Gesamtentwurf von Agentendynamik und Kommunikationstopologie homogener Multi-Agenten-Systeme

Vom Fachbereich
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Jonathan Hermann, M. Sc.

geboren am 11. September 1988 in Gießen

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze

Tag der Einreichung:	20. Oktober 2020
Tag der Prüfung:	21. Januar 2021

D 17 · Darmstadt 2021

Gesamtentwurf von Agentendynamik und Kommunikationstopologie homogener Multi-Agenten-Systeme

Gemehmigte Dissertation von Jonathan Hermann, M. Sc.

D 17 · Darmstadt 2021

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,
E-Publishing-Service der TU Darmstadt
https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de
tuprints@ulb.tu-darmstadt.de

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-175532
URI: https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/17553

Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative-Commons-Lizenz:
Namensnennung – Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung 4.0 Deutschland
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt von Juli 2015 bis September 2020.

Ich möchte mich bei all denen bedanken, die zur erfolgreichen Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben. Dieses Vorwort reicht nicht aus, um alle namentlich zu nennen. Einige möchte ich dennoch im Folgenden hervorheben.

Zuallererst danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski. Ich bin dankbar, dass er mir die Möglichkeit zur Promotion am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik gegeben hat und ich mir immer seiner vollen Unterstützung gewiss sein konnte. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch noch einmal ausdrücklich für das Ermöglichen meines Forschungsaufenthalts im Herbst 2019 an der University of Toronto bedanken. Für die Zeit in Toronto danke ich Prof. Luca Scardovi für die Betreuung und die fruchtbare Zusammenarbeit. Außerdem bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze für die bereitwillige Übernahme des Korreferats, für das Interesse an meiner Arbeit und die freundlichen und anregenden Diskussionen meiner Ergebnisse.

Meine Zeit am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik werde ich immer in bester Erinnerung behalten. Dies liegt vor allem auch an allen Kollegen, die ich in dieser Zeit kennenlernen durfte und denen ich auch in Zukunft in Freundschaft verbunden bleiben werde. Besonders bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Bernhard Hammer und Dr.-Ing. Eric Lenz für die kritische Durchsicht dieser Arbeit sowie auch bei Dr.-Ing. Sebastian Bernhard und Viktor Kisner für die zahllosen fachlichen Diskussionen, die zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben. Außerdem danke ich den administrativen und technischen Mitarbeitern des Fachgebiets, Ilse Brauer, Corina Fischer, Alfred Gross, Alexander Stark und in Gedenken auch Brigitte Hoppe. Durch ihre Hilfsbereitschaft und Herzlichkeit schaffen sie eine überaus gute Atmosphäre am Fachgebiet.

Mein Dank gilt zudem allen Freunden, die mich in den letzten Jahren auch abseits des universitären Umfelds begleitet haben. Besonders möchte ich mich bei Joe und Naemi für die große Unterstützung insbesondere während des herausfordernden Schreibprozesses inmitten der Corona-Pandemie bedanken. Zuletzt möchte ich meiner Familie danken, ohne deren Rückhalt mein Studium der Elektrotechnik und Informationstechnik sowie schließlich auch diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Darmstadt, Februar 2021
Jonathan Hermann

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Abkürzungen **VIII**

Kurzfassung **XII**

Abstract **XIV**

1 Einleitung **1**
1.1 Literaturübersicht 2
1.2 Eigene Beiträge und Struktur der Arbeit 7

2 Beschreibung homogener Multi-Agenten-Systeme **10**
2.1 Graphen und assoziierte Matrizen 10
2.1.1 Zusammenhängende Graphen 11
2.1.2 Nicht zusammenhängende Graphen 15
2.2 Synchronisierung homogener Multi-Agenten-Systeme 18
2.2.1 Verwendung statischer Synchronisierungsregler 19
2.2.2 Verwendung dynamischer Synchronisierungsregler 22

3 Entwurf des transienten Verhaltens homogener Multi-Agenten-Systeme **24**
3.1 Stabilität des transienten Verhaltens 24
3.1.1 Synchronisierbarkeit 25
3.1.2 Entwurf stabilisierender Regler minimaler Ordnung 29
3.1.3 Entwurf synchronisierender Regler minimaler Ordnung 32
3.1.4 Beschreibung der Synchronisierungsmenge 36
3.1.5 Synchronisierungsregler mit maximalem Synchronisierungsradius 43
3.2 Optimalität des transienten Verhaltens 50
3.2.1 Regelgesetz zur optimalen Transition auf die Synchronisierungstrajektorie 51
3.2.2 Vergleich mit bestehenden Ansätzen zur optimalen Synchronisierung . . 54

4 Entwurf des stationären Verhaltens homogener Multi-Agenten-Systeme **60**
4.1 Kosten der Synchronisierung einzelner Agenten 61
4.2 Optimale stationäre Synchronisierung 63
4.2.1 Kosten der Synchronisierung des Multi-Agenten-Systems 64
4.2.2 Minimierung der Synchronisierungskosten bei bekannten Anfangswerten 65
4.2.3 Minimierung der erwarteten Synchronisierungskosten bei unbekannten Anfangswerten 66
4.3 Optimale stationäre Cluster-Synchronisierung 70
4.3.1 Cluster-Synchronisierung homogener Multi-Agenten-Systeme 70

4.3.2 Kosten der Cluster-Synchronisierung 74
4.3.3 Minimierung der Cluster-Synchronisierungskosten bei bekannten Anfangswerten 76
4.3.4 Minimierung der erwarteten Cluster-Synchronisierungskosten bei unbekannten Anfangswerten 80
4.3.5 Formulierung der Beschränkungen an den Graphenentwurf 82

5 Entwurf des Kommunikationsgraphen 89
5.1 Parametrierungen der Laplacematrix 89
5.2 Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix für Graphen mit beliebigen Kantengewichten 90
5.2.1 Problemformulierung und Parametrierung der Lösung 90
5.2.2 Vorgabe der Struktur des Graphen 93
5.2.3 Minimierung der Eigenwertsensitivität 94
5.3 Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix für Graphen mit positiven Kantengewichten 100
5.3.1 Problemformulierung 100
5.3.2 Sonderfälle: Kleine Graphen 102
5.4 Vorgabe der Nullräume der Laplacematrix 107
5.4.1 Vorgabe des Linkseigenvektors zum Nulleigenwert der Laplacematrix zusammenhängender Graphen 107
5.4.2 Vorgabe der Nullräume der Laplacematrix nicht zusammenhängender Graphen 108

6 Zusammenfassung und Ausblick 113

A Mathematischer Anhang 117
A.1 Matrizen 117
A.2 Kronecker-Produkt 117
A.3 Gerschgorin-Kreise 118
A.4 Spektralradius und Perron-Frobenius-Theorem 118
A.5 Isomorphismus zwischen komplexen und reellen Matrizen 118
A.6 Erreichbarkeitsmatrix eines Graphen 119
A.7 Das Prinzip vom Argument 120

B Ergänzende Beweise und Rechnungen 122
B.1 Abschätzung des Spektralradius von $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}$ im Beweis zu Satz 2.13 122
B.2 Ergänzungen zu Abschnitt 3.1.5 122
B.2.1 Berechnung der Tangentenschnittpunkte der Nyquistkurven 122
B.2.2 Algorithmische Lösung des Optimierungsproblems in Gleichung 3.31 . . 124
B.2.3 Berechnung des maximalen Spektralradius von $\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ über alle Frequenzen 125
B.3 Berechnung des optimalen Regelgesetzes gemäß Gleichung 3.44 für $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$ 126
B.4 Ergänzungen zu Abschnitt 4.3 127
B.4.1 Untere Grenze für $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F})$ 127

B.4.2 Anzahl der Möglichkeiten die Knotenmenge $\mathcal{V}$ einzuteilen 128
B.5 Ergänzungen zu Kapitel 5 130
B.5.1 Beweis von Lemma 5.3 130
B.5.2 Ergänzungen zum Beweis von Satz 5.18 131

Literaturverzeichnis **135**

Eigene Veröffentlichungen **146**

Symbole und Abkürzungen

Abkürzungen

MIMO	Multiple-Input-Multiple-Output
SISO	Single-Input-Single-Output
u.B.v.	Unter Beschränkung von

Allgemeine mathematische Notation

$\mathbf{A}$	Matrix
$\mathcal{A}$	(Multi-)Menge
a	Skalar
$\mathbf{a}$	Vektor
$\mathscr{A}$	Vektorraum
$\mathbf{A}^\top$	Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^\mathrm{H}$	Konjugiert-komplex Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^+$	Pseudoinverse der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$ ($\succeq \mathbf{0}$)	Die Matrix $\mathbf{A}$ ist positiv definit (semidefinit)
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ($\geq \mathbf{0}$)	Die Matrix $\mathbf{A}$ ist elementweise positiv (nichtnegativ)
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	Die Menge $\mathcal{A}$ ist Teilmenge der Menge $\mathcal{B}$
$\lvert a \rvert$	Absolutwert eines reellen oder komplexen Skalars a
$\lvert \mathcal{A} \rvert$	Kardinalität einer Menge $\mathcal{A}$
$[a, b]$	Geschlossenes Intervall
$[a, b)$	Halboffenes Intervall
$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$	Hadamard-Produkt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Kronecker-Produkt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$b(n, k)$	Binomialkoeffizient
$B(n)$	Bellzahl
$\mathrm{Cov}\,(\mathbf{x})$	Kovarianzmatrix einer vektoriellen Zufallsvariablen $\mathbf{x}$
$\det\,(\mathbf{A})$	Determinante der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathrm{E}\,(\mathbf{x})$	Erwartungswert einer (vektoriellen) Zufallsvariablen $\mathbf{x}$
$\mathrm{Im}\,(\mathbf{A})$	Imaginärteil der Matrix $\mathbf{A}$
j	Imaginäre Einheit
$\mathrm{rang}(\mathbf{A})$	Rang der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathrm{Re}\,(\mathbf{A})$	Realteilteil der Matrix $\mathbf{A}$
$S(n, k)$	Stirling-Zahl
$\mathrm{spec}\,(\mathbf{A})$	Spektrum einer Matrix $\mathbf{A}$ (als Multimenge)
$\mathrm{supp}(\mathcal{A})$	Grundmenge einer Multimenge $\mathcal{A}$

$\mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$	Spur der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathrm{vec}(\mathbf{A})$	Vektorisierung der Matrix $\mathbf{A}$
$\kappa(\mathbf{A})$	Konditionszahl der Matrix $\mathbf{A}$
ϖ	Windungszahl nach Definition A.15
$\nu_i \rightsquigarrow \nu_j$	Es existiert ein Pfad von Knoten ν_i zu Knoten ν_j
$(\cdot)\,!$	Fakultät
$(\cdot)^*$	Lösung eines Optimierungsproblems
$\lVert\cdot\rVert$	Norm
$*$	Platzhalter für nicht relevante Matrixeinträge

Skalare, Vektoren, Matrizen, Funktionen

$\mathbf{1}_N$	Einsvektor der Länge N
$\mathbf{0}$	Nullmatrix passender Dimension
$\mathbf{A}_w$	Gewichtete Adjazenzmatrix eines Graphen
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{A}_\mathrm{c}$	Reglersystemmatrix
$\hat{\mathbf{A}}(n_\mathrm{c})$	Für Regler der Ordnung n_c erweiterte Systemmatrix nach (3.2)
$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}))$	Modifizierte erweiterte Systemmatrix nach (3.19)
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix
$\hat{\mathbf{B}}(n_\mathrm{c})$	Für Regler der Ordnung n_c erweiterte Systemmatrix nach (3.2)
$\mathbf{C}$	Ausgangsmatrix
$\hat{\mathbf{C}}(n_\mathrm{c})$	Für Regler der Ordnung n_c erweiterte Systemmatrix nach (3.2)
$\mathbf{D}_w$	Gewichtete Eingangsgradmatrix
$\mathbf{e}_i$	i-ter Einheitsvektor
$\mathbf{E}_\mathrm{c}$	Reglereingangsmatrix
$\mathbf{F}$	Eigenprojektionsmatrix der Laplacematrix
$\mathbf{F}_\mathrm{c}$	Reglereingangsmatrix
$\mathbf{G}_\mathrm{c}$	Reglerdurchgriffsmatrix
$\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s)$	Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises (3.19)
$\mathbf{H}_\mathrm{c}$	Reglerausgangsmatrix
$\mathbf{I}_N$	Einheitsmatrix der Dimension N
J_T	Kosten der Synchronisierung
$J_\mathrm{T,Reg}$	Regularisierte Kosten der Cluster-Synchronisierung
$\mathbf{K}$	Reglerdurchgriffsmatrix
$\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}), \lambda)$	Strukturierte Rückführmatrix nach (3.2)
$\check{\mathbf{K}}(n_\mathrm{c})$	Unstrukturierte reelle oder komplexe Rückführmatrix nach (3.3)
$\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}))$	Unstrukturierte reelle Rückführmatrix nach (3.19)
$\mathbf{L}_w$	Laplacematrix
$\mathbf{L}_w^\mathrm{K}$	Laplacematrix des vollständig verbundenen Graphen mit Kantengewichten $1/N$
$\overline{\mathbf{L}}_w$	Reduzierte Laplacematrix
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Matrix vektorisierter Einzellaplacematrizen in (5.4)
$\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$	Matrix vektorisierter reduzierter Einzellaplacematrizen in (5.11)

$\mathbf{M}$	Parametrierung des Rechtsnullraums der Laplacematrix
$\mathbf{N}$	Parametrierung des Linksnullraums der Laplacematrix
$\mathbf{P}$	Positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung (3.38)
$\mathbf{Q}$	Gewichtungsmatrix der Zustandsdifferenzen
$\mathbf{R}$	Gewichtungsmatrix der Stellgröße (in Abschnitt 3.2)
$\mathbf{R}$	Optimierungsvariable beim Graphenentwurf (in Kapitel 5)
$r_{\max}(\boldsymbol{\Theta})$	Radius des maximalen Kreises in der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta})$
$r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$	Radius des maximalen Kreises um λ in der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta})$
s	Komplexes Skalar
$\mathbf{S}$	Kovarianzmatrix des Anfangszustandes
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}$	Rechtseigenvektormatrix von $\boldsymbol{\Lambda}$
$\mathbf{u}_i$	Eingangssignal von Agent i
$\mathbf{u}_{\mathrm{c},i}$	Eingangssignal der Reglerdynamik von Agent i
$\mathbf{V}$	Matrix, für die $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$ und $\mathbf{V}^\top\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ gilt
$\mathbf{v}_i$	Summe gewichteter Ausgangsdifferenzen von Agent i zu Nachbaragenten
$\mathbf{v}_{\mathrm{c},i}$	Summe gewichteter Reglerzustandsdifferenzen von Agent i zu Nachbaragenten
w	Gewichtsfunktion einer Kante
$w_{i,j}$	Gewicht der Kante von Knoten ν_i zu Knoten ν_j
$\mathbf{w}$	Kantengewichtsvektor
$\mathbf{x}$	Gesamtzustand des Multi-Agenten-Systems
$\mathbf{x}_0$	Anfangszustand des Multi-Agenten-Systems
$\mathbf{x}_{\mathrm{E}}$	Erwartungswert des Anfangszustandes des Multi-Agenten-Systems
$\mathbf{x}_i$	Zustand von Agent i
$\mathbf{x}_{\mathrm{c},i}$	Reglerzustand von Agent i
$\mathbf{x}_{\mathrm{syn}}$	Synchronisierungstrajektorie
$\mathbf{y}_i$	Ausgangssignal von Agent i
$\beta, \delta, \epsilon, \theta$	Reelle Skalare
$\boldsymbol{\gamma}$	Linkseigenvektor zum Nulleigenwert der Laplacematrix
$\boldsymbol{\Theta}(n_{\mathrm{c}})$	Zusammenfassendes Tupel der Matrizen eines Reglers der Ordnung n_{c}
ϑ	Regularisierungsparameter im Gütemaß (4.32)
$\boldsymbol{\Lambda}$	Matrix, die gewünschtes Spektrum aufweist
λ	Eigenwert der Laplacematrix
$\lambda(\boldsymbol{\Theta})$	Mittelpunkt des maximalen Kreises in der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta})$
$\boldsymbol{\mu}$	Rechtseigenvektor zum Nulleigenwert der Laplacematrix
μ	Komplexes Skalar
$\mu_i(s)$	Nyquist-Kurve
ν_i	Knoten i eines Graphen
$\boldsymbol{\Pi}_{\mathscr{A}}$	Matrix zur Projektion auf den asynchronen Unterraum
$\boldsymbol{\rho}$	Freiheitsgrad bei der Wahl der Kantengewichte isospektraler Graphen nach (5.12)
σ	Realteil des Eigenwerts der Laplacematrix
$\boldsymbol{\Psi}$	Abbildung des Zustands auf die Synchronisierungstrajektorie
ω	Imaginärteil des Eigenwerts der Laplacematrix, Kreisfrequenz

Dimensionen

N	Anzahl Agenten/Knoten
N_0	Dimension des Nullraums der Laplacematrix
N_C	Anzahl Cluster
$N_\mathcal{R}$	Anzahl maximale Erreichbarkeitsmengen
n	Systemordnung
n_c	Reglerordnung
$n^*_{\mathrm{c,K}}$	Minimale Ordnung komplex stabilisierender Regler
$n^*_{\mathrm{c,R}}$	Minimale Ordnung reell stabilisierender Regler
$n^*_{\mathrm{c,S}}$	Minimale Ordnung synchronisierender Regler
p	Anzahl Eingänge
q	Anzahl Ausgänge

Räume, Mengen

$\mathscr{A}$	Asynchroner Unterraum
$\mathcal{B}_r(\lambda)$	Offener Kreis in der komplexen Ebene um λ mit Radius r
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen
$\mathbb{C}_{<0}$	Offene linke komplexe Halbebene
$\mathcal{C}$	Gemeinsame Teilmenge
$\mathcal{D}(N)$	Notwendiges Eigenwertgebiet für Graphen mit positiven Gewichten und N Knoten
$\mathcal{E}$	Kantenmenge
$\mathcal{G}$	Graph
$\mathcal{G}_w$	Gewichteter Graph
$\mathcal{H}$	Exklusive Teilmenge
$\mathcal{I}$	Indexmenge
$\mathcal{K}_\mathrm{K}$	Menge komplex stabilisierender Regler
$\mathcal{K}_\mathrm{S}$	Menge synchronisierender Regler
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathcal{R}$	Maximale Erreichbarkeitsmenge
$\mathscr{S}$	Synchroner Unterraum
$\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$	Zu den Reglermatrizen in $\mathbf{\Theta}$ gehörende Synchronisierungsmenge
$\mathcal{U}$	Menge der Wurzelknoten
$\mathcal{V}$	Knotenmenge
Γ_D	Nyquist-D-Kurve
Ω	Multimenge mit Imaginärteilen von Eigenwerten von $\mathbf{A}$

Kurzfassung

Die Entwicklungen im Bereich eingebetteter Systeme und die große Verfügbarkeit moderner Kommunikationsmittel tragen dazu bei, dass Regelungen komplexer Systeme immer häufiger dezentral und vernetzt ausgeführt werden. Solche aus lokalen Regelkreisen und einem Kommunikationsnetzwerk bestehenden Systeme werden als verteilte Regelsysteme bezeichnet. Die Eigenschaften des Gesamtsystems hängen dabei sowohl von den lokal verwendeten Regelgesetzen als auch von der Topologie des Kommunikationsnetzwerkes ab. Ein Sonderfall verteilter Regelsysteme, bei dem dieser Zusammenhang zwischen den lokalen Regelgesetzen, der Kommunikationstopologie und den Eigenschaften des Gesamtsystems besonders deutlich wird, sind sogenannte Multi-Agenten-Systeme. Unter Multi-Agenten-Systemen werden physikalisch nicht gekoppelte Systeme verstanden, welche das Kommunikationsnetzwerk nutzen, um ein gemeinsames Regelziel zu erreichen. Die einzelnen Systeme werden dabei als Agenten bezeichnet und das gemeinsame Regelziel besteht beispielsweise in der Synchronisierung der Agenten.

Für homogene Multi-Agenten-Systeme, d. h., wenn alle Agenten eine identische Dynamik aufweisen, lässt sich das Synchronisierungsverhalten des Gesamtsystems anhand der Dynamik eines einzelnen Agenten und algebraischer Eigenschaften des Kommunikationsgraphen beschreiben. In der vorliegenden Arbeit wird diese Eigenschaft homogener Multi-Agenten-Systeme ausgenutzt, um den Entwurf der Agentendynamik vom Entwurf der Kommunikationstopologie zu trennen. Es wird ein systematischer Gesamtentwurf vorgeschlagen. Dabei wird zunächst die Agentendynamik betrachtet. Es wird gezeigt, wie diese so entworfen werden kann, dass Synchronisierung möglich ist. Anschließend werden algebraische Beschränkungen an den Kommunikationsgraphen abgeleitet, sodass die Einhaltung dieser Beschränkungen zu Stabilität des transienten und Optimalität des stationären Synchronisierungsverhaltens führt. Schließlich wird gezeigt, wie diese Beschränkungen beim Graphenentwurf berücksichtigt werden können.

Für den Entwurf der Agentendynamik wird ein Vorgehen präsentiert, mit dem Synchronisierungsregler minimaler Ordnung entworfen werden können. Als algebraische Beschränkung an den Kommunikationsgraphen zum Erreichen eines stabilen Synchronisierungsverhaltens wird die Menge aller zu Synchronisierung führenden Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix – die Synchronisierungsmenge – spezifiziert. Dabei werden die aus der Literatur bekannten Ergebnisse zur Beschreibung der Synchronisierungsmenge auf den Fall von Mehrgrößensystemen und auf die Verwendung dynamischer Regler erweitert. Darüber hinaus wird ein optimierungsbasierter Entwurf von Synchronisierungsreglern fester Ordnung vorgeschlagen, welcher zum Ziel hat, den Radius des größten in der Synchronisierungsmenge enthaltenen Kreises – den Synchronisierungsradius – zu maximieren.

Neben der Stabilität wird auch die Optimalität des transienten Verhaltens thematisiert. Dazu wird ein Regelgesetz zur optimalen Transition auf die stationäre Synchronisierungstrajektorie entwi-

ckelt und dieses mit bestehenden Ansätzen zur optimalen Synchronisierung verglichen. Die Ergebnisse zur Optimalität des transienten Verhaltens unterscheiden sich von den restlichen Ergebnissen dieser Arbeit, da sich sowohl das Regelgesetz als auch die Kommunikationstopologie aus der Lösung der betrachteten Optimalregelprobleme ergeben und somit nicht Teil des oben skizzierten Entwurfsschemas sind.

Zusätzlich zum transienten Verhalten wird auf die Optimalität des stationären Synchronisierungsverhaltens eingegangen. Es wird gezeigt, wie die Nullräume der Laplacematrix dazu genutzt werden können, das stationäre Verhalten zu optimieren. Diese Optimierung wird sowohl für den Synchronisierungsfall als auch für den Fall der Cluster-Synchronisierung durchgeführt.

Für den Graphenentwurf wird zunächst die Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix betrachtet, um somit alle Nichtnulleigenwerte innerhalb der Synchronisierungsmenge platzieren zu können. Neben der eigentlichen Lösung des Eigenwertvorgabeproblems wird darauf eingegangen, wie sekundäre Entwurfsziele erreicht werden können. Dabei wird das Einhalten einer vorgegebenen Struktur des Graphen und die Minimierung der Sensitivität der Eigenwerte gegenüber Störungen der Kantengewichte thematisiert. Gemeinsam mit den Ergebnissen zur Maximierung des Synchronisierungsradius, stellt die Minimierung der Eigenwertsensitivität einen Beitrag zur Erhöhung der Robustheit des Gesamtsystems dar. Abschließend wird gezeigt, dass die Vorgabe der Nullräume der Laplacematrix zum Erreichen von optimalem stationären Synchronisierungsverhalten immer zusätzlich zur Vorgabe der Eigenwerte möglich ist.

Abstract

Due to recent developments in embedded systems and communication devices, the control of complex systems is increasingly implemented in a decentralized and networked way. Such control systems consisting of local control loops and a communication network are called distributed control systems. The properties of the overall system thereby depend on the local control laws as well as on the communication topology. A special case of distributed control systems, where these interdependences of the local control laws, the communication topology, and the properties of the overall system become particularly obvious, is given by so-called multi-agent systems. Multi-agent systems are physically uncoupled systems, which use the communication network to pursue a common control objective. Thereby, the individual systems are called agents and the common control objective is, e. g., the synchronization of the agents.

For homogeneous multi-agent systems, i. e. when all agents exhibit identical dynamics, the synchronization behavior of the overall system can be described by the dynamics of a single agent and algebraic properties of the communication graph. The present thesis exploits this property of homogeneous multi-agent systems to decouple the design of the agents' dynamics from the design of the communication topology. A systematic design approach for the overall system is proposed. At first, the agents' dynamics are considered. It is shown, how the dynamics can be designed in order to enable synchronization. Afterwards, algebraic constraints for the communication graph are derived, such that the fulfilment of these constraints ensures stable and stationary optimal synchronization. Finally, it is shown, how a communication graph can be designed that fulfils these constraints.

For the design of the agents' dynamics, a procedure for designing synchronizing controllers of minimal order is presented. As algebraic constraint for the communication graph to guarantee stable synchronization the synchronization region is specified, i. e. the set of all non-zero eigenvalues of the Laplacian matrix that lead to synchronization. A way to describe the synchronization region for the general MIMO-case with dynamic output feedback is presented, which extends existing results for SISO-systems with static output feedback. Additionally, an optimization based approach for the design of synchronizing controllers of fixed order is proposed that aims at maximizing the synchronization radius, i. e. the radius of the largest circle contained in the synchronization region.

Besides stability, also optimality of the transient behavior is addressed. For this purpose, a control law yielding an optimal transition to the stationary synchronization trajectory is developed. The resulting control law is compared to existing results concerning optimal synchronization. The results regarding the optimality of the transient behavior differ from the results in the rest of the thesis, since both, the control law and the communication topology, emerge from the solution to the considered optimal control problems and are therefore not part of the design scheme outlined above.

In addition to the transient behavior, the optimality of the stationary synchronization behavior is considered. It is shown, how the nullspaces of the Laplacian matrix can be used as design variables to enforce optimal stationary behavior. The optimization is carried out for the synchronization and the cluster-synchronization case.

Regarding the graph design, the eigenvalue assignment for the Laplacian matrix is considered in order to place all non-zero eigenvalues inside the synchronization region. Besides the actual solution to the eigenvalue assignment problem, it is shown how secondary design objectives can be achieved. Thereby, the prespecification of the graph structure and the minimization of the sensitivity of the eigenvalues with respect to disturbances of the edge weights is discussed. Together with the results concerning the maximization of the synchronization radius, the minimization of the eigenvalue sensitivity increases the robustness of the overall system. Finally, it is shown that the nullspaces of the Laplacian matrix can always be assigned in addition to the eigenvalues in order to achieve optimal stationary synchronization behavior.

1 Einleitung

Aufgabe der Regelungstechnik ist es, dynamische Systeme so anzusteuern, dass sie ein gewünschtes Verhalten aufweisen. Insbesondere für große Systeme (verfahrenstechnische Anlagen, Energienetze, etc.) ist es dabei üblich, die zur Regelung genutzten Recheninstanzen über das System hinweg zu verteilen. Dadurch existieren, z. B. bei großen verfahrenstechnischen Anlagen, zahlreiche lokale Regelkreise. Die lokalen Regelkreise werden klassischerweise über eine zentrale Instanz (Prozessleitsystem) koordiniert. Die Entwicklungen im Bereich eingebetteter Systeme und die große Verfügbarkeit moderner Kommunikationsmittel tragen jedoch dazu bei, dass Regelungen komplexer Systeme immer häufiger vernetzt ausgeführt werden, d. h., dass die lokalen Regelinstanzen direkt miteinander kommunizieren können. Das Gesamtsystem besteht dann, wie in Abb. 1.1 gezeigt, aus im Allgemeinen physikalisch gekoppelten Teilsystemen, welche jeweils von dezentralen Instanzen geregelt werden. Die dezentralen Regeleinheiten greifen dazu auf lokale Messinformation (d.h. eigene Messsignale) zurück, können jedoch über ein Kommunikationsnetzwerk miteinander Informationen austauschen. Der Informationsaustausch verschiedener Regeleinrichtung über Kommunikationskanäle kann zu einer Verbesserung der Regelgüte genutzt werden oder in manchen Fällen sogar notwendig zum Erreichen des Regelziels sein.

Ein solches Regelsystem bestehend aus über ein Kommunikationsnetzwerk verbundenen dezentralen Reglern wird als *verteiltes Regelsystem* bezeichnet. Im Gegensatz zum Entwurf eines zentralen Reglers spielt beim Entwurf verteilter Regelsysteme die Kommunikationstopologie eine große Rolle, da diese die Struktur des Informationsflusses einschränkt: Während ein zentraler Regler alle Informationen des Systems gleichzeitig zur Verfügung hat und diese zur Regelung nutzen kann, können die verteilten Regler jeweils nur die Information ihres eigenen Teilsystems und die von denjenigen anderen Teilsystemen verwenden, mit denen sie über einen Kommunikationskanal verbunden sind. Die Kommunikationstopologie wird dabei üblicherweise mathematisch mittels Graphen beschrieben. Die Eigenschaften des verteilt geregelten Gesamtsystems hängen damit sowohl von den verwendeten lokalen Regelgesetzen als auch von der Kommunikationstopologie bzw. von den Eigenschaften des Kommunikationsgraphen ab.

In dieser Arbeit wird dieses Zusammenspiel aus Regler- und Kommunikationsentwurf an einem Spezialfall verteilter Regelsysteme untersucht, den sogenannten *Multi-Agenten-Systemen*. Bei Multi-Agenten-Systemen werden die einzelnen Teilsysteme als Agenten bezeichnet und die in Abb. 1.1 eingezeichnete physikalische Kopplung entfällt. Durch die fehlende physikalische Kopplung wird der Einfluss der Kommunikationstopologie besonders gut sichtbar. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich daher insbesondere mit der Frage, wie ein Multi-Agenten-System als Gesamtsystem aus Agenten- und Reglerdynamik sowie Kommunikationstopologie systematisch entworfen werden kann.

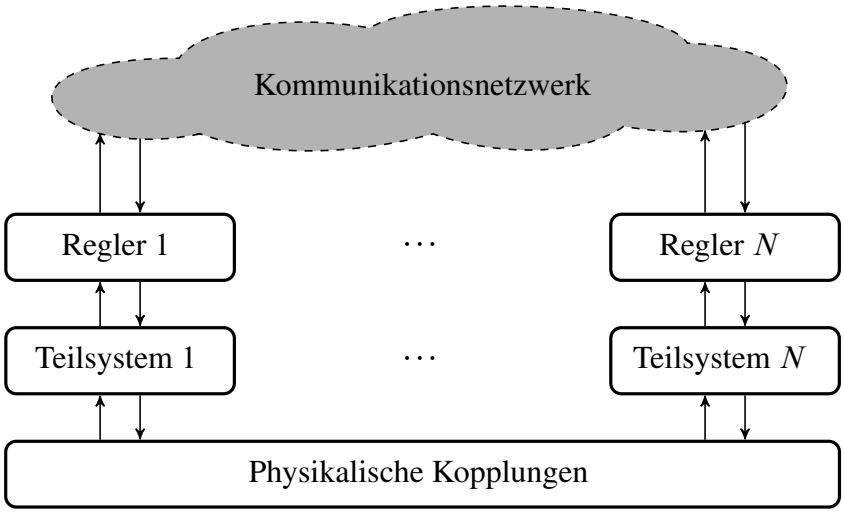

Abbildung 1.1: Verteiltes Regelsystem: Die Regler der (im Allgemeinen physikalisch gekoppelten) Teilsysteme tauschen Informationen über ein Kommunikationsnetzwerk aus.

Neben den oben bereits erwähnten Beispielen der verfahrenstechnischen Anlagen [76] und Energiesysteme [4, 52, 136] für allgemeine verteilte Regelsysteme, treten auch Multi-Agenten-Systeme in verschiedenen technischen Anwendungen auf. Ein großer Teil der Anwendungen liegt dabei im Bereich der Multi-Roboter-Systeme. Dort werden Problemstellungen wie das Rendez-Vous-Problem [58], die kooperative Exploration unbekannter Umgebungen [22, 41, 51] oder Regelungen für Formationsfahrten bzw. -flüge [106, 122] behandelt. Ähnliche Problemstellungen wie bei Multi-Roboter-Systemen treten im Bereich des (kooperativen) autonomen Fahrens auf [142]. Ein viel erforschtes Feld stellt in diesem Zusammenhang die Regelung autonomer Fahrzeugkolonnen dar [147], welches auch seit kurzem wieder verstärkt aufgegriffen wird [78, 86]. Neben diesen aus dem Bereich der Robotik stammenden Problemstellungen werden ähnliche Methoden auch bei der Analyse der Synchronisierung von Oszillatoren [33] verwendet. Ergebnisse dieser Art können auch zur Analyse der Stabilität des Energienetzes [135], der Synchronisierung biochemischer Systeme [130] oder der Meinungsbildung in sozialen Netzwerken [111, 44] verwendet werden.

1.1 Literaturübersicht

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem systematischen Entwurf homogener Multi-Agenten-Systeme. Sie kann dabei jedoch auch als Beitrag zum Entwurf allgemeinerer verteilter Regelsysteme verstanden werden. Aus diesem Grund wird in der folgenden Literaturübersicht auch der allgemeinere Fall verteilter Regelsysteme betrachtet und ausführlich die dabei auftretenden Herausforderungen diskutiert.

Der Begriff des *verteilten Regelsystems* wird wie im vorigen Abschnitt beschrieben verwendet, um die Struktur des Informationsflusses zu beschreiben. In dieser Verwendung des Begriffes wird daher weder spezifiziert, welche Information für den Entwurf des Regelsystems zur Verfügung steht, noch wie die Regelung technisch realisiert wird. Litz trifft in [75] dieselbe Unterscheidung

im Zusammenhang mit dem Begriff des *dezentralen Regelsystems* und verwendet den Begriff ebenfalls im Sinne des Informationsflusses. Somit kann der Entwurf eines verteilten Regelsystems also durchaus zentral erfolgen, d.h. mit vollständigem Systemwissen. In jedem Fall stellt der Entwurf eines verteilten Regelsystems ein strukturbeschränktes Entwurfsproblem dar, welches im Allgemeinen schwer zu lösen ist.

Bereits 1971 formulierte Aoki in [5] im Zusammenhang mit verteilten Regelungen zwei Hauptproblemstellungen: Die Stabilisierung des Gesamtsystems mit minimalem Kommunikationsaufwand und das Finden des optimalen Kompromisses zwischen Performance und Kommunikationskosten. Die Frage nach der Stabilisierbarkeit wurde für den Fall einer komplett dezentralen Regelung von Wang und Davison in [156] mit der Einführung des Begriffes der *dezentral fixen Pole* (engl. *decentralized fixed modes*) beantwortet. Die dezentral fixen Pole sind Eigenwerte, die durch keine dezentrale Regelung verschoben werden können. Entsprechend kann das System mithilfe eines dezentralen Reglers nicht stabilisiert werden, wenn es instabile dezentral fixe Pole enthält. Eine gute Übersicht über die Ergebnisse im Fall dezentraler Regelung kann [75] entnommen werden. Im Fall allgemeiner Kommunikationstopologien wird statt von dezentral fixen Polen von *bezüglich der Kommunikationstopologie fixen Polen* (engl. *fixed modes with respect to the feedback pattern*) gesprochen [132]. Dazu wird in [132] die minimale Kommunikationstopologie gesucht (im Sinne der minimalen Anzahl an Kanten im Kommunikationsgraph), sodass das System keine fixen Pole mehr enthält. In [113] wird die Problemstellung verallgemeinert, indem den unterschiedlichen Kanten im Kommunikationsgraphen unterschiedliche Kosten zugewiesen werden und dann im Sinne dieser Kosten die günstigste Topologie gesucht wird, sodass das System keine fixen Pole mehr enthält. In [99] wird schließlich gezeigt, dass dieses Problem NP-schwer ist.

Für eine vorgegebene Kommunikationstopologie wurde neben dem Stabilisierungsproblem auch das Optimalreglerentwurfsproblem bereits früh erforscht. Obwohl Witsenhausen in [159] mithilfe eines Gegenbeispiels zeigen konnte, dass das optimale Regelgesetz für das strukturbeschränkte Optimalreglerentwurfsproblem eines linearen zeitinvarianten Systems bei Verwendung eines quadratischen Gütemaßes nicht notwendigerweise linear ist, existieren ausgehend von [66] viele Arbeiten, welche den optimalen strukturbeschränkten linearen Regler suchen. Ein bewährter Algorithmus zum Lösen dieses Problems ist die Methode von Anderson und Moore [3], für die in leicht abgeänderter Form in [120] die lokale Konvergenzrate untersucht wurde. Ähnlich zur Methode von Anderson und Moore, wo über eine quadratische Approximation des Problems in jeder Iteration eine Suchrichtung bestimmt wird, wurde in [71] mithilfe der *Alternating Direction Method of Multipliers* und einer erweiterten Lagrange-Funktion der strukturbeschränkte Optimalregler gesucht.

Neben dem Optimalreglerentwurf mit vorgegebener Kommunikationstopologie, gibt es auch einige Arbeiten, die sich mit der gleichzeitigen Optimierung von Regelkreisperformance und Kommunikationstopologie beschäftigen. Dieses Mehrzieloptimierungsproblem (gleichzeitiges Optimieren von einem Gütemaß für die Performance und einem Gütemaß für die Topologie) wird dabei meist skalarisiert gelöst, d. h., es wird die gewichtete Summe der beiden Gütemaße minimiert. Alternativ wird statt der gleichzeitigen Minimierung beider Gütemaße eines der Gütemaße in der Optimierung als Beschränkung berücksichtigt und nur das andere minimiert. Unabhängig von der

genauen Formulierung sind diese Probleme im Allgemeinen nicht konvex. Genauer gesagt ist der strukturbeschränkte Optimalreglerentwurf genau dann konvex, wenn die Strukturbeschränkung quadratisch invariant ist [127, 65, 94]. Da diese Einschränkung oft nicht erfüllt ist, jedoch bis auf wenige Ausnahmen nur konvexe Optimierungsprobleme gut lösbar[1] sind, finden sich in der Literatur einige Ansätze, welche das Problem konvex relaxieren. Dies wird zum Beispiel bei Ansätzen basierend auf linearen Matrixungleichungen durch Verwendung blockdiagonaler Matrizen in den Ljapunov-Funktionen erreicht [172, 128]. In anderen Arbeiten wird direkt das ursprüngliche nicht konvexe Problem gelöst, z. B. unter Verwendung von erweiterten Lagrange-Funktionen [71, 72].

Die in diesem Abschnitt bisher diskutierten Quellen betrachten das Problem des Entwurfs eines verteilten Regelsystems als zentrales Mehrgrößenreglerentwurfsproblem. Dabei berücksichtigen sie die Kommunikationstopologie durch Strukturbeschränkung der entsprechenden Reglermatrizen. Für den Fall physikalisch verkoppelter Systeme ist dies ein gängiger Ansatz. Für Multi-Agenten-Systeme hingegen kann ein anderer Weg eingeschlagen werden. Durch den Wegfall physikalischer Kopplungen können die algebraischen Eigenschaften des zugrundeliegenden Kommunikationsgraphen verwendet werden, um die Dimension des Entwurfs zu verringern. Auf die entsprechende Literatur zu Multi-Agenten-Systemen wird am Ende dieses Abschnitts ausführlich eingegangen. Zuvor wird jedoch noch kurz die Abgrenzung zu einigen weiteren im Zusammenhang mit verteilten Regelsystemen auftretenden Begriffen diskutiert:

- Vernetzte Regelung (engl. *networked control system*): Der Begriff der vernetzten Regelung beschreibt – unvoreingenommen betrachtet – sehr gut das, was in dieser Arbeit als verteiltes Regelsystem bezeichnet wird: Die Vernetzung lokaler Regeleinrichtungen über Kommunikationskanäle zur Regelung eines größeren Gesamtsystems. Dennoch wird hier von der Verwendung des Begriffes abgesehen, da in der Literatur mit ihm vor allem Problemstellungen verbunden werden, welche die technische Realisierung der Regelung betreffen, wie beispielsweise begrenzte Bandbreite bei der Kommunikation, Kommunikationsverzögerungen, Paketausfälle, etc. All diese Aspekte, die vor allem die Qualität der Informationsübertragung betreffen, werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, sondern es wird die Struktur des Informationsflusses in den Vordergrund gestellt und von einer idealen Übertragungsqualität ausgegangen.

- Large-Scale-Systems: Im Zusammenhang mit dezentralen und verteilten Regelsystemen wird manchmal auch der Begriff des Large-Scale-Systems verwendet (vgl. [79, 134]). Die subjektive Konnotation in „Large-Scale“ erschwert es, eine klare Abtrennung zu finden. Jedoch tritt der Begriff vor allem dann auf, wenn der Entwurf mit unvollständigem Wissen durchgeführt wird. Dies ist oft der Fall, wenn das System „zu groß“ ist, um ein detailliertes Modell aufzustellen. Es wird dann versucht, durch Zerlegung des Systems in nur schwach verkoppelte Teilsysteme den Entwurf für jedes Teilsystem auf einen lokalen Reglerentwurf zurückzuführen. In dieser Arbeit hingegen wird immer davon ausgegangen, dass die zu regelnden Systeme vollständig bekannt sind.

[1] Unter „gut lösbar“ wird hier verstanden, dass in polynomialer Zeit deterministisch das globale Optimum gefunden werden kann.

- Komplexe Netzwerke: Wenn von *komplexen Netzwerken* gesprochen wird (siehe z. B. [105]), werden graphentheoretische Zusammenhänge untersucht, die bei großen (realen) Netzwerken, wie beispielsweise Bekanntschaftsnetzwerken, Kooperationsnetzwerken, Computernetzwerken, etc. auftreten. Als bekanntes Beispiel ist das Kleine-Welt-Problem zu nennen [97, 139]: Die Frage, über wie viele „Ecken“ sich alle Menschen kennen. Graphentheoretisch werden diese Phänomene mit Zufallsgraphen nachgebildet und für diese Zufallsgraphen statistische Eigenschaften untersucht, z. B. der Erwartungswert des Durchmessers (maximale Distanz zwischen zwei Knoten) [14, 83]. Die Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit zielen hingegen darauf ab, die Kommunikationstopologie gezielt zu entwerfen. Dazu spielen solche statistischen Eigenschaften der Graphen keine Rolle.

Wird in der regelungstechnischen Literatur von Multi-Agenten-Systemen gesprochen, so sind, wie bereits mehrfach dargelegt, physikalisch nicht gekoppelte Systeme gemeint. An dieser Stelle sei betont, dass es durchaus andere Lesarten des Agentenbegriffs gibt, bei denen eine verkoppelte Dynamik der Teilsysteme vorliegen kann und sich der Agentenbegriff nur auf die Entscheidungsautonomie des Reglers des jeweiligen Teilsystems bezieht. Diese Verwendung des Agentenbegriffs entstammt der Informatik [160]. In dieser Lesart ist der Agent also letztlich nur der Regler, d.h. die entscheidungstreffende Intelligenz. In der vorliegenden Arbeit werden hingegen die einzelnen nicht gekoppelten Teilsysteme als Agenten bezeichnet, welche jeweils mit einem Regler ausgestattet sind. Die Regler der Agenten sind dann über ein Kommunikationsnetzwerk miteinander verbunden und verfolgen ein gemeinsames Regelziel, z. B. die Synchronisierung auf eine gemeinsame Trajektorie.

Eine große Zahl an Veröffentlichungen hat sich in den letzten beiden Jahrzehnten mit der Regelung von Multi-Agenten-Systemen beschäftigt. Das Konsensusproblem ist dabei vermutlich das einfachste und zugleich bedeutendste regelungstechnische Problem im Zusammenhang mit Multi-Agenten-Systemen [108]. Beim Konsensusproblem geht es selbstredend darum, dass sich die Agenten auf einen gemeinsamen Wert (z. B. Zustands- oder Ausgangswert) einigen. Die Verbindung der Lösung des Konsensusproblems zu elementaren Eigenschaften des Kommunikationsgraphen wurde erstmals von Fax und Murray in [37] aufgezeigt: Der Kommunikationsgraph muss einen gerichteten Spannbaum enthalten [121]. Darauf aufbauend wurden weitere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösung des Konsensusproblems erarbeitet [88]. Während viele Arbeiten sich zunächst auf das Konsensusproblem von Agenten mit Integratordynamik konzentrierten, wurden in einigen weiteren Arbeiten diese Ergebnisse auf Agenten mit Doppelintegratordynamik erweitert (vgl. beispielsweise [168]). Für allgemeine Dynamiken findet teilweise eine Unterscheidung zwischen Konsensus [73] (Konvergenz zu einem gemeinsamem konstanten Zustand) und Synchronisierung [131] (Konvergenz zu einer gemeinsamer Zustands-/Ausgangstrajektorie) statt. Letztere wird jedoch manchmal ebenfalls als Konsensus bezeichnet [88]. Außerdem wird bei allgemeinen Dynamiken zwischen *homogenen Multi-Agenten-Systemen* (alle Agenten haben dieselbe Dynamik) und *heterogenen Multi-Agenten-Systemen* (die unterschiedlichen Agenten können unterschiedliche Dynamiken aufweisen) unterschieden, weshalb im Folgenden nochmal separat auf die Unterschiede zwischen diesen beiden Abstufungen eingegangen wird.

Das Synchronisierungsproblem für homogene Agenten vereinfacht sich insofern, als dass es in ein simultanes Stabilisierungsproblem umgeformt werden kann [38]. Dieses simultane Stabilisierungsproblem hängt dann von der Dynamik eines einzelnen Agenten und den algebraischen Eigenschaften des Kommunikationsgraphen ab. Mithilfe dieser Formulierung des Synchronisierungsproblems lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Synchronisierung ableiten [88]. Für den Fall der Zustandsrückführung gibt Tuna in [152] ein Regelgesetz zur Synchronisierung an, bei dem eine algebraische Riccati-Gleichung gelöst werden muss, welche die Dimension eines Agenten hat. Außerdem muss eine positive untere Grenze für den Realteil der Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix bekannt sein. Für den Fall der Ausgangsrückführung gibt es verschiedene Ansätze, die auf dem Einsatz eines Beobachters beruhen [131, 74]. Soll der Einsatz eines Beobachters vermieden werden, so muss im Allgemeinen das simultane Stabilisierungsproblem mit statischer Ausgangsrückführung numerisch gelöst werden [143].

Für heterogene Multi-Agenten-Systeme lässt sich das Synchronisierungsproblem nicht einfach in ein simultanes Stabilisierungsproblem umformulieren. Trotzdem zeigen Wieland *et al.* in [157], dass zur Synchronisierung der Agenten auf eine nichttriviale Trajektorie, die Agenten notwendigerweise eine gemeinsame Dynamik aufweisen müssen. Lunze führt in [85] in ähnlicher Weise den Begriff der Systemüberschneidung ein und zeigt ebenfalls deren Notwendigkeit für eine erfolgreiche Synchronisierung. Synchronisierung auf eine Ausgangstrajektorie bedeutet, dass jeder Agent nach der Synchronisierung diese Trajektorie abfährt. Für die Synchronisierung heterogener Agenten auf eine nichttriviale Trajektorie ist es daher notwendig, dass es eine nichttriviale Schnittmenge der Trajektorien gibt, die jeder Agent autonom abfahren kann. Diese notwendige Bedingung wird in Anlehnung an das bekannte Resultat von Francis und Wonham [42] aus dem Bereich der Mehrgrößenregelung als *Internes-Modell-Prinzip der Synchronisierung* bezeichnet.

Für den Entwurf von Regelgesetzen zur Synchronisierung heterogener Multi-Agenten-Systeme gibt es verschiedene Ansätze. Ein Ansatz ist es, die notwendige Bedingung einer gemeinsamen Dynamik dadurch zu erfüllen, dass jeder Agent ebendiese Dynamik als Exosystem als Teil seines dynamischen Reglers beinhaltet. Dieser Ansatz wird oft als *virtueller Exosystemansatz* bezeichnet [157]. Eine weitere Möglichkeit, das Interne-Modell-Prinzip der Synchronisierung zu erfüllen, ist es, die Agenten durch eine unterlagerte Regelung so zu regeln, dass alle dasselbe Ein-Ausgangs-Verhalten aufweisen. Solche Ansätze werden als *Homogenisierungsansätze* bezeichnet [63, 62, 145]. Bei den bislang aufgeführten Ansätzen müssen entweder Reglerzustände kommuniziert werden oder es wird eine unterlagerte Regelung zur Homogenisierung benötigt. Synchronisierung allein aufgrund von Relativinformation der Ausgänge und unter Verwendung allgemeiner dynamischer Regler wird in [146] durch einen zentralen strukturbeschränkten Entwurf erreicht.

Dass der Einfluss der Kommunikationstopologie bei Multi-Agenten-Systemen deutlich sichtbar ist, kann leicht am Konsensusproblem mit Integratordynamik nachvollzogen werden. Dort ist die Konvergenzrate direkt mit dem kleinsten Nichtnulleigenwert der Laplacematrix des Kommunikationsgraphen verknüpft [38]. Der größte Eigenwert der Laplacematrix limitiert hingegen die größtmögliche Totzeit des Kommunikationsnetzes, für die Konsensus erreicht wird [109, 103]. Außerdem limitiert der größte Eigenwert der Laplacematrix die maximal zulässige Verstärkung und somit auch die Konvergenzrate beim Vorhandensein von Stellgrößenbeschränkungen [165].

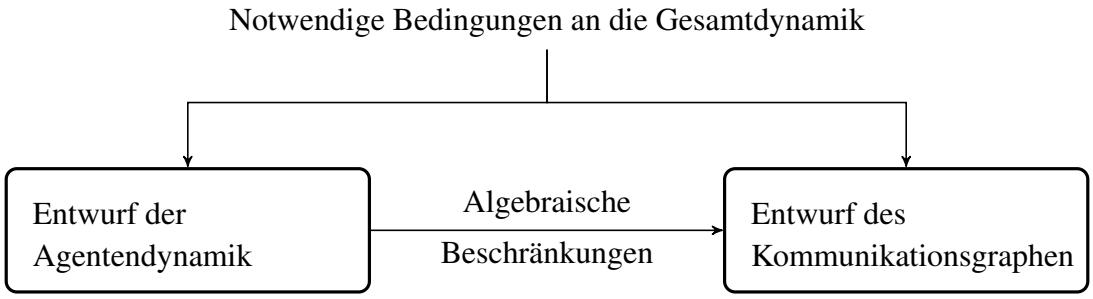

Abbildung 1.2: Zweistufiges Entwurfsschema: Trennung des Entwurfs der Agentendynamik und der Kommunikationstopologie.

Auch bei Systemen zweiter Ordnung können direkt Abschätzungen für die Konvergenzrate aus den Eigenwerten der Laplacematrix abgeleitet werden [100]. Diese zentrale Rolle der Kommunikationstopologie hat zur Folge, dass sich einige Arbeiten gezielt mit der Optimierung des Kommunikationsgraphen beschäftigen. In vielen Arbeiten wird dabei versucht, den kleinsten Nichtnulleigenwert ungerichteter verbundener Graphen zu maximieren. In [155] wird das Problem analytisch behandelt, indem der zum kleinsten Nichtnulleigenwert assoziierte Eigenvektor verwendet wird. Im Gegensatz zu dieser analytischen Methode, formuliert Boyd das Problem als konvexes Optimierungsproblem [17], welches effizient numerisch gelöst werden kann. Dabei maximiert er den kleinsten Nichtnulleigenwert bei gleichzeitiger Beschränkung der Summe der Kantengewichte des Graphen. Rafiee und Bayen variieren diese Problemformulierung, indem sie die Anzahl der Kanten nach oben beschränken. Dies führt auf ein gemischt ganzzahliges semidefinites Programm [119]. Neben der Maximierung des kleinsten Nichtnulleigenwerts wird in [133] zusätzlich der größte Eigenwert der Laplacematrix beschränkt.

1.2 Eigene Beiträge und Struktur der Arbeit

Bis auf die Ansätze zum gleichzeitigen Entwurf des Reglers und der Kommunikationstopologie aus Sicht eines zentralen, strukturbeschränkten Mehrgrößenreglerentwurfsproblems, betrachten die im vorigen Abschnitt diskutierten Quellen sowohl für allgemeine verteilte Regelsysteme als auch für Multi-Agenten-Systeme entweder das Reglerentwurfsproblem bei feststehender Kommunikationstopologie, oder den Entwurf der Kommunikationstopologie ohne Bezug auf das dynamische Gesamtsystem. In der vorliegenden Arbeit wird ein Gesamtentwurf für homogene Multi-Agenten-Systeme präsentiert, bei dem beide Entwurfsprobleme – der Reglerentwurf und der Entwurf der Kommunikationstopologie – systematisch berücksichtigt werden. Dabei wird die im letzten Abschnitt bereits benannte Eigenschaft homogener Multi-Agenten-Systeme ausgenutzt, dass das Synchronisierungsverhalten des Gesamtsystems anhand der Dynamik eines einzelnen Agenten und algebraischer Eigenschaften des Kommunikationsgraphen beschrieben werden kann. Dies ermöglicht es, die beiden Entwurfsprobleme getrennt, jedoch jeweils unter Berücksichtigung der Gesamtdynamik, zu betrachten. Der Gesamtentwurf wird dann in den folgenden beiden Schritten ausgeführt, welche auch in Abb. 1.2 skizziert sind:

- Zunächst erfolgt der Entwurf der Agentendynamik, d.h. der (möglicherweise dynamischen) Regelgesetze. Aus dem Entwurf der Agentendynamik werden algebraische Beschränkungen an den Entwurf der Kommunikationstopologie abgeleitet.
- Als Zweites erfolgt der Entwurf des Kommunikationsgraphen. Die im Entwurf der Agentendynamik gefundenen algebraischen Beschränkungen werden an die den Kommunikationsgraphen beschreibenden Matrizen gestellt.

In beiden Schritten werden zudem notwendige Bedingungen für den Entwurf der Gesamtdynamik berücksichtigt. Der Vorteil der zweistufigen Vorgehensweise liegt darin, dass beim Entwurf des Kommunikationsgraphen die Dynamik des Gesamtsystems nicht mehr berücksichtigt werden muss, da dies bei der Bestimmung der algebraischen Beschränkungen bereits geschehen ist.

Zu Beginn werden in Kapitel 2 die erforderlichen Grundlagen zur Synchronisierung homogener Multi-Agenten-Systeme besprochen. Dazu wird auf die graphentheoretische Beschreibung eingegangen und die betrachtete Systemklasse eingeführt. Der Hauptteil der Arbeit ist dann gemäß der oben benannten zweistufigen Vorgehensweise gegliedert. Dabei wird in den Kapiteln 3 und 4 der Entwurf der Agentendynamik diskutiert und es werden die algebraischen Beschränkungen für den Graphenentwurf hergeleitet. In Kapitel 5 wird schließlich gezeigt, wie diese algebraischen Beschränkungen beim Entwurf eines Kommunikationsgraphen berücksichtigt werden können.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Entwurf der Synchronisierungsregler. Dabei wird die Synchronisierbarkeit des Gesamtsystems, d. h. die Stabilität des transienten Synchronisierungsverhalten, als notwendige Bedingung beachtet. Es wird aufgezeigt, wie Regler minimaler Ordnung entworfen werden können, welche die Synchronisierung über ein Kommunikationsnetz ermöglichen. Für die so gefundenen Regler wird die Menge aller zu Synchronisierung führenden Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix – die sogenannte Synchronisierungsmenge – als Beschränkung an den Entwurf des Kommunikationsgraphen abgeleitet. Die Ergebnisse zur Beschreibung der Synchronisierungsmenge stellen dabei eine Erweiterung der aus der Literatur bekannten Ergebnisse auf den Fall von Mehrgrößensystemen und auf die Verwendung dynamischer Regler dar. Aufbauend auf der Beschreibung der Synchronisierungsmenge wird außerdem gezeigt, wie Regler fester Ordnung so entworfen werden können, dass sie zu einer großen Synchronisierungsmenge führen.

Neben den Betrachtungen zur Stabilität in Abschnitt 3.1 wird in Abschnitt 3.2 auf die Optimalität des transienten Synchronisierungsverhaltens eingegangen. Dazu wird ein Regelgesetz zur optimalen Transition auf die stationäre Synchronisierungstrajektorie entwickelt und dieses mit bestehenden Ansätzen zur optimalen Synchronisierung verglichen. Die Ergebnisse zur Optimalität des transienten Verhaltens unterscheiden sich von den restlichen Ergebnissen dieser Arbeit, da sich sowohl das Regelgesetz als auch die Kommunikationstopologie aus der Lösung der betrachteten Optimalregelprobleme ergeben und somit nicht Teil des oben skizzierten Entwurfsschemas sind.

Im Anschluss an den Entwurf des transienten Verhaltens, wird in Kapitel 4 das stationäre Synchronisierungsverhalten von Multi-Agenten-Systemen betrachtet. Das stationäre Synchronisierungsverhalten homogener Multi-Agenten-Systeme hängt von den Anfangszuständen der Agenten und

den Nullräumen der Laplacematrix des Kommunikationsgraphen ab. Unter verschiedenen Annahmen an die Anfangszustände der Agenten werden daher die Nullräume der Laplacematrix zur Optimierung des stationären Synchronisierungsverhaltens verwendet und anschließend als algebraische Beschränkungen an den Graphenentwurf spezifiziert. Die Optimierung des stationären Verhaltens wird sowohl für den Synchronisierungs- als auch für den Cluster-Synchronisierungsfall durchgeführt.

In Kapitel 5 wird schließlich gezeigt, wie die in den vorigen Teilen abgeleiteten algebraischen Beschränkungen beim Graphenentwurf berücksichtigt werden können. Dabei werden Methoden entwickelt, um Laplacematrizen mit vorgegebenen Eigenwerten und Nullräumen zu entwerfen. Darüber hinaus wird gezeigt, wie zusätzliche Entwurfsziele durch Optimierung der Kantengewichte beim Graphenentwurf berücksichtigt werden können. Neben der Vorgabe der Graphenstruktur wird dabei insbesondere die Minimierung der Eigenwertsensitivität thematisiert und diskutiert, wie diese zur Erhöhung der Robustheit des Gesamtsystems führt.

Die Arbeit schließt in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf mögliche weitere Fragestellungen.

2 Beschreibung homogener Multi-Agenten-Systeme

In diesem Kapitel wird in die Grundlagen eingeführt, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit für den Entwurf homogener Multi-Agenten-Systeme immer wieder zurückgegriffen wird. Dabei wird in Abschnitt 2.1 zunächst die graphenbasierte Beschreibung der Kommunikationstopologie von Multi-Agenten-Systemen thematisiert. Darauf aufbauend wird in Abschnitt 2.2 die in der gesamten Arbeit betrachtete Systemklasse der linearen homogenen Multi-Agenten-Systeme vorgestellt und darauf eingegangen, unter welchen Umständen Synchronisierung der Agenten erreicht wird.

2.1 Graphen und assoziierte Matrizen

Der Informationsfluss in Multi-Agenten-Systemen wird mittels Graphen beschrieben. Einen guten Überblick über die zur Modellierung von Multi-Agenten-Systemen notwendigen graphentheoretischen Grundlagen liefert [96], woraus auch die folgenden grundlegenden Definitionen entlehnt sind. Zur Beschreibung des Informationsflusses eines Multi-Agenten-Systems wird jeder Agent als Knoten eines Graphen aufgefasst. Die Knoten werden in der (endlichen) Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ zusammengefasst. Die Kopplungen der Agenten (durch Kommunikationskanäle) werden durch Kanten zwischen den Knoten beschrieben, welche in der Kantenmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ zusammengefasst sind. Der Kommunikationsgraph ist dann formal durch das Paar $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ definiert. Gilt für ein Knotenpaar ν_i, ν_j, dass $(\nu_i, \nu_j) \in \mathcal{E}$, so bedeutet dies, dass eine Kante vom Knoten ν_i zum Knoten ν_j existiert. Die Richtung der Kante wird in der vorliegenden Arbeit im Sinne des Informationsflusses definiert, d. h., die Kante (ν_i, ν_j) zeigt an, dass Information von Knoten ν_i zu Knoten ν_j fließt. Der Knoten ν_i heißt dann Vorgängerknoten von ν_j und der Knoten ν_j heißt Nachfolgerknoten von ν_i. Existiert zu jeder Kante $(\nu_i, \nu_j) \in \mathcal{E}$ eine Kante $(\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E}$, so wird von einem ungerichteten Graphen gesprochen, andernfalls von einem gerichteten Graphen bzw. von einem Digraphen. Die Menge der ungerichteten Graphen ist offensichtlich in der Menge der gerichteten Graphen enthalten. Daher wird in der vorliegenden Arbeit immer vom Allgemeinfall eines gerichteten Graphen ausgegangen. Es werden nur schleifenfreie Graphen betrachtet, d. h., kein Knoten besitzt eine Kante zu sich selbst, sodass stets $(\nu_i, \nu_i) \notin \mathcal{E}$ gilt. Zusätzlich zur Richtung kann jede Kante (ν_i, ν_j) mit einem reellwertigen Gewicht $w_{i,j} \neq 0$ versehen werden und somit ein gewichteter Informationsfluss dargestellt werden. Formal kann dazu ein gewichteter Graph $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ definiert werden, wobei $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, welche jeder Kante des Graphen $(\nu_i, \nu_j) \in \mathcal{E}$ das Gewicht $w_{i,j}$ zuordnet. Mit einem solchen gewichteten Graphen ist die gewichtete *Adjazenzmatrix* assoziiert

$$\mathbf{A}_w = [a_{i,j}] = \begin{cases} w_{j,i}, & \text{wenn } (\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Adjazenzmatrix beschreibt den Graphen vollständig. Daher kann auch umgekehrt mithilfe der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}_w$ ein gewichteter Graph $\mathcal{G}_w$ definiert werden, welcher genau dann eine Kante zwischen den Knoten ν_j und ν_i mit dem entsprechenden Kantengewicht hat, wenn $a_{i,j} \neq 0$. Es wird daher im Folgenden auch $\mathcal{G}_w(\mathbf{A}_w)$ geschrieben, wenn der mit der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}_w$ assoziierte gewichtete Graph gemeint ist. Ist nur der zugrunde liegende Graph (das kombinatorische Objekt) gemeint, so wird $\mathcal{G}(\mathbf{A}_w)$ geschrieben und der Index w weggelassen. Mit dieser Konvention lässt sich die Addition zweier Graphen definieren, indem einfach die Adjazenzmatrizen addiert werden: $\mathcal{G}_w(\mathbf{A}_{w,1}) + \mathcal{G}_w(\mathbf{A}_{w,2}) = \mathcal{G}_w(\mathbf{A}_{w,1} + \mathbf{A}_{w,2})$. Zusätzlich zur Adjazenzmatrix wird die gewichtete *(Eingangs-)Gradmatrix* $\mathbf{D}_w = [d_{i,j}]$ definiert, welche eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente der jeweiligen Zeilensumme der Adjazenzmatrix entsprechen, d. h., für die $d_{i,i} = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}$ gilt. Schließlich wird die gewichtete *Laplacematrix* zu

$$\mathbf{L}_w = \mathbf{D}_w - \mathbf{A}_w \tag{2.1}$$

definiert. Aus der Definition der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ ist direkt ersichtlich, dass deren Zeilensumme immer Null ist. Dies bedeutet, dass der Einsvektor $\mathbf{1}_N$ immer im Rechtsnullraum der Laplacematrix liegt und folglich die Laplacematrix immer mindestens einen Eigenwert in Null hat. Diese Eigenschaft der Laplacematrix führt zur Definition der *reduzierten Laplacematrix* (vgl. [166])

$$\overline{\mathbf{L}}_w = \mathbf{V}^\top \mathbf{L}_w \mathbf{V}, \tag{2.2}$$

wobei die Matrix $\mathbf{V}$ so gewählt ist, dass $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$ gilt. Die reduzierte Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ resultiert aus der Transformation der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ auf obere Blockdreiecksform

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}_w\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{L}}_w \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

durch die reguläre Matrix $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N & \mathbf{V} \end{bmatrix}$. Daher besitzt die reduzierte Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ dieselben Eigenwerte wie die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ bis auf einen Nulleigenwert.

Bemerkung 2.1. *Wie oben angemerkt, besteht ein umkehrbarer Zusammenhang zwischen der Definition eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w$ und der Definition der zugehörigen Adjazenzmatrix $\mathbf{A}_w$. Dies gilt selbst, wenn der Graph nicht schleifenfrei ist. Für schleifenfreie Graphen, welche in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet werden, ist die Beziehung zwischen Adjazenzmatrix $\mathbf{A}_w$ und Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ ebenfalls eineindeutig. Daher kann mit jeder Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ ein schleifenfreier Graph assoziiert werden; es wird $\mathcal{G}_w(\mathbf{L}_w)$ bzw. $\mathcal{G}(\mathbf{L}_w)$ für den entsprechenden gewichten bzw. ungewichteten Graphen geschrieben. Dementsprechend lässt sich die Addition zweier schleifenfreier Graphen auch mittels der Laplacematrizen durchführen: $\mathcal{G}_w(\mathbf{L}_{w,1}) + \mathcal{G}_w(\mathbf{L}_{w,2}) = \mathcal{G}_w(\mathbf{L}_{w,1} + \mathbf{L}_{w,2})$.*

2.1.1 Zusammenhängende Graphen

Die Einführung der mit Graphen assoziierten reellwertigen Matrizen macht die Mittel der linearen Algebra zugänglich zur Untersuchung der Eigenschaften von Graphen. Eine wichtige Eigenschaft

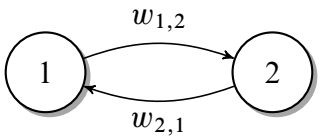

Abbildung 2.1: Gewichteter Graph mit 2 Knoten.

von Graphen, die auch bei der Analyse von Multi-Agenten-Systemen eine große Rolle spielt, ist, ob und wie alle Knoten des Graphen durch Pfade miteinander verbunden sind. Ein (gerichteter) Pfad der Länge r in $\mathcal{G}$ ist eine Folge $\nu_{k_0}, \ldots, \nu_{k_r}$ von $r+1$ Knoten, sodass $(\nu_{k_i}, \nu_{k_{i+1}}) \in \mathcal{E}$ für alle $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ gilt. Existiert ein Pfad zwischen Knoten ν_i und ν_j, so wird $\nu_i \rightsquigarrow \nu_j$ geschrieben.

Definition 2.2 (Zusammenhängend und stark zusammenhängend). *Ein Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ heißt zusammenhängend, wenn es mindestens einen Knoten $\nu_i \in \mathcal{V}$ gibt, von dem aus alle anderen Knoten durch Pfade erreicht werden können, d. h., für den $\nu_i \rightsquigarrow \nu_j$ für alle $\nu_j \in \mathcal{V} \backslash \{\nu_i\}$ gilt. Ein solcher Knoten wird als Wurzelknoten bezeichnet. Ein Graph heißt stark zusammenhängend, wenn jeder Knoten Wurzelknoten ist.*

Es ist ein bekanntes Resultat, dass für Graphen mit positiven Kantengewichten die Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ direkt darauf schließen lässt, ob der Graph zusammenhängend ist.

Satz 2.3 ([121, Lemma 3.3]). *Der Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit positiven Kantengewichten ist genau dann algebraisch einfach, wenn der zugrunde liegende Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ zusammenhängend ist.*

Werden auch negative Kantengewichte zugelassen, so ist dieses Resultat nicht mehr gültig, wie als Nächstes an einem einfachen Beispiel gezeigt wird.

Beispiel 2.4. *Die Laplacematrix des in Abb. 2.1 gezeigten Graphen ist durch*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} w_{2,1} & -w_{2,1} \\ -w_{1,2} & w_{1,2} \end{bmatrix}$$

gegeben. Offensichtlich ist der Graph (stark) zusammenhängend. Das charakteristische Polynom von $\mathbf{L}_w$ ergibt sich zu

$$\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{L}_w) = s^2 - (w_{1,2} + w_{2,1})s.$$

Für $w_{1,2} = -w_{2,1}$ besitzt die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ also einen (algebraisch) doppelten Eigenwert in Null, obwohl der zugrunde liegende Graph zusammenhängend ist.

An Beispiel 2.4 wird ersichtlich, dass der Nulleigenwert der Laplacematrix von Graphen mit beliebigen Gewichten durchaus mehrfach sein kann, obwohl der zugrunde liegende Graph zusammenhängend ist. Dass dies jedoch nur der Ausnahmefall ist und dass die Umkehrung nicht gilt, zeigen die folgenden beiden Sätze, deren Beweise im Anschluss angegeben sind.

Satz 2.5. *Der Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit beliebigen Kantengewichten ist für fast alle Kantengewichte algebraisch einfach, wenn der zugrunde liegende Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ zusammenhängend ist.*

Satz 2.6. *Wenn der Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit beliebigen Kantengewichten algebraisch einfach ist, dann ist der zugrunde liegende Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ zusammenhängend.*

Beweis zu Satz 2.5. Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ zusammenhängend. Sei $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ die Menge aller gewichteten Laplacematrizen, deren zugrunde liegender Graph $\mathcal{G}$ ist. Es genügt zu zeigen, dass die Menge derjenigen Laplacematrizen in $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, die genau einen Nulleigenwert besitzen, dicht ist in $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Dazu wird zunächst der Graph $\mathcal{G}_{|w|} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, |w|)$ eingeführt, welcher aus dem Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ gewonnen wird, wobei jedoch alle negativen Kantengewichte zu betragsmäßig gleichen positiven Kantengewichten verändert werden. Der Graph $\mathcal{G}_{|w|}$ besitzt also ausschließlich positive Kantengewichte. Beiden Graphen $\mathcal{G}_w$ und $\mathcal{G}_{|w|}$ liegt derselbe Graph $\mathcal{G}$ zugrunde, d. h., sowohl $\mathbf{L}_w$ als auch $\mathbf{L}_{|w|}$ gehören zur Menge $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Es wird im Folgenden außerdem der Graph

$$\mathcal{G}_w(\theta) = \mathcal{G}_w(\underbrace{(1-\theta)\cdot\mathbf{L}_w + \theta\cdot\mathbf{L}_{|w|}}_{\mathbf{L}_w(\theta)}) \tag{2.4}$$

mit $\theta \in \mathbb{R}$ betrachtet, bei dem die positiven Gewichte aus $\mathcal{G}_w$ beibehalten werden und die ursprünglich negativen Gewichte nun von dem Parameter θ abhängen. Jedes Kantengewicht des Graphen $\mathcal{G}_w(\theta)$ hat für $\theta \in [0, \epsilon_0)$ mit ausreichend kleinem $\epsilon_0 > 0$ dasselbe Vorzeichen wie im ursprünglichen Graphen $\mathcal{G}_w = \mathcal{G}_w(0)$ und die Laplacematrix $\mathbf{L}_w(\theta)$ ist folglich ebenfalls in $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ enthalten. Die Determinante der reduzierten Laplacematrix $p(\theta) = \det(\overline{\mathbf{L}}_w(\theta))$ ist ein Polynom in θ. Nach Satz 2.3 gilt $p(1) = \det(\overline{\mathbf{L}}_{|w|}) \neq 0$, da $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist und $\mathcal{G}_{|w|}$ ausschließlich positive Kantengewichte besitzt. Dies schließt den Fall aus, dass $p(\theta)$ identisch Null ist. Daher gilt $p(\theta) = 0$ nur für endlich viele Werte von θ. Sollte $p(0) = \det(\overline{\mathbf{L}}_w) = 0$ gelten, dann bedeutet dies, dass ein beliebig kleines $\theta_0 > 0$ mit $\theta_0 < \epsilon_0$ existiert für das $p(\theta_0) \neq 0$. Dies bedeutet also, dass mit einer entsprechend kleinen Variation der negativen Gewichte in $\mathcal{G}_w$ die Laplacematrix des dann resultierenden Graphen $\mathcal{G}_w(\theta_0)$, welcher derselbe Graph $\mathcal{G}$ zugrunde liegt, genau einen Eigenwert in Null besitzt, was den Beweis beschließt.[1] □

Beweis zu Satz 2.6. Sei $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ wie im Beweis zu Satz 2.5 erneut die Menge aller gewichteten Laplacematrizen, deren zugrunde liegender Graph $\mathcal{G}$ ist. Ebenso werden erneut die Graphen $\mathcal{G}_{|w|} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, |w|)$ sowie $\mathcal{G}_w(\theta)$ nach (2.4) mit $\theta \in \mathbb{R}$ eingeführt. Alle Kantengewichte des Graphen $\mathcal{G}_w(\theta)$ sind für $\theta \in (1-\epsilon_1, 1]$ mit ausreichend kleinem $\epsilon_1 > 0$ positiv und die Laplacematrix $\mathbf{L}_w(\theta)$ ist ebenfalls in $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ enthalten. Erneut ist die Determinante der reduzierten Laplacematrix $p(\theta) = \det(\overline{\mathbf{L}}_w(\theta))$ ein Polynom in θ. Nun wird der Satz durch Widerspruch bewiesen: Angenommen der Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w = \mathbf{L}_w(0)$ sei algebraisch einfach, d. h., es gelte $p(0) = \det(\overline{\mathbf{L}}_w) \neq 0$, aber der Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ sei nicht zusammenhängend, was nach Satz 2.3

[1] Ein ähnliches Argument wurde in [50] genutzt, um zu zeigen, dass die Menge der diagonalisierbaren Matrizen dicht ist in der Menge aller Matrizen.

gleichbedeutend mit $p(1) = \det(\overline{\mathbf{L}}_{|w|}) = 0$ ist. Da $p(\theta)$ nicht identisch Null ist, existiert ein $\theta_1 < 1$ mit $\theta_1 > 1 - \epsilon_1$, sodass $p(\theta_1) \neq 0$ gilt. Da $\mathcal{G}_w(\theta_1)$ ebenfalls nur positive Kantengewichte besitzt, bedeutet dies nach Satz 2.3, dass der zugrunde liegende Graph $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist und führt somit zum Widerspruch. □

Neben der Vielfachheit des Nulleigenwerts spielt in dieser Arbeit auch die Parametrierung des Links- und des Rechtsnullraums der Laplacematrix eine große Rolle. Wie bereits im vorigen Abschnitt betont, liegt der Einsvektor $\mathbf{1}_N$ immer im Rechtsnullraum der Laplacematrix und spannt diesen vollständig auf, wenn der Nulleigenwert einfach ist. Für den Linksnullraum lassen sich hingegen folgende Aussagen machen.

Lemma 2.7 ([143, Lemma 2.5]). *Für die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit positiven Kantengewichten existiert ein (elementweise) positiver Vektor $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N_{>0}$, der $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_w = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ erfüllt, wenn der zugrunde liegende Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ stark zusammenhängend ist.*

Die Aussage von Lemma 2.7 bezüglich stark zusammenhängender Graphen mit positiven Kantengewichten wird in Satz 2.9 auf zusammenhängende Graphen mit positiven Kantengewichten verallgemeinert. Der Beweis dieses Satzes kann [61] entnommen werden, ist jedoch hier erneut angegeben, um die Verallgemeinerung auf zusammenhängende Graphen mit beliebigen Kantengewichten im dann folgenden Korollar 2.10 offensichtlich zu machen. Für den Beweis von Satz 2.9 wird außerdem zunächst folgende Definition eingeführt.

Definition 2.8 (Induzierter Subgraph [96, Abschnitt 2.1.2]). *Sei der Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ und eine Teilmenge $\mathcal{S}$ der Knotenmenge $\mathcal{V}$ gegeben. Der Graph $\mathcal{G}_\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{E}_\mathcal{S})$ mit $\mathcal{E}_\mathcal{S} = \{(v_i, v_j) \in \mathcal{E} \mid v_i, v_j \in \mathcal{S}\}$ heißt auf $\mathcal{S}$ induzierter Subgraph von $\mathcal{G}$.*

Satz 2.9 ([61, Satz 3.3]). *Für die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit positiven Kantengewichten, dessen zugrunde liegender Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ zusammenhängend ist, existiert ein (elementweise) nichtnegativer Vektor $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$, der $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_w = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ erfüllt. Es gilt $\gamma_i > 0$ genau dann, wenn der Knoten $v_i \in \mathcal{V}$ Wurzelknoten von $\mathcal{G}$ ist, ansonsten gilt $\gamma_i = 0$.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ die Menge aller Wurzelknoten in $\mathcal{G}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{V} \backslash \mathcal{U}$. Es wird zunächst angenommen, die Knotenmenge $\mathcal{V}$ sei so sortiert, dass die Wurzelknoten $\mathcal{U}$ die ersten Elemente in $\mathcal{V}$ sind. Dann hat die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ von $\mathcal{G}$ die Form (vgl. [2, Lemma 2])

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{w,\mathcal{U}\mathcal{U}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{w,\mathcal{M}\mathcal{U}} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{M}\mathcal{M}} \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\mathbf{L}_{w,\mathcal{U}\mathcal{U}}$ die Laplacematrix des auf $\mathcal{U}$ induzierten Subgraphen von $\mathcal{G}_w$. Dieser induzierte Subgraph ist stark zusammenhängend, da $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ alle Wurzelknoten von $\mathcal{G}$ enthält (vgl. [2, Lemma 1]). Nach Lemma 2.7 existiert daher ein positiver Vektor $\boldsymbol{\gamma}_1$, sodass $\boldsymbol{\gamma}_1^\top \mathbf{L}_{w,\mathcal{U}\mathcal{U}} = \mathbf{0}^\top$ und $\boldsymbol{\gamma}_1^\top \mathbf{1}_{|\mathcal{U}|} = 1$. Für $\boldsymbol{\gamma}^\top = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1^\top & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix}$ gilt daher $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_w = \mathbf{0}^\top$ und $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$. Ist die Knotenmenge $\mathcal{V}$ nicht wie oben angenommen nach $\mathcal{U}$ und $\mathcal{M}$ sortiert, so kann die Laplacematrix mithilfe

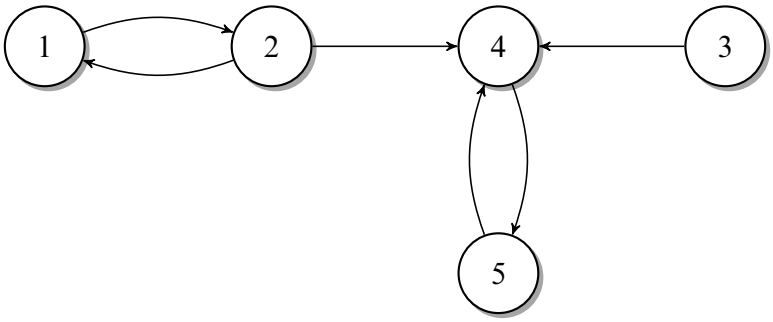

Abbildung 2.2: Nicht zusammenhängender Graph.

einer geeigneten Permutationsmatrix $\mathbf{\Pi}$ durch $\tilde{\mathbf{L}}_w = \mathbf{\Pi}\mathbf{L}_w\mathbf{\Pi}^\top$ in die gewünschte Form transformiert werden. Entsprechend existiert ein positiver Vektor $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1 \in \mathbb{R}^{|\mathcal{U}|}$, sodass $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\mathbf{L}}_w = \mathbf{0}^\top$ für $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^\top = [\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1^\top\ \mathbf{0}^\top]$ gilt. Dann folgt der Satz direkt aus der Rücktransformation $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{\Pi}^\top\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$. □

Für beliebige Kantengewichte lässt sich keine Aussage über das Vorzeichen der Nichtnullelemente von $\boldsymbol{\gamma}$ treffen. Es kann jedoch aus dem Beweis von Satz 2.9 und der Tatsache, dass die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ mindestens einen Nulleigenwert besitzt, folgendes Korollar angegeben werden.

Korollar 2.10. *Für die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit beliebigen Kantengewichten, dessen zugrunde liegender Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ zusammenhängend ist, existiert ein nichttrivialer Vektor $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$, der $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{L}_w = \mathbf{0}$ erfüllt. Ist $v_i \in \mathcal{V}$ kein Wurzelknoten von $\mathcal{G}$, so gilt $\gamma_i = 0$. Ist der Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ algebraisch einfach, so kann $\boldsymbol{\gamma}$ so gewählt werden, dass $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{1}_N = 1$ gilt.*

2.1.2 Nicht zusammenhängende Graphen

Bisher wurden zusammenhängende Graphen betrachtet. Abb. 2.2 zeigt ein Beispiel für einen Graphen, der nicht zusammenhängend im Sinne von Definition 2.2 ist, da kein Knoten existiert, von dem aus jeder andere Knoten über einen Pfad erreicht werden kann. Um die Ergebnisse zur Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix sowie zur Parametrierung des Nullraums auf nicht zusammenhängende Graphen zu erweitern, werden zunächst einige Definitionen benötigt.

Definition 2.11 (Erreichbarkeitsmengen [26, Definition 2.2]). *Sei ein Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gegeben. Für jeden Knoten $v_i \in \mathcal{V}$ wird die Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{R}(v_i) = \{v_i\} \cup \{v_j \in \mathcal{V} \mid v_i \rightsquigarrow v_j\}$ definiert. Die Erreichbarkeitsmenge des Knotens v_i beschreibt also die Vereinigung des Knotens v_i mit der Menge aller Knoten, die vom Knoten v_i aus über einen Pfad erreicht werden können.*

Im Falle des Graphen aus Abb. 2.2 gilt folglich $\mathcal{R}(v_1) = \mathcal{R}(v_2) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, $\mathcal{R}(v_3) = \{v_3, v_4, v_5\}$ und $\mathcal{R}(v_4) = \mathcal{R}(v_5) = \{v_4, v_5\}$. Es fällt direkt auf, dass die Erreichbarkeitsmengen der Knoten v_4 und v_5 vollständig in den Erreichbarkeitsmengen aller anderen Knoten enthalten sind, während z. B. Knoten v_3 nur in seiner eigenen Erreichbarkeitsmenge vorkommt. Diese Beobachtung kann formalisiert werden und mit Hilfe der folgenden Definition kann der Graph in exklusive und gemeinsame Knotenmengen unterteilt werden.

Definition 2.12 (Maximale Erreichbarkeitsmengen [26, Definition 2.6]). *Eine Menge $\mathcal{R} \in \mathcal{V}$ ist eine maximale Erreichbarkeitsmenge des Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, wenn es mindestens einen Knoten $v_i \in \mathcal{V}$ gibt, sodass $\mathcal{R} = \mathcal{R}(v_i)$ gilt und es keinen Knoten $v_j \in \mathcal{V}$ gibt, sodass $\mathcal{R}(v_i)$ echte Teilmenge von $\mathcal{R}(v_j)$ ist. Da die Knotenmenge $\mathcal{V}$ endlich ist, existieren stets $N_\mathcal{R}$ solcher maximaler Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{N_\mathcal{R}}$. Diese sind eindeutig durch den Graphen $\mathcal{G}$ bestimmt. Für jede maximale Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{R}_k$ wird weiterhin die exklusive Teilmenge $\mathcal{H}_k = \mathcal{R}_k \setminus \cup_{l \neq k} \mathcal{R}_l$ sowie die gemeinsame Menge $\mathcal{C}_k = \mathcal{R}_k \setminus \mathcal{H}_k$ definiert. Außerdem wird die Menge $\mathcal{U}_k = \{v_i \in \mathcal{V} \mid \mathcal{R}(v_i) = \mathcal{R}_k\}$ definiert, welche alle Wurzelknoten des auf $\mathcal{R}_k$ induzierten Subgraphen zusammenfasst.*

Der Graph in Abb. 2.2 besitzt zwei maximale Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_1 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ und $\mathcal{R}_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ mit den jeweils definierten Teilmengen $\mathcal{H}_1 = \mathcal{U}_1 = \{v_1, v_2\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{U}_2 = \{v_3\}$ sowie $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \{v_4, v_5\}$.

Mit diesen Definitionen lassen sich nun die Ergebnisse zur Vielfachheit des Nulleigenwerts sowie zur Parametrierung der Nullräume der Laplacematrix auf nicht zusammenhängende Graphen verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung wird im Folgenden aus [2] entnommenen Satz präsentiert. Erneut ist, wie schon bei Satz 2.9, der Beweis mit angegeben, um die Verallgemeinerung auf Graphen mit beliebigen Kantengewichten durch Bemerkung 2.15 offensichtlich zu machen. Außerdem wird die im Beweis verwendete Darstellung der Laplacematrix später beim Graphenentwurf in Abschnitt 5.4.2 eine Rolle spielen.

Satz 2.13 ([2, Lemma 2]). *Für den gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit positiven Kantengewichten seien gemäß Definition 2.12 die maximalen Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{N_\mathcal{R}}$ definiert. Für jede Menge $\mathcal{R}_k$ mit $k \in \{1, \ldots, N_\mathcal{R}\}$ seien außerdem die entsprechenden exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_k$, gemeinsamen Teilmengen $\mathcal{C}_k$ und die Teilmengen der Wurzelknoten $\mathcal{U}_k$ definiert. Dann hat der Nulleigenwert der Laplacematrix die algebraische und geometrische Vielfachheit $N_\mathcal{R}$. Der Rechtsnullraum wird durch $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_{N_\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^N$ und der Linksnullraum durch $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_{N_\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^N$ aufgespannt, wobei die jeweiligen Vektoren so gewählt werden können, dass für $k \in \{1, \ldots, N_\mathcal{R}\}$*

(i) $\mu_{k,i} = 1$ *für* $v_i \in \mathcal{H}_k$,

(ii) $\mu_{k,i} \in (0, 1)$ *für* $v_i \in \mathcal{C}_k$,

(iii) $\mu_{k,i} = 0$ *für* $v_i \notin \mathcal{R}_k$,

(iv) $\gamma_{k,i} \in (0, 1)$ *für* $v_i \in \mathcal{U}_k$,

(v) $\gamma_{k,i} = 0$ *für* $v_i \notin \mathcal{U}_k$,

(vi) $\sum_{i=1}^{N} \gamma_{k,i} = 1$

gilt. Bei Wahl der Rechtseigenvektoren der Nulleigenwerte wie oben angegeben gilt außerdem $\sum_{k=1}^{N_\mathcal{R}} \boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{1}_N$.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, sei im Folgenden wie im Beweis zu Satz 2.9 ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Knoten bereits entsprechend der definierten Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ bzw. $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{N_\mathcal{R}}$ angeordnet sind, sodass die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ von $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ durch

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_2\mathcal{H}_2} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}\mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_1} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_2} & \cdots & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

gegeben ist, wobei $\mathcal{C} = \cup_{k=1}^{N_\mathcal{R}} \mathcal{C}_k$ die Vereinigungsmenge der Knoten beschreibt, die in mindestens zwei maximalen Erreichbarkeitsmengen enthalten sind. Da definitionsgemäß alle Knoten in $\mathcal{C}$ von Knoten in den Mengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ erreicht werden können, ist die Matrix $\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ regulär (vgl. [26, Korollar 2.5]). Die Matrizen $\mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_k\mathcal{H}_k}$ sind die Laplacematrizen der auf den exklusiven Knotenmengen $\mathcal{H}_k$ induzierten Subgraphen, welche definitionsgemäß zusammenhängend sind. Die Vielfachheit des Nulleigenwerts folgt daher direkt aus der Blockstruktur von $\mathbf{L}_w$. Außerdem kann die Parametrierung der Linkseigenvektoren $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_{N_\mathcal{R}}$ ebenfalls aus der Blockstruktur von $\mathbf{L}_w$ sowie aus Satz 2.9 hergeleitet werden, woraus (iv) bis (vi) folgen. Des Weiteren ist klar, dass (i) und (iii) aufgrund der Blockstruktur erfüllt werden können, da $\mathbf{1}_{|\mathcal{H}_k|}$ Rechtseigenvektor von $\mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_k\mathcal{H}_k}$ für $k = 1, \ldots, N_\mathcal{R}$ ist. Damit bleibt zu zeigen, dass bei dieser Wahl der Rechtseigenvektoren auch (ii) gilt. Um (ii) zu zeigen, sei zunächst bemerkt, dass der Eingangsgrad aller Knoten in $\mathcal{C}$ mindestens 1 ist, da alle Knoten in $\mathcal{C}$ mindestens einen Vorgängerknoten entweder in $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ oder in $\mathcal{C}$ selbst haben. Dies bedeutet, dass die Eingangsgradmatrix $\mathbf{D}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$, welche der Diagonalen von $\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ entspricht, regulär ist. Damit gilt $\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} = \mathbf{D}^{-1}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} = \mathbf{I}_{|\mathcal{C}|} - \mathbf{A}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$. Die Matrix $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} = \mathbf{D}^{-1}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathbf{A}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ kann als gewichtete Adjazenzmatrix interpretiert werden, welcher der auf $\mathcal{C}$ induzierte Subgraph zugrunde liegt. Es gilt

$$(\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}})^{-1} = \mathbf{I}_{|\mathcal{C}|} + \sum_{m=1}^{\infty} (\mathbf{A}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}})^m,$$

wenn die Inverse von $\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ als Taylor-Reihe um $\mathbf{I}_{|\mathcal{C}|}$ entwickelt wird. Die Reihe konvergiert, da der Spektralradius von $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ kleiner als 1 ist (siehe Abschnitt B.1). Damit ist $(\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}})^{-1}$ die Erreichbarkeitsmatrix des mit $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ assoziierten Graphen (vgl. Abschnitt A.6). Die Matrix $(\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}})^{-1}$ ist somit nichtnegativ und damit ist auch

$$\boldsymbol{\mu}_{k,\mathcal{C}} = -\mathbf{L}^{-1}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_k}\mathbf{1}_{|\mathcal{H}_k|} = (\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}})^{-1} \underbrace{(-\mathbf{D}^{-1}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_k}\mathbf{1}_{|\mathcal{H}_k|})}_{\boldsymbol{\eta}_k}$$

nichtnegativ, da alle Einträge in $\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_k}$ nichtpositiv sind. Das i-te Element $\boldsymbol{\eta}_k$ kann nun mit dem i-ten Knoten in $\mathcal{C}$ assoziiert werden. Ein Element von $\boldsymbol{\eta}_k$ ist genau dann positiv, wenn eine Kante von einem Knoten in $\mathcal{H}_k$ zu dem entsprechenden Knoten in $\mathcal{C}$ vorhanden ist. Die Erreichbarkeitsmatrix $(\mathbf{L}'_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}})^{-1}$ hat wiederum die Eigenschaft, dass in der i-ten Spalte das j-te Element genau dann positiv ist, wenn ein Pfad vom i-ten Knoten zum j-ten Knoten in $\mathcal{C}$ vorhanden ist. Dies impliziert gemeinsam mit den Aussagen zu den Nichtnulleinträgen von $\boldsymbol{\eta}_k$, dass genau die Elemente

von $\boldsymbol{\mu}_{k,\mathcal{C}}$ positiv sind, die von einem Knoten in $\mathcal{H}_k$ über einen Pfad erreicht werden können. Die Nichtnullelement von $\boldsymbol{\mu}_{k,\mathcal{C}}$ entsprechen daher also genau den Elementen in $\mathcal{C}_k$. Die Tatsache, dass jedes dieser Elemente auch in mindestens einem anderen Vektor $\boldsymbol{\mu}_l$ mit $l \neq k$ positiv ist, gemeinsam mit der Tatsache, dass der Einsvektor $\mathbf{1}_N$ immer Rechtseigenvektor der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ ist, bedeutet, dass alle Elemente in $\boldsymbol{\mu}_{k,\mathcal{C}}$ echt kleiner als 1 sind, was wiederum direkt zu Eigenschaft (ii) führt. □

Bemerkung 2.14. *Dass die algebraische und geometrische Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ eines gewichteten Graphen $\mathcal{G}_w = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ mit positiven Kantengewichten immer übereinstimmen, ist ein bemerkenswertes Resultat, welches auch in [27, Proposition 12] bewiesen wurde. Der hier angegebene Beweis aus [2], welcher ähnlich auch in [26] zu finden ist, wurde ausgewählt, da er im Gegensatz zum Beweis in [27] wesentlich konstruktiver ist.*

Die Laplacematrix des Graphen in Abb. 2.2 bei Wahl aller Kantengewichte zu 1 ergibt sich zu

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da der Graph zwei maximale Erreichbarkeitsmengen hat, besitzt die Laplacematrix einen algebraisch und geometrisch doppelten Eigenwert in Null. Die Nullräume von $\mathbf{L}_w$ werden gemäß Satz 2.13 durch

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aufgespannt.

Bemerkung 2.15. *Für Graphen mit beliebigen Kantengewichten entfallen im Allgemeinen wie in Korollar 2.10 die Positivitätseigenschaften (ii) und (iv) der Eigenvektoren. Darüber hinaus entspricht die Anzahl der Nulleigenwerte wie in Satz 2.5 erneut nur generisch der Anzahl $N_{\mathcal{R}}$ der maximalen Erreichbarkeitsmengen. Daher ist Eigenschaft (vi) ebenfalls nur generisch erfüllt, da sie voraussetzt, dass die geometrische und die algebraische Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix übereinstimmen.*

2.2 Synchronisierung homogener Multi-Agenten-Systeme

Wie im Einleitungskapitel bereits dargelegt, wird unter einem Multi-Agenten-System in dieser Arbeit ein System von mehreren physikalisch nicht gekoppelten Teilsystemen verstanden. Die

einzelnen Teilsysteme werden dabei als *Agenten* bezeichnet. Weisen alle Agenten dieselbe Dynamik

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i,0} \tag{2.6a}$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i \tag{2.6b}$$

auf, d. h., sind die reellwertigen Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ identisch für alle Agenten $i = 1, \ldots, N$, so wird von einem *homogenen* Multi-Agenten-System gesprochen. Für die in (2.6) auftretenden Vektoren gilt $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^q$. In diesem Abschnitt wird die Synchronisierung solcher homogener Multi-Agenten-Systeme thematisiert. Dazu wird in Abschnitt 2.2.1 zunächst diskutiert, unter welchen Voraussetzungen die Verwendung statischer Regelgesetze zur Synchronisierung führt. Im Anschluss wird in Abschnitt 2.2.2 auf die Verwendung dynamischer Synchronisierungsregler eingegangen.

2.2.1 Verwendung statischer Synchronisierungsregler

Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems bedeutet, dass asymptotisch alle Agenten auf eine gemeinsame Trajektorie konvergieren. Um Synchronisierung zu erreichen, steht jedem Agent die gewichtete Summe der Ausgangsdifferenzen zu den im Kommunikationsgraphen benachbarten Agenten (Vorgängerknoten)

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{N} w_{j,i} \left(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\right) \tag{2.7}$$

zur Verfügung. Dabei stellt $w_{j,i}$ das Gewicht der Kante von Knoten ν_j zu Knoten ν_i im Kommunikationsgraphen $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ dar. Jeder Agent führt diese gewichtete Summe auf seinen Systemeingang

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}\mathbf{v}_i \tag{2.8}$$

zurück, wobei wiederum jeder Agent dieselbe homogene Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ verwendet[2].

Werden die Zustände aller Agenten zu $\mathbf{x} = \operatorname{col}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ zusammengefasst, so kann das für alle Agenten zusammengefasste Regelgesetz $\mathbf{u} = \operatorname{col}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N)$ nach (2.7) und (2.8) mithilfe des Kronecker-Produkts (siehe Abschnitt A.2) durch

$$\mathbf{u} = (\mathbf{L}_w \otimes \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} \tag{2.9}$$

beschrieben werden, wobei $\mathbf{L}_w$ die Laplacematrix des Kommunikationsgraphen darstellt. Dadurch ergibt die Gesamtdynamik von $\mathbf{x}$ zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B})\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{L}_w \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.10}$$

mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \operatorname{col}(\mathbf{x}_{1,0}, \ldots, \mathbf{x}_{N,0})$. Wenn im Weiteren von Synchronisierung gesprochen wird, dann wird dies immer im Sinne folgender Definition verstanden.

[2] Eine Ausnahme dieser Struktur des Regelgesetzes zur Synchronisierung wird in Bemerkung 3.5 diskutiert.

Definition 2.16 (Synchronisierung). *Es wird gesagt, das Regelgesetz* (2.9) *führt zur Synchronisierung des Gesamtsystems* (2.10)*, wenn für beliebige Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$

$$\lim_{t\to\infty} \left\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\right\| = 0$$

gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, N\}$.

Es ist ein bekanntes Resultat (vgl. [37, Theorem 1]), dass das Synchronisierungsproblem identisch zu einem simultanen Stabilisierungsproblem ist. Da dieses Resultat im weiteren Verlauf der Arbeit eine zentrale Rolle spielt, ist der Beweis ebenfalls angegeben.

Satz 2.17. *Das Regelgesetz* (2.9) *führt genau dann zur Synchronisierung des Gesamtsystems* (2.10)*, wenn*

$$\mathbf{A} + \lambda\mathbf{BKC} \tag{2.11}$$

Hurwitz ist für alle $\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$*, wobei* $\overline{\mathbf{L}}_w$ *die reduzierte Laplacematrix des Kommunikationsgraphen gemäß* (2.2) *ist.*

Beweis. Die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ kann wie in (2.3) mithilfe der regulären Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}_N & \mathbf{V}\end{bmatrix}$ auf obere Blockdreiecksform transformiert werden. Wird $\mathbf{T}$ genutzt, um eine Zustandstransformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\,\tilde{\mathbf{x}} \tag{2.12}$$

durchzuführen, so ergibt sich die transformierte Gesamtdynamik (2.10) zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\,\tilde{\mathbf{x}} + \left(\begin{bmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{L}}_w \end{bmatrix} \otimes \mathbf{BKC}\right)\tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \left(\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{x}_0. \tag{2.13}$$

Synchronisierung wird genau dann erreicht, wenn eine Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t) \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$\lim_{t\to\infty} \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_{\text{syn}}(t)\right) = \mathbf{0}$$

für beliebige $\mathbf{x}_{i,0}$ für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \left(\mathbf{x}(t) - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\cdot\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)\right) &= \lim_{t\to\infty} \left((\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\cdot\tilde{\mathbf{x}}(t) - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\cdot\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\left(\begin{bmatrix}\mathbf{1}_N & \mathbf{V}\end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n\right)\cdot\tilde{\mathbf{x}}(t) - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\cdot\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left((\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{x}_{\text{syn}}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{2:N}(t)\end{bmatrix}\right) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Aus der Regularität von $\mathbf{T}$ folgt also, dass Synchronisierung genau dann erreicht wird, wenn $\tilde{\mathbf{x}}_{2:N}(t)$ für beliebige Anfangswerte $\tilde{\mathbf{x}}_{2:N}(0)$ asymptotisch verschwindet. Für die Synchronisierungstrajektorie gilt dann

$$\lim_{t\to\infty} \left(\tilde{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{x}_{\text{syn}}(t)\right) = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Im Folgenden wird die reguläre Hauptvektormatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ verwendet, welche $\overline{\mathbf{L}}_w$ auf Jordannormalform $\mathbf{J}_{\overline{\mathbf{L}}_w} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{L}}_w\tilde{\mathbf{V}}$ transformiert. Wird mit $\tilde{\mathbf{V}}$ nun eine weitere Zustandstransformation

$$\bar{\mathbf{x}}_{2:N} = (\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{2:N}$$

durchgeführt, so gilt natürlich weiterhin, dass Synchronisierung genau dann erreicht wird, wenn $\lim_{t\to\infty} \bar{\mathbf{x}}_{2:N}(t) = \mathbf{0}$ für beliebige Anfangswerte $\bar{\mathbf{x}}_{2:N}(0)$ gilt, d. h., wenn die Dynamik von $\bar{\mathbf{x}}_{2:N}$ stabil ist. Die Dynamik von $\bar{\mathbf{x}}_{2:N}$ ergibt sich zu

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{2:N} = \underbrace{\left((\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{J}_{\overline{\mathbf{L}}_w} \otimes \mathbf{BKC})\right)}_{\hat{\mathbf{A}}_{\overline{\mathbf{L}}_w}} \bar{\mathbf{x}}_{2:N}$$

und ist genau dann stabil, wenn die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_{\overline{\mathbf{L}}_w}$ Hurwitz ist. Die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_{\overline{\mathbf{L}}_w}$ hat obere Blockdreiecksform und ist genau dann Hurwitz, wenn ihre Diagonalblöcke Hurwitz sind. Da $\mathbf{J}_{\overline{\mathbf{L}}_w}$ die Eigenwerte von $\overline{\mathbf{L}}_w$ auf der Diagonalen hat, sind die Diagonalblöcke von $\hat{\mathbf{A}}_{\overline{\mathbf{L}}_w}$ genau die Matrizen $\mathbf{A} + \lambda_i \mathbf{BKC}$, wobei λ_i der i-te Eigenwert von $\overline{\mathbf{L}}_w$ ist. □

Korollar 2.18. *Sei die Matrix* $\mathbf{A}$ *nicht Hurwitz. Das Regelgesetz* (2.9) *führe zur Synchronisierung des Gesamtsystems* (2.10). *Dann ist der Nulleigenwert der Laplacematrix* $\mathbf{L}_w$ *algebraisch einfach.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Tatsache, dass wenn $\mathbf{A}$ nicht Hurwitz ist, notwendigerweise $\lambda \neq 0$ für alle $\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$ gelten muss, da ansonsten mindestens eine der Matrizen in (2.11) weiterhin nicht Hurwitz ist und somit Satz 2.17 nicht erfüllt werden kann. □

Korollar 2.19. *Ist* $\mathbf{A}$ *nicht Hurwitz, so muss der Kommunikationsgraph zum Erreichen von Synchronisierung notwendigerweise zusammenhängend sein.*

Satz 2.20. *Die Matrix* $\mathbf{A}$ *sei nicht Hurwitz. Das Regelgesetz* (2.9) *führe zur Synchronisierung des Gesamtsystems* (2.10). *Sei* $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)$ *Synchronisierungstrajektorie, d. h., die Trajektorien aller Agenten konvergieren für* $t \to \infty$ *unter Verwendung des Regelgesetzes* (2.9) *zu* $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)$. *Dann kann die Synchronisierungstrajektorie durch das autonome System*

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{syn}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{syn}},\ \mathbf{x}_{\text{syn}}(0) = \mathbf{x}_{\text{syn},0} \tag{2.15a}$$

$$\mathbf{x}_{\text{syn},0} = \left(\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x}_0 \tag{2.15b}$$

beschrieben werden, wobei $\boldsymbol{\gamma}$ *den zum Nulleigenwert der Laplacematrix* $\mathbf{L}_w$ *gehörenden Linkseigenvektor darstellt, der so skaliert ist, dass* $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ *gilt.*

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 2.17 gezeigt, kann die Synchronisierungstrajektorie nach (2.14) durch $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ beschrieben werden, wobei $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ durch die Transformation (2.12) gegeben ist. Das Entscheidende im Beweis zu Satz 2.17 ist, dass durch die Transformation (2.12) die Systemmatrix des Gesamtsystems (2.13) auf obere Blockdreiecksform transformiert wird. Um dies zu erreichen, ist die Wahl der regulären Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ nicht eindeutig, sondern muss lediglich als erste Spalte den Einsvektor $\mathbf{1}_N$ besitzen. Entscheidend für die Wahl von $\tilde{\mathbf{x}}_1$ ist hingegen die erste Zeile der inversen Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{-1}$. Ist $\mathbf{A}$ nicht Hurwitz, so ist nach Korollar 2.18 der Nulleigenwert der Laplacematrix einfach und der Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ der Laplacematrix kann nach Korollar 2.10 so gewählt werden, dass $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ gilt. Dementsprechend kann dann $\boldsymbol{\gamma}^\top$ als erste Zeile von $\mathbf{T}^{-1}$ zur Transformation verwendet werden, sodass $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \left(\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x}$ gilt. Mit dieser Wahl gilt schließlich

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \left(\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} = (1 \otimes \mathbf{A}) \left(\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_1 \tag{2.16}$$

mit dem Startwert $\tilde{\mathbf{x}}_1(0) = \left(\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{x}_0$. Somit kann die Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)$ mithilfe des autonomen Systems (2.16) beschrieben werden. □

Bemerkung 2.21. *Wenn* $\mathbf{A}$ *Hurwitz ist, so wird triviale Synchronisierung erreicht, d. h. Synchronisierung auf die Trajektorie* $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t) = \mathbf{0}$. *Diese entspricht asymptotisch natürlich der durch* (2.15) *beschriebenen Trajektorie. Allerdings garantiert erst die Einschränkung, dass* $\mathbf{A}$ *nicht Hurwitz ist, nach Korollar 2.18 und Korollar 2.10, dass der Nulleigenwert der Laplacematrix einfach ist und somit der Linkseigenvektor* $\boldsymbol{\gamma}$ *der Laplacematrix so gewählt werden kann, dass* $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ *gilt.*

Bemerkung 2.22. *Die Synchronisierungstrajektorie, welche im Beweis zu Satz 2.17 implizit definiert wurde und welche Gegenstand von Satz 2.20 ist, ist streng genommen nur für* $t \to \infty$ *eindeutig definiert. Trotzdem wird unter dem Begriff der Synchronisierungstrajektorie im Weiteren immer die Zustandstrajektorie des autonomen Systems* (2.15a) *verstanden, auf die alle Agentenzustände konvergieren.*

2.2.2 Verwendung dynamischer Synchronisierungsregler

Im vorigen Abschnitt wurde die Synchronisierung bei Verwendung einer statischen Rückführung (2.8) der relativen Ausgangsinformation (2.7) betrachtet. In diesem Abschnitt wird der Fall betrachtet, dass statt einer statischen Rückführung eine dynamische Rückführung verwendet wird. Dazu erhält jeder Agent einen Reglerzustand $\mathbf{x}_{\text{c},i} \in \mathbb{R}^{n_\text{c}}$.

Weiterhin steht jedem Agenten die gewichtete Summe der Ausgangsdifferenzen zu seinen Nachbaragenten (2.7) zur Verfügung. Darüber hinaus wird angenommen, dass die internen Reglerzustände der Agenten ebenfalls über das Netzwerk kommuniziert werden. Daher steht jedem Agenten außerdem das Signal

$$\mathbf{v}_{\text{c},i} = \sum_{j=1}^{N} w_{j,i}\left(\mathbf{x}_{\text{c},i} - \mathbf{x}_{\text{c},j}\right) \tag{2.17}$$

zur Verfügung. Jeder Agent wählt die Dynamik seines Synchronisierungsreglers zu

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{c},i} = \mathbf{u}_{\text{c},i}. \tag{2.18}$$

Die Stellsignale $\mathbf{u}_i$ und $\mathbf{u}_{\text{c},i}$ werden zu

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}\mathbf{v}_i + \mathbf{G}_\text{c}\mathbf{v}_{\text{c},i} + \mathbf{H}_\text{c}\mathbf{x}_{\text{c},i} \tag{2.19a}$$

$$\mathbf{u}_{\text{c},i} = \mathbf{A}_\text{c}\mathbf{x}_{\text{c},i} + \mathbf{E}_\text{c}\mathbf{v}_i + \mathbf{F}_\text{c}\mathbf{v}_{\text{c},i} \tag{2.19b}$$

gewählt. Wird für jeden Agenten der erweiterte Zustand $\mathbf{x}_{\text{e},i} = \operatorname{col}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\text{c},i})$ betrachtet, so ergibt sich die Dynamik des Gesamtzustands $\mathbf{x}_\text{e} = \operatorname{col}(\mathbf{x}_{\text{e},1}, \ldots, \mathbf{x}_{\text{e},N})$ analog zu (2.10) zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_\text{e} = &\left(\mathbf{I}_N \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)\mathbf{x}_\text{e}\\ &+ \left(\mathbf{I}_N \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\text{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{H}_\text{c}\\ \mathbf{A}_\text{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\text{c}}\end{bmatrix}\right)\mathbf{x}_\text{e}\\ &+ \left(\mathbf{L}_w \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\text{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{G}_\text{c}\\ \mathbf{E}_\text{c} & \mathbf{F}_\text{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\text{c}}\end{bmatrix}\right)\mathbf{x}_\text{e}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Um die Argumentation zu vereinfachen wird nun Definition 2.16 neu formuliert und zusätzlich gefordert, dass die Reglerzustände ebenfalls synchronisieren sollen.

Definition 2.23 (Synchronisierung bei dynamischer Erweiterung). *Es wird gesagt, das erweiterte Gesamtsystem* (2.20) *synchronisiert für beliebige Anfangswerte* $\mathbf{x}_\mathrm{e}(0)$*, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \mathbf{x}_{\mathrm{e},i}(t) - \mathbf{x}_{\mathrm{e},j}(t) \right\| = 0$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ *gilt.*

Wird den Argumenten im Beweis zu Satz 2.17 gefolgt, so führt das Synchronisierungsproblem mit dynamischem Regler erneut zu einem simultanen Stabilisierungsproblem und Synchronisierung des Gesamtsystems (2.20) wird für beliebige Anfangswerte genau dann erreicht, wenn die Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\mathrm{c} \\ \mathbf{A}_\mathrm{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}_\mathrm{c} \\ \mathbf{E}_\mathrm{c} & \mathbf{F}_\mathrm{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{c}} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Hurwitz ist für alle $\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$. Dabei sind die Matrizen $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}_\mathrm{c}$, $\mathbf{E}_\mathrm{c}$, $\mathbf{F}_\mathrm{c}$, $\mathbf{G}_\mathrm{c}$ und $\mathbf{H}_\mathrm{c}$ beim Reglerentwurf frei wählbar, sodass die Struktur von (2.21) sehr ähnlich zur Struktur von (2.11) bei der statischen Ausgangsrückführung ist (und für $\mathbf{A}_\mathrm{c} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}_\mathrm{c} = \mathbf{0}$ sogar übereinstimmt).

Bemerkung 2.24. *Für die Synchronisierung der Agentenzustände* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ *gemäß Definition 2.16 ist die simultane Stabilisierung der Matrix* (2.21) *für alle* $\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$ *eine nur hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung, weshalb Definition 2.23 eingeführt wurde und immer auch die Synchronisierung der Reglerzustände* $\mathbf{x}_{\mathrm{c},1}, \ldots, \mathbf{x}_{\mathrm{c},N}$ *gefordert wird. Die Sinnhaftigkeit der Situation, dass mindestens für einen Eigenwert* λ *der reduzierten Laplacematrix* $\overline{\mathbf{L}}_w$ *die entsprechende Matrix* (2.21) *nicht Hurwitz ist und trotzdem Synchronisierung im Sinne von Definition 2.16 erreicht wird, ist aus praktischer Sicht ohnehin fraglich. Dieser Fall tritt nämlich genau dann auf, wenn zwar die Zustände* $\mathbf{x}$*, jedoch nicht die Reglerzustände* $\mathbf{x}_\mathrm{c}$ *synchronisieren. Die verbleibende Dynamik der Reglerzustände darf dann allerdings auch keinen Einfluss mehr auf die Differenz der Zustände haben. Um dies auszuschließen müsste also eine Detektierbarkeitsannahme an die entsprechenden Systemmatrizen der Reglerzustände und an die Rückführmatrizen gestellt werden. Da diese Matrizen jedoch als Entwurfsparameter aufgefasst werden, könnte eine solche Anforderung, die ohnehin sinnlos erscheint, nur umständlich im Entwurf berücksichtigt werden. Daher wird auf Definition 2.23 zurückgegriffen, um solche Umstände zu vermeiden.*

Bemerkung 2.25. *Werden die Reglerzustände nicht über das Netzwerk kommuniziert, so steht das Signal* $\mathbf{v}_{\mathrm{c},i}$ *nicht zur Regelung zur Verfügung. Hinsichtlich der Synchronisierung ergibt sich trotzdem das simultane Stabilisierungsproblem* (2.21)*, wobei jedoch* $\mathbf{F}_\mathrm{c} = \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{G}_\mathrm{c} = \mathbf{0}$ *gelten muss.*

3 Entwurf des transienten Verhaltens homogener Multi-Agenten-Systeme

Wie im Einleitungskapitel erläutert, wird in dieser Arbeit ein zweistufiges Entwurfsschema für homogene Multi-Agenten-Systeme vorgeschlagen und dabei der Entwurf der Agentendynamik von dem des Kommunikationsnetzwerkes getrennt (vgl. Abb. 1.2). In diesem und dem nachfolgenden Kapitel wird der erste Teil dieses Schemas betrachtet: Der Entwurf der Agentendynamik wird durchgeführt und daraus algebraische Beschränkungen an den Entwurf des Kommunikationsgraphen abgeleitet, welcher dann in Kapitel 5 behandelt wird. Für die Synchronisierung homogener Multi-Agenten-Systeme liegen sowohl für den Graphenentwurf als auch für den Entwurf der Agentendynamik notwendige Bedingungen vor, welche beim jeweiligen Entwurf beachtet werden müssen. Beim Graphenentwurf betrifft dies die Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix (vgl. Korollar 2.18 und Korollar 2.19). Beim Entwurf der Agentendynamik muss hingegen beachtet werden, dass die Menge der zur Synchronisierung führenden Graphen nicht leer sein darf, d. h., es muss mindestens ein Graph existieren, welcher zur Synchronisierung führt. Die Synchronisierung selbst kann in ein transientes und ein stationäres Verhalten aufgeteilt werden. Eine erfolgreiche Synchronisierung bedeutet, dass das transiente Verhalten stabil ist. Abschnitt 3.1 beschäftigt sich daher mit der oben diskutierten notwendigen Bedingung an die Agentendynamik. Es wird aufgezeigt, wie dynamische Regler minimaler Ordnung für die Synchronisierung berechnet werden können. Als algebraische Beschränkungen für den Entwurf des Kommunikationsgraphen wird dabei eine Beschreibung für die Lage der Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix hergeleitet, welche die Stabilität des transienten Verhaltens garantieren. In Abschnitt 3.2 wird anschließend diskutiert, wie der Synchronisierungsregler auszulegen ist, damit jeder Agent bezüglich eines quadratischen Gütemaßes optimal die Synchronisierungstrajektorie erreicht. Der Entwurf optimaler Synchronisierungsregler stellt einen Sonderfall in der vorliegenden Arbeit dar, da sich für diesen Fall die Struktur des Kommunikationsgraphen implizit als Lösung des betrachteten Optimierungsproblems ergibt.

3.1 Stabilität des transienten Verhaltens

Es wird die Problemstellung der Synchronisierung wie in Abschnitt 2.2 betrachtet. In diesem Abschnitt wird der Fragestellung nachgegangen, ob für eine gegebene Agentendynamik (2.6) ein zur Synchronisierung führendes Regelgesetz existiert. Ein verteiltes Synchronisierungsgesetz wie beispielsweise das statische Regelgesetz (2.9), aber auch das allgemeine dynamische Regelgesetz (2.18), (2.19), hängt dabei sowohl von den verwendeten Rückführmatrizen als auch von der über den gewichteten Graphen $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ beschriebenen Kommunikationstopologie ab. Diese Problemstellung wird zunächst in Abschnitt 3.1.1 näher erörtert und der Zusammenhang zwi-

schen dem Synchronisierungsproblem und dem Stabilisierungsproblem aufgezeigt. Dieser Zusammenhang wird ausgenutzt, um ausgehend von stabilisierenden Reglern minimaler Ordnung (Abschnitt 3.1.2) Synchronisierungsregler minimaler Ordnung zu entwerfen (Abschnitt 3.1.3). In Abschnitt 3.1.4 wird dann ausgehend von dem so entworfenen Regelgesetz die Menge aller komplexen Zahlen angegeben, in welcher alle Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix für eine erfolgreiche Synchronisierung liegen müssen. Schließlich wird in Abschnitt 3.1.5 gezeigt, wie diese Menge durch Optimierung der Reglermatrizen vergrößert werden kann.

3.1.1 Synchronisierbarkeit

In diesem Abschnitt wird die Synchronisierbarkeit eines Multi-Agenten-Systems diskutiert, d. h., es wird untersucht, unter welchen Umständen ein Multi-Agenten-System synchronisiert werden kann. Dazu wird das allgemeine dynamische Regelgesetz bestehend aus (2.7), (2.17), (2.18) und (2.19) betrachtet. Um die Notation kompakt zu halten, werden alle Reglermatrizen im Tupel

$$\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}) = (\mathbf{K}, \mathbf{A}_\mathrm{c}, \mathbf{E}_\mathrm{c}, \mathbf{F}_\mathrm{c}, \mathbf{G}_\mathrm{c}, \mathbf{H}_\mathrm{c}) \tag{3.1}$$

zusammengefasst. Die Synchronisierbarkeit wird dabei gemäß folgender Definition verstanden, welche in [162] ähnlich für den Fall statischer Ausgangsrückführungen formuliert wurde.

Definition 3.1 (Synchronisierbarkeit durch dynamische Ausgangsrückführung fester Ordnung [162, Definition 2]). *Ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik* (2.6) *heißt synchronisierbar durch dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung n_c, wenn ein Tupel reeller Matrizen $\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c})$ und ein gewichteter Graph $\mathcal{G}_w$ existieren, sodass das Regelgesetz mit dem Reglerzustand $\mathbf{x}_{\mathrm{c},i} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{c}}$ bestehend aus* (2.7), (2.17), (2.18) *und* (2.19) *zur Synchronisierung des Systems gemäß Definition 2.23 führt.*

In Abschnitt 2.2.2 wurde gezeigt, dass Synchronisierung gemäß Definition 2.23 bei Verwendung einer dynamischen Ausgangsrückführung der Ordnung n_c äquivalent zur simultanen Stabilisierung der Matrizen

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}(n_\mathrm{c})} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{c}}\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}(n_\mathrm{c})} \underbrace{\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{K} & \lambda\mathbf{G}_\mathrm{c}+\mathbf{H}_\mathrm{c}\\ \lambda\mathbf{E}_\mathrm{c} & \lambda\mathbf{F}_\mathrm{c}+\mathbf{A}_\mathrm{c}\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}),\lambda)} \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{c}}\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}(n_\mathrm{c})} \tag{3.2}$$

für alle $\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$ ist. Der Entwurf eines Graphen und somit der Entwurf der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ wird in Kapitel 5 behandelt. In diesem Abschnitt wird der Entwurf der Reglermatrizen $\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c})$ betrachtet. Die Reglermatrizen sollen dabei so entworfen werden, dass mindestens ein Graph $\mathcal{G}_w$ existiert, sodass die Matrix in (3.2) für alle $\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$ Hurwitz ist. Die Existenzbedingung an den Graphen wird in diesem Abschnitt jedoch zunächst aufgeweicht, indem gefordert wird, dass lediglich eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ existieren muss, für die (3.2) Hurwitz ist. In Abschnitt 5.2 wird dann gezeigt, wie Graphen $\mathcal{G}_w$ mit beliebigem unter komplexer Konjugation invariantem Spektrum entworfen werden können, wenn beliebige (ggf. negative) Kantengewichte zugelassen werden. Im Vorgreifen auf dieses Wissen kann folgendes an den Fall der dynamischen Ausgangsrückführung angepasstes Lemma aus [162] angegeben werden, wobei hinsichtlich der Synchronisierbarkeit bezüglich der Anzahl an Agenten N unterschieden wird.

Lemma 3.2 ([162, Lemma 1]). *Gegeben sei ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik* (2.6). *Das System ist genau dann synchronisierbar durch dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung n_c, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) N ist gerade und es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix in (3.2) *Hurwitz ist.*

(ii) N ist ungerade und es existiert $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass die Matrix in (3.2) *Hurwitz ist.*

Beweis. Da $\overline{\mathbf{L}}_w$ eine reelle Matrix ist, ist $\operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)$ eine unter komplexer Konjugation invariante Multimenge mit $N-1$ Elementen. Ist N gerade, muss daher mindestens ein Eigenwert von $\overline{\mathbf{L}}_w$ auf der reellen Achse liegen. □

Die Unterscheidung nach der Anzahl der Agenten in Lemma 3.2 zeigt direkt, dass es sich beim Reglerentwurf für eine gerade bzw. ungerade Anzahl an Agenten um unterschiedliche Problemstellungen handelt, da die Struktur der Rückführmatrix $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{\Theta}(n_c), \lambda)$ in (3.2) abhängig von der Anzahl an Agenten ist. Die Matrix $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{\Theta}(n_c), \lambda)$ ist dabei entweder reell (für N gerade) oder strukturiert[1] komplex (für N ungerade). In beiden Fällen wird $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{\Theta}(n_c), \lambda)$ jedoch verwendet, um (3.2) zu stabilisieren. Dies motiviert, die Beziehung der Synchronisierbarkeit zur Stabilisierbarkeit zu untersuchen, wofür folgende Definition analog zu Definition 3.1 eingeführt wird.

Definition 3.3 (Stabilisierbarkeit durch dynamische Ausgangsrückführung fester Ordnung). *Ein System mit der Dynamik* (2.6) *heißt reell (komplex) stabilisierbar durch dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung n_c, wenn eine reelle (komplexe) Matrix $\check{\mathbf{K}}(n_c)$ existiert, sodass*

$$\hat{\mathbf{A}}(n_c) + \hat{\mathbf{B}}(n_c) \cdot \check{\mathbf{K}}(n_c) \cdot \hat{\mathbf{C}}(n_c) \tag{3.3}$$

Hurwitz ist, wobei $\hat{\mathbf{A}}(n_c)$, $\hat{\mathbf{B}}(n_c)$ und $\hat{\mathbf{C}}(n_c)$ wie in (3.2) *definiert sind.*

Es lässt sich direkt eine Hierarchie der drei sich auf die dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung n_c beziehenden Probleme feststellen: Reelle Stabilisierbarkeit impliziert immer Synchronisierbarkeit und Synchronisierbarkeit impliziert wiederum immer komplexe Stabilisierbarkeit. Des Weiteren gilt nach obiger Diskussion für eine gerade Anzahl an Agenten, dass Synchronisierbarkeit und reelle Stabilisierbarkeit äquivalent sind (vgl. [162, Theorem 3] für den Fall statischer Ausgangsrückführungen). Für eine ungerade Anzahl an Agenten gilt eine solche Äquivalenz jedoch im Allgemeinen nicht, sondern das Synchronisierungsproblem steht gewissermaßen „zwischen“ dem reellen und dem komplexen Stabilisierungsproblem. Es werden im Folgenden noch einige Bemerkungen und Beispiele zu der Unterscheidung der verschiedenen Stabilisierungsprobleme sowie zum Begriff der Synchronisierbarkeit angegeben.

Bemerkung 3.4. *Einen Sonderfall nimmt in der obigen Diskussion der SISO-Fall mit statischer Ausgangsrückführung ein. In diesem Fall sind das Synchronisierungsproblem für eine ungerade Anzahl an Agenten und das komplexe Stabilisierungsproblem äquivalent. Der Grund dafür ist,*

[1] Für eine ungerade Anzahl an Agenten ist die Matrix $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{\Theta}(n_c), \lambda)$ eine strukturiert komplexe Matrix, da die Komplexität durch die Multiplikation der reellen Reglermatrizen in $\mathbf{\Theta}(n_c)$ mit der komplexen Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ auftritt.

dass sich (3.2) *zu* $\mathbf{A} + \lambda \mathbf{b} k \mathbf{c}^\top$ *vereinfacht, weshalb statt nach* $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $k \in \mathbb{R}$ *auch direkt nach einer komplexen Rückführung* $\check{k} = \lambda k \in \mathbb{C}$ *gesucht werden könnte, sodass* $\mathbf{A} + \mathbf{b}\check{k}\mathbf{c}^\top$ *Hurwitz ist. In [49, Theorem 1] wird darüber hinaus eine Klasse von SISO-Systemen angegeben, für die die Lösbarkeit von allen oben angegebenen Problemen äquivalent ist, d. h., für ein System in dieser Klasse ist entweder keines der Probleme lösbar oder alle gleichzeitig. Da diese Äquivalenz des Synchronisierungsproblems und der Stabilisierungsprobleme im Allgemeinen nicht gilt, sind auch die in der Literatur vorhandenen Ergebnisse [38, 162, 116, 49] zum SISO-Fall mit statischer Ausgangsrückführung nicht auf dynamische Ausgangsrückführungen und MIMO-Systeme zu verallgemeinern.*

Bemerkung 3.5. *In [84] wird statt der hier verwendeten Definition 3.1 eine leicht andere Definition für Synchronisierbarkeit verwendet. Dabei wird Synchronisierbarkeit als Eigenschaft des einzelnen Agenten definiert und nicht wie in Definition 3.1 als Eigenschaft des Multi-Agenten-Systems mit* N *Agenten. Folglich wird gefordert, dass Synchronisierung unabhängig von der Anzahl an Agenten, d. h. für beliebige* $N > 1$*, erreicht werden soll. Unter einer solchen Definition folgt aus Lemma 3.2 und unter Berücksichtigung oben geführter Diskussion, dass Synchronisierbarkeit und reelle Stabilisierbarkeit durch dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung* n_c *äquivalent sind. Die Definition der Synchronisierbarkeit wird in [84] anhand der statischen Ausgangsrückführung definiert. Dabei wird statt des in Abschnitt 2.2 verwendeten Regelgesetzes* (2.9) *ein verallgemeinertes Regelgesetz verwendet, bei dem jeder Agent seine Eingangsgröße zu*

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{K}_{i,j}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)$$

wählt. Damit resultiert als Gesamtstellgröße

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_\mathrm{ges}\mathbf{y}, \tag{3.4}$$

wobei $\mathbf{K}_\mathrm{ges} \cdot (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ *für* $\mathbf{K}_\mathrm{ges} \in \mathbb{R}^{Np \times Nq}$ *gilt. Somit ergibt sich in diesem Fall die Gesamtdynamik des Multi-Agenten-Systems zu*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B})\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}) \cdot \mathbf{K}_\mathrm{ges} \cdot (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C})\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung derselben Zustandstransformation wie in (2.12) *lässt sich analog zum Beweis von Satz 2.17 zeigen, dass Synchronisierung mit dem Regelgesetz* (3.4) *genau dann erreicht wird, wenn die Dynamik von*

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{2:N} = \Big((\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{B}) \cdot \tilde{\mathbf{K}}_\mathrm{ges} \cdot (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{C})\Big)\bar{\mathbf{x}}_{2:N} \tag{3.5}$$

stabil ist mit $\tilde{\mathbf{K}}_\mathrm{ges} = (\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{K}_\mathrm{ges}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n) \in \mathbb{R}^{(N-1)p \times (N-1)q}$ *und* $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N-1}$*, sodass* $\mathbf{V}^\top \mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$*. Wird Synchronisierbarkeit als Eigenschaft definiert, die für alle* $N > 1$ *gelten soll, so muss die Dynamik* (3.5) *insbesondere für* $N = 2$ *stabil sein, weshalb direkt ersichtlich ist, dass Synchronisierbarkeit in diesem Sinne äquivalent zur Stabilisierbarkeit durch statische Ausgangsrückführung ist. Natürlich gilt auch mit dem verallgemeinerten Regelgesetz*

(3.4) *diese Äquivalenz nicht mehr, wenn die Eigenschaft der Synchronisierbarkeit wieder gemäß Definition 3.1 für ein Multi-Agenten-System mit N Agenten definiert wird. Dann sind nämlich die Aussagen in Lemma 3.2 weiterhin hinreichend für Synchronisierbarkeit, da das Regelgesetz* (2.9) *ein Spezialfall von* (3.4) *ist. Im unten angeführten Beispiel 3.7 wird aufgezeigt, dass die Aussagen in Lemma 3.2 bei Verwendung des verallgemeinerten Regelgesetzes* (3.4) *jedoch nicht mehr notwendig sind: Im Beispiel wird ein Agentensystem angegeben, das mit* (3.4) *nicht synchronisierbar für $N = 2$, wohl aber für alle $N > 2$ ist.*

Beispiel 3.6. *Als Beispiel für den Fall, dass die Synchronisierbarkeit bei Verwendung einer festen Reglerordnung n_c sich für eine gerade und eine ungerade Anzahl an Agenten unterscheiden kann, wird das in [162] diskutierte Beispiel der statischen Ausgangsrückführung von SISO-Agenten mit den Systemmatrizen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 11 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

herangezogen. Für eine statische Ausgangsrückführung, d. h. für $n_\mathrm{c} = 0$, ergibt sich das charakteristische Polynom der Matrix in (3.2) *zu*

$$\det\left(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \lambda \mathbf{b} k \mathbf{c}^\top\right) = s^4 - (k\lambda + 8)s^3 - (k\lambda + 9)s^2 - (k\lambda - 11)s - 1$$

mit der reellen skalaren Reglerverstärkung $k \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten zu s^4 und s^0 des charakteristischen Polynoms haben unterschiedliches Vorzeichen unabhängig von der Wahl von λ. Um Stabilität zu gewährleisten ist es für $\lambda \in \mathbb{R}$ gemäß dem klassischen Hurwitz-Kriterium [81, Satz 8.5] jedoch notwendig, dass alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms dasselbe Vorzeichen besitzen. Daher kann kein $\lambda \in \mathbb{R}$ gefunden werden, sodass die Matrix $\mathbf{A} + \lambda \mathbf{b} k \mathbf{c}^\top$ stabil ist, weshalb nach Lemma 3.2 eine gerade Anzahl an Agenten nicht durch statische Ausgangsrückführung synchronisiert werden kann. Wird $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachtet und zum Beispiel $k = -1$ und $\lambda = 9{,}5 + \mathrm{j}\,5$ gewählt, so ist $\mathbf{A} + \lambda \mathbf{b} k \mathbf{c}^\top$ Hurwitz und bei entsprechender Wahl der Kommunikationstopologie (siehe Abschnitt 5.2) wird Synchronisierung für eine ungerade Anzahl an Agenten erreicht.

Beispiel 3.7. *Im Folgenden soll an einem Beispiel noch die in Bemerkung 3.5 angegebene alternative Synchronisierbarkeitsdefinition näher diskutiert werden. Dazu wird ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik* (2.6) *und den Systemmatrizen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

betrachtet. Die so gegebene Agentendynamik ist weder reell noch komplex stabilisierbar durch statische Ausgangsrückführung.[2] *Somit ist das Multi-Agenten-System nach Definition 2.23 nicht*

[2] Dies konnte mithilfe von Quantorenelimination verifiziert werden (vgl. [123]).

synchronisierbar durch statische Ausgangsrückführung. Wird allerdings das verallgemeinerte statische Regelgesetz (3.4) *verwendet, so lässt sich zwar weiterhin für* $N = 2$ *keine Lösung finden. Dennoch können für* $N = 3$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},3} = \begin{bmatrix} -160{,}6570 & -24{,}4467 & -36{,}0837 & -33{,}0258 \\ -73{,}7319 & -11{,}8776 & -14{,}8046 & -16{,}5658 \\ 113{,}3782 & 17{,}3607 & 25{,}1189 & 23{,}5962 \\ -17{,}6117 & -0{,}9262 & -5{,}7517 & -3{,}4864 \end{bmatrix}$$

und für $N = 4$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},4} = \begin{bmatrix} 166{,}9341 & 129{,}9458 & 355{,}3639 & 150{,}1529 & 281{,}2410 & -75{,}2565 \\ -52{,}1466 & -45{,}7919 & -122{,}8328 & -95{,}2797 & -40{,}8391 & 80{,}0952 \\ -69{,}1891 & -69{,}7362 & -188{,}7339 & -232{,}8997 & 51{,}2312 & 233{,}0418 \\ -40{,}4824 & -27{,}3071 & -76{,}4781 & 4{,}9350 & -109{,}6216 & -31{,}3150 \\ -41{,}4704 & -23{,}7792 & -66{,}2490 & 52{,}3369 & -157{,}2669 & -86{,}8553 \\ -70{,}3353 & -48{,}5912 & -135{,}3191 & -6{,}8630 & -171{,}6550 & -33{,}3305 \end{bmatrix}$$

Lösungen gefunden werden. Diese Lösungen $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},3}$ *und* $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},4}$ *können nun genutzt werden, um für beliebige* $N > 4$ *blockweise weitere Lösungen* $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},5} = \text{blkdiag}(\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},3}, \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},3})$, $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},6} = \text{blkdiag}(\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},3}, \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ges},4})$, *usw. zu konstruieren. Somit ist für das hier betrachtete Multi-Agenten-System Synchronisierung durch das verallgemeinerte statische Regelgesetz* (3.4) *für eine beliebige Anzahl an Agenten* $N > 2$ *möglich.*

3.1.2 Entwurf stabilisierender Regler minimaler Ordnung

In diesem Abschnitt wird an die im vorigen Abschnitt geführte Diskussion zur Beziehung des Synchronisierungsproblems zum Stabilisierungsproblem angeknüpft und der Entwurf stabilisierender Regler minimaler Ordnung thematisiert. Im nachfolgenden Abschnitt 3.1.3 wird dann gezeigt, wie ausgehend von stabilisierenden Reglern minimaler Ordnung ein Synchronisierungsregler minimaler Ordnung entworfen werden kann.

Das Problem der Stabilisierung durch Ausgangsrückführung ist ein in der regelungstechnischen Literatur viel thematisiertes Problem. Einen vereinheitlichenden Rahmen für statische und dynamische sowie reelle und komplexe Ausgangsrückführungen liefert folgender Satz.

Satz 3.8 ([137, Theorem 9.1]). *Für die Eingangsmatrix* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *und die Ausgangsmatrix* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$ *der Agentendynamik* (2.6) *gelte, dass* $\mathbf{B}$ *vollen Spaltenrang und* $\mathbf{C}$ *vollen Zeilenrang habe. Seien zwei Matrizen* $\mathbf{B}^{\perp} \in \mathbb{R}^{n-p\times n}$ *und* $\mathbf{C}^{\perp} \in \mathbb{R}^{n\times n-q}$ *gegeben, sodass* $\mathbf{B}^{\perp}$ *vollen Zeilenrang und* $\mathbf{C}^{\perp}$ *vollen Spaltenrang hat und* $\mathbf{B}^{\perp}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ *sowie* $\mathbf{C}\mathbf{C}^{\perp} = \mathbf{0}$ *gilt. Für die Agentendynamik* (2.6) *existiert genau dann eine reell (komplex) stabilisierende Ausgangsrückführung, wenn sym-*

metrische (hermitesche), positiv definite Matrizen $\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{Q}$ *existieren, sodass*

$$\mathbf{B}^{\perp} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\top}) \cdot (\mathbf{B}^{\perp})^{\top} \prec \mathbf{0} \tag{3.6a}$$

$$(\mathbf{C}^{\perp})^{\top} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\top}\mathbf{P}) \cdot \mathbf{C}^{\perp} \prec \mathbf{0} \tag{3.6b}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) := \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.6c}$$

gilt. Seien $\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{Q}$ *Lösungen für* (3.6) *und sei* $n_{\mathrm{c}} = \operatorname{rang}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}^{-1})$. *Sei außerdem die Zerlegung* $\mathbf{P} - \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{V}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^{\mathrm{H}}$ *mit der positiv definiten Matrix* $\mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{c}} \times n_{\mathrm{c}}}$ *gegeben. Dann ist*

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1^{\mathrm{H}} & \mathbf{\Sigma}_1^{-1} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

Ljapunov-Matrix des geschlossenen, um einen reellen (komplexen) dynamischen Regler der Ordnung n_{c} *erweiterten Regelkreises, d. h., es existiert eine reelle (komplexe) Rückführmatrix* $\check{\mathbf{K}}(n_{\mathrm{c}})$ *der Dimension* $(p + n_{\mathrm{c}}) \times (q + n_{\mathrm{c}})$, *die sich als Lösung der linearen Matrixungleichung*

$$\hat{\mathbf{P}} \left(\hat{\mathbf{A}}(n_{\mathrm{c}}) + \hat{\mathbf{B}}(n_{\mathrm{c}}) \cdot \check{\mathbf{K}}(n_{\mathrm{c}}) \cdot \hat{\mathbf{C}}(n_{\mathrm{c}}) \right) + \left(\hat{\mathbf{A}}(n_{\mathrm{c}}) + \hat{\mathbf{B}}(n_{\mathrm{c}}) \cdot \check{\mathbf{K}}(n_{\mathrm{c}}) \cdot \hat{\mathbf{C}}(n_{\mathrm{c}}) \right)^{\mathrm{H}} \hat{\mathbf{P}} \prec \mathbf{0}$$

berechnen lässt.

Bemerkung 3.9. *Satz 3.8 ist direkt für den reellen und den komplexen Rückführungsfall angegeben. In [137, Theorem 9.1] wird ausschließlich der reelle Fall betrachtet. Für den komplexen Fall muss das zugrunde liegende [137, Theorem 2.3.12] ebenfalls miteinbezogen werden. Außerdem muss die Verallgemeinerung des Ljapunov-Stabilitätskriteriums für komplexe Matrizen beachtet werden: Die Ljapunov-Stabilitätstheorie besagt, dass eine Matrix* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *genau dann Hurwitz ist, wenn eine reelle, symmetrische, positiv definite Matrix* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\top} \succ \mathbf{0}$ *existiert, sodass*

$$\mathbf{P}\mathbf{M} + \mathbf{M}^{\top}\mathbf{P} \prec \mathbf{0}$$

gilt [137, Korollar 3.5.1]. Diese Aussage der Ljapunov-Stabilitätstheorie gilt jedoch auch für komplexe Matrizen, d. h., die Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *ist genau dann Hurwitz, wenn eine komplexe, hermitesche, positiv definite Matrix* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{H}} \succ \mathbf{0}$ *existiert, sodass*

$$\mathbf{P}\mathbf{M} + \mathbf{M}^{\mathrm{H}}\mathbf{P} \prec \mathbf{0}$$

gilt [56, Theorem 2.2.1].

Der oben angegebene Satz vereinheitlicht die Problemstellung der Stabilisierbarkeit, indem er zunächst unabhängig von einer Reglerordnung angibt, ob ein reell oder komplex stabilisierender Regler existiert. Die Bedingungen (3.6) sind dabei lineare Matrixungleichungen und somit konvex. Daher können Lösungen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$, die (3.6) erfüllen, effizient durch entsprechende Optimierungsverfahren gefunden werden. Die benötigte Ordnung des dynamischen Reglers hängt vom Rang der Matrix $\mathbf{P} - \mathbf{Q}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ab. Soll ein Regler der Ordnung n_{c} forciert werden, so kann dies erreicht werden, indem zu den Bedingungen (3.6) noch die Rangbedingung

$$\operatorname{rang}(\mathbf{Z}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})) \leq n + n_{\mathrm{c}} \tag{3.7}$$

hinzugefügt wird. Die Rangbedingung (3.7) ist nichtkonvex und erschwert die Berechnung einer Lösung für $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$. Für $n_c = 0$, d. h. für den Fall statischer Ausgangsrückführung, ist (3.7) dabei äquivalent zur bilinearen Bedingung $\mathbf{PQ} = \mathbf{I}_n$. Für $n_c = n$ wird (3.7) trivialerweise erfüllt. Der Satz gibt daher auch mit $n_c = n$ die Reglerordnung an, die maximal zur Stabilisierung benötigt wird, wenn Stabilisierung überhaupt möglich ist. Somit liefert der Satz auch hinsichtlich eines Synchronisierungsreglers die maximal benötigte Ordnung. Dies stimmt auch mit den Ergebnissen in [69] überein, wo über einen Beobachteransatz ein Synchronisierungsregler entworfen wird. Dazu werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_c = \mathbf{A} + \mathbf{BF}, \quad \mathbf{E}_c = -\mathbf{H}, \quad \mathbf{F}_c = \mathbf{HC}, \quad \mathbf{G}_c = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_c = \mathbf{F} \tag{3.8}$$

gewählt, wobei $\mathbf{F}$ und $\mathbf{H}$ so gewählt werden, dass $(\mathbf{A} + \mathbf{BF})$ und $(\mathbf{A} + \mathbf{HC})$ stabil sind. Solche Matrizen existieren genau dann, wenn die Agentendynamik (2.6) stabilisierbar und detektierbar ist. Ein ähnlicher beobachterbasierter Ansatz wird auch in [131] verfolgt. Dabei wird allerdings ein leicht anderes Regelgesetz angesetzt, bei dem angenommen wird, dass jeder Agent seinen eigenen Ausgang absolut messen kann (und nicht nur die Ausgangsdifferenzen zu seinen Nachbaragenten).

Zur Berechnung stabilisierender Regler minimaler Ordnung kann wie in [48] vorgegangen werden und gemäß Satz 3.8 mithilfe von (3.6) und der Rangbeschränkung (3.7) sukzessive die Reglerordnung n_c verringert werden. Dazu wird zunächst das konvexe Problem für $n_c = n$ gelöst. Anschließend wird das Problem iterativ gelöst, wobei jeweils die Reglerordnung um eins verringert wird. Dabei wird das resultierende nichtkonvexe Optimierungsproblem mit der vorangegangenen Lösung gestartet – im ersten Schritt, dem Fall $n_c = n - 1$, wird also mit der Lösung des konvexen Optimierungsproblems gestartet. Mit diesem Vorgehen wird die Reglerordnung so lange verringert, bis keine Lösung des nichtkonvexen Optimierungsproblems mehr gefunden wird. Da für die minimale Ordnung eines reell stabilisierenden Reglers $n^*_{c,R}$ und eines komplex stabilisierenden Reglers $n^*_{c,K}$ immer $n^*_{c,K} \leq n^*_{c,R}$ gilt, kann das oben angegebene Vorgehen verwendet werden, um zunächst eine Lösung $\mathbf{P}^*_R$, $\mathbf{Q}^*_R$ zu berechnen, welche zu einem reell stabilisierenden Regler der Ordnung $n^*_{c,R}$ führt. Diese reelle Lösung kann dann als Startpunkt verwendet werden, um nach komplexen Matrizen $\mathbf{P}^*_K$, $\mathbf{Q}^*_K$ zu suchen, die zu einem komplex stabilisierenden Regler der Ordnung $n^*_{c,K}$ führen.

Bemerkung 3.10. *Im ersten Schritt des oben beschriebenen Vorgehens wird das konvexe Optimierungsproblem* (3.6) *gelöst. Statt nur nach einem zulässigen Lösungspaar* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *zu suchen, bietet es sich an,* $\operatorname{tr}(\mathbf{P} + \mathbf{Q})$ *zu minimieren. Die Minimierung von* $\operatorname{tr}(\mathbf{P} + \mathbf{Q})$ *ist eine konvexe Heuristik zur Rangminimierung von* $\mathbf{Z}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ *in* (3.6c) *(vgl. [39]).*

Bemerkung 3.11. *Das zentrale mathematische Problem, welches zur Berechnung eines stabilisierenden Reglers minimaler Ordnung nach oben vorgestelltem Vorgehen gelöst werden muss, ist ein nichtkonvexes Optimierungsproblem. Dieses besteht aus den konvexen linearen Matrixbeschränkungen* (3.6) *und der nichtkonvexen Rangbeschränkung* (3.7)*. Es existieren verschiedene Verfahren, dieses nichtkonvexe Problem zu lösen, z. B. durch alternierende Projektionsalgorithmen [47], dem Newton-Verfahren ähnlichen Vorgehensweisen [110] oder durch Linearisierung eines geeigneten Komplementaritätsproblems [36]. Für die in dieser Arbeit betrachteten Beispiele wurde die in [110] vorgestellte Methode verwendet. Eine Implementierung dieser Methode steht als Löser* `lmirank` *im Softwarepaket YALMIP [77] zur Vefügung.*

Bemerkung 3.12. *Die meisten numerischen Lösungsverfahren sind nur für den Umgang mit reellen Matrizen geeignet. Wird eine komplexwertige Lösung gesucht, so kann das vorliegende komplexwertige Problem mithilfe des in Abschnitt A.5 beschriebenen Isomorphismus in ein reellwertiges Problem umgewandelt werden. Zusätzlich muss die modifizierte Rangbeschränkung*

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{W}_{\mathrm{Re}}(\mathbf{P},\mathbf{Q})\right) \leq 2\cdot(n+n_{\mathrm{c}}) \tag{3.9}$$

berücksichtigt werden.

3.1.3 Entwurf synchronisierender Regler minimaler Ordnung

In diesem Abschnitt wird ein Vorgehen beschrieben, wie für eine gegebene Anzahl N an Agenten ein Synchronisierungsregler minimaler Ordnung berechnet werden kann. Formal wird also folgende Problemstellung behandelt.

Problem 3.13. *Sei ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik* (2.6) *gegeben. Finde die minimale Ordnung $n^*_{\mathrm{c,S}}$, sodass das Multi-Agenten-System synchronisierbar durch dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung $n^*_{\mathrm{c,S}}$ ist. Wenn N gerade (ungerade) ist, finde darüberhinaus eine reelle (komplexe) Zahl λ und reelle Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n^*_{\mathrm{c,S}})$, sodass die Matrix in* (3.2) *Hurwitz ist.*

Um Problem 3.13 zu lösen, wird im Folgenden der in Abschnitt 3.1.1 diskutierte Sachverhalt ausgenutzt, dass das Synchronisierungsproblem gewissermaßen „zwischen“ dem reellen und dem komplexen Stabilisierungsproblem steht. Dies bedeutet, dass für die Existenz eines Synchronisierungsreglers minimaler Ordnung notwendigerweise ein komplex stabilisierender Regler derselben Ordnung existieren muss und andererseits die Existenz eines reell stabilisierenden Reglers hinreichend für die Existenz eines Synchronisierungsreglers ist. Für die minimale Ordnung $n^*_{\mathrm{c,S}}$ eines Synchronisierungsreglers und die minimalen Ordnungen $n^*_{\mathrm{c,R}}$ bzw. $n^*_{\mathrm{c,K}}$ reell und komplex stabilisierender Regler gilt daher die Beziehung

$$n^*_{\mathrm{c,K}} \leq n^*_{\mathrm{c,S}} \leq n^*_{\mathrm{c,R}}. \tag{3.10}$$

Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass sowohl ein reell als auch ein komplex stabilisierender Regler minimaler Ordnung bereits gefunden wurde (z. B. mit den in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Methoden). Es wird nun gezeigt, wie ausgehend von diesen stabilisierenden Reglern minimaler Ordnung ein synchronisierender Regler minimaler Ordnung entworfen werden kann. Da in Problem 3.13 zwischen einer geraden und einer ungerade Anzahl N an Agenten unterschieden wird, werden diese beiden Fälle separat betrachtet.

Fall N gerade

Wenn N gerade ist, dann gilt immer $n^*_{\mathrm{c,S}} = n^*_{\mathrm{c,R}}$. Daher kann in diesem Fall eine Lösung von Problem 3.13 direkt gewonnen werden, indem $\lambda = 1$ gewählt wird und dann die reelle stabilisierende Rückführung $\check{\mathbf{K}}(n^*_{\mathrm{c,R}}) \in \mathbb{R}^{(p+n^*_{\mathrm{c,R}})\times(q+n^*_{\mathrm{c,R}})}$ in (3.3) dazu genutzt wird, die Synchronisierungsreglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n^*_{\mathrm{c,R}})$ so zu wählen, dass $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{\Theta}(n^*_{\mathrm{c,R}}),1)$ zu einer Hurwitzmatrix in (3.2) führt.

Fall N ungerade

Wenn N ungerade ist, kann $n^*_{\mathrm{c,S}}$ durchaus echt kleiner sein als $n^*_{\mathrm{c,R}}$. Trotzdem gilt natürlich weiterhin, dass $n^*_{\mathrm{c,K}}$ gemäß (3.10) eine untere Grenze für $n^*_{\mathrm{c,S}}$ angibt. Dieser Umstand wird im Weiteren dazu genutzt, einen Synchronisierungsregler minimaler Ordnung zu finden. Dabei wird in den folgenden Schritten vorgegangen:

1. Setze $n_{\mathrm{c}} = n^*_{\mathrm{c,K}}$.
2. Wenn $n_{\mathrm{c}} = n^*_{\mathrm{c,R}}$ gilt, verwende den reell stabilisierenden Regler zur Bestimmung eines Synchronisierungsreglers der Ordnung $n^*_{\mathrm{c,S}} = n^*_{\mathrm{c,R}}$. Andernfalls, fahre fort mit Schritt 3.
3. Suche in der Menge der komplex stabilisierenden Regler der Ordnung n_{c} nach einem synchronisierenden Regler.
4. Wenn die Suche in Schritt 3 erfolgreich war, verwende die Lösung als Synchronisierungsregler der Ordnung $n^*_{\mathrm{c,S}} = n_{\mathrm{c}}$. Andernfalls, setze $n_{\mathrm{c}} \leftarrow n_{\mathrm{c}} + 1$ und fahre fort mit Schritt 2.

Der entscheidende Schritt in diesem Vorgehen ist die Suche nach einem synchronisierenden Regler in der Menge der komplex stabilisierenden Regler (Schritt 3). Eine Möglichkeit, diesen Schritt auszuführen, wird im Folgenden beschrieben. Der Schritt muss nur ausgeführt werden, wenn die echte Ungleichung $n^*_{\mathrm{c,K}} < n^*_{\mathrm{c,R}}$ gilt, sodass dies ein Sonderfall für den Entwurf von Synchronisierungsreglern für Multi-Agenten-Systeme mit einer ungeraden Anzahl an Agenten darstellt.

Für den Rest dieses Abschnitts wird darauf verzichtet n_{c} explizit als Argument der auftretenden Matrizen mitzuführen, um die Notation kompakt zu halten.

In Schritt 3 des oben angegebenen Vorgehens gilt $n^*_{\mathrm{c,K}} \leq n_{\mathrm{c}} < n^*_{\mathrm{c,R}}$ für die betrachtete Ordnung n_{c}. Für diese Situation ist also das Ziel, in der Menge der komplex stabilisierenden Rückführmatrizen

$$\mathcal{K}_{\mathrm{K}} = \{\check{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{(p+n_{\mathrm{c}})\times(q+n_{\mathrm{c}})} \,|\, \operatorname{spec}\left(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\check{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\right) \subseteq \mathbb{C}_{<0}\} \tag{3.11}$$

nach einer Matrix $\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$ zu suchen, welche die Struktur in (3.2) erfüllt, d. h., die zur Menge der synchronisierenden Rückführmatrizen

$$\mathcal{K}_{\mathrm{S}} = \{\check{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}_{\mathrm{K}} \,|\, \exists \boldsymbol{\Theta}, \lambda, \text{ sodass } \check{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)\}$$

gehört. Um dieses Ziel zu erreichen, wird im Folgenden eine nichtnegative Funktion $f : \mathcal{K}_{\mathrm{K}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert, für die $f(\check{\mathbf{K}}) = 0$ genau dann gilt, wenn $\check{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}_{\mathrm{S}}$. Die Suche nach einer synchronisierenden Rückführmatrix wird dann durch Minimierung der Funktion $f(\check{\mathbf{K}})$ über alle $\check{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}_{\mathrm{K}}$ ausgeführt. Wenn für die Lösung $\check{\mathbf{K}}^*$ einer solchen Minimierung $f(\check{\mathbf{K}}^*) = 0$ gilt, dann kann $\check{\mathbf{K}}^*$ genutzt werden, um die Reglermatrizen $\boldsymbol{\Theta}$ und die komplexe Zahl λ und somit einen Synchronisierungsregler zu bestimmen.

Die Funktion f wird so definiert, dass sie angibt, wie gut die Struktur einer gegebenen komplex stabilisierenden Rückführmatrix $\check{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}_\mathrm{K}$ mit der gewünschten Struktur von $\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$ übereinstimmt. Dazu wird eine systematische Wahl von $\boldsymbol{\Theta}$ und λ abhängig von $\check{\mathbf{K}}$ vorgegeben, sodass $f(\check{\mathbf{K}}) = \|\check{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)\|_\mathrm{F}^2$ die gewünschten Eigenschaften aufweist. Um diese systematische Wahl von $\boldsymbol{\Theta}$ und λ herzuleiten, wird zunächst die Rückführmatrix $\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$ zu

$$\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{K}_1 & \lambda \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{K}_1 & \hat{\mathbf{K}}_2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

partitioniert, wobei $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{(p+n_\mathrm{c}) \times q}$, $\mathbf{K}_{21} \in \mathbb{R}^{(p+n_\mathrm{c}) \times n_\mathrm{c}}$, $\mathbf{K}_{22} \in \mathbb{R}^{(p+n_\mathrm{c}) \times n_\mathrm{c}}$ und $\hat{\mathbf{K}}_2 \in \mathbb{C}^{(p+n_\mathrm{c}) \times n_\mathrm{c}}$ entsprechend die Reglermatrizen $\boldsymbol{\Theta}$ beinhalten. In derselben Weise wird auch $\check{\mathbf{K}}$ zu

$$\check{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{K}}_1 & \check{\mathbf{K}}_2 \end{bmatrix}$$

partitioniert. Da $n_\mathrm{c} < n_{\mathrm{c,R}}^*$ gilt, muss $\mathrm{Im}(\check{\mathbf{K}}) \neq \mathbf{0}$ gelten für alle $\check{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}_\mathrm{K}$. Wenn $\mathcal{K}_\mathrm{S} \subseteq \mathcal{K}_\mathrm{K}$ nichtleer ist, muss folglich $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ gelten. Dies bedeutet, dass die komplexe Matrix $\hat{\mathbf{K}}_2$ in (3.12) unstrukturiert ist und somit zu $\hat{\mathbf{K}}_2 = \check{\mathbf{K}}_2$ gewählt werden kann. Da $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$, wird im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = \sigma + \mathrm{j}$ gewählt mit $\sigma \in \mathbb{R}$. Für beliebige σ gilt dann

$$\check{\mathbf{K}}_1 = \underbrace{(\sigma + \mathrm{j})}_{\lambda} \underbrace{\mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right)}_{\mathbf{K}_1} + \underbrace{\left(\mathrm{Re}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right) - \sigma \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right)\right)}_{\mathbf{K}_{1,\mathrm{res}}},$$

wodurch eine Aufteilung von $\check{\mathbf{K}}_1$ erreicht wird, bei der der erste Summand dieselbe Struktur wie $\lambda \mathbf{K}_1$ in (3.12) hat, und der zweite Summand durch eine reelle Restmatrix $\mathbf{K}_{1,\mathrm{res}} \in \mathbb{R}^{(p+n_\mathrm{c}) \times q}$ gegeben ist. Durch Wahl von σ zu

$$\sigma = \sigma_0(\check{\mathbf{K}}_1) = \begin{cases} \frac{\mathrm{tr}\left(\mathrm{Im}(\check{\mathbf{K}}_1)^\top \mathrm{Re}(\check{\mathbf{K}}_1)\right)}{\mathrm{tr}\left(\mathrm{Im}(\check{\mathbf{K}}_1)^\top \mathrm{Im}(\check{\mathbf{K}}_1)\right)}, & \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right) \neq \mathbf{0} \\ 0, & \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right) = \mathbf{0} \end{cases}$$

wird die Frobenius-Norm von $\mathbf{K}_{1,\mathrm{res}}$ minimiert. Das Quadrat der minimalen Norm von $\mathbf{K}_{1,\mathrm{res}}$

$$f(\check{\mathbf{K}}) = \left\| \mathrm{Re}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right) - \sigma_0(\check{\mathbf{K}}_1) \, \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_1\right) \right\|_\mathrm{F}^2 \tag{3.13}$$

ist dann eine stetige und stetig differenzierbare Funktion in $\check{\mathbf{K}}_1$ für alle $\check{\mathbf{K}}_1$, für die $\mathrm{Im}(\check{\mathbf{K}}_1) \neq \mathbf{0}$ gilt. Die Funktion $f(\check{\mathbf{K}})$ weist die gewünschten Eigenschaften auf und das Minimierungsproblem

$$\min_{\check{\mathbf{K}}} \quad f(\check{\mathbf{K}}) \tag{3.14a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \check{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}_\mathrm{K} \tag{3.14b}$$

kann zur Lösung des Synchronisierungsproblems verwendet werden. Wird eine Lösung $\check{\mathbf{K}}^*$ von (3.14) gefunden, für die $f(\check{\mathbf{K}}^*) = 0$ gilt, dann ist eine Lösung des Synchronisierungsproblems

durch Wahl von $\lambda = (\sigma_0(\check{\mathbf{K}}_1^*) + \mathrm{j})$ und den Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ zu

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{E}_\mathrm{c} \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_1^*\right), \ \mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\mathrm{c} \\ \mathbf{F}_\mathrm{c} \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_2^*\right), \tag{3.15a}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\mathrm{c} \\ \mathbf{A}_\mathrm{c} \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\left(\check{\mathbf{K}}_2^*\right) - \sigma_0(\check{\mathbf{K}}_1^*) \cdot \mathrm{Im}\left(\check{\mathbf{K}}_2^*\right) \tag{3.15b}$$

gegeben.

Bemerkung 3.14. *Um die Stabilitätsbeschränkung* (3.14b) *zu berücksichtigen (vgl. die Definition von $\mathcal{K}_\mathrm{K}$ in* (3.11)*), kann die spektrale Abszisse*[3] $\alpha(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\check{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}})$ *der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises verwendet werden. Die spektrale Abszisse hat sich als geeignetes Werkzeug erwiesen, um die Stabilitätsbeschränkung bei der numerischen Optimierung zu berücksichtigen [15]. Unter Zuhilfenahme der spektralen Abszisse, kann Beschränkung* (3.14b) *durch* $\alpha(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\check{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}) < 0$ *ersetzt werden.*

Bemerkung 3.15. *Die numerische Lösung von Minimierungsproblem* (3.14) *kann durch jede bereits bekannte komplex stabilisierende Rückführmatrix* $\check{\mathbf{K}}$ *initialisiert werden.*

Beispiel 3.16. *Am nun folgenden Beispiel soll das Vorgehen zum Entwurf von Synchronisierungsreglern minimaler Ordnung verdeutlicht werden. Dazu wird ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik* (2.6) *und den Systemmatrizen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

betrachtet. Reell und komplex stabilisierende Regler minimaler Ordnung lassen sich wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben entwerfen. Die so gefundenen minimalen Ordnungen sind $n_{\mathrm{c,R}}^* = 2$ und $n_{\mathrm{c,K}}^* = 1$.[4] *Als komplexe Rückführmatrix $\check{\mathbf{K}}(1)$, welche $\hat{\mathbf{A}}(1) + \hat{\mathbf{B}}(1) \cdot \check{\mathbf{K}}(1) \cdot \hat{\mathbf{C}}(1)$ stabilisiert, lässt sich*

$$\check{\mathbf{K}}(1) = \begin{bmatrix} -2{,}6845 - \mathrm{j}\,37{,}2808 & -6{,}0204 - \mathrm{j}\,2{,}8440 \\ -10{,}0923 + \mathrm{j}\,1{,}5140 & -0{,}7950 + \mathrm{j}\,0{,}1606 \end{bmatrix}.$$

angeben. Daher kann die Suche nach einem Synchronisierungsregler minimaler Ordnung für ein Multi-Agenten-System mit einer ungeraden Anzahl an Agenten gemäß dem oben angegebenen Vorgehen durch Lösen des Minimierungsproblems (3.14) *unter Verwendung von $\check{\mathbf{K}}(1)$ als Startwert durchgeführt werden. Es lässt sich $\lambda = (0{,}2249 + \mathrm{j})$ und*

$$\mathbf{K} = -39{,}91, \quad \mathbf{A}_\mathrm{c} = -0{,}0511, \quad \mathbf{E}_\mathrm{c} = 4{,}555, \tag{3.17a}$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{c} = 0{,}005103, \quad \mathbf{G}_\mathrm{c} = -5{,}377, \quad \mathbf{H}_\mathrm{c} = -1{,}164 \tag{3.17b}$$

als Synchronisierungsregler der Ordnung $n_{\mathrm{c,S}}^* = 1$ finden.

[3] Die spektrale Abszisse $\alpha(\mathbf{X})$ beschreibt das Maximum der Realteile aller Eigenwerte der Matrix $\mathbf{X}$.

[4] Dass diese Ordnungen tatsächlich minimal sind, konnte mithilfe von Quantorenelimination nachgewiesen werden (vgl. [123]).

3.1.4 Beschreibung der Synchronisierungsmenge

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie für ein Multi-Agenten-System mit N Agenten ein Synchronisierungsregler minimaler Ordnung entworfen werden kann. Als Ergebnis des beschriebenen Vorgehens ergeben sich eine komplexe Zahl λ und Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c})$. Diese lösen gemeinsam das Synchronisierungsproblem, indem sie dazu führen, dass die Matrix in (3.2) Hurwitz ist. Die im Tupel $\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c})$ zusammengefassten Matrizen bestimmen den (dynamischen) Regler, der von allen Agenten gemäß Abschnitt 2.2.2 verwendet werden sollte. Bei Verwendung dieses Reglers kann die Zahl λ dazu genutzt werden, eine zur Synchronisierung führende Kommunikationstopologie zu spezifizieren, indem gefordert wird, dass alle Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ entweder der Zahl λ oder der konjugiert-komplexen Zahl $\bar{\lambda}$ entsprechen. Sollten jedoch λ und $\bar{\lambda}$ die einzigen zulässigen Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix sein (als isolierte Punkte), so würde eine geringe Veränderung der Kantengewichte des Graphen zum Scheitern der Synchronisierung führen. Glücklicherweise ist dies nicht der Fall, was im Folgenden am Konzept der *Synchronisierungsmenge* verdeutlicht wird. Die Synchronisierungsmenge ist formal durch

$$\mathcal{S}(\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c})) = \left\{\lambda \mid \operatorname{spec}\left(\hat{\mathbf{A}}(n_\mathrm{c}) + \hat{\mathbf{B}}(n_\mathrm{c}) \cdot \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c}), \lambda) \cdot \hat{\mathbf{C}}(n_\mathrm{c})\right) \subseteq \mathbb{C}_{<0}\right\} \tag{3.18}$$

definiert (vgl. [162]) und beschreibt die Menge aller zulässigen Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$, welche unter Verwendung des über die Matrizen in $\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c})$ gegebenen Reglers zur Synchronisierung führen. Mit dem Begriff der Synchronisierungsmenge kann aus Satz 2.17 und Abschnitt 2.2.2 folgendes Korollar abgeleitet werden.[5]

Korollar 3.17. *Das durch die Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c})$ beschriebene dynamische Regelgesetz der Ordnung n_c gemäß Abschnitt 2.2.2 führt genau dann zur Synchronisierung des Gesamtsystems* (2.20)*, wenn*

$$\operatorname{spec}\left(\overline{\mathbf{L}}_w\right) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c})).$$

Bemerkung 3.18. *Aus Gleichung* (3.18) *folgt, dass die Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta}(n_\mathrm{c}))$ offen und symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist. Dass die Synchronisierungsmenge offen ist, garantiert direkt eine gewisse Robustheit gegen den oben angesprochenen Fall kleiner Störungen der Kantengewichte, die dazu führen, dass der Kommunikationsgraph nicht exakt das gewünschte Spektrum aufweist.*

Bemerkung 3.19. *In [162] wird der Begriff „synchronization region“ verwendet, um die Synchronisierungsmenge zu beschreiben. Der Begriff „region“ (zu deutsch „Gebiet“) wird jedoch oft explizit mit einer offenen, zusammenhängenden Menge verknüpft (vgl. [21, Abschnitt 1.3], [170, Abschnitt 1.3.2.4]). Da die Synchronisierungsmenge jedoch nicht notwendigerweise zusammenhängend ist, wird hier vom Begriff des Gebietes abgesehen und stattdessen nur von Menge gesprochen.*

Bemerkung 3.20. *Für das Konzept der Synchronisierungsmenge existieren verschiedene Begriffe in der Literatur: Neben dem Begriff „synchronization region“ in [162], verwenden [35] „synchronized region“, [69] „consensus region“, [49] „stability region“, [116] „H-domain“. In [161]*

[5] Vgl. [162, Theorem 1] für den Fall statischer Ausgangsrückführungen.

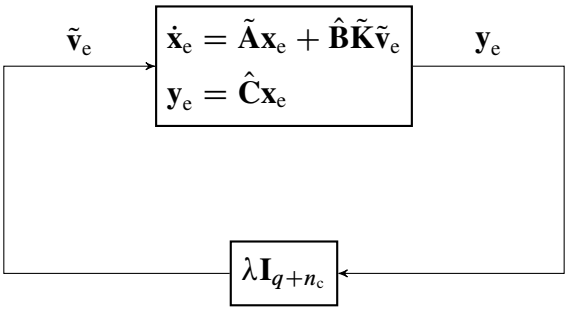

Abbildung 3.1: Über $\lambda\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}}$ geschlossener Regelkreis.

wird die Synchronisierungsmenge implizit definiert, indem die Abbildung von λ zur spektralen Abszisse der Matrix (3.2) *betrachtet wird. In [112] wird in ähnlicher Weise eine „master stability function“ definiert (unter Verwendung des maximalen Ljapunov-Exponenten als Stabilitätsmaß). Die letztgenannten Konzepte sind aus praktischer Sicht jedoch nicht relevant, da die entsprechenden Funktionen für jeden Punkt in der komplexen Ebene einzeln numerisch ausgewertet werden müssen. Zudem sind die Resultate bezüglich der „stability region“ in [49] und der „H-domain“ in [116] nur auf SISO-Systeme anwendbar. Resultate für MIMO-Systeme sind dagegen selten. In [35] wird der MIMO-Fall betrachtet und es werden verschiedene Fälle klassifiziert, welche die Form der Synchronisierungsmenge betreffen (z. B. den Fall mehrerer nicht zusammenhängender Teilmengen). Die Resultate sind jedoch nur für sehr kleine Systeme anwendbar, da sie darauf basieren, ein komplexes Hurwitz-Kriterium analytisch auszuwerten.*

Bemerkung 3.21. *Für ungerichtete Graphen sind alle Eigenwerte der Laplacematrix reell, da die Laplacematrix ungerichteter Graphen symmetrisch ist. Daher ist in diesem Fall nur die Schnittmenge der Synchronisierungsmenge mit der reellen Achse von Interesse. Dies bedeutet, dass der relevante Teil der Synchronisierungsmenge die Vereinigung von Intervallen auf der reellen Achse ist. Wenn diese Menge beschränkt ist, spielt es eine wesentliche Rolle, wie die Eigenwerte der Laplacematrix auf der reellen Achse verteilt sind. Daher wird in der Literatur teilweise auch das Verhältnis des größten zum kleinsten Nichtnulleigenwerts der Laplacematrix als Maß für die Synchronisierbarkeit eines Netzwerks verwendet (vgl. [29]).*

Bemerkung 3.22. *Wird der Beobachteransatz* (3.8) *als Synchronisierungsregler der Ordnung n verwendet und $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^\top$ gewählt, wobei $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top \succ \mathbf{0}$ Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung*

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^\top + \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

ist, dann ist die Synchronisierungsmenge durch $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta}) = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(\lambda) \geq 1\}$ gegeben (vgl. [69, 152]). Die Synchronisierungsmenge ist in diesem Fall also unbeschränkt. Ein ähnliches Resultat ist in [163] dokumentiert. Dort wird gezeigt, dass passive Systeme ebenfalls eine unbeschränkte Synchronisierungsmenge aufweisen.

Im Folgenden wird ein dem Nyquist-Stabilitätskriterium ähnliches Vorgehen verwendet, um eine Beschreibung der Synchronisierungsmenge anzugeben. Das klassische Nyquist-Stabilitätskriterium (vgl. [40, Abschnitt 3.13], [138, Abschnitt 4.9.2]) trifft Aussagen über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises anhand des Übertragungsverhaltens des offenen Regelkreises. Um mit

diesem Prinzip die Synchronisierungsmenge zu beschreiben, wird im Weiteren das dynamische System

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathrm{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{H}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\mathrm{c} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}))} \mathbf{x}_\mathrm{e} + \hat{\mathbf{B}}(n_\mathrm{c}) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}_\mathrm{c} \\ \mathbf{E}_\mathrm{c} & \mathbf{F}_\mathrm{c} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}))} \tilde{\mathbf{v}}_\mathrm{e} \tag{3.19a}$$

$$\mathbf{y}_\mathrm{e} = \hat{\mathbf{C}}(n_\mathrm{c})\, \mathbf{x}_\mathrm{e}. \tag{3.19b}$$

als offener Regelkreis bezeichnet. Der Regelkreis wird wie in Abb. 3.1 gezeigt über $\lambda \mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}}$ geschlossen, wodurch sich

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathrm{e} = \left(\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c})) + \lambda \hat{\mathbf{B}}(n_\mathrm{c}) \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c})) \hat{\mathbf{C}}(n_\mathrm{c})\right) \mathbf{x}_\mathrm{e} \tag{3.20a}$$

$$\mathbf{y}_\mathrm{e} = \hat{\mathbf{C}}(n_\mathrm{c})\, \mathbf{x}_\mathrm{e} \tag{3.20b}$$

als geschlossener Regelkreis ergibt. Die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises entspricht der Matrix in (3.2), die gemäß (3.18) maßgeblich die Synchronisierungsmenge bestimmt. In dieser Darstellung hängt der offene Regelkreis nur von den Systemmatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und den Reglermatrizen $\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c})$ ab. Die Reglermatrizen werden dabei sowohl zur erweiterten Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}))$ als auch zur modifizierten erweiterten Eingangsmatrix $\hat{\mathbf{B}}(n_\mathrm{c}) \cdot \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c}))$ gezählt.

Für den Rest dieses Abschnitts wird erneut darauf verzichtet, n_c und auch $\boldsymbol{\Theta}(n_\mathrm{c})$ explizit als Argumente aufzuführen, um die Notation kompakt zu halten. Es werden die folgenden Annahmen an das System getroffen.

Annahme 3.23. *Die Dynamik des offenen Regelkreises* (3.19) *ist stabilisierbar und detektierbar.*

Annahme 3.24. *Die Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises* $\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}$ *ist eine invertierbare rationale Matrix* .[6]

Um die Synchronisierungsmenge mit einem dem Nyquist-Kriterium ähnlichen Vorgehen zu beschreiben, werden zunächst noch einige weitere Vorüberlegungen getroffen. Das Nyquist-Kriterium basiert im Grunde auf dem funktionstheoretischen Prinzip vom Argument (vgl. Abschnitt A.7). Das Prinzip vom Argument besagt, dass die Änderung des komplexen Arguments eines Funktionszeigers einer rationalen Funktion $f(s)$, dessen Funktionsvariable s stetig entlang einer einfach geschlossenen Kurve Γ in der komplexen Ebene verändert wird, ausschließlich von der Anzahl der Pol- und Nullstellen der Funktion f im Inneren des von der Kurve Γ eingeschlossenen Gebietes abhängt. Um das Prinzip vom Argument zur Beschreibung der Synchronisierungsmenge zu verwenden, wird die einfach geschlossene Nyquist-D-Kurve Γ_D in der komplexen Ebene benötigt, welche die gesamte imaginäre Achse und einen Halbkreis mit unendlich großem Radius in die rechte komplexe Halbebene durchläuft (vgl. [138, Section 4.9.2]). Die Nyquist-D-Kurve wird als Grenzfall der wie in Abb. 3.2a gezeigten Kurve $\Gamma_{\mathrm{D},\varepsilon}$ definiert. Der in die rechte komplexe Halbebene ragende Halbkreis hat dabei den Radius $1/\varepsilon$. Zusätzlich werden in $\Gamma_{\mathrm{D},\varepsilon}$ alle Pol- und

[6] Die rationale Matrix $\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s)$ wird hier als invertierbar bezeichnet, wenn $s_0 \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s_0)$ invertierbar ist, d. h., wenn ihre Determinante nicht identisch Null ist (vgl. [151, Abschnitt 2.8]).

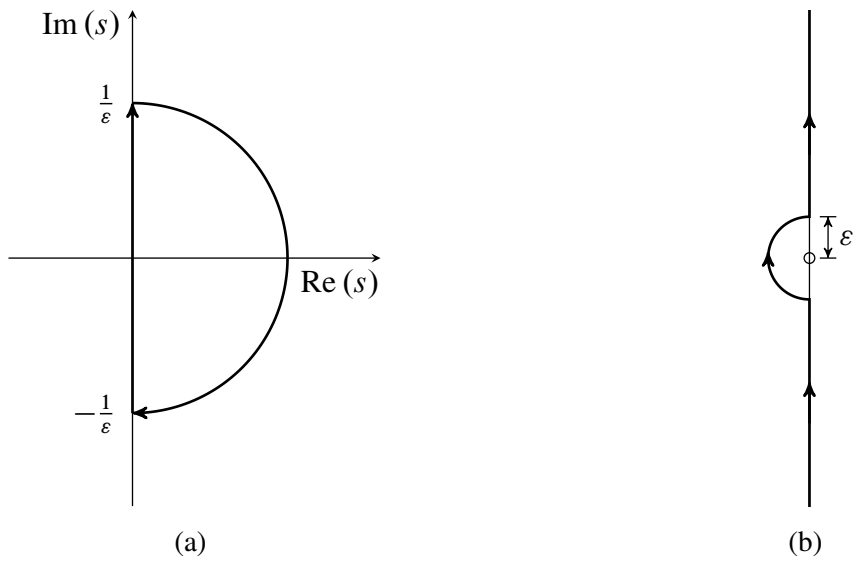

Abbildung 3.2: (a): Nyquist-D-Kurve $\Gamma_{\mathrm{D},\varepsilon}$: Teilstück der j-Achse und Halbkreis in die rechte komplexe Halbebene mit Radius $1/\varepsilon$; (b): Linksaussparung einer kritischen Stelle auf der j-Achse mit Radius ε.

Nullstellen des offenen Regelkreises auf der imaginären Achse wie in Abb. 3.2b angedeutet durch Halbkreise mit Radius ε in die linke komplexe Halbebene ausgespart. Formal wird dann

$$\Gamma_{\mathrm{D}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Gamma_{\mathrm{D},\varepsilon} \tag{3.21}$$

definiert. Mit diesen Vorüberlegungen wird nun im folgenden Satz eine Beschreibung der Synchronisierungsmenge mithilfe der Nyquist-D-Kurve angegeben. Dazu wird noch die Notation der Windungszahl $\varpi(s_0, f(s), \Gamma_{\mathrm{D}})$ gemäß Definition A.15 benötigt. Diese gibt an, wie oft das Bild $f(s)$ entlang der Kurve Γ_{D} den Punkt s_0 entgegen dem Uhrzeigersinn umschließt.

Satz 3.25. *Seien die Annahmen 3.23 und 3.24 erfüllt. Für $\mathbf{\Theta}(n_{\mathrm{c}})$, sei*

$$\mu(s,\lambda) = \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_{\mathrm{c}}} - \tilde{\mathbf{A}} - \lambda\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\right) \tag{3.22}$$

definiert. Sei

$$\mu(s,\lambda) = \mu_0(s)\cdot(\mu_1(s)-\lambda)\cdot\ldots\cdot\left(\mu_{q+n_{\mathrm{c}}}(s)-\lambda\right) \tag{3.23}$$

die Faktorisierung von $\mu(s,\lambda)$ bezüglich λ. Es sei Γ_{D} die Nyquist-D-Kurve gemäß (3.21)*, bei der alle Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktionsmatrix des offenen Regelkreises $\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(s)$ auf der imaginären Achse mit Linkshalbkreisen ausgespart sind.*[7] *Der offene Regelkreis habe n_{Z} Nullstellen in der geschlossenen rechten komplexen Halbebene. Dann gilt*

$$\mathcal{S}(\mathbf{\Theta}(n_{\mathrm{c}})) = \{\lambda \mid \sum_{i=1}^{q+n_{\mathrm{c}}} \varpi(\lambda, \mu_i(s), \Gamma_{\mathrm{D}}) = n_{\mathrm{Z}}\}. \tag{3.24}$$

[7] Als Pole und Nullstellen werden hier die Pole und Nullstellen der rationalen Funktion $\det(\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(s))$ verstanden.

Beweis. Gemäß der Definition der Synchronisierungsmenge in (3.18) liegen alle Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}} + \lambda\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}$ für alle $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ in der offenen linken komplexen Halbebene und somit außerhalb von Γ_D. Daher gilt nach Satz A.17 und unter Berücksichtigung von Lemma A.16, dass $\varpi(0, \mu(s,\lambda), \Gamma_\mathrm{D}) = 0$ für alle $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mu(s,\lambda) &= \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}} - \lambda\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\right) \\
&= \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) \cdot \det\left(\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \lambda\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\right) \\
&= \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) \cdot \det\left(\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}} - \lambda\hat{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\right) \\
&= \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) \cdot \det\left(\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}} - \lambda\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s)\right),
\end{aligned}$$

wobei für die vorletzte Umformung Lemma A.1 verwendet wurde. Da nach Annahme 3.24 die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s)$ invertierbar ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mu(s,\lambda) &= \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) \cdot \det\left(\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}} - \lambda\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s)\right) \\
&= \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) \cdot \det\left(\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s)\right) \cdot \det\left(\mathbf{G}_\mathrm{ol}^{-1}(s) - \lambda\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}}\right).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Faktorisierung (3.23) von $\mu(s,\lambda)$ folgt damit $\mu_0(s) = \det(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \det(\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s))$. Es bezeichne n_P die Anzahl der Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}}$, die in der geschlossenen rechten komplexen Halbebene und somit im Inneren von Γ_D liegen. Aufgrund der Annahme 3.23 gibt es keine Pol-Nullstellen-Kürzung von $\det(\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s))$ in der geschlossenen rechten komplexen Halbebene. Deshalb hat $\det(\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s))$ genau n_Z Nullstellen und n_P Polstellen im Inneren von Γ_D. Unter Berücksichtigung von Lemma A.14 und Satz A.17 gilt daher $\varpi(0, \mu_0(s), \Gamma_\mathrm{D}) = -n_\mathrm{P} + n_\mathrm{P} - n_\mathrm{Z} = -n_\mathrm{Z}$. Die Funktionen $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ in (3.23) sind die von s abhängigen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\mathbf{G}_\mathrm{ol}^{-1}(s) - \lambda\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}})$ in λ. Die Koeffizienten dieses charakteristischen Polynoms bezüglich λ sind entlang der Kurve Γ_D stetige Funktionen in s, da alle Polstellen der Koeffizienten – diese entsprechen den Nullstellen von $\det(\mathbf{G}_\mathrm{ol}(s))$ – auf der Kurve Γ_D ausgespart wurden. Daher sind auch die Funktionen $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ entlang der Kurve Γ_D stetig, da die Nullstellen eines charakteristischen Polynoms stetige Funktionen seiner Koeffizienten sind [169]. Folglich sind alle in der Faktorisierung (3.23) auftretenden Funktionen stetig und es kann Lemma A.14 angewandt und die Summe der einzelnen Windungszahlen der Faktoren verwendet werden, um die Gesamtwindungszahl von $\mu(s,\lambda)$ zu berechnen. Da außerdem $\varpi(0, \mu_i - \lambda, \Gamma_\mathrm{D}) = \varpi(\lambda, \mu_i, \Gamma_\mathrm{D})$ für $i = 1, \ldots, q + n_\mathrm{c}$ gilt, folgt für alle $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$

$$\begin{aligned}
\varpi(0, \mu(s,\lambda), \Gamma_\mathrm{D}) &= \varpi(0, \mu_0(s), \Gamma_\mathrm{D}) + \sum_{i=1}^{q+n_\mathrm{c}} \varpi(\lambda, \mu_i(s), \Gamma_\mathrm{D}) \\
&= -n_\mathrm{Z} + \sum_{i=1}^{q+n_\mathrm{c}} \varpi(\lambda, \mu_i(s), \Gamma_\mathrm{D}) = 0,
\end{aligned}$$

woraus die Beschreibung (3.24) für die Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ folgt. □

Bemerkung 3.26. *Die Invertierbarkeitsannahme 3.24 hängt von der Formulierung des offenen Regelkreises ab. Bei der Formulierung nach* (3.19) *wird zum einen implizit angenommen, dass das System mindestens so viele Eingänge wie Ausgänge hat, d. h., dass* $p \geq q$ *gilt.*[8] *Zum anderen wird angenommen, dass* $\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}$ *vollen Spaltenrang und* $\hat{\mathbf{C}}$ *vollen Zeilenrang hat. Diese Annahmen können auch umgangen werden, indem eine Zerlegung* $\mathbf{B}_\Sigma \mathbf{C}_\Sigma = \hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}$ *durchgeführt wird, sodass* $\mathbf{B}_\Sigma$ *vollen Spaltenrang und* $\mathbf{C}_\Sigma$ *vollen Zeilenrang hat, und dann* $\mathbf{B}_\Sigma$ *als neue Eingangsmatrix und* $\mathbf{C}_\Sigma$ *als neue Ausgangsmatrix des offenen Regelkreises* (3.19) *verwendet wird.*

Bemerkung 3.27. *Nach Satz 3.25 wird die Synchronisierungsmenge* $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ *durch alle Punkte* λ *in der komplexen Ebene beschrieben, welche von den Nyquist-Kurven von* $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ *in Summe* n_Z *mal entgegen dem Uhrzeigersinn umschlossen werden. Die Anzahl der Umschließungen zu zählen kann recht umständlich sein, insbesondere, wenn durch die Aussparung kritischer Punkte auf der imaginären Achse die Verläufe der Kurven im Unendlichen eine entscheidende Rolle spielen. Nichtsdestotrotz unterteilen die Nyquist-Kurven von* $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ *die komplexe Ebene in endlich viele zusammenhängende Gebiete. Unter Umständen ist es daher einfacher, für jedes dieser zusammenhängenden Gebiete zu überprüfen, ob es zur Synchronisierungsmenge gehört, indem für einen Punkt* λ *im Inneren des Gebiets überprüft wird, ob der über* $\lambda\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}}$ *geschlossene Regelkreis stabil ist. Dieses Vorgehen ist insbesondere dann nützlich, wenn bereits ein Punkt* λ *im Inneren der Synchronisierungsmenge, z. B. als Ergebnis des in Abschnitt 3.1.3 vorgestellten Entwurfsverfahrens, bekannt ist.*

Bemerkung 3.28. *Sollen die Nyquist-Kurven der Funktionen* $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ *geplottet werden, so muss die Kurve* Γ_D *zunächst abgetastet werden, d. h., es müssen Stützstellen* $s_1, \ldots, s_M \in \Gamma_\mathrm{D}$ *gewählt werden, an denen die Funktionen* $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ *ausgewertet werden. Die Werte* $\mu_1(s_i), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s_i)$ *sind die Nullstellen in* λ *der Funktion* $\mu(s_i, \lambda)$ *in* (3.22). *Dementsprechend empfiehlt es sich, direkt das verallgemeinerte Eigenwertproblem*

$$\left(s_i \mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) \mathbf{v} = \mu \hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{v} \tag{3.25}$$

zu lösen. Die endlichen Lösungen dieses Eigenwertproblems sind die Werte $\mu_1(s_i), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s_i)$. *Sollen die Funktionen* $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ *mithilfe dieser Werte geplottet werden, so sind zwei Dinge zu beachten. Zum einen sollten die Stützstellen* $s_1, \ldots, s_M \in \Gamma_\mathrm{D}$ *geordnet entlang der Nyquist-D-Kurve* Γ_D *gewählt werden. Diese Ordnung kann durch Wahl einer Parametrierung* $\gamma_\mathrm{D} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *von* Γ_D *realisiert werden: Die Stützstellen* $s_j = \gamma(\tau_j)$ *sind dann entlang des Pfades geordnet, wenn* $0 \leq \tau_j < \tau_{j+1} \leq 1$ *für* $j = 1, \ldots, M-1$ *gilt. Neben der Ordnung der Stützstellen ist außerdem zu beachten, dass die Lösungen des verallgemeinerten Eigenwertproblems* (3.25) *im Allgemeinen ungeordnet sind. Diese müssen daher zusätzlich geordnet werden, um stetige Funktion* $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s)$ *zu erhalten. Um dies zu erreichen, wird die Sortierung der Lösung für* s_1 *als Ausgangspunkt betrachtet. Ausgehend davon werden dann die Lösungen des verallgemeinerten Eigenwertproblems* (3.25) *für* $s_2, \ldots, s_M$ *iterativ sortiert. Ein Iterationsschritt*

[8] Gilt $q < p$, so sollte $\tilde{\mathbf{K}}$ statt über die Eingangsmatrix über die neue Ausgangsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}$ zum offenen Regelkreis gezählt werden.

sieht dabei wie folgt aus: Seien die Funktionswerte $\mu_1(s_j), \ldots, \mu_{q+n_c}(s_j)$ *im Vektor*

$$\boldsymbol{\mu}_j = \begin{bmatrix} \mu_{1,j} \\ \vdots \\ \mu_{q+n_c,j} \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Für den nächsten Stützpunkt s_{j+1} *seien die endlichen Lösungen des verallgemeinerten Eigenwertproblems* (3.25) *im Vektor*

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{j+1} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{1,j+1} \\ \vdots \\ \hat{\mu}_{q+n_c,j+1} \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Stetigkeit der Funktionen $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_c}(s)$ *bedeutet vereinfacht gesagt, dass kleine Änderungen in der Variable* s *auch nur zu kleinen Änderung im Funktionswert führen. Die Elemente von* $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{j+1}$ *sollten daher so sortiert werden, dass die Abstände zu den zugehörigen Elementen in* $\boldsymbol{\mu}_j$ *möglichst klein sind. Es sollte also eine Permutationsmatrix* $\boldsymbol{\Pi}_{j+1}$ *gefunden werden, sodass*

$$\left\| \boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\Pi}_{j+1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{j+1} \right\|_1 \tag{3.26}$$

minimiert wird. Wurde eine solche Permutationsmatrix gefunden, so wird entsprechend $\boldsymbol{\mu}_{j+1} = \boldsymbol{\Pi}_{j+1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{j+1}$ *gewählt und als Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt verwendet. Der entscheidende Schritt in jeder Iteration ist also das Finden einer Permutationsmatrix* $\boldsymbol{\Pi}_{j+1}$*, sodass* (3.26) *minimiert wird. Dieses Zuordnungsproblem kann z. B. mit dem klassischen Munkres-Algorithmus erfolgen [102].*

Wenn die Stützstellen $s_1, \ldots, s_n$ *dicht genug gewählt wurden, genügt für den hier vorliegenden Fall auch ein einfacheres, elementweises Vorgehen. Dazu wird beginnend mit* $\hat{\mu}_{1,j+1}$ *das Element in* $\boldsymbol{\mu}_j$ *gesucht, zu dem* $\hat{\mu}_{1,j+1}$ *den minimalen Abstand hat. Dieses Vorgehen wird Schrittweise für alle weiteren Elemente in* $\hat{\mu}_{1,j+1}$ *ebenso durchgeführt, wobei jedoch jeweils nur die noch nicht zugeordneten Elemente in* $\boldsymbol{\mu}_j$ *betrachtet werden. Somit kann auf einfache Weise eine Zuordnung der Elemente von* $\hat{\mu}_{1,j+1}$ *zu denen von* $\boldsymbol{\mu}_j$ *gefunden werden, ohne auf den verhältnismäßig komplexen Munkres-Algorithmus zurückzugreifen.*

Beispiel 3.29. *Es wird erneut die in Beispiel 3.16 diskutierte Agentendynamik mit Systemmatrizen* (3.16) *und Reglerparametern* $\boldsymbol{\Theta}$ *nach* (3.17) *betrachtet. In Abb. 3.3 sind die Nyquist-Kurven von* $\mu_1(s)$ *und* $\mu_2(s)$ *gemäß Satz 3.25 eingezeichnet und die Synchronisierungsmenge* $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta})$ *als schattierte Fläche gekennzeichnet.*

Beispiel 3.30 (Kooperative Stabilisierung)**.** *Die Interpretation der Elemente der Synchronisierungsmenge als stabilisierende komplexe Rückführung eines Standardregelkreises, wie dies in Abb. 3.1 dargestellt ist, zeigt erneut die Verbindung zwischen dem Synchronisierungsproblem und dem Stabilisierungsproblem auf. Für SISO-Systeme mit statischer Ausgangsrückführung wurde daher in [49] auch die kooperative Stabilisierung betrachtet. Unter kooperativer Stabilisierung ist dabei zu verstehen, dass jeder Agent zur Stabilisierung seine eigene Stellgröße abhängig von den (absoluten) Ausgangssignalen seiner Nachbaragenten wählt.*[9] *Für die in den Beispielen 3.16 und*

[9] Bei den in dieser Arbeit sonst betrachteten Regelgesetzen zur Synchronisierung stehen den Agenten nur Differenzsignale zur Verfügung.

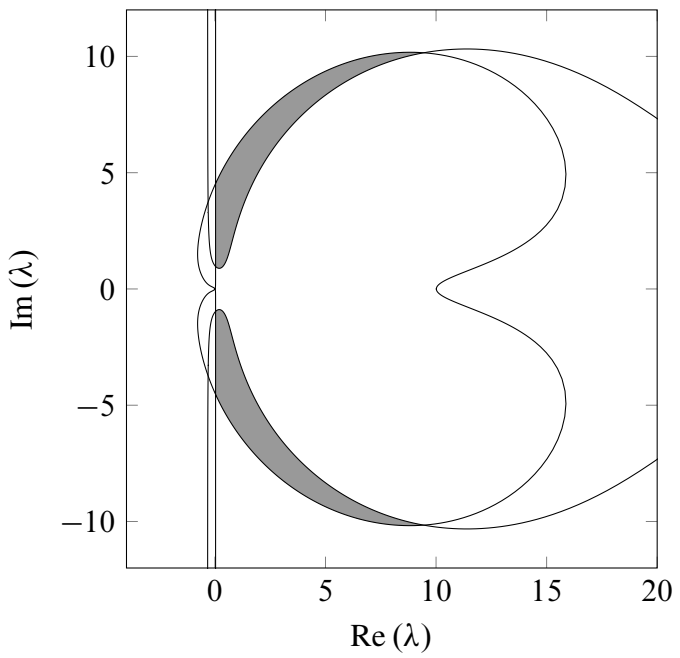

Abbildung 3.3: Nyquist-Kurven und Synchronisierungsmenge (schattiert) zu Beispiel 3.29.

3.29 betrachtete Agentendynamik (3.16) *und den Synchronisierungsregler* (3.17)*, wird eine solche kooperative Stabilisierung nun anhand von zwei Agenten veranschaulicht. Wird die erweiterte Agentendynamik* (3.19) *betrachtet und die Agenten wählen ihren jeweiligen Eingang zu*[10]

$$\mathbf{v}_{\mathrm{e},1} = \mathrm{Re}\,(\lambda) \cdot \mathbf{y}_{\mathrm{e},1} - \mathrm{Im}\,(\lambda) \cdot \mathbf{y}_{\mathrm{e},2} \tag{3.27a}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{e},2} = \mathrm{Im}\,(\lambda) \cdot \mathbf{y}_{\mathrm{e},1} + \mathrm{Re}\,(\lambda) \cdot \mathbf{y}_{\mathrm{e},2}, \tag{3.27b}$$

so führt dies für jedes $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ *zu stabilem Verhalten des kooperativen Verbunds der beiden Agenten. In Abb. 3.4 sind die Zustandsverläufe der beiden Agenten für die in Beispiel 3.16 gefundene Wahl von* $\lambda = (0{,}2249 + \mathrm{j}) \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ *und zufällig gewählte Anfangswerte zu sehen. Auch hier ist bemerkenswert, dass, obwohl die Agentendynamik* (3.16) *mit einem Regler der Ordnung* $n_{\mathrm{c}} = 1$ *nicht reell stabilisierbar ist, die beiden Agenten durch Verwendung des kooperativen Regelgesetzes* (3.27) *und dem Regler erster Ordnung* (3.17) *Stabilisierung erreichen.*

3.1.5 Synchronisierungsregler mit maximalem Synchronisierungsradius

In den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4 wurde der Synchronisierungsreglerentwurf und die Beschreibung aller zur Synchronisierung führenden Kommunikationstopologien thematisiert. Die Ergebnisse sind dreierlei. Erstens resultieren aus dem vorgestellten Verfahren Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_{\mathrm{c}})$, welche gemäß (3.1) einen dynamischen Synchronisierungsregler der Ordnung n_{c} beschreiben. Zweitens wurde ein zulässiger Eigenwert λ der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ gefunden. Und drittens wurde darüber hinaus die Menge aller zulässigen Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix

[10] Die Wahl des Regelgesetzes (3.27) kann durch Anwendung des in Abschnitt A.5 beschriebenen Isomorphismus zwischen komplexen und reellen Matrizen auf die Gleichung des geschlossenen Regelkreises (3.20) motiviert werden.

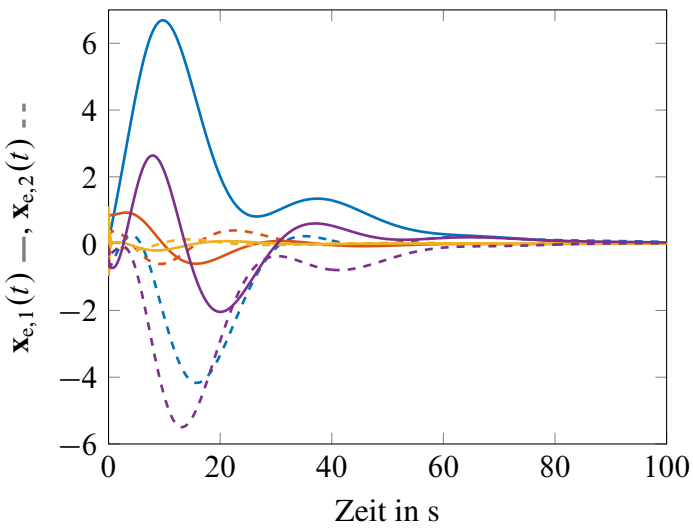

Abbildung 3.4: Zustandsverläufe bei kooperativer Stabilisierung der Agenten in Beispiel 3.30.

unter Verwendung der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_c)$ beschrieben. Der Entwurf der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_c)$ bildet in diesem dreifachen Ergebnis das Zentrum. In Abschnitt 3.1.3 wurde dabei aufgezeigt, wie ein zur Synchronisierung führender Regler minimaler Ordnung entworfen werden kann. Unabhängig von der Ordnung n_c des Reglers ist die Wahl der Reglermatrizen eines Synchronisierungsreglers niemals eindeutig: Existiert ein Synchronisierungsregler der Ordnung n_c, so existieren mehrere Regler derselben Ordnung, die alle das Ziel der Synchronisierung erreichen.[11] In diesem Abschnitt wird daher der Reglerentwurf noch einmal genauer betrachtet. Es wird davon ausgegangen, dass bereits Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_c)$ und ein zulässiger Eigenwert λ gefunden wurden, für die die Matrix in (3.2) Hurwitz ist. Diese werden als Ausgangspunkt für den weiteren Entwurf verwendet. Der im Folgenden vorgestellte Reglerentwurf zielt nun darauf ab, eine Vergrößerung der Synchronisierungsmenge zu erreichen. Die Ordnung n_c des Reglers wird dabei beibehalten. Um die Notation kompakt zu halten, wird im Weiteren jedoch davon abgesehen, die Ordnung n_c als Argument explizit mitzuführen. Als Maß für die Größe der Synchronisierungsmenge wird der Radius des größtmöglichen Kreises im Inneren der Synchronisierungsmenge verwendet. Dieser wird im Weiteren als *Synchronisierungsradius* bezeichnet und ist formal durch die Lösung des Maximierungsproblems

$$r_{\max}(\mathbf{\Theta}) = \max_{r,\lambda} \quad r \tag{3.28a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathcal{B}_r(\lambda) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{\Theta}) \tag{3.28b}$$

gegeben, wobei

$$\mathcal{B}_r(\lambda) = \{\lambda' \in \mathbb{C} \mid \left|\lambda' - \lambda\right| < r\}$$

einen offenen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt λ beschreibt. Die Maximierung des Synchronisierungsradius führt zur Erhöhung der Robustheit des Synchronisierungsverhaltens bezüglich Unsicherheiten beim Graphenentwurf, worauf in Abschnitt 5.2.3 eingegangen wird. Bevor die

[11] Dass die Wahl der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}(n_c)$ nicht eindeutig ist, liegt daran, dass die Menge der synchronisierenden Regler wie auch die Synchronisierungsmenge (vgl. Bemerkung 3.18) eine offene Menge ist.

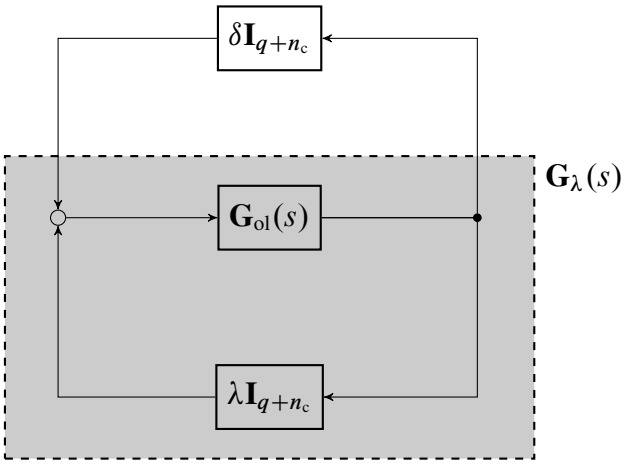

Abbildung 3.5: Über $\lambda'\mathbf{I}_{q+n_c} = (\lambda + \delta)\mathbf{I}_{q+n_c}$ geschlossener Regelkreis, wobei $\delta\mathbf{I}_{q+n_c}$ als strukturierte Unsicherheit der nominalen Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_\lambda(s)$ aufgefasst wird.

Maximierung des Synchronisierungsradius $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ durch Optimierung der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ betrachtet wird, wird zunächst ausführlich diskutiert, wie $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ berechnet werden kann, d. h., wie das Maximierungsproblem (3.28) gelöst werden kann. Dazu wird zuerst das Maximierungsproblem (3.28) für ein feststehendes $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ betrachtet, d. h., es wird die Lösung des Maximierungsproblems

$$r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda) = \max_{r} \quad r \tag{3.29a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathcal{B}_r(\lambda) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{\Theta}) \tag{3.29b}$$

gesucht. Ein etablierter Ansatz, das Optimierungsproblem (3.29) zu lösen, ist die Berechnung des maximalen strukturierten Singulärwerts (vgl. [34], [173, Kapitel 11]). Dabei ist das Maximum des strukturierten Singulärwerts über alle Frequenzen der Übertragungsmatrix des über $\lambda\mathbf{I}_{q+n_c}$ geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{G}_\lambda(s) = (\mathbf{I}_{q+n_c} - \lambda\mathbf{G}_{ol}(s))^{-1}\mathbf{G}_{ol}(s)$$

zu suchen, wobei $\mathbf{G}_{ol}(s)$ die Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises (3.19) ist. Der Kehrwert des maximalen strukturierten Singulärwerts bemisst dann die maximal zulässige strukturierte Unsicherheit $\mathbf{\Delta} = \delta\mathbf{I}_{q+n_c}$, sodass der gemäß Abb. 3.5 geschlossene Regelkreis gerade noch stabil ist. Obwohl Implementierungen für die Berechnung des strukturierten Singulärwerts in Programmbibliotheken (z. B. in *Matlab Robust Control Toolbox* [92] oder *Systems Modeling, Analysis and Control Toolbox* [125]) zur Verfügung stehen, wird hier ein anderer Weg eingeschlagen, indem Gebrauch von Satz 3.25 gemacht wird. In Bemerkung 3.31 werden dann die Vor- und Nachteile des im Folgenden vorgestellten Vorgehens gegenüber der Verwendung der vorhandenen Werkzeuge zur Berechnung des maximalen strukturierten Singulärwerts diskutiert.

Die Nyquist-Kurven der Funktionen $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_c}(s)$[12] aus der Faktorisierung in (3.23) unterteilen, wie in Bemerkung 3.27 bereits betont, die komplexe Ebene in endlich viele zusammenhän-

[12] Die Nyquist-Kurven der Funktionen $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_c}(s)$ hängen von der Wahl der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ ab. Diese Abhängigkeit ist hier nicht explizit ausgewiesen.

gende Gebiete. Damit begrenzen sie natürlich auch die Synchronisierungsmenge und eine Lösung zu Optimierungsproblem (3.29) ist gegeben durch die Lösung von

$$r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda) = \min_{\substack{\tau \in [0,1] \\ i \in \{1,\ldots,q+n_c\}}} |\mu_i(\gamma_D(\tau)) - \lambda| \,, \tag{3.30}$$

wobei $\gamma_D : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine Parametrierung der Nyquist-D-Kurve Γ_D darstellt. In Bemerkung 3.28 wurde beschrieben, wie die Werte der Funktionen $\mu_1(s), \ldots, \mu_{q+n_c}(s)$ numerisch an Stützstellen ausgewertet werden können. Im Folgenden wird daher angenommen, dass an entlang der Kurve Γ_D gewählten Stützstellen $s_1, \ldots, s_M$ die Werte der Funktionen $\mu_i(s)$ für alle $i = 1, \ldots, q + n_c$ vorliegen. Wie in Bemerkung 3.28 wird auch hier angenommen, dass diese Stützstellen mithilfe der Parametrierung $\gamma_D \,|\, [0, 1] \to \mathbb{C}$ gewonnen wurden und dass für die zur Wahl der Stützstellen $s_j = \gamma(\tau_j)$ führenden Werte von τ erneut $0 \leq \tau_j < \tau_{j+1} \leq 1$ für $j = 1, \ldots, M - 1$ gilt.

Soll $r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$ durch Lösung des Optimierungsproblems (3.30) gefunden werden, so muss das Minimum in (3.30) über alle $s \in \Gamma_D$ gesucht werden. Es ist daher klar, dass das Optimierungsproblem (3.30) nicht ohne Weiteres anhand einer endlichen Anzahl an Stützstellen gelöst werden kann. Daher wird nun eine Heuristik vorgestellt, wie eine untere Grenze für $r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$ aus einer endlichen Zahl an Stützstellen gewonnen werden kann. Dazu wird zunächst jeweils für alle aufeinanderfolgende Punkte $\mu_i(s_j)$ und $\mu_i(s_{j+1})$ ein Dreieck aufgespannt (vgl. Abb. 3.6). Dieses Dreieck besteht aus den an den Punkten anliegenden Tangenten der Kurve $\mu_i(s)$ und der Verbindungslinie zwischen den Punkten. Der Schnittpunkt der Tangenten wird im Folgenden mit $\mu_{t,i}(s_j, s_{j+1})$ bezeichnet. Details und Sonderfälle zur Berechnung der Tangenten und des Tangentenschnittpunktes $\mu_{t,i}(s_j, s_{j+1})$ sind im Anhang in Abschnitt B.2.1 dokumentiert. Die Kanten dieser Tangentendreiecke können nun als stückweise lineare Funktionen der Laufvariablen τ der Parametrierung des Pfades Γ_D dargestellt werden. Im Folgenden wird daher mit $\tilde{\mu}_i(\tau)$ die stückweise lineare Beschreibung der Verbindungslinien und mit $\tilde{\mu}_{t,i}(\tau)$ die stückweise lineare Beschreibung der Tangentenabschnitte bezeichnet. Auf die explizite Angabe von Formeln für $\tilde{\mu}_i(\tau)$ und $\tilde{\mu}_{t,i}(\tau)$ wird hier der Übersichtlichkeit halber verzichtet. Die Heuristik, die im Folgenden angewandt wird, besteht darin anzunehmen, dass die Nyquist-Kurven $\mu_i(\gamma(\tau))$ vollständig innerhalb dieser Tangentendreiecke verlaufen. Trifft diese Annahme zu, so kann eine untere Grenze für $r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda)$ durch Lösung des Optimierungsproblems

$$\tilde{r}_{\max}(\boldsymbol{\Theta}, \lambda) = \min_{\substack{\tau \in [0,1] \\ i \in \{1,\ldots,q+n_c\}}} \min\left(|\tilde{\mu}_i(\tau) - \lambda| \,, |\tilde{\mu}_{t,i}(\tau) - \lambda|\right) \tag{3.31}$$

berechnet werden. Eine mögliche algorithmische Umsetzung zur Lösung dieses Optimierungsproblems ist in Abschnitt B.2.2 angegeben. Die Gültigkeit der getroffenen Annahme, dass die Nyquist-Kurven $\mu_i(\gamma(\tau))$ vollständig innerhalb der Tangentendreiecke verlaufen, hängt sowohl vom konkreten Verlauf der Nyquist-Kurven als auch von der Wahl der Stützstellen ab. Je mehr Stützstellen verwendet werden und je näher diese beieinander liegen, desto höher wird der Anteil der Intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, auf die diese Annahme zutrifft. Als weiteres Argument für die Rechtfertigung der gewählten Heuristik ist zu nennen, dass die getroffene Annahme nicht für alle Nyquist-Kurven $\mu_i(\gamma(\tau))$, $i = 1, \ldots, n+n_c$, und Intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, M-1$, erfüllt sein muss, sondern nur für die Kurven und Intervalle, die kritisch für die Lösung von Optimierungsproblem

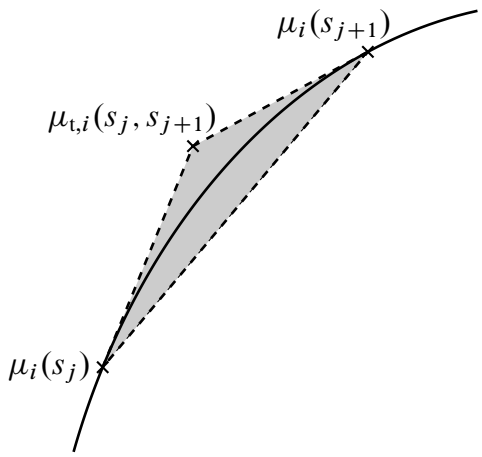

Abbildung 3.6: Durch Stützstellen $\mu_i(s_j)$ und $\mu_i(s_{j+1})$ aufgespanntes Dreieck aus Tangenten und Verbindungslinie.

(3.30) sind. Trotz dieser Argumente bleibt die getroffene Annahme heuristisch und es gibt keine Garantie, dass die Lösung $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ von (3.31) eine valide untere Grenze für $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ in (3.30) ist.

Es wurde mit (3.30) bzw. (3.31) aufgezeigt, wie für gegebene Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ und einen zulässigen Laplace'schen Eigenwert $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ der maximale Kreis um ein vorgegebenes λ gefunden werden kann, sodass der Kreis vollständig in der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ liegt. Die durch (3.30) bzw. (3.31) gegebenen Lösungen von Maximierungsproblem (3.29) werden nun verwendet, um den Synchronisierungsradius $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ gemäß (3.28) zu bestimmen. Dazu wird das Optimierungsproblem

$$r_{\max}(\mathbf{\Theta}) = \max_{\lambda} \quad r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda) \tag{3.32a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta}) \tag{3.32b}$$

gelöst. Die Berechnung von $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ durch Lösen von (3.30) kann dabei entsprechend durch die mittels (3.31) heuristisch gewonnene untere Grenze $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ ersetzt werden, um eine untere Grenze $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta})$ für $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ zu berechnen. Neben dem Synchronisierungsradius $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ folgt aus der Optimierung (3.32) der Mittelpunkt $\lambda(\mathbf{\Theta})$ als optimale Wahl von $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$.

Die Ergebnisse zur Berechnung des Synchronisierungsradius $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ durch (3.32), werden im Folgenden genutzt, um die Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ zu optimieren. An dieser Stelle ist nun allerdings zu bedenken, dass der Laplace'sche Eigenwert λ in der für die Beschreibung der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ relevanten Stabilisierungsgleichung (3.2) immer als Produkt mit Matrizen aus $\mathbf{\Theta}$ auftaucht. Dies bedeutet, dass eine Skalierung derjenigen Reglermatrizen, die jeweils mit λ multipliziert werden ($\mathbf{K}$, $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{F}_c$, $\mathbf{G}_c$), zu einer Skalierung der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ führt. Demzufolge ist eine einfache Maximierung des Synchronisierungsradius $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$ mit Hilfe der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ nicht aussagekräftig. Es muss stattdessen dieser Skalierungseffekt aus der Optimierung herausgenommen werden, was durch Normierung des Synchronisierungsradius $r_{\max}(\mathbf{\Theta})$

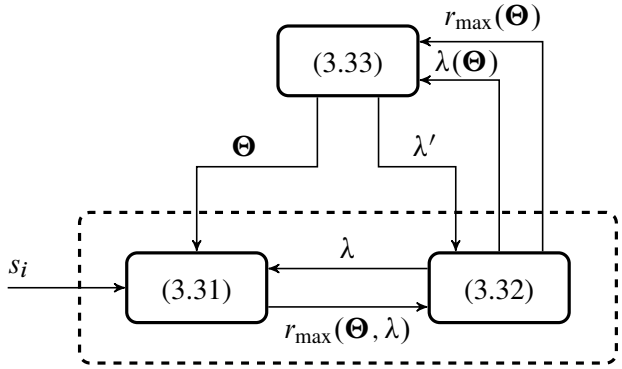

Abbildung 3.7: Schematischer Überblick der Optimierung zum Entwurf von Synchronisierungsreglern mit maximalem Synchronisierungsradius.

mit dem Betrag von $\lambda(\mathbf{\Theta})$ erreicht werden kann. Es wird daher das Optimierungsproblem

$$r_{\max} = \max_{\mathbf{\Theta}} \quad r_{\max}(\mathbf{\Theta}) \big/ |\lambda(\mathbf{\Theta})| \tag{3.33a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathcal{S}(\mathbf{\Theta}) \neq \emptyset \tag{3.33b}$$

betrachtet, wobei natürlich nur über die Matrizen $\mathbf{\Theta}$ optimiert werden darf, für die die Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ nichtleer ist. Dies führt zu einer optimalen Wahl der Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}^*$.

Zusammenfassend gliedert sich das hier vorgestellte Vorgehen zur Berechnung von Synchronisierungsreglern mit maximalem (normierten) Synchronisierungsradius in die drei verschachtelten Optimierungsprobleme (3.29), (3.32) und (3.33). Optimierungsproblem (3.29) kann dabei durch die heuristische Variante (3.31) ersetzt werden. Zur Lösung der beiden anderen Optimierungsprobleme (3.32) und (3.33) bietet sich die Verwendung gradientenfreier unbeschränkter Optimierungsverfahren an. Die in den einzelnen Optimierungsproblemen auftretenden Beschränkungen können dann dadurch berücksichtigt werden, dass an unzulässigen Stellen $r_{\max} = -\infty$ als Funktionswert definiert wird. Eine Implementierung dieser verschachtelten Optimierungsprobleme kann gemäß Abbildung 3.7 erfolgen. Dabei wird von gültigen Startwerten $\mathbf{\Theta}_0$, λ'_0 ausgegangen, welche beispielsweise gemäß Abschnitt 3.1.3 gewonnenen werden können. Neben der eigentlichen Optimierungsvariablen $\mathbf{\Theta}$ wird λ' als Hilfsvariable bei der Lösung von (3.33) weiter mitgeführt und als Zertifikat für die Erfüllung der Nebenbedingung (3.33b) genutzt, indem für das Paar $(\mathbf{\Theta}, \lambda')$ anhand von Gleichung (3.18) überprüft wird, ob $\lambda' \in \mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ gilt. Für jedes $\mathbf{\Theta}$ werden dann anhand der vorher auszuwählenden Stützpunkte s_j die Stützstellen $\mu_i(s_j)$ und die Tangentenschnittpunkte $\mu_{\mathrm{t},i}(s_j, s_{j+1})$ berechnet, womit für jedes λ Optimierungsproblem (3.31) gelöst wird. Das Optimierungsproblem (3.32) wird schließlich gelöst, indem λ' als Startwert verwendet wird und dann nach λ gesucht wird, sodass $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ maximiert wird.

Im Folgenden wird in Bemerkung 3.31 zunächst erneut die zur Lösung von Optimierungsproblem (3.29) bzw. (3.30) verwendete Heuristik (3.31) diskutiert. Im Anschluss wird in Beispiel 3.32 der Entwurf eines Synchronisierungsreglers mit maximalem Synchronisierungsradius anhand des bereits in den Beispielen 3.16 und 3.29 betrachteten Systems durchgeführt.

Bemerkung 3.31. *Wie bereits angedeutet, kann als Alternative zu der vorgestellten Heuristik* (3.31) *das Optimierungsproblem* (3.30) *auch durch Berechnung des maximalen strukturierten*

Singulärwerts gelöst werden. Durch diesen Weg kann der Nachteil der vorgestellten Heuristik – die fehlende Garantie für die Validität der gefundenen unteren Grenze für $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ – umgangen werden, wenn auf Verfahren zur Berechnung des strukturierten Singulärwerts zurückgegriffen wird, welche ohne jegliche Heuristik eine obere Grenze für diesen garantieren [126]. In diesem Sinne wäre ein solches Verfahren vorzuziehen. Im Folgenden werden jedoch Gründe genannt, welche gegen die Verwendung dieser Verfahren sprechen.

Zunächst sind bei der Verwendung der Funktionen `mussv` *in der Robust Control Toolbox bzw.* `muub` *in der SMAC Toolbox zwei Dinge zu beachten. Zum einen hat sich in einigen numerischen Beispielfällen gezeigt, dass der von* `mussv` *und* `muub` *zurückgegebene Wert für die obere Schranke konservativ sein kann. Dies ist insofern verwunderlich, als dass für den hier vorliegenden Fall die obere Schranke des strukturierten Singulärwerts theoretisch nicht konservativ, sondern exakt sein sollte (vgl. [173, Theorem 11.4]). Zum anderen werden bei den vorhandenen Implementierung nur nichtnegative Frequenzen $\omega \geq 0$ der Übertragungsfunktion betrachtet, da die Verfahren nur für Systeme mit rein reellen Systemmatrizen ausgelegt sind. In dem hier vorliegenden Fall muss jedoch der strukturierte Singulärwert für die Übertragungsfunktion $G_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ berechnet werden. Durch die Abhängigkeit von λ kann jedoch der Maximalwert des strukturierten Singulärwerts auch bei negativen Frequenzen auftreten. Die für lediglich nichtnegative Frequenzen implementierten Verfahren können dennoch verwendet werden, indem jeweils der maximale strukturierte Singulärwert von $G_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ und von $G_{\bar{\lambda}}(\mathrm{j}\omega)$ über alle $\omega \geq 0$ berechnet wird. Das Maximum beider so berechneter Werte, entspricht dann dem Maximum von $G_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ über alle $\omega \in \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt B.2.3).*

Die bisher genannten Nachteile der Verwendung der bereits existierenden Implementierungen des strukturierten Singulärwertes lassen sich vermeiden, indem z. B. das Verfahren in [126] auf die hier vorhandenen Umstände angepasst wird (vollständiger Frequenzbereich sowie Verwendung der exakten oberen Schranken und zugehörigen Skalierungsmatrizen).

Der große Vorteil der Verwendung der heuristischen Lösung liegt hingegen in dem Rechenzeitvorteil der gewonnen werden kann, wenn der Wert für $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ nicht nur für ein Paar $(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ berechnet werden soll, sondern wenn für gegebene Reglermatrizen $\mathbf{\Theta}$ das Optimierungsproblem (3.32) *mittels eines iterativen (z. B. gradientenfreien) Optimierungsverfahrens gelöst werden soll. In diesem Fall muss nämlich für ein gegebenes $\mathbf{\Theta}$ der Wert $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ für sehr viele verschiedene Werte von λ berechnet werden. Wird $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ jeweils mithilfe der Heuristik gelöst, so müssen nur einmal vorab die Stützstellen $\mu_i(s_j)$ und die Tangentenschnittpunkte $\mu_{\mathrm{t},i}(s_j, s_{j+1})$ berechnet werden. Ist dies erfolgt, so kann die Berechnung von $\tilde{r}_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ dann, wie in Abschnitt B.2.2 beschrieben, direkt explizit numerisch erfolgen. Im Gegensatz dazu muss bei dem Weg über den strukturierten Singulärwert dieser für jedes λ von Grund auf neu bestimmt werden. Der Vergleich an einigen Beispielsystemen hat gezeigt, dass die Rechenzeit zur Lösung von Optimierungsproblem* (3.30) *für einen Punkt λ auf beiden Wegen in etwa dieselbe ist, während für die Lösung von Optimierungsproblem* (3.32) *der Weg über die Heuristik eine ungefähr um den Faktor 15 geringere Rechenzeit benötigt. Eine Möglichkeit, die Vorteile beider Vorgehensweisen zu nutzen, wäre es, die eigentliche Optimierung mithilfe der Heuristik durchzuführen und anschließend zur Absicherung des Ergebnisses eine garantierte untere Schranke für $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ mithilfe einer garantierten oberen Schranke des maximalen strukturierten Singulärwerts gemäß [126] zu berechnen.*

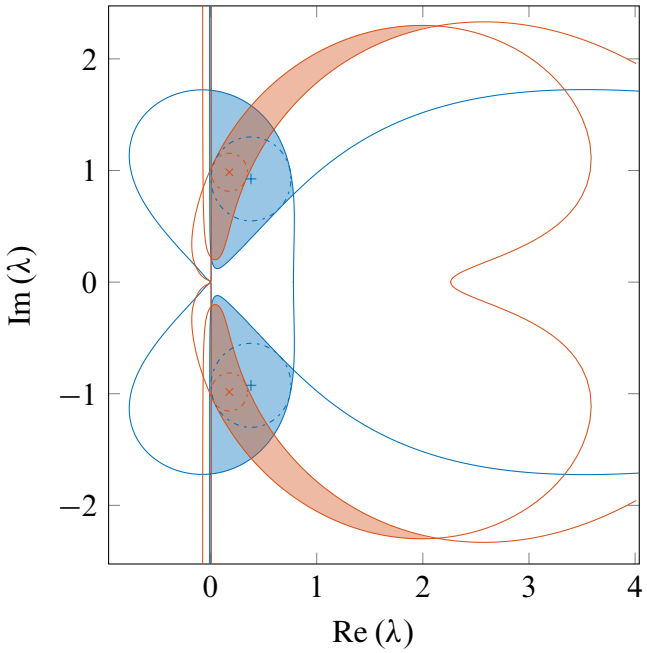

Abbildung 3.8: Nyquist-Kurven und Synchronisierungsmengen (ausgefüllt) zu Beispiel 3.32: (rot) $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta})$ mit maximalem Kreis mit Mittelpunkt $\lambda(\boldsymbol{\Theta})$ (×); (blau) $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta}^*)$ mit maximalem Kreis mit Mittelpunkt $\lambda(\boldsymbol{\Theta}^*)$ (+).

Beispiel 3.32. *Für das bereits in den Beispielen 3.16 und 3.29 betrachte Multi-Agenten-System kann ausgehend von dem gefundenen Synchronisierungsregler* (3.17) *nun die Wahl der Reglermatrizen* $\boldsymbol{\Theta}$ *durch Lösen von* (3.33) *optimiert werden, woraus eine optimale Wahl der Reglermatrizen* $\boldsymbol{\Theta}^*$ *resultiert. Dies wurde gemäß dem in Abb. 3.7 skizzierten Vorgehen durchgeführt. Der Vergleich der Synchronisierungsmengen* $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta})$ *und* $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta}^*)$ *ist in Abb. 3.8 gezeigt. Dabei wurden in beiden Fällen die Reglermatrizen so skaliert, dass* $|\lambda(\boldsymbol{\Theta})| = |\lambda(\boldsymbol{\Theta}^*)| = 1$ *gilt. Es ist zu sehen, dass sich die Form der Synchronisierungsmenge ändert. Der Synchronisierungsradius* $r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}) = 0{,}1704$ *kann durch die Optimierung auf* $r_{\max}(\boldsymbol{\Theta}^*) = 0{,}3763$ *vergrößert werden. Der Mittelpunkt des größten in der optimierten Synchronisierungsmenge liegenden Kreises ist* $\lambda(\boldsymbol{\Theta}^*) = 0{,}381 \pm \mathrm{j}\,0{,}925$.

3.2 Optimalität des transienten Verhaltens

In diesem Abschnitt wird die Optimalität des transienten Verhaltens diskutiert. Den Betrachtungen in diesem Abschnitt kommt dabei eine Sonderrolle in der vorliegenden Arbeit zu, da sich die Kommunikationstopologie direkt aus den betrachteten Optimalregelproblemen ergibt. Somit steht diese nicht mehr zum späteren Entwurf zur Verfügung, wodurch eine Abweichung von dem im Rest der Arbeit befolgten zweistufigen Entwurfsschema (vgl. Abb. 1.2) vorliegt. Es wird jedoch gezeigt, dass die Parametrierung der Optimalregelprobleme dazu genutzt werden kann, bestimmte Kommunikationstopologien vorzugeben.

Der Suche nach einem Synchronisierungsregler für optimales transientes Synchronisierungsverhalten kann auf verschiedene Weise nachgegangen werden. Eine Möglichkeit ist es, die Struktur des Regelgesetzes im Vorhinein festzulegen, sodass das Regelgesetz beispielsweise die in (2.9) beschriebene Form mit einer vorher festgelegten Kommunikationstopologie aufweist. Somit wird durch die Struktur des Regelgesetzes das Erreichen von Synchronisierung vorgegeben und die Optimierung dient dann dem Anpassen der Reglerverstärkungen zur Minimierung eines geeigneten Gütemaßes. Das resultierende Optimierungsproblem kann als parametrisches Optimalregelproblem interpretiert werden, zu dessen Lösungen verschiedene Methoden existieren [89]. Allerdings führt diese Vorgehensweise nur in wenigen Ausnahmefällen auf ein konvexes Optimierungsproblem [127]. Daher werden oft heuristische Verfahren vorgeschlagen, um gute suboptimale Lösungen zu finden [101, 16].

Ein anderer Ansatz ist es, die Struktur des Regelgesetzes zunächst offen zu lassen. Da nun die Struktur der Regelung nicht mehr zum Erreichen von Synchronisierung festgelegt wird, muss stattdessen das zu lösende Optimierungsproblem entsprechend so formuliert werden, dass Synchronisierung der Agenten garantiert wird. Der gängigste Ansatz in der Literatur ist daher, den Synchronisierungsfehler, d. h. die Zustandsabweichungen der Agenten untereinander, gemeinsam mit der aufgebrachten Stellgröße im Gütemaß zu bestrafen (vgl. [171, 101, 25]). Im späteren Verlauf dieses Abschnitts werden die Ergebnisse aus [171] stellvertretend für ein solches Vorgehen mit dem im Weiteren vorgestellten Ansatz verglichen.

Statt den Synchronisierungsfehler der Agenten untereinander zu betrachten, wird hier ein alternativer Ansatz diskutiert: Optimale Synchronisierung wird als optimale Transition jedes Agenten auf die Synchronisierungstrajektorie verstanden. Jeder Agent soll dabei zur Umsetzung des optimalen Regelgesetzes nur auf Zustandsdifferenzen zu seinen Nachbaragenten zurückgreifen. Dies wird erreicht, indem zwei Anforderungen an die Synchronisierungstrajektorie gestellt werden. Zum einen soll diese weiterhin wie in (2.15) als Trajektorie eines autonomen Systems darstellbar sein. Zum anderen wird gefordert, dass die Synchronisierungstrajektorie über eine lineare Abbildung aus den einzelnen Agentenzuständen gewonnen werden kann.

In Abschnitt 3.2.1 folgt nun zunächst die Formulierung und Herleitung der Lösung dieses Optimalregelproblems zur optimalen Transition auf die Synchronisierungstrajektorie. Im Anschluss wird das gewonnene Regelgesetz in Abschnitt 3.2.2 mit dem in [171] entwickelten Regelgesetz verglichen. Es wird gezeigt, dass genau ein Spezialfall existiert, für den beide Regelgesetze übereinstimmen.

3.2.1 Regelgesetz zur optimalen Transition auf die Synchronisierungstrajektorie

Für ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik (2.6) wird das Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^{N} \int_{0}^{\infty} \left(\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\text{syn}}\right)^{\top} \mathbf{Q} \left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\text{syn}}\right) + \mathbf{u}_i^{\top} \mathbf{R} \mathbf{u}_i \right) \mathrm{d}t \tag{3.34}$$

betrachtet, d. h., es werden die quadratischen Abweichungen der Agentenzustände $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ zur Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\text{syn}}$ sowie die verwendete Stellenergie minimiert. Dabei werden die Zustandsabweichungen jeweils mit der positiv semidefiniten Matrix $\mathbf{Q}$ und die Stellgrößen jeweils mit der positiv definiten Matrix $\mathbf{R}$ gewichtet. Es werden die folgenden beiden Standardannahmen für Optimalregelprobleme getroffen:

Annahme 3.33. *Das Paar* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *ist steuerbar.*

Annahme 3.34. *Das Paar* $(\mathbf{Q}, \mathbf{A})$ *ist beobachtbar.*

Es wird nun zusätzlich davon ausgegangen, dass die Synchronisierungstrajektorie wie in (2.15) mithilfe eines autonomen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{syn}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{syn}}, \ \mathbf{x}_{\text{syn}}(0) = \mathbf{x}_{\text{syn},0} \tag{3.35}$$

beschrieben werden kann.[13] Da diese Synchronisierungstrajektorie nicht von der Wahl der Stellgrößen $\mathbf{u}_i$ abhängt, kann die Minimierung des Gütemaßes (3.34) für jeden Summanden

$$\int_0^\infty \left(\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\text{syn}}\right)^\top \mathbf{Q} \underbrace{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\text{syn}}\right)}_{\tilde{\mathbf{x}}_i} + \mathbf{u}_i^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_i \right) \mathrm{d}t \tag{3.36}$$

einzeln erfolgen. Somit muss für jeden Agenten einzeln ein linear quadratisches Folgeregelproblem auf einem unendlichen Horizont gelöst werden. Für beliebige Trajektorien $\mathbf{x}_{\text{syn}}$ müssten für solche optimalen Folgeregelprobleme entsprechend angepasste Methoden der optimalen Regelung verwendet werden [7]. Die Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\text{syn}}$ wird hier jedoch durch ein autonomes System erzeugt, welches dieselbe Systemmatrix wie die einzelnen Agenten besitzt. Für diesen Sonderfall weist der optimale Folgeregler nach [7, Abschnitt 3.4.5] die einfache Struktur eines klassischen Riccati-Reglers auf. Dies wird ersichtlich, indem nun das vorliegende Problem in ein gewöhnliches linear quadratisches Optimalregelproblem umgeformt wird. Dazu wird der Synchronisierungsfehler $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\text{syn}}$ betrachtet. Unter Berücksichtigung der Agentendynamik (2.6) und der Beschreibung der Synchronisierungstrajektorie (3.35) ergibt sich die Dynamik des Synchronisierungsfehlers zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \quad \tilde{\mathbf{x}}_i(0) = \mathbf{x}_{i,0} - \mathbf{x}_{\text{syn},0}.$$

Sind die Annahmen 3.33 und 3.34 erfüllt, so erfolgt die Minimierung von (3.36) durch den klassischen Riccati-Regler

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_i, \tag{3.37}$$

wobei unter den gegebenen Annahmen $\mathbf{P}$ die positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{3.38}$$

ist (vgl. [82, Satz 7.2]).

[13] Siehe auch Bemerkung 2.22 zur Verwendung des Begriffs *Synchronisierungstrajektorie*.

Um das Regelgesetz (3.37) zu realisieren, muss jedem Agenten der Zustand der Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\text{syn}}$ zur Verfügung stehen. Ziel ist es jedoch, ein Regelgesetz zu gewinnen, bei dem jeder Agent nur auf seinen eigenen Zustand und die Zustände seiner Nachbaragenten zurückgreifen muss. Um dies zu erreichen, wird im Folgenden gefordert, dass der Zustand der Synchronisierungstrajektorie sich zu jedem Zeitpunkt aus den Zuständen der Agenten über eine lineare Abbildung berechnen lässt, d. h., dass

$$\mathbf{x}_{\text{syn}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \dots & \boldsymbol{\Psi}_N \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Psi}} \mathbf{x}$$

mit $\boldsymbol{\Psi}_1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt. Unter Berücksichtigung von (3.35) folgt also die Forderung

$$\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{x}.$$

Es werden nun zwei Annahmen an die Matrix $\boldsymbol{\Psi}$ formuliert und anschließend das gewünschte Optimalregelgesetz präsentiert.

Annahme 3.35. $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Psi}_i = \mathbf{I}_n$.

Annahme 3.36. *Für alle* $i \in \{1, \dots, N\}$ *kommutiert* $\boldsymbol{\Psi}_i$ *mit* $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}$.

Satz 3.37. *Seien die Annahmen 3.33 und 3.34 erfüllt. Sei* $\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \dots & \boldsymbol{\Psi}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times Nn}$ *gegeben. sodass die Annahmen 3.35 und 3.36 erfüllt sind. Sei*

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathscr{A}} = \mathbf{I}_{Nn} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\, \boldsymbol{\Psi} \tag{3.39}$$

definiert und sei $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *die positiv definite Lösung von* (3.38). *Dann löst das Regelgesetz*

$$\mathbf{u} = \underbrace{-\left(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right) \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\mathscr{A}}}_{\mathbf{K}_{\text{ges},1}} \mathbf{x}. \tag{3.40}$$

das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u}} \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Pi}_{\mathscr{A}}^\top (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Q})\, \boldsymbol{\Pi}_{\mathscr{A}} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R})\, \mathbf{u}\right) \mathrm{d}t \tag{3.41a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\, \mathbf{x} + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B})\, \mathbf{u} \tag{3.41b}$$

$$\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{x}. \tag{3.41c}$$

Beweis. Ist (3.41c) erfüllt, so kann $\boldsymbol{\Psi}\mathbf{x}$ im Gütemaß (3.41a) durch $\mathbf{x}_{\text{syn}}$ ersetzt werden, wobei (3.35) gilt. Das Gütemaß (3.41a) entspricht dann dem Gütemaß (3.34) und somit stellt (3.37) das optimale Regelgesetz dar. Wird $\mathbf{x}_{\text{syn}}$ wieder durch $\boldsymbol{\Psi}\mathbf{x}$ ersetzt, so resultiert (3.40) als das optimale Regelgesetz. Es muss somit nur noch gezeigt werden, dass mit (3.40) die Nebenbedingung (3.41c) erfüllt ist. Dazu wird der unter dem Regelgesetz (3.40) geschlossene Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\, \mathbf{x} - \left(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right) \cdot (\mathbf{I}_{Nn} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n) \cdot \boldsymbol{\Psi})\, \mathbf{x}.$$

betrachtet. Mit Annahme 3.35 gilt

$$\mathbf{\Psi}\left(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n\right) = \mathbf{I}_n$$

und Annahme 3.36 garantiert, dass

$$\mathbf{\Psi}\left(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{\Psi}.$$

Sind die Annahmen 3.35 und 3.36 erfüllt, so gilt also für den geschlossenen Regelkreis

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{\Psi}\left(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{x} + \mathbf{\Psi}\left(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{\Psi}\mathbf{x} \\ &= \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{\Psi}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\mathbf{\Psi}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}\mathbf{x},\end{aligned}$$

sodass die Nebenbedingung (3.41c) bei Verwendung des Regelgesetzes (3.40) erfüllt ist. □

Der Satz 3.37 beschreibt durch (3.40) ein einfach zu gewinnendes und einfach zu implementierendes Regelgesetz. Das Optimalregelproblem (3.41) wird dabei maßgeblich durch die Matrix $\mathbf{\Psi}$ in der Nebenbedingung (3.41c) bestimmt. Durch diese Nebenbedingung wird die Synchronisierungstrajektorie vorgegeben, welche somit das Problem parametriert. Dies kann dazu genutzt werden, um die hier entwickelten Ergebnisse zum optimalen transienten Verhalten mit den Ergebnissen zum optimalen stationären Verhalten in Kapitel 4 zu kombinieren (vgl. Bemerkung 4.7).

An dieser Stelle wird noch kurz auf die beiden getroffen Annahmen 3.35 und 3.36 eingegangen. Insbesondere Annahme 3.36 scheint zunächst restriktiv. Werden jedoch $\mathbf{\Psi}_1, \ldots, \mathbf{\Psi}_N$ als skalare Matrizen gewählt, so ist diese Annahme immer erfüllt. Eine solche Wahl wird später näher betrachtet. Annahme 3.35 hingegen führt dazu, dass das Regelgesetz (3.40) mithilfe der Matrix $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ in (3.39) darstellbar ist. Diese Matrix bildet die Verbindung zu den Ergebnissen in [171], die im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

3.2.2 Vergleich mit bestehenden Ansätzen zur optimalen Synchronisierung

In diesem Abschnitt wird das gefundene optimale Regelgesetz (3.40) mit dem in [171] entwickelten Regelgesetz verglichen. Dazu wird zunächst das Regelgesetz [171] angegeben und dabei bereits Ähnlichkeiten zum Regelgesetz (3.40) aufgezeigt. Anschließend werden die Unterschiede beider Regelgesetze herausgearbeitet.

Wenn Annahme 3.35 erfüllt ist, dann ist die Matrix $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ in (3.39) eine Projektionsmatrix, d. h., es gilt $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}^2 = \mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$. Die Abbildung $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}\mathbf{x}$ projiziert den Zustand $\mathbf{x}$ auf den asynchronen Unterraum $\mathscr{A}$, welcher komplementär zum synchronen Unterraum $\mathscr{S} = \operatorname{bild}\left(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n\right)$ ist. Somit stellt $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}\mathbf{x}$ gewissermaßen den Synchronisierungsfehler dar. Mit der Darstellung über die Projektionsmatrix unterscheidet sich das in Satz 3.37 betrachtete Optimierungsproblem von dem in [171] betrachteten Problem nur durch die zusätzliche Nebenbedingung (3.41c).[14] Im Folgenden wird daher der

[14] In [171] wird der asynchrone Unterraum $\mathscr{A}$ als das orthogonale Komplement zum synchronen Unterraum $\mathscr{S}$ definiert, wodurch $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ eine orthogonale Projektion ist. In diesem Sinne ist die hier gemachte Betrachtung eine Verallgemeinerung, da auch Schiefprojektionen $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ zugelassen werden.

Einfluss dieser Nebenbedingung auf die Lösung des Optimierungsproblems (3.41) näher untersucht. Dazu wird zunächst das zentrale Ergebnis in [171], die Lösung des Optimierungsproblems (3.41) ohne die Nebenbedingung (3.41c), hergeleitet. Dieses Ergebnis wird um die Beschreibung der Synchronisierungstrajektorie der resultierenden Lösung erweitert.

Satz 3.38. *Seien die Annahmen 3.33 und 3.34 erfüllt. Sei* $\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Psi}_1 & \dots & \mathbf{\Psi}_N\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times Nn}$ *gegeben und erfülle Annahme 3.35. Sei* $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ *wie in* (3.39). *Sei* $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{(N-1)n\times(N-1)n}$ *die positiv definite Lösung von*

$$\tilde{\mathbf{P}}\left(\mathbf{I}_{N-1}\otimes\mathbf{A}\right) + \left(\mathbf{I}_{N-1}\otimes\mathbf{A}^\top\right)\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}}\left(\mathbf{I}_{N-1}\otimes\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\right)\tilde{\mathbf{P}} = -\tilde{\mathbf{Q}}, \tag{3.42}$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left(\mathbf{V}^\top\otimes\mathbf{I}_n\right)\cdot\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}^\top\cdot\left(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{Q}\right)\cdot\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}\cdot\left(\mathbf{V}\otimes\mathbf{I}_n\right) \tag{3.43}$$

mit $\mathbf{V}\in\mathbb{R}^{N\times(N-1)}$, *sodass* $\mathbf{1}_N^\top\mathbf{V} = \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$. *Dann löst das Regelgesetz*

$$\mathbf{u} = \underbrace{-\left(\mathbf{V}\otimes\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\right)\cdot\tilde{\mathbf{P}}\cdot\left(\mathbf{V}^\top\otimes\mathbf{I}_n\right)}_{\mathbf{K}_{\text{ges},2}}\mathbf{x} \tag{3.44}$$

das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u}} \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^\top\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}^\top\left(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{Q}\right)\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\top\left(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{R}\right)\mathbf{u}\right)\mathrm{d}t \tag{3.45a}$$

$$\text{u.B.v.}\quad \dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{A}\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{B}\right)\mathbf{u}. \tag{3.45b}$$

Das Regelgesetz (3.44) *führt zur Konvergenz aller Agenten auf die Synchronisierungstrajektorie* $\mathbf{x}_{\text{syn}}$, *für welche gilt*

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{syn}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{syn}},\ \mathbf{x}_{\text{syn}}(0) = \mathbf{x}_{\text{syn},0} \tag{3.46a}$$

$$\mathbf{x}_{\text{syn},0} = \left(\frac{1}{N}\mathbf{1}_N^\top\otimes\mathbf{I}_n\right)\mathbf{x}_0. \tag{3.46b}$$

Beweis. Es wird die Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\text{syn}}\\ \mathbf{x}_{\text{asyn}}\end{bmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\mathbf{1}_N^\top\\ \mathbf{V}^\top\end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}}\otimes\mathbf{I}_n\Bigg)\mathbf{x}\,,\quad \mathbf{x} = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{1}_N & \mathbf{V}\end{bmatrix}}_{\mathbf{T}}\otimes\mathbf{I}_n\Big)\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\text{syn}}\\ \mathbf{x}_{\text{asyn}}\end{bmatrix} \tag{3.47}$$

mit dem synchronen Zustand $\mathbf{x}_{\text{syn}}\in\mathbb{R}^n$ und dem asynchronen Zustand $\mathbf{x}_{\text{asyn}}\in\mathbb{R}^{(N-1)n}$ betrachtet. Der Beweis folgt gemäß dem Beweis in [171, Theorem 2] durch die Betrachtung des asynchronen Zustandes $\mathbf{x}_{\text{asyn}}$, welcher die Dynamik

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{asyn}} = \left(\mathbf{I}_{N-1}\otimes\mathbf{A}\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{V}^\top\otimes\mathbf{B}\right)\mathbf{u}$$

aufweist. Aufgrund von Annahme 3.35 gilt $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}} \cdot (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$. Somit wird das Gütemaß (3.45a) vollständig mithilfe des asynchronen Zustandes $\mathbf{x}_{\text{asyn}}$ beschrieben und ist durch

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{x}_{\text{asyn}}^\top \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_{\text{asyn}} + \mathbf{u}^\top (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R}) \mathbf{u} \right) \mathrm{d}t$$

gegeben. Um zu zeigen, dass daraus das Regelgesetz (3.44) als Lösung von Optimierungsproblem (3.45) folgt, muss lediglich gezeigt werden, dass tatsächlich eine positiv definite Lösung $\tilde{\mathbf{P}}$ der algebraischen Riccati-Gleichung (3.42) existiert. Wird $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ gemäß (3.39) in (3.43) eingesetzt, so folgt unter Berücksichtigung von $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{1}_N = N$, dass

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{Q}) + N \cdot \left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{Q} \mathbf{\Psi} \left(\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n \right) \tag{3.48}$$

gilt.

Aus der durch die Annahmen 3.33 und 3.34 gegebenen Steuerbarkeit von $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ und Beobachtbarkeit von $(\mathbf{Q}, \mathbf{A})$ sowie der Tatsache, dass $\mathbf{V}$ vollen Spaltenrang hat, folgt außerdem aus [143, Lemmata 2.6 und 2.7], dass $(\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{A}, \mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{B})$ steuerbar und $(\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{Q}, \mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{A})$ beobachtbar ist. Daher besitzt die Riccati-Gleichung (3.42) eine positiv definite Lösung, wenn $\tilde{\mathbf{Q}}$ durch $(\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{Q})$ ersetzt wird. Da der zweite Summand in (3.48) positiv semidefinit ist, gilt $\tilde{\mathbf{Q}} \succeq (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{Q})$. Damit folgt aus [45, Theorem 2.3], dass (3.42) auch für $\tilde{\mathbf{Q}}$ eine positiv definite Lösung besitzt.

Abschließend wird gezeigt, dass das Regelgesetz (3.44) zu der durch (3.46) beschriebenen Synchronisierungstrajektorie führt. Da $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ gilt, ergibt sich nach (3.47) unter Berücksichtigung des Regelgesetzes (3.44)

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{syn}} = \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top \otimes \mathbf{I}_n \right) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{syn}},$$

woraus direkt (3.46) folgt. □

Im Folgenden werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden optimalen Regelgesetze (3.40) und (3.44) herausgearbeitet. Dabei wird zunächst der Fall aufgezeigt, bei dem beide Gesetze übereinstimmen. Anschließend wird dann eine spezielle Wahl der Struktur der Matrix $\mathbf{\Psi}$ diskutiert, die zu Regelgesetzen der Form (2.9) führt, die in Abschnitt 2.2 als verteiltes Synchronisierungsregelgesetz für Multi-Agenten-Systeme eingeführt wurde.

In [171, Theorem 2] wird bewiesen, dass das optimale Regelgesetz (3.44) diffusiv ist, d. h., dass $\mathbf{K}_{\text{ges},2} \cdot (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ gilt. Dies ist auch für das Regelgesetz (3.40) der Fall, da $\mathbf{K}_{\text{ges},1} \cdot (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ gilt. Dies ist direkt ersichtlich, da aufgrund von Annahme 3.35 immer $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}} \cdot (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ gilt. Die Eigenschaft, dass die Regelgesetze diffusiv sind, bedeutet schließlich, dass zur Umsetzung der Regelgesetze die Agenten nur auf Zustandsdifferenzen zu ihren Nachbaragenten zurückgreifen müssen. Dies ist insofern interessant, als dass diese Struktur des Regelgesetzes in natürlicher Weise aus der Lösung der betrachteten Optimierungsprobleme resultiert und nicht im Vorhinein festgelegt wurde (vgl. die Diskussion in [171] sowie in [98]). Neben dieser strukturellen Übereinstimmung unterscheiden sich die beiden Regelgesetze jedoch außer in genau einem Sonderfall. Dieser Sonderfall wird im folgenden Satz hergeleitet.

Satz 3.39. *Seien die Annahmen von Satz 3.37 erfüllt. Die Lösungen der Optimalregelprobleme* (3.41) *und* (3.45) *stimmen für beliebige Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$ *genau dann überein, wenn* $\mathbf{\Psi} = (\mathbf{1}_N^\top/N \otimes \mathbf{I}_n)$ *gilt.*

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass für $\mathbf{\Psi} = (\mathbf{1}_N^\top/N \otimes \mathbf{I}_n)$ die beiden Regelgesetze (3.40) und (3.44) übereinstimmen. Für diesen Fall ist die Projektionsmatrix $\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}}$ durch

$$\mathbf{\Pi}_{\mathscr{A}} = \underbrace{\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top\right)}_{\mathbf{L}_w^{\mathrm{K}}} \otimes \mathbf{I}_n, \tag{3.49}$$

gegeben, wobei $\mathbf{L}_w^{\mathrm{K}}$ die Laplacematrix des vollständig verbundenen Graphen mit einheitlichen Kantengewichten $w_{i,j} = 1/N$ ist. Somit gilt für das Regelgesetz (3.40)

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{L}_w^{\mathrm{K}} \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{x} \tag{3.50}$$

mit der positiv definiten Lösung $\mathbf{P}$ der algebraischen Riccati-Gleichung (3.38). Um zu zeigen, dass das Regelgesetz (3.44) mit (3.50) übereinstimmt, wird im Folgenden zunächst die algebraische Riccati-Gleichung (3.42) näher betrachtet. Da $\mathbf{1}_N^\top\mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$ für die Matrix $\mathbf{V}$ in (3.43) gilt, folgt $\mathbf{V}^\top\mathbf{L}_w^{\mathrm{K}}\mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$. Da zudem $\mathbf{L}_w^{\mathrm{K}\top}\mathbf{L}_w^{\mathrm{K}} = \mathbf{L}_w^{\mathrm{K}}$ gilt, folgt aus (3.49) und (3.43)

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{Q}).$$

Damit wird die algebraische Riccati-Gleichung (3.42) durch die positiv definite Blockdiagonalmatrix

$$\tilde{\mathbf{P}} = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{P})$$

gelöst, wobei $\mathbf{P}$ die positiv definite Lösung von (3.38) darstellt. Somit gilt für das Regelgesetz (3.44)

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{V}\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{x}. \tag{3.51}$$

Für die Matrix $\mathbf{T}$ in (3.47) gilt $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}_N$, woraus direkt $\mathbf{V}\mathbf{V}^\top = \mathbf{L}_w^{\mathrm{K}}$ folgt, was beweist, dass für $\mathbf{\Psi} = (\mathbf{1}_N/N \otimes \mathbf{I}_n)$ die beiden Regelgesetze (3.50) und (3.51) übereinstimmen.

Als nächstes wird gezeigt, dass auch der umgekehrte Sachverhalt gilt. Es wird also gezeigt, dass wenn die Lösungen der Optimalregelprobleme (3.41) und (3.45) für beliebige Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ übereinstimmen, dann notwendigerweise $\mathbf{\Psi} = (\mathbf{1}_N^\top/N \otimes \mathbf{I}_n)$ gelten muss. Dies wird durch Widerspruch bewiesen. Angenommen es gilt $\mathbf{\Psi} \neq (\mathbf{1}_N^\top/N \otimes \mathbf{I}_n)$ und die Regelgesetze (3.40) und (3.44) stimmen überein. Dann müssen beide Regelgesetze für beliebige Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ auch auf dieselbe Synchronisierungstrajektorie führen. Die Lösung (3.40) des Optimalregelproblems (3.41) führt konstruktionsbedingt auf die Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\mathrm{syn}} = \mathbf{\Psi}\mathbf{x}$, welche durch (3.35) mit $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},0} = \mathbf{\Psi}\mathbf{x}_0$ gegeben ist. Wie in Satz 3.38 gezeigt wurde, führt die Lösung (3.44) jedoch immer auf die durch (3.46) beschriebene Synchronisierungstrajektorie. Es existieren somit Anfangswerte $\mathbf{x}_0$, für die sich beide Trajektorien unterscheiden, was zum Widerspruch führt. □

Eine Besonderheit an der Lösung des im vorangegangenen Satz diskutierten Falls – der Wahl von $\mathbf{\Psi} = \mathbf{1}_N^\top / N \otimes \mathbf{I}_n$ – ist, dass das optimale Regelgesetz in derselben Form wie (2.9) vorliegt und damit dieselbe Form wie die im Rest der Arbeit betrachteten Synchronisierungsregelgesetze aufweist. Dies bedeutet, das Regelgesetz (3.50) liegt in der Form

$$\mathbf{u} = (\mathbf{L}_w \otimes \mathbf{K})\,\mathbf{x} \tag{3.52}$$

vor mit der homogenen Reglerverstärkung

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}$$

und der Laplacematrix des Kommunikationsgraphen $\mathbf{L}_w = \mathbf{L}_w^{\mathrm{K}} = \mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top / N$. Dieses optimale Regelgesetz benötigt somit einen vollständigen Kommunikationsgraphen, sodass jeder Agent mit jedem anderen Agenten Informationen austauscht.

Im Folgenden wird auf eine alternative Wahl für $\mathbf{\Psi}$ eingegangen, welche für die Lösung des Optimalregelproblems (3.41) ebenfalls auf ein Regelgesetz der Form (3.52) führt. Dazu wird $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$ mit $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ betrachtet. Für diese Wahl sind die Annahmen 3.35 und 3.36 immer erfüllt, sodass die Ergebnisse aus den Sätzen 3.37 und 3.38 angewandt werden können. Wird das Optimalregelproblem (3.41) mit dieser Wahl gelöst, so resultiert erneut ein Regelgesetz der Form (3.52) mit der Reglerverstärkung $\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}$ und dem Kommunikationsgraphen

$$\mathbf{L}_w = \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N\boldsymbol{\gamma}^\top. \tag{3.53}$$

Abhängig von der Wahl von $\boldsymbol{\gamma}^\top$ benötigt dieses Regelgesetz nicht mehr vollständige Kommunikation. Dieser mögliche Verzicht auf vollständige Kommunikation ist eine sehr vorteilhafte Eigenschaft der Lösung von Optimierungsproblem (3.41). Dass diese Eigenschaft für die Lösung von Optimierungsproblem (3.45) nicht gilt, wird im Folgenden aufgezeigt.

Es wird zunächst der Zusammenhang von Optimierungsproblem (3.45) bei Wahl von $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$ zu dem in [101] diskutierten Optimalregelproblem hergestellt. Für $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$ ist das Gütemaß (3.41a) bzw. (3.45a) durch

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{x}^\top \left(\mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}\top} \cdot \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{Q}\right)\mathbf{x} + \mathbf{u}^\top (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R})\,\mathbf{u}\right) \mathrm{d}t \tag{3.54}$$

gegeben. Das Produkt $\mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}\top} \cdot \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}}$ kann als Laplacematrix eines ungerichteten Graphen interpretiert werden. Damit hat das Gütemaß (3.54) die in [101] betrachtete Form, wodurch in diesem Fall das in [101] diskutierte Optimalregelproblem dem Problem (3.45) entspricht. In [101] wird bereits betont, dass für die Realisierung der Lösung des resultierenden Optimalregelproblems im Allgemeinen vollständige Kommunikation benötigt wird. Dies wird an der Lösung von Optimierungsproblem (3.45) ersichtlich, welche für $\boldsymbol{\gamma}^\top \neq \mathbf{1}_N^\top / N$[15] die kompakte Form[16]

$$\mathbf{u} = -\left(\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top\right) \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N\mathbf{v}_N^\top}{\mathbf{v}_N^\top\mathbf{v}_N} \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\left(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}} - \mathbf{P}\right)\right)\mathbf{x} \tag{3.55}$$

[15] In Satz 3.39 wurde betont, dass die Regelgesetze (3.40) und (3.44) für $\boldsymbol{\gamma}^\top = \mathbf{1}_N^\top / N$ identisch sind. Daher wird hier nur der Fall $\boldsymbol{\gamma}^\top \neq \mathbf{1}_N^\top / N$ betrachtet.

[16] Siehe Abschnitt B.3 für die an [101] angelehnte Berechnung dieses Regelgesetzes.

annimmt mit $\mathbf{v}_N = \mathbf{1}_N - N\boldsymbol{\gamma}$, der positiv definiten Lösung $\mathbf{P}$ von (3.38) und der positiv definiten Lösung $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}}$ von

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}} - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}} = -N \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2 \cdot \mathbf{Q}. \tag{3.56}$$

Es ist direkt ersichtlich, dass auch für $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$ für die Umsetzung des Regelgesetzes (3.55) vollständige Kommunikation benötigt wird.

4 Entwurf des stationären Verhaltens homogener Multi-Agenten-Systeme

Im vorherigen Kapitel wurde das transiente Synchronisierungsverhalten eines Multi-Agenten-Systems diskutiert. In diesem Kapitel wird der Fokus auf das stationäre Verhalten gelegt. Dazu wird zunächst ein Perspektivwechsel vorgeschlagen: Bisher wurde die Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems als Selbstzweck betrachtet, d. h., jeder Agent hat zum Ziel, seine Trajektorie mit denen der anderen Agenten zu synchronisieren. Dies ist für viele Anwendungen der Fall. Trotzdem gibt es auch Anwendungen, bei denen die Agenten ihre eigenen Ziele verfolgen und die Synchronisierung zwar erforderlich ist, jedoch ein Abweichen vom eigenen Ziel bedingt. Als Beispiel kann die geschwindigkeitssynchrone Fahrt von Fahrzeugen auf der Autobahn genannt werden. In Abwesenheit aller anderen Fahrzeuge würde jedes Fahrzeug mit seiner eigenen präferierten Geschwindigkeit fahren. Die Anwesenheit anderer Fahrzeuge erfordert jedoch die Anpassung der eigenen Geschwindigkeit an die der anderen. In diesem Szenario ist also die Geschwindigkeitssynchronisation ein Einigungsprozess, bei dem jeder Teilnehmer gewissermaßen einen Kompromiss eingeht und sein eigentliches Ziel aufgibt, um mit der Synchrongeschwindigkeit zu fahren.

Diese Perspektive auf den Prozess der Synchronisierung – die Synchronisierung als Kompromissfindung – wirft direkt die Frage auf, wie ein optimaler Kompromiss aussieht. Dieser Frage wird in diesem Kapitel nachgegangen. Dazu wird der Kompromiss in Bezug auf das stationäre Synchronisierungsverhalten bewertet, welches durch die Synchronisierungstrajektorie repräsentiert wird. Die Synchronisierungstrajektorie wird dabei für jeden Agenten jeweils mit derjenigen Trajektorie verglichen, welcher der Agent als autonomes System ohne Synchronisierung gefolgt wäre.

Die mathematische Formulierung dieser Kosten der Synchronisierung für den einzelnen Agenten sowie die Annahmen an die Agentendynamik werden in Abschnitt 4.1 besprochen. In Abschnitt 4.2 wird dann der optimale Kompromiss der Synchronisierung des gesamten Multi-Agenten-Systems unter den getroffenen Annahmen gesucht. Dabei wird der Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ zum Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ im Sinne des in der Einleitung beschriebenen zweistufigen Entwurfsprozesses (vgl. Abbildung 1.2) als Optimierungsvariable verwendet und somit für den späteren Graphenentwurf als algebraische Beschränkung spezifiziert. Dazu werden verschiedene Optimierungsprobleme für verschiedene Annahmen an die Anfangswerte der Agenten – die Anfangswerte repräsentieren die jeweiligen eigenen Ziele der Agenten – als konvexe semidefinite Programme formuliert, welche effizient gelöst werden können.

Die Betrachtungen in Abschnitt 4.2 setzen voraus, dass Synchronisierung aller Agenten angestrebt wird. In Abschnitt 4.3 wird darüber hinaus der Fall betrachtet, dass auch die Synchronisierung in mehrere Cluster von Agenten zugelassen wird. Dazu wird zunächst der Begriff der *Cluster-Synchronisierung* eingeführt und angegeben, unter welchen Umständen Cluster-Synchronisierung erreicht wird. In Abschnitt 4.3.2 wird dann gezeigt, wie das in Abschnitt 4.2 diskutierte Gütemaß zur

Bewertung des Kompromisses der Synchronisierung auf den Fall der Cluster-Synchronisierung erweitert werden kann. Die Minimierung der so definierten Kosten der Cluster-Synchronisierung wird in den Abschnitten 4.3.3 und 4.3.4 unter verschiedenen Annahmen an die Anfangswerte der Agenten betrachtet. Dazu werden der Rechts- und der Linksnullraum der Laplacematrix als Freiheitsgrade im Entwurf verwendet. Abschließend wird in Abschnitt 4.3.5 darauf eingegangen, wie die gefundenen optimalen Rechts- und Linksnullräume entsprechend als algebraische Beschränkung für den späteren Graphenentwurf spezifiziert werden können.

4.1 Kosten der Synchronisierung einzelner Agenten

Für die Formulierung und Lösung der Fragestellungen in diesem Kapitel wird erneut ein Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der homogenen Agentendynamik (2.6) betrachtet. Es wird durchweg von einer statischen Rückführung (2.9) ausgegangen, um die Notation kompakt zu halten. Für die Betrachtung dynamischer Rückführungen muss entsprechend die erweiterte Dynamik gemäß Abschnitt 2.2.2 berücksichtigt werden. An die Agentendynamik wird zunächst eine grundlegende Annahme gestellt.

Annahme 4.1. *Das Multi-Agenten-System mit N Agenten mit der Dynamik* (2.6) *ist synchronisierbar durch statische Ausgangsrückführung gemäß Definition 3.1.*

Annahme 4.1 stellt eine notwendige Bedingung für die sinnvolle Behandlung der betrachteten Problemstellungen in diesem Kapitel dar. Erneut sei darauf hingewiesen, dass eine eventuell erforderliche dynamische Rückführung zum Schaffen der Synchronisierbarkeitsvoraussetzungen durch eine geeignete dynamische Erweiterung erfolgen kann. Daher stellt Annahme 4.1 keine echte Einschränkung an die betrachtete Systemklasse dar. Um ein geeignetes Gütemaß zur Bewertung des im vorigen Abschnitt motivierten Kompromisses der Synchronisierung zu formulieren, wird ein Resultat aus [9] verwendet, welches in einem ähnlichen Kontext bereits in [10] verwendet wurde. Für die Verwendung dieses Resultats werden wie auch in [9] zusätzliche Annahmen getroffen, welche die untersuchte Systemklasse einschränken.

Annahme 4.2. *Für alle Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{A})$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$ gilt* $\mathrm{Re}\,(\lambda_i(\mathbf{A})) = 0$. *Zudem stimmen für alle Eigenwerte algebraische und geometrische Vielfachheit überein.*

Annahme 4.2 impliziert, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}$ nicht Hurwitz ist. Daher kann Satz 2.20 angewandt werden und jede synchronisierende Rückführung (2.9) führt auf eine Synchronisierungstrajektorie, die wie in (2.15a) durch

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{syn}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{syn}},\ \mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(0) = \mathbf{x}_{\mathrm{syn},0} \tag{4.1}$$

beschrieben wird. Annahme 4.2 garantiert daher, dass die Synchronisierungstrajektorie nichttrivial und beschränkt ist. Es wird die Multimenge Ω definiert, welche die Imaginärteile aller Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit nichtnegativem Imaginärteil entsprechend ihrer Vielfachheit enthält. Zur späteren Formulierung des Gütemaßes zur Bewertung des Kompromisses der Synchronisierung wird an Ω folgende Annahme getroffen.

Annahme 4.3. *Es gilt* $\omega_i/\omega_j \in \mathbb{Q}$ *für alle* $\omega_i, \omega_j \in \operatorname{supp}(\Omega)\setminus\{0\}$.

Annahme 4.3 ermöglicht, eine Periodendauer T für die Synchronisierungstrajektorie zu definieren, sodass für alle $\omega_i \in \operatorname{supp}(\Omega)\setminus\{0\}$ ein $k_i \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $T = k_i \frac{2\pi}{\omega_i}$ gilt. Wie auch in [10] angemerkt, ist Annahme 4.3 nicht restriktiv, da $\mathbb{Q}$ dicht ist in $\mathbb{R}$. Um das Ergebnis aus [9] zu verwenden und später die Notation zu vereinfachen, wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich angenommen, dass die Matrix $\mathbf{A}$ in einer speziellen Form vorliegt.

Annahme 4.4. *Die Vielfachheit eines Elements* $\omega \in \Omega$ *wird mit* $m_\Omega(\omega)$ *bezeichnet. Die Menge* $\operatorname{supp}(\Omega)\setminus\{0\}$ *besteht aus* N_Ω *Elementen. Die Systemmatrix* $\mathbf{A}$ *hat die Form*

$$\mathbf{A} = \operatorname{blkdiag}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{N_\Omega}), \tag{4.2}$$

mit

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{0}_{m_\Omega(0)\times m_\Omega(0)}$$

sowie

$$\mathbf{A}_i = \omega_i \cdot \left(\mathbf{I}_{m_\Omega(\omega_i)} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

für $i = 1, \ldots, N_\Omega$, $\omega_i \in \operatorname{supp}(\Omega)\setminus\{0\}$ *und* $\omega_j \neq \omega_i$, *es sei denn* $j = i$.

Mit diesen Annahmen können nun die Kosten der Synchronisierung formuliert werden. Dazu wird wie eingangs motiviert die Synchronisierungstrajektorie (4.1) mit der Trajektorie verglichen, welcher jeder Agent ohne Synchronisierung gefolgt wäre. Für den i-ten Agenten wird diese mit $\mathbf{x}_i^0(t)$ bezeichnet und durch

$$\dot{\mathbf{x}}_i^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_i^0, \; \mathbf{x}_i^0(0) = \mathbf{x}_{i,0} \tag{4.3}$$

beschrieben. Die Kosten der Synchronisierung werden dann durch

$$J_{\mathrm{T},i} = \frac{1}{T} \lim_{t_0\to\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i^0(t)\right)^\top \underbrace{\mathbf{G}_i^\top \mathbf{G}_i}_{\mathbf{Q}_i} \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i^0(t)\right) \mathrm{d}t \tag{4.4}$$

mit der positiv definiten Matrix $\mathbf{Q}_i$ definiert. Die Kosten für Agent i bestrafen also die quadratische Abweichung zwischen der Synchronisierungstrajektorie und der Ursprungstrajektorie des Agenten. Im nächsten Lemma wird gezeigt, dass unter den getroffenen Annahmen das Integral (4.4) explizit gelöst werden kann.

Lemma 4.5. *Die Matrix* $\mathbf{A}$ *erfülle die Annahmen 4.2, 4.3 und 4.4. Die Trajektorien* $\mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(t)$ *und* $\mathbf{x}_i^0(t)$ *seien durch* (4.1) *und* (4.3) *gegeben. Es gelte*

$$\lim_{t\to\infty} \left\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(t)\right\| = 0. \tag{4.5}$$

Dann kann das Gütemaß $J_{\mathrm{T},i}$ *in* (4.4) *äquivalent durch*

$$J_{\mathrm{T},i} = \left(\mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(0) - \mathbf{x}_i(0)\right)^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i \left(\mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(0) - \mathbf{x}_i(0)\right), \tag{4.6}$$

beschrieben werden, wobei die positiv definite Matrix $\widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i$ *durch*

$$\widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i = \operatorname{blkdiag}\left(\mathbf{G}_{i,0}^\top \mathbf{G}_{i,0}, \widetilde{\mathbf{G}}_{i,1}^\top \widetilde{\mathbf{G}}_{i,1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{G}}_{i,N_{\bar{\Omega}}}^\top \widetilde{\mathbf{G}}_{i,N_{\bar{\Omega}}}\right) \tag{4.7}$$

gegeben ist mit

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{i,j}^\top \widetilde{\mathbf{G}}_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}_{i,j}^\top \mathbf{G}_{i,j} + \mathbf{Z}_j^\top \mathbf{G}_{i,j}^\top \mathbf{G}_{i,j} \mathbf{Z}_j\right)$$

für $j = 1, \ldots, N_\Omega$. *Dabei setzen sich die Matrizen* $\mathbf{G}_{i,j}$ *aus denjenigen Spalten von* $\mathbf{G}_i$ *in* (4.4) *zusammen, die zu dem entsprechenden Diagonalblock* $\mathbf{A}_j$ *von* $\mathbf{A}$ *in* (4.2) *gehören und die Matrizen* $\mathbf{Z}_j$ *sind für* $j = 1, \ldots, N_\Omega$ *gegeben durch*

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{I}_{m_\Omega(\omega_j)} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beweis. Unter der Annahme (4.5) kann $\mathbf{x}_i(t)$ im Integral (4.4) durch $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)$ ersetzt werden. Für die Differenz $\tilde{\mathbf{x}}_i^0 = \mathbf{x}_{\text{syn}} - \mathbf{x}_i$ gilt

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i^0 = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_i^0, \ \tilde{\mathbf{x}}_i(0) = \mathbf{x}_{\text{syn},0} - \mathbf{x}_{i,0}.$$

Der Beweis folgt dann direkt aus der Anwendung von [9, Lemma 2]. □

Die in Lemma 4.5 angegebene Umformung des Gütemaßes (4.4) wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels immer wieder verwendet. Es wird dabei implizit angenommen, dass die im Lemma getroffenen Annahmen alle erfüllt sind.

Bemerkung 4.6. *Annahme 4.2 schließt Systeme mit stabilen Eigenwerten aus. Da die Kosten* (4.4) *für* $t_0 \to \infty$ *definiert sind, ist dies eine sinnvolle Annahme, da stabile Moden keinen Einfluss auf das Gütemaß hätten. Sollen dennoch Systeme mit stabilen Eigenwerten zugelassen werden, so kann dies durch Erweiterung der Systemmatrix* $\mathbf{A}$ *um einen Block* $\mathbf{A}_{\text{stab}}$, *welcher alle stabilen Eigenwerte enthält, erreicht werden. Außerdem muss dann die Matrix* $\widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i$ *um einen Nullblock entsprechender Größe erweitert werden. Dies führt dann jedoch dazu, dass* $\widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i$ *nur noch positiv semidefinit ist.*

4.2 Optimale stationäre Synchronisierung

Wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, führt unter Annahme 4.2 nach Satz 2.20 ein synchronisierendes Regelgesetz (2.9) zu einer durch (4.1) beschriebenen Synchronisierungstrajektorie $\mathbf{x}_{\text{syn}}(t)$, für die

$$\mathbf{x}_{\text{syn},0} = \left(\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{x}_0 \tag{4.8}$$

gilt, wobei $\boldsymbol{\gamma}^\top$ der Linkseigenvektor der Laplacematrix des Kommunikationsgraphen $\mathbf{L}_w$ zum Nulleigenwert ist, welcher so skaliert ist, dass $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ gilt. Der durch (4.8) gegebene Zusammenhang wird im Folgenden dazu verwendet, das stationäre Synchronisierungsverhalten zu optimieren. Dazu werden zunächst in Abschnitt 4.2.1 die Kosten der Synchronisierung aller Agenten eines Multi-Agenten-Systems zusammengefasst. Diese Kosten werden dann in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 unter verschiedenen Annahmen an die Anfangswerte der Agenten minimiert.

4.2.1 Kosten der Synchronisierung des Multi-Agenten-Systems

Gleichung (4.8) kann verwendet werden, um das in (4.4) definierte Gütemaß bzw. die äquivalente Formulierung als quadratische Form (4.6) in Abhängigkeit vom Anfangszustand des Gesamtsystems $\mathbf{x}_0 = \operatorname{col}(\mathbf{x}_{0,1}, \ldots, \mathbf{x}_{0,N})$ und dem Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ darzustellen. Es gilt $\mathbf{x}_{i,0} = (\mathbf{e}_i^\top \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},0} = (\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_0$ bzw. $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},0} = (\mathbf{e}_i^\top \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_0$.[1] Somit lässt sich $J_{\mathrm{T},i}$ in (4.6) äquivalent schreiben als

$$\begin{aligned}
J_{\mathrm{T},i}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0) &= \left(\mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(0) - \mathbf{x}_i(0)\right)^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i \left(\mathbf{x}_{\mathrm{syn}}(0) - \mathbf{x}_i(0)\right) \\
&= \mathbf{x}_0^\top \left(\mathbf{e}_i^\top \left(\mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top - \mathbf{I}_N\right) \otimes \mathbf{I}_n\right)^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i \left(\mathbf{e}_i^\top \left(\mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top - \mathbf{I}_N\right) \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{x}_0^\top \left(\left(\mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top - \mathbf{I}_N\right) \otimes \mathbf{I}_n\right)^\top (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{I}_n) \widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i \left(\mathbf{e}_i^\top \otimes \mathbf{I}_n\right) \left(\left(\mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top - \mathbf{I}_N\right) \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{x}_0^\top \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Nn} \\ \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix}^\top \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \otimes \widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i\right)\right)}_{\hat{\mathbf{G}}_i^\top \hat{\mathbf{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Nn} \\ \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}} \mathbf{x}_0 .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Mit diesen Vorüberlegungen werden nun die Kosten der Synchronisierung des gesamten Multi-Agenten-Systems als Summe der Einzelkosten (4.9) der Agenten definiert und sind somit durch

$$J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{N} J_{\mathrm{T},i}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \hat{\mathbf{G}}_i^\top \hat{\mathbf{G}}_i\right)}_{\hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}} \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{x}_0 \tag{4.10}$$

gegeben. Für $\mathbf{x}_{i,0} = \mathbf{x}_{\mathrm{syn},0}$ gilt $J_{\mathrm{T},i} = 0$, was einfach an (4.6) nachvollzogen werden kann. Da $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$, folgt aus (4.8) für $\mathbf{x}_{1,0} = \cdots = \mathbf{x}_{N,0}$, dass $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},0} = \mathbf{x}_{1,0} = \cdots = \mathbf{x}_{N,0}$. Somit ist $J_{\mathrm{T}} = 0$, wenn die Anfangswerte aller Agenten übereinstimmen. Dies zeigt, dass die Matrix $\hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}$ nur positiv semidefinit ist, obwohl alle Matrizen $\widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i$ in (4.7) positiv definit sind. Es wird im Weiteren davon ausgegangen, dass die Matrix $\hat{\mathbf{G}}$ vollen Zeilenrang hat. Der Rang von $\hat{\mathbf{G}}$ wird mit n_{G} bezeichnet.

Die in (4.10) definierten Kosten der Synchronisierung für das gesamte Multi-Agenten-System sind abhängig von dem Anfangszustand der Agenten $\mathbf{x}_0 = \operatorname{col}(\mathbf{x}_{0,1}, \ldots, \mathbf{x}_{0,N})$ und dem Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ zum Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird der Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ dazu genutzt, das Gütemaß (4.10) zu minimieren. Der so gefundene optimale Linkseigenvektor kann dann später beim Graphenentwurf als algebraische Beschränkung berücksichtigt werden. Die Spezifikation des Linkseigenvektors stellt somit neben der Spezifikation des Spektrums der Laplacematrix, die in Abschnitt 3.1.4 diskutiert wurde, die zweite wesentliche Spezifikation für den Graphenentwurf dar. In Abschnitt 5.4.1 wird gezeigt, dass für Graphen mit beliebigen Kantengewichten beide Spezifikationen immer auch gemeinsam berücksichtigt werden können.

[1] Die etwas umständliche Schreibweise $\boldsymbol{\gamma}^\top = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top$ wird hier verwendet, um die Verallgemeinerung der Problemstellung auf den Fall der Cluster-Synchronisierung in Abschnitt 4.3 zu vereinfachen.

Bemerkung 4.7. *Eine spezielle Laplacematrix, die $\boldsymbol{\gamma}$ als Linkseigenvektor zum Nulleigenwert hat, ist die bereits in* (3.53) *angegebene Matrix*

$$\mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top, \tag{4.11}$$

Es ist leicht zu sehen, dass tatsächlich $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}$ gilt, da $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ für $\boldsymbol{\gamma}$ gefordert wird. Die Wahl (4.11) *als Laplacematrix ist insofern interessant, als dass sie die Kommunikationstopologie repräsentiert, die für die Lösung des in Satz 3.37 formulierten Optimalregelproblems* (3.41) *mit $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n)$ für ein optimales transientes Synchronisierungsverhalten resultiert. Damit können die Ergebnisse zum optimalen transienten Verhalten mit den Ergebnissen dieses Abschnitts zum optimalen stationären Synchronisierungsverhalten kombiniert werden, indem für den optimalen Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}^*$, welcher die optimale stationäre Synchronisierungstrajektorie beschreibt, durch Lösen von* (3.41) *ein Regelgesetz berechnet wird, für das die Transition auf diese Trajektorie ebenfalls optimal ist.*

Bemerkung 4.8. *Werden nur Graphen mit positiven Kantengewichten betrachtet, so sind alle Elemente von $\boldsymbol{\gamma}$ gemäß Satz 2.9 nichtnegativ zu wählen. Dies kann dann in den in diesem Kapitel betrachteten Optimierungsproblemen jeweils als lineare Ungleichungsbeschränkung $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}$ zusätzlich berücksichtigt werden.*

4.2.2 Minimierung der Synchronisierungskosten bei bekannten Anfangswerten

Wie oben motiviert, wird im Folgenden der Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ zum Nulleigenwert der Laplacematrix des Kommunikationsgraphen $\mathbf{L}_w$ dazu verwendet, die Kosten der Synchronisierung (4.10) zu minimieren. Es stellt sich jedoch unmittelbar die Frage, wie mit der Abhängigkeit der Kosten J_T vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ des Multi-Agenten-Systems umgegangen werden soll. Bevor auf die Berücksichtigung unbekannter Anfangswerte eingegangen wird, wird zunächst davon ausgegangen, dass der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ bekannt ist. Dies führt auf das Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{\gamma}} \quad J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0) \tag{4.12a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1. \tag{4.12b}$$

Dieses Optimierungsproblem kann als konvexes semidefinites Programm formuliert werden, welches dementsprechend effizient gelöst werden kann.[2]

Satz 4.9. *Sei $\boldsymbol{\gamma}^*$ die Lösung des semidefiniten Programms*

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\gamma}, \hat{J}_\mathrm{T}} \quad & \hat{J}_\mathrm{T} \\ \text{u.B.v.} \quad & \begin{bmatrix} \hat{J}_\mathrm{T} & \mathbf{x}_0^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \\ \hat{\mathbf{G}} \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{x}_0 & \mathbf{I}_{n_\mathrm{G}} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\gamma} = 1, \end{aligned}$$

[2] Die Implementierung solcher semidefiniter Programme erfolgte in allen Beispielen in dieser Arbeit mithilfe von *CVX* [46] unter Verwendung des Lösers *SDPT3* [150].

wobei $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ *und* $\hat{\mathbf{G}}$ *wie in* (4.9) *und* (4.10) *definiert sind. Dann löst* $\boldsymbol{\gamma}^*$ *ebenso das Minimierungsproblem* (4.12).

Beweis. Zunächst wird das Gütemaß von (4.12) umformuliert. Statt direkt $J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0)$ zu minimieren, kann ebenso das Supremum $\hat{J}_\mathrm{T}$ von $J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0)$ minimiert werden, für das entsprechend $\hat{J}_\mathrm{T} - J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0) \geq 0$ gilt. Ersetzen von $J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0)$ durch (4.10) und Anwendung des Schur-Komplement-Lemmas (siehe Lemma A.2) beschließt den Beweis. □

4.2.3 Minimierung der erwarteten Synchronisierungskosten bei unbekannten Anfangswerten

Dass die Anfangswerte aller Agenten und somit auch die Synchronisierungstrajektorie *a priori* bekannt sind, ist eher von theoretischer Natur und macht – bei Vernachlässigung von Störungen – gewissermaßen eine Synchronisierung durch ein verteiltes Regelgesetz (2.9) unnötig, da in diesem Fall jeder Agent auch ohne Kommunikation mit den anderen Agenten der Synchronisierungstrajektorie folgen könnte. Trotzdem wird bereits durch Optimierungsproblem (4.12) die in diesem Kapitel verfolgte Idee klar, dass die Kommunikationstopologie als Entwurfsfreiheitsgrad verwendet werden kann, um die Synchronisierungstrajektorie zu beeinflussen. Diese Idee soll nun für den Fall erweitert werden, dass die Anfangswerte der Agenten nicht *a priori* bekannt sind. Um in diesem Fall ein sinnvolles Optimierungsproblem zur Minimierung der Kosten der Synchronisierung zu formulieren, wird folgende Annahme für die Anfangswerte der Agenten getroffen.

Annahme 4.10. *Der Anfangswert* $\mathbf{x}_0$ *sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert* $\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_\mathrm{E}$ *und Kovarianz* $\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{S}$*, wobei* $\mathbf{S}$ *positiv definit ist.*

Bemerkung 4.11. *Statt der Betrachtung des zusammengefassten Zustands* $\mathbf{x}_0$ *aller Agenten des gesamten Multi-Agenten-Systems, mag es in vielen Fällen natürlicher sein, die Anfangswerte der Agenten separat zu betrachten, d. h. für jeden Agenten* $i = 1, \ldots, N$ *Erwartungswert* $\mathbf{x}_{\mathrm{E},i}$ *und Kovarianz* $\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_{0,i}) = \mathbf{S}_i$ *einzeln zu definieren. Für den Erwartungswert des Gesamtzustands gilt dann* $\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{col}(\mathbf{x}_{\mathrm{E},1}, \ldots, \mathbf{x}_{\mathrm{E},N})$*. Unter der Annahme, dass die Anfangswerte der einzelnen Agenten unkorreliert sind, gilt für die Kovarianzmatrix des Gesamtzustandes dann* $\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{blkdiag}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N)$.

Annahme 4.10 ermöglicht nun eine sinnvolle Erweiterung von Optimierungsproblem (4.12) auf den Fall unbekannter Anfangswerte. Dazu wird im Folgenden der Erwartungswert der Kosten (4.10) minimiert, d. h., es wird das Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{\gamma}} \quad \mathrm{E}\left(J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0)\right) \tag{4.13a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1 \tag{4.13b}$$

betrachtet. Durch die Erwartungswertbildung wird die direkte Abhängigkeit der Kosten vom Anfangswert eliminiert. [3] Auch dieses Minimierungsproblem kann wieder als konvexes semidefinites Programm formuliert werden, wie im folgenden Satz gezeigt wird.

Satz 4.12. *Erfülle* $\mathbf{x}_0$ *die Annahme 4.10. Sei* $\boldsymbol{\gamma}^*$ *die Lösung des semidefiniten Programms*

$$\min_{\boldsymbol{\gamma},\, \bar{J}_\mathrm{T},\, \hat{J}_\mathrm{T},\, \mathbf{X}} \quad \bar{J}_\mathrm{T} + \hat{J}_\mathrm{T} \tag{4.14a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{V}_\mathrm{S}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \\ \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{V}_\mathrm{S} & \bar{J}_\mathrm{T}\mathbf{I}_{n_\mathrm{G}} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{4.14b}$$

$$1 - \operatorname{tr}(\mathbf{X}) \geq 0 \tag{4.14c}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_\mathrm{T} & \mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \\ \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{x}_\mathrm{E} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{G}} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{4.14d}$$

$$\mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\gamma} = 1, \tag{4.14e}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ *und* $\hat{\mathbf{G}}$ *wie in* (4.9) *und* (4.10) *definiert sind und* $\mathbf{V}_\mathrm{S}\mathbf{V}_\mathrm{S}^\top = \mathbf{S}$ *die Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix* $\mathbf{S}$ *ist. Dann löst* $\boldsymbol{\gamma}^*$ *ebenso das Minimierungsproblem* (4.13).

Beweis. Das Gütemaß $J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0)$ in (4.10) wird zunächst umgeformt zu

$$J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E}) + 2\mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E}) + \mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{x}_\mathrm{E}.$$

Zur Berechnung von $\mathrm{E}\,(J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0))$ kann die Linearität des Erwartungswerts ausgenutzt werden, sodass alle drei Summanden einzeln betrachtet werden können. Da $\mathrm{E}\,(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_\mathrm{E}$ gilt und $\mathbf{x}_\mathrm{E}$ deterministisch ist, gilt

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})\right) = 0$$

und

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{x}_\mathrm{E}\right) = \mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{x}_\mathrm{E}. \tag{4.15}$$

Da $\operatorname{Cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{S} = \mathrm{E}\left((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})^\top\right)$, gilt für den verbleibenden Summanden schließlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})\right) &= \mathrm{E}\left(\operatorname{tr}\left((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})\right)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\operatorname{tr}\left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})^\top\right)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathrm{E}\left((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{E})^\top\right)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{S}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{V}_\mathrm{S}^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{V}_\mathrm{S}\right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Soll nun das Minimum von $\mathrm{E}\,(J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0))$ gefunden werden, so muss also der Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ so gewählt werden, dass (4.14e) gilt und die Summe der Terme (4.15) und (4.16) minimiert

[3] Die Erwartungswertbildung ist ein klassischer Ansatz zur Eliminierung der Abhängigkeit von unbekannten Variablen in Optimierungsproblemen. In ähnlicher Weise wie hier wurde dies in [100, Abschnitt 3.9] für die Berechnung von Synchronisierungsreglern mit optimalem transienten Verhalten durchgeführt.

wird. Die Minimierung von (4.15) entspricht der in Satz 4.9 betrachteten Minimierung der Kosten der Synchronisierung unter Berücksichtigung des bekannten Anfangswerts $\mathbf{x}_\mathrm{E}$. Folglich können die Ergebnisse von Satz 4.9 verwendet werden, woraus $\hat{J}_\mathrm{T}$ als Summand im Gütemaß und die Beschränkung (4.14d) im semidefiniten Programm folgen. Für die Minimierung der Spur (4.16), wird wie im Beweis zu Satz 4.9 erneut zunächst das Supremum $\bar{J}_\mathrm{T}$ als Optimierungsvariable eingeführt und als Summand im Gütemaß gemeinsam mit der Beschränkung $\bar{J}_\mathrm{T} - \mathrm{tr}\left(\mathbf{V}_\mathrm{S}^\top \hat{\mathbf{\Gamma}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{V}_\mathrm{S}\right) \geq 0$ berücksichtigt. Die Einführung der Schlupfvariablen $\mathbf{X}$ (vgl. Lemma A.3) und Nutzung des Schur-Komplement-Lemmas A.2 führt dann auf die Beschränkungen (4.14b) und (4.14c) im semidefiniten Programm . □

Bemerkung 4.13. *Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse wurden bereits in [54] veröffentlicht. Allerdings sind hier insbesondere bei der Betrachtung unbekannter Anfangswerte einige Änderungen gegenüber der Darstellung in [54] vorgenommen worden. Die Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$ *werden nun als Zufallsvariablen mit entsprechendem Erwartungswert* $\mathbf{x}_\mathrm{E}$ *und Kovarianz* $\mathbf{S}$ *aufgefasst, während in [54] zulässige Anfangswertgebiete definiert wurden, welche im Grunde den* σ*-Umgebungen von* $\mathbf{x}_\mathrm{E}$ *entsprechen. Dabei wurde in [54] jedoch immer* $\mathbf{x}_\mathrm{E} = \mathbf{0}$ *gewählt. Statt der Minimierung des Erwartungswerts des Gütemaß* $J_\mathrm{T}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}_0)$*, wurden in [54] die Durchschnittskosten und die Worst-Case-Kosten über alle zulässigen Anfangswerte minimiert. Die Betrachtung der Durchschnittskosten führt dabei auf ein zur Minimierung des Erwartungswerts äquivalentes Minimierungsproblem.*[4] *Die Betrachtung der Worst-Case-Kosten hingegen führt nur in Sonderfällen auf ein konvexes Optimierungsproblem. Außerdem lassen sich die Ergebnisse in [54] bezüglich der Worst-Case-Kosten nicht auf den Fall* $\mathbf{x}_\mathrm{E} \neq \mathbf{0}$ *verallgemeinern, weshalb hier davon abgesehen wurde, auf die Minimierung von Worst-Case-Kosten einzugehen.*

Bemerkung 4.14. *Wieland et al. zeigen in [157], dass Synchronisierung von linearen Multi-Agenten-Systemen (inklusive heterogener Systeme) mit linearen Synchronisierungsreglern notwendigerweise auf Ausgangstrajektorien führen, die durch autonome lineare Systeme wie in* (4.1) *beschrieben werden. Insbesondere wird in [157] ein viel verwendeter Ansatz zur Synchronisierung heterogener Multi-Agenten-Systeme vorgeschlagen, bei dem jeder Agent ein identisches virtuelles Exosystem zur Generierung einer solchen Ausgangstrajektorie sowie einen Regler zum exakten Folgen dieser Trajektorie implementiert. Ausgangssynchronisierung wird dann erreicht, indem die homogenen Exosysteme mit einem Regelgesetz wie in* (2.9) *synchronisiert werden. Für die Zustände der Exosysteme ergibt sich dann also wieder eine Synchronisierungstrajektorie, deren Anfangswert wie in* (4.8) *vom Linkseigenvektor* $\boldsymbol{\gamma}$ *der Laplacematrix* $\mathbf{L}_w$ *des Kommunikationsgraphen abhängt. Dies bedeutet, dass die Ergebnisse, die in diesem Abschnitt bezüglich der Synchronisierungstrajektorie entwickelt wurden, auch für heterogene Multi-Agenten-Systeme verwendet werden können. Eine weitere interessante Erweiterung der Ansätze für den Fall heterogener Agenten stellt die Betrachtung der Stellenergie dar, welche verwendet wird, um stationär der Synchronisierungstrajektorie zu folgen. Diese ist naturgemäß bei homogenen Systemen für jeden Agenten identisch, während sie bei heterogenen Systemen stark variieren kann. In diesem Sinne ließen sich auch optimale Folgeregelansätze betrachten (vgl. [8]), wobei dann statt eines exakten*

[4] Äquivalenz der Minimierungsprobleme ist hier so zu verstehen, dass beide Probleme vom selben optimalen Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma}^*$ gelöst werden.

Tabelle 4.1: Wunschgeschwindigkeiten und Kompromisskosten der Fahrzeuge in Beispiel 4.15

Fahrzeug i	1	2	3	4	5	6
$x_{i,0}$ in km/h	100	105	125	130	150	180
σ_i in km/h	5	5	5	10	5	20
$\mathbf{Q}_i$ in $1/(\mathrm{km/h})^2$	30	40	5	5	5	10

Folgereglers jeder Agent zum Folgen seines eigenen Exosystems einen optimalen Folgeregler verwenden würde. Dies würde dann zwar nicht mehr zu exakter Synchronisierung führen, es könnte jedoch stattdessen eine auf die Optimalität bezogene Aufweichung des Synchronisierungsbegriffes in Betracht gezogen werden [10].

Beispiel 4.15. *In diesem Kapitel wird immer wieder das Beispiel der Fahrzeugkolonnenregelung aufgegriffen. Es wird lediglich auf die Synchronisierung der Geschwindigkeit eingegangen.*[5] *Für die Geschwindigkeit kann das einfache Integratormodell*

$$\dot{x}_i = u_i$$

verwendet werden für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$. *Es wird nun eine Kolonne aus* $N = 6$ *Fahrzeugen betrachtet. Die Fahrzeuge haben die in Tabelle 4.1 gezeigten Präferenzen. Diese sind durch den Erwartungswert* $x_{i,0}$ *und die Standardabweichung* σ_i *der Wunschgeschwindigkeit und die zur Bestrafung der quadratischen Abweichung von der Wunschgeschwindigkeit in* (4.4) *verwendete Konstante* $\mathbf{Q}_i$ *gegeben. Die Kolonne wird also aus zwei langsamen Fahrzeugen, drei Fahrzeugen mit moderater Wunschgeschwindigkeit und einem Fahrzeug mit hoher Wunschgeschwindigkeit gebildet. Wird ein optimaler Kompromiss durch Lösen von Optimierungsproblem* (4.14) *gesucht, so wird*

$$\boldsymbol{\gamma}^{*\top} = \begin{bmatrix} 0{,}3158 & 0{,}4211 & 0{,}0526 & 0{,}0526 & 0{,}0526 & 0{,}1053 \end{bmatrix}$$

als optimale Wahl des Linkseigenvektors zum Nulleigenwert der Laplacematrix erhalten. Bei dieser Wahl dominieren die beiden langsamen Fahrzeuge aufgrund ihrer hohen Strafterme den Kompromiss. Im Erwartungswert einigen sich die Fahrzeuge auf eine Geschwindigkeit von 116 *km/h. Als erwartete Gesamtkompromisskosten ergibt sich somit* $\mathrm{E}(J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)) = 66000$.

Die Verläufe der Fahrzeuggeschwindigkeiten bei Verwendung eines Synchronisierungsregelgesetzes gemäß (2.9), *d. h. für die Gesamtdynamik* $\dot{\mathbf{x}} = -k\,\mathbf{L}_w\mathbf{x}$, *sind in Abb. 4.1 gezeigt.*[6] *Dabei wurde die Laplacematrix* $\mathbf{L}_w = \mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N\boldsymbol{\gamma}^{*\top}$ *gemäß* (4.11) *in Bemerkung 4.7 so gewählt, dass* $\boldsymbol{\gamma}^*$ *Linkseigenvektor zum Nulleigenwert ist. Außerdem wurde* $k = 0{,}1$ *gewählt, wodurch in dem Simulationsbeispiel auch die für automatisierte Fahrfolgefunktionen übliche Anforderung an die maximal zulässige Bremsbeschleunigung von* $3{,}5\mathrm{m/s}^2$ *(vgl. [158, Abschnitt 46.3]) nicht überschritten werden.*

[5] Die isolierte Betrachtung der Geschwindigkeitsregelung stellt natürlich eine Vereinfachung dar, da in der Praxis der Abstand der Fahrzeuge zueinander ebenfalls eine wichtige Rolle spielt. Am Beispiel der Geschwindigkeit lässt sich jedoch der in diesem Kapitel betrachtete Kompromiss der Synchronisierung gut veranschaulichen.

[6] In der Simulation wurde für die Zustände x_i die Einheit m/s verwendet.

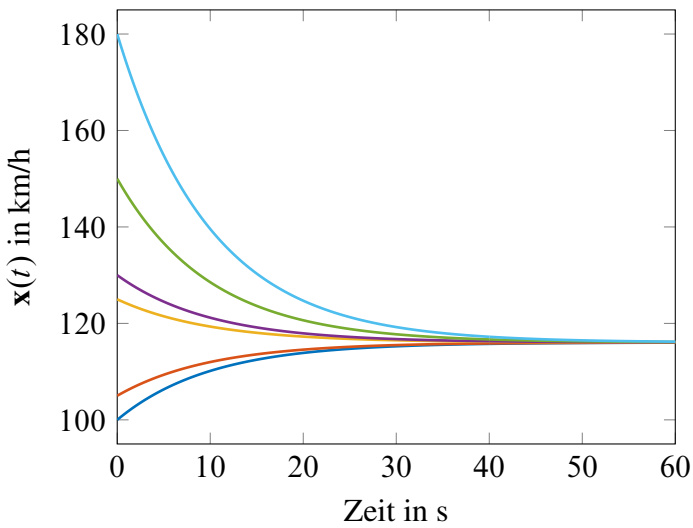

Abbildung 4.1: Verläufe der Fahrzeuggeschwindigkeiten bei optimaler stationärer Synchronisierung nach Beispiel 4.15.

4.3 Optimale stationäre Cluster-Synchronisierung

Bisher wurden ausschließlich Regelgesetze betrachtet, welche zur Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems führen. Für diese wurden dann die Kosten für die resultierende stationäre Synchronisierungstrajektorie minimiert. Statt weiterhin zu fordern, dass alle Agenten auf eine gemeinsame Trajektorie synchronisieren, wird in diesem Abschnitt die Optimierung des stationären Verhaltens betrachtet, wenn zugelassen wird, dass sich stationär einzelne synchronisierte Gruppen von Agenten ausbilden. Dazu wird in Abschnitt 4.3.1 zunächst der Begriff der *Cluster-Synchronisierung* eingeführt und gezeigt, unter welchen Voraussetzungen Cluster-Synchronisierung für ein Multi-Agenten-System erreicht wird. Anschließend werden in Abschnitt 4.3.2 die Kosten der Cluster-Synchronisierung aufgestellt. Diese werden dann in den Abschnitten 4.3.3 und 4.3.4 für bekannte und unbekannte Anfangswerte der Agenten minimiert. In Abschnitt 4.3.5 wird abschließend diskutiert, wie geeignete algebraische Beschränkungen für den Graphenentwurf zum Erreichen von optimaler stationärer Cluster-Synchronisierung formuliert werden können.

4.3.1 Cluster-Synchronisierung homogener Multi-Agenten-Systeme

Cluster-Synchronisierung wird im Weiteren gemäß folgender Definition verstanden.

Definition 4.16 (Cluster-Synchronisierung)**.** *Es wird gesagt, das Regelgesetz* (2.9) *führe zu Cluster-Synchronisierung des Multi-Agenten-Systems* (2.10)*, wenn für beliebige Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_{\mathrm{syn},i}(t) \right\| = 0 \tag{4.17}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ *gilt, wobei die Trajektorien* $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},i}(t)$ *jeweils durch autonome Systeme*

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{syn},i} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{syn},i}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{syn},i}(0) = \mathbf{x}_{\mathrm{syn},i,0} \tag{4.18}$$

beschrieben werden.

Definition 4.16 weicht von den üblichen Definitionen von Cluster-Synchronisierung ab, weshalb dies in der nachfolgenden Bemerkung ausführlich diskutiert wird. Im Anschluss wird dann gezeigt, wann ein Regelgesetz der Form (2.9) zu Cluster-Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems führt.

Bemerkung 4.17. *In [164, 117] wird gesagt, dass das Regelgesetz* (2.9) *zu Cluster-Synchronisierung des Multi-Agenten-Systems* (2.10) *führt, wenn eine Partitionierung der Indexmenge* $\mathcal{I} = \{1, \ldots, N\}$ *in* $\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_{N_\mathrm{C}}$ *existiert, sodass für alle*[7] *Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$*, für alle* $k \in \{1, \ldots, N_\mathrm{C}\}$ *und für alle* $i \in \mathcal{I}_k$

$$\limsup_{t\to\infty} \left\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\right\| \begin{cases} = 0, & \textit{für alle } j \in \mathcal{I}_k \quad (4.19\text{a}) \\ > 0 & \textit{für alle } j \notin \mathcal{I}_k \quad (4.19\text{b}) \end{cases}$$

gilt. Diese Definition weist jedoch mehrere Schwachstellen auf. Zum einen kollidiert die Forderung, dass die Trajektorien der Agenten verschiedener Cluster sich nach (4.19b) *unterscheiden müssen, mit der Forderung, dass dies für alle Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$ *der Fall sein soll. Denn mit einem Regelgesetz der Form* (2.9) *gibt es immer Anfangswertkonstellationen, für welche keine Trennung der Agenten vorgenommen werden kann, z. B. für* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$*, obwohl sich für die meisten anderen Anfangswerte die Trajektorien sehr wohl unterscheiden. Daher müsste bei Verwendung einer solchen Definition zumindest der Terminus „für fast alle Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$*“ verwendet werden, der zulässt, dass für eine nichtmessbare Menge an Anfangswertkonstellationen Agenten unterschiedlicher Cluster auf dieselbe Trajektorie konvergieren dürfen. Dies wird aber weder in [164] noch in [117] bemerkt. Eine weitere Schwachstelle der Definition nach [164, 117] betrifft die Angabe der Anzahl* N_C *der Cluster. In [164], [117] und auch [43] wird diese Anzahl* N_C *der Cluster a priori angegeben und daher der Begriff* N_C*-Cluster-Synchronisierung definiert. In [167] wird mit einer ähnlichen Definition die Cluster-Synchronisierung ausschließlich für* $N_\mathrm{C} = 2$ *betrachtet. Die Vorgabe der Anzahl* N_C *der Cluster ist dabei für die Sinnhaftigkeit der Definition entscheidend. Wird bei der Definition die Vorgabe von* N_C *weggelassen, so wird Cluster-Synchronisierung immer erreicht, da unabhängig von der Wahl des Regelgesetzes durch die triviale Partitionierung* $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_N$ *mit* $\mathcal{I}_k = \{k\}$ *die Bedingung* (4.19a) *immer erfüllt ist. Somit existiert dann auch immer eine Partitionierung, für die* (4.19b) *für (fast) alle Anfangswerte* $\mathbf{x}_0$ *erfüllt ist. Das Problem bei der A-Priori-Spezifikation der Anzahl der Cluster ist jedoch, dass sie den Entwurfsprozess eines Regelgesetzes der Form* (2.9) *erschwert. Die Synchronisierung in mehrere Cluster hängt nämlich, wie später gezeigt wird, mit dem Nullraum der Laplacematrix* $\mathbf{L}_w$ *des Kommunikationsgraphen zusammen. Die Dimension des Nullraums von* $\mathbf{L}_w$*, welche einen entscheidenden Entwurfsparameter darstellt, liefert jedoch nur eine untere Grenze für die Anzahl* N_C *der Cluster. Da die Anzahl der Cluster für die in diesem Abschnitt betrachteten Problemstellung keine direkte Rolle spielt, wird daher durch Definition 4.16 eine von [164, 117] abweichende Definition der Cluster-Synchronisierung vorgeschlagen. Diese hat den Vorteil, dass sie auch ohne A-Priori-Spezifikation der Anzahl der Cluster sinnvoll bleibt. Es ist zwar auch nach Definition 4.16 die triviale Partitionierung möglich, jedoch wird Cluster-Synchronisierung im Sinne von Definition 4.16 nicht mehr für*

[7] In [164] wird Cluster-Synchronisierung für einen gegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ definiert und dann in den später formulierten Sätzen jeweils Cluster-Synchronisierung für alle Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ behandelt, wodurch dies auch direkt in der Definition hätte berücksichtigt werden können.

beliebige Regelgesetze erreicht. Zudem führt jedes Regelgesetz, das zu Cluster-Synchronisierung im Sinne von Definition 4.16 führt, auch zu N_C-Cluster-Synchronisierung im Sinne von [164, 117], sodass dann ebenfalls eine Einteilung in N_C Cluster getroffen werden kann. Wenn daher im weiteren Verlauf dieses Abschnittes von der Anzahl der Cluster gesprochen wird, wird diese im Sinne der Definition von [164, 117] verstanden.

Satz 4.18. *Das Regelgesetz* (2.9) *führt zu Cluster-Synchronisierung des Multi-Agenten-Systems* (2.10) *im Sinne von Definition 4.16, wenn algebraische und geometrische Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ übereinstimmen und wenn*

$$\mathbf{A} + \lambda \mathbf{BKC} \tag{4.20}$$

Hurwitz ist für alle $\lambda \in \operatorname{supp}(\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w)) \setminus \{0\}$, d. h. für alle Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$.

Beweis. Sei N_0 die Anzahl der Nulleigenwerte der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$. Der Rechts- bzw. Linksnullraum von $\mathbf{L}_w$ werde durch $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}$ bzw. $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}$ aufgespannt, d. h., es gelte $\mathbf{L}_w \mathbf{M} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{N}^\top \mathbf{L}_w = \mathbf{0}$. Es gelte außerdem $\mathbf{N}^\top \mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0}$, was immer möglich ist, da algebraische und geometrische Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ übereinstimmen. Seien $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$, sodass die Transformation der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ auf Jordannormalform durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}^\top \\ \mathbf{W}^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}} \cdot \mathbf{L}_w \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{V} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_0} & \\ & \mathbf{J}_{\mathbf{L}_w \setminus \{0\}} \end{bmatrix}$$

gegeben ist, wobei $\mathbf{J}_{\mathbf{L}_w \setminus \{0\}}$ alle Nichtnulleigenwerte von $\mathbf{L}_w$ enthält. Mithilfe der Matrix $\mathbf{T}$ kann ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.17 eine Zustandstransformationation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{1:N_0} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{N_0+1:N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^\top \otimes \mathbf{I}_n \\ \mathbf{W}^\top \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = \left(\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\, \tilde{\mathbf{x}}$$

durchgeführt werden. Die Dynamik des so transformierten Zustands unter Verwendung des Regelgesetzes (2.9) ergibt sich dann zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\, \tilde{\mathbf{x}} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_0} & \\ & \mathbf{J}_{\mathbf{L}_w \setminus \{0\}} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{BKC} \right) \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \left(\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x}_0. \tag{4.21}$$

Aufgrund der oberen Dreiecksform der Jordanmatrix $\mathbf{J}_{\mathbf{L}_w \setminus \{0\}}$ lässt sich daher mit denselben Argumenten wie im Beweis zu Satz 2.17 zeigen, dass $\lim_{t \to \infty} \tilde{\mathbf{x}}_{N_0+1:N} = \mathbf{0}$ gilt, wenn die Matrix (4.20) Hurwitz ist für alle $\lambda \in \operatorname{supp}(\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w)) \setminus \{0\}$. Somit gilt

$$\lim_{t \to \infty} \left(\mathbf{x} - (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_n)\, \tilde{\mathbf{x}}_{1:N_0}\right) = \mathbf{0}. \tag{4.22}$$

Die Wahl von

$$\mathbf{x}_{\mathrm{syn},i} = \left(\mathbf{e}_i^\top \mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_n\right) \tilde{\mathbf{x}}_{1:N_0} \tag{4.23}$$

mit dem i-ten Einheitsvektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^N$ führt also zu (4.17), wobei aus (4.21) ersichtlich ist, dass $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},i}$ tatsächlich durch (4.18) beschrieben wird mit

$$\mathbf{x}_{\mathrm{syn},i,0} = \left(\mathbf{e}_i^\top \mathbf{M}\mathbf{N}^\top \otimes \mathbf{I}_n\right) \mathbf{x}_0. \tag{4.24}$$

□

Als erste Konsequenz aus Satz 4.18 wird nun zunächst Annahme 4.1 – die Synchronisierbarkeitsannahme – aufgeweicht. Grund dafür ist, dass die Anzahl der Nichtnulleigenwerte, welche das simultane Stabilisierungsproblem in (4.20) bestimmen, im Gegensatz zum Synchronisierungsfall bei der Cluster-Synchronisierung nicht *a priori* festliegt. Daher wird nun gefordert, dass für eine beliebige Anzahl an Nichtnulleigenwerten der Laplacematrix die Stabilisierungsbedingung (4.20) erfüllt werden kann. Dies wird in der folgenden Annahme formuliert, welche für den Rest des Abschnitts als erfüllt vorausgesetzt wird.

Annahme 4.19. *Die Agentendynamik* (2.6) *ist reell stabilisierbar durch statische Ausgangsrückführung gemäß Definition 3.3.*

Als Nächstes wird das stationäre Verhalten bei erfolgreicher Cluster-Synchronisierung diskutiert. Der Beweis von Satz 4.18 liefert durch (4.22), (4.23) und (4.24) eine Parametrierung des stationären Verhaltens der Cluster-Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems und es gilt für die Anfangswerte $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},1,0}, \ldots, \mathbf{x}_{\mathrm{syn},N,0}$ der gemäß Definition 4.16 durch (4.18) beschriebenen stationären Trajektorien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{syn},1,0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\mathrm{syn},N,0} \end{bmatrix} = \big(\underbrace{\mathbf{M}\mathbf{N}^\top}_{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{I}_n\big)\, \mathbf{x}_0. \tag{4.25}$$

Dieses Resultat entspricht im Konsensus-Fall (skalare Agenten mit Integratordynamik) dem Resultat in [28, Theorem 1]. In [28] wird die Matrix $\mathbf{F}$ als *Eigenprojektionsmatrix* des Graphen bzw. *Matrix der maximalen Erreichbarkeitsmengen* (engl. *matrix of maximum out-forests*) bezeichnet.

Die Matrix $\mathbf{F}$ wird im Folgenden dazu genutzt, die Kosten der Cluster-Synchronisierung zu minimieren, welche im nachfolgenden Abschnitt 4.3.2 definiert werden. Die Minimierung der Kosten wird für bekannte (Abschnitt 4.3.3) und unbekannte (Abschnitt 4.3.4) Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ durchgeführt. Dabei werden die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$, die den Rechts- bzw. Linksnullraum der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ parametrieren, als Freiheitsgrade in der Optimierung genutzt. In Abschnitt 4.3.5 wird dann diskutiert, wie aus den gefundenen optimalen Matrizen $\mathbf{M}^*$ und $\mathbf{N}^*$ geeignete algebraische Beschränkungen für den Graphenentwurf formuliert werden können. Zwei Eigenschaften der Matrix $\mathbf{F}$, die in den Abschnitten 4.3.2 bis 4.3.4 Verwendung finden, sind im folgenden Lemma zusammengetragen.

Lemma 4.20. *Sei $\mathbf{L}_w$ eine gewichtete Laplacematrix, für die algebraische und geometrische Vielfachheit des Nulleigenwerts übereinstimmen. Sei N_0 die Vielfachheit des Nulleigenwerts von $\mathbf{L}_w$. Sei $\mathbf{F}$ die Eigenprojektionsmatrix von $\mathbf{L}_w$. Dann gilt*

(i) $\operatorname{tr}(\mathbf{F}) = N_0$,

(ii) $\mathbf{F}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$.

Beweis. Da algebraische und geometrische Vielfachheit des Nulleigenwerts von $\mathbf{L}_w$ übereinstimmen, kann die Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}$ durch $\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{N}^\top$ parametriert werden, wobei $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}$ den Rechts- bzw. Linksnullraum von $\mathbf{L}_w$ aufspannen, sodass $\mathbf{L}_w\mathbf{M} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{N}^\top\mathbf{L}_w = \mathbf{0}$

gilt. Es können $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ immer so gewählt werden, dass $\mathbf{N}^\top\mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0}$ gilt, was im Folgenden angenommen wird.

(i): Eigenschaft (i) ergibt sich direkt durch

$$\operatorname{tr}(\mathbf{F}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{N}^\top\mathbf{M}\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{I}_{N_0}) = N_0.$$

(ii) : Zum Beweis von Eigenschaft (ii) wird ausgenutzt, dass der Einsvektor $\mathbf{1}_N$ immer im Rechtsnullraum der Laplacematrix liegt. Da der Rechtsnullraum durch die Matrix $\mathbf{M}$ aufgespannt wird, gilt also $\operatorname{bild}(\mathbf{1}_N) \subseteq \operatorname{bild}(\mathbf{M})$ und somit existiert ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_0}$, sodass $\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{1}_N$ gilt. Da $\mathbf{N}^\top\mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0}$, gilt $\mathbf{N}^\top\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{N}^\top\mathbf{1}_N = \mathbf{a}$. Damit folgt $\mathbf{F}\mathbf{1}_N = \mathbf{M}\mathbf{N}^\top\mathbf{1}_N = \mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{1}_N$. □

Bemerkung 4.21. *Auch wenn erst später in Abschnitt 4.3.5 auf eine geeignete Spezifikation algebraischer Beschränkungen für den späteren Graphenentwurf in Abschnitt 5.4.2 eingegangen wird, kann analog zu Bemerkung 4.7 auch für den hier vorliegenden Fall der Cluster-Synchronisierung direkt eine spezielle Laplacematrix angegeben werden, deren Rechts- und Linksnullräume durch die Matrizen* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N\times N_0}$ *und* $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N\times N_0}$ *beschrieben werden. Für* $\mathbf{N}^\top\mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0}$ *und* $\mathbf{M}\mathbf{N}^\top\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$ *ist nämlich durch*

$$\mathbf{L}_w^{\mathbf{M},\mathbf{N}} = \mathbf{I}_N - \mathbf{M}\mathbf{N}^\top \tag{4.26}$$

eine gültige Laplacematrix eines gewichteten Graphen gegeben, deren Rechts- und Linksnullräume durch $\mathbf{M}$ *und* $\mathbf{N}$ *gegeben sind.*

4.3.2 Kosten der Cluster-Synchronisierung

Die Kosten der Synchronisierung, welche in Abschnitt 4.1 formuliert wurden, betreffen den Kompromiss, den jeder Agent durch die Synchronisierung eingeht, indem er seine ursprünglich präferierte Trajektorie verlässt und stationär einer alternativen Trajektorie folgt. Diese Kompromisskosten werden auch in diesem Abschnitt nach Gleichung (4.4) als mittlere quadratische Abweichung dieser beiden Trajektorien definiert. Erfüllt das Regelgesetz (2.9) die Bedingungen in Satz 4.18, so wird Cluster-Synchronisierung erreicht und die stationären Trajektorien der Agenten werden durch die autonomen Systeme (4.18) mit den Anfangswerten (4.24) beschrieben. Sind zusätzlich erneut die Annahmen 4.2, 4.3 und 4.4 erfüllt, so können daher die Kompromisskosten der Cluster-Synchronisierung wieder als quadratische Form geschrieben werden. Die Kosten hängen dann von der Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}$ und dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ ab. Zunächst gilt mit (4.18) nach Lemma 4.5 für den i-ten Agenten

$$J_{\mathrm{T},i} = \left(\mathbf{x}_{\mathrm{syn,i},0} - \mathbf{x}_{i,0}\right)^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i \left(\mathbf{x}_{\mathrm{syn,i},0} - \mathbf{x}_{i,0}\right).$$

Mit $\mathbf{x}_{i,0} = (\mathbf{e}_i^\top \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_{\mathrm{syn},i,0} = (\mathbf{e}_i^\top\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_0$ kann $J_{\mathrm{T},i}$ direkt durch das Ergebnis in (4.9) beschrieben werden, wobei $\mathbf{1}_N\boldsymbol{\gamma}^\top$ durch $\mathbf{F}$ ersetzt werden muss. Somit ergibt sich $J_{\mathrm{T},i}$ abhängig von $\mathbf{F}$ und $\mathbf{x}_0$ zu

$$J_{\mathrm{T},i}(\mathbf{F},\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^\top \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Nn} \\ \mathbf{F}\otimes\mathbf{I}_n \end{bmatrix}^\top \hat{\mathbf{G}}_i^\top \hat{\mathbf{G}}_i \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Nn} \\ \mathbf{F}\otimes\mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{F}}} \mathbf{x}_0. \tag{4.27}$$

Die Gesamtkompromisskosten des Multi-Agenten-Systems folgen dann analog zu (4.10) zu

$$J_{\mathrm{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{N} J_{\mathrm{T},i}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^\top \hat{\mathbf{F}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{x}_0. \tag{4.28}$$

Wird die stationäre Cluster-Synchronisierung mit minimalen Kompromisskosten gesucht, so besteht diese darin, dass kein Kompromiss eingegangen wird, d. h., dass die Agenten gänzlich auf Synchronisierung verzichten und stattdessen jeder Agent seiner eigenen ursprünglichen Trajektorie folgt. Dies bedeutet, dass die optimale Eigenprojektionsmatrix durch $\mathbf{F} = \mathbf{I}_N$ gegeben wäre. Wie eingangs am Beispiel der Fahrzeugkolonnenfahrt motiviert, gibt es jedoch durchaus Situationen, in denen es sich für die einzelnen Agenten lohnt, mit anderen zu synchronisieren, z. B. um Kraftstoff durch Windschattenfahren einzusparen. Das Ziel bei der Formulierung von Kosten für die Cluster-Synchronisierung ist es daher, die Kompromisskosten weiterhin klein zu halten und gleichzeitig die Entstehung nichttrivialer Cluster zu begünstigen. Statt hier aber ein physikalisch motiviertes Gütemaß einzuführen, wird die Entstehung nichttrivialer Cluster durch einen Regularisierungsterm für die Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}$ erreicht. Als Regularisierungsterm wird

$$J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left\| \left(\mathbf{e}_i^\top - \mathbf{e}_j^\top \right) \mathbf{F} \right\|_1 \tag{4.29}$$

verwendet. Durch $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F})$ wird also bestraft, wenn sich die Zeilen in $\mathbf{F}$ unterscheiden. Nach (4.24) bestimmt die i-te Zeile von $\mathbf{F}$ die resultierende stationäre Trajektorie des i-ten Agenten. Sind also zwei Zeilen in $\mathbf{F}$ identisch, so bedeutet dies, dass die beiden zugehörigen Agenten synchronisieren. Die Regularisierung durch den Term $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F})$ in (4.29) wird üblicherweise als *Sum-of-Norms*-Regularisierung bezeichnet (vgl. [107]). Die 1-Norm kann dabei auch durch andere Normen ersetzt werden. So kann es z. B. von Vorteil sein, statt der 1-Norm eine stetig differenzierbare Norm zu verwenden, um die Differenzierbarkeit bei der Optimierung auszunutzen. Wird jedoch die 1-Norm verwendet, so lässt sich J_{Reg} auch kompakt durch

$$J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) = \left\| \mathrm{vec}\left(\mathbf{\Phi}\mathbf{F}\right) \right\|_1 \tag{4.30}$$

beschreiben, wobei $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2 \times N}$ durch

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{\Phi}_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}_i = 2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i^\top - \mathbf{e}_{i+1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i^\top - \mathbf{e}_N^\top \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

gegeben ist. Eine solche 1-Norm-Regularisierung wird im Bereich der statistischen Regression mit der Abkürzung LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) bezeichnet. Es ist bekannt, dass die 1-Norm-Regularisierung bei ihrer klassischen Verwendung als Regularisierung eines linearen Ausgleichsproblems zu Lösungen mit vielen Nulleinträgen führt [148].

Als Gesamtkosten der Cluster-Synchronisierung wird im Weiteren die Summe der Kompromisskosten J_{T} und des Regularisierungsterms J_{Reg}

$$J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0, \vartheta) = J_{\mathrm{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0) + \vartheta \cdot J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) \tag{4.32}$$

betrachtet, wobei der Regularisierungsterm mit einem Faktor $\vartheta > 0$ gewichtet wird.

4.3.3 Minimierung der Cluster-Synchronisierungskosten bei bekannten Anfangswerten

In diesem Abschnitt wird zunächst angenommen, dass der Anfangswert $\mathbf{x}_0$ bekannt ist. Die Kosten der Cluster-Synchronisierung $J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0)$ in (4.32) hängen dann von der Matrix $\mathbf{F}$ ab, welche im Weiteren als Optimierungsvariable verwendet wird. Ziel ist es also, die Matrix $\mathbf{F}$ so zu wählen, dass die Kosten $J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0)$ minimal sind und gleichzeitig $\mathbf{F}$ die Eigenprojektionsmatrix einer Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ ist, für die algebraische und geometrische Vielfachheit des Nulleigenwerts übereinstimmen. Bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller solcher Eigenprojektionsmatrizen. Dann wird also im Folgenden das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{F}} \quad J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0, \vartheta) \tag{4.33a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F} \in \mathcal{F} \tag{4.33b}$$

betrachtet. Bevor ein Weg zur Lösung dieses Optimierungsproblems aufgezeigt wird, wird im folgenden Lemma zunächst der Einfluss des Regularisierungsparameters ϑ diskutiert.

Lemma 4.22. *Sei $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta)$ Lösung von* (4.33) *in Abhängigkeit von $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{Nn}$ und $\vartheta > 0$ und sei $J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta)$ zugehöriger Gütewert. Dann gilt*

(i) $J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta)$ *ist konkav in* ϑ,

(ii) $\lim_{\vartheta \to 0} J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta) = 0$,

(iii) $\lim_{\vartheta \to 0} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta) = \mathbf{I}_N$, *für fast alle* $\mathbf{x}_0$,

(iv) Es existiert $\vartheta_{\max} > 0$, sodass $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta) = \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^{*\top}$ und $J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta) = J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)$ für alle $\vartheta \geq \vartheta_{\max}$, wobei $\boldsymbol{\gamma}^*$ Lösung von (4.12) *und $J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)$ zugehöriger Gütewert ist. Dabei kann $\vartheta_{\max}$ so gewählt werden, dass $J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)/(2N(N-1)) \leq \vartheta_{\max} \leq J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)/(2N)$.*

Beweis. (i): Seien $\vartheta_1, \vartheta_2 > 0$ gegeben und sei $\vartheta_0 = \tau\vartheta_1 + (1-\tau)\vartheta_2$ mit $\tau \in [0, 1]$. Sei $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta_0)$ für $\vartheta_0 > 0$ gegeben. Offensichtlich gilt

$$J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta) \leq J_{\mathrm{T}}\left(\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta_0), \mathbf{x}_0\right) + \vartheta \cdot J_{\mathrm{Reg}}\left(\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta_0)\right) \tag{4.34}$$

für alle $\vartheta > 0$, da die Lösung von (4.33) niemals „schlechter“ werden kann als $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta_0)$. Der Beweis von Konkavität folgt dann direkt auf dem selben Weg wie in [19, Abschnitt 3.1.3]: Einsetzen von $\vartheta = \vartheta_1$ bzw. $\vartheta = \vartheta_2$ in (4.34), Multiplizieren der resultierenden Ungleichungen mit τ bzw. $(1-\tau)$ und anschließendes Addieren beider Ungleichungen führt auf

$$\begin{aligned}\tau \cdot J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta_1) &+ (1-\tau) \cdot J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta_2) \\ &\leq J_{\mathrm{T}}\left(\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta_0), \mathbf{x}_0\right) + (\tau\vartheta_1 + (1-\tau)\vartheta_2) \cdot J_{\mathrm{Reg}}\left(\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta_0)\right) = J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta_0),\end{aligned}$$

was Konkavität von $J^*_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{x}_0, \vartheta)$ zeigt (vgl. [19, Abschnitt 3.1.1]).

(ii): Wie bereits diskutiert, gilt für die Kompromisskosten $J_{\mathrm{T}}(\mathbf{I}_N, \mathbf{x}_0) = 0$ für alle $\mathbf{x}_0$.

(iii): Für $\vartheta \to 0$ konvergiert $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta)$ gegen die Lösung von $J_{\mathrm{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0) = 0$, welche $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F})$ minimiert. Ist $\mathbf{F} = \mathbf{I}_N$ eindeutige Lösung von $J_{\mathrm{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0) = 0$, so gilt also $\lim_{\vartheta \to 0} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0, \vartheta) = \mathbf{I}_N$. Da die Kompromisskosten für jeden Agenten über die quadratische Form in (4.6) mit positiv definiter Matrix $\widetilde{\mathbf{G}}_i^\top \widetilde{\mathbf{G}}_i$ definiert sind, ist die Eindeutigkeit der Lösung $\mathbf{F} = \mathbf{I}_N$ immer dann gegeben, wenn die Anfangswerte aller Agenten paarweise verschieden sind, d. h., wenn $\mathbf{x}_{0,i} \neq \mathbf{x}_{0,j}$ gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ und $i \neq j$, da dann eine Synchronisierung von zwei Agenten immer zu positiven Kompromisskosten führt. Der Terminus „für fast alle $\mathbf{x}_0$“ schließt somit alle Fälle aus, für die diese Eindeutigkeit verloren geht.

(iv): Für den Regularisierungsterm gilt $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) = 0$ genau dann, wenn alle Zeilen von $\mathbf{F}$ identisch sind, d. h., wenn $\mathbf{F} = \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^\top$ gilt. Nach Lemma 4.20 muss für $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ außerdem $\mathbf{F}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$ gelten. Somit ist das Minimum von $J_{\mathrm{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0)$ unter der Beschränkung $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) = 0$ durch $\mathbf{F} = \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^{*\top}$ gegeben, wobei $\boldsymbol{\gamma}^*$ die Lösung von (4.12) ist. Nach Lemma B.3 in Abschnitt B.4.1 gilt $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) \geq 2N$ für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$, für die rang $(\mathbf{F}) \geq 2$ gilt. Somit gilt für alle $\vartheta \geq J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)/(2N) \geq \vartheta_{\max}$, dass $J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0, \vartheta) \geq J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^{*\top}, \mathbf{x}_0, \vartheta)$, sodass dann die Lösung von (4.33) durch $\mathbf{F}^* = \mathbf{1}_N \boldsymbol{\gamma}^{*\top}$ gegeben ist. Durch $\vartheta \geq J_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^*, \mathbf{x}_0)/(2N)$ ist eine obere Grenze für $\vartheta_{\max}$ gegeben. Natürlich gilt nach (4.34), dass $J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}^*, \mathbf{x}_0, \vartheta_{\max}) \leq \vartheta_{\max} \cdot J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{I}_N) = \vartheta_{\max} \cdot 2N(N-1)$, woraus die untere Grenze für $\vartheta_{\max}$ folgt. □

Lemma 4.22 zeigt auf, dass die Extremfälle des Optimierungsproblems (4.33) durch keinerlei Synchronisierung für $\vartheta = 0$ und durch vollständige Synchronisierung für $\vartheta \geq \vartheta_{\max}$ gegeben sind. Damit ist ein sinnvoller Bereich für die Wahl des Regularisierungsparameters ϑ festgelegt. Dabei ist insbesondere die obere Grenze $\vartheta_{\max}$ interessant, welche in dem in (iv) genannten Intervall liegt.

Im Folgenden wird eine Möglichkeit zur Lösung des Optimierungsproblems (4.33) vorgeschlagen. Das Gütemaß $J_{\mathrm{T,Reg}}$ stellt eine konvexe Funktion in $\mathbf{F}$ dar. Die Schwierigkeit beim Lösen des Optimierungsproblems ist daher durch die Beschränkung $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ gegeben. Diese Beschränkung kann durch die Parametrierung $\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{N}^\top$ mit den beiden Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}$ und $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}$ berücksichtigt werden. Nach Bemerkung 4.21 ist es dazu ausreichend, an die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ die Forderungen $\mathbf{N}^\top \mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0}$ und $\mathbf{M}\mathbf{N}^\top \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$ zu stellen, wodurch garantiert wird, dass $\mathbf{F}$ Eigenprojektionsmatrix einer Laplacematrix mit N_0-fachem Nulleigenwert ist. Mit dieser Parametrierung wird das Gütemaß $J_{\mathrm{T,Reg}}$ also direkt abhängig von $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$. Zusätzlich wird die Vielfachheit N_0 des Nulleigenwerts ebenfalls Parameter der Optimierung. Für eine feste Wahl von $N_0 \in \{1, \ldots, N\}$ resultiert das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{M},\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}} \quad J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top, \mathbf{x}_0, \vartheta) \tag{4.35a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{M}\mathbf{N}^\top \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{4.35b}$$

$$\mathbf{N}^\top \mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0}. \tag{4.35c}$$

Um Optimierungsproblem (4.33) zu lösen, kann Optimierungsproblem (4.35) für $N_0 = 1, \ldots, N$ gelöst werden und dann das Minimum über N_0 gebildet werden. Wurden Lösungen $\mathbf{F}_1^*, \ldots, \mathbf{F}_N^*$ für $N_0 = 1, \ldots, N$ gefunden, so löst also $\mathbf{F}_{N_0^*}^*$ mit

$$N_0^* = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1, \ldots, N\}} J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}_i^*, \mathbf{x}_0, \vartheta) \tag{4.36}$$

das ursprünglich formulierte Problem (4.33). Auch wenn das Problem (4.35) durch den Regularisierungsterm J_{Reg} in (4.29) nichtglatt ist, hat sich in den betrachteten Beispielen die Verwendung von Standardverfahren zur nichtlinearen beschränkten Optimierung zur Lösung von (4.35) bewährt.[8]

Im Folgenden wird auf zwei Aspekte eingegangen, die bei der Lösung der Optimierungsprobleme (4.35) und (4.36) eine Rolle spielen. Zum einen wird ein Kriterium entwickelt, welches es ermöglicht, die Minimierung über N_0 in (4.36) gegebenenfalls abzubrechen, ohne für alle $N_0 \in \{1, \ldots, N\}$ Optimierungsproblem (4.35) gelöst zu haben. Zum anderen wird die Wahl geeigneter Startwerte zur Lösung des nichtkonvexen Problems (4.35) diskutiert.

Nutzung unterer Grenzen als Abbruchkriterium

Grundlage für die Entwicklung eines Kriteriums für einen vorzeitigen Abbruch der Minimierung über N_0 in (4.36) bildet die Berechnung einer unteren Grenze für den minimalen Gütewert von Optimierungsproblem (4.35). Dazu wird ausgenutzt, dass Optimierungsproblem (4.35) ohne die Beschränkung (4.35c) ein konvexes Problem in $\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{N}^\top$ ist. Beschränkung (4.35c) kann nach (i) in Lemma 4.20 durch $\mathrm{tr}\,(\mathbf{F}) \geq N_0$ konvex relaxiert werden, wodurch sich das konvexe Problem

$$\min_{\mathbf{F}_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^{N \times N}} \quad J_{\mathrm{T}}(\mathbf{F}_{\mathrm{R}}, \mathbf{x}_0) + \vartheta \cdot J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}_{\mathrm{R}}) \tag{4.37a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F}_{\mathrm{R}} \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{4.37b}$$

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{F}_{\mathrm{R}}) \geq N_0 \tag{4.37c}$$

ergibt. Bevor auf die Verwendung der Lösung $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}^*$ des relaxierten Problems als Kriterium für einen vorzeitigen Abbruch der Minimierung über N_0 in (4.36) eingegangen wird, wird zunächst gezeigt, wie $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}^*$ effizient berechnet werden kann. Dazu kann Optimierungsproblem (4.37) wie die Optimierungsprobleme (4.12) und (4.13) in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 als semidefinites Programm formuliert werden, wie folgender Satz zeigt.

Satz 4.23. *Sei $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}^*$ die Lösung des semidefiniten Programms*

$$\min_{\mathbf{F}_{\mathrm{R}}, \hat{J}_{\mathrm{T}}, \hat{J}_{\mathrm{Reg}}, \boldsymbol{\delta}} \quad \hat{J}_{\mathrm{T}} + \vartheta \cdot \hat{J}_{\mathrm{Reg}} \tag{4.38a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F}_{\mathrm{R}} \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{4.38b}$$

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{F}_{\mathrm{R}}) \geq N_0 \tag{4.38c}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_{\mathrm{T}} & \mathbf{x}_0^\top \hat{\mathbf{F}}_{\mathrm{R}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \\ \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{F}}_{\mathrm{R}} \mathbf{x}_0 & \mathbf{I}_{n_{\mathrm{G}}} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{4.38d}$$

$$\hat{J}_{\mathrm{Reg}} \geq \boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{1}_{N^2(N-1)/2} \tag{4.38e}$$

$$-\boldsymbol{\delta} \leq \mathrm{vec}\,(\boldsymbol{\Phi} \mathbf{F}_{\mathrm{R}}) \leq \boldsymbol{\delta}, \tag{4.38f}$$

[8] In [67] wird gezeigt, dass klassische Quasi-Newton-Verfahren in der Praxis oft gut geeignet sind, nichtglatte Probleme zu lösen. Sollten mit solchen klassischen Verfahren keine guten Ergebnisse erzielt werden, so kann auf spezielle Lösungsverfahren für nichtglatte Probleme wie z. B. [15] oder [23] zurückgegriffen werden.

wobei $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{F}}_\mathrm{R}$ *und* $\mathbf{\Phi}$ *wie in* (4.10), (4.27) *und* (4.31) *definiert sind. Dann löst* $\mathbf{F}_\mathrm{R}^*$ *ebenso das Minimierungsproblem* (4.37).

Beweis. Die beiden Summanden im Gütemaß von (4.37) können separat betrachtet werden. Die Verwendung des Supremums $\hat{J}_\mathrm{T}$ und der Beschränkung (4.38d) zur Minimierung der durch (4.28) beschriebenen Kosten $J_\mathrm{T}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0)$ erfolgt in gleicher Weise wie im Beweis zu Satz 4.9. Zur Minimierung des durch (4.30) beschriebenen Regularisierungsterms $J_\mathrm{Reg}(\mathbf{F}_\mathrm{R})$ wird das Supremum $\hat{J}_\mathrm{Reg}$ verwendet. Die 1-Norm von vec $(\mathbf{\Phi}\mathbf{F}_\mathrm{R})$ entspricht der Summe der Absolutwerte der einzelnen Elemente des Vektors, was dementsprechend über den Summenterm $\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{1}_{N^2(N-1)/2}$ und die Ungleichungen (4.38f) berücksichtigt wird. □

Die Lösung $\mathbf{F}_\mathrm{R}^*$ des relaxierten Problems liefert eine untere Grenze für das Originalproblem. Seien $\mathbf{F}_1^*, \ldots, \mathbf{F}_N^*$ Lösungen für das Optimierungsproblem (4.35) für $N_0 = 1, \ldots, N$ und seien $\mathbf{F}_{\mathrm{R},1}^*, \ldots, \mathbf{F}_{\mathrm{R},N}^*$ die entsprechenden Lösungen für das relaxierte Optimierungsproblem (4.37). Durch die Relaxierung gilt offensichtlich

$$J_\mathrm{T,Reg}(\mathbf{F}_{\mathrm{R},\hat{N}_0}^*, \mathbf{x}_0, \vartheta) \leq J_\mathrm{T,Reg}(\mathbf{F}_{N_0}^*, \mathbf{x}_0, \vartheta) \tag{4.39}$$

für alle $N_0 \geq \hat{N}_0$. Daher kann die Lösung des relaxierten Problems (4.37) verwendet werden, um die Optimierung (4.36) frühzeitig abzubrechen. Wird nämlich beginnend von $N_0 = 1$ das Optimierungsproblem (4.35) für aufsteigende N_0 für $N_0 = 1, \ldots, \hat{N}_0 - 1$ gelöst,[9] so ist durch den besten Gütewert $J_\mathrm{T,Reg}(\mathbf{F}_{N_0}^*, \mathbf{x}_0, \vartheta)$ aller $N_0 \in \{1, \ldots, \hat{N}_0 - 1\}$ eine obere Grenze für den optimalen Gütewert von Optimierungsproblem (4.36) bekannt. Ist schließlich der Gütewert für die Lösung $\mathbf{F}_{\mathrm{R},\hat{N}_0}^*$ des relaxierten Problems (4.37) größer als diese obere Grenze, so kann die Optimierung abgebrochen werden, da gemäß (4.39) durch $J_\mathrm{T,Reg}(\mathbf{F}_{\mathrm{R},\hat{N}_0}^*, \mathbf{x}_0, \vartheta)$ eine untere Grenze für alle $N_0 \geq \hat{N}_0$ gegeben ist.

Bestimmung geeigneter Startwerte

Im Folgenden wird gezeigt, wie die Lösung $\mathbf{F}_{\mathrm{R},N_0}^*$ der konvexen Relaxierung (4.37) genutzt werden kann, um geeignete Startwerte für die nichtkonvexe Minimierung (4.35) zu bestimmen. Dazu wird die optimale Approximation von $\mathbf{F}_{\mathrm{R},N_0}^*$ durch das Produkt $\mathbf{M}\mathbf{N}^\top$ unter der Beschränkung (4.35c) gesucht, d. h., es wird das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{M},\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}} \quad \left\| \mathbf{M}\mathbf{N}^\top - \mathbf{F}_{\mathrm{R},N_0}^* \right\|_\mathrm{F}^2 \tag{4.40a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{N}^\top \mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0} \tag{4.40b}$$

betrachtet. Die Lösungen $\mathbf{M}^*$ und $\mathbf{N}^*$ können dann als Startwerte zur Lösung von (4.35) verwendet werden. Optimierungsproblem (4.40) ist ebenfalls ein nichtkonvexes Optimierungsproblem.

[9] Für $N_0 = 1$ kann die exakte Lösung durch Lösen des in Satz 4.9 beschriebenen semidefiniten Programms gewonnen werden.

Es kann mit verschiedenen Verfahren versucht werden, das Problem zu lösen. Eine einfache, aber vielversprechende Methode ist die der *Alternierenden Optimierung* (vgl. [12]), bei der iterativ abwechselnd eine der beiden Optimierungsvariablen $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{N}$ festgehalten wird und über die jeweils andere optimiert wird. Beide dann zu lösende Optimierungsprobleme sind konvexe gleichungsbeschränkte lineare Ausgleichsprobleme, für deren Lösung effiziente numerische Verfahren existieren [13]. Das eigentlich zu lösende Problem ist jedoch, wie bereits angemerkt, nichtkonvex, sodass es auch hier eine wichtige Rolle spielt, gute Startwerte für $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{N}^0$ zu finden. Dazu kann die Lösung von Optimierungsproblem (4.40) bei Vernachlässigung der Beschränkung (4.40b) verwendet werden. Diese ist durch

$$\mathbf{M}^0 = \mathbf{U}_1 \sqrt{\mathbf{\Sigma}_1} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}^0 = \mathbf{V}_1 \sqrt{\mathbf{\Sigma}_1}$$

gegeben, wobei $\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N_0}$ und $\mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$ aus der Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{F}^*_{\mathrm{R},N_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^\top \\ \mathbf{V}_2^\top \end{bmatrix}$$

resultieren [90, Theorem 24].

4.3.4 Minimierung der erwarteten Cluster-Synchronisierungskosten bei unbekannten Anfangswerten

In diesem Abschnitt wird die Minimierung der Cluster-Synchronisierungskosten für den Fall betrachtet, dass der Anfangswert $\mathbf{x}_0$ unbekannt ist, dieser jedoch gemäß Annahme 4.10 als Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbf{x}_\mathrm{E}$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{S}$ angenommen werden kann. Wie in Abschnitt 4.2.3 ist daher auch hier das Ziel, die erwarteten Kosten der Cluster-Synchronisierung $\mathrm{E}(J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0, \vartheta))$ zu minimieren. Dazu wird erneut die Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}$ als Optimierungsvariable verwendet. Formal wird also das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{F}} \quad \mathrm{E}\left(J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0, \vartheta)\right) \tag{4.41a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F} \in \mathcal{F} \tag{4.41b}$$

betrachtet, wobei abermals $\mathcal{F}$ die Menge aller Eigenprojektionsmatrizen bezeichnet. Die Lösung dieses Optimierungsproblems kann mit denselben Mitteln wie im vorigen Abschnitt 4.3.3 gesucht werden. Statt Optimierungsproblem (4.41), wird also die analog zu (4.35) parametrierte Form

$$\min_{\mathbf{M},\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N_0}} \quad \mathrm{E}\left(J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top, \mathbf{x}_0, \vartheta)\right) \tag{4.42a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{M}\mathbf{N}^\top \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{4.42b}$$

$$\mathbf{N}^\top \mathbf{M} = \mathbf{I}_{N_0} \tag{4.42c}$$

für $N_0 = 1, \ldots, N$ gelöst und anschließend das Minimum über N_0 gesucht. Dabei kann mit denselben Überlegungen wie im Beweis zu Satz 4.12 der Erwartungswert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(J_\mathrm{T}(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top, \mathbf{x}_0, \vartheta)\right) &= \mathrm{E}\left(J_\mathrm{T}(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top, \mathbf{x}_0)\right) + \vartheta \cdot J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top) \\ &= \mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\mathbf{F}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{x}_\mathrm{E} + \mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{F}}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{S}\right) + \vartheta \cdot J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{M}\mathbf{N}^\top) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden mit

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Nn} \\ \mathbf{M}\mathbf{N}^\top \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

Auch für den Fall unbekannter Anfangswerte kann wie im vorangegangen Abschnitt eine konvexe Relaxierung des Problems (4.42) genutzt werden, um durch Verwendung der dadurch erhaltenen unteren Grenze des optimalen Gütewertes das Lösen von Problem (4.42) gegebenenfalls für einige N_0 zu vermeiden und für alle anderen N_0 eine geeignete Startlösung bereitzustellen. Dazu kann das relaxierte Problem

$$\min_{\mathbf{F}_\mathrm{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}} \quad \mathrm{E}\left(J_\mathrm{T}(\mathbf{F}_\mathrm{R}, \mathbf{x}_0)\right) + \vartheta \cdot J_\mathrm{Reg}(\mathbf{F}_\mathrm{R}) \tag{4.43a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F}_\mathrm{R}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{4.43b}$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{F}_\mathrm{R}\right) \geq N_0 \tag{4.43c}$$

verwendet werden. Dieses kann erneut als semidefinites Programm formuliert werden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.24. *Erfülle* $\mathbf{x}_0$ *die Annahme 4.10. Sei* $\mathbf{F}_\mathrm{R}^*$ *die Lösung des semidefiniten Programms*

$$\min_{\mathbf{F}_\mathrm{R},\, \bar{J}_\mathrm{T},\, \hat{J}_\mathrm{T},\, \hat{J}_\mathrm{Reg},\, \boldsymbol{\delta},\, \mathbf{X}} \quad \bar{J}_\mathrm{T} + \hat{J}_\mathrm{T} + \vartheta \cdot \hat{J}_\mathrm{Reg} \tag{4.44a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F}_\mathrm{R}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{4.44b}$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{F}_\mathrm{R}\right) \geq N_0 \tag{4.44c}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{V}_\mathrm{S}^\top \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{R}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \\ \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{F}}_\mathrm{R}\mathbf{V}_\mathrm{S} & \bar{J}_\mathrm{T}\mathbf{I}_{n_\mathrm{G}} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{4.44d}$$

$$1 - \mathrm{tr}\left(\mathbf{X}\right) \geq 0 \tag{4.44e}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_\mathrm{T} & \mathbf{x}_\mathrm{E}^\top \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{R}^\top \hat{\mathbf{G}}^\top \\ \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{F}}_\mathrm{R}\,\mathbf{x}_\mathrm{E} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{G}} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{4.44f}$$

$$\hat{J}_\mathrm{Reg} \geq \boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{1}_{N^2(N-1)/2} \tag{4.44g}$$

$$-\boldsymbol{\delta} \leq \mathrm{vec}\left(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{F}_\mathrm{R}\right) \leq \boldsymbol{\delta}, \tag{4.44h}$$

wobei $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{F}}_\mathrm{R}$ *und* $\boldsymbol{\Phi}$ *wie in* (4.10), (4.27) *und* (4.31) *definiert sind und* $\mathbf{V}_\mathrm{S}\mathbf{V}_\mathrm{S}^\top = \mathbf{S}$ *die Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix* $\mathbf{S}$ *ist. Dann löst* $\mathbf{F}_\mathrm{R}^*$ *ebenso das Minimierungsproblem* (4.43).

Beweis. Die Berücksichtigung von $\mathrm{E}\left(J_\mathrm{T}(\mathbf{F}_\mathrm{R}, \mathbf{x}_0)\right)$ im Gütemaß von Minimierungsproblem (4.43) erfolgt wie in Satz 4.12 durch die Summe $\bar{J}_\mathrm{T} + \hat{J}_\mathrm{T}$ unter den Nebenbedingungen (4.44d), (4.44e) und (4.44f). Der Regularisierungsterm $J_\mathrm{Reg}(\mathbf{F}_\mathrm{R})$ wird wiederum wie in Satz 4.23 durch den Summanden $\hat{J}_\mathrm{Reg}$ und die zugehörigen Nebenbedingungen (4.44g), (4.44h) berücksichtigt. □

Beispiel 4.25. *Es wird erneut die Fahrzeugkolonne aus Beispiel 4.15 mit den in Tabelle 4.1 zusammengefassten Präferenzen der einzelnen Fahrzeuge betrachtet. Für den Regularisierungsfaktor wird* $\vartheta = 1500$ *gewählt. Nach Lemma 4.22 und mit den Zahlen in Beispiel 4.15 gilt*

$66000/60 = 1100 \leq \vartheta_{\max} \leq 66000/12 = 5500$. *Somit liegt ϑ im selben Intervall, in dem auch $\vartheta_{\max}$ liegt. Für diese Wahl von ϑ ergibt sich*

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} -0{,}4766 & 0{,}6078 \\ -0{,}4680 & 0{,}4679 \\ -0{,}4471 & 0{,}1300 \\ -0{,}4471 & 0{,}1300 \\ -0{,}4470 & 0{,}1297 \\ -0{,}3857 & -0{,}8619 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{N}_2^* = \begin{bmatrix} -0{,}1152 & 0{,}6732 \\ -1{,}0807 & -0{,}0668 \\ -0{,}0931 & -0{,}0058 \\ -0{,}1377 & -0{,}0085 \\ -0{,}1290 & -0{,}0080 \\ -0{,}7222 & -0{,}7250 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

für $N_0 = 2$, woraus sich erwartete Gesamtkosten von $\mathrm{E}(J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{M}_2^*\mathbf{N}_2^{*\top}, \mathbf{x}_0, \vartheta)) = 39556$ ergeben. Diese sind niedriger als die Kosten für $N_0 = 1$. Für $N_0 = 3$ wiederum ergibt sich durch Lösen der konvexen Relaxierung (4.44) *der Wert $\mathrm{E}(J_{\mathrm{T,Reg}}(\mathbf{F}_{\mathrm{R},3}^*, \mathbf{x}_0, \vartheta)) = 48408$ als untere Grenze für die Lösung von* (4.42) *für alle $N_0 \geq 3$. Da diese untere Grenze größer ist als das gefundene Optimum für $N_0 = 2$, kann die Optimierung abgebrochen werden und die durch* (4.45) *gefundenen Matrizen als Lösung von Optimierungsproblem* (4.41) *verwendet werden. Mit dieser Wahl ergibt sich*

$$\mathbf{x}_{\mathrm{syn}} = \begin{bmatrix} 100{,}3 & 107{,}9 & 126{,}3 & 126{,}3 & 126{,}3 & 180{,}3 \end{bmatrix}$$

als optimaler stationärer Wert der Cluster-Synchronisierung nach (4.25)*, wonach also eine Synchronisierung der Fahrzeuge in vier Cluster resultiert.*

4.3.5 Formulierung der Beschränkungen an den Graphenentwurf

In den vorangegangenen Abschnitten 4.3.3 und 4.3.4 wurde gezeigt, wie die Kosten der Cluster-Synchronisierung für bekannte und unbekannte Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ minimiert werden können. Die Minimierung erfolgte dabei unter Verwendung der Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ als Entwurfsparameter. Ergebnis der Optimierung ist daher eine optimale Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}^*$ bzw. zwei Matrizen $\mathbf{M}^*, \mathbf{N}^* \in \mathbb{R}^{N \times N_0^*}$, für die $\mathbf{M}^*\mathbf{N}^{*\top} = \mathbf{F}^*$ und $\mathbf{N}^{*\top}\mathbf{M}^* = \mathbf{I}_{N_0^*}$ gelten. Alle Regelgesetze (2.9) mit einer Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ mit N_0^* Nulleigenwerten, für die

$$\mathbf{L}_w\mathbf{M}^* = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}^{*\top}\mathbf{L}_w = \mathbf{0} \tag{4.46}$$

gilt, führen daher zu optimaler stationärer Cluster-Synchronisierung im Sinne des Gütemaßes (4.32), wenn zusätzlich die Bedingungen in Satz 4.18 erfüllt sind. Somit können die Gleichungen (4.46) als Beschränkungen in dem in Kapitel 5 thematisierten Graphenentwurf verwendet werden.

Im Folgenden wird jedoch argumentiert, dass die direkte Verwendung von (4.46) als Beschränkungen im Graphenentwurf dazu führen kann, dass die Cluster-Synchronisierung nicht robust ist gegenüber geringen Veränderungen der Kantengewichte des Graphen. In Abschnitt 2.1.2 wurde gezeigt, dass für Graphen mit positiven Kantengewichten die Anzahl der Nulleigenwerte N_0 immer der Anzahl $N_{\mathcal{R}}$ der sogenannten *maximalen Erreichbarkeitsmengen* des Graphen entspricht (vgl. Satz 2.13). Dies ist für Graphen mit beliebigen Kantengewichten jedoch nur noch generisch

gegeben (vgl. Beispiel 2.4 und Bemerkung 2.15); es gilt allgemein $N_0 \geq N_{\mathcal{R}}$. Die Verwendung der Beschränkungen (4.46) im Graphenentwurf wird dabei im Allgemeinen auf den Fall $N_0 > N_{\mathcal{R}}$ führen.[10] Dass dieser Fall für die Cluster-Synchronisierung jedoch problematisch ist, wird an folgendem Beispiel verdeutlicht, welches [164, Beispiel 3] entnommen ist.

Beispiel 4.26. *In [164, Beispiel 3] wird ein Multi-Agenten-System mit N skalaren Agenten*

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i,0}$$

betrachtet. Die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{L}_w \mathbf{x} \tag{4.47}$$

mit $\mathbf{x} = \left[x_1, \ldots, x_N\right]$ *beschreibt die Dynamik der Zustände der N Agenten $x_1, \ldots, x_N$ unter dem Regelgesetz* (2.9) *und dem in Abb. 4.2 gezeigten gewichteten Kommunikationsgraphen $\mathcal{G}_w$ mit der Laplacematrix*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Das Spektrum der Laplacematrix ist durch $\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w) = \{0\,;\,0\,;\,0{,}76\,;\,2\,;\,4\,;\,5{,}24\}$ *gegeben, d. h., die Vielfachheit des Nulleigenwerts der Laplacematrix beträgt $N_0 = 2$. Rechts- und Linksnullraum von $\mathbf{L}_w$ werden durch*

$$\mathbf{M}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{N}^\top = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

aufgespannt, wobei $\mathbf{N}^\top \mathbf{M} = \mathbf{I}_2$ gilt. In diesem Fall konvergiert also der Zustand $\mathbf{x}$ unter der Dynamik (4.47) *gemäß* (4.25) *auf den Wert* $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}_0$, *was dazu führt, dass x_1, x_2, x_3, x_4 sowie x_5, x_6 jeweils auf den Mittelwert ihrer Anfangszustände konvergieren. Ein beispielhafter Verlauf dieser Cluster-Synchronisierung ist in Abb. 4.3 durch die mit durchgezogenen Linien gekennzeichneten Zustandsverläufe zu sehen. Diese Konvergenz in zwei Cluster wird erreicht, obwohl der zugrunde liegende Kommunikationsgraph zusammenhängend ist, d. h., obwohl der Graph nur eine maximale Erreichbarkeitsmenge gemäß Definition 2.12 aufweist und somit $N_{\mathcal{R}} = 1$ gilt. Wie in Satz 2.5 gezeigt wurde, entspricht die Anzahl der Nulleigenwerte N_0 generisch der Anzahl der maximalen Erreichbarkeitsmengen $N_{\mathcal{R}}$ und eine minimale Variation der negativen Gewichte führt dazu, dass $N_0 = N_{\mathcal{R}}$ gilt. Dies ist auch in dem hier betrachteten Beispiel der Fall, sodass durch leichtes „Wackeln“ an den Gewichten der zweite Eigenwert λ_2 in Null verschoben wird. Dieser wird dabei entweder in positiver Richtung $\lambda_2 > 0$ oder in negativer Richtung $\lambda_2 < 0$ verschoben, was dann entweder wieder zu gewöhnlicher Synchronisierung oder zu instabilem Verhalten führt (vgl. Abb. 4.3).*

[10] Die Matrizen $\mathbf{M}^*$ und $\mathbf{N}^*$ sind im Allgemeinen vollbesetzt, was z. B. bei Wahl der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ gemäß (4.26) zu einem vollständig verbundenen Graphen führt.

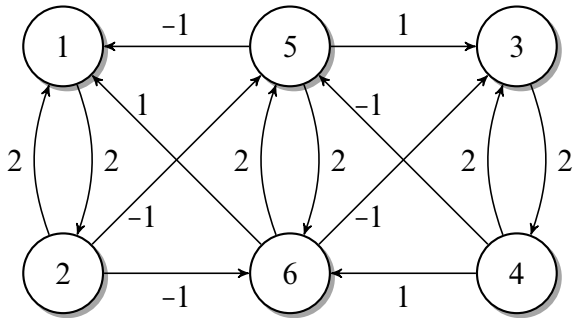

Abbildung 4.2: Graph aus [164, Beispiel 3].

Beispiel 4.26 zeigt, dass für $N_0 > N_{\mathcal{R}}$ die Cluster-Synchronisierung nicht robust bezüglich bereits geringster Veränderung der Kantengewichte ist. Daher ist es nicht ratsam, die Gleichungen (4.46) direkt als algebraische Beschränkungen an die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ beim Entwurf des Kommunikationsgraphen zu stellen. In diesem Abschnitt soll deshalb gezeigt werden, wie aus der gefundenen optimalen Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}^*$ mit $\operatorname{rang}(\mathbf{F}_0^*) = N_0^*$ Beschränkungen für eine Laplacematrix abgeleitet werden können, für die $N_{\mathcal{R}} = N_0^*$ gilt und die zu geringen Kosten für die Cluster-Synchronisierung führt.

Die Herausforderung dabei ist, dass die Forderung $N_0 = N_{\mathcal{R}}$ die Wahl der Rechts- und Linksnullräume stark einschränkt. Allgemein kann für den Fall $N_0 = N_{\mathcal{R}}$ die Parametrierung der Nullräume der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ gemäß Satz 2.13 und Bemerkung 2.15 vorgenommen werden. Dabei spielt die Einteilung der Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ des Graphen in die in Definition 2.12 eingeführten maximalen Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{N_{\mathcal{R}}}$ und exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}$ eine große Rolle. Die wesentlichen Bedingungen, die für die Elemente der Rechts- und Linkseigenvektoren $\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_{N_0} \in \mathbb{R}^N$ und $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{N_0} \in \mathbb{R}^N$ zum Nulleigenwert der Laplacematrix gemäß Satz 2.13 und Bemerkung 2.15 gelten, sind an dieser Stelle noch einmal zusammengefasst:

$$\nu_i \in \mathcal{H}_k \Rightarrow \mu_{k,i} = 1 \tag{4.48a}$$

$$\nu_i \in \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N_{\mathcal{R}}} \mathcal{H}_l \Rightarrow \mu_{k,i} = 0 \tag{4.48b}$$

$$\nu_i \notin \mathcal{H}_k \Rightarrow \gamma_{k,i} = 0 \tag{4.48c}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_{k,i} = 1 \tag{4.48d}$$

$$\sum_{k=1}^{N_{\mathcal{R}}} \boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{1}_N \tag{4.48e}$$

Die in (4.48) angegebenen Bedingungen an die Rechts- und Linkseigenvektoren zum Nulleigenwert der Laplacematrix sind im Gegensatz zu denen in Satz 2.13 ausschließlich anhand der exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}$ formuliert. Dabei unterscheiden sich beide Formulierungen in zwei Punkten. Zum einen tauchen in Satz 2.13 in einigen der dort angegebenen Bedingungen die

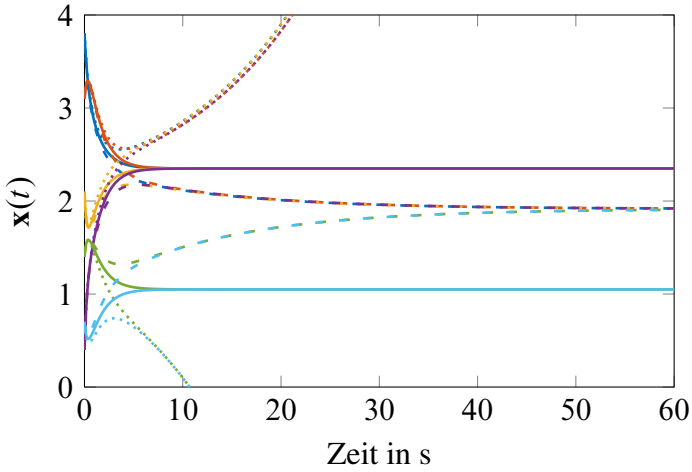

Abbildung 4.3: Trajektorien bei ungestörten Kantengewichten (—) und leicht betragsmäßig verminderten (- -) bzw. erhöhten (···) negativen Kantengewichten.

Mengen der Wurzelknoten $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{N_\mathcal{R}}$ als weitere Teilmengen auf. Die hier verwendete Formulierung impliziert, dass jeder Knoten in den exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ auch Wurzelknoten der jeweiligen Teilmenge sein kann. Zum anderen lassen (4.48a) und (4.48b) im Gegensatz zu den Bedingungen in Satz 2.13 zu, dass jeder Knoten, der nicht zu einer exklusiven Teilmenge gehört, von jeder exklusiven Teilmenge aus erreicht werden kann.

An den Bedingungen (4.48) ist sofort ersichtlich, was die Minimierung der Kosten der Cluster-Synchronisierung unter der Forderung $N_0 = N_\mathcal{R}$ erschwert: Die dazu erforderliche optimale Einteilung der Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ in die unterschiedlichen Erreichbarkeitsmengen stellt ein kombinatorisches Optimierungsproblem dar, bei dem die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten schneller als exponentiell in N wächst (vgl. Lemma B.4). Um das Problem trotzdem sinnvoll zu lösen, wird in diesem Abschnitt der Ansatz verfolgt, die bereits gefundene optimale Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}^*$ zu verwenden, um die Anzahl möglicher Einteilungen der Knotenmenge stark zu begrenzen. Für die verbleibenden möglichen Einteilungen der Knotenmenge werden dann schließlich zwei Matrizen

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 & \cdots & \boldsymbol{\mu}_{N_0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N_0^*} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_{N_0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N_0^*} \tag{4.49}$$

so bestimmt, dass deren Elemente die Bedingungen (4.48) erfüllen und die Matrix $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{N}}^\top$ zu niedrigen Kosten der Cluster-Synchronisierung im Sinne des Gütemaßes (4.32) führt. Dabei stellt der beschriebene Lösungsansatz einen heuristischen Ansatz dar. Die beschriebene Lösung wird also im Allgemeinen suboptimal bezüglich des Gütemaßes (4.32) für $N_0 = N_\mathcal{R}$ sein.

In Bemerkung 4.17 wurde bereits eine Aufteilung der Agenten in Cluster angesprochen. Danach werden gemäß (4.19) zwei Agenten zum selben Cluster gezählt, wenn ihre stationären Trajektorien übereinstimmen. Außerdem wurde definiert, dass zwei Agenten zu unterschiedlichen Clustern gezählt werden, wenn sich ihre stationären Trajektorien für (fast) alle Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ unterscheiden. Die Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}^*$ gibt nach (4.25) die stationäre Clusterung der Agenten vor. Die Einteilung der Agenten in Cluster kann daher an der Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}^*$ festge-

macht werden: Zwei Agenten gehören genau dann zum selben Cluster, wenn die entsprechenden Zeilen in $\mathbf{F}^*$ übereinstimmen. Somit kann zur Einteilung der Agenten in verschiedene Cluster eine Partitionierung der Indexmenge $\mathcal{I} = \{1, \ldots, N\}$ in $\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_{N_\mathrm{C}}$ erfolgen, sodass für alle $k \in \{1, \ldots, N_\mathrm{C}\}$ und für alle $i \in \mathcal{I}_k$

$$\left\| (\mathbf{e}_i^\top - \mathbf{e}_j^\top) \cdot \mathbf{F}^* \right\| \begin{cases} \leq \epsilon, & j \in \mathcal{I}_k, \\ > \epsilon, & j \notin \mathcal{I}_k, \end{cases} \tag{4.50}$$

wobei $\epsilon > 0$ eine zu wählende Toleranz für die Clusterung ist.[11] Durch eine solche Partitionierung der Indexmenge $\mathcal{I} = \{1, \ldots, N\}$ in $\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_{N_\mathrm{C}}$ wird schließlich auch die Anzahl der Cluster N_C berechnet.

Um aus der gewonnen Partitionierung der Indexmenge $\mathcal{I}$ die Einteilung der Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ in die exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ abzuleiten, wird zunächst der Zusammenhang zwischen den Zeilen von $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{N}}^\top$ diskutiert, wenn $\tilde{\mathbf{M}}$ und $\tilde{\mathbf{N}}$ wie in (4.49) so gewählt werden, dass deren Elemente die Bedingungen (4.48) erfüllen. Aus den Bedingungen (4.48) lassen sich folgende Schlussfolgerungen bezüglich der Zeilen der Eigenprojektionsmatrix $\tilde{\mathbf{F}}$ ziehen:

- Zwei Zeilen in $\tilde{\mathbf{F}}$ sind identisch, wenn sie zur selben exklusiven Teilmenge $\mathcal{H}_k$ gehören.
- Zwei Zeilen in $\tilde{\mathbf{F}}$ unterscheiden sich, wenn sie zu unterschiedlichen exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l, k \neq l$ gehören.
- Alle Zeilen in $\tilde{\mathbf{F}}$, die zu der gemeinsamen Menge $\mathcal{C} = \cup_{k=1}^{N_\mathcal{R}} \mathcal{C}_k$ gehören, können unterschiedlich sein.

Diese Bedingungen zeigen, dass die Knoten einer exklusiven Teilmenge $\mathcal{H}_k$ für $k \in \{1, \ldots, N_\mathcal{R}\}$ alle zu demselben Cluster gehören. Außerdem zeigen diese Bedingungen den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Cluster N_C und der Anzahl der maximalen Erreichbarkeitsmengen $N_\mathcal{R}$ auf. Die letzte Bedingung macht dabei klar, dass die Anzahl der Cluster N_C durchaus größer sein kann als die Anzahl der maximalen Erreichbarkeitsmengen, sodass insgesamt $N \geq N_\mathrm{C} \geq N_0 \geq N_\mathcal{R} \geq 1$ gilt. Tatsächlich kann im Extremfall die Anzahl der Cluster N_C sogar der Anzahl der Knoten N entsprechen, selbst wenn $N_\mathcal{R} = 2$ gilt. Dies wird an dem folgenden Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 4.27. *Der in Abb. 4.4 gezeigte Graph mit $N_\mathcal{R} = 2$ maximalen Erreichbarkeitsmengen besitzt die Laplacematrix und die Eigenprojektionsmatrix*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt in diesem Fall $N_\mathrm{C} = N = 4$.

[11] Eine solche Clusterung kann mit verschiedenen Verfahren wie z. B. dem *K-Means-Algorithmus* erfolgen (vgl. [57]). Bei Verwendung des K-Means-Algorithmus muss die Anzahl der Cluster *a priori* vorgegeben werden. Dabei kann die dem K-Means-Algorithmus vorgegebene Anzahl sukzessive erhöht werden, bis (4.50) mit der gewünschten Toleranz ϵ erfüllt ist.

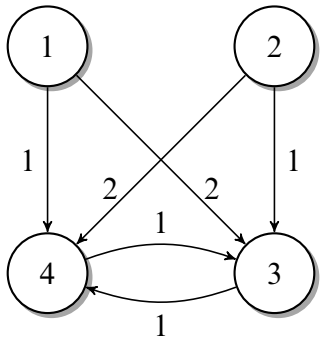

Abbildung 4.4: Graph mit 4 Knoten und zwei maximalen Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_1 = \{\nu_1, \nu_3, \nu_4\}$ und $\mathcal{R}_2 = \{\nu_2, \nu_3, \nu_4\}$.

Mit der obigen Diskussion kann die Partitionierung der Indexmenge $\mathcal{I}$ gemäß (4.50) in $\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_{N_\mathrm{C}}$ dazu genutzt werden, eine mögliche Einteilung der Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ in die exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ zu wählen. Dazu werden $N_\mathcal{R}$ aus den N_C Teilmengen $\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_{N_\mathrm{C}}$ ausgewählt. Es gibt insgesamt

$$b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R}) = \frac{N_\mathrm{C}\,!}{(N_\mathrm{C} - N_\mathcal{R})\,!N_\mathcal{R}\,!}$$

Möglichkeiten diese Auswahl zu treffen, wobei $b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})$ den Binomialkoeffizienten bezeichnet [149]. Wie oben angemerkt, kann die Anzahl der Cluster N_C der Anzahl der Knoten N entsprechen, wodurch diese Anzahl prinzipiell immer noch schneller als exponentiell in N wächst. Wenn allerdings die Differenz zwischen N_C und $N_\mathcal{R}$ klein bleibt, so bleibt auch $b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})$ klein. Um diese Differenz klein zu halten, kann die Anzahl der Cluster N_C *a-priori* beschränkt werden, indem z. B. die Toleranz ϵ in (4.50) geeignet gewählt wird. Im Folgenden wird

$$\mathcal{H}_1^i, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}^i$$

für die i-te Wahl der exklusiven Teilmengen geschrieben, wobei $i \in \{1, \ldots, b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})\}$. Die Wahl der exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1^i, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}^i$ legt einige der Elemente in $\tilde{\mathbf{M}}$ und $\tilde{\mathbf{N}}$ in (4.49) gemäß (4.48) bereits fest. Die verbleibenden Elemente können optimiert werden, indem das Minimierungsproblem

$$\min_{\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}^{N \times N_\mathcal{R}}} \quad \mathrm{E}\left(J_\mathrm{T}(\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{N}}^\top, \mathbf{x}_0)\right) + \vartheta \cdot J_\mathrm{Reg}(\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{N}}^\top) \tag{4.51a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad (4.48), (4.49) \text{ für } \mathcal{H}_1^i, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}^i \tag{4.51b}$$

gelöst wird, wobei $\mathbf{x}_0$ entweder deterministisch oder als Zufallsvariable gemäß Annahme 4.10 angenommen wird. Wurden für alle $i \in \{1, \ldots, b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})\}$ Lösungen $\tilde{\mathbf{M}}_i^*, \tilde{\mathbf{N}}_i^*$ für Optimierungsproblem (4.51) bestimmt, so wird

$$\tilde{\mathbf{M}}^*, \tilde{\mathbf{N}}^* = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1, \ldots, b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})\}} J_{\mathrm{T,Reg}}(\tilde{\mathbf{M}}_i^* \tilde{\mathbf{N}}_i^{*\top}, \mathbf{x}_0, \vartheta) \tag{4.52}$$

als Lösung des Gesamtproblems ausgewählt.

Das Vorgehen zum Bestimmen von $\tilde{\mathbf{M}}^*, \tilde{\mathbf{N}}^*$ wird im Folgenden noch einmal zusammengefasst:

1.) Bestimme gemäß (4.50) eine Partitionierung der Indexmenge $\mathcal{I} = \{1, \ldots, N\}$ in Teilmengen $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_{N_\mathrm{C}}$ (ggf. mit Vorgabe einer oberen Grenze für N_C) anhand der in Abschnitt 4.3.3 bzw. Abschnitt 4.3.4 gefundenen optimalen Eigenprojektionsmatrix $\mathbf{F}^*$.

2.) Bestimme alle möglichen Ziehungen von $N_\mathcal{R} = N_0^* = \mathrm{rang}(\mathbf{F}^*)$ exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1^i, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}^i$, $i = 1, \ldots, b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})$ der gefundenen Partitionierung.

3.) Berechne für alle $i \in \{1, \ldots, b(N_\mathrm{C}, N_\mathcal{R})\}$ die Lösungen $\tilde{\mathbf{M}}_i^*, \tilde{\mathbf{N}}_i^*$ von Optimierungsproblem (4.51).

4.) Wähle $\tilde{\mathbf{M}}^*, \tilde{\mathbf{N}}^*$ gemäß (4.52).

Bemerkung 4.28. *Es wird noch kurz eine nützliche Modifikation von Optimierungsproblem* (4.51) *diskutiert. Es kann wünschenswert sein, dass die in* (4.50) *gefundene Clusterung für das stationäre Verhalten der Agenten in der gemeinsamen Teilmenge $\mathcal{C}$ beibehalten wird. Dies kann berücksichtigt werden, indem lineare Gleichungsbeschränkungen an die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ zur Optimierung* (4.51) *hinzugezogen werden, um zu erzwingen, dass die entsprechenden Zeilen in $\tilde{\mathbf{M}}$ identisch sind.*

Beispiel 4.29. *Um das in diesem Abschnitt entwickelte Vorgehen zu illustrieren, wird erneut Beispiel 4.15 verwendet. Es werden die in Beispiel 4.25 gewonnenen Matrizen $\mathbf{M}_2^*$ und $\mathbf{N}_2^*$ in* (4.45) *verwendet, um die Nullräume der Laplacematrix eines Graphen zu beschreiben, für den $N_\mathcal{R} = N_0^* = 2$ gilt. Dabei wird für die Anzahl der Cluster $N_\mathrm{C} \leq 3$ vorgegeben. Als resultierende Clusterung wird daher die Partitionierung der Indexmenge $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_2 = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{I}_3 = \{6\}$ gefunden. Somit existiert neben den beiden exklusiven Teilmengen auch eine gemeinsame Teilmenge $\mathcal{C}$ und es muss für drei Ziehungen ($\mathcal{C} \in \{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$) das Optimierungsproblem* (4.51) *gelöst werden. Optimierungsproblem* (4.51) *wird dabei unter Verwendung der in Bemerkung 4.28 diskutierten Modifikation gelöst, sodass z. B. für $\mathcal{C} = \mathcal{I}_2$ die Gleichungsbeschränkung*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

herangezogen wird. Es zeigt sich, dass die Wahl von $\mathcal{C} = \mathcal{I}_2$ optimal im Sinne von (4.52) *ist, was schließlich zu*

$$\tilde{\mathbf{M}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}0000 \\ 0 & 1{,}0000 \\ 0{,}2934 & 0{,}7066 \\ 0{,}2934 & 0{,}7066 \\ 0{,}2934 & 0{,}7066 \\ 1{,}0000 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \tilde{\mathbf{N}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3464 \\ 0 & 0{,}6536 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1{,}0000 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

führt. Es ergeben sich $\mathrm{E}(J_{\mathrm{T,Reg}}(\tilde{\mathbf{M}}^*\tilde{\mathbf{N}}^{*\top}, \mathbf{x}_0, \vartheta)) = 40996$ *als erwartete Kosten der Cluster-Synchronisierung dieser Lösung. Diese sind nur unwesentlich höher als die Kosten der in* (4.25) *gefundenen optimalen Cluster-Synchronisierung.*

5 Entwurf des Kommunikationsgraphen

In den letzten beiden Kapiteln wurden unter verschiedenen Perspektiven auf die Dynamik der Agenten algebraische Beschränkungen an den Entwurf des Kommunikationsgraphen im Sinne des in Abb. 1.2 skizzierten Entwurfsschemas abgeleitet. Für die Stabilität des transienten Verhaltens sowie die Optimalität des stationären Verhaltens des Systems wurden die Eigenwertpositionen und Nullräume der Laplacematrix spezifiziert. Alle Graphen, welche die gefundenen Beschränkungen erfüllen, führen also zu stabilem transienten Verhalten bzw. optimalem stationären Verhalten.

In diesem Kapitel wird nun darauf eingegangen, wie die gefundenen Beschränkungen beim Graphenentwurf berücksichtigt werden können. In Abschnitt 5.1 wird zunächst eine Parametrierungen der Laplacematrix vorgeschlagen, die sich für die Lösung der betrachteten Probleme eignet. In Abschnitt 5.2 wird dann die Platzierung der Eigenwerte der Laplacematrix von Graphen mit beliebigen Kantengewichten betrachtet. Es wird gezeigt, dass für diesen Fall die Vorgabe eines unter komplexer Konjugation invarianten Spektrums immer möglich ist. Als weitere Entwurfsziele werden die Einhaltung einer vorher festgelegten Struktur des Graphen (Abschnitt 5.2.2) sowie die Minimierung der Sensitivität der Eigenwerte gegenüber Störungen der Kantengewichte (Abschnitt 5.2.3) diskutiert. In Abschnitt 5.3 wird auf das Eigenwertvorgabeproblem noch einmal gesondert für Graphen mit positiven Kantengewichten eingegangen. In diesem Fall kann für das Problem im Allgemeinen keine geschlossene Lösung angegeben werden. Es wird jedoch in Abschnitt 5.3.2 auf einige Sonderfälle von Graphen mit wenigen Knoten eingegangen, für die eine tiefere analytische Einsicht in das Problem möglich ist. Die Ergebnisse zur Eigenwertvorgabe der Laplacematrix wurden teilweise bereits in [53] veröffentlicht.

Im Anschluss an die Betrachtung der Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix wird in Abschnitt 5.4 auch die Vorgabe der Nullräume behandelt. In Abschnitt 5.4.1 wird gezeigt, dass die Vorgabe des Linkseigenvektors zum Nulleigenwert für Graphen mit beliebigen Kantengewichten immer auch zusätzlich zur Vorgabe der Eigenwerte möglich ist. Während die Eigenwertvorgabe in den Abschnitten 5.2 und 5.3 ausschließlich für zusammenhängende Graphen diskutiert wird, wird in Abschnitt 5.4.2 die Vorgabe von Rechts- und Linksnullräumen für nicht zusammenhängende Graphen diskutiert.

5.1 Parametrierungen der Laplacematrix

Die in den Kapiteln 3 und 4 formulierten Beschränkungen an den Graphenentwurf beziehen sich allesamt auf die Laplacematrix $\mathbf{L}_w$. Diese wurde in (2.1) definiert. Für den Entwurf der Laplacematrix in diesem Kapitel wird jedoch nicht direkt die Definition aus (2.1) verwendet. Stattdessen wird eine Darstellung vorgeschlagen, welche für einen parametrischen Entwurf geeignet ist.

Die im Weiteren verwendete Parametrierung der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ basiert auf der Idee, diese als gewichtete Summe mehrerer bekannter Laplacematrizen darzustellen (vgl. Bemerkung 2.1 für die Rechtfertigung dieser Darstellung). Alle gewichteten Laplacematrizen $\mathbf{L}_w$ von Graphen mit N Knoten lassen sich als gewichtete Summe von $N \cdot (N-1)$ (ungewichteten) Einzel-Laplacematrizen $\mathbf{L}_{i,j}$ darstellen, welche jeweils genau eine Kante im vollständig verbundenen Graphen repräsentieren. Es gilt also

$$\mathbf{L}_w = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} w_{i,j} \mathbf{L}_{i,j} \tag{5.1}$$

mit

$$\mathbf{L}_{i,j} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\top \tag{5.2}$$

und $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$. Dabei beschreibt $\mathbf{L}_{i,j}$ die Kante vom Knoten ν_i zum Knoten ν_j. Die Gewichte $w_{i,j}$ sind direkt die Kantengewichte der entsprechenden Kante und $w_{i,j} = 0$ impliziert, dass die Kante vom Knoten ν_i zum Knoten ν_j nicht existiert. Die Kantengewichte werden im Weiteren in dem Vektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_N \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{N(N-1)} \tag{5.3}$$

zusammengefasst, wobei $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{i,1} & \dots & w_{i,i-1} & w_{i,i+1} & \dots & w_{i,N} \end{bmatrix}$ alle Gewichte enthält, welche vom Knoten ν_i ausgehen. Mit dieser Schreibweise kann Gleichung (5.1) auch vektorisiert dargestellt werden durch

$$\operatorname{vec}(\mathbf{L}_w) = \underbrace{\begin{bmatrix} \operatorname{vec}(\mathbf{L}_{1,2}) & \dots & \operatorname{vec}(\mathbf{L}_{N,N-1}) \end{bmatrix}}_{\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N(N-1)}} \mathbf{w}. \tag{5.4}$$

5.2 Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix für Graphen mit beliebigen Kantengewichten

In diesem Abschnitt wird die Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix für Graphen mit beliebigen Kantengewichten betrachtet. Dazu wird zunächst in Abschnitt 5.2.1 die Problemstellung konkretisiert und die Lösbarkeit im allgemeinen Fall aufgezeigt. In den nachfolgenden Abschnitte wird dann auf die Optimierung der Kantengewichte zum Erreichen sekundärer Entwurfsziele eingegangen.

5.2.1 Problemformulierung und Parametrierung der Lösung

Wie bei der Definition der Laplacematrix durch (2.1) in Abschnitt 2.1 bereits angemerkt, liegt mindestens ein Eigenwert der Laplacematrix strukturbedingt immer in Null. Dieser Eigenwert kann durch Wahl der Kantengewichte nicht beeinflusst werden, sodass nur die $N-1$ verbleibenden Eigenwerte vorgegeben werden können. Daher wird in diesem Abschnitt die folgende Problemstellung betrachtet.

Problem 5.1. *Sei eine Multimenge* $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ *gegeben, welche invariant unter komplexer Konjugation ist. Finde Kantengewichte* $w_{i,j} \in \mathbb{R}$ *zusammengefasst in* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N(N-1)}$ *wie in* (5.3), *sodass*

$$\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$$

für die resultierende Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ *nach* (5.1) *gilt.*

Statt den strukturbedingten Nulleigenwert zu berücksichtigen und $\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ zu fordern, kann auch direkt

$$\operatorname{spec}\left(\overline{\mathbf{L}}_w\right) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \tag{5.5}$$

gefordert werden, wobei

$$\overline{\mathbf{L}}_w = \mathbf{V}^\top \mathbf{L}_w \mathbf{V} \tag{5.6}$$

die in (2.2) eingeführte reduzierte Laplacematrix ist mit $\mathbf{V}$, sodass $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$. Die Parametrierung (5.1) kann dementsprechend auch für die reduzierte Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ angepasst werden zu

$$\overline{\mathbf{L}}_w = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} w_{i,j} \overline{\mathbf{L}}_{i,j} \tag{5.7}$$

mit

$$\overline{\mathbf{L}}_{i,j} = \mathbf{V}^\top \mathbf{L}_{i,j} \mathbf{V}. \tag{5.8}$$

Um Problem 5.1 zu lösen, müssen also Kantengewichte $w_{i,j} \in \mathbb{R}$ gefunden werden, sodass $\overline{\mathbf{L}}_w$ in (5.7) das gewünschte Spektrum aufweist. Statt dieses Problem direkt zu lösen, wird der Idee von Chu und Guo in [31] gefolgt und eine Ähnlichkeitstransformation von $\overline{\mathbf{L}}_w$ zu einer Matrix $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$ gesucht, für die

$$\operatorname{spec}(\mathbf{\Lambda}) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \tag{5.9}$$

gilt. Diese Idee zur Lösung von Problem 5.1 wird im folgenden Lemma zusammengefasst.

Lemma 5.2. *Sei eine Multimenge* $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ *gegeben, welche invariant unter komplexer Konjugation ist. Sei außerdem eine Matrix* $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$ *gegeben, für die* $\operatorname{spec}(\mathbf{\Lambda}) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ *gilt. Problem 5.1 ist lösbar, wenn Kantengewichte* $w_{i,j} \in \mathbb{R}$ *zusammengefasst in* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N(N-1)}$ *wie in* (5.3) *und eine reguläre Matrix* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$ *existieren, sodass*

$$\overline{\mathbf{L}}_w = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \tag{5.10}$$

für die reduzierte Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ *in* (5.7) *gilt. Wenn alle Elemente von* $\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ *paarweise verschieden sind, dann ist Bedingung* (5.10) *ebenfalls notwendig zur Lösung von Problem 5.1.*

Beweis. Mit der vorangegangen Diskussion ist direkt klar, dass die Existenz von $\mathbf{w}$ und $\mathbf{R}$ hinreichend für die Lösbarkeit von Problem 5.1 ist, da dann (5.5) gilt. Durch die Vorgabe von $\mathbf{\Lambda}$ wird

jedoch auch die Jordannormalform von $\overline{\mathbf{L}}_w$ vorgegeben, d. h., es werden die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte spezifiziert, welche in der Formulierung von Problem 5.1 noch offen gelassen wurden. Die Vorgabe paarweise verschiedener Eigenwerte spezifiziert jedoch direkt auch die geometrische Vielfachheit, sodass in diesem Fall die Notwendigkeit von Bedingung (5.10) zur Lösung von Problem 5.1 folgt. □

Lemma 5.2 wird im Weiteren als Hauptwerkzeug genutzt, um Problem 5.1 zu lösen. Dazu wird im Folgenden die Gleichung (5.10) vektorisiert und $\overline{\mathbf{L}}_w$ direkt durch (5.7) ersetzt. Analog zu (5.4) ergibt sich dadurch

$$\operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) = \underbrace{\left[\operatorname{vec}\left(\overline{\mathbf{L}}_{1,2}\right) \quad \dots \quad \operatorname{vec}\left(\overline{\mathbf{L}}_{N,N-1}\right)\right]}_{\overline{\mathcal{L}}} \mathbf{w}. \tag{5.11}$$

Dabei sind die Spalten von $\overline{\mathcal{L}}$ gemäß dem nach (5.3) sortierten Auftreten der entsprechenden Kantengewichte in $\mathbf{w}$ angeordnet. Die Matrix $\overline{\mathcal{L}}$ in (5.11) hat die folgenden vorteilhaften Eigenschaften, welche in Abschnitt B.5.1 bewiesen werden.

Lemma 5.3. *Die in* (5.11) *definierte Matrix* $\overline{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times N(N-1)}$ *hat vollen Zeilenrang und die Spalten der Matrix* $\overline{\mathcal{L}}^{\perp} := \mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}$ *sind eine Basis für den Rechtsnullraum von* $\overline{\mathcal{L}}$*, wobei* $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N-1}$ *die in* (5.6) *zur Definition der reduzierten Laplacematrix verwendete Matrix darstellt.*

Aus diesem Lemma lässt sich direkt das erste zentrale Ergebnis dieses Abschnitts ableiten, welches im folgenden Satz präsentiert wird.

Satz 5.4. *Problem 5.1 ist immer lösbar.*

Beweis. Da $\overline{\mathcal{L}}$ nach Lemma 5.3 vollen Rang hat, existiert für jede reguläre Matrix $\mathbf{R}$ und für jede Wahl von $\boldsymbol{\Lambda}$ immer eine Lösung $\mathbf{w}$ von (5.11). Wird $\boldsymbol{\Lambda}$ so gewählt, dass (5.9) gilt, so sind die Bedingungen in Lemma 5.2 immer erfüllbar, wodurch die Lösbarkeit von Problem 5.1 folgt. □

Bemerkung 5.5. *Nach Satz 5.4 ist Problem 5.1 immer lösbar. Dazu wurde im Beweis die Formulierung von Lemma 5.2 genutzt. Interessanterweise können die Kantengewichte* $\mathbf{w}$ *für jede reguläre Matrix* $\mathbf{R}$ *und für jede Wahl von* $\boldsymbol{\Lambda}$ *explizit angegeben werden zu*

$$\mathbf{w} = \overline{\mathcal{L}}^{+} \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) + (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1})\, \boldsymbol{\rho}, \tag{5.12}$$

wobei $\overline{\mathcal{L}}^{+}$ *die Pseudoinverse von* $\overline{\mathcal{L}}$ *darstellt und* $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1})$ *nach Lemma 5.3 den Rechtsnullraum von* $\overline{\mathcal{L}}$ *aufspannt. Der Vektor* $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{N-1}$ *parametriert die Freiheitsgrade zur Lösung von* (5.11)*. Dies zeigt, dass die Lösung von Problem 5.1 niemals eindeutig ist.*

Bemerkung 5.6. *In Lemma 5.3 wurde gezeigt, dass der Nullraum von* $\overline{\mathcal{L}}$ *durch* $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1})$ *aufgespannt wird, wenn* $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N-1}$ *die in* (5.6) *zur Definition der reduzierten Laplacematrix verwendete Matrix darstellt. Der in Abschnitt B.5.1 dazu angegebene Beweis verwendet jedoch nur, dass* $\mathbf{V}$ *vollen Spaltenrang hat und* $\mathbf{1}_N^{\top}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ *gilt (vgl. Gleichung* (B.17)*). Der Nullraum von* $\overline{\mathcal{L}}$ *wird daher ebenso von* $(\mathbf{V}' \otimes \mathbf{1}_{N-1})$ *aufgespannt, wenn* $\mathbf{V}' \in \mathbb{R}^{N \times N-1}$ *vollen Spaltenrang hat und* $\mathbf{1}_N^{\top}\mathbf{V}' = \mathbf{0}$ *gilt. Mit der Wahl von* $\mathbf{V}$ *wie in* (5.6) *vereinfachen sich jedoch manche der folgenden Betrachtungen, weshalb diese Wahl in Lemma 5.3 direkt verwendet wurde.*

Bemerkung 5.7. *Die beiden Matrizen* $\mathbf{R}, \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$*, welche in Lemma 5.2 eingeführt wurden, um das Eigenwertvorgabeproblem zu einer algebraischen Bedingung umzuformen, spielen im weiteren Verlauf dieses Kapitels eine wichtige Rolle. Da insbesondere* $\mathbf{R}$ *als Optimierungsvariable in verschiedenen Optimierungsproblemen verwendet wird, ist die Beschränkung auf reelle Matrizen wesentlich. Die Matrix* $\mathbf{\Lambda}$ *muss ebenso reell gewählt werden und soll das vorgegebene Spektrum enthalten. Dabei kann* $\mathbf{\Lambda}$ *einfach als Blockdiagonalmatrix gewählt werden, wobei jeder Block einen vorzugebenden Eigenwert repräsentiert. Für reelle Eigenwerte* $\lambda \in \mathbb{R}$ *kann* λ *direkt als skalarer Block berücksichtigt werden. Für konjugiert-komplexe Eigenwertpaare* $\lambda = \sigma \pm \mathrm{j}\omega \in \mathbb{C}$ *kann stattdessen*

$$\begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

als Block gewählt werden.[1]

Beispiel 5.8. *Als Beispiel wird in diesem Abschnitt immer wieder der Entwurf von Graphen betrachtet, sodass die Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix allesamt bei* $\lambda = 0{,}381 \pm \mathrm{j}\,0{,}925$ *liegen, wobei dies dem Mittelpunkt des maximalen Kreises innerhalb der Synchronisierungsmenge in Beispiel 3.32 entspricht. Es wird ein Graph mit* $N = 5$ *Knoten entworfen. Für die Wahl von* $\mathbf{\Lambda}$ *gemäß Bemerkung 5.7 und* $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{N-1}$ *ergibt sich*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 0{,}3048 & -0{,}4899 & 0{,}3375 & -0{,}4899 & 0{,}3375 \\ 0{,}3375 & 0{,}3047 & -0{,}7455 & -0{,}0762 & 0{,}1795 \\ -0{,}4899 & 0{,}5931 & 0{,}3049 & -0{,}3319 & -0{,}0762 \\ 0{,}3375 & -0{,}0762 & 0{,}1795 & 0{,}3047 & -0{,}7455 \\ -0{,}4899 & -0{,}3319 & -0{,}0762 & 0{,}5931 & 0{,}3049 \end{bmatrix}$$

als Lösung, welche mithilfe der Pseudoinversen $\overline{\mathcal{L}}^{+}$ *wie in* (5.12) *für* $\rho = \mathbf{0}$ *gewonnen wird.*

5.2.2 Vorgabe der Struktur des Graphen

In Bemerkung 5.5 wurde bereits herausgearbeitet, dass die Lösung von Problem 5.1 nach Satz 5.4 immer existiert, jedoch niemals eindeutig ist. Für den Entwurf eines Graphen wirft dies die Frage auf, welche Lösung ausgewählt werden soll. In diesem und dem nachfolgenden Abschnitt werden daher Möglichkeiten diskutiert, wie die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade bei der Wahl der Kantengewichte genutzt werden können.

Ein häufiges Ziel ist es, nur bestimmte Kanten zum Graphenentwurf zu verwenden, d. h. die Struktur des Graphen *a priori* festzulegen. So ist es beispielsweise denkbar, dass gewisse Kommunikationskanäle beim Entwurf eines Multi-Agenten-Systems vermieden werden sollen. Für den in diesem Abschnitt vorgestellten Entwurf der Laplacematrix bedeutet dies, dass einige Elemente in dem Kantengewichtsvektor $\mathbf{w}$ nicht zum Entwurf zur Verfügung stehen bzw. zu Null gewählt werden müssen.

[1] Diese Wahl entspricht dem in Abschnitt A.5 beschriebenen Isomorphismus von $\lambda_+ = \sigma + \mathrm{j}\omega$.

Nach Lemma 5.2 wird Problem 5.1 gelöst, wenn Gleichung (5.11) erfüllt ist. Soll die Struktur des Graphen *a priori* vorgegeben werden, so kann auf die modifizierte Gleichung

$$\operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}}\tilde{\mathbf{w}} \tag{5.13}$$

zurückgegriffen werden. Dabei fasst $\tilde{\mathbf{w}}$ alle Elemente des Kantengewichtsvektors $\mathbf{w}$ zusammen, die zum Entwurf verwendet werden dürfen. Die Matrix $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ setzt sich dann aus den Spalten von $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ in (5.11) zusammen, die zu den entsprechenden in $\tilde{\mathbf{w}}$ enthaltenen Elementen von $\mathbf{w}$ gehören.

Die in Lemma 5.3 benannte vorteilhafte Eigenschaft, dass $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ vollen Zeilenrang hat, ist für die Matrix $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ in (5.13) im Allgemeinen nicht mehr erfüllt. Daher stellt die Vorgabe der Struktur des Graphen eine Einschränkung dar. Hat die Matrix $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ Rangabfall, d. h., gilt $m_{\tilde{\mathbf{w}}} := (N-1)^2 - \operatorname{rang}(\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}}) > 0$, so ist Gleichung (5.13) und somit Problem 5.1 unter Umständen nicht mehr lösbar.

Die Lösbarkeit von Gleichung (5.13) hängt dabei auch von der Wahl der regulären Matrix $\mathbf{R}$ ab. Für eine gegebene Matrix $\mathbf{R}$ ist Gleichung (5.13) genau dann lösbar (vgl. [11, Fakt 2.10.6]), wenn

$$\boldsymbol{\Xi}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{\top}\operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) = \mathbf{0} \tag{5.14}$$

gilt, wobei $\boldsymbol{\Xi}_{\tilde{\mathbf{w}}} \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times m_{\tilde{\mathbf{w}}}}$ eine Basis für den Linksnullraum von $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ darstellt, d. h., $\boldsymbol{\Xi}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ hat vollen Spaltenrang und es gilt $\boldsymbol{\Xi}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{\top}\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\tilde{\mathbf{w}}} = \mathbf{0}$. Die Erfüllung der nichtlinearen Gleichung (5.14) garantiert also, dass eine Lösung von Problem 5.1 für eine vorgegebene Graphenstruktur existiert.

Beispiel 5.9. *An dieser Stelle wird als Beispiel erneut ein Graph mit dem Ziel entworfen, die Eigenwerte der Laplacematrix wie in Beispiel 5.8 zu platzieren. Für den Entwurf wird die in Abb. 5.1 gezeigte Graphenstruktur vorgegeben. Die Lösung von Gleichung* (5.14) *wurde mithilfe des in der Funktion* `fsolve` *der Matlab Optimization Toolbox [91] implementierten Levenberg-Marquardt-Algorithmus gesucht. Es wurde die Laplacematrix*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} -0{,}2213 & -7{,}1930 & 0 & 7{,}4143 & 0 \\ 6{,}0070 & -6{,}0070 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}2585 & -5{,}7087 & 0{,}4141 & 0 & 0{,}0361 \\ 0 & -6{,}9902 & 0 & 6{,}9902 & 0 \\ -130{,}3464 & 0 & -23{,}7329 & 153{,}7314 & 0{,}3479 \end{bmatrix}$$

gefunden, welche die vorgegebene Struktur und das spezifizierte Spektrum aufweist.

5.2.3 Minimierung der Eigenwertsensitivität

In Abschnitt 3.1 und insbesondere in Abschnitt 3.1.4 wurde die Bedeutung der Lage der Eigenwerte der Laplacematrix für die Stabilität der Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems ausführlich diskutiert. Für einen (dynamischen) Synchronisierungsregler mit den im Tupel $\boldsymbol{\Theta}$ wie in (3.1) zusammengefassten Reglermatrizen wurde durch Satz 3.25 eine Beschreibung der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbb{C}$ angegeben, in der alle Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix für eine erfolgreiche Synchronisierung liegen müssen.

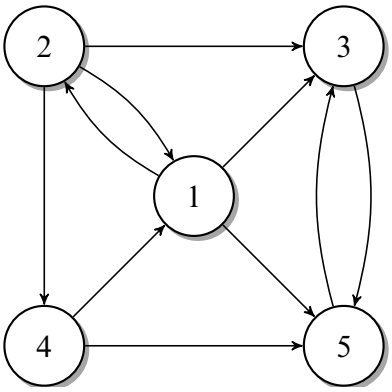

Abbildung 5.1: Vorgegebene Struktur für den Graphenentwurf in den Beispielen 5.9 und 5.11.

Bisher wurde in diesem Abschnitt diskutiert, wie ein Graph mit vorher spezifiziertem Spektrum der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ bzw. der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ entworfen werden kann. Werden die Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ ausschließlich innerhalb der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ gewählt, so führt dieser Graph gemeinsam mit dem Synchronisierungsregler $\mathbf{\Theta}$ zur Synchronisierung des Multi-Agenten-Systems. Liegen die Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ jedoch außerhalb von $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$, so scheitert die Synchronisierung.

Die Einführung der Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ wurde in Abschnitt 3.1.4 auch damit motiviert, dass die Lage der Eigenwerte der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ durch Variation der Kantengewichte gestört wird. Die Synchronisierungsmenge $\mathcal{S}(\mathbf{\Theta})$ beschreibt somit auch, wie stark diese Störung der Eigenwerte ausfallen darf, ohne dass die Synchronisierung scheitert. Durch den Entwurf von Synchronisierungsreglern mit maximalem Synchronisierungsradius in Abschnitt 3.1.5 wurde in diesem Sinne bereits die Robustheit der Synchronisierung erhöht, indem die Synchronisierungsmenge vergrößert wurde. In diesem Abschnitt wird ergänzend dazu ein Graphenentwurf angestrebt, welcher die Sensitivität der Eigenwerte von $\overline{\mathbf{L}}_w$ gegenüber Störungen der Kantengewichte minimiert, wodurch die Robustheit der Synchronisierung weiter erhöht wird.

Bei Verwendung des in den letzten Abschnitten vorgestellten Entwurfsschemas wird die reduzierte Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ nach (5.10) durch

$$\overline{\mathbf{L}}_w = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1} \tag{5.15}$$

beschrieben, wobei durch die Wahl der regulären Matrix $\mathbf{R}$ Freiheitsgrade im Entwurf gegeben sind, welche genutzt werden können, um die Sensitivität der Eigenwerte von $\overline{\mathbf{L}}_w$ gegenüber Störungen der Kantengewichte zu minimieren. Für die Matrix $\mathbf{\Lambda}$, welche das Spektrum der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ spezifiziert, wird in diesem Abschnitt folgende Annahme getroffen:

Annahme 5.10. *Die Matrix* $\mathbf{\Lambda}^{N-1\times N-1}$ *mit* $\operatorname{spec}(\mathbf{\Lambda}) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ *ist diagonalisierbar und* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}$ *ist Rechtseigenvektormatrix von* $\mathbf{\Lambda}$*, d. h., es gilt* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}} = \operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_N)$.

Unter dieser Annahme gilt

$$\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\overline{\mathbf{L}}_w\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}} = \operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$

Somit ist $\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}$ Rechtseigenvektormatrix der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$.

Um eine niedrige Sensitivität der Eigenwerte zu erreichen, wird in der regelungstechnischen Literatur meist die Konditionszahl der Eigenvektormatrix minimiert (vgl. [60, 24, 144, 141]). Die Wahl der Konditionszahl als Minimierungsziel basiert auf dem Bauer-Fike-Theorem (vgl. [55, Theorem 6.3.2]). Für den hier betrachteten Fall besagt das Bauer-Fike-Theorem, dass für alle Eigenwerte λ' der gestörten reduzierten Laplacematrix $(\overline{\mathbf{L}}_w + \mathbf{\Delta})$ die Beziehung

$$\min_{\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)} \left|\lambda' - \lambda\right| \leq \left\| \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{\Delta} \mathbf{R} \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}} \right\| \leq \underbrace{\|\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}\| \cdot \left\| (\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}})^{-1} \right\|}_{\kappa(\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}})} \cdot \|\mathbf{\Delta}\|$$

gilt, wobei $\kappa(\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}})$ die Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix $\mathbf{R}\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}$ bezüglich der gewählten submultiplikativen Norm darstellt. Das Bauer-Fike-Theorem beschreibt also eine obere Grenze für die Veränderungen der Eigenwerte einer diagonalisierbaren Matrix bei Störung durch die Matrix $\mathbf{\Delta}$. Wird die Konditionszahl der Rechtseigenvektormatrix zur Abschätzung dieser oberen Schranke verwendet, so wird die Struktur der Störmatrix $\mathbf{\Delta}$ vernachlässigt. Für die Störung der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ durch Veränderungen der Kantengewichte $\mathbf{w}$ ist die Struktur der Störung jedoch bekannt. Mit der Darstellung (5.7) für die reduzierte Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ gilt

$$\mathbf{\Delta} = \Delta \overline{\mathbf{L}}_w = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \Delta w_{i,j} \overline{\mathbf{L}}_{i,j},$$

wobei $\Delta w_{i,j}$ die Störung des Kantengewichts $w_{i,j}$ darstellt. Mithilfe der Dreiecksungleichung lässt sich daher

$$\min_{\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)} \left|\lambda' - \lambda\right| \leq \left\| \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{\Delta} \mathbf{R} \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}} \right\|_{\mathrm{F}} \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left\| \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \overline{\mathbf{L}}_{i,j} \mathbf{R} \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}} \right\|_{\mathrm{F}} \cdot \left|\Delta w_{i,j}\right|$$

als Abschätzung für die Eigenwertstreuung angeben. Dabei wurde die Frobenius-Norm als submultiplikative Norm gewählt. Im Weiteren wird die vektorisierte Schreibweise

$$\min_{\lambda \in \operatorname{spec}(\overline{\mathbf{L}}_w)} \left|\lambda' - \lambda\right| \leq \sum_{k=1}^{N(N-1)} \left\| \left(\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{\top} \mathbf{R}^{\top} \otimes \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \right) \cdot \overline{\mathcal{L}} \mathbf{e}_k \right\|_2 \cdot \left| \mathbf{e}_k^{\top} \Delta \mathbf{w} \right| \tag{5.16}$$

mit $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^{N(N-1)}$ verwendet. Der Vektor der Störungen der Kantengewichte $\Delta \mathbf{w}$ ist analog zum Kantengewichtsvektor $\mathbf{w}$ in (5.3) aufgebaut. Die Abschätzung (5.16) dient im Folgenden dazu, die Kantengewichte zu optimieren, um eine möglichst geringe Streuung der Eigenwerte bei Störung der Kantengewichte zu erhalten. Dazu wird zunächst das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{R}} \sum_{k=1}^{N(N-1)} \left\| \left(\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{\top} \mathbf{R}^{\top} \otimes \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \right) \cdot \overline{\mathcal{L}} \mathbf{e}_k \right\|_2 \tag{5.17}$$

betrachtet. Es wird also die durch (5.16) gegebene Schranke für die Eigenwertstreuung minimiert unter der Voraussetzung, dass alle Kantengewichte betragsmäßig gleichmäßig gestört werden, d. h., dass $|\Delta w_{i,j}| = \Delta w$ für alle i, j gilt. Bemerkenswert an diesem Optimierungsziel ist,

dass die Minimierung der Eigenwertsensitivität gemäß (5.17) nur von der Matrix $\mathbf{R}$ abhängig ist. Somit ist die Minimierung unabhängig von der konkreten Wahl der Kantengewichte $\mathbf{w}$, solange diese (5.11) erfüllt. Daraus folgt, dass einfach die im vorigen Abschnitt hergeleitete Gleichung (5.13) als Nebenbedingung in der Optimierung hinzugenommen werden kann, wenn Graphen mit einer *a priori* festgelegten Struktur entworfen werden sollen. In diesem Fall sollten zusätzlich die Summenterme im Gütemaß von (5.17) verworfen werden, die zu Kanten gehören, welche nicht verwendet werden dürfen.

Da die Abschätzung der Eigenwertstreuung durch (5.16) für beliebig kleine Störungen der Kantengewichte Δw gilt, wird durch Optimierungsproblem (5.17) tatsächlich die Eigenwertsensitivität minimiert, d. h. die Reaktion der Eigenwerte auf kleinste Veränderung der Kantengewichte. Im Kontext der Synchronisierung von Multi-Agenten-Systemen können solche geringen Schwankungen der Kantengewichte beispielsweise durch Implementierungsungenauigkeiten der Regler der einzelnen Agenten hervorgerufen werden. Dahingegen stellt der Ausfall einer Kommunikationsverbindung eine gravierendere Störung dar. Dies entspricht dem Wegfall einer Kante im Kommunikationsgraph. Ein solcher Wegfall einer Kante wird durch Wahl des Vektors der Störungen der Kantengewichte $\Delta\mathbf{w}$ zu

$$\Delta\mathbf{w} = -\mathbf{e}_k \odot \mathbf{w}$$

abgebildet, wodurch der gestörte Kantengewichtsvektor $(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})$ an der entsprechenden Stelle einen Nulleintrag erhält. Dabei stellt $\odot$ das Hadamard-Produkt, d. h. die elementweise Multiplikation, dar. Durch diese Wahl kann (5.16) dazu verwendet werden, die Streuung der Eigenwerte bei Wegfall einer Kante abzuschätzen. Mit diesen Vorüberlegungen wird das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{R},\mathbf{w},\delta} \quad \delta \tag{5.18a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \left\| \left(\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\top}\mathbf{R}^{\top} \otimes \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\mathbf{R}^{-1} \right) \cdot \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{e}_k \right\|_2 \cdot \left|\mathbf{e}_k^{\top}\mathbf{w}\right| \leq \delta, \quad k = 1, \ldots, N(N-1) \tag{5.18b}$$

$$\operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{w} \tag{5.18c}$$

formuliert. Durch dieses Minimierungsproblem werden die Kantengewichte so optimiert, dass die durch (5.16) gegebene obere Grenze der Eigenwertstreuung für den Wegfall einer Kante im Worst-Case minimiert wird.

Beispiel 5.11. *An dieser Stelle wird ein Graph mit derselben Struktur und demselben Spektrum wie in Beispiel 5.9 entworfen. Allerdings wird der Entwurf diesmal durch Lösen von Optimierungsproblem* (5.17) *unter zusätzlicher Berücksichtigung von* (5.14) *als Nebenbedingung zur Vorgabe der Struktur durchgeführt. Als Ergebnis wird die Laplacematrix*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 0{,}9701 & -2{,}0215 & 0 & 1{,}0514 & 0 \\ 0{,}9146 & -0{,}9146 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7188 & -1{,}4498 & 0{,}2016 & 0 & 0{,}5294 \\ 0 & -0{,}7065 & 0 & 0{,}7065 & 0 \\ 0{,}7279 & 0 & -1{,}6771 & 0{,}3887 & 0{,}5605 \end{bmatrix}$$

erhalten. Um den Vorteil der Minimierung der Eigenwertsensitivität zu verdeutlichen, wird die so entworfene Laplacematrix mit der Laplacematrix aus Beispiel 5.9 verglichen. Dazu wurden in

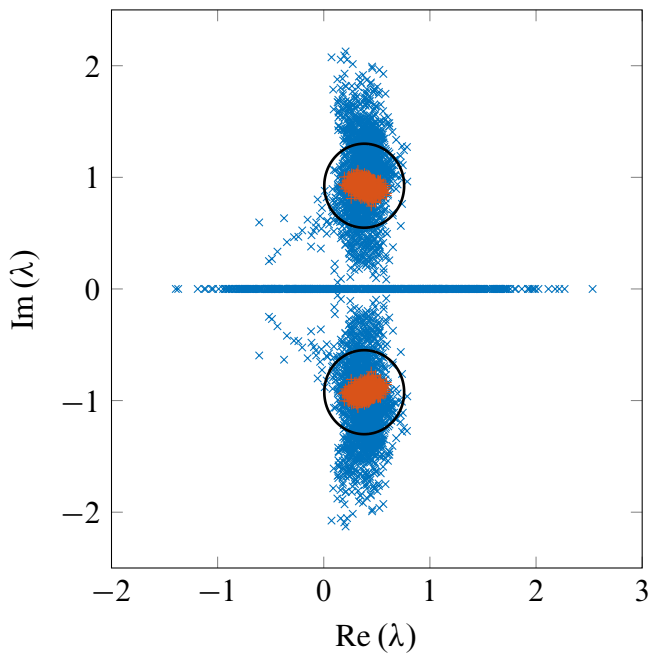

Abbildung 5.2: Monte-Carlo-Simulation der Eigenwertstreuung durch Störung der Kantengewichte der Laplacematrizen aus Beispiel 5.9 (×) und Beispiel 5.11 (+). Maximaler Kreis innerhalb der Synchronisierungsmenge aus Beispiel 3.32 (—).

einer Monte-Carlo-Simulation in 1000 *Versuchen die Kantengewichte gestört, wobei die additive Störung der Kantengewichte unabhängig normalverteilt mit einer Varianz von* $\mathrm{Var}(\Delta w_{k,l}) = 0{,}0025$ *simuliert wurde. In Abb. 5.2 sind die Eigenwerte der gestörten Laplacematrizen aufgetragen. Dabei ist zu erkennen, dass die Streuung der Eigenwerte der Laplacematrix mit minimierter Eigenwertsensitivität erheblich geringer ausfällt. Es ist außerdem der maximale Kreis innerhalb der Synchronisierungsmenge aus Beispiel 3.32 eingezeichnet. Die gestörten Eigenwerte der Laplacematrix mit minimierter Eigenwertsensitivität verbleiben allesamt innerhalb dieses Kreises, sodass trotz Störung der Kantengewichte bei Wahl dieser Laplacematrix weiterhin Synchronisierung erreicht wird. Dahingegen liegen die gestörten Eigenwerte der Laplacematrix aus Beispiel 5.9 teilweise weit außerhalb des eingezeichneten Kreises und sogar auf der reellen Achse. In diesem Fall würden die Eigenwerte somit außerhalb der Synchronisierungsmenge liegen und zum Scheitern der Synchronisierung führen.*

Beispiel 5.12. *Zusätzlich zur in Beispiel 5.11 betrachteten Störung der Kantengewichte soll nun noch das Verhalten der Eigenwerte bei Wegfall einer Kante untersucht werden. Dazu wird erneut ein Graph mit denselben Eigenwerten wie in Beispiel 5.8 entworfen. Diesmal wird der Entwurf durch Lösen von Optimierungsproblem* (5.18) *durchgeführt. Es resultiert die Laplacematrix*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 0{,}3756 & -0{,}6301 & 0{,}2650 & -0{,}5393 & 0{,}5288 \\ 0{,}1469 & 0{,}0430 & -0{,}4837 & 0{,}1469 & 0{,}1469 \\ -0{,}3268 & 0{,}6268 & 0{,}3536 & -0{,}3268 & -0{,}3268 \\ 0{,}5288 & -0{,}6301 & 0{,}2650 & 0{,}3756 & -0{,}5393 \\ -0{,}5393 & -0{,}6301 & 0{,}2650 & 0{,}5288 & 0{,}3756 \end{bmatrix}.$$

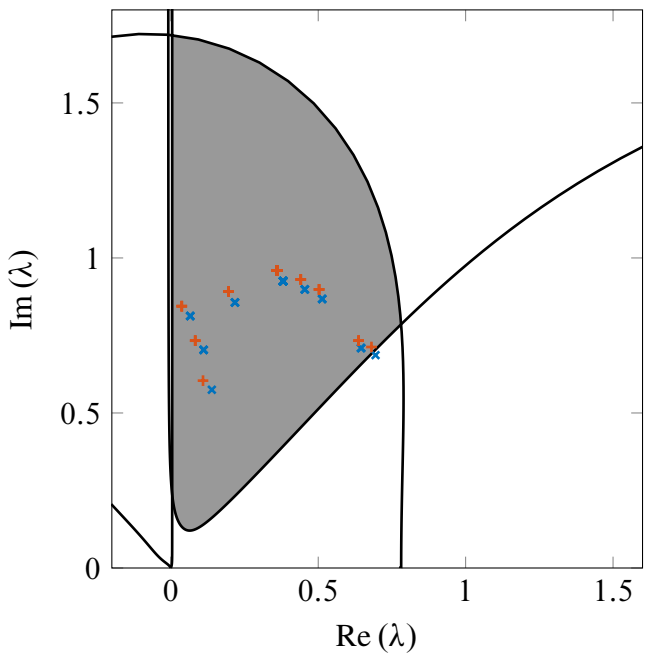

Abbildung 5.3: Eigenwertstreuung bei Wegfall von Kanten der Laplacematrix aus Beispiel 5.12 (×) und bei Vorgabe aller Eigenwerte zu $\lambda = 0{,}36 \pm \mathrm{j}0{,}96$ (+). In grau hinterlegt ist die Synchronisierungsmenge aus Beispiel 3.32 zu sehen, welche von den entsprechenden Nyquist-Kurven begrenzt wird.

Als minimaler Gütewert von Optimierungsproblem (5.18) *wird* $\delta^* = 0{,}718$ *erreicht. Im Sinne von* (5.16) *stellt* δ^* *eine obere Grenze für den Streuradius der Eigenwerte bei Wegfall einer Kante dar. Der tatsächliche Streuradius der Eigenwerte bei Wegfall einer Kante kann für diesen Graphen zu* $\Delta\lambda_{\max} = 0{,}4352$ *berechnet werden. Beide Radien sind größer als der Synchronisierungsradius* $r_{\max} = 0{,}3763$ *des maximalen Kreises in der Synchronisierungsmenge aus Beispiel 3.32, zu dessen Mittelpunkt* $\lambda = 0{,}381 \pm \mathrm{j}\,0{,}925$ *alle Eigenwerte der ungestörten reduzierten Laplacematrix vorgegeben wurden. Dass gestörte Eigenwerte außerhalb dieses Kreises liegen, muss jedoch noch nicht bedeuten, dass diese auch außerhalb der Synchronisierungsmenge liegen. In diesem Beispiel tritt jedoch bei Wegfall der Kante von Knoten* v_2 *zu Knoten* v_3 *tatsächlich der Fall auf, dass ein konjugiert-komplexes Eigenwertpaar knapp außerhalb der Synchronisierungsmenge liegt (vgl. (×) in Abb. 5.3), wodurch bei Wegfall dieser Kante die Synchronisierung scheitern würde. Wird derselbe Entwurf mit der Vorgabe aller Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix bei* $\lambda = 0{,}36 \pm \mathrm{j}\,0{,}96$ *durchgeführt, so wird erreicht, dass alle Eigenwerte innerhalb der Synchronisierungsmenge liegen, egal welche Kante wegfällt (vgl. (+) in Abb. 5.3). Dies offenbart eine Schwäche des Eigenwertvorgabeentwurfs: Die Wahl der richtigen Eigenwerte kann entscheidend zum Erreichen des überlagerten Entwurfsziels sein. Eine vielversprechende Alternative zur Eigenwertvorgabe ist daher die Eigenwertbereichsvorgabe (vgl. [64, 140, 154]), bei der die konkrete Wahl der Eigenwerte ebenfalls der Optimierung zur Verfügung steht.*

5.3 Vorgabe der Eigenwerte der Laplacematrix für Graphen mit positiven Kantengewichten

In der gesamten vorliegenden Arbeit werden für gewichtete Graphen sowohl positive als auch negative Kantengewichte zugelassen. In Kapitel 2 wurde bereits ersichtlich, dass viele Ergebnisse in der Literatur lediglich für Graphen mit positiven Kantengewichten gültig sind. Dies liegt daran, dass gewichtete Graphen oft für ausschließlich positive Kantengewichte definiert werden (vgl. [1, 96]). Daher wird in diesem Abschnitt der Fall von Graphen mit positiven Kantengewichten noch einmal gesondert betrachtet. Dazu wird in Abschnitt 5.3.1 zunächst die Problemstellung formuliert und die Lösbarkeit diskutiert. Anschließend werden in Abschnitt 5.3.2 einige Sonderfälle für kleine Graphen behandelt, für die eine tiefere Einsicht in die Lösung des Problems möglich ist.

5.3.1 Problemformulierung

In diesem Abschnitt wird die folgende Problemstellung diskutiert.

Problem 5.13. *Sei eine Multimenge $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ gegeben, welche invariant unter komplexer Konjugation ist. Finde Kantengewichte $w_{i,j} \in \mathbb{R}$ zusammengefasst in $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N(N-1)}$ wie in* (5.3)*, für die $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ und*

$$\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$$

für die resultierende Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ nach (5.1) *gilt.*

Für beliebige Kantengewichte wurde in Satz 5.4 gezeigt, dass das Problem der Eigenwertvorgabe für die Laplacematrix immer lösbar ist. Diese Aussage verliert unter der zusätzlichen Einschränkung $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ ihre Gültigkeit. Dies wird ersichtlich durch folgendes Lemma, welches in [1] unter Verwendung eines Resultats aus [32] gezeigt wurde und mit entsprechenden Resultaten zu stochastischen Matrizen übereinstimmt (vgl. [59], [31]).

Lemma 5.14 ([1])**.** *Für das Spektrum einer Laplacematrix $\mathbf{L}_w \in \mathbb{R}^{N \times N}$ nach* (5.1) *mit $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ gilt*

$$\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w) \subseteq \mathcal{D}(N), \tag{5.19}$$

wobei

$$\mathcal{D}(N) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg(\lambda) \in [-(\pi/2 - \pi/N), (\pi/2 - \pi/N)]\}. \tag{5.20}$$

Lemma 5.14 gibt eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von Problem 5.13 an. Dies bedeutet, dass Problem 5.13 nicht lösbar ist, wenn Eigenwerte außerhalb der durch (5.20) definierten Menge $\mathcal{D}(N)$ vorgegeben werden sollen. Die Frage nach der Lösbarkeit von Problem 5.13 für

$$\{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \subseteq \mathcal{D}(N) \tag{5.21}$$

lässt sich hingegen nicht ohne Weiteres beantworten. Eigenwertvorgaben, für die (5.21) gilt, können aber als valide Kandidaten für die Lösung von Problem 5.13 angesehen werden. Die Validität eines Kandidaten löst nicht das Problem, stellt aber trotzdem eine nützliche Information dar [30].

Die Suche nach einer Lösung von Problem 5.13 kann mit derselben Idee wie in Abschnitt 5.2.1 unter Verwendung von Lemma 5.2 verfolgt werden. Es kann also eine Matrix $\mathbf{\Lambda}$, welche das vorzugebende Spektrum enthält, gewählt werden und dann nach einer regulären Matrix $\mathbf{R}$ und nichtnegativen Kantengewichten $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ gesucht werden, sodass (5.10) bzw. (5.11) erfüllt ist. Die Einschränkung auf nichtnegative Kantengewichte erschwert die Suche, es können jedoch Verfahren zur beschränkten Optimierung zur Lösung verwendet werden. Um die Anzahl der Optimierungsvariablen klein zu halten, kann außerdem von der in Bemerkung 5.5 angegebenen, von $\mathbf{R}$ abhängigen expliziten Parametrierung (5.12) des Kantengewichtsvektors $\mathbf{w}$ Gebrauch gemacht werden. Dies wird im folgenden Lemma formal zusammengefasst und dient später zur Herleitung einer Lösung für Graphen mit $N = 3$ Knoten.

Lemma 5.15. *Sei eine Multimenge $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ gegeben, welche invariant unter komplexer Konjugation ist. Sei außerdem eine Matrix $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$ gegeben, für die* $\operatorname{spec}(\mathbf{\Lambda}) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ *gilt. Problem 5.13 ist lösbar, wenn eine reguläre Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$ und $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ existieren, sodass*

$$\overline{\mathcal{L}}^{+} \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}_{N-1})\,\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0} \tag{5.22a}$$

$$\mathbf{1}_N^{\top}\boldsymbol{\xi} \leq 0 \tag{5.22b}$$

gilt. Wenn alle Elemente von $\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ paarweise verschieden sind, dann ist die Erfüllung der Ungleichungen (5.22) *ebenfalls notwendig zur Lösung von Problem 5.13.*

Seien $\boldsymbol{\xi}^*$ und $\mathbf{R}^*$, sodass die Ungleichungen (5.22) *erfüllt sind, dann wird Problem 5.13 gelöst durch Wahl von $\mathbf{w}$ nach* (5.12) *mit $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$ und $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{\top}\boldsymbol{\xi}^*$.*

Beweis. Wie im Vorfeld des Lemmas diskutiert, folgt aus denselben Argumenten wie im Beweis von Lemma 5.2, dass es hinreichend (und im Fall einfacher Eigenwerte auch notwendig) zur Lösung von Problem 5.13 ist, wenn eine reguläre Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$ und nichtnegative Kantengewichte $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ existieren, sodass (5.10) bzw. (5.11) gilt. Nach Bemerkung 5.5 kann $\mathbf{w}$ für alle $\mathbf{R}$ explizit parametriert werden durch (5.12) mit den Freiheitsgraden $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{N-1}$. Die Existenz von $\mathbf{R}$ und $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$, sodass (5.10) gilt, ist also äquivalent zur Existenz von $\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\rho}$ und $\delta \leq 0$, sodass

$$\overline{\mathcal{L}}^{+} \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) + (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1})\,\boldsymbol{\rho} + \delta \cdot (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_{N-1}) \geq \mathbf{0}.$$

Werden δ und $\boldsymbol{\rho}$ durch

$$\boldsymbol{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{1}_N & \mathbf{V}\end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix}\delta \\ \boldsymbol{\rho}\end{bmatrix}$$

ersetzt, so ergibt sich direkt Ungleichung (5.22a). Die Matrix $\mathbf{T}$ stimmt mit der Transformationsmatrix überein, die zur Bestimmung der reduzierten Laplacematrix in (2.3) verwendet wurde. Die inverse Transformation ist durch

$$\begin{bmatrix}\delta \\ \boldsymbol{\rho}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{N}\mathbf{1}_N^{\top} \\ \mathbf{V}^{\top}\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}$$

gegeben, wodurch $\delta = \frac{1}{N}\mathbf{1}_N^{\top}\boldsymbol{\xi}$ und die Ungleichung (5.22b) folgt, da $\delta \leq 0$ gefordert wurde. Zudem wird durch die Rücktransformation die Wahl von $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{\top}\boldsymbol{\xi}$ offensichtlich. □

Bemerkung 5.16. *Soll beim Entwurf von Graphen mit positiven Kantengewichten wie in Abschnitt 5.2.2 die Struktur des Graphen teilweise vorgegeben werden, so ist es nicht sinnvoll, Gleichung* (5.14) *als Beschränkung in die Suche nach einer gültigen Lösung von* (5.22) *mit aufzunehmen, da durch die Erfüllung von Gleichung* (5.14) *nur garantiert wird, dass die Struktur bei Verwendung beliebiger (ggf. auch negativer) Kantengewichte eingehalten werden kann. Stattdessen kann im Fall positiver Kantengewichte einfach*

$$\mathbf{f}^\top \mathbf{w} = 0$$

als Beschränkung hinzugenommen werden. Über den Vektor $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$ *kann dann erzwungen werden, dass alle Elemente in* $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ *zu Null werden, die zu Kanten gehören, welche im Entwurf vermieden werden sollen. Dazu müssen einfach die entsprechenden Elemente in* $\mathbf{f}$ *ungleich Null gewählt werden und alle anderen Elemente in* $\mathbf{f}$ *zu Null gewählt werden. Da* $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ *folgt dann* $w_k = 0$ *für alle* $k \in \{1, \ldots, N(N-1)\}$*, für die* $f_k > 0$*. Wird die Formulierung* (5.22) *in Lemma 5.15 verwendet, um eine Lösung zu finden, so kann entsprechend mit* (5.12) *und* $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^\top \boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{f}^\top \cdot \underbrace{\left(\overline{\mathcal{L}}^+ \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\right) + \left(\mathbf{V}\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{1}_{N-1}\right)\boldsymbol{\xi}\right)}_{\mathbf{w}} = 0$$

als zusätzliche Gleichungsbeschränkung hinzugenommen werden.

5.3.2 Sonderfälle: Kleine Graphen

Ist die Anzahl N der Knoten des Graphen klein, so kann Problem 5.13 teilweise sogar explizit gelöst werden oder es können zumindest tiefere Einblicke in die Lösbarkeit gewonnen werden. In diesem Abschnitt werden daher Graphen mit zwei, drei und vier Knoten genauer betrachtet. Für den Fall $N = 2$ lässt sich dabei sehr einfach eine explizite Lösung von Problem 5.13 angeben. Für $N = 3$ ist dies nicht mehr so einfach möglich. Trotzdem können konvexe Ungleichungen formuliert werden, deren Lösbarkeit äquivalent zur Lösbarkeit von Problem 5.13 sind und es kann mithilfe der Lösung dieser konvexen Ungleichungen ebenfalls eine explizite Lösung von Problem 5.13 angegeben werden. Zum Abschluss dieses Abschnitt wird am Fall $N = 4$ die bereits im Zusammenhang mit Lemma 5.14 diskutierte Frage nach der Menge aller Eigenwertvorgaben, für die Problem 5.13 lösbar ist, noch einmal näher betrachtet.

Fall $N = 2$

Der Fall $N = 2$ lässt sich einfach analytisch lösen, was in folgendem Satz zusammengefasst ist.

Satz 5.17 ($N = 2$)**.** *Sei* $0 < \lambda_2 \in \mathbb{R}$*. Dann wird Problem 5.13 durch*

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda_2}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\rho\right) \tag{5.23}$$

mit $\rho \in [-1, 1]$ *gelöst.*

Beweis. Im Fall $N = 2$ ist Gleichung (5.11) durch $\lambda_2 = w_{1,2} + w_{2,1}$ gegeben. Dies führt direkt auf (5.23) für den Vektor der Kantengewichte $\mathbf{w}^\top = \left[w_{1,2}, w_{2,1}\right]$ und die zusätzliche Beschränkung $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$. □

Fall $N = 3$

Es wird der Fall $N = 3$ mit konjugiert-komplexen Eigenwerten $\lambda_{2,3}$ betrachtet. Für diesen Fall kann die Lösung von Problem 5.13 über eine konvexe Menge parametriert werden. Außerdem lässt sich eine explizite Formel zur Wahl der Kantengewichte herleiten.

Satz 5.18 ($N = 3$, konjugiert-komplexe Eigenwerte). *Seien $\lambda_{2,3} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega$ mit $0 < \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ gegeben. Problem 5.13 besitzt genau dann eine Lösung für $\{\lambda_2, \lambda_3\}$, wenn $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\top \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ existieren, sodass*

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^+ \left(\sigma \cdot \mathrm{vec}\left(\mathbf{I}_2\right) + \omega \cdot \mathrm{vec}\left(\mathbf{YU}\right)\right) + \left(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2\right)\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0} \tag{5.24a}$$

$$\mathbf{1}_3^\top \boldsymbol{\xi} \leq 0 \tag{5.24b}$$

$$\mathbf{Y} \succ \mathbf{0} \tag{5.24c}$$

$$\det\left(\mathbf{Y}^{-1}\right) \leq 1 \tag{5.24d}$$

gilt mit $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Seien $\boldsymbol{\xi}^*$ und $\mathbf{Y}^*$, sodass die Ungleichungen (5.24) *erfüllt sind. Dann führt die Wahl der Kantengewichte zu*

$$\mathbf{w} = \sigma \cdot \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^+ \mathrm{vec}\left(\mathbf{I}_2\right) + \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^+ \frac{\zeta \cdot \omega}{\sqrt{\det\left(\mathbf{Y}^*\right)}} \mathrm{vec}\left(\mathbf{Y}^*\mathbf{U}\right) + \left(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2\right)\boldsymbol{\rho} \tag{5.25}$$

auf eine Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ mit $\mathrm{spec}(\mathbf{L}_w) = \{0, \lambda_2, \lambda_3\}$. *Dabei ist $\zeta \in \{-1, 1\}$ und $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ das größte Polytop ist, sodass $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ für alle $\rho \in \mathcal{P}$. Es gilt $\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{Y}^*)}}\mathbf{V}^\top\boldsymbol{\xi}^* \in \mathcal{P}$.*

Beweis. Da für $\omega > 0$ alle Elemente von $\{0, \lambda_2, \lambda_3\}$ paarweise verschieden sind, ist die Erfüllung der Ungleichungen (5.22) in Lemma 5.15 notwendig und hinreichend zur Lösung von Problem 5.13. Bevor der Beweis fortgesetzt wird, sei darauf hingewiesen, dass $\mathbf{UU}^\top = \mathbf{I}_2$ für die im Satz definierte Matrix $\mathbf{U}$ gilt. Darüber hinaus ist die Inverse der in Lemma 5.15 verwendeten Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{R}\right)}\mathbf{U}^\top\mathbf{R}^\top\mathbf{U}$$

gegeben. Als erster Schritt zum Beweis des Satzes wird nun die Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ gewählt, welche die Information über das gewünschte Spektrum beinhaltet. Diese kann im betrachteten Fall wie in Bemerkung 5.7 zu

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}\sigma & -\omega \\ \omega & \sigma\end{bmatrix} = \sigma\mathbf{I}_2 + \omega\mathbf{U}$$

gewählt werden, was zu

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^{-1} = \sigma\mathbf{I}_2 + \omega\frac{1}{\det\left(\mathbf{R}\right)}\mathbf{RR}^\top\mathbf{U} \tag{5.26}$$

führt. Da $\mathbf{R}$ nach Lemma 5.15 regulär gewählt werden muss, ist $\mathbf{Y}' = \mathbf{R}\mathbf{R}^\top$ eine symmetrische und positiv definite Matrix und es gilt $\det(\mathbf{R}) = \zeta \cdot \sqrt{\det(\mathbf{Y}')}$ für $\zeta \in \{-1, 1\}$. In Abschnitt B.5.2 wird gezeigt, dass

$$\overline{\mathcal{L}}^+ \operatorname{vec}(\mathbf{Y}'\mathbf{U}) = \underbrace{\left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}_{\mathbf{M}_\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \left[\eta_1, -\eta_1, \eta_2, -\eta_2, \eta_3, -\eta_3\right]^\top \tag{5.27}$$

für jede symmetrische Matrix $\mathbf{Y}'$ gilt, wobei $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig von den Elementen von $\mathbf{Y}'$ ist und $\mathbf{Y}' \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$ gilt. Außerdem gilt (vgl. ebenso Abschnitt B.5.2)

$$\overline{\mathcal{L}}^+ \operatorname{vec}(\mathbf{I}_2) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_6. \tag{5.28}$$

Dies bedeutet, dass nach Lemma 5.15 und unter Berücksichtigung von (5.26), (5.27) und (5.28), Problem 5.13 genau dann lösbar ist, wenn $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}'^\top \succ \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}'$ und $\beta \leq 1$ existieren, sodass $\mathbf{1}_3^\top \boldsymbol{\xi}' \leq 0$ und

$$\frac{\sigma}{3}\mathbf{1}_6 + \frac{\zeta \cdot \omega}{\sqrt{\det(\mathbf{Y}')}}\mathbf{M}_\eta \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2)\,\boldsymbol{\xi}' \geq (1-\beta)\frac{\sigma}{3}\mathbf{1}_6 \geq \mathbf{0} \tag{5.29}$$

gilt. Da $\mathbf{Y}' \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{R}$ ist regulär), gilt $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$. Daher gilt aufgrund der Struktur von $\mathbf{M}_\eta$ und der Beschränkung $\mathbf{1}_3^\top \boldsymbol{\xi}' \leq \mathbf{0}$, dass $\beta > 0$ gelten muss. Wird $(1-\beta)\frac{\sigma}{3}\mathbf{1}_6$ von (5.29) abgezogen und anschließend durch β geteilt, so ergibt sich

$$\frac{\sigma}{3}\mathbf{1}_6 + \frac{\zeta \cdot \omega}{\beta \cdot \sqrt{\det(\mathbf{Y}')}}\overline{\mathcal{L}}^+ \cdot \operatorname{vec}(\mathbf{Y}'\mathbf{U}) + (\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2)\,\frac{1}{\beta}\boldsymbol{\xi}' \geq \mathbf{0}. \tag{5.30}$$

Die Wahl von $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'/(\beta \cdot \sqrt{\det(\mathbf{Y}')})$ ergibt $\det(\mathbf{Y}) = 1/\beta^2$, woraus $\det(\mathbf{Y}^{-1}) \leq 1$ folgt. Zudem gilt $\mathbf{1}_3^\top \boldsymbol{\xi} \leq 0$ für $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'/\beta$ natürlich genau dann, wenn $\mathbf{1}_3^\top \boldsymbol{\xi}' \leq 0$ gilt. Wird darüber hinaus die Symmetrie von $\overline{\mathcal{L}}^+ \cdot \operatorname{vec}(\mathbf{Y}'\mathbf{U}) = \mathbf{M}_\eta \boldsymbol{\eta}$ in (5.27) berücksichtigt, so wird klar, dass (5.30) immer gleichzeitig für $\zeta = 1$ und für $\zeta = -1$ erfüllt sein muss. Aus diesen Betrachtungen folgt daher direkt, dass die Erfüllbarkeit der Ungleichungen (5.24) notwendig zur Lösung von Problem 5.13 ist. Wird hingegen davon ausgegangen, dass die Ungleichungen (5.24) erfüllt sind und wird $\beta = 1/\sqrt{\det(\mathbf{Y})}$ gewählt, wofür $0 < \beta \leq 1$ gilt (da $0 < \det(\mathbf{Y}^{-1}) \leq 1$), dann kann dieselbe Argumentation in umgekehrter Reihenfolge verwendet werden, um zu zeigen, dass die Erfüllbarkeit der Ungleichungen (5.24) auch hinreichend zur Lösung von Problem 5.13 ist. Daher führen die Lösungen $\boldsymbol{\xi}^*$, $\mathbf{Y}^*$ der Ungleichungen (5.24) mit $\beta = 1/\sqrt{\det(\mathbf{Y}^*)}$ und $\mathbf{R}^*\mathbf{R}^{*\top}/\det(\mathbf{R}) = \beta\mathbf{Y}^*$ in (5.26) sowie $\boldsymbol{\xi}'^* = \beta\boldsymbol{\xi}^*$ zu Lösungen der Ungleichungen (5.22), weshalb die Wahl von $\mathbf{w}$ nach (5.25) mit $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^\top \boldsymbol{\xi}'^*$ Problem 5.13 nach Lemma 5.15 löst. □

Die Menge aller $\mathbf{Y}$ und $\boldsymbol{\xi}$, welche die Ungleichungen (5.24) erfüllen, ist konvex.[2] Somit können durch Lösen eines konvexen Zulässigkeitsproblems (engl. *feasibility problem*) gültige $\mathbf{Y}^*$ und $\boldsymbol{\xi}^*$

[2] Die Determinante der Inversen $\det(\mathbf{Y}^{-1})$ einer positiv definiten Matrix $\mathbf{Y} \succ \mathbf{0}$ ist eine konvexe Funktion, da $f(\mathbf{Y}) = \log((\det(\mathbf{Y}^{-1}))$ konvex ist für alle $\mathbf{Y} \succ \mathbf{0}$ [153, Abschnitt 5.4] und die Komposition mit der Exponentialfunktion $\exp(f(\mathbf{Y}))$ Konvexität erhält [19, Beispiel 3.13].

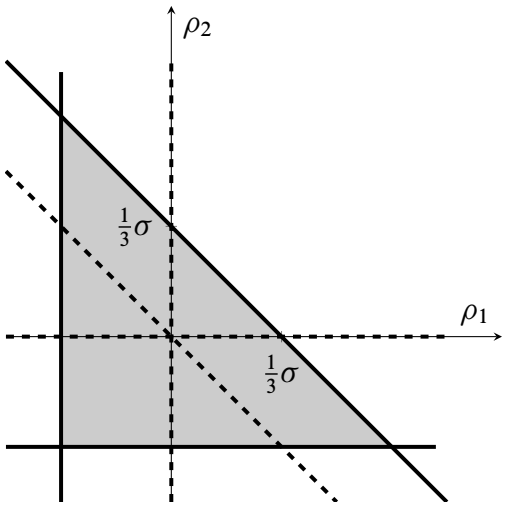

Abbildung 5.4: Polytop $\mathcal{P}$, welches die Freiheitsgrade zur Wahl der Kantengewichte im Fall $N = 3$ gemäß (5.31) beschreibt: Das schattierte Gebiet gehört zu $\omega = 0$, während die gestrichelten Linien zu $\omega = \sigma/\sqrt{3}$ gehören, wobei das Polytop $\mathcal{P}$ nur noch den Punkt $\rho_1 = \rho_2 = 0$ enthält.

gefunden werden (und es kann detektiert werden, wenn keine Lösung existiert). Im Folgenden wird gezeigt, dass die numerische Lösung sogar verwendet werden kann, um einen expliziten Ausdruck für die Kantengewichte im Fall $N = 3$ zu finden.

Nach Lemma 5.14 ist die Wahl von $\lambda_{2,3} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega$ mit $\sigma, \omega > 0$ nur dann möglich, wenn $\omega \leq \sigma/\sqrt{3}$ gilt. Für den Grenzfall $\omega = \sigma/\sqrt{3}$ lässt sich numerisch tatsächlich eine Lösung $\mathbf{Y}^*, \boldsymbol{\xi}^*$ für die Ungleichungen (5.24) finden. Interessanterweise kann die Matrix $\mathbf{Y}^*$ dazu genutzt werden, eine explizite Formel für die Wahl der Kantengewichte für alle $\omega \leq \sigma/\sqrt{3}$ anzugeben. Dies wird ersichtlich, wenn die im Beweis von Satz 5.18 benannte Symmetrie des Vektors $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^{+}\mathrm{vec}\,(\mathbf{YU})$ in (5.27) in Betracht gezogen wird. Dies führt zu

$$\mathbf{w} = \frac{1}{3}\sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \zeta \cdot \omega \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}, \tag{5.31}$$

wobei $\boldsymbol{\rho} = \left[\rho_1, \rho_2\right]^\top \in \mathcal{P}$ und $\zeta \in \{-1, 1\}$. Dabei wurde der Nullraum von $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ über $(\mathbf{V}' \otimes \mathbf{1}_2)$ parametriert mit $\mathbf{V}' = [\mathbf{I}_2, -\mathbf{1}_2]^\top$ (vgl. Bemerkung 5.6 zur alternativen Wahl der Nullraumparametrierung). Das Polytop $\mathcal{P}$ ist in Abb. 5.4 zu sehen. Es ist ersichtlich, dass für $\omega = \sigma/\sqrt{3}$, das Polytop $\mathcal{P}$ nur noch einen einzigen Punkt enthält, d. h., dass in diesem Fall keine weiteren Freiheitsgrade zur Parametrierung der Kantengewichte vorliegen. Der einzige Freiheitsgrad, welcher weiterhin zur Verfügung steht, ist die Wahl von $\zeta \in \{-1, 1\}$. Allerdings stellt diese Wahl keinen wirklichen Freiheitsgrad dar, da die beiden Graphen, die für die beiden möglichen Werte von ζ erhalten werden, isomorph zueinander sind, d. h., dass beide resultierende Graphen durch eine Permutation der Knoten ineinander überführt werden können.

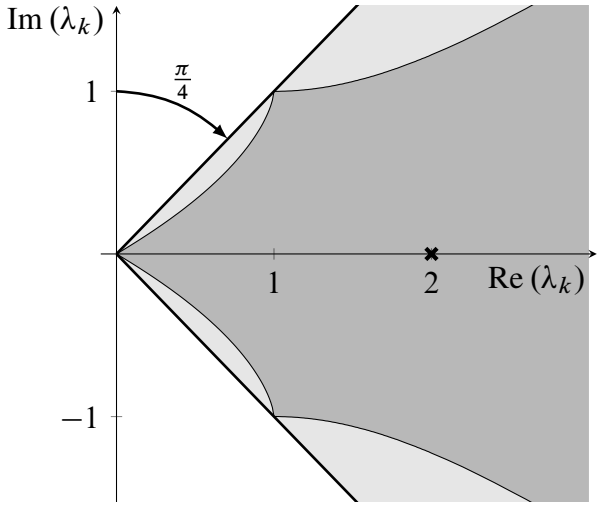

Abbildung 5.5: Eigenwertgebiete der Laplacematrix von Graphen mit vier Knoten und positiven Kantengewichten: Notwendiges Gebiet gemäß Lemma 5.14 (hell schattiert); Zulässiges Gebiet für λ_3 und λ_4, wenn $\lambda_2 = 2$ fest vorgegeben wird (dunkel schattiert).

Fall $N = 4$

Für den Fall $N = 4$ wird im Folgenden untersucht, für welche Eigenwertvorgaben $\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ Problem 5.13 lösbar ist. Wie im Zusammenhang mit Lemma 5.14 bereits diskutiert, ist dies für das Problem 5.13 keine einfach zu beantwortende Frage. Lemma 5.14 gibt dabei lediglich einen notwendigen Bereich für das Spektrum der Laplacematrix an. Für $N = 4$ ist dieser Bereich durch den in Abb. 5.5 hell schattierten Sektor gekennzeichnet. Dieser Sektor liegt in der geschlossenen rechten komplexen Halbebene, besitzt einen Öffnungswinkel von $\pi/2$ und ist symmetrisch bezüglich der reellen Achse. Für $N = 4$ kann ein konjugiert-komplexes Eigenwertpaar $\lambda_{3,4} = \sigma \pm \mathrm{j}\,\omega$ mit $0 < \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ vorgegeben werden. Der verbleibende Eigenwert λ_2 muss dann reell gewählt werden. Zur Untersuchung, welche Eigenwertkonstellationen zu einer Lösung von Problem 5.13 führen, wird dieser Eigenwert nun fest zu $\lambda_2 = 2$ vorgegeben und dann für verschiedene $\sigma > 0$ numerisch das größtmögliche $\omega_{\max}(\sigma)$ gesucht, für welches noch eine Lösung für Problem 5.13 bei der Vorgabe von $\lambda_{3,4} = \sigma \pm \mathrm{j}\,\omega_{\max}(\sigma)$ existiert. Das gefundene zulässige Gebiet ist in Abb. 5.5 als dunkel schattierte Fläche gekennzeichnet. Es ist ersichtlich, dass dieses Gebiet in dem durch Lemma 5.14 beschriebenen Sektor liegt, jedoch kleiner als dieser ist. In der Tat ist $0 < \sigma = 1$ der einzige Punkt für den der maximale Imaginärteil $\omega_{\max}(1) = 1$ den Rand des notwendigen Sektors berührt. Dieser spezielle Punkt $\lambda_{3,4} = 1 \pm \mathrm{j}$ beschreibt die ungewichtete gerichtete Ringtopologie.

Bemerkung 5.19. *Nicht zuletzt das hier betrachtete Beispiel von Graphen mit vier Knoten macht deutlich, warum in dieser Arbeit keine Einschränkung auf Graphen mit positiven Kantengewichten getroffen wurde. Wenn nur Graphen mit positiven Kantengewichten zugelassen würden, so würde es beim Entwurf der Synchronisierungsregler in Abschnitt 3.1 nicht ausreichen zu fordern, dass die Synchronisierungsmenge nichtleer ist, sondern zusätzlich müsste dann sichergestellt werden, dass es mindestens einen Graph gibt, dessen Eigenwerte allesamt in der gefundenen Synchronisierungsmenge liegen. Eine solche Einschränkung erschwert die Entwurfsaufgabe immens und macht den in dieser Arbeit dargelegten zweistufigen Entwurf nahezu unmöglich.*

5.4 Vorgabe der Nullräume der Laplacematrix

In diesem Abschnitt wird statt der Vorgabe des Spektrums die Vorgabe der Nullräume der Laplacematrix thematisiert. Dies schließt an den in Kapitel 4 behandelten Entwurf des optimalen stationären Verhaltens eines Multi-Agenten-Systems an. In Abschnitt 5.4.1 wird dabei zunächst der zu optimaler stationärer Synchronisierung führende Linkseigenvektor zum Nulleigenwert der Laplacematrix zusammenhängender Graphen betrachtet. Es wird gezeigt, dass dieser immer zusätzlich zum Spektrum vorgegeben werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen an den Graphen getroffen werden. In Abschnitt 5.4.2 wird anschließend der in Abschnitt 4.3 diskutierte Fall betrachtet, dass optimale Cluster-Synchronisierung angestrebt wird und dafür der Rechts- und der Linksnullraum eines nicht zusammenhängenden Graphen spezifiziert wurden. Es wird aufgezeigt, wie die Vorgabe dieser Nullräume im Graphenentwurf berücksichtigt werden kann.

5.4.1 Vorgabe des Linkseigenvektors zum Nulleigenwert der Laplacematrix zusammenhängender Graphen

In Abschnitt 4.2 wurde der Linkseigenvektor $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$ zum Nulleigenwert der Laplacematrix $\mathbf{L}_w$ dazu genutzt, optimales stationäres Synchronisierungsverhalten eines Multi-Agenten-Systems zu erzielen. In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, wann und wie ein zusammenhängender Graph entworfen werden kann, für den schließlich

$$\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_w = \mathbf{0} \tag{5.32}$$

gilt. Wird die vektorisierte Darstellung der Laplacematrix (5.4) genutzt, so lässt sich (5.32) durch

$$\left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{5.33}$$

beschreiben. Die Forderung, dass der Graph zusammenhängend ist, lässt sich dadurch erzielen, dass alle Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix $\overline{\mathbf{L}}_w$ ungleich Null vorgegeben werden (vgl. Satz 2.6). Dies kann mithilfe der in den letzten Abschnitten entwickelten Methoden erreicht werden. Gleichung (5.33) lässt sich dabei als Nebenbedingung in allen Optimierungsproblemen in den Abschnitten 5.2 und 5.3 mit aufnehmen, wodurch erzwungen wird, dass der entworfene Graph $\boldsymbol{\gamma}$ als Linkseigenvektor zum Nulleigenwert seiner Laplacematrix besitzt. Die Aufnahme von (5.33) als Beschränkung im Optimierungsproblem ist insbesondere für den Entwurf von Graphen mit Strukturbeschränkungen relevant. Für den Entwurf ohne Strukturbeschränkungen lässt sich hingegen folgende Aussage treffen.

Satz 5.20. *Sei $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$ gegeben, sodass $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$. Sei ein Kantengewichtsvektor $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^{N(N-1)}$ gegeben. Es existiert immer ein Kantengewichtsvektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N(N-1)}$, sodass $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_w = \mathbf{0}$ und* $\operatorname{spec}(\mathbf{L}_w) = \operatorname{spec}(\mathbf{L}_{\mathbf{w}_0})$ *gilt.*

Beweis. Nach Bemerkung 5.5 und Gleichung (5.12) sind alle Laplacematrizen mit den Kantengewichten

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}) \cdot \boldsymbol{\rho} \tag{5.34}$$

isospektral zu $\mathbf{L}_{\mathbf{w}_0}$ für alle $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{N-1}$. Für die linke Seite von (5.33) folgt aus (5.34)

$$\left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \left(\mathbf{w}_0 + \left(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}\right). \tag{5.35}$$

Wird $\boldsymbol{\rho}$ so gewählt, dass dieser Ausdruck verschwindet, so ist die Bedingung (5.33) erfüllt und $\boldsymbol{\gamma}$ ist tatsächlich Linkseigenvektor zum Nulleigenwert von $\mathbf{L}_w$. Um zu zeigen, dass eine solche Wahl von $\boldsymbol{\rho}$ existiert, wird zunächst die im Beweis von Lemma 5.3 hergeleitete Beziehung (B.16) verwendet, wodurch (5.35) zu

$$\left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w}_0 - \left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \left(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}$$

umgeformt wird. Da $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_N = 1$ gilt, genügt es schließlich zum Beweis des Satzes zu zeigen, dass

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\rho} = \left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w}_0 \tag{5.36}$$

lösbar ist und somit (5.33) erfüllt werden kann. Da $\mathbf{1}_N$ den Linksnullraum von $\mathbf{V}$ aufspannt (vgl. die Definition von $\mathbf{V}$ in (2.2) bzw. (5.6)) ist (5.36) genau dann lösbar, wenn [11, Fakt 2.10.6]

$$\mathbf{1}_N^\top \cdot \left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$$

gilt. Wird die Definition von $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ in (5.4) berücksichtigt sowie die Tatsache, dass der Einsvektor $\mathbf{1}_N$ im Rechtnullraum jeder Laplacematrix liegt, so folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_N^\top \cdot \left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w}_0 &= \left(\mathbf{1}_N^\top \otimes 1\right) \left(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w}_0 \\
&= \left(\mathbf{1}_N^\top \otimes \boldsymbol{\gamma}^\top\right) \cdot \left[\operatorname{vec}\left(\mathbf{L}_{w,1,2}\right) \quad \dots \quad \operatorname{vec}\left(\mathbf{L}_{w,N,N-1}\right)\right] \cdot \mathbf{w}_0 \\
&= \left[\operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_{w,1,2} \mathbf{1}_N\right) \quad \dots \quad \operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{L}_{w,N,N-1} \mathbf{1}_N\right)\right] \cdot \mathbf{w}_0 = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

was den Beweis schließt. □

Bemerkung 5.21. *Das Ergebnis in Satz 5.20 lässt sich immer mit dem Ergebnis zur Minimierung der Eigenwertsensitivität durch Optimierungsproblem* (5.17) *kombinieren. Wie bereits im Anschluss an die Formulierung von Optimierungsproblem* (5.17) *angemerkt, hängt die Minimierung der Eigenwertsensitivität lediglich von der regulären Matrix* $\mathbf{R}$ *ab. Die konkrete Wahl der Kantengewichte* $\mathbf{w}$*, die* (5.11) *erfüllt, kann dann so getroffen werden, dass* $\boldsymbol{\gamma}$ *Linkseigenvektor zum Nulleigenwert der Laplacematrix ist. Somit lässt sich immer ein Graph mit vorgegebenen Eigenwerten und vorgegebenem Linkseigenvektor zum Nulleigenwert sowie minimaler Eigenwertsensitivität entwerfen.*

5.4.2 Vorgabe der Nullräume der Laplacematrix nicht zusammenhängender Graphen

In Abschnitt 4.3 wurde die optimale Cluster-Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems betrachtet. Dabei wurden der Rechts- und der Linksnullraum der Laplacematrix als Freiheitsgrade zum Entwurf verwendet. Damit die Cluster-Synchronisierung robust gegenüber Änderungen der Kantengewichte ist, wurde in Abschnitt 4.3.5 argumentiert, dass die Dimension der optimalen

Nullräume N_0^* mit der Anzahl $N_{\mathcal{R}}$ der in Definition 2.12 eingeführten maximalen Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{N_{\mathcal{R}}}$ übereinstimmen soll. Als Ergebnis von Abschnitt 4.3.5 wurde daher eine Parametrierung der optimalen Nullräume durch die Matrizen

$$\tilde{\mathbf{M}}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 & \cdots & \boldsymbol{\mu}_{N_{\mathcal{R}}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N_{\mathcal{R}}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{N}}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_{N_{\mathcal{R}}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N_{\mathcal{R}}} \tag{5.37}$$

gewonnen, wobei die Vektoren $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_{N_{\mathcal{R}}}$ und $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_{N_{\mathcal{R}}}$ die in Satz 2.13 bzw. in (4.48) beschriebenen Bedingungen erfüllen.

Ähnlich wie in (5.32) in Abschnitt 5.4.1 ist es nun das Ziel, einen Graphen zu entwerfen, der $N_{\mathcal{R}}$ maximale Erreichbarkeitsmengen besitzt und für den

$$\mathbf{L}_w \tilde{\mathbf{M}}^* = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{N}}^{*\top} \mathbf{L}_w = \mathbf{0} \tag{5.38}$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird wie schon im Beweis von Satz 2.13 vorausgesetzt, dass die Knotenmenge so geordnet ist, dass die Laplacematrix die in (2.5) gezeigte Form

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_2\mathcal{H}_2} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_1} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_2} & \cdots & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

annimmt.[3] In diesem Fall nehmen auch die Matrizen $\tilde{\mathbf{M}}^*$ und $\tilde{\mathbf{N}}^*$ in (5.37) eine spezielle Form an. Die in Satz 2.13 bzw. in (4.48) beschriebenen Bedingungen an die Vektoren $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_{N_{\mathcal{R}}}$ und $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_{N_{\mathcal{R}}}$ implizieren nämlich, dass in $\boldsymbol{\gamma}_k$ nur die zu $\mathcal{H}_k$ gehörenden Elemente ungleich Null sein können und dass alle Elemente in $\boldsymbol{\mu}_k$, die zu $\mathcal{H}_k$ gehören, gleich 1 sind. Somit liegen $\tilde{\mathbf{M}}^*$ und $\tilde{\mathbf{N}}^*$ in der Form

$$\tilde{\mathbf{M}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}^*_{\mathcal{H}} \\ \tilde{\mathbf{M}}^*_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{N}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}^*_{\mathcal{H}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}}^*_{\mathcal{H}} = \operatorname{blkdiag}\left(\mathbf{1}_{|\mathcal{H}_1|}, \ldots, \mathbf{1}_{|\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}|}\right) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{N}}^*_{\mathcal{H}} = \operatorname{blkdiag}\left(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{N_{\mathcal{R}}}\right) \tag{5.40}$$

vor. Dabei gilt $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_k \in \mathbb{R}^{|\mathcal{H}_k|}$ und $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_k^\top \mathbf{1}_{|\mathcal{H}_k|} = 1$ für alle $k \in \{1, \ldots, N_{\mathcal{R}}\}$.

Mit diesen Vorüberlegungen können die Laplacematrizen $\mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1}, \ldots, \mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}}$ so entworfen werden, dass sie zusammenhängend sind und jeweils $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_k$ als Linkseigenvektor zum Nulleigenwert besitzen. Dies ist gemäß Satz 5.20 immer möglich, indem alle Eigenwerte der zugehörigen reduzierten Laplacematrizen ungleich Null vorgegeben werden und die Kantengewichte im Anschluss an den spektralen Entwurf so angepasst werden, dass $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_k$ Linkseigenvektor zum Nulleigenwert ist.

Somit verbleibt nur noch der Entwurf von $\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}}$ und $\mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_1}, \ldots, \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{H}_{N_{\mathcal{R}}}}$. Um diesen durchzuführen, wird der Idee in [26, Korollar 2.5] gefolgt und die Laplacematrix

$$\widehat{\mathbf{L}}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \boldsymbol{\beta} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{C}\mathcal{C}} \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

[3] Diese Ordnung muss ggf. durch Permutation der Knoten erreicht werden und kann dann im Anschluss an den Entwurf entsprechend wieder rückgängig gemacht werden.

betrachtet, wobei $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}|}$ alle Kanten zusammenfasst, welche von den exklusiven Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_\mathcal{R}}$ in die entsprechenden Knoten der gemeinsamen Menge $\mathcal{C}$ eingehen. Die Laplacematrix $\widehat{\mathbf{L}}_{w,\mathcal{CC}}$ kann nun unter Vorgabe der durch die Nulleinträge in (5.41) bestimmten Struktur gemäß Abschnitt 5.2.2 bzw. Bemerkung 5.16 so entworfen werden, dass alle Eigenwerte der reduzierten Laplacematrix von Null verschieden sind. Durch den Entwurf von $\widehat{\mathbf{L}}_{w,\mathcal{CC}}$ ist schließlich $\mathbf{L}_{w,\mathcal{CC}}$ gemäß (5.41) festgelegt. Abschließend müssen die Matrizen $\mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_1}, \ldots, \mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_{N_\mathcal{R}}}$ noch so gewählt werden, dass

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_1} & \mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_2} & \cdots & \mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_{N_\mathcal{R}}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^*_\mathcal{H} + \mathbf{L}_{w,\mathcal{CC}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^*_\mathcal{C} = \mathbf{0} \tag{5.42}$$

gilt. Die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}^*_\mathcal{H}$ in (5.40) ist immer linksinvertierbar. Daher ist die Gleichung (5.42) immer lösbar. Eine Lösung ist durch

$$\mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}} = -\mathbf{L}_{w,\mathcal{CC}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^*_\mathcal{C} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{*+}_\mathcal{H} \tag{5.43}$$

gegeben, wobei $\tilde{\mathbf{M}}^{*+}_\mathcal{H}$ die Pseudoinverse von $\tilde{\mathbf{M}}^*_\mathcal{H}$ bezeichnet.

Bemerkung 5.22. *Im oben skizzierten Entwurf können die Nichtnulleigenwerte von $\mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_k\mathcal{H}_k}$ für alle $k \in \{1, \ldots, N_\mathcal{R}\}$ sowie die Eigenwerte von $\mathbf{L}_{w,\mathcal{CC}}$ frei vorgegeben werden. Dabei sind die vorgegebenen Spektren immer so zu wählen, dass sie invariant bezüglich komplexer Konjugation sind. Dementsprechend muss, wie auch im Zusammenhang mit der Synchronisierbarkeit eines Multi-Agenten-Systems diskutiert (vgl. Lemma 3.2), immer mindestens ein Eigenwert reell vorgegeben werden, wenn eine exklusive Teilmenge $\mathcal{H}_k$ eine gerade Anzahl an Knoten enthält bzw. wenn die gemeinsame Teilmenge $\mathcal{C}$ eine ungerade Anzahl an Knoten enthält. Wegen dieser Abhängigkeit der zulässigen Lage der Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix von der Größe der unterschiedlichen Teilmengen wurde Annahme 4.19 in Abschnitt 4.3 getroffen. Diese stellt sicher, dass es möglich ist, einen Synchronisierungsregler zu entwerfen, dessen Synchronisierungsmenge die reelle Achse schneidet. Mit der hier geführten Diskussion kann ein solcher Entwurf schließlich zum Erreichen von optimaler Cluster-Synchronisierung notwendig sein.*

Beispiel 5.23. *Als abschließendes Beispiel wird nun der Entwurf eines Graphen betrachtet, dessen Laplacematrix die in Beispiel 4.29 durch die Matrizen $\tilde{\mathbf{M}}^*, \tilde{\mathbf{N}}^* \in \mathbb{R}^{6\times 2}$ in* (4.53) *spezifizierten Nullräume aufweist. Damit die Knoten so geordnet sind, dass die Laplacematrix in der Form* (5.39) *vorliegt, muss zunächst Knoten v_6 an vorderste Stelle permutiert werden. Die Permutation muss erst am Ende des Entwurfs berücksichtigt werden. Zunächst können die einzelnen Laplacematrizen in* (4.53) *wie oben angegeben entworfen werden.*

Die exklusive Teilmenge $\mathcal{H}_1 = \{v_6\}$ beinhaltet nur einen Knoten. Damit ist die zugehörige Laplacematrix durch $\mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1} = 0$ ohne jegliche Freiheitsgrade festgelegt.

Für die zu $\mathcal{H}_2 = \{v_1, v_2\}$ gehörende Laplacematrix kann ein Nichtnulleigenwert als reeller Eigenwert vorgegeben werden. Für Graphen mit zwei Knoten verbleibt bei der Vorgabe eines Nichtnulleigenwerts genau ein Freiheitsgrad, wie auch Satz 5.17 zeigt. Dieser verbleibende Freiheitsgrad

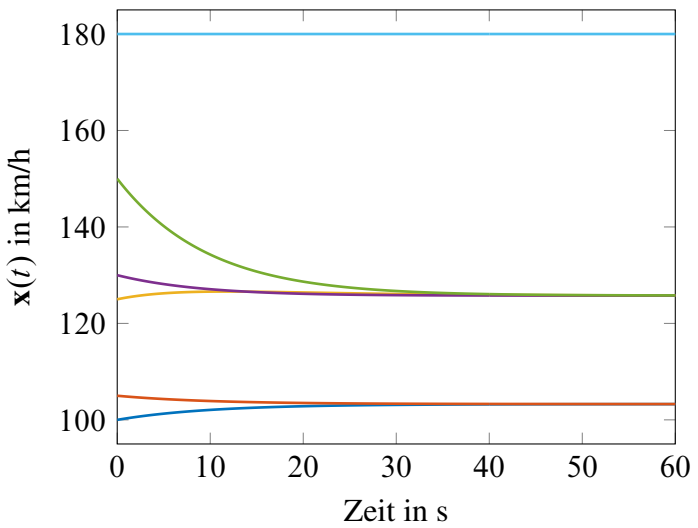

Abbildung 5.6: Verläufe der Fahrzeuggeschwindigkeiten bei optimaler stationärer Cluster-Synchronisierung nach Beispiel 4.29 mit der in Beispiel 5.23 entworfenen Laplacematrix.

wird nun dazu genutzt, den Linkseigenvektor $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_2^\top = [0{,}3464 \;\; 0{,}6536]$ *vorzugeben. Für die Vorgabe des Eigenwerts* $\lambda = 1$ *führt dies zu*

$$\mathbf{L}_{w,\mathcal{H}_2\mathcal{H}_2} \begin{bmatrix} 0{,}6536 & -0{,}6536 \\ -0{,}3464 & 0{,}3464 \end{bmatrix}.$$

Als nächstes wird der Entwurf von $\widehat{\mathbf{L}}_{w,\mathcal{CC}} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *durchgeführt. Dabei muss die in* (5.41) *gezeigte Struktur eingehalten werden. Es können drei Nichtnulleigenwerte vorgegeben werden. Somit muss ein Nichtnulleigenwert reell gewählt werden. Dieser wird zu* $\lambda_2 = 1$ *vorgegeben. Die beiden anderen Nichtnulleigenwerte können konjugiert-komplex gewählt werden und werden zu* $\lambda_{3,4} = 1 \pm \mathrm{j}\,0{,}2$ *vorgegeben. Wird der Entwurf durch Lösen von Optimierungsproblem* (5.17) *unter Einhaltung der strukturbeschränkenden Nebenbedingung* (5.14) *durchgeführt, so ergibt sich*

$$\widehat{\mathbf{L}}_{w,\mathcal{CC}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}8734 & 1{,}0629 & 0{,}0277 & -0{,}2172 \\ -0{,}9823 & 0{,}0438 & 1{,}0088 & -0{,}0703 \\ -1{,}1443 & 0{,}2084 & 0{,}0075 & 0{,}9284 \end{bmatrix}.$$

Abschließend können $\mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_1}$ *und* $\mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_2}$ *mithilfe von* (5.43) *gewählt werden. Unter Berücksichtigung der anfangs angesprochenen Permutation ergibt sich dann*

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 0{,}6536 & -0{,}6536 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3464 & 0{,}3464 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}6172 & 0 & 1{,}0629 & 0{,}0277 & -0{,}2172 & -0{,}2562 \\ -0{,}6941 & 0 & 0{,}0438 & 1{,}0088 & -0{,}0703 & -0{,}2882 \\ -0{,}8086 & 0 & 0{,}2084 & 0{,}0075 & 0{,}9284 & -0{,}3357 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

als Laplacematrix, welche die vorgegebenen Eigenwerte und Nullräume aufweist.

Die entworfene Laplacematrix kann nun dazu verwendet werden, um für die in Beispiel 4.15 betrachtete Fahrzeugkolonne ein Regelgesetz zu entwerfen, welches zu optimaler stationärer Cluster-Synchronisierung nach Beispiel 4.29 führt. Das Regelgesetz wird gemäß (2.9) *gewählt, sodass die Gesamtdynamik* $\dot{\mathbf{x}} = -k\,\mathbf{L}_w\mathbf{x}$ *resultiert. Die gewählten Eigenwertpositionen führen für* $k > 0$ *zu Cluster-Synchronisierung. Es wird wie schon in Beispiel 4.15 die Reglerverstärkung* $k = 0,1$ *gewählt, um die resultierenden Beschleunigungen klein zu halten. Abb. 5.6 zeigt die Verläufe der Fahrzeuggeschwindigkeiten, wobei die Gruppierung der Fahrzeuge in die drei in Beispiel 4.29 gefundenen Cluster deutlich wird.*

6 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit befasst sich mit dem systematischen Gesamtentwurf homogener linearer Multi-Agenten-Systeme. Dabei wird ein zweistufiges Entwurfsschema vorgeschlagen: Zunächst wird der Entwurf der Agentendynamik durchgeführt und dabei algebraische Beschränkungen an den Kommunikationsgraphen abgeleitet. Anschließend wird der Kommunikationsgraph unter Berücksichtigung dieser algebraischen Beschränkungen entworfen. Die Anwendung der entwickelten Methoden wird im Verlauf der Arbeit durchgängig anhand akademischer Beispiele illustriert. Im Folgenden wird auf die einzelnen Schritte des Entwurfs noch einmal näher eingegangen. Ein Überblick über die verschiedenen Schritte ist zudem in Abb. 6.1 gegeben.

Der Entwurf der transienten Agentendynamik wird in Abschnitt 3.1 unter Berücksichtigung der notwendigen Bedingung der Synchronisierbarkeit des Gesamtsystems durchgeführt. Es wird gezeigt, wie Synchronisierungsregler minimaler Ordnung entworfen werden können. Für den gefundenen Regler werden alle zulässigen Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix des Kommunikationsgraphen durch Beschreibung der sogenannten *Synchronisierungsmenge* spezifiziert. Die Ergebnisse zur Synchronisierungsmenge, welche für Mehrgrößensysteme und dynamische Ausgangsrückführungen gewonnen werden, stellen dabei eine Erweiterung der Ergebnisse in [162] für Eingrößensysteme dar. Die Ergebnisse zur Beschreibung der Synchronisierungsmenge werden schließlich genutzt, um einen Synchronisierungsregler fester Ordnung zu entwerfen, welcher zur Maximierung des *Synchronisierungsradius* führt, d. h. zur Maximierung des größten in der Synchronisierungsmenge enthaltenen Kreises.

Neben dem transienten Verhalten wird in Kapitel 4 das stationäre Verhalten homogener Multi-Agenten-Systeme betrachtetet. Die Synchronisierung wird dazu als Kompromissfindung interpretiert und ein Gütemaß definiert, welches diesen Kompromiss beschreibt. Anhand dieses Gütemaßes wird dann unter verschiedenen Annahmen an die Anfangswerte der Agenten das stationäre Verhalten des Multi-Agenten-Systems so optimiert, dass die Kompromisskosten minimiert werden. Dazu werden die Nullräume der Laplacematrix als Entwurfsvariablen verwendet. Für den Fall der Synchronisierung führt dies zu einer Spezifikation des optimalen Linkseigenvektors zum Nulleigenwert der Laplacematrix. Neben dem Synchronisierungsfall wird auch für den Fall der *Cluster-Synchronisierung* das stationäre Verhalten optimiert. In diesem Fall werden Links- und Rechtsnullraum der Laplacematrix als Spezifikationen für den Graphenentwurf gewonnen.

Die abgeleiteten algebraischen Beschränkungen – Lage der Eigenwerte und Nullräume der Laplacematrix – werden schließlich im Graphenentwurf in Kapitel 5 berücksichtigt. Es wird gezeigt, dass immer beide Spezifikationen gemeinsam berücksichtigt werden können. Darüber hinaus wird gezeigt, wie die Kantengewichte optimiert werden können, um weitere Entwurfsziele, wie die Vorgabe der Struktur des Graphen oder eine minimale Eigenwertsensitivität, zu erreichen.

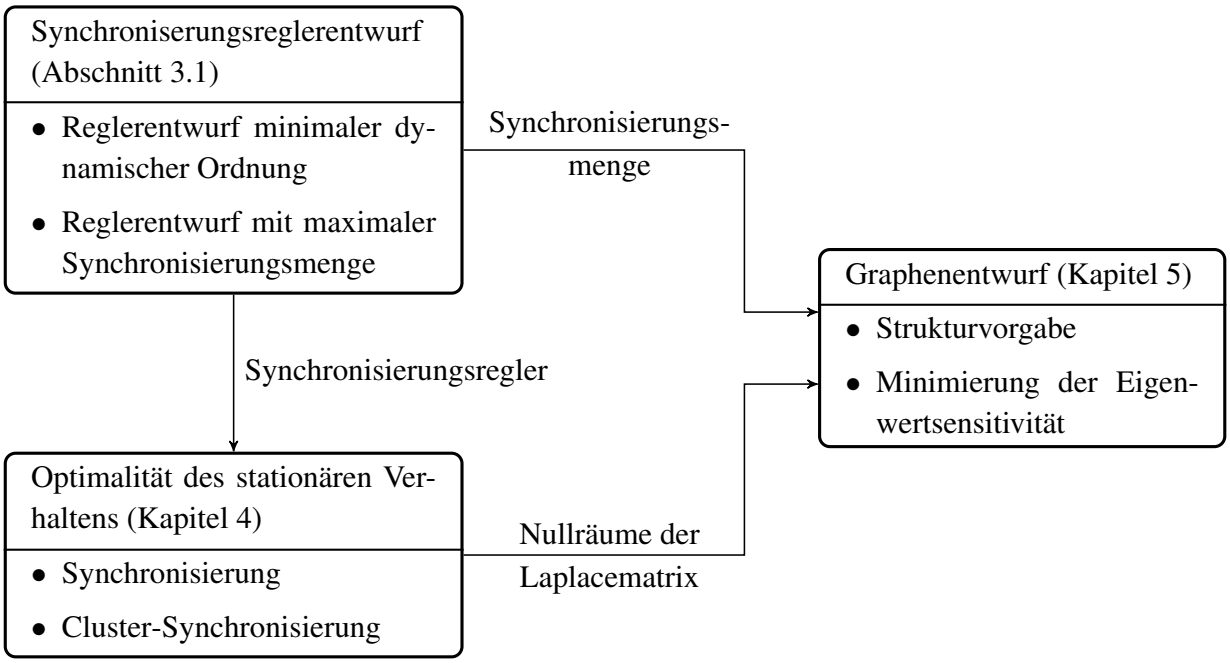

Abbildung 6.1: Zusammenfassung des vorgestellten Schemas zum Gesamtentwurf linearer homogener Multi-Agenten-Systeme.

Zusätzlich zu den bisher genannten Ergebnissen wird in Abschnitt 3.2 das optimale transiente Verhalten von Multi-Agenten-Systemen diskutiert. Dazu wird ein Optimierungsproblem zum Erzielen einer optimalen Transition auf die Synchronisierungstrajektorie formuliert und gezeigt, in welchem Zusammenhang das so formulierte Problem zu den aus der Literatur bekannten Ergebnissen zur optimalen Synchronisierung steht. Die Betrachtungen zur optimalen Synchronisierung in Abschnitt 3.2 stellen aus zwei Gründen einen Sonderfall in dem oben skizzierten Entwurfsschema dar: Zum einen wird dort von einer Zustandsrückführung statt von einer (dynamischen) Ausgangsrückführung ausgegangen. Zum anderen ergibt sich die Kommunikationstopologie direkt aus der Lösung der betrachteten Optimalregelprobleme und steht daher nicht im Anschluss noch zum Entwurf zur Verfügung. Eine Verbindung zu den restlichen Ergebnissen der Arbeit wird jedoch durch Bemerkung 4.7 hergestellt, wo vorgeschlagen wird, dass der in Abschnitt 4.2 gefundene optimale Linkseigenvektor zum Nulleigenwert der Laplacematrix genutzt wird, um das in Abschnitt 3.2.1 formulierte Optimierungsproblem zur optimalen Transition zu parametrieren.

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die Systemdynamik der Agenten vollständig bekannt ist und dass die Kommunikation zwischen den Agenten ideal ist. Im Zusammenhang mit der Minimierung der Eigenwertsensitivität in Abschnitt 5.2.3 wird bereits aufgezeigt, dass die Abweichung von diesen idealisierten Annahmen relevant für den erfolgreichen Einsatz der vorgestellten Entwurfsmethodik ist. Dabei wird in den Beispielen 5.11 und 5.12 eine Störung der Kantengewichte und ein Kommunikationskanalausfall betrachtet. Durch die Minimierung der Eigenwertsensitivität in Abschnitt 5.2.3 wird gemeinsam mit der Maximierung des Synchronisierungsradius in Abschnitt 3.1.5 die Robustheit des Gesamtsystems erhöht. Die systematische Analyse der Robustheit des Gesamtsystems, insbesondere im Hinblick auf Unsicherheiten in der Agentendynamik, bleibt jedoch als offene Fragestellung bestehen, welche Raum für weitere Forschung

bietet. Um dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Entwurf zu folgen, könnte die Unsicherheit in der Agentendynamik bei der Beschreibung der Synchronisierungsmenge durch Verwendung eines Toleranzbandes für die Nyquist-Kurven ähnlich wie in [81, Abschnitt 8.6] berücksichtigt werden. Alternativ könnte auch bei der Berechnung des Synchronisierungsradius in Abschnitt 3.1.5 die Unsicherheit der Strecke in dem in Abb. 3.5 gezeigten $\mathbf{G}_\lambda$-Regelkreis berücksichtigt werden. Dabei könnte der Synchronisierungsradius mit angepassten Methoden zur Berechnung des maximalen strukturierten Singulärwerts bestimmt werden. Durch eine solche Berechnung des Synchronisierungsradius unter Berücksichtigung von Unsicherheiten der Agentendynamik, würde die Platzierung aller Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix innerhalb des mit diesem Synchronisierungsradius assoziierten Kreises zu robuster Synchronisierung führen. Beide Wege führen also gewissermaßen zur Beschreibung einer *robusten Synchronisierungsmenge*. Neben der Berücksichtigung von Unsicherheiten in der Beschreibung der Synchronisierungsmenge, könnte eine weitere Modifikation der Synchronisierungsmenge darauf abzielen, Zeitbereichsanforderungen des Synchronisierungsverhaltens zu berücksichtigen. Die Synchronisierungsmenge wie sie in Abschnitt 3.1.4 in (3.18) definiert wurde, beschreibt alle Nichtnulleigenwerte der Laplacematrix, die dazu führen, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises (3.20) in der offenen linken komplexen Halbebene liegen, d. h., dass der geschlossene Regelkreis (3.20) stabil ist. Statt nur auf Stabilität abzuzielen, könnte auch eine Mindestdämpfung sowie eine Mindestabklingrate des transienten Verhaltens angestrebt werden. Dies bedeutet, statt der offenen linken komplexen Halbebene könnten für die Lage der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises (3.20) alternative Zielmengen spezifiziert werden (siehe [146], [143, Abschnitt 3.1.1] für mögliche Zielmengen). Die Beschreibung der so modifizierten Synchronisierungsmenge, ließe sich erneut mithilfe von Satz 3.25 gewinnen, wenn statt der Nyquist-D-Kurve Γ_D (vgl. Abb. 3.2a) eine Kurve verwendet würde, welche nicht die imaginäre Achse, sondern die Berandung des Zieleigenwertbereiches durchläuft, bevor die Kurve über den unendlichen Bogen in die rechte komplexe Halbebene geschlossen wird. Solche Zeitbereichsanforderungen könnten nicht nur bei der Beschreibung der Synchronisierungsmenge berücksichtigt werden, sondern bei sämtlichen in Abschnitt 3.1 diskutierten Aspekten des Entwurfes von Synchronisierungsreglern.

Wie bereits in Beispiel 5.12 angemerkt wurde, liegt in der konkreten Wahl der Eigenwerte innerhalb der Synchronisierungsmenge ein bislang ungenutzter Freiheitsgrad (in den Beispielen in Abschnitt 5.2 wurden jeweils alle Nichtnulleigenwerte im Mittelpunkt des größten Kreises innerhalb der Synchronisierungsmenge vorgegeben). Dieser Freiheitsgrad könnte zugänglich gemacht werden, wenn der Graphenentwurf durch eine Eigenwertbereichsvorgabe statt der exakten Eigenwertvorgabe durchgeführt wird. Mit Methoden zur Eigenwertbereichsvorgabe wie in [64, 140, 154] könnte auch Robustheit gegenüber Kantenausfällen angestrebt werden, indem ein Multi-Modell-Entwurf durchgeführt wird. Dabei würde jedes Modell den um eine Kante verminderten vollständigen Graphen abbilden. Die Anzahl der Multi-Modelle würde so allerdings mit N^2 wachsen. Statt auf einen gegenüber Kantenausfällen robusten Entwurf zu setzen, könnten auch Ansätze zur Adaption der verbleibenden Kantengewichte im Fall eines Kantenwegfalls untersucht werden. Dabei könnte auf Arbeiten zur adaptiven Synchronisierung wie z. B. [68, 70, 95] aufgebaut werden. Alternativ zu solchen allgemeinen adaptiven Ansätzen könnten auch Rekonfigurationsansätze zum Erreichen von Fehlertoleranz gegenüber Kantenausfällen untersucht werden (vgl.

[87]). Dabei könnte ausgenutzt werden, dass die Manipulation der Kantengewichte im Kern der in (5.11) definierten Matrix $\overline{\mathcal{L}}$ zu isospektralen Graphen führt (vgl. Bemerkungen 5.5 und 5.6). Da der Wegfall einer Kante als Nullsetzen des entsprechenden Kantengewichts interpretiert werden kann, könnte dies durch eine gezielte Manipulation der Kantengewichte im Kern von $\overline{\mathcal{L}}$ kompensiert werden.

Neben der Robustheit des Gesamtsystems stellt die Verallgemeinerung der Ergebnisse dieser Arbeit auf verteilte Regelsysteme mit vorhandenen physikalischen Kopplungen zwischen den Teilsystemen eine interessante Fragestellung für weiterführende Untersuchungen dar. Ein großer Bestandteil der Ergebnisse dieser Arbeit basiert auf der Umformung des Synchronisierungsproblems zu dem simultanen Stabilisierungsproblem in Satz 2.17 und der dadurch erreichten Aufteilung des Gesamtentwurfs in den Entwurf der Dynamik der Teilsysteme und den Entwurf des Kommunikationsgraphen. Ein möglicher erster Schritt, die Ergebnisse dieser Arbeit auf allgemeinere verteilte Regelsysteme anzuwenden, wäre daher, Systemklassen zu definieren, für die in ähnlicher Weise eine solche Aufteilung möglich ist. Wird das Kommunikationsnetz hingegen nicht zur Stabilisation der Dynamik der einzelnen Teilsysteme, sondern lediglich zur Koordination der Teilsysteme verwendet, so lassen sich die entwickelten Methoden durchaus auch auf eine breitere Systemklasse anwenden. Dies wurde in [52] am Beispiel der Koordination verkoppelter Microgrids gezeigt. Dabei ist jedes Microgrid mit einem eigenen Regler ausgestattet, welcher zur Stabilisierung eines einzelnen Microgrids ausgelegt ist. Die Stabilisierung des Verbunds mehrerer so geregelter Microgrids wird dann durch Kommunikation der einzelnen Microgridregler untereinander erreicht.

A Mathematischer Anhang

A.1 Matrizen

Lemma A.1 ([11, Lemma 2.8.6]). *Seien* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *und* $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m\times m}$. *Wenn* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{D}$ *regulär sind, dann gilt*

$$\det(\mathbf{A}) \cdot \det\left(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right) = \det(\mathbf{D}) \cdot \det\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right).$$

Lemma A.2 (Schur-Komplement [18, Sec. 2.7.4]). *Seien* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *symmetrische Matrizen und sei* $\mathbf{R}$ *positiv definit. Die Bedingung*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^\top & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}$$

ist äquivalent zu $\mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top \succeq \mathbf{0}$.

Lemma A.3 (Schur-Komplement Spurumformung [18, Sec. 2.1]). *Sei* $\mathbf{R}$ *symmetrisch und positiv definit. Dann gilt*

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top\right) \leq 1 \tag{A.1}$$

genau dann, wenn eine symmetrische Matrix $\mathbf{X}$ *existiert, sodass*

$$\mathbf{X} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top \succeq \mathbf{0}, \quad \operatorname{tr}(\mathbf{X}) \leq 1. \tag{A.2}$$

Beweis. Gilt (A.1), so gilt offensichtlich (A.2) mit $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top$. Andersherum folgt aus (A.2)

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{X} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{X}) - \operatorname{tr}\left(\mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top\right) \geq 0,$$

woraus mit $\operatorname{tr}(\mathbf{X}) \leq 1$ direkt (A.1) folgt. □

A.2 Kronecker-Produkt

Das Kronecker-Produkt der Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ist definiert durch

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times r}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r\times s}$. Dann gilt

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}\mathbf{D}). \tag{A.3}$$

Mit dem Vektorisierungsoperator

$$\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \operatorname{vec}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top & \dots & \mathbf{a}_n^\top\end{bmatrix}^\top$$

gilt

$$\operatorname{vec}(\mathbf{ABC}) = \left(\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A}\right) \operatorname{vec}(\mathbf{B}) . \tag{A.4}$$

A.3 Gerschgorin-Kreise

Satz A.4 ([55, Theorem 6.1.1]). *Sei* $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbf{C}^{n\times n}$. *Seien*

$$R_i'(\mathbf{A}) = \sum_{j\neq i} \left|a_{i,j}\right| , \quad i = 1, \dots, n$$

die um das Diagonalelement reduzierten absoluten Zeilensummen von $\mathbf{A}$. *Seien*

$$\mathcal{S}_i = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq R_i'(\mathbf{A})\}, \quad i = 1, \dots, n$$

die Gerschgorin-Kreise von $\mathbf{A}$. *Die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$ *sind in der Vereinigung der Gerschgorin-Kreise*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i$$

enthalten.

A.4 Spektralradius und Perron-Frobenius-Theorem

Definition A.5 (Spektralradius [55, Definition 1.2.9]). *Der Spektralradius einer Matrix* $\mathbf{A}$ *ist definiert als der betragsmäßig größte Eigenwert von* $\mathbf{A}$, *oder formal durch*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \operatorname{spec}(\mathbf{A})} |\lambda| .$$

Satz A.6 (Perron-Frobenius [55, Theorem 8.3.1]). *Wenn* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *elementweise nichtnegativ ist, dann ist* $\rho(\mathbf{A})$ *Eigenwert von* $\mathbf{A}$ *und es existiert ein nichttrivialer elementweise nichtnegativer Vektor* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *sodass* $\mathbf{Ax} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x}$ *gilt.*

A.5 Isomorphismus zwischen komplexen und reellen Matrizen

Es wird die Abbildung

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = \begin{bmatrix}\operatorname{Re}(\mathbf{A}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{A}) & \operatorname{Re}(\mathbf{A})\end{bmatrix}$$

von der komplexen Matrix $\mathbf{A} = \operatorname{Re}(\mathbf{A}) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \in \mathbf{C}^{m\times n}$ zu der reellen Matrix $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ betrachtet. Es gilt (vgl. [114, Lemma 15.3]) folgendes Lemma.

Lemma A.7.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = \mathbf{B}_{\mathrm{Re}} + \mathbf{C}_{\mathrm{Re}}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = \mathbf{B}_{\mathrm{Re}}\mathbf{C}_{\mathrm{Re}}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = \mathbf{B}_{\mathrm{Re}}^{-1}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{+} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = \mathbf{B}_{\mathrm{Re}}^{+}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{*} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = \mathbf{B}_{\mathrm{Re}}^{\top}$$

Außerdem gilt das folgende Lemma.

Lemma A.8. *Sei* $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$*, dann ist* $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ *ähnlich zu*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

wobei $\bar{\mathbf{A}} = \mathrm{Re}\,(\mathbf{A}) - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,(\mathbf{A})$ *die konjugiert-komplexe Matrix zu* $\mathbf{A}$ *ist.*

Beweis. Dieses Ergebnis kann einfach gezeigt werden, indem die Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\mathbf{T}$ mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n$$

durchgeführt wird. □

A.6 Erreichbarkeitsmatrix eines Graphen

Die folgenden Ergebnisse zu Erreichbarkeitsmatrizen sind [80, Abschnitt 2.3.2] entnommen.

Lemma A.9. *Sei* $\mathbf{A}_w \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *die Adjazenzmatrix eines gewichteten Graphen* $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ *mit positiven Kantengewichten. Es exisitiert ein Pfad der Länge* k *vom Knoten* v_i *zum Knoten* v_j *genau dann, wenn das* j*-te Element der* i*-ten Spalte der Matrix* $\mathbf{A}_w^k$ *ungleich Null ist.*

Definition A.10. *Sei* $\mathbf{A}_w \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *die Adjazenzmatrix eines gewichteten Graphen* $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ *mit positiven Kantengewichten. Die Matrix*

$$\mathbf{R}_w = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}_w^k \tag{A.6}$$

heißt Erreichbarkeitsmatrix des Graphen $\mathcal{G}$*.*

Lemma A.11. *Sei* $\mathbf{R}_w$ *gemäß Definition A.10 die Erreichbarkeitsmatrix eines gewichteten Graphen* $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ *mit positiven Kantengewichten. Das Element* $r_{i,j}$ *von* $\mathbf{R}_w$ *ist genau dann von Null verschieden, wenn* $v_i \in \mathcal{R}(v_j)$ *gilt, wobei* $\mathcal{R}(v_j)$ *die Erreichbarkeitsmenge von Knoten* v_j *gemäß Definition 2.11 ist.*

Bemerkung A.12. *Die Summe* (A.6) *in der Definition der Erreichbarkeitsmatrix wird nach N Gliedern abgebrochen. Dieses Abbrechen der Summe resultiert aus der Tatsache, dass ein Pfad vom Knoten v_i zum Knoten v_j, welcher jeden Knoten nicht mehr als einmal durchläuft, höchstens $N-1$ Kanten hat. Das bedeutet, dass das j-te Element der i-ten Spalte mindestens einer der Matrizen $\mathbf{A}_w^1, \ldots, \mathbf{A}_w^{N-1}$ ungleich Null ist. Statt die Summe nach N Gliedern abzubrechen, könnte jedoch auch die unendliche Summe*

$$\mathbf{R}_{w,\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_w^k$$

betrachtet werden und diese als Erreichbarkeitsmatrix verwendet werden. Dies ist allerdings nur zulässig, wenn der Grenzwert exisitiert, d. h., wenn $\rho(\mathbf{A}_w) < 1$ für den Spektralradius von $\mathbf{A}_w$ gilt. Existiert der Grenzwert, so ist das Muster der Nulleinträge und Nichtnulleinträge der Matrizen $\mathbf{R}_w$ und $\mathbf{R}_{w,\infty}$ dasselbe. Daher gelten die Aussagen in Lemma A.11 gleichermaßen für $\mathbf{R}_{w,\infty}$.

A.7 Das Prinzip vom Argument

Definition A.13 (Variation des Arguments einer komplexen Funktion entlang einer Kurve)**.** *Sei Γ eine einfache Kurve in $\mathbb{C}$ mit der Parametrierung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, für die $f(s) \neq 0$ für alle $s \in \Gamma$ gilt. Sei $\varphi_f : \Gamma \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die für jedes $s \in \Gamma$*

$$f(s) = |f(s)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_f(s)}$$

gilt.[1] *Die Funktion φ_f sei eineindeutig und stetig.*[2] *Dann bezeichnet*

$$\Delta_\Gamma \arg\left(f(s)\right) = \varphi_f(\gamma(1)) - \varphi_f(\gamma(0))$$

die Variation des Arguments von f entlang der Kurve Γ.

Lemma A.14 ([118, Abschnitt VI.1.2, Lemma 11 und Lemma 13])**.** *Seien Γ und f wie in Definition A.13. Seien $f_1, \ldots, f_m : \Gamma \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ stetige Funktionen, sodass*

$$f(s) = \prod_{i=1}^{m} f_i(s)$$

für alle $s \in \Gamma$ gilt. Dann gilt

$$\Delta_\Gamma \arg\left(f(s)\right) = \sum_{i=1}^{m} \Delta_\Gamma \arg\left(f_i(s)\right).$$

Ist Γ eine einfach geschlossene Kurve, so ist die Variation des Arguments von f entlang Γ ein ganzes Vielfaches von 2π (vgl. [118, Abschnitt VI.1.2, Lemma 13]). Dies bedeutet, dass die geschlossene Kurve $f(\Gamma)$ den Ursprung ganzzahlig oft umschließt, was zu folgender Definition führt.

[1] Die Funktion φ_f beschreibt also das Argument der komplexen Funktionswerte $f(s)$ entlang der Kurve Γ.

[2] Eine solche eineindeutige und stetige Argumentsfunktion existiert immer unter den hier getroffenen Annahmen (vgl. [118, Abschnitt VI.1.2, Lemma 10 sowie Definitionen 4 und 5]).

Definition A.15 (Windungszahl). *Sei Γ eine einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und sei $z_0 \in \mathbb{C}$, sodass $f(s) \neq z_0$ für alle $s \in \Gamma$ gilt. Dann heißt*

$$\varpi(z_0, f(s), \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg\left(f(s) - z_0\right)$$

Windungszahl der Kurve $f(\Gamma)$ um z_0.

Lemma A.16 ([118, Abschnitt VI.1.2, Lemma 13]). *Seien Γ, f und z_0 wie in Definition A.15. Sei $-\Gamma$ die Kurve Γ mit gegenläufiger Orientierung. Dann gilt*

$$\varpi(z_0, f(s), \Gamma) = -\varpi(z_0, f(s), -\Gamma)$$

Satz A.17 (Prinzip vom Argument, [20, Abschnitt 86]). *Sei Γ eine gegen den Uhrzeigersinn orientierte, einfach geschlossene Kurve in der komplexen Ebene und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine rationale Funktion, d. h. $f(s) = n(s)/d(s)$, wobei $n(s)$ und $d(s)$ Polynome in $s \in \mathbb{C}$ sind. Es gelte*

(i) f hat n_Z Nullstellen und n_P Pole im Inneren von Γ, wobei die Vielfachheit der Nullstellen und Pole mitberücksichtigt wird;

(ii) f hat weder Pole noch Nullstellen auf Γ.

Dann gilt

$$\varpi(0, f(s), \Gamma) = n_\mathrm{Z} - n_\mathrm{P}.$$

B Ergänzende Beweise und Rechnungen

B.1 Abschätzung des Spektralradius von $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}$ im Beweis zu Satz 2.13

Da $\mathbf{1}_N$ im Rechtsnullraum von $\mathbf{L}_w$ liegt und da alle Nichtdiagonalelemente von $\mathbf{L}_w$ nichtpositiv sind, gilt

$$\mathbf{L}_{w,\mathcal{CC}}\mathbf{1}_{|\mathcal{C}|} = -\sum_{k=1}^{N_\mathcal{R}} \mathbf{L}_{w,\mathcal{CH}_k}\mathbf{1}_{|\mathcal{H}_k|} \geq \mathbf{0}.$$

Für die skalierte Matrix $\mathbf{L}'_{w,\mathcal{CC}} = \mathbf{D}^{-1}_{w,\mathcal{CC}}\mathbf{L}_{w,\mathcal{CC}} = \mathbf{I}_{|\mathcal{C}|} - \mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}$ gilt diese Beziehung natürlich auch, woraus

$$\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}\mathbf{1}_{|\mathcal{C}|} \leq \mathbf{1}_{|\mathcal{C}|}$$

folgt. Damit folgt mithilfe des Gerschgorin-Theorems (Abschnitt A.3), dass alle Eigenwerte von $\mathbf{L}'_{w,\mathcal{CC}}$ innerhalb eines Kreises mit Radius $r \leq 1$ und Mittelpunkt 1 in der komplexen Ebene liegen. Da $\mathbf{L}'_{w,\mathcal{CC}}$ regulär ist, folgt daraus, dass $\operatorname{Re}\left(\lambda_i(\mathbf{L}'_{w,\mathcal{CC}})\right) > 0$ für $i = 1, \ldots, |\mathcal{C}|$ gilt. Damit gilt $\operatorname{Re}\left(\lambda_i(\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}})\right) = 1 - \operatorname{Re}\left(\lambda_i(\mathbf{L}'_{w,\mathcal{CC}})\right) < 1$ für $i = 1, \ldots, |\mathcal{C}|$. Da $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}$ eine nichtnegative Matrix ist, gilt aufgrund des Perron-Frobenius-Theorems (Satz A.6), dass der Spektralradius $\rho(\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}})$ Eigenwert von $\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}$ ist. Damit folgt sofort, dass $\rho(\mathbf{A}'_{w,\mathcal{CC}}) < 1$. □

B.2 Ergänzungen zu Abschnitt 3.1.5

B.2.1 Berechnung der Tangentenschnittpunkte der Nyquistkurven

Wie in Bemerkung 3.28 beschrieben, können die Werte der Nyquist-Kurven $\mu_1(s_j), \ldots, \mu_{q+n_\mathrm{c}}(s_j)$ für alle Stützstellen $s_1, \ldots, s_M \in \Gamma_\mathrm{D}$ entlang der Kurve Γ_D durch jeweiliges Lösen des verallgemeinerten Eigenwertproblems (3.25) berechnet werden. Neben den Eigenwerten $\mu_i(s_j)$ können so auch die zugehörigen Rechtseigenvektoren $\mathbf{v}_{i,j}$ und Linkseigenvektoren $\mathbf{w}^\top_{i,j}$ berechnet werden. Wurde die Nyquist-D-Kurve Γ_D über die Parametrierung $\gamma_\mathrm{D} \,|\, [0,1] \to \mathbb{C}$ beschrieben, so ist die am Punkt $\mu_i(s_j)$ mit $s_j = \gamma_\mathrm{D}(\tau_i)$ anliegende Tangente durch

$$\mu_{t,i,s_j}(\Delta\tau) = \mu_i(s_j) + \left.\frac{\partial \mu_i(s)}{\partial s}\right|_{s=s_j} \cdot \left.\frac{\gamma_\mathrm{D}(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_j} \cdot \Delta\tau_j \tag{B.1}$$

mit $\Delta\tau \in \mathbb{R}$ gegeben. Dabei entspricht $\partial\mu_i(s)/\partial s$ der Ableitung des Eigenwerts in (3.25) nach dem Parameter s. Es wird nun angenommen, dass alle endlichen Eigenwerte in (3.25) einfach

sind.[1] Dann gilt (vgl. [129])

$$\left.\frac{\partial \mu_i(s)}{\partial s}\right|_{s=s_j} = \frac{\mathbf{w}_{i,j}^\top \mathbf{v}_{i,j}}{\mathbf{w}_{i,j}^\top \hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}_{i,j}}. \tag{B.2}$$

Die Ableitung $\gamma_\mathrm{D}(\tau)/\partial\tau$ kann an der Stelle $\tau = \tau_j$ direkt aus der gewählten Parametrierung der Nyquist-D-Kurve Γ_D bestimmt werden. Liegen für zwei aufeinanderfolgende Stützstellen s_j und s_{j+1} die Tangentenbeschreibungen gemäß (B.1) vor, so kann der Schnittpunkt der beiden Tangenten $\mu_{\mathrm{t},i}(s_j, s_{j+1})$ durch Gleichsetzen der beiden Beschreibungen gewonnen werden. Die dabei zu bestimmenden Werte von $\Delta\tau_j$ und $\Delta\tau_{j+1}$ werden mit $\Delta\tau_{j,j+1}$ und $\Delta\tau_{j+1,j}$ bezeichnet. Im Hinblick auf die in Abschnitt 3.1.5 verwendete heuristische Annahme, dass die Nyquist-Kurve $\mu_i(\gamma_\mathrm{D}(\tau))$ für $\tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1}$ vollständig in dem durch die Punkte $\mu_i(s_j)$ und $\mu_i(s_{j+1})$ und dem Tangentenschnittpunkt $\mu_{\mathrm{t},i}(s_j, s_{j+1})$ aufgespannten Dreieck verläuft (vgl. Abb. 3.6), muss notwendigerweise $\Delta\tau_{j,j+1} \geq 0$ und $\Delta\tau_{j+1,j} \leq 0$ gelten. Dies bedeutet, dass die Nichterfüllung dieser Bedingung eine Situation darstellt, in der die für die Heuristik getroffene Annahme nicht erfüllt ist und somit die Verwendung des Tangentendreiecks zwischen den beiden Punkten $\mu_i(s_j)$ und $\mu_i(s_{j+1})$ nicht sinnvoll ist. Die beiden Punkte können dann für die algorithmische Lösung des Optimierungsproblems (3.31) (vgl. Abschnitt B.2.2) markiert werden, sodass wenn für die Lösung τ^* des Optimierungsproblems $\tau_j \leq \tau^* \leq \tau_{j+1}$ gilt, der Nutzer auf die Nichterfüllung der für die Heuristik getroffenen Annahme hingewiesen werden kann.

Bemerkung B.1. *An dieser Stelle wird noch kurz die der Berechnung der Eigenwertableitung* (B.2) *zugrunde liegende Annahme diskutiert, dass die endlichen Eigenwerte in* (3.25) *einfach sind. Das zum Eigenwertproblem* (3.25) *gehörende charakteristische Polynom*

$$\chi(s,\mu) = \det\left(s\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}} - \mu\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}\right)$$

ist ein bivariates Polynom in s und μ. Um zu überprüfen, ob das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen in μ hat, kann die Resultante des charakteristischen Polynoms $\chi(s,\mu)$ und seiner Ableitung $\partial\chi(s,\mu)/\partial\mu$ in Bezug auf μ genutzt werden (vgl. [50]). Verschwindet die Resultante, so liegen mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms in μ vor. Die Resultante ist wiederum ein Polynom in s und hat somit entweder nur endlich viele Nullstellen oder verschwindet vollständig. Im ersten Fall können die oben vorgestellten Resultate ohne Weiteres verwendet werden, da für den Fall, dass mehrfache Eigenwerte für $s_j = \gamma_\mathrm{D}(\tau_j)$ vorliegen sollten, durch eine geringe Variation in τ_j alle Eigenwerte einfach sind und somit die getroffene Annahme wieder gültig ist. Verschwindet die Resultante jedoch vollständig, so ist die Annahme einfacher Eigenwerte für alle $s \in \mathbb{C}$ ungültig. In diesem Fall kann versucht werden, das Polynom $\chi(s,\mu)$ mittels Polynomfaktorisierungsalgorithmen (z. B. mithilfe der in der Matlab Symbolic Toolbox [93] zur Verfügung stehenden Funktion `factor`*) auf ein Polynom $\tilde{\chi}(s,\mu)$ zu reduzieren, welches dieselben Nullstellen in μ wie $\chi(s,\mu)$ hat, wobei alle Nullstellen einfach sind. Wurde solch ein reduziertes Polynom $\tilde{\chi}(s,\mu)$ gefunden, so kann anschließend eine Deteriminaldarstellung von $\tilde{\chi}(s,\mu)$ gesucht werden [115], sodass*

$$\tilde{\chi}(s,\mu) = \det\left(s\mathbf{I}_{\tilde{n}} - \mathbf{A}_{\tilde{\chi}} - \mu\mathbf{B}_{\tilde{\chi}}\right)$$

[1] Siehe Bemerkung B.1 für eine Diskussion dieser Annahme.

gilt. Zu dieser Deteriminaldarstellung kann nun wieder ein verallgemeinertes Eigenwertproblem analog zu (3.25) *assoziiert werden. Dieses Eigenwertproblem erfüllt dann die Annahme einfacher Eigenwerte und die Eigenwertableitungen lassen sich analog zu* (B.2) *berechnen, wobei* $\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{C}}$ *durch* $\mathbf{B}_{\tilde{\chi}}$ *ersetzt wird.*

B.2.2 Algorithmische Lösung des Optimierungsproblems in Gleichung 3.31

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit zur Lösung von Optimierungsproblem (3.31) aufgezeigt. Es wird dazu angenommen, dass für alle entlang der Nyquist-D-Kurve Γ_{D} gewählten Stützstellen $s_1, \ldots, s_M$ sowohl die Werte $\mu_i(s_j)$ als auch die Tangentenschnittpunkte $\mu_{\mathrm{t},i}(s_j, s_{j+1})$ der Nyquist-Kurven $\mu_i(s)$ für alle $i \in \{1, \ldots, q + n_{\mathrm{c}}\}$ vorliegen. Das Minimum in (3.31) wird über die Funktionen $\tilde{\mu}_i(\tau)$ und $\tilde{\mu}_{\mathrm{t},i}(\tau)$ mit $i = 1, \ldots, q + n_{\mathrm{c}}$ gesucht, wobei τ Laufvariable einer Parametrierung der Nyquist-D-Kurve $\gamma_{\mathrm{D}}(\tau)$ ist. Das Minimierungsproblem lässt sich aufteilen, indem zunächst das Minimum über jede einzelne Funktion gesucht wird. Die auftretenden Funktionen sind stückweise linear. Daher kann zudem das Minimierungsproblem weiter aufgeteilt werden, indem jeweils die einzelnen Intervalle separat betrachtet werden, auf denen die Funktionen linear sind. Dies soll im Folgenden für eine Funktion $\tilde{\mu}_i(\tau)$ gezeigt werden, d. h., es wird beschrieben, wie das Minimierungsproblem

$$\min_{\tau \in [0,1]} |\tilde{\mu}_i(\tau) - \lambda| \tag{B.3}$$

gelöst werden kann. Die Funktion $\tilde{\mu}_i(\tau)$ ist durch die gemäß der Stützstellen $s_1, \ldots, s_M$ geordneten Werte $\mu_i(s_j)$ definiert. Für die Betrachtung der stückweise linearen Tangentenfunktion $\tilde{\mu}_{\mathrm{t},i}(\tau)$ sind die nachfolgend gezeigten Überlegungen ebenso gültig, wobei die Tangentenschnittpunkte $\mu_{\mathrm{t},i}(s_j, s_{j+1})$ statt der Werte $\mu_i(s_j)$ verwendet werden müssen. Nun kann (B.3) jeweils einzeln über die Intervalle betrachten, auf denen die Funktion $\tilde{\mu}_i(\tau)$ linear ist. Für $\tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1}$ gilt dabei

$$\tilde{\mu}_i(\tau) = \tilde{\mu}_i(\tilde{\tau}_j) = \mu_i(s_j) + \tilde{\tau}_j \cdot \big(\mu_i(s_{j+1}) - \mu_i(s_j)\big)$$

mit der skalierten Laufvariable $\tilde{\tau}_j = (\tau - \tau_j)/(\tau_{j+1} - \tau_j) \in [0, 1]$. Wird die Fortsetzung dieser Geraden für $\tilde{\tau}_j \in \mathbb{R}$ betrachtet, so hat das Minimierungsproblem

$$\min_{\tilde{\tau}_j \in \mathbb{R}} \left|\tilde{\mu}_i(\tilde{\tau}_j) - \lambda\right|$$

dieselbe Lösung wie das Minimierungsproblem

$$\min_{\tilde{\tau}_j \in \mathbb{R}} \left\| \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(\tilde{\mu}_{\mathrm{t},i}(\tilde{\tau}_j) - \lambda\right) \\ \mathrm{Im}\left(\tilde{\mu}_{\mathrm{t},i}(\tilde{\tau}_j) - \lambda\right) \end{bmatrix} \right\|_2 .$$

Die Lösung dieses linearen Ausgleichsproblems lässt sich explizit angeben zu

$$\tilde{\tau}_j^{**} = \frac{\mathrm{Re}\left(\mu_i(s_{j+1}) - \mu_i(s_j)\right) \cdot \mathrm{Re}\left(\mu_i(s_j) - \lambda\right) + \mathrm{Im}\left(\mu_i(s_{j+1}) - \mu_i(s_j)\right) \cdot \mathrm{Im}\left(\mu_i(s_j) - \lambda\right)}{\left|\mu_i(s_{j+1}) - \mu_i(s_j)\right|^2}.$$

Wird nun die Beschränkung von $\tilde{\tau}_j$ auf das Intervall $[0, 1]$ wieder berücksichtigt, indem

$$\tilde{\tau}_j^{*} = \min(\max(\tau_j^{**}, 0), 1)$$

gewählt wird, so ist mit $\left|\tilde{\mu}_i(\tilde{\tau}_j^*) - \lambda\right|$ die Lösung von (B.3) über das Intervall $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ gegeben. Dies kann schließlich für alle Intervalle durchgeführt werden und somit das Minimum über alle Intervalle gefunden werden, um die Gesamtlösung von (B.3) zu erhalten. Wird dieses Vorgehen für alle Funktionen $\tilde{\mu}_i(\tau)$ und $\tilde{\mu}_{\mathrm{t},i}(\tau)$ für alle $i \in \{1, \ldots, q + n_\mathrm{c}\}$ angewandt, so lässt sich schließlich die Lösung von (3.31) bestimmen. Der Vorteil des beschriebenen Vorgehens ist, dass die einzelnen Rechenschritte explizit ausgeführt werden können und kein iteratives Vorgehen erforderlich ist.

B.2.3 Berechnung des maximalen Spektralradius von $\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ über alle Frequenzen

In Bemerkung 3.31 wurde die Verwendung vorhandener Implementierungen zur Berechnung des maximalen strukturierten Singulärwerts der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ diskutiert. Dabei wurde darauf hingewiesen, dass vorhandene Implementierungen wie die Funktion `mussv` der *Matlab Robust Control Toolbox* [92] oder die Funktion `muub` der *Systems Modeling, Analysis and Control Toolbox* [125] den maximalen strukturierten Singulärwert jeweils nur über nichtnegative Frequenzen berechnen, im hier vorliegenden Fall jedoch das Maximum auch bei negativen Frequenzen auftreten kann. Im Folgenden wird daher gezeigt, wie solche Funktionen trotzdem verwendet werden können, um eine obere Grenze für den maximalen strukturierten Singulärwert von $\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ zu berechnen. Der strukturierte Singulärwert von $\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)$ ist in dem in Abschnitt 3.1.5 diskutierten Fall der wiederholten skalaren strukturierten Unsicherheit $\mathbf{\Delta} = \delta\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}}$ identisch mit dem Spektralradius $\rho\left(\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)\right)$. Der maximale strukturierte Singulärwert über alle Frequenzen entspricht dann dem Kehrwert des in (3.29) definierten Radius $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$, d. h., es gilt

$$\frac{1}{r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)} = \max_{-\infty \le \omega \le \infty} \rho\left(\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)\right).$$

Dabei ist (vgl. Abb. 3.5)

$$\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega) = \left(\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}} - \lambda\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega)\right)^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega).$$

Für $\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega) = \hat{\mathbf{C}}(\mathrm{j}\omega\mathbf{I}_{n+n_\mathrm{c}} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}$ gilt $\overline{\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega)} = \mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(-\mathrm{j}\omega)$, wobei $\overline{(\cdot)}$ den komplexen Konjugationsoperator darstellt. Dies führt zu

$$\mathbf{G}_{\bar{\lambda}}(\mathrm{j}\omega) = \left(\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}} - \bar{\lambda}\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega)\right)^{-1} \cdot \mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega) = \overline{\left(\mathbf{I}_{q+n_\mathrm{c}} - \lambda\overline{\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega)}\right)^{-1} \cdot \overline{\mathbf{G}_{\mathrm{ol}}(\mathrm{j}\omega)}} = \overline{\mathbf{G}_\lambda(-\mathrm{j}\omega)}.$$

Der Spektralradius einer Matrix ist invariant unter komplexer Konjugation, sodass

$$r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda) = \min\left(\frac{1}{\rho_{\max,1}}, \frac{1}{\rho_{\max,2}}\right)$$

mit

$$\rho_{\max,1} = \max_{\omega \ge 0} \rho\left(\mathbf{G}_\lambda(\mathrm{j}\omega)\right), \qquad \rho_{\max,2} = \max_{\omega \ge 0} \rho\left(\mathbf{G}_{\bar{\lambda}}(\mathrm{j}\omega)\right)$$

gilt. Somit können die vorhandenen Implementierungen `mussv` und `muub` genutzt werden, um eine untere Grenze für $r_{\max}(\mathbf{\Theta}, \lambda)$ zu bestimmen.

B.3 Berechnung des optimalen Regelgesetzes gemäß Gleichung 3.44 für $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$

Um die kompakte Form (3.55) für das optimale Regelgesetz (3.44) bei Wahl von $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\gamma}^\top \otimes \mathbf{I}_n$ zu erhalten wird

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}' & \frac{\mathbf{v}_N}{\|\mathbf{v}_N\|_2} \end{bmatrix}$$

gewählt, wobei $\mathbf{v}_N = \mathbf{1}_N - N\boldsymbol{\gamma}$ und $\mathbf{V}'$ so gewählt wird, dass $\mathbf{V}'^\top\mathbf{V}' = \mathbf{I}_{N-2}$ sowie $\mathbf{1}^\top\mathbf{V}' = \boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{V}' = \mathbf{0}$ gilt. Mit dieser Wahl gilt weiterhin wie in Satz 3.38 gefordert $\mathbf{1}_N^\top\mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_{N-1}$. Die zur Berechnung des Regelgesetzes benötigte Matrix $\tilde{\mathbf{Q}}$ berechnet sich gemäß (3.43) zu

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left(\mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}\,\top} \cdot \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{V} \otimes \mathbf{Q}\right)$$

mit $\mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N\boldsymbol{\gamma}^\top$. Es gilt

$$\mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}' & \frac{\tilde{\mathbf{v}}_N}{\|\mathbf{v}_N\|_2} \end{bmatrix}$$

mit $\tilde{\mathbf{v}}_N = N \cdot (\|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2\,\mathbf{1}_N - \boldsymbol{\gamma})$, wodurch $\mathbf{V}'^\top\tilde{\mathbf{v}}_N = \mathbf{0}$ gilt. Schließlich gilt

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}}_N^\top\tilde{\mathbf{v}}_N}{\|\mathbf{v}_N\|_2^2} = \frac{N^2 \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2 \cdot (N \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2 - 1)}{N \cdot (N \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2 - 1)} = N \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2\,,$$

und somit ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-2} & 0 \\ 0 & N \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{Q}\right).$$

Durch diese Form von $\tilde{\mathbf{Q}}$ wird die algebraische Riccati-Gleichung (3.42) durch die positiv definite Blockdiagonalmatrix

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_{N-2} \otimes \mathbf{P}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix}$$

gelöst, wobei $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}}$ die positiv definiten Lösungen von (3.38) und (3.56) darstellen. Damit folgt für das Regelgesetz (3.44)

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{V}'\mathbf{V}'^\top \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}\right)\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N\mathbf{v}_N^\top}{\mathbf{v}_N^\top\mathbf{v}_N} \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma}}\right)\mathbf{x}. \tag{B.4}$$

Als letzter Schritt der Herleitung der kompakten Form (3.55) des Regelgesetzes (3.44) wird das Produkt $\mathbf{V}\mathbf{V}^\top$ betrachtet. Es gilt (vgl. die Berechnung im Beweis von Satz 3.39)

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^\top = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top = \mathbf{V}'\mathbf{V}'^\top + \frac{\mathbf{v}_N\mathbf{v}_N^\top}{\mathbf{v}_N^\top\mathbf{v}_N},$$

woraus direkt

$$\mathbf{V}'\mathbf{V}'^\top = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top - \frac{\mathbf{v}_N\mathbf{v}_N^\top}{\mathbf{v}_N^\top\mathbf{v}_N}$$

folgt, was in (B.4) eingesetzt auf (3.55) führt. □

Bemerkung B.2. *Das hier beschriebene Vorgehen orientiert sich am Vorgehen in [101, Theorem 2] zur Berechnung des optimalen Synchronisierungsreglers bei Verwendung der Laplacematrix* $\mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}\,\top} \cdot \mathbf{L}_w^{\boldsymbol{\gamma}}$ *im Gütemaß des Optimierungsproblems wie in* (3.54).

B.4 Ergänzungen zu Abschnitt 4.3

B.4.1 Untere Grenze für $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F})$

Für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}} \quad & J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) \\ \text{u.B.v.} \quad & \mathbf{F} \in \mathcal{F} \\ & \operatorname{rang}(\mathbf{F}) = N_0 \end{aligned}$$

ist eine untere Grenze durch die Lösung des konvexifizierten Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{F}} \quad J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) \tag{B.5a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{F}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N \tag{B.5b}$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{F}) = N_0 \tag{B.5c}$$

gegeben. Eine Lösung dieses Optimierungsproblem und insbesondere der zugehörige Gütewert können explizit angegeben werden, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma B.3. *Die Matrix* $\mathbf{F}^* = \frac{N_0-1}{N-1} \cdot \mathbf{I}_N + \frac{N-N_0}{N(N-1)} \cdot \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top$ *ist Lösung des Optimierungsproblems* (B.5) *und es gilt* $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}^*) = 2N(N_0 - 1)$.

Beweis. Zunächst wird der Gütewert $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}^*) = 2N(N_0-1)$ berechnet. Nach (4.30) gilt $J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}) = \|\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}\mathbf{F})\|_1$. Die Matrix $\mathbf{\Phi}$ besitzt folgende Eigenschaften (vgl. die Definition von $\mathbf{\Phi}$ in (4.31)):

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}, \quad \|\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})\|_1 = 2N(N-1), \quad \mathbf{\Phi}^\top\mathbf{\Phi} = 4 \cdot (N\mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top). \tag{B.6}$$

Daher gilt $\mathbf{\Phi}\mathbf{F}^* = (N_0 - 1)/(N - 1)\mathbf{\Phi}$ und somit folgt

$$J_{\mathrm{Reg}}(\mathbf{F}^*) = \frac{N_0 - 1}{N - 1} \|\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})\|_1 = 2N(N_0 - 1).$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $\mathbf{F}^*$ tatsächlich Lösung des Optimierungsproblems (B.5) ist. Alle Matrizen, die (B.5b) und (B.5c) erfüllen, können durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \Delta\mathbf{F}$$

parametriert werden, wobei

$$\Delta\mathbf{F}\mathbf{1}_N = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \operatorname{tr}(\Delta\mathbf{F}) = 0$$

gilt. Diese beiden Beschränkungen können vektorisiert werden, sodass

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N^\top \otimes \mathbf{I}_N \\ \operatorname{vec}(\mathbf{I}_N)^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Psi}} \operatorname{vec}(\Delta\mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

folgt. Somit kann vec $(\Delta\mathbf{F})$ explizit parametriert werden durch

$$\operatorname{vec}(\Delta\mathbf{F}) = \boldsymbol{\Psi}^{\perp}\boldsymbol{\zeta} \tag{B.7}$$

wobei $\boldsymbol{\Psi}^{\perp}$ den Nullraum von $\boldsymbol{\Psi}$ aufspannt, sodass $\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\perp} = \mathbf{0}$ gilt. Für $\boldsymbol{\Psi}^{\perp}$ gilt

$$\operatorname{vec}\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^{\top}\right)^{\top}\boldsymbol{\Psi}^{\perp} = \left[-\tfrac{1}{N}\mathbf{1}_N^{\top} \quad 1\right]\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\perp} = \mathbf{0}. \tag{B.8}$$

Optimierungsproblem (B.5) kann mithilfe der Parametrierung (B.7) als unbeschränktes Problem geschrieben werden

$$\min_{\boldsymbol{\zeta}} \quad \left\|(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \left(\operatorname{vec}\left(\mathbf{F}^*\right) + \boldsymbol{\Psi}^{\perp}\boldsymbol{\zeta}\right)\right\|_1 .$$

Dies ist ein nichtglattes konvexes unbeschränktes Minimierungsproblem, sodass als notwendige und hinreichende Bedingung für ein globales Minimum der Nullvektor im Subdifferential des Optimums enthalten sein muss [124, Theorem 10.1]. Ein einfach zu bestimmender Subgradient ist durch

$$\mathbf{g}^{\top}(\boldsymbol{\zeta}) = \operatorname{sign}\left((\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \left(\operatorname{vec}\left(\mathbf{F}^*\right) + \boldsymbol{\Psi}^{\perp}\boldsymbol{\zeta}\right)\right)^{\top} \cdot (\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\perp}$$

gegeben (vgl. [104, Beispiel 3.1.5.5 und Lemma 3.1.11]). Unter Berücksichtigung von (B.6) gilt an der Stelle $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{\top}(\mathbf{0}) &= \operatorname{sign}\left(\operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{F}^*\right)\right)^{\top} \cdot (\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\perp} \\
&= \operatorname{sign}\left(\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi})\right)^{\top} \cdot (\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\perp} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi})^{\top} \cdot (\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\perp} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\top}\boldsymbol{\Phi}\right)^{\top} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\perp} \\
&= 2N \cdot \operatorname{vec}\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^{\top}\right)^{\top} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\perp}.
\end{aligned}$$

Mit (B.8) gilt somit $\mathbf{g}^{\top}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0}^{\top}$, was den Beweis schließt. □

B.4.2 Anzahl der Möglichkeiten die Knotenmenge $\mathcal{V}$ einzuteilen

Im Folgenden wird die Anzahl der Möglichkeiten berechnet, die Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ in exklusive und gemeinsame Teilmengen einzuteilen. Zur Berechnung werden die Stirling-Zahlen zweiter Art $S(N, N_0)$ und die Bell-Zahlen $B(N)$ verwendet. Die Stirling-Zahl $S(N, N_0)$ beschreibt die Anzahl möglicher Partitionierungen einer N-elementigen Menge in genau N_0 nichttriviale Teilmengen. Es gilt $S(N, N) = S(N, 1) = 1$. Die Bell-Zahl $B(N)$ wiederum beschreibt die Gesamtzahl möglicher Partitionierung einer N-elementigen Menge. Für $N, N_0 > 0$ gilt (vgl. [149, Abschnitt 1.3])

$$S(N+1, N_0+1) = S(N, N_0) + (N_0+1) \cdot S(N, N_0+1) \tag{B.9}$$

und

$$B(N) = \sum_{N_0=1}^{N} S(N, N_0). \tag{B.10}$$

Lemma B.4. *Sei $T_{\text{ges}}(N)$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ in exklusive und gemeinsame Teilmengen einzuteilen. Es gilt*

$$T_{\text{ges}}(N) = B(N+1) - 2^N + 1 > \left(\frac{N+1}{e \cdot \ln(N+1)}\right)^{N+1} - 2^N + 1,$$

wobei $B(N+1)$ die $(N+1)$-te Bell-Zahl und e die Eulersche Zahl ist.

Beweis. Es wird zuerst die Anzahl $T(N, N_0)$ möglicher Einteilungen der Knotenmenge $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ in N_0 exklusive Teilmengen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{N_0}$ berechnet. Dazu wird die Knotenmenge zunächst partitioniert. Für $N_0 = 1$ und für $N_0 = N$ gibt es jeweils nur eine Möglichkeit die Partitionierungen durchzuführen. Für $1 < N_0 < N$ muss hingegen unterschieden werden, ob die gemeinsame Menge $\mathcal{C} = \cup_{k=1}^{N_{\mathcal{R}}} \mathcal{C}_k$ leer ist oder nicht, da dann die Knotenmenge entweder in N_0 oder in N_0+1 Teilmengen partitioniert werden muss. Im ersteren Fall entspricht die Anzahl möglicher Einteilung direkt der Anzahl der Partitionierungen, welche durch die Stirling-Zahl $S(N, N_0)$ gegeben ist. Im letzteren Fall muss weiterhin gewählt werden, welche der $N_0 + 1$ Teilmengen die gemeinsamen Menge $\mathcal{C}$ ist. Da jede der Teilmengen als gemeinsamen Menge $\mathcal{C}$ gewählt werden kann, ergibt sich $(N_0 + 1) \cdot S(N, N_0 + 1)$ als Anzahl. Somit ergibt sich insgesamt

$$T(N, N_0) = \begin{cases} S(N, N_0) + (N_0 + 1) \cdot S(N, N_0 + 1), & 1 < N_0 < N, \\ S(N, N_0), & N_0 \in \{1, N\}. \end{cases}$$

Für $N > 2$ ist dann die Gesamtzahl möglicher Einteilungen in exklusive und gemeinsame Teilmengen durch

$$\begin{aligned} T_{\text{ges}}(N) &= \sum_{N_0=1}^{N} T(N, N_0) \\ &= S(N, N) + S(N, 1) + \sum_{N_0=2}^{N-1} \big(S\,(N, N_0) + (N_0 + 1) \cdot S\,(N, N_0 + 1)\big) \end{aligned}$$

gegeben. Mit der Rekursionsformel (B.9) und $S(N, N) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} T_{\text{ges}}(N) &= 1 - 2 \cdot S(N, 2) + \sum_{N_0=1}^{N-1} S(N+1, N_0 + 1) \\ &= 1 - 2 \cdot S(N, 2) - S(N+1, 1) - S(N+1, N+1) + \sum_{N_0=1}^{N+1} S(N+1, N_0). \end{aligned}$$

Mit (B.10), $S(N+1, 1) = S(N+1, N+1) = 1$ und $S(N, 2) = 2^{N-1} - 1$ folgt schließlich

$$T_{\text{ges}}(N) = B(N+1) - 2^N + 1.$$

Obwohl dieser Ausdruck für $N > 2$ hergeleitet wurde, ergibt er auch für $N = 1$ mit $T_{\text{ges}}(1) = 1$ und $N = 2$ mit $T_{\text{ges}}(2) = 2$ das korrekte Ergebnis. Für die Gesamtanzahl gilt [6]

$$T_{\text{ges}}(N) > \left(\frac{N+1}{e \cdot \ln(N+1)}\right)^{N+1} - 2^N + 1.$$

□

B.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

B.5.1 Beweis von Lemma 5.3

Es wird zuerst gezeigt, dass $\overline{\mathcal{L}}$ vollen Zeilenrang hat. Dazu wird bewiesen, dass der Linksnullraum von $\overline{\mathcal{L}}$ trivial ist. Sei $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^{(N-1)^2}$, sodass $\mathbf{z}_0^\top \overline{\mathcal{L}} = \mathbf{0}^\top$ gilt. Es wird gezeigt, dass $\mathbf{z}_0$ notwendigerweise zu Null gewählt werden muss. Nach (5.11) ergibt sich unter Berücksichtigung von (5.8)

$$\overline{\mathcal{L}} = \underbrace{\left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right)}_{\mathcal{M}_\mathrm{V} \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times N^2}} \cdot \underbrace{\left[\mathrm{vec}\left(\mathbf{L}_{1,2}\right) \quad \dots \quad \mathrm{vec}\left(\mathbf{L}_{N,N-1}\right)\right]}_{\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N(N-1)}}. \tag{B.11}$$

Die Matrix $\mathcal{M}_\mathrm{V}$ hat vollen Zeilenrang, da $\mathbf{V}^\top$ vollen Zeilenrang hat. Darüber hinaus besitzt die Matrix $\mathcal{L}$ vollen Spaltenrang, da die Spalten $\mathrm{vec}\left(\mathbf{L}_{i,j}\right)$ jeweils Kanten des vollständig verbundenen Graphen repräsentieren, jede Kante nur einmal vorkommt und somit der nichttriviale Nebendiagonaleintrag in $\mathbf{L}_{i,j}$ nur für (ν_i, ν_j) auftritt. Damit hat der Linksnullraum von $\mathcal{L}$ die Dimension N. Die Zeilen der Matrix $(\mathbf{1}_N^\top \otimes \mathbf{I}_N) \in \mathbb{R}^{N \times N^2}$ beschreiben eine Basis des Linksnullraums. Dies ist direkt ersichtlich aus Anwendung der Beziehung zwischen dem Kronecker-Produkt und dem Vektorisierungsoperator (A.4) auf jede Spalte von $\mathcal{L}$ gemeinsam mit der Eigenschaft, dass der Einsvektor $\mathbf{1}_N$ im Kern jeder Laplacematrix liegt

$$(\mathbf{1}_N^\top \otimes \mathbf{I}_N) \cdot \mathrm{vec}\left(\mathbf{L}_{i,j}\right) = \mathrm{vec}\left(\mathbf{L}_{i,j}\mathbf{1}_N\right) = \mathbf{0}.$$

Für $\mathbf{z}_0$, sodass $\mathbf{z}_0^\top \overline{\mathcal{L}} = \mathbf{0}^\top$, muss daher $\mathbf{z}_0^\top \mathcal{M}_\mathrm{V}$ im Linksnullraum von $\mathcal{L}$ liegen, d. h., es muss $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$ existieren, sodass

$$\mathbf{z}_0^\top \left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right) = \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{1}_N^\top \otimes \mathbf{I}_N)$$

gilt. Erneut kann die Beziehung zwischen dem Kronecker-Produkt und dem Vektorisierungsoperator (A.4) angewandt werden. Wird $\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$ als Matrix geschrieben, welche die Elemente von $\mathbf{z}_0$ in geeigneter Weise enthält, so ergibt sich

$$\mathbf{V}\mathbf{Z}_0\mathbf{V}^\top - \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}_N^\top = \mathbf{0}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\left[-\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{V}\mathbf{Z}_0\right] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N^\top \\ \mathbf{V}^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^\top} = \mathbf{0}. \tag{B.12}$$

Die Matrix $\mathbf{T}$ entspricht genau der in (2.3) definierten Transformationsmatrix, welche definitionsgemäß regulär ist. Daher kann (B.12) nur erfüllt werden, wenn $\mathbf{V}\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Da $\mathbf{V}$ vollen Spaltenrang hat, muss folglich $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ gelten, was zeigt, dass der Linksnullraum von $\overline{\mathcal{L}}$ trivial ist.

Als nächstes wird gezeigt, dass die Spalten von $\overline{\mathcal{L}}^\perp := \mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}$ eine Basis des Rechtsnullraums von $\overline{\mathcal{L}}$ darstellen. Im Folgenden wird die Notation

$$\mathcal{I} = \left[\mathrm{vec}\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\top\right) \quad \dots \quad \mathrm{vec}\left(\mathbf{e}_N\mathbf{e}_N^\top\right)\right]$$

verwendet. Außerdem wird $\mathbf{I}_N^{-i}$ geschrieben, um die Einheitsmatrix zu beschreiben, bei der die i-te Spalte gelöscht wurde. Darüber hinaus wird die Schreibweise $\mathbf{1}_N^{-i} := \mathbf{1}_N - \mathbf{e}_i$ verwendet, welche den Einsvektor beschreibt, der als i-tes Element eine Null enthält. Es gilt $\mathbf{I}_N^{-i}\mathbf{1}_{N-1} = \mathbf{1}_N^{-i}$. Es wird zunächst ein Teil der Matrix $\mathcal{L}$ betrachtet, welche in die Definition von $\overline{\mathcal{L}}$ gemäß (B.11) eingeht. Unter Berücksichtigung der Definition von $\mathbf{L}_{i,j}$ in (5.2) gilt

$$\begin{aligned}
&\left[\operatorname{vec}(\mathbf{L}_{i,1}), \ldots, \operatorname{vec}(\mathbf{L}_{i,i-1}), \operatorname{vec}(\mathbf{L}_{i,i+1}), \ldots, \operatorname{vec}(\mathbf{L}_{i,N})\right] \\
&\quad = \mathcal{I}\,\mathbf{I}_N^{-i} - \mathbf{e}_i \otimes \left[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_N\right] \\
&\quad = \mathcal{I}\,\mathbf{I}_N^{-i} - (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{I}_N)\,\mathbf{I}_N^{-i},
\end{aligned}$$

wobei die Beziehung $\operatorname{vec}(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^\top) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ genutzt wurde. Wird dieser Ausdruck verwendet um $\mathcal{L}$ darzustellen, so ergibt sich

$$\mathcal{L} = \left(\left(\mathbf{1}_N^\top \otimes \mathcal{I}\right) - \mathbf{I}_{N^2}\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_N^{-N} \end{bmatrix}. \tag{B.13}$$

Es gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_N^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_N^{-N} \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_N^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N^\top\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_N^{-N} \end{bmatrix} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_N) - \mathcal{I}\,\mathbf{V}. \tag{B.14}$$

Zudem gilt

$$\left(\mathbf{1}_N^\top \otimes \mathcal{I}\right)\mathcal{I} = \left[\operatorname{vec}(\mathcal{I}\mathbf{e}_1), \ldots, \operatorname{vec}(\mathcal{I}\mathbf{e}_N)\right] = \mathcal{I}. \tag{B.15}$$

Unter Verwendung von (B.13), (B.14) und (B.15) sowie bei Verwendung der Tatsache, dass $\mathbf{1}_N^\top\mathbf{V} = \mathbf{0}^\top$ gilt, folgt

$$\mathcal{L} \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}) = -(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_N). \tag{B.16}$$

Daher folgt unter Berücksichtigung der Definition von $\overline{\mathcal{L}}$ in (B.11), dass

$$\overline{\mathcal{L}} \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}) = -\left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right)(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_N) = \mathbf{0}, \tag{B.17}$$

da $\mathbf{V}^\top\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ gilt. Da bereits gezeigt wurde, dass $\overline{\mathcal{L}}$ vollen Zeilenrang hat, d. h., dass $\operatorname{rang}(\overline{\mathcal{L}}) = (N-1)^2$ gilt, hat der Rechtsnullraum von $\overline{\mathcal{L}}$ die Dimension $N-1$. Dies zeigt, dass die Spalten von $\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_{N-1}$ eine vollständige Basis für den Rechtsnullraum von $\overline{\mathcal{L}}$ sind. □

B.5.2 Ergänzungen zum Beweis von Satz 5.18

Für den Fall $N = 3$ wird im Folgenden gezeigt, dass

$$\overline{\mathcal{L}}^+ \operatorname{vec}(\mathbf{Y}'\mathbf{U}) = \underbrace{\left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}_{\mathbf{M}_\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \left[\eta_1, -\eta_1, \eta_2, -\eta_2, \eta_3, -\eta_3\right]^\top \tag{B.18}$$

und

$$\overline{\mathcal{L}}^{+}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{I}_2) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_6 \tag{B.19}$$

gilt. Beide Gleichungen sind vom Typ $\overline{\mathcal{L}}^{+}\mathbf{v} = \mathbf{w}$ und werden daher auf demselben Weg bewiesen. Zunächst wird gezeigt, dass

$$\overline{\mathcal{L}}\mathbf{w} = \mathbf{v} \tag{B.20}$$

gilt und anschließend, dass $\mathbf{w}$ Lösung von (B.20) mit minimaler 2-Norm ist (diese Lösung wird über die Pseudo-Inverse $\overline{\mathcal{L}}^{+}$ gewonnen). In beiden Fällen wird von der Darstellung der Matrix $\overline{\mathcal{L}}$ in (B.11) Gebrauch gemacht.

Um die Gültigkeit von (B.18) zu zeigen, wird zunächst

$$\overline{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right) \cdot \mathcal{L} \cdot \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \tag{B.21}$$

betrachtet. Der Nullraum von $(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top) \in \mathbb{R}^{4\times 9}$ wird für beliebige $\mathbf{V}$ mit $\mathbf{1}_3^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ durch

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \left[(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_3)\,, \quad \left(\mathbf{1}_3 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \right]$$

aufgespannt. Es lässt einfach numerisch überprüfen, dass

$$\mathrm{bild}\left(\mathcal{L} \cdot \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\right) \cap \mathrm{bild}\,(\boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0}$$

gilt, woraus folgt, dass $\overline{\mathcal{L}}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ in (B.21) vollen Spaltenrang hat. Sei

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

eine symmetrische Matrix. Dann gilt

$$\mathrm{vec}\left(\mathbf{Y}'\mathbf{U}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{\mathbf{y}}} \cdot \mathbf{y}$$

mit $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ y_3]^\top$. Als nächstes wird gezeigt, dass für alle $\boldsymbol{\eta}$ ein $\mathbf{y}$ existiert, sodass $\mathbf{M}_{\mathbf{y}}\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta}$ gilt. Um dies zu zeigen, wird ausgenutzt, dass ein Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann lösbar ist, wenn $\mathbf{w}^\top\mathbf{b} = 0$ für alle $\mathbf{w}$ im Linksnullraum von $\mathbf{A}$ gilt [11, Fakt 2.10.6]. Der Linksnullraum

von $\mathbf{M}_\mathbf{y}$ wird durch $\operatorname{vec}(\mathbf{I}_2)$ aufgespannt. Somit beweist

$$\begin{aligned}
\operatorname{vec}(\mathbf{I}_2)^\top \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}} &= \operatorname{vec}(\mathbf{I}_2)^\top \cdot \left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{vec}\left(\mathbf{V}\mathbf{V}^\top\right)^\top \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{vec}\left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3^\top\right)^\top \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathbf{1}_6^\top \cdot \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \left(\mathbf{1}_3^\top \otimes \mathbf{1}_2^\top\right) \cdot \left(\mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

dass für alle $\boldsymbol{\eta}$ ein $\mathbf{y}$ existiert, sodass $\mathbf{M}_\mathbf{y}\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta}$ gilt. Dass $\mathbf{V}\mathbf{V}^\top = \mathbf{I}_3 - \mathbf{1}_3\mathbf{1}_3^\top/3 = \mathbf{L}_w^\mathrm{K}$ für beliebige $\mathbf{V}$ mit $\mathbf{1}_3^\top\mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ gilt, wurde bereits im Beweis von Satz 3.39 hergeleitet. Dass $\operatorname{vec}\left(\mathbf{L}_w^\mathrm{K}\right)^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{1}_6^\top$ gilt, kann numerisch ausgewertet werden, da beide Matrizen vollständig bekannt sind. Da für alle $\boldsymbol{\eta}$ ein $\mathbf{y}$ existiert, sodass $\mathbf{M}_\mathbf{y}\mathbf{y} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta}$ gilt, kann also eine lineare Abbildung von $\boldsymbol{\eta}$ nach $\mathbf{y}$ definiert werden. Diese ist eineindeutig, da $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}$ und $\mathbf{M}_\mathbf{y}$ jeweils vollen Spaltenrang haben. Daher existiert auch die Umkehrabbildung von $\mathbf{y}$ nach $\boldsymbol{\eta}$ und es folgt insbesondere $\mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$. Im Folgenden wird noch gezeigt, dass $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta}$ die Lösung mit minimaler 2-Norm von $\mathbf{M}_\mathbf{y}\mathbf{y} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{w}$ ist. Jede Lösung $\mathbf{w}$ lässt sich durch

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta} + (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2)\,\boldsymbol{\rho}$$

parametrieren, da $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2)$ nach Lemma 5.3 den Nullraum von $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ aufspannt. Für das Quadrat der 2-Norm von $\mathbf{w}$ gilt

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 = \mathbf{w}^\top\mathbf{w} = \left\|\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta}\right\|_2^2 + \|(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2)\,\boldsymbol{\rho}\|_2^2 \geq \left\|\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta}\right\|_2^2,$$

da $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}}^\top \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2) = \mathbf{0}$, da $[1\ -1] \cdot \mathbf{1}_2 = 0$. Dies schließt den Beweis der Gültigkeit von (B.18).

Die Gültigkeit von (B.19) wird auf dieselbe Weise gezeigt. Für diesen Fall gilt

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{1}_6 = \operatorname{vec}\left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3^\top\right),$$

da $\boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{w}$ die vektorisierte Laplacematrix bei Wahl der Kantengewichte in $\mathbf{w}$ angibt, was bei $\mathbf{w} = \mathbf{1}_6/3$ die Laplacematrix des vollständig verbundenen Graphen ist, wobei alle Kantengewichte zu $1/3$ gewählt wurden. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{1}_6 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{1}_6 \\
&= \left(\mathbf{V}^\top \otimes \mathbf{V}^\top\right) \cdot \operatorname{vec}\left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3^\top\right) \\
&= \operatorname{vec}\left(\mathbf{V}^\top\left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3^\top\right)\mathbf{V}\right) = \operatorname{vec}(\mathbf{I}_2),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus $\mathbf{1}_3^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ folgt. Mit demselben Argument wie oben kann gezeigt werden, dass $\mathbf{1}_6/3$ die Lösung mit minimaler 2-Norm von $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{w} = \operatorname{vec}(\mathbf{I}_2)$ ist, denn jede Lösung $\mathbf{w}$ dieser Gleichung lässt sich durch

$$\mathbf{w} = \frac{1}{3}\mathbf{1}_6 + (\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2)\,\boldsymbol{\rho}$$

darstellen. Erneut gilt für das Quadrat der 2-Norm

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{w} = \left\| \frac{1}{3}\mathbf{1}_6 \right\|_2^2 + \|(\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}_2)\,\boldsymbol{\rho}\|_2^2 \geq \left\| \frac{1}{3}\mathbf{1}_6 \right\|_2^2,$$

da $\mathbf{1}_6/3 = (\mathbf{1}_3^\top \otimes \mathbf{1}_2^\top)/3$ und $\mathbf{1}_3^\top \mathbf{V} = \mathbf{0}$ gilt. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] R. Agaev und P. Chebotarev. „On the spectra of nonsymmetric Laplacian matrices“. In: *Linear Algebra and its Applications* 399 (2005), S. 157–168.

[2] S. Ahmadizadeh u. a. „On eigenvalues of Laplacian matrix for a class of directed signed graphs“. In: *Linear Algebra and its Applications* 523 (2017), S. 281–306.

[3] B. D. O. Anderson und J. B. Moore. *Linear optimal control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.

[4] M. Andreasson. „Control of multi-agent systems with applications to distributed frequency control power systems“. Diss. KTH Royal Institute of Technology, 2013.

[5] M. Aoki. „Some control problems associated with decentralized dynamic systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16.5 (1971), S. 515–516.

[6] D. Berend und T. Tassa. „Improved bounds on Bell numbers and on moments of sums of random variables“. In: *Probability and Mathematical Statistics* 30.2 (2010), S. 185–205.

[7] S. Bernhard. „Optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte und optimale Output Regulation für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme“. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2020.

[8] S. Bernhard. „Time-Invariant Control in LQ Optimal Tracking: An Alternative to Output Regulation“. In: *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017). 20th IFAC World Congress, S. 4912–4919.

[9] S. Bernhard und J. Adamy. „Minimized input-energy gain based static decoupling control for linear over-actuated systems with sinusoidal references“. In: *12th IEEE International Conference on Control and Automation*. 2016, S. 253–259.

[10] S. Bernhard, S. Khodaverdian und J. Adamy. „Optimal stationary synchronization of heterogeneous linear multi-agent systems“. In: *American Control Conference*. 2018.

[11] D. S. Bernstein. *Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas*. 2nd ed. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2009.

[12] J. C. Bezdek und R. J. Hathaway. „Some Notes on Alternating Optimization“. In: *Advances in Soft Computing - AFSS 2002*. Hrsg. von N. R. Pal und M. Sugeno. Lecture Notes in Computer Science. Berlin und Heidelberg: Springer, 2002, S. 288–300.

[13] Å. Björck. *Numerical methods for least squares problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.

[14] B. Bollobas. „The Diameter of Random Graphs“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 267.1 (1981), S. 41.

[15] V. Bompart, P. Apkarian und D. Noll. „Non-smooth techniques for stabilizing linear systems“. In: *American Control Conference, 2007*. Piscataway, NJ: IEEE Service Center, 2007, S. 1245–1250.

[16] F. Borrelli und T. Keviczky. „Distributed LQR Design for Identical Dynamically Decoupled Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.8 (2008), S. 1901–1912.

[17] S. Boyd. „Convex optimization of graph Laplacian eigenvalues“. In: *International Congress of Mathematicians*. 2006, S. 1311–1319.

[18] S. Boyd u. a. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[19] S.P. Boyd und L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[20] J. W. Brown und R. V. Churchill. *Complex variables and applications*. 8th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2009.

[21] J. Bruna und J. Cufí. *Complex Analysis*. European Mathematical Society Publishing House, 2013.

[22] W. Burgard u. a. „Coordinated multi-robot exploration“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 21.3 (2005), S. 376–386.

[23] J. V. Burke u. a. „Gradient Sampling Methods for Nonsmooth Optimization“. In: *Numerical Nonsmooth Optimization: State of the Art Algorithms*. Hrsg. von A. M. Bagirov u. a. Springer International Publishing, 2020, S. 201–225.

[24] R. Byers und S. G. Nash. „Approaches to robust pole assignment“. In: *International Journal of Control* 49.1 (1989), S. 97–117.

[25] Y. Cao und W. Ren. „LQR-based optimal linear consensus algorithms“. In: *2009 American Control Conference*. 2009, S. 5204–5209.

[26] J. S. Caughman und J. J. P. Veerman. „Kernels of Directed Graph Laplacians“. In: *The Electronic Journal of Combinatorics* (2006), R39–R39.

[27] P. Chebotarev und R. Agaev. „Forest matrices around the Laplacian matrix“. In: *Linear Algebra and its Applications* 356.1 (2002), S. 253–274.

[28] P. Chebotarev und R. Agaev. „The Forest Consensus Theorem“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 59.9 (2014), S. 2475–2479.

[29] G. Chen und Z. Duan. „Network synchronizability analysis: A graph-theoretic approach“. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18.3 (2008), S. 037102.

[30] M. Chu und G. Golub. *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*. Oxford University Press, 2005.

[31] M. T. Chu und Q. Guo. „A Numerical Method for the Inverse Stochastic Spectrum Problem“. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 19.4 (1998), S. 1027–1039.

[32] N Dimitriev und E Dynkin. „On the characteristic numbers of a stochastic matrix“. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Bd. 49. 1945, S. 159–162.

[33] F. Dörfler und F. Bullo. „Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey“. In: *Automatica* 50.6 (2014), S. 1539–1564.

[34] J. Doyle. „Analysis of feedback systems with structured uncertainties“. In: *IEE Proceedings D Control Theory and Applications* 129.6 (1982), S. 242.

[35] Z. Duan, G. Chen und L. Huang. „Synchronization of weighted networks and complex synchronized regions“. In: *Physics Letters A* 372.21 (2008), S. 3741–3751.

[36] L. El Ghaoui, F. Oustry und M. AitRami. „A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.8 (1997), S. 1171–1176.

[37] J. A. Fax und R. M. Murray. „Graph Laplacians and Stabilization of Vehicle Formations“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 35.1 (2002). 15th IFAC World Congress, S. 55–60.

[38] J. A. Fax und R. M. Murray. „Information flow and cooperative control of vehicle formations“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49.9 (2004), S. 1465–1476.

[39] M. Fazel, H. Hindi und S. P. Boyd. „A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation“. In: *American Control Conference*. 2001, S. 4734–4739.

[40] O. Föllinger u. a. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 12., überarbeitete Auflage. Lehrbuch Studium. Berlin und Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2016.

[41] D. Fox u. a. „Distributed Multirobot Exploration and Mapping“. In: *Proceedings of the IEEE* 94.7 (2006), S. 1325–1339.

[42] B. A. Francis und W. M. Wonham. „The internal model principle of control theory“. In: *Automatica* 12.5 (1976), S. 457–465.

[43] S. Gering und V. Willert. „Solving the N-Consensus Problem: Combining Clustering and Synchronization“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 45.26 (2012), S. 216–221.

[44] J. Ghaderi und R. Srikant. „Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate“. In: *Automatica* 50.12 (2014), S. 3209–3215.

[45] I. Gohberg, P. Lancaster und L. Rodman. „On Hermitian Solutions of the Symmetric Algebraic Riccati Equation“. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 24.6 (1986), S. 1323–1334.

[46] M. Grant und S. Boyd. *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1*. `http://cvxr.com/cvx`. 2014.

[47] K. M. Grigoriadis und E. B. Beran. „Alternating Projection Algorithms for Linear Matrix Inequalities Problems with Rank Constraints“. In: *Advances in linear matrix inequality methods in control*. Hrsg. von L. El Ghaoui und S. Niculescu. Advances in design and control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000, S. 251–267.

[48] K. M. Grigoriadis und R. E. Skelton. „Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods“. In: *Automatica* 32.8 (1996), S. 1117–1125.

[49] S. Hara, M. Kanno und H. Tanaka. „Cooperative gain output feedback stabilization for multi-agent dynamical systems“. In: *48h IEEE Conference on Decision and Control*. 2009, S. 877–882.

[50] D. J. Hartfiel. „Dense Sets of Diagonalizable Matrices“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 123.6 (1995), S. 1669–1672.

[51] A. D. Haumann, K. D. Listmann und V. Willert. „DisCoverage: A new paradigm for multi-robot exploration“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2010, S. 929–934.

[52] J. Hermann, B. Hammer und U. Konigorski. „Sekundärregelung und Koordination verkoppelter Microgrids“. In: *at - Automatisierungstechnik* 67.12 (2019), S. 1019–1034.

[53] J. Hermann und U. Konigorski. „Eigenvalue Assignment for the Laplacian Matrix of Directed Graphs“. In: *American Control Conference*. 2019, S. 4036–4042.

[54] J. Hermann u. a. „Designing Communication Topologies for Optimal Synchronization Trajectories of Homogeneous Linear Multi-Agent Systems“. In: *European Control Conference*. 2018, S. 1454–1461.

[55] R. A. Horn und C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 2013.

[56] R. A. Horn und C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1991.

[57] A. K. Jain. „Data clustering: 50 years beyond K-means“. In: *Pattern Recognition Letters* 31.8 (2010), S. 651–666.

[58] M. Ji und M. Egerstedt. „Distributed Coordination Control of Multiagent Systems While Preserving Connectedness“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 23.4 (2007), S. 693–703.

[59] F. I. Karpelevich. „On the characteristic roots of matrices with nonnegative elements“. In: *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 15.4 (1951), S. 361–383.

[60] J. Kautsky, N. K. Nichols und P. van Dooren. „Robust pole assignment in linear state feedback“. In: *International Journal of Control* 41.5 (1985), S. 1129–1155.

[61] S. Khodaverdian. „Reglerentwurf zur Synchronisierung linearer heterogener Multi-Agenten-Systeme“. Diss. TU Darmstadt, 2017.

[62] S. Khodaverdian und J. Adamy. „A distributed analysis and design method for the synchronization of linear heterogeneous SISO systems by static state control“. In: *23rd Mediterranean Conference on Control and Automation*. 2015, S. 1053–1058.

[63] S. Khodaverdian und J. Adamy. „Entkopplungsbasierte Synchronisierung heterogener linearer Multi-Agenten-Systeme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 62.12 (2014).

[64] U. Konigorski. „Entwurf robuster strukturbeschränkter Zustandsregelungen durch Polgebietsvorgabe mittels Straffunktionen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 35.6 (1987), S. 254–258.

[65] L. Lessard und S. Lall. „Quadratic invariance is necessary and sufficient for convexity“. In: *American Control Conference*. 2011, S. 5360–5362.

[66] W. Levine und M. Athans. „On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 15.1 (1970), S. 44–48.

[67] A. S. Lewis und M. L. Overton. „Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods“. In: *Mathematical Programming* 141.1 (2013), S. 135–163.

[68] Z. Li u. a. „Consensus control of linear multi-agent systems with distributed adaptive protocols“. In: *American Control Conference*. 2012, S. 1573–1578.

[69] Z. Li u. a. „Consensus of Multiagent Systems and Synchronization of Complex Networks: A Unified Viewpoint“. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 57.1 (2010), S. 213–224.

[70] Z. Li u. a. „Designing Fully Distributed Consensus Protocols for Linear Multi-Agent Systems With Directed Graphs“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.4 (2015), S. 1152–1157.

[71] F. Lin, M. Fardad und M. R. Jovanovic. „Augmented Lagrangian Approach to Design of Structured Optimal State Feedback Gains“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.12 (2011), S. 2923–2929.

[72] F. Lin, M. Fardad und M. R. Jovanović. „Design of Optimal Sparse Feedback Gains via the Alternating Direction Method of Multipliers“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.9 (2013), S. 2426–2431.

[73] Z. Lin, B. Francis und M. Maggiore. „Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.1 (2005), S. 121–127.

[74] K. D. Listmann, J. Adamy und L. Scardovi. „Synchronisierung identischer linearer Systeme — ein Zugang über LMIs“. In: *at - Automatisierungstechnik* 59.9 (2011), S. 563–573.

[75] L. Litz. *Dezentrale Regelung*. Methoden der Regelungstechnik. Oldenbourg Verlag, 1983.

[76] L. Litz. „Dezentraler Regelungsentwurf einer Durchlaufglühanlage mittels mehrstufiger Ordnungsreduktion“. In: *at - Automatisierungstechnik* 30.10 (1982). ISSN: 0178-2312.

[77] J. Löfberg. „YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB“. In: *In Proceedings of the CACSD Conference*. 2004.

[78] J. Lunze. „Adaptive Cruise Control With Guaranteed Collision Avoidance“. In: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 20.5 (2019), S. 1897–1907.

[79] J. Lunze. *Feedback control of large scale systems*. Prentice-Hall international series in systems and control engineering. Prentice-Hall, 1992.

[80] J. Lunze. *Networked control of multi-agent systems*. Bookmundo, 2019.

[81] J. Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 10., aktual. Aufl. Springer Vieweg, 2014.

[82] J. Lunze. *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9., überarb. Aufl. 2016. Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[83] J. Lunze. „Structural properties of networked systems with random communication links“. In: *Automatica* 80 (2017), S. 300–304.

[84] J. Lunze. „Synchronizable nodes in networked systems“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44.4 (2010).

[85] J. Lunze. „Synchronization of Heterogeneous Agents“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.11 (2012), S. 2885–2890.

[86] J. Lunze. „Vernetzte Abstandsregelung von Fahrzeugkolonnen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 67.12 (2019), S. 990–1006.

[87] J. Lunze und J.H. Richter. „Reconfigurable Fault-tolerant Control: A Tutorial Introduction“. In: *European Journal of Control* 14.5 (2008), S. 359–386.

[88] C. Ma und J. Zhang. „Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 55.5 (2010), S. 1263–1268.

[89] P. Makila und H. Toivonen. „Computational methods for parametric LQ problems–A survey“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 32.8 (1987), S. 658–671.

[90] I. Markovsky. „Structured low-rank approximation and its applications“. In: *Automatica* 44.4 (2008), S. 891–909.

[91] MATLAB. *Optimization Toolbox*. The MathWorks Inc., 2020.

[92] MATLAB. *Robust Control Toolbox*. The MathWorks Inc., 2020.

[93] MATLAB. *Symbolic Math Toolbox*. The MathWorks Inc., 2020.

[94] N. Matni und V. Chandrasekaran. „Regularization for Design“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 61.12 (2016), S. 3991–4006.

[95] J. Mei u. a. „Consensus of linear multi-agent systems with fully distributed control gains under a general directed graph“. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. 2014, S. 2993–2998.

[96] M. Mesbahi und M. Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, 2010.

[97] S. Milgram. „The small world problem“. In: *Psychology today* 2.1 (1967), S. 60–67.

[98] J. M. Montenbruck u. a. „On the Necessity of Diffusive Couplings in Linear Synchronization Problems With Quadratic Cost“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.11 (2015), S. 3029–3034.

[99] S. Moothedath, P. Chaporkar und M. N. Belur. „A Flow-Network Based Polynomial-Time Approximation Algorithm for the Minimum Constrained Input Structural Controllability Problem“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 63.9 (2018), S. 3151–3158.

[100] A. Mosebach. „Performance and controller design for the synchronization of multi-agent systems“. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 2017.

[101] A. Mosebach und J. Lunze. „LQR design of synchronizing controllers for multi-agent systems“. In: *at - Automatisierungstechnik* 63.6 (2015). ISSN: 0178-2312.

[102] J. Munkres. „Algorithms for the Assignment and Transportation Problems“. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 5.1 (1957), S. 32–38.

[103] U. Münz, A. Papachristodoulou und F. Allgöwer. „Delay robustness in consensus problems“. In: *Automatica* 46.8 (2010), S. 1252–1265.

[104] Y. Nesterov. *Lectures on convex optimization*. Second edition. Bd. 137. Springer optimization and its applications. Springer, 2018.

[105] M. E. J. Newman. „The Structure and Function of Complex Networks“. In: *SIAM Review* 45.2 (2003), S. 167–256.

[106] K. Oh, M. Park und H. Ahn. „A survey of multi-agent formation control“. In: *Automatica* 53 (2015), S. 424–440.

[107] H. Ohlsson und L. Ljung. „Identification of Piecewise Affine Systems Using Sum-of-Norms Regularization“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 44.1 (2011), S. 6640–6645.

[108] R. Olfati-Saber, J. A. Fax und R. M. Murray. „Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems“. In: *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007), S. 215–233.

[109] R. Olfati-Saber und R. M. Murray. „Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49.9 (2004), S. 1520–1533.

[110] R. Orsi, U. Helmke und J. B. Moore. „A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities“. In: *Automatica* 42.11 (2006), S. 1875–1882.

[111] S. E. Parsegov u. a. „Novel Multidimensional Models of Opinion Dynamics in Social Networks“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.5 (2017), S. 2270–2285.

[112] L. M. Pecora und T. L. Carroll. „Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems“. In: *Physical Review Letters* 80.10 (1998), S. 2109–2112.

[113] S. Pequito, S. Kar und G. J. Pappas. „Minimum cost constrained input-output and control configuration co-design problem: A structural systems approach“. In: *American Control Conference*. 2015, S. 4099–4105.

[114] R. Pintelon und J. Schoukens. *System Identification – A Frequency Domain Approach*. John Wiley & Sons, Inc, 2001.

[115] B. Plestenjak und M. E. Hochstenbach. „Roots of Bivariate Polynomial Systems via Determinantal Representations“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 38.2 (2016), S. 765–788.

[116] B.T. Polyak und Y.Z. Tsypkin. „Stability and robust stability of uniform systems“. In: *Automation and Remote Control* (1996).

[117] J. Qin und C. Yu. „Cluster consensus control of generic linear multi-agent systems under directed topology with acyclic partition“. In: *Automatica* 49.9 (2013), S. 2898–2905.

[118] T. Rado und P. V. Reichelderfer. *Continuous Transformations in Analysis: With an Introduction to Algebraic Topology*. Bd. 75. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, In Einzeldarstellungen mit Besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Springer, 1955.

[119] M. Rafiee und A. M. Bayen. „Optimal network topology design in multi-agent systems for efficient average consensus“. In: *49th IEEE Conference on Decision and Control*. 2010, S. 3877–3883.

[120] T. Rautert und E. W. Sachs. „Computational Design of Optimal Output Feedback Controllers“. In: *SIAM Journal on Optimization* 7.3 (1997), S. 837–852.

[121] W. Ren und R. W. Beard. „Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.5 (2005), S. 655–661.

[122] W. Ren, R. W. Beard und E. M. Atkins. „Information consensus in multivehicle cooperative control“. In: *IEEE Control Systems Magazine* 27.2 (2007), S. 71–82.

[123] K. Röbenack u. a. „Stabilization by Static Output Feedback: A Quantifier Elimination Approach“. In: *22nd International Conference on System Theory, Control and Computing*. 2018, S. 715–721.

[124] R. T. Rockafellar und R. J. Wets. *Variational analysis*. Corr. 3. print. Bd. 317. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 2009.

[125] C. Roos. „Systems modeling, analysis and control (SMAC) toolbox: An insight into the robustness analysis library“. In: *IEEE Conference on Computer Aided Control System Design*. 2013, S. 176–181.

[126] C. Roos und J. Biannic. „Efficient computation of a guaranteed stability domain for a high-order parameter dependent plant“. In: *American Control Conference*. 2010, S. 3895–3900.

[127] M. Rotkowitz und S. Lall. „A Characterization of Convex Problems in Decentralized Control^{a}st“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.2 (2006), S. 274–286.

[128] J. Rubió-Massegú u. a. „Static output-feedback control under information structure constraints“. In: *Automatica* 49.1 (2013), S. 313–316.

[129] C. S. Rudisill. „Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix“. In: *AIAA Journal* 12.5 (1974), S. 721–722.

[130] L. Scardovi, M. Arcak und E. D. Sontag. „Synchronization of Interconnected Systems With Applications to Biochemical Networks: An Input-Output Approach“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 55.6 (2010), S. 1367–1379.

[131] L. Scardovi und R. Sepulchre. „Synchronization in networks of identical linear systems“. In: *Automatica* 45.11 (2009), S. 2557–2562.

[132] M. Sezer. „Minimal essential feedback patterns for pole assignment using dynamic compensation“. In: *22nd IEEE Conference on Decision and Control*. 1983, S. 28–32.

[133] S. Y. Shafi, M. Arcak und L. El Ghaoui. „Graph weight design for Laplacian eigenvalue constraints with multi-agent systems applications“. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. 2011, S. 5541–5546.

[134] D. D. Šiljak. *Large-scale dynamic systems: stability and structure*. Dover Publications, 1978.

[135] J. W. Simpson-Porco, F. Dörfler und F. Bullo. „Synchronization and power sharing for droop-controlled inverters in islanded microgrids“. In: *Automatica* 49.9 (2013), S. 2603–2611.

[136] J.W. Simpson-Porco u. a. „Stability, power sharing, & distributed secondary control in droop-controlled microgrids“. In: *IEEE International Conference on Smart Grid Communications*. 2013, S. 672–677.

[137] R. E. Skelton, T. Iwasaki und K. M. Grigoriadis. *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor & Francis, 1998.

[138] S. Skogestad und I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control: Analysis and design*. Wiley, 2009.

[139] I. de Sola Pool und M. Kochen. „Contacts and influence“. In: *Social Networks* 1.1 (1978), S. 5–51.

[140] G. L. Stein. „Methoden und Anwendungen zur Polvorgabe mittels strukturbeschränkter Rückführungen“. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2020.

[141] G. L. Stein, J. Strubel und U. Konigorski. „A robust eigenvalue assignment approach to integrated system and control design“. In: *23rd Mediterranean Conference on Control and Automation*. Hrsg. von Jorge L. Martínez. 2015, S. 728–733.

[142] C. Stiller u. a. „Kooperativ interagierende Automobile“. In: *at - Automatisierungstechnik* 66.2 (2018), S. 81–99.

[143] J. Strubel. „Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme mittels strukturbeschränkter Regelungen“. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, 2016.

[144] J. Strubel und U. Konigorski. „Robust eigenstructure assignment using parametric output feedback“. In: *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*. 2014, S. 1249–1254.

[145] J. Strubel und U. Konigorski. „Verkopplungsbasierte Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 64.8 (2016).

[146] J. Strubel, G. L. Stein und U. Konigorski. „Synchronization of heterogeneous agents using min-max optimization“. In: *American Control Conference*. 2015, S. 50–55.

[147] D. Swaroop und J. K. Hedrick. „String stability of interconnected systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41.3 (1996), S. 349–357.

[148] R. Tibshirani. „Regression Shrinkage and Selection via the Lasso“. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 58.1 (1996), S. 267–288.

[149] P. Tittmann. *Einführung in die Kombinatorik*. 3. Auflage. Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019.

[150] K. C. Toh, M. J. Todd und R. H. Tütüncü. „SDPT3 — A Matlab software package for semidefinite programming“. In: *Optimization Methods and Software* 11 (1999), S. 545–581.

[151] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel und M. Hautus. *Control Theory for Linear Systems*. Springer, 2001.

[152] S. E. Tuna. *LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems*. 2008. URL: `http://arxiv.org/pdf/0801.3390v1`.

[153] J. G. VanAntwerp und R. D. Braatz. „A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities“. In: *Journal of Process Control* 10.4 (2000), S. 363–385.

[154] P. Vogt, E. Lenz und U. Konigorski. „gammasyn – eine Toolbox zur robusten Polbereichsvorgabe mittels beschränkter Optimierung und Straffunktionen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 68.10 (2020), S. 893–904.

[155] Y. Wan u. a. „On the structure of graph edge designs that optimize the algebraic connectivity“. In: *47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2008, S. 805–810.

[156] Shih-Ho Wang und E. Davison. „On the stabilization of decentralized control systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 18.5 (1973), S. 473–478. ISSN: 0018-9286.

[157] P. Wieland, R. Sepulchre und F. Allgöwer. „An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization“. In: *Automatica* 47.5 (2011), S. 1068–1074.

[158] H. Winner u. a. *Handbuch Fahrerassistenzsysteme: Grundlagen, Komponenten und Systeme für aktive Sicherheit und Komfort*. 3., überarb. und erg. Aufl. Springer Vieweg, 2015.

[159] H. S. Witsenhausen. „A Counterexample in Stochastic Optimum Control“. In: *SIAM Journal on Control* 6.1 (1968), S. 131–147.

[160] M. Wooldridge und N. R. Jennings. „Agent theories, architectures, and languages: A survey“. In: *Intelligent Agents*. Springer Berlin Heidelberg, 1995, S. 1–39.

[161] C. W. Wu und L. O. Chua. „Application of Kronecker products to the analysis of systems with uniform linear coupling“. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 42.10 (1995), S. 775–778.

[162] T. Xia und L. Scardovi. „Output-feedback synchronizability of linear time-invariant systems“. In: *Systems & Control Letters* 94 (2016), S. 152–158.

[163] T. Xia und L. Scardovi. „Synchronization of linear time-invariant systems on rooted graphs“. In: *55th Conference on Decision and Control*. IEEE, 2016, S. 4376–4381.

[164] W. Xia und M. Cao. „Clustering in diffusively coupled networks“. In: *Automatica* 47.11 (2011), S. 2395–2405.

[165] T. Yang u. a. „Global consensus in homogeneous networks of discrete-time agents subject to actuator saturation“. In: *European Control Conference*. 2013, S. 244–249.

[166] G. F. Young, L. Scardovi und N. E. Leonard. „Robustness of noisy consensus dynamics with directed communication“. In: *American Control Conference*. 2010, S. 6312–6317.

[167] J. Yu und L. Wang. „Group consensus of multi-agent systems with undirected communication graphs“. In: *7th Asian Control Conference*. 2009, S. 105–110.

[168] W. Yu, G. Chen und M. Cao. „Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems“. In: *Automatica* 46.6 (2010), S. 1089–1095.

[169] M. Zedek. „Continuity and Location of Zeros of Linear Combinations of Polynomials“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 16.1 (1965), S. 78–84.

[170] E. Zeidler. *Springer-Handbuch der Mathematik I*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[171] S. Zeng und F. Allgöwer. „Structured optimal feedback in multi-agent systems: A static output feedback perspective“. In: *Automatica* 76 (2017), S. 214–221.

[172] Y. Zheng, R. P. Mason und A. Papachristodoulou. „Scalable Design of Structured Controllers Using Chordal Decomposition“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 63.3 (2018), S. 752–767.

[173] K. Zhou, J. C. Doyle und K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.

Eigene Veröffentlichungen

[1] J. Hermann u. a. „Designing Communication Topologies for Optimal Synchronization Trajectories of Homogeneous Linear Multi-Agent Systems“. In: *European Control Conference*. 2018, S. 1454–1461.

[2] J. Hermann und U. Konigorski. „Eigenvalue Assignment for the Laplacian Matrix of Directed Graphs“. In: *American Control Conference*. 2019, S. 4036–4042.

[3] J. Hermann, B. Hammer und U. Konigorski. „Sekundärregelung und Koordination verkoppelter Microgrids“. In: *at - Automatisierungstechnik* 67.12 (2019), S. 1019–1034.

[4] J. Hermann, B. Hammer und U. Konigorski. „Primary and Secondary Control in Lossy Inverter-Based Microgrids“. In: *International Conference on Smart Energy Systems and Technologies*. 2019, S. 1–6.

[5] J. Hermann und U.Konigorski. „Eigenwertplatzierung der Laplacematrix gerichteter Graphen“. In: *GMA Fachausschuss 1.40 „Systemtheorie und Regelungstechnik“*. Vortrag am 19.09.2018.

[6] J. Hermann und U.Konigorski. „Sekundärregelung verkoppelter Microgrids“. In: *GMA Fachausschuss 1.50 „Grundlagen vernetzter Systeme“*. Vortrag am 12.03.2019.