

Verkopplungsbasierte Methoden zum Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Deskriptorsysteme

Vom Fachbereich
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Daniel Labisch

geboren am 8. Januar 1985 in Würzburg

Referent: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski
Korreferent: PD Dr.-Ing. habil. Joachim Deutscher

Tag der Einreichung: 2. Juli 2013
Tag der mündlichen Prüfung: 25. Oktober 2013



D 17

Darmstädter Dissertationen

Darmstadt, 2013

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt. Die Ergebnisse erarbeitete ich bei der Bearbeitung des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes „Analyse und Entwurf nichtlinearer Verkopplungsregelungen und Deskriptorsysteme“.

Ich bedanke mich bei allen, die mich bei der Erstellung der Arbeit unterstützt und begleitet haben. In besonderem Maße danke ich Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski, der mir die Möglichkeit zur Promotion gab und mich stets unterstützte und motivierte. Er half mir immer wieder aus den abstrakten Details heraus, um meinen Blick auf das eigentliche Ziel zu fokussieren. Außerdem danke ich PD Dr.-Ing. habil. Joachim Deutscher von der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg für die freundliche Übernahme des Korreferates und die vielen interessanten Diskussionen und Anregungen.

Maßgeblich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen hat die von Beginn an ausgezeichnete Atmosphäre am Fachgebiet. So danke ich Brigitte Hoppe und Corina Fischer, die mich bei allen nichtfachlichen Problemen jederzeit freundlich unterstützten. Daneben danke ich allen Kollegen für den freundschaftlichen Austausch und die schöne Zeit, die ich am Fachgebiet verbringen durfte. Hervorheben möchte ich besonders die fruchtbaren Diskussionen mit meinem Kollegen Jan Strubel und meinem ehemaligen Kollegen Dr.-Ing. Maximilian Manderla, die mich nicht nur fachlich bereicherten, sondern auch wesentlich zu meinem Spaß an der Forschung beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir ein Studium ermöglichten und mich auch anschließend in der Promotionsphase jederzeit bedingungslos unterstützen, meiner Frau Regina, die mir den nötigen liebevollen Rückhalt gibt, und meiner Tochter Verena, deren Geburtstermin den nötigen Druck erzeugte, meine Arbeit zügig abzuschließen.

Darmstadt, im Oktober 2013

Daniel Labisch

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Abkürzungen	VII
Kurzfassung	XI
1 Einführung	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Literaturübersicht	2
1.3 Struktur der Arbeit	7
2 Beschreibung von Deskriptorsystemen	9
2.1 Darstellung	9
2.2 Eigenschaften	10
2.3 Lineare Deskriptorsysteme	12
3 Interpretation eines Deskriptorsystems als Verkopplungsproblem	14
3.1 Fiktive Zustandsraumdarstellung	14
3.2 Verkoppelte Zustandsraumdarstellung	15
3.3 Verkoppelte Zustandsraumdarstellung mit minimaler dynamischer Erweiterung	24
3.4 Vergleich und Diskussion der Darstellungen	29
3.5 Spezielle Anwendungen der verkoppelten Darstellung	34
3.5.1 Numerische Simulation	34
3.5.2 Stabilitätsuntersuchung	36
3.6 Verkoppelte Darstellung linearer Deskriptorsysteme	37
3.7 Kurzzusammenfassung	39
4 Exakte Linearisierung	41
4.1 Entkopplung und exakte Ein-/Ausgangslinearisierung	41
4.1.1 Dynamische Entkoppelbarkeit	41
4.1.2 Differenzordnungen	43
4.1.3 Statische Entkoppelbarkeit	49
4.1.4 Exakte Ein-/Ausgangslinearisierung	53
4.1.5 Propere Entkoppelbarkeit	54
4.1.6 Aspekte der Implementierung und Robustheit	56
4.1.7 Anwendung als Vorsteuerungsentwurf	58
4.2 Nulldynamik	60
4.2.1 Nulldynamik regulärer Deskriptorsysteme	60
4.2.2 Nulldynamik entkoppelbarer Deskriptorsysteme	65
4.3 Exakte Deskriptorlinearisierung	68
4.4 Anwendung auf lineare Deskriptorsysteme	72
4.5 Kurzzusammenfassung	78

5	Trajektorienfolgeregelung mittels Riccati-Entwurf	80
5.1	Verkopplung linearer, zeitvarianter Deskriptorsysteme	80
5.2	Riccati-Entwurf linearer, zeitvarianter Deskriptorsysteme	83
5.3	Trajektorienfolgeregelung nichtlinearer Deskriptorsysteme	87
5.4	Kurzzusammenfassung	88
6	Beobachterentwurf	89
6.1	Beobachtbarkeit nichtlinearer Deskriptorsysteme	89
6.2	Entwurf kausaler Beobachter für nichtlineare Deskriptorsysteme	91
6.3	Reduzierung der Beobachterordnung	98
6.4	Entwurf kausaler Beobachter für lineare Deskriptorsysteme	98
6.4.1	Anwendung des nichtlinearen Entwurfs auf lineare Deskriptorsysteme . .	98
6.4.2	Entwurf eines reduzierten Beobachters	104
6.4.3	Modifizierter Entwurf	106
6.5	Kurzzusammenfassung	108
7	Beispielsysteme	109
7.1	Dreimassenschwinger	109
7.2	Akademisches Beispielsystem	114
7.3	Verladebrücke	117
7.4	Parallelroboter	119
8	Zusammenfassung und Ausblick	129
A	Eigenschaften linearer Deskriptorsysteme	131
B	Eigenschaften von Zustandssystemen	134
C	Numerische Berechnungen der Beispielsysteme	138
C.1	Dreimassenschwinger	138
C.2	Parallelroboter	142
	Literaturverzeichnis	145

Symbole und Abkürzungen

Parameter

a_j^i	Parameter zur Polvorgabe bei der exakten Linearisierung (4.4)
b_j^i	Parameter zur Vorgabe der Verkopplungsdynamik (3.8)
c_j^i	Parameter zur Polvorgabe bei der dynamischen Erweiterung (3.6)
i, j, k, ℓ	Skalare Parameter
h	Nilpotenzindex von N
m	Anzahl der algebraischen Gleichungen
n	Systemordnung
n_b	Beobachterordnung
n_c	Ordnung einer dynamischen Rückführung
n_e	Dimension von \mathcal{N}_e
n_m	Dimension von \mathcal{N}_m
n_{slow}	Anzahl endlicher Eigenwerte
n_u	Dimension der dynamischen Erweiterung
n_{x_e}	Dimension der verkoppelten Zustandsraumdarstellung
n_z	Ordnung der Nulldynamik
p	Anzahl der Eingänge
q	Anzahl der Ausgänge
r	Anzahl der Differentialgleichungen
δ	$= \sum_{i=1}^q \delta_i$, Summe der Differenzordnungen
δ_i	Differenzordnung des i -ten Ausgangs
$\delta_{m,i}$	Maximale Differenzordnung des i -ten Ausgangs
μ	Anzahl der vor jeden Eingang geschalteten PT ₁ -Glieder
κ	$= \sum_{i=1}^m \kappa_i$, Anzahl aller Restriktionen
κ_i	Anzahl der durch die i -te algebraische Gleichung erzeugten Restriktionen

Variablen

t	Zeit
t_0, t_1	Anfangs- und Endzeitpunkt
u	Eingang
u_e	$= (x_2, u)$, erweiterter Eingang
\bar{u}	$= (u, \dot{u}, \dots, (u)^{(\mu)})$, Eingang und μ Eingangsableitungen
v	Eingang der verkoppelten Zustandsraumdarstellungen (3.13) und (3.21)
w	Reglereingang
x	Deskriptor
x_1	Differentielle Variable
x_e	$= (x_1, x_u)$, Zustand der verkoppelten Zustandsraumdarstellungen (3.13), (3.21)

x_2	Algebraische Variable
x_b	Rekonstruierter Deskriptor des kausalen Beobachters
x_u	Zustandsvektor der dynamischen Rückführung
$x_{w,1}$	Deskriptor der langsamen Dynamik
$x_{w,2}$	Deskriptor der schnellen Dynamik
y	Ausgang
y_e	= (y, u, z) , erweiterter Ausgang
z	Fiktiver Ausgang der algebraischen Gleichung
z_e	= (z, y) , erweiterter Ausgang
ζ	Deskriptor- oder Zustandsvektor
ξ	Zustandsvektor
ξ_b	Zustandsvektor des kausalen Beobachters
λ	Skalar
λ_i	Eigenwert
λ_0	Nullstelle
Λ_i	Eigenvektor

Funktionen, Operatoren

a	Systemvektorfeld des Zustandssystems (2.2)
$\text{bild}(\cdot)$	Bild einer Matrix
c	Ausgangsfunktion des Zustandssystems (2.2)
f	Systemvektorfeld des Deskriptorsystems (2.1)
f_b	Systemvektorfeld der Zustandsraumdarstellung (6.1)
\tilde{f}_e	Systemvektorfeld der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.13)
F	Beschreibung des impliziten Systems (2.3)
\tilde{f}_m	Systemvektorfeld der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.21)
g	Algebraische Gleichungen des Deskriptorsystems (2.1)
g_b	Fiktive Ausgangsfunktion der Zustandsraumdarstellung (6.1)
h	Ausgangsfunktion des Deskriptorsystems (2.1)
h_b	Ausgangsfunktion der Zustandsraumdarstellung (6.1)
h_e	Ausgangsfunktion der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.13)
h_m	Ausgangsfunktion der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.21)
\tilde{h}_m	Erweiterte Ausgangsfunktion der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (6.6)
$(\cdot)\text{I}(\cdot)$	Ununterscheidbarkeit
$(\cdot)\text{I}^V(\cdot)$	Ununterscheidbarkeit in einer Umgebung V
$\text{kern}(\cdot)$	Kern einer Matrix
$L_{(\cdot)}(\cdot)$	Lie-Ableitung
r	Statische Rückführung (2.6)
r_1	Systemvektorfeld der dynamischen Rückführung (2.7)
r_2	Ausgangsfunktion der dynamischen Rückführung (2.7)
r_x	Systemvektorfeld der dynamischen Erweiterung (3.11) bzw. (3.19)

r_u	Ausgangsfunktion der dynamischen Erweiterung (3.11) bzw. (3.19)
$\text{rang}(\cdot)$	Rang einer Matrix
$\text{span}(\cdot)$	Raum, der von Vektoren oder 1-Formen aufgespannt wird
$y(t, t_0, \zeta_0, u)$	Ausgangsverlauf der Lösung mit Anfangswert $\zeta(t_0) = \zeta_0$ und Eingang $u(t)$
α_e	Verkopplungsregler aus Algorithmus 3.1
α_m	Verkopplungsregler aus Algorithmus 3.2
γ_e	Restriktionen aus Algorithmus 3.1
γ_m	Restriktionen aus Algorithmus 3.2
$\sigma(A)$	Eigenwerte der Matrix A
Ψ	Koordinatentransformation $\bar{u} \mapsto (x_u, v)$ (3.15)

Vektoren, Matrizen

A	Systemmatrix des Deskriptorsystems (2.8)
A_{ij}	Aufteilung von A in der semi-expliziten Darstellung (2.9)
A_e	Systemmatrix des erweiterten Deskriptorsystems (3.31)
A_u	Systemmatrix der dynamischen Erweiterung (3.28)
A_w	Systemmatrix in der Weierstrass-Kronecker-Form (2.10)
B	Eingangsmatrix des Deskriptorsystems (2.8)
B_i	Aufteilung von B in der semi-expliziten Form (2.9)
B_e	Eingangsmatrix des erweiterten Deskriptorsystems (3.31)
B_u	Eingangsmatrix der dynamischen Erweiterung (3.28)
$B_{w,i}$	Aufteilung von B_w in der Weierstrass-Kronecker-Form (2.10)
C	Ausgangsmatrix des Deskriptorsystems (2.8)
C_i	Aufteilung von C in der semi-expliziten Form (2.9)
C_e	Ausgangsmatrix des erweiterten Deskriptorsystems (3.31)
C_u	Ausgangsmatrix der dynamischen Erweiterung (3.28)
$C_{w,i}$	Aufteilung von C_w in der Weierstrass-Kronecker-Form (2.10)
D	Durchgriffsmatrix (2.8)
D_e	Durchgriffsmatrix des erweiterten Deskriptorsystems (3.31)
D_u	Durchgriffsmatrix der dynamischen Erweiterung (3.28)
E	Systemmatrix (2.8)
E_e	Systemmatrix des erweiterten Deskriptorsystems (3.31)
F_v	Matrix des linearen Verkopplungsreglers (3.29)
$G(\lambda)$	Übertragungsmatrix
I, I_k	Einheitsmatrix, Einheitsmatrix der Dimension k
L	Beobachtermatrix
N	Nilpotente Matrix der Weierstrass-Kronecker-Form (2.10)
R_{x_1}	Matrix des linearen Verkopplungsreglers (3.29)
R_{x_u}	Matrix des linearen Verkopplungsreglers (3.29)
T_w	Transformationsmatrix auf Weierstrass-Kronecker-Form (2.10)
$\Pi(\lambda)$	Rosenbrock'sche Systemmatrix

Mathematische Abkürzungen

$T_x \mathcal{M}_x$	Tangentenraum von \mathcal{M}_x am Punkt x
$T\mathcal{M}_x$	Tangentenbündel von \mathcal{M}_x ($T\mathcal{M}_x = \bigcup_{x \in \mathcal{M}_x} T_x \mathcal{M}_x$)
$\mathcal{C}^k(V, W)$	Menge aller k -mal stetig differenzierbaren Abbildungen $V \rightarrow W$
$\partial_x f$	$= \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, partielle Ableitung der Funktion f nach x
$\langle z, x_2 \rangle$	Interpretation von z als Ausgang und x_2 als Eingang in (3.1)

Mengen

\mathbb{C}	Komplexe Zahlen
\mathbb{C}^+	Komplexe Zahlen mit nicht negativem Realteil
\mathbb{I}	$\subset \mathbb{R}$, eine Untermenge des \mathbb{R}
$\mathcal{K}(\rho, \mathcal{N}, \mathcal{M})$	Funktionen $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mit identischen Funktionswerten auf \mathcal{N} , (3.25)
$\mathcal{K}(\rho, \mathcal{N})$	$= \mathcal{K}(\rho, \mathcal{N}, \mathcal{M}_{x_e, x_2, v})$, Äquivalenzklasse, (3.24)
$\mathcal{M}_{\langle x \rangle}$	Mannigfaltigkeit, auf der die Variable x definiert ist
\mathbb{N}	Natürliche Zahlen ohne 0
\mathbb{N}_0	Natürliche Zahlen mit 0
\mathcal{N}_e	Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M}_{x_e} , berechnet mit Algorithmus 3.1
$\tilde{\mathcal{N}}_e$	Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{M}_{x_e, x_2, v}$, berechnet mit Algorithmus 3.1
\mathcal{N}_m	Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M}_{x_e} , berechnet mit Algorithmus 3.2
\mathcal{O}	Beobachtbarkeitsraum auf \mathcal{M}_{x_1} (6.2)
$\tilde{\mathcal{O}}$	Beobachtbarkeitsraum auf \mathcal{N}_m (6.4)
\mathcal{Q}	Restriktionsraum auf \mathcal{M}_{x_1} (6.3)
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
\mathbb{R}^+	Positive, reelle Zahlen
\mathbb{R}_0^-	Negative, reelle Zahlen einschließlich 0
\mathbb{S}	Einheitskreis
V, W	Mengen
\mathcal{Z}	Kotangentenraum aller Restriktionen (3.26)
\emptyset	Leere Menge

Notation

$\hat{(\cdot)}$	Anfangswert bei t_0
$\underline{s}, s \in \mathbb{N}$	Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis s
$x^i, x \in \mathbb{R}^n$	i -te Element des Vektors x
$x^{(i)}$	i -te Zeitableitung von x
$[a^i]_{i \in \underline{n}}$	$= [a^1 \ \dots \ a^n]^T$, Vektor mit den Elementen a^i

Kurzfassung

Bei der modularen Modellbildung dynamischer Systeme entsteht direkt und intuitiv eine differential-algebraische Beschreibungsform. In der regelungstechnischen Literatur wird diese meist als Deskriptorsystem bezeichnet. Die Interpretation eines nichtlinearen Deskriptorsystems als spezielles Verkopplungsproblem bildet die Grundlage für die in der vorliegenden Arbeit hergeleiteten Methoden. Dafür wird der aus der Zustandsraummethodik bekannte Verkopplungsentwurf genutzt, um für ein Deskriptorsystem ein verkoppeltes Zustandssystem zu berechnen. Dieses verkoppelte Zustandssystem existiert für alle regulären Deskriptorsysteme, insbesondere auch für solche mit differenzierendem Verhalten, und ist geeignet, die Lösung des Deskriptorsystems zu reproduzieren. Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung stellt außerdem die Basis sowohl für Regler- als auch Beobachterentwürfe dar, wobei die besondere Herausforderung darin besteht, die Regler und Beobachter auf das Deskriptorsystem zu übertragen und vor allem immer ein geregeltes Deskriptorsystem zu erzeugen, welches regulär ist.

Auf diesem Weg lassen sich für Zustandssysteme bekannte Methoden auf nichtlineare Deskriptorsysteme überführen. Unter der Angabe neuer notwendiger und hinreichender Bedingungen können Deskriptorsysteme sowohl statisch als auch dynamisch entkoppelt werden, unabhängig davon, ob sie differenzierendes Verhalten besitzen. Die Untersuchung der Entkopplungsregelung führt darüber hinaus auf neue invariante Kennzahlen für Deskriptorsysteme, den maximalen Differenzordnungen. Daneben wird die Nulldynamik eines Deskriptorsystems allgemein definiert, wodurch Aussagen über eine stabile Entkopplung möglich sind. Die exakte Deskriptorlinearisierung überführt ein Deskriptorsystem durch Deskriptorrückführung und Koordinatentransformation in ein lineares Deskriptorsystem. Für die Berechnungen sind im Allgemeinen partielle Differentialgleichungen zu lösen. Die in einem Sonderfall mögliche analytische Lösung kann dagegen direkt angegeben werden. Mit einem zeitvarianten Verkopplungsregler gelingt es außerdem, einen Riccatiregler für lineare, zeitvariante Deskriptorsysteme zu entwerfen.

Neben dem Reglerentwurf für Deskriptorsysteme ist das verkoppelte Zustandssystem auch für die Definition und Überprüfung der Beobachtbarkeit geeignet. Der Beobachterentwurf für ein Deskriptorsystem führt im Allgemeinen auf ein dynamisches System, welches wieder ein Deskriptorsystem ist. Existiert ein Beobachter in Zustandsdarstellung, so wird das Deskriptorsystem als kausal beobachtbar bezeichnet. Für die kausale Beobachtbarkeit werden nicht nur neue notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet, sondern auch ein Methode, die den Entwurf immer in einen Zustandsbeobachterentwurf für ein beobachtbares Zustandssystem überführt.

Alle neuen Methoden werden außerdem auf lineare Deskriptorsysteme angewandt. Gerade die dort mögliche Transformation in den Laplacebereich ermöglicht ein einfacheres Verständnis der Ergebnisse. Die praktische Anwendbarkeit der theoretischen Methoden zeigen die Beispielsysteme am Ende der Arbeit. Die neuen Verfahren werden sowohl an Simulationsbeispielen als auch an einem realen Versuchsstand implementiert und validiert.

1 Einführung

1.1 Einleitung

In weiten Teilen der Regelungstechnik ist eine exakte mathematische Beschreibung von dynamischen Systemen eine wesentliche Voraussetzung für die Systemanalyse und den Entwurf von Regelungen. Die *Modellbildung* übersetzt dafür reale physikalische Vorgänge in die abstrakte Sprache der Mathematik, was in der Regel auf gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen führt. Die Beschreibung von expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen ist immer mit einem *Zustandssystem*, einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung, möglich, das in der Regelungstechnik seit vielen Jahren eine der wichtigsten Systemklassen darstellt. Die Aufgabe der regelungstechnischen Modellbildung ist somit üblicherweise, für einen real existierenden Prozess ein Modell in Form eines Zustandssystems zu erzeugen.

Die Modellbildung einfacher dynamischer Vorgänge ist häufig unproblematisch. Für große und komplexe Systeme ist es dagegen sehr aufwendig oder kaum möglich, unmittelbar ein Zustandssystem zu bestimmen. Vielmehr muss das Gesamtsystem in kleinere Teilsysteme zerlegt werden, die für sich genommen modelliert werden. Um zum gewünschten Gesamtsystem zu gelangen, müssen die Teilsysteme miteinander verknüpft werden. Da die Kopplung im Allgemeinen nicht über Differentialgleichungen, sondern über rein algebraische Beziehung erfolgt, ergibt sich kein Zustandssystem; es entsteht ein *differential-algebraisches System*. Dieses besteht sowohl aus Differentialgleichungen als auch aus algebraischen Gleichungen und ist in der Regelungstechnik als *Deskriptorsystem* bekannt. Da sich die regelungstechnische Literatur stärker auf Zustandssysteme als auf Deskriptorsysteme konzentriert, stehen heute deutlich mehr Methoden für Zustandssysteme zur Verfügung.

Vor allem Aspekte der Lösbarkeit erschweren die Behandlung von Deskriptorsystemen. Unter wenig einschränkenden Annahmen besitzen Zustandssysteme immer eine eindeutige Lösung. Für Deskriptorsysteme gilt dies nicht; die Lösbarkeit ist nur unter restriktiveren Bedingungen gegeben. Und selbst wenn diese Bedingungen erfüllt sind, bleibt die numerische Berechnung der Lösung eines Deskriptorsystems sehr aufwendig. Darüber hinaus können Deskriptorsysteme differenzierendes Verhalten beschreiben, was mit Zustandssystemen nicht möglich ist. Sie stellen daher eine allgemeinere Systemklasse dar, wobei die Klasse der Zustandssysteme komplett in den Deskriptorsystemen enthalten ist, sodass eine neue Methodik für Deskriptorsysteme automatisch auf Zustandssysteme anwendbar ist. Da Entwurfsmethoden auf eine allgemeinere Systemklasse erweitert werden können, ist die Behandlung von Deskriptorsystemen auch aus mathematisch theoretischer Sichtweise interessant.

Die Übertragung von Methoden für lineare Zustandssysteme auf lineare Deskriptorsysteme ist in einigen Fällen mit überschaubarem Aufwand möglich, da sich die Systembeschreibungen im Frequenzbereich kaum unterscheiden. Die Übertragung gelingt bei nichtlinearen Deskriptorsystemen meist nicht ohne Weiteres. In der Regel wird das Deskriptorsystem in eine Zustandsraumdar-

stellung überführt, auf die bekannte Methoden angewandt werden können. Dies ist auch in der vorliegenden Arbeit der Fall; jedoch unterscheiden sich die Überführung und die Wahl der Zustandsraumdarstellung von bekannten Vorgehensweisen.

Die neuen Verfahren, die im Verlauf der Arbeit hergeleitet werden, basieren auf der Verkopplungsregelung. Dabei handelt es sich ursprünglich um einen Reglerentwurf für Zustandssysteme, bei dem die Zustandsvariablen asymptotisch eine algebraische Beziehung erfüllen. Für bestimmte Anfangswerte, die diese algebraische Gleichung erfüllen, stellt der Entwurf sicher, dass die algebraische Gleichung nicht mehr verletzt werden kann. Obwohl die Zustandsvariablen formal weiterhin unabhängig sind, sind sie daher für bestimmte Anfangswerte algebraisch verknüpft. Da ein Deskriptorsystem genau durch diese Kopplung gekennzeichnet ist, lässt sich ein verkoppeltes Zustandssystem als Deskriptorsystem interpretieren. Die Umkehrung dieser Argumentation führt auf die Grundidee der vorliegenden Arbeit: für ein gegebenes Deskriptorsystem wird ein verkoppeltes Zustandssystem entworfen, für welches bekannte Methoden existieren. Über die Verkopplung finden die Methoden anschließend beim Deskriptorsystem Anwendung. Die Tatsache, dass sogar für Deskriptorsysteme mit differenzierendem Verhalten die Herleitung geeigneter verkoppelter Zustandsraumdarstellungen möglich ist, macht die neue Methodik in einigen Bereichen leistungsfähiger als bekannte Resultate.

1.2 Literaturübersicht

Bereits 1974 stellt *Rosenbrock* [113] die Beschreibung eines linearen Deskriptorsystems vor, obwohl erst 1977 *Luenberger* [77] den Begriff *Deskriptorsystem* prägt. Nur zwei Jahre später führt ebenfalls *Luenberger* [79] nichtlineare Deskriptorsysteme in die regelungstechnische Literatur ein. Seitdem entstand eine Vielzahl von Arbeiten sowohl über lineare als auch nichtlineare Deskriptorsysteme, wobei *Aplevich* [3], *Dai* [19] sowie *Lewis* [71] eine gute Übersicht für lineare Deskriptorsysteme bieten und *Duan* [25], *Kumar* und *Daoutidis* [61], *Kunkel* und *Mehrmann* [64] sowie *Yang* u. a. [139] einzelne Aspekte nichtlinearer Deskriptorsysteme beleuchten. Motiviert ist die Verwendung von Deskriptorsystemen hauptsächlich durch die vereinfachte Modellbildung mit der sich *Müller* [92, 93] intensiv beschäftigt. Gerade bei nichtlinearen Deskriptorsystemen erweisen sich einige spezielle Darstellungsformen als günstig. Eine der Darstellungen, die *semiexplizite Form* ([37]), stellt die Basis für weitere Untersuchungen in dieser Arbeit dar. Ein Deskriptorsystem in semi-expliziter Form besteht aus einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung und weiteren algebraischen Gleichungen. Viele Arbeiten setzen semi-explizite Deskriptorsysteme vom *Index* 1 voraus (siehe z. B. [5, 17, 34, 51, 54, 72, 121, 126, 128–130, 133, 138, 140]). Der *Index* eines Deskriptorsystems ist eine wichtige Systemgröße, wobei die Modellierung vieler realer Systeme auf ein Deskriptorsystem mit einem *Index* größer 1 führt. In der vorliegenden Arbeit spielt der *Index* des Deskriptorsystems keine Rolle, er darf beliebige Werte kleiner unendlich annehmen. Eine detaillierte Diskussion über den *Index* eines Deskriptorsystems geben *Campbell* und *Gear* [15].

Um *versteckte Restriktionen* eines allgemeinen Deskriptorsystems zu bestimmen, müssen die gesamten Systemgleichungen nach der Zeit abgeleitet werden ([16]). Bei Deskriptorsystemen in der semi-expliziten Form reicht das zeitliche Ableiten der algebraischen Gleichungen aus, um weitere Restriktionen zu berechnen. Alle Lösungen des Deskriptorsystems erfüllen auch diese versteckten Restriktionen. Bei einem eindeutig lösbaeren Deskriptorsystem müssen die Restriktionen nach einer endlichen Anzahl von Ableitungen die algebraischen Variablen eindeutig festlegen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie sich aus diesen Überlegungen eine Verbindung zu Verkopplungsregelungen ziehen lässt.

In der Anwendung für eine spezielle Fahrzeugregelung betrachtet *Jochheim* [52] Verkopplungsregelungen, die *Konigorski* [57] systematisch auf Basis der *Vollständigen Modalen Synthese* (siehe *Roppenecker* [111]) für lineare Zustandssysteme verallgemeinert. *Deutscher* [23] erweitert diese Methode schließlich sogar auf lineare, verteilt-parametrische Zustandssysteme. Die Lösungen eines verkoppelten Systems erfüllen asymptotisch eine algebraische Gleichung. Lösungen, die für alle Zeiten die Gleichung erfüllen, liegen in einem geregelt invarianten Unterraum des Zustandsraumes. Diese Interpretation entspricht bei nichtlinearen Zustandssystemen der größten, geregelt invarianten, ausgangsnulldenden Untermannigfaltigkeit, die *Nijmeijer* und *van der Schaft* [99] berechnen. Im Gegensatz zum Unterraum, der mittels linearer Verkopplungsregelung erzeugt wird, ist diese Untermannigfaltigkeit im Allgemeinen nicht attraktiv für das geregelte System. Wie auch die Untermannigfaltigkeit für nichtlineare Systeme attraktiv gewählt werden kann, zeigt der Autor in [67] bei der Verallgemeinerung der Verkopplungsregelung auf nichtlineare Zustandssysteme.

Verkopplungsregelungen für den Entwurf linearer Deskriptorsysteme werden erstmals von *Konigorski* [58] vorgestellt. Darauf aufbauend übertragen *Manderla* und *Konigorski* [82] die Vollständige Modale Synthese auf lineare Deskriptorsysteme und überführen den Verkopplungsansatz in *Manderla* u. a. [85] auf nichtlineare Deskriptorsysteme. Die Verkopplung ermöglicht außerdem eine einfache numerische Simulation von Deskriptorsystemen, die kein differenzierendes Verhalten besitzen ([70, 85]). Darüber hinaus nutzt *Manderla* [81] den Verkopplungsgedanken in seiner Dissertation für den Entwurf eines Riccati-reglers sowie eines Beobachters für lineare Deskriptorsysteme. Da sich die Interpretation eines Deskriptorsystems als Verkopplungsproblem als sehr fruchtbar erwiesen hat, stellt sie auch die Grundlage für weitergehende Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit dar.

Der Entwurf von Entkopplungsreglern gehört für lineare und nichtlineare Mehrgrößensysteme zu den am häufigsten verwendeten Verfahren, weshalb die Entkopplungsregelung ein großes Interesse in der regelungstechnischen Literatur hervorgerufen hat. Beginnend mit *Falb* und *Wolovich* [27] sind viele Arbeiten über die Entkopplung von zuerst linearen und später nichtlinearen Zustandssystemen entstanden. Seit dem Erscheinen von *Nijmeijer* und *van der Schaft* [99] gehört die nichtlineare Entkopplungsregelung zu den Standardverfahren der nichtlinearen Zustandsregelung, wohingegen die Entkopplung von Deskriptorsystemen erheblich weniger Aufmerksamkeit erhält.

Minamide u. a. [87] sowie *Paraskevopoulos* und *Koumboulis* [101, 102] untersuchen die Entkopplung linearer Deskriptorsysteme. Da die verwendeten Methoden die Laplace-Transformation benötigen, sind sie nicht für die Übertragung auf nichtlineare Systeme geeignet. Die Berechnung

von Entkopplungsregelungen für nichtlineare Deskriptorsysteme setzt häufig restriktive Annahmen voraus. So beschäftigen sich unter anderem *Wang* und *Li* [129] lediglich mit Deskriptorsystemen vom Index 1. Diese Voraussetzung ist für eine große Anzahl praxisrelevanter Systeme nicht erfüllt. In vielen weiteren Arbeiten wird angenommen, dass die Jacobi-Matrix der algebraischen Gleichung bezüglich der algebraischen Variable und dem Eingang maximalen Rang besitzt (siehe z. B. *Xiaoping* und *Celikovsky* [136], *Wang* u. a. [132], *Zhang* [140]). Diese Bedingung entspricht bei linearen Deskriptorsystemen der Impulssteuerbarkeit und ist ebenfalls sehr restriktiv. Neben der Entkoppelbarkeit definieren *Wang* u. a. [132] außerdem die Differenzordnung nichtlinearer Deskriptorsysteme für dieselbe begrenzte Systemklasse.

Auf derartige Einschränkungen verzichten *Schlacher* u. a. [115], die das Deskriptorsystem in eine Pfaff'sche Darstellung überführen. Prinzipiell können die betrachteten Systeme dort sogar *improper* sein, das bedeutet, sie besitzen differenzierendes Verhalten. Der Entwurf des Entkopplungsreglers führt in diesem Fall zu einer dynamischen Erweiterung mit Integratoren, sodass dann kein statisches Regelgesetz berechnet werden kann. Mathematisch weniger anspruchsvoll ist das Entkopplungsverfahren, das *Müller* [97] vorstellt. Es ist nur für Deskriptorsysteme ohne differenzierendes Verhalten geeignet und führt nicht immer auf ein reguläres geregeltes Deskriptorsystem. Problematisch ist vor allem, dass bei diesem Verfahren sogar bei properen Deskriptorsystemen Eingangsableitungen den Entwurf erschweren.

Kumar und *Daoutidis* [59, 60] erzeugen eine Zustandsraumdarstellung für die Berechnung des Entkopplungsreglers und verfolgen damit einen ähnlichen Ansatz wie die vorliegende Arbeit. Die in [59] getroffene Einschränkung auf propere Deskriptorsysteme wird in [60] gelockert, wobei dynamische Rückführungen bei improperen Deskriptorsystemen auftreten. Beide Verfahren sind nicht in der Lage, die in dieser Arbeit beschriebenen, nicht proper entkoppelbaren Deskriptorsysteme zu entkoppeln. Dies gelingt mit der neuen Methode, da weder die Properheit des unregulierten noch die Properheit des geregelten Deskriptorsystems gefordert werden. Darüber hinaus werden Deskriptorsysteme mit differenzierendem Verhalten ebenfalls mit einer statischen Rückführung entkoppelt.

Einen anderen Weg beschreiben *Pereira da Silva* u. a. [103], die nicht a priori zwischen Eingängen und algebraischen Variablen unterscheiden, wodurch kein improperes Verhalten auftreten kann. Unter diesen Annahmen lösen *Pereira da Silva* u. a. das dynamische Entkopplungsproblem, wobei das Vorgehen mathematisch anspruchsvoll ist. Wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, lässt sich die dynamische Entkopplung auch sehr elegant mithilfe der verkoppelten Zustandsraumdarstellung erzielen.

Grundsätzlich ist nur durch die Entkoppelbarkeit noch keine Stabilität im entkoppelten Deskriptorsystem sichergestellt, wie dies schon von Zustandssystemen bekannt ist. Für die Vorgabe der Ein-/Ausgangsdynamik bietet sich in der Regel die *exakte Ein-/Ausgangslinearisierung* an. Nicht nur *Wang* und *Chen* [128], sondern auch *Jiandong* und *Zhaolin* [51] setzen streng propere Deskriptorsysteme mit Index 1 voraus, was wieder sehr restriktiv ist. Gerade die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung benötigt diese Annahmen nicht. Die Stabilität eines entkoppelten Zustandssystem

hängt darüber hinaus von der übrigen Dynamik ab; so ist es für die stabile Entkoppelbarkeit eines Zustandssystems hinreichend, wenn dessen *Nullodynamik* stabil ist ([50]).

Die Nullodynamik entspricht den unsteuerbaren Bewegungen, die ein Zustandssystem noch ausführen kann, wenn der Ausgang für alle Zeiten gleich null ist. Eine Lösung der Nullodynamik kann nicht mehr auf der gesamten Zustandsmannigfaltigkeit liegen, sondern lediglich auf einer Untermannigfaltigkeit. In der Literatur findet die Nullodynamik von nichtlinearen Deskriptorsystemen bisher wenig Aufmerksamkeit. So beschäftigen sich *Berger* u. a. [8] lediglich mit der Nullodynamik linearer Deskriptorsysteme. Sowohl *Zhang* [140] als auch *Wang* u. a. [133] betrachten zwar affine nichtlineare Deskriptorsysteme, sie fordern jedoch, dass das System den Index 1 besitzt. Die Definition der Nullodynamik von *Wang* u. a. [131, 132] setzt wieder voraus, dass die Jacobi-Matrix der algebraischen Gleichung bezüglich der algebraischen Variable und dem Eingang maximalen Rang besitzt. Für die stabile Entkoppelbarkeit allgemeiner Deskriptorsysteme bieten die bisherigen Publikationen zur Nullodynamik daher noch keine Resultate. Die vorliegende Arbeit setzt nur die Regularität des Deskriptorsystems voraus, um nicht nur eine allgemeingültige Definition der Nullodynamik angeben zu können, sondern auch ein hinreichendes Kriterium für stabile Entkoppelbarkeit.

Bei der *exakten Zustandslinearisierung* bedarf die Stabilität des geregelten Zustandssystems keiner weiteren Untersuchung, da eine Rückführung und eine Koordinatentransformation berechnet werden, sodass das geregelte System entkoppelt, linear sowie steuerbar ist ([50]). Folglich kann das geregelte System immer stabilisiert werden. Die *exakte Deskriptorlinearisierung* stellt das Pendant in der Anwendung auf Deskriptorsysteme dar. *Jiandong* und *Zhaolin* [51] betrachten dieses Problem für nichtlineare, streng propre Deskriptorsysteme mit Index 1 und geben für diese Systemklasse eine entsprechende Koordinatentransformation an. *Kaprielian* u. a. [54] benötigen dieselben Voraussetzungen, leiten aber keine Koordinatentransformation her. Einen anderen Ansatz stellt *Xiaoping* [135] vor, der für die Linearisierung ausschließlich eine Koordinatentransformation und keine Rückführung verwendet. Das Linearisierungsverfahren von *Kawaji* und *Taha* [55] geht deutlich weiter. Ihre hinreichenden Bedingungen führen auf einen Satz partieller Differentialgleichungen, die gelöst werden müssen. Allerdings erfolgt die Einschränkung auf Deskriptorsysteme mit nur einer Eingangsgröße. Die exakte Deskriptorlinearisierung auf Basis der verkoppelten Darstellung führt im Allgemeinen zwar auch auf partielle Differentialgleichungen, trotzdem gelingt der Entwurf für eine Klasse von Deskriptorsystemen, die sogar impropere Mehrgrößensysteme einschließt.

Campbell [13] betrachtet die Linearisierung eines nichtlinearen Deskriptorsystems entlang einer Trajektorie, wobei ein *lineares, zeitvariantes Deskriptorsystem* entsteht. Bei linearen, zeitvarianten Zustandssystemen bietet sich vor allem der Entwurf eines Riccati-optimalreglers an, da für die Vorgabe der Dynamik bei zeitvarianten Systemen keine Eigenwerte verwendet werden können. Darüber hinaus ist die berechnete Rückführung sehr robust und stellt kaum Anforderungen an das zu regelnde System ([80]). Der Entwurf von Optimalregelungen für zeitinvariante Deskriptorsysteme wird seit vielen Jahren untersucht. So leitet bereits *Cobb* [18] 1983 eine Lösung auf Basis einer klassischen Riccatidifferentialgleichung her, die unter anderem die Impulssteuerbarkeit des Deskriptorsystems fordert. Dieselbe Voraussetzung benötigen später *Takaba* [124] sowie *Fridman*

[33]. Bei anderen Entwürfen entsteht eine Riccatidifferentialgleichung, die selbst in Deskriptorform vorliegt (siehe z. B. *Kunkel* und *Mehrmann* [62], *Kurina* und *März* [66]). Die numerische Lösung dieser Riccati-Gleichung ist deshalb nicht mehr mit expliziten Standardintegrationsverfahren möglich.

Optimalregler für propere und impropere Deskriptorsysteme betrachtet *Müller* [91, 94, 95]. Im Fall von improperen Deskriptorsystemen wird durch die Vorschaltung zusätzlicher Integratoren ein properes Deskriptorsystem erzeugt. Diese Integratoren müssen in den Regler integriert werden, wodurch keine statische Rückführung, wie bei Zustandssystemen, entworfen wird. Im Gegensatz dazu stellt *Manderla* [81] einen Riccati-Entwurf für zeitinvariante Deskriptorsysteme vor, die differenzierendes Verhalten besitzen dürfen. Der benötigte Verkopplungsregler wird in dieser Arbeit so erweitert, dass er für zeitvariante Deskriptorsysteme Anwendung finden kann, ohne dass zusätzliche Voraussetzungen an das Deskriptorsystem gestellt werden.

Die Entkopplungsregelung, die exakte Deskriptorlinearisierung und auch der Riccatiregler führen den gesamten Deskriptor zurück; sie sind Entwurfsverfahren für vollständige Deskriptorrückführungen. Im Allgemeinen ist der Deskriptor jedoch nicht komplett messbar, sodass auf Beobachter zurückgegriffen werden muss. Entsteht beim Beobachterentwurf für ein Zustandssystem unmittelbar ein Beobachter in Zustandsraumform, so ergibt sich zum Beispiel beim Entwurf eines Deskriptorbeobachters von *Campbell* u. a. [14] ein Beobachter in Deskriptorform. Aufgrund des Aufwands bei der numerischen Simulation ist es wünschenswert, Deskriptorbeobachter in Zustandsform zu entwerfen, sogenannte *kausale Beobachter*. Für lineare, impulsbeobachtbare Deskriptorsysteme stellen unter anderem *Fahmy* und *O'Reilly* [26] sowie *Darouach* und *Boutayeb* [22] einen entsprechenden Entwurf vor. Weniger restriktiv sind die hinreichenden Bedingungen von *Müller* und *Hou* [96] bzw. *Hou* und *Müller* [44], die die Detektierbarkeit des Deskriptorsystems zusammen mit einer weiteren Rangbedingung fordern. *Ailon* [1] zeigt erstmals, dass es für den Entwurf eines kausalen Beobachters notwendig und hinreichend ist, wenn das lineare Deskriptorsystem detektierbar und das schnelle, steuerbare Teilsystem beobachtbar ist. Für den Entwurf ist die aufwendige Überführung des Deskriptorsystems in die *Weierstrass-Kronecker-Form* notwendig. Später geben *Hou* und *Müller* [45, 46] notwendige und hinreichende Bedingungen an, die ohne die Berechnung der Weierstrass-Kronecker-Form auskommen. Unter denselben Voraussetzungen überführen *Manderla* [81], *Manderla* und *Konigorski* [83] bzw. *Manderla* u. a. [84] einen linearen Beobachter in Deskriptorform in einen äquivalenten Beobachter in Zustandsform.

Boutayeb und *Darouach* [9] nutzen die lineare Entwurfsmethodik, um den Beobachterentwurf auf das um eine Ruhelage linearisierte Deskriptorsystem zu übertragen, wobei sie dessen Impulsbeobachtbarkeit fordern. *Aliyu* und *Boukas* [2] verlangen ein impulsfreies, linearisiertes Deskriptorsystem. Für eine Verallgemeinerung behandeln viele Arbeiten nichtlineare Deskriptorsysteme, die in einer Umgebung einem linearen Deskriptorsystem entsprechen, zu dessen Systemgleichung eine Nichtlinearität addiert wird (siehe [20, 21], [35], [53], [56], [75], [105], [119, 120], [137], [139]). Erfüllt die Nichtlinearität eine lokale Lipschitz-Bedingung, so kann sie geeignet kompensiert werden und der Beobachterentwurf erfolgt mit linearen Methoden. Neben der Einschränkung, dass oft die Impulsbeobachtbarkeit des linearen Teilsystems oder sogar die Beobachtbarkeit des schnellen Teilsystems gefordert wird, bildet diese Systemklasse nicht alle nichtlinearen Deskriptorsysteme

ab. *Frisk* und *Åslund* [34] bzw. *Åslund* und *Frisk* [5] benötigen diese strukturelle Einschränkung der Systemklasse nicht, da sie Beobachter nur für Deskriptorsysteme vom Index 1 entwerfen. Mit der Beobachtbarkeit impliziter Deskriptorsysteme beschäftigen sich *Terrell* [125] sowie *Gerdin* [39], der darüber hinaus den Einfluss unbekannter Parameter betrachtet. Ein konkreter Beobachterentwurf erfolgt in beiden Arbeiten jedoch nicht. Im Gegensatz dazu übertragen *Zimmer* und *Meier* [142] den Beobachterentwurf eines Deskriptorsystems auf einen Zustandsbeobachterentwurf, wobei das Deskriptorsystem keine Eingänge besitzt. Schwierigkeiten mit differenzierendem Verhalten werden so komplett umgangen. Deskriptorsysteme, die eine Klasse mechanischer Systeme beschreiben, betrachten *Hou* und *Müller* [47]. Sie erzeugen direkt einen kausalen Beobachter.

Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung ist wiederum geeignet, den nichtlinearen Zustandsbeobachterentwurf geradlinig auf Deskriptorsysteme zu übertragen. Ohne weiteren Aufwand ergibt sich immer ein kausaler Beobachter, wobei die dafür benötigten neuen notwendigen und hinreichenden Bedingungen in der Anwendung auf lineare Deskriptorsysteme den notwendigen und hinreichenden von *Ailon* [1] entsprechen. Auf die teilweise sehr einschränkenden Annahmen, die in der Literatur zu finden sind, kann mit dem neuen Ansatz verzichtet werden.

Im Gegensatz zu zahlreichen Veröffentlichungen findet in der vorliegenden Arbeit keine grundsätzliche Einschränkung der betrachteten Systemklasse statt. Die vorgestellten Methoden eignen sich ausdrücklich für die Anwendung an improperen Deskriptorsystemen, ohne dass weitere Eigenschaften, wie zum Beispiel Impulssteuerbarkeit, gefordert werden. Dass das geregelte System differenzierendes Verhalten besitzen darf, ermöglicht ganz neue Entwürfe, wobei die Regularität des geregelten Deskriptorsystems stets sichergestellt ist.

1.3 Struktur der Arbeit

Neben den notwendigen Systemdarstellungen führt Kapitel 2 wichtige Eigenschaften bezüglich der Lösbarkeit von Deskriptorsystemen ein. Diese werden in Kapitel 3 für eine neue Sicht auf die semi-explizite Deskriptordarstellung genutzt: die Interpretation als Verkopplungsproblem. Die Lösung dieses Problems erfolgt durch zwei Algorithmen, die beide eine *verkoppelte Zustandsraumdarstellung* erzeugen. Neben einer ausführlichen Diskussion der Darstellungen erfolgt die Herleitung notwendiger und hinreichender Bedingungen für den Erfolg der Berechnungen. Die Algorithmen unterscheiden sich darin, wie mit improperem Verhalten umgegangen wird. Beim ersten Algorithmus bleibt die Struktur des Ein-/Ausgangsverhaltens erhalten, der zweite erzeugt eine verkoppelte Darstellung mit geringerer Ordnung. Eine praktische Anwendung liefert die Verwendung der erzeugten Systemdarstellung als Simulationsmodell; sie ermöglicht die numerische Lösungsberechnung mit Standardintegrationsverfahren. Die verkoppelte Darstellung vereinfacht darüber hinaus die Stabilitätsanalyse nichtlinearer Deskriptorsysteme.

Kapitel 4 beschäftigt sich sowohl mit der *Entkopplung* von Deskriptorsystemen, als auch der *exakten Linearisierung* sowie der *Nulldynamik*. Die Lösung des dynamischen und statischen Entkopplungsproblems erfolgt unter der Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen, wobei neue

invariante Kenngrößen, die *maximalen Differenzordnungen*, eingeführt werden. Aus der Entkoppelung lässt sich der Entwurf einer speziellen *modellgestützten Vorsteuerung* ableiten, die nicht nur für Deskriptor-, sondern auch für Zustandssysteme genutzt werden kann. Die Nulldynamik, die allgemein für Deskriptorsysteme definiert wird, stellt außerdem Bedingungen für die stabile Entkoppelbarkeit zur Verfügung. Für eine Klasse von Deskriptorsystemen ist es schließlich möglich, eine *exakte Deskriptorlinearisierung* durchzuführen.

Um für nichtlineare Deskriptorsysteme die Vorteile der 2-Freiheitsgrade Reglerstruktur nutzen zu können, behandelt Kapitel 5 die Trajektorienfolgeregelung mithilfe eines *Riccati-Entwurfs*. Bei der Linearisierung eines nichtlinearen Deskriptorsystems entlang einer Trajektorie entsteht ein lineares, zeitvariantes Deskriptorsystem, weshalb die Erweiterung des Riccati-Entwurfs auf zeitvariante Deskriptorsysteme die Grundlage für die Trajektorienfolgeregelung nichtlinearer Deskriptorsysteme darstellt.

Die Rekonstruktion des gesamten Deskriptors, den die vorgestellten Reglerentwürfe bekanntermaßen benötigen, erfolgt in Kapitel 6 mit einem *kausalen Beobachter*. Neben notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die kausale Beobachtbarkeit werden Möglichkeiten vorgestellt, die Ordnung des Beobachters zu reduzieren.

Kleine, akademische Beispielsysteme verdeutlichen bereits in den einzelnen Kapiteln die dargestellten Überlegungen. Dass die neuen Entwürfe für praktische und komplexe Systeme geeignet sind, zeigt abschließend Kapitel 7. Ein Dreimassenschwinger, ein akademisches System sowie eine Verladebrücke dienen als Simulationsbeispiele, wohingegen vom geregelten Prüfstand eines redundanten, planaren Parallelroboters Messdaten vorgestellt werden.

Alle Ergebnisse für nichtlineare Deskriptorsysteme müssen grundsätzlich in gleicher Weise für lineare Deskriptorsysteme Gültigkeit besitzen. Da sich viele Resultate mithilfe von linearen Deskriptorsystemen sehr anschaulich nachvollziehen lassen, wird das Ergebnis jedes Kapitels am entsprechenden Kapitelende auf lineare Deskriptorsysteme angewandt. Überdies veranschaulichen lineare Beispielsysteme solche Aspekte, die bereits bei linearen Deskriptorsystemen auftreten. Für eine bessere Verständlichkeit wird daher bewusst auf das Einfügen künstlicher Nichtlinearitäten verzichtet.

2 Beschreibung von Deskriptorsystemen

2.1 Darstellung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit nichtlinearen, zeitinvarianten Deskriptorsystemen, die in der *semi-expliziten Form* ([37])

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u) \quad (2.1a)$$

$$0 = g(x_1, x_2, u) \quad (2.1b)$$

$$y = h(x_1, x_2, u) \quad (2.1c)$$

vorliegen. $x_1 \in \mathcal{M}_{x_1}$ bezeichnet die *differentielle Variable* und $x_2 \in \mathbb{R}^m$ die *algebraische Variable* des Systems. Zusammen bilden sie den *Deskriptor* $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{M}_x$. \mathcal{M}_{x_1} sowie \mathcal{M}_x sind glatte r - bzw. n -dimensionale Mannigfaltigkeiten, wobei $n = r + m$ gilt. Außerdem kennzeichnet $u \in \mathbb{R}^p$ den Eingang und $y \in \mathbb{R}^q$ den Ausgang des Deskriptorsystems. Das Vektorfeld $f : (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p) \rightarrow T_{x_1}\mathcal{M}_{x_1}$ sowie die Abbildungen $g : (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h : (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^q$ werden als genügend glatt angenommen.

Die klassische Zustandsraumdarstellung ist als Sonderfall in der Klasse der Deskriptorsysteme enthalten. Gilt $m = 0$ so existieren keine algebraischen Gleichungen und keine algebraischen Variablen. Mit $x_1 = \xi$ geht das Deskriptorsystem in ein Zustandssystem

$$\dot{\xi} = a(\xi, u) \quad (2.2a)$$

$$y = c(\xi, u) \quad (2.2b)$$

über, wobei der Zustand $\xi \in \mathcal{M}_\xi$ auf einer glatten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_ξ liegt und das Vektorfeld $a : (\mathcal{M}_\xi \times \mathbb{R}^p) \rightarrow T_\xi\mathcal{M}_\xi$ sowie die Abbildung $c : (\mathcal{M}_\xi \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^q$ genügend glatt sind.

Noch allgemeiner als ein Deskriptorsystem beschreibt das implizite Gleichungssystem

$$0 = F(\dot{\zeta}, \zeta, u) \quad (2.3)$$

dynamische Vorgänge. $\zeta \in \mathcal{M}_\zeta$ ist die dynamische Variable, die auf der glatten n -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_ζ liegt, und $F : (T\mathcal{M}_\zeta \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine genügend glatte Abbildung. In dieser impliziten Darstellung sind sowohl die klassischen Zustandssysteme als auch Deskriptorsysteme enthalten. Gilt in einer Umgebung $\text{rang}(\partial_{\dot{\zeta}}F) = n$, so lässt sich das implizite Gleichungssystem lokal nach $\dot{\zeta} = \dot{\xi}$ auflösen und als Zustandssystem (2.2) darstellen. Gilt in einer Umgebung dagegen $\text{rang}(\partial_{\dot{\zeta}}F) = r < n$, so kann das implizite Gleichungssystem mithilfe einer Koordinatentransformation lokal in die semi-explizite Form (2.1) überführt werden. Damit ist es unter den genannten Voraussetzungen möglich, das implizite System in einer Umgebung in ein Zustandssystem oder ein Deskriptorsystem zu überführen.

Wie eingangs beschrieben, entstehen Deskriptorsysteme ganz intuitiv bei der modularen Modellbildung und anschließenden Verknüpfung von Teilsystemen. Diese Vorgehensweise führt im Allgemeinen zu einer Darstellung in der Form (2.1). Liegt eine implizite Systembeschreibung (2.3) vor und ist die Überführung in (2.1) nicht möglich oder nicht nur lokal gewünscht, so lässt sich jedes implizite System mithilfe von

$$\dot{\zeta} = x_s \tag{2.4a}$$

$$0 = F(x_s, \zeta, u) , \tag{2.4b}$$

mit $x_s \in \mathbb{R}^n$, in die Darstellung (2.1) überführen. In dieser Arbeit wird daher ausschließlich von nichtlinearen Deskriptorsystemen, die in der Form (2.1) vorliegen, ausgegangen.

2.2 Eigenschaften

Von Zustandssystemen (2.2) ist mit dem Satz von *Picard-Lindelöf* (siehe z. B. [28]) schon lange bekannt, dass lokal eine eindeutige Lösung zu einem Anfangswert $\hat{\xi}$ existiert, wenn das Systemvektorfeld a in einer Umgebung von $(\hat{\xi}, \hat{u})$ Lipschitz-stetig bezüglich ξ ist. Da in dieser Arbeit ein genügend glattes Vektorfeld vorausgesetzt wird, ist dies immer der Fall.

Im Gegensatz dazu besitzen Deskriptorsysteme nicht immer eine eindeutige Lösung, weshalb eine genauere Betrachtung des Lösungsbegriffs und der damit verbundenen Eigenschaften bei der Analyse von Deskriptorsystemen notwendig ist. Zuerst wird die Definition der Lösung in Anlehnung an *Mehrmann* und *Stykel* [86] gegeben.

Definition 2.1. Eine Abbildung $x : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{M}_x$ wird als *Lösung* des Systems (2.1) bezeichnet, wenn $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathcal{M}_x)$ gilt und x (2.1) punktweise für eine gegebene Eingangsfunktion u erfüllt. Die Abbildung wird als Lösung des Anfangswertproblems, bestehend aus (2.1) und

$$x(t_0) = \hat{x} \tag{2.5}$$

bezeichnet, wenn x eine Lösung von (2.1) ist und (2.5) erfüllt. Der Anfangswert (2.5) wird als *konsistent* bezeichnet, wenn das entsprechende Anfangswertproblem mindestens eine Lösung besitzt.

Mithilfe dieses Lösungsbegriffs ist es möglich, die *Regularität* eines Deskriptorsystems zu definieren.

Definition 2.2 ([86]). Ein Deskriptorsystem (2.1) wird als *regulär* in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) , die (2.1) erfüllt, bezeichnet, wenn es eine eindeutige Lösung für jede genügend glatte Eingangsfunktion u in einer Umgebung von \hat{u} und jeden konsistenten Anfangswert in einer Umgebung von \hat{x} besitzt.

Die Regularität stellt die wichtigste Eigenschaft eines Deskriptorsystems dar. Jede Modellierung eines realen Systems führt immer auf ein reguläres Deskriptorsystem. Aus diesem Grund und da

die Behandlung von Systemen ohne eindeutige Lösung aus regelungstechnischer Sicht wenig zielführend erscheint, wird in dieser Arbeit die Regularität des Deskriptorsystems (2.1) grundsätzlich vorausgesetzt. Die nachfolgend definierte *Properheit* wird jedoch ausdrücklich nicht vorausgesetzt.

Definition 2.3. Ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) wird als *proper* bezeichnet, wenn es eine eindeutige Lösung für jede Eingangsfunktion $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, U \subset \mathbb{R}^p)$ in einer Umgebung von \hat{u} und jeden Anfangswert in einer Umgebung von \hat{x} , der konsistent mit dem Deskriptorsystem ist, besitzt. Ist dies nicht der Fall, wird das Deskriptorsystem als *improper* bezeichnet. Existiert die eindeutige Lösung bereits für jede Eingangsfunktion $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}, U \subset \mathbb{R}^p)$, so wird das Deskriptorsystem darüber hinaus als *streng proper* bezeichnet.

Die letzte Definition lässt sich so interpretieren, dass ein Deskriptorsystem genau dann proper ist, wenn die Lösung nicht von Ableitungen der Eingangsfunktion abhängt. Dies ist bei Zustandssystemen immer erfüllt. Da die Lösung eines Zustandssystems darüber hinaus nicht direkt von der Eingangsfunktion abhängt, ist es immer streng proper. Sowohl Regularität als auch Properheit sind lokale Eigenschaften, die nur in einer Umgebung gültig sind. Da in dieser Arbeit überwiegend lokale Aussagen hergeleitet werden, wird auf die Angabe der jeweiligen Umgebungen im Hinblick auf eine bessere Lesbarkeit verzichtet, wenn sie für das Verständnis nicht notwendig ist.

Die Definition der Regularität nichtlinearer Deskriptorsysteme ist in der Literatur nicht immer einheitlich. Teilweise (siehe z. B. [61]) wird ein Deskriptorsystem erst als regulär bezeichnet, wenn es proper ist. Die in dieser Arbeit getroffene Unterscheidung zwischen regulären und properen Deskriptorsystemen wird in der Literatur häufig verwendet und stimmt, wie im folgenden Abschnitt gezeigt, mit der einheitlichen Definition für lineare Deskriptorsysteme überein. Daneben werden reguläre Deskriptorsysteme teilweise als *lösbar* ([12]) und in der englischsprachigen Literatur als *well-posed* ([110]) bezeichnet. Gebräuchliches Synonym für Properheit ist die *Kausalität* ([90]), teilweise wird auch von *Realisierbarkeit* ([36]) gesprochen, da die Beschreibung jedes real existierenden Systems immer auf ein properes Deskriptorsystem führt.

Obwohl keine realen Systeme existieren, die improper sind, wird Properheit in dieser Arbeit nicht generell vorausgesetzt. Neben Methoden, die nur für propere Deskriptorsysteme existieren, werden auch Methoden für improper Systeme vorgestellt. Welche Möglichkeiten sich daraus für die Regelung von realen Systemen ergeben, wird in den jeweiligen Kapiteln ausgeführt. Außerdem wird in Abschnitt 7.1 ein Deskriptormodell eines realen Systems vorgestellt, welches wegen einer Vereinfachung bei der Modellbildung improper ist.

Neben der Systemanalyse ist es in der Regelungstechnik wünschenswert, Systeme gezielt beeinflussen zu können. Wird eine Regelung verwendet, so kann bei einem Deskriptorsystem prinzipiell der komplette Deskriptor verwendet werden, was als *Deskriptorrückführung* bezeichnet wird. Im Unterschied zu Zustandssystemen kann eine Deskriptorrückführung die grundlegenden Eigenschaften der Regularität und Properheit verändern, weshalb die Regularität des geregelten Deskriptorsystems stets sicherzustellen ist. Damit durch die Rückführung keine Freiheitsgrade verloren gehen, werden lediglich *reguläre* Deskriptorrückführungen betrachtet.

Definition 2.4. Eine statische Deskriptorrückführung

$$u = r(x_1, x_2, w) \quad (2.6)$$

mit $w \in \mathbb{R}^p$ für ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) wird in einer Umgebung $U \subset (\mathcal{M}_x \times \mathbb{R}^p)$ als *regulär* bezeichnet, wenn $\text{rang } \partial_w r(x_1, x_2, w) = p \forall (x_1, x_2, w) \in U$ gilt.

Definition 2.5. Eine dynamische Deskriptorrückführung

$$\dot{x}_c = r_1(x_c, x_1, x_2, w) \quad (2.7a)$$

$$u = r_2(x_c, x_1, x_2, w) \quad (2.7b)$$

mit $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ und $w \in \mathbb{R}^p$ für ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) wird in einer Umgebung von $U \subset (\mathbb{R}^{n_c} \times \mathcal{M}_x \times \mathbb{R}^p)$ als *regulär* bezeichnet, wenn (2.7) dort invertierbar (siehe Definition B.4) ist.

In der Literatur über Deskriptorsysteme ist häufig vom *Index* die Rede. Für lineare Deskriptorsystemen wird dieses Konzept im nächsten Abschnitt definiert. Für nichtlineare Deskriptorsysteme existieren mehrere Indexbegriffe (siehe [37, 38] oder [15]). Häufig anzutreffen ist der *differentielle Index*, der, vereinfacht ausgedrückt, der Anzahl der benötigten Ableitungen der algebraischen Gleichungen entspricht, um diese eindeutig nach der ersten Ableitung der algebraischen Variablen auflösen zu können. Da der Index eines Deskriptorsystems in dieser Arbeit nicht von Bedeutung ist, wird auf die entsprechenden Definitionen nicht weiter eingegangen.

2.3 Lineare Deskriptorsysteme

Lineare Deskriptorsysteme werden im Allgemeinen in der Form

$$E\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.8a)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.8b)$$

mit dem Deskriptor $x \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}^p$ und dem Ausgang $y \in \mathbb{R}^q$ dargestellt. Die Matrix $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt den Rang r , der kleiner oder gleich n ist. Die Matrizen A , B , C und D sind von passender Dimension. Lineare Deskriptorsysteme können immer in die semi-explizite Form

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (2.9a)$$

$$0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (2.9b)$$

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du \quad (2.9c)$$

überführt werden, wobei $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$ und $n = r + m$ gilt. Das Vorgehen ist zum Beispiel in *Konigorski* [58] beschrieben. Die Matrizen in (2.9) sind wieder von passender Dimension. Die im letzten Abschnitt vorgestellten Eigenschaften werden nun speziell für lineare Deskriptorsysteme dargestellt.

Definition 2.6 ([19, 81]). Ein lineares Deskriptorsystem (2.8) wird als *regulär* bezeichnet, wenn

$$\det(\lambda E - A) \neq 0$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt ist.

Für die Betrachtung der Properheit ist die Einführung der *Weierstrass-Kronecker-Form* hilfreich. Jedes reguläre, lineare Deskriptorsystem (2.8) lässt sich mithilfe einer Koordinatentransformation $x_w = T_w x$ und der Multiplikation mit einer geeigneten Matrix $T_L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von links auf die Darstellung

$$\dot{x}_{w,1} = A_w x_{w,1} + B_{w,1} u \quad (2.10a)$$

$$N \dot{x}_{w,2} = x_{w,2} + B_{w,2} u \quad (2.10b)$$

$$y = C_{w,1} x_{w,1} + C_{w,2} x_{w,2} + D u \quad (2.10c)$$

mit den Deskriptorvariablen $x_{w,1} \in \mathbb{R}^{n_{\text{slow}}}$ sowie $x_{w,2} \in \mathbb{R}^{n-n_{\text{slow}}}$ überführen ([19]). Die hier auftretende Matrix $N \in \mathbb{R}^{(n-n_{\text{slow}}) \times (n-n_{\text{slow}})}$ ist nilpotent mit dem Index h , d. h. $N^{h-1} \neq 0$ und $N^h = 0$. Die Lösung von (2.10) kann durch

$$x_{w,1}(t) = e^{A_w(t-t_0)} x_{w,1}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_w(t-\tau)} B_{w,1} u(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

$$x_{w,2}(t) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_{w,2} u^{(i)}(t) \quad (2.12)$$

angegeben werden. $x_{w,1}(t)$ hängt, wie die Lösung von Zustandssystemen, nur vom Anfangswert $x_{w,1}(t_0)$ und von vergangenen Werten von $u(\tau)$ ab. $x_{w,2}(t)$ wird dagegen durch den Eingang und seine Ableitungen zum aktuellen Zeitpunkt t bestimmt. Aus diesem Grund wird (2.10a) als *langsame Teilsystem* und (2.10b) als *schnelles Teilsystem* bezeichnet. Die Properheit des Deskriptorsystems hängt wegen (2.11) und (2.12) lediglich vom schnellen Teilsystem ab.

Definition 2.7 ([118]). Ein lineares Deskriptorsystem (2.8) wird als *proper* bezeichnet, wenn in der Darstellung (2.10) die Bedingung $N B_{w,2} = 0$ erfüllt ist. Es wird als *streng proper* bezeichnet, wenn $B_{w,2} = 0$ gilt.

Dai [19] zeigt, dass die Regularität von (2.8) für die Überführung in die Form (2.10) und damit für die Existenz einer eindeutigen Lösung von (2.8) notwendig und hinreichend ist. Daher ist Definition 2.2 für lineare Systeme äquivalent zu Definition 2.6. Anhand der Zeitlösung ist erkennbar, dass auch Definition (2.3) sowie (2.7) äquivalent sind.

Wie für lineare Zustandssysteme kann die Ein-/Ausgangsdynamik für reguläre, lineare Deskriptorsysteme mithilfe der *Übertragungsmatrix*

$$G(\lambda) = C (\lambda E - A)^{-1} B + D$$

beschrieben werden.

3 Interpretation eines Deskriptorsystems als Verkopplungsproblem

Die Lösungen eines verkoppelten Zustandssystems erfüllen asymptotisch eine algebraische Beziehung und liegen damit asymptotisch in einem invarianten Unterraum. Wird diese Beziehung als algebraische Gleichung zum Zustandssystem ergänzt, entsteht formal ein Deskriptorsystem. Es verhält sich genau wie das verkoppelte Zustandssystem, sofern die Anfangswerte des Zustandssystems im invarianten Unterraum gewählt werden. Umgekehrt lässt sich damit auch ein Deskriptorsystem als Verkopplungsproblem interpretieren, indem ein verkoppeltes Zustandssystem gesucht wird, welches sich asymptotisch wie das Deskriptorsystem verhält. Dafür wird die algebraische Gleichung des Deskriptorsystems als fiktive Ausgangsgleichung betrachtet, die nicht immer, sondern nur asymptotisch erfüllt werden soll. Aus dem Deskriptorsystem wird somit ein fiktives Zustandssystem. Für dieses Zustandssystem wird anschließend ein Verkopplungsregler entworfen, um zum verkoppelten Zustandssystem zu gelangen.

3.1 Fiktive Zustandsraumdarstellung

Betrachtet wird das fiktive Zustandssystem

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u) \quad (3.1a)$$

$$z = g(x_1, x_2, u) \quad (3.1b)$$

$$y = h(x_1, x_2, u), \quad (3.1c)$$

wobei das Vektorfeld f sowie die Abbildungen g und h des Deskriptorsystems (2.1) verwendet werden. Das System besitzt den r -dimensionalen Zustand $x_1 \in \mathcal{M}_{x_1}$. Je nach Verwendung wird entweder $u_e = (x_2, u) \in \mathbb{R}^{m+p}$ als Eingang und $z_e = (z, y) \in \mathbb{R}^{m+q}$ als Ausgang betrachtet oder der Eingang entspricht $x_2 \in \mathbb{R}^m$ und der Ausgang $z \in \mathbb{R}^m$. Im zweiten Fall stellt $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I}, \mathbb{R}^p)$ einen genügend glatten, zeitvarianten Parameter dar. Im weiteren Verlauf wird nicht nur die lokale Invertierbarkeit bezüglich der Ein- und Ausgänge u_e und z_e , sondern auch bezüglich x_2 und z diskutiert. Abgekürzt wird dies mit der Invertierbarkeit bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ bzw. $\langle z, x_2 \rangle$. Die Definition der Invertierbarkeit eines Zustandssystems ist im Anhang in Definition B.4 zu finden. Das folgende Lemma zeigt, dass die Regularität des Deskriptorsystems (2.1) mit dem Zustandssystem (3.1) überprüft werden kann.

Lemma 3.1. (\hat{x}_1, \hat{x}_2) sei ein konsistenter Anfangswert für das Deskriptorsystem (2.1). Das Deskriptorsystem ist genau dann regulär in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$, wenn (3.1) bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$ in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$ invertierbar ist.

Beweis. \Leftarrow : Sei $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ eine Funktion, die zusammen mit $u(t)$ punktweise (2.1) erfüllt. Dann erfüllen $x(t)$ und $u(t)$ auch punktweise (3.1), wobei $z(t) = 0$ gilt. Da (3.1) invertierbar bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$ ist, wird $x_2(t)$ nach Lemma B.3 eindeutig durch $z(t) = 0$ und $\hat{x} = x(t_0)$

festgelegt. Zu einem gegebenen $u(t)$ existiert daher genau eine Lösung, die (3.1) mit $z(t) = 0$ erfüllt. Somit existiert eine eindeutige Lösung für (2.1), sodass (2.1) regulär ist.

⇒: Das Deskriptorsystem (2.1) sei regulär, wodurch die Lösung $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ eindeutig ist, die (2.1) punktweise für ein gegebenes $u(t)$ und einen konsistenten Anfangswert $\hat{x} = x(t_0)$ erfüllt. Angenommen (3.1) ist nicht invertierbar bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$. Dann existiert ein $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$, für das $\tilde{x}_2(t) \neq x_2(t)$, $\tilde{x}_2(t_0) = x_2(t_0)$ sowie $\tilde{x}_1(t_0) = x_1(t_0)$ gilt, sodass $\tilde{x}(t)$ punktweise (3.1) mit $z(t) = 0$ für die Eingangsfunktion $u(t)$ erfüllt. Deshalb erfüllt auch $\tilde{x}(t)$ punktweise (2.1). Da (2.1) zwei Lösungen zum selben Anfangswert und Eingang besitzt, kann das Deskriptorsystem nicht regulär sein. \square

In den folgenden Abschnitten werden Algorithmen vorgestellt, die ausgehend von (3.1) verkoppelte Zustandsraumdarstellungen herleiten, die geeignet sind, die Lösung des Deskriptorsystems zu reproduzieren.

3.2 Verkoppelte Zustandsraumdarstellung

Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen stellt der Shuffle Algorithmus von *Luenberger* [78] dar, der ein lineares Deskriptorsystem derart modifiziert, dass ein Deskriptorsystem vom Index 0 entsteht. Angewandt auf Deskriptorsysteme in der semi-expliziten Form erzeugt der Algorithmus Ableitungen der algebraischen Gleichungen. Da die algebraischen Gleichungen für eine Lösung des Deskriptorsystems zu jedem Zeitpunkt erfüllt sind, muss eine Lösung auch die Ableitungen der algebraischen Gleichungen zu jedem Zeitpunkt erfüllen ([15]). Die dabei auftretenden Gleichungen stellen weitere Restriktionen für die Lösung dar und werden als *verborgene Restriktionen* (engl. *hidden constraints* [115]) bezeichnet.

Die Grundidee des im Folgenden vorgestellten Algorithmus ist es, die algebraischen Gleichungen des Deskriptorsystems so lange nach der Zeit abzuleiten, bis das entstandene Gleichungssystem eindeutig nach den algebraischen Variablen aufgelöst werden kann, um eine fiktive Rückführung für die algebraischen Variablen zu erzeugen. Bei diesem Vorgehen wird der explizite Zusammenhang zwischen den algebraischen und den übrigen Variablen sichtbar. Das Einsetzen dieser fiktiven Rückführung in die Differentialgleichungen des Deskriptorsystems liefert formal ein Zustandssystem. Die Untermannigfaltigkeit, die im Kern der Abbildung g von (2.1b) und ihren Ableitungen liegt, wird für das Zustandssystem durch die fiktive Rückführung geregelt invariant. Da die Systemgleichungen (2.1a) und (3.1a) übereinstimmen und (2.1b) für alle Lösungen des geregelten Zustandssystems auf dieser Untermannigfaltigkeit erfüllt ist, besitzt die Zustandsraumdarstellung auf der Untermannigfaltigkeit dieselbe Lösung wie das Deskriptorsystem. Um die vorgestellte Grundidee allgemein umsetzen zu können, müssen einige Besonderheiten beachtet werden.

Ist das Deskriptorsystem nicht proper, so hängen Ableitungen der algebraischen Gleichungen von Eingangsableitungen ab. Um trotzdem zu einer Zustandsraumdarstellung zu gelangen, wird beim Auftreten einer Eingangsableitung das Deskriptorsystem dynamisch erweitert, indem vor jeden

Eingang ein Integrator geschaltet wird. Dies kann offensichtlich mehrfach notwendig sein; es wird so lange dynamisch erweitert, bis das erweiterte Deskriptorsystem proper ist. Für einige Anwendungen ist es außerdem sinnvoll, dass die berechnete Untermannigfaltigkeit für das entstandene Zustandssystem attraktiv ist.

Der vorgestellte Algorithmus basiert prinzipiell auf dem *Constrained Dynamics Algorithm* von Nijmeijer und van der Schaft [99]. Dort wird die größte ausgangsnulldende Untermannigfaltigkeit sowie eine Rückführung bestimmt, mit der die Untermannigfaltigkeit geregelt invariant ist. In Manderla u. a. [85] wird ein Verkopplungsalgorithmus für Deskriptorsysteme beschrieben, der strukturell wie der *Constrained Dynamics Algorithm* aufgebaut ist; alle algebraischen Gleichungen werden zusammen im Algorithmus verwendet. Dabei konnte kein konstruktives Verfahren angegeben werden, um die Attraktivität der Untermannigfaltigkeit immer sicherzustellen.

Im neuen Verfahren werden die algebraischen Gleichungen sukzessive behandelt. Dies bedeutet, dass die erste Gleichung so lange nach der Zeit abgeleitet wird, bis die entstandene Gleichung von algebraischen Variablen abhängt. Diese eine Gleichung kann nicht eindeutig nach den m algebraischen Variablen x_2 aufgelöst werden. Es verbleiben $m - 1$ Freiheitsgrade, die in einer neuen $(m - 1)$ -dimensionalen Variable $x_{2,1}$ parametrisiert werden, was auf eine erste fiktive Rückführung führt. Beim Ableiten der zweiten algebraischen Gleichung wird diese Rückführung eingesetzt, sodass nun so lange abgeleitet wird, bis die neue Variable auftritt. Dieses Vorgehen wird für alle algebraischen Gleichungen wiederholt, sodass im letzten Schritt keine Freiheitsgrade beim Auflösen übrig bleiben.

Um die Attraktivität der Untermannigfaltigkeit sicherzustellen, wird nicht nur die höchste Ableitung einer algebraischen Gleichung beim Auflösen verwendet, sondern es werden die vorherigen Ableitungen mit Gewichtungsfaktoren hinzu addiert. Dies entspricht der Polvorgabe bei der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung ([50]), wenn die Abbildung g von (2.1b) als fiktive Ausgangsgleichung und die algebraischen Variablen als fiktiver Eingang interpretiert werden. Die Vorgabe von Polen mit negativem Realteil führt dazu, dass der fiktive Ausgang asymptotisch gegen null konvergiert. Da die Untermannigfaltigkeit gerade dadurch charakterisiert ist, dass der fiktive Ausgang für alle Lösungen auf der Untermannigfaltigkeit null ist, macht diese Polvorgabe die Untermannigfaltigkeit attraktiv.

Das beschriebene Vorgehen lässt sich als nichtlinearer Verkopplungsreglerentwurf ([67]) für das System (3.1) bezüglich des Eingangs x_2 und des Ausgangs z verstehen. Diese in Konigorski [58] für lineare Deskriptorsysteme vorgeschlagene und in Manderla [81] auf nichtlineare Deskriptorsysteme übertragene Interpretation wird weiter verallgemeinert und gibt der entstehenden Darstellung den Namen *verkoppelte Zustandsraumdarstellung*.

Im Verlauf der Arbeit wird die verkoppelte Zustandsraumdarstellung auch für Stabilitätsuntersuchungen genutzt. Daher ist es notwendig, dass für die dynamische Erweiterung nicht nur Integratoren vor die Eingänge geschaltet werden, sondern stabile PT_1 -Glieder. Die Vorschaltung von Integratorketten bleibt als Sonderfall enthalten. Für eine bessere Verständlichkeit wird der Algorithmus zuerst für die erste algebraische Gleichung ausgeführt (Schritte 1-3). Anschließend werden die übrigen algebraischen Gleichungen betrachtet (Schritte 4-8).

Algorithmus 3.1.

Schritt 0 Das System (3.1) wird mit Σ_0 bezeichnet und es gilt $\tilde{x}_1 := x_1, \tilde{u} := u, \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_2) := f(x_1, x_2, u)$ sowie $\gamma_0(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_2) := g(x_1, x_2, u)$. Die einzelnen Funktionen in γ_0 werden mit $\gamma_0^1, \dots, \gamma_0^m$ bezeichnet. Außerdem sei $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_{x_1}$ die Zustandsmannigfaltigkeit für Σ_0 . Der Parameter κ_j zählt die Anzahl der Ableitungen der j -ten Gleichung und der Parameter μ die Ordnung der dynamischen Erweiterung jedes Eingangs. Zu Beginn wird $\kappa_j = 0, j \in \underline{m}$ und $\mu = 0$ gesetzt.

Schritt 1 Wenn $\partial_{x_2} \gamma_{\kappa_1}^1 \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_1 gilt, wird direkt zu Schritt 3 gesprungen, da keine weiteren Ableitungen notwendig sind.

Gilt $\partial_{\tilde{u}} \gamma_{\kappa_1}^1 \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_1 , dann wird μ um 1 erhöht und das System mit einem PT₁-Glied vor jedem Eingang dynamisch erweitert. Dies führt auf $\check{x}_1 := (\tilde{x}_1, \tilde{u})$ sowie

$$\check{f}(\check{x}_1, \check{u}, x_2) := \begin{bmatrix} \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_2) \\ c_\mu \tilde{u} + \check{u} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

mit einem beliebigen Parameter $c_\mu \in \mathbb{R}_0^-$. Außerdem wird \mathcal{M}_0 durch $(\mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}^p)$ ersetzt.

Gilt dagegen $\partial_{\tilde{u}} \gamma_{\kappa_1}^1 = 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_1 , so wird lediglich $\check{x}_1 := \tilde{x}_1, \check{u} := \tilde{u}$ und $\check{f}(\check{x}_1, \check{u}, x_2) := \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_2)$ gesetzt.

Schritt 2 κ_1 wird um 1 erhöht und das Ableiten der letzten Restriktion erzeugt die neue Restriktion $\gamma_{\kappa_1}^1 := L_{\check{f}} \gamma_{\kappa_1-1}^1$. Alle bisherigen Restriktionen werden in der Vektorfunktion $\gamma_1^T := [\gamma_0^1 \dots \gamma_{\kappa_1-1}^1]$ zusammengefasst und es wird angenommen, dass der Rang der Jacobi-Matrix von γ_1 bezüglich \check{x}_1 konstant in einer Umgebung von (\hat{x}_1, \hat{u}) ist und

$$\text{rang}(\partial_{\check{x}_1} \gamma_1) = \kappa_1 \quad (3.3)$$

gilt, also alle zuvor bestimmten Restriktionen unabhängig sind. Damit ist $\mathcal{M}_1 := \{\check{x}_1 \in \mathcal{M}_0 \mid \gamma_1 = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit.

Schritt 3 Es wird $\check{f} := \tilde{f}, \check{x}_1 := \tilde{x}_1$ sowie $\tilde{u} := \check{u}$ gesetzt und die Schritte 1 und 2 so lange wiederholt, bis $\partial_{x_2} \gamma_{\kappa_1}^1 \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_1 gilt. Dafür waren κ_1 Ableitungen der ersten algebraischen Gleichung notwendig.

Die Parameter $b_i^1 \in \mathbb{R}$ werden so gewählt, dass die Nullstellen des Polynoms

$$P^1(\lambda) = (\lambda)^{\kappa_1} + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} b_i^1 \cdot (\lambda)^i \quad (3.4)$$

alle in \mathbb{C}^- liegen. Mit dem Satz B.9 ist es möglich, eine fiktive Rückführung $\alpha_1 : (\mathcal{M}_1 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-1}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $x_2 = \alpha_1(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,1})$ und der neuen Variable $x_{2,1} \in \mathbb{R}^{m-1}$ zu finden, die die Gleichung

$$\gamma_{\kappa_1}^1(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_2) + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} b_i^1 \gamma_i^1(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_2) = 0 \quad (3.5)$$

in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_1 löst und für die lokal $\text{rang } \partial_{x_{2,1}} \alpha_1 = m-1$ gilt. Das System Σ_0 , welches mit $x_2 = \alpha_1(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,1})$ geregelt ist, wird mit Σ_1 bezeichnet. Für dieses System ist \mathcal{M}_1 attraktiv, da in Σ_1 die lineare Dynamik $(z^1)^{(\kappa_1)} + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} b_i^1 (z^1)^{(i)} = 0$ enthalten ist, deren Polstellen den Nullstellen von (3.4) entsprechen.

In den nächsten Schritten werden die übrigen algebraischen Gleichungen beginnend bei der zweiten betrachtet, wofür die Variable $j = 2$ gesetzt wird.

Schritt 4 Die Beschreibung von Σ_{j-1} sei $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,(j-1)})$ mit $x_{2,(j-1)} \in \mathbb{R}^{m-j+1}$. Es gilt $\mathcal{M}_j := \mathcal{M}_{j-1}$.

Schritt 5 Wenn $\partial_{x_{2,(j-1)}} \gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j gilt, wird direkt zu Schritt 7 gesprungen.

Gilt $\partial_{\tilde{u}} \gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j , dann wird μ um 1 erhöht und das System mit einem PT_1 -Glied vor jedem Eingang dynamisch erweitert. Dies führt auf $\check{x}_1 := (\tilde{x}_1, \tilde{u})$ und

$$\check{f}(\check{x}_1, \check{u}, x_{2,(j-1)}) := \begin{bmatrix} \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,(j-1)}) \\ c_\mu \tilde{u} + \check{u} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

mit einem beliebigen Parameter $c_\mu \in \mathbb{R}_0^-$. Außerdem wird \mathcal{M}_{j-1} durch $(\mathcal{M}_{j-1} \times \mathbb{R}^p)$ ersetzt. Gilt dagegen $\partial_{\tilde{u}} \gamma_{\kappa_j}^j = 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j , so wird lediglich $\check{x}_1 := \tilde{x}_1, \check{u} := \tilde{u}$ und $\check{f}(\check{x}_1, \check{u}, x_{2,(j-1)}) := \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,(j-1)})$ gesetzt.

Schritt 6 κ_j wird um 1 erhöht und die neue Restriktion $\gamma_{\kappa_j}^j := L_{\check{f}} \gamma_{\kappa_{j-1}}^j$ durch Ableiten der letzten Restriktion erzeugt. Alle bisherigen Restriktionen zur j -ten algebraischen Gleichung werden in der Vektorfunktion $\gamma_j^T := [\gamma_0^j \ \dots \ \gamma_{\kappa_j-1}^j]$ zusammengefasst und es wird angenommen, dass der Rang der Jacobi-Matrix von γ_j bezüglich \check{x}_1 konstant in einer Umgebung von (\hat{x}_1, \hat{u}) ist und

$$\text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j \kappa_i. \quad (3.7)$$

gilt, also alle zuvor bestimmten Restriktionen unabhängig sind. Damit ist $\mathcal{M}_j := \{\check{x}_1 \in \mathcal{M}_{j-1} \mid \gamma_j = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit.

Schritt 7 Es wird $\tilde{f} := \check{f}, \tilde{x}_1 := \check{x}_1$ sowie $\tilde{u} := \check{u}$ gesetzt und die Schritte 5 und 6 so lange wiederholt, bis $\partial_{x_{2,(j-1)}} \gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j gilt. Dafür waren κ_j Ableitungen der j -ten algebraischen Gleichung notwendig.

Die Parameter $b_i^j \in \mathbb{R}$ werden so gewählt, dass die Nullstellen des Polynoms

$$P^j(\lambda) = (\lambda)^{\kappa_j} + \sum_{i=0}^{\kappa_j-1} b_i^j \cdot (\lambda)^i \quad (3.8)$$

alle in \mathbb{C}^- liegen. Mit dem Satz B.9 ist es möglich, eine fiktive Rückführung $\alpha_j : (\mathcal{M}_j \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-j}) \rightarrow \mathbb{R}^{m-j+1}$ mit $x_{2,(j-1)} = \alpha_j(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,j})$ und der neuen Variable $x_{2,j} \in \mathbb{R}^{m-j}$ zu finden, die die Gleichung

$$\gamma_{\kappa_j}^j(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,(j-1)}) + \sum_{i=0}^{\kappa_j-1} b_i^j \gamma_i^j(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,(j-1)}) = 0 \quad (3.9)$$

in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j löst und für die lokal $\text{rang } \partial_{x_{2,j}} \alpha_j = m - j$ gilt. Das System Σ_{j-1} , welches mit $x_{2,(j-1)} = \alpha_j(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,j})$ geregelt ist, wird mit Σ_j bezeichnet. Für dieses System ist \mathcal{M}_j attraktiv, da in Σ_j die lineare Dynamik $(z^j)^{(\kappa_j)} + \sum_{i=0}^{\kappa_j-1} b_i^j (z^j)^{(i)} = 0$ enthalten ist, deren Polstellen den Nullstellen von (3.8) entsprechen.

Schritt 8 j wird um 1 erhöht und die Schritte 4 – 8 werden so lange wiederholt, bis $j = m$ gilt.

Werden die Rangannahmen (3.3) und (3.7) in Schritt 2 bzw. 6 immer erfüllt, so terminiert der Algorithmus erfolgreich. Werden die Rangannahmen nicht erfüllt, wird die j -te algebraische Gleichung von den verbleibenden Variablen $x_{2,(j-1)}$ nicht mehr beeinflusst. In diesem Fall terminiert der Algorithmus nicht erfolgreich. Im weiteren Verlauf wird gezeigt, dass der Algorithmus für reguläre Deskriptorsysteme immer erfolgreich terminiert. Zuvor verdeutlicht ein Beispiel den Ablauf des Algorithmus.

Beispiel 3.1. Gegeben ist das Deskriptorsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{x}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + u^1 \\ x^4 + u^2 \\ -x^5 \\ -x^5 - x^6 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} x^4 \\ x^1 + x^2 \end{bmatrix} \quad y = x^5$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4) \in \mathbb{R}^4$, $x_2 = (x^5, x^6) \in \mathbb{R}^2$ und $\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$.

Schritt 0: Es gilt $\gamma_0^1 = \tilde{x}^4$, $\gamma_0^2 = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$ und $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \mathbb{R}^4$.

Schritt 1: Wegen $\partial_{x_2} \gamma_0^1 = 0$ und $\partial_{\tilde{u}} \gamma_0^1 = 0$ ist keine dynamische Erweiterung notwendig und es gilt $\check{x}_1 = \tilde{x}_1$ und $\check{u} = \tilde{u}$.

Schritt 2: $\kappa_1 = 1$ und die neue Restriktion $\gamma_1^1 = -x^5 - x^6$ wird berechnet. Es gilt

$$\text{rang } \partial_{\check{x}_1} \gamma_1^1 = \text{rang } \partial_{\check{x}_1} (\check{x}^4) = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

und $\mathcal{M}_1 = \{\check{x}_1 \in \mathbb{R}^4 \mid \check{x}^4 = 0\}$.

Schritt 3: Es wird $\tilde{x}_1 = \check{x}_1$ und $\tilde{u} = \check{u}$ gesetzt und der Parameter b_0^1 größer null gewählt, sodass die Nullstelle des Polynoms

$$P^1(\lambda) = \lambda + b_0^1$$

in \mathbb{C}^- liegt. (3.5) ergibt sich zu

$$-x^5 - x^6 + b_0^1 \tilde{x}^4 = 0$$

und es kann

$$x_2 = \begin{bmatrix} x^5 \\ x^6 \end{bmatrix} = \alpha_1(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,1}) = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ b_0^1 \tilde{x}^4 - x_{2,1} \end{bmatrix}$$

gewählt werden.

Schritt 4: Fortsetzung mit 2. algebraischer Gleichung und $\gamma_0^2 = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$.

Schritt 5: Wegen $\partial_{x_2}\gamma_0^2 = 0$ und $\partial_{\tilde{u}}\gamma_0^2 = 0$ ist keine dynamische Erweiterung notwendig und es gilt $\check{x}_1 = \tilde{x}_1$ und $\check{u} = \tilde{u}$.

Schritt 6: $\kappa_2 = 1$ und die neue Restriktion $\gamma_1^2 = \check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{u}^1 + \check{u}^2$ wird berechnet. Es gilt

$$\text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \check{x}^4 \\ \check{x}^1 + \check{x}^2 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

und $\mathcal{M}_2 = \{\check{x}_1 \in \mathcal{M}_1 \mid \check{x}^1 + \check{x}^2 = 0\}$.

Schritt 7: Wiederholen der Schritte 5 und 6 mit $\tilde{x}_1 = \check{x}_1$ und $\tilde{u} = \check{u}$.

Schritt 5: Wegen $\partial_{x_2}\gamma_1^2 = 0$ und $\partial_{\tilde{u}}\gamma_1^2 \neq 0$ wird mit $\check{x}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{u})$ und $\mathcal{M}_1 = \{\check{x}_1 \in \mathbb{R}^6 \mid \check{x}^4 = 0\}$ das erweiterte System

$$\check{f}(\check{x}_1, \check{u}, x_{2,1}) = \begin{bmatrix} \check{x}^3 + \check{x}^5 \\ \check{x}^4 + \check{x}^6 \\ -x_{2,1} \\ -b_0^1 \check{x}^4 \\ c_1 \check{x}^5 + \check{u}^1 \\ c_1 \check{x}^6 + \check{u}^2 \end{bmatrix}$$

erzeugt.

Schritt 6: $\kappa_2 = 2$ und die neue Restriktion $\gamma_2^2 = -x_{2,1} - b_0^1 \check{x}^4 + c_1 \check{x}^5 + \check{u}^1 + c_1 \check{x}^6 + \check{u}^2$ wird berechnet. Es gilt

$$\text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \check{x}^4 \\ \check{x}^1 + \check{x}^2 \\ \check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{x}^5 + \check{x}^6 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

und $\mathcal{M}_2 = \{\check{x}_1 \in \mathcal{M}_1 \mid \check{x}^1 + \check{x}^2 = 0, \check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{x}^5 + \check{x}^6 = 0\}$.

Schritt 7: Es wird $\tilde{x}_1 = \check{x}_1$ und $\tilde{u} = \check{u}$ gesetzt und die Parameter b_0^2 und b_1^2 beide größer null gewählt, sodass die Nullstellen des Polynoms

$$P^2(\lambda) = \lambda^2 + b_1^2 \lambda + b_0^2$$

in \mathbb{C}^- liegen. (3.9) ergibt sich zu

$$-x_{2,1} - b_0^1 \check{x}^4 + c_1 \check{x}^5 + \check{u}^1 + c_1 \check{x}^6 + \check{u}^2 + b_1^2 (\check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{x}^5 + \check{x}^6) + b_0^2 (\check{x}^1 + \check{x}^2) = 0$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} x_{2,1} &= \alpha_2(\tilde{x}_1, \tilde{u}) \\ &= -b_0^1 \check{x}^4 + c_1 \check{x}^5 + \check{u}^1 + c_1 \check{x}^6 + \check{u}^2 + b_1^2 (\check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{x}^5 + \check{x}^6) + b_0^2 (\check{x}^1 + \check{x}^2). \end{aligned}$$

Schritt 8: Der Algorithmus terminiert erfolgreich.

Ist der Algorithmus erfolgreich, so wird die neue Variable $x_e := \tilde{x}_1 \in \mathcal{M}_{x_e}$ eingeführt, wobei $\mathcal{M}_{x_e} = (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^{p\mu})$ mit $n_{x_e} := \dim \mathcal{M}_{x_e} = r + p\mu$, da das System (3.1) mit μ PT₁-Gliedern

vor jedem Eingang dynamisch erweitert wird. $n_u := p\mu$ entspricht der Ordnung der dynamischen Erweiterung und $\kappa := \sum_{j=1}^m \kappa_j$ der Anzahl der Restriktionen. Alle berechneten Restriktionen werden in der Abbildung $\gamma_e : \mathcal{M}_{x_e} \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$,

$$\gamma_e(x_e) = \begin{bmatrix} \gamma_0^1(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ \gamma_{\kappa_1-1}^1(\tilde{x}_1) \\ \gamma_0^2(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ \gamma_{\kappa_m-1}^m(\tilde{x}_1) \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Die Restriktionen definieren die Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_e := \mathcal{M}_m = \{x_e \in \mathcal{M}_{x_e} \mid \gamma_e(x_e) = 0\}, \quad (3.10)$$

die die Dimension $\dim \mathcal{N}_e = r + n_u - \kappa$ besitzt. Mit dem neuen Eingang $v := \tilde{u}$ und der Aufteilung $x_e = (x_1, x_u)$, wobei $x_u \in \mathbb{R}^{n_u}$ gilt, kann die dynamische Erweiterung

$$\dot{x}_u = \begin{bmatrix} A_{u,11} & I_p & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & I_p \\ 0 & \dots & & A_{u,\mu\mu} \end{bmatrix} x_u + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix} v = r_x(x_u, v) \quad (3.11a)$$

$$u = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x_u = r_u(x_u), \quad (3.11b)$$

angegeben werden, wobei

$$A_{u,kk} = \begin{bmatrix} c_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

gilt. Die sukzessive berechneten Rückführungen erzeugen den fiktiven Verkopplungsregler

$$x_2 = \alpha_1(x_1, u, \alpha_2(\dots \alpha_m(\tilde{x}_1, \tilde{u}))) = \alpha_e(x_e, v) \quad (3.12)$$

und die verkoppelte Zustandsraumdarstellung Σ_m nimmt die Form

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} f(x_1, \alpha_e(x_1, x_u, v), r_u(x_u)) \\ r_x(x_u, v) \end{bmatrix} = \tilde{f}_e(x_e, v) \quad (3.13a)$$

$$y = h(x_1, \alpha_e(x_1, x_u, v), r_u(x_u)) = h_e(x_e, v) \quad (3.13b)$$

an. Wird (3.12) in (2.1b) eingesetzt, so ergibt sich die fiktive algebraische Gleichung

$$0 = g(x_1, \alpha_e(x_1, x_u, v), r_u(x_u)) = g_e(x_e), \quad (3.14)$$

die für alle $x_e \in \mathcal{N}_e$ sowie $v \in \mathbb{R}^p$ erfüllt ist. Dass g_e nicht mehr von v abhängt, lässt sich mithilfe einer Fallunterscheidung begründen. Hängt die j -te algebraische Gleichung von (2.1b) nicht von

x_2 und u ab, so kann g_e^j nicht von v abhängen. Hängt die Gleichung von x_2 ab, so ist $\kappa_j = 0$ und wegen (3.5) bzw. (3.9) tritt v in g_e^j nicht auf. Tritt in g^j nur u auf, so wird das Deskriptorsystem mindestens einmal dynamisch erweitert, sodass g_e^j ebenfalls nicht von v abhängen kann.

Die in (3.13) auftretenden Variablen x_u und v lassen sich bei der dynamischen Erweiterung mit I-Gliedern als Eingang und Eingangsableitung interpretieren. Werden jedoch PT_1 -Glieder verwendet, ist die Verknüpfung nicht mehr unmittelbar erkennbar. Die dynamische Erweiterung (3.11) lässt sich aufgrund ihrer Struktur immer in eine reguläre Koordinatentransformation

$$(x_u, v) = \Psi(u, \dot{u}, \dots, (u)^{(\mu)}) = \Psi(\bar{u}), \quad (3.15)$$

umformen, die ebenfalls linear ist und die Gestalt

$$\begin{aligned} x_{u,1} &= u \\ x_{u,2} &= \dot{u} - A_{u,11}u \\ x_{u,3} &= \ddot{u} - (A_{u,11} + A_{u,22})\dot{u} + A_{u,22}A_{u,11}u \\ &\vdots \\ x_{u,\mu} &= (u)^{(\mu-1)} - \left(\sum_{i=2}^{\mu-1} A_{u,ii} \right) (u)^{(\mu-2)} + \left(\sum_{i=1}^{\mu-1} \sum_{j=1}^{i-1} A_{u,ii} A_{u,jj} \right) (u)^{(\mu-3)} \\ &\quad + \dots + \left(\sum_{i=1}^{\mu-1} \prod_{j=1, j \neq i}^{\mu-1} -A_{u,jj} \right) \dot{u} + \left(\prod_{j=1}^{\mu-1} -A_{u,jj} \right) u \\ v &= (u)^{(\mu)} - \left(\sum_{i=2}^{\mu} A_{u,ii} \right) (u)^{(\mu-1)} + \left(\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{i-1} A_{u,ii} A_{u,jj} \right) (u)^{(\mu-2)} \\ &\quad - \sum_{i=3}^{\mu} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} A_{u,ii} A_{u,jj} A_{u,kk} (u)^{(\mu-3)} \\ &\quad + \dots + \left(\sum_{i=1}^{\mu} \prod_{j=1, j \neq i}^{\mu} -A_{u,jj} \right) \dot{u} + \left(\prod_{j=1}^{\mu} -A_{u,jj} \right) u \end{aligned}$$

annimmt. Mit (3.15) ist es möglich, Berechnungen für die verkoppelte Zustandsraumdarstellung auf den Eingang und seine Ableitung zurückzuführen und umgekehrt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden an einigen Stellen Restriktionen benötigt, die von x_2 abhängen. Die Restriktionen $\gamma_{\kappa_j}^j$ aus dem Algorithmus hängen jedoch von der Variable $x_{2,(j-1)}$ ab. Durch

$$\gamma_{e,\kappa_j}^j := L \check{f} \gamma_{\kappa_{j-1}}^j \quad \text{mit} \quad \check{f}(x_e, x_2, v) := \begin{bmatrix} f(x_1, x_2, r_u(x_u)) \\ r_x(x_u, v) \end{bmatrix}$$

werden die Koordinaten so gewählt, dass alle γ_{e,κ_j}^j von x_2 abhängen. Da der Algorithmus terminiert, muss

$$\text{rang } \partial_{x_2} \left[\gamma_{e,\kappa_j}^j \right]_{j \in \underline{m}} = m$$

gelten. Außerdem wird

$$\gamma_{e,i}^j := \gamma_i^j \quad \forall i \in \{0, \dots, \kappa_j - 1\}, j \in \underline{m}$$

gesetzt. (3.9) stellt mit $z^j = \gamma_{e,0}^j, \dot{z}^j = \gamma_{e,1}^j, \dots, (z^j)^{(\kappa_j)} = \gamma_{e,\kappa_j}^j, j \in \underline{m}$ eine lineare, autonome Differentialgleichung mit einer stabilen Ruhelage in $z = 0$ dar, da die in (3.4) bzw. (3.8) gewählten Nullstellen hier als Pole die Dynamik bestimmen. Diese werden im weiteren Verlauf auch synonym als *Verkopplungseigenwerte* bezeichnet. Da auf \mathcal{N}_e immer $z = 0$ gilt, ist \mathcal{N}_e für (3.13) invariant und attraktiv.

Nachdem die Ergebnisse des Algorithmus 3.1 vorgestellt wurden, wird gezeigt, dass der Algorithmus für reguläre Deskriptorsysteme immer erfolgreich terminiert.

Satz 3.2. (\hat{x}_1, \hat{x}_2) sei ein konsistenter Anfangswert für das Deskriptorsystem (2.1). Der Algorithmus 3.1 terminiert in einer Umgebung von $(\hat{x}_e, \hat{v}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$, wobei $\hat{x}_2 = \alpha_e(\hat{x}_e, \hat{v})$ und $\hat{u} = r_u(\hat{x}_u)$ gilt, genau dann erfolgreich, wenn das Deskriptorsystem (2.1) in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$ regulär ist.

Beweis. \Leftarrow : γ_i^j stellt die i -te Ableitung der j -ten algebraischen Gleichung von (2.1) dar, wodurch $\gamma_i^j = 0$ für alle Lösungen von (2.1) erfüllt ist. Mit der Regularität des Deskriptorsystems (2.1) folgt aus Lemma 3.1, dass (3.1) bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$ invertierbar ist. Daher sind alle γ_i^j unabhängig (siehe [109]) und die Rangannahmen (3.3) sowie (3.7) erfüllt. Der Algorithmus terminiert erfolgreich.

\Rightarrow : Angenommen der Algorithmus terminiert erfolgreich. Dann wird eine Funktion (3.12) berechnet, die auf \mathcal{N}_e , unabhängig von der Wahl der Parameter b_i^j , eindeutig ist. Aus der Kenntnis von \hat{x}_e, \hat{v} und $z(t) = 0$ kann mit (3.13) $x_2(t)$ in eindeutiger Weise bestimmt werden. Damit muss (3.1) bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$ invertierbar sein, was nach Lemma 3.1 äquivalent zur Regularität des Deskriptorsystems (2.1) ist. \square

Die im Verlauf des Algorithmus erzeugte dynamische Erweiterung (3.11) besitzt spezielle Eigenschaften, wie nachfolgend gezeigt.

Lemma 3.3. Die dynamische Erweiterung (3.11) ist linear, besitzt keine Nullstellen und ist vollständig steuer- und beobachtbar sowie invertierbar.

Beweis. Da die quadratische Rosenbrock'sche Systemmatrix von (3.11) wegen

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_{u,11} - \lambda I_p & I_p & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & I_p & 0 \\ 0 & \dots & A_{u,\mu\mu} - \lambda I_p & I_p & \\ I_p & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} = p\mu + p = n_u + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

immer vollen Rang besitzt, existieren keine invarianten Nullstellen und das System ist vollständig steuer- sowie beobachtbar. Damit ist das System auch invertierbar (siehe Lemma B.1). \square

Ein Ziel des Algorithmus ist es, ein Zustandssystem zu erzeugen, das die Lösung des Deskriptorsystems rekonstruieren kann. Dass dies gelungen ist, zeigt der nachfolgende Satz.

Satz 3.4. *Das Deskriptorsystem (2.1) sei regulär in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$, wobei $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ einen konsistenten Anfangswert beschreibt. $(x_1(t), x_2(t))$ bezeichne die Lösung des Deskriptorsystems zu diesem Anfangswert und $(\xi_1(t), \xi_u(t))$ bezeichne die Lösung von (3.13) zum Anfangswert $(\hat{x}_1, \hat{\xi}_u)$, wobei $\hat{\xi}_u$ und v so gewählt werden, dass der Ausgang von (3.11) genau $u(t)$, dem Eingang des Deskriptorsystems, entspricht, was nach Lemma 3.3 immer möglich ist. Dann besitzen beide Systeme dieselbe Lösung und es gilt $x_1(t) = \xi_1(t)$ sowie $x_2(t) = \alpha_e(\xi_1(t), \xi_u(t), v(t))$.*

Beweis. Da (3.14) für den gewählten Anfangswert erfüllt ist, wird (3.14) für die Lösung von (3.13) zu diesem Anfangswert für alle $v \in \mathbb{R}^p$ erfüllt. Damit ist die algebraische Gleichung (2.1b) für $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ und $u(t)$ immer erfüllt, wobei $\xi_2(t) = \alpha_e(\xi_1(t), \xi_u(t), v(t))$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $g(\xi_1(t), \xi_2(t), u(t)) = 0$. Aufgrund der Regularität von (2.1) entspricht $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ der Lösung des Deskriptorsystems (2.1). \square

Wird für die Lösungen von (3.13) noch die Variable x_2 , berechnet mit (3.12), berücksichtigt, so lässt sich mit

$$\tilde{\mathcal{M}}_e := \left\{ (x_e, x_2, v) \in \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \mid \gamma_{e,i}^j(x_e, x_2, v) = 0, i \in \{0, \dots, \kappa_j\}, j \in \underline{m} \right\} \quad (3.16)$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{M}_{x_e, x_2, v} := \mathcal{M}_{x_e} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ angeben, auf der die Lösungen übereinstimmen.

Beim Algorithmus 3.1 werden beim Auftreten von Eingangsableitungen vor jeden Eingang PT_1 -Glieder geschaltet. In vielen Fällen entsteht dabei eine dynamische Erweiterung großer Ordnung. Im nächsten Abschnitt wird ein modifizierter Algorithmus vorgestellt, um die Ordnung der dynamischen Erweiterung deutlich zu reduzieren.

3.3 Verkoppelte Zustandsraumdarstellung mit minimaler dynamischer Erweiterung

Die Ordnung der dynamischen Erweiterung ließe sich sicherlich reduzieren, indem ein PT_1 -Glieder nur vor die Eingänge geschaltet wird, deren Ableitungen auftreten. Die Ordnung lässt sich darüber hinaus weiter vermindern, was mit folgender Überlegung verdeutlicht werden soll.

Gilt beispielsweise bei $m = 1$ für die Ableitung der algebraischen Gleichung $L_f g = \phi(x_1) + x_2 + \dot{u}^1 + \dot{u}^2$, so wird das System mit zwei PT_1 -Gliedern, jeweils eines vor u^1 und vor u^2 , erweitert. Wird zuvor eine reguläre Eingangstransformation $w^1 = u^1 + u^2$, $w^2 = u^1 - u^2$ angewandt, ergibt sich $L_f g = \phi(x_1) + x_2 + \dot{w}^1$ und es wird nur noch ein PT_1 -Glieder benötigt.

Führen nur die auftretenden Eingangsableitungen zu dynamischen Erweiterungen, so hängt die Gesamtordnung von einer regulären Eingangstransformation ab. Dies lässt sich nutzen, indem vor

der dynamischen Erweiterung immer eine reguläre Eingangstransformation durchgeführt wird, so dass nur noch die Ableitung einer Komponente des neuen Eingangsvektors auftritt. Dann wird bei jedem Auftreten von Eingangsableitungen nur ein PT_1 -Glied hinzugefügt. Diese Überlegungen führen auf den folgenden Algorithmus.

Algorithmus 3.2. Der Algorithmus stimmt mit Algorithmus 3.1 bis auf Schritt 1 und Schritt 5 überein. Da Schritt 5 für $j = 1$ identisch mit Schritt 1 ist, wird hier nur die Modifikation von Schritt 5 vorgestellt. Die Änderung betrifft nur den Fall, wenn $\partial_{\tilde{u}}\gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ gilt.

Modifizierter Schritt 5 Wenn $\partial_{x_{2,(j-1)}}\gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j gilt, wird direkt zu Schritt 7 von Algorithmus 3.1 gesprungen.

Gilt $\partial_{\tilde{u}}\gamma_{\kappa_j}^j = 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j , so wird der Schritt 5 von Algorithmus 3.1 ausgeführt.

Gilt dagegen $\partial_{\tilde{u}}\gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{M}_j , dann wird μ um 1 erhöht und das System mit einem PT_1 -Glied dynamisch erweitert. Dafür wird eine reguläre Eingangskoodinatentransformation $\tilde{u} = \beta_\mu(\tilde{x}_1, \tilde{v})$, $\tilde{v} \in \mathbb{R}^p$ benötigt, wobei lokal $\text{rang } \partial_{\tilde{v}}\beta_\mu = p$ gilt. Die Transformation muss so gewählt werden, dass mit der Aufteilung $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$, $\tilde{v}_1 \in \mathbb{R}^{p-1}$, $\tilde{v}_2 \in \mathbb{R}$, nur noch \tilde{v}_2 Einfluss auf $\gamma_{\kappa_j}^j$ besitzt. Damit muss lokal $\partial_{\tilde{v}_1}(\gamma_{\kappa_j}^j \circ \beta_\mu) = 0$ und $\partial_{\tilde{v}_2}(\gamma_{\kappa_j}^j \circ \beta_\mu) \neq 0$ gelten. Außerdem ist β_μ so zu wählen, dass bei \hat{x}_1 die Gleichungen $\partial_{\tilde{x}_1}\tilde{f} = \partial_{\tilde{x}_1}(\tilde{f} \circ \beta_\mu) \circ \beta_\mu^{-1}$, $\partial_{\tilde{x}_1}\gamma_{\kappa_j}^j = \partial_{\tilde{x}_1}(\gamma_{\kappa_j}^j \circ \beta_\mu) \circ \beta_\mu^{-1}$ und $\partial_{\tilde{x}_1}\gamma_0^i = \partial_{\tilde{x}_1}(\gamma_0^i \circ \beta_\mu) \circ \beta_\mu^{-1}$ für $j < i \leq m$ erfüllt sind. Die Erweiterung des Zustands mit \tilde{v}_2 führt auf $\tilde{x}_1 := (\tilde{x}_1, \tilde{v}_2)$ und $\tilde{u} := (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ mit $\tilde{u}_1 = \tilde{v}_1$. Mit $\tilde{v}_2 = c_\mu \tilde{v}_2 + \tilde{u}_2$ folgt

$$\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{u}, x_{2,(j-1)}) := \begin{bmatrix} \tilde{f}(\tilde{x}_1, \beta_\mu(\tilde{x}_1, \tilde{v}), x_{2,(j-1)}) \\ c_\mu \tilde{v}_2 + \tilde{u}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

für einen beliebigen Parameter $c_\mu \in \mathbb{R}_0^-$. Außerdem wird \mathcal{M}_{j-1} durch $\mathcal{M}_{j-1} = \{(\tilde{x}_1, \tilde{v}_2) \in (\mathcal{M}_{j-2} \times \mathbb{R}) \mid \gamma_{j-1} = 0\}$ ersetzt.

Es folgt Schritt 6 von Algorithmus 3.1

Wie zuvor terminiert der Algorithmus erfolgreich, wenn die Rangannahmen (3.3) und (3.7) in Schritt 2 bzw. 6 erfüllt sind. Wie gezeigt wird, ist dies für reguläre Deskriptorsysteme immer der Fall. Der Ablauf wird erneut an einem Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 3.2. Betrachtet wird wieder das Deskriptorsystem aus Beispiel 3.1. Bis zum ersten Ausführen von Schritt 7 ändert sich nichts, da $\partial_{\tilde{u}}\gamma_0^1 = 0$ und $\partial_{\tilde{u}}\gamma_0^2 = 0$ gilt. Es folgen die Berechnungen ab dem zweiten Durchgang von Schritt 5.

Schritt 5: Wegen $\partial_{x_2}\gamma_1^2 = 0$ und $\partial_{\tilde{u}}\gamma_1^2 \neq 0$ wird das System dynamisch erweitert. Die Eingangskoodinatentransformation

$$\tilde{u} = 0,5 \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_2 - \tilde{v}_1 \end{bmatrix}$$

erfüllt die genannten Voraussetzungen und erzeugt mit $\check{x}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{v}_2)$, $\check{u}_1 = \tilde{v}_1$ und $\mathcal{M}_1 = \{\check{x}_1 \in \mathbb{R}^5 \mid \check{x}^4 = 0\}$ das erweiterte System

$$\check{f}(\check{x}_1, \check{u}, x_{2,1}) = \begin{bmatrix} \check{x}^3 + 0,5\check{u}_1 + 0,5\check{x}^5 \\ \check{x}^4 + 0,5\check{x}^5 - 0,5\check{u}_1 \\ -x_{2,1} \\ -b_0^1\check{x}^4 \\ c_1\check{x}^5 + \check{u}_2 \end{bmatrix}.$$

Schritt 6: $\kappa_2 = 2$ und die neue Restriktion $\gamma_2^2 = -x_{2,1} - b_0^1\check{x}^4 + c_1\check{x}^5 + \check{u}_2$ wird berechnet. Es gilt

$$\text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \text{rang } \partial_{\check{x}_1} \begin{bmatrix} \check{x}^4 \\ \check{x}^1 + \check{x}^2 \\ \check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{x}^5 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

und $\mathcal{M}_2 = \{\check{x}_1 \in \mathcal{M}_1 \mid \check{x}^1 + \check{x}^2 = 0, \check{x}^3 + \check{x}^4 + \check{x}^5 = 0\}$.

Schritt 7: Es wird $\tilde{x}_1 = \check{x}_1$ und $\tilde{u} = \check{u}$ gesetzt und die Parameter b_0^2 und b_1^2 beide größer null gewählt, sodass die Nullstellen des Polynoms

$$P^2(\lambda) = \lambda^2 + b_1^2\lambda + b_0^2$$

in \mathbb{C}^- liegen. (3.9) ergibt sich zu

$$-x_{2,1} - b_0^1\tilde{x}^4 + c_1\tilde{x}^5 + \tilde{u}^2 + b_1^1(\tilde{x}^3 + \tilde{x}^4 + \tilde{x}^5) + b_0^1(\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2) = 0$$

und damit gilt

$$x_{2,1} = \alpha_2(\tilde{x}_1, \tilde{u}) = -b_0^1\tilde{x}^4 + c_1\tilde{x}^5 + \tilde{u}^2 + b_1^1(\tilde{x}^3 + \tilde{x}^4 + \tilde{x}^5) + b_0^1(\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2).$$

Schritt 8: Der Algorithmus terminiert erfolgreich.

Ist der Algorithmus erfolgreich, so werden alle berechneten Restriktionen in

$$\gamma_m(x_e) = \begin{bmatrix} \gamma_{m,0}^1(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ \gamma_{m,\kappa_1-1}^1(\tilde{x}_1) \\ \gamma_{m,0}^2(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ \gamma_{m,\kappa_m-1}^m(\tilde{x}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0^1(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ \gamma_{\kappa_1-1}^1(\tilde{x}_1) \\ \gamma_0^2(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ \gamma_{\kappa_m-1}^m(\tilde{x}_1) \end{bmatrix}$$

mit der Variable $x_e := \tilde{x}_1 \in \mathcal{M}_{x_e}$ zusammengefasst. Es gilt $\mathcal{M}_{x_e} = (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^\mu)$ mit $n_{x_e} := \dim \mathcal{M}_{x_e} = r + \mu$, da das System (3.1) mit insgesamt μ PT₁-Gliedern dynamisch erweitert wird. Die Ordnung der dynamischen Erweiterung wird wieder mit $n_u := \mu$ und die Anzahl der Restriktionen mit $\kappa := \sum_{j=1}^m \kappa_j$ abgekürzt. Die Restriktionen definieren für den modifizierten Algorithmus die Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_m = \{x_e \in \mathcal{M}_{x_e} \mid \gamma_m(x_e) = 0\}, \quad (3.18)$$

die die Dimension $\dim \mathcal{N}_m = r + n_u - \kappa$ besitzt. Mit dem neuen Eingang $v := \tilde{u}$ und der Aufteilung $x_e = (x_1, x_u)$, wobei $x_u \in \mathbb{R}^{n_u}$ gilt, kann die dynamische Erweiterung

$$\dot{x}_u = r_x(x_u, x_1, v) \quad (3.19a)$$

$$u = r_u(x_u, x_1, v) \quad (3.19b)$$

berechnet werden. Diese erzeugt zusammen mit dem fiktiven Verkopplungsregler

$$x_2 = \alpha_m(x_e, v) \quad (3.20)$$

die verkoppelte Zustandsraumdarstellung minimaler Ordnung

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} f(x_1, \alpha_m(x_1, x_u, v), r_u(x_u, x_1, v)) \\ r_x(x_u, x_1, v) \end{bmatrix} = \tilde{f}_m(x_e, v) \quad (3.21a)$$

$$y = h(x_1, \alpha_m(x_1, x_u, v), r_u(x_u, x_1, v)) = h_m(x_e, v), \quad (3.21b)$$

die Σ_m entspricht. Durch Einsetzen in (2.1b) ergibt sich die fiktive algebraische Gleichung

$$0 = g(x_1, \alpha_e(x_1, x_u, v), r_u(x_1, x_u, v)) = g_m(x_e), \quad (3.22)$$

die für alle $x_e \in \mathcal{N}_m$ und $v \in \mathbb{R}^p$ erfüllt ist. Aus denselben Überlegungen wie bei (3.14) hängt die Gleichung nicht mehr von v ab.

(3.19) wird als *minimale* dynamische Erweiterung bezeichnet, da bei jedem Auftreten von Eingangsableitungen nur ein zusätzlicher Zustand hinzugefügt wird. Bei der Verwendung von Algorithmus 3.1 hängt weder r_x noch r_u von x_1 ab, da (3.11) nur aus PT_1 -Gliedern besteht. Bei der Verwendung von Algorithmus 3.2 hängt (3.19) im Allgemeinen von x_1 ab.

Mit $\gamma_{m,\kappa_j}^j := L \check{\gamma}_{m,\kappa_j-1}^j$, wobei

$$\check{f}(x_e, x_2, v) := \begin{bmatrix} f(x_1, x_2, r_u(x_u)) \\ r_x(x_u, v) \end{bmatrix}$$

gilt, werden die Restriktionen mit einer Abhängigkeit von x_2 eingeführt, die

$$\text{rang } \partial_{x_2} \left[\gamma_{m,\kappa_j}^j \right]_{j \in \underline{m}} = m$$

erfüllen müssen. (3.9) stellt mit $z^j = \gamma_{m,0}^j$, $\dot{z}^j = \gamma_{m,1}^j$, ..., $(z^j)^{(\kappa_j)} = \gamma_{m,\kappa_j}^j$, $j \in \underline{m}$ weiterhin eine lineare, autonome Differentialgleichung mit einer stabilen Ruhelage in $z = 0$ dar. Da auf \mathcal{N}_m wieder $z = 0$ gilt, ist \mathcal{N}_m für (3.21) invariant und attraktiv.

Anmerkung. Die mit Algorithmus 3.1 und Algorithmus 3.2 berechneten Mannigfaltigkeiten (3.10) bzw. (3.18) sowie die verkoppelten Zustandsraumdarstellungen (3.13) und (3.21) werden im weiteren Verlauf der Arbeit in der Notation unterschieden. Um für eine übersichtliche Darstellung auf zusätzliche Indizes zu verzichten, erhalten Parameter und Variablen aus den Algorithmen dieselben Bezeichnungen (wie z. B. n_u , x_e , x_u , ...).

Der erste der folgenden Sätze zeigt, dass die Regularität des Deskriptorsystems notwendig und hinreichend für das erfolgreiche Terminieren des Algorithmus 3.2 ist.

Satz 3.5. (\hat{x}_1, \hat{x}_2) sei ein konsistenter Anfangswert für das Deskriptorsystem (2.1). Der Algorithmus 3.2 terminiert in einer Umgebung von $(\hat{x}_e, \hat{v}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$, wobei $\hat{x}_2 = \alpha_m(\hat{x}_e, \hat{v})$ und $\hat{u} = r_u(\hat{x}_u, x_1, v)$ gilt, genau dann erfolgreich, wenn das Deskriptorsystem (2.1) in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$ regulär ist.

Beweis. Der Beweis ist identisch mit dem Beweis von Satz 3.2. □

Obwohl Lemma 3.3 nicht für die dynamische Erweiterung (3.19) gilt, besitzt auch diese spezielle Eigenschaften.

Lemma 3.6. Für ein bekanntes $x_1(t)$ ist die dynamische Erweiterung (3.19) invertierbar und $u(t)$ legt $x_u(t)$ sowie $v(t)$ für $t \geq t_0$ eindeutig fest.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Bei der ersten dynamischen Erweiterung ergibt sich mit $x_u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= c_1 x_u + \check{u}_2 \\ u &= \beta_1(x_1, \tilde{v}) = r_u(x_u, x_1, \check{u}_1)\end{aligned}$$

mit $\tilde{v} = (\check{u}_1, x_u)$, wobei lokal $\text{rang } \partial_{\tilde{v}} \beta_1 = \text{rang } \partial_{(\check{u}_1, x_u)} r_u = p$ gelten muss, da die Eingangskoodinatentransformation regulär ist. Aus Satz B.8 folgt, dass die zweite Gleichung eindeutig nach $(x_u, \check{u}_1) = \tilde{r}_u(x_1, u)$ aufgelöst werden kann. Sind $u(t)$ und $x_1(t)$ bekannt, so sind $\check{u}_1(t)$ und $x_u(t)$ festgelegt. Über $\check{u}_2 = \dot{x}_u - c_1 x_u$ ist deshalb $\check{u}_2(t)$ eindeutig festgelegt. Die dynamische Erweiterung erster Ordnung ist damit invertierbar.

Induktionsschritt: Angenommen die dynamische Erweiterung nach k -maligem Erweitern mit $x_u \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= r_x(x_u, x_1, \tilde{u}) \\ u &= r_u(x_u, x_1, \tilde{u})\end{aligned}$$

ist für ein bekanntes $x_1(t)$ invertierbar und $u(t)$ legt $x_u(t)$ sowie $\tilde{u}(t)$ eindeutig fest. Die nächste dynamische Erweiterung ergibt sich mit $x_v \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned}\dot{x}_v &= c_k x_v + \check{u}_2 \\ \tilde{u} &= \beta_k(x_1, x_u, \tilde{v}) = r_{\tilde{u}}(x_u, x_v, x_1, \check{u}_1)\end{aligned}$$

mit $\tilde{v} = (\check{u}_1, x_v)$, wobei lokal $\text{rang } \partial_{\tilde{v}} \beta_k = \text{rang } \partial_{(\check{u}_1, x_v)} r_{\tilde{u}} = p$ gilt. Aus Satz B.8 folgt erneut, dass die zweite Gleichung eindeutig nach $(\check{u}_1, x_v) = \tilde{r}_{\tilde{u}}(x_1, x_u, \tilde{u})$ aufgelöst werden kann. Damit ist $\check{u}_1(t)$ und $x_v(t)$ festgelegt, sowie über $\check{u}_2 = \dot{x}_v - c_k x_v$ auch $\check{u}_2(t)$.

Aus der Induktion resultiert, dass die dynamische Erweiterung (3.19) für ein bekanntes $x_1(t)$ invertierbar ist und $u(t)$ eindeutig $x_u(t)$ sowie $v(t)$ festlegt. □

Es folgen die Bedingungen dafür, dass die verkoppelte Darstellung (3.21) dieselbe Lösung wie das Deskriptorsystem (2.1) besitzt.

Satz 3.7. *Das Deskriptorsystem (2.1) sei regulär in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$, wobei $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ einen konsistenten Anfangswert beschreibt. $(x_1(t), x_2(t))$ bezeichne die Lösung des Deskriptorsystems zu diesem Anfangswert und $(\xi_1(t), \xi_u(t))$ bezeichne die Lösung von (3.21) zum Anfangswert $(\hat{x}_1, \hat{\xi}_u)$, wobei $\hat{\xi}_u$ und v so gewählt werden, dass der Ausgang von (3.19) genau $u(t)$, dem Eingang des Deskriptorsystems entspricht. Dann besitzen beide Systeme dieselbe Lösung und es gilt $x_1(t) = \xi_1(t)$ sowie $x_2(t) = \alpha_m(\xi_1(t), \xi_u(t), v(t))$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.4. □

Abschließend kann analog zu (3.16)

$$\tilde{\mathcal{N}}_m := \left\{ (x_e, x_2, v) \in \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \mid \gamma_{m,i}^j(x_e, x_2, v) = 0, i \in \{0, \dots, \kappa_j\}, j \in \underline{m} \right\} \quad (3.23)$$

definiert werden.

3.4 Vergleich und Diskussion der Darstellungen

In den letzten beiden Abschnitten werden zwei Algorithmen vorgestellt, die jeweils eine mit dem Deskriptorsystem (2.1) verknüpfte Zustandsraumdarstellung erzeugen. Wie bereits dargestellt, sind beide geeignet, die Lösung des Deskriptorsystems zu berechnen. In diesem Abschnitt werden einige Vergleiche zwischen den Darstellungen gezogen und weiterführende Resultate hergeleitet.

Die verkoppelten Zustandsraumdarstellungen (3.13) und (3.21) unterscheiden sich lediglich in der jeweiligen dynamischen Erweiterung (3.11) bzw. (3.19). Für ein properes Deskriptorsystem stimmen die verkoppelten Zustandssysteme offensichtlich überein, da keine dynamische Erweiterung für deren Erzeugung benötigt wird. Für propere Deskriptorsysteme existiert immer eine Zustandsraumdarstellung in *Minimalkoordinaten*. Ein Zustandssystem ist eine Minimalkoordinatendarstellung für ein properes Deskriptorsystem, wenn das Zustandssystem keine redundanten Variablen enthält. Die Lösungen des Deskriptorsystems und des Zustandssystems stimmen dann auf der gesamten Zustandsmannigfaltigkeit des Zustandssystems überein. An dieser Stelle wird nochmals explizit betont, dass (3.13) und (3.21) im Allgemeinen nicht der Minimalkoordinatendarstellung entsprechen. Dies ist nur der Fall, wenn das Deskriptorsystem vom Index 1 ist.

Um eine Minimalkoordinatendarstellung zu berechnen, müssen ebenfalls die algebraischen Gleichungen nach der Zeit abgeleitet werden, bis explizite Abhängigkeiten von den algebraischen Variablen auftreten. Die Systembeschreibung wird anschließend so umgeformt, dass keine redundanten Variablen mehr auftreten und das entstandene Zustandssystem nur von unabhängigen Variablen abhängt – den Minimalkoordinaten. Diese Umformung ist im Allgemeinen bei nichtlinearen Deskriptorsystemen sehr aufwendig und erhöht die Komplexität des Systemvektorfeldes

deutlich. Im Gegensatz zur Minimalkoordinatendarstellung besitzt die verkoppelte Zustandsraumdarstellung eine größere Ordnung, weil die redundanten Variablen weiterhin vorhanden sind. Dies ermöglicht Lösungen des Zustandssystems, die keine Lösungen des Deskriptorsystems sind, die also nicht auf der invarianten Untermannigfaltigkeit verlaufen. Da die Umformung in Minimalkoordinaten entfällt, ist das Systemvektorfeld in vielen Fällen erheblich einfacher aufgebaut, was die weitere Verwendung zum Regler- und Beobachterentwurf erleichtert. Zusammenfassend handelt es sich beim verkoppelten Zustandssystem um eine übersichtlichere und einfachere Darstellung, die jedoch durch eine größere Ordnung erkauft wird.

Obwohl Lösungen des Deskriptorsystems auch Lösungen der beiden verkoppelten Zustandssysteme (3.13) bzw. (3.21) sind, gibt es einige wichtige Unterschiede zwischen den Darstellungen. Dass sich die Ordnungen der beiden Systeme im Allgemeinen unterscheiden, wird bereits in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert und ist der Grund für die Einführung des Algorithmus 3.2. Die dynamische Erweiterung (3.11) verändert allerdings nicht die Struktur des Ein-/Ausgangsverhaltens des Deskriptorsystems, da vor jedem Eingang dieselbe Anzahl PT_1 -Glieder geschaltet wird. Damit ist das Deskriptorsystem (2.1) genau dann entkoppelt, wenn die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13) entkoppelt ist.

Für die Erzeugung der verkoppelten Darstellung (3.21) werden dagegen reguläre Eingangskoodinaten Transformationen benötigt, was die Struktur des Ein-/Ausgangsverhaltens des Deskriptorsystems verändert. (3.21) ist daher im Allgemeinen nicht entkoppelt, wenn das Deskriptorsystem entkoppelt ist und umgekehrt. Aus diesem Grund bildet die erste verkoppelte Darstellung (3.13) die Grundlage für den Entkopplungsentwurf in Kapitel 4. Da das verkoppelte System (3.21) weniger Zustände besitzt, müssen beim Beobachterentwurf weniger Zustände rekonstruiert werden, weshalb (3.21) für den Beobachterentwurf in Kapitel 6 besser geeignet erscheint.

Bei der Polvorgabe (3.5) bzw. (3.9) in den Algorithmen 3.1 und 3.2 werden zu der höchsten Ableitung einer algebraischen Gleichung andere Restriktionen addiert. Da diese Restriktionen auf \mathcal{M}_j verschwinden, ändert sich die zu lösende Gleichung auf \mathcal{M}_j nicht. Außerhalb dagegen schon, was die Attraktivität von \mathcal{M}_j sicherstellt. Die Idee, eine Funktion gezielt mit den Restriktionen zu modifizieren, wird an dieser Stelle weiter untersucht.

Für jede beliebige Funktion $\rho : \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \rightarrow \mathbb{R}$ verändert die Summe der Funktion mit einer Restriktion den Funktionswert auf $\tilde{\mathcal{N}}_e$ nicht. Dies bedeutet

$$\rho(x_e, x_2, v) = \rho(x_e, x_2, v) + \gamma_{e,i}^j(x_e, x_2, v) \quad \forall (x_e, x_2, v) \in \tilde{\mathcal{N}}_e$$

mit $i \in \{0, \dots, \kappa_j\}$, $j \in \underline{m}$, da $\gamma_{e,i}^j(x_e, x_2, v) = 0$ für alle $(x_e, x_2, v) \in \tilde{\mathcal{N}}_e$ erfüllt ist. Offenbar gelten diese Überlegungen nicht nur für die Modifikation einer Funktion durch Addition einer Restriktion, sondern auch für allgemeinere Modifikationen durch Restriktionen.

Die Verallgemeinerung des dargestellten Vorgehens führt auf eine Funktionenklasse, die von jeder Funktion $\rho : \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt wird. Diese Klasse ist definiert als

$$\mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e) := \left\{ \tilde{\rho} : \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{\rho}(x_e, x_2, v) = \rho(x_e, x_2, v) \quad \forall (x_e, x_2, v) \in \tilde{\mathcal{N}}_e \right\}. \quad (3.24)$$

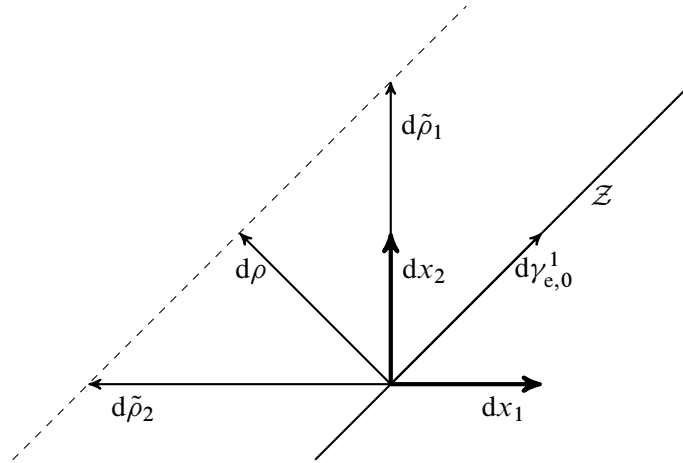


Bild 3.1: Geometrische Interpretation der Äquivalenzklasse

$\mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ enthält alle Funktionen, die auf $\tilde{\mathcal{N}}_e$ denselben Funktionswert wie ρ annehmen. Satz 3.4 zeigt, dass Lösungen der verkoppelten Darstellung auf \mathcal{N}_e und wegen (3.12) auf $\tilde{\mathcal{N}}_e$ mit der Lösung des Deskriptorsystems verknüpft sind. Infolgedessen stimmt eine Funktion $\rho : (\mathcal{M}_x \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$ mit allen Funktionen $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$, die ebenfalls nur von x und u abhängen, für alle Lösungen des Deskriptorsystems überein. Wie sich leicht zeigen lässt, handelt es sich bei $\mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ sogar um eine Äquivalenzklasse ([29]).

Den vorausgegangenen Überlegungen folgend, werden teilweise Funktionen aus $\mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ gesucht, die nicht von allen Variablen (x_e, x_2, v) abhängen, sondern zum Beispiel nur von x und u . \mathcal{M} sei eine der Mannigfaltigkeiten $\{\mathcal{M}_{x_1}, \mathcal{M}_{x,u}\}$. Da $\mathcal{M}_{x_e, x_2, v} = (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^{p\mu} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$ gilt, existiert immer eine Projektion $\pi : \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \rightarrow \mathcal{M}$ mit

$$\begin{aligned} \pi : (x_1, x_u, x_2, v) &\mapsto x_1 && \text{für } \mathcal{M} = \mathcal{M}_{x_1} \\ \pi : (x_1, x_u, x_2, v) &\mapsto (x_1, x_2, u) && \text{für } \mathcal{M} = \mathcal{M}_{x,u}, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Fall mit (3.15) $(u, \dot{u}, \dots, (u)^{(\mu)}) = \Psi^{-1}(x_u, v)$ beachtet werden muss. Damit kann die Menge

$$\mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}) := \left\{ \tilde{\rho} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{\rho}(\pi(x_e, x_2, v)) = \rho(x_e, x_2, v) \quad \forall (x_e, x_2, v) \in \tilde{\mathcal{N}}_e \right\} \quad (3.25)$$

definiert werden. Diese wird erst für $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer Äquivalenzklasse, da für alle $\rho : \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht nur von Elementen aus \mathcal{M} abhängen, $\rho \notin \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M})$ gilt ([29]).

Die Äquivalenzklasse lässt sich geometrisch interpretieren. Jede Funktion $\rho : \mathcal{M}_{x_e, x_2, v} \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt an jedem Punkt $(\hat{x}_e, \hat{x}_2, \hat{v}) \in \mathcal{M}_{x_e, x_2, v}$ ein Element $d\rho \in T_{(\hat{x}_e, \hat{x}_2, \hat{v})}^* \mathcal{M}_{x_e, x_2, v}$ des Kotangententialraumes (zur Definition der äußeren Ableitung und des Kotangententialraumes siehe z. B. [114]). Da sich alle $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ durch die Modifikation mit Restriktionen ergeben, verändert sich die Richtung im Kotangententialraum. Diese Veränderung ist nur in die Richtungen von $d\gamma_{e,i}^j$ möglich, da nur Modifikationen mit $\gamma_{e,i}^j$ erlaubt sind. Mit dem Unterraum des Kotangententialraumes $\mathcal{Z} \subset T_{(\hat{x}_e, \hat{x}_2, \hat{v})}^* \mathcal{M}_{x_e, x_2, v}$

$$\mathcal{Z} := \text{span} \left\{ d\gamma_{e,i}^j \right\}_{i \in \{0, \dots, \kappa_j\}, j \in \underline{m}} \quad (3.26)$$

gilt deshalb

$$d\tilde{\rho} \in \text{span}\{d\rho\} + \mathcal{Z}. \quad (3.27)$$

Da die Richtung von $d\rho$ unter der Modifikation erhalten bleiben muss, gilt

$$d\rho \notin \mathcal{Z} \quad \Leftrightarrow \quad d\tilde{\rho} \notin \mathcal{Z}.$$

Bild 3.1 zeigt diesen Zusammenhang bei einer Restriktion $\gamma_{e,0}^1 = x_1 + x_2$, die \mathcal{Z} aufspannt. Die Funktion $\rho = x_2 - x_1$ erzeugt die Äquivalenzklasse $\mathcal{K}(\rho, \mathcal{N}_e)$, wobei beispielhaft zwei Elemente $\tilde{\rho}_1 = 2x_2$ und $\tilde{\rho}_2 = -2x_1$ der Äquivalenzklasse dargestellt sind.

Die Äquivalenzklassen werden in Abschnitt 4.1 bei der Entkopplung von Deskriptorsystemen angewandt. Diesen Abschnitt rundet eine Betrachtung der Dimensionen von \mathcal{N}_e und \mathcal{N}_m ab, wobei die Äquivalenzklasse ebenfalls benötigt wird. Dass die Dimension von \mathcal{N}_e nicht invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung ist, verdeutlicht folgendes Beispiel.

Beispiel 3.3. *Betrachtet wird das Deskriptorsystem*

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad 0 = x_1 + u^1 + u^2$$

mit $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ und $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Algorithmus 3.1 erzeugt die dynamische Erweiterung

$$\dot{x}_u = \begin{bmatrix} c_1 x_u^1 + v^1 \\ c_1 x_u^2 + v^2 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = x_u$$

und eine Restriktion $\gamma_0^1 = x_1 + u^1 + u^2$. Es gilt $\dim \mathcal{N}_e = 2$. Wird das Deskriptorsystem mit der Rückführung $u^1 = x_2 + w^1$, $u^2 = w^2$ geregelt, so erzeugt der Algorithmus keine dynamische Erweiterung, da das geregelte Deskriptorsystem proper ist. Außerdem wird keine Restriktion berechnet, sodass $\dim \mathcal{N}_e = 1$ für das geregelte Deskriptorsystem gilt.

Im Gegensatz dazu lässt sich zeigen, dass die Dimension von \mathcal{N}_m invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung ist. Vorher werden einige Vorüberlegungen benötigt.

Die Dimension von \mathcal{N}_m entspricht $r + n_u - \kappa$. Im nachfolgenden Lemma wird gezeigt, dass $n_u - \kappa$ invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung ist. Die Grundidee des Beweises lässt sich mithilfe eines Deskriptorsystems mit einer algebraischen Gleichung anschaulich zeigen. Beim Auftreten von u in $\gamma_{\kappa_1}^1$ im Algorithmus wird bei jeder weiteren Ableitung nicht nur eine neue Restriktion, sondern auch eine zusätzliche dynamische Erweiterung erzeugt. Somit spielt es für die Dimension von \mathcal{N}_m keine Rolle, wie viele weitere Ableitungen von $\gamma_{\kappa_1}^1$ nötig sind.

Lemma 3.8. *Die Dimension von \mathcal{N}_m ist invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung (2.6) für das reguläre Deskriptorsystem (2.1).*

Vor dem Beweis des Lemmas werden noch zwei Zwischenergebnisse benötigt.

Lemma 3.9. *Die mit Algorithmus 3.1 und 3.2 berechneten Untermannigfaltigkeiten \mathcal{N}_e bzw. \mathcal{N}_m sind lokal invariant unter einer Vertauschung der algebraischen Gleichungen des regulären Deskriptorsystems (2.1).*

Beweis. Der Beweis ist für beide Algorithmen identisch. \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 seien die Untermannigfaltigkeiten, die für verschiedene Reihenfolgen der algebraischen Gleichungen bestimmt werden. Hat die Reihenfolge Einfluss auf die Untermannigfaltigkeiten, so muss es Vertauschungen der algebraischen Gleichungen geben, bei denen lokal $\mathcal{N}_1 \not\approx \mathcal{N}_2$ gilt. Eine k -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit ist lokal per Definition immer diffeomorph zum \mathbb{R}^k . Damit folgt $\dim \mathcal{N}_1 \neq \dim \mathcal{N}_2$. O.B.d.A. sei angenommen, dass $\dim \mathcal{N}_1 > \dim \mathcal{N}_2$ gilt. Es muss eine Lösung des verkoppelten Zustandssystems mit $x_e \in \mathcal{N}_1$ geben, für die $x_e(t) \in \mathcal{N}_1$ für alle $t > t_0$ gilt und $x_e(t_1) \notin \mathcal{N}_2$ für ein $t_1 > t_0$. Nach Satz 3.4 bzw. 3.7 stimmt diese Lösung mit der Lösung des Deskriptorsystems überein. Für die Lösung eines Deskriptorsystems ist die Reihenfolge der algebraischen Gleichungen ohne Bedeutung, sodass die Lösung in \mathcal{N}_2 liegen muss. Dies widerspricht der Annahme, dass die Reihenfolge Einfluss auf \mathcal{N} besitzt. \square

Lemma 3.10. *Wird zu Beginn von Schritt 1 oder 5 von Algorithmus 3.1 oder 3.2 die Restriktion $\gamma_{\kappa_j}^j$ durch ein Element von $\mathcal{K}(\gamma_{\kappa_j}^j, \mathcal{M}_j, (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^{p_\mu}))$ ersetzt, so hat dies keinen Einfluss auf die berechnete Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_m eines regulären Deskriptorsystems (2.1).*

Beweis. Alle Berechnungen im weiteren Verlauf des Algorithmus werden auf \mathcal{M}_j oder Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{M}_j durchgeführt. Auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_j gilt $\gamma_{\kappa_j}^j = \tilde{\gamma} \forall \tilde{\gamma} \in \mathcal{K}(\gamma_{\kappa_j}^j, \mathcal{M}_j, (\mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^{p_\mu}))$, womit sich die weiteren Restriktionen auf \mathcal{M}_j nicht ändern. Damit hat das Ersetzen keinen Einfluss auf \mathcal{M}_m . \square

Beweis von Lemma 3.8. Der Algorithmus 3.2 wird leicht modifiziert durchgeführt. Wenn in Schritt 1 oder 5 $\partial_{\tilde{u}} \gamma_{\kappa_j}^j \neq 0$ gilt, wird der Algorithmus unterbrochen und die algebraischen Gleichungen so umsortiert, dass die j -te algebraische Gleichung zur letzten Gleichung wird. Die algebraischen Gleichungen dürfen nach Lemma 3.9 vertauscht werden. Die übrige Reihenfolge soll erhalten bleiben und der Algorithmus wird mit der neuen j -ten Gleichung fortgesetzt. Dies wird so lange wiederholt, bis die letzten algebraischen Gleichungen alle von \tilde{u} abhängen. Da mit dem modifizierten Vorgehen noch keine dynamische Erweiterung erzeugt wird, gilt $\tilde{u} = u$. Die Anzahl dieser Gleichungen wird mit \tilde{m} bezeichnet und es sei $\tilde{j} := m - \tilde{m} + 1$

Gilt

$$\tilde{p} := \text{rang } \partial_u \begin{bmatrix} \gamma_{\kappa_{\tilde{j}}}^{\tilde{j}} \\ \vdots \\ \gamma_{\kappa_m}^m \end{bmatrix} < \tilde{m},$$

so werden diese $\gamma_{\kappa_j}^j$ im Hinblick auf Lemma 3.10 modifiziert. Es existieren \tilde{p} Funktionen $\tilde{\gamma}^i \in \mathcal{K}(\gamma_{\kappa_i}^i, \mathcal{M}_{\tilde{j}})$, $i \in \{\tilde{j}, \dots, m\}$, für die

$$\text{rang } \partial_{\tilde{u}} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}^{\tilde{j}} \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}^m \end{bmatrix} = \tilde{p}$$

gilt und $\tilde{m} - \tilde{p}$ Funktionen $\hat{\gamma}^i \in \mathcal{K}(\gamma_{\kappa_i}^i, \mathcal{M}_{\tilde{j}})$, $i \in \{\tilde{j}, \dots, m\}$, für die

$$\partial_{\tilde{u}} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}^{\tilde{j}} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}^m \end{bmatrix} = 0$$

gilt. Es ist immer möglich, die Funktionen so zu wählen, dass alle $\tilde{\gamma}^i$ und $\hat{\gamma}^j$ unabhängig bezüglich \tilde{x}_1 sind. Nach Lemma 3.10 kann der Algorithmus mit diesen veränderten Funktionen weitergeführt werden, ohne dass sich \mathcal{N}_m ändern wird. Die $\hat{\gamma}^j$ können weiter abgeleitet werden.

Wird das beschriebene modifizierte Vorgehen weiter wiederholt, so tritt bei einem regulären Deskriptorsystem irgendwann der Fall ein, dass $\tilde{m} = \tilde{p}$ gilt. Wird der Algorithmus für diese Gleichungen ohne Modifikationen weiter ausgeführt, so wird bei jedem Ableiten der Gleichungen eine neue Restriktion erzeugt und, wegen der Eingangsabhängigkeit, eine dynamische Erweiterung hinzugefügt. $n_u - \sum_{j=1}^m \kappa_j$ wird sich damit bis zum Ende des Algorithmus nicht mehr verändern. Alle bisher erzeugten Restriktionen sind unabhängig von u , sodass eine reguläre statische Deskriptorrückführung (2.6) keinen Einfluss darauf hat. Für jede reguläre statische Deskriptorrückführung muss

$$\text{rang } \partial_w \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}^{\tilde{j}} \circ r \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}^m \circ r \end{bmatrix} = \tilde{p} = \tilde{m}$$

erfüllt sein, sodass sich im geregelten System $n_u - \sum_{j=1}^m \kappa_j = n_u - \kappa$ nicht mehr verändern kann. Wegen $\dim \mathcal{N}_m = r + n_u - \kappa$ ist die Dimension invariant. \square

Wie mit Beispiel 3.3 gezeigt, kann das Lemma 3.8 nicht für \mathcal{N}_e gelten. Im Algorithmus 3.1 wird beim Auftreten von Eingangsableitungen sofort eine dynamische Erweiterung der Ordnung p erzeugt. Bei $\tilde{p} < p$ mit \tilde{p} aus dem Beweis von Lemma 3.8 überwiegt daher die zusätzliche Dimension der dynamischen Erweiterung die zusätzlichen Restriktionen.

Nachdem die verkoppelten Zustandsraumdarstellungen verglichen und die Unterschiede diskutiert wurden, leitet der nächste Abschnitt weitere praktische Resultate aus den Zustandsraumdarstellungen ab.

3.5 Spezielle Anwendungen der verkoppelten Darstellung

3.5.1 Numerische Simulation

Gerade die numerische Simulation nichtlinearer Deskriptorsysteme gestaltet sich im Allgemeinen schwieriger und aufwendiger als die Simulation von Zustandssystemen. Seit vielen Jahren ([10, 41]) bis heute ([63, 65, 122, 123]) beschäftigen sich viele Publikationen mit dieser Aufgabe. Die Interpretation als Verkopplungsproblem liefert eine elegante Möglichkeit zur numerischen

Simulation von Deskriptorsystemen. Im Fall eines properen Deskriptorsystems sind die Algorithmen 3.1 und 3.2 identisch und liefern dasselbe verkoppelte Zustandssystem. Da dieses denselben Eingang wie das Deskriptorsystem besitzt, kann die Darstellung direkt für die Simulation des Deskriptorsystems genutzt werden ([70]).

Für konsistente Anfangswerte besitzt das verkoppelte Zustandssystem für alle Eingangsfunktionen dieselbe Lösung wie das Deskriptorsystem, da die Lösungen auf der invarianten Untermannigfaltigkeit \mathcal{N}_e verbleiben. Für die numerische Simulation können die Systemgleichungen (3.13) mit Standardintegrationsverfahren (z. B. Runge-Kutta-Verfahren) numerisch gelöst werden. Unter Beachtung des Verkopplungsreglers (3.12) kann so der komplette Deskriptor berechnet werden.

Da bei der numerischen Integration immer kleine Fehler auftreten, wird die numerische Lösung des verkoppelten Zustandssystems (3.13) nicht exakt auf \mathcal{N}_e liegen. An dieser Stelle wird zum ersten Mal deutlich, dass die Wahl von \mathcal{N}_e als attraktive Untermannigfaltigkeit notwendig ist. Wäre \mathcal{N}_e nicht attraktiv, so würden kleine numerische Fehler mit der Zeit dazu führen, dass die Lösung von (3.13) die Untermannigfaltigkeit \mathcal{N}_e erkennbar verlässt und nicht mehr der Lösung des Deskriptorsystems entspräche. Durch die Attraktivität klingen diese kleinen Fehler sofort ab, sodass die Lösungen im Rahmen der numerischen Genauigkeit übereinstimmen.

Ist das Deskriptorsystem improper, so entspricht der Eingang des verkoppelten Zustandssystems nicht mehr dem Eingang des Deskriptorsystems. Wird davon ausgegangen, dass die Ableitungen von u bekannt sind, so lassen sich mit (3.15) $x_u(t)$ und $v(t)$ bestimmen, sodass (3.13) als Simulationsmodell verwendet werden kann. Entweder kann das System dann mittels $x_u(t_0)$ und $v(t)$ komplett simuliert werden oder eine Alternative besteht darin, aus $x_u(t)$ und $v(t)$ mithilfe des Verkopplungsreglers (3.12) die algebraische Variable $x_2(t)$ zu bestimmen und nur noch (3.1) zu simulieren. Im ersten Fall sollte die dynamische Erweiterung nicht nur aus Integratorketten bestehen, sondern aus stabilen PT_1 -Gliedern, sodass numerische Fehler bei der Simulation der dynamischen Erweiterung abklingen.

Im Gegensatz zum Simulationsmodell aus *Manderla* u. a. [85] bzw. *Manderla* [81] beinhalten die Algorithmen 3.1 und 3.2 eine konstruktive Methode zur Stabilisierung mittels Polvorgabe für alle regulären Deskriptorsysteme.

Für propere Deskriptorsysteme entspricht die vorgeschlagene Simulation in ihrer Grundidee der von *Baumgarte* [7] vorgestellten Stabilisierungsmethode. Viele Veröffentlichungen wie zum Beispiel *Ascher* u. a. [4] oder auch *Burgermeister* u. a. [11] zeigen, welche Schwierigkeiten bei der Wahl der Verkopplungsdynamik für die Simulation von Deskriptorsystemen entstehen und dass Projektionsmethoden im Allgemeinen bessere Ergebnisse liefern. Dieser Abschnitt hat daher nicht zum Ziel, ein neues numerisches Simulationsverfahren vorzustellen, sondern zu zeigen, dass die verkoppelte Zustandsraumdarstellung prinzipiell für die numerische Simulation geeignet ist. Da dieses System für die folgenden Entwurfsmethoden erzeugt werden muss, kann auf einfachem Weg eine numerische Lösung mit Standardintegrationsverfahren berechnet werden. Diese Anwendung wird im Abschnitt 7.4 mit der Simulation des nichtlinearen Deskriptormodells eines planaren Parallelroboters verdeutlicht.

3.5.2 Stabilitätsuntersuchung

Die Überprüfung der Stabilität von nichtlinearen Deskriptorsystemen gestaltet sich aufwendiger, als bei Zustandssystemen ([89, 91]). Häufig werden restriktive Forderungen an das Deskriptorsystem gestellt, um die Stabilität zu untersuchen ([126, 127, 134]). Bei Verwendung der verkoppelten Darstellung ist es möglich, Stabilitätsuntersuchungen für das Deskriptorsystem durchzuführen, ohne solche einschränkenden Annahmen zu treffen.

Definition 3.1 ([114], [127]). Eine Ruhelage \hat{x} des Deskriptorsystems (2.1) ist *stabil im Sinne von Lyapunov*, wenn für alle $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ ein $\varepsilon_2(\varepsilon_1, t_0) \in \mathbb{R}^+$ existiert, für das

$$|x(t_0) - \hat{x}| < \varepsilon_2(\varepsilon_1, t_0) \Rightarrow |x(t) - \hat{x}| < \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0$$

erfüllt ist, wobei $x(t)$ die Lösung von (2.1) zum konsistenten Anfangswert $x(t_0)$ für $u(t) = 0$ beschreibt. Die Ruhelage wird als *asymptotisch stabil* bezeichnet, wenn zusätzlich ein $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass

$$|x(t_0) - \hat{x}| < \varepsilon_3 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \hat{x}| = 0$$

gilt.

Da die Lösungen auf \mathcal{N}_e übereinstimmen, ist eine Ruhelage des Deskriptorsystems immer eine Ruhelage des verkoppelten Systems auf \mathcal{N}_e und umgekehrt. Handelt es sich um eine stabile Ruhelage für ein properes Deskriptorsystem, so muss sie mithilfe von Satz 3.4 auch eine stabile Ruhelage für (3.13) sein, wenn \mathcal{N}_e attraktiv gewählt wird. Die Argumentation gilt offensichtlich ebenso in umgekehrter Richtung.

Bei der Betrachtung von improperen Deskriptorsystemen muss zusätzlich noch gefordert werden, dass stabile PT_1 -Glieder für die dynamische Erweiterung verwendet werden, da sonst (3.13) ein lineares Teilsystem mit instabilen Eigenwerten enthalten kann.

Folgende Sätze fassen zusammen, wie die Stabilität des Deskriptorsystems (2.1) mithilfe des Zustandssystems (3.13) überprüft werden kann.

Satz 3.11. Sei $\hat{x}_e = (\hat{x}_1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{N}_e$ für $v = 0$ eine Ruhelage des verkoppelten Zustandssystems (3.13). Wird \mathcal{N}_e attraktiv und die dynamische Erweiterung (3.11) stabil gewählt, so ist $\hat{x} = (\hat{x}_1, \alpha_e(\hat{x}_e, 0))$ genau dann eine stabile Ruhelage im Sinne von Lyapunov für das Deskriptorsystem (2.1), wenn \hat{x}_e eine stabile Ruhelage im Sinne von Lyapunov für das verkoppelte Zustandssystem (3.13) ist.

Beweis. Nach Satz 3.4 stimmen die Lösungen von (2.1) und (3.13) für die Anfangswerte \hat{x} bzw. \hat{x}_e und die Eingänge $u(t) = 0$ und $v(t) = 0$ lokal überein. Damit ist Definition 3.1 genau dann für das Deskriptorsystem erfüllt, wenn sie für das verkoppelte Zustandssystem erfüllt ist. \square

Satz 3.12. Sei $\hat{x}_e = (\hat{x}_1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{N}_e$ für $v = 0$ eine Ruhelage des verkoppelten Zustandsystems (3.13). Wird \mathcal{N}_e attraktiv und die dynamische Erweiterung (3.11) stabil gewählt, so ist $\hat{x} = (\hat{x}_1, \alpha_e(\hat{x}_e, 0))$ genau dann eine asymptotisch stabile Ruhelage des Deskriptorsystems (2.1), wenn \hat{x}_e eine asymptotisch stabile Ruhelage des verkoppelten Zustandssystems (3.13) ist.

Beweis. Der Beweis ist identisch mit dem Beweis von Satz 3.11. \square

Anmerkung. Im Gegensatz zur asymptotischen Stabilität ist Satz 3.12 für exponentielle Stabilität (siehe z. B. [114]) im Allgemeinen nicht mehr notwendig und hinreichend, sondern nur noch hinreichend. Dies ist darin begründet, dass durch den Verkopplungsentwurf nur $z(t)$ exponentiell abklingt. Durch die nichtlineare Abbildung $z = g_e(x_e)$ konvergiert $x_e(t)$ im Allgemeinen nur noch asymptotisch gegen \mathcal{N}_e , wenn $z(t)$ exponentiell gegen 0 konvergiert.

In einigen Fällen, zum Beispiel wenn es sich bei den $z^i = g_e^i(x_e)$ um Polynome in den Elementen von x_e handelt, gilt Satz 3.12 sogar für exponentielle Stabilität, da für jeden Summanden $a_k \cdot (x_e^j(t))^k$ des Polynoms $g_e^i(x_e)$ die Abschätzung

$$\left| a_k \cdot (x_e^j(t))^k \right| \leq \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2(t-t_0)} |x_e^j(t_0)| \Leftrightarrow |x_e^j(t)| \leq \frac{\varepsilon_1}{|a_k|} e^{-\frac{\varepsilon_2}{k}(t-t_0)} |x_e^j(t_0)|$$

mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ gilt.

3.6 Verkoppelte Darstellung linearer Deskriptorsysteme

Auch für ein lineares Deskriptorsystem (2.9) in semi-expliziter Form kann mithilfe der Algorithmen 3.1 oder 3.2 eine dynamische Erweiterung (3.11) bzw. (3.19) entworfen werden, sodass die Restriktionen nicht mehr von Ableitungen von v abhängen. Beide dynamische Erweiterungen nehmen die lineare Gestalt

$$\dot{x}_u = A_u x_u + B_u v \quad (3.28a)$$

$$u = C_u x_u + D_u v \quad (3.28b)$$

an, wobei für die mit Algorithmus 3.1 erzeugte Erweiterung $D_u = 0$ gilt. Die Berechnung des Verkopplungsreglers (3.12) bzw. (3.20) führt auf die Darstellung

$$x_2 = R_{x_1} x_1 + R_{x_u} x_u + F_v v \quad (3.29)$$

und zusammen mit (3.28) auf das Gesamtsystem

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} R_{x_1} & A_{12} R_{x_u} + B_1 C_u \\ 0 & A_u \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} A_{12} F_v + B_1 D_u \\ B_u \end{bmatrix} v \quad (3.30a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 R_{x_1} & C_2 R_{x_u} + D C_u \end{bmatrix} x_e + (C_2 F_v + D D_u) v. \quad (3.30b)$$

Außerdem ergibt sich die fiktive algebraische Gleichung

$$0 = \begin{bmatrix} A_{21} + A_{22} R_{x_1} & A_{22} R_{x_u} + B_2 C_u \end{bmatrix} x_e + \underbrace{(A_{22} F_v + B_2 D_u)}_{=0} v,$$

die, wie auch (3.14), nicht von v abhängt.

Selbstverständlich gelten die für nichtlineare Deskriptorsysteme zuvor hergeleiteten Aussagen für lineare Deskriptorsysteme. So terminieren die Algorithmen für reguläre Deskriptorsysteme erfolgreich (Sätze 3.2 und 3.5), die Lösungen stimmen unter den angegebenen Voraussetzungen überein (Sätze 3.4 bzw. 3.7), die dynamische Erweiterung (3.28) basierend auf Algorithmus 3.1 besitzt keine Nullstellen und ist vollständig steuer- und beobachtbar sowie invertierbar (Lemma 3.3), die dynamische Erweiterung (3.28) basierend auf Algorithmus 3.2 ist invertierbar (Lemma 3.6) und die Dimension von \mathcal{N}_m ist invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung (Lemma 3.8). Für die dynamische Erweiterung basierend auf Algorithmus 3.2 lässt sich ein weiteres Ergebnis angeben.

Lemma 3.13. *Die dynamische Erweiterung (3.28), berechnet mit Algorithmus 3.2, besitzt keine invarianten Nullstellen.*

Beweis. Nach Lemma 3.6 legt $u(t)$ eindeutig $x_u(t)$ und $v(t)$ für $t \geq t_0$ fest und damit insbesondere auch $x_u(t_0)$. Daher können keine Nullstellen existieren. \square

Bei linearen Deskriptorsystemen lassen sich die differenzierbaren Lösungen über die Eigenmodi des Systems darstellen und interpretieren ([81]). Diese Eigenschaft ermöglicht die bisherigen Ergebnisse mit den n_{slow} endlichen Eigenwerten des Deskriptorsystems in Verbindung zu bringen. Dafür wird das erweiterte Deskriptorsystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{E_e} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 C_u \\ A_{21} & A_{22} & B_2 C_u \\ 0 & 0 & A_u \end{bmatrix}}_{A_e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_u \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 D_u \\ B_2 D_u \\ B_u \end{bmatrix}}_{B_e} v \quad (3.31a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & D C_u \end{bmatrix}}_{C_e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_u \end{bmatrix} + \underbrace{D D_u}_{D_e} v \quad (3.31b)$$

benötigt, welches sich durch Verwendung von (3.28) ergibt. Durch die Anwendung von Algorithmus 3.1 oder 3.2 wird eine dynamische Erweiterung erzeugt, sodass

$$G_{x_e}(\lambda) = (\lambda E_e - A_e)^{-1} B_e$$

nur Einträge besitzt, bei denen der Nennergrad größer oder gleich dem Zählergrad ist. Das erweiterte Deskriptorsystem ist damit immer proper, obwohl bei einem impropere Deskriptorsystem bei einzelnen Einträgen von

$$G_x(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1} B$$

der Zählergrad größer als der Nennergrad ist. Der folgende Satz verknüpft nun die Eigenmodi mit den Mannigfaltigkeiten \mathcal{N}_e und \mathcal{N}_m .

Satz 3.14. *Bei der Anwendung der Algorithmen 3.1 und 3.2 auf ein reguläres lineares Deskriptorsystem (2.9) gilt*

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}_e - n_{u,1} &= n_{\text{slow}} \\ \dim \mathcal{N}_m - n_{u,2} &= n_{\text{slow}}, \end{aligned}$$

wobei $n_{u,1}$ die Dimension von x_u , berechnet mit Algorithmus 3.1, $n_{u,2}$ die Dimension von x_u , berechnet mit Algorithmus 3.2, und n_{slow} die Anzahl der endlichen Eigenwerte von (2.9) bezeichnet.

Beweis. Der Beweis ist für beide Algorithmen identisch, weshalb er nur für Algorithmus 3.1 angegeben wird. Das erweiterte Deskriptorsystem (3.31) wird mit der Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} x_{w,1} \\ x_{w,2} \end{bmatrix} = T_w \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_u \end{bmatrix}$$

in die Weierstrass-Kronecker-Form (2.10) überführt. Bezeichne Λ_i den Eigenvektor zum Eigenwert λ_i des langsamen Teilsystems. Insgesamt existieren $n_{\text{slow}} + n_u$ Eigenwert/Eigenvektor Paare. Für die Lösung von (3.31) gilt immer

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{N}}_e$$

sowie

$$\begin{bmatrix} x_{w,1}(t) \\ x_{w,2}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} x_{w,1} \\ x_{w,2} \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_u+p} \mid \exists p_i \in \mathbb{C} : x_{w,1} = \sum_{i=1}^{n_{\text{slow}}+n_u} p_i \Lambda_i, x_{w,2} = -B_{w,2} v \right\}}_{\tilde{\mathcal{N}}}.$$

$x_{w,2}$ hängt dabei nicht von Ableitungen von v ab, da (3.31) immer proper ist. Offensichtlich gilt $\dim \tilde{\mathcal{N}} = n_{\text{slow}} + n_u + p$. Da jedes Element von $\tilde{\mathcal{N}}_e$ und $\tilde{\mathcal{N}}$ in einer Lösung enthalten ist, folgt $\dim \tilde{\mathcal{N}}_e = \dim \tilde{\mathcal{N}}$. Mit dem Zusammenhang $\dim \mathcal{N}_e = \dim \tilde{\mathcal{N}}_e - p$ folgt der Satz. \square

3.7 Kurzzusammenfassung

Kapitel 3 leitet mehrere Zustandsraumdarstellungen aus einem Deskriptorsystem ab. Zuerst werden die algebraische Variable und die algebraische Gleichung als weiterer Ein- bzw. Ausgang interpretiert, um so die wichtige Verknüpfung zwischen der Regularität eines Deskriptorsystems und der Invertierbarkeit des *fiktiven Zustandsystems* (3.1) zu erzeugen.

Durch die Weiterentwicklung bekannter Algorithmen ist es gelungen, mithilfe von Algorithmus 3.1 ein *verkoppeltes Zustandssystem* zu erzeugen, welches auf einer Untermannigfaltigkeit dieselbe Lösung wie das Deskriptorsystem besitzt. Ist das Deskriptorsystem improper, so ist im Verlauf des Algorithmus eine dynamische Erweiterung des verkoppelten Systems notwendig. Durch eine Modifikation bei dieser dynamischen Erweiterung wird ein zweiter Algorithmus hergeleitet, der ebenfalls ein verkoppeltes Zustandssystem erzeugt. Obwohl sich die verkoppelten Darstellungen in ihrer Ordnung unterscheiden können, sind sie strukturell sehr ähnlich und von zentraler Bedeutung im weiteren Verlauf der Arbeit.

Da es mit den verkoppelten Zustandsraumdarstellungen möglich ist, die Lösung des Deskriptorsystems zu bestimmen, sind sie auch für die numerische Simulation nichtlinearer Deskriptorsysteme geeignet. Wie in Abschnitt 3.5.1 dargestellt, müssen keine aufwendigen Integrationsverfahren für differential-algebraische Systeme verwendet werden, sondern die verkoppelten Zustandssysteme können mit Standardintegrationsverfahren gelöst werden. Zudem liefert Satz 3.12 eine einfache Möglichkeit, die Stabilität nichtlinearer Deskriptorsysteme zu überprüfen.

Die verkoppelten Darstellungen bilden im weiteren Verlauf der Arbeit die Grundlage für darauf aufbauende Untersuchungen. Dieses Kapitel zeigt, dass die verkoppelten Zustandssysteme für alle regulären Deskriptorsysteme immer existieren. Einschränkende Voraussetzungen für das Deskriptorsystem sind daher nicht notwendig.

4 Exakte Linearisierung

Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13) liefert die Grundlage für die Untersuchungen in diesem Kapitel. Zuerst wird die dynamische sowie die statische Entkoppelbarkeit von nicht-linearen Deskriptorsystemen analysiert. Beim Entkopplungsentwurf legt dabei die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung die Ein-/Ausgangsdynamik fest. Ob auch das gesamte geregelte Deskriptorsystem stabil ist, lässt sich mit der Nulldynamik untersuchen, die anschließend für nichtlineare Deskriptorsysteme eingeführt wird. Bei der exakten Deskriptorlinearisierung in Abschnitt 4.3 wird eine statische Deskriptorrückführung gesucht, die das nichtlineare Deskriptorsystem zusammen mit einer Koordinatentransformation in ein lineares überführt.

4.1 Entkopplung und exakte Ein-/Ausgangslinearisierung

Ein Zustands- oder Deskriptorsystem ist entkoppelt, wenn jeder Eingang auf genau einen Ausgang wirkt und jeder Ausgang von genau einem Eingang beeinflusst wird. Offensichtlich notwendig für ein entkoppeltes System ist, dass die Anzahl der Ein- und Ausgänge übereinstimmt. Folglich wird für die Entkopplung angenommen, dass das Deskriptorsystem quadratisch ist und damit $p = q$ gilt.

Bei Zustandssystemen wird in der Regel zuerst die statische Entkoppelbarkeit untersucht, da sie einfacher als die dynamische Entkoppelbarkeit überprüft werden kann (siehe z. B. [50] sowie [99]). Aus der dynamischen Entkoppelbarkeit lässt sich anschließend auch die Invertierbarkeit ableiten ([24]). Die dynamische Entkoppelbarkeit von Deskriptorsystemen wird jedoch auf Basis der Invertierbarkeit hergeleitet, was direkt gelingt und daher zuerst erfolgt. Bei der statischen Entkopplung können sich die Differenzordnungen im geregelten Deskriptorsystem ändern. Daher muss zuerst untersucht werden, wie sich die Differenzordnungen gezielt verändern lassen. Anschließend können daraus notwendige und hinreichende Bedingungen für die statische Entkoppelbarkeit in Abschnitt 4.1.3 hergeleitet werden.

Nach der statischen Entkoppelbarkeit wird mit der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung in Abschnitt 4.1.4 ein Verfahren vorgestellt, das die Ein-/Ausgangsdynamik vorgibt. Untersuchungen zur properen Entkoppelbarkeit schließen daraufhin die theoretischen Überlegungen zur Entkopplung ab. Abschnitt 4.1.6 geht auf Aspekte zur Implementierung und der Robustheit der Entkopplungsregelung ein; der praktische Einsatz einer speziellen Entkopplung für den Entwurf einer modellgestützten Vorsteuerung runden den Abschnitt 4.1 ab.

4.1.1 Dynamische Entkoppelbarkeit

Wie bei Zustandssystemen spielt die Invertierbarkeit auch bei Deskriptorsystemen eine große Rolle für die dynamische Entkopplung. Bevor die dynamische Entkopplung untersucht wird, stellt das

folgende Lemma eine Verbindung zwischen der Invertierbarkeit der fiktiven Darstellung (3.1) und des verkoppelten Systems (3.13) her.

Lemma 4.1. *Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13) des regulären Deskriptorsystems (2.1) ist genau dann in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ invertierbar, wenn das fiktive System (3.1) bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) invertierbar ist, wobei $\hat{x}_2 = \alpha_e(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ und $\hat{u} = r_u(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ gilt.*

Beweis. \Leftarrow : Da (3.1) invertierbar bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ ist, lassen sich $x_2(t)$ und $u(t)$ eindeutig aus \hat{x}_1 sowie $z(t)$ und $y(t)$ bestimmen (siehe Lemma B.3). Da die dynamische Erweiterung (3.11) nach Lemma 3.3 invertierbar ist, kann aus \hat{x}_u und $u(t)$ direkt $v(t)$ bestimmt werden. \hat{x}_u ist mit $u(t)$ festgelegt, sodass $v(t)$ mithilfe von $u(t)$ berechnet werden kann. Damit ist das verkoppelte System (3.13) invertierbar.

\Rightarrow : Da (3.13) invertierbar ist, kann aus \hat{x}_e und $y(t)$ unmittelbar $v(t)$ bestimmt werden. Da (3.11) und (3.1) in Reihe geschaltet sind und (3.11) nach Lemma 3.3 invertierbar ist, muss aus $y(t)$, $x_2(t)$ sowie \hat{x}_1 auch $u(t)$ bestimmbar sein. Zusammen mit der Regularität des Deskriptorsystems und Lemma 3.1 folgt die Invertierbarkeit von (3.1) bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$. \square

Ist die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13) invertierbar, so kann sie dynamisch entkoppelt werden (siehe Lemma B.5). Wird der dynamische Entkopplungsregler zusammen mit der dynamischen Erweiterung (3.11) auf das Deskriptorsystem (2.1) angewandt, ist auch dieses entkoppelt. Unter der Voraussetzung, dass das geregelte Deskriptorsystem regulär ist, kann auf diesem Weg mit geringem Aufwand ein Deskriptorsystem dynamisch entkoppelt werden. Folgender Satz beweist nicht nur die Regularität, sondern auch, dass die Invertierbarkeit von (3.13) notwendig und hinreichend für die dynamische Entkoppelbarkeit ist.

Satz 4.2. *Eine reguläre dynamische Deskriptorrückführung (2.7) für das reguläre Deskriptorsystem (2.1), die das geregelte Deskriptorsystem in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) so entkoppelt, dass das geregelte System dort regulär ist, existiert genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

- *Die fiktive Zustandsraumdarstellung (3.1) des Deskriptorsystems (2.1) ist in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) invertierbar bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$.*
- *Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13) des Deskriptorsystems (2.1) ist in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ invertierbar, wobei $\hat{x}_2 = \alpha_e(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ und $\hat{u} = r_u(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ gilt.*

Beweis. Dass beide Bedingungen äquivalent sind, folgt aus Lemma 4.1.

\Leftarrow : Nach Lemma B.5 existiert eine reguläre dynamische Zustandsrückführung (B.2) für (3.13), die die Ein-/Ausgangsdynamik des geregelten Systems entkoppelt. Wird der dynamischen Rückführung die dynamische Erweiterung (3.11) nachgeschaltet, entsteht eine reguläre dynamische Deskriptorrückführung für das Deskriptorsystem, die wegen Satz 3.4 das Deskriptorsystem entkoppelt. Diese Rückführung hängt nicht von x_2 ab. Es bleibt zu zeigen, dass das geregelte Deskriptorsystem regulär ist.

Wird die Deskriptorrückführung mit der Identität $x_2 = x_2$ erweitert, entsteht eine reguläre dynamische Zustandsrückführung für den erweiterten Eingang u_e in (3.1). Mit Lemma B.4 ist das

geregelte fiktive System invertierbar bezüglich $\langle z_e, w_e \rangle$, wobei $w_e := (x_2, w)$.

Da das geregelte Deskriptorsystem entkoppelt und das fiktive Zustandssystem des geregelten Deskriptorsystems bezüglich $\langle z_e, w_e \rangle$ invertierbar ist, muss die fiktive Zustandsraumdarstellung auch bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$ invertierbar sein. Damit ist das geregelte Deskriptorsystem regulär.

\Rightarrow : Angenommen es existiert eine reguläre dynamische Deskriptorrückführung (2.7), sodass das geregelte Deskriptorsystem regulär und entkoppelt ist, so ist das fiktive Zustandssystem des geregelten Deskriptorsystems invertierbar bezüglich $\langle z_e, w_e \rangle$. Angenommen das System (3.1) ist nicht bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ invertierbar. Dann ist die dynamische Rückführung mit $x_2 = x_2$ für (3.1) regulär und das fiktive Zustandssystem des geregelten Deskriptorsystems kann nicht invertierbar bezüglich $\langle z_e, w_e \rangle$ sein. Dies widerspricht der Annahme. \square

Mit dem letzten Satz sind Bedingungen für die dynamische Entkoppelbarkeit regulärer Deskriptorsysteme bekannt. Wenn ein Deskriptorsystem dynamisch entkoppelbar ist, kann es nur einen Eingang $u(t)$ geben, der einen vorgegebenen Ausgang $y(t)$ zu einem bestimmten Anfangswert \hat{x} erzeugt. Der Vergleich mit Lemma B.3 und B.5 für invertierbare Zustandssysteme motiviert folgende Definition invertierbarer Deskriptorsysteme.

Definition 4.1. Das Deskriptorsystem (2.1) wird als *invertierbar* in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) bezeichnet, wenn \hat{x} ein konsistenter Anfangswert ist und (3.13) in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ invertierbar ist, wobei $\hat{x}_2 = \alpha_e(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ und $\hat{u} = r_u(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ gilt.

Wie im Verlauf des letzten Beweises dargestellt, wird die erste Bedingung von Satz 4.2 nicht nur zur Überprüfung der dynamischen Entkoppelbarkeit benötigt, sondern dient auch direkt dem Entwurf einer dynamischen Rückführung. Im Allgemeinen ergibt sich dabei eine große Reglerordnung, da die dynamische Erweiterung (3.11) der berechneten Zustandsrückführung nachgeschaltet werden muss. Wie bereits in Kapitel 3 diskutiert, lässt sich die Ordnung der dynamischen Erweiterung durch einfache Maßnahmen reduzieren, was auf den Algorithmus 3.2 führte. Da der Entwurf einer dynamischen Zustandsrückführung minimaler Ordnung für die Entkopplung von Zustandssystemen recht aufwendig ist (siehe z. B. [48]), wird in dieser Arbeit nicht weiter untersucht, wie eine dynamische Deskriptorrückführung minimaler Ordnung für die dynamische Entkopplung berechnet werden kann.

Wird auf die Dynamik in der Rückführung jedoch vollständig verzichtet, muss das Deskriptorsystem statisch entkoppelbar sein. Bedingungen, wann dies der Fall ist, werden im Abschnitt 4.1.3 hergeleitet. Zuvor ist die Einführung der Differenzordnungen für Deskriptorsysteme notwendig.

4.1.2 Differenzordnungen

Wird eine Ausgangsgleichung eines Zustandssystems so lange nach der Zeit abgeleitet, bis eine explizite Eingangsabhängigkeit auftritt, entspricht die Anzahl der benötigten Ableitungen der *Differenzordnung* des Ausgangs. Werden alle Ausgänge entsprechend der jeweiligen Differenzordnung abgeleitet und die höchsten Ausgangsableitungen in einer Vektorfunktion zusammengefasst, so ist das Zustandssystem genau dann statisch entkoppelbar, wenn die partielle Ableitung

dieser Vektorfunktion nach dem Eingang vollen Rang besitzt ([50], [99], [114]). Da die Differenzordnungen eng mit der statischen Entkoppelbarkeit von Zustandssystemen verknüpft sind, beschäftigt sich dieser Abschnitt mit den Differenzordnungen von Deskriptorsystemen.

Für die Berechnung der Ausgangsableitungen bei Zustandssystemen muss zuerst die partielle Ableitung einer Ausgangsgleichung nach dem Zustandsvektor gebildet werden, die mit der Ableitung des Zustandsvektors multipliziert wird. Da die Ableitung des Zustandsvektors dem Systemvektorfeld entspricht, kann dieses eingesetzt werden, um die Ableitung des Ausgangs in Abhängigkeit des Zustands und des Eingangs zu bestimmen. Dies entspricht der Lie-Ableitung des Ausgangs. Bei der Übertragung auf ein Deskriptorsystem muss ebenfalls die partielle Ableitung einer Ausgangsgleichung nach dem Deskriptor gebildet werden. Die Ableitung der differentiellen Variablen ist wie zuvor bekannt und kann eingesetzt werden. Die Ableitung der algebraischen Variablen ist dagegen nicht bekannt.

Einen Ausweg bietet die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13). Da es sich dabei um ein Zustandssystem handelt, können die Differenzordnungen klassisch berechnet werden. Diese entsprechen allerdings noch nicht den Differenzordnungen des Deskriptorsystems, da die dynamische Erweiterung Einfluss auf die Differenzordnungen von (3.13) hat. Die für (3.13) berechneten Differenzordnungen müssen noch um die Anzahl der vorgeschalteten PT_1 -Glieder vermindert werden, was auf die folgende Definition führt.

Definition 4.2. Die *Differenzordnung* δ_i für den Ausgang y^i des regulären Deskriptorsystems (2.1) ist die kleinste ganze Zahl $\delta_i \geq -\mu$, die

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\tilde{f}_e}^{d_i + \mu} h_e^i}{\partial v} &= 0 \quad \forall d_i \in \{-\mu, \dots, \delta_i - 1\} \\ \frac{\partial L_{\tilde{f}_e}^{\delta_i + \mu} h_e^i}{\partial v} &\neq 0 \end{aligned}$$

für (3.13) in einer Umgebung von (\hat{x}_e, \hat{v}) erfüllt.

Im Gegensatz zu Zustandssystemen können Differenzordnungen eines Deskriptorsystems negative Werte annehmen, wenn das Deskriptorsystem differenzierendes Verhalten besitzt. Für $\mu = 0$ dagegen geht obige Definition in die klassische Definition der Differenzordnungen für Zustandssysteme über, ist also konsistent mit dieser. In Wang u. a. [132] werden Differenzordnungen für Deskriptorsysteme definiert, allerdings für eine eingeschränkte Systemklasse, bei der die Jacobi-Matrix der algebraischen Gleichungen bezüglich den algebraischen Variablen und den Eingängen maximalen Rang besitzt. Mit der dort angegebenen Definition ist Definition 4.2 ebenfalls konsistent.

Für Zustandssysteme sind die Differenzordnungen invariant unter einer regulären statischen Zustandsrückführung ([99]). Anhand einfacher linearer Deskriptorsysteme lässt sich leicht nachvollziehen, dass dies für die Differenzordnungen von Deskriptorsystemen nicht der Fall ist (siehe z. B. Abschnitt 7.1). Im Folgenden wird untersucht, wie die Differenzordnung verändert werden kann;

im Allgemeinen ist es sowohl möglich, die Differenzordnung zu verringern, als auch zu vergrößern. Selbstverständlich ist es nur dann sinnvoll, von einer veränderten Differenzordnung beim geregelten Deskriptorsystem zu sprechen, wenn dieses regulär ist. Für eine einfachere Darstellung wird die Regularität des geregelten Deskriptorsystems in diesem Abschnitt immer angenommen. Erst im Abschnitt 4.1.3 werden Bedingungen hergeleitet, sodass ein reguläres geregeltes Deskriptorsystem mit veränderter Differenzordnung entsteht. Zuerst wird nur die Verringerung der Differenzordnung betrachtet.

Wenn ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) nicht streng proper ist, gibt es mindestens eine Restriktion $\gamma_{e,i}^j(x_1, x_2, u)$, die von u abhängt, aber nicht von Ableitungen von u . Diese Restriktion kann zu einer Ausgangsfunktion $h^i(x_1, x_2)$ addiert werden, die nicht vom Eingang abhängt, wodurch eine *modifizierte Ausgangsfunktion* entsteht. Da die Restriktionen für alle Lösungen des Deskriptorsystems null sind, stimmen die Ausgangsfunktion und die modifizierte Ausgangsfunktion in ihrem Wert für alle Lösungen des Deskriptorsystems überein. Die modifizierte Ausgangsgleichung ist ein Element der Äquivalenzklasse $\mathcal{K}(h^i, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ und hängt, im Gegensatz zur ursprünglichen Ausgangsgleichung, von u ab.

Da die modifizierte Ausgangsfunktion nach dem Eingang u aufgelöst werden kann, ist sie für einen Reglerentwurf geeignet. Dafür wird

$$h^i(x_1, x_2) + \gamma_{e,i}^j(x_1, x_2, u) = w^i$$

nach u aufgelöst, um eine Deskriptorrückführung zu berechnen. Unter der Annahme, dass das geregelte Deskriptorsystem regulär ist, besitzt es die Ein-/Ausgangsdynamik $y^i = w^i$, womit die Differenzordnung auf 0 reduziert wird.

Doch die Modifikation einer Ausgangsfunktion kann nicht nur genutzt werden, um bei einer Ausgangsableitung eine Eingangsabhängigkeit zu erzeugen und die Differenzordnung zu reduzieren. Sie kann eine vorhandene Eingangsabhängigkeit auch kompensieren und so die Differenzordnung vergrößern. Wie dies möglich ist, wird im Folgenden hergeleitet, indem Ausgangsableitungen $(y^i)^{(d_i)}$ beliebiger Höhe d_i untersucht werden. Jede Ausgangsableitung $(y^i)^{(d_i)}$ lässt sich immer als Funktion $(\mathcal{M}_x \times \mathbb{R}^{\ell p}) \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen, die von x und $(u, \dots, (u)^{(\ell-1)})$ abhängt, wobei $\ell - 1$ der Anzahl der notwendigen Eingangsableitungen entspricht. Um diese Funktionen zu bestimmen, kann zum Beispiel

$$\begin{aligned} (y^i)^{(0)} &= h^i \\ (y^i)^{(j+1)} &= \left(\partial_{x_1} (y^i)^{(j)} \right) f + \left(\partial_{x_2} (y^i)^{(j)} \right) \dot{x}_2 + \left(\partial_u (y^i)^{(j)} \right) \dot{u} + \left(\partial_{\ddot{u}} (y^i)^{(j)} \right) \ddot{u} + \dots \end{aligned}$$

mit f und h des Deskriptorsystems (2.1) sowie

$$\dot{x}_2 = (\partial_{x_1} \alpha_e) f + (\partial_u (\alpha_e \circ \Psi)) \dot{u} + \dots + (\partial_{(u)^{(\mu)}} (\alpha_e \circ \Psi)) (u)^{(\mu+1)}$$

mit der Funktion Ψ aus (3.15) verwendet werden. $(y^i)^{(d_i)}$ erzeugt die Äquivalenzklasse von Funktionen $\mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e)$, die für alle Lösungen des Deskriptorsystems dieselben Funktionswerte annehmen.

Um eine Eingangsabhängigkeit von $(y^i)^{(d_i)}$ zu kompensieren, muss ein $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$ existieren. Die Funktion \tilde{y} nimmt für alle Lösungen dieselben Funktionswerte wie $(y^i)^{(d_i)}$ an und hängt nicht vom Eingang oder Eingangsableitungen ab. Hängt $L_f \tilde{y}$ von u ab, so kann $L_f \tilde{y}$ zum Reglerentwurf genutzt werden. Die Differenzordnung beim geregelten Deskriptorsystem ist dann $d_i + 1$, sofern es regulär ist. Da Restriktionen höchstens von der μ -ten Eingangsableitung abhängen, kann eine solche Kompensation nicht für beliebig große d_i möglich sein.

Für die Herleitung einer Obergrenze für d_i wird zuerst $\Theta \subset T_{(\hat{x}, \hat{u})}^* \mathcal{M}_{x, \bar{u}}$

$$\Theta := \text{span} \left\{ dx_1^k, d(\gamma_{e,i}^j \circ \Psi) \right\}_{k \in \underline{r}, i \in \{0, \dots, \kappa_j\}, j \in \underline{m}}$$

eingeführt. Gilt $d\rho \in \Theta$ für eine Funktion $\rho : \mathcal{M}_{x, \bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt aus (3.27) offensichtlich $d\tilde{\rho} \in \Theta$ für alle $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$. Gilt dagegen $d\rho \notin \Theta$, so führt (3.27) auf $d\tilde{\rho} \notin \Theta$ für alle $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$. Liegt also die äußere Ableitung von ρ in Θ , so liegen die äußeren Ableitungen aller Funktionen in Θ , die Elemente der Äquivalenzklasse von ρ sind.

Hängt ρ nur von x_1 ab, so ist $d\rho \in \Theta$ unabhängig von den Restriktionen erfüllt. Hängt ρ dagegen vom Eingang ab, so spielen die Restriktionen eine Rolle. Gibt es eine Restriktion mit derselben Eingangsabhängigkeit wie ρ , so ist diese ebenfalls in Θ enthalten und es gilt wieder $d\rho \in \Theta$. Hängt keine Restriktion vom Eingang ab, so folgt $d\rho \notin \Theta$. In diesem Fall ist keine Kompensation der Eingangsabhängigkeit möglich. Dieselben Überlegungen gelten für Eingangsableitungen und werden nachfolgend verallgemeinert.

Wie gezeigt wird, ist es für alle Elemente von Θ möglich, sie durch Modifikationen mit den Restriktionen so zu verändern, dass sie nur noch von x_1 abhängen. Dies bedeutet insbesondere, dass sie nicht mehr vom Eingang oder dessen Ableitung abhängt und eine Vergrößerung der Differenzordnung prinzipiell möglich ist.

Lemma 4.3. *Es existiert genau dann mindestens ein $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$, wenn $d\rho \in \Theta$ für eine Funktion $\rho : \mathcal{M}_{x, \bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.*

Beweis. \Leftarrow : Es existiert immer ein lokaler Diffeomorphismus $\Gamma : \mathcal{M}_{x, \bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}^{k_1+k_2+k_3}$ mit $k_1 := \kappa + m$, $k_2 + k_3 = n + p\mu - k_1$, für den

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \xi \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1(x_1, x_2, \bar{u}) \\ \Gamma_2(x_1) \\ \Gamma_3(x_2, \bar{u}) \end{bmatrix}$$

gilt. Dabei wird

$$\eta_1 = \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{e,0}^1 \\ \vdots \\ \gamma_{e,\kappa_m}^m \end{bmatrix}$$

gewählt, was auf $\Gamma^{-1}(0, \xi, \eta_2) \in \tilde{\mathcal{N}}_e$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{k_2}$ und $\eta_2 \in \mathbb{R}^{k_3}$ führt. Wegen $d\rho \in \Theta$ existieren Funktionen $a^k, b_i^j : \mathcal{M}_{x, \bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$d\rho = \sum_{k=1}^n a^k dx_1^k + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{k_j} b_i^j d(\gamma_{e,i}^j \circ \Psi)$$

lokal in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) gilt. Daraus folgt $\partial_{\eta_2}(\rho \circ \Gamma^{-1}) = 0$.

Die Wahl von $\hat{\rho} = \rho \circ \Gamma^{-1}(0, \xi, 0)$ führt mit $\tilde{\rho} := \hat{\rho} \circ \Gamma$ auf $\tilde{\rho} = \rho \forall (x_1, x_2, \bar{u}) \in \tilde{\mathcal{N}}_e$. Aus $\partial_{\eta_2}(\rho \circ \Gamma^{-1}) = 0$ folgt $\partial_{\eta_2} \hat{\rho} = 0$, weshalb $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$ erfüllt ist.

\Rightarrow : $d\rho \notin \Theta$ führt mit (3.27) auf $d\tilde{\rho} \notin \Theta$ für alle $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$. Aus $d\tilde{\rho} \notin \text{span}\{dx_1^k\}_{k \in \underline{r}}$ folgt, dass $\mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1}) = \emptyset$ für $d\rho \notin \Theta$ gilt. \square

Dieses Ergebnis wird verwendet, um für Ausgangsableitungen zu überprüfen, ob es ein Element in der Äquivalenzklasse der Ausgangsableitung gibt, das nur von x_1 abhängt. Wenn dies der Fall ist, kann der Ausgang weiter abgeleitet werden, da der Eingangseinfluss kompensiert werden konnte. Eine Vergrößerung der Differenzordnung ist daher möglich. Existiert ein solches Element nicht in der Äquivalenzklasse, dann ist, wie im weiteren Verlauf noch hergeleitet wird, die größtmögliche Differenzordnung erreicht, die im geschlossenen Regelkreis mit einer regulären statischen Deskriptorrückführung erzeugt werden kann. Im Hinblick darauf erfolgt bereits an dieser Stelle die Definition der maximalen Differenzordnung, die sich an der Definition der Differenzordnung für Zustandssysteme von *Huijberts* u. a. [49] sowie *Glumineau* und *Moog* [40] orientiert.

Definition 4.3. Die *maximale Differenzordnung* $\delta_{m,i}$ für den Ausgang y^i des regulären Deskriptorsystems (2.1) ist die kleinste ganze Zahl $\delta_{m,i} \geq 0$, für die

$$d(y^i)^{(\delta_{m,i})} \notin \Theta$$

in einer Umgebung von (\hat{x}_e, \hat{v}) gilt.

Wegen $d\rho \in \Theta \Leftrightarrow d\tilde{\rho} \in \Theta$ für $\rho : \mathcal{M}_{x, \bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{\rho} \in \mathcal{K}(\rho, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ kann die Berechnung der maximalen Differenzordnung immer mit den Ausgangsableitungen der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.13) erfolgen. Die Berechnung der maximalen Differenzordnung wird in Beispiel 4.1 sowie in Abschnitt 7.1 für das Beispiel eines Dreimassenschwingers beschrieben.

Wenn $d(y^i)^{(d_i)}$ in Θ liegt, besitzt die d_i -te Ableitung der Ausgangsfunktion Eingangsabhängigkeiten, die durch Restriktionen kompensiert werden können. Wird der Ausgang y^i jedoch mehr als $\delta_{m,i}$ -mal abgeleitet, lässt sich keine statische Rückführung mehr daraus berechnen, da immer Eingangsableitungen auftreten. Die dargestellten Überlegungen werden in den folgenden Lemmata zusammengefasst.

Lemma 4.4. Wenn $d_i \in \{0, \dots, \delta_{m,i} - 1\}$ für ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) gewählt wird, existiert eine Funktion $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$.

Beweis. Sei $d_i \in \{0, \dots, \delta_{m,i} - 1\}$. Aus Definition 4.3 folgt $d(y^i)^{(d_i)} \in \Theta$. Mit Lemma 4.3 existiert dann ein $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$. \square

Lemma 4.5. *Wenn $d_i > \delta_{m,i}$ für ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) gilt, ist $\partial_{(\hat{u}, \hat{u}, \dots)} \tilde{y} \neq 0$ für jede Funktion $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ in der Umgebung von (\hat{x}_e, \hat{v}) erfüllt.*

Beweis. Nach Lemma 4.4 existiert ein $\tilde{y}_1^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(\delta_{m,i}-1)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$. Für $\tilde{y}_2^i := L_f \tilde{y}_1^i$ gilt $\tilde{y}_2^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(\delta_{m,i})}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ und $\tilde{y}_2^i \notin \Theta$. Sei $\tilde{y}_3^i := L_f \tilde{y}_2^i + \partial_{x_2} \tilde{y}_2^i \dot{x}_2$ mit $\dot{x}_2 = L_f \alpha_e + \partial_{\bar{u}}(\alpha_e \circ \Psi) \dot{\bar{u}}$. Angenommen es gilt $\partial_{\bar{u}} \tilde{y}_3^i = 0$, dann muss $\partial_{x_2} \tilde{y}_2^i \cdot \partial_{\bar{u}}(\alpha_e \circ \Psi) = 0$ erfüllt sein, was auf $\tilde{y}_2^i \in \Theta$ führt. Durch Widerspruch ist damit gezeigt, dass $\partial_{\bar{u}} \tilde{y} \neq 0$ für alle $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e)$ mit $d_i = \delta_{m,i} + 1$ gilt. Die Argumentation lässt sich für alle $d_i > \delta_{m,i}$ wiederholen. \square

Mit den letzten beiden Ergebnissen wurde gezeigt, dass es immer möglich ist, eine zu $(y^i)^{(d_i)}$ äquivalente Funktion zu finden, die nicht vom Eingang oder Eingangsableitungen abhängt, wenn $d_i < \delta_{m,i}$ gilt. Von mindestens einer Eingangsableitung hängen alle äquivalenten Funktionen für $d_i > \delta_{m,i}$ ab. Im Fall $d_i = \delta_{m,i}$ muss im Allgemeinen keines der beiden Lemmata erfüllt sein.

Um die äquivalenten Funktionen für einen Reglerentwurf, wie hier der Entkopplung, nutzen zu können, muss eine äquivalente Funktion gesucht werden, die vom Eingang, jedoch nicht von Eingangsableitungen abhängt. Eine solche äquivalente Funktion muss in $\mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ liegen. Diese kann nach dem Eingang aufgelöst werden, um zu einer Rückführung zu gelangen. Wann geeignete äquivalente Funktionen existieren, beantwortet folgendes Lemma.

Lemma 4.6. *Es existiert genau dann eine Funktion $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$, für die*

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial u} \neq 0 \tag{4.1}$$

in einer Umgebung von (\hat{x}_e, \hat{v}) erfüllt ist, wenn $d_i \in \{0, \dots, \delta_{m,i}\}$ für ein reguläres, nicht streng properes Deskriptorsystem gilt.

Beweis. \Leftarrow : Da das Deskriptorsystem nicht streng proper ist, existiert mindestens eine Funktion $\tilde{\gamma} : \mathcal{M}_{x,u} \rightarrow \mathbb{R}$, die $\tilde{\gamma}(x, u) = 0 \forall (x, \Psi(\bar{u})) \in \tilde{\mathcal{N}}_e$ und $\partial_u \tilde{\gamma} \neq 0$ erfüllt. Gilt $d_i < \delta_{m,i}$, existiert wegen Lemma 4.4 mindestens ein $\check{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$. $\tilde{y} = \check{y} + \tilde{\gamma}$ erfüllt damit (4.1). Gilt $d_i = \delta_{m,i}$, so erfüllt mit $\check{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i-1)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$ entweder $\tilde{y} = L_f \check{y}$ oder $\tilde{y} = L_f \check{y} + \tilde{\gamma}$ die Bedingung (4.1) und $\tilde{y} \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$.

\Rightarrow : Die Notwendigkeit ist eine direkte Folge aus Lemma 4.5. \square

Eine weitere Konsequenz aus dem letzten Lemma ist, dass die Differenzordnung durch eine Rückführung höchstens den Wert $\delta_{m,i}$ annehmen kann. Dies rechtfertigt die zuvor gewählte Bezeichnung der *maximalen* Differenzordnung und schließt die Überlegungen zu einer Veränderung der Differenzordnung ab.

4.1.3 Statische Entkoppelbarkeit

Ausgänge durch Restriktionen zu modifizieren, wie dies im letzten Abschnitt betrachtet wird, birgt komplett neue Möglichkeiten für den Reglerentwurf. Im weiteren Verlauf werden daher modifizierte Ausgänge zum Entkoppeln verwendet. Für die Berechnung eines statischen Entkopplungsreglers ist es notwendig, dass modifizierte Ausgänge $\tilde{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e)$, $d_i \in \{0, \dots, \delta_{m,i}\}$, $i \in \underline{p}$ existieren, die

$$\text{rang } \partial_u [\tilde{y}^i]_{i \in \underline{p}} = p \quad (4.2)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial (u)^{(j)}} = 0 \quad \forall i \in \underline{p}, j > 0 \quad (4.3)$$

erfüllen. Dann kann zum Beispiel $[\tilde{y}^i]_{i \in \underline{p}} = w$ nach dem Eingang u aufgelöst werden, um eine reguläre statische Deskriptorrückführung (2.6) zu berechnen. Ist das geregelte Deskriptorsystem regulär, so besitzt es die Ein-/Ausgangsdynamik $(y^i)^{(d_i)} = w^i$. Damit ist es entkoppelt und die Ein-/Ausgangsdynamik besteht aus jeweils d_i Integratoren.

Da die Bedingung (4.3) nur sicherstellt, dass keine Eingangsableitungen auftreten, kann sie entfallen, wenn stattdessen $\tilde{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ gefordert wird. Die Regularität des geregelten Deskriptorsystems ist durch die beiden Bedingungen allerdings noch nicht sichergestellt. Es zeigt sich bereits an einfachen Beispielsystemen, dass das beschriebene Vorgehen teilweise zum Verlust der Regularität führt. Ist das Deskriptorsystem nicht invertierbar, so kann es offensichtlich nicht möglich sein, das System zu entkoppeln. Sind die Bedingungen für ein nicht invertierbares Deskriptorsystem trotzdem erfüllt, so entsteht ein nicht reguläres geregeltes Deskriptorsystem.

Im Gegensatz zu Zustandssystemen, die immer invertierbar sind, wenn ihre Entkopplungsmatrix regulär ist ([99]), folgt bei Deskriptorsystemen aus (4.2) noch nicht deren Invertierbarkeit. Nach Satz 4.2 ist jedoch auch bei Deskriptorsystemen die Forderung der Invertierbarkeit notwendig für die Entkoppelbarkeit. Wie gezeigt wird, erzeugt die Kombination mit (4.2) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die statische Entkoppelbarkeit.

Satz 4.7. *Es existiert genau dann eine reguläre statische Deskriptorrückführung (2.6) für das reguläre Deskriptorsystem (2.1), sodass das mit der Rückführung geregelte Deskriptorsystem in einer Umgebung von \hat{x} regulär und mit den Differenzordnungen $d_i \geq 0$ entkoppelt ist, wenn Funktionen $\tilde{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$, $d_i \in \{0, \dots, \delta_{m,i}\}$, $i \in \underline{p}$, existieren, für die (4.2) in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{u}) erfüllt ist und das Deskriptorsystem in dieser Umgebung invertierbar ist.*

Beweis. \Leftarrow : Angenommen das Deskriptorsystem ist invertierbar und (4.2) ist erfüllt. Aufgrund der obigen Überlegungen existiert eine reguläre statische Deskriptorrückführung, die das geregelte Deskriptorsystem mit den Differenzordnungen $d_i \geq 0$ entkoppelt. Wird die Rückführung mit der Identität $x_2 = x_2$ erweitert, so ist mit derselben Argumentation, wie im Beweis von Satz 4.2, die fiktive Darstellung des geregelten Deskriptorsystems invertierbar bezüglich $\langle z_e, w_e \rangle$ sowie die

fiktive Zustandsraumdarstellung bezüglich $\langle z, x_2 \rangle$ invertierbar und somit das geregelte Deskriptorsystem regulär.

\Rightarrow : Angenommen es existiert eine reguläre statische Deskriptorrückführung (2.6), sodass das geregelte Deskriptorsystem regulär und mit den Differenzordnungen $d_i \geq 0$ entkoppelt ist. Es existieren Funktionen $\hat{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{\tilde{d}_i}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,w})$ für die $\partial_w \hat{y}^i \neq 0 \forall i \in \underline{p}$ gilt und die Matrix $\partial_w [\hat{y}^i]_{i \in \underline{p}}$ vollen Rang besitzt. Da die Deskriptorrückführung regulär ist, ist (4.2) für das unregulierte Deskriptorsystem erfüllt.

Wie beim Beweis von Satz 4.2 kann auf die Regularität von (2.1) und die Invertierbarkeit von (3.1) bezüglich $\langle z_e, v_e \rangle$ geschlossen werden. \square

Mit dem letzten Satz sind erstmals notwendige und hinreichende Bedingungen für die statische Entkoppelbarkeit regulärer Deskriptorsysteme bekannt, wobei an das Deskriptorsystem keine weiteren Annahmen gestellt oder Einschränkungen gemacht werden. Die Differenzordnungen des geregelten Deskriptorsystems können beliebig zwischen 0 und $\delta_{m,i}$ gewählt werden, sofern (4.2) erfüllt ist. Für die Überprüfung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen aus Satz 4.7 müssen geeignete Funktionen in der jeweiligen Äquivalenzklasse gefunden werden. Die Äquivalenzklasse hängt noch vom Parameter d_i ab, dieser muss geeignet gewählt werden. Es ist bisher nicht erkennbar, welche Auswirkungen die Wahl von d_i hat.

Lemma 4.8. *Kann ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) nach Satz 4.7 mit den Parametern $d_i \leq \delta_{m,i} \forall i \in \underline{p}$ in einer Umgebung von (\hat{x}_1, \hat{x}_2) entkoppelt werden, wobei $d_j < \delta_{m,j}$ für ein $j \in \underline{p}$ gilt, so kann das Deskriptorsystem mit den Parametern $\tilde{d}_i = d_i \forall i \in \underline{p}, i \neq j$ und $0 \leq \tilde{d}_j \leq \delta_{m,j}$ in dieser Umgebung entkoppelt werden.*

Beweis. Sei (2.1) ein reguläres Deskriptorsystem, das mit den Parametern $d_i, i \in \underline{p}$ entkoppelt werden kann. Angenommen, dass Deskriptorsystem kann mit den Parametern $\tilde{d}_i, i \in \underline{p}$, wobei $\tilde{d}_j \neq d_j$ für ein $j \in \underline{p}$ gilt, nicht entkoppelt werden. Da $d_j < \delta_{m,j}$ folgt für alle $\tilde{y}^j \in \mathcal{K}((y^j)^{d_j}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ direkt $d\tilde{y}^j \in \Theta$. Daher existiert ein $\tilde{\gamma} : \mathcal{M}_{x,u} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(x, u) = 0 \forall (x, \Psi(\bar{u})) \in \tilde{\mathcal{N}}_e$, sodass (4.2) erfüllt ist, wenn \tilde{y}^j durch $\tilde{\gamma}$ ersetzt wird. Da in (4.2) nur die Abhängigkeit von u eine Rolle spielt, kann $\tilde{\gamma}$ darüber hinaus so gewählt werden, dass $d\tilde{\gamma} \in \mathcal{Z}$ gilt.

Wegen der Annahme $d_j < \delta_{m,j}$ ist das Deskriptorsystem nicht streng proper und es existiert nach Lemma 4.6 ein $\check{y}^j \in \mathcal{K}((y^j)^{\tilde{d}_j}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$. Mit $\tilde{y}^j = \check{y}^j$ kann (4.2) nicht erfüllt sein, da das Deskriptorsystem sonst mit den Parametern \tilde{d}_i entkoppelbar wäre, was per Annahme ausgeschlossen ist. Dann muss $\tilde{y}^j = \check{y}^j + \tilde{\gamma}$ die Bedingung (4.2) erfüllen. Da $\tilde{y}^j \in \mathcal{K}((y^j)^{\tilde{d}_j}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ gilt, ist das Deskriptorsystem mit den Parametern \tilde{d}_i entkoppelbar und das Lemma durch Widerspruch bewiesen. \square

Nach dem letzten Lemma kann eine Differenzordnung d_j beliebig verändert werden, wenn eine Entkopplung mit $d_j < \delta_{m,j}$ möglich ist. Die Umkehrung der Aussage zeigt, dass wenn die Entkopplung eines entkoppelbaren Deskriptorsystems mit $d_j < \delta_{m,j}$ nicht möglich ist, auch keine Entkopplung mit $0 \leq \tilde{d}_j < \delta_{m,j}$ erfolgen kann. Für die Entkopplung muss zwingend $\tilde{d}_j = \delta_{m,j}$

gewählt werden. Daher sollte für die Überprüfung der Entkoppelbarkeit eines Deskriptorsystems immer $d_i = \delta_{m,i}$, $i \in \underline{p}$ gewählt werden.

Am Ende dieses Abschnitts werden nochmals die maximalen Differenzordnungen betrachtet. Für Zustandssysteme stimmen die maximalen Differenzordnungen mit den klassischen Differenzordnungen überein, welche unter einer regulären statischen Rückführung invariant sind. Bei Deskriptorsystemen sind beide im Allgemeinen verschieden und nur die maximalen Differenzordnungen sind invariant, was an dieser Stelle gezeigt wird.

Satz 4.9. *Die maximalen Differenzordnungen eines regulären Deskriptorsystems (2.1) sind invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung (2.6).*

Beweis. Angenommen die maximale Differenzordnung wird durch eine reguläre statische Deskriptorrückführung verändert. Sei $\delta_{m,i}$ die maximale Differenzordnung eines Ausgangs des Deskriptorsystems und $\tilde{\delta}_{m,i}$ die des geregelten Deskriptorsystems, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{\delta}_{m,i} > \delta_{m,i}$ angenommen wird. Das geregelte Deskriptorsystem kann mit einer weiteren regulären statischen Deskriptorrückführung so geregelt werden, dass das zweite geregelte System als Differenzordnungen $\tilde{\delta}_{m,i}$ besitzt. Die Hintereinanderschaltung von zwei regulären statischen Deskriptorrückführungen lässt sich immer durch eine einzige reguläre statische Deskriptorrückführung erzielen, sodass sich die Differenzordnung $\tilde{\delta}_{m,i}$ bereits mit einer Rückführung erzeugen lassen muss. Da $\tilde{\delta}_{m,i} > \delta_{m,i}$ gilt, widerspricht dies Lemma 4.5, was die Annahme widerlegt. \square

Da die maximalen Differenzordnungen invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung sind, ist ihre Summe ebenfalls invariant. Nachfolgendes Beispiel verdeutlicht die Berechnung der maximalen Differenzordnungen und die Überprüfung der Entkoppelbarkeit.

Beispiel 4.1. *Gegeben ist das Deskriptorsystem*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} \sin(x^1) + x^3 + u^1 \\ x^2 + u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{bmatrix} x^4 + u^1 \\ x^5 + u^2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3)$, $x_2 = (x^4, x^5)$ und $x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4)$. Algorithmus 3.1 berechnet den Verkopplungsregler

$$x_2 = \begin{bmatrix} -u^1 \\ -u^2 \end{bmatrix},$$

wobei keine Verkopplungseigenwerte vorgegeben werden können, da g direkt nach x_2 auflösbar ist. Es lässt sich leicht erkennen, dass das fiktive Zustandssystem (3.1) bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ invertierbar ist und damit auch das Deskriptorsystem. Für die Berechnung der maximalen Differenzordnung wird

$$\begin{aligned} d\gamma_{e,0}^1 &= d(x^4 + u^1) = dx^4 + du^1 \\ d\gamma_{e,0}^2 &= d(x^5 + u^2) = dx^5 + du^2 \end{aligned}$$

benötigt, was auf

$$\Theta := \text{span} \{dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 + du^1, dx^5 + du^2\}$$

führt. Offensichtlich gilt $dy^1 \in \Theta$ und $dy^2 \in \Theta$. Die erste Ausgangsableitung ergibt sich zu

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} u^1 + x^3 + \sin(x^1) \\ u^1 + x^2 \end{bmatrix}$$

und führt auf

$$\begin{aligned} d\dot{y}^1 &= d(u^1 + x^3 + \sin(x^1)) = du^1 + dx^3 + \partial_{x^1} \sin(x^1) dx^1 = du^1 + dx^3 + \cos(x^1) dx^1 \\ d\dot{y}^2 &= d(u^1 + x^2) = du^1 + dx^2, \end{aligned}$$

woraus direkt $d\dot{y}^1 \notin \Theta$ und $d\dot{y}^2 \notin \Theta$ folgt. Mit Definition 4.3 sind die maximalen Differenzordnungen damit $\delta_{m,1} = \delta_{m,2} = 1$. Zur Überprüfung der Entkoppelbarkeit werden zuerst Funktionen in $\mathcal{K}((y^i)^{\delta_{m,i}})$, \mathcal{N}_e , $\mathcal{M}_{x,u}$ gesucht, die (4.2) erfüllen. Dies ist für die Wahl

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 - \gamma_{e,0}^1 + \gamma_{e,0}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x^1) + x^3 + u^1 \\ x^2 - x^4 + x^5 + u^2 \end{bmatrix}$$

der Fall, sodass das Deskriptorsystem entkoppelbar ist. Auflösen von $\tilde{y} \stackrel{!}{=} w$ nach u erzeugt die reguläre statische Deskriptorrückführung

$$u = \begin{bmatrix} -\sin(x^1) - x^3 + w^1 \\ -x^2 + x^4 - x^5 + w^2 \end{bmatrix},$$

die auf das reguläre geregelte Deskriptorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} w^1 \\ -\sin(x^1) + x^2 - x^3 + w^1 \\ -x^2 + x^4 - x^5 + w^2 \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{bmatrix} -\sin(x^1) - x^3 + x^4 + w^1 \\ -x^2 + x^4 + w^2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

führt, das die Ein-/Ausgangsdynamik $\dot{y} = w$ besitzt.

Eine Veränderung der Differenzordnung im geregelten System ist ebenfalls möglich. Die Wahl von

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y^1 + \gamma_{e,0}^1 \\ y^2 + \gamma_{e,0}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + x^4 + u^1 \\ x^2 + x^5 + u^2 \end{bmatrix}$$

erfüllt erneut (4.2) und führt mit der Forderung $\tilde{y} \stackrel{!}{=} w$ auf die reguläre statische Deskriptorrückführung

$$u = \begin{bmatrix} -x^1 - x^4 + w^1 \\ -x^2 - x^5 + w^2 \end{bmatrix}.$$

Das reguläre geregelte Deskriptorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} -x^1 + \sin(x^1) + x^3 - x^4 + w^1 \\ -x^1 + x^2 - x^4 + w^1 \\ -x^2 - x^5 + w^2 \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{bmatrix} -x^1 + w^1 \\ -x^2 + w^2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

besitzt nun die Ein-/Ausgangsdynamik $y = w$.

Das Beispiel gibt außerdem einen Hinweis für die Wahl der Funktionen in den Äquivalenzklassen um (4.2) zu erfüllen. Zum Erzeugen einer passenden Eingangsabhängigkeit reicht die Addition einer eingangsabhängigen Restriktion in vielen Fällen bereits aus.

4.1.4 Exakte Ein-/Ausgangslinearisierung

Bis jetzt wurden Bedingungen hergeleitet, wann ein Deskriptorsystem statisch entkoppelt werden kann. Der verwendete Reglerentwurf führte zu einer Integratorkette in jedem Ein-/Ausgangskanal. Aufbauend auf den vorgestellten Ergebnissen wird in diesem Abschnitt die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung auf Deskriptorsysteme übertragen.

Das Prinzip der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung für Zustandssysteme besteht darin, dass für jede Ausgangsgleichung und ihre Ableitungen eine gewünschte lineare Differentialgleichung vorgegeben wird. Wird diese nach dem Eingang aufgelöst, so ergibt sich ein Regelgesetz, welches die vorgegebene Dynamik für den Ausgang erzeugt (siehe z. B. [50], [99]).

Bei der vorgestellten statischen Entkopplung von Deskriptorsystemen werden die Parameter d_i so gewählt, dass Funktionen $\tilde{y}_{d_i}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ existieren, für die (4.2) erfüllt ist. Um Differentialgleichungen vorgeben zu können, werden weitere Funktionen $\tilde{y}_j^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(j)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x_1})$ mit $j < d_i$ benötigt. Nach Lemma 4.4 existieren diese Funktionen immer, da $d_i \leq \delta_{m,i}$ gewählt werden muss.

Mit den Parametern $a_j^i \in \mathbb{R}$ kann die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{d_1-1} a_j^1 \tilde{y}_j^1 + \tilde{y}_{d_1}^1 \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{d_p-1} a_j^p \tilde{y}_j^p + \tilde{y}_{d_p}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^1 w^1 \\ \vdots \\ a_0^p w^p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

wegen Satz B.8 und (4.2) nach u aufgelöst werden und es ergibt sich eine reguläre statische Deskriptorrückführung (2.6). Ist das Deskriptorsystem statisch entkoppelbar, so besitzt das geregelte Deskriptorsystem die Ein-/Ausgangsdynamik

$$a_0^i y^i + \dots + a_{d_i-1}^i \cdot (y^i)^{(d_i-1)} + (y^i)^{(d_i)} = a_0^i w^i \quad \forall i \in \underline{p},$$

da $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle Lösungen auf $\tilde{\mathcal{N}}_e$ gilt.

Wie bei Zustandssystemen hängt die Stabilität des geregelten Systems bei der exakten Ein-/Ausganglinearisierung nicht nur von der vorgegebenen Dynamik ab, sondern auch von der Nulldynamik. Diese wird später in Abschnitt 4.2 betrachtet.

4.1.5 Propere Entkoppelbarkeit

Bei der bisherigen Betrachtung der Entkopplung wird weder für das unregelte noch das geregelte Deskriptorsystem Properheit angenommen. Im Gegensatz dazu fordern *Zhang* u. a. [141] immer die Properheit des geregelten Systems und *Müller* [97] noch dazu die Properheit des unregulierten Systems.

Mit der neu vorgestellten Methodik lässt sich nur dann ein properes geregeltes Deskriptorsystem erzeugen, wenn mit maximaler Differenzordnung entkoppelt wird. Dafür ist keine statische Deskriptorrückführung in der Form (2.6) nötig. Wie sich zeigen lässt (z. B. in [97]), ist für die Regelung eines properen Deskriptorsystems, sodass das geregelte Deskriptorsystem proper ist, nur eine *reduzierte statische Deskriptorrückführung*

$$u = r_{\text{red}}(x_1, w) \quad (4.5)$$

mit $w \in \mathbb{R}^p$ ausreichend. Damit diese *regulär* ist, muss $\text{rang } \partial_w r_{\text{red}} = p$ gelten. Für die propere, statische Entkoppelbarkeit gilt das folgende Lemma.

Lemma 4.10. *Ein reguläres, properes Deskriptorsystem (2.1) kann mit einer regulären, reduzierten statischen Deskriptorrückführung (4.5) genau dann in einer Umgebung von (\hat{x}_1, \hat{x}_2) entkoppelt werden, sodass das geregelte Deskriptorsystem dort regulär und proper ist, wenn (4.2) mit $\tilde{y}^i = (y^i)^{(\delta_{m,i})}$ in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ erfüllt ist.*

Beweis. \Leftarrow : Wenn $\tilde{y}^i = (y^i)^{(\delta_{m,i})}$ (4.2) erfüllt, ist die verkoppelte Zustandsraumdarstellung (3.13) entkoppelbar und damit invertierbar. Daher ist das Deskriptorsystem invertierbar und die Bedingungen von Satz 4.7 sind erfüllt. Da (3.13) entkoppelbar ist und wegen der Properheit $n_u = 0$ gilt,

kann für (3.13) eine entkoppelnde, reguläre statische Zustandsrückführung entworfen werden, die die Form (4.5) annimmt. Diese entkoppelt das Deskriptorsystem. Das geregelte Deskriptorsystem ist wegen Satz 4.7 regulär. Da die Restriktionen $\gamma_{e,i}^j$, $i \in \{0, \dots, \kappa_j - 1\}$, $j \in \underline{m}$ nicht von u abhängen und die reduzierte Rückführung die Abhängigkeit der Restriktionen γ_{e,κ_j}^j von x_2 nicht verändert, bleibt das geregelte Deskriptorsystem proper.

\Rightarrow : Existiert eine reguläre, reduzierte statische Deskriptorrückführung, die das System proper entkoppelt, so müssen die Bedingungen von Satz 4.7 erfüllt sein, da dieser notwendig ist. Damit existieren $\hat{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(\delta_{m,i})}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$, $i \in \underline{p}$, für die (4.2) erfüllt ist. Da eine reduzierte Rückführung entworfen werden konnte, müssen sogar $\hat{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(\delta_{m,i})}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ existieren, die (4.2) erfüllen.

Angenommen (4.2) wird von $\tilde{y}^i = (y^i)^{(\delta_{m,i})}$ nicht erfüllt. Da das Deskriptorsystem proper ist, hängt γ_e nicht von u ab, sodass alle Elemente von $\mathcal{K}(\tilde{y}^i, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ dieselbe Eingangsabhängigkeit besitzen. Damit kann (4.2) auch nicht mit \hat{y}^i erfüllt werden. Durch Widerspruch ist gezeigt, dass (4.2) mit $\tilde{y}^i = (y^i)^{(\delta_{m,i})}$ erfüllt ist. \square

Die vorgestellte Entkopplungsmethodik deckt mit diesem Lemma die Resultate zur properen Entkoppelbarkeit von Müller [97] sowie Schmitt und Konigorski [117] mit ab, ohne dass die in Müller [97] benötigten Fallunterscheidungen beachtet werden müssen. Den Unterschied zwischen Satz 4.7 und Lemma 4.10 verdeutlicht ein kurzes Beispielsystem, das zwar entkoppelbar ist, aber nicht proper entkoppelt werden kann.

Beispiel 4.2. *Das Deskriptorsystem*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + u^1 \\ u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad 0 = x^4 + u^2 \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$, $x_2 = x^4 \in \mathbb{R}$ und $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ ist ein reguläres, properes Deskriptorsystem, welches nach Satz 4.7 entkoppelbar ist und für das $\delta_m^1 = \delta_m^2 = 1$ gilt. Die Ausgangsableitung ist

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} x^3 + u^1 \\ u^1 \end{bmatrix},$$

weshalb die Bedingung von Lemma 4.10 nicht erfüllt ist. Mit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} &= \dot{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{e,0}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + u^1 \\ u^1 + x^4 + u^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow u &= \begin{bmatrix} -x^3 + w^1 \\ x^3 - x^4 - w^1 + w^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ist das System entkoppelbar und das geregelte System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^1 \\ -x^3 + w^1 \\ x^3 - x^4 - w^1 + w^2 \end{bmatrix} \quad 0 = x^3 - w^1 + w^2 \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

ist regulär und mit maximaler Differenzordnung entkoppelt, aber nicht proper. Wegen Lemma 4.10 existiert keine Rückführung, die ein properes, entkoppeltes Deskriptorsystem erzeugt.

Das Beispiel zeigt, dass es für die Angabe notwendiger und hinreichender Entkopplungsbedingungen nötig ist, auf die Forderung der Properheit des geregelten Deskriptorsystems zu verzichten.

4.1.6 Aspekte der Implementierung und Robustheit

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit zwei wichtigen Aspekten der vorgestellten Entkopplungsregelung. Zuerst wird auf die Implementierung der Entkopplungsregelung in Verbindung mit der verkoppelten Zustandsraumdarstellung eingegangen. Anschließend wird die Robustheit der Rückführung gegenüber Parametervariationen untersucht.

Implementierung Die verkoppelte Darstellung kann, wie in Abschnitt 3.5.1 gezeigt, zur Simulation des Deskriptorsystems verwendet werden. Soll ein geregeltes Deskriptorsystem simuliert werden, so lässt sich die Deskriptorrückführung prinzipiell auch auf das verkoppelte Zustandssystem anwenden. Dass diese Implementierung zu Problemen führen kann, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 4.3. Betrachtet wird das reguläre Deskriptorsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + x^3 + u^1 \\ x^2 + u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} x^4 + u^1 \\ x^5 + u^2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$, $x_2 = (x^4, x^5) \in \mathbb{R}^2$ und $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$, das die Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & -\frac{1}{s(1-s)} \\ \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

besitzt. Das Einsetzen der regulären statischen Deskriptorrückführung

$$u = \begin{bmatrix} -x^1 - x^4 + w^1 \\ -x^2 - x^5 + w^2 \end{bmatrix}$$

führt auf das Deskriptorsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - x^4 + w^1 \\ -x^1 + x^2 - x^4 + w^1 \\ -x^2 - x^5 + w^2 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} -x^1 + w^1 \\ -x^2 + w^2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix},$$

welches regulär ist. Die Übertragungsmatrix des geregelten Deskriptorsystems ist $G(\lambda) = I_2$. Wird die verkoppelte Zustandsraumdarstellung des unregulierten Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + x^3 + u^1 \\ x^2 + u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u^1 \\ -u^2 \end{bmatrix}$$

betrachtet und die Rückführung eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - x^4 + w^1 \\ -x^1 + x^2 - x^4 + w^1 \\ -x^2 - x^5 + w^2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

Einsetzen in den Verkopplungsregler führt auf

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + x^4 - w^1 \\ x^2 + x^5 - w^2 \end{bmatrix}.$$

Es ist nicht mehr möglich, den Verkopplungsregler nach x_2 aufzulösen. Bei einer Implementierung der Rückführung entsteht damit eine nicht lösbare algebraische Schleife, sodass x_2 nicht mehr bestimmt werden kann.

Im Beispiel ist es nicht möglich, die geregelte verkoppelte Zustandsraumdarstellung zur Simulation des geregelten Deskriptorsystems einzusetzen. Werden die Differenzordnungen auf null reduziert, so tritt das Problem bei den meisten Deskriptorsystemen auf. Daher sollte immer eine neue verkoppelte Zustandsraumdarstellung des geregelten Deskriptorsystems berechnet werden, unabhängig davon ob es simuliert wird oder andere auf der verkoppelten Darstellung basierende Methoden zum Einsatz kommen.

Robustheit Es soll an dieser Stelle keine umfangreiche Robustheitsanalyse der Entkopplungsregelung erfolgen, sondern lediglich ein spezieller Aspekt der Robustheit betrachtet werden. Dafür wird nochmals das Beispiel 4.3 herangezogen. Wird die Rückführung

$$u = \begin{bmatrix} -x^1 - x^4 + p_1 x^4 + w^1 \\ -x^2 - x^5 + p_2 x^5 + w^2 \end{bmatrix}$$

mit den Parametern $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ verwendet, so zeigt sich, dass nur bei der Wahl $p_1 = p_2 = 0$ die Differenzordnungen $\delta_1 = \delta_2 = 0$ im geschlossenen Regelkreis erzeugt werden. Schon für beliebig kleine Abweichungen der Parameter von 0 erhöhen sich die Differenzordnungen.

Da die Reduzierung der Differenzordnung erreicht wird, indem die Wirkung von x_2 auf z in (3.1) verzögert wird, müssen durch die Rückführung bestimmte Variablen in den algebraischen Gleichungen oder deren Ableitungen kompensiert werden. Im Beispiel 4.3 waren das die algebraischen Variablen x^4 und x^5 . Stimmt diese Kompensation nicht exakt, so verändert sich der differenzierende Charakter des Systems und somit dessen Differenzordnung.

Da ein Modell praktisch nie exakt einem realen System entspricht, ist die Reduzierung der Differenzordnung für den praktischen Einsatz ungeeignet; es wird immer zu kleinen Abweichungen kommen, die eine exakte Kompensation verhindern. Im Gegensatz dazu sind in der Simulation die Modelle in der Regel exakt bekannt und der entworfene Entkopplungsregler reduziert die Differenzordnung wie gewünscht. Dass trotzdem praktische Anwendungen dieses Entkopplungsreglers existieren, verdeutlicht der folgende Abschnitt.

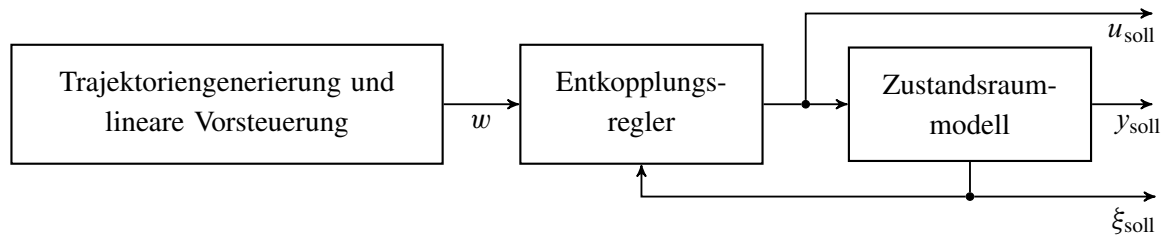


Bild 4.1: Struktur der klassischen, modellgestützten Vorsteuerung

4.1.7 Anwendung als Vorsteuerungsentwurf

Entwurf einer Vorsteuerung für Deskriptorsysteme Bevor auf den neuen Vorsteuerungsentwurf eingegangen wird, soll zuerst eine bekannte Vorsteuerungsstruktur vorgestellt werden, die als Grundlage dienen wird. Es handelt sich um eine dynamische, modellgestützte Vorsteuerung (siehe [112]), die in Bild 4.1 dargestellt ist. Das Besondere an dieser Vorsteuerung ist, dass sie ein geregeltes Modell der Strecke enthält. Ist das System ein-/ausgangslinearisierbar, so kann eine lineare Vorsteuerung des geregelten Modells erfolgen (siehe z. B. [116]), was den Entwurfsaufwand für die Vorsteuerung deutlich reduziert. Bei dieser Struktur kann der Eingang des Modells als Stellgröße für das reale System verwendet werden. Das Modell in der Vorsteuerung berechnet außerdem einen Sollverlauf für den Zustand des realen Systems. Da der Sollverlauf bekannt ist, ist die weitere Implementierung eines Folgereglers sehr einfach.

Ist es möglich, alle Differenzordnungen eines regulären, entkoppelbaren Deskriptorsystems zu reduzieren, so ist es nach Lemma 4.8 immer möglich, das Deskriptorsystem mit $d_i = 0$ zu entkoppeln. Das geregelte System besitzt die Übertragungsmatrix $G(\lambda) = I$, also ein P-Verhalten in den entkoppelten Ein-/Ausgangskanälen. Der Ausgang folgt damit immer exakt dem Eingang, ohne dynamische Verzögerungen. Da die gewünschte Trajektorie direkt aufgeschaltet wird, kann eine zusätzliche lineare Vorsteuerung des geregelten Systems entfallen.

Wie in Kapitel 3 gezeigt wird, kann ein improperes System problemlos simuliert werden, wenn die Eingangsableitungen bekannt sind. Es ist somit grundsätzlich möglich, das geregelte System zu simulieren. Selbstverständlich muss dafür der Eingang des geregelten Deskriptorsystems eine bestimmte Differenzierbarkeitsanforderung erfüllen, wobei jede Trajektorie eines realen Systems eine gewisse Differenzierbarkeit besitzt. Unter der Beachtung von (3.15) stimmen diese überein.

Beim hier dargestellten Vorgehen wird die Stellgröße für das reale System vom Regler berechnet. Ebenso wird ein Sollverlauf des Deskriptors erzeugt. Der Unterschied zur klassischen Struktur liegt darin, dass für die Simulation des Deskriptorsystems die verkoppelte Zustandsraumdarstellung verwendet wird. Da das geregelte Deskriptorsystem simuliert wird, muss die verkoppelte Zustandsraumdarstellung des geregelten Deskriptorsystems simuliert werden, wie in Abschnitt 4.1.4 beschrieben. Um bei dieser Implementierung die Stellgröße des realen Systems bestimmen zu können, muss der Entkopplungsregler separat berechnet werden. Dies führt auf die in Bild 4.2 dargestellte Struktur.

Die Voraussetzung für den neuen Vorsteuerungsentwurf ist, dass das Deskriptorsystem mit reduzierten Differenzordnungen entkoppelbar ist. Dafür ist es nicht notwendig, dass das unregelte

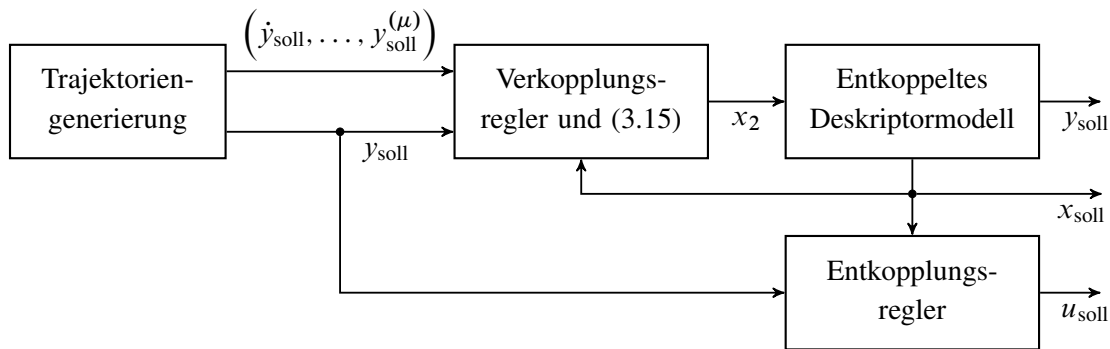


Bild 4.2: Struktur der modifizierten, modellgestützten Vorsteuerung

Deskriptorsystem improper ist. Das geregelte Deskriptorsystem muss jedoch stabil sein. Wie im nächsten Abschnitt bei der Einführung der Nulldynamik für Deskriptorsysteme gezeigt wird, ist dafür eine stabile Nulldynamik hinreichend. Der Vorsteuerungsentwurf ist damit nicht nur von theoretischem Interesse, sondern lässt sich für viele praktische Systeme einsetzen. In Abschnitt 7.4 wird der Vorsteuerungsentwurf beispielhaft an einem Parallelroboterprüfstand implementiert und Messergebnisse gezeigt.

Die Idee dieses neuen Vorsteuerungsentwurfs kann nicht nur für Deskriptorsysteme, sondern auch für Zustandssysteme genutzt werden, um zu einer einfachen Entwurfsmethodik für eine Vorsteuerung zu gelangen.

Entwurf einer Vorsteuerung für Zustandssysteme Durch die Hinzunahme der algebraischen Gleichung

$$0 = u - \eta$$

zu den Differentialgleichungen des Zustandssystems (2.2) kann ein fiktives, reguläres Deskriptorsystem erzeugt werden, für das ξ die differentielle Variable und $\eta \in \mathbb{R}^p$ die algebraische Variable darstellt. Dieses Deskriptorsystem ist genau dann invertierbar, wenn das Zustandssystem (2.2) invertierbar ist, was nachfolgend angenommen wird.

Besitzt das Zustandssystem keinen Durchgriff, so können mit $\tilde{y} = y + u - \eta$ modifizierte Ausgänge erzeugt werden, wobei für alle Ausgänge $\tilde{y}^i \in \mathcal{K}(y, \mathcal{N}_e)$ gilt. Diese modifizierten Ausgänge können zum Entkopplungsreglerentwurf herangezogen werden, da die Bedingungen von Satz 4.7 erfüllt sind. Dies führt auf den Entkopplungsregler

$$u = r(\xi, \eta, w) = w - c(\xi) + \eta,$$

womit sich das geregelte Deskriptorsystem

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(\xi, r(\xi, \eta, w)) \\ 0 &= r(\xi, \eta, w) - \eta = w - c(\xi) \\ y &= c(\xi) \end{aligned}$$

ergibt, das die Ein-/Ausgangsdynamik

$$y(t) = w(t)$$

besitzt und wegen Satz 4.7 regulär ist. Selbstverständlich ist der Entwurf auch für Systeme mit Durchgriff möglich; modifizierte Ausgänge $\tilde{y}^i \in \mathcal{K}(y, \mathcal{N}_e)$, die Satz 4.7 erfüllen, existieren immer.

Die Anwendung des Algorithmus 3.1 auf das geregelte Deskriptorsystem erzeugt den Verkopplungsregler $\eta = \alpha_e(x_e, v)$, was unter Beachtung von (3.15) mit $y_{\text{soll}} = w, \dots, (y_{\text{soll}})^{(\mu)} = (w)^{(\mu)}$ und $(x_u, v) = \Psi(w, \dots, (w)^{(\mu)})$ zu

$$\eta = \alpha_e\left(\xi, \Psi\left(y_{\text{soll}}, \dots, (y_{\text{soll}})^{(\mu)}\right)\right)$$

führt. Es lässt sich wiederum die Struktur aus Bild 4.2 verwenden, um das Zustandssystem vorzusteuern. Wie bei der Vorsteuerung von Deskriptorsystemen müssen Ableitungen der Trajektorie y_{soll} bekannt sein.

Voraussetzung für den Entwurf der Vorsteuerung ist die Invertierbarkeit des Zustandssystems (2.2). Die Stabilität des entkoppelten Deskriptorsystems ist für Zustandssysteme mit stabiler Null-dynamik immer sichergestellt. Diese Voraussetzungen sind für viele praktische Systeme erfüllt, sodass mit der dargestellten Methodik in einfacher Weise eine Vorsteuerung entworfen werden kann.

4.2 Nulldynamik

4.2.1 Nulldynamik regulärer Deskriptorsysteme

Bei der Nulldynamik handelt es sich um Bewegungen, die ein System ausführen kann, wenn der Ausgang identisch null ist. Ist ein Zustandssystem invertierbar, so legt die Bedingung $y(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$ alle Eingänge eindeutig fest. Ist dies nicht der Fall, so definieren *Nijmeijer* und *van der Schaft* [99, Definition 11.15] die Nulldynamik als die Bewegungen, die mit den verbleibenden Eingängen nicht mehr beeinflusst werden können. Diese Definition lässt sich auf reguläre Deskriptorsysteme übertragen. Anschließend wird auf zwei Aspekte der Nulldynamik näher eingegangen: der Einfluss auf die stabile Entkoppelbarkeit und die Ordnung der Nulldynamik.

Für eine Lösung der Nulldynamik nimmt die Ausgangsfunktion für alle Zeiten den Wert null an. Da für die Lösung eines Deskriptorsystems auch immer die Restriktionen erfüllt sein müssen, ist es naheliegend, für die Berechnung der Nulldynamik nicht mehr zwischen dem Ausgang und den algebraischen Gleichungen zu unterscheiden. Die Herleitung der Nulldynamik eines Deskriptorsystems erfolgt deshalb mithilfe des Systems (3.1) mit dem Ausgang z_e sowie dem Eingang u_e . Sie basiert auf der Definition und der Herleitung der Nulldynamik von *Nijmeijer* und *van der Schaft* [99].

Der Verkopplungsalgorithmus 3.1 und der Algorithmus zur Berechnung der Nulldynamik sind sich prinzipiell ähnlich, wenn u_e als algebraische Variable und z_e als algebraische Gleichung interpretiert werden. Algorithmus 3.1 terminiert allerdings nur, wenn das System bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ invertierbar ist, was keine Voraussetzung für die Nulldynamik ist. Im Folgenden wird daher ein neuer Algorithmus zur Berechnung der Nulldynamik angegeben, der strukturell mit Algorithmus 3.1 übereinstimmt, wobei die Attraktivität der berechneten Untermannigfaltigkeit nicht benötigt wird.

Algorithmus 4.1.

Schritt 0 Das System (3.1) wird durch Σ_0 gekennzeichnet; $\mathcal{Y}_0 := \mathcal{Y}_1 := \mathcal{M}_{x_1}$ sei dessen Zustandsmannigfaltigkeit. Mit $u_{e,0} := u_e$ gilt $\tilde{f}(x_1, u_{e,0}) := f(x_1, x_2, u)$ und

$$\psi_0 := \begin{bmatrix} g(x_1, u_{e,0}) \\ h(x_1, u_{e,0}) \end{bmatrix}.$$

$\psi_0^1, \dots, \psi_0^{m+q}$ bezeichnen die einzelnen Funktionen in ψ_0 . Der Parameter ℓ_j zählt die Anzahl der Ableitungen der j -ten Gleichung. Zu Beginn wird $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{m+q} = 0$ gesetzt und es gilt $\tilde{p} = m + p$ sowie $j = 1$.

Schritt 1 Wenn $\partial_{u_{e,(j-1)}} \psi_{\ell_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 auf \mathcal{Y}_j gilt, wird direkt zu Schritt 2 gesprungen.

Ansonsten wird ℓ_j um 1 erhöht und die neue Restriktion $\psi_{\ell_j}^j = L_{\tilde{f}} \psi_{\ell_{j-1}}^j$ durch Ableiten der letzten Restriktion erzeugt. Alle bisherigen Restriktionen werden in der Vektorfunktion $\psi_j^T = [\psi_0^j \dots \psi_{\ell_{j-1}}^j]$ zusammengefasst und es wird angenommen, dass der Rang der Jacobi-Matrix von ψ_j bezüglich x_1 konstant in einer Umgebung von \hat{x}_1 ist. Gilt

$$\text{rang } \partial_{x_1} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_j \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j \ell_i, \quad (4.6)$$

so sind alle Restriktionen unabhängig, $\mathcal{Y}_j := \{x_1 \in \mathcal{Y}_{j-1} \mid \psi_j = 0\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit und es wird zu Schritt 2 gesprungen.

Ist (4.6) dagegen nicht erfüllt, so ist die letzte Restriktion abhängig von den vorherigen. Das Ableiten wird abgebrochen und ℓ_j um 1 vermindert. Dann ist (4.6) wieder erfüllt und \mathcal{Y}_j eine Untermannigfaltigkeit. Es wird $\alpha_j(x_1, u_{e,j}) := u_{e,j}$ mit $u_{e,j} \in \mathbb{R}^{\tilde{p}}$ eingeführt. Anschließend wird zu Schritt 3 gesprungen.

Schritt 2 Es wird der Schritt 1 so lange wiederholt, bis $\partial_{u_{e,(j-1)}} \psi_{\ell_j}^j \neq 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 gilt. Dafür waren ℓ_j Ableitungen der j -ten Ausgangsgleichung notwendig.

Mit Satz B.9 ist es möglich, eine fiktive Rückführung $\alpha_j : (\mathcal{Y}_j \times \mathbb{R}^{\tilde{p}-1}) \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{p}}$ mit $u_{e,(j-1)} = \alpha_j(x_1, u_{e,j})$ und $u_{e,j} \in \mathbb{R}^{\tilde{p}-1}$ zu finden, die die Gleichung $\psi_{\ell_j}^j(x_1, u_{e,(j-1)}) = 0$ in einer Umgebung von \hat{x}_1 löst und für die $\text{rang } \partial_{u_{e,j}} \alpha_j = \tilde{p} - 1$ gilt. Das System Σ_{j-1} , welches mit $u_{e,(j-1)} = \alpha_j(x_1, u_{e,j})$ geregelt ist, wird mit Σ_1 bezeichnet. Es gilt $\mathcal{Y}_{j+1} := \mathcal{Y}_j$.

Schritt 3 j wird um 1 erhöht und die Schritte 1 – 3 werden so lange wiederholt, bis $j = m + q$ gilt.

Der Algorithmus terminiert erfolgreich, wenn die Rangannahme (4.6) im Schritt 1 immer erfüllt ist. Die berechneten Restriktionen werden in

$$\psi_z(x_1) = \begin{bmatrix} \psi_1^1(x_1) \\ \vdots \\ \psi_{\ell_1-1}^1(x_1) \\ \psi_1^2(x_1) \\ \vdots \\ \psi_{\ell_{m+q}-1}^{m+q}(x_1) \end{bmatrix}$$

zusammengefasst und es gilt $\ell := \sum_{j=1}^{m+q} \ell_j$. Der Algorithmus erzeugt die Rückführung

$$u_e = \alpha_z(x_1, u_{e,j}) = \alpha_z(x_1, v) \quad (4.7)$$

mit $v \in \mathbb{R}^{\tilde{p}}$, das geregelte Zustandssystem

$$\dot{x}_1 = f_z(x_1, v) \quad (4.8a)$$

$$z_e = h_z(x_1) \quad (4.8b)$$

und die maximale, lokal geregelt invariante, ausgangsnulldende Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_z = \{x_1 \in \mathcal{M}_{x_1} \mid \psi_z(x_1) = 0\} . \quad (4.9)$$

Für das geregelte System muss $z_e = 0 \quad \forall x_1 \in \mathcal{N}_z, v \in \mathbb{R}^{\tilde{p}}$ gelten. Damit entsprechen die Bewegungen von (4.8) denen des Deskriptorsystems für $y(t) = 0$, wenn $u_e = \alpha_z(x_1, v)$ beachtet wird. Für die Definition der Nulldynamik werden noch zwei Zwischenergebnisse benötigt.

Lemma 4.11. *Terminiert der Algorithmus 4.1 erfolgreich in einer Umgebung von \hat{x}_1 , so existieren Koordinaten (ξ, η) mit $\xi = \psi_z(x_1)$, in denen (4.8) die Gestalt*

$$\dot{\xi} = \tilde{f}_{z,1}(\xi) \quad (4.10a)$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_{\eta}(\xi, \eta, v) \quad (4.10b)$$

$$z_e = h_z(\xi) \quad (4.10c)$$

annimmt, wobei das Zustandssystem (4.10a) mit dem Ausgang (4.10c) lokal beobachtbar um $\hat{\xi} = \psi_z(\hat{x}_1)$ ist. η sind lokale Koordinaten für \mathcal{N}_z .

Beweis. Auf \mathcal{N}_z gilt per Definition $\xi = 0$. Würde das erste Teilsystem von η oder v abhängen, wäre \mathcal{N}_z nicht mehr invariant unter der Systemdynamik. Daher darf das erste Teilsystem nicht von η und v abhängen. Da ψ_z nur durch Ausgangsableitungen erzeugt wird, folgt die lokale Beobachtbarkeit des Teilsystems (4.10a), (4.10c). Das zweite Teilsystem darf wegen $\xi = \psi_z(x_1)$ keinen Einfluss auf den Ausgang haben. \square

Lemma 4.12. *Wenn die Dimension der Erreichbarkeitsdistribution \mathcal{A} von (4.10b) lokal konstant ist, existieren lokale Koordinaten (ξ_2, ξ_3) für \mathcal{N}_z , in denen (4.10b) auf \mathcal{N}_z die Form*

$$\dot{\xi}_2 = f_{z1}(\xi_2, \xi_3, v) \quad (4.11a)$$

$$\dot{\xi}_3 = f_{z2}(\xi_3) \quad (4.11b)$$

annimmt.

Beweis. Das Lemma ist eine direkte Folge von Satz B.6. □

Definition 4.4. (4.11b) wird als *Nulldynamik* des regulären Deskriptorsystems (2.1) in einer Umgebung von \hat{x} bezeichnet.

Die Nulldynamik ist wohldefiniert, wenn der Algorithmus 4.1 erfolgreich terminiert und Lemma 4.12 erfüllt ist. Bemerkenswert ist, dass die Nulldynamik eines regulären Deskriptorsystems, welches nicht notwendigerweise proper ist, immer durch ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem beschrieben werden kann. Genau wie bei Zustandssystemen liegen die Lösungen der Nulldynamik im Allgemeinen nur in einer Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N}_z , in der $\xi_2 = 0$ gilt. Mit $\dim \xi_2 + \dim \xi_3 = \dim \mathcal{N}_z$ ergibt sich die Ordnung der Nulldynamik zu $n_z := \dim \xi_3$.

Folgendes Beispiel verdeutlicht den Algorithmus 4.1.

Beispiel 4.4. *Das Deskriptorsystem*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{x}^4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u + x^2 \\ bx^2 + a \sin(x^2) + x^3 \\ x^5 + c \cos(x^2) \\ x^2 + e(x^4)^2 + dx^4 - u \end{bmatrix} \\ 0 &= x^1 \\ y &= x^3 \end{aligned}$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $x_2 = x^5$, $\mathcal{M}_{x_1} = (\mathbb{R} \times \mathbb{S} \times \mathbb{R}^2)$ und den Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ verletzt die Voraussetzung zur Definition der Nulldynamik von Wang u. a. [131, 132]. Algorithmus 4.1 berechnet die Restriktionen

$$\begin{aligned} \psi_0^1 &= x^1 \\ \psi_0^2 &= x^3 \\ \psi_1^1 &= u + x^2 \\ \psi_1^2 &= x^5 + c \cos(x^2). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_z = \{x_1 \in \mathcal{M}_{x_1} \mid x^1 = 0, x^3 = 0\},$$

die fiktive Rückführung

$$u_e = \begin{bmatrix} -c \cos(x^2) \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

und das geregelte System

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ bx^2 + a \sin(x^2) + x^3 \\ 0 \\ 2x^2 + e(x^4)^2 + dx^4 \end{bmatrix}$$

$$z_e = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Da dieses System keinen weiteren Eingang v besitzt, lässt sich direkt die Nulldynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{x}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx^2 + a \sin(x^2) \\ 2x^2 + e(x^4)^2 + dx^4 \end{bmatrix}$$

ablesen.

Die Anwendung von Algorithmus 4.1 auf Zustandssysteme berechnet die klassische Nulldynamik. Weitere Betrachtungen im Verlauf der Arbeit verdeutlichen, dass die vorgestellte Definition mit der Nulldynamik von Zustandssystemen konsistent ist. Zuerst wird gezeigt, dass die Nulldynamik durch eine reguläre statische Deskriptorrückführung nicht verändert werden kann.

Satz 4.13. Die Nulldynamik (4.11b) ist invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung (2.6) für das reguläre Deskriptorsystem (2.1).

Beweis. Da keine Restriktion in $\psi_z(x_1)$ von u abhängt, werden die Restriktionen durch die Deskriptorrückführung $u = r(x_1, x_2, w)$ nicht verändert und die Mannigfaltigkeit \mathcal{N}_z ist für das unregulierte und das geregelte Deskriptorsystem dieselbe. Es bleibt zu zeigen, dass die Dynamik (4.11b) auf \mathcal{N}_z ebenfalls dieselbe ist.

Mit der Abbildung $\psi_\ell : \mathcal{M}_{x,u} \rightarrow \mathbb{R}^{m+q}$

$$\psi_\ell(x_1, u_e) := \begin{bmatrix} L_f \psi_{\ell_1-1}^1 \\ \vdots \\ L_f \psi_{\ell_{m+q}-1}^{m+q} \end{bmatrix}$$

kann (4.7) auch direkt über $\psi_\ell \circ \alpha_z = 0 \forall x_1 \in \mathcal{M}_{x_1}, v \in \mathbb{R}^{\bar{p}}$ berechnet werden. Die Deskriptorrückführung lässt sich als erweiterte Rückführung

$$u_e = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ r(x_1, x_2, w) \end{bmatrix} = \tilde{r}(x_1, x_2, w) = \tilde{r}(x_1, w_e)$$

mit $w_e := (x_2, w)$ interpretieren. Sei $w_e = \tilde{\alpha}_z(x_1, \tilde{v})$ die Rückführung (4.7) bei der Berechnung der Nulldynamik des geregelten Deskriptorsystems. Diese muss immer

$$\psi_\ell \circ \tilde{r} \circ \tilde{\alpha}_z = 0 \quad \forall x_1 \in \mathcal{M}_{x_1}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^{\tilde{p}}$$

erfüllen. Da v bzw. \tilde{v} die verbleibenden Freiheitsgrade parametrieren, ist die Wahl $\tilde{v} = v$ möglich. $\tilde{\alpha}_{z,1}(x_1, v) = \alpha_{z,1}(x_1, v)$ stellt somit den ersten Teil der Rückführung (4.7) des geregelten Deskriptorsystems dar. Für den zweiten Teil muss

$$\alpha_{z,2}(x_1, v) = r(x_1, \alpha_{z,1}(x_1, v), \tilde{\alpha}_{z,2}(x_1, v))$$

gelten. Da die statische Rückführung (2.6) regulär ist, folgt $f \circ r \circ \tilde{\alpha}_{z,2} = f \circ \alpha_{z,2}$. Die Systeme (4.8), (4.10) sowie (4.11) stimmen somit für das unregelte und das geregelte Deskriptorsystem überein, und daher insbesondere die Nulldynamik (4.11b). \square

Wie bei Zustandssystemen ist die Berechnung der Nulldynamik für nicht invertierbare Deskriptorsysteme relativ aufwendig, da geeignete Koordinatentransformationen für die Erzeugung von (4.11) benötigt werden. Deutlich einfacher gelingt dies bei invertierbaren Systemen, worauf im nächsten Abschnitt näher eingegangen wird.

4.2.2 Nulldynamik entkoppelbarer Deskriptorsysteme

Zuerst werden quadratische, invertierbare Deskriptorsysteme betrachtet. Ist ein reguläres Deskriptorsystem invertierbar, so ist (3.1) bezüglich $\langle z_e, u_e \rangle$ invertierbar. Die Bedingung $z_e(t) = 0$ für die Nulldynamik legt somit in eindeutiger Weise den Eingang $u_e(t)$ fest. Da keine Freiheitsgrade bei der Berechnung von (4.7) existieren, tritt in (4.8), (4.10) und (4.11) die Variable v nicht mehr auf. Für (4.11) folgt $\dim \xi_2 = 0$ und damit $\dim \mathcal{N}_z = n_z$. Die Berechnung der Erreichbarkeitsdistribution, die für die Koordinatentransformation auf (4.11) benötigt wird, ist nicht mehr notwendig, da die Nulldynamik für invertierbare Deskriptorsysteme schon (4.10b) für $\xi = 0$ entspricht.

Die Ausgangsableitungen von z_e sind bei einem invertierbaren Deskriptorsystem unabhängig, weshalb die Bedingung (4.6) bei jeder Durchführung des 1. Schrittes erfüllt ist. Die Nulldynamik ist daher immer wohldefiniert. Darüber hinaus muss für die Transformation auf (4.10) die Funktion $\psi_z : \mathcal{M}_{x_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+q}$ lediglich zu einem lokalen Diffeomorphismus ergänzt werden, was in der Regel wenig Aufwand erfordert. Zusammenfassend ist die Nulldynamik für invertierbare, reguläre Deskriptorsysteme immer wohldefiniert und sie kann, sofern sie existiert, deutlich einfacher bestimmt werden als im allgemeinen Fall.

Bei entkoppelbaren Zustandssystemen existiert ein interessanter Zusammenhang zwischen der Systemordnung n , der Summe der Differenzordnungen δ und der Ordnung der Nulldynamik n_z . Wird das System mittels der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung entkoppelt, so werden δ Zustände als externe Dynamik sichtbar, die übrigen $n - \delta$ Zustände treten als interne Zustände auf ([50]). In dieser Darstellung wird die Berechnung der Nulldynamik sehr einfach und es kann abgelesen

werden, dass sie die Ordnung $n_z = n - \delta$ besitzt. Es stellt sich die Frage, ob ein solcher Zusammenhang bei Deskriptorsystemen ebenfalls besteht. Um diese Frage zu beantworten, werden im Folgenden einige Ergebnisse zur Nulldynamik entkoppelbarer Deskriptorsysteme hergeleitet, wobei die Aussagen zur Nulldynamik invertierbarer Deskriptorsysteme offensichtlich auch für entkoppelbare Deskriptorsysteme gelten.

Lemma 4.14. *Die Ordnung n_z der Nulldynamik des entkoppelbaren Deskriptorsystems (2.1) ist immer gleich der Ordnung der Nulldynamik des Zustandssystems*

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, r_u(x_u, x_1, v)) \quad (4.12a)$$

$$\dot{x}_u = r_x(x_u, x_1, v) \quad (4.12b)$$

$$z = g(x_1, x_2, r_u(x_u, x_1, v)) \quad (4.12c)$$

$$y = h(x_1, x_2, r_u(x_u, x_1, v)), \quad (4.12d)$$

das aus der Kombination von (2.1) mit (3.19) entsteht. Für den erweiterten Ausgang wird $z_e(t) = (z(t), y(t)) = 0$ gefordert, wobei als Eingang zur Berechnung der Nulldynamik $v_e = (x_2, v)$ verwendet wird.

Beweis. Ist $x_1(t), x_2(t), x_u(t)$ mit $v(t)$ eine Lösung der Nulldynamik des Zustandssystems, so ist $x_1(t), x_2(t)$ mit $u(t) = r_u(x_u(t), x_1(t), v(t))$ eine Lösung der Nulldynamik des Deskriptorsystems, da $z(t) = 0, y(t) = 0$ gilt. Umgekehrt lassen sich zu jeder Lösung der Nulldynamik des Deskriptorsystems $x_1(t), x_2(t)$ mit $u(t)$ nach Lemma 3.6 eindeutige Funktionen $x_u(t)$ und $v(t)$ berechnen, sodass $u(t) = r_u(x_u(t), x_1(t), v(t))$ gilt und damit $z_e(t) = 0$. Zusammen mit $v(t)$ stellt $(x_1(t), x_2(t), x_u(t))$ somit eine Lösung der Nulldynamik des Zustandssystems dar. Darüber hinaus folgt für zwei Lösungen der Nulldynamik $(v_1(t), x_{1,1}(t), x_{u,1}(t))$ und $(v_2(t), x_{1,2}(t), x_{u,2}(t))$ mit $x_{1,1}(t) = x_{1,2}(t)$ nach Lemma 3.6 immer $x_{u,1}(t) = x_{u,2}(t)$. Daher besitzen die beiden Mannigfaltigkeiten, in denen die jeweiligen Nulldynamiken der beiden Systeme liegen, dieselbe Dimension. \square

Lemma 4.15. *Ist das reguläre Deskriptorsystem (2.1) mit den Differenzordnungen δ_i in einer Umgebung von \hat{x} entkoppelt, so gilt dort*

$$n_z = r - \kappa - \delta$$

und

$$\dim \mathcal{N}_m = \delta + n_z + n_u,$$

$$\text{wobei } \delta := \sum_{i=1}^q \delta_i.$$

Beweis. Da eine Lösung der Nulldynamik immer $z(t) = 0$ erfüllen muss, gilt $\mathcal{N}_z \subset \mathcal{N}_m$. Wegen Lemma 4.14 kann die Berechnung von $n_z = \dim \mathcal{N}_z$ mit (4.12) durchgeführt werden.

Die Berechnung von $\tilde{\mathcal{N}}_z$, der Mannigfaltigkeit der Nulldynamik von (4.12), wird aufgeteilt, sodass zuerst nur $z(t) = 0$ gefordert wird. Die Anwendung von Algorithmus (4.1) liefert dann dasselbe

Ergebnis wie Algorithmus 3.2, sodass ebenfalls (3.20) und die κ Restriktionen γ_m berechnet werden. Erst jetzt wird $y(t) = 0$ gefordert. Die Ausgänge y^i von (4.12) werden abgeleitet, um eine Rückführung für v zu berechnen, die $y(t) = 0$ sicherstellt. Da das Deskriptorsystem mit den Differenzordnungen δ_i entkoppelt ist, sind zur Bestimmung von $u(t)$ weitere δ Ableitungen nötig. Um aus $u(t)$ eindeutig $v(t)$ zu berechnen, sind nochmals n_u Ableitungen notwendig. Insgesamt erzeugt die Forderung $y(t) = 0$ damit $(\delta + n_u)$ weitere unabhängige Restriktionen für $\tilde{\mathcal{N}}_z$, die auch von γ_m unabhängig sind, da das Deskriptorsystem entkoppelt ist. Es gilt $n_z = \dim \mathcal{N}_m - \delta - n_u = r - \kappa - \delta$, da $\dim \mathcal{N}_m = r + n_u - \kappa$ per Definition erfüllt ist. \square

Das letzte Lemma gilt nur für Deskriptorsysteme, die entkoppelt sind, im Allgemeinen aber nicht für entkoppelbare Deskriptorsysteme. Für Deskriptorsysteme, die mit der Differenzordnung δ_m entkoppelt sind, folgt

$$\dim \mathcal{N}_m = \delta_m + n_u + n_z .$$

Aufgrund der Invarianzeigenschaft von δ_m kann daraus ein Ergebnis für proper entkoppelbare Deskriptorsysteme abgeleitet werden.

Lemma 4.16. *Ist das Deskriptorsystem (2.1) in einer Umgebung von \hat{x} regulär und proper entkoppelbar, gilt*

$$\dim \mathcal{N}_m = \delta_m + n_z . \quad (4.13)$$

Beweis. Wird das System proper entkoppelt, so gilt $n_u = 0$ im proper entkoppelten System und es muss mit maximaler Differenzordnung entkoppelt werden. Wegen Lemma 4.15 gilt $\dim \mathcal{N}_m = \delta_m + n_z$ im geregelten Deskriptorsystem. Nach Lemma 3.8, Satz 4.13 sowie Satz 4.9 sind $\dim \mathcal{N}_m$, $\dim \mathcal{N}_z$ und δ_m invariant unter einer regulären Deskriptorrückführung, sodass $\dim \mathcal{N}_m = \delta_m + n_z$ im unregulierten Deskriptorsystem erfüllt ist. \square

(4.13) stellt für proper entkoppelbare Deskriptorsysteme ein ähnliches Ergebnis dar, wie es für Zustandssysteme bekannt ist – bei entkoppelbaren Zustandssystemen entspricht die Summe der Differenzordnung und der Ordnung der Nulldynamik immer der Systemordnung. Wichtig ist, dass das Resultat nur für proper entkoppelbare Deskriptorsysteme gilt. Für entkoppelbare Deskriptorsysteme, die nicht proper entkoppelt werden können, ist der vorgestellte Zusammenhang nicht erfüllt. In Abschnitt 4.4 wird diese Besonderheit für lineare Deskriptorsysteme anschaulich mithilfe von Eigenwerten und invarianten Nullstellen beschrieben.

Die bisherigen Überlegungen liefern ein weiteres wichtiges Resultat; sie ermöglichen eine hinreichende Bedingung für stabile Entkoppelbarkeit. Ist die Nulldynamik eines Zustandssystems stabil, so kann es immer stabil entkoppelt werden ([50]). Dasselbe gilt für Deskriptorsysteme.

Satz 4.17. *Stellt (\hat{x}, \hat{u}) mit $h(\hat{x}, \hat{u}) = 0$ eine stabile Ruhelage der Nulldynamik (4.11b) eines regulären, entkoppelbaren Deskriptorsystems (2.1) dar, so kann das Deskriptorsystem um (\hat{x}, \hat{u}) stabil entkoppelt werden.*

Beweis. Ist die Nulldynamik des Deskriptorsystems (2.1) stabil, so ist nach Satz 4.13 die Nulldynamik des entkoppelten Deskriptorsystems stabil. Wird die Ein-/Ausgangsdynamik mithilfe der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (Abschnitt 4.1.4) stabil gewählt, so hängt die Ein-/Ausgangsdynamik nicht mehr von der übrigen Dynamik ab. Wegen Lemma 4.15 kann im geregelten Deskriptorsystem nur die Ein-/Ausgangsdynamik und die Nulldynamik existieren. Da die Ein-/Ausgangsdynamik stabil gewählt wird, stellt \mathcal{N}_z eine attraktive Untermannigfaltigkeit dar, sodass alle Lösungen asymptotisch auf \mathcal{N}_z konvergieren. Aus der Stabilität der Nulldynamik folgt die Stabilität des Gesamtsystems um (\hat{x}, \hat{u}) . \square

4.3 Exakte Deskriptorlinearisierung

Entkoppelbare Zustandssysteme können mithilfe der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (siehe z. B. [50, 99, 114]) direkt entkoppelt werden. Besitzt das System keine instabile Nulldynamik, so ist mit diesem Verfahren der geschlossene Regelkreis stabil. Die Ein-/Ausgangsdynamik ist nicht nur entkoppelt, sondern auch linear und kann als Übertragungsmatrix dargestellt werden. Besitzt das System darüber hinaus keine Nulldynamik, so kann eine Koordinatentransformation berechnet werden, sodass das gesamte geregelte System linear ist. Dies wird als *exakte Zustandslinearisierung* bezeichnet, wobei nicht notwendigerweise die Ausgänge des Zustandssystems verwendet werden müssen. Das System ist bereits dann exakt zustandslinearisierbar, wenn Ausgänge existieren, für die es entkoppelbar ist und keine Nulldynamik besitzt.

In Anlehnung an die exakte Zustandslinearisierung wird bei der *exakten Deskriptorlinearisierung* gefordert, dass das gesamte nichtlineare Deskriptorsystem mit einer regulären statischen Deskriptorrückführung und einer regulären Koordinatentransformation in ein lineares Deskriptorsystem überführt werden kann. In Anlehnung an *Isidori* [50] erfolgt die folgende Definition.

Definition 4.5. Wenn für ein reguläres Deskriptorsystem (2.1) Umgebungen $U_x \subset \mathcal{M}_x$ um einen konsistenten Anfangswert \hat{x} und $U_u \subset \mathbb{R}^p$ um \hat{u} , eine statische Deskriptorrückführung (2.6), die in $(U_x \times U_u)$ regulär ist, eine Koordinatentransformation $\Phi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Matrizen $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ existieren, sodass

$$(\partial_{x_1} f(x_1, x_2, r(x_1, x_2, w)))|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = A_{11}\xi_1 \quad (4.14a)$$

$$(\partial_{x_2} f(x_1, x_2, r(x_1, x_2, w)))|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = A_{12}\xi_2 \quad (4.14b)$$

$$(\partial_{x_1} g(x_1, x_2, r(x_1, x_2, w)))|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = A_{21}\xi_1 \quad (4.14c)$$

$$(\partial_{x_2} g(x_1, x_2, r(x_1, x_2, w)))|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = A_{22}\xi_2 \quad (4.14d)$$

$$(\partial_w f(x_1, x_2, r(x_1, x_2, w)))|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = B_1 w \quad (4.14e)$$

$$(\partial_w g(x_1, x_2, r(x_1, x_2, w)))|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = B_2 w \quad (4.14f)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.14g)$$

mit $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \Phi(x)$ erfüllt ist, dann wird das Deskriptorsystem (2.1) als *exakt deskriptorlinearisierbar* bezeichnet.

Obwohl sich die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung, die in Abschnitt 4.1.4 behandelt wird, ohne Probleme auf Deskriptorsysteme übertragen lässt, ist der Aufwand für die exakte Deskriptorlinearisierung erheblich größer. Exakt ein-/ausgangslinearisierte Zustandssysteme können in die lineare externe Dynamik und die Nulldynamik aufgeteilt werden. Ist keine Nulldynamik vorhanden, so ist das Gesamtsystem linear. Ein Deskriptorsystem enthält darüber hinaus im Allgemeinen noch eine schnelle Dynamik, die für lineare Systeme als schnelles Teilsystem der Weierstrass-Kronecker-Form abgespalten werden kann. Die Überführung der schnellen Dynamik eines nichtlinearen Deskriptorsystems in eine lineare Darstellung kann nur noch durch Koordinatentransformation erfolgen, da die Rückführung durch die Ein-/Ausgangsdynamik vollständig festliegt.

Allgemeine Voraussetzungen dafür, dass diese Koordinatentransformation existiert, sind sehr aufwendig zu finden. Im Folgenden werden die Voraussetzungen aus diesem Grund nur für zwei Sonderfälle hergeleitet und es wird gezeigt, welche Schwierigkeiten bei der Verallgemeinerung entstehen.

Nachfolgend wird angenommen, dass das Deskriptorsystem keine Nulldynamik besitzt. Wird ein reguläres Deskriptorsystem entkoppelt und exakt ein-/ausgangslinearisiert, hängt die externe Dynamik nicht von der schnellen Dynamik ab. Wird das Deskriptorsystem mit den Differenzordnungen δ_i entkoppelt, müssen $\tilde{y}_j^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(j)}, \mathcal{N}_e, \mathcal{M}_{x_1})$, $0 \leq j < \delta_i$, $i \in \underline{p}$ existieren, die eine Abbildung $\Phi_1 : \mathcal{M}_{x_1} \rightarrow \mathbb{R}^\delta$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{\delta_p-1}^p \end{bmatrix} = \Phi_1(x_1)$$

erzeugen, wobei $\delta := \sum_{i=1}^p \delta_i$ gilt. Die mithilfe der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung erzeugte Dynamik nimmt in den neuen Koordinaten die lineare Form

$$\dot{\xi}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A_{pp} \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} B_{1,1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & B_{1,p} \end{bmatrix} w \quad (4.15a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & C_p \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & D_{pp} \end{bmatrix} w \quad (4.15b)$$

an. Die Dynamik jedes Ein-/Ausgangskanals wird durch die Matrizen

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0^i & \cdots & & -a_{\delta_i-1}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\delta_i \times \delta_i} \quad B_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\delta_i \times 1}$$

$$C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times \delta_i}$$

$$D_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \delta_i > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben, die in Steuerungsnormalform vorliegen. Die Übertragungsmatrix des langsamen Teilsystems hat die Gestalt

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} G_{11}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{pp}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad G_{ii}(\lambda) = \frac{a_0^i}{\lambda^{\delta_i} + a_{\delta_i-1}^i \lambda^{\delta_i-1} + \dots + a_0^i},$$

wobei die Parameter a_j^i im Verlauf der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (4.4) vorgegeben werden. Es ist daher für exakt ein-/ausgangslinearisierte Deskriptorsysteme ohne Nulldynamik immer möglich, die langsame Dynamik in die lineare Darstellung (4.15) zu überführen.

Im Folgenden werden Bedingungen gesucht, für die das schnelle Teilsystem mit einem linearen, differential-algebraischen Gleichungssystem beschrieben werden kann. Ist das Deskriptorsystem streng proper, so ist auch das geregelte Deskriptorsystem streng proper. Damit ist keine dynamische Erweiterung im Algorithmus 3.2 notwendig und es gilt $\dim \mathcal{N}_m = r - \kappa$. Aus Lemma 4.15 kann direkt abgeleitet werden, dass für entkoppelbare Deskriptorsysteme, die keine Nulldynamik besitzen, $r = \kappa + \delta$ gilt. Die Restriktionen des geregelten Deskriptorsystems

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{e,1}^1 \\ \vdots \\ \gamma_{e,\kappa_m}^m \end{bmatrix} = \Phi_2(x_1, x_2),$$

die wegen der strengen Properheit nicht vom Eingang u abhängen, ergänzen die Abbildung Φ_1 zu einer regulären Koordinatentransformation $\Phi(x_1, x_2) := (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2))$, wobei $\Phi : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, da bei einem regulären, invertierbaren Deskriptorsystem die Restriktionen und Ausgangsableitungen unabhängig sind. Die Restriktionen entstehen nur durch Ableiten der algebraischen Gleichungen, weshalb die schnelle Dynamik in den transformierten Koordinaten die lineare Form

$$\begin{bmatrix} N_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{mm} \end{bmatrix} \dot{\xi}_2 = \xi_2 \quad N_{ii} := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\kappa_i+1) \times (\kappa_i+1)}$$

annimmt. Da die Matrix N aufgrund der gewählten Struktur immer nilpotent ist, handelt es sich um ein schnelles Teilsystem der Weierstrass-Kronecker-Form (2.10). Das deskriptorlinearisierte System liegt somit immer in Weierstrass-Kronecker-Form vor.

Ist das Deskriptorsystem nicht streng proper, so treten Eingänge oder sogar Eingangsableitungen in den Restriktionen auf. Wird die Transformation Φ in gleicher Weise gebildet, so hängt sie vom Eingang ab. Eingangsabhängige Transformationen können unter anderem Steuerbarkeitseigenschaften verändern, was kurz an folgendem Beispiel verdeutlicht werden soll.

Beispiel 4.5. *Das Deskriptorsystem*

$$\dot{x}_1 = x_1 \qquad 0 = x_2 + u$$

mit $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}$ ist impulssteuerbar. Mit der Transformation $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2 + u$ wird daraus das System

$$\dot{\xi}_1 = \xi_1 \qquad 0 = \xi_2,$$

welches keinen Eingang besitzt und deshalb nicht impulssteuerbar ist.

In dieser Arbeit werden nur Koordinatentransformationen für die exakte Deskriptorlinearisierung betrachtet, die nicht vom Eingang abhängen. Die Herleitung allgemeiner Bedingungen für die exakte Deskriptorlinearisierbarkeit gestaltet sich unter dieser Voraussetzung sehr aufwendig.

Als zweiter Sonderfall wird angenommen, dass die Eingänge nur linear in den Restriktionen des geregelten Deskriptorsystems auftreten. Dies bedeutet, alle Restriktionen sind affin in den Eingängen w mit konstanten Vorfaktoren $d_i^j \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\gamma_{e,i}^j(x_1, x_2, w) = \gamma_{x,i}^j(x_1, x_2) + d_i^j w + d_{i-1}^j \dot{w} + \dots + d_0^j \cdot (w)^{(i)},$$

wobei der nichtlineare Bestandteil der Restriktionen $\gamma_{x,i}^j(x_1, x_2)$ die eingangsunabhängige Abbildung

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{x,1}^1 \\ \vdots \\ \gamma_{x,\kappa_m}^m \end{bmatrix} = \Phi_2(x_1, x_2),$$

erzeugt. Wie zuvor müssen die Funktionen $\gamma_{x,i}^j$ bei einem regulären, invertierbaren Deskriptorsystem unabhängig von den Ausgangsableitungen sein, da die Restriktionen $\gamma_{e,i}^j$ unabhängig sind. Damit ergibt sich wieder eine reguläre Koordinatentransformation $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, die das geregelte Deskriptorsystem in die Darstellung (4.15) und

$$\begin{bmatrix} N_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{mm} \end{bmatrix} \dot{\xi}_2 = \xi_2 + \begin{bmatrix} B_{2,1} \\ \vdots \\ B_{2,p} \end{bmatrix} w \quad (4.16)$$

mit den Matrizen

$$N_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\kappa_j \times \kappa_j} \qquad B_{2,j} = \begin{bmatrix} d_0^j \\ \vdots \\ d_{\kappa_j-1}^j \end{bmatrix}$$

transformiert. Das lineare System liegt erneut in der Weierstrass-Kronecker-Form vor Grundsätzlich muss bei der exakten Deskriptorlinearisierung nicht die Ausgangsabbildung (2.1c) verwendet werden, sondern es reicht aus, wenn eine beliebige Ausgangsabbildung existiert, mit der das Deskriptorsystem die genannten Voraussetzungen erfüllt. Das zuerst dargestellte Vorgehen für streng propere Deskriptorsysteme ist in diesem zweiten Entwurf enthalten, der in folgendem Satz zusammengefasst wird.

Satz 4.18. *Das reguläre Deskriptorsystem (2.1) ist in einer Umgebung von \hat{x} exakt deskriptorlinearisierbar, wenn Ausgangsfunktionen existieren, für die es keine Nulldynamik besitzt und entkoppelbar ist, und die Restriktionen des entkoppelten Deskriptorsystems affin in (w, \dot{w}, \dots) mit konstanten Vorfaktoren sind.*

Beweis. Mit den oben angegebenen Überlegungen kann unter den geforderten Voraussetzungen ein lineares langsames Teilsystem (4.15) und ein lineares schnelles Teilsystem (4.16) erzeugt werden, sodass (4.14a) bis (4.14f) erfüllt sind. Aufgrund der Struktur von (4.15) ist das langsame Teilsystem immer steuerbar, was nach Satz A.1 gleichbedeutend mit (4.14g) ist. \square

Die restriktiven Voraussetzungen von Satz 4.18 sind zwar hinreichend für die exakte Deskriptorlinearisierung, sicherlich aber nicht notwendig. Der Verzicht auf die Konstanz des affinen Vorfaktors von w erschwert das Auffinden einer geeigneten Koordinatentransformation erheblich, da er im Allgemeinen auf eine partielle Differentialgleichung führt, die gelöst werden muss (siehe z. B. [55]). Ob eine geeignete Koordinatentransformation existiert und bestimmt werden kann, wird in dieser Arbeit deshalb nicht weiter untersucht.

4.4 Anwendung auf lineare Deskriptorsysteme

Entkopplung In Abschnitt 4.1.1 wird die dynamische Entkoppelbarkeit zusammen mit geeigneten Bedingungen hergeleitet. Genau wie dort wird im Folgenden für die Entkopplung angenommen, dass das Deskriptorsystem quadratisch ist und $p = q$ gilt.

Die Bedingungen von Satz 4.2 vereinfachen sich bei linearen Deskriptorsystemen, da die Invertierbarkeit eines Zustandssystems mit Lemma B.1 deutlich einfacher bestimmt werden kann, als bei nichtlinearen Systemen.

Lemma 4.19. *Das reguläre, quadratische lineare Deskriptorsystem (2.9) ist genau dann invertierbar, wenn*

$$\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang } G(\lambda) = p$$

gilt.

Beweis. Ein Deskriptorsystem ist nach Definition 4.1 invertierbar, wenn (3.30) invertierbar ist. Wegen Satz 3.4 ist (3.30) genau dann invertierbar, wenn die Hintereinanderschaltung der dynamischen Erweiterung (3.28) und des Deskriptorsystems (2.9) invertierbar ist. Nach Lemma 3.3 ist (3.28) invertierbar und damit ist (3.30) genau dann invertierbar, wenn das Deskriptorsystem invertierbar ist. \square

Auch die Berechnung der Differenzordnungen für ein lineares Deskriptorsystem ist deutlich einfacher. Wie bei Zustandssystemen (siehe z. B. [32]) ist die Differenzordnung im Fall eines linearen

Deskriptorsystems mit einem Ein- und einem Ausgang die Differenz der Ordnungen des Nenner- und Zählerpolynoms. Bei mehreren Ein- und Ausgängen ist die Differenzordnung des i -ten Ausgangs die kleinste Differenzordnung aller Einzelübertragungsfunktionen der i -ten Zeile der Übertragungsmatrix. Wird die dynamische Erweiterung (3.28) vorgeschaltet, so erhöht sich jede Differenzordnung um μ . Daher stimmen die Differenzordnungen eines linearen Deskriptorsystems mit den Differenzordnungen der verkoppelten Darstellung (3.30) vermindert um μ überein. Dasselbe Ergebnis liefert Definition 4.2, wodurch gezeigt ist, dass die vorgestellte Definition der Differenzordnungen für lineare Deskriptorsysteme in die klassische Definition übergeht.

Für die statische Entkopplung müssen gegebenenfalls Ausgangsableitungen mit Restriktionen modifiziert werden, was sich bei linearen Deskriptorsystemen erneut einfacher gestaltet. Um eine lineare Rückführung berechnen zu können, müssen die modifizierten Ausgangsfunktionen linear sein. Zur Erzeugung der modifizierten Ausgangsfunktion dürfen deshalb nur Linearkombinationen der Restriktionen zur Ausgangsableitung addiert werden.

Betrachtet wird die Ausgangsableitung $(y^i)^{(d_i)}$. Zu dieser werden die Restriktionen $\gamma_{e,k}^j$ addiert, die jeweils mit dem Parameter $p_k^j \in \mathbb{R}$ multipliziert werden, sodass

$$\tilde{y}^i = (y^i)^{(d_i)} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\kappa_j} p_k^j \gamma_{e,k}^j \quad (4.17)$$

gilt. Es müssen Parameter gesucht werden, um $\tilde{y}^i \in \mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ zu erfüllen. Dies ist gleichbedeutend mit (4.17) und

$$\partial_{(u^{(j)})} \tilde{y}^i = 0 \quad \forall i \in \underline{p}, j > 0. \quad (4.18)$$

Wenn für alle Ausgänge zusammen außerdem (4.2) gilt, so ist die Entkopplung nach Satz 4.7 möglich.

Für die Überprüfung der statischen Entkoppelbarkeit ist nicht mehr die Suche geeigneter Funktionen in den Äquivalenzklassen $\mathcal{K}((y^i)^{(d_i)}, \tilde{\mathcal{N}}_e, \mathcal{M}_{x,u})$ nötig, sondern (4.2) und (4.18) stellen lineare Gleichungssysteme in den Parametern p_k^j dar, die gelöst werden müssen.

Nulldynamik Die Berechnung der Nulldynamik, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, führt bei einem linearen Deskriptorsystem (2.9) auf die Rückführung (4.7), die in der Form

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} v \quad (4.19)$$

dargestellt werden kann. Es ergibt sich der Unterraum $\mathcal{N}_z = \{x_1 \in \mathbb{R}^r \mid Q_1 x_1 = 0\}$ mit $Q_1 x_1 = \psi_z(x_1)$, der für das geregelte fiktive System invariant ist und es gilt $z_e = 0 \quad \forall x_1 \in \mathcal{N}_z, v \in \mathbb{R}^{m+p-\tilde{p}}$. Da mit $m+q$ Ausgangsgrößen $\tilde{p} \leq m+q$ unabhängige Eingangsrichtungen von u_e bei der Berechnung der Nulldynamik fest vorgegeben werden können, bleiben $m+p-\tilde{p} \geq p-q$ Eingangsrichtungen übrig, die keinen Einfluss auf die Nulldynamik ausüben können.

Es lässt sich nach Lemma 4.11 und Lemma 4.12 immer eine reguläre Koordinatentransformation $\hat{x}_1 = Qx_1$ finden, sodass das geregelte System die Gestalt

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ \hat{A}_{31} & 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (4.20a)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (4.20b)$$

annimmt, wobei $\xi_1 = Q_1x_1$ gilt. Das erste Teilsystem ist vollständig beobachtbar, wodurch aus $z_e(t) = 0$ direkt $\xi_1(t) = 0$ folgt. Damit gilt für $\hat{x}_1 \in \mathcal{N}_z$ unmittelbar $\xi_1 = 0$. Für $\xi_1 = 0$ beschreiben das zweite und dritte Teilsystem die Dynamik auf \mathcal{N}_z , wobei das zweite Teilsystem vollständig steuerbar ist. Somit entspricht das dritte Teilsystem für $\xi_1 = 0$ der Nulldynamik des Systems.

Für lineare Zustandssysteme kann die Nulldynamik als lineares Zustandssystem im invarianten Unterraum beschrieben werden. Die Eigenwerte der Systemmatrix dieses Systems entsprechen den invarianten Nullstellen des ursprünglichen Zustandssystems ([50]). Dasselbe Resultat wird nun für Deskriptorsysteme hergeleitet, wofür zuerst invariante Nullstellen eines linearen Deskriptorsystems benötigt werden.

Definition 4.6 ([88]). Die *invarianten Nullstellen* eines regulären Deskriptorsystems (2.8) sind die Werte $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, die

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_0 E & B \\ C & D \end{bmatrix} < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda E & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

erfüllen.

Satz 4.20. Die Eigenwerte von \hat{A}_{33} stimmen mit den invarianten Nullstellen von (2.9) überein.

Beweis. Aus der Steuerbarkeit des zweiten Teilsystems von (4.20a) folgt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} - \lambda I & \hat{B}_{21} \end{bmatrix} = \dim \xi_2 .$$

Wird das Vorfilter von (4.19) so erweitert, dass sich eine reguläre Rückführung

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$$

mit $\tilde{v}_1 := v$, $\det F \neq 0$ ergibt, so legt die Bedingung $z_e(t) = 0$ jetzt $\tilde{v}_2(t) = 0$ eindeutig fest. Das geregelte System (4.20) nimmt die Gestalt

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ \hat{A}_{31} & 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \\ 0 & \hat{B}_{32} \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{C}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix}}_{\hat{D}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$$

an. Die Überführung geschah mithilfe einer regulären Koordinatentransformation Q und einer statischen Rückführung, sodass

$$\hat{A} = Q(A_{11} + A_{12}R_1 + B_1R_2)Q^{-1} \quad \hat{B} = Q(A_{12}F_1 + B_1F_2)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -(A_{21} + A_{22}R_1 + B_2R_2)Q^{-1} \\ (C_1 + C_2R_1 + DR_2)Q^{-1} \end{bmatrix} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} -A_{22}F_1 - B_2F_2 \\ C_2F_1 + DF_2 \end{bmatrix}$$

gilt. Da aus $z_e(t) = 0$ mit der Berechnung der Nulldynamik $\tilde{v}_2(t)$ eindeutig bestimmt wird, kann das erste Teilsystem keine invariante Nullstelle besitzen und es folgt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} - \lambda I & \hat{B}_{12} \\ \hat{C}_1 & D_2 \end{bmatrix} = \dim \xi_1 + \tilde{p},$$

was dem Maximalrang der Matrix entspricht. Wird die Rosenbrock'sche Systemmatrix für das geregelte System aufgestellt, ergibt sich

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \hat{A} - \lambda I & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} - \lambda I & 0 & 0 & 0 & \hat{B}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} - \lambda I & \hat{A}_{23} & \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \\ \hat{A}_{31} & 0 & \hat{A}_{33} - \lambda I & 0 & \hat{B}_{32} \\ \hat{C}_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} - \lambda I & \hat{B}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{A}_{31} & \hat{B}_{32} & \hat{A}_{33} - \lambda I & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{B}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{22} - \lambda I & \hat{B}_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \dim \xi_1 + \tilde{p} + \text{rang} \begin{bmatrix} \hat{A}_{33} - \lambda I \end{bmatrix} + \dim \xi_2.$$

Die Umformung

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ R_1 & I & 0 \\ R_2 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & F_1 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q(A_{11} + A_{12}R_1 + B_1R_2)Q^{-1} - \lambda I & Q(A_{12}F_1 + B_1F_2) \\ (A_{21} + A_{22}R_1 + B_2R_2)Q^{-1} & A_{22}F_1 - B_2F_2 \\ (C_1 + C_2R_1 + DR_2)Q^{-1} & C_2F_1 + DF_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} - \lambda I & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix}$$

zeigt, dass die Rosenbrock'schen Systemmatrizen beider Darstellungen denselben Rang besitzen. Dies führt auf

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_0 E & B \\ C & D \end{bmatrix} < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda E & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \forall \lambda_0 \in \sigma(\hat{A}_{33}),$$

was den Satz beweist. □

Beispiel 4.6. *Betrachtet wird erneut das Deskriptorsystem aus Beispiel 4.4, welches mit den Parametern $a = c = e = 0$ und $\mathcal{M}_{x_1} = \mathbb{R}^4$ zu einem linearen Deskriptorsystem*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

wird, genau wie die Nulldynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & d \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

Das lineare Deskriptorsystem besitzt die invarianten Nullstellen b und d , die mit den Eigenwerten von A_z übereinstimmen.

Ist das lineare Deskriptorsystem invertierbar, so tritt, wie bei nichtlinearen Deskriptorsystemen, das zweite Teilsystem aus (4.20a) nicht mehr auf. Auch hier wird damit das Auffinden einer geeigneten Koordinatentransformation einfacher.

Darüber hinaus existiert bei entkoppelbaren Zustandssystemen ein interessanter Zusammenhang zwischen der Entkoppelbarkeit und den invarianten Nullstellen: ein lineares, quadratisches, invertierbares Zustandssystem kann genau dann entkoppelt werden, wenn die Summe der Differenzordnungen und der Anzahl der invarianten Nullstellen gleich der Systemordnung ist ([74]). Die *Vollständige Modale Synthese* ([111]) ermöglicht eine anschauliche Erklärung. Im entkoppelten System treten so viele Pole in der Übertragungsmatrix auf, wie die Summe der Differenzordnungen des Systems ist. Unsteuerbare Eigenwerte entsprechen bereits invarianten Nullstellen; treten weitere steuerbare Eigenwerte auf, so müssen diese zu den restlichen invarianten Nullstellen verschoben und somit unbeobachtbar gemacht werden. Dafür sind $n - \sum_{i=1}^q \delta_i$ invariante Nullstellen nötig.

Bereits bei der Betrachtung nichtlinearer Deskriptorsysteme in Lemma 4.16 wird für proper entkoppelbare Deskriptorsysteme ein vergleichbarer Zusammenhang hergeleitet, der $n_{\text{slow}} + n_u = \delta_m + n_z$ entspricht. Im Allgemeinen gilt dieser Zusammenhang jedoch nicht, wie folgendes lineare Beispiel nochmals anschaulich verdeutlicht.

Beispiel 4.7. Es wird das Deskriptorsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + x^3 + u^1 \\ x^2 + u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} x^4 + u^1 \\ x^5 + u^2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$, $x_2 = (x^4, x^5) \in \mathbb{R}^2$ und $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ betrachtet. Die Anwendung von Satz 4.7 zeigt, dass das System mit den maximalen Differenzordnungen $\delta_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ entkoppelbar ist. Es besitzt drei endliche Eigenwerte und keine invarianten Nullstellen. Die Rückführung

$$u = \begin{bmatrix} -x^1 - x^3 + w^1 \\ -x^2 + x^4 - x^5 + w^2 \end{bmatrix}$$

erzeugt die Übertragungsmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$G_R(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Das geregelte System besitzt lediglich zwei endliche Eigenwerte und nach wie vor keine invariante Nullstelle.

Wird die Entkopplung mit der Vollständigen Modalen Synthese für Deskriptorsysteme (siehe [81, 82]) zugrunde gelegt, so gibt es bei Deskriptorsystemen offensichtlich nicht nur die Möglichkeit, einen Pol durch eine Nullstelle aus der Übertragungsmatrix zu kürzen, sondern auch die, einen Eigenwert ins Unendliche zu verschieben und damit die Anzahl der endlichen Eigenwerte zu reduzieren. Eine ähnlich einfache Entkoppelbarkeitsbedingung, wie sie *Lohmann* [74] vorstellt, existiert deshalb für lineare Deskriptorsysteme nicht. Im folgenden Satz wird jedoch gezeigt, dass diese Bedingung auf proper entkoppelbare Deskriptorsysteme übertragen werden kann.

Satz 4.21. Das reguläre Deskriptorsystem (2.9) sei quadratisch und invertierbar. Es ist genau dann proper entkoppelbar, wenn

$$n_{\text{slow}} + n_u = \delta_m + n_z$$

gilt.

Beweis. Dass diese Bedingung notwendig ist, folgt aus Satz 3.14 und Lemma 4.16. Es bleibt zu zeigen, dass sie auch hinreichend ist.

Ist das Deskriptorsystem improper, besitzt es steuerbare unendliche Eigenwerte. Diese können daher zu endlichen verschoben werden, sodass das geregelte Deskriptorsystem proper ist. Somit existiert immer eine reguläre statische Deskriptorrückführung, die ein properes geregeltes Deskriptorsystem erzeugt. Nach Lemma 3.8 ist $\dim \mathcal{N}_m$ und somit $n_{\text{slow}} + n_u$ invariant unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung. Nach Satz 4.9 ist δ_m invariant sowie nach Satz 4.13 n_z . Daher gilt für das geregelte Deskriptorsystem $n_{\text{slow}} = \delta_m + n_z$. Die Anwendung von Algorithmus 3.1 auf das geregelte Deskriptorsystem führt auf (3.13), ohne dass eine dynamische Erweiterung

benötigt wird. Wegen der Invertierbarkeit des Deskriptorsystems ist auch (3.13) invertierbar und nach Lemma B.2 nicht degeneriert.

Das Zustandssystem (3.13) besitzt n Eigenwerte, wobei die $n - r$ Verkopplungseigenwerte durch den Verkopplungsentwurf unsteuerbar gemacht werden und damit als zusätzliche invariante Nullstellen auftreten. Die Systemordnung des Zustandssystems (3.13) entspricht daher $\delta_m + n_z + n - r$ und (3.13) erfüllt die Entkoppelbarkeitsbedingung von *Lohmann* [74]. Da (3.13) entkoppelbar ist, muss auch das geregelte Deskriptorsystem proper entkoppelbar sein und die Bedingungen von Lemma 4.10 erfüllen. Dann wird Lemma 4.10 auch vom unregulierten Deskriptorsystem erfüllt. \square

4.5 Kurzzusammenfassung

Dieses Kapitel untersucht nicht nur die *statische*, sondern auch die *dynamische Entkoppelbarkeit* nichtlinearer Deskriptorsysteme. Ausgehend von der Überführung des dynamischen Entkopplungsentwurfs auf ein invertierbares Zustandssystem werden notwendige und hinreichende Kriterien für die dynamische Entkoppelbarkeit in Abschnitt 4.1.1 entwickelt.

Um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die statische Entkoppelbarkeit herzuleiten, ist deutlich mehr Aufwand erforderlich. Es zeigt sich, dass die in Abschnitt 4.1.2 definierten Differenzordnungen mit einer regulären statischen Deskriptorrückführung verändert werden können. Genauere Betrachtungen führen auf die *maximale Differenzordnung*, die den größtmöglichen Wert beschreibt, den die Differenzordnung eines Ausgangs im geregelten Deskriptorsystem annehmen kann. Darüber hinaus wird gezeigt, dass die maximalen Differenzordnungen unter einer regulären statischen Deskriptorrückführung invariant sind. Mit diesen Überlegungen werden anschließend die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die statische Entkoppelbarkeit in Satz 4.7 angegeben, die die *exakte Ein-/Ausgangslinearisierung* in Abschnitt 4.1.4 in einen konkreten Reglerentwurf überführt. Damit liegt erstmals ein allgemein gültiger Entkopplungsentwurf vor, der keinerlei einschränkende Voraussetzungen an das Deskriptorsystem stellt. Zudem erlaubt die neue Methodik, die Differenzordnungen im geregelten Deskriptorsystem frei zu wählen, sofern dies möglich ist.

Neben den theoretischen Untersuchungen stellt Abschnitt 4.1.7 eine praktische Anwendung vor, um die vorgestellte Entkopplung zu nutzen: auf einfache Weise wird eine *modellgestützte Vorsteuerung* entworfen. Das Vorgehen lässt sich sogar auf Zustandssysteme übertragen, um für jedes invertierbare Zustandssystem eine Vorsteuerung mit einem rein proportionalen Ein-/Ausgangsverhalten zu berechnen.

Die *Nulldynamik*, die in Abschnitt 4.2 betrachtet wird, lässt sich in geradliniger Weise von Zustandssystemen auf Deskriptorsysteme übertragen. Wird bei Zustandssystemen nur gefordert, dass die Ausgangsgleichung für alle Lösungen der Nulldynamik gleich null ist, so wird bei Deskriptorsystemen darüber hinaus gefordert, dass die algebraische Gleichung erfüllt ist. Der notwendige Algorithmus ist, wie die Verkopplungsalgorithmen in Kapitel 3, in serieller Weise angegeben. Die

Definition der Nulldynamik betrachtet alle regulären Deskriptorsysteme, wohingegen Abschnitt 4.2.2 Vereinfachungen bei der Berechnung für invertierbare sowie entkoppelbare Deskriptorsysteme diskutiert.

Die Untersuchung der Nulldynamik bietet die Grundlage, um die *exakte Deskriptorlinearisierung* in Abschnitt 4.3 zu betrachten. Es wird eine Rückführung und eine Koordinatentransformation gesucht, die ein geregeltes Deskriptorsystem erzeugen, welches linear ist. Für einen Sonderfall können in Satz 4.18 hinreichende Bedingungen an die exakte Deskriptorlinearisierbarkeit angegeben werden. Außerdem ist dargestellt, welche Schwierigkeiten bei einer Verallgemeinerung auftreten.

Abschließend werden die vorgestellten Methoden speziell auf lineare Deskriptorsysteme angewandt. Für die Entkopplung müssen überschüssige Eigenwerte nicht mehr nur durch invariante Nullstellen kompensiert werden, sondern sie können auch zu unendlichen Eigenwerten verschoben werden. Der bekannte Zusammenhang, dass bei einem entkoppelbaren Zustandssystem die Summe der Differenzordnungen und invarianten Nullstellen der Anzahl der Eigenwerte entsprechen muss, gilt, wie ausführlich erläutert, nur für proper entkoppelbare Deskriptorsysteme.

5 Trajektorienfolgeregelung mittels Riccati-Entwurf

Zur Trajektorienfolgeregelung wird ein nichtlineares Zustandssystem häufig entlang der Trajektorie linearisiert, wobei ein lineares, zeitvariantes System entsteht. Eigenwertbasierte Methoden, wie zum Beispiel die Vollständige Modale Synthese, sind für die Regelung zeitvarianter Systeme ungeeignet. Der Riccati-Entwurf, der sich durch die Minimierung eines quadratischen Gütemaßes ergibt, ermöglicht dagegen einen einfachen und zudem gut interpretierbaren Reglerentwurf. In diesem Kapitel werden lineare, zeitvariante Deskriptorsysteme

$$E(t)\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (5.1)$$

mit $x(t_0) = \hat{x}$ im Zeitintervall von t_0 bis $t_e < \infty$ betrachtet, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^p$ gilt. Die Matrix $E : U_t \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ hat den konstanten Rang $r \leq n$ für alle $t \in U_t$, wobei $U_t \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende, offene Menge mit $t_0, t_e \in U_t$ beschreibt. Die übrigen Matrizen sind von passender Dimension und hängen ebenfalls von t ab. Alle Matrizen werden als genügend glatt für alle $t \in U_t$ angenommen.

Das zeitvariante Deskriptorsystem (5.1) kann, genau wie zeitinvariante Deskriptorsysteme, immer in die semi-explizite Form

$$\dot{x}_1 = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + B_1(t)u \quad (5.2a)$$

$$0 = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + B_2(t)u \quad (5.2b)$$

gebracht werden ([12]), indem die in *Konigorski* [58] dargestellte Überführung mit einer zeitvarianten Transformation durchgeführt wird. Die Definitionen 2.1 bis 2.5 gelten direkt für lineare, zeitvariante Deskriptorsysteme (5.1). Da das System linear ist, können die Umgebungen um \hat{x} und \hat{u} entfallen; die getroffenen Annahmen müssen jetzt für alle $t \in U_t$ erfüllt sein.

Der im Folgenden vorgestellte Entwurf entspricht dem in *Labisch* und *Konigorski* [69] beschriebenen Verfahren, wobei in der vorliegenden Arbeit der zeitvariante Verkopplungsalgorithmus explizit dargestellt ist.

5.1 Verkopplung linearer, zeitvarianter Deskriptorsysteme

Um den zeitvarianten Riccati-Entwurf auf Deskriptorsysteme zu übertragen, wird erneut eine verkoppelte Zustandsraumdarstellung benötigt. Für deren Berechnung kann nicht Algorithmus 3.1 verwendet werden, da das Deskriptorsystem (5.2) zeitvariant ist und die Zeitabhängigkeiten explizit im Algorithmus berücksichtigt werden müssen. Im weiteren Verlauf wird sich zeigen, dass es sinnvoll ist, die algebraischen Variablen und die Eingänge zu einem erweiterten Eingang zusammenzufassen. Mit dieser Struktur benötigt *Manderla* [81] selbst bei der Verkopplung improperer Deskriptorsysteme keine dynamische Erweiterung.

Algorithmus 5.1.

Schritt 0 Das System (5.2) wird mit Σ_0 bezeichnet und es gilt $v_0^T := [x_2^T \ u^T]$, $A_f(t) := A_{11}(t)$, $B_f(t) := [A_{12}(t) \ B_1(t)]$, $C_f(t) := A_{21}(t)$ und $D_f(t) := [A_{22}(t) \ B_2(t)]$. Die einzelnen Zeilen von $C_f(t)$ werden mit $c_{f,0}^1(t), \dots, c_{f,0}^m(t)$, die einzelnen Zeilen von $D_f(t)$ werden mit $d_{f,0}^1(t), \dots, d_{f,0}^m(t)$ bezeichnet. $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}_1 := \mathbb{R}^r$ sei der Zustandsraum für Σ_0 . Der Parameter κ_j zählt die Anzahl der Ableitungen der j -ten algebraischen Gleichung. Zu Beginn wird $\kappa_j = 0$, $j \in \underline{m}$ gesetzt und es gilt $j = 1$.

Schritt 1 Wenn $d_{f,\kappa_j}^j(t) \neq 0$ für alle $t \in U_t$ gilt, wird direkt zu Schritt 2 gesprungen. Sonst wird κ_j um 1 erhöht und die neue Restriktion

$$c_{f,\kappa_j}^j(t) := \frac{dc_{f,\kappa_j-1}^j(t)}{dt} + c_{f,\kappa_j-1}^j(t)A_f(t) \quad (5.3)$$

und $d_{f,\kappa_j}^j(t) := c_{f,\kappa_j-1}^j(t)B_f(t)$ durch Ableiten der letzten Restriktion erzeugt. Alle bisherigen Restriktionen zur j -ten algebraischen Gleichung werden in der Matrix

$$\tilde{G}_j(t) := \begin{bmatrix} c_{f,0}^j(t) \\ \vdots \\ c_{f,\kappa_j-1}^j(t) \end{bmatrix}$$

zusammengefasst und es wird angenommen, dass der Rang von $\tilde{G}_j(t)$ konstant für alle $t \in U_t$ ist und

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{G}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{G}_j(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j \kappa_i \quad (5.4)$$

gilt. Damit sind alle zuvor bestimmten Restriktionen unabhängig und

$$\mathcal{M}_j := \{x_1 \in \mathcal{M}_{j-1} \mid \tilde{G}_j(t)x_1 = 0\}$$

ist zu jedem Zeitpunkt eine Untermannigfaltigkeit.

Schritt 2 Es wird der Schritt 1 so lange wiederholt, bis $d_{f,\kappa_j}^j(t) \neq 0$ für alle $t \in U_t$ gilt. Dafür waren κ_j Ableitungen der j -ten algebraischen Gleichung notwendig.

Die Parameter $b_i^j \in \mathbb{R}$ werden so gewählt, dass die Nullstellen des Polynoms

$$P^j(\lambda) = (\lambda)^{\kappa_j} + \sum_{i=0}^{\kappa_j-1} b_i^j \cdot (\lambda)^i \quad (5.5)$$

alle in \mathbb{C}^- liegen. Dann ist es möglich, die fiktive Rückführung $v_{j-1} = \tilde{R}_j(t)x_1 + \tilde{F}_j(t)v_j$ mit $v_j \in \mathbb{R}^{m+p-j}$ zu berechnen, die

$$0 = b_0^j c_{f,0}^j(t) + \dots + b_{\kappa_j-1}^j c_{f,\kappa_j-1}^j(t) + c_{f,\kappa_j}^j(t) + d_{f,\kappa_j}^j(t)v_{j-1} \quad (5.6)$$

löst. Es gilt

$$\tilde{R}_j(t) := - \left(d_{f,\kappa_j}^j(t) \right)^+ \left(b_0^j c_{f,0}^j(t) + \dots + b_{\kappa_j-1}^j c_{f,\kappa_j-1}^j(t) + c_{f,\kappa_j}^j(t) \right) \quad (5.7)$$

$$\tilde{F}_j(t) := \left(d_{f,\kappa_j}^j(t) \right)^\perp, \quad (5.8)$$

wobei $(\cdot)^+$ die Rechtsinverse und $(\cdot)^\perp$ eine Matrix beschreibt, die den gesamten Rechtskern aufspannt. Das System Σ_{j-1} , welches mit dem Verkopplungsregler geregelt ist, wird mit Σ_1 bezeichnet. Für dieses System ist \mathcal{M}_j attraktiv. Es gilt $\mathcal{M}_{j+1} := \mathcal{M}_j$.

Schritt 3 j wird um 1 erhöht und die Schritte 1 – 3 werden so lange wiederholt, bis $j = m$ gilt.

Wie Algorithmus 3.1 und 3.2 terminiert auch dieser Algorithmus erfolgreich, wenn die Ranganahme (5.4) in Schritt 1 immer erfüllt ist. Ist der Algorithmus erfolgreich, so werden alle berechneten Restriktionen in

$$\tilde{G}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{G}_m(t) \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Die Anzahl der Restriktionen ergibt sich zu $\kappa := \sum_{j=1}^m \kappa_j$. Die Restriktionen definieren erneut eine Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_r = \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^r \mid \tilde{G}(t)x_1 = 0 \right\}, \quad (5.9)$$

die die Dimension $\dim \mathcal{N}_r = r - \kappa$ besitzt. Der fiktive Verkopplungsregler

$$\begin{aligned} u_e = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} &= \tilde{R}_1(t)x_1 + \tilde{F}_1(t)\tilde{R}_2(t)x_1 + \dots + \left(\prod_{i=1}^m \tilde{F}_i(t) \right) v_m \\ &= \begin{bmatrix} \hat{R}_1(t) \\ \hat{R}_2(t) \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \hat{F}_1(t) \\ \hat{F}_2(t) \end{bmatrix} v \end{aligned} \quad (5.10)$$

mit $v := v_m$ erzeugt die verkoppelte Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x}_1 = \tilde{A}(t)x_1 + \tilde{B}(t)v \quad (5.11a)$$

$$z = \tilde{C}(t)x_1 + \tilde{D}(t)v, \quad (5.11b)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= A_{11}(t) + \left(A_{12}(t)\hat{R}_1(t) + B_1(t)\hat{R}_2(t) \right) & \tilde{B}(t) &= A_{12}(t)\hat{F}_1(t) + B_1(t)\hat{F}_2(t) \\ \tilde{C}(t) &= A_{21}(t) + \left(A_{22}(t)\hat{R}_1(t) + B_2(t)\hat{R}_2(t) \right) & \tilde{D}(t) &= A_{22}(t)\hat{F}_1(t) + B_2(t)\hat{F}_2(t). \end{aligned}$$

Für das System (5.11), das Σ_m entspricht, ist die Untermannigfaltigkeit \mathcal{N}_r invariant und attraktiv, sodass auf \mathcal{N}_r wieder $z = 0$ gilt. Für $d_{f,0}^j(t) = 0$ ist die j -te Zeile von $\tilde{D}(t)$ eine Nullzeile. Gilt dagegen $d_{f,0}^j(t) \neq 0$, so ist $\kappa_j = 0$ und wegen (5.6) ist die j -te Zeile von $\tilde{D}(t)$ ebenfalls eine Nullzeile. Daher kann (5.11b) nicht mehr von v abhängen, woraus

$$\tilde{D}(t) = 0$$

folgt.

Satz 5.1. (\hat{x}_1, \hat{x}_2) sei ein konsistenter Anfangswert für das Deskriptorsystem (5.2). Der Algorithmus 5.1 terminiert erfolgreich, wenn das Deskriptorsystem (5.2) regulär ist.

Beweis. Dem Beweis von Satz A.4 folgend, lässt sich Algorithmus 3.1 auf das zeitinvariante Deskriptorsystem (5.2) anwenden, wenn $\dot{i} = 1$ berücksichtigt wird. Da x_2 in u_e enthalten ist, muss Algorithmus 5.1 erfolgreich terminieren, wenn Algorithmus 3.1 erfolgreich terminiert. Zusammen mit Satz 3.2 ist der Satz bewiesen. \square

Im Gegensatz zu den Sätzen 3.2 und 3.5 ist der Satz 5.1 nur noch hinreichend. Da die Abhängigkeit von u zum Terminieren des Algorithmus führen kann, ergibt sich aus der Anwendung des Algorithmus 5.1 noch kein Hinweis auf die Regularität des Deskriptorsystems. Ist das Deskriptorsystem allerdings regulär, so ist die Zustandsraumdarstellung (5.11) in der Lage, die Lösung des Deskriptorsystems zu reproduzieren.

Satz 5.2. Das Deskriptorsystem (5.2) sei regulär. $\xi_1(t)$ bezeichne die Lösung von (5.11) zum Anfangswert $\xi_1(t_0) = \hat{x}_1 \in \mathcal{N}_r$. $x_1(t_0) = \xi_1(t_0)$ ist zusammen mit $x_2(t_0) = \hat{R}_1(t_0)\xi_1(t_0) + \hat{F}_1(t_0)v(t_0)$ für alle $v(t)$ ein konsistenter Anfangswert des Deskriptorsystems und für die Lösung des Deskriptorsystems $(x_1(t), x_2(t))$ zum Eingang $u(t) = \hat{R}_2(t)\xi_1(t) + \hat{F}_2(t)v(t)$ gilt $x_1(t) = \xi_1(t)$ und $x_2(t) = \hat{R}_1(t)\xi_1(t) + \hat{F}_1(t)v(t)$.

Beweis. (5.2b) ist für alle $x_1(t_0) \in \mathcal{N}_r$ und $v(t_0) \in \mathbb{R}^p$ in Verbindung mit (5.10) erfüllt. Aufgrund des Verkopplungsentwurfs gilt für alle $x_1(t_0) \in \mathcal{N}_r$ und $v \in \mathcal{C}^k(U_t, \mathbb{R}^p)$ immer $z(t) = 0$ in (5.11b). Zusammen mit (5.10) ist (5.2) für alle Lösungen des verkoppelten Zustandssystems (5.11) erfüllt, sodass die Lösungen auch Lösungen des Deskriptorsystems (5.2) sind und $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ einen konsistenten Anfangswert für das Deskriptorsystem darstellt. \square

5.2 Riccati-Entwurf linearer, zeitvarianter Deskriptorsysteme

Beim Riccati-Entwurf für ein Zustandssystem (5.11) wird eine Eingangsfunktion $u(t)$ gesucht, die das Gütemaß

$$\tilde{J} = \frac{1}{2}x_1^T(t_e)\tilde{M}_{x_e}x_1(t_e) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_e} \begin{bmatrix} x_1^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} M_{\text{ODE}}(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (5.12)$$

mit

$$M_{\text{ODE}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{xx}(t) & \tilde{M}_{xu}(t) \\ \tilde{M}_{ux}(t) & \tilde{M}_{uu}(t) \end{bmatrix}$$

minimiert. $x_1(t)$ beschreibt darin die Lösung des Systems (5.11) beim Eingang $u(t)$. Die Lösung dieses Optimierungsproblems führt auf eine Zustandsrückführung, den Riccatiregler (siehe z. B. [31], [76]).

Für Deskriptorsysteme lässt sich entsprechend das Gütemaß

$$J = \frac{1}{2} x_1^T(t_e) M_{x_e}^{11} x_1(t_e) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} M_{\text{DAE}}(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (5.13)$$

mit

$$M_{\text{DAE}}(t) = \begin{bmatrix} M_{xx}^{11}(t) & M_{xx}^{12}(t) & M_{xu}^1(t) \\ M_{xx}^{21}(t) & M_{xx}^{22}(t) & M_{xu}^2(t) \\ M_{ux}^1(t) & M_{ux}^2(t) & M_{uu}(t) \end{bmatrix}$$

angeben. Im Folgenden ist eine Rückführung

$$u = R_1(t)x_1 + R_2(t)x_2 \quad (5.14)$$

gesucht, die das Gütemaß (5.13) für das reguläre Deskriptorsystem (5.2) minimiert. Das mit (5.14) geregelte Deskriptorsystem soll stets regulär und proper sein.

Der nachfolgende Riccati-Entwurf erweitert das in *Manderla* [81] dargestellten Verfahren für lineare, zeitinvariante Deskriptorsysteme, das für den Riccati-Entwurf ebenfalls eine verkoppelte Zustandsraumdarstellung benötigt. Diese wird auf Basis der Vollständigen Modalen Synthese entworfen. Der in dieser Arbeit vorgestellte Verkopplungsreglerentwurf lässt sich, im Gegensatz zur Vollständigen Modalen Synthese, ohne Probleme auf zeitvariante Systeme übertragen. Der Riccati-Entwurf für lineare, zeitvariante Deskriptorsysteme kann damit auf den klassischen Entwurf für zeitvariante Zustandssysteme zurückgeführt werden, wobei das Gütemaß (5.12) minimiert wird.

Das Gütemaß (5.13) wird nur für Lösungen des Deskriptorsystems (5.2) minimiert. Da die Lösungen von (5.2) und (5.11) wegen Satz 5.2 auf \mathcal{N}_r übereinstimmen, können prinzipiell die Lösungen von (5.11) für den Entwurf verwendet werden. v muss so bestimmt werden, dass sich der entsprechende Verlauf für x_2 und u ergibt. Da dies für alle Lösungen des Deskriptorsystems möglich ist, erzeugt (5.11) zusammen mit (5.10) für alle Anfangswerte auf \mathcal{N}_r und alle $v(t) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I}, \mathbb{R}^p)$ auch alle Lösungen des Deskriptorsystems. Wird die Minimierung für Lösungen von (5.11) durchgeführt, so sind alle Lösungen des Deskriptorsystems enthalten. Ist es möglich, den berechneten Riccatiregler so auf das Deskriptorsystem zu übertragen, dass die Lösungen der jeweiligen geregelten Systeme einander entsprechen, so ist der Riccatiregler für das Deskriptorsystem gefunden.

Um den Riccati-Entwurf für (5.11) durchführen zu können, muss aus dem Gütemaß für das Deskriptorsystem (5.13) das Gütemaß für das verkoppelte Zustandssystem (5.12) berechnet werden. Wie in *Manderla* [81] beschrieben, erfolgt diese Umrechnung mithilfe des Verkopplungsreglers (5.10). Dies führt auf

$$M_{\text{ODE}}(t) = T_R^T(t) M_{\text{DAE}}(t) T_R(t) \quad \text{mit} \quad T_R(t) := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hat{R}_1(t) & \hat{F}_1(t) \\ \hat{R}_2(t) & \hat{F}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Für eine kompaktere Darstellung wird nachfolgend auf die Angabe der Zeitabhängigkeit der Matrizen verzichtet. Die Anwendung des Riccati-Entwurfs auf die verkoppelte Darstellung (5.11) erzeugt die Riccatidifferentialgleichung

$$\begin{aligned} -\dot{\tilde{P}} &= \tilde{M}_{xx} + \tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} - (\tilde{P} \tilde{B} + \tilde{M}_{xu}) \tilde{M}_{uu}^{-1} (\tilde{B}^T \tilde{P} + \tilde{M}_{xu}^T) \\ \tilde{P}(t_e) &= \tilde{M}_{x_e} = M_{x_e}^{11}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aus der Lösung \tilde{P} dieser Differentialgleichung wird der Riccatiregler

$$v = -\tilde{M}_{uu}^{-1} (\tilde{B}^T \tilde{P} + \tilde{M}_{ux}) x_1 = \tilde{R} x_1 \quad (5.17)$$

für das Zustandssystem (5.11) berechnet (siehe z. B. [31], [76]).

(5.17) bestimmt lediglich v und nicht den Eingang des Deskriptorsystems u . Für die Übertragung des Riccatireglers auf das Deskriptorsystem wird (5.10) von links mit $\begin{bmatrix} M_s & I \end{bmatrix}$ multipliziert, wobei $M_s : U_t \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ eine vorerst beliebige, zeitvariante Matrix darstellt. (5.10) kann jetzt nach

$$u = \begin{bmatrix} (M_s \hat{R}_1 + \hat{R}_2) & -M_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (M_s \hat{F}_1 + \hat{F}_2) v \quad (5.18)$$

aufgelöst werden. Wird M_s so gewählt, dass die Matrix $(M_s \hat{F}_1 + \hat{F}_2)$, die als Vorfilter interpretiert werden kann, regulär ist, stellt (5.18) eine eindeutige Beziehung zwischen u und v her. Da für reguläre Deskriptorsysteme immer

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix} = p \quad (5.19)$$

gilt ([81]), ist die geforderte Wahl von M_s für alle regulären Deskriptorsysteme möglich. Das Einsetzen des Riccatireglers (5.17) für das verkoppelte Zustandssystem in (5.18) führt auf die lineare, zeitvariante Deskriptorrückführung

$$u = \begin{bmatrix} (M_s \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + (M_s \hat{F}_1 + \hat{F}_2) \tilde{R}) & -M_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

die den Riccatiregler für das Deskriptorsystem (5.2) bezüglich des Gütemaßes (5.13) darstellt.

Wie bei allen Verfahren muss hier gezeigt werden, dass das geregelte Deskriptorsystem regulär ist. Neben der Regularität wird die Properheit des Deskriptorsystems gefordert. Nun wird gezeigt, dass Regularität und Properheit bereits mit (5.18) sichergestellt sind.

Satz 5.3. *Das mit der Rückführung (5.18) geregelte Deskriptorsystem (5.2) ist mit $v = \tilde{R} x_1$ für alle $\tilde{R} \in U_t \rightarrow \mathbb{R}^{p \times r}$ regulär und proper.*

Beweis. In Manderla [81] wird für zeitinvariante Deskriptorsysteme gezeigt, dass die Rückführung (5.18) immer einen regulären geschlossenen Regelkreis erzeugt, da die steuerbaren unendlichen Eigenwerte zu den gewählten Verkopplungseigenwerten verschoben werden. Aus Satz A.4

folgt die Regularität des geschlossenen zeitvarianten Regelkreises.

Wie sich leicht anhand von (5.18) erkennen lässt, werden in allen κ_i -ten Ableitungen der algebraischen Gleichungen, die von u , nicht aber von x_2 abhängen, durch die Rückführung Abhängigkeiten von x_2 erzeugt, da $(M_s \hat{F}_1 + \hat{F}_2)$ regulär ist. Damit ist das geregelte Deskriptorsystem proper. Da mit \tilde{R} nur der Einfluss von x_1 verändert werden kann, kann die Regularität und Properheit für kein \tilde{R} verloren gehen. \square

Bei der Minimierung des Gütemaßes (5.13) stellt das Deskriptorsystem (5.2) eine Nebenbedingung in Form eines differential-algebraischen Systems dar. Die algebraische Gleichung von (5.2) muss daher bei der Minimierung beachtet werden. Der Verkopplungsentwurf macht aus dieser algebraischen Nebenbedingung eine dynamische in Form der Verkopplungsdynamik von (5.11). Für alle konsistenten Anfangswerte des Deskriptorsystems wird die Verkopplungsdynamik von (5.11) nicht angeregt, sodass die algebraische Nebenbedingung für konsistente Anfangswerte weiterhin implizit in (5.11) enthalten ist.

Aufgrund des Entwurfs ist der Riccatiregler (5.20) für die verkoppelte Darstellung (5.11) bezüglich des Gütemaßes (5.12) optimal. Wird der Riccatiregler (5.17) in den Verkopplungsregler (5.10) eingesetzt, so ist das entstandene Regelgesetz für das fiktive Zustandssystem (3.1) nicht für alle Anfangswerte optimal, da die Verkopplungsdynamik per Polvorgabe entworfen und von inkonsistenten Anfangswerten angeregt wird. Im Deskriptorsystem existiert diese Verkopplungsdynamik jedoch nicht, sodass die Rückführung (5.20) für das Deskriptorsystem (5.2) einen Riccatiregler bezüglich des Gütemaßes (5.13) darstellt.

Um das vorgestellte Verfahren anwenden zu können, muss zuerst ein Verkopplungsregler entworfen werden. Wie in Satz 5.3 gezeigt, ist dies für alle regulären Deskriptorsysteme möglich. Der Entwurf des Riccatireglers für das Deskriptorsystem wird damit auf den Entwurf für das verkoppelte Zustandssystem übertragen. Die Riccatidifferentialgleichung (5.16) existiert und besitzt immer eine optimale Lösung, wenn die Matrizen $\tilde{M}_{x_e} = M_{x_e}^{11}$ und $\tilde{M}_{uu}(t)$ für alle $t \in U_t$ symmetrisch, positiv definit sind und die Matrix $M_{ODE}(t)$ für alle $t \in U_t$ symmetrisch, positiv semidefinit ist (siehe z. B. [31], [76]). Da die Matrix T_R vollen Rang besitzt, ist $M_{ODE}(t)$ symmetrisch, positiv semidefinit, wenn $M_{DAE}(t)$ symmetrisch, positiv semidefinit gewählt wird ([143, Satz 5, S. 129]). Wie in Manderla [81] beschrieben, lässt sich die positive Definitheit von $\tilde{M}_{uu}(t)$ über die Wahl von $M_{xx}^{22}(t)$, $M_{xu}^2(t)$ und $M_{uu}(t)$ immer erzielen, da (5.19) erfüllt ist. Die bisherigen Überlegungen stellen den Beweis für den nachfolgenden Satz dar, indem die beschriebenen Voraussetzungen kompakt zusammengefasst sind.

Satz 5.4. *Wird die Matrix $M_{x_e}^{11}$ symmetrisch, positiv definit und die Matrix $M_{DAE}(t)$ so gewählt, dass die Matrix $\tilde{M}_{uu}(t)$ mit (5.15) für alle $t \in U_t$ symmetrisch, positiv definit und $M_{ODE}(t)$ symmetrisch, positiv semidefinit ist, so existiert mit (5.20) immer eine optimale Lösung, die das Gütemaß (5.13) für das reguläre Deskriptorsystem (5.2) minimiert.*

Anmerkung. Der Zeitpunkt t_e im Gütemaß (5.13) muss immer kleiner unendlich gewählt werden. Genau wie bei Zustandssystemen (siehe z. B. [31]) werden daher keine weiteren Voraussetzungen, wie zum Beispiel die Stabilisierbarkeit des Systems, benötigt. Der Riccati-Entwurf für zeitinvari-

ante Deskriptorsysteme mit $t_e \rightarrow \infty$ ist in *Manderla* [81] beschrieben. Für praktische Anwendungen ist es jedoch sinnvoll die Gewichtungsmatrizen so zu wählen, dass auch $M_{\text{ODE}}(t)$ symmetrisch positiv definit ist, damit alle Bewegungen des Systems in das Gütemaß (5.13) eingehen.

5.3 Trajektorienfolgeregelung nichtlinearer Deskriptorsysteme

Häufig entsteht das lineare, zeitvariante Deskriptorsystem (5.2) durch die Linearisierung eines nichtlinearen Deskriptorsystems entlang einer Trajektorie. In diesem Fall ist die Zeitvarianz der Systemmatrizen nicht mehr analytisch gegeben, sondern es wird zu jedem Zeitpunkt eine Systemdarstellung durch Linearisierung berechnet. Die Bestimmung der Zeitableitungen in (5.3) wird dann deutlich aufwendiger; die Anwendung des beschriebenen Verfahrens ist jedoch weiterhin möglich.

Wurde bereits ein nichtlinearer Verkopplungsregler nach Algorithmus 3.1 entworfen, um zum Beispiel das System zu simulieren, so vereinfacht sich die Anwendung des Riccati-Entwurfs. Der lineare, zeitvariante Verkopplungsregler (5.10) kann aus dem schon bekannten nichtlinearen Verkopplungsregler bestimmt werden, sodass der Algorithmus 5.1 und damit die aufwendigen Zeitableitungen nicht berechnet werden müssen. Zu beachten bleibt, dass der Verkopplungsregler (3.12) lediglich x_2 und nicht u_e bestimmt und vom Zustand der dynamischen Erweiterung x_u abhängt. Daher wird angenommen, dass das nichtlineare Deskriptorsystem regulär und proper ist, sodass keine dynamische Erweiterung auftritt und in (3.12) $v = u$ gewählt werden kann. Wird (3.12), wie auch das Deskriptorsystem, entlang einer Trajektorie linearisiert, so lässt sich daraus (5.10) bestimmen. Zur Unterscheidung der Variablen des nichtlinearen und des linearisierten Systems beschreiben ξ_1 bzw. u den Zustand und den Eingang von (3.13) sowie x_1 und v den Zustand und Eingang von (5.11). Durch Linearisierung entlang der Trajektorie $\xi_1(t)$ und der passenden Stellgröße $u(t)$ ergibt sich (5.10) zu

$$\begin{aligned} u_e = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial_{\xi_1} \alpha_e(\xi_1, u) \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \partial_u \alpha_e(\xi_1, u) \\ I_p \end{bmatrix} v \Big|_{\xi_1 = \xi_1(t), u = u(t)} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{R}_1(t) \\ \hat{R}_2(t) \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \hat{F}_1(t) \\ \hat{F}_2(t) \end{bmatrix} v. \end{aligned}$$

Der zeitvariante Verkopplungsregler ermöglicht wieder den vorgestellten Riccati-Entwurf, wobei für das nichtlineare Deskriptorsystem zusätzlich die Properheit vorausgesetzt wird.

Anmerkung. Die Forderung der Properheit kann entfallen, wenn Algorithmus 5.1 für nichtlineare Systeme durchgeführt wird. Dies ist analog zum Algorithmus 3.1 möglich und führt auf einen nichtlinearen Verkopplungsregler, der u_e bestimmt (siehe *Manderla* [81]). Da der Beweis von Satz 5.3 für nichtlineare Systeme erheblich aufwendiger ist, wird in der vorliegenden Arbeit auf dessen Ausführung und die Angabe des nichtlinearen Algorithmus verzichtet.

5.4 Kurzzusammenfassung

Dieses Kapitel erweitert den *Riccati-Entwurf* auf *zeitvariante Deskriptorsysteme*, wobei der fiktive Verkopplungsentwurf erneut die Grundlage für die Entwurfsmethodik darstellt. Die Überführung in die verkoppelte Zustandsraumdarstellung ermöglicht den Entwurf auf Basis einer klassischen Matrix-Riccatidifferentialgleichung. Wie Satz 5.4 zeigt, ist für den vorgestellten Entwurf nur die Regularität des Deskriptorsystems notwendig. Obwohl es sich beim Riccati-Entwurf um ein lineares Regelungsverfahren handelt, zeigt es bei der Trajektorienfolgeregelung eines nichtlinearen Systems in vielen Fällen hervorragende Ergebnisse. Ist bereits ein nichtlinearer Verkopplungsregler bekannt, so kann die Berechnung des linearen, zeitvarianten Verkopplungsreglers deutlich vereinfacht werden.

6 Beobachterentwurf

Nachdem in den letzten beiden Kapiteln vollständige Deskriptorrückführungen berechnet wurden, beschäftigt sich Kapitel 6 mit dem Entwurf von Deskriptorbeobachtern. Zuerst wird dafür die lokale Beobachtbarkeit von Deskriptorsystemen definiert. Im Anschluss erfolgt der Entwurf kausaler Beobachter, also Beobachter die in Form eines Zustandssystems vorliegen. Es wird gezeigt, dass die dabei hergeleiteten Bedingungen notwendig und hinreichend für die kausale Beobachtbarkeit von lokal beobachtbaren Deskriptorsystemen sind.

6.1 Beobachtbarkeit nichtlinearer Deskriptorsysteme

Die folgenden Definitionen für die Beobachtbarkeit sind *Nijmeijer* und *van der Schaft* [99] entnommen. Da sie unabhängig von der Systembeschreibung sind, können sie sowohl auf Zustandssysteme als auch auf Deskriptorsysteme angewandt werden. Liegt das Zustandssystem (2.2) zugrunde, so gilt $\mathcal{M}_\zeta := \mathcal{M}_\xi$ und $y(t, t_0, \zeta_0, u)$ bezeichnet den Ausgangsverlauf von (2.2) für dessen Lösung zum Anfangswert $\zeta_0 := \xi(t_0)$ und Eingang u . Wird das Deskriptorsystem (2.1) betrachtet, so gilt $\mathcal{M}_\zeta := \mathcal{M}_x$ und $y(t, t_0, \zeta_0, u)$ beschreibt den Ausgangsverlauf von (2.1) für dessen Lösung zum konsistenten Anfangswert $\zeta_0 := x(t_0)$ und dem Eingang u . Neben einem konsistenten Anfangswert wird die Regularität des Deskriptorsystems vorausgesetzt.

Definition 6.1 ([99, Definition 3.27]). Zwei Variablen $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{M}_\zeta$ eines Systems (2.2) oder (2.1) werden als *ununterscheidbar* bezeichnet (dargestellt durch $\zeta_1 \mathbb{I} \zeta_2$), wenn für jede zulässige Eingangsfunktion u die Ausgangsfunktion $t \mapsto y(t, t_0, \zeta_1, u)$, $t \geq t_0$ für den Anfangswert $\zeta(t_0) = \zeta_1$ und die Ausgangsfunktion $t \mapsto y(t, t_0, \zeta_2, u)$, $t \geq t_0$ für den Anfangswert $\zeta(t_0) = \zeta_2$ identisch auf ihrem gemeinsamen Definitionsgebiet sind. Das System wird als *beobachtbar* bezeichnet, wenn aus der Ununterscheidbarkeit von ζ_1 und ζ_2 unmittelbar $\zeta_1 = \zeta_2$ folgt.

Da viele Aussagen für nichtlineare Systeme nur lokal gelten, wird in der folgenden Definition auf die lokale Beobachtbarkeit eingegangen.

Definition 6.2 ([99, Definition 3.28]). Sei $V \subset \mathcal{M}_\zeta$ eine offene Menge, die ζ_1 und ζ_2 enthält. ζ_1 und ζ_2 werden als *ununterscheidbar in V* bezeichnet (dargestellt durch $\zeta_1 \mathbb{I}^V \zeta_2$), wenn für jede zulässige konstante Eingangsfunktion $u \in U_u$ die Lösungen $\zeta(t, t_0, \zeta_1, u)$ sowie $\zeta(t, t_0, \zeta_2, u)$ für $t \leq t_1$, mit $t_1 > t_0$, in V verbleiben und die Ausgangsfunktion $t \mapsto y(t, t_0, \zeta_1, u)$, $t \geq t_0$ für den (konsistenten) Anfangswert $\zeta(t_0) = \zeta_1$ und die Ausgangsfunktion $t \mapsto y(t, t_0, \zeta_2, u)$, $t \geq t_0$ für den (konsistenten) Anfangswert $\zeta(t_0) = \zeta_2$ identisch auf ihrem gemeinsamen Definitionsgebiet für $t \leq t_1$ mit einem beliebigen $t_1 > t_0$ sind. Das System wird als *lokal beobachtbar um $\hat{\zeta}$* bezeichnet, wenn eine Umgebung W um $\hat{\zeta}$ existiert, sodass für jede Umgebung $V \subset W$ von $\hat{\zeta}$ aus der Ununterscheidbarkeit in V von ζ_1 und ζ_2 direkt $\zeta_1 = \zeta_2$ folgt. Ist das System für alle $\hat{\zeta} \in \mathcal{M}_\zeta$ lokal beobachtbar um $\hat{\zeta}$, so wird es als *lokal beobachtbar* bezeichnet.

Wie in Anhang A dargestellt, werden bei linearen Deskriptorsystemen verschiedene Beobachtbarkeitsdefinitionen unterschieden. Die vorgestellte Beobachtbarkeit nichtlinearer Deskriptorsysteme geht für lineare Deskriptorsysteme in die Beobachtbarkeit des langsamen Teilsystems über. Andere Beobachtbarkeitsdefinitionen, die sich auf das Impulsverhalten nichtlinearer Deskriptorsysteme beziehen, werden im weiteren Verlauf nicht benötigt, sodass darauf nicht weiter eingegangen wird.

Für die Untersuchung der Beobachtbarkeit spielt es bei Deskriptorsystemen eine entscheidende Rolle, dass die Lösungen im Allgemeinen nicht auf der gesamten Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_x verlaufen können. Die Betrachtung der Ausgangsableitungen alleine, entsprechend der Herangehensweise bei Zustandssystemen aus Satz B.7, reicht daher noch nicht aus.

Obwohl mit (3.13) und (3.21) verkoppelte Zustandssysteme zur Verfügung stehen, kann mit diesen nicht unmittelbar die lokale Beobachtbarkeit des Deskriptorsystems überprüft werden. Die Definition der lokalen Beobachtbarkeit geht von konstanten Eingängen aus; die dynamische Erweiterung führt jedoch dazu, dass von einem konstanten v nicht auf ein konstantes u geschlossen werden kann. Ist der Eingang des Deskriptorsystems konstant, so gilt $\dot{u} = 0$, wodurch aus (3.13) und unter Verwendung von (3.15) das Zustandssystem

$$\dot{x}_1 = \tilde{f}_{e,1}(x_1, \Psi(u, 0, \dots, 0)) = f_b(x_1, u) \quad (6.1a)$$

$$z = g_e(x_1, \Psi(u, 0, \dots, 0)) = g_b(x_1, u) \quad (6.1b)$$

$$y = h_e(x_1, \Psi(u, 0, \dots, 0)) = h_b(x_1, u) \quad (6.1c)$$

hervorgeht. Für die Herleitung einer Beobachtbarkeitsbedingung für Deskriptorsysteme wird der *Beobachtbarkeitsraum* $\mathcal{O}(x_1)$ benötigt. $\mathcal{O}(x_1)$ ist der lineare Raum über \mathbb{R} aller Funktionen

$$L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_k} \tilde{h}^j(x_1, u_0), \quad j \in \underline{q}, k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (6.2)$$

wobei $X_i = f_b(x_1, u_i)$, $i \in \underline{k}$ gilt und u_i konstante Eingangsfunktionen aus einer Umgebung U um \hat{u} sind.

Mit $\mathcal{O}(x_1)$ lässt sich die *Beobachtbarkeitskodistribution* $d\mathcal{O}(x_1) \subset T_{x_1}^* \mathcal{M}_{x_1}$

$$d\mathcal{O}(x_1) = \text{span} \{dH(x_1) \mid H(x_1) \in \mathcal{O}(x_1)\}, \quad x_1 \in \mathcal{M}_{x_1}$$

definieren. Wie in Satz B.7 dargestellt, muss für die Beobachtbarkeit von Zustandssystemen lediglich überprüft werden, ob die Dimension von $d\mathcal{O}(x_1)$ der Systemordnung entspricht. Dies ist bei Deskriptorsystemen im Allgemeinen nicht notwendig, da Lösungen nur auf einer Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M}_{x_1} verlaufen.

In Kapitel 3 wird die Untermannigfaltigkeit \mathcal{N}_e berechnet, die für $\dot{u} = 0$ zu

$$\mathcal{N}_b = \{(x_1, u) \in \mathcal{M}_{x_1} \times \mathbb{R}^p \mid \gamma_b(x_1, u) = 0\},$$

wird, wobei $\gamma_b(x_1, u) = \gamma_e(x_1, \Psi(u, 0, \dots, 0))$ gilt. Für die Betrachtung auf \mathcal{M}_{x_1} wird zusätzlich der Raum $\mathcal{Q}(x_1)$ benötigt, der der lineare Raum über \mathbb{R} aller Funktionen

$$L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_k} \tilde{g}^j(x_1, u_0), \quad j \in \underline{m}, k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (6.3)$$

ist, wobei $X_i = f_b(x_1, u_i)$, $i \in \underline{k}$ gilt und u_i konstante Eingangsfunktionen aus einer Umgebung U um \hat{u} sind. Mit $\mathcal{Q}(x_1)$ lässt sich eine Distribution $d\mathcal{Q}(x_1) \subset T_{x_1}^* \mathcal{M}_{x_1}$

$$d\mathcal{Q}(x_1) = \text{span} \{dH(x_1) \mid H(x_1) \in \mathcal{Q}(x_1)\}, \quad x_1 \in \mathcal{M}_{x_1}$$

definieren.

Satz 6.1. *Das reguläre Deskriptorsystem (2.1) ist lokal beobachtbar um (\hat{x}_1, \hat{x}_2) , wenn zusammen mit $d\tilde{\mathcal{O}}(x_1) = d\mathcal{O}(x_1) + d\mathcal{Q}(x_1)$*

$$\dim(d\tilde{\mathcal{O}}(x_1)) = \dim \mathcal{M}_{x_1} = r \quad (6.4)$$

in einer Umgebung von \hat{x}_1 gilt.

Beweis. Da alle Lösungen zu einem Anfangswert auf \mathcal{N}_b in \mathcal{N}_b verbleiben, ist zusätzlich zur Ausgangsfunktion noch $g_b(x_1, u) = 0$ bekannt. Der Beweis des Satzes erfolgt analog zu dem Beweis von Theorem 3.32 von Nijmeijer und van der Schaft [99].

Es existieren r Funktionen $H_i(x_1) \in \tilde{\mathcal{O}}(x_1)$, sodass $dH_1(\hat{x}_1), \dots, dH_r(\hat{x}_1)$ linear unabhängig sind. Sie erzeugen die Abbildung $\Phi : \mathcal{M}_{x_1} \rightarrow \mathbb{R}^r$ mit

$$\Phi(x_1) = [H_1(x_1) \quad \dots \quad H_r(x_1)]^T,$$

deren Jacobi-Matrix regulär in \hat{x}_1 ist und die deshalb in einer Umgebung $W \subset \mathcal{M}_{x_1}$ von \hat{x}_1 ein Diffeomorphismus ist. Angenommen es existiert ein $\hat{\zeta} \in V \subset W$, für das $\hat{x}_1 \text{IV}^{\hat{\zeta}}$ gilt. Dann folgt daraus für jedes $i \in \underline{r}$ und $k \geq 0$ mit kleinen t_1, \dots, t_k

$$h_b^i(Z_k^{t_k} \circ \dots \circ Z_1^{t_1}(\hat{x}_1), u_0) = h_b^i(Z_k^{t_k} \circ \dots \circ Z_1^{t_1}(\hat{\zeta}), u_0),$$

wobei $Z_j^t(\hat{x}_1)$ den Fluss von $Z_j(x_1) = f_b(x_1, u_j)$ für den Anfangswert \hat{x}_1 und den konstanten Eingang u_j aus einer Umgebung U um \hat{u} beschreibt. Das sukzessive Ableiten der Gleichungen nach t_k, \dots, t_1 jeweils bei $t_k = 0, \dots, t_1 = 0$ liefert

$$L_{Z_1} \dots L_{Z_k} h_b^i(\hat{x}_1, u_0) = L_{Z_1} \dots L_{Z_k} h_b^i(\hat{\zeta}, u_0).$$

Daraus folgt, dass $H(\hat{x}_1) = H(\hat{\zeta}) \quad \forall H \in \tilde{\mathcal{O}}$ und insbesondere $H_i(\hat{x}_1) = H_i(\hat{\zeta}) \quad \forall i \in \underline{r}$ und daraus $\hat{x}_1 = \hat{\zeta}$. Daher ist das Deskriptorsystem lokal beobachtbar. \square

Nachdem Bedingungen für die lokale Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Deskriptorsystems bekannt sind, wird im nächsten Abschnitt speziell auf das Problem der kausalen Beobachtbarkeit und den Entwurf eines kausalen Beobachters eingegangen.

6.2 Entwurf kausaler Beobachter für nichtlineare Deskriptorsysteme

Die Aufgabe eines Beobachters ist es, eine Variable x_b zur Verfügung zu stellen, die möglichst der unbekannt Variable x des beobachteten Systems entspricht. Ein dynamisches System wird als *Beobachter* für das Deskriptorsystem (2.1) bezeichnet, wenn es die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. (Konsistenz) für $\hat{x}_b = \hat{x}$ muss $x_b(t) = x(t)$ für alle $t > t_0$ gelten und
2. (Konvergenz) für $\hat{x}_b \neq \hat{x}$ muss $\lim_{t \rightarrow \infty} x_b(t) - x(t) = 0$ gelten.

Der Beobachter verwendet dafür lediglich den Eingang u und den Ausgang y des Deskriptorsystems. Wie eingangs beschrieben, werden als Beobachter für Deskriptorsysteme oft ebenfalls Deskriptorsysteme berechnet. Um die damit verbundenen Probleme bei der Simulation des Beobachters in der Reglereinrichtung zu vermeiden ist es zweckmäßig, zur Beobachtung von Deskriptorsystemen, wenn möglich, ein Zustandssystem

$$\dot{\xi}_b = a_b(\xi_b, u, y) \quad (6.5a)$$

$$x_b = c_b(\xi_b, u, y) \quad (6.5b)$$

einzusetzen, wobei $\xi_b \in \mathbb{R}^{n_b}$ der Zustand des Beobachters ist, dessen Dimension n_b an dieser Stelle noch unbekannt ist. Man spricht von einem *kausalen Beobachter*, wenn zusätzlich zu den Eigenschaften des Beobachters noch die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

3. (Kausalität) der Beobachter lässt sich als dynamisches Zustandssystem (6.5) beschreiben.

Dann wird das Deskriptorsystem (2.1) als *kausal beobachtbar* bezeichnet, da es mit einem Zustandssystem, welches bekanntlich immer kausal ist, beobachtet werden kann. Da der Entwurf eines kausalen Beobachters nicht für jedes beobachtbare Deskriptorsystem möglich ist, werden im Folgenden Bedingungen für die kausale Beobachtbarkeit hergeleitet.

Offensichtlich kann bei einem properen Deskriptorsystem das verkoppelte Zustandssystem (3.13) als Prozesskopie verwendet werden, da $v = u$ gilt. Ist (3.13) beobachtbar, so kann ein Zustandsbeobachter für das System entworfen werden. Da die Lösungen der verkoppelten Darstellung und des Deskriptorsystems nach Satz 3.4 übereinstimmen, ist der Beobachter ein Beobachter des Deskriptorsystems. Die Properheit eines beobachtbaren Deskriptorsystems und die Beobachtbarkeit von (3.13) sind zwar hinreichend für die kausale Beobachtbarkeit, sie sind jedoch keinesfalls notwendig.

Den Entwurf eines Deskriptorbeobachters auf den Entwurf eines Zustandsbeobachters zu überführen, bildet die Grundidee bei den weiteren Überlegungen und führt am Ende des Abschnitts auch auf notwendige und hinreichende Bedingungen für kausale Beobachtbarkeit. Dafür wird eine kausale Prozesskopie in Form eines Zustandssystems gesucht, für die ein Zustandsbeobachter entworfen werden kann. Im Fall eines improperen Deskriptorsystems stellt das verkoppelte Zustandssystem (3.13) eine kausale Prozesskopie dar, der Eingang v kann allerdings nur durch Differenzieren aus u gewonnen werden. Da es nicht möglich ist, einen idealen Differenzierer als Zustandssystem zu beschreiben, kann auf diesem Weg nicht direkt ein kausaler Beobachter erzeugt werden. Die Verwendungen von Ableitungsschätzern (siehe z. B. [30], [107, 108]) ist zwar prinzipiell möglich, soll aber in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden. Vielmehr werden Bedingungen gesucht, wann es nur mit Verwendung eines Zustandssystems als Beobachter möglich ist, impropere Deskriptorsysteme zu beobachten.

Kann aus der Kenntnis von y und u der neue Eingang v bestimmt werden, so sind bei einem impropere Deskriptorsystem die Eingänge von (3.13) bekannt und (3.13) kann damit als kausale Prozesskopie verwendet werden. Neben (3.13) steht mit (3.21) eine weitere verkoppelte Zustandsraumdarstellung zur Verfügung. Es stellt sich die Frage, ob der Entwurf eines kausalen Beobachters mit beiden Darstellungen möglich ist oder welche der beiden genutzt werden sollte.

Bei der Herleitung der Entkoppelbarkeit in Kapitel 4 wird das verkoppelte Zustandssystem (3.13) zugrunde gelegt, weil es an manchen Stellen eine einfachere Darstellung ermöglicht. Im Gegensatz dazu ist es beim Entwurf kausaler Beobachter von entscheidender Bedeutung, dass das verkoppelte Zustandssystem mit minimaler Erweiterung (3.21) verwendet wird. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel 6.1. *Das Deskriptorsystem*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{x}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + u^1 \\ x^4 + u^2 \\ -x^5 \\ -x^5 - x^6 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} x^4 \\ x^1 + x^2 \end{bmatrix} \quad y = x^5$$

mit $x_1 = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4$, $x_2 = (x^5, x^6) \in \mathbb{R}^2$ und $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 3.1 bzw. 3.2 geht mit $b_0^1 = b_0^2 = b_1^2 = 1$ und $c_1 = 0$ nach Anwendung von Algorithmus 3.1 in das verkoppelte Zustandssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e^1 \\ \dot{x}_e^2 \\ \dot{x}_e^3 \\ \dot{x}_e^4 \\ \dot{x}_e^5 \\ \dot{x}_e^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e^3 + x_e^5 \\ x_e^4 + x_e^6 \\ -v^1 - v^2 - x_e^1 - x_e^2 - x_e^3 - x_e^5 - x_e^6 \\ -x_e^4 \\ v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

$$y = v^1 + v^2 + x_e^1 + x_e^2 + x_e^3 + x_e^5 + x_e^6$$

mit $x_e = (x_1, u^1, u^2)$ und $v = \dot{u}$ über. Aus y kann lediglich $v^1 + v^2$ bestimmt werden; die Berechnung von v ist dagegen nicht möglich. Daher kann aus dem verkoppelten Zustandssystem keine kausale Prozesskopie gewonnen werden.

Wird der Algorithmus 3.2 verwendet, so ergibt sich die verkoppelte Darstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e^1 \\ \dot{x}_e^2 \\ \dot{x}_e^3 \\ \dot{x}_e^4 \\ \dot{x}_e^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e^3 + x_e^5 + v^1 \\ x_e^4 - v^1 \\ -v^2 - x_e^1 - x_e^2 - x_e^3 - x_e^5 \\ -x_e^4 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

$$y = v^2 + x_e^1 + x_e^2 + x_e^3 + x_e^5$$

mit $x_e = (x_1, u^1 + u^2)$ und $v = (-u^2, \dot{u}^1 + \dot{u}^2)$. Durch u ist v^1 bekannt und mit y kann v^2 bestimmt werden. Eine kausale Prozesskopie mit bekannten Eingängen kann daraus berechnet werden.

Für die Nutzung der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.21) als kausale Prozesskopie ist die Kenntnis der Eingangsgröße v notwendig. Wie im Beispiel geschehen, kann diese Kenntnis sowohl mithilfe der Ausgänge y als auch der Eingänge u gewonnen werden. Wann es möglich ist, v auf diese Weise zu bestimmen, soll im Folgenden allgemein untersucht werden.

Im Verlauf des Algorithmus 3.2 wird das System dynamisch erweitert, was mit (3.19) als dynamischer Regler für u und x_2 interpretiert wird. Die Ausgangsgleichung des dynamischen Reglers $u = r_u(x_u, x_1, v)$ stellt eine weitere Messgleichung dar, da davon ausgegangen wird, dass der Eingang u des Deskriptorsystems dem Beobachter bekannt ist. Alle Lösungen des Deskriptorsystems müssen auf \mathcal{N}_m liegen, sodass dem Beobachter $z = 0$ bekannt ist. Damit ergibt sich das verkoppelte System mit erweiterter Ausgangsgleichung

$$\dot{x}_e = \tilde{f}_m(x_e, v) \quad (6.6a)$$

$$y_e = \begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_m(x_e, v) \\ r_u(x_e, v) \\ g_m(x_e) \end{bmatrix} = \tilde{h}_m(x_e, v). \quad (6.6b)$$

Wie bereits diskutiert, eignet sich diese Systembeschreibung nicht zur Überprüfung der Beobachtbarkeit des Deskriptorsystems. Auch die lokale Beobachtbarkeit von (6.6) kann nicht nachgewiesen werden, da dabei konstante Eingänge vorausgesetzt werden. Das folgende Zwischenergebnis liefert jedoch eine spezielle Beobachtbarkeitseigenschaft von (6.6), die im weiteren Verlauf benötigt wird.

Lemma 6.2. *Das Deskriptorsystem (2.1) sei lokal beobachtbar um (\hat{x}_1, \hat{x}_2) für Eingänge um \hat{u} und für \hat{x}_u sowie \hat{v} gelte $\hat{u} = r_u(\hat{x}_u, \hat{x}_1, \hat{v})$. Zwei Lösungen $x_{e,1}(t)$ und $x_{e,2}(t)$ des Systems (6.6), die in einer Umgebung von (\hat{x}_1, \hat{x}_u) verlaufen, stimmen überein, wenn für sie $y_{e,1}(t) = y_{e,2}(t)$, $u_1(t) = \text{const}$ sowie $u_2(t) = \text{const}$ gilt.*

Beweis. Angenommen es existieren zwei Lösungen $x_{e,1}(t) \neq x_{e,2}(t)$ für (6.6) zu den Eingängen $v_1(t)$ und $v_2(t)$, sodass $y_{e,1}(t) = y_{e,2}(t)$, $u_1(t) = \text{const}$ sowie $u_2(t) = \text{const}$ gilt. Aus $y_{e,1}(t) = y_{e,2}(t)$ folgt $u_1(t) = u_2(t)$, da u in y_e enthalten ist. Da das Deskriptorsystem lokal beobachtbar ist, muss mit der Aufteilung $x_{e,i} = (x_{1,i}, x_{u,i})$ direkt $x_{1,1} = x_{1,2}$ gelten. Da nach Lemma 3.6 $u(t)$ zusammen mit $x_1(t)$ eindeutig $x_u(t)$ und $v(t)$ festlegt, folgt aus $u_1(t) = u_2(t)$ weiterhin $x_{u,1}(t) = x_{u,2}(t)$, was der Annahme widerspricht. \square

Ist zusätzlich zur Beobachtbarkeit des Deskriptorsystems noch die Forderung

$$\text{rang } \partial_v \tilde{h}_m(x_e, v) = p \quad (6.7)$$

in einer Umgebung erfüllt, so kann die erweiterte Ausgangsgleichung (6.6b) dort eindeutig nach v aufgelöst werden, was auf

$$v = r_b(x_e, y_e) \quad (6.8)$$

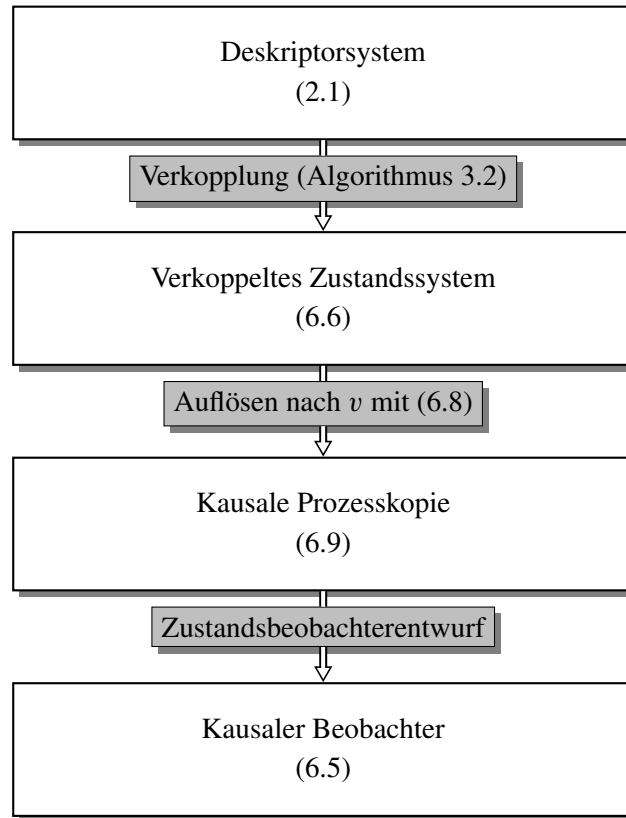


Bild 6.1: Übersicht der Beobachterentwurfsschritte

führt. Die Eingänge des Simulationsmodells sind damit bekannt. Der kausale Beobachterentwurf für das Deskriptorsystem (2.1) ist in den Beobachterentwurf für ein Zustandssystem überführt und kann mit bekannten Methoden für das Gesamtsystem

$$\dot{x}_e = \tilde{f}_m(x_e, r_b(x_e, y_e)) \quad (6.9a)$$

$$\tilde{y}_e = \tilde{h}_m(x_e, r_b(x_e, y_e)) \quad (6.9b)$$

erfolgen, was auf die Differentialgleichung (6.5a) des Beobachters führt. Um aus ξ_b wieder x_b , den Schätzwert für x , zu berechnen, muss noch die Ausgangsgleichung (6.5b) berechnet werden. Die ersten r Komponenten von ξ_b , also $\xi_{b,1}$, liefern direkt den Schätzwert für x_1 . Unter Verwendung von (3.20) und (6.8) ergibt sich

$$x_b = \begin{bmatrix} \xi_{b,1} \\ \tilde{\alpha}(\xi_b, r_b(\xi_b, y_e)) \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

In Bild 6.1 sind die bisher betrachteten Systeme und die jeweiligen Überführungen dargestellt, um das Entwurfsverfahren grafisch zu veranschaulichen. Damit (6.5) ein kausaler Beobachter ist, müssen die drei zu Beginn des Abschnitts vorgestellten Bedingungen (Konsistenz, Konvergenz und Kausalität) erfüllt sein. Da es sich bei (6.5) um ein Zustandssystem handelt, ist die *Kausalität* offensichtlich immer gegeben.

Für die *Konsistenz* muss die Differentialgleichung von (6.9) näher betrachtet werden. Da (6.8) die Ausgangsgleichung exakt nach v auflöst, gilt $\tilde{f}_m(x_e, v) = \tilde{f}_m(x_e, r_b(x_e, \tilde{h}_m(x_e, v))) \forall x_e \in U \subset$

$\mathcal{N}_m, v \in V \subset \mathbb{R}^p$. Die Lösung von (3.21) verbleibt für konsistente Anfangswerte immer in \mathcal{N}_m . Zusammen mit Satz 3.7 ist daher die Konsistenzeigenschaft erfüllt.

Da der kausale Beobachterentwurf für nichtlineare Deskriptorsysteme in dieser Arbeit auf den Entwurf eines Zustandsbeobachters übertragen werden soll, wird für die *Konvergenz* im Folgenden gezeigt, dass (6.9) lokal beobachtbar ist und somit der Entwurf eines Zustandsbeobachters möglich ist.

Lemma 6.3. *Das Deskriptorsystem (2.1) sei lokal beobachtbar um (\hat{x}_1, \hat{x}_2) für Eingänge um \hat{u} und für \hat{x}_u sowie \hat{v} gelte $\hat{u} = r_u(\hat{x}_u, \hat{x}_1, \hat{v})$. Wenn die Bedingung (6.7) in einer Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_u, \hat{v})$ erfüllt ist, dann ist das System (6.9) lokal beobachtbar um (\hat{x}_1, \hat{x}_u) .*

Beweis. Angenommen das System (6.9) ist nicht lokal beobachtbar. Es existieren zwei Lösungen $x_{e,1}(t) \neq x_{e,2}(t)$ zum konstanten Eingang $y_{e,1}(t) = y_{e,2}(t)$ von (6.9), wobei für die jeweiligen Ausgänge $\tilde{y}_{e,1}(t) = \tilde{y}_{e,2}(t)$ gilt. Es lassen sich mit (6.8) eindeutige $v_1(t)$ und $v_2(t)$ finden. Die Anwendung von Lemma 6.2 liefert $x_{e,1}(t) = x_{e,2}(t)$, was der Annahme widerspricht. Daher ist das System (6.6) lokal beobachtbar. \square

Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass die Bedingung (6.7) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für einen kausalen Beobachterentwurf für nichtlineare Deskriptorsysteme ist.

Satz 6.4. *Das reguläre Deskriptorsystem (2.1) sei lokal beobachtbar um alle $\zeta_0 \in V \subset \mathcal{N}_m$. Das Deskriptorsystem (2.1) ist genau dann kausal beobachtbar, wenn die Bedingung (6.7) in V erfüllt ist.*

Beweis. \Leftarrow : Wenn das reguläre Deskriptorsystem (2.1) lokal beobachtbar und die Bedingung (6.7) erfüllt ist, existiert wegen Lemma 6.3 durch (6.9) eine beobachtbare Prozesskopie, für die deshalb ein Beobachter entworfen werden kann. Da die Lösungen von (6.6) und (2.1) nach Satz 3.7 übereinstimmen und (6.8) exakt v bestimmt, ist dieser Beobachter ein kausaler Beobachter für (2.1). \Rightarrow : Angenommen es existiert ein dynamisches System (6.5), welches die Eigenschaften eines kausalen Beobachters für das Deskriptorsystem (2.1) erfüllt. Die Lösung $x_b(t)$ des Beobachters hat die Form

$$\begin{aligned} \xi_b(t) &= \xi_b(t_0) + \int_{t_0}^t a_b(\xi_b(\tau), u(\tau), y(\tau)) d\tau \\ x_b(t) &= c_b(\xi_b(t), u(t), y(t)) . \end{aligned}$$

Aufgrund der Konsistenzeigenschaft eines Beobachters, müssen für $\hat{x}_b = x_b(t_0) = \hat{x}$ die Lösungen $x_b(t) = x(t)$ übereinstimmen. Die Aufteilung $c_b = (c_{b,1}, c_{b,2})$ mit $c_{b,2} : (\mathcal{M}_\xi \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathbb{R}^m$ liefert

$$c_{b,2}(\xi_b, u, y) = c_{b,2}(\xi_b, \tilde{h}_m(x_e, v)) \stackrel{!}{=} x_2 = \alpha_m(x_e, v) \quad \forall x_e \in \mathcal{N}_m, v \in \mathbb{R}^p .$$

Da $v \in \mathbb{R}^p$ beliebig gewählt werden darf, kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn

$$\frac{\partial(c_{b,2} \circ \tilde{h}_m)}{\partial v} = \frac{\partial \alpha_m}{\partial v}$$

gilt. Angenommen die Bedingung (6.7) ist verletzt, so existiert ein v^i , das

$$\frac{\partial \tilde{h}_m(x_e, v)}{\partial v^i} = 0$$

erfüllt, wobei gegebenenfalls eine reguläre Eingangskoodinatentransformation notwendig ist. Aus (6.6b) folgt $\partial_{v^i} r_u = 0$. Nach Lemma 3.6 ist (3.19) invertierbar, woraus $\partial_{v^i} r_x \neq 0$ folgt. Da im Algorithmus 3.2 nur dann mit einem PT_1 -Glieder erweitert wird, wenn ein Eingang in einer Restriktion auftritt, muss v^i auf mindestens ein γ_{m,κ_j}^j wirken. Daraus folgt, $\partial_{v^i} \alpha_m \neq 0$ und somit

$$\frac{\partial (c_{b2} \circ \tilde{h}_m)}{\partial v^i} \neq \frac{\partial \alpha_m}{\partial v^i},$$

was die Konsistenzeigenschaft des Beobachters verletzt. \square

Der letzte Satz liefert eine neue Bedingung für die kausale Beobachtbarkeit nichtlinearer Deskriptorsysteme. Diese ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. Für die Überprüfung der Bedingung wird nur die verkoppelte Darstellung (3.21) benötigt, die, zusammen mit (6.8), die notwendige kausale Prozesskopie darstellt. Der Entwurf des eigentlichen Beobachters ist damit für alle kausal beobachtbaren Deskriptorsysteme auf den Entwurf eines Zustandsbeobachters für (6.9) zurückgeführt. Es können beliebige nichtlineare Beobachterentwürfe zum Einsatz kommen, was in dieser Arbeit nicht weiter vertieft wird. Rekonstruiert der Beobachter die Zustände von (6.9) korrekt, so rekonstruiert er auch die Zustände von (3.21) richtig. Da die verkoppelte Darstellung (3.21) und das Deskriptorsystem (2.1) nach Satz 3.7 identische Lösungen besitzen, konvergiert der Beobachter mit (6.10) auch für das Deskriptorsystem, sodass die *Konvergenz* sichergestellt ist.

Anmerkung. Prinzipiell könnte für (6.6) auch ein Beobachter für unbekannte Eingänge entworfen werden. Dieser ist jedoch nicht in der Lage auch x_2 zu rekonstruieren. Wird dies zusätzlich gefordert, ergeben sich sehr restriktive Voraussetzungen, unter denen allerdings immer Satz 6.4 erfüllt ist.

Für prope Deskriptorsysteme vereinfacht sich der Entwurf eines kausalen Beobachters, da bereits (3.21) eine kausale Prozesskopie mit bekannten Eingängen darstellt.

Folgesatz 6.5. *Ist das reguläre, prope Deskriptorsystem (2.1) lokal beobachtbar in einer Umgebung von \hat{x} , dann ist es dort kausal beobachtbar.*

Beweis. Ist das Deskriptorsystem proper, so hat die Matrix $\partial_v r_u$ vollen Rang und (6.7) ist unabhängig von h_m immer erfüllt. Die kausale Beobachtbarkeit folgt direkt aus Satz 6.4. \square

In diesem Abschnitt wurde ein Verfahren vorgestellt, um ein lokal beobachtbares Zustandssystem zu erzeugen, für das ein Beobachter für das Deskriptorsystem entworfen werden kann. Darüber hinaus liefert Satz 6.4 die Voraussetzungen für das zu beobachtende Deskriptorsystem. Zu beachten ist, dass die Bedingung aus Satz 6.4 nur notwendig und hinreichend für lokal beobachtbare Deskriptorsysteme ist. Dies liegt daran, dass im Allgemeinen selbst für ein nicht lokal beobachtbares

System ein Beobachter entworfen werden kann, wenn es möglich ist, das Gesamtsystem zu stabilisieren. Für lineare Systeme wird diese Eigenschaft als *Detektierbarkeit* bezeichnet, die weniger restriktiv als die Beobachtbarkeit ist. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wird bei nichtlinearen Deskriptorsystemen in der vorliegenden Arbeit immer die lokale Beobachtbarkeit vorausgesetzt. Bei der Anwendung des Beobachterentwurfs auf lineare Deskriptorsysteme am Ende des Kapitels wird die Detektierbarkeit jedoch berücksichtigt.

6.3 Reduzierung der Beobachterordnung

Obwohl alle Lösungen des Deskriptorsystems nur auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{N}_m verlaufen, ist die Ordnung des Beobachters im Allgemeinen deutlich größer als die Dimension von \mathcal{N}_m . Dieser Abschnitt zeigt, dass eine Reduzierung der Beobachterordnung immer möglich ist.

Durch die Anwendung der Verkopplung in Algorithmus 3.2 werden Bewegungen von (6.6), die außerhalb von \mathcal{N}_m liegen, unsteuerbar gemacht. Damit enthält (6.6) ein nicht steuerbares Teilsystem, welches nicht mit v beeinflusst werden kann. Selbst nach Einsetzen von (6.8) bleibt das nicht steuerbare Teilsystem erhalten, weshalb eine Koordinatentransformation $(\xi, \bar{z}) = \Phi(x_e)$ mit $\bar{z} = (\gamma_{m,0}^1(x_e), \dots, \gamma_{m,\kappa_m-1}^m(x_e))$ existiert, die (6.9) in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \tilde{f}_{m,1}(\xi, \bar{z}, y_e) \\ \dot{\bar{z}} &= \tilde{f}_{m,2}(\bar{z}) \\ \tilde{y}_e &= \tilde{h}_m(\xi, \bar{z}, y_e)\end{aligned}$$

überführt. Der Ausgang des Beobachters und die Lösung des Deskriptorsystems können nur übereinstimmen, wenn $\bar{z} = 0$ ist, die Lösung der Prozesskopie also in \mathcal{N}_m verläuft. Dies führt auf die Prozesskopie reduzierter Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \tilde{f}_{m,1}(\xi, 0, y_e) = f_{\text{red}}(\xi, y_e) \\ \tilde{y}_e &= \tilde{h}_m(\xi, 0, y_e) = h_{\text{red}}(\xi, y_e),\end{aligned}$$

die wegen Satz 6.1 beobachtbar sein muss. Ein Beobachter für dieses Zustandssystem ist erneut ein Beobachter für das Deskriptorsystem, wobei seine Ordnung auf $r + n_u - \kappa$ reduziert wird.

6.4 Entwurf kausaler Beobachter für lineare Deskriptorsysteme

6.4.1 Anwendung des nichtlinearen Entwurfs auf lineare Deskriptorsysteme

In diesem Abschnitt wird der vorgestellte Entwurf eines kausalen Beobachters auf lineare Deskriptorsysteme angewandt. Die Lemmata des letzten Abschnitts werden für lineare Systeme neu formuliert, wobei die Detektierbarkeit die geforderte Beobachtbarkeit ersetzt. Die Lemmata für lineare Deskriptorsysteme werden erneut bewiesen, da die Beweise durch die im Linearen mögliche

Verwendung von Eigenwerten sehr anschaulich sind. Für lineare Deskriptorsysteme sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die kausale Beobachtbarkeit bekannt ([1]). Ein Vergleich mit diesen wird zeigen, dass die neu formulierten Bedingungen äquivalent zu den bekannten sind.

Für ein lineares Deskriptorsystem (2.9) kann mithilfe des Algorithmus 3.2 der Verkopplungsregler (3.29) und die dynamische Erweiterung (3.28) entworfen werden. Das Deskriptorsystem (2.9) erzeugt zusammen mit (3.28) unter Berücksichtigung von (3.29) ein verkoppeltes Zustandssystem

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}R_{x_1} & A_{12}R_{x_u} + B_1C_u \\ 0 & A_u \end{bmatrix}}_{A_e} x_e + \underbrace{\begin{bmatrix} A_{12}F_v + B_1D_u \\ B_u \end{bmatrix}}_{B_e} v \quad (6.11a)$$

$$y_e = \begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 + C_2R_{x_1} & C_2R_{x_u} + DC_u \\ 0 & C_u \\ A_{21} + A_{22}R_{x_1} & A_{22}R_{x_u} + B_2C_u \end{bmatrix}}_{C_e} x_e + \underbrace{\begin{bmatrix} C_2F_v + DD_u \\ D_u \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_e} v, \quad (6.11b)$$

welches dem System (3.21) entspricht. Da der Eingang u des Deskriptorsystems und die Restriktionen $z = 0$ bekannt sind, werden sie mit dem Ausgang y zum erweiterten Ausgang y_e zusammengefasst. Wie in Satz 3.7 gezeigt wird, stimmen die Lösungen von (2.9) und (6.11) bezüglich x_1 überein, wenn konsistente Anfangswerte für x_1 gewählt werden und $x_u(t_0)$ sowie $v(t)$ passend zu den Eingängen und ihren Ableitungen zum Zeitpunkt t_0 gewählt werden.

Bedingung (6.7) vereinfacht sich für lineare Deskriptorsysteme zu

$$\text{rang } D_e = p, \quad (6.12)$$

sodass sich mit der Linksinversen $D_e^+ = (D_e^T D_e)^{-1} D_e^T$ von D_e

$$v = D_e^+ (y_e - C_e x_e)$$

eindeutig bestimmen lässt. Eingesetzt in (6.11) ergibt sich die lineare Darstellung für (6.9) zu

$$\dot{x}_e = (A_e - B_e D_e^+ C_e) x_e + B_e D_e^+ y_e = A_g x_e + B_g y_e \quad (6.13a)$$

$$\tilde{y}_e = (C_e - D_e D_e^+ C_e) x_e + D_e D_e^+ y_e = C_g x_e + D_g y_e. \quad (6.13b)$$

Ist dieses System detektierbar, so existiert eine Beobacherverstärkung $L \in \mathbb{R}^{(r+n_u) \times (q+p+m)}$, um das System zu stabilisieren. Wird $L(y_e - \tilde{y}_e)$ zur Differentialgleichung addiert, ergibt sich der Beobachter

$$\dot{\tilde{x}}_e = (A_g - LC_g) \tilde{x}_e + (B_g + L(I - D_g)) y_e \quad (6.14)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ R_{x_1} & R_{x_u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F_v D_e^+ C_e \end{bmatrix} \right)}_{C_x} \tilde{x}_e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_v D_e^+ \end{bmatrix}}_{D_x} y_e, \quad (6.15)$$

der durch die Wahl von L stabilisiert werden kann ([84]). Die Untersuchung des Beobachterfehlers $e = x - \tilde{x}$ wird in die Betrachtung der Fehler $e_e = x_e - \tilde{x}_e$ und $e_2 = x_2 - \tilde{x}_2$ aufgeteilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{e}_e &= \dot{x}_e - \dot{\tilde{x}}_e = A_e x_e + B_e v - (A_g - LC_g)\tilde{x}_e - (B_g + L(I - D_g))(C_e x_e + D_e v) \\ &= (A_e - B_e D_e^+ C_e - LC_e + LD_e D_e^+ C_e)e_e + (B_e - B_e D_e^+ D_e - LD_e + LD_e D_e^+ D_e)v \\ &= (A_g - LC_g)e_e\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}e_2 &= \begin{bmatrix} R_{x_1} & R_{x_u} \end{bmatrix} x_e + F_v v - \left(\begin{bmatrix} R_{x_1} & R_{x_u} \end{bmatrix} - F_v D_e^+ C_e \right) \tilde{x}_e - F_v D_e^+ (C_e x_e + D_e v) \\ &= \left(\begin{bmatrix} R_{x_1} & R_{x_u} \end{bmatrix} - F_v D_e^+ C_e \right) e_e.\end{aligned}$$

Da L gerade so gewählt ist, dass $(A_g - LC_g)$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, geht e_e asymptotisch gegen 0. Damit geht sowohl e_2 als auch e asymptotisch gegen 0 und der Beobachter konvergiert. In den folgenden Lemmata werden hinreichende Bedingungen hergeleitet, sodass (6.13) detektierbar ist.

Lemma 6.6. *Ist das Deskriptorsystem (2.9) detektierbar, dann ist das System (6.11) detektierbar.*

Beweis. Da das Deskriptorsystem (2.9) detektierbar ist, gilt nach Satz A.2

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+.$$

Wegen Lemma 3.13 besitzt das System (3.28) keine invarianten Nullstellen, weshalb

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_u - \lambda I & B_u \\ C_u & D_u \end{bmatrix} = n_u + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gilt und alle Eigenwerte von A_u steuer- und beobachtbar sind. Einsetzen der Matrizen liefert

$$\begin{aligned}\text{rang} \begin{bmatrix} A_e - \lambda I \\ C_e \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} R_{x_1} - \lambda I & A_{12} R_{x_u} + B_1 C_u \\ 0 & A_u - \lambda I \\ C_1 + C_2 R_{x_1} & C_2 R_{x_u} + D C_u \\ 0 & C_u \\ A_{21} + A_{22} R_{x_1} & A_{22} R_{x_u} + B_2 C_u \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} R_{x_1} - \lambda I & A_{12} R_{x_u} + B_1 C_u \\ A_{21} + A_{22} R_{x_1} & A_{22} R_{x_u} + B_2 C_u \\ C_1 + C_2 R_{x_1} & C_2 R_{x_u} + D C_u \\ 0 & A_u - \lambda I \\ 0 & C_u \end{bmatrix},\end{aligned}$$

da sich der Rang beim Vertauschen von Zeilen nicht verändert. Die Blockdreiecksstruktur führt auf

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} A_e - \lambda I \\ C_e \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}R_{x_1} - \lambda I \\ A_{21} + A_{22}R_{x_1} \\ C_1 + C_2R_{x_1} \end{bmatrix} + \text{rang} \begin{bmatrix} A_u - \lambda I \\ C_u \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \left(\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ R_{x_1} \end{bmatrix} \right) + n_u \\ &= r + n_u = n_{x_e} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+, \end{aligned}$$

woraus die Detektierbarkeit des verkoppelten Systems (6.11) folgt. \square

Lemma 6.7. *Ist das Deskriptorsystem (2.9) detektierbar, dann besitzt das System (6.11) keine invarianten Nullstellen in \mathbb{C}^+ .*

Beweis. Angenommen es existiert eine invariante Nullstelle $\lambda_N \in \mathbb{C}^+$. Für diese invariante Nullstelle besitzt

$$\Pi_e(\lambda_N) = \begin{bmatrix} A_e - \lambda_N I & B_e \\ C_e & D_e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_{x_e}+q+p+m) \times (n_{x_e}+p)}$$

einen Rechtskern $\begin{bmatrix} x_{e0}^T & v_0^T \end{bmatrix}^T$ und es gilt mit der Lösung des Systems $x_e(t) = x_{e0}e^{\lambda_N t}$ und $v(t) = v_0e^{\lambda_N t}$, dass der Ausgang

$$y_e(t) = C_e x_{e0} e^{\lambda_N t} + D_e v_0 e^{\lambda_N t} = 0$$

verschwindet. Aus Lemma 6.6 folgt, dass das System (6.11) detektierbar ist und somit die ersten n_{x_e} Spalten der Rosenbrock'schen Systemmatrix $\Pi_e(\lambda_N)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^+$ linear unabhängig sind. Deshalb muss $v_0 \neq 0$ gelten. Da (3.28) wegen Lemma 3.13 keine invarianten Nullstellen besitzt und nach Lemma 3.6 invertierbar ist, folgt mit $v_0 \neq 0$ unmittelbar $u(t) \neq 0$. Jedoch ist u ein Teil von y_e und muss verschwinden. Dies widerspricht der Annahme, dass eine invariante Nullstelle in \mathbb{C}^+ existiert und beweist das Lemma. \square

Lemma 6.8. *Ist das Deskriptorsystem (2.9) detektierbar und ist Bedingung (6.12) erfüllt, so ist das System (6.13) detektierbar.*

Beweis. Mit Lemma 6.6 ist bekannt, dass das System (6.11) detektierbar ist. Aus (6.12) folgt, dass mit der Singulärwertzerlegung

$$D_e = U \tilde{D}_e V^T \quad \tilde{D}_e = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{e,1} \\ 0 \end{bmatrix} = U^T D_e V$$

die Matrix $\tilde{D}_{e,1}$ quadratisch regulär ist. Mit der regulären Ein- und Ausgangstransformation

$$\begin{aligned}\tilde{y}_e &= U^T y_e \\ \tilde{v} &= V^T v\end{aligned}$$

geht das verkoppelte System (6.11) in die Darstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= A_e x_e + B_e V \tilde{v} = \tilde{A}_e x_e + \tilde{B}_e \tilde{v} \\ \tilde{y}_e &= U^T C_e x_e + U^T D_e V \tilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{e,1} \\ \tilde{y}_{e,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{e,1} \\ \tilde{C}_{e,2} \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} \tilde{D}_{e,1} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v}\end{aligned}$$

über, ohne dass sich Eigenwerte oder invariante Nullstellen und ihre Eigenschaften verändern. Dieses System besitzt deshalb ebenfalls keine invarianten Nullstellen in \mathbb{C}^+ und ist detektierbar. Die Rosenbrock'sche Systemmatrix von (6.13) in transformierten Ein- und Ausgangskordinaten ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\Pi_g(\lambda) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_e - \tilde{B}_e \tilde{D}_{e,1}^{-1} \tilde{C}_{e,1} - \lambda I & \tilde{B}_e \tilde{D}_{e,1}^{-1} \tilde{C}_{e,1} \\ 0 & I \\ \tilde{C}_{e,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A}_e - \lambda I & \tilde{B}_e \\ \tilde{C}_{e,1} & \tilde{D}_{e,1} \\ \tilde{C}_{e,2} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\Pi}_e(\lambda)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\tilde{D}_{e,1}^{-1} \tilde{C}_{e,1} & \tilde{D}_{e,1}^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Sei $\Pi_e(\lambda)$ die Rosenbrock'sche Systemmatrix des verkoppelten Systems (6.11). Da $\text{rang } \tilde{\Pi}_e(\lambda) = \text{rang } \Pi_e(\lambda) = n_{x_e} + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+$ gilt und $\tilde{\Pi}_e(\lambda)$ mit einer regulären Matrix multipliziert wird, besitzt $\Pi_g(\lambda)$ maximalen Rang für alle $\lambda \in \mathbb{C}^+$. Somit hat das System (6.13) keine invarianten Nullstellen in \mathbb{C}^+ und ist detektierbar. \square

Lemma 6.8 stellt hinreichende Bedingungen für den Entwurf eines kausalen Beobachters zur Verfügung, die im Verlauf des Beobachterentwurfs überprüft werden können. *Ailon* [1] gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines kausalen Beobachters an. Er benötigt eine spezielle Darstellung der Weierstrass-Kronecker-Form

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ 0 & 0 & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{w,1} \\ \dot{x}_{w,21} \\ \dot{x}_{w,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_w & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{w,1} \\ x_{w,21} \\ x_{w,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{w,1} \\ B_{w,21} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.16a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_{w,1} & C_{w,21} & C_{w,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{w,1} \\ x_{w,21} \\ x_{w,22} \end{bmatrix} + D u, \quad (6.16b)$$

bei der das schnelle Teilsystem in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil zerlegt wird. Die bekannten, notwendigen und hinreichenden Bedingen sind in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 6.9 ([1], [81]). *Ein kausaler Beobachter für das System (6.16) lässt sich genau dann konstruieren, wenn die Paare $(C_{w,1}, A_w)$ detektierbar und $(C_{w,21}, N_{11})$ impulsbeobachtbar sind.*

Sind die Bedingungen von Satz 6.9 erfüllt, so wird das Deskriptorsystem (2.8) als *kausal beobachtbar* bezeichnet. Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts wird der Zusammenhang von Lemma 6.8 und Satz 6.9 untersucht, wofür die reguläre Koordinatentransformation $\tilde{v} = W^{-1}v$ benötigt wird, die

$$\tilde{D}_u = D_u W = D_u \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{u,1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{u,1} \in \mathbb{R}^{p \times p_1}, \quad p_1 := \text{rang } \tilde{D}_{u,1}$$

erfüllt. Mit den folgenden Lemmata wird gezeigt, dass die Voraussetzungen von Satz 6.9 mit den Bedingungen von Satz 6.4 übereinstimmen.

Lemma 6.10. *Bedingung (6.12) ist genau dann erfüllt, wenn $\text{rang } C_2 \tilde{F}_{v,2} = \text{rang } \tilde{F}_{v,2}$ mit $\tilde{F}_v = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{v,1} & \tilde{F}_{v,2} \end{bmatrix} = F_v \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} = F_v W$ gilt.*

Beweis. Die höchsten Ableitungen von u wirken immer auf x_2 . Diese entsprechen den Eingangsrichtungen von v , die im Rechtskern von D_u liegen und damit nicht direkt auf u wirken. Daher müssen alle Elemente des Rechtskerns von D_u auf x_2 wirken, weshalb $\tilde{F}_{v,2}$ maximalen Rang $p_2 := \text{rang } \tilde{F}_{v,2} = p - p_1$ besitzt und

$$\text{rang} \begin{bmatrix} F_v \\ D_u \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{F}_{v,1} & \tilde{F}_{v,2} \\ \tilde{D}_{u,1} & 0 \end{bmatrix} = p$$

gilt. Da eine elementare Zeilenumformung den Rang einer Matrix nicht ändert, folgt

$$\begin{aligned} \text{rang } D_e &= \text{rang} \begin{bmatrix} C_2 F_v + D D_u \\ D_u \\ 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} C_2 F_v \\ D_u \\ 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} C_2 \tilde{F}_{v,1} & C_2 \tilde{F}_{v,2} \\ \tilde{D}_{u,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= p_1 + \text{rang } C_2 \tilde{F}_{v,2}. \end{aligned}$$

Der Rang von D_e ist genau dann gleich p , wenn $\text{rang } C_2 \tilde{F}_{v,2} = \text{rang } \tilde{F}_{v,2}$ gilt, da $\text{rang } \tilde{F}_{v,2} = p_2$. \square

Lemma 6.11. *Ist das Paar $(C_{w,21}, N_{11})$ impulsbeobachtbar, so gilt $\text{rang } C_2 \tilde{F}_{v,2} = \text{rang } \tilde{F}_{v,2}$.*

Beweis. Wird die Zeitlösung von x_w betrachtet, so hängt nur $x_{w,21} = -\sum_{i=0}^{h-1} N_{11}^i B_{w,21} u^{(i)}$ von Ableitungen von u ab. Unter Verwendung von (3.28) hängt nur $x_{w,21}$ direkt von v ab und es ergibt sich

$$\partial_v x_{w,21} = \underbrace{-B_{w,21} D_u}_{B_p} - \underbrace{\sum_{i=1}^{h-1} N_{11}^i B_{w,21} C_u A_u^{i-1} B_u}_{B_n}.$$

Wegen der Nilpotenz von N_{11} folgt $N_{11}B_n = 0$ und da $x_{w,21}$ nicht von \dot{v} abhängen kann, gilt $N_{11}B_p = 0$. Die Transformation $v = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$ führt auf

$$\begin{aligned} \tilde{B}_p &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{p,1} & 0 \end{bmatrix} = B_p \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}_n &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{n,1} & \tilde{B}_{n,2} \end{bmatrix} = B_n \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\partial_{\tilde{v}_2} y = C_2 \tilde{F}_{v,2} = C_{w,21} \tilde{B}_{n,2}. \quad (6.17)$$

Wegen der Impulsbeobachtbarkeit gilt nach Satz A.2 kern $N_{11} \cap \text{kern } C_{w,21} \cap \text{bild } N_{11} = \emptyset$. Dies bedeutet, dass das Bild von N_{11} nicht im Rechtskern von $\begin{bmatrix} N_{11}^T & C_{w,21}^T \end{bmatrix}^T$ liegt.

Da bild $\tilde{B}_{n,2} \subset \text{bild } N_{11}$ gilt, liegt auch das Bild von $\tilde{B}_{n,2}$ nicht im Rechtskern von $\begin{bmatrix} N_{11}^T & C_{w,21}^T \end{bmatrix}^T$. Zusammen mit $N_{11}B_n = 0$ folgt

$$\text{rang } C_{w,21} \tilde{B}_{n,2} = \text{rang } \tilde{B}_{n,2}. \quad (6.18)$$

Für die Transformation auf Weierstrass-Kronecker-Form $x_w = T_w x$ sei $\hat{T}_w = T_w^{-1}$ und $x_2 = \hat{T}_{w,1} x_{w,1} + \hat{T}_{w,21} x_{w,21} + \hat{T}_{w,22} x_{w,22}$. Damit ist

$$\partial_{\tilde{v}_2} x_2 = \tilde{F}_{v,2} = \hat{T}_{w,21} \tilde{B}_{n,2}$$

erfüllt, woraus $\text{rang } \tilde{F}_{v,2} \leq \text{rang } \tilde{B}_{n,2}$ folgt. Zusammen mit (6.17) und (6.18) gilt $\text{rang } C_2 \tilde{F}_{v,2} = \text{rang } C_{w,21} \tilde{B}_{n,2} = \text{rang } \tilde{B}_{n,2}$ und damit $\text{rang } \tilde{F}_{v,2} \geq \text{rang } \tilde{B}_{n,2}$. Dies beweist das Lemma. \square

Aus den beiden letzten Lemmata folgt, dass Lemma 6.8 gilt, wenn Satz 6.9 erfüllt ist. Da die Bedingungen von Satz 6.9 notwendig und hinreichend sind, müssen die Bedingungen von Lemma 6.8 ebenfalls notwendig und hinreichend sein. Zusammenfassend ergibt sich der folgende Satz.

Satz 6.12. *Es lässt sich genau dann ein kausaler Beobachter (6.14) entwerfen, wenn das reguläre Deskriptorsystem (2.9) detektierbar und die Bedingung (6.12) erfüllt ist.*

Die neue Entwurfsmethodik für einen kausalen Beobachter besitzt dieselben Voraussetzungen, wie andere in der Literatur bekannte Entwürfe. Da sie nicht auf lineare Methodiken angewiesen ist, lässt sie sich sogar für nichtlineare Deskriptorsysteme einsetzen. Im Vergleich mit bekannten linearen Entwürfen wie in *Mandlerla* [81], ist die Beobachterordnung des neuen Verfahrens größer. Wie bei nichtlinearen Systemen kann die Ordnung auch im Fall von linearen Deskriptorsystemen reduziert werden.

6.4.2 Entwurf eines reduzierten Beobachters

Mit denselben Überlegungen wie in Abschnitt 6.3 sind die Verkopplungseigenwerte von (6.11) unsteuerbar. Dieses nicht steuerbare Teilsystem lässt sich abspalten, um so die Ordnung zu reduzieren. Mithilfe verschiedener Verfahren (siehe z. B. [73] oder [42, 43]) kann das durch die

Verkopplung unsteuerbar gemachte Teilsystem aus (6.13) entfernt werden, was auf das reduzierte System

$$\dot{x}_{\text{red}} = A_{\text{red}}x_{\text{red}} + B_{\text{red}}y_e \quad (6.19a)$$

$$x_b = C_{\text{red}}x_{\text{red}} + D_{\text{red}}y_e \quad (6.19b)$$

führt. Die Ordnung von (6.13) ist $r + n_u$ und es gilt $\dim \mathcal{N}_m = n_{\text{slow}} + n_u$. Damit besitzt das reduzierte Zustandssystem die Ordnung $n_{\text{slow}} + n_u$, was der Summe der endlichen Eigenwerte und der Anzahl der steuerbaren unendlichen Eigenwerte entspricht. Beim Entwurf in *Manderla* [81] besitzt der Beobachter immer die Ordnung $n_{\text{slow}} + n_u$, sodass der vorgestellte Entwurf in dieser Hinsicht mit bekannten Entwürfen übereinstimmt.

Selbstverständlich ist der Entwurf eines reduzierten Zustandsbeobachters (siehe z. B. [32]) für die kausale Prozesskopie reduzierter Ordnung (6.19) möglich, was die Ordnung des Beobachters weiter vermindert. Die Idee des klassischen reduzierten Zustandsbeobachters ist es, Zustandsgrößen, die mit dem Ausgang direkt bestimmt werden können, nicht mit dem Beobachter zu rekonstruieren. Nur noch die restlichen Zustände werden beobachtet, was mit einer weiteren Verminderung der Beobachterordnung einhergeht.

Durch die Verwendung der erweiterten Ausgangsgleichung in (6.13) kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass die Zeilen von C_g linear unabhängig sind, da im Allgemeinen Nullzeilen vorhanden sind. Mit $\tilde{q} := \text{rang } C_g$ existiert immer eine Matrix $V \in \mathbb{R}^{\tilde{q} \times (q+p+m)}$, für die $\text{rang } VC_g = \tilde{q}$ gilt. Somit lässt sich eine Koordinatentransformation

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ VC_g \end{bmatrix} x_{\text{red}} = T x_{\text{red}}$$

erzeugen, wenn die Matrix $T_1 \in \mathbb{R}^{n_{b,\text{red}} \times n_{\text{slow}} + n_u}$ mit $n_{b,\text{red}} := n_{\text{slow}} + n_u - \tilde{q}$ so gewählt wird, dass $\text{rang } T = n_{\text{slow}} + n_u$ gilt. Daraus folgt $\xi_2 = Vy_e - VD_g y_e = \tilde{V} y_e$. Zusammen mit $\tilde{A} = TA_g T^{-1}$, $\tilde{B} = TB_g$ und $\tilde{C}_x = C_x T^{-1}$ kann die kausale Prozesskopie in den neuen Koordinaten durch

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \tilde{A}_{11}\xi_1 + \tilde{A}_{12}\xi_2 + \tilde{B}_1 y_e = \tilde{A}_{11}\xi_1 + (\tilde{A}_{12}\tilde{V} + \tilde{B}_1)y_e \\ \dot{\xi}_2 &= \tilde{A}_{21}\xi_1 + \tilde{A}_{22}\xi_2 + \tilde{B}_2 y_e = \tilde{A}_{21}\xi_1 + (\tilde{A}_{22}\tilde{V} + \tilde{B}_2)y_e \\ \tilde{x} &= \tilde{C}_{x,1}\xi_1 + \tilde{C}_{x,2}\xi_2 + D_x y_e = \tilde{C}_{x,1}\xi_1 + (\tilde{C}_{x,2}\tilde{V} + D_x)y_e \end{aligned}$$

dargestellt werden. Entsprechend dem klassischen Vorgehen von *Föllinger* [32] wird $\tilde{A}_{21}\xi_1$ als Ausgangsgleichung für den Beobachterentwurf genutzt und angenommen, dass $\dot{\xi}_2 - (\tilde{A}_{22}\tilde{V} + \tilde{B}_2)y_e$ bekannt ist. Mit der Beobachtermatrix $L \in \mathbb{R}^{n_{b,\text{red}} \times \tilde{q}}$ ergibt sich durch Ausgangsaufschaltung

$$\dot{\xi}_1 = (\tilde{A}_{11} - L\tilde{A}_{21})\xi_1 + (\tilde{A}_{12}\tilde{V} + \tilde{B}_1)y_e + L(\dot{\xi}_2 - (\tilde{A}_{22}\tilde{V} + \tilde{B}_2)y_e).$$

Die Abhängigkeit von $\dot{\xi}_2$ kann hier mit dem neuen Zustand $\eta = \xi_1 - L\xi_2$ eliminiert werden, was auf den reduzierten Beobachter

$$\dot{\eta} = (\tilde{A}_{11} - L\tilde{A}_{21})\eta + ((\tilde{A}_{12} - L\tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{11}L - L\tilde{A}_{21}L)\tilde{V} + \tilde{B}_1 - L\tilde{B}_2)y_e \quad (6.20a)$$

$$\tilde{x} = \tilde{C}_{x,1}\eta + (\tilde{C}_{x,1}L\tilde{V} + \tilde{C}_{x,2}\tilde{V} + \tilde{D}_x)y_e \quad (6.20b)$$

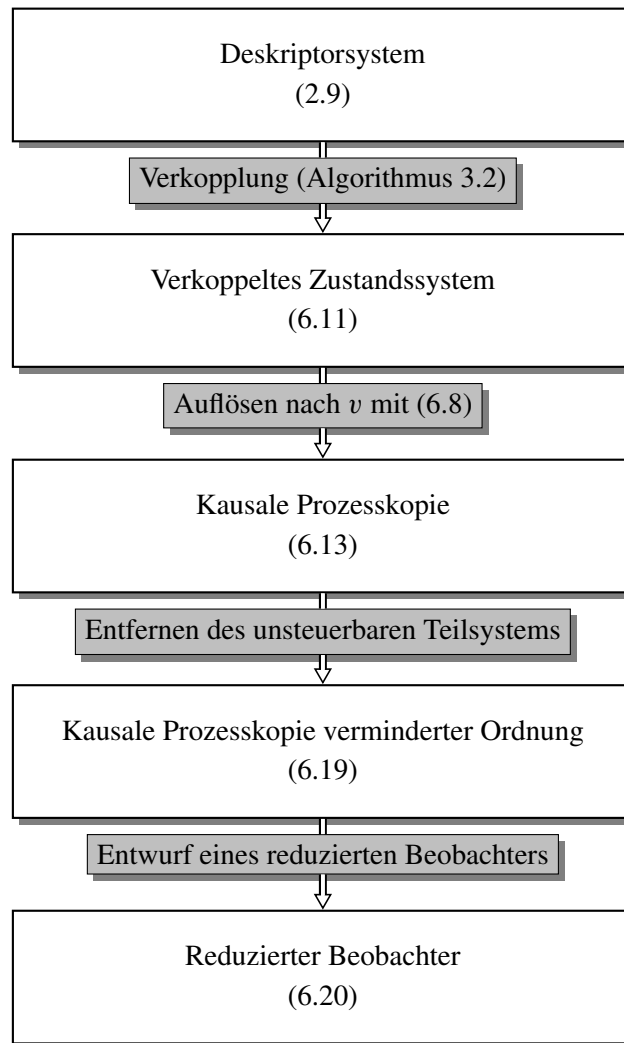


Bild 6.2: Übersicht der Entwurfsschritte für den reduzierten Beobachter

führt. Die Voraussetzung für den Entwurf eines reduzierten Beobachters ist lediglich, wie bei Zustandssystemen, die Detektierbarkeit von (6.20). Da (6.20) detektierbar ist, wenn (6.13) detektierbar ist, kann der Entwurf eines reduzierten Beobachters für kausal beobachtbare Deskriptorsysteme immer durchgeführt werden.

Für lineare Deskriptorsysteme ist es gelungen, eine neue Entwurfsmethodik für reduzierte, kausale Beobachter herzuleiten sowie notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben. Der Ablauf des Entwurfs ist in Bild 6.2 nochmals zusammengefasst. Im nächsten Abschnitt wird das Kapitel mit einem modifizierten Entwurf beendet, der auf einen kausalen Beobachter verringerter Ordnung ($n_{\text{slow}} + n_u$) führt und sogar mit weniger Zwischenschritten auskommt.

6.4.3 Modifizierter Entwurf

Beim bisher beschriebenen Verfahren wird eine kausale Prozesskopie erzeugt, um einen Beobachter zu entwerfen. In *Manderla* [81] wird zuerst ein Beobachter für das Deskriptorsystem in der

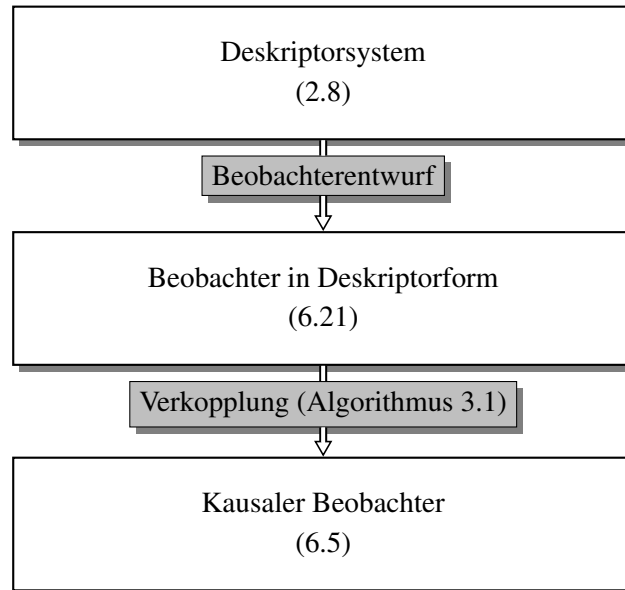


Bild 6.3: Übersicht der Entwurfsschritte für den modifizierten Beobachterentwurf

Form

$$E\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly \quad (6.21)$$

entworfen, der damit in Deskriptorform vorliegt. Dieser wird anschließend mit Methoden der Vollständigen Modalen Synthese in eine Zustandsform überführt. Diese Entwurfsreihenfolge kann auch mit der vorgestellten Methodik beschriftet werden.

Lemma 6.13. *Ist das lineare Deskriptorsystem (2.8) kausal beobachtbar, so ist es immer möglich, einen Deskriptorbeobachter (6.21) so zu entwerfen, dass dieser proper ist.*

Beweis. Da das lineare Deskriptorsystem kausal beobachtbar ist, ist das steuerbare schnelle Teilsystem beobachtbar. Es ist daher immer möglich, alle steuerbaren unendlichen Eigenwerte mit einer Ausgangsaufschaltung zu endlichen Eigenwerten zu verschieben. Der Beobachter ist somit proper. \square

Wird Algorithmus 3.1 oder 3.2 auf den Deskriptorbeobachter (6.21) angewandt, so wird keine dynamische Erweiterung erzeugt und die verkoppelte Zustandsraumdarstellung des Beobachters besitzt den Eingang u . Der Aufwand für die Berechnung von v , der zuvor erforderlich war, wird in diesem Fall nicht benötigt. Da die Lösungen von (6.21) und der verkoppelten Zustandsraumdarstellung übereinstimmen, ist dieses Zustandssystem ein Beobachter für das Deskriptorsystem. Es ergibt sich der in Bild 6.3 dargestellte Entwurfsablauf, bei dem im Vergleich zu Bild 6.1 die Verkopplung und der Beobachterentwurf vertauscht sind. Wie beschrieben, kann die Auflösung nach v entfallen, womit sich insgesamt ein vereinfachter Entwurf ergibt. Die Voraussetzungen für den Entwurf eines kausalen Beobachters sind erneut die in Satz 6.9 vorgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für kausale Beobachtbarkeit.

Satz 6.14. *Es ist genau dann möglich, mit dem vorgestellten modifizierten Entwurf einen kausalen Beobachter zu entwerfen, wenn das lineare Deskriptorsystem (2.8) kausal beobachtbar ist.*

Beweis. Nach Lemma 6.13 ist der Deskriptorbeobachter proper. Damit besitzt das verkoppelte Zustandssystem (3.30) für den Deskriptorbeobachter keine dynamische Erweiterung. Nach Satz 3.4 stimmen die Lösungen des Beobachters und der verkoppelten Zustandsraumdarstellung überein. Das Zustandssystem ist deshalb ein Beobachter für das Deskriptorsystem. \square

Wie in Manderla [81] gezeigt, besitzt der Beobachter (6.21) $n_{\text{slow}} + n_u$ endliche Eigenwerte. Da er proper ist, sind keine steuerbaren unendlichen Eigenwerte vorhanden. Beim Verkopplungsreglerentwurf für den Beobachter ist somit keine dynamische Erweiterung notwendig, sodass der kausale Beobachter die Ordnung r besitzt. Mit denselben Argumenten wie zuvor ist hier erneut eine Ordnungsreduktion möglich, um einen Beobachter der Ordnung $n_{\text{slow}} + n_u$ zu berechnen.

6.5 Kurzzusammenfassung

Kapitel 6 beschäftigte sich mit dem *Beobachterentwurf* für reguläre Deskriptorsysteme. Zu Beginn wird in Abschnitt 6.1 die *lokale Beobachtbarkeit* nichtlinearer Deskriptorsysteme hergeleitet, die sich mit wenig Aufwand aus der lokalen Beobachtbarkeit nichtlinearer Zustandssysteme entwickeln lässt. Um den direkten Entwurf eines Beobachters in Deskriptorform zu vermeiden, stellt Satz 6.4 eine neue notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines nichtlinearen, *kausalen Deskriptorbeobachters* zur Verfügung. Darüber hinaus wird der Beobachterentwurf für alle kausal beobachtbaren Deskriptorsysteme auf den Entwurf eines Zustandsbeobachters für ein beobachtbares Zustandssystem übertragen. Da die Ordnung des kausalen Beobachters die dynamische Ordnung des Deskriptorsystems im Allgemeinen übersteigt, beschreibt Abschnitt 6.3, wie sich die Ordnung des Beobachters auf die dynamische Ordnung des Deskriptorsystems verringern lässt.

Am Ende dieses Kapitels findet sich erneut eine Betrachtung linearer Deskriptorsysteme. Indem statt der lokalen Beobachtbarkeit nur noch die Detektierbarkeit des Deskriptorsystems gefordert wird, werden die Ergebnisse für die kausale Beobachtbarkeit erweitert. Es zeigt sich, dass bekannte notwendige und hinreichende Bedingungen äquivalent zu den neuen Anforderungen aus Satz 6.12 sind. Das für nichtlineare Deskriptorsysteme erstmals vorgestellte Ergebnis entspricht daher bei der Anwendung auf lineare Systeme den bekannten Resultaten. Die verringerte Beobachterordnung kann beim linearen, kausalen Beobachter durch den Entwurf eines *reduzierten Beobachters* weiter verkleinert werden, der für alle kausal beobachtbaren Deskriptorsysteme anwendbar ist.

7 Beispielsysteme

Um die praktische Anwendbarkeit der neuen Methoden aufzuzeigen, werden sie in diesem Kapitel an vier Beispielsystemen implementiert und getestet. Das impropere Deskriptormodell eines Dreimassenschwingers veranschaulicht den Entkopplungsentwurf und den kausalen Beobachterentwurf in der Simulation. Der kausale Beobachterentwurf wird außerdem für ein akademisches, nichtlineares und impropere Beispielsystem dargestellt. Die Verladebrücke wird durch Linearisierung zu einem linearen, zeitvarianten Deskriptorsystem, sodass der zeitvariante Riccati-Entwurf daran durchgeführt werden kann. Abschließend stellt der planare Parallelroboter einen komplexen und real existierenden Laborprüfstand dar, für den nicht nur das Simulationsmodell entworfen wird, sondern auch der Entkopplungsregler, die modellgestützte Vorsteuerung, der Trajektorienfolgeregler sowie ein Beobachter.

7.1 Dreimassenschwinger

Systembeschreibung und Modellbildung Das in Bild 7.1 dargestellte System besteht aus drei Massen, die mit zwei starren Stangen verbunden sind, wobei die Stange zwischen m_1 und m_2 von variabler Länge ist. Die Massen m_1 und m_3 sind mit ihrer Umgebung über Feder- und Dämpferelemente verbunden. Die Positionen werden mit x^1 , x^3 und x^5 sowie ihre Geschwindigkeiten mit x^2 , x^4 und x^6 beschrieben. Gemeinsam bilden sie die dynamische Variable $x_1 \in \mathbb{R}^6$. Die algebraische Variable $x_2 \in \mathbb{R}^2$ entspricht der Kraft x^7 zwischen den ersten beiden Massen und der Kraft x^8 zwischen m_2 und m_3 . Auf die dritte Masse wirkt eine Kraft, die als erster Eingang u^1 interpretiert wird. Der zweite Eingang u^2 entspricht dem Abstand der Massen m_1 und m_2 . Es ergibt sich das Deskriptorsystem

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} x^2 \\ -\frac{c_1}{m_1}x^1 - \frac{d_1}{m_1}x^2 + \frac{1}{m_1}x^7 \\ x^4 \\ -\frac{1}{m_2}x^7 + \frac{1}{m_2}x^8 \\ x^6 \\ -\frac{c_2}{m_3}x^5 - \frac{d_2}{m_3}x^6 - \frac{1}{m_3}x^8 + \frac{1}{m_3}u^1 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} -x^1 + x^3 + u^2 \\ -x^3 + x^5 \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

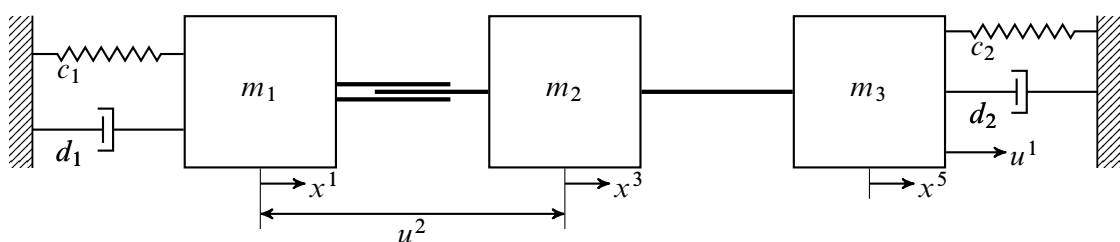


Bild 7.1: Dreimassenschwinger

Tabelle 7.1: Parameter des Dreimassenschwingers

Symbol	Wert	Einheit
c_1	1	N/m
c_2	2	N/m
d_1	0,1	N s/m
d_2	0,3	N s/m
m_1	1	kg
m_2	0,1	kg
m_3	0,2	kg

Durch die Wahl des zweiten Eingangs ist das System improper. Die Parameter des Systems sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst.

Auf den ersten Blick erscheint es widersprüchlich, ein improperes Deskriptormodell eines realen Systems zu berechnen. Dass dies im vorgestellten Beispielsystem doch möglich ist, liegt an einer Vereinfachung bei der Modellbildung. Es ist physikalisch nicht möglich, Positionen sprungförmig zu ändern, obwohl u^2 hier ein Eingang ist. Im realen System stellt u^2 den Ausgang eines nicht modellierten Aktors dar. Wird für $u^2(t)$ ein genügend glatter Verlauf vorgegeben, der durch den Aktor erzeugt werden kann, gibt das Deskriptormodell das physikalische Systemverhalten korrekt wieder.

Für dieses Deskriptorsystem werden im Folgenden zuerst Entkopplungsregler entworfen, die verschiedene Differenzordnungen im geregelten System erzeugen. Anschließend erfolgt der Entwurf eines kausalen Beobachters mit den in Kapitel 6 vorgestellten Verfahren. Die Ausgangsgleichung des Systems unterscheidet sich dabei und wird jeweils angegeben.

Entkopplung mit maximaler Differenzordnung Im Kapitel 4 wird ein Verfahren vorgestellt, welches für Deskriptorsysteme einen Entkopplungsregler entwirft, der die Differenzordnung bei nicht streng properen Deskriptorsystemen verändern kann. Zuerst soll dieser so berechnet werden, dass sich im entkoppelten System die maximale Differenzordnung einstellt. Anschließend wird ein zweiter Regler entworfen, der die Differenzordnung reduziert.

Für den Entkopplungsreglerentwurf wird angenommen, dass die Positionen der beiden Massen die Ausgänge des Systems darstellen, was auf die Ausgangsgleichung

$$y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^5 \end{bmatrix}$$

führt. Die Anwendung von Algorithmus 3.1 auf das System erzeugt mit $c_1^i = 0$, $c_2^i = 0$, $b_0^i = 25$, $b_1^i = 10$ und $b_2^i = 1$ für $i = 1, 2$ sowie den Parametern aus Tabelle 7.1 das verkoppelte System (C.1), welches im Anhang C.1 zusammen mit den Restriktionen und dem Verkopplungsregler zu

finden ist. Die ersten beiden Restriktionen der beiden algebraischen Gleichungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\gamma_{e,0}^1(x_1, u) &= -x^1 + x^3 + u^2 \\ \gamma_{e,1}^1(x_1, u, \dot{u}) &= -x^2 + x^4 + \dot{u}^2 \\ \gamma_{e,0}^2(x_1) &= -x^3 + x^5 \\ \gamma_{e,1}^2(x_1) &= -x^4 + x^6,\end{aligned}$$

womit

$$\Theta = \text{span}\{dx^1, dx^2, dx^3, dx^4, dx^5, dx^6, du^2, d\dot{u}^2\}$$

bestimmt werden kann. Die Ausgangsableitungen

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \begin{bmatrix} x^2 \\ x^6 \end{bmatrix} \\ \ddot{y} &= \begin{bmatrix} -x^1 - 0,1x^2 + x_2^1 \\ -10x^5 - 1,5x^6 - 5x^8 + 5u^1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

führen mit Definition 4.3 auf

$$\begin{aligned}dy^1 &= dx^1 \in \Theta \\ dy^2 &= dx^5 \in \Theta \\ d\dot{y}^1 &= dx^2 \in \Theta \\ d\dot{y}^2 &= dx^6 \in \Theta \\ d\ddot{y}^1 &= -dx^1 - 0,1dx^2 + dx^7 \notin \Theta \\ d\ddot{y}^2 &= -10dx^5 - 1,5dx^6 - 5dx^8 + 5du^1 \notin \Theta\end{aligned}$$

und damit auf $\delta_{m,1} = \delta_{m,2} = 2$. Durch die modifizierten Ausgangsableitungen

$$\begin{aligned}\tilde{y}^1 &= \ddot{y}^1 + \gamma_{e,0}^1(x_1, u) = -2x^1 - 0,1x^2 + x^3 + x^7 + u^2 \\ \tilde{y}^2 &= \ddot{y}^2 = -10x^5 - 1,5x^6 - 5x^8 + 5u^1\end{aligned}$$

wird die Entkopplung mit maximaler Differenzordnung möglich. Wird $a_0^j = 1$, $a_1^j = 2$ mit $j = 1, 2$ für die Vorgabe der entkoppelten Dynamik verwendet, ergibt sich das geregelte Deskriptorsystem

$$\dot{\hat{x}}_1 = \begin{bmatrix} x^2 \\ -x^1 - 0,1x^2 + x^7 \\ x^4 \\ -10x^7 + 10x^8 \\ x^6 \\ -x^5 - 2x^6 + w^2 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} -1,9x^2 - x^7 + w^1 \\ -x^3 + x^5 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^5 \end{bmatrix},$$

das die Übertragungsmatrix

$$G_{R,1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} \end{bmatrix}$$

besitzt.

Entkopplung mit verringerter Differenzordnung Es wird dieselbe Ausgangsgleichung wie zuvor verwendet, sodass auch das verkoppelte Zustandssystem unverändert bleibt. Jedoch erfolgt die Entkopplung mit den modifizierten Ausgangsableitungen

$$\begin{aligned}\tilde{y}^1 &= y^1 + \gamma_{e,0}^1(x_1, u) = x^3 + u^2 \\ \tilde{y}^2 &= \ddot{y}^2 = -10x^5 - 1,5x^6 - 5x^8 + 5u^1.\end{aligned}$$

Für die Entkopplungsdynamik wird wieder $a_0^2 = 1$, $a_1^2 = 2$ gewählt, was das geregelte Deskriptorsystem

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} x^2 \\ -x^1 - 0,1x^2 + x^7 \\ x^4 \\ -10x^7 + 10x^8 \\ x^6 \\ -x^5 - 2x^6 + w^2 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} -x^1 + w^1 \\ -x^3 + x^5 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^5 \end{bmatrix}$$

mit der Übertragungsmatrix

$$G_{R,2}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} \end{bmatrix}$$

erzeugt. Im Vergleich mit $G_{R,1}(\lambda)$ ist gut erkennbar, dass die erste Differenzordnung verändert werden konnte. Selbstverständlich ist auch ein Entwurf mit $\delta_1 = 1$ möglich, da Lemma 4.8 für den ersten Ausgang erfüllt ist. Für den zweiten Ausgang ist keine Veränderung der Differenzordnung möglich, da nur der zweite Eingang auf die Restriktionen wirkt. Damit ist (4.2) für eine verringerte zweite Differenzordnung nicht erfüllbar.

Entwurf eines kausalen Beobachters Für den Entwurf eines kausalen Beobachters wird die Ausgangsgleichung

$$y = x^7$$

verwendet, mit der das langsame Teilsystem der Weierstrass-Kronecker-Form beobachtbar ist. Im Gegensatz zum Beispielsystem aus *Labisch* und *Konigorski* [68] ist der Dreimassenschwinger nicht impulsbeobachtbar. Für die Parameter aus Tabelle 7.1 und mit $c_1^i = 0$, $c_2^i = 0$, $b_0^i = 25$, $b_1^i = 10$ und $b_2^i = 1$ für $i = 1, 2$ erzeugt Algorithmus 3.2 das verkoppelte Zustandssystem (C.2). Offensichtlich besitzt D_e den Rang zwei, sodass das System kausal beobachtbar ist. Mit der Ausgangsgleichung, die zuvor für den Entkopplungsentwurf genutzt wurde, wäre diese Bedingung nicht erfüllt. Das Auflösen der Ausgangsgleichung und Einsetzen in die Systemgleichung führt auf die kausale Prozesskopie (C.3). Es kann direkt ein Zustandsbeobachter für dieses System entworfen werden, wobei mit (C.4) der Deskriptor rekonstruiert werden kann.

Wie beschrieben, lässt sich die Systemordnung weiter reduzieren, da die vier Verkopplungseigenwerte in -5 nicht steuerbar sind. Die balancierte Ordnungsreduktion führt auf die kausale Prozesskopie (C.5) der Ordnung 4. Für dieses System wird ein Luenbergerbeobachter (C.6) mit den

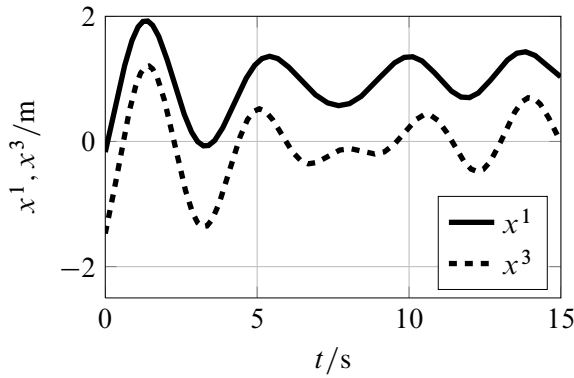


Bild 7.2: Simulation des Dreimassenschwingers (7.1)

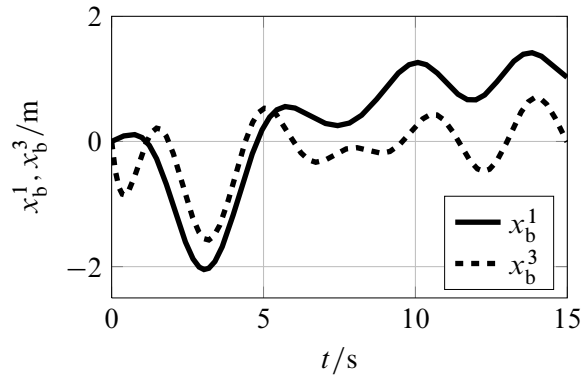


Bild 7.3: Simulation des Luenbergerbeobachters (C.6)

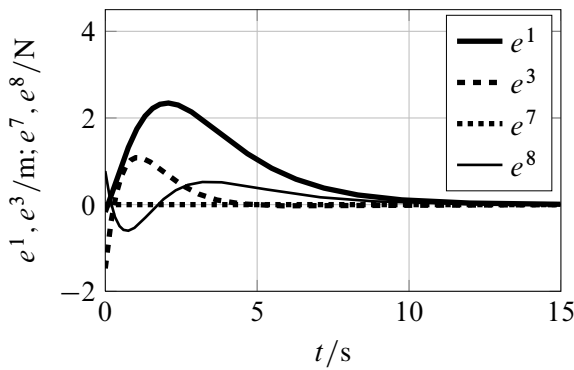


Bild 7.4: Simulation des Beobachterfehlers des Luenbergerbeobachters (C.6)

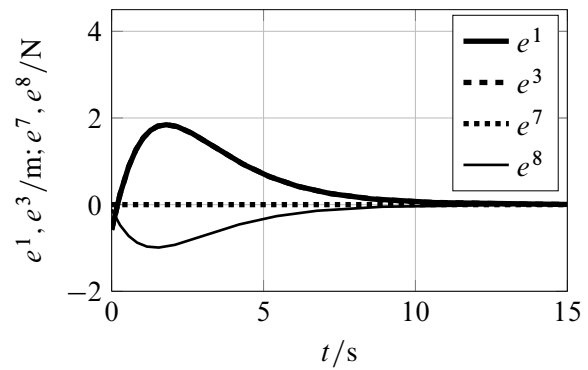


Bild 7.5: Simulation des Beobachterfehlers des reduzierten Beobachters (C.7)

Eigenwerten $\{-0,5, -1, -1,5, -2\}$ und ein reduzierter Beobachter (C.7) mit den Eigenwerten $\{-0,5, -1, -1,5\}$ entworfen. Die Simulation des Deskriptorsystems ist in Bild 7.2 dargestellt, wobei die Anfangswerte des Deskriptorsystems zu

$$x(0) = [-0,17 \quad 2,06 \quad -1,47 \quad 2,06 \quad -1,47 \quad 2,06 \quad 1,52 \quad 1,79]^T$$

gewählt werden und die Eingangsfunktion

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0,1t \\ 1 + 0,3 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

beträgt. Dargestellt sind die Positionen der ersten beiden Massen, da die Position der dritten Masse immer der Position der zweiten Masse entspricht. Die vom Beobachter rekonstruierten Positionen sind in Bild 7.3 zu sehen. Bild 7.4 zeigt den Beobachterfehler $e^i = x^i - x_b^i$ des Luenbergerbeobachters zum Anfangswert $\xi_b(0) = 0$ für die Position ($i = \{1, 3\}$) und die Schnittkräfte ($i = \{7, 8\}$). Auf die Darstellung des Beobachterfehlers der Position der dritten Masse wird verzichtet, da sie wieder dem der zweiten Masse entspricht. Die Kraft x^7 zwischen den ersten beiden Massen steht dem Beobachter direkt als Messgröße zur Verfügung. Da es sich dabei nicht um eine dynamische Variable handelt, verwendet der Luenbergerbeobachter diese direkt als Schätzung, wodurch keine Abweichung in e^7 auftritt. Die Beobachterfehler des reduzierten Beobachters sind

in Bild 7.5 dargestellt, wobei erneut auf den Beobachterfehler der Position der dritten Masse verzichtet wird. Die Beobachterfehler der ersten beiden Massen sind identisch, da sich die entsprechenden Ausgangsfunktionen in (C.7b) nur im Durchgriff unterscheiden. Für beide Beobachter klingen die Beobachterfehler asymptotisch ab, was deutlich zu erkennen ist.

7.2 Akademisches Beispielsystem

In Kapitel 6 wird ein Verfahren zum Entwurf kausaler Beobachter für nichtlineare Deskriptorsysteme vorgestellt. Da es sich beim Dreimassenschwinger um ein lineares Beispielsystem handelt, konnte auch der kausale Beobachter als lineares System berechnet werden. Außerdem wird bei der Anwendung von Algorithmus 3.2 keine Eingangskoodinatentransformation benötigt.

Dieser Abschnitt zeigt den Entwurf eines kausalen Beobachters für ein nichtlineares Deskriptorsystem. Damit die Rechnungen nachvollziehbar bleiben, wird auf die Verwendung eines realen Systems verzichtet und ein nichtlineares, akademisches Beispielsystem

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} u^1 + \cos(x^1) \\ u^2 + x^3 \end{bmatrix} \quad 0 = x^2 + x^1 u^1 + u^2 \quad y = x^3 \quad (7.2)$$

betrachtet. Es besitzt die differentielle Variable $x_1 = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, die algebraische Variable $x_2 = x^3 \in \mathbb{R}$, den Eingang $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ sowie den Ausgang $y \in \mathbb{R}$. Für Eingänge mit $u(t_0) = (\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ stellt

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \arccos(-\hat{u}^1) & -\arccos(-\hat{u}^1)\hat{u}^1 - \hat{u}^2 & -\hat{u}^2 \end{bmatrix}^T$$

einen konsistenten Anfangswert und eine Ruhelage dar. Im weiteren Verlauf wird das Deskriptorsystem mit $\hat{u}^1 = 0,5$ und $\hat{u}^2 = 0$ lokal in einer Umgebung von \hat{x} betrachtet. Eine kurze Untersuchung zeigt, dass \hat{x} eine asymptotisch stabile Ruhelage ist. Die Anwendung von Algorithmus 3.1 führt mit $b_0^1 = 1$, $c_1 = 0$ auf

$$\begin{aligned} \gamma_{e,0}^1 &= x^2 + x^1 u^1 + u^2 \\ \gamma_{e,1}^1 &= u^2 + x^3 + (u^1 + \cos(x^1))u^1 + x^1 \dot{u}^1 + \dot{u}^2 \\ \alpha_e &= -u^2 - (u^1 + \cos(x^1))u^1 - x^1 \dot{u}^1 - \dot{u}^2. \end{aligned}$$

Zuerst wird die Beobachtbarkeit mittels Satz 6.1 überprüft. Für die Berechnung von $d\mathcal{O}(x_1)$ wird $dh_b(x_1, u_0) = d(-u_0^2 - (u_0^1 + \cos(x^1))u_0^1) = -\sin x^1 dx^1$ benötigt, wobei $\sin(x^1) \neq 0$ um \hat{x}^1 gilt. Da offensichtlich $dL_{f_b} h_b \in \text{span}\{dx^1\}$ erfüllt ist, gilt

$$d\mathcal{O}(x_1) = \text{span}\{dx^1\}.$$

Mit $dg_b(x_1, u_0) = dx^2 + \hat{u}^1 dx^1$ und $dL_{f_b} g_b = 0$, was aus $L_{f_b} g_b = \gamma_{e,1}^1 \circ \alpha_e = 0$ folgt, kann

$$d\mathcal{Q}(x_1) = \text{span}\{dx^2 + \hat{u}^1 dx^1\}$$

und damit

$$\dim(d\mathcal{O}(x_1) + d\mathcal{Q}(x_1)) = 2 = r$$

bestimmt werden, woraus die lokale Beobachtbarkeit des Deskriptorsystems folgt.

Algorithmus 3.2 benötigt offensichtlich eine Eingangskoodinatentransformation, da auf $\gamma_{e,0}^1$ sowohl u^1 als auch u^2 wirkt. Die Transformation

$$\beta(x_1, \tilde{v}) = \begin{bmatrix} \tilde{v}^1 \\ x^1 \tilde{v}^2 - x^1 v^1 \end{bmatrix}$$

erfüllt die Voraussetzungen und erzeugt mit $x_u = \tilde{v}_2$, $v^1 = \tilde{v}^1$ und $c_1 = -1$

$$\begin{aligned} \gamma_{m,0}^1 &= x^2 + x^1 x_u \\ \gamma_{m,1}^1 &= x^3 - x^1 \tilde{v}^1 + x^1 x_u + x^1 (\tilde{v}^2 - x_u) + x_u (v^1 + \cos(x^1)) \\ \alpha_m &= x^1 v^1 - x^2 - x^1 v^2 - x_u v^1 - x^1 x_u - x_u \cos(x^1) \\ \dot{x}_u &= c_1 x_u + v_2 . \end{aligned}$$

Es ergibt sich die erweiterte verkoppelte Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \begin{bmatrix} \cos(x^1) + v^1 \\ -x^2 - x^1 v^2 - x_u v^1 - x_u \cos(x^1) \\ -x_u + v^2 \end{bmatrix} \\ y_e &= \begin{bmatrix} x^1 v^1 - x^2 - x^1 v^2 - x_u v^1 - x^1 x_u - x_u \cos(x^1) \\ v^1 \\ x^1 x_u - x^1 v^1 \\ x^2 + x^1 x_u \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

deren erweiterte Ausgangsgleichung nach v aufgelöst werden kann, was auf

$$v = \begin{bmatrix} u^1 \\ -\frac{1}{x^1} (x^2 + y - x^1 u^1 + x_u u^1 + x^1 x_u + x_u \cos(x^1)) \end{bmatrix}$$

führt. Einsetzen in die erweiterte verkoppelte Zustandsraumdarstellung erzeugt die kausale Prozesskopie

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \begin{bmatrix} \cos(x^1) + u^1 \\ y - x^1 u^1 + x^1 x_u \\ u^1 - 2x_u - \frac{1}{x^1} (x^2 + y + x_u u^1 + x_u \cos(x^1)) \end{bmatrix} = f_k(x_e, y_e) \\ \tilde{y}_e &= \begin{bmatrix} y \\ u^1 \\ x^1 x_u - x^1 u^1 \\ x^2 + x^1 x_u \end{bmatrix} = h_k(x_e, y_e) \\ x_b &= \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \end{bmatrix} = c_b(x_e, y_e) , \end{aligned}$$

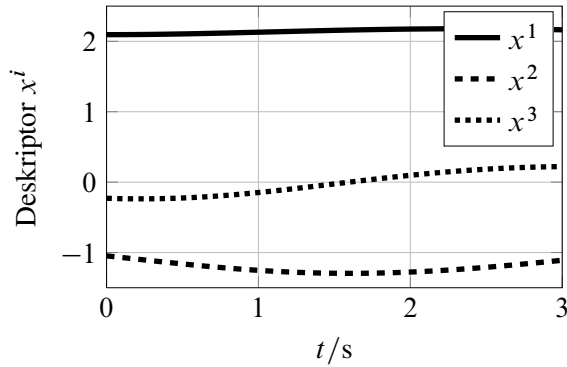


Bild 7.6: Simulation des Beispielsystems (7.2)

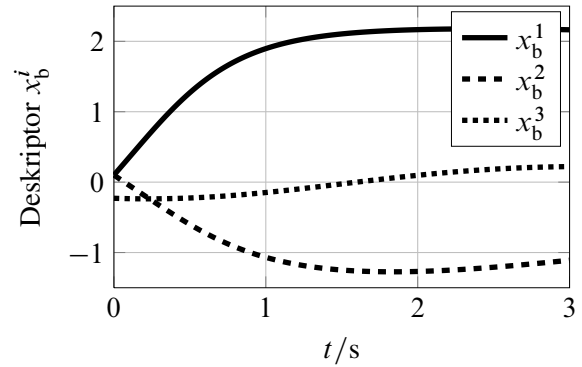


Bild 7.7: Simulation des Beobachters (7.3)

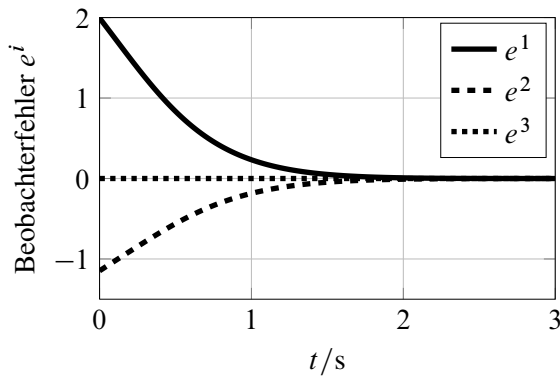


Bild 7.8: Simulation des Beobachterfehlers

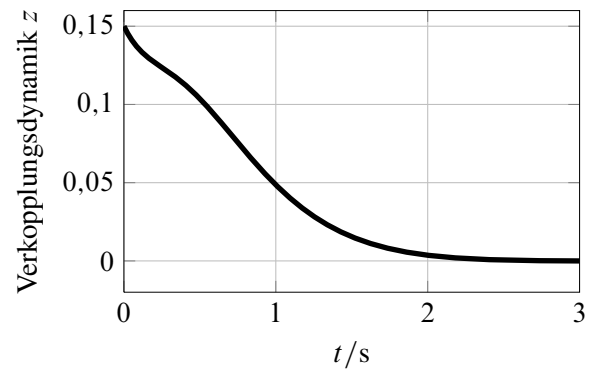


Bild 7.9: Simulation der Verkopplungsdynamik des Beobachters (7.3)

die lokal beobachtbar ist.

Die lineare Ausgangsaufschaltung mit der Beobachtermatrix

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

erzeugt einen nichtlinearen Arbeitspunktbeobachter

$$\dot{\xi}_b = f_k(\xi_b, y_e) + L(y_e - h_k(\xi_b, y_e)) \quad (7.3a)$$

$$x_b = c_b(\xi_b, y_e) \quad (7.3b)$$

für die kausale Prozesskopie, der als Beobachter für das Deskriptorsystem verwendet wird. Dieser besitzt eine asymptotisch stabile Beobachterfehlerdynamik um $\hat{\xi}_b = (\hat{x}, \hat{u}^1 + \hat{u}^2/\hat{x}^1)$.

In der Simulation zur Validierung des Entwurfs wird das Deskriptorsystem mit dem konsistenten Anfangswert \hat{x} zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ initialisiert. Als Eingangsfunktion wird

$$u(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}^1 + 0,1 \sin(t) \\ \hat{u}^2 + 0,01 \sin(2t) \end{bmatrix}$$

gewählt. Der Beobachter beginnt bei einem Anfangswert von $\xi_b^1(t_0) = \xi_b^2(t_0) = \xi_b^3(t_0) = 0,1$.

In Bild 7.6 ist der Verlauf des Deskriptors dargestellt. Bild 7.7 zeigt den Verlauf des vom Beobachter rekonstruierten Deskriptors, wobei der Einschwingvorgang des Beobachterfehlers in Bild 7.8 zu sehen ist. Es ist gut zu erkennen, dass die Fehlerdynamik asymptotisch abklingt. Obwohl das Verfahren nur lokal in einer Umgebung von \hat{x} gültig ist, konvergiert der Beobachter für dieses System auch nach einem deutlichen Beobachterfehler zu Beginn. Der Einfluss der Verkopplungsdynamik wird in Bild 7.9 sichtbar. Hier ist der Verlauf von z für den Beobachter dargestellt. Da der Anfangswert des Beobachters keinem konsistenten Anfangswert des Deskriptorsystems entspricht, liegt der Beobachterzustand zu Beginn nicht auf \mathcal{N}_m . Asymptotisch verläuft die Lösung des Beobachters jedoch auf \mathcal{N}_m . Durch den Beobachterentwurf wird auch die Verkopplungsdynamik beeinflusst, da sie nicht steuerbar, aber über z beobachtbar ist. Deshalb besitzt der Beobachter im Allgemeinen keine lineare Verkopplungsdynamik.

7.3 Verladebrücke

Systembeschreibung und Modellbildung Verladebrücken sind häufig in Häfen anzutreffen und werden auch als Portalkräne bezeichnet. Das Einsatzgebiet umfasst vor allem das Be- und Entladen von Containerschiffen. In Bild 7.10 ist ein Labormodell einer solchen Verladebrücke schematisch dargestellt, die bereits in *Manderla* [81] sowie *Labisch* und *Konigorski* [69] vorgestellt wird. Sie besteht aus einer Laufkatze, die sich entlang einer horizontalen Führung reibungsfrei bewegen kann. Die Last wird als Stab modelliert, der an der Laufkatze mit einem ebenfalls reibungsfreien Drehgelenk befestigt ist. Der Stab kann seine Länge verändern, wobei

$$l(t) = 0,6 \text{ m} + 0,1 \text{ m} \cdot \sin(t)$$

gilt. Bei der Modellierung des zeitvarianten Systems mit variabler Pendelstablänge ist offensichtlich das Trägheitsmoment des Stabes Θ_s zeitvariant, da es von der Länge abhängt. Die verwendeten Parameter sind in Tabelle 7.2 aufgeführt. Die Zerlegung in die beiden Teilsysteme Laufkatze und Pendelstab, wie in Bild 7.11 dargestellt, macht die Schnittkräfte sichtbar. Im Gegensatz zur Modellbildung in *Manderla* [81] erfolgt die Modellierung aufgrund der Zeitvarianz der Parameter $l(t)$ und $\Theta(t)$ durch den Lagrange-Formalismus. Mit der Lagrange-Funktion

$$L = 0,5m_w\dot{x}_w^2 + 0,5m_s\dot{x}_s^2 + 0,5m_s\dot{y}_s^2 + 0,5\Theta_s(t)\dot{\alpha}^2 - y_s m_s g$$

Tabelle 7.2: Parameter der Verladebrücke

Parameter		Wert	Einheit
Erdbeschleunigung	g	9,81	m/s ²
Masse Laufkatze	m_w	2,00	kg
Masse Stab	m_s	0,50	kg
Trägheitsmoment Stab	$\Theta_s(t)$	$\frac{1}{12}m_s l^2(t)$	kg m ²

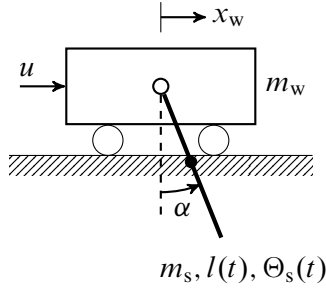


Bild 7.10: Verladebrücke mit Pendelstab ([81])

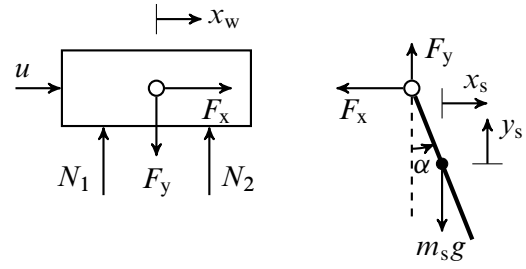


Bild 7.11: Freikörperbild der Verladebrücke ([81])

ergeben sich die Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x}_w} L - \partial_{x_w} L - F_{g,1} = m_w \ddot{x}_w - u - F_x \\
 0 &= \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x}_s} L - \partial_{x_s} L - F_{g,2} = m_s \ddot{x}_s + F_x \\
 0 &= \frac{d}{dt} \partial_{\dot{y}_s} L - \partial_{y_s} L - F_{g,3} = m_s \ddot{y}_s + m_s g - F_y \\
 0 &= \frac{d}{dt} \partial_{\dot{\alpha}} L - \partial_{\alpha} L - F_{g,4} = \Theta_s(t) \ddot{\alpha} + \dot{\Theta}_s(t) \dot{\alpha} - 0,5l(t) F_x \cos(\alpha) + 0,5l(t) F_y \sin(\alpha)
 \end{aligned}$$

und die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 0 &= x_w - x_s + 0,5l(t) \sin(\alpha) \\
 0 &= y_s + 0,5l(t) \cos(\alpha) ,
 \end{aligned}$$

wobei $F_{g,i}$ die jeweiligen generalisierten Kräfte kennzeichnen. Die Linearisierung des sich daraus ergebenden nichtlinearen Deskriptorsystems um $x_{w,0} = x_{s,0} = y_{s,0} = 0, \alpha_0 = 0$ sowie $F_{x,0} = 0$ und $F_{y,0} = m_s g$ führt direkt auf $\Delta y_s = 0, \Delta \dot{y}_s = 0$ und $\Delta F_y = 0$, sodass diese Variablen für eine kompaktere Darstellung entfallen. Damit ergibt sich das lineare zeitvariante Deskriptorsystem

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_w \\ \Delta \dot{x}_s \\ \Delta \dot{\alpha} \\ \frac{1}{m_w} (\Delta F_x + \Delta u) \\ -\frac{1}{m_s} \Delta F_x \\ \frac{1}{\Theta_s(t)} \left(-0,5m_s g l(t) \Delta \alpha + 0,5l(t) \Delta F_x - \dot{\Theta}_s(t) \Delta \dot{\alpha} \right) \end{bmatrix} \quad (7.4a)$$

$$0 = \Delta x_w - \Delta x_s + 0,5l(t) \Delta \alpha \quad (7.4b)$$

mit den differentiellen Variablen $x_1^T = [\Delta x_w \quad \Delta x_s \quad \Delta \alpha \quad \Delta \dot{x}_w \quad \Delta \dot{x}_s \quad \Delta \dot{\alpha}] \in \mathbb{R}^6$, der algebraischen Variable $x_2 = \Delta F_x \in \mathbb{R}$ und dem Eingang $\Delta u \in \mathbb{R}$.

Zeitvarianter Riccati-Entwurf Auf das Deskriptorsystem (7.4) kann der Algorithmus 5.1 angewandt werden. Die Parameter $b_0^1 = 12$ und $b_1^1 = 7$ erzeugen die Verkopplungsdynamik mit den

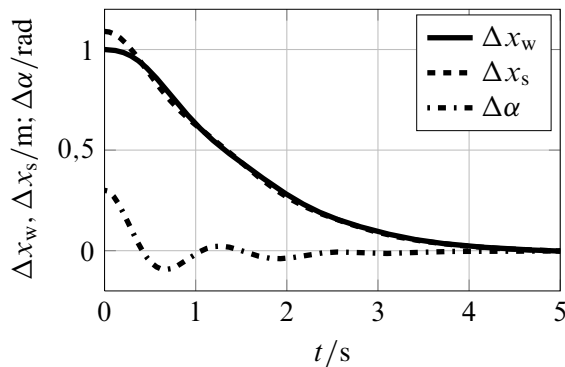


Bild 7.12: Simulation der zeitvarianten Verladebrücke (7.4)

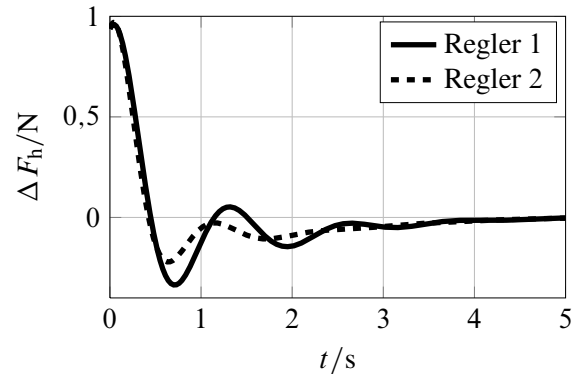


Bild 7.13: Vergleich der entworfenen Regler bezüglich der Schnittkraft

Eigenwerten -3 und -4 . Der Verkopplungsregler ergibt sich unter Beachtung der Parameter zu

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{24}{17} & \frac{24}{17} & \frac{2583-55 \sin(t)-35 \cos(t)}{850} & -\frac{14}{17} & \frac{14}{17} & -\frac{7 \sin(t)+42}{170} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} \\ 1 \end{bmatrix} v.$$

Die Lösung der Matrix-Riccatidifferentialgleichung (5.16) mit $t_0 = 0$ s und $t_e = 5$ s erfolgt mit den Gewichtungsmatrizen

$$\begin{aligned} M_{xx}^{11} &= 5I & M_{xx}^{12} &= 0 & M_{xu}^1 &= 0 \\ M_{xx}^{21} &= 0 & M_{xx}^{22} &= 1 & M_{xu}^2 &= 0 \\ M_{ux}^1 &= 0 & M_{ux}^2 &= 0 & M_{uu} &= 1 \\ M_{xe} &= 2I \end{aligned}$$

für das Gütemaß (5.13). Aus der Lösung der Riccatidifferentialgleichung wird anschließend der zeitvariable Riccatiregler berechnet und auf das Modell (7.4) der Verladebrücke angewandt. In Bild 7.12 sind die Positionen der Laufkatze und des Pendelstabes sowie der Winkel des Pendelstabes für das geregelte Deskriptorsystem dargestellt. Der konsistente Anfangswert der Simulation beträgt $x^T(0) = [1 \quad 1,09 \quad 0,3 \quad -0,015 \quad 0 \quad 0 \quad 0,938]$. Es ist gut zu erkennen, dass der Riccatiregler das Deskriptorsystem innerhalb von 5 Sekunden in die stabile Ruhelage $x = 0$ überführt.

Um die Möglichkeiten des Riccati-Entwurfs speziell bei Deskriptorsystemen zu nutzen, wird noch ein zweiter Regler entworfen, bei dem die Gewichtung der Schnittkraft F_x auf $M_{xx}^{22} = 2$ verdoppelt ist. Bild 7.13 zeigt den Verlauf der Schnittkraft für beide Regler im Vergleich. Die Reduzierung der benötigten Schnittkraft aufgrund der stärkeren Gewichtung im Gütemaß ist deutlich zu erkennen.

7.4 Parallelroboter

Systembeschreibung und Modellbildung In Bild 7.14 ist der am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik des Instituts für Automatisierungstechnik und Mechatronik aufgebaute Parallelroboter zu sehen, dessen mechanische Struktur in Bild 7.15 dargestellt ist. Er besitzt drei Arme,

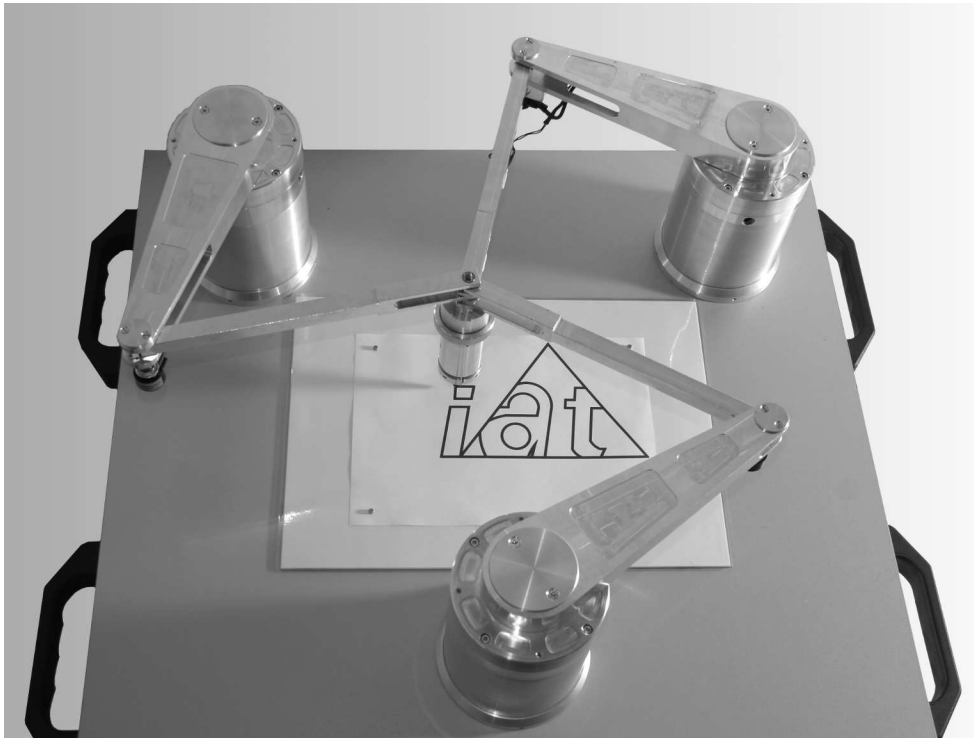


Bild 7.14: Parallelroboter am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik

die sich in der horizontalen Ebene, die im Bild 7.15 als z^1 - z^2 -Ebene gekennzeichnet ist, bewegen können. Jeder Arm besteht aus zwei Drehgelenken, die sich um die z^3 -Achse drehen können. Die drei Arme sind am jeweiligen Ende fest in einem weiteren Drehgelenk miteinander verbunden, was den Endeffektor (engl. Tool-Center-Point, TCP) des Roboters darstellt. Die drei Antriebe des Parallelroboters sitzen jeweils im ersten Gelenk jedes Armes und erzeugen dort die Momente u^1 , u^2 und u^3 . Es handelt sich um permanent erregte Synchronmotoren mit integrierten Drehwinkelgebern, die über ein Getriebe mit den Armen verbunden sind. Alle Größen werden immer auf die Getriebeausgangsseite bezogen. Der Drehwinkelgeber erfasst die Winkel der jeweiligen Gelenke, welche als aktive Gelenke bezeichnet werden. Die zweiten Gelenke jedes Armes, die passiven Gelenke, sind mit einem gesonderten Absolutwinkelgeber bestückt. Neben der Aufzeichnung der Winkel kann die Bewegung des Parallelroboters durch den am Endeffektor montierten Stift auf einem Blatt erfasst werden, das unter den Armen auf die Bodenplatte geklemmt ist. Der Stift kann mithilfe eines elektromagnetischen Aktors angehoben und abgesenkt werden, sodass beliebige Konturen gezeichnet werden können. Die mechanischen Parameter des Parallelroboters sind im Anhang C.2 angegeben.

Insgesamt besitzt der Aufbau drei Antriebe, deren Momente die Eingangsgrößen des Systems darstellen, und sechs Winkelsensoren, die die Messgrößen erfassen, obwohl der Parallelroboter lediglich zwei mechanische Freiheitsgrade aufweist. Die Antriebsredundanz wird für eine gezielte Verspannung der Struktur verwendet. Auch ein antriebsfehlertolerantes Regelungskonzept wäre denkbar.

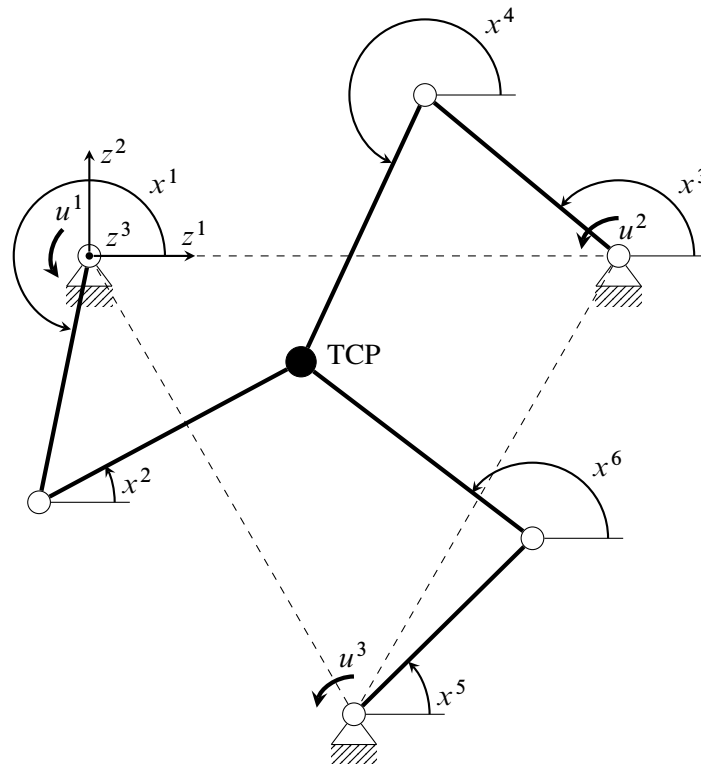


Bild 7.15: Strukturbild des Parallelroboters

Obwohl bereits mit zwei Winkeln die Stellung des gesamten Parallelroboters eindeutig festliegt, werden alle Winkel erfasst. Neben der Möglichkeit, das Messrauschen durch die Redundanz zu reduzieren, ergibt sich noch ein zweiter Vorteil aus den überzähligen Messungen: aus den Messdaten kann neben der Position noch der Offset jedes Winkelsensors geschätzt werden, was detailliert in *Schmitt* [116] beschrieben ist. Trotzdem verbleiben noch kleine Sensoroffsets.

Am Parallelroboter finden einige in dieser Arbeit beschriebene Entwürfe eine praktische Anwendung. Die Simulation erfolgt mit dem Simulationsmodell aus Abschnitt 3.5.1, der in Abschnitt 4.1 beschriebene Entkopplungsregler wird für das Vorsteuerungskonzept aus Abschnitt 4.1.7 entworfen und beim linearen Trajektorienfolgeregler handelt es sich um einen zeitvarianten Riccati-Regler aus Kapitel 5.

Der Parallelroboter zeigt deutlich, welche Vorteile die Aufteilung in modulare Teilsysteme für die Modellbildung bietet. Soll der Parallelroboter direkt als Gesamtsystem modelliert werden, so steht am Anfang die Auswahl von Minimalkoordinaten. Diese Wahl ist nicht eindeutig; so sind zwei beliebige Gelenkwinkel oder auch die Position des Endeffektors als Minimalkoordinaten geeignet. Durch die nichtlinearen Abhängigkeiten der übrigen Koordinaten von den Minimalkoordinaten ergibt sich zum Beispiel bei der Modellierung mit dem Formalismus von Lagrange eine sehr große und umfangreiche Lagrange-Funktion, die auf komplexe Bewegungsgleichungen führt. Die berechneten Funktionen der Zustandsraumdarstellung sind schlussendlich so groß und unübersichtlich, dass numerische Simulationen sehr rechenintensiv und langsam sind. Die symbolische Manipulation des Zustandssystems, zum Beispiel für einen nichtlinearen Reglerentwurf, ist selbst mit modernen Rechnern und Softwarepaketen nur mit einer großen Rechenzeit möglich.

Im Gegensatz dazu liefert das Freischneiden am Endeffektor drei identische Teilsysteme, die sich einfach modellieren lassen. Die Wahl der beiden Gelenkwinkel als Minimalkoordinaten führt sehr schnell zu einer kompakten und übersichtlichen Zustandsraumdarstellung eines Teilsystems. Vier unabhängige, holonome Zwangsbedingungen – die z^1 - und z^2 -Positionen der drei Einzelarme müssen übereinstimmen – verkoppeln anschließend die drei Teilsysteme. Die Kombination der drei Zustandssysteme mit den algebraischen Zwangsbedingungen entspricht einem Deskriptorsystem in der semi-expliziten Form. Dieses Deskriptorsystem ist weiterhin übersichtlich und besteht aus vergleichsweise kompakten, nichtlinearen Funktionen.

Die modulare Modellbildung des Parallelroboters ist in *Manderla* u. a. [85] bzw. *Manderla* [81] ausführlich beschrieben, wobei die Parameter des Aufbaus dieser Arbeit im Anhang C.2 in Tabelle C.1 zu finden sind. Das dabei entstehende Deskriptorsystem

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u) \quad (7.5a)$$

$$0 = g(x_1) \quad (7.5b)$$

$$y = h(x_1) \quad (7.5c)$$

$$y_r = h_r(x_1) \quad (7.5d)$$

liegt in der semi-expliziten Form vor. Die ersten 6 Einträge der differentiellen Variable $x_1 \in (\mathbb{S}^6 \times \mathbb{R}^6)$ sind die in Bild 7.15 dargestellten Winkel in Radianten. Die übrigen Einträge entsprechen den Winkelgeschwindigkeiten mit $x^{i+6} = \dot{x}^i$ für $1 \leq i \leq 6$ (in rad/s). Die algebraische Variable $x_2 \in \mathbb{R}^4$ besteht aus den Schnittkräften am Endeffektor (in N), wobei x_2^1 und x_2^2 die Kräfte in z^1 - und z^2 -Richtung am ersten Teilsystem sowie x_2^3 und x_2^4 die Kräfte in z^1 - und z^2 -Richtung am zweiten Teilsystem bezeichnen. Die Kräfte am dritten Teilsystem ergeben sich direkt aus diesen und treten nicht gesondert im Modell auf. Die Eingangsmomente $u \in \mathbb{R}^3$ (in Nm) sind ebenfalls in Bild 7.15 eingezeichnet. Als Messgrößen $y \in \mathbb{R}^6$ stehen die sechs Winkel zur Verfügung, aus denen die Position des Endeffektors berechnet werden kann, die den ersten Teil der Regelgröße darstellt. Um die Antriebsredundanz nutzen zu können, wird eine weitere Regelgröße hinzugefügt: die Summe der Eingangsmomente. Diese Summe steht stellvertretend für die Verspannung im System und soll gezielt vorgegeben werden. Damit besitzt die Regelgröße $y_r \in \mathbb{R}^3$ dieselbe Dimension wie der Eingang.

Auch wenn die Darstellung des Vektorfeldes f bereits zu umfangreich für diese Arbeit ist, führt eine Modellierung in Zustandsform, wie beschreiben, zu erheblich größeren Systemgleichungen. Die algebraische Gleichung

$$g(x_1) = \begin{bmatrix} 0,50 - 0,24 \cos(x^1) - 0,28 \cos(x^2) + 0,24 \cos(x^3) + 0,28 \cos(x^4) \\ -0,24 \sin(x^1) - 0,28 \sin(x^2) + 0,24 \sin(x^3) + 0,28 \sin(x^4) \\ 0,25 - 0,24 \cos(x^1) - 0,28 \cos(x^2) + 0,24 \cos(x^5) + 0,28 \cos(x^6) \\ -0,44 - 0,24 \sin(x^1) - 0,28 \sin(x^2) + 0,24 \sin(x^5) + 0,28 \sin(x^6) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

ist dagegen kompakt und übersichtlich.

Die Berechnung der verkoppelten Zustandsraumdarstellung (3.13) für das Deskriptorsystem, die mit dem Computer-Algebra-System *Mathematica* durchgeführt wurde, zeigt, dass es regulär und

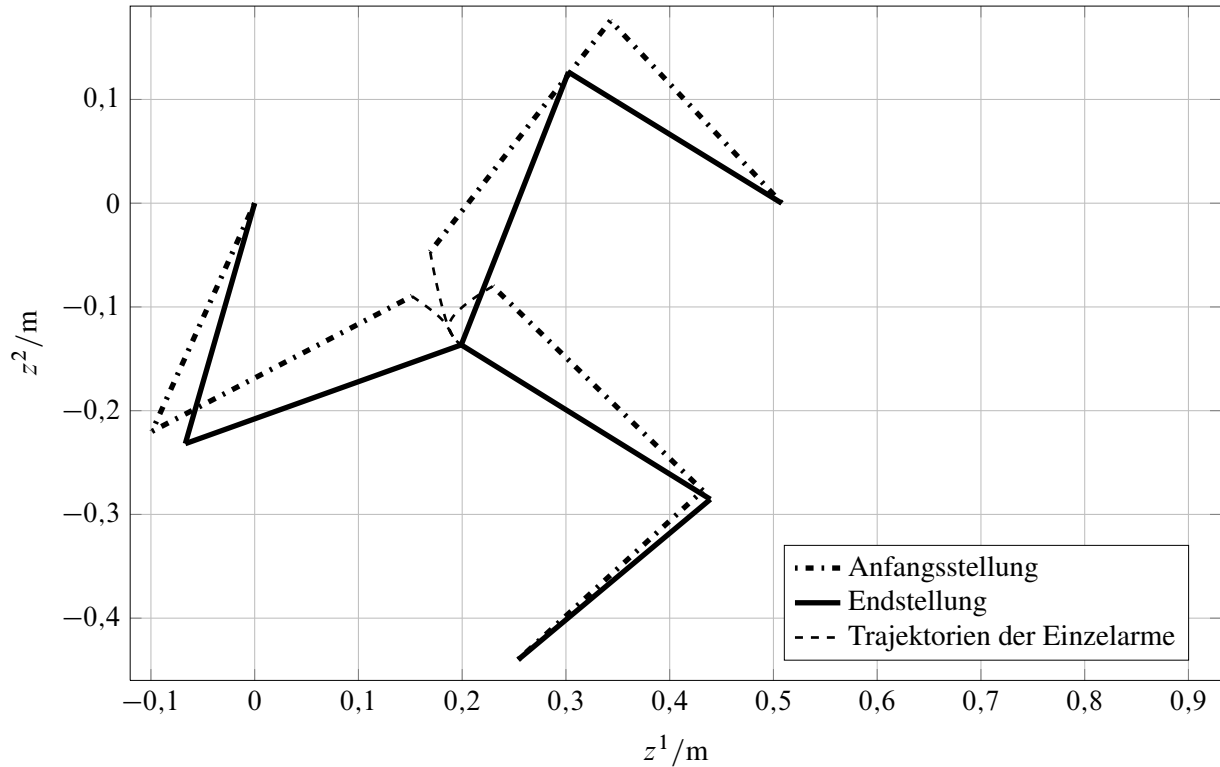


Bild 7.16: Simulation des Parallelroboters mit inkonsistenten Anfangswerten

proper, aber nicht streng proper ist, was durch physikalische Überlegungen bestätigt wird. Außerdem ist das Deskriptorsystem bezüglich $\langle y_r, u \rangle$ invertierbar, da die verkoppelte Zustandsraumdarstellung sogar entkoppelbar ist.

Simulationsmodell Um das Deskriptorsystem wie in Abschnitt 3.5.1 beschrieben zu simulieren, wird die verkoppelte Darstellung (3.13) verwendet. Bei der Durchführung von Algorithmus 3.1 wird keine dynamische Erweiterung erzeugt, da das Deskriptorsystem proper ist. Jede der vier algebraischen Gleichungen (7.6) lässt sich nach zwei Ableitungen nach den algebraischen Variablen auflösen, sodass jeweils zwei Verkopplungseigenwerte vorgegeben werden können. Die Parameter $b_0^j = 2$ und $b_1^j = 3$ für $j = 1, \dots, 4$ legen diese für eine erste Simulation nach -1 und -2 .

Um die Leistungsfähigkeit des Verkopplungsreglers zu demonstrieren, erfolgt die Anregung der Verkopplungsdynamik durch die Wahl inkonsistenter Anfangswerte

$$\hat{x}_1 = [4,29 \quad 0,48 \quad 2,32 \quad 4,05 \quad 0,74 \quad 2,37 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\hat{x}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

wobei die Winkel in Radianen angegeben sind. In Bild 7.16 sind die Verläufe der einzelnen Armenden dargestellt. Der Verkopplungsregler bewirkt ein sofortiges Abklingen der Armabstände. Am Ende der Simulation betragen die Gelenkwinkel

$$y_{\text{mess}} = [4,43 \quad 0,34 \quad 2,59 \quad 4,34 \quad 0,70 \quad 2,59]^T,$$

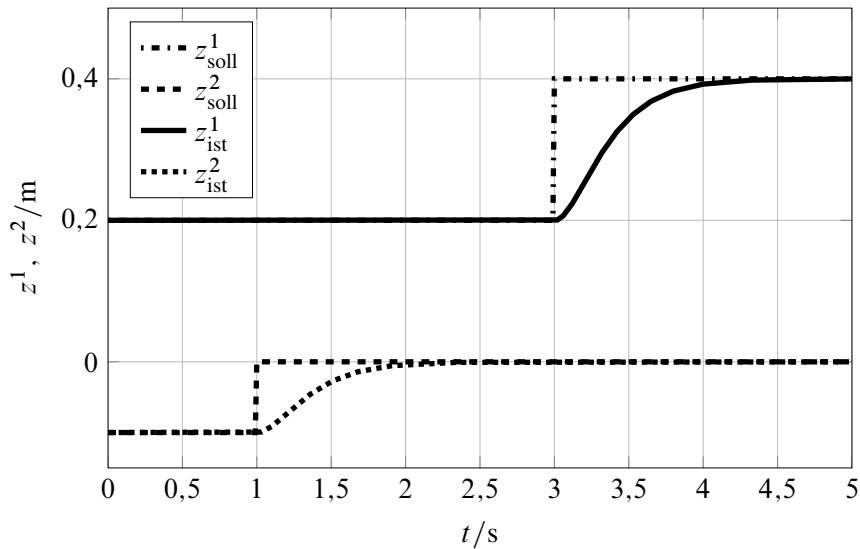


Bild 7.17: Simulation des Parallelroboters mit Entkopplungsregler

womit ohne zusätzlichen Aufwand ein konsistenter Anfangswert für weitere Simulationen berechnet wird. Für die weitere Verwendung der verkoppelten Zustandsraumdarstellung werden die Verkopplungseigenwerte mit $b_0^j = 625$ und $b_1^j = 50$ für $j = 1, \dots, 4$ nach -25 gelegt.

Entkopplung Eine beliebige Positionierung des Endeffektors in der z^1 - z^2 -Ebene ist mit einem Entkopplungsregler möglich. Neben der Position dient die Verspannung der Struktur, also die Summe der Eingangsmomente, als dritte Regelgröße. Bei der Analyse des Deskriptorsystems zeigt sich, dass es nach Satz 4.7 und Lemma 4.10 entkoppelt werden kann. Für die Regelung des Parallelroboters bietet sich die Entkopplung nach Lemma 4.10 an, da dabei lediglich die differentiellen Variablen durch den Regler zurückgeführt werden.

Die Differenzordnungen des Deskriptorsystems ergeben sich zu $\delta_1 = \delta_2 = 2$ und $\delta_3 = 0$. Da das Deskriptorsystem proper ist, gilt für die maximalen Differenzordnungen $\delta_{m,1} = \delta_{m,2} = 2$ und $\delta_{m,3} = 0$. Der Entwurf des Entkopplungsreglers nach Lemma 4.10 verändert die Differenzordnungen nicht. Durch die Wahl der Parameter $a_0^i = 25$, $a_1^i = 10$, $i \in \{1, 2\}$ erhalten die PT_2 -Glieder, die auf die Position des Endeffektors wirken, jeweils einen doppelten Pol bei -5 . Der Entkopplungsregler kann die Summe der Eingangsmomente ohne dynamische Verzögerung einstellen, sodass sich ein P-Verhalten ergibt. Ohne weitere Berechnungen folgt aus Lemma 4.15, dass das geregelte Deskriptorsystem mit der Systemordnung $r = 12$ keine Nulldynamik besitzt, da 8 Restriktionen existieren und die Summe der Differenzordnungen 4 ist. Das unregelte Deskriptorsystem enthält wegen Satz 4.13 ebenfalls keine Nulldynamik. Viel wichtiger ist die Tatsache, dass damit das geregelte Deskriptorsystem immer stabil entkoppelbar ist und der entworfene Entkopplungsregler eingesetzt werden kann.

In der Simulation, bei der keine Modellfehler auftreten und der gesamte Deskriptor bekannt ist, ergibt sich genau die vorgegebene Ein-/Ausgangsdynamik. Dieses PT_2 -Verhalten ist für einen Sprung in beiden Sollpositionen in Bild 7.17 dargestellt. Die Anfangswerte sind konsistent und so gewählt, dass der Endeffektor zu Beginn die Position $(0,2 \text{ m} \mid -0,1 \text{ m})$ besitzt. Deutlich zu

erkennen ist das entkoppelte Verhalten, da die Bewegung in z^2 -Richtung keinen Einfluss auf die z^1 -Position besitzt und umgekehrt.

Die Verwendung des Entkopplungsreglers als Regler für den realen Aufbau ist prinzipiell möglich, wenn ein Beobachter eingesetzt wird, um die nicht gemessenen differentiellen Variablen zu rekonstruieren. Die Nutzung einer Vorsteuerung zusammen mit einem linearen Trajektorienfolgeregler zeigt jedoch erheblich bessere Ergebnisse, weshalb der Entkopplungsregler am realen System keine direkte Anwendung findet. In Hinblick auf die dynamische, modellgestützte Vorsteuerung aus Abschnitt 4.1.7 erfolgt noch ein weiterer Entwurf eines Entkopplungsreglers, wobei dieser die Differenzordnung auf Basis von Satz 4.7 reduziert.

Die benötigten modifizierten Ausgangsgleichungen müssen dabei so gewählt werden, dass sie vom Eingang abhängen und ihre Jacobi-Matrix bezüglich des Eingangs regulär ist. Die dritte Regelgröße, die Verspannung des Systems, hängt direkt von den Eingängen ab und muss daher nicht modifiziert werden. Zur Funktion $h_r^1(x_1)$ aus (7.5), die die z^1 -Position des Endeffektors berechnet, wird die 2. Ableitung der ersten algebraischen Gleichung (7.6) addiert. Die Summe aus $h_r^2(x_1)$ und der 2. Ableitung der zweiten algebraischen Gleichung (7.6) vervollständigt die modifizierte Ausgangsfunktion, deren Jacobi-Matrix bezüglich des Eingangs regulär ist. Damit ist nach Satz 4.7 die Entkopplung mit den Differenzordnungen $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ möglich und ein entsprechender Entkopplungsregler wird berechnet.

Vorsteuerungsentwurf Da der Parallelroboter vorgegebene Trajektorien abfahren soll, ist die Verwendung einer Vorsteuerung zu empfehlen. Die modellgestützte Vorsteuerung aus Abschnitt 4.1.7 bietet eine einfache Möglichkeit, das komplexe, nichtlineare System vorzusteuern.

Für die Vorsteuerung wird der Entkopplungsregler mit $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ verwendet. Wie in Abschnitt 4.1.6 ausführlich beschrieben, muss für die Simulation des geregelten Deskriptorsystems ein eigenes verkoppeltes Zustandssystem mit Algorithmus 3.1 berechnet werden. Daraus ergibt sich dieselbe Vorsteuerungsstruktur, wie bereits in Bild 4.2 dargestellt.

Die benötigte Trajektoriengenerierung muss nicht nur einen Sollverlauf y_{soll} für die Endeffektorposition zur Verfügung stellen, sondern auch die Ableitungen \dot{y}_{soll} und \ddot{y}_{soll} . Die Parametrierung der Trajektorien erfolgt mithilfe von *nichtuniformen, rationalen Bézier-Splines* (NURBS, siehe [104]). *Barthel* [6] beschreibt ausführlich, wie aus dieser Beschreibungsform die für den Parallelroboter benötigten Ableitungen entstehen.

Trajektorienfolgeregelung Als Trajektorienfolgeregler kommt der in Kapitel 5 beschriebene zeitvariante Riccatiregler zum Einsatz. Grundlage ist die Linearisierung des Deskriptorsystems entlang der Trajektorie, um zu einem linearen, zeitvarianten Deskriptorsystem zu gelangen. Für dieses System kann, wie in Kapitel 5 gezeigt, ein zeitvarianter Riccatiregler entworfen werden. Deutlich bessere Ergebnisse erzielt dieser bei Erweiterung um einen I-Anteil, da er dann stückweise konstante Störungen stationär genau ausregeln kann. Die Abweichung der Endeffektorposition von der Trajektorie wird integriert und in ein erweitertes Deskriptorsystem aufgenommen. Die

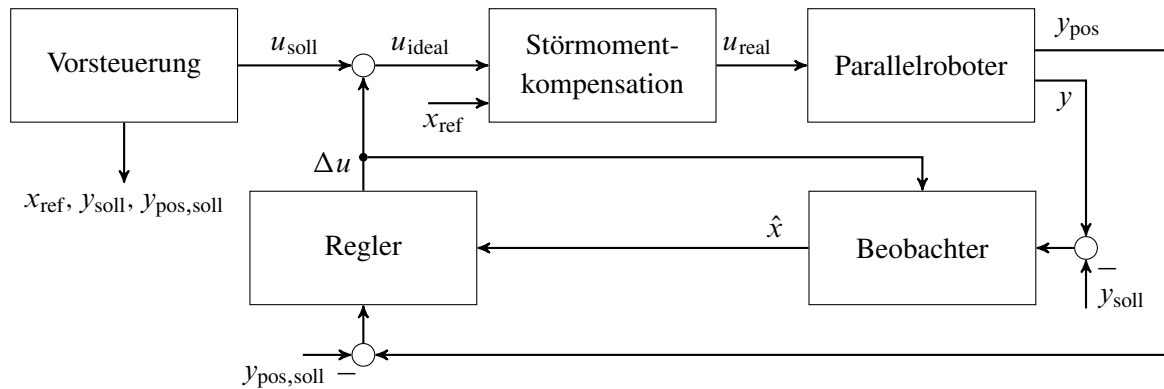


Bild 7.18: Regelungsstruktur

Gewichtungsmatrizen des Riccati-Entwurfs für dieses System sind im Anhang C.2 in (C.8) aufgeführt.

Die Matrix M_s , die in (5.18) die Übertragung des Riccatireglers auf das Deskriptorsystem ermöglicht, kann als Nullmatrix gewählt werden, da das Deskriptorsystem proper ist. Daher erfolgt keine Rückführung der algebraischen Variablen in (5.20).

Zeitvariantes Kalmanfilter Da der Riccatiregler alle differentiellen Variablen des Deskriptorsystems zurückführt, wird zusätzlich ein Beobachter benötigt, der als kausaler Beobachter implementiert ist. Für das propere Deskriptorsystem stellt dies jedoch keinen zusätzlichen Aufwand dar. Dual zum Trajektorienfolgeregler wird ein zeitvariantes Kalmanfilter für das entlang der Trajektorie linearisierte System entworfen, wobei die Gewichtungsmatrizen im Anhang C.2 zu finden sind.

Gesamtregelung Neben der Vorsteuerung, der Trajektorienfolgeregung und dem Kalmanfilter ist noch eine Störgrößenaufschaltung Teil der Gesamtregelung. Am Parallelroboter treten vor allem zwei Störgrößen auf: die Reibung in den aktiven und passiven Gelenken sowie Störmomente im Synchronmotor, wie Nut- und Polrastmomente. Um den Trajektorienfolgeregler zu entlasten, erfolgt das Umschalten geeigneter Kompensationsmomente.

Die Reibung der aktiven Gelenke ist aufgrund der verwendeten Getriebe deutlich ausgeprägter als die Reibung der passiven Gelenke. Da an den passiven Gelenken darüber hinaus kein Kompensationsmoment erzeugt werden kann, wird die dort auftretende Gelenkreibung vernachlässigt und auf deren Kompensation verzichtet. Im Gegensatz dazu lässt sich die Reibung der aktiven Gelenke direkt kompensieren. Sie wird deshalb abhängig von der Winkelgeschwindigkeit vermessen und in einer entsprechenden Kennlinie abgelegt, was in *Schmitt* [116] beschrieben ist. Da die Kompensation nie exakt möglich ist, wird wegen der verbleibenden, als stückweise konstant angenommenen Störungen der I-Anteil im Regler verwendet.

Nut- und Polrastmomente des Synchronmotors sind Störmomente, die periodisch bei jeder Motordrehung wirken. Ihr Auftreten wird sowohl von den Parametern des Motors (Polpaarzahl,

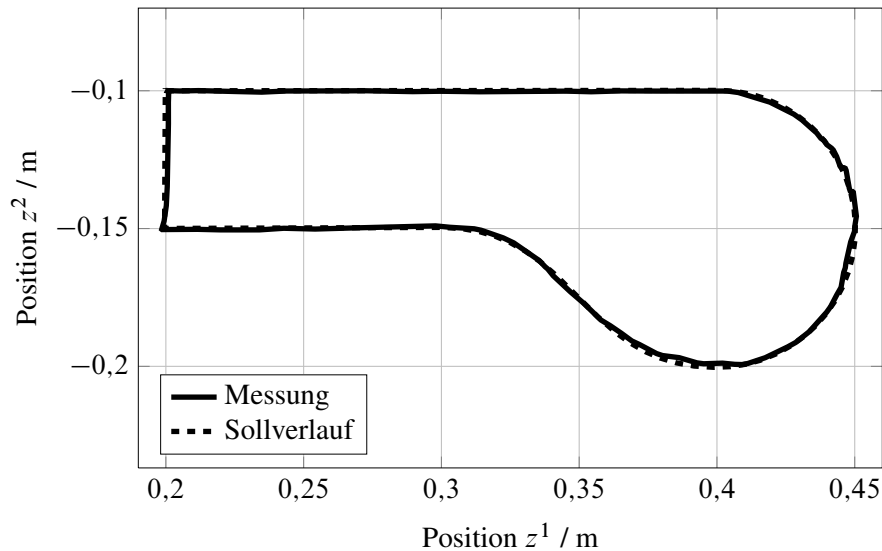


Bild 7.19: Gemessener Trajektorienverlauf des Parallelroboters

Anzahl der Nuten, etc.) beeinflusst, als auch von der Bauform und der Fertigungsqualität. Da diese Störmomente vom Drehwinkel, der Drehzahl sowie der Belastung des Motors abhängen, ist die Bestimmung eines mehrdimensionalen Kennfeldes notwendig. *Palmer* [100] beschreibt detailliert die Motorvermessung und die anschließende Kompensation der Störmomente.

Prinzipiell kann die Berechnung der Störgrößenaufschaltung für Reibung und Rastmomente mit gemessenen bzw. rekonstruierten Größen erfolgen. Diese zusätzliche Rückkopplung kann jedoch zu einem nicht vorhersehbaren Verhalten führen, wenn das Kompensationsmoment nicht exakt dem auftretenden Störmoment entspricht. Die Störgrößenkompensation verwendet daher die Sollgrößen der Vorsteuerung, sodass die Störgrößenaufschaltung vorgesteuert wird. Eine Destabilisierung des Gesamtsystems ist damit ausgeschlossen. Treten nur geringe Abweichungen der Endeffektortrajektorie vom Sollverlauf auf, so macht die Störkompensation lediglich kleine Fehler.

Die gesamte Reglerstruktur ist in Bild 7.18 zusammengefasst. Da Regler und Beobachter für das entlang der Trajektorie linearisierte System entworfen werden, benötigt der Beobachter die Abweichung der gemessenen Winkel von den Sollwerten und der Regler integriert die Abweichung der Position von der Sollposition. Die Störmomentkompensation wird ohne zusätzliche Rückführung betrieben, sodass der Referenzwert des Deskriptors x_{ref} der Vorsteuerung genutzt wird. Bild 7.19 zeigt Messergebnisse, die diese Regelung für eine beispielhafte Trajektorie erzielt. Sie beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ s am Punkt $(0,2 \text{ m} \mid -0,1 \text{ m})$ mit einer Geraden nach rechts. Nach 1,5 s geht die Trajektorie in einen Halbkreis über, der nach 1,5 s in einen Splineabschnitt überführt wird. Von $4 \text{ s} \leq t < 5 \text{ s}$ verläuft die Trajektorie auf einer Geraden nach links. Die abschließende Gerade nach oben beendet die Trajektorie zum Zeitpunkt $t = 5,5$ s wieder im Startpunkt.

Die bei der Messung auftretenden Fehler sind in Bild 7.20 zu sehen. Dabei ist die Abweichung senkrecht zur Trajektorienrichtung dargestellt, wobei Abweichung links der Trajektorie positive und rechts der Trajektorie negative Werte annehmen. Es ist gut erkennbar, dass die Abweichungen meist kleiner als 1 mm sind, wobei maximal 2 mm auftreten. Ein Grund dafür ist, dass die Reib- und Rastmomente nicht exakt kompensiert werden können und so immer kleine Störmo-

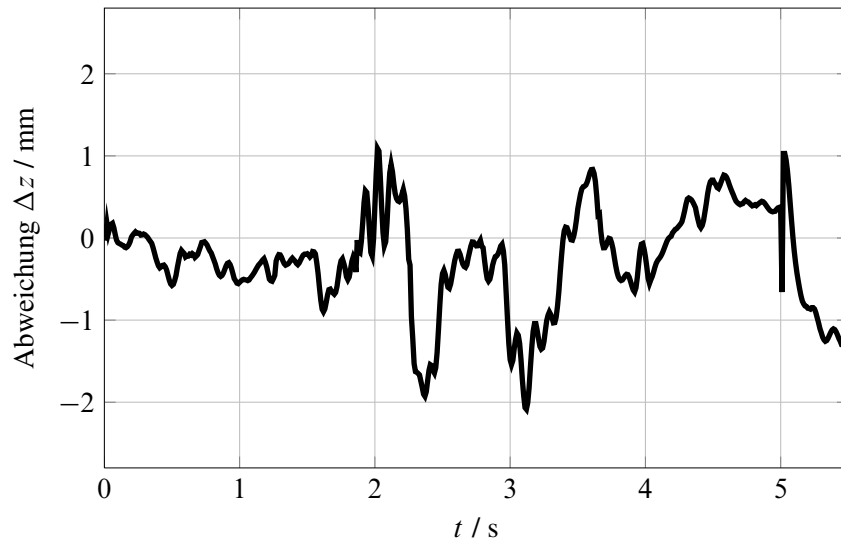


Bild 7.20: Gemessene Abweichung senkrecht zur Trajektorie

mente verbleiben. Der zweite Grund für die Abweichungen ist das Auftreten von Sensoroffsets. Da die Messung wie beschrieben redundant erfolgt, führen Sensoroffsets dazu, dass die Messdaten nicht die algebraische Gleichung des Deskriptorsystems erfüllen. Dies erzeugt Beobachterfehler im auf dem Deskriptorsystem basierenden Beobachter. Da die Positionsbestimmung aufgrund der Sensoroffsets nur mit einer Genauigkeit von etwa einem Millimeter möglich ist, sind durch Veränderungen der Regelung kaum Genauigkeitssteigerungen zu erwarten.

Der Parallelroboter zeigt deutlich, welche Vorteile die Modellierung als Deskriptorsystem bietet. Weder die parallelkinematische Struktur noch die Antriebs- oder Messredundanz erzeugen einen zusätzlichen Aufwand beim Regler- und Beobachterentwurf. Die gesamte Synthese erfolgt auf Basis des Deskriptorsystems und unter Verwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden in einem geschlossenen, transparenten Entwurf und erzielt hervorragende Ergebnisse.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit beschreibt einen neuen Ansatz, um aus nichtlinearen, sowohl properen als auch improperen Deskriptorsystemen eine *verkoppelte Zustandsraumdarstellung* zu erzeugen. Die Grundlage stellt die Interpretation des Deskriptorsystems als Verkopplungsproblem dar. Für die Berechnung der verkoppelten Zustandsraumdarstellung werden zwei Algorithmen angegeben, die sich bei Deskriptorsystemen mit differenzierendem Verhalten beim Auftreten von Eingangsableitungen unterscheiden. Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung existiert für alle regulären Deskriptorsysteme und stellt die Basis für alle weiteren Analyse- und Syntheseverfahren dar. Sie kann nicht nur für eine einfache Simulation von Deskriptorsystemen mit Standardintegrationsverfahren genutzt werden, sondern ist auch zur Stabilitätsuntersuchung von Deskriptorsystemen geeignet.

Ausgehend von der verkoppelten Zustandsraumdarstellung wird das *statische* und *dynamische Entkopplungsproblem* für reguläre Deskriptorsysteme betrachtet, wobei dessen Lösung in beiden Fällen neue notwendige und hinreichende Bedingungen liefert. Auch bei improperen Deskriptorsystemen wird dabei ein statischer Entkopplungsregler berechnet. Die Definition der *Differenzordnungen* benötigt ebenfalls keine Einschränkungen und gilt für alle regulären Deskriptorsysteme. Eine nähere Betrachtung der Differenzordnung führt zur Einführung einer wichtigen neuen Kenngröße, der *maximalen Differenzordnung*.

Um auch Stabilitätsaussagen für entkoppelte Deskriptorsysteme zu ermöglichen, wird die *Nullodynamik* für Deskriptorsysteme untersucht und allgemein definiert. Einige für Zustandssysteme bekannte Resultate werden auf Deskriptorsysteme erweitert: die stabile Nulldynamik eines entkoppelbaren Deskriptorsystems ist hinreichend für dessen stabile Entkoppelbarkeit. Diese Bedingung ist jedoch nicht notwendig für die Entkopplung. Die Herleitung notwendiger und hinreichender Bedingungen für Zustandssysteme aus *Isidori* [50] sollte auf Basis der Verkopplungsinterpretation prinzipiell auch auf Deskriptorsysteme übertragbar sein.

Die Vorgabe der Ein-/Ausgangsdynamik mittels *exakter Ein-/Ausgangslinearisierung* erfolgt bei Deskriptorsystemen analog zu Zustandssystemen. Die *exakte Deskriptorlinearisierung* wird dagegen nur für eine Klasse von Deskriptorsystemen eingeführt. Bei diesem Verfahren soll das gesamte Deskriptorsystem mithilfe einer statischen Rückführung und einer Koordinatentransformation in ein lineares, steuerbares Deskriptorsystem überführt werden. Aufgrund der schnellen Dynamik, die bei Zustandssystemen nicht existiert, gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe bei Deskriptorsystemen deutlich aufwendiger als im Zustandsraum. Der vorgestellte Entwurf erscheint für eine Verallgemeinerung geeignet; die zu erwartenden Schwierigkeiten werden in der Arbeit diskutiert.

Die *zeitvariante Riccatiregelung* stellt ein lineares Entwurfsverfahren dar, das sehr häufig bei der Trajektorienfolgeregelung nichtlinearer Systeme Verwendung findet. Ein bekanntes Verfahren für den Entwurf zeitinvarianter, linearer Deskriptorsysteme lässt sich mit dem Verkopplungszugang auf zeitvariante Deskriptorsysteme erweitern. Neben dem eigentlichen linearen Entwurf werden spezielle Vereinfachungen in der Anwendung als Trajektorienfolgeregler für nichtlineare Deskrip-

torsysteme angegeben, da hier der nichtlineare Verkopplungsregler in den Riccati-Entwurf integriert wird.

Die verkoppelte Zustandsraumdarstellung ermöglicht nicht nur Reglerentwürfe, sondern ist auch für die Berechnung eines Beobachters geeignet. Der Beobachter wird sogar in Form eines Zustandssystems erzeugt, sodass kein zusätzlicher Aufwand zum Entwurf eines *kausalen Beobachters* notwendig ist. Die neuen notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen für *kausale Beobachtbarkeit* nichtlinearer Deskriptorsysteme führen bei linearen Deskriptorsystemen wieder auf bekannte notwendige und hinreichende Bedingungen.

Die abschließende Betrachtung mehrerer Beispielsysteme validiert die neuen Methoden sowohl in der Simulation als auch am realen Laborprüfstand. Am Dreimassenschwinger werden die Entkopplungsregelung und der kausale Beobachterentwurf für ein lineares System verdeutlicht. Ein akademisches Beispielsystem zeigt anschließend den kausalen Beobachterentwurf für ein nichtlineares, impropres Deskriptorsystem. Der Riccati-Entwurf erfolgt nicht nur an einer Verladebrücke, sondern auch am Parallelroboter, dessen gesamte Reglerstruktur außerdem den Entkopplungsregler und einen Beobachter erfordert.

Insgesamt ermöglicht die verkopplungsbasierte Methodik für nichtlineare Deskriptorsysteme viele bekannte Methoden von Zustandssystemen auf Deskriptorsysteme zu übertragen. Der von *Konigorski* [58] für lineare Deskriptorsysteme erstmals vorgestellte Zugang hat sich damit als leistungsfähiges Entwurfskonzept herausgestellt, das erst bei nichtlinearen Deskriptorsystemen sein gesamtes Potential zeigt.

A Eigenschaften linearer Deskriptorsysteme

Im Folgenden werden die Steuer- und Beobachtbarkeitskonzepte für lineare Deskriptorsysteme kurz zusammengefasst. Ausführlichere Diskussionen sind zum Beispiel in *Dai* [19] und *Manderla* [81] zu finden.

Definition A.1 ([19]). Das Deskriptorsystem (2.8) ist *steuerbar*, wenn für $t_0 < t_1 < \infty$, einen beliebigen Anfangswert $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ und einen beliebigen Endwert $\zeta \in \mathbb{R}^n$ eine Eingangsfunktion $u(t) \in \mathcal{C}^{h-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^p)$ existiert, sodass $x(t_1) = \zeta$ gilt.

Definition A.2 ([81]). Das Deskriptorsystem (2.10b) ist *impulssteuerbar*, wenn zu jedem Anfangswert $x_{w,2}(t_0)$ eine Eingangsfunktion $u(t) \in \mathcal{C}^{h-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^p)$ existiert, sodass die Funktion $x_{w,2}(t)$, die (2.10b) erfüllt, impulsfrei ist.

Satz A.1 ([19, 81]). *Betrachtet wird das Deskriptorsystem (2.8) bzw. (2.10).*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das langsame Teilsystem (2.10a) ist steuerbar.*

b) $\text{rang} \begin{bmatrix} A_w - \lambda I & B_{w,1} \end{bmatrix} = n_{\text{slow}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

c) $\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda E & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das schnelle Teilsystem (2.10b) ist steuerbar.*

b) $\text{rang} \begin{bmatrix} B_{w,2} & NB_{w,2} & \dots & N^{h-1}B_{w,2} \end{bmatrix} = n - n_{\text{slow}}$

c) $\text{rang} \begin{bmatrix} N & B_{w,2} \end{bmatrix} = n - n_{\text{slow}}$

d) $\text{rang} \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n$

3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das Deskriptorsystem (2.8) ist steuerbar.*

b) *Das langsame Teilsystem (2.10a) und das schnelle Teilsystem (2.10b) sind steuerbar.*

4. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das Deskriptorsystem (2.8) ist impulssteuerbar.*

b) *Das schnelle Teilsystem (2.10b) ist impulssteuerbar.*

c) $\text{rang} \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n - r$

Definition A.3 ([19]). Das Deskriptorsystem (2.8) ist *beobachtbar*, wenn die Anfangsbedingung $x(t_0)$ eindeutig aus $u(t)$, $y(t)$, $0 \leq t < \infty$ rekonstruiert werden kann.

Definition A.4 ([19]). Das Deskriptorsystem (2.10) ist *impulsbeobachtbar*, wenn das Impulsverhalten in der Lösung von $x_{w,2}(t)$ eindeutig aus $u(t)$ und $y(t)$, $0 \leq t < \infty$ rekonstruiert werden kann.

Satz A.2 ([19, 81]). *Betrachtet wird das Deskriptorsystem (2.8) bzw. (2.10).*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das langsame Teilsystem (2.10a) ist beobachtbar.*

$$b) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} A_w^T - \lambda I & C_{w,1}^T \end{bmatrix} = n_{\text{slow}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$c) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} A^T - \lambda E^T & C^T \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das schnelle Teilsystem (2.10b) ist beobachtbar.*

$$b) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} C_{w,2}^T & N^T C_{w,2}^T & \dots & (N^T)^{h-1} C_{w,2}^T \end{bmatrix} = n - n_{\text{slow}}$$

$$c) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} N^T & C_{w,2}^T \end{bmatrix} = n - n_{\text{slow}}$$

$$d) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} E^T & C^T \end{bmatrix} = n$$

3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das System (2.8) ist beobachtbar.*

b) *Das langsame und das schnelle Teilsystem von (2.10) sind beobachtbar.*

4. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Das Deskriptorsystem (2.8) ist impulsbeobachtbar.*

b) *Das schnelle Teilsystem (2.10b) ist impulsbeobachtbar.*

$$c) \operatorname{kern} N \cap \operatorname{kern} C_2 \cap \operatorname{bild} N = \emptyset$$

$$d) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + r$$

$$e) \operatorname{rang} \begin{bmatrix} A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix} = m$$

Folgesatz A.3. *Das schnelle Teilsystem des Deskriptorsystems (2.9) ist genau dann beobachtbar, wenn $\operatorname{rang} C_2 = m$ gilt.*

Beweis. Das schnelle Teilsystem eines linearen Deskriptorsystems (2.8) ist nach Satz A.2 genau dann beobachtbar, wenn

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n.$$

In semi-expliziter Form ergibt sich

$$\text{rang} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = n ,$$

woraus der Folgesatz folgt. \square

Definition A.5 ([19, Definition 3-1.3, Theorem 3-1.3]). Das Deskriptorsystem (2.8) wird als *de-tekktierbar* bezeichnet, wenn

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A^T - \lambda E^T & C^T \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+$$

gilt.

In Kapitel 5 treten zeitvariante Deskriptorsysteme auf. Für diese wird der folgende Satz benötigt.

Satz A.4. *Das lineare zeitvariante Deskriptorsystem (5.2) ist regulär in U_t , wenn*

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}(\hat{t}) & A_{12}(\hat{t}) \\ A_{21}(\hat{t}) & A_{22}(\hat{t}) \end{bmatrix} \right) \neq 0 \quad \forall \hat{t} \in U_t \quad (\text{A.1})$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis. Da das Deskriptorsystem (5.2) durch die Erweiterung mit der Gleichung $\dot{t} = 1$ immer zu einem zeitinvarianten, nichtlinearen Deskriptorsystem wird, welches dieselbe Lösung besitzt, ist (5.2) genau dann regulär, wenn das erweiterte Deskriptorsystem regulär ist. Zur Überprüfung der Regularität nichtlinearer Deskriptorsysteme müssen die Systemgleichungen so lange nach der Zeit abgeleitet werden, bis sie nach der Ableitung des Deskriptors aufgelöst werden können. Da die Gleichung $\dot{t} = 1$ hierfür keinen Beitrag liefern kann, existiert eine eindeutige Lösung, wenn für alle $\hat{t} \in U_t$ das dann zeitinvariante Deskriptorsystem (5.2) regulär ist. Damit ist (A.1) erfüllt. In diesem Fall wird das Deskriptorsystem (5.2) in *Campbell* [12] als *lösbar* bezeichnet. \square

B Eigenschaften von Zustandssystemen

Lineare Zustandssysteme Im Folgenden werden einige Eigenschaften linearer Zustandssysteme

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu \quad (\text{B.1a})$$

$$y = C\xi + Du \quad (\text{B.1b})$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, die in dieser Arbeit benötigt werden, kurz zusammengefasst. Für die Analyse von Zustandssystemen werden häufig die *Rosenbrock'sche Systemmatrix*

$$\Pi(\lambda) := \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

und die Übertragungsmatrix

$$G(\lambda) := C(\lambda I - A)^{-1}B + D$$

benötigt, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Definition B.1 ([106]). Gilt

$$\text{rang } \Pi(\lambda_0) < \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang } \Pi(\lambda)$$

für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, so wird λ_0 als *invariante Nullstelle* des Zustandssystems (B.1) bezeichnet.

Definition B.2 ([106]). Gilt $\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_0 I & B \end{bmatrix} < n$, so wird λ_0 als *Eingangsentkopplungsnullstelle* des Zustandssystems (B.1) bezeichnet.

Gilt $\text{rang} \begin{bmatrix} A^T - \lambda_0 I & C^T \end{bmatrix} < n$, so wird λ_0 als *Ausgangsentkopplungsnullstelle* des Zustandssystems (B.1) bezeichnet.

Damit entsprechen wegen des Hautus-Kriteriums (siehe z. B. [32]) die Eingangsentkopplungsnullstellen den nicht steuerbaren Eigenwerten und die Ausgangsentkopplungsnullstellen den nicht beobachtbaren Eigenwerten.

Lemma B.1. *Ein quadratisches, lineares Zustandssystem (d.h. $p = q$) ist genau dann invertierbar, wenn $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang } G(\lambda) = p$ gilt.*

Beweis. Das Lemma ist eine direkte Folge von Lemma B.3. □

Definition B.3. Ein Zustandssystem (B.1) wird als *degeneriert* bezeichnet, wenn

$$\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rang } \Pi(\lambda) < n + \min(p, q)$$

gilt, die Rosenbrock'sche Systemmatrix also für kein λ ihren Maximalrang annimmt.

Lemma B.2. Ein quadratisches Zustandssystem (B.1) ist genau dann nicht degeneriert, wenn es invertierbar ist.

Beweis. Für fast alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $A - \lambda I$ invertierbar. Aus

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & (A - \lambda I)^{-1} B \\ 0 & C(\lambda I - A)^{-1} B + D \end{bmatrix}$$

folgt $\text{rang } \Pi(\lambda) = n + \text{rang } G(\lambda)$ für fast alle $\lambda \in \mathbb{C}$. \square

Nichtlineare Zustandssysteme Auch für nichtlineare Zustandssysteme werden einige Eigenschaften benötigt, die nachfolgend eingeführt werden.

Definition B.4 ([24], [99]). Ein quadratisches Zustandssystem (2.2) mit $p = q$ wird in einer Umgebung von $(\hat{\xi}, \hat{u})$ als *lokal invertierbar* bezeichnet, wenn es dort den Rang p besitzt.

Um den Rang eines quadratischen Zustandssystems zu bestimmen, ist ein Algorithmus auszuführen (siehe z. B. [24], [99]). Mit dem Algorithmus wird überprüft, ob das System mit einer dynamischen Zustandsrückführung entkoppelt werden kann. Da die Darstellung des Algorithmus an dieser Stelle zu weit führen würde, wird dafür auf *Nijmeijer* und *van der Schaft* [99] verwiesen.

Für nichtquadratische Systeme muss die Links- und Rechtsinvertierbarkeit unterschieden werden, die für quadratische Systeme gleichbedeutend sind. In dieser Arbeit wird Invertierbarkeit nur für quadratische Systeme benötigt, weshalb nicht zwischen Links- und Rechtsinvertierbarkeit unterschieden werden muss. Ausführliche Diskussionen darüber sind in *Respondek* [109] zu finden. Außerdem wird lediglich die lokale Invertierbarkeit betrachtet, die daher vereinfachend nur als Invertierbarkeit bezeichnet wird.

Die wichtigste Eigenschaft invertierbarer Zustandssysteme, die in dieser Arbeit benötigt wird, ist in folgendem Lemma zusammengefasst.

Lemma B.3. Es ist genau dann für ein quadratisches Zustandssystem (2.2) möglich, die eindeutige Eingangsfunktion $u(t)$ aus der Kenntnis des Anfangswertes $\xi(t_0)$ und der Ausgangsfunktion $y(t)$ in einer Umgebung zu bestimmen, wenn das System in dieser Umgebung invertierbar ist.

Beweis. Das Lemma folgt aus *Respondek* [109, condition (NL4)]. \square

Die Invertierbarkeit spielt bei der Definition regulärer Rückführungen eine wichtige Rolle.

Definition B.5. Eine Zustandsrückführung

$$u = r(\xi, w)$$

mit $w \in \mathbb{R}^p$ für das Zustandssystem (2.2), wird als *reguläre statische Zustandsrückführung* bezeichnet, wenn in einer Umgebung von $(\hat{\xi}, \hat{w})$ $\text{rang } \partial_w r(\xi, w) = p$ gilt.

Definition B.6. Eine dynamische Zustandsrückführung

$$\dot{\xi}_c = r_1(\xi_c, \xi, w) \quad (\text{B.2a})$$

$$u = r_2(\xi_c, \xi, w) \quad (\text{B.2b})$$

mit $\xi_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ und $w \in \mathbb{R}^p$ für das Zustandssystem (2.2), wird als *reguläre dynamische Zustandsrückführung* bezeichnet, wenn (B.2) in einer Umgebung von $(\hat{\xi}_c, \hat{\xi}, \hat{w})$ für alle $\xi(t)$ in dieser Umgebung invertierbar ist.

Offensichtlich ist die reguläre statische Zustandsrückführung ein Sonderfall der regulären dynamischen Zustandsrückführung, wenn $n_c = 0$ gilt.

Lemma B.4 ([24, Lemma 3.3]). *Die Invertierbarkeit des Systems (2.2) ist invariant unter einer regulären dynamischen Zustandsrückführung.*

Lemma B.5 ([98, Theorem 4.1]). *Das Zustandssystem (2.2) kann genau dann mit einer regulären dynamischen Zustandsrückführung entkoppelt werden, wenn das System invertierbar ist.*

Aus [114, Definition 11.21], [99, Definition 3.19, Proposition 3.20] wird die folgende Definition abgeleitet.

Definition B.7. Die *Erreichbarkeits-Lie-Algebra* A eines Zustandssystems (2.2) wird von Elementen der Form

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, X_0] \dots]]], \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

aufgespannt, wobei $X_0(\xi) \in \{\partial_{u_1} a(\xi), \dots, \partial_{u_p} a(\xi)\}$, $X_i(\xi) = a(\xi, u_i)$, $i \in \underline{k}$. $u_i \in \mathbb{R}^p$ sind konstante Eingangsfunktionen. Die involutive *Erreichbarkeitsdistribution* ist

$$\mathcal{A}(\xi) = \text{span}\{X(\xi) \mid X(\xi) \in A(\xi)\}, \quad \xi \in \mathcal{M}_\xi.$$

Satz B.6. *Wenn die Erreichbarkeitsdistribution $\mathcal{A}(\xi)$ von (2.2) konstante Dimension besitzt, lassen sich lokale Koordinaten $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ finden, sodass $\mathcal{A}(\tilde{\xi}) = \text{span}\{\partial_{\tilde{\xi}_1}\}$ gilt. In diesen Koordinaten nimmt das System (2.2) die Form*

$$\dot{\tilde{\xi}}_1 = a_1(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, u)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_2 = a_2(\tilde{\xi}_2)$$

an.

Beweis. Wird (2.2) mit $\dot{u} = w$ erweitert, so ergibt sich ein eingangsaffines System. Die Anwendung von [99, Definition 3.19, Proposition 3.20] führt auf die Erreichbarkeitsdistribution $\mathcal{A}_e(\xi, u)$ dieses erweiterten Systems. Der Vergleich von [99, Proposition 3.20] und Definition B.7 zeigt,

dass $\mathcal{A}_e(\xi, u) = \mathcal{A}(\xi) + \text{span}\{\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^p}\}$ gilt. Nach [99, Theorem 3.49 (a)] existieren Koordinaten $(\tilde{\xi}_1, u, \tilde{\xi}_2)$, in denen das System die Gestalt

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\xi}}_1 &= a_1(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, u) \\ \dot{u} &= w \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 &= a_2(\tilde{\xi}_2)\end{aligned}$$

annimmt. □

Satz B.7 ([99, Def. 3.29 und Theo. 3.32]). *Betrachtet wird das nichtlineare Zustandssystem (2.2). Sei \mathcal{O} die Menge aller Funktionen*

$$L_{a(\cdot, u)}^k c^j(\cdot, u), \quad j \in \underline{p}, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

mit einem festen $u \in U_u \subset \mathbb{R}^p$ und $\hat{u} \in U_u$. Wenn mit $\hat{\xi} \in U_\xi \subset \mathcal{M}_\xi$

$$\dim \text{span}\{d\mathcal{O}\} = n \quad \forall u \in U_u, \xi \in U_\xi$$

gilt, dann ist das Zustandssystem (2.2) in einer Umgebung von $\hat{\xi}$ lokal beobachtbar.

Definition B.8 ([67]). Eine Untermannigfaltigkeit $\mathcal{N} = \{\xi \in \mathcal{M}_\xi \mid \gamma(\xi) = 0\}$ von \mathcal{M}_ξ wird in einer Umgebung U von $\hat{\xi}$ mit $\gamma(\hat{\xi}) = 0$ als *lokal attraktiv* für das System (2.2) bezeichnet, wenn für alle $\xi(t_0) \in U$ die Bedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\xi(t)) = 0$ erfüllt ist.

Bei der Beschäftigung mit nichtlinearen Systemen ist der Satz über die implizite Funktion sehr wichtig. Dieser wird im Folgenden angegeben.

Satz B.8 ([99]). *Sei $W \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ eine offene Umgebung und $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung mit $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ an einem Punkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in W$. Wenn die aus den letzten m Spalten der Jacobi-Matrix von $f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, am Punkt (\hat{x}, \hat{y}) gebildete Matrix vollen Rang besitzt, dann existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ um \hat{x} sowie eine eindeutige glatte Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, die $g(\hat{x}) = \hat{y}$ und $f(x, g(x)) = 0 \forall x \in V$ erfüllt.*

In dieser Arbeit wird eine direkte Folge dieses Satzes häufig verwendet.

Folgesatz B.9. *Sei $W \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ eine offene Umgebung und $f : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine glatte Abbildung mit $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ an einem Punkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in W$. Wenn $\text{rang } \partial_y f(x, y) = \ell$ in einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{y}) gilt, dann existiert eine Umgebung $V \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-\ell})$ um $(\hat{x}, \hat{z}) \in V$ sowie eine eindeutige glatte Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, die $g(\hat{x}, \hat{z}) = \hat{y}$, $\text{rang } \partial_z g = m - \ell$ und $f(x, g(x, z)) = 0 \forall (x, z) \in V$ erfüllt.*

Beweis. In einer Umgebung von (\hat{x}, \hat{y}) existiert eine Koordinatentransformation $y = \Phi(\xi_1, \xi_2)$ mit $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m-\ell}$ und $\xi_2 \in \mathbb{R}^\ell$, sodass $\partial_{\xi_1} f(x, \Phi(\xi_1, \xi_2)) = 0$ und $\text{rang } \partial_{\xi_2} f(x, \Phi(\xi_1, \xi_2)) = \ell$ in einer Umgebung von $(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)$ mit $\hat{y} = \Phi(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)$ gilt. Für $\tilde{f}(x, \xi_2) := f(x, \Phi(\xi_1, \xi_2))$ existiert wegen Satz B.8 eine Umgebung $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ um $\hat{x} \in V$ und eine Abbildung $\tilde{g} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, die $\tilde{g}(\hat{x}) = \hat{\xi}_2$ und damit $\tilde{f}(x, \tilde{g}(x)) = 0 \forall x \in \tilde{V}$ erfüllt. Damit erfüllt die Abbildung $g = \Phi(\xi_1, \tilde{g}(x))$ mit $\xi_1 = z$ und $V \subset (\tilde{V} \times \mathbb{R}^{m-\ell})$ die Aussagen $g(\hat{x}, \hat{z}) = \hat{y}$, $\text{rang } \partial_z g = m - \ell$ und $f(x, g(x, z)) = 0 \forall (x, z) \in V$. □

C Numerische Berechnungen der Beispielsysteme

C.1 Dreimassenschwinger

Für den Dreimassenschwinger aus Abschnitt 7.1 führt Algorithmus 3.1 mit $c_1^i = 0$, $c_2^i = 0$, $b_0^i = 25$, $b_1^i = 10$ und $b_2^i = 1$ für $i = 1, 2$ sowie den Parametern aus Tabelle 7.1 auf die Restriktionen der ersten algebraischen Gleichung

$$\begin{aligned}\gamma_{e,0}^1(x_1, u) &= -x^1 + x^3 + u^2 \\ \gamma_{e,1}^1(x_1, u, \dot{u}) &= -x^2 + x^4 + \dot{u}^2 \\ \gamma_{e,2}^1(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}, x_2) &= x^1 + 0,1x^2 + \ddot{u}^2 - 11x_2^1 + 10x_2^2,\end{aligned}$$

woraus

$$x_2 = \alpha_1(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}, x_{2,1}) = \begin{bmatrix} -2,18x^1 - 0,9x^2 + 2,27x^3 + 0,91x^4 + 2,27u^2 + 0,91\dot{u}^2 + 0,09\ddot{u}^2 + 0,67x_{2,1} \\ 0,74x_{2,1} \end{bmatrix}$$

berechnet wird. Die Restriktionen der zweiten algebraischen Gleichung

$$\begin{aligned}\gamma_{e,0}^2(x_1) &= -x^3 + x^5 \\ \gamma_{e,1}^2(x_1) &= -x^4 + x^6 \\ \gamma_{e,2}^2(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}, x_{2,1}) &= -21,82x^1 - 9x^2 + 22,73x^3 + 9,09x^4 - 10x^5 - 1,5x^6 \\ &\quad + 5u^1 + 22,73u^2 + 9,09\dot{u}^2 + 0,91\ddot{u}^2 - 4,37x_{2,1}\end{aligned}$$

führen auf

$$\begin{aligned}x_{2,1} = \alpha_2(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}) &= -4,99x^1 - 2,06x^2 - 0,52x^3 - 0,21x^4 + 3,43x^5 + 1,94x^6 \\ &\quad + 1,14u^1 + 5,2u^2 + 2,08\dot{u}^2 + 0,21\ddot{u}^2.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\alpha_e(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}) = \begin{bmatrix} -5,54x^1 - 2,28x^2 + 1,92x^3 + 0,77x^4 + 2,31x^5 + 1,31x^6 + 0,77u^1 + 5,77u^2 + 2,31\dot{u}^2 + 0,23\ddot{u}^2 \\ -3,69x^1 - 1,52x^2 - 0,38x^3 - 0,15x^4 + 2,54x^5 + 1,44x^6 + 0,85u^2 + 3,85u^2 + 1,54\dot{u}^2 + 0,15\ddot{u}^2 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich das verkoppelte Zustandssystem

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,54 & -2,38 & 1,92 & 0,77 & 2,31 & 1,31 & 0,77 & 5,77 & 0 & 2,31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18,46 & 7,62 & -23,08 & -9,23 & 2,31 & 1,31 & 0,77 & -19,23 & 0 & -7,69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18,46 & 7,62 & 1,92 & 0,77 & -22,69 & -8,69 & 0,77 & -19,23 & 0 & -7,69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,23 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,77 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,77 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad (\text{C.1a})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e \quad (\text{C.1b})$$

mit $x_e^T = [x_1^T \ u^T \ \dot{u}^T]$ und $v = \ddot{u}$.

Algorithmus 3.2 erzeugt die Restriktionen

$$\begin{aligned} \gamma_{m,0}^1(x_1, u) &= \gamma_{e,0}^1(x_1, u) \\ \gamma_{m,1}^1(x_1, u, \dot{u}^2) &= \gamma_{e,1}^1(x_1, u, \dot{u}) \\ \gamma_{m,2}^1(x_1, u, \dot{u}^2, \ddot{u}^2, x_2) &= \gamma_{e,2}^1(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}, x_2) \\ \gamma_{m,0}^2(x_1) &= \gamma_{e,0}^2(x_1) \\ \gamma_{m,1}^2(x_1) &= \gamma_{e,0}^2(x_1) \\ \gamma_{m,2}^2(x_1, u, \dot{u}^2, \ddot{u}^2, x_{2,1}) &= \gamma_{e,2}^2(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}, x_{2,1}) \end{aligned}$$

und den Verkopplungsregler

$$\alpha_m(x_1, u, \dot{u}^2, \ddot{u}^2) = \alpha_e(x_1, u, \dot{u}, \ddot{u}).$$

Die dynamische Erweiterung

$$\begin{aligned} \dot{x}_u &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \\ u &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v, \end{aligned}$$

wobei $x_u^T = [u^2 \ \dot{u}^2]$ und $v^T = [u^1 \ \ddot{u}^2]$ gilt, führt mit $x_e^T = [x_1^T \ x_u^T]$ auf das verkoppelte Zustandssystem

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,54 & -2,38 & 1,92 & 0,77 & 2,31 & 1,31 & 5,77 & 2,31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18,46 & 7,62 & -23,08 & -9,23 & 2,31 & 1,31 & -19,23 & -7,69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 18,46 & 7,62 & 1,92 & 0,77 & -22,69 & -8,69 & -19,23 & -7,69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,77 & 0,23 \\ 0 & 0 \\ 0,77 & -0,77 \\ 0 & 0 \\ 0,77 & -0,77 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad (\text{C.2a})$$

$$y_e = \begin{bmatrix} -5,54 & -2,28 & 1,92 & 0,77 & 2,31 & 1,31 & 5,77 & 2,31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0,77 & 0,23 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v. \quad (\text{C.2b})$$

Durch Auflösen der Ausgangsgleichung nach

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 9,9 & -8,33 & -3,33 & -10 & -5,67 & -25 & -10 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4,33 & -3,33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e$$

und Einsetzen in das System ergibt sich die kausale Prozesskopie

$$\dot{\tilde{x}}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16,67 & -6,67 & 10 & 5,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,33 & 3,33 & -15 & -4,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 24 & 9,9 & -8,33 & -3,33 & -10 & -5,67 & -25 & -10 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,33 & 3,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,33 & 3,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4,33 & -3,33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.3a})$$

$$\tilde{y}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e. \quad (\text{C.3b})$$

Mit

$$x_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,67 & -0,67 & 1 & 0,57 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.4})$$

kann der Beobachter die Variablen des Deskriptors rekonstruieren. Die balancierte Ordnungsreduktion von (C.3) führt auf das System

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} -0,09 & 0,47 & -0,77 & 0,5 \\ -0,6 & -1,93 & 0,58 & 1,07 \\ 0,38 & -4,44 & 0,19 & 1,13 \\ -0,84 & -5,08 & -0,23 & 0,73 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,77 & -1,8 & 0 & 0 & 0 \\ 4,42 & -3,7 & 0 & 0 & 0 \\ 4,23 & -4,05 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.5a})$$

$$\tilde{y}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,19 & 0,26 & 0,46 & -0,54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.5b})$$

$$x_b = \begin{bmatrix} -0,28 & -0,33 & 0,54 & -0,35 \\ 0,72 & -0,13 & 0,21 & -0,13 \\ -0,09 & -0,59 & 0,09 & 0,19 \\ 0,24 & -0,22 & -0,3 & -0,45 \\ -0,09 & -0,59 & 0,09 & 0,19 \\ 0,24 & -0,22 & -0,3 & -0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,42 & -0,03 & -0,08 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e, \quad (\text{C.5c})$$

für welches ein Luenbergerbeobachter

$$\dot{\xi}_b = \begin{bmatrix} -0,33 & 0,82 & -0,17 & -0,21 \\ 0,14 & -3 & -1,25 & 3,23 \\ 0,02 & -3,92 & 1,09 & 0,07 \\ -2,05 & -3,36 & 2,74 & -2,75 \end{bmatrix} \xi_b + \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & -1,33 & 0 & 0 \\ 1,77 & -1,8 & 4,02 & 0 & 0 \\ 4,42 & -3,7 & -1,97 & 0 & 0 \\ 4,23 & -4,05 & -6,51 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.6a})$$

$$x_b = \begin{bmatrix} -0,28 & -0,33 & 0,54 & -0,35 \\ 0,72 & -0,13 & 0,21 & -0,13 \\ -0,09 & -0,59 & 0,09 & 0,19 \\ 0,24 & -0,22 & -0,3 & -0,45 \\ -0,09 & -0,59 & 0,09 & 0,19 \\ 0,24 & -0,22 & -0,3 & -0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,42 & -0,03 & -0,08 \end{bmatrix} \xi_b + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.6b})$$

mit den Eigenwerten $\{-0,5, -1, -1,5, -2\}$ und ein reduzierter Beobachter

$$\dot{\xi}_b = \begin{bmatrix} -2,15 & -0,92 & 0,86 \\ -3,99 & -0,63 & -0,37 \\ -5,54 & -0,86 & -0,22 \end{bmatrix} \xi_b + \begin{bmatrix} 2,11 & -1,8 & -4,32 & 0 & 0 \\ 4,99 & -3,7 & -12,3 & 0 & 0 \\ 3,55 & -4,05 & -13,97 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.7a})$$

$$x_b = \begin{bmatrix} -0,55 & 0,16 & 0,09 \\ 0,07 & 0,55 & -0,54 \\ -0,55 & 0,16 & 0,09 \\ -0,16 & -0,19 & -0,58 \\ -0,55 & 0,16 & 0,09 \\ -0,16 & -0,19 & -0,58 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,38 & -0,09 & 0 \end{bmatrix} \xi_b + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,26 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,67 & 0,33 & 0,68 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_e \quad (\text{C.7b})$$

mit den Eigenwerten $\{-0,5, -1, -1,5\}$ entworfen wird.

C.2 Parallelroboter

Die mechanischen Parameter des Parallelroboters sind in Tabelle C.1 angegeben, wobei ihre Bedeutungen im Strukturbild C.1 dargestellt sind.

Der Trajektorienfolgeregler wird als zeitvarianter Riccatiregler für das entlang der Trajektorie linearisierte System entworfen, der um einen I-Anteil für die Position des Endeffektors ergänzt wird. Das Systemvektorfeld des verkoppelten Zustandssystems wird daher um die Berechnung des Endeffektorpositionsfehlers durch $h_r(x_1)$ aus (7.5d) erweitert wobei sich der Zustand zu $\Delta x_R^T = \begin{bmatrix} \Delta x_e^T & \Delta x_p^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{14}$ mit dem integrierten Positionsfehler $\Delta x_p \in \mathbb{R}^2$ ergibt.

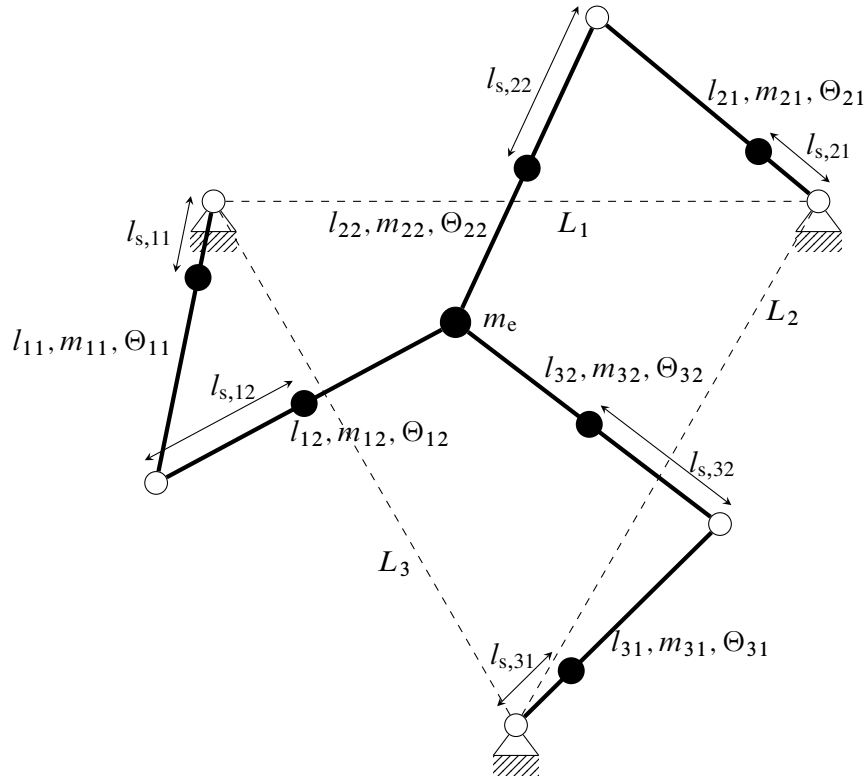


Bild C.1: Strukturbild des Parallelroboters

Tabelle C.1: Parameter des Parallelroboters

Symbol	Wert	Einheit	Beschreibung
L_1	0,4997	m	Abstand zwischen den Antrieben 1 und 2
L_2	0,5067	m	Abstand zwischen den Antrieben 2 und 3
L_3	0,5072	m	Abstand zwischen den Antrieben 3 und 1
l_{11}, l_{21}, l_{31}	0,2412	m	Armlänge der aktiven Arme
l_{12}	0,2819	m	Armlänge des 1. passiven Armes
l_{22}	0,2825	m	Armlänge des 2. passiven Armes
l_{32}	0,2818	m	Armlänge des 3. passiven Armes
$l_{s,11}, l_{s,21}, l_{s,31}$	0,0378	m	Abstand zum Armschwerpunkt
$l_{s,12}, l_{s,22}, l_{s,32}$	0,1166	m	Abstand zum Armschwerpunkt
m_{11}, m_{21}, m_{31}	1,634	kg	Masse der Arme
m_{12}, m_{22}, m_{32}	0,219	kg	Masse der Arme
m_e	0,55	kg	Masse des Endeffektors
$\Theta_{11}, \Theta_{21}, \Theta_{31}$	0,0133	kg m ²	Massenträgheitsmoment der aktiven Arme mit Antrieb
$\Theta_{12}, \Theta_{22}, \Theta_{32}$	0,0017	kg m ²	Massenträgheitsmoment der passiven Arme

Die Gewichtungsmatrizen für den zeitvarianten Riccati-Entwurf werden zeitinvariant zu

$$\begin{aligned}
 M_{xx}^{11} &= \text{diag}(a, a, a, a, a, a, b, b, b, b, b, b, c, c) & M_{xx}^{12} &= 0 & M_{xu}^1 &= 0 \\
 M_{xx}^{21} &= 0 & M_{xx}^{22} &= 10 & M_{xu}^2 &= 0 \\
 M_{ux}^1 &= 0 & M_{ux}^2 &= 0 & M_{uu} &= 30
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

mit

$$a = 5000$$

$$b = 10$$

$$c = 2 \cdot 10^5$$

gewählt. Der Parameter c gewichtet dabei die integrierten Positionsabweichungen des Endeffektors. Die Gewichtungsmatrix $M_{x_e}^{11}$ wird als Lösung der algebraischen Riccatigleichung der verkoppelten Zustandsraumdarstellung zum Zeitpunkt t_e gewählt.

Die Wahl der Gewichtungsmatrizen basiert auf wiederholten Simulationen, bei denen sich zeigte, dass der integrierte Positionsfehler um Größenordnungen stärker als die übrigen Zustände gewichtet werden muss, damit der I-Anteil einen nennenswerten Beitrag zum Stellgrößensignal liefert. Am realen Aufbau erzeugte die Regelung mit den angegebenen Parametern die geringsten Abweichungen von der Trajektorie.

Als Beobachter kommt ein Kalmanfilter zum Einsatz, das um einen Störgrößenbeobachter erweitert wird. Dies ist notwendig, da die Reibung nicht exakt kompensiert werden kann und die durch den I-Anteil im Regler erzeugten Momente zur Reibkompensation sonst den Beobachterfehler vergrößern. Daher werden Stückweise konstante Störungen angenommen, die an jedem Eingang des Parallelroboters wirken. Der Kalmanfilterentwurf erfolgt für das um die Störmodelle erweiterte verkoppelte Zustandssystem mit dem Zustand $\Delta x_K^T = [\Delta x_e^T \quad \Delta x_r^T] \in \mathbb{R}^{15}$, wobei $\Delta x_r \in \mathbb{R}^3$ den Zustand der drei Störmodelle für die Reibung beschreibt. Die geschätzten Störgrößen werden jedoch nicht aufgeschaltet, da keine Verbesserungen durch das Aufschalten erkennbar sind.

Die Kovarianzmatrix des Systemrauschens Q und die Kovarianzmatrix des Messrauschens S werden für den Kalmanfilterentwurf zeitinvariant zu

$$Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 100, 100, 100)$$

$$S = \text{diag}(a, b, a, b, a, b)$$

mit

$$a = 1 \cdot 10^{-4}$$

$$b = 1 \cdot 10^{-2}$$

gewählt. Als Anfangswert für die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers wird die Lösung der algebraischen Riccatigleichung zum Zeitpunkt t_0 des dualen Systems verwendet.

Die Sinus-Kosinus-Geber der Antriebe an den aktiven Gelenken werden auch zur Bestimmung der Messgrößen für das Kalmanfilter verwendet. Sie liefern, im Gegensatz zu den Hallsensoren an den passiven Gelenken, ein Winkelsignal ohne erkennbares Rauschen. Dies wird bei der Wahl der Kovarianzmatrix des Messrauschens berücksichtigt. Die Wahl der übrigen Gewichtungsmatrizen beruht erneut auf Simulationen und anschließender Evaluierung am realen System. Die angegebenen Gewichtungsmatrizen erzeugen dabei die kleinsten Schätzfehler.

Literaturverzeichnis

- [1] AILON, Amit: On the reduced-order causal observer for generalized control systems. In: *International Journal of Control* 57 (1993), Nr. 6, S. 1311–1323
- [2] ALIYU, Mohammad Dikko S.; BOUKAS, El-Kébir: Kalman Filtering for Affine Nonlinear Descriptor Systems. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 30 (2011), S. 125–142
- [3] APLEVICH, J. Dwight: *Implicit Linear Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991
- [4] ASCHER, Uri M.; CHIN, Hongsheng; REICH, Sebastian: Stabilization of DAEs and invariant manifolds. In: *Numerische Mathematik* 67 (1994), S. 131–149
- [5] ÅSLUND, Jan; FRISK, Erik: An observer for non-linear differential-algebraic systems. In: *Automatica* 42 (2006), Nr. 6, S. 959–965
- [6] BARTHEL, Markus: *Automatisierte Trajektoriengenerierung für einen Parallelroboter*. Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik, Technische Universität Darmstadt, Bachelorarbeit, 2012
- [7] BAUMGARTE, Joachim: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1 (1972), Nr. 1, S. 1–16
- [8] BERGER, Thomas; ILCHMANN, Achim; REIS, Timo: Zero dynamics and funnel control of linear differential-algebraic systems. In: *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 24 (2012), Nr. 3, S. 1–45
- [9] BOUTAYEB, Mohamed; DAROUACH, Mohamed: Observers design for nonlinear descriptor systems. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 3, 1995, S. 2369–2374
- [10] BRENAN, Kathryn E.; CAMPBELL, Stephan L.; PETZOLD, Linda R.: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1996
- [11] BURGERMEISTER, Bernhard; ARNOLD, Martin; ESTERL, Benjamin: DAE time integration for real-time applications in multi-body dynamics. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 86 (2006), Nr. 10, S. 759–771
- [12] CAMPBELL, Stephan L.: *Singular Systems of Differential Equations II*. Marshfield: Pitman Publishing Inc., 1982
- [13] CAMPBELL, Stephan L.: Linearization of DAEs along trajectories. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 46 (1995), Nr. 1, S. 70–84

- [14] CAMPBELL, Stephan L.; DELEBECQUE, François; NIKOUKHAH, Ramine: Observer design for linear time varying descriptor systems. In: *Proceedings Control of Industrial Systems* Bd. 1, 1997, S. 507–512
- [15] CAMPBELL, Stephan L.; GEAR, C. William: The index of general nonlinear DAEs. In: *Numerische Mathematik* 72 (1995), S. 173–196
- [16] CAMPBELL, Stephan L.; GRIEPENTROG, Eberhard: Solvability of General Differential Algebraic Equations. In: *SIAM Journal on Scientific Computation* 16 (1995), Nr. 2, S. 257–270
- [17] CHU, Delin; MEHRMANN, Volker: Disturbance decoupled observer design for descriptor systems. In: *Systems & Control Letters* 38 (1999), Nr. 1, S. 37–48
- [18] COBB, Daniel: Descriptor variable systems and optimal state regulation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 28 (1983), Nr. 5, S. 601–611
- [19] DAI, Liyi: *Singular Control Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
- [20] DAROUACH, Mohamed; BOUTAT-BADDAS, Latifa: Observers for a Class of Nonlinear Singular Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), Nr. 11, S. 2627–2633
- [21] DAROUACH, Mohamed; BOUTAT-BADDAS, Latifa: Observers for Lipschitz nonlinear descriptor systems: Application to unknown inputs systems. In: *Proceedings of the 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2008, S. 1369–1374
- [22] DAROUACH, Mohamed; BOUTAYEB, Mohamed: Design of observers for descriptor systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (1995), Nr. 7, S. 1323–1327
- [23] DEUTSCHER, Joachim: Verkopplungsregelung von linearen verteilt-parametrischen Systemen. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 3, S. 143–154
- [24] DI BENEDETTO, Maria Domenica; GRIZZLE, Jessy W.; MOOG, Claude H.: Rank Invariants of Nonlinear Systems. In: *Siam Journal of Control and Optimization* 27 (1989), Nr. 3, S. 658–672
- [25] DUAN, Guang-Ren: *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. New York u.a.: Springer-Verlag, 2010
- [26] FAHMY, Moustafa M.; O'REILLY, John: Observers for descriptor systems. In: *International Journal of Control* 49 (1989), Nr. 6, S. 2013–2028
- [27] FALB, Peter L.; WOLOVICH, William A.: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 12 (1967), S. 651–659

- [28] FINCKENSTEIN, Karl Graf Fink von; LEHM, Jürgen; SCHELLHAAS, Helmut; WEGMANN, Helmut: *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure 2. Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Numerik und Statistik*. Wiesbaden: Teubner Verlag, 2006
- [29] FISCHER, Gerd: *Lineare Algebra*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2010
- [30] FLIESS, Michel; JOIN, Cédric; SIRA-RAMÍREZ, Hebertt: Non-linear estimation is easy. In: *International Journal of Modelling, Identification and Control* 4 (2008), Nr. 1, S. 12–27
- [31] FÖLLINGER, Otto: *Optimale Regelung und Steuerung*. München: Oldenbourg Verlag, 1994
- [32] FÖLLINGER, Otto: *Regelungstechnik*. Berlin: VDE VERLAG GmbH, 2013
- [33] FRIDMAN, Emilia: A descriptor system approach to nonlinear singularly perturbed optimal control problem. In: *Automatica* 37 (2001), Nr. 4, S. 543–549
- [34] FRISK, Erik; ÅSLUND, Jan: An observer for semi-explicit differential-algebraic systems. In: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, IFAC, Elsevier, 2005, S. 671–676
- [35] GAO, Zhiwei; HO, Daniel W.: State/noise estimator for descriptor systems with application to sensor fault diagnosis. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 54 (2006), Nr. 4, S. 1316–1326
- [36] GAUSCH, Felix: Die Realisierbarkeit verkoppelter dynamischer Systeme. In: *e&i - Elektrotechnik und Informationstechnik* 9 (2005), S. 314–318
- [37] GEAR, C. William: Differential-Algebraic Equation Index Transformations. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 9 (1988), S. 39–47
- [38] GEAR, C. William: Differential Algebraic Equations, Indices, and Integral Algebraic Equations. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 27 (1990), Nr. 6, S. 1527–1534
- [39] GERDIN, Markus: Local Identifiability and Observability of nonlinear differential-algebraic Equations. In: *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification* Bd. 14, 2006, S. 802–807
- [40] GLUMINEAU, Alain; MOOG, Claude H.: Essential orders and the non-linear decoupling problem. In: *International Journal of Control* 50 (1989), Nr. 5, S. 1825–1834
- [41] HAIRER, Ernst; LUBICH, Christian; ROCHE, Michel: *The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
- [42] HINRICHSSEN, Diederich; PHILIPPSEN, Hans-Werner: Modellreduktion mit Hilfe balancierter Realisierungen, Teil 1. In: *at - Automatisierungstechnik* 38 (1990), S. 416–422
- [43] HINRICHSSEN, Diederich; PHILIPPSEN, Hans-Werner: Modellreduktion mit Hilfe balancierter Realisierungen, Teil 2. In: *at - Automatisierungstechnik* 38 (1990), S. 460–466

- [44] HOU, Ming; MÜLLER, Peter C.: Design of a Class of Luenberger Observers for Descriptor Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (1995), S. 133–136
- [45] HOU, Ming; MÜLLER, Peter C.: Causal Observability of Descriptor Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), S. 158–163
- [46] HOU, Ming; MÜLLER, Peter C.: Observer Design for Descriptor Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), S. 164–168
- [47] HOU, Ming; MÜLLER, Peter C.: Observer Design for a class of descriptor systems. In: *Proceedings of the European Control Conference, September 1-4, 2003*
- [48] HUIJBERTS, Henri J. C.; NIJMEIJER, Henk; VAN DER WEGEN, Leo L. M.: Minimality of dynamic input-output decoupling for nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 18 (1992), Nr. 6, S. 435–443
- [49] HUIJBERTS, Henri J.; MOOG, Claude H.; POTHIN, R.: Input-output decoupling of nonlinear systems by static measurement feedback. In: *Systems & Control Letters* 39 (2000), Nr. 2, S. 109–114
- [50] ISIDORI, Alberto: *Nonlinear Control Systems*. London: Springer-Verlag, 1995
- [51] JIANDONG, Zhu; ZHAOLIN, Cheng: Exact linearization for a class of nonlinear differential-algebraic systems. In: *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation* Bd. 1, 2002, S. 211–214
- [52] JOCHHEIM, Andreas: *Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme unter der Nebenbedingung vorgegebener Ausgangsgrößenverkopplungen*. Düsseldorf: Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 457, VDI-Verlag, 1995
- [53] KAPRIELIAN, Stephen; TURI, Janos: An observer for a nonlinear descriptor system. In: *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 1, 1992, S. 975–976
- [54] KAPRIELIAN, Stephen; TURI, Janos; HUNT, Louis R.: Vector input-output linearization for a class of descriptor systems. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 2, 1991, S. 1949–1954
- [55] KAWAJI, Shigeyasu; TAHA, Eloi Zaognini: Feedback linearization of a class of nonlinear descriptor systems. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 4, 1994, S. 4035–4037
- [56] KOENIG, Damien: Observer design for unknown input nonlinear descriptor systems via convex optimization. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51 (2006), Nr. 6, S. 1047–1052
- [57] KONIGORSKI, Ulrich: Ausgangsgrößenverkopplung bei linearen Mehrgrößensystemen. In: *at - Automatisierungstechnik* 47 (1999), S. 165–170

- [58] KONIGORSKI, Ulrich: Entwurf linearer Deskriptorsysteme durch Polvorgabe. In: *at - Automatisierungstechnik* 52 (2004), S. 39–45
- [59] KUMAR, Aditya; DAOUTIDIS, Prodromos: Feedback control of nonlinear differential-algebraic-equation systems. In: *AIChE Journal* 41 (1995), Nr. 3, S. 619–636
- [60] KUMAR, Aditya; DAOUTIDIS, Prodromos: Feedback Regularization and Control of Nonlinear Differential-Algebraic-Equation Systems. In: *AIChE Journal* 42 (1996), S. 2175–2198
- [61] KUMAR, Aditya; DAOUTIDIS, Prodromos: *Control of nonlinear differential algebraic equation systems: with application to chemical processes*. London: Chapman & Hall/CRC, 1999
- [62] KUNKEL, Peter; MEHRMANN, Volker: The Linear Quadratic Optimal Control Problem for Linear Descriptor Systems with Variable Coefficients. In: *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 10 (1997), S. 247–264
- [63] KUNKEL, Peter; MEHRMANN, Volker: Analysis of Over- and Underdetermined Nonlinear Differential-Algebraic Systems with Application to Nonlinear Control Problems. In: *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 14 (2001), S. 233–256
- [64] KUNKEL, Peter; MEHRMANN, Volker: *Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution*. Zürich: European Mathematical Society, 2006
- [65] KUNKEL, Peter; MEHRMANN, Volker; RATH, Werner: Analysis and Numerical Solution of Control Problems in Descriptor Form. In: *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 14 (2001), S. 29–61
- [66] KURINA, Galina A.; MÄRZ, Roswitha: Feedback Solutions of Optimal Control Problems with DAE Constraints. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 46 (2007), Nr. 4, S. 1277–1298
- [67] LABISCH, Daniel; KONIGORSKI, Ulrich: Attractive Invariant Submanifold-based Coupling Controller Design. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011, S. 7747–7752
- [68] LABISCH, Daniel; KONIGORSKI, Ulrich: Entwurf kausaler Beobachter für lineare Deskriptorsysteme. In: ADAMY, Jürgen (Hrsg.); SAWODNY, Oliver (Hrsg.): *GMA Fachausschuss 1.40 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“, Workshop, 16.09.-19.09.2012*, 2012, S. 289–301
- [69] LABISCH, Daniel; KONIGORSKI, Ulrich: Optimale Regelung linearer, zeitvarianter Deskriptorsysteme. In: *at - Automatisierungstechnik* zur Veröffentlichung angenommen (2013)
- [70] LABISCH, Daniel; MANDERLA, Maximilian; KONIGORSKI, Ulrich: Control, simulation and stability analysis of nonlinear regular proper DAEs. In: *Proceedings of the 20th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2012, S. 392–397

- [71] LEWIS, Frank L.: A survey of linear singular systems. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 5 (1986), S. 3–36
- [72] LI, Yuan; WANG, Wentao: Disturbance decoupling for a class of nonlinear differential-algebraic systems. In: *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, 2009, S. 625–629
- [73] LITZ, Lothar: Ordnungsreduktion linearer Zustandsraummodelle durch Beibehaltung der dominanten Eigenbewegungen. In: *Regelungstechnik* 27 (1979), Nr. 3, S. 80–81
- [74] LOHMANN, Boris: *Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum*. Düsseldorf: Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 244, VDI-Verlag, 1991
- [75] LU, Guoping; HO, Daniel W. C.: Full-order and reduced-order observers for Lipschitz descriptor systems: the unified LMI approach. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 53 (2006), Nr. 7, S. 563–567
- [76] LUDYK, Günter: *Theoretische Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995
- [77] LUENBERGER, David G.: Dynamic Equations in Descriptor Form. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 22 (1977), S. 312–321
- [78] LUENBERGER, David G.: Time-Invariant Descriptor Systems. In: *Automatica* 14 (1978), S. 473–480
- [79] LUENBERGER, David G.: Non-Linear Descriptor Systems. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 1 (1979), S. 219–242
- [80] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008
- [81] MANDERLA, Maximilian: *Eine Methodik zum Regler- und Beobachterentwurf für Mehrgrößensysteme in Deskriptorform*. Düsseldorf: Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1196, VDI-Verlag, 2011
- [82] MANDERLA, Maximilian; KONIGORSKI, Ulrich: Vollständige Modale Synthese regulärer Deskriptorsysteme. In: *at - Automatisierungstechnik* 58 (2010), S. 70–78
- [83] MANDERLA, Maximilian; KONIGORSKI, Ulrich: Design of causal state observers for regular descriptor systems. In: *European Journal of Control* 19 (2013), Nr. 2, S. 104–112
- [84] MANDERLA, Maximilian; LABISCH, Daniel; KONIGORSKI, Ulrich: Dualität von Regler- und Beobachterentwurf für reguläre Deskriptorsysteme. In: ADAMY, Jürgen (Hrsg.); SAWODNY, Oliver (Hrsg.): *GMA Fachausschuss 1.40 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“, Workshop , 18.09.-21.09.2011*, 2011, S. 320–331

- [85] MANDERLA, Maximilian; SCHMITT, Daniel; KONIGORSKI, Ulrich: Modelling, Simulation and Control of a Redundant Parallel Robotic Manipulator based on Invariant Manifolds. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 16 (2010), Nr. 2, S. 95–113
- [86] MEHRMANN, Volker; STYKEL, Tatjana: Descriptor Systems: A General Mathematical Framework for Modelling, Simulation and Control. In: *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), S. 405–415
- [87] MINAMIDE, Nariyasu; NIKIFORUK, Peter N.; GUPTA, Madan Mohan: Decoupling of descriptor systems. In: *IEE, Proceedings-D*. 138 (1991), S. 453–459
- [88] MISRA, Pradeep; VAN DOOREN, Paul; VARGA, Andras: Computation of Structural Invariants of Generalized State Space Systems. In: *Automatica* 30 (1994), S. 1921–1936
- [89] MÜLLER, Peter C.: Stability of Nonlinear Descriptor Systems. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 76 (1996), S. 9–12
- [90] MÜLLER, Peter C.: Kausale und nichtkausale Deskriptorsysteme. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 77 (1997), S. 231–232
- [91] MÜLLER, Peter C.: Stability and Optimal Control of Nonlinear Descriptor Systems: A Survey. In: *Applied Mathematics and Computer Science* 8 (1998), S. 269–286
- [92] MÜLLER, Peter C.: Descriptor systems: pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 53 (2000), Nr. 4-6, S. 273–279
- [93] MÜLLER, Peter C.: Aspects of Modeling Dynamical Systems by Differential-Algebraic Equations. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 7 (2001), Nr. 2, S. 133–143
- [94] MÜLLER, Peter C.: Optimal control of proper and nonproper descriptor systems. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2003), S. 875–884
- [95] MÜLLER, Peter C.: Linear-Quadratic Optimal Control of Descriptor Systems. In: *Proceedings of the 14th International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2011, S. 54–59
- [96] MÜLLER, Peter C.; HOU, Ming: On the Observer Design for Descriptor Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), S. 1666–1671
- [97] MÜLLER, Pia: *Linearisierung und Entkopplung von Deskriptorsystemen*. Aachen: Shaker Verlag, 2000
- [98] NIJMEIJER, Henk; RESPONDEK, Witold: Dynamic Input-Output Decoupling of Nonlinear Control Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 33 (1988), Nr. 11, S. 1065–1070

- [99] NIJMEIJER, Henk; VAN DER SCHAFT, Arjan: *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1990
- [100] PALMER, Thomas: *Integration von Synchronantrieben in einen planaren Parallelroboter und Entwicklung einer Regelstrategie zur Nutrastrmomentkompensation*. Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik, Technische Universität Darmstadt, Masterarbeit, 2013
- [101] PARASKEVOPOULOS, Paraskevas N.; KOUMBOULIS, Fortis N.: Decoupling and pole assignment in generalised state space systems. In: *IEE Proceedings D Control Theory and Applications* 138 (1991), Nr. 6, S. 547–560
- [102] PARASKEVOPOULOS, Paraskevas N.; KOUMBOULIS, Fortis N.: The decoupling of generalized state-space systems via state feedback. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 37 (1992), Nr. 1, S. 148–152
- [103] PEREIRA DA SILVA, Paulo Sergio; VELOSO PAZZOTO, Nadéia Aparecida; FILHO, Carlos Corrêa: Relative Structure at Infinity and Nonlinear Semi-implicit DAEs. In: *European Journal of Control* 12 (2006), Nr. 5, S. 545–558
- [104] PIEGL, Les; TILLER, Wayne: *The Nurbs Book*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997
- [105] PLOIX, Stéphane; MAQUIN, Didier; RAGOT, José: Asymptotic observer for a non linear descriptor system. In: *IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'97*. Hull, Royaume-Uni, 1997, S. 654–658
- [106] RAISCH, Jörg: *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. München: Oldenbourg Verlag, 1994
- [107] REGER, Johann; JOUFFROY, Jerome: Algebraische Ableitungsschätzung im Kontext der Rekonstruierbarkeit. In: *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), S. 324–331
- [108] REGER, Johann; JOUFFROY, Jerome: On algebraic time-derivative estimation and deadbeat state reconstruction. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, S. 1740–1745
- [109] RESPONDEK, Witold: Right and Left Invertibility of Nonlinear Control Systems. In: SUSSMANN, Héctor. J. (Hrsg.): *Nonlinear Control and Optimal Control*. Marcel Dekker, 1990, S. 133–176
- [110] RIAZA, Ricardo: *Differential-algebraic systems: analytical aspects and circuit applications*. London: World Scientific, 2008
- [111] ROPPENECKER, Günter: *Vollständige modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen*. Düsseldorf: Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 59, VDI-Verlag, 1983

- [112] ROPPENECKER, Günter: Zustandsregelung linearer Systeme – Eine Neubetrachtung. In: *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 10, S. 491–498
- [113] ROSENBROCK, Howard Harry: Structural properties of linear dynamical systems. In: *International Journal of Control* 20 (1974), Nr. 2, S. 191–202
- [114] SASTRY, Shankar: *Nonlinear Systems*. New York: Springer-Verlag, 1999
- [115] SCHLACHER, Kurt; KUGI, Andreas; HAAS, Werner: Geometric Control of a Class of Nonlinear Descriptor Systems. In: *IFAC Nonlinear Control Systems Design 1* (1998), S. 379–384
- [116] SCHMITT, Daniel: *Reglerentwurf und Reibkompensation am Beispiel eines Parallelroboters*. Institut für Automatisierungstechnik, Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2009
- [117] SCHMITT, Daniel; KONIGORSKI, Ulrich: Exakte Linearisierung regulärer, realisierbarer Deskriptorsysteme. In: KUGI, Andreas (Hrsg.); LOHMANN, Boris (Hrsg.): *GMA Fachausschuss 1.40 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“, Workshop , 19.09.-22.09.2010*, 2010, S. 372–382
- [118] SCHÜPPHAUS, Rolf: *Regelungstechnische Analyse und Synthese von Mehrkörpersystemen in Deskriptorform*. Düsseldorf: Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 478, VDI-Verlag, 1995
- [119] SHIELDS, Derek Nicholas: Observer design for discrete nonlinear descriptor systems. In: *UKACC International Conference on Control* Bd. 2, 1996, S. 831–836
- [120] SHIELDS, Derek Nicholas: Observer design and detection for nonlinear descriptor systems. In: *International Journal of Control* 67 (1997), Nr. 2, S. 153–168
- [121] SJOBERG, Johan; GLAD, Torkel: Computing the controllability function for nonlinear descriptor systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2006, S. 1021–1026
- [122] STEINBRECHER, Andreas: *Numerical Solution of Quasi-Linear Differential-Algebraic Equations and Industrial Simulation of Multibody Systems*, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Dissertation, 2006
- [123] STEINBRECHER, Andreas: Remodeling of Dynamical Systems to Benefit Numerical Simulations. In: *Proceedings of the 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling*, 15.02.-17.02.2012 2012
- [124] TAKABA, Kiyotsugu: Linear quadratic optimal control for linear implicit system. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 4, 1999, S. 4074–4079
- [125] TERRELL, William J.: Local observability of nonlinear differential-algebraic equations (DAEs) from the linearization along a trajectory. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (2001), Nr. 12, S. 1947–1950

- [126] WANG, He-Sheng; YUNG, Chee-Fai; CHANG, Fan-Ren: H_∞ control for nonlinear descriptor systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 11, S. 1919–1925
- [127] WANG, He-Sheng; YUNG, Chee-Fai; CHANG, Fan-Ren: H_∞ Control for Nonlinear Descriptor Systems. London: Springer-Verlag, 2006
- [128] WANG, Jie; CHEN, Chen: Exact linearization of nonlinear differential algebraic systems. In: *Proceedings of the International Conferences on Info-tech and Info-net* Bd. 4, 2001, S. 284–290
- [129] WANG, Wentao; LI, Guoming: Nonlinear control methods for a class of differential-algebraic systems. In: *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference, 2009*, S. 2900–2904
- [130] WANG, Wentao; LI, Guoming; LI, Yuan; ZHANG, Yi: Asymptotic Output Tracking for a class of Nonlinear Differential Algebraic Systems. In: *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference, 2010*, S. 3563–3567
- [131] WANG, Wentao; LIU, Xiaoping; ZHAO, Jun: The zero dynamics of nonlinear singular control systems. In: *Proceedings of the American Control Conference* Bd. 5, 2002, S. 3564–3569
- [132] WANG, Wentao; LIU, Xiaoping; ZHAO, Jun: The zero dynamics of nonlinear singular control systems and their application. In: *Proceedings of the American Control Conference* Bd. 2, 2003, S. 1554–1559
- [133] WANG, Wentao; YANG, Huanhuan; LI, Yuan; ZHANG, Yi: The zero dynamics for a class of nonlinear differential algebraic systems. In: *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference, 2011*, S. 3942–3946
- [134] WU, Hansheng; MIZUKAMI, Koichi: Stability and robust stabilization of nonlinear descriptor systems with uncertainties. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 3, 1994, S. 2772–2777
- [135] XIAOPING, Liu: On Linearization of Nonlinear Singular Control Systems. In: *Proceedings of the American Control Conference, 1993*, S. 2284–2287
- [136] XIAOPING, Liu; CELIKOVSKY, Sergej: Feedback control of affine nonlinear singular control systems. In: *Internation Journal of Control* 68 (1997), S. 753–774
- [137] YANG, Chunyu; ZHANG, Qingling; CHAI, Tianyou: Observer design for a class of nonlinear descriptor systems. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, 2009*, S. 8232–8237
- [138] YANG, Chunyu; ZHANG, Qingling; CHAI, Tianyou; DING, Jinliang: Stability and strong passivity of nonlinear descriptor systems. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010*, S. 2414–2419

-
- [139] YANG, Chunyu; ZHANG, Qingling; ZHOU, Linna: *Stability Analysis and Design for Non-linear Singular Systems*. Bd. 435. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013
- [140] ZHANG, Yi: The zero dynamics of nonlinear differential algebraic systems and their application. In: *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference*, 2011, S. 858–862
- [141] ZHANG, Yi; WANG, Wentao; ZHANG, Qingling: Input-Output Decoupling of Affine Non-linear Descriptor Control Systems. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, 2006, S. 1–4
- [142] ZIMMER, Gerta; MEIER, Jürgen: On observing nonlinear descriptor systems. In: *Systems & Control Letters* 32 (1997), Nr. 1, S. 43–48
- [143] ZURMÜHL, Rudolf; FALK, Sigurd: *Matrizen und ihre Anwendungen für angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure: Grundlagen*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1984