

**Statistische Analyse und
semiklassische Beschreibung von
supraleitenden Limaçon-Billardards
und
Raysplitting in
supraleitenden Mikrowellenbillards**

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

angefertigt von

Dipl.–Phys. Heiko Rehfeld
aus Hamburg

Mai 2000

Darmstadt
D 17

Referent: Professor Dr. Dr. h.c. mult. A. Richter
Korreferent: Professor Dr. J. Wambach

Tag der Einreichung: 30. Mai 2000
Tag der Prüfung: 28. Juni 2000

Zusammenfassung

Mit den im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Experimenten an flachen supra- und normalleitenden Mikrowellenresonatoren, sog. Billards, werden zwei verschiedene Zugänge zum Thema Quantenchaos diskutiert. Ein Zugang ist die Analyse der Eigenfrequenzspektren mit den Methoden der Random Matrix Theory (RMT) und anschließendem Vergleich mit dem Verhalten des zum Quantensystem korrespondierenden klassischen Systems. Der zweite Zugang ist die Periodic Orbit Theory (POT), mit deren Hilfe man in der Lage ist, durch Kenntnis der Eigenschaften der klassischen periodischen Orbits (PO) das quantenmechanische Spektrum zu rekonstruieren.

Im ersten Teil standen vier Billards aus der Familie der Limaçons im Mittelpunkt, deren klassisches Verhalten den gesamten Bereich von regulärer über gemischte bis zu chaotischer Dynamik abdeckt. Untersucht wurden die beiden Grenzfälle mit regulärem bzw. chaotischem Verhalten und zwei Billards aus dem gemischten Bereich. Beim Übergang zur Quantenmechanik konnte gezeigt werden, daß diese Systeme das gleiche Verhalten bezüglich ihrer Chaotizität aufweisen wie im klassischen Fall. Dazu wurden diese Billards als supraleitende Mikrowellenresonatoren realisiert und das gemessene Eigenfrequenzspektrum gemäß der RMT untersucht. Spurformeln sind die Grundlage für den zweiten Zugang zu Quantensystemen durch die POT. Reguläre bzw. chaotische Systeme sind nach den etablierten Theorien von Berry und Tabor bzw. Gutzwiller semiklassisch beschreibbar. Ullmo *et al.* stellten eine Spurformel vor, mit deren Hilfe man in der Lage ist, auch quantenmechanische Systeme mit gemischter Dynamik allein aus den Eigenschaften der PO des klassischen Analogons zu rekonstruieren. Diese Rekonstruktion wurde an den vier Limaçon-Billard-Systemen erstmals experimentell untersucht durchgeführt. Die ersten klassischen PO der Billards wurden bestimmt und die quantenmechanischen Niveaudichten der einzelnen Billards mittels der Spurformel von Ullmo *et al.* berechnet. Verglichen wurden die aus der experimentellen und der rekonstruierten Niveaudichte durch Fourier-Transformation erhaltenen Längenspektren. Es zeigte sich bis auf kleinere Abweichungen eine relativ gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie.

Der zweite Teil dieser Arbeit behandelt Quantenbillards, die im Innern eine endliche Potentialstufe aufweisen. Diese sog. Raysplitting-Billards wurden im Experiment durch eine teilweise Füllung der Kavitäten mit einem festen Dielektrikum realisiert. Im klassisch korrespondierenden System existieren aufgrund des Potentialsprungs zwei verschiedene Typen von PO: die Newtonschen und die nicht-Newtonschen Bahnen. Bei den letzteren handelt es sich um PO, bei denen das Teilchen trotz einer Energie größer der Höhe der Potentialstufe an dieser teilweise reflektiert werden. An zwei Systemen wurde der Einfluß der nicht-Newtonschen Bahnen auf das quantenmechanische Verhalten des Systems diskutiert. Dazu wurde das Spektrum eines supraleitenden Kreisresonators mit einem dielektrischen Halbkreis im Innern vermessen. In den Niveaustatistiken zeigte sich, daß sich das vormals reguläre Verhalten des ungefüllten Kreisbillards durch das Einbringen des Dielektrikums in ein vollständig chaotisches änderte. Dies kam durch die nicht-Newtonschen Bahnen zustande, die auch im Längenspektrum des Billards identifiziert werden konnten. Das zweite System, an dem das Raysplitting untersucht wurde, war ein Viertel-Sinai-Billard, das mit einem kleinen verschiebbaren dielektrischen Rechteck gefüllt war. Hier wurde der Einfluß der Position des Dielektrikums auf die Länge der periodischen Bahnen untersucht. Es zeigte sich, daß nur die nicht-Newtonschen Bahnen außerhalb des Dielektrikums beeinflußt wurden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen klassischer und quantenmechanischer Billards	5
2.1	Klassische Billardsysteme	5
2.2	Quantenmechanische Billards und Analogexperimente	7
3	Experimentelle Grundlagen und Analysemethoden	11
3.1	Meßaufbau und Durchführung der Experimente	11
3.2	Statistische Analyse und Vergleich von realen und idealen Systemen	18
3.2.1	Stadion-Billard	19
3.2.2	Treppenfunktion und Entfaltung der Daten	20
3.2.3	Kurzreichweitige Korrelationen	25
3.2.4	Langreichweitige Korrelationen	28
3.2.5	Längenspektren und periodische Bahnen	31
4	Klassisches und quantenmechanisches Verhalten der Limaçon-Billards	34
4.1	Klassische Eigenschaften	34
4.2	Quantenmechanisches Verhalten	38
4.2.1	Mikrowellenexperiment	38
4.2.2	Statistische Analyse	41
5	Mode-Fluctuation-Distribution	46
5.1	Theoretische Grundlagen	46
5.2	Anwendung auf experimentelle Daten	48
5.2.1	Limaçon-Billards	48
5.2.2	Bunimovich Stadion-Billard und 3D-Sinai-Billard	52

6	Semiklassische Beschreibungsmöglichkeiten der Spektren	55
6.1	Spurformeln	56
6.1.1	Chaotische Systeme	57
6.1.2	Reguläre Systeme	58
6.1.3	Gemischte Systeme	58
6.2	Anwendung auf die Familie der Limaçon-Billardards	61
6.2.1	Kreisbillard	62
6.2.2	Limaçon-Billardards	63
7	Theoretische Grundlagen und experimentelle Realisierung	74
7.1	Theoretische Grundlagen	74
7.2	Experimentelle Realisation	77
8	Statistische Analyse der Spektren	81
8.1	Kreisbillard	81
8.2	Sinai-Billard	87
9	Schlußbemerkung und Ausblick	91
A	Anhang	93
A.1	Numerische Bestimmung von Eigenwerten	93

1 Einleitung

Seit einigen Jahrzehnten erlebt die Untersuchung chaotischer Phänomene einen enormen Aufschwung [1, 2]. Ein Hauptgrund dafür liegt darin begründet, daß chaotisches Verhalten in fast allen Bereichen der Natur auftritt. Deshalb konzentriert man sich bei dessen Erforschung in zunehmendem Maße neben der Physik auch auf das Verhalten chaotischer Systeme in anderen Disziplinen wie der Medizin, der Chemie oder den Wirtschaftswissenschaften [3, 4]. Für solche komplexen Systeme ist es charakteristisch, daß eine Vorhersage für deren zeitliche Entwicklung nicht möglich ist, obwohl die die Systeme beschreibenden Gleichungen bekannt sind. Die Ursachen dafür sind Nichtlinearitäten in den Gleichungen, die dazu führen, daß die Systeme extrem empfindlich auf kleinste Störungen reagieren, die sich mit der Zeit dann exponentiell verstärken. Umgekehrt bedeutet dies aber auch, daß Fehler in der Bestimmung der Anfangsbedingungen das System unvorhersagbar machen.

Nachdem das chaotische Verhalten von klassischen Systemen weitgehend verstanden ist, versucht man auch quantenmechanische Systeme unter dem Aspekt des Auftretens von chaotischen Signaturen zu untersuchen [5]. Es soll dabei geklärt werden, wie sich die Eigenschaften klassisch chaotischer Systeme in das dazu korrespondierende quantenmechanische Analogsystem übertragen lassen. Dieser Zusammenhang von klassischer Chaostheorie und Quantenmechanik wird auch als Quantenchaos bezeichnet und ist Gegenstand intensiver Untersuchungen [6–9]. Neben Studien an realen in der Natur vorkommenden Systemen, wie z.B. Atomen und Atomkernen, beschränkte man sich zunächst aufgrund der Komplexität der realen Systeme auf die Untersuchung von Modellsystemen, um grundlegende Erkenntnisse auf diesem Themengebiet gewinnen zu können.

Klassische Billardsysteme bieten sich wegen ihrer relativ einfachen Handhabung für das Studium chaotischer Eigenschaften an. Dabei versteht man unter einem Billard ein berandetes Gebiet, in dem sich ein Teilchen verlustfrei mit elastischen Reflexionen an der Berandung bewegt. Durch geeignete Wahl der Berandungsform kann man die Dynamik des Teilchens beeinflussen. Man spricht von einer chaotischen Bewegung, wenn sich periodische Teilchenbahnen unter einer kleinen Störung exponentiell voneinander entfernen. Beim Übergang zur Quantenmechanik ist das korrespondierende Billard durch einen unendlich tiefen Potentialtopf

der gleichen Form gegeben, und die Bewegung des Teilchens wird durch die stationäre Schrödingergleichung beschrieben. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik, bei der der Chaosbegriff an die Teilchenbahnen gekoppelt ist, existiert in der Quantenmechanik der Bahnbegriff nicht mehr; dort erhält man nur noch eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Teilchen. Die Frage, die sich stellt, ist: Wie läßt sich der Chaosbegriff in der Quantenmechanik definieren bzw. wie werden die Eigenschaften der klassisch chaotischen Bewegung den Eigenzuständen des quantenmechanischen Analogons aufgeprägt? Um diese Frage zu beantworten, bedient man sich zweier unterschiedlicher Konzepte. Zum einen benutzt man zur Beschreibung quantenmechanischer Systeme die Random Matrix Theory (RMT) [10–14], die eigentlich für nukleare Vielteilchensysteme entwickelt wurde. Dabei wird unter Zuhilfenahme der jeweiligen Symmetrieeigenschaften des Quantensystems, wie z.B. Raum-Zeit-Symmetrien, ein Ensemble von Zufallsmatrizen erstellt, dessen Eigenwerte dann das gleiche statistische Verhalten aufweisen wie die Eigenwerte des quantenmechanischen Systems. Zum anderen nutzt man durch die semiklassische Quantisierung von klassisch chaotischen Systemen, die im Rahmen der Periodic Orbit Theory (POT) [5, 15] durchgeführt wird, nur Eigenschaften der klassischen periodischen Bahnen, um Rückschlüsse auf das quantenmechanische Verhalten des korrespondierenden Systems zu ziehen. Jedoch gilt für beide Zugänge, daß sie nur eine aussagekräftige Charakterisierung des quantenmechanischen Systems zulassen, wenn man sich im Bereich von hochangeregten Zuständen befindet, d.h. im semiklassischen Grenzfall, der formal durch $\hbar \rightarrow 0$ beschrieben wird. Da aufgrund der Unschärferelation chaotische Bereiche im klassischen Phasenraum, deren Zellengrößen kleiner als \hbar^n sind, wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade ist, nicht für das quantenmechanische System aufzulösen sind, lassen sich erst die klassischen Teilcheneigenschaften gemäß des Korrespondenzprinzips bei hohen Anregungsenergien im Quantensystem wiederfinden.

Nachdem lange Zeit theoretische Untersuchungen das Thema Quantenchaos dominiert haben, werden seit gut zehn Jahren vermehrt Experimente auf diesem Arbeitsgebiet durchgeführt. Neben direkten Experimenten mit mikroskopischen Quantenbillards, sog. Quantum Dots [16], sind Analogexperimente an makroskopischen Modellsystemen ein anschaulicher Zugang zu diesem Thema. Da die Schrödingergleichung formal eine Wellengleichung ist, werden Analogsysteme untersucht, die ebenfalls durch eine Wellengleichung beschreibbar sind. Quasi-zwei-

dimensionale elektromagnetische Hohlraumresonatoren bieten sich aufgrund der direkten Analogie zwischen der das System beschreibenden Helmholtzgleichung und der Schrödingergleichung für Analogexperimente an. Neben Fragestellungen zur Niveaustatistik, die durch das Messen des Eigenfrequenzspektrums eines Mikrowellenresonators studiert werden können [17, 18], sind auch experimentelle Untersuchungen der Wellenfunktionen der Systeme möglich [19–22].

Um statistische Analysen der gemessenen Resonanzspektren mit großer Genauigkeit durchführen zu können, werden seit 1991 am Institut für Kernphysik der TU Darmstadt Experimente fast ausschließlich mit supraleitenden Mikrowellenresonatoren durchgeführt [23–40]. Trotz des erhöhten meßtechnischen Aufwands durch die Kühlung mit flüssigem Helium auf 4.2 K, sind die Vorteile gegenüber den normalleitenden Messungen deutlich. Durch die minimierten Hochfrequenzverluste ist man in der Lage, Mikrowellenspektren bei höchster Auflösung nahezu vollständig aufzunehmen. Diese Vollständigkeit der Spektren ist eine wichtige Voraussetzung für detaillierte statistische Untersuchungen und Vergleiche mit den theoretischen Aussagen der RMT und der POT. In diesem Zusammenhang wurden am Institut für Kernphysik ganz unterschiedliche Aspekte zum Themengebiet Quantenchaos untersucht. Zum einen wurden Messungen der reinen Eigenfrequenzspektren, sowohl von einzelnen als auch von gekoppelten supraleitenden Resonatoren, zum präzisen Test von statistischen Analysemethoden [23, 25, 30, 32, 33, 36], detaillierten Beschreibungen der Resonanzen samt ihrer Breiten und dem Studium von nichtexponentiellen Zerfallsprozessen in quantenmechanischen Systemen [24, 26, 27], wie sie auch in numerischen Simulationen für kernphysikalische Systeme gefunden wurden [41], durchgeführt. Zum anderen wurden auch Problemstellungen behandelt, die eine Kombination aus supraleitenden und normalleitenden Messungen erfordern bzw. nur bei Raumtemperatur realisiert werden konnten. Zum Beispiel waren für die Untersuchungen zum Chaos-Assisted Tunneling [38] neben der Aufnahme von Spektren des supraleitenden Resonators auch Messungen der Wellenfunktionen notwendig, die nur bei Raumtemperatur durchgeführt werden konnten. Die Untersuchungen zur topologischen Struktur von sog. Exceptional Points [40] erforderten neben der Bestimmung der Eigenfrequenz und deren Breite unter der Änderung von zwei externen Parametern auch die genaue Kenntnis der Wellenfunktion. Neben diesen Experimenten mit zweidimensionalen Mikrowellenkavitäten, wurden auch Messungen

an dreidimensionalen Resonatoren durchgeführt [29, 31], die zwar aufgrund der vektoriellen Wellengleichung keinen direkten Zusammenhang zu Quantenbillards haben, deren Spektren sich aber dennoch durch die RMT und POT beschreiben lassen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden zwei voneinander unabhängige Problemstellungen aus dem Themenbereich Quantenchaos behandelt. Nachdem in Kap. 2 die theoretischen Grundlagen zum klassischen und quantenmechanischen Billardproblem sowie zum Analogexperiment mit Mikrowellenresonatoren vorgestellt werden, schließt sich in Kap. 3 eine allgemeine Darstellung der experimentellen Durchführung der Messungen und eine Diskussion der statistischen Analysemethoden der Meßdaten gemäß der RMT und der POT am Beispiel eines sogenannten $\gamma = 1$ Stadion-Billards an. Darauf folgend werden im ersten Teil Experimente mit vier Billards aus der Familie der Limaçons vorgestellt. Diese Billardsysteme decken aufgrund ihrer unterschiedlichen Chaotizität den gesamten Bereich von regulärer über gemischte bis zu chaotischer Dynamik ab. An den gemessenen Frequenzspektren werden die Konzepte der RMT getestet (Kap. 4). Ferner wird eine neue Analyseverfahren der Niveaufluktuationen, die Mode-Fluctuation-Distribution, in Kap. 5 vorgestellt und auf die Daten der Billards angewandt. Durch Kenntnis der klassischen periodischen Bahnen der Billards wird außerdem im Rahmen der POT mit der Hilfe von Spurformeln das quantenmechanische Spektrum in Kap. 6 rekonstruiert.

Billardsysteme mit einer endlichen Potentialstufe im Innern stehen im Mittelpunkt des Teil II dieser Arbeit. In Kap. 7 wird das Phänomen des Raysplittings theoretisch dargestellt und die experimentelle Realisierung mit Mikrowellenresonatoren beschrieben. Experimente an zwei Billardsystemen, bei denen Raysplitting auftritt, werden in Kap. 8 vorgestellt und ihre Spektren auf die Existenz und den Einfluß spezieller periodischer Orbits, den sog. nicht-Newtonschen Bahnen, untersucht.

2 Grundlagen klassischer und quantenmechanischer Billards

In diesem Kapitel werden Billards als Modellsysteme zum Studium von Chaos in konservativen Systemen vorgestellt. Es soll erläutert werden, was unter Chaos in klassischen Billards verstanden wird. Ausgehend davon wird das dem klassischen Billard zugeordnete quantenmechanische Billard beschrieben, in dem ebenfalls Signaturen von Chaos zu finden sind. Abschließend wird eine Methode diskutiert, wie quantenmechanische Systeme mit Hilfe eines Analogexperiments nicht nur theoretischen sondern auch experimentellen Untersuchungen zugänglich sind.

2.1 Klassische Billardsysteme

Zum Studium von Chaos in konservativen Systemen eignen sich klassische Billardsysteme besonders [42]. Dabei versteht man unter einem klassischen Billard ein ebenes zweidimensionales oder räumlich dreidimensionales Gebiet \mathcal{D} , in dem sich ein Teilchen, vergleichbar mit einer Billardkugel, mit der Masse m und dem Impuls \vec{p} nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen verlustfrei mit konstanter Energie $\mathcal{E} = p^2/2m$ bewegt. Das Teilchen tritt nur mit der Berandung $\partial\mathcal{D}$ des Systems in Wechselwirkung, indem es dort zu elastischen, winkeltreuen Reflexionen kommt. Die Dynamik des Billardsystems hängt allein von der Form der Berandung ab. Diese ist verantwortlich für das reguläre bzw. chaotische Verhalten des Teilchens. Aus der Teilchendynamik kann man eine Klassifizierung der Billards in reguläre, chaotische oder gemischte Systeme vornehmen. Dazu schaut man sich die periodischen Bahnen des Teilchens im Billard an. Dies sind Bahnen, bei denen der Startpunkt im Phasenraum nach endlicher Zeit und nach endlicher Anzahl von Reflexionen wieder erreicht wird. Abbildung 2.1 (oben) zeigt exemplarisch zwei Beispiele von periodischen Bahnen in einem regulären und in einem chaotischen Billard. Um Unterschiede zwischen einer regulären und einer chaotischen Bewegung zu illustrieren, ist es lediglich notwendig, die Auswirkung einer kleinen Störung in den Anfangsbedingungen (Ort/Impuls) des Teilchens zu untersuchen. Die Störung einer periodischen Bahn in einem regulären System führt dazu, daß

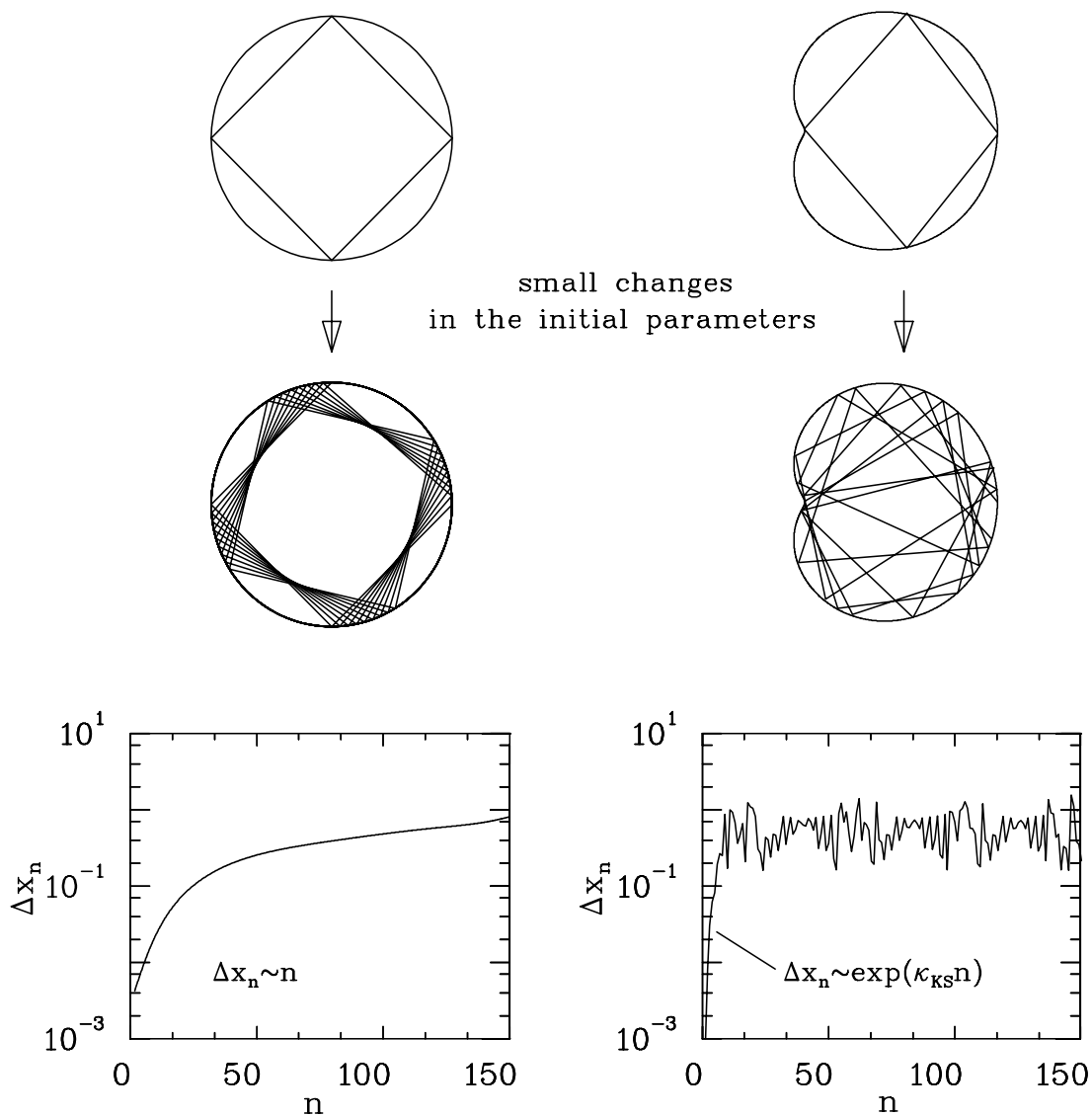


Abb. 2.1: Änderung einer Teilchenbahn unter dem Einfluß einer kleinen Störung in den Anfangsbedingungen nach n Reflexionen. Auf der linken Seite ist der Sachverhalt für ein reguläres und auf der rechten Seite für ein chaotisches System dargestellt. Im oberen Teil ist jeweils eine periodische Bahn gezeigt und im mittleren Teil das Resultat nach einer leichten Störung des Startimpulses. Im unteren Teil geben die dargestellten Kurven die Phasenraumseparation zwischen ungestörter und gestörter Bahn an (Gl. (2.1)).

sich die gestörte und die ungestörte Teilchenbahn linear mit der Zeit voneinander entfernen, die Bewegung bleibt daher geordnet. Dieser Sachverhalt läßt sich mit

Hilfe der Größe

$$\Delta x_n = \sqrt{\Delta r_n^2 + \Delta p_n^2} \quad (2.1)$$

darstellen [43]. Dabei ist Δr_n die Differenz zwischen gestörter und ungestörter Bahn nach n Reflexionen am Rand im Ortsraum, analog dazu ist Δp_n die Differenz zwischen beiden Bahnen im Impulsraum. Für ein reguläres System erhält man eine lineare Abhängigkeit mit der Anzahl der Reflexionen

$$\Delta x_n \sim n . \quad (2.2)$$

Dies wird auch im unteren linken Teil von Abb. 2.1 sichtbar. Anders sieht es in einem chaotischen System aus. Stört man dort die Anfangsbedingungen einer periodischen Bahn, so entfernen sich die gestörte und die ungestörte Bahn exponentiell voneinander. Die Teilchenbahn überstreicht dabei im Laufe der Zeit das gesamte Billard. Diese exponentielle Separation ist in Abb. 2.1 (rechts) dargestellt und wird durch folgenden Zusammenhang ausgedrückt

$$\Delta x_n \sim \exp(\kappa_{KS} \cdot n) , \quad (2.3)$$

wobei κ_{KS} die Kolmogorov-Sinai-Entropie bezeichnet [1, 44]. Bereits nach wenigen Reflexionen sind die beiden Teilchenbahnen voneinander entkoppelt und fluktuieren um einen mittleren Phasenraumabstand.

Dieser Unterschied zwischen einem regulären und einem chaotischen System wird auch in den Newtonschen Bewegungsgleichungen ausgedrückt, die im Fall von chaotischen Systemen nichtintegrabel sind. Dies liegt daran, daß das System mehr Freiheitsgrade als Erhaltungsgrößen besitzt.

2.2 Quantenmechanische Billards und Analogexperimente

Im folgenden soll geklärt werden, ob die chaotische Dynamik klassischer Systeme auch noch beim Übergang zu quantenmechanischen Systemen Bestand hat. In der Quantenmechanik wird dem Teilchen eine Wellenfunktion zugeordnet, deren

Quadrat die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens an einem Ort angibt. Somit existiert auch keine Teilchenbahn mehr und man erhält bei der quantenmechanischen Übersetzung des klassischen Billards ein Punktteilchen der Masse m mit dem dazugehörigen Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ und der Energie $\mathcal{E} = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$ in einem von unendlich hohen Wänden begrenzten Potentialtopf. Dabei entspricht die Form der Berandung der des klassischen Billards. Beschreiben läßt sich die Dynamik solch konservativer Systeme durch die stationäre Schrödingergleichung

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Psi(\vec{r}) = \mathcal{E}\Psi(\vec{r}) \quad (2.4)$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$\Psi(\vec{r})\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0 \quad (2.5)$$

aufgrund des Potentialsprungs am Rand. Dabei steht \hat{H} für den das System beschreibenden Hamilton-Operator und $\Psi(\vec{r})$ für die Wellenfunktion des Teilchens. Im Gegensatz zum klassischen System, das zu jeder Zeit vollständig durch Ort und Impuls charakterisiert ist, erhält man im quantenmechanischen Billard als Lösung der Schrödingergleichung für abgeschlossene Gebiete diskrete Eigenwerte k_i mit den dazugehörigen Eigenfunktionen Ψ_i . Auf Störungen in den Anfangsbedingungen sind die einzelnen zeitlich stabilen Eigenzustände unempfindlich. Hier wird die chaotische Struktur des Systems in den Verteilungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen sichtbar [45]. Die Aufgabe besteht für quantenmechanische Systeme darin, im Rahmen von Niveaustatistiken universelle Eigenschaften der Eigenwertspektren aufzuzeigen, welche symptomatisch für klassisch reguläre bzw. chaotische Systeme sind. Da die theoretischen Vorhersagen zur Niveaustatistik nur semiklassisch ($\hbar \rightarrow 0$) formuliert sind, ist es notwendig, eine ausreichende Anzahl von Eigenzuständen, d.h. hochangeregte Systeme mit einer großen Niveaudichte, zu betrachten. Aufgrund der Tatsache, daß der Schrödingergleichung, genau wie der Newtonschen Bewegungsgleichung im klassischen Fall, kein nichtlineares Verhalten aufgeprägt ist, können die chaotischen Signaturen im Eigenwertspektrum bzw. in den Eigenfunktionen dabei grundsätzlich nur von der Form der Berandung des Billards abhängen.

Im Fall regulärer Systeme ist das durch Gl. (2.4) definierte quantenmechanische Problem analytisch lösbar, d.h. exakte Eigenwerte und Eigenfunktionen können

bestimmt werden. Dagegen ist man im Fall von nichtintegrablen Systemen gezwungen, die Lösungen numerisch zu bestimmen [46]. Diese Methoden sind aufwendig, und die Genauigkeit und Vollständigkeit der Lösung hängen vom gewählten Verfahren ab.

Für eine experimentelle Untersuchung solcher quantenmechanischen Systeme hat man sich die Tatsache zunutze gemacht, daß viele physikalische Probleme durch Differentialgleichungen beschrieben werden, die eine analoge Struktur zu Gl. (2.4) aufweisen. Als ein mögliches Analogexperiment bietet sich bspw. die Untersuchung von elektromagnetischen Hohlraumresonatoren mit Mikrowellen an. Das elektrische Feld in solchen Resonatoren wird durch die vektorielle Helmholtzgleichung [47]

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = -\epsilon\mu \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.6)$$

mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\vec{E}_{tan}(\vec{r})|_{\partial D} = \vec{0} \quad (2.7)$$

für das tangential elektrische Feld an den als ideal leitend angenommenen Resonatorwänden vollständig charakterisiert. Dabei bezeichnet $\vec{E}(\vec{r})$ den elektrischen Feldvektor, c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit, ϵ und μ die relative Dielektrizitätskonstante bzw. die relative Permeabilität des Mediums im Resonatorvolumen, die im Fall von Vakuum beide gleich eins sind, und $\omega = 2\pi f$ die Eigenkreisfrequenz der stehenden Welle im Resonator.

Im Unterschied zu den skalaren Eigenfunktionen $\Psi(\vec{r})$ des quantenmechanischen Problems handelt es sich bei $\vec{E}(\vec{r})$ jedoch um ein Vektorfeld. Wenn man aber statt des allgemeinen dreidimensionalen Resonators einen zweidimensionalen, d.h. einen Resonator, der in z -Richtung kaum ausgedehnt ist, betrachtet, dann weist das elektrische Feld nur eine z -Komponente und das magnetische Feld Komponenten senkrecht dazu auf. Dies gilt aber nur solange die Frequenz der in den Resonator eingestrahlten Wellen unterhalb einer Grenzfrequenz

$$f_G = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{c_0}{2h}, \quad (2.8)$$

bleibt, wobei h die Ausdehnung des Resonators in z -Richtung ist. Es existieren dann im Hohlraumresonator nur transversal magnetische Moden (TM-Moden)

und es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_z(\vec{r}) = \Phi(x, y) \vec{e}_z . \quad (2.9)$$

Die Helmholtzgleichung kann man unterhalb von f_G umschreiben in

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}(\vec{r}) = \Delta \Phi(x, y) \vec{e}_z &= -\epsilon \mu \frac{\omega^2}{c_0^2} \Phi(x, y) \vec{e}_z \\ \Rightarrow \Delta \Phi(x, y) &= -k_{em}^2 \Phi(x, y) \end{aligned} \quad (2.10)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tan} \Big|_{\partial \mathcal{D}} &= \Phi(x, y) \vec{e}_z \Big|_{\partial \mathcal{D}} = \vec{0} \\ \Rightarrow \Phi(x, y) \Big|_{\partial \mathcal{D}} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dabei wurde der Wellenvektor $k_{em} = \sqrt{\epsilon \mu} \omega / c_0$ eingeführt.

Hier wird ersichtlich, daß die zweidimensionale Strukturfunktion $\Phi(x, y)$ durch dasselbe Randwertproblem beschrieben wird, wie die quantenmechanische Wellenfunktion $\Psi(\vec{r})$. Dabei müssen lediglich die quantenmechanischen Eigenwerte $k_{qm}^2 = 2m\mathcal{E}/\hbar^2$ durch die elektromagnetischen $k_{em}^2 = \epsilon \mu \omega^2 / c_0^2$ ersetzt werden. Wenn das Quantenbillard und der elektromagnetische Resonator die gleiche Form haben, sind die Lösungen der Gl. (2.4) und (2.11) bis auf eine Skalierungsgröße gleich. Der Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz f und Eigenwert \mathcal{E} ergibt sich zu

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi^2 \epsilon \mu \hbar^2 f^2}{m c_0^2} . \quad (2.12)$$

Man hat somit die Möglichkeit, über eine direkte Messung der Resonanzfrequenzen des Resonators, die Eigenwerte des quantenmechanischen Problems zu bestimmen. Diese Analogie bildet die Grundlage für die Experimente mit flachen Mikrowellenresonatoren, die in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit diskutiert werden.

3 Experimentelle Grundlagen und Analysemethoden

Die Realisierung der im letzten Abschnitt beschriebenen Analogexperimente mit supraleitenden Mikrowellenresonatoren wird in diesem Kapitel vorgestellt. Dabei werden die experimentellen Grundlagen sowie die Messung im einzelnen beschrieben. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die statistischen Analysemethoden am Beispiel der Eigenfrequenzspektren von zwei Stadion-Billardis diskutiert, die auf unterschiedliche Weise gewonnen wurden. Darüber hinaus wird ein Vergleich zwischen diesen beiden Datensätzen, die zum einen experimentell gemessen und zum anderen numerisch simuliert wurden, vorgenommen, um eine Aussage über die Qualität der Experimente im Vergleich zur Simulation zu erhalten.

3.1 Meßaufbau und Durchführung der Experimente

Die Experimente, die im Rahmen dieser Arbeit beschrieben werden, wurden mit supraleitenden Mikrowellenresonatoren durchgeführt, die nach zwei unterschiedlichen Konzepten hergestellt wurden. Die Tatsache, daß supraleitende anstatt normaleitende Resonatoren benutzt wurden, sind die aufgrund der Supraleitung minimierten Hochfrequenzverluste in den Wänden der Kavitäten. Man erreicht mit supraleitenden Niob- oder Bleiresonatoren typischerweise Güten in der Größenordnung von $Q = f/\Delta f = 10^5 - 10^7$ (f ist die Resonanzfrequenz und Δf die dazugehörige Breite), wo hingegen im normaleitenden Fall mit Kupferkavitäten nur Güten von $Q = 10^3 - 10^4$ erreicht werden. Die Verwendung von supraleitenden Kavitäten soll garantieren, daß möglichst alle Resonanzen im Spektrum identifiziert werden können.

Für den Vergleich in Kap. 3.2 und die Experimente im Teil I wurden Resonatoren aus 2 mm starkem Nioblech verwandt, die in den CERN-Werkstätten gefertigt wurden. Niob hat die Eigenschaft, unterhalb einer Sprungtemperatur von 9.2 K supraleitend zu werden. Um an allen Blech-Blech-Verbindungen einen optima-

len elektrischen Kontakt zu gewährleisten, wurden die Resonatoren elektronenstrahlgeschweißt. Für eine möglichst umfassende Beseitigung von Oxidresten auf den Innenoberflächen des Resonators wurde dieser noch vor dem Schweißvorgang chemisch gereinigt. Diese Herstellungsmethode ist zwar sehr aufwendig und kostenintensiv, garantiert dafür aber sehr hohe Güten des Resonators, die sich in den Meßergebnissen widerspiegeln. Die mit diesen geschweißten Niobresonatoren erreichbaren Güten liegen in der Größenordnung von $Q = 10^6 - 10^7$. In den vergangenen Jahren hat sich diese Herstellungsmethode sehr bewährt [23,48–51]. Als Nachteil dieser Resonatoren kann die Tatsache angesehen werden, daß sie nach dem Bau nicht oder nur sehr schwer bezüglich einer nachträglich gewünschten Parameteränderung modifiziert werden können [50].

Um diesen Nachteil zu umgehen, wird seit kurzem eine weitere Methode zur Herstellung der Resonatoren verwandt. Eine interessante Alternative zum verwendeten Niob stellt Blei dar, das bei 7.2 K supraleitend wird. Da ein reiner Bleiresonator mechanisch nicht stabil genug ist, wurde ein Kupferresonator als Basis mit einer dünnen Bleischicht galvanisch versehen [52, 53]. Um auch Parameteränderungen noch nachträglich vornehmen zu können, wurde ein solcher Resonator modular aufgebaut. Dieser besteht aus drei Teilen: einer Bodenplatte, einem mittleren Rahmen und einer Deckelplatte, die miteinander verschraubt und mit einem Lötzinndraht elektrisch gedichtet werden (s. Abb. 3.1). Für den zweiten Teil dieser Arbeit wurde der modulare Rechteckresonator aus [52] verwandt. Es hat sich aber gezeigt, daß bei der dort beschriebenen Methode zur Verschraubung der drei Einzelteile gravierende, die Messung störende Probleme aufgetreten waren. Dabei handelte es sich um den Effekt, daß sog. "Frame-Moden" [52] sich zwischen dem mittleren Rahmen und dem Boden bzw. Deckel ausgebildet haben. Ursache war der schlechte elektrische Kontakt zwischen den drei Einzelteilen. Um diesen Effekt zu unterdrücken, wurde der Resonator vor den in Teil II beschriebenen Untersuchungen insoweit modifiziert, daß dabei in den mittleren Rahmen eine Nut an der Ober- und Unterseite nahe dem Innenrand eingefräst wurde, um eine eindeutige Positionierung des zur Herstellung des elektrischen Kontakts verwendeten Lötzinndrahts zu gewährleisten (s. Abb. 3.1 rechts).

Vorteil dieser modularen Bauweise der Kupferresonatoren mit anschließender galvanischen Verbleiung sind zum einen die einfachere Herstellung und somit ein geringerer Preis, und zum anderen können auch Geometrien, bei denen Parameter

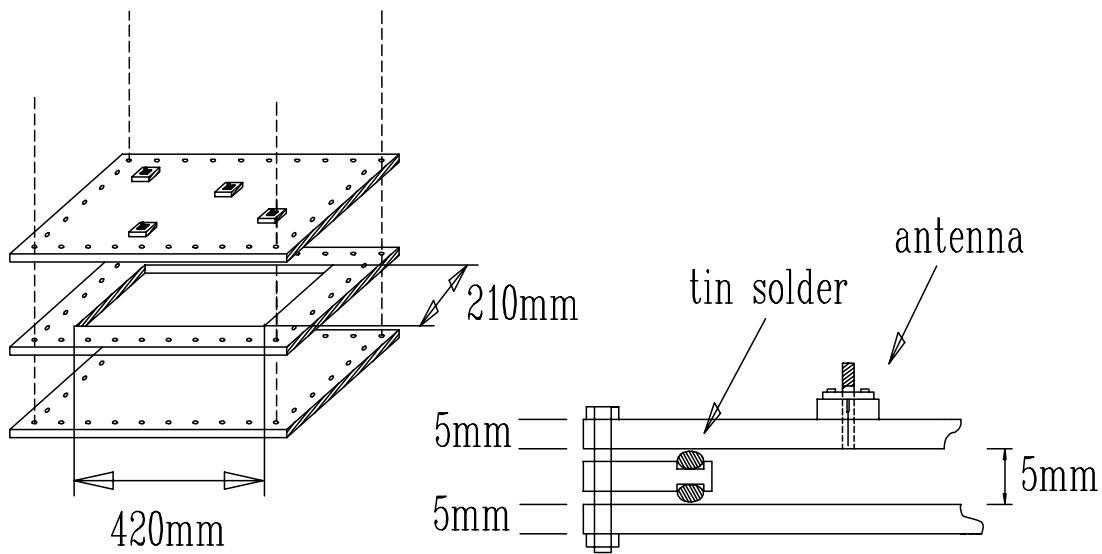


Abb. 3.1: Aufbau des modularen Rechteckresonators. Auf der rechten Seite ist die Dichtung mit Lötzinndraht skizziert.

geändert werden sollen, einfacher realisiert werden. Der modulare Rechteckresonator eignet sich besonders gut dafür, da durch Einfügen geeigneter Inlets eine Vielzahl von unterschiedlichen Geometrien untersucht werden können (s. Teil II). Als Nachteil kann die leicht geringere Güte gegenüber verschweißten Niobresonatoren aufgeführt werden. Die typischen Güten für solche modularen Blei-Kupfer-Resonatoren liegen im Experiment bei $Q \leq 5 \cdot 10^5$ [52, 53].

Die Anregung der Kavitäten mit Mikrowellen erfolgte über Dipolantennen, die auf der Oberseite der Resonatoren sitzen. Die Eindringtiefe der Antenne betrug nur einige $100 \mu\text{m}$, damit das elektromagnetische Feld im Innern der Kavität so wenig wie möglich gestört wurde. Bei den verwendeten Resonatoren jeweils standen zwischen zwei und vier Antennen zur Verfügung.

Um die Resonatoren unter die für die Supraleitung nötige Sprungtemperatur von 9.2 K (Niob) bzw. 7.2 K (Blei) zu bringen, wurde für die Kühlung flüssiges Helium, das bei Normaldruck eine Siedetemperatur von 4.2 K hat, benutzt. Die Messungen fanden in einem vertikalen Bad-Kryostaten statt [50], der im Chaoslabor (Abb. 3.2) des Instituts für Kernphysik steht. In Abb. 3.3 ist ein Schnitt durch den verwendeten Kryostaten gezeigt.

Zur Messung wurden die Resonatoren in eine Kupferbox eingebaut, die vom flüssigen Helium umgeben ist. Dies sollte gewährleisten, daß während der einzel-



Abb. 3.2: Im Vordergrund ist der im Boden versenkte Bad-Kryostat zu erkennen. Der Deckel samt des Innengerüsts des Kryostaten ist herausgezogen, so daß ein Blick auf die Cu-Box möglich ist, in der die Billards während der Messung eingebaut sind. Links ist der Helium-Vorratsbehälter und im Hintergrund die Hochfrequenzmeßapparatur zu sehen.

nen Messungen nahezu konstante Temperatur- und Druckbedingungen herrschten. Die Cu-Box wurde während der Messung auf einen Druck von ungefähr $10^{-1} - 10^{-3}$ mbar evakuiert, um dielektrische Effekte, die durch das Helium auftreten können und somit das aufgenommene Spektrum verfälschen könnten, zu vermeiden. Von der Kupferbox führten mehrere Versorgungsrohre durch den Deckel des Kryostaten nach außen. Durch sie wurden die notwendigen Meßleitungen zur

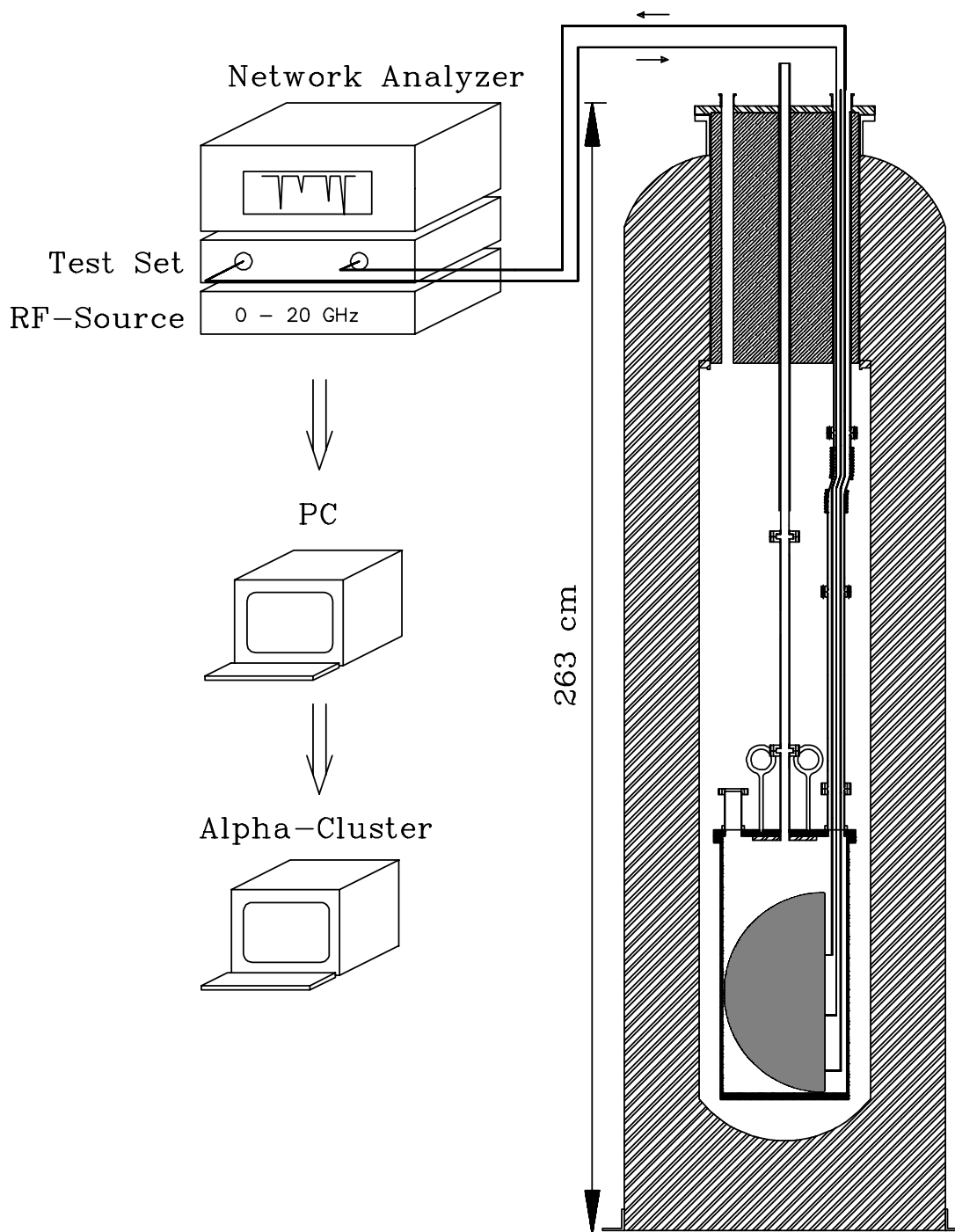


Abb. 3.3: Schnitt durch den Flüssig-Helium Kryostaten mit einem in der Cu-Box eingebauten Limaçon-Billard (Kap. 4), das über Festmantelkabel mit der Hochfrequenzmeßapparatur (linke Seite) verbunden ist. Des weiteren sind die Rechner zur Steuerung des Experiments sowie zur Datenanalyse dargestellt.

Temperaturkontrolle in der Cu-Box sowie die Hochfrequenz-Festmantelkabel zur Ein- und Auskoppelung der Mikrowellen in die Resonatoren verlegt.

Mit Hilfe eines Netzwerkanalysator-Systems, bestehend aus einem Hochfrequenzgenerator (HP 8341B), einem S-Parameter Test-Set (HP 8514B) sowie dem eigentlichen Netzwerkanalysator (HP 8510B) wurde die Mikrowellenleistung über die Festmantelkabel in die Kavitäten ein- und wieder ausgekoppelt und anschließend analysiert. Die letzten Messungen des zweiten Teils dieser Arbeit wurden mit dem Nachfolge-Netzwerkanalysator-Systems (Netzwerkanalysator HP 8510C, Hochfrequenzgenerator HP 83651B, S-Parameter Test-Set HP 8517B) durchgeführt, das einen Frequenzbereich bis 50 GHz abdeckt. Für die Messungen wurde das einzukoppelnde Signal in einem hochstabilen Frequenzgenerator erzeugt und über das S-Parameter Test-Set zu den Antennen des Resonators geleitet. Das aus dem Resonator ausgekoppelte Signal wurde wiederum vom Test-Set aufgenommen und zur anschließenden Weiterverarbeitung dem Netzwerkanalysator zugeführt. Dort wurde dann das ausgekoppelte Signal nach Amplitude und Phase im Vergleich zum eingekoppelten Signal analysiert. Da das S-Parameter Test-Set nur zwei Ausgänge besitzt, wurden für den Fall der 4-Antennenmessung noch sechs Mikrowellenschalter zwischen Test-Set und Resonator gesetzt, um so alle möglichen vier Reflexions- (Ein- und Auskoppelantenne sind identisch) und sechs Transmissionspektren (verschiedene Ein- und Auskoppelantenne) in kurzer Zeit nacheinander aufnehmen zu können.

Alle in dieser Arbeit behandelten Messungen mit supraleitenden Resonatoren wurden im Frequenzintervall zwischen 45 MHz und maximal 20 GHz mit einer Auflösung von 10 kHz und einer Ausgangsleistung von 20 dBm durchgeführt. Je nach Antennenanzahl haben die Messungen zwischen 12 h (zwei Antennen) und 45 h (vier Antennen) gedauert. Das Netzwerkanalysator-System sowie die Mikrowellenschalter wurden während der Messung von einem PC über einen HP-IB Bus gesteuert.

In Abb. 3.4 ist ein typisches Transmissionsspektrum im Frequenzbereich von 17.75 bis 18.00 GHz eines Limaçon-Billardards (vergl. Kap. 4) dargestellt. Im oberen Teilbild ist das Spektrum bei Raumtemperatur im normalleitenden Zustand des Resonators und im unteren Bild im supraleitenden Zustand bei einer Temperatur von 4.2 K aufgezeigt. Die einzelnen Frequenzen sind bei der normalleitenden

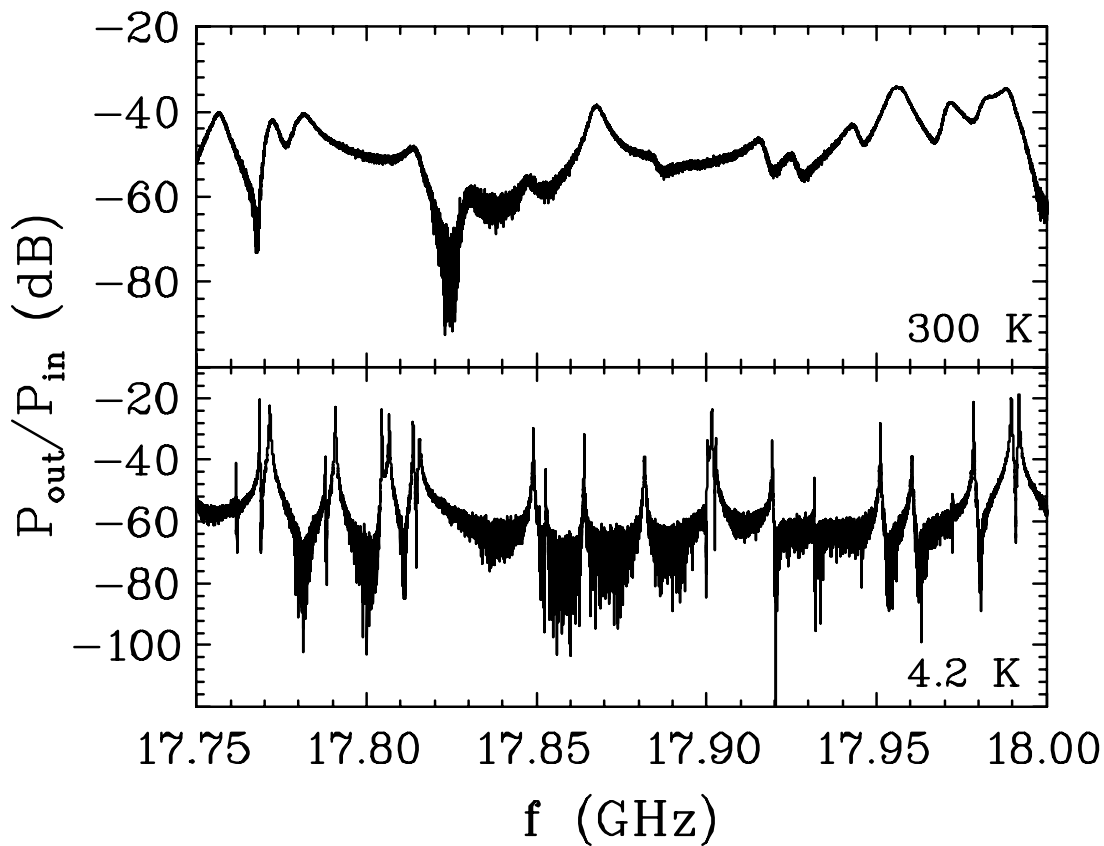


Abb. 3.4: Typische Transmissionsspektren, einmal bei Raumtemperatur (300 K, oben) und einmal im supraleitenden Fall des Resonators (4.2 K, unten) aufgenommen. Die Spektren stammen von einem Limaçon-Billard (s. Kap. 4). Deutlich wird die bessere Identifizierbarkeit der einzelnen Resonanzen im supraleitenden Fall aufgrund der kleineren Wandverluste sichtbar. Das Spektrum im normalleitenden Fall ist aufgrund der Kontraktion der Kavität gegen das supraleitende zu kleineren Frequenzen hin verschoben.

Messung nicht mehr zu identifizieren und eine Zuordnung der Eigenfrequenzen zwischen beiden Spektren ist aufgrund der Kontraktion des Billards im Kalten und der hohen Niveaudichte im dargestellten Frequenzbereich auch nicht mehr möglich. Deutlich sichtbar wird dabei die Gütesteigerung von $Q = 10^3$ im normalleitenden Fall auf bis zu $Q = 10^7$ im supraleitenden Fall und das verbesserte Signal-zu-Rauschverhältnis aufgrund der minimierten Verluste in der Resonatoroberfläche. Diese Bedingung ermöglichten es, selbst im hohen Frequenzbereich, die dichtliegenden Resonanzen aufzulösen. Dabei wird sehr eindrucksvoll belegt,

daß der erhöhte Aufwand einer supraleitenden Messung gegenüber einer Messung bei Raumtemperatur gerechtfertigt ist. Nur so kann garantiert werden, daß nahezu alle Resonanzen des Billards aufgelöst werden können, um anschließend eine aussagekräftige statistische Analyse der Spektren durchführen zu können.

3.2 Statistische Analyse und Vergleich von realen und idealen Systemen

Der Zugang zum chaotischen Verhalten von quantenmechanischen Systemen besteht nicht darin, sich mit einzelnen Eigenwerten zu beschäftigen (s. Kap. 2.2), sondern im Rahmen der Random Matrix Theory (RMT) sich darauf zu beschränken, statistische Eigenschaften von Ensembles von Eigenwerten zu beschreiben. Die RMT geht auf Wigner zurück, der bereits in den 50er Jahren spektrale Fluktuationseigenschaften von Atomkernen, komplexen Atomen und Molekülen mit Methoden der RMT beschrieb [54] (für einen Überblick s. [6, 13, 14]). Bei der RMT spielt lediglich die globale Symmetrie des untersuchten Systems (z.B. Zeitumkehrinvarianz oder Rotationssymmetrie) eine Rolle. In den 80er Jahren wurde nachgewiesen, daß sich auch quantenmechanische Spektren von niedrigdimensionalen, klassisch vollständig chaotischen Systemen (Billards) im statistischen Verhalten in nichts von den Resonanzspektren eines Vielteilchensystems, wie es z.B. Compoundkerne sind, unterscheiden [55]. Es hat sich gezeigt, daß die Eigenwerte solcher Billardsysteme so verteilt sind, wie die Eigenwerte des Gaußschen Orthogonalen Ensembles (GOE). Dabei handelt es sich um ein Ensemble von $N \times N$ Zufallsmatrizen, die invariant unter beliebigen orthogonalen Transformationen sind. Dies bedeutet, daß die Matrixelemente reell und symmetrisch sein müssen. Außerdem werden alle Matrixelemente als unabhängige Gauß-verteilte Zufallszahlen gewählt, da sonst keine weiteren Informationen über das System bekannt sein sollen [12]. Wird ein solches Ensemble diagonalisiert, erhält man sog. GOE-verteilte Eigenwerte, welche sich hervorragend dazu eignen, die Korrelationen im Eigenwertspektrum klassisch chaotischer Systeme mit Raum-Zeit-Symmetrien wiederzugeben. Hat man dagegen Systeme, denen andere Symmetrien zugrunde liegen, so erhält man z.B. für nicht-zeitumkehrinvariante Systeme Korrelationen, die mit

dem GUE (Gaußsches Unitäres Ensemble) beschrieben werden können. Experimente an Billards mit diesen Symmetrieeigenschaften sind u.a. in [53, 56, 57] zu finden. Neben der Anwendung der RMT auf die Spektren niedrigdimensionaler Systeme, hat sich aber auch gezeigt, daß die RMT viel universeller verwendbar ist. Ein Überblick darüber ist in [14] gegeben.

In den folgenden Abschnitten werden die Konzepte der statistischen Analyse gemäß der RMT vorgestellt und auf zwei unterschiedlich gewonnene Eigenfrequenzspektren angewandt. Es handelt sich dabei zum einen um eine Messung des Frequenzspektrums eines supraleitenden Mikrowellenbillards (Messung der Eigenwerte) und zum anderen um eine theoretische Simulation (Berechnung der Eigenwerte). Die so gewonnene Eigenwertsequenzen werden durch eine statistische Analyse direkt miteinander verglichen. Es soll schließlich die Frage diskutiert werden, inwieweit ein Vergleich zwischen experimentellen Daten und theoretischer Simulation sinnvoll ist. Das System, an dem der Vergleich durchgeführt wurde, ist das bereits experimentell und theoretisch ausgiebig studierte Bunimovich Stadion-Billard [23, 58].

3.2.1 Stadion-Billard

Theoretische Vorhersagen gehen immer von der Tatsache aus, daß man ein ideales System mit perfekter Geometrie hat, während Experimente mit realen Systemen durchgeführt werden. Solche realen Mikrowellenresonatoren weisen aber aufgrund der Fertigungsmethode immer Abweichungen zur vorgegeben Geometrie auf. Bei den geschweißten Kavitäten (vgl. Kap. 3.1) ist man darüber hinaus nicht in der Lage, die exakte innere Geometrie nach der Fertigung zu vermessen.

Das System, das im hier diskutierten Vergleich zwischen Experiment und Simulation behandelt wurde [36], ist das $\gamma = a/R = 1$ Stadion-Billard, wobei a die Länge des rechteckigen Teils und R der Radius des Viertelkreises angibt, s. Abb. 3.5 (links). Beim Bau eines Resonators mit dieser Geometrie sind folgende Eigenschaften besonders kritisch: Der Radius der Berandung ändert sich nicht abrupt sondern kontinuierlich am Übergang des geraden Stückes a zur Kreissection [59]. Ein anderer wichtiger Punkt ist die Tatsache, daß die Winkel der Ecken des Billards nicht exakt 90° sind.

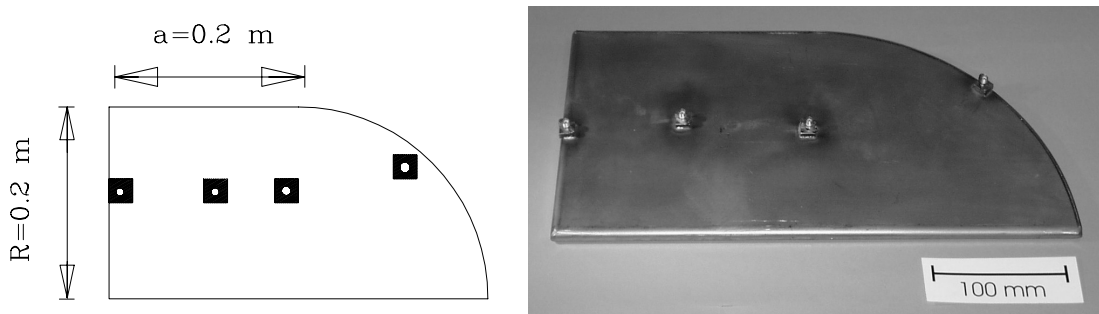


Abb. 3.5: Auf der linken Seite ist eine Skizze des untersuchten $\gamma = 1$ Bunimovich Stadion-Billard samt seinen geometrischen Dimensionen dargestellt. Die für die Messung verwendete Mikrowellenkavitat ist auf der rechten Seite abgebildet.

Die experimentellen Daten wurden an einem supraleitenden Niobresonator in der Form eines $\gamma = 1$ Stadion-Billard mit $a = R = 0.2$ m gewonnen (s. Abb. 3.5 (rechts)). Die Geometrie ist auf die kleinste Symmetrieeinheit reduziert (desymmetrisiert), im hier vorliegenden Fall auf ein Viertel-Stadion, um eine Überlagerung von verschiedenen unabhängigen Symmetrieklassen zu vermeiden. Im Frequenzintervall 45 MHz bis 20 GHz wurden 955 Eigenfrequenzen gemessen. Die theoretischen Eigenwerte wurden durch Lösen der Schrödingergleichung in einem Viertel des $\gamma = 1$ Stadion-Billard berechnet. Dabei wurde der Einfachheit halber die Fläche des Billard auf 4π gesetzt. Im Anhang A.1 ist eine Skizze der Rechnung angegeben. Es wurden die ersten 770 Eigenwerte mit einer Auflösung besser als $1/100$ des mittleren Niveauabstands berechnet.

3.2.2 Treppenfunktion und Entfaltung der Daten

Für die hier vorliegenden Sequenzen von Eigenfrequenzen beschreibt man deren Zustandsdichten, d.h. die Anzahl der Zustände pro Frequenzintervall, durch eine Summe von überlagerten Delta-Funktionen an den Stellen der Resonanzen f_i

$$\rho(f) = \sum_{i=1}^N \delta(f - f_i) \quad (3.1)$$

mit der Resonanzanzahl N im gegebenen Frequenzintervall. Durch Integration erhält man daraus die Treppenfunktion

$$N(f) = \int_0^f df' \rho(f') = \sum_{f > f_i} 1 + \sum_{f = f_i} \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Gleichung (3.2) stellt nichts anderes dar, als eine Treppe mit der Stufenhöhe eins an den Positionen der gegebenen Resonanzfrequenzen und gibt die Zahl der Eigenwerte bis zu einer Frequenz f an. Diese Treppenfunktion fluktuiert um einen lokalen Mittelwert $N^{smooth}(f)$, so daß sie wie folgt umgeschrieben werden kann:

$$N(f) = N^{smooth}(f) + N^{fluc}(f) \quad (3.3)$$

Für das hier verwendete Modellsystem Billard ist es möglich, diesen glatten Anteil formal anzugeben. Bereits Weyl [60,61] zeigte, daß im Mittel die Zahl der Eigenwerte in führender Ordnung quadratisch mit der Frequenz anwächst und mit der Fläche des Billards skaliert. In [62] wurden weitere Korrekturen für den glatten Verlauf der integrierten Niveaudichte angegeben, so daß sich schließlich für ein zweidimensionales skalares Billardproblem mit Dirichletschen Randbedingungen folgende Weyl-Formel ergibt

$$N^{Weyl}(f) = N^{smooth}(f) = \frac{\pi A}{c^2} f^2 - \frac{C}{2c} f + K. \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnet A die Fläche und C den Umfang des Billards. Der konstante Term K beschreibt Einflüsse der Krümmung sowie der Winkel des Billards und liegt in der Größenordnung von eins. Dieser Term ist analytisch durch

$$K = \oint \kappa(l) dl + \sum_{\beta_i} \frac{\pi^2 - \beta_i^2}{24\pi\beta_i} \quad (3.5)$$

gegeben, wobei $\kappa(l)$ die Krümmung der Berandung $\partial\mathcal{D}$ und β_i den Winkel der Ecken angibt.

Aus diesem glatten Anteil können durch eine Anpassung an die gemessenen bzw. simulierten Daten (Gl. (3.2)) Informationen über die Geometrie der Stadion-Billard gewonnen und mit den gegebenen Designparametern der Billards verglichen werden. Die Fläche des Resonators ist $A_{design} = 0.0714 \text{ m}^2$ und der Umfang $C_{design} = 1.114 \text{ m}$. Die Anpassung der Weyl-Formel (Gl. (3.4)) an die gemessene spektrale Stufenfunktion $N(k)$, mit der Wellenzahl $k = 2\pi/c_0 f$, ergab folgende Parameter: Fläche $A_{exp} = (0.0711 \pm 0.0004) \text{ m}^2$ und Berandung

$C_{exp} = (1.137 \pm 0.022)$ m. Diese Werte sind sehr gut mit den Designwerten in Übereinstimmung. Für die numerisch bestimmten Daten mit einer vorgegebenen Fläche 4π und dementsprechender Berandung C stimmen die Parameter durch eine Anpassung der Weyl-Formel an die Daten sehr gut überein, die Abweichung bewegt sich im Promillebereich. Durch Kenntnis dieser Geometrieparameter läßt sich auch die zu erwartende Anzahl von Resonanzen bis zu einer Maximalfrequenz bestimmen. Setzt man die Designwerte in die Weyl-Formel (Gl. (3.4)) ein und betrachtet das Frequenzintervall bis 20 GHz, so erwartet man für den Mikrowellenresonator 959 Eigenfrequenzen, die sehr gut mit der experimentell gewonnenen Anzahl von 955 übereinstimmt.

Startpunkt der Untersuchung war ein direkter eins-zu-eins Vergleich beider Datensätze. Um vergleichbare Aussagen bei der Untersuchung von verschiedenen Systemen zu erhalten, müssen die Spektren der einzelnen Systeme noch entfaltet werden. Unter Entfaltung eines Spektrums versteht man ein Verfahren zur Reskalierung der Frequenzachse auf einen mittleren Niveauabstand von eins zwischen zwei direkt benachbarten Eigenfrequenzen. Mit diesem Verfahren werden Unterschiede in den Spektren, die allein durch verschiedene geometrische Parameter (Fläche, Umfang) der Billards bedingt sind, herauskorrigiert. Das Entfalten geschieht durch folgende Transformation

$$\epsilon_i = N^{Weyl}(f_i), \quad (3.6)$$

wobei f_i die jeweilige Resonanzfrequenz ist. Jede Resonanz wird hierbei lokal auf den Mittelwert der integrierten Niveaudichte abgebildet [6]. Die mit der Entfaltung entfernten geometrischen Eigenschaften des realen und des idealen Systems erlaubten nun einen direkten Vergleich der ersten 770 Eigenwerte. In Abb. 3.6 ist die Differenz zwischen entfaltetem experimentellen und numerischen Daten, $\epsilon_{exp} - \epsilon_{num}$, dargestellt. Die Kurve fluktuiert um null, was ein Indiz für die Vollständigkeit beider Spektren ist. Die Oszillationen in der Kurve sind zufällig und zeigen, wie genau eine bestimmte Eigenfrequenz experimentell ermittelt werden kann. Wenn man nur einen Eigenmode im gemessenen Spektrum zufällig an einer Stelle entfernt, so zeigt die Kurve sehr deutlich eine Stufe der Höhe eins genau an der Stelle, an der der Eigenwert entfernt wurde. Dies ist im unteren Teil der Abb. 3.6 dargestellt, wo im experimentellen Spektrum der 427. Eigenwert fehlt.

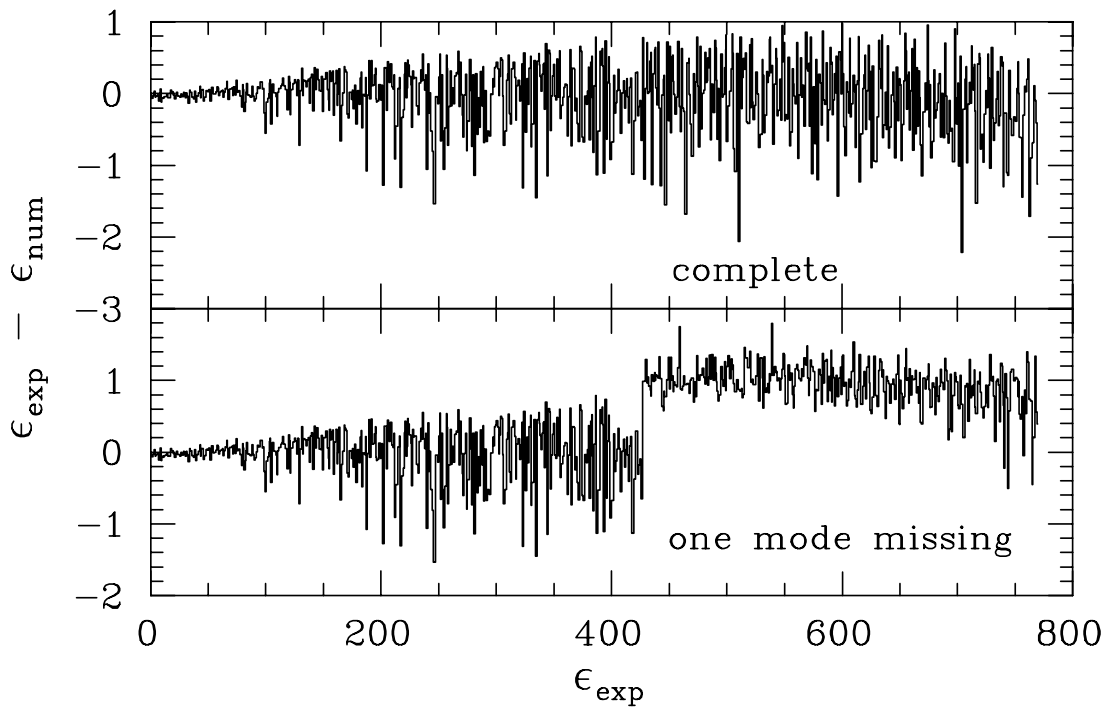


Abb. 3.6: Im oberen Teil ist die Differenz der entfaltenen Eigenwerte $\epsilon_{exp} - \epsilon_{num}$ über die entfaltenen Eigenwerte ϵ_{exp} der experimentellen Daten aufgetragen. Im unteren Teil ist die gleiche Kurve dargestellt, nur wurde hier willkürlich der 427. Eigenwert aus dem experimentellen Spektrum entfernt.

Informationen über die dynamischen Eigenschaften können daraus allerdings nicht gewonnen werden. Physikalische Aussagen, die Informationen über den Grad der Chaotizität des Systems enthalten, müssen demnach im fluktuierenden Anteil $N^{fluc}(f)$ stecken. Wenn man den fluktuierenden Teil der Treppenfunktion $N^{fluc}(k) = N(k) - N^{Weyl}(k)$ aus den Eigenfrequenzsequenzen extrahiert, kann die um null fluktuierende Kurve der experimentellen Daten beobachtet werden, die in Abb. 3.7 dargestellt ist. Dort ist neben einem starken Anstieg der Amplitude der Fluktuationen mit zunehmender Wellenzahl k – eine charakteristische Eigenschaft von regulären Systemen – aber auch eine periodische Grobstruktur mit der Periode 15.7 m^{-1} (750 MHz) zu beobachten. Dieses Verhalten des fluktuierenden Anteils kann durch die Existenz einer Familie neutralstabiler periodischer Bahnen, die sich zwischen den beiden parallelen Seiten des rechteckigen Teils hin- und herbewegen, die sog. Bouncing Ball Orbits (BBO) [23], erklärt werden. Diese Bahnen haben die Länge $2R$. Deshalb zeigt die integrierte Niveaudichte $N(k)$

periodische Oszillationen mit der festen Periode $2\pi/(2R) = 15.7 \text{ m}^{-1}$ um den mittleren Wert, gegeben durch die Weyl-Formel. Beschrieben werden können diese Oszillationen durch eine semiklassische Formel, die den Einfluß der BBO auf das Spektrum berücksichtigt [63]

$$N^{bbo}(k) = \frac{a}{R} \left(\sum_{1 \leq n \leq X} \sqrt{X^2 - n^2} - \frac{\pi}{4} X^2 + \frac{1}{2} X \right) \quad (3.7)$$

mit $X = kR/\pi$. Diese Formel rekonstruiert sehr gut das mittlere oszillierende Verhalten des fluktuierenden Anteils aus Abb. 3.7 (oben). Nachdem dieser Anteil noch zusätzlich vom fluktuierenden Anteil abgezogen ist, erhält man den eigentlichen fluktuierenden Anteil der Niveaudichte (unteres Bild in Abb. 3.7).

Die in den ϵ_i steckenden Fluktuationen um den Mittelwert ϵ bilden die Grundlage für die im folgenden diskutierten Niveaustatistiken.

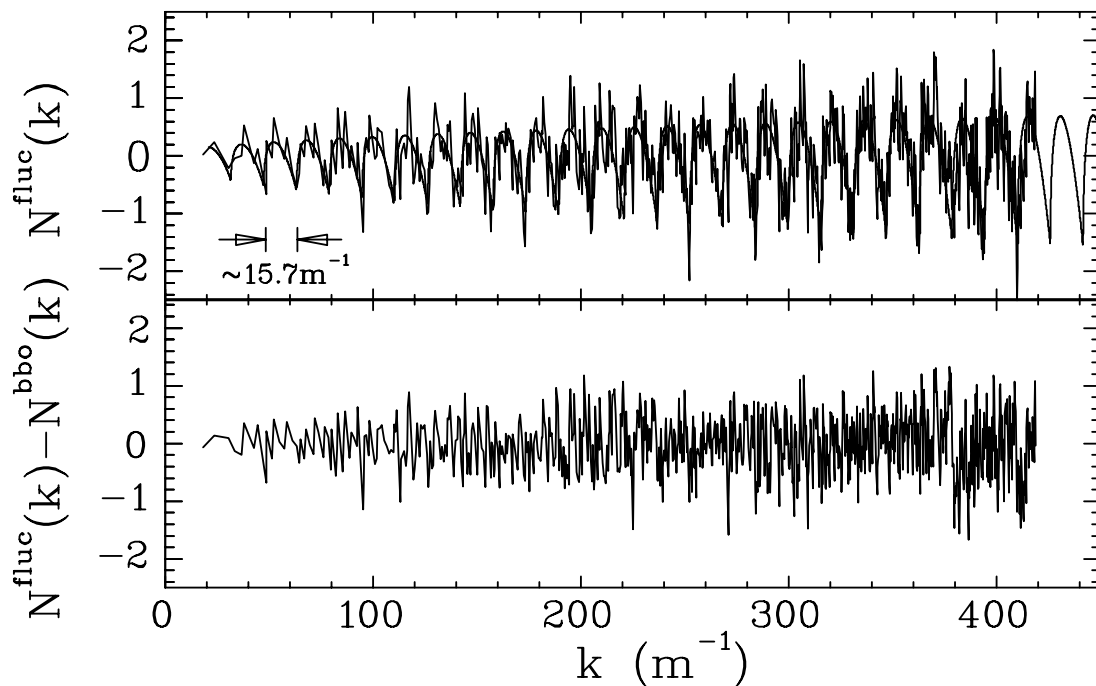


Abb. 3.7: Das Histogramm im oberen Teil stellt den fluktuierenden Anteil $N(k) - N^{Weyl}(k)$ der Treppenfunktion der experimentellen Daten dar. Die durchgezogene Kurve beschreibt die semiklassische Vorhersage für die Bouncing Ball Orbits (BBO) gemäß Gl. (3.7). Der untere Teil zeigt den fluktuierenden Anteil nach Abzug des BBO-Beitrags.

3.2.3 Kurzreichweitige Korrelationen

Zur Beschreibung von Korrelationen zwischen den Eigenwerten auf kurzen Skalen, d.h. Korrelationen auf der Skala des mittleren Niveauabstands, ist die Nächste-Nachbar-Verteilung (Nearest Neighbor Distribution, NND) eine etablierte Statistik. Die NND ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(s)$ für das Auftreten eines Abstandes $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ zwischen direkt benachbarten Eigenwerten. Dabei sind die folgenden Normierungsbedingungen erfüllt:

$$\int_0^{\infty} P(s) ds = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} P(s) s ds = 1 \quad (3.8)$$

Für ein reguläres System, bei dem die Eigenwerte völlig unkorreliert sind, erhält man für die Abstände s eine Poisson-Verteilung [12]

$$P^{Poisson}(s) = \exp(-s) . \quad (3.9)$$

Dies bedeutet, daß besonders häufig kleine Abstände zwischen den Eigenwerten vorkommen. Dabei spricht man auch von Niveauanziehung bzw. level attraction.

Genau wie für reguläre Systeme läßt sich eine Verteilung der nächsten Nachbarn auch für quantenmechanisch chaotische Systeme angeben. Bereits in den 50er Jahren hatte Wigner eine Verteilung gefunden, die die Verteilung der Eigenwerte eines GOE in sehr guter Näherung approximiert. Diese sogenannte Wigner-Verteilung [64]

$$P^{GOE}(s) \approx P^{Wigner}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (3.10)$$

wächst für kleine Abstände s linear an, d.h. man beobachtet eine Abstoßung von Eigenwerten (level repulsion). In Abb. 3.8 (oben) sind die beiden Grenzfälle der NND graphisch dargestellt. Für die untersuchten $\gamma = 1$ Stadion-Billardards wurde die NND aus den entfalteten Datensätzen, die durch den BBO-Anteil korrigiert wurden, berechnet und in Abb. 3.8 (oben) als Histogramm dargestellt. Der BBO-Anteil wird in der kurzreichweitigen Korrelationsanalyse nicht deutlich sichtbar, so daß nur der Fall mit vollständig entferntem BBO-Anteil behandelt wird.

Um die Chaotizität von Systemen beschreiben zu können, die sowohl reguläres als auch chaotisches Verhalten zeigen, eignet sich das Modell von Berry und Robnik [65] besonders gut. Dieses Modell stellt sehr anschaulich den Zusammenhang

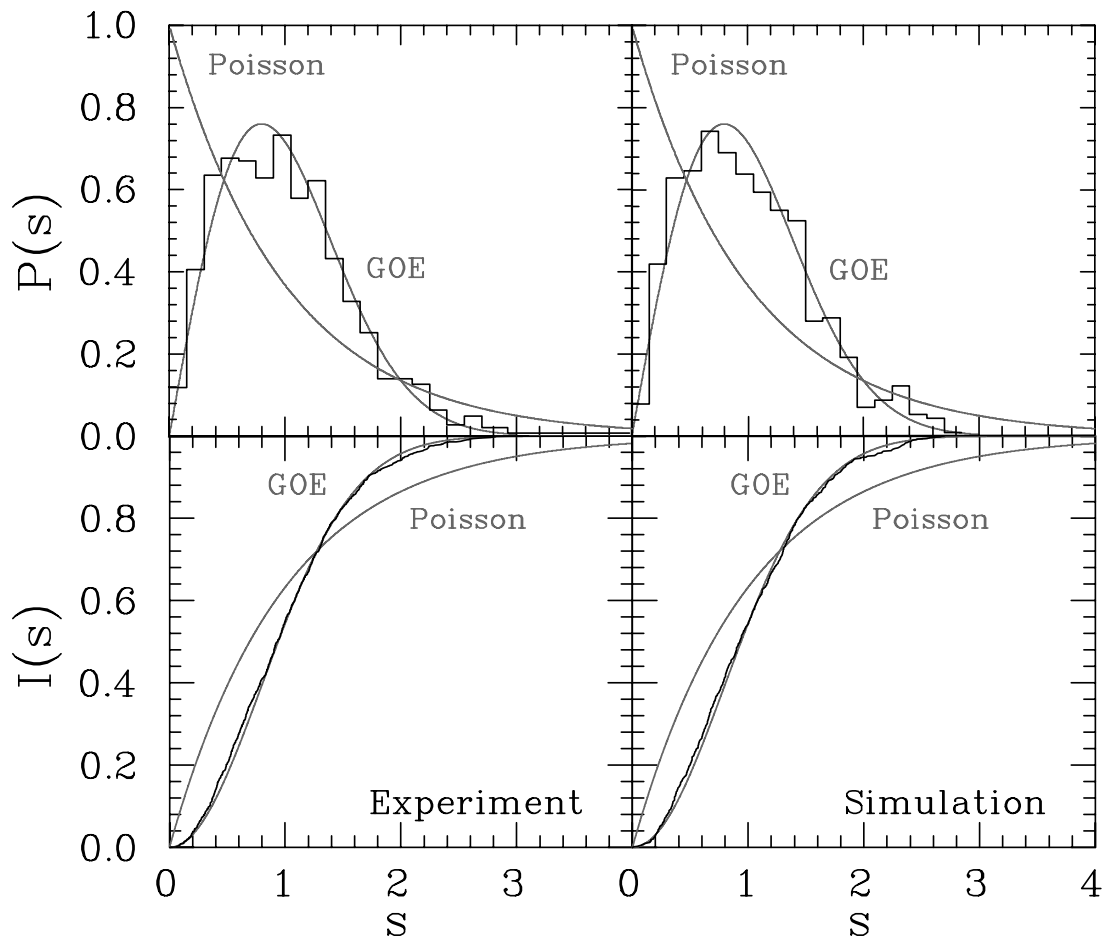


Abb. 3.8: Kurzreichweitige Statistiken: Im oberen Teil der Abbildung ist die Nächste-Nachbar-Verteilung $P(s)$ und im unteren Teil die kumulative NND $I(s)$ der experimentellen (links) und der numerisch simulierten Daten (rechts) dargestellt. Darüber hinaus sind auch noch die beiden Grenzverteilungen Poisson und GOE als hellgraue Kurve mit eingezeichnet. Der BBO-Beitrag ist aus den Daten schon extrahiert, so daß sie den vorhergesagten GOE-Verlauf zeigen.

zwischen dem klassischen und dem quantenmechanischen System her. Dabei wird ein Mischungsparameter q eingeführt, der im klassischen Bild denjenigen relativen Anteil des Phasenraums angibt, der von chaotischen Trajektorien ergodisch überdeckt wird. Im quantenmechanischen Fall gibt dieser Parameter direkt den relativen Anteil aller chaotischen Teilzustandsdichten an der Gesamtzustandsdichte an. Für die Nächste-Nachbar-Verteilung erhält man folgende Interpolation

zwischen regulärem und chaotischem Verhalten

$$P^{BR}(s) = \exp(-(1-q)s) \left[(1-q)^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} q s \right) + \left(2(1-q)q + \frac{\pi}{2} q^3 s \right) \exp \left(-\frac{\pi}{4} q^2 s^2 \right) \right]. \quad (3.11)$$

Für einen Wert $q = 0$, der klassische Phasenraum ist völlig regulär, erhält man den erwarteten Poisson-Verlauf der NND, Gl. (3.9). Ebenso läßt sich für $q = 1$, vollständig chaotischer Phasenraum, die GOE-Verteilung, Gl. (3.10), gewinnen. Neben diesem Modell gibt es noch weitere Beschreibungsmethoden gemischter Systeme [66–69], die zum Teil in [25] an Billards getestet wurden. Durch die Anwendung dieses Modells auf die beiden untersuchten Stadion-Billards mit extrahierten BBO-Anteil erhält man als Mischungsparameter $q = 0.96 \pm 0.03$ für den experimentell gewonnenen Datensatz und $q = 0.97 \pm 0.02$ für den theoretischen. Wie in [58] beschrieben, sollte das Stadion-Billard vollständig chaotisch sein, was auch durch die beiden Mischungsparameter, die sehr nahe bei eins liegen, ausgedrückt wird.

Bei der Bestimmung der NND gehen aber auch Informationen verloren. Dies kommt durch die Zusammenfassung von Abständen in Bins zustande, die im Intervall $[s, s + \Delta s]$ liegen. Bei der Wahl der Intervalllänge Δs muß man demnach immer einen Kompromiß zwischen kleinen statistischen Fehlern in wenigen Kanälen und großen statistischen Ungenauigkeiten bei dementsprechend mehr Kanälen eingehen. Eine Alternative ist hier die leicht aus der NND zu konstruierende kumulative NND

$$I(s) = \int_0^s P(s') ds'. \quad (3.12)$$

Diese Verteilung wird durch die Sortierung der Abstände benachbarter Eigenwerte der Größe nach und anschließender Bestimmung des Anteils von Abständen unterhalb eines gegebenen s berechnet. Für diese Statistik lassen sich auch sehr einfach die beiden Grenzverteilungen für reguläre bzw. chaotische Systeme (s. Abb. 3.8 unten) sowie eine Verteilung für gemischte Systeme angeben [49].

Aus den beiden Datensätzen wurde die kumulative Nächste-Nachbar-Verteilung $I(s)$ (Gl. (3.12)) für den fluktuierenden Anteil der Niveaudichte, korrigiert durch den Weyl- und den BBO-Anteil, berechnet. Im unteren Teil von Abb. 3.8 ist die Verteilung für beide Systeme dargestellt. In diesem Fall erhält man aus dem

Modell von Berry und Robnik als Mischungsparameter $q = 0.97 \pm 0.01$ für die experimentellen und $q = 0.98 \pm 0.02$ für die numerisch bestimmten Daten. Auch hier liegen die beiden bestimmten Mischungsparameter nahe bei eins und sind somit sehr gut mit der theoretischen Vorhersage verträglich.

3.2.4 Langreichweitige Korrelationen

In diesem Abschnitt wird das universelle Verhalten auf weitaus größeren Energieskalen als die von der Größe des mittleren Niveauabstands diskutiert. Man spricht hierbei von sog. langreichweitigen Korrelationen. Dabei untersucht man Korrelationen zwischen Eigenwerten im Bereich $1 < L < L_{max}$, wobei L_{max} den Abstand zwischen zwei Eigenwerten angibt, bis wohin noch universelles Verhalten auftritt. Die Größe L_{max} wird durch das Verhältnis aus mittlerer Systemzeit (Heisenbergzeit) τ_H und der kleinsten im System auftretenden Zeit τ_{min} festgelegt [70]:

$$L_{max} = \frac{\tau_H}{\tau_{min}} = \frac{1}{\tau_{min}} \frac{h}{D} \quad (3.13)$$

Dabei bezeichnet h das Plancksche Wirkungsquantum und D den mittleren Niveauabstand. Die Zeit τ_{min} wird dabei aus der Länge der kürzesten periodischen Bahn l_{min} und der maximalen Energie E_{max} im System bestimmt

$$\tau_{min} = \frac{l_{min}}{\sqrt{2E_{max}/m}} . \quad (3.14)$$

Aus den experimentellen Daten läßt sich der Wert L_{max} wie folgt bestimmen

$$L_{max} = \frac{2cN}{2\pi f_{max} l_{min}} , \quad (3.15)$$

wobei N die Anzahl der betrachteten Resonanzen bis zur Maximalfrequenz f_{max} ist.

Das mathematisch einfachste Maß auf langen Skalen stellt die Σ^2 -Statistik dar. Sie untersucht die Varianz der Niveauanzahl $n(L)$ auf Intervallen der Länge L um den dazu gehörigen Mittelwert auf diesen Intervallen, der gemäß der Entfaltung gleich L ist. Dabei gilt

$$\Sigma^2(L) = \langle (n(L) - \langle n(L) \rangle)^2 \rangle = \langle n^2(L) \rangle - L^2 . \quad (3.16)$$

Die Mittelung $\langle \cdot \rangle$ findet dabei über viele Intervalle der Länge L statt.

Ein weiteres statistisches Maß ist die Dyson-Mehta oder Δ_3 -Statistik [12, 71]. Sie beschreibt die mittlere quadratische Abweichung der integrierten Niveaudichte von ihrem Mittelwert auf einem Intervall der Länge L

$$\Delta_3(L) = \left\langle \min_{(A,B)} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} dx [N(x' - x) - (Ax + B)]^2 \right\rangle. \quad (3.17)$$

Die Mittelung findet wieder über viele Intervalle der Länge L mit Mittelpunkt x' statt. Über folgende Relation hängt die Δ_3 -Statistik mit der Σ^2 -Statistik zusammen [6]:

$$\Delta_3(L) = \frac{2}{L^4} \int_0^L dr (L^3 - 2L^2r + r^3) \Sigma^2(r) \quad (3.18)$$

Wie auch im Fall der NND lassen sich für die beiden hier vorgestellten Statistiken Grenzverteilungen für den regulären bzw. den chaotischen Fall angeben. Für den regulären Fall erhält man:

$$\Sigma_{Poisson}^2(L) = L \quad (3.19)$$

$$\Delta_3^{Poisson}(L) = \frac{L}{15} \quad (3.20)$$

Dieses streng monotone Anwachsen der anzahlsspezifischen Schwankungen auf einem Intervall der Länge L ist für korrelationsfreie Streudaten typisch. Im Fall chaotischer Systeme mit GOE verteilten Eigenwerten erhält man folgende asymptotische Verteilungen für große L :

$$\Sigma_{GOE}^2(L) \approx \frac{2}{\pi^2} \left(\ln(2\pi L) + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8} \right) \quad (3.21)$$

$$\Delta_3^{GOE}(L) \approx \frac{1}{\pi^2} \left(\ln(2\pi L) + \gamma + \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{8} \right) \quad (3.22)$$

Dabei steht γ für die Eulersche Konstante. Dieses Verhalten für chaotische Systeme drückt ein viel strukturierteres, schwankungsärmeres Auftreten der Eigenwerte im Vergleich zum regulären Fall aus. Dabei spricht man auch von der spektralen Steifigkeit oder level clustering der Eigenwerte GOE-artiger Spektren auf langen Skalen. In Abb. 3.9 sind die beiden Grenzverteilungen für die Σ^2 -Statistik graphisch dargestellt.

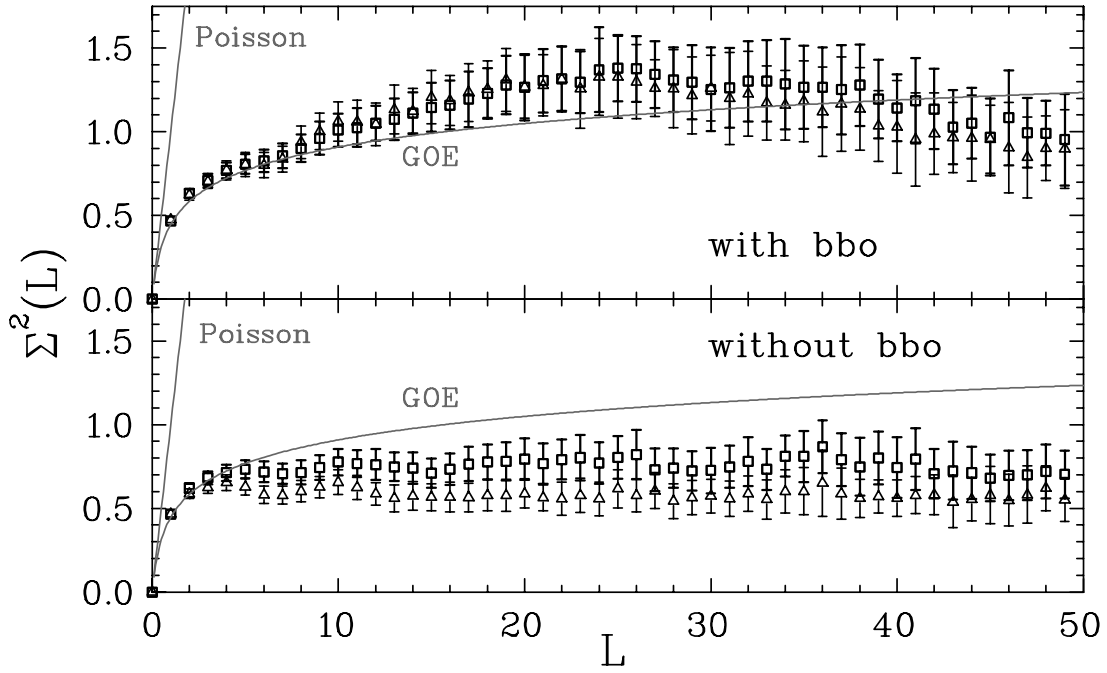


Abb. 3.9: Σ^2 -Statistik der experimentellen Daten (\square) verglichen mit dem numerischen Datensatz (\triangle). Im oberen Teil ist der BBO-Beitrag nicht entfernt, während im unteren Teil der Abbildung dieser aus den Datensätzen extrahiert wurde. Die Fehlerbalken der Datenpunkte sind ein Maß der statistischen Fluktuationen des gegebenen Eigenwertensembles im Intervall der Länge L . Die vorhergesagte Sättigung setzt in beiden Kurven bei $L = L_{max} \approx 4$ ein.

Um auch in den langreichweitigen Korrelationen auf die Mischung von Poisson- und GOE-Verhalten schließen zu können, lassen sich folgende Verteilungen für das Berry-Robnik Modell mit dem Mischungsparameter q angeben [6]

$$\Sigma_{BR}^2(L) = \Sigma_{Poisson}^2((1-q)L) + \Sigma_{GOE}^2(qL) \quad (3.23)$$

$$\Delta_3^{BR}(L) = \Delta_3^{Poisson}((1-q)L) + \Delta_3^{GOE}(qL). \quad (3.24)$$

In der Σ^2 -Statistik der beiden untersuchten Stadion-Billardards wurden die Einflüsse der vorhin beschriebenen BBO deutlicher sichtbar, als in den kurzreichweitigen Statistiken. Der Effekt beeinflusst die Steifigkeit des Spektrums für große Werte von L , vergl. Abb. 3.9. Eine exakte Handhabung dieser Orbits, wie bei der kumulativen NND beschrieben, verändert auffallend die Form der Σ^2 -Statistik in Richtung der erwarteten GOE-Verteilung. Im oberen Teil von Abb. 3.9 sind die ex-

perimentellen Daten (\square) und die numerischen Daten (\triangle) der Σ^2 -Statistik, bevor der BBO-Anteil entfernt wurde, dargestellt. Zwischen diesen beiden Datensätzen kann kein signifikanter Unterschied festgestellt werden, im Gegensatz zu den beiden Datensätzen, bei denen der BBO-Anteil extrahiert wurde (unterer Teil von Abb. 3.9). Die Höhe der Sättigung unterscheidet sich leicht. Beide Verteilungen folgen aber sehr gut der GOE-Vorhersage bis zu einem Wert $L \approx 3.5$, ab dem die Verteilungen sättigen und nicht-universelles Verhalten auftritt. Das ist in sehr guter Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage von $L \approx 3.8$ [70]. Dieser Wert $L = L_{max}$ weist auf den kürzesten periodischen Orbit, der im Fall des $\gamma = 1$ Stadion-Billard der BBO ist. Die Abweichung zwischen beiden Datensätzen oberhalb von L_{max} kann dadurch erklärt werden, daß die Mikrowellenkavität ein reales System mit vorhandenen Ungenauigkeiten ist (z.B. leichte Nichtparallelität der geraden Segmente, die auf die PO einen Einfluß haben könnten).

3.2.5 Längenspektren und periodische Bahnen

Neben der RMT und der Klassifizierung der quantenmechanischen Systeme nach dem Grad der Chaotizität des korrespondierenden klassischen Systems stellt die Periodic Orbit Theory (POT) einen weiteren sehr wichtigen Zusammenhang zwischen dem klassischen und dem quantenmechanischen System her [5]. Bei der POT geht man davon aus, daß ein gegebenes quantenmechanisches Spektrum allein durch die Kenntnis der periodischen Bahnen im klassischen Analogon und deren Eigenschaften vollständig beschrieben werden kann. Um die Beiträge der periodischen Bahnen zur Niveaudichte zu extrahieren, bietet sich die Fourier-Transformation des quantenmechanischen Spektrums an [63]. Dabei wird im Fall der Mikrowellenexperimente der fluktuierende Anteil der Niveaudichte vom Frequenz- in den Zeit- bzw. Längenbereich Fourier-transformiert

$$\tilde{\rho}^{fluc}(l) = \int_{f_{min}}^{f_{max}} \rho^{fluc}(f) \exp\left(i\frac{2\pi}{c}lf\right) df. \quad (3.25)$$

Die Intervallgrenzen, in dem die Eigenfrequenzen liegen, werden dabei mit f_{min} und f_{max} bezeichnet. Aus dieser Transformation erhält man ein Längenspektrum mit maximaler Fourier-Amplitude bei den Längen l , die den Bahnlängen klassisch periodischer Orbits entsprechen. Dabei korrespondiert die Höhe der Amplitude

zur Stabilität dieser Bahnen. Dieses Fourier-Integral ist vollständig analytisch lösbar, und somit frei von numerischen Fehlern. Neben der Länge einer periodischen Bahn ist auch noch die Stabilität der Bahn von Interesse. Generell lassen sich die periodischen Bahnen im Zweidimensionalen in drei Stabilitätsklassen einteilen [72]: stabile, neutralstabile und instabile periodische Bahnen. Für eine ausführlichere Diskussion der Bahntypen wird auf Kap. 6 verwiesen. Je nach Chaotizitätsgrad des Billards kommen die einzelnen Bahntypen im klassischen System vor. In einem regulären Billard treten nur die stabilen und neutralstabilen Orbits auf, während in einem chaotischen System die neutralstabilen (z.B. als Bouncing Ball Orbits (BBO)) sowie die instabilen periodischen Bahnen vorkommen können. In einem gemischten Billardsystem können alle drei Bahntypen vorliegen.

Bei den Berechnungen der Längenspektren aus den fluktuierenden Eigenwertdichten beider Stadion-Billard wurde das Spektrum der numerischen Simulation auf das des Experiments für eine bessere Vergleichbarkeit umskaliert (der kürzeste BBO erscheint in beiden Spektren an derselben Stelle). In Abb. 3.10 ist das Längenspektrum für die experimentellen (oben) und die numerischen (unten) Daten gegeben. In beiden Spektren wurden die dominierenden BBO extrahiert. Dies ist, wie in Abb. 3.10 zu beobachten, aufgrund der numerischen Unsicherheiten in Gl. (3.7) nicht ganz möglich. Es ist deutlich sichtbar, daß neben der Position der Peaks (Länge der Orbits) auch die Höhe (Stabilität der Orbits) in beiden Spektren nahezu identisch sind.

Eine detaillierte Analyse der BBO im experimentellen Billard, die die Länge $l = n \cdot R$ ($n = 2, 4, 6, \dots$) haben, zeigte, daß die Distanz R zwischen den beiden parallelen Seiten nicht exakt $R = 0.20$ m (wie vorgegeben) sondern $R = (0.1992 \pm 0.0005)$ m (Mittelwert über die ersten sechs Wiederholungen des BBO) betrug. Daraus läßt sich folgern, daß die beiden geraden Segmente des Billards nicht exakt parallel sind. Die Gründe dieser Abweichung ($\Delta R/R = 4 \cdot 10^{-3}$) vom Designwert sind zum einen durch die mechanische Genauigkeit bei der Fertigung ($3 \cdot 10^{-3}$) und zum anderen durch Effekte durch die thermische Kontraktion [73] bei tiefen Temperaturen ($1 \cdot 10^{-3}$) erklärbar. Dies ist auch der Grund für die leicht unterschiedlichen Sättigungsniveaus in der Σ^2 -Statistik nach Abzug des BBO-Anteils.

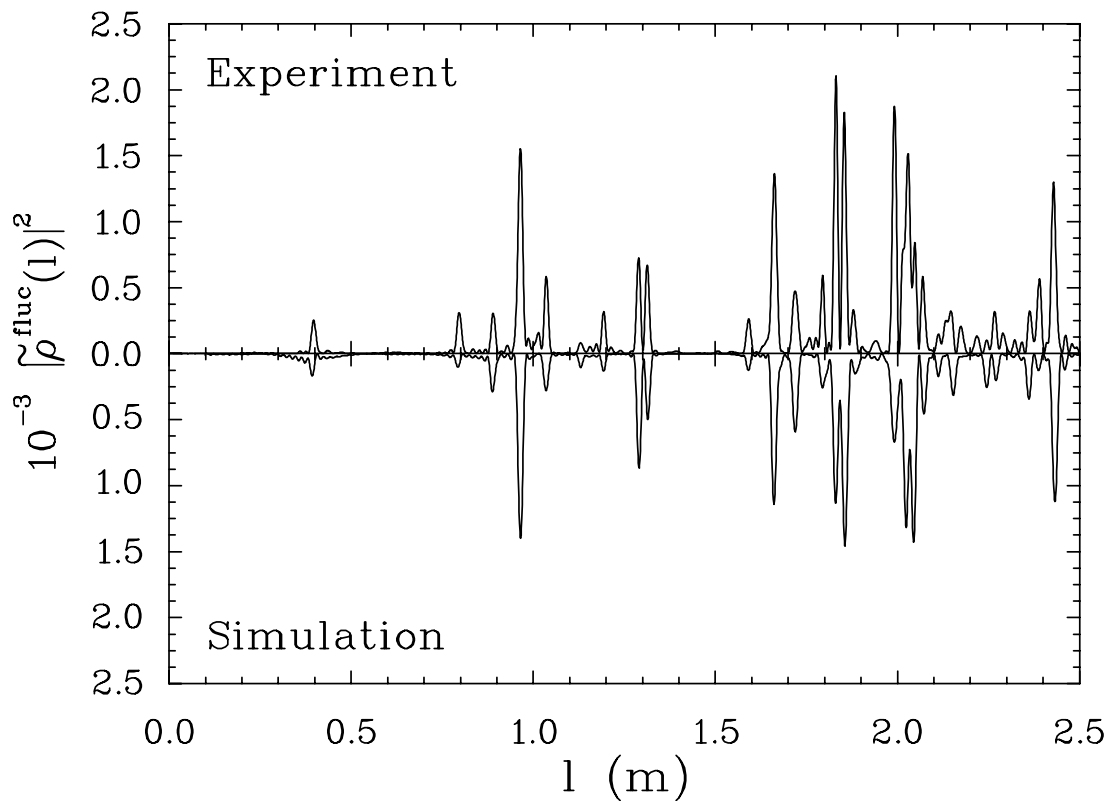


Abb. 3.10: Fourier-Transformation des fluktuierenden Anteils der Niveaudichte $\rho(k) - \rho^{Weyl}(k) - \rho^{BBO}(k)$. Die experimentellen und die numerischen Daten sind als Spiegelbild dargestellt. Überreste der BBO bei $l = 0.4$ m, 0.8 m und zu einem Teil bei $l = 1.2$ m sind noch sichtbar.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das Analogexperiment, durchgeführt mit Mikrowellenresonatoren, sehr gut in der Lage ist, quantenmechanische Billardsysteme zu simulieren. Die kleinen Abweichungen, die sich in der statistischen Analyse zeigten, lassen sich auf die nicht vermeidbaren Ungenauigkeiten bei der Fertigung der Billards zurückführen. Für einfache zweidimensionale Billards, wenn man nur an den Eigenwerten interessiert ist, sind die numerischen Simulationen dem Experiment gleichwertig. Für weitergehende Probleme (z.B. Billards mit Streukörpern oder dreidimensionale Billards) bietet das Experiment einen relativ einfacheren und schnelleren Zugang zu großen Sequenzen von Eigenwerten. Darüber hinaus zeigt sich durch die gute Übereinstimmung von Experiment und Theorie, daß es auch legitim ist, Resultate aus dem Experiment mit denen aus einer Simulation, z.B. gemessene Eigenwertspektren mit simulierten Feldverteilungen, für eine Analyse zu kombinieren.

TEIL I: Statistische Analyse und semi-klassische Beschreibung von supraleitenden Limaçon-Billardards

4 Klassisches und quantenmechanisches Verhalten der Limaçon-Billardards

In den nächsten drei Kapiteln werden Billardsysteme untersucht, deren Dynamik gemischt ist, d.h. ihr Verhalten liegt zwischen dem eines regulären und dem eines chaotischen Systems. Die hier verwendeten Billards gehören zu der Familie der Limaçons. Die Form der Billards wurde schon 1525 von Dürer erwähnt, der eine Methode zur Konstruktion der Berandungskurve vorstellte [74]. In der Mathematik sind diese Kurven auch als Pascalsche Schnecken ($\text{limax} = \text{lat. Schnecke}$) bekannt. Diese Familie von Systemen hatte Robnik 1983 erstmals als Billards sowohl klassisch [75] als auch quantenmechanisch [76–79] numerisch untersucht. Die Limaçon-Billardards eignen sich hervorragend für die Untersuchung von Systemen, die von regulär nach chaotisch übergehen, da sich das System nur durch Variation eines einzigen Kontrollparameters von einem integrablen, regulären Billard (Kreis) [72] über einen weiten Bereich von Billards mit gemischter Dynamik in ein völlig chaotisches Billard, die Kardioide [80], überführen läßt. Im ersten Abschnitt wird die Familie der Billards vorgestellt. Außerdem werden ihre klassischen Eigenschaften diskutiert. Im zweiten Abschnitt wird anschließend ihr quantenmechanisches Verhalten in Mikrowellenexperimenten untersucht.

4.1 Klassische Eigenschaften

Die Berandung der Billards aus der Familie der Limaçons ist durch folgende konforme Abbildung des Einheitskreises definiert

$$\omega = z + \lambda z^2 \quad \text{mit } |z| = 1, \quad (4.1)$$

wobei z komplex ist und der Kontrollparameter λ Werte im Intervall $[0,0.5]$ annehmen kann. Für $\lambda = 0.5$ ist die durch Gl. (4.1) definierte Abbildung nicht mehr konform. Für die späteren klassischen Untersuchungen ist die komplexe Schreibweise ungeeignet, so daß folgende Parameterdarstellung gewählt wurde

$$\begin{aligned}x(\phi) &= \cos(\phi) + \lambda \cos(2\phi) \\y(\phi) &= \sin(\phi) + \lambda \sin(2\phi).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Dabei durchläuft der Winkel ϕ das Intervall $0 \leq \phi < 2\pi$ (vergl. Abb. 4.1). Für $\lambda = 0$ erhält man aus Gl. (4.1) bzw. (4.2) den Einheitskreis, der mit zunehmendem λ deformiert wird. Ab $\lambda = 0.25$ ist die Berandung nicht mehr komplett konvex und für $\lambda = 0.5$ erhält man die Kardioide. In diesem Fall tritt bei $\phi = \pi$ bzw. bei

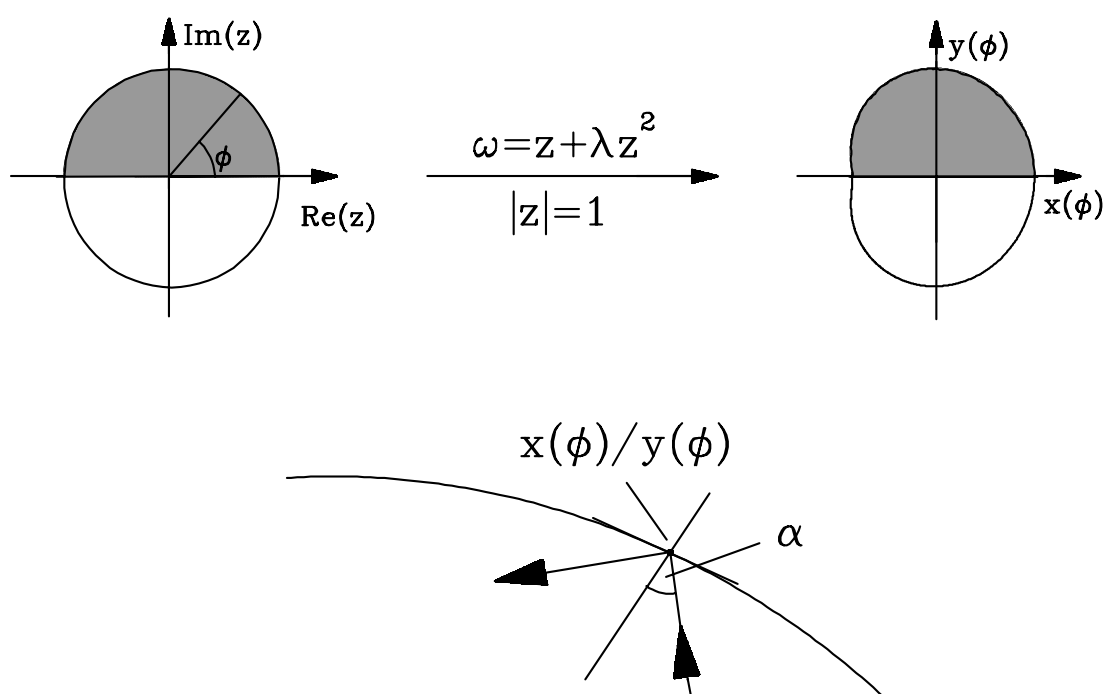


Abb. 4.1: Im oberen Teil ist die konforme Abbildung des Einheitskreises auf ein Billard der Limaçon-Familie gemäß Gl. (4.1) illustriert. Es ist zu beachten, daß bei den folgenden Untersuchungen nur das desymmetrisierte System (grau unterlegt) berücksichtigt wurde (außer beim Kreis). Im unteren Teil ist die Reflexion einer Teilchenbahn im Punkt $(x(\phi)/y(\phi))$ definiert. Der Einfallswinkel α , der gleich dem Ausfallswinkel ist, wird relativ zum Lot gemessen.

$z = -1$ eine Unstetigkeit (Kuspe) auf. In Abb. 4.2 sind einige Beispiele aus der Familie der Limaçon-Billardards mit verschiedenen Werten λ dargestellt.

Für die geplanten klassischen und quantenmechanischen Untersuchungen wurden vier verschiedene Parameter λ ausgesucht. Der erste Parameter ($\lambda = 0$) stand aufgrund des schon vorhandenen Kreisbillards [38, 51, 81] bereits fest. Die Festlegung der übrigen drei Parameter wurde im Rahmen von [49] durchgeführt, wird aber hier für ein besseres Verständnis noch einmal kurz wiederholt. Der Ausgangspunkt für die Bestimmung der drei Parameter war die Betrachtung des klassischen Phasenraums für unterschiedliche λ . Für die Berechnung der Bewegung im Phasenraum des klassischen Billards ordnet man der Billardkugel bei jeder Wandberührung (Reflexion) zwei Phasenraumkoordinaten zu. Es handelt sich dabei um die normierte Länge $l(\phi)$ der Berandung vom Punkt $\phi = 0$ bis zum Reflexionspunkt, der durch den Winkel ϕ beschrieben wird (Abb. 4.1) und die normierte Tangentialkomponente des Impulses $S = \sin(\alpha)$. Der Winkel α bezeichnet, wie in Abb. 4.1 dargestellt, den Einfalls- (Ausfalls-) Winkel relativ zum Lot am Rand. Für verschiedene Parameter λ wurden Bahnen im Billard simuliert und so die Phasenraumkoordinaten $l(\phi)$ und S gewonnen. In Abb. 4.3 sind Poincaré-Schnitte für verschiedene λ dargestellt. Für jeden Poincaré-Schnitt wurden 50 Bahnen mit jeweils $5 \cdot 10^4$ Reflexionen und unterschiedlichen Anfangsbedingungen betrachtet. Deutlich sichtbar ist, daß sich der Phasenraum in unterschiedliche Gebiete aufteilen läßt: Der Poincaré-Schnitt des $\lambda = 0$ Billards besteht nur aus horizontalen invarianten Kurven, die für die Drehimpulserhaltung im Kreisbillard

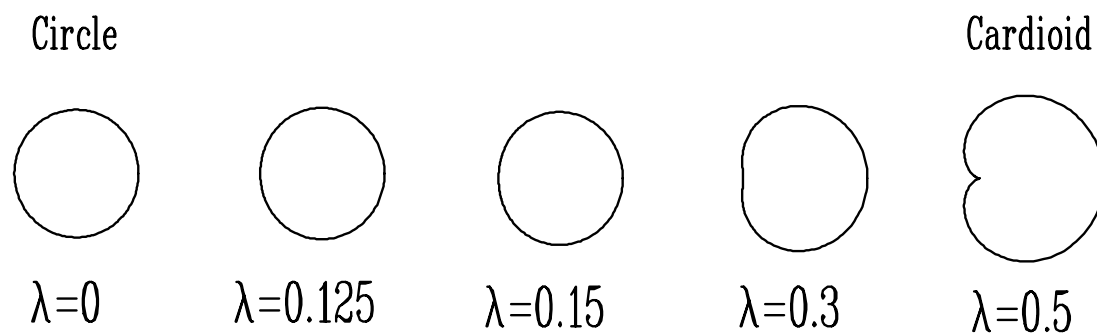


Abb. 4.2: Einige Beispiele aus der Familie der Limaçon-Billardards. Die beiden Grenzfälle sind links der Kreis mit $\lambda = 0$ und rechts das Kardioid-Billard mit $\lambda = 0.5$. In den Beispielen ist deutlich zu erkennen, daß die Fläche der Billards bei Variation von λ nicht erhalten bleibt.

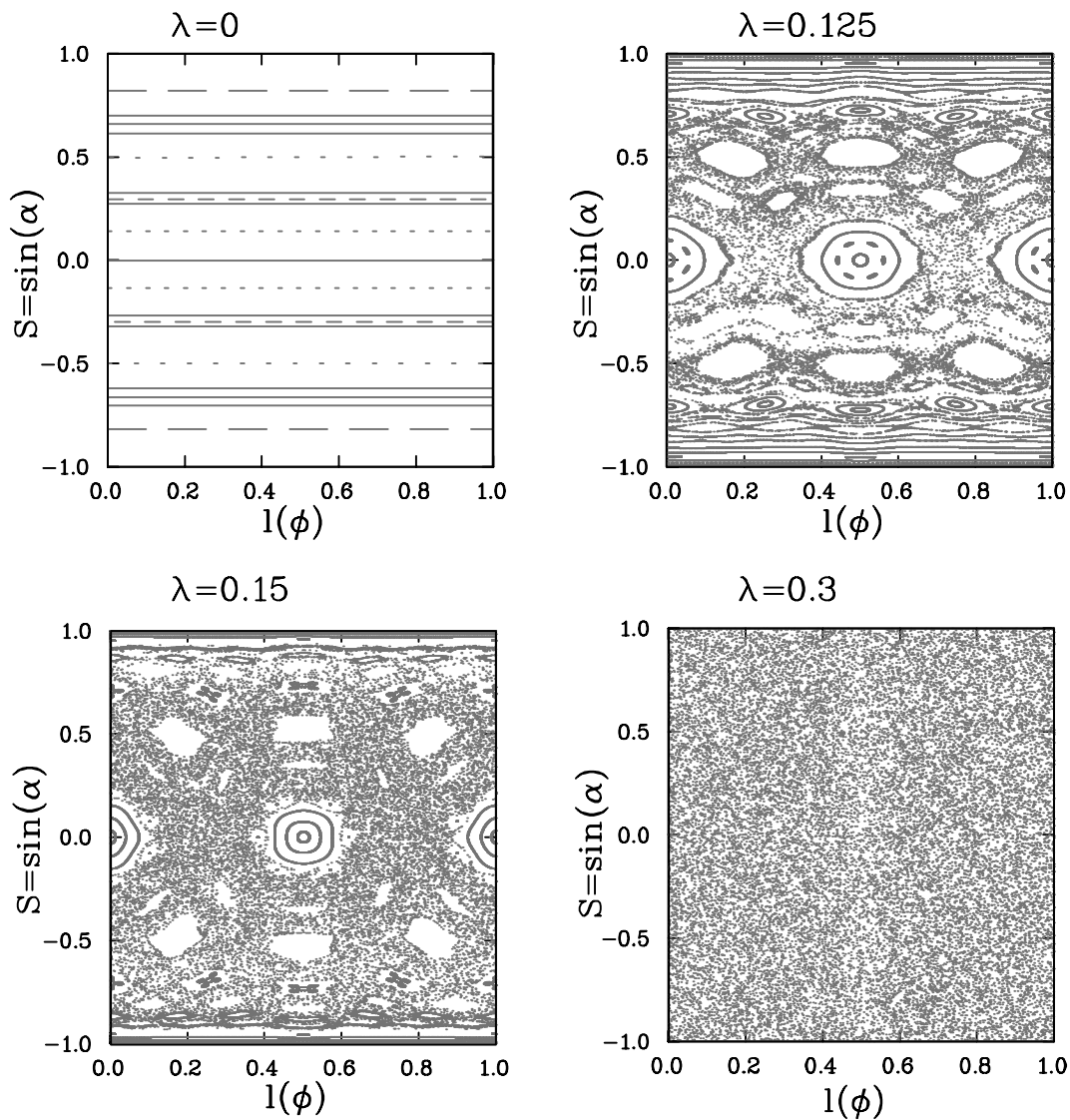


Abb. 4.3: Poincaré-Schnitte für Billards aus der Familie der Limaçons mit unterschiedlichen Kontrollparametern λ .

stehen. Mit zunehmendem λ brechen diese Kurven auf, und die regulären Streifen werden durch ein ergodisch gefülltes Gebiet, das sog. Chaosmeer, verdrängt.

Das Auswahlkriterium für die Wahl der drei restlichen Parameter λ war die Vorgabe, daß das Chaosmeer (chaotischer Anteil) in den Poincaré-Schnitten einen Flächenanteil von 55%, 66% und 100% annehmen sollte. Mit dieser Wahl kann sehr gut der Übergang von einem regulären zu einem chaotischen System experimentell untersucht werden. Für die Bestimmung der Fläche des Chaosmeeres wurde für verschieden λ das Chaosmeer aus dem Poincaré-Schnitt isoliert. Dies wurde dadurch realisiert, daß als Startwert für die Berechnung einer Teilchen-

bahn ein Koordinatenpaar aus dem chaotischen Bereich gewählt wurde. Da diese Bahn im chaotischen Teil des Phasenraums startet, wird sich das komplette chaotische Gebiet im Laufe der Zeit mit zunehmender Anzahl von Reflexionen ergodisch ausfüllen. Dabei dringt die Bahn nicht in die regulären Bereiche ein. Für diese Untersuchung wurden 10^5 Reflexionen am Rand betrachtet. Aus dem Flächeninhalt des chaotischen Bereiches kann man wie folgt den klassischen Mischungsparameter q_{kl} berechnen

$$q_{kl} = \frac{A_{chaotic}}{A_{total}}. \quad (4.3)$$

Danach ist q_{kl} nichts anderes als die normierte Fläche des Chaosmeeres und dient somit als klassisches Maß für den Grad der Chaotizität. Aus den Untersuchungen ergaben sich folgende Parameter λ :

$$\begin{aligned} q_{kl} = 0\% & \rightarrow \lambda = 0 \\ q_{kl} = 55\% & \rightarrow \lambda = 0.125 \\ q_{kl} = 66\% & \rightarrow \lambda = 0.15 \\ q_{kl} = 100\% & \rightarrow \lambda = 0.3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Da für $\lambda \geq 0.279$ keinerlei signifikante reguläre Bahnen mehr existieren, die Einfluß auf die Dynamik des Systems haben [82], wurde für $q_{kl} = 100\%$ der Parameter $\lambda = 0.3$ willkürlich gewählt.

4.2 Quantenmechanisches Verhalten

4.2.1 Mikrowellenexperiment

Für die Untersuchung des quantenmechanischen Analogons der klassischen Billards aus der Familie der Limaçons wurden Mikrowellenkavitäten aus Niob der Form aus Gl. (4.1) mit den im vorherigen Abschnitt bestimmten Kontrollparametern λ aus Gl. (4.4) in den CERN-Werkstätten gemäß der in Kap. 3.1 beschriebenen Methode gefertigt. Bis auf das $\lambda = 0$ Billard, das ursprünglich für andere Experimente konzipiert wurde [51, 81], sind die drei übrigen Kavitäten

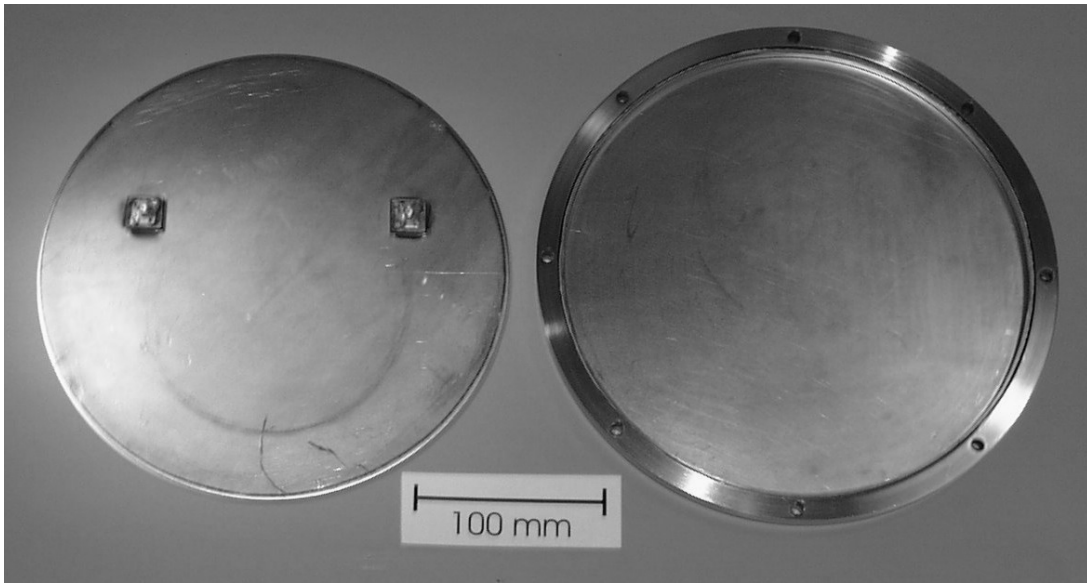


Abb. 4.4: Modularer Kreisresonator aus Niob. Auf dem Deckel sind die zwei Antennen für die Ein- und Auskopplung der Mikrowellen zu erkennen.

desymmetrisiert, um eine Überlagerung von verschiedenen Symmetrieklassen zu vermeiden. Das Kreisbillard ist mit zwei und die anderen Billards jeweils mit vier Antennen zum Ein- und Auskoppeln der Mikrowellen bestückt. In Abb. 4.4 und 4.5 sind die vier untersuchten Kavitäten dargestellt. Tabelle 4.1 faßt die vorgegebenen geometrischen Daten der Billards zusammen.

Bei den Messungen im Frequenzbereich von $45 \text{ MHz} \leq f \leq 20 \text{ GHz}$ wurden

Tab. 4.1: Anzahl der Antennen, Geometrische Daten und Anzahl der Resonanzen der Limaçon-Billard. Die Anzahl der Resonanzen bis 20 GHz wurde durch Gl. (3.4) abgeschätzt (der Wert in der Klammer beim $\lambda = 0.3$ Billard bezieht sich auf eine maximale Frequenz von 18 GHz).

	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.125$	$\lambda = 0.15$	$\lambda = 0.3$
# Antennen	2	4	4	4
Fläche A_{design} [m ²]	0.0491	0.0861	0.0861	0.0861
Umfang C_{design} [m]	0.7854	1.1958	1.1931	1.1743
# Resonanzen	660	1164	1164	1165 (939)

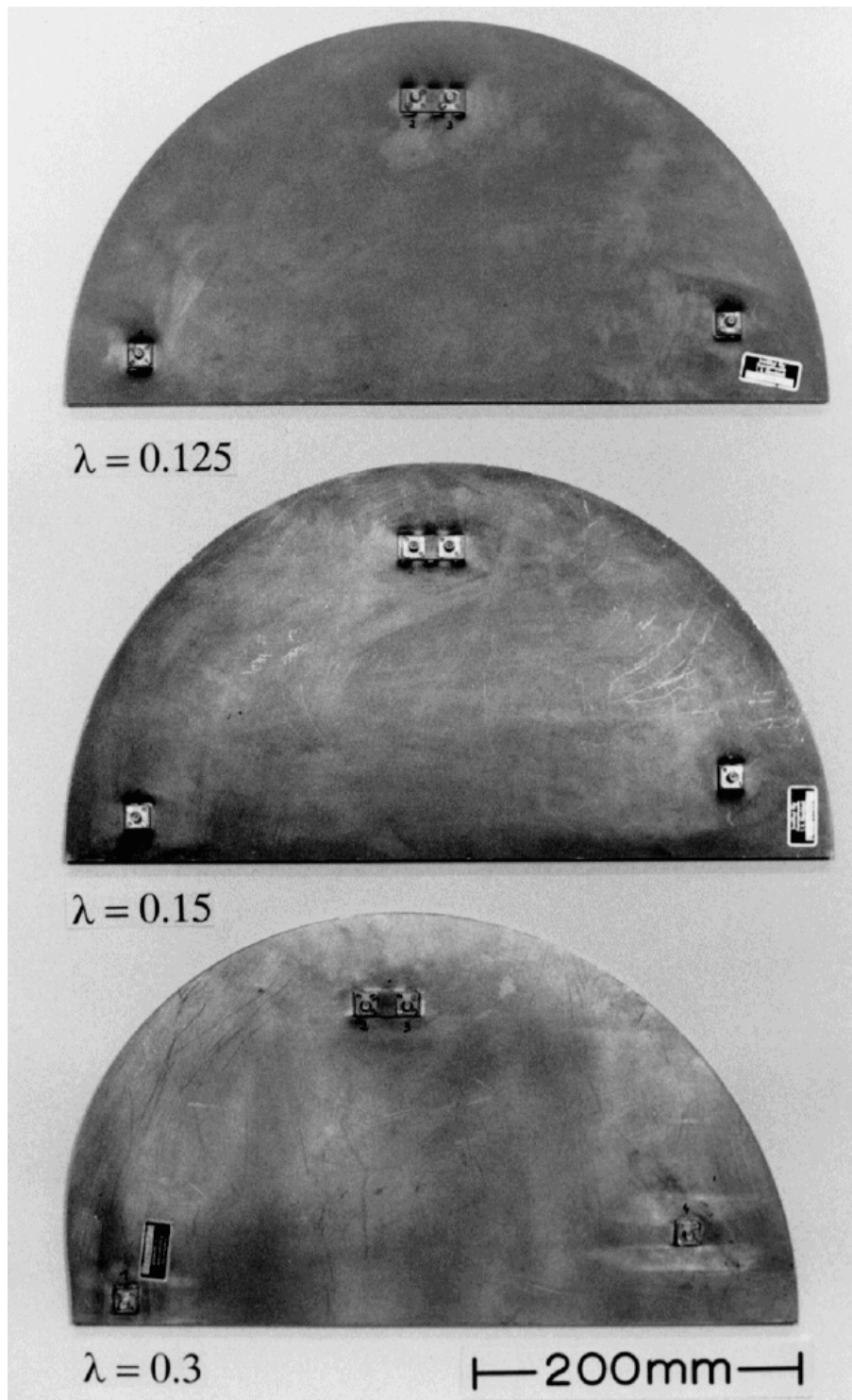


Abb. 4.5: Die drei desymmetrisierten Mikrowellenkavitäten aus Niob. Deutlich sind die vier Antennen pro Billard zu erkennen, durch die die Mikrowellen ein- und wieder ausgekoppelt werden.

für das Kreisbillard 663, für das $\lambda = 0.125$ Billard 1163 und für das $\lambda = 0.15$ Billard 1173 Eigenmoden erhalten. Das $\lambda = 0.3$ Billard wurde nur bis zu einer Maximalfrequenz von 18 GHz vermessen, da es sich oberhalb dieser Frequenz, durch Deformation aufgrund thermischer Spannungen bei der ersten Messung, dreidimensional verhält [49]. Die Messung ergab bis 18 GHz 942 Eigenfrequenzen.

4.2.2 Statistische Analyse

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der statistischen Analyse der aus den gemessenen Spektren gewonnenen Resonanzfrequenzen gemäß der in Kap. 3.2 beschriebenen Analysemethoden. Um die Spektren der vier verschiedenen Billards vergleichen zu können, mußten diese zuerst entfaltet werden. Diese Reskalierung der Frequenzachse auf einen mittleren Niveauabstand von eins wurde mit Hilfe der Weyl-Formel Gl. (3.4) durchgeführt, deren Parameter durch eine Anpassung an die kumulative Niveaudichte bestimmt wurden. In Tab 4.2 sind die daraus berechneten Flächen- und Umfangswerte sowie der Vergleich mit den geometrischen Daten aus Tab. 4.1 aufgeführt. Dabei wird sichtbar, daß die experimentell angepaßten Werte sehr gut mit den geometrischen Designwerten übereinstimmen.

Für die Charakterisierung der chaotischen Eigenschaften der gemessenen Spektren wurden die Untersuchungen der entfalteten Eigenfrequenzspektren mit der Analyse der kurzreichweitigen Korrelationen begonnen. Wie in Abschnitt 3.2.3 ausgeführt, eignen sich dazu besonders gut die Nächste-Nachbar-Verteilung so-

Tab. 4.2: Die aus der Anpassung der Weyl-Formel Gl. (3.4) an die experimentellen Daten bestimmten geometrischen Parameter der untersuchten Billards. Zusätzlich sind noch die Abweichungen zu den vorgegebenen Designwerten angegeben.

	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.125$	$\lambda = 0.15$	$\lambda = 0.3$
Fläche A_{fit} [m ²]	0.0493	0.0860	0.0862	0.0860
ΔA [%]	0.41	0.11	0.12	0.11
Umfang C_{fit} [m]	0.8109	1.2038	1.2039	1.1742
ΔC [%]	3.25	0.67	0.91	0.01

wie die kumulative NND. In Abb. 4.6 sind die beiden Verteilungen für die vier untersuchten Systeme dargestellt. Neben den experimentellen Daten sind dort auch noch die beiden Grenzfälle für reguläre (Poisson) bzw. chaotische (GOE) Systeme mit eingezeichnet. Um eine Aussage über den Grad der Chaotizität der Billards machen und diesen dann mit den klassischen Vorgaben vergleichen zu können, wurde das in Kap. 3.2 beschriebene und benutzte Modell von Berry und Robnik auf die experimentellen Daten angewandt. Wie bereits erläutert, liefert dieses Modell im quantenmechanischen Fall einen Mischungsparameter q_{qm} , der direkt den relativen Anteil aller chaotisch reinen Teilzustandsdichten an der Gesamtzustandsdichte angibt. Die Parameter q_{qm} , die man aus einer Anpassung des Modells an die Daten erhält, sind in Tab. 4.3 angegeben, und die daraus resultierenden Verteilungen sind in Abb. 4.6 dargestellt. Aus den Daten wird deutlich sichtbar, wie sich die klassischen Vorgaben bezüglich des Grades der Chaotizität auf das quantenmechanische System übertragen lassen.

Neben den kurzreichweitigen wurden auch die langreichweitigen Korrelationen der Spektren mit Hilfe der Σ^2 - und der Δ_3 -Statistik (s.a. Kap. 3.2.4) untersucht. Auch auf diese Datensätze wurde das Modell von Berry und Robnik angewandt, um einen Mischungsparameter für einen Vergleich mit dem klassischen Billard zu bestimmen. In Abb. 4.7 sind die Verteilungen der beiden Statistiken für die untersuchten Billards dargestellt. Daneben sind wieder die beiden Grenzfälle sowie

Tab. 4.3: Aus den kurzreichweitigen ($P(s)$ und $I(s)$) und den langreichweitigen ($\Sigma^2(L)$ und $\Delta_3(L)$) Korrelationen mit dem Berry-Robnik Modell bestimmten Mischungsparameter der vier untersuchten Limaçon-Billard. Zum Vergleich ist auch noch jeweils der klassische Mischungsparameter angegeben.

	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.125$	$\lambda = 0.15$	$\lambda = 0.3$
klassisch	0.00	0.55	0.66	1.00
$P(s)$	0.15 ± 0.02	0.59 ± 0.03	0.63 ± 0.03	0.99 ± 0.01
$I(s)$	0.12 ± 0.01	0.57 ± 0.01	0.60 ± 0.01	1.00 ± 0.01
$\Sigma^2(L)$	0.11 ± 0.04	0.57 ± 0.05	0.65 ± 0.04	1.00 ± 0.05
$\Delta_3(L)$	0.12 ± 0.05	0.51 ± 0.05	0.60 ± 0.05	1.00 ± 0.05

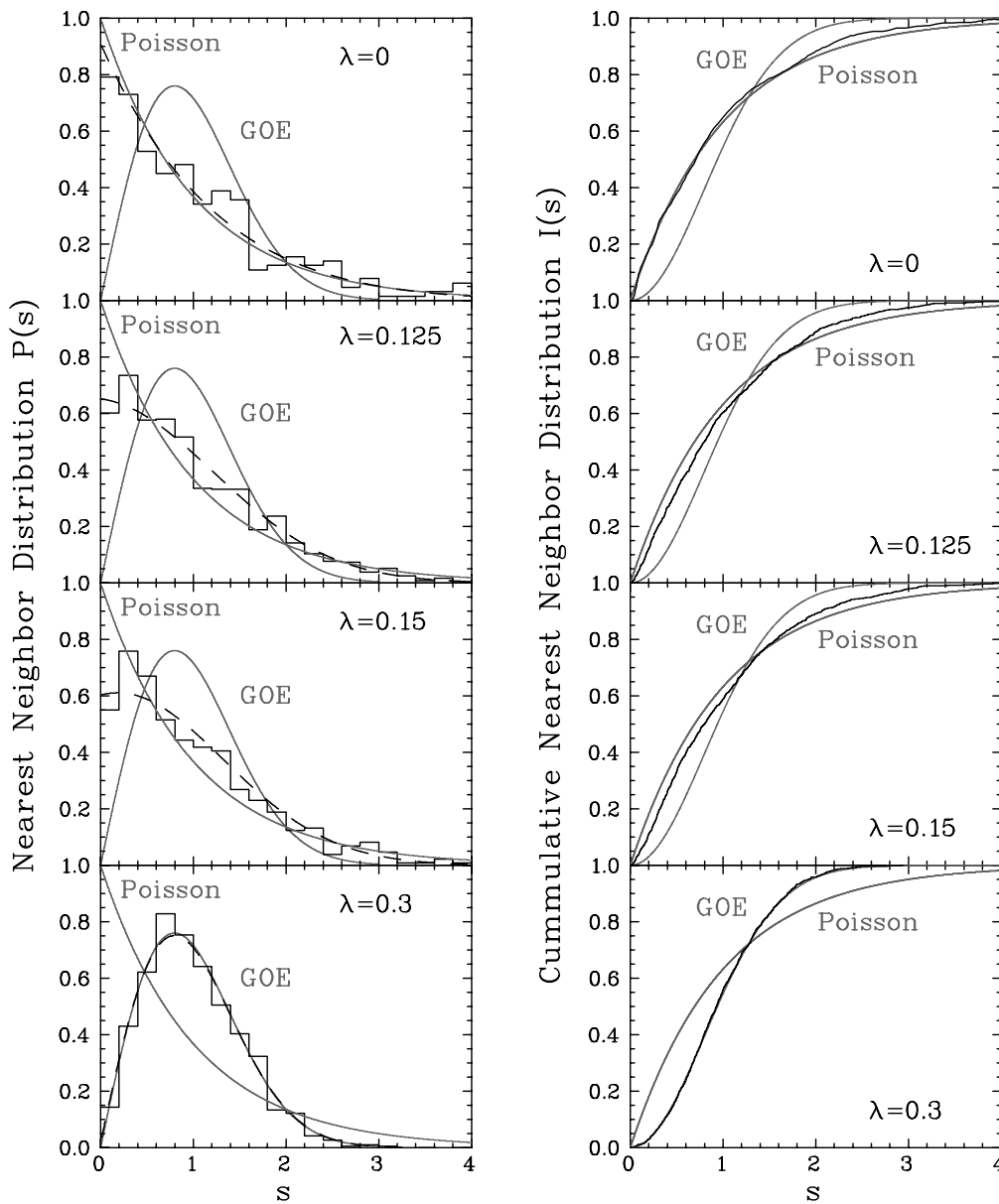


Abb. 4.6: Verteilungen für der beiden kurzreichweitigen Korrelationen NND $P(s)$ (links) und kumulative NND $I(s)$ (rechts) der vier untersuchten Systeme. Die Daten sind als Histogramm dargestellt. Daneben sind auch die beiden Verteilungen für reguläre (Poisson) und chaotische (GOE) Systeme aufgeführt. In der NND sind darüber hinaus noch die nach Gl. (3.11) angepaßten Kurven (gestrichelt) mit den entsprechenden Mischungsparametern aus Tab. 4.3 eingezeichnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in der Verteilung $I(s)$ darauf verzichtet.

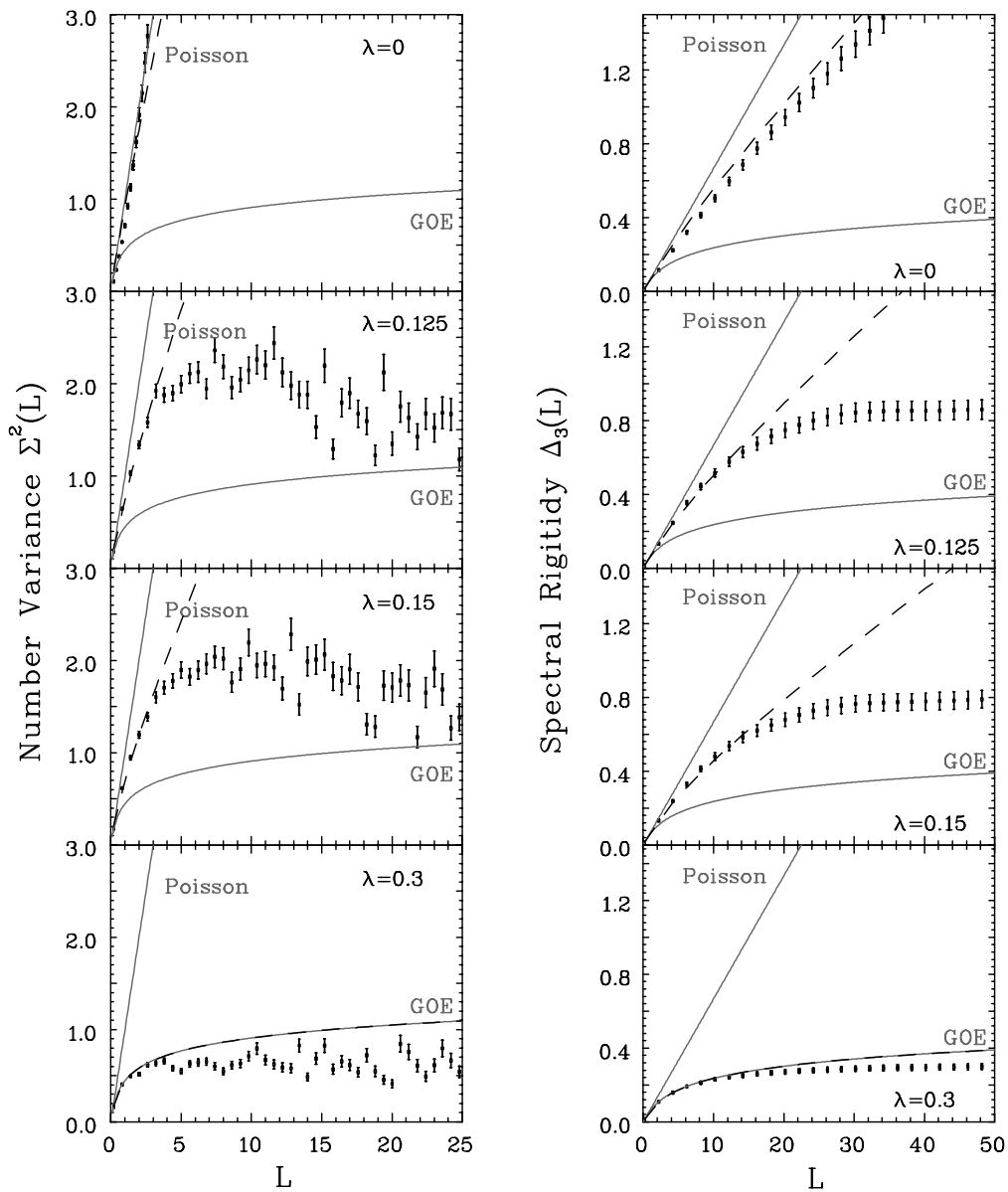


Abb. 4.7: Statistiken der langreichweitigen Korrelationen für die vier untersuchten Billards. Auf der linken Seite ist die Σ^2 -Statistik und auf der rechten Seite die Δ_3 -Statistik dargestellt. Neben den experimentellen Daten sind auch noch die beiden Grenzverteilungen sowie die Anpassung nach dem Modell von Berry und Robnik (gestrichelt) eingezeichnet.

das Ergebnis der Anpassung bis an ein L_{max} (s.u.) aus dem Berry-Robnik Modell eingezeichnet. Die so bestimmten Mischungsparameter sind zum Vergleich ebenfalls in Tab. 4.3 aufgeführt.

Bei einem abschließenden Vergleich zeigen alle mit den verschiedenen Statistiken

aus den experimentellen Daten gewonnenen Mischungsparametern q_{qm} untereinander sowie mit den klassisch bestimmten eine sehr gute Übereinstimmung innerhalb der Fehler. Dies zeigt deutlich, daß sich die klassische Dynamik der Systeme auch im quantenmechanischen Analogon wiederfinden läßt. Die Abweichungen beim Kreisbillard lassen sich darauf zurückführen, daß schon die kleinsten Störungen des regulären Systems, wie Fertigungsungenauigkeiten oder Eindringen der Antennen in die Kavität, eine Auswirkung auf die Dynamik des Systems haben und somit in einem von null verschiedenen Mischungsparameter resultieren.

Wie bereits erwähnt, sind die langreichweitigen Korrelationen nur sinnvoll bis zu einer Länge L_{max} , bis zu der universelles Verhalten auftritt, zu betrachten. Bei der Σ^2 -Statistik sieht man, daß oberhalb einer Länge $L = L_{max}$ Oszillationen einsetzen, während bei der Δ_3 -Statistik ab einem $L = L_{max}$ eine Sättigung der Verteilung zu beobachten ist. Dabei fällt auf, daß das nicht-universelle Verhalten bei der Σ^2 -Statistik deutlich früher einsetzt als bei der Δ_3 -Statistik. Nach [83] gilt $L_{max}(\Delta_3) \approx 4 \cdot L_{max}(\Sigma^2)$. Dies ist für alle vier untersuchten Billards in den Verteilungen erkennbar. Wie bereits in Gl. (3.15) erläutert, kann man aus der Kenntnis von L_{max} sowie der Resonanzanzahl und der Maximalfrequenz auf die kürzeste periodische Bahn im klassisch korrespondierenden Billard l_{min} schließen. Im Fall des Kreisbillards ist es die Bahn entlang der Symmetrielinie und für die übrigen drei Billards die Bahn, der senkrecht zur Grundlinie verläuft. In Tab. 4.4 sind die kürzesten periodischen Bahnen der Billards und die daraus resultierenden Werte von L_{max} den Werten von L_{max} gegenübergestellt, die aus der Δ_3 -Statistik ablesbar sind. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung.

Tab. 4.4: Aus den Δ_3 -Statistiken (Abb. 4.7) abgelesene Werte für L_{max} der vier Systeme. Zusätzlich ist der theoretische Wert angegeben, berechnet aus dem kürzesten periodischen Orbit l_{min} des klassischen Systems gemäß Gl. (3.15).

	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.125$	$\lambda = 0.15$	$\lambda = 0.3$
l_{min} [m]	0.500	0.476	0.476	0.490
$L_{max,theo}$	6.3	11.7	11.7	10.2
L_{max,Δ_3}	4.0	12.0	12.0	10.5

5 Mode-Fluctuation-Distribution

Wie in den beiden vorangegangenen Kapiteln gezeigt, lassen sich die Energie-Eigenwert-Statistiken im Fall von integrablen Billardsystemen durch eine Poisson Zufallsstatistik [84] beschreiben, während klassisch chaotische Billards der Statistik der RMT folgen [55, 85, 86]. Dies bedeutet z.B., daß die Nächste-Nachbar-Verteilung für chaotische Systeme Niveauabstoßung und für reguläre Systeme Niveauanziehung zeigt. Überraschenderweise bedeutet dies, daß die Statistik klassisch chaotischer Systeme viel steifer (“rigid”) ist als die der integrablen Systeme. Diese Beschreibung wurde für viele Systeme erfolgreich getestet (s. z.B. Kap. 4), aber es gibt Ausnahmen, sowohl für integrable als auch für chaotische Systeme. Für sog. arithmetische Systeme, die stark chaotisch sind, d.h. es existieren nur isolierte und instabile periodische Orbits, wurde eine NND gefunden, die durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden konnte [87–92]. Um qualitative Aussagen über die Chaotizität der Systeme zu treffen, wurde eine neue Statistik eingeführt, die sog. Mode-Fluctuation-Distribution (Niveau-Fluktuations-Verteilung) [93, 94]. Diese Statistik wurde zuerst im integrablen Fall für die Eigenwerte des Laplace-Operators auf einem Torus [95] getestet und später in [96] an den unnormierten Fluktuationen von regulären und chaotischen Billards studiert, ohne daß dafür eine Grenzverteilung angegeben wurde. Es wurde vermutet, daß diese Grenzverteilung der normierten Fluktuationen für chaotische Systeme Gauß-förmig sind [93, 94], während integrable Systeme eine nicht Gauß-förmige Grenzverteilung aufweisen. Diese Vermutung wurde erfolgreich für diverse reguläre und chaotische Billards theoretisch getestet [80, 91, 94, 97]. In den folgenden Abschnitten wird die Mode-Fluctuation-Distribution theoretisch motiviert, hergeleitet und anschließend mit experimentell gewonnenen Daten getestet [32].

5.1 Theoretische Grundlagen

Die statistische Analyse der Eigenwertspektren startet genauso wie in Kap. 3.2 beschrieben. Zuerst werden die Daten gemäß Gl. (3.4) entfaltet, und anschließend wird die entfaltete Treppenfunktion $N(\epsilon)$ in einen glatten und einen darum fluk-

tuierenden Anteil zerlegt: $N(\epsilon) = N^{smooth}(\epsilon) + N^{fluc}(\epsilon) = \epsilon + N^{fluc}(\epsilon)$. Daraus berechnet sich der normierte fluktuierende Anteil der integrierten Niveaudichte wie folgt

$$W(\epsilon) = \frac{N^{fluc}(\epsilon)}{\sqrt{D(\epsilon)}}, \quad (5.1)$$

wobei $D(\epsilon)$ die Varianz ist

$$D(\epsilon) = \frac{\Xi(c)}{(c-1)\epsilon} \int_{\epsilon}^{c\epsilon} [N^{fluc}(y)]^2 dy, \quad (5.2)$$

mit $c > 1$. Die Größe $\Xi(c)$ ist eine Korrektur, die für integrable Systeme notwendig ist, um für $W(\epsilon)$ eine Varianz von eins zu erhalten (für Details s. [97]).

Die Vermutung, die in [93,94] aufgestellt wurde, kann wie folgt formuliert werden: Für gebundene konservative und skalierbare Systeme, wie sie durch Billards realisierbar sind, zeigen die normierten Niveaufluktuationen (Gl. (5.1)) eine Grenzverteilung $W(\epsilon)$ für $\epsilon \rightarrow \infty$. Diese Verteilung ist absolut gleichmäßig bezogen auf das Lebesgue Maß auf der reellen Achse. Die Dichteverteilung $P(W)$ ist durch

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(c-1)T} \int_T^{cT} g(W(\epsilon)) \rho\left(\frac{\epsilon}{T}\right) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} g(W) P(W) dW \quad (5.3)$$

definiert, wobei $g(W)$ eine gebundene kontinuierliche Funktion und $\rho(t) \geq 0$ eine kontinuierliche Dichte im Intervall $[1,c]$ mit $1/(c-1) \int_1^c \rho(t) dt = 1$ ist. Die Grenzverteilung hat des weiteren einen Mittelwert von null und eine Varianz von eins

$$\int_{-\infty}^{\infty} W P(W) dW = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} W^2 P(W) dW = 1. \quad (5.4)$$

Die Hauptaussage von [93,94] lautet: Wenn das zum quantenmechanischen korrespondierende klassische System stark chaotisch ist, es also nur isolierte und instabile periodische Orbits besitzt, dann zeigt die Verteilung der normierten Niveaufluktuation universelles Gauß-Verhalten

$$P(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right). \quad (5.5)$$

Im Gegensatz dazu zeigt ein klassisch integrables System eine nicht Gauß-förmige Dichteverteilung $P(W)$. Für eine große Anzahl von integrablen Systemen wurde dies verifiziert [97–100]. Für chaotische Systeme wurde diese Vermutung in

[80,91,94] numerisch und in [32,101] experimentell getestet. Eine Gauß-Verteilung für chaotische Systeme korrespondiert zu einer maximalen Zufälligkeit der Fluktuationen, während die Niveaufluktuationen für reguläre Systeme weitaus weniger zufällig sind [93]. Die in Berry's semiklassischer Analyse [70] gefundenen Resultate für das asymptotische Verhalten der Sättigung der Δ_3 -Statistik lassen sich auch auf die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Varianz $D(\epsilon)$ (Gl. (5.2)) übertragen. Für generisch integrable Systeme erhält man

$$D(\epsilon) \sim \text{const.} \cdot \sqrt{\epsilon}, \quad (5.6)$$

wohingegen sich für generisch klassisch chaotische Systeme mit anti-unitärer Symmetrie (Zeitumkehrsymmetrie)

$$D(\epsilon) \sim \frac{1}{2\pi^2} \ln \epsilon + \text{const.} \quad (5.7)$$

ergibt.

5.2 Anwendung auf experimentelle Daten

Im folgenden Abschnitt soll die Mode-Fluctuation-Distribution auf experimentell gewonnene Daten angewandt werden. Dabei handelt es sich im ersten Teil um die in Kap. 4 diskutierten Billards aus der Limaçon-Familie. Diese Billards sind sehr gut für einen Test verwendbar, da sie den gesamten Bereich von regulär bis chaotisch abdecken. Im zweiten Teil werden zwei chaotische Billards, ein Stadion-Billard und ein dreidimensionales Sinai-Billard untersucht, deren klassisches Analogon zusätzlich noch neutralstabile periodische Bahnen besitzen, die sog. BBO. Es soll dabei geklärt werden, welchen Einfluß die Bahnen auf die Statistik haben.

5.2.1 Limaçon-Billards

Die bereits in Kap. 4 vorgestellten und diskutierten vier Billards aus der Limaçon-Familie eignen sich hervorragend aufgrund ihre unterschiedlichen Chaotizitätsgrade für einen Test der Mode-Fluctuation-Distribution. Die Billards haben

die in Kap. 4 bestimmten klassischen Chaotizitätsgrade: $q = 0$ ($\lambda = 0$), $q = 0.55$ ($\lambda = 0.125$), $q = 0.66$ ($\lambda = 0.15$) und $q = 1$ ($\lambda = 0.3$), die sich auch in den korrespondierenden quantenmechanischen Systemen bestätigen ließen. Wenn die Vermutung der Mode-Fluctuation-Distribution stimmt, dürfte nur das $\lambda = 0.3$ Billard eine Gauß-förmige Dichteverteilung $P(W)$ aufzeigen, während die Verteilungen der restlichen drei Billards Abweichungen davon zeigen sollten. Es ist aber zu beachten, daß das $\lambda = 0.3$ Billard nicht vollständig ergodisch (chaotisch) ist, da noch winzig kleine, nicht signifikante Inseln der Stabilität existieren [102] (siehe [82] für analytische Resultate um $\lambda = 0.25$). Diese Stabilitätsinseln sind aber so klein, daß sie das Energiespektrum im betrachteten Bereich nicht beeinflussen (s.a. Resultate in Kap. 4).

Um die Mode-Fluctuation-Distribution zu berechnen (Gl. (5.1)), wurde der normierte fluktuierende Anteil der kumulativen Niveaudichte $N^{fluc}(\epsilon)$ des entfaltenen Spektrums bestimmt. Für das chaotische $\lambda = 0.3$ Billard wurde für die Varianz $D(\epsilon)$ aus Gl. (5.2) der Ansatz $D(\epsilon) = 1/(2\pi^2) \ln \epsilon + \text{const.}$ verwendet. In Abb. 5.1 ist neben dem fluktuierenden Anteil auch die Varianz $D(\epsilon)$ dargestellt. Anschließend wurde $W(\epsilon)$ für ca. 10^6 zufällig verteilte Werte ϵ aus dem Intervall $[0, \epsilon_{max}]$, wobei ϵ_{max} die maximale entfaltete Eigenfrequenz ist, berechnet. Der konstante Term in der Varianz $D(\epsilon)$ wurde dabei so gewählt, daß sich eine Varianz von eins für die Verteilung $P(W)$ ergibt. In Abb. 5.2 (obere Reihe) ist die so erhaltene Verteilung links dargestellt, und es ist leicht ersichtlich, daß sie die für chaotische Systeme vorhergesagte Gauß-Verteilung aufzeigt.

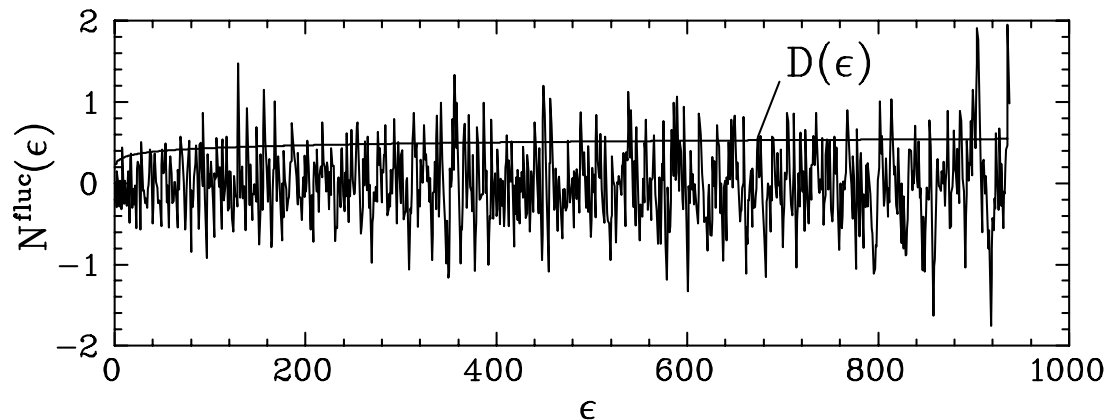


Abb. 5.1: Fluktuierender Anteil der entfaltenen Daten des $\lambda = 0.3$ Billards. Als durchgezogene Kurve ist die Varianz $D(\epsilon)$ aus (Gl. (5.2)) dargestellt.

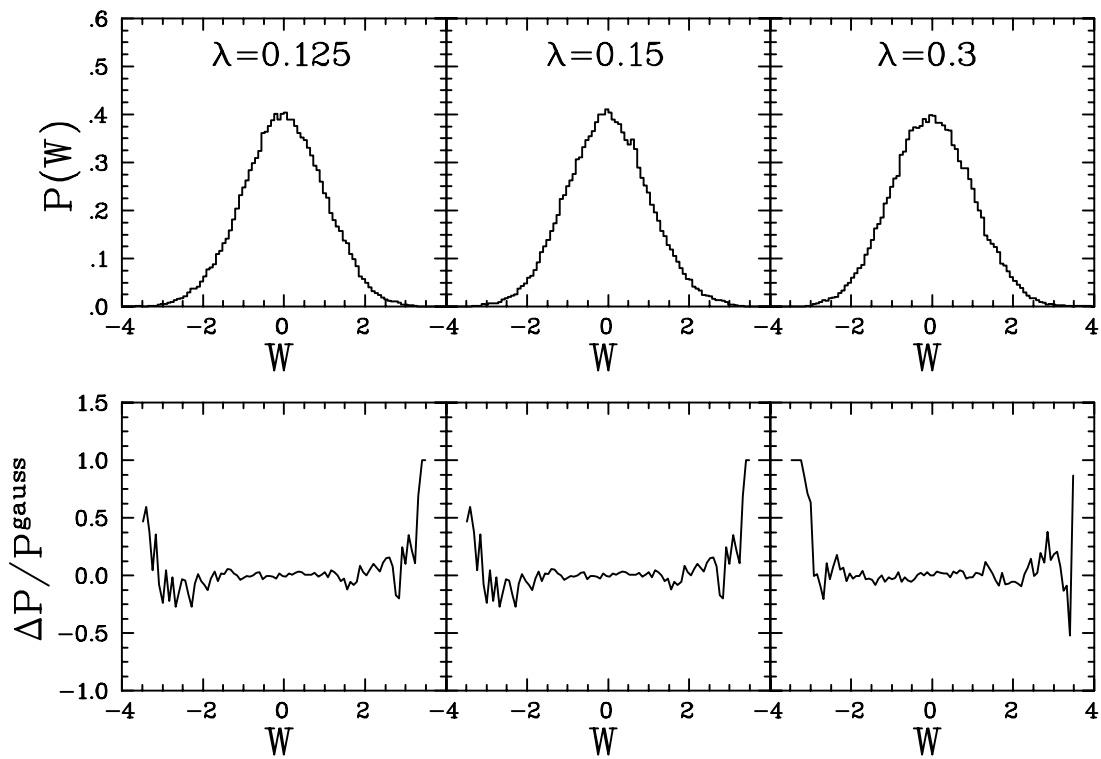


Abb. 5.2: Mode-Fluctuation-Distribution $P(W)$ für drei Billards aus der Limaçon-Familie (oberer Teil). Alle drei Verteilungen folgen dem Gaußschen Verhalten für chaotische Systeme. Im unteren Teil ist die Differenz, normiert auf die Gauß-Verteilung, zwischen den Daten und der Gauß-Kurve aufgetragen.

Für die beiden Billards ($\lambda = 0.125$ und $\lambda = 0.15$), die gemischte Dynamik aufweisen, würde man in der Mode-Fluctuation-Distribution Abweichungen vom Gauß-Verhalten erwarten. In diesen beiden Fällen wurde für die Varianz $D(\epsilon)$ der Ansatz $D(\epsilon) = \text{const.} \cdot \epsilon^{1/4}$, der eine gute Approximation des Verhaltens der Fluktuationen darstellt, gewählt. Die so erhaltenen Verteilungen $P(W)$ zeigen aber keinen signifikanten Unterschied zu einer Gauß-Verteilung (Abb. 5.2 obere Reihe). Im unteren Teil von Abb. 5.2 ist die Differenz ΔP zwischen den Gauß-Verteilungen und den berechneten Verteilungen $P(W)$, normiert auf die Gauß-Kurve, dargestellt. Die Verteilungen für die drei Billards zeigen annähernd dasselbe Verhalten, unabhängig von ihrem Chaotizitätsgrad. Dies ist auch im Signifikanz-Niveau des Kolmogorov-Smirnov Tests, der den Maximalwert des absoluten Unterschieds zwischen zwei kumulativen Verteilungen bestimmt, ausgedrückt, der bei allen drei Billards um 85% liegt. Etwas anders sieht es beim

regulären Mitglied der Limaçon-Familie, dem $\lambda = 0$ Billard (Kreis), aus. Hier würde man genau wie für das $\lambda = 0.125$ und das $\lambda = 0.15$ Billard Abweichungen vom Gauß-Verhalten für die Verteilung $P(W)$ erwarten. Im Fall des Kreises wurde für die Varianz $D(\epsilon)$ der Ansatz $D(\epsilon) = \text{const} \cdot \sqrt{\epsilon}$ benutzt. In Abb. 5.3 ist die daraus gewonnene Verteilung $P(W)$ gezeigt, die sich klar von einer Gauß-Verteilung unterscheidet. Für dieses Billard erhält man ein Signifikanz-Niveau von 67%. Die Tatsache, daß für die beiden gemischten Billards keine Abweichungen von der Gauß-Verteilung gefunden wurden, liegt daran, daß nur eine relativ geringe Anzahl von Eigenwerten (ca. 1000) in die Berechnung mit einfließen. Wie in Kap. 5.1 beschrieben, wurde die Aussage, eine Gauß-Verteilung für chaotische Systeme und eine nicht Gauß-förmige Grenzverteilung in den Niveaufluktuationen zu bekommen, für $\epsilon \rightarrow \infty$ aufgestellt. Auf der anderen Seite erhält man jedoch für die beiden Grenzfälle (regulär/chaotisch) befriedigende Resultate. Das Ergebnis für das Kreisbillard, daß die Aussage der MFD bestätigt, steht aber in Kontrast zum Ergebnis aus [101], bei dem kein Unterschied zwischen der Verteilung $P(W)$ eines regulären Systems (Rechteck) und der Gauß-Verteilung für chaotische Systeme gefunden wurde, obwohl ungefähr die gleiche Anzahl von Eigenwerten verwandt wurden wie im vorliegenden Fall für das Kreisbillard.

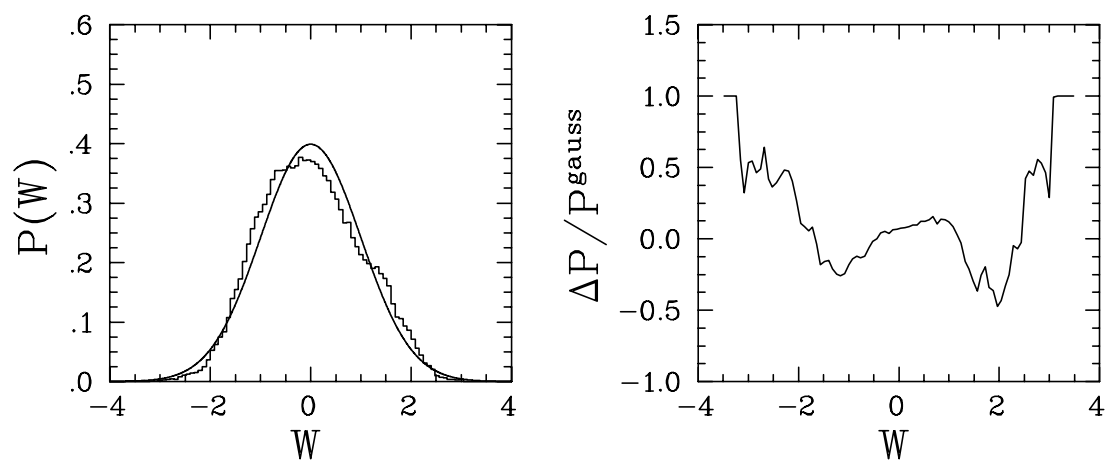


Abb. 5.3: Mode-Fluctuation-Distribution $P(W)$ für das Kreisbillard (links). Die Gauß-Verteilung ist als durchgezogene Linie dargestellt. Auf der rechten Seite ist deutlich die Abweichung zwischen den Daten und der Gauß-Kurve zu erkennen.

5.2.2 Bunimovich Stadion-Billard und 3D-Sinai-Billard

Wie in [97] diskutiert, kann die Theorie der Mode-Fluctuation-Distribution auch auf chaotische Systeme erweitert werden, bei denen der fluktuierende Anteil $N^{fluc}(\epsilon)$ noch mit einer langreichweitigen Oszillation $N^{long}(\epsilon)$ moduliert ist. In diesem Fall muß der Entfaltungsprozeß wie folgt modifiziert werden:

$$\epsilon_i = N^{Weyl}(f_i) + N^{long}(f_i) \quad (5.8)$$

Im Fall des Bunimovich Stadion-Billards rühren diese langreichweitigen Oszillationen von der Existenz der BBO her (vergl. Kap. 3.2). Wie in [58] gezeigt, ist das Stadion stark chaotisch, aber dies verhindert nicht die Existenz von neutralstabilen Orbits (solange sie Maß null im Phasenraum haben). Diese BBO dominieren den fluktuierenden Anteil, und die oben gemachte Aussage zur Mode-Fluctuation-Distribution ist hier nicht mehr anwendbar. Dies wurde mit den experimentellen Daten des $\gamma = 1.8$ Stadion-Billards aus [23] überprüft. Die Meßdaten wurden entfaltet und die normierte Niveaufluktuation $W(\epsilon)$ wurde gemäß Gl. (5.1) und (5.2) berechnet. Für die Varianz $D(\epsilon)$ wurde der gleiche Ansatz wie für die beiden gemischten Limaçon-Billards gewählt. Die daraus resultierende Dichteverteilung $P(W)$ ist im linken Teil der Abb. 5.4 gezeigt. Deutlich ist sichtbar, daß die Verteilung $P(W)$ zu positiven $W(\epsilon)$ verlagert ist, was auf die Existenz der BBO hinweist. In der Tat wurde in [103] unter der Nutzung des Resultats aus [63] gezeigt, daß in diesem Fall die Grenzverteilung von $P(W)$ nicht Gauß-förmig ist.

Bezieht man aber den Einfluß der BBO mit in den Entfaltungsprozeß ein und setzt – wie in Gl. (5.7) verwendet – für $D(\epsilon) = 1/(2\pi^2) \ln \epsilon + \text{const.}$ an, so erhält man für $P(W)$ die erwartete Gauß-Verteilung für stark chaotische Systeme (rechte Seite von Abb. 5.4). Auch in den Signifikanz-Niveaus wird der Unterschied der beiden Verteilungen mit BBO-Anteil bzw. mit extrahiertem BBO-Anteil deutlich sichtbar. Man erhält 57% für den ersten und 75% für den zweiten Fall.

Ein weiteres System, bei dem die BBO eine wichtige Rolle spielen, ist das 3D-Sinai-Billard, welches auch stark chaotisch ist [104, 105]. Im Gegensatz zum 2D-Stadion-Billard, weist das 3D-Sinai-Billard BBO mit der Dimension zwei und drei auf. Die Daten für die Berechnung der Mode-Fluctuation-Distribution stammen aus [31, 51]. In Abb. 5.5 ist die Mode-Fluctuation-Distribution $P(W)$ mit und ohne BBO gezeigt. In der Verteilung mit den BBO (linker Teil) ist nur eine kleine

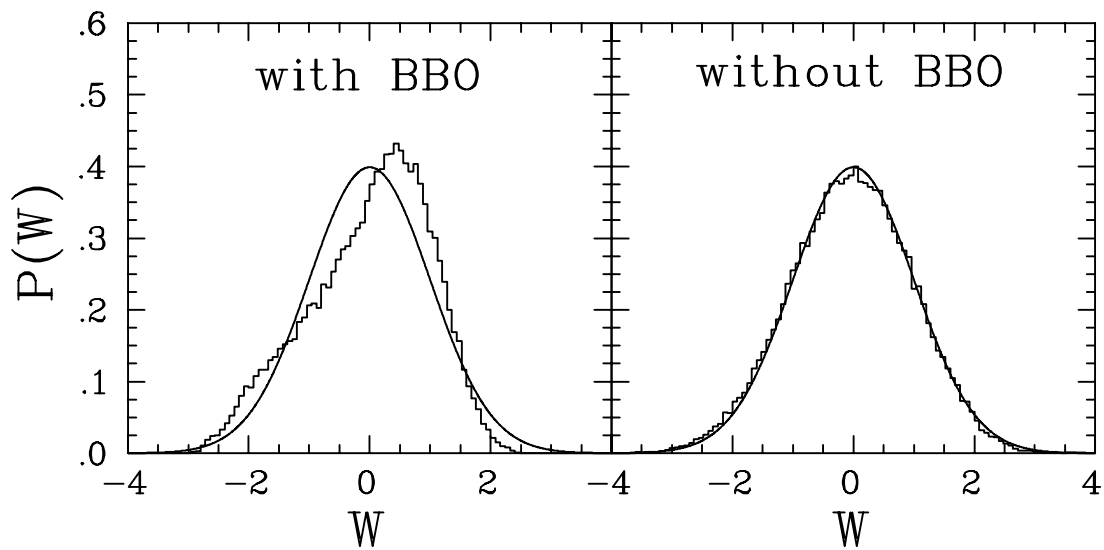


Abb. 5.4: Mode-Fluctuation-Distribution $P(W)$ für das $\gamma = 1.8$ Bunimovich Stadion-Billard. Im linken Teil ist die Verteilung mit BBO gezeigt, die zu positiven W -Werten verschoben ist. Auf der rechten Seite ist die Verteilung mit extrahiertem BBO-Beitrag dargestellt, die sehr gut mit dem vorhergesagten Gauß-Verhalten (durchgezogene Linie) für chaotische Systeme übereinstimmt.

Abweichung vom Gauß-Verhalten sichtbar, aber bei $W \approx -3$ erscheint ein kleiner Peak. In diesem Fall ist der Einfluß der BBO nicht so stark wie beim Stadion, das auf eine Überlagerung der verschiedenen BBO-Klassen zurückzuführen ist. Dies bestätigen auch die Ergebnisse in [31, 51]. Nimmt man aber die Beiträge der BBO mit in den Entfaltungsprozeß, so erhält man den rechten Teil der Abb. 5.5, der das vorausgesagte Gauß-Verhalten zeigt. Die Signifikanz-Niveaus für beide Fälle sind mit 78% (mit BBO) und 75% (ohne BBO) annähernd gleich.

Abschließend läßt sich sagen, daß die Statistik zur Analyse der Mode-Fluctuation-Distribution nur mit gewissen Vorbehalten einsetzbar ist, um die Chaotizität von Systemen mit relativ wenigen Eigenwerten (ca. 1000-1800) zu charakterisieren. Es wurde aber gezeigt, daß für die Grenzfälle regulär (Kreis) und chaotisch (Stadion, $\lambda = 0.3$ Billard, 3D-Sinai) die experimentell gewinnbaren Eigenwerte ausreichen, um ein befriedigendes Resultat der Mode-Fluctuation-Distribution zu erhalten. Dagegen hat sich ergeben, daß für gemischte Systeme die geforderte Anzahl von Eigenwerten (ca. $10^4 - 10^6$) für ein aussagekräftiges Resultat im Experiment nur schwer zu erhalten ist. Deshalb ist die Niveau-Fluktuations-Verteilung

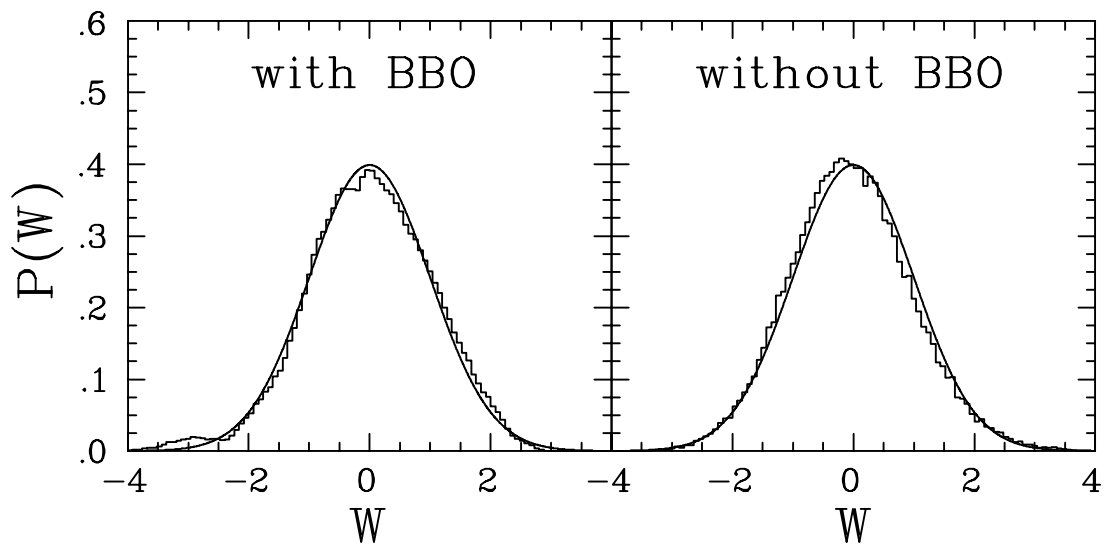


Abb. 5.5: Mode-Fluctuation-Distribution $P(W)$ für das 3D-Sinai-Billiard. Auf der linken Seite ist die Verteilung mit BBO gezeigt, bei der bei $W \approx -3$ eine signifikante Abweichung erscheint. Im rechten Teil ist die Verteilung ohne BBO, die das vorhergesagte Gauß-Verhalten (durchgezogene Linie) zeigt, dargestellt.

keine alternativ zur RMT anwendbare Statistik, um qualitative Aussagen über die Chaotizität von experimentellen Systemen zu gewinnen. Ein weiterer Nachteil dieser Statistik ist, daß nur für den chaotischen Fall eine Grenzverteilung auftritt, während für den regulären Grenzfall eine solche nicht existiert. Dies macht eine Deutung der Abweichungen vom Gauß-Verhalten für nicht chaotische Systeme und eine Klassifizierung nach dem Chaotizitätsgrad schwierig.

6 Semiklassische Beschreibungsmöglichkeiten der Spektren

Der semiklassische Zusammenhang zwischen der Niveaudichte von chaotischen Quantensystemen mit den Eigenschaften der periodischen Bahnen des korrespondierenden klassischen Systems ist seit über 30 Jahren bekannt. Es handelt sich dabei um die Periodic Orbit Theory (POT), die sich auf Gutzwillers Arbeiten gründet [5, 15, 106–108] und mit der neben der RMT ein weiterer, sehr wichtiger Zugang zur Charakterisierung von Quantenchaos besteht. Die Idee, die hinter der POT steckt, ist die, daß man das quantenmechanische Spektrum allein aus den Eigenschaften der periodischen Bahnen des analogen klassischen Systems (z.B. Länge und Stabilität) eindeutig rekonstruieren kann.

Um sich die Beiträge der klassischen periodischen Bahnen zur Niveaudichte zu verdeutlichen, wird eine Fourier-Analyse des experimentellen Frequenzspektrums (vergl. Gl. (3.25)) durchgeführt [63]. Mit Hilfe dieser Transformation gelangt man vom Frequenz- in den Zeit- bzw. Längensbereich. Das sog. Längenspektrum weist an den Positionen der periodischen Orbits des klassischen Billards Peaks mit unterschiedlicher Höhe auf, die Rückschlüsse auf die Stabilität der Bahnen zulassen. Die periodischen Bahnen lassen sich in zwei Dimensionen generell in drei Stabilitätsklassen einteilen [72]:

- Stabile (elliptische) periodische Bahnen: Dieser Typ von Orbit reagiert auf kleine Störungen in den Anfangsbedingungen stets mit einer Rückfokussierung in Richtung der ungestörten Bahn. Diese Bahnen verlassen bestimmte Bereiche im Phasenraum, die sog. Inseln der Stabilität, nie.
- Neutralstabile (parabolische) Bahnen: Auf kleine Störungen in den Anfangsbedingungen reagieren diese Bahnen mit einer linearen Entfernung von der ungestörten Bahn. Zu diesem Bahntyp gehören auch die sog. Bouncing Ball Orbits (vergl. Kap. 3.2).
- Instabile (hyberbolische) periodische Bahnen: Diese Bahnen entfernen sich schon bei der kleinsten Störung exponentiell von der ungestörten Bahn.

In Abb. 6.1 sind die Beiträge der einzelnen Bahntypen zur Dynamik eines Billards im Poincaré-Schnitt des $\lambda = 0.125$ Limaçon-Billards exemplarisch aufgezeigt. All-

gemein läßt sich sagen, daß in regulären Systemen nur neutralstabile und stabile Orbits, während in chaotischen Systemen sowohl neutralstabile (BBO) als auch instabile Bahnen auftreten können. In gemischten Systemen können dagegen, wie in Abb. 6.1 dargestellt, alle drei Bahntypen vorkommen.

6.1 Spurformeln

Sogenannte Spurformeln, in die die klassischen Eigenschaften der periodischen Bahnen eingehen, stellen den Zugang zur Beschreibung quantenmechanischer Spektren dar. Im folgenden werden verschiedene Ansätze diskutiert, mit denen

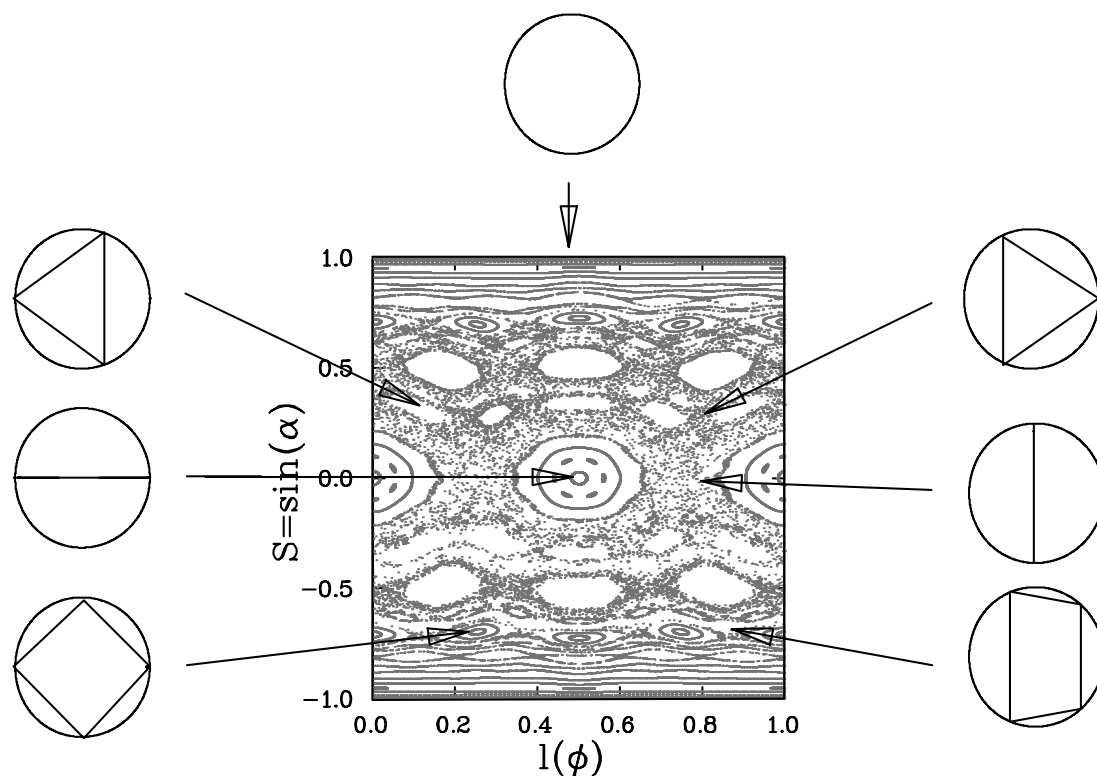


Abb. 6.1: Poincaré-Schnitt des $\lambda = 0.125$ Billards mit gemischter Dynamik. Mit dargestellt sind beispielhaft einige, den Poincaré-Schnitt erzeugende Bahnen, die stabilen auf der linken und die instabilen auf der rechten Seite. In der Mitte oberhalb des Schnittes ist eine neutralstabile Bahn dargestellt, die entlang der Billardberandung verläuft.

man in der Lage ist, reguläre, chaotische und auch gemischte Systeme zu beschreiben. Auf die ausführliche Herleitung der Spurformeln für reguläre bzw. chaotische Systeme soll hier verzichtet werden. Für eine ausführlichere Beschreibung wird auf die Originalliteratur verwiesen [15, 106–110]. Im Gegensatz dazu wird die Entwicklung der Spurformel für die gemischten Systeme genauer dargestellt. Im darauf folgenden Kapitel werden die vorgestellten Beschreibungsmöglichkeiten auf die Billards aus der Limaçon-Familie angewandt und die theoretisch erhaltenen Längenspektren mit denen, wie sie aus experimentellen Daten gewonnenen wurden, verglichen. Im weiteren wird gezeigt, wie die klassischen periodischen Bahnen sowie deren Eigenschaften bestimmt werden können.

6.1.1 Chaotische Systeme

Historisch begründete Gutzwiller die POT [15, 106–108]. Er entwickelte aus dem Feynmanschen Pfadintegral-Formalismus eine semiklassische Spurformel, mit der man durch klassisch periodische Bahnen eines chaotischen Systems einen Zugang zur Niveaudichte des analogen Quantensystems bekam. Diese sog. Gutzwillersche Spurformel beschreibt die Niveaudichte über eine gewichtete Summe der einzelnen klassischen periodischen Orbits. Bei der Herleitung geht man von der auslaufenden Greensfunktion, die durch den das System beschreibenden Hamilton-Operator definiert wird, aus. Daraus läßt sich durch Spurbildung die Zustandsdichte bestimmen. Die grundlegende Idee ist, die Greensche Funktion in semiklassischer Näherung unter der Verwendung des Feynmanschen Pfadintegrals durch eine Summe über klassische Pfade auszudrücken. Man erhält für den fluktuierenden Anteil der Niveaudichte

$$\rho^G(S) = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{po} \frac{T}{|\det(\mathbf{M} - \mathbf{1})|^{1/2}} \cos\left(\frac{S}{\hbar} - \eta\frac{\pi}{2}\right). \quad (6.1)$$

Dabei bezeichnet S die klassische Wirkung des periodischen Orbits, T seine Periode, \mathbf{M} die Monodromie-Matrix, die Informationen über die Stabilität der Bahn enthält, und η den Maslov-Index, der Phaseninformationen berücksichtigt. Für eine ausführlichere Diskussion zur Bestimmung der Monodromie-Matrix sowie des Maslov-Index wird auf Kap. 6.2 verwiesen.

6.1.2 Reguläre Systeme

Bereits 1917 hat Einstein – ausgehend von der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung – eine Quantisierungsbedingung für integrable Quantensysteme herleitet. Später wurde diese Bedingung noch von Brillouin und Keller vervollständigt [111]. Somit waren integrable Quantensysteme den Untersuchungen zugänglich, und man konzentrierte sich zunächst hauptsächlich auf den Zugang zu den chaotischen, nichtintegrablen Systemen, die mit der EBK-Quantisierung aufgrund des Fehlens von Tori nicht lösbar waren. Anfang der 70er Jahre stellte Gutzwiller mit seiner Spurformel eine allgemeine Beschreibungsmöglichkeit für Quantenspektren vor. Jedoch war diese Form der Spurformel nicht für reguläre Systeme anwendbar, da sie nur isolierte periodische Orbits berücksichtigt. Geschlossene periodische Bahnen in einem regulären System formen aber eine kontinuierliche Familie, die den Torus, auf dem sie existieren, ausfüllen.

Im Jahre 1976 griffen Berry und Tabor [109, 110] die Gutzwillersche Idee der Spurformel wieder auf und entwickelten mit Hilfe der Torus-Quantisierung eine Spurformel für integrable Systeme, die die oben kurz beschriebenen Probleme nicht aufweist. Der Beitrag der einzelnen Tori zur Niveaudichte läßt sich wie folgt darstellen

$$\rho_M^{BT}(S) = \frac{T}{\pi |\hbar^3 M_2^3 g_E''|^{1/2}} \cos \left(\frac{S}{\hbar} - \frac{\eta\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (6.2)$$

wobei T die Periode der periodischen Bahn, S ihre Wirkung und η ihr Maslov-Index ist. Die einzelnen periodischen Bahnen werden durch $M = (M_1, M_2)$ bezeichnet, wobei M_1 und M_2 die Topologie der Bahn auf dem Torus charakterisiert. Die Größe g_E'' bezeichnet die Krümmung der Kurve gleicher Energien $H(I_1, I_2) = E$ und (I_1, I_2) sind die Wirkungsvariablen.

6.1.3 Gemischte Systeme

Die hier folgende Herleitung der Spurformel für Systeme mit gemischter Dynamik von [112, 113] beschränkt sich auf Systeme mit zwei Freiheitsgraden (Billards). Bereits Ozorio de Almeida [7] hatte sich mit der Beschreibung von gemischten Systemen befaßt, die aber in den Bereich der fast integrablen Systeme einzuordnen sind, d.h. die nur eine sehr leichte Störung vom integrablen Fall aufwiesen. Dabei führte er einem integrablen System, das durch den Hamilton-Operator H_0

beschrieben wird, eine leichte Störung der Form $\varepsilon\mathcal{H}$ zu, so daß das System wie folgt charakterisiert wird

$$H(I, \phi) = H_0(I) + \varepsilon\mathcal{H}(I, \phi) , \quad (6.3)$$

wobei (I, ϕ) die Wirkungs-Winkel Variablen sind. Diese kleine Störung ändert die Niveaudichte ρ_M^{BT} (Gl.(6.2)) insoweit, daß im Einklang mit der klassischen Störungstheorie eine Korrektur erster Ordnung zur klassischen Wirkung hinzugefügt werden muß. Allgemein bedeutet eine Störung für ein reguläres System, daß die Tori, auf denen die periodischen Bahnen existieren, sukzessiv zerstört werden, so daß gemäß dem Poincaré-Birkhoff Theorem [114] pro Torus nur zwei periodische Bahnen überleben: ein stabiler (s) und ein instabiler (u) periodischer Orbit. So fand Ozorio de Almeida eine modifizierte Niveaudichte für fast integrierbare Systeme, die durch

$$\rho_M^O(S) = \rho_M^{BT}(S)J_0(\Delta S/\hbar) \quad (6.4)$$

gegeben ist, wobei J_0 die Besselfunktion ist und ΔS die Differenz zwischen der Wirkung der stabilen und der instabilen Bahn bezeichnet.

Da jedoch in einem typischen Problemfall der ungestörte Hamilton-Operator H_0 sowie die Störung $\varepsilon\mathcal{H}$ in Wirkungs-Winkel Variablen nicht bekannt sind, ist eine Verallgemeinerung von Gl. (6.2) und Gl. (6.4) sowie eine Methode zur Berechnung der Parameter, die in diese Gleichungen Eingang finden, nötig. Zwei wichtige Parameter sind hierbei zum einen die Krümmung g_E'' der Linie konstanter Energie und zum anderen die Korrektur ΔS zur Wirkung. Diese Informationen können aber in den Eigenschaften der gestörten, isolierten periodischen Orbits gefunden werden. Ullmo *et al.* [112] gingen deshalb bei ihrer Herleitung von der Berry-Tabor Spurformel aus. Aber statt des Propagator-Formalismus aus [110] benutzten sie die energieabhängige Greens Funktion sowie das Resultat von Ozorio de Almeida, gingen aber über dessen Betrachtungen weiter hinaus. Anstatt die Fourier-Entwicklung der Korrektur zur Wirkung, die in dem gedämpften Bessel-Term in Gl. (6.4) zu finden ist, abzuschneiden, führten sie neue Wirkungen ein, die sich aus der mittleren Wirkung \bar{S} und aus der Differenz der Wirkungen ΔS der beiden periodischen Orbits (stabiler (s) und instabiler (u)) zusammensetzt. Diese sind durch folgende Relationen gegeben

$$\bar{S} = \frac{S_u + S_s}{2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta S = \frac{S_u - S_s}{2}. \quad (6.5)$$

Die Wirkungen S_u und S_s sowie die Monodromie-Matrizen \mathbf{M}_u und \mathbf{M}_s der beiden periodischen Bahnen können einfach berechnet werden (s. Kap. 6.2). Benutzt man diese Ausdrücke für die Beschreibung des Beitrags zur Niveaudichte, der durch das Auseinanderlaufen der periodischen Bahnen der Familie M unter einer Störung auftritt (s. [112]), so ist man in der Lage, den Ausdruck der Niveaudichte für integrable Systeme zu modifizieren. Man erhält für jedes Paar aus stabilem und instabilem periodischen Orbit folgenden Beitrag zur Niveaudichte

$$\begin{aligned} \rho_M^U(S) = & \frac{1}{\pi|\hbar^3 M_2^3 g_E''|^{1/2}} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(\frac{i\bar{S}}{\hbar} - \frac{i\eta\pi}{2} - \frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ & \times \left[\bar{T} [J_0(s) - i\tilde{a}J_1(s)] \right. \\ & \left. \left. + i\Delta T \left[J_1(s) + \frac{i\tilde{a}}{2} [J_0(s) - J_2(s)] \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei $s = \Delta S/\hbar$ die normierte Korrektur zur Wirkung, \bar{T} die gemittelte Periodendauer und ΔT die Periodendifferenz der beiden betrachteten Orbits ist. Die Besselfunktionen werden durch J_0, J_1 und J_2 bezeichnet. Der Wert \tilde{a} ist das Verhältnis der Determinanten der Monodromie-Matrizen $\tilde{a} = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ mit $\kappa = (-\det(\mathbf{M}_u - \mathbf{1})/\det(\mathbf{M}_s - \mathbf{1}))^{1/2}$ der beiden beteiligten Orbits und ist somit auch ein Maß für den Grad der Chaotizität. Für $\tilde{a} \rightarrow 0$ erhält man das Resultat von Ozorio de Almeida (Gl. (6.4)). Der Maslov-Index wird mit η bezeichnet, und für die Bestimmung der Krümmung der Äquienergiekurve g_E'' wird auf [115] verwiesen. Eine ausführliche Herleitung der Ergebnisse ist in [112] zu finden.

Um Gl. (6.6) auf Billardssysteme anwenden zu können, müssen noch einige Modifikationen vorgenommen werden: Die Wirkung ist für Billards durch $S = \hbar kl$ gegeben, wobei k die Wellenzahl des quantenmechanischen Systems und l die Bahnlänge des Orbits ist. Die Periodendauer T des periodischen Orbits ist wegen der Annahme einer Einheitsgeschwindigkeit im Billard durch die Bahnlänge gegeben. Der Term $M_2^3 g_E''$ kann durch folgenden Ausdruck bestimmt werden

$$M_2^3 g_E'' = -\frac{\det(\mathbf{M}_u - \mathbf{1}) [1 - \tilde{a}]^2}{2\pi\Delta S} \quad \text{bzw.} \quad M_2^3 g_E'' = \frac{\det(\mathbf{M}_s - \mathbf{1}) [1 + \tilde{a}]^2}{2\pi\Delta S}. \quad (6.7)$$

Ausgehend von Gl. (6.6) können die beiden Grenzfälle, die Berry-Tabor Spurformel für reguläre Systeme und die Gutzwiller Spurformel für chaotische Systeme,

leicht reproduziert werden. Den ersten Fall erhält man, wenn man die Korrektur zur Wirkung ΔS gegen null gehen läßt. Der Gutzwiller Fall ergibt sich, wenn man für die Besselfunktionen den asymptotischen Ausdruck für große Argumente einsetzt.

Ullmo *et al.* haben ihre Theorie am gekoppelten Oszillator für verschiedene Chaotizitätsgrade getestet. Dabei stellten sie eine gute Übereinstimmung zwischen der simulierten Niveaudichte des Quantensystems und der Rekonstruktion mit Hilfe der Spurformel fest. Im folgenden Abschnitt soll erstmals geklärt werden, ob sich diese Beschreibungsmöglichkeit auch auf Mikrowellenbillards, die relativ wenige Eigenwerte (ca. 1000) im Vergleich zum gekoppelten Oszillator mit ca. 12000 Eigenwerten aufweisen, anwenden läßt.

6.2 Anwendung auf die Familie der Limaçon-Billards

In diesem Kapitel werden die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Spurformeln an experimentellen Systeme getestet. Hierzu werden die in Kap. 4 diskutierten vier Billards aus der Familie der Limaçons untersucht, da sie das volle Spektrum von regulärer über gemischte bis zu chaotischer Dynamik abdecken. Der Vergleich zwischen Theorie (Spurformeln) und Experiment wird dabei über die Längenspektren der Billards durchgeführt. Dazu werden sowohl die durch die Spurformeln berechneten theoretischen Niveaudichten als auch die experimentell gemessenen Niveaudichten der fluktuierenden Anteile mittels einer Fourier-Transformation in den Längenbereich abgebildet (vergl. Kap. 3.2.5). Dies hat den Vorteil, daß direkt ein Vergleich von Positionen (Länge des periodischen Orbits) und Amplituden (Stabilität der Bahn) der Peaks in den Längenspektren vorgenommen werden kann. Zuvor wird aber gezeigt, wie sich die Spurformeln auf Billard-Systeme übersetzen lassen und wie sich die periodischen Orbits sowie deren Eigenschaften, die als Grundlage der Spurformeln dienen, bestimmen lassen.

6.2.1 Kreisbillard

Die Bestimmung der klassischen periodischen Bahnen zur Rekonstruktion des experimentellen Längenspektrums des Kreisbillards mit Hilfe der Berry-Tabor Spurformel (Gl. (6.2)) stellt im allgemeinen kein großes Problem dar. Die einzelnen periodischen Orbits lassen sich einfach über eine Vorschrift konstruieren, in die nur die Anzahl der Reflexionen N_1 und die Anzahl der Perioden N_2 eingeht

$$l_{po}(N_1, N_2) = 2N_1 R \sin\left(\frac{N_2}{N_1}\pi\right) \quad \text{mit} \quad 1 \leq N_2 \leq \frac{N_1}{2}. \quad (6.8)$$

Dabei bezeichnet l_{po} die Länge des periodischen Orbits und R ist der Radius des Kreisbillards, der im hier verwendeten System 0.125 m beträgt. Aus Gl. (6.2) und der Übersetzung der klassischen Wirkung $S = \hbar k l_{po}$ für Billardsysteme erhält man nach umfangreichen Rechnungen [116]

$$\begin{aligned} \rho^{BT}(k) = & \sum_{N_1=2}^{\infty} \sum_{N_2=1}^{N_1/2} g \frac{l_{po}}{4N_1^2} (-1)^{N_1} \sqrt{\frac{2l_{po}k}{\pi}} \\ & \times \cos\left(kl_{po} - \frac{\pi}{2}N_1 + \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

wobei g die Multiplizität ist und für Orbits $(2N_2, N_2)$ gleich zwei und in den übrigen Fällen gleich vier ist. Die Wellenzahl wird durch k ausgedrückt. In Abb. 6.2 ist die theoretische Konstruktion gemäß der obigen Gleichung dem experimentellen

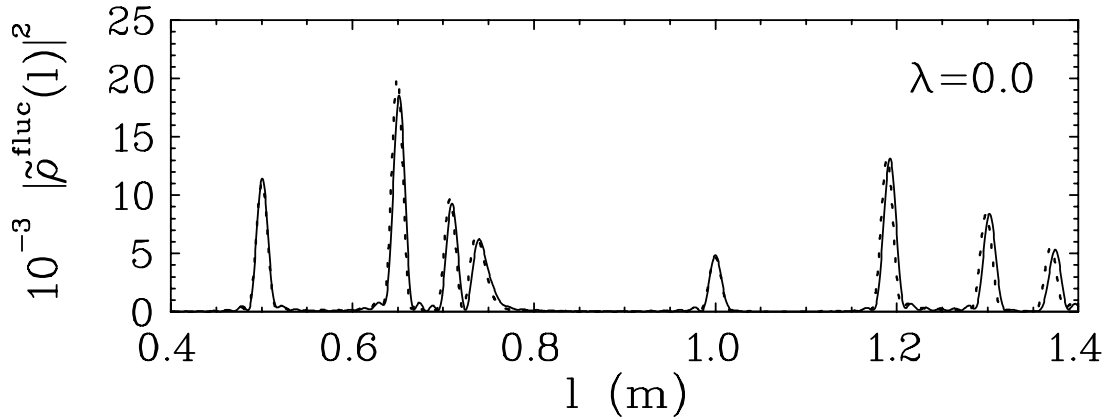


Abb. 6.2: Vergleich von experimentellem Längenspektrum (durchgezogene Linie) und Rekonstruktion (gestrichelte Kurve) gemäß Gl. (6.9) für den Kreis. Unterschiede sind zwischen den beiden Kurven aufgrund ihrer guten Übereinstimmung kaum zu erkennen.

Längenspektrum gegenübergestellt. Deutlich ist die sehr gute Übereinstimmung beider Spektren zu sehen. Die ganz leichte Verschiebung zwischen Theorie und Experiment läßt sich auf das der Messung zugrunde liegende reale System, bei dem der Kreis wegen Fertigungstoleranzen nicht 100% kreisförmig ist und auf die Kontraktion im Kalten zurückführen.

6.2.2 Limaçon-Billards

Deutlich komplizierter wird die Rekonstruktion der Längenspektren der übrigen Limaçon-Billards. Bei diesen Systemen kommen die Spurformeln von Ullmo *et al.* Gl. (6.6) bzw. Gutzwiller Gl. (6.1) zum Einsatz. Im Gegensatz zum Kreis lassen sich für diese Billards die periodischen Bahnen nicht durch eine Bildungsvorschrift in Abhängigkeit von der Anzahl der Reflexionen und Perioden bestimmen, und somit existiert kein geschlossener Ausdruck für die Spurformeln, der alle Bahnen berücksichtigt. Deshalb mußten für die beiden gemischten Billards und für das chaotische System alle periodischen Bahnen bis zu einer bestimmten Länge mit ihren Eigenschaften individuell bestimmt werden. Die Grenzlänge, bis zu der die periodischen Bahnen zur Berechnung des Längenspektrums berücksichtigt wurden, ist durch die Länge der Whispering Gallery Orbits (WGO) gegeben. Dabei handelt es sich um Orbits, die am Rand des Billards entlanglaufen und bei denen die Anzahl der Reflexionen gegen unendlich geht. Deren asymptotische Länge ist durch den Umfang des Billards festgelegt. Im Längenspektrum werden diese WGO durch einen breiten Peak, positioniert bei der Länge der Berandung, repräsentiert. Dieser Peak besteht aus unendlich vielen Einzelorbits (fast gleiche Länge, aber unterschiedliche Anzahl von Reflexionen), die miteinander interferieren. Für eine korrekte Beschreibung des experimentellen Längenspektrums müßten aber alle Orbits dieser WGO-Familie in der Spurformel berücksichtigt werden. Aus diesem Grunde wird bei der hier durchgeführten Rekonstruktion auf diese Bahnen verzichtet.

Bei der Beschreibung und der Bestimmung der periodischen Orbits in den Limaçon-Billards wurden ebenso wie bei den Messungen nur die desymmetrisierten Systeme betrachtet. Die Darstellung der periodischen Orbits erfolgt im klassischen Billard durch Angabe einer endlichen Sequenz von Reflexionspunkten auf der Berandung $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Dabei sind die Punkte ω_i durch Gl. (4.1) gegeben

und es gilt $\omega_{n+1} = \omega_1$, d.h. ab dem $(n + 1)$ -ten Punkt wird der periodische Orbit von neuem durchlaufen. Demnach ist die Länge einer periodischen Bahn durch

$$l_{po} = \sum_{i=1}^n |\omega_{i+1} - \omega_i| \quad (6.10)$$

gegeben. Da es, wie bereits erläutert, keine Bildungsvorschrift für die periodischen Bahnen gibt, wurde bei deren Bestimmung von den periodischen Bahnen des regulären Mitglieds der Limaçon-Familie, dem Kreis, ausgegangen. Da sich eine stabile periodische Bahn eines regulären Systems unter einer Störung (Veränderung der Geometrie) in eine stabile und in eine instabile periodische Bahn aufspaltet (Poincaré-Birkhoff Theorem), ist es legitim, die Form der periodischen Bahnen des regulären Systems als Ausgangspunkt (Anzahl der Reflexionen etc.) für die Bestimmung der periodischen Orbits in den gemischten bzw. chaotischen Systemen zu benutzen. Für die weiteren Rechnungen eignet sich die Polardarstellung der Reflexionspunkte $r(\phi) = 2\lambda \cos(\phi) + 1$ mit $0 \leq \phi \leq \pi$. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich Gl. (6.10) wie folgt umschreiben

$$l_{po} = \sum_{i=1}^n l_i(\phi_i, \phi_{i+1}), \quad (6.11)$$

wobei $l(\phi_i, \phi_{i+1})$ die Länge des Teilstücks zwischen zwei Reflexionen bezeichnet und durch

$$l_i(\phi_i, \phi_{i+1}) = \left[\left((2\lambda \cos(\phi_i) + 1) \cos(\phi_i) - (2\lambda \cos(\phi_{i+1}) + 1) \cos(\phi_{i+1}) \right)^2 \right. \\ \left. \left((2\lambda \cos(\phi_i) + 1) \sin(\phi_i) - (2\lambda \cos(\phi_{i+1}) + 1) \sin(\phi_{i+1}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.12)$$

gegeben ist. Zur Bestimmung der periodischen Bahnen wurde das Extremalprinzip (Fermatsches Prinzip) verwendet. Die Länge der Bahn l_{po} muß stationär sein, d.h. die erste Ableitung von l_{po} nach ϕ_i muß verschwinden. Man erhält dabei folgendes nichtlineares Gleichungssystem

$$\frac{\partial l_i}{\partial \phi_1} + \dots + \frac{\partial l_i}{\partial \phi_n} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (6.13)$$

Dieses System mußte numerisch gelöst werden, wobei es sehr auf die richtige Wahl der Startparameter für die Reflexionswinkel ankam, um eine stabile Lösung zu bekommen.

In Abb. 6.3 sind für das $\lambda = 0.125$ Billard einige der kürzesten periodischen Orbits aufgeführt. Bei der Bestimmung der einzelnen Bahnen flossen noch einige Vereinfachungen mit in die Berechnungen ein, wie z.B. Start- bzw. Endpunkt der Bahn liegen in einer der beiden Ecken, so daß sich die Anzahl der zu bestimmenden Reflexionswinkel reduzierte.

Nach der Bestimmung der einzelnen periodischen Orbits sowie deren Länge fehlen noch für die Rekonstruktion der experimentellen Längenspektren Informationen über die Stabilität der einzelnen Bahnen. Mit Hilfe der Monodromie-Matrix können Aussagen zur Stabilität der Bahnen gemacht werden. Die Monodromie-Matrix beschreibt die Bewegung eines Teilchens entlang einer periodischen Bahn im Phasenraum zwischen Start- und Endpunkt. Dabei führt man zu deren Bestimmung ein Koordinatensystem ein, dessen x -Koordinate parallel und dessen

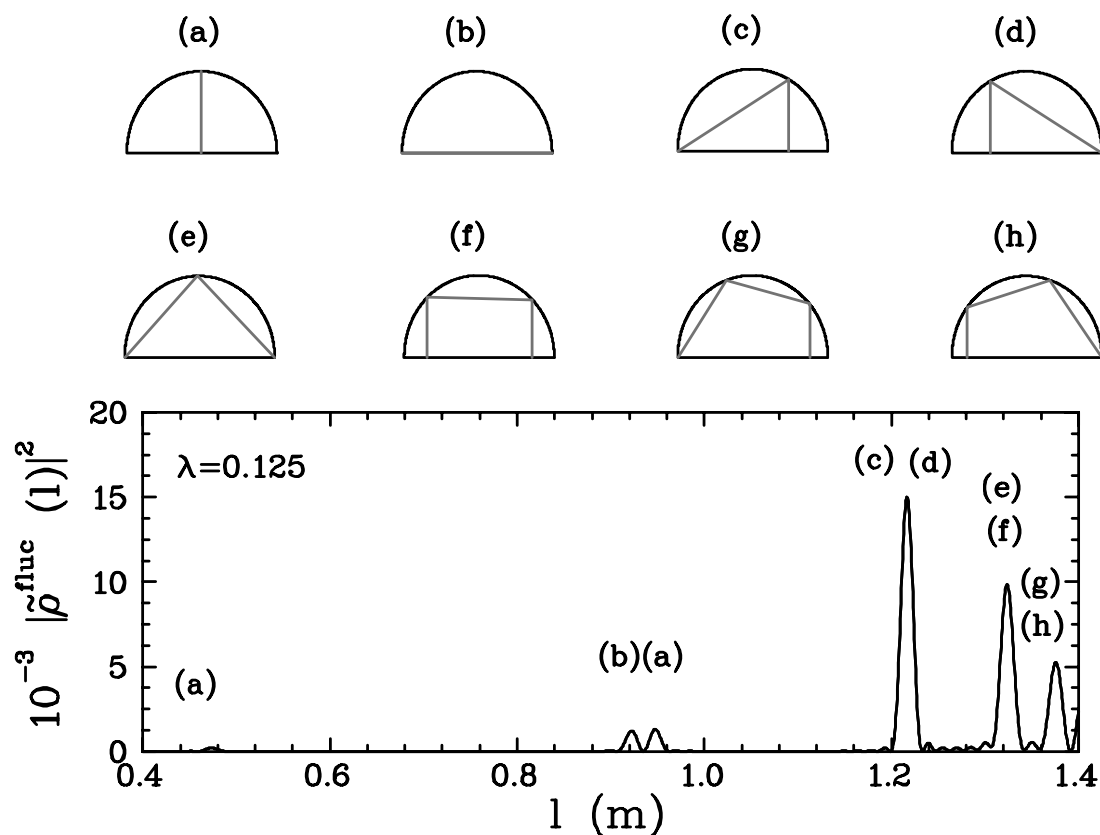


Abb. 6.3: Beispiele einiger periodischer Orbits für das $\lambda = 0.125$ Billard. Im oberen Teil sind die Orbits skizziert, die im unteren Bild im Längenspektrum identifiziert sind. Die Eigenschaften der Bahnen sind in Tab. 6.1 angegeben.

y -Koordinate senkrecht zum Orbit ist. Demnach hat ein Teilchen, das am Ort (x_0, dy) mit dem Impuls (p_x, dp_y) in infinitesimaler Nähe einer periodischen Bahn startet, nach einem Umlauf die Koordinaten (x_0, dy') und den Impuls (p_x, dp'_y) . Die Monodromie-Matrix \mathcal{M} definiert sich dann wie folgt für einen periodischen Orbit

$$\begin{pmatrix} dy' \\ dp'_y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} dy \\ dp_y \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Dabei gilt $\det(\mathcal{M}) = 1$. Führt man einen Winkel θ zwischen der Impulsrichtung und der x -Achse des äußeren Koordinatensystems ein, so erhält man eine modifizierte energieunabhängige Monodromie-Matrix \mathbf{M} und

$$\begin{pmatrix} dy' \\ d\theta' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} dy \\ d\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}p \\ M_{21}/p & M_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Diese Matrix ist in Teilmatrizen zerlegbar [117]

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cdot \dots \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1, \quad (6.16)$$

bei denen die Matrix \mathbf{M}_i für den Beitrag eines geradlinigen Segments zwischen zwei Reflexionen oder für den Beitrag einer Reflexion am Rand steht. Man erhält für einen geradlinigen Bahnteil der Länge l (s. Gl. (6.12))

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

und für den Beitrag einer Reflexion im Punkt ϕ

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2\kappa(\phi)}{\cos(\alpha)} & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Dabei ist $\kappa(\phi)$ die Krümmung der Berandung am Reflexionspunkt ϕ und α ist der Reflexionswinkel (vergl. Abb. 4.1). Bei einer Reflexion am geradlinigen Segment der Limaçon-Billardards (Symmetrielinie) bekommt man aufgrund der nichtvorhandenen Krümmung die negative Einheitsmatrix. Im Fall, daß eine periodische Bahn in eine der zwei Ecken läuft, wird sie so reflektiert, daß sie wieder in sich zurückläuft. Als Monodromie-Matrix erhält man dafür

$$\mathbf{M}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\kappa(\phi)}{\cos(\alpha)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

die sich als Produkt der Monodromie-Matrix einer Reflexion an der Geraden und einer Reflexion an der senkrechten Tangente im Punkt $\phi = 0$ bzw. $\phi = \pi$ ergibt.

Die Stabilität einer periodischen Bahn erhält man aus den Eigenwerten der zur Bahn gehörigen Monodromie-Matrix, die wie folgt berechnet werden

$$\sigma_{1,2} = \frac{\text{Tr}\mathbf{M}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Tr}\mathbf{M}}{2} - \det(\mathbf{M})} . \quad (6.20)$$

Es werden dabei drei Fälle unterschieden, die nicht von der Wahl des Startpunkts bei der Berechnung der Monodromie-Matrix abhängen:

- $|\text{Tr}\mathbf{M}| > 2$: Der periodische Orbit ist instabil und die Eigenwerte der Monodromie-Matrix sind reell und lassen sich für den hyperbolischen Fall als $\sigma_{1,2} = \exp(\pm u)$ bzw. für den invers hyperbolischen Fall $\sigma_{1,2} = -\exp(\pm u)$ schreiben. Der Wert u wird größer null gewählt und als Stabilitätsexponent bezeichnet. Der Ljapunov-Exponent läßt sich durch $\Lambda = u/l$ angeben und beschreibt das exponentielle Entfernen zweier benachbarter Punkte im Phasenraum mit der Zeit [1].
- $|\text{Tr}\mathbf{M}| < 2$: Der periodische Orbit ist stabil und die komplexen Eigenwerte sind gegeben durch $\sigma_{1,2} = \exp(\pm iv)$ (elliptischer Fall), wobei $v > 0$ gewählt wird und den Stabilitätswinkel des Orbits bezeichnet.
- $|\text{Tr}\mathbf{M}| = 2$: Der periodische Orbit ist neutralstabil und die Eigenwerte der Monodromie-Matrix lassen sich für den parabolischen Fall durch $\sigma_{1,2} = 1$ bzw. für den invers parabolischen Fall durch $\sigma_{1,2} = -1$ angeben. Der Ljapunov-Exponent ergibt sich hier zu $\Lambda = 0$.

Als letzte Eigenschaft der periodischen Bahnen muß noch der Maslov-Index η bestimmt werden, der Informationen über die Phase der Bahn beinhaltet. Bei Billardsystemen setzt sich dieser aus zwei Teilen zusammen: zum einen aus der doppelten Anzahl der Reflexionen n am Rand (dabei zählen Reflexionen in einer Ecke zweimal) und zum anderen aus der Anzahl der konjugierten Punkte μ

$$\eta = 2n + \mu . \quad (6.21)$$

Betrachtet man ein Bündel von Bahnen, die alle in einem Punkt starten, so können sich die Bahnen nach einer Reflexion an der konvexen Berandung wieder

schneiden. Dies kann in einem Punkt geschehen, dann liegt ein Fokuspunkt vor, oder die Bahnen treffen sich in einer Umgebung und bilden eine Kaustik. Die Summe der Fokuspunkte und der Kaustiken eines Bündels von Bahnen zu einer periodischen Bahn ergibt die Anzahl der konjugierten Punkte. Berechnen läßt sich die Anzahl der konjugierten Punkte durch die Anzahl der Nullstellen des M_{12} -Elements der Monodromie-Matrix einer periodischen Bahn, d.h. es werden die Vorzeichenwechsel des M_{12} -Elements zwischen zwei Reflexionen betrachtet. Es liegt ein konjugierter Punkt vor, wenn das Produkt $M''_{12}M'_{12} < 0$ ist, wobei M''_{12} das Matrixelement vor und M'_{12} das Matrixelement nach einer Multiplikation mit der Matrix \mathbf{M}_L eines geradlinigen Stücks ist. Da die Anzahl der konjugierten Punkte startpunktsabhängig ist, erhält man die Gesamtanzahl der konjugierten Punkte einer periodischen Bahn durch

$$\mu = \begin{cases} \mu_M + 1 & ; c \geq 0 \\ \mu_M & ; c < 0 \end{cases}, \quad (6.22)$$

wobei μ_M die Anzahl der konjugierten Punkte bestimmt durch Nullstellenzählen und $c = -(2 - \text{Tr}\mathbf{M})/M_{12}$ ist.

In Tab. 6.1 sind die Eigenschaften (Länge, Stabilität, Anzahl der Reflexionen / konjugierten Punkte, Maslov-Index) der acht kürzesten Bahnen für die drei Billards ($\lambda = 0.125$ / $\lambda = 0.15$ / $\lambda = 0.3$) aufgeführt. In diesen Werten wird auch der Sachverhalt des Poincaré-Birkhoff-Theorems sichtbar: Bahnen, die vom selben periodischen Orbit des regulären Systems ausgehen, separieren mit zunehmender Störung (hier ausgedrückt durch den Kontrollparameter λ) in der Länge (siehe z.B. Orbit-Paar (c)/(d)). Diese Informationen über die klassischen periodischen Orbits reichen aus, um die Längenspektren der drei Systeme mit Hilfe der Spurformel von Ullmo *et al.* (Gl. (6.6)) bzw. Gutzwiller (Gl. (6.1)) zu rekonstruieren. In Abb. 6.4 sind diese Ergebnisse im Vergleich mit dem Experiment graphisch dargestellt.

Aus der Abbildung wird sichtbar, daß die Rekonstruktion für die beiden gemischten Billards in relativ guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist. Größere Abweichungen sind bei den längeren Orbits zu sehen. Die gleiche Situation findet sich beim chaotischen $\lambda = 0.3$ Billard. Wieder stimmen die kürzeren Orbits mit der Rekonstruktion überein, während bei den folgenden Unterschiede zu sehen sind. Bei allen drei Billards äußern sich die Abweichungen jedoch nicht signifikant

Tab. 6.1: Eigenschaften der periodischen Orbits für die $\lambda = 0.125$ / $\lambda = 0.15$ / $\lambda = 0.3$ Limaçon-Billard. Stabile Orbits werden mit s, instabile Orbits mit u bezeichnet. Die Buchstaben in der ersten Spalte beziehen sich auf die Form der Orbits (s. oberer Teil in Abb. 6.3).

PO	Länge [m]	Stabilität	# Reflexionen	# konj. Punkte	Maslov-Index
$\lambda = 0.125$					
(a)	0.4746	u	2	1	5
(b)	0.9223	s	4	1	9
(c)	1.2128	s	5	2	12
(d)	1.2211	u	5	3	13
(e)	1.3236	s	6	3	15
(f)	1.3263	u	6	4	16
(g)	1.3754	s	7	4	18
(h)	1.3772	u	7	5	19
$\lambda = 0.15$					
(a)	0.4769	u	2	1	5
(b)	0.9163	s	4	1	9
(c)	1.2103	s	5	2	12
(d)	1.2237	u	5	3	13
(e)	1.3227	s	6	3	15
(f)	1.3278	u	6	4	16
(g)	1.3749	s	7	4	18
(h)	1.3781	u	7	5	19
$\lambda = 0.3$					
(a)	0.4900	u	2	1	5
(b)	0.8623	u	4	1	9
(b')	0.8837	u	3	2	8
(c)	1.1805	u	5	2	12
(d)	1.2451	u	5	3	13
(e)	1.3084	u	6	3	15
(f)	1.3449	u	6	4	16
(g)	1.3670	u	7	4	18
(h)	1.3923	u	7	5	19

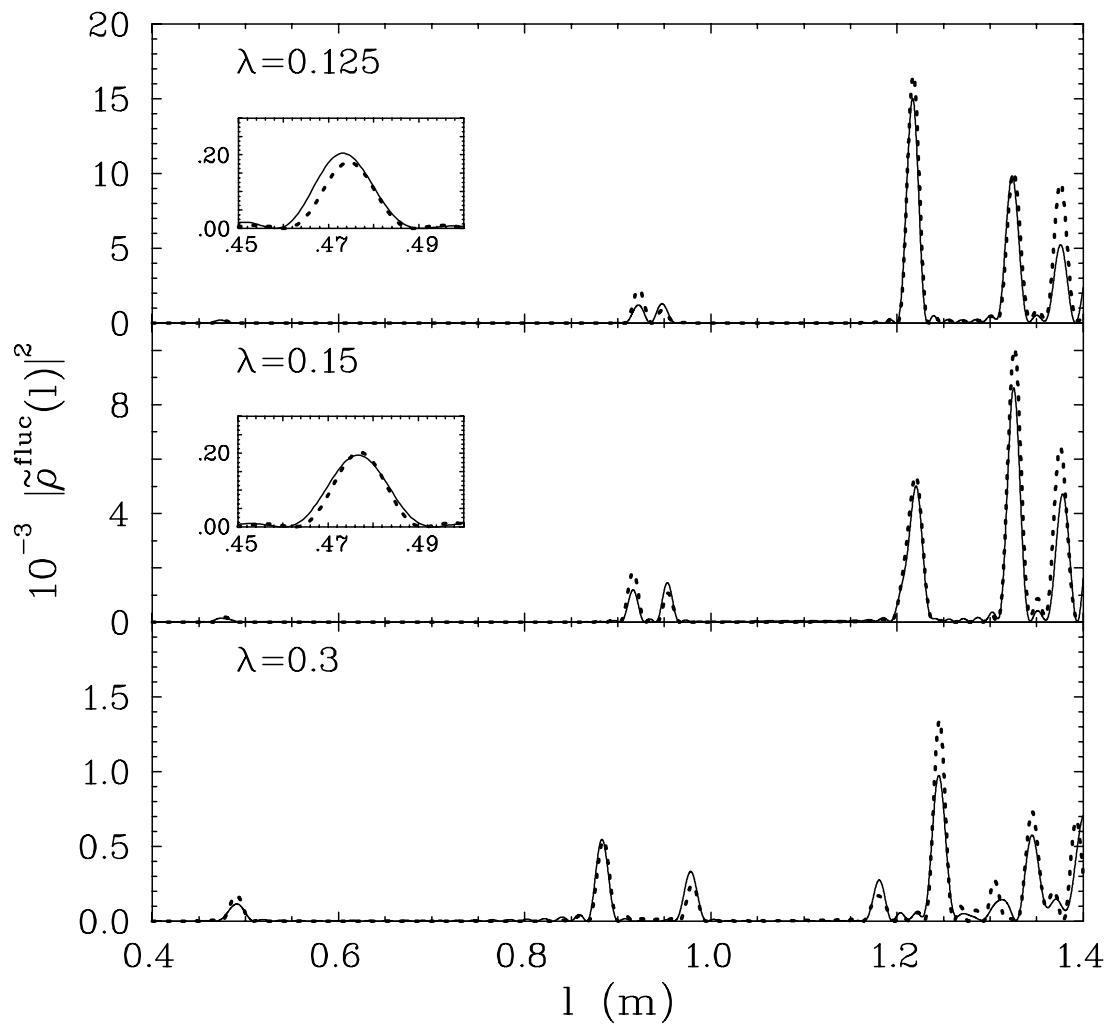


Abb. 6.4: Vergleich der experimentellen Längenspektren des $\lambda = 0.125$, $\lambda = 0.15$ und $\lambda = 0.3$ Billards (von oben nach unten) mit der Rekonstruktion (gestrichelte Linie) nach Gl. (6.6) bzw. Gl. (6.1). Der Bildeinschub beim $\lambda = 0.125$ und $\lambda = 0.15$ Billard zeigen jeweils eine Vergrößerung des kürzesten periodischen Orbits. Für eine deutlichere Darstellung der Unterschiede zwischen beiden Kurven wird auf Abb. 6.6 verwiesen.

in der Lage der periodischen Bahnen, sondern nur in der Amplitude (Stabilität), die in der Größenordnung bis zu maximal ca. 30% liegen. Dabei ist zu beachten, daß die Rekonstruktion jeweils immer größere Amplituden aufweist, d.h. stabilere Bahnen widerspiegelt, als das jeweilige Experiment. Schaut man sich auch noch die Phaseninformation der periodischen Bahnen an, so stellt man fest, daß dort auch keine signifikanten Abweichungen zwischen Theorie und Experiment zu finden sind. In Abb. 6.5 sind der Real- und der Imaginärteil des Längenspek-

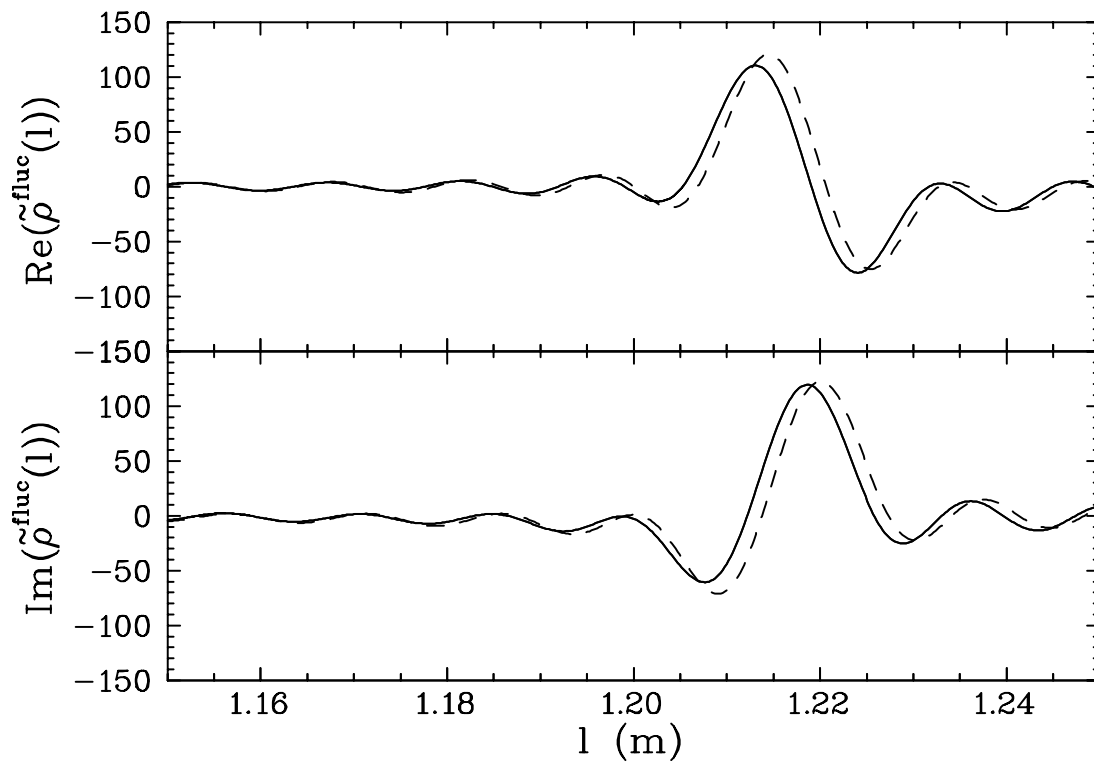


Abb. 6.5: Real- und Imaginärteil der Fourier transformierten Niveaudichte für das $\lambda = 0.125$ Billard. Die Daten des gemessenen Spektrums sind als durchgezogene und die der Rekonstruktion als gestrichelte Linie dargestellt. Der Peak gehört zum periodischen Bahn-Paar bei $l = 1.21$ m / 1.22 m.

trums des $\lambda = 0.125$ Limaçon-Billard für die Bahnen der Länge 1.21 m / 1.22 m ((c)/(d) Orbit-Paar) dargestellt. Man sieht deutlich, daß neben der Position der beiden periodischen Bahnen auch die Phase zwischen der theoretischen Rekonstruktion und dem Experiment übereinstimmen. Allein bei der Stabilität sind leichte Unterschiede zu beobachten.

Die Abweichungen, die für die beiden gemischten Billardsysteme gefunden wurden, lassen sich aber nicht mit der Tatsache begründen, daß für die Untersuchungen reale Mikrowellenkavitäten im Vergleich zu den idealen Systemen, auf denen die Rekonstruktion beruht, verwendet wurden. Numerische Simulationen [118] haben gezeigt, daß das gemessene Eigenwertspektrum in sehr guter Übereinstimmung mit den numerisch simulierten Eigenwerten ist. Dies wird in Abb. 6.6 veranschaulicht. Dort ist die Differenz der Längenspektren berechnet aus den Meßdaten und den numerisch simulierten Daten bzw. die Differenz der Längenspektren berechnet aus den Meßdaten und den theoretisch rekonstruierten Daten gezeigt.

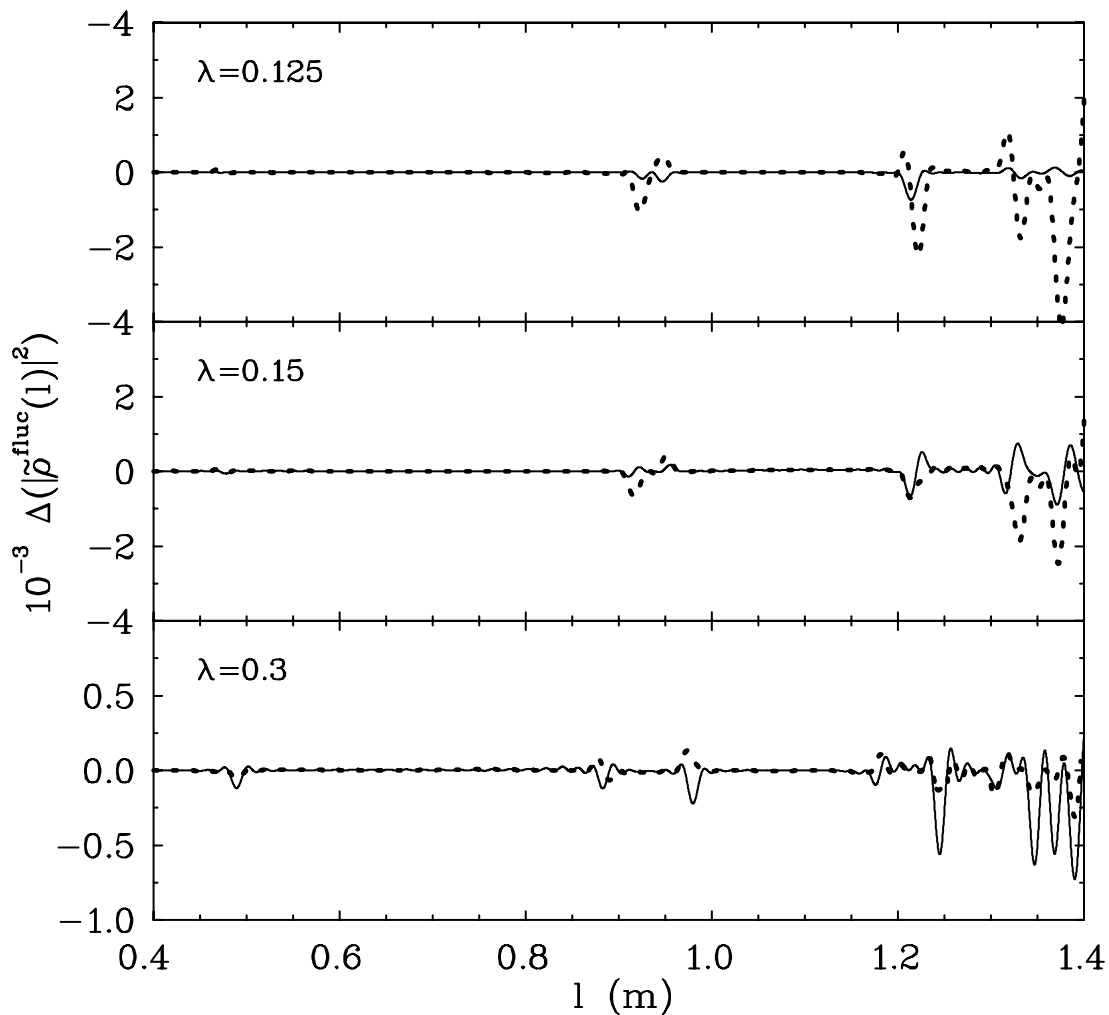


Abb. 6.6: Differenz zwischen den Längenspektren der gemessenen und der numerisch erhaltenen Daten (durchgezogene Linie) bzw. der gemessenen und der theoretisch rekonstruierten Daten (gestrichelte Kurve) für die Billards mit $\lambda = 0.125$, $\lambda = 0.15$ und $\lambda = 0.3$.

Signifikante Abweichungen sind nur im zweiten Fall zu sehen, während die Daten aus dem ersten Fall sehr gut miteinander verträglich sind.

Anders sieht die Sache beim chaotischen $\lambda = 0.3$ Billard aus. Die Abweichungen, die dort in Abb. 6.4 zu sehen sind, lassen sich diesmal auf die Tatsache zurückführen, daß ein Vergleich zwischen einem realen und einem idealen System stattgefunden hat. Während der Fertigung dieses Billards hat die Herstellung der Berandung besonders an der Stelle mit $\phi = \pi$ Probleme bereitet. Speziell die Eigenschaften der Berandung (z.B. Krümmung) haben aber einen großen Einfluß auf die Stabilität (Amplitude im Längenspektrum) der periodischen Or-

bits. Vergleicht man hingegen die theoretische Rekonstruktion mit den numerisch simulierten Daten, so stellt man fest, daß diese beiden Datensätze in besserer Übereinstimmung sind (s. Abb. 6.6). Daraus kann man folgern, daß die gefundenen Abweichungen auf mechanische Imperfektionen des Billards zurückzuführen sind.

Abschließend läßt sich feststellen, daß die hier erstmals durchgeführte Rekonstruktion von experimentellen Längenspektren von Systemen mit gemischter Dynamik durch die Spurformel von Ullmo *et al.* gute Ergebnisse erbracht hat. Es wurde gezeigt, daß sich die kürzeren periodischen Orbits sowohl in der Länge als auch in der Stabilität gut beschreiben lassen. Über längere Orbits konnte hier aufgrund der Komplexität der Bahnen keine Aussage gemacht werden. Die Abweichungen, die hier zwischen Experiment und Theorie gefunden wurden, haben mehrere Ursachen. Zum einen sind aus dem Experiment nur eine relativ geringe Anzahl von Eigenwerten gewonnen worden (im Vergleich zum Test durchgeführt von Ullmo *et al.* mit dem gekoppelten Oszillator). Es wird angenommen, daß man für die Rekonstruktion der gemischten Systeme weiter in den semiklassischen Bereich vordringen muß. Zum anderen kann man aber auch annehmen, daß die beschriebene Spurformel nur bedingt dazu in der Lage ist, gemischte Systeme, die weit entfernt vom fast integrablen Fall sind, korrekt zu beschreiben. Obwohl die hier vorgestellte Spurformel in [112, 113] nur für fast integrable Systeme getestet wurde, sollte sie aber dennoch aufgrund der vollständigen Interpolation zwischen der Beschreibungsmöglichkeit von Berry und Tabor auf der regulären Seite und der von Gutzwiller auf chaotischen Seite in der Lage sein, auch Systeme zu beschreiben, die weit im gemischten Bereich liegen.

TEIL II: Raysplitting in supraleitenden Mikrowellenbillards

7 Theoretische Grundlagen und experimentelle Realisierung

Nachdem im ersten Teil dieser Arbeit im Innern potentialfreie Quantenbillards betrachtet wurden, sollen in den folgenden Kapiteln Billardsysteme untersucht werden, die im Innern ein teilweise von null verschiedenes aber endliches Potential haben. Es wird dargestellt, wie sich die Dynamik des Quantenbillards unter der Einbringung eines Potentials verändert. In diesem Zusammenhang wird auch das Phänomen des Raysplittings (Strahlenspaltung) diskutiert. Es wird gezeigt, daß neben den klassisch periodischen Bahnen, die den Newtonschen Bewegungsgleichungen folgen, auch sog. nicht-Newtonsche Bahnen in den Systemen eine wichtige Rolle spielen. Nach einer kurzen theoretischen Einführung in Billardsysteme in denen Strahlenspaltung auftritt, wird gezeigt, wie diese Billards experimentell realisiert werden können. Inspiriert durch [119] wird ein Kreisbillard sowie ein Viertel-Sinai-Billard im Experiment untersucht und die statistischen Eigenschaften der Spektren sowie der Einfluß der nicht-Newtonschen Bahnen diskutiert.

7.1 Theoretische Grundlagen

In der Quantenmechanik tritt bei einer Potentialänderung auf Skalen kleiner als die de Broglie-Wellenlänge das Phänomen des Raysplittings auf (s.a. [120]). Dies soll im folgenden an einem eindimensionalen Streuproblem erläutert werden: Ein Teilchen der Masse m und der Energie $\mathcal{E} > V_0$ von links kommend wird an einem Potential der Form $V(x) = V_0/(1 + \exp(-x/d))$ gestreut, wobei V_0 die Potentialhöhe und d dessen Breite ist. Im asymptotischen Fall erhält man für die Wellenfunktion $\Psi(x) = \exp(ikx) + r \exp(-ikx)$ für den Bereich $x \rightarrow -\infty$ und $\Psi(x) = t \exp(ikx)$ für $x \rightarrow +\infty$. Dabei sind die Wellenzahlen $k = (2m\mathcal{E})^{1/2}/\hbar$ und $\kappa = (2m[\mathcal{E} - V_0])^{1/2}/\hbar$ und t bezeichnet die Transmissionsamplitude der

Welle. Der Reflexionskoeffizient r ist durch

$$r = \frac{\sinh(\pi d(k - \kappa))}{\sinh(\pi d(k + \kappa))} \quad (7.1)$$

gegeben. Der semiklassische Limes für die Streuung der Wellen ($\hbar \rightarrow 0$) im Grenzfalle einer scharfen Potentialstufe ($d \rightarrow 0$) wird nun näher untersucht. Es ergeben sich zwei interessante Fälle für den Doppellimes ($\hbar \rightarrow 0/d \rightarrow 0$):

- Die Breite d wird festgehalten und der Limes $\hbar \rightarrow 0$ ausgeführt. Anschließend erfolgt für die Breite der Limes $d \rightarrow 0$. Dieser Fall wird auch “Newtonscher Grenzfalle” genannt, denn die Dynamik der einfallenden Teilchen wird durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen beschrieben: für $\mathcal{E} > V_0$ wird das Teilchen vollständig transmittiert ($t = 1$) und für $\mathcal{E} < V_0$ erfolgt für das Teilchen eine vollständige Reflexion ($r = 1$) an der Potentialstufe.
- Für ein festes \hbar wird zuerst der Limes $d \rightarrow 0$ und erst danach der Limes $\hbar \rightarrow 0$ ausgeführt. Dies ist der Fall, bei dem für ein einfallendes Teilchen an der Potentialstufe Strahlenspaltung auftritt. Für den Reflexionskoeffizienten (Gl. (7.1)) erhält man $r = (k - \kappa)/(k + \kappa)$, was unabhängig von \hbar ist. Daraus folgt, daß selbst für den Fall, daß das Teilchen eine Energie $\mathcal{E} > V_0$ hat, eine Transmissionsamplitude t resultiert, die kleiner als 1 ist, was zu einem Teilchen mit endlicher Reflexionswahrscheinlichkeit korrespondiert. Man spricht in diesem Falle auch von nicht-Newtonscher Mechanik.

Hierbei lassen sich zwei verschiedene Bahntypen unterscheiden:

- Newtonsche Bahnen: Die Energie des klassischen Teilchens ist kleiner als die Potentialstufe, das Teilchen wird an dieser Stufe reflektiert (Totalreflexion). Ist die Energie des Teilchens größer als die Potentialstufe, erfolgt vollständige Transmission.
- Nicht-Newtonsche Bahnen: Die Energie des Teilchens ist größer als die Potentialstufe, das Teilchen wird jedoch mit einer Wahrscheinlichkeit größer null am Potentialsprung reflektiert.

Eine ausführlichere Behandlung klassischer Raysplitting-Billardards ist in [121] gegeben.

In der Natur tritt Strahlenspaltung z.B. bei akustischen oder elektromagnetischen Systemen auf. Im Fall von akustischen Systemen kann eine einfallende Welle am Übergang von einem Medium in ein anderes in eine longitudinale und in eine transversale Welle aufgespalten werden. Der Fall der oben diskutierten Potentialstufe tritt z.B. bei elektromagnetischen Systemen auf, bei denen eine Welle beim Übergang von einem Medium mit einer Dielektrizitätszahl ϵ in ein anderes Medium mit einer Dielektrizitätszahl ϵ' an der Grenzfläche in eine reflektierte und in eine transmittierte Welle aufgespalten werden kann. Für den transmittierten Strahl gilt das Snellsche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}}, \quad (7.2)$$

wobei α der Einfallswinkel im Dielektrikum mit n und α' der Ausfallswinkel im Dielektrikum mit n' ist. Für eine Reflexion ist $\alpha = \alpha'$. Wenn der einfallende Strahl von einem optisch dichteren Medium (n) in ein optisch dünneres Medium (n') übergeht, so kommt es für Winkel, die größer als der Grenzwinkel $\alpha_G = \arcsin(n'/n)$ sind, zur Totalreflexion. Für Winkel, die kleiner als dieser Grenzwinkel sind, erhält man für den einfallenden Strahl eine Reflexionswahrscheinlichkeit $R = ((n - n')/(n + n'))^2$ und eine Transmissionswahrscheinlichkeit $T = 1 - R = (4nn')/(n + n')^2$.

Ein Quantenbillard, in dem Raysplitting auftritt, kann wie folgt dargestellt werden. Als Beispiel wird ein zweidimensionales, kreisförmiges Stufenbillard mit Radius R betrachtet. Das Potential des Billards ist durch

$$V(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{für } r = \sqrt{x^2 + y^2} > R \\ V_0 \Theta(-x) & \text{für } r = \sqrt{x^2 + y^2} < R \end{cases} \quad (7.3)$$

gegeben (s. Abb. 7.1). Dabei bezeichnet $\Theta(x)$ die Sprungfunktion, die für $x < 0$ null und für $x \geq 0$ gleich eins ist. Entlang des Kreisdurchmessers bei $x = 0$ erhält man eine scharfe Potentialstufe der Höhe V_0 , an der Strahlenspaltung auftritt. Beschrieben wird das System durch folgende modifizierte Schrödingergleichung

$$\Delta \Psi = -(\mathcal{E} - V_0 \Theta(-x)) \Psi. \quad (7.4)$$

Seit einigen Jahren beschäftigt man sich theoretisch mit dem Phänomen des

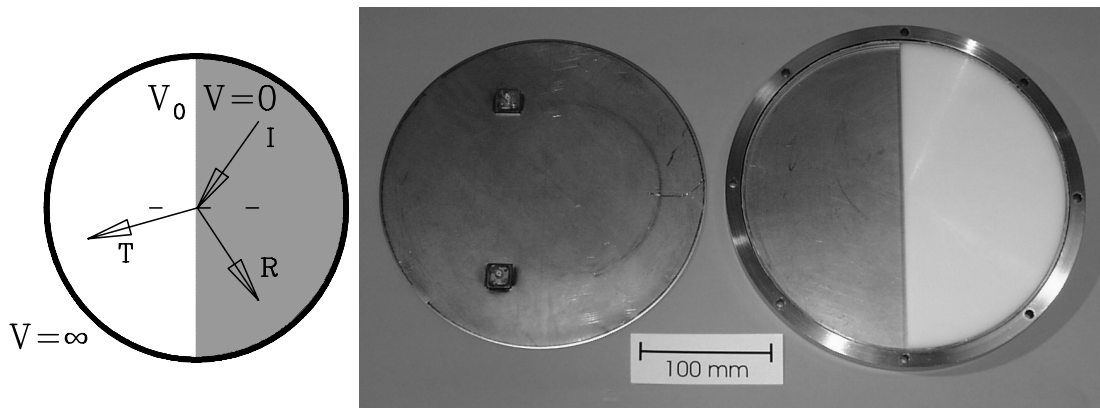


Abb. 7.1: Auf der linken Seite ist das kreisförmige Raysplitting-Billard skizziert, und auf der rechten Seite ist die experimentelle Realisation dargestellt. Der einfallende Strahl (I) wird an der Grenzfläche in einen transmittierten (T) und in einen reflektierten (R) aufgeteilt. Das weiße Dielektrikum im Kreisresonator entspricht dem Potential $V = 0$ in der Skizze.

Raysplittings in Billardsystemen. Dabei wurde u.a. die Strahlenspaltung in einem Kreisbillard [119, 122, 123], einem Ringbillard [124, 125], einem Dreiecksbillard [126] sowie in einem Rechteckbillard [127] unter verschiedenen Aspekten, wie z.B. statistische Analyse der Spektren (RMT) oder Signifikanz der nicht-Newton'schen Bahnen in den Längenspektren (POT), sowohl klassisch als auch von der quantenmechanischen Seite untersucht.

7.2 Experimentelle Realisation

Experimentell lassen sich solche quantenmechanischen Stufenbillards mit Mikrowellenresonatoren realisieren, die teilweise mit einem Dielektrikum gefüllt sind. Dies läßt sich mit einem festen Dielektrikum, wie z.B. Polyethylen durchführen. Da die Wellenlängen der hier verwendeten Mikrowellen in der Größenordnung einiger Zentimeter liegen, und sich das Dielektrikum mit μm -Genauigkeit zuschneiden läßt, ist die Vorgabe einer scharfen Potentialstufe gegeben.

Es wurden zwei Billardsysteme zum Thema Raysplitting untersucht. Beim ersten Billard handelt es sich um das im vorigen Abschnitt bereits vorgestellte Stufenkreisbillard. Für das Experiment wurde der im ersten Teil dieser Arbeit verwen-

deten Kreisresonator benutzt, bei dem in eine Hälfte ein Polyethylen-Halbkreis gelegt wurde, s. Abb. 7.1. Das verwendete Polyethylen [128] hat eine Dielektrizitätskonstante von $\epsilon_{PE} = 2.4$ ($n_{PE} = 1.55$), die über den gesamten untersuchten Frequenzbereich bis 20 GHz nahezu konstant ist. Die elektromagnetischen Wellen werden in diesem Resonator mit der modifizierten Helmholtzgleichung

$$\Delta\Phi(x, y) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \left(1 - n_{PE}^{-2}\right) \Theta(-x)\right) \Phi(x, y) \quad \text{und} \quad c_0 = n_{PE} \cdot c \quad (7.5)$$

beschrieben (vergl. a. die allgemeine Helmholtzgleichung (Gl. (2.10))). Die Sprungfunktion $\Theta(x)$ ist wie in Gl. (7.3) definiert. In diesem Billardsystem entspricht das Polyethylen dem Potential $V = 0$ im Quantenbillard [129].

Das zweite Billard, an dem Raysplitting-Phänomene untersucht wurden, ist ein desymmetrisiertes Viertel-Sinai-Billard, in dem ein verschiebbares Rechteck aus Polyethylen eingelegt wurde. In Abb. 7.2 sind die Geometrie des Systems sowie dessen Abmessungen dargestellt. Bei dem Billard handelt es sich um das in Kap. 3.1 beschriebene modulare Rechteckbillard aus Kupfer mit einer supraleitenden Bleischicht. Um daraus ein Sinai-Billard zu bekommen, wurde in eine Ecke ein Viertelkreis gelegt.

Aufgrund der teilweisen dielektrischen Füllung in den Mikrowellenresonatoren erniedrigt sich auch die Grenzfrequenz gemäß

$$f_G(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{c_0}{2h}. \quad (7.6)$$

Daraus folgt eine Grenzfrequenz von $f_G(\epsilon_{PE}) \approx 14$ GHz für das 7 mm hohe Kreisbillard und $f_G(\epsilon_{PE}) \approx 16$ GHz für das 6 mm hohe Sinai-Billard. Sonst unterscheiden sich die Messungen nicht von denen, die in Kap. 3.1 beschrieben wurden. Die Verwendung supraleitender Resonatoren wird in diesen Fällen für eine eindeutige Identifizierung der einzelnen Resonanzen besonders wichtig. Durch das Dielektrikum steigt die Niveaudichte im Vergleich zur ungefüllten Kavität, aber gleichzeitig nimmt die Güte der Resonanzen durch dielektrische Verluste ab. Dies führt schon im mittleren Frequenzbereich um 10 GHz zu dicht benachbarten und teilweise sich überlappenden Resonanzen, die bei einer normalleitenden Messung nicht mehr trennbar wären.

Experimente mit solchen modifizierten Mikrowellenkavitäten zur Strahlenspaltung wurden erstmalig in [130, 131] vorgestellt, bei denen nicht-Newtonsche Or-

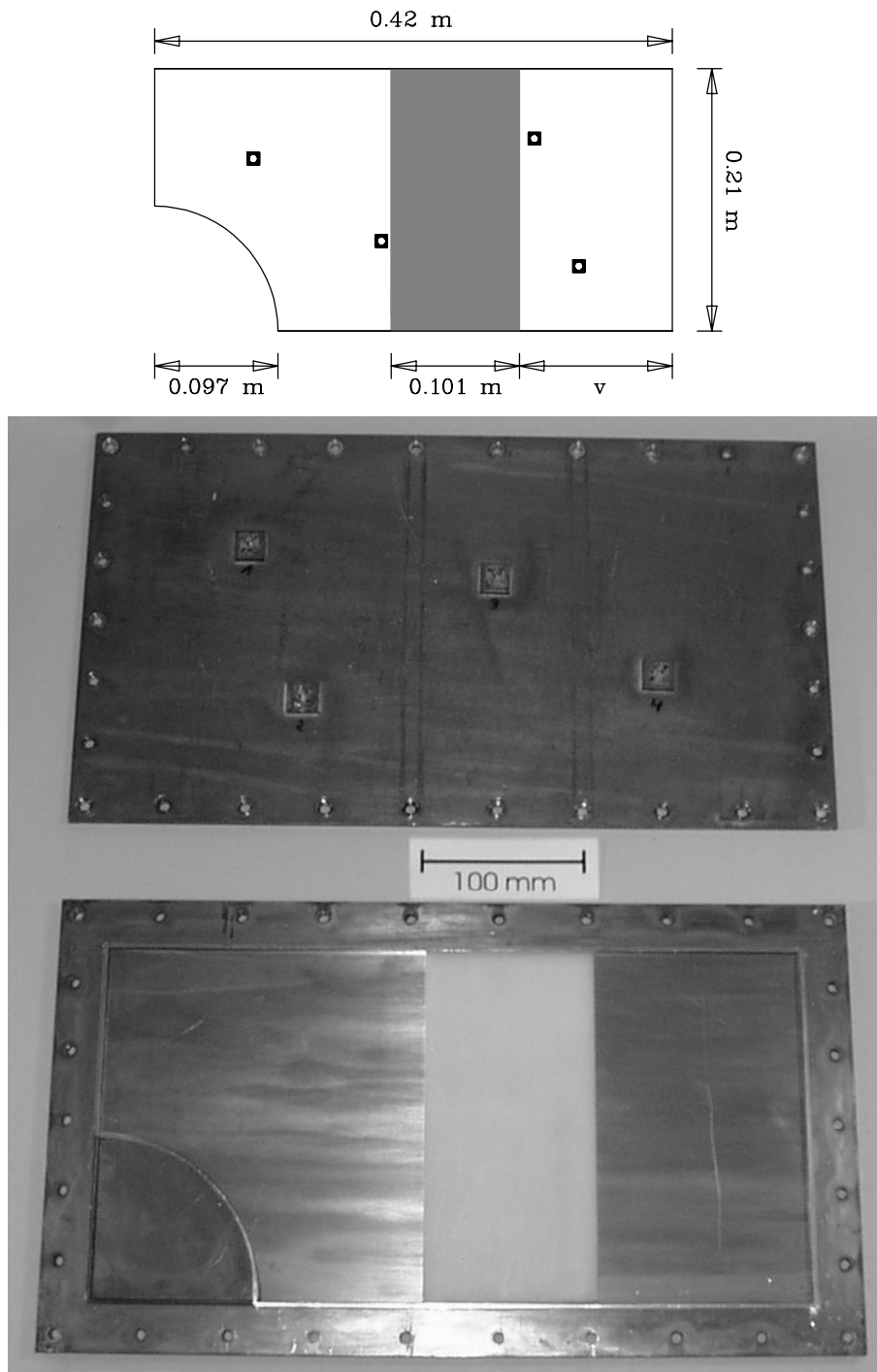


Abb. 7.2: Skizze mit den Abmessungen des Sinai-Raysplitting-Billiards (oben) und Foto des Viertel-Sinai-Billiards, aufgebaut aus dem modularen Rechteckresonators (unten). Das dielektrische Rechteck kann in der Position verschoben werden, die durch v angegeben wird.

bits in einem mit einem dielektrischen Teflon-Rechteck teilweise gefüllten normalleitenden Stadion-Billard im Längenspektrum durch Messung von nur 50 Resonanzen identifiziert wurden. Niveau-Geschwindigkeitsverteilungen an variablen Raysplitting-Billard wurden in [132] studiert. Im Gegensatz zu diesen bisher durchgeführten Untersuchungen mit normalleitenden Resonatoren zeichnen sich die im folgenden beschriebenen Experimente mit supraleitenden Kavitäten durch eine deutlich höhere Anzahl von gemessenen Eigenfrequenzen (zwischen 550 und 900) aus. Dadurch werden die Ergebnisse der statistischen Analyse deutlich signifikanter und die nicht-Newton'schen Bahnen können in den Längenspektren eindeutiger identifiziert werden.

8 Statistische Analyse der Spektren

Im folgenden Kapitel soll der Einfluß des dielektrischen Einsatzes in den beiden untersuchten Stufenbillards auf ihr statistisches Verhalten hin untersucht werden. Des weiteren wird gezeigt, wie die nicht-Newtonschen Bahnen im Längenspektrum nachgewiesen werden können. Beim Sinai-Billard wird darüber hinaus auch der Einfluß der Position des dielektrischen Rechtecks auf das Verhalten der periodischen Orbits untersucht.

8.1 Kreisbillard

Für den kreisförmigen Resonator, dessen eine Hälfte mit einem Polyethylen Halbkreis gefüllt ist, ergab die supraleitende Messung bei 4.2 K (vergl. Kap. 3.1) des Frequenzspektrums 552 Eigenfrequenzen im Bereich von 45 MHz - 14 GHz. Bevor die statistische Analyse der Daten durchgeführt werden kann, müssen zuerst die gemessenen Eigenfrequenzen entfaltet werden. Aufgrund der zwei unterschiedlichen Medien in der Kavität (Vakuum ($\epsilon = 1$)/Polyethylen ($\epsilon = 2.4$)) und den daraus unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Mikrowellen, muß die Weyl-Formel (Gl. (3.4)) dieser Situation angepaßt werden. Zum einen ändert sich der Flächen- und der Umfangsterm, aber zum anderen muß auch die Strahlensplattung an der Grenzfläche mitberücksichtigt werden. Die Weyl-Formel für Raysplitting-Billards lautet allgemein [124, 129, 133]

$$N^{Weyl}(f) = (A_1 + \epsilon A_2) \frac{\pi}{c_0^2} f^2 - (C_1 + \sqrt{\epsilon} C_2) \frac{1}{2c_0} f + \Delta N(f) + const. , \quad (8.1)$$

wobei A_1 und C_1 die Fläche und der Umfang des Vakuumbereichs und ϵA_2 und $\sqrt{\epsilon} C_2$ die Fläche und der Umfang des Dielektrikums sind. Die Grenzfläche zwischen Vakuum und Dielektrikum wird dabei nicht mit zum Umfang gezählt. Diese Grenzfläche geht mit in den Term $\Delta N(f)$ ein, der durch

$$\Delta N(f) = \nu(\zeta) L_{RS} \sqrt{\epsilon} \frac{2\pi}{c_0} f \quad \text{mit} \quad \zeta = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \quad (8.2)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet L_{RS} die Länge der Grenzfläche und $\nu(\zeta)$ ist zu berechnen durch

$$\nu(\zeta) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\zeta} - \frac{1}{4\pi} \left(1 + \sqrt{1 - \zeta} \right) + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\zeta} \int_1^{1/\zeta} \chi^{-1/2} K(\chi^{-1/2}) d\chi, \quad (8.3)$$

wobei

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - x^2 \sin^2(\phi) \right)^{-1/2} d\phi \quad (8.4)$$

ein vollständiges elliptisches Integral erster Art ist. Aus den theoretischen geometrischen Abmessungen (s. dazu Tab. 4.1) und der Dielektrizitätskonstanten von Polyethylen ergeben sich für die Flächen: $A_1 = 0.0245 \text{ m}^2$ und $A_2 = 0.0589 \text{ m}^2$ ($\Rightarrow A_{ges} = 0.0834 \text{ m}^2$) und für die Umfänge: $C_1 = 0.3927 \text{ m}$ und $C_2 = 0.6084 \text{ m}$ ($\Rightarrow C_{ges} = 1.0011 \text{ m}$). Die Länge der Grenzfläche ist $L_{RS} = 0.25 \text{ m}$. Mit $\zeta = 0.583$ berechnet sich $\nu(\zeta)$ zu 0.07042 . Durch die Anpassung von Gl. (8.1) an die gemessene integrierte Niveaudichte erhält man für die Gesamtfläche $A_{ges,exp} = 0.0832 \text{ m}^2$ und für den Gesamtumfang $C_{ges,exp} = 1.4362 \text{ m}$. Es zeigt sich, daß die angepaßte Fläche sehr gut mit den theoretischen Vorgaben verträglich ist, während beim Umfang eine deutliche Abweichung auftritt.

Berechnet man die Nächste-Nachbar-Verteilung (NND) aus den mit Gl. (8.1) entfalteten Frequenzdaten für das kreisförmige Stufenbillard, so erhält man eine Verteilung, die sich grundsätzlich von der des reinen Kreisbillards (reguläres System), die durch eine Poisson-Verteilung gegeben ist, unterscheidet. In Abb. 8.1 sind zum Vergleich die Verteilungen vom reinen System und dem Stufenkreisbillard gegenübergestellt. Beschreiben läßt sich die Verteilung des Stufenbillards durch eine 2-GOE-Verteilung [13], die nichts anderes ist, als eine Überlagerung von zwei GOE-Kurven aufgrund der noch im System vorhandenen Symmetrie (gerade und ungerade Parität). Es zeigt sich also, daß das reguläre Verhalten des reinen Systems durch das Einbringen des dielektrischen Halbkreises gestört wird. Das System wird zu einem chaotischen System, da die ursprünglich stabilen klassischen Bahnen an der Grenzfläche durch Reflexion und Transmission stark beeinflußt werden. Dasselbe Verhalten wird auch in der Σ^2 -Statistik sichtbar, die in Abb. 8.2 dargestellt ist. Theoretische Untersuchungen zu diesem Billardsystem bestätigen dieses Ergebnis [119, 123].

Wie in den Niveaustatistiken, so müßten auch im Längenspektrum des Strahl-

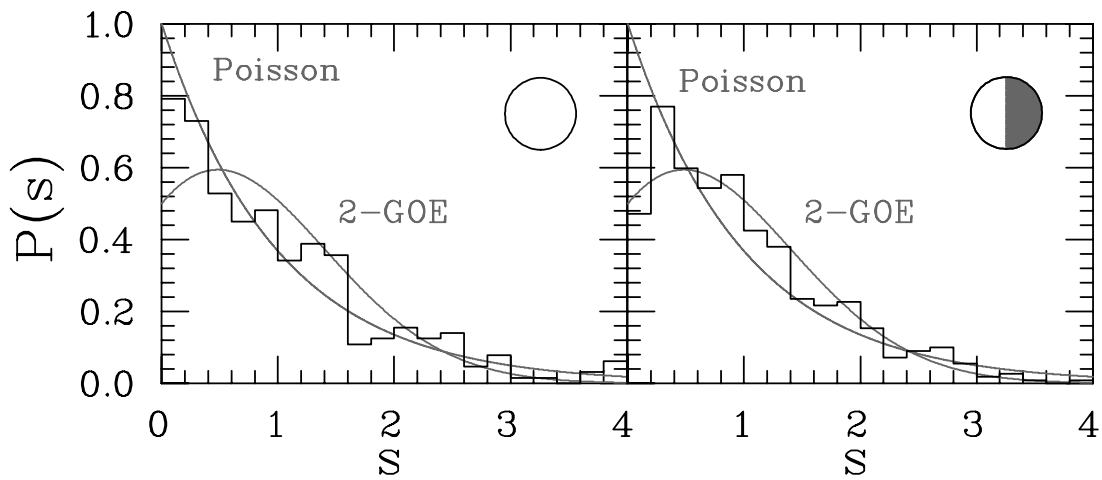


Abb. 8.1: Nächste-Nachbar-Verteilung $P(s)$ für das reine Kreisbillard (links) und das Stufenbillard (rechts). Neben den Daten sind auch noch die beiden Grenzverteilungen, Poisson für ein reguläres System und 2-GOE für ein chaotisches System mit zwei unabhängigen Symmetrieklassen, eingezeichnet.

enspaltungsbillard der Einfluß der nicht-Newtonschen Bahnen sichtbar werden, d.h. bei den Längen dieser Orbits sollten Peaks erscheinen. Um dies zu überprüfen wird die Fourier-Transformation des entfalteten fluktuierenden Anteils gebildet und in Abb. 8.3 mit dem Längenspektrum des reinen Kreisbillards (vergl. a. Kap. 6.2.1) verglichen.

Deutlich ist ein Unterschied zwischen den beiden Längenspektren zu sehen. Im kreisförmigen Stufenbillard hat kein einziger Orbit des reinen Systems überlebt. Des weiteren sind die Bahnen in diesem Billard, unabhängig ob Newtonsche oder nicht-Newtonsche Bahnen, deutlich instabiler als im ungefüllten Kreisbillard (zu sehen an der Amplitude der Peaks). Dies bestätigt auch das Ergebnis der Niveaufluktuationsanalyse, das besagt, daß das Stufenbillard ein chaotisches System ist. In Abb. 8.4 sind einige periodische Bahnen beider Kreisbillards aufgeführt. Während die Bahnen des reinen Systems gemäß Gl. (6.8) bestimmt wurden, existiert zur Berechnung der periodischen Orbits im Stufenbillard keine Vorschrift; dort wurden sie durch geometrische Überlegungen bestimmt und sind somit nicht vollständig. Die Länge der einzelnen Orbits im Stufenbillard setzt sich aus zwei Anteilen zusammen

$$l_{PO} = l_{PO, \text{Vakuum}} + \sqrt{\epsilon} l_{PO, \text{Dielektrikum}} , \quad (8.5)$$

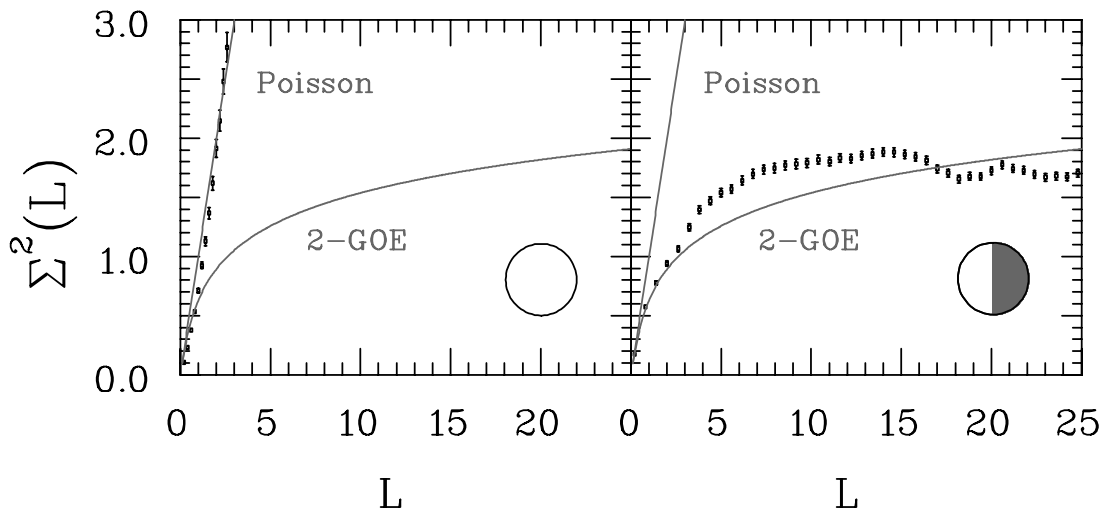


Abb. 8.2: Σ^2 -Statistik für das reine Kreisbillard (links) und das Stufenbillard (rechts). Zusätzlich zu den Daten sind auch wieder die beiden Grenzverteilungen eingezeichnet (Poisson/2-GOE).

wobei $l_{PO,Vakuum}$ die geometrische Bahnlänge des periodischen Orbits ist, die im Vakuumteil des Billards verläuft und $l_{PO,Dielektrikum}$ die geometrische Bahnlänge im Dielektrikum ist. Demnach bestimmt sich die Länge der periodischen Bahn aus der Summe der beiden optischen Weglängen, im Vergleich zum ungefüllten Billard, bei der die geometrische Länge gleich der optischen Länge ist.

Die im kreisförmigen Stufenbillard identifizierten Orbits kann man in zwei Kategorien einteilen: zum einen in die Newtonschen Bahnen und zum anderen in die nicht-Newtonschen Bahnen. Zu den Newtonschen Bahnen zählen die Orbits, die in beiden Hälften des Billards existieren ((a), (b), (c), (d), (e)). Dagegen sind die Bahnen (A), (B), (C), (D) und (E) eindeutig zu den nicht-Newtonschen Orbits zu zählen, da sie nur auf der Seite des Billards mit $V = V_0$ existieren, d.h. sie werden am Potentialsprung reflektiert. Bei den Orbits (1), (2), (3), (4) und (5) kann man nicht genau festlegen zu welcher Kategorie sie gehören, da das Dielektrikum als Potentialtopf aufgefaßt werden kann. Ist die Energie der Teilchen kleiner als V_0 , würde das Teilchen sich nur innerhalb des Potentialtopfs bewegen, und es wäre eine Newtonsche Bahn. Hat das Teilchen aber eine Energie, die größer als die des Potentialsprungs ist, so würde das klassische Teilchen aus dem Potentialtopf über den Potentialsprung hinweglaufen, was aber bei diesen Bahnen nicht geschieht. In diesem Fall lassen sich die Bahnen als nicht-Newtonsche Bahnen identifizieren. Aus Abb. 8.3 läßt sich ersehen, daß die nicht-Newtonschen Bahnen in der Regel

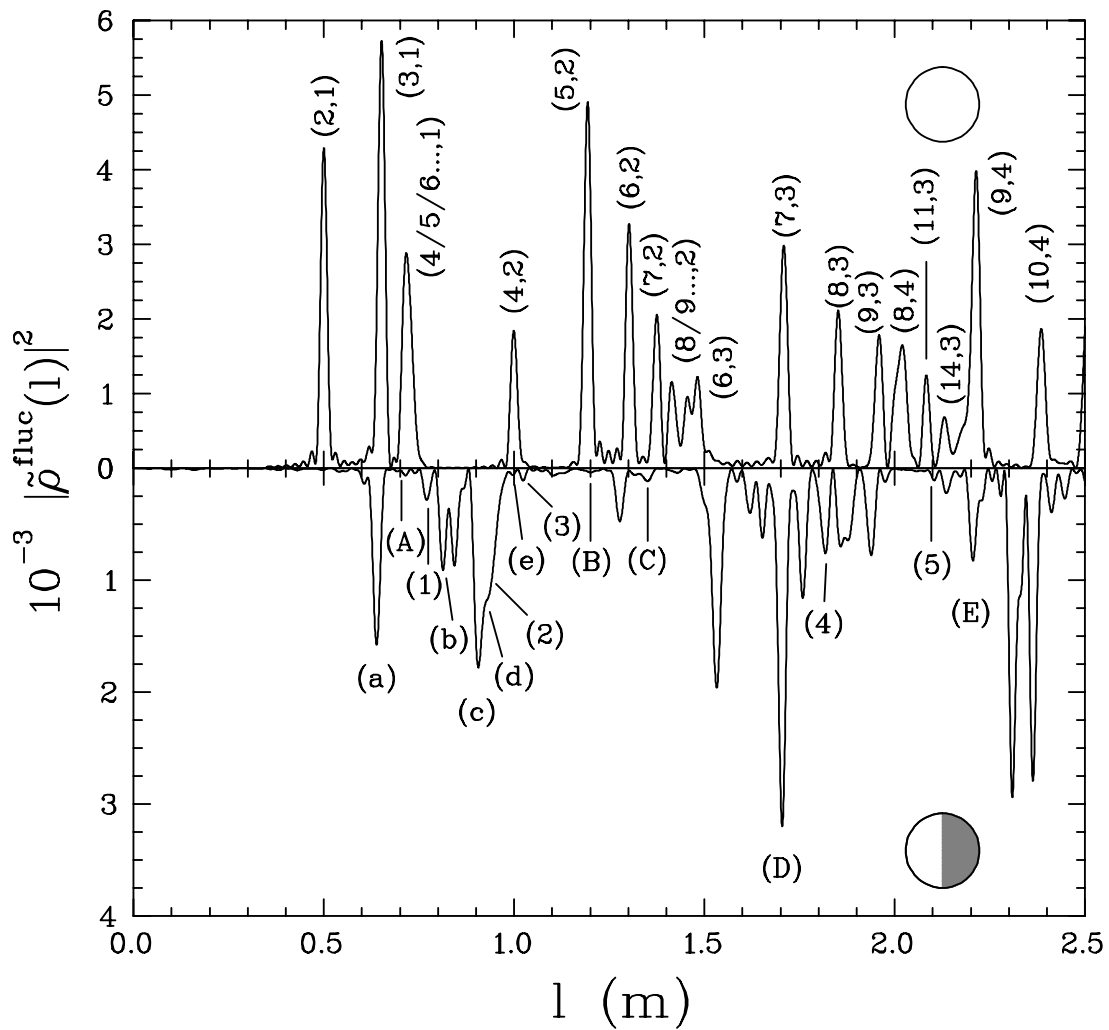


Abb. 8.3: Längenspektren der beiden Kreisbillards als Spiegelbild. Im oberen Teil ist das Spektrum des reinen Systems und im unteren Teil das Spektrum des Billards mit dielektrischem Halbkreis dargestellt. In beiden Spektren sind einige periodische Bahnen identifiziert (s. Abb. 8.4).

deutlich kleinere Amplituden als die Newtonschen Orbits besitzen, d.h. sie sind viel instabiler. Dies ist auch gut mit der relativ kleinen Reflexionswahrscheinlichkeit von Bahnen kommend vom hohen Potential am Potentialsprung verträglich. Der Peak bei 1.70 m, dem der Orbit (D) zugeordnet wurde, hat eine relativ hohe Stabilitätsamplitude, so daß davon ausgegangen werden kann, daß er nicht nur allein durch den nicht-Newtonschen Orbit zustande kommt, sondern eine Überlagerung von mehreren Orbits ist.

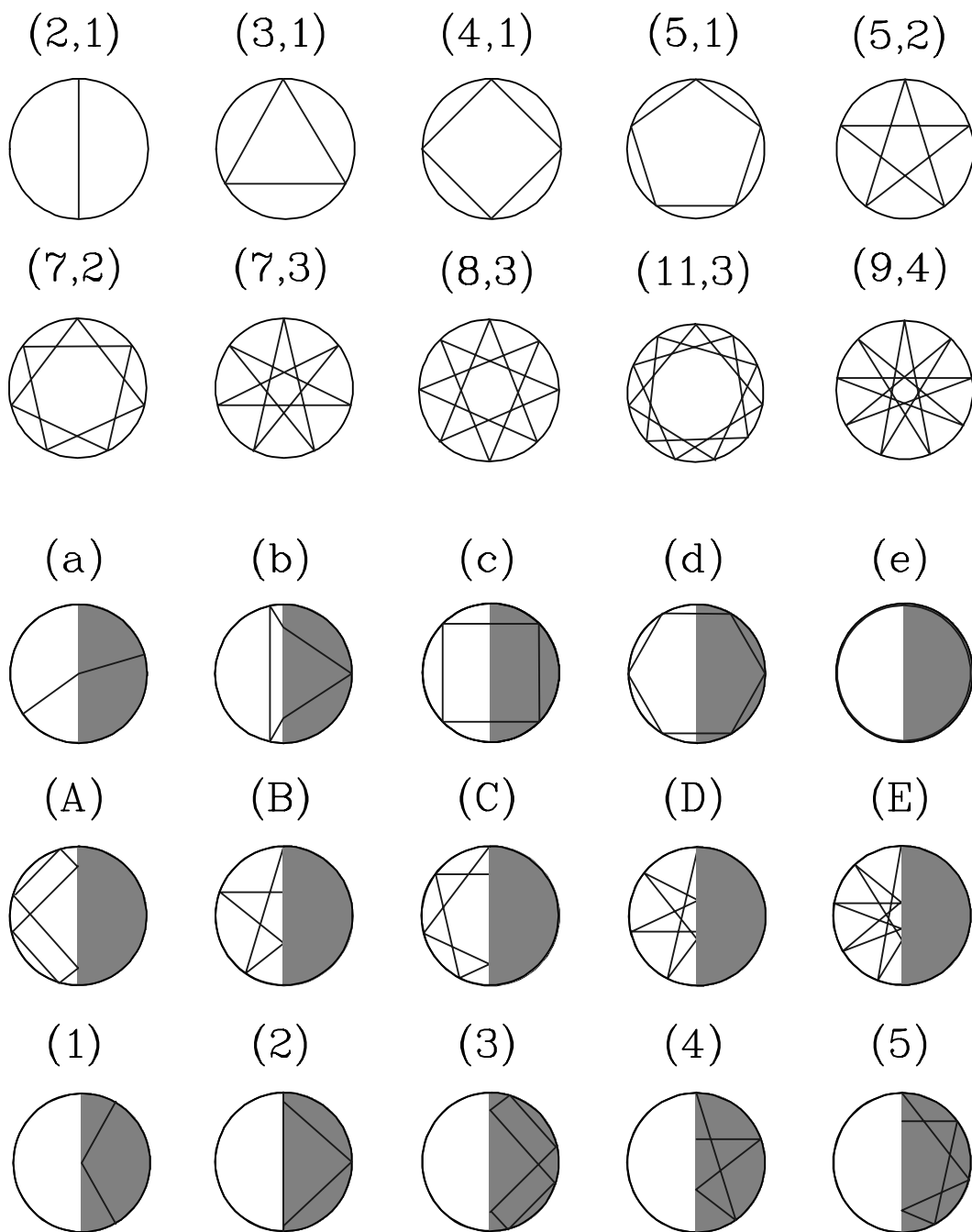


Abb. 8.4: Beispiele von periodischen Orbits in beiden Kreisbillardsystemen. Die Bezeichnung der Bahnen im reinen Kreisbillard mit (N_1/N_2) ist konsistent mit Gl. (6.8). In Abb. 8.3 sind die einzelnen Orbits identifiziert.

8.2 Sinai-Billard

Das Sinai-Billard mit verschiebbarem dielektrischen Rechteck wurde im supraleitenden Fall für drei verschiedene Positionen des Rechtecks gemessen. Die Messun-

gen wurden mit folgenden Verschiebungen durchgeführt: $v = 0.090/0.125/0.160$ m (vergl. a. Abb. 7.2). Der Schwerpunkt der folgenden Untersuchungen am Sinai-Billard ist nicht wie im Fall des Kreisbillards der Einfluß des Dielektrikums auf die Niveaustatistik, sondern auf die Längen der periodischen Orbits. Da das Sinai-Billard ohne Dielektrikum ein chaotisches System ist [104], wird sich dies durch das Einbringen des Dielektrikums kaum ändern. Das Frequenzspektrum wurde im Intervall 45 MHz - 16 GHz (wie auch für die beiden anderen Konfigurationen) gemessen, und es wurden 884 Eigenfrequenzen identifiziert. Aufgrund der Dämpfung des Dielektrikums und der relativ hohen Niveaudichte (im Vergleich zum Kreisbillard) konnten im oberen Frequenzbereich trotz vier Antennen und supraleitender Messung nicht alle Resonanzen aufgelöst werden. Um das Spektrum zu entfalten, wurde auch bei diesem System die modifizierte Weyl-Formel (Gl. (8.1)) verwendet. Der Vergleich zwischen den angepaßten und den theoretischen Geometrieparametern zeigt, daß der aus der Messung bestimmte Flächen-term ($A_{ges,exp} = 0.1041$ m²) gut mit der theoretischen Vorgabe ($A_{ges} = 0.1106$ m²) übereinstimmt. Beim Umfangsterm kommt es wie beim Stufenkreisbillard zu Abweichungen, die aber auf das nicht ganz vollständige Spektrum zurückzuführen sind ($C_{ges} = 1.3298$ m und $C_{ges,exp} = 1.7841$ m). Berechnet man aus den entfaltenen Daten die Nächste-Nachbar-Verteilung, so erhält man, genau wie für das reine Sinai-Billard, eine GOE-Verteilung der Abstände. In Abb. 8.5 sind die Verteilungen beider Systeme gegenübergestellt. Bei der Berechnung der Verteilungen wurden die Bouncing Ball Orbits (vergl. Kap. 3.2) unberücksichtigt gelassen. Für das reine Billard ist eine vollständige Entfernung der BBO aufgrund der Kenntnis der Bildungsvorschrift möglich, die aber für die Raysplitting-Billardards aufgrund der Reflexion bzw. Transmission an der Grenzfläche Vakuum/Dielektrikum nicht mehr gültig ist. Für einen besseren Vergleich wurden deshalb die BBO in keinem der untersuchten Billards extrahiert.

Die Position des Dielektrikums im Sinai-Billard hat weder auf die Anzahl noch auf die Verteilungen der Niveaus einen Einfluß, obwohl sich die einzelnen Resonanzlagen ändern. In allen drei untersuchten Fällen wurden in den gemessenen Spektren ungefähr die gleiche Anzahl von Resonanzen (jeweils ca. 890) identifiziert. Auch bei der Entfaltungsprozedur gibt es zwischen den Billards keinen signifikanten Unterschied, da sich weder Fläche noch Umfang ändern. In den Nächste-Nachbar-Verteilungen erhält man jeweils auch die für chaotische Systeme

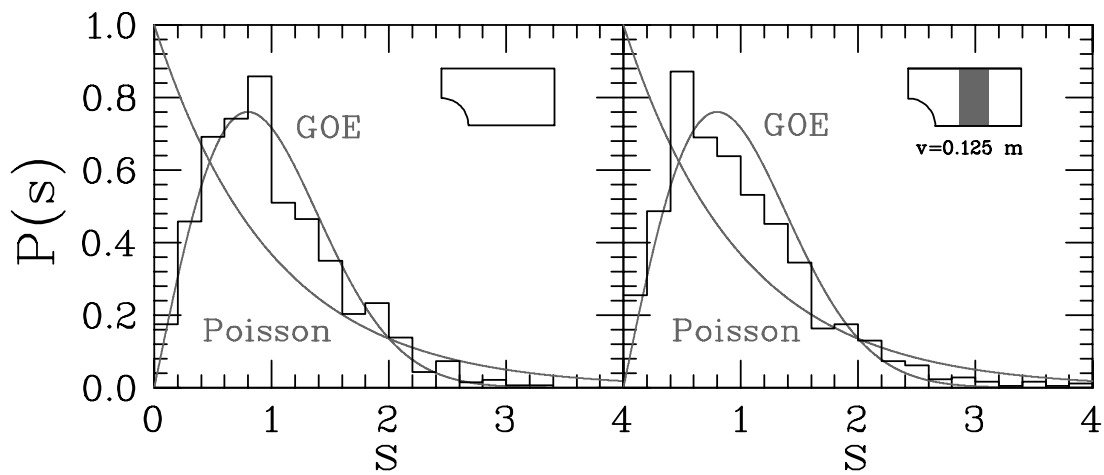


Abb. 8.5: Nächste-Nachbar-Verteilung $P(S)$ für das reine Sinai-Billard (links) und das Sinai-Billard mit dielektrischen Rechteck (rechts) mit einer Verschiebung $v = 0.125$ m. Wiederum sind neben den Daten die Grenzverteilungen für reguläre und chaotische Systeme eingezeichnet.

me typische GOE-Verteilung.

Anders sieht es aus, wenn man die Längenspektren der untersuchten Systeme untereinander vergleicht. In Abb. 8.6 ist neben den Längenspektren der drei Raysplitting-Billards auch noch das Spektrum des reinen Sinai-Billards dargestellt. Betrachtet man sich die Längenspektren der drei Raysplitting-Systeme im Vergleich zu dem reinen System, so fällt auf, daß zahlreiche neue Bahnen entstanden sind. Im Unterschied zu den Kreisbillards hat das Einbringen des Dielektrikums aber keinen so starken Einfluß auf die Stabilität der Orbits und somit auf die Dynamik des Systems, wie bereits in den Nächsten-Nachbar-Verteilungen gezeigt. In Abb. 8.7 sind Beispiele einiger periodischer Bahnen des reinen Sinai-Billards (obere Reihe) und des Sinai-Raysplitting-Billards mit einer Verschiebung $v = 0.125$ m dargestellt. Die Bahnen des Stufenbillards können problemlos auf die beiden anderen untersuchten Systeme mit den Verschiebungen des Dielektrikums $v = 0.090$ m und $v = 0.160$ m übertragen werden. In Abb. 8.6 sind die dargestellten Orbits identifiziert und kenntlich gemacht. Ein Orbit, der in allen Billardsystemen (mit und ohne Dielektrikum) vorkommt, ist der BBO (α) bzw. (a). Ebenso wie beim kreisförmigen Stufenbillard lassen sich die einzelnen Orbits wieder in drei Kategorien unterteilen: Newtonsche Bahnen ((a), (b), (c), (d)), nicht-Newtonsche Bahnen ((A), (B), (C), (D)) und Bahnen, die in Abhängigkeit der

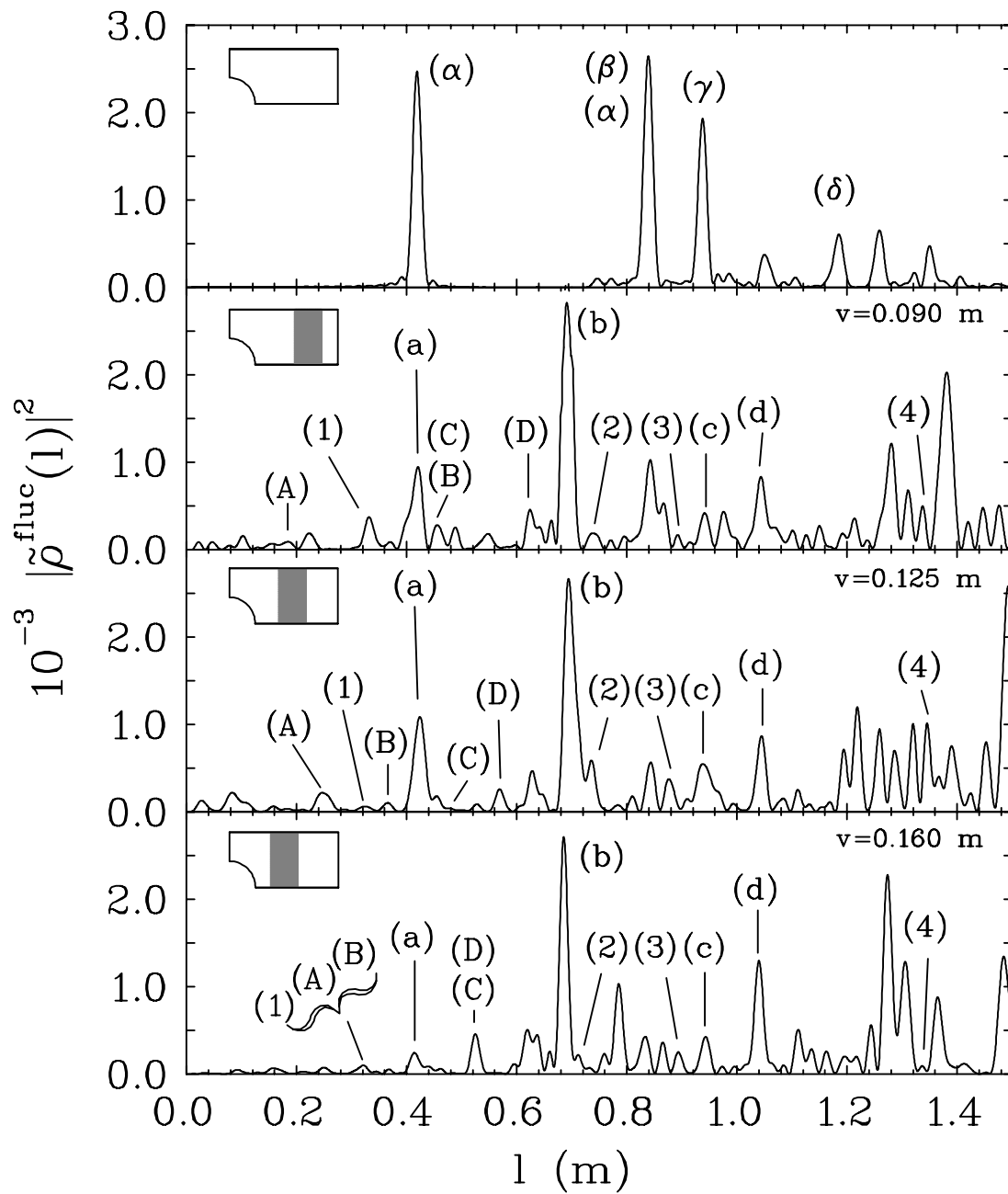


Abb. 8.6: Längenspektren des reinen Sinai-Billard (oben) sowie der drei Raysplitting-Systeme mit unterschiedlicher Verschiebung v . Die in Abb. 8.7 dargestellten periodischen Bahnen sind in den Längenspektren markiert.

Energie des klassischen Teilchens entweder Newtonsche bzw. nicht-Newtonsche Bahnen sind ((1), (2), (3), (4)) (s.a. Argumentation beim kreisförmigen Stufenbillard, Kap. 8.1). Genau diese Bahnen haben, da sie nur im Dielektrikum verlaufen,

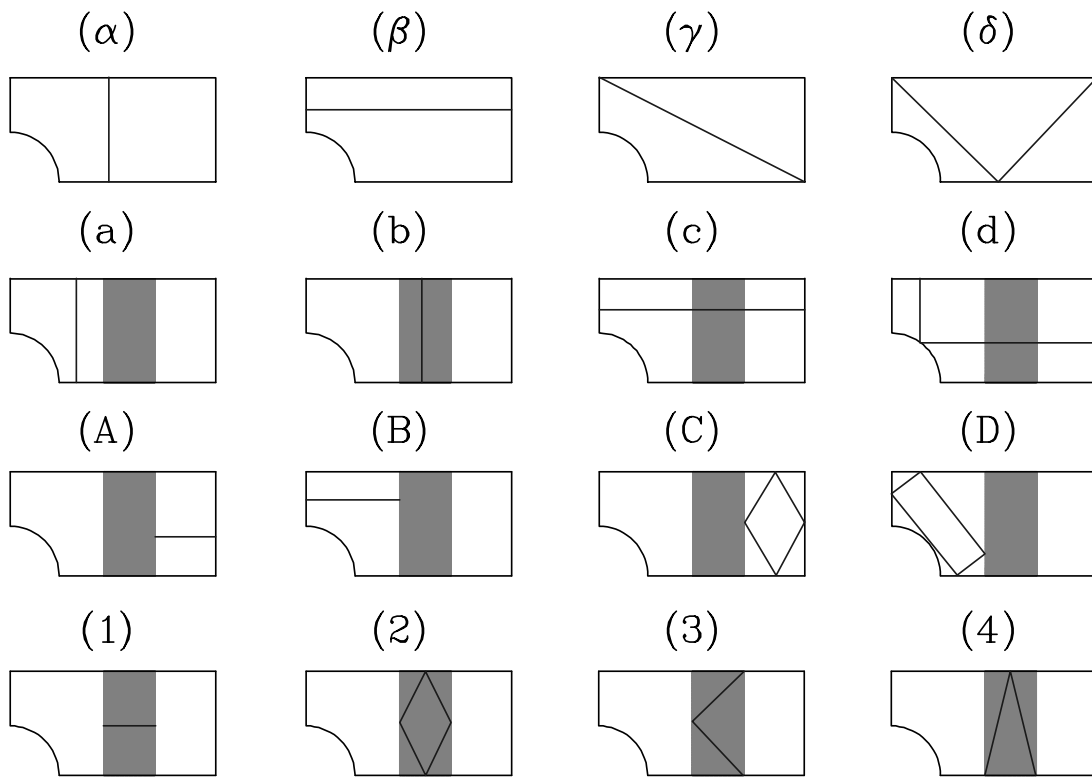


Abb. 8.7: Periodische Bahnen in dem reinen Sinai-Billard sowie in den drei untersuchten Stufenbillards. Die einzelnen Bahnen sind in den Längenspektren (Abb. 8.6) identifiziert.

in allen drei Billards die gleiche Bahnlänge. Des weiteren sind auch alle unzweifelhaft als Newtonsche Bahnen identifizierte Orbits in allen drei Billards gleich lang. Unterschiede in den Bahnlängen findet man hingegen bei den nicht-Newtonschen Bahnen, die nur im Vakuumteil des Billards verlaufen. Die Orbits (a) und (b) wurden hier zu den Newtonschen Bahnen gezählt, obwohl sie nur in einem Teil des Billards verlaufen, jedoch nicht mit der Grenzfläche Vakuum-Dielektrikum wechselwirken.

9 Schlußbemerkung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die beiden Hauptzugänge zum Thema Quantenchaos durch die Random Matrix Theory und die Periodic Orbit Theory an unterschiedlichen Systemen mit der Hilfe von Mikrowellenresonatoren untersucht. Im ersten Teil wurde zum einen gezeigt, daß bei der quantenmechanischen Übersetzung eines klassischen Systems dessen Eigenschaften sich auch noch in den Verteilungen der Eigenwerte wiederfinden lassen, und zum anderen, wie das quantenmechanische Spektrum allein aus den klassischen periodischen Bahnen rekonstruiert werden kann. Dies wurde an vier Billards aus der Familie der Limaçons experimentell durchgeführt, die das gesamte Spektrum von regulärer über gemischter bis chaotischer Dynamik abdeckten. Bei der Rekonstruktion der Spektren mit Hilfe von Spurformeln zeigte sich aber, daß die verwendete Spurformel von Ullmo *et al.* nicht vollständig in der Lage ist, das gemessene Längenspektrum zu beschreiben. Besonders bei der Stabilität einiger Bahnen traten Abweichungen zwischen Experiment und Theorie auf, die nicht nur auf geometrische Imperfektionen der verwendeten Resonatoren zurückzuführen waren. Es sieht so aus, daß von der theoretischen Seite her die Spurformel noch optimiert werden muß. Ein weiterer Nachteil war auch, daß es zur Bestimmung der einzelnen periodischen Orbits keine Bildungsvorschrift gab, um möglichst viele klassische Bahnen für die Rekonstruktion zur Verfügung zu haben und so die Spurformel bei längeren Orbitlängen zu testen. Nachdem reguläre, gemischte und chaotische zweidimensionale Billardsysteme mit der Hilfe von Spurformeln beschrieben werden konnten, stehen nach der Rekonstruktion des 3D-Sinai-Billards [31, 51], dessen Längenspektrum aber durch Bouncing Ball Orbits dominiert wurde, Experimente an einem dreidimensionalen Stadion-Billard kurz bevor [134], das durch eine geeignete Wahl des rechteckigen Quaders so gut wie keine Bouncing Ball Orbits aufweist [135]. Mit den Ergebnissen soll die semiklassische Beschreibung des Systems durch die Spurformel von Balian und Duplantier [136] getestet werden.

Der Nachteil, der bei den Untersuchungen zur Mode-Fluctuation-Distribution aufgetreten war, daß für die Statistik nicht genügend Eigenwerte zur Verfügung standen, kann durch den neuen Netzwerkanalysator der Chaosgruppe, der Frequenzen bis 50 GHz zugänglich macht, behoben werden. Es ist lediglich notwendig, ein System, das gemischtes Verhalten aufzeigt, als sehr flachen Mikrowellenresonator zu

realisieren, damit er im gesamten Frequenzbereich zweidimensional bleibt. Bei der Größe der bisher verwendeten Resonatoren und einer Höhe von 3 mm würde man bis 50 GHz ungefähr 8000 Eigenwerte erwarten. Dies würde die statistischen Aussagen weitaus genauer machen und Abweichungen vom Gauß-Verhalten, das nur chaotische Systeme aufweisen sollte, laut Theorie deutlicher zeigen.

Die im zweiten Teil der Arbeit untersuchten Phänomene zum Raysplitting zeigten deutlich den Einfluß der nicht-Newtonschen Bahnen, hervorgerufen durch die endliche Potentialstufe im Billard, auf die Niveaustatistiken sowie auf die Längenspektren der untersuchten Systeme. Auch für diese Systeme gibt es Ansatzpunkte zur Beschreibung durch Spurformeln [121]. Es handelt sich dabei um eine modifizierte Gutzwillersche Spurformel, in die sowohl die Newtonschen als auch die nicht-Newtonschen Bahnen und zusätzlich noch die Reflexionswahrscheinlichkeiten der Orbits an der Potentialstufe mit eingehen. Aufgrund der Komplexität der periodischen Bahnen in solchen Raysplitting-Systemen (es existiert im allgemeinen keine Bildungsvorschrift für die Bahnen) konnten erfolgreiche Rekonstruktionen bisher nicht durchgeführt werden.

Im Zusammenhang mit dem Phänomenen des Raysplitting im untersuchten Sinai-Billard stellen sich auch noch weitere interessante Fragestellungen: Existieren in diesen Billardsystemen auch Wellenfunktionen, die analog zu den in Kap. 8.2 beschriebenen periodischen Bahnen von der Position des Dielektrikums unbeeinflusst bleiben? Für die Messung der Wellenfunktionen in Billards allgemein steht zur Zeit aber nur ein Verfahren, nämlich die Störkörpermethode, zur Verfügung. Sie beruht auf der Tatsache, daß die in einem Hohlraumresonator angeregten stehenden elektromagnetischen Wellen durch das Einbringen eines Störkörpers in das Resonatorvolumen derart gestört werden, daß sich die Resonanzfrequenz verschiebt. In Abhängigkeit der Verschiebung kann auf die Stärke der Feldverteilung geschlossen werden [137]. Ein Nachteil ist aber, daß das Dielektrikum für Messungen nicht zugänglich ist. Um dieses Problem zu umgehen, wurde die Realisierung einer aus der Beschleunigerphysik stammenden Methode angedacht. Sie basiert auf der Messung der durch das elektromagnetische Feld in die Oberfläche der Kavität induzierten Wärmeverteilung mittels Temperaturmeßwiderständen [138–140]. Simulationen ergaben aber, daß die zur Verfügung stehende Mikrowellenleistung (einige Milliwatt) nicht ausreicht, um Temperatureffekte auf der Oberfläche detektieren zu können.

A Anhang

A.1 Numerische Bestimmung von Eigenwerten

In diesem Abschnitt soll kurz skizziert werden, wie die Eigenwerte für den Vergleich mit den experimentell gewonnenen Eigenfrequenzen in Kap. 3.2 numerisch berechnet wurden.

Ausgangspunkt der Berechnungen der Eigenwerte eines quantenmechanischen Billards mit Dirichlet Randbedingungen ist folgende Gleichung

$$\Delta\Psi(\vec{r}) + k^2\Psi(\vec{r}) = 0 \quad \text{mit} \quad \Psi(\vec{r})\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Um diese Gleichung zu lösen, wird Ψ durch eine Reihenentwicklung mit regulären Bessel-Funktionen ersetzt, so daß man

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \Theta) = \sum_{l=-L}^L a_l J_l(kr) \exp(il\Theta) \quad (\text{A.2})$$

erhält. Zur Lösung von Gl. (A.1) unter den gegebenen Randbedingungen muß noch die Berandung des Billards durch die Variable s parametrisiert werden ($0 \leq s \leq \mathcal{L}$), so daß die Entwicklung aus Gl. (A.2) zu

$$\Phi(s) = \Psi(r, \Theta) = \sum_{l=-L}^L a_l J_l(kr(s)) \exp(il\Theta(s)) \quad (\text{A.3})$$

umgeschrieben werden kann. Die in s periodische Funktion kann in eine Fourier-Serie zerlegt werden, dessen Koeffizienten durch

$$C_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mathcal{L}} ds \Phi(s) \exp(-2in\pi s/\mathcal{L}) = \sum_{l=-L}^L a_l C_{n,l}(k) \quad (\text{A.4})$$

mit

$$C_{n,l}(k) = \int_0^{\mathcal{L}} ds \exp(-2ni\pi s/\mathcal{L}) J_l(kr(s)) \exp(il\Theta(s)) \quad (\text{A.5})$$

ausgedrückt werden. Um die Randbedingung in Gl. (A.1) zu erfüllen, wird eine äquivalente Bedingung, daß alle Fourier-Koeffizienten $C_n(k)$ null zu sein haben,

zumindest für $-L \leq n \leq L$, notwendig. Daraus ergibt sich dann folgendes lineares Gleichungssystem

$$\sum_{l=-L}^L a_l C_{n,l}(k) = 0 \quad \text{für} \quad -L \leq n \leq L . \quad (\text{A.6})$$

Um nichttriviale Lösungen für dieses homogenes System zu finden, muß

$$D(k) = \det [C_{n,l}(k)] = 0 \quad (\text{A.7})$$

gelten. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß für die Lösung von Gl. (A.1) die Matrix $C_{n,l}(k)$ konstruiert und die Nullstellen der Determinanten $D(k)$ gefunden werden müssen.

Auf das Stadion-Billard soll nun diese Methode angewandt werden. Um die Berechnung der Matrix $C_{n,l}(k)$ so einfach wie möglich zu machen, muß der Ursprung des dem System zugrunde liegenden Koordinatensystems geeignet gewählt werden. Für das Stadion bietet sich dafür der Symmetriemittelpunkt an, so daß es auch relativ einfach wird, die verschiedenen Symmetrieklassen zu separieren. Mit dieser Wahl ergibt sich dann aus Gl. (A.2) für eine ungerade-ungerade Symmetrie, wie sie dem experimentell untersuchten Viertel-Stadion entspricht,

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \Theta) = \sum_{n=1}^N a_n J_{2n}(kr) \sin(2n\Theta) . \quad (\text{A.8})$$

Damit wird die Funktion $D(k)$ in einem Intervall $[k_{min}, k_{max}]$ unter der Bedingung, daß die Anzahl der Partialwellen konstant ist, tabelliert. Es gilt ferner

$$k_{min} R_{max} = L \quad \text{und} \quad k_{max} R_{max} = L + 2 , \quad (\text{A.9})$$

wobei R_{max} die größte Entfernung vom Ursprung zur Berandung ist. Im hier vorliegenden Fall ist $R_{max} = R + a$. Die Anzahl der Koeffizienten a_n kann mit $N = L/2 + dN$ angenommen werden, wobei dN typischerweise im Bereich von 0 bis 4 liegt. Die Position der Eigenwerte hängt aber nur sehr schwach vom gewählten Wert ab.

Für die Berechnung des Integrals

$$C_{n,m}(k) = \int_0^{\mathcal{L}} ds \sin(n\pi s/\mathcal{L}) J_{2m}(kr(s)) \sin(2m\Theta(s)) \quad (\text{A.10})$$

werden Punkte, die gleichmäßig auf der Berandung verteilt liegen, verwendet. Sobald der Abstand zweier benachbarter Punkte so gewählt wird, daß die schnellste Änderung der Phase in Gl. (A.10) kleiner als π ist, dann ist das Integral exakt genug, um die Positionen der Nullstellen von $D(k)$ zu erhalten. Anders ausgedrückt, die Schrittweite Δs sollte so gewählt werden, daß

$$\frac{N\pi\Delta s}{\mathcal{L}} + \frac{2N\Delta s}{d_{min}} \leq \pi \quad (\text{A.11})$$

gilt. Dabei ist d_{min} der kleinste Abstand vom Ursprung zur Berandung, im hier betrachteten Fall R . Mit Hilfe dieser Vorgaben ist eine Berechnung der ersten 1000 Eigenwerte für das Stadion relativ einfach. Die Dimensionen der benutzten Matrizen ist in der Größenordnung 100 und die Genauigkeit der Eigenwerte ist besser als 1/100 des mittleren Niveauabstands.

Literatur

- [1] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos*, 2nd revised edition, (VCH, Weinheim, 1989).
- [2] H. Haken, *Synergetik*, 3. erweiterte Auflage, (Springer, Berlin, 1990).
- [3] W. Gerok, *Ordnung und Chaos*, (Wiss. Verl.-Ges., Stuttgart, 1990).
- [4] J. Gleick, *Chaos – Making a New Science*, (Penguin Books, London, 1988).
- [5] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, (Springer, New York, 1990).
- [6] O. Bohigas and M.-J. Giannoni, in *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics*, edited by J.S. Dehesa, J.M.G. Gomez, and A. Polls, Lecture Notes in Physics Vol. **209**, p. 1 (Springer, Berlin, 1984).
- [7] A.M. Ozorio de Almeida, *Hamilton Systems: Chaos and Quantization*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [8] F. Haake, *Quantum Signature of Chaos*, (Springer, Berlin, 1991).
- [9] M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, *Chaos and Quantum Physics*, (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [10] F.J. Dyson, J. Math. Phys. **6**, 1191 (1962).
- [11] C.E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, (Academic Press, New York, 1965).
- [12] M.L. Mehta, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, (Academic Press, New York, 1967); 2nd revised and enlarged edition, (Academic Press, San Diego, 1991).
- [13] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Physics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Veros, and J. Zinn-Justin, p. 87 (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [14] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H.A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).

- [15] M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **11**, 1791 (1970).
- [16] L.P. Kouwenhoven, C.M. Marcus, P.L. McEuen, S. Tarucha, R.M. Westervelt, and N.S. Wingreen, *NATO ASI Conference Proceedings*, edited by L.P. Kouwenhoven, G Schön, and L.L. Sohn, (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- [17] H.-J. Stöckmann and J. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2215 (1990).
- [18] E. Doron, U. Smilansky, and A. Frenkel, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3072 (1990).
- [19] S. Sridhar, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 785 (1991).
- [20] S. Sridhar, D.O. Hogenboom, and B.A. Willemsen, *J. Stat. Phys.* **68**, 239 (1992).
- [21] J. Stein and H.-J. Stöckmann, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2867 (1992).
- [22] H.-M. Lauber, P. Weidenhammer, and D. Dubbers, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1004 (1994).
- [23] H.-D. Gräf, H.L. Harney, H. Lengeler, C.H. Lewenkopf, C. Rangacharyulu, A. Richter, P. Schardt, and H.A. Weidenmüller, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1296 (1992).
- [24] H. Alt, P. von Brentano, H.-D. Gräf, R.-D. Herzberg, M. Philipp, A. Richter, and P. Schardt, *Nucl. Phys. A* **560**, 293 (1993).
- [25] H. Alt, H.-D. Gräf, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, C. Rangacharyulu, A. Richter, and P. Schardt, *Phys. Rev. E* **50**, R1 (1994).
- [26] H. Alt, H.-D. Gräf, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, P. Schardt, and H.A. Weidenmüller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 62 (1995).
- [27] H. Alt, P. von Brentano, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, M. Philipp, H. Rehfeld, A. Richter, and P. Schardt, *Phys. Lett. B* **366**, 7 (1996).
- [28] H. Alt, H.-D. Gräf, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and P. Schardt, *Phys. Rev. E* **53**, 2217 (1996).
- [29] H. Alt, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, P. Schardt, and A. Wirzba, *Phys. Rev. E* **54**, 2303 (1996).

- [30] H. Alt, H.-D. Gräf, T. Guhr, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and P. Schardt, *Phys. Rev. E* **55**, 6674 (1997).
- [31] H. Alt, C. Dembowski, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, R. Schuhmann, and T. Weiland, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1026 (1997).
- [32] H. Alt, A. Bäcker, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter, *Phys. Rev. E* **58**, 1737 (1998).
- [33] H. Alt, C.I. Barbosa, H.-D. Gräf, T. Guhr, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4847 (1998).
- [34] H. Rehfeld, and H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, *Nonlinear Phenom. Complex Systems* **2**, 44 (1999).
- [35] A. Richter, in *Emerging Applications of Number Theory*, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. **109**, edited by D.A. Hejhal, J. Friedman, M.C. Gutzwiller, and A.M. Odlyzko, p. 479 (Springer, New York, 1999).
- [36] H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and C. Schmit, *Phys. Rev. E* **60**, 2851 (1999).
- [37] C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and T. Weiland, *Phys. Rev. E* **60**, 3942 (1999).
- [38] C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 867 (2000).
- [39] H. Rehfeld, C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, R. Hofferbert, and A. Richter, to be published in *Physica E* (2000).
- [40] C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, W.D. Heiss, H. Rehfeld, and A. Richter, submitted to *Phys. Rev. Lett.* (2000).
- [41] S. Drożdż, A. Trellakis, and J. Wambach, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4891 (1996).
- [42] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **9** (1927); *Acta Math.* **50**, 359 (1927).

- [43] G. Zaslavsky and H.R. Strauss, in *Irregular Atomic Systems and Quantum Chaos*, edited by J.C. Gay, p. 51 (Gordon and Breach, Philadelphia, 1992).
- [44] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. USSR **98**, 527 (1959).
- [45] M.V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **413**, 183 (1987).
- [46] R.E. Kleinman and G.F. Roach, SIAM Rev. **16**, 214 (1974); M.V. Berry and M. Wilkinson, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 15 (1984); M. Sieber and F. Steiner, Phys. Lett. A **148**, 415 (1990); B. Li and M. Robnik, CAMTP/**95-3**, chao-dyn/9507002 (1995).
- [47] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (de Gruyter, Berlin, 1981).
- [48] P. Schardt, Dissertation (1995) D17, TH Darmstadt.
- [49] H. Rehfeld, Diplomarbeit (1996), TH Darmstadt, unveröffentlicht.
- [50] H. Alt, Dissertation (1998) D17, TU Darmstadt.
- [51] R. Hofferbert, Dissertation (1999) D17, TU Darmstadt.
- [52] C. Dembowski, Diplomarbeit (1997), TH Darmstadt, unveröffentlicht.
- [53] A. Heine, Diplomarbeit (1999), TU Darmstadt, unveröffentlicht.
- [54] E.P. Wigner, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47**, 790 (1961), Nachdruck in [11].
- [55] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [56] U. Stoffregen, J. Stein, H.-J. Stöckmann, M. Kuś, and F. Haake, Phys. Rev. Lett. **74**, 2666 (1995).
- [57] P. So, S.M. Anlage, E. Ott, and R.N. Oerter, Phys. Rev. Lett. **74**, 2662 (1995).
- [58] L.A. Bunimovich, Funct. Anal. Appl. **8**, 254 (1974); Commun. Math. Phys. **65**, 295 (1979); Sov. Phys. JETP **62**, 842 (1985).
- [59] D. Alonso and P. Gaspard, J. Phys. A **27**, 1599 (1994).
- [60] H. Weyl, J. Reine Angew. Math. **141**, 1 (1912); *ibid* p. 163.

- [61] H. Weyl, *J. Reine Angew. Math.* **143**, 177 (1913).
- [62] H.P. Baltes and E.R. Hilf, *Spectra of Finite Systems*, (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976).
- [63] M. Sieber, U. Smilansky, S.C. Creagh, and R.G. Littlejohn, *J. Phys. A* **26**, 6217 (1993).
- [64] E.P. Wigner, *SIAM Rev.* **9**, 1 (1967).
- [65] M.V. Berry and M. Robnik, *J. Phys. A* **17**, 2413 (1984).
- [66] G. Lenz and F. Haake, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1 (1991).
- [67] F. Haake, G. Lenz, P. Seba, J. Stein, H.-J. Stöckmann, and K. Zyczkowski, *Phys. Rev. A* **44**, R6161 (1991).
- [68] T.A. Brody, J. Flores, J.B. French, P.A. Mello, A. Panday, and S.S.M. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).
- [69] V.K.B. Kota and S. Sumedha, *Phys. Rev. E* **60**, 3405 (1999).
- [70] M.V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 229 (1985).
- [71] F.J. Dyson and M.L. Mehta, *J. Math. Phys.* **4**, 701 (1963).
- [72] M.V. Berry, *Eur. J. Phys.* **2**, 91 (1981).
- [73] H.D. Erling, *Ann. Phys.* **41**, 467 (1942).
- [74] A. Dürer, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel un Richtscheyt in Linien, Ebenen uund Gantzen Corporen durch Albrecht Dürer zusammen gezogen und zu Nutz alle Kunstlieb Habenden mit zu gehörigen Figuren in Truck gebracht*, 2. Auflage, (Uhl, Nördlingen, 1983).
- [75] M. Robnik, *J. Phys. A* **16**, 3971 (1983).
- [76] M. Robnik, *J. Phys. A* **17**, 1049 (1984).
- [77] T. Prosen and M. Robnik, *J. Phys. A* **26**, 2371 (1993).
- [78] Baowen Li and M. Robnik, *J. Phys. A* **28**, 2799 (1995).

- [79] Baowen Li and M. Robnik, J. Phys. A **28**, 4843 (1995).
- [80] A. Bäcker, F. Steiner, and P. Stifter, Phys. Rev. E **52**, 2463 (1995).
- [81] R. Hofferbert, Diplomarbeit (1994), TH Darmstadt, unveröffentlicht.
- [82] A. Hayli, T. Dumont, J. Moulin-Ollagnier, and J.-M. Strelcyn, J. Phys. A **20**, 3237 (1987).
- [83] A. Delon, R. Just, and M. Lombardi, J. Chem. Phys. **95**, 5701 (1991).
- [84] M.V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 375 (1977).
- [85] S.W. McDonalds and A.N. Kaufman, Phys. Rev. Lett. **42**, 1189 (1979).
- [86] G. Casati, F. Valz-Gris, and I. Guarneri, Lett. Nuovo Cimento **28**, 279 (1980).
- [87] R. Aurich and F. Steiner, Physica D **39**, 169 (1989).
- [88] E.B. Bogomolny, B. Georgeot, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **69**, 1477 (1992).
- [89] J. Bolte, G. Steil, and F. Steiner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2188 (1992).
- [90] J. Bolte, Int. J. Mod. Phys. B **7**, 4451 (1993).
- [91] R. Aurich, F. Scheffler, and F. Steiner, Phys. Rev. E **51**, 4173 (1995).
- [92] P. Sarnak, Israel Math. Conf. Proc. **8**, 183 (1995).
- [93] F. Steiner, in *Schlaglichter der Forschung. Zum 75. Jahrestag der Universität Hamburg 1994*, edited by R. Ansorge, Festschrift published on the occasion of the 75th anniversary of the University of Hamburg, p. 543 (Reimer-Verlag, Berlin, 1994).
- [94] R. Aurich, J. Bolte, and F. Steiner, Phys. Rev. Lett. **73**, 1356 (1994).
- [95] A. Cheng and J.L. Lebowitz, Phys. Rev. A **44**, R3399 (1991).
- [96] E.B. Bogomolny and C. Schmit, Nonlinearity **6**, 523 (1993).
- [97] R. Aurich, A. Bäcker, and F. Steiner, Int. J. Mod. Phys. B **11**, 805 (1997).

- [98] P.M. Bleher, F.J. Dyson, and J.L. Lebowitz, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3047 (1993).
- [99] D.V. Kosygin, A.A. Minasov, and Ya.G. Sinai, *Russian Math. Surveys* **48**, 1 (1993).
- [100] P.M. Bleher, in *Emerging Applications of Number Theory*, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. **109**, edited by D.A. Hejhal, J. Friedman, M.C. Gutzwiller, and A.M. Odlyzko, p. 1 (Springer, New York, 1999).
- [101] L. Sirko and P.M. Koch, *Phys. Rev. E* **54**, R21 (1996).
- [102] H.R. Dullin und A. Bäcker, unveröffentlicht.
- [103] J. Bolte, *Open Syst. Inf. Dyn.* **6**, 167 (1999).
- [104] Y.G. Sinai, *Funct. Anal. Appl.* **2**, 245 (1968); *Russian Math. Surveys* **25**, 137 (1970); *Introduction to Ergodic Theory*, (Princeton University Press, Princeton, 1976).
- [105] H. Primack and U. Smilansky, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4831 (1995).
- [106] M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **8**, 1979 (1967).
- [107] M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **10**, 1004 (1969).
- [108] M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **12**, 343 (1971).
- [109] M.V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. Lond. A* **349**, 101 (1976).
- [110] M.V. Berry and M. Tabor, *J. Phys. A* **10**, 371 (1977).
- [111] A. Einstein, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **19**, 82 (1917); L. Brillouin, *Le Journal de Physique et le Radium* **7**, 353 (1926); J.B. Keller, *Ann. Phys. NY* **4**, 180 (1958).
- [112] D. Ullmo, M. Grinberg, and S. Tomsovic, *Phys. Rev. E* **54**, 136 (1996).
- [113] S. Tomsovic, M. Grinberg, and D. Ullmo, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4346 (1995).
- [114] G.D. Birkhoff, *Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* **1**, 85 (1935).

- [115] O. Bohigas, S. Tomsovic, and D. Ullmo, Phys. Rep. **223**, 43 (1993).
- [116] I. Kim, Diplomarbeit (1994), Universität Hamburg, unveröffentlicht.
- [117] M. Sieber and F. Steiner, Physica D **44**, 248 (1990).
- [118] T. Hesse, private Mitteilung (1997).
- [119] R. Blümel and A. Kohler, Phys. Bl. **52**, 1243 (1996).
- [120] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Quantenmechanik*, 8. berichtigte und überarbeitete Auflage, (Akademie Verlag, Berlin, 1988).
- [121] L. Couchman, E. Ott, and T.M. Antonsen, Jr., Phys. Rev. A **46**, 6193 (1992).
- [122] R. Blümel, T.M. Antonsen, Jr., B. Georgeot, E. Ott, and R.E. Prange, Phys. Rev. Lett. **76**, 2476 (1996).
- [123] R. Blümel, T.M. Antonsen, Jr., B. Georgeot, E. Ott, and R.E. Prange, Phys. Rev. E **53**, 3284 (1996).
- [124] A. Kohler and R. Blümel, Phys. Lett. A **238**, 271 (1998).
- [125] A. Kohler and R. Blümel, Phys. Rev. E **59**, 7228 (1999).
- [126] A. Kohler, G.H.M. Killesreiter, and R. Blümel, Phys. Rev. E **56**, 2691 (1997).
- [127] A. Kohler and R. Blümel, Phys. Lett. A **247**, 87 (1998).
- [128] Polyethylen PE500, Orbilan Kunststoffwerk GmbH, Rosendahl.
- [129] R.E. Prange, E. Ott, T.M. Antonsen, Jr., B. Georgeot, and R. Blümel, Phys. Rev. E **53**, 207 (1996).
- [130] L. Sirko, P.M. Koch, and R. Blümel, Phys. Rev. Lett. **78**, 2940 (1997).
- [131] Sz. Bauch, A. Błędowski, L. Sirko, P.M. Koch, and R. Blümel, Phys. Rev. E **57**, 304 (1998).
- [132] Y. Hlushckuk, A. Kohler, Sz. Bauch, L. Sirko, R. Blümel, M. Barth, and H.-J. Stöckmann, Phys. Rev. E **61**, 366 (2000).

- [133] U. Kuhl, Dissertation (Logos Verlag, Berlin, 1998).
- [134] C. Richter, Diplomarbeit, TU Darmstadt, in Vorbereitung.
- [135] T. Papenbrock, chao-dyn/9909030 (1999).
- [136] R. Balian and B. Duplantier, Ann. Phys. **104**, 300 (1977).
- [137] L.C. Maier, Jr. and J.C. Slater, J. Appl. Phys. **23**, 68 (1952).
- [138] H. Piel and R. Romijn, CERN/EF/RF **80-3** (1980).
- [139] P. Kneisel, G. Müller, and C. Reece, IEEE Trans. **MAG-23**, 1417 (1987).
- [140] C.M. Lyneis, M. Mac Ashan, and Nguyen Tuong Viet, in *Proc. of the 1972 Proton Linear Accelerator Conference Los Alamos*, p. 98 (LASL, Los Alamos, 1972).

Danksagung

Zum Schluß ist es nun Zeit all jenen zu danken, die das Entstehen dieser Arbeit mit ihrer Hilfe unterstützt haben.

Bei Herrn Professor Dr. Dr. h.c. mult. A. Richter bedanke ich mich für seine stetige Unterstützung und zahlreichen Diskussionen, die viel zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Herrn Professor Dr. J. Wambach danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Bei Herrn Dr. H.-D. Gräf bedanke ich mich für die rege Diskussionsbereitschaft sowohl bei theoretischen Fragestellungen als auch bei experimentellen Problemen.

Den Mitgliedern des Quanten Chaosteam Darmstadt (QCD), den Herren Dr. H. Alt, Dipl.-Phys. C. Dembowski und Dr. R. Hofferbert danke ich neben der ausgezeichnet guten Arbeitsatmosphäre und den hilfreichen fachlichen Diskussionen auch für den Spaß, den wir bei den zahlreichen gemeinsamen Aktivitäten hatten.

I would like to thank Professor Dr. C. Schmit for providing me with the theoretical eigenvalues of the $\gamma = 1$ Bunimovich stadium billiard.

Bei Herrn Dr. A. Bäcker möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit bei der Mode-Fluctuation-Distribution bedanken.

Herrn Professor Dr. M.C. Gutzwiller danke ich für die aufschlußreiche Diskussion zur Periodic Orbit Theory am Wissenschaftskolleg zu Berlin.

For the kind invitation to Orsay I would like to thank Professor Dr. O. Bohigas, Professor Dr. S. Tomsovic and Dr. D. Ullmo. The discussions about the trace formula for mixed systems was very helpful.

Herrn Dr. O. Titze danke ich für den unermüdlichen Ausbau der Rechnerinfrastruktur sowie für die rasche Behebung von auftretenden Speicherproblemen.

Natürlich gilt mein Dank auch allen unerwähnten Kollegen der Arbeitsgruppe für das sehr gute Arbeitsklima und die immerwährende Hilfsbereitschaft bei Problemen jeglicher Art.

Diese Arbeit wurde durch die DFG unter der Förderungsnummer Ri242/16-1 sowie durch den SFB 185 "Nichtlineare Dynamik" unterstützt.

Lebenslauf

Heiko Rehfeld

- | | |
|---------------------|--|
| 3. November 1970 | Geboren in Hamburg |
| 1977 – 1981 | Besuch der Grundschule Kronberg/Ts.-Oberhöchstadt |
| 1981 – 1990 | Besuch der Liebig-Schule (Gymnasium) in Frankfurt/M. |
| Juni 1990 | Abitur |
| 1990 – 1996 | Studium der Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt |
| Juni 1996 | Abschluß des Studiums mit Diplom |
| seit September 1996 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kernphysik der Technischen Hochschule/Universität Darmstadt |

Eidesstattliche Erklärung:

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig verfaßt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen habe.

Darmstadt, 30. Mai 2000

