

Korrekturen höherer Ordnung
zur Abstrahlung harter Photonen
in Elektron–Positron Kollisionen
bei hohen Energien

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von
Dipl.-Phys. Heike Pieschel
aus Frankfurt am Main

Referent: Prof. Dr. P. Manakos
Korreferent: Prof. Dr. P. Mulser

Tag der Einreichung: 15. 4. 2002
Tag der Prüfung: 10. 6. 2002

Darmstadt 2002
D 17

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Einführung	5
1.2	Vorbemerkung	6
1.3	Aufgabenstellung	8
1.3.1	Anwendung	8
1.4	Gliederung	8
2	Einfachabstrahlung	11
2.1	Abstrahlung eines weichen Photons	12
2.1.1	Weiche Näherung	12
2.1.2	Totaler Wirkungsquerschnitt in weicher Näherung	13
2.2	Abstrahlung eines kollinearen Photons	15
2.2.1	Vereinfachungen durch geeignete Wahl der Eichung	17
2.2.1.1	Physikalische Eichung	17
2.2.2	Näherungen für ein kollineares Photon	19
2.2.2.1	Spurterme	19
2.2.2.2	Führende kollineare Terme	20
2.2.2.3	Kreuzterme	21
2.2.3	Abstrahlung eines harten kollinearen Photons	22
2.2.3.1	Genäherter totaler Wirkungsquerschnitt	24
3	Mehrfachabstrahlungen	25
3.1	Unterscheidbarkeit der Photonen	25
3.2	Mehrfachabstrahlung von Photonen nahe der Infrarotsingularität	27
3.2.1	Näherung für zwei weiche Photonen	27
3.2.2	Inklusiver Wirkungsquerschnitt für Abstrahlung von bis zu N weichen Photonen	28
3.3	Mehrfachabstrahlung von Photonen nahe der Massensingularität	29
3.3.1	Phasenraumbereiche und strenge Ordnung	29
3.3.2	Iteration für streng geordnete Photonen in der masselosen Näherung	32
3.3.3	Wirkungsquerschnitt bei Abstrahlung von n Photonen	33
3.3.3.1	Phasenraumintegration	34
3.3.3.2	Wirkungsquerschnitt	34
3.4	Inklusiver LLA –Wirkungsquerschnitt	35
3.4.1	Die IR–Divergenz	36

3.4.2	Radiatorfunktion und GLAP-Entwicklungsgleichung	37
3.4.3	Radiatorfunktion für zwei abstrahlende Teilchen im Anfangszustand	38
3.4.4	Mehrfachzählen von Photonen	39
3.5	Beispiel: $e^+e^- \rightarrow \text{ISR} + (Z \rightarrow \nu \bar{\nu})$	40
4	Universelle NLL-Korrekturen bei Abstrahlung zweier Photonen	43
4.1	Führende Beiträge für zwei harte Photonen	44
4.2	Struktur der führenden und nächstführenden Terme im kollinearen Logarithmus	46
4.2.1	Führender logarithmischer Term	46
4.2.2	NLL-Terme für masselose Fermionen	47
4.2.3	Für massive Fermionen zusätzlich auftretende NLL-Terme	48
4.3	Abstrahlung zweier Photonen im kollinearen Bereich um die \vec{p} -Richtung	48
4.3.1	Term, Kreuz- und Austauschterm	49
4.3.2	Universelle NLL-Korrekturen ohne Beiträge in m^2 , NLL_c	50
4.3.3	Zwei-Photon-Splittingfunktion	51
4.3.3.1	Zwei-Photon-Splittingfunktion im weichen Limes	55
4.3.4	NLL-Korrekturen für $m \neq 0$, NLL_m	56
4.4	Notation für führende und nächstführende Beiträge	57
5	Universelle NLL-Korrekturen zur LLA-Radiatorfunktion	59
5.1	Zwei-Photon-Splittingfunktion	59
5.2	Symbolische Notation	60
5.3	NLL_m -Korrektur	61
5.3.1	Entwicklungsgleichung für die NLL_m -Radiatorfunktion	62
5.3.2	NLL_m -Radiatorfunktion bis in $O(\eta^2)$	63
5.4	NLL_c -Korrektur	64
5.4.1	Entwicklungsgleichung für die NLL_c -Radiatorfunktion	65
6	Numerische Tests	69
6.1	Phasenraumintegrationen für $e^+e^- \rightarrow Z + n\gamma$	69
6.1.1	Kollinear genäherter Phasenraum	71
6.2	Genäherte Wirkungsquerschnitte, universelle und nichtuniverselle Korrekturen	72
6.2.1	Genäherter Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$	72
6.2.2	Genäherter Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$	73
6.2.2.1	Näherung der Abstrahlung eines Photons	73
6.2.2.2	Näherung der Abstrahlung beider Photonen	75
6.3	Numerische Tests	79
6.3.1	Numerische Tests für masselose Fermionen	79
6.3.2	Numerische Tests für massive Fermionen	82
7	Zusammenfassung und Ausblick	87

A	Notation	91
A.1	Impulse	91
A.2	Vertizes	91
A.3	Gamma-Matrizen	92
A.4	Struktur iterierbarer Beiträge	92
B	Phasenraumintegrationen	95
B.1	Phasenraumintegration für $a \rightarrow n$ Teilchen	95
B.2	Phasenraumintegration für $2 \rightarrow 2$	96
B.3	Phasenraum für $2 \rightarrow 3$, Spezialfall $M_1 = M_2 = 0$	96
B.4	Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z$	97
B.5	Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$	98
B.6	$e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$	101
B.6.1	Genähertes Matrixelement für Abstrahlung eines zu \vec{p} kollinearen Photons	102
B.7	Nichtuniverselle Terme bei Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor- und Axialvektorkopplung	104
B.8	Bemerkungen zur Monte-Carlo-Integration	106
C	GLAP-Gleichung	109
C.1	Mellin-Transformation	109
C.2	Reihendarstellung der Γ -Funktion	110
C.3	Gribov-Lösung des LLA-Radiators für weiche Photonen	110
C.3.1	Mellin-Transformation der GLAP-Gleichung	110
C.3.2	Berechnung der Mellin-Momente	111
C.3.3	Rücktransformation und Gribov-Näherung	112
C.4	Analytische Lösung durch Iteration	113
C.5	Normierung der Radiatorfunktion	115
C.6	Nebenrechnungen	116
C.6.1	$O(\alpha^2)$ -LLA-Koeffizient von $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z+ISR}$	116
C.6.2	$O(\alpha^2)$ -NLL $_m$ -Koeffizient von $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z+ISR}$	117
C.6.3	$O(\alpha^2)$ -NLL $_{\gamma_1}$ -Koeffizient von $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z+ISR}$	118
D	Struktur der NLL-Terme	119
D.1	Struktur der NLL-Terme für $m = 0$	119
D.2	Struktur der $O(LL_c)$ - und $O(NLL_c)$ -Terme für $m \neq 0$	121
E	Abstrahlung zweier Photonen von der p -Fermionlinie	125
E.1	Abkürzungen, Vereinfachungen	125
E.2	Term, Kreuz- und Austauschterm	127
E.2.1	Term und Austauschterm	127
E.2.2	Kreuzterm	130
E.3	Beitrag T_1 aus $M_{12X}^{21X} + M_{21X}^{12X}$	133
E.4	Rechnungen zur Zwei-Photon-Splittingfunktion	136
E.4.1	Abkürzungen	138
E.4.2	Integraltypen	139

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Die Quantenelektrodynamik (QED) als Theorie der Wechselwirkung zwischen Elektronen, Positronen und Photonen ist die bisher am besten überprüfte Quantenfeldtheorie. Ist die Wechselwirkung schwach, wie dies in der QED der Fall ist, bedient man sich zur Berechnung von Streuquerschnitten störungstheoretischer Methoden, welche die Übergangsamplitude nach Potenzen der Kopplungskonstante α (Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante) entwickeln.

Die QED enthält zunächst in jeder Ordnung Störungstheorie divergente Stücke. Trotzdem ist eine Divergenzen enthaltende Theorie akzeptabel, solange diese nicht in theoretischen Vorhersagen über experimentell zugängliche Größen erscheinen. In der renormierten Theorie treten tatsächlich nur physikalisch beobachtbare Größen auf, siehe z.B. [7]. In der renormierten QED sind dann die Strahlungskorrekturen beliebiger Ordnung endlich und können im Prinzip mit beliebig hoher Genauigkeit berechnet werden. Den Erfolg der renormierten Störungstheorie in der QED beweist die exzellente Übereinstimmung von theoretischer Vorhersage und Experiment, wie beispielsweise die Beobachtungen der Lamb-Shift und des anomalen magnetischen Moments des Elektrons zeigen.

In einer Theorie mit masselosen Feldern, wie das Photon der QED und das Gluon der QCD, bleiben auch nach der Renormierung infrarote Divergenzen bestehen, welche sich aber in physikalisch beobachtbaren Prozessen aufheben. Koppelt das masselose Feld mit einem anderen masselosen Feld, wie das Photon mit einem (in erster Näherung masselosen) Fermion, oder mit sich selbst, wie das Gluon, dann gibt es eine weitere Singularität, die sogenannte kollineare Singularität. Selbige tritt auch im Hochenergiegrenzfall $m \ll E$ bei kollinearer Abstrahlung eines masselosen Teilchens von einem leichten Teilchen der (gegen E vernachlässigbar kleinen) Masse m und Energie E auf und wird daher auch als Massen-Singularität bezeichnet.

Sei p der Impuls des abstrahlenden leichten Teilchens, $p^2 = m^2$, k der des abgestrahlten masselosen Teilchens, $k^2 = 0$, dann wird der in der Übergangsamplitude auftretende Propagator mit Nenner

$$(p - k)^2 - m^2 = -2(pk) = -2EQ(1 - \beta \cos \theta_k)$$

singulär für verschwindende Energie $Q \rightarrow 0$ des Teilchens mit Impuls k . Im Limes verschwindender Masse m und somit Lorentz-Faktor $\beta \rightarrow 1$ geht der Propa-

gatornenner gegen Null, wenn \vec{k} kollinear zu \vec{p} ist. Eine derartige Übergangsamplitude enthält also je nach betrachtetem Phasenraumbereich sowohl infrarote als auch kollineare bzw. Massensingularitäten. Im totalen Wirkungsquerschnitt manifestieren sich beide Divergenzen durch typische weiche und kollineare Logarithmen $L_{\text{IR}} = \ln(Q_{\text{max}}/Q_{\text{min}})$ und $L_c = \ln(s/m^2)$ für jedes abgestrahlte masselose Teilchen.

Die physikalisch beobachtbaren Prozesse gehen einher mit der Abstrahlung einer unbestimmten, da nicht detektierbaren Zahl weicher Photonen, so daß ein von einer beliebigen Anzahl weicher Photonen begleitetes Elektron nicht von einem einzelnen Elektron zu unterscheiden ist. Die theoretischen Vorhersagen für Wirkungsquerschnitte, welche derartige weiche entartete Zustände enthalten, sind infrarotdivergent im Limes verschwindender Photonenenergien. Für eine konsequente Behandlung infraroter Divergenzen sind außer der Abstrahlung weicher reeller Photonen auch die zugehörigen virtuellen Prozesse zu berücksichtigen. Im Wirkungsquerschnitt für einen beobachtbaren Prozeß dürfen keine Infrarotdivergenzen mehr auftreten. Daß dies wirklich der Fall ist, zeigten Bloch und Nordsieck [1] mit dem Bloch–Nordsieck–Theorem, nach welchem sich die Infrarotdivergenzen in über alle entarteten Endzustände summierten Übergangsraten herausheben. So hebt sich beispielsweise auf Einschleifenniveau die Infrarotsingularität der Vertex–Korrektur des Wirkungsquerschnittes $\sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}}$ gegen die infrarote Singularität des Wirkungsquerschnittes $\sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}\gamma}$ weg. Infrarote und kollineare Singularitäten treten sowohl bei Abstrahlung durch Anfangs– als auch durch Endzustandsteilchen auf. Das Kinoshita–Lee–Nauenberg–Theorem besagt, daß in einer Theorie mit masselosen Feldern die Übergangsraten frei von infraroten Divergenzen und Massensingularitäten sind, wenn über entartete Anfangs– und Endzustände summiert wird [2].

1.2 Vorbemerkung

Wir untersuchen im folgenden hochenergetische Elektron–Positron–Vernichtungsprozesse der Art $e^+ + e^- \rightarrow X$, wobei vereinbart wird, daß es sich bei dem nicht näher spezifizierten Endzustand X um einen über die entarteten Endzustände summierten Zustand handelt, welcher nach dem Kinoshita–Lee–Nauenberg–Theorem keine infraroten oder Massendivergenzen mehr aufweist. Im Gegensatz dazu enthalten die nicht inklusiv gerechneten Anfangszustände durch Abstrahlung weicher oder kollinearere Photonen sowohl infrarote als auch kollineare Divergenzen. Nach den Faktorisierungstheoremen der QED (vgl. [3]) sind die durch kollineare oder weiche Abstrahlungen auftretenden nicht vernachlässigbaren Korrekturen höherer Ordnung in der elektromagnetischen Kopplungskonstanten α eine Eigenschaft der einlaufenden Fermionen und somit unabhängig von den bei der Elektron–Positron–Vernichtung erzeugten Endzustandsteilchen. Für weiche oder kollineare Abstrahlungen trifft in den führenden Beiträgen dieser Korrekturterme jeder Faktor α auf einen oder beide der oben bereits angesprochenen großen infraroten oder kollinearen Logarithmen L_{IR} oder L_c . Hier kann die Störungsreihe nicht mehr je nach Energie des zu betrachtenden Bornprozesses bei einer geeigneten Potenz in α abgebrochen werden, die Korrekturen aller Ordnungen in $(\alpha L_{\text{IR}})^n$ oder $(\alpha L_c)^n$ müssen berücksichtigt werden. Da eine exakte Rechnung in allen Ordnungen weder numerisch noch analytisch durchführbar ist, sind geeignete Näherungsmethoden zu entwickeln, die zumindest die führenden

Terme jeder Ordnung in α liefern und somit eine Resummation der Korrekturen ermöglichen. Allgemein ist der totale Wirkungsquerschnitt für Abstrahlung von n Photonen als eine Reihe der Form

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow X+n\gamma} &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \sum_{n_{\text{IR}}=0}^n \sum_{n_c=0}^n C_{X+n\gamma}^{(n_c, n_{\text{IR}})} \mathbf{L}_c^{n_c} \mathbf{L}_{\text{IR}}^{n_{\text{IR}}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n (\mathbf{L}_c^n, \mathbf{L}_c^{n-1}, \dots, \mathbf{L}_c^0) \cdot \begin{pmatrix} C^{(n,n)} & C^{(n,n-1)} & \dots & C^{(n,0)} \\ C^{(n-1,n)} & C^{(n-1,n-1)} & \dots & C^{(n-1,0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^{(0,n)} & C^{(0,n-1)} & \dots & C^{(0,0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{\text{IR}}^n \\ \mathbf{L}_{\text{IR}}^{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{\text{IR}}^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.1)$$

in kollinearen und infraroten Logarithmen anzusetzen, mit eindeutig festgelegten Koeffizienten $C_{X+n\gamma}^{(n_c, n_{\text{IR}})}$. Diese Koeffizienten können mittels geeigneter Näherungsverfahren aus dem Ausdruck für den Gesamtwirkungsquerschnitt (1.1) extrahiert werden.

Der führende infrarote Term $(\alpha \mathbf{L}_{\text{IR}})^n$ des totalen Wirkungsquerschnittes der Abstrahlung von n Photonen stammt aus den für verschwindende Energie aller n Photonen am stärksten divergierenden Stücken des differentiellen Wirkungsquerschnittes, ist also mit Hilfe einer sogenannten weichen Näherung berechenbar. Um auf weiche Abstrahlungen sensitive Resonanzen korrekt behandeln zu können, ist dabei der gesamte Energieverlust $(1-x)E$ bei Abstrahlung weicher Photonen über eine verringerte Schwerpunktenenergie $\sqrt{x s}$ im Bornprozeß zu berücksichtigen.

Um eine Entwicklung des totalen Wirkungsquerschnittes nach kollinearen Logarithmen zu gewinnen, müssen dagegen die kollinear führenden Terme des differentiellen Wirkungsquerschnittes identifiziert werden. Dazu wird die Anfangszustandsabstrahlung von n Photonen in demjenigen Phasenraumbereich betrachtet, in dem sie kollinear zur Flugrichtung des leichten oder masselosen abstrahlenden Fermions sind und gegeneinander streng nach ihren Transversalimpulsen geordnet. Die Koeffizienten der führenden Ordnung $(\alpha \mathbf{L}_c)^n$ in der Entwicklung des zugehörigen totalen Wirkungsquerschnittes nach dem großen kollinearen Logarithmus \mathbf{L}_c werden aus den im betrachteten Phasenraumbereich führenden Termen des differentiellen Wirkungsquerschnittes gewonnen. Diese in der sogenannten „Leading Logarithmic Approximation“, LLA, (vgl. [11], [12]) berechneten Wirkungsquerschnitte der Abstrahlung einer festen Anzahl von n Photonen im Anfangszustand werden in allen Ordnungen aufsummiert und daraus eine Entwicklungsgleichung, die Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi–(GLAP)–Gleichung für die die Abstrahlungen beschreibende Strukturfunktion hergeleitet.

Diese universelle Fermionstrukturfunktion beschreibt den in alle Ordnungen in α resummierten Beitrag der Anfangszustandsabstrahlung (Initial State Radiation, ISR) und ist mit dem Wirkungsquerschnitt des zu betrachtenden Prozesses ohne Anfangszustandsabstrahlungen $e^+e^- \rightarrow X$, im folgenden Born–Wirkungsquerschnitt genannt, zu falten:

$$\sigma_{X+\text{ISR}}(s) = \sum_{n_\gamma=0}^{\infty} \alpha^{n_\gamma} \mathbf{L}_c^{n_\gamma} \left(\sum_{n_{\text{IR}}=0}^{n_\gamma} C_{X+n_\gamma\gamma}^{(n_\gamma, n_{\text{IR}})} \mathbf{L}_{\text{IR}}^{n_{\text{IR}}} \right) = \int_0^1 \mathcal{D}(x) \sigma_X(xs) dx \quad (1.2)$$

1.3 Aufgabenstellung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, auch die in den oben angesprochenen Verfahren bisher nicht berücksichtigten Beiträge nächstführender Ordnung in den führenden Logarithmen, die sogenannten „Next to Leading Log“ (NLL)–Korrekturen, zu berechnen und auf diese Weise die bisherigen Näherungen des totalen Wirkungsquerschnittes für Abstrahlung von n Photonen weiter zu verbessern.

Wir unterscheiden bei fester Ordnung N der Abstrahlung zwei Arten universeller NLL–Korrekturen proportional $\alpha^N L_c^{N-1}$, zum einen diejenigen, die auch in der Näherung masseloser Fermionen im Anfangszustand auftreten und zum anderen solche, die erst bei Nichtvernachlässigen der Fermionmasse in Erscheinung treten. Zur einfacheren Unterscheidung benennen wir erstere mit NLL_c , letztere mit NLL_m . Ferner bezeichnen wir für masselose Fermionen die zu $\alpha^N L_c^{N-1} L_{\text{IR}}^N$ proportionalen Korrekturen mit NLL_{soft} . Diese sind von nächstführender Ordnung im kollinearen und von führender Ordnung im infraroten Logarithmus und entsprechen dem weichen Limes der oben definierten NLL_c –Korrekturen.

1.3.1 Anwendung

Bei Schwerpunktenenergien weit oberhalb der Z^0 –Resonanz werden in der e^+e^- –Paarvernichtung Z^0 –Bosonen unter Abstrahlung harter Photonen erzeugt, wodurch auch in Energiebereichen weit oberhalb der Z^0 –Resonanz Z –Physik mit ausreichend großem Wirkungsquerschnitt möglich ist. So liegt für eine Energie der Anfangszustandsteilchen im Schwerpunktsystem von 100 GeV der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ bei ungefähr 83 pb. Als konkrete Anwendungsbeispiele werden uns die beiden Prozesse $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ dienen. Wie wir später beim Vergleich der Näherungen für Abstrahlung eines harten kollinearen Photons mit der vollen Rechnung für massive Fermionen im Anfangszustand sehen werden, kann eine Korrektur der Radiatorfunktion in nächstführender Ordnung eine deutliche Verbesserung der Näherungen bewirken. Wir werden feststellen, daß an dieser Stelle zusätzlich nichtuniverselle NLL–Korrekturen auftreten können.

1.4 Gliederung

Die vorliegende Arbeit ist in drei Teile gegliedert, wobei der erste Teil im Detail den Phasenraum für Abstrahlung eines einzelnen Photons behandelt, der zweite Teil entsprechend den Phasenraum für Mehrfachabstrahlungen. Der dritte Teil wird NLL–Korrekturen zum Thema haben.

Wir betrachten in Kapitel 2 zunächst den Spezialfall der Abstrahlung eines weichen Photons von einem massiven Fermion. Bei diesem Ansatz wird der bei einer reduzierten Schwerpunktenenergie xs stattfindende Bornprozeß in jeder Ordnung α^n der Abstrahlungen mit der n –ten Potenz des Abstrahlungsbeitrags eines einzelnen weichen Photons zu multiplizieren sein, modulo statistischer Faktoren für ununterscheidbare Photonen. Dieser Abstrahlungsbeitrag enthält den bei Abstrahlung eines Photons auftretenden infrarotdivergenten Anteil. Im Anschluß wird zur Untersuchung der Massensingularität die Abstrahlung eines harten kollinearen Photons von einem massiven und einem masselosen Fermion behandelt und so der nicht mit der

Infrarotsingularität verbundene Anteil der kollinearen Divergenz gewonnen. Die in diesem Zusammenhang eingeführte Eichung ermöglicht eine einfachere Identifikation der führenden kollinearen Terme.

Nach Behandlung der Abstrahlung eines einzelnen Photons betrachten wir im zweiten Teil der Arbeit Mehrfachabstrahlungen. Kapitel 3 behandelt die Abstrahlung einer beliebigen Zahl von Photonen, wobei die führende logarithmische Ordnung im Fall weicher Photonen aus den führenden infraroten Termen, im Fall harter kollinear Photonen aus der Iteration der führenden kollinearen Stücke gewonnen wird, entsprechend der Entwicklung nach infraroten und kollinearen Logarithmen. Die Resummation der in jeder Ordnung α^n der Abstrahlungen durch den führenden kollinear-logarithmischen Ausdruck genäherten Teilwirkungsquerschnitte liefert einen Ausdruck für die bereits oben erwähnte Fermionstrukturfunktion, aus welchem wiederum die GLAP-Entwicklungsgleichung der Strukturfunktionen hergeleitet werden kann.

Im dritten Teil der Arbeit werden NLL-Korrekturen behandelt, welche im totalen Wirkungsquerschnitt eine relativ zur betrachteten Ordnung in α um Eins niedrigere Potenz in den führenden kollinearen Logarithmen aufweisen. Dazu werden in Kapitel 4 sowohl die oben mit NLL_c bezeichneten Korrekturen bei Abstrahlung von Photonen durch masselosen Fermionen als auch die durch Nichtvernachlässigen der Elektronmasse zusätzlich auftretenden NLL_m -Korrekturen untersucht und in Kapitel 5 die durch die universellen NLL-Korrekturen resultierenden Änderungen der Radiatorfunktion bzw. deren Entwicklungsgleichung behandelt. In Kapitel 6 werden dann abschließend die in Kapitel 4 berechneten universellen NLL-Korrekturen am Beispiel der Prozesse $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ numerisch überprüft. Die Betrachtung des $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnittes wird zeigen, daß wir zumindest einen Teil der nichtuniversellen Terme dadurch berücksichtigen können, daß als Bornprozeß der ohne großen Aufwand analytisch zu berechnende Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ gewählt und die Abstrahlung des zweiten Photons genähert wird.

Kapitel 2

Einfachabstrahlung

Der im Laufe dieser Arbeit zu untersuchende Prozeß wird, wie bereits in der Einleitung erwähnt, ein Elektron–Positron–Vernichtungsprozeß der Art $e^+e^- \rightarrow X$ sein. Bei dem nicht näher spezifizierten Endzustand X handelt es sich um einen über die entarteten Endzustände summierten Zustand, welcher nach dem Kinoshita–Lee–Nauenberg–Theorem keine infraroten oder Massendivergenzen mehr aufweist. Da es unser Ziel sein wird, eine verbesserte Näherung für den zugehörigen totalen Wirkungsquerschnitt bei zusätzlicher Abstrahlung einer beliebigen Anzahl von Photonen zu finden, gehen wir von einem Prozeß der allgemeinen Form $e^+e^- \rightarrow X + n\gamma$ aus. Wir betonen noch einmal, daß die nun im Endzustand auftretenden Photonen nach Voraussetzung ausschließlich von den einlaufenden Fermionen oder aus einem Zwischenzustand heraus abgestrahlt werden. Im vorliegenden Kapitel soll anhand des einfachsten Falls, der Abstrahlung eines einzigen zusätzlichen Photons, das Auftreten des mit der infraroten Divergenz verbundenen Infrarotlogarithmus L_{IR}

$$L_{\text{IR}} = \ln \left(\frac{Q_{\text{max}}}{Q_{\text{min}}} \right) \quad (2.1)$$

sowie des mit der Massensingularität verknüpften kollinearen Logarithmus L_c

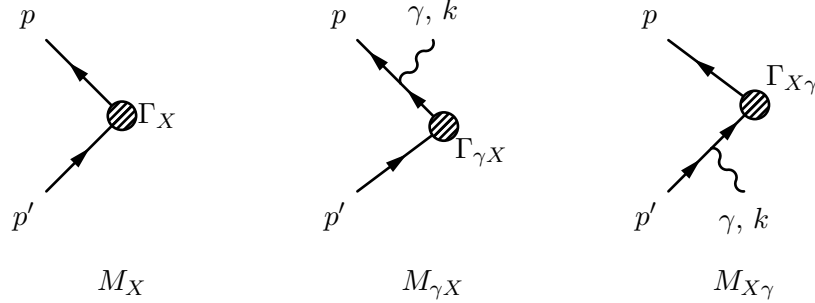
$$L_c = \ln \left(\frac{s}{m^2} \right) \quad (2.2)$$

untersucht werden. Der totale Wirkungsquerschnitt des zu betrachtenden Prozesses $e^+e^- \rightarrow X + \gamma$ als Reihe in den Logarithmen L_{IR} und L_c angesetzt, wird von der folgenden Form sein:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow X+\gamma} = \alpha \left[C_{X+\gamma}^{(1,1)} L_{\text{IR}} L_c + C_{X+\gamma}^{(1,0)} L_c + C_{X+\gamma}^{(0,1)} L_{\text{IR}} + C_{X+\gamma}^{(0,0)} \right] \quad (2.3)$$

Eine Entwicklung des quadrierten Matrixelementes — entsprechend der Entwicklung des differentiellen Wirkungsquerschnittes — nach den im Limes verschwindender Photonenergie führenden Termen, wird die mit der höchsten Potenz des infraroten Logarithmus verknüpften Koeffizienten $C_{X+\gamma}^{(1,1)}$ und $C_{X+\gamma}^{(0,1)}$ aus Gleichung (2.3) liefern. Der kollinear führende Anteil des differentiellen Wirkungsquerschnittes wird hingegen die mit der höchsten Potenz von L_c verbundenen Koeffizienten $C_{X+\gamma}^{(1,1)}$ und $C_{X+\gamma}^{(1,0)}$ ergeben. Wie wir sehen, muß der Koeffizient $C_{X+\gamma}^{(1,1)}$ der führenden logarithmischen Ordnung aus beiden Ansätzen folgen. Wir beginnen mit der Behandlung der führenden infraroten Beiträge.

Abbildung 2.1: $e^+e^- \rightarrow X$ und $e^+e^- \rightarrow X + \gamma_{\text{soft}}$



2.1 Abstrahlung eines weichen Photons

2.1.1 Weiche Näherung

Da die im Limes kleiner Photonenergie führenden Terme des differentiellen Wirkungsquerschnittes gesucht sind, soll das Photon für die nun folgenden Betrachtungen als energetisch weich angenommen werden. Mit Sicherheit sind nur diejenigen Beiträge zum gesamten Matrixelement relevant, in denen das weiche Photon einen kleinen Propagatornenner verursacht. Der bereits inklusiv gerechnete Endzustand X enthält keine der zu betrachtenden infraroten oder kollinearen Divergenzen mehr. Auch die Abstrahlung eines weichen Photons aus einem Zwischenzustand heraus kann keinen kleinen Propagatornenner bewirken, so daß die divergenten Anteile aus denjenigen Beiträgen des quadrierten Matrixelementes stammen müssen, in denen das Photon an eines der einlaufenden Fermionen koppelt. Dieses einlaufende Fermion kann auch nach Abstrahlung des Photons als näherungsweise on shell angesehen werden, da der Bruchteil $(1-x)$ der an das Photon abgegebenen Anfangsenergie im Grenzfall sehr weicher Photonen gegen Null, bzw. $x \rightarrow 1$ geht. Ausgangspunkt ist somit ein genähertes Matrixelement der Form

$$\mathcal{M}_{X+\gamma_{\text{soft}}} = M_{\gamma X} + M_{X\gamma} \quad (2.4)$$

(s. Abbildung 2.1). Im weichen Grenzfall kann

$$\Gamma_{\gamma X}(s) \approx \Gamma_X(xs) \approx \Gamma_{X\gamma}(s)$$

gesetzt werden und wir rechnen daher im folgenden in guter Näherung mit einem Matrixelement

$$\mathcal{M}_{X+\gamma_{\text{soft}}}^{(ss')} = e\bar{v}(p, s) \left[\not{\epsilon} \frac{(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2} \Gamma_X + \Gamma_X \frac{(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p'-k)^2 - m^2} \not{\epsilon}' \right] u(p', s') \quad (2.5)$$

Unter der Annahme, daß die Photonenergie klein gegen alle anderen auftretenden Energien ist, folgt durch Vernachlässigen von k im Zähler und nachfolgender Anwendung der Dirac-Gleichung (vergl. [4])

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X+\gamma_{\text{soft}}}^{(ss')} &\approx e \left(\frac{(\epsilon p)}{(kp)} - \frac{(\epsilon p')}{(kp')} \right) \bar{v}(p, s) \Gamma_X u(p', s') \\ &= \mathcal{M}_\gamma(x) \cdot \mathcal{M}_X^{(ss')}(xs) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Gleichung (2.6) ist zu entnehmen, daß der Beitrag der Photonabstrahlung als ein die infrarote sowie die kollineare Divergenz enthaltender multiplikativer Faktor \mathcal{M}_γ aus dem Gesamtmatrizelement herausgezogen werden kann.

Die führende infrarote Ordnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes verschwindet für ein von einem massiven Fermion in Vorwärtsrichtung abgestrahltes Photon. Dies liegt daran, daß die unphysikalischen Photonpolarisationen nicht zum quadrierten Gesamtmatrizelement beitragen, die Propagatornennern endlich bleiben, die physikalischen Polarisationsvektoren des Photons transversal zum Photonimpuls sind und daher bei kollinear Abstrahlung die Produkte (εp) und $(\varepsilon p')$ und damit das Matrizelement aus Gleichung (2.6) für physikalische Polarisationen im Limes $\theta \rightarrow 0, \pi$ gegen Null gehen.

2.1.2 Totaler Wirkungsquerschnitt in weicher Näherung

Das quadrierte und über die Photonpolarisationen

$$\sum_{s \in \text{Pol}_\gamma} \varepsilon_s^\mu \varepsilon_s^{*\nu} = -g^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

summierte Matrizelement (2.6) lautet

$$\sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{\gamma X}|^2 = e^2 \left[\frac{2(pp')}{(pk)(p'k)} - \frac{m^2}{(pk)^2} - \frac{m^2}{(p'k)^2} \right] \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_X(xs)|^2 \quad (2.8)$$

Wie beispielsweise in Abbildung 2.2 zu sehen, liefert der im folgenden als „Pseudo- $O(m^2)$ -Term“ bezeichnete Ausdruck

$$\frac{m^2}{(pk)^2} = \frac{m^2}{E^2 Q^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \quad (2.9)$$

in der Nähe der kollinearen Singularität $\theta \rightarrow 0$ einen nicht vernachlässigbaren Beitrag zum differentiellen Wirkungsquerschnitt, gegen den sich der führende Term proportional $(1 - \beta \cos \theta)^{-1}$ teilweise weghebt. Dasselbe gilt natürlich auch für die entsprechenden Terme proportional $m^2(p'k)^{-2}$ und $(p'k)^{-1}$ im Bereich $\theta = O(\pi - m/E)$. Im differentiellen Wirkungsquerschnitt bzw. im quadrierten Matrizelement können folglich zwei verschiedene Sorten von Termen proportional m^2 auftreten, die „echten“ und somit generell vernachlässigbaren Beiträge in $O(m^2/E^2) =: O(m^2)$ und die von nun an als „Pseudo- $O(m^2)$ -Term“ oder $\tilde{O}(m^2)$ bezeichneten nicht vernachlässigbaren. Wie in der weiteren Rechnung deutlich wird, tragen letztere dann zum totalen Wirkungsquerschnitt in $O(m^0)$ statt in $O(m^2)$ bei, wenn das Integrationsgebiet den Bereich sehr kleiner Winkel $\theta = O(m/E)$ bzw. $\theta = O(\pi - m/E)$ beinhaltet. Diese $\tilde{O}(m^2)$ -Anteile des differentiellen Wirkungsquerschnittes werden die für massive Fermionen zusätzlich auftretenden Korrekturen nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus zum totalen Wirkungsquerschnitt liefern.

Nach Integration von (2.8) über den Photonphasenraum erhalten wir

$$\sigma_{X+\gamma_{\text{soft}}} = \frac{\alpha}{\pi} G(\cos \theta_{\text{max}}, \cos \theta_{\text{min}}) \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} dx \frac{2}{(1-x)} \sigma_X(xs) \quad (2.10)$$

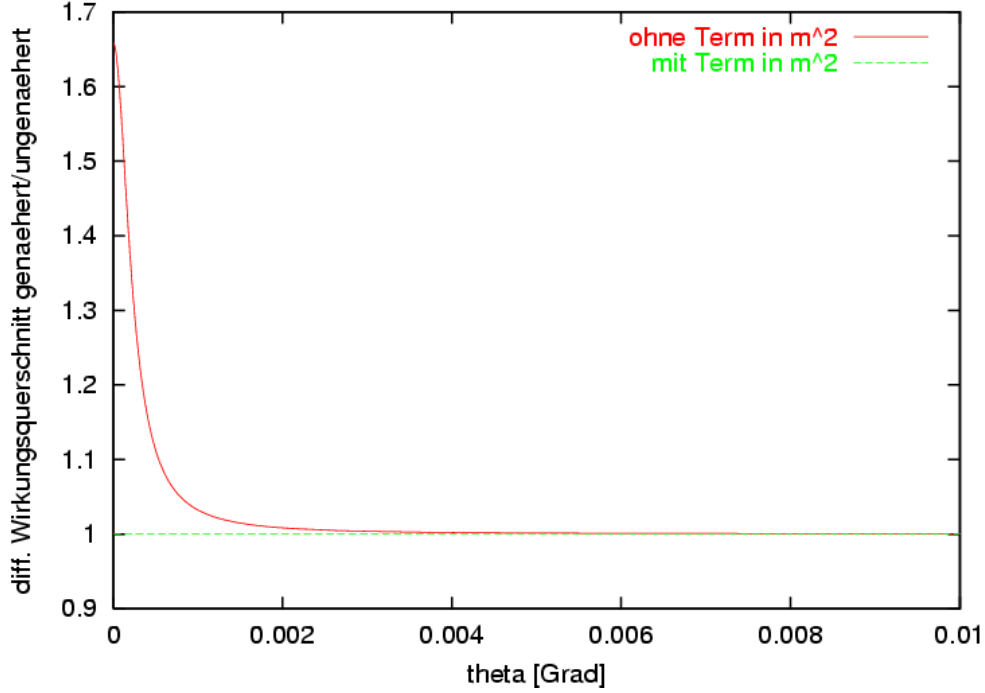


Abbildung 2.2: $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ bei $E = 100.0 \text{ GeV}$, Verhältnis von genähertem diff. zum ungenäherten diff. Wirkungsquerschnitt in Abh. vom Photon-Polarwinkel θ , Näherung mit und ohne Pseudo- $O(m^2)$ -Term

mit dem Winkelanteil

$$G(\cos \theta_{\max}, \cos \theta_{\min}) \quad (2.11)$$

$$= \left[\frac{(1 + \beta^2)}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} \right) - \frac{m^2}{\beta E^2 (1 - \beta \cos \theta)} + \frac{m^2}{\beta E^2 (1 + \beta \cos \theta)} \right]_{\cos \theta_{\max}}^{\cos \theta_{\min}},$$

welcher außer dem kollinear logarithmischen Anteil nichtlogarithmische Terme proportional m^2 enthält. Im Limes $xs \rightarrow s$ folgt bei Energieintegration von $Q_{\min} = (1 - x_{\max})E$ bis $Q_{\max} = (1 - x_{\min})E$ und Winkelintegration über den Bereich $\theta \in [0, \pi]$ für den totalen Wirkungsquerschnitt der Abstrahlung eines weichen Photons mit $s = 4E^2$ und der Entwicklung

$$\beta = 1 - \frac{m^2}{2E^2} + O\left(\frac{m^4}{E^4}\right)$$

der bekannte Ausdruck [4]

$$\sigma_{X+\gamma_{\text{soft}}} = \frac{2\alpha}{\pi} L_{\text{IR}} [L_c - 1] \sigma_X(s) \quad (2.12)$$

Wie für die weiche Näherung zu erwarten, ist dieser von der Form

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow X+\gamma} = \alpha L_{\text{IR}} \left[C_{X+\gamma}^{(1,1)} L_c + C_{X+\gamma}^{(0,1)} \right] \quad (2.13)$$

Werden hingegen im Photonmatrixelement (2.8) die Pseudo- $O(m^2)$ -Terme vernachlässigt, so entfällt der NLL-Term $\propto (\alpha L_{\text{IR}}^1 L_c^0)$ in (2.11), und wir erhalten bei Integration über den vollen Raumwinkel mit

$$\sigma_{X+\gamma_{\text{soft}}} \approx \frac{2\alpha}{\pi} L_{\text{IR}} L_c \sigma_X(s) \quad (2.14)$$

lediglich den führenden doppeltlogarithmischen Term in $\alpha L_{\text{IR}}^1 L_c^1$.

2.2 Abstrahlung eines kollinearen Photons

Im nächsten Schritt gilt es nun, die mit der Massensingularität verbundenen führenden kollinearen Beiträge zum differentiellen Wirkungsquerschnitt zu untersuchen. Wir erwarten nun ein genähertes Ergebnis der Form

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow X+\gamma} \approx \alpha L_c \left[C_{X+\gamma}^{(1,1)} L_{\text{IR}} + C_{X+\gamma}^{(1,0)} \right], \quad (2.15)$$

welches zusätzlich zum führenden doppeltlogarithmischen Term eine Korrektur in nächstführender Ordnung im infraroten Logarithmus enthält. In der Näherung masseloser abstrahlender Fermionen wird sich dies bestätigen. Rechnen wir allerdings mit massiven Fermionen im Anfangszustand, werden wir eine Möglichkeit finden, auch die Korrektur nächstführender Ordnung in $\alpha L_{\text{IR}} L_c^0$, mit anderen Worten auch den Koeffizienten $C_{X+\gamma}^{(0,1)}$ zu bestimmen. Im folgenden beschränken wir uns zunächst auf Abstrahlung eines Photons im kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung.

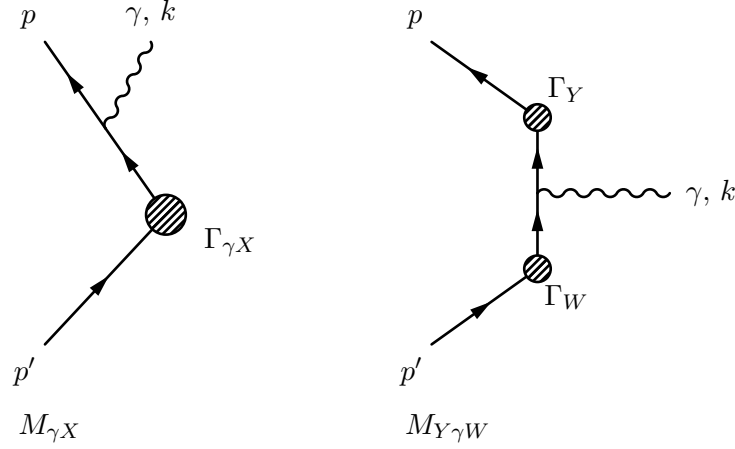
Der Bornprozeß $e^+e^- \rightarrow X$ wird aufgrund der Kollinearität des Photons in guter Näherung keinen Transversalimpuls verlieren, sondern nur vom Energieverlust durch die Abstrahlung betroffen sein, d.h. bei einer verringerten Schwerpunktsenergie $\sqrt{x}s$ stattfinden. Die bereits erwähnte kollineare oder Massensingularität tritt im Limes verschwindender Elektronmasse m im Propagatordenner

$$(p-k)^2|_{\theta=0} = -2EQ(1-\beta\cos\theta)|_{\theta=0} = -2EQ \left[\frac{m^2}{E^2} + O\left(\frac{m^4}{E^4}\right) \right]$$

auf, welcher bei nichtverschwindender Masse m zwar klein ist, aber immer endlich bleibt. Bei Annahme masseloser Fermionen im Anfangszustand ist also die Abstrahlung des Photons unter einem Mindestwinkel θ_c zur Strahlachse zu fordern. Wir stellen fest, daß in der Näherung masseloser Fermionen $\theta_c = m/E$ den aus der weichen Näherung für massive Fermionen bekannten kollinearen Logarithmus reproduziert, welcher aus der Integration von $(1 \pm \beta \cos \theta)^{-1}$ über den vollen Winkelbereich von Null bis π stammt.

Für das von der p -Fermionlinie abgestrahlte Photon sind alle Terme der führenden Ordnung in den Stücken proportional zu $Z_a/(1-\beta\cos\theta)$ oder $Z_b/(1-\beta\cos\theta)^2$ des quadrierten Matrixelementes enthalten, wobei sich Potenzen in $(1-\beta\cos\theta)$ im Nenner noch gegen Terme der Zähler Z_a und Z_b wegkürzen können. Wir unterscheiden im Matrixelement das Diagramm $\mathcal{M}_{\gamma X} = Z_{\gamma X}/(pk)$ mit Abstrahlung des kollinearen Photons von der p -Fermionlinie, die Diagramme $\mathcal{M}_{Y\gamma W}$ mit Abstrahlung des Photons aus einem Zwischenzustand und $\mathcal{M}_{X\gamma}$ mit Abstrahlung des Photons

Abbildung 2.3: Diagramme $M_{\gamma X}$ und $M_{Y\gamma W}$



von der p' -Fermionlinie, wobei wir letzteres als Spezialfall der Zwischenzustandsabstrahlung ansehen wollen. Ausgehend von einem Matrixelement

$$\mathcal{M}_{X+\gamma\text{coll}}^{(ss')} \approx e\bar{v}(p, s) \left[\not{\epsilon} \frac{(k - \not{p} + m)}{(k - p)^2 - m^2} \Gamma_{\gamma X} + \Gamma_Y \not{\epsilon} \Gamma_W \right] u(p', s') \quad (2.16)$$

für massive Fermionen sind die Terme der führenden kollinearen Ordnung des quadrierten Matrixelementes für ein zu \vec{p} kollineares Photon enthalten in

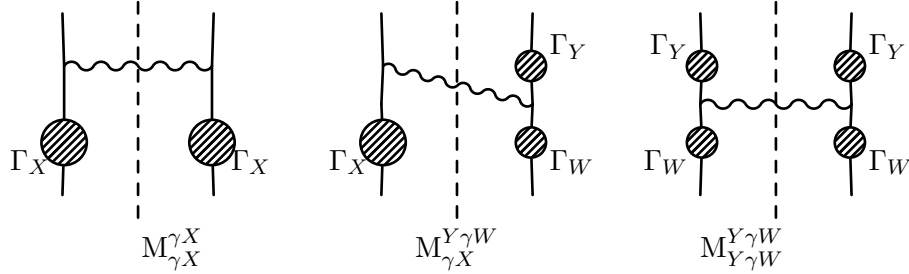
$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{X+\gamma\text{coll}}|^2 &\approx |\mathcal{M}_{\gamma X}|^2 + 2\Re[\mathcal{M}_{\gamma X} \mathcal{M}_{Y\gamma W}^*] \\ &= \frac{|Z_{\gamma X}|^2}{(pk)^2} + \frac{2}{(pk)} \Re[Z_{\gamma X} \mathcal{M}_{Y\gamma W}^*] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Impulse seien dabei gemäß (A.1) definiert mit der Photonenergie $Q := (1-x)E$. Für unter kleinem Winkel θ zur \vec{p} -Richtung abgestrahlte Photonen kann der Impuls in der sogenannten „kollinearen Näherung“ als

$$\not{k} = \frac{Q}{E} \not{p} + \left[\not{k} - \frac{Q}{E} \not{p} \right] = (1-x)\not{p} + O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \quad (2.18)$$

geschrieben werden. Quadrieren des Matrixelementes liefert die in Abbildung (2.4) dargestellten geschnittenen Diagramme, den führenden quadratischen Term $M_{\gamma X}^{\gamma X}$, den vernachlässigbaren quadratischen Term $M_{Y\gamma W}^{Y\gamma W}$, welcher keinen Faktor (pk) im Nenner enthält, sowie den Beitrag des Kreuzterms $M_{\gamma X}^{Y\gamma W} + M_{Y\gamma W}^{\gamma X} = 2\Re M_{\gamma X}^{Y\gamma W}$. Letzterer kann an dieser Stelle nicht weiter vereinfacht werden, solange keine zusätzlichen Annahmen über die Struktur von Γ_Y und Γ_W gemacht werden. Daher soll im nächsten Abschnitt zunächst eine Methode entwickelt werden, die eine einfachere Identifikation der führenden kollinearen Beiträge zum quadrierten Matrixelement gestattet.

Abbildung 2.4: Geschnittene Diagramme aus $\sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{\gamma+X}|^2$



2.2.1 Vereinfachungen durch geeignete Wahl der Eichung

Wir erinnern uns daran, daß zur Herleitung der weichen Näherung die folgende Eichung für das Photon verwendet wurde:

$$\sum_{s \in \text{Pol}_\gamma} \varepsilon_s^\mu \varepsilon_s^{*\nu} = -g^{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Das Ergebnis für das quadrierte und über alle Photon-Polarisationsrichtungen summierte Matrixelement hängt nicht mehr von der Wahl der Photon-Eichung ab. Wenn auch verschiedene Terme des Matrixelements in unterschiedlichen Eichungen unterschiedlich aussehen werden, so muß die Summe über alle Einzeltermine immer gleich sein, welche Eichung auch gewählt wurde. Damit müssen auch die führenden kollinearen Terme eichunabhängig sein. Für uns relevant ist der Fall, in dem die Summe über die zur Anfangszustandsabstrahlung beitragenden Diagramme unabhängig von der Art des Bornprozesses separat eichinvariant ist. Für die führenden logarithmischen Terme trifft dies zu. Die Eichinvarianz ist auch für die nächstführende logarithmische Ordnung gesichert, wenn eine durchgehend geladene Fermionlinie die beiden Fermionen im Anfangszustand verbindet. Der Bornprozeß kann in diesem Fall nur über ein neutrales Teilchen an obige Fermionlinie koppeln.

2.2.1.1 Physikalische Eichung

Eine mögliche Wahl geeigneter physikalischer ($\varepsilon_R^\mu, \varepsilon_L^\mu$) und unphysikalischer ($\varepsilon_+^\mu, \varepsilon_-^\mu$) Polarisationsvektoren des Photons mit Impuls

$$k^\mu = Q (1, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = Q \left(1, \hat{\vec{k}} \right) \quad (2.20)$$

ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_R^\mu(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, (-\cos \theta \cos \phi + i \sin \phi), (-\cos \theta \sin \phi - i \cos \phi), \sin \theta) \\ \varepsilon_L^\mu(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, (-\cos \theta \cos \phi - i \sin \phi), (-\cos \theta \sin \phi + i \cos \phi), \sin \theta) = (\varepsilon_R^\mu)^* \\ \varepsilon_+^\mu(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, \hat{\vec{k}} \right) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_-^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, -\hat{k}\right) \quad (2.21)$$

Die Polarisationsvektoren (2.21) erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} (\varepsilon_R k) &= (\varepsilon_L k) = (\varepsilon_+ \varepsilon_+) = (\varepsilon_- \varepsilon_-) = 0 \\ (\varepsilon_R \varepsilon_R^*) &= (\varepsilon_L \varepsilon_L^*) = -1 \\ (\varepsilon_+ \varepsilon_-) &= 1 \end{aligned}$$

und für die Polarisationssumme definieren wir

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Pol}} \varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} &:= \varepsilon_R^\mu \varepsilon_L^\nu + \varepsilon_L^\mu \varepsilon_R^\nu - \varepsilon_+^\mu \varepsilon_-^\nu - \varepsilon_-^\mu \varepsilon_+^\nu \\ &= -g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da wir wissen, daß im gesamten quadrierten Matrixelement die Beiträge der unphysikalischen Freiheitsgrade herausfallen, können wir, falls das komplette quadrierte Matrixelement $\varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} M_{\mu\nu}$ betrachtet wird, auch

$$\sum_{\text{Pol}_\gamma} \varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} M_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = (\varepsilon_R^\mu \varepsilon_L^\nu + \varepsilon_L^\mu \varepsilon_R^\nu) M_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

schreiben, dürfen uns also auf die Summation über physikalische Polarisationsrichtungen beschränken. Andererseits können wir eine allgemeine Form der Eichung mit noch nicht näher spezifizierten Polarisationsvektoren $\tilde{\varepsilon}_\mu$ wählen.

$$\sum_{\text{Pol}} \tilde{\varepsilon}^\mu \tilde{\varepsilon}^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu c^\nu + c^\mu k^\nu}{(ck)} - \frac{c^2}{(ck)^2} k^\mu k^\nu \quad (2.24)$$

Mit $c^\mu = \varepsilon_-^\mu$ als Eichvektor gilt $c^2 = 0$ sowie $(ck) = \sqrt{2}Q$. Schreiben wir $k^\mu / \sqrt{2}Q$ nach Gleichung (2.21) als ε_+^μ , dann erhalten wir für die Polarisationssumme aus Gleichung (2.24) den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Pol}} \tilde{\varepsilon}^\mu \tilde{\varepsilon}^{*\nu} &= -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu \varepsilon_-^\nu + \varepsilon_-^\mu k^\nu}{\sqrt{2}Q} \\ &= -g^{\mu\nu} + \varepsilon_+^\mu \varepsilon_-^\nu + \varepsilon_-^\mu \varepsilon_+^\nu, \end{aligned} \quad (2.25)$$

welcher nach Gleichung (2.22) äquivalent ist zu

$$\sum_{\text{Pol}} \tilde{\varepsilon}^\mu \tilde{\varepsilon}^{*\nu} = \varepsilon_R^\mu \varepsilon_L^\nu + \varepsilon_L^\mu \varepsilon_R^\nu = \sum_{\text{phys}} \varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} \quad (2.26)$$

Eine explizite Wahl neuer Polarisationsvektoren $\tilde{\varepsilon}_\mu$ ist daher nicht notwendig, uns genügt die Identität

$$\sum_{\text{phys}} \varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu \varepsilon_-^\nu + \varepsilon_-^\mu k^\nu}{\sqrt{2}Q} \quad (2.27)$$

der im folgenden als „physikalische Eichung“ bezeichneten Summation über die physikalischen Polarisationsvektoren nach Gleichung (2.21), um die Näherung für das volle quadrierte Matrixelement zu vereinfachen.

2.2.2 Näherungen für ein kollineares Photon

Sind Näherungen für den Fall eines von einem massiven Fermion im Anfangszustand kollinear abgestrahlten Photons durchzuführen, wird sich das Problem stellen, vernachlässigbare Terme zu identifizieren. Um in Spurtermen zu nähern, werden wir die Tatsache auszunutzen haben, daß in jeder Darstellung der Diracschen Gamma-Matrizen $\gamma^\mu := (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$, für ein zu \vec{p} kollineares Photon

$$\not{p}\not{k} = O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)$$

ist, was im folgenden Abschnitt in der chiralen Darstellung (vgl. Abschnitt A.3) explizit gezeigt werden soll. Da die einzelnen Darstellungen der Dirac-Matrizen über unitäre Transformationen verknüpft sind,

$$\gamma_{\text{bel. Darst.}}^\mu = U \gamma_{\text{chiral}}^\mu U^\dagger$$

erhalten wir aus dem expliziten Ausdruck für $\not{p}\not{k}$ in der chiralen Darstellung leicht die entsprechenden Ausdrücke in jeder anderen Darstellung.

2.2.2.1 Spurterme

Die Impulse der einlaufenden (massiven) Fermionen e^+ und e^- sowie des Photons im Schwerpunktsystem seien wie in Gleichung (A.1) angegeben definiert. In der chiralen Darstellung gilt dann

$$\not{p} = E \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1 - \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \beta) \\ (1 + \beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \beta) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\not{p}' = E \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1 + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \beta) \\ (1 - \beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \beta) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\not{k} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1 - \cos \theta) & -\sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & -\sin \theta e^{i\phi} & (1 + \cos \theta) \\ (1 + \cos \theta) & \sin \theta e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ \sin \theta e^{i\phi} & (1 - \cos \theta) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

und daher wird für kleine Winkel θ der Ausdruck $\not{p}\not{k}$ von $O(\theta) + O(m^2/E^2)$ sein.

$$\not{p}\not{k} = \frac{m^2}{E^2} \frac{EQ}{(1 + \beta)} \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) & \sin \theta e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta e^{i\phi} & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + EQ(1 + \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta e^{i\phi} & (1 - \cos \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \cos \theta) & -\sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& = O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)
\end{aligned}$$

und analog wird für zu \vec{p}' kollinear abgestrahlte Photonen $\not{p}'\not{k}|_{\gamma\parallel p'}$ ebenfalls von der Größenordnung $O(\theta) + O(m^2/E^2)$ sein.

2.2.2.2 Führende kollineare Terme

Wir erwarten im totalen Wirkungsquerschnitt für Anfangszustandsabstrahlung eines Photons in führender Ordnung einen großen Logarithmus L_c , der sich im differentiellen Wirkungsquerschnitt als Term in $(1 \pm \cos \theta)^{-1}$ bei masselosen, als Term in $(1 \pm \beta \cos \theta)^{-1}$ bei massiven Fermionen im Anfangszustand zeigt. Der führende Term des differentiellen Wirkungsquerschnittes wird also für ein zu \vec{p} kollinear abgestrahltes Photon mit einem Faktor $(pk)^{-1} = (EQ(1 - \beta \cos \theta))^{-1}$ behaftet sein. Direkt auf der kollinearen oder Massensingularität, $\theta = 0$, gilt

$$\left. \frac{EQ}{(pk)} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{(1 - \beta)} = \frac{2E^2}{m^2} + O(1) \quad (2.31)$$

und der führende Term wird in der Nähe der Singularität mit $E^2 m^{-2}$ gehen, daher können für Abstrahlung kollinear Photonen durch massive Fermionen die führenden Terme anhand ihres Verhaltens bei sehr kleinen Winkeln

$$\theta \ll \frac{m}{E}$$

bzw.

$$\pi - \theta \ll \frac{m}{E}$$

klassifiziert werden, bei Abstrahlung durch masselose Fermionen analog anhand des Verhaltens im Limes $\theta \rightarrow 0$, wobei in einer physikalisch sinnvollen Rechnung für $m = 0$ bei Winkeln $\theta_{\min} = m/E$ und $\theta_{\max} = \pi - m/E$ abgeschnitten wird.

Es gibt aber noch einen weiteren Beitrag im differentiellen Wirkungsquerschnitt, der in der Nähe der Massensingularität ein $O(E^2/m^2)$ -Verhalten wie die oben erwähnten Terme aufweist: einen Term der Art $m^2/(pk)^2$, wie bei der Besprechung der weichen Näherung bereits zu sehen war.

$$\left. \frac{Q^2 m^2}{(pk)^2} \right|_{\theta=0} = \frac{m^2}{E^2(1 - \beta)^2} = \frac{4E^2}{m^2} + O(1) \quad (2.32)$$

Dieser von uns als „Pseudo- $O(m^2)$ “ oder $\tilde{O}(m^2)$ bezeichnete Beitrag existiert nur im Fall massiver Fermionen im Anfangszustand und tritt außerhalb des Bereichs sehr kleiner Winkel $\theta = O(m/E)$ nur als vernachlässigbarer Term von $O(m^2)$ in Erscheinung. Genau dieser Anteil wird in der Rechnung mit massiven Fermionen für Abstrahlung eines Photons auf eine Korrektur in NLL führen.

2.2.2.3 Kreuzterme

Wir werden nun zeigen, daß Kreuzterme der Art $\sum_{\text{Pol}} M_{\gamma X} M_{Y\gamma W}^*$ des Diagramms $M_{\gamma X}$ mit einem Diagramm $M_{Y\gamma W}$ der Abstrahlung aus dem Zwischenzustand (vgl. Abbildung 2.3) für ein zu p kollinear abgestrahltes Photon in der physikalischen Eichung nicht in führender Ordnung beitragen, wenn kein weiteres Photon mit vergleichbarem Transversalimpuls abgestrahlt wird. Im Laufe der Rechnung werden wir die Ergebnisse aus Abschnitt 2.2.2 verwenden, um nichtführende Terme zu vernachlässigen, beispielsweise ist für ein zu \vec{p} kollinear abgestrahltes Photon der Ausdruck $\not{p}\not{k}/(pk)$ von $O(1)$ und trägt nicht zur führenden kollinearen Ordnung in $O(E^2/m^2)$ bei.

Wir berechnen den Kreuzterm $\sum_{\text{Pol}} M_{\gamma X} M_{Y\gamma W}^*$ allgemeiner Form in der physikalischen Eichung

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Pol}} M_{\gamma X} M_{Y\gamma W}^* &= \frac{1}{-2(pk)} \sum_{\text{Pol}} \text{tr} \{ (\not{p} - m) \not{\epsilon} (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{\epsilon}^* \bar{\Gamma}_Y \} \\ &= - \frac{[K_a + K_b + K_c]}{2(pk)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

mit den Beiträgen

$$\begin{aligned} K_a &= -\text{tr} \{ (\not{p} - m) \gamma_\mu (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \gamma^\mu \bar{\Gamma}_Y \} \\ &= -2\text{tr} \{ (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{p} \bar{\Gamma}_Y \} \\ &\quad + \underbrace{\text{tr} \{ \gamma_\mu [\not{p}\not{k} + m\not{k}] \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \gamma^\mu \bar{\Gamma}_Y \}}_{O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} K_b &= \frac{1}{(ck)} \text{tr} \{ (\not{p} - m) \not{k} (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{\epsilon} \bar{\Gamma}_Y \} \\ &= - \frac{2(pk)}{(ck)} \underbrace{\text{tr} \{ (\not{p} - m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{\epsilon} \bar{\Gamma}_Y \}}_{O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

sowie

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{(ck)} \text{tr} \{ (\not{p} - m) \not{\epsilon} (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{k} \bar{\Gamma}_Y \} \\ &= \frac{2(pk)}{(ck)} \text{tr} \{ (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{k} \bar{\Gamma}_Y \} \\ &\quad - \frac{1}{(ck)} \underbrace{\text{tr} \{ \not{\epsilon} [\not{p}\not{k} + m\not{k}] \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{k} \bar{\Gamma}_Y \}}_{O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

und setzen die Ergebnisse in Gleichung (2.33) ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{Pol}} M_{\gamma X} M_{Y\gamma W}^* &= -\frac{1}{2(pk)} \left[-2\text{tr} \{ (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{p} \bar{\Gamma}_Y \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(pc)}{(ck)} \text{tr} \{ (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \not{k} \bar{\Gamma}_Y \} \right] + \frac{O(E^2\theta) + O(m^2)}{(pk)} \\
&= \frac{1}{(pk)} \text{tr} \left\{ (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_W \left[\not{p} - \frac{(pc)}{(ck)} \not{k} \right] \bar{\Gamma}_Y \right\} + O(1) \\
&= O(1)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Damit ist gezeigt, daß $\sum_{\text{Pol}} M_{\gamma X} M_{Y\gamma W}^*$ für ein annähernd kollineares Photon nicht von führender Ordnung sein kann, da bei unserer Wahl des Eichvektors als $c^\mu = (1, -\hat{k})/\sqrt{2}$ in (2.37)

$$\not{p} - \frac{(pc)}{(ck)} \not{k} = \not{p} - \frac{2E}{2Q} \cdot \frac{Q}{E} \not{p} + O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) = O(\theta) + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \tag{2.38}$$

gilt. Die Terme führender Ordnung proportional $(pk)^{-1}$ in $\sum_{\text{phys}} M_{\gamma X} M_{Y\gamma W}^*$ fallen somit weg und es bleiben nur vernachlässigbare Terme der Größenordnung

$$(O(E^2\theta) + O(m^2)) / (pk) =: O(1)$$

übrig.

Obige Argumentation gilt für den Fall, daß kein weiterer Propagator der Größenordnung von $1/(pk)$ auftritt, wenn also die Transversalimpulse aller weiteren abgestrahlten Photonen wesentlich größer als die des hier betrachteten Photons sind.

2.2.3 Abstrahlung eines harten kollinearen Photons

Wie in Abschnitt 2.2.2.3, gezeigt wurde, tragen in der physikalischen Eichung keine Kreuzterme des führenden Diagramms $M_{\gamma X}$ mit Diagrammen bei, in denen ein zu \vec{p} kollineares Photon aus einem Zwischenzustand abgestrahlt wird, wobei hier auch das Diagramm $M_{X\gamma}$ der Abstrahlung des kollinearen Photons von der zweiten Fermionlinie als Zwischenzustandsabstrahlung zu werten ist. Somit sind in der physikalischen Eichung die führenden Beiträge der Abstrahlung eines kollinearen Photons allein durch das quadrierte und polarisationssummierte Diagramm $M_{\gamma X}$ gegeben, falls das betrachtete Photon einen deutlich kleineren Transversalimpuls als alle eventuell zusätzlich abgestrahlten Photonen aufweist oder das einzige von der p -Fermionlinie abgestrahlte Photon ist. Wir klassifizieren die im quadrierten Matrixelement auftretenden Terme nach ihrem Verhalten bei kollinearen Winkeln und vernachlässigen später alle Stücke, die nach den in Abschnitt 2.2.2.2 dargestellten Kriterien im differentiellen Wirkungsquerschnitt nicht führend sein können.

Ausgehend von einer Zerlegung des Matrixelementes $M_{\gamma X}^{(ss')}$ in einen zu Q^{-1} proportionalen Anteil $\mathcal{M}_{(1)}^{(ss')}$ und einen Anteil $\mathcal{M}_{(2)}^{(ss')} \propto Q^0$

$$M_{\gamma X}^{(ss')} = e\bar{v}(p, s) \not{\epsilon} \frac{(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2} \Gamma_{\gamma X} u(p', s')$$

$$= \mathcal{M}_{(1)}^{(ss')} + \mathcal{M}_{(2)}^{(ss')} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(1)}^{(ss')} &= \frac{e(p\varepsilon)}{(pk)} \bar{v}(p, s) \Gamma_{\gamma X} u(p', s') \\ \mathcal{M}_{(2)}^{(ss')} &= -\frac{e}{2(pk)} \bar{v}(p, s) \not{k} \Gamma_{\gamma X} u(p', s') \end{aligned} \quad (2.40)$$

berechnen wir das quadrierte, über die Teilchenpolarisationen summierte Matrixelement. Aus dem ersten Stück $\mathcal{M}_{(1)}$ wird der führende infrarote Beitrag in Q^{-2} zum quadrierten Matrixelement stammen, aus $\mathcal{M}_{(2)}$ ein Beitrag in Q^0 ,

$$\sum_{\text{phys}} |\mathcal{M}_{(1)}|^2 = e^2 \left[\frac{2(pc)}{(ck)(pk)} - \frac{p^2}{(pk)^2} \right] \text{tr} \{ (\not{p} - m) \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_{\gamma X} \} \quad (2.41)$$

$$\sum_{\text{phys}} |\mathcal{M}_{(2)}|^2 = -\frac{e^2}{(pk)} \text{tr} \{ \not{k} \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_{\gamma X} \} \quad (2.42)$$

sowie aus dem Mischterm ein Beitrag in Q^{-1} .

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{phys}} \left[\mathcal{M}_{(1)} \mathcal{M}_{(2)}^* + \mathcal{M}_{(2)} \mathcal{M}_{(1)}^* \right] \\ &= \frac{e^2 p^2}{(pk)^2} \text{tr} \{ \not{k} \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_{\gamma X} \} - \frac{me^2}{(pk)} \text{tr} \{ \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_{\gamma X} \} \\ &\quad - \frac{e^2}{(ck)(pk)} \text{tr} \{ [(ck)(\not{p} - m) - (pk)\not{p} + (pc)\not{k}] \Gamma_{\gamma X} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_{\gamma X} \} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Damit folgt unter Verwendung der kollinearen Näherung nach Gleichung (2.18) und der Tatsache, daß der Ausdruck — mit den Abkürzungen $\hat{p} := \vec{p}/E$, $\hat{k} := \vec{k}/Q$ und $\vec{\gamma} := (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ —

$$\begin{aligned} \frac{1}{(pk)} \left[-\not{p} + \frac{(pc)}{(ck)} \not{k} + \frac{(pk)}{(ck)} \not{p} \right] &= \frac{\beta E}{(pk)} \left[\hat{p} - \hat{k} \cos \theta \right] \vec{\gamma} \\ &= \frac{O(E^2 \theta) + O(m^2)}{(pk)} = O(1) \end{aligned} \quad (2.44)$$

im kollinearen Winkelbereich von nichtführender Ordnung ist, für das komplette Matrixelement das Ergebnis

$$\sum_{\text{phys}} |\mathcal{M}_{\gamma X}|^2 = e^2 \left[\frac{(1+x^2)}{(1-x)(pk)} - \frac{xm^2}{(pk)^2} \right] \frac{1}{x} \text{tr} \left\{ \not{p}_1 \Gamma_X^{(p-k_1) \rightarrow xp} \not{p}' \bar{\Gamma}_X^{(p-k_1) \rightarrow xp} \right\} + O(1) \quad (2.45)$$

wobei wir annehmen, daß der Transversalimpulsübertrag auf das abgestrahlte Photon im Bornprozeß vernachlässigbar ist und daher in das Bornmatrixelement ein in guter Näherung masseloses on shell Elektron der Energie $x_1 E$ (Energie im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen) und Impuls $p_1^\mu \approx x_1 E(1, 0, 0, 1)$ einläuft. Im

Limes $m \rightarrow 0$ folgt aus Gleichung (2.45) das Ergebnis der entsprechenden Rechnung für masselose Fermionen.

$$\sum_{\text{phys}} |\mathcal{M}_{\gamma X}|^2 = e^2 \frac{(1+x^2)}{(1-x)(pk)} \frac{1}{x} \text{tr} \left\{ \not{p}_1 \Gamma_X^{(p-k_1) \rightarrow xp} \not{p}' \bar{\Gamma}_X^{(p-k_1) \rightarrow xp} \right\} + O(1) \quad (2.46)$$

2.2.3.1 Genäherter totaler Wirkungsquerschnitt

Die Berechnung des genäherten totalen Wirkungsquerschnittes zeigt tatsächlich, daß wir mit unserer Klassifikation der führenden kollinearen Terme im Fall massiver Fermionen im Anfangszustand bei Abstrahlung eines Photons auch den Term nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus erhalten, der sonst nur aus einer weichen Näherung mit massiven Fermionen folgt. Mit $\theta_{\min} = 0$ und $\theta_{\max} = \pi$ folgt

$$\begin{aligned} \sigma(s)_{X+\gamma}^{m \neq 0, \gamma \parallel p} &\approx \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{1 - \beta \cos \theta_{\max}}{1 - \beta \cos \theta_{\min}} \right) \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{(1+x^2)}{(1-x)} \sigma_X(xs) dx \\ &- \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{m^2}{E^2(1 - \beta \cos \theta_{\min})} - \frac{m^2}{E^2(1 - \beta \cos \theta_{\max})} \right] \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x}{(1-x)} \sigma_X(xs) dx + O(m^2) \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \left[\text{L}_c \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{(1+x^2)}{(1-x)} \sigma_X(xs) dx - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{2x}{(1-x)} \sigma_X(xs) dx \right] + O(m^2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

und analog für ein zu p' kollinear abgestrahltes Photon noch einmal der gleiche Beitrag.

$$\sigma(s)_{X+\gamma}^{m \neq 0, \gamma \parallel p'} \Big|_{\theta_{\min}=0}^{\theta_{\max}=\pi} = \sigma(s)_{X+\gamma}^{m \neq 0, \gamma \parallel p} \Big|_{\theta_{\min}=0}^{\theta_{\max}=\pi} \quad (2.48)$$

Der genäherte Wirkungsquerschnitt ist im Fall massiver Fermionen somit von der Form

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow X+\gamma} &= \sigma(s)_{X+\gamma}^{m \neq 0, \gamma \parallel p} + \sigma(s)_{X+\gamma}^{m \neq 0, \gamma \parallel p'} \\ &= \alpha \left[C_{X+\gamma}^{(1,1)} \text{L}_{\text{IR}} \text{L}_c + C_{X+\gamma}^{(1,0)} \text{L}_c + C_{X+\gamma}^{(0,1)} \text{L}_{\text{IR}} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Wie wir sehen, trägt im Fall massiver abstrahlender Fermionen der $\tilde{O}(m^2)$ -Term, welcher im differentiellen Wirkungsquerschnitt im extrem kollinearen Winkelbereich von derselben Größenordnung wie der führende logarithmische Term ist, in nächstführender Ordnung bei. Für eine gegenüber der masselosen Näherung verbesserten Rechnung sind daher die Fermionmassen nicht zu vernachlässigen und konsequent alle Terme der im kollinearen Winkelbereich führenden Ordnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes $O(E^2/(pk), m^2/(pk)^2)$ zu berücksichtigen.

Kapitel 3

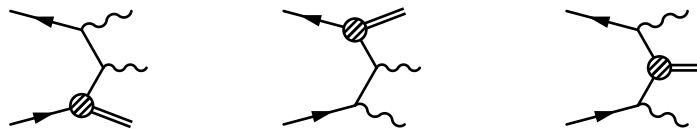
Mehrfachabstrahlungen

Nach eingehender Betrachtung der Anfangszustandsabstrahlung eines einzelnen ist nun die Abstrahlung einer beliebigen Anzahl N von Photonen zu betrachten. Dazu werden wir in diesem Kapitel zunächst Methoden bereitstellen, um bei Mehrfachabstrahlungen diejenigen Beiträge des differentiellen Wirkungsquerschnittes zu identifizieren, welche im totalen Wirkungsquerschnitt die führenden logarithmischen Terme ergeben. Durch Resummation der führenden kollinear-logarithmischen Terme der totalen Wirkungsquerschnitte jeder Ordnung der Abstrahlung gewinnen wir eine Näherung für den zugehörigen inklusiven Wirkungsquerschnitt.

3.1 Unterscheidbarkeit der Photonen

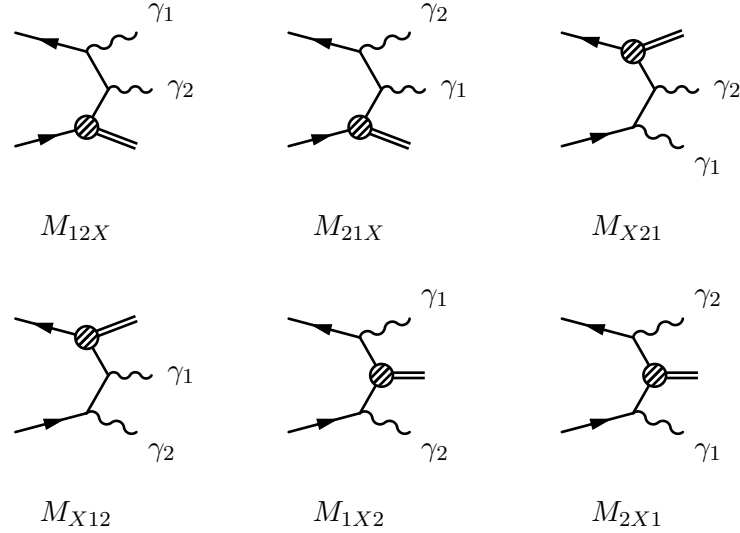
Um die Berechnung des Wirkungsquerschnittes zu vereinfachen, wird jedes der N Photonen mit einem Index i versehen und jedem Photon γ_i , $i = 1, \dots, N$ ein Impuls k_i (vgl. Abschnitt A.1) zugeordnet, $k_i^2 = 0$, wobei jedes der Photonen durch einen Satz (Q_i, θ_i, ϕ_i) dreier Größen beschrieben wird. Zur Berechnung des Übergangsmatrixelementes des betrachteten Prozesses sind für alle beitragenden Diagrammtypen die durch Vertauschung von Photonindizes entstehenden Diagramme aufzusummieren, wie in Abbildung 3.1 und 3.2 für $e^+e^- \rightarrow Z + 2\gamma$, d.h. $N = 2$ dargestellt.

Abbildung 3.1: Diagrammtypen für $e^+e^- \rightarrow Z + 2\gamma$



Werden für alle mit den Indizes $i = 1 \dots N$ versehenen Photonen dieselben Grenzen Q_{\min} , Q_{\max} , θ_{\min} , θ_{\max} , ϕ_{\min} , ϕ_{\max} gewählt, dann sind die auftretenden Mehrfachzählungen von Diagrammen durch Anbringen eines statistischen Faktors

Abbildung 3.2: $e^+e^- \rightarrow Z + 2\gamma$



$S_N = 1/N!$ zu kompensieren, da bei Abstrahlung von N Photonen jeder mögliche Diagrammtyp genau $N!$ mal auftritt, entsprechend den $N!$ möglichen Anordnungen der Photonen.

Alle für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow X + n\gamma$ auftretenden Diagrammtypen sind als Diagramme mit n Photonlinien enthalten in der Faltung der einfach gezeichneten Linien des Bornprozeß-Diagramms

$$(3.1)$$

mit den die Photonabstrahlungen von der Positronlinie beschreibenden Diagrammen

$$(3.2)$$

beziehungsweise mit den die Abstrahlungen einer beliebigen Anzahl von Photonen von der Elektronlinie beschreibenden Diagrammen:

$$(3.3)$$

Solange die Photonen nicht durch Indizes markiert werden, tritt in dieser Faltung jeder mögliche Diagrammtyp genau einmal auf und Mehrfachzählungen sind damit

ausgeschlossen.

$$\begin{aligned}
& \left(\longrightarrow + \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \longleftarrow \end{array} + \dots \right) \otimes \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \text{circle} \\ \diagdown \end{array} \right) \otimes \left(\longrightarrow + \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \longrightarrow \end{array} + \dots \right) \\
&= \begin{array}{c} \diagup \\ \text{circle} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \longleftarrow \\ \text{circle} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{circle} \\ \text{wavy} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \longrightarrow \\ \text{circle} \\ \diagdown \end{array} \\
&+ \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \longleftarrow \\ \text{circle} \\ \text{wavy} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \longrightarrow \\ \text{circle} \\ \text{wavy} \\ \diagdown \end{array} + \dots \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Für N mit Indizes $i = 1 \dots N$ markierte Photonen mit denselben Energie- und Winkel-Integrationsgrenzen entfällt der statistische Faktor S im Wirkungsquerschnitt, wenn über markierte Teilchen, im folgenden ebenfalls mit γ_i oder „Photon“ bezeichnet, integriert wird, welche entweder durch

$$Q_{\min} \leq Q_1 < Q_2 < \dots < Q_N \leq Q_{\max}$$

oder durch

$$\theta_{\min} \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N \leq \theta_{\max}$$

unterschieden werden. Für $N = 2$ entspricht der erste Fall der Reduktion der Integration über das Quadrat $Q_{\min} \leq Q_1, Q_2 \leq Q_{\max}$ mit statistischem Faktor $S = 1/2!$ auf Integration über das Dreieck $Q_{\min} \leq Q_1 \leq Q_{\max}, Q_1 < Q_2$ mit statischem Faktor $S = 1$ bei gleichzeitiger Winkelintegration über das Quadrat $\theta_{\min} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \theta_{\max}$. Der zweite Fall entspricht analog der Reduktion der Integration über das Quadrat $\theta_{\min} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \theta_{\max}$ mit statistischem Faktor $S = 1/2!$ auf Integration über das Dreieck $\theta_{\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{\max}, \theta_1 < \theta_2$ mit statischem Faktor $S = 1$ bei gleichzeitiger Energieintegration über das Quadrat $Q_{\min} \leq Q_1, Q_2 \leq Q_{\max}$.

3.2 Mehrfachabstrahlung von Photonen nahe der Infrarotsingularität

3.2.1 Näherung für zwei weiche Photonen

Die Abstrahlung eines als weich genäherten Photons wurde bereits in Kapitel 2 ausführlich behandelt, nun stellt sich die Frage nach der Verallgemeinerung auf Abstrahlung von n weichen Photonen. Wir untersuchen zunächst die Abstrahlung zweier weicher Photonen und leiten aus dem Ergebnis den allgemeinen Fall ab. Wie bereits bei Abstrahlung eines weichen Photons, werden auch hier Diagramme mit Abstrahlung weicher Photonen aus Zwischenzuständen unterdrückt sein, so daß wir nur die in Abbildung 3.2 dargestellten Diagramme zu berücksichtigen haben. Ausgangspunkt ist ein Matrixelement der Form

$$\mathcal{M}_{X+2\gamma}^{(ss')} = e^2 \bar{v}(p, s) [M_{12X} + M_{21X} + M_{1X2} + M_{2X1} + M_{X12} + M_{X21}] u(p', s') \tag{3.5}$$

Für zwei weiche, nicht zu einer der Fermionrichtungen kollineare Photonen ist die Forderung $Q_1, Q_2 \ll E$ gleichbedeutend mit $(pk_1), (pk_2) \gg (k_1k_2)$ und daher setzen wir in (3.5)

$$(k_1 + k_2 - p)^2 - m^2 \approx (k_1 - p)^2 - m^2 + (k_2 - p)^2 - m^2 \quad (3.6)$$

und

$$(k_1 + k_2 - p')^2 - m^2 \approx (k_1 - p')^2 - m^2 + (k_2 - p')^2 - m^2 \quad (3.7)$$

Dieses Argument versagt, wenn eines der Photonen unter sehr kleinem Winkel, das andere bei sehr kleiner Energie abgestrahlt wird und (k_1k_2) daher von derselben Größenordnung wie (pk_1) und (pk_2) ist. Vernachlässigen der Photonenergien und damit der Photonimpulse in Gleichung (3.5) sowie Anwenden der Diracgleichung zeigt, daß für weiche Photonen fern der kollinearen Singularität die Abstrahlung jedes Photons der Multiplikation des Bornmatrixelements $\mathcal{M}_B = \bar{v}(p, s) \Gamma u(p', s')$ mit einem Faktor M_{γ_i} entspricht.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(ss')} &\approx e^2 \left(\frac{(p\varepsilon_1)}{(pk_1)} - \frac{(p'\varepsilon_1)}{(p'k_1)} \right) \cdot \left(\frac{(p\varepsilon_2)}{(pk_2)} - \frac{(p'\varepsilon_2)}{(p'k_2)} \right) \mathcal{M}_B \\ &= \mathcal{M}_{\gamma_1}(x_1) \cdot \mathcal{M}_{\gamma_2}(x_2) \cdot \mathcal{M}_B(x_1x_2s) \end{aligned}$$

3.2.2 Inklusiver Wirkungsquerschnitt für Abstrahlung von bis zu N weichen Photonen

Wie leicht zu folgern, ist zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes der Abstrahlung von n weichen, nichtkollinearen, ununterscheidbaren Photonen von beiden Fermionlinien — dem führenden infrarotlogarithmischen Anteil des totalen Wirkungsquerschnittes bei Abstrahlung von n Photonen — der Bornquerschnitt bei der reduzierten Schwerpunktenenergie $\sqrt{x_1x_2\dots x_n s}$ für jedes der n Photonen mit einem Faktor

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right) [\mathbb{L}_c - 1] \frac{2}{(1 - x_1)}$$

(vgl. (2.10)) zu falten und ein statistischer Faktor $1/n!$ anzubringen.

$$\sigma_{X+n\gamma_{\text{soft}}}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n \frac{[\mathbb{L}_c - 1]^n}{n!} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{2dx_i}{(1 - x_i)} \right) \sigma_X(x_1\dots x_n s) \quad (3.8)$$

Um den inklusiven Wirkungsquerschnitt für Abstrahlung von bis zu N weichen Photonen im Energiebereich $[Q_{\min}, Q_{\max}]$ zu berechnen, ist über alle entsprechenden Beiträge für Abstrahlung von n Photonen im Anfangszustand zu summieren.

$$\sigma_{X+\text{ISR}}(s) = \sum_{n=0}^N \sigma_{X+n\gamma_{\text{soft}}}(s) \quad (3.9)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ und $x_1\dots x_n s \rightarrow s$ ist der führende infrarote Anteil des inklusiven Wirkungsquerschnittes somit exponentierbar.

$$\sigma_{X+\text{ISR}}(s) = \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\pi} [\mathbb{L}_c - 1] \mathbb{L}_{\text{IR}} \right\} \sigma_X(s) \quad (3.10)$$

Diese Näherung wird für einen auf weiche Abstrahlungen sensitiven Bornwirkungsquerschnitt zu grob sein. Trotzdem ist festzuhalten, daß in dieser groben Näherung die weichen Abstrahlungen exakt exponentiert werden können, daher erwarten wir in einer genaueren Rechnung zumindest näherungsweise exponentielles Verhalten der weichen Abstrahlungen.

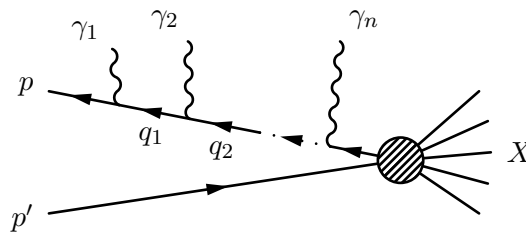
3.3 Mehrfachabstrahlung von Photonen nahe der Massensingularität

Im vorangehenden Abschnitt hatten wir die Beiträge der führenden infrarotlogarithmischen Ordnung bei Abstrahlung einer beliebigen Anzahl n von Photonen aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt im Limes verschwindender Photonenergien identifiziert. Bereits bei der Untersuchung der Einfachabstrahlung wurde deutlich, daß bei Abstrahlung harter Photonen zur besseren Approximation des totalen Wirkungsquerschnittes auch diejenigen mit der führenden Ordnung im kollinearen Logarithmus verknüpften Terme benötigt werden, die mit den nichtführenden Ordnungen im infraroten Logarithmus verbunden sind. Wir werden im folgenden die führenden logarithmischen Terme aus der Betrachtung des differentiellen Wirkungsquerschnittes im Limes harter kollinearer Photonen ableiten. Da uns zunächst nur die führende logarithmische Ordnung des totalen Wirkungsquerschnittes interessiert, wird vorerst mit masselosen Fermionen im Anfangszustand gerechnet.

Zu erwarten ist das Auftreten kleiner Propagatordenner für kollinear zur \vec{p} - oder zur \vec{p}' -Richtung abgestrahlte Photonen. Die in diesem Fall führenden Stücke des differentiellen Wirkungsquerschnittes werden, wie auch bei der Abstrahlung eines Photons zu sehen war, im totalen Wirkungsquerschnitt die führenden logarithmischen Terme liefern. Wir beschränken uns zunächst auf die Untersuchung der Abstrahlung aller n Photonen im selben kollinearen Winkelbereich $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ um die \vec{p} -Richtung und schließen aus den dafür erhaltenen Ergebnissen später auf den allgemeinen Fall.

3.3.1 Phasenraumbereiche und strenge Ordnung

Abbildung 3.3: $e^+e^- \rightarrow X + n\gamma$, Diagramm $M_{12\dots nX}$



Zur Vereinfachung der weiteren Betrachtungen werden die Photonen wieder mit γ_1 bis γ_n bezeichnet. Um das Auftreten statistischer Faktoren zu vermeiden, wählen

wir die für unsere Zwecke geeignete Unterscheidung der Photonen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ anhand ihrer Polarwinkel θ_i , $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$. Kleine Propagatornennner werden für im kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung abgestrahlte Photonen nur in den Diagrammen auftreten, in denen die Photonen an die p -Fermionlinie koppeln. In der von uns verwendeten Eichung sind daher nur Permutationen von Diagrammen der in Abbildung 3.3 dargestellten Art relevant. Koppeln alle abgestrahlten Photonen an dasselbe Fermion, dann läuft ein virtuelles Fermion mit Impuls $q_n = p - k_1 - k_2 - \dots - k_n$ in den Bornprozeß ein. Die Energien $Q_i = (1 - x_i)E_{i-1}$ der sukzessive abgestrahlten Photonen werden geeigneterweise jeweils durch die Energie E_i des abstrahlenden virtuellen Fermions parametrisiert, welches nur noch einen Bruchteil $E_{i-1} = x_{i-1}E_i = x_1 \dots x_{i-1}E =: xE$ der Energie E des ursprünglich einlaufenden Fermions besitzt. Mit der Definition

$$N_{n+1} := \left(\left(p - \sum_{i=1}^n k_i \right) k_{n+1} \right) \quad (3.11)$$

gilt für die invariante Masse des n -ten virtuellen Fermions

$$q_n^2 := \left(p - \sum_{i=1}^n k_i \right)^2 = -2 \sum_{i=1}^n N_i \quad (3.12)$$

Für die Diskussion der relevanten Phasenraumbereiche betrachten wir den Phasenraum für Abstrahlung zweier nach ihren Polarwinkeln $\theta_1 < \theta_2$ unterschiedenen Photonen in denselben Winkel- und Energiebereichen. Abbildung 3.4 zeigt eine Skizze des (Q_1, θ_1) -Integrationsgebietes bei festgehaltenem (Q_2, θ_2) , welches beschränkt ist auf den Bereich links von der $\theta_2 = \text{const.}$ -Linie. In diesem Gebiet sind drei Bereiche zu unterscheiden:

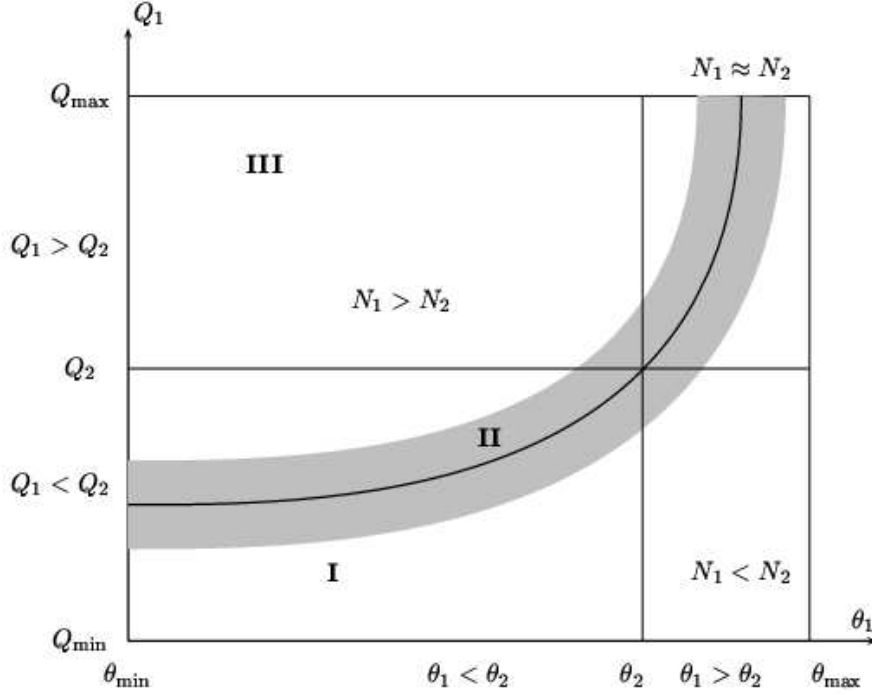
- Gebiet I mit $(N_1 \ll N_2, \theta_1 < \theta_2)$, in der Abbildung unterhalb der $(N_1 = N_2)$ -Linie, Bereich strenger Ordnung nach den N_i
- Gebiet II mit $(O(N_1) = O(N_2), \theta_1 < \theta_2)$, in der Abbildung im Bereich rings um die $(N_1 = N_2)$ -Linie
- Gebiet III mit $(N_2 \ll N_1, \theta_1 < \theta_2)$, in der Abbildung im Bereich oberhalb der $(N_1 = N_2)$ -Linie

Im Phasenraumabschnitt I hat die für die Photonen γ_i bestehende strenge Ordnung nach den oben definierten N_i , $N_1 \ll N_2 \dots \ll N_n$, zur Folge, daß in den Propagatornennern $q_n^2 = -2 \sum_{i=1}^n N_i$ der virtuellen Fermionen alle N_j , $j < n$ gegen N_n vernachlässigbar sind. Unter Verwendung der kollinearen Näherung $k_i = (1 - x_i)q_{i-1}$ für alle Impulse mit Index $i < n$ ergibt sich

$$q_n^2 \approx -2N_n \quad (3.13)$$

mit

$$N_n \approx \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \right) (pk_n) \quad (3.14)$$



Abbildungung 3.4: Relative Größe von $N_1 := (pk_1)$ und $N_2 := (pk_2) - (k_1k_2)$ in Abhängigkeit von Energie und Polarwinkel Q_1 und θ_1 des ersten Photons bei festgehaltenem Q_2 und θ_2 des zweiten Photons.

Bei streng geordneten Photonen sieht das i -te Photon von seinem Vorgänger γ_{i-1} einen näherungsweise vernachlässigbaren fehlenden Transversalimpuls bzw. nur ein einlaufendes on shell Fermion der verringerten Energie E_{i-1} . Da strenge Ordnung der Photonen gleichbedeutend ist mit $N_k \cdot N_{k+1} \ll N_{k+1}^2$, tragen Diagramme $M_{12\dots k+1,k,\dots n}$ mit vertauschten Reihenfolgen der Photonen in jedem Fall weniger bei als dasjenige Diagramm $M_{12\dots k,k+1,\dots n}$, welches die Abstrahlungen in der der strengen Ordnung entsprechenden Reihenfolge enthält. Dies wird die folgende Betrachtung der Propagatorstruktur von Term und Austauschterm zeigen. Die Zähler spielen in dieser Betrachtung keine Rolle und werden mit $Z_{12\dots k,k+1,\dots n}$ bzw. $Z_{12\dots k+1,k,\dots n}$ abgekürzt.

$$\begin{aligned}
M_{12\dots k,k+1,\dots n} &= Z_{12\dots k,k+1,\dots n} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_2^2} \cdots \cdots \frac{1}{q_k^2} \frac{1}{q_{k+1}^2} \cdots \cdots \frac{1}{q_n^2} \\
&\approx (-2)^{-n} Z_{12\dots k,k+1,\dots n} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \cdots \cdots \frac{1}{N_k} \frac{1}{N_{k+1}} \cdots \cdots \frac{1}{N_n} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Im Propagatornenner des Austauschterms $M_{12\dots k+1,k,\dots n}$ steht nach Abstrahlung von k Photonen — wobei hier das mit dem Index $k+1$ versehene Photon an k -ter Stelle der Abstrahlungen, das mit Index k an $(k+1)$ -ter Stelle steht — nicht der quadrierte Impuls q_k^2 wie in (3.15), sondern der mit $-2N_{k+1}x_k^{-1}$ zu nähernde quadrierte Impuls

$(p - k_1 - \dots - k_{k-1} - k_{k+1})^2$. Wir nähern

$$\begin{aligned}
M_{12\dots k+1,k,\dots n} &= Z_{12\dots k+1,k,\dots n} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_2^2} \cdots \frac{1}{(p - k_1 - \dots - k_{k-1} - k_{k+1})^2} \frac{1}{q_{k+1}^2} \cdots \frac{1}{q_n^2} \\
&\approx (-2)^{-n} Z_{12\dots k+1,k,\dots n} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \cdots \frac{x_k}{N_{k+1}} \frac{1}{N_{k+1}} \cdots \frac{1}{N_n} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Damit wäre im Phasenraumbereich strenger Ordnung der Photonen nach den N_i das Diagramm $M_{12\dots nX}$ als führend in der Massensingularität identifiziert, im konkreten Fall der Abstrahlung zweier Photonen das Diagramm M_{12X} .

In Gebiet II gilt keine strenge Ordnung, die beiden Photonen werden mit vergleichbaren Transversalimpulsen abgestrahlt und der Propagatornenner des virtuellen Fermions nach Abstrahlung der beiden Photonen kann nicht einfach als von der ersten Abstrahlung unabhängig angesehen werden. Daher werden sich die führenden Beiträge anders als im Fall streng geordneter Photonen nicht nur aus dem Diagramm M_{12X} zusammensetzen. In Gebiet III, ($N_2 \ll N_1$, $\theta_1 < \theta_2$), gilt sogar die umgekehrte Ordnung der Photonen, so daß der kollinear führende Beitrag dort auf gar keinen Fall alleine aus M_{12X} stammen kann.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird zunächst nur der Bereich *I* strenger Ordnung zur Iteration des genäherten differentiellen Wirkungsquerschnittes bei Abstrahlung N kollinearer Photonen fern der Infrarotsingularität betrachtet, da dort der führende kollineare Beitrag in der in Kapitel 2 definierten physikalischen Eichung vollständig im Diagramm $M_{12\dots nX}$ enthalten ist. Integration des aus dem quadrierten Diagramm $M_{12\dots nX}$ berechneten differentiellen Wirkungsquerschnittes über die Photonpolarwinkel zeigt die Struktur des führenden kollinear-logarithmischen Terms als proportional zu $(\alpha L_c)^n$.

3.3.2 Iteration für streng geordnete Photonen in der masselosen Näherung

Nachdem wir im vorangehenden Abschnitt festgestellt haben, daß im Phasenraumbereich strenger Ordnung der Photonen nach den in Gleichung (3.11) definierten Größen N_i die führende kollineare Ordnung des quadrierten Matrixelementes in der von uns gewählten Eichung vollständig in dem quadrierten und polarisationssummierten Diagramm $M_{12\dots nX}$ enthalten ist, stellt sich nun die Frage nach einer einfachen Möglichkeit, diesen führenden kollinearen Anteil explizit zu berechnen.

Wie wir der Herleitung in Abschnitt 2.2.3, Gleichung (2.46) entnehmen können, ist bei Abstrahlung eines Photons γ_1 die führende kollinear-logarithmische Ordnung des totalen Wirkungsquerschnittes — hier in unserer Eichung aus dem quadrierten und polarisationssummierten Diagramm M_{1X} berechnet — zu schreiben als Faltung aus einer die Abstrahlung beschreibenden Splittingfunktion mit dem totalen Wirkungsquerschnitt des anschließenden Bornquerschnittes $\sigma_X(x_1s)$, welcher bei einer verringerten Schwerpunktenenergie $\sqrt{x_1s}$ stattfindet. Nach Abstrahlung des Photons läuft in guter Näherung ein on shell Fermion der Masse Null mit verringerter Energie x_1E und Impuls $x_1\vec{p}$ in den Restprozeß ein. Dieser ist bis auf die verringerte Schwerpunktenenergie in guter Näherung unabhängig von der Abstrahlung des ersten Photons γ_1 . Dieselben Überlegungen können wir auch für den Fall anstellen, daß neben den in X enthaltenen Teilchen ein weiteres Photon γ_2 abgestrahlt wird, welches gegen das erste Photon streng geordnet ist, $N_1 \ll N_2$. Der Beitrag des ersten

Photons koppelt wieder nach Gleichung (2.46) ab und es verbleibt die Berechnung des quadrierten und polarisationssummierten Diagramms M_{2X} bei einer verringerten Schwerpunktenenergie $\sqrt{x_1}s$. Verwenden wir auch für das zweite Photon γ_2 wieder die kollineare Näherung, erhalten wir für die führende kollineare Ordnung bei Abstrahlung zweier Photonen im selben kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Pol}_{1,2}} |M_{e^+e^- \rightarrow X+n\gamma}|^2 &\approx \sum_{\text{phys}_{1,2}} |M_{12(X+(n-2)\gamma)}|^2 \\ &\approx \frac{e^2}{x_1} \tilde{P}_1(x_1, \cos \theta_1) \frac{e^2}{x_2} \tilde{P}_2(x_1, x_2, \cos \theta_2) |\mathcal{M}_{X+(n-2)\gamma}|^2 \Big|_{p-k_1-k_2 \approx x_1 p - k_2 \approx x_1 x_2 p} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dabei ist x_n definiert über $Q_n = (1 - x_n)E_{n-1} = (1 - x_n)x_1 \dots x_{n-1}E$ und die Splittingfunktion \tilde{P}_n vor der $\cos \theta_i$ -Integration ist gegeben durch

$$\tilde{P}_n(x_1, \dots, x_n, \cos \theta_n) = \frac{(1 + x_n^2)}{(1 - x_n)N_n} \quad (3.18)$$

Iteration für Abstrahlung einer beliebigen Anzahl von n streng geordneten Photonen von der p -Fermionlinie ($N_1, \dots, N_{n-1} \ll N_n$) ergibt für die führende kollineare Ordnung des quadrierten Matrixelementes der Abstrahlung von n kollinearen Photonen im selben Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung das Resultat

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Pol}_{1,2,\dots,n}} |M_{e^+e^- \rightarrow X+n\gamma}|^2 &\approx \sum_{\text{phys}_{1,2,\dots,n}} |M_{12\dots nX}|^2 \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^2}{x_i} \tilde{P}_i(x_1, \dots, x_i, \cos \theta_i) \right) |\mathcal{M}_X|^2 \Big|_{q_n = p - k_1 - \dots - k_n \rightarrow x_1 \dots x_n p} \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.3.3 Wirkungsquerschnitt bei Abstrahlung von n Photonen

An dieser Stelle werden wir zunächst nur den für kollinear um die \vec{p} -Richtung abgestrahlte Photonen kollinear-logarithmischen Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt und den daraus resultierenden Anteil des inklusiven Wirkungsquerschnittes sowie die zugehörige Strukturfunktion behandeln.

Für die Berechnung des vollständigen totalen Wirkungsquerschnittes ist zu beachten, daß auch der für den Fall von n kollinear zur Flugrichtung des zweiten Fermions im Anfangszustand abgestrahlten Photonen führende kollineare Beitrag zu berücksichtigen ist, ebenso wie die führenden kollinearen Beiträge für den Fall, daß von den n Photonen m kollinear zur einen und $n - m$ kollinear zur anderen Fermionrichtung abgestrahlt werden. Wie wir später zeigen werden, können diese Beiträge einfach durch Faltung des mit der Strukturfunktion des ersten Fermions gefalteten Bornquerschnittes mit der Strukturfunktion des zweiten einlaufenden Fermions einbezogen werden. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Berechnung des führenden kollinearen Beitrags zum Wirkungsquerschnitt $\sigma_{e^+e^- \rightarrow X+n\gamma}$ für den Fall der Abstrahlung von n Photonen im kollinearen Bereich um die \vec{p} -Richtung.

3.3.3.1 Phasenraumintegration

Als eine für unsere Zwecke geeignete Parametrisierung des $(X+n\gamma)$ -Phasenraumintegrals $\Lambda_{Xn\gamma}(s)$ erweist sich

$$\begin{aligned}\Lambda_{Xn\gamma}(s) &= \frac{1}{2s} \frac{(2\pi)^4}{C_{n\gamma} C_X} \int \delta\left(p + p' - k_X - \sum_{i=1}^n k_i\right) \cdot d\Phi_X \prod_{i=1}^n \delta(k_i^2) \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^3} \\ &\approx \frac{1}{C_{n\gamma}} \int \Lambda_X(xs) \delta(x - x_1 \dots x_n) dx \prod_{i=1}^n \frac{E^2(1-x_i)(x_1 \dots x_{i-1})^2 dx_i d\Omega_i}{2(2\pi)^3}\end{aligned}\quad (3.20)$$

wobei $\Lambda_X(xs)$ die Phasenraumintegration über die Endzustandsteilchen X beschreibt.

$$\Lambda_X(xs) := \frac{1}{2s} \frac{1}{C_X} \int (2\pi)^4 \delta(x_1 \dots x_n p + p' - k_X) d\Phi_X \quad (3.21)$$

Der statistische Faktor C_X ist je nach der Anzahl ununterscheidbarer Teilchen in X einzusetzen. Da wir nach Voraussetzung Doppeltzählen von Diagrammen durch nach ihren Polarwinkeln unterschiedene Photonen vermeiden, ist der statistische Faktor $C_{n\gamma}$ der Photonen gleich Eins zu setzen. In Gleichung (3.20) wurde die Voraussetzung verwendet, daß im Bornprozeß ein großer Transversalimpulsübertrag stattfindet, gegenüber dem der durch die Abstrahlung im Anfangszustand verlorengegangene Transversalimpuls vernachlässigbar ist. Lediglich der Energieverlust des einlaufenden Fermions durch die Abstrahlung geht in den Bornprozeß ein, der bei einer verringerten Schwerpunktenenergie ($xs = x_1 \dots x_n s$ im Schwerpunktsystem der ursprünglichen einlaufenden Teilchen) stattfindet.

Die einzigen aus der Anfangszustandsabstrahlung folgenden Einschränkungen an die Integrationsvariablen x_i folgen aus der Forderung, daß das abstrahlende Fermion an das i -te Photon nicht mehr als seine aktuelle Energie E_i abgeben kann, und daher auf jeden Fall $0 < x = x_1 x_2 \dots x_n < 1$ gelten muß bzw. $0 < x_i < 1$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Die untere Grenze für die dem Bornprozeß durch Abstrahlung an der p -Fermionlinie verlorengegangene Energie wird je nach Bornprozeß X geeignet gewählt. Wenn alle Energie in Form von Photonen abgestrahlt wird, geht der Phasenraum für den Bornprozeß zwangsläufig gegen Null.

3.3.3.2 Wirkungsquerschnitt

Der totale Teilwirkungsquerschnitt für Anfangszustandsabstrahlung von n harten kollinearen Photonen in der „Leading Logarithmic Approximation“, LLA, welcher in jeder Ordnung der Abstrahlung nur den führenden kollinear-logarithmischen Term aus Abstrahlung der Photonen kollinear zur \vec{p} -Richtung berücksichtigt, wird nun wie folgt berechnet.

$$\begin{aligned}\sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA}, n\gamma||p}(s, \text{Lc}) &= \int \left[\frac{1}{2s C_X} \int_{\Phi_X} (2\pi)^4 \delta(xp + p' - k_X) |\mathcal{M}_X|^2 d\Phi_X \right] \delta(x - x_1 x_2 \dots x_n) \cdot \\ &\quad \prod_{i=1}^n \left[\frac{e^2}{x_i} \tilde{P}_i(x_1, \dots, x_i, \cos \theta_i) \frac{E^2(1-x_i)(x_1 \dots x_{i-1})^2 dx_i d\Omega_i}{2(2\pi)^3} \right] dx\end{aligned}\quad (3.22)$$

Mit Hilfe von

$$\frac{1}{2sC_X} \int (2\pi)^4 \delta(xp + p' - k_X) |\mathcal{M}_X|^2 d\Phi_X = x\sigma_X(xs) \quad (3.23)$$

und der Splittingfunktion

$$\tilde{P}_i(x_1, \dots, x_i, \cos \theta_i) E^2 (1 - x_i) x_1^2 \dots x_{i-1}^2 = \frac{P(x_i)}{(1 - \cos \theta_i)} \quad (3.24)$$

wobei

$$P(x_i) := \frac{1 + x_i^2}{1 - x_i}, \quad (3.25)$$

erhalten wir mit $x_{12\dots n} := x_1 x_2 \dots x_n$

$$\begin{aligned} & \sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA}, n\gamma \| p}(s, \theta_{\min} < \theta_1, \dots, \theta_n < \theta_{\max}) \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n I_n(\cos \theta_{\max}, \cos \theta_{\min}) \int_0^1 dx \delta(x - x_1 \dots x_n) \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{x_{i,\min}}^{x_{i,\max}} P(x_i) dx_i \right\} \sigma_X(xs) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dabei wurde in Gleichung (3.26) ausgenutzt, daß für streng geordnete Photonen keine explizite Abhängigkeit von den Photon–Azimuthwinkeln ϕ_i besteht und daher jede ϕ_i –Integration einen Faktor 2π liefert. Für den Winkelanteil $I_k(\cos \theta_{k+1})$ folgt nach der Integration über $\cos \theta_k$, wie in Abschnitt A.4 gezeigt,

$$\begin{aligned} I_{n-k}(\cos \theta_{k-1}) &:= \int_{\cos \theta_{\max}}^{\cos \theta_{k-1}} \frac{d \cos \theta_k}{(1 - \cos \theta_k)} I_{n-k+1}(\cos \theta_k) \\ &= \frac{1}{(n-k)!} \ln^k \left(\frac{1 - \cos \theta_{\max}}{1 - \cos \theta_{k-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Für den Wirkungsquerschnitt erhalten wir mit den Grenzwinkeln $\theta_{\min} = m/E$ und $\theta_{\max} = \pi - m/E$ das Ergebnis

$$\sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA}, n\gamma \| p}(s, L_c) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \frac{L_c^n}{n!} \int_0^1 dx \delta(x - x_1 \dots x_n) \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{x_{i,\min}}^{x_{i,\max}} P(x_i) dx_i \right\} \sigma_X(xs) \quad (3.28)$$

3.4 Inklusiver LLA –Wirkungsquerschnitt

Im letzten Abschnitt haben wir den führenden Term der Entwicklung des totalen Wirkungsquerschnittes nach dem mit der Massensingularität verknüpften kollinearen Logarithmus L_c (2.2) für Abstrahlung von n zum selben Fermionimpuls kollinearen Photonen berechnet. Um den inklusiven Wirkungsquerschnitt in der „Leading Logarithmic Approximation“ für Abstrahlung einer unbestimmten Anzahl von Photonen zu erhalten, ist über alle Teilwirkungsquerschnitte $\sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA}, n\gamma \| p}(s, L_c)$ zu summieren:

$$\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{LLA}, \text{ISR} \| p}(s, L_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA}, n\gamma \| p}(s, L_c) \quad (3.29)$$

3.4.1 Die IR–Divergenz

Zur Berechnung der LLA–Teilwirkungsquerschnitte waren wir von streng geordneten kollinearen Photonen fern der Infrarotsingularität ausgegangen, haben diese Einschränkung allerdings nur insofern benutzt, als daß keines der kollinearen Photonen weich genähert wurde. Gleichung (3.29) gibt daher unabhängig davon, ob die abgestrahlten Photonen energetisch hart oder weich sind, die korrekten führenden kollinearen Terme wieder, auch jene, die nicht mit der infraroten Singularität im Limes verschwindender Photonenergien verknüpft sind. Mit anderen Worten: es sind keine höheren Potenzen in L_c zu erwarten als die bereits bekannten, daher können wir mit (3.29) den gesamten Photon–Energiebereich abdecken. Allgemein kann somit, wie in Abschnitt 3.3.3.1 besprochen, $0 \leq x_i \leq 1$ angenommen werden, allerdings gilt es zu beachten, daß in den Teilwirkungsquerschnitten Faktoren $(1 - x_i)$ im Nenner der Splittingfunktionen $P(x_i)$ auftreten und sich dadurch für $x_i \rightarrow 1$ die infrarote Divergenz in nichtintegrablen Singularitäten manifestiert.

Weitere Einschränkungen der insgesamt vor dem eigentlichen Bornprozeß abgestrahlten Energie $(1 - x)E$, wie Schwellenenergien zur X –Produktion oder die Tatsache, daß das in den Bornprozeß einlaufende näherungsweise als on shell Fermion der Energie xE anzusehende Teilchen noch relativistisch sei, werden als Eigenschaft des Bornprozesses betrachtet und gehen nicht in die hier zu berechnende Strukturfunktion der Anfangszustandsabstrahlung ein. Wir nehmen daher im folgenden an, daß erst auf der Stufe des Bornprozesses entschieden wird, ob die nach Abstrahlung verbleibende Energie ausreichend ist oder nicht und setzen in der Beschreibung der Abstrahlung die unteren Grenzen $x_{i,\min}$ gleich Null.

Zurück zur Infrarotsingularität: Wie bereits in der Einführung erwähnt, garantiert das Kinoshita–Lee–Nauenberg–Theorem, daß in experimentell beobachtbaren Prozessen keine Infrarotdivergenzen auftreten. Lassen wir die Abstrahlung extrem weicher Photonen zu, so sind auch die davon nicht mehr getrennt aufzulösenden virtuellen Beiträge zu berücksichtigen, da für einen physikalischen Prozeß über die weichen entarteten Zustände der Anfangsteilchen zu summieren ist. Da die im Limes $x_i \rightarrow 1$ auftretende Infrarotdivergenz durch die virtuellen Diagramme (Vertexkorrekturen) kompensiert wird, ist das Mitnehmen der virtuellen Beiträge dem Ersetzen der ursprünglichen Splittingfunktionen $P(x_i)$ durch ihre $+$ –Distributionen $P_+(x_i)$ äquivalent. Die oberen Integrationsgrenzen $x_{i,\max}$ können nun problemlos gleich Eins gesetzt werden.

$$\sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA},n\gamma||p}(s, L_c) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \frac{L_c^n}{n!} \int_0^1 dx \delta(x - x_1 \dots x_n) \prod_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 P_+(x_i) dx_i \right\} \sigma_X(xs) \quad (3.30)$$

Wir verwenden die $+$ –Distribution einer Funktion $F(x)$ in der speziellen Form

$$F_+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\Theta(1 - \varepsilon - x) F(x) - \delta(1 - \varepsilon - x) \int_0^{1-\varepsilon} dy F(y) \right) \quad (3.31)$$

und damit berechnet sich die $+$ -Distribution der Splittingfunktion $P(x)$ zu

$$P_+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Theta(1 - \varepsilon - x) \frac{(1 + x^2)}{(1 - x)} + \delta(1 - \varepsilon - x) \left(2 \ln \varepsilon + \frac{3}{2} \right) \right] \quad (3.32)$$

3.4.2 Radiatorfunktion und GLAP-Entwicklungsgleichung

Setzen wir die Teilwirkungsquerschnitte in der Form (3.30) in Gleichung (3.29) für den inklusiven Wirkungsquerschnitt für Photonabstrahlung durch eines der masselosen Fermionen im Anfangszustand ein, zeigt sich, daß sich dieser als Faltung aus einer die Photonabstrahlungen beschreibenden LLA-Strukturfunktion $D^{\text{LLA}}(x, L_c)$ mit dem Bornwirkungsquerschnitt σ_X ausdrücken läßt. Die gesamte Information über den Abstrahlungsprozeß steht in dieser Radiatorfunktion und ist unabhängig von der Art des nachfolgenden Bornprozesses.

$$\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{LLA}}(s, L_c) = \int_0^1 dx D^{\text{LLA}}(x, L_c) \sigma_X(xs) \quad (3.33)$$

Die Radiatorfunktion $D^{\text{LLA}}(x, L_c)$ in (3.33) ist dabei definiert als

$$D^{\text{LLA}}(x, L_c) = \delta(1 - x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \frac{L_c^n}{n!} \int_0^1 \delta(x - x_1 x_2 \dots x_n) \left(\prod_{i=1}^n P_+(x_i) dx_i \right), \quad (3.34)$$

wobei die Faltung von $\delta(1 - x)$ mit $\sigma_X(xs)$ den Bornprozeß ohne Abstrahlung beschreibt. Ableiten von (3.34) nach L_c und Umbenennen der Integrationsvariable x_n in z — wegen $0 \leq x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq 1$ kann auch x/z nur Werte zwischen Null und Eins annehmen oder z nur Werte zwischen x und Eins — liefert eine Evolutionsgleichung für die Radiatorfunktion, die Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi-(GLAP)-Gleichung.

$$\frac{\partial}{\partial L_c} D^{\text{LLA}}(x, L_c) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_+(z) D^{\text{LLA}}\left(\frac{x}{z}, L_c\right) \quad (3.35)$$

mit der Anfangsbedingung

$$D^{\text{LLA}}(x, 0) = \delta(1 - x) \quad (3.36)$$

Im Limes weicher Photonen kann ein analytischer Ausdruck für diese Radiatorfunktion, die sogenannte Gribov-Näherung, gewonnen werden. Dazu wird die GLAP-Gleichung mittels Mellin-Transformation in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den Mellin-Momenten überführt. Nach Berechnung der Mellin-Momente erfolgt die Rücktransformation für den Spezialfall weicher Photonen. Die so erhaltene Radiatorfunktion $D^{x \rightarrow 1}(x, \mu^2)$ wird dann durch Iteration der führenden Ordnungen für harte Photonen verbessert. Die vollständige Rechnung wird in Anhang C durchgeführt, an dieser Stelle sollen lediglich die Ergebnisse dargestellt werden:

- Gribov–Näherung der Radiatorfunktion für weiche Photonen

$$D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) = \exp \left\{ \frac{\eta}{2} \left(\frac{3}{4} - \gamma \right) \right\} (1-x)^{\left(\frac{\eta}{2}-1\right)} \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\frac{\eta}{2})} \right) \quad (3.37)$$

- LLA–Radiatorfunktion

$$D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \left[\frac{1}{2} (1+x^2) + \frac{\eta}{8} \left(-\frac{1}{2} (1+3x^2) \ln x - (1-x)^2 \right) \right] \cdot D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) \quad (3.38)$$

wobei

$$\eta = \frac{2\alpha}{\pi} L_c \quad (3.39)$$

3.4.3 Radiatorfunktion für zwei abstrahlende Teilchen im Anfangszustand

Die bisherigen Ergebnisse für GLAP–Gleichung und Radiatorfunktion sind unabhängig davon, ob das Elektron oder das Positron als das abstrahlende Fermion angenommen wurde. Physikalisch sinnvoll ist allerdings erst der Fall, wenn beide Anfangsteilchen abstrahlen, dazu kann die Faltung des Bornquerschnittes mit einem Radiator erneut als Bornquerschnitt mit zusätzlicher Abstrahlung durch eines der Anfangsteilchen mit einem Radiator für Photonabstrahlung durch das zweite Anfangsteilchen gefaltet werden. Strahlen beide Teilchen im Anfangszustand kollineare Photonen ab, dann ist daher der Born–Wirkungsquerschnitt mit je einem Radiator pro abstrahlendem Teilchen zu falten.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(s, \eta) &= \int_0^1 dz dx_1 dx_2 D(x_1, \eta) D(x_2, \eta) \delta(z - x_1 x_2) \sigma^{(0)}(zs) \\ &= \int_0^1 \mathcal{D}(z, \eta) \sigma_X(zs) dz \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\mathcal{D}(z, \eta) = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} D(x_1, \eta) D\left(\frac{z}{x_1}, \eta\right) \quad (3.41)$$

Die letzte Zeile in Gleichung (3.40) ist nur dann gültig, wenn ohne zusätzliche Winkelschnitte über den gesamten Phasenraum integriert wird. Ansonsten ist die Faltung explizit mit zwei Radiatoren durchzuführen. Mellin–Transformation liefert

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}(n, \eta) &= \int_0^1 z^{n-1} \mathcal{D}(z) dz \\ &= \left(\int_0^1 dx_1 x_1^{n-1} D(x_1, \eta) \right) \left(\int_0^1 dy y^{n-1} D(y, \eta) \right) \end{aligned}$$

$$= \overline{D}(n, \eta) \overline{D}(n, \eta) \quad (3.42)$$

Das Mellin–Moment $\overline{D}(n, \eta)$ war bereits in (C.12) berechnet worden, so daß die alten Ergebnisse beibehalten werden können, indem $\eta \rightarrow 2\eta$ ersetzt wird. Der Ausdruck in Gleichung (3.40) enthält nun auch die Beiträge für Abstrahlung einer jeweils beliebigen Zahl von Photonen kollinear um die \vec{p} und die \vec{p}' –Richtung.

3.4.4 Mehrfachzählen von Photonen

Werden bereits auf der Ebene des Bornprozesses Photonen abgestrahlt, so ist bei Faltung mit einer weitere Photonabstrahlungen beschreibenden Radiatorfunktion auf die korrekte Statistik zu achten. Für alle mittels der LLA–Radiatorfunktion beschriebenen Photonen waren dieselben Winkel– und Energiebereiche vorausgesetzt, und zwar der Bereich der Polarwinkel von Null bis π und der Energiebereich von Null bis E .

Angenommen, von N insgesamt in denselben Energie– und Winkelbereichen abgestrahlten Photonen werden m dem Bornprozeß zugeordnet und die übrigen $N - m$ durch Splittingfunktionen beschrieben. Ausgangspunkt ist der für Abstrahlung von N Photonen genäherte LLA–Wirkungsquerschnitt $\sigma_{X+N\gamma}^{\text{LLA}}(s)$.

$$\sigma_{X+N\gamma}^{\text{LLA}}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^N \frac{\mathbf{L}_c^N}{N!} \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_N P_+(x_1) P_+(x_2) \dots P_+(x_N) \sigma_X(x_1 x_2 \dots x_N s) \quad (3.43)$$

Wenn m der N Photonen dem Bornquerschnitt zugeordnet werden, berechnet sich der genäherte Wirkungsquerschnitt für Abstrahlung von N Photonen nach folgender Gleichung.

$$\sigma_{X+N\gamma}^{\text{LLA}}(s) = \frac{m!(N - m!)}{N!} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{N-m} \frac{\mathbf{L}_c^{N-m}}{(N - m)!} \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-m} P_+(x_1) P_+(x_2) \dots P_+(x_{N-m}) \sigma_{X+m\gamma}(x_1 x_2 \dots x_{N-m} s) \quad (3.44)$$

Die statistischen Faktoren korrigieren die Tatsache, daß der Bornwirkungsquerschnitt wegen der m Bornphotonen den Faktor $(\alpha/\pi)^m \mathbf{L}_c^m/m!$ enthält. Summation über alle Zusatzabstrahlungen von $N = m$ bis unendlich ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_{X+m\gamma+\text{ISR}}^{\text{LLA}}(s) &\approx \sum_{N=m}^{\infty} \frac{m!(N - m!)}{N!} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{N-m} \frac{\mathbf{L}_c^{N-m}}{(N - m)!} \\ &\int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-m} P_+(x_1) P_+(x_2) \dots P_+(x_{N-m}) \sigma_{X+m\gamma}(x_1 x_2 \dots x_{N-m} s) \\ &= \int_0^1 dx \mathcal{D}^{(m)}(x, \mathbf{L}_c) \sigma_{X+m\gamma}(xs) \end{aligned} \quad (3.45)$$

mit der Radiatorfunktion

$$\mathcal{D}^{(m)}(x, L_c) = \delta(x-1) + \sum_{(N-m)=1}^{\infty} \frac{m!(N-m)!}{N!} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{N-m} \frac{L_c^{N-m}}{(N-m)!} \int_0^1 dx_1 \dots dx_{N-m} \delta(x-x_1 \dots x_{N-m}) P_+(x_1) \dots P_+(x_{N-m}) \quad (3.46)$$

Ableiten nach L_c zeigt, daß der Radiator aus Gleichung 3.46 keine GLAP-Gleichung erfüllt, da ein Teil der Information über die kollinearen Logarithmen im Bornquerschnitt enthalten ist und daher gegenüber dem in Kapitel 3 besprochenen Radiator veränderte statistische Faktoren auftreten.

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{(m)}(x, L_c) = \sum_{(N-m)=1}^{\infty} \frac{m!(N-m)!}{N!} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{N-m} \frac{L_c^{N-m-1}}{(N-m-1)!} \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} dx_2 \dots dx_{N-m} \delta\left(\frac{x}{x_1} - x_2 \dots x_{N-m}\right) P_+(x_1) \dots P_+(x_{N-m}) \quad (3.47)$$

Enthält der Bornquerschnitt Photonen, welche in denselben Energie- und Winkelbereichen abgestrahlt werden, wie die durch den Radiator zu beschreibenden zusätzlich abgestrahlten Photonen, dann erfüllt die zu verwendende Radiatorfunktion nach Gleichung (3.46) nicht die GLAP-Gleichung. Umgekehrt darf also der aus der GLAP-Gleichung berechnete Radiator nicht mit einem Bornquerschnitt gefaltet werden, in welchem weitere Photonen in denselben Winkel- und Energiebereichen wie die durch den Radiator beschriebenen Photonen abgestrahlt werden, da sonst Photonen nicht korrekt gezählt werden.

3.5 Beispiel: $e^+e^- \rightarrow \text{ISR} + (Z \rightarrow \nu \bar{\nu})$

Der inklusive Wirkungsquerschnitt für den LLA-Anteil der von einem der einlaufenden Teilchen abgestrahlten Photonen mit anschließender Produktion eines zerfallenden Z folgt mittels

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ISR}+(Z \rightarrow \nu \bar{\nu})}(s, L_c) &= \int_0^1 dx D^{\text{LLA}}(x, L_c) \sigma_{Z \rightarrow \nu \bar{\nu}}(xs) \\ &= \frac{(R_s^2 + L_s^2)}{12\pi} \left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}}\right)^2 \int_0^1 dx \frac{xs D^{\text{LLA}}(x, L_c)}{((xs - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

mit der Radiatorfunktion $D^{\text{LLA}}(x, L_c)$ nach Gleichung (3.38) für den führenden logarithmischen Anteil und der Gribov-Näherung für weiche Photonen nach Gleichung (C.28).

Für $e^+e^- \rightarrow \text{ISR} + (Z \rightarrow \nu \bar{\nu})$ kommen die größten Beiträge zum totalen Wirkungsquerschnitt bei Schwerpunktenenergien s von der Größenordnung der Z -Resonanz aus den Phasenraumbereich kleiner Fermionpropagatorenner, wenn gleichzeitig die invariante Masse des Z im Zwischenzustand möglichst in der Nähe der on

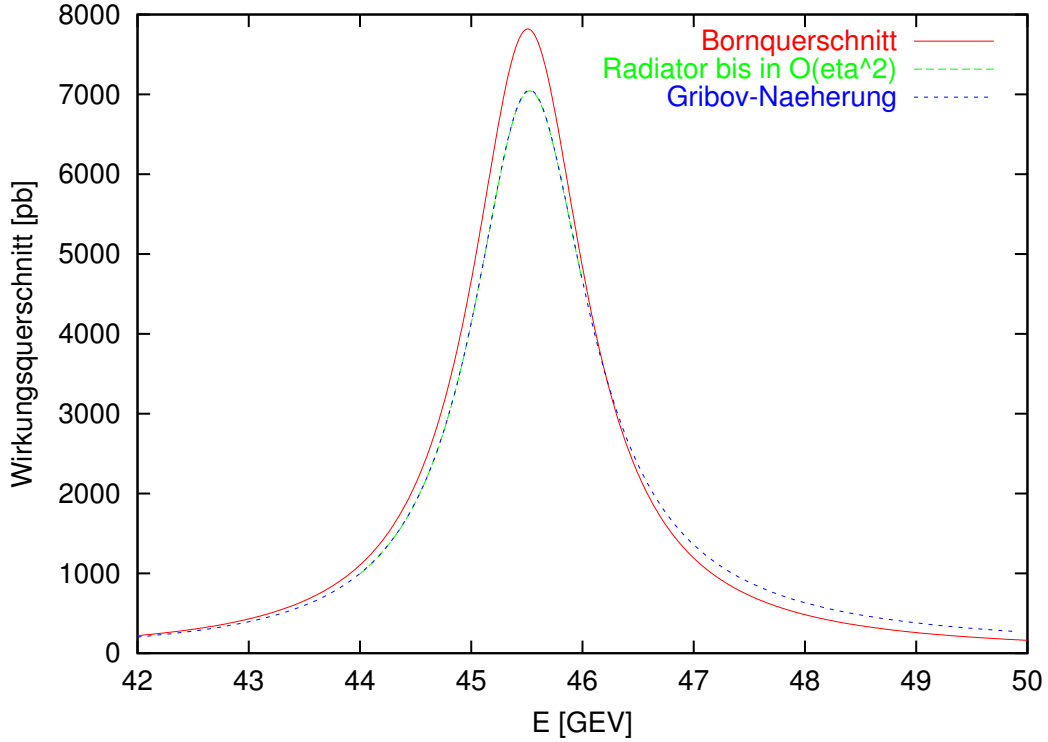


Abbildung 3.5: Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow \text{ISR} + (Z \rightarrow \nu\bar{\nu})$ bei Anfangszustandsabstrahlung durch eines der einlaufenden Teilchen in Abhängigkeit von der Energie E der einlaufenden Teilchen im Schwerpunktsystem und Abstrahlung der Photonen im Kegel $\cos\theta_{\max} = 1^\circ$ um die Strahlrichtung, Bornquerschnitt ohne Radiator, gefaltet mit Radiator nach Gleichung (3.38) und gefaltet mit weicher Gribovlösung

shell Z -Masse liegt. Wie in Abbildung 3.5 bzw. 3.6 gezeigt, fallen in der Nähe der Z -Resonanz die Ergebnisse der Faltung des Bornquerschnittes mit der Radiatorfunktion nach Gleichung (3.38) und der Faltung mit der Gribov-Näherung in guter Näherung zusammen. Daraus ist zu folgern, daß die Veränderung in der Peakgestalt in der Nähe der Resonanz überwiegend durch weiche Abstrahlungen bedingt ist.

Anders sieht der Fall bei Schwerpunktenergien weit oberhalb der Z -Resonanz aus. Hier werden diejenigen Korrekturterme die größten Beiträge liefern, bei denen die nach Abstrahlung verringerte Schwerpunktenergie xs wieder in der Nähe der Z -Resonanz liegt, was wiederum nur bei Abstrahlung eines oder mehrerer harter Photonen der Fall sein wird. Bei hohen Schwerpunktenergien der einlaufenden Teilchen wird also harte kollineare Abstrahlung die größten Korrekturen liefern, wie auch Abbildung 3.7 zeigt. Die Ergebnisse für Faltung der Gribov-Näherung bzw. der vollen Radiatorfunktion nach (3.38) weichen in diesem Fall deutlich voneinander ab.

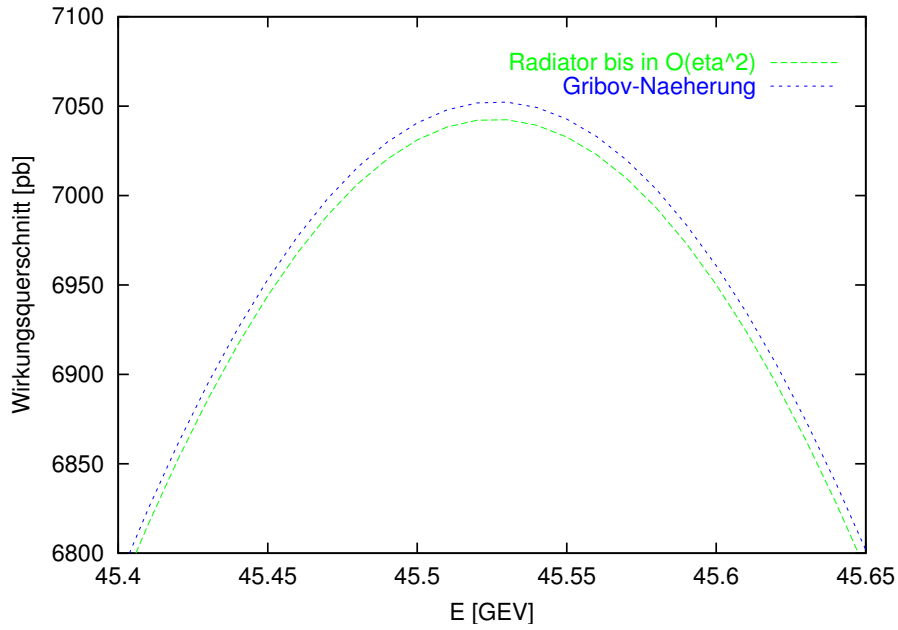


Abbildung 3.6: Detailansicht von Abbildung 3.5, Vergleich der Faltung des Bornquerschnittes mit dem Radiator nach Gleichung (3.38) und der Faltung mit der weichen Gribovlösung auf der Resonanz

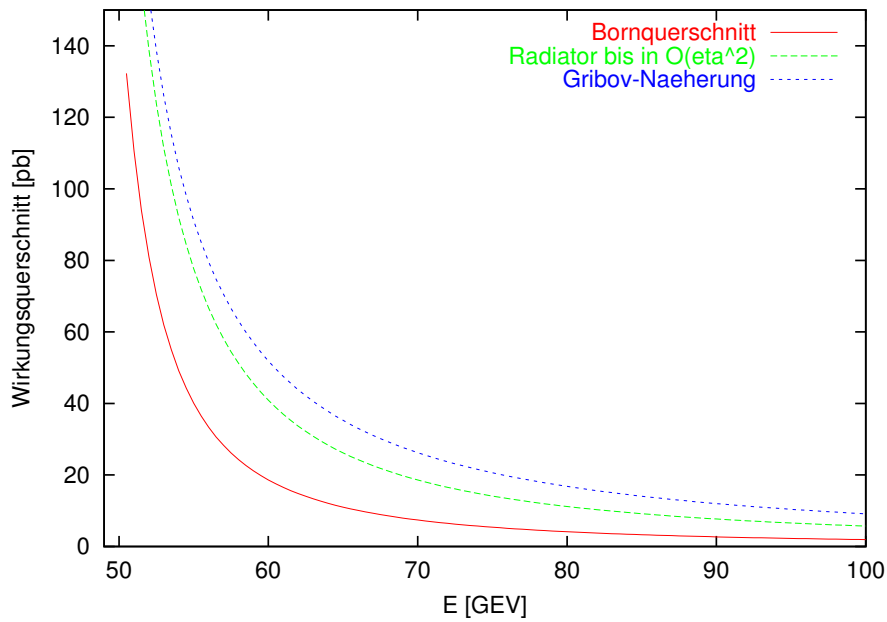


Abbildung 3.7: Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow \text{ISR} + (Z \rightarrow \nu\bar{\nu})$ bei Anfangszustandsabstrahlung durch eines der einlaufenden Teilchen in Abhängigkeit von der Energie E der einlaufenden Teilchen im Schwerpunktsystem und Abstrahlung der Photonen im Kegel $\cos\theta_{\text{max}} = 1^\circ$ um die Strahlrichtung bei Energien weit oberhalb der Z -Resonanz. Bornquerschnitt ohne Radiator, gefaltet mit Radiator nach Gleichung (3.38) und gefaltet mit weicher Gribovlösung

Kapitel 4

Universelle NLL–Korrekturen bei Abstrahlung zweier Photonen

Nachdem der führende Anteil der Entwicklung des totalen Wirkungsquerschnittes nach dem kollinearen Logarithmus L_c im vorangehenden Kapitel eingehend besprochen wurde, ist nun für eine Verbesserung der Näherung nach Korrekturen nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus zu suchen. Für Abstrahlung eines Photons hatten wir diese Beiträge erhalten, indem wir für massive Fermionen im Anfangszustand die im Limes eines kollinear abgestrahlten Photons führenden Anteile des quadrierten und polarisationssummierten Matrixelementes identifizierten. Integration über diese Beiträge liefert im totalen Wirkungsquerschnitt der Abstrahlung eines Photons die Beiträge führender und nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus, vergleiche Kapitel 2.

Für den allgemeinen Fall der Abstrahlung einer beliebigen Anzahl von Photonen wählen wir eine analoge Vorgehensweise. Wie wir zeigen werden, tragen außer dem führenden nur Diagramme zur nächstführenden logarithmischen Ordnung bei, bei denen zwei in der Abstrahlungslinie benachbarte kollineare Photonen gegeneinander vertauscht wurden. Zunächst beschränken wir uns auf die Abstrahlung zweier Photonen im selben kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung. Die führende kollineare Ordnung, welche im totalen Wirkungsquerschnitt die Terme in $\alpha^2 L_c^2$ liefert, muß dieselbe sein, die wir im strong ordering-Bereich aus dem Leiterdiagramm M_{12X} erhalten haben. Die quadrierte Summe der Diagramme M_{12X} und M_{21X} (siehe Abb. 3.2) wird daher die Terme der führenden und nächstführenden logarithmischen Ordnung enthalten. Da auch in der Näherung masseloser Fermionen im Anfangszustand Korrekturen in NLL zu erwarten sind, unterscheiden wir zwischen den auch im Fall masseloser Fermionen auftretenden, im folgenden mit NLL_c bezeichneten, und den als NLL_m bezeichneten $\tilde{O}(m^2)$ -Korrekturen, welche bei Nichtvernachlässigen der Fermionmasse zusätzlich auftreten. Nach Integration über die Raumwinkel der beiden betrachteten Photonen können wir die mit dem nicht aus den $\tilde{O}(m^2)$ -Korrekturen stammenden NLL_c -Beitrag verknüpfte Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$ identifizieren. Die NLL_c -Beiträge bei Abstrahlung einer beliebigen Anzahl von Photonen im selben kollinearen Winkelbereich erhalten wir jeweils durch Ersetzen der einfachen Splittingfunktionen $P(x_i)$ und $P(x_{i+1})$ durch die Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_i, x_{i+1})$ für ein Photonpaar γ_i, γ_{i+1} und Summation über alle

Paare.

4.1 Führende Beiträge für zwei harte Photonen

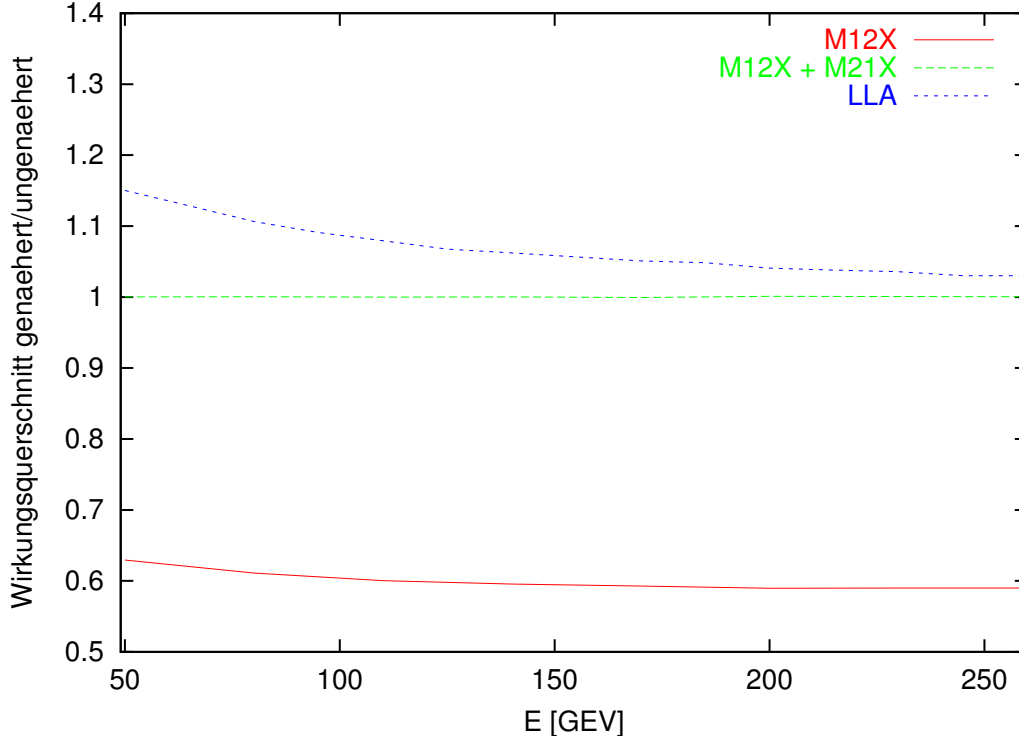
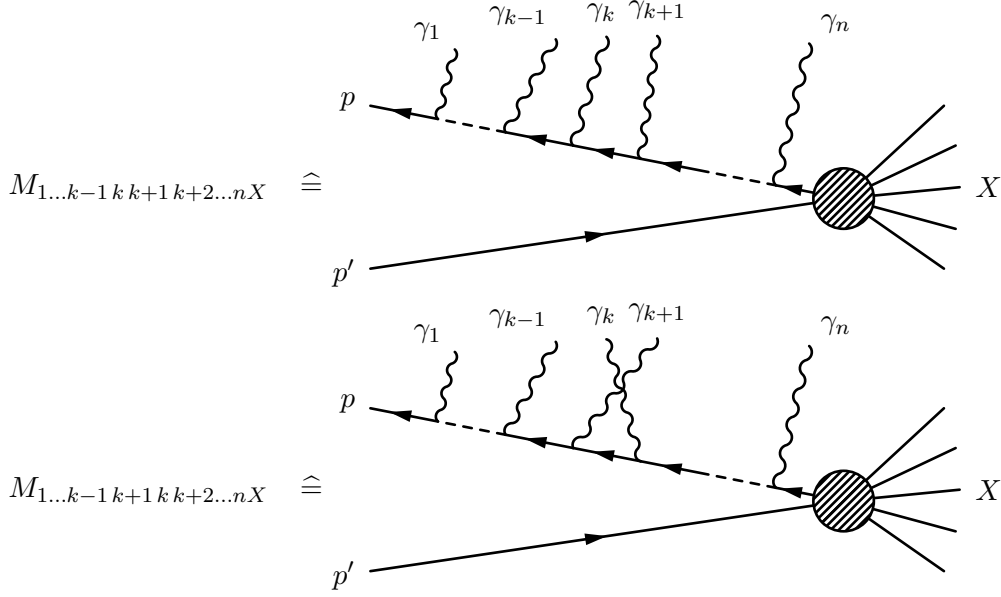


Abbildung 4.1: Verhältnis von genähertem zu ungenähertem ($Z\gamma\gamma$)-Wirkungsquerschnitt, Matrixelement ersetzt durch M_{12X} , $M_{12X} + M_{21X}$ und LLA-Näherung, gerechnet in physikalischer Eichung, beide Photonen im kollinearen Winkelbereich $[0^\circ, 1^\circ]$, massive Fermionen, $\frac{s-M_Z^2}{4E} - (1-x_1)E > 10^{-6} \frac{s-M_Z^2}{4E}$

Abbildung 4.1 zeigt, daß das Ersetzen des vollständigen Matrixelementes durch das von uns in Kapitel 3 für den Bereich streng geordneter Photonen in der physikalischen Eichung als führend identifizierte Diagramm M_{12X} — wobei M_{12X} in ungenäherter Form eingesetzt wird — den totalen Wirkungsquerschnitt des Beispielprozesses $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ nur ungenügend annähert. Die LLA-Näherung liegt schon deutlich besser, bedarf aber offensichtlich einer Verbesserung in nächstführender Ordnung. Dagegen approximiert die quadrierte und polarisationssummierte Summe $\sum_{\text{Pol}} |M_{12X} + M_{21X}|^2$ aus Diagramm M_{12X} und Austauschdiagramm M_{21X} das vollständige quadrierte Matrixelement für zwei im kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung abgestrahlte Photonen sehr gut.

Angenommen, wir betrachten die Abstrahlung von n Photonen im kollinearen Bereich um die \vec{p} -Richtung. Den führenden kollinearen Anteil erhalten wir in der physikalischen Eichung aus dem Beitrag $\sum_{\text{Pol}} |M_{12\dots nX}|^2$, berechnet in der Näherung

Abbildung 4.2: Führende Diagramme bei vergleichbaren Photonen γ_k und γ_{k+1}



streng nach den in Gleichung (3.11) definierten Größen N_i geordneter Photonen. Heben wir nun für zwei der Photonen, beispielsweise γ_k und γ_{k+1} , die strenge Ordnung auf, so daß diese gegen die Photonen γ_1 bis γ_{k-1} und γ_{k+2} bis γ_n aber nicht gegeneinander streng nach den N_i geordnet sind, kann der Propagatornenner

$$-\frac{1}{2}(p - k_1 - \dots - k_{k-1} - k_k - k_{k+1})^2 \approx -\frac{1}{2}(x_1 \dots x_{k-1} p - k_k - k_{k+1})^2 = N_k + N_{k+1}$$

nicht weiter genähert werden, weil

$$N_k = x_1 \dots x_{k-1} (p k_k)$$

und

$$N_{k+1} = x_1 \dots x_{k-1} ((p - k_k) k_{k+1})$$

von gleicher Größenordnung sind. Nach der Argumentation von Abschnitt 3.3.1 zur Identifikation des führenden Diagramms kommen nun die in Abbildung 4.2 dargestellten Diagramme

$$M_{1\dots k-1 k k+1 k+2\dots n X} \quad \text{und} \quad M_{1\dots k-1 k+1 k k+2\dots n X}$$

gleichermaßen als potentiell führend infrage. Hier versagt auch die in Abschnitt 2.2.2.3 dargelegte Begründung für die Vernachlässigbarkeit des Kreuzterms

$$\sum_{\text{phys}} (M_{1\dots k-1 k k+1 k+2\dots n X} M_{1\dots k-1 k+1 k k+2\dots n X}^* + M_{1\dots k-1 k+1 k k+2\dots n X} M_{1\dots k-1 k k+1 k+2\dots n X}^*)$$

dieser beiden Diagramme, eben weil noch ein weiteres Photon mit vergleichbarem Transversalimpuls abgestrahlt wird. Daher werden wir, weil es hier nicht möglich

ist, ein Diagramm eindeutig als führend zu identifizieren, für die Abstrahlung zweier Photonen ausgehend von der Summe $M_{12X} + M_{21X}$ nach Termen in führender und nächstführender kollinearer Ordnung suchen müssen.

4.2 Struktur der führenden und nächstführenden Terme im kollinearen Logarithmus

Im folgenden betrachten wir, von welcher Struktur Terme sein müssen, um im totalen Wirkungsquerschnitt führende und nächstführende logarithmische Beiträge erzeugen zu können. Der totale Wirkungsquerschnitt für in denselben Winkel- und Energiebereichen abgestrahlte Photonen wird erwartungsgemäß in eine Reihe der Form

$$\sigma_{X+n\gamma}(s) = \alpha^n \int_0^1 dx \sum_{i=1}^n C_i^{(X+n\gamma)}(x) L_c^i \sigma_X(xs) \quad (4.1)$$

im kollinearen Logarithmus L_c entwickelbar sein.

In denselben Integrationsgrenzen für Winkel- und Energieintegrationen abgestrahlte Photonen werden zur Vermeidung von statistischen Faktoren geeigneterweise nach ihren Polarwinkeln unterschieden, $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$. Die in unserer Eichung allein zur führenden Ordnung des quadrierten Matrixelementes beitragenden Diagramme sind für n im kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung abgestrahlte Photonen diejenigen, bei denen alle n Photonen an die p -Fermionlinie koppeln. Um die Entwicklung des totalen Wirkungsquerschnittes nach kollinearen Logarithmen zu erhalten, ist über den vollen Winkelbereich $1 \geq \cos \theta_i \geq -1$ für massive, $1 - b \geq \cos \theta_i \geq -1 + b$ für masselose Fermionen zu integrieren, wobei

$$b := \frac{m^2}{2E^2} \quad (4.2)$$

aus der Wahl $\theta_{\text{cut}} = m/E$ des Abschneidewinkels folgt.

4.2.1 Führender logarithmischer Term

Der führende logarithmische Term im totalen Wirkungsquerschnitt stammt aus dem Stück proportional $(N_1 N_2 \dots N_n)^{-1}$, d.h. proportional

$$\frac{1}{(1 - \cos \theta_1)} \cdots \frac{1}{(1 - \cos \theta_n)}$$

für masselose, bzw.

$$\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta_1)} \cdots \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta_n)}$$

für massive Fermionen. Integration über die Winkel θ_1 bis θ_n ergibt nach Anhang A.4, Gleichung (A.12) für $m = 0$

$$I_{12\dots k k+1\dots n}^{m=0}(-1 + b, 1 - b) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1+b}^{1-b} \frac{d \cos \theta_1}{(1 - \cos \theta_1)} \cdots \int_{-1+b}^{\cos \theta_{n-2}} \frac{d \cos \theta_{n-1}}{(1 - \cos \theta_{n-1})} \int_{-1+b}^{\cos \theta_{n-1}} \frac{d \cos \theta_n}{(1 - \cos \theta_n)} \\
&= \frac{1}{n!} L_c^n
\end{aligned}$$

und für $m \neq 0$ bis auf vernachlässigbare Terme proportional m^2 entsprechend

$$\begin{aligned}
I_{12\dots k k+1\dots n}^{m \neq 0}(-1, 1) &= \frac{1}{n!} \ln^n \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) + O(m^2) \\
&= \frac{1}{n!} L_c^n + O(m^2)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2.2 NLL–Terme für masselose Fermionen

Nun stellt sich das Problem, die im Fall masseloser Fermionen im Anfangszustand auftretenden NLL–Terme zu identifizieren. Der im totalen Wirkungsquerschnitt den führenden logarithmischen Beitrag ergebende Term geht im differentiellen Wirkungsquerschnitt, wie bereits gezeigt, mit $[N_1 N_2 \dots N_{k-1} N_k N_{k+1} \dots N_n]^{-1}$. Wir erwarten daher, daß im strong ordering-Bereich ($N_1 \ll \dots \ll N_n$) NLL–Beiträge aus Stücken im differentiellen Wirkungsquerschnitt gewonnen werden können, in denen beispielsweise ein Nenner N_k durch $N_{k+1} \gg N_k$ ersetzt wurde.

Ausgehend von streng nach den in Gleichung (3.11) definierten Größen N_i geordneten Photonen wird jedem Diagramm $M_{12\dots nX}$ eine genäherte Nennerstruktur zugeordnet. Das den führenden logarithmischen Term im totalen Wirkungsquerschnitt liefernde Diagramm ergibt nach dem Quadrieren einen Term proportional $(N_1 N_2 \dots N_n)^{-1}$. In grober Näherung kann der Nenner für den führenden Beitrag zum quadrierten Matrixelement somit als proportional $N_1 N_2 \dots N_n$ abgeschätzt werden. Ein Diagramm der Art $M_{12\dots i-1 i+1 i+2 \dots nX}$, bei welchem γ_i und γ_{i+1} in vertauschter Reihenfolge abgestrahlt werden, hat eine genäherte Nennerstruktur

$$(N_1 \dots N_i N_{i+1}^2 N_{i+2} \dots N_n)^{-1}$$

im Gegensatz zu $(N_1 \dots N_n)^{-1}$ beim führenden Diagramm $M_{12\dots nX}$. Allgemein ordnen wir einem Diagramm $M_{12\dots i-1 k i+1 i+2 \dots nX}$, bei dem das Photon γ_k an die i -te Stelle, $i < k$, der Abstrahlung verschoben wurde, eine Nennerstruktur

$$(N_1 \dots N_{i-1} N_k^{k-i+1} N_{k+1} \dots N_n)^{-1}$$

zu. Im quadrierten Matrixelement trägt dann der Kreuzterm eines derartigen Diagramms $M_{12\dots i-1 k i+1 i+2 \dots nX}$ mit dem führenden Diagramm $M_{1\dots nX}$ nach Kürzen mit dem als $N_1 \dots N_n$ abgeschätzten Zähler bestenfalls mit

$$(N_1 \dots N_{i-1} N_k^{k-i+1} N_{k+1} \dots N_n)^{-1}$$

bei und das quadrierte Austauschdiagramm bestenfalls mit

$$N_i N_{i+1} \dots N_{k-1} (N_1 \dots N_{i-1} N_k^{2(k-i)+1} N_{k+1} \dots N_n)^{-1}$$

In Anhang **D** wird gezeigt, daß nur Terme des quadrierten Matrixelementes, welche nach Kürzen mit dem abgeschätzten Zähler eine Nennerstruktur der Art

$$[N_1 N_2 \dots N_{i-1} N_{i+1}^2 N_{i+2} \dots N_n]^{-1}$$

oder

$$N_i [N_1 \dots N_{i-1} N_{i+2}^3 N_{i+3} \dots N_n]^{-1}$$

aufweisen, in der gesuchten NLL_c -Ordnung beitragen können. Diese Terme können wiederum nur aus der quadrierten Summe von führendem Diagramm und einem Diagramm mit in der Abstrahlungsreihenfolge vertauschten Photonen γ_i, γ_{i+1} stammen.

4.2.3 Für massive Fermionen zusätzlich auftretende NLL -Terme

Im Fall massiver Fermionen im Anfangszustand gibt es eine weitere Möglichkeit, NLL -Beiträge im totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, nämlich die in Abschnitt **2.2.2.2** erwähnten Pseudo- $O(m^2)$ -Terme, welche im Fall masseloser Fermionen nicht auftreten. Da der führende Beitrag jeder Ordnung der Abstrahlung im totalen Wirkungsquerschnitt mit einem kollinearen Logarithmus behaftet ist, es also keine nicht-logarithmischen Terme höherer negativer Potenzen gibt, werden weitere Faktoren N_i im Nenner nur zusammen mit dem Quadrat der Fermionmasse m^2 im Zähler auftreten, der das m^{-2} -Verhalten der N_i^{-1} bei sehr kleinen Winkeln kompensiert. Bereits bei der Besprechung der weichen Näherung in Kapitel **2** lieferten derartige im differentiellen Wirkungsquerschnitt in der Form $m^2/(pk)^2$ oder $m^2/(p'k)^2$ auftretende Stücke NLL -Beiträge im totalen Wirkungsquerschnitt. Allgemein erwarten wir also, daß Terme mit der Nennerstruktur

$$[N_1 N_2 \dots N_n]^{-1} \frac{m^2}{N_i} \dots \frac{m^2}{N_j}$$

für Abstrahlung kollinearere Photonen durch massive Fermionen in NLL beitragen. Zu untersuchen ist daher ein Integral der Form

$$\begin{aligned} & I_{g_1 g_2 \dots g_k \dots g_n}(c) \\ &= (m^2)^{\sum_i g_i - n} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^{g_1}} \int_c^{c_1} \frac{dc_2}{(1 - \beta c_2)^{g_2}} \dots \int_c^{c_{k-1}} \frac{dc_k}{(1 - \beta c_k)^{g_k}} \dots \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_n}{(1 - \beta c_n)^{g_n}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Integrale $I_{g_1 g_2 \dots g_k \dots g_n}(c)$ werden danach unterschieden, ob im k -ten Integrationsschritt eine Potenz $(1 - \beta \cos \theta_k)^{-1}$ und damit $g_k = 1$, oder $(1 - \beta \cos \theta_k)^{-2}$ und damit $g_k = 2$ auftritt. In Anhang **D** wird diese Rechnung detailliert ausgeführt. Wie wir feststellen, trägt für gleichartige Photonen, welche zur Vereinfachung der Phasenraumintegration nach ihren Winkeln unterschieden werden, nur der Term mit $g_1 = 2, g_i = 1$ für $1 < i \leq n$ in der gesuchten nächstführenden Ordnung bei.

4.3 Abstrahlung zweier Photonen im kollinearen Bereich um die \vec{p} -Richtung

Zur Berechnung der NLL -Korrekturen für massive und masselose Fermionen bei Abstrahlung zweier Photonen im kollinearen Winkelbereich um die \vec{p} -Richtung be-

nennen wir diese Photonen wieder mit γ_1 und γ_2 . Die auftretenden Propagatorenner vor Kürzen mit dem Zähler sind

$$\frac{1}{(pk_1)^2 P_{12}^2} \quad \text{in} \quad \sum_{\text{phys}} |M_{12X}|^2 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{(pk_2)^2 P_{12}^2} \quad \text{in} \quad \sum_{\text{phys}} |M_{21X}|^2 \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{(pk_1)(pk_2)P_{12}^2} \quad \text{in} \quad \sum_{\text{phys}} (M_{12X}M_{21X}^* + M_{21X}M_{12X}^*) \quad (4.8)$$

mit

$$P_{12} := (pk_1) + (pk_2) - (k_1k_2) \quad (4.9)$$

Die bei der Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes der Abstrahlung zweier Photonen auftretenden 4-Vektoren sind $p, p', k_1, k_2, c_1, c_2$. Wir unterscheiden für zwei im kollinearen Kegel um die \vec{p} -Richtung abgestrahlte Photonen die auftretenden Skalarprodukte anhand ihrer Größe. Die kleinen Skalarprodukte

$$\{(pk_1), (pk_2), (p'c_1), (p'c_2), (k_1k_2), (c_1c_2)\}$$

sind von $O(\theta_1^2) + O(m^2)$, $O(\theta_2^2) + O(m^2)$ oder $O(\psi_{12}^2)$. Dabei ist ψ_{ij} der Winkel zwischen den räumlichen Impulsen der Photonen γ_i und γ_j . Die großen Skalarprodukte

$$\{(pp'), (pc_1), (pc_2), (p'k_1), (p'k_2), (k_1c_1), (k_1c_2), (k_2c_1), (k_2c_2)\}$$

können wie folgt genähert werden:

$$\begin{aligned} (pp') &= 2E^2 + O(m^2) \\ (pc_i) &= \sqrt{2}EQ_i + O(\theta_i^2) + O(m^2) \\ (p'k_i) &= 2EQ_i + O(\theta_i^2) + O(m^2) \\ (k_i c_i) &= \sqrt{2}Q_i \\ (k_i c_j) &= \sqrt{2}Q_i + O(\psi_{ij}^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Da wir in unserer Näherung an denjenigen Termen interessiert sind, welche im totalen Wirkungsquerschnitt die führenden und nächstführenden Terme der Entwicklung nach dem kollinearen Logarithmus liefern, vernachlässigen wir bei der Berechnung des quadrierten Matrixelementes alle Terme, welche mit drei oder mehr „kleinen“ Skalarprodukten im Zähler und einem der Nenner (4.6) bis (4.8) gehen, — bzw. mit $(m^2)^{-4+i}$ mit $i \geq 2$ für $\theta \rightarrow 0$ — da diese nicht zur führenden und nächstführenden Ordnung des totalen Wirkungsquerschnittes beitragen werden.

4.3.1 Term, Kreuz- und Austauschterm

Ausgehend von

$$\mathcal{M}_{X+2\gamma_{\text{coll}}}^{(ss')} \approx M_{12X} + M_{21X} \quad (4.11)$$

mit

$$M_{12X} = e^2 \bar{v}(p, s) \not{\epsilon}_1 \frac{(\not{k}_1 - \not{p} + m)}{(k_1 - p)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2 \frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m)}{(k_1 + k_2 - p)^2 - m^2} \Gamma_X u(p', s') \quad (4.12)$$

und

$$M_{21X} = e^2 \bar{v}(p, s) \not{\epsilon}_2 \frac{(\not{k}_2 - \not{p} + m)}{(k_2 - p)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1 \frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m)}{(k_1 + k_2 - p)^2 - m^2} \Gamma_X u(p', s') \quad (4.13)$$

berechnen wir in Anhang E, Abschnitt E.2 den quadrierten Term,

$$\sum_{\text{phys}} |M_{12X}|^2 =: M_{12X}^{12X} = V_{12X}^{12X} + W_{12X}^{12X}$$

Austauschterm,

$$\sum_{\text{phys}} |M_{21X}|^2 =: M_{21X}^{21X} = V_{21X}^{21X} + W_{21X}^{21X}$$

sowie den Kreuzterm

$$\sum_{\text{phys}} (M_{12X} M_{21X}^* + M_{21X} M_{12X}^*) =: (M_{12X}^{21X} + M_{21X}^{12X}) = (K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}) + (C_{12X}^{21X} + C_{21X}^{12X})$$

Die $\tilde{O}(m^2)$ -Beiträge sind dabei vollständig in W_{12X}^{12X} , W_{21X}^{21X} und $(C_{12X}^{21X} + C_{21X}^{12X})$ enthalten, der führende Anteil und die auch für masselose Fermionen auftretenden NLL-Korrekturen in V_{12X}^{12X} , V_{21X}^{21X} und $(K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X})$.

4.3.2 Universelle NLL-Korrekturen ohne Beiträge in m^2 , NLL_c

Die in Abschnitt 3.3.1 für streng geordnete kollineare Photonen eingeführte Parametrisierung der Photonenergien erweist sich für den Fall vergleichbarer Photonen γ_1 und γ_2 nur als bedingt geeignet, da sie die Symmetrie des genäherten Matrixelementes unter Vertauschung der Photonen γ_1 und γ_2 verschleiern und dadurch die genäherten Ausdrücke unnötig verkomplizieren würde. Wir ergänzen daher unsere alte Parametrisierung

$$Q_1 := (1 - x_1)E \quad (4.14)$$

$$Q_2 := (1 - x_2)x_1E \quad (4.15)$$

aus Abschnitt 3.3.1 durch eine zweite äquivalente Parametrisierung.

$$Q_1 := (1 - y_2)y_1E \quad (4.16)$$

$$Q_2 := (1 - y_1)E \quad (4.17)$$

In diesen Parametrisierungen schreiben wir den Ausdruck für V_{12X}^{12X} aus Gleichung (E.32) als

$$V_{12X}^{12X} = \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \frac{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \frac{1}{(pk_1)P_{12}} + \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left\{ - \frac{[x_1^2 x_2 (1 + x_2^2) + x_2 (1 + x_2)]}{P_{12}^2 (1 - x_1)(1 - x_2)} \right\}$$

$$- \left. \frac{x_2^2(pk_2)}{(pk_1)P_{12}^2(1-x_2)} + \frac{x_2^2(k_1k_2)}{(pk_1)P_{12}^2(1-x_1)(1-x_2)} \right\} \quad (4.18)$$

sowie den Ausdruck für V_{21X}^{21X} aus Gleichung (E.35) als

$$V_{21X}^{21X} = \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left\{ \frac{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}{(1-y_1)(1-y_2)} \frac{1}{(pk_2)P_{12}} - \frac{[y_1^2 y_2(1+y_2^2) + y_2(1+y_2)]}{P_{12}^2(1-y_1)(1-y_2)} \right. \\ \left. - \frac{y_2^2(pk_1)}{(pk_2)P_{12}^2(1-y_2)} + \frac{y_2^2(k_1k_2)}{(pk_2)P_{12}^2(1-y_1)(1-y_2)} \right\} \quad (4.19)$$

Den Kreuztermanteil ($K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}$) aus Gleichung (E.49) drücken wir symmetrisch in beiden Parametrisierungen aus.

$$\begin{aligned} & (K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}) \\ & \approx \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left\{ \frac{(k_1k_2)^2}{(pk_1)(pk_2)P_{12}^2} \frac{1+x_1^2x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right. \\ & + \frac{(pk_1)}{(pk_2)P_{12}^2} \left(\frac{1+x_1^2x_2+x_1^2x_2^2}{(1-x_1)} \right) + \frac{(pk_2)}{(pk_1)P_{12}^2} \left(\frac{1+y_1^2y_2+y_1^2y_2^2}{(1-y_1)} \right) \\ & + \frac{1}{P_{12}^2} \left[\frac{2x_1x_2+2x_1^2x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} + x_1x_2 + \frac{1}{(1-x_2)x_1} \right] \\ & + \frac{1}{P_{12}^2} \left[\frac{2y_1y_2+2y_1^2y_2}{(1-y_1)(1-y_2)} + y_1y_2 + \frac{1}{(1-y_2)y_1} \right] \\ & + \frac{(k_1k_2)}{(pk_2)P_{12}^2} \left[\frac{-x_1x_2-x_1x_2^2-x_1^2x_2^2+x_1^2x_2^3}{(1-x_1)(1-x_2)} - \frac{1}{(1-x_1)} - \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right] \\ & \left. + \frac{(k_1k_2)}{(pk_1)P_{12}^2} \left[\frac{-y_1y_2-y_1y_2^2-y_1^2y_2^2+y_1^2y_2^3}{(1-y_1)(1-y_2)} - \frac{1}{(1-y_1)} - \frac{1}{(1-y_1)(1-y_2)y_1} \right] \right\} \end{aligned}$$

Der dem Restprozeß durch Abstrahlung der beiden Photonen verlorengegangene Energieanteil ist natürlich in beiden Parametrisierungen gleich, da

$$x_{12} = x_1x_2 = y_1y_2,$$

und hängt nur noch von der Summe der Photonenergien $Q_1 + Q_2$ ab, wie Gleichung (E.24) für das Bornmatrixelement zu entnehmen ist.

4.3.3 Zwei-Photon-Splittingfunktion

Der Beitrag $V_{12X}^{12X} + V_{21X}^{21X} + K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}$ enthält nach der Phasenraumintegration Terme mit führender und nächstführender Potenz im kollinearen Logarithmus. Da der zu betrachtende Beitrag symmetrisch in den Photonen γ_1 und γ_2 ist, integrieren wir beide Photonpolarwinkel unabhängig voneinander über den vollen Winkelbereich.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2!} \int d\Phi_X \frac{Q_1Q_2dQ_1dQ_2}{(4\pi)^2(2\pi)^2} d\cos\theta_1d\cos\theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} (V_{12X}^{12X} + V_{21X}^{21X} + K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}) \\ & = \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \int \frac{Q_1Q_2dQ_1dQ_2}{E^4} (\mathcal{V}_{12X}^{12X} + \mathcal{V}_{21X}^{21X} + \mathcal{K}_{12X}^{21X} + \mathcal{K}_{21X}^{12X}) \sigma_X(x_1x_2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L_c^2}{2!} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \int dx_1 dx_2 P(x_1) P(x_2) \sigma_X(x_1 x_2 s) \\
&+ \frac{L_c}{2!} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \int dx_1 dx_2 T(x_1, x_2) \sigma_X(x_1 x_2 s) + O(L_c^0)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Wir berechnen im folgenden Abschnitt die Zwei-Photon-Splittingfunktion in der Form $T(x_1, x_2)$, wobei die Details der Rechnungen Anhang E, Abschnitt E.4 zu entnehmen sind. Durch die unsymmetrische Parametrisierung der Photonenergien Q_1 und Q_2 in den Photon-Energievariablen x_1 und x_2 wird $T(x_1, x_2)$ im allgemeinen nicht symmetrisch in x_1 und x_2 sein.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{12X}^{12X} &= \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{(1-x_1)(1-x_2)} K_2 - \frac{[x_1^2 x_2(1+x_2^2) + x_2(1+x_2)]}{(1-x_1)(1-x_2)} K_4 \\
&- \frac{x_2^2}{(1-x_2)} K_5 + \frac{x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} [K_5 - K_2 + K_4]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{21X}^{21X} &= \frac{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}{(1-y_1)(1-y_2)} K_3 - \frac{[y_1^2 y_2(1+y_2^2) + y_2(1+y_2)]}{(1-y_1)(1-y_2)} K_4 \\
&- \frac{y_2^2}{(1-y_2)} K_6 + \frac{y_2^2}{(1-y_1)(1-y_2)} [K_6 - K_3 + K_4]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

und

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{K}_{12X}^{21X} + \mathcal{K}_{21X}^{12X}) \\
&= \frac{1+x_1^2 x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} [K_5 + K_6 + K_1 - 2K_2 - 2K_3 + K_4] \\
&+ \left(\frac{1+x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2}{(1-x_1)} \right) K_6 + \left(\frac{1+y_1^2 y_2 + y_1^2 y_2^2}{(1-y_1)} \right) K_5 \\
&+ \left[\frac{2x_1 x_2 + 2x_1^2 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} + x_1 x_2 + \frac{1}{(1-x_2)x_1} \right] K_4 \\
&+ \left[\frac{2y_1 y_2 + 2y_1^2 y_2}{(1-y_1)(1-y_2)} + y_1 y_2 + \frac{1}{(1-y_2)y_1} \right] K_4 \\
&+ \left[\frac{-x_1 x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^3}{(1-x_1)(1-x_2)} - \frac{1}{(1-x_1)} - \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right] [K_6 + K_4 - K_3] \\
&+ \left[\frac{-y_1 y_2 - y_1 y_2^2 - y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_2^3}{(1-y_1)(1-y_2)} - \frac{1}{(1-y_1)} - \frac{1}{(1-y_1)(1-y_2)y_1} \right] [K_5 + K_4 - K_2]
\end{aligned}$$

Die Integrale

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \int d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} \frac{1}{(pk_1)(pk_2)} \\
K_2 &:= \int d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} \frac{1}{(pk_1)P_{12}} \\
K_3 &:= \int d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} \frac{1}{(pk_2)P_{12}}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
K_4 &:= \int d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} \frac{1}{P_{12}^2} \\
K_5 &:= \int d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} \frac{(pk_2)}{(pk_1)P_{12}} \\
K_6 &:= \int d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} \frac{(pk_1)}{(pk_2)P_{12}}
\end{aligned}$$

sind von der Form

$$A_i(x_1, x_2)L_c^2 + B_i(x_1, x_2)L_c + C_i(x_1, x_2)$$

In Abschnitt E.4 werden die Integrale K_i bis in einfachlogarithmischer Ordnung berechnet [19]. Die Terme proportional L_c^2 in \mathcal{V}_{12X}^{12X} und \mathcal{V}_{21X}^{21X}

$$P(x_1)P(x_2)A_2L_c^2 - \frac{x_2^2}{(1-x_2)}A_5L_c^2 + \frac{x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}[A_5 - A_2]L_c^2 \quad (4.26)$$

setzen sich, wie zu erwarten, zusammen zu

$$\frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)x_1^2}P(x_1)P(x_2)L_c^2$$

und

$$\frac{1}{2(1-y_1)(1-y_2)y_1^2}P(y_1)P(y_2)L_c^2$$

Im Kreuzterm $\mathcal{K}_{12X}^{21X} + \mathcal{K}_{21X}^{12X} =: \mathcal{K}_2L_c^2 + \mathcal{K}_1L_c$ verschwinden alle Terme proportional L_c^2 .

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 &= \frac{1 + x_1^2x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} [A_1 + A_5 + A_6 - 2A_2 - 2A_3] \\
&+ \left(\frac{1 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2^2}{(1-x_1)} \right) A_6 + \left(\frac{1 + y_1^2y_2 + y_1^2y_2^2}{(1-y_1)} \right) A_5 \\
&+ \left[\frac{-x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^3}{(1-x_1)(1-x_2)} - \frac{1}{(1-x_1)} - \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right] [A_6 - A_3] \\
&+ \left[\frac{-y_1y_2 - y_1y_2^2 - y_1^2y_2^2 + y_1^2y_2^3}{(1-y_1)(1-y_2)} - \frac{1}{(1-y_1)} - \frac{1}{(1-y_1)(1-y_2)y_1} \right] [A_5 - A_2] \\
&= \frac{1 + x_1^2x_2^2}{2(1-x_1)^2x_1^4} + \frac{1 + x_1^2x_2^2}{2(1-x_1)^2(1-x_1+x_1x_2)^2} \\
&+ \frac{1 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2^2}{2(1-x_1)^2(1-x_2)x_1(1-x_1+x_1x_2)^2} + \frac{1 + 2x_1^2x_2^2}{2(1-x_1)(1-x_2^2)x_1^4} + \frac{x_1x_2}{2(1-x_2)^2x_1^4} \\
&+ \frac{1}{2(1-x_1)(1-x_1+x_1x_2)^2} \left[-\frac{x_1x_2(1+x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)} - \frac{1 + x_1^2x_2^2}{(1-x_1)} - \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right] \\
&+ \frac{1}{2(1-x_2)x_1^3} \left[-\frac{2x_1x_2(1-x_1+x_1x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} + \frac{x_1x_2}{(1-x_2)x_1} - \frac{1 + x_1^2x_2^2}{(1-x_2)x_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Der Ausdruck für $\mathcal{V}_{12X}^{12X} + \mathcal{V}_{21X}^{21X} + \mathcal{K}_{12X}^{21X} + \mathcal{K}_{21X}^{12X}$ ist symmetrisch unter gleichzeitiger Vertauschung von x_1 mit y_1 sowie x_2 mit y_2 , entsprechend der oben geforderten Symmetrie unter Austausch der Photonenergien.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{12X}^{12X} + \mathcal{V}_{21X}^{21X} + \mathcal{K}_{12X}^{21X} + \mathcal{K}_{21X}^{12X} &= L_c t(x_1, x_2) + L_c t(y_1, y_2) \\ &+ \frac{L_c^2 P(x_1)P(x_2)}{2(1-x_1)(1-x_2)x_1} + \frac{L_c^2 P(y_1)P(y_2)}{2(1-y_1)(1-y_2)y_1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Mit der nächstführenden logarithmischen Ordnung ist die folgende von den Photonenergievariablen x_1 und x_2 abhängige Funktion $t(x_1, x_2)$ verknüpft:

$$\begin{aligned} t(x_1, x_2) &= \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{(1-x_1)(1-x_2)} B_2(x_1, x_2) - \frac{[x_1^2 x_2(1+x_2^2) + x_2(1+x_2)]}{(1-x_1)(1-x_2)} B_4(x_1, x_2) \\ &- \frac{x_2^2}{(1-x_2)} B_5(x_1, x_2) + \frac{x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} [B_5(x_1, x_2) - B_2(x_1, x_2) + B_4(x_1, x_2)] \\ &+ \frac{1+x_1^2 x_2^2}{2(1-x_1)(1-x_2)x_1} [B_5(x_1, x_2) + B_6(x_1, x_2) + 2B_4(x_1, x_2) \\ &- 2B_2(x_1, x_2) - 2B_3(x_1, x_2)] + \left(\frac{1+x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2}{(1-x_1)} \right) B_6(x_1, x_2) \\ &+ \left[\frac{2x_1 x_2 + 2x_1^2 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} + x_1 x_2 + \frac{1}{(1-x_2)x_1} \right] B_4(x_1, x_2) \\ &+ \left[\frac{-x_1 x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^3}{(1-x_1)(1-x_2)} - \frac{1}{(1-x_1)} - \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} \right] \cdot \left[B_6(x_1, x_2) \right. \\ &\left. + B_4(x_1, x_2) - B_3(x_1, x_2) \right] \end{aligned}$$

Die gesuchte Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$ berechnen wir aus der mit dem aus dem Phasenraummaß der Photonenergie-Integration stammenden Faktor

$$\frac{Q_1 Q_2 dQ_1 dQ_2}{E^4} = (1-x_1)(1-x_2)x_1^2 dx_1 dx_2$$

multiplizierten Summe $t(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)$. Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= (1-x_1)(1-x_2)x_1^2 [t(x_1, x_2) + t(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))] \\ &= [x_1^4 + x_1^2 x_2(1-x_1 + x_1 x_2)] B_2(x_1, x_2) \\ &+ [x_1^3 x_2 + x_1(1-x_1 + x_1 x_2)^3] B_3(x_1, x_2) \\ &- x_1^3 x_2(1-x_1)(1-x_2) [B_5(x_1, x_2) + B_6(x_1, x_2)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Einsetzen der ebenfalls weiter vereinfachten Ausdrücke für $B_2(x_1, x_2)$, $B_3(x_1, x_2)$,

$B_5(x_1, x_2)$ und $B_6(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
B_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1^2} \ln \left(\frac{(1-x_2)x_1^2}{(1-x_1)x_2} \right) \\
B_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1(1-x_1+x_1x_2)} \ln \left(\frac{(1-x_1)(1-x_1+x_1x_2)^2}{(1-x_2)x_1^2x_2} \right) \\
B_5(x_1, x_2) &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1^3} \ln \left(\frac{(1-x_2)x_1^2}{(1-x_1)x_2} \right) \\
B_6(x_1, x_2) &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1(1-x_1+x_1x_2)^2} \ln \left(\frac{(1-x_1)(1-x_1+x_1x_2)^2}{(1-x_2)x_1^2x_2} \right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

liefert schließlich das folgende Ergebnis für $T(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}
T(x_1, x_2) &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \ln \left(\frac{(1-x_2)x_1^2}{(1-x_1)x_2} \right) \\
&+ \left[\frac{(1-x_1+x_1x_2)^2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \frac{x_1^2x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1+x_1x_2)^2} \right] \ln \left(\frac{(1-x_1)(1-x_1+x_1x_2)^2}{(1-x_2)x_1^2x_2} \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Wie gefordert, ist $T(x_1, x_2)dx_1dx_2$ symmetrisch unter Vertauschen der Photonenergien, was nach Einsetzen von x_1 und x_2 in der Form $x_2 = 1 - Q_2/x_1E$ und $x_1 = 1 - Q_1/E$ deutlich wird.

$$\begin{aligned}
T(x_1, x_2)dx_1dx_2 &= \frac{dQ_1dQ_2}{E^2} \left[\frac{(E-Q_1)^4 + E^2(E-Q_1-Q_2)^2}{Q_1Q_2(E-Q_1)^2} \ln \left(\frac{Q_2(E-Q_1)^2}{EQ_1(E-Q_1-Q_2)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(E-Q_2)^4 + E^2(E-Q_1-Q_2)^2}{Q_1Q_2(E-Q_2)^2} \ln \left(\frac{Q_1(E-Q_2)^2}{EQ_2(E-Q_1-Q_2)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

4.3.3.1 Zwei-Photon-Splittingfunktion im weichen Limes

Im Limes $x_1 \rightarrow 1$ entsprechend dem Grenzfall verschwindender Photonenergie $Q_1 = (1-x_1)E$ geht die Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$ aus Gleichung (4.31) bei beliebigem x_2 über in

$$\begin{aligned}
&\lim_{x_1 \rightarrow 1} T(x_1, x_2) \\
&= \lim_{x_1 \rightarrow 1} \left\{ \frac{[(x_1^2 + x_2^2)(1-x_1+x_1x_2)^2 - (1-x_1+x_1x_2)^4 - x_1^2x_2^2]}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1+x_1x_2)^2} \ln \left(\frac{1-x_2}{1-x_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \ln \left(\frac{x_1^2}{x_2} \right) + \frac{(1-x_1+x_1x_2)^4 + x_1^2x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1+x_1x_2)^2} \ln \left(\frac{(1-x_1+x_1x_2)^2}{x_1^2x_2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_2^2} \ln \left(\frac{1-x_2}{1-x_1} \right) [(1+x_2^2)x_2^2 - x_2^4 - x_2^2] \\
&\quad + \frac{1+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \ln \left(\frac{1}{x_2} \right) + \frac{x_2^4 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)x_2^2} \ln \left(\frac{x_2^2}{x_2} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Aufgrund der Symmetrie unter Austausch der Photonen geht daher die Zwei-Photon-Splittingfunktion auch für verschwindende Energie $Q_2 = (1 - x_2)x_1 E$ des zweiten Photons und damit auch im Limes $x_2 \rightarrow 1$ gegen Null. Damit verbleiben im weichen Limes in der Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$ nur Terme nullter Potenz der Photonenergien im Nenner, welche nach Integration über x_1 und x_2 keine infraroten Logarithmen liefern.

Als Ergebnis ist festzuhalten, daß in einer Rechnung mit masselosen Fermionen bei fester Ordnung N der Abstrahlung keine Korrekturen in $\alpha^N L_{\text{IR}}^N L_c^{N-1}$ und $\alpha^N L_{\text{IR}}^{N-1} L_c^{N-1}$ auftreten. Die NLL-Korrekturen im infraroten Logarithmus der Form $\alpha^N L_{\text{IR}}^{N-1} L_c^N$, $\alpha^N L_{\text{IR}}^{N-2} L_c^N$ etc. erhalten wir automatisch zusammen mit den die führenden kollinearen Logarithmen liefernden Termen, diese sind also im führenden kollinearen Term bereits enthalten. Die Approximation des totalen Wirkungsquerschnittes durch die führenden kollinearen-logarithmischen Beiträge wird demnach exakt im Limes weicher Abstrahlungen.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß aus den hier noch nicht behandelten $\tilde{O}(m^2)$ -Termen sehr wohl Beiträge in $\alpha^N L_{\text{IR}}^N L_c^{N-1}$ zum totalen Wirkungsquerschnitt stammen werden.

4.3.4 NLL-Korrekturen für $m \neq 0$, NLL_m

Bei Abstrahlung zweier Photonen von derselben Fermionlinie tritt in einer allgemeinen Rechnung anstelle des für streng geordnete Photonen genäherten Propagatorennenners $x_1(pk_2)$ der volle Propagatorenner proportional P_{12} (4.9) auf, wobei P_{12} im Limes strenger Ordnung $N_1 \ll N_2$ in den genäherten Ausdruck $x_1(pk_2)$ übergeht. Um aus den noch zu diskutierenden Beiträgen W_{12X}^{12X} , W_{21X}^{21X} und $W_{12X}^{21X} + W_{21X}^{12X}$ die Beiträge der $\tilde{O}(m^2)$ -Terme zu den NLL-Korrekturen zu extrahieren, schreiben wir P_{12} als

$$P_{12} = \frac{1}{x_1(pk_2)}(1 - \Delta) \quad (4.35)$$

Dabei parametrisiert $0 < \Delta < 1$ die Abweichung der Näherung $x_1(pk_2)$ vom ungenäherten Propagatorenner P_{12} .

$$\Delta := 1 - \frac{x_1(pk_2)}{P_{12}} \quad (4.36)$$

Im Gebiet strenger Ordnung ist $\Delta \ll 1$, gilt aber keine strenge Ordnung, dann muß Δ nicht unbedingt vernachlässigbar klein sein. Terme mit P_{12} im Nenner werden sich näherungsweise wie Terme mit (pk_2) im Nenner verhalten.

Die bei der Berechnung des Kreuzterms in der P_{12} -Parametrisierung nach Gleichung (4.35) auftretenden Beiträge sind proportional zu $1/(pk_1)(pk_2)$, $1/(pk_2)^2$ oder $(pk_1)/(pk_2)^3$. Da der führende Beitrag jeder Ordnung der Abstrahlung im totalen Wirkungsquerschnitt mit einem kollinearen Logarithmus behaftet ist, es also keine nichtlogarithmischen Terme höherer negativer Potenzen gibt, werden weitere Faktoren (pk_1) oder (pk_2) im Nenner nur zusammen mit dem Quadrat m^2 der Fermionmasse im Zähler auftreten, der das m^{-2} -Verhalten von $(pk_1)^{-1}$ bzw. $(pk_2)^{-1}$ bei sehr kleinen Winkeln kompensiert. Wir erwarten daher bei Nichtvernachlässigen

der Fermionmassen in den NLL-Korrekturtermen des differentiellen Wirkungsquerschnittes für Abstrahlung zweier Photonen zusätzliche Beiträge in $m^2/(pk_1)(pk_2)^2$, $m^2/(pk_2)^3$, $m^2(pk_1)/(pk_2)^4$ oder $m^2/(pk_1)^2(pk_2)$. Wie bereits in Abschnitt 4.2.3 gezeigt, trägt keiner der ersten drei dieser Terme im totalen Wirkungsquerschnitt in NLL bei, da keines der Integrale der drei erstgenannten Terme nach Integration über die Photonpolarwinkel θ_1 und θ_2 eine höhere Potenz als L_c^0 liefert. Ein Term proportional $m^2/(pk_1)^2(pk_2)$ kann nur im quadratischen Term, nicht aber in Austausch- und Kreuzterm auftreten. Das entsprechende Winkelintegral trägt als von $O(\alpha^2 L_c^1)$ zu den NLL-Korrekturen der Abstrahlung zweier Photonen bei, daher wird der in Gleichung (E.33) angegebene Anteil W_{12X}^{12X} proportional m^2 des quadratischen Terms M_{12X}^{12X} die im Fall massiver Fermionen zusätzlich auftretenden Korrekturen enthalten.

$$\begin{aligned} W_{12X}^{12X} &= \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left\{ -\frac{2x_1 x_2 m^2}{(1-x_1)(pk_1)P_{12}^2} - \frac{m^2}{(pk_1)^2} \left[\frac{x_1}{P_{12}} - \frac{x_1 x_2 m^2}{P_{12}^2} + \frac{2x_1 x_2 (pk_2)}{P_{12}^2 (1-x_2)x_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x_1 x_2}{P_{12}^2} \cdot \left(((p-k_1)k_2) + \frac{2(k_1 k_2)}{(1-x_2)x_1} + 2((p-k_1)k_2) \frac{(1-x_1)}{(1-x_2)x_1} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left(-\frac{x_1 m^2}{(pk_1)^2} \right) \frac{1+x_2^2}{(1-x_2)P_{12}} + O(\text{NNLL}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Setzen wir in Gleichung (4.37) für den Propagatornenner P_{12} wieder die Parametrisierung aus Gleichung (4.35) ein, verbleibt im Limes streng geordneter Photonen der Beitrag

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} W_{12X}^{12X} = -\frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \frac{x_1 m^2}{(pk_1)^2} \frac{(1+x_2^2)}{(1-x_2)x_1(pk_2)}$$

Phasenraumintegration ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2!} \int d\Phi_X \frac{Q_1 Q_2 dQ_1 dQ_2}{(4\pi)^2 (2\pi)^2} d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 \frac{d\phi_{12}}{2\pi} (W_{12X}^{12X} + W_{21X}^{21X}) \\ &= -2 \frac{L_c}{2!} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \int dx_1 dx_2 R(x_1) P(x_2) \sigma_X(x_1 x_2 s) \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei

$$R(x) := \frac{2x}{(1-x)} \quad (4.39)$$

4.4 Notation für führende und nächstführende Beiträge

Zum Abschluß des vorliegenden Kapitels listen wir der Übersichtlichkeit halber alle bisher berechneten Beiträge führender und nächstführender logarithmischer Ordnung auf. Da wir auch in Zukunft berücksichtigen wollen, daß es sich bei Zwei-Photon- und $\tilde{O}(m^2)$ -Korrekturen um völlig verschiedene Arten von Korrekturen handelt, führen wir separate Namen für diese ein. Ferner sei auf die erst in Kapitel 6 angesprochenen, je nach Art des Prozesses eventuell relevanten nichtuniversellen Korrekturen hingewiesen.

- LLA Führender Beitrag im kollinearen Logarithmus, enthält alle Beiträge proportional $(\alpha L_c)^N$ des totalen Wirkungsquerschnittes der Abstrahlung von N Photonen. Die Abstrahlung jedes Photons liefert einen Faktor $(\alpha/\pi) L_c P(x_i)$.
- NLL _{m} Enthält neben den LLA–Beiträgen auch die aus den $\tilde{O}(m^2)$ –Termen stammenden Korrekturen nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus, d.h. Terme proportional $\alpha^N L_c^{N-1}$ bei Abstrahlung einer festen Anzahl von N Photonen. Hierbei handelt es sich um eine universelle Korrektur, die vom unter dem kleinsten Winkel abgestrahlten Photon in der Abstrahlungslinie herrührt. In jeder Ordnung N der Abstrahlung ist für das erste abgestrahlte Photon ein Faktor $(\alpha/\pi) [L_c P(x_i) - NR(x_i)]$ einzusetzen, für die übrigen wieder der LLA–Faktor $(\alpha/\pi) L_c P(x_i)$.
- NLL_{soft} Die NLL_{soft}–Näherung entspricht dem um den weichen Grenzfall der $\tilde{O}(m^2)$ –Korrekturen erweiterten LLA–Anteil. Hier treten in nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus nur Terme proportional $\alpha^N L_c^{N-1} L_{\text{IR}}^N$ bei fester Ordnung N der Abstrahlung auf.
- NLL _{c} Um den Beitrag der auch für masselose Fermionen im Anfangszustand auftretenden Zwei–Photon–Korrekturen erweiterter LLA–Anteil. Auch dies ist eine universelle Korrektur. Zum LLA–Anteil wird für jedes Paar aufeinanderfolgend abgestrahlter Photonen ein LLA–Anteil addiert, für welchen die Splittingfunktionen $P(x_i)P(x_j)$ des jeweiligen Photonpaares ersetzt wird durch eine Zwei–Photon–Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$.
- NLL _{$c+m$} Um Zwei–Photon– und $\tilde{O}(m^2)$ –Korrekturen, also um alle universellen Korrekturen, erweiterter LLA–Beitrag.
- NLL _{Z} Der LLA–Term wird erweitert um die $\tilde{O}(m^2)$ –Korrekturen sowie um einen für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ berechneten nichtuniversellen Term. Dieser Beitrag wird in Kapitel 6 im Rahmen der numerischen Tests behandelt.

Kapitel 5

Universelle NLL–Korrekturen zur LLA–Radiatorfunktion

Eine Radiatorfunktion, die Beiträge bis beispielsweise in α^2 zum ISR–Wirkungsquerschnitt gut wiedergibt, wird gegenüber dem herkömmlichen LLA–Radiator verbesserte Werte für den inklusiven Wirkungsquerschnitt für Anfangszustandsabstrahlung liefern. Im Laufe der Rechnung konnten wir zwei Sorten universeller NLL–Korrekturen unterscheiden, zum einen die aus den $\tilde{O}(m^2)$ –Beiträgen stammenden NLL_{m^-} , zum anderen die durch die Zwei–Photon–Splittingfunktion beschriebenen, auch für masselose Fermionen auftretenden NLL_c –Korrekturen. Aufsummation aller in nächstführender logarithmischer Ordnung verbesserten Teilwirkungsquerschnitte der Abstrahlung von n Photonen liefert den zum jeweiligen Bornprozeß gehörigen ISR–Wirkungsquerschnitt. Dieser kann wieder als Faltung des Bornquerschnittes mit einer die Abstrahlungen beschreibenden Radiatorfunktion geschrieben werden. Wir werden nun NLL_c – und NLL_{m^-} –Korrekturen zur in Kapitel 3 berechneten LLA–Radiatorfunktion diskutieren. Dabei interessieren uns an dieser Stelle nach wie vor nur die bisher betrachteten, nicht von der konkreten Wahl des Bornprozesses abhängenden universellen Korrekturen.

5.1 Zwei–Photon–Splittingfunktion

Wie wir in Kapitel 4 bei der Betrachtung der Zwei–Photon–Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$ im Limes weicher Photonen feststellen konnten, enthält diese keine Infrarotsingularitäten. In den folgenden Rechnungen verwenden wir eine Zwei–Photon–Splittingfunktion, welche nur noch von der Variable $x_{12} := x_1 x_2$ abhängt. Da diese infrarotendlich ist, entfällt die Regularisierung.

$$T(x_{12}) = \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_{12} - x_1 x_2) T(x_1, x_2) \quad (5.1)$$

Wir berechnen

$$T(z) = \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(z - x_1 x_2) T(x_1, x_2) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-z} \int_{\frac{z}{1-\varepsilon}}^{1-\varepsilon} dx \left\{ \left[\frac{z^2-z}{x^2} + \frac{z^2-1}{x} + \frac{1-z^2}{1-x+z} + \frac{z-z^2}{(1-x+z)^2} \right] \ln \left(\frac{x-z}{1-z+x} \right) \right. \\
&+ \left[\frac{z^2-z}{x^2} + \frac{z^2-1}{x} + \frac{1+z^2}{1-x} + \frac{1+z^2}{x-z} - 1+z \right] 2 \ln x \\
&+ \left[-1+z + \frac{1+z^2}{1-x} + \frac{z^2-1}{1-x+z} + \frac{z^2-z}{(1-x+z)^2} + \frac{1+z^2}{x-z} \right] 2 \ln(1-x+z) \\
&- \left. \left[\frac{z^2-z}{x^2} + \frac{z^2-1}{x} + \frac{2(1+z^2)}{1-x} + \frac{2(1+z^2)}{x-z} - 2(1-z) + \frac{z^2-1}{1-x+z} + \frac{z^2-z}{1-x+z} \right] \ln z \right\} \\
&= \frac{1}{1-z} \left\{ \left(\frac{5z^2}{2} + \frac{7}{2} - z \right) \ln^2 z + \frac{(1-z)^2}{z^2} \ln z - 3(1-z)(1-z) \frac{\pi^2}{6} \right. \\
&+ (1-z)(2z-1) \ln(1-z) - 2(1-z)(1+z) \text{Li}_2(z) - (3+z^2) \text{Li}_2(1-z) \\
&- \left. 2(1+z^2) \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{z} \right) + (1-z)^2 \text{Li}_2 \left(\frac{1}{z} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Im Limes $z \rightarrow 1$ verschwindet $T(z)$.

5.2 Symbolische Notation

Zur Veranschaulichung definieren wir eine Art Feynmanregeln zur Berechnung der universellen führenden und nächstführenden Beiträge. Dabei wird jede Splittingfunktion $P_+(x)$ durch eine Einsetzung

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \blacksquare \end{array} \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \text{L}_c P_+(x),$$

jede Splittingfunktion $R_+(x)$ durch eine Einsetzung

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \circ \end{array} \equiv - \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) R_+(x)$$

und jede Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_{ij})$ durch eine Einsetzung

$$\begin{array}{c} \text{two wavy lines} \\ \blacksquare \end{array} \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \text{L}_c T(x_{ij})$$

in die betreffende Fermionlinie symbolisiert. Den Bornprozeß $e^+e^- \rightarrow X$ ersetzen wir in dieser Notation durch das Symbol

$$\begin{array}{c} \text{fermion line} \\ \text{shaded circle} \end{array} \equiv \sigma_X(xs)$$

Die Beiträge führender logarithmischer Ordnung der Faltung des Bornquerschnittes mit einer LLA–Radiatorfunktion

$$\begin{aligned}\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{LLA}} &= \sigma_X(s) + \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^n}{n!} \delta(x - x_1 \dots x_n) \prod_{i=1}^n P_+(x_i) dx_i \sigma_X(xs) \\ &= \int \mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, L_c) \sigma_X(xs) dx\end{aligned}\quad (5.3)$$

schreiben sich in der neuen symbolischen Notation als

$$\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{LLA}} \equiv \left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \dots \right) \otimes \left(\text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \text{---} \right) \quad (5.4)$$

Mit der symbolischen Darstellung

$$\mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, L_c) \equiv \left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \dots \right) \quad (5.5)$$

für die LLA–Radiatorfunktion sieht die zugehörige Evolutionsgleichung in der differentiellen Form wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial L_c} &\left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \dots \right) \\ &= \left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} + \dots \right) \otimes \left(\text{---} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \text{---} \right)\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung stellen wir dar als

$$\mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, 0) \equiv \left(\text{---} \right) \quad (5.7)$$

5.3 NLL_m–Korrektur

Wie wir in Kapitel 4 bereits feststellten, trägt in unserer Unterscheidung der Photonen nach ihren Polarwinkeln $\theta_1 < \dots < \theta_n$ nur das unter dem kleinsten Winkel abgestrahlte Photon mit einem Beitrag $R_+(x_1)$ zur nächstführenden kollinear–logarithmischen Ordnung bei, so daß die NLL_m–Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt

$$\Delta\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_m} = - \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^{n-1}}{n!} \delta(x - x_1 \dots x_n) n R_+(x_1) dx_1 \prod_{i=2}^n P_+(x_i) dx_i \sigma_X(xs) \quad (5.8)$$

in der symbolischen Notation wie folgt aussehen:

$$\Delta\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_m} \equiv \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \blacksquare \text{---} \\ \text{---} \circ \blacksquare \blacksquare \text{---} \\ \vdots \end{array} \right) \otimes \left(\text{---} \text{---} \text{---} \right) \quad (5.9)$$

Die +-Distribution von $R(x)$ nach Gleichung (4.39) folgt analog zu $P_+(x)$ aus Gleichung (3.31).

5.3.1 Entwicklungsgleichung für die NLL_m -Radiatorfunktion

Der die NLL_m -Korrekturen enthaltende ISR-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_m}$ folgt als

$$\begin{aligned} \sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_m}(s) &= \sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{LLA}}(s) + \Delta\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_m}(s) \\ &= \int_0^1 dx \mathcal{D}^{\text{NLL}_m}(x, L_c) \sigma_X(xs) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die NLL_m -Radiatorfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{NLL}_m}(x, L_c) &= \delta(1-x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^{n-1}}{n!} \int_0^1 \delta(x-x_1 \dots x_n) [P_+(x_1)L_c - nR_+(x_1)] dx_1 \prod_{i=2}^n P_+(x_i) dx_i \end{aligned} \quad (5.11)$$

enthält zusätzlich zum LLA-Anteil auch die NLL_m -Beiträge. Sie erfüllt wieder eine Entwicklungsgleichung,

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{\text{NLL}_m}(x, L_c) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \int_0^1 \frac{dz}{z} P_+(z) \mathcal{D}^{\text{NLL}_m}\left(\frac{x}{z}, L_c\right) \quad (5.12)$$

welche sich von der Entwicklungsgleichung (3.35) des LLA-Radiators nur durch die veränderte Anfangsbedingung

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}_m}(x, L_c) = \delta(1-x) - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) R_+(x) \quad (5.13)$$

unterscheidet. In der symbolischen Darstellung

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}_m}(x, L_c) \equiv \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \blacksquare \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \blacksquare \blacksquare \text{---} \\ \text{---} \circ \blacksquare \text{---} \\ \vdots \end{array} \right) \quad (5.14)$$

für die NLL_m -Radiatorfunktion sieht die zugehörige Evolutionsgleichung wie folgt aus:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial L_c} \left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} + \dots \right) \\ &= \left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} + \dots \right) \otimes \left(\text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die Anfangsbedingung schreibt sich in der symbolischen Notation als

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}_m}(x, 0) \equiv \left(\text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{array} \right) \quad (5.16)$$

Für die in NLL_m korrigierte Radiatorfunktion erhalten wir eine Gribov-Lösung der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{NLL}_m}^{x \rightarrow 1}(x, \eta) &= \exp \left\{ \frac{\eta}{2} \left(\frac{3}{4} - \gamma \right) \right\} (1-x)^{\left(\frac{\eta}{2}-1\right)} \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\frac{\eta}{2})} \right) \\ & \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) [2\gamma - 2] - 4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\ln(1-x)}{2} - \frac{\Gamma'(1+\frac{\eta}{2})}{\Gamma(1+\frac{\eta}{2})} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wir erkennen in der ersten Zeile von Gleichung (5.17) wieder die LLA-Gribov-Lösung aus Gleichung (3.37), welche aufgrund der veränderten Anfangsbedingung (5.13) mit dem Faktor in der zweiten Zeile von (5.17) zu multiplizieren ist.

5.3.2 NLL_m -Radiatorfunktion bis in $O(\eta^2)$

Auch im Fall der in NLL_m verbesserten Radiatorfunktion können wir wieder eine Faktorisierung in einen harten x -abhängigen und einen weichen x -unabhängigen Anteil ansetzen.

$$\mathcal{D}_{\text{NLL}_m}(x, \eta) = E_{\text{NLL}_m}(\eta) \cdot d_{\text{NLL}_m}(x, \eta) \quad (5.18)$$

Die Rechnungen werden analog zu den in Abschnitt C.4 für die analytische Lösung der LLA-Radiatorfunktion dargestellten durchgeführt. Mit der Anfangsbedingung

$$d_0(x) = \delta(1-x) - \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \frac{2x}{1-x} \Theta(1-\varepsilon-x)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{\text{NLL}_m}(x, \eta)(1-x) \quad (5.19) \\ &= \frac{\eta}{2} \left[\frac{1}{2} (1+x^2) + \frac{\eta}{8} \left(\frac{3}{2} (1+x^2) - (1-x)^2 - \frac{1}{2} (1+3x^2) \ln x + 2(1+x^2) \ln(1-x) \right) \right] \\ & - 4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left[\frac{x}{2} + \frac{\eta}{8} \left(-x(1+x) \ln x + (1+x)^2 \ln(1-x) + (1+x^2) + \frac{3}{2}x \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ O\left(\frac{\alpha}{\pi}\eta^2\right) + O(\eta^3)$$

Suchen wir eine Lösung, welche im Limes $x \rightarrow 1$ in die weiche Gribov-Lösung übergeht, bzw. die resummierten und regularisierten Infrarotsingularitäten enthält, dann folgt aus dem Ansatz

$$\mathcal{D}^{\text{LLA}_m}(x, \eta) = \mathcal{D}_{\text{LLA}_m}^{x \rightarrow 1}(x, \eta) a(x, \eta) + b(x, \eta) \quad (5.20)$$

mit

$$a(x, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k a_k(x) \quad (5.21)$$

$$b(x, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k b_k(x) \quad (5.22)$$

unter der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow 1} b_k(x) = 0 \quad (5.23)$$

nach Koeffizientenvergleich mit (C.40)

$$\mathcal{D}^{\text{LLA}_m}(x, \eta) = \mathcal{D}_{\text{LLA}_m}^{x \rightarrow 1}(x, \eta) \cdot x + \frac{\eta}{4}(1-x) + O\left(\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)\eta\right) \quad (5.24)$$

5.4 NLL_c-Korrektur

Um den um die durch die Zwei-Photon-Korrekturen (NLL_c⁻) ergänzten Wirkungsquerschnitt der Abstrahlung von n Photonen zu berechnen, muß der korrekte statistische Faktor angebracht werden. Bei Abstrahlung von n Photonen werden $n - 2$ der Photonen durch eine Splittingfunktion und einen Faktor $\alpha_{\text{Lc}}P(x_i)$ beschrieben, während zwei der Photonen als Photonpaar gewertet werden und durch $\alpha_{\text{Lc}}T(x_{12})$ gekennzeichnet sind. Sehen wir dieses Photonpaar als neues Teilchen an, dann ist ein statistischer Faktor $1/(n - 1)!$ für die nun n abgestrahlten Teilchen anzubringen. Ferner gibt es bei Abstrahlung von n Photonen $n - 1$ Möglichkeiten, ein Paar aus nacheinander abgestrahlten Photonen zu bilden. Benennen wir die Integrationsvariablen entsprechend um, ist zu sehen, daß es formal ausreicht, die Abstrahlung eines Photonpaares an der ersten Stelle der Abstrahlungslinie mit einem Faktor $n - 1$ multipliziert zu berechnen.

$$\begin{aligned} \sigma_{X+n\gamma}^{\text{NLL}_c}(s) & \quad (5.25) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{\mathbf{L}_c^{n-1}}{n!} \int_0^1 dx \delta(x - x_1 \dots x_n) [P_+(x_1) - nR_+(x_1)] dx_1 \prod_{i=1}^n P_+(x_i) dx_i \sigma_X(xs) \\ &+ \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{\mathbf{L}_c^{n-1}}{(n-1)!} (n-1) \int_0^1 dx \delta(x - x_{12}x_3 \dots x_n) T(x_{12}) dx_{12} \prod_{i=3}^n P_+(x_i) dx_i \sigma_X(xs) \end{aligned}$$

Die Zwei-Photon-Korrekturen sind für jedes Photonpaar einzusetzen und treten daher erst für Abstrahlung von mindestens zwei Photonen auf.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_c} & \quad (5.26) \\ &= \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^{n-1}}{(n-1)!} (n-1) \delta(x-x_1 x_2 x_3 \dots x_n) T(x_{12}) dx_{12} \prod_{i=3}^n P_+(x_i) dx_i \sigma_X(xs) \end{aligned}$$

In der symbolischen Notation schreiben wir

$$\Delta\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_c} \equiv \left(\begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \\ \text{diagram 3} \\ \dots \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{c} \text{diagram 4} \end{array} \right) \quad (5.27)$$

5.4.1 Entwicklungsgleichung für die NLL_c -Radiatorfunktion

Der die Zwei-Photon-Korrekturen enthaltende ISR-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_c}$ berechnet sich wieder als Summe der entsprechenden Teilwirkungsquerschnitte.

$$\begin{aligned} \sigma_{X+\text{ISR}}^{\text{NLL}_c}(s) &= \sigma_{X+n\gamma}^{\text{LLA}}(s) + \Delta\sigma_{X+n\gamma}^{\text{NLL}_c}(s) \\ &= \int_0^1 dx \mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, L_c) \sigma_X(xs) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die NLL_c -Radiatorfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, L_c) &= \delta(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^n}{n!} \int_0^1 \delta(x-x_1 \dots x_n) \prod_{i=1}^n P_+(x_i) dx_i \quad (5.29) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \delta(x-x_1 x_2 x_3 \dots x_n) T(x_{12}) dx_{12} \prod_{i=3}^n P_+(x_i) dx_i \end{aligned}$$

enthält nun die auch für masselose Fermionen auftretenden universellen Korrekturen nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus. Nach Umbenennen des Summationsindex und der Integrationsvariablen in der letzten Zeile von Gleichung (5.29) fassen wir die einzelnen Beiträge zusammen und schreiben den NLL_c -Radiator als

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, L_c) &= \delta(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{L_c^{n-1}}{n!} \int_0^1 \delta(x-x_1 \dots x_n) \cdot \quad (5.30) \\ &\quad \left[P_+(x_1) L_c + n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) T(x_1) L_c \right] dx_1 \prod_{i=2}^n P_+(x_i) dx_i. \end{aligned}$$

Wir interpretieren

$$\left[P_+(x_1) L_c + n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) T(x_1) L_c \right] L_c^{n-1} \prod_{i=2}^n P_+(x_i)$$

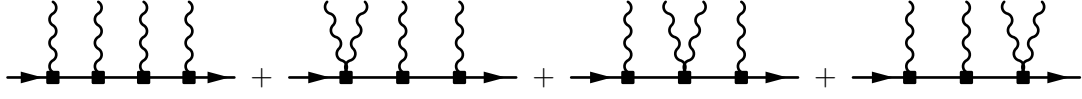
als ersten Term der Entwicklung von

$$\prod_{i=1}^n \left[P_+(x_i) L_c + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) T(x_i) L_c \right]$$

und schreiben den NLL_c -Radiator nach Hinzufügen weiterer Zwei-Photon-Beiträge in der hier nicht weiter betrachteten Ordnung $O(\alpha^n L_c^{n-2})$ oder niedriger als

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, L_c) &= \delta(1-x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n \frac{1}{n!} \int_0^1 \delta(x - x_1 \dots x_n) \prod_{i=1}^n \left[P_+(x_i) L_c + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) T(x_i) L_c \right] dx_i \end{aligned} \quad (5.31)$$

In der graphischen Notation geschrieben, berücksichtigen wir nun bei Abstrahlung von beispielsweise vier Photonen zusätzlich zu den Beiträgen



$$(5.32)$$

der führenden und nächstführenden Ordnung $(\alpha L_c)^4$ und $\alpha^4 L_c^3$ auch den Zwei-Photon-Beitrag proportional $\alpha^4 L_c^2$.



$$(5.33)$$

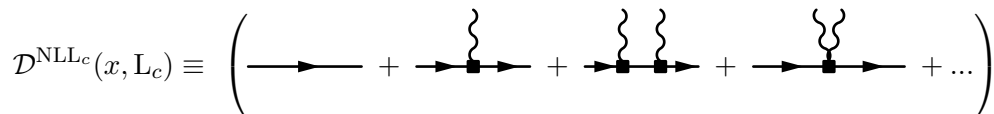
Die NLL_c -Radiatorfunktion erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, L_c) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \int_0^1 \frac{dz}{z} \left[P_+(z) + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) T(z) \right] \mathcal{D}^{\text{NLL}_c} \left(\frac{x}{z}, L_c \right) \quad (5.34)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, L_c) = \delta(1-x) \quad (5.35)$$

In der symbolischen Darstellung



$$(5.36)$$

für die LLA-Radiatorfunktion sieht die zugehörige Evolutionsgleichung wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial L_c} \left(\longrightarrow + \longrightarrow \text{with one wavy line} + \longrightarrow \text{with two wavy lines} + \longrightarrow \text{with three wavy lines} + \dots \right) \\
&= \left(\longrightarrow \text{with one wavy line} + \longrightarrow \text{with two wavy lines} \right) \otimes \left(\longrightarrow + \longrightarrow \text{with one wavy line} + \longrightarrow \text{with two wavy lines} + \longrightarrow \text{with three wavy lines} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Die Anfangsbedingung stellen wir dar als

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}_c}(x, 0) \equiv \left(\longrightarrow \right) \tag{5.38}$$

Prinzipiell besteht wieder die Möglichkeit, für die Evolutionsgleichung (5.34) durch Mellin-Transformation, Lösen der transformierten Differentialgleichung und Rücktransformation für $x \rightarrow 1$ eine Gribov-artige Lösung zu finden. Durch die kompliziertere Form der Zwei-Photon-Splittingfunktion würde sich diese Rechnung allerdings recht aufwendig gestalten. Empfehlenswert wäre daher sicherlich ein numerischer Lösungsversuch, beispielsweise mittels Monte Carlo-Verfahren [13].

Wir halten fest, daß NLL_m - und NLL_c -Korrekturen zwei völlig unterschiedliche Arten von Korrekturen darstellen. Während NLL_m -Korrekturen nur durch das unter kleinstem Winkel zur Strahlrichtung abgestrahlte Photon hervorgerufen werden und lediglich in einer modifizierten Anfangsbedingung der Evolutionsgleichung resultieren, ändern die im gesamten Winkelbereich für jedes Photonpaar auftretenden Zwei-Photon-Korrekturen die Evolutionsgleichung selbst, nicht aber deren Anfangsbedingung. Die bereits in der Einleitung erwähnten, je nach Bornprozeß möglicherweise auftretenden nichtuniversellen Korrekturen, werden in nächsten Kapitel im Rahmen der numerischen Tests für die konkreten Beispielprozesse $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ angesprochen.

Kapitel 6

Numerische Tests

Kapitel 5 hatten wir darauf verwendet, für zwei im selben kollinearen Winkelbereich abgestrahlte Photonen diejenigen Terme des quadrierten Matrixelementes zu identifizieren, welche im totalen Wirkungsquerschnitt Beiträge in führender und nächstführender Ordnung in L_c liefern können. Die einfachste Möglichkeit, die in nächstführender Ordnung verbesserte Näherung zu testen, ist der Vergleich mit dem ungenäherten Wirkungsquerschnitt der Abstrahlung zweier Photonen. Dazu sind die genäherten Ausdrücke für Abstrahlung beider Photonen kollinear zur \vec{p} - und kollinear zur \vec{p}' -Richtung sowie der Abstrahlung jeweils eines Photons kollinear zur \vec{p} - und \vec{p}' -Richtung zu addieren

Die Berechnung eines totalen Wirkungsquerschnittes ist grob in zwei Arbeitsabschnitte zu unterteilen, die Berechnung des quadrierten Matrixelementes bzw. des differentiellen Wirkungsquerschnittes und des Phasenraums, welche nur in den einfachsten Fällen analytisch durchführbar sind. Bereits für drei Endzustandsteilchen können nicht geschlossen darstellbare Integrale auftreten, so daß es sich empfiehlt, die Phasenraumintegration mittels eines Monte-Carlo-Verfahrens durchzuführen [17]. Die im folgenden vorgestellte $Z\gamma\gamma$ -Phasenraumparametrisierung in einer Photonenergie, zwei Polarwinkeln und zwei Azimutwinkeln, von denen einer lediglich den trivialen Faktor 2π liefert, hat sich im hier vorliegenden Fall als die am besten geeignete herausgestellt. Um die Berechnung des ungenäherten Wirkungsquerschnittes ohne analytische Vorarbeit numerisch durchzuführen zu können, berechnen wir die Helizitätsamplituden aus den Spinoren, Wellenfunktionen und Dirac-Matrizen für alle Polarisationskombinationen der beteiligten Teilchen. Dies erfordert zwangsläufig eine große Anzahl an Multiplikationen, die eine derartige numerische Rechnung sehr zeitaufwendig machen, bietet aber die Möglichkeit, verschiedene Photoneichnungen zu testen, von denen sich die in Abschnitt 2.2.1 vorgestellte physikalische Eichung auch für die numerische Rechnung als die sinnvollste Wahl erweist.

6.1 Phasenraumintegrationen für $e^+e^- \rightarrow Z + n\gamma$

Ausgangspunkt der weiteren Diskussion wird das ungenäherte $2 \rightarrow 3$ -Phasenraumintegral $\Gamma_{Z\gamma\gamma}[1]$ mit einem massiven und zwei masselosen Teilchen im Endzustand

sein.

$$\begin{aligned} & \Gamma_{Z\gamma\gamma}[1] \\ &= \frac{1}{8s} \int \frac{1}{(2\pi)^5} \delta((p+p'-k_1-k_2)^2 - M_Z^2) Q_1 Q_2 dQ_1 dQ_2 d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 d\phi_1 d\phi_2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die Deltafunktion legt Q_2 fest auf

$$Q_2 = \frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E} (1 - \cos\psi_{12}) \right]} \quad (6.2)$$

Hier bezeichnet ψ_{12} den Winkel zwischen den Photonrichtungen, $\cos\psi_{12} = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$. Somit folgt für das Phasenraumintegral

$$\Gamma_{Z\gamma\gamma}[1] = \frac{1}{32s} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \left[\frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{s \left[1 - \frac{Q_1}{2E} (1 - \cos\psi_{12}) \right]} \right] \frac{Q_1 dQ_1 d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 d\phi_1 d\phi_2}{\left[1 - \frac{Q_1}{2E} (1 - \cos\psi_{12}) \right]} \quad (6.3)$$

wobei

$$Q_{\min} := (1 - x_{\max})E \leq Q_1, Q_2 \leq \frac{s - M_Z^2}{4E}, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 2\pi$$

Bei Abstrahlung von N Photonen ergibt sich analog

$$\Gamma_{Z+N\gamma}[1] = \frac{1}{2s} \frac{1}{2^N} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3N}} \int \delta \left(\left(p + p' - \sum_{i=1}^N k_i \right)^2 - M_Z^2 \right) \prod_{i=1}^N Q_i dQ_i d\cos\theta_i d\phi_i \quad (6.4)$$

und die Energie des N -ten Photon berechnet sich aus der Deltafunktion zu

$$Q_N = \frac{s - 4E \sum_{i=1}^{N-1} Q_i + \left(\sum_{i=1}^{N-1} k_i \right)^2 - M_Z^2}{4E} \cdot \left[1 - \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^{N-1} Q_i (1 - \cos\psi_{iN}) \right]^{-1} \quad (6.5)$$

Nach Integration über die Delta-Funktion erhalten wir somit im allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} \Gamma_{Z+N\gamma}[1] &= \frac{1}{2s} \frac{1}{2^N} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3N}} \cdot \\ & \int \left(\frac{s - 4E \sum_{i=1}^{N-1} Q_i + \left(\sum_{i=1}^{N-1} k_i \right)^2 - M_Z^2}{4s \left[1 - \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^{N-1} Q_i (1 - \cos\psi_{iN}) \right]} \right) \frac{\prod_{i=1}^{N-1} Q_i dQ_i d\cos\theta_i d\phi_i}{\left[1 - \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^{N-1} Q_i (1 - \cos\psi_{iN}) \right]} \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.1.1 Kollinear genäherter Phasenraum

Wir untersuchen im folgenden geeignete Näherungen für die Phasenraumbereiche kollinear abgestrahlter Photonen, wie sie zur Berechnung der führenden kollinear-logarithmischen Ordnung herangezogen werden. Wird für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ eines der Photonen — wir wählen γ_1 — kollinear genähert, dann muß konsequenterweise die Deltafunktion der Impulserhaltung ebenfalls durch den entsprechenden kollinear genäherten Ausdruck $\delta(x_1p+p'-k_2-k_Z)$ bzw. durch $\delta(p+x_1p'-k_2-k_Z)$ für $\gamma_1 \parallel p'$ ersetzt werden, so daß für die Energie Q_2 des zweiten Photon nun näherungsweise

$$Q_2^{\gamma_1 \parallel p} = \frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E}(1 - \cos \theta_2) \right]} + O(m^2) \quad (6.7)$$

für ein zu \vec{p} bzw.

$$Q_2^{\gamma_1 \parallel p'} = \frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E}(1 + \cos \theta_2) \right]} + O(m^2) \quad (6.8)$$

für ein zu \vec{p}' kollinear abgestrahltes Photon folgt. Die Phasenraumintegration zerfällt somit in die Integration $\Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \parallel p}[1]$ über den für ein annähernd zu \vec{p} kollineares Photon genäherten Phasenraumbereich und die Integration $\Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \parallel p'}[1]$ über den für ein annähernd zu \vec{p}' kollineares Photon genäherten Phasenraumbereich.

$$\begin{aligned} & \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \parallel p}[1] \\ &= \frac{1}{8s} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \left[\frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E}(1 - \cos \theta_2) \right]} \right] \frac{Q_1 dQ_1 d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 d\phi_1 d\phi_2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E}(1 - \cos \theta_2) \right]} \Big|_{Q_2=Q_2^{\gamma_1 \parallel p}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \parallel p'}[1] \\ &= \frac{1}{8s} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \left[\frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E}(1 + \cos \theta_2) \right]} \right] \frac{Q_1 dQ_1 d \cos \theta_1 d \cos \theta_2 d\phi_1 d\phi_2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{2E}(1 + \cos \theta_2) \right]} \Big|_{Q_2=Q_2^{\gamma_1 \parallel p'}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Wird das zweite Photon ebenfalls kollinear genähert, dann ist analog die Impulserhaltungs-Deltafunktion zu ersetzen durch $\delta(x_1x_2p+p'-k_Z)$, wenn beide Photonen als kollinear zu \vec{p} behandelt werden, durch $\delta(x_1p+y_1p'-k_Z)$, wenn γ_1 kollinear zu \vec{p} und γ_2 kollinear zu \vec{p}' genähert wird, durch $\delta(y_1p+x_1p'-k_Z)$, wenn γ_2 kollinear zu \vec{p} und γ_1 kollinear zu \vec{p}' genähert wird und schließlich $\delta(p+y_1y_2p'-k_Z)$, wenn beide Photonen als kollinear zu p' genähert werden. Damit erhalten wir für die Energie des zweiten Photons je nach Näherung

$$Q_2^{\gamma_1\gamma_2 \parallel p} = Q_2^{\gamma_1\gamma_2 \parallel p'} = \frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E} = \left(1 - \frac{M_Z^2}{x_1s} \right) x_1E \quad (6.11)$$

$$Q_2^{\gamma_1 \parallel p, \gamma_2 \parallel p'} = Q_2^{\gamma_2 \parallel p, \gamma_1 \parallel p'} = \frac{s - 4EQ_1 - M_Z^2}{4E \left[1 - \frac{Q_1}{E} \right]} = \left(1 - \frac{M_Z^2}{x_1s} \right) E \quad (6.12)$$

Die Phasenraumintegration zerfällt nun in die Beiträge

$$\begin{aligned}\Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\gamma_2\|p}[1] &= \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\gamma_2\|p'}[1] \\ &= \frac{1}{32s} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \left[1 - \frac{z}{x_1}\right] (1-x_1)x_1 dx_1 d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 d\phi_1 d\phi_2 \Big|_{Q_2=(1-\frac{z}{x_1})x_1 E}\end{aligned}\quad (6.13)$$

für Abstrahlung beider Photonen kollinear zu derselben Fermionlinie und

$$\begin{aligned}\Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\|p,\gamma_2\|p'}[1] &= \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_2\|p,\gamma_1\|p'}[1] \\ &= \frac{1}{32s} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \left[1 - \frac{z}{x_1}\right] \frac{1}{x_1} (1-x_1) dx_1 d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 d\phi_1 d\phi_2 \Big|_{Q_2=(1-\frac{z}{x_1})E}\end{aligned}\quad (6.14)$$

für Abstrahlung der Photonen kollinear zu verschiedenen Fermionlinien. Als Abkürzung wurde $z := M_Z^2/s$ verwendet.

6.2 Genäherte Wirkungsquerschnitte, universelle und nichtuniverselle Korrekturen

Im folgenden Abschnitt berechnen wir nun die Wirkungsquerschnitte der Prozesse $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ in führender kollinear-logarithmischer LLA-, in um die Beiträge der $\tilde{O}(m^2)$ -Terme verbesserter NLL $_m$ - und in um die universellen kollinear-logarithmischen NLL $_c$ - und NLL $_m$ -Terme verbesserter NLL $_{c+m}$ -Näherung. Ferner untersuchen wir die mit NLL $_Z$ bezeichnete Näherung, welche zusätzlich zu den Beiträgen der $\tilde{O}(m^2)$ -Terme auch nichtuniverselle Beiträge enthält.

6.2.1 Genäherter Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$

Der $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ -Wirkungsquerschnitt kann analytisch berechnet werden und lautet bis auf vernachlässigbare Terme proportional m^2 (vgl. Abschnitt B.5)

$$\sigma_{Z\gamma}(s) = \frac{V_Z}{s} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot \left[\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) L_c - \frac{2z}{1-z} - (1-z) \right] \quad (6.15)$$

wobei $V_Z := \pi (R_s^2 + L_s^2) G_f M_Z^2 / \sqrt{2}$. Mit $I_{e^+e^- \rightarrow Z}$ nach Gleichung (B.17) berechnen wir den führenden kollinear-logarithmischen (LLA-) Anteil des $Z\gamma$ -Wirkungsquerschnittes als

$$\sigma_{Z\gamma}^{\text{LLA}}(s) = \frac{\alpha}{\pi} L_c \int_0^1 dx_1 P_+(x_1) I_{e^+e^- \rightarrow Z}(x_1 s) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) L_c \frac{V_Z}{s} \left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) \quad (6.16)$$

Der um die universelle Korrektur in nächstführender logarithmischer Ordnung erweiterte genäherte Wirkungsquerschnitt folgt mittels

$$\sigma_{Z\gamma}^{\text{NLL}_m}(s) = \sigma_{Z\gamma}^{\text{LLA}}(s) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx_1 R_+(x_1) I_Z(x_1 s) = \sigma_{Z\gamma}^{\text{LLA}}(s) - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \frac{V_Z}{s} \frac{2z}{1-z} \quad (6.17)$$

mit $R(x)$ nach Gleichung (4.39). Zwei-Photon-Korrekturen treten erst bei Abstrahlung von zwei oder mehr Photonen auf. Für den um den zusätzlich zu den NLL_m -Beiträgen auftretenden nichtuniversellen Beitrag korrigierten genäherten Wirkungsquerschnitt berechnen wir

$$\sigma_{Z\gamma}^{\text{NLL}Z}(s) = \sigma_{Z\gamma}^{\text{NLL}m}(s) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx_1 (1-x_1) I_Z(x_1 s) = \sigma_{Z\gamma}^{\text{NLL}m}(s) - \frac{V_Z}{s} \frac{\alpha}{\pi} (1-z) \quad (6.18)$$

Vergleich von Gleichung (6.18) mit Gleichung (6.15) zeigt, daß $\sigma_{Z\gamma}^{\text{NLL}Z}(s)$ den analytisch berechneten Wert exakt wiedergibt. Ferner sehen wir an dieser Stelle, daß sich Gleichung (6.18) bzw. (6.15) umformen lässt zu

$$\sigma_{Z\gamma}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \frac{V_Z}{s} \left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) [\text{L}_c - 1], \quad (6.19)$$

da sich bei Integration über den vollen Winkelbereich nichtuniverseller und $\tilde{O}(m^2)$ -Term hier zufälligerweise gerade zu einem zur Splittingfunktion $P(z)$ proportionalen Term zusammensetzen. Ob nichtuniverselle Stücke auftreten oder nicht, hängt, wie in Anhang B, Abschnitt B.7 gezeigt, von der Art der Kopplung im $2 \rightarrow 2$ -Bornprozeß ab. Bei Vektor- und Axialvektorkopplung treten nichtuniverselle Stücke auf, bei skalarer und pseudoskalarer Kopplung hingegen nicht.

Abbildung 6.1 zeigt das Verhältnis der einzelnen genäherten Wirkungsquerschnitte zum ungenäherten Wirkungsquerschnitt. Wir stellen fest, daß bei kleinen Strahlenergien E der um den $\tilde{O}(m^2)$ -Beitrag erweiterte LLA-Querschnitt den ungenäherten Wirkungsquerschnitt gut annähert, mit steigender Strahlenergie wird diese Näherung schlechter, da der nichtuniverselle Anteil an Stärke gewinnt. Nur die sowohl um den $\tilde{O}(m^2)$ -Beitrag als auch um den nichtuniversellen Anteil verbesserte LLA-Näherung reproduziert den ungenäherten Wirkungsquerschnitt.

6.2.2 Genäherter Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$

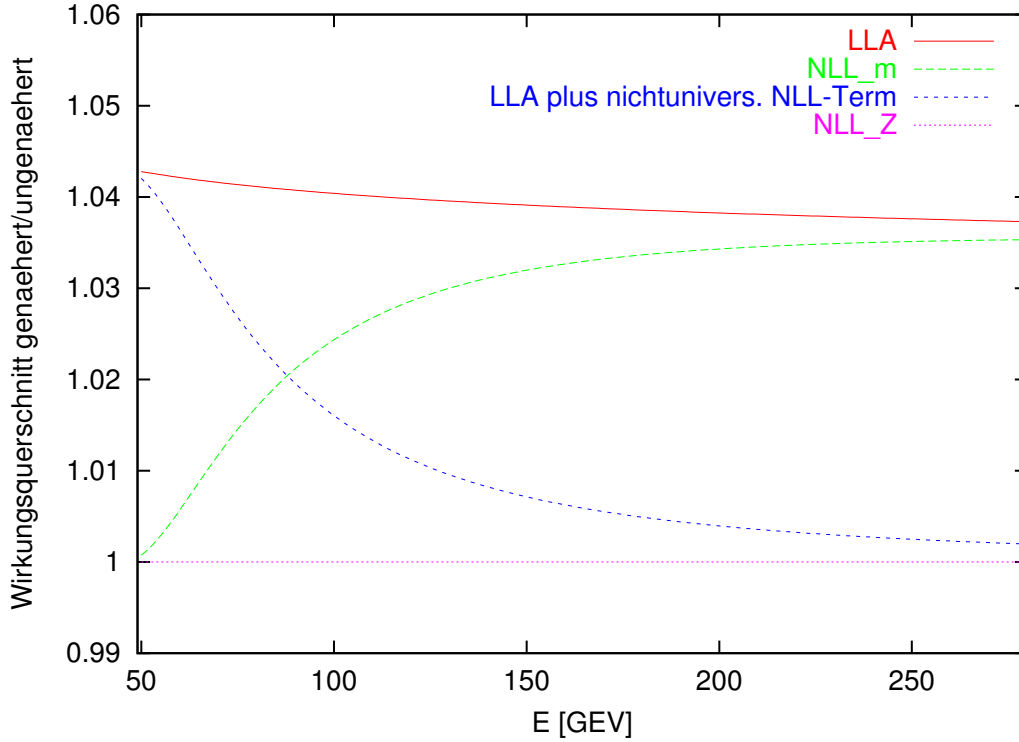
Im nächsten Schritt betrachten wir den genäherten $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt. Da die kollinearen Phasenraumbereiche disjunkt sind, tragen nur die Integrationen der jeweiligen genäherten quadrierten Matrixelemente über den zugehörigen genäherten Phasenraum bei.

6.2.2.1 Näherung der Abstrahlung eines Photons

Wird nur eines der beiden abgestrahlten Photonen kollinear genähert, berechnen wir den totalen Wirkungsquerschnitt unter Einschränkung der Photonenergien auf den Bereich $Q_{\min} := (1-x_{\max})E < Q_1, Q_2 < (1-z)E$ aus

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}(s) \approx \frac{1}{2!} \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \| p} \left[\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |M_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \| p}|^2 \right] + \frac{1}{2!} \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \| p'} \left[\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |M_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \| p'}|^2 \right] \quad (6.20)$$

Da zwei ununterscheidbare Photonen abgestrahlt werden, ist ein statistischer Faktor $1/2!$ anzubringen. Zur Berechnung des genäherten totalen Wirkungsquerschnittes



Abbildungung 6.1: Verhältnis von mit LLA, NLL_m , LLA plus nichtuniversellem Anteil sowie NLL_Z genähertem zum ungenäherten $Z\gamma$ -Wirkungsquerschnitt im vollen Winkelbereich, massive Fermionen

nach Gleichung (6.20) sind die betreffenden Näherungen für das quadrierte Matrixelement anzugeben. Wir parametrisieren die Energie des als kollinear genäherten Photons als $Q_1 := (1 - x_1)E$.

Das bis auf vernachlässigbare Terme in $O(m^2)$ berechnete quadrierte und polarisationssummierte Matrixelement für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ bei einlaufendem Impuls $p_1 = p - k_1$ oder $p'_1 = p' - k_1$ entnehmen wir Gleichung (B.44):

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \| p}|^2 = 4(4\pi\alpha)^2 \frac{V_Z}{\pi} \left(\frac{P(x_1)E^2}{(pk_1)} - \frac{x_1 m^2 E^2}{(pk_1)^2} \right) \cdot \left(\frac{\left(1 + \left(\frac{z}{x_1}\right)^2\right) E^4}{EQ_2(p'k_2)} + \frac{\left(1 + \left(\frac{z}{x_1}\right)^2\right) E^4}{EQ_2(pk_2)} - \frac{M_Z^2 m^2}{(pk_2)^2} - \frac{M_Z^2 m^2}{(p'k_2)^2} - 1 \right) \quad (6.21)$$

für $\gamma_1 \parallel \vec{p}$ und

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1 \| p'}|^2 = 4(4\pi\alpha)^2 \frac{V_Z}{\pi} \left(\frac{P(x_1)E^2}{(p'k_1)} - \frac{x_1 m^2 E^2}{(p'k_1)^2} \right) \cdot \quad (6.22)$$

$$\left(\frac{\left(1 + \left(\frac{z}{x_1}\right)^2\right) E^4}{EQ_2(p'k_2)} + \frac{\left(1 + \left(\frac{z}{x_1}\right)^2\right) E^4}{EQ_2(pk_2)} - \frac{M_Z^2 m^2}{(pk_2)^2} - \frac{M_Z^2 m^2}{(p'k_2)^2} - 1 \right)$$

für $\gamma_1 \parallel \vec{p}'$. Der totale Wirkungsquerschnitt zeigt wieder die erwartete Entwicklung nach dem kollinearen Logarithmus, wobei hier allerdings in nächstführender Ordnung ein zusätzlicher Term proportional L_c auftritt,

$$\begin{aligned} \sigma_{Z\gamma\gamma}|_{\text{nichtuniversell}} = & - (4\pi\alpha)^2 \frac{V_Z}{\pi} \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma\parallel p} \left[\left(\frac{(1+x_1^2)E^2}{(1-x_1)(pk_1)} - \frac{x_1 m^2 E^2}{(pk_1)^2} \right) \right] \\ & - (4\pi\alpha)^2 \frac{V_Z}{\pi} \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma\parallel p'} \left[\left(\frac{(1+x_1^2)E^2}{(1-x_1)(p'k_1)} - \frac{x_1 m^2 E^2}{(p'k_1)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

welcher durch die Struktur des Bornquerschnittes bestimmt und somit nichtuniversell ist.

6.2.2.2 Näherung der Abstrahlung beider Photonen

Das Integral über den für zwei zu p' kollineare Photonen genäherten Phasenraum kann durch eine Variablentransformation in die entsprechende Integration über den Bereich zweier zu p kollinearer Photonen übergeführt werden. Daher berechnet sich der genäherte Wirkungsquerschnitt der Abstrahlung zweier Photonen als

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}(s) \approx \frac{2}{2!} \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\gamma_2\parallel p} \left[\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |M_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\gamma_2\parallel p}|^2 \right] + \frac{2}{2!} \Gamma_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\parallel p, \gamma_2\parallel p'} \left[\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |M_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\parallel p, \gamma_2\parallel p'}|^2 \right]. \quad (6.24)$$

Zur Berechnung von (6.24) ist zu bemerken, daß die Form der genäherten Matrixelemente von der gewählten Parametrisierung der Polarwinkel abhängt. Für den für zwei zur \vec{p} -Richtung kollinear abgestrahlte Photonen genäherten Phasenraum berechnen wir das Polarwinkelintegral für $\theta_1 < \theta_2$. Die Energien beider Photonen sollen nach Voraussetzung denselben Bereich abdecken. Wir parametrisieren die für die weitere Rechnung von (6.24) benötigten Phasenraumbereiche kollinearer Photonen als

$$\gamma_1\gamma_2 \parallel p, \quad Q_1 = (1-x_1)E, \quad Q_2 = (1-x_2)x_1E \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{M_Z^2}{x_1 s}$$

sowie

$$\gamma_1 \parallel p, \quad \gamma_2 \parallel p', \quad Q_1 = (1-x_1)E, \quad Q_2 = (1-x_2)E$$

Die genäherten quadrierten Matrixelemente bestehen aus einem die Photonabstrahlung im betreffenden Phasenraumbereich beschreibendem Anteil, welchen wir mit $d^{\gamma_1\gamma_2\parallel p}(x)$ bzw. $d^{\gamma_1\parallel p, \gamma_2\parallel p'}(x)$ bezeichnen, multipliziert mit dem quadrierten und polarisationssummierten Bornmatrixelement bei der entsprechend verringerten Schwerpunktenenergie $\sqrt{x}s$:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\gamma_2\parallel p}|^2 &= d^{\gamma_1\gamma_2\parallel p}(x) \frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_Z(xs)|^2 \\ \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{Z\gamma\gamma}^{\gamma_1\parallel p, \gamma_2\parallel p'}|^2 &= d^{\gamma_1\parallel p, \gamma_2\parallel p'}(x) \frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_Z(xs)|^2 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Als quadriertes Born–Matrixelement ist

$$\sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow Z}|^2(s) = 4 \frac{V_Z}{\pi} s \quad (6.26)$$

einzusetzen. Die Funktionen $d^{\gamma_1\gamma_2\|p}(x)$ und $d^{\gamma_1\|p,\gamma_2\|p'}(x)$ werden in den folgenden Unterabschnitten für die später numerisch zu vergleichenden Näherungen aufgeführt.

Um im totalen Wirkungsquerschnitt die führenden kollinear–logarithmischen Beiträge zu reproduzieren, sind die folgenden Funktionen $d_{\text{LLA}}(x)$ einzusetzen:

$$d_{\text{LLA}}^{\gamma_1\gamma_2\|p} = (4\pi\alpha)^2 \frac{P(x_1)}{(pk_1)} \frac{P(x_2)}{x_1(pk_2)} \quad (6.27)$$

$$d_{\text{LLA}}^{\gamma_1\|p,\gamma_2\|p'} = (4\pi\alpha)^2 \frac{P(x_1)}{(pk_1)} \frac{P(y_1)}{(p'k_2)} \quad (6.28)$$

In der reinen LLA werden nur die führenden logarithmischen Terme berücksichtigt, daher kann mit masselosen Fermionen gerechnet werden, wenn bei einem minimalen Winkel $\theta_{\min} = m/E$ (maximalen Winkel $\theta_{\max} = \pi - m/E$) abgeschnitten wird.

Für den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten wir vor Ausführen der Energieintegrationen das folgende Ergebnis:

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{LLA}}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{V_Z L_c^2}{s} \frac{1}{2} \int_z^{x_{\max}} \frac{dx_1}{x_1} P(x_1) P\left(\frac{z}{x_1}\right) \Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E} \quad (6.29)$$

Hier kürzt

$$\begin{aligned} \Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E} := & \underbrace{\left[\Theta\left(\left(1 - \frac{z}{x_1}\right)x_1 - (1 - x_{\max})\right) \Theta\left((1-z) - \left(1 - \frac{z}{x_1}\right)x_1\right) \right]}_{\Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E}^{\gamma_1\gamma_2\|p}} \\ & + \Theta\left(\left(1 - \frac{z}{x_1}\right) - (1 - x_{\max})\right) \Theta\left((1-z) - \left(1 - \frac{z}{x_1}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.30)$$

die durch die Einschränkung auf den Energiebereich $Q_{\min} := (1 - x_{\max})E < Q_1, Q_2 < (1 - z)E$ auftretende Stufenfunktion ab. Im Limes $x_{\max} \rightarrow 1$ gehen die x_1 –Integrationsgrenzen für zwei zu \vec{p} kollineare Photonen und diejenigen für ein zu \vec{p} und ein zu \vec{p}' kollineares Photon ineinander über und wir berechnen für diesen Fall

$$\begin{aligned} \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{LLA}}(s) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{V_Z L_c^2}{s} \frac{1}{2} \int_z^1 \frac{dx_1}{x_1} P_+(x_1) P_+\left(\frac{z}{x_1}\right) \\ &= \frac{V_Z}{s} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{L_c^2}{2!} \left[-2(1-z) + 4P(z) \ln(1-z) - \frac{\ln z}{(1-z)} (1+3z^2) + 3P(z) \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die um die mit der führenden infraroten Ordnung verknüpften Terme nächstführender kollinear–logarithmischer Ordnung korrigierte Näherung ist gegeben durch die Funktionen d_{NLLsoft} .

$$d_{\text{NLLsoft}}^{\gamma_1\gamma_2\|p} = (4\pi\alpha)^2 \left(\frac{P(x_1)}{(pk_1)} - \frac{m^2}{(pk_1)^2} \right) \frac{P(x_2)}{x_1(pk_2)} \quad (6.32)$$

$$d_{\text{NLLsoft}}^{\gamma_1 \| p, \gamma_2 \| p'} = (4\pi\alpha)^2 \left(\frac{P(x_1)}{(pk_1)} - \frac{m^2}{(pk_1)^2} \right) \left(\frac{P(y_1)}{(p'k_2)} - \frac{m^2}{(p'k_2)^2} \right) \quad (6.33)$$

Die oben vereinbarte Unterscheidung der Photonen γ_1 und γ_2 anhand ihrer Polarwinkel verdeckt die Symmetrie der Photonen in $d_{\text{NLLsoft}}^{\gamma_1 \gamma_2 \| p}$. Für den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten wir

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLLsoft}}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{V_Z L_c}{s} \frac{1}{2} \int_z^{x_{\max}} \frac{dx_1}{x_1} \left[P(x_1) L_c - \frac{4}{(1-x_1)} \right] P\left(\frac{z}{x_1}\right) \Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E} \quad (6.34)$$

Die um die zu m^2 proportionalen Terme verbesserte Näherung wird durch die Funktionen d_{NLLA_m} dargestellt.

$$d_{\text{NLL}_m}^{\gamma_1 \gamma_2 \| p} = (4\pi\alpha)^2 \left(\frac{P(x_1)}{(pk_1)} - \frac{x_1 m^2}{(pk_1)^2} \right) \frac{P(x_2)}{x_1 (pk_2)} \quad (6.35)$$

$$d_{\text{NLL}_m}^{\gamma_1 \| p, \gamma_2 \| p'} = (4\pi\alpha)^2 \left(\frac{P(x_1)}{(pk_1)} - \frac{x_1 m^2}{(pk_1)^2} \right) \left(\frac{P(y_1)}{(p'k_2)} - \frac{y_1 m^2}{(p'k_2)^2} \right) \quad (6.36)$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_m}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{V_Z L_c}{s} \frac{1}{2!} \int_z^{x_{\max}} \frac{dx_1}{x_1} [P(x_1) L_c - 2R(x_1)] P\left(\frac{z}{x_1}\right) \Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E} \quad (6.37)$$

und im Limes $x_{\max} \rightarrow 1$ folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_m}(s) &= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{V_Z L_c}{s} \frac{1}{2!} \int_z^1 \frac{dx_1}{x_1} [P_+(x_1) L_c - 2R_+(x_1)] P_+\left(\frac{z}{x_1}\right) \quad (6.38) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{L_c V_Z}{2! s} \left\{ 4P(z) \ln(1-z) [L_c - 2] + L_c \left[-2(1-z) - \frac{\ln z}{(1-z)} (1+3z^2) + 3P(z) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[-R(z)(1+z) \ln z - 2(1-z) \ln(1-z) + 2P(z) + \frac{3}{2} R(z) \right] \right\} \end{aligned}$$

Die Funktionen $d_{\text{NLL}_{c+m}}$ entsprechen den um die in Kapitel 4 berechneten NLL_c -Korrekturen erweiterten Funktionen d_{NLL_m} .

$$d_{\text{NLL}_{c+m}}^{\gamma_1 \gamma_2 \| p} = V_{12X}^{12X} + V_{21X}^{21X} + K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X} - (4\pi\alpha)^2 \frac{x_1 m^2}{(pk_1)^2} \frac{P(x_2)}{x_1 (pk_2)} \quad (6.39)$$

$$d_{\text{NLL}_{c+m}}^{\gamma_1 \| p, \gamma_2 \| p'} = d_{\text{NLL}_m}^{\gamma_1 \| p, \gamma_2 \| p'} \quad (6.40)$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten wir in diesem Fall

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_{c+m}}(s) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{V_Z L_c}{s} \frac{1}{2!} \int_z^{x_{\max}} \frac{dx_1}{x_1} [P(x_1) L_c - 2R(x_1)] P\left(\frac{z}{x_1}\right) \Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E}$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{V_Z L_c}{s 2!} \int_z^{x_{\max}} \frac{dx_1}{x_1} T\left(x_1, \frac{z}{x_1}\right) \Theta_{Q_{\min} < Q_1, Q_2 < (1-z)E} \quad (6.41)$$

Im Limes $x_{\max} \rightarrow 1$ erhalten wir mit dem Ergebnis der Energieintegration über die Zwei-Photon-Splittingfunktion nach Gleichung (5.2) für den totalen Wirkungsquerschnitt das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned} \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_{c+m}}(s) &= \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_m}(s) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{V_Z L_c}{s 2!} \frac{1}{1-z} \left\{ \left(\frac{5z^2}{2} + \frac{7}{2} - z\right) \ln^2 z + \frac{(1-z)^2}{z^2} \ln z \right. \\ &\quad - 3(1-z)(1-z) \frac{\pi^2}{6} + (1-z)(2z-1) \ln(1-z) - 2(1-z)(1+z) \text{Li}_2(z) \\ &\quad \left. - (3+z^2) \text{Li}_2(1-z) - 2(1+z^2) \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{z}\right) + (1-z)^2 \text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Die zusätzlich auch um die nichtuniversellen Terme verbesserte NLL_m -Näherung wird durch die Funktionen d_{NLL_Z} dargestellt.

$$d_{\text{NLL}_Z}^{\gamma_1\gamma_2\|p} = d_{\text{NLL}_m}^{\gamma_1\gamma_2\|p} - (4\pi\alpha)^2 \frac{P(x_1)}{(pk_1)} \quad (6.43)$$

$$d_{\text{NLL}_Z}^{\gamma_1\|p,\gamma_2\|p'} = d_{\text{NLL}_m}^{\gamma_1\|p,\gamma_2\|p'} - (4\pi\alpha)^2 \frac{P(x_1)}{(pk_1)} \quad (6.44)$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt

$$\sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_Z}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{V_Z L_c}{s 2} \int_z^{x_{\max}} \frac{dx_1}{x_1} [P(x_1)L_c - R(x_1) - (1-x_1)] P\left(\frac{z}{x_1}\right) \quad (6.45)$$

Im Limes $x_{\max} \rightarrow 1$ folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_Z}(s) &= \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_m}(s) - 2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{L_c}{2!} \int_0^1 dx_1 dx_2 P_+(x_1)(1-x_2)_+ I_Z(x_1 x_2 s) \\ &= \sigma_{Z\gamma\gamma}^{\text{NLL}_m}(s) - 2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{L_c V_Z}{2! s} \left[2(1-z) \ln(1-z) + z \ln z - \ln z - (1-z) - \frac{1}{2} R(z) \right] \end{aligned} \quad (6.46)$$

Dieser Wirkungsquerschnitt läßt sich mit $P(x) = R(x) + (1-x)$ schreiben als LLA-Wirkungsquerschnitt, bei welchem die Ersetzung

$$L_c^2 \rightarrow L_c [L_c - 2] \approx [L_c - 1]^2$$

vorgenommen wurde.

6.3 Numerische Tests

Der Vorteil der Verwendung eines adaptiven Monte Carlo–Algorithmus wie VEGAS liegt darin, daß sich die Integrationsroutine dem Integranden anpaßt und durch eine geeignete Kombination von stratified und importance sampling nach einer optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Integrationsvariablen sucht [16], [18]. Allgemein können die in der Hochenergiephysik auftretenden Integranden Singularitäten in verschiedenen Integrationsvariablen aufweisen, daher bieten sich Mehrkanalverfahren an. In den von uns betrachteten Beispielen treten Singularitäten in den Winkelintegrationen auf. Da das hier verwendete, in Abschnitt B.8 des Anhangs besprochene Mapping auch bei Abstrahlung von mehr als einem Photon die durch die jeweils kollinear führenden Terme in $(1 \pm \beta \cos \theta_i)^{-1}$ hervorgerufenen starken Fluktuationen glätten kann, sind Mehrkanalverfahren für unsere Beispielrechnungen nicht zwingend erforderlich. Sie könnten aber im Rahmen einer optimierten Berechnung des ungenäherten Wirkungsquerschnittes zum Einsatz kommen.

Da beim Versuch, die numerische Erzeugung des ungenäherten Matrixelements durch geeignete Umformungen zu beschleunigen, für kleine Winkel verstärkt Rundungsfehler auftraten, verzichteten wir an dieser Stelle zugunsten der besseren Kontrolle über die Rechengenauigkeit auf eine numerische Optimierung des ungenäherten Matrixelementes.

6.3.1 Numerische Tests für masselose Fermionen

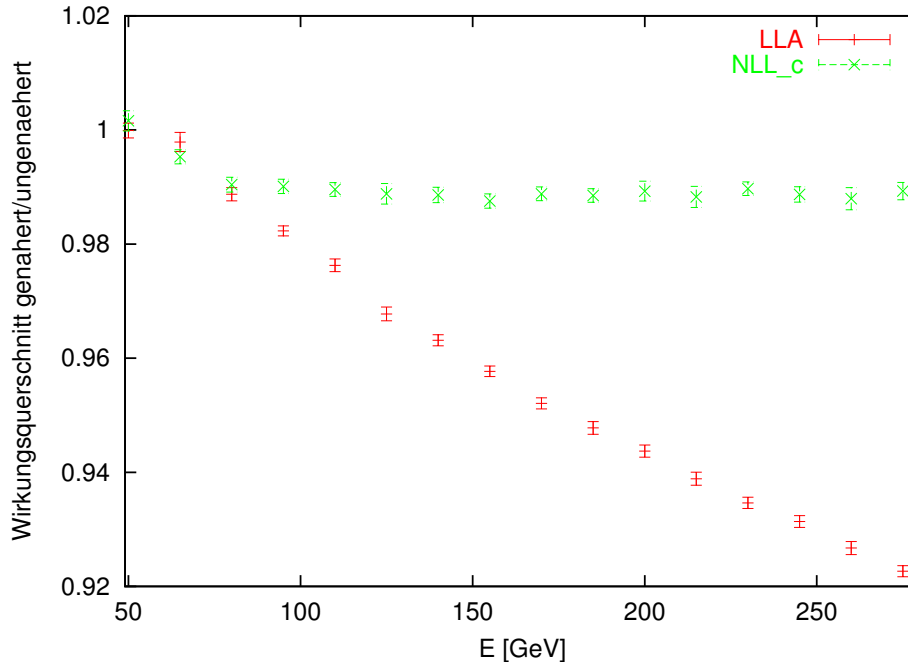


Abbildung 6.2: Verhältnis von mit LLA und NLL_c genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, masselose Fermionen, Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [\frac{m}{E}, 1^\circ]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-3}(1-z)E$. Die Ergebnisse für LLA und NLL_c fallen zusammen.

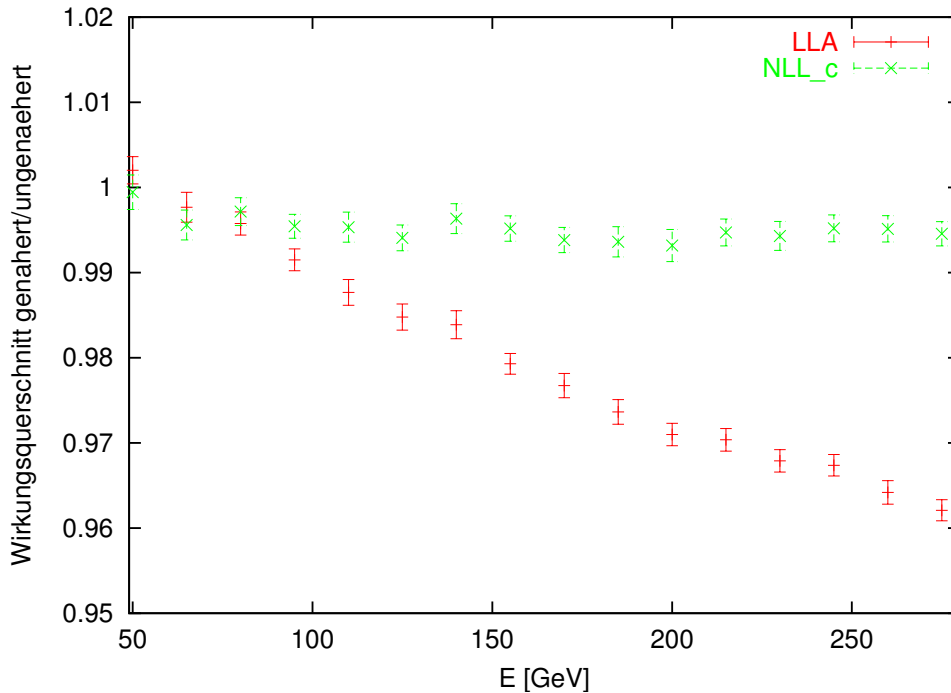


Abbildung 6.3: Verhältnis von mit LLA und NLL_c genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, masselose Fermionen, Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [\frac{m}{E}, 1^\circ]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-6}(1-z)E$. Die Ergebnisse für LLA und NLL_Z fallen zusammen.

In der Darstellung der Ergebnisse verzichten wir auf die Darstellung der Fehlerbalken, wenn diese von der Größe der abgebildeten Datenpunkte sind. Sollten mit unterschiedlichen Näherungsmethoden berechnete Ergebnisse so nahe zusammenliegen, daß sie in einer Abbildung nicht getrennt aufzulösen sind, wird nur einer der Datensätze dargestellt.

Für zwei im selben kollinearen Winkelbereich abgestrahlte Photonen zeigt sich in Abbildung 6.2 und 6.3 für den Fall masseloser Fermionen im Anfangszustand im Bereich niedriger Strahlenergien bis ca. 80 GeV gute Übereinstimmung der mit LLA, NLL_Z und NLL_c erzielten Ergebnisse mit der ungenäherten Rechnung. Wir folgern daher, daß bei Strahlenergien unterhalb von etwa 80 GeV, d.h. Schwerpunktenenergien \sqrt{s} von etwa 160 GeV, die nächstführenden gegenüber den führenden logarithmischen Termen stark unterdrückt sind. Mit steigender Strahlenergie fallen die Ergebnisse von LLA und NLL_Z relativ zur ungenäherten Rechnung deutlich kleiner aus, so daß bei TESLA-Energien von 250 GeV pro einlaufendem Fermion mit um die 4% Abweichung vom Sollwert zu rechnen ist, während die Ergebnisse der NLL_c -Rechnung, die sämtliche mit der nächsten Ordnung in den kollinearen Logarithmen verknüpften Anteile enthält, weiterhin weniger als 1% vom Sollwert abweichen. Die Tatsache, daß die Werte der NLL_Z -Näherung innerhalb der Fehlergrenzen mit denen der LLA zusammenfallen, erklärt sich daraus, daß in der NLL_Z -Rechnung zusätzlich zu den führenden Termen der LLA lediglich der nichtuniverselle Anteil berücksichtigt wurde, welcher im kollinearen Winkelbereich stark unterdrückt ist.

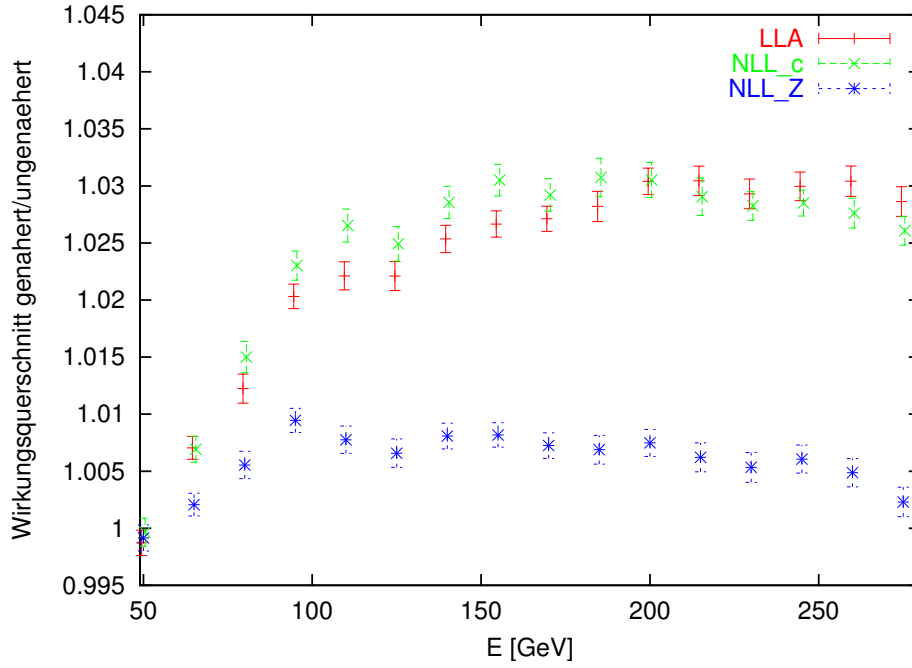


Abbildung 6.4: Verhältnis von mit LLA, NLL_c und NLL_Z genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, masselose Fermionen, voller Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [\frac{m}{E}, \pi - \frac{m}{E}]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-3}(1-z)E$

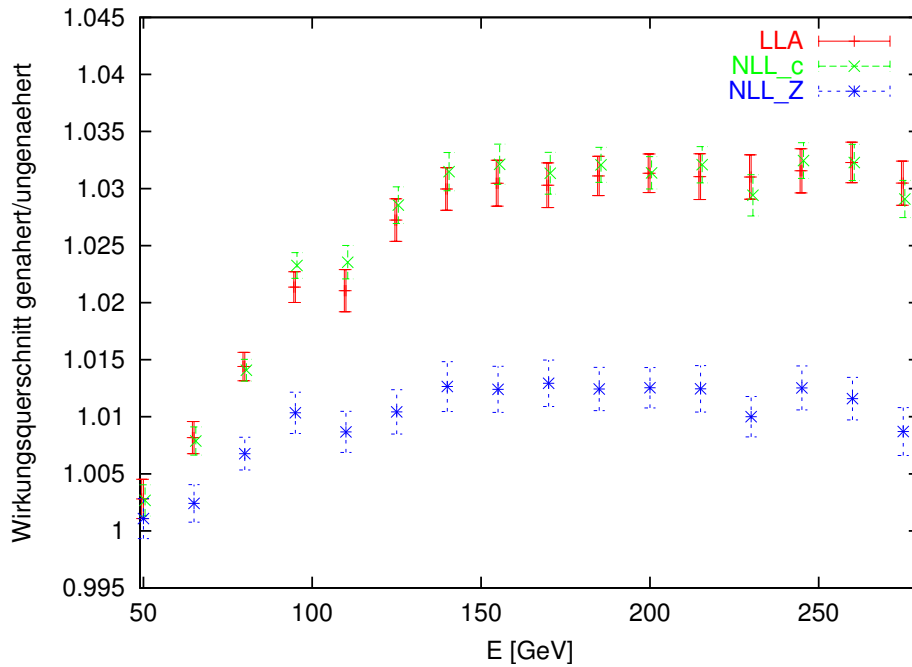


Abbildung 6.5: Verhältnis von mit LLA, NLL_c und NLL_Z genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, masselose Fermionen, voller Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [\frac{m}{E}, \pi - \frac{m}{E}]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-6}(1-z)E$

Abbildung 6.4 und 6.5 zeigen die Ergebnisse der entsprechenden Rechnungen für den über den vollen Winkelbereich integrierten $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt. Hier stellen wir fest, daß weder LLA- noch NLL_c -Näherung zufriedenstellende Ergebnisse liefern, die Resultate weichen zwischen 2% und 3% vom Sollwert ab. Dagegen liegen hier die Ergebnisse der NLL_Z -Näherung deutlich besser, was ein starker Hinweis darauf ist, daß auch für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ nichtuniverselle Terme bei Integration über den vollen Winkelbereich eine Rolle spielen.

6.3.2 Numerische Tests für massive Fermionen

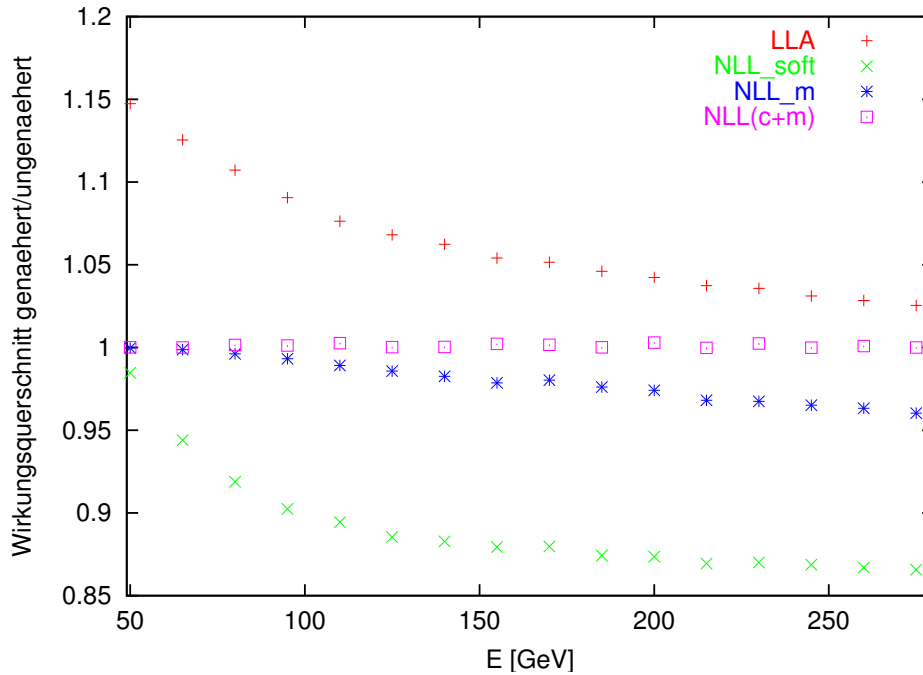


Abbildung 6.6: Verhältnis von mit LLA, NLL_{soft} , NLL_m und NLL_{c+m} genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, massive Fermionen, Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1^\circ]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-6}(1-z)E$, Fehlerbalken von der Größe der Punkte. NLL_m und NLL_Z fallen zusammen.

Für massive Fermionen im Anfangszustand und kollinear im Kegel mit Öffnungswinkel 1° um die Strahlrichtung abgestrahlte Photonen versagt, wie Abbildung 6.6 und 6.7 zeigen, die reine LLA recht deutlich. Bei einer Strahlenergie von 50 GeV liegt die Abweichung bei etwa 15%, fällt aber bei TESLA-Strahlenergien um die 250 GeV deutlich ab und liegt je nach gewählter Minimalenergie der Photonen bei nur noch etwa 3% oder schneidet die Linie der Sollwerte. Wie weiter zu erkennen, ist die NLL_{soft} -Näherung, welche nur den $\alpha^2 L_c L_{\text{IR}}^2$ -Anteil der Korrekturen enthält, nur in der Nähe der Z -Schwelle eine brauchbare Näherung. Bei Strahlenergien ab etwa 50 GeV wird die Abweichung vom Sollwert immer drastischer, da hier aufgrund der Phasenraumgeometrie des betrachteten Prozesses nicht beide Photonen gleichzeitig sehr weich sein können und somit die Niederenergieapproximation NLL_{soft} der nächstführenden Terme versagt. Die Näherung wird verbessert, wenn wie in der

NLL_m -Näherung alle mit der Fermionmasse behafteten Terme in $\tilde{O}(m^2)$ berücksichtigt werden.

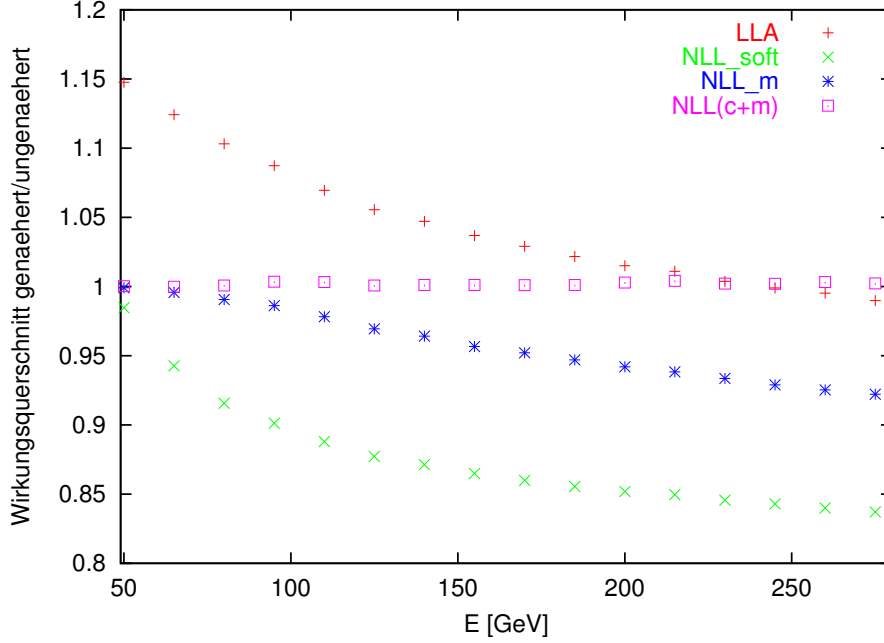


Abbildung 6.7: Verhältnis von mit LLA, NLL_{soft} , NLL_m und NLL_{c+m} genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, massive Fermionen, Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1^\circ]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-3}(1-z)E$, Fehlerbalken von der Größe der Punkte. NLL_m und NLL_Z fallen zusammen

Die gute Übereinstimmung der Ergebnisse der NLL_{c+m} - mit der ungenäherten Rechnung zeigt, daß im betrachteten Winkelbereich die Korrekturen durch nicht-universelle Anteile vernachlässigbar sind. Dies wird ferner dadurch bestätigt, daß die NLL_Z -Näherung für ein kollineares Photon und die die in nächstführender Ordnung beitragenden Pseudo- $O(m^2)$ -Terme enthaltende NLL_m -Näherung, welche sich voneinander um einen nichtuniversellen Anteil unterscheiden, innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen. Bis etwa 80 GeV fallen die Ergebnisse von NLL_{c+m} , NLL_m und NLL_Z innerhalb der Fehlergrenzen zusammen, so daß in diesem Bereich die Korrekturen nächsthöherer Ordnung durch die $\tilde{O}(m^2)$ -Beiträge dominiert sind. Oberhalb von etwas 80 GeV fallen die Ergebnisse von NLL_m und NLL_Z im Verhältnis zur ungenäherten Rechnung deutlich ab.

Die große Abweichung der LLA bei kleinen Strahlenergien erklärt sich daraus, daß die führende infrarote Ordnung der aus den Pseudo- $O(m^2)$ -Terme stammenden Beiträge für weiche Photonen die Korrekturen dominiert. Mit wachsender Strahlenergie wird der Phasenraum für harte Photonabstrahlungen zugänglich, der Anteil der Korrekturen am totalen Wirkungsquerschnitt sinkt, wie die sich verbessernden LLA-Ergebnisse zeigen. Offensichtlich sind jedoch mit wachsender Strahlenergie für kollineare Photonen alle mit der nächstführenden Ordnung im kollinearen Logarithmus verbundenen Korrekturen relevant, so daß die NLL_{c+m} -Approximation, welche alle derartigen Terme enthält, die beste Näherung liefert.

Die Abbildungen 6.8 und 6.9 zeigen die Beiträge der verschiedenen Näherungsmethoden zum über den vollen Winkelbereich berechneten totalen $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt für zwei kollineare sowie ein kollineares und ein akollineares Photon.

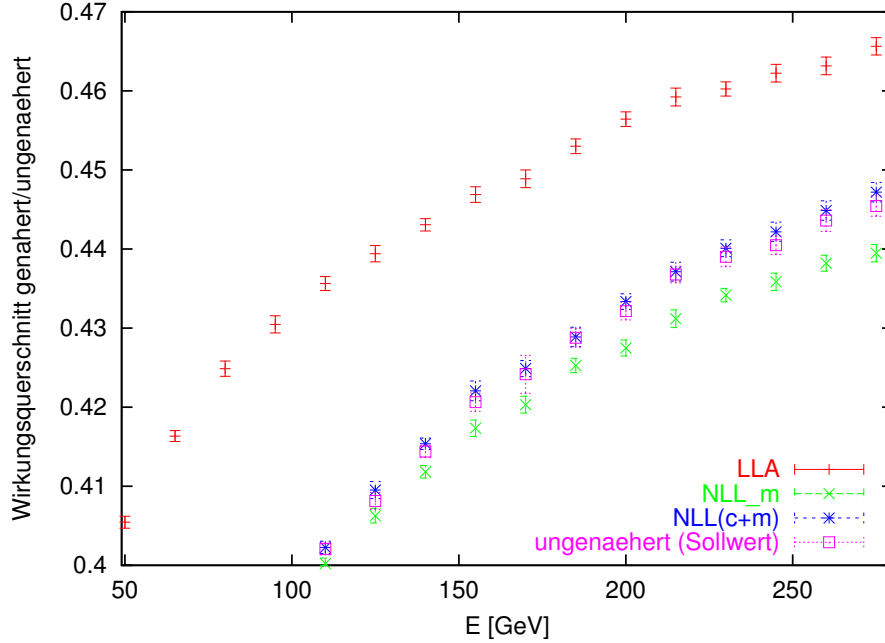


Abbildung 6.8: Anteil des totalen $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnittes für beide Photonen in den kollinearen Winkelbereichen $[0^\circ, 1^\circ]$ oder $[1^\circ, 179^\circ]$. Verhältnis von ungenähertem und mit LLA, NLL_m sowie NLL_{c+m} genähertem Ergebnis zum ungenäherten Wirkungsquerschnitt im vollen Winkelbereich, massive Fermionen, $Q_1, Q_2 > 10^{-6}(1-z)E$. NLL_m und NLL_Z fallen zusammen

Der Beitrag für zwei kollineare Photonen in den Winkelintervallen $[0^\circ, 1^\circ]$ oder $[1^\circ, 179^\circ]$ zum Gesamtwirkungsquerschnitt liegt, wie Abbildung 6.8 zeigt, im betrachteten Energiebereich zwischen 35% und 46% des Gesamtwirkungsquerschnittes. Wie zu erwarten, kommt das Ergebnis der NLL_{c+m} -Näherung dem Sollwert am nächsten, bzw. fällt innerhalb der Fehlergrenzen mit selbigem zusammen. Auch die Ergebnisse von NLL_m und NLL_Z fallen wieder zusammen, weichen aber vom Sollwert ab, jedoch lange nicht so deutlich wie das LLA-Resultat.

Abbildung 6.9 stellt die Beiträge zu totalen Wirkungsquerschnitt für ein kollineares Photon im Winkelbereich $[0^\circ, 1^\circ]$ und ein akollineares Photon im Winkelbereich $[1^\circ, 179^\circ]$ dar. Der Referenzwert der ungenäherten Rechnung liegt hier zwischen etwa 48% bei $E = 50$ GeV und etwa 46% bei $E = 275$ GeV. Von den genäherten Ergebnissen weicht die LLA wieder am deutlichsten ab. NLL_m , NLL_Z und NLL_{c+m} fallen bei $E = 50$ GeV in guter Näherung mit dem Sollwert zusammen, weichen aber mit steigender Strahlenergie immer stärker ab, wobei das NLL_Z -Resultat mit einer Abweichung von bis zu 2% noch am nächsten beim Sollwert liegt.

Werden beide Photonen im als akollinear anzusehenden Winkelbereich $[1^\circ, 179^\circ]$ abgestrahlt, dann fallen die Ergebnisse von LLA, NLL_{c+m} - und NLL_m -Näherung

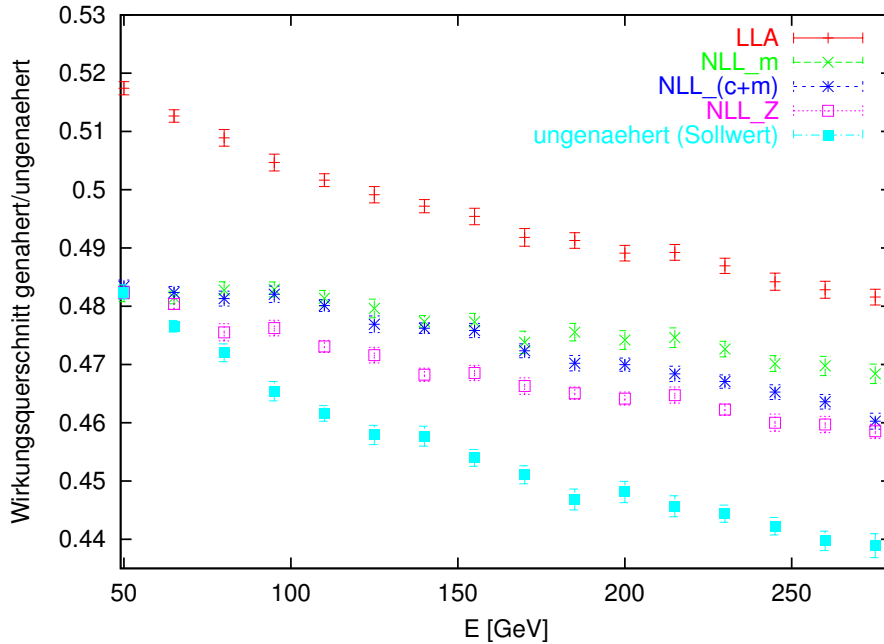


Abbildung 6.9: Anteil des totalen $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnittes für ein kollineares Photon im Winkelbereich $[0^\circ, 1^\circ]$ oder $[179^\circ, 180^\circ]$ und ein akollineares im Winkelbereich $[1^\circ, 179^\circ]$. Verhältnis von ungenähertem und mit LLA, NLL_m , NLL_{c+m} sowie NLL_Z genähertem Ergebnis zum ungenäherten Wirkungsquerschnitt im vollen Winkelbereich, massive Fermionen, $Q_1, Q_2 > 10^{-6}(1-z)E$

zwangsläufig zusammen, da im betrachteten Winkelbereich die $\tilde{O}(m^2)$ -Terme nur vernachlässigbare Beiträge proportional m^2 zum totalen Wirkungsquerschnitt liefern und damit bis auf Terme in $O(m^2)$ dasselbe Ergebnis wie die LLA. Auch die Ergebnisse von NLL_{c+m} sowie NLL_Z weichen nur um etwa 1% vom Sollwert ab, wobei der NLL_Z -Beitrag dem Sollwert wieder am nächsten kommt. Die Beiträge zweier akollinearere Photonen liegen um die 17% bei Strahlenergien um die 50 GeV und fallen zunehmend ab bis zu um die 12% bei einer Strahlenergie von etwa 275 GeV. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Darstellung der Ergebnisse, da die numerischen Ergebnisse zu dicht beisammen liegen.

Zusammenfassend können wir erwarten, daß die NLL_Z -Näherung mit etwa 1% Abweichung vom Sollwert die beste Approximation an den totalen Wirkungsquerschnitt im vollen Winkelbereich liefert, obwohl die NLL_{c+m} -Ergebnisse für kollineare Photonen besser liegen. Abbildung 6.10 und 6.11 bestätigen diese Annahme.

Für den über den vollen Polarwinkelbereich integrierten totalen Wirkungsquerschnitt liefert nun nicht mehr die NLL_{c+m} - sondern die NLL_Z -Approximation die beste Näherung. Dies erklärt sich offenbar daraus, daß für den totalen Wirkungsquerschnitt im vollen Winkelbereich die Beiträge der $\tilde{O}(m^2)$ -Terme zusammen mit den nichtuniversellen Termen die Beiträge der nächstführenden kollinear-logarithmischen Ordnung dominieren. Die Ergebnisse der LLA und der LLA plus der Niederenergieapproximation der $\tilde{O}(m^2)$ -Beiträge, NLL_{soft} , liefern keine zufriedenstellenden Ergebnisse.

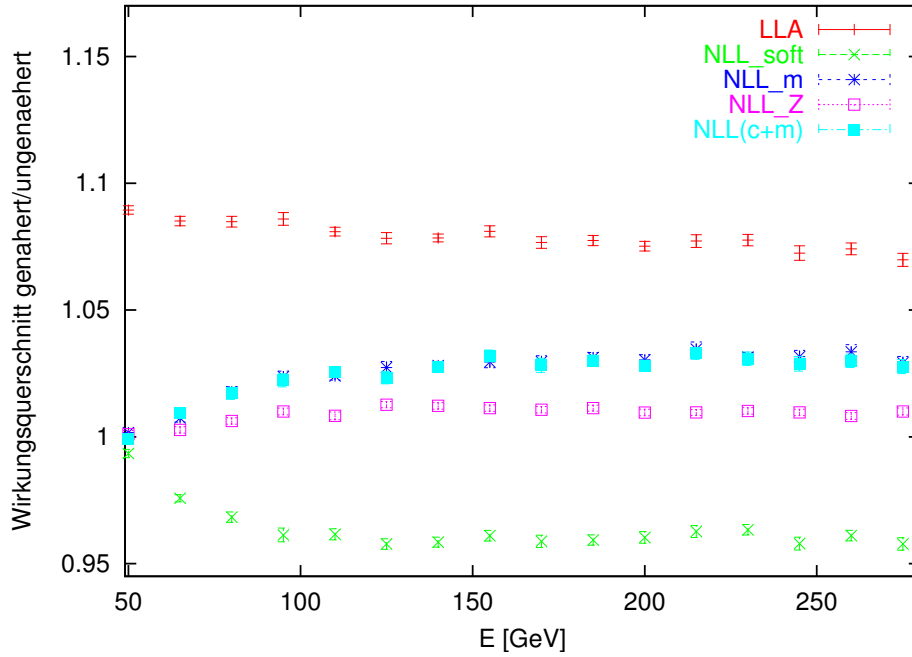


Abbildung 6.10: Verhältnis von mit LLA, NLL_{soft} , NLL_m , NLL_{c+m} und NLL_Z genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, massive Fermionen, voller Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [0, 180^\circ]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-6}(1-z)E$

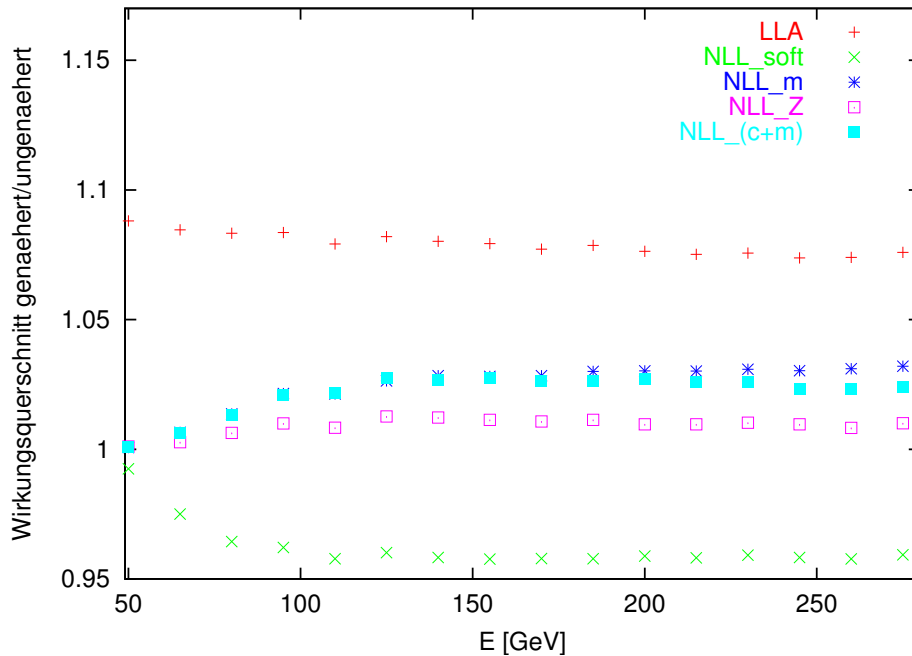


Abbildung 6.11: Verhältnis von mit LLA, NLL_{soft} , NLL_m , NLL_{c+m} und NLL_Z genähertem zu ungenähertem $Z\gamma\gamma$ -Wirkungsquerschnitt, massive Fermionen, voller Winkelbereich $\theta_1, \theta_2 \in [0, 180^\circ]$, $Q_1, Q_2 > 10^{-3}(1-z)E$

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Am geplanten Linearbeschleuniger TESLA werden, anders als bei LEP, wesentlich höhere Strahlenergien verfügbar sein. Daher müssen, um Präzisionsmessungen zu ermöglichen, die Einflüsse durch Strahlungskorrekturen hinreichend gut bekannt sein. Die für von weichen Photonen dominierten Vorhersagen für LEP werden bei TESLA–Strahlenergien um Terme höherer Ordnung in der Entwicklung nach großen Logarithmen zu erweitern sein. Ziel dieser Arbeit war es, Korrekturen nächstführender Ordnung zu untersuchen und sie nach Möglichkeit wie die führenden logarithmischen Beiträge zu resumieren.

Der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{e^+e^- \rightarrow X+N\gamma}$ der Abstrahlung von N Photonen durch die Fermionen im Anfangszustand lässt sich allgemein als Reihe im kollinearen L_c und infraroten Logarithmus L_{IR} ansetzen, vgl. Gleichung (1.1).

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow X+N\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^N \sum_{n_c=0}^N \sum_{n_{\text{IR}}=0}^N C_X^{(n_c, n_{\text{IR}})} L_c^{n_c} L_{\text{IR}}^{n_{\text{IR}}} \quad (7.1)$$

Die weiche Näherung bestimmt die Koeffizienten $C_X^{(n_c, N)}$ aus Gleichung (7.1), die LLA die Koeffizienten $C_X^{(N, n_{\text{IR}})}$, $0 \leq n_c, n_{\text{IR}} \leq N$. Für eine präzisere Rechnung ist es unabdingbar, auch Kenntnisse über die Einträge in der zweiten Zeile der Koeffizientenmatrix in Gleichung (1.1) zu erlangen, welche die Korrekturen nächstführender Ordnung (NLL) im kollinearen Logarithmus beschreiben. Es treten verschiedene Arten dieser NLL–Korrekturen auf.

Eine Variante ist die auch im Fall masseloser Fermionen im Anfangszustand auftretende Zwei–Photon–Korrektur aus der Abstrahlung eines Paares zweier nicht streng gegeneinander geordneter Photonen γ_i, γ_{i+1} , welche durch die Zwei–Photon–Splittingfunktion $T(x_{ij})$ beschrieben werden. Diese hängt nur vom Gesamtenergieverlust durch Abstrahlung beider Photonen ab. Bei Abstrahlung von n Photonen ist für alle Paare nacheinander abgestrahlter Photonen eine derartige Korrektur anzubringen.

In der Rechnung mit massiven abstrahlenden Fermionen im Anfangszustand wurde deutlich, daß durch nichtverschwindende Fermionmassen nichtvernachlässigbare Beiträge nächstführender Ordnung im kollinearen Logarithmus L_c auftreten. Diese von uns als $\tilde{O}(m^2)$ –Korrekturen bezeichneten Terme weisen im differentiellen Wirkungsquerschnitt im Limes kleiner Winkel dasselbe Verhalten wie die die führende

logarithmische Ordnung liefernden Beiträge auf. Bei akollinearen Winkeln verhalten sie sich allerdings wie Terme der Größenordnung $O(m^2/E^2)$. Diese Beiträge sind daher bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes nicht vernachlässigbar, wenn der Integrationsbereich Winkel der Größenordnung $O(m/E)$ einschließt. Sowohl die Zwei-Photon- als auch die $\tilde{O}(m^2)$ -Korrekturen wurden in Kapitel 4 behandelt. In Kapitel 5 wurden die durch Hinzufügen dieser NLL-Korrekturen zur in der führenden logarithmischen Näherung LLA berechneten Fermionstrukturfunktion auftretenden Änderungen in der Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, L_c) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \int_0^1 \frac{dz}{z} P_+(z) \mathcal{D}^{\text{LLA}}\left(\frac{x}{z}, L_c\right) \quad (7.2)$$

$$\mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, L_c)(x, 0) = \delta(1-x) \quad (7.3)$$

der Radiatorfunktion $\mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, L_c)$ betrachtet. Dabei stellte sich heraus, daß die $\tilde{O}(m^2)$ -Korrekturen die Anfangsbedingung ändern, nicht aber die Evolutionsgleichung, welche für die korrigierte Radiatorfunktion $\mathcal{D}^{\text{NLL}m}(x, L_c)$ von derselben Form ist wie die für den LLA-Radiator $\mathcal{D}^{\text{LLA}}(x, L_c)$. Neben der Splittingfunktion $P(x) = (1+x^2)/(1-x)$ tritt hier noch $R(x) = 2x/(1-x)$ auf:

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{\text{NLL}m}(x, L_c) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \int_0^1 \frac{dz}{z} P_+(z) \mathcal{D}^{\text{NLL}m}\left(\frac{x}{z}, L_c\right) \quad (7.4)$$

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}m}(x, 0) = \delta(1-x) - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) R_+(x) \quad (7.5)$$

Die um die Zwei-Photon-Korrekturen ergänzte Radiatorfunktion $\mathcal{D}^{\text{NLL}c}(x, L_c)$ besitzt eine veränderte Evolutionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{\text{NLL}c}(x, L_c) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \int_0^1 \frac{dz}{z} \left[P_+(z) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) T_+(z) \right] \mathcal{D}^{\text{NLL}c}\left(\frac{x}{z}, L_c\right) \quad (7.6)$$

mit derselben Anfangsbedingung wie die LLA-Gleichung (7.2).

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}c}(x, 0) = \delta(1-x) \quad (7.7)$$

Die alle universellen Korrekturen, mit anderen Worten Zwei-Photon- und $\tilde{O}(m^2)$ -Korrekturen, enthaltende Radiatorfunktion $\mathcal{D}^{\text{NLL}c+m}(x, L_c)$ hat eine veränderte Evolutionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial L_c} \mathcal{D}^{\text{NLL}c+m}(x, L_c) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \int_0^1 \frac{dz}{z} \left[P_+(z) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) T_+(z) \right] \mathcal{D}^{\text{NLL}c+m}\left(\frac{x}{z}, L_c\right) \quad (7.8)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathcal{D}^{\text{NLL}c+m}(x, 0) = \delta(1-x) - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) R_+(x) \quad (7.9)$$

In Kapitel 6 wurden die Ergebnisse der Rechnungen aus Kapitel 4 anhand der Prozesse $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ überprüft. Durch Erweitern der Reihenentwicklung des totalen Wirkungsquerschnittes um die Terme der nächstführenden logarithmischen Ordnung konnte eine Verbesserung der Näherung für im kollinearen Winkelbereich abgestrahlte Photonen erzielt werden, so daß eine verbesserte Abschätzung für den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt im Bereich kleiner Winkel um die Strahlachse möglich wird. Der für die numerischen Tests herangezogene auch experimentell relevante Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z + n\gamma$ ist insofern ein Spezialfall, als durch die Impulserhaltung die Energie eines der Photonen in Abhängigkeit von den übrigen Photonenergien gegeben ist. In der Entwicklung des totalen $Z + \text{ISR}$ -Wirkungsquerschnittes nach führenden Logarithmen tritt eine um eins niedrigere Potenz im infraroten Logarithmus auf, als im allgemeinen Fall zu erwarten wäre.

Wir stellten fest, daß für die Entwicklung des totalen Wirkungsquerschnittes im vollen Winkelbereich zur nächstführenden Ordnung in den kollinearen Logarithmen auch nichtuniverselle Terme beitragen können. Dies wird immer dann möglich sein, wenn die Energie eines der abgestrahlten Photonen durch die Impulserhaltung als hart festgelegt ist, wenn es sich also beim Bornwirkungsquerschnitt, im hier betrachteten Beispiel $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z\gamma}(s)$, um einen bereits ein Photon enthaltenden $2 \rightarrow 2$ -Prozeß handelt. Ob nichtuniverselle Stücke auftreten oder nicht, hängt wie in Kapitel 6 besprochen, von der Art der Kopplung im $2 \rightarrow 2$ -Bornprozeß ab: bei Vektor- und Axialvektorkopplung treten nichtuniverselle Stücke auf, bei skalarer und pseudoskalarer Kopplung hingegen nicht.

Zumindest ein Teil dieser Korrekturen kann berücksichtigt werden, indem der betreffende differentielle Bornwirkungsquerschnitt analytisch berechnet wird, die führenden und nächstführenden Terme identifiziert werden und die universelle NLL_m -Radiatorfunktion um einen auf den zu betrachtenden Prozeß zugeschnittenen nichtuniversellen Anteil ergänzt wird. Wir stellten fest, daß sich für Wirkungsquerschnitte der Art $e^+e^- \rightarrow Z + n\gamma$ dieser nichtuniverselle Beitrag bei Integration über den vollen Winkelbereich mit den $\tilde{O}(m^2)$ -Beiträgen gerade wieder zu einem zur universellen Splittingfunktion $P(x)$ proportionalen Term zusammenfügt. Dieser Term ist mit einem logarithmischen Faktor $-n(\alpha/\pi)^n L_c^{n-1}$ behaftet, welcher dem nächstführenden Beitrag im kollinearen Logarithmus aus $(L_c - 1)^n$ entspricht. Die herkömmliche Methode, für weiche Abstrahlungen NLL -Korrekturen durch Ersetzen des kollinearen Logarithmus L_c mit $L_c - 1$ zu berücksichtigen, liefert für harte Abstrahlungen nur einen Teil der Korrekturen nächstführender Ordnung. Bei harten Abstrahlungen ist zusätzlich noch die Zwei-Photon-Korrektur zu berücksichtigen, welche im Limes weicher Abstrahlungen vernachlässigbar ist.

Um die korrekte Statistik aller abgestrahlten Photonen zu gewährleisten, muß die Faltung der berechneten Radiatorfunktion mit einem Bornprozeß durchgeführt werden, welcher selbst keine von den ISR -Photonen ununterscheidbaren weiteren Photonen abstrahlt. In unserem Beispiel ist daher als Bornprozeß der zu einer Deltafunktion proportionale $e^+e^- \rightarrow Z$ -Wirkungsquerschnitt einzusetzen, obwohl der eigentlich relevante Prozeß niedrigster Ordnung $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ ist. Durch Erweiterung der LLA -Radiatorfunktion um die NLL_m -Terme und den nichtuniversellen Anteil aus $\sigma_{Z\gamma}$ wird der $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ -Wirkungsquerschnitt exakt reproduziert. Das LLA -Ergebnis für den genäherten totalen Wirkungsquerschnitt nächsthöherer Ordnung

in den Photonabstrahlungen, $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma}(s)$, weicht bei Integration über den vollen Winkelbereich um etwa 5% von der ungenäherten Rechnung ab, mit obigen Näherungsmethoden kann dagegen eine Genauigkeit von etwa 1% erzielt werden.

Für die Zukunft wäre es sicherlich eine Ausweitung der Betrachtungen der nächstführenden logarithmischer Beiträge auf die QCD interessant, da dort auch für eine Theorie mit massiven Fermionen Massensingularitäten aufgrund der Drei-Gluon-Kopplung auftreten können. Ferner wäre eine weiterführende Betrachtung nicht-universeller Stücke für andere Prozesse sinnvoll, um prozeßabhängige Korrekturen zur universellen Radiatorfunktion bereitzustellen. Auch wäre eine Anwendung der zur numerischen Lösung der herkömmlichen Evolutionsgleichung (7.2) verwendeten Methoden auf die durch Berücksichtigen der Zwei-Photon-Korrekturen veränderte Evolutionsgleichung (7.8) geeignetes Thema einer weiteren Betrachtung.

Anhang A

Notation

A.1 Impulse

Konventionen für Impulse ($\beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}}$):

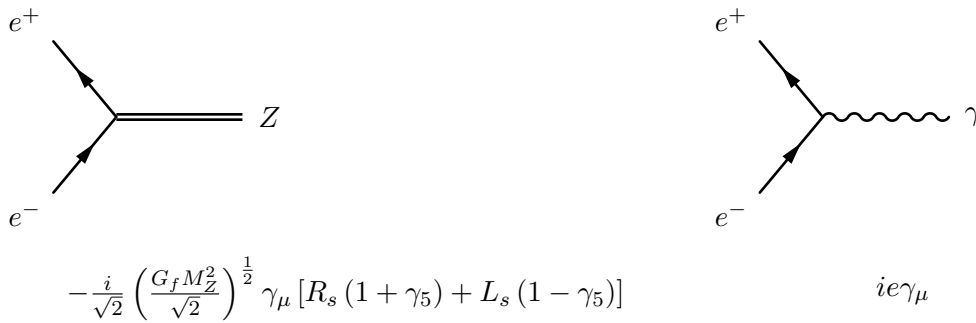
Positron	e^+	$p^\mu = E (1, 0, 0, \beta)$
Elektron	e^-	$p'^\mu = E (1, 0, 0, -\beta)$
Photon	γ_i	$k_i^\mu = Q_i (1, \sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i)$
Z-Boson	Z	$p^\mu = (Q_Z, q_z \sin \theta_Z \cos \phi_Z, q_z \sin \theta_Z \sin \phi_Z, q_z \cos \theta_Z)$

(A.1)

Für als masselos genäherte Fermionen gilt $\beta = 1$.

A.2 Vertizes

Abbildung A.1:



$$L_s = 2 \sin^2 \theta_w - 1 \quad (A.2)$$

$$R_s = 2 \sin^2 \theta_w \quad (A.3)$$

A.3 Gamma–Matrizen

Wir verwenden die Diracschen Gamma–Matrizen in der chiralen Darstellung,

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A.4}$$

mit den Pauli–Matrizen

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}\tag{A.5}$$

Es ist

$$\not{d} = a_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (a^0 - a^3) & -(a^1 - ia^2) \\ 0 & 0 & -(a^1 + ia^2) & (a^0 + a^3) \\ (a^0 + a^3) & (a^1 - ia^2) & 0 & 0 \\ (a^1 + ia^2) & (a^0 - a^3) & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{A.6}$$

A.4 Struktur iterierbarer Beiträge

In Abschnitt 3.2.2 wurde bereits gezeigt, daß der inklusive Wirkungsquerschnitt für die Abstrahlung sehr weicher Photonen durch Multiplikation des Bornquerschnittes mit einer die führenden Logarithmen enthaltenden Exponentialfunktion darstellbar ist.

$$\begin{aligned}\sigma_X^{\text{ISR, soft}}(s, \theta_{\min} = 0, \theta_{\max} = \pi, Q_{\min}, Q_{\max}) \\ = \exp \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) L_{\text{IR}} [L_c - 1] \right\} \sigma_X^{(0)}(s)\end{aligned}\tag{A.7}$$

Allgemein kann jede Summe $\sum_{n=1}^{\infty} I_n(a, b)$ aus wie folgt definierten Integralen

$$I_k(a, y_{k+1}) = \int_a^{y_{k+1}} I_{k-1}(y_k) f(y_k) dy_k\tag{A.8}$$

als Exponentialfunktion geschrieben werden, unabhängig von der Struktur des Ausgangsintegranden $f(y_1)$

$$\begin{aligned}I_1(y_2) &= \int_a^{y_2} f(y_1) dy_1 \\ &= F(y_2) - F(a)\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
I_2(y_3) &= \int_a^{y_3} I_1(y_2) f(y_2) dy_2 \\
&= \int_a^{y_3} F(y_2) f(y_2) dy_2 - F(a) \int_a^{y_3} I_1(y_2) f(y_2) dy_2 \\
&= \frac{1}{2} [F(y_3) - F(a)]^2
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Mit dem Ansatz

$$I_n(y_{n+1}) = \frac{1}{n!} [F(y_{n+1}) - F(a)]^n \tag{A.11}$$

erhalten wir im n -ten Induktionsschritt

$$\begin{aligned}
I_n(y_{n+1}) &= \int_a^{y_{n+1}} I_{n-1}(y_n) f(y_n) dy_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{y_{n+1}} [F(y_n) - F(a)]^{n-1} f(y_n) dy_n \\
&= \frac{F(y_n)}{(n-1)!} [F(y_n) - F(a)]^{n-1} \Big|_a^{y_{n+1}} - \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_a^{y_{n+1}} [F(y_n) - F(a)]^{n-2} f(y_n) F(y_n) dy_n \\
&= \frac{F(y_{n+1})}{(n-1)!} [F(y_{n+1}) - F(a)]^{n-1} - \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_a^{y_{n+1}} [F(y_n) - F(a)]^{n-1} f(y_n) dy_n \\
&\quad - \frac{F(a)}{(n-2)!} \int_a^{y_{n+1}} [F(y_n) - F(a)]^{n-2} f(y_n) dy_n \\
&= \frac{F(y_{n+1})}{(n-1)!} [F(y_{n+1}) - F(a)]^{n-1} - \frac{(n-1)}{n!} [F(y_{n+1}) - F(a)]^n \\
&\quad - \frac{F(a)}{(n-1)!} [F(y_{n+1}) - F(a)]^{n-1} \\
&= \frac{1}{n!} [F(y_{n+1}) - F(a)]^n
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Die Gültigkeit für $n = 2$ wurde in Gleichung (A.9) gezeigt. Bei Summation über alle $I_n(a, b)$ folgt mit $I_0 := 1$

$$\begin{aligned}
I^{\text{inklusive}} &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(a, b) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [F(a) - F(b)]^n \\
&= \exp \{F(a) - F(b)\}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

sehen wir, daß sich die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(a, b)$ als Exponentialfunktion schreiben lässt. Dieses Ergebnis ist allein durch die Struktur der oben definierten Integrale $I_n(a, y_{n+1})$ bedingt und wird zur Berechnung inklusiver Wirkungsquerschnitte benötigt.

Anhang B

Phasenraumintegrationen

B.1 Phasenraumintegration für $a \rightarrow n$ Teilchen

Die Phasenraumgrenzen hängen nur von den Massen und Impulsen der Teilchen in Anfangs- und Endzustand ab, daher ist es an dieser Stelle ausreichend, anstelle des totalen Wirkungsquerschnittes

$$\sigma_{a \rightarrow n}(s) = \frac{1}{2sC} \int \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3n}} \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^a p_j - \sum_{i=1}^n k_i \right) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{2Q_i} \quad (\text{B.1})$$

das n -dimensionale Phasenraumintegral

$$\Gamma_{a \rightarrow n}[1] = \frac{1}{2s(2\pi)^{3n-4}} \int \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^a p_j - \sum_{i=1}^n k_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{2Q_i} \quad (\text{B.2})$$

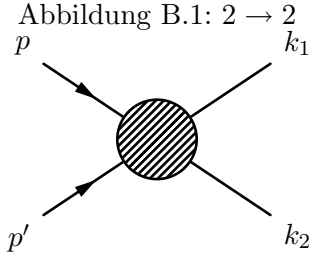
zu betrachten. Der totale Wirkungsquerschnitt folgt durch Einsetzen des über die Polarisierungen der Anfangsteilchen gemittelten und über die der Endteilchen summierten quadrierten Übergangsmatrixelementes $|\mathcal{M}|^2$ und Anbringen statistischer Faktoren C .

$$\sigma_{a \rightarrow n}(s) = \frac{1}{C} \Gamma_{a \rightarrow n} [|\mathcal{M}|^2] \quad (\text{B.3})$$

Durch Integration über die vierdimensionale Deltafunktion wird die Anzahl der freien Integrationsvariablen auf einen neuen Satz Φ von $(3n-4)$ Variablen reduziert. Das Integral geht damit in

$$\Gamma_n[1] = \int \rho(\Phi) d\Phi \quad (\text{B.4})$$

über. Die Phasenraumdichte $\rho(\Phi)$ ist zusammengesetzt aus Vorfaktoren und Jacobideterminanten, die während der Integration auftreten können. Das Hauptproblem für eine numerische Rechnung besteht in der Bestimmung des physikalischen Bereichs des Phasenraumes oder genauer der Integrationsgrenzen der einzelnen Variablen, die für mehr als zwei Teilchen im Endzustand auf nichttriviale Weise zusammenhängen [10].



B.2 Phasenraumintegration für $2 \rightarrow 2$

Die Phasenraumintegration wird im Schwerpunktsystem der beiden einlaufenden Teilchen durchgeführt, welche hier als Teilchen gleicher Masse m vorausgesetzt werden. Die Impulse sind ($\beta = \sqrt{1 - m^2/E^2}$)

$$\begin{aligned}
 p^\mu &= E(1, 0, 0, \beta) \\
 p'^\mu &= E(1, 0, 0, -\beta) \\
 k_1^\mu &= (Q_1, q_1 \sin \theta, 0, q_1 \cos \theta) \\
 k_2^\mu &= (Q_2, -q_1 \sin \theta, 0, -q_1 \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

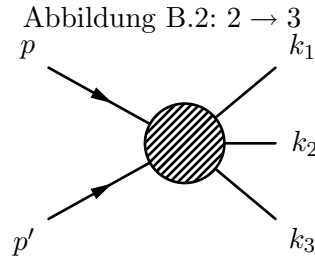
Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{2 \rightarrow 2}[1] &= \frac{1}{2s(2\pi)^{3 \cdot 2 - 4}} \int \delta^{(4)}(p + p' - k_1 - k_2) \delta(k_1^2 - M_1^2) \delta(k_2^2 - M_2^2) d^4 k_1 d^4 k_2 \\
 &= \frac{1}{32\pi s^2} \sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)} \int d \cos \theta
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

wobei die Lambdafunktion $\lambda(a, b, c)$ definiert ist als

$$\lambda(a, b, c) = (a - b - c)^2 - 4bc \tag{B.7}$$

B.3 Phasenraum für $2 \rightarrow 3$, Spezialfall $M_1 = M_2 = 0$



Das Phasenraumintegral (B.2) geht im Fall von $2 \rightarrow 3$ Teilchen über in

$$\begin{aligned}
 R_{2 \rightarrow 3} &= \frac{1}{(2\pi)^{3 \cdot 3 - 4}} \int \delta^{(4)}\left(p + p' - \sum_{i=1}^3 k_i\right) \prod_{i=1}^3 \delta(k_i^2 - M_i^2) d^4 k_i \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^5} \int \delta\left((p + p' - k_1 - k_2)^2 - M_3^2\right) \sqrt{Q_1^2 - M_1^2} \sqrt{Q_2^2 - M_2^2} \frac{dQ_1 d\Omega_1}{2} \frac{dQ_2 d\Omega_2}{2}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Die Rechnung kann vereinfacht werden, wenn als Bezugssystem wieder das Schwerpunktsystem $\vec{p} + \vec{p}' = \vec{0}$ der einlaufenden Teilchen (gleicher Masse m) gewählt wird. Da wir für unsere Rechnungen nur den Spezialfall eines massiven und zweier masseloser Teilchen im Endzustand benötigen, setzen wir $M_1 = M_2 = 0$ und verwenden die Deltafunktion, um die Q_2 -Integration auszuführen.

$$R_{2 \rightarrow 3} = \frac{1}{4(2\pi)^5} \int \frac{\left(\frac{s-M_3^2}{4E} - Q_1\right)}{4E \left(1 - \frac{Q_1}{2E}(1 - \cos \psi_{12})\right)^2} Q_1 dQ_1 d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (\text{B.9})$$

mit

$$Q_2 = \frac{\frac{s-M_3^2}{4E} - Q_1}{\left(1 - \frac{Q_1}{2E}(1 - \cos \psi_{12})\right)} \quad (\text{B.10})$$

und dem Satz $\Phi(Q_1, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ von unabhängigen Integrationsvariablen, wobei

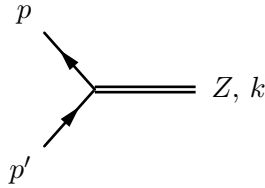
$$0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq Q_1 \leq \frac{s - M_3^2}{4E}$$

Der Winkel ψ_{12} zwischen den räumlichen Photonimpulsen berechnet sich aus

$$\cos \psi_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (\text{B.11})$$

B.4 Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z$

Abbildung B.3:



Wir berechnen das Matrixelement für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z$ im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen. Die Impulse seien festgelegt als

$$\begin{aligned} p^\mu &= E(1, 0, 0, \beta) \\ p'^\mu &= E(1, 0, 0, -\beta) \\ k_Z^\mu &= (p + p')^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ferner verwenden wir folgende Abkürzungen für die (e^+e^-Z) -Kopplungen

$$\begin{aligned} C &= R_s(1 + \gamma_5) + L_s(1 - \gamma_5) \\ \bar{C} &= R_s(1 - \gamma_5) + L_s(1 + \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Damit ist

$$\mathcal{M}_Z(p, p') = V_Z \bar{v}(p, s) \not{e}_Z C u(p', s') \quad (\text{B.14})$$

wobei $V_Z = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}}\right)}$. Wir erhalten mit $s = 4E^2$ für das quadrierte, über die Anfangsspins gemittelte und über die Polarisationen im Endzustand summierte Matrixelement das Ergebnis

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_Z(p, p')|^2 = \left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}}\right) [(R_s^2 + L_s^2)(s - 2m^2) + 8R_s L_s m^2 + (R_s - L_s)^2 m^2] \quad (\text{B.15})$$

Im weiteren Verlauf der Rechnung wird folgendes Integral $I_{2 \rightarrow 1}$ auftreten:

$$\begin{aligned} I_{2 \rightarrow 1} &= \frac{1}{2s} \int (2\pi)^4 \delta(p + p' - k) |\mathcal{M}|^2 \delta(k^2 - M^2) \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{2\pi}{2s} |\mathcal{M}|^2 \delta(s - M^2) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

wobei hier

$$I_{e^+ e^- \rightarrow Z} = \frac{\pi}{s} \delta(s - M_Z^2) \left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}}\right) [(R_s^2 + L_s^2)(s - 2m^2) + m^2 [8R_s L_s + (R_s - L_s)^2]] \quad (\text{B.17})$$

B.5 Prozeß $e^+ e^- \rightarrow Z \gamma$

Wir berechnen nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $e^+ e^- \rightarrow Z \gamma$. Da es sich um einen $2 \rightarrow 2$ -Prozeß handelt, ist, wie oben erwähnt, die Energie der Endzustandsteilchen durch die Energie der Teilchen im Anfangszustand festgelegt. Gerechnet wird wie vorher im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen, d.h. wir legen die Impulse fest wie folgt:

$$\begin{aligned} p^\mu &= E(1, 0, 0, \beta) \\ p'^\mu &= E(1, 0, 0, -\beta) \\ k^\mu &= Q(1, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ k_Z^\mu &= (p + p' - k)^\mu \\ k_Z^2 &= M_Z^2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

und die Photonenergie ist im Schwerpunktsystem gegeben als

$$Q_\gamma = \frac{4E^2 - M_Z^2}{4E} \quad (\text{B.19})$$

Mit $V_{Z\gamma} = -\frac{ie}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}}\right)}$ schreiben wir das Matrixelement als

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{Z\gamma}^{(ss')} &= V_{Z\gamma} \varepsilon_\gamma^\mu \varepsilon_Z^\alpha \bar{v}(p, s) \left[\frac{\gamma_\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma_\alpha C}{(p-k)^2 - m^2} + \frac{\gamma_\alpha C (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\mu}{(p'-k)^2 - m^2} \right] u(p', s') \\
&= V_{Z\gamma} \varepsilon_\gamma^\mu \varepsilon_Z^\alpha (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)_{\mu\alpha} \\
(\mathcal{M}_A)_{\mu\alpha} &= \left(\frac{p_\mu}{(pk)} - \frac{p'_\mu}{(p'k)} \right) \bar{v}(p, s) \gamma_\alpha C u(p', s') \\
(\mathcal{M}_B)_{\mu\alpha} &= \bar{v}(p, s) \left(\frac{\gamma_\mu \not{k} \gamma_\alpha C}{-2(pk)} - \frac{\gamma_\alpha C \not{k} \gamma_\mu}{-2(p'k)} \right) u(p', s')
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Um das quadrierte und über die Z - und γ -Polarisationsrichtungen summierte Matrixelement zu berechnen, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{Pol}_\gamma} \varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} &= -g^{\mu\nu} =: S_\gamma^{\mu\nu} \\
\sum_{\text{Pol}_Z} \varepsilon_Z^\mu \varepsilon_Z^{*\nu} &= -g^{\mu\nu} + \frac{k_Z^\mu k_Z^\nu}{M_Z^2} =: S_Z^{\mu\nu} + \frac{1}{M_Z^2} K_Z^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Da das Z -Boson im Limes masseloser Fermionen an einen erhaltenen Strom koppelt, werden im Limes $m \rightarrow 0$ die mit $K_Z^{\mu\nu} := k_Z^\mu k_Z^\nu$ kontrahierten Terme wegfallen. Für massive Fermionen ist der $S_\gamma K_Z$ -Anteil mit einem Faktor m^2/M_Z^2 unterdrückt und trägt weder zur führenden noch zur nächstführenden logarithmischen Ordnung bei.

Im Laufe der Rechnung ersetzen wir alle invarianten Skalarprodukte durch die Mandelstam-Variablen s , t und u ,

$$s = (p + p')^2 = (k + k_Z)^2 \tag{B.22}$$

$$t = (p - k)^2 = (p' - k_Z)^2 \tag{B.23}$$

$$u = (p' - k)^2 = (p - k_Z)^2 \tag{B.24}$$

welche die Beziehung

$$s + t + u = M_Z^2 + 2m^2 \tag{B.25}$$

erfüllen. Wir berechnen unter Verwendung der in Tabelle B.1 definierten Abkürzungen

$$\begin{aligned}
S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} (|\mathcal{M}_A|^2)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} &= \left[\frac{m^2}{(pk)^2} + \frac{m^2}{(p'k)^2} - \frac{2(pp')}{(pk)(p'k)} \right] \cdot T_1 \\
&= 16(R_s^2 + L_s^2) \left[-\frac{2m^2(s-2m^2)}{(t-m^2)^2} - \frac{2m^2(s-2m^2)}{(u-m^2)^2} + \frac{2(s-2m^2)^2}{(t-m^2)(u-m^2)} \right] \\
&+ 64R_s L_s m^2 \left[-\frac{4m^2}{(t-m^2)^2} - \frac{4m^2}{(u-m^2)^2} + \frac{4(s-2m^2)}{(t-m^2)(u-m^2)} \right]
\end{aligned} \tag{B.26}$$

und

$$S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} (|\mathcal{M}_B|^2)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} = \frac{1}{4(pk)^2} T_{2a} + \frac{1}{4(p'k)^2} T_{2b} - \frac{2}{4(pk)(p'k)} \Re \{T_{2c}\}$$

$$= 16(R_s^2 + L_s^2) \left[\frac{(u - m^2)}{(t - m^2)} + \frac{(t - m^2)}{(u - m^2)} \right] \quad (\text{B.27})$$

sowie den Realteil des Mischterms

$$\begin{aligned} & 2\Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} (\mathcal{M}_B \mathcal{M}_A^*)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} \right\} \quad (\text{B.28}) \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2(pk)^2} T_{12a} - \frac{1}{2(p'k)^2} T_{12b} + \frac{1}{2(pk)(p'k)} (T_{12c} + T_{12d}) \right] \\ &= 16(R_s^2 + L_s^2) \left[-\frac{2m^2(u - m^2)}{(t - m^2)^2} - \frac{2m^2(t - m^2)}{(u - m^2)^2} + \frac{2(s - 2m^2)}{(u - m^2)} - \frac{2m^2}{(t - m^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(s - 2m^2)}{(t - m^2)} - \frac{2m^2}{(u - m^2)} \right] \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für den $S_\gamma S_Z$ -Anteil des über die Photon- und Z -Polarisationen summierten Matrixelementes

$$\begin{aligned} S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} |\mathcal{M}_{Z\gamma}|_{(\mu\nu)(\alpha\beta)}^2 &= |V_{Z\gamma}|^2 S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} |\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B|_{(\mu\nu)(\alpha\beta)}^2 \quad (\text{B.29}) \\ &= |V_{Z\gamma}|^2 \left[16(R_s^2 + L_s^2) T_{16(R_s^2 + L_s^2)} + 32R_s L_s m^2 T_{32R_s L_s} \right] \end{aligned}$$

Bez.	Definition	Ergebnis
T_1	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu C (\not{p}' + m) \bar{C} \gamma^\mu \right\}$	$-16(R_s^2 + L_s^2)(pp') - 64R_s L_s m^2$ $= -8(R_s^2 + L_s^2)(s - 2m^2) - 64R_s L_s m^2$
T_{2a}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu C (\not{p}' + m) \bar{C} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \right\}$	$16(R_s^2 + L_s^2) \cdot 4(pk)(p'k)$ $= 16(R_s^2 + L_s^2)(t - m^2)(u - m^2)$
T_{2b}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) C \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \bar{C} \right\}$	T_{2a}
T_{2c}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu C (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \bar{C} \right\}$	0
T_{12a}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{p} \not{k} \gamma_\nu C (\not{p}' + m) \bar{C} \gamma^\nu \right\}$	$-16(R_s^2 + L_s^2)m^2(p'k) - 64R_s L_s m^2(pk)$ $8(R_s^2 + L_s^2)m^2(u - m^2) + 32R_s L_s m^2(t - m^2)$
T_{12b}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) C \gamma_\nu \not{k} \not{p}' (\not{p}' + m) \bar{C} \gamma^\nu \right\}$	$-16(R_s^2 + L_s^2)m^2(pk) - 64R_s L_s m^2(p'k)$ $= 8(R_s^2 + L_s^2)m^2(t - m^2) + 32R_s L_s m^2(u - m^2)$
T_{12c}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\nu C \not{k} \not{p}' (\not{p}' + m) \bar{C} \gamma^\nu \right\}$	$-16(R_s^2 + L_s^2) [2(pp')(pk) - m^2(p'k)]$ $-64R_s L_s m^2(pk)$ $= 8(R_s^2 + L_s^2) [(s - 2m^2)(t - m^2) - m^2(u - m^2)]$ $+32R_s L_s m^2(t - m^2)$
T_{12d}	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{p}' \not{k} \gamma_\nu C (\not{p}' + m) \bar{C} \gamma^\nu \right\}$	$-16(R_s^2 + L_s^2) [2(pp')(p'k) - m^2(pk)]$ $-64R_s L_s m^2(p'k)$ $= 8(R_s^2 + L_s^2) [(s - 2m^2)(u - m^2) - m^2(t - m^2)]$ $+32R_s L_s m^2(u - m^2)$

Tabelle B.1: Zur Berechnung von $S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} (|\mathcal{M}_{Z\gamma}|^2)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)}$ benötigte Spurterme

mit

$$T_{16(R_s^2+L_s^2)} = \frac{1}{(t-m^2)(u-m^2)} \left[s^2 + M_Z^4 - 4m^2(s + M_Z^2) + 8m^4 \right] - 2 \\ - 2m^2(M_Z^2 - 2m^2) \left(\frac{1}{(t-m^2)^2} + \frac{1}{(u-m^2)^2} \right) \quad (\text{B.30})$$

und

$$T_{32R_sL_s} = -8m^2 \left(\frac{1}{(t-m^2)^2} + \frac{1}{(u-m^2)^2} \right) + \frac{8s - 16m^2}{(t-m^2)(u-m^2)} \quad (\text{B.31})$$

Das komplette über die Spins der Anfangsteilchen gemittelte und über die Polarisationsrichtungen der Endzustandsteilchen summierte quadrierte Matrixelement lautet bis auf vernachlässigbare Terme in $O(m^2/E^2)$

$$\frac{1}{4} |\mathcal{M}_{Z\gamma}|^2 = 2e^2 \left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}} \right) (R_s^2 + L_s^2) \cdot \left[\frac{-(s^2 + M_Z^4)}{(s - M_Z^2)(u - m^2)} + \frac{-(s^2 + M_Z^4)}{(s - M_Z^2)(t - m^2)} \right. \\ \left. - 2 - \frac{2m^2 M_Z^2}{(t - m^2)^2} - \frac{2m^2 M_Z^2}{(u - m^2)^2} \right] + O(m^2) \quad (\text{B.32})$$

Mit $x := M_Z^2/s$ und $Q = (s - M_Z^2)/4E = (1 - x)E$ erhalten wir den entsprechenden Ausdruck in Abhängigkeit von der Energie E der einlaufenden Teilchen und dem Winkel θ des räumlichen Photonimpulses zur Strahlrichtung als

$$\frac{1}{4} |\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow Z\gamma}|^2 \\ = 4e^2 \left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}} \right) (R_s^2 + L_s^2) \cdot \left[\frac{(1 + x^2)}{(1 - x)^2(1 - \beta \cos \theta)} + \frac{(1 + x^2)}{(1 - x)^2(1 + \beta \cos \theta)} - 1 \right. \\ \left. - \frac{xm^2}{E^2(1 - x)^2(1 - \beta \cos \theta)^2} - \frac{xm^2}{E^2(1 - x)^2(1 + \beta \cos \theta)^2} \right] + O(m^2) \quad (\text{B.33})$$

B.6 $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$

Zur Berechnung des quadrierten und polarisationssummierten $e^+e^- \rightarrow Z\gamma\gamma$ -Matrixelementes können die Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte herangezogen werden. Gerechnet wird wieder im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen, mit den Impulsen

$$p^\mu = E(1, 0, 0, \beta) \\ p'^\mu = E(1, 0, 0, -\beta) \\ k_1^\mu = Q_1(1, \sin \theta_1 \cos \phi_1, \sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \theta_1) \\ k_2^\mu = Q_2(1, \sin \theta_2 \cos \phi_2, \sin \theta_2 \sin \phi_2, \cos \theta_2) \\ k_Z^\mu = (p + p' - k_1 - k_2)^\mu \\ k_Z^2 = M_Z^2 \quad (\text{B.34})$$

Die Photonenergie Q_2 ist im Schwerpunktsystem in der Näherung eines zu \vec{p} kollinearen Photons gegeben durch Gleichung (6.7), in der Näherung eines zu \vec{p}' kollinearen Photons durch Gleichung (6.8).

B.6.1 Genähertes Matricelement für Abstrahlung eines zu \vec{p} kollinearen Photons

Nach Abstrahlung des ersten Photons läuft in guter Näherung ein Fermion mit Impuls $p_1 = p - k_1$, $p_1^2 = m_1^2$ in den Restprozeß $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ ein. Mit dem Vorfaktor $V_{Z\gamma} = -\frac{ie}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{G_f M_Z^2}{\sqrt{2}}\right)}$ schreiben wir das zugehörige Matricelement in guter Näherung als

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Z\gamma}^{\gamma_1\parallel p} &= V_{Z\gamma}\varepsilon_2^\mu\varepsilon_Z^\alpha\bar{v}(p_1, s)\left[\frac{\gamma_\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)\gamma_\alpha C}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} + \frac{\gamma_\alpha C(\not{p}' - \not{k}_2 + m)\gamma_\mu}{(p' - k_2)^2 - m^2}\right]u(p', s') \\ &= V_{Z\gamma}\varepsilon_2^\mu\varepsilon_Z^\alpha(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)_{\mu\alpha}\end{aligned}\quad (\text{B.35})$$

$$(\mathcal{M}_A)_{\mu\alpha} = \left(\frac{p_{1\mu}}{(p_1 k_2)} - \frac{p'_\mu}{(p' k_2)}\right)\bar{v}(p_1, s)\gamma_\alpha C u(p', s') \quad (\text{B.36})$$

$$(\mathcal{M}_B)_{\mu\alpha} = \bar{v}(p_1, s)\left(\frac{\gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\alpha C}{-2(p_1 k_2)} + \frac{(m - m_1)\gamma_\mu \gamma_\alpha C}{-2(p_1 k_2)} - \frac{\gamma_\alpha C \not{k}_2 \gamma_\mu}{-2(p' k_2)}\right)u(p', s') \quad (\text{B.37})$$

Wie bereits bei der Berechnung des differentiellen $Z\gamma$ -Wirkungsquerschnittes zu sehen, stammen die nicht vernachlässigbaren $\tilde{O}(m^2)$ -Beiträge allein aus dem quadrierten Faktor $(p_{1\mu}/(p_1 k_2) - p'_\mu/(p' k_2))$ von $(\mathcal{M}_A)_{\mu\alpha}$. Im Laufe der Rechnung ersetzen wir alle invarianten Skalarprodukte durch die modifizierten Mandelstam-Variablen \tilde{s} , \tilde{t} und \tilde{u} ,

$$\tilde{s} = (p_1 + p')^2 \quad (\text{B.38})$$

$$\tilde{t} = (p_1 - k_2)^2 \quad (\text{B.39})$$

$$\tilde{u} = (p' - k_2)^2 \quad (\text{B.40})$$

welche die Beziehung

$$\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = M_Z^2 + m^2 + m_1^2 \quad (\text{B.41})$$

erfüllen. Die weitere Rechnung wird analog zum vorherigen Abschnitt ausgeführt. Wir berechnen unter Verwendung der in Tabelle B.2 definierten Abkürzungen

$$\begin{aligned}S_\gamma^{\mu\nu}S_Z^{\alpha\beta}(|\mathcal{M}_A|^2)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} &= \left[\frac{4m_1^2}{((p_1 - k_2)^2 - m^2)^2} + \frac{4m^2}{((p' - k_2)^2 - m^2)^2} - \frac{8(p_1 p')}{((p_1 - k_2)^2 - m^2)((p' - k_2)^2 - m^2)}\right] \cdot \tilde{T}_1 \\ &= 16(R_s^2 + L_s^2)\left[-\frac{2m_1^2\tilde{s}}{(\tilde{t} - m^2)^2} - \frac{2m^2\tilde{s}}{(\tilde{u} - m^2)^2} + \frac{2(\tilde{s} - m^2 - m_1^2)^2}{(\tilde{t} - m^2)(\tilde{u} - m^2)}\right] + O(m^2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}S_\gamma^{\mu\nu}S_Z^{\alpha\beta}(|\mathcal{M}_B|^2)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} & \quad (\text{B.43}) \\ &= \frac{\tilde{T}_{2a}}{((p_1 - k_2)^2 - m^2)^2} + \frac{\tilde{T}_{2b}}{((p' - k_2)^2 - m^2)^2} - \frac{2\Re\{\tilde{T}_{2c}\}}{((p_1 - k_2)^2 - m^2)((p' - k_2)^2 - m^2)} \\ &= 16(R_s^2 + L_s^2)\left[\frac{(\tilde{u} - m^2)}{(\tilde{t} - m^2)} + \frac{(\tilde{t} - m^2)}{(\tilde{u} - m^2)} + \frac{m^2 - m_1^2}{(\tilde{t} - m^2)^2}\right] + O(m^2)\end{aligned}$$

Bez.	Definition	Ergebnis/ $(R_s^2 + L_s^2)$
\tilde{T}_1	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)\gamma_\mu C(\not{p}' + m)\bar{C}\gamma^\mu\right\}$	$-16(p_1 p') + O(m^2)$ $= -8(\tilde{s} - m^2 - m_1^2) + O(m^2)$
\tilde{T}_{2a}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)\gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu C(\not{p}' + m)\bar{C}\gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu\right\}$	$64(p_1 k_2)(p' k_2)$ $= 16(\tilde{t} - m_1^2)(\tilde{u} - m^2)$
\tilde{T}_{2b}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)C\gamma_\nu \not{k}_2 \gamma_\mu (\not{p}' + m)\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu \bar{C}\right\}$	\tilde{T}_{2a}
\tilde{T}_{2c}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)\gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu C(\not{p}' + m)\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu \bar{C}\right\}$	0
\tilde{T}_{12a}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)\not{p}_1 \not{k}_2 \gamma_\nu C(\not{p}' + m)\bar{C}\gamma^\nu\right\}$	$-16m_1^2(p' k_2) + O(m^2(\tilde{t} - m_1^2))$ $= 8m_1^2(\tilde{u} - m^2) + O(m^2)$
\tilde{T}_{12b}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)C\gamma_\nu \not{k}_2 \not{p}' (\not{p}' + m)\bar{C}\gamma^\nu\right\}$	$-16m^2(p_1 k_2) + O(m^2(\tilde{t} - m_1^2))$ $= 8m^2(\tilde{t} - m_1^2) + O(m^2(\tilde{t} - m_1^2))$
\tilde{T}_{12c}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)\gamma_\nu C\not{k}_2 \not{p}_1 (\not{p}' + m)\bar{C}\gamma^\nu\right\}$	$-16 [2(p_1 p')(p_1 k_2) - m_1^2(p' k_2)]$ $+ O(m^2(\tilde{t} - m_1^2))$ $= 8 [(\tilde{s} - m_1^2 - m^2)(\tilde{t} - m^2) - m_1^2(\tilde{u} - m^2)]$ $+ O(m^2(\tilde{t} - m_1^2))$
\tilde{T}_{12d}	$\text{tr}\left\{(\not{p}_1 - m)\not{p}' \not{k}_2 \gamma_\nu C(\not{p}' + m)\bar{C}\gamma^\nu\right\}$	$-16 [2(p_1 p')(p' k_2) - m^2(p_1 k_2)]$ $+ O(m^2(\tilde{u} - m^2))$ $= 8 [(\tilde{s} - m_1^2 - m^2)(\tilde{u} - m^2) - m^2(\tilde{t} - m_1^2)]$ $+ O(m^2(\tilde{u} - m^2))$

Tabelle B.2: Zur Berechnung von $S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} (|\mathcal{M}_{\gamma Z}|^2)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)}$ benötigte Spurterme

sowie den Realteil des Mischterms

$$\begin{aligned}
2\Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} S_Z^{\alpha\beta} (\mathcal{M}_B \mathcal{M}_A^*)_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} \right\} &= 2 \left[-\frac{\tilde{T}_{12a}}{2(p_1 k_2)^2} - \frac{\tilde{T}_{12b}}{2(p' k_2)^2} + \frac{(\tilde{T}_{12c} + \tilde{T}_{12d})}{2(p_1 k_2)(p' k_2)} \right] \\
&= 16(R_s^2 + L_s^2) \left[-\frac{2m_1^2(\tilde{u} - m^2)}{(\tilde{t} - m^2)^2} - \frac{2m^2(\tilde{t} - m^2)}{(\tilde{u} - m^2)^2} + \frac{2(\tilde{s} - m_1^2 - m^2)}{(\tilde{u} - m^2)} - \frac{2m^2}{(\tilde{t} - m^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(s - m_1^2 - m^2)}{(\tilde{t} - m^2)} - \frac{2m^2}{(\tilde{u} - m^2)} \right]
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit für den relevanten Anteil des über die Photon- und Z -Polarisationen summierten Matrixelementes

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{Pol}} |\mathcal{M}_{Z\gamma}^{\gamma_1}|^2 \tag{B.44} \\
&= |V_{Z\gamma}|^2 16(R_s^2 + L_s^2) \left[\frac{\tilde{s}^2 + M_Z^4}{(\tilde{t} - m^2)(\tilde{u} - m^2)} - 2 - \frac{2m_1^2 M_Z^2}{(\tilde{t} - m^2)^2} - \frac{2m^2 M_Z^2}{(\tilde{u} - m^2)^2} \right] + O(m^2)
\end{aligned}$$

B.7 Nichtuniverselle Terme bei Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor- und Axialvektorkopplung

Wir untersuchen das Matrixelement

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{Z\gamma}^{(ss')} &= e^2 \bar{v}(p, s) \left[\frac{\gamma_\mu (\not{k} - \not{p} + m) \Gamma}{(p-k)^2 - m^2} + \frac{\Gamma (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\mu}{(p'-k)^2 - m^2} \right] u(p', s') \\
&= e^2 \varepsilon_\gamma^\mu \left(\mathcal{M}_A^{(\Gamma)} + \mathcal{M}_B^{(\Gamma)} \right)_\mu \\
(\mathcal{M}_A)_\mu^{(\Gamma)} &= \left(\frac{p_\mu}{(pk)} - \frac{p'_\mu}{(p'k)} \right) \bar{v}(p, s) \Gamma u(p', s') \\
(\mathcal{M}_B)_\mu^{(\Gamma)} &= \bar{v}(p, s) \left(\frac{\gamma_\mu \not{k} \Gamma}{-2(pk)} - \frac{\Gamma \not{k} \gamma_\mu}{-2(p'k)} \right) u(p', s')
\end{aligned} \tag{B.45}$$

eines hypothetischen $2 \rightarrow 2$ -Prozesses $e^+e^- \rightarrow Z + \gamma$ mit einem massiven Teilchen Z der Masse M_Z auf nichtuniverselle Stücke bei Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor- und Axialvektorkopplung von Z an die Fermionen. Wir berechnen unter Verwendung

Bez.	Definition	Ergebnis
$T_1^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m)(\not{p}' + m) \right\}$	$4(pp') - 4m^2$
$T_{2a}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \not{k} (\not{p}' + m) \not{k} \gamma^\mu \right\}$	$-16(pk)(p'k)$
$T_{2b}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{k} \gamma_\mu (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \right\}$	$T_{2a}^{(1)}$
$T_{2c}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \not{k} (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \right\}$	$16(pk)(p'k)$
$T_{12a}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{p} \not{k} (\not{p}' + m) \right\}$	$-4m^2(pk) + 4m^2(p'k)$
$T_{12b}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{k} \not{p}' (\not{p}' + m) \right\}$	$-4m^2(p'k) + 4m^2(pk)$
$T_{12c}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{k} \not{p} (\not{p}' + m) \right\}$	$-4m^2(pk) - 4m^2(p'k) + 8(pk)(pp')$
$T_{12d}^{(1)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{p}' \not{k} (\not{p}' + m) \right\}$	$-4m^2(pk) - 4m^2(p'k) + 8(p'k)(pp')$

Tabelle B.3: Skalare Kopplung

der in Tabelle B.3 bis B.6 aufgeführten Ergebnisse für die verschiedenen Kopplungen $\Gamma = 1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$ die Beiträge

$$S_\gamma^{\mu\nu} \sum_{\text{PolZ}, \Gamma} \left(|\mathcal{M}_A^{(\Gamma)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = \left[-\frac{m^2}{(pk)^2} - \frac{m^2}{(p'k)^2} + \frac{2(pp')}{(pk)(p'k)} \right] \cdot T_1^{(\Gamma)} \tag{B.46}$$

und

$$S_\gamma^{\mu\nu} \sum_{\text{PolZ}, \Gamma} \left(|\mathcal{M}_B^{(\Gamma)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = -\frac{1}{4(pk)^2} T_{2a}^{(1)} - \frac{1}{4(p'k)^2} T_{2b}^{(1)} + \frac{2}{4(pk)(p'k)} \Re \left\{ T_{2c}^{(\Gamma)} \right\}$$

sowie den Realteil des Mischterms

$$2\Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} \sum_{\text{PolZ}, \Gamma} \left(\mathcal{M}_B^{(\Gamma)} \mathcal{M}_A^{(\Gamma)*} \right)_{(\mu\nu)} \right\} = -2 \left[-\frac{T_{12a}^{(\Gamma)}}{2(pk)^2} - \frac{T_{12b}^{(\Gamma)}}{2(p'k)^2} + \frac{(T_{12c}^{(\Gamma)} + T_{12d}^{(\Gamma)})}{2(pk)(p'k)} \right] \tag{B.47}$$

Bez.	Definition	Ergebnis
$T_1^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_5(\not{p}' + m)\gamma_5\right\}$	$4(pp') + 4m^2$
$T_{2a}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\mu \not{k} \gamma_5(\not{p}' + m)\gamma_5 \not{k} \gamma^\mu\right\}$	$-16(pk)(p'k)$
$T_{2b}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu(\not{p}' + m)\gamma^\mu \not{k} \gamma_5\right\}$	$T_{2a}^{(\gamma_5)}$
$T_{2c}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\mu \not{k} \gamma_5(\not{p}' + m)\gamma^\mu \not{k} \gamma_5\right\}$	$16(pk)(p'k)$
$T_{12a}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\not{p} \not{k} \gamma_5(\not{p}' + m)\gamma_5\right\}$	$4m^2(pk) + 4m^2(p'k)$
$T_{12b}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_5 \not{k} \not{p}'(\not{p}' + m)\gamma_5\right\}$	$4m^2(p'k) + 4m^2(pk)$
$T_{12c}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_5 \not{k} \not{p}(\not{p}' + m)\gamma_5\right\}$	$4m^2(pk) - 4m^2(p'k) + 8(pk)(pp')$
$T_{12d}^{(\gamma_5)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\not{p}' \not{k} \gamma_5(\not{p}' + m)\gamma_5\right\}$	$-4m^2(pk) + 4m^2(p'k) + 8(p'k)(pp')$

Tabelle B.4: Pseudoskalare Kopplung

Bez.	Definition	Ergebnis
$T_1^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\mu(\not{p}' + m)\gamma^\mu\right\}$	$8(pp') + 16m^2$
$T_{2a}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu(\not{p}' + m)\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu\right\}$	$-32(pk)(p'k)$
$T_{2b}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu(\not{p}' + m)\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu\right\}$	$T_{2a}^{(\gamma^\mu)}$
$T_{2c}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu(\not{p}' + m)\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu\right\}$	0
$T_{12a}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\not{p} \not{k} \gamma_\nu(\not{p}' + m)\gamma^\nu\right\}$	$16m^2(pk) + 8m^2(p'k)$
$T_{12b}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\nu \not{k} \not{p}'(\not{p}' + m)\gamma^\nu\right\}$	$8m^2(pk) + 16m^2(p'k)$
$T_{12c}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\gamma_\nu \not{k} \not{p}(\not{p}' + m)\gamma^\nu\right\}$	$-8m^2(p'k) + 16m^2(pk) + 16(pp')(pk)$
$T_{12d}^{(\gamma^\mu)}$	$-\text{tr}\left\{(\not{p} - m)\not{p}' \not{k} \gamma_\nu(\not{p}' + m)\gamma^\nu\right\}$	$-8m^2(pk) + 16m^2(p'k) + 16(pp')(p'k)$

Tabelle B.5: Vektorkopplung

Da für Vektor- und Axialvektorkopplung Terme proportional $k_Z^\mu k_Z^\nu$ in der Polarisationssumme wie oben gezeigt nur in vernachlässigbarer $O(m^2)$ beitragen, verwenden wir hier $\sum_{\text{PolZ}, \Gamma=\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5} = -g^{\mu\nu}$. Für skalare und pseudoskalare Kopplung verwenden wir $\sum_{\text{PolZ}, \Gamma=1, \gamma_5} = 1$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_A^{(1)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} &= S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_A^{(\gamma_5)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} \\
&= \frac{1}{2} S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_A^{(\gamma^\mu)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_A^{(\gamma^\mu \gamma_5)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} \\
&= 8s \left[\frac{s}{(t-m^2)(u-m^2)} - \frac{m^2}{(t-m^2)^2} - \frac{m^2}{(u-m^2)^2} \right] \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

$$S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_B^{(1)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_B^{(\gamma_5)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = 4 \left[\frac{(t-m^2)}{(u-m^2)} + \frac{(u-m^2)}{(t-m^2)} + 2 \right] \quad (\text{B.49})$$

Bez.	Definition	Ergebnis
$T_1^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}' + m) \gamma_5 \gamma^\mu \right\}$	$8(pp') - 16m^2$
$T_{2a}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 (\not{p}' + m) \gamma_5 \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \right\}$	$-32(pk)(p'k)$
$T_{2b}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_5 \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_5 \right\}$	$T_{2a}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$
$T_{2c}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_5 \right\}$	0
$T_{12a}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{p} \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 (\not{p}' + m) \gamma_5 \gamma^\nu \right\}$	$-16m^2(pk) + 8m^2(p'k)$
$T_{12b}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_5 \gamma_\nu \not{k} \not{p}' (\not{p}' + m) \gamma_5 \gamma^\nu \right\}$	$8m^2(pk) - 16m^2(p'k)$
$T_{12c}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \gamma_\nu \gamma_5 \not{k} \not{p} (\not{p}' + m) \gamma_5 \gamma^\nu \right\}$	$-8m^2(p'k) - 16m^2(pk) + 16(pk)(p'p)$
$T_{12d}^{(\gamma^\mu \gamma_5)}$	$\text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \not{p}' \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 (\not{p}' + m) \gamma_5 \gamma^\nu \right\}$	$-8m^2(pk) - 16m^2(p'k) + 16(pp')(p'k)$

Tabelle B.6: Axialvektorkopplung

$$S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_B^{(\gamma^\mu)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = S_\gamma^{\mu\nu} \left(|\mathcal{M}_B^{(\gamma^\mu \gamma_5)}|^2 \right)_{(\mu\nu)} = 8 \left[\frac{(t - m^2)}{(u - m^2)} + \frac{(u - m^2)}{(t - m^2)} \right] \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{aligned} 2\Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} \left(\mathcal{M}_B^{(1)} \mathcal{M}_A^{(1)*} \right)_{(\mu\nu)} \right\} &= 2\Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} \left(\mathcal{M}_B^{(\gamma_5)} \mathcal{M}_A^{(\gamma_5)*} \right)_{(\mu\nu)} \right\} \\ &= \Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} \left(\mathcal{M}_B^{(\gamma^\mu)} \mathcal{M}_A^{(\gamma^\mu)*} \right)_{(\mu\nu)} \right\} = \Re \left\{ S_\gamma^{\mu\nu} \left(\mathcal{M}_B^{(\gamma^\mu \gamma_5)} \mathcal{M}_A^{(\gamma^\mu \gamma_5)*} \right)_{(\mu\nu)} \right\} \\ &= 8 \left[-\frac{m^2(t - m^2)}{(u - m^2)^2} - \frac{m^2(u - m^2)}{(t - m^2)^2} + \frac{s}{(t - m^2)} + \frac{s}{(u - m^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Für skalare und pseudoskalare Kopplung erhalten wir für das quadrierte Gesamtmatrizelement bis auf vernachlässigbare Terme in $O(m^2)$ das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left| \mathcal{M}_{Z\gamma}^{(1)} \right|^2 &= \frac{1}{4} \left| \mathcal{M}_{Z\gamma}^{(\gamma_5)} \right|^2 \\ &= e^2 \left[\frac{-(s^2 + M^4)}{(s - M^2)(u - m^2)} + \frac{-(s^2 + M^4)}{(s - M_Z^2)(t - m^2)} - \frac{2m^2 M^2}{(t - m^2)^2} - \frac{2m^2 M^2}{(u - m^2)^2} \right] + O(m^2) \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Für Vektor- und Axialvektorkopplung berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left| \mathcal{M}_{Z\gamma}^{(1)} \right|^2 &= \frac{1}{4} \left| \mathcal{M}_{Z\gamma}^{(\gamma_5)} \right|^2 \\ &= 2e^2 \left[\frac{-(s^2 + M^4)}{(s - M^2)(u - m^2)} + \frac{-(s^2 + M^4)}{(s - M_Z^2)(t - m^2)} - \frac{2m^2 M^2}{(t - m^2)^2} - \frac{2m^2 M^2}{(u - m^2)^2} - 2 \right] \\ &\quad + O(m^2) \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Vergleich der Ergebnisse für skalare/pseudoskalare (B.52) und Vektor-/Axialvektorkopplung (B.53) zeigt, daß nur im zweiten Fall das nichtuniverselle Stück auftritt.

B.8 Bemerkungen zur Monte-Carlo-Integration

Der Vorteil der Verwendung eines adaptiven Monte Carlo-Algorithmus wie VEGAS liegt darin, daß sich die Integrationsroutine dem Integranden anpaßt und durch eine

geeignete Kombination von stratified und importance sampling nach einer optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Integrationsvariablen sucht [16], [18]. Je nach Lage der Singularitäten des Integranden findet der Algorithmus diese Verteilung nicht von alleine, daher kann eine von Hand ausgeführte Variablentransformation hilfreich sein. Am besten geeignet ist dabei die Transformation auf eine Variable $f(x)$, deren Integral die Stammfunktion des Integranden bezüglich der problematischen Variable x gut annähert. Beispielsweise ist dies bezüglich des Winkels θ im differentiellen $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ -Wirkungsquerschnitt die Stammfunktion von

$$\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)} + \frac{1}{(1 + \beta \cos \theta)} = \frac{2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}$$

und damit die Transformation der Integration über $\cos \theta$ auf Integration über

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} \right) \quad (\text{B.54})$$

aus der $\cos \theta$ über die Umkehrfunktion

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta} \left(\frac{e^{\beta f} - 1}{e^{\beta f} + 1} \right) \quad (\text{B.55})$$

berechnet werden kann.

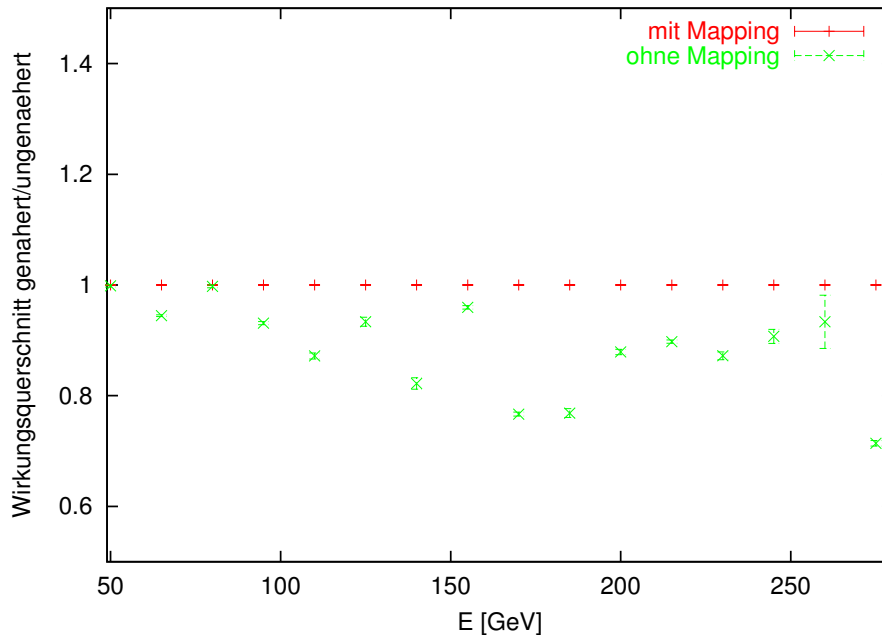


Abbildung B.4: Mit VEGAS numerisch berechneter Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ mit und ohne Mapping im Verhältnis zur analytisch berechneten Lösung

Abbildung B.4 verdeutlicht, daß der VEGAS-Algorithmus massive Probleme mit dem nicht transformierten differentiellen Wirkungsquerschnitt hat. Obwohl die angegebenen Fehler klein sind, ist es völlig unbestimmt, wie weit die Resultate vom

analytisch berechneten Wert (6.15) abweichen. Nach Ausführen der oben angegebenen Variablentransformation liefert die Monte-Carlo-Integration dagegen verlässliche Ergebnisse.

Anhang C

GLAP–Gleichung

C.1 Mellin–Transformation

Die Mellin–Transformation ist definiert durch

$$\mathcal{M}(t)[f(x)] = \bar{f}(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} f(x) dx \quad (\text{C.1})$$

wobei $t = \sigma + i\omega$.

- Satz: Ist $f(x)$ im Intervall $(0, +\infty)$ stückweise regulär und existiert das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{c-1} |f(x)| dx$$

für ein reelles c , so existiert die durch die Formel (C.1) definierte Mellin–Transformierte der Funktion $f(x)$ und es gilt dabei fast überall für $x > 0$:

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}(x)[\bar{f}(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(t) x^{-t} dt \quad (\text{C.2})$$

- Satz: Existieren für eine reelle Zahl c die Integrale

$$\int_0^{\infty} x^c |f(x)| dx, \quad \int_0^{\infty} x^c |g(x)| dx,$$

so existiert auch das Integral

$$\int_0^{\infty} x^c |\phi(x)| dx$$

wobei

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} f(z) g\left(\frac{x}{z}\right) dz \quad (\text{C.3})$$

und

$$\mathcal{M}(t)[\phi(x)] = \mathcal{M}(t)[f(x)] \cdot \mathcal{M}(t)[g(x)] \quad (\text{C.4})$$

C.2 Reihendarstellung der Γ -Funktion

$$\Gamma(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (\text{C.5})$$

mit der rekursiven Definition der Koeffizienten

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} s_{k+1} c_{n-k} \quad (\text{C.6})$$

und dem Startwert $c_0 = 1$ und $s_1 = \gamma$, $s_n = \zeta(n)$, wobei $\gamma = 0.5772157$ die Euler-Mascheroni Konstante ist und $\zeta(x)$ die Riemannsche Zeta-Funktion. Wir berechnen die ersten Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} c_1 &= -\gamma \\ c_2 &= \frac{1}{2} (\gamma^2 + \zeta(2)) \\ c_3 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\gamma}{2} (\gamma^2 + 3\zeta(2)) - \zeta(3) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

C.3 Gribov-Lösung des LLA-Radiators für weiche Photonen

Im Limes weicher Photonen kann ein analytischer Ausdruck für die Radiatorfunktion $D^{\text{LLA}}(x, L_c)$, die sogenannte Gribov-Näherung, gewonnen werden. Dazu wird die GLAP-Gleichung (3.35) mittels Mellin-Transformation in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den Mellin-Momenten überführt. Nach Berechnung der Mellin-Momente erfolgt die Rücktransformation für den Spezialfall weicher Photonen.

C.3.1 Mellin-Transformation der GLAP-Gleichung

Das Mellin-Moment $\bar{f}(t)$ von $f(x) \Theta(1-x)\Theta(x)$ ist nach (C.1) definiert als

$$\bar{f}(t) = \int_0^1 dx x^{t-1} f(x) \quad (\text{C.8})$$

Mellin-Transformation der GLAP-Gleichung (3.35) ergibt nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge und Variablentransformation auf $y = x/z$

$$\int_0^1 dx x^{t-1} \frac{\partial}{\partial L_c} D^{\text{LLA}}(x, L_c) = \frac{\partial}{\partial L_c} \bar{D}^{\text{LLA}}(t, L_c)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \bar{P}_+(t) \bar{D}^{\text{LLA}}(t, L_c) \quad (\text{C.9})$$

Um spätere Rechnungen zu vereinfachen, ist es sinnvoll, eine weitere Variablentransformation durchzuführen:

$$\eta(L_c) = \frac{2\alpha}{\pi} L_c \quad (\text{C.10})$$

so daß die Mellin-Transformierte der GLAP-Gleichung die Form

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \bar{D}^{\text{LLA}}(t, \eta) = \frac{1}{4} \bar{P}_+(t) \bar{D}^{\text{LLA}}(t, \eta) \quad (\text{C.11})$$

annimmt, mit der Lösung

$$\bar{D}^{\text{LLA}}(t, \eta) = \exp \left\{ \frac{1}{4} \bar{P}_+(t) \eta(L_c) \right\} \quad (\text{C.12})$$

und der Anfangsbedingung

$$\bar{D}^{\text{LLA}}(t, 0) = 1 \quad (\text{C.13})$$

C.3.2 Berechnung der Mellin-Momente

Für die Splitting-Funktion $P_+(z)$ ergibt sich mit (3.31) das n -te Mellin-Moment, n sei eine ganze Zahl, zu

$$\bar{P}_+(n) = \frac{3}{2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{C.14})$$

Für natürliche Zahlen n kann $\bar{P}_+(n)$ analytisch auf reelle Werte t fortgesetzt werden, so daß es möglich ist, die Summe in (C.14) in eine Linearkombination Eulerscher ψ -Funktionen umzuschreiben. Die Funktionalgleichung der ψ -Funktion ist

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{C.15})$$

Für ganzzahlige Argumente gilt

$$\psi(1) = -\gamma \quad \psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad n \geq 2 \quad (\text{C.16})$$

Aus (C.14) wird somit

$$\bar{P}_+(t) = \psi(1) + \psi(3) - \psi(t) - \psi(t+2) \quad (\text{C.17})$$

Das t -te Mellin-Moment der Radiatorfunktion, $\bar{D}^{\text{LLA}}(t, \eta)$, folgt aus (C.12) zu

$$\begin{aligned} \bar{D}^{\text{LLA}}(t, \eta) &= \exp \left\{ \frac{1}{4} \eta \bar{P}_+(t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\eta}{2} \left(\frac{3}{4} - \gamma \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\eta}{4} (\psi(t) + \psi(t+2)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

C.3.3 Rücktransformation und Gribov-Näherung

Die Rücktransformation erfolgt gemäß (C.2)

$$\begin{aligned}
 D^{\text{LLA}}(x, \eta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dt x^{-t} \overline{D}^{\text{LLA}}(t, \eta) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \exp\left\{\frac{\eta}{2}\left(\frac{3}{4} - \gamma\right)\right\} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dt x^{-t} \exp\left\{-\frac{\eta}{4}(\psi(t) + \psi(t+2))\right\}
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Die reelle Konstante c ist beliebig, solange der Integrationsweg im Konvergenzbereich des Integrals liegt. Unter Verwendung der Funktionalgleichung der Γ -Funktion

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \tag{C.20}$$

und

$$\frac{d}{dt} \ln\left(\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)}\right) = \frac{d}{dt} \ln \Gamma(t+1) - \frac{d}{dt} \ln \Gamma(t) = \frac{1}{t} \tag{C.21}$$

kann die ψ -Funktion nach Vergleich von (C.21) und (C.15) als

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \ln \Gamma(t) \tag{C.22}$$

identifiziert werden. Für große Werte von t wird $\Gamma(t)$ durch die Stirling-Formel genähert:

$$\Gamma(t) \approx (t-1)! \approx \sqrt{2\pi(t-1)} \left(\frac{t-1}{e}\right)^{t-1} = \sqrt{2\pi} (t-1)^{t-\frac{1}{2}} e^{-(t-1)} \tag{C.23}$$

Daher ist für große t

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \ln \Gamma(t) \approx \frac{d}{dt} \left[\ln(\sqrt{2\pi}) + \left(t - \frac{1}{2}\right) \ln(t-1) - (t-1) \right] \approx \ln(t) \tag{C.24}$$

Da der Integrand in (C.19) für kleine Werte von t oszilliert, im Limes großer Werte von t aber gegen $x^{-t} \exp\{-\frac{\eta}{2} \ln t\}$ geht, werden die großen Beiträge zum Integranden aus dem Bereich großer t stammen. Die Konvergenz des Integrals wird besser, je näher x an Eins liegt, daher nähern wir den Integranden in (C.19) für große t und substituieren $y = t \ln x$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} D^{\text{LLA}}(x, \eta) &= \frac{1}{2\pi i} \exp\left\{\frac{\eta}{2}\left(\frac{3}{4} - \gamma\right)\right\} \frac{1}{\ln x} \int_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} dy \exp\left\{-\frac{\eta}{2} \ln \frac{y}{\ln x}\right\} x^{-\left(\frac{y}{\ln x}\right)} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \exp\left\{\frac{\eta}{2}\left(\frac{3}{4} - \gamma\right)\right\} (\ln x)^{\frac{\eta}{2}-1} \int_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} dy y^{-\frac{\eta}{2}} x^{-\left(\frac{y}{\ln x}\right)}
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

Einschieben eines Faktors

$$1 = -(-1)^{-\frac{\eta}{2}} (-1)^{\frac{\eta}{2}-1}$$

sowie Verwendung der Identität

$$x^{-\left(\frac{y}{\ln x}\right)} = \exp\left\{-\left(\frac{y}{\ln x}\right) \ln x\right\} = e^{-y}$$

ergibt

$$D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) = \frac{i}{2\pi} \exp\left\{\frac{\eta}{2}\left(\frac{3}{4} - \gamma\right)\right\} (-\ln x)^{\frac{\eta}{2}-1} \int_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} dy (-y)^{-\frac{\eta}{2}} e^{-y} \quad (\text{C.26})$$

Da $\ln x$ für $0 < x < 1$ immer negativ ist und nach Voraussetzung $t > 0$ gilt, ist auch $y = t \ln x$ immer kleiner Null. Daher muß der Integrationsweg in (C.26) in der Ebene links der imaginären Achse verlaufen, die Konstante \tilde{c} ist negativ zu wählen. Wir schreiben den Integrationsweg in (C.26) in eine geschlossene Kontur K um, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Dies ist möglich, wenn die Kontur im rechten unendlichen Halbkreis geschlossen wird, da der Integrand für $y \rightarrow +\infty$ verschwindet. Nach diesen Änderungen ist (C.26) von der Form der Hankelschen Integraldarstellung der Γ -Funktion:

$$\frac{1}{\Gamma(\tilde{x})} = \frac{i}{2\pi} \int_K (-y)^{(-\tilde{x})} e^{-y} dy \quad (\text{C.27})$$

Mit $\tilde{x} = \eta/2$ und $-\ln x \approx 1-x$ folgt die Gribov-Näherung der LLA-Radiatorfunktion für weiche Photonen

$$D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) = \exp\left\{\frac{\eta}{2}\left(\frac{3}{4} - \gamma\right)\right\} (1-x)^{\left(\frac{\eta}{2}-1\right)} \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)}\right) \quad (\text{C.28})$$

C.4 Analytische Lösung durch Iteration

Einsetzen des Ausdrucks (3.32) für die $+$ -Distribution der Splittingfunktion in die GLAP-Gleichung (3.35)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[\int_x^{1-\varepsilon} \frac{dz}{z} \frac{(1+z^2)}{(1-z)} D^{\text{LLA}}\left(\frac{x}{z}, \eta\right) + \left(2 \ln \varepsilon + \frac{3}{2}\right) D^{\text{LLA}}(x, \eta) \right] \quad (\text{C.29})$$

motiviert die folgende Faktorisierung der Radiatorfunktion in einen harten x -abhängigen und einen weichen x -unabhängigen Anteil.

$$D^{\text{LLA}}(x, \eta) = E(\eta) d(x, \eta) \quad (\text{C.30})$$

Einsetzen dieses Produktansatzes in die GLAP-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \eta} D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} E(\eta)\right) d(x, \eta) + E(\eta) \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) d(x, \eta)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dz}{z} P_+(z) D^{\text{LLA}} \left(\frac{x}{z}, \eta \right) \quad (\text{C.31})$$

ergibt nach Koeffizientenvergleich eine Differentialgleichung in $E(\eta)$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} E(\eta) = \frac{1}{2} \left(\ln \epsilon + \frac{3}{4} \right) E(\eta) \quad (\text{C.32})$$

mit der Lösung

$$E(\eta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\ln \epsilon + \frac{3}{4} \right) \eta \right\} \quad (\text{C.33})$$

sowie eine Differentialgleichung in $d(x, \eta)$.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} d(x, \eta) = \frac{1}{4} \int_x^{1-\epsilon} \frac{dz}{z} P(z) d \left(\frac{x}{z}, \eta \right) \quad (\text{C.34})$$

Gleichung (C.34) kann durch Iteration gelöst werden. Dazu setzen wir $d(x, \eta)$ als Potenzreihe in η an,

$$d(x, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k}{k!} d_k(x) \quad (\text{C.35})$$

und erhalten folgende Relation zwischen aufeinanderfolgenden Koeffizienten d_k und d_{k+1} .

$$d_{k+1}(x) = \frac{1}{4} \int_x^{1-\epsilon} \frac{dz}{z} P(z) d_k(x) \quad (\text{C.36})$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung $d_0(x) = \delta(1-x)$ können alle weiteren Koeffizienten aus (C.36) berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß die Abstrahlung n harter Photonen wegen $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \epsilon$ nur im Bereich $0 \leq x \leq \epsilon^n$ stattfinden kann. Für die beiden ersten Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned} d_1(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right) \Theta(1-x-\epsilon) \\ d_2(x) &= \frac{1}{16} \frac{2}{(1-x)} \left[-\frac{1}{2} (1+3x^2) \ln x - (1-x)^2 + 2(1+x^2) \ln \left(\frac{1-x}{\epsilon} \right) \right] \\ &\quad \Theta \left((1-\epsilon)^2 - x \right) \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Damit folgt für die Radiatorfunktion

$$D^{\text{LLA}}(x, \eta) = E(\eta) \left[d_0(x) + \eta d_1(x) + \frac{1}{2} \eta^2 d_2(x) + O(\eta^3) \right] \quad (\text{C.38})$$

Schreiben wir $E(\eta)$ ebenfalls als Potenzreihe in η

$$E(\eta) = 1 + \frac{\eta}{2} \left(\ln \epsilon + \frac{3}{4} \right) + \frac{\eta^2}{8} \left(\ln^2 \epsilon + \frac{3}{2} \ln \epsilon + \frac{9}{16} \right) + O(\eta^3) \quad (\text{C.39})$$

und setzen (C.37) und (C.39) in (C.38) ein,

$$(1-x) D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \frac{\eta}{2} \left[\frac{1}{2} (1+x^2) + \frac{\eta}{8} \left(\frac{3}{2} (1+x^2) - (1-x)^2 - \frac{1}{2} (1+3x^2) \ln x + 2(1+x^2) \ln(1-x) \right) \right] + O(\eta^3) \quad (\text{C.40})$$

dann sehen wir, daß der Ausdruck für die Radiatorfunktion, wie zu erwarten, nicht mehr von ϵ abhängt.

Im Limes $x \rightarrow 1$ ist zu fordern, daß (C.40) in die Näherungslösung (C.28) für weiche Photonen übergeht. Um dies zu erreichen, wird wieder ein Produktansatz gemacht

$$D^{\text{LLA}}(x, \eta) = D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) a(x, \eta) \quad (\text{C.41})$$

mit

$$a(x, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k a_k(x) \quad (\text{C.42})$$

und $D^{x \rightarrow 1}(x, \eta)$ in eine Potenzreihe in η entwickelt.

$$\begin{aligned} D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) &= \left[1 + \frac{\eta}{2} \left(\frac{3}{4} - \gamma \right) + \frac{\eta^2}{8} \left(\frac{3}{4} - \gamma \right)^2 + O(\eta^3) \right] \cdot \frac{1}{(1-x)} \frac{\eta}{2} \\ &\left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(1-x) + \frac{\eta^2}{8} \ln^2(1-x) + O(\eta^3) \right] \cdot \left[1 + \frac{\eta}{2} \gamma + \frac{\eta^2}{8} (\gamma^2 - \zeta(2)) + O(\eta^3) \right] \\ &= \frac{\eta}{2} \frac{1}{(1-x)} \left[1 + \frac{\eta}{2} \left(\frac{3}{4} + \ln(1-x) \right) \right] + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Koeffizientenvergleich mit (C.40) ergibt das von uns in den folgenden Rechnungen verwendete Ergebnis

$$D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \left[\frac{1}{2} (1+x^2) + \frac{\eta}{8} \left(-\frac{1}{2} (1+3x^2) \ln x - (1-x)^2 \right) \right] D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) \quad (\text{C.44})$$

für die Radiatorfunktion.

C.5 Normierung der Radiatorfunktion

Da mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 ein Fermion im Anfangszustand in den Prozeß einläuft, muß die Fermionstrukturfunktion $D(x, L_c)$ die Bedingung

$$\int_0^1 D(x, L_c) dx = 1 \quad (\text{C.45})$$

erfüllen, was wir an dieser Stelle überprüfen werden. Dazu betrachten wir ein Integral der Form

$$\int_0^1 dx (1-x)^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} dx$$

welches bei $x = 1$ eine integrable Singularität besitzt. Variablentransformation auf $t = (1-x)^{\frac{1}{n}}$ ergibt für $n \geq 1/(1-a)$ ein konvergentes Integral. Wir setzen $n = 1/(1-a)$ und erhalten

$$\int_0^1 dx (1-x)^{-a} = n \int_0^1 t^{n(1-a)-1} dt = \frac{1}{1-a} \quad (\text{C.46})$$

Um die korrekte Normierung der Radiatorfunktion zu überprüfen, integrieren wir zunächst mit Hilfe von (C.46) und $n = \frac{2}{\eta}$ die weiche Gribovlösung

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) &= \exp\left\{\frac{\eta}{2}\left(\frac{3}{4} - \gamma\right)\right\} \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)}\right) \int_0^1 dx (1-x)^{\left(\frac{\eta}{2}-1\right)} dx \\ &= 1 + \frac{3\eta}{8} + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

was in führender Ordnung mit Eins verträglich ist. Ein besseres Ergebnis ist an dieser Stelle nicht zu erwarten, da die weiche Näherung nicht im vollen x -Bereich gültig ist. Dazu müssen wir die im harten Limes verbesserte LLA-Radiatorfunktion

$$D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \left[\frac{1}{2} (1+x^2) + \frac{\eta}{8} \left(-\frac{1}{2} (1+3x^2) \ln x - (1-x)^2 \right) \right] \cdot D^{x \rightarrow 1}(x, \eta) \quad (\text{C.48})$$

über x integrieren.

$$\int_0^1 dx D^{\text{LLA}}(x, \eta) = \left(1 + \frac{3\eta}{8} + O(\eta^2) \right) \cdot \left(1 - \frac{3\eta}{8} \right) = 1 + O(\eta^2) \quad (\text{C.49})$$

Hier folgt ein in quadratischer Ordnung mit Eins verträgliches Ergebnis. Die Ergebnisse der numerischen Rechnung werden in Abbildung C.1 in Abhängigkeit von der Energie E der einlaufenden Teilchen dargestellt. Das sichtbare Abfallen des Integrals über die Gribovnäherung liegt daran, daß im Limes kleiner Energie E auch η kleiner wird, daher Terme in $O(\eta)$ weniger stark beitragen und somit die Gribovlösung im Limes kleiner Energien besser wird.

C.6 Nebenrechnungen

C.6.1 $O(\alpha^2)$ -LLA-Koeffizient von $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z+\text{ISR}}$

Zur Berechnung des $O(\alpha^2)$ -LLA-Koeffizienten des Wirkungsquerschnittes $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z+\text{ISR}}$ ist das Integral

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 P_+(x_1) P_+(x_2) \delta(z - x_1 x_2) \quad (\text{C.50})$$

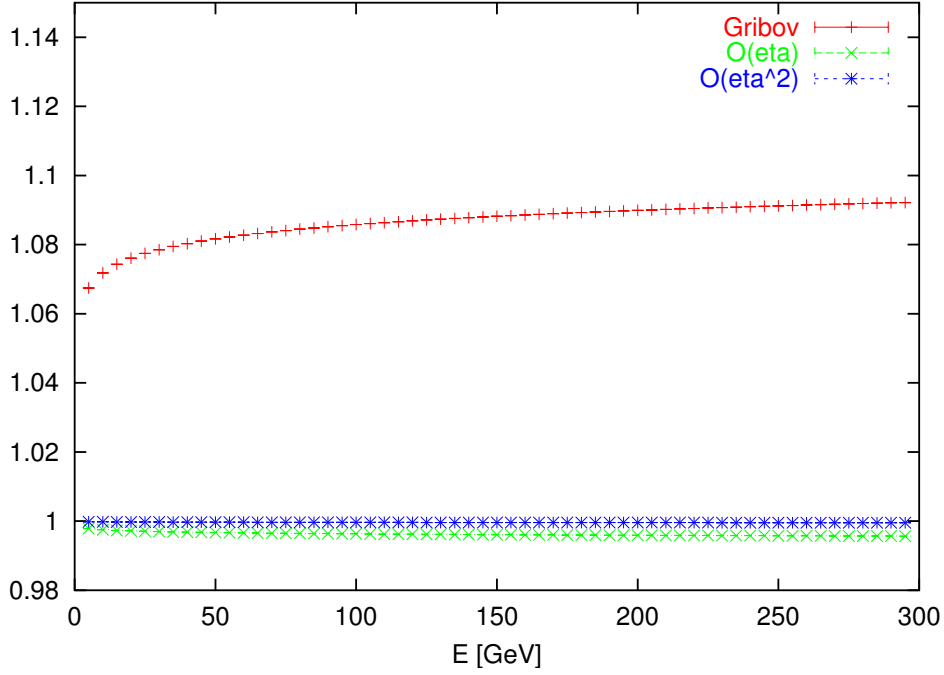


Abbildung C.1: Normierung der Radiatorfunktion in Abhängigkeit von der Energie der einlaufenden Teilchen im Schwerpunktsystem

$$= \int_{\frac{z}{1-\varepsilon_2}}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx_1}{x_1} P(x_1) P\left(\frac{z}{x_1}\right) + 2 \left(\ln \varepsilon_1 + \frac{3}{4} \right) P(z) + 2 \left(\ln \varepsilon_2 + \frac{3}{4} \right) P(z)$$

zu berechnen. Mit

$$\begin{aligned} \int_{\frac{z}{1-\varepsilon_2}}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx_1}{x_1} \left(\frac{1+x_1^2}{1-x_1} \right) \left(\frac{1+\frac{z^2}{x_1^2}}{1-\frac{z}{x_1}} \right) &= \int_{\frac{z}{1-\varepsilon_2}}^{1-\varepsilon_1} dx_1 \left[-1 + \frac{2P(z)}{1-x_1} + \frac{2P(z)}{x_1-z} - \frac{z}{x_1^2} - \frac{1+z}{x_1} \right] \\ &= -2(1-z) + 2P(z) [-\ln \varepsilon_1 - \ln \varepsilon_2 + 2 \ln(1-z)] - \frac{\ln z}{(1-z)} (1+3z^2) \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} P_+(x_1) P_+\left(\frac{z}{x_1}\right) = -2(1-z) + 4P(z) \ln(1-z) - \frac{\ln z}{(1-z)} (1+3z^2) + 3P(z) \quad (\text{C.52})$$

C.6.2 $O(\alpha^2)$ -NLL_m-Koeffizient von $\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z+\text{ISR}}$

Zur Berechnung des $O(\alpha^2)$ -NLL_m-Koeffizienten benötigen wir das folgende Integral.

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 P_+(x_1) R_+(x_2) \delta(z - x_1 x_2) \quad (\text{C.53})$$

$$= \int_{\frac{z}{1-\varepsilon_2}}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx_1}{x_1} P(x_1) R\left(\frac{z}{x_1}\right) + 2(\ln \varepsilon_2 + 1) P(z) + 2\left(\ln \varepsilon_1 + \frac{3}{4}\right) R(z)$$

Mit

$$2 \int_{\frac{z}{1-\varepsilon_2}}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx_1}{x_1} \left(\frac{1+x_1^2}{1-x_1}\right) \left(\frac{\frac{z}{x_1}}{1-\frac{z}{x_1}}\right) \quad (\text{C.54})$$

$$= R(z) \int_{\frac{z}{1-\varepsilon_2}}^{1-\varepsilon_1} dx_1 \left[\frac{1}{x_1} + \frac{2}{(1-x_1)} + \frac{1}{z(x_1-z)} + \frac{z}{(x_1-z)} - \frac{1}{zx_1} \right]$$

$$= \left[-2R(z) \ln \varepsilon_1 - 2P(z) \ln \varepsilon_2 - R(z)(1+z) \ln z + 2P(z) \ln(1-z) + 2R(z) \ln(1-z) \right]$$

erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} P_+(x_1) R_+\left(\frac{z}{x_1}\right) = -R(z)(1+z) \ln z + 2P(z) \ln(1-z) + 2R(z) \ln(1-z)$$

$$+ 2P(z) + \frac{3}{2}R(z) \quad (\text{C.55})$$

C.6.3 $O(\alpha^2)$ -NLL $_{\gamma_1}$ -Koeffizient von $\sigma_{e+e^- \rightarrow Z+\text{ISR}}$

Um den $O(\alpha^2)$ -NLL $_{\gamma_1}$ -Koeffizienten zu berechnen, benötigen wir das Integral

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 P_+(x_1)(1-x_1) \delta(z - x_1 x_2) \quad (\text{C.56})$$

$$= \int_z^{1-\varepsilon_1} \frac{dx_1}{x_1} P(x_1) \left(1 - \frac{z}{x_1}\right) + (1-z) \left(2 \ln \varepsilon_1 + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}P(z)$$

Mit

$$\int_z^{1-\varepsilon_1} \frac{dx_1}{x_1} \left(\frac{1+x_1^2}{1-x_1}\right) \left(1 - \frac{z}{x_1}\right) = \int_z^{1-\varepsilon_1} dx_1 \left[\frac{1-z}{x_1} - 1 + \frac{z}{x_1^2} + \frac{2(1-z)}{(1-x_1)} \right]$$

$$= \left[-\ln z + z \ln z - 2(1-z) \ln \varepsilon_1 + 2(1-z) \ln(1-z) - 2(1-z) \right] \quad (\text{C.57})$$

erhalten wir

$$\int_z^1 \frac{dx_1}{x_1} P_+(x_1) \left(1 - \frac{z}{x_1}\right) = 2(1-z) \ln(1-z) + z \ln z - \ln z - (1-z) - \frac{1}{2}R(z)$$

$$(\text{C.58})$$

Anhang D

Struktur der NLL–Terme

D.1 Struktur der NLL–Terme für $m = 0$

Wir betrachten zunächst die Struktur der NLL–Terme für den Fall masseloser Fermionen im Anfangszustand, so daß die Integrationen über die Photonpolarwinkel bei einem Minimalwinkel $\theta_{\min} = m/E$ abzuschneiden sind.

Ausgehend von streng nach den in Gleichung (3.11) definierten Größen N_i geordneten Photonen, $N_1 \ll N_2 \ll \dots \ll N_n$, kann jedem Diagramm $M_{12\dots nX}$ eine genäherte Nennerstruktur zugeordnet werden. Das den führenden logarithmischen Term im totalen Wirkungsquerschnitt liefernde Diagramm ergibt nach dem Quadrieren einen Term proportional $(N_1 N_2 \dots N_n)^{-1}$, was bedeutet, daß der Nenner für den führenden Term grob genähert als proportional $N_1 N_2 \dots N_n$ angesehen werden kann.

Abhängig davon, an welcher Stelle der Abstrahlungslinie Photonen vertauscht wurden, hat ein Diagramm der Art $M_{12\dots i-1 i+1 i i+2 \dots nX}$, bei welchem γ_i und γ_{i+1} in vertauschter Reihenfolge abgestrahlt werden, eine Nennerstruktur

$$N_1 \dots N_i N_{i+1}^2 N_{i+2} \dots N_n$$

im Gegensatz zu $N_1 \dots N_n$ beim führenden Diagramm $M_{12\dots nX}$. Allgemein können wir einem Diagramm $M_{12\dots i-1 k i i+1 i+2 \dots nX}$, bei dem das Photon γ_k an die i -te Stelle, $i < k$, der Abstrahlung verschoben wurde, eine Nennerstruktur

$$N_1 \dots N_{i-1} N_k^{k-i+1} N_{k+1} \dots N_n$$

zuordnen. Im quadrierten Matrixelement trägt dann der Kreuzterm eines derartigen Diagramms $M_{12\dots i-1 k i i+1 i+2 \dots nX}$ mit dem führenden Diagramm $M_{1\dots nX}$ bestenfalls mit

$$\begin{aligned} & N_1 \dots N_n \left(N_1 \dots N_{i-1} N_k^{k-i+1} N_{k+1} \dots N_n \right)^{-1} (N_1 \dots N_n)^{-1} \\ & = \left(N_1 \dots N_{i-1} N_k^{k-i+1} N_{k+1} \dots N_n \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

bei und das quadrierte Austauschdiagramm bestenfalls mit

$$N_1 \dots N_n \left(N_1 \dots N_{i-1} N_k^{k-i+1} N_{k+1} \dots N_n \right)^{-2}$$

$$= N_i N_{i+1} \dots N_{k-1} \left(N_1 \dots N_{i-1} N_k^{2(k-i)+1} N_{k+1} \dots N_n \right)^{-1} \quad (\text{D.2})$$

Wir integrieren den Kreuzterm (D.1) für $k = i + 1$, welcher nach Kürzen mit dem Zähler die Nennerstruktur

$$[N_1 N_2 \dots N_{i-1} N_{i+1}^2 N_{i+2} \dots N_n]^{-1}$$

aufweisen wird, über die Polarwinkel von einer geeignet gewählten unteren Grenze c bis zur oberen Grenze $\cos \theta_{\min} := 1 - b$. Ferner führen wir $c_i := \cos \theta_i$ als Abkürzung ein.

$$\begin{aligned} I_a &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-2}} \frac{dc_{i-1}}{(1-c_{i-1})} \int_c^{c_{i-1}} dc_i \int_c^{c_i} \frac{dc_{i+1}}{(1-c_{i+1})^2} \int_c^{c_{i+1}} \frac{dc_{i+2}}{(1-c_{i+2})} \dots \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_n}{(1-c_n)} \\ &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-2}} \frac{dc_{i-1}}{(1-c_{i-1})} \int_c^{c_{i-1}} dc_i \int_c^{c_i} \frac{dc_{i+1}}{(1-c_{i+1})^2} \frac{\ln^{(n-(i+1))} \left(\frac{1-c}{1-c_{i+1}} \right)}{(n-(i+1))!} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Einsetzen des Teilintegrals

$$\int_c^{c_i} \frac{dc_{i+1}}{(1-c_{i+1})^2} \ln^N \left(\frac{1-c}{1-c_{i+1}} \right) = \frac{1}{(1-c_i)} \ln^N \left(\frac{1-c}{1-c_i} \right) + O \left(\ln^{N-1} \left(\frac{1-c}{1-c_i} \right) \right) \quad (\text{D.4})$$

ergibt einen Term der gesuchten nächstführenden logarithmischen Ordnung:

$$\begin{aligned} I_a &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-2}} \frac{dc_{i-1}}{(1-c_{i-1})} \int_c^{c_{i-1}} \frac{dc_i}{(1-c_i)} \frac{1}{(n-i-1)!} \ln^{n-i-1} \left(\frac{1-c}{1-c_i} \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \ln^{n-1} \left(\frac{1-c}{1-b} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Im nächsten Schritt integrieren wir den Kreuzterm für $k = i + 2$ mit der Nennerstruktur

$$[N_1 \dots N_{i-1} N_{i+2}^3 N_{i+3} \dots N_n]^{-1}$$

über die Polarwinkel.

$$\begin{aligned} I_b &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-1}} dc_i \int_c^{c_i} dc_{i+1} \int_c^{c_{i+1}} \frac{dc_{i+2}}{(1-c_{i+2})^3} \int_c^{c_{i+2}} \frac{dc_{i+3}}{(1-c_{i+3})} \dots \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_n}{(1-c_n)} \\ &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-2}} \frac{dc_{i-1}}{(1-c_{i-1})} \int_c^{c_{i-1}} dc_i \int_c^{c_i} dc_{i+1} \int_c^{c_{i+1}} \frac{dc_{i+2}}{(1-c_{i+2})^3} \frac{\ln^{(n-(i+2))} \left(\frac{1-c}{1-c_{i+2}} \right)}{(n-(i+2))!} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Nach Einsetzen des Teilintegrals

$$\int_c^{c_{i+1}} \frac{dc_{i+2}}{(1-c_{i+2})^3} \ln^N \left(\frac{1-c}{1-c_{i+2}} \right) = \frac{1}{(1-c_{i+1})^2} \ln^N \left(\frac{1-c}{1-c_{i+1}} \right) + O \left(\ln^{N-1} \left(\frac{1-c}{1-c_{i+1}} \right) \right) \quad (\text{D.7})$$

stellen wir fest, daß (D.6) in der c_i -Integration wieder ein Teilintegral der Form (D.7) enthält und somit weder in der c_{i+1} - noch in der c_i -Integration eine Potenz des Logarithmus hinzugewinnt. Daher werden nur Kreuzterme des führenden Diagramms mit solchen Diagrammen in nächstführender logarithmischer Ordnung beitragen, bei denen das Photon γ_k um einen Platz auf Position $k-1$ in der Abstrahlungslinie verschoben wurde. Nun integrieren wir das von uns als Austauschterm bezeichnete quadrierte Diagramm für ein auf Position i verschobenes Photon γ_{i+1} mit der Nennerstruktur

$$N_i [N_1 N_2 \dots N_{i-1} N_{i+1}^3 \dots N_n]^{-1}.$$

$$\begin{aligned} I_c &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-1}} dc_i (1-c_i) \int_c^{c_i} \frac{dc_{i+1}}{(1-c_{i+1})^3} \int_c^{c_{i+1}} \frac{dc_{i+2}}{(1-c_{i+2})} \dots \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_n}{(1-c_n)} \\ &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-1}} dc_i (1-c_i) \int_c^{c_i} \frac{dc_{i+1}}{(1-c_{i+1})^3} \frac{\ln^{(n-(i+1))} \left(\frac{1-c}{1-c_{i+1}} \right)}{(n-(i+1))!} \end{aligned}$$

ergibt mit dem Teilintegral

$$\int_c^{c_i} \frac{dc_{i+1}}{(1-c_{i+1})^3} \ln^N \left(\frac{1-c}{1-c_{i+1}} \right) = \frac{1}{(1-c_i)^2} \ln^N \left(\frac{1-c}{1-c_i} \right) + O \left(\ln^{N-1} \left(\frac{1-c}{1-c_i} \right) \right)$$

einen Term in NLL_c , da das Integral nur in der c_{i+1} -Integration keine Potenz des Logarithmus hinzugewinnt:

$$\begin{aligned} I_c &= \int_c^{1-b} \frac{dc_1}{(1-c_1)} \dots \int_c^{c_{i-1}} dc_i (1-c_i) \frac{1}{(n-(i+1))!} \frac{1}{(1-c_i)^2} \ln^{n-i+1} \left(\frac{1-c}{1-c_i} \right) + O(L_c^{n-2}) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} L_c^{n-1} + O(L_c^{n-2}) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Allgemein tragen daher zu den Termen in nächstführender logarithmischer Ordnung des totalen Wirkungsquerschnittes neben dem führenden nur Austauschdiagramme bei, bei denen ein Photon um einen Platz in der Abstrahlungslinie verschoben wurde, entsprechend dem Vertauschen der Photonen γ_i und γ_{i+1} .

D.2 Struktur der $O(\text{LL}_c)$ - und $O(\text{NLL}_c)$ -Terme für $m \neq 0$

Im nun folgenden Abschnitt werden die bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes der Abstrahlung von n Photonen im selben kollinearen Winkelbereich durch massive Fermionen auftretenden Integrale in $\tilde{O}(m^2)$ der Form

$$\begin{aligned} &I_{g_1 g_2 \dots g_k \dots g_n}(c) \\ &= (m^2)^{\sum_i^k g_i - n} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1-\beta c_1)^{g_1}} \dots \int_c^{c_{k-1}} \frac{dc_k}{(1-\beta c_k)^{g_k}} \dots \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_2}{(1-\beta c_n)^{g_n}} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

untersucht. Wir unterscheiden die Integrale $I_{g_1 g_2 \dots g_k \dots g_n}(c)$ danach, ob im k -ten Integrationsschritt eine Potenz $(1 - \beta \cos \theta_k)^{-1}$ und damit $(g_k = 1)$, oder $(1 - \beta \cos \theta_k)^{-2}$ und damit $(g_k = 2)$ auftritt. Für $g_1 = \dots = g_n = 1$ erhalten wir mit $c = -1$ gerade den führenden Term in L_c . Die Betrachtung beginnt mit den Fällen $g_n = 1$ und $g_n = 2$, wobei „echte“ $O(m^2)$ -Terme vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned}
& I_{g_1 g_2 \dots g_{n-1} 1} \tag{D.10} \\
&= (m^2)^{\sum_i^n g_i - n} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^{g_1}} \cdots \int_c^{c_{n-2}} \frac{dc_{n-1}}{(1 - \beta c_{n-1})^{g_{n-1}}} \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_n}{(1 - \beta c_n)} \\
&= (m^2)^{\sum_i^{n-1} g_i - (n-1)} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^{g_1}} \cdots \int_c^{c_{n-2}} \frac{dc_{n-1}}{(1 - \beta c_{n-1})^{g_{n-1}}} \ln \left(\frac{1 - \beta c}{1 - \beta c_{n-1}} \right) + O(m^2)
\end{aligned}$$

Das entsprechende Integral für $g_n = 2$ lautet

$$\begin{aligned}
& I_{g_1 g_2 \dots g_{n-1} 2} \tag{D.11} \\
&= (m^2)^{\sum_i^n g_i - n} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^{g_1}} \cdots \int_c^{c_{n-2}} \frac{dc_{n-1}}{(1 - \beta c_{n-1})^{g_{n-1}}} \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_n}{(1 - \beta c_n)^2} \\
&= (m^2)^{\sum_i^{n-1} g_i - (n-1)} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^{g_1}} \cdots \int_c^{c_{n-2}} \frac{dc_{n-1}}{(1 - \beta c_{n-1})^{g_{n-1}}} \frac{m^2}{1 - \beta c_{n-1}} + O(m^2)
\end{aligned}$$

Da auch in der c_{n-1} -Integration weder für $g_{n-1} = 2$ noch für $g_{n-1} = 1$ ein kollinearer Logarithmus hinzukommt, ist $I_{g_1 g_2 \dots g_{n-1} 2}$ als von $O(\text{NNLL}_c)$ vernachlässigbar. Allgemein sehen wir mit Hilfe von (D.12), daß für nach ihren Polarwinkeln unterschiedene Photonen keines der Integrale $I_{g_1 g_2 \dots g_{n-1} g_n}$ mit $g_i = 2$, $i > 1$ in $O(\text{NLL})$ beitragen kann. Der einzige Beitrag in $O(\text{NLL})$ kommt aus dem Integral $I_{21 \dots 1}$ mit $g_2 = \dots = g_n = 1$.

$$\begin{aligned}
I_{21 \dots 1} &= m^2 \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^2} \int_c^{c_1} \frac{dc_2}{(1 - \beta c_2)} \cdots \int_c^{c_{n-1}} \frac{dc_2}{(1 - \beta c_1)^2} \\
&= \frac{m^2}{(n-1)!} \int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^2} \ln^{(n-1)} \left(\frac{1 - \beta c}{1 - \beta c_1} \right)
\end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung benötigen wir die Integralidentität

$$\int \frac{\ln^t y}{y^k} dy = -\frac{\ln^t y}{(k-1)y^{k-1}} + \frac{t}{(k-1)} \int \frac{\ln^{t-1} y}{y^k} dy \tag{D.12}$$

für $k \neq 1$. Damit erhalten wir

$$\int_c^1 \frac{dc_1}{(1 - \beta c_1)^2} \ln^N \left(\frac{1 - \beta c}{1 - \beta c_1} \right) \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^k \ln^{N-k}(1-\beta c) \int_{1-\beta}^{1-\beta c} \frac{dt_1}{t_1^2} \ln^k t_1 + O(m^2) \\
&= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^k \ln^{N-k}(1-\beta c) \left[-\frac{1}{1-\beta c} \ln^k(1-\beta c) + \frac{1}{1-\beta} \ln^k(1-\beta) \right] \\
&+ O(L_c^{n-2})
\end{aligned}$$

Somit lautet das Ergebnis

$$I_{21\dots 1} = \frac{m^2}{(1-\beta)} \frac{1}{(n-1)!} L_c^{n-1} + O(\text{NNLL}_c)$$

Anhang E

Abstrahlung zweier Photonen von der p -Fermionlinie

E.1 Abkürzungen, Vereinfachungen

Die Polarisationssumme über die physikalischen Polarisationsvektoren des Photons mit Impuls k_i wird abgekürzt als

$$S_i^{\mu\nu} := \sum_{\text{phys}} \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^{*\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_i^\mu c_i^\nu + k_i^\nu c_i^\mu}{(c_i k_i)} \right) \quad (\text{E.1})$$

wobei als Eichvektor c_i jeweils der unphysikalische Polarisationsvektor $\varepsilon_-^\mu(k_i)$ verwendet wird.

$$c_i^\mu := \varepsilon_-^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, -\hat{k} \right) \quad (\text{E.2})$$

Ein häufig auftretender Ausdruck ist die Kontraktion der Polarisationssumme $S_i^{\mu\nu}$ mit dem Impuls eines der einlaufenden Teilchen, bei Einschränkung auf Abstrahlung der Photonen von der p -Fermionlinie ist dies der Impuls p_ν .

$$A_i^\mu := S_i^{\mu\nu} p_\nu = -p^\mu + \frac{(p k_i) c_i^\mu}{(c_i k_i)} + \frac{(p c_i) k_i^\mu}{(c_i k_i)} \quad (\text{E.3})$$

Die Kontraktion von $S_i^{\mu\nu}$ mit der Impulskombination $(p - k_j)_\nu$ wird mit $\mathcal{A}_i^{j\mu}$ abgekürzt.

$$\mathcal{A}_i^{j\mu} := -(p - k_j)^\mu + \frac{((p - k_j) c_i)}{(c_i k_i)} k_i^\mu + \frac{((p - k_j) k_i)}{(c_i k_i)} c_i^\mu \quad (\text{E.4})$$

Zur Berechnung des genäherten quadrierten und über die Polarisierungen beider Photonen summierten Matrixelementes für Abstrahlung zweier Photonen γ_1 und γ_2 von der p -Fermionlinie, benötigen wir die im folgenden aufgeführten Skalarprodukte

$$\begin{aligned} & (A_i p), \quad (A_i A_j), \quad (A_i c_j), \quad ((\mathcal{A}_j^2 - A_j) k_i), \quad ((\mathcal{A}_j^i - A_j) p), \\ & ((\mathcal{A}_j^i - A_j) c_i) \quad \text{und} \quad ((\mathcal{A}_j^i - A_j) (\mathcal{A}_i^j - A_i)) \end{aligned}$$

Für den Fall, daß beide Photonen unter kleinen Winkeln θ_1 und θ_2 zur \vec{p} -Richtung abgestrahlt werden, können die dann großen Skalarprodukte

$$(pp'), (pc_1), (pc_2), (p'k_1), (p'k_2), (k_1c_1), (k_1c_2), (k_2c_1), (k_2c_2)$$

wie in Gleichung (4.10) angegeben genähert werden. Wir berechnen

$$\begin{aligned} (A_i A_j) &= -(A_i p) + \frac{(pc_j)(A_i k_j)}{(c_j k_j)} + \frac{(pk_j)(A_i c_j)}{(c_j k_j)} \\ &= -(A_j p) + \frac{(pc_i)(A_j k_i)}{(c_i k_i)} + \frac{(pk_i)(A_j c_i)}{(c_i k_i)} \\ &\approx -(pk_i) \frac{E}{Q_i} - (pk_j) \frac{E}{Q_j} + (k_i k_j) \frac{E^2}{Q_i Q_j} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$(A_i c_j) = -(pc_j) + \frac{(c_j k_i)(pc_i)}{(c_i k_i)} + \frac{(c_i c_j)(pk_i)}{(c_i k_i)} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}_j^i - A_j) k_i) &= \left(k_i - \frac{(k_i c_j) k_j}{(c_j k_j)} - \frac{(k_i k_j) c_j}{(c_j k_j)} \right)_\mu k_i^\mu \\ &= -\frac{2(k_i c_j)(k_i k_j)}{(c_j k_j)} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$((\mathcal{A}_j^i - A_j) p) = (pk_i) - \frac{(k_i c_j)(pk_j)}{(c_j k_j)} - \frac{(k_i k_j)(pc_j)}{(c_j k_j)} \quad (\text{E.8})$$

$$((\mathcal{A}_j^i - A_j) c_i) = (k_i c_i) - \frac{(k_i c_j)(k_j c_i)}{(c_j k_j)} - \frac{(k_i k_j)(c_i c_j)}{(c_j k_j)} \quad (\text{E.9})$$

$$((\mathcal{A}_i^j - A_i) c_j)(c_i k_i) = ((\mathcal{A}_i^j - A_i) c_j)(c_j k_j) \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}_j^i - A_j)(\mathcal{A}_i^j - A_i)) &= \left(k_i - \frac{(k_i c_j) k_j}{(c_j k_j)} - \frac{(k_i k_j) c_j}{(c_j k_j)} \right)_\mu (\mathcal{A}_i^j - A_i)_\mu \\ &= ((\mathcal{A}_i^j - A_i) k_i) - \frac{(k_i c_j)((\mathcal{A}_i^j - A_i) k_j)}{(c_j k_j)} - \frac{(k_i k_j)((\mathcal{A}_i^j - A_i) c_j)}{(c_j k_j)} \\ &= -\frac{(k_i c_j)((\mathcal{A}_i^j - A_i) k_j)}{(c_j k_j)} - \frac{(k_i k_j)((\mathcal{A}_i^j - A_i) c_j)}{(c_j k_j)} \\ &= \left(k_j - \frac{(k_j c_i) k_i}{(c_i k_i)} - \frac{(k_i k_j) c_i}{(c_i k_i)} \right)_\mu (\mathcal{A}_j^i - A_j)_\mu \\ &= -\frac{(k_j c_i)((\mathcal{A}_j^i - A_j) k_i)}{(c_i k_i)} - \frac{(k_i k_j)((\mathcal{A}_j^i - A_j) c_i)}{(c_i k_i)} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

E.2 Term, Kreuz- und Austauschterm

E.2.1 Term und Austauschterm

Wir berechnen zunächst den quadrierten Term

$$M_{12X}^{12X} = \frac{e^{4\text{tr}\{\mathbf{R}_{12X}^{12X}\Gamma_X(\not{p}' + m)\bar{\Gamma}_X\}}}{((k_1 - p)^2 - m^2)^2((k_1 + k_2 - p)^2 - m^2)^2}. \quad (\text{E.12})$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12X}^{12X} & \quad (\text{E.13}) \\ &= S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \gamma_\alpha (\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma_\beta (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \\ &= 4S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \gamma_\alpha [(pk_1)\not{k}_1 + (pk_1)\mathcal{A}_1 - (A_1p)(\not{k}_1 - \not{p} + m)] \gamma_\beta (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \end{aligned}$$

mit (E.4) und den weiteren Abkürzungen

$$p_1^\mu := p^\mu - k_1^\mu \quad (\text{E.14})$$

$$P_{12} := ((pk_1) + (pk_2) - (k_1k_2)). \quad (\text{E.15})$$

Einsetzen von

$$\begin{aligned} S_2^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \not{k}_1 \gamma_\beta &= 2 \left[\not{k}_1 - \not{k}_1 + \frac{(k_1k_2)}{(c_2k_2)} \not{\phi}_2 + \frac{(c_2k_1)}{(c_2k_2)} \not{k}_2 \right] \\ &= 2 [\not{k}_1 - (\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)] \quad (\text{E.16}) \end{aligned}$$

$$S_2^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \mathcal{A}_1 \gamma_\beta = 2 \left[\frac{(A_1k_2)}{(c_2k_2)} \not{\phi}_2 + \frac{(c_2A_1)}{(c_2k_2)} \not{k}_2 \right] \quad (\text{E.17})$$

$$S_2^{\alpha\beta} \gamma_\alpha (\not{p} - m) \gamma_\beta = 2 [(\not{p} + m) + \mathcal{A}_2] \quad (\text{E.18})$$

mit \mathcal{A}_1^2 und \mathcal{A}_2^1 nach Gleichung (E.4) in Gleichung (E.13) ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12X}^{12X} &= 16P_{12} \left\{ [(pk_1) - (A_1p)] [\not{k}_1 - (\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)] \right. \\ &\quad \left. + (pk_1) \left[\frac{(A_1k_2)}{(c_2k_2)} \not{\phi}_2 + \frac{(c_2A_1)}{(c_2k_2)} \not{k}_2 \right] + (A_1p) [(\not{p} - m) + \mathcal{A}_2] \right\} \\ &\quad + 16(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \left\{ [(pk_1) - (A_1p)] [(k_1(k_2 - p)) - ((\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)(k_1 - p))] \right. \\ &\quad \left. + (pk_1) \left[\frac{(A_1k_2)}{(c_2k_2)} (c_2(k_1 + k_2 - p)) + \frac{(c_2A_1)}{(c_2k_2)} (k_2(k_1 - p)) \right] \right. \\ &\quad \left. + (A_1p) [(pk_1) + (pk_2) + (A_2(k_1 - p))] \right\} \\ &=: 16 (P_{12} S_{12X}^{12X} + T_{12X}^{12X}) \quad (\text{E.19}) \end{aligned}$$

Die hierbei verwendeten Abkürzungen S_{12X}^{12X} und T_{12X}^{12X} werden wie folgt definiert und geeignet genähert.

$$S_{12X}^{12X} = [(pk_1) - (A_1p)] [\not{k}_1 - (\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)]$$

$$\begin{aligned}
& + (pk_1) \left[\frac{(A_1 k_2)}{(c_2 k_2)} \not{k}_2 + \frac{(c_2 A_1)}{(c_2 k_2)} \not{k}_2 \right] + (A_1 p) [(\not{p} - m) + \not{A}_2] \\
& \approx (pk_1) \frac{Q_1}{Q_2} \not{k}_2 - (A_1 p) \frac{Q_1}{Q_2} \not{k}_2 + (A_1 p) \frac{E}{Q_2} \not{k}_2 - (A_1 p) m
\end{aligned} \tag{E.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{12X}^{12X} & = (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \left\{ [(pk_1) - (A_1 p)] [(k_1(k_2 - p)) - ((A_2^1 - A_2)(k_1 - p))] \right. \\
& + (pk_1) \left[\frac{(A_1 k_2)}{(c_2 k_2)} (c_2(k_1 + k_2 - p)) + \frac{(c_2 A_1)}{(c_2 k_2)} (k_2(k_1 - p)) \right] \\
& \left. + (A_1 p) [(pk_1) + (pk_2) + (A_2(k_1 - p))] \right\} \\
& \approx (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \left\{ (pk_1) \left[(k_1 k_2) \left(\frac{Q_1 + Q_2 - E}{Q_2} \right) - ((p - k_1)k_2) \frac{Q_1}{Q_2} \right] \right. \\
& + (A_1 p) \left[-(A_2 p) + (pk_2) + (pk_2) \frac{Q_1}{Q_2} + (k_1 k_2) \frac{E}{Q_2} \right] + (pk_1)(A_1 k_2) - (A_1 p)(k_1 k_2) \\
& \left. + (A_1 p)(k_1 k_2) \frac{E}{Q_2} + (A_1 p)(pk_2) \frac{Q_1}{Q_2} - (pk_1)(A_1 k_2) \left(\frac{E - Q_1}{Q_2} \right) - 2(A_1 p)(k_1 k_2) \frac{Q_1}{Q_2} \right\}
\end{aligned} \tag{E.21}$$

Das quadrierte Teilmatrixelement M_{12X}^{12X} folgt nun mit R_{12X}^{12X} aus Gleichung (E.19) zu

$$M_{12X}^{12X} = \frac{e^4}{(pk_1)^2 P_{12}^2} \text{tr} \left\{ [P_{12} S_{12X}^{12X} + \mathbb{T}_{12X}^{12X}] \Gamma_X (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_X \right\} \tag{E.22}$$

wobei in der Näherung annähernd zu \vec{p} kollineareren Photonen, entsprechend $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$ bei unserer Wahl der räumlichen Impulse, Ausdrücke der Art $(1 + \cos \theta_1)$, $(1 + \cos \theta_2)$ wie in (4.10) in guter Näherung gleich 2 gesetzt werden können. Ferner vernachlässigen wir sämtliche Stücke in $P_{12} S_{12X}^{12X}$ und \mathbb{T}_{12X}^{12X} , in denen mehr als zwei der Skalarprodukte (pk_1) , (pk_2) , $(k_1 k_2)$ auftreten, da diese Terme hier weder LL- noch NLL-Beiträge zum totalen Wirkungsquerschnitt liefern.

Mit den Definitionen

$$x_{12} := \frac{E - Q_1 - Q_2}{E} = x_1 x_2 \tag{E.23}$$

und

$$M_X^X := x_{12} \text{tr} \left\{ (\not{p} - m) \Gamma_X^{p-k_1-k_2 \rightarrow x_{12} p} (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_X^{p-k_1-k_2 \rightarrow x_{12} p} \right\} \tag{E.24}$$

für das quadrierte Bornmatrixelement mit einlaufendem Impuls $x_{12} p$ und dem Bruchteil $x_{12} E$ der Energie des ursprünglich einlaufenden Fermions — im Bornmatrixelement auftretende Impulse $k_1 + k_2 - p$ sind aus Konsistenzgründen ebenfalls als $x_{12} p$ zu nähern — erhalten wir für den Anteil M_{12X}^{12X} des quadrierten Matrixelementes in der kollinearen Näherung mit

$$\not{k}_2 \approx \frac{Q_2}{E} \not{p}, \quad \not{k}_1 \approx \frac{Q_1}{E} \not{p},$$

das vorläufige genäherte Ergebnis

$$\begin{aligned}
M_{12X}^{12X} &= \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left[\frac{Q_1}{E(pk_1)P_{12}} + \frac{(A_1p)(E - Q_1)}{(pk_1)^2 P_{12} E} \right] \\
&+ \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} x_{12} \cdot \left(\frac{(A_1p)}{(pk_1)^2} \right) \cdot \left(\frac{(A_2p)}{P_{12}^2} \right) \\
&- \frac{e^2 M_X^X}{x_{12} P_{12}^2} x_{12} \cdot \left[\frac{(A_1p)}{(pk_1)^2} \left[((p - k_1)k_2) + 2(k_1k_2) \frac{E}{Q_2} + 2((p - k_1)k_2) \frac{Q_1}{Q_2} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{(A_1k_2)}{(pk_1)} \left(\frac{Q_1 + Q_2 - E}{Q_2} \right) + \frac{(k_1k_2)}{(pk_1)} \left(\frac{Q_1 + Q_2 - E}{Q_2} \right) - \frac{((p - k_1)k_2)}{(pk_1)} \frac{Q_1}{Q_2} \right] \\
&+ O(\text{NNLL}).
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Der genäherte Beitrag für den zweiten quadratischen Term M_{21X}^{21X} des quadrierten Matrixelementes folgt sofort durch Vertauschen der Photonindizes $1 \leftrightarrow 2$ in (E.25).

$$\begin{aligned}
M_{21X}^{21X} &= \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left[\frac{Q_2}{E(pk_2)P_{12}} + \frac{(A_2p)(E - Q_2)}{(pk_2)^2 P_{12} E} \right] \\
&+ \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} x_{12} \cdot \left(\frac{(A_2p)}{(pk_2)^2} \right) \cdot \left(\frac{(A_1p)}{P_{12}^2} \right) \\
&- \frac{e^2 M_X^X}{x_{12} P_{12}^2} x_{12} \cdot \left[\frac{(A_2p)}{(pk_2)^2} \left[((p - k_2)k_1) + 2(k_1k_2) \frac{E}{Q_1} + 2((p - k_2)k_1) \frac{Q_2}{Q_1} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{(A_2k_1)}{(pk_2)} \left(\frac{Q_1 + Q_2 - E}{Q_1} \right) + \frac{(k_1k_2)}{(pk_2)} \left(\frac{Q_1 + Q_2 - E}{Q_1} \right) - \frac{((p - k_2)k_1)}{(pk_2)} \frac{Q_2}{Q_1} \right] \\
&+ O(\text{NNLL})
\end{aligned} \tag{E.26}$$

Wir ersetzen die Ausdrücke für (A_1p) , (A_2p) und (A_1k_2) in (E.25) durch

$$\begin{aligned}
(A_1p) &= -m^2 + \frac{2(pc_1)(pk_1)}{(c_1k_1)} \\
&\approx -m^2 + 2(pk_1) \frac{E}{Q_1}
\end{aligned} \tag{E.27}$$

$$(A_2p) \approx -m^2 + 2(pk_2) \frac{E}{Q_2} \tag{E.28}$$

$$\begin{aligned}
(A_1k_2) &= -(pk_2) + \frac{(pc_1)(k_1k_2)}{(c_1k_1)} + \frac{(pk_2)(c_1k_2)}{(c_1k_1)} \\
&\approx -(pk_2) + (k_1k_2) \frac{E}{Q_1} + (pk_1) \frac{Q_2}{Q_1}
\end{aligned} \tag{E.29}$$

$$(A_2k_1) \approx -(pk_1) + (k_1k_2) \frac{E}{Q_2} + (pk_2) \frac{Q_1}{Q_2} \tag{E.30}$$

und spalten in M_{12X}^{12X} alle Stücke proportional m^2 ab. Wir schreiben somit

$$M_{12X}^{12X} = V_{12X}^{12X} + W_{12X}^{12X}, \tag{E.31}$$

wobei der führende Anteil in

$$\begin{aligned}
V_{12X}^{12X} = & \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left[\frac{1}{P_{12}} \left[\frac{Q_1}{E(pk_1)} + \frac{2(E-Q_1)}{Q_1(pk_1)} \right] - \frac{x_{12}}{P_{12}^2} \left\{ \left(\frac{Q_1+Q_2-E}{Q_1} \right) \right. \right. \\
& + \frac{(pk_2)}{(pk_1)} \left[-\frac{4E(E-Q_1)}{Q_1 Q_2} + \frac{2E}{Q_1} - \frac{2Q_1+Q_2-E}{Q_2} \right] \\
& \left. \left. + \frac{(k_1 k_2)}{(pk_1)} \left[\frac{4E(E-Q_1)}{Q_1 Q_2} - \frac{E^2}{Q_1 Q_2} - \frac{E}{Q_1} + \frac{2Q_1}{Q_2} + 1 \right] \right\} \right] \quad (E.32)
\end{aligned}$$

steckt und das zu m^2 proportionale Stück W_{12X}^{12X}

$$\begin{aligned}
W_{12X}^{12X} = & \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left\{ -\frac{2x_{12}m^2 E}{Q_1(pk_1)P_{12}^2} - \frac{m^2}{(pk_1)^2} \left[\frac{(E-Q_1)}{EP_{12}} - \frac{x_{12}m^2}{P_{12}^2} + \frac{2x_{12}(pk_2)E}{P_{12}^2 Q_2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x_{12}}{P_{12}^2} \cdot \left((p-k_1)k_2 + \frac{2(k_1 k_2)E}{Q_2} + 2((p-k_1)k_2) \frac{Q_1}{Q_2} \right) \right] \right\} \quad (E.33)
\end{aligned}$$

die $\tilde{O}(m^2)$ -Terme enthält. Den zweiten quadratischen Beitrag erhalten wir wie vorher durch Vertauschen der Photonindizes

$$M_{21X}^{21X} = V_{21X}^{21X} + W_{21X}^{21X} \quad (E.34)$$

mit

$$\begin{aligned}
V_{21X}^{21X} = & \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left[\frac{1}{P_{12}} \left[\frac{Q_2}{E(pk_2)} + \frac{2(E-Q_2)}{Q_2(pk_2)} \right] - \frac{x_{12}}{P_{12}^2} \left\{ \left(\frac{Q_1+Q_2-E}{Q_2} \right) \right. \right. \\
& + \frac{(pk_1)}{(pk_2)} \left[-\frac{4E(E-Q_2)}{Q_1 Q_2} + \frac{2E}{Q_2} - \frac{Q_1+2Q_2-E}{Q_1} \right] \\
& \left. \left. + \frac{(k_1 k_2)}{(pk_2)} \left[\frac{4E(E-Q_2)}{Q_1 Q_2} - \frac{E^2}{Q_1 Q_2} - \frac{E}{Q_2} + \frac{2Q_2}{Q_1} + 1 \right] \right\} \right] \quad (E.35)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
W_{21X}^{21X} = & \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \left\{ -\frac{2x_{12}m^2 E}{Q_2(pk_2)P_{12}^2} - \frac{m^2}{(pk_2)^2} \left[\frac{(E-Q_2)}{EP_{12}} - \frac{x_{12}m^2}{P_{12}^2} + \frac{2x_{12}(pk_1)E}{P_{12}^2 Q_1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x_{12}}{P_{12}^2} \cdot \left((p-k_2)k_1 + \frac{2(k_1 k_2)E}{Q_1} + 2((p-k_2)k_1) \frac{Q_2}{Q_1} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

E.2.2 Kreuzterm

Weitere zum totalen Wirkungsquerschnitt beitragende Anteile erwarten wir aus der Berechnung des Kreuzterms $M_{12X}^{21X} + M_{21X}^{12X}$ der beiden führenden Diagramme M_{12X} und M_{21X} , welchen wir unter Verwendung der Diracgleichung in vier geeignete Terme zerlegen und diese dann einzeln berechnen.

$$(M_{12X}^{21X} + M_{21X}^{12X}) := \frac{e^4 \sum_{\text{phys}} \text{tr} \{ (Z_{12X}^{21X} + Z_{21X}^{12X}) \Gamma_X (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_X \}}{16(pk_1)(pk_2) ((pk_1) + (pk_2) - (k_1 k_2))^2} \quad (E.36)$$

$$= e^4 S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} \frac{\text{tr} \{ (Z_{12X}^{21X} + Z_{21X}^{12X})_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} \Gamma_X (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_X \}}{16(pk_1)(pk_2)P_{12}^2} \quad (\text{E.37})$$

Es ist

$$\begin{aligned} & Z_{12X}^{21X} \\ &= S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma_\beta (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \\ &=: T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

wobei die Stücke T_1 bis T_4 gegeben sind durch

$$T_1 = S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\alpha (\not{p} - m) \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.39})$$

$$T_2 = -2S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} p_\alpha (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.40})$$

$$T_3 = -2S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} p_\nu (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\alpha (\not{p} - m) \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.41})$$

$$T_4 = 4S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} p_\alpha p_\nu (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.42})$$

Wir beginnen mit der Berechnung von T_4 , wobei unter Verwendung der in Abschnitt E.1 aufgeführten Definitionen zunächst

$$\begin{aligned} T_4 &= 4S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} p_\alpha p_\nu (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \\ &= 4(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \mathcal{A}_1 (\not{p} - m) \mathcal{A}_2 (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

folgt. Nach Addition des komplex konjugierten Terms erhalten wir mit der bereits bei der Berechnung der quadratischen Terme herangezogenen Argumentation zur Unterscheidung potentiell führender und nichtführender Terme im differentiellen Wirkungsquerschnitt das genäherte Ergebnis.

$$\begin{aligned} \frac{T_4 + \bar{T}_4}{16} &= P_{12} [-(A_1 A_2) (\not{p} - m) + (A_1 p) \mathcal{A}_2 + (A_2 p) \mathcal{A}_1] \quad (\text{E.44}) \\ &+ (\not{k}_2 - \not{p}_1 + m) \left[-(A_1 A_2) (p(k_1 + k_2)) + (A_1 p) (A_2 (k_1 - p)) + (A_2 p) (A_1 (k_2 - p)) \right] \\ &\approx \not{p} \left(\frac{Q_1 + Q_2 - E}{E} \right) \left\{ (pk_1)(pk_2) \left[-\frac{8E^2}{Q_1 Q_2} + \frac{3Q_1}{Q_2} + \frac{3Q_2}{Q_1} \right] - (pk_1)^2 \frac{E}{Q_1} - (pk_2)^2 \frac{E}{Q_2} \right. \\ &+ (k_1 k_2) ((pk_1) + (pk_2)) \frac{E^2}{Q_1 Q_2} \left. \right\} + P_{12} \not{p} \left[(pk_1) \frac{E}{Q_1} + (pk_1) \frac{E}{Q_2} - (k_1 k_2) \frac{E^2}{Q_1 Q_2} \right] \\ &- \not{p} m^2 P_{12} - \not{p} x_{12} \left[-m^2 (pk_1) - m^2 (pk_2) - 2m^4 + \frac{4m^2 E (pk_1)}{Q_1} + \frac{4m^2 (pk_2) E}{Q_2} \right] \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für T_2 zunächst

$$\begin{aligned} T_2 &= -2S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} p_\alpha (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.45}) \\ &= -4(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) [(\not{p} + m) + \mathcal{A}_1] \not{k}_1 \mathcal{A}_2 (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \end{aligned}$$

und

$$T_2 + \bar{T}_2 = -16P_{12} \left[-(A_2 (A_1 + p)) \not{k}_1 + (A_2 k_1) [(\not{p} - m) + \mathcal{A}_1] + (pk_1) \mathcal{A}_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& -16(k_1 + k_2 - \not{p} + m) \left[-(A_2(A_1 + p))(k_1(k_2 - p)) \right. \\
& \left. + (A_2 k_1) [(pk_1) + (pk_2) + (A_1(k_2 - p))] + (pk_1)(A_2(k_1 - p)) \right] \\
& \approx 16x_{12}(pk_1) \left(\frac{2Q_1 + Q_2 - E}{Q_1} \right) \left[-(pk_1) + (k_1 k_2) \frac{E}{Q_2} + (pk_2) \frac{Q_1}{Q_2} \right] \not{p} \\
& - 16x_{12}(pk_1)(pk_2) \frac{2E}{Q_2} \not{p} + 16\not{p}x_{12}m^2 \left[(k_1(k_2 - p)) + \frac{(k_1 k_2)E}{Q_2} + \frac{(pk_2)Q_1}{Q_2} \right]
\end{aligned} \tag{E.46}$$

nach Addition des komplex konjugierten Terms. Da $T_3 + \bar{T}_3$ aus $T_2 + \bar{T}_2$ durch Vertauschen der Photonindizes hervorgeht, erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}
T_3 + \bar{T}_3 & \approx 16x_{12}(pk_2) \left(\frac{Q_1 + 2Q_2 - E}{Q_2} \right) \left[-(pk_2) + (k_1 k_2) \frac{E}{Q_1} + (pk_1) \frac{Q_2}{Q_1} \right] \not{p} \\
& - 16x_{12}(pk_1)(pk_2) \frac{2E}{Q_1} \not{p} + 16\not{p}x_{12}m^2 \left[(k_2(k_1 - p)) + \frac{(k_1 k_2)E}{Q_1} + \frac{(pk_1)Q_2}{Q_1} \right]
\end{aligned}$$

Die Berechnung von T_1 gestaltet sich ein wenig aufwendiger, verläuft aber analog zur Berechnung von T_2 , T_3 und T_4 und wird daher in Abschnitt E.3 detailliert dargestellt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
T_1 + \bar{T}_1 & \approx 16P_{12}\not{p} \cdot 4(k_1 k_2)x_{12} - 16x_{12}\not{p} \left[(k_1 k_2)^2 \left(-\frac{E^2}{Q_1 Q_2} + \frac{E}{Q_1} + \frac{E}{Q_2} - 4 \right) \right. \\
& \left. + (pk_1)(k_1 k_2) \left(\frac{E}{Q_1} - \frac{Q_2}{Q_1} + 3 \right) + (pk_2)(k_1 k_2) \left(\frac{E}{Q_2} - \frac{Q_1}{Q_2} + 3 \right) \right] \\
& - 32x_{12}m^2(k_1 k_2)\not{p}.
\end{aligned} \tag{E.47}$$

Damit erhalten wir den gesuchten Kreuzterm in guter Näherung als

$$(M_{12X}^{21X} + M_{21X}^{12X}) = (K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}) + (C_{12X}^{21X} + C_{21X}^{12X}) \tag{E.48}$$

mit dem im Limes masseloser Fermionen nichtverschwindenden Anteil

$$\begin{aligned}
(K_{12X}^{21X} + K_{21X}^{12X}) & = \frac{e^4 \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^4 [T_i + \bar{T}_i] \Gamma_X (\not{p}' + m) \bar{\Gamma}_X \right\}}{16(pk_1)(pk_2)P_{12}^2} \\
& \approx \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}(pk_1)(pk_2)P_{12}} \left[(pk_1) \frac{E}{Q_1} + (pk_2) \frac{E}{Q_2} - (k_1 k_2) \frac{E^2}{Q_1 Q_2} + 4(k_1 k_2)x_{12} \right] \\
& - \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}(pk_1)(pk_2)P_{12}^2} x_{12} \left\{ (k_1 k_2)^2 \left(-\frac{x_{12}E^2}{Q_1 Q_2} - 4 \right) + (pk_1)^2 \left(\frac{2Q_1 + Q_2 - 2E}{Q_1} \right) \right. \\
& \left. + (pk_2)^2 \left(\frac{Q_1 + 2Q_2 - 2E}{Q_2} \right) + (pk_1)(pk_2) \left(-\frac{8E^2}{Q_1 Q_2} + \frac{6E}{Q_1} + \frac{6E}{Q_2} - 2 - \frac{2Q_1}{Q_2} - \frac{2Q_2}{Q_1} \right) \right. \\
& \left. + (pk_1)(k_1 k_2) \left(\frac{2E(E - Q_1)}{Q_1 Q_2} + 3 - \frac{Q_2}{Q_1} \right) + (pk_2)(k_1 k_2) \left(\frac{2E(E - Q_2)}{Q_1 Q_2} + 3 - \frac{Q_1}{Q_2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{E.49}$$

und dem Stück $(C_{12X}^{21X} + C_{21X}^{12X})$ proportional m^2 .

$$(C_{12X}^{21X} + C_{21X}^{12X}) = \frac{e^4 M_X^X}{x_{12}} \frac{m^2}{(pk_1)(pk_2)P_{12}^2} \left\{ \frac{x_{12}(k_1 k_2)E}{Q_2} + \frac{x_{12}(pk_2)Q_1}{Q_2} + \frac{x_{12}(k_1 k_2)E}{Q_1} \right\}$$

$$+ \left. \frac{x_{12}(pk_1)Q_2}{Q_1} - P_{12} + 2m^2 x_{12} - \frac{4x_{12}E(pk_1)}{Q_1} - \frac{4x_{12}(pk_2)E}{Q_2} \right\} \quad (\text{E.50})$$

E.3 Beitrag T_1 aus $M_{12X}^{21X} + M_{21X}^{12X}$

Wir zerlegen T_1 in folgende vier geeignete Teilstücke t_1^a , t_1^b , t_1^c und t_1^d :

$$\begin{aligned} T_1 &= S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\alpha (\not{p} - m) \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \\ &=: t_1^a + t_1^b + t_1^c + t_1^d \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

mit

$$t_1^a = -S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu (\not{p} - m) \gamma_\alpha \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.52})$$

$$t_1^b = 2p_\alpha S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.53})$$

$$t_1^c = 2p_\nu S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\alpha \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.54})$$

$$t_1^d = -2g_{\alpha\nu} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \gamma_\mu \not{k}_2 (\not{p} + m) \not{k}_1 \gamma_\beta (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.55})$$

Nach Ausführen der Polarisationssumme erhalten wir für t_1^a

$$\begin{aligned} t_1^a &= -4(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \left[\not{k}_2 - (\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{A}_1) \right] (\not{p} - m) \left[\not{k}_1 - (\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2) \right] \cdot \\ &\quad (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

und nach Addition des komplex konjugierten Terms

$$\begin{aligned} t_1^a + \bar{t}_1^a &= -16P_{12} \left[-(k_1 k_2) (\not{p} - m) - ((\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{A}_1)(\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)) (\not{p} - m) \right. \\ &\quad \left. + [\not{k}_1 - \mathcal{A}_2^1 + \mathcal{A}_2] (p(k_2 - \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1)) + [\not{k}_2 - \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1] (p(k_1 - \mathcal{A}_2^1 + \mathcal{A}_2)) \right] \\ &\quad - 16(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \left[-(k_1 k_2) ((pk_1) + (pk_2)) - ((\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{A}_1)(\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)) (pk_1) \right. \\ &\quad \left. - ((\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{A}_1)(\mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2)) (pk_2) + (p(k_2 - \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1)) ((k_1 - \mathcal{A}_2^1 + \mathcal{A}_2)(k_1 + k_2 - p)) \right. \\ &\quad \left. + (p(k_1 - \mathcal{A}_2^1 + \mathcal{A}_2)) ((k_2 - \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1)(k_1 + k_2 - p)) \right] \\ &\approx -16P_{12} \not{p} \left[-(k_1 k_2) + (pk_1) \frac{Q_2}{E} + (pk_2) \frac{Q_1}{E} \right] + 16x_{12} \not{p} \left[-2(pk_1)(pk_2) \right. \\ &\quad \left. + (pk_1)(k_1 k_2) \left(\frac{2Q_1 + Q_2 - 2E}{Q_1} \right) + (pk_2)(k_1 k_2) \left(\frac{Q_1 + 2Q_2 - 2E}{Q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (k_1 k_2)^2 \frac{E(3Q_1 + 3Q_2 - 2E)}{Q_1 Q_2} - 3(k_1 k_2)(pk_1) - 3(k_1 k_2)(pk_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

Nach Summation über die Photonpolarisationen erhalten wir für t_1^b

$$t_1^b = 4(k_1 + k_2 - \not{p} + m) [k_2 - \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1] k_1 \mathcal{A}_2 (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.58})$$

und nach Addition des komplex konjugierten Terms entsprechend

$$\begin{aligned} t_1^b + \bar{t}_1^b &= 16P_{12} [((\mathcal{A}_1^2 - A_1)A_2) k_1 + (k_1 k_2)\mathcal{A}_2 + (A_2 k_1) (k_2 - \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1)] \\ &\quad + 16(k_1 + k_2 - \not{p} + m) \left[((\mathcal{A}_1^2 - A_1)A_2) (k_1(k_2 - p)) + (k_1 k_2)(A_2(k_1 - p)) \right. \\ &\quad \left. + (A_2 k_1) ((k_2 - \mathcal{A}_1^2 + A_1)(k_1 + k_2 - p)) \right] \\ &\approx -16x_{12} \left[-(pk_1) + (k_1 k_2) \frac{E}{Q_2} + (pk_2) \frac{Q_1}{Q_2} \right] (k_1 k_2) \left(\frac{2Q_1 + Q_2 - E}{Q_1} \right) \not{p} \\ &\quad + 16x_{12}(pk_2)(k_1 k_2) \frac{2E}{Q_2} \not{p} - 16x_{12}m^2(k_1 k_2)\not{p} \end{aligned} \quad (\text{E.59})$$

Vertauschen der Photonindizes $1 \leftrightarrow 2$ liefert das genäherte Ergebnis für $t_1^c + \bar{t}_1^c$.

$$\begin{aligned} t_1^c + \bar{t}_1^c &\approx -16x_{12} \left[-(pk_2) + (k_1 k_2) \frac{E}{Q_1} + (pk_1) \frac{Q_2}{Q_1} \right] (k_1 k_2) \left(\frac{Q_1 + 2Q_2 - E}{Q_2} \right) \not{p} \\ &\quad + 16x_{12}(pk_1)(k_1 k_2) \frac{2E}{Q_1} \not{p} - 16x_{12}m^2(k_1 k_2)\not{p} \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$

Den noch fehlenden Beitrag t_1^d zerlegen wir ebenfalls in vier geeignete Stücke t_1^{da} , t_1^{db} , t_1^{dc} und t_1^{dd} :

$$\begin{aligned} t_1^d &= -2g_{\alpha\nu} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \left[k_2 \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\beta k_1 - 2k_{1\beta} k_2 \gamma_\mu (\not{p} + m) \right. \\ &\quad \left. - 2k_{2\mu} (\not{p} + m) \gamma_\beta k_1 + 4k_{2\mu} k_{1\beta} (\not{p} + m) \right] (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \\ &= t_1^{da} + t_1^{db} + t_1^{dc} + t_1^{dd} \end{aligned} \quad (\text{E.61})$$

wobei

$$t_1^{da} = -2g_{\alpha\nu} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (k_1 + k_2 - \not{p} + m) k_2 \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\beta k_1 (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.62})$$

$$t_1^{db} = 4k_{1\beta} g_{\alpha\beta} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (k_1 + k_2 - \not{p} + m) k_2 \gamma_\mu (\not{p} + m) (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.63})$$

$$t_1^{dc} = 4k_{2\mu} g_{\alpha\beta} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (k_1 + k_2 - \not{p} + m) (\not{p} + m) \gamma_\beta k_1 (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.64})$$

$$t_1^{dd} = -8g_{\alpha\nu} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} k_{2\mu} k_{1\beta} (k_1 + k_2 - \not{p} + m) (\not{p} + m) (k_1 + k_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.65})$$

Wir erhalten für t_1^{dd}

$$\begin{aligned} t_1^{dd} &= -16 [(k_1 k_2)(k_1 + k_2 - \not{p} + m) + P_{12}(k_1 + k_2)] \cdot \\ &\quad \left[-(k_1 k_2) + \frac{3(k_1 k_2)(k_1 c_2)(c_1 k_2) + (k_1 k_2)^2 (c_1 c_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.66})$$

bzw. nach Hinzuaddieren des komplex konjugierten Terms

$$t_1^{dd} + \bar{t}_1^{dd} \approx -16\not{p} \left[-4x_{12}(k_1 k_2)^2 + 4P_{12}(k_1 k_2) \left(\frac{Q_1 + Q_2}{E} \right) \right] \quad (\text{E.67})$$

Ferner berechnen wir

$$t_1^{dc} = 4(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m)(\not{p} + m) \left[-\frac{(k_1 k_2)}{(c_1 k_1)} \not{\phi}_1 + \frac{2(c_1 k_2)(k_1 k_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} \not{\phi}_2 + \frac{(k_1 k_2)(c_1 c_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} \not{k}_2 \right. \\ \left. + \frac{(c_1 k_2)(k_1 c_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} \not{k}_2 \right] \not{k}_1 (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.68})$$

bzw.

$$t_1^{dc} + \bar{t}_1^{dc} \approx 16P_{12}\not{p} \left[3(k_1 k_2) - (pk_1) \frac{Q_2}{E} + (pk_2) \frac{Q_1}{E} \right] \\ - 16x_{12}\not{p} \left[-(k_1 k_2)(pk_1) \frac{Q_2}{Q_1} + (k_1 k_2)^2 \frac{E}{Q_1} + 3(k_1 k_2)(pk_2) \right] \quad (\text{E.69})$$

Durch Vertauschen der Photonindizes erhalten wir

$$t_1^{db} + \bar{t}_1^{db} \approx 16P_{12}\not{p} \left[3(k_1 k_2) - (pk_2) \frac{Q_1}{E} + (pk_1) \frac{Q_2}{E} \right] \\ - 16x_{12}\not{p} \left[-(k_1 k_2)(pk_2) \frac{Q_1}{Q_2} + (k_1 k_2)^2 \frac{E}{Q_2} + 3(k_1 k_2)(pk_1) \right] \quad (\text{E.70})$$

Das letzte Stück t_1^{da}

$$t_1^{da} = -2g_{\alpha\nu} S_1^{\mu\nu} S_2^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \not{k}_2 \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\beta \not{k}_1 (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \\ = -\frac{2m}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \not{k}_2 \left[\not{k}_1 \not{\phi}_2 (c_1 k_2) + \not{k}_1 \not{k}_2 (c_1 c_2) \right. \\ \left. + \not{\phi}_1 \not{\phi}_2 (k_1 k_2) + \not{\phi}_1 \not{k}_2 (k_1 c_2) \right] \not{k}_1 (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \\ - 2(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \not{k}_2 \left[-2(\not{p} + \not{A}_1 + \not{A}_2) + \frac{\not{k}_1 \not{p} \not{\phi}_2 (c_1 k_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} + \frac{\not{k}_1 \not{p} \not{k}_2 (c_1 c_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} \right. \\ \left. + \frac{\not{\phi}_1 \not{p} \not{\phi}_2 (k_1 k_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} + \frac{\not{\phi}_1 \not{p} \not{k}_2 (k_1 c_2)}{(c_1 k_1)(c_2 k_2)} \right] \not{k}_1 (\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p} + m) \quad (\text{E.71})$$

liefert nach Addition des komplex konjugierten Terms und Näherung den Beitrag

$$t_1^{da} + \bar{t}_1^{da} \approx 16P_{12}\not{p} \left[(pk_2) \frac{Q_1}{E} + (pk_1) \frac{Q_2}{E} - 3(k_1 k_2) \right] \quad (\text{E.72}) \\ - 16x_{12} \left[-2(pk_1)(pk_2) + (pk_2)(k_1 k_2) \frac{E}{Q_2} + (pk_1)(k_1 k_2) \frac{E}{Q_1} - (k_1 k_2)^2 \frac{E^2}{Q_1 Q_2} \right]$$

Aus $t_1^{da} + t_1^{db} + t_1^{dc} + t_1^{dd} + cc$ ergibt sich dann $t_1^d + \bar{t}_1^d$,

$$t_1^d + \bar{t}_1^d = 16P_{12}\not{p} \left[(pk_1) \frac{Q_2}{E} + (pk_2) \frac{Q_1}{E} + 3(k_1 k_2) - 4(k_1 k_2) \left(\frac{Q_1 + Q_2}{E} \right) \right] \\ - 16x_{12}\not{p} \left[(k_1 k_2)^2 \left(-\frac{E^2}{Q_1 Q_2} + \frac{E}{Q_2} + \frac{E}{Q_1} - 4 \right) + (k_1 k_2)(pk_1) \left(\frac{E}{Q_1} - \frac{Q_2}{Q_1} + 3 \right) \right. \\ \left. + (k_1 k_2)(pk_2) \left(\frac{E}{Q_2} - \frac{Q_1}{Q_2} + 3 \right) - 2(pk_1)(pk_2) \right] \quad (\text{E.73})$$

und schließlich $T_1 + \bar{T}_1$

$$\begin{aligned}
T_1 + \bar{T}_1 &= t_1^a + \bar{t}_1^a + t_1^b + \bar{t}_1^b + t_1^c + \bar{t}_1^c + t_1^d + \bar{t}_1^d \\
&\approx 16P_{12}\not{p} \cdot 4(k_1 k_2)x_{12} - 16x_{12}\not{p} \left[(k_1 k_2)^2 \left(-\frac{E^2}{Q_1 Q_2} + \frac{E}{Q_1} + \frac{E}{Q_2} - 4 \right) \right. \\
&\quad \left. + (pk_1)(k_1 k_2) \left(\frac{E}{Q_1} - \frac{Q_2}{Q_1} + 3 \right) + (pk_2)(k_1 k_2) \left(\frac{E}{Q_2} - \frac{Q_1}{Q_2} + 3 \right) \right] \\
&\quad - 32x_{12}m^2(k_1 k_2)\not{p}
\end{aligned} \tag{E.74}$$

E.4 Rechnungen zur Zwei-Photon-Splittingfunktion

Zur Bestimmung der Zwei-Photon-Splittingfunktion $T(x_1, x_2)$ sind Integrale von Funktionen zweier Polarwinkel und eines Azimuthwinkels zu berechnen. Dazu verwenden wir einen Trick [19]. Angenommen, wir wissen, daß ein Ausdruck

$$\Phi(w_0) = \int_0^{w_0} dw_1 \int_0^{w_0} dw_2 f(w_1, w_2) \tag{E.75}$$

bei großen Werten von w_0 von der folgenden Form ist:

$$\Phi(w_0) = A \ln^2 w_0 + B \ln w_0 + C \tag{E.76}$$

Ableiten von (E.76) nach w_0 und Übergang zum Limes $w_0 \gg 1$ ergibt

$$w_0 \Phi'(w_0) = 2A \ln w_0 + B = z_0 \int_0^{w_0} [f(w, w_0) + f(w_0, w)] dw \tag{E.77}$$

Um daher das zweifache Integral (E.75) mit einfachlogarithmischer Genauigkeit zu rechnen, genügt es, die eine Integration in (E.77) durchzuführen. Wir wenden diese Methode nun an, um

$$K_2(w_0) := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(pk_1)P_{12}} \tag{E.78}$$

zu berechnen. Dazu schreiben wir P_{12} und (pk_1) mit Hilfe von $\beta = 1 - b$, $b = m^2/2E^2 + O(m^4/E^4)$ und $\cos \theta_i = 1 - t_i$ um auf

$$P_{12} = \frac{E^2}{b} \left[z_1(1 + w_1) + z_2(1 + w_2) - z_1 z_2 w_1 w_2 + 2z_1 z_2 \sqrt{w_1 w_2} \cos \phi \right] \tag{E.79}$$

und

$$(pk_1) = \frac{E^2}{b} z_1(1 + w_1) \tag{E.80}$$

mit $w_i = t_i/b$, $z_1 := (1 - x_1)$, $z_2 := (1 - x_2)x_1$ und $w_0 = 2/b = s/m^2$. Nach Integration über den Azimuthwinkel ϕ in

$$K_2(w_0) = \frac{1}{E^4} \int_0^{w_0} dw_1 \int_0^{w_0} dw_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{z_1(1+w_1) [a(w_1, w_2) + b(w_1, w_2) \cos \phi]} \quad (\text{E.81})$$

$$a(w_1, w_2) = z_1(1+w_1) + z_2(1+w_2) - z_1 z_2 w_1 w_2 \quad (\text{E.82})$$

$$b(w_1, w_2) = 2z_1 z_2 \sqrt{w_1 w_2} \cos \phi \quad (\text{E.83})$$

ist das Integral K_2 von der Form (E.75),

$$K_2(w_0) = \frac{1}{E^4} \int_0^{w_0} dw_1 \int_0^{w_0} dw_2 \frac{1}{z_1(1+w_1) \sqrt{F(w_1, w_2)}} \quad (\text{E.84})$$

$$= \frac{A_2}{E^4} \ln w_0^2 + \frac{B_2}{E^4} \ln w_0 + \frac{C_2}{E^4} \quad (\text{E.85})$$

mit

$$F(w_1, w_2) = w_1^2 z_1^2 (1 - z_2)^2 + w_2^2 z_2^2 (1 - z_2)^2 + 2w_1 w_2 z_1 z_2 (1 - z_1 - z_2 - z_1 z_2) \quad (\text{E.86})$$

Wir berechnen die Koeffizienten A_2 und B_2 im Limes $w_0 \gg 1$ nach einer weiteren Variablentransformation auf $t = w/w_0$ aus

$$\begin{aligned} w_0 E^4 K_2'(w_0) &= \frac{1}{z_1} \int_{\frac{1}{w_0}}^{w_0} dt \frac{1}{t \sqrt{F_1(t)}} + \frac{1}{z_1} \int_{\frac{1}{w_0}}^{w_0} dt \frac{1}{\sqrt{F_2(t)}} \quad (\text{E.87}) \\ &= \frac{1}{z_1 z_2 (1 - z_1)} \ln \left(2w_0 \sqrt{c_1^2} + 2w_0 c_1 + b_1 \right) - \frac{1}{z_1 \sqrt{a_2}} \ln (2\sqrt{a_2} \sqrt{c_2} + b_2) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_1(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ F_2(t) &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{aligned} \quad (\text{E.88})$$

und

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1^2 (1 - z_2)^2 = c_2 \\ b_1 &= 2z_1 z_2 (1 - z_1) (1 - z_2) - 4z_1^2 z_2^2 \\ c_1 &= z_2^2 (1 - z_1)^2 = a_2 \\ \Delta_1 &= \Delta_2 = 4a_1 c_1 - b_2^2 = 16z_1^3 z_2^3 (1 - z_1 - z_2) \end{aligned} \quad (\text{E.89})$$

Einsetzen von a_i , b_i und c_i ergibt schließlich

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2z_1 z_2 (1 - z_1)} = \frac{1}{2(1 - x_1)(1 - x_2)x_1^2} \quad (\text{E.90}) \\ B_2 &= \frac{1}{z_1 z_2 (1 - z_1)} \ln \left(\frac{z_2 (1 - z_1)^2}{z_1 (1 - z_1 - z_2)} \right) = \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)x_1^2} \ln \left(\frac{(1 - x_2)^2 x_1^3}{(1 - x_1)x_1 x_2} \right) \end{aligned}$$

E.4.1 Abkürzungen

Für die weitere Rechnung benötigen wir die in diesem Abschnitt definierten und berechneten Integrale.

$$I_0 := \int_0^1 \frac{dt}{(F_1(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a_1 + b_1)}{\Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{2b_1}{\Delta_1 \sqrt{c_1}} \quad (\text{E.91})$$

$$J_0 := \int_0^1 \frac{dt}{(F_1(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2c_1 + b_1)}{\Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{2b_1}{\Delta_1 \sqrt{a_1}} \quad (\text{E.92})$$

$$I_1 := \int_0^1 \frac{tdt}{(F_1(t))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(b_1 + 2c_1)}{\Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} + \frac{4c_1}{\Delta_1 \sqrt{c_1}} \quad (\text{E.93})$$

$$J_1 := \int_0^1 \frac{tdt}{(F_2(t))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(b_1 + 2a_1)}{\Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} + \frac{4a_1}{\Delta_1 \sqrt{a_1}} \quad (\text{E.94})$$

$$I_2 := \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(F_1(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2b_1^2 - 4a_1 c_1 + 2b_1 c_1}{a_1 \Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{2b_1 c_1}{a_1 \Delta_1 \sqrt{c_1}} + \frac{1}{a_1 \sqrt{a_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{a_1} \sqrt{a_1 + b_1 + c_1} + 2a_1 + b_1}{2\sqrt{a_1 c_1} + b_1} \right) \quad (\text{E.95})$$

$$J_2 := \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(F_2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2b_1^2 - 4a_1 c_1 + 2b_1 a_1}{c_1 \Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{2b_1 a_1}{c_1 \Delta_1 \sqrt{a_1}} + \frac{1}{c_1 \sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c_1} \sqrt{a_1 + b_1 + c_1} + 2c_1 + b_1}{2\sqrt{a_1 c_1} + b_1} \right) \quad (\text{E.96})$$

$$\begin{aligned} I'_{-1} &:= \int_{\frac{1}{w_0}}^1 \frac{dt}{t(F_1(t))^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c_1} \sqrt{a_1 + b_1 + c_1} + 2c_1 + b_1}{2w_0 \sqrt{c_1^2} + 2w_0 c_1 + b_1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln w_0 - \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c_1} \sqrt{a_1 + b_1 + c_1} + 2c_1 + b_1}{4c_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

$$\begin{aligned} I_{-1} &:= \int_{\frac{1}{w_0}}^1 \frac{dt}{t(F_1(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{c_1 \sqrt{F_1(t)}} \Big|_0^1 - \frac{b_1}{2c_1} \int_0^1 \frac{dt}{(F_1(t))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c_1} \int_{\frac{1}{w_0}}^1 \frac{dt}{t(F_1(t))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{c_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{1}{c_1 \sqrt{c_1}} - \frac{b_1}{2c_1} I_0 + \frac{1}{c_1} I'_{-1} \end{aligned} \quad (\text{E.98})$$

$$I'_0 := \int_0^1 \frac{dt}{(F_1(t))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{a_1}\sqrt{a_1+b_1+c_1+2a_1+b_1}}{2\sqrt{a_1}\sqrt{c_1+b_1}} \right) \quad (\text{E.99})$$

$$J'_0 := \int_0^1 \frac{dt}{(F_2(t))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c_1}\sqrt{a_1+b_1+c_1+2c_1+b_1}}{2\sqrt{a_1}\sqrt{c_1+b_1}} \right) \quad (\text{E.100})$$

E.4.2 Integraltypen

Mittels der oben vorgestellten Methode berechnen wir nun unter Verwendung der in Abschnitt E.4.1 definierten Teilintegrale die wie folgt definierten Integrale K_1 bis K_6 .

$$K_1 := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(pk_1)(pk_2)} = \frac{A_1}{E^4} \ln^2 w_0 \quad (\text{E.101})$$

$$A_1 = \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1} = \frac{1}{(1-y_1)(1-y_2)y_1}$$

$$K_2 := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(pk_1)P_{12}} = \frac{A_2}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_2}{E^4} \ln w_0 + O(\ln^0 w_0) \quad (\text{E.102})$$

$$w_0 K'_2 = 2 \frac{A_2}{E^4} \ln^2(w_0) + \frac{B_2}{E^4} \ln w_0 = \frac{1}{E^4} \left[\frac{1}{z_1} I'_{-1} + \frac{1}{z_1} J'_0 \right] \quad (\text{E.103})$$

$$A_2 = \frac{1}{2z_1 z_2 (1-z_1)} = \frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)x_1^2} \quad (\text{E.104})$$

$$B_2 = \frac{1}{z_1 z_2 (1-z_1)} \ln \left(\frac{z_2(1-z_1)^2}{z_1(1-z_1-z_2)} \right) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1^2} \ln \left(\frac{(1-x_2)x_1^2}{(1-x_1)x_2} \right) \quad (\text{E.105})$$

$$K_3 := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(pk_2)P_{12}} = \frac{A_3}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_3}{E^4} \ln w_0 + O(\ln^0 w_0) \quad (\text{E.106})$$

$$A_3 = \frac{1}{2z_2 z_1 (1-z_2)} = \frac{1}{2(1-y_1)(1-y_2)y_1^2} \quad (\text{E.107})$$

$$B_3 = \frac{1}{z_2 z_1 (1-z_2)} \ln \left(\frac{z_1(1-z_2)^2}{z_2(1-z_1-z_2)} \right) = \frac{1}{(1-y_1)(1-y_2)y_1^2} \ln \left(\frac{(1-y_2)y_1^2}{(1-y_1)y_2} \right) \quad (\text{E.108})$$

$$K_4 := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{P_{12}^2} = \frac{A_4}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_4}{E^4} \ln w_0 + O(\ln^0 w_0) \quad (\text{E.109})$$

$$w_0 K'_4 = 2 \frac{A_4}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_4}{E^4} \ln w_0$$

$$= \frac{1}{E^4} [z_1(1-z_2)I_1 + z_2(1-z_1)J_1 + z_2(1-z_1)I_0 + z_1(1-z_2)J_0] \quad (\text{E.110})$$

$$A_4 = 0 \quad (\text{E.111})$$

$$B_4 = \frac{1}{z_1 z_2 (1-z_1-z_2)} = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)x_1^2 x_2} \quad (\text{E.112})$$

$$K_5 := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{(pk_2)}{(pk_1)P_{12}^2} = \frac{A_5}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_5}{E^4} \ln w_0 + O(\ln^0 w_0)$$

$$(\text{E.113})$$

$$w_0 K'_5 = 2 \frac{A_5}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_5}{E^4} \ln w_0 \quad (\text{E.114})$$

$$= \frac{1}{E^4} \left[z_2(1-z_2)I_0 + z_2^2 \left(\frac{1}{z_1} - 1 \right) I_{-1} + z_2(1-z_2)J_1 + z_2^2 \left(\frac{1}{z_1} - 1 \right) J_2 \right]$$

$$A_5 = \frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)x_1^3} \quad (\text{E.115})$$

$$B_5 = z_2(1-z_2)I_0 + z_2(1-z_2)J_1 + z_2^2 \left(\frac{1}{z_1} - 1 \right) J_2$$

$$+ z_2^2 \left(\frac{1}{z_1} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{c_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{1}{c_1 \sqrt{c_1}} - \frac{b_1}{2c_1} \left[\frac{2(2a_1 + b_1)}{\Delta_1 \sqrt{a_1 + b_1 + c_1}} - \frac{2b_1}{\Delta_1 \sqrt{c_1}} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c_1 \sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c_1} \sqrt{a_1 + b_1 + c_1} + 2c_1 + b_1}{4c_1} \right) \right\}$$

$$= \frac{(1-z_2)}{2z_1 z_2 (1-z_1)(1-z_1-z_2)} + \left(\frac{1}{z_1} - 1 \right) \left[-\frac{1}{z_2(1-z_1)^3} + \frac{(1-z_2)}{2z_2(1-z_1)^2(1-z_1-z_2)} \right]$$

$$(\text{E.116})$$

$$+ \frac{1}{z_2(1-z_1)^3} \ln \left(\frac{z_2(1-z_1)^2}{z_1(1-z_1)(1-z_2) - z_1^2 z_2} \right) - \frac{z_1 z_2}{z_2(1-z_1)^3(1-z_1-z_2)} \Big]$$

$$K_6 := \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 \int_{-1}^1 d \cos \theta_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{(pk_1)}{(pk_2)P_{12}^2} = \frac{A_6}{E^4} \ln^2 w_0 + \frac{B_6}{E^4} \ln w_0 + O(\ln(w_0)^0)$$

$$(\text{E.117})$$

$$A_6 = \frac{1}{2(1-y_1)(1-y_2)y_1^3} \quad (\text{E.118})$$

$$B_6 \quad (\text{E.119})$$

$$= \frac{(1-z_1)}{2z_1 z_2 (1-z_2)(1-z_1-z_2)} + \left(\frac{1}{z_2} - 1 \right) \left[-\frac{1}{z_1(1-z_2)^3} + \frac{(1-z_1)}{2z_1(1-z_2)^2(1-z_1-z_2)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z_1(1-z_2)^3} \ln \left(\frac{z_1(1-z_2)^2}{z_2(1-z_1)(1-z_2) - z_2^2 z_1} \right) - \frac{z_1 z_2}{z_1(1-z_2)^3(1-z_1-z_2)} \right]$$

Literaturverzeichnis

- [1] F. Bloch, A. Nordsieck. Phys. Rev. 52 (1937) 54. (Sec. 6.2)
- [2] T. Muta. Foundations of Quantum Chromodynamics. World Scientific, 1987.
- [3] J. C. Collins, D. E. Soper. The Theorems of Perturbative QCD. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1987. 37:383.
- [4] J. Bjorken, S. Drell. Relativistische Quantenmechanik. BI, 1990.
- [5] C. Quigg. Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions. Benjamin/Cummings, 1983.
- [6] F. Mandl, G. Shaw. Quantenfeldtheorie. AULA, 1993.
- [7] M.E. Peskin, D.V. Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory. Addison Wesley, 1997.
- [8] S. Weinberg. The Quantum Theory of Fields, Volume II Modern Applications. Cambridge 1996.
- [9] B.W. Lee, C. Quigg and H.B. Thacker. Phys. Rev. D16, 1519(1977).
- [10] E. Byckling, K. Kajantje. Particle Kinematics. John Wiley & Sons, 1973.
- [11] M. Skrzypek and S. Jadach. Exact and approximate solutions for the electron nonsinglet structure function in QED. Z.Phys. C – Particles and Fields 49, 577-584 (1991).
- [12] Markus Landgraf. Evolutionsalgorithmen zur Generierung elektromagnetischer Bremsstrahlung in Hochenergiestreuereprozessen. Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1995.
- [13] Andreas Heitmann. Approximation der Elektron-Strukturfunktion im Monte-Carlo CLOV. Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1996.
- [14] F.A.Berends, R.Kleiss. Distributions in the Process $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma)$. Nuc. Phys. B177 (1981) 237-262.
- [15] F.A.Berends, R.Kleiss. Radiative Corrections to Bhabha Scattering at High Energies. Nuc. Phys. B304 (1988) 712-748.
- [16] H.Press, W. Vetterling. Numerical Recipes in C, Second Edition. Cambridge 1995.

- [17] T. Ohl, *Comput. Phys. Commun.* 120 (1999) 13 [arXiv:hep-ph/9806432].
- [18] T. Ohl. Electroweak Gauge Bosons at Future Electron–Positron Colliders. IK-DA 99/11, June 1999.
- [19] N.P.Merenkov. A Study of the Process of Emission of Two Hard Photons in ep Collisions at High Energies. *Yad. Fiz.* 48 (1988), 1782–1792.

Danksagung

Mein Dank gilt zunächst Prof. Dr. P. Manakos für die Annahme als Doktorandin und Unterstützung meiner Promotion und Dr. T. Ohl für die intensive Betreuung meiner Arbeit und Hilfe bei physikalischen Problemen. Ferner danke ich den Mitgliedern der Darmstädter Arbeitsgruppe für Hochenergiephysik für die vielen interessanten Gespräche. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. J. Reuter für die moralische Unterstützung. Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Großmutter bedanken, die mir durch ihre Unterstützung mein Studium ermöglicht haben.

Lebenslauf

Heike Pieschel
Frankfurter Landstr. 182
64291 Darmstadt
Tel.: (06151) 376577

Persönliche Daten

Geburt	4. August 1972 in Frankfurt am Main
Eltern	Horst Pieschel, Studiendirektor Ingeborg Pieschel, Hausfrau
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

Ausbildungsdaten

1978 - 1982	Geschwister-Scholl-Schule in Steinbach.
1982 - 1991	Altkönigschule in Kronberg Abitur 1991 mit der Gesamtnote 1.1
1991-1997	Physikstudium an der Technischen Universität Darmstadt.
April 1995	Aufnahme in die Arbeitsgruppe Prof. Dr. Manakos. Arbeitsschwerpunkt: Quantenfeldtheorie, insbesondere elektroschwaches Standardmodell und Strahlungskorrekturen. Leitung von Übungsgruppen in der theoretischen Physik.

- Nov. 1997 Abschluß als Diplomphysikerin mit der Gesamtnote „sehr gut“.
Thema der Diplomarbeit: Produktion von drei Eichbosonen in hochenergetischen e^+e^- -Kollisionen.
- Teilnahme an der 29. Herbstschule für Hochenergie-Physik in Maria Laach.
- ab Jan. 1997 Doktorandin in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Manakos.
Promotionsvorhaben: Korrekturen höherer Ordnung zur Abstrahlung harter Photonen in Elektron-Positron Kollisionen bei hohen Energien.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Es wurde bislang kein weiterer Promotionsversuch unternommen.

Darmstadt, im April 2002

(Heike Pieschel)