
Renormierung selbstkonsistenter Näherungen
in der Quantenfeldtheorie
bei endlichen Temperaturen

Vom Fachbereich Physik der
Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von

Dipl.-Phys. Hendrik van Hees
aus Darmstadt

Darmstadt 2000
D 17

Referent: Prof. Dr. W. Nörenberg
Korreferenten: Prof. Dr. J. Knoll
Prof. Dr. J. Wambach

Tag der Einreichung: 24. Oktober 2000
Tag der Prüfung: 20. November 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zusammenfassung	7
1.1	Die Aufgabenstellung	7
1.2	Zusammenfassung der Arbeit	9
1.3	Ausblick	13
2	Quantenfeldtheoretische Grundlagen	15
2.1	Statistische Ensembles	15
2.1.1	Zustände und Observable	15
2.1.2	Das Wechselwirkungsbild	16
2.1.3	Mehrpunktfunktionen auf der Kontur	18
2.2	Feynmanregeln für das thermodynamische Gleichgewicht	20
2.2.1	Das Entropieprinzip	21
2.2.2	Statistische Operatoren für das Gleichgewicht	21
2.2.3	Pfadintegrale	22
2.2.4	Zweipunkt–Greenfunktion im Gleichgewicht	26
2.2.5	Die Diagrammregeln der Störungstheorie	27
2.2.6	Feynmanregeln im Impulsraum	29
2.3	Thermodynamische Größen	32
2.3.1	Die Zustandsgrößen	32
2.3.2	Das ideale geladene Bosegas	33
2.3.3	Die Zustandssumme als Funktionaldeterminante	38
2.3.4	Das freie Fermigas	40
2.3.5	Zusammenfassung der Ergebnisse für ideale Gase	42
2.3.6	Thermodynamik von Eichfeldern	42
2.4	Renormierung bei endlichen Temperaturen	47
2.4.1	Renormierung im Vakuum	47
2.4.2	Allgemeine Regeln der BPHZ–Renormierung	52
2.4.3	Renormierung bei endlichen Temperaturen	56
3	Φ–Funktionalnäherungen	59

Inhaltsverzeichnis

3.1	Die exakten Bewegungsgleichungen	60
3.1.1	Das erzeugende Funktional	60
3.1.2	Anwendung auf die ϕ^4 -Theorie	65
3.2	Thermodynamische Zustandsgrößen und Φ -Funktional	66
3.3	Symmetrien	68
3.4	Φ -Funktionalnäherungen und Symmetrien	74
3.4.1	Symmetrieanalyse von Φ -Funktionalnäherungen	75
3.4.2	Die externen Vertexfunktionen	76
3.5	Einfachste Näherungen für das $O(N)$ -Modell	80
3.5.1	Die Hartreenäherung	80
3.6	Renormierung des Sunset-Diagramms	86
3.6.1	Die Näherung für das Vakuum	86
3.6.2	Renormierung des Sunset-Diagramms bei endlichen Temperaturen	89
3.7	Renormierung der vollen Näherung	90
3.7.1	Numerische Ergebnisse	92
4	Anwendung auf die Theorie der Vektormesonen	95
4.1	Abelsche Vektormesondominanzmodelle	95
4.1.1	Freie massive Vektorfelder	95
4.1.2	Wechselwirkende Theorie	99
4.1.3	Ankopplung der Photonen	106
4.1.4	Die klassischen Bewegungsgleichungen	107
4.2	Anpassung der Parameter	108
4.2.1	Die ρ -Selbstenergie	108
4.2.2	Der Formfaktor	109
4.3	Beimischung des ω -Mesons	110
4.4	Die ρ -Selbstenergie bei endlichen Temperaturen	112
4.4.1	Störungsrechnung	112
4.4.2	Selbstkonsistente Behandlung des π - ρ -Systems	115
A	Wichtige Formeln	125
A.1	Formeln zur Auswertung von Vakuumfeynmanintegralen	125
A.1.1	Standard-Feynman-Integrale	125
A.1.2	Laurententwicklung der Γ -Funktion	126
A.1.3	Feynmans Parametrisierung	126
A.2	Freie Real-Time-Propagatoren für skalare Bosonen	126
A.3	Transversale Vierertensoren	127
A.4	Einige perturbative „thermische“ Feynmanintegrale	127
A.5	Exakte Propagatoren und Selbstenergien	128

Inhaltsverzeichnis

A.6	Einige Vakuumdiagramme	128
A.7	Tadpoles	130
A.8	Numerisches Integrationsverfahren	131
B	Feynmanregeln	133
B.1	Herleitung der Feynmanregeln im Raumzeitbereich	133
B.2	Das abelsche Vektormesondominanzmodell	136
C	Fermionische kohärente Zustände	139
D	Photonen- und Dileptonenproduktionsraten	145
D.1	Photonenproduktionsrate	145
D.2	Die Dileptonenproduktionsrate	148
	Literaturverzeichnis	151

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Zusammenfassung

1.1 Die Aufgabenstellung

Die relativistische Quantenfeldtheorie ist das Ergebnis des Versuchs, die (spezielle) Relativitätstheorie mit den Prinzipien der Quantentheorie in Einklang zu bringen. Es zeigt sich nämlich, daß die Quantentheorie unter Berücksichtigung der relativistischen Raumzeitstruktur zwangsläufig eine Vielteilchentheorie ist. Außer in dem Fall wechselwirkungsfreier Teilchen ist die Teilchenzahl nämlich i.a. keine Erhaltungsgröße. An die Stelle der Teilchenzahl treten als Erhaltungsgrößen die verschiedenen Ladungsquantenzahlen (elektrische Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl, Strangeness usw.).

Aufgrund dieser Nichterhaltung der Teilchenzahl ist nicht nur ein Einteilchenbild unmöglich; man ist bereits für einfache Probleme auf Näherungsmethoden angewiesen. Es kommt insbesondere zu Problemen mit divergenten Integralen, die bei der „naiven“ Auswertung der Störungsreihe in höherer als der führenden Ordnung auftreten. Die Integrale divergieren bei hohen Impulsen bzw. kleinen Abständen (UV-Divergenzen). Eng damit verknüpft ist die mathematische Schwierigkeit, die Produkte von Feldoperatoren zum gleichen Raumzeitpunkt eindeutig zu definieren.

Diese Probleme werden durch die Renormierungstheorie gelöst, indem die Parameter der Theorie, also die Massen der Teilchen und die Kopplungskonstanten der Wechselwirkungen, in jeder Ordnung der Störungstheorie an die gemessenen Parameter angepaßt werden. Es zeigt sich dabei, daß die Parameter von der Energieskala abhängen, bei der ihre experimentellen Werte bestimmt werden. Ein Beispiel für dieses „Gleiten der Kopplungskonstante“ stellt die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante dar, die bei niedrigen Energien, wie sie sich z.B. durch Anpassung an gemessene Atomspektren ergibt, den Wert von etwa $1/137$ besitzt. Die Auswertung von Streuexperimenten bei hohen Energien (meist wird als Energieskala die Masse der W -Bosonen $m_W \approx 80.4 \text{ GeV}c^2$ verwendet) ergibt Werte um etwa $1/128$.

Es zeigt sich, daß eine bestimmte Klasse von Quantenfeldtheorien existiert, bei der endlich viele Parameter ausreichen, um alle Divergenzen auf diese Weise zu physikalisch zu interpretieren und zu beseitigen. Solche Theorien werden renormierbar genannt.

Ein wesentliches Konzept bei der Aufstellung konkreter Modelle sind die allgemeinen Symmetrieprinzipien, die zum einen die Symmetrie von Raum und Zeit, zum anderen die Symmetrie der Bewegungsgleichungen bei Transformationen der Felder untereinander betreffen. Da die Symmetrien nach dem Noethertheorem Erhaltungssätze zur Folge haben, läßt sich aus experimentellen Daten auf die dazugehörige Symmetriegruppe schließen. Wird einem quantenfeldtheoretischen

Modell eine Symmetrie zugrundegelegt, bedeutet dies zum einen eine Einschränkung für mögliche Wechselwirkungsterme, zum anderen aber auch für die sich möglicherweise ergebenden divergenten Terme, die bei der Auswertung der Störungsreihe auftreten. In vielen Fällen kann durch solche Restriktionen aufgrund einer Symmetrie eine oberflächlich nicht renormierbare Theorie renormierbar werden. Dies ist z.B. in der QED der Fall, wo die Streuamplitude für die Delbrückstreuung, also der Vierphotonenvertex, aufgrund der zugrundeliegenden Eichsymmetrie konvergent ist.

Für die Behandlung von Vektormesonen erweist sich die Eichtheorie als das Mittel der Wahl. Die Analyse der Poincarésymmetrie der Raumzeit zeigt, daß masselose Vektormesonen notwendig Eichfelder sind. Das bedeutet, daß eine naive Behandlung des Vektorpotentials zur Propagation unphysikalischer Freiheitsgrade führt, die die Kausalität und Unitarität der S -Matrix verletzt, da die unphysikalischen Freiheitsgrade bei der Quantisierung zu Zuständen mit negativer „Norm“ führen. Wie aber unter anderem die Arbeiten von 't Hooft und Veltman zeigen, lassen sich diese Probleme dadurch vermeiden, daß Vektorteilchen als Eichbosonen einer abelschen oder nichtabelschen Eichsymmetrie behandelt werden. Auch im Fall von massiven Vektorbosonen erfordert die Renormierbarkeit der Theorie und die Forderung nach „Physikalität“ ihrer Freiheitsgrade die Behandlung als Eichboson.

Als einer der größten Erfolge dieser quantenfeldtheoretischen Methoden kann die Entwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen angesehen werden. Zum einen gibt es bis heute keine experimentellen Hinweise für eine Gültigkeitsgrenze des Standardmodells, zum anderen stellt es mit dem einheitlichen Prinzip der Eichsymmetrien aller fundamentalen Wechselwirkungen ein in sich konsistentes theoretisches Modell der Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen dar.

Dieser Erfolg beruht aber nicht zuletzt auf der Entwicklung analytischer und numerischer Methoden zur Berechnung von Feynmandiagrammen. Es seien beispielhaft nur die von 't Hooft und Veltman entwickelte dimensionale Regularisierung und die damit verbundene Vereinfachung bei der Renormierung der nichtabelschen Eichtheorien erwähnt.

Weitere interessante Aspekte treten in den Vordergrund, wenn man versucht, die Fragen der Vielteilchendynamik der Teilchen mit Hilfe der Quantenfeldtheorie zu behandeln. Bei der Untersuchung von Schwerionenstößen zeigt sich nämlich unter anderem, daß die Hadronen in Materie eine Veränderung ihrer Einteilcheneigenschaften (insbesondere ihrer Massen und Zerfallsbreiten) gegenüber ihren „Vakuumeigenschaften“ erfahren. Ein direkter Hinweis darauf ist z.B. die gemessene Erhöhung der Produktionsrate von Elektron–Positron–Paaren („Dileptonen“) bezogen auf die am Stoß beteiligten Nukleonen bei invarianten Paarmassen im Bereich von 300 MeV bis 600 MeV im Vergleich zu Stößen einzelner Nukleonen. Die Erklärung dafür wird unter anderem in der Veränderung der Massen und Breiten der Vektor–Mesonen gesucht. Diese ist im Rahmen der Vektormesondominanzmodelle wiederum auf die Modifikation der Pioneneigenschaften in Materie zurückzuführen. Die Pionen koppeln stark an Baryonenresonanzen und erhalten dadurch im Medium eine große Zerfallsbreite, die sich wiederum entscheidend auf die spektrale Verteilung des ρ -Mesons auswirkt.

Für eine theoretische Beschreibung dieser Phänomene ist also eine konsistente Behandlung von breiten Resonanzen von entscheidender Bedeutung. Die Propagatoren der Störungstheorie sind allerdings immer die freier Teilchen, die ein scharfes Massenspektrum besitzen. Wie das eben angedeutete Beispiel des Pions zeigt, können im Vakuum stabile Teilchen in Materie aufgrund von Streuprozessen, die durch starke Kopplungen unter den Teilchen hervorgerufen werden, alle Charakteristika breiter Resonanzen aufweisen.

Bei der quantenfeldtheoretischen Behandlung der Mediummodifikationen von Teilcheneigen-

schaften, die übrigens nicht nur die oben besprochenen Einteilchenparameter betreffen, sondern auch die Kopplungskonstanten der beteiligten Wechselwirkung, ist es entscheidend, daß die Renormierung sämtlicher in das Modell eingehender Parameter auf experimentelle Daten im Vakuum erfolgt. Ihre Mediummodifikationen müssen dann ohne weitere Willkür aus der durch die renormierte Lagrangedichte vorgegebenen Dynamik berechnet werden. Es ist nämlich physikalisch keineswegs klar, wie eventuelle Renormierungsbedingungen an Teilchenparameter im Medium zu stellen wären.

Die störungstheoretische Analyse diese Problems zeigt, daß tatsächlich in jeder Ordnung der Störungstheorie die Renormierung der Vakuumdiagramme ausreicht. Die Modifikationen der Parameter aufgrund der Vielteilchenprozesse in Materie ist ohne weitere Renormierung endlich, so daß Voraussagen über diese Änderungen gegenüber den „Vakuumeigenschaften“ der beteiligten Teilchen ohne Willkür durch das zugrundeliegende Modell bestimmt sind.

Allerdings erfordert die Diskussion des Verhaltens breiter Resonanzen zumindest eine selbstkonsistente Behandlung im Sinne einer Dysonresummation des Propagators, da die Störungstheorie mit Propagatoren freier Teilchen formuliert wird, die stets Teilchen mit scharf definierten Massen beschreiben. Es ist nicht von vornherein klar, ob auch für solche über die Störungstheorie hinausgehenden Näherungsverfahren eine Renormierung im Vakuum ausreicht. Diese Fragestellung, insbesondere auch im Hinblick auf die Anwendung auf die Eigenschaften der Vektormesonen in Materie, stellt die Hauptmotivation für diese Arbeit dar.

1.2 Zusammenfassung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, aufbauend auf dem von Luttinger, Ward, Baym und Kadanoff entwickelten sogenannten Φ -Funktionalformalismus, Konzepte zur theoretischen Behandlung solcher Vielteilcheneffekte zu entwickeln.

Dazu werden in *Kapitel 2* die benötigten quantenfeldtheoretischen Grundlagen rekapituliert. Wir verwenden die auf Schwinger und Keldysh zurückgehende Formulierung der Vielteilchenquantenfeldtheorie, die auf der Einführung einer geschlossenen Zeitkontur basiert. Diese Darstellung weist im Fall des thermodynamischen Gleichgewichts, auf das wir uns in dieser Arbeit beschränken, gegenüber dem auf Matsubara zurückgehenden Imaginärzeitformalismus den Vorteil auf, daß er direkt zur Berechnung des retardierten Propagators führt, ohne daß insbesondere bei numerischen Rechnungen problematische analytische Fortsetzungen notwendig sind.

Es werden in diesem Kapitel die Pfadintegralmethoden unter Verwendung der Zeitkontur vollständig entwickelt, wodurch eine elegante Formulierung der Φ -Funktionalmethode in Kapitel 3 vorbereitet wird. Diese Methoden werden anhand der wohlbekannteren Thermodynamik relativistischer idealer Gase veranschaulicht. Insbesondere werden die für die thermodynamischen Größen wichtigen „Normierungsfaktoren“ der Pfadintegrale mit Hilfe einer einfachen Zeitgitterrechnung systematisch behandelt.

Wir widmen weiter einen Abschnitt den Renormierungsmethoden, die in dieser Arbeit zur Anwendung kommen. Es ist entscheidend für die Analyse der oben angedeuteten Fragestellung bzgl. der Mediummodifikationen von Teilchen, daß die Renormierung vollständig im Vakuum erfolgt. Die renormierte Theorie wird also durch die Vakuumeigenschaften der beschriebenen Teilchen vollständig bestimmt. Im Fall einer renormierbaren Quantenfeldtheorie bedeutet die Renormierung die Anpassung der Massen und Kopplungskonstanten der Teilchen im Vakuum, während die Berechnung von Mediummodifikationen keinerlei zusätzliche Willkür mehr erfor-

dert: Die Gegenterme, die erforderlich sind, um für die Lagrangedichte in jeder Ordnung der Störungstheorie einen wohldefinierten endlichen Ausdruck zu erhalten, sind also unabhängig von Temperatur und Dichte des Systems im Vakuum festgelegt. Wir fassen daher kurz die Ergebnisse des als BPHZ–Renormierung bekannten Verfahrens zusammen, weil dieses auch bei dem in dieser Arbeit entwickelten Renormierungsverfahren der selbstkonsistenten Näherungen und bei den numerischen Rechnungen zur Anwendung kommt.

In *Kapitel 3* werden die Φ –Funktionalmethoden systematisch mit Hilfe des Konturpfadintegrals begründet. Wie Baym gezeigt hat, ist die Herleitung selbstkonsistenter Näherungen aus einem Variationsprinzip notwendig und hinreichend dafür, daß die quantenstatistischen Erwartungswerte von Erhaltungsgrößen den Erhaltungssätzen genügen, sofern sie sich aus einer linear auf den Feldern operierenden Symmetriegruppe der klassischen Wirkung ergeben. Darunter fallen auch die raumzeitlichen Erhaltungsgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls.

Das exakte Φ –Funktional ergibt dabei ein geschlossenes Integralgleichungssystem für das mittlere Feld und die Zweipunktgreenfunktion der Theorie. Die Selbstenergien ergeben sich dabei als Funktionale der exakten Greenfunktion im Sinne einer Skelettdiagrammentwicklung, was einer Dysonresummation der Propagatorlinien der Störungstheorie entspricht. Da das exakte Φ –Funktional Gleichungen für das mittlere Feld und die exakte Greenfunktion liefert, respektieren diese Größen somit die aus Symmetrien folgenden Ward–Takahashi–Identitäten.

Dies ist für Näherungen des Φ –Funktionals im allgemeinen aber nicht der Fall. Als ein Ergebnis dieser Arbeit wird eine systematische Methode zur Symmetrieanalyse von Φ –Funktionalnäherungen vorgestellt. Es zeigt sich dabei, daß zwar die Divergenz der Erwartungswerte der lokalen erhaltenen Ströme, auch für die Näherung verschwindet und somit der Erwartungswert der dazugehörigen Ladung eine Erhaltungsgröße ist, aber die Ward–Takahashi–Identitäten für die Korrelationsfunktionen dieser Größen nicht erfüllt sind. Quantenstatistisch betrachtet bedeutet dies, daß die mittleren Erhaltungsgrößen zwar die Symmetrien respektieren, nicht aber ihre Korrelationen.

Der Grund dafür läßt sich auch auf andere Weise verstehen: Die Zweipunktfunction, die selbstkonsistent behandelt wird, beschreibt den „Zerfall“ der Einteilchenzustände aufgrund von Wechselwirkungen des betrachteten Teilchens mit dem Medium, in dem es sich befindet. In Näherungen des Φ –Funktionals wird jedoch der Fluß der Erhaltungsgröße in andere Zustände nicht vollständig berücksichtigt, da die Vertizes als punktförmig behandelt werden. Obwohl also an jedem Punktvertex die Erhaltungssätze respektiert werden, wird im allgemeinen die Symmetrie für Korrelationsfunktionen (feldtheoretisch durch die eigentlichen Selbstenergie– und Vertexfunktionen gegeben) verletzt.

Das bekannteste Beispiel für eine solche Verletzung der Symmetrie durch selbstkonsistente Näherungen stellt die Hartreenäherung des linearen $O(N)$ –Sigmamodells, das das einfachste chirale symmetrische Modell für die Pionen und das „Sigameson“ dar. Die chirale Symmetrie wird in dieser Theorie spontan und schwach explizit gebrochen, und die Symmetriegruppe des Grundzustandes ist im chiralen Limes $O(N - 1)$. Nach dem Goldstone–Theorem muß es im chiralen Limes der spontan gebrochenen Phase demnach $N - 1$ masselose Teilchen (Nambu–Goldstone–Bosonen) geben. Dies ist für die einfachste Φ –Funktional–Näherung, die der Hartree–Näherung entspricht, nicht der Fall. Die „Pionen“ sind infolgedessen im Rahmen dieser Näherungen auch im chiralen Limes nicht masselos, was die Verletzung der chiralen Symmetrie impliziert.

Ein wichtiges Resultat dieser Arbeit wird jedoch an diesem Beispiel bereits deutlich: Die auf der Φ –Funktionalmethode beruhenden Näherungen lassen sich durch Subtraktion von temperatur– und dichteunabhängigen Gegentermen renormieren. Dies wird durch die Entwicklung einer von

der im Rahmen der Störungstheorie angewendeten BPHZ-Methode inspirierten Methode zur Subtraktion der Subdivergenzen von Diagrammen ermöglicht. Wir zeigen, daß stets die Extraktion der reinen Vakuumsdiagramme und Subtraktion der in ihnen enthaltenen Divergenzen ausreicht, um den endlichen Beitrag des gesamten selbstkonsistenten Diagramms eindeutig durch Wahl der im Vakuum festzulegenden Renormierungsbedingungen zu bestimmen. Störungstheoretisch entspricht dies einer nichttrivialen Teilresummation der Gegenterme in beliebiger Ordnung. Es zeigt sich, daß die innere Konsistenz dieser Gegenterme durch die Φ -Funktionalmethode sichergestellt wird.

Wir werden jedoch auch zeigen, daß es stets möglich ist, eine effektive Wirkung aus dem genäherten Φ -Funktional zu definieren, die die Erhaltungssätze vollständig respektiert. Allerdings erzeugt dieses Funktional eine externe Selbstenergiefunktion, die im allgemeinen von der selbstkonsistent berechneten Selbstenergie verschieden ist. Im Fall des linearen Sigamodells in Hartree-Näherung führt diese Näherung des effektiven Potentials zur RPA-Resummation, von der in der Literatur bereits bekannt ist, daß sie zur Wiederherstellung der chiralen Symmetrie führt. Unser Zugang liefert darüber hinaus den Nachweis, daß dieses Verfahren zur „Restauration der Symmetrie“ für alle Näherungen der betrachteten Art führt. Diese Möglichkeit, symmetrienerhaltende Näherungen auch für die Korrelationsfunktionen der Vielteilchentheorie zu konstruieren, wurde bereits durch Kadanoff und Baym ohne Rückgriff auf die Φ -Funktionalmethode angegeben.

Wir schließen das Kapitel mit der detaillierten Untersuchung des Renormierungsproblems am Beispiel der ϕ^4 -Theorie, die wir mit der entwickelten Methode bis zur 2. Ordnung der Φ -Funktionalnäherung behandeln, so daß die selbstkonsistente Näherung für die Selbstenergie durch eine Summe aus „Tadpole-“ und „Sunsetdiagramm“ gegeben ist. Es zeigt sich, daß durch die Φ -Funktionalmethode die Konsistenz der zur Renormierung der überlappenden Divergenzen notwendigen Gegenterme gesichert wird.

Anhand dieses Beispiels wird auch gezeigt, daß sich die selbstkonsistenten Näherungen unter Verwendung dieses Renormierungsverfahrens numerisch auswerten lassen.

In *Kapitel 4* wenden wir uns schließlich der Behandlung der Vektor-Mesonen zu, wobei wir uns auf das einfachste abelsche Vektordominanzmodell beschränken wollen (für eine mögliche nichtabelsche Erweiterung des Modells, das alle drei Vektormesonen beinhaltet, vgl. meine Diplomarbeit [Hee97]).

Wir rekapitulieren die Bedeutung der Ward-Takahashi-Identitäten für Eichtheorien, die hier nicht nur Ausdruck des Zusammenhangs zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen sind, sondern auch sicherstellen, daß keine unphysikalischen Freiheitsgrade die Konsistenz des Modells zerstören. Wie wir zeigen werden, gilt dies auch für die abelsche Theorie mit massiven Vektormesonen, da eine renormierbare Theorie nur möglich ist, wenn das massive Vektormeson als Eichboson behandelt wird. Im Gegensatz zum nichtabelschen Fall benötigen wir allerdings keinen Higgsmechanismus zur Erzeugung der Masse. Es genügt die Einführung eines skalaren Geistfeldes, das zusammen mit den Faddeev-Popov-Geistern die spuriosen Moden des Eichfeldes kompensiert. Diese Geistfelder sind aber wegen der Kommutativität der Eichgruppe wechselwirkungsfrei und treten daher nicht bei der Berechnung von Φ -Funktionalnäherungen in Erscheinung, was das Problem der Verletzung der Eichinvarianz durch die Näherungen erheblich vereinfacht.

Die Anwendung der Φ -Funktionalmethode auf Eichtheorien wird nämlich dadurch erheblich erschwert, daß sie die Ward-Takahashi-Identitäten der Eichsymmetrie ab dem Zweipunktniveau verletzen. Da diese Propagatoren in der selbstkonsistenten Rechnung selbst in die Gleichungen

eingehen müssen, ergeben sich charakteristische Probleme mit den spuriosen Moden.

Wir können dieses Problem nicht grundsätzlich lösen, weil es für die selbstkonsistenten Näherungen keinen Entwicklungsparameter gibt, der eine systematische Formulierung für symmetrienerhaltende Näherungen garantiert, wie es in der Störungstheorie die Anzahl der Schleifen der berücksichtigten Diagramme darstellt, was einer Entwicklung der störungstheoretischen eigentlichen Vertexfunktionen nach Potenzen von \hbar entspricht.

Um die Verletzung der Eichsymmetrie durch die Näherung möglichst klein zu halten, werden wir zunächst in der Wahl der Eichung eingeschränkt. Wir können die Massen der spuriosen Moden beliebig groß wählen, wie das Beispiel der Klasse der manifest renormierbaren 't Hooftschen R_ξ -Eichungen zeigt, bei der die spuriosen Moden die Massenquadrate ξm_ρ^2 besitzen. Für $\xi \rightarrow \infty$ gehen die R_ξ -Eichungen in die unitäre Eichung über, in der keine spuriosen Moden mehr vorkommen.

Die von Näherungen des Φ -Funktional generierte Dysongleichung garantiert jedoch nicht, daß der Fluß des zur Eichtheorie gehörigen erhaltenen Stromes vollständig berücksichtigt wird. Dies äußert sich darin, daß der Polarisationsensor für das ρ -Meson für diese Näherung nicht vierdimensional transversal ist und somit die Ward-Takahashi-Identität für den Polarisationsensor verletzt wird. Es muß daher von Hand auf die vierdimensional transversalen Freiheitsgrade des Polarisationsensors projiziert werden. Durch die Verletzung der Eichsymmetrie ergeben sich dabei auch numerische Schwierigkeiten am Lichtkegel. Erfahrungen mit klassischen Transportnäherungen (Fokker-Planck-Gleichung) zeigen aber, daß die Korrekturen des internen Polarisationsensors durch die Leitersummation für die rein räumlichen Komponenten i.a. klein sind. Daher verwenden wir ausschließlich diese Komponenten des selbstkonsistenten Polarisationsensors zur Definition der vierdimensional transversalen Komponenten, wodurch auch die numerischen Probleme am Lichtkegel vermieden werden.

Um in einer möglichst einfachen selbstkonsistenten Modellrechnung den Einfluß der Breite des Pions im Medium auf die ρ -Mesonenparameter zu studieren, haben wir auf eine Ankopplung der Baryonenresonanzen verzichtet. Die Breite der Pionen wird in dieser Modellrechnung durch die Vierpionenkopplung generiert, die in einer bosonischen Eichtheorie ohnehin notwendig ist, um die Renormierbarkeit des Modells zu gewährleisten.

Wie die numerische Auswertung des Modells zeigt, geht bei endlichen Temperaturen das scharfe Schwellenverhalten des ρ -Mesonenpolarisationsensors erwartungsgemäß aufgrund der Pionenbreite in Materie vollständig verloren. Dies entspricht der physikalischen Situation, daß bei endlichen Temperaturen bei allen Energien reale Prozesse möglich sind, die auf die Wechselwirkung des durch den Propagator beschriebenen Teilchens an den übrigen Teilchen im „Wärmebad“ zurückzuführen sind.

Unter Annahme der Vektormesondominanz wurde aus dem selbstkonsistent berechneten ρ -Mesonenpolarisationsensor das Dileptonenspektrum gewonnen (vgl. Anhang D). Durch Sortieren der einzelnen Beiträge des Schleifenintegrals zum Polarisationsensor nach dem Vorzeichen der Energiekomponente der beteiligten Propagatoren lassen sich die einzelnen physikalischen Prozesse auflösen: Der Niederenergiebereich des Dileptonenspektrums wird von Bremsstrahlungsprozessen dominiert. Dieser Beitrag ist in der Störungsrechnung aufgrund des scharfen Schwellenverhaltens vollständig unterdrückt, also eine direkte Folge der endlichen Pionenbreiten im Medium. Der Vorteil der selbstkonsistenten Behandlung gegenüber der Verwendung von „effektiven Propagatoren“ in einem quasi störungstheoretischen Zugang liegt dabei darin, daß diese Bremsstrahlungsprozesse konsistent mit den Annihilationsprozessen behandelt werden. Dadurch wird der Landau-Pomeranchuk-Migdal-Effekt berücksichtigt. Diese Modellrechnung zeigt, daß

eine signifikante Erhöhung der Dileptonenrate im Bereich unterhalb von $\sqrt{s} = 500 \text{ MeV}$ qualitativ durch die diskutierten Mediumeffekte erreicht werden kann.

Wie schon oben erwähnt, läßt sich zu jeder Φ -Funktionalnäherung eine nichtperturbative Näherung Γ_{eff} für die effektive Wirkung angeben, die die Ward-Takahashi-Identitäten erfüllt, vorausgesetzt man bestimmt das Φ -Funktional konsistent in einer bestimmten Schleifenordnung. Γ_{eff} wird durch die mittleren Felder und Propagatoren, die durch die Lösungen der Φ -Funktionalnäherung bestimmt sind, ausgedrückt. Die durch Γ_{eff} in der üblichen Weise durch Ableitung nach den mittleren Feldern generierten Vertexfunktionen erfüllen die Ward-Takahashi-Identitäten. Diese Vertexfunktionen bezeichnen wir als externe Größen, weil der externe Propagator nicht selbstkonsistent aus einer Dysongleichung bestimmt wird. Vielmehr sind die inneren Linien der externen Selbstenergiefunktionen durch die Lösung der von der Φ -Funktionalnäherung bestimmten Dysongleichung gegeben, die wir in diesem Zusammenhang auch als interne Propagatoren bezeichnen. Die Lösung der zur Φ -Funktionalnäherung gehörigen Feldgleichung ist per constructionem hingegen auch stationärer Punkt des Funktionals Γ_{eff} . Dies erklärt, warum die Mittelwerte der Noetherströme erhalten sind, die Ward-Takahashi-Identitäten für die höheren Vertexfunktionen aber verletzt werden.

Die Berechnung des externen ρ -Polarisationstensors erfordert die Lösung einer Bethe-Salpetergleichung in Leiternäherung, die den zum selbstkonsistenten Propagator im Sinne der Ward-Takahashi-Identitäten gehörigen Dreipunktvertex bestimmt. Es ist dabei entscheidend für diese Konsistenz, daß der in die Bethe-Salpetergleichung eingehende Kern, seiner „Topologie“ nach ein Vierervertex, seinerseits als zweite Ableitung des Φ -Funktionals definiert werden muß. Einzig und allein dieser Kern stellt die Konsistenz des externen Propagators mit den Ward-Takahashi-Identitäten sicher, und diese kann auch nur durch die Resummation aller Leiterdiagramme für den Dreiervertex erreicht werden. Analoge Bemerkungen gelten natürlich auch für die höheren Vertexfunktionen.

Selbst wenn die Leiterreihe numerisch aufsummiert werden könnte, ergäbe sich nun aber immer noch ein Problem mit der thermodynamischen Konsistenz. Zwar ergibt sich durch Schließen des externen Propagators mit einer Propagatorlinie eine unendliche Summe von zweiteilchenirreduziblen geschlossenen Diagrammen, die damit die geforderte Topologie der Φ -Funktional-Diagramme besitzen, aber der externe Propagator erfüllt nicht die zu diesem Φ -Funktional gehörige Dysongleichung, und die durch die geschlossenen Diagramme gegebene Näherung für das thermodynamische Potential wird nicht am stationären Punkt der dynamischen Größen berechnet. Dies war zu erwarten, da ja Baym gezeigt hat, daß eine selbstkonsistente Näherung, die gleichzeitig die Erhaltungssätze für die Erwartungswerte der Ströme als auch die thermodynamische Konsistenzforderung erfüllt, notwendig vom Typ einer Φ -Funktionalnäherung sein muß.

Bei der numerischen Bestimmung der Φ -Funktionalnäherung bleibt auch das Problem mit den unphysikalischen Moden ungelöst, die dazu führen können, daß numerische Instabilitäten auftreten. In diesem Fall könnte dann prinzipiell die Leitersumme nicht gebildet werden.

1.3 Ausblick

Die in dieser Arbeit bereitgestellten Mittel zur Formulierung und Lösung selbstkonsistenter Näherungen, die insbesondere die endliche Breite von Teilchen und Resonanzen in Materie berücksichtigt, lassen sich auf viele Problemstellungen der Vielteilchenphysik anwenden.

So ist eine Anwendung auf realistische hadronische Modelle zur Dileptonenproduktion möglich, die neben weiteren mesonischen Freiheitsgraden (z.B. ω und ϕ) insbesondere auch die stark an die Pionen koppelnden Baryonenresonanzen berücksichtigen. Dabei stellt die Φ -Funktionalmethode die konsistente Berücksichtigung aller Effekte im Rahmen der Näherung sicher: Das Hinzufügen eines Feldfreiheitsgrades zum Modell modifiziert durch die Selbstkonsistenz der Näherung auch alle anderen Freiheitsgrade, und zwar so, daß die thermodynamische Konsistenz sichergestellt wird.

Wie die Betrachtung des $O(N)$ -Modells gezeigt hat, ist die Methode insbesondere auch zur Untersuchung von Phasenübergängen geeignet, so daß auch eine Anwendung auf chirale Modelle interessant ist.

Die Erfahrungen mit dem abelschen Eichmodell für das π - ρ -System können auf nichtabelsche Eichmodelle erweitert werden, wobei insbesondere die Anwendung auf das Quark-Gluon-Plasma und die Beschreibung von Phänomenen wie „color-conductivity“ interessant sein dürfte.

Für die QCD gibt es seit langem viele Ansätze, zu eichinvarianten selbstkonsistenten Näherungen zu gelangen. Besonderen Erfolg versprach das „Hart Thermal Loop“-Verfahren, das auf einer Trennung der Skalen in harte und weiche Freiheitsgrade beruht¹. Die Anwendbarkeit dieser Ansätze ist jedoch auf das perturbative Regime der QCD beschränkt, und alle Bemühungen, über eine Beschreibung der weichen Moden jenseits eines mittleren Feldes, d.h. einer klassischen Feldnäherung, hinauszugehen, sind bislang erfolglos in der Aufgabe geblieben, die Stromerhaltung, geschweige denn Eichkovarianz, auf dem Propagatorniveau zu gewährleisten. Das hier vorgeschlagene Projektionsverfahren garantiert zumindest die Stromerhaltung des internen Polarisationsensors und könnte daher auch bei diesen Problemen zu weiteren Fortschritten verhelfen.

Hinsichtlich der numerischen Methoden setzt der hohe numerische Aufwand der Erweiterung auf Näherungen, die über das Zweipunktniveau des Φ -Funktionals hinausgehen, allerdings Grenzen. So ist schon die numerische Lösung der Leitergleichungen, die zur Bestimmung des externen Propagators mit dem in Anhang B beschriebenen Näherungsverfahren praktisch unmöglich. Hier ist eine einfache Parametrisierung des dysonresummierten Propagators, der eine analytische oder stark vereinfachte numerische Behandlung der Diagramme ermöglicht und Anwendung des Rayleigh-Ritzschen Näherungsverfahrens denkbar.

Hinsichtlich einer Behandlung von Nichtgleichgewichtszuständen stellt die Φ -Funktionalmethode ein wichtiges Hilfsmittel zur Aufstellung von Transportgleichungen für breite Resonanzen dar, deren Beschreibung eine über die üblichen Quasiteilchennäherungen hinausgehende Näherung erfordert².

¹Von der umfangreichen Literatur seien für die Grundlagen nur [FT92], [BP92a, BP92b] und [JN93] zitiert. In [BI93, BI94, BI95] wird der Zusammenhang mit klassischen Transportgleichungen (Fokker-Planck-Gleichungen) hergestellt.

²vgl. [IKV99, IKV00, Leu00]

Kapitel 2

Quantenfeldtheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die allgemeinen Grundlagen der Quantenstatistik in der Formulierung der relativistischen Quantenfeldtheorie zusammengestellt werden.

Obwohl sich die Resultate dieser Arbeit vor allem auf den Fall des thermodynamischen Gleichgewichts beziehen, wollen wir zunächst den allgemeinen Formalismus der von Schwinger und Keldysh in [Sch61, Kel64] eingeführten Realzeitkontur betrachten. Dieser Formalismus bietet sich nämlich auch für die Behandlung des Gleichgewichtsfalls an, da er sowohl die Berechnung dynamischer Eigenschaften von Teilchen in dichter, heißer Materie als auch der Zustandsgrößen im Falle des thermodynamischen Gleichgewichts erlaubt, und zwar auf Grundlage der n -Punkt-Greenschen Funktionen auf der Zeitkontur.

2.1 Statistische Ensembles

Ein Vielteilchensystem erlaubt i.a. aufgrund seiner Komplexität keine exakte quantentheoretische Behandlung. Vielmehr muß auf bestimmte für ein gegebenes Problem charakteristische kollektive, makroskopische Größen zurückgegriffen werden, die durch die Mittelwerte der entsprechenden mikroskopischen Größen definiert sind. Dies geschieht durch die Einführung geeigneter Gibbsscher Ensembles des Vielteilchenproblems.

2.1.1 Zustände und Observable

Ein Quantensystem wird allgemein durch seinen Zustandsraum, also den projektiven Raum eines separablen Hilbertraums und die durch ein System von Feldoperatoren erzeugte Operatoralgebra, charakterisiert.

Ein Zustand ist durch einen positiv semidefiniten Operator \mathbf{R} mit Spur 1, den *statistischen Operator*, definiert. Bezeichnet $|\psi\rangle$ einen beliebigen normierten Vektor, also den Repräsentanten eines reinen Zustands, der einer vollständigst möglichen Charakterisierung des Systems entspricht, so ist die Wahrscheinlichkeit, diesen bei Messung der entsprechenden Observable vorzufinden, durch

$$P_{\mathbf{R}}(\psi) = \langle \psi | \mathbf{R} | \psi \rangle \quad (2.1)$$

gegeben. Wie man leicht durch Entwicklung nach einem beliebigen vollständigen Orthonormal-

system sieht, läßt sich dies auch durch die Gleichung

$$P_{\mathbf{R}}(\psi) = \text{Tr}(\mathbf{R}|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (2.2)$$

ausdrücken. Damit ordnet sich der Spezialfall des reinen Zustands vollständig in den allgemeinen Fall unter. Ein reiner Zustand liegt nämlich genau dann vor, wenn der statistische Operator ein *Projektionsoperator* ist.

Betrachten wir nun eine beliebige Observable O , die durch den Operator \mathbf{O} repräsentiert wird. Ist ihre Spektraldarstellung

$$\mathbf{O} = \int do o|o\rangle\langle o|, \quad (2.3)$$

so ist offenbar der Erwartungswert derselben durch

$$\langle\mathbf{O}\rangle_{\mathbf{R}} = \int do oP_{\mathbf{R}}(|o\rangle) = \text{Tr}(\mathbf{O}\mathbf{R}) \quad (2.4)$$

gegeben.

Die Dynamik des Systems wird durch eine nach unten beschränkte Observable, den *Hamiltonoperator* charakterisiert. Die Zeitentwicklung ist dabei nur bis auf eine unitäre Transformation festgelegt. Die beobachtbaren Größen, also quantenstatistische Mittelwerte von Observablen, sind nämlich unitär äquivalent, d.h. invariant unter unitären Transformationen. Für allgemeine Betrachtungen bietet sich das *Heisenbergbild* an. Dieses wird dadurch definiert, daß die Zustände zeitunabhängig sind und die Observablen der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{O}(\phi, t) = \frac{1}{i}[\mathbf{O}(\phi, t), \mathbf{H}]_+ + \partial_t\mathbf{O}(\phi, t) \quad (2.5)$$

genügen. Dabei bezieht sich ∂_t auf die explizite Zeitabhängigkeit des Operators.

Für den statistischen Operator gilt im Heisenbergbild definitionsgemäß die *von Neumann-Gleichung*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R} = \frac{1}{i}[\mathbf{H}, \mathbf{R}]_+ + \partial_t\mathbf{R} = 0. \quad (2.6)$$

Speziell im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn also keine explizite Zeitabhängigkeit des statistischen Operators vorliegt, vertauscht derselbe mit dem Hamiltonoperator. Er muß also in diesem Fall ein Funktional der Erhaltungsgrößen des Systems sein.

2.1.2 Das Wechselwirkungsbild

Aufgabe der Quantenstatistik ist es, aus einem gegebenen Anfangszustand die aufgrund des Hamiltonoperators bestimmte Dynamik des Systems zu berechnen. Dies ist im allgemeinen Fall einer Quantenfeldtheorie wechselwirkender Teilchen nicht in geschlossener Form möglich, so daß wir auf die Störungsrechnung als Ausgangspunkt angewiesen sind. Wir gehen daher zum Wechselwirkungsbild über, das dadurch charakterisiert ist, daß sich die Feldoperatoren nach dem „ungestörten“ Hamiltonoperator \mathbf{H}_{I0} gemäß der Gleichung

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \mathbf{A}_I(t, t_0)\phi_I(t_0, \vec{x})\mathbf{A}_I^\dagger(t, t_0) \text{ mit } \mathbf{A}(t, t_0) = \mathcal{T}_c \exp \left[+i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_{I0}(t') \right] \quad (2.7)$$

und die statistischen Operatoren nach dem „Störhamiltonoperator“ \mathbf{H}_{IS} gemäß

$$\mathbf{R}_I[\phi_I(t), t] = \mathbf{C}_I(t, t_0)\mathbf{R}_I[\phi_I(t_0), t_0]\mathbf{C}_I^\dagger(t, t_0) \text{ mit } \mathbf{C}_I(t, t_0) = \mathcal{T}_c \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_{IS}(t') \right] \quad (2.8)$$

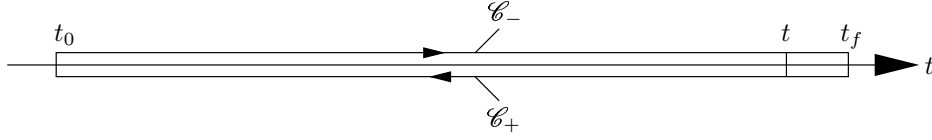


Abbildung 2.1: Die Schwinger–Keldysh-Kontur, deren beide Zweige wir mit \mathcal{C}_- (chronologische Zeitordnung) bzw. \mathcal{C}_+ (antichronologische Zeitordnung) bezeichnen. Diese gerichtete Kurve entlang der reellen Zeitachse legt die Zeitordnung der Operatoren in (2.10) fest, wenn man sich alle Zeiten auf den beiden Zweigen entsprechend der Pfeile angeordnet denkt.

zeitlich entwickeln. Das Symbol \mathcal{T}_c steht für die chronologische Zeitordnung der Operatoren, d.h. bei der Entwicklung der Exponentialfunktion ist die Operatorordnung mit von rechts nach links wachsenden Zeitargumenten unter dem Integral zu wählen. Bei fermionischen Feldoperatoren schließt dieses Ordnungssymbol die Signatur der zu der Umordnung benötigten Permutation ein. Der gesamte Hamiltonoperator ist durch $\mathbf{H}_I = \mathbf{H}_{I0} + \mathbf{H}_{IS}$ gegeben.

Betrachten wir nun eine beliebige, von zunächst nur einem Zeitargument abhängige Observable $\mathbf{O}_I(t)$ (z.B. die fundamentalen Feldoperatoren). Dabei gehen wir davon aus, daß die Zeitentwicklungsgleichung (2.7) in analytischer Form lösbar ist. Das ist für die relativistische Quantenfeldtheorie der Fall, sofern man für H_{I0} den „wechselwirkungsfreien Hamiltonoperator“ zugrunde legt. Im allgemeinen wird dann die Bewegungsgleichung (2.8) für den statistischen Operator nicht geschlossen lösbar sein. Daher sind wir auf die Anwendung störungstheoretischer Methoden angewiesen, die auf der Entwicklung in asymptotische Reihen nach Potenzen der im Störhamiltonoperator enthaltenen Kopplungskonstanten beruht (*zeitabhängige Störungstheorie*).

Wir erweitern diese Methode auf die Berechnung von Erwartungswerten zeitabhängiger Operatoren. Wegen (2.8) und der zyklischen Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur gilt

$$\langle \mathbf{O}(t) \rangle_{\mathbf{R}} = \text{Tr}[\mathbf{R}_I(t) \mathbf{O}_I(t)] = \text{Tr}[\mathbf{R}_{I0} \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_0) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{C}_I(t, t_0)] \quad \text{mit } \mathbf{R}_{I0} = \mathbf{R}[\phi_I(t_0), t]. \quad (2.9)$$

Da sich bei der hermiteschen Konjugation in Operatorprodukten die Reihenfolge der Operatoren umkehrt, folgt daraus sofort die Gleichung

$$\langle \mathbf{O}(t) \rangle = \text{Tr} \left[\mathbf{R}_{I0} \mathcal{T}_a \left\{ \exp \left[+i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_{IS}(t') \right] \right\} \mathbf{O}_I(t) \mathcal{T}_c \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_{IS}(t') \right] \right\} \right]. \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{T}_a die antichronologische Zeitordnung, also die gegenüber \mathcal{T}_c umgekehrte Anordnung der Operatoren innerhalb des Produkts.

Nach einer von Schwinger[Sch61] und Keldysh[Kel64] eingeführten Technik läßt sich dieser Ausdruck insgesamt durch eine Operatorordnung beschreiben, die durch die Einführung einer Zeitkontur gegeben ist. Diese Zeitkontur verläuft vom Anfangszeitpunkt t_0 bis zu einer Zeit $t_f \geq t$ und wieder zurück zu t_0 (s. Abb. 2.1).

Unter Verwendung dieser Kontur können wir (2.10) in der Form

$$\langle \mathbf{O}(t) \rangle_{\mathbf{R}} = \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_{I0} \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \left[\exp \left(-i \int_{\mathcal{C}} dt' \mathbf{H}_{IS}(t') \right) \right] \mathbf{O}_I(t) \right\} \quad (2.11)$$

schreiben, wobei das Integral als Wegintegral entlang der Kontur zu verstehen ist. Dadurch ergibt sich auch für die antichronologisch geordnete Kontur aufgrund der entsprechend entgegengesetzten Integrationsrichtung das korrekte Vorzeichen. Weiter bemerken wir, daß sich aufgrund der

Zeitordnung die Beiträge des Zeitintervalls $[t, t_f]$ von den beiden Zweigen der Kontur jeweils gegenseitig aufheben. Dabei sind aber noch keine Bedingungen an die Asymptotik der Felder gestellt. Diese sind der physikalischen Situation des Anfangszustandes entsprechend zu wählen.

Der Fall der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie im Vakuum ergibt sich für $\mathbf{R} = |0\rangle\langle 0|$. Das Ziel ist die Berechnung von S -Matrixelementen. Die Randbedingungen an die Felder bestimmen sich dabei aus der Forderung, daß die Felder für große Zeiten in asymptotisch freie Zustände, die freie Teilchen im Anfangs- bzw. Endzustand repräsentieren, übergehen müssen. Für die Berechnung von Greenschen Funktionen (n -Punkt-Funktionen) ist hingegen gemäß der LSZ-Reduktionsformel (vgl. z.B. [IZ80, BL86]) das asymptotische Verschwinden der Felder zu verlangen. Wir kommen weiter unten auf die Frage der Randbedingungen für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichts zurück.

Die weitere Ausgestaltung des Formalismus folgt weitgehend dem Vorgehen in der Vakuumtheorie: Die Exponentialfunktion in (2.11) wird formal nach Potenzen von \mathbf{H}_{IS} entwickelt. Dies führt in bekannter Weise zu Feynmanregeln, allerdings mit einigen wesentlichen Unterschieden. Zunächst sind alle Greenschen Funktionen mit ihrem Zeitargument entlang der Kontur definiert. Weiter ist nicht zu erwarten, daß das Wicktheorem in seiner einfachen Form wie im Vakuum gilt. Im allgemeinen zerfallen Erwartungswerte für Feldoperatorprodukte nämlich nicht in Summen aus Produkten von Zweipunktfunktionen, sondern der statistische Operator wird Vielteilchenkorrelationen beliebiger Ordnung enthalten. Man kann zeigen, daß das Wicktheorem genau dann in einer dem Vakuumfall entsprechenden Form gilt, wenn der statistische Operator von der Form $\mathbf{R} = \exp[-\mathbf{A}]$ ist, wobei \mathbf{A} ein beliebiger hermitescher Einteilchenoperator ist, so daß \mathbf{R} ein Operator mit Spur 1 ist. Dabei unterscheiden sich die Greenfunktionen von den Feynmanpropagatoren des Vakuums [Dan84].

Weiter ist es offensichtlich, daß sich (2.11) auf beliebige Feldoperatorprodukte erweitern läßt:

$$\langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = \text{Tr} \left[\mathbf{R}_{I0} \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \left\{ \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}} d\tau \mathbf{H}_{IS}(\tau) \right] \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \right\} \right]. \quad (2.12)$$

Da die Observablenalgebra durch die Feldoperatoren erzeugt wird, können wir die Erwartungswerte observabler Größen aus den Erwartungswerten der Form (2.12) gewinnen. Diese können wir aber durch Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals

$$Z_{\mathcal{C}}[\mathbf{R}, J] = \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_{I0} \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} d^2\omega x J(x) \phi_I(x) \right] \right\} \quad (2.13)$$

berechnen. Dabei denken wir uns die Feldtheorie gleich in einer allgemeinen Raumzeitdimension 2ω im Sinne der dimensional Regularisierung formuliert, so daß wir es stets mit regularisierten Ausdrücken zu tun haben.

2.1.3 Mehrpunktfunktionen auf der Kontur

Für die praktischen Anwendungen, u.a. auch für die Herleitung von Diagrammregeln, benötigen wir die Greenfunktionen bzgl. der reellen Zeitargumente, um Fouriertransformationen bzgl. der Differenzen von Raum-Zeit-Argumenten bilden zu können. Dabei muß aber notiert werden, auf welchem Zweig der Kontur die Konturkomponente jedes Elements liegt. Dies geschieht durch Indizes $-$ bzw. $+$ an den jeweiligen Funktionen.

Für Einpunktfunktionen, also Erwartungswerte eines beliebigen lokalen Feldoperators $F(x) = \langle \mathbf{A}(x) \rangle$ gilt

$$F^+(x) = F^-(x), \quad (2.14)$$

da sich die Beiträge des Zeitintervalls (t, t_f) von den beiden Teilen der Kontur gegenseitig aufheben.

Wir werden es im folgenden hauptsächlich mit Zweipunktfunktionen zu tun haben. Seien $\mathbf{A}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$ zwei beliebige lokale Operatoren. Dann ist eine Konturzweipunktfunktion F durch

$$iF(x, y) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(x) \mathbf{B}(y) \rangle \quad (2.15)$$

definiert. Sie läßt sich als eine 2×2 -Matrix aus Zweipunktfunktionen mit gewöhnlichen reellen Zeitargumenten darstellen, indem man definiert

$$i\hat{F}(x, y) = i \begin{pmatrix} F^{--}(x, y) & F^{-+}(x, y) \\ F^{+-}(x, y) & F^{++}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(x) \mathbf{B}(y) \rangle & \langle \mathbf{B}(y) \mathbf{A}(x) \rangle \\ \langle \mathbf{A}(x) \mathbf{B}(y) \rangle & \langle \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \mathbf{A}(x) \mathbf{B}(y) \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Dazu ist zu bemerken, daß wir hier die Regeln für bosonische lokale Operatoren angeführt haben. Im Fall fermionischer Felder muß zusätzlich dem Vorzeichen der durch den Zeitordnungsoperator vorgeschriebenen Permutation des Produkts Rechnung getragen werden.

Aus der Matrixdarstellung wird deutlich, daß die Außerdiagonalelemente F^{-+} und F^{+-} Erwartungswerte von Produkten mit festliegender Operatorordnung sind. Wegen der Unitarität der Zeitentwicklung sind diese Funktionen analytisch in $t \in \mathbb{R}$ und lassen sich zumindest in einer Umgebung der reellen Achse analytisch nach komplexen t -Werten fortsetzen. Wir werden im Fall des thermodynamischen Gleichgewichts die Anwendung dieser analytischen Eigenschaften noch genauer ausführen. Auch im allgemeinen Fall lassen sich die Zweipunktfunktionen mit Hilfe der vermöge

$$\Theta_{\mathcal{C}}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_1 \geq_{\mathcal{C}} t_2 \\ 0 & \text{für } t_2 <_{\mathcal{C}} t_1 \end{cases} \quad (2.17)$$

definierten Sprungfunktion durch die in t analytischen Außerdiagonalelemente ausdrücken:

$$F(x, y) = \Theta_{\mathcal{C}}(x_0, y_0) F^{+-}(x, y) + \Theta_{\mathcal{C}}(y_0, x_0) F^{-+}(x, y). \quad (2.18)$$

In vielen Fällen ist es aber bequemer, die Zweipunktfunktionen durch die retardierten und avancierten Funktionen

$$\begin{aligned} F_R(x, y) &= F^{--}(x, y) - F^{-+}(x, y) = F^{+-}(x, y) - F^{++}(x, y) = \\ &= \Theta(x_0 - y_0) [F^{+-}(x, y) - F^{-+}(x, y)] \\ F_A(x, y) &= F^{--}(x, y) - F^{+-}(x, y) = F^{-+}(x, y) - F^{++}(x, y) = \\ &= -\Theta(y_0 - x_0) [F^{+-}(x, y) - F^{-+}(x, y)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

auszudrücken.

Für den Fall, daß $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$, insbesondere also für die Greensche Funktion, für die $\mathbf{A} = \phi$ ist, gelten zusätzlich die Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned} [iF^{\pm\mp}(x, y)]^* &= iF^{\pm\mp}(y, x), \quad [iF^{\pm\pm}(x, y)]^* = iF^{\mp\mp}(y, x) \\ [F^R(x, y)]^* &= F^A(y, x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wir können nun für die Matrixelemente der Zweipunktfunktion die sogenannte *Wignertransformierte* einführen, d.h. die Fouriertransformation bzgl. der Relativkoordinaten $\xi = x - y$ der Zweipunktfunktion. Im allgemeinen wird die Funktion dann noch von $X = (x + y)/2$ abhängen:

$$\tilde{F}^{ij}(X, p) = \int d^{2\omega} \xi F^{ij}(X + \xi/2, X - \xi/2) \exp(ip\xi), \quad i, j \in \{+, -\}. \quad (2.21)$$

Ist der durch den statistischen Operator definierte Zustand des Systems translationsinvariant, hängen die \tilde{F}^{ij} nur von p ab, denn die Zweipunktfunktionen F^{ij} selbst können in diesem Fall nur von den Relativkoordinaten $\xi = x - y$ abhängen.

Für den Fall $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$ folgt aus den Beziehungen (2.20) für die Wignertransformierten

$$\begin{aligned} i\tilde{F}^{\pm\mp}(X, p) \in \mathbb{R}, \quad [i\tilde{F}^{\pm\pm}(X, p)]^* &= i\tilde{F}^{\mp\mp}(X, p) \\ [\tilde{F}_R(X, p)]^* &= \tilde{F}_A(X, p). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aus (2.19) folgt aus dem Faltungssatz für Fouriertransformationen

$$\tilde{F}_R(X, p) = [\tilde{\Theta} * \underbrace{(\tilde{F}^{+-} - \tilde{F}^{-+})}_{-iF_S}](X, p). \quad (2.23)$$

Es ist klar, daß sich hierbei die Faltung nur auf die Komponenten p_0 des Relativimpulses bezieht. Die Linearkombination F_S heißt die zur Zweipunktfunktion F gehörige Spektralfunktion und ist wegen (2.22) reell. Die Fourierdarstellung der Sprungfunktion ist

$$\Theta(t) = \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{i}{p_0 + i\eta} \exp(-ip_0 t). \quad (2.24)$$

Damit ergibt sich die *Spektraldarstellung* der retardierten Zweipunktfunktion in Wignerdarstellung:

$$\tilde{F}_R(X, p) = \int \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{\tilde{F}_S(X, p')}{(p'_0 - p_0) + i\eta}, \quad \text{mit } \vec{p}' = \vec{p}. \quad (2.25)$$

Aus der bekannten Formel

$$\frac{1}{(p'_0 - p_0) + i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{p'_0 - p_0} - i\pi\delta(p'_0 - p_0) \quad (2.26)$$

folgt für die Spektralfunktion

$$\tilde{F}_S(X, p) = -2 \operatorname{Im} \tilde{F}_R(X, p) \quad (2.27)$$

und die *Kramers–Kronig–Relation*

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(X, p) = -\mathcal{P} \int \frac{dp'_0}{\pi} \frac{\operatorname{Im} \tilde{F}_R(X, p')}{p'_0 - p_0}. \quad (2.28)$$

2.2 Feynmanregeln für das thermodynamische Gleichgewicht

Thermodynamische Gleichgewichtszustände werden durch nicht explizit zeitabhängige statistische Operatoren beschrieben. Im Heisenbergbild muß aufgrund der von Neumanngleichung (2.6) der statistische Operator für das Gleichgewicht überhaupt zeitunabhängig sein. Damit muß er sich als Funktion der Erhaltungsgrößen des Systems ausdrücken lassen.

2.2.1 Das Entropieprinzip

Die Bestimmung des statistischen Operators zur Beschreibung einer bestimmten physikalischen Situation erfolgt durch Wahl nach dem *Jaynesschen Prinzip des geringsten Vorurteils* der auf Shannon zurückgehenden Informationstheorie. Dieses Prinzip besagt, daß bei gegebenen Erwartungswerten \mathcal{O}_i von Observablen O_i der statistische Operator so zu bestimmen ist, daß die *von Neumann-Entropie*

$$S = - \langle \ln(\mathbf{R}) \rangle = - \text{Tr}[\mathbf{R} \ln(\mathbf{R})] \quad (2.29)$$

maximal wird [Kat67, Hob87]. Dabei wird die Entropie als ein Maß für die fehlende Information über ein System angesehen. Für einen reinen Zustand $\mathbf{R} = |\psi\rangle \langle \psi|$ verschwindet die Entropie, d.h. es liegt vollständige Information über das System vor.

Die Maximierung der Entropie unter den gegebenen Nebenbedingungen verlangt die Stationarität des Funktionals

$$S[\mathbf{R}, \lambda_i] = \text{Tr} \left[-\mathbf{R} \left(\ln(\mathbf{R}) - \sum_i \lambda_i \mathbf{O}_i \right) \right] \quad (2.30)$$

bzgl. Variationen des statistischen Operators \mathbf{R} , wobei die λ_i Lagrangeparameter zur Erfüllung der Nebenbedingungen bezeichnen. Ausführung der Variation ergibt für den statistischen Operator schließlich die Form

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_i \lambda_i \mathbf{O}_i \right) \quad \text{mit} \quad Z = \text{Tr} \left[\exp \left(- \sum_i \lambda_i \mathbf{O}_i \right) \right]. \quad (2.31)$$

Die Lagrangeparameter λ_i sind dabei so festzulegen, daß

$$\langle \mathbf{O}_i \rangle = \text{Tr}(\mathbf{O}_i \mathbf{R}) \stackrel{!}{=} \mathcal{O}_i \quad (2.32)$$

ist.

2.2.2 Statistische Operatoren für das Gleichgewicht

Je nach Wahl der Erhaltungsgrößen bei der Bestimmung des statistischen Operators aus dem Entropieprinzip erhält man die verschiedenen statistischen Operatoren. Wir beschränken uns hier auf die Behandlung des großkanonischen und des kanonischen Ensembles. Während beim kanonischen Ensemble nur der Erwartungswert der Gesamtenergie des Systems festliegt, werden beim großkanonischen Ensemble zusätzlich noch Mittelwerte von Noetherladungen (elektrische Ladung, Baryonen- oder Leptonenzahl etc.) vorgegeben. Wie wir gleich sehen werden, erweisen sich die korrespondierenden Lagrangeparameter als inverse Temperatur und chemische Potentiale.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall eines Gases von geladenen Spin-0-Teilchen. In der relativistischen Quantenfeldtheorie steht dabei (im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall) fest, daß es sich um Bosonen handelt [PB40]. Die klassische Lagrangedichte des Feldes lautet

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi) \quad (2.33)$$

und die Hamiltondichte mit den kanonisch konjugierten Feldimpulsen

$$\Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}, \quad \Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \quad (2.34)$$

entsprechend

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}\Pi^* + \dot{\phi}^*\Pi - \mathcal{L} = \Pi^*\Pi + (\nabla\phi^*)(\nabla\phi) + m^2\phi^*\phi + V(\phi^*\phi). \quad (2.35)$$

Außer den Erhaltungssätzen, die aus der Lorentzsymmetrie folgen (also Energie-, Impuls-, Drehimpuls-, und Schwerpunktsatz), besitzt diese Lagrangedichte noch eine globale intrinsische Symmetrie unter $U(1)$ -Transformationen des Feldes. Die dazugehörige Noetherladung ist die elektrische Ladung

$$Q = \int d^{2\omega}x \phi^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \quad (2.36)$$

Die kanonische Quantisierung erfolgt wie üblich, indem man die klassischen Felder durch Feldoperatoren ersetzt und, entsprechend der bosonischen Natur der Felder, die Operatoralgebra durch die kanonischen Kommutatorrelationen für Feldoperatoren zu gleichen Zeiten festlegt:

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})]_- = 0, \quad [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})]_- = i\delta^{(2\omega-1)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.37)$$

Dabei sind die kanonisch konjugierten Impulse durch

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \quad \Pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \quad (2.38)$$

definiert.

Bei der erhaltenen Ladung (2.36) stoßen wir auf charakteristische Operatorordnungsprobleme. Da die Gesamtladung des Systems ohnehin renormiert werden muß, ist die Ordnung nur bis auf beliebige feldunabhängige Beiträge bestimmt. Da wir unten die Pfadintegralmethode anwenden wollen, definieren wir die regularisierte Ladung durch die Weylordnung der kanonischen Operatoren, d.h. alle Impulsoperatoren stehen links von allen Feldoperatoren:

$$\mathbf{Q} = i \int d^{2\omega-1}\vec{x} (\Pi^\dagger \phi^\dagger - \Pi \phi). \quad (2.39)$$

Daraus berechnet man unmittelbar

$$[\mathbf{Q}, \phi(x)]_- = -\phi(x). \quad (2.40)$$

Dies ist das quantenfeldtheoretische Analogon zu der aus der klassischen Theorie bekannten Tatsache, daß eine Noetherladung die ihr korrespondierende Symmetrieoperation erzeugt.

Entsprechend lautet der statistische Operator bei gegebener mittlerer Ladung \mathcal{Q} und Energie \mathcal{E} gemäß (2.31)

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q}) \quad \text{mit} \quad Z = \text{Tr}[\exp(-\beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q})]. \quad (2.41)$$

Das chemische Potential μ bzgl. der erhaltenen Noetherladung Q ist durch $\alpha = \beta\mu$ definiert.

2.2.3 Pfadintegrale

Wir werden im folgenden die Pfadintegralmethode benutzen, da diese für praktische Rechnungen, insbesondere die Quantisierung von Eichtheorien, besonders bequem ist. Dazu führen wir zunächst verallgemeinerte Eigenzustände der Feldoperatoren im Heisenbergbild ein:

$$\phi(x) |\phi, t\rangle = \phi(x) |\phi, t\rangle, \quad \phi^\dagger(x) |\phi, t\rangle = \phi^*(x) |\phi, t\rangle. \quad (2.42)$$

Da sich im Heisenbergbild die Feldoperatoren mit dem vollständigen zeitunabhängigen Hamiltonoperator zeitlich entwickeln, gilt

$$\phi(x) = \exp(i\mathbf{H}t)\phi(0, \vec{x})\exp(-i\mathbf{H}t), \quad (2.43)$$

und damit folgt, daß sich die verallgemeinerten Eigenvektoren gemäß

$$|\phi, t\rangle = \exp(i\mathbf{H}t)|\phi, 0\rangle \quad (2.44)$$

bewegen.

Wegen der Vertauschungsrelation (2.40) ist

$$\exp(-\alpha\mathbf{Q})\phi(x)\exp\alpha\mathbf{Q} = \exp(\alpha)\phi(x) \quad (2.45)$$

und damit

$$\exp(\alpha\mathbf{Q})|\phi\rangle = |\exp\alpha\phi\rangle, \quad (2.46)$$

d.h. der links stehende Vektor ist verallgemeinerter Eigenvektor des Feldoperators zum Eigenwert $\exp(\alpha)\phi$. Entsprechend zeigt man, daß

$$\phi^\dagger \exp(\alpha\mathbf{Q})|\phi\rangle = \exp(-\alpha)\phi^*|\phi\rangle \quad (2.47)$$

ist.

Führen wir nun in Analogie dazu auch die verallgemeinerten Eigenvektoren für die kanonisch konjugierten Impulse $\mathbf{\Pi}$ ein, so folgt aus den kanonischen Vertauschungsregeln (2.37) bis auf eine willkürlich zu definierende Normierungskonstante

$$\langle\phi, 0|\mathbf{\Pi}, 0\rangle = \exp\left(i\int d^{2\omega-1}\vec{x}[\mathbf{\Pi}(0, \vec{x})\phi(0, \vec{x}) + \mathbf{\Pi}^*(0, \vec{x})\phi^*(0, \vec{x})]\right). \quad (2.48)$$

Mit dieser Normierung gelten die Beziehungen

$$\int D\phi D\phi^*|\phi, 0\rangle\langle\phi, 0| = \int \frac{D\mathbf{\Pi}D\mathbf{\Pi}^*}{(2\pi)^2}|\mathbf{\Pi}, 0\rangle\langle\mathbf{\Pi}, 0| = \mathbf{1}. \quad (2.49)$$

Sei $\mathbf{F}(t) := \mathbf{F}[\phi, t]$ ein von einem Zeitargument abhängiges Funktional der Feldoperatoren. Dann können wir mit Hilfe der eben eingeführten Operatoren und Zustände eine Pfadintegralformulierung für den Erwartungswert gewinnen. Es gilt nämlich wegen (2.49)

$$\langle\mathbf{F}(t)\rangle = \frac{1}{Z}\text{Tr}\{\exp(-\beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q})\mathbf{F}(t)\} = \frac{1}{Z}\int D\phi D\phi^*\langle\phi, 0|\exp(-\beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q})\mathbf{F}(t)|\phi, 0\rangle. \quad (2.50)$$

Da \mathbf{H} und \mathbf{Q} voraussetzungsgemäß miteinander vertauschbar sind und wegen (2.46) sowie (2.44) gilt

$$\langle\mathbf{F}(t)\rangle = \frac{1}{Z}\int D\phi D\phi^*\langle\phi, -i\beta|\mathbf{F}(t)|\exp(\alpha)\phi, 0\rangle. \quad (2.51)$$

Unter dem Funktionalintegral taucht dabei das Übergangsmatrixelement des Operators $\mathbf{F}(t)$ für eine Zeitentwicklung des Zustands von $\exp(\alpha)|\phi\rangle$ zur Zeit $t = 0$ zu einem Zustand $|\phi\rangle$ zur Zeit $t = -i\beta$ auf.

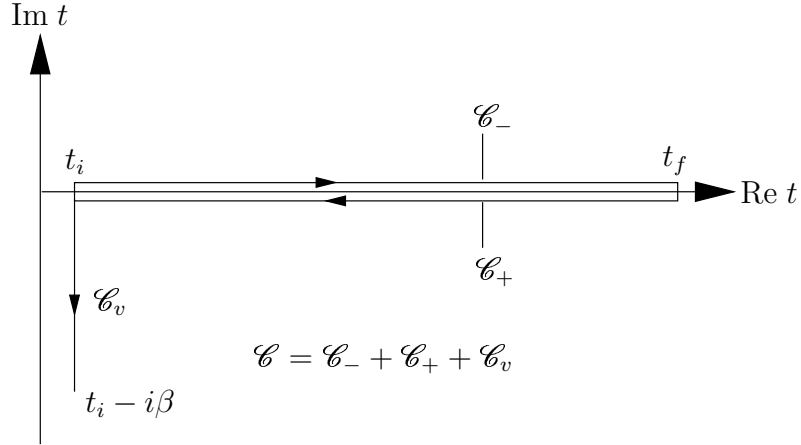


Abbildung 2.2: Die modifizierte Schwinger–Keldysh–Kontur für das Gleichgewicht. In der Rechnung in diesem Abschnitt setzen wir $t_i = 0$ und $t_f = t$. Wegen der Zeitunabhängigkeit des Gleichgewichtszustandes können jedoch Anfangs- und Endpunkt des reellen Teils der Kontur willkürlich gelegt werden.

Dies ist die klassische Situation, in der die Einführung des Pfadintegrals von Vorteil ist. Da aber $t \in \mathbb{R}$ ist, müssen wir noch einen 1-Operator einfügen und die Zyklizität unter der Spur ausnutzen:

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \langle \phi, 0 | \exp(-\beta \mathbf{H}) \exp(it \mathbf{H}) \mathbf{F}(t) \exp(-it \mathbf{H}) | \exp(\alpha) \phi, 0 \rangle. \quad (2.52)$$

Diese Zeitentwicklung können wir uns entlang einer Zeitkontur in der komplexen Ebene vorstellen, die die allgemeine Schwinger–Keldysh–Kontur (vgl. Abb. 2.1) um ein vertikales Stück, das von 0 bis $-i\beta$ läuft, ergänzt (s. Abb. 2.2).

Wir nehmen nun an, daß der Hamiltonoperator die spezielle Form (2.35) besitzt, d.h.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Pi}^\dagger) + \mathbf{H}_2(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}^\dagger), \quad (2.53)$$

wobei \mathbf{H}_2 von den Feldoperatoren und deren *räumlichen* Ableitungen, nicht aber von den kanonisch konjugierten Feldimpulsen (also nicht von den zeitlichen Ableitungen des Feldes) abhängt.

Wir teilen nun jeden der drei Abschnitte der modifizierten Schwinger–Keldysh–Kontur in N_j ($j = 1, 2, 3$) Zeitabschnitte $\Delta\tau$ ein. Wegen

$$\exp[\Delta\tau(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)] = \exp[\Delta\tau(\mathbf{H}_1)] \exp[\Delta\tau \mathbf{H}_2] + O(\Delta\tau^2) \quad (2.54)$$

können wir geeignete Impuls- bzw. Feldeigenvektorspektralzerlegungen des Einsoperators gemäß

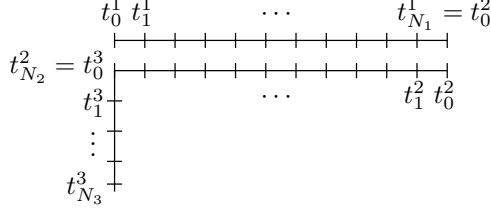


Abbildung 2.3: Zur Zeitgitterung entlang der modifizierten Schwinger–Keldysh-Kontur.

(2.49) in (2.52) einfügen

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F}(t) \rangle &= \int D\phi_k^{j*} d\phi_k^j \int \frac{D\Pi_k^{j*} D\Pi_k^j}{(2\pi)^2} \times \\
 &\times \langle \phi_{N_3}^3 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}_1(t_{N_3}^3)] | \Pi_{N_3}^3 \rangle \langle \Pi_{N_3}^3 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}(t_{N_3}^3)] | \phi_{N_3-1}^3 \rangle \times \\
 &\times \langle \phi_{N_3-1}^3 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}_1(t_{N_3-1}^3)] | \Pi_{N_3-1}^3 \rangle \langle \Pi_{N_3-1}^3 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}(t_{N_3}^3)] | \phi_{N_3-2}^3 \rangle \dots \times \\
 &\times \langle \phi_1^3 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}_1(t_1^3)] | \Pi_1^3 \rangle \langle \Pi_1^3 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}(t_{N_3}^3)] | \phi_0^3 \rangle \times \\
 &\times \langle \phi_{N_2}^2 | \exp[-i\Delta t_2 \mathbf{H}_1(t_{N_2}^2)] | \Pi_{N_2}^2 \rangle \langle \Pi_{N_2}^2 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}(t_{N_2}^2)] | \phi_{N_2-1}^2 \rangle \dots \times \\
 &\times \langle \phi_1^2 | \exp[-i\Delta t_2 \mathbf{H}_1(t_1^2)] | \Pi_1^2 \rangle \langle \Pi_1^2 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}(t_1^2)] | \phi_0^2 \rangle \times \\
 &\times \langle \phi_0^2 | \mathbf{F}(t_0^2) | \phi_{N_1}^1 \rangle \\
 &\times \langle \phi_{N_1}^1 | \exp[-i\Delta t_1 \mathbf{H}_1(t_{N_1}^1)] | \Pi_{N_1}^1 \rangle \langle \Pi_{N_1}^1 | \exp[-i\Delta t_1 \mathbf{H}(t_{N_1}^1)] | \phi_{N_1-1}^1 \rangle \times \dots \\
 &\times \langle \phi_1^1 | \exp[-i\Delta t_1 \mathbf{H}_1(t_1^1)] | \Pi_1^1 \rangle \langle \Pi_1^1 | \exp[-i\Delta t_3 \mathbf{H}(t_1^1)] | \phi_0^1 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dabei sind die eingeschobenen Vektoren immer an der Stelle τ_k^j des Zeitelements zu verstehen. An den Randpunkten ist zu beachten, daß $t_0^1 = t_0^3 = t_{N_2}^2$ und $t_0^2 = t_{N_1}^1$ ist. Für die Endpunkte der Kontur gilt wegen der Spurbildungsvorschrift (2.52) der modifizierten Schwinger–Keldysh-Kontur die Randbedingung $\phi_{N_3}^3 = \exp(-\alpha\phi)\phi_0^1$. Wegen der Spurbildung ist auch über ϕ_0 zu integrieren.

Nun gilt wegen (2.53) und (2.48)

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{k-1}^j | \exp(\lambda\Delta\tau \mathbf{H}_1) | \Pi_k \rangle &= \exp \left[\lambda\Delta\tau H_1(\Pi_k, \Pi_k^*) + i \int d^{2\omega-1} \vec{x} (\phi_{k-1} \Pi_k) + cc. \right] \\
 \langle \Pi_k | \exp(\lambda\Delta\tau \mathbf{H}_2) | \phi_k \rangle &= \exp \left[\lambda\Delta\tau H_2(\phi_k, \phi_k^*) - i \int d^{2\omega-1} \vec{x} (\phi_k \Pi_k) + cc. \right].
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Setzt man dies in (2.55) ein und betrachtet das Argument der sich ergebenden Exponentialfunktion als Gitternäherung eines Wegintegrals entlang der modifizierten Schwinger–Keldysh-Kontur, ergibt sich im Kontinuumsmites $N_j \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2, 3$) die gesuchte Pfadintegraldarstellung in der Hamiltonschen Form

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = \frac{1}{Z} \int \int_{PP} D\Phi D\Phi^* \frac{D\Pi D\Pi^*}{(2\pi)^2} \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}} d^{2\omega} x \mathcal{H} - \Pi \dot{\phi} - \Pi^* \dot{\phi}^* \right] F(t). \tag{2.57}$$

Darin deutet PP an, daß über alle Feldkonfigurationen mit den „pseudoperiodischen Randbedingungen“

$$\begin{aligned}
 \phi(0, \vec{x}) &= \phi_0(\vec{x}), \quad \phi^*(0, \vec{x}) = \phi_0^*(\vec{x}), \\
 \phi(-i\beta, \vec{x}) &= \exp(-\alpha)\phi(0, \vec{x}), \quad \phi^*(-i\beta, \vec{x}) = \exp(\alpha)\phi^*(0, \vec{x})
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

zu integrieren ist. Bzgl. des kanonischen Impulses sind keinerlei Randbedingungen zu fordern. Über die Feldkonfiguration am Anfangszeitpunkt der Kontur ist unrestringiert zu integrieren, was von der Spurbildung herrührt.

Da weiter bei der speziellen Hamiltondichte (2.35) das Integral bzgl. der kanonischen Feldimpulse ein Gaußintegral ist, läßt sich diese Integration explizit ausführen. Dabei können wir die Regel benutzen, daß das Gaußintegral bis auf einen Faktor, der nur vom Koeffizienten vor $\Pi^* \Pi$ abhängt, das Argument am stationären Punkt des Funktionals unter der Exponentialfunktion ist. da der besagte Koeffizient in unserem Falle unabhängig von den Feldern ist, gilt schließlich die Lagrangesche Formulierung des Pfadintegrals

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = \frac{1}{Z'} \int_{PP} D\Phi D\Phi^* \exp\{iS_{\mathcal{E}}[\phi, \phi^*]\} F(t) \text{ mit } S_{\mathcal{E}}[\phi, \phi^*] = \int_{\mathcal{E}} d^{2\omega} x \mathcal{L}. \quad (2.59)$$

Dabei ist die Zustandssumme durch

$$Z' = \int_{PP} D\phi D\phi^* \exp \left[i \int_{\mathcal{E}} d^{2\omega} x \mathcal{L} \right] \quad (2.60)$$

definiert.

Weiter ist aus der Herleitung unmittelbar klar, daß wir den Erwartungswert eines jeden konturgeordneten Produkts von Feldoperatoren durch das Pfadintegral in der Lagrangeschen Form ausdrücken können:

$$\langle \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z'} \int_{PP} D\phi D\phi^* \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp \left[i \int_{\mathcal{E}} d^{2\omega} x \mathcal{L} \right]. \quad (2.61)$$

Dieser Zusammenhang ist in der Literatur als *Feynman-Kac-Formel* bekannt. Insbesondere können wir sie auch auf das erzeugende Funktional für solche Operatorprodukte anwenden:

$$Z[j, j^*] = \frac{1}{Z'} \int_{PP} D\phi D\phi^* \exp \left[i \int_{\mathcal{E}} d^{2\omega} x (\mathcal{L} + j^* \phi + j \phi^*) \right]. \quad (2.62)$$

2.2.4 Zweipunkt–Greenfunktion im Gleichgewicht

Wir können nun die in Abschnitt 2.1.3 gewonnenen Beziehungen für Zweipunktfunktionen insbesondere auf die exakten Greenschen Funktionen für das thermodynamische Gleichgewicht anwenden. Die erste Vereinfachung ergibt sich daraus, daß der Gleichgewichtszustand translationsinvariant in Raum und Zeit ist, so daß die Greenschen Zweipunktfunktionen nur von der Differenz ihrer Argumente abhängen. Damit sind die entsprechenden Wignertransformierten (2.21) Funktionen von p und unabhängig von X .

Wir werden nun sehen, daß aufgrund der Periodizitätsbedingungen (2.58) die Zweipunkt–Greenfunktionen im Impulsraum vollständig durch den Imaginärteil der retardierten Greenfunktion (also die Spektralfunktion) bestimmt ist. Wir schreiben im folgenden der Einfachheit halber die Matrixgreenfunktionen als Funktionen der Form $G^{ij}(\xi)$:

$$\begin{aligned} Z[0]G^{+-}(\xi) &= \int_{PP} D\phi D\phi^* \phi(\xi^+) \phi(0^-)^* \exp(iS[\phi]) \\ &= \int_{PP} \exp(-\mu\beta) \phi(x) \phi^*(-i\beta) \exp[iS[\phi]] = Z[0]G^{-+}(\xi + i\beta) \exp(iS[\phi]), \end{aligned} \quad (2.63)$$

wobei die Zeitargumente von ξ auf dem reellen Teil der Kontur liegen. Wir haben im letzten Schritt benutzt, daß alle Zeiten auf dem vertikalen Teil der Kontur stets „nach“ allen Zeiten auf dem reellen Teil im Sinne der Konturordnung stehen. Damit muß das Pfadintegral (bis auf den explizit berücksichtigten unbestimmten Faktor $Z[0]$) in der zweiten Zeile die analytische Fortsetzung von G^{-+} sein. Diese analytische Fortsetzung ist zumindest im offenen Streifen $-\beta < \text{Im } \xi < 0$ möglich, weil die Außerdiagonalelemente der matrixwertigen Realzeitfunktionen entlang der reellen Achse analytisch sind. Wir schreiben diese Beziehung in der Form

$$G^{+-}(\xi - i\beta) = \exp(-\mu\beta)G^{-+}(\xi). \quad (2.64)$$

Dies ist die *KMS-Bedingung*¹, deren vierdimensionale Fouriertransformation

$$\tilde{G}^{+-}(p) = \exp[\beta(p_0 - \mu)]\tilde{G}^{-+}(p) \quad (2.65)$$

lautet. Nach (2.23) gilt dann

$$A(p) = -2\text{Im } G_R(p), \quad iG^{-+}(p) = A(p)f_B(p_0 - \mu), \quad iG^{+-}(p) = A(p)[1 + f_B(p_0 - \mu)], \quad (2.66)$$

wobei wir die *Bose-Einstein-Verteilung*

$$f_B(p_0 - \mu) = \frac{1}{\exp[\beta(p_0 - \mu)] - 1} \quad (2.67)$$

eingeführt haben. Zusammen mit der Spektraldarstellung (2.23) für die retardierte Greenfunktion

$$iG_R(p) = \int \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{A(p'_0, \vec{p})}{p'_0 - p_0 + i\eta} \quad (2.68)$$

und den allgemeinen Beziehungen (2.19) und (2.22) sind damit alle vier Realzeitgreenfunktionen durch die Spektralfunktion A bestimmt. In kompakter Schreibweise läßt sich dies durch

$$iG_{\varphi}(x', x) = \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} A(p) \exp[-ip(x' - x)][\Theta_{\varphi}(t', t) + f_B(p_0 - \mu)] \quad (2.69)$$

zusammenfassen.

Die Beziehungen (2.64)–(2.69) lassen sich auf beliebige Zweipunktfunktionen der Form (2.15) bzw. (2.16) mit $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$ verallgemeinern, wobei für μ das zum Operator \mathbf{A} gehörige chemische Potential μ_A in die Bose-Einstein-Verteilung (2.67) einzusetzen ist. Es ist klar, daß Selbstenergien das gleiche μ wie den dazugehörigen Greenfunktionen zugeordnet ist.

2.2.5 Die Diagrammregeln der Störungstheorie

Die Diagrammregeln lassen sich nun in vollständiger Analogie zur Vakuumfeldtheorie entwickeln. Dazu berechnen wir zunächst das erzeugende Funktional für die freie Theorie

$$Z_0[j, j^*] = N \int D\phi d\phi^* \exp[-i \{ \phi_1^*(\square + m^2)\phi_1 \}_1 + i \{ j_1^*\phi_1 + j_1\phi_1^* \}]. \quad (2.70)$$

Durch Entwickeln um den stationären Punkt des Funktionals im Exponenten, der durch

$$\begin{aligned} -(\square + m^2)\phi_j &= -j, & -(\square + m^2)\phi_j^* &= -j^*, \\ \phi_j(-i\beta, \vec{x}) &= \exp(-\alpha)\phi_j(0, \vec{x}), & \phi_j^*(-i\beta, \vec{x}) &= \exp(\alpha)\phi_j^*(0, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.71)$$

¹benannt nach Kubo, Martin und Schwinger

gegeben ist, erhalten wir sofort

$$Z[j, j^*] = \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}} d^2\omega x j^*(x) \phi_j(x) \right]. \quad (2.72)$$

Wir müssen also nur die Lösung der Gleichungen (2.71) als Funktional von j angeben. Es ist klar, daß diese Lösung durch die freie Konturgreenfunktion gemäß

$$\phi_j(x) = \int d^2\omega x' \Delta_{\mathcal{C}}(x, x') j(x') \quad (2.73)$$

gegeben ist. Die Greenfunktion selbst bestimmt sich aus der Bewegungsgleichung

$$(\Delta + m^2)\Delta_{\mathcal{C}} = -\delta_{\mathcal{C}}(x). \quad (2.74)$$

Dabei ist die Kontur- δ -Distribution durch

$$\int_{\mathcal{C}} f(t) \delta_{\mathcal{C}}(t - t') = f(t') \quad (2.75)$$

für alle $C_0^\infty(\mathcal{C}, \mathbb{C})$ -Funktionen f definiert².

Aus den allgemeinen Beziehungen des vorigen Abschnitts wissen wir aber, daß es bereits genügt, wenn wir die Spektralfunktion des Problems kennen. Betrachten wir die $---$ -Komponente der Greenfunktion, ist es klar, daß die δ -Singularität in (2.74) nur von der retardierten Funktion verursacht sein kann. Diese muß also die Bewegungsgleichung

$$(\Delta + m^2)\Delta_R(x) = -\delta^{(2\omega)}(x) \quad (2.76)$$

erfüllen. Zusammen mit den Randbedingungen, die sich aus $\Delta_R(x) \propto \Theta(t)$ ergeben, folgt daraus für die Fouriertransformierte sofort die Lösung

$$\tilde{\Delta}_R(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\eta \operatorname{sign}(p_0)} \quad (2.77)$$

und damit für die freie Spektralfunktion

$$A_0(p) = -2 \operatorname{Im} \tilde{\Delta}_R(p) = 2\pi \operatorname{sign}(p_0) \delta(p^2 - m^2). \quad (2.78)$$

Wir lassen ab jetzt der Kürze halber die Tilde für die Fouriertransformationen der Greenfunktionen weg. Mit Hilfe der allgemeinen Beziehungen (2.19) und (2.66) ergeben sich damit sofort die Greenfunktionen im Realzeitbereich.

$$\begin{aligned} \Delta^{--}(p) &= \frac{1}{p^2 - m^2 + i\eta \sigma(p_0)} - 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \sigma(p_0) f_B(p_0), \\ \Delta^{+-}(p) &= -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \sigma(p_0) [1 + f_B(p_0)], \\ \Delta^{-+}(p) &= -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \sigma(p_0) f_B(p_0), \\ \Delta^{++}(p) &= -\frac{1}{p^2 - m^2 - i\eta \sigma(p_0)} - 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \sigma(p_0) f_B(p_0). \end{aligned} \quad (2.79)$$

²Es ist wichtig zu bemerken, daß diese Distribution nur im Sinne reeller Parametrisierungen der Kontur definiert sein kann, nicht aber als komplexe Funktion.

Die Konturgreenfunktionen im Raumzeit-Bereich ergeben sich mit der Spektralfunktion A_0 gemäß (2.69).

Wir notieren noch die Lösung für das erzeugende Funktional der Greenfunktionen des freien Feldes. Setzen wir (2.73) in (2.72) ein und normieren Z_0 so, daß $Z_0[0, 0] = 1$ ist, folgt

$$Z_0[j, j^*] = \exp\left[i \int d^{2\omega} x_1 d^{2\omega} x_2 j^*(x_1) \Delta_{\mathcal{G}}(x_1, x_2) j(x_2)\right]. \quad (2.80)$$

Aufgrund der Definition (2.62) können wir nun das erzeugende Funktional für die wechselwirkende Theorie in der Form

$$Z[j, j^*] = \int d^{2\omega} x \exp\left(i S_I \left[\frac{\delta}{i \delta j(x)}, \frac{\delta}{i \delta j^*(x)} \right]\right) Z_0[j, j^*] \quad (2.81)$$

schreiben, wobei S_I der Wechselwirkungsanteil der klassischen Wirkung ist. Dieser entspricht dem Teil der Lagrangedichte, der ein Polynom von mindestens drittem Grade in den Feldern ist. Die Exponentialfunktion kann nun nach Potenzen des Wechselwirkungsanteils entwickelt werden:

$$\exp[i S_I] = \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{k!} S_I^k. \quad (2.82)$$

Die Bildung der Ableitungen und Integrationen, die durch die Anwendung dieses Ausdrucks entstehen, können in einem Diagrammformalismus zusammengefaßt werden, der genau den Feynmanschen Diagrammregeln im Vakuum entspricht. Wir stellen die Diagrammregeln für die Berechnung von Greenfunktionen des Realzeitformalismus zusammen. Wir beschränken uns dazu exemplarisch auf die ϕ^4 -Theorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \underbrace{\frac{\lambda}{4!} \phi^4}_{\mathcal{L}_I}. \quad (2.83)$$

Hier liegt ein reelles Skalarfeld vor, deren freie Greenfunktion durch (2.69) mit $\mu = 0$ gegeben ist. Wir haben hier natürlich nur eine einzige äußere Quelle, so daß das freie erzeugende Funktional durch

$$Z_0[j] = \exp\left[\frac{i}{2} \int_{\mathcal{G}} d^{2\omega} x d^{2\omega} x' j(x') \Delta_{\mathcal{G}}(x', x) j(x)\right] \quad (2.84)$$

gegeben ist.

Berechnen wir nun den Beitrag der Störungsreihe zu $G^{(n)}$ zur k -ten Ordnung Störungstheorie ist insgesamt der Ausdruck

$$i Z[0] G_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{i \delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i \delta j(x_n)} \frac{1}{k!} \int d^{2\omega} y_1 \cdots d^{2\omega} y_k \frac{\delta^4}{i^4 \delta j(y_1)^4} \cdots \frac{\delta^4}{i^4 \delta j(y_k)^4} Z_0[j] \Big|_{j=0} \quad (2.85)$$

zu bestimmen.

2.2.6 Feynmanregeln im Impulsraum

Wir haben bereits im vorigen Abschnitt die freien Greenfunktionen der Realzeitkontur im Impulsraum berechnet. Aufgrund der Translationsinvarianz erweist es sich als vorteilhaft, die Feynmanregeln überhaupt im Impulsraum zu formulieren. Genau wie im Fall eines allgemeinen statistischen Operators muß sich die Theorie auch für das thermodynamische Gleichgewicht allein mit der Realzeitkontur formulieren lassen.

Dazu stellen wir fest, daß aufgrund der Geschlossenheit des Realzeitzweiges der Kontur das erzeugende Funktional (2.80) faktorisiert:

$$\begin{aligned}
 Z[j, j^*] = & \exp \left[\int_{\mathcal{C}} d^2\omega x \int_{\mathcal{C}} d^2\omega x' j^*(x) \Delta_{\mathcal{C}}(x, x') j(x') \right] \times \\
 & \times \exp \left[\int_{\mathcal{C}_v} d^2\omega x \int_{\mathcal{C}_v} d^2\omega x' j^*(x) \Delta_{\mathcal{C}_v}(x, x') j(x') \right], \quad (2.86)
 \end{aligned}$$

denn bei dem Doppelintegral in (2.80) verschwindet der Realzeitanteil des einen Integrals, wenn das Zeitargument im anderen Integral auf dem vertikalen Teil liegt. Dies ist übrigens nur dann der Fall, wenn die Realzeitkontur für sich geschlossen ist, nicht bei anderen Konturen, die in der Literatur diskutiert werden.

Diese Faktorisierung bedeutet, daß erwartungsgemäß die Realzeitgreenfunktionen in sich geschlossene Feynmanregeln bilden. Analog gilt dies natürlich auch für die Greenfunktionen des vertikalen Teils. Die letzteren entsprechen der Imaginärzeit- oder Matsubaramethode.

Damit können wir bereits die Impulsraumfeynmanregeln für die Realzeitkontur zusammenstellen, die wie im Fall der Vakuumtheorie gegenüber den Feynmanregeln in der Raumzeit eine erhebliche Vereinfachung für praktische Rechnungen mit sich bringt.

Zu ihrer Herleitung müssen wir nur in einem gemäß der in Anhang B beschriebenen Diagrammregeln im Raumzeitbereich die Integration auf die Realzeitkontur beschränken und die Fourierdarstellungen der freien Greenfunktionen (2.79) für die einzelnen Zweige einsetzen. Da wie im Vakuumformalismus die Raumzeitargumente der freien Greenfunktionen nur in der Differenz auftreten, was die raumzeitliche Translationsinvarianz des Gleichgewichtszustandes widerspiegelt gilt an jedem Vertex die Viererimpulserhaltung³, d.h. die Integration über einen inneren Punkt ergibt einen Faktor $(2\pi)^{2\omega} \delta^{(2\omega)}(\sum_i p_i)$, wobei die p_i die in einen Vertex einlaufenden Impulse bezeichnen. Weiter ist zu beachten, daß bei der Integration über den antichronologischen Zweig der Kontur, aufgrund der umgekehrten Integrationsrichtung ein Vorzeichenwechsel zu beachten ist. Wir müssen also auch die Vertizes mit einem Index $j \in \{+, -\}$ versehen, je nachdem ob dieser für die Integration über den chronologischen ($-$) oder antichronologischen ($+$) Zweig der Zeitkontur steht. Ein $--$ Vertex besitzt dabei dieselbe Feynmanregel wie der entsprechende Vakuumvertex, während der $+-$ Vertex gegenüber diesem das Vorzeichen wechselt. Ebenso tragen auch die äußeren Punkte des Diagramms \pm -Indizes. Sie geben an, wo die Argumente des zu berechnenden Beitrags der Störungsreihe zur n -Punktfunktion liegen, wenn man die Fouriertransformation rückgängig macht. Die Greenfunktionen sind entgegen der Pfeilrichtung zu lesen. Dies zeigt, daß im Realzeitformalismus im Impulsraum auch für die Greenfunktionen neutraler Teilchen eine Pfeilrichtung definiert sein muß, daß aber die Symmetriefaktoren (bzw. die „Multiplizität“) eines Diagramms die gleichen wie im Vakuumformalismus sein müssen.

Für die ϕ^4 -Theorie können wir also die Feynmanregeln mit den in Abb. 2.4 gegebenen graphischen Elementen zusammenfassen:

Für die ϕ^4 -Theorie wird jeder Beitrag der Störungsreihe zu $G_k^{(n)}$ durch ein Diagramm mit k Vertexpunkten und ohne geschlossene Teildiagramme gegebener Topologie repräsentiert. Der Gesamtbeitrag in k -ter Ordnung Störungstheorie ist durch die Summe über alle möglichen topologisch voneinander verschiedenen Diagramme gegeben.

Ein Feynmandiagramm ist dabei wie folgt auszuwerten:

³Dies ist eine Folge des Noethertheorems, demzufolge die Impulserhaltung aus der Translationsinvarianz der Wirkung folgt.

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \pm = \pm \frac{i\lambda}{4!} \quad \begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \\ j \quad k \end{array} = i\Delta^{jk}(p)$$

Abbildung 2.4: Die Feynmanregeln für die ϕ^4 -Theorie im Realzeitformalismus.

- (1) Man zeichne k Vertizes mit je vier amputierten Beinchen und n äußere Punkte mit Linien. Die äußeren Punkte sind mit \pm -Indizes zu versehen und die äußeren Linien mit Impulsen p_1, \dots, p_n .
- (2) Es sind zunächst die äußeren Punkte untereinander bzw. mit den Vertizes zu verbinden, wobei wie in Abschnitt B.1 angegeben der Multiplizitätsfaktor M zu bestimmen ist.
- (3) Jede Linie, die einen Vertexpunkt mit einem äußeren Punkt oder mit einem anderen oder demselben Vertexpunkt verbindet, ist mit einem inneren Impuls q_j zu versehen, dabei ist der Impulserhaltung an jedem Vertex Rechnung zu tragen. Der dabei immer auftretende Faktor $(2\pi)^{2\omega} \delta^{(2\omega)}(\sum_i p_i)$, der die Gesamtimpulserhaltung beschreibt, wird weggelassen, wobei vorausgesetzt wird, daß die Summe der äußeren Impulse 0 ist.
- (4) Jeder Vertexpunkt wird entsprechend Abb. 2.4 durch $\pm i\lambda/4!$ ersetzt. Weiter wird ein Faktor $M/k!$ hinzugefügt. Jede innere Linie mit Impuls p steht für einen Propagator, der entsprechend der Pfeilrichtung gemäß Abb. 2.4 einzusetzen ist. Für die Verbindung zweier äußerer Punkte mit Impulsen p_1 und p_2 ist $(2\pi)^4 \delta^{(2\omega)}(p_1 + p_2) \Delta(p_1)$ zu setzen. Über die durch die Impulserhaltung an den Vertizes und die Gesamtimpulserhaltung nicht festgelegten inneren Impulse ist zu integrieren, über die inneren Vertexpunkte ist bzgl. \pm zu summieren. Dies entspricht der Integration über die beiden Zweige der Zeitkontur im Raumzeitbereich.

2.3 Thermodynamische Größen

In diesem Abschnitt wollen wir den „imaginären Teil“ der Zeitkontur näher betrachten. Es ist klar, daß bei einer Kenntnis der Greenfunktionen entlang des reellen Teils der Kontur aufgrund der im vorigen Abschnitt hergeleiteten analytischen Eigenschaften die Funktionen auch entlang des imaginären Teils bekannt sind.

2.3.1 Die Zustandsgrößen

Zunächst ist es bequem, auch für die thermodynamischen Zustandsgrößen eine „erzeugende Funktion“, nämlich die *Zustandssumme* zu definieren:

$$Z(\beta, \alpha) = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q}) = \exp[\Omega(\beta, \alpha)]. \quad (2.87)$$

Dann folgt aus der Definition des statistischen Operators für das großkanonische Gleichgewichtsensemble (2.41)

$$E = \text{Tr}(\mathbf{R}\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \Omega(\beta, \alpha), \quad Q = \text{Tr}(\mathbf{R}\mathbf{Q}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega(\beta, \alpha). \quad (2.88)$$

Für die von Neumannentropie gilt wegen (2.29)

$$S = -\text{Tr}(\mathbf{R} \ln \mathbf{R}) = \Omega + \beta \langle E \rangle - \alpha \langle Q \rangle. \quad (2.89)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $\Omega = \ln Z$ eine Legendretransformierte der Entropie, also eine *Masseiefunktion* ist. Wir führen nun die neuen Variablen $T = 1/\beta$ (Temperatur) und $\mu = \alpha/\beta$ (chemisches Potential) ein. Dann folgt

$$S = \frac{\partial}{\partial T} [T\Omega(T, \mu)]_{\mu=\text{const}}. \quad (2.90)$$

Durch Umschreiben von (2.88) ergibt sich

$$dE = TdS + \mu dQ, \quad (2.91)$$

was zeigt, daß T die Temperatur und μ das chemische Potential im thermodynamischen Sinne darstellen, also TdS die dem System bei der Zustandsänderung zugeführte Wärme und μdQ die zur Zuführung der Ladung dQ zum System erforderliche chemische Energie ist.

Wir stellen noch einmal die immer wieder benötigten Zusammenhänge zwischen den thermodynamischen Größen zusammen. Im folgenden betrachten wir alle thermodynamischen Zustandsgrößen als Funktionen von β und μ .

$$\begin{aligned} Z(\beta, \mu) &= \text{Tr}(\exp(-\beta \mathbf{H} + \mu \beta \mathbf{Q})), \quad \Omega(\beta, \mu) = \ln Z(\beta, \mu), \\ E = \text{Tr}(\mathbf{R}\mathbf{H}) &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \Omega(\beta, \alpha/\beta) \Big|_{\alpha=\mu\beta}, \\ Q = \text{Tr}(\mathbf{R}\mathbf{Q}) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega(\beta, \alpha/\beta) \Big|_{\alpha=\mu\beta}, \\ S &= \frac{\partial}{\partial T} [T\Omega(1/T, \mu)]_{T=1/\beta}, \quad dE = TdS + \mu dQ. \end{aligned} \quad (2.92)$$

2.3.2 Das ideale geladene Bosegas

Zur Berechnung der Entropie als Funktion von β und μ und damit aller thermodynamischen Zustandsgrößen, genügen unsere bisher durchgeführten formalen Manipulationen mit Pfadintegralen nicht, denn wir benötigen die Zustandssumme Z bis auf von β und μ unabhängige Faktoren, während für das erzeugende Funktional für Greenfunktionen von j und j^* unabhängige multiplikative Konstanten irrelevant waren, weil sie sich durch die Normierung ohnehin wegheben.

Für die Berechnung der Zustandssumme bzw. des großkanonischen Potentials $\Omega = \ln Z$ ist es aber wesentlich, auch von β und μ abhängige multiplikative Konstanten zu berücksichtigen, während von den Feldern unabhängige Konstanten keine Rolle spielen. Wir müssen daher nochmals auf die Hamiltonsche Formulierung (2.57) des Pfadintegrals zurückgreifen. Für $F = 1$ erhalten wir

$$Z(\beta, \mu) = N \int_{pp} D\phi D\phi^* \int D\Pi D\Pi^* \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}} d^{2\omega} x (\mathcal{H} - \Pi \dot{\phi} - \Pi^* \dot{\phi}^*) \right], \quad (2.93)$$

wobei N einen von β und μ unabhängigen Faktor bezeichnet.

Ferner müssen wir das Gas in ein endliches Volumen einschließen, damit die Ausdrücke einen wohldefinierten Sinn erhalten. Dabei bedeutet der thermodynamische Limes, den wir hier abschließend betrachten wollen, daß Randeffekte vernachlässigbar sein sollen, d.h. das Volumen soll groß gegenüber den charakteristischen Längenskalen des Systems sein. Der Einfachheit halber können wir dann einen Würfel der Kantenlänge l als Quantisierungsvolumen sowie periodische Randbedingungen für die Felder wählen, d.h. wir verlangen

$$\phi(t, \vec{x} + l\vec{e}_i) = \phi(t, \vec{x}), \quad \phi^*(t, \vec{x} + l\vec{e}_i) = \phi^*(t, \vec{x}), \quad (2.94)$$

wobei \vec{e}_i für $i = 1, \dots, 2\omega - 1$ die räumlichen Koordinateneinheitsvektoren sind.

Es ist weiter klar, daß es hier genügt, bzgl. des Zeitintegrals nur über \mathcal{C}_V zu integrieren, weil sich die Beiträge der beiden Zweige der geschlossene Realzeitkontur gegenseitig wegheben. Wir führen also wieder die Parametrisierung $t = -i\tau$ mit $\tau \in (0, \beta)$ ein, wodurch sich ein euklidisches Pfadintegral

$$Z_0(\beta, \mu) = \int_{pp} D\Phi D\Phi^* \int D\Pi D\Pi^* \times \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^{2\omega-1} \vec{x} [\Pi^* \Pi + (\nabla \phi)^* (\nabla \phi) - i\Pi \partial_\tau \phi - i\Pi^* \partial_\tau \phi^*] \right] \quad (2.95)$$

ergibt, wobei wir jetzt freie Teilchen vorausgesetzt haben. Die Felder im Pfadintegral haben den Randbedingungen

$$\phi(\tau = \beta, \vec{x}) = \phi(\tau = 0, \vec{x}) \exp(-\beta\mu), \quad \phi^*(\beta, \vec{x}) = \phi^*(0, \vec{x}) \exp(\beta\mu) \quad (2.96)$$

zu genügen. Das bedeutet, daß die Felder implizit von β und μ abhängen, so daß wir eine Zeitgitterung einführen müssen, um diese Abhängigkeit zu berücksichtigen, bevor wir das Impulsgitter explizit ausführen können. Eine Raumgitterung ist im Moment noch nicht notwendig.

Wir teilen also das Intervall $(0, \beta)$ in n Teile ein. Mit $\epsilon = \beta/n$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 Z_0(\beta, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int D\phi_k^* D\phi_k \int D\Pi_k^* D\Pi_k \\
 \exp \left[-\epsilon \sum_{k=1}^n \int d^{2\omega-1} \vec{x} \left(\Pi_k^* \Pi_k + (\nabla \phi_k^*)(\nabla \phi_k) + m^2 \phi_k^* \phi_k \right. \right. \\
 \left. \left. - i\Pi_k \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\epsilon} - i\Pi_k^* \frac{\phi_k^* - \phi_{k-1}^*}{\epsilon} \right) \right], \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

wobei den pseudoperiodischen Randbedingungen (2.96) durch die Forderungen

$$\phi_n = \phi_0 \exp(-\beta\mu) \quad \text{und} \quad \phi_n^* = \phi_0^* \exp(\beta\mu) \quad (2.98)$$

Rechnung zu tragen ist. Die Gaußintegrale über die kanonischen Impulse lassen sich nun geschlossen ausführen:

$$Z_0(\beta, \mu) = N' \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{pp} D\phi_k^* D\phi_k \exp \left[-\epsilon \sum_{k=1}^n \int d^{2\omega-1} \vec{x} \frac{|\phi_k - \phi_{k-1}|^2}{\epsilon^2} + m^2 \phi_k^* \phi_k + (\nabla \phi_k^*)(\nabla \phi_k) \right]. \quad (2.99)$$

Es ist klar, daß dies im Kontinuumsmites wieder in die bekannte Form des Lagrangeschen Pfadintegrals übergeht:

$$Z_0(\beta, \mu) = N' \int_{pp} \tilde{D}\phi^* \tilde{D}\phi \exp \left[-\int_0^\beta d\tau \int d^{2\omega-1} \vec{x} \mathcal{L}_E \right] \quad (2.100)$$

mit

$$\mathcal{L}_E = (\partial_\tau \phi^*)(\partial_\tau \phi) + (\nabla \phi^*)(\nabla \phi) + m^2 \phi^* \phi. \quad (2.101)$$

Entscheidend für die Zustandssumme ist aber, daß wir hier durch die zeitgitterte Form wissen, wie das Pfadintegralmaß zu normieren ist (bis auf thermodynamisch irrelevante Faktoren, die von β und μ unabhängig sind). Man muß nur (2.100) durch die gegitterte Version (2.99) definieren. Zur endgültigen Berechnung der großkanonischen Zustandssumme führen wir jedoch zunächst in der Kontinuumsform die *Homogenisierung der zeitlichen Randbedingungen* aus, indem wir die Felder um den stationären Punkt des Wirkungsfunktional, also die Lösung des entsprechenden klassischen Systems entwickeln. Dies ist im Fall des freien Gases exakt möglich, weil die Lagrangedichte auch in den Feldern und deren Ableitungen quadratisch ist, also ein Gaußsches Pfadintegral vorliegt.

Es ist hier aber von Vorteil, zunächst in die Impulsdarstellung zu wechseln (die imaginäre Zeit bleibt hier untransformiert, weil wir ja die Gitterung bzgl. dieser Variablen ausgeführt haben). Wir setzen also

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \phi(\tau, \vec{p}) \exp(i\vec{p}\vec{x}), \quad \phi^*(x) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \phi^*(\tau, \vec{p}) \exp(-i\vec{p}\vec{x}). \quad (2.102)$$

Dabei bezeichnet $V = l^{2\omega-1}$ das räumliche Quantisierungsvolumen, und die Summen laufen über die Werte $\vec{p} = 2\pi(n_1, \dots, n_{2\omega-1})/l$ entsprechend den periodischen räumlichen Randbedingungen für die Felder. Für den thermodynamische Limes halten wir fest, daß für große l die Impulssummen durch die Ersetzungsregel

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^{2\omega-1}} \int d^{2\omega-1} \vec{p} \quad (2.103)$$

genähert werden können.

Die euklidische Wirkung in dieser Parametrisierung ist durch

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} [(\partial_\tau \phi^*)(\partial_\tau \phi) + \omega^2 \phi^* \phi] \text{ mit } \omega^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (2.104)$$

gegeben. Zur Berechnung des Pfadintegrals definieren wir zunächst für jedes festgehaltene \vec{p} die klassische Lösung als den stationären Punkt des euklidischen Wirkungsfunktional

$$S_E(\vec{p}) = - \int_0^\beta d\tau [(\partial_\tau \phi^*)(\partial_\tau \phi) + \omega^2 \phi^* \phi] \quad (2.105)$$

mit den pseudoperiodischen Randbedingungen des Pfadintegrals, d.h. durch

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} = \left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi^*} \right|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} = 0, \quad (2.106)$$

$$\phi(0, \vec{p}) = \phi_0, \quad \phi(\beta, \vec{p}) = \exp(-\beta\mu)\phi_0, \quad \phi^*(0) = \phi_0^*, \quad \phi^*(\beta) = \exp(\beta\mu)\phi_0^*.$$

Die Bewegungsgleichungen sind bis auf das durch die euklidische Form der Wirkung bedingte Vorzeichen die eines harmonischen Oszillators der Masse 1 und der Frequenz ω . Die eindeutige Lösung lautet

$$\begin{aligned} \phi_{\text{cl}}(\tau) &= \phi_0 \left[\cosh(\omega\tau) + \frac{[\exp(-\beta\mu) - \cosh(\omega\beta)]}{\sinh(\omega\beta)} \right], \\ \phi_{\text{cl}}^*(\tau) &= \phi_0^* \left[\cosh(\omega\tau) + \frac{[\exp(\beta\mu) - \cosh(\omega\beta)]}{\sinh(\omega\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Das allgemeine Feld im Pfadintegral können wir nun schreiben als

$$\phi = \phi_{\text{cl}} + \phi' \text{ mit } \phi'(\tau=0) = \phi'(\tau=\beta) = 0. \quad (2.108)$$

Wegen der Homogenität der Randbedingungen von ϕ' rechnen wir aufgrund der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen für ϕ_{cl} sofort nach, daß

$$S_E[\phi, \vec{p}] = S_E[\phi_{\text{cl}}] + S_E[\phi'] \quad (2.109)$$

ist. Einsetzen der Lösung (2.107) ergibt

$$S_E[\phi_{\text{cl}}, \vec{p}] = 2\omega\phi_0^*\phi_0 \frac{\sinh[\beta(\mu - \omega)/2] \sinh[\beta(\mu + \omega)/2]}{\cosh(\beta\omega/2) \sinh(\beta\omega/2)} \quad (2.110)$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} Z(\beta, \mu) &= N \prod_{\vec{p}} \int d(\phi_0^*/\sqrt{V}) d(\phi_0/\sqrt{V}) \exp[S_E[\phi_{\text{cl}}]] \times \\ &\quad \times \underbrace{\int_{\phi(\tau=0)=0}^{\phi(\tau=\beta)=0} D(\phi^*/\sqrt{V}) D(\phi/\sqrt{V}) \exp[S_E[\phi]]}_{Z_{\text{hom}}}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Dabei haben wir beachtet, daß durch die Parametrisierung im Impulsraum das Pfadintegralmaß mit $1/V$ zu skalieren ist. Zur Berechnung der Zustandssumme Z_{hom} für Felder, die homogenen

Randbedingungen genügen, müssen wir wieder zur zeitgitterten Form (2.99) übergehen. Durch die homogenen Randbedingungen ist es nun aber leicht, die gitterte Wirkung in der Form

$$S_E^{\text{lat}} = -\phi^{*t} \frac{\hat{M}}{\epsilon} \phi \quad (2.112)$$

zu schreiben, wobei nun $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1})^t$ den impulsabhängigen Vektor der Felder an den Zeitgitterpunkten bezeichnet. Die Matrix ist symmetrisch und tridiagonal:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 2 + \omega^2 \epsilon^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \omega^2 \epsilon^2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \omega^2 \epsilon^2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

Wir benötigen die Determinante dieser Matrix, denn für eine beliebige hermitesche Matrix gilt

$$\int d^n z^* d^n z \exp(-az^\dagger \hat{A} z) = \frac{2\pi i}{a^n \det \hat{A}}. \quad (2.114)$$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhalten wir die Rekursionsformel

$$d_{n-1} = \det \hat{M} = (2 + \omega^2 \epsilon^2) D_{n-2} - D_{n-3}, \quad D_0 = 1, \quad D_{-1} = 0. \quad (2.115)$$

Diese zweigliedrige Rekursionsformel läßt sich leicht lösen indem man sie in der folgenden Matrix-Vektorform schreibt:

$$\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \cosh u & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{A}} \begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } 2 \cosh u = 2 + \omega^2 \epsilon^2. \quad (2.116)$$

Damit folgt durch Iteration

$$\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \hat{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.117)$$

Beim Diagonalisieren, Potenzieren und Rücktransformieren der Matrix \hat{A} erweist sich die Parametrisierung mit u als vorteilhaft. Es folgt

$$D_{n-1} = \frac{2n^2 \sinh \left[n \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{\omega^2}{2n^2} \right) \right]}{\omega \beta \sqrt{4n^2 + \omega^2 \beta^2}}. \quad (2.118)$$

Wir benötigen diesen Ausdruck nur in führender Ordnung für große n :

$$D_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\cong} \frac{n \sinh(\omega \beta)}{\beta \omega} = \frac{1 \sinh(\omega \beta)}{\epsilon \omega}. \quad (2.119)$$

Dies in die zeitgitterte Form von (2.111) eingesetzt, ergibt unter Anwendung von (2.114) das Resultat

$$N \prod_{\vec{p}} \frac{\omega}{\sinh(\omega \beta)}. \quad (2.120)$$

Damit ergibt sich schließlich durch Einsetzen in (2.111) und Integration über ϕ_0^* und ϕ_0 :

$$Z(\beta, \mu) = N \prod_{\vec{p}} \frac{1}{\cosh(\beta \omega) - \cosh(\beta \mu)}. \quad (2.121)$$

Nun bilden wir den Logarithmus und gehen mit Hilfe der Ersetzungsregel (2.103) zur Integralnäherung für große Volumina über. Dabei ist zu beachten, daß die Nullmode $\vec{p} = 0$, also $\omega = m$ explizit zu addieren ist, weil sie durch den Übergang zum Integral wegen $d^3\vec{p} = \omega\sqrt{\omega^2 - m^2}d\omega d(\cos\theta)d\phi$ wegfällt. Dies ergibt nach einigen Umformungen bis auf von β und μ unabhängige Konstanten das Resultat

$$\begin{aligned} \Omega_\infty(\beta, \mu) = -V \int \frac{d^{2\omega-1}\vec{p}}{(2\pi)^{2\omega-1}} \{ & \beta\omega + \ln[1 - \exp[-\beta(\omega + \mu)]] + \ln[1 - \exp[-\beta(\omega - \mu)]] \} - \\ & - \ln[1 - \exp(-\beta(m - \mu))] - \ln[1 - \exp(-\beta(m + \mu))]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Dieser Ausdruck ist wegen des Terms $\beta\omega$ im Integranden nicht endlich. Berechnet man aber die Entropie gemäß (2.90), fällt dieser Term heraus. Bestimmen wir also das Potential Ω umgekehrt durch das entsprechende Integral der Entropie, sehen wir, daß es sich um eine Renormierung des Potentials bei $T = 0$ handelt. Im Operatorformalismus wird dieses Problem durch die Renormierung des Vakuums mit Hilfe der Normalordnungsvorschrift für die Feldoperatoren behoben. Die Divergenz ist also nur auf die fehlende Normalordnungsvorschrift im Pfadintegralformalismus zurückzuführen. Andererseits ist die Normalordnungsvorschrift jedoch für Eichtheorien problematisch und eine Renormierung des Vakuums bei der Berechnung von Korrekturen im Rahmen der Störungsreihe der wechselwirkenden Theorie ohnehin erforderlich. Wir erhalten also endgültig für die physikalische Raumzeitdimension $2\omega = 4$

$$\begin{aligned} \Omega_0(\beta, \mu) = -V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ & \ln[1 - \exp[-\beta(\omega + \mu)]] + \ln[1 - \exp[-\beta(\omega - \mu)]] \} - \\ & - \ln[1 - \exp(-\beta(m - \mu))] - \ln[1 - \exp(-\beta(m + \mu))]. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Bilden wir nun die intensive Größe Ω_0/V , finden wir im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$ für $\mu \neq \pm m$:

$$\frac{1}{V}\Omega_0(\beta, \mu) \underset{V \rightarrow \infty}{\cong} - \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 - \exp[-\beta(\omega + \mu)]] + \ln[1 - \exp[-\beta(\omega - \mu)]] \} := \frac{1}{V}\Omega_0^*(\beta, \mu). \quad (2.124)$$

Das Sternchen deutet an, daß es sich hierbei um den Anteil der Teilchen außerhalb des Grundzustandes handelt. In dem Fall, daß die vorgegebene Ladungsdichte mit $|\mu| < m$ nicht erreicht werden kann, muß $\mu = \pm m$ gesetzt werden. Dabei ist zu beachten, daß dann der Beitrag der Nullmode $\vec{p} = 0 \Rightarrow \omega = m$ in der diskreten Summe divergiert, während er beim Übergang zum Integral (2.124) durch den Faktor \vec{p}^2 in $d^3\vec{p}$ wegfällt. Es ist klar, daß in diesem Fall eine makroskopisch relevante Anzahl von Teilchen den Grundzustand besetzt. Dies bezeichnet man als *Bose-Einstein-Kondensation*, wobei zu beachten ist, daß hierunter eine Kondensation im Impulsraum zu verstehen ist. In diesem Kondensatzustand gibt (2.124) also nur den Anteil des Gases korrekt wieder, der sich aus Teilchen konstituiert, die sich angeregten Zuständen befinden.

Wir zeigen nun, wie man formal den kondensierten Zustand im thermodynamischen Limes zu berücksichtigen hat. Vor dem Übergang zum thermodynamischen Limes ist $|\mu| < m$ zu setzen. Betrachten wir die Situation bei Annäherung $\mu \rightarrow +m$, so ist der Beitrag der Nullmode nicht vernachlässigbar klein:

$$\Omega_{\text{cond}}(\beta, \mu) = -\ln[1 - \exp(-\beta(m - \mu))]. \quad (2.125)$$

Der Beitrag dieses Kondensats zur Ladungsdichte des Systems berechnet sich zu

$$q_{\text{cond}}(\beta, \mu) = \frac{1}{V}[\partial_\alpha \Omega_{\text{cond}}(\beta, \mu = \alpha/\beta)]_{\alpha=\beta\mu} = \frac{1}{V} \frac{1}{1 - \exp[-\beta(m - \mu)]} \stackrel{!}{=} q_0 > 0. \quad (2.126)$$

Zum Übergang zum thermodynamischen Limes müssen wir die Limes $\mu \rightarrow m$ und $V \rightarrow \infty$ so bilden, daß $q_0 = \text{const}$, d.h. wir müssen bei der Limesbildung

$$V(\beta, \mu) = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1 - \exp[-\beta(m - \mu)]} \quad (2.127)$$

setzen und $\mu \rightarrow m$ bilden. Für die Kondensatbeiträge der einzelnen thermodynamischen Größen ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \lim_{\mu \rightarrow m-0} \frac{1}{V(\beta, \mu)} [\partial_\beta \Omega_{\text{cond}}(\beta, \alpha/\beta)]_{\alpha=\beta\mu} = q_0 m \\ s_0 &= \lim_{\mu \rightarrow m-0} \frac{1}{V(\beta, \mu)} T \Omega_{\text{cond}}(1/T, \mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Das heißt in diesem Fall bilden Teilchen das Kondensat. Analog findet man für Antiteilchen im Kondensat, also den entsprechenden Übergang $\mu \rightarrow -m$:

$$q_0 < 0, \quad \epsilon_0 = |q_0| m, \quad s_0 = 0. \quad (2.129)$$

Wir bemerken weiter, daß wir jetzt auch Zustandsänderungen bei adiabatischen Änderungen des Volumens betrachten können. Es genügt, den ersten Hauptsatz der Thermodynamik anzuschreiben, da daraus alle thermodynamischen Beziehungen hervorgehen. Da alle extensiven Größen im thermodynamischen Limes proportional zu V sind, gilt

$$dE = T dS + \mu dQ + \frac{T\Omega}{V} dV. \quad (2.130)$$

Dem entnehmen wir die physikalische Bedeutung, des großkanonischen thermodynamischen Potentials

$$\Omega = \frac{PV}{T}, \quad (2.131)$$

wobei wir mit P den Druck bezeichnen.

2.3.3 Die Zustandssumme als Funktionaldeterminante

Wir haben gesehen, daß sich in

$$Z(\beta, \mu) = N' \int \tilde{D}\phi^* \tilde{D}\phi \exp[-S_E[\phi^*, \phi]] \quad (2.132)$$

der β -abhängige von der Impulsintegration herrührende Faktor im Pfadintegralmaß $\tilde{D}\phi^* \tilde{D}\phi$ gegen einen entsprechenden Faktor im Pfadintegralmaß über die Felder weggehoben hat. Wir können also statt (2.100) einfach das übliche Pfadintegral in der Lagrangeschen Form benutzen und den Normierungsfaktor trotzdem unabhängig von β und μ annehmen.

Wir demonstrieren dies am Beispiel des ungeladenen idealen Bosegases. Die euklidische Lagrangedichte schreibt sich

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_\mu^E \phi)(\partial_\mu^E \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (2.133)$$

mit $\phi \in \mathbb{R}$. Die Zustandssumme ist also nach den obigen Bemerkungen durch

$$Z_0(\beta) = N \int_{\mathbb{p}} D\phi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int_V d^3 \vec{x} \mathcal{L}_E \right] \quad (2.134)$$

gegeben. Jetzt wenden wir direkt die Formel

$$\ln N \int_{\mathfrak{p}} D\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x' \int d^4x \phi(x') D(x, x') \phi(x) \right] = \ln \frac{N}{\sqrt{\text{Det} D}} = \ln N - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(D) \quad (2.135)$$

an, die als Grenzwert der entsprechenden diskretisierten Pfadintegralformel zu verstehen ist.

Schreiben wir die Felder im Viererimpulsraum, wobei wegen der periodischen Randbedingungen der Felder die p_0 -Komponente die diskreten Matsubarafrequenzen $\omega_n = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ durchläuft

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{\omega_n} \int d^3\vec{p} \exp(-ipx)|_{p_0=\omega_n} \phi(p) \text{ mit } \phi(p) = \phi(-p) \in \mathbb{R}, \quad (2.136)$$

finden wir für den in Frage stehenden Operator in Impulsdarstellung

$$D(p, p') = (p^2 + m^2) \delta^{(4)}(p - p'), \quad (2.137)$$

so daß die Spur schließlich

$$\ln Z_0(\beta) \hat{=} -\frac{V}{2} \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[(2\pi n)^2 + \omega^2 \beta^2] \quad (2.138)$$

ergibt. Dabei bezeichnen wir mit $\hat{=}$ die Gleichheit bis auf von β unabhängige Konstanten, die i.a. unendliche Ausdrücke darstellen. Zur Berechnung der Summe benutzen wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(2\pi n)^2 + \omega^2 \beta^2] &\hat{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_1^{\omega^2 \beta^2} du \frac{1}{(2\pi n)^2 + u} = \int_1^{\omega^2 \beta^2} du \frac{\coth(\sqrt{u}/2)}{2\sqrt{u}} \\ &\hat{=} \beta\omega + 2 \ln[1 - \exp(-\beta\omega)]. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Der erste Term entspricht wieder der Nullpunktsenergie, die wir mit demselben Argument, wie oben unmittelbar vor Gl. (2.123) besprochen, abziehen können. Die endgültige Gleichung für die thermodynamische Zustandssumme des neutralen Bosegases lautet also

$$\Omega_0(\beta) = \ln Z_0 = -V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp(-\beta\omega)]. \quad (2.140)$$

Das entspricht in der Tat dem halbierten Resultat (2.123) für $\mu = 0$. Der Faktor 1/2 rührt daher, daß beim neutralen Bosegas nur 1 Feldfreiheitsgrad vorhanden ist, entsprechend der Ununterscheidbarkeit von Teilchen und Antiteilchen.

Wir bemerken noch, daß sich hier kein Problem mit einem Kondensat ergibt. Das ist auch physikalisch verständlich, denn beim ladungsneutralen Gas gibt es keine der Ladung entsprechende Erhaltungsgröße, so daß sich die Teilchendichte beim Übergang ins thermodynamische Gleichgewicht entsprechend der Temperatur, d.h. der im Mittel zur Verfügung stehenden Energie, einstellt.

Bei masselosen Teilchen ist übrigens zwingend $\mu = 0$, und es gilt eine entsprechende Bemerkung. Der Kondensatbeitrag der Nullmode zu Ω ist in diesem Fall vor dem Übergang von der Impulssumme zum Integral im thermodynamischen Limes divergent. Da dies jedoch ein von β unabhängiger Beitrag ist, spielt dies keine Rolle, d.h. der Beitrag der Nullmode ist bei der ohnehin notwendigen Renormierung von Ω abzuziehen, so daß die Integrale im thermodynamischen Limes auch in diesem Fall korrekt sind.

2.3.4 Das freie Fermigas

Das freie Fermigas läßt sich in vollständiger Analogie zum freien Bosegas analytisch behandeln. Abgesehen von den Komplikationen, die die Antikommutatorregeln und damit die Notwendigkeit der Einführung der \mathbb{Z}_2 -graduierten Grassmannalgebra mit sich bringen, weist das Fermigas sogar einige Vereinfachungen gegenüber dem Bosonengas auf.

Die Lagrangedichte freier Diracfermionen mit der Masse m ist durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \quad (2.141)$$

gegeben. Sie ist linear in $\dot{\psi}$, und folglich ist

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger. \quad (2.142)$$

Der erhaltene Strom bzw. die dazugehörige Ladung aus der $U(1)$ -Symmetrie ist durch

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad Q = \int d^{2\omega-1}\vec{x}\psi^\dagger\psi \quad (2.143)$$

gegeben, und wir können genau die Schritte nachvollziehen, die wir schon beim Bosegas ausgeführt haben, um zur Pfadintegralformel

$$\begin{aligned} Z(\beta, \mu) &= \text{Tr} \exp(-\beta\mathbf{H} + \beta\mu\mathbf{Q}) = N \int \text{D}\Pi \int_{\text{pap}} \text{D}\psi \exp \left[i \int_{\mathcal{E}} d^{2\omega}x \mathcal{L} \right] \\ &= N' \int \text{D}\bar{\psi} \int_{\text{pap}} \text{D}\psi \exp \left[i \int_{\mathcal{E}} d^{2\omega}x \mathcal{L} \right] \end{aligned} \quad (2.144)$$

zu gelangen. Dabei haben wir die Formel (C.22) und $\det \gamma^0 = 1$ ausgenutzt. Wegen der Linearität von \mathcal{L} in $\dot{\psi}$ stimmen die Hamiltonsche und die Lagrangesche Form bis auf indefinite Faktoren miteinander überein. Wegen der Spurbildungsregel (C.37) ist aufgrund der Antikommutativität der Grassmannfelder an ψ die „pseudoantiperiodische“ Randbedingung

$$\psi(t_i, \vec{x}) = -\psi(t_f, \vec{x}) \exp(\beta\mu) \quad (2.145)$$

zu stellen. Die kanonischen Impulse Π und folglich auch die Felder $\bar{\psi}$ müssen keinerlei Randbedingungen erfüllen. Im übrigen empfiehlt es sich hier, die Weylordnung der Lagrangedichte so zu definieren, daß alle Feldoperatoren $\bar{\psi}$ links von allen ψ zu stehen kommen, und es sind bei der Herleitung von (2.144) im gitterten Pfadintegral die Zerlegungen der Identität nach kohärenten Zuständen entsprechend dieser Ordnung einzuschieben.

Wir können jedoch auf die Berechnung des Pfadintegrals nach der Zeitgitterungsmethode verzichten und direkt auf die im vorigen Abschnitt anhand des ungeladenen Bosegas exemplifizierte Methode der Funktionaldeterminante zurückgreifen, weil die Hamiltonsche und die Lagrangesche Formulierung hier identisch sind. Wir können alle Ausführungen von dort wörtlich übernehmen. Die Felder müssen allerdings den geänderten Randbedingungen (2.145) genügen, d.h. die Zerlegung nach Impulseigenzuständen im euklidischen Zweig der Kontur ist für $2\omega = 4$ von der Form

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp(ikp) \psi(p) \Big|_{p_0=(2k+1)\frac{\pi}{\beta} + i\mu}. \quad (2.146)$$

Dabei verstehen wir alle Skalarprodukte für diese Rechnung als positiv definit euklidisch. Es ist für die γ -Matrizen ebenfalls die entsprechende euklidische Form zu wählen: $\gamma_0^E = \gamma^0$ und $\gamma_i^E = i\gamma^i$. Ab jetzt schreiben für den Rest dieses Abschnitts $\not{p} = p_j \gamma_j^E$. Dies in die Wirkung eingesetzt, ergibt

$$\beta \sum_{\omega_F} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\pi^3} \bar{\psi}(p)(i\not{p} + m)\psi(p)|_{p_0=\omega_F+i\mu}. \quad (2.147)$$

Es ist also

$$Z = N \text{Det}[\beta(i\not{p} + m)]. \quad (2.148)$$

Hier empfiehlt es sich, zuerst die Determinante bzgl. der Diracindizes zu bilden und dann die Spurformel zu benutzen:

$$\Omega = \ln Z \doteq 2V \sum_{\omega_F} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln\{[(\omega_F + i\mu)^2 + \omega^2]\beta^2\}. \quad (2.149)$$

Da die Summe über ω_F symmetrisch ist, läßt sich dies in den rein reellen Ausdruck

$$\Omega \doteq V \sum_{\omega_F} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \{\ln[\beta^2(\omega_F^2 + (\omega - \mu)^2)] + \ln[\beta^2(\omega_F^2 + (\omega + \mu)^2)]\} \quad (2.150)$$

umformen, wobei über die fermionischen Matsubarafrequenzen $\omega_F(k) = (2k + 1)\pi/\beta$ für $k \in \mathbb{Z}$ summiert wird. Das weitere Vorgehen entspricht exakt dem im vorigen Abschnitt für das Bosegas. Nach Abziehen unendlicher von β und μ unabhängiger Konstanten und der Renormierung der Nullpunktsenergie ergibt sich das *thermodynamische Potential für Fermionen*:

$$\Omega = 2V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \{\ln[1 + \exp[-\beta(\omega - \mu)]] + \ln[1 + \exp[-\beta(\omega + \mu)]]\}. \quad (2.151)$$

Wir erhalten also wieder zwei Beiträge, von denen einer von den Teilchen und der andere von den dazugehörigen Antiteilchen herrührt. Der Faktor 2 trägt den beiden Spinfreiheitsgrade der Diraceteilchen Rechnung.

Der einzige Unterschied zu Bosonen ist also das Vorzeichen vor der Exponentialfunktion, das von der auf der fermionischen Natur beruhenden Antiperiodizität der Felder beruht. Dies spiegelt das Pauliprinzip wieder.

Es gibt keine Einschränkung des Wertebereichs für μ , d.h. zu jeder Temperatur kann die Ladungsdichte (also die Differenz der Anzahl von Teilchen und Antiteilchen) beliebig eingestellt werden. Auch, daß es aufgrund des Pauliverbots keine Kondensation geben kann, wird durch den Grenzübergang $\beta \rightarrow \infty$ für die extensiven Zustandsgrößen klar. So ergibt z.B. die Ableitung nach β

$$E = 2V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega [f_F^+(\omega) + f_F^-(\omega)]|_{\omega=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \quad (2.152)$$

mit der *Fermi-Dirac*-Verteilung

$$f_F^\pm(\omega) = \frac{1}{1 + \exp[\beta(\omega \mp \mu)]}. \quad (2.153)$$

2.3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse für ideale Gase

Bosonen

Die thermodynamischen Zustandsgrößen für massive geladene Spin-0-Bosonen sind durch

$$\begin{aligned}
 P(\beta, \mu) &= \frac{\Omega(\beta, \mu)}{\beta V} = -\frac{1}{\beta} \int_m^\infty d\omega \omega \sqrt{\omega^2 - m^2} \{ \ln[1 - \exp(-\beta(\omega - \mu))] + (\mu \rightarrow -\mu) \}, \\
 E(\beta, \mu) &= \frac{V}{2\pi^2} \int_m^\infty \omega^2 \sqrt{\omega^2 - m^2} [f_B^+(\omega) + f_B^-(\omega)], \\
 Q(\beta, \mu) &= \frac{V}{2\pi^2} \int_m^\infty d\omega \omega \sqrt{\omega^2 - m^2} [f_B^+(\omega) - f_B^-(\omega)], \\
 S(\beta, \mu) &= \Omega + \beta E - \beta \mu Q.
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

Dabei haben wir die Boseverteilungsfunktionen für Teilchen und Antiteilchen eingeführt:

$$f_B^\pm(\omega) = \frac{1}{\exp[\beta(\omega \pm \mu)] - 1}. \tag{2.155}$$

Zu bemerken ist, daß durch die Feynman-Stückelberg-Interpretation der Moden negativer Frequenz, die Teilchen und Antiteilchen positive Energie, aber entgegengesetzt gleiche Ladungen besitzen, wie es sein muß. Diese Konstruktion ist für Teilchen mit ganzzahligem Spin nur mit der Bosestatistik konsistent. Der Fall des Bose-Einstein-Kondensats wurde hierbei nicht berücksichtigt (s. Abschnitt 2.3.2).

Fermionen

Die thermodynamischen Zustandsgrößen für massive geladene Spin-1/2-Fermionen sind durch

$$\begin{aligned}
 P(\beta, \mu) &= \frac{\Omega(\beta, \mu)}{\beta V} = \frac{2}{\beta} \int_m^\infty d\omega \omega \sqrt{\omega^2 - m^2} \{ \ln[1 + \exp(-\beta(\omega - \mu))] + (\mu \rightarrow -\mu) \}, \\
 E(\beta, \mu) &= \frac{2V}{2\pi^2} \int_m^\infty \omega^2 \sqrt{\omega^2 - m^2} [f_F^+(\omega) + f_F^-(\omega)], \\
 Q(\beta, \mu) &= \frac{2V}{2\pi^2} \int_m^\infty d\omega \omega \sqrt{\omega^2 - m^2} [f_F^+(\omega) - f_F^-(\omega)], \\
 S(\beta, \mu) &= \Omega + \beta E - \beta \mu Q.
 \end{aligned} \tag{2.156}$$

Dabei haben wir die Fermiverteilungsfunktionen für Teilchen und Antiteilchen eingeführt:

$$f_F^\pm(\omega) = \frac{1}{\exp[\beta(\omega \pm \mu)] + 1}. \tag{2.157}$$

2.3.6 Thermodynamik von Eichfeldern

Wie schon in der Quantenfeldtheorie im Vakuum ergeben sich auch bei endlichen Temperaturen Probleme aus der Eichinvarianz. Wir behandeln der Einfachheit halber zunächst eine reine Yang-Mills-Theorie (vgl. [Hee97] für die hier verwendete Konvention, für eine Übersicht über Eichtheorien [Tay76]). Die klassische Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \tag{2.158}$$

gegeben. Dabei bezieht sich die Spur auf die Matrixstruktur der zur Eichgruppe gehörigen Liealgebra. Im einzelnen gilt

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.159)$$

wobei die f^{abc} die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der Liealgebra bezeichnen. Die Theorie ist eichinvariant unter den nichtabelschen lokalen Transformationen, und das Eichfeld stellt einen affinen Zusammenhang des Faserbündels dar.

Der kanonische Energie-Impulstensor ist hingegen durch den eichabhängigen Ausdruck

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F^{a\rho\sigma} - F^{a\mu\rho} \partial^\nu A_\rho^a \quad (2.160)$$

gegeben. Er kann allerdings durch die Addition des Ausdrucks

$$F^{a\mu\rho} (D_\rho A^\nu)^a \stackrel{\text{eom}}{=} \partial_\rho (F^{a\mu\rho} A^{a\nu}) \quad (2.161)$$

zu einem eichinvarianten, für die Lösungen der Bewegungsgleichungen wegen der Antisymmetrie von $F^{a\mu\rho}$ unter Vertauschung von ρ und μ ebenfalls erhalten, symmetrischen Energie-Impulstensor ergänzt werden⁴. Dabei steht das Zeichen $\stackrel{\text{eom}}{=}$ für eine Gleichheit, die für Felder nur dann gültig ist, wenn sie die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen. Da es sich für solche Felder, um eine totale Divergenz handelt, ändert dies nichts daran, daß der Gesamtviererimpuls des Systems

$$p^\nu = \int d^{2\omega-1} \vec{x} \Theta^{0\nu} \quad (2.162)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Außerdem ist klar, daß jede Komponente dieses Gesamtviererimpulses eichinvariant ist.

Bei der Quantisierung des Systems besteht das Problem darin, daß nicht die Felder selbst, sondern der modulo Eichtransformationen genommene Quotientenraum den physikalischen Einteilchenhilbertraum bilden:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \left\{ A^{a\rho} \left| \frac{\delta S}{\delta A^{a\mu}} = 0, A = A' \Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \in G : A' = \mathcal{A}^{\mathcal{U}} \right. \right\}, \quad (2.163)$$

wobei $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \mathcal{U} A \mathcal{U}^\dagger - \mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger$ ist.

Es ist also bei der Spurbildung zur Berechnung der Zustandssumme

$$Z(\beta) = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H}) \quad (2.164)$$

zu beachten, daß der physikalischen Hilbertraum ein Fockraum über die Klassen, die durch die Orbits der Eichgruppe auf den Eichfeldern erzeugt wird, und nicht ein Fockraum über die Eichfelder selbst ist. Die Lösung über den Operatorformalismus ist relativ kompliziert (vgl. [Kug97]). Wir bedienen uns daher der in [Tay76, Wei96, Hee97] ausführlich dargestellten Methode der Faddeev-Popov-Quantisierung [FP67]. Wie wir bereits bei der Behandlung der skalaren Bosonen gesehen haben, können wir die Zustandssumme gleich in der Lagrangeschen Formulierung des Pfadintegrals schreiben. Es sei nun

$$g^a[A, x] = c^a(x) \quad (2.165)$$

⁴Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie entsteht dieser Tensor durch Variation nach der Metrik $g_{\mu\nu}$, und folglich ist dieser eichabhängige Tensor der gravitativ wirksame Energie-Impulstensor.

eine die Eichung festlegende Eichbedingung mit einem beliebigen Satz von Feldern c^a . Ferner bezeichne

$$\Delta_g[\mathcal{A}] = \text{Det} \left(\frac{\delta g^a}{\delta \chi^b} \right) \quad (2.166)$$

die *Faddeev–Popov–Determinante*, wobei χ^b die infinitesimalen Eichtransformationen parametrisieren, also

$$\delta g^a = \frac{\delta g^a}{\delta A_\mu^c} (\partial^\mu \delta \chi^c + g f^{abc} \delta \chi^a A_\mu^b). \quad (2.167)$$

Dann können wir die Zustandssumme als Pfadintegral der Form

$$Z(\beta) = N \int_{\text{per}} \text{D}\mathcal{A} \delta(g[\mathcal{A}, x] - c(x)) \Delta(g) \exp(-S_E[\mathcal{A}]) \quad (2.168)$$

schreiben. Dabei ist über alle periodischen Felder ($A(\tau + \beta, \vec{x}) = A(x)$) zu integrieren. Durch die funktionale δ -Distribution wird effektiv nur über eine Klasse, die durch die Eichbedingung (2.165) definiert ist, integriert. Dieser Ausdruck ist daher eichinvariant und unabhängig von den Hilfsfeldern c^a . Das ist schon deswegen offensichtlich, weil die Kombination aus Pfadintegralmaß, funktionaler δ -Distribution und Faddeev–Popov–Determinante sowie die Wirkung eichinvariant sind.

Zur praktischen Anwendung ist dieser Ausdruck jedoch noch nicht zu gebrauchen. Die funktionale δ -Distribution läßt sich beseitigen, indem wir die Unabhängigkeit bzgl. der Hilfsfelder c^a berücksichtigen. Eine mit einem beliebigen Gewicht ausgeführte Integration über diese Felder ergibt lediglich einen Beitrag zu der Normierungskonstante N . Das Gewicht wird der Einfachheit halber als Gaußfunktion gewählt. Das ergibt im Falle linearer Eichungen, also $g[\mathcal{A}, x] = O\mathcal{A}$, wobei O ein geeigneter linearer Operator ist, einen Beitrag zum Propagator des Eichfeldes:

$$Z[\beta] = N \int_{\text{per}} \text{D}\mathcal{A} \Delta_g[\mathcal{A}] \exp \left[-S_E[\mathcal{A}] - \frac{1}{2\xi} g^a g^a \right]. \quad (2.169)$$

Es bleibt noch, die Faddeev–Popov–Determinante durch ein Pfadintegral auszudrücken. Da sie im Zähler erscheint, ist dies nur durch Integration über Grassmannfelder zu bewerkstelligen. Da es sich aber um eine Funktionaldeterminante im Raum der *periodischen* Funktionen handelt, sind dies keine Fermionen im physikalischen Sinne. Es ergeben sich aufgrund der Periodizität nämlich bosonische statistische Eigenschaften.

Diese sogenannten *Faddeev–Popov–Geister* beschreiben auch keine physikalischen Teilchen. Sie dienen vielmehr dazu, nichtphysikalische Freiheitsgrade, die in den Eichfeldern enthalten sind, zu kompensieren. Dies ist aus der eben angedeuteten Herleitung auch völlig klar: Die Faddeev–Popov–Determinante erlaubt ja die eichinvariante Integration über die Eichgruppe. Das Pfadintegral in der endgültigen Formulierung lautet folglich

$$Z[\beta] = N \int_{\text{per}} \text{D}\mathcal{A} \text{D}\eta^* \text{D}\eta \exp \left[-S_E[\mathcal{A}] - \frac{1}{2\xi} g^a g^a S_{\text{Egh}}[\mathcal{A}, \eta^*, \eta] \right] \quad (2.170)$$

mit der euklidischen Geistlagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Egh}} = \int d^{2\omega} x d^{2\omega} y \eta^{*a}(x) \frac{\delta g^a[\mathcal{A}^x, x]}{\delta \delta \chi^b(y)} \eta^b(y). \quad (2.171)$$

Dies ist ein in x lokaler Ausdruck, wenn $g[\mathcal{A}, x]$ lokal in x ist. Insgesamt haben wir also ein Feynmansches Pfadintegral über periodische Eich- und Geistfelder erhalten, in dem die ursprüngliche eichunabhängige Wirkung durch eine eichabhängige effektive Wirkung ersetzt wurde. Die unphysikalischen Geistfreiheitsgrade sorgen dafür, daß mit diesem Pfadintegral berechnete Erwartungswerte eichinvarianter Größen eichinvariant sind. Es ist auch klar, daß wir statt der Matsubarazeitkontur die volle Schwinger–Keldysh–Gleichgewichtskontur einführen können.

Wählen wir nun ein lineares eichfixierendes lokales Funktional, ist die effektive Wirkung ebenfalls quadratisch in den Eichfeldern und den Faddeev–Popov–Geistern. Wählen wir der Einfachheit halber die Klasse der relativistisch kovarianten R_ξ –Eichungen (entsprechend der Lorentzzeichnung in der Elektrodynamik)

$$g^a = \partial_\mu A^\mu, \quad (2.172)$$

gilt für die Geistlagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{gh}} = \partial_\mu \eta^* D^\mu \eta \text{ mit } (D_\mu \eta)^a = \partial_\mu \eta^a + g f^{abc} A_\mu^c \eta^b. \quad (2.173)$$

Zur Illustration berechnen wir das thermodynamische Potential des freien Photonengases. In diesem Fall ist die Eichgruppe die abelsche $U(1)$. Im Fall einer abelschen Eichgruppe ist die eichinvariante Wirkung ein quadratisches Funktional der Eichfelder, und wegen $f^{abc} = 0$ geht die kovariante Ableitung in (2.173) in die partielle Ableitung über, so daß die Geistlagrangedichte der eines freien skalaren masselosen Bosons wird.

Für diese Eichung ist also die effektive Lagrangedichte durch

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + (\partial_\mu \eta^*)(\partial^\mu \eta) \quad (2.174)$$

gegeben.

Daraus liest man unmittelbar die inversen Propagatoren des Imaginärzeitformalismus ab:

$$D_{\mu\nu}^{-1} = p^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu. \quad (2.175)$$

Nach der in Abschnitt 2.3.3 und Abschnitt 2.3.4 besprochenen Methode finden wir unmittelbar die Zustandssumme

$$\Omega_A = \ln Z_A = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln D^{-1}. \quad (2.176)$$

Die Determinante über die euklidischen Raumzeitindizes und die Spur über die Impulse genommen ergibt dies nach Abzug indefiniter Faktoren und Renormierung des Vakuums

$$\Omega_A = -4V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp(-\beta\omega)]_{\omega=|\vec{p}|}. \quad (2.177)$$

Dieses Resultat ist offensichtlich nicht korrekt, denn das masselose Vektorfeld besitzt nur zwei physikalische Freiheitsgrade. Die unphysikalischen Freiheitsgrade tragen jedoch genau wie die physikalischen zur Zustandssumme bei. Allerdings haben wir noch die Geistlagrangedichte zu berücksichtigen. Diese ist ebenfalls die Lagrangedichte eines masselosen geladenen Bosonengases (periodische Randbedingungen für die Felder!) jedoch mit grassmannwertigen Feldern. Das bedeutet, daß wir genau dieselbe Funktionaldeterminante zu berechnen haben, diese gemäß (C.23)

jedoch mit dem umgekehrten Vorzeichen zu Ω beiträgt. Dies eliminiert also gerade die unphysikalischen Freiheitsgrade, so daß wir die korrekte Zustandssumme eines freien masselosen Bosegases mit zwei Freiheitsgraden erhalten:

$$\Omega_{\text{phys}} = -2V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp(-\beta\omega)]|_{\omega=|\vec{p}|} = \frac{V\pi^2}{45\beta^3}. \quad (2.178)$$

Daß dieses Resultat unabhängig von ξ ist, reflektiert die Eichinvarianz der Zustandssumme für unsere spezielle Klasse von Eichungen. Die Bedeutung der Faddeev–Popov–Determinante, die wir hier durch die Integration über die beiden Faddeev–Popov–Geistfelder berücksichtigt haben, besteht darin, daß sie die beiden unphysikalischen Freiheitsgrade der vier Eichfelder kompensiert. Im Gegensatz zur Vakuumtheorie, müssen also auch in der abelschen Eichtheorie die Faddeev–Popov–Geister berücksichtigt werden. Da sie aber nicht an die Eichfelder koppeln, tauchen sie auch bei endlichen Temperaturen nicht in den Feynmanregeln zur Berechnung von zusammenhängenden Greenfunktionen (bzw. einteilchenirreduziblen Vertexfunktionen) auf. Das bedeutet, daß die Feynmanregeln bei endlichen Temperaturen bis auf die zusätzliche Einführung der \pm -Vertizes und der matrixwertigen Greenfunktionen keinerlei Änderungen gegenüber der Vakuumtheorie erfahren.

2.4 Renormierung bei endlichen Temperaturen

In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen der Renormierung der Störungstheorie bei endlichen Temperaturen rekapituliert und an einigen Beispielen verdeutlicht werden. Da sich herausstellt, daß sich die Renormierung der Theorie bei endlichen Temperaturen auf die Renormierung im Vakuum reduziert, behandeln wir zunächst die Renormierung im Vakuum.

2.4.1 Renormierung im Vakuum

Das Problem der Divergenzen in der Störungstheorie der relativistischen Quantenfeldtheorie ist so alt wie diese selbst. Zum ersten Mal stellten Pauli und Heisenberg (1929) fest, daß die heute Quantenelektrodynamik genannte Quantenfeldtheorie mit Diracfermionen und minimal gekoppeltem $U(1)$ -Eichfeld (Photonenfeld) divergente Integrale ergibt, wenn man über die führende Baumgraphennäherung hinausgeht und „Strahlungskorrekturen“ berechnen will.

Zum ersten Mal wurde dieses Problem anhand der Berechnungen der Lambshift (Weisskopf, Bethe, Oppenheimer) durch Subtraktion unendlicher Ausdrücke gelöst. Die erste allgemeine Lösung wurde durch Schwinger und Tomonaga im Formalismus der Quantenfeldtheorie sowie durch Feynman in seinem Diagrammformalismus angegeben und systematisch aus der Quantenfeldtheorie hergeleitet durch Dyson. Allerdings hat sich später herausgestellt, daß der Dysonsche Zugang aufgrund einer ungenügenden Behandlung überlappender Divergenzen nicht vollständig ist.

Die endgültige Lösung ist die BPHZ-Renormierung, die von Bogoliubov, Parasiuk, Hepp und Zimmermann unter Verwendung des Weinbergschen Konvergenztheorems [Wei60] entwickelt worden ist. Für eine ausführliche Behandlung dieser Methode sei auf [Zim69, Zim70], für den Fall von Theorien mit masselosen Teilchen (insbesondere Nambu-Goldstone-Bosonen in Theorien mit spontan gebrochener globaler Symmetrie) auf [LZ75] verwiesen. Wir beschränken uns darauf, die Methode an einigen Beispielen aus der renormierbaren Theorie des skalaren Feldes zu demonstrieren.

Die Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (2.179)$$

gegeben. So wird klar, daß wir uns auf die Behandlung zusammenhängender einteilchenirreduzibler Diagramme beschränken können. Ein allgemeines Diagramm ist nämlich offensichtlich konvergent, wenn die einteilchenirreduziblen zusammenhängenden Teildiagramme, aus denen es zusammengesetzt ist, konvergent sind.

Zunächst ist allerdings eine Regularisierungsvorschrift zu verwenden, damit die analytischen Ausdrücke überhaupt sinnvoll sind. Wir verwenden in dieser Arbeit die Methode der dimensional Regularisierung [HV72] oder die „regularisierungsfreie“ BPHZ-Methode, die Vorschriften definiert, ein Feynmanintegral direkt durch Subtraktionen des Integranden zu renormieren. Letzteres ist insbesondere nützlich, wenn die Resultate, wie die im nächsten Kapitel eingeführten selbstkonsistenten Näherungen, nur numerisch zu gewinnen sind.

Als dritte Methode bietet sich die Berechnung des Imaginärteils eines Diagramms und die Verwendung subtrahierter Dispersionsrelationen an. Sie ist ebenfalls für numerische Berechnungen geeignet. Der Nachteil ist, daß die analytischen Eigenschaften für Diagramme mit wachsender Zahl an externen Punkten rasch kompliziert werden, so daß wieder die direkte BPHZ-

Renormierung zu bevorzugen ist, insbesondere in der Theorie bei endlichen Temperaturen und Dichten.

Die benötigten Standardformeln der dimensional Regularisierung, die natürlich auch zur Auswertung der durch die BPHZ-Methode renormierten vierdimensionalen Integrale verwendbar sind, werden in Anhang A zusammengefaßt. Eine ausführliche Herleitung dieser Regeln ist auch in [Hee97, Hee98] zusammengestellt.

Die Methode der dimensional Regularisierung weist gegenüber älteren Regularisierungsverfahren (z.B. der Cutoff-Regularisierung in den verschiedenen Varianten oder dem Pauli-Villars-Verfahren) den Vorteil auf, daß sie eine Regularisierungsskala nur über die Umdefinition der Kopplungskonstanten $\lambda \rightarrow \mu^{2\epsilon}\lambda$ einführt. Dadurch lassen sich leicht massenunabhängige Renormierungsschemata definieren (z.B. das „minimal subtraction scheme“ oder das „modified minimal subtraction scheme“), was deutliche Vorteile bei der Behandlung von Theorien mit spontan gebrochenen Symmetrien mit sich bringt. Außerdem respektiert das Verfahren sehr viele Symmetrien (am wichtigsten ist hier die lokale Eichsymmetrie von Yang-Mills-Eichtheorien). Durch diese beiden Eigenschaften erweist es sich als besonders bequem zur Renormierung von Eichtheorien, weil in jedem Schritt der Rechnung die Ward-akahashi-Identitäten erfüllt sind. Gegenüber der BPHZ-Renormierung weist es auch den Vorteil auf, daß keinerlei Probleme mit masselosen Teilchen auftreten.

Andererseits zeigt die BPHZ-Vorschrift, daß die renormierten Feynmandiagramme von der Wahl der Regularisierung unabhängig sind. Dabei subtrahiert man die entsprechenden divergenten Anteile stets direkt im Integranden des Feynmanintegrals. Diese Methode hat allerdings den Nachteil, daß sie nur unter großen Schwierigkeiten auf Schleifendiagramme mit ausschließlich masselosen Teilchen anwendbar ist, da dann nicht mehr bei $p = 0$ subtrahiert werden kann.

Für Symmetrien unter einer linear auf den Feldern operierenden Gruppe gilt weiter das Theorem von Symanzik [IZ80, Kug97], demzufolge symmetriebrechende Terme mit einer Impulsordnung ≤ 3 in der Lagrangedichte nur Gegenterme erfordern, die von höchstens derselben Impulsdimension, auf keinen Fall jedoch höherer Dimension sind. Daher ist es erlaubt, auch für die masselosen Felder Regulatormassen einzuführen, die nach Anwendung eines massenunabhängigen Renormierungsschemas wieder zu 0 gesetzt werden dürfen.

Im Falle spontaner Symmetriebrechung einer globalen kontinuierlichen Symmetrie und den in diesem Zusammenhang dabei auftretenden skalaren masselosen Nambu-Goldstone-Bosonen, ist es stets möglich, die Symmetrie der Theorie mit $m^2 > 0$ durch einen Term $c\phi$ explizit zu brechen, diese Theorie massenunabhängig zu renormieren, sodann den Limes $m^2 \rightarrow -\mu^2$ auszuführen (alle Pseudogoldstonemoden sind aufgrund des schwachen symmetriebrechenden Terms massiv) und dann durch $c \rightarrow 0$ zum spontan gebrochenen Goldstonemodus der Theorie überzugehen. Es zeigt sich damit, daß die spontan gebrochene Theorie durch dieselben die Symmetrie respektierenden Gegenterme renormiert wird wie im Wigner-Weylmodus, also bei symmetrischem Grundzustand.

Schließlich kann man dieses Argument für lokale Eichsymmetrien in umgekehrter Richtung führen: Hier ist es sinnvoll, zunächst durch den Higgs-Kibble-Mechanismus alle Eichfelder massiv zu machen und sodann zum Wigner-Weyl-Mode überzugehen. Das hat den Vorteil, daß keinerlei Infrarotprobleme auftreten, und damit auch die Theorie mit masselosen Eichfeldern eichinvariant renormiert ist. Dies zeigt schließlich, daß auch hier die BPHZ-Methode zur Methode der dimensional Regularisierung bis auf endliche Renormierungen äquivalent (also bei Wahl derselben Eichbedingungen sogar identisch) ist.

Wir zeigen nun die Methode der dimensional Regularisierung und der BPHZ-Renormierung

an drei einfachen Beispielen:

Primitiv divergente Diagramme

Als primitiv divergentes Diagramm bezeichnet man ein solches Feynmandiagramm, das einen divergenten analytischen Ausdruck liefert und durch Zerschneiden einer beliebigen Linie zu einem konvergenten Diagramm wird.

Das einfachste nichttriviale Beispiel ist in der Schreibweise der dimensional Regularisierung durch das Einschleifendiagramm

$$\Sigma(p) = \text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{ig^2}{2} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(m^2 - l^2 - i\eta)[m^2 - (l+p)^2 - i\eta]} \quad (2.180)$$

gegeben. Dabei verwenden wir die Konvention für die Dimension der Raumzeit $d = 2(\omega - \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$. Die Regulatoren der Minkowski-Greenfunktionen bezeichnen wir daher hier mit $i\eta$. Das Resultat für dieses Diagramm ist gem. (A.30)

$$\Sigma(p) = -\frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \operatorname{artanh} \left(\frac{s}{\sqrt{s(4m^2 - s)}} \right) \right] \quad \text{mit } s = p^2. \quad (2.181)$$

mit $s = p^2$. An diesem Beispiel wird bereits eine Eigenschaft der dimensional Regularisierung deutlich: Die durch die Regularisierung eingebrachte Skala μ tritt nur in den endlichen logarithmischen Termen auf, nicht jedoch im divergenten Term. Der zur Renormierung des unendlichen Teils notwendige Gegenterm ist unabhängig von μ und m . Im minimal-subtraction scheme ist dieser Gegenterm durch

$$\delta\Sigma_{\text{MS}} = \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} \quad (2.182)$$

gegeben. Der Grund für diese *Massenunabhängigkeit* des Gegenterms ist, daß im Formalismus der dimensional Regularisierung die Regularisierungsskala nur implizit durch die Kopplungskonstanten wirksam wird.

Es ist klar, daß wir durch endliche Renormierungen eine Änderung des Renormierungsschemas herbeiführen können. Im vorliegenden Fall reicht wegen der nur logarithmischen Divergenz des Diagramms zur Festlegung des Renormierungsschemas die Definition von Σ an einem Punkt $s = m_r^2$ aus. Dies entspricht einer Massenrenormierung. Es ist jedoch genauso mit der Renormierbarkeit der Theorie vereinbar, auch eine Wellenfunktionsrenormierung durchzuführen, die in höheren Ordnungen sowieso erforderlich wird. Wir können also verlangen

$$\Sigma(s = m_r^2) = m_r^2 - m^2, \quad \partial_s \Sigma(s)|_{s=m_r^2} = 0. \quad (2.183)$$

Es muß nur $m_r^2 < 4m^2$ sein, damit der Gegenterm nicht komplex wird, was eine Nichtunitarität der S -Matrix bedeuten würde. Die physikalische Masse liegt dann bei m_r . Insbesondere ist das physikalische Renormierungsschema („on-shell scheme“) durch $m_r = m$ definiert. Dann sind nackte und renormierte Masse per definitionem in jeder Ordnung Störungstheorie identisch. In diesem Schema lautet der Gegenterm

$$\delta\Sigma_{\text{phys}} = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 3 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{s}{m^2} \left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - 1 \right) \right]. \quad (2.184)$$

Überlappende Divergenzen

Wir kommen nun zu einem einfachen Beispiel für überlappende Divergenzen, nämlich das „Sunset-Diagramm“ der ϕ^4 -Theorie:

$$\Gamma = \text{---} \begin{array}{c} l_2 + p \\ \circ \\ l_1 + l_2 \\ \text{---} \\ l_1 \\ \circ \\ p \end{array} \text{---}, \quad I_\Gamma = \frac{(-i\lambda)^2}{6} iG(l_1) iG(l_1 + l_2) iG(l_2 + p). \quad (2.185)$$

Darin bezeichnen wir mit Γ das Diagramm und mit I_Γ den unrenormierten Integranden, wie er durch die Feynmanregeln gegeben ist. Nach dem Weinbergschen Powercountingtheorem ist das Diagramm quadratisch divergent. Allerdings genügt es hierbei scheinbar nicht, einfach ein Polynom im äußeren Impuls abzuziehen. Schon die Wahl der Impulse zeigt, daß das Diagramm eine sog. Subdivergenz aufweist. Hält man nämlich l_2 und p konstant, so ist das Integral über l_1 mit dem Integranden $G(l_1)G(l_1 + l_2)$ logarithmisch divergent. Diagrammatisch können wir dies dadurch andeuten, daß wir das entsprechende Subdiagramm wie folgt markieren:

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \vdots \end{array} \quad (2.186)$$

Dieses Diagramm ist logarithmisch divergent und kann durch einen konstanten Gegenterm renormiert werden. Wie wir bereits anhand des vorigen Beispiels gesehen haben, kann dies im Sinne der BPHZ-Renormierung einfach dadurch erfolgen, daß wir vom Integranden dieses Subdiagramms seinen Wert bei $l_2 = 0$ subtrahieren. Dies ergibt schon die erste Regel der BPHZ-Renormierung: Eine Subdivergenz wird dadurch beseitigt, daß vom Integranden des entsprechenden Subdiagramms das Taylorpolynom bzgl. der äußeren Impulse des Subdiagramms um den Renormierungspunkt (in unserem Beispiel $l_2 = 0$) bis zur Divergenzordnung (hier 0) subtrahiert wird. Folglich läßt sich der Gegentermbeitrag zu Γ , der notwendig ist, um diese Subdivergenz zu beseitigen, offensichtlich dadurch finden, daß wir statt des Integranden des Subdiagramms die besprochene Taylorentwicklung einsetzen. Das so entstehende *reduzierte Diagramm* bezeichnen wir mit $t_{\gamma_1}\Gamma$. In unserem Fall ist also der Integrand des reduzierten Diagramms durch

$$t_{\gamma_1}\Gamma = \frac{i\lambda^2}{6} G^2(l_1)G(l_2 + p) \quad (2.187)$$

definiert. Betrachten wir aber den Integranden des nun vorliegenden subtrahierten Diagramms

$$(1 - t_{\gamma_1})\Gamma = \frac{i\lambda^2}{6} [G(l_1 + l_2) - G(l_1)]G(l_1)G(l_2 + p), \quad (2.188)$$

ist klar, daß auch dieses Diagramm nicht nur nach wie vor quadratisch divergent ist, sondern auch noch eine Subdivergenz für $l_1, p = \text{const}$ bzgl. der Integration über l_2 enthält. Das entsprechende Subdiagramm bezeichnen wir mit γ_2 , und es ist ebenfalls logarithmisch divergent. Auch dieses Diagramm müßten wir entsprechend der eben gefundenen Vorschrift abziehen. Allerdings ist das

dazugehörige reduzierte Diagramm in unserem Fall von p unabhängig. Das gleiche gilt für das dritte divergente Subdiagramm, das sich aus dem Unterraum $l_1 + l_2 = \text{const}$ aus Γ ergibt.

Wir notieren aber der Vollständigkeit halber, daß das durch Abziehen der entsprechenden reduzierten Diagramme von allen Subdivergenzen befreite Diagramm dem Integranden

$$\bar{R}_\Gamma = \frac{i\lambda^2}{6} [G(l_1 + l_2) - G(l_1)]G(l_1)G(l_2 + p) - G^2(l_2)[G(l_1) + G(l_1 + l_2)] \quad (2.189)$$

entspricht. Man versteht anschaulich, daß durch diese Prozedur das Diagramm keine Subdivergenzen mehr enthält, weil ja durch die Subtraktionen der reduzierten Diagramme der Divergenzgrad jedes Subdiagramms negativ gemacht wurde. Diese Betrachtung zeigt eine wichtige Erkenntnis der BPHZ-Theorie:

Zum einen sind die Gegenterme, die zur Lagrangedichte addiert werden müssen, um die Divergenzen zu beseitigen, Polynome in den Feldern und den Impulsen (bzw. Ableitungen in den Raumzeitkoordinaten), also immer *lokale* Terme. In unserem Fall tragen sie zur Renormierung des Vierervertex (also zur Kopplungskonstante λ) bei. Es wird auch deutlich, daß aufgrund des Powercountingtheorems Theorien, die nur Terme in den Feldern und Ableitungen der Impulsdimension ≤ 4 enthalten, im Dysonschen Sinne renormierbar sind in dem Sinne, daß nur endlich viele Typen von Gegentermen notwendig sind, um die Theorie in jeder Ordnung Störungstheorie endlich zu machen.

Obwohl es in unserem Beispiel nicht vorkommt, daß bestimmte Subdivergenzen durch mehrere Kästchen um Subdiagramme gekennzeichnet werden, kann man anschaulich verstehen, daß man in komplizierteren Fällen, in denen dies erforderlich ist, Mengen von Subdiagrammen, die überlappen, nicht berücksichtigen muß. Die entsprechenden überlappenden Divergenzen werden aufgrund des eben schon angegebenen Arguments bereits vollständig kompensiert, denn jeder mögliche Unterraum der Integrationsvariablen, der im Sinne des Powercountingtheorems einer Divergenz entspricht, wurde berücksichtigt, wenn man nur die Mengen disjunkter Subdiagramme (also solche, die keine Linien oder Vertizes innerhalb des Gesamtdiagramms gemeinsam besitzen) sowie die verschachtelten Subdiagramme (also solche, von denen ein Subdiagramm eines oder mehrere Subdiagramme seinerseits als Subdiagramm enthält) nach dem oben beschriebenen Schema behandelt.

Betrachten wir nun wieder \bar{R}_Γ , wird deutlich, daß das Integral noch die quadratische Divergenz enthält, die sich durch das Powercounting-Theorem ergibt, wenn beide Schleifenimpulse groß werden. Diese Divergenzen können wir aber durch Abzug des entsprechenden Taylorpolynoms in p bis zur entsprechenden Ordnung eliminieren. Dabei werden auch, wie bereits oben angedeutet, die beiden von p unabhängigen reduzierten Diagramme wieder abgezogen. Der Integrand für das renormierte Diagramm ist also durch

$$R_\Gamma = [1 - t_\Gamma]\bar{R}_\Gamma = \frac{i\lambda}{6} G(l_1)[G(l_1 + l_2) - G(l_1)][1 - t_2(p)]G(l_2 + p) \quad (2.190)$$

gegeben, wobei

$$t_2(p)G(l_2 + p) = G(l_2) + p^\mu [\partial_{p^\mu} G(l_2 + p)]|_{p=0} + \frac{p^\mu p^\nu}{2!} [\partial_{p^\mu} \partial_{p^\nu} G(l_2 + p)]|_{p=0} \quad (2.191)$$

ist.

Es ist klar, daß jedes beliebige Renormierungsschema aus diesem BPHZ-Schema durch eine endliche Renormierung erreicht werden kann. Eventuell sind dazu auch Subtraktionen notwendig, die über das reine Entfernen der Divergenzen hinausgehen (die sog. „oversubtraction“).

2.4.2 Allgemeine Regeln der BPHZ–Renormierung

Anhand unserer Beispiele können wir nun die allgemeinen Regeln der BPHZ–Renormierung angeben. Zunächst sind einige Definitionen notwendig. Gegeben sei ein zusammenhängendes einteilchenirreduzibles (1PI) amputiertes Diagramm Γ . Wir bezeichnen diese Klasse von Diagrammen, die in der Funktionalformulierung der Quantenfeldtheorie durch die effektive Wirkung erzeugt werden, als *eigentliche Vertexdiagramme*. Der durch die auf Γ angewandten Feynmanregeln gegebene Integrand werde mit I_Γ bezeichnet.

Ein eigentliches Vertexdiagramm heißt *Renormierungsteil*, wenn es oberflächlich divergent ist.

Eine Teilmenge von Vertizes und Linien von Γ definiert ein Subdiagramm von Γ , wenn es für sich genommen wieder ein eigentliches Vertexdiagramm ist. Für ein solches Diagramm γ schreiben wir $\gamma \subseteq \Gamma$.

Seien γ_1 und γ_2 zwei Subdiagramme von Γ . Sie heißen *disjunkt* $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, wenn sie keine gemeinsamen Linien besitzen. Sie heißen *verschachtelt*, $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$, wenn γ_1 selbst ein Subdiagramm von γ_2 ist. Sie werden schließlich *überlappend*, $\gamma_1 \circ \gamma_2$, genannt, wenn sie weder disjunkt noch verschachtelt sind. Sie besitzen dann zwar gemeinsame Vertizes und Linien. Es ist jedoch nicht das eine Diagramm Subdiagramm des anderen.

Sei $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ eine Menge von paarweise disjunkten Subdiagrammen von Γ . Dann bezeichnen wir den Integranden des Restdiagramms mit $I_{\Gamma \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}$. Offensichtlich gilt

$$I_\Gamma = I_{\Gamma \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}} \prod_{j=1}^n I_{\gamma_j}. \quad (2.192)$$

In der ursprünglichen Formulierung von Bogoliubov und Parasiuk [BP57], werden nun rekursiv die Subdivergenzen beseitigt. Ist das Diagramm Γ primitiv divergent, d.h. enthält es keine divergenten Subdiagramme, ist selbst aber Renormierungsteil (wie bei unserem Einschleifenbeispiel), dann ist der Integrand R_Γ des renormierten Diagramms durch

$$R_\Gamma = (1 - t_\Gamma)I_\Gamma \quad (2.193)$$

definiert. Sind Subdivergenzen vorhanden, müssen zunächst die Subdivergenzen von Γ entfernt werden. Den entsprechenden Integranden nennen wir \bar{R}_Γ . Dann ist

$$R_\Gamma = \begin{cases} \bar{R}_\Gamma & \text{falls } \Gamma \text{ kein Renormierungsteil} \\ (1 - t_\Gamma)\bar{R}_\Gamma & \text{falls } \Gamma \text{ Renormierungsteil} \end{cases}. \quad (2.194)$$

Jedes divergente Subdiagramm wird bei der Berechnung von \bar{R}_Γ ebenfalls nach dieser Rekursionsvorschrift behandelt. Es ist anschaulich klar, daß nach diesem sog. Bogoliubovschen *R-Prozeß* der konvergente Integrand tatsächlich gefunden ist, wenn auch der formale Beweis schwierig ist. Hepp hat in dieser Hinsicht den Beweis von Bogoliubov und Parasiuk auch noch korrigiert: Er hat gezeigt, daß im Impulsraum die Wickrotation rückgängig gemacht werden kann und die Beseitigung der $i\eta$ -Regulatoren in den Propagatoren durch Bildung des schwachen Limes $\eta \rightarrow 0$ auf wohldefinierte Distributionen für jedes Diagramm führt.

Die Bedeutung des Zimmermannschen Beitrags (vgl. [Zim69] bzw. das Vorlesungsskript [Zim70]) besteht darin, daß er eine explizite Lösung der Rekursionsvorschrift angegeben hat. Dadurch läßt sich aber auch die Rekursionsvorschrift selbst noch einfacher fassen. Dazu definiert Zimmermann den Begriff des „*Forest*“. Ein Forest ist eine beliebige Teilmenge von Subdiagrammen

(die auch das vollständige Diagramm selbst enthalten darf), die paarweise nicht überlappend sind. Sie müssen aber nicht zwingend disjunkt sein, d.h. sie können ineinander geschachtelt sein. Diagrammatisch ist ein Forest durch das Diagramm mit Kästchen, die die in ihm enthaltenen Subdiagramme umranden, zu veranschaulichen. Zwei Kästchen sind dabei entweder vollständig ineinander enthalten, oder sie dürfen keine gemeinsamen Diagrammteile umschließen. Ein *restringierter Forest* liegt vor, wenn alle in ihm enthaltenen Diagramme Renormierungsteile sind. Jedem restringierten Forest entspricht nun ein diagrammatischer Ausdruck, der aus dem ursprünglichen Diagramm dadurch entsteht, daß jedes ein Subdiagramm γ umschließende Kästchen zu einem Punkt kontrahiert wird. Man spricht bei den dadurch entstehenden neuen Vertizes von *Kontraktionen*. Jeder dieser Kontraktionen wird der Ausdruck $-t_\gamma I_\gamma$ zugeordnet. Die übrigen nicht in einem Kästchen enthaltenen Linien behalten ihre ursprüngliche Bedeutung bei. Bei ineinander geschachtelten Kästchen muß diese Prozedur natürlich beginnend mit dem innersten Diagramm von innen nach außen durchgeführt werden.

Ist $\mathfrak{F} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ ein beliebiger restringierter Forest, dann entspricht also dem zugeordneten kontrahierten Diagramm der Ausdruck

$$\Omega_{\mathfrak{F}} = \tilde{\prod}_{\gamma \in \mathfrak{F}} (-t_\gamma) I_\gamma. \quad (2.195)$$

Dabei deutet die Tilde über dem Produkt an, daß im Falle von ineinander verschachtelten Diagrammen stets die Tayloroperatoren so angeordnet sind, daß sie in der Reihenfolge von innen nach außen angewendet werden. Für disjunkte Diagramme $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sind wegen

$$I_\Gamma = I_{\Gamma \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}} \prod_{j=1}^n I_{\gamma_j} \quad (2.196)$$

die Tayloroperatoren t_{γ_j} kommutativ, so daß die Reihenfolge beliebig ist.

Die *Zimmermannsche Forestformel* besagt dann, daß der renormierte Integrand des Diagramms Γ

$$R_\Gamma = \sum_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}_R(\Gamma)} \Omega_{\mathfrak{F}}, \quad (2.197)$$

wobei $\mathcal{F}_R(\Gamma)$ die Menge aller restringierten Forests des Diagramms Γ bezeichnet. Definitionsgemäß enthält $\mathcal{F}_R(\Gamma)$ auch die leere Menge, den *leeren Forest*. Entsprechend der diagrammatischen Bedeutung, daß der leere Forest das Diagramm Γ ohne Subdiagramme auszeichnende Kästchen enthält, ist ihm einfach der zu Γ gehörige Integrand zugeordnet.

Daß diese Formel das gleiche Resultat wie der Bogoliubovsche R-Prozeß für das renormierte Diagramm liefert, erkennt man wie folgt: Wir bezeichnen mit $\bar{\mathcal{F}}_R(\Gamma)$ die Menge aller restringierten Forests von Γ , die Γ selbst nicht enthalten, die *normalen Forests*. Es ist klar, daß die Menge aller restringierten Forests von Γ entweder mit $\bar{\mathcal{F}}_R(\Gamma)$ übereinstimmt (nämlich dann, wenn Γ selbst oberflächlich konvergent ist) oder dadurch aus $\bar{\mathcal{F}}_R(\Gamma)$ entsteht, daß man zu jedem $\mathfrak{F} \in \bar{\mathcal{F}}_R(\Gamma)$ auch $\mathfrak{F} \cup \{\Gamma\}$ zu $\bar{\mathcal{F}}_R(\Gamma)$ hinzufügt. Offensichtlich ist dann

$$\bar{R}_\Gamma = \sum_{\mathfrak{F} \in \bar{\mathcal{F}}_R(\Gamma)} \Omega_{\mathfrak{F}}, \quad (2.198)$$

und die Forestformel schreibt dann vor, daß daraus R_Γ gemäß dem R-Prozeß durch (2.194) entsteht.

Symmetrien und Renormierung

I.a. muß die Lagrangedichte einer renormierbaren lokalen Quantenfeldtheorie alle Terme enthalten, für die die Impulsdimension aller Monome in den Feldern und deren Ableitungen ≤ 4 ist. Das ist z.B. der Fall für die Lagrangedichte (2.179). Liegt allerdings eine globale linear auf den Feldern operierende Symmetrie vor, reichen schon alle mit dieser Symmetrie verträglichen renormierbaren Terme aus, damit die Theorie renormierbar ist. Der Grund dafür ist, daß bei linearer Realisierung der Symmetrie nicht nur die klassische, sondern auch die effektive Wirkung diese Symmetrie aufweisen [Wei96, Hee97].

Liegen symmetriebrechende Terme vor, deren Impulsdimension ≤ 3 ist (das entspricht Wechselwirkungstermen mit Kopplungskonstanten von der Impulsdimension ≥ 1), treten auch nur symmetriebrechende Gegenterme von höchstens derselben Impulsdimension auf, die also bereits schon in der klassischen Lagrangedichte vorzusehen sind, damit die Theorie renormierbar ist. Dies stellt aber sicher, daß für die Wechselwirkungsteile, die höherer Impulsdimension in der Lagrangedichte entsprechen, die symmetrischen Gegenterme zur Renormierung hinreichen. In unserem Beispiel bedeutet dies, daß für die Renormierung primitiv divergenter Vierervertexdiagramme, also auch der Gesamtdivergenz eines solchen Vertex, d.h. die Divergenz die nach Abzug aller Subdivergenzen übrig bleibt, die Gegenterme der ϕ^4 -Theorie hinreichend sind.

Ferner zeigt das Bogoliubovsche Rekursionsverfahren, daß das Resultat deshalb ein konvergentes Integral sein muß, weil durch das Abziehen der endlichen Taylorentwicklungen der beim R-Prozeß involvierten Diagramme die Divergenzordnung aller Teildiagramme und des Diagramms selbst negativ gemacht wird, so daß das Integral nach dem Weinbergschen Konvergenztheorem endlich ist.

BPHZ und dimensionale Regularisierung

Die BPHZ-Methode ist, wie schon weiter oben betont, unabhängig von der Wahl der Regularisierungsmethode. Für praktische Rechnungen ist es aber meist bequemer, eine Regularisierungsvorschrift wie die dimensionale Regularisierung zu benutzen. Die Methoden können auch kombiniert werden, indem man die BPHZ-Methode zur Bestimmung der erforderlichen Gegenterme direkt aus den Diagrammen verwendet, aber die Bildungsvorschrift t_γ für den Gegenterm eines Diagramms γ entsprechend dem Regularisierungsschema verwendet. Im Falle der dimensionalen Regularisierung kann man dafür z.B. die Entfernung der Pole $1/(4-d)^k$ definieren. Auch hier sind entsprechend den Formeln in Anhang A die Gegenterme für jedes primitiv divergente Diagramm Polynome in den äußeren Impulsen.

Das BPHZ-Schema trägt dabei der korrekten Subtraktion von Subdivergenzen Rechnung und stellt aufgrund der Forest-Formel sicher, daß keine nichtlokalen Gegenterme (im Impulsraum von der Art $\ln[p^2/(4\pi\mu^2)]$) erforderlich werden, die aufgrund von überlappenden Divergenzen in den regularisierten Ausdrücken auftreten. Das bedeutet, daß die renormierte Lagrangedichte lokal bleibt, also ein Polynom der Felder und deren Ableitungen ist, wie die nackte Lagrangedichte. Wie oben ausgeführt, ist der Grund dafür, daß die überlappenden Divergenzen bereits durch Subtraktion von Subdivergenzen identisch verschwinden. Im formalen Beweis des BPHZ-Theorems ergibt sich dies übrigens auch daraus, daß für zwei überlappende Subdiagramme γ_1 und γ_2 stets $(1 - t_{\gamma_1 \cup \gamma_2})t_{\gamma_1}t_{\gamma_2} = (1 - t_{\gamma_1 \cup \gamma_2})t_{\gamma_2}t_{\gamma_1} = 0$ ist. Daher genügt die Summation über die Forests in der Zimmermannschen Formel, um die Divergenzen zu beseitigen. Es ist klar, daß diese Aussage auch für andere Subtraktionsvorschriften, wie z.B. die minimale Subtraktion der dimensionalen

Regularisierung, gilt, da das renormierte Feynmanintegral von der Regularisierung unabhängig ist.

Ein weiterer Vorteil der dimensional Regularisierung gegenüber dem BPHZ-Schema ist, daß die Behandlung von Infrarotdivergenzen kein weiteres Problem darstellt, solange alle masselosen Teilchen off-shell sind.

Subtrahierte Dispersionsrelationen

Eine weitere wichtige Methode der Renormierung ist die Verwendung von Dispersionsrelationen. Die Idee dieser Methode besteht darin, zunächst den endlichen Imaginärteil der Diagramme zu berechnen. Dies kann durch die Cutkoskyregeln (vgl. [IZ80]) erfolgen. Im Falle der Selbstenergie liefern die analytischen Eigenschaften der Schwinger-Keldysh-Greenfunktionen sofort

$$\text{Im } \Sigma_R = \frac{\Sigma^{-+} - \Sigma^{+-}}{2i}. \quad (2.199)$$

Im Vakuum gilt

$$\Sigma^{--}(p) = \Theta(p_0)\Sigma_R(p) + \Theta(-p_0)\Sigma_A(p), \quad (2.200)$$

so daß mit dieser Methode der Imaginärteil vollständig bestimmt ist. Im Vakuum nutzen wir weiter die Lorentzinvarianz aus und schreiben $\Sigma = \Sigma^{--}$ als Funktion der Invariante $s = p^2$. Für $s \notin \mathbb{R}$ ist die Funktion aufgrund der durch die Feynman-Stückelberg'schen Randbedingungen sichergestellten Kausalstruktur analytisch. Für den „euklidischen Bereich“ $s < 0$ ist Σ reell, so daß nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip $\Sigma(s^*) = \Sigma^*(s)$ gilt. Entlang Teilen der positiv reellen Achse weist die Selbstenergie einen Verzweigungsschnitt auf. Das physikalische Blatt der dazugehörigen Riemannschen Fläche ist durch $\Sigma(s) \in \mathbb{R}$ für $s < 0$ eindeutig bestimmt. Physikalisch beschreibt der Imaginärteil den Zerfall der Einteilchenzustände (entsprechend der einlaufenden bzw. auslaufenden Linie des Selbstenergiendiagramms) in die durch die inneren Linien des Diagramms repräsentierten virtuellen Zwischenzustände. Die Schwelle, bei der der Schnitt in der s -Ebene beginnt, ist demzufolge durch den Phasenraum dieses Zerfalls bestimmt. Für das oben besprochene Sunsetdiagramm bedeutet dies, daß die Schwelle bei $s_{\text{thr}} = (3m)^2$ liegt.

Zur Berechnung der vollständigen Selbstenergiefunktion aus ihrem Imaginärteil nutzen wir nun diese analytischen Eigenschaften aus. Dazu wenden wir das Cauchysche Integraltheorem an, wobei wir den Integrationsweg wie in Abb. 2.5 wählen.

Die Selbstenergiefunktion verschwindet allerdings im Unendlichen i.a. nicht. Das Weinbergsche Theorem besagt z.B., daß für das Sunsetdiagramm $\Sigma(s) \cong_{s \rightarrow \infty} O(s(\ln s)^\beta)$ ist. Ist nun $s_r < s_{\text{thr}}$, ist Σ in einer Umgebung dieses Punktes analytisch, und wir können statt Σ die Funktion

$$f(z) = \frac{\Sigma(z)}{(z - s_r)^n} \quad (2.201)$$

betrachten. Da die Feynmanintegrale nach dem Weinbergschen Theorem bis auf Logarithmen asymptotisch wie eine Potenz von s anwachsen, kann man n stets so groß wählen, daß f im Unendlichen verschwindet. Wegen

$$\frac{1}{(z - s_r)^n(z - s)} = \frac{1}{(s - s_r)^n(z - s)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(s - s_r)^k(z - s_r)^{n-k+1}} \quad (2.202)$$

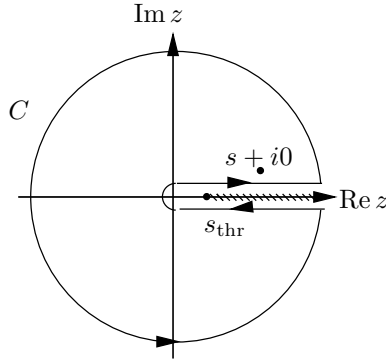


Abbildung 2.5: Zur Herleitung der Dispersionsrelation: Die Selbstenergie soll an der Stelle $s + i\eta$ berechnet werden. Dazu wird die Integrationskontur C für den Cauchyschen Integralsatz verwendet.

folgt dann aus dem auf f angewandten Cauchyschen Konvergenztheorem bei Wahl der Kontur gemäß Abb. 2.5, wobei das Integral über den ins Unendliche verlegten Kreis aufgrund der Asymptotik von f verschwindet, und wegen $f(s + i\eta) - f(s - i\eta) = 2i \text{Im } f(s + i\eta)$

$$\Sigma(s + i\eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(s - s_r)^k \Sigma^{(k)}(s_r)}{k!} + \frac{(s - s_r)^n}{\pi} \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{\text{Im } \Sigma(z + i\eta)}{(z - s_r)^n (z - s + i\eta)}. \quad (2.203)$$

Das bedeutet, daß wir neben dem Imaginärteil zur Berechnung der Selbstenergie auch noch deren Ableitungen bis zur $(n - 1)$ -ten Ordnung an der Stelle s_r benötigen. Für das Sunsetdiagramm benötigen wir beispielsweise $\Sigma(s_r)$ und $\Sigma'(s_r)$. Dies entspricht aber genau der Freiheit der Wahl der Renormierungsbedingungen bei der Renormierung der Selbstenergie, d.h. die Renormierungsbedingungen für die Selbstenergie legen diesen Anteil eindeutig fest. Das bedeutet, daß der oben eingeführte Subtraktionspunkt s_r dem Renormierungspunkt entspricht, bei dem die Renormierungsbedingungen festgelegt werden. Es ist klar, daß stets $s_r < s_{\text{thr}}$ sein muß. Im Fall der ϕ^4 -Theorie können wir z.B. die Wellenfunktionsrenormierungskonstante und den Massengliedterm so wählen, daß

$$\Sigma(m^2) = 0 \text{ und } \Sigma'(m^2) = 0 \quad (2.204)$$

ist. Dies bedeutet, daß die exakte Greenfunktion in jeder Ordnung Störungstheorie an der Stelle $s = m^2$ einen Pol mit Residuum 1 aufweist, d.h. in der Nähe dieses Pols der freien Greenfunktion entspricht. Physikalisch bedeutet dies, daß das beschriebene Teilchen die Masse m besitzt und die asymptotischen Wellenfunktionen stets auf 1 normiert sind, d.h. in äußeren Linien brauchen keine Selbstenergieeinschübe berücksichtigt zu werden, und bei der Berechnung von S -Matrixelementen können die auf 1 normierten freien Wellenfunktionen für die asymptotischen Zustände eingesetzt werden.

2.4.3 Renormierung bei endlichen Temperaturen

Es ist nun physikalisch von entscheidender Bedeutung, daß zur Renormierung bei endlichen Temperaturen und Dichten bereits die Renormierung der Vakuumbeiträge hinreichend ist. Dies stellt die Unabhängigkeit der Gegenterme in der effektiven Wirkung vom Zustand des Systems

sicher. Für das Hauptthema dieser Arbeit, nämlich die Untersuchung des Einflusses der Materie auf die Massen und Kopplungskonstanten, bedeutet dies, daß diese Parameter durch die Vakuumeigenschaften allein festgelegt sind und die durch das umgebende Medium bedingten Änderungen allein durch das zugrundeliegende Modell gegeben sind. Es ist also bei endlichen Temperaturen keine über die Renormierung im Vakuum hinausgehende, willkürliche Wahl von Gegentermen notwendig.

Es ist schon aus physikalischen Gründen einleuchtend, daß die Renormierung der Vakuumteile ausreichend ist, um auch für die entsprechenden Diagramme bei endlicher Temperatur ein endliches Resultat zu erhalten: Die Änderung der Funktionen bei endlicher Temperatur verglichen mit denen im Vakuum kann nur von den Teilen des Impulsintegrals herrühren, wo die Energien der beteiligten Teilchen von höchstens derselben Größenordnung sind wie die Temperatur. Die Beiträge von höheren Energien sind durch Bose–Einstein– bzw. Fermi–Dirac–Verteilungsfunktionen unterdrückt.

Formal erkennt man dies am einfachsten im Raum-Zeitbereich des Matsubaraformalismus. Im Limes $T \rightarrow 0$ geht die Matsubaragreenfunktionen in den Vakuumpropagator der euklidischen Quantenfeldtheorie, aus der die Vakuumtheorie bei reeller Zeit durch analytische Fortsetzung (Wickrotation der Zeitkoordinate) entsteht, über:

$$G(\tau, \vec{x}; T = 0) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp[i(k_4\tau + \vec{k}\vec{x})]}{k_4^2 + \omega_{\vec{k}}^2} \text{ mit } \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (2.205)$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$G(\tau, \vec{x}; T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\tau + n\beta, \vec{x}; T = 0), \quad (2.206)$$

erkennen wir, daß diese genau mit der Matsubaragreenfunktion übereinstimmt, denn offensichtlich erfüllt sie die Bewegungsgleichung der freien Greenfunktion und die Periodizitätsbedingung

$$(\square_E + m^2)G(\tau, \vec{x}; T) = \delta(\tau)\delta^{(3)}(\vec{x}), \quad G(\tau + \beta, \vec{x}; T) = G(\tau, \vec{x}; T). \quad (2.207)$$

Die UV–Divergenzen im Energie–Impulsbereich stellen sich im Raum–Zeitbereich als Singularitäten der Propagatoren bei $x^2 = \tau^2 + \vec{x}^2 = 0$ dar. Diese Singularität kann aber in der Summe (2.206) nur im temperaturunabhängigen Glied für $n = 0$ auftreten, also im Vakuumanteil des Propagators, während der temperaturabhängige Anteil eine analytische Funktion in τ und \vec{x} ist.

Es ist klar, daß wir eine ähnliche Betrachtung auch direkt im Impulsraum anstellen können: Die freien Greenfunktionen der Realzeitkontur (2.79) lassen sich wie folgt in freie und temperaturabhängige Anteile zerlegen:

$$\begin{aligned} i\Delta^{--}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\eta} + 2\pi i\delta(p^2 - m^2)f_B(|p_0|), \\ i\Delta^{+-}(p) &= 2\pi[\Theta(p_0) + f_B(|p_0|)]\delta(p^2 - m^2), \\ i\Delta^{-+}(p) &= 2\pi[\Theta(-p_0) + f_B(|p_0|)]\delta(p^2 - m^2), \\ i\Delta^{++}(p) &= -\frac{i}{p^2 - m^2 - i\eta} + 2\pi i\delta(p^2 - m^2)f_B(|p_0|) \end{aligned} \quad (2.208)$$

Zum einen wird klar, daß für $T \rightarrow 0$ die Greenfunktionen in die entsprechenden Vakuumausdrücke übergehen, zum anderen, daß die Temperaturanteile $\cong_{p_0 \rightarrow \infty} \exp(-\beta|p_0|)\delta(p^2 - m^2)$ sind.

Durch die δ -Distribution ergibt sich, daß die Temperaturanteile der Propagatorlinien on-shell-Impulse tragen, und das bedeutet, daß nach Ausführung der Integration über l_0 des entsprechenden Schleifenimpulses die Integration über \vec{l} exponentiell gedämpft ist, also ein endliches Resultat ergibt. Das bedeutet, daß beim Bogoliubovschen R -Prozeß alle Subdiagramme aus den Forests entfernt werden können, die eine reine Temperaturlinie tragen. Das bedeutet, daß temperaturabhängige Renormierungsteile nicht auftreten, d.h. evtl. im Formalismus der dimensional Regularisierung auftretende temperaturabhängige Polterme in $1/(4-d)$ werden allein durch die Subtraktion von Vakuumsdivergenzen entfernt. Die Gegenterme, die erforderlich sind, um die einteilchenirreduziblen zusammenhängenden Diagramme endlich zu machen, sind also temperaturunabhängig.

Kapitel 3

Φ -Funktionalnäherungen

Wir kommen in diesem Kapitel zum Hauptgegenstand dieser Arbeit, nämlich zur Behandlung einer Klasse von Resummationstechniken, deren Entwicklung auf Luttinger und Ward [LW60] sowie Baym und Kadanoff [BK61] zurückgeht. Baym zeigte, daß die selbstkonsistenten geschlossenen Gleichungen für die mittleren Felder und die Selbstenergie sich zwangsläufig aus dem von Luttinger und Ward angegebenen erzeugenden Funktional (im folgenden Φ -Funktional genannt) für diese Größen herleiten lassen [Bay62], wenn die Erhaltungssätze für die Mittelwerte von Noetherladungen erfüllt sind.

Wie wir im Detail weiter unten sehen werden, ergibt sich die Selbstenergie dabei durch Variation des Funktionals Φ nach der exakten Greenfunktion. Damit wird die Selbstenergie durch die angezogenen Skelettdiagramme der Quantenfeldtheorie definiert, deren punktförmige Vertizes durch den Wechselwirkungsanteil der klassischen Wirkung $S[\phi' + \varphi]$ bzgl. ϕ' definiert sind. Da die Variation eines beliebigen diagrammatisch mit iG -Linien definierten Funktionals die Summe aller amputierten Diagramme erzeugt, die durch Öffnen jeweils einer Linie entstehen, muß das Φ -Funktional selbst zweiteilchenirreduzibel sein. Allerdings weisen die geschlossenen Diagramme gegenüber Diagrammen mit externen Punkten einen zusätzlichen kombinatorischen Faktor $1/V$ auf, wobei V die Anzahl der Vertizes im Diagramm bezeichnet. Daher sind zwar die Selbstenergien diagrammatisch resummierbar, wodurch sich gerade die Darstellung der Selbstenergie durch die angezogenen Skelettdiagramme ergibt, nicht aber das Φ -Funktional. In Abschnitt 3.1.1 sollen diese Aussagen systematisch hergeleitet werden.

Dabei bedienen wir uns der Pfadintegralformulierung der Methode durch Cornwall, Jackiw und Tomboulis, die das Φ -Funktional im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie aufgegriffen haben [CJT74]. In der Literatur wird die Methode aufgrund dieser Arbeiten oft auch als CJT-Funktionalformalismus bezeichnet.

Diese Funktionalmethode gestattet zusammen mit diesen Diagrammregeln die systematische Herleitung von selbstkonsistenten Näherungen, die die *Erhaltungssätze für die Mittelwerte der Noetherströme* in mit der entsprechenden linear realisierten Symmetrie verträglichen Näherungen des Φ -Funktionals respektieren. Darunter fallen auch die aus der Poincaré-Symmetrie folgenden Erhaltungssätze für die Erwartungswerte von Gesamtenergie, -impuls und -drehimpuls. Wie wir in Abschnitt 3.1.1 herleiten werden, ergibt sich ein geschlossenes System von Bewegungsgleichungen für die mittleren Felder und die Selbstenergie, die sich durch die Stationaritatsforderung bzgl. Variationen nach dem mittleren Feld und der exakten Greenfunktion an das erzeugende Funktional formulieren lassen.

Angewandt auf die verallgemeinerte Schwinger–Keldysh–Kontur für das Gleichgewicht ist das erzeugende Funktional \mathbb{T} für die Lösungen dieser Bewegungsgleichungen gleichzeitig identisch mit dem großkanonischen thermodynamischen Potential $\Omega = \ln Z$. Damit ermöglichen die Näherungen des Funktionals eine Behandlung der statistischen Größen in Konsistenz mit den dynamischen Größen, die durch den stationären Punkt des Funktionals bzgl. eben dieser Größen definiert sind. Diese Eigenschaft bezeichnen wir im folgenden kurz als *thermodynamische Konsistenz* der Näherung.

Wie wir bei der Untersuchung der *Symmetrieeigenschaften von Φ -Funktionalnäherungen* sehen werden, ergeben sich jedoch auch charakteristische Probleme, die die Anwendung auf Theorien mit Symmetrien erschweren: Zum einen sind die lokalen Ward–Takahashi–Identitäten der Symmetrien für Greenfunktionen jenseits des Einpunktniveaus verletzt und damit die Symmetrie der Theorie, da der Propagator selbstkonsistent in die Gleichungen eingeht. Dies bedeutet für lokale Eichtheorien, daß unphysikalische Freiheitsgrade (insbesondere Zustände negativer Norm) in den inneren Linien der Näherung propagiert werden. Damit wird ab dem Zweipunktniveau nicht nur die Symmetrie der Theorie verletzt, sondern auch die Unitarität der S -Matrix. Wir werden in Kapitel 4 eine pragmatische Teillösung dieses Problems angeben, die die Stromerhaltung auf Korrelatorniveau restauriert und bei der keine unphysikalischen Moden auftreten.

Wir werden weiter zeigen, daß sich stets aus einer gegebenen Φ -Funktionalnäherung eine *externe Selbstenergie* herleiten läßt, die die Ward–Takahashi–Identitäten und damit die Symmetrien respektiert. Dies erfordert jedoch i.a. die Lösung von Vertexgleichungen vom Typ der „Leiternäherungen“ der Bethe–Salpeter–Gleichung, so daß eine numerische Umsetzung große Probleme bereitet. Die entstehenden Gleichungen sind für das exakte Funktional naturgemäß identisch zu der vollständigen nicht abbrechenden Hierarchie der Schwinger–Dyson–Gleichungen (vgl. z.B. [IZ80]). Aus Lösungen der Näherungen des Funktionals ergeben sich aber Gleichungen für die n -Punktfunktionen, die sich im Prinzip rekursiv aus den selbstkonsistent bestimmten Lösungen für das mittlere Feld und die Greenfunktion bestimmen lassen. Die so formal definierten n -Punktfunktionen erfüllen auch die Ward–Takahashi–Identitäten, jedoch ist eine numerische Lösung außer in den einfachsten Fällen (entsprechend einer RPA–Resummation für die Hartree–Näherung, wie wir sie in Abschnitt 3.5.1 am Beispiel des linearen $O(N)$ -Sigma Modells genauer betrachten werden) aufgrund des großen Rechenaufwands praktisch nicht möglich.

3.1 Die exakten Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt leiten wir die Eigenschaften des exakten Φ -Funktionals her, das die Herleitung eines Variationsprinzips für das exakte mittlere Feld und die Greenfunktion erlaubt.

3.1.1 Das erzeugende Funktional

Die Bewegungsgleichungen

Die Herleitung der selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen erfolgt am elegantesten mit Hilfe funktionaler Methoden unter Verwendung der im vorigen Kapitel zusammengestellten Pfadintegraltechniken.

Im folgenden verstehen wir bei Integralen über die Zeitkomponente von Funktionen der Raumzeitvariablen die Konturintegration entlang der Schwinger–Keldysh– bzw. der für das thermodynamische Gleichgewicht erweiterten Schwinger–Keldysh–Kontur. Wir kürzen in formalen Be-

3.1 · Die exakten Bewegungsgleichungen

trachtungen die Funktionsargumente ab: $f_{12\dots} = f(x_1, x_2, \dots)$. Ferner schreiben wir für Integrale über die Raum–Zeit–Koordinaten kurz

$$\int_{\mathcal{C}} d^{2\omega}x_1 d^{2\omega}x_2 \cdots f(x_1, x_2, \dots) = \{f_{12\dots}\}_{12\dots}. \quad (3.1)$$

Der Einfachheit halber betrachten wir nun die Feldtheorie eines skalaren reellen Feldes und legen eine beliebige Zeitkontur \mathcal{C} zugrunde. Die Erweiterung zu mehrkomponentigen bosonischen oder fermionischen Feldern zeigt keinerlei formale Komplikationen gegenüber diesem einfachsten Fall. Die Theorie sei durch das klassische Wirkungsfunktional $S[\phi]$ definiert. Als erstes führen wir das erzeugende Funktional

$$Z[J, K] = \int D\phi \exp \left(iS[\phi] + i\{J_1\phi_1\}_1 + \frac{i}{2}\{K_{12}\phi_1\phi_2\}_{12} \right) \quad (3.2)$$

ein. Dann stellt $W = -i \ln Z$ bzgl. J das erzeugende Funktional der mit

$$S_K[\phi] = S[\phi] + i/2 \{K_{12}\phi_1\phi_2\}_{12} \quad (3.3)$$

als klassischer Wirkung definierten Quantenfeldtheorie dar (vgl. Kapitel 16 in [Wei96]). Die Ableitungen nach J ergeben aufgrund der Feynman–Kac–Formel die Erwartungswerte der konturgeordneten Operatorprodukte, insbesondere das exakte mittlere Feld φ und die exakte Greenfunktion G dieser Theorie:

$$\varphi_1 = \frac{\delta W}{\delta J_1} = \langle \phi_1 \rangle_{J,K}, \quad G_{12} = -\frac{\delta^2 W}{\delta J_1 \delta J_2} = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \phi_1 \phi_2 \rangle_{J,K}, \quad (3.4)$$

wobei $\langle \cdots \rangle_{J,K}$ den quantenstatistischen Erwartungswert des Arguments in Anwesenheit der Quellen J und K bezeichnet. Es ist klar, daß sich für $J = K = 0$ die entsprechenden exakten Größen der durch $S[\phi]$ definierten Quantenfeldtheorie ergeben.

Aus der Pfadintegraldarstellung (3.2) erhalten wir sofort die wichtige Beziehung

$$\frac{\delta W}{\delta K_{12}} = \frac{1}{2}(\varphi_1\varphi_2 + iG_{12}). \quad (3.5)$$

Es ist wichtig zu betonen, daß diese Gleichheit von G in (3.4) und (3.5) allein aus der Pfadintegraldarstellung für Z und der Feynman–Kac–Formel folgt. Dies bedeutet, daß diese Gleichheit für Näherungen nicht zu gelten braucht. Wir werden dies weiter unten noch ausführlich zu betrachten haben, wenn wir die Symmetrieeigenschaften der Näherungen untersuchen.

Zunächst können wir aber analog zum Vorgehen in der üblichen Formulierung der Quantenfeldtheorie mit Hilfe von erzeugenden Funktionalen die externen Quellen J und K auch als Funktionale der Größen φ und G verstehen, die sich durch Auflösen von (3.4) nach J und K ergeben würden. Durch eine funktionale Doppellegendretransformation ergibt sich als „natürliches Funktional“ für diese Größen

$$\mathbb{F}[\varphi, G] = W[J, K] - \{ \varphi_1 J_1 \}_1 - \frac{1}{2} \{ (\varphi_1 \varphi_2 + iG_{12}) K_{12} \}_{12}. \quad (3.6)$$

Zur Unterscheidung von der üblicherweise betrachteten einfachen Legendretransformierten bzgl. J , also der effektiven Wirkung $\Gamma[\varphi]$, bezeichnen wir die Doppellegendretransformierte mit \mathbb{F} .

Durch Funktionalableitung nach φ und G unter Beruckichtigung der impliziten Definition der Funktionale $J[\varphi, G]$ und $K[\varphi, G]$ durch (3.4) sowie (3.5) erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\delta \mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta \varphi_1} = -J_1, \quad \frac{\delta \mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta G_{12}} = -\frac{i}{2} K_{12}. \quad (3.7)$$

Daraus folgt, daß die Bewegungsgleichungen bei verschwindenden äußeren Quellen für das exakte mittlere Feld und die exakte Greenfunktion durch die Variationsprinzipien

$$\frac{\delta \mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta \varphi_1} = 0, \quad \frac{\delta \mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta G_{12}} = 0 \quad (3.8)$$

bestimmt. Als nächstes benötigen wir jedoch praktische Regeln, wie \mathbb{I} bzw. Näherungen von \mathbb{I} zu berechnen sind.

Diagrammregeln

Im folgenden wollen wir unter Verwendung des Pfadintegrals Diagrammregeln zur Berechnung des erzeugenden Funktionals \mathbb{I} herleiten, wobei als diagrammatische Elemente jedoch nicht wie in der Störungstheorie die klassischen Felder und die freie Greenfunktion (d.h. die Baumgraphennaherungen) auftreten, sondern entsprechend der funktionalen Abhängigkeit von \mathbb{I} die exakten Größen φ und G .

Dazu substituieren wir in (3.2) $\phi' = \phi - \varphi$, wobei φ zunächst ein beliebig gewähltes Feld bezeichnen soll. Wegen der Translationsinvarianz des Pfadintegrals ergibt sich daraus

$$Z[J, K] = \exp \left(iS[\varphi] + i \{J_1 \varphi_1\}_1 + \frac{i}{2} \{K_{12} \varphi_1 \varphi_2\}_{12} \right) Z_1[J'_1, K]. \quad (3.9)$$

Dabei ist das Funktional Z_1 durch

$$Z_1[j, K] = \int D\phi' \exp \left(\frac{i}{2} \{(\mathcal{D}_{12}^{-1} + K_{12}) \phi'_1 \phi'_2\}_{12} + iS_I[\phi, \varphi] + i \{j_1 \phi_1\} \right) \quad (3.10)$$

definiert, wobei wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen eingeführt haben:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{12}^{-1} &= \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2}, \\ S_I[\phi', \varphi] &= S[\varphi] - \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1} \phi'_1 \right\}_1 - \frac{1}{2} \{ \mathcal{D}_{12}^{-1} \phi'_1 \phi'_2 \}_{12}, \\ J'_1 &= \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1} + \{K_{12} \varphi_2\}_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Damit ist \mathcal{D} der vom Hilfsfeld φ abhängige Propagator des Feldes ϕ' in der Wirkung $S[\varphi + \phi']$. Weiterhin ist $S_I[\phi', \varphi]$ bzgl. ϕ' der „Wechselwirkungsanteil“ der durch Z_1 definierten Quantenfeldtheorie, denn S_I beginnt in der funktionalen Entwicklung nach ϕ' mindestens mit der Ordnung $O(\phi'^3)$.

Wir zeigen nun, daß der Erwartungswert des Feldes ϕ' der durch Z_1 definierten Quantenfeldtheorie verschwinden muß, wenn

$$\varphi_1 = \frac{\delta W}{\delta J_1} \quad (3.12)$$

3.1 · Die exakten Bewegungsgleichungen

gelten soll. Dazu leiten wir (3.9) nach J ab, wobei zu beachten ist, daß in $Z_1[j, K]$ das Feld φ noch kein Funktional von j und K darstellt:

$$\frac{\delta Z[J, K]}{\delta J_1} = i\varphi_1 Z + \left\{ \frac{\delta Z_1[j, K]}{\delta j_{1'}} \bigg|_{j=J'} \frac{\delta J_{1'}}{\delta J_1} \right\}_{1'} \exp \left(iS[\varphi] + i \{J_1 \varphi_1\}_1 + \frac{i}{2} \{K_{12} \phi_1 \phi_2\}_{12} \right). \quad (3.13)$$

Aus der Definition von J' ergibt sich daraus sofort

$$\frac{\delta Z[J, K]}{\delta J_1} = i\varphi_1 Z + i \langle \phi_1' \rangle_{J'1} Z. \quad (3.14)$$

Dabei bezeichnet $\langle \dots \rangle_{j1}$ den Mittelwert des Arguments bzgl. der durch Z_1 definierten Quantenfeldtheorie unter Einfluß der externen Quelle j . Da aber für $j = J'$ (3.12) gelten soll, muß

$$\langle \phi_1' \rangle_{J'1} = 0 \quad (3.15)$$

sein. Damit ist aber die Berechnung von $W[J, K]$ bzw. $\mathbb{I}[\varphi, G]$ auf die Berechnung von $Z_1[j, K]$ zurückgeführt, wobei der Strom j so zu wählen ist, daß das mittlere Feld der dadurch definierten Theorie verschwindet. Wir können in Z_1 die bilokale Quelle K zugunsten von G einfach dadurch eliminieren, daß wir verlangen

$$K = G^{-1} - \mathcal{D}^{-1}. \quad (3.16)$$

Es ist zu beachten, daß damit K als Funktional von φ und G festgelegt ist. Dies ist aber genau die Situation, die wir benötigen, um $\mathbb{I}[\varphi, G]$ zu bestimmen.

Wir können also definieren

$$Z_1[j, K[G]] \equiv Z_1[j, G] = \int D\phi' \exp \left(\frac{i}{2} \{G_{12}^{-1} \phi_1' \phi_2'\}_{12} \right) \exp \left(iS_I[\phi', \varphi] + i \{j_1 \phi_1'\}_1 \right). \quad (3.17)$$

Dies ist aber die Quantenfeldtheorie, die durch die Wechselwirkungsterme $S_I[\phi', \varphi]$ und einen „perturbativen“ Propagator G definiert ist. Entwickeln wir die zweite Exponentialfunktion nach ihrem Argument in ihre Potenzreihe, erkennen wir, daß

$$\exp(iW_1[j, G]) = Z_1[j, G] = \exp \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(iG) + iW_2[j, G] \right] \quad (3.18)$$

ist. Die Spur ist dabei in dem in Kapitel 2 bei der Berechnung des thermodynamischen Potentials bereits benutzten funktionalen Sinne zu verstehen. Das Funktional W_2 ist die Summe aller geschlossenen zusammenhängenden Diagramme mit mindestens 2 Schleifen, die mit durch $S_I[\phi', \varphi]$ definierten Vertizes und Linien, die iG repräsentieren, gebildet werden können. Definieren wir weiter

$$\varphi_1' = \frac{\delta iW_1[j, G]}{\delta j_1} \quad \text{und} \quad \Gamma_1[\varphi_1', G] = W_1[j, G] - \{\varphi_1' j_1\}_1, \quad (3.19)$$

dann ist nach bekannten Sätzen Γ_1 bzgl. φ' das erzeugende Funktional für die einteilchenirreduziblen amputierten Greenfunktionen (vgl. [Wei96] und den Rekursionsbeweis in [Hee98]). Setzen wir nun jedoch $j = J'$, so wissen wir aus (3.15), daß dann $\varphi' = 0$ ist, so daß also W_1 für diesen Wert des Stromes einteilchenirreduzibel ist.

Nun fassen wir aber die ursprünglichen externen Quellen J und K als Funktionale von φ und G auf, so daß wir schließlich (3.9) und (3.18) in (3.6) einsetzen können:

$$i\mathbb{I}[\varphi, G] = iS[\varphi] - \frac{1}{2} \{ \mathcal{D}_{12}^{-1} (G_{12} - \mathcal{D}_{12}) \}_{12} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(iG) + i \underbrace{\mathbb{I}_2[\varphi, G]}_{\equiv W_2[J'[\varphi, G], G]}. \quad (3.20)$$

Dieses Funktional wurde zum ersten Mal von Luttinger und Ward [LW60] für die Herleitung des thermodynamischen Potentials mit diagrammatischen Methoden hergeleitet, jedoch ohne Beruckichtigung der Beiträge des mittleren Feldes.

Wir wissen bereits, daß $i\mathbb{I}_2$ durch einteilchenirreduzible Diagramme mit mindestens zwei Schleifen dargestellt wird, deren Vertizes durch $iS_I[\phi, \varphi]$ (bzgl. ϕ) bestimmt sind und in denen Linien die Greenfunktion iG repräsentieren.

Wir werden jedoch nun zeigen, daß \mathbb{I}_2 für die Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.8) genau durch die Summe aller zweiteilchenirreduziblen geschlossenen Diagramme mit mindestens zwei Schleifen dargestellt wird. Haben wir dies gezeigt, ist damit das Funktional \mathbb{I} durch einfache analytische Ausdrücke und Diagrammregeln für \mathbb{I}_2 hinreichend bestimmt. Wir müssen dazu nur (3.20) in (3.8) einsetzen. Dann ergibt sich die Dyson-Gleichung

$$-i(\mathcal{D}_{12}^{-1} - G_{12}^{-1}) = 2 \frac{\delta i\mathbb{I}_2[\varphi, G]}{\delta iG_{12}} := -i\Sigma'_{12}. \quad (3.21)$$

Es ist zu beachten, daß hier die einteilchenirreduzible Selbstenergie Σ durch Diagramme mit angezogenen Linien, die iG bedeuten, repräsentiert wird und der vom mittleren Feld abhängige Propagator \mathcal{D} als „freier Propagator“ angesehen wird. Sämtliche Linien in Σ können also keine Selbstenergieeinschube mehr enthalten, d.h. es läßt sich kein Diagrammteil von $-i\Sigma$ abtrennen, indem man zwei Linien durchschneidet, es sei denn man trennt damit die externen Punkte x_1 und x_2 voneinander. Da die Selbstenergie einteilchenirreduzibel ist, müssen jedoch die Diagrammteile, die jeweils einen der beiden externen Punkte beinhalten, durch wenigstens zwei Linien miteinander verbunden sein. Nun bedeutet die Ableitung eines Ausdrucks nach iG diagrammatisch das öffnen einer vollen Linie, wobei ein bei den beiden die Argumente von G repräsentierenden äußeren Punkten amputiertes Diagramm resultiert. Damit muß aber \mathbb{I}_2 selbst zweiteilchenirreduzibel sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

Im folgenden verwenden wir neben \mathbb{I}_2 auch das ursprüngliche Baymsche Φ -Funktional, das durch

$$\mathbb{I}[\varphi, G] = S_0[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(iG) + \frac{i}{2} \langle D_{12}^{-1}(G_{12} - D_{12}) \rangle_{12} + \Phi[\varphi, G] \quad (3.22)$$

definiert wird. S_0 ist hierbei der wechselwirkungsfreie Anteil der klassischen Wirkung, enthält also Feldpolynome bis zur Ordnung φ^2 . D bezeichnet den störungstheoretischen freien Propagator:

$$D_{12}^{-1} = \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\phi=0}. \quad (3.23)$$

Das Φ -Funktional hängt dann mit \mathbb{I}_2 durch

$$\Phi[\varphi, G] = \underbrace{S_I[\varphi]}_{0 \text{ Schleifen}} + \frac{i}{2} \underbrace{\{(\mathcal{D}_{12}^{-1} - D_{12}^{-1})G_{12}\}_{12}}_{1 \text{ Schleife}} + \underbrace{\mathbb{I}_2[\varphi, G]}_{\geq 2 \text{ Schleifen}} \quad (3.24)$$

zusammen. Damit ist Φ aus *allen* zweiteilchenirreduziblen geschlossenen Diagrammen der Theorie aufgebaut. Dazu ist zu bemerken, daß $S_I[\varphi]$ ein lokales Funktional des mittleren Feldes ist und damit keine iG -Linien beinhaltet. Der Einschleifenbeitrag ist vom Tadpoletyp und kann somit ebenfalls durch Durchschneiden der einen iG -Linie nicht in zwei Teile zerfallen. Die Bewegungsgleichung für das mittlere Feld (3.8) zeigt dann, daß dies eine systematische Schleifenentwicklung der Quellterme für das mittlere Feld darstellt. Definieren wir die Selbstenergie Σ' bzgl. D als

freiem Propagator, dann gilt aufgrund der Bewegungsgleichung für G (3.8)

$$\begin{aligned}
 -i(\square + m^2)\varphi_1 &:= ij_1 = -\frac{\delta i\Phi}{\delta\varphi}, \\
 -i(D_{12}^{-1} - G_{12}^{-1}) &:= -i\Sigma_{12} = \frac{\delta i\Phi}{\delta iG_{21}} \times \begin{cases} 2 & \text{für reelle Bosonenfelder} \\ 1 & \text{für komplexe Bosonenfelder,} \\ -1 & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

wobei sich die hier der Vollständigkeit halber angegebenen Fälle von komplexen Bosonenfeldern und Fermionenfeldern in vollständiger Analogie zu dem hier behandelten reellen Skalarfeld herleiten lassen. Damit ist die Kopplung des mittleren Feldes, die im Propagator \mathcal{D} enthalten ist, in die Selbstenergie Σ verschoben worden. Dies ist konsistent mit der Tatsache, daß Σ einteilchenirreduzibel sein muß, genau wie Σ' , da es sich bei der Differenz effektiv um einen lokalen Selbstenergiebeitrag des mittleren Feldes ohne iG -Linien handelt.

Im Operatorformalismus sind diese Größen in schematischer Form also durch

$$\begin{aligned}
 i\Phi &= \left\langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \exp \left(i \int_{\mathcal{C}} S_I[\phi, \varphi] \right) \right\rangle_{2\text{PI}}, \\
 -ij(x) &= \left\langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \exp \left(i \int_{\mathcal{C}} S_I[\phi, \varphi] \right) \right\rangle_{2\text{PI}}, \\
 -i\Sigma(x, y) &= \left\langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \exp \left(i \int_{\mathcal{C}} S_I[\phi, \varphi] \right) \right\rangle_{2\text{PI}}
 \end{aligned} \quad (3.26)$$

gegeben. Dabei sind die Erwartungswerte in der üblichen Weise diagrammatisch auszuwerten: Die Exponentialfunktion ist in ihre Potenzreihe zu entwickeln und die Erwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren durch die Kontraktion von Paaren von Feldoperatoren und Mittelwerte von einzelnen Feldern zu ermitteln. Dabei stehen die Kontraktionen für volle Greenfunktionen

$$iG(x, y) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \phi(x) \phi(y) \rangle, \quad (3.27)$$

und die mittleren Felder sind durch

$$\varphi(x) = \langle \phi(x) \rangle \quad (3.28)$$

zu berücksichtigen. Jeder Beitrag einer bestimmten Kontraktion läßt sich in der üblichen Weise diagrammatisch darstellen (vgl. Anhang B). Die 2PI-Vorschrift besagt, daß von allen möglichen Kontraktionen nur solche zu berücksichtigen sind, die zweiteilchenirreduziblen Diagrammen entsprechen.

3.1.2 Anwendung auf die ϕ^4 -Theorie

Wir wollen zur Illustration die im vorigen Abschnitt auf abstrakte Weise hergeleiteten Diagrammregeln zur Bestimmung von Γ auf die ϕ^4 -Theorie anwenden. Die Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (3.29)$$

gegeben. Der erste Schritt zur diagrammatischen Berechnung des Φ -Functionals ist die Bestimmung des Wechselwirkungsanteils unter Einfluß des mittleren Feldes φ :

$$S_I[\phi', \varphi] = - \left\{ \frac{\lambda}{3!} \varphi_1 \phi_1'^3 + \frac{\lambda}{4!} \phi_1'^4 \right\}_1. \quad (3.30)$$

Stellen wir das mittlere Feld durch ein Beinchen mit einem Kreuz dar, ergeben sich für Φ und mit den Bewegungsgleichungen (3.25) für φ und Σ' die Diagramme

$$i\Phi = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} + \frac{1}{3} \dots \quad (3.31)$$

$$-ij = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \times \end{array} + \dots \quad (3.32)$$

$$-i\Sigma = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} + \dots \quad (3.33)$$

In der obersten Zeile werden alle zweiteilchenirreduziblen geschlossenen Diagramme, die zu $i\Phi$ bis zur zweiten Vertexordnung beitragen, dargestellt. Die Faktoren $1/2$ vor den beiden letzten Diagrammen deuten die gegenüber den üblicherweise in Lehrbüchern angegebenen Feynmanregeln zu beruckichtigenden Zusatzfaktoren $1/V$ ($V =$ Zahl der Vertizes) für geschlossene Diagramme an. Die korrekten Zahlfaktoren ergeben sich ohne Zusatzregeln auch aus den in Abschnitt B.1 angegebenen Abzahlregeln.

Die zweite Zeile gibt die Quellterme der Klein–Gordon–Gleichung gemäß der Definition in (3.25) an. Die Ableitung von $i\Phi$ nach φ entspricht der Entfernung eines Beinchens mit Kreuzchen in den Diagrammen. Die Zahlfaktoren entsprechen den für Feynmandiagramme üblichen Bestimmungsregeln für den Symmetriefaktor, da der Zusatzfaktor $1/V$ aufgrund der Anzahl der Vertizes kompensiert wird. Der entstehende amputierte äußere Punkt des Diagramms ist dick gezeichnet.

Entsprechend verhält es sich in der dritten Zeile für die Selbstenergie. Der zusätzliche Faktor 2 in der Definition von Σ' in (3.25) trägt dabei der besonderen Tatsache Rechnung, daß wir hier ein *reelles* Feld betrachten. Die zusätzlichen Faktoren ergeben sich daraus, daß es sich um strikt neutrale Teilchen handelt, für die die Teilchen und die Antiteilchen identisch sind. Dies entspricht genau der analogen Situation in der Störungstheorie.

3.2 Thermodynamische Zustandsgrößen und Φ -Funktional

Ein Blick auf die Definition (3.2) des erzeugenden Funktionals $Z(J, K)$ zeigt, daß der Wert des Funktionals $i\mathbb{I}[\varphi, G]$ für die Lösungen der Bewegungsgleichungen, d.h. verschwindende äußere Quellen J und K gleich dem thermodynamischen Potential

$$\Omega(\beta) = i\mathbb{I}[\varphi, G] \quad (3.34)$$

ist. Dabei ist zu beachten, daß der reelle Teil der Zeitkontur \mathcal{C} zu Ω nicht beiträgt, da dieser in sich geschlossen ist. Andererseits haben wir in Kapitel 2 gesehen, daß die Matsubara-greenfunktion und die retardierte Greenfunktion vermöge der KMS–Bedingung durch eine analytische Fortsetzung miteinander verknüpft sind. Für eine allgemeine komplexe Variable z definieren wir daher die analytische Fortsetzung der retardierten Greenfunktion mit Hilfe der Spektraldarstellung (2.68)

$$G_c(z, \vec{p}) = \int \frac{dz'}{2\pi} \frac{A(z', \vec{p})}{z' - z} \text{ mit } A(z, \vec{p}) = -2 \text{Im } G_R(z, \vec{p}) \text{ für } z \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

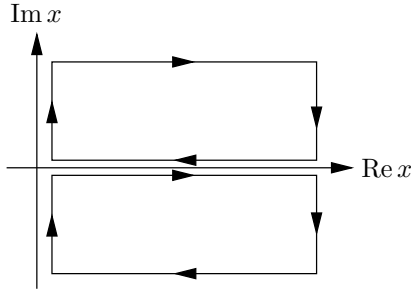


Abbildung 3.1: Die Kontur zur Herleitung der reellen Darstellung für die Matsubarasummenformel (3.38).

Für reelle $z = p_0$ gilt aufgrund der allgemeinen analytischen Eigenschaften der Wignertransformierten von retardierter und avancierter Greenfunktion:

$$G_{R/A}(p_0, \vec{p}) = G_c(p_0 \pm i\eta, \vec{p}) \text{ für } p_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

Die Matsubargreenfunktion ist hingegen durch die imaginären Werte des Zeitarguments der analytischen Greenfunktion

$$G_M(\omega_k, \vec{p}) = G_c(i\omega_k, \vec{p}) \text{ mit } \omega_k = \frac{2\pi k}{\beta} \Big|_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.37)$$

gegeben. Die ω_k sind die bosonischen Matsubarafrequenzen, die den periodische Randbedingungen der Felder im bosonischen Pfadintegral (2.58) für $\mu = 0$ entsprechen.

Im Matsubaraformalismus gilt die folgende Summenformel

$$\frac{1}{\beta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(i\omega_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{i\infty+\eta} dp_0 [F(p_0) + F(-p_0)] \left[\frac{1}{2} + f_B(p_0) \right], \quad (3.38)$$

wobei wir die Boseverteilungsfunktion

$$f_B(p_0) = \frac{1}{\exp(\beta p_0) - 1} \quad (3.39)$$

verwendet haben. Diese Formel gilt für im Unendlichen hinreichend schnell fallende Funktionen F , die in einem offenen Streifen um die imaginäre Achse analytisch sind. Betrachten wir nun die Kontur in Abb. 3.1 und nehmen an, die Funktion ist überall analytisch, ausgenommen entlang der reellen Achse, so folgt aus dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(i\omega_k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{2} [F(p_0 - i\eta\sigma(p_0)) - F(p_0 + i\eta\sigma(p_0))] + \\ &\quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 n(p_0) [F(p_0 - i\eta\sigma(p_0)) - F(p_0 + i\eta\sigma(p_0))] \\ &\quad \text{mit } n_B(p_0) = f_B(|p_0|). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Wir wenden diese Summenformel nun zur Berechnung der Entropiedichte an, wobei wir auf die Gl. (2.92) zurückgreifen

$$s = \partial_T \frac{\mathbb{I}[\varphi, G]}{\beta V}. \quad (3.41)$$

Da φ und G in dieser Formel die stationären Punkte des Funktionals \mathbb{I} bezeichnen, genügt die partielle Ableitung nach der Temperatur, d.h. es sind nur die in den Diagrammregeln

zur Berechnung von Φ auftretenden expliziten Temperaturabhängigkeiten der Bose–Einstein–Verteilungsfunktionen f_B zu differenzieren.

Wir denken uns nun \mathbb{I} in der Impulsdarstellung berechnet und wenden die Summenformel (3.40) auf die letzte verbleibende Matsubarasumme an. über die räumlichen Impulse ist gemäß den Matsubara–Feynmanregeln zu integrieren. In der Impulsdarstellung enthält nun jedes geschlossene Diagramm, das zu Φ beiträgt, formal den Faktor „ $\delta^{(4)}(0)$ “, der durch die Quantisierung in einem endlichen Volumen mit räumlich periodischen Randbedingungen und Berücksichtigung der durch die KMS–Bedingung gegebenen zeitlichen Periodizität der Felder als $-i\beta V$ zu interpretieren ist. Damit ergibt eine Anwendung der Matsubarasummenformel (3.40) für die Entropiedichte

$$s = -2 \int_{p_0 > 0} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \partial_T n(p_0) \left\{ \text{Im} \ln[-G_R^{-1}(p)] + \text{Im}[\Sigma_R(p)G_R(p)] + i \frac{\delta\Phi[\varphi, G]}{\delta n(p)} \Big|_{G_R, \varphi = \text{const}} \right\}. \quad (3.42)$$

Die Funktionalableitung von Φ nach der Verteilungsfunktion n ist dabei bei konstant gehaltenem G_R und φ zu nehmen.

Enthält das Φ -Funktional nur Diagramme mit maximal zwei internen Punkten, läßt sich diese Formel noch wesentlich vereinfachen. Zunächst ist klar, daß die Tadpolebeitrage, die allein zur impulsunabhangigen Modifikation der Teilchenmassen im Medium beitragen, bereits im $\text{Im} \ln(-G_R^{-1})$ -Anteil des Integrals berücksichtigt sind. Drückt man die verbleibenden Zweipunktbeitrage zu Φ (die vollständig in \mathbb{I}_2 enthalten sind) durch Schließen der Selbstenergie mit einer Propagatorlinie aus und berücksichtigt die dabei auftretenden Zahlfaktoren, vereinfacht sich nach einiger Rechnung der Ausdruck für die Entropiedichte für diese Klasse von Diagrammen zu (vgl. [Rie68, CP75]):

$$s = -2 \int_{p_0 > 0} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \partial_T n(p_0) \{ \text{Im} \ln[-G_R^{-1}(p)] + (\text{Im} \Sigma_R)(\text{Re} G_R) \}. \quad (3.43)$$

Für eine ausführliche Herleitung und Diskussion dieser Gleichung s. auch [Wei98].

3.3 Symmetrien

In diesem Abschnitt leiten wir die Symmetrieeigenschaften der Greenfunktionen her. Für die hier betrachteten *exakten* Funktionale und Propagatoren folgt aus der Feynman–Kac–Formel die schon oben verwendete Beziehung (3.5). Es sei bereits hier betont, daß dieser Zusammenhang allein aus der Pfadintegralformulierung der exakten Quantenfeldtheorie folgt. Es ist klar, daß sich diese Beziehung auch aus dem Operatorformalismus im Heisenbergbild gewinnen läßt. Wesentlich für den hier diskutierten Punkt ist es, im Auge zu behalten, daß sie sich im Formalismus *exakter Lösungen der betrachteten Quantenfeldtheorie handelt* ergibt. Dies bedeutet, daß sie für eine Näherung nicht mehr notwendigerweise gültig sind.

Wir definieren nun eine vom mittleren Feld φ abhängige *effektive Greenfunktion* vermöge

$$\frac{\delta\mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta G_{12}} \Big|_{G=G_{\text{eff}}[\varphi]} = K_{12} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.44)$$

und ein effektives Wirkungsfunktional gemäß

$$\Gamma_{\text{eff}}[\varphi] := \mathbb{I}[\varphi, G_{\text{eff}}[\varphi]]. \quad (3.45)$$

Da für $K = 0$ das Funktional \mathbb{I} mit der effektiven Wirkung übereinstimmt, gilt

$$\Gamma_{\text{eff}}[\varphi] \stackrel{\text{ex}}{=} \Gamma[\varphi], \quad (3.46)$$

wobei wir die gewöhnliche effektive Wirkung, also die einfache Legendretransformierte von $W[J, K = 0]$ bzgl. J mit Γ bezeichnen. Wir betonen mit dem Zeichen $\stackrel{\text{ex}}{=}$, daß zur Herleitung einer solchen Gleichung die Feynman–Kacformel benutzt wurde, deren Gültigkeit die Pfadintegralformel für Z voraussetzt, so daß die durch sie ausgedrückte funktionale Beziehung für Näherungen nicht notwendigerweise gelten muß. Insbesondere folgt aus (3.46) noch die wichtige Beziehung

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} \stackrel{\text{ex}}{=} (G^{-1})_{12} = \mathcal{D}^{-1} - \Sigma_{12}, \quad (3.47)$$

wobei Σ_{12} die aus den Bewegungsgleichungen (3.8) folgende Selbstenergie bezeichnet. Gleichung (3.47) besagt also, daß sie für das exakte Φ -Funktional mit der exakten Selbstenergie übereinstimmt.

Wir leiten nun die Beziehungen ab, die sich aus *globalen, linear auf den Feldern operierenden* Symmetrien der klassischen Wirkung ergeben. Wir bezeichnen diese Beziehungen als Ward–Takahashi–Identitäten (WTIn), obwohl dieser Name in der Literatur eher für die entsprechenden aus einer lokalen Eichinvarianz folgenden Beziehungen reserviert ist.

Wegen der eben aus \mathbb{I} hergeleiteten Identität der selbstkonsistenten Greenfunktion mit der exakten Greenfunktion der betrachteten Quantenfeldtheorie genügt es hier, die Symmetriebetrachtungen mit der gewöhnlichen effektiven Wirkung Γ auszuführen. Im nächsten Abschnitt werden wir die analogen Betrachtungen für das Funktional \mathbb{I} und für das effektive Funktional Γ_{eff} zu wiederholen haben, weil dann die exakten Beziehungen zwischen den Greenfunktionen aus den oben erläuterten Gründen ihre Gültigkeit verlieren.

Um einen konkreten Fall vor Augen zu haben, behandeln wir im folgenden das lineare $O(N)$ -Sigmamodell in seiner einfachsten fermionenfreien Form. Sei also $\vec{\phi}$ ein Spaltenvektor aus N reellen Feldern. Die allgemeinste unter der Transformation $\vec{\phi} \rightarrow \hat{T}\vec{\phi}$ für alle $\hat{T} \in O(N)$ invariante oberflächlich renormierbare Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi})(\partial^\mu \vec{\phi}) - \frac{m^2}{2}\vec{\phi}^2 - \frac{\lambda}{8}(\vec{\phi}^2)^2. \quad (3.48)$$

Hierbei ist insbesondere der Fall der spontanen Symmetriebrechung, also $m^2 = -\tilde{m}^2 < 0$, interessant. Wir betrachten also im folgenden m^2 als Parameter, der auch negative Werte annehmen kann.

Globale Form der Ward–Takahashi–Identitäten

Unter der *globalen Form* der WTIn verstehen wir die Tatsache, daß im Falle linear realisierter Symmetrien der klassischen Wirkung auch die effektive Wirkung unter dieser Symmetrie invariant ist. Unter der Voraussetzung, daß ein die Symmetrie respektierendes Regularisierungsschema existiert, d.h. keine Anomalien vorliegen, ist also eine Theorie, deren Lagrangedichte das allgemeinst mögliche unter der Symmetrie invariante Polynom bis zur Impulsdimension 4 enthält, perturbativ renormierbar.

In unserem Fall des linearen Sigmamodells respektiert die dimensionale Regularisierung die Symmetrie. In Anlehnung an die Pauli–Villars-Regularisierung ist auch die Einführung höherer

Ableitungen in den kinetischen Term denkbar (vgl. [IZ80]), z.B.

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \vec{\phi} \square \phi \rightarrow -\frac{1}{2} \int d^4x \vec{\phi} \left(\square + a_1 \frac{\square^2}{\Lambda^2} + a_2 \frac{\square^3}{\Lambda^4} \right) \vec{\phi}. \quad (3.49)$$

Dann ist der Propagator von der Dimension -6 , so daß die höchste vorkommende quadratische Divergenz der eigentlichen Selbstenergiendiagramme regularisiert ist. Da aber hier keinerlei Probleme mit der dimensional Regularisierung zu befürchten sind, verwenden wir diese aufgrund der einfacheren Handhabbarkeit.

Die klassische Wirkung (3.48) ist unter allen linearen Transformation $\vec{\phi}'(x) = \hat{T} \vec{\phi}$ mit $\hat{T} \in O(N)$ invariant. Um daraus eine Aussage über die effektive Wirkung zu erhalten, bemerken wir, daß das Pfadintegralmaß ebenfalls invariant unter der Transformation ist. Durch Substitution von $\vec{\phi}'$ im Pfadintegral für Z ergibt dies

$$\begin{aligned} Z[\vec{J}] &= N \int D(\hat{T} \vec{\phi}) \exp \left[iS[\hat{T} \vec{\phi}] + i \left\{ \vec{J}_1 \hat{T} \vec{\phi}_1 \right\}_1 \right] = \\ &= N \int D\vec{\phi} \exp \left[iS[\vec{\phi}] + i \left\{ (\hat{T}^t \vec{J}_1) \vec{\phi}_1 \right\}_1 \right] = Z[\hat{T}^t \vec{J}]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Das bedeutet, daß das erzeugende Funktional für zeitgeordnete Erwartungswerte invariant ist, wenn die Ströme mit beliebigen $O(N)$ -Matrizen transformiert werden. Das selbe trifft dann auch auf das erzeugende Funktional für zusammenhängende Greenfunktionen $W[\vec{J}]$ zu.

Parametrisieren wir nun die $O(N)$ -Gruppe gem

$$\hat{T}(\chi) = \exp(i\chi_i \hat{t}^i), \quad i = 1, \dots, N(N-1)/2, \quad (3.51)$$

so stellen die $i\hat{t}^i$ eine Basis der Liealgebra $o(N) = \mathcal{LO}(N)$ dar. In unserem Fall liegt die reelle Fundamentaldarstellung der $o(N)$ vor, d.h. die $i\hat{t}^i$ sind reell und antisymmetrisch. Ableiten der Invarianzbeziehung $W[\vec{J}] = W[\hat{T}^t(\chi)\vec{J}]$ nach χ_j und anschließendes Nullsetzen von χ ergibt dann

$$\left\{ \vec{J}_1 \hat{t}^j \frac{\delta Z}{\delta \vec{J}_1} \right\}_1 = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N(N-1)/2. \quad (3.52)$$

Für die effektive Wirkung Γ folgt daraus

$$\left\{ \frac{\delta \Gamma}{\delta \vec{\phi}_1} \hat{t}^j \vec{\phi}_1 \right\}_1 = 0. \quad (3.53)$$

Sie ist also wie die klassische Wirkung invariant unter $O(N)$ -Transformationen.

Damit ist aber auch bereits die Renormierbarkeit mit symmetrischen Gegentermen erwiesen: Angenommen die Theorie sei bis zur L -Schleifenordnung durch symmetrische Gegenterme renormiert. Dann sind nach dem BPHZ-Theorem in der $L+1$ -Schleifenordnung nur noch Gegenterme notwendig, die durch Polynome in den Feldern und Ableitungen derselben ausgedrückt werden können, die von der Impulsdimension ≤ 4 sind. Da die Gegenterme bis zur L -Schleifenordnung nach Induktionsannahme symmetrisch unter der Symmetrieoperation sind und die regularisierte Wirkung ebenfalls symmetrisch ist, müssen diese lokalen Gegenterme, die nach Abzug der Subdivergenzen noch zur Elimination der oberflächlichen Divergenzen der $L+1$ -Ordnung notwendig sind, ebenfalls symmetrisch sein. Damit ist die Theorie also in jeder Schleifenordnung der Störungstheorie renormierbar.

Da in unserem Fall die freie und die Wechselwirkungs-Lagrangedichte jeweils für sich symmetrisch sind, trifft das gleiche Beweisargument auch für jede Ordnung in λ zu. Dieses Argument ist im übrigen unabhängig davon, ob die Theorie im Wigner-Weyl- oder im Goldstones-Modus vorliegt. In beiden Fällen genügen stets mit der Symmetrie verträgliche Gegenterme.

Lokale Form der Ward–Takahashi–Identitäten

In der klassischen Theorie hat eine kontinuierliche globale Symmetrie nach dem Noethertheorem stets die Existenz eines erhaltenen Stromes zur Folge. Wir werden jetzt zeigen, daß dies auch für den Erwartungswert des entsprechenden Stromes in der Quantenfeldtheorie gilt. Außerdem ergeben sich die WTIn für die eigentlichen Selbstenergie- und Vertexfunktionen. Wir können dabei ohne großen Aufwand die Symmetrieklasse noch dahingehend erweitern, daß wir Raum–Zeitsymmetrien mitbehandeln.

Zunächst erinnern wir an die Behandlung der entsprechenden Frage für klassische Systeme (für eine ausführliche Behandlung vgl. [Noe18, IZ80, Wei96, Hee97]). Dazu betrachten wir infinitesimale Symmetrietransformationen der Form

$$\vec{\phi}'(x') = \vec{\phi}(x) + \delta\vec{\phi}[\vec{\phi}, x], \quad x' = x + \delta x(x). \quad (3.54)$$

Eine einfache Rechnung ergibt dann für die Variation der Wirkung (es ist die Funktionaldeterminante im Wirkungsintegral zu berücksichtigen sowie die Tatsache, daß die Variation der Felder nicht mit der Ableitung nach Raumzeitvariablen vertauscht):

$$\delta S = \left\{ \frac{\delta S}{\delta\vec{\phi}_1} [\delta\vec{\phi}_1 - \delta x_1^\nu (\partial_\nu \vec{\phi})] \right\}_1. \quad (3.55)$$

Damit (3.55) eine Symmetrietransformation ist, muß (3.55) identisch verschwinden, und zwar auch für Felder, die nicht Lösung der Bewegungsgleichungen sind. Sind also $\delta\chi^i$ die infinitesimalen Parameter der durch (3.54) definierten Symmetriegruppe, muß es Ströme j^i geben, so daß für beliebige raumzeitabhängige $\delta\chi^i$

$$\left\{ \frac{\delta S}{\delta\vec{\phi}_1} [\delta\vec{\phi}_1 - \delta x_1^\nu (\partial_\nu \vec{\phi})] \right\}_1 = - \left\{ (\partial_\mu \delta\chi_{i1}) j_1^{i\mu} \right\} = \left\{ \delta\chi_{i1} \partial_\mu j_1^{i\mu} \right\}_1 \quad (3.56)$$

ist. Da diese Beziehung für beliebige Funktionen $\delta\chi^i(x)$ gilt, folgt

$$\frac{\delta S}{\delta\vec{\phi}_1} [\delta\vec{\phi}_1 - \delta x_1^\nu (\partial_\nu \vec{\phi})] = \delta\chi_i \partial_\mu j_1^{i\mu} \quad (3.57)$$

Für die *Lösungen* der Bewegungsgleichungen gilt dann

$$\frac{\delta S}{\delta\vec{\phi}} = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^{i\mu} = 0, \quad (3.58)$$

und das bedeutet, daß die zur Symmetriegruppe gehörenden Noetherladungen

$$Q^i(t) = \int d^3\vec{x} j^{i0}(x) \quad (3.59)$$

Erhaltungsgrößen sind. Eine nähere Betrachtung der Symmetriebedingung ergibt, daß eine Symmetrie dann vorliegt, wenn es Vektorfelder Ω^i gibt, so daß

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu = \delta\chi^i \partial_\mu \Omega^{i\mu} \quad (3.60)$$

gilt. Der erhaltene Strom ist dann durch

$$\delta\chi^i j^{i\mu} = \delta x^\nu \left(\partial_\nu \vec{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \vec{\phi})} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \vec{\phi})} \delta\vec{\phi} + \Omega^{i\mu} \delta\chi^i \quad (3.61)$$

definiert. Es sei nur der Vollständigkeit halber noch erwähnt, daß diese Betrachtung die Form von $j^{i\mu}$ als lokales Funktional der Felder $\vec{\phi}$ nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr können für ein beliebiges in den Raumzeitindizes μ und ν antisymmetrisches lokales Funktional $k^{i\nu\mu}$ die Ströme auch durch

$$j'^{i\mu} = j^{i\mu} + \partial_\nu k^{i\nu\mu} \quad (3.62)$$

definiert werden. Dann gilt für die j' genauso wie für die j der lokale Erhaltungssatz (3.58), und die Noetherladung (3.59) ist unter diesen Transformationen invariant. Diese Uneindeutigkeit der lokalen Ströme ist für die speziell relativistische Feldtheorie ohne Bedeutung, da ohnehin nur die Noetherladungen physikalische Relevanz besitzen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zu den Implikationen für die Quantentheorie kommen. Wir beschränken uns im folgenden auf globale $O(N)$ -Transformationen, die in infinitesimaler Form durch

$$\delta\vec{\phi}(x) = \delta\chi^i \hat{t}^i \vec{\phi}(x) \quad (3.63)$$

gegeben sind. Aus (3.61) lesen wir ab, daß die Noetherströme durch

$$j_\mu^i = -i\vec{\phi} \hat{t}^i \partial_\mu \vec{\phi} \quad (3.64)$$

gegeben sind.

Wir nutzen nun die Invarianz des Pfadintegralmaßes unter infinitesimalen Feldtransformationen aus:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D(\vec{\phi} + \delta\vec{\phi}) \exp\left(iS[\vec{\phi} + \delta\vec{\phi}] + i\left\{\vec{J}_1(\vec{\phi}_1 + \delta\vec{\phi}_1)\right\}_1\right) = \\ &= \int D\vec{\phi} \exp\left(iS[\vec{\phi} + \delta\vec{\phi}] + i\left\{\vec{J}_1(\vec{\phi}_1 + \delta\vec{\phi}_1)\right\}_1\right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck nach $\delta\vec{\phi}$, erhalten wir in erster Ordnung

$$0 = \int D\vec{\phi} \left\{ \left(\frac{\delta S}{\delta\vec{\phi}_1} + \vec{J}_1 \right) \delta\vec{\phi}_1 \right\}_1 \exp\left(iS[\vec{\phi}] + i\left\{\vec{J}_1\vec{\phi}_1\right\}_1\right). \quad (3.66)$$

Da dies für beliebigen $\delta\vec{\phi}$ gilt, folgt die lokale Form derselben Aussage:

$$0 = \int D\vec{\phi} \left(\frac{\delta S}{\delta\vec{\phi}_1} + \vec{J}_1 \right) \delta\vec{\phi}_1 \exp\left(iS[\vec{\phi}] + i\left\{\vec{J}_1\vec{\phi}_1\right\}_1\right). \quad (3.67)$$

Setzen wir speziell für $\delta\vec{\phi}$ die Symmetrietransformation ein und verwenden (3.57), finden wir schließlich die *lokale WTI der Symmetrietransformation*:

$$0 = \int D\vec{\phi} \left(\partial_\mu j_1^{i\mu} + \vec{J}_1 \hat{\tau}^i \vec{\phi}_1 \right) \exp\left(iS[\vec{\phi}] + i\left\{\vec{J}_1\vec{\phi}_1\right\}_1\right). \quad (3.68)$$

Nach der Feynman-Kac-Formel können wir dieses Resultat zunächst in der Form

$$\partial_\mu \left\langle j^{i\mu}[\vec{\phi}, x] \right\rangle = -\vec{J}(x) \hat{\tau}^i \left\langle \vec{\phi}(x) \right\rangle \quad (3.69)$$

festhalten. Für verschwindende äußere Quellen bedeutet dies die *Stromerhaltung des Erwartungswertes des Stromoperators*.

Wir können das Resultat aber auch als eine lokale WTI für die effektive Wirkung Γ umschreiben. Dazu setzen wir zunächst in (3.68) den Strom (3.64) ein und ersetzen die Felder durch entsprechende Ableitungen nach den äußeren Quellen. Daraus entsteht die WTI für das erzeugende Funktional zeitgeordneter Erwartungswerte:

$$0 = \partial_\mu \int d^{2\omega} x' \left[-i \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_j(x) i\delta J_k(x')} \right] \delta^{(2\omega)}(x - x') \tau_{jk}^i + \vec{J}(x) \hat{\tau}^i \frac{\delta Z}{i\delta \vec{J}(x)}. \quad (3.70)$$

Dies schreiben wir in eine WTI für W um, wobei wir die Symmetrie des Propagators $G_{jk}(x, x')$ für $x = x'$ verwenden.

$$\partial^\mu \vec{\varphi}_j \partial_\mu \hat{\tau}^i \vec{\varphi} = \vec{\varphi} \hat{\tau}^i \square \vec{\varphi} = \vec{J} \hat{\tau}^i \vec{\varphi} \quad \text{mit} \quad \vec{\varphi} := \frac{\delta W}{\delta \vec{J}}. \quad (3.71)$$

Das bedeutet, daß auch der mit dem mittleren Feld $\vec{\varphi}$ gebildete Strom für verschwindende äußere Quellen erhalten ist. Im Gleichgewicht ist dies eine triviale Aussage, weil in diesem Fall $\vec{\varphi} = \text{const}$ ist und der Strom identisch verschwindet. Dabei haben wir die Antisymmetrie der $\hat{\tau}^i$ ausgenutzt. Wegen $\vec{J} = -\delta\Gamma/\delta\vec{\varphi}$ folgt daraus sofort

$$\vec{\varphi}_1 \hat{\tau}^i \square_1 \vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi}_1 \hat{\tau}^i \frac{\delta\Gamma}{\delta\vec{\varphi}_1}. \quad (3.72)$$

Daraus ergibt sich eine ganze Hierarchie von WTI, die immer die n -Punktvertexfunktion mit der $(n + 1)$ -Punktfunktion verknüpft.

Als eines der wichtigsten Resultate wollen wir das *Nambu–Goldstonetheorem* für homogene Systeme (z.B. thermodynamisches Gleichgewicht) anführen. Dazu schreiben wir (3.72) in Komponentenform und leiten nach φ ab. Setzen wir dann $\vec{J} = -\delta\Gamma/\delta\vec{\varphi} = 0$ und nehmen an, die Lösung der Feldgleichung für das mittlere Feld $\vec{\varphi}$ sei unabhängig vom Raumzeitargument, finden wir die Beziehung

$$\tau_{j_1 j_2}^i \varphi_{j_1} \square \delta(x_1 - x_2) = \varphi_j \tau_{j j_1}^i G_{j_1 j_2}^{-1}(x_1 - x_2). \quad (3.73)$$

Fouriertransformation bzgl. $x_1 - x_2$ ergibt für den Impuls 0 die Massenquadratmatrix, so daß wir schließlich

$$\vec{\varphi} \hat{\tau}^i \hat{M}^2 = 0 \quad (3.74)$$

erhalten. Da die $i\hat{\tau}^i$ eine Basis der antisymmetrischen reellen $N \times N$ -Matrizen bilden, bedeutet dies, daß die $(N - 1)$ zu $\vec{\varphi}$ orthogonalen Feldanregungen verschwindende Masse besitzen. Dies ist das Nambu–Goldstone–Theorem: Bei spontaner Symmetriebrechung der Gruppe G , derart, daß die Untergruppe H das mittlere Feld $\vec{\varphi}$ invariant läßt, sind $\dim(G) - \dim(H)$ Anregungsmoden, die sog. *Nambu–Goldstonemoden*, masselos. In unserem Fall ist $G = O(N)$ und $H = O(N - 1)$, d.h. die Anzahl der Goldstonemoden beträgt $N(N - 1)/2 - (N - 1)(N - 2)/2 = N - 1$.

3.4 Φ -Funktionalnäherungen und Symmetrien

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß sich die Quellterme der Bewegungsgleichungen für das mittlere Feld und die Dysongleichung in kompakter Form aus dem Φ -Funktional herleiten lassen. Das Φ -Funktional ist dabei durch die Summe aller geschlossenen zweiteilchenirreduziblen Diagramme gegeben, wobei die Linien der Diagramme für volle Greenfunktionen iG stehen und die Vertizes aus dem Wechselwirkungsanteil $S_I[\phi, \varphi]$ zu definieren sind (vgl. Anhang B zur Aufstellung der Diagrammregeln). Das mittlere Feld und die Greenfunktion sind durch die Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.25) gegeben.

Es liegt nun nahe, eine Näherung von Φ durch die Auswahl weniger Diagramme zu gewinnen und die Bewegungsgleichungen für das genäherte mittlere Feld und die Greenfunktion durch Beibehaltung der funktionalen Beziehungen (3.25) für die Quellen zu definieren. Dies führt zu einem selbstkonsistenten Naherungsschema, das eine der Näherung des Φ -Funktionals entsprechende Klasse von perturbativen Diagrammen resummiert. Baym [Bay62] ist auf der Suche nach erhaltenden Näherungen, also Schemata, die die Erhaltungssätze im Mittel erfüllen, auf die Φ -Funktionalnäherung gestoßen und hat die entsprechenden Näherungen als „ Φ -derivable approximations“ bezeichnet.

Im folgenden untersuchen wir, welche der soeben hergeleiteten Symmetrieeigenschaften der exakten Lösung im Fall von Näherungen des Φ -Funktionals (bzw. in unserer Sprechweise Γ) erhalten bleiben. Es wird sich zeigen, daß das ursprüngliche erzeugende Funktional für die selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen Γ nur gewährleistet, daß für Näherungen, die die Symmetrie respektieren, der Erwartungswert des Stromes eine lokale Erhaltungsgröße bleibt, so wie es bereits in den ersten Arbeiten von Baym [Bay62] bewiesen worden ist. Allerdings wird sich zeigen, daß der in die selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen eingehende Propagator i.a. nicht die WTIn erfüllt.

Dies bedeutet, daß die Symmetrie durch die Φ -Funktionalnäherungen in der Regel explizit gebrochen wird. Der Grund besteht darin, daß zwar das erzeugende Funktional systematisch nach Potenzen von \hbar , entsprechend der Anzahl der Schleifen, entwickelt werden kann, aufgrund der Selbstkonsistenz jedoch eine Resummation in allen Ordnungen von \hbar resultiert. Diese Resummation kann außer in dem praktisch nicht durchführbaren Fall einer exakten Behandlung nicht vollständig sein, so daß keine systematische \hbar -Entwicklung für die Lösungen vorliegt. Wie bereits oben erwähnt, bewirkt dies i.a. die explizite Brechung der Symmetrie für die Näherungen, und das erklärt die bekannte bereits in [BG77] und in neuerer Zeit in [LR00] untersuchte Tatsache, daß für das lineare Sigma-Modell in der Hartree-Näherung das Goldstone-Theorem verletzt ist, d.h. im chiralen Limes die Pionen nicht masselos sind.

Wir werden jedoch zeigen, daß sich aus dem gemäß (3.44) und (3.45) definierten effektiven Funktional durch Funktionalableitungen nach dem mittleren Feld stets Vertexfunktionen erzeugen lassen, die die WTIn erfüllen. Dabei ersetzen wir Φ durch eine Näherung im eben erklärten Sinne. Dies ist gleich bedeutend damit, daß die so definierte Näherung für $\Gamma^{(\text{eff})}$ die Symmetrien der klassischen Wirkung respektiert. Allerdings wird sich auch zeigen, daß die praktische Lösung der daraus resultierenden Gleichungen die Resummation von Vertexkorrekturen vom Typ der Bethe-Salpetergleichung erfordert. Dies ist außer in sehr einfachen Fällen, von denen wir einen anhand des $O(N)$ -Modells darstellen werden, im allgemeinen in der Praxis aufgrund des großen numerischen Aufwands unmöglich.

Es sei noch betont, daß das Problem, daß die Φ -Funktionalnäherungen die Symmetrie ab dem Zweipunktfunktionenniveau brechen, im Falle der Anwendung auf Eichtheorien zur Propagation

unphysikalischer Freiheitsgrade (u.a. zu solchen mit negativer Norm) führt. Wir gehen darauf detailliert im nächsten Kapitel dieser Arbeit ein.

3.4.1 Symmetrieanalyse von Φ -Funktionalnäherungen

Wir betrachten nun erneut \mathbb{I} im Hinblick auf Symmetrien der klassischen Wirkung. Wir gehen dabei genau analog wie bei der obigen Herleitung der WTIn für die gewöhnliche effektive Wirkung vor, berücksichtigen aber explizit die bilokale Quelle im erzeugenden Funktional (3.2) für konturgeordnete Produkte. Wir substituieren also in (3.2) $\phi' = \phi + \delta\phi$ und erhalten in erster Ordnung in $\delta\phi$ nach Ausnutzen der Symmetrie der bilokalen Quelle $K_{j_1,k_2} = K_{k_2,j_1}$

$$0 = \int D\vec{\phi} \left[\left\{ \frac{\delta S}{\delta \vec{\phi}_1} \delta \vec{\phi}_1 \right\}_1 + \left\{ \vec{J}_1 \delta \vec{\phi}_1 \right\}_1 + \left\{ K_{j_1,k_2} \phi_{j_1} \delta \phi_{k_2} \right\}_{12} \right] \times \exp \left[iS[\vec{\phi}] + i \left\{ \vec{J}_1 \vec{\phi}_1 \right\}_1 + \frac{i}{2} \left\{ K_{j_1,k_2} \phi_{j_1} \phi_{k_2} \right\}_{12} \right]. \quad (3.75)$$

Wir können nun für $\delta\vec{\phi}$ eine lokale infinitesimale $O(N)$ -Transformation

$$\delta\phi_{j_1} = i\delta\chi_1^i \tau_{jj'}^i \phi_{j'_1} \quad (3.76)$$

einsetzen und erhalten

$$0 = \int D\phi \left\{ \left[\frac{\delta S}{\delta \phi_1} i\hat{\tau}^i \delta\chi_1^i + \vec{J}_1 i\hat{\tau}^i \vec{\phi}_1 \delta\chi_1^i + \left\{ K_{j_1,k_2} i\tau_{jj'}^i \phi_{j'_1} \phi_{k_2} \right\}_2 \delta\chi_1^i \right] \times \exp \left[iS[\vec{\phi}] + i \left\{ \vec{J}_1 \vec{\phi}_1 \right\}_1 + \frac{i}{2} \left\{ K_{j_1,k_2} \phi_{j_1} \phi_{k_2} \right\}_{12} \right] \right\}_1. \quad (3.77)$$

Jetzt verwenden wir (3.57), nutzen also die Symmetrie der klassischen Wirkung unter $O(N)$ -Transformationen aus:

$$\left\{ \delta\chi_1^i \partial_\mu j_1^{i\mu} \left[\frac{\delta Z[\vec{J}, K]}{\delta i\vec{J}_1} \right] \right\}_1 + \left\{ \delta\chi_1^i \vec{J}_1 i\hat{\tau}^i \frac{\delta Z[\vec{J}, K]}{\delta i\vec{J}_1} \right\}_1 + 2 \left\{ \delta\chi_1^i K_{12}^{jk} i\tau_{jj'}^i \frac{\delta Z[\vec{J}, K]}{\delta iK_{12}^{jk}} \right\}_{12} = 0. \quad (3.78)$$

Setzen wir hierin $\delta\chi^i = \text{const}$, bedeutet dies, daß $Z[\vec{J}, K]$ invariant unter $O(N)$ -Transformationen ist, wobei sich \vec{J} wie ein Vektor und K wie ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe transformieren. Dies gilt dann auch für W und schließlich für \mathbb{I} :

$$\left\{ \frac{\delta \mathbb{I}[\vec{\varphi}, G]}{\delta \vec{\varphi}_1} \hat{\tau}^i \vec{\varphi}_1 \right\}_1 + \left\{ \frac{\delta \mathbb{I}[\vec{\varphi}, G]}{\delta G_{j_1,k_2}} (\tau_{jl}^i G_{l1,k_2} + \tau_{kl}^i G_{j_1,l_2}) \right\}_{12} = 0. \quad (3.79)$$

Es ist klar, daß diese Symmetriebeziehung in jeder Schleifenordnung von \mathbb{I}_2 , entsprechend einer Entwicklung nach Potenzen von \hbar und in unserem Falle auch in Entwicklungen nach Potenzen der Kopplungskonstante gilt, weil sowohl der quadratische als auch der quartische Anteil der Lagrangedichte jeweils für sich invariant unter $O(N)$ -Transformationen sind. Bei Eichtheorien ist dies im allgemeinen nicht der Fall, und es ist nur eine Entwicklung nach der Anzahl der Schleifen, nicht aber nach der Anzahl der Vertices eichkovariant.

Andererseits ist in (3.78) $\delta\chi_1$ beliebig, und wir folgern die lokale WTI für Z :

$$\partial_\mu \tilde{J}_1^{i\mu} \left(\frac{\delta}{\delta i \tilde{J}_1^i} \right) Z[\vec{J}, K] + \tilde{J}_1^i \hat{\tau}^i \frac{\delta Z[\vec{J}, K]}{\delta i \tilde{J}_1^i} + 2 \left\{ K_{12}^{jk} i \tau_{jj'}^i \frac{\delta Z[\vec{J}, K]}{\delta i K_{12}^{jk}} \right\}_2 = 0. \quad (3.80)$$

Dies bedeutet, daß für jede Φ -Funktionalnäherung, die die Symmetrie respektiert (für die \mathbb{T}_2 also alle Diagramme bis zu einer bestimmten \hbar -Ordnung bzw. einer Ordnung in der Kopplungskonstanten λ enthält), der Erwartungswert des Stromes verschwindet, wenn die äußeren Quellen zu 0 gesetzt werden.

Gem (3.6) führt die Forderung, daß die äußeren Quellen verschwinden sollen, auf die Bewegungsgleichungen (3.8) für die das mittlere Feld $\vec{\varphi}$ und die Greenfunktion G bzw. die Selbstenergie Σ . Der Erwartungswert des Stromes für diese Lösungen ist dann wegen (3.80) erhalten:

$$\partial_\mu \tilde{J}_1^{i\mu} \left(\frac{\delta}{\delta i \tilde{J}_1^i} \right) W[J, K] \Big|_{\vec{J}=0, K=0} = 0. \quad (3.81)$$

Da jedoch bei der Herleitung von (3.46) von Pfadintegralmanipulationen Gebrauch gemacht wurde, die nur für die exakten Lösungen der Feldtheorie gelten und die Lösungen einer beliebigen Φ -Funktionalnäherung keine systematische Entwicklung nach Potenzen von \hbar oder λ darstellen, sondern vom Standpunkt der Störungstheorie aus betrachtet eine teilweise Resummation darstellen, darf nicht erwartet werden, daß die globalen oder lokalen WTIn für die genäherte selbstkonsistente Greenfunktion gelten. Dies bedeutet aber gegebenenfalls, daß die Symmetrie ab dem Zweipunktniveau verletzt sein kann. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß in aller Regel diese Symmetrieverletzung tatsächlich auftritt.

3.4.2 Die externen Vertexfunktionen

Unabhängig von diesen Symmetrieuberlegungen haben wir also sorgfältig zwischen den verschiedenen Näherungen zu unterscheiden. Zum einen definieren wir die Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.25) also $\vec{\varphi}$ und G bzw. Σ' , zum anderen können wir aber auch im Falle einer durch einen bestimmten Satz von Diagrammbeitragen zu Φ definierten Φ -Funktionalnäherung gem (3.44) und (3.45) das effektive Funktional

$$\Gamma^{(\text{eff})}[\vec{\varphi}] = \mathbb{I}[\vec{\varphi}, G^{(\text{eff})}[\vec{\varphi}]] \text{ mit } \frac{\delta \mathbb{I}[\vec{\varphi}, G]}{\delta G} \Big|_{G=G^{(\text{eff})}[\vec{\varphi}]} = 0 \quad (3.82)$$

definieren. Es ist klar, daß aufgrund von (3.79) die in der üblichen Weise mit diesem effektiven Potential definierten Vertexfunktionen die WTIn (3.53) der effektiven Wirkung Γ erfüllen und folglich die so definierte effektive Näherung die Symmetrie für alle Vertexfunktionen respektiert. Die durch $\Gamma^{(\text{eff})}$ definierte Selbstenergie stellt allerdings im allgemeinen keine selbstkonsistente Näherung im Sinne des Φ -Funktional dar. Wir nennen die durch $\Gamma^{(\text{eff})}$ erzeugten Vertexfunktionen daher im folgenden *externe Vertizes*.

Wegen

$$\frac{\delta \Gamma^{(\text{eff})}[\vec{\varphi}]}{\delta \varphi_1} = \frac{\delta \mathbb{I}[\vec{\varphi}, G]}{\delta \varphi_1} \Big|_{G=G^{(\text{eff})}[\vec{\varphi}]} \quad (3.83)$$

ist der stationäre Punkt $\vec{\varphi}'$ von $\Gamma^{(\text{eff})}$ identisch mit der Lösung der Bewegungsgleichung (3.25) für die Φ -Funktionalnäherung, und es gilt $G^{(\text{eff})}[\vec{\varphi}] = G$, wobei G die Lösung der von Φ gem (3.25) erzeugten Dysongleichung darstellt.

Dies ist eine Gleichung vom Typ der Leiternaherung zur Bethe–Salpetergleichung. Dabei ist es wichtig, daß sowohl die Inhomogenität

$$iI_{123}^{(3)} = 2 \frac{\delta^2 i\Phi}{\delta iG_{21} \delta \varphi_3} \quad (3.93)$$

als auch der Bethe–Salpeterkern

$$iK_{1234} = 2 \frac{\delta^2 i\Phi}{\delta iG_{21} \delta iG_{34}} \quad (3.94)$$

wiederum aus dem Φ -Funktional hergeleitet werden, durch das auch die Propagatorlinien iG definiert sind.

Dadurch ist zugleich sichergestellt, daß in die Lösung der Φ -Funktionalnäherung und die Berechnung des externen Propagators die gleichen Gegenterme zur Renormierung der Vakuumdiagramme eingehen. Damit ist durch das Φ -Funktional die konsistente Renormierung auch des externen Propagators und aller übrigen externen Vertexfunktionen sichergestellt, die sich durch die höheren Ableitungen von $\Gamma^{(\text{eff})}$ nach φ ergeben. Diese durch die Funktionalableitungen von $\Gamma^{(\text{eff})}$ gegebene Definition stellt nach der obigen Analyse eine eindeutige, konsistente Vorschrift dar, die WTIn mit dem selbstkonsistent dyson-resummierten Propagator zu garantieren.

Fassen wir (3.88), (3.91), (3.93) und (3.94) zusammen und setzen das Resultat in (3.85) ein, so folgt schließlich für die externe Selbstenergie

$$-i\Sigma_{12}^{\text{ext}} = 2 \frac{\delta^2 i\Phi[\varphi, G]}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} + \left\{ i\Gamma_{1'2'1}^{(3)} iG_{1'1''} iG_{2'2''} iI_{1''2''2} \right\}_{1'2'1''2''}. \quad (3.95)$$

Diagrammatisch kann diese Gleichung wie folgt geschrieben werden:

$$-i\Sigma_{\text{ext}} = i\Phi_{\varphi\varphi} + i\Gamma^{(3)} \square i\Gamma^{(3)}. \quad (3.96)$$

Wir ersehen daraus, daß sich durch Schließen der externen Selbstenergie mit einer iG -Linie zwar wieder geschlossene zweiteilchenirreduzible Diagramme ergeben, aber die externe Selbstenergie im allgemeinen *nicht* der stationäre Punkt des entsprechenden Γ -Funktional ist. Das mittlere Feld $\vec{\varphi}'$ ist aber per constructionem sowohl stationärer Punkt des Funktional Γ als auch des effektiven Wirkungsfunktional $\Gamma^{(\text{eff})}$, wodurch sich auch nochmals die Erfüllung der Erhaltungssätze für den so definierten Erwartungswert des Noetherstromes bestätigt.

Als Beispiel betrachten wir die Bestimmung der externen Selbstenergie in der ϕ^4 -Theorie.

$$i\Phi = \text{[diagram with 4 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]} + \frac{1}{2} \text{[diagram with 2 external legs]} + \frac{1}{2} \text{[diagram with 2 external legs]} \quad (3.97)$$

$$i(\square + m^2)\varphi = -ij = \text{[diagram with 4 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]} \quad (3.98)$$

$$-i(D^{-1} - G^{-1}) = -i\Sigma = \text{[diagram with 2 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]} + \text{[diagram with 2 external legs]}, \quad (3.99)$$

wobei wir hier der Vollständigkeit halber die Bewegungsgleichungen (3.25) noch einmal wiederholt haben. Die Φ -Funktionalnäherung wird vollständig durch die Wahl der zweiteilchenirreduziblen geschlossenen Diagramme für das Φ -Funktional, in unserem Beispiel also durch (3.97), bestimmt. Daraus ergeben sich die selbstkonsistenten gekoppelten Bewegungsgleichungen für das mittlere Feld φ und die dyson-resummierte Greenfunktion G gemäß (3.25).

Die einzelnen Elemente, die in die Berechnung der externen Selbstenergie vermöge (3.96) eingehen, sind durch die Inhomogenität und den Kern der Bethe-Salpetergleichung (3.92) definiert, die sich aus den zweiten Ableitungen des Φ -Funktionalns ergeben.

$$i\Phi_{\varphi,\varphi} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \quad (3.100)$$

$$iI^{(3)} = i\Phi_{iG,\varphi} = \text{diagram 4} + \text{diagram 5} \quad (3.101)$$

$$iK = i\Phi_{iG,iG} = \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} \quad (3.102)$$

Die Propagatorlinien stehen hierin wieder für den selbstkonsistent berechneten Propagator iG und die Nadeln für die mittleren Felder $i\varphi$, wie sie durch die Φ -Funktionalnäherung gemäß (3.98) und (3.99) bestimmt sind.

Es werden also die Bewegungsgleichungen (3.98) und (3.99) zunächst selbstkonsistent gelöst. Die so gewonnenen Lösungen für φ und G definieren die internen Felder und Propagatoren. Sie gehen dann als Diagrammelemente in die Ausdrücke für den Quellterm (3.101) und den Kern der Bethe-Salpetergleichung (3.102) ein.

Diese entspricht der Aufsummation einer unendlichen funktionalen Neumanngleichung. Durch die Bestimmung von Inhomogenität und Kern dieser Bethe-Salpetergleichung aus demselben Φ -Funktional, das auch die selbstkonsistenten Gleichungen generiert, wird sichergestellt, daß die Ward-Takahashi-Identitäten einer linear realisierten Symmetrie durch die externe Selbstenergie und alle höheren durch $\Gamma^{(\text{eff})}$ in analoger Weise zu erzeugenden Vertexfunktionen erfüllt werden.

Man könnte sich vorstellen, den aus Σ_{ext} bestimmten externen Propagator G_{ext} für alle Linien einzusetzen. Dies würde jedoch implizit eine neue, erweiterte Φ -Funktionalnäherung mit den durch Σ_{ext} definierten zweiteilchenirreduziblen Diagrammen ergeben also

$$2 \frac{\delta i\Phi^{(\text{erw})}}{\delta iG} = -i\Sigma_{\text{ext}}. \quad (3.103)$$

In dem so definierten selbstkonsistenten Verfahren würden dann alle Propagatoren und Selbstenergien wieder zu neuen internen Größen werden, die ihrerseits zwar eine bessere Näherung darstellen, aber die WTIn wiederum verletzen und erneut gemäß dem obigen Verfahren neue weit kompliziertere Bethe-Salpetergleichungen implizieren.

3.5 Einfachste Näherungen für das $O(N)$ -Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir exemplarisch die einfachste selbstkonsistente Näherung für das $O(N)$ -Modell, anhand dessen alle Techniken, die zur Behandlung solcher Näherungen benötigt werden, erläutert werden können.

Zunächst untersuchen wir die reine Φ -Funktionalnäherung und demonstrieren, daß die $O(N)$ -Symmetrie explizit gebrochen wird. Danach betrachten wir die die Symmetrie respektierende Näherung. Gleichzeitig wird sich eine diagrammatische Erklärung und eine physikalische Interpretation ergeben, warum die Φ -Funktionalnäherung ab dem Niveau der Zweipunktfunktionen nicht symmetrieerhaltend ist. Der Grund dafür besteht darin, daß in der reinen Φ -Funktionalnäherung keine dynamischen Vertexkorrekturen berücksichtigt werden. Die einzigen Vertexkorrekturen sind lokale Gegenterme zur Renormierung von Vakuumsdivergenzen, die einerseits explizit durch die Diagramme verursacht sein können, andererseits jedoch implizit durch die Selbstkonsistenz der Näherung ins Spiel kommen. Dies bedeutet jedoch, daß die Vertizes in jedem Fall punktförmig bleiben. Diese Betrachtung zeigt schon, daß dadurch die Symmetrie gebrochen werden muß, weil die in den selbstkonsistenten Propagator eingehende Selbstenergie nicht mit dem zu den Punktvertizes gehörigen freien Propagator im Sinne der WTIn kompatibel sein kann. Wir bezeichnen den Propagator bzw. die dazugehörige Selbstenergie der Φ -Funktionalnäherung im folgenden auch als *internen Propagator* bzw. *interne Selbstenergie*.

Wie wir oben allgemein gezeigt haben, können wir zu jeder Φ -Funktionalnäherung vermöge Γ_{eff} ein effektives erzeugendes Funktional für Selbstenergien und eigentliche Vertexfunktionen definieren, die die WTIn und damit die Symmetrien respektieren. Wir bezeichnen die so definierten Selbstenergien und Vertexfunktionen als *externe* Größen, weil sie zwar a posteriori aus der selbstkonsistenten Lösung der Φ -Funktionalnäherung gewonnen werden, jedoch nicht selbstkonsistent in die Rechnung eingehen.

Diagrammatisch erfordert die Berechnung von Σ_{ext} eine Resummation des effektiven Dreiver-
 tex gem (3.92). Dies ergibt genau die Vertexkorrekturen, die aufgrund der Einführung einer teilweise resummierten Zweipunktfunktion zur Wiederherstellung der WTIn benötigt werden. Entscheidend dafür ist aber wieder die Tatsache, daß der Bethe-Salpeter-Kern ebenfalls aus dem Funktional \mathbb{F} durch zweimalige Ableitung nach G erzeugt wird.

3.5.1 Die Hartreenäherung

Wir definieren Φ -Funktionalnäherungen dadurch, daß wir die in \mathbb{F}_2 eingehenden Diagramme angeben. Diese müssen zweiteilchenirreduzibel sein. In unserem Fall begnügen wir uns mit dem „Achtdiagramm“:

$$\mathbb{F}[\varphi, G] = S[\varphi] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(-iG^{-1}) + \frac{i}{2} \{ \mathcal{D}_{12}^{-1}(G_{12} - \mathcal{D}_{12}) \}_{12} + \mathbb{F}_2[\varphi, G] \text{ mit} \quad (3.104)$$

$$i\mathbb{F}_2[\varphi, G] = \text{diagramm} = \frac{i\lambda}{8} \left\{ \delta_{ijkl} G_{11}^{ij} G_{11}^{kl} \right\}_1.$$

Zunächst stellen wir für beliebig gegebenes $\vec{\varphi}$ die erste Gleichung in (3.8) auf. Diese geht nämlich auch in die Berechnung der symmetrieerhaltenden Näherung ein.

Dazu benötigen wir den von $\vec{\varphi}$ abhängigen Propagator \mathcal{D} gemäß (3.11). Eine einfache Rechnung ergibt unter Verwendung der allgemeinen Formeln für die störungstheoretischen Realzeitpropagatoren im Impulsraummatrixformalismus

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{P}_\perp \hat{\Delta}(p, m_{0\perp}) + \hat{P}_\parallel \hat{\Delta}(p, m_{0\parallel}). \quad (3.105)$$

Dabei sind die Projektoren auf die transversale bzw. longitudinale Richtung bzgl. des vorgegebenen mittleren Feldes durch

$$\hat{P}_\perp = \mathbb{1} - \frac{\vec{\varphi} \otimes \vec{\varphi}}{\varphi^2}, \quad \hat{P}_\parallel = \frac{\vec{\varphi} \otimes \vec{\varphi}}{\varphi^2} \quad (3.106)$$

und die freien Vakuummassen für die Feldmoden transversal und longitudinal zum mittleren Feld durch

$$m_{0\perp}^2 = \frac{\lambda}{2} \varphi^2 - \tilde{m}^2, \quad m_{0\parallel}^2 = \frac{3\lambda}{2} \varphi^2 - \tilde{m}^2 \quad (3.107)$$

definiert. Die Projektoren erfüllen die Beziehungen

$$\hat{P}_\perp^2 = \hat{P}_\perp, \quad \hat{P}_\parallel^2 = \hat{P}_\parallel, \quad \hat{P}_\perp \hat{P}_\parallel = \hat{P}_\parallel \hat{P}_\perp = 0, \quad \text{tr } \hat{P}_\perp = N - 1, \quad \text{tr } \hat{P}_\parallel = 1. \quad (3.108)$$

Für den in (3.104) auftretenden Vierervertex gilt die Feynmanregel

$$\begin{array}{c} k \\ \diagdown \quad \diagup \\ \pm \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ j \quad l \end{array} \begin{array}{c} m \\ \diagup \\ \diagdown \\ l \end{array} = \pm i \frac{\lambda}{4!} \delta_{jklm} = \pm i \frac{\lambda}{4!} (\delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}). \quad (3.109)$$

Die Selbstenergie ergibt sich durch Öffnen einer Linie von \mathbb{F}_2 . Zerlegen des Propagators nach transversalen und longitudinalen Komponenten ergibt dann nach Anwendung der Feynmanregeln die dimensional regularisierte Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma_\perp^{--} &= \frac{i\lambda}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} [(N+1)G_\perp^{--}(l) + G_\parallel^{--}(l)], \\ \Sigma_\parallel^{--} &= \frac{i\lambda}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} [(N-1)G_\perp^{--}(l) + 3G_\parallel^{--}(l)]. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Dabei ist μ die Massenskala der dimensional Regularisierung und $d = 2(\omega - \epsilon)$ die Dimension der Raumzeit. In unserem einfachen Fall reduziert sich die Selbstenergie auf eine reelle Diagonalmatrix in den \pm -Indizes des Realzeitformalismus, d.h. es ergibt sich eine selbstkonsistente vom vorgegebenen mittleren Feld $\vec{\varphi}$ und der Temperatur abhängige Massenmatrix.

Renormierung

Als nächstes müssen wir (3.110) renormieren. Von der Störungstheorie her erwarten wir, daß wir mit temperaturunabhängigen Gegentermen renormieren können. Zunächst wollen wir die Renormierungsbedingungen festlegen. Da die Selbstenergie in unserer Näherung Tadpolestruktur besitzt, würde bei der Berechnung der entsprechenden Diagramme der Störungstheorie lediglich eine Massenrenormierung im Vakuum erforderlich. Wir werden gleich sehen, daß aufgrund der Selbstkonsistenz versteckte überlappende und ineinander verschachtelte Subdivergenzen vorliegen, die wir durch die Addition eines Kopplungskonstantengegenterms beseitigen müssen.

Der zweite Term ist nach den Feynmanregeln in dimensionaler Regularisierung durch

$$-\delta\Sigma_2 = \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} G_{\text{vac}}(l) \Sigma G_{\text{vac}}(l) \quad (3.116)$$

gegeben. Die Komponenten der beiden Gegenterme ergeben sich damit aus den in Anhang A gegebenen Standardregeln der dimensional Regularisierung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema zu

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_{1\perp} &= \frac{\lambda}{32\pi^2} [m_{\text{vac}\parallel}^2 + (N+1)m_{\text{vac}\perp}^2] \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma \right) \\ \delta\Sigma_{1\parallel} &= \frac{\lambda}{32\pi^2} [3m_{\text{vac}\parallel}^2 + (N-1)m_{\text{vac}\perp}^2] \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma \right) \\ \delta\Sigma_{2\perp} &= \frac{\lambda}{32\pi^2} [\Sigma_{\parallel} + (N+1)\Sigma_{\perp}] \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \\ \delta\Sigma_{2\parallel} &= \frac{\lambda}{32\pi^2} [3\Sigma_{\parallel} + (N-1)\Sigma_{\perp}] \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Damit folgen die renormierten selbstkonsistenten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\perp} &= \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[(N+1)M_{\perp}^2 \ln \left(\frac{M_{\perp}^2}{4\pi\mu^2} \right) + M_{\parallel}^2 \ln \left(\frac{M_{\parallel}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \Sigma_{\parallel} - (N+1)\Sigma_{\perp} \right] + \\ &\quad + \lambda\pi \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} n(l_0) [(N+1)\delta(l^2 - M_{\perp}^2) + \delta(l^2 - M_{\parallel}^2)], \\ \Sigma_{\parallel} &= \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[(N-1)M_{\perp}^2 \ln \left(\frac{M_{\perp}^2}{4\pi\mu^2} \right) + 3M_{\parallel}^2 \ln \left(\frac{M_{\parallel}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 3\Sigma_{\parallel} - (N-1)\Sigma_{\perp} \right] + \\ &\quad + \lambda\pi \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} n(l_0) [(N-1)\delta(l^2 - M_{\perp}^2) + 3\delta(l^2 - M_{\parallel}^2)]. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Die Hartreenäherung und die dazugehörige externe Selbstenergie

Die Lösung der Hartreenäherung ist durch die simultan mit (3.118) zu lösende Gleichung

$$\left. \frac{\delta\mathbf{\Gamma}}{\delta\varphi} \right|_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.119)$$

definiert. Wegen (3.82) gilt

$$\frac{\delta\Gamma_{\text{eff}}}{\delta\varphi} = \left. \frac{\delta\mathbf{\Gamma}}{\delta\varphi} \right|_{G=G_{\text{eff}}} + \left\{ \left. \frac{\delta\mathbf{\Gamma}}{\delta G_{1'2'}} \right|_{G=G_{1'2'}^{(\text{eff})}} \frac{\delta G_{1'2'}^{(\text{eff})}}{\delta\varphi} \right\}_{1'2'} = \frac{\delta\Gamma_{\text{eff}}}{\delta\varphi} = \left. \frac{\delta\mathbf{\Gamma}}{\delta\varphi} \right|_{G=G_{\text{eff}}}, \quad (3.120)$$

und damit ist auch das effektive Funktional Γ_{eff} für $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}'$ stationär. Leiten wir die vorige Gleichung nochmals nach φ ab, erhalten wir

$$(G_{\text{ext}}^{-1})_{12} = \left. \frac{\delta^2\Gamma_{\text{eff}}}{\delta\varphi_1\delta\varphi_2} \right|_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} = \left. \frac{\delta^2\mathbf{\Gamma}}{\delta\varphi_1\delta\varphi_2} \right|_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} + \left\{ \left. \frac{\delta^2\mathbf{\Gamma}}{\delta\varphi_1\delta G_{3'4'}} \frac{\delta G_{3'4'}^{(\text{eff})}}{\delta\varphi_2} \right|_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} \right\}_{3'4'}, \quad (3.121)$$

wobei wir

$$G = G_{\text{eff}}[\vec{\varphi}'] \quad (3.122)$$

gesetzt haben.

Für unsere durch (3.104) gegebene Näherung erhalten wir damit für die externe Selbstenergie, die wir durch

$$\Sigma_{\text{ext}} = \mathcal{D}^{-1} - G_{\text{ext}}^{-1} \quad (3.123)$$

definieren, durch Einsetzen von (3.88) in (3.121) in diagrammatischer Form

$$-i\Sigma_{\text{ext}} = \text{---} \left(\text{---} \text{---} \right) \text{---} + \text{---} \left(\text{---} \text{---} \right) \text{---} + \text{---} \left(\text{---} \text{---} \right) \text{---} + \dots \quad (3.124)$$

Dabei stehen die dicken Linien für G . Es wird deutlich, daß im Nambu–Goldstone–Modus eine Resummation des Vierervertex notwendig wird, die in unserem Fall relativ einfach ist, weil wir aufgrund der „Tadpolenaherung“ nur punktförmige Vierervertizes und keine „Austauschvertizes“ generieren. Im Wigner–Weyl–Modus stimmen interne und externe Selbstenergie überein. Dies erklärt die bereits in [BG77] ausgeführte Tatsache, daß die Hartreenäherung für das lineare Sigmamodell im Nambu–Goldstone–Modus die zugrundeliegende $O(N)$ -Symmetrie verletzt, während sie im Wigner–Weyl–Modus durch dieselbe Näherung respektiert wird. Wir bemerken noch, daß (3.124) die RPA–Resummation darstellt (vgl. [AB99]).

Jetzt wird auch die physikalische Begründung für die Verletzung der Symmetrie durch die Φ -Funktionalnäherung deutlich: Sie trägt dem Transport der Erhaltungsgröße auf die beim Stoß beteiligten anderen Teilchen nicht vollständig Rechnung, was zur Verletzung des der Symmetrie entsprechenden Erhaltungssatzes im Inneren der Diagramme führt, während der Erwartungswert der dazugehörigen Noetherladung erhalten ist. Wie unsere Betrachtung zeigt, ist zur Wiederherstellung der Symmetrie die Berücksichtigung der durch die RPA–Näherung (3.124) definierten Mehrfachstreuprozesse erforderlich.

Für die RPA-resummierte Hartreenäherung wollen wir noch explizit die Erfüllung des Goldstone-theorems nachweisen, d.h. die Masselosigkeit der $(N - 1)$ „Pionen“ zeigen. Dazu werten wir (3.121) in der Impulsdarstellung an der Stelle $p = 0$ aus. Für die Hartreenäherung ergibt sich

$$G_{12}^{(\text{ext})} = \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{\text{eff}}}{\delta \varphi_1 \varphi_2} \right|_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} = \left[\mathcal{D}_{12}^{-1} - \Sigma_{12} - \left\{ \frac{\delta \Sigma_{12'}}{\delta \varphi_2} \varphi_{2'} \right\}_{2'} \right]_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} . \quad (3.125)$$

Die Bewegungsgleichung für das mittlere Feld (3.119) lautet

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_1} - \{ \Sigma_{12'} \varphi_{2'} \}_{2'} = 0 \text{ für } \vec{\varphi} = \vec{\varphi}' . \quad (3.126)$$

Durch Zerlegung von \mathcal{D} und Σ in Komponenten longitudinal und transversal zum mittleren Feld vereinfacht sich dies zu

$$\vec{\varphi}' \left(\tilde{m}^2 - \frac{\lambda}{2} \vec{\varphi}'^2 - \Sigma_{\parallel} \right) = 0 . \quad (3.127)$$

Im Nambu–Goldstone–Modus muß die Klammer verschwinden, damit das mittlere Feld nicht-verschwindender Werte fähig ist. Damit ergibt sich der vom mittleren Feld abhängige Baumgraphenpropagator für die Lösung der Φ -Funktionalnäherung

$$\mathcal{D}^{-1} \Big|_{\vec{\varphi}=\vec{\varphi}'} = \Theta_{\perp}(p^2 + \Sigma_{\parallel}) + \Theta_{\parallel}(p^2 + \Sigma_{\parallel} - \lambda \vec{\varphi}'^2) . \quad (3.128)$$

3.5 · Einfachste Näherungen für das $O(N)$ -Modell

Jetzt können wir die Ableitungen nach den Komponenten des mittleren Feldes explizit bilden, und (3.125) ergibt unter Verwendung der Gleichung

$$\varphi_k \partial_{\varphi_l} \Theta_{\parallel}^{jk} = -\varphi_k \partial_{\varphi_l} \Sigma_{\perp}^{jk} = \Theta_{\perp}^{jl} \quad (3.129)$$

für die Matrix des Massenquadrats:

$$(M_{\text{ext}}^2)_{jk} = \Theta_{\parallel}^{jk} \left(\lambda \bar{\varphi}'^2 + \frac{\partial \Sigma_{\parallel}}{\partial |\bar{\varphi}'|} |\bar{\varphi}'| \right), \quad (3.130)$$

also wie vom Goldstonetheorem gefordert, Masselosigkeit der $(N-1)$ zum mittleren Feld transversalen Komponenten.

Im Wigner–Weylmodus $\bar{\varphi}' = 0$, der bei höheren Temperaturen entweder eine metastabile oder bei noch höheren Temperaturen die einzige Lösung der Φ -Funktionalnäherung ist, ist $M_{\text{vac}\perp}^2 = M_{\text{vac}\parallel}^2 = -\tilde{m}^2$, und aus (3.118) ergibt sich sofort, daß die temperaturabhängigen Massen gleich sein müssen. Damit ist die Hartree-Näherung, wie schon oben, bemerkt, in diesem Fall konsistent mit der $O(N)$ -Symmetrie, und der Φ -Funktionalpropagator stimmt mit dem externen Propagator überein.

3.6 Renormierung des Sunset-Diagramms

Wir wenden uns nun der Behandlung der durch die folgende Näherung des \mathbb{I}_2 -Funktionals definierten Näherung in der einfachen ϕ^4 -Theorie zu:

$$i\Phi[G] = \text{Sunset} + \frac{1}{2} \text{Bubble} \quad (3.131)$$

Dabei beschränken wir uns hier von vornherein auf die ungebrochene Theorie, also den Fall des verschwindenden mittleren Feldes $\varphi = 0$. Im Gegensatz zu den oben behandelten Diagrammen erhalten wir hier einen Imaginärteil der Selbstenergie, so daß wir den Einfluß der endlichen Breite der Spektralfunktionen untersuchen können.

Wir werden im folgenden sehen, daß auch hier mit Hilfe der BPHZ-Renormierung die Renormierung der Näherung mit temperaturunabhängigen Kopplungskonstanten möglich ist. Dazu ist zunächst die Vakuumtheorie zu renormieren, um die Integranden zur Subtraktion für die Vakuumsdivergenzen der Diagramme bei endlicher Temperatur zur Verfügung zu haben. Von besonderem Interesse ist hier die Tatsache, daß wie in der Störungstheorie die expliziten und implizit auf Grund der Selbstkonsistenz vorhandenen überlappenden und ineinander geschachtelten Divergenzen durch die BPHZ-Methode subtrahiert werden können.

3.6.1 Die Näherung für das Vakuum

In diesem Abschnitt lösen wir die durch (3.131) definierten selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen für die Selbstenergie, die durch ffnen einer Linie eines jeden Diagramms in (3.131) gegeben ist:

$$-i\Sigma = \text{SelfEnergy} + \text{Bubble} \quad (3.132)$$

Im folgenden bezeichnen wir mit G und Σ die matrixwertige Greenfunktion bzw. Selbstenergie:

$$G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{--} & \Sigma^{-+} \\ \Sigma^{+-} & \Sigma^{++} \end{pmatrix}. \quad (3.133)$$

Im Vakuum gilt der folgende Zusammenhang zwischen zeitgeordneter und retardierter Selbstenergie:

$$\Sigma^{--}(p) = \Theta(p_0)\Sigma_R(s) + \Theta(-p_0)\Sigma_R^*(s) \quad \text{mit } s = p^2. \quad (3.134)$$

Die Dysongleichung für die retardierte Selbstenergie wird also durch

$$G_R(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma_R(s) + i\epsilon \text{sign}(p_0)} \quad (3.135)$$

gelöst. Aufgrund des Weinbergschen Konvergenztheorems sind sowohl das Sunset- als auch das Tadpolediagramm quadratisch divergent. Wegen der Lorentzinvarianz hängt die Selbstenergie nur von der skalaren Größe $s = p^2$ ab, so daß wir zwei Renormierungsbedingungen vorzuschreiben haben. Im physikalischen Renormierungsschema identifizieren wir im Rahmen der betrachteten

der physikalischen Renormierung den Vierervertex bei Impulsübertrag 0 zum Wert λ bedeutet, was wir unten im Fall endlicher Temperatur noch benötigen werden.

Um den Imaginärteil (3.137) zu berechnen, führen wir die Einschleifennäherung für die Vertexkorrektur ein, die die Topologie des Dinosaurierdiagramms besitzt, jedoch mit selbstkonsistenten Propagatoren statt freier zu nehmen ist:

$$L^{+-}(l) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG^{-+}(k) iG^{+-}(k+l). \quad (3.143)$$

Aufgrund der Feynmanregeln und wegen der Lorentzinvarianz ist dies eine Funktion von $s = p^2$ und $\propto \Theta(l_0)$. Für $l_0 > 0$ und $\vec{l} = 0$ finden wir schließlich

$$\begin{aligned} L^{+-}(l) = \frac{\Theta(l_0)}{4\pi^4} \int_0^{l_0} d^4k & \left[\pi\delta(k^2 - m^2) \pi\delta[(k-l)^2 - m^2] + \right. \\ & \left. + \pi\delta(k^2 - m^2)A_c(k-l) + \frac{1}{4}A_c(k)A_c(k-l) \right]. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Wegen der nunmehr vorhandenen Rotationsinvarianz des Integranden in \vec{l} können wir die δ -Distributionen ausintegrieren:

$$\begin{aligned} L_1^{+-}(l) &= \frac{\Theta(l_0)}{4\pi^2} \int_0^{l_0} dk_0 \int d^3\vec{k} \delta(k^2 - m^2) \delta[(k-l)^2 - m^2] = \\ &= \frac{\Theta(l_0)}{8\pi} \Theta(l^2 - 4m^2) \sqrt{\frac{l^2 - 4m^2}{s}} \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} L_2^{+-}(l) &= \frac{\Theta(l_0)}{4\pi^3} \int_0^{l_0} dk_0 \int d^3\vec{k} \delta(k^2 - m^2) A_c(k-l) = \\ &= \frac{\Theta(l_0)}{2\pi^2} \int_m^{l_0} dk_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} A_c[(k_0 - l_0)^2 - k_0^2 + m^2] \end{aligned} \quad (3.146)$$

$$\begin{aligned} L_3^{+-}(l) &= \frac{\Theta(l_0)}{16\pi^4} \int_0^{l_0} dk_0 \int d^3\vec{k} A_c(k^2) A_c[(k-l)^2] = \\ &= \frac{\Theta(l_0)}{4\pi^3} \int_0^{l_0} \int_0^{3m} \vec{k}^2 d|\vec{k}| A_c(k^2) A_c[(k-l)^2]. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Wie zu erwarten, ergibt sich wegen der in den Greenfunktionen enthaltenen Θ -Funktionen und der Schwelle bei $s = 9m^2$ ein endliches Resultat. Die verbleibenden Integrale lassen sich numerisch einfach behandeln.

Mit Hilfe der Vierpunktfunktion L^{+-} können wir schließlich das Sunsetdiagramm auswerten. Wir können wegen der Lorentzinvarianz wieder $s = p_0^2$ und $\vec{p} = 0$ setzen, denn $\text{Im } \Sigma_R(s) \propto \Theta(s - 9m^2)$. Dann ergibt sich für (3.139)

$$\text{Im } \Sigma_R(s) = -\frac{\lambda^2}{192\pi^4} \int_0^{p_0} dl_0 \int d^3\vec{l} [2\pi\delta(l^2 - m^2) + A_c(l)] L^{+-}(p-l). \quad (3.148)$$

Wieder kann die Rotationssymmetrie in \vec{l} ausgenutzt und die Deltadistribution ausintegriert

werden:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{R1}(s) &= -\frac{\lambda^2}{96\pi^3} \int_0^{p_0} dl_0 \int d^3\vec{l} \delta(l^2 - m^2) L^{+-}(p-l) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{48\pi^2} \Theta(p_0^2 - 9m^2) \int_m^{p_0} dl_0 \sqrt{l_0^2 - m^2} L^{+-}(p-l)|_{|\vec{l}|^2=l_0^2-m^2} \end{aligned} \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{R2}(s) &= -\frac{\lambda^2}{192\pi^4} \int_0^{p_0} \int d^3\vec{l} A_c(l) L^{+-}(p-l) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{48\pi^3} \Theta(p_0^2 - 9m^2) \int_{3m}^{p_0} dl_0 \int_0^{p_0} d|\vec{l}| \vec{l}^2 A_c(l) L^{+-}(p-l). \end{aligned} \quad (3.150)$$

Die verbleibenden Integrale lassen sich wieder mit einfachen numerischen Integrationsverfahren berechnen.

3.6.2 Renormierung des Sunset-Diagramms bei endlichen Temperaturen

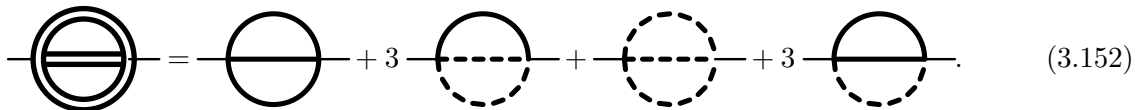
Zunächst renormieren wir das Sunsetdiagramm allein, d.h. wir setzen den Tadpole zu 0. Dazu betrachten wir die Lösung der Dysongleichung in Form einer Neumannreihe

$$G = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} (\Sigma \Delta)^k, \quad (3.151)$$

wobei Δ die Matrix für die freie Realzeitgreenfunktion und Σ die dazugehörige Selbstenergie bezeichnet. Da die Selbstenergie von der Dimension $\delta(\Sigma) = 2$ ist, treten in jeder Ordnung der Selbstenergie Divergenzen vom oberflächlichen Divergenzgrad $d = 2$ auf. Andererseits zeigt die Betrachtung in Abschnitt 2.4.3, daß jedes perturbative Diagramm bei endlichen Temperaturen mit von der Temperatur unabhängigen Gegentermen renormiert werden kann. Wir erwarten, daß dies auch für unsere selbstkonsistente Näherung gilt, da diese als Teilresummation der Störungsreihe aufgefaßt werden kann.

Um dies zu zeigen, benutzen wir die Tatsache, daß die BPHZ-Renormierung einzig und allein auf Weinbergs Konvergenztheorem beruht und dessen Gültigkeit nicht auf die spezielle Form der störungstheoretischen Integrale beschränkt ist. Wie in Abschnitt 2.4.2 ausführlich besprochen, müssen wir der BPHZ-Methode folgend nur alle Forests des Diagramms finden und entsprechende Gegenterme vom Integranden abziehen, um zum renormierten Integranden zu gelangen.

Bei den Diagrammen der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen dürfen die Subdiagramme nur Vakuumlinien enthalten. Daher schreiben wir den Propagator der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen (im folgenden als Doppellinie dargestellt) als Summe aus einem Vakuumanteil (durchgezogene Linie) und einen Temperaturanteil (gestrichelte Linie):



$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---} + 3 \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + 3 \text{---} \bigcirc \text{---}. \quad (3.152)$$

In unserem Fall finden wir wieder die drei Forests, die wir schon in Abschnitt 2.4.1 im Rahmen der Störungstheorie besprochen haben. Sie sind alle drei von gleicher Struktur, so daß dies in

(3.152) bereits durch Multiplikation des entsprechenden Diagramms mit 3 berucktigt haben:

$$\gamma = \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \quad (3.153)$$

The diagram shows a horizontal line with a dashed circle and a solid circle. The dashed circle is larger and has a dashed line, while the solid circle is smaller and has a solid line. Both circles are centered on the horizontal line. The equation is labeled (3.153).

Nunmehr ist nur noch das Diagramm, das ausschließlich Vakuumlينien enthält, divergent. Dieses ist durch das nach dem im vorigen Abschnitt beschriebene Verfahren renormierte Diagramm zu ersetzen.

Um zu zeigen, daß wir durch diese Prozedur bereits ein konvergentes Integral konstruiert haben, müssen wir zeigen, daß der reine Temperaturanteil des Propagators, den wir in den Diagrammen als gestrichelte Linie gezeichnet haben, von einer Dimension $\delta(G - G_{\text{vac}}) < -4$ ist. Dies ist sicher korrekt für den freien Propagator, bei dem dieser Anteil exponentiell gedämpft ist. Nehmen wir an, diese Annahme gelte auch für den selbstkonsistenten Propagator, besagt das Weinbergsche Konvergenztheorem, daß dies mit der selbstkonsistenten Gleichung konsistent ist, denn dann hat der Temperaturanteil der Selbstenergie einen Divergenzgrad < 0 .

Aufgrund des BPHZ-Theorems werden folglich die Diagramme durch dieselben Gegenterme für reine Vakuumsdiagramme renormiert, wie sie bereits im Vakuum erforderlich waren, und diese sind per constructionem von der Temperatur unabhängig. Damit ist aber klar, daß der folgende Gegenterm ausreicht, um den gesamten Temperaturanteil des Sunsetdiagramms zu renormieren:

$$\delta\Sigma_T = 3 \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \quad (3.154)$$

The diagram shows a horizontal line with a dashed circle. The dashed circle is attached to the horizontal line at a single point, forming a tadpole shape. The equation is labeled (3.154).

Wie bereits im Vakuum können wir den Gegenterm nicht explizit berechnen, was bedeutet, daß wir das Vakuumdinosaurierdiagramm

$$L_{\text{vac}}^{\text{---}}(l) = (1 - t_\Gamma) \text{---} \bigcirc \text{---} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} iG^{\text{---}}(k) i[G^{\text{---}}(k+l) - G^{\text{---}}(k)] \quad (3.155)$$

The diagram shows a horizontal line with a solid circle. The solid circle is attached to the horizontal line at two points, forming a dinosaur-like shape. The equation is labeled (3.155).

mit den selbstkonsistenten Vakuumlينien zu berechnen haben. In (3.155) wurde die Renormierung nach dem BPHZ-Verfahren bereits ausgeführt. Bei der numerischen Rechnung kann es wieder mit Hilfe einer Dispersionsrelation mit einer Subtraktion erhalten werden. Es ist also statt des unrenormierten Vakuumdinosauriersubdiagramms in (3.152) einfach der renormierte Ausdruck (3.155) einzusetzen.

3.7 Renormierung der vollen Näherung

Jetzt kommen wir zur Renormierung der vollständigen durch (3.131) definierten Näherung. Der Unterschied zum soeben behandelten Fall des verschwindenden Tadpolebeitrags besteht darin, daß $\Sigma_T - \Sigma_{\text{vac}}$ jetzt den oberflächlichen Divergenzgrad 0 besitzt, also $\delta(G - G_{\text{vac}}) = -4$ ist. Dies bedeutet, daß die Subtraktion der vom Vakuumdinosauriersubdiagramm herrührenden Divergenz des Sunsetdiagramms nicht mehr ausreicht, um dasselbe endlich zu machen. Wir müssen also die aufgrund des Tadpolebeitrags hinzukommenden Vakuumsdivergenzen extrahieren. Natürlich ist auch der Tadpolebeitrag selbst durch geeignete Vakuumgegenterme zu renormieren.

Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: G sei der vollständige selbstkonsistente Propagator, der durch die Bewegungsgleichungen unserer Näherung für \mathbb{F}_2 bestimmt werden soll. G_0 bezeichne den Propagator der eben berechneten Lösung, für die der Tadpole zu 0 gesetzt wurde. G_v sei die selbstkonsistente Sunstetnäherung im Vakuum, die wir in Abschnitt 3.4.1 besprochen haben. Für den renormierten Tadpolebeitrag zur selbstkonsistenten Selbstenergie schreiben wir T und Σ_S für den Sunstetbeitrag. Schließlich bezeichne Σ_0 die Selbstenergie für den Fall $T = 0$. Nun entwickeln wir die volle selbstkonsistente Greenfunktion in Potenzen des renormierten Tadpolebeitrages zur Selbstenergie T :

$$G(p) = \sum_{k=0}^{\infty} G_0^{(k)}(p) T^k \quad \text{mit} \quad G_0^{(k)}(p) = \left. \frac{\partial^k G(p)}{\partial T^k} \right|_{T=0}. \quad (3.156)$$

Jede Ableitung nach dem Tadpole erniedrigt die Dimension von G um 2, so daß die Dimensionen dieser Ausdrücke für die Bestimmung des oberflächlichen Divergenzgrades

$$\delta[G_0^{(k)}(p)] = -2(k+1). \quad (3.157)$$

lauten. Das bedeutet, daß nach der Subtraktion der expliziten Subdivergenz im Sunstetdiagramm nur der Beitrag zur Ordnung $k = 1$ des Propagators weitere Divergenzen enthält. Für das Tadpole-diagramm sind ebenfalls nur die ersten beiden Glieder in der Entwicklung (3.156) divergent.

Wir benötigen also eine Bewegungsgleichung für $G_0^{(1)}$. Dazu leiten wir die Dysongleichung

$$G = \Delta + \Delta \Sigma G \quad (3.158)$$

nach T ab:

$$\frac{\partial G}{\partial T} = \Delta \left(\sigma_3 + \frac{\partial \Sigma_S}{\partial T} \right) G + \Delta \Sigma \frac{\partial G}{\partial T}. \quad (3.159)$$

Fügen wir eine Einheitsmatrix in der Form GG^{-1} im zweiten Ausdruck ein, können wir die Dysongleichung wieder einsetzen. Multiplizieren wir die resultierende Gleichung noch mit $G\Delta^{-1}$ und setzen $T = 0$, erhalten wir schließlich

$$G_0^{(1)} = G \left(\sigma_3 + \Sigma_0^{(1)} \right) G \quad \text{mit} \quad \Sigma_3^{(1)} = \left. \frac{\partial \Sigma_S}{\partial T} \right|_{T=0}. \quad (3.160)$$

Setzen wir dies für die Ableitung des Sunstetdiagrammbeitrages zur Selbstenergie ein, erhalten wir für den Vakuumanteil dieser Ableitung die Rekursionsformel

$$-i\Lambda_v = \text{---} \text{---} \text{---} = -i \left[\sigma_3 + \Sigma_v^{(1)} \right] = 3 \text{---} \text{---} \text{---} + \text{ct.} \quad (3.161)$$

Die Subdivergenz dieses Diagramms haben wir gemäß des BPHZ-Formalismus zu subtrahieren, indem wir L statt des Subdiagramms einsetzen, bevor wir auch die Gesamtdivergenz abziehen können. Der Vakuumanteil der Ableitung ist also durch

$$\Sigma_v^{(1)}(p) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} G_v(l) [\sigma_3 + \Sigma_v^{(1)}(l)] G_v(l) [L_v(l+p) - L_v(l)] \quad (3.162)$$

gegeben. Alle weiteren Beiträge zu $\Sigma_0^{(1)}$ werden aus diesem Vakuumdiagramm durch Substitution von $G_{0T} = G_0 - G_v$ anstelle von G_v generiert. Wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, ist der oberflächliche Divergenzgrad dieses Propagatoranteils $\delta(G_{0T}) < -4$, und folglich sind all diese Diagramme endlich. Dies ist auch der Fall für den Beitrag zu $\Sigma_0^{(1)}$, der durch Ersetzen von Λ_v durch $\Sigma_{0T}^{(1)} = \Sigma_0^{(1)} - \Sigma_v^{(1)}$ entsteht, da $\delta(\Sigma_{0T}^{(1)}) < -2$.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß das renormierte Sunsetdiagramm durch

$$\begin{aligned} \Sigma_S(p) = \Sigma_v(p) - \frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \{ & L_v(l+p)[G_T(l) - TG_v(l)[\sigma_3 + \Sigma_v^{(1)}(l)]G_v(l) + \\ & + L_T(l+p)G_v(l) + \frac{1}{3}L_T(l+p)G_T(l) \}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

gegeben ist.

Die gleiche Technik führt zur Renormierung des Tadpolebeitrags:

$$T = \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \{ G_T^{--}(l) - TG_v^{--}[1 + \Sigma_v^{(1) --}(l)]G_v^{--} \}. \quad (3.164)$$

Zusammen mit der Dysongleichung stellen (3.163) und (3.164) die renormierten selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen für die Selbstenergie bzw. die Greenfunktion dar.

3.7.1 Numerische Ergebnisse

Wie oben beschrieben wurde zur Berechnung der Vakuumgreenfunktion die selbstkonsistenten Gleichungen in einem Iterationsprozeß gelöst. Für $m = m_\pi = 140\text{MeV}$ und $\lambda = 65$ unterscheiden sich selbstkonsistente und störungstheoretische Lösung nur marginal voneinander. Das ist dadurch zu erklären, daß der Hauptbeitrag zur Selbstenergie von den Polanteilen der Greenfunktionen herrührt. Zur Berechnung des Imaginärteils der Selbstenergie auf einem Gitter in s , wurden einfache adaptive zweidimensionale bzw. eindimensionale Integrationsroutinen benutzt, wobei die δ -Distributionen zuvor ausintegriert wurden. Zur Berechnung des Realteils der Selbstenergie wurde die subtrahierte Dispersionsrelation (3.138) verwendet. Dabei wurde linear zwischen den Gitterpunkten interpoliert und entsprechend dem asymptotischen Verhalten über den Gitterbereich hinaus extrapoliert. Das Dispersionsintegral mit dem stückweise linear interpolierten Imaginärteil der Selbstenergie wurde dabei analytisch berechnet.

Da die Lorentzinvarianz bei endlicher Temperatur zu einer räumlichen Rotationsinvarianz gebrochen ist, werden in diesem Fall dreidimensionale Integrale notwendig. Die von p_0 und $|\vec{p}|$ abhängige Selbstenergie wurde dabei auf einem 150×150 -Gitter berechnet.

Für die Berechnung der renormierten Temperaturbeitrage zu den Integralen wurden keine Dispersionsrelationen verwendet, sondern direkt die oben beschriebenen Subtraktionen im Integranden vorgenommen.

Ein typisches Beispiel wird in den Abbildungen 3.2 und 3.3 gezeigt.

Die selbstkonsistent berechnete Selbstenergie weist kein Schwellenverhalten mehr auf, wie die Störungstheorie. Der Imaginärteil ist vielmehr im gesamten Energiebereich von 0 verschieden. Dies ist dadurch zu erklären, daß die Auerdiagonalelemente der freien Realzeitpropagatoren, die in der Störungstheorie verwendet werden und den Imaginärteil bestimmen proportional zu $\delta(p^2 - m^2)$ sind, während die selbstkonsistente Spektralfunktion im ganzen Energiebereich eine

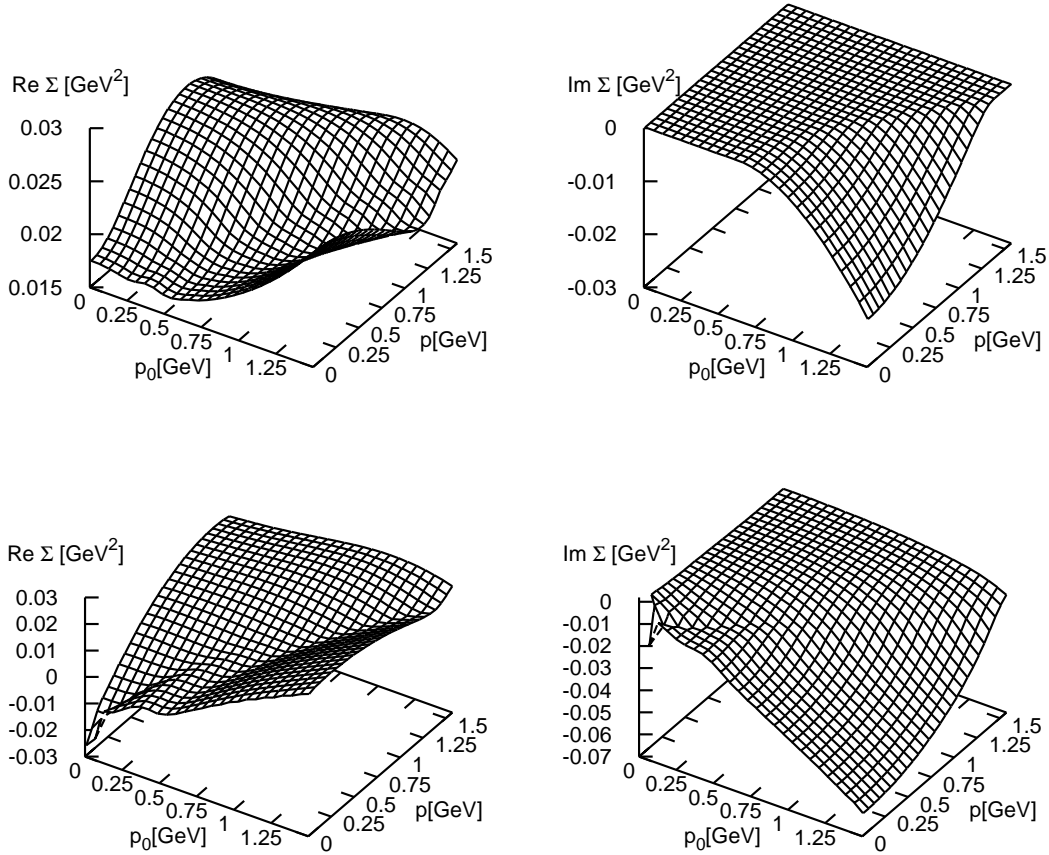


Abbildung 3.2: Perturbative (oben) und selbstkonsistente (unten) Selbstenergie bei $T = 100\text{MeV}$: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts)

signifikante Breite aufweist. In den dreidimensionalen Plots wird deutlich, daß die selbstkonsistent berechneten Selbstenergien bei $p = 0$ eine Singularität aufweisen. Dies ist dadurch zu erklären, daß bereits bei beliebig kleinen Energien durch die starke Kopplung des betrachteten Teilchens an die es umgebenden Teilchen im Wärmebad Prozesse erlaubt sind, die im Vakuum energetisch verboten sind, weil die Teilchen eine scharfe Masse besitzen und das Kontinuum der Einteilchenzustände erst jenseits der Schwelle bei $s = (3m)^2$ beginnt.

Die gemäß (3.43) berechnete Entropiedichte wird in Abbildung 3.4 gezeigt. Das Tadpolediagramm führt zu einer Massenerhöhung, während das Sunsetdiagramm die Masse verringert. In der selbstkonsistenten Näherung kompensieren sich die Auswirkungen dieser Massenshifts bei niedrigen Temperaturen fast vollständig, so daß sich gegenüber der Entropie für das ideale Gas fast keine Änderung erkennen läßt. Bei höheren Temperaturen steigt die Entropie hingegen stark an, was durch die Erniedrigung der Masse (entsprechend einem negativen Realteil der Selbstenergie) aufgrund des Beitrags des Sunsetdiagramms erklärt wird.

Bei noch höheren Temperaturen um etwa 130 MeV wird die Näherung allerdings instabil, da aufgrund des Sunsetdiagrammbeitrags die Masse so weit abgesenkt wird, daß die retardierte Greenfunktionen einen spuriösen Pol bei raumartigen Impulsen aufweist.

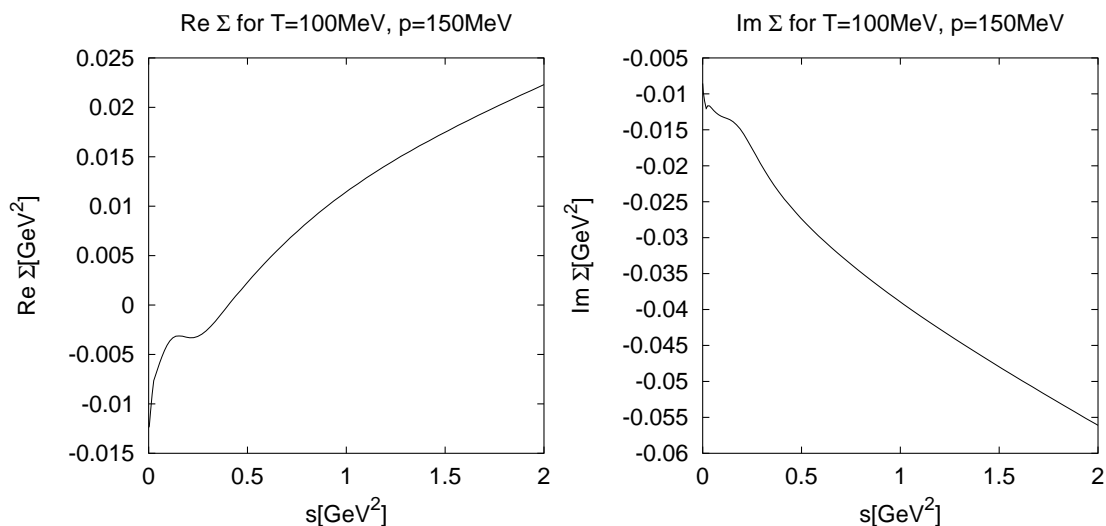


Abbildung 3.3: Selbstkonsistente Selbstenergie bei $T = 100\text{MeV}$ bei $|\vec{p}| = 150\text{MeV}$: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts)

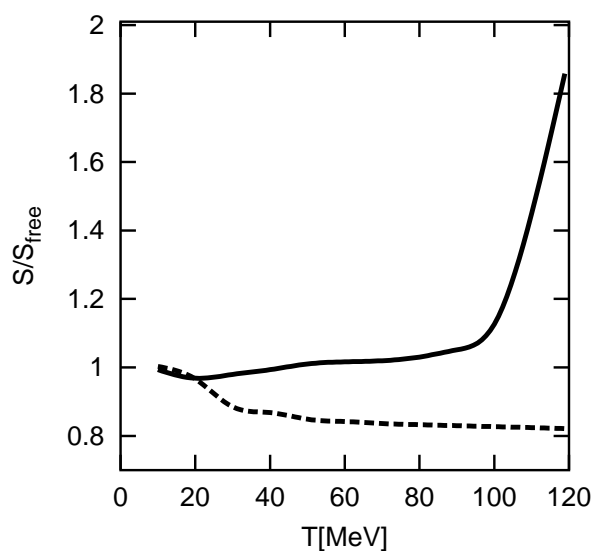


Abbildung 3.4: Die Entropiedichte bezogen auf die Entropiedichte des idealen Pionengases. Bei der störungstheoretischen Rechnung (gestrichelte Linie) dominiert der Polanteil der Greenfunktion das Tadpolediagramm. Aufgrund des positiven Massenshifts ist die Entropie verglichen mit der des idealen Gases verringert. In der selbstkonsistenten Rechnung wird hingegen der Beitrag des Sunsetdiagramms entscheidend, der für die endliche Breite des Pions verantwortlich ist und für eine Aufweichung der Polstruktur sorgt.

Kapitel 4

Anwendung auf die Theorie der Vektormesonen

4.1 Abelsche Vektormesondominanzmodelle

Wir referieren in diesem Abschnitt die bekannten auf [KLZ67] zurückgehenden Modelle zur Beschreibung der Vektormesonen. Zur Historie der Idee der Vektormesondominanz vgl. auch die dortigen Referenzen.

Im Gegensatz zur Behandlung der massiven Vektorfelder in [KLZ67] stellen wir uns hierbei systematisch auf den Standpunkt der Eichtheorien und führen eine kovariante und renormierbare Eichung ein.

4.1.1 Freie massive Vektorfelder

Wir nähern uns der theoretischen Behandlung der Vektorbosonen in effektiven Modellen, indem wir die allgemeine Theorie massiver Vektorfelder im Rahmen der Quantenfeldtheorie reflektieren. Wir behandeln dabei sogleich den allgemeinen Fall des thermodynamischen Gleichgewichts, der ja auch den Vakuumfall umfaßt, wie in Kapitel 2 ausführlich dargestellt wurde. In diesem Abschnitt betrachten wir die einfachen Vektormesondominanzmodelle, die auf Sakurai [Sak60], vor allem aber auf Kroll, Lee und Zumino [KLZ67] zurückgehen. Es handelt sich dabei um abelsche Eichtheorien mit von Hand addierten Massentermen. Wie bereits in [KLZ67] gezeigt, ist eine solche Theorie im Rahmen der Störungstheorie vollständig konsistent formulierbar und bei Beschränkung auf renormierbare Wechselwirkungsterme renormierbar. Dies steht im Gegensatz zum allgemeineren Fall nichtabelscher Eichtheorien, die durch ein naives Addieren von Massentermen für die Vektorbosonen inkonsistent werden.

Beginnen wir mit der Behandlung der massiven Vektormesonen, indem wir zunächst den Fall des freien Feldes betrachten. Die *Proca-Lagrangedichte*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu \quad \text{mit } V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (4.1)$$

beschreibt massive Vektorbosonen. Bildet man nämlich die Divergenz der klassische Feldgleichung

$$(\square + m^2)V^\mu - \partial^\mu \partial_\nu V^\nu = 0, \quad (4.2)$$

ergibt sich daraus sofort die Divergenzfreiheit des Vektorfeldes, falls die Masse nicht verschwindet:

$$m^2 \partial_\mu V^\mu = 0. \quad (4.3)$$

Das bedeutet, daß im Gegensatz zum masselosen Vektorfeld das massive Vektorfeld nicht zwangsläufig ein Eichfeld ist. Die obige Wahl der freien Lagrangedichte erzwingt nämlich die Ausprojektion des skalaren Anteils des Feldes (4.3) vermöge der Bewegungsgleichung von selbst, d.h. es handelt sich um eine Zwangsbedingung zweiter Klasse. Diese Brechung der Eichinvarianz durch den Massenterm bringt es gleichzeitig mit sich, daß der Propagator existiert. Wir können auch leicht die Thermodynamik des freien massiven Vektorfeldes behandeln, indem wir den Imaginärzeitanteil des Pfadintegrals benutzen, um die Zustandssumme zu berechnen. Wir brauchen dies hier nicht zu wiederholen, denn dies wurde in Kapitel 2 schon mehrfach gezeigt. Wir notieren nur das nunmehr bereits selbstverständliche Ergebnis:

$$\Omega(\beta) = \log Z(\beta) = -\frac{1}{2} : \text{Tr} \log D := -3V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp(-\beta\omega)]|_{\omega=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}. \quad (4.4)$$

Dabei steht $:\dots:$ für die Normalordnung, was wir, wie ausführlich in Kapitel 2 besprochen, durch Subtraktion der unendlichen Vakuumenergie erreichen. Die Determinante berechnet man mit derselben Technik wie im Fall des Dirac-Feldes (vgl. Abschnitt 2.3.4), nur daß es sich bei Vektorfeldern um Bosefelder handelt. Wie zu erwarten, erhalten wir als Resultat die Zustandssumme eines dreikomponentigen idealen Bosegases. Die drei Komponenten sind hierbei durch die drei voneinander unabhängigen Polarisationsrichtungen des massiven Vektorfeldes gegeben.

Allerdings ergeben sich bei der Quantisierung Probleme mit dieser Lagrangedichte. Dies erkennt am einfachsten, wenn man den freien Vakuumpropagator aus der Lagrangedichte bestimmt. Dieser ist im Impulsraum nämlich durch

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\frac{p^\mu p^\nu}{m^2} - g^{\mu\nu} \right] \quad (4.5)$$

gegeben. Offenbar besitzt er bei der Bestimmung des oberflächlichen Divergenzgrades von perturbativen Feynmandiagrammen die Dimension $\delta(\Delta) = 0$, so daß es zunächst keine Möglichkeit zu geben scheint, mit diesen Feldern renormierbare Wechselwirkungen zu konstruieren.

Andererseits reduzieren lokale Eichsymmetrien die Divergenzstruktur einer Theorie drastisch. Insbesondere gibt es für masselose Eichfelder keine quadratische Divergenz in der Selbstenergie, so daß die Masse nicht renormiert wird. Zur Renormierung der Vektorselbstenergie (die in der Literatur im Fall der QED als Vakuumpolarisation bezeichnet wird) reicht also bereits die Feldrenormierung aus. Das bedeutet, daß die renormierte Masse genau wie die nackte Masse verschwindet. Es liegt also nahe, eine Formulierung als Eichtheorie zu suchen. Dadurch wird aber die Möglichkeit der Kopplung an andere Felder eingeschränkt, denn das Vektorfeld kann nur an erhaltene Ströme von anderen Feldern koppeln, damit die Eichinvarianz gewahrt bleibt. Andererseits besitzen die Eichtheorien eine derart reichhaltige Struktur, daß sie so erfolgreiche physikalische Modelle wie das Standardmodell der Elementarteilchen ermöglichen.

Im Falle eines freien massiven Vektorfeldes läßt sich durch Einführung eines reellen Hilfsfeldes φ in die Proca-Lagrangedichte leicht eine lokale Eichsymmetrie etablieren:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu + \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) + m\varphi \partial_\mu V^\mu. \quad (4.6)$$

Durch direktes Nachrechnen weist man sofort nach, daß die mit dieser Wirkung definierte Lagrangedichte unter der *lokalen* Eichtransformation

$$\delta V_\mu(x) = \partial_\mu \chi(x), \quad \delta \varphi = m \chi(x) \quad (4.7)$$

invariant ist. Die Quantisierung dieser Theorie erfolgt mit der Methode der Faddeev–Popov–Quantisierung [FP67], die wir hier anhand unseres einfachen Beispiels kurz rekapitulieren wollen. Als erstes ist eine Eichung zu fixieren. Die einfachsten Feynmanregeln ergeben sich durch Wahl einer linearen Eichbedingung:

$$g[V, \varphi, x] = c(x) \quad \text{mit} \quad g[V, \varphi, x] = \partial_\mu V^\mu(x) + \xi m \varphi(x). \quad (4.8)$$

Daß diese spezielle Wahl für unser Problem Vorteile bringt, werden wir gleich weiter unten sehen. Weiter definieren wir die Faddeev–Popov–Determinante zu

$$\Delta_g^{-1}[c] = \int D\chi \delta[g[V^\chi, \varphi^\chi, x] - c(x)]. \quad (4.9)$$

Hierin bezeichnet $g[V^\chi, \varphi^\chi, x]$ das Funktional für die gemäß (4.7) transformierten Felder. Zur Berechnung der Determinante müssen wir nur die Integrationsvariable im Funktionalintegral ändern. Wir können dabei die untransformierten Eichfelder so wählen, daß $g[V, \varphi, x] = c(x)$. Damit folgt dann

$$\Delta_g^{-1} = \int Dg \det \frac{\delta \chi}{\delta g^\chi} \delta[g - c] = \det \frac{\delta \chi}{\delta g^\chi} \Big|_{\chi=0}. \quad (4.10)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß wir die Parametrisierung der Eichgruppe so wählen können, daß $g = c \Leftrightarrow \chi = 0$. Endgültig folgt damit

$$\Delta_g = \det[(\square_y + \xi m^2) \delta^{(2\omega)}(x-y)] = N \int D\eta^* D\eta \exp \left\{ i \int_{\mathcal{G}} d^{2\omega} x [(\partial_\mu \eta^*)(\partial^\mu \eta) - \xi m^2 \eta^* \eta] \right\} \quad (4.11)$$

Dabei haben wir die Funktionaldeterminante durch Pfadintegration über *Grassmannfelder* η^* und η ausgedrückt, wobei N wieder eine willkürliche temperaturunabhängige Konstante ist. Die Grassmannfelder heißen *Faddeev–Popov–Geister* und sind im Raum der Felder mit *periodischen Randbedingungen* definiert. Sie verhalten sich also analog zur Situation im Vakuum von der Feldgleichung und der Statistik her wie Bosonen, hinsichtlich ihrer Quantisierung aber wie Fermionen. Schon dies zeigt, daß es sich um unphysikalische Felder handelt, die einzig und allein dazu dienen, unphysikalische Freiheitsgrade des Eichfeldes bei gegebener Eichfixierung in der Störungsrechnung zu beseitigen (s. auch Abschnitt 2.3.6).

Nun können wir das erzeugende Funktional für die Konturgreenfunktionen in gewohnter Weise einführen:

$$Z = \int DVD\varphi D\eta^* D\eta D\chi \delta[g[V^\chi] - c] \Delta_g \exp \left\{ iS[V, \varphi, \eta^*, \eta] + \right. \\ \left. + i \{ j_\mu(x) V^{\chi\mu}(x) + k(x) \varphi^\chi(x) + \eta^*(x) \alpha(x) + \alpha^*(x) \eta(x) \}_x \right\}. \quad (4.12)$$

Hierin konnten wir in den Quelltermen V^χ und φ^χ setzen, weil die δ -Distribution im Pfadintegral für die Projektion auf den Orbit $\chi = 0$ sorgt. Durch die Substitution $V \rightarrow V^\chi$ folgt wegen der

Invarianz der Faddeev–Popov–Determinanten, des Pfadintegralmaßes und der klassischen nicht eichfixierten Wirkung $S[V, \varphi]$

$$Z = N \int D V D \varphi D \eta^* D \eta \delta[g - c] \exp \left\{ i S[V, \varphi, \eta^*, \eta] + \right. \\ \left. + i \{ j_\mu(x) V^\mu(x) + k(x) \varphi(x) + \eta^*(x) \alpha(x) + \alpha^*(x) \eta(x) \}_x \right\}. \quad (4.13)$$

Dabei ergibt die Integration über χ nur einen weiteren konstanten indefiniten Faktor, da der Integrand nach der Substitution nicht mehr von χ abhängt.

Da weiter der Integrand des Pfadintegralmaßes außer innerhalb der δ -Distribution nicht vom Hilfsfeld c abhängt, können wir es mit einem beliebigen Gewicht über dieses Feld integrieren, womit die δ -Distribution ausintegriert wird. Wir wählen das Gewicht

$$\exp \left(-\frac{i}{2\xi} g[V, \varphi]^2 \right). \quad (4.14)$$

Dadurch erhalten wir schließlich die effektive Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + \frac{m}{2} V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu V^\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{\xi m^2}{2} \varphi^2 + \\ + (\partial_\mu \eta^*)(\partial^\mu \eta) - \xi m^2 \eta^* \eta. \quad (4.15)$$

Wir gelangen also zu einer einfachen Lagrangedichte mit freien Feldern V_μ , φ , η^* und η . Die Wahl der Eichbedingung (4.8) erfolgte dabei so, daß der Mischungsterm zwischen φ und V_μ gerade wieder aufgehoben wird. Die Propagatoren für diese Felder lauten im Vakuum¹

$$V_\mu: \Delta_V^{\mu\nu}(p) = -\frac{g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\eta} + \frac{(1 - \xi)p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2 + i\eta)(p^2 - \xi m^2 + i\eta)} \\ \varphi: \Delta_\varphi(p) = \frac{1}{p^2 - \xi m^2 + i\eta} \\ \eta^*, \eta: \Delta_\eta(p) = \frac{1}{p^2 - \xi m^2 + i\eta}. \quad (4.16)$$

Wir bemerken, daß es im Gegensatz zum Fall des masselosen Eichfeldes nicht nur die beiden grassmannwertigen Faddeev–Popov–Geistfelder, sondern auch noch ein skalares Geistfeld φ gibt. Als minimale Probe, ob diese Lagrangedichte tatsächlich äquivalent zur Proca–Lagrangedichte (4.1) ist, sei bemerkt, daß die Berechnung der Zustandssumme genauso erfolgt wie oben für die Proca–Lagrangedichte angedeutet. Hierbei ist zu beachten, daß die Determinante der Faddeev–Popov–Geistfelder wegen ihrer Grassmannatur im Zähler der Zustandssumme auftritt, jedoch periodischen Randbedingungen genügt. Dabei wird der Beitrag des einen der beiden Faddeev–Popov–Geistfelder durch den Beitrag des skalaren Geistes und der des anderen durch den longitudinalen unphysikalischen Freiheitsgrad des Vektorfeldes kompensiert, so daß man wieder zu der schon oben diskutierten Zustandssumme (4.4) der Proca–Lagrangedichte gelangt (vgl. die analoge Situation für masselose Vektorfelder in Abschnitt 2.3.6).

¹Die freien Propagatoren für das thermodynamische Gleichgewicht im Matrixformalismus der Schwinger–Keldysh–Kontur oder im Matsubaraformalismus lassen sich daraus sofort, wie in Kapitel 2 für den Fall skalarer Bosonen beschrieben, herleiten.

Wir bemerken weiter, daß im Grenzfall $\xi \rightarrow \infty$ für $m \neq 0$ die unphysikalischen Freiheitsgrade verschwinden und die Ergebnisse der Proca–Lagrangedichte reproduziert werden. Führt man hingegen zunächst den Grenzübergang $m \rightarrow 0$ aus, gelangt man zur materiefreien QED mit einem zusätzlichen freien Skalarfeld, d.h. in diesem Grenzfall wird der skalare Geist nicht kompensiert, und er taucht im Spektrum der physikalischen Teilchen auf.

4.1.2 Wechselwirkende Theorie

Dies deutet bereits an, daß die Feldtheorie der massiven Vektorfelder einerseits durch die nicht manifest renormierbare Proca–Lagrangedichte andererseits aber auch durch unsere Lagrangedichte (4.15) erfolgen kann. Beide Zugänge sind äquivalent, *sofern die Ankopplung des Vektorfeldes an weitere Felder dem Eichprinzip genügt*. Dies ist z.B. gewährleistet, wenn die Wechselwirkungsterme auf kanonische Weise durch minimale Kopplung an einen erhaltenen Strom generiert werden. Weiter ist klar, daß sowohl die Faddeev–Popov–Geistfelder als auch das skalare Geistfeld als unphysikalische Felder nicht an physikalische Felder gekoppelt werden dürfen. Verlangt man zusätzlich die Renormierbarkeit der Theorie, wird man fast unvermeidlich zum Kroll–Lee–Zumino–Vektordominanzmodell geführt.

Wir bemerken weiter, daß für unsere freie Lagrangedichte (4.15) alle Propagatoren die Dimension -2 besitzen, so daß beim Abzählen der Divergenzordnung für alle diese Felder die gleichen Regeln wie für die Propagatoren von Skalarfeldern gelten. Im Gegensatz dazu führte die Proca–Lagrangedichte zu einem Propagator der Dimension 0 für das Vektorfeld. Dies bedeutet, daß sich unsere Annahme, daß die Herstellung einer lokalen Eichsymmetrie zu einer „Verbesserung“ des Divergenzgrades führt, bestätigt. Dabei beschränkt man allerdings die Wahl der Wechselwirkungsterme mit anderen Feldern auf eichinvariante Ankopplungen.

Der hadronische Teil der Wechselwirkung

Betrachten wir zunächst nur ein Vektormeson (das ρ -Meson) und koppeln es minimal an den erhaltenen Pionenstrom. Dadurch ergibt sich ein Modell, das formal der skalaren QED mit einem massiven Photon entspricht. Man gelangt also zum gleichen Modell wie Kroll, Lee und Zumino, das sich aus unserer Formulierung durch die Wahl der *unitären Eichung*, also $\xi \rightarrow \infty$, ergibt. Die drei Geistfelder koppeln in der Lagrangedichte nicht an die übrigen Teilchen. Wir werden jetzt explizit zeigen, daß diese Theorie perturbativ renormierbar und frei von Pathologien ist. Insbesondere werden wir zeigen, daß die Geistfreiheitsgrade wechselwirkungsfrei bleiben, wenn alle Diagramme einer Schleifenordnung konsistent berücksichtigt werden.

Zunächst definieren wir die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{had}} = \mathcal{L}_V + (D_\mu \pi)^* (D^\mu \pi) - m_\pi^2 \pi^* \pi - \frac{\lambda}{8} (\pi^* \pi)^2. \quad (4.17)$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{L}_V die freie effektive Lagrangedichte (4.15) der Vektor- und der drei Geistfelder. Die kovariante Ableitung ist wie üblich durch

$$D_\mu \pi = (\partial_\mu + igV_\mu) \pi \quad (4.18)$$

definiert. Die Pionenfelder transformieren sich unter den Eichtransformationen (4.7) wie folgt:

$$\pi'(x) = \exp[-ig\chi(x)]\pi(x), \quad \pi'^*(x) = \exp[ig\chi(x)]\pi^*(x). \quad (4.19)$$

Die Invarianz folgt dabei sofort aufgrund der Kovarianz der Ableitung:

$$D'_\mu \pi' = \exp(-ig\chi) D_\mu \pi, \quad (D'_\mu \pi')^* = \exp(ig\chi) (D_\mu \pi)^*. \quad (4.20)$$

Aus dem Noethertheorem berechnet man den zur Ladung dieser effektiven hadronischen Wechselwirkung gehörigen Strom der Pionen zu

$$J_{\text{had}}^\mu = g[i\pi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \pi - g\pi^* \pi V^\mu]. \quad (4.21)$$

Es sei bereits an dieser Stelle betont, daß dies *nicht* der zur elektrischen Ladung gehörige Strom ist. Dieser kann erst bestimmt werden, wenn wir das Photonenfeld einführen und an die vorhandenen Hadronen ankoppeln. Generell muß man im Auge behalten, daß die physikalische Bedeutung aufgrund des Noethertheorems erhaltener Ströme erst dann definiert ist, wenn die Kopplung an die entsprechenden Eichfelder erfolgt ist.

Die Feynmanregeln

Die Feynmanregeln im Impulsraum ergeben sich durch die Fouriertransformation der Lagrangedichte, indem man die Felder durch ihre Fouriertransformierten

$$\begin{aligned} V_\mu(x) &= \int \frac{d^2\omega p}{(2\pi)^{2\omega}} \exp(-ixp) \tilde{V}_\mu(p), \\ \pi(x) &= \int \frac{d^2\omega p}{(2\pi)^{2\omega}} \exp(-ixp) \tilde{\pi}(p) \\ \pi^*(x) &= \int \frac{d^2\omega p}{(2\pi)^{2\omega}} \exp(ixp) \tilde{\pi}^*(p) \end{aligned} \quad (4.22)$$

ausdrückt und in die Lagrangedichte einsetzt. Die perturbativen Vertizes sind durch die mit i multiplizierten Koeffizienten vor den entsprechenden Feldern gegeben

$$\begin{aligned} \gamma^{\rho\pi^*\pi}(p, q, r) &= -ig(q^\mu + r^\mu), \\ \gamma^{\rho\rho\pi^*\pi}(p, q, r, s) &= ig^2, \\ \gamma^{(\pi^*\pi)^2} &= -\frac{i\lambda}{8}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei wir einen Faktor $(2\pi)^{2\omega} \delta^{(2\omega)}(\sum p)$ weggelassen haben².

Die Ward–Takahashi–Identitäten

Wir wenden uns nun der Frage der Renormierbarkeit des Modells zu. Dazu müssen wir dessen Eichinvarianz ausnutzen, denn diese schränkt die Wahl der Gegenterme erheblich ein. So verbietet sie z.B. die Einführung eines nackten Vertex mit vier ρ -Mesonenenden. Nach dem Powercounting-Theorem und aufgrund der relativistischen Invarianz der Lagrangedichte wäre eine renormierbare Wechselwirkung nur in der nicht eichinvarianten Form $\mathcal{L}_{\rho^4} = \lambda'(V_\mu V^\mu)^2$

²Wir verwenden hierbei bzgl. der Abzählregeln der Multiplizität eines Diagramms eine etwas andere Konvention als in den meisten Lehrbüchern angegeben: Statt die Symmetrie eines jeden Diagramms zu berücksichtigen, müssen wir nur die Anzahl der Möglichkeiten zählen, ein gegebenes Diagramm durch Verbinden der Vertizes mit den entsprechenden Greenfunktionlinien zu erzeugen.

möglich. Da Dank der Eichinvarianz alle vorkommenden Propagatoren eine Dimension $\delta = -2$ zur Zählung des oberflächlichen Divergenzgrades besitzen, gilt $\delta(\Gamma_{\rho^A}) = 0$, d.h. Vierer- ρ -Vertizes sind oberflächlich logarithmisch divergent. Ein die Eichsymmetrie explizit brechender Term der oben angegebenen Form steht aber als Gegenterm nicht zur Verfügung, d.h. wir müssen zeigen, daß die „overall“-Divergenz dieses Vierervertextyps aufgrund der Eichinvarianz verschwindet. Dazu benötigen wir die *Ward-Takahashi-Identitäten* [War50, Tak57], die sich aus der lokalen Eichinvarianz ergeben.

Wir folgen bei der Herleitung der Ward-Takahashi-Identitäten, im folgenden wieder mit WTI abgekürzt, der Vorgehensweise, wie sie von Slavnov [Sla72] und Taylor [Tay71, Tay76] bei der Herleitung der verallgemeinerten Identitäten für die nichtabelschen Eichtheorien angewendet wurden.

Wir bemerken, daß im Fall einer abelschen Eichtheorie diese Herleitung, ohne Rückgriff auf die im nichtabelschen Fall für die praktische Handhabung der Theorie unumgängliche BRST-Symmetrie ([BRS76]), zu lokalen WTIIn führt. Der Grund dafür liegt darin, daß bei abelschen Eichtheorien die Faddeev-Popov-Geistfelder (sowie der in unserem Zugang eingeführte skalare Geist) freie Felder sind, während diese bei nichtabelschen Eichtheorien notwendig wechselwirkende Felder sind. Dazu sei bemerkt, daß für nichtabelsche Eichtheorien renormierbare Wechselwirkungen mit massiven Eichbosonen nur unter Ausnutzung des *Higgs-Kibble-Mechanismus* [Hoo71] existieren. Auch hier tritt bei Wahl einer renormierbaren Eichung (z.B. die 't Hooft-sche R_ξ -Eichung) für jedes Eichfeld, das zu der gebrochenen Symmetrie gehört, zusätzlich zu den Faddeev-Popov-Geistern in der Wigner-Weyl-Phase auch je ein skalarer Geist auf. Die skalaren Geister entstehen dabei aus denjenigen Feldern, die bei spontaner Brechung der entsprechenden globalen Symmetrie in den masselosen Freiheitsgraden (*Nambu-Goldstone-Bosonen*) resultieren würden. In der unitären Eichung, die nur physikalische Freiheitsgrade enthält, aber nicht manifest renormierbare Feynmanregeln ergibt, werden diese Freiheitsgrade komplett durch das Eichfeld absorbiert und liefern den gegenüber masselosen Vektoreilchen für massive Vektorteilchen benötigten zusätzlichen transversalen Freiheitsgrad. Im Falle nichtunitärer (insbesondere also manifest renormierbarer Eichungen) steuern die genannten Skalarfelder nicht nur den verglichen mit masselosen Vektorfeldern erforderlichen zusätzlichen physikalischen Freiheitsgrad bei, sondern eliminieren auch unphysikalische Anteile, die durch die Faddeev-Popovgeister in der Goldstonephase nicht berücksichtigt werden. Dieses Verhalten ist analog zur Funktion unseres skalaren Geistes. Bei der abelschen Theorie erschöpft sich seine Funktion aber bereits in der korrekten Zählung der Vektorfeldfreiheitsgrade für den Fall des idealen Gases. Im nichtabelschen Fall sind alle Geistfreiheitsgrade auch für die störungstheoretischen Rechnungen (insbesondere also auch schon im Vakuum) notwendig zur Herstellung der Eichinvarianz physikalischer Größen (insbesondere also auch der S -Matrixelemente).

Es sei auch bemerkt, daß im abelschen Fall die gleichen Aussagen auch aus den lokalen Wardidentitäten der globalen Eichinvarianz gewonnen werden können (vgl. z.B. [Her92]). Dies erfordert aber eine kompliziertere Diskussion, weil sich Aussagen über die Greenfunktionen des erhaltenen Stromes und nicht direkt solche über die eigentlichen Vertexdiagramme, d.h. zusammenhängende einteilchenirreduzible amputierte Diagramme, ergeben.

Zur Herleitung der WTIIn müssen wir die Wirkung (bzw. die Lagrangedichte) in den eichinvarianten und den eichabhängigen Anteil aufspalten. Im folgenden benötigen wir nur den eichabhängigen Anteil, der aus der Eichfixierung und der Einführung der externen Quellen resultiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2\xi}[\partial_\mu V^\mu + \xi m\varphi]^2 \\ \mathcal{L}_{\text{source}} &= j_\mu V^\mu + k\varphi + \eta^* \alpha + \alpha^* \eta + a^* \pi + \pi^* a.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Wir schreiben zur Abkürzung das definierende Pfadintegral für das erzeugende Funktional der konturgeordneten unzusammenhängenden Greenfunktionen in der Form

$$Z[J] = \int D\Phi \exp [iS_{\text{inv}} + iS_{\text{fix}} + iS_{\text{source}}]. \quad (4.25)$$

Dabei steht Φ für alle Felder, die in der Lagrangedichte auftreten (also die Vektorfelder, die Pionfelder sowie die Faddeev–Popov–Felder und das skalare Geistfeld) und J für die externen Quellen in $\mathcal{L}_{\text{source}}$ gemäß (4.24). Ferner verwenden wir die Wirkungen gemäß $S = \int_{\mathcal{C}} d^2\omega x \mathcal{L}$, also in der Zeitkoordinaten über die modifizierte Schwinger–Keldysh–Kontur für das thermodynamische Gleichgewicht integriert.

Da eine Eichtransformation unitär auf den Pionen–Feldern bzw. als Translation auf dem Vektor– und dem skalaren Geistfeld sowie trivial auf den Faddeev–Popov–Geistfeldern operiert, ist das Pfadintegralmaß invariant unter Eichtransformationen. Daher liefert die Substitution eichtransformierter Felder aufgrund der Eichinvarianz des invarianten Anteils der Wirkung:

$$Z[J] = N \int D\Phi \exp [iS_{\text{inv}} + iS_{\text{fix}}^\chi + iS_{\text{source}}^\chi]. \quad (4.26)$$

Dabei steht S_k^χ für die Wirkung, die aus (4.24) hervorgeht, wenn man für die Felder die gemäß (4.7,4.19) transformierten Felder einsetzt. Dabei haben wir berücksichtigt, daß $S_{\text{inv}}^\chi = S_{\text{inv}}$ ist. Wesentlich für die Herleitung der WTIn ist nun, daß die linke Seite von (4.26) nicht von χ abhängt. Leiten wir (4.26) nach $\chi(x)$ ab (wir lassen das Argument x der Kürze halber weg), finden wir bereits die WTI für das erzeugende Funktional:

$$-\frac{\square + \xi m^2}{\xi} \left[\partial^\mu \frac{\delta Z}{\delta i j^\mu} + \xi m \frac{\delta Z}{\delta i k} \right] - \partial_\mu j^\mu Z + kmZ - ig \left[a^* \frac{\delta Z}{\delta i a^*} - a \frac{\delta Z}{\delta i a} \right] = 0. \quad (4.27)$$

Dies läßt sich sofort in eine äquivalente Beziehung für das erzeugende Funktional der *zusammenhängenden Greenfunktionen* $W = -i \ln Z$ umschreiben:

$$-\frac{\square + \xi m^2}{\xi} \left[\partial^\mu \frac{\delta W}{\delta j^\mu} + \xi m \frac{\delta W}{\delta k} \right] - \partial_\mu j^\mu + km - ig \left[a^* \frac{\delta W}{\delta a^*} - a \frac{\delta W}{\delta a} \right] = 0. \quad (4.28)$$

Speziell für die Frage der Renormierbarkeit ist es bequem, dies zu einer Identität für die eigentlichen Vertexfunktionen umzuformen. Das erzeugende Funktional ist die *effektive Wirkung*, die durch die Legendretransformation

$$\begin{aligned}\Gamma[\bar{\Phi}] &= W[J] - \{J\bar{\Phi}\} \text{ mit} \\ \bar{\Phi} &= \frac{\delta W}{\delta J} \Leftrightarrow \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}} = -J.\end{aligned}\quad (4.29)$$

gegeben ist. Einsetzen dieser Definition in (4.28) ergibt

$$-\frac{\square + \xi m^2}{\xi} (\partial_\mu \bar{V}^\mu + \xi m \bar{\varphi}) + \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{V}^\mu} - m \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}} + ig \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\pi}} \bar{\pi} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\pi}^*} \bar{\pi}^* \right] = 0. \quad (4.30)$$

Renormierbarkeit

Wir werden nun die eben hergeleiteten WTIn auf die Frage der Renormierbarkeit der Theorie anwenden. Als erstes ist hier zu bemerken, daß diese Identitäten für die nackten Größen nur dann gelten können, wenn wir einen eichunabhängigen Regulator benutzen. In unserem Fall ist die dimensionale Regularisierung ein solcher eichunabhängiger Regulator. Deshalb haben wir auch oben die allgemeine Dimension 2ω für die Raumzeit angeschrieben, d.h. die WTIn gelten für die dimensional regularisierte effektive Wirkung.

Zunächst müssen wir uns vergegenwärtigen, was das BPHZ–Theorem bereits über unsere Theorie aussagt: Die oberflächliche Divergenz eines Diagramms ist ein Polynom bzgl. seiner äußeren Impulse, dessen Grad durch seinen oberflächlichen Divergenzgrad und damit seine Impulsdimension gegeben ist. Für unsere Regulatorwahl bedeutet dies, daß nach Beseitigung der Subdivergenzen alle Koeffizienten der Polterme $1/(\omega - 2)^\alpha$ Polynome in den äußeren Impulsen von der durch die Dimension des Diagramms gegebenen Ordnung sind. Es ist zu betonen, daß in unserem Fall die Subtraktion der Subdivergenzen im Sinne des „minimal subtraction scheme“ der dimensionalen Regularisierung zu verstehen ist. Die Bogoliubovsche Subtraktion von Taylorentwicklungen ist nicht eichinvariant und müßte durch kompliziert zu handhabende Regeln zur Herstellung der WTIn erzwungen werden.

Es ist also folgender induktive Beweis zu führen: Wir nehmen an, wir hätten die Theorie bis zur L –Schleifenordnung mit Gegentermen renormiert, die bereits in der Lagrangedichte vorhanden sind, d.h. durch Renormierung der Wellenfunktionen, der Massen und Ladungen werden alle Diagramme mit L bzw. weniger als L Schleifen endlich. Wir müssen nur noch zeigen, daß die oberflächlichen Divergenzen der Renormierungsteile mit $(L + 1)$ Schleifen ebenfalls durch Gegenterme renormierbar sind, die bereits in der Lagrangedichte vorhanden sind. Insbesondere ist durch diese Annahme gesichert, daß für die von Subdivergenzen befreiten Diagramme genau wie für die dimensional regularisierten Diagramme die WTIn gelten.

Die Induktion beginnt mit $L = 0$, denn mit Sicherheit erfüllt die klassische Wirkung, entsprechend der „Baumgraphennäherung“ der effektiven Wirkung, die WTIn (4.30), und diese ist im Impulsraum per constructionem ein Polynom in den Impulsen und Feldern von einem durch die Dimension der Monome gegebenen Grade. Wir werden im folgenden zu zeigen haben, daß die Symmetrien der Theorie, also die WTIn (4.30) für diese Polynome den Gegentermen die in der Lagrangedichte auftretenden Formen aufzwingen, d.h. für den Induktionsanfang, daß unsere Lagrangedichte die allgemeinst mögliche renormierbare Theorie definiert, die die lokale Eichsymmetrie erfüllt.

Zum Beweis setzen wir für die Gegentermlagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{counter}} = & -\frac{1}{4}\delta Z_3 V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + \frac{\delta m^2}{2} V_\mu V^\mu - \frac{1}{2}\delta(1/\xi)(\partial_\mu V^\mu)^2 + \\ & + \delta Z_2 (\partial_\mu \pi^*)(\partial^\mu \pi) - \frac{\delta m_\pi^2}{2} \pi^* \pi + \\ & ig\delta Z_1 [\pi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \pi] V^\mu + g^2 \delta Z'_1 V_\mu V^\mu \pi^* \pi - \frac{\delta\lambda}{8} (\pi^* \pi)^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

an. Wir haben für die Geister keine Gegentermlagrangedichte angesetzt, weil diese freie Felder sind und daher für sie keine Strahlungskorrekturen auftreten.

Dazu beginnen wir mit der Feststellung, daß der ρ - ϕ -Mischungsterm verschwindet:

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V^\mu \delta \varphi} \right|_{\bar{\Phi}=0} = 0. \quad (4.32)$$

Das folgt daraus, daß der Mischungsterm auf Baumgraphenniveau verschwindet und φ in der effektiven Lagrangedichte ein freies Feld ist, so daß alle Vertizes für φ verschwinden. Setzen wir also die äußeren Quellen 0, verschwinden alle Ableitungen von Γ , außer der zweiten, die auf den inversen freien Propagator des skalaren Geistes führt, wenn eine oder mehrere davon nach φ erfolgt.

Ableiten der WTI (4.30) ergibt dann

$$G_\varphi^{-1}(x, y) = -(\square_x + \xi m^2) \delta^{(2\omega)}(x - y), \quad (4.33)$$

und Invertieren dieser Gleichung führt schließlich auf

$$-(\square_x + \xi m^2) G_\varphi(x, y) = \delta^{(2\omega)}(x - y), \quad (4.34)$$

was die Konsistenz der obigen Überlegung mit der Eichinvarianz demonstriert. Die Selbstenergie des skalaren Geistes verschwindet also, und es bedarf weder einer Renormierung dieses Feldes noch seiner Masse. Damit dies aber konsistent mit der Eichinvarianz sein kann, dürfen auch die unphysikalischen Freiheitsgrade des Eichfeldes nicht wechselwirken. Dies weist man aber sofort durch Ableiten der WTI (4.30) nach $\bar{V}^\nu(y)$ nach:

$$\partial_{x\mu} (G_\rho^{-1})^{\mu\nu}(x, y) = \frac{\square + \xi m^2}{\xi} \partial_x^\nu \delta^{(2\omega)}(x - y). \quad (4.35)$$

Fouriertransformation dieser Beziehung und Verwendung der Dysongleichung $G_\rho^{-1} = \Delta_\rho^{-1} - \Sigma_\rho^{-1}$ führt sogleich auf

$$p_\mu \Sigma_\rho^{\mu\nu} = 0. \quad (4.36)$$

Die Selbstenergie ist also transversal, und der divergente Beitrag der Divergenz in der Loopordnung ($L + 1$) (nach Induktionsannahme sind alle Subdivergenzen durch eichinvariante Gegensterme beseitigt) erfordert einen Gegenterm der Form

$$-\frac{\delta Z_3}{2} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}), \quad (4.37)$$

so daß der Gegenterm nur zum Renormierungsfaktor Z_3 des Eichfeldes beiträgt. Der tatsächliche Divergenzgrad verringert sich also von 2 auf effektiv 0 für die Transversalkomponente des Vakuumanteils der Eichbosonen-Selbstenergie. Dies bestätigt auch, daß es in „minimal subtraction“ weder eines ρ -Massen- und noch eines Eichfixierungskonstantengegenterms bedarf:

$$\delta m^2 = 0, \quad \delta(1/\xi) = 0. \quad (4.38)$$

Dies ist für die Eichinvarianz der Störungstheorie auch notwendig, weil nur so das korrekte Verhältnis zwischen Geist- und ρ -Massen gewährleistet bleibt. Da nämlich keine Strahlungskorrekturen zu den Greenfunktionen der nicht wechselwirkenden Geister auftreten, also die Massen der Geister nicht renormiert werden, darf dies auch nicht für die ρ -Masse und den Eichfixierungsterm erforderlich sein.

Jetzt kommen wir bereits zu den Vertizes. Wir betrachten zunächst die Typen, die schon auf Baumgraphenniveau vorkommen: Ableitung der WTI (4.30) nach $\bar{\pi}^*(y)$ und $\bar{\pi}(z)$ führt auf

$$\partial_x^\mu \Gamma_\mu^{\rho, \pi^*, \pi}(x, y, z) = g G_\pi^{-1}(y, z) [\delta^{(2\omega)}(x - z) - \delta^{(2\omega)}(x - y)]. \quad (4.39)$$

Dabei haben wir die allgemeine Definition

$$\Gamma^{\Phi_1, \dots, \Phi_k}(x_1, \dots, x_k) = i \frac{\delta^k \Gamma}{\delta \bar{\Phi}(x_1) \cdots \delta \bar{\Phi}(x_k)} \Big|_{\bar{\Phi}=0} \quad (4.40)$$

der Vertexfunktionen benutzt. Fouriertransformation der WTI für den $\rho\pi\pi$ -Vertex führt auf

$$ip^\mu \Gamma_\mu^{\rho\pi^*\pi}(p, q, r) = g [G_\pi^{-1}(q) - G_\pi^{-1}(r)]. \quad (4.41)$$

Wegen $\delta(\Gamma^{\rho\pi\pi}) = 1$ und $\delta(G_\pi^{-1}) = 2$ erfüllen die divergenten Teile der $(L+1)$ -ten Loopordnung nach Beseitigung der Subdivergenzen also aufgrund deren Lorentzinvarianz die Beziehung

$$(q_\mu - r_\mu)(C_1 q^\mu + C_2 r^\mu) = \delta Z_2 g (q^2 - r^2), \quad (4.42)$$

woraus durch Koeffizientenvergleich die Beziehung

$$C_1 = C_2 := \delta Z_1 g = \delta Z_2 g \quad (4.43)$$

resultiert³. Der Gegenterm für den $\rho\pi\pi$ -Vertex ist also von der verlangten Form

$$\Gamma_\mu^{\rho\pi^*\pi, \infty}(p, q, r) = -i \delta Z_1 g (q_\mu + r_\mu), \quad (4.44)$$

und die WTI (4.41) ergibt für die Gegenterme der Renormierungskonstanten in $(L+1)$ -ter Schleifenordnung die Beziehung

$$\delta Z_1 = \delta Z_2, \quad (4.45)$$

die ebenfalls durch die Eichinvarianz gefordert wird.

Leiten wir die WTI (4.30) nach $\pi^*(y)$, $\pi(z)$ und nach $A^\nu(x')$ ab, finden wir nach Fouriertransformation die Beziehung

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu}^{\rho\rho\pi^*\pi}(p, p', q, r) = \Gamma_\nu^{\rho\pi^*\pi}(p, p - q, r) - \Gamma_\nu^{\rho\pi^*\pi}(p', q, p + r). \quad (4.46)$$

Da $\delta(\Gamma^{\rho\rho\pi^*\pi}) = 0$ ist, folgt aus der Lorentzinvarianz und dem BPHZ-Theorem, daß der Gegenterm von der Form $2i\delta Z'_1 g^{\mu\nu}$ sein muß. Die WTI (4.46) hat dann zur Folge, daß

$$\delta Z_1 = \delta Z'_1 \quad (4.47)$$

sein muß. Damit ist der Anteil der π - ρ -Wechselwirkung der Gegentermlagrangedichte schon als eichinvariant erwiesen.

Bereits aufgrund der Invarianz der Wirkung unter globalen Eichtransformationen folgt weiter, daß der Gegenterm des Vierpionenvertex von der angegebenen Form sein muß. Damit haben wir gezeigt, daß die Gegenterme zu den Vertexkorrekturen bereits auf Baumgraphenniveau vorhandener Wechselwirkungsterme in der Tat von derselben lokalen eichinvarianten Form sind, wie die bereits in der Lagrangedichte vorhandenen. Wir müssen nun noch zeigen, daß die oberflächlich

³Wir merken noch an, daß für die Massenrenormierungskonstante Z_{m_π} keine Beschränkung aus den WTI folgt. Die Pionenmasse wird ja auch durch die Eichinvarianz in ihrem Wert in keiner Weise eingeschränkt.

divergenten eigentlichen Vertexdiagramme, die nicht als Wechselwirkungsterme in der Lagrangedichte auftreten, endlich sind. Für diese existiert nämlich kein mit der Eichsymmetrie und der Lorentzinvarianz verträglicher renormierbarer Gegenterm.

Dazu stellen wir fest, daß Vertizes vom Typ $\rho\rho\rho$ aufgrund der C -Invarianz der Lagrangedichte in jeder Loopordnung identisch verschwinden. Diese Tatsache ist als *Furrysches Theorem* bekannt. Aufgrund der Symmetrie unter globalen Eichtransformationen verschwinden auch die Vertizes vom Typ $\pi\rho\rho$ und $\pi\pi\rho$, so daß als einziger oberflächlich divergenter Vertex Γ^{ρ^4} verbleibt⁴. Wir müssen also zeigen, daß dieser endlich ist.

Dazu leiten wir die WTI (4.30) nach $V_\nu(w)V_\rho(y)V_\sigma(z)$ ab. Fouriertransformation des erhaltenen Ausdrucks führt dann auf

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^{\rho^4}(p, q, r, s) = 0. \quad (4.48)$$

Der oberflächliche Divergenzgrad ist $\delta(\Gamma^{\rho^4}) = 0$. Zusammen mit der Lorentzinvarianz und Symmetrie der bosonischen Vakuumvertexfunktionen folgt aus dem BPHZ-Theorem, daß der zur oberflächlichen Divergenz dieses Vertex gehörige divergierende Anteil die Form

$$D(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (4.49)$$

haben muß. Aus der WTI (4.48) folgt dann unmittelbar, daß $D = 0$ sein muß. Damit ist die perturbative Renormierbarkeit des Modells bewiesen.

4.1.3 Ankopplung der Photonen

Die Ankopplung der Photonen erfolgt nun nach den allgemeinen Prinzipien der Eichtheorie. Zu dem Zweck führen wir eine zweite $U(1)$ -Eichsymmetrie mit dem Photonenfeld A_μ ein und ersetzen zunächst die kovariante Ableitung für die Pionfelder durch

$$D_\mu = \partial_\mu + igV_\mu + ieA_\mu \quad (4.50)$$

Außerdem besteht noch die Möglichkeit der Einführung eines direkten Mischungsterms zwischen Photonen und ρ -Mesonen:

$$\mathcal{L}_{\rho\gamma} = -\frac{e}{2g_{\rho\gamma}} V_{\mu\nu} A^{\mu\nu}. \quad (4.51)$$

Da das Photonenfeld masselos ist, benötigen wir natürlich nur ein Paar freier Faddeev-Popov-Geistfelder, das für die korrekte Zahl der Freiheitsgrade für den Anteil des freien Gases an der Zustandssumme sorgt. Für die Berechnung von Korrekturen spielt dieser Term keine Rolle. Die Feynmanregeln werden also durch den Propagator für das Photonenfeld

$$\Delta_\gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\eta} + \frac{(1 - \xi')k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\eta)^2}, \quad (4.52)$$

wobei wir einen weiteren unabhängigen Eichfixierungsparameter für die Landaeichung benutzt haben, und die Vertexregeln

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho\gamma}(q) &= i\frac{e}{g_{\rho\gamma}} q^2 \Theta_{\mu\nu}(q) \\ \Gamma_\mu^{\gamma\pi^*\pi}(r, p, q) &= -ie(p_\mu + q_\mu) \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma\gamma\pi^*\pi} &= ie^2 g^{\mu\nu} \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\rho\gamma\pi^*\pi} &= 2ieg^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.53)$$

⁴Im Fall der QED führt dieser Vertex zur Beschreibung der „Streuung von Licht an Licht“ (*Delbrückstreuung*).

ergänzt.

Es ist klar, daß auch diese Theorie renormierbar ist. Das beweist man wortwörtlich genauso wie für das rein hadronische Modell.

Wir fügen nun noch die Elektronenfelder hinzu. Diese sind Diracfelder, die die Ladung $-e$ tragen. Wir bemerken, daß es vom Standpunkt der Eichtheorien keinerlei Erklärung für diese Universalität der elektrischen Ladung gibt. Die Eichtheorie stellt aber sicher, daß die Universalität der nackten Ladungen für die renormierten Ladungen erhalten bleibt. Wie wir nämlich oben explizit für die hadronische Wechselwirkung gesehen haben, gibt es keine Ladungsgegenterme. Die in der fermionischen QED auftretenden Dreiervertizes werden ebenfalls aufgrund der entsprechenden WTI vollständig durch die Wellenfunktionsrenormierung des Photonfeldes renormiert. Die kovariante Ableitung für das Elektronenfeld ist durch

$$\mathcal{D}\psi = (\not{\partial} + ie\mathcal{A})\psi \quad (4.54)$$

gegeben. Dies führt zu den Feynmanregeln

$$\begin{aligned} \Delta_e(p) &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\eta} \\ \Gamma_\mu^{\gamma e^+ e^-}(r, p, q) &= -e\gamma_\mu. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Wir stellen die Feynmanregeln für dieses *allgemeine Eichmodell* in graphischer Form in Anhang B zusammen.

4.1.4 Die klassischen Bewegungsgleichungen

Um Anschluß an die physikalische Interpretation des Modells zu gewinnen, geben wir zunächst die klassischen Feldgleichungen für das ρ -Meson und das Photon an, wobei wir uns auf den eichinvarianten klassischen Teil der Lagrangedichte beschränken dürfen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu V^{\mu\nu} + m^2 V^\nu - ig_{\pi\rho} \pi^* \overleftrightarrow{D}^\nu \pi + \frac{e}{g_{\rho\gamma}} \partial_\mu A^{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu A^{\mu\nu} + ie\pi^* \overleftrightarrow{D}^\nu \pi + \frac{e}{g_{\rho\gamma}} \partial_\mu V^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dabei verwenden wir die Abkürzung

$$\pi^* \overleftrightarrow{D}^\mu \pi = \pi^* (D^\mu \pi) - (D^\mu \pi)^* \pi \quad (4.57)$$

mit der kovarianten Ableitung (4.50). Für den elektromagnetischen Strom folgt durch Einsetzen der ersten in die zweite Bewegungsgleichung

$$j_{\text{em}}^\nu = \partial_\mu A^{\mu\nu} = ie \left(1 - \frac{g_{\rho\pi}}{g_{\rho\gamma}} \right) \pi^* \overleftrightarrow{D}^\nu \pi + \frac{e^2}{g_{\rho\gamma}^2} \partial_\mu A^{\mu\nu} + \frac{e}{g_{\rho\gamma}} m^2 V^\nu. \quad (4.58)$$

Für $g' = g$ ist der elektromagnetische Strom also *bis auf Größen der Ordnung e^2 proportional zum Feld des Vektormesons*. Daher spricht man in diesem Fall von *Vektormesondominanz*, weil dann der rein pionische elektromagnetische Strom nicht zu den Quellen des elektromagnetischen Feldes beiträgt.

4.2 Anpassung der Parameter

In diesem Abschnitt fassen wir kurz zusammen, wie die Parameter des Modells aus Pionenstreu-
daten gewonnen werden können.

4.2.1 Die ρ -Selbstenergie

Da das ρ -Meson nicht stabil ist (die Zerfallsbreite beträgt $150.7 \pm 1.1 \text{ MeV}$ [C⁺98]), müssen wir die
Selbstenergie des ρ -Mesons zumindest in führender Ordnung Störungstheorie berücksichtigen.
Wir demonstrieren gleichzeitig an diesem einfachen Beispiel die oben ausführlich besprochenen
WTIn. Die Selbstenergie in Einschleifennäherung berechnet sich aus den folgenden Beiträgen:

$$-i\Sigma_{\rho}^{\mu\nu}(p) = \mu \text{ (loop with } l \text{ and } l+p \text{)} + \mu \text{ (loop with } l \text{)} \quad (4.59)$$

Die Feynmanregeln sind unter Berücksichtigung des korrekten Multiplizitätsfaktors anzuwen-
den, den man durch Abzählen der Möglichkeiten, die Vertizes mit den äußeren Punkten zu
verbinden, erhält. Dabei ist zu beachten, daß durch die Pfeilrichtung des Pionenpropagators an-
gedeutet ist, daß er verschiedene Felder verbindet, nämlich π mit π^* . Der analytische Ausdruck
in dimensionaler Regularisierung ist damit

$$\Sigma_{\rho}^{\mu\nu}(p) = ig^2 \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \left[\frac{(2l+p)^{\mu}(2l+p)^{\nu}\mu^{2\epsilon}}{(m_{\pi}^2 - (l+p)^2 - i\eta)(m_{\pi}^2 - l^2 - i\eta)} + \frac{2g^{\mu\nu}\mu^{2\epsilon}}{m_{\pi}^2 - l^2 - i\eta} \right]. \quad (4.60)$$

Wie man durch Kontrahieren mit p_{μ} sofort nachweist, ist dieser Ausdruck transversal, wie es
aufgrund der WTI (4.36) sein muß. Wir wollen dies jedoch nicht explizit voraussetzen, sondern
direkt die Gleichungen (A.26-A.39) anwenden:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\rho}^{\mu\nu}(p) = & g^2 [4p^{\mu}p^{\nu}L_{31}(p^2, m_{\pi}, m_{\pi}, \mu, \epsilon) + 4g^{\mu\nu}L_{32}(p^2, m_{\pi}, m_{\pi}, \mu, \epsilon) + \\ & + 4p^{\mu}p^{\nu}L_2(p^2, m_{\pi}, m_{\pi}, \mu, \epsilon) + p^{\mu}p^{\nu}L_1(p^2, m_{\pi}, m_{\pi}, \mu, \epsilon) - \\ & - 2g^{\mu\nu}T_1(m, \mu, \epsilon)]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Wie wir oben im Anschluß an (4.36) diskutiert haben, ist es sinnvoll, $\Sigma_{\rho}^{\mu\nu} = p^2\Theta^{\mu\nu}(p)\tilde{\Sigma}(p^2)$
zu definieren. Aufgrund der $\rho\gamma$ -Mischung ist das physikalische Renormierungsschema durch die
Bedingung $\tilde{\Sigma}(p^2 = 0) = 0$ definiert. Dies stellt nämlich sicher, daß das Residuum des Photonen-
propagators in der berücksichtigten Ordnung der Selbstenergie 1 ist. Wie aus der allgemeinen
Diskussion der analytischen Eigenschaften der Selbstenergie bekannt ist, beginnt der Schnitt für
 $\tilde{\Sigma}(s)$ bei $s = 4m_{\pi}^2$, so daß das ρ -Meson eine Resonanz wird. Da das ρ -Meson also kein asym-
ptotischer Zustand ist, kann keine „on-shell“-Bedingung für das ρ -Meson gestellt werden. Der
Photonenpropagator besitzt jedoch stets einen „on-shell“-Pol, dessen Residuum wir sinnvoller-
weise zu 1 festlegen, damit keine Renormierung der Wellenfunktionen für die äußeren Beinchen
eines Diagramms notwendig ist. Mit dieser Renormierungsbedingung ergibt sich nach einigen
elementaren Rechnungen

$$\Sigma_{\rho}^{\mu\nu}(p) = \frac{g^2}{72\pi^2}\Theta^{\mu\nu}(p) \left[(p^2 - 4m_{\pi}^2) \sqrt{1 - \frac{4m_{\pi}^2}{p^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{p^2}}{2m_{\pi}} \right) - 4(p^2 - 3m_{\pi}^2) \right]. \quad (4.62)$$

Dabei ist es für die praktische Anwendung dieses Resultats wichtig, p^2 durch $p^2 + i\eta$ mit einer kleinen positiven Zahl η zu ersetzen. Dies stellt sicher, daß der Imaginärteil der Selbstenergie entlang des Schnitts negativ ist. Unterhalb der Schwelle, also für $p^2 < 4m_\pi^2$, ist die Selbstenergie reell, wie es der allgemeinen Diskussion der analytischen Eigenschaften entspricht.

4.2.2 Der Formfaktor

Der elektromagnetische Formfaktor des Pions ist durch das Verhältnis der Übergangsamplitude $\pi^+\pi^- \rightarrow e^+e^-$ zur Baumgraphenamplitude mit Austausch eines Photons definiert. Auf Baumgraphenniveau tragen das Photonenaustauschdiagramm und das entsprechende Diagramm, bei dem zunächst die Pionen zu einem ρ -Meson annihilieren und dann durch den $\rho\gamma$ -Mischungsververtex in ein virtuelles Photon „oszilliert“, das dann wiederum in ein e^+e^- -Paar zerfällt, bei. In niedrigster Ordnung ist der Formfaktor den Feynmanregeln zufolge also durch

$$F_\pi^{\text{tree}}(q) = \left[1 - \frac{g_{\rho\pi}}{g_{\rho\gamma}} \frac{q^2}{q^2 - m_\rho^2} \right] \quad (4.63)$$

gegeben. Dies trägt aber der Tatsache, daß das ρ -Meson eine Resonanz ist, noch nicht Rechnung, weil der freie Propagator verwendet wurde⁵.

Wir tragen dem nun Rechnung, indem wir die Dysongleichung resumieren und den ρ -Propagator in der Form

$$G_\rho^{\mu\nu}(q, \xi = 0) = \Theta^{\mu\nu}(q) \frac{1}{q^2 - m_\rho^2 - q^2 \tilde{\Sigma}(q)} \quad (4.64)$$

verwenden. Dabei ist die Wahl des Eichparameters $\xi = 0$ (entsprechend Landau-Eichung in der QED) besonders bequem, weil wir dann den von der Wechselwirkung unbeeinflussten longitudinalen Teil des Propagators nicht mitnotieren müssen. Für den Formfaktor ist die Wahl der Eichung ohnehin ohne Belang, da der longitudinale Teil des Propagators nicht beiträgt, wie es für eichinvariante Größen sein muß.

Wir können nun ohne weitere Rechnung noch Korrekturen zur Ordnung $g_{\rho\gamma}/g_{\rho\pi}$ Rechnung tragen, indem wir in den Selbstenergiendiagrammen eine äußere ρ -Linie durch eine γ -Linie ersetzen. Dies liefert Einschleifenbeiträge zum Mischungsververtex, die einfach durch $\Sigma_{\rho\gamma}^{\mu\nu}(q) = e/g_{\rho\pi} \Sigma_\rho^{\mu\nu}$ gegeben sind. Daraus ergibt sich schließlich

$$F_\pi(q) = 1 - \frac{g_{\rho\pi}}{g_{\rho\gamma}} \frac{q^2 - \frac{g_{\rho\gamma}}{g_{\rho\pi}} q^2 \tilde{\Sigma}_\rho(q)}{q^2 - m_\rho^2 - q^2 \tilde{\Sigma}(q)}. \quad (4.65)$$

Wir sehen, daß $F_\pi(0) = 1$ ist. Dies reflektiert die Tatsache, daß die elektrische Ladung bei Impulsübertrag 0 zu e festgelegt ist. Unsere Überlegungen zur Renormierbarkeit haben ja auch gezeigt, daß die Wahl der physikalischen Renormierungsbedingung für den Eichfeldrenormierungsfaktor auch die Renormierungsbedingung für die elektrische Ladung festlegt.

Abbildung 4.1 zeigt den Fit der Parameter m_ρ , $g_{\rho\pi}$ und $g_{\rho\gamma}$ an die Daten[B⁺85] für den Formfaktor. Zur Illustration wurde auch der Fit für die Annahme der strikten Vektordominanz entsprechend $g_{\rho\gamma} = g_{\rho\pi}$ eingezeichnet. Aus dem Fit ergeben sich für das strikte Vektormesondominanzmodell (VMD) bzw. das allgemeine Eichmodell (GGM) für die Parameter jeweils die Werte

⁵Die auf „on-shell“-Diagramme angewandten WTIn sorgen dabei dafür, daß nur der transversale physikalische Teil des ρ -Propagators relevant ist, d.h. das Ergebnis eichinvariant ist, wie es für physikalische Größen sein muß.

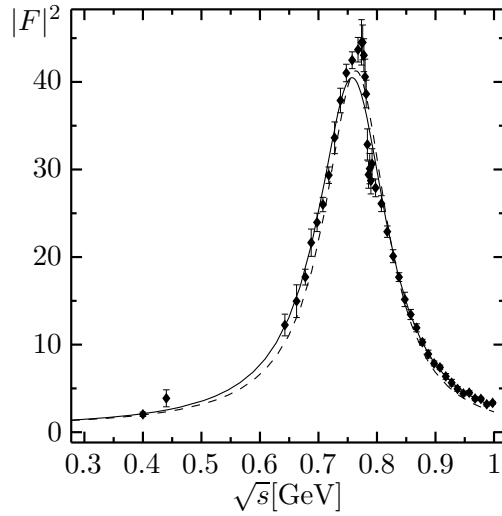


Abbildung 4.1: Der elektromagnetische Pionenformfaktor in führender Vertexordnung. Die ρ -Mesonenselbstenergie wurde in Einschleifenstörungstheorie berechnet und für den ρ -Propagator die entsprechende Resummation der Dysongleichung eingesetzt. Die gestrichelte Linie gibt das Resultat des χ^2 -Fits für das strikte Vektordominanzmodell (also $g_{\rho\gamma} = g_{\rho\pi}$), die durchgezogene Linie das für das verallgemeinerte Modell an. Der Fit beschreibt die Daten sehr gut, wenn man von der Resonanzstelle absieht. Dies ist darauf zurückzuführen, daß wir die Mischung zwischen ρ - und ω -Meson noch nicht berücksichtigt haben.

$$\begin{aligned} \text{VMD: } g_{\rho\pi} &\stackrel{!}{=} g_{\rho\gamma} = 5.38, \quad m_\rho = 770 \text{ MeV}/c^2 \\ \text{GGM: } g_{\rho\pi} &= 5.683, \quad g_{\rho\gamma} = 5.171, \quad m_\rho = 765 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Es ist immerhin $(g_{\rho\pi} - g_{\rho\gamma})/g_{\rho\pi} = 9\%$.

4.3 Beimischung des ω -Mesons

Wir bemerken weiter, daß der Fit in der Resonanzregion noch nicht befriedigend ist. Nun zeigt sich, daß das ρ -Meson trotz positiver G -Parität mit einem kleinen Verzweigungsverhältnis auch nach drei Pionen zerfallen kann. Dies weist darauf hin, daß der Isospineigenzustand des ρ -Mesons nicht mit seinem Masseneigenzustand übereinstimmt, wie wir bisher angenommen haben, sondern eine Beimischung des ω -Mesons beinhaltet.

Wir wollen das Modell nicht vollständig auf ω -Mesonen erweitern. Dazu sei auf [Kli95] verwiesen. Wir zeigen nur, daß die Massenmischung mit dem ω -Meson den Formfaktor in der Resonanzregion vollkommen befriedigend erklärt. Dazu führen wir die Feldvektoren $(\rho, \omega)^t$, die die Masseneigenzustände bezeichnen und $(\rho_I, \omega_I)^t$ für die Isospineigenzustände ein. Beide sind durch eine Drehmatrix \hat{C} verknüpft. In der Masseneigenbasis hat die Selbstenergie unter Einbeziehung der Masse die Form $\text{diag}(-\tilde{\Sigma}_\rho, -\tilde{\Sigma}_\omega)$. Die Mischungsmatrix können wir in Form einer infinitesimalen Drehung ansetzen:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

4.3 · Beimischung des ω -Mesons

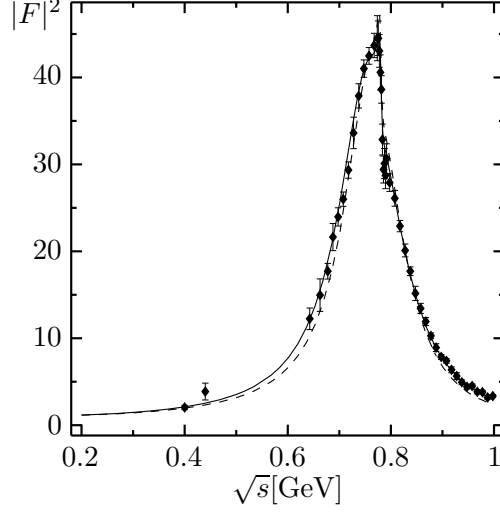


Abbildung 4.2: Der Pionformfaktor unter Berücksichtigung der ρ - ω -Mischung in führender Ordnung gemäß (4.70) im strikten Vektormesondominanzmodell (gestrichelt) und im allgemeinen Eichmodell (durchgezogen). Die Parametersätze sind durch (4.66) und (4.71) gegeben.

so daß sich (in linearer Näherung in ϵ) für den Propagator in der Isospineigenbasis

$$\hat{D}_I(q^2) = (k^2 \mathbb{1} - \hat{C}^t \tilde{\Sigma} \hat{C})^{-1} = \frac{1}{(k^2 - \tilde{\Sigma}_\rho)(k^2 - \tilde{\Sigma}_\omega)} \begin{pmatrix} k^2 - \tilde{\Sigma}_\omega & \epsilon(\tilde{\Sigma}_\rho - \tilde{\Sigma}_\omega) \\ -\epsilon(\tilde{\Sigma}_\rho - \tilde{\Sigma}_\omega) & k^2 - \tilde{\Sigma}_\rho \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

ergibt.

Wir setzen nun für das ω -Meson eine Breit-Wigner-Näherung für den Propagator an:

$$\tilde{\Sigma}_\omega = m_\omega^2 - im_\omega \Gamma_\omega, \quad (4.69)$$

und in dieser Näherung (linear in ϵ) ergibt sich für den Formfaktor

$$F_{\pi(\rho\omega)}(q) = F_\pi(q) \left[1 + \frac{\epsilon(m_\rho^2 - m_\omega^2 - \Sigma_\rho + im_\omega \Gamma_\omega)}{q^2 - m_\omega^2 + im_\omega \Gamma_\omega} \right], \quad (4.70)$$

wobei F_π der durch (4.65) gegebene Formfaktor ist.

Für das Modell der strikten Vektormesondominanz, also $g_{\rho\pi} = g_{\rho\gamma}$, bzw. das allgemeine Eichmodell ergibt sich als Parametersatz für das ω -Meson und den Mischungswinkel unter Beibehaltung der Werte für das mischungsfreie ρ -Meson:

$$\begin{aligned} \text{VMD: } & \epsilon = -4.0 \cdot 10^{-3}, \quad m_\omega = 778 \text{MeV}/c^2, \quad \Gamma_\omega = 9.4 \text{MeV}/c^2, \\ \text{GGM: } & \epsilon = -3.9 \cdot 10^{-3}, \quad m_\omega = 779 \text{MeV}/c^2, \quad \Gamma_\omega = 8.3 \text{MeV}/c^2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Die Resultate sind in Abb. 4.2 im Vergleich zu den Meßdaten gezeigt.

4.4 Die ρ -Selbstenergie bei endlichen Temperaturen

In diesem Abschnitt berechnen wir die Selbstenergie des ρ -Mesons bei endlichen Temperaturen. Wir rekapitulieren zunächst kurz die bereits in [GK91] im Imaginärzeitformalismus gewonnenen Resultate der Störungstheorie.

Im nächsten Abschnitt behandeln wir im Rahmen des abelschen Eichmodells die selbstkonsistente Näherung und untersuchen den Einfluß des „mediumverbreiterten Pions“ auf die Dileptonenrate.

4.4.1 Störungsrechnung

Nachdem wir das Vakuum unter Verwendung des physikalischen Renormierungsschemas renormiert haben, sind die verbleibenden temperaturabhängigen Beiträge endlich, und wir können diese sofort bei $d = 4$ ausrechnen.

Die Anwendung in Anhang B zusammengestellten Rezeitfeynmanregeln ergibt für die ---Komponente nach Verschiebung der Integrationsvariable in einem Teilintegral

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{--} = & \Pi_{\mu\nu}^{--\text{vac}} + g^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left\{ (2l+p)_\mu (2l+p)_\nu \left[\frac{1}{(l-p)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(l+p)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \right] \times \right. \\ & \times \left[2\pi n(l_0) \delta(l^2 - m_\pi^2) - i4\pi^2 n(l_0) n(l_0 + p_0) \delta(l^2 - m_\pi^2) \delta[(l+p)^2 - m_\pi^2] - \right. \\ & \left. \left. - 2g_{\mu\nu} 2\pi n(l_0) \delta(l^2 - m_\pi^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Aufgrund der Auszeichnung des Ruhesystems des Wärmebades ist dieser Ausdruck nicht mehr vierdimensional kovariant. Im Ruhesystem des Wärmebads besteht allerdings noch eine dreidimensionale Rotationssymmetrie. Da die WTIn bei endlichen Temperaturen für die Konturvertexfunktionen gelten, ist die Selbstenergie wie im Vakuum vierdimensional transversal. Aufgrund der Auszeichnung des Ruhesystems des Wärmebads ist sie aber nicht mehr proportional zu $\Theta_{\mu\nu}(p)$. Wegen der verbleibenden Rotationssymmetrie spaltet die Selbstenergie in zwei Anteile auf, nämlich einen dreidimensional transversalen und einen dreidimensional longitudinalen Anteil. Die entsprechenden Projektoren Θ_T und Θ_L sind in (A.17) und (A.18) angeführt: Aufgrund der Rotationssymmetrie können wir also schreiben

$$\Pi_{\mu\nu}^{--} = \Pi_T^{--} \Theta_{\mu\nu}^T + \Pi_L^{--} \Theta_{\mu\nu}^L \quad \text{mit} \quad \Pi_T^{--} = \frac{1}{2} \Theta_T^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{--}, \quad \Pi_L^{--} = -\Pi_\mu^{--\mu} - 2\Pi_T^{--}. \quad (4.73)$$

Die letzte Form zur Berechnung der longitudinalen Komponente erweist sich als numerisch vorteilhaft gegenüber einer direkten Verwendung des longitudinalen Projektors, weil dieser singular entlang des Lichtkegels ist.

Wir führen Polarkoordinaten für \vec{l} mit durch \vec{p} gegebener Polarrichtung ein. Ausintegration der δ -Distribution und des Azimuthwinkels, von dem der Integrand aufgrund der Rotationssymmetrie

um \vec{p} nicht abhängt, ergibt

$$\begin{aligned}
 \Pi_T^- &= \frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dL L^2 \int_{-1}^1 du (1-u^2) n(\omega) \left[\frac{1}{(p_0 - \omega)^2 - (L^2 - 2LPu + P^2) - m_\pi^2 + i0} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(p_0 + \omega)^2 - (L^2 - 2LPu + P^2) - m_\pi^2 + i0} \right] + (p_0 \rightarrow -p_0, u \rightarrow -u) - \\
 &\quad - \frac{ig^2}{4\pi P} \int_0^\infty dL \frac{L^3}{\omega} [(1-u_+^2)\Theta(1-|u_+|)n(p_0+\omega) + \\
 &\quad + (1-|u_-|)\Theta(1-|u_-|)n(p_0-\omega)] n(\omega) + \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{L^2}{\omega} dL n(\omega). \tag{4.74}
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir $u = \cos \theta$ und $\|\vec{l}\| = L$ gesetzt; u_+ und u_- haben die in (A.19) angegebene Bedeutung. In dem Doppelintegral läßt sich noch die Integration über u explizit ausführen, wobei die Funktion

$$I_1(a, b) := \int_{-1}^1 du \frac{1-u^2}{a+bu} = \frac{1}{b^3} \left[2ab + (a^2 - b^2) \ln \left(\frac{a-b}{a+b} \right) \right] \tag{4.75}$$

auftritt. Beim Logarithmus ist wie überall in dieser Arbeit der Hauptwert zu verstehen, und es ist für $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$ stets $p^2 + i0$ zu setzen. Die verbleibenden Integrale nach L wurden mit Hilfe eines adaptiven Simpsonverfahrens numerisch berechnet.

Die außerdiagonalen Matrixelemente der Realzeitselbstenergie lassen sich mit Hilfe von (A.19) berechnen. Charakteristisch für diese Wightmanfunktionen ist, daß sie endlich sind und keine Diskontinuitäten auftreten, wie wir bereits im vorigen Kapitel bei der Untersuchung der allgemeinen analytischen Eigenschaften festgestellt haben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \Pi_T^{+-} &= \frac{ig^2}{4\pi} \int_0^\infty dL \frac{L^3}{\omega P} \{ \Theta(1-|u_+|)(1-u_+^2)n(\omega)[n(\omega+p_0) + \Theta(\omega+p_0)] + \\
 &\quad + \Theta(1-|u_-|)(1-u_-^2)[n(p_0-\omega) + \Theta(p_0-\omega)][1+n(\omega)] \} \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_T^{-+} &= \frac{ig^2}{4\pi} \int_0^\infty dL \frac{L^3}{\omega P} \{ \Theta(1-|u_+|)(1-u_+^2)[1+n(\omega)][n(\omega+p_0) + \Theta(-\omega-p_0)] + \\
 &\quad + \Theta(1-|u_-|)(1-u_-^2)[n(p_0-\omega) + \Theta(\omega-p_0)]n(\omega) \}. \tag{4.77}
 \end{aligned}$$

Die vierte Funktion Π_T^{++} ergibt sich sofort algebraisch aus (A.23).

Für die invariante Spur des Tensors folgt mit denselben Methoden:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{tr}}^{--} = & \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty dL \frac{L^2}{\omega} \int_{-1}^1 du \left\{ \frac{(2\omega - p_0)^2 - 4L^2 + 4LPu - P^2}{(\omega - p_0)^2 - L^2 + 2LPu - P^2 - m_\pi^2 + i0} + \right. \\ & \left. + \frac{(2\omega + p_0)^2 - 4L^2 + 4LPu - P^2}{(\omega + p_0)^2 - L^2 + 2LPu - P^2 - m_\pi^2 + i0} + (p_0 \rightarrow -p_0, u \rightarrow -u) \right\} n(\omega) - \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{ig^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dL \frac{L}{\omega P} \left\{ \Theta(1 - |u_+|) n(p_0 + \omega) [(2\omega + p_0)^2 - 4L^2 - 4LPu_+ - P^2] + \right. \\ & \left. + \Theta(1 - |u_-|) n(p_0 - \omega) [(2\omega - p_0)^2 - 4L^2 - 4LPu_- - P^2] \right\} n(\omega) - \\ & - \frac{4g^2}{\pi^2} \int_0^\infty dL \frac{L^2}{\omega} n(\omega), \\ \Pi_{\text{tr}}^{+-} = & \frac{ig^2}{8\pi} \int_0^\infty dL \left\{ \Theta(1 - |u_+|) [\Theta(\omega + p_0) + n(\omega + p_0)] n(\omega) \times \right. \\ & \times [(2\omega + p_0)^2 - 4L^2 - 4LPu_+ - P^2] + \\ & + \Theta(1 - |u_-|) [\Theta(p_0 - \omega) + n(p_0 - \omega)] [1 + n(\omega)] \times \\ & \left. \times [(2\omega - p_0)^2 - 4L^2 - 4LPu_- - P^2] \right\} \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{tr}}^{-+} = & \frac{ig^2}{8\pi} \int_0^\infty dL \frac{L}{\omega P} \left\{ \Theta(1 - |u_+|) [\Theta(-\omega - p_0) + n(\omega + p_0)] [1 + n(\omega)] \times \right. \\ & \times [(2\omega + p_0)^2 - 4L^2 - 4LPu_+ - P^2] + \\ & + \Theta(1 - |u_-|) [\Theta(\omega - p_0) + n(\omega - p_0)] n(\omega) \times \\ & \left. \times [(2\omega - p_0)^2 - 4L^2 - 4LPu_- - P^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Zur numerischen Berechnung wurde wieder die Integration über u in der $--$ -Komponente unter Verwendung von

$$I_2(a, b, c, d) = \int_{-1}^1 du \frac{c + du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} \left[2bd + (ad - bc) \ln \left(\frac{a - b}{a + b} \right) \right] \quad (4.81)$$

ausgeführt.

4.4.2 Selbstkonsistente Behandlung des π - ρ -Systems

In diesem Abschnitt wollen wir die Φ -Funktionalnäherung auf das abelsche Vektormesondominanzmodell anwenden und die Dileptonenproduktionsrate berechnen. Dies ist besonders aufgrund von experimentellen Resultaten der CERES- und DLS-Kollaborationen [A⁺95, W⁺95, P⁺97] interessant. Es zeigt sich nämlich, daß die Dileptonenproduktionsrate im Bereich invarianter Paarmassen zwischen 300MeV und 600MeV gegenüber der Rate, die man von entsprechenden Raten in Proton-Proton-Stößen erwarten würde, signifikant erhöht ist. Durch den Ausbau von CERES und HADES bei der GSI ist in nächster Zeit auch eine noch höhere Auflösung des Dileptonenproduktionsspektrums bei Schwerionenstößen zu erwarten.

Aus theoretischer Sicht wurden verschiedene Mechanismen zur Erklärung dieses Phänomens, das auf der Mediummodifikation der Vektormesonen in hadronischer Materie zurückzuführen ist, vorgeschlagen [GK91, RW99a, HFN93, RCW97, RW99b, UBRW98, RUBW98, RG99, UBRW00].

In der hier vorgestellten Modellrechnung beschränken wir uns auf die Anwendung der Φ -Funktionalmethode auf das minimale abelsche Vektormesondominanzmodell. Durch Wahl der Vierpionenkopplungskonstante werden Pionbreiten im Medium von 50 MeV und mehr simuliert. Dadurch werden die Effekte der starken Ankopplung des Pions an Baryonenresonanzen, wie z.B. die Δ -Resonanz, modelliert.

Bei der Anwendung der Φ -Funktionalnäherung auf Eichtheorien ergeben sich die folgenden Probleme aufgrund der Verletzung der Eichsymmetrie durch die Näherung.

- Die selbstkonsistenten Vektormesonpropagatoren enthalten Komponenten von unphysikalischen Freiheitsgraden. Dies führt zur Verletzung der Kausalität und Unitarität der S -Matrix.
- Die Polarisationsensoren der Vektormesonen sind nicht vierdimensional transversal, und es ergeben sich spuriose Singularitäten am Lichtkegel, die zu numerischen Instabilitäten führen.

Projektion auf die physikalischen Freiheitsgrade

Zur Vermeidung von Kausalitätsproblemen bei der Kopplung der Vektorpropagatoren in den π -Selbstenergiendiagrammen wird eine R_ξ -Eichung mit großem ξ gewählt, so daß die spuriosen Moden große Massen erhalten und sich im für die Mediumprozesse relevanten Niederenergiebereich nicht auswirken.

Hauptsächlich durch die endliche Dämpfungsbreite der Pionen bleibt der ρ -Mesonenpolarisationstensor nicht stromerhaltend. Dies führt dazu, daß unphysikalische nicht vierdimensional transversale Moden angeregt werden, die nicht nur zu einer falschen Zahl der Freiheitsgrade, sondern auch darüber hinaus wegen der negativen Norm dieser Zustände zu unkontrollierbaren Problemen im selbstkonsistenten Verfahren führen. Daher ist ein Ausschalten dieser spuriosen Moden unbedingt erforderlich.

Es hat sich gezeigt, daß eine „naive Projektion“ auf die vierdimensional transversalen Komponenten des sich aus den Diagrammregeln der Φ -Funktionalnäherung ergebenden Polarisationsensors zu numerischen Problemen führt. Dies ist auf die longitudinale Komponente zurückzuführen, die bei diesem Verfahren zu Singularitäten auf dem Lichtkegel und zu entsprechenden numerischen Instabilitäten führte.

Aufgrund der Behandlung des analogen Problems der Photonenproduktion im Rahmen der in [KV96] betrachteten Fokker–Planck–Näherung, ist zu erwarten, daß die raumartigen Komponenten durch die selbstkonsistente Einschleifennäherung bereits recht gut wiedergegeben werden, sofern die transversale Dämpfungsrate durch die Dämpfungsbreite der Pionen in der Schleife gegeben ist. Dies ist in der Regel dann der Fall, wenn die mikroskopischen Streuprozesse isotrop verlaufen und damit bewirken, daß weitere Streueffekte, wie sie in der Aufsummation der Bethe–Salpetergleichung berücksichtigt werden, vernachlässigbar sind.

Die Zeitkomponenten des exakten Polarisationsensors besitzen hingegen aufgrund der Erhaltungssätze eine unendliche „Relaxationszeit“, und dies kann nur durch die unten näher erläuterte Leiterresummation, die zum externen Polarisationsensor führt, beschrieben werden.

Es bietet sich also an, zur Projektion auf die beiden vierdimensional transversalen Komponenten des Polarisationsensors nur die raumartigen Komponenten der Φ –Funktionalnäherung zu verwenden. Ist nämlich der Polarisationsensor $\Pi^{\mu\nu}$ vierdimensional transversal, dann muß er sich aufgrund der räumlichen Rotationssymmetrie mit Hilfe der beiden in Anhang A.3 definierten vierdimensional transversalen Projektionsensoren in einen räumlich transversalen und einen räumlich longitudinalen Anteil aufspalten lassen:

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \Pi_L(p)\Theta_L^{\mu\nu}(p) + \Pi_T(p)\Theta_T^{\mu\nu}(p). \quad (4.82)$$

Im folgenden vereinbaren wir, daß lateinische Indizes stets von 1 bis 3 laufen und stets die positiv definite euklidische Metrik für die raumartigen Komponenten benutzt wird. Dann folgt aus den Definitionen (A.17) für die Projektoren sofort

$$\delta_{jk}\Pi^{jk}(p) = 2\Pi_T + \frac{(p_0)^2}{p^2}\Pi_L, \quad \frac{p_j p_k}{p^2}\Pi^{jk} = \frac{(p_0)^2}{p^2}\Pi_L, \quad (4.83)$$

d.h. die dreidimensional skalaren Funktionen Π_L und Π_T lassen sich tatsächlich aus den raumartigen Komponenten des Tensors allein gewinnen. Dieses Verfahren werden wir im folgenden auf die Komponenten des selbstkonsistenten Polarisationsensors anwenden, um somit Stromerhaltung zu gewährleisten. Wir erwarten aufgrund der obigen Diskussion, daß der Fehler für diese Komponenten vernachlässigbar ist.

Modellrechnung zur Dileptonenrate

Wir wollen in diesem Abschnitt unter Umgehung aller Renormierungsprobleme eine selbstkonsistente Rechnung der Dileptonenrate vorstellen. Dabei beschränken wir uns auf die Behandlung des endlichen Imaginärteils der retardierten Selbstenergiefunktionen, halten aber die Normierung der Spektralfunktionen, entsprechend einer Feldrenormierung, konstant. Diese Resultate werden teilweise bereits in [HK00b, HK00a] dargestellt.

Wir legen für das $\pi\rho$ –System eine Lagrangedichte, wie in den vorigen Abschnitten ausführlich erläutert, zugrunde, fügen aber noch eine Wechselwirkung mit dem chiralen Partner des ρ –Mesons, dem a_1 –Meson hinzu, um seinen Einfluß auf die Dileptonenrate im Vergleich zur endlichen Breite des Pions in Materie zu studieren:

$$\mathcal{L}_{\rho a_1}^{\text{int}} = g_{\pi\rho a_1}(\pi + \pi^*)\rho_\mu a_1^\mu. \quad (4.84)$$

Die Näherung des Φ –Funktional wählen wir in der niedrigsten Ordnung, fügen jedoch auch das „Baseball–Diagramm“ der Viererpionenselbstwechselwirkung hinzu, um schematisch eine

Pionenbreite zu induzieren, die in einem realistischen Szenario in nuklearer Materie auf die Wechselwirkung mit baryonischen Resonanzzuständen wie dem Δ -Meson zurückzuführen ist [Her92, HFN93, FP97, RCW97, RW99a, RG99].

Die im folgenden betrachtete Φ -Funktionalnäherung definieren wir wir durch die folgenden Diagramme:

$$i\Phi = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (4.85)$$

Durch Ableiten nach den jeweiligen Propagatoren, also das Öffnen der entsprechenden Linien, erhält man die Diagramme für die Selbstenergien der einzelnen Teilchen:

$$-i\Pi_\rho = \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}, \quad (4.86)$$

$$-i\Pi_{a_1} = \text{Diagram 6}, \quad (4.87)$$

$$-i\Sigma_\pi = \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9}. \quad (4.88)$$

Diese Diagramme zeigen, daß die Herleitung der selbstkonsistenten Gleichungen aus dem Φ -Funktionalformalismus den Prinzipien von *actio = reactio* und detailliertem Gleichgewicht sicherstellt: Wird die Selbstenergie einer Teilchenspezies in irgendeiner Weise geändert (z.B. indem man mehr Diagrammbeiträge berücksichtigt), erfordern diese Prinzipien auch die entsprechenden Änderungen in den Diagrammen für die anderen Teilchensorten.

Im Vakuum sind die Vektormesonen ρ und a_1 Resonanzen. Entsprechend dem Phasenraum für den Zerfall der betreffenden Teilchen besitzen die selbstkonsistenten Selbstenergien Schwellen, bei $\sqrt{s} = 2m_\pi$ bzw. $\sqrt{s} = 3m_\pi$. Das Pion ist in dem betrachteten Szenario das einzige stabile Teilchen, so daß der Propagator einen Pol bei $s = m_\pi^2$ und eine Schwelle bei $s = 3m_\pi^2$ besitzt (vgl. Abb. 4.3).

Die Konsequenzen der Pionenbreite für die Spektralfunktionen und die gem. (D.43) berechnete Dileptonenrate der Vektormesonen ist in Abb. 4.4 gezeigt. Die selbstkonsistenten Rechnungen wurden in der angegebenen Näherung bei voller Viererimpulsabhängigkeit durchgeführt. Die Pionenbreite wurde durch Anpassen der Vierpionenkopplungskonstante λ auf die in Abb. 4.3 angegebenen Nominalwerte bei $s = m_\pi^2$ justiert. Durch die selbstkonsistente Rechnung ist jedoch auch die Pionenbreite eine Funktion von (p_0, \vec{p}) (s. Abb. 4.5 rechts).

Wie bereits oben erwähnt haben wir bei diesen Rechnungen nur den Imaginärteil der Selbstenergien berücksichtigt und die Spektralfunktionsnormierung konstant gehalten, also eine Wellenfunktionsrenormierung vorgenommen.

Die Abbildung 4.4 zeigt zur Illustration links oben die selbstkonsistent berechnete Spektralfunktion des ρ -Mesons in der vollen Viererimpulsabhängigkeit. Die longitudinale und transversale Komponente des ρ -Polarisationstensor werden in Abb. 4.5 gezeigt.

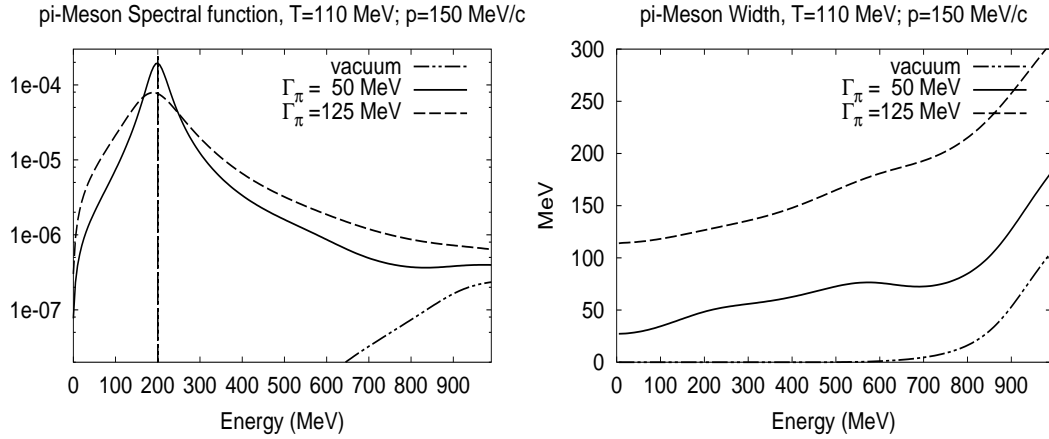


Abbildung 4.3: Die Spektralfunktion und Breite des Pions als Funktion der Energie bei einem Impuls von $150\text{MeV}/c$ im Vakuum sowie für verschiedene Kopplungskonstanten λ der Vierpionenwechselwirkung.

Um den Einfluß der selbstkonsistent berücksichtigten endlichen In-Medium-Breiten der beteiligten Teilchen zu diskutieren, werden die folgenden Näherungen gezeigt, wobei stets das gewichtete Mittel der longitudinalen und transversalen Komponente der ρ -Spektralfunktion geplottet wird. Zum einen wurde der störungstheoretisch berechnete ρ -Mesonpolarisationstensor im Vakuum und bei endlichen Temperaturen (vgl. Abschnitte 4.2.1 und 4.4.1) eingesetzt. Da hierbei der freie Pionenpropagator eingeht, dessen Spektralfunktion eine on-shell- δ -Distribution ist, zeigt die Spektralfunktion das Vakuumschwellenverhalten bei zeitartigen Viererimpulsen, und die Berücksichtigung der endlichen Temperatur hat relativ wenig Einfluß auf die Dileptonenrate.

Im Gegensatz dazu geht durch die selbstkonsistente Dysonresummation des Propagators aufgrund der endlichen Breite des Pions im Medium das Schwellenverhalten verloren. Alle Schnitte der Selbstenergie verlaufen für festgehaltenen Dreierimpuls entlang der gesamten reellen Energieachse, und das physikalische Blatt der retardierten Funktionen ist so vollständig von dem der avancierten Funktionen getrennt. Das bedeutet, daß bei allen Energien reale Prozesse möglich sind, die auf der Streuung eines Teilchens an Teilchen des Wärmebades beruhen. Aufgrund des thermischen Gewichtes (Bose-Einstein-Verteilung) in (D.43) zeigt sich eine dramatische Erhöhung der Dileptonenproduktionsrate im Bereich kleiner Energien. Rechts unten wurde die Produktionsrate nach verschiedenen physikalischen Prozessen getrennt. Der Niederenergiebereich wird vom Bremsstrahlungsbeitrag dominiert, der sich bei der selbstkonsistenten Rechnung als Beitrag des Schleifenintegrals ergibt, bei dem die Energiekomponenten des Viererimpulses in beiden Propagatoren gleiches Vorzeichen besitzen. Dieser Beitrag verschwindet in der Störungstheorie aufgrund der scharfen Massenschalenbedingung, ist aber endlich für Teilchen (insbesondere in unserer Rechnung für Pionen) mit endlicher Breite im Medium. Dieser Anteil ist damit auf die Streuung der Pionen mit den das Wärmebad konstituierenden Teilchen zurückzuführen. Auch hier wird wieder der Vorteil der selbstkonsistenten Behandlung deutlich: Der In-Medium-Bremsstrahlungsbeitrag zum elektromagnetischen Formfaktor des Pions und Pionenannihilationsprozesse werden konsistent berücksichtigt, wodurch zugleich dem Landau-Pomeranchuk-Migdal-Effekt Rechnung getragen wird (vgl. die ausführliche Behandlung in [KV96]). Diese konsistente Berücksichtigung des Bremsstrahlungsbeitrages führt bereits bei moderaten Pionenbreiten von 50 MeV, die hier durch die entsprechende Wahl der Vierpion-

4.4 · Die ρ -Selbstenergie bei endlichen Temperaturen

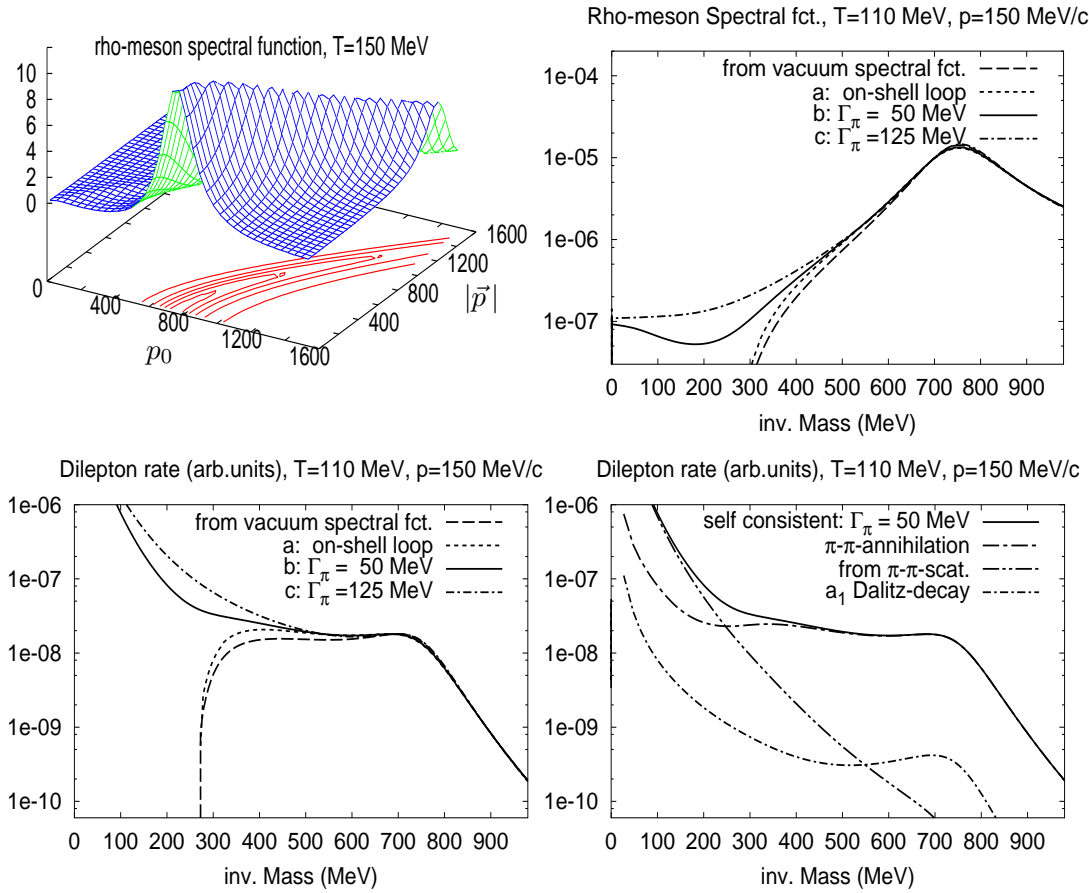


Abbildung 4.4: Oben: ρ -Mesonspektralfunktion, unten: Thermische Dileptonenproduktionsrate.

nenkopplung simuliert wurde, zu einer signifikanten Erhöhung der Dileptonenrate im Bereich unterhalb von $\sqrt{s} = 500$ MeV. Für einen Vergleich mit den experimentellen Daten ist allerdings eine realistische Berücksichtigung der baryonischen Beiträge notwendig. Der Beitrag des a_1 -Dalitzzerfalls wurde durch Abseparation des a_1 - π -Schleifenbeitrags zur Partialbreite des ρ -Mesons erhalten. Im Rahmen unserer schematischen Behandlung kann man sagen, daß dieser im ganzen Energiebereich nicht wesentlich erscheint. Allerdings muß man sich vor Augen halten, daß in dieser Rechnung keinerlei Mediummodifikationen der Teilchenmassen berücksichtigt wurden. Diese können im Rahmen der selbstkonsistenten Näherungen mit den in Kapitel 3 ausführlich vorgestellten Renormierungsmethoden im Rahmen eines chiralen Modells untersucht werden.

Der externe Polarisationsensor

Hier diskutieren wir eine minimale Version selbstkonsistenter Näherungen, um zu einem stromerhaltenden Polarisationsensor zu kommen. Wir benutzen dabei, daß sich eine von spuriösen Freiheitsgraden freie Φ -Funktionalnäherung dadurch formulieren läßt, daß man die Vektormesonen *nur* durch ihre mittleren Felder berücksichtigt. Die selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen entsprechen dann der Näherung des Vektormesons allein durch ein klassisches Feld, in dessen Quelltermen jedoch entsprechend der Φ -Funktionalnäherung Quantenfluktuationen der übri-

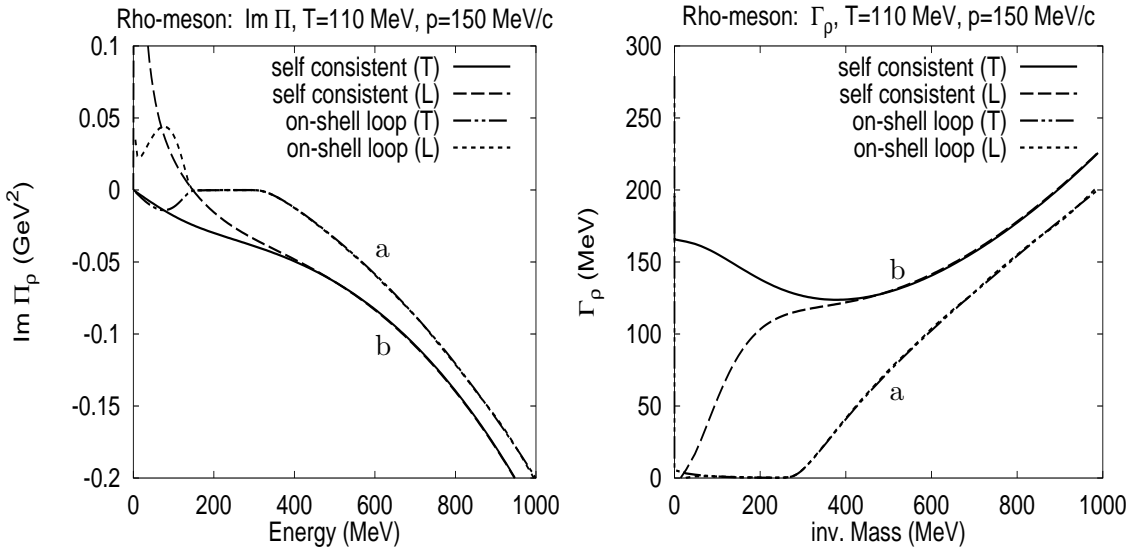


Abbildung 4.5: Links: Imaginärteil der longitudinalen (L) und der transversalen (T) Komponente des ρ -Polarisationstensors bei $T = 110 \text{ MeV}$. (a) zeigt die Störungsrechnung bei dieser Temperatur und (b) die selbstkonsistente Näherung für die Wahl der Vierpionenkopplung, so daß $\Gamma_\pi = 125 \text{ MeV}$. Rechts werden die entsprechenden ρ -Breiten $\Gamma_\rho^{L/T} = -\text{Im } \Pi_\rho^{L/T} / p_0$ gezeigt.

gen Felder selbstkonsistent berücksichtigt werden. Diese Klasse von Näherungen enthalten keine spuriosen Freiheitsgrade in den selbstkonsistenten Propagatoren. Die Lösungen der selbstkonsistenten Bewegungsgleichungen erlauben, wie in Abschnitt 3.4.2 besprochen, die Konstruktion des externen Polarisationstensors, der die Symmetrien respektiert und folglich insbesondere vierdimensional transversal ist.

Für unser minimales π - ρ -Modell bedeutet dies, daß wir für Φ eine Näherung wählen, die keine ρ -Propagatorlinien in den Diagrammen enthält:

$$i\Phi[G_\pi, \rho] = \cancel{\text{diagramm}} + \text{diagramm}, \quad (4.89)$$

$$-i\Sigma_\pi = \cancel{\text{diagramm}} + \text{diagramm}, \quad (4.90)$$

$$-i\partial_\mu \rho^{\mu\nu} = -ij^\mu = \text{diagramm}. \quad (4.91)$$

Hier bezeichnet die Schleifenlinie mit Kreuz das mittlere ρ -Mesonenfeld. Da die durch (4.89) definierte Näherung für Φ unter Eichtransformationen

$$\rho'_\mu = \rho_\mu + \partial_\mu \chi, \quad \pi' = \exp(-ig\chi)\pi \quad (4.92)$$

4.4 · Die ρ -Selbstenergie bei endlichen Temperaturen

invariant ist, sind die resultierenden Bewegungsgleichungen (4.90) und (4.91) bezüglich Eichtransformationen kovariant.

Das effektive erzeugende Funktional für die externen Vertexfunktionen für das ρ -Meson

$$\Gamma_{\text{eff}}[\rho] = \mathbb{I}[\rho, G_{\text{eff}}[\rho]] \text{ mit } \left. \frac{\delta \mathbb{I}[\rho, G]}{\delta G} \right|_{G=G_{\text{eff}}\pi} = 0 \quad (4.93)$$

ergibt, wie ebenfalls in Abschnitt 3.4 gezeigt, Vertexfunktionen, die die WTIn erfüllen. Da der ρ -Propagator nicht in der selbstkonsistenten Dynamik vorkommt, werden auch keine spuriosen Moden in den internen Linien propagiert.

Der externe Polarisationsstensor des ρ -Mesons ist durch

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{ext}}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{\delta\rho^\mu \delta\rho^\nu} \Phi[\rho, G_{\text{eff}}[\rho]] \quad (4.94)$$

definiert. Wie in Abschnitt 3.4 allgemein gezeigt wurde, benötigen wir zur Berechnung dieser Näherung zunächst die Lösung der Gleichung für die Ableitung des effektiven Pionenpropagators nach dem äußeren Feld, die zu einem effektiven Dreiervertex führt und diagrammatisch wie folgt dargestellt werden kann:

$$i \frac{\delta G_\pi}{\delta \rho^\mu} = \text{Diagramm 1} = \text{Diagramm 2} + \text{Diagramm 3} \quad (4.95)$$

Dabei haben wir benutzt, daß der effektive Vierervertex aufgrund von (4.89) durch

$$K_{1234} = \frac{\delta^2 i\Phi}{\delta iG_{12} \delta iG_{34}} = \text{Diagramm 4} \quad (4.96)$$

gegeben ist. Der externe ρ -Polarisationsstensor ist schließlich durch

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{ext}} = \text{Diagramm 5} \quad (4.97)$$

bestimmt.

Auch hier wird wieder deutlich, daß die Herleitung der externen Vertexfunktionen aus dem Φ -Funktional allein deshalb zu einer Wiederherstellung der WTIn führt, weil die Diagrammelemente, die zur Berechnung benutzt werden, eben diesen WTIn entsprechen und aufgrund ihrer Konstruktion aus dem Φ -Funktional dem selbstkonsistent bestimmten Pionenpropagator angepaßt sind.

Wir können nun nochmals auf die Probleme der Φ -Funktionalnäherung selbst zurückkommen. Wie die detaillierte Analyse in [KV96] im Rahmen von klassischen Transportmodellen zeigt, besitzen alle Komponenten des ρ -Mesonenpolarisationstensors für eine der Φ -Funktionalnäherung entsprechende Approximation zur exakten Lösung der Fokker-Planck-Gleichung ein Zeitverhalten der Form

$$\Pi_\rho^{\mu\nu}(\tau, \vec{p} = 0) \propto \exp(-\Gamma_\pi \tau). \quad (4.98)$$

Dabei ist hier mit $\Pi_\rho^{\mu\nu}$ der Strom-Strom-Korrelator bezeichnet, der in der Millsdarstellung (also in einer gemischten Zeit-Dreierimpulsdarstellung) berechnet wurde.

Die Leitersummation entspricht im klassischen Limes einem Langevinprozeß, wobei die Beiträge von Vielfachstreuungen zum Polarisationsstensor *kohärent* aufsummiert werden. Dies führt im Falle der 00-Komponente zur Restauration der Ladungserhaltung:

$$\Pi_\rho^{00}(\tau, \vec{p} = 0) \propto \exp(-\Gamma\tau) \sum_n \frac{(\Gamma\tau)^n}{n!} = 1. \quad (4.99)$$

Zusammenfassung

Zusammenfassend können wir sagen, daß die beobachtete Erhöhung im Dileptonenspektrum bei Schwerionenstößen, zumindest qualitativ auch durch den Einfluß der endlichen In-Medium-Breiten erklärt werden kann. Die hier vorgestellte Behandlung dieses Problems mit dem selbstkonsistenten Φ -Funktionalformalismus weist gegenüber anderen Näherungsschemata folgende wesentliche Vorteile auf:

- Die Mittelwerte erhaltener Ströme sind für die Näherungen erhalten.
- Thermodynamische Konsistenz: Die Näherung für das Φ -Funktional liefert gleichzeitig mit der Dynamik (Bewegungsgleichungen für die mittleren Felder und die Selbstenergien) auch die Näherung für die thermodynamischen Zustandsgrößen, indem es das thermodynamische Potential im Rahmen der Näherung darstellt.
- Bremsstrahlungs- und Anihilationsbeiträge zum Dileptonenspektrum werden konsistent berücksichtigt (Landau-Pomeranchuk-Migdaleffekt).

Das Problem, eine selbstkonsistente Näherung zu finden, die gleichzeitig auch die WTIn für den *internen Propagator* erfüllt, bleibt weiterhin ein offenes Problem. Dies ist bereits im Ansatz des Φ -Funktionals enthalten, weil alle Vertizes punktförmig bleiben und a priori kein Parameter angegeben werden kann, der wie in der Störungstheorie eine systematische Entwicklung zuließe. Durch die Selbstkonsistenz werden Beiträge in allen Ordnungen der Kopplungskonstanten oder \hbar resummiert, wobei es sich aber naturgemäß nur um eine Teilresummation handeln kann, da eine exakte Behandlung der Quantenfeldtheorie nicht möglich ist.

Auch die numerische Berechnung der externen Selbstenergiefunktionen, die die Transversalitätsbedingung erfüllt und somit eine Näherung darstellt, die auf dem Zweipunkt-Korrelatorniveau die Stromerhaltung formal erfüllt, erscheint angesichts der Komplexität der erforderlichen Leiterresummation aussichtslos. Entsprechend wurden in der Literatur im Zusammenhang mit dieser Problematik lediglich einfachere Vertexkorrekturen berücksichtigt, so z.B. in [KSXX90, AKLQ92] in Form von Landau-Migdal-Parametrisierungen der Δ - N -Wechselwirkung, wo sich das Problem auf die Berechnung von Quasiteilchenschleifendiagrammen des hier behandelten Typs und die „Bubble“-Resummation vom RPA-Typ (vgl. Abschnitt 3.5) reduziert. In anderen Arbeiten, wie z.B. [HFN93, UBRW00] werden zwar kompliziertere Vertexdiagramme berücksichtigt, allerdings nicht im Rahmen selbstkonsistenter Rechnungen. Die dort betrachteten Vertexkorrekturen können jedenfalls nicht die durch die endliche Breite der Pionen hervorgerufenen Defizite kompensieren.

Wie schon mehrfach in dieser Arbeit betont, stellt die Berechnung des externen Propagators genau die Vertexkorrektur dar, die zur Wiederherstellung der WTIn auf Korrelatorniveau notwendig ist. Der in den externen Polarisationsensor (4.97) eingehende Dreiervertex (4.95) entspricht genau dem zum selbstkonsistenten π -Propagator gehörigen Dreiervertex. Es ist dabei wesentlich, daß der Bethe-Salpeter-Kern seinerseits wieder vermöge (4.96) aus dem Φ -Funktional bestimmt ist.

Allerdings ist für die numerische Berechnung des externen Polarisationsensors die Lösung der Bethe-Salpeter-Leiternäherung für den Dreipunktvertex (4.95) mit voller Impulsabhängigkeit notwendig, und dies übersteigt die numerischen Möglichkeiten schon allein dadurch, daß eine Abschätzung des Rechenaufwands einen Faktor 10^5 verglichen mit dem Aufwand für die hier

vorgestellten Berechnungen der Selbstenergie ergibt. Außerdem ist eine komplizierte Analyse der analytischen Eigenschaften des Dreiervertex notwendig, wie sie z.B. in ([HWH98]) besprochen werden.

Selbst wenn dieses praktische Problem gelöst werden könnte, ergibt sich noch eine konzeptionelle Schwierigkeit, denn der externe Propagator wird ja gerade nicht in der selbstkonsistenten Rechnung benutzt, um die oben erläuterten Rückkopplungseffekte des Vektormesons bei voller Konsistenz der Bremsstrahlungs- und Annihilationsprozesse zu berücksichtigen. Der interne Propagator, der in den Linien des Φ -Funktionals benutzt wird, propagiert aber auch spuriose Freiheitsgrade der Vektormesonen. Wir müssen daher feststellen, daß das Problem eines vollständig die Symmetrie auf dem Zweipunktkorrelatorniveau respektierenden selbstkonsistenten Schemas weiterhin offen bleiben muß.

Wir sind dem gesteckten Ziel zumindest auf pragmatischem Wege näher gekommen. Immerhin garantiert unser Ansatz für die Projektion auf einen transversalen Polarisationsensor für die Vektormesonen, daß nur transversale physikalische Moden in den internen Linien der selbstkonsistenten Diagramme propagiert werden und auch numerische Probleme am Lichtkegel vermieden werden, da nirgends explizit durch $p_0^2 - \vec{p}^2$ dividiert werden muß, wie bei einer naiven Projektion auf die dreidimensional longitudinalen Freiheitsgrade.

Anhang A

Wichtige Formeln

A.1 Formeln zur Auswertung von Vakuumfeynmanintegralen

Wir verwenden ausschließlich das Verfahren der dimensional Regularisierung. Die Herleitung der Formeln findet sich in [Hee97].

A.1.1 Standard-Feynman-Integrale

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(m^2 - p^2 - 2pq - i\eta)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_\mu}{(m^2 - p^2 - 2pq - i\eta)^\alpha} = -\frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{q_\mu}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_\mu p_\nu}{(m^2 - p^2 - 2pq - i\eta)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}} \times \\ &\times \left[q_\mu q_\nu \Gamma(\alpha - \omega) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (q^2 + m^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p^2}{(m^2 - p^2 - 2pq - i\eta)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}} \times \\ &\times [q^2 \Gamma(\alpha - \omega) - \omega (q^2 + m^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(l^2)^2}{(M^2 - l^2 - i\eta)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \omega(\omega + 1) \frac{\Gamma(\alpha - 2 - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha - 2 - \omega}} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma}{(M^2 - l^2 + i\eta)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - 2 - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha - 2 - \omega}} \times \\ &\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 Laurententwicklung der Γ -Funktion

Die Laurententwicklung der Γ -Funktion um die Pole $x_n = -n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right]. \quad (\text{A.7})$$

$$\Psi_1(1) = -\gamma, \quad \forall n \geq 1 : \Psi_1(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (\text{A.8})$$

Dabei ist $\gamma = 0.577\dots$ die Euler-Mascheronische Konstante.

A.1.3 Feynmans Parametrisierung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^m b_k^{\alpha_k}} = \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^m \alpha_k)}{\prod_{k=1}^m \Gamma(\alpha_k)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{m-2}} dx_{m-1} \times \quad (\text{A.11})$$

$$\times \frac{x_{m-1}^{\alpha_1-1} (x_{m-2} - x_{m-1})^{\alpha_2-1} \cdots (1-x_1)^{\alpha_m-1}}{[b_1 x_{m-1} + b_2 (x_{m-2} - x_{m-1}) + \cdots + b_m (1-x_1)]^{\sum_{k=1}^m \alpha_k}} \quad (\text{A.12})$$

A.2 Freie Real-Time-Propagatoren für skalare Bosonen

$$i\Delta^{--}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + n(p_0)2\pi\delta_\epsilon(p^2 - m^2)$$

$$i\Delta^{++}(p) = -\frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + n(p_0)2\pi\delta_\epsilon(p^2 - m^2) \quad (\text{A.13})$$

$$i\Delta^{+-}(p) = 2\pi \text{sign } p_0 \delta_\epsilon(p^2 - m^2) [f(p_0) + 1] = 2\pi [n(p_0) + \Theta(p_0)] \delta_\epsilon(p^2 - m^2),$$

$$i\Delta^{-+}(p) = 2\pi \text{sign } p_0 \delta_\epsilon(p^2 - m^2) f(p_0) = 2\pi [n(p_0) + \Theta(-p_0)] \delta_\epsilon(p^2 - m^2).$$

Dabei ist die regularisierte δ -Distribution als

$$2\pi\delta_\epsilon(x) = \frac{i}{x + i\epsilon} - \frac{i}{x - i\epsilon} = \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (\text{A.14})$$

wobei ϵ im schwachen Sinne $\rightarrow +0$ zu lesen ist.

Die bosonischen Verteilungsfunktionen sind durch

$$f(x) = \frac{1}{\exp(\beta x) - 1}; \quad n(x) = f(|x|) \quad (\text{A.15})$$

gegeben.

Es gelten die folgenden nützlichen Beziehungen:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) + 1 &= 0, \quad f(x)f(y-x) = f(y)[1 + f(x) + f(y-x)], \\ n(x) &= \text{sign } x [\Theta(-x) + f(x)]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Transversale Vierertensoren

In der thermodynamischen Feldtheorie ist die Lorentzinvarianz durch Auszeichnung des Ruhesystems des Wärmebads gebrochen. Im Ruhesystem des Wärmebads spalten daher vierdimensional transversale Funktionen in einem räumlich longitudinalen und einen räumlich transversalen Anteil auf:

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu}(p) &= -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \\ \Theta_T(p)^{jk} &= \delta^{jk} + \frac{p^j p^k}{p^2}, \quad \Theta_T^{0j}(p) = \Theta_T^{j0}(p) = 0, \\ \Theta_L^{\mu\nu}(p) &= \Theta^{\mu\nu}(p) - \Theta_T^{\mu\nu}(p).\end{aligned}\tag{A.17}$$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\Theta_L(p)^{\mu\nu}\Theta_T(p)_{\nu\sigma} &= 0, \\ \Theta^{\mu\nu}(p)\Theta_{\mu\nu}(p) &= 3, \\ \Theta_T^{\mu\nu}(p)\Theta_{T\mu\nu} &= 2, \\ \Theta_L^{\mu\nu}(p)\Theta_{L\mu\nu} &= 1.\end{aligned}\tag{A.18}$$

A.4 Einige perturbative „thermische“ Feynmanintegrale

Im folgenden sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ eine dreidimensional skalare Funktion. Kleine Buchstaben bezeichnen Vierervektoren, kleine Buchstaben mit Pfeilen Dreiervektoren sowie die entsprechenden großen Buchstaben Beträge von Dreiervektoren. So ist l ein Vierervektor, \vec{l} die raumartigen Komponenten im Ruhesystem des Wärmebads und $L = \|\vec{l}\|$ mit $\|\cdot\|$ als euklidischer Norm.

Im folgenden werden Kugelkoordinaten $(L, u = \cos\theta, \phi)$ des \mathbb{R}^3 mit durch den äußeren Dreierimpuls \vec{p} festgelegter Polarrichtung eingeführt. Es wird vorausgesetzt, daß f nur von L , P und u abhängen, was im Falle von dreidimensional skalaren Feldern der Fall ist.

$$\begin{aligned}\int d^4l f(l) \delta(l^2 - m^2) \delta[(l+p)^2 - m^2] &= \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dL \frac{L}{\omega P} \left\{ \Theta(1 - |u_+|) f(\omega, \vec{l})|_{u=u_+} + \Theta(1 - |u_-|) f(-\omega, \vec{l})|_{u=u_-} \right\} \\ \text{mit } u_\pm &= \frac{(\omega \pm p_0)^2 - L^2 - P^2 - m^2}{2LP} \text{ und } \omega = \sqrt{L^2 + m^2}\end{aligned}\tag{A.19}$$

Hierbei ist in Fällen, die die analytische Fortsetzung von euklidischen Feynmanintegralen zu Minkowskischen Feynmanintegralen verlangen, der Ausdruck $p^2 - m^2$ durch $p^2 - m^2 + i\epsilon$ zu ersetzen, um die Funktion auf dem korrekten Riemannblatt auszuwerten.

Bei numerischen Rechnungen ist dabei vorausgesetzt, daß die üblichen Konventionen eingehalten werden: Auf dem gesuchten Blatt sind Wurzeln positiver reeller Werte positiv reell sowie Logarithmen reell (Prinzipalwerte). Diese Voraussetzungen sind sowohl im Fortrancompiler g77 als auch in Mathematica 3.0 erfüllt.

A.5 Exakte Propagatoren und Selbstenergien

Zwischen den Schwinger-Keldysh-Greenfunktionen und retardierten bzw. avancierten Greenfunktionen bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} G^R &= G^{--} - G^{-+} = G^{+-} - G^{++}, \\ G^A &= G^{-+} - G^{++} = G^{--} - G^{+-}, \\ G^{+-} + G^{-+} &= G^{--} + G^{++}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Spektraldarstellungen für retardierte und avancierte Greenfunktionen:

$$G^{R/A}(p) = \int \frac{dz}{2\pi} \frac{A(z, \vec{p})}{z - p_0 \mp i\epsilon}. \quad (\text{A.21})$$

Aus den Kramers-Kronig-Relationen folgt dann die Beziehung für die Spektrale Dichte

$$A(z, \vec{p}) = -2 \text{Im}[G^R(z, \vec{p})], \quad G^A(p) = G^{R*}(p). \quad (\text{A.22})$$

Die entsprechenden Beziehungen für die Selbstenergien:

$$\begin{aligned} \Sigma^R &= \Sigma^{--} + \Sigma^{-+}, \quad \Sigma^A = \Sigma^{--} + \Sigma^{+-} \\ \Sigma^{++} + \Sigma^{--} &= -(\Sigma^{+-} + \Sigma^{-+}). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Kadanoff-Baym-Gleichungen im Matrixformalismus:

$$-(\square_1 + m^2)\hat{G}(x_1, x_2) = \hat{\tau}\delta^{(4)}(x_1 - x_2) + \hat{\tau} \left\langle \hat{\Sigma}(x_1, x_3)\hat{G}(x_3, x_2) \right\rangle_3 \quad (\text{A.24})$$

mit der Matrix

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

A.6 Einige Vakuumdiagramme

Wir wollen im folgenden einige Einschleifen-Vakuumdiagramme berechnen, die sich als nützlich erweisen. Es handelt sich um den einfachen Fall, wenn die Schleife aus nur zwei Propagatorlinien besteht und Vertizes, die insgesamt zu Impulsordnungen $O(p^k)$ mit $k = 0, 1, 2$ im Zähler führen. Diese Rechnungen stellen gleichzeitig einfache Beispiele zur Technik der dimensional Regularisierung dar.

Wir definieren die regularisierte Funktion $L_1^{(\text{reg})}$ durch

$$L_1^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0)[(l+p)^2 - m_2^2 + i0]}, \quad (\text{A.26})$$

wobei hier und im folgenden stets die Skala μ der dimensional Regularisierung eingeführt wurde, so daß die Kopplungskonstanten in jeder Raum-Zeitdimension $d = 2\omega = 4 - 2\epsilon$ dieselbe Impulsdimension wie bei $d = 4$ besitzen.

Dieses Integral soll (zunächst für $p^2 < 0$) mit dem nach einer Wickrotation berechneten Standardintegral (A.1) ausgeführt werden. Dazu schreiben wir (A.26) mit einer Feynmanparametrisierung gemäß (A.9) und vertauschen die Integrationsreihenfolge, was wegen der Regularisierung erlaubt ist

$$L_1^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \frac{\mu^{2\epsilon}}{\{(1-x)(l^2 - m_1^2 + i0) + x[(l+p)^2 - m_2^2 + i0]\}^2}. \quad (\text{A.27})$$

Durch eine quadratische Ergänzung läßt sich der Nenner in die Gestalt

$$(l+xp)^2 - M^2 \text{ mit } M^2 = (1-x)m_1^2 + xm_2^2 - x(1-x)p^2 - i0 \quad (\text{A.28})$$

bringen, und die Anwendung von (A.1) führt nach Laurententwicklung bzgl. ϵ um $\epsilon = 0$ auf

$$L_1^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) + O(\epsilon). \quad (\text{A.29})$$

Das verbleibende Integral läßt sich geschlossen ausführen. Es folgt

$$\begin{aligned} L_1^{(\text{reg})}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = & -\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi\mu^2} \right) \right] + O(\epsilon) + \\ & \frac{1}{16\pi^2 s} \left\{ (m_1^2 - m_2^2) \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) - 2s + \lambda(s + i0, m_1, m_2) \times \right. \\ & \left. \times \left[\text{artanh} \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) + \text{artanh} \left(\frac{s - m_1^2 + m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Das Integral ist also, wie vom Weinbergtheorem her zu erwarten, logarithmisch divergent. Wir haben weiter die Abkürzung

$$\lambda(s, m_1, m_2) = \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]} \quad (\text{A.31})$$

eingeführt.

Das Feynmanintegral (A.30) besitzt bei $s = (m_1 + m_2)^2$ einen Verzweigungspunkt, und auf dem physikalischen Blatt ist der Hauptwert der Wurzel und der des Logarithmus (d.h. die Wurzel ist für positive reelle Argumente positiv reell und der Logarithmus reell definiert) zu nehmen. Der Schnitt liegt bei $s > (m_1 + m_2)^2$ entlang der reellen Achse.

Mit denselben Techniken berechnen wir noch zwei weitere Integrale:

$$p^\mu L_2^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l^\mu \mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0)[(l+p)^2 - m_2^2 + i0]} \quad (\text{A.32})$$

ergibt

$$\begin{aligned} L_2^{(\text{reg})}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = & \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi\mu^2} \right) \right] + O(\epsilon) \\ & + \frac{1}{32\pi^2 s^2} \left\{ s(m_1^2 - m_2^2 + 2s) - (m_1^2 - m_2^2 + s)\lambda(s + i0, m_1, m_2) \times \right. \\ & \left. \times \left[\text{artanh} \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) + \text{artanh} \left(\frac{s - m_1^2 + m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) \right] - \right. \\ & \left. - [(m_1^2 - m_2^2)^2 - 2m_2^2 s] \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

ein wie zu erwarten linear divergentes Resultat.

Schließlich werten wir noch

$$L_3^{\mu\nu(\text{reg})}(p, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l^\mu l^\nu \mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0)[(l+p)^2 - m_2^2 + i0]} \quad (\text{A.34})$$

aus:

$$L_3^{\mu\nu(\text{reg})}(p, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = p^\mu p^\nu L_{31}^{(\text{reg})}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) + g^{\mu\nu} L_{32}^{(\text{reg})}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) \quad (\text{A.35})$$

mit den skalaren Funktionen

$$\begin{aligned} L_{31}^{(\text{reg})}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = & -\frac{1}{48\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \frac{1}{6} \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi\mu^2} \right) \right] + O(\epsilon) + \\ & + \frac{1}{288\pi^2 s^3} \left\{ -s[6(m_1^2 - m_2^2)^2 + 3(m_1^2 - 5m_2^2)s + 13s^2] + \right. \\ & + 6\lambda(s + i\epsilon, m_1, m_2)[m_1^4 + (s - m_2^2)^2 + m_1^2(s - 2m_2^2)] \times \\ & \times \left[\text{artanh} \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) + \text{artanh} \left(\frac{s - m_1^2 + m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) \right] + \\ & \left. + [(m_1^2 - m_2^2)^3 + 3(m_2^4 - m_1^2 m_2^2)s - 3m_2^2 s^2] \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

und

$$\begin{aligned} L_{32}^{(\text{reg})}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = & \frac{s - 3(m_1^2 + m_2^2)}{192\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi\mu^2} \right) \right] + O(\epsilon) + \\ & + \frac{1}{576\pi^2 s^2} \left\{ s[3(m_1^2 - m_2^2)^2 - 12(m_1^2 + m_2^2)s + 5s^2] - 3\lambda^3(s + i\epsilon, m_1, m_2) \times \right. \\ & \times \left[\text{artanh} \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) + \text{artanh} \left(\frac{s - m_1^2 + m_2^2}{\lambda(s + i0, m_1, m_2)} \right) \right] + \\ & \left. + [(m_1^2 - m_2^2)^3 - 3(m_1^4 - m_2^4)s] s^2 \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

A.7 Tadpoles

Für die eichinvariante Behandlung von Eichtheorien ist weiter die Normalordnung im Operatorformalismus zu vermeiden, weil sie die manifeste Eichinvarianz bricht. Die Tadpolebeiträge sorgen dafür, daß die Eichfelder keiner Massenrenormierung bedürfen, was essentiell ist, weil im Wigner-Weyl-Mode (also bei nicht spontan gebrochener Eichsymmetrie) ein Vektorfeld notwendig masselos ist, also auch kein endlicher Gegenterm zulässig ist. Wieder mit Hilfe von (A.1) finden wir sofort

$$T_1(m, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^{2\epsilon}}{l^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right]. \quad (\text{A.38})$$

Insbesondere für $m \rightarrow 0$ findet sich das bekannte Resultat

$$\lim_{m \rightarrow 0} T_1(m, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^{2\epsilon}}{l^2 + i\epsilon} = 0. \quad (\text{A.39})$$

A.8 Numerisches Integrationsverfahren

Im folgenden soll kurz das in dieser Arbeit verwendete numerische Integrationsverfahren zur Auswertung von Diagrammen mit zwei inneren Punkten beschrieben werden, das auf Ideen von J. Knoll zurückgeht. Diagramme dieser Topologie können offensichtlich durch sukzessive Auswertung von Einschleifenintegralen berechnet werden, wie es ausführlich in Kapitel 3 am Beispiel des Sunsetdiagramms erläutert worden ist.

Es sind Integrale der Form

$$C(p_0, P) = \int d^4l A(l_0, L) B(l_0 + p_0, |\vec{l} + \vec{p}|) \quad (\text{A.40})$$

zu berechnen. Dabei sind A und B die Funktionen der Zeitkomponente und des Betrags der Raumkomponenten des jeweiligen Viererimpulses. Mit $|\vec{k}|$ bezeichnen wir die euklidische Norm des Dreiervektors \vec{k} .

Wir nutzen zunächst die Rotationssymmetrie aus und führen Kugelkoordinaten ein. Wir bemerken, daß in Kugelkoordinaten die δ -Distribution die Gestalt

$$\delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \underbrace{\frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2)}_{\frac{2}{r_1} \delta(r_1^2 - r_2^2)} \delta(\phi_1 - \phi_2) \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (\text{A.41})$$

besitzt. Für eine Funktion, die nur vom Betrag des Vektors \vec{x} abhängt, gilt also

$$f(|\vec{x}|) = \int d^3\vec{y} f(|\vec{y}|) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{1}{x^2} \delta(|\vec{x}| - |\vec{y}|) f(|\vec{y}|). \quad (\text{A.42})$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich nun der räumliche Anteil des Integrals einer Funktion, die von $|\vec{l}|$ und $|\vec{l} + \vec{p}|$ abhängt wie folgt umformulieren. Dazu sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} G(|\vec{p}|) &= \int d^3\vec{l} F(|\vec{l}|, |\vec{l} + \vec{p}|) = \\ &= \int d^3\vec{l}_1 \int d^3\vec{l}_2 F(|\vec{l}_1|, |\vec{l}_2|) \delta^{(3)}(\vec{l}_1 - \vec{l}_2 + \vec{p}) = \\ &= \frac{1}{2\pi p^2} \int d^3\vec{l}_1 \int d^3\vec{l}_2 \int d^3\vec{l}_3 F(|\vec{l}_1|, |\vec{l}_2|) \delta^{(3)}(\vec{l}_1 - \vec{l}_2 + \vec{l}_3) \delta(p - l_3) = \\ &= \frac{1}{2\pi p} \int d^3\vec{l}_1 \int d^3\vec{l}_2 F(|\vec{l}_1|, |\vec{l}_2|) \delta[p^2 - (\vec{l}_1 - \vec{l}_2)^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Die Einführung von Kugelkoordinaten in \vec{l}_1 und \vec{l}_2 , wobei \hat{l}_1 als Polarrichtung von \vec{l}_2 benutzt wird, und Abintegration der vier Winkelintegrale ergibt:

$$G(P) = \frac{2\pi}{p} \int_0^\infty l_1 dl_1 \int_0^\infty l_2 dl_2 \Theta(|l_1 - l_2| \leq P \leq l_1 + l_2) F(l_1, l_2). \quad (\text{A.44})$$

Für die numerische Implementation auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterabstand h läßt sich diese Gleichung auch so interpretieren, daß jedes Stützstellenpaar l_1 und l_2 einen Beitrag

$$\frac{2\pi l_1 l_2}{P} F(l_1, l_2) h^2 \quad (\text{A.45})$$

zu allen Endimpulsen P liefert, die die in der Θ -Funktion in (A.44) notierte Dreiecksungleichung erfüllen.

Die numerisch genauesten Resultate, getestet an Gaußschen Faltungsintegralen, ergibt sich, wenn die Impulse auf halbzahligen Stützstellen vertafelt werden, also

$$P_{i_P} = (i_P + 1/2)h, \quad l_{1i_1} = (i_1 + 1/2)h, \quad l_{2i_2} = (i_2 + 1/2)h \quad (\text{A.46})$$

gesetzt und die ganzzahlige Dreiecksungleichung $|i_1 - i_2| \leq |i_P| \leq i_1 + i_2$ benutzt wird.

Zusammen mit den Energieintegralen, die ebenfalls auf äquidistanten Gittern realisiert werden, erlaubt Gl. (A.44) eine geschickte Anordnung der numerischen Schleifen, so daß deren Verschachtelungstiefe maximal vom Grade 4 wird, d.h. der numerische Aufwand ist proportional zu N^4 , wobei N die Anzahl der Stützstellen für p_0 und $P = |\vec{p}|$ bezeichnet. Übersichtsrechnungen wurden mit $N = 100$, die gezeigten Resultate mit $N = 200$ durchgeführt. Eine naive Implementation (3-dimensionale Integrale für ein zweidimensionales Feld) hätte einen Aufwand der Ordnung N^5 bedeutet, was zu um zwei Größenordnungen höheren Rechenzeiten geführt hätte.

Wegen möglicher scharfer Strukturen der Spektralfunktionen erweist es sich als vorteilhaft, die retardierten Greenfunktionen bzgl. der p_0 im Integralmittel zu vertafeln. Dazu wurde der *inverse* retardierte Propagator zwischen den Stützstellen linear interpoliert und der Mittelwert gemäß dieser Interpolation für jedes Intervall vermöge

$$G_R(p_0, P) \approx \int_{l_{<}^0}^{l_{>}^0} G_R(l_0, P) = \ln \left[\frac{\ln(G_{>}^{-1}/G_{<}^{-1})}{G_{>}^{-1} - G_{<}^{-1}} \right] \quad (\text{A.47})$$

berechnet. Dabei sind $l_{<}^0$ und $l_{>}^0$ die Grenzen des betrachteten zu p_0 gehörigen Intervalls und $G_{< / >}^{-1}$ die entsprechenden Werte des inversen retardierten Propagators.

Die bei Ableitungskopplungen auftretenden Richtungsabhängigkeiten können dadurch umgangen werden, daß die jeweils benötigten tensoriellen Spuren wie $g_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}$ oder $p_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}$ berechnet werden. Die dabei auftretenden Skalarprodukte können dann vermöge

$$l_\mu p^\mu = \frac{1}{2}[(l+p)^2 - l^2 - p^2] \quad (\text{A.48})$$

durch „isotrope“ Größen ausgedrückt werden.

Neben kontrollierbaren Gitterartefakten erweist sich die numerische Iteration der Selbstenergieberechnungen als stabil, da selbst zur Berechnung von Funktionswerten am Rande des Gitters hauptsächlich nur Werte der Integranden aus dem Inneren des Gitters wesentliche Beiträge zum Integral liefern.

Anhang B

Feynmanregeln

In diesem Anhang erläutern wir die Herleitung der Feynmanregeln und stellen sie für die in dieser Arbeit behandelten Modelle zusammen.

B.1 Herleitung der Feynmanregeln im Raumzeitbereich

Der Vollständigkeit halber zeigen wir in diesem Abschnitt, wie sich die Feynmanregeln im Raumzeitbereich aus (2.84) herleiten lassen.

Entwickeln wir (2.84) in j , erkennen wir, daß $G_k^{(n)}$ nur für gerade n von 0 verschieden sein kann. Dies ist Folge der Symmetrie der Lagrangedichte, gegenüber der „Feldspiegelungstransformation“ $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$. Weiter trägt nur der Term bei, der genau $4k + n$ äußere Ströme enthält.

Bezeichnen wir nun, wie in der Diagrammtechnik üblich, mit einer Linie den Propagator $i\Delta_\varphi$, mit einem Sternchen den äußeren Strom und mit einem Punkt ein Raumzeitargument, können wir die Ableitung diagrammatisch ausführen (vgl. Abb. B.1).

Dabei bedeutet jede Ableitung nach j die Entfernung eines Sternchens, und die Bezeichnung des Punktes, an dem dieser angebracht ist mit dem im Strom auftretenden Raumzeitargument. Dabei entsteht durch die Ableitungen $\delta^4/\delta J(y)^4$ ein Raumzeitpunkt y , von dem vier Linien ausgehen, der zu diesem Wechselwirkungsterm gehörende *Vertex*. Entsprechend dem Ausdruck

$$\begin{array}{ccc}
 \star x & = j(x) & \star \leftarrow \star \\
 \bullet \xrightarrow{x'} \bullet & = iG_\varphi(x', x) & \star \leftarrow \star \\
 & & \vdots \\
 & & \star \leftarrow \star
 \end{array}
 \quad \frac{1}{[(4k+n)/2]!} \left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+n)/2}$$

(a)
(b)

Abbildung B.1: (a) Elemente für Diagramme mit äußeren Quellen: Jedes Sternchen steht für einen äußeren Strom, jede Linie für einen freien Konturpropagator $i\Delta_\varphi$. Ein Punkt bezeichnet ein Raumzeitargument mit einer Zeitkomponente auf der Kontur.

(b) Das Integral, aus dem sich ein Beitrag zu $G_k^{(n)}$ durch Ableiten nach den äußeren Quellen gemäß (2.85) ergibt. Nach Bilden der Ableitungen und Nullsetzen der äußeren Ströme kann nämlich offensichtlich nur ein Term, der vorher genau $4k+n$ Ströme enthalten hat, übrig bleiben. Der Symmetriefaktor des Diagramms wurde explizit angegeben.

(2.85) gehört zu jedem solchen Vertex ein Faktor $-i\lambda/4!$, und es ist über den entsprechenden Punkt zu integrieren (für das Zeitargument entlang der Kontur). Die Linie kann sowohl im gleichen Vertex als auch in einem anderen Vertex enden. Jede Linie steht, wie oben eingeführt, für einen *freien Propagator* $i\Delta_{\mathcal{G}}(x', x)$. Durch die Bildung der n Ableitungen entsprechend den Raumzeitargumenten der n -Punktfunktion entstehen *äußere Punkte*, in denen eine Linie endet, die jedoch nicht einem Vertex angehört. Über diese Punkte ist natürlicherweise nicht zu integrieren. Jedes so durch Ableitung entstehende Gebilde nennen wir *Feynmandiagramm*.

I.a. besteht ein Feynmandiagramm aus mehreren zusammenhängenden Teildiagrammen, und das Gesamtdiagramm ist das Produkt aus allen Teildiagrammen. Ein Ausdruck der Form (2.85) wird i.a. aus der Summe verschiedener Diagramme bestehen, die alle eine gleiche Anzahl äußerer Punkte besitzen. Da alle Ströme in unserem Fall die gleichen sind, weil wir es nur mit einem Feldfreiheitsgrad zu tun haben, entstehen zu jedem Paar (k, n) eine endliche Anzahl von Graphen, von denen aber nur wenige verschiedene analytische Ausdrücke liefern. Es ist offensichtlich, daß Diagramme, die die gleiche Topologie bzgl. der Verbindung innerer und äußerer Punkte mit Propagatorlinien aufweisen, den gleichen Wert besitzen. Ein Diagramm gegebener Topologie trägt aber nun offensichtlich mit einem Multiplizitätsfaktor bei, der sich durch die Möglichkeiten ergibt, die k Vertizes mit $(4k - n)/2$ Propagatorlinien zu verbinden, so daß genau das Diagramm der gegebenen Topologie entsteht.

Um dies zu verstehen, muß man sich nur klar machen, daß nach dem Ableiten und Nullsetzen der äußeren Ströme nur der Beitrag der Ordnung $(4k - n)/2$ der Exponentialreihe, die das freie erzeugende Funktional generiert, übrig bleiben kann. Der Faktor $(1/2)^{(4k-n)/2}$ hebt sich weg, weil alle Ströme durch Differenzieren wegfallen müssen, d.h. jeder Term der Form

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} d^{2\omega} x' d^{2\omega} x j(x') \Delta_{\mathcal{G}}(x', x) j(x) \quad (\text{B.1})$$

wird differenziert. Der Faktor $1/[(4k - n)/2]!$ von der Exponentialfunktion fällt heraus, weil die $(4k - n)/2$ Faktoren gleich sind. Wir fassen also die Feynmanregeln wie folgt zusammen:

Zur Berechnung des Beitrags zur n -Punkt Greenfunktion $G_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ in k -ter Ordnung der Störungsreihe vorgegebener Topologie sind folgende Schritte notwendig:

- (1) Es sind zunächst k Vertizes mit vier amputierten Beinchen zu zeichnen. Amputiert heißt hierbei, daß mit den Beinchen keine Propagatoren assoziiert werden sollen. Außerdem sind die äußeren Punkte x_1, \dots, x_n mit der Bezeichnung des dazugehörigen Raumzeitarguments hinzuzufügen.
- (2) Die äußeren Punkte werden gemäß der vorgegebenen Topologie des Diagramms verbunden. Dabei ist die Zahl der Möglichkeiten entsprechend der Zahl der amputierten Beinchen, mit denen dies geschehen kann, zu multiplizieren. Schließlich sind die nunmehr topologisch festgelegten Vertizes ebenfalls durch Linien zu verbinden, wobei die entsprechenden Möglichkeiten ebenfalls in das Produkt eingehen. Wir nennen den so bestimmten Faktor M („Multiplizität“ des Diagramms).
- (3) Jede Linie, die zwei Raumzeitpunkte x und y , verbindet, trägt einen Faktor $i\Delta_{\mathcal{G}}(x, y)$ bei. Die Argumente sind dabei entgegen der Pfeilrichtung anzuordnen, obwohl dies wegen der speziellen Symmetrie der Greenfunktion für die Feynmanregeln im Konfigurationsraum keine Rolle spielt. Der Grund dafür ist, daß im Pfadintegralformalismus wegen der gleichen Ströme in (2.84) die Reihenfolge der Raumzeitargumente der Greenfunktion unerheblich

ist. Man beachte, daß dies auch im Operatorformalismus wegen der Symmetrie des Ausdrucks $iG^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{G}} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle$ bzgl. des Vertauschens beliebiger Raumzeitargumente selbstverständlich ist. Wir werden jedoch bei der Aufstellung der Feynmanregeln im Impulsraum von dieser Pfeilrichtung noch Gebrauch machen. Jeder Vertex steht für einen Faktor $-i\lambda/4!$. Schließlich ist noch mit $M/k!$ zu multiplizieren und über die inneren Punkte (also zu einem Vertex gehörigen Raumzeitargumente) zu integrieren.

- (4) Es ist durch die entsprechende Näherung von $Z[j = 0]$ zu dividieren. Dabei haben wir berücksichtigt, daß wir das erzeugende Funktional der freien Theorie auf 1 normiert haben.

Der Propagator ist dabei ganz allgemein durch den quadratischen Anteil in der Lagrangedichte bestimmt. Es ist das Inverse der quadratischen Form, die entsteht, wenn man alle Ableitungen durch partielle Integration auf ein Feld bringt. Das zeigt, daß eine Störungstheorie nur sinnvoll formulierbar ist, wenn diese quadratische Form invertierbar ist, also wenn die freien Feldgleichungen eindeutig lösbar sind. Es handelt sich dabei um die Greenfunktion der freien Feldgleichung mit pseudoperiodischen für bosonische und pseudoantiperiodischen Randbedingungen für fermionische Felder.

Der Vertex zu einem Wechselwirkungsterm ist durch die entsprechende Ableitung dieses Terms nach den Feldern (und Division durch die entstehenden Faktoren bei identischen in dem Term vorkommende Felder) gegeben.

Wir bemerken dabei, daß wegen (4) die Diagramme eliminiert werden, die geschlossene Teildigramme, also Diagramme ohne äußere Punkte enthalten. In der Vakuumquantentheorie entspricht dies der Renormierung des Vakuumzustandes in der gegebenen Ordnung Störungstheorie. In unserem Fall handelt es sich um Korrekturen zur Zustandssumme (in dem in (2.62) durch Z' gegebenen Sinne), die für die Normierung des Statistischen Operators auf 1 in jeder Ordnung der Störungsentwicklung sorgen. Für einen elementaren Beweis s. [Hee98].

Betrachten wir als Beispiel die Korrektur niedrigster Ordnung zur Zweipunktfunktion in der ϕ^4 -Theorie. Die oben angedeutete Rechnung kann hier leicht von Hand ausgeführt werden, wir wollen jedoch die Rechnung mit Hilfe der Diagrammregeln ausführen.

Für die Korrektur zur Zustandssumme erhalten wir nur ein Diagramm:

$$iZ_1 = \text{diagramm} = \frac{i\lambda}{8} \int d^{2\omega}y \Delta_{\mathcal{G}}^2(y, y). \quad (\text{B.2})$$

Der Multiplizitätsfaktor ergibt sich dabei wie folgt: Gemäß den Feynmanregeln zeichnen wir einen Vertex mit vier Beinchen. Jetzt nehmen wir ein Beinchen und verbinden es entsprechend der Topologie des Diagramms mit einem der drei verbliebenen Beinchen (3 Möglichkeiten). Ein weiteres Beinchen ist mit dem letzten verbliebenen zu verbinden, so daß hier $M = 3$, der gesamte Vertexfaktor also $-3i\lambda/4! = -i\lambda/8$ ist. Ein weiteres $--$ Zeichen stammt von den beiden Linien, die für $i\Delta(y, y)$ stehen.

Für die Zweipunktfunktion haben wir die folgenden beiden Diagramme:

$$Z'[0]iG_1^{(2)} = \text{diagramm} \times \text{diagramm} + \text{diagramm}. \quad (\text{B.3})$$

Insgesamt bekommen wir also

$$G_0^{(2)} + G_1^{(2)} = \frac{\left(\text{---} \left(1 + \text{---} \right) + \text{---} + O(\lambda^2) \right)}{1 + \text{---} + O(\lambda^2)}. \quad (\text{B.4})$$

Entwicklung des Nenners in eine geometrische Reihe gibt dann in der Ordnung λ

$$G_1^{(2)} = \text{---}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 Das abelsche Vektormesondominanzmodell

Das abelsche Vektormesondominanzmodell wurde ausführlich in Abschnitt 4.1 besprochen. Wir geben nur die Feynmanregeln für die wechselwirkenden Teilchen an. Die drei Geister (1 skalarer und 2 Faddeev-Popov-Geister) wechselwirken im Falle der abelschen Eichtheorie nicht und werden daher lediglich zur Berechnung der Zustandssumme des wechselwirkungsfreien Gases in beliebigen R_ξ -Eichungen benötigt.

Wir formulieren die perturbativen Feynmanregeln für das Vakuum. Die entsprechenden Regeln für endliche Temperaturen und Dichten erhält man daraus durch Anwendung der in Anhang B für Skalarfelder angegebenen Regeln.

Wir folgen in der Konvention der Feynmanregeln [IZ80]: Die Pfeile an Propagatoren und Vertizes geben die Richtung des Ladungsflusses geladener Teilchen an. Im Fall äußerer Linien für eine Streuamplitude ist nach der LSZ-Reduktionsformel jeweils die Wellenfunktion $\pi(p)$ ($\pi^*(-p)$) für einlaufende π^+ (π^-) Mesonen bzw. $\pi^*(-p)$ ($\pi(p)$) für auslaufende π^+ (π^-) Mesonen und entsprechend für Leptonen einzusetzen. Die freien ebenen Wellenfunktionen in Impulsdarstellung sind für Bosonen auf $2\omega(\vec{p})$ bzw. für Fermionen der Masse m auf $\omega(\vec{p})/m$ normiert. In dieser Konvention ergibt sich aus den Feynmanregeln die durch $S = \mathbb{1} + iT$ definierte Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang vom Anfangszustand $|i\rangle$ zum Endzustand $|f\rangle$

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{T}_{fi}. \quad (\text{B.6})$$

Dabei bezeichnet P_i den Gesamtviererimpuls im Anfangs- und P_f den Gesamtviererimpuls im Endzustand. Damit gilt für den invarianten differentiellen Streuquerschnitt der Streuung von zwei Teilchen im Anfangskanal (Impulse p_1 und p_2) zu einer beliebigen Zahl von Teilchen im Endkanal (Impulse p_3, \dots, p_n)

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{|\mathcal{T}_{fi}|^2}{\prod_i k_i!} \frac{d^3 \vec{p}_3}{2\omega(\vec{p}_3)} \dots \frac{d^3 \vec{p}_n}{2\omega(\vec{p}_n)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f). \quad (\text{B.7})$$

Hierin bezeichnet k_i die Anzahl identischer Teilchen der Spezies i im Endkanal. Für jedes massive Fermion der Spezies i im Anfangs- und Endkanal ist entsprechend der gegenüber Bosonen verschiedenen Normierung mit $2m_i$ zu multiplizieren.

Die Propagatoren für die ρ -Mesonen, Photonen, Pionen und Leptonen lauten in R_ξ -Eichung¹:

$$\mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 - m_\rho^2 + i\eta} + \frac{i(1 - \xi_\rho)p^\mu p^\nu}{(p^2 - m_\rho^2 + i\eta)(p^2 - \xi m_\rho^2 + i\eta)} \quad (\text{B.8})$$

$$\mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\eta} + \frac{i(1 - \xi_\gamma)p^\mu p^\nu}{(p^2 + i\eta)^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m_\pi^2 + i\eta} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m_l^2 + i\eta}. \quad (\text{B.11})$$

Die Vertizes sind gegeben durch

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} r \\ q \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} r - q \\ \mu \end{array} = -ig_{\rho\pi}(q^\mu + r^\mu) \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} r \\ q \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} r - q \\ \mu \end{array} = -ie(q^\mu + r^\mu) \end{array} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = ig_{\rho\pi}^2 g^{\mu\nu} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = ie^2 g^{\mu\nu} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = 2ie g_{\rho\pi} g^{\mu\nu} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = -\frac{i\lambda}{8} \quad (\text{B.16})$$

$$\mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu = i \frac{e}{g_{\rho\gamma}} p^2 \Theta^{\mu\nu}(p) \quad (\text{B.17})$$

¹Die Eichfixierungskonstanten für ρ -Meson und Photon können unabhängig voneinander gewählt werden!

Anhang C

Fermionische kohärente Zustände

Für die Pfadintegralformulierung fermionischer Quantenfeldtheorien werden die verallgemeinerten Eigenzustände der Feldoperatoren und deren kanonisch konjugierte Impulse benötigt, die wir hier der Vollständigkeit halber angeben wollen. Wir benötigen sie in dieser Arbeit allerdings nur am Rande bei der Behandlung von Eichtheorien im Rahmen des Faddeev–Popov–Formalismus. Im bosonischen Fall sind das gerade die *kohärenten Zustände*. Da die fermionischen Feldoperatoren Antikommutatorregeln statt Kommutatorregeln genügen, müssen die „Eigenwerte“ sowohl der Felder als auch der Impulse durch eine antikommutative Algebra, die sog. *Grassmannalgebra*, realisiert werden. Wir folgen hierbei (bis auf eine Vorzeichenkonvention beim Integrieren) der Konvention in [Wei95].

Wir beginnen mit einer Quantenfeldtheorie, in der die Raumzeitkoordinaten gegittert sind. Diesen Schritt müssen wir für das Pfadintegral ohnehin zunächst durchführen. Wir ignorieren dabei alle mathematischen Probleme, die mit einer solchen Diskretisierung im Zusammenhang mit Fermionen auftreten können.

Dann haben wir es mit einer Operatoralgebra zu tun, die aus einer endlichen (oder höchstens abzählbar unendlichen) Anzahl fundamentaler Feldoperatoren und deren kanonisch konjugierten Impulsen erzeugt wird. Diese Operatoren genügen den folgenden Antikommutatorregeln:

$$[\psi_\alpha, \Pi_\beta]_+ = i\delta_{\alpha\beta}, \quad [\psi_\alpha, \psi_\beta]_+ = [\Pi_\alpha, \Pi_\beta]_+ = 0. \quad (\text{C.1})$$

Insbesondere folgt, daß für jedes α gilt $\Pi_\alpha^2 = \psi_\alpha^2 = 0$. Daraus ergibt sich sofort, daß es einen Zustand $|0\rangle \in \mathcal{H}$ und $\langle 0| \in \mathcal{H}^*$ gibt, so daß

$$\forall \alpha : \psi_\alpha |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \pi_\alpha = 0 \quad (\text{C.2})$$

gilt. Es muß betont werden, daß $\langle 0|$ *nicht* das duale Element zu $|0\rangle$ ist. Wir definieren den durch (C.2) nicht festgelegten Faktor von $|0\rangle$ so, daß $\langle 0|0\rangle = 1$.

Eine vollständige Basis von \mathcal{H} ist dann durch

$$|\alpha, \beta, \dots\rangle = \Pi_\alpha \Pi_\beta \cdots |0\rangle \quad (\text{C.3})$$

gegeben. Dabei kann eine beliebige Anzahl von untereinander verschiedenen Impulsoperatoren auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ angewandt werden. Es ist lediglich eine beliebige dann aber feste Anordnung der Impulsoperatoren zu wählen, was einer bestimmten Phasenwahl der Basiszustände entspricht.

Die Feldoperatoren und Impulsoperatoren wirken dann wie folgt auf die Basiszustände

$$\begin{aligned}\psi_\alpha |\alpha, \beta, \dots\rangle &= \psi_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha |\beta, \dots\rangle = [\psi_\alpha, \mathbf{\Pi}_\alpha]_+ |\beta, \dots\rangle = i |\beta, \dots\rangle, \\ \mathbf{\Pi}_\alpha |\alpha, \beta, \dots\rangle &= \mathbf{P}_\alpha^2 |\beta, \dots\rangle = 0.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Entsprechend kann man eine Basis des dualen Raums durch

$$\langle \alpha, \beta, \dots | = \langle 0 | \frac{1}{i} \psi_\alpha \frac{1}{i} \psi_\beta \dots \tag{C.5}$$

generieren. Aus den Antikommutatorrelationen liest man dann sofort ab, daß

$$\langle \alpha', \beta', \dots | \alpha, \beta, \dots \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{\alpha', \beta', \dots\} \neq \{\alpha, \beta, \dots\} \\ \sigma(P) & \text{falls } \alpha' = P(\alpha), \beta' = P(\beta), \dots, \end{cases}\tag{C.6}$$

wobei $P \in S(\{\alpha, \beta, \dots\})$.

Definieren wir nun verallgemeinerte Eigenvektoren der Feldoperatoren

$$\forall \alpha : \psi_\alpha |\eta\rangle = \eta_\alpha |\eta\rangle, \tag{C.7}$$

so müssen aufgrund der Antikommutativität der Feldoperatoren untereinander die η_α ebenfalls untereinander antikommutieren. Wir werden auf diese Weise auf die sog. *Grassmannzahlen* geführt. Diese stellen einen \mathbb{C} -Vektorraum dar, die durch ein assoziatives, distributives und \mathbb{Z}_2 -graduiertes¹ Produkt zur *Grassmannalgebra* erweitert werden. Im folgenden soll es darum gehen, die Analysis auf dieser Grassmannalgebra so zu definieren, daß möglichst weitgehende Analogien zu den im Pfadintegral für Bosonen angewandten Rechenregeln entstehen. Dieser Kalkül wurde durch Berezin in die Quantenfeldtheorie eingeführt.

Die Grassmannvariablen sollen der Bequemlichkeit halber nicht nur untereinander, sondern auch mit den Feld- und Impulsoperatoren antikommutieren:

$$[\eta_\alpha, \eta_\beta]_+ = [\eta_\alpha, \psi_\beta]_+ = [\eta_\alpha, \mathbf{\Pi}_\beta]_+ = 0. \tag{C.8}$$

Die Exponentialfunktion von Produkten von Feld- bzw. Impulsoperatoren mit Grassmannzahlen ist dann durch die formale Potenzreihe definiert. Dabei ist zu beachten, daß dies in dem Fall, daß nur endlich viele Feld- und Impulsoperatoren vorliegen, stets eine abbrechende Reihe ist, da jedes Monom, in dem eine Grassmannzahl oder ein Operator mehr als einmal vorkommen, wegen der Antikommutatorregel verschwindet. Mit dieser Definition gilt dann

$$|\eta\rangle = \exp \left[-i \sum_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha \eta_\alpha \right] |0\rangle. \tag{C.9}$$

Zum Beweis bemerken wir, daß wir die Exponentialfunktion faktorisieren dürfen, da die $\mathbf{\Pi}_\alpha \eta_\alpha$ untereinander vertauschen, dabei ist auch die Reihenfolge der Produkte in diesem Fall unerheblich. Um zu zeigen, daß (C.9) verallgemeinerter Zustand der Feldoperatoren ist, wenden wir

¹Da die Erzeugenden η_α antikommutieren (antikommutieren) Produkte aus einer geraden (ungeraden) Zahl solcher Erzeugenden mit allen anderen Produkten. Man spricht daher von einer \mathbb{Z}_2 -graduierten Algebra.

diese Faktorisierung an:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha |\eta\rangle &= \psi_\alpha \exp(-i\mathbf{\Pi}_\alpha \eta_\alpha) \exp\left(-i \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{\Pi}_\beta \eta_\beta\right) |0\rangle = -i[\psi_\alpha, \mathbf{\Pi}_\alpha]_+ \eta_\alpha \exp\left(-i \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{\Pi}_\beta \eta_\beta\right) |0\rangle = \\ &= \eta_\alpha (1 - i\mathbf{\Pi}_\alpha \eta_\alpha) \exp\left(-i \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{\Pi}_\beta \eta_\beta\right) |0\rangle = \eta_\alpha |\eta\rangle.\end{aligned}\tag{C.10}$$

Dabei haben wir $\eta_\alpha^2 = 0$ ausgenutzt.

Analog zeigt man, daß

$$\langle \eta | = \langle 0 | \prod_\alpha \psi_\alpha \exp\left(-i \sum_\alpha \eta_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha\right)\tag{C.11}$$

ein verallgemeinerter dualer Eigenvektor (verallgemeinerter Linkseigenvektor) ist. Das Produkt über die antikommutierenden Feldoperatoren ist dabei als geordnetes Produkt zu verstehen, wobei eine lexikalische Ordnung willkürlich ausgezeichnet wird. Unterschiedliche Ordnungen resultieren lediglich in Phasenfaktoren, die wir beliebig wählen können. Für die Rechnungen müssen wir allerdings eine feste Phasenordnung wählen. Für (C.11) gilt

$$\langle \eta | \psi_\alpha = \langle \eta | \eta_\alpha.\tag{C.12}$$

Man zeigt leicht, daß für die so definierten Eigenvektoren der Feldoperatoren gilt

$$\langle \eta' | \eta \rangle = \prod_\alpha (\eta_\alpha - \eta_{\alpha'}).\tag{C.13}$$

Auf dieselbe Weise definieren wir verallgemeinerte Rechts- und Linkseigenvektoren der Impulsoperatoren

$$|\eta^*\rangle = \exp\left(-i \sum_\alpha \psi_\alpha \eta_\alpha^*\right) \prod_\beta \mathbf{\Pi}_\beta |0\rangle \quad \text{und} \quad \langle \eta^* | = \langle 0 | \exp\left(-i \sum_\alpha \eta_\alpha^* \psi_\alpha\right).\tag{C.14}$$

Für das Übergangsmatrixelement finden wir ebenfalls durch elementare Rechnungen

$$\langle \eta^* | \eta \rangle = \exp\left(-i \sum_\alpha \eta_\alpha^* \eta_\alpha\right).\tag{C.15}$$

Damit ist bereits eine weitgehende Analogie zu den bosonischen kohärenten Zuständen erreicht. Allerdings gilt wegen der Antikommutativität der Operatoren und Grassmannvariablen

$$\langle \eta | \eta^* \rangle = i^N (-1)^{N(N-1)/2} \exp\left(+i \sum_\alpha \eta_\alpha^* \eta_\alpha\right).\tag{C.16}$$

Wir stellen weiter fest, daß die kohärenten Zustände vollständig sind, denn jeder der durch (C.2) definierten Zustände $|\alpha, \beta, \dots\rangle$ ist wegen (C.9) gerade der Koeffizient des Produkts $\eta_\alpha \eta_\beta \dots$.

Dies motiviert die Definition des Integrals über Grassmannzahlen. In einer N -dimensionalen Grassmannalgebra ist jede durch eine formale Potenzreihe definierbare Funktion ein endliches Polynom, und die Entwicklung enthält ein eindeutig festgelegtes Glied der Form

$$f(\eta) = \cdots + c \prod_{\alpha} \eta_{\alpha}, \quad (\text{C.17})$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ ist. Dann definieren wir als

$$\int d^N \eta f(\eta) = c. \quad (\text{C.18})$$

Das so definierte *Berezinintegral* folgt analogen Rechenregeln wie uneigentliche Mehrfachintegrale über \mathbb{R}^N , wenn man entsprechende Vorzeichenkonventionen beachtet. Insbesondere ist das Integral \mathbb{C} -linear und unabhängig unter Translationen, letzteres, weil sich in einer formalen Entwicklung von $f(\eta + \eta')$ um $\eta' = 0$ der Koeffizient vor $\prod_{\alpha} \eta_{\alpha}$ nicht ändert. Das Berezinintegral läßt sich als iteriertes Integral von Integralen über nur ein η_{α} verstehen, indem wir definieren

$$\forall c \in \mathbb{C} \int d\eta_{\alpha} c \eta_{\beta} \eta_{\gamma} \cdots \eta_{\alpha} = c \eta_{\beta} \eta_{\gamma} \cdots, \quad (\text{C.19})$$

d.h. das Vorzeichen des Integrals entscheidet sich an der Zahl von Vertauschungen von Grassmannzahlen in den Monomen, die notwendig sind, um die Variable, über die integriert wird, ganz nach rechts zu bringen. Wir vereinbaren weiter, daß die „Differenziale“ $d\eta_{\alpha}$ unter dem Integral untereinander sowie mit allen Grassmannzahlen und fermionischen Operatoren antikommutieren sollen.

Eine sehr wichtige Regel ist die Substitutionsregel für das Mehrfachintegral, dessen Beweis daher hier eingeschoben werden soll. Es sei also $M_{\alpha\beta}$ eine beliebige invertierbare $\mathbb{C}^{N \times N}$ -Matrix. Dann gilt

$$\eta'_{\alpha} = M_{\alpha\beta}^{-1} \eta_{\beta} \Rightarrow \prod_{\alpha} \eta'_{\alpha} = \prod_{\alpha} \sum_{\beta_{\alpha}} M_{\alpha\beta_{\alpha}}^{-1} \eta_{\beta_{\alpha}}. \quad (\text{C.20})$$

Da ein Produkt, das mehrere gleiche Grassmannzahlen enthält, verschwindet, genügt es, über $\beta_{\alpha} \in S_N$ zu summieren. Bringt man also die Produkte auf der rechten Seite in lexikalische Ordnung, muß man dies durch einen Faktor $\sigma(\beta)$ berücksichtigen, so daß man schließlich

$$\prod_{\alpha} \eta'_{\alpha} = \sum_{\beta_{\alpha}} \prod_{\alpha} \sigma(\beta) M_{\alpha\beta_{\alpha}}^{-1} \prod_{\gamma} \eta_{\gamma} = (\det M)^{-1} \prod_{\gamma} \eta_{\gamma} \quad (\text{C.21})$$

erhält. Damit folgt für jede analytische Funktion f die Substitutionsregel

$$\int d^N \eta' f(M\eta') = \det M \int d^N \eta f(\eta), \quad (\text{C.22})$$

d.h. im Gegensatz zu gewöhnlichen Integralen in \mathbb{R}^N steht die Jacobideterminante der Transformation im Zähler und nicht im Nenner.

Für das euklidische Pfadintegral finden wir damit sofort

$$G(M) = \int d^N(\eta^*, \eta) \exp(\eta_j^* M_{jk} \eta_k) = \det M \quad (\text{C.23})$$

für nichtsinguläre hermitesche Matrizen M . Zum Beweis müssen wir nur durch eine Hauptachsentransformation M auf Diagonalgestalt bringen. Da die dabei angewandte Transformation unitär ist, ist das Pfadintegralmaß gemäß (C.22) dabei invariant:

$$G(M) = \int d^N(\eta^*, \eta) \exp \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \eta_j^* \eta_j \right). \quad (\text{C.24})$$

Darin bezeichnen die λ_j die Eigenwerte der Matrix M . Jetzt beachten wir, daß die Exponentialfunktion wegen des paarweisen Auftretens der Grassmannzahlen im Argument faktorisiert:

$$\exp \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \eta_j^* \eta_j \right) = \prod_{j=1}^N (1 + \lambda_j \eta_j^* \eta_j). \quad (\text{C.25})$$

Wir können also die Faktoren einzeln integrieren und erhalten schließlich

$$G_M = \prod_{j=1}^N \lambda_j = \det M, \quad (\text{C.26})$$

und das war zu zeigen. Die Regel entspricht wieder genau der bosonischen Gaußintegralregel, nur daß die Determinante im Zähler und nicht im Nenner steht. Dieser wichtige Umstand spielt bei der Behandlung der Quantisierung von Eichtheorien eine wesentliche Rolle (vgl. Abschnitte 2.3.6 und 4.1).

Da die $|\eta\rangle$ eine vollständige Basis des Hilbertraums bilden, können wir jeden Zustand $|f\rangle$ in der Form

$$|f\rangle = \int d^N \eta |\eta\rangle f(\eta) \quad (\text{C.27})$$

schreiben. Dabei setzt sich f aus einer Summe von Monomen, die gerade die aus Summen der Form $\langle \alpha, \beta, \dots | f \rangle \eta_\gamma \eta_\delta \dots \sigma(P)$ bestehen, wobei die $\eta_\gamma \eta_\delta \dots$ gerade komplementär zu den besetzten Zuständen α, β, \dots sind, zusammen. $\sigma(P)$ deutet das Vorzeichen an, das notwendig ist, um die jeweiligen vollständigen Produkte aus N Grassmannzahlen in lexikalische Ordnung zu bringen.

Wir wollen f aus dem gegebenen $|f\rangle$ durch Berezinintegration berechnen, um zu einer Vollständigkeitsrelation der kohärenten Zustände zu gelangen, die wir im Pfadintegral benutzen können wie beim entsprechenden Schritt in den bosonischen Pfadintegralen. Offenbar gilt wegen (C.13)

$$\langle \eta' | f \rangle = \int \langle \eta' | \eta \rangle d^N \eta f(\eta) = \int \prod_{\alpha} (\eta_{\alpha} - \eta'_{\alpha}) d^N \eta f[\eta' + (\eta - \eta')]. \quad (\text{C.28})$$

Bringen wir die $d\eta_{\alpha}$ in $d^N \eta$ nach links, ergibt dies insgesamt lediglich einen Faktor $(-1)^N$. Die formale Entwicklung der Funktion nach Produkten aus Faktoren der Form $(\eta_{\alpha} - \eta'_{\alpha})$ ergibt dann wegen des unter dem Integral explizit stehenden Produkts dieser Faktoren:

$$\langle \eta' | f \rangle = (-1)^N \int d^N \eta \prod_{\alpha} (\eta_{\alpha} - \eta'_{\alpha}) f(\eta) = (-1)^N f(\eta'). \quad (\text{C.29})$$

Damit schreibt sich die Vollständigkeitsrelation mit fermionischen kohärenten Zuständen

$$(-1)^N \int |\eta\rangle d^N \eta \langle \eta| = \mathbf{1}. \quad (\text{C.30})$$

Genauso zeigt man, daß für die verallgemeinerten Impulseigenvektoren die Vollständigkeitsrelation in der Form

$$\int |\eta^*\rangle d^N \eta^* \langle \eta^*| = \mathbb{1} \quad (\text{C.31})$$

gilt.

Nun müssen wir noch die Frage beantworten, wie die Spur eines Operators im Fockraum zu berechnen ist. Dazu genügt zunächst die Betrachtung eines 1-dimensionalen Raumes, d.h. wir haben nur ein Paar aus einem fermionischen Feldoperator und seinem kanonisch konjugierten Impuls. Mit der Vollständigkeitsrelation (C.30) finden wir

$$\text{Tr } \mathbf{O} = \sum_{a=0}^1 \langle a | \mathbf{O} | a \rangle = \sum_{a=0}^1 \int \langle a | \eta \rangle d\eta \underbrace{\langle \eta | \mathbf{O} | \eta' \rangle}_{O_{\eta\eta'}} d\eta' \langle \eta' | a \rangle. \quad (\text{C.32})$$

Nehmen wir nun an, daß wir nur Operatoren betrachten, die aus einer geraden Anzahl von Feld- und Impulsoperatoren zusammengesetzt sind, wie es für die Observablen einer fermionischen Theorie sein muß, so kommutiert das Matrixelement $O_{\eta\eta'}$ mit allen Grassmannvariablen, so daß wir schreiben können

$$\text{Tr } \mathbf{O} = \sum_{a=0}^1 \int d\eta d\eta' \langle a | \eta \rangle \langle \eta' | a \rangle O_{\eta\eta'}. \quad (\text{C.33})$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß auch das Produkt $d\eta d\eta'$ mit allen Größen kommutiert.

Um nun die Summe über die Besetzungszustände ausführen zu können und deren Vollständigkeit auszunutzen, müssen wir die formalen Skalarprodukte vertauschen. Dabei ist Vorsicht geboten, weil in die Konstruktion der kohärenten Zustände Grassmannzahlen involviert sind. In der Tat gilt die nicht triviale Regel

$$\langle a | \eta \rangle \langle \eta' | a \rangle = \langle -\eta' | a \rangle \langle a | \eta \rangle, \quad (\text{C.34})$$

wie man sofort durch direkte Anwendung der Definitionen auf beiden Seiten zeigen kann. Damit folgt

$$\text{Tr } \mathbf{O} = \int d\eta d\eta' \langle -\eta' | \eta \rangle O_{\eta'\eta} \quad (\text{C.35})$$

Vertauschen von $d\eta$ mit $d\eta'$ ergibt schließlich wegen der Vollständigkeitsrelation (C.30)

$$\text{Tr } \mathbf{O} = \int d\eta' \langle -\eta' | \mathbf{O} | \eta' \rangle. \quad (\text{C.36})$$

Es ist also wesentlich, daß bei der Spurbildung ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel im Bra zu berücksichtigen ist. Die Verallgemeinerung auf beliebigdimensionale Grassmannalgebren erfolgt durch iterierte Anwendung dieser Regel für den eindimensionalen Fall:

$$\text{Tr } \mathbf{O} = \int d^N \eta' \langle -\eta' | \mathbf{O} | \eta' \rangle. \quad (\text{C.37})$$

Wie in Abschnitt 2.3.4 dieser Arbeit gezeigt wird, ergibt dies im Unterschied zur analogen bosonischen Pfadintegralformel antiperiodische Randbedingungen für die Felder und führt damit zu den Fermiverteilungsfunktionen bei der Berechnung thermodynamischer Erwartungswerte und in den Greenfunktionen, wie es für Fermionenfelder sein muß.

Anhang D

Photonen– und Dileptonenproduktionsraten

In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang zwischen der Selbstenergie der ρ -Mesonen und Photonen– und Dileptonenproduktionsraten herleiten.

D.1 Photonenproduktionsrate

Die Übergangsrates R_{fi} für einen Prozeß, der das System von einem asymptotisch freien Anfangszustand $|i\rangle$ zu einem asymptotisch freien Endzustand $|f\rangle$ überführt, ist mit einem S -Matrixelement verknüpft

$$R_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{\tau V} \quad (\text{D.1})$$

verknüpft, wobei τ die Beobachtungszeit und V das Systemvolumen bedeuten. Unter $|S_{fi}|^2$ ist dabei

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \tau \quad (\text{D.2})$$

zu verstehen, wie aus der von Fermi angegebenen korrekten Interpretation der δ -Distribution folgt.

Im Falle der Elektrodynamik ist nun das S -Matrixelement durch

$$S_{fi} = \left\langle f \left| \int d^4x \mathbf{J}_\mu(x) \mathbf{A}^\mu(x) \right| i \right\rangle \quad (\text{D.3})$$

gegeben, wobei \mathbf{J}^μ den elektromagnetischen Strom der stark wechselwirkenden Materie bedeutet. Die Translationsinvarianz der Wirkung und des Gleichgewichtszustandes hat zur Folge, daß

$$\mathbf{J}^\mu(x) = \exp(i\mathbf{P}x) \mathbf{J}^\mu(0) \exp(-i\mathbf{P}x) \quad (\text{D.4})$$

ist, wobei \mathbf{P} der Operator des Gesamtimpulses ist. Da die asymptotischen Anfangs- und Endzustände Impulseigenzustände sind, gilt folglich

$$\langle f | \mathbf{J}^\mu(x) | i \rangle = \exp[i(P_f - P_i)x] \langle f | \mathbf{J}^\mu(0) | i \rangle. \quad (\text{D.5})$$

Die auf ein Teilchen pro Volumen normierte Wellenfunktion für Photonen mit Viererimpuls k im Anfangszustand ist durch

$$A^\mu = \frac{\epsilon^\mu}{\sqrt{2\omega V}} \exp(-ikx) \quad (\text{D.6})$$

gegeben. Die Polarisation der Photonen wird durch die Polarisationsmatrix $\rho_{\mu\nu} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu$ beschrieben. Wir benötigen die Polarisationsmatrix für unpolarisierte Photonen, die gemäß der Vorschrift $\text{tr}(\rho_{\mu\nu}) = 1$ zu normieren ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Photon den Polarisationsvektor e_α besitzt, ist dann durch $e_\alpha^* \rho^{\alpha\beta} e_\beta$ gegeben. Wir müssen nun zur Bestimmung der korrekten Polarisationsmatrix für unpolarisierte Photonen zunächst die Eichung fixieren. Dabei ist die Strahlungseichung, $A_0 = 0$, $\nabla \vec{A} = 0$ bequem. Für ein unpolarisiertes Photon mit Impuls $\vec{k} = \omega \vec{n}$ ist die Polarisationsmatrix in dieser Eichung durch

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2}(\delta_{ab} - n_a n_b), \quad \rho_{0a} = \rho_{a0} = \rho_{00} = 0 \quad (\text{D.7})$$

gegeben, wobei der aufgrund der Eichbedingung zu verlangenden Transversalität Rechnung getragen wurde.

Wir können nun zu einer beliebigen Eichung übergehen indem wir eine Eichtransformation durchführen. Dann haben wir in der neuen Eichung

$$\rho'_{\mu\nu} = \rho_{\mu\nu} + \chi_\nu k_\mu + \chi_\mu k_\nu \quad (\text{D.8})$$

mit einem beliebigen Vektorfeld $\chi_\mu(k)$. Wir setzen nun $\chi_0 = -1/(4\omega)$ und $\chi_a = k_a/(4\vec{k}^2)$. Dann ergibt sich

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}. \quad (\text{D.9})$$

Berechnen wir jedoch zunächst das Matrixelement für die Emission eines Photons mit Impuls \vec{k} und Polarisation ϵ in niedrigster Ordnung bzgl. der Feinstrukturkonstanten α :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{\epsilon^\mu}{\sqrt{2\omega V}} \int d^4x [\exp(ikx) + \exp(-ikx)] \exp[i(P_f - P_i)x] \langle f | \mathbf{J}_\mu(0) | i \rangle = \\ &= \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{2\omega V}} [\delta^{(4)}(P_f - P_i + k) + \delta^{(4)}(P_f - P_i - k)] \langle f | \mathbf{J}_\mu(0) | i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Jetzt summieren wir über die Polarisierungen mit Hilfe der oben hergeleiteten Polarisationsmatrix für unpolarisierte Photonen. Dabei ist entsprechend den zwei Polarisationsmöglichkeiten eines Photons mit 2 zu multiplizieren. Außerdem beachten wir die Vorschrift (D.2) beim Quadrieren des S -Matrix-Elements. Dann erhalten wir schließlich für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$R_{fi} = -\frac{(2\pi)^4 g^{\mu\nu}}{\omega V} [\delta^{(4)}(P_f - P_i + k) + \delta^{(4)}(P_f - P_i - k)] \langle f | \mathbf{J}_\mu(0) | i \rangle \langle i | \mathbf{J}_\nu(0) | f \rangle. \quad (\text{D.11})$$

Wir gehen dabei davon aus, daß die Photonen hinreichend schnell das Wärmebad verlassen, so daß im Anfangszustand keine Photonen vorhanden sind. Über die Anfangszustände ist mit der Gleichgewichtsverteilung zu mitteln und über die Endzustände zu summieren.

Für die Photonenproduktionsrate eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht erhalten wir demnach

$$dR = -\frac{g^{\mu\nu}}{\omega V} \frac{V d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{Z} \sum_{i,f} \exp(-\beta K_i) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f - k) \langle f | \mathbf{J}_\mu(0) | i \rangle \langle i | \mathbf{J}_\nu(0) | f \rangle. \quad (\text{D.12})$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu \mathbf{Q}$ geschrieben, wobei \mathbf{H} den Hamiltonoperator, \mathbf{Q} den Ladungsoperator und μ das chemische Potential bezeichnen. Jetzt definieren wir die Stromkorrelatoren für Absorption und Emission eines Photons durch

$$f_{\mu\nu}^\pm(k) = \sum_{i,f} \pm \frac{1}{Z} \exp(-\beta K_i) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f \pm k) \langle f | \mathbf{J}_\mu(0) | i \rangle \langle i | \mathbf{J}_\nu(0) | f \rangle. \quad (\text{D.13})$$

Hierin entspricht das obere Vorzeichen der Emission, das untere der Absorption eines Photons durch das Wärmebad. Eine direkte Rechnung zeigt, daß

$$f_{\mu\nu}^+(k) = -\exp(\beta\omega)f_{\mu\nu}^-(k), \quad (\text{D.14})$$

also das *Prinzip vom detaillierten Gleichgewicht* gilt.

Jetzt läßt sich die Korrelationsfunktion mit Hilfe der Spektralfunktion

$$f_{\mu\nu}^n = f_{\mu\nu}^+ + f_{\mu\nu}^- = -[\exp(\beta\omega) - 1]f_{\mu\nu}^- \quad (\text{D.15})$$

zur retardierten und thermischen Korrelationsfunktion analytisch fortsetzen:

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}^R(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \frac{f_{\mu\nu}^n(z, \vec{k})}{z - k_0 - i\epsilon} \\ f_{\mu\nu}^T(\omega_n, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \frac{f_{\mu\nu}^n(z, \vec{k})}{z - i\omega_n}, \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

wobei $\omega_n = 2\pi nT$, $n \in \mathbb{Z}$ die Matsubarafrequenzen für Bosonen bezeichnen.

Diese Funktionen lassen sich nun leicht in Beziehung zur reduzierten Selbstenergie der Photonen bringen. Dazu seien $D_{\mu\nu}^R$ der exakte und $\Delta_{\mu\nu}^R$ der freie retardierte Photonenpropagator in einer beliebigen Eichung. Die Photonen Produktionsrate durch die Realzeitgreenfunktion

$$iG_{\mu\nu}(x, y) = \langle T_{\mathcal{X}} \mathbf{A}_{\mu}(x) \mathbf{A}_{\nu}(y) \rangle \quad (\text{D.17})$$

ausgedrückt werden. Der Zusammenhang zwischen retardierter exakter und ungestörter Greenfunktion ist durch

$$G^R = \Delta^R + \Delta^R P^R G^R \quad (\text{D.18})$$

gegeben. Anwenden von G_0^{-1} ergibt aber gerade den gesuchten Stromkorrelator. Aus der Kramers-Kronigrelation für retardierte Funktionen ergibt sich demnach der Zusammenhang zwischen Spektralfunktion des Stromkorrelators und retardiertem Stromkorrelator zu

$$f_{\mu\nu}^n(k) = 2 \text{Im} P_{\mu\nu}^R(k). \quad (\text{D.19})$$

Dies oben eingesetzt ergibt

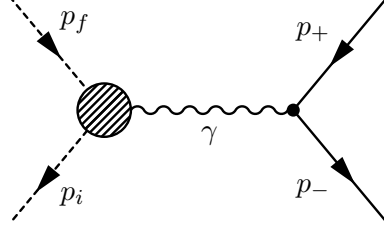
$$f_{\mu\nu}^- = -2n(\omega) \text{Im} P_{\mu\nu}^R(k). \quad (\text{D.20})$$

Da aber unsere Überlegungen nur auf Treelevel-Niveau bzgl. der Photonen (jedoch exakt bzgl. der starken Wechselwirkung innerhalb des Wärmebades!) gelten, muß man statt des reduzierten Polarisationstensors die irreduzible Selbstenergie (Vakuumpolarisation) des Photons einsetzen. Wir gelangen so zu dem wichtigen Zusammenhang zwischen Photonenproduktionsrate und retardierter Photonenselbstenergie

$$\omega \frac{dR_{\gamma}}{d^3k} = -\frac{2g^{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \text{Im} \Pi_{\mu\nu}^R(\omega). \quad (\text{D.21})$$

D.2 Die Dileptonenproduktionsrate

Aus der soeben hergeleiteten Photonenproduktionsrate läßt sich in derselben Ordnung in α auch die Dileptonenproduktionsrate berechnen, denn sie kann durch den folgenden Prozeß beschrieben werden:



Der Leptonenstrom in Baumgraphennäherung ist für einen reinen Zustand

$$J_\nu^l(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x) = \frac{e}{V}\sqrt{\frac{m_l^2}{E_+E_-}}\exp[-i(p_+ + p_-)x]\bar{u}(p_-, s_-)\gamma_\nu v(p_+, s_+). \quad (\text{D.22})$$

Zur Ausführung der Summe über alle Polarisationen für den Fall unpolarisierter Leptonen benötigen wir wieder die entsprechende Polarisationsmatrix. Im reinen Zustand gilt

$$\rho_{ik} = u_i(p, s)\bar{u}_k(p, s), \quad (\text{D.23})$$

wobei i und k Spinorindizes $1 \dots 4$ bezeichnen. Die Matrix ist entsprechend der hier verwendeten Normierungsvorschrift für die Spinoren auf $\text{tr } \rho = 2m_l$ normiert.

Der mittlere Spin eines Teilchens ist

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \vec{\Sigma} \psi = \frac{1}{4E} \bar{u}(p, s) \gamma^0 \vec{\Sigma} u(p, s). \quad (\text{D.24})$$

In der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen ist die Spinmatrix durch

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{D.25})$$

gegeben, wobei $\vec{\sigma}$ den Spaltenvektor mit den Paulischen Spinmatrizen als Einträgen bezeichnet. Dieses Resultat können wir für einen beliebigen bezüglich des Spins gemischten Zustandes verallgemeinern:

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{4E} \text{tr}(\rho \gamma^0 \vec{\Sigma}) = \frac{1}{4E} \text{tr}(\rho \gamma^5 \vec{\gamma}). \quad (\text{D.26})$$

Im Falle des reinen Zustandes gilt wegen der Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - m)\rho = \rho(\not{p} - m) = 0. \quad (\text{D.27})$$

Da diese Beziehung linear ist, muß dies für jede Polarisationsmatrix gelten. Im Ruhesystem des Leptons wird der Polarisationszustand vollständig durch $2\langle \vec{s} \rangle = \vec{\xi}$ beschrieben. Diesen Vektor kann man mittels eines Lorentzboosts vom Ruhesystem des asymptotisch freien Teilchens in ein beliebiges System transformieren. Dadurch wird der Spin im Ruhesystem des Teilchens durch einen Vierervektor, den wir mit a bezeichnen, kovariant beschrieben.

Dabei handelt es sich um einen Paritätspseudovektor, weil der Spin axial ist. Im Ruhesystem ist $a = (0, \vec{\xi})^t$ und $p = (m, 0)^t$, also $a^\mu p_\mu = 0$ in jedem System. Weiter gilt $a_\mu a^\mu = -\vec{\xi}^2$ in

jedem Bezugssystem. Daraus ergeben sich die Komponenten von a in einem System, in dem das Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/E$ besitzt, zu

$$a^0 = \frac{|\vec{p}|}{m} \vec{\xi}_{\parallel}, \quad \vec{a}_{\perp} = \vec{\xi}_{\perp}, \quad \vec{a}_{\parallel} = \frac{E}{m} \vec{\xi}_{\parallel}. \quad (\text{D.28})$$

Dabei beziehen sich \parallel und \perp auf die Bewegungsrichtung des Leptons. Insgesamt ist also

$$\vec{a} = \vec{\xi} + \frac{\vec{p}(\vec{\xi}\vec{p})}{m(E+m)}, \quad a^0 = \frac{\vec{a}\vec{p}}{m}. \quad (\text{D.29})$$

Für unpolarisierte Leptonen ist $\vec{\xi} = 0$ und damit $a = 0$. Folglich kann ρ nur mit Hilfe von p und den Gamma-Matrizen aufgebaut werden. Damit $(\not{p} - m)\rho = 0$ ist, muß also $\rho \propto (\not{p} + m)$ sein. Wegen $\text{tr} \gamma = 0$ ist $\text{tr}(\not{p} + m) = 4m$, also

$$\rho = \frac{1}{2}(\not{p} + m). \quad (\text{D.30})$$

Der Vollständigkeit halber sei nur noch erwähnt, daß für teilweise polarisierte Leptonen

$$\rho = \frac{1}{2}(\not{p} + m)(1 - \gamma^5 \not{\phi}) \quad (\text{D.31})$$

gilt. Zur Mittelung über die Spins ist mit diesem ρ zu multiplizieren und die Spur zu bilden. Für die Bildung der Spinsumme ist das Ergebnis den zwei Einstellmöglichkeiten des Spins entsprechend zu verdoppeln.

In unserem Fall gilt also

$$\text{tr} \left[\frac{\not{p}_- + m_l}{2m_l} \gamma_{\nu} \frac{\not{p}_+ - m_l}{2m_l} \gamma_{\beta} \right] = 4(p_{-\nu} p_{+\beta} + p_{+\nu} p_{-\beta} - g_{\nu\beta} p_{-} p_{+}). \quad (\text{D.32})$$

Wie oben im Falle der Photonenrate gezeigt, lautet somit die Dileptonenrate

$$\begin{aligned} E_+ E_- \frac{dR}{d^3\vec{p}_+ d^3\vec{p}_-} &= \frac{e^2}{2\pi^6} [p_{\nu}^- p_{\beta}^+ + p_{\beta}^- p_{\nu}^+ - g_{\nu\beta} (p_+ p_- + m_l^2)] \times \\ &\times D^{\mu\nu}(k) D^{\alpha\beta}(-k) \frac{1}{Z} \sum_{i,f} \exp(-\beta K_i) (2\pi)^4 \times \\ &\times \delta^{(4)}(P_i - P_f - p_+ - p_-) \langle f | \mathbf{J}_{\mu} | i \rangle \langle i | \mathbf{J}_{\alpha} | f \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Hierin ist $k = p_+ + p_-$ der Impuls des virtuellen Photons. Damit ist klar, daß bis auf die Tatsache, daß die Photonen virtuell sind, dieselben Rechnungen wie für die Photonenrate zum Ziel führen:

$$\begin{aligned} E_+ E_- \frac{dR}{d^3\vec{p}_+ d^3\vec{p}_-} &= \frac{2e^2}{(2\pi)^6} [p_{\nu}^- p_{\beta}^+ + p_{\beta}^- p_{\nu}^+ - g_{\nu\beta} (p_+ p_- + m_l^2)] \times \\ &\times D^{\mu\nu}(k) D^{\alpha\beta}(-k) \text{Im} \Pi_{\mu\alpha}^R(k) \frac{1}{\exp(\beta\omega) - 1}. \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Da dieses Resultat ohnehin nur in der Ordnung e^2 genau ist, können wir statt des exakten Photonenpropagators den freien benutzen. In Feynmanzeichnung¹ lautet dieser

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}, \quad (\text{D.35})$$

¹Infolge der Eichinvarianz ist der hadronische Strom notwendig erhalten, und somit das S -Matrixelement für die „on-shell“-Leptonen transversal bezüglich des Impulses, also das S -Matrixelement in dieser Näherung eichinvariant.

und damit erhalten wir schließlich für die Dileptonenrate

$$E_+ E_- \frac{dR}{d^3\vec{p}_+ d^3\vec{p}_-} = \frac{2e^2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2)^2} [p_\mu^- p_\nu^+ + p_\nu^- p_\mu^+ - g_{\mu\nu}(p_+ p_- + m_l^2)] \text{Im} \Pi^{R\mu\nu}(k) \frac{1}{\exp(\beta\omega) - 1}. \quad (\text{D.36})$$

Wir können dies noch in die differentielle Erzeugungsrate bzgl. des Viererimpulsübertrags umrechnen. Es gilt

$$\frac{dR}{d^4k} = 4 \int \frac{d^3\vec{p}_+ d^3\vec{p}_-}{2E_+ 2E_-} \frac{dR}{d^3\vec{p}_+ d^3\vec{p}_-} \delta^{(4)}(k - p_+ - p_-). \quad (\text{D.37})$$

Mit dem kovarianten Phasenraumintegral

$$L^{\mu\nu}(k) = (2\pi)^2 \int \frac{d^4p_+}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_-}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k - p_+ - p_-) \delta(p_+^2 - m_l^2) \delta(p_-^2 - m_l^2) \times \\ \times [p_\mu^- p_\nu^+ + p_\nu^- p_\mu^+ - g_{\mu\nu}(p_+ p_- + m_l^2)] \Theta(p_+^0) \Theta(p_-^0) \quad (\text{D.38})$$

schreibt sich dies

$$\frac{dR}{d^4k} = 32\pi\alpha L^{\mu\nu}(k) \text{Im} \Pi_{\mu\nu}^R(k) f_B(k_0). \quad (\text{D.39})$$

da $L^{\mu\nu}(k)$ ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe ist, der nur von k abhängt, muß er sich aus den Tensoren $k^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ zusammensetzen. Dies parametrisieren wir in der Form

$$L^{\mu\nu}(k) = f(k) \Theta^{\mu\nu}(k) + g(k) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad \text{mit} \quad \Theta^{\mu\nu}(k) = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.40})$$

Wegen der δ -Distributionen im definierenden Integral D.38 gilt

$$g(k) = \frac{1}{k^2} k_\mu k_\nu L^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (\text{D.41})$$

Für den transversalen Anteil gilt nach Ausführung der Integrationen, die am einfachsten im Schwerpunktsystem $\vec{k} = 0$ ausgeführt werden:

$$L^{\mu\nu} = \frac{\pi}{6} \frac{k^2 + 2m_l^2}{(2\pi)^6} \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{k^2}} \Theta^{\mu\nu}(k). \quad (\text{D.42})$$

Dies in (D.39) eingesetzt ergibt schließlich unter Berücksichtigung, daß der Photonenpolarisationstensor transversal ist

$$\frac{dR}{d^4k} = -\frac{\alpha}{12\pi^4} \frac{k^2 + 2m_l^2}{(k^2)^2} \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{k^2}} [2 \text{Im} \Pi_T^R + \text{Im} \Pi_L^R] f_B(k_0). \quad (\text{D.43})$$

Dabei haben wir den Photonenpolarisationstensor in der Form

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_T \Theta_T^{\mu\nu} + \Pi_L \Theta_L^{\mu\nu} \quad (\text{D.44})$$

geschrieben, wobei für den dreidimensional transversalen und den longitudinalen Projektionstensor gilt

$$\Theta_T^{\mu\nu}(k) = \begin{cases} \delta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2 & \text{falls } \mu, \nu \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{falls } \mu = 0 \vee \nu = 0 \end{cases}, \quad \Theta_L^{\mu\nu}(k) = \Theta^{\mu\nu}(k) - \Theta_T^{\mu\nu}. \quad (\text{D.45})$$

Literaturverzeichnis

- [A⁺95] G. Agakishiev et al., Enhanced Production of Low-Mass Electron Pairs in 200 GeV/Nucleon S-Au Collisions at the CERN Super Proton Synchrotron. *Phys. Rev. Lett.* **75** 1272 (1995)
- [AB99] Z. Aouissat und M. Belkacem, Symmetry conserving non-perturbative s-wave renormalization of the pion in hot and baryon dense medium. *Phys. Rev.* **C60** 065211 (1999), <http://de.arXiv.org/abs/nucl-th/9905058>
- [AKLQ92] M. Asakawa, C. M. Ko, P. Levai und X. J. Qiu, Rho meson in dense hadronic matter. *Phys. Rev.* **C46** 1159 (1992)
- [B⁺85] L. M. Barkov et al., Electromagnetic Pion Form Factor in the Timelike Region. *Nucl. Phys.* **B256** 365 (1985)
- [Bay62] G. Baym, Self-Consistent Approximations in Many-Body Systems. *Phys. Rev.* **127** 1391 (1962)
- [BG77] G. Baym und G. Grinstein, Phase Transition in the Σ model at finite Temperature. *Phys. Rev.* **D15** 2897 (1977)
- [BI93] J. P. Blaizot und E. Iancu, Kinetic equations for long wavelength excitations of the quark - gluon plasma. *Phys. Rev. Lett.* **70** 3376 (1993), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9301236>
- [BI94] J. P. Blaizot und E. Iancu, Soft collective excitations in hot gauge theories. *Nucl. Phys.* **B417** 608 (1994), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9306294>
- [BI95] J.-P. Blaizot und E. Iancu, Gauge structure and semiclassical aspects of hard thermal loops. *Nucl. Phys.* **B434** 662 (1995), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9405240>
- [BK61] G. Baym und L. Kadanoff, Conservation Laws and Correlation Functions. *Phys. Rev.* **124** 287 (1961)
- [BL86] D. Bailin und A. Love, Introduction to Gauge Field Theory, Adam Hilger, Bristol and Boston (1986)
- [BP57] N. N. Bogoliubov und O. S. Parasiuk, On the Multiplication of the causal function in the quantum theory of fields. *Acta Math.* **97** 227 (1957)
- [BP92a] E. Braaten und R. D. Pisarski, Calculation of the quark damping rate in hot QCD. *Phys. Rev.* **D46** 1829 (1992)

- [BP92b] E. Braaten und R. D. Pisarski, Simple effective Lagrangian for hard thermal loops. Phys. Rev. **D45** 1827 (1992)
- [BRS76] C. Becchi, A. Rouet und R. Stora, Renormalization of Gauge Theories. Annals of Physics **98** 287 (1976)
- [C⁺98] C. Caso et al., Review of particle physics. Eur. Phys. J. **C3** 1 (1998)
- [CJT74] M. Cornwall, R. Jackiw und E. Tomboulis, Effective Action for Composite Operators. Phys. Rev. **D10** 2428 (1974)
- [CP75] G. Carneiro und C. Pethick, Specific heat of a normal Fermi liquid. II. Microscopic approach. Phys. Rev. **B11** 1106 (1975)
- [Dan84] P. Danielewicz, Quantum Theory of Nonequilibrium Processes, I. Annals of Physics **152** 239 (1984)
- [FP67] L. D. Faddeev und V. N. Popov, Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. Phys. Lett. **B25** 29 (1967)
- [FP97] B. Friman und H. J. Pirner, P-wave polarization of the rho meson and the dilepton spectrum in dense matter. Nucl. Phys. **A617** 496 (1997), <http://de.arXiv.org/abs/nucl-th/9701016>
- [FT92] J. Frenkel und J. C. Taylor, Hard thermal QCD, forward scattering and effective actions. Nucl. Phys. **B374** 156 (1992)
- [GK91] C. Gale und J. I. Kapusta, Vector Dominance Model at Finite Temperature. Nuclear Physics **B357** 65 (1991)
- [Hee97] H. van Hees, Quantenfeldtheoretische Beschreibung des $\pi\rho$ -Systems, Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt (1997), <http://theory.gsi.de/~vanhees/index.html>
- [Hee98] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (1998), <http://theory.gsi.de/~vanhees/index.html>
- [Her92] M. Herrmann, Eigenschaften des ρ -Mesons in dichter Kernmaterie, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt (1992)
- [HFN93] M. Herrmann, B. L. Friman und W. Nörenberg, Properties of rho mesons in nuclear matter. Nucl. Phys. **A560** 411 (1993)
- [HK00a] H. van Hees und J. Knoll, Finite pion width effects on the rho-meson. Accepted for publication by Nucl. Phys. A (2000), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/0007070>
- [HK00b] H. van Hees und J. Knoll, Finite pion width effects on the rho-meson and dilepton spectra. Proceedings: 28th International Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitation: Hadrons in Dense Matter (Hirscheegg 2000) (2000), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/0002087>
- [Hob87] A. Hobson, Concepts in Statistical Mechanics, 2. Aufl., Gordon and Breach Science Publishers (1987)

- [Hoo71] G. 't Hooft, Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields. Nuclear Physics **B35** 167 (1971)
- [HV72] G. 't Hooft und M. Veltman, Regularization and Renormalization of Gauge Fields. Nuclear Physics **B44** 189 (1972)
- [HWH98] D. Hou, E. Wang und U. Heinz, N-point functions at finite temperature. J. Phys. **G24** 1861 (1998)
- [IKV99] Y. B. Ivanov, J. Knoll und D. N. Voskresensky, Self-consistent approximations to non-equilibrium many-body theory. Nucl. Phys. **A657** 413 (1999), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9807351>
- [IKV00] Y. B. Ivanov, J. Knoll und D. N. Voskresensky, Resonance Transport and Kinetic Entropy. Nucl. Phys. **A672** 313 (2000), <http://arXiv.org/abs/nuc1-th/9905028>
- [IZ80] C. Itzykson und J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill Book Comany, New York (1980)
- [JN93] R. Jackiw und V. P. Nair, High temperature response functions and the nonAbelian Kubo formula. Phys. Rev. **D48** 4991 (1993), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9305241>
- [Kat67] A. Katz, Principles of Statistical Mechanics, W. H. Freeman and Company, San Francisco and London (1967)
- [Kel64] L. Keldysh, Diagram Technique for Nonequilibrium Processes. ZhETF **47** 1515, [Sov. Phys JETP **20** 1965 1018] (1964)
- [Kli95] F. Klingl, Untersuchungen zur Struktur der Vektormesonen, Diplomarbeit, Universität Regensburg (1995)
- [KLZ67] N. M. Kroll, T. D. Lee und B. Zumino, Neutral Vector Mesons and the Hadronic Electromagnetic Current. Phys. Rev. **157** 1376 (1967)
- [KSXK90] C. L. Korpa, P. J. Siemens, L. Xiong und C. M. Ko, Dilepton production from pion-pion annihilation in a nuclear medium. Phys. Lett. **B246** 333 (1990)
- [Kug97] T. Kugo, Eichtheorie, Springer-Verlag, Heidelberg (1997)
- [KV96] J. Knoll und D. Voskresensky, Classical and Quantum Many-Body Description of Bremsstrahlung in Dense Matter (Landau-Pomeranchuk-Migdal Effect). Annals of Physics **249** 532 (1996)
- [Leu00] S. Leupold, Towards a test particle description of transport processes for states with continuous mass spectra. Nucl. Phys. **A672** 475 (2000)
- [LR00] J. T. Lenaghan und D. H. Rischke, The $O(N)$ model at finite temperature: Renormalization of the gap equations in Hartree and large- N approximation. J. Phys. G **G26** 431 (2000), <http://de.arXiv.org/abs/nuc1-th/9901049>
- [LW60] J. Luttinger und J. Ward, Ground-State Energy of a Many-Fermion System II. Phys. Rev. **118** 1417 (1960)

- [LZ75] J. Lowenstein und W. Zimmermann, On the Formulation of Theories with Zero-Mass Propagators. Nucl. Phys. **B86** 77 (1975)
- [Noe18] E. Noether, Invariante Variationsprobleme. Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen S. 235 (1918)
- [P⁺97] R. J. Porter et al., Dielectron Cross Section Measurements in Nucleus-Nucleus Reactions at 1.0 A GeV. Phys. Rev. Lett. **79** 1229 (1997)
- [PB40] W. Pauli und F. J. Belinfante, On the Statistical Behavior of known and unknown elementary Particles. Physica **7** 177 (1940)
- [RCW97] R. Rapp, G. Chanfray und J. Wambach, Rho meson propagation and dilepton enhancement in hot hadronic matter. Nucl. Phys. **A617** 472 (1997), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9702210>
- [RG99] R. Rapp und C. Gale, ρ Properties in a Hot Meson Gas. Phys. Rev. **C60** 024903 (1999), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9902268>
- [Rie68] E. Riedel, The entropy expression of a fermi liquid in shielded potential approximation. Application to ³He. Z.Phys. **210** 403 (1968)
- [RUBW98] R. Rapp, M. Urban, M. Buballa und J. Wambach, A microscopic calculation of photoabsorption cross sections on protons and nuclei. Phys. Lett. **B417** 1 (1998)
- [RW99a] R. Rapp und J. Wambach, Chiral symmetry restoration and dileptons in relativistic heavy-ion collisions, <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9909229> (1999)
- [RW99b] R. Rapp und J. Wambach, Low mass dileptons at the CERN-SPS: Evidence for chiral restoration? Eur. Phys. J. **A6** 415 (1999), <http://de.arXiv.org/abs/hep-ph/9907502>
- [Sak60] J. J. Sakurai, Theory of strong interactions. Ann. Phys. **11** 1 (1960)
- [Sch61] J. Schwinger, Brownian Motion of a Quantum Oscillator. J. Math. Phys **2** 407 (1961)
- [Sla72] A. A. Slavnov, Ward identities in gauge theories. Theor. Math. Phys. **10** 99 (1972)
- [Tak57] Y. Takahashi. Nuovo Cim. **6** 370 (1957)
- [Tay71] J. C. Taylor, Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills Field. Nucl. Phys. **B33** 436 (1971)
- [Tay76] J. C. Taylor, Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press (1976)
- [UBRW98] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp und J. Wambach, Momentum dependence of the pion cloud for rho mesons in nuclear matter. Nucl. Phys. **A641** 433 (1998)
- [UBRW00] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp und J. Wambach, Modifications of the rho meson from the virtual pion cloud in hot and dense matter. Nucl. Phys. **A673** 357 (2000)
- [W⁺95] P. Wurm et al., New Results from NA45/CERES. Nucl. Phys. **A590** 103c (1995)

Literaturverzeichnis

- [War50] J. C. Ward, An Identity in Quantum Electrodynamics. Phys. Rev. **78** 182 (1950)
- [Wei60] S. Weinberg, High-Energy Behavior in Quantum Field Theory. Phys. Rev. **118** 838 (1960)
- [Wei95] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Bd. 1, Cambridge University Press (1995)
- [Wei96] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Bd. 2, Cambridge University Press (1996)
- [Wei98] W. Weinhold, Thermodynamik mit Resonanzzuständen, Dissertation, TU Darmstadt (1998), http://theory.gsi.de/the/the_diss.html
- [Zim69] W. Zimmermann, Convergence of Bogoliubov's Method of Renormalization in Momentum Space. Commun. math. Phys. **15** 208 (1969)
- [Zim70] W. Zimmermann, Local Operator Products and Renormalization in Quantum Field Theory. Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory. M.I.T. Press S. 397 (1970)

Literaturverzeichnis

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Jörn Knoll bedanken, der als Betreuer diese Arbeit begleitet hat. Er hat nicht nur die interessante Themenstellung motiviert, sondern hat durch seine stete Diskussionsbereitschaft entscheidend zur Klärung aller im Laufe dieser Arbeit aufgetretenen Probleme beigetragen. Ihm verdanke ich auch die Idee zu dem Algorithmus zur Durchführung der numerischen Berechnungen, die gegenüber der Anwendung der üblichen Integrationsalgorithmen eine erhebliche Verkürzung der Rechenzeit ermöglichte.

Herrn Prof. Nörenberg danke ich für die Aufnahme in die Theoriegruppe bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung und sein stetes Interesse am Fortgang dieser Arbeit. Ihm sind nicht nur die hervorragenden Arbeitsbedingungen in der Theoriegruppe sondern auch die Möglichkeit für viele Aktivitäten außerhalb der GSI zu verdanken. So konnte ich unter anderem an Workshops am ECT* in Trento (Italien), beim INT in Seattle (USA) und in Hirschegg (Österreich) teilnehmen und meine Arbeit vorstellen.

Zur Lösung vieler Detailfragen haben auch die anregenden Diskussionen mit Dr. Vincent Brindejone, Prof. Dr. Hans Feldmeier, Dr. Bengt Friman, Prof. Dr. Yuri Ivanov, Dr. Matthias Lutz, Prof. Dr. Kristof Redlich, Prof. Dr. Yuri Ivanov und Prof. Dr. Dima Voskresensky und Dr. Wolfgang Weinhold beigetragen.

Für die stets freundliche und anregende Atmosphäre in der Arbeitsgruppe danke ich meinen Kommilitonen Thomas Neff, Robert Roth und Peter Krafft. Durch seine engagierte Administration des theorieeigenen Linuxclusters hat Thomas Neff entscheidenden Anteil an den guten Arbeitsbedingungen. Thomas Neff und Robert Roth haben auch Teile dieser Arbeit sehr sorgfältig Korrektur gelesen und mir so bei der Bekämpfung des Tippfehlerteufels geholfen. Bei Frau Elsbeth Raß möchte ich mich ebenfalls für die stets freundliche Begleitung aller Aktivitäten in der Arbeitsgruppe bedanken.

Dem National Institute of Nuclear Theory in Seattle (Washington State) verdanke ich einen anregenden Aufenthalt beim Workshop „Non-Equilibrium Dynamics in Quantum Field Theory“, wo ich, insbesondere in Diskussionen mit Dr. Emil Mottola, einen Teil der grundsätzlichen Fragen bzgl. Symmetrieverletzungen durch Φ -Funktionalnäherungen klären konnte.

Last but not least möchte ich mich bei meinen Eltern für die ideelle und materielle Unterstützung meines Studiums bedanken.

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name: Hendrik van Hees
Geburtsdatum: 15. April 1971
Geburtsort: Darmstadt
Familienstand: ledig

Bildungsweg

1977-1981	Lessingschule Erzhausen (Grundschule)
1981-1983	Hessenwaldschule Weiterstadt (Pflichtförderstufe)
1983-1990	Eleonorenschule Darmstadt (Gymnasium)
1990	Abitur
1990-1991	Grundwehrdienst
1991-1997	Studium der Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt
1997	Diplom
Oktober 1997-Oktober 2000	Wissenschaftliche Hilfskraft im Bereich Theorie der Gesellschaft für Schwerionenforschung, Darmstadt
seit Oktober 2000	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Bereich Theorie der Gesellschaft für Schwerionenforschung, Darmstadt