

Analytische und semi-analytische Berechnungsmodelle zur Auslegung von Strukturklebverbindungen

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

von

M. Sc. Nicolas Stein

aus Lich

Referent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c.mult. Holm Altenbach
Tag der Einreichung:	06. April 2018
Tag der mündlichen Prüfung:	10. Juli 2018


Darmstadt 2018
D17

Stein, Nicolas

Analytische und semi-analytische Berechnungsmodelle zur Auslegung von Strukturklebverbindungen

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

 Creative Commons Lizenz (CC BY-NC-ND 4.0 International), 2018.

Freies Vervielfältigen und Weiterverbreiten – Namensnennung –
Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik an der Technischen Universität Darmstadt entstanden. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonderer Dank geht an Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Becker für seine wohlwollende Unterstützung und Förderung sowie für die gewährten Freiheiten zur wissenschaftlichen Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c.mult. Holm Altenbach danke ich sehr für sein entgegengebrachtes Interesse an der vorliegenden Arbeit und für die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Weiterhin danke ich all meinen Kolleginnen und Kollegen in und außerhalb des Fachgebiets für eine gute Zusammenarbeit und gegenseitige Unterstützung bei den zu bewältigenden Aufgaben. Philipp Weißgraeber möchte ich im Besonderen danken für die gemeinsam erarbeiteten Projekte, Diskussionen in und außerhalb der Arbeitszeit sowie für die beeindruckende, nie nachlassende und ansteckende Motivation zur wissenschaftlichen Arbeit. Philipp Rosendahl und Julian Felger gilt ebenso besonderer Dank für die gute gemeinsame Arbeit, gegenseitige Hilfe und großes Interesse und Tatendrang für die gemeinsam entwickelten Beiträge. Die viele zusammen verbrachte Zeit und die fruchtbaren Diskussionen haben sowohl diese Arbeit als auch die Zeit am Fachgebiet maßgeblich bereichert und das Arbeiten zu etwas Großartigem gemacht.

Zusätzlich möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, meinen Eltern für ihre stetige Unterstützung und Bestärkung sowie meinem Sohn Fabian für die gewährte Zeit zur Vollendung dieses Manuskriptes. Schlussendlich geht mein größter Dank an meine Frau Susanne für einfach alles, die nie versiegende Geduld und Unterstützung, das stete Interesse an meiner Arbeit und das Durchhaltevermögen in anstrengenden Zeiten.

Für Oli, Fabi und Susi.

Kurzfassung

Kleberverbindungen werden aufgrund ihrer vielseitigen Einsatzmöglichkeiten und des technologischen Fortschritts der gezielten anwendungsorientierten Klebstoffherstellung zunehmend im strukturellen Bereich eingesetzt. Entsprechend finden sich Kleberverbindungen in zahlreichen Anwendungen vornehmlich auf dem Gebiet des konstruktiven Leichtbaus zur Fügung gleicher oder ungleicher Strukturelemente. Jedoch sind die Bedenken gegenüber Kleberverbindungen in lasttragenden Strukturen insbesondere aufgrund des komplexen mechanischen Verhaltens und den vielfältig auftretenden Versagensprozessen groß. Effiziente Methoden zur Spannungs- und Deformationsanalyse sowie zur Versagenslastvorhersage sind bis heute Gegenstand der Forschung.

Im Fokus dieser Arbeit steht die Entwicklung analytischer und semi-analytischer Berechnungsverfahren zur Analyse der Lastübertragung und des Tragverhaltens von Kleberverbindungen. Hierzu werden zunächst die Grundlagen der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, der Mechanik ebener Laminate, der klassischen Festigkeitsmechanik sowie der Bruchmechanik dargestellt. Anschließend wird eine Übersicht über den Stand der Forschung bezüglich Kleberverbindungen präsentiert. Neben einem Überblick über mögliche Versagensarten von Kleberverbindungen und konstruktive Verbesserungsmaßnahmen werden Modelle zur Analyse der Lastübertragung vorgestellt. Dabei wird insbesondere auf die Unterschiede der Modellierungsansätze von spröden und duktilen Klebstoffen eingegangen und ein Überblick zu Modellen von Gradientenklebstoffen gegeben. Die gängigsten Ansätze zur Versagensbewertung werden vorgestellt und umfassend diskutiert.

Der Kern der vorliegenden Arbeit ist der Vorschlag eines allgemeinen Modellierungsansatzes zur Analyse der Lastübertragung in Kleberverbindungen mit spröden, duktilen sowie Gradientenklebstoffen. Dieser ermöglicht die Analyse beliebiger Überlappungsfügungen, die durch eine einfache Überlappung charakterisiert sind. Für spröde und Gradientenklebstoffe werden analytische Lösungsdarstellungen des zugrunde liegenden gewöhnlichen Differentialgleichungssystems vorgestellt. Im Falle duktiler Klebstoffe liegt ein nichtlineares Differentialgleichungssystem vor, das mittels eines Finite-Differenzen-Verfahrens gelöst wird. Die resultierenden Spannungsfelder werden für eine Vielzahl von Fügekonfigurationen eingehend mit numerischen Referenzlösungen verglichen. In allen Fällen ergibt sich eine hohe Approximationsgüte. Umfangreiche Studien zum Einfluss des Gradierungsprofils von Gradientenkleberverbindungen sowie des maximal auftretenden Steifigkeitsverhältnisses führen auf Empfehlungen für die Anwendung zur Auslegung von Gradientenkleberverbindungen. Eine effiziente Optimierungsroutine zur Bestimmung des bestmöglichen Gradierungsprofils bezüglich einer vorgegebenen Zielfunktion wird vorgestellt und anhand von Beispielen verdeutlicht. Im Falle duktiler Klebstoffe werden der Einfluss der Spannungs-Dehnungskurvenapproximation sowie der Wahl der Vergleichsspannung analysiert.

Die vorgeschlagene Modellierung erlaubt die Analyse des Tragverhaltens von spröden Klebverbindungen. Dazu wird eine Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der finiten Bruchmechanik herangezogen. Die vorgestellte effiziente Implementierung ermöglicht eine Auswertung mit sehr kurzen Berechnungszeiten. Zur Untersuchung der Grenzen des Modells wird zusätzlich eine die Sprödigkeit quantifizierende, dimensionslose Kennzahl eingeführt. Für die Versagensbewertung duktiler Klebverbindungen werden Umsetzungen der gängigsten Versagenskonzepte wie beispielsweise des Konzepts des globalen Fließens oder des J -Integral-Konzepts vorgestellt und verglichen. Umfangreiche Vergleichsstudien mit einer Vielzahl von experimentell ermittelten Daten zeigen schließlich die gute Qualität der Versagenslastvorhersagen. Hierbei bewähren sich im Falle duktiler Klebstoffe Kriterien begründet auf der Betrachtung des J -Integrals. Für spröde Klebstoffe werden darüber hinaus numerische Vergleichsrechnungen mit Kohäsivzonenmodellierung zur Validierung herangezogen. Dabei zeigt sich, dass das vorgestellte Berechnungsverfahren stets konservative Versagenslastvorhersagen liefert und den Einfluss geometrischer Parameter auf die Versagenslast korrekt abbildet.

Abstract

Adhesive joints are increasingly used in structural engineering due to their broad field of application and the actual technological development regarding precise application-oriented adhesive manufacturing. Hence, adhesive joints can be found in various applications predominantly in lightweight constructions for assembling similar or dissimilar structural elements. However, there are some concerns regarding the use of adhesive joints in load-bearing structures due to their complex mechanical behaviour and the various possible failure modes. Efficient stress and deformation analysis tools as well as failure load predictions are subjects of current research.

The goal of the work is the development of analytical and semi-analytical methods that allow for an analysis of the load transfer as well as the load-bearing behaviour of adhesive joints. First, the required theoretical fundamentals of the theory of elasticity and plasticity, mechanics of laminates, strength theory as well as fracture mechanics are outlined. Subsequently, an overview of the state of the art regarding adhesive joints is given. In addition to an outline on possible failure modes and measures of improvement regarding design, analysis methods for the load-transfer in adhesive joints are presented. Here, the differences of the approaches regarding brittle and ductile adhesives are addressed and a summary on methods for the analysis of functionally graded adhesives are given. The most frequently used failure models for adhesive joints are introduced and thoroughly discussed.

The core of the work is the proposition of a general approach for the analysis of the load transfer in adhesive joints with brittle, ductile as well as functionally graded adhesives that is applicable to arbitrarily shaped lap joints characterized by a single overlap. For brittle as well as for functionally graded adhesives analytical solutions of the underlying differential equation system are depicted. In case of ductile adhesives non-linear differential equations are derived and solved using a finite difference scheme. The resulting stress fields are thoroughly compared to numerical reference solutions for a vast number of adhesive joint configurations. A high approximation quality is achieved in all cases. Comprehensive studies regarding the impact of the grading profile and the maximum occurring stiffness ratio allow for providing recommendations for the engineer concerning the design of functionally graded adhesive joints. An efficient optimization routine for determining the best possible grading profile regarding a pre-defined target function is presented and illustrated with a few exemplary joint configurations. In case of ductile adhesives the influence of the stress-strain curve approximation as well as the equivalent stress are analyzed.

An efficient implementation of the coupled stress and energy criterion in the framework of finite fracture mechanics is used for the failure analysis of joints with brittle adhesives. The presented procedure allows for the evaluation of failure loads in a very short time. In addition, a dimensionless brittleness number is introduced for investigating

the validity limits of the approach. For the strength assessment of ductile adhesive joints implementations of the most commonly used failure criteria as e.g., the concept of globally yielding or criteria based on the J -integral as a fracture parameter are introduced and discussed. Thorough comparative studies with a large number of experimentally determined failure loads reveal the excellent quality of the failure load predictions. In case of ductile adhesives criteria based on the J -integral provide the best strength predictions. Numerical reference solutions with cohesive zone models are additionally used for the validation of the presented failure model for brittle adhesives joints. It becomes evident that the presented approach gives conservative joint strength predictions in all cases and correctly covers the impact of geometrical parameters on the failure load.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	12
1 Einleitung	17
1.1 Motivation	17
1.2 Ziel der Arbeit	18
1.3 Aufbau der Arbeit	19
2 Theoretische Grundlagen	21
2.1 Lineare Elastizitätstheorie	21
2.2 Mechanik ebener Laminate	27
2.2.1 Klassische Laminattheorie	27
2.2.2 Schubdeformationstheorie 1. Ordnung	31
2.3 Plastizitätstheorie	33
2.4 Klassische Versagenskriterien	35
2.5 Grundlagen der Bruchmechanik	36
2.5.1 Linear-elastische Bruchmechanik	37
2.5.2 Elastisch-plastische Bruchmechanik	40
2.6 Finite Bruchmechanik	44
3 Zum Stand der Forschung von Klebverbindungen	49
3.1 Allgemeine Betrachtungen	49
3.1.1 Versagensarten von Klebverbindungen	51
3.1.2 Klebschichtdickeneffekt	52
3.1.3 Konstruktive Verbesserungen von Klebverbindungen	53
3.2 Spannungsanalyse von Überlappungsfügungen	56
3.2.1 Linear-elastisches Materialverhalten	56
3.2.2 Elastisch-plastisches Materialverhalten	59
3.3 Versagensbewertung	62
4 Analyse von Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen	69
4.1 Einführung	69
4.2 Modellierung der Klebverbindung	70
4.3 Differentialgleichungssystem	72
4.3.1 Herleitung und Lösungsansätze	73
4.3.2 Randbedingungen	77
4.4 Vergleich der Spannungslösung mit Finite-Elemente-Analysen	78
4.5 Versagensbewertung mittels analytischer Lösung	82
4.5.1 Berechnung der Energiefreisetzungsrate	83
4.5.2 Umsetzung des gekoppelten Kriteriums	84
4.6 Versagensbewertung mittels numerischem Modell	87

4.7	Ergebnisse	90
4.7.1	Einfluss der einzelnen Versagenskriterien	90
4.7.2	Vergleich analytischer, numerischer und experimenteller Daten	91
4.8	Einfluss der Sprödigkeit auf die Versagensbewertung	96
4.9	Grenzen des Modells	99
4.10	Anmerkungen und Ausblick	100
5	Analyse von Gradientenklebverbindungen	101
5.1	Einführung	101
5.2	Modellierung des Gradientenklebstoffes	102
5.3	Differentialgleichungssystem	102
5.3.1	Herleitung und Potenzreihenlösungsansatz	102
5.3.2	Randbedingungen	105
5.4	Ergebnisse	106
5.4.1	Konvergenz der Ergebnisse	108
5.4.2	Vergleich mit Finite-Elemente-Analysen	109
5.5	Studien	110
5.5.1	Einfluss des Gradierungsprofils	112
5.5.2	Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses	113
5.5.3	Optimierung des Gradierungsprofils	114
5.6	Anmerkungen und Ausblick	119
6	Analyse von Klebverbindungen mit duktilen Klebstoffen	121
6.1	Einführung	121
6.2	Modellierung der Klebstoffplastizität	122
6.3	Differentialgleichungssystem	123
6.3.1	Herleitung und Lösung	123
6.3.2	Randbedingungen	125
6.4	Ergebnisse und Studien	125
6.4.1	Vergleich mit Finite-Elemente-Analysen	127
6.4.2	Einfluss der Spannungs-Dehnungskurvenapproximation	128
6.4.3	Einfluss der Vergleichsspannung	130
6.5	Versagensbewertung mittels analytischem Modell	131
6.6	Ergebnisse	133
6.7	Anmerkungen und Ausblick	138
7	Zusammenfassung	141
	Literaturverzeichnis	143

Nomenklatur

Abkürzungen

Abaqus	kommerzielle FEM-Software
BFGS	BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNO
BLA	Bi-lineare Approximation
CFK	Carbonfaserverstärkter Kunststoff
CMH	COULOMB-MOHR Hypothese
DTP	Deformationstheorie der Plastizität
EIS	Elliptisches Spannungskriterium
EPP	Elastisch-perfekt plastisch
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FEM	Finite-Elemente-Methode
FBM	Finite Bruchmechanik
G	Gali et al. (1981)
GB	GRIFFITHSches Bruchkriterium
HTA	Hyperbolische Tangensapproximation
IHS	Interaktionsgesetz nach HUTCHINSON-SUO
KZM	Kohäsivzonenmodell
LIG	Lineares Interaktionsgesetz
NSH	Normalspannungshypothese
QP	Quadratisches Problem
R	Raghava et al. (1973)
SQP	Sequentielle quadratische Programmierung
vM	VON MISES

Indizes und Schreibweisen

$(\cdot)'$	Ableitung nach x
$(\cdot)_0$	Größe bezogen auf die Fügeiteilmittellebene
$(\cdot)_c$	kritischer Wert
$(\cdot)_{el}$	Wert im elastischen Bereich
$(\cdot)_f$	Wert bei Versagen
$(\cdot)_I, (\cdot)_{II}, (\cdot)_{III}$	Rissöffnungsmoden
$(\cdot)_{pl}$	Wert im plastischen Bereich
$(\cdot)_V$	Vergleichsgröße
$(\cdot)_y$	Wert bei Fließbeginn
$(\cdot)_{ij}$	Indexnotation $i, j = 1, \dots, 3$
$(\cdot)_{ijkl}$	Indexnotation $i, j, k, l = 1, \dots, 3$
$(\cdot)^{(a)}$	Größe bezogen auf die Klebschicht
$(\cdot)^{(i)}$	Größe bezogen auf Fügeiteil $i = 1$ oder 2

Nomenklatur

$(\cdot)^D$	Größe bezogen auf den Spannungsdeviator
$(\cdot)^T$	Größe bezogen auf die Temperatur

Lateinische Formelzeichen

$\Delta a, \Delta A$	finite Risslänge/-fläche
a_n, b_n, c_n	Koeffizienten der Reihendarstellung $n \in \mathbb{N}$
A_{ij}	Dehnsteifigkeiten $i, j = 1, 2, 6$
\mathbf{A}	Koeffizientenmatrix
b	Breite der Klebverbindung
B_{ij}	Kopplungssteifigkeiten $i, j = 1, 2, 6$
c_{ijkl}	Elastizitätstensor
\mathbf{c}	Vektor der Koeffizienten der Reihendarstellung
C	Kontur um den Riss
C_i	freie Konstanten $i = 1, \dots, 7$
C_{ij}	Steifigkeiten
d_n, e_n, f_n	Hilfsgrößen $n = 1, 2, 3$
D_i	freie Konstanten $i = 1, \dots, 6$
D_{ij}	Biegesteifigkeiten $i, j = 1, 2, 6$
e_{ij}	Verzerrungsdeviator
E	Elastizitätsmodul
E	Innere Energie
E_s	Sekantenmodul
f	beliebige Funktion
f_i	Volumenkraft
F	skalärer Lastparameter
g	beliebige Funktion
G	Schubmodul
\mathcal{G}	differentielle Energiefreisetzungsrate
$\bar{\mathcal{G}}$	inkrementelle Energiefreisetzungsrate
\mathcal{G}_c	Bruchzähigkeit
h_i	Fügeteilhöhe $i = 1, 2$
H_{ij}	Hilfsgrößen $i, j = 1, 2$
I_1, I_2, I_3	Invarianten
J	J -Integral
J_{ij}	Hilfsgrößen $i, j = 1, 2$
K	Kinetische Energie
K	Kompressionsmodul
K	Spannungsintensitätsfaktor
K_c	Bruchzähigkeit
L	Überlappungslänge
M	Biegemomente
N	Normalkräfte
P	Leistung der äußeren Kräfte
Q	Leistung des Wärmeflusses
Q	Querkräfte
r	Radius im Polarkoordinatensystem

s	Verhältnis der Fließspannung unter Druck und Zug
s_{ij}	Spannungsdeviator
s_{ijkl}	Nachgiebigkeitstensor
S	Nachgiebigkeiten
t	Klebschichtdicke
t_i	Spannungsvektor
T	Temperatur
T_0	Ausgangstemperatur
ΔT	Änderung der Temperatur
u_i bzw. u, v, w	Verschiebungen
U	spezifisches elastisches Potential
\mathbf{v}	Eigenvektor
W	spezifische Formänderungsarbeit
x_i bzw. x, y, z	Koordinaten
\mathbf{y}	Vektor freier Funktionen
Z	Zielfunktion

Griechische Formelzeichen

α	Parameter des RAMBERG-OSGOOD-Potenzgesetzes
α_i, α_{ij}	Temperaturausdehnungskoeffizienten
γ	Schubverzerrung
Γ	Hilfsgröße
δ	Separation der Rissflanken
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol
Δ	Hilfsgröße
$\Delta\Pi$	Änderung der Gesamtenergie
$\Delta_{\text{Exp/FBM}}$	relative Abweichung experimentell/ mittels FBM ermittelter Daten
ζ_i, η_i	Koeffizienten der Differentialgleichungen $i = 1, \dots, 6$
Θ	Winkel
ϵ	Konvergenzgüte
ε	Dehnung
κ	Schubkorrekturfaktor
λ	Eigenwert
μ	Sprödigkeitszahl
ν	Querkontraktionszahl
σ	Spannung
$\sigma_{\text{I}}, \sigma_{\text{II}}, \sigma_{\text{III}}$	Hauptspannungen
τ	Schubspannung
φ	Winkel im Polarkoordinatensystem
ψ	Verdrehung um die Biegeachse
ψ	Mixed-Mode-Winkel
$\boldsymbol{\psi}$	Hilfsvektor
Ω_c	potentielle Rissfläche

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Unter einer Klebverbindung versteht man eine "flächige Verbindung gleicher oder verschiedenartiger Werkstoffe unter Verwendung einer meist artfremden Substanz, die an den Oberflächen der zu verbindenden Teile haftet [...]" (Brockmann et al., 2009). Die Hauptaufgabe der Klebverbindung besteht in der Lastübertragung von einem Füge­teil in das andere. Klebverbindungen gehören zu den universellsten Verbindungstechnologien. Nahezu alle technisch nutzbaren Werkstoffe lassen sich mittels Klebtechnik stoffschlüssig fügen. Insbesondere für das großflächige Verbinden von Werkstoffen, wie es beispielsweise für den Leichtbau von Autokarosserien aus Aluminium, Stahl oder Kunststoff von Bedeutung ist, lassen sich Klebverbindungen vorteilhaft einsetzen. Faserverbundwerkstoffe sind ohne Klebverbindungen sogar kaum denkbar. Sowohl die Fasern als auch die Einzelschichten sind mittels Klebverbindungen gefügt.

Der Durchbruch in der Klebtechnik zur leistungsstarken Verbindungstechnik gelang mit der Entwicklung der synthetischen Herstellung von Klebstoffen in den 1940er Jahren (Bishopp, 1997, Brockmann et al., 2009). Phenolharzklebstoffe sowie Epoxidharze und Polyurethane ersetzen die klassischen natürlichen Klebstoffe wie beispielsweise den im frühen Flugzeugbau eingesetzten Holzleim (Higgins, 2000). Mit denen bis heute andauernden Fortschritten und Entwicklungen in der Polymerchemie ist es möglich gezielt Klebstoffe herzustellen, die vorgegebene Festigkeits- und Verformungseigenschaften aufweisen. Eine entsprechend rasche Weiterentwicklung und steigende Nutzung spiegelt sich in den Konjunkturdaten der Klebstoffindustrie wieder. Die Wachstumsraten der Klebstoffindustrie liegen in den letzten zehn Jahren rund 2,5 – 5% über denen des deutschen Bruttoinlandsprodukts. Knapp 1,5 Millionen Tonnen Kleb-, Dicht- und zementäre Bauklebstoffe sowie 1 Milliarde Quadratmeter trägergebundene Klebstoffe werden mit einem Gesamtumsatz von ungefähr 3,7 Milliarden Euro jährlich in Deutschland produziert (Industrieverband Klebstoffe e.V., 2017).

Dennoch werden Klebverbindungen insbesondere bei lasttragenden Strukturen oftmals mit Skepsis betrachtet (Wagner u. Stett, 2015). Dies liegt maßgeblich an dem komplexen strukturmechanischen Verhalten und den komplizierten Versagensprozessen von Klebverbindungen, die bei der Gestaltung und Dimensionierung einer Klebverbindung Beachtung finden müssen. Aufgrund der stark unterschiedlichen Nachgiebigkeiten der Füge­teile ist der Lastfluss an den Überlappungsrändern von Klebverbindungen konzentriert. Nach linearer Elastizitätstheorie treten Spannungssingularitäten an den Bi-Materialpunkten

zwischen Klebschicht und Füge­teilen auf. Aufgrund des komplexen Verformungsverhaltens liegen in den meisten Fällen kombinierte Schub- und Schälspannungsfelder vor. Beim Fügen dünnwandiger Bauteile treten oftmals nichtlineare Versteifungseffekte auf. Die verwendeten Klebstoffe sind im Vergleich zu den Füge­teilen meistens sehr nachgiebig und haben insbesondere bezüglich Querszugbeanspruchung geringe Festigkeiten, sodass Klebschichtversagen die am häufigsten auftretende Versagensart darstellt. Dabei können verschiedene Klebschichtversagensmodi, die sensitiv vom Klebstoffsystem und der Füge­geometrie abhängen, auftreten.

Ohne ein grundlegendes Wissen des mechanischen Verhaltens und der zugehörigen Versagensvorgänge einer Klebverbindung müssen zur Auslegung eine Vielzahl an Experimenten durchgeführt werden. Daher werden insbesondere für die Vorauslegung, in der oftmals Parameterstudien und Optimierungsroutinen durchgeführt werden, effiziente und zuverlässige Berechnungsverfahren benötigt. Aufgrund der breiten Gestaltungsmöglichkeiten von Klebverbindungen hinsichtlich der Füge­geometrie und des Klebstoffsystems ist ein möglichst allgemein anwendbares Vorhersagemodell hinsichtlich Lastübertragung und Versagenslasten wünschenswert. Ein solches würde die weitere Verbreitung und das Ausschöpfen des eigentlichen Potentials der Klebtechnik vorantreiben.

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung effizienter und zuverlässiger Berechnungsmethoden zur Analyse der Lastübertragung und des Tragverhaltens von Klebverbindungen. Dabei ist insbesondere die allgemeine Anwendbarkeit auf beliebige überlappende Klebfü­gungskonfigurationen mit Mehrschichtverbundfü­ge­teilen sowie einer großen Auswahl von Klebstoffsystemen mit unterschiedlichem Materialverhalten von Bedeutung. Aufgrund der Vielzahl von möglichen Versagensmodi soll sich die Arbeit zunächst auf die dominanteste Versagensart fokussieren: dem Versagen der Klebschicht.

Für eine Bewertung von Klebschichtversagen ist zunächst das Spannungs- und Deformationsfeld der Klebschicht zu ermitteln. Dazu ist eine analytische Berechnungsmethode zur Spannungs- und Deformationsanalyse mit möglichst geringer Komplexität sowie Berechnungsaufwand für überlappende Klebverbindungen zu entwickeln und mit Referenzlösungen zu validieren.

Klebschichtversagen tritt bei überlappenden Klebverbindungen in den meisten Fällen ausgehend von Spannungskonzentrationen an den Rändern der Überlappung auf. Auf Grundlage der Spannungs- und Deformationsanalyse sind geeignete Versagenskriterien zu entwickeln und anzuwenden. Im Falle spröden Versagens soll eine Bewertung mittels des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der finiten Bruchmechanik erfolgen. Eine entsprechende effiziente Auswertungsroutine, die eine Versagenslastvorhersage ermöglicht, ist zu entwickeln und zu implementieren. Zusätzlich ist eine numerische Referenzlösung mit Kohäsivzonenmodellen zu implementieren und die Ergebnisse mit denen der zuvor entwickelten Methodik zu vergleichen. Im Falle duktilen Versagens sind geeignete Versagenskriterien zu identifizieren und die zugehörigen

Versagenslastvorhersagen zu vergleichen und zu diskutieren. Schließlich sollen umfangreiche vergleichende Studien mit experimentellen Befunden zur Bewertung der Qualität der Versagenslastvorhersagen durchgeführt werden.

Bei den zu entwickelnden Berechnungsmethoden sind die Effizienz und die Qualität der Versagenslastvorhersagen von besonderer Bedeutung. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines allgemein anwendbaren Vorauslegungswerkzeugs zur Analyse von Klebverbindungen, welches eine vorteilhafte Einbettung in Optimierungsroutinen und die einfache Durchführung von Parameterstudien erlaubt.

1.3 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit führt in die benötigten theoretischen Hintergründe der folgenden Ausführungen ein. Die lineare Elastizitätstheorie, die Mechanik ebener Laminate und die Deformationstheorie der Plastizität werden in kompakter Form vorgestellt. Weiterhin werden klassische Versagenskriterien sowie die Grundkonzepte der linear-elastischen und elastisch-plastischen Bruchmechanik erläutert. Abschließend wird aufbauend auf der Festigkeitsmechanik und der linear-elastischen Bruchmechanik die finite Bruchmechanik mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium eingeführt. Dabei werden insbesondere die Vorteile und der Mehrwert dieses Konzeptes im Rahmen der klassischen Versagenskriterien erläutert.

In Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit wird der aktuelle Stand der Forschung im Bereich der Klebverbindungen vorgestellt. Neben den möglichen Versagensarten von Klebverbindungen wird auf den Klebschichtdickeneffekt und konstruktive Empfehlungen zur Auslegung von Klebverbindungen eingegangen. Weiter werden bestehende Konzepte zur Analyse der Lastübertragung vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer umfassenden Vorstellung der in der Literatur gängigen Versagensbewertungsansätze von Klebverbindungen.

Kapitel 4 stellt ein analytisches Berechnungsverfahren zur Spannungs- und Deformationsanalyse sowie zur Versagensbewertung von Überlappungsfügungen mit spröden Klebstoffen vor. Dabei wird insbesondere auf das zugrunde liegende Differentialgleichungssystem und die Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums eingegangen. Zusätzlich werden ein numerischer Bewertungsansatz mittels Kohäsivzonenmodellen vorgestellt und Versagenslastvorhersagen beider Ansätze mit experimentellen Daten verglichen. Abschließend werden der Einfluss der Sprödigkeit sowie die zugehörigen Grenzen des Modells diskutiert.

Die Analyse von Gradientenklebverbindungen wird in Kapitel 5 behandelt. Es wird ebenfalls ein analytisches Berechnungsverfahren zur Spannungs- und Deformationsanalyse vorgestellt. Dabei wird umfassend die Modellierung des Gradientenklebstoffs und der Lösungsansatz des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems dargestellt. Umfangreiche Studien zum Einfluss der Klebstoffgradierung und zum optimalen Gradierungsverlauf für bestimmte Klebverbindungskonfigurationen werden präsentiert und die Ergebnisse diskutiert.

Kapitel 1 Einleitung

Kapitel 6 ist der Analyse von Klebverbindungen mit duktilen Klebstoffen gewidmet. Ein effizientes Berechnungsverfahren zur Analyse der Klebschichtspannungen und -deformationen wird eingeführt. Darauffolgend werden ein Vergleich mit numerischen Referenzlösungen und Sensitivitätsanalysen zum Einfluss der Eingangsparameter präsentiert. Schließlich erfolgt die Vorstellung verschiedener Versagenskonzepte auf Basis des vorgestellten Berechnungsmodells. Die Ergebnisse werden mit experimentellen Daten aus der Literatur verglichen und eingehend diskutiert.

Abschließend werden in Kapitel 7 die erarbeiteten Ergebnisse zusammenfassend in kompakter Form dargestellt.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen dieser Arbeit zusammenfassend dargestellt und eine einheitliche Nomenklatur eingeführt. Ausgehend von den Grundlagen der Elastizitätstheorie werden die Mechanik ebener Laminate und die Deformationstheorie der Plastizität dargelegt. Darauf aufbauend werden klassische Versagenskonzepte erläutert. Das Kapitel schließt mit einer Einführung in die klassische linear-elastische und elastisch-plastische Bruchmechanik sowie der Einführung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der finiten Bruchmechanik.

2.1 Lineare Elastizitätstheorie

Die lineare Elastizitätstheorie beschreibt das mechanische Verhalten deformierbarer Körper unter der Annahme kleiner Deformationen sowie linear-elastischen Materialverhaltens. Im Folgenden werden die Grundkonzepte dieser Theorie aufgeführt¹. Eine ausführliche Darstellung findet sich beispielsweise bei Eschenauer u. Schnell (1993), Becker u. Gross (2002), Gross et al. (2007b) oder Sadd (2009).

Deformiert sich ein Körper infolge innerer oder äußerer Belastungen, treten innere Kräfte, die sogenannten Spannungen, auf. Lokal an einem Punkt eines Körpers wird der Spannungszustand durch den sogenannten CAUCHYSchen Spannungstensor beschrieben. Der CAUCHYSche Spannungstensor ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Die zugehörige Komponentenmatrix bezüglich eines kartesischen Basissystems lässt sich wie folgt darstellen:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Die Diagonalelemente σ_{11}, σ_{22} und σ_{33} bezeichnet man als Normalspannungen, die Nebendiagonalelemente σ_{12}, σ_{13} und σ_{23} als Schubspannungen². Die Symmetrie $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ lässt sich durch das Momentengleichgewicht am infinitesimalen Volumenelement zeigen

¹Für die Darstellung der Formeln wird in vielen Fällen die Indexnotation unter Verwendung der Indizes i, j, k und l benutzt. Sofern nicht anders angegeben, können die Indizes die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Ferner gilt die EINSTEINSche Summenkonvention: über mehrfach auftretenden Indizes innerhalb jeden Glieds eines Terms ist zu summieren, sodass die Indizes die Werte 1, 2 und 3 durchlaufen.

²Alternativ werden die Normalspannungen mit σ und die Schubspannungen mit τ bezeichnet.

(Becker u. Gross, 2002). Der Spannungstensor kann additiv in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil zerlegt werden. Bezeichnet man den deviatorischen Anteil als s_{ij} , ergibt sich folgende Zerlegung³:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij}. \quad (2.2)$$

Dabei wird der erste Anteil oftmals als Kugeltensor bezeichnet.

In einem Schnitt durch den Körper mit der Normalen n_j liefert das CAUCHYSche Theorem einen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor σ_{ij} und dem auf den Schnitt bezogenen Spannungsvektor t_i :

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (2.3)$$

Zum ursprünglich betrachteten Basissystem lässt sich ein gedrehtes Basissystem finden, sodass die Komponentenmatrix nur Normalspannungen enthält und die Schubspannungen verschwinden. Dieses System bezeichnet man als Hauptachsensystem. Die zugehörigen Normalspannungen werden häufig der Größe nach geordnet und als Hauptspannungen bezeichnet ($\sigma_{\text{I}} \geq \sigma_{\text{II}} \geq \sigma_{\text{III}}$). Aus der Überlegung, dass der Spannungsvektor und der Normalenvektor in durch das Hauptachsensystem bestimmten Schnitten gleichgerichtet sind, lässt sich die folgende charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Hauptspannungen herleiten:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (2.4)$$

Dabei stellen die Koeffizienten der Gleichung (2.4) die Invarianten des Spannungstensors dar. Sie lassen sich wie folgt aus den Spannungen berechnen:

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad (2.5)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}), \quad (2.6)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}). \quad (2.7)$$

Analog lassen sich auch für den Spannungsdeviator entsprechende Invarianten formulieren. Da die Invarianten unabhängig vom zugrunde liegenden Basissystem sind, haben sie bei der Formulierung von Versagenskriterien eine große Bedeutung (Altenbach et al., 2014). Dies gilt insbesondere für die zweite Invariante des Spannungsdeviators I_2^{D} , die sich unter der Verwendung der Hauptspannungen σ_{I} , σ_{II} und σ_{III} wie folgt vorteilhaft darstellen lässt:

$$I_2^{\text{D}} = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{6}[(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2]. \quad (2.8)$$

Weitere für die Formulierung von Versagenskriterien wichtige Spannungsgrößen sind die sogenannten Oktaederspannungen

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}} + \sigma_{\text{III}}}{3} = \frac{1}{3}I_1, \quad (2.9)$$

³Das KRONECKER-Symbol δ_{ij} ist definiert als: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_2^D. \quad (2.10)$$

Sie treten in Schnitten auf, deren Normale mit den drei Hauptachsen gleiche Winkel einschließen.

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen am infinitesimalen Volumenelement lassen sich lokale Bedingungen für das Gleichgewicht eines Körpers herleiten:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. \quad (2.11)$$

Dabei sind f_i die Volumenkräfte im Körper.

Neben der Beschreibung der Beanspruchung eines Körpers befasst sich die Elastizitätstheorie mit den zugehörigen Deformationen. Der Deformationszustand wird, wie der Spannungszustand, durch Tensoren zweiter Stufe, den Verzerrungstensoren, charakterisiert. In den meisten technisch relevanten Fällen ist es ausreichend, den linearisierten Verzerrungstensor mit der Komponentenmatrix

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

zu betrachten. Die Diagonalelemente werden als Dehnungen und die Nichtdiagonalelemente als Schubverformungen bezeichnet. Die Schubverformungen stehen in folgender Relation mit den oftmals verwendeten technischen Gleitungen $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. Zwischen den Verschiebungen u_i und den Verzerrungen ε_{ij} eines Körpers gilt der Zusammenhang:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.13)$$

Ebenso wie der CAUCHYSche Spannungstensor lässt sich der linearisierte Verzerrungstensor in einen volumetrischen und deviatorischen Anteil additiv zerlegen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij}. \quad (2.14)$$

Schließlich gelten für den linearisierten Verzerrungstensor die gleichen Beziehungen für das Hauptachsensystem und die Invarianten wie für den CAUCHYSchen Spannungstensor. Analog zu den Oktaederspannungen lassen sich auch zugehörige Oktaederverzerrungen herleiten.

Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie gilt zwischen den Komponenten des CAUCHYSchen Spannungstensors und des linearisierten Verzerrungstensors ein proportionaler Zusammenhang, das HOOKESche Gesetz. Mit Hilfe des Elastizitätstensors vierter Stufe mit den Komponenten c_{ijkl} lässt sich das HOOKESche Gesetz allgemein wie folgt angeben:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.15)$$

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Dabei besitzt der Elastizitätstensor vierter Stufe aufgrund der Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors sowie energetischer Argumente im allgemeinen Fall der Anisotropie 21 unabhängige Komponenten. Der Nachgiebigkeitstensor mit den Komponenten s_{ijkl} besitzt die gleichen Eigenschaften und verknüpft die Verzerrungen mit den Spannungen:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (2.16)$$

Berücksichtigt man thermische Dehnungen ε_{ij}^T , die bei einer Temperaturänderung $\Delta T = T - T_0$ ausgehend von einer Anfangstemperatur T_0 auf eine aktuelle Temperatur T entstehen, lässt sich das HOOKESche Gesetz erweitern:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^T, \quad (2.17)$$

wobei sich die thermischen Dehnungen mit den linearen Temperatúrausdehnungskoeffizienten α_{ij} in erster Näherung wie folgt angeben lassen

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}\Delta T. \quad (2.18)$$

Eine für die Ingenieurin oder den Ingenieur übliche Darstellung des HOOKESchen Gesetzes lässt sich mit Hilfe der VOIGT-Notation angeben. Dazu ordnet man die Elemente des Spannungs- und des Verzerrungstensors in Vektoren an, sodass das HOOKESche Gesetz als Matrix-Gleichung mit zweifach indizierten Steifigkeiten C_{ij} angegeben werden kann:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Viele Materialien weisen bestimmte Materialsymmetrien auf, sodass sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten der Steifigkeitsmatrix weiter verringert. Im Folgenden wird der häufig vorkommende Fall von orthotropem Materialverhalten betrachtet. Orthotropes Materialverhalten liegt vor, wenn im Material drei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenen existieren wie beispielsweise bei durch Gewebelagen mit senkrecht aufeinander stehenden Faserrichtungen verstärkten Kunststoffen. Das HOOKESche Gesetz, aufgelöst nach den Verzerrungen, lässt sich mit Hilfe der Nachgiebigkeitsmatrix mit den zweifach indizierten Komponenten S_{ij} unter Verwendung der sogenannten verallgemeinerten Ingenieurkonstanten wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}}_{[S_{ij}]} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Dabei ergibt sich die Nachgiebigkeitsmatrix als Inverse der Steifigkeitsmatrix. Aus deren Symmetrie lassen sich die folgenden Reziprozitätsrelationen ablesen:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad (2.21)$$

sodass lediglich neun unabhängige Ingenieurkonstanten verbleiben.

Im Falle von isotropem Materialverhalten reduziert sich die Zahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten weiter auf zwei und die Steifigkeitsmatrix lässt sich wie folgt angeben:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Dabei gilt folgender Zusammenhang zwischen den Komponenten der Steifigkeitsmatrix und den gebräuchlichen Ingenieurkonstanten, dem Elastizitätsmodul E , dem Schubmodul G und der Querkontraktionszahl ν (auch Poissonzahl genannt):

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ C_{12} &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ G &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Zusätzlich wird oftmals der Kompressionsmodul K als Werkstoffkonstante angegeben. Betrachtet man eine reine Volumendehnung, lässt sich das HOOKEsche Gesetz mit Hilfe des Kompressionsmoduls schreiben:

$$\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} = \frac{E}{(1 - 2\nu)}\varepsilon_{kk}. \quad (2.24)$$

Dabei kann die Querkontraktionszahl ν Werte zwischen -1 und $0,5$ annehmen.⁴

Zusammen bilden die Gleichgewichtsbedingungen (2.11), die Kinematik (2.13) und das Elastizitätsgesetz (2.15) sowie entsprechend zu formulierende Randbedingungen ein elastizitätstheoretisches Randwertproblem, das mittels analytischer oder numerischer Verfahren zu lösen ist.

Die in der Praxis vorkommenden räumlichen Probleme lassen sich im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie in den seltensten Fällen analytisch lösen. Technische Probleme können jedoch oftmals in guter Näherung als eben angesehen und daraufhin effizient

⁴Dies ergibt sich aus der Forderung, dass die Formänderungsenergiedichte für beliebige Verzerrungszustände positiv sein muss. Folglich müssen der Elastizitätsmodul E , der Schubmodul G und der Kompressionsmodul K größer Null sein.

gelöst werden. In diesen Fällen reduzieren sich sowohl die Anzahl der Gleichungen als auch die Anzahl der unabhängigen Variablen. Die folgenden beiden Spannungs- und Verzerrungszustände sind für die Ausführungen in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung:

- Ebener Spannungszustand (ESZ):
Besitzt ein Körper in eine Raumrichtung (hier x_3 -Richtung) eine Längenabmessung, die im Vergleich zu den anderen relevanten Längenabmessungen klein ist, gilt in guter Näherung:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}(x, y), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x, y), \quad \tau_{12} = \tau_{12}(x, y) \quad (2.25)$$

- Ebener Verzerrungszustand (EVZ):
Ändert sich die Form und Belastung eines Körpers in eine Raumrichtung (hier x_3 -Richtung) nicht und wird die Ausdehnung in eine Raumrichtung durch eine Lagerung verhindert⁵, gilt:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x, y), \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(x, y), \quad \gamma_{12} = \gamma_{12}(x, y) \quad (2.26)$$

Neben den Betrachtungen der Deformationen, Spannungen und Verzerrungen haben sich Energiebetrachtungen bei der Analyse eines mechanischen Systems als zweckmäßig erwiesen. Deformiert sich ein Körper ausgehend von einem verzerrungslosen Ausgangszustand zu einem verformten Zustand, charakterisiert durch die Verzerrungen $\bar{\varepsilon}_{ij}$, so wird eine Formänderungsarbeit geleistet. Die pro Volumeneinheit geleistete Formänderungsarbeit W lässt sich durch Integration wie folgt ermitteln:

$$W = \int_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (2.27)$$

Im Falle elastischen Materialverhaltens hängt die spezifische Formänderungsarbeit nicht vom Deformationsweg, sondern nur vom Endverzerrungszustand $\bar{\varepsilon}_{ij}$ ab, sodass das Arbeitsinkrement dW das vollständige Differential dU einer Zustandsgröße $U(\varepsilon_{ij})$ darstellt. Die Zustandsgröße U wird oft als Formänderungsenergiedichte oder spezifisches elastisches Potential bezeichnet. Im Falle linearer Elastizität lässt sich die Formänderungsenergiedichte als quadratische Form der Spannungen bzw. Verzerrungen angeben:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij} \right) \left(\frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + e_{ij} \right) \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{6} \sigma_{kk} \varepsilon_{ll} + \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2 + G e_{ij} e_{ij}. \quad (2.29)$$

Dabei bezeichnet man den ersten Summanden in Gleichung (2.29) als Volumenänderungsenergiedichte U_V und den zweiten als Gestaltsänderungsenergiedichte U_G .

⁵In vielen technischen Problemstellungen wird ein EVZ angenommen, wenn in eine Raumrichtung die Längenabmessung des Bauteils wesentlich größer als die verbleibenden Abmessungen sind, sodass die zugehörigen Verzerrungen vernachlässigbar klein sind.

Gemäß der Energiebilanz der Kontinuumsmechanik, die auch als erster Hauptsatz der Thermodynamik bekannt ist, entspricht die zeitliche Änderung der Summe der inneren und kinetischen Energie eines elastischen Körpers dem Energietransport in den Körper:

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q, \quad (2.30)$$

wobei E die innere Energie, K die kinetische Energie, P die mechanische Leistung der angreifenden Kräfte und Q die Leistung des Wärmeflusses sind. Die innere Energie entspricht im Falle rein elastischen Materialverhaltens dem Volumenintegral über das spezifische elastische Potential $\int_V U dV$, auch inneres Potential Π^i genannt.

2.2 Mechanik ebener Laminate

Mehrschichtverbunde bzw. Laminate sind Flächentragwerke, die sich aus einer beliebigen Anzahl von Einzelschichten zusammensetzen. Die Beschreibung des Verformungsverhaltens solcher Mehrschichtverbunde erfordert eine detaillierte Betrachtung der zugrunde liegenden Mechanik. Im Folgenden wird die zugehörige Theorie der Mechanik ebener Laminate mit besonderem Fokus auf die klassische Laminattheorie und die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung in dem für diese Arbeit benötigten Umfang vorgestellt. Eine umfassende Einführung in die Mechanik ebener Laminate findet sich beispielsweise bei Altenbach et al. (1996, 2004), Jones (1999), Becker u. Gross (2002), Reddy (2004), Schürmann (2007) und Mittelstedt u. Becker (2016).

2.2.1 Klassische Laminattheorie

Die klassische Laminattheorie eignet sich zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens hinreichend dünner Laminate. Dazu wird zunächst auf das Verhalten einer Laminateneinzelschicht und den Laminataufbau eingegangen. Dabei sei mit einer Laminateneinzelschicht ein Verbund aus Matrixmaterial und unidirektionalen Fasern oder einem Faser-Gewebe bezeichnet. Da Mehrschichtverbunde und somit auch die Einzelschichten üblicherweise als dünnwandige flächige Bauteile ausgelegt werden, kann für die Einzelschicht ein ebener Spannungszustand zugrunde gelegt werden. Ihre Dicke ist meist kleiner als die sonstigen ebenen Abmessungen. Beschränkt man sich weiterhin auf orthotrope Laminateneinzelschichten, vereinfacht sich das HOOKEsche Gesetz im kartesischen, in Abbildung 2.1 dargestellten x_1, x_2, x_3 -Materialhauptachsensystem gemäß Gleichung (2.19) zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Aufgelöst nach den Spannungen ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

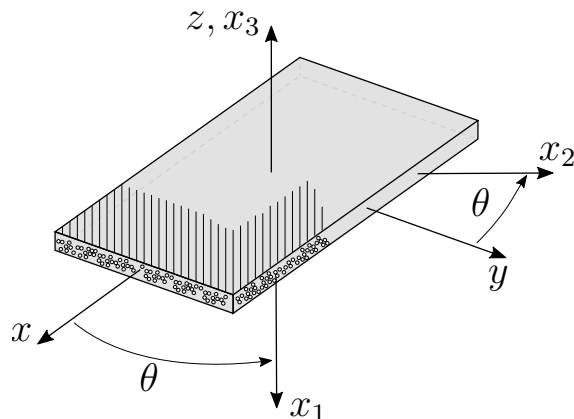


Abbildung 2.1: Unidirektional verstärkte Laminat-Einzelschicht mit kartesischem x, y, z -Laminatkoordinaten- bzw. x_1, x_2, x_3 -Materialhauptsachsensystem. Das Materialhauptsachsensystem wird zweckmäßigerweise an der Faserlängsrichtung ausgerichtet.

mit den sogenannten reduzierten Steifigkeiten

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Neben der Darstellung bezüglich des Materialhauptsachsensystems ist zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Mehrschichtverbunds die Einführung eines globalen kartesischen x, y, z -Laminatkoordinatensystems (vgl. Abbildung 2.1) notwendig. Bezüglich dieses Systems ist die x_1 -Achse des Materialhauptsachsensystems um den Winkel θ gegenüber der x -Achse gedreht. Das HOOKESche Gesetz im globalen Laminatkoordinatensystem lässt sich aus Gleichung (2.32) herleiten:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

wobei \bar{Q}_{ij} die transformierten reduzierten Steifigkeiten darstellen. Die Transformationsgleichungen ergeben sich aus elementaren Tensortransformationen des Spannungs- und Verzerrungstensors, sodass für die transformierten reduzierten Steifigkeiten gilt:

$$\bar{Q}_{ij} = T_{ik}Q_{kl}T_{jl}, \quad (2.35)$$

mit

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Die genaue Herleitung der Transformationsgleichungen findet man in der zuvor genannten einschlägigen Fachliteratur.

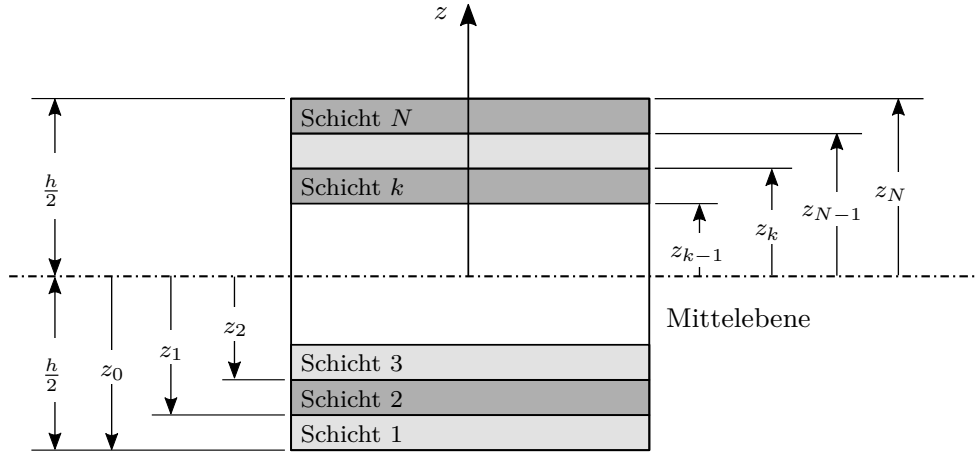


Abbildung 2.2: Querschnitt eines Mehrschichtverbunds, Bezeichnung der Einzelschichten.

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Mehrschichtverbunds werden zusätzlich kinematische Annahmen für das Gesamtlaminat im globalen Laminatkoordinatensystem formuliert und Schnittgrößen durch Integration über die Dicke ermittelt. Die z -Koordinate des globalen Laminatkoordinatensystems wird gemäß Abbildung 2.2 von der Laminat-Mittelebene aus gezählt. Die einzelnen Schichten werden von der untersten Schicht ausgehend mit der z -Koordinate aufsteigend nummeriert. Im Rahmen der klassischen Laminattheorie werden die gleichen Annahmen wie in der KIRCHOFFSchen Plattentheorie zugrunde gelegt. Ebenen senkrecht zur Laminatmittelebene bleiben unter Deformation eben und senkrecht, sodass Querschubdeformationen vernachlässigt werden. Letztere Forderung wird oftmals als Normalenhypothese bezeichnet. Zusätzlich wird die Dickenänderung des Laminats vernachlässigt. Aus diesen kinematischen Annahmen ergibt sich der folgende Verschiebungsansatz⁶

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.37)$$

und durch Einsetzen in Gleichung (2.13) die Verzerrungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Durch Einsetzen der Verzerrungen in Gleichung (2.34) ergibt sich schließlich das Konstitutivgesetz der k -ten Lamineinzelschicht

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.39)$$

⁶Dabei bezeichnet der Index 0 Größen, die auf die Laminat-Mittelebene bezogen sind.

Integriert man die über die Laminatdicke h verteilten Spannungen, erhält man die resultierenden Schnittkräfte

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz, \quad (2.40)$$

und Schnittmomente

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz. \quad (2.41)$$

Durch Einsetzen der Spannungen (2.39) in die Gleichungen (2.40) sowie (2.41) und Ausführen der Integration erhält man durch Einführung der Laminatsteifigkeitsmatrix die folgende Darstellung des Konstitutivgesetzes für den Mehrschichtverbund:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

mit den Steifigkeiten

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz = \sum_k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad (2.43)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z dz = \frac{1}{2} \sum_k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (2.44)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (2.45)$$

Die Komponenten A_{ij} , B_{ij} und D_{ij} werden als Dehnsteifigkeiten, Kopplungssteifigkeiten und Biegesteifigkeiten bezeichnet. Die Laminatsteifigkeitsmatrix bestimmt maßgeblich das mechanische Verhalten des Mehrschichtverbunds und ist entscheidend für die Komplexität des zugrunde liegenden mechanischen Problems.

In der Praxis ist es oftmals zielführend neben mechanischen auch thermische Lasten zu berücksichtigen. Gemäß Gleichung (2.17) lautet das Elastizitätsgesetz für die k -te Einzelschicht unter Beachtung thermischer Dehnungen mit den Temperaturendeckungskoeffizienten α_1 und α_2 bezüglich des Materialhauptachsensystems

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_2 \Delta T \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Durch Transformation auf das globale Laminatkoordinatensystem gemäß Gleichung (2.34) und Integration über die Laminatdicke ergibt sich

$$\begin{bmatrix} N_x + N_x^T \\ N_y + N_y^T \\ N_{xy} + N_{xy}^T \\ M_x + M_x^T \\ M_y + M_y^T \\ M_{xy} + M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

mit den thermischen Schnittkräften

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T \, dz, \quad (2.48)$$

und Schnittmomenten

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T z \, dz. \quad (2.49)$$

Dabei ergeben sich die transformierten Temperatureausdehnungskoeffizienten α_{xx} , α_{yy} und α_{xy} aus den Temperatureausdehnungskoeffizienten bezüglich des Materialhauptachsensystems α_1 und α_2 mittels elementarer Tensortransformationen.

2.2.2 Schubdeformationstheorie 1. Ordnung

Die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung erweitert die klassische Laminattheorie um den transversalen Schub. Dies ist insbesondere bei dickeren Laminaten mit "schwachen" transversalen Schubsteifigkeiten von enormer Bedeutung. Dazu wird die Normalenhypothese fallen gelassen⁷. Es wird weiterhin das Ebenbleiben der Querschnitte unter Deformation angenommen. Die Orthogonalität einer Normalen nach der Verformung wird jedoch nicht weiter gefordert. Damit werden zwei neue Freiheitsgrade ψ_x und ψ_y als Verdrehungen in Richtung der x - und y -Achse eingeführt. Als erweiterter Verschiebungsansatz ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (2.50)$$

und damit das zugehörige Verzerrungsfeld

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y.$$

⁷In Analogie zu den Plattentheorien entspricht die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung der Anwendung der REISSNER-MINDLIN-Plattentheorie auf Laminare. Detaillierte Ausführungen zu Plattentheorien findet man beispielsweise bei Becker u. Gross (2002).

Mit den eingeführten Verzerrungsgrößen $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_{xx}, \kappa_{yy}$ und κ_{xy} gilt weiterhin das Konstitutivgesetz (2.42). Im Gegensatz zur klassischen Laminattheorie ist in der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung die Angabe von Konstitutivgesetzen für die Querkräfte möglich. Aus dem verallgemeinerten HOOKEschen Gesetz im Laminatkoordinatensystem

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

folgt durch Integration über die Dicke

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

mit

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz = \sum_k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 4, 5. \quad (2.54)$$

Die transformierten reduzierten Steifigkeiten $\bar{Q}_{44}, \bar{Q}_{45}$ und \bar{Q}_{55} ergeben sich durch elementare Regeln der Tensortransformation aus den reduzierten Steifigkeiten Q_{44} und Q_{55} , die transversale Schubsteifigkeiten darstellen. Diese ergeben sich wiederum analog zu den Steifigkeiten Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} und Q_{66} in Gleichung (2.32) aus dem HOOKEschen Gesetz (2.19).

Infolge des eingeführten Verzerrungsfeldes (2.51) sind die Schubspannungen in jeder Einzelschicht über die Dicke konstant und nicht parabolisch wie nach elementarer Biegetheorie und der Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen. Letztlich überschätzt damit die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung die transversalen Schubsteifigkeiten. Um die Berechnungsfehler klein zu halten, werden die transversalen Schubsteifigkeiten durch die Einführung von Schubkorrekturfaktoren κ_i modifiziert, sodass sich das Konstitutivgesetz der Querkräfte wie folgt schreiben lässt

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 A_{44} & \kappa_3 A_{45} \\ \kappa_3 A_{45} & \kappa_2 A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Zur Berechnung von Schubkorrekturfaktoren existieren verschiedenste Rechenverfahren. Für diese Arbeit von besonderer Bedeutung ist die von Klarmann u. Schweizerhof (1993) vorgeschlagene Berechnungsmethode für Schubkorrekturfaktoren von Laminaten. Die Berechnung der Schubkorrekturfaktoren κ_i beruht auf dem Verhältnis zwischen der Schubverzerrungsenergie zugehörig zu der mit der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung berechneten Schubspannungen und der Schubverzerrungsenergie der Schubspannungen, die durch Integration der Gleichgewichtsbedingungen (2.11) berechnet werden. Im Falle eines isotropen Werkstoffes ergibt sich der Wert $\kappa = 5/6$. Weitere Details sind in der zugrunde liegenden Arbeit (Klarmann u. Schweizerhof, 1993) zu finden.

Analog zum vorherigen Kapitel ist mit der jeweiligen Kinematik, dem Elastizitätsgesetz für die Schnittkräfte und -momente und entsprechend zu formulierende Gleichgewichts- und Randbedingungen ein elastizitätstheoretisches Randwertproblem vollständig formuliert. Die hier nicht aufgeführten Gleichungen sind in der zu Beginn des Kapitels genannten einschlägigen Fachliteratur zu finden.

2.3 Plastizitätstheorie

In realen Materialien treten bei hinreichend kleinen Beanspruchungen rein elastische Deformationen auf. Wird eine bestimmte Materialbeanspruchung überschritten, tritt bei duktilen Materialien plastisches Fließen auf, sodass bei Entlastung bleibende Deformationen auftreten. Spröde Materialien hingegen weisen keine oder vernachlässigbar kleine plastische Verformungen auf (Altenbach, 2015).

Wesentliche Merkmale plastischen Materialverhaltens sind die Abhängigkeit von der Deformationsgeschichte und die Irreversibilität des plastischen Fließens. Daher werden in der Plastizitätstheorie in den meisten Fällen Materialgesetze in inkrementeller Form, das heißt in einer Formulierung bezüglich der Änderung entsprechender Größen, beschrieben. Betrachtet man lediglich monoton steigende Belastungen und keine Entlastungsvorgänge, lässt sich das zugehörige Materialgesetz jedoch in absoluten Größen angeben. Diese Art der Formulierung wird als Deformationstheorie der Plastizität bezeichnet, ermöglicht oftmals eine einfache Lösung elastisch-plastischer Problemstellungen und soll in dieser Arbeit weiter verfolgt werden. Eine ausführliche Einführung in die Plastizitätstheorie findet sich bei Kachanov (1971), Lubliner (1998) oder Jones (2009).

Im Rahmen der Deformationstheorie lässt sich isotropes elastisch-plastisches Materialverhalten durch ein modifiziertes HOOKEsches Gesetz beschreiben. Dazu werden in Gleichung (2.19) mit Steifigkeitsmatrix (2.22) sowie Konstanten (2.23) der konstante Elastizitätsmodul E und die konstante Querkontraktionszahl ν durch einen variablen Elastizitätsmodul (Sekantenmodul) E_s und eine variable Querkontraktionszahl ν_s ersetzt:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} ((1 - \nu_s)\varepsilon_{11} + \nu_s(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})), \\
 \sigma_{22} &= \frac{E_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} ((1 - \nu_s)\varepsilon_{22} + \nu_s(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})), \\
 \sigma_{33} &= \frac{E_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} ((1 - \nu_s)\varepsilon_{33} + \nu_s(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})), \\
 \sigma_{23} &= \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \gamma_{23}, \quad \sigma_{13} = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \gamma_{13}, \quad \sigma_{12} = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \gamma_{12}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Dabei sind E_s und ν_s kontinuierliche Funktionen des Spannungszustandes. Somit wird innerhalb der Deformationstheorie elastisch-plastisches wie ein nichtlinear elastisches Materialverhalten beschrieben.

Aus Experimenten ist beobachtbar, dass für viele Materialien im plastischen Verformungsbereich unter Druck nahezu keine Volumenänderungen auftreten, d.h. der Werkstoff sich nahezu inkompressibel verhält. Eine entsprechende von der Last abhängige Querkontraktionszahl, die einen kontinuierlichen Übergang vom kompressiblen elastischen ($\nu_s = \nu$) bis zum inkompressiblen plastischen Bereich ($\nu_s = 0.5$) ermöglicht, lässt sich wie folgt angeben (Jones, 2009)

$$\nu_s = \frac{1}{2} - \frac{E_s}{E} \left(\frac{1}{2} - \nu \right). \tag{2.57}$$

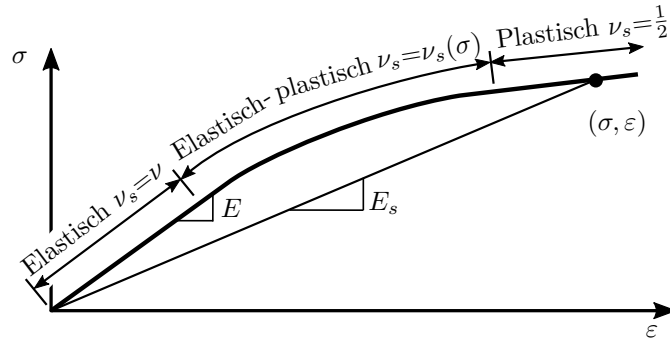


Abbildung 2.3: Variation der Querkontraktionszahl in Abhängigkeit der Spannung.

Abbildung 2.3 zeigt exemplarisch die Variation der Poissonzahl sowie des Sekantenmoduls in Abhängigkeit der Spannung für einen einfachen uniaxialen Zugversuch.

Der Sekantenmodul als Funktion eines mehrachsigen Spannungszustandes lässt sich mit Hilfe einer experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungskurve wie z.B. aus einem uniaxialen Zugversuch bestimmen. Dazu werden mehrachsige Spannungszustände zunächst durch eine skalare Vergleichsspannung $\sigma_V(\sigma_{ij})$ beschrieben. In der klassischen Deformationstheorie verwendet man eine Vergleichsspannung, die sich als Funktion der Oktaederschubspannungen angeben lässt

$$\sigma_V = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{\text{oct}}. \quad (2.58)$$

Zugehörig zur Vergleichsspannung lässt sich eine Vergleichsverzerrung als Funktion der Oktaederschubverzerrung herleiten ($\varepsilon_V = \left(\frac{3\sqrt{2}}{1+\nu}\right)\gamma_{\text{oct}}$). Im Rahmen der Deformationstheorie folgt mit der Verwendung des modifizierten HOOKEschen Gesetzes (2.56) schließlich

$$\sigma_V = E_s \varepsilon_V. \quad (2.59)$$

Dabei sind die skalaren Vergleichsgrößen gerade so gewählt, dass sich im Falle eines uniaxialen Spannungszustandes ($\sigma_I = \sigma$ und $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ mit $\varepsilon_I = \varepsilon$ und $\varepsilon_{II} = \varepsilon_{III} = -\nu\varepsilon$) die Vergleichsspannung und die Vergleichsverzerrung jeweils auf σ und ε reduzieren. In diesem Fall lässt sich Gleichung (2.59) schreiben als

$$\sigma = E_s \varepsilon. \quad (2.60)$$

Die Spannungs-Dehnungskurve der Vergleichsgrößen ist demnach identisch zur Spannungs-Dehnungskurve des uniaxialen Zugversuchs, sodass für konkrete Vergleichsspannungen bzw. -dehnungen mittels Gleichung (2.60) und Daten eines uniaxialen Zugversuchs der Sekantenmodul bestimmt werden können. Dabei ist es vorteilhaft für die experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungskurve einen Approximationsansatz zu wählen, sodass der Sekantenmodul letztlich als Funktion angegeben werden kann, die nur von der Vergleichsspannung oder -dehnung abhängt. Setzt man beispielsweise den Sekantenmodul bestimmt durch einen Approximationsansatz in Abhängigkeit der Vergleichsverzerrung ε_V in das modifizierte HOOKEsche Gesetz (2.56) ein, erhält man explizite

Ausdrücke für die Spannungen. Die Wahl der Vergleichsspannung bzw. -verzerrung bestimmt infolge des Zusammenhangs zwischen uniaxialen und mehrachsigen Spannungszuständen über den Sekantenmodul schlussendlich den Beginn des plastischen Fließens.

2.4 Klassische Versagenskriterien

Klassische Bruch- und Versagensbedingungen für Materialien und Strukturen in Form von Festigkeitshypothesen haben bis heute eine besondere praktische Bedeutung, obwohl sie auf Überlegungen des späten 19. bzw. des frühen 20. Jahrhunderts basieren (Gross u. Seelig, 2011). Sie werden oft in Hauptspannungen oder -dehnungen formuliert und haben die allgemeine Form

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad g(\varepsilon_{ij}) = 0. \quad (2.61)$$

Sie können im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen bzw. -dehnungen als Versagensflächen dargestellt werden. Oftmals erfolgt die Formulierung der Versagenshypothesen über eine Vergleichsspannung σ_V oder -dehnung ε_V

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_V(\sigma_{ij}) - \sigma_c = 0 \quad \text{bzw.} \quad g(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_V(\varepsilon_{ij}) - \varepsilon_c = 0 \quad (2.62)$$

mit kritischen Materialkennwerten $(\cdot)_c$ aus einfachen Versuchen wie z.B. dem uniaxialen Zugversuch. Analog zu Kapitel 2.3 wird damit der Übergang vom tensoriellen Spannungs- bzw. Verzerrungszustand zu skalaren Vergleichsgrößen geschaffen. Im Folgenden werden lediglich die für die Arbeit relevanten Versagensbedingungen in kurzer Form dargestellt.

Die Normalspannungshypothese (NSH) nach RANKINE, LAMÉ und NAVIER postuliert Versagen, wenn die größte Hauptspannung

$$\sigma_V = \sigma_I = \sigma_{\text{NSH}} \quad (2.63)$$

einen kritischen Wert erreicht, vorausgesetzt, dass mindestens eine Hauptspannung Werte größer 0 annimmt. Sie kommt vorrangig zur Beschreibung spröden Versagens von Werkstoffen zum Einsatz.

Die Gestaltsänderungsenergiehypothese nach VON MISES (vM) postuliert Versagen, wenn die Gestaltsänderungsenergiegedichte U_G (vgl. Gleichung (2.29)) einen kritischen Wert erreicht. Ausgedrückt in Spannungen lässt sich die VON MISES-Vergleichsspannung schreiben als

$$\sigma_V = \sqrt{3I_2^D} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sigma_{\text{vM}}. \quad (2.64)$$

Sie ist die in der Ingenieurpraxis gängigste Versagenshypothese und wird insbesondere bei duktilen Materialien zur Beschreibung des plastischen Fließbeginns verwendet. Sie entspricht der in Kapitel 2.3 eingeführten Vergleichsspannung und kann in diesem

Kontext als gewichtete Oktaederschubspannung angesehen werden (Gross u. Seelig, 2011).

In der Literatur findet man viele weitere und komplexere Versagensbedingungen für jeweils spezifische Anwendungsgebiete und Materialien. Eine Versagenshypothese, die beispielsweise vorrangig zur Beschreibung des Abgleitens geologischer oder granularer Medien verwendet wird, ist die COULOMB-MOHR-Hypothese. Sie postuliert Versagen bzw. Abgleiten an einer Schnittfläche, wenn der Betrag der Schubspannungen einen linear mit der Normalspannung zusammenhängenden bzw. experimentell ermittelten Wert überschreitet. Eine weitere bekannte Versagensbedingung ist die DRUCKER-PRAGER Hypothese, die zusätzlich zur Gestaltsänderungsenergie einen hydrostatischen Anteil berücksichtigt. Beide sind Zweiparametermodelle und können bereits nicht mehr direkt in der Form (2.62) angegeben werden. Während Hypothesen für das Einsetzen spröden Versagens oder plastischen Fließens spannungsbasiert formuliert werden, lässt sich der duktile Bruch nach ausgeprägtem plastischen Fließen durch dehnungsbasierte Versagenskriterien beschreiben. Dabei ist beispielsweise die JOHNSON-COOK Hypothese zu erwähnen, die durch Formulierung einer Bruchdehnung mit dem Verhältnis zwischen hydrostatischen und deviatorischen Anteilen die zum duktilen Bruch typische Hohlraum- bzw. Porenbildung und -vereinigung berücksichtigt. Umfangreichere Ausführungen sowie einen Überblick über Versagenshypothesen finden sich beispielsweise bei Gross u. Seelig (2011) und Altenbach et al. (2014).

2.5 Grundlagen der Bruchmechanik

Die klassische Bruchmechanik befasst sich mit der Analyse von Rissen und deren Ausbreitung. Als Riss wird dabei aus makroskopischer Sichtweise ein Schnitt in einem Körper bezeichnet. Im folgenden Kapitel werden in kurzer Form die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen der linear-elastischen und elastisch-plastischen Bruchmechanik vorgestellt. Insbesondere die linear-elastische Bruchmechanik hat für diese Arbeit eine besondere Bedeutung, da sie mit den klassischen Festigkeitshypothesen die Grundlage der finiten Bruchmechanik darstellt. Detaillierte Ausführungen zur Bruchmechanik finden sich beispielsweise bei Broberg (1999), Anderson (2005) und Gross u. Seelig (2011).

Zunächst werden hinsichtlich der Deformationen eines Risses drei verschiedene Rissöffnungsarten unterschieden, vgl. Abbildung 2.4. Modus I bezeichnet eine symmetrische Rissöffnung normal zu den Rissufer. Als Modus II und Modus III sind Rissuferverschiebungen tangential in der Ebene benannt, die sich jeweils normal und tangential zur Rissfront ausbilden. Treten mehrere Rissöffnungsmoden kombiniert auf, nennt man die zugehörige Belastung Mixed-Mode-Beanspruchung.

Die Region unmittelbar an der Rissfront, in der die eigentliche Bindungslösung stattfindet, bezeichnet man als Prozesszone. Ist die Prozesszone im Vergleich zu den restlichen charakteristischen makroskopischen Abmessungen klein, ist eine Kontinuumsmechanische Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Körpers zulässig.

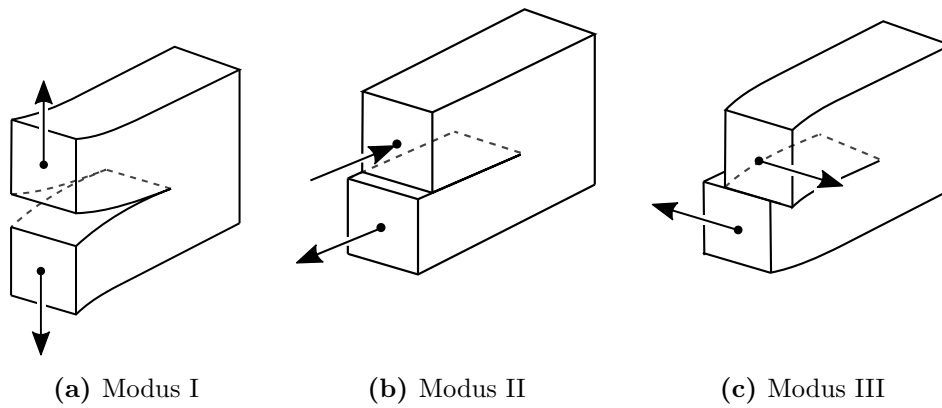


Abbildung 2.4: Rissöffnungsarten.

2.5.1 Linear-elastische Bruchmechanik

Die linear-elastische Bruchmechanik betrachtet Risse in Körpern, die sich durch isotropes linear-elastisches Materialverhalten auszeichnen. Inelastische Vorgänge werden vernachlässigt. Dies umfasst sowohl die Vorgänge in der Prozesszone als auch den unmittelbaren Bereich um die Risspitze, in der typischerweise Plastifizierung auftritt. Die Annahme, dass die plastische Zone im Vergleich zum elastischen Bereich vernachlässigbar ist, bezeichnet man oftmals als Kleinbereichsfließen. Die linear-elastische Bruchmechanik eignet sich daher vorrangig zur Beschreibung spröden Versagens.

Eine besondere Bedeutung kommt den Spannungen und Deformationen in der unmittelbaren Umgebung der Risspitze, dem sogenannten Rissspitzenfeld, zu. Für einen Riss in einem unendlich ausgedehntem, zweidimensionalen Körper mit homogenem, isotropem Material lässt sich das Rissspitzenfeld bezüglich eines Polarkoordinatensystems (r, φ) mit Ursprung in der Risspitze mittels asymptotischer Methoden wie folgt angeben

$$\begin{aligned} u_i - u_{i0} &= r^{1/2} \hat{u}_i^{(1)}(\varphi) + r \hat{u}_i^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \hat{u}_i^{(3)}(\varphi) \dots, \\ \sigma_{ij} &= r^{-1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\varphi) + \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(3)}(\varphi) \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

Dabei beschreiben u_{i0} Starrkörperbewegungen und $\hat{\sigma}_{ij}^{(1)}, \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}, \dots$ sowie $\hat{u}_i^{(1)}, \hat{u}_i^{(2)}, \dots$ jeweils Funktionen des Winkels φ , die bis auf einen Faktor bestimmt sind. In der unmittelbaren Umgebung der Risspitze, d.h. für $r \rightarrow 0$, dominiert der singuläre Term des Spannungsfeldes. Zur Einordnung des singulären Verhaltens dient die sogenannte Singularitätsordnung. Sie entspricht dem Exponenten des Verschiebungsfeldes, der kleiner als eins ist und somit zu singulären Spannungen führt. Demnach liegt für den Riss in einem homogenen, isotropen Körper eine Singularitätsordnung von $1/2$ vor, sodass die Spannungen ein Abklingverhalten der Ordnung $1/\sqrt{r}$ aufweisen. Zweckmäßigerweise unterteilt man die Rissspitzenfelder in symmetrische und antisymmetrische Anteile, die jeweils einer Modus I- bzw. Modus II-Rissöffnung zugeordnet werden können. Der symmetrische Anteil der

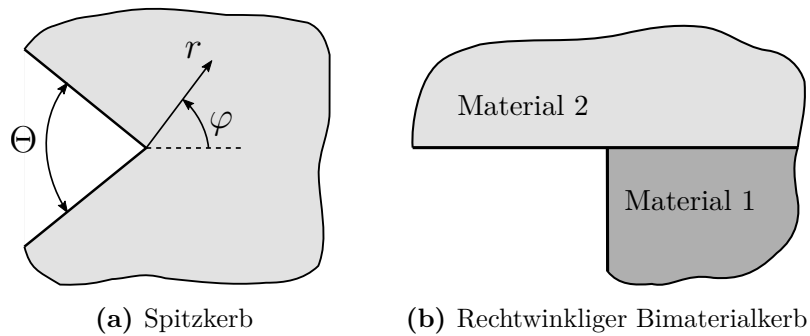


Abbildung 2.5: Kerbgeometrien.

Spannungen (Modus I) lässt sich wie folgt angeben

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) \begin{bmatrix} 1 - \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2) \\ 1 + \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \cos(3\varphi/2) \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Der Spannungsintensitätsfaktor K_I stellt ein Maß für die Belastung des Rissspitzenbereichs dar und hängt sowohl von der globalen Geometrie als auch von der Belastung ab. Für den antisymmetrischen Anteil des Spannungsfeldes lässt sich analog ein Spannungsintensitätsfaktor K_{II} einführen. Für viele spezifische Situationen existieren geschlossen-analytische oder numerisch ermittelte Lösungen der Spannungsintensitätsfaktoren⁸, die in Spannungsintensitätsfaktorhandbüchern wie z.B. Tada et al. (2000) zu finden sind.

Neben der Situation des Risses gibt es in der linearen Elastizitätstheorie Probleme, bei denen singuläre Spannungen mit einer von $1/2$ abweichenden Singularitätsordnung auftreten. Eine wichtige Klasse von Problemen sind Spitzkerben ohne Rundungsradius im Kerbgrund, siehe Abbildung 2.5. Mittels asymptotischer Analyse lassen sich folgende Spannungs- und Verzerrungsnahfelder für den Kerbgrund herleiten:

$$\begin{aligned} u_i - u_{i0} &= r^{\lambda_1} \hat{u}_i^{(1)} + r^{\lambda_2} \hat{u}_i^{(1)} + \dots, \\ \sigma_{ij} &= r^{\lambda_1-1} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)} + r^{\lambda_2-1} \hat{\sigma}_{ij}^{(2)} + \dots. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Im Falle einer Spitzkerbe in einem homogenen Körper, vgl. Abbildung 2.5(a), sind λ_1 und λ_2 die zu Modus I und Modus II zugehörigen Singularitätsordnungen, die in Abhängigkeit vom Kerböffnungswinkel Θ zwischen $1/2$ und 1 variieren. Der Fall des Risses im homogenen Körper mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ ist als Spezialfall für $\Theta = 0$ enthalten. Im Intervall $0 \leq \Theta < 102,5^\circ$ treten sowohl für Modus I- als auch Modus II-Belastungen singuläre Spannungen auf. Ab einem Kerböffnungswinkel von $102,5^\circ$ sind die Spannungen lediglich bei einer Modus I-Belastung singulär.

Eine weitere für diese Arbeit bedeutsame Klasse von Problemen umfasst rechtwinklige Bimaterialkerben, vgl. Abbildung 2.5(b). Auch für diese Struktursituationen treten im Kerbgrund singuläre Spannungen auf (Bogy, 1971). Die Singularitätsordnungen

⁸Diese werden oftmals in der Literatur als K -Faktoren bezeichnet.

hängen neben der Anordnung der Materialsektionen und des Kerböffnungswinkels auch vom elastischen Kontrast, d.h. dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln der beiden Materialien ab. Analog zum Spitzkerb im homogenen Körper treten für $E_1/E_2 \leq 1$ Singularitätsordnungen zwischen $1/2$ und 1 auf, die man auch als schwache Singularitäten bezeichnet (Sator u. Becker, 2012). Weiterhin sei erwähnt, dass spezifische Problemstellungen existieren, bei denen Spannungssingularitäten auftreten, die stärker als die Rissspitzeningularität sind ($\lambda < 1/2$) (Sator, 2010, Mayland, 2012, Hell u. Becker, 2015). Diese Singularitäten werden oftmals als starke Singularitäten oder Hypersingularitäten bezeichnet. Unter der Forderung beschränkter Formänderungsenergie lässt sich zeigen, dass die Singularitätsordnung λ jedoch nie Werte unter 0 im 2D-Fall bzw. unter $-0,5$ im 3D-Fall annehmen kann.

Neben den Rissspitzenahfeldern kommt der Energiebilanz bei einem Rissfortschritt eine zentrale Bedeutung zu. Zur näheren Untersuchung der Energieänderungen bei Rissfortschritt betrachtet man einen zweidimensionalen, rissbehafteten, elastischen Körper mit Einheitstiefe, auf dessen Rand äußere Lasten bzw. Verschiebungen vorgegeben sind. Mit Hilfe der Energiebilanz (2.30) und der Voraussetzung, dass die äußeren Lasten ein Potential besitzen, lässt sich zeigen, dass infolge eines Rissfortschritts um die Länge Δa , die mechanische Energie des Systems Π abnimmt. Die so freigesetzte Energie $-\Delta\Pi$ ist für den Bruchprozess verfügbar. Bezieht man die freigesetzte Energie auf den Rissfortschritt Δa und vollzieht den Übergang zu infinitesimalen Größen, erhält man die differentielle Energiefreisetzungsrate

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\frac{\Delta\Pi}{\Delta a} = -\frac{d\Pi}{da}. \quad (2.68)$$

Im linear-elastischen Fall existiert ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Energiefreisetzungsrate und den zuvor eingeführten Spannungsintensitätsfaktoren. Die zugehörige Herleitung erfolgt über sogenannte virtuelle Rissschließintegrale, die die Arbeit eines virtuellen, quasistatischen Schließens eines Risses darstellen. Detaillierte Ausführungen findet man beispielsweise bei Gross u. Seelig (2011). Für den allgemeinen Fall einer Mixed-Mode-Belastung lässt sich folgender Zusammenhang für die Energiefreisetzungsrate pro Einheitslänge finden:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.69)$$

mit

$$E^* = \begin{cases} E & \text{im ESZ} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (2.70)$$

Zur Bewertung von Rissen wurden verschiedenste Kriterien postuliert. Der bekannteste Ansatz basiert auf der Energiebilanz bei Rissfortschritt und wurde erstmals von Griffith (1921) verwendet. Mit Hilfe der zuvor eingeführten Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} lässt sich das sogenannte GRIFFITHSche Bruchkriterium wie folgt angeben:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c. \quad (2.71)$$

Demnach tritt Risswachstum auf, wenn die Energiefreisetzungsrate einen kritischen Wert, den sogenannten Risswiderstand oder auch die Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c , erreicht bzw. wenn die durch das Einsetzen und den Verlauf des Rissfortschritts freigesetzte Energie der zum Bruchprozess benötigten Energie entspricht. Die zum Bruchprozess benötigte Energie umfasst dabei sowohl die Energie zur Schaffung neuer Oberflächen sowie die dissipierte Energie infolge inelastischer Deformationen in der Prozesszone. Eine ausführliche Darstellung der Energiebilanz und den zugrundeliegenden Ideen finden sich in der Arbeit von Gross u. Seelig (2011).

Neben der Energiefreisetzungsrate erlauben auch die Spannungsintensitätsfaktoren die Formulierung eines Bruchkriteriums. Grundannahme beim sogenannten K -Konzept ist, dass die Zustände an der Rissspitze eindeutig durch die Spannungsintensitätsfaktoren charakterisiert werden. Erste Arbeiten zur Formulierung eines solchen Bruchkriteriums mittels Spannungsintensitäten gehen auf Irwin (1957) zurück. Dabei wird für reine Modenbelastung Versagen postuliert, wenn die zugehörigen Spannungsintensitätsfaktoren kritische Werte annehmen:

$$K_{\text{I}} = K_{\text{Ic}}, \quad K_{\text{II}} = K_{\text{IIc}}, \quad K_{\text{III}} = K_{\text{IIIc}} \quad (2.72)$$

wobei die Größen K_{Ic} , K_{IIc} und K_{IIIc} ebenfalls als Bruchzähigkeiten bezeichnet werden. Das Kriterium (2.72) wird in der Literatur oftmals als IRWINSches Bruchkriterium eingeführt und ist bis heute in der praktischen Anwendung fest etabliert.

Im Falle einer Mixed-Mode-Belastung muss ein Kriterium formuliert werden, das die Interaktion der einzelnen Moden berücksichtigt. Allgemein lässt sich ein solches Kriterium im Kontext des K -Konzepts schreiben als

$$f(K_{\text{I}}, K_{\text{II}}, K_{\text{III}}) = K_c. \quad (2.73)$$

2.5.2 Elastisch-plastische Bruchmechanik

Die elastisch-plastische Bruchmechanik beschäftigt sich mit Rissen in duktilen Materialien, bei denen sich unter Belastung eine nicht wegzudenkende plastische Zone um die Rissspitze bildet. Infolgedessen stumpft die Rissspitze bei steigender Belastung ab und der plastische Bereich wächst an. Bei einer bestimmten kritischen Belastung setzt letztlich die Initiierung des Rissfortschritts ein.

Zwei Konzepte zur Charakterisierung des Rissspitzenfeldes haben sich zur Bewertung von Versagensvorgängen in der elastisch-plastischen Bruchmechanik etabliert. Das Konzept der kritischen Rissspitzenöffnung ist zunächst weitestgehend experimentell motiviert. Es basiert auf der Idee, dass die Rissspitzenöffnung⁹ ein Maß für die Charakterisierung der Rissspitze ist und postuliert Versagen, wenn diese einen kritischen Wert erreicht. Das alternative Konzept basierend auf dem J -Integral ist für diese Arbeit von besonderer Bedeutung. Das J -Integral kann im Rahmen der Deformationstheorie der Plastizität als Spannungs- bzw. Verformungsintensitätsfaktor des Rissspitzenfeldes in einem elastisch-plastischem Material interpretiert werden. In diesem Kontext wird Versagen postuliert, wenn das J -Integral einen kritischen Wert erreicht.

⁹Engl.: Crack Tip Opening Displacement, CTOD

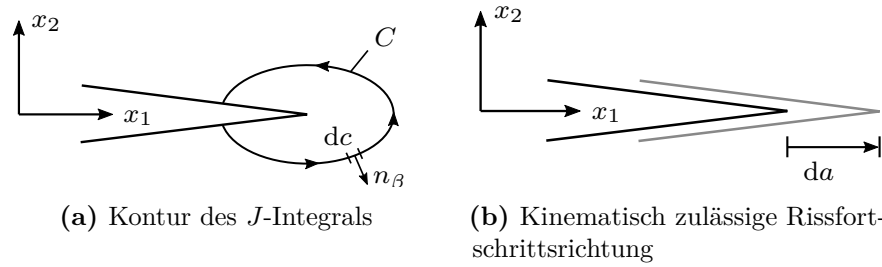


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung der Kontur des J -Integrals (a) und der kinematisch zulässigen Rissfortschrittsrichtung (b) bei der Anwendung des J -Integrals auf einen Riss

Aufgrund der einfacheren Berechnung des Integrals und experimentellen Bestimmung der versagenskritischen Parameter soll im Folgenden auf das J -Integral eingegangen werden. Betrachtet man einen zweidimensionalen Körper aus homogenem, elastischem Material mit der Formänderungsenergiegedichte $U(\varepsilon_{ij})$ unter vernachlässigbaren Volumenkräften, so ergibt sich zunächst der J -Vektor als Konturintegral längs einer geschlossenen Kurve C zu

$$J_\alpha = \int_C (U\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{i\beta}u_{i,\alpha}) n_\beta dc \quad (2.74)$$

wobei die griechischen Indizes α und β die Werte 1 und 2 durchlaufen. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes lässt sich leicht zeigen, dass für jede beliebige Kontur C , die ein defektfreies Material ohne Singularitäten und Diskontinuitäten des Integranden einschließt, $J_k = 0$ gilt¹⁰. Andernfalls, wie beispielsweise beim Vorhandensein eines Risses, nimmt J_k im Allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert an. Wendet man den J -Integral-Vektor auf einen Riss mit belastungsfreien Rissufern in einem zweidimensionalen homogenen, elastischen Körper an, lassen sich J_1 und J_2 als Energieänderung des Systems bei Verschiebung des Risses in die jeweilige x_1 - bzw. x_2 -Richtung interpretieren¹¹. Dabei ist die Kontur C gemäß Abbildung 2.6(a) so zu wählen, dass sie an den jeweiligen Rissufern startet bzw. endet und die Rissspitze umschließt. Da lediglich eine Verschiebung da in x_1 -Richtung, vgl. Abbildung 2.6(b), eine kinematisch zulässige Rissfortschrittsrichtung darstellt, kommt insbesondere J_1 als Bruchparameter eine wichtige Bedeutung zu. Das zugehörige Konturintegral, das man schlussendlich als J -Integral bezeichnet, lässt sich schreiben als

$$J = J_1 = \int_C (Udx_2 - t_i u_{i,1} dc). \quad (2.75)$$

Durch geeignete Wahl der Kontur C lässt sich zeigen, dass das Integral (2.75) sowohl für linear-elastisches als auch elastisch-plastisches Materialverhalten beschrieben durch die Deformationstheorie wegunabhängig ist (Gross u. Seelig, 2011).

Da das J -Integral die Energieänderung des Systems infolge einer translatorischen Verschiebung der Rissspitze darstellt, entspricht J im Falle eines Risses in einem linear-

¹⁰Aufgrund dieser Eigenschaft bezeichnet man das Integral (2.74) als Erhaltungsintegral.

¹¹In diesem Kontext wird J_k oftmals als auf den Riss wirkende Kraft aufgefasst und als Konfigurationskraft bzw. verallgemeinerte oder materielle Kraft bezeichnet. Detaillierte Ausführungen finden sich dazu bei Gross u. Seelig (2011).

elastischen Körper der Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} . Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Integrals (2.75) kann das J -Integral daher besonders vorteilhaft in der linear-elastischen Bruchmechanik zur Berechnung der Energiefreisetzungsrate genutzt werden. Der Integrationsweg C wird dabei hinreichend weit entfernt von der Risspitze gewählt, sodass die genaue, aufwendige Bestimmung des Rissspitzenfeldes entfällt. Im Kontext der elastisch-plastischen Bruchmechanik entspricht das J -Integral jedoch nicht mehr einer Energiefreisetzungsrate im klassischen Sinne, d.h. einer potentiellen Energie, die bei Rissfortschritt freigesetzt wird. Ein nicht zu vernachlässigbarer Anteil der Verzerrungsenergie wird infolge Plastifizierung dissipiert¹², sodass bei Rissfortschritt bzw. Entlastung nur anteilig die gespeicherte Verzerrungsenergie wieder freigesetzt wird.

Nichtsdestotrotz bietet sich das J -Integral zur Formulierung eines Bruchkriteriums an. Bereits vor 50 Jahren zeigten Hutchinson (1968), Rice u. Rosengren (1968) unabhängig voneinander, dass das J -Integral das Rissspitzenfeld in einem nichtlinear-elastischen Material charakterisiert. Betrachtet man eine kreisförmige Kontur C um die Risspitze eines Risses, parametrisiert in Polarkoordinaten (r, φ) , in einem elastisch-plastischem Material, beschrieben durch die Deformationstheorie, ergibt sich für das J -Integral

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (Un_1 - \sigma_{i\beta}u_{i,1}n_\beta)rd\varphi. \quad (2.76)$$

Infolge der Wegunabhängigkeit muss der Integrand des Integrals (2.76) unabhängig von r sein, d.h. der Klammerausdruck muss ein $1/r$ -Verhalten für $r \rightarrow 0$ aufweisen. Setzt man das Potenzgesetz nach RAMBERG-OSGOOD¹³ als Approximationsansatz für das konstitutive Verhalten des nichtlinear-elastischen Materials an, erhält man nach einigen Umformungen das Rissspitzenfeld eines Risses in einem elastisch-plastischen Material¹⁴:

$$\begin{aligned} u_i - u_{i0} &= \alpha\varepsilon_0r \left(\frac{J}{I\alpha\varepsilon_0\sigma_0r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{u}_i(\varphi), \\ \sigma_{ij} &= \alpha\sigma_0 \left(\frac{J}{I\alpha\varepsilon_0\sigma_0r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\varphi). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Dabei sind $\alpha, \varepsilon_0, \sigma_0$ und n Parameter des RAMBERG-OSGOOD Potenzgesetzes, I eine dimensionslose Konstante und $\tilde{u}_i(\varphi)$ sowie $\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi)$ Funktionen des Winkels φ . Gleichung (2.77) wird unter Verwendung der Anfangsbuchstaben von Hutchinson (1968), Rice u. Rosengren (1968) HRR-Feld genannt¹⁵. Der Fall $n = 1$ entspricht linear-elastischem Materialverhalten und liefert nach Gleichung (2.77) die aus der linear-elastischen Bruchmechanik bekannte $1/\sqrt{r}$ -Singularität für das Spannungsfeld. Aus Gleichung (2.77)

¹²Bei Rissfortschritt hinterlässt ein Riss in einem elastisch-plastischen Material einen sogenannten plastischen Nachlauf (Engl.: plastic wake), induziert durch die plastische Zone, die sich an der Risspitze einstellt.

¹³Ein Potenzgesetz der Form: $\varepsilon/\varepsilon_0 = \sigma/\sigma_0 + \alpha(\sigma/\sigma_0)^n$. Für hinreichend kleine α stellen jeweils σ_0, ε_0 und n die Feldgrößen bei Fließbeginn und einen Verfestigungsexponent dar.

¹⁴Eine ausführlichere Herleitung des HRR-Feldes (2.77) findet man bei Anderson (2005) und Gross u. Seelig (2011).

¹⁵Die HRR-Lösung stellt die stärkste Singularität der elastisch-plastischen Nahfeldlösung dar und entspricht somit einer Theorie 1. Ordnung.

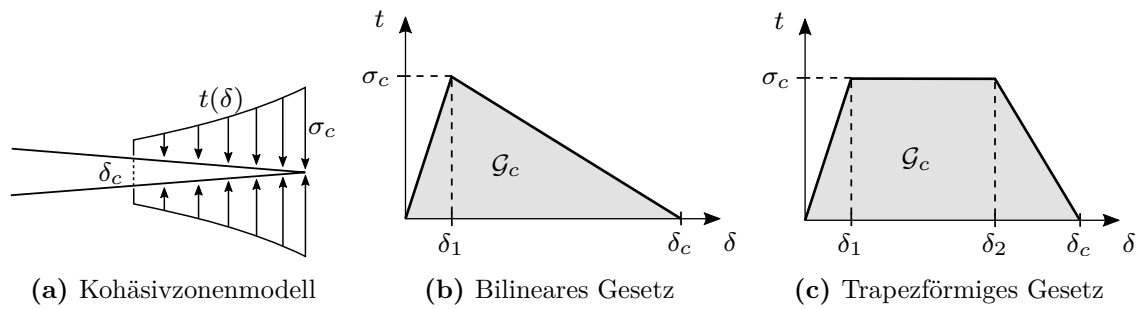


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung des Kohäsivzonenmodells (a) und der bilinearen (b) und trapezförmigen (c) Kohäsivgesetze.

wird direkt ersichtlich, dass das J -Integral analog zum Spannungsintensitätsfaktor im Rahmen des K -Konzepts die Stärke bzw. Intensität des Rissspitzenfeldes charakterisiert. Demnach lässt sich folgendes Bruchkriterium formulieren: Erreicht das J -Integral einen materialspezifischen kritischen Wert, die Bruchzähigkeit J_c , kommt es zum Einsetzen von Risswachstum:

$$J = J_c. \quad (2.78)$$

Im Falle linear-elastischen Materialverhaltens ist das Bruchkriterium (2.78) gleichwertig zum GRIFFITHSchen Bruchkriterium (2.71). Weiter sei darauf hingewiesen, dass durch das Kriterium (2.78) lediglich die Initiierung eines Risses an der abgestumpften Risspitze beschrieben werden kann. Bei darauffolgendem Rissfortschritt treten Entlastungsvorgänge auf, die nicht mit der Deformationstheorie der Plastizität korrekt beschrieben werden können. Daher ist die direkte Anwendung des Kriteriums (2.78) zunächst auf stationäre Risse beschränkt.

Schließlich seien zwei einfache jedoch wichtige Modellierungsansätze duktilen Versagens erwähnt, die die plastische Zone als streifenförmig ausgedehnten Bereich modellieren. Der zunächst intuitivste Ansatz ist dabei das sogenannte Dugdale-Modell (Dugdale, 1960). Es berücksichtigt ideal-plastisches Materialverhalten und die plastische Zone als sogenannten Fließstreifen. Die zunächst elastisch-plastische Aufgabe reduziert sich damit auf das elastische Problem eines Risses, dessen Rissuferbelastung gerade der Fließspannung entspricht. Beide zuvor genannten Konzepte zur Formulierung eines Versagenskriteriums lassen sich auf das Dugdale-Modell anwenden und führen meist zu hinreichend befriedigenden Lösungen. Bei den erstmals von Barenblatt (1959) vorgeschlagenen Kohäsivzonenmodellen wird ebenfalls ein streifenförmiger Modellierungsansatz genutzt. Die Prozesszone wird als Kohäsivzone angesehen, in der eine Separation δ der potentiellen Rissflanken möglich ist. Zwischen den potentiellen Rissflanken wirken Kohäsionsspannungen t , die abhängig von der Separation δ mittels eines Kohäsivgesetzes $t(\delta)$ bestimmt sind, vgl. Abbildung 2.7(a). Das Kohäsivgesetz beschreibt das lokale Verhalten der Kohäsivzone mittels eines Spannungs-Separationsgesetzes und wird je nach Material und Versagensvorgang gewählt. Durch diesen allgemeinen Ansatz lassen sich verschiedenartige Bruchvorgänge darstellen. Zur Beschreibung spröden und duktilen Versagens wurden beispielsweise bilineare bzw. trapezförmige Spannungs-Separationsgesetze vorgeschlagen (Abbildung 2.7(b) und 2.7(c)). Dabei entspricht die

spezifische Separationsarbeit der Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c und ist letztlich durch das Integral des Kohäsivgesetzes gegeben:

$$\mathcal{G}_c = \int_0^{\delta_c} t(\delta) d\delta, \quad (2.79)$$

wobei δ_c die kritische Separation der Rissflanken ist. Im günstigsten Fall reduziert sich die Anzahl der freien Parameter auf zwei. Diese lassen sich beispielsweise im Falle des bilinearen Gesetzes aus der experimentell ermittelbaren Bruchfestigkeit σ_c und spezifischen Separationsarbeit \mathcal{G}_c bestimmen. Im Falle des perfekten Sprödbruchs eines linear-elastischen Körpers ist die Kohäsivzonenmodellierung dem K -Konzept und dem GRIFFITHSchen Bruchkriterium gleichwertig. Eine genaue Herleitung des Zusammenhangs findet man beispielsweise bei Gross u. Seelig (2011). Kohäsivzonenmodelle eignen sich vorrangig zur numerischen Behandlung von bruchmechanischen Problemen mittels der Finiten-Elemente Methode. Dabei werden Kohäsivzonenelemente verschwindender Dicke eingesetzt, deren Verhalten durch ein Kohäsivgesetz beschrieben wird.

2.6 Finite Bruchmechanik

Die finite Bruchmechanik ist im Vergleich zur klassischen Bruchmechanik erst wenige Jahre alt und somit nur selten in Lehr- und Fachbüchern zu finden. Dabei schließt sie eine nicht wenig umstrittene Lücke zwischen den zuvor vorgestellten Feldern der klassischen Festigkeitsmechanik und der linear-elastischen Bruchmechanik. Die Probleme der bisher vorgestellten Werkzeuge zur Versagensbewertung und der Bedarf nach neuen Konzepten werden an der Betrachtung von Struktursituationen offenbar, die schwache Spannungssingularitäten aufweisen. Als technisch relevante Struktursituationen sind hierbei insbesondere konstruktiv bedingte Spitzkerben und Multimaterialpunkte, wie sie beispielsweise in Klebverbindungen oder an freien Rändern von Laminaten vorkommen¹⁶, zu nennen. Eine direkte Auswertung klassischer Festigkeitskriterien versagt, da nach den Festigkeitshypothesen aufgrund des singulären Charakters des Spannungsfeldes beliebig kleine Lasten zu Versagen führen. Betrachtet man einen infinitesimalen Riss an einer schwachen Spannungssingularität, so erhält man eine verschwindende differentielle Energiefreisetzungsrates (Leguillon, 1999). Nach der linear-elastischen Bruchmechanik kommt es daher selbst bei beliebig hohen Lasten nicht zu Versagen. Diese Diskrepanz beider Theorien wird erst durch die Einführung der finiten Bruchmechanik befriedigend aufgelöst.

Zunächst wurden zur Bewältigung der aufgeführten Probleme Modifikationen der klassischen Bewertungskonzepte vorgeschlagen. Diese ziehen entweder Spannungen gemittelt über eine bestimmte Distanz bzw. ausgewertet in einer bestimmten Entfernung zur Spannungssingularität zur Bewertung heran oder betrachten zur Anwendung der linear-elastischen Bruchmechanik fiktive Risse in der Struktur. Erstere sind als Theorie

¹⁶Das Auftreten einer charakteristischen dreidimensionalen Spannungsverteilung an Laminaträndern bzw. -ecken infolge sprunghafter Steifigkeitsänderungen zwischen den einzelnen Schichten wird auch als Laminatrand- bzw. -eckeneffekt bezeichnet.

kritischer Distanzen¹⁷ in dem Buch von Taylor (2007) zusammengefasst dargestellt und finden bis heute in der industriellen Praxis breite Anwendung. Konzepte, die fiktive Risse oder bereits vorhandene Defekte in der Struktur betrachten, findet man in der Literatur oftmals unter dem Namen: Methode imaginärer Risse (Waddoups et al., 1971, El Haddad et al., 1980) oder inhärenter Defekte (Leblond u. Mouro, 1999, 2000a,b)¹⁸. In all diesen Ansätzen wird ein zusätzlicher Längenparameter eingeführt, für den kein physikalischer Zusammenhang zu den betrachteten Material- bzw. Strukturparametern angegeben werden kann. Für jede Struktursituation muss der entsprechende Längenparameter zunächst experimentell ermittelt werden.

Der Weg zur finiten Bruchmechanik wurde von Hashin (1996) bereitet, als er die Mikrorissbildung in Laminaten als diskrete Bruchvorgänge modellierte. Grundlegend war dabei die Annahme einer spontanen Rissbildung kinematisch zulässiger Risse endlicher Länge. Dem Gedanken von Hashin (1996) folgend schlug Leguillon (2002) zur Modellierung diskreter Bruchvorgänge ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium vor. Dabei wird die instantane Entstehung eines Risses endlicher Größe ΔA vorhergesagt, wenn ein Spannungs- und ein Energiekriterium gleichzeitig erfüllt sind. Das Spannungskriterium fordert, dass im ungerissenen Zustand die Festigkeitshypothese über die gesamte Fläche Ω_c des betrachteten finiten Risses erfüllt ist:

$$\sigma_V(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta A). \quad (2.80)$$

Gleichzeitig muss ein Energiekriterium für die Initiierung des finiten Risses erfüllt sein. In Anlehnung an die differentielle Energiefreisetzungsrates (2.68) wird zunächst eine inkrementelle Energiefreisetzungsrates

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta \Pi}{\Delta A} \quad (2.81)$$

eingeführt, die explizit die Größe ΔA des finiten Risses berücksichtigt. Im Folgenden sollen vorrangig ebene Probleme behandelt werden, für die $\Delta A = b\Delta a$ gilt, wobei b die Tiefe der Struktur darstellt. Alternativ zu Gleichung (2.81) lässt sich die inkrementelle Energiefreisetzungsrates auch mittels Integration der differentiellen Energiefreisetzungsrates über die Risslänge Δa bestimmen

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \mathcal{G}(\tilde{a}) d\tilde{a}. \quad (2.82)$$

Analog zum GRIFFITHSchen Bruchkriterium lässt sich mit der eingeführten inkrementellen Energiefreisetzungsrates ein Bruchkriterium für die Initiierung eines finiten Risses der Länge Δa formulieren:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.83)$$

Beide Kriterien (2.80) und (2.83) bilden gemeinsam das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium

$$\sigma_V(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c, \quad (2.84)$$

¹⁷Engl.: Theory of critical distances.

¹⁸Engl.: Imaginary crack or inherent flaw methods.

und müssen nach Leguillon (2002) für die Entstehung eines Risses finiter Länge gleichzeitig erfüllt sein. Dabei wird Gleichung (2.84) in der Literatur auch als hybrides Kriterium bezeichnet (Hebel et al., 2010, Gross u. Seelig, 2011, Sun et al., 2015).

Cornetti et al. (2006) schlugen eine alternative Formulierung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums vor, bei der statt eines punktuellen ein über die Risslänge gemitteltes Spannungskriterium ausgewertet wird:

$$\frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_V(\sigma_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})) d\tilde{\mathbf{x}} \geq \sigma_c \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.85)$$

Unabhängig von der konkreten Formulierung des Spannungskriteriums existieren zwei Unbekannte in der Formulierung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums: die finite Risslänge und die äußere Belastung bei Rissinitiierung. Die Auswertung des gekoppelten Kriteriums erfordert daher die Lösung eines zunächst nichtlinearen restringierten Optimierungsproblems. Ist die äußere Belastung durch einen skalaren Parameter F beschreibbar, lässt sich die Bruchlast F_f als kleinste Last, die das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium unter der Bedingung kinematisch möglicher Risskonfigurationen erfüllt, definieren. Im allgemeinsten Fall ergibt sich folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} F_f &= \min_{F, \Delta a} F \\ \text{u.d.B.} \quad & \sigma_V(\sigma_{ij}(\mathbf{x}, F)) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a), \\ & \bar{\mathcal{G}}(\Delta a, F) \geq \mathcal{G}_c. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Zeigen die Spannungen und die inkrementelle Energiefreisetzungsrates in der unmittelbaren Umgebung der Spannungskonzentration ein monotonen Verhalten, vereinfacht sich das Optimierungsproblem.¹⁹ Die Ungleichungen reduzieren sich zu Gleichungen. In diesem Fall stellt das Spannungskriterium aufgrund der monoton fallenden Spannungen eine obere und das Energiekriterium infolge der monoton steigenden Energiefreisetzungsrates eine untere Grenze für die zulässige Risslänge dar. Die zugehörige kritische Bruchlast ist genau dann gefunden, wenn die obere und die untere Schranke der Risslänge gerade übereinstimmen. Eine besonders effiziente Auswertung ist möglich, wenn zusätzlich die Spannungen linear und die Energiefreisetzungsrates quadratisch von der äußeren Belastung abhängen. Dann lassen sich die Gleichungen entkoppeln und die Risslänge Δa direkt aus der impliziten Gleichung

$$\frac{\sigma_V^2(\sigma_{ij}(\mathbf{x}))}{\bar{\mathcal{G}}(\Delta a)} = \frac{\sigma_c^2}{\mathcal{G}_c} \quad (2.87)$$

bestimmen. Ein Einsetzen der ermittelten Risslänge in eines der beiden Teilkriterien des gekoppelten Kriteriums liefert schließlich die Bruchlast F_f .

Neben der erfolgreichen Anwendung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums auf Struktursituationen mit singulären Spannungskonzentrationen wie beispielsweise

¹⁹Geometrien, bei denen dies der Fall ist, nennt man nach Bazant u. Planas (1997) positive Geometrien. Eine Untersuchung negativer Geometrien und deren Auswirkungen auf die Auswertung des gekoppelten Kriteriums findet man bei Weißgraeber et al. (2016b).

Spitzkerben in den ursprünglichen Arbeiten von Leguillon (2002) und Cornetti et al. (2006) oder der Betrachtung des Laminatrandeffekts (Hebel et al., 2010, Martin et al., 2010) wurden auch Probleme mit nichtsingulären Spannungskonzentrationen untersucht. Exemplarisch seien hier die Arbeiten über Rissinitiierung in gelochten Laminaten erwähnt. Die symmetrische Initiierung finiter Risse in gelochten quasi-isotropen Laminaten²⁰ unter uniaxialer Zugbelastung wurde sowohl mit numerischen als auch analytischen Modellierungen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums von Li u. Zhang (2006), Hebel u. Becker (2008), Martin et al. (2012) und Camanho et al. (2012) untersucht. Die Ergebnisse zeigten eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten und die korrekte Abbildung des Lochgrößeneffekts²¹. Rissinitiierung an elliptischen Löchern in Laminaten wurde mittels eines neu eingeführten Spannungsintensitätsfaktors von Weißgraeber et al. (2016a) und mittels asymptotischer semi-analytischer Methoden von Felger et al. (2017a) studiert. Dabei wurden in der Arbeit von Felger et al. (2017a) auch beliebig geschichtete Laminaten untersucht, die in Experimenten eine symmetrische Rissinitiierung bei uniaxialer Last aufzeigten. Eine asymmetrische Rissinitiierung unter Mixed-Mode-Belastung wie sie beispielsweise bei einer Laminateneinzelschicht mit einer zur Last gedrehten Faserausrichtung auftritt, wurde mittels asymptotischer und numerischer Modellierung von Felger et al. (2017b) bzw. Andersons et al. (2010) und Modniks et al. (2014) untersucht. Des Weiteren wurde von Rosendahl et al. (2017) bei der Untersuchung gelochter Scheiben unter kombinierter Biege- und Zugbelastung gezeigt, dass sich das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium vorteilhaft zur Untersuchung von Risskonfigurationen mit mehreren Rissen anwenden lässt. Abhängig vom Verhältnis der beiden Belastungsarten wurden verschiedene Risskonfigurationen am Lochrand ermittelt. Die Bruchbilder und zugehörigen Versagenslasten zeigten eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen numerischer Simulationen des Bruchvorgangs mittels Kohäsivzonenmodellierung. Einen umfangreichen Überblick über die bisherigen Anwendungen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums auf singuläre und nichtsinguläre Spannungskonzentrationen sowie eine kurze Abhandlung zur Entstehung und Entwicklung des Kriteriums finden sich in der Übersichtsarbeit von Weißgraeber et al. (2016c).

Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik erlaubt für verschiedenste Struktursituationen mit nichtsingulären und singulären Spannungskonzentrationen eine physikalisch basierte Bewertung der effektiven Festigkeit ohne zusätzliche Einführung eines Längenparameters. Analytische, semi-analytische sowie numerische Umsetzungen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums haben sich als erfolgreich erwiesen. Dabei wurden Größeneffekte und Versagenslasten sowie zugehörige Rissbilder mit guter Übereinstimmung zu experimentellen Daten abgebildet.

²⁰Als quasi-isotrop bezeichnet man Laminaten, deren Dehnsteifigkeitsmatrix A_{ij} isotropen Charakter hat, d.h. für die $A_{11} = A_{22}, A_{16} = A_{26} = 0$ sowie $A_{66} = (A_{11} - A_{12})/2$ gilt.

²¹Als Lochgrößeneffekt wird die zunächst experimentell beobachtete Abhängigkeit der effektiven Festigkeit einer gelochten Struktur vom Durchmesser des Loches bezeichnet.

Kapitel 3

Zum Stand der Forschung von Klebverbindungen

*„Man braucht nichts im (K)leben zu fürchten, man muss nur alles verstehen“
Marie Curie, polnische Physikerin*

Das folgende Kapitel bietet einen Überblick über den Stand der Forschung des mechanischen Verhaltens von Klebverbindungen mit besonderem Fokus auf Überlappungsfügungen. Nach allgemeinen Betrachtungen zu Klebverbindungen werden mögliche Versagensarten diskutiert, der Einfluss der Klebschichtdicke erörtert und konstruktive Verbesserungen von Klebverbindungen vorgestellt. Es folgt eine Übersicht und Diskussion über analytische und semi-analytische Modelle zur Spannungsanalyse. Abschließend werden die gängigsten Modelle zur Versagensbewertung von Klebverbindungen vorgestellt.

3.1 Allgemeine Betrachtungen

Der Ingenieurin und dem Ingenieur liegen heutzutage verschiedenste Techniken zur Fügung von Bauteilen vor. Neben den klassischen Verbindungstechniken wie Bolzen- oder Schweißverbindungen haben sich insbesondere im Leichtbau Klebverbindungen als vorteilhaft erwiesen. Der Klebschicht bzw. dem Klebstoff, gemäß DIN EN 923 (2015) „ein nichtmetallischer Stoff, der Füge­teile durch Flächenhaftung und innere Festigkeit verbinden kann“, kommt dabei eine zentrale Rolle zu: die Kraftübertragung zwischen den einzelnen Strukturelementen. Im Leichtbau werden Klebverbindungen besonders aufgrund ihrer vorteilhaften Anwendung beim Fügen dünnwandiger, flächiger Bauteile geschätzt. Unterschiedliche Werkstoffe sind ffügbar und tragende Querschnitte werden nicht wie bei Bolzenverbindungen reduziert, sodass die damit verbundene Kerbwirkung entfällt. Die thermische Gefügebeeinflussung und die zugehörige Füge­teilverformung, wie sie typischerweise bei Schweißverbindungen auftreten, entfallen aufgrund der geringen Wärmezufuhr beim Aushärten der Klebstoffe. Allerdings existieren auch einige Nachteile, deren sich die Ingenieurin und der Ingenieur bewusst sein müssen. Für Klebverbindungen unter hohen mechanischen Beanspruchungen und Alterungseinflüssen ist eine sorgfältige und aufwändige Oberflächenvorbehandlung der Füge­teile erforderlich. Die Überwachung der Klebqualität erfolgt in den meisten Fällen mittels zerstörender Prüfverfahren mit Proben gleichen Materials, Abmessungen und Fertigungsbedingungen. Zerstörungsfreie Prüfverfahren sind bis heute aktueller Gegenstand der Forschung. Schließlich sind bei der Auslegung von Klebverbindungen die engen Temperaturgrenzen und Alterungseinflüsse mit einzubeziehen.

Aus der Sichtweise der konstruierenden Ingenieurin und des konstruierenden Ingenieurs lassen sich Klebstoffe zunächst weit gefasst in Strukturklebstoffe, elastische Klebstoffe und Dichtstoffe einteilen (Schürmann, 2007). Sie unterscheiden sich sowohl in der Festigkeit als auch in der Steifigkeit und der Bruchdehnung. Während Strukturklebstoffe hohe Festigkeiten und Steifigkeiten bei kleinen Bruchdehnungen aufweisen (in den meisten Fällen Schubsteifigkeiten $G > 10$ MPa und Bruchdehnungen bis $\varepsilon_c = 0,7$), sind elastische Klebstoffe und insbesondere Dichtstoffe durch vergleichsweise kleine Festigkeiten und Steifigkeiten sowie hohe Bruchdehnungen charakterisiert. Die folgenden Ausführungen fokussieren sich auf die für den strukturellen Einsatz wichtigen Strukturklebstoffe. Sie sind vorrangig auf die Anforderungen im Luft- und Raumfahrtbereich eingestellt und zeichnen sich durch ein geringes Verformungsvermögen aus. Dabei kommen meist Klebstoffe auf Epoxid-²² oder Phenolharzbasis²³ mit dünnen Klebschichtdicken im Bereich von 0,1 bis 0,5 mm zum Einsatz (Habenicht, 2006). Detailliertere Klassifizierungen von Klebstoffen nach beispielsweise der chemischen Basis der Klebstoffe oder des Aushärtemechanismus finden sich bei Habenicht (2006) und Brockmann et al. (2009).

Abhängig von der Struktursituation und Belastung der Fügung empfiehlt es sich verschiedene geometrische Fügekonfigurationen in Betracht zu ziehen. Grundlegend gilt, dass Spannungen normal zur Klebschicht zu vermeiden sind, da Schubbelastungen bei Klebstoffen weniger versagenskritisch sind (Adams et al., 1997). Erstere werden im Folgenden als Schälspannungen bezeichnet. Dickwandige Strukturen werden daher meist über abgestufte oder geschäftete Klebungen verbunden, die allerdings je nach Material und Abmessungen der Füge­teile erheblichen Fertigungsaufwand erfordern. Für dünnwandige Strukturen sind überlappende Klebverbindungen die primär zu wählende Klasse von Konfigurationen, vgl. Abbildung 3.1. Ihr Aufbau ist vergleichsweise einfach, der Fertigungsaufwand gering und das Tragverhalten günstig. Sie werden auch als Standardkonfigurationen in genormten Testversuchen (DIN EN 1464, 2010, DIN EN 1465, 2009) und wissenschaftlichen Untersuchungen von Klebverbindungen genutzt.

Das mechanische Verformungsverhalten und die Versagensvorgänge bei überlappenden Klebverbindungen sind trotz ihres vergleichsweise simplen Aufbaus höchst komplex. Die Betrachtung der effektiven Festigkeit von Klebverbindungen ist mittels klassischer Festigkeitsnachweise nicht direkt möglich, da ein Verbundsystem statt eines homogenen Werkstoffes vorliegt. An den Bimaterialpunkten zwischen Füge­teilen und Klebschicht treten nach Abschnitt 2.5.1 Spannungssingularitäten und in der Klebschicht aufgrund des komplexen Verformungsverhaltens meist nicht zu vernachlässigende Schub- und Normalspannungen auf. Im Falle axial belasteter einschnittiger Überlappungsfügungen treten aufgrund der Exzentrizität der Last darüber hinaus große Biegedeformationen

²²Das erste Epoxidharzklebstoffsystem zur Fügung von Metallen wurde von Eduard Preiswerk 1944 entwickelt. Historisch eng verbunden ist der Klebstoffname ARALDIT erstmals von der CIBA AG (mittlererweile Huntsman Cooperation) 1945 auf den Markt gebracht.

²³Der große Durchbruch bei der Entwicklung von Phenolharzklebstoffen durch DE BRUYNE gelang vor knapp 75 Jahren. Der erste Klebstoff dieser Art ging in die Klebtechnik mit dem Namen REDUX (Research at Duxford (dem Ursprungsort)) ein. Seit den 1950er Jahren werden Phenolharzklebstoffe in großen Umfang ohne Langzeitprobleme im Flugzeugbau eingesetzt (Bishopp, 1997, Brockmann et al., 2009).

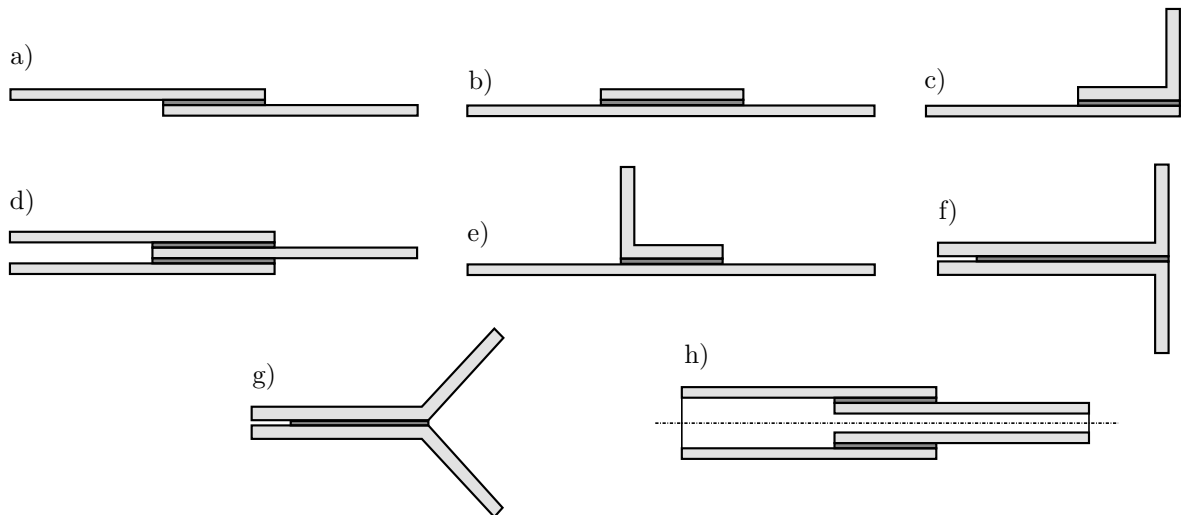


Abbildung 3.1: Beispiele überlappender Klebverbindungen: a) Einschnittige Überlappungsfügung b) Verstärkungspflaster c) L-Fügung d) Zweischnittige Überlappungsfügung e) T-Fügung f) Schälfügung g) Geneigte Schälfügung h) Rohrüberlappungsfügung.

der Füge­teile auf, die letztlich zu einem geometrisch nichtlinearen Tragverhalten führen. Die vorliegende Arbeit befasst sich daher eingehend mit den mechanischen Grundlagen zur Auslegung von Strukturklebungen: der Analyse der Lastübertragung und der Versagensbewertung überlappender Klebverbindungen.

3.1.1 Versagensarten von Klebverbindungen

Versagen kann bei überlappenden Klebverbindungen in verschiedenster Art und Weise auftreten, vgl. Abbildung 3.2 zur Übersicht. Zunächst unterscheidet man zwischen dem Versagen der verklebten Füge­teile und der Klebschicht. Füge­teilversagen tritt insbesondere bei der Verwendung hochfester Klebstoffe zum Fügen niedrigfester Füge­teile auf. Bei unter Biegung belasteten dünnen Füge­teilen kommt es häufig zum Biegeversagen, d.h. der Ausbildung eines plastischen Fließstreifens. In den Untersuchungen von Grant et al. (2009a) und Karachalios et al. (2013a) trat dieses charakteristische Versagensverhalten bei unter Zug belasteten einschnittigen Überlappungsfügungen zwischen dünnen Baustahlplatten auf. Infolge der Exzentrizität der Last ergaben sich am Rand der Überlappung hohe Biegemomente, die letztlich zum Versagen führten. Biegeversagen

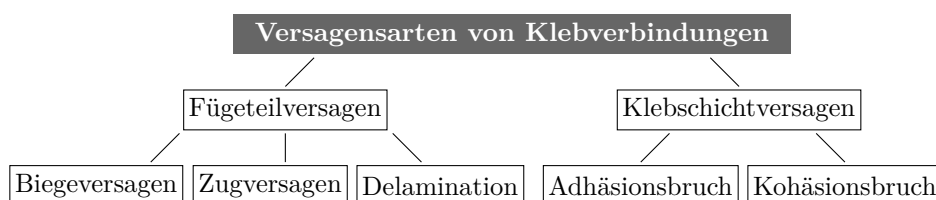


Abbildung 3.2: Übersicht der möglichen Versagensarten von Klebverbindungen.

tritt ebenso als primäre Versagensart in der Grundplatte von T-Fügungen aus dünnen Metallplatten auf (da Silva u. Adams, 2002). Neben dem Versagen infolge Biegung kann Zugversagen im Füge­teil auftreten. Diese Versagensart infolge Zugbelastung ist charakteristisch für besonders niedrigfeste Füge­teile. Bei Klebverbindungen zwischen Laminaten tritt beim Einsatz hochfester Klebstoffe hingegen primär Delamination auf. Dies ist zurückzuführen auf die Spannungskonzentrationen am Ende des Überlappungsbereiches und den damit verbundenen hohen interlamina­ren Spannungen zwischen benachbarten Lamineinzelschichten bei geringer Festigkeit in Dickenrichtung (Banea u. da Silva, 2009, Budhe et al., 2017). Die Delamination der zur Klebschicht nächsten Schicht ist daher ein charakteristisches Versagensbild.

Beim Klebschichtversagen unterscheidet man zunächst adhäsives und kohäsives Versagen²⁴. Rein adhäsives Versagen liegt vor, wenn sich Klebschicht und Füge­teile trennen, sodass weder auf dem Füge­teil Klebschichtreste noch an der Klebschicht Füge­teilreste vorhanden sind. Kohäsives Versagen hingegen bezeichnet das Trennen der Fügung innerhalb der Klebschicht (Adams et al., 1997). Klebschichtversagen kann darüber hinaus als spröder oder duktiler Bruch charakterisiert werden. Beim Sprödbbruch erfolgt das Versagen mit vernachlässigbar kleinen bzw. keinen inelastischen Deformationen und einer vergleichsweise hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dies tritt insbesondere bei Klebstoffen aus hochvernetzten Polymeren wie beispielsweise Phenolharzen auf. Zeigt der Klebstoff eine gewisse Verformbarkeit durch beispielsweise Beigabe eines Weichmachers²⁵, neigt die Klebverbindung zum Versagen infolge eines zähen (duktilen) Bruchs. Dem eigentlichen Bruch geht eine inelastische Verformung der Klebschicht voraus, sodass die mechanische Beanspruchung zunächst über eine Verformungsarbeit abgebaut werden kann. Dies betrifft insbesondere die nach Abschnitt 2.5.1 auftretenden Spannungskonzentrationen am Rand der Überlappung. Ob das Klebschichtversagen einer Klebverbindung letztlich infolge eines spröden oder duktilen Bruchs auftritt, hängt sowohl von den Materialeigenschaften als auch der Beanspruchung, d.h. dem lokal herrschenden Spannungszustand, sowie der Geometrie der Fügung ab. Um die maximal mögliche Versagenslast zu erreichen, ist bei der Auswahl der Materialien und der Geometrie der Fügung zunächst kohäsives Versagen das Ziel. Dabei ist zur Vermeidung eines Adhäsionsbruchs neben der gewissenhaften Auswahl der Fügekonfiguration eine sorgfältige Vorbehandlung der Füge­teile erforderlich (Wegman u. Van Twisk, 2012).

3.1.2 Klebschichtdickeneffekt

Die Klebschichtdicke hat bei überlappenden Klebfügungen einen entscheidenden Einfluss auf das Versagensverhalten. Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass

²⁴Nach DIN EN 10365 (1995) wird adhäsives Versagen sogar weiter unterteilt in Adhäsionsbruch an (i) einem Füge­teil oder (ii) beiden Füge­teilen. Kohäsives Versagen wird weiter untergliedert in (i) Kohäsionsbruch und (ii) speziellen substratnahen Kohäsionsbruch. Darüber hinaus ist es möglich, dass ein Mischbruch auftritt.

²⁵Man nennt die zugehörigen Klebstoffe daraufhin zähelastische Klebstoffe (Engl.: toughened adhesives). Eine Weichmachung kann durch Hinzugabe flexibler, langkettiger Reaktionskomponenten oder kautschukelastischer Partikel in den Klebstoff erfolgen (Habenicht, 2006).

insbesondere bei einschnittigen Überlappungsfügungen mit zunehmender Klebschichtdicke die Versagenslast abnimmt (Adams et al., 1997, da Silva et al., 2006a, 2008, Castagnetti et al., 2011). Dabei liegt die optimale Klebschichtdicke für die meisten strukturellen Klebstoffe zwischen 0,1 und 0,2 mm (Gleich et al., 2001, Habenicht, 2006). Dieser Größeneffekt steht zunächst im Widerspruch zu den Erkenntnissen aus einfachen Spannungsanalysen, die abnehmende Spannungsniveaus bei steigender Klebschichtdicke vorhersagen (Adams et al., 1997). Bis heute ist der Klebschichtdickeneffekt aktueller Gegenstand der Forschung. Ein erster Erklärungsversuch von Adams u. Peppiatt (1974) begründet den Größeneffekt mit der größeren Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Defekten und Mikrorissen infolge der größeren Klebschichtdicke.²⁶ Dieses Phänomen sollte demnach bei allen Überlappungsfügungen auftreten. Allerdings wurde bei einigen Konfigurationen keine direkte Abhängigkeit der Versagenslast von der Klebschichtdicke festgestellt. Dazu gehören unter anderem einschnittige Überlappungsfügungen unter Biegung (Grant et al., 2009a), T-Fügungen (Grant et al., 2009b) sowie sogenannte Umschlingungsfügungen²⁷ (Grant et al., 2009c). Crocombe (1989) erklärt den Klebschichtdickeneffekt mit einem Kriterium, das Versagen bei vollständiger Plastifizierung der Klebschicht vorhersagt. In Experimenten (beispielsweise da Silva et al. (2006a)) ist jedoch der Klebschichtdickeneffekt auch bei spröden Klebstoffen ohne maßgebliche Plastifizierung erkennbar. Des Weiteren wird der Größeneffekt durch die erhöhte Querkontraktionsbehinderung (Habenicht, 2006) sowie der Zunahme der Grenzschichtspannungen (Gleich et al., 2001) bei kleiner werdenden Klebschichtdicken begründet. Ein erst kürzlich vorgeschlagenes, elegantes und physikalisch basiertes Konzept zeigt auf, dass zum Erfassen des Klebschichtdickeneffekts sowohl die Spannungen als auch die Energiebilanz bei Rissinitiierung betrachtet werden müssen. Wie bereits diskutiert nehmen die Spannungen mit zunehmender Klebschichtdicke ab (Adams et al., 1997, da Silva et al., 2009b), da eine gleichmäßigere Lastübertragung erfolgen kann. Allerdings steigt die Energiefreisetzungsrates eines Risses mit der Klebschichtdicke an, da in der dickeren Klebschicht mehr Formänderungsenergie gespeichert ist. Bezieht man beide Aspekte in ein Kriterium ein, kann der Einfluss der Klebschichtdicke auch bei sprödem Versagen von Klebverbindungen adäquat beschrieben werden. Mittels analytischer (Weißgraber u. Becker, 2011b, 2013) sowie numerischer Modellierung (Hell et al., 2014) des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums (vgl. Abschnitt 2.6) konnte der Einfluss der Klebschichtdicke auf die Versagenslasten von einschnittigen Überlappungsfügungen korrekt abgebildet werden.

3.1.3 Konstruktive Verbesserungen von Klebverbindungen

Neben einer günstigen Wahl der geometrischen Parameter wie Klebschichtdicke, Überlappungslänge oder Fügeteildicke können sich spezifische Ausführungen der Klebverbindung als vorteilhaft erweisen. Beim Fügen mit Anpressdruck wird häufig Klebstoff aus dem Überlappungsbereich herausgedrückt, sodass eine Klebkehle²⁸ entsteht. Diese ermöglicht

²⁶Eine analoge Begründung erklärt im Kontext von Faserkunststoffverbunden die erhöhte Faserfestigkeit im Vergleich zum Werkstoff in kompakter Form und ist als stochastischer Größeneffekt bekannt (Schürmann, 2007).

²⁷Engl.: clinch bzw. hemflange joints

²⁸Engl.: adhesive fillet

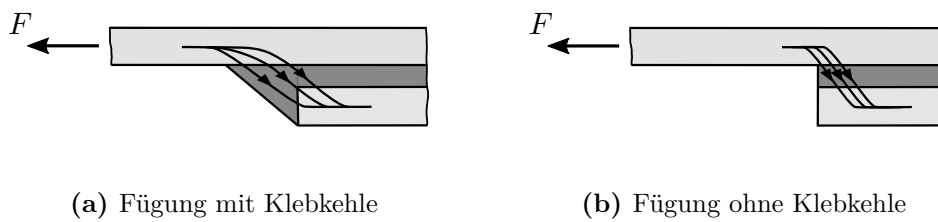


Abbildung 3.3: Vergrößerter Ausschnitt einer auf Zug (Normalkraft F) belasteten einschnittigen Überlappungsfügung mit Klebkehle (a) und ohne Klebkehle (b). Pfeile repräsentieren schematisch den konzentrierten Kraftfluss im Bereich des Überlappungsendes

einen gleichmäßigeren Kraftfluss, vgl. Abbildung 3.3, und wirkt sich festigkeitssteigernd auf die Klebverbindung aus (Adams et al., 1997, da Silva et al., 2012). Adams u. Peppiatt (1974) untersuchten numerisch einschnittige Überlappungsfügungen mit einer 45° Klebkehle und erhielten eine Reduktion der Spannungsspitzen von über 40% im Vergleich zu Fügungen ohne Klebkehlen. Ähnliche Ergebnisse zeigten sich in umfangreichen numerischen Studien von Crocombe u. Adams (1981a), Tsai u. Morton (1995) sowie Lang u. Mallick (1998). Infolge der Klebkehlen entfallen die rechtwinkligen einspringenden Ecken, sodass sich die größte Spannungskonzentration an der Ecke des Fügeteils im Inneren der Klebschicht befindet. Adams u. Harris (1987) zeigten experimentell an einschnittig überlappend gefügten Aluminiumblechen, dass Klebkehlen eine Steigerung der Versagenslast von bis zu 50% bewirken können. In den meisten Untersuchungen werden dennoch Überlappungsfügungen mit rechtwinkligen Klebfugen betrachtet. Dies ist die einfachste experimentell zu reproduzierende Konfiguration, stellt den kritischsten Fall dar und liefert somit konservative Abschätzungen der Versagenslasten und Spannungsfelder.

Eine weitere Möglichkeit der Reduktion von Spannungsspitzen besteht in einer keilförmigen Ausführung der Fügeteile²⁹. Am Ende des Überlappungsbereiches wird dadurch die Fügeteilhöhe reduziert bzw. die Klebschichtdicke erhöht, sodass lokal die Nachgiebigkeit ansteigt und das Spannungsniveau sinkt. Der Einfluss keilförmig ausgeführter Fügeteile in Kombination mit Klebkehlen wurde an zweischnittigen Überlappungsfügungen von Adams et al. (1986), Potter et al. (2001), Guild et al. (2001) und da Silva u. Adams (2007) untersucht. Bei einem Vergleich verschiedener Geometrien stellte sich heraus, dass Klebverbindungen mit Klebkehlen und innenseitig keilförmig ausgeführten Fügeteilen das geringste Spannungsniveau am Rand der Überlappung und die größten Versagenslasten aufweisen. Alternativ lassen sich bei Überlappungsfügungen mit Klebkehlen die Fügeteilecken, an denen die größten Spannungskonzentrationen vorliegen, abrunden. Entsprechende numerische und experimentelle Untersuchungen an einschnittigen Überlappungsfügungen wurden von Adams u. Harris (1987) und Zhao et al. (2011a,b) durchgeführt. Sie zeigten, dass sich durch eine Abrundung der Fügeteilecken die Tragfähigkeit von Fügungen mit spröden Klebstoffen um bis zu 40% steigern lässt. Des Weiteren wurden Formoptimierungen der Fügeteil- sowie Klebkehlengeometrie untersucht (Rispler et al., 2000, Belingardi et al., 2002), um die entsprechenden

²⁹Sie werden als angeschrägte Fügeteile (Engl.: tapered adherends) bezeichnet.

Versagenslasten zu maximieren. Allerdings hat sich gezeigt, dass komplexe Geometrie-
anpassungen von Klebverbindungen in vielen praktischen Fällen nicht direkt umsetzbar
sind oder einen zu großen Fertigungsaufwand benötigen.

Neben geometrischen Veränderungen der Fügung haben sich Kombinations- oder Gradi-
entenklebungen als vorteilhaft erwiesen. Sie basieren auf der erstmals von Raphael (1965)
vorgeschlagenen Idee³⁰, am Rande der Überlappung die Steifigkeit des Klebstoffes und
damit die Spannungen zu senken und in der Mitte der Überlappung die Steifigkeit zu
erhöhen. Der mittlere Bereich der Überlappung wird dadurch stärker zur Lastaufnahme
herangezogen, sodass man eine gezielte Spannungsumlagerung erhält. Die intuitivste
Umsetzung ist die Kombination zweier Klebstoffe: einen duktilen am Rand und einen
spröden Klebstoff in der Mitte der Überlappung. Diese Idee blieb lange unbeachtet und
wurde erst mit dem Aufkommen von Gradientenmaterialien³¹ zur Jahrtausendwende
wieder aufgenommen und umgesetzt. Zunächst gab es zahlreiche experimentelle Unter-
suchungen zu Kombinationsklebungen (Pires et al., 2003, Fitton u. Broughton, 2005,
Marques u. da Silva, 2008, da Silva u. Lopes, 2009, Vallée et al., 2010), die im Ver-
gleich zu Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen eine signifikante Verbesserung der
Tragfähigkeit zeigten. Allerdings ergaben sich einige Probleme beim Einsatz mehrerer
Klebstoffe in einer Klebfuge aufgrund der verschiedenen Aushärtemechanismen und
der klaren Separierung der einzelnen Werkstoffe. Das Ziel einer Spannungsreduktion
am Rand der Überlappung wurde erreicht. Allerdings traten erhöhte Spannungskon-
zentrationen an den Multimaterialübergängen der einzelnen Klebstoffe auf. Daraus
folgte, dass der Steifigkeitsverlauf vom Rand zur Mitte der Überlappung idealerweise
kontinuierlich umgesetzt werden sollte.³² Sancaktar u. Kumar (2000) gelang erstmals
eine experimentelle Umsetzung einer kontinuierlichen Variation der Klebstoffsteifig-
keit entlang des Überlappungsbereiches durch lokales Einstreuen von Gummipartikeln.
Stapleton et al. (2012) erzeugten Gradientenklebstoffe in ähnlicher Art und Weise durch
Hinzugabe von Glasperlen in unterschiedlicher Konzentration entlang der Überlap-
pfung. Eine elegantere Umsetzung entwickelten Carbas et al. (2014a,b). Sie erzeugten
einen kontinuierlichen Steifigkeitsverlauf des Klebstoffes durch lokal variierende Aus-
härtetemperaturen mittels Induktionserwärmung. Heutzutage ist es mittels neuartiger
Produktionsmethoden wie beispielsweise dem 3D-Drucken möglich, beliebige Steifig-
keitsverläufe durch gezieltes Drucken verschiedenartiger Polymere in unterschiedlichen
Volumenanteilen zu erzeugen. Eine entsprechend erfolgreiche Studie haben Kumar et al.
(2016) vorgestellt. In allen experimentellen Untersuchungen ergaben sich erhebliche Stei-
gerungen der effektiven Festigkeit der Klebungen im Vergleich zum Einsatz homogener
Klebstoffe.

³⁰Sie entstand im Rahmen eines Projektes zu geklebten Raketentriebwerksgehäusen in Auftrag der
Republic Aviation Corporation in Farningdale, USA.

³¹Engl.: functionally graded materials

³²Klebstoffe mit kontinuierlichem Steifigkeitsverlauf werden als Gradientenklebstoffe (Engl.: functionally
graded adhesives) bezeichnet.

3.2 Spannungsanalyse von Überlappungsfügungen

Der erste Schritt zur Bewertung von Klebverbindungen beinhaltet eine detaillierte Spannungsanalyse insbesondere mit Hinblick auf die in der Klebschicht auftretenden Spannungen. Neben numerischen Zugängen zur Strukturanalyse haben sich bis heute klassische analytische und semi-analytische Näherungslösungen zur Spannungsanalyse bewährt. Solche Lösungen existieren bereits seit fast 80 Jahren, sodass eine Vielzahl an Modellen in der Literatur zu finden ist. Dabei werden für die Füge­teile und Klebschicht vereinfachende kinematische Annahmen getroffen, um kompakte und effiziente Lösungen zu erhalten. Im Folgenden soll eine Übersicht über die wichtigsten Arbeiten und Zusammenhänge gegeben werden.

3.2.1 Linear-elastisches Materialverhalten

Die meisten vorgeschlagenen analytischen Modelle basieren auf der Grundannahme, dass sich Füge­teile und Klebschicht durch linear-elastisches Materialverhalten beschreiben lassen. Dies trifft insbesondere für spröde Klebstoffe bis hin zum Versagen zu. In diesem Falle ist es oftmals möglich, geschlossen-analytische Lösungen herzuleiten.

Zunächst seien zwei richtungsweisende Arbeiten zur Analyse einschnittiger Überlappungsfügungen erwähnt, die die Basis der meisten nachfolgenden Modelle bilden. Volkersen (1938) schlug das älteste Modell zur Ermittlung der Spannungen in der Klebschicht vor.³³ In seinem Modell sind die Füge­teile als dehnsteife Stäbe und die Klebschicht als eine Reihe elastischer Schubfedern modelliert, sodass lediglich die Schubspannungsverteilung längs der Überlappung vorhergesagt werden kann.³⁴ Die zweite bahnbrechende Arbeit veröffentlichten Goland u. Reissner (1944). In ihrem Modell werden die Füge­teile als Balken und die Klebschicht als Kontinuum bestehend aus elastischen Federn, die sowohl Schub- als auch Schälspannungen aufnehmen können, betrachtet. Die nichtlinearen Biegedeformationen der äußeren Füge­teilmereiche werden durch die Berücksichtigung von Biegemomenten und Querkraften am Rand der Überlappung mit einbezogen. Den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den zusätzlich berücksichtigten Schnittgrößen und den angreifenden Kräften erfolgt mittels eines Biegemomentenfaktors. Beide Modelle bilden die Klebschicht als ein vereinfachtes Kontinuum bestehend aus einer unendlichen Ansammlung von Federn ab. Dabei wird zwar in Längsrichtung jedoch nicht in Dickenrichtung eine Variation der Feldgrößen berücksichtigt. Die zugehörigen kinematischen Annahmen und das zugrunde liegende Konstitutivgesetz lassen sich auch rigoros durch asymptotische Methoden herleiten (Klarbring u. Movchan, 1998, Geymonat et al., 1999, Benveniste u. Miloh, 2001).³⁵ Ein solcher Ansatz ist auch bei der

³³In der Originalarbeit, erschienen als Bericht der Ernst-Heinkel-Flugzeugwerke in Rostock, ging es um die Verteilung der Nietkräfte einer Nietreihe. Der Modellierungsansatz der Nieten als einheitliches Kontinuum wurde jedoch später für Klebungen verwendet.

³⁴In der englischsprachigen Literatur wird daher das Modell auch als *shear-lag* Modell bezeichnet.

³⁵Dazu betrachtet man eine dünne Schicht zwischen zwei elastischen Medien. Eine asymptotische Analyse bezüglich eines dimensionslosen Parameters abhängig von der Klebschichtdicke unter der Annahme signifikant kleinerer elastischer Konstanten der Klebschicht im Vergleich zu den Füge­teilen

3.2 Spannungsanalyse von Überlappungsfügungen

Modellierung der Grenzschicht zwischen Faser und Matrix in Faserverbundstrukturen gängig (Mantič et al., 2015, Távora et al., 2016). Die dünne Schicht wird dabei als *weak* (Lenci, 2001), *soft* (Benveniste u. Miloh, 2001) oder *imperfect* (Hashin, 2002) *interface* bezeichnet. Diese Modellierung liefert bei der Analyse von Klebverbindungen adäquate Näherungslösungen für hinreichend dünne Klebschichten im Vergleich zu den sonstigen Abmessungen.

Aufbauend auf diesen beiden einfachen Modellen wurden viele Erweiterungen vorgeschlagen. De Bruyne (1944) und Hart-Smith (1973a) entwickelten basierend auf dem Modell von Volkersen (1938) Näherungslösungen für zweiseitige und Hart-Smith (1973b) für geschäftete und gestufte Klebfügungen. Des Weiteren wurde von Hart-Smith (1973c) eine alternative Formulierung des Biegemomentenfaktors von Goland u. Reissner (1944) vorgeschlagen.³⁶ Chen u. Cheng (1983) und Zhao et al. (2010) erweiterten diesen auf Fügungen mit ungleichen Fügeteilen und Talmon l'Armée et al. (2016) auf verklebte Mehrschichtverbunde mit Biegedehnkopplung. Ojalvo u. Eidinoff (1978) entwickelten ein erweitertes Federmodell der Klebschicht mit linearer Variation der Schälspannungen über die Klebschichtdicke. Tsai et al. (1998) sowie Srinivas (1975) modellierten und untersuchten eingehend den Einfluss der Schubdeformationen der Fügeteile auf die Klebschichtspannungen in ein- sowie zweiseitigen Überlappungsfügungen. Srinivas (1975) entwickelte dabei ein komplexes umfassendes Modell, das auch keilförmig ausgeführte und ungleiche Fügeteile berücksichtigte. Allerdings wird in seiner Modellierung eine zusätzliche numerische Lösung benötigt. Die Berücksichtigung von Schubdeformationen kann im Besonderen bei der Betrachtung von verklebten Faserkunststoffverbunden von Bedeutung sein. Die ältesten Modelle, die Lamine als Fügeteile in der Analyse berücksichtigen, wurden von Wah (1973) sowie Renton u. Vinson (1975a,b) vorgeschlagen. Allerdings beschränken sich diese Analysen auf symmetrische Konfigurationen. Erweiterungen auf verklebte Lamine mit asymmetrischen Aufbauten beschrieben durch klassische Laminattheorie und Schubdeformationstheorie 1. Ordnung wurden jeweils von Mortensen u. Thomsen (1997, 2002)³⁷ sowie Yang u. Pang (1996) entwickelt.

Eine Erweiterung des klassischen Modells von Goland u. Reissner (1944) auf beliebige Überlappungskonfigurationen wurde von Bigwood u. Crocombe (1989) vorgeschlagen. Dabei wird nur der Überlappungsbereich der Klebverbindung mit beliebigen Schnittgrößen an den Rändern der Fügeteile betrachtet, siehe Abbildung 3.4. Dieser in der Literatur als *general sandwich-type*-Modell bezeichneter Ansatz ermöglicht die Analyse verschiedenster Variationen von Fügungen, die durch eine einfache Überlappung charakterisiert sind. Dies umfasst beispielsweise einschnittige Überlappungsfügungen, L-Fügungen, T-Fügungen, Schäl-fügungen sowie Verstärkungspflaster (vgl. Abbildung 3.1). Eine Erweiterung des vorgeschlagenen Modells von Bigwood u. Crocombe (1989) auf verklebte Lamine mit symmetrischem Lagenaufbau wurde von Liu et al. (2014) entwickelt.

liefert schließlich die Kinematik und das Konstitutivgesetz als Terme 1. Ordnung.

³⁶Die Arbeiten von Hart-Smith (1973a,b,c) wurden als Berichte des PABST (Primary Adhesively Bonded Structure Technology) Programms im Auftrag der USAF Flight Dynamics Laboratory publiziert.

³⁷Die Modelle von Mortensen u. Thomsen (1997, 2002) findet man auch im Softwarepaket ESAComp zur Berechnung und Design von Laminaten und laminierten Strukturen wieder.

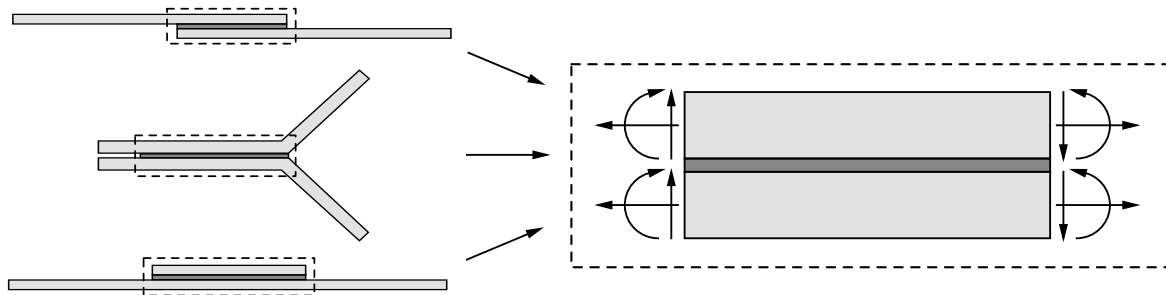


Abbildung 3.4: Modellierung der Überlappungsfügungen durch Betrachten des Überlappungsbereichs mit beliebigen Schnittgrößen am Rand.

Eine Problematik all dieser sogenannten *weak-interface*-Modelle ist, dass sie an den Rändern der Überlappung die Randbedingungen nicht exakt erfüllen. Bei den genannten analytischen Näherungslösungen nehmen die Schäl- und Schubspannungen am Rand endliche, erhöhte Werte an. In vergleichenden Finite-Elemente-Analysen ergeben sich zwar erhöhte Schubspannungen in der unmittelbaren Nähe zum Rand. Allerdings findet man verschwindende Schubspannungen am freien Rand der Klebschicht. Eine Möglichkeit spannungsfreie, freie Ränder abzubilden, bieten Modelle basierend auf Variationsprinzipien wie beispielsweise dem Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials. Die ersten Modelle dieser Art wurden für einschnittige Überlappungsfügungen von Pirvics (1974), Allman (1977) sowie Chen u. Cheng (1983) vorgeschlagen. Erwähnenswert ist dabei die Analyse von Frostig et al. (1999), in der zusätzlich eine Modellierung von Klebkehlen entwickelt wurde. Explizite Lösungen sind allerdings nur für spezielle Fälle herleitbar. Zur Lösung der Differentialgleichungen werden oftmals semi-analytische Verfahren verwendet, die beispielsweise die Fügung in eine Raumrichtung diskretisieren und analytische Funktionen in der verbleibenden Raumrichtung nutzen (Yousefsani u. Tahani, 2013, Weißgraeber, 2014). Für komplexere Geometrien sind allerdings numerische Verfahren zur Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichungen notwendig. Einen umfassenden Überblick über Näherungslösungen zur Spannungsanalyse mechanisch belasteter Klebungen findet man in den Artikeln von da Silva et al. (2009a,b) und Budhe et al. (2017) sowie dem Buch von da Silva et al. (2012).

Die Entwicklung analytischer Modelle überlappender Klebfügungen unter rein thermischer Last geschah zumeist getrennt aber nahezu parallel zu den zuvor genannten Arbeiten im Forschungsfeld der Elektronik, Optoelektronik und Photonik. In den zugehörigen Anwendungen haben mechanische gegenüber thermischen Lasten eine untergeordnete Rolle (Suhir, 2009). Die jeweiligen Pionierarbeiten von Timoshenko (1925) und Aleck (1949) basieren ebenfalls auf einer Modellierung der Klebschicht als verschmiertes Federkontinuum oder Variationsrechnung.³⁸ Dabei wurden insbesondere Erweiterungen hinsichtlich Schälspannungen (Chen u. Nelson, 1979), Variation der Spannungen über die Dicke (Suhir, 1986, 1989) sowie den spannungsfreien Rändern der Klebschicht (Wang u. Zeng, 2008) vorgeschlagen. Einen umfassenden Überblick findet man im Übersichtsartikel von Suhir (2009). Trotz der parallelen Modellentwicklung in verschiedenen Forschungsfeldern zeigen die jeweiligen Ansätze für Klebungen unter

³⁸In der Literatur bezeichnet man diese beiden Ansätze jeweils als *strength-of-materials* und *theory-of-elasticity approach*.

3.2 Spannungsanalyse von Überlappungsfügungen

mechanischer oder thermischer Last große Gemeinsamkeiten. Der Ansatz von Chen u. Nelson (1979) für Fügungen unter thermischer Last basiert beispielsweise auf den gleichen kinematischen Annahmen für Füge­teile und Klebschicht wie die Arbeiten von Volkersen (1938) und Goland u. Reissner (1944). Des Weiteren wurden Arbeiten für Klebfügungen unter kombinierter mechanischer und thermischer Last publiziert, die Ansätze beider Disziplinen vereinen (Wong u. Wong, 2008, Wong, 2015).

Mit dem Aufkommen neuer produktionstechnischer Methoden zur Umsetzung von Gradientenklebstoffen (vgl. Kapitel 3.1.3) ist der Bedarf an analytischen Methoden für Gradientenklebverbindungen erheblich gewachsen. Allerdings existieren aufgrund der Aktualität der Thematik nur wenige Ansätze. Raphael (1965) schlug zur Ermittlung der Spannungen in einschnittigen Überlappungsfügungen mit mehreren Klebstoffen eine Analyse basierend auf dem Modell von Volkersen (1938) vor. Das zuvor genannte Modell von Srinivas (1975) ermöglicht ebenfalls die Analyse von Kombinationsklebungen mit ungleichen Füge­teilen. Das Neves et al. (2009a,b) erweiterten das komplexe Modell von Frostig et al. (1999) hinsichtlich Kombinationsklebstoffen. Das erste Modell zur Analyse von Spannungen in Gradientenklebungen wurde von Kumar (2009) entwickelt. Es basiert auf dem Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie und ermöglicht die Analyse von axialsymmetrischen Roh­rüberlappungsfügungen mit als Polynom darstellbaren Steifigkeitsverläufen des Gradientenklebstoffs. Für diese spezielle Füge­konfiguration wurden einige Erweiterungen vorgeschlagen (Kumar u. Scanlan, 2010, 2013) sowie der optimale Steifigkeitsverlauf des Gradientenklebstoffes bei Torsionsbelastung untersucht (Spaggiari u. Dragoni, 2014). Für ebene Überlappungsfügungen schlugen Stapleton et al. (2012) einen *weak-interface*-Modellierungsansatz im Rahmen eines übergeordneten finiten Elements für Gradientenklebungen vor. Das Einbetten dieses Elements in eine Finite-Elemente-Analyse ermöglicht verschiedene Füge­konfigurationen effizient numerisch zu untersuchen. Eine klassische analytische Umsetzung der *weak-interface*-Modellierung entwickelten Carbas et al. (2014a). Basierend auf der Arbeit von Volkersen (1938) leiteten sie eine analytische Lösung für die Schubspannungen in symmetrischen einschnittigen Überlappungsfügungen her. In Zusammenarbeit mit J. Felger zeigte der Autor jedoch einige Fehler in der Modellierung auf und entwickelte ein verbessertes *shear-lag*-Modell für Fügungen mit ungleichen Füge­teilen (Stein et al., 2017b). Darüber hinaus gelang dem Autor zusammen mit H. Mardani ein *weak-interface*-Modell für einschnittige Gradientenüberlappungskle­bungen basierend auf den kinematischen Annahmen von Goland u. Reissner (1944) zu entwickeln. Dieses berücksichtigt sowohl Schub- als auch Schälspannungen in der Klebschicht und liefert gute Übereinstimmungen mit numerischen Referenzlösungen (Stein et al., 2016a). Aufgrund der Komplexität der Gleichungen sind jedoch die Lösungen der klassischen *weak-interface*-Modellierungen nur als Potenzreihe und nicht in expliziter Form darstellbar.

3.2.2 Elastisch-plastisches Materialverhalten

Eine Beschreibung des Materialverhaltens mittels linearer Elastizitätstheorie ist für spröde Klebstoffe hinreichend, da die Deformationen bis zum Versagen nahezu rein elastisch stattfinden. Allerdings zeigen einige zähelastische Klebstoffe schon unter

geringer Last inelastische Deformationen. Daher ist die Berücksichtigung elastisch-plastischen Materialverhaltens für eine präzise Spannungsanalyse in Klebungen mit duktilen Klebstoffen zwingend notwendig.

Die wenigen bisher vorgeschlagenen Ansätze basieren auf *weak-interface*-Modellierungen und lassen sich in zwei Kategorien einteilen: (1) Elastisch-perfekt plastische Ansätze (EPP) sowie (2) Modelle basierend auf der Deformationstheorie der Plastizität (DTP). Erstere unterteilen die Klebschicht in elastische und plastische Bereiche. Die plastischen Bereiche befinden sich an den Rändern der Überlappung, an denen Spannungskonzentrationen vorliegen. Die Bereiche werden zunächst separat behandelt. Eine stetige Lösung wird mittels Kontinuitätsbedingungen erzeugt. Der zweite Ansatz modelliert den Klebstoff mittels der Deformationstheorie der Plastizität, vgl. Kapitel 2.3. Infolge der einheitlichen Modellierung der Klebschicht entlang der gesamten Überlappung erhält man eine glatte Lösung der Feldgrößen.

Eines der ersten EPP-Modelle für ein- sowie zweischnittige Überlappungsfügungen schlugen Dickson et al. (1972) vor.³⁹ Im plastischen Bereich wird eine konstante VON MISES-Spannung vorgesehen und in der verbleibenden Region eine elastische Lösung implementiert. Die zugrunde liegenden Gleichungen werden mittels eines iterativen Verfahrens gelöst. Allerdings erfordern die Kontinuitätsbedingungen die numerische Integration der Spannungen. Die bekanntesten EPP-Ansätze für ein- und zweischnittige Überlappungs- sowie geschäftete und gestufte Klebfügungen sind in den Arbeiten von Hart-Smith (1973a,b,c) zu finden. Die Unterteilung in elastische und plastische Bereiche wird nur für die Schubspannungen durchgeführt. Die Schälspannungen verhalten sich linear-elastisch entlang der Überlappung. Die elastisch-perfekt plastische Spannungs-Dehnungskurve wird dabei so gewählt, dass die Fläche unter der Kurve identisch zur Fläche unter der realen Spannungs-Dehnungskurve ist. Pickett u. Hollaway (1985) erweiterten den Ansatz von Hart-Smith (1973a,b,c) auf verklebte Laminat. Grant u. Taig (1976) entwickelten einen EPP-Ansatz für einschnittige Überlappungsfügungen basierend auf der Arbeit von Volkersen (1938), der ebenfalls eine Unterteilung in elastische und plastische Bereiche nur für die Schubspannungen vorsieht.⁴⁰ Yang et al. (2004) untersuchten gemäß ASTM D3165 (2014) eine spezifische einschnittige Überlappungskonfiguration mit Laminaten als Fügeteilen und unterteilten in ihrem EPP-Ansatz den Überlappungsbereich sowie die äußeren Fügeteile in elastische und plastische Bereiche. Die Fügeteile wurden mittels Schubdeformationstheorie 1. Ordnung modelliert. Weitere feinere Unterteilungen der plastischen Bereiche wurden von Lee u. Kim (2007) berücksichtigt. Zwar ergeben sich glattere Spannungsverläufe infolge der weiteren Unterteilung, allerdings ergibt sich dadurch eine signifikant erhöhte Dimension der zu lösenden Differentialgleichungssysteme.

Im gleichen Jahr wie Dickson et al. (1972) schlugen Grimes et al. (1972) den ersten DTP-Ansatz für ein- und zweischnittige Überlappungs- sowie gestufte Klebfügungen vor. Als Approximation der Spannungs-Dehnungskurve wird ein RAMBERG-OSGOOD-Potenzgesetz mit der VON MISES-Spannung als Vergleichsspannung angesetzt. Das präsentierte

³⁹Dickson et al. (1972) entwickelten ebenso eine DTP-Modellierung. Allerdings wurde diese lediglich als Konzept ohne direkte Umsetzung veröffentlicht.

⁴⁰Die Arbeit von Grant u. Taig (1976) bildet die Basis des ESDU (Engineering Science Data Unit) Programmpakets zur Analyse elastisch-plastischer Klebfügungen.

3.2 Spannungsanalyse von Überlappungsfügungen

Lösungskonzept der zugrunde liegenden Gleichungen ist allerdings sehr komplex und schwer umsetzbar. Delale et al. (1981) hingegen schlugen zwei verschiedene Ansätze vor: (1) Die Ermittlung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen aus einer übergeordneten Energiefunktion (2) ein DTP-Modell basierend auf einer RAMBERG-OSGOOD-Approximation der wahren Spannungs-Dehnungskurve. Allerdings veröffentlichten sie dies beide lediglich als Konzept, sodass weder eine konkrete Umsetzung noch Ergebnisse verfügbar sind. Bigwood u. Crocombe (1990, 1992) erweiterten ihr *general sandwich-type*-Modell auf nichtlineares Materialverhalten für die Klebschicht sowie die Füge­teile. Als Vergleichsspannung dient eine modifizierte VON MISES-Spannung (Raghava et al., 1973), die eine Interaktion der hydrostatischen und deviatorischen Spannungsanteile berücksichtigt. Als Approximationsansatz zur Spannungs-Dehnungskurve wird eine hyperbolische Tangensapproximation vorgeschlagen. Wang et al. (2003a,b) betrachteten zusätzlich Schubdeformationen der Füge­teile und wendeten erfolgreich die Spannungslösung zur Versagensbewertung von Schäl­fügungen an. Eine Erweiterung des Modells von Bigwood u. Crocombe (1990) auf verklebte Lamine mit symmetrischem Lagenaufbau wurde von Smeltzer u. Klang (2003) vorgeschlagen. Ein Modell, das zusätzlich die Alterungseinflüsse des Klebstoffes mittels eines Fick'schen Diffusionsmodells berücksichtigt, wurde von Crocombe (2008) aufbauend auf der Arbeit von Bigwood u. Crocombe (1990) entwickelt. Einen allgemeinen Ansatz zur Analyse duktiler Klebverbindungen mit Laminat­füge­teilen schlugen ebenfalls Mortensen u. Thomsen (1997, 2002) vor. Sie modellierten die Füge­teile mittels klassischer Laminattheorie und einer modifizierten VON MISES-Spannung (Gali et al., 1981) als Vergleichsspannung. Sie schlugen eine iterative Lösung der zugrunde liegenden Gleichungen mit einem Update des Sekantenmoduls in jedem Schritt vor. Dabei wurde das Lösungskonzept allgemein gehalten, um die Anwendung auf verschiedene Überlappungskonfigurationen zu ermöglichen.

Die Komplexität der zugrunde liegenden Differentialgleichungen der vorgestellten Modelle sind im Fall elastisch-plastischer Materialmodellierung so hoch, dass sie nahezu immer numerisch zu lösen sind. Trotz des Aufwandes sind semi-analytische Berechnungsverfahren in vielen Fällen vorteilhafter als vollnumerische Zugänge zur Analyse von Klebverbindungen. Dies betrifft im Besonderen Anwendungsgebiete, in denen für verschiedene Konfigurationen mehrmals Spannungen ausgewertet werden müssen, wie beispielsweise Parameterstudien in Frühentwurfstadien sowie Optimierungsroutinen. Numerische Methoden wie die Finite-Elemente-Methode ermöglichen zwar die Analyse beliebig komplexer Geometrien mit nichtlinearem Materialverhalten sowie nichtlinearen Effekten wie große Deformationen. Allerdings erfordert dies eine gewissenhafte und gründliche Modellbildung. Bei Klebverbindungen mit dünnen Klebschichten betrifft dies insbesondere die Netzfeinheit. Über die Dicke der Klebschicht sollte eine Mindestanzahl von Elementen verwendet werden. Gleichzeitig sollte das Seitenverhältnis der einzelnen Elemente nicht einen bestimmten Grenzwert übersteigen, da sonst Rechengenauigkeiten vorliegen. Dadurch werden schnell eine vergleichsweise große Anzahl von Freiheitsgraden für hinreichend auskonvergierte Lösungen benötigt. Der größte Nachteil jedoch besteht darin, dass lediglich eine Klebfügungskonfiguration mit einer Rechnung berechnet werden kann. Dabei umfasst eine Rechnung die Modellbildung, die Vernetzung des Modells sowie die Lösung des zugrunde liegenden Gleichungssystems.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für Klebverbindungen mit linear-elastischem Materialverhalten eine Vielzahl an Modellen existieren, die Fügungen mit unterschiedlichen Fügepartnern, Kompositfügeteilen mit symmetrischem Lagenaufbau sowie Schubdeformationen und den Einfluss der Klebschichtdicke berücksichtigen. Bei Gradientenklebverbindungen sind bis jetzt hingegen nur einige wenige Ansätze für spezifische Verbindungskonfigurationen wie einschnittige Überlappungsfügungen vorgeschlagen worden. Im Bereich elastisch-plastischer Klebverbindungen finden sich vorrangig Modellierungsansätze basierend auf der Deformationstheorie der Plastizität, die mittels klassischer Laminattheorie verklebte symmetrische Laminatfügeteile abbilden. Bislang fehlt es allerdings an allgemeinen Modellen, die die Analyse beliebiger Fügekonfigurationen mit sich unterschiedlich verhaltenden Klebstoffen und asymmetrische Laminataufbauten der Fügeteile unter Berücksichtigung der Schubdeformationen ermöglichen und eine anschließende effiziente Versagensbewertung erlauben.

3.3 Versagensbewertung

Die Bewertung von Klebverbindungen ist Gegenstand vieler wissenschaftlicher Arbeiten. Im Wesentlichen werden dabei festigkeitsmechanische Ansätze, bruchmechanische Ansätze oder Ansätze der Schädigungsmechanik verwendet. Im Besonderen haben sich Kohäsivzonenmodelle für die Bewertung von Klebverbindungen bewährt.⁴¹ Im Folgenden soll ein Überblick über die wichtigsten Ansätze und Zusammenhänge gegeben werden.

Die gängigsten und zugleich ältesten Bewertungsansätze für Klebfügungen basieren auf festigkeitsmechanischen Überlegungen, siehe Kapitel 2.4. Dabei werden Vergleichsspannungen oder -dehnungen mit kritischen Materialkennwerten wie beispielsweise der Festigkeit oder Bruchdehnung verglichen. Bei der Verwendung von *weak-interface*-Lösungen werden meist die endlichen Spannungsspitzen am Rande der Überlappung zum Vergleich herangezogen, obwohl bekannt ist, dass das Spannungsfeld an den Bimaterialpunkten der einspringenden Ecken der Überlappungsfügungen singulären Charakter hat. Zur Beschreibung spröden Versagens wird dabei hauptsächlich die Normalspannungshypothese verwendet (Adams et al., 1997). Ikegami et al. (1990) verwendete die VON MISES-Gestaltsänderungshypothese zur Bewertung duktiler geschäfteter Klebverbindungen, während Greenwood (1969) hingegen das Kriterium maximaler Schubspannungen auf Basis der Spannungslösung von Goland u. Reissner (1944) zur Bewertung einschnittiger Überlappungsfügungen heranzog. Für duktile Klebstoffe, bei denen nicht vernachlässigbare inelastische Deformationen vor dem endgültigen Versagen auftreten, haben sich dehnungsbasierte Kriterien bewährt. Dabei kamen vor allem die Kriterien maximaler Hauptdehnungen (Harris u. Adams, 1984) sowie maximaler Schubverzerrungen (Hart-Smith, 1973c) zum Einsatz. Übersichtsarbeiten zum Vergleich verschiedener

⁴¹Kohäsivzonenmodelle werden in bruchmechanischen Fachbüchern (Gross u. Seelig, 2011) dem Bereich elastisch-plastischer Bruchmechanik zugeordnet, während sie in Fachbüchern zur Modellierung von Klebverbindungen (da Silva u. Campilho, 2012) als Ansatz der Schädigungsmechanik vorgestellt werden. Bei ersterer Zuordnung werden Kohäsivzonenmodelle als Verallgemeinerung des Dugdale-Modells eingeführt, wohingegen sie bei letzterer als lokaler Ansatz eines Schädigungsgesetzes interpretiert werden.

Versagenkriterien (Goglio et al., 2008, da Silva et al., 2009a,b, Rodríguez et al., 2012) haben jedoch gezeigt, dass bei der Verwendung festigkeitsmechanischer Ansätze auf Basis analytischer Spannungslösungen deutliche Abweichungen zwischen den vorhergesagten Versagenslasten und experimentellen Befunden auftreten. Einige Effekte wie der Einfluss der Überlappungslänge auf die Versagenlasten von einschnittigen Überlappungsfügungen konnte zumindest qualitativ korrekt abgebildet werden. Der Einfluss der Klebschichtdicke konnte hingegen nur falsch wiedergegeben werden.

Bei sehr duktilen Klebstoffen (Bruchdehnung über 20%) fand Crocombe (1989) heraus, dass sich bei Überlappungsfügungen der komplette Überlappungsbereich vor dem endgültigen Versagen im Bereich des plastischen Fließens befindet. Daraufhin schlug er das Konzept des globalen Fließens vor, das Versagen postuliert, wenn über den kompletten Überlappungsbereich die Fließgrenze erreicht ist. Ein Vergleich mit Experimenten zeigte eine gute Übereinstimmung und eine korrekte Abbildung des Klebschichtdickeneffekts. Allerdings gilt dies nur bei vergleichsweise kurzen Überlappungslängen. Bei hinreichend großen Überlappungsbereichen tritt globales Versagen infolge einer Rissentstehung am Rande der Überlappung auf, bevor die komplette Klebschicht plastifiziert (Karachalios et al., 2013b).

Bruchmechanische Ansätze stützen sich weitestgehend auf die Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren oder der Energiefreisetzungsrates von a priori angenommenen Anfangsrissen und einem anschließenden Vergleich mit kritischen Materialkennwerten wie beispielsweise der Bruchzähigkeit. Dabei wird vorwiegend das J -Integral in Verbindung mit analytischen Näherungslösungen zur Bestimmung der Energiefreisetzungsrates im Rahmen der linearen Bruchmechanik oder der Intensität des Rissspitzenfeldes im Kontext der elastisch-plastischen Bruchmechanik verwendet.⁴² Yamada (1988) ermittelte mittels des J -Integrals angewendet auf ein Balkenmodell eine explizite Darstellung der Energiefreisetzungsrates für DCB-Prüfkörper mit Anfangsriss. Entsprechende Untersuchungen für einschnittige Überlappungsfügungen wurden von Hu et al. (1992) unter Benutzung des *shear-lag*-Modells und von Fraise u. Schmit (1993) sowie Hu (1995) unter Verwendung des Modells von Goland u. Reissner (1944) durchgeführt. Krenk (1992) ermittelte den gleichen Ausdruck der Energiefreisetzungsrates für einschnittige Überlappungsfügungen über die Auswertung der Nachgiebigkeit der Fügungen im Falle linearer Elastizität. Fernlund u. Spelt (1991) nutzten das J -Integral, um die Energiefreisetzungsrates für verschiedenste überlappende Klebkonfigurationen zu bestimmen. Zur Auswertung des Bruchkriteriums wurden neben den klassischen Formulierungen (2.71) und (2.78) einige Ansätze vorgeschlagen, die der in Klebungen typischerweise auftretenden Mixed-Mode-Beanspruchung Rechnung tragen. Dazu wird die Bruchzähigkeit als Funktion des sogenannten Mixed-Mode-Winkels $\psi = \arctan(\mathcal{G}_{II}/\mathcal{G}_{I})$ eingeführt, sofern sich die Anteile der Energiefreisetzungsrates in Rissöffnungsmoden unterteilen lassen.⁴³ Optimalerweise liegen zur Auswertung des Bruchkriteriums experimentell ermittelte Werte der Bruchzähigkeit in Abhängigkeit des Mixed-Mode-Winkels vor, sodass eine

⁴²Obwohl die Näherungslösungen die Spannungssingularität nicht abbilden, erhält man einen von null verschiedenen Wert für das J -Integral. Derartige Ansätze haben sich trotz des approximativen Charakters beispielsweise zur Ermittlung der Energiefreisetzungsrates bei der Delamination von Laminaten (Williams, 1988, Suo u. Hutchinson, 1990) als sehr zweckmäßig erwiesen.

⁴³Dieser Winkel wird bei Rissen in Grenzschichten alternativ über das Verhältnis von Schub- zu Schälspannungen definiert (Hutchinson u. Suo, 1991, Mantič u. París, 2004).

zugehörige Versagensfläche⁴⁴ erstellt werden kann. Für den Fall, dass lediglich für reine Modus I und II-Belastung die Bruchzähigkeiten vorliegen, wird die Bruchzähigkeit als Funktion des Mixed-Mode-Winkels mittels Interaktionsgesetzen beschrieben. Oftmals wird ein formal einfacher Ansatz zur Interaktion genutzt, der in vielen Fällen hinreichend gute Ergebnisse im Vergleich zu Experimenten liefert (Chai, 1988, Tong, 1998, Yang u. Thouless, 2001, Dillard et al., 2009):

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}}\right)^{k_1} + \left(\frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{IIc}}\right)^{k_2} = 1, \quad (3.1)$$

wobei k_1 und k_2 frei zu wählende Parameter sind, die an experimentelle Ergebnisse angepasst werden müssen. In den meisten Fällen wird jedoch aus Vereinfachungsgründen $k_1 = k_2 = 1$ bzw. $k_1 = k_2 = 2$ gewählt. Alternativ werden trigonometrische (Hutchinson u. Suo, 1991, Charalambides et al., 1992) sowie auch Polynomfunktionen (Fernlund et al., 1994, Papini et al., 1994) zur Definition des Interaktionsgesetzes genutzt.

Einige wenige Ansätze (Groth, 1988, Xu et al., 1999, Goglio u. Rossetto, 2010) ermitteln im Falle linear-elastischen Materialverhaltens sogenannte verallgemeinerte Spannungsintensitätsfaktoren und vergleichen diese zur Versagensbewertung mit kritischen Materialkennwerten. Die Betrachtung verallgemeinerter Spannungsintensitätsfaktoren ist notwendig, da an den Bimaterialkerben an den Enden der Überlappung keine Risspitzeningularität vorliegt und somit keine klassischen Spannungsintensitätsfaktoren definiert sind (Groth, 1988). Allerdings findet diese Methodik wenig Anwendung, da erheblicher Aufwand zur Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren notwendig ist.

Des Weiteren wurden einige nicht-lokale Ansätze im Rahmen der Festigkeits- und Bruchmechanik angewendet, die sich wiederum in der Theorie kritischer Distanzen (Taylor, 2007) zusammenfassen lassen, vgl. Kapitel 2.6. Unter anderem werteten John et al. (1991) und Crocombe (1989) jeweils das Kriterium maximaler Schub- und Schälspannungen in einer bestimmten Distanz zum Ende der Überlappung zur Versagensbewertung aus, um die Problematik singulärer Spannungen zu umgehen. Crocombe (1989) zeigte jedoch, dass die kritische Distanz abhängig von der Art der Belastung ist. Cui et al. (2003) sowie Crocombe u. Adams (1981b) nutzen Vergleichsdehnungskriterien, ausgewertet in einer kritischen Distanz zum Überlappungsende, um Schälfügungen zu bewerten. Dabei zeigte sich, dass die kritische Distanz von der Geometrie der Fügung abhängt. Clark u. McGregor (1993) hingegen mittelten die Spannungen über eine bestimmte Fläche zur Versagensbewertung von Fügungen. Anderson u. Devries (1987, 1989) sowie Kim u. Lee (2008) betrachteten einen imaginären Riss, um klassische bruchmechanische Konzepte anwenden zu können. Die Größe des Risses muss zunächst jedoch mittels Experimenten bestimmt werden. Alle genannten Arbeiten liefern zwar hinreichend gute Ergebnisse aber können keine befriedigende, physikalisch basierte Erklärung für den zusätzlich benötigten Längenparameter angeben. Erst das gekoppelte Kriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik, vgl. Kapitel 2.6, liefert einen physikalisch basierten Zugang. Statt eines empirischen Längenparameters werden lediglich die Bruchzähigkeit und die

⁴⁴In der Literatur (Fernlund et al., 1994, Tong, 1998) oft als *failure* oder *fracture envelope* bezeichnet.

Festigkeit des Klebstoffes als Versagensparameter benötigt. Die ersten Anwendungen des gekoppelten Kriteriums auf Klebverbindungen basieren auf analytischen Näherungslösungen. Carpinteri et al. (2009) sowie Cornetti et al. (2012) analysierten die Ablösung von Faserkunststoffverstärkungen auf Betonträgern mittels eines einfachen *shear-lag*-Modells und diskutierten Größeneffekte. Weißgraeber u. Becker (2011a,b) schlugen Umsetzungen des gekoppelten Kriteriums für einschnittige Überlappungsfügungen basierend auf den Lösungen von Volkersen (1938) und Goland u. Reissner (1944) vor. Allerdings konnte der Einfluss geometrischer Strukturparameter auf die Versagenslasten nicht korrekt abgebildet werden. Ein verbessertes Modell unter der Verwendung der Spannungslösung von Ojalvo u. Eidinoff (1978) ermöglichte die korrekte Abbildung des Einflusses geometrischer Parameter auf die Versagenslasten (Weißgraeber u. Becker, 2013, Weißgraeber, 2014). Hierbei ist zu erwähnen, dass das Spannungs- und Energiekriterium erstmals eine physikalisch basierte Erklärung des Klebschichtdickeneffekts für spröde Klebstoffe ermöglichte. Detaillierte numerische Umsetzungen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums angewendet auf einschnittige Überlappungsfügungen wurden mittels geometrisch linearen (Mendoza-Navarro et al., 2013, Moradi et al., 2013, Carrère et al., 2015) sowie geometrisch nichtlinearen (Hell et al., 2014, Weißgraeber et al., 2015) Finite-Elemente-Analysen implementiert. Für eine große Anzahl an Experimenten ergaben sich eine gute Übereinstimmung zwischen Versagenslastvorhersagen und experimentellen Befunden.

Ein weit verbreitetes Versagenskonzept für Klebverbindungen, das ebenfalls spannungsbasierte und energetische Betrachtungen vereint, ist die Kohäsivzonenmodellierung. Die Prozesszone wird dabei als Kohäsivzone modelliert und das zugehörige Materialverhalten durch ein Kohäsivgesetz beschrieben. Letzteres beschreibt sowohl das mechanische Verhalten bis zur Schadensinitiierung, als auch den nachfolgenden kontinuierlich fortschreitenden Schädigungsverlauf, vgl. Kapitel 2.5.2. Die Annahme initialer Defekte oder Risse ist dabei nicht notwendig. Analytische Umsetzungen von Kohäsivzonenmodellen sind zwar äußerst effizient aber nur mittels vereinfachender Annahmen umsetzbar und daher in der Literatur selten zu finden. Yuan et al. (2004), Cottone u. Giambanco (2009), Cornetti u. Carpinteri (2011) sowie Cornetti et al. (2015) untersuchten mittels eines analytischen Ansatzes die Ablösung von Faserkunststoffpflastern an Balkenträgern.⁴⁵ Dabei wurden in der Grenzschicht zwischen Träger und Verstärkung lediglich Schubspannungen berücksichtigt. Ein weiterer Ansatz für ein- sowie zweiseitige Überlappungsfügungen, der neben Schub- auch Schälspannungen berücksichtigt, wurde von Ascione (2009) vorgeschlagen. Aufgrund der Komplexität des Modells sind jedoch die zugrunde liegenden Differentialgleichungen mittels eines iterativen Verfahrens zu lösen.

Numerische Umsetzungen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode erlauben hingegen die Modellierung komplexer Fügegeometrien unter Verwendung beliebiger Kohäsivgesetze. Sie erfreuen sich einiger Beliebtheit bei der Analyse von Klebverbindungen und sind in kommerziellen Finite-Elemente Programmpaketen implementiert (da Silva u. Campilho, 2012). Dabei ist jedoch erwähnenswert, dass der Risspfad bei Kohäsivzonenmodellierungen a priori bekannt sein muss, da entlang diesem Kohäsivzonenelemente

⁴⁵In der Literatur wird die analytische Umsetzung von Kohäsivzonenmodellen auch als *cohesive crack model* (CCM) bezeichnet.

vorzusehen sind. Man unterscheidet bei der Modellbildung prinzipiell zwei Vorgehensweisen: (1) das Einfügen von Kohäsivzonenelementen mit verschwindender Dicke entlang des potentiellen Risspfades und (2) das Einfügen von Kohäsivzonenelementen finierter Dicke, die im Falle von Überlappungsfügungen meist die komplette Klebschicht repräsentieren.⁴⁶ Ersteres folgt dem Grundgedanken des von Barenblatt (1959) vorgeschlagenen Konzeptes der Kohäsivzonenmodellierung und erlaubt sowohl die Füge-teile als auch die Klebschicht mit einem separaten Materialmodell zu modellieren (Campilho et al., 2005, Liljedahl et al., 2006). Letzteres entspricht vielmehr einem klassischen Schädigungsmodell mit skalarem Schädigungsparameter und energiebasiertem Evolutionsgesetz, das jedoch aufgrund der Einfachheit oftmals in der Anwendung verwendet wird. Die Physik des eigentlichen Bruchgeschehens und die zugehörigen lokalen Effekte können dabei jedoch nicht abgebildet werden. Vielmehr wird das Bruchgeschehen verschmiert dargestellt. Eine Diskussion beider Ansätze findet man bei da Silva u. Campilho (2012).

Die Form des Kohäsivgesetzes sollte bei beiden Ansätzen abhängig vom Materialverhalten des Klebstoffes sowie den Eigenschaften der Grenzschicht ausgewählt werden. Untersuchungen ergaben, dass bilineare Kohäsivgesetze, vgl. Abbildung 2.7(b), besonders geeignet sind zur Simulation spröden Versagens von Klebstoffen (Campilho et al., 2011b) sowie intralaminaren Versagens von Kompositfügeteilen in Klebverbindungen (Xie et al., 2006). Hingegen haben sich trapezförmige Kohäsivgesetze, vgl. Abbildung 2.7(c), zur Abbildung duktilen Versagens von Klebstoffen bewährt (Feraren u. Jensen, 2004, Campilho et al., 2008). Aufbauend auf diesen klassischen Kohäsivgesetzen wurden weitergehende Analysen zur speziellen Form des Spannungs-Separationsgesetzes durchgeführt. Andersson u. Stigh (2004), Leffler et al. (2007) sowie Högberg et al. (2007) zeigten, dass komplette nichtlineare Spannungs-Separationsgesetze auf Basis einfacher *weak-interface*-Lösungen und Auswertungen des J -Integrals aus wenigen experimentell bestimmten geometrischen Parametern ermittelt werden können. Eine umfangreiche Übersicht zur Formauswahl und Bestimmung von Kohäsivgesetzen insbesondere im Falle von Mixed-Mode-Belastungen findet man beispielsweise bei da Silva u. Campilho (2012) und Campilho et al. (2013b).

Weiterhin ist zu erwähnen, dass bei numerischen Umsetzungen mittels eines impliziten Löser Konvergenzprobleme aufgrund des lokal entfestigenden Materialverhaltens beim Übergang zur einsetzenden Schädigung entstehen. Üblicherweise wird zur Umgehung dieser Problematik ein zusätzlicher viskoser Anteil im Konstitutivgesetz der Kohäsivzonenelemente vorgesehen. Diese viskosen Eigenschaften haben auf die in der Finite-Elemente-Methode entstehenden Gleichungssysteme grundsätzlich eine regulisierende und somit auf die Konvergenz bezogene positive Auswirkung. Die zu den viskosen Effekten gehörigen Parametern, die lediglich der Konvergenzverbesserung dienen, müssen dabei mit besonderer Sorgfalt gewählt werden. Ziel ist es, gerade genug Viskosität in das Konstitutivgesetz einzubringen, sodass hinreichende Konvergenz bei vernachlässigbaren Änderungen der Ergebnisse vorliegt. Damit ist immer eine gesonderte Parameterstudie notwendig. Eine detaillierte Erklärung und Diskussion dieser

⁴⁶Diese Ansätze werden in der Literatur (da Silva u. Campilho, 2012) auch als *local* und *continuum approach* bezeichnet.

Problematik findet man beispielsweise bei Trondl (2013). Des Weiteren ist eine bestimmte Netzfeinheit der Kohäsivzonenelemente innerhalb der Prozesszone zu garantieren, sodass die physikalischen Vorgänge an der Rissspitze korrekt abgebildet werden können. Umfangreiche Untersuchungen und Empfehlungen findet man dazu bei Turon et al. (2007) und da Silva u. Campilho (2012).

Eine erst jüngst entwickelte Erweiterung der klassischen Kohäsivzonenmodellierung ermöglicht die Simulation von Versagensvorgängen ohne vorheriger Festlegung spezifischer Risspfade. Sie verknüpft die Ideen der Kohäsivzonenmodellierung mit denen der erweiterten Finite-Elemente-Methode⁴⁷. Kohäsivzonenelemente verschwindender Dicke werden erst dann in Elemente eingefügt, wenn ein Schadensinitiiierungskriterium erfüllt ist. Dabei werden die entsprechenden Elemente geteilt und anschließend senkrecht zur maximalen Hauptspannung bzw. -dehnungsrichtung Kohäsivzonenelemente eingefügt. Campilho et al. (2011b,a) wendeten erstmals diese im kommerziellen Finite-Elemente-Programmpaket ABAQUS implementierte Methodik zur Versagensvorhersage von Klebverbindungen an. Für DCB-Prüfkörper ergaben sich physikalisch sinnvolle Risspfade und eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Befunden. Allerdings erwies sich das Konzept bei ein- und zweiseitigen Überlappungsfügungen nicht als zielführend, da das Kriterium maximaler Hauptspannungen den elastischen Kontrast zwischen Füge­teilen und Klebstoff nicht berücksichtigt. Es wurden Risse vorhergesagt, die direkt nach Initiierung in der Klebschicht in das Füge­teil hineinwachsen. Alternativ wurden Konzepte vorgeschlagen, die lediglich in Klebkehlen den zuvor beschriebenen Ansatz und im Inneren der Klebschicht klassische Kohäsivzonenelemente nutzen (Sugiman et al., 2013, Mubashar et al., 2014, Stuparu et al., 2016). Campilho et al. (2013a), Fernandes et al. (2015), de Sousa et al. (2017) sowie Santos u. Campilho (2017) legten hingegen die Ausrichtung der eingefügten Kohäsivzonenelemente a priori fest, sodass ein wichtiger Vorteil der Methode verloren ging. Der Autor entwickelte in Zusammenarbeit mit S. Dölling, K. Chalkiadaki und P. Weißgraeber ein Modellierungskonzept, das dem elastischen Kontrast zwischen Füge­teilen und Klebstoff Rechnung trägt (Stein et al., 2017a). Ein benutzerdefiniertes Kriterium wurde implementiert, das zunächst Risse senkrecht zur Hauptspannungsrichtung und beim Auftreffen auf Bimaterial­grenzschichten eine entsprechende Ablenkung des Risses vorsieht. Dieses Konzept lieferte gute Übereinstimmungen mit experimentell ermittelten Risspfaden sowie Versagenslasten für einschnittige Überlappungsfügungen mit Klebkehlen sowie abgerundeten Füge­teilen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass im Gegensatz zu klassischen festigkeits- und bruchmechanischen Ansätzen das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium verlässliche Versagenslastvorhersagen auf physikalischer Basis für sprödes Versagen liefert. Für duktilen Versagen haben sich in Kombination mit analytischen Spannungslösungen insbesondere bruchmechanische Konzepte bewährt. Kohäsivzonenmodellierungen bieten hingegen eine sehr breite Anwendungsmöglichkeit. Sowohl sprödes als auch duktilen Versagen werden mittels des gleichen Konzepts abgebildet. Allerdings empfiehlt sich eine vollnumerische Umsetzung und die genauere Analyse der zugrunde liegenden physikalischen Zusammenhänge des Versagensgeschehens erweist sich als schwierig. Die Identifizierung der adäquaten Kohäsivgesetze mit den zugehörigen Parametern

⁴⁷Engl.: Extended Finite Element Method (XFEM)

Kapitel 3 Zum Stand der Forschung von Klebverbindungen

sowie die Umgehung der Konvergenzprobleme stellt sich in den meisten Fällen als sehr aufwändig heraus. Nichtsdestotrotz werden Kohäsivzonenmodelle aufgrund ihrer vielseitigen Anwendbarkeit oftmals in der Wissenschaft als Referenzlösungen herangezogen.

Kapitel 4

Analyse von Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen

*„It is better to be vaguely right than exactly wrong.“
Carveth Read, britischer Philosoph und Logiker*

Im folgenden Kapitel werden effiziente Berechnungsmethoden zur Analyse von Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen vorgestellt. Typischerweise wird das globale Versagen solcher Fügungen bereits durch eine Rissinitiierung am Rand des Überlappungsbereiches charakterisiert. Zunächst wird zur Spannungsanalyse ein general sandwich-type-Modell präsentiert, das auch die Analyse verklebter Laminate mit Biegedehnkopplung ermöglicht. Die ermittelten Spannungsfelder verschiedenster Überlappungsfügungen werden mittels Finite-Elemente-Analysen validiert und umfassend diskutiert. Daraufhin wird ein effizientes Berechnungskonzept zur Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums vorgestellt. Dabei wird im Detail die Auswertung energetischer Größen und die Lösung des zum gekoppelten Kriteriums zugehörigen Optimierungsproblems dargestellt. Resultate der Analyse werden anschließend mit Experimenten sowie Ergebnissen numerischer Vergleichsrechnungen unter Verwendung von Kohäsivzonenmodellen verglichen. Es zeigt sich sowohl mit den experimentellen Befunden als auch den numerischen Ergebnissen eine gute Übereinstimmung. Abschließend werden die Grenzen des Modells eingehend diskutiert. Die hier vorgestellte Modellierung mit den dargestellten Ergebnissen wurde in international begutachteten Fachzeitschriften und Tagungsbänden publiziert (Weißgraeber et al., 2014, Stein et al., 2015, 2016b,d).

4.1 Einführung

Wie in den Kapiteln 3.2.1 und 3.3 beschrieben, eignen sich zur Untersuchung von Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen analytische Modelle basierend auf der linearen Elastizitätstheorie und dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium. Im Folgenden wird zur Analyse der Spannungen ein vereinfachtes eindimensionales *general sandwich-type*-Modell im ebenen Verzerrungszustand für Überlappungsfügungen mit Mehrschichtverbundfügeteilen unter kombinierter mechanischer und thermischer Last vorgestellt. Dieses repräsentiert mit den kinematischen Annahmen vorrangig das mechanische Verhalten eines streifenförmigen Querschnitts in der Mitte der Fügung senkrecht zur Tiefenrichtung. Da in Experimenten eine Rissinitiierung typischerweise in der Mitte der Klebschicht in Tiefenrichtung am Rand der Überlappung auftritt (Karachalios et al., 2013b) und die Bruchzähigkeit im ebenen Spannungszustand größer als im ebenen Verzerrungszustand ist (Kinloch u. Shaw, 1981, Gross u. Seelig, 2011) liefert die

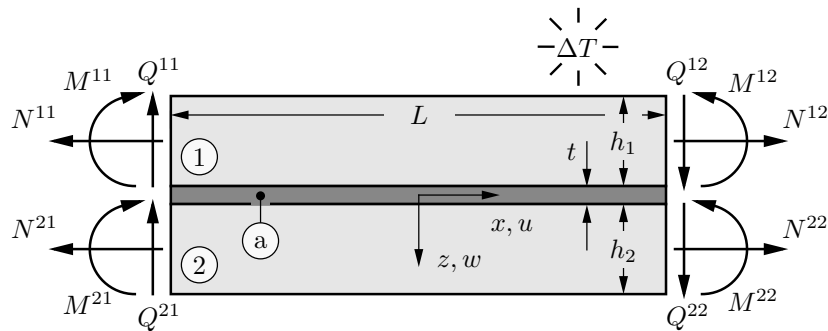


Abbildung 4.1: *Sandwich-type* Modell des Überlappungsbereiches unter thermischer Last mit beliebigen Schnittgrößen am Rand.

Modellierung der Fügung im EVZ eine konservative Abbildung der Wirklichkeit. Die Auswertung des gekoppelten Kriteriums auf Basis des *general sandwich-type*-Modells ermöglicht die Versagensbewertung verschiedenster Überlappungsfügungen und bildet somit eine direkte Verallgemeinerung der Arbeiten von Weißgraeber u. Becker (2013), Weißgraeber (2014). Ein Vergleich der berechneten Ergebnisse mit experimentellen Befunden und numerischen Vergleichsrechnungen mit Kohäsivzonenmodellen zeigt die allgemeine Anwendbarkeit und Qualität des vorgestellten Konzeptes. Die vorgestellte Modellierung wurde mit dankbarer Unterstützung von P. Weißgraeber veröffentlicht (Weißgraeber et al., 2014, Stein et al., 2015, 2016b,d).

4.2 Modellierung der Klebverbindung

Im Folgenden werden zunächst die benötigten Grundgleichungen des Modells im Detail hergeleitet und in einheitlicher Nomenklatur dargestellt. Wie bereits in Kapitel 3.2.1 beschrieben, bildet die alleinige Betrachtung des Überlappungsbereiches mit beliebigen Schnittlasten an den Fügebauteilenden die Basis einer *general sandwich-type*-Modellierung. Abbildung 4.1 zeigt den Überlappungsbereich einer Fügung mit Tiefe b , Fügebauteildicken h_1 und h_2 , Klebschichtdicke t sowie Überlappungslänge L mit allen möglichen Schnittlasten am jeweiligen Rand der Fügebauteile: Normalkräfte N , Querkräfte Q und Biegemomente M . Für die nachfolgenden Berechnungen wird ein kartesisches Koordinatensystem mit Axialkoordinate x und Dickenkoordinate z mit den jeweils zugehörigen Verschiebungen u und w in der Mitte der Fügung betrachtet. Alle Feldgrößen zugehörig zu den Fügebauteilen und der Klebschicht werden jeweils mit den Indizes „1“, „2“ und „a“ gekennzeichnet. Ableitungen nach der Axialkoordinate x werden hier und im Folgenden durch $(\cdot)'$ dargestellt.

Zunächst werden an einem freigeschnittenen infinitesimalen Element des Überlappungsbereiches die Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet. Betrachtet man ein solches Element mit den zugehörigen Schnittlasten $N^{(i)}$, $Q^{(i)}$ sowie $M^{(i)}$ ($i = 1, 2$), vgl. Abbildung 4.2, so ergeben sich die jeweiligen Kräftegleichgewichte in x - und z - Richtung sowie das Momentengleichgewicht um die jeweilige Mitte des Fügebauteils zu

$$N^{(1,2)'} \pm \tau_{xz}^{(a)} = 0, \quad (4.1)$$

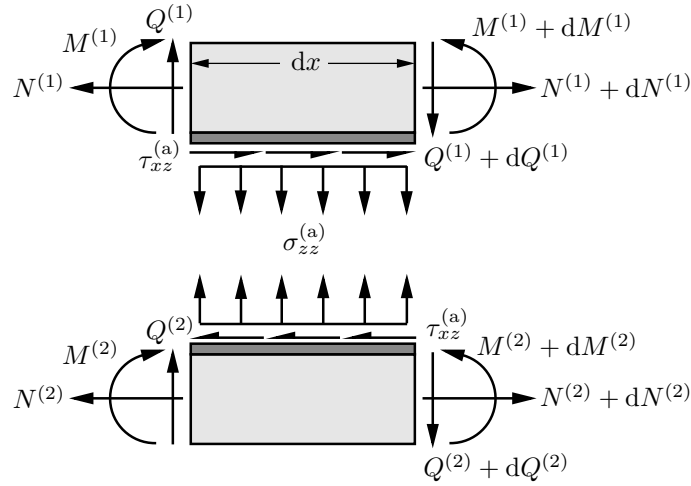


Abbildung 4.2: Freikörperbild eines infinitesimalen Elements des Überlappungsbereiches.

$$Q^{(1,2)'} \pm \sigma_{zz}^{(a)} = 0, \quad (4.2)$$

$$M^{(1,2)'} - Q^{(1,2)} + \frac{h_{1,2} + t}{2} \tau_{xz}^{(a)} = 0. \quad (4.3)$$

Da bei Laminaten oftmals vergleichsweise geringe transversale Schubsteifigkeiten vorliegen, werden in der Analyse Schubdeformationen der Füge­teile mittels der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung berücksichtigt, vgl. Kapitel 2.2.2. Infolge der Annahme des EVZ folgt aus Gleichung (2.50) der Verschiebungsansatz für die Füge­teile ($i = 1, 2$) bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems \hat{x}_i, \hat{z}_i mit dem Ursprung in der jeweiligen Mitte der Füge­teile zu

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x, z) &= u_0^{(i)}(x) + \hat{z}_i \psi^{(i)}(x), \\ w^{(i)}(x, z) &= w_0^{(i)}(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die zugehörigen Verzerrungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(i)} &= u_0^{(i)'}(x) + \hat{z} \psi^{(i)'}(x), \\ \gamma_{xz}^{(i)} &= w_0^{(i)'}(x) + \psi^{(i)}(x), \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} &= \gamma_{yz}^{(i)} = \gamma_{xy}^{(i)} = \varepsilon_{zz}^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Das Konstitutivgesetz der Füge­teile, das die Schnittgrößen mit den Verzerrungen in Beziehung setzt, ergibt sich aus den Gleichungen (2.47) und (2.55) zu

$$\begin{bmatrix} N^{(i)} + N^{(i)T} \\ M^{(i)} + M^{(i)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & B_{11}^{(i)} \\ B_{11}^{(i)} & D_{11}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{(i)'} \\ \psi^{(i)'} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$Q^{(i)} = \kappa^{(i)} A_{55}^{(i)} \gamma_{xz}^{(a)} = \kappa^{(i)} A_{55}^{(i)} (w_0^{(i)'} + \psi^{(i)}), \quad (4.7)$$

mit den in Gleichungen (2.47)–(2.49) und (2.55) angegebenen Schnittkräften und Schnittmomenten zugehörig zur axialen Koordinate x .

Die Kinematik der Klebschicht basiert auf dem Konzept der *weak-interface*-Modelle und bildet den Klebstoff als vereinfachtes Kontinuum bestehend aus einer unendlichen Ansammlung von Federn ab. Zunächst ergibt sich aus der Annahme des ebenen Verzerrungszustandes

$$\varepsilon_{yy}^{(a)} = \gamma_{xy}^{(a)} = \gamma_{yz}^{(a)} = 0. \quad (4.8)$$

Die Verzerrungen $\gamma_{xz}^{(a)}$ und $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ lassen sich mit Hilfe der Deformationen der beiden Fügeiteile wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(a)} &= \frac{1}{t} \left(u^{(2)} \left(x, -\frac{h_2}{2} \right) - u^{(1)} \left(x, \frac{h_1}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} (w_0^{(1)'} + w_0^{(2)'}), \\ &= \frac{1}{t} \left(u_0^{(2)} - \frac{h_2}{2} \psi^{(2)} - u_0^{(1)} - \frac{h_1}{2} \psi^{(1)} \right) + \frac{1}{2} (w_0^{(1)'} + w_0^{(2)'}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(a)} = \frac{1}{t} (w_0^{(2)} - w_0^{(1)}). \quad (4.10)$$

Anders als bei den meisten bisherigen *weak-interface*-Modellen wird hierbei die komplette Definition der Schubverzerrungen berücksichtigt. Eine entsprechende Formulierung für $\varepsilon_{xx}^{(a)}$, lässt sich ebenfalls angeben. Allerdings ist sie für die weiterführenden Betrachtungen nicht vonnöten. Das Elastizitätsgesetz des Klebstoffes ergibt sich aus Gleichung (2.19) unter der Annahme des EVZ zunächst zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(a)} \\ \sigma_{zz}^{(a)} \\ \tau_{xz}^{(a)} \end{bmatrix} &= \frac{E^{(a)}}{(1 + \nu^{(a)})(1 - 2\nu^{(a)})} \begin{bmatrix} 1 - \nu^{(a)} & \nu^{(a)} & 0 \\ \nu^{(a)} & 1 - \nu^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu^{(a)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(a)} \\ \varepsilon_{zz}^{(a)} \\ \gamma_{xz}^{(a)} \end{bmatrix} \\ \sigma_{yy}^{(a)} &= \nu^{(a)}(\sigma_{xx}^{(a)} + \sigma_{zz}^{(a)}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mit der zusätzlichen Annahme, dass bei Überlappungsfügungen die Axialspannungen $\sigma_{xx}^{(a)}$ vernachlässigbar klein gegenüber den Schub- und Schälspannungen $\tau_{xz}^{(a)}$ und $\sigma_{zz}^{(a)}$ sind, ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für $\varepsilon_{xx}^{(a)}$. Ein letztes Einsetzen und Umformen ergibt schließlich

$$\sigma_{zz}^{(a)} = \frac{E^{(a)}}{1 - \nu^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \quad \sigma_{yy}^{(a)} = \frac{\nu^{(a)} E^{(a)}}{1 - \nu^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \quad \tau_{xz}^{(a)} = \frac{E^{(a)}}{2(1 + \nu^{(a)})} \gamma_{xz}^{(a)}. \quad (4.12)$$

4.3 Differentialgleichungssystem

Aus den dargestellten Grundgleichungen lässt sich durch geschicktes Differenzieren und Einsetzen ein homogenes, gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die Klebschichtspannungen $\tau_{xz}^{(a)}$ und $\sigma_{zz}^{(a)}$ herleiten. Die folgenden Ausführungen zeigen im Detail die Herleitung des Differentialgleichungssystems, entsprechende Lösungsansätze sowie die zugehörigen Randbedingungen auf.

4.3.1 Herleitung und Lösungsansätze

Aus Vereinfachungsgründen seien zunächst die Abkürzungen

$$\tilde{N}^{(i)} = N^{(i)} + N^{(i)T} \quad \text{und} \quad \tilde{M}^{(i)} = M^{(i)} + M^{(i)T} \quad (4.13)$$

für die Schnittlasten eingeführt. Anschließend werden die Ableitungen der Fügeteildeformationen in Abhängigkeit der Schnittlasten dargestellt. Invertiert man Gleichung (4.6), ergibt sich

$$\begin{bmatrix} u_0^{(i)'} \\ \psi^{(i)'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{(i)}} \begin{bmatrix} D_{11}^{(i)} & -B_{11}^{(i)} \\ -B_{11}^{(i)} & A_{11}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}^{(i)} \\ \tilde{M}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\text{mit} \quad \Delta^{(i)} = A_{11}^{(i)} D_{11}^{(i)} - B_{11}^{(i)2}. \quad (4.15)$$

Differenziert man Gleichung (4.7) nach der Axialkoordinate x und formt nach der zweiten Ableitung der Verschiebung in $\hat{z}^{(i)}$ -Richtung um, erhält man

$$w_0^{(i)''} = \frac{Q^{(i)'}}{\kappa^{(i)} A_{55}^{(i)}} - \frac{1}{\Delta^{(i)}} \left(-B_{11}^{(i)} \tilde{N}^{(i)} + A_{11}^{(i)} \tilde{M}^{(i)} \right). \quad (4.16)$$

Differenziert man die Schubverzerrung der Klebschicht (4.9) nach x und setzt die oben angegebenen Ausdrücke der Deformationen der Fügeteile (4.14) und (4.16) ein, folgt

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(a)'} &= \frac{1}{t\Delta^{(2)}} \left(\left(D_{11}^{(2)} + \frac{h_2+t}{2} B_{11}^{(2)} \right) \tilde{N}^{(2)} - \left(B_{11}^{(2)} + \frac{h_2+t}{2} A_{11}^{(2)} \right) \tilde{M}^{(2)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{t\Delta^{(1)}} \left(\left(D_{11}^{(1)} - \frac{h_1+t}{2} B_{11}^{(1)} \right) \tilde{N}^{(1)} + \left(-B_{11}^{(1)} + \frac{h_1+t}{2} A_{11}^{(1)} \right) \tilde{M}^{(1)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^{(2)} A_{55}^{(2)}} - \frac{1}{\kappa^{(1)} A_{55}^{(1)}} \right) \sigma_{zz}^{(a)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Differenziert man zwei weitere Male nach x und setzt die Kräfte- und Momentengleichgewichte der jeweiligen Fügeteile (4.1)–(4.3) ein, lassen sich alle Schnittlasten eliminieren. Multipliziert man daraufhin die Gleichung mit dem Schubmodul des Klebstoffes $G^{(a)}$ und verwendet das Konstitutivgesetz der Klebschicht (4.12), ergibt sich die folgende homogene, gewöhnliche Differentialgleichung für die Klebschichtspannungen:

$$\tau_{xz}^{(a)''''} - \eta_1 \tau_{xz}^{(a)'} + \eta_2 \sigma_{zz}^{(a)} - \eta_3 \sigma_{zz}^{(a)''} = 0, \quad (4.18)$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{G^{(a)}}{t} \left(\frac{D_{11}^{(2)} + (h_2+t)B_{11}^{(2)} + \frac{(h_2+t)^2}{4} A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} + \frac{D_{11}^{(1)} - (h_1+t)B_{11}^{(1)} + \frac{(h_1+t)^2}{4} A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \right), \\ \eta_2 &= \frac{G^{(a)}}{t} \left(\frac{1}{\Delta^{(2)}} \left(B_{11}^{(2)} + \frac{h_2+t}{2} A_{11}^{(2)} \right) + \frac{1}{\Delta^{(1)}} \left(B_{11}^{(1)} - \frac{h_1+t}{2} A_{11}^{(1)} \right) \right), \\ \eta_3 &= \frac{G^{(a)}}{2} \left(\frac{1}{\kappa^{(2)} A_{55}^{(2)}} - \frac{1}{\kappa^{(1)} A_{55}^{(1)}} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Eine zweite Differentialgleichung erhält man durch Einsetzen von Gleichung (4.16) in die zweite Ableitung der Dehnung der Klebschicht in vertikale Richtung (4.10). Dies liefert zunächst

$$t\varepsilon_{zz}^{(a)''} = \frac{1}{\Delta^{(1)}} \left(-B_{11}^{(1)} \tilde{N}_1 + A_{11}^{(1)} \tilde{M}_1 \right) - \frac{1}{\Delta^{(2)}} \left(-B_{11}^{(2)} \tilde{N}_2 + A_{11}^{(2)} \tilde{M}_2 \right) + \frac{Q_2'}{\kappa^{(2)} A_{55}^{(2)}} - \frac{Q_1'}{\kappa^{(1)} A_{55}^{(1)}}. \quad (4.20)$$

Differenziert man nach der Axialkoordinate x und setzt die Gleichgewichtsbedingungen der Fügeiteile (4.1) und (4.3) ein, ergibt sich

$$t\varepsilon_{zz}^{(a)'''} = \left(\frac{1}{\Delta^{(1)}} \left(B_{11}^{(1)} - \frac{h_1 + t}{2} A_{11}^{(1)} \right) + \frac{1}{\Delta^{(2)}} \left(B_{11}^{(2)} + \frac{h_2 + t}{2} A_{11}^{(2)} \right) \right) \tau_{xz}^{(a)} + \frac{A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} Q_1 - \frac{A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} Q_2 + \left(\frac{1}{k^{(1)} A_{55}^{(1)}} + \frac{1}{k^{(2)} A_{55}^{(2)}} \right) \sigma_{zz}^{(a)'}. \quad (4.21)$$

Differenziert man ein weiteres Mal und eliminiert die Ableitungen der Querkräfte mittels der Gleichgewichtsbedingung (4.2), erhält man eine Differentialgleichung unabhängig von den Schnittlasten. Durch Multiplizieren der Gleichung mit $E^{(a)}/(1-\nu^{(a)2})$ und Einsetzen des Konstitutivgesetzes der Klebschicht (4.12) ergibt sich die zweite homogene, gewöhnliche Differentialgleichung für die Klebschichtspannungen

$$\sigma_{zz}^{(a)''''} - \eta_4 \sigma_{zz}^{(a)''} + \eta_5 \sigma_{zz}^{(a)} - \eta_6 \tau_{xz}^{(a)'} = 0, \quad (4.22)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \eta_4 &= \frac{E^{(a)}}{t(1-\nu^{(a)2})} \left(\frac{1}{\kappa^{(1)} A_{55}^{(1)}} + \frac{1}{\kappa^{(2)} A_{55}^{(2)}} \right), \\ \eta_5 &= \frac{E^{(a)}}{t(1-\nu^{(a)2})} \left(\frac{A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} + \frac{A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \right), \\ \eta_6 &= \frac{E^{(a)}}{t(1-\nu^{(a)2})} \left(\frac{1}{\Delta^{(1)}} \left(B_{11}^{(1)} - \frac{h_1 + t}{2} A_{11}^{(1)} \right) + \frac{1}{\Delta^{(2)}} \left(B_{11}^{(2)} + \frac{h_2 + t}{2} A_{11}^{(2)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die Differentialgleichungen (4.18) und (4.22) bilden ein homogenes, gewöhnliches Differentialgleichungssystem siebter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Durch die Einführung eines Hilfsvektors

$$\boldsymbol{\psi} = \left[\tau_{xz}^{(a)}, \tau_{xz}^{(a)'}, \tau_{xz}^{(a)''}, \sigma_{zz}^{(a)}, \sigma_{zz}^{(a)'}, \sigma_{zz}^{(a)''}, \sigma_{zz}^{(a)'''} \right]^T, \quad (4.24)$$

lässt sich das Differentialgleichungssystem siebter Ordnung auf ein System erster Ordnung zurückführen und in der Form eines Eigenwertproblems schreiben als

$$\boldsymbol{\psi}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}, \quad (4.25)$$

mit der 7×7 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & -\eta_2 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \eta_6 & 0 & -\eta_5 & 0 & \eta_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Eine allgemeine Lösung dieses Systems lässt sich durch eine Eigenwertanalyse der Matrix \mathbf{A} ermitteln. Die Systemmatrix hat einen Nulleigenwert sowie sechs reelle oder komplexe Eigenwerte abhängig von der betrachteten Fügekonfiguration. Die komplette Lösung ergibt sich aus der Linearkombination der zugehörigen Lösungsanteile. Aus dem Nulleigenwert mit zugehörigen Eigenvektor \mathbf{v}_0 ergibt sich der Lösungsanteil

$$\boldsymbol{\psi}_{\lambda=0} = \mathbf{v}_0. \quad (4.27)$$

Zu den immer paarweise auftretenden reellwertigen Eigenwerten $\lambda_{\mathbb{R}} = \pm a$ mit linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_{\mathbb{R}}^{\pm}$ gehören die Lösungsanteile

$$\boldsymbol{\psi}_{\lambda_{\mathbb{R}}} = \left\{ \mathbf{v}_{\mathbb{R}}^+ e^{ax}, \mathbf{v}_{\mathbb{R}}^- e^{-ax} \right\}. \quad (4.28)$$

Die komplexen Eigenwerte treten immer in komplex konjugierten Paaren $\lambda_{\mathbb{C}} = b \pm ic$ mit komplexen Eigenvektoren $\mathbf{v}_{\mathbb{C}}^{(1)} \pm i\mathbf{v}_{\mathbb{C}}^{(2)}$ auf. Die zugehörigen komplexwertigen Lösungsanteile lassen sich mittels geeigneter Linearkombinationen zu folgenden reellwertigen Lösungsanteilen transformieren

$$\boldsymbol{\psi}_{\lambda_{\mathbb{C}}} = \left\{ e^{bx} \left(\mathbf{v}_{\mathbb{C}}^{(1)} \cos(cx) - \mathbf{v}_{\mathbb{C}}^{(2)} \sin(cx) \right), \right. \\ \left. e^{bx} \left(\mathbf{v}_{\mathbb{C}}^{(1)} \sin(cx) + \mathbf{v}_{\mathbb{C}}^{(2)} \cos(cx) \right) \right\}. \quad (4.29)$$

Die angegebenen Lösungsanteile bilden das Fundamentalsystem der Lösungen des Differentialgleichungssystems (4.25). Die gesamte Lösung ergibt sich aus der Linearkombination der Lösungsanteile (4.27)–(4.29) mit jeweiligen Wichtungskonstanten C_1, \dots, C_7 .

Alternativ lässt sich das System bestehend aus den beiden Differentialgleichungen (4.18) und (4.22) entkoppeln. Als Spezialfall ist zunächst die Lösung im Falle einer symmetrischen Fügekonfiguration mit identischen Fügeteilen ohne Biegedehnkopplung dargestellt. Dabei verschwinden die Konstanten η_2, η_3 und η_6 , sodass die Differentialgleichungen (4.18) und (4.22) direkt entkoppelt vorliegen. In diesem Falle ergeben sich mittels eines einfachen Exponentialansatzes folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(a)} &= C_1 + C_2 \cosh(\sqrt{\eta_1}x) + C_3 \sinh(\sqrt{\eta_1}x), \\ \sigma_{zz}^{(a)} &= C_4 \sinh(\Gamma_1 x) + C_5 \cosh(\Gamma_1 x) + C_6 \sinh(\Gamma_2 x) + C_7 \cosh(\Gamma_2 x), \end{aligned} \quad (4.30)$$

mit

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\eta_4 \pm \sqrt{\eta_4^2 - 4\eta_5}}. \quad (4.31)$$

Sind die obigen Annahmen zur Fügekonfiguration nicht erfüllt, lässt sich dennoch ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem herleiten. Durch weiteres Differenzieren und geschicktes Umformen der Gleichungen (4.18) und (4.22) ergeben sich folgende entkoppelte Differentialgleichungen⁴⁸

$$\tau_{xz}^{(a)\text{VII}} - \bar{\eta}_1 \tau_{xz}^{(a)\text{V}} + \bar{\eta}_2 \tau_{xz}^{(a)\text{III}} + \bar{\eta}_3 \tau_{xz}^{(a)\text{I}} = 0, \quad (4.32)$$

$$\sigma_{zz}^{(a)\text{VI}} - \bar{\eta}_1 \sigma_{zz}^{(a)\text{IV}} + \bar{\eta}_2 \sigma_{zz}^{(a)\text{II}} + \bar{\eta}_3 \sigma_{zz}^{(a)} = 0, \quad (4.33)$$

mit den Koeffizienten

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1 + \eta_4, \quad \bar{\eta}_2 = \eta_1 \eta_4 + \eta_5 - \eta_3 \eta_6, \quad \bar{\eta}_3 = \eta_2 \eta_6 - \eta_1 \eta_5. \quad (4.34)$$

Unter gewissen Annahmen lassen sich für die Differentialgleichungen (4.32) und (4.33) entkoppelte analytische Lösungen angeben. Vorausgesetzt, dass die polynomiale Diskriminante

$$D = \frac{1}{27} \left(\bar{\eta}_2 - \frac{\bar{\eta}_1^2}{3} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2}{3} + \bar{\eta}_3 - \frac{2}{27} \bar{\eta}_1^3 \right), \quad (4.35)$$

größer Null ist, lassen sich beispielsweise folgende beide analytische Lösungen für die Klebschichtspannungen angeben

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(a)} = & C_1 + C_2 \cosh(\xi_1 x) + C_3 \sinh(\xi_1 x) \\ & + C_4 \cosh(\xi_2 x) \cos(\xi_3 x) + C_5 \cosh(\xi_2 x) \sin(\xi_3 x) \\ & + C_6 \sinh(\xi_2 x) \cos(\xi_3 x) + C_7 \sinh(\xi_2 x) \sin(\xi_3 x), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(a)} = & D_1 \cosh(\xi_1 x) + D_2 \sinh(\xi_1 x) \\ & + D_3 \cosh(\xi_2 x) \cos(\xi_3 x) + D_4 \cosh(\xi_2 x) \sin(\xi_3 x) \\ & + D_5 \sinh(\xi_2 x) \cos(\xi_3 x) + D_6 \sinh(\xi_2 x) \sin(\xi_3 x). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dabei sind C_1, \dots, C_7 sowie D_1, \dots, D_6 freie Konstanten und müssen durch entsprechende Randbedingungen bestimmt werden. Die Größen ξ_1, ξ_2 und ξ_3 können direkt aus den Lösungen der charakteristischen Gleichungen der Differentialgleichungen (4.32) und (4.33) berechnet werden. Der Fall $D > 0$ tritt bei nahezu allen überlappenden Fügekonfigurationen mit metallischen Fügeteilen auf und entspricht bezüglich der Eigenwertanalyse der Systemmatrix (4.26) einem Auftreten von einem Nulleigenwert sowie zwei reell- und vier komplexwertigen Eigenwerten. Eine negative Diskriminante ($D < 0$) erhält man oftmals bei der Berechnung von überlappend verklebten Laminaten. Das Auftreten von $D = 0$ ist nur in konstruierten Fällen möglich und ein rein akademischer Fall. Da sich, wie im folgenden Abschnitt dargelegt, die entkoppelten Lösungsdarstellungen (4.36) und (4.37) bei der Berechnung der freien Konstanten als unvorteilhaft herausstellen, sei für eine genaue und detaillierte Darstellung der Herleitung der polynomialen

⁴⁸Dabei werden römische Ziffern zur Darstellung von Ableitungsordnungen größer als 4 genutzt.

Diskriminante (4.35) sowie der Lösungen im Falle $D > 0$ und $D < 0$ und den zugehörigen Randbedingungen auf Stein et al. (2017c) verwiesen.

Die Auswertung der Randbedingungen führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den freien Konstanten als Unbekannten, das jedoch numerisch schlecht konditioniert ist. Betrachtet man beispielsweise die Lösungsanteile der reellwertigen Eigenwerte (4.28) treten in der Matrix zugehörig zum Gleichungssystem der Randbedingungen Terme der Art $e^{-aL/2}$ und $e^{aL/2}$ auf. Dies führt insbesondere bei großen Überlappungen oder großen Eigenwerten zu Einträgen verschiedenster Größenordnungen und letztlich zu erheblichen numerischen Fehlern bei der Lösung des Gleichungssystems. Abhilfe schafft eine Verschiebung der Koordinate x abhängig vom Vorzeichen des Eigenwerts. Bei den Termen mit jeweils abklingendem bzw. steigendem Exponentialverhalten wird statt der Koordinate x der Ausdruck $(x + \frac{L}{2})$ bzw. $(x - \frac{L}{2})$ verwendet. Die Lösung bleibt trotz der Koordinatenverschiebung weiterhin gültig, da ein konstanter Ausdruck auf den Lösungsanteil multipliziert wird. Lediglich die Werte der zu berechnenden freien Konstanten werden dadurch beeinflusst. Dies führt zu einer wesentlichen Verbesserung der numerischen Kondition der Matrix. Da dies insbesondere beim ersten dargestellten Lösungsansatz des Differentialgleichungssystems einfach umsetzbar ist, wird dieser im Folgenden verwendet. Des Weiteren sei darauf hingewiesen, dass die Lösungsdarstellung (4.36) und (4.37) zwar viele Fügekonfigurationen abdeckt. Allerdings werden im Gegensatz zu den anderen Lösungsansätzen sechs weitere Randbedingungen zur Bestimmung der freien Konstanten benötigt.

4.3.2 Randbedingungen

Das folgende Kapitel legt die sieben benötigten Randbedingungen zur Bestimmung der freien Konstanten C_1, \dots, C_7 dar. Die erste Randbedingung ergibt sich direkt aus dem horizontalen Kräftegleichgewicht bei einem Schnitt des in Abbildung 4.1 dargestellten Überlappungsbereiches entlang der Überlappung. Sie lässt sich darstellen als

$$b \int_{-L/2}^{L/2} \tau_{xz}^{(a)} dx = N^{11} - N^{12}. \quad (4.38)$$

Sechs weitere Randbedingungen ergeben sich aus den zur Herleitung des Differentialgleichungssystems dargestellten Gleichungen. Diese verknüpfen die Schnittlasten mit Ableitungen der Spannungen an den beiden Rändern der Überlappung und können im weitesten Sinne als Kompatibilitätsbedingungen interpretiert werden. Wertet man Gleichung (4.17) an beiden Enden der Überlappung aus, ergeben sich die beiden Randbedingungen

$$\left(\tau_{xz}^{(a)'} - \eta_3 \sigma_{zz}^{(a)} \right) \Big|_{\frac{L}{2}} = H_{22} + H_{12}, \quad \text{und} \quad \left(\tau_{xz}^{(a)'} - \eta_3 \sigma_{zz}^{(a)} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}} = H_{21} + H_{11}, \quad (4.39)$$

mit

$$H_{ij} = \frac{G^{(a)}}{t\Delta^{(i)}} \left(\left((-1)^i D_{11}^{(i)} + \frac{h_i + t}{2} B_{11}^{(i)} \right) \tilde{N}^{ij} - \left((-1)^i B_{11}^{(i)} + \frac{h_i + t}{2} A_{11}^{(i)} \right) \tilde{M}^{ij} \right). \quad (4.40)$$

Zwei weitere Gleichungen erhält man durch Auswertung der Gleichung (4.20) an beiden Enden der Überlappung

$$\left(\sigma_{zz}^{(a)''} - \eta_4 \sigma_{zz}^{(a)}\right) \Big|_{\frac{L}{2}} = J_{12} - J_{22}, \quad \text{und} \quad \left(\sigma_{zz}^{(a)''} - \eta_4 \sigma_{zz}^{(a)}\right) \Big|_{-\frac{L}{2}} = J_{11} - J_{21}, \quad (4.41)$$

mit

$$J_{ij} = \frac{E^{(a)}}{t \Delta^{(i)} (1 - \nu^{(a)^2})} \left(-B_{11}^{(i)} \tilde{N}^{ij} + A_{11}^{(i)} \tilde{M}^{ij} \right). \quad (4.42)$$

Die beiden letzten Randbedingungen folgen mittels Auswertung der Gleichung (4.21) an den jeweiligen Enden des Überlappungsbereiches zu

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{zz}^{(a)'''} - \eta_4 \sigma_{zz}^{(a)'} - \eta_6 \tau_{xz}^{(a)}\right) \Big|_{\frac{L}{2}} &= \frac{E^{(a)}}{t (1 - \nu^{(a)^2})} \left(\frac{A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} Q^{12} - \frac{A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} Q^{22} \right), \\ \left(\sigma_{zz}^{(a)'''} - \eta_4 \sigma_{zz}^{(a)'} - \eta_6 \tau_{xz}^{(a)}\right) \Big|_{-\frac{L}{2}} &= \frac{E^{(a)}}{t (1 - \nu^{(a)^2})} \left(\frac{A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} Q^{11} - \frac{A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} Q^{21} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Damit liegen sieben Randbedingungen zur Bestimmung der sieben Unbekannten C_1, \dots, C_7 vor. Infolge der zuvor beschriebenen Verschiebung der Axialkoordinate x in der Lösung des Differentialgleichungssystems abhängig von der Art des Eigenwerts ergibt sich ein gut konditioniertes und numerisch günstig zu lösendes lineares Gleichungssystem.

4.4 Vergleich der Spannungslösung mit Finite-Elemente-Analysen

Im Folgenden werden die Ergebnisse des dargestellten analytischen Berechnungsverfahrens für verschiedene Überlappungsfügungskonfigurationen mit Finite-Elemente-Referenzlösungen verglichen. Dabei werden die Klebschichtspannungen verschiedenster Fügekonfigurationen unter rein thermischer, rein mechanischer und kombinierten Lastfällen gezeigt und diskutiert.

Eine Umsetzung des dargestellten analytischen Berechnungsverfahrens wurde mit dem Programmpaket MATLAB implementiert. Dabei entsteht der größte Rechenaufwand bei der Eigenwertanalyse der Systemmatrix und dem Lösen des linearen Gleichungssystems der Randbedingungen. Aufgrund der analytischen Natur der zugrunde liegenden Gleichungen und der Effizienz des Programms bei numerischen Berechnungen mit Hilfe von Matrizen ergeben sich Rechenzeiten, die durchschnittlich 5 ms betragen.⁴⁹ Eine Implementierung wurde als ergänzendes Material zu der zugehörigen Veröffentlichung (Weißgräber et al., 2014) publiziert. Die zugehörigen Finite-Elemente-Referenzmodelle wurden mittels der in ABAQUS 6.14-1 bereitgestellten Python-Schnittstelle parametrisch umgesetzt. Diese ermöglicht eine vollautomatische Modellierung, Vernetzung,

⁴⁹Die Angaben beziehen sich auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit einem Intel® Core™ i5 Prozessor mit 4 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.

Tabelle 4.1: Materialkennwerte der verwendeten Fügeiteile und Klebstoffe.

	(a) Kennwerte isotroper Werkstoffe			(b) Kennwerte der Laminateneinzelschicht	
	Stahl	Aluminium	Epoxy	CFK ⁵³	
E [GPa]	210	70	2,7	E_1 [GPa]	135
ν [-]	0,3	0,33	0,36	E_2 [GPa]	10
α [10^{-6}K^{-1}]	11,3	23,1	–	G_{12} [GPa]	5
				ν_{12} [-]	0,27
				α_1 [10^{-6}K^{-1}]	–0,6
				α_2 [10^{-6}K^{-1}]	30
				$\kappa([0^\circ/90^\circ]_S)$	0,805
				$\kappa([90^\circ/0^\circ]), \kappa([0^\circ/90^\circ])$	0,773

Berechnung sowie Auswertung der Finite-Elemente-Berechnungen. Um explizit den dargestellten Modellierungsansatz für beliebige Überlappungsfügungen zu validieren, wurde ein numerisches zweidimensionales Modell des Überlappungsbereiches implementiert. Die zugehörigen Schnittkräfte und -momente an den Fügeiteilquerschnitten auf Höhe der Überlappungsränder werden auf Starrkörper aufgebracht, die mittels Zwangsbedingungen⁵⁰ mit den Fügeiteilrändern kinematisch verbunden sind. Thermische Lasten werden als homogene Temperaturänderungen für die komplette Fügung umgesetzt. Linear-elastisches Materialverhalten ist für die Fügeiteile und Klebschicht vorgesehen. Bei verklebten Mehrschichtverbunden werden die Fügeiteile zunächst gemäß des Laminataufbaus partitioniert und die jeweiligen Materialkennwerte der anisotropen Einzelschichten abhängig von der Faserorientierung implementiert. Die Vernetzung des kompletten Modells erfolgt mit zweidimensionalen, vierknotigen Kontinuums-elementen basierend auf den Bedingungen des ebenen Verzerrungszustandes⁵¹. Die durchschnittliche Elementgröße des gleichmäßigen, rechteckigen Netzes beträgt 0,025 mm. Die implementierten Modelle haben insgesamt zwischen $5 \cdot 10^5$ und $1 \cdot 10^6$ Freiheitsgraden und erfordern auf einem üblichen Arbeitsplatzrechner Rechenzeiten inklusive Auswertung zwischen 40 und 80 s.⁵²

Im Weiteren werden für die einzelnen Fügekonfigurationen die in der Mitte der Klebschicht wirkenden Schub- und Schälspannungen entlang des Überlappungsbereiches betrachtet. Für die Fügekonfigurationen werden die in Tabelle 4.1 angegebenen Werte der elastischen Kenngrößen der Fügeiteile und der Klebschicht verwendet. Die Schubkorrekturfaktoren zugehörig zu den verwendeten Laminataufbauten (Kreuzverbund $[0^\circ/90^\circ]_S$ und asymmetrische Laminataufbauten $[90^\circ/0^\circ], [0^\circ/90^\circ]$) wurden mit der Berechnungsmethode von Klarmann u. Schweizerhof (1993) ermittelt. Oberhalb der jeweiligen Diagramme ist zur Übersicht die zugehörige Struktursituation abgebildet. Die jeweils wirkenden Randlasten am Überlappungsbereich sind zu jeder Struktursituation in Tabelle 4.2 zu finden. Sie wurden mit einer angenommenen Gesamtlänge

⁵⁰In ABAQUS: Tie-constraint.

⁵¹In der ABAQUS Finite-Elemente-Bibliothek als CPE4 bezeichnet.

⁵²Die Rechenzeiten beziehen sich wie zuvor auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit Intel® Core™ i5 Prozessor mit 4 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.

⁵³CFK ist die Abkürzung für Carbonfaserverstärkter Kunststoff (Engl.: Carbon-Fibre-Reinforced-Plastics, CFRP).

Tabelle 4.2: Schnittlasten pro Einheitstiefe und Temperaturänderung bei einer angenommenen Gesamtlängung von 225 mm und einer Tiefe von $b = 25$ mm. Schnittkräfte N und Q in N/mm, Schnittmomente M in Nmm/mm und Temperaturänderung ΔT in K.

Abbildung	N^{11}	Q^{11}	M^{11}	N^{12}	Q^{12}	M^{12}	N^{21}	Q^{21}	M^{21}	N^{22}	Q^{22}	M^{22}	ΔT
4.3(a)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-100
4.3(b)	200	2,2	222,2	0	0	0	0	0	0	200	2,2	-222,2	0
4.3(c)	200	3,1	311,1	0	0	0	0	0	0	200	3,1	-311,1	0
4.3(d)	0	0	0	0	0	200	0	0,8	88,8	0	0,8	-88,8	-100
4.4(a)	0	0	0	0	0	0	2000	0	0	2000	0	0	0
4.4(b)	0	0	0	0	0	0	2000	0	0	2000	0	0	0
4.4(c)	300	0	0	0	0	0	0	0	0	300	0	0	0

der überlappenden Fügungen von 225 mm und eine Breite von $b = 25$ mm mittels einfacher Gleichgewichtsbedingungen berechnet. Dies vernachlässigt im Falle einschnittiger Überlappungsfügungen zwar die nichtlinearen Biegedehformationen außerhalb des Überlappungsbereiches. Allerdings erlaubt diese Vorgehensweise einen direkten Vergleich des dargestellten Modellierungsansatzes mit numerischen Referenzlösungen ohne den Einfluss weiterer Modelle zur Abbildung des nichtlinearen mechanischen Verhaltens. Ergebnisse des analytischen Modells und der FEA sind jeweils als durchgezogene und gepunktete Linien dargestellt.

Abbildung 4.3(a) zeigt zunächst die Ergebnisse des analytischen Berechnungsverfahrens im Vergleich zu denen der Finite-Elemente-Analyse für einen Dreischichtverbund aus Stahl, Epoxy und Aluminium unter einer rein thermischen Last. Infolge des größeren Wärmeausdehnungskoeffizienten von Aluminium ergeben sich erhöhte Schäl- und Schubspannungen an den Enden der Überlappung. In den Abbildungen 4.3(b) und 4.3(c) sind die Ergebnisse für jeweils symmetrische und asymmetrische einschnittige Überlappungsfügungen unter rein mechanischer Last dargestellt. Während sich bei der symmetrischen Fügung ein symmetrisches Spannungsfeld einstellt, ergeben sich bei der asymmetrischen Fügung am Ende der Überlappung zugehörig zum nachgiebigeren Füge teil erhöhte Spannungsspitzen. Eine ähnlich asymmetrische Spannungsverteilung ergibt sich bei einer T-Fügung unter kombinierter Biegung und thermischer Last, vgl. Abbildung 4.3(d). Den Einfluss verschiedener Laminataufbauten mit und ohne Biegedehnkopplung auf die Spannungsverteilung von Verstärkungspflastern ist in den Abbildungen 4.4(a) und 4.4(b) dargestellt. Bei der Verwendung eines symmetrischen Lagenaufbaus ohne Biegedehnkopplung (siehe Abbildung 4.4(b)) ergeben sich wesentlich geringere Schälspannungsspitzen gegenüber erhöhten Schubspannungen an den Rändern der Überlappung. Da Schubbelastungen für Klebstoffe meist weniger versagenskritisch sind, empfiehlt sich ein symmetrischer Lagenaufbau. Symmetrische zweischnittige Überlappungsfügungen lassen sich ebenso mittels des vorgestellten Berechnungsverfahrens analysieren, siehe Abbildung 4.4(c). Dafür muss eine geeignete Symmetriebedingung implementiert werden. Im gegebenen Fall wird die Symmetrie mittels einer verschwindenden Schub- und Biegenachgiebigkeit sowie einer halbierten Dehnsteifigkeit des mittleren Füge teils berücksichtigt.

4.4 Vergleich der Spannungslösung mit Finite-Elemente-Analysen

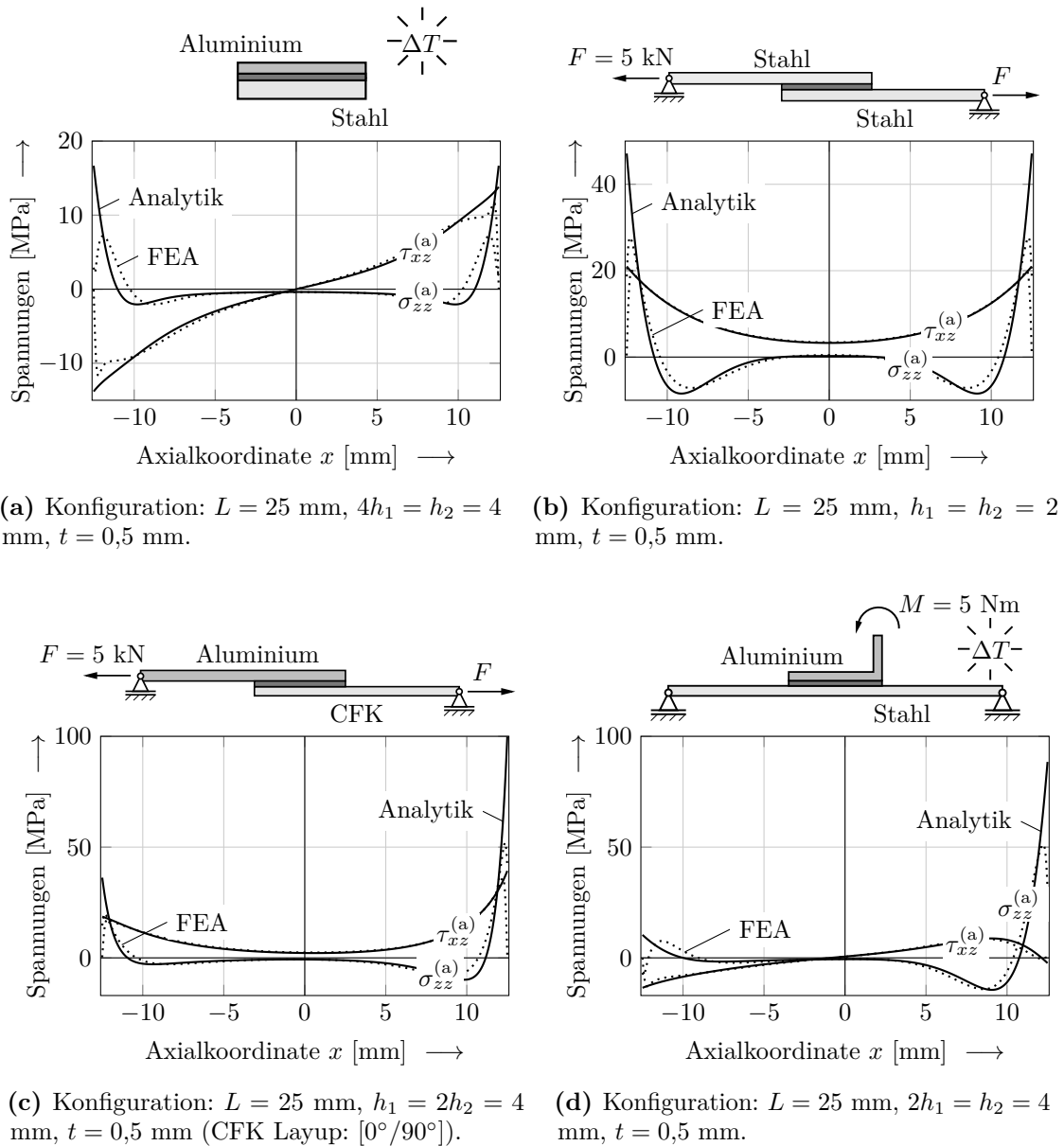
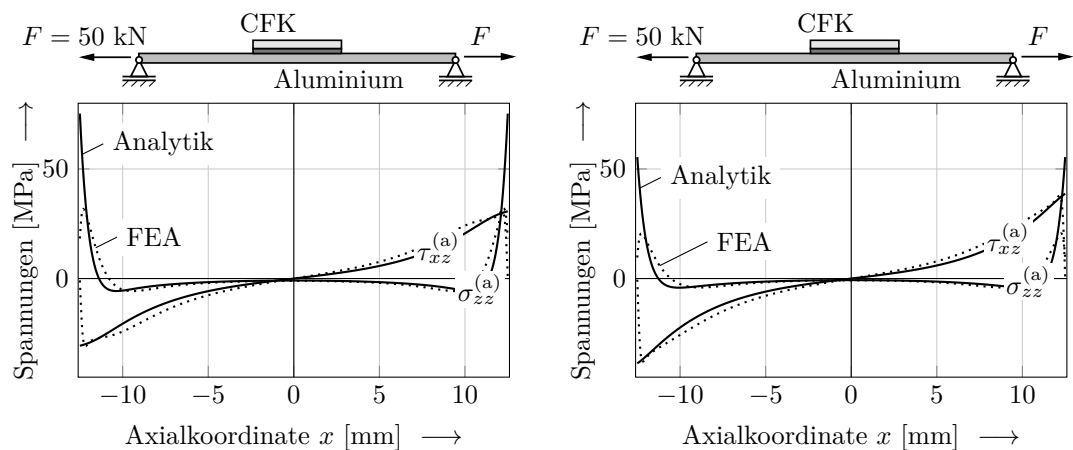
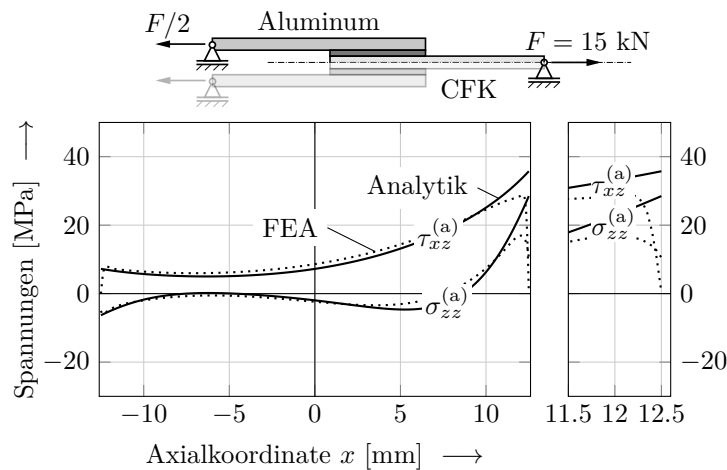


Abbildung 4.3: Vergleich der Spannungsergebnisse des analytischen Berechnungsverfahrens mit Ergebnissen der Finite-Elemente-Referenzlösung für einen Trimaterialstreifen (a), zwei einschnittige Überlappungsfügungen (b) und (c) sowie eine T-Fügung (d).

Sowohl für rein thermische oder mechanische als auch kombinierte Lastfälle ergibt sich insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse des analytischen Berechnungsverfahrens mit den Finite-Elemente-Referenzlösungen, insbesondere im mittleren Bereich der Überlappung. Betrachtet man eingehend die Ränder der Überlappung, siehe den vergrößerten Ausschnitt in Abbildung 4.4(c), sind jedoch Abweichungen erkennbar. Das analytische Modell ist nicht in der Lage die spannungsfreien Randbedingungen am Ende der Überlappung abzubilden. Hingegen werden sowohl für die Schäl- als auch für die Schubspannungen endliche Spannungsspitzen vorhergesagt. Dies



(a) Konfiguration: $L = 25$ mm, $4h_1 = h_2 = 4$ mm, $t = 0,5$ mm (CFK Layup: $[90^\circ/0^\circ]$).
 (b) Konfiguration: $L = 25$ mm, $4h_1 = h_2 = 4$ mm, $t = 0,5$ mm (CFK Layup: $[0^\circ/90^\circ]_S$).



(c) Konfiguration: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm, $t = 0,5$ mm (CFK Layup: $[0^\circ/90^\circ]_S$).

Abbildung 4.4: Vergleich der Spannungsergebnisse des analytischen Berechnungsverfahrens mit Ergebnissen der Finite-Elemente-Referenzlösung für zwei Verstärkungspflaster (a) und (b) sowie für eine zweiseitige Überlappungsfügung mit vergrößertem Ausschnitt am Rand der Überlappung.

lässt sich mit den vereinfachenden Annahmen zur Kinematik der Klebschicht erklären und ist ein bekanntes Defizit von *weak-interface*-Modellen, vgl. Kapitel 3.2.1. Allerdings ist – wie in den folgenden Abschnitten dargelegt – dieses Defizit von geringer Bedeutung, wenn zur Analyse des Tragverhaltens nicht-lokale Konzepte herangezogen werden.

4.5 Versagensbewertung mittels analytischer Lösung

Im Folgenden wird auf Basis des zuvor dargestellten analytischen Modells das Tragverhalten von Überlappungsfügungen mittels des gekoppelten Spannungs- und Energie-

kriteriums analysiert. Zur Auswertung des gekoppelten Kriteriums werden neben den Spannungen in der Klebschicht die inkrementellen Energiefreisetzungsraten möglicher Risskonfigurationen benötigt. Des Weiteren muss zur Berechnung der Versagenslast und der zugehörigen finiten Risslänge das zugrunde liegende Optimierungsproblem (2.86) gelöst werden. Beides wird im folgenden Abschnitt adressiert und im Detail dargestellt.

4.5.1 Berechnung der Energiefreisetzungsrates

Ausgehend von den Ergebnissen der Spannungsanalyse ergibt sich zunächst die sinnvolle Einschränkung möglicher Risskonfigurationen auf Risse ausgehend von den Überlappungsenden. Gemäß Gleichung (2.82) lassen sich die zugehörigen inkrementellen Energiefreisetzungsraten mittels Integration der differentiellen Energiefreisetzungsraten über die Risslängen berechnen. Differentielle Energiefreisetzungsraten von Rissen in Überlappungsfügungen wurden bereits im Rahmen von *weak-interface*-Modellen analysiert, vgl. Kapitel 3.3. Sowohl die Auswertung des J -Integrals (Fraisse u. Schmit, 1993, Hu, 1995, Lenci, 2001) als auch des Risschließintegrals (Carpinteri et al., 2009) und die Berechnung über Nachgiebigkeiten (Krenk, 1992) führen für die differentielle Energiefreisetzungsrates eines Risses der Länge a ausgehend von den Überlappungsrandern auf den Ausdruck

$$\mathcal{G}(a) = tW \left(\pm \frac{L}{2} \mp a \right) = \frac{1}{2} \frac{t}{E^{(a)}} \sigma_{\max}^2 + \frac{1}{2} \frac{t}{G^{(a)}} \tau_{\max}^2, \quad (4.44)$$

wobei die Bezeichnungen σ_{\max} und τ_{\max} aus Gründen der Übersichtlichkeit hier und in den folgenden Kapiteln für die Schäl- und Schubspannungen in der Klebschicht an der unmittelbaren Risspitze verwendet werden. W stellt dabei die Formänderungsenergie-dichte dar. In diesem Kontext kann die Initiierung eines finiten Risses als Verkürzung des Überlappungsbereiches interpretiert werden.⁵⁴ Die Energiefreisetzungsrates (4.44) lässt sich im Rahmen der dargestellten Modellierung in zwei Anteile aufspalten, die sich den Rissöffnungsmodi I und II zuordnen lassen:

$$\mathcal{G}_{\text{I}} = \frac{1}{2} \frac{t}{E^{(a)}} \sigma_{\max}^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_{\text{II}} = \frac{1}{2} \frac{t}{G^{(a)}} \tau_{\max}^2. \quad (4.45)$$

Die zugehörigen inkrementellen Energiefreisetzungsrates erhält man nach Gleichung (2.82) mittels Integration über die Risslänge. Da Risswachstum unmittelbar mit einer Verkürzung der Überlappungslänge zusammenhängt ($da = -dL$), ergeben sich für die inkrementellen Energiefreisetzungsrates die Ausdrücke

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{I}} = \frac{1}{\Delta a} \int_{L-\Delta a}^L \frac{1}{2} \frac{t}{E^{(a)}} \left(\sigma_{\max}(\tilde{L}) \right)^2 d\tilde{L}, \quad (4.46)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{II}} = \frac{1}{\Delta a} \int_{L-\Delta a}^L \frac{1}{2} \frac{t}{G^{(a)}} \left(\tau_{\max}(\tilde{L}) \right)^2 d\tilde{L}. \quad (4.47)$$

Die Auswertung der Integrale (4.46) und (4.47) muss aufgrund der Abhängigkeit der Schäl- und Schubspannungen von der Überlappungslänge L numerisch erfolgen.

⁵⁴ Da in *weak-interface*-Modellen finite Spannungswerte am Rande der Überlappung auftreten, ist im Widerspruch zur Theorie nach Gleichung (4.44) die Energiefreisetzungsrates verschwindender Risslängen ungleich Null. Dies ist eine bekannte Eigenschaft solcher Modelle und wurde eingehend in Weißgraeber et al. (2014) diskutiert.

4.5.2 Umsetzung des gekoppelten Kriteriums

Liegen sowohl die Spannungen als auch die Energiefreisetzungsraten möglicher Risskonfigurationen vor, muss zur Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums das in Kapitel 2.6 eingeführte Optimierungsproblem (2.86) gelöst werden.

Zunächst ist zur Formulierung des Optimierungsproblems ein geeignetes Spannungs- sowie Energiekriterium zu wählen. Nach Kapitel 2.4 erscheint die Verwendung der Normalspannungshypothese (2.63) zur Beschreibung spröden Versagens als zweckmäßig. Im Falle des eingeführten analytischen Modells lässt sie sich schreiben als

$$\sigma_{\text{NSH}} = \frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xz}^{(a)}\right)^2} \geq \sigma_c. \quad (4.48)$$

unter der Voraussetzung, dass $\sigma_{\text{NSH}} > 0$ Alternativ werden in vielen Fällen (Mantič, 2009, García u. Leguillon, 2012, Tran et al., 2012) Interaktionsgesetze der Form

$$\left(\frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{\sigma_c}\right)^n + \left(\frac{\tau_{xz}^{(a)}}{\tau_c}\right)^n \geq 1, \quad (4.49)$$

zur Beschreibung spröden Versagens von Grenzschichten verwendet. Die Wahl $n = 1$ führt dabei auf eine Darstellung der COULOMB-MOHR Hypothese (CMH), während das Kriterium für den Fall $n = 2$ ein elliptisches Spannungskriterium (EIS) darstellt. In Anlehnung an Gleichung (3.1) lässt sich ein ähnliches Interaktionsgesetz für die inkrementellen Energiefreisetzungsraten formulieren. Dabei wird aus Vereinfachungsgründen in vielen Untersuchungen zu Grenzschichtversagen ein lineares Interaktionsgesetz (LIG) der Form

$$\frac{\bar{\mathcal{G}}_{\text{I}}}{\mathcal{G}_{\text{Ic}}} + \frac{\bar{\mathcal{G}}_{\text{II}}}{\mathcal{G}_{\text{IIc}}} \geq 1 \quad (4.50)$$

verwendet. Alternativ lässt sich auch ein klassisches GRIFFITHSches Bruchkriterium (GB) für die inkrementelle Energiefreisetzungsraten implementieren, vgl. Gleichung (2.83). Ein weiterer gängiger Ansatz zur Analyse von Grenzschichtversagen lässt sich mittels einer vom Mixed-Mode-Winkel ψ abhängigen Bruchzähigkeit $\mathcal{G}_c(\psi)$ herleiten. Als Approximationsansatz zur Interaktion der verschiedenen Modi dient das von Hutchinson u. Suo (1991) vorgeschlagene phänomenologische Gesetz

$$\mathcal{G}_c(\psi) = \mathcal{G}_{\text{Ic}} \left(1 + \tan^2((1 - \Lambda)\psi)\right), \quad (4.51)$$

mit

$$\Lambda = 1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{G}_{\text{IIc}}}{\mathcal{G}_{\text{Ic}}} - 1} \right). \quad (4.52)$$

Ein zugehöriges Energiekriterium für inkrementelle Energiefreisetzungsraten, im Folgenden abgekürzt mit dem Index (IHS), lässt sich in der folgenden Form angeben

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_{\text{I}} + \bar{\mathcal{G}}_{\text{II}} \geq \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \mathcal{G}_c(\psi) da. \quad (4.53)$$

Aufgrund des zugrunde liegenden *weak-interface*-Modells zur Berechnung der Spannungen und Energiefreisetzungsraten ergibt sich für das zu lösende Optimierungsproblem (2.86) unabhängig von der Wahl der dargestellten Kriterien ein Sonderfall. Da die Spannungen ausgehend vom Rand der Überlappung von endlichen Spannungsspitzen monoton fallen, stellt das Spanningskriterium eine obere Schranke für die Risslänge dar. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrates steigt hingegen monoton mit größer werdender Risslänge, sodass das Energiekriterium eine untere Schranke für die finite Risslänge bildet. Die gesuchte Rissinitiierungslast ist genau dann gefunden, wenn beide Schranken übereinstimmen. Nach Kapitel 2.6 reduzieren sich daher die Ungleichungen zu Gleichungen und das Optimierungsproblem vereinfacht sich.

Die betrachteten überlappenden Klebfügungen, mit Ausnahme axial belasteter einschnittiger Überlappungsfügungen, stellen darüber hinaus lineare Probleme dar. Da, wie bereits in Kapitel 4.4, die Belastung des Überlappungsbereiches über einfache Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden, hängen die Klebschichtspannungen linear und die Energiefreisetzungsrates quadratisch von der äußeren Last ab. In diesem Fall lässt sich gemäß Gleichung (2.87) eine implizite Gleichung für die finite Risslänge Δa herleiten. Zur Lösung dieser Gleichung genügt eine einfache Nullstellensuche. Die ermittelte finite Risslänge wird in eines der beiden Teilkriterien eingesetzt und mittels einer weiteren Nullstellensuche die zugehörigen Rissinitiierungslast F_f bestimmt.

Bei einschnittigen Überlappungsfügungen unter axialer Zugbelastung treten aufgrund der Exzentrizität der angreifenden Lasten große Biegedehformationen der äußeren Füge-teile auf. Berücksichtigt man diese bei der Berechnung der angreifenden Kräfte und Momente des Überlappungsbereiches, erhält man einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen äußerer Belastung und den Klebschichtspannungen sowie den Energiefreisetzungsrates. Eine entsprechende analytische Lösung der am Überlappungsbereich wirkenden Randlasten für einschnittige Überlappungsfügungen ungleicher Mehrschichtverbunde wurde von Talmon l'Armée et al. (2016) vorgeschlagen und wird im Folgenden verwendet. Allerdings ist es möglich auch in diesem Fall das Optimierungsproblem effizient mittels eines iterativen Algorithmus zu lösen. Ein zugehöriger Ablaufplan des Algorithmus findet sich in Abbildung 4.5. Zunächst wird ein Startwert F_0 für den Belastungsparameter F ermittelt. Dabei wird F_0 gerade so gewählt, dass das Spanningskriterium am Rand der Überlappung erfüllt ist ($\Delta a_0 = 0$). Ist das Energiekriterium für $F_0, \Delta a_0$ bereits erfüllt, ist die Versagenslast $F_f = F_0$ ermittelt. Andernfalls startet ein iteratives Schema. Zunächst erfährt der Belastungsparameter F ein Update der Form

$$F_{i+1} = \sqrt{\frac{\bar{\mathcal{G}}_c}{\bar{\mathcal{G}}}} F_i, \quad F_{i+1} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\mathcal{G}}_I}{\bar{\mathcal{G}}_{Ic}} + \frac{\bar{\mathcal{G}}_{II}}{\bar{\mathcal{G}}_{IIc}}\right)^{-1}} F_i, \quad \text{bzw.} \quad F_{i+1} = \sqrt{\frac{\int_0^{\Delta a} \bar{\mathcal{G}}_c(\psi) da}{\Delta a \bar{\mathcal{G}}}} F_i, \quad (4.54)$$

abhängig von der Wahl des Energiekriteriums. Die energetischen Größen werden dabei mit den jeweiligen Iterationswerten $F_i, \Delta a_i$ ausgewertet. Das Update (4.54) basiert auf der quadratischen Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrates von der Last im Falle eines linearen Modells. Anschließend wird mittels des mit der Last F_{i+1} ausgewer-teten Spanningskriteriums die zugehörige finite Risslänge Δa_{i+1} bestimmt. Ist die

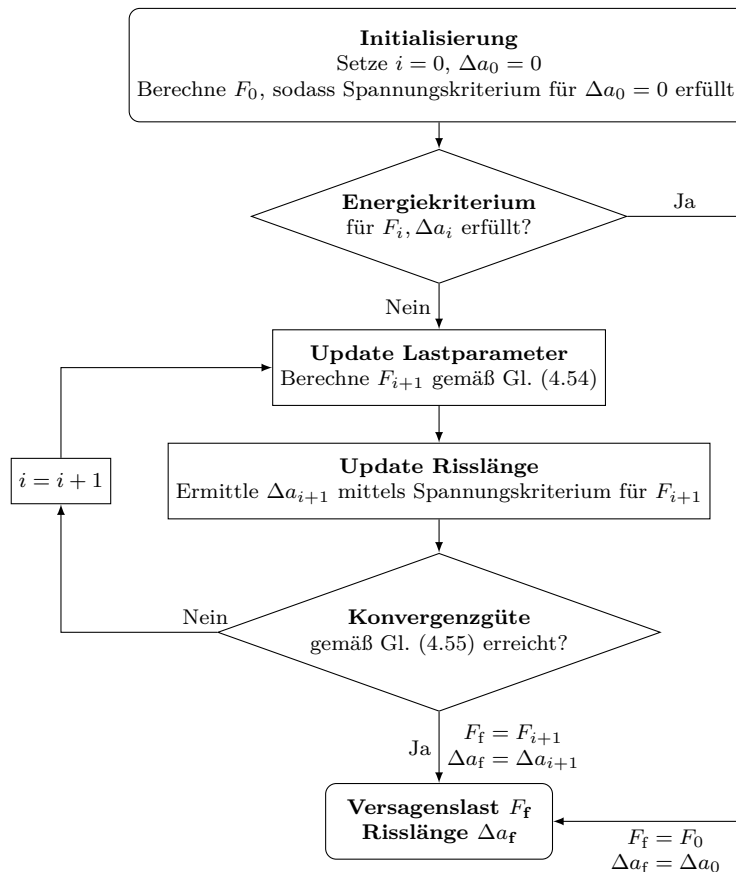


Abbildung 4.5: Ablaufplan des iterativen Algorithmus zur Lösung des Optimierungsproblems (2.86).

Konvergenzbedingung

$$\frac{|F_{i+1} - F_i|}{F_{i+1}} < \epsilon \quad (4.55)$$

mit einem Toleranzwert ϵ erfüllt, ist die Rissinitiierungslast $F_f = F_{i+1}$ mit zugehöriger Risslänge $\Delta a_f = a_{i+1}$ gefunden. In den untersuchten Fällen hat sich ein Toleranzwert von $\epsilon = 10^{-4}$ als ausreichend erwiesen. Die Effizienz des iterativen Lösers wird in Abbildung 4.6 beispielhaft an einer einschnittigen Stahl-Epoxy-CFK-Fügung gezeigt. Bereits nach vier Iterationsschritten und einer Rechenzeit unter $1,5^{55}$ s ist die Konvergenz der Ergebnisse erreicht. Dabei ist zu beachten, dass die betrachtete Überlappungsfügung mit ungleichen Fügeteilen, bei denen ein Fügeteil ein Mehrschichtverbund mit Biegedehnkopplung darstellt, mit zu den komplexesten Fügekonfigurationen gehört. Für symmetrische Fügungen mit isotropen Fügeteilen reduziert sich die Rechenzeit weiter. Des Weiteren ist bei der Auswertung mehrerer Fügekonfigurationen für das in MATLAB implementierte Programm eine Parallelisierung möglich, die nochmals die Rechenzeiten im Durchschnitt auf unter 1 s reduziert.

⁵⁵Die Angabe von Rechenzeiten bezieht sich wiederum auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit einem Intel® Core™ i5 Prozessor mit 4 Kernen und jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.

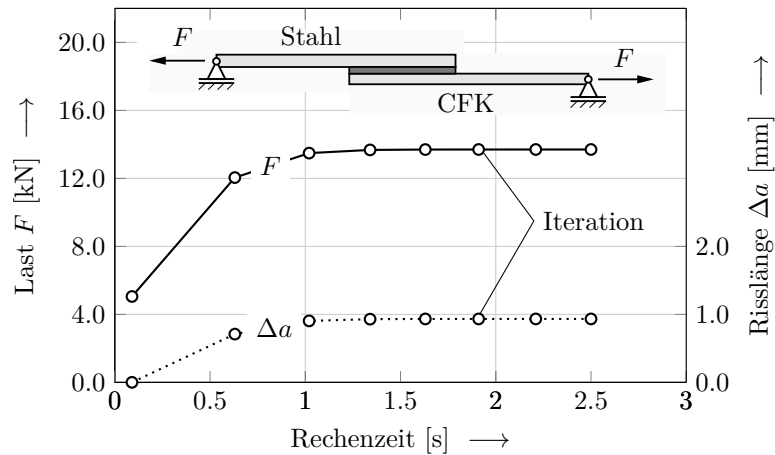


Abbildung 4.6: Konvergenz des iterativen Lösungsalgorithmus für eine Stahl-Epoxy-CFK-Fügung (CFK-Layup: $[0^\circ/90^\circ]$) der Dimensionen $L = 25$ mm, $h_1 = 2h_2 = 2$ mm, $t = 0,2$ mm, $b = 25$ mm. Die zugehörigen Randlasten wurden mittels der Rechenmethode von Talmon l’Armée et al. (2016) ermittelt. Als Versagenskriterien wurden die Normalspannungshypothese (4.48) und ein lineares Interaktionsgesetz der Energiefreisetzungsraten (4.50) mit den Versagensparametern des Klebstoffes $\sigma_c = 40$ MPa, $2\mathcal{G}_{Ic} = \mathcal{G}_{IIc} = 0,6$ N/mm verwendet.

4.6 Versagensbewertung mittels numerischem Modell

Als Referenzlösungen dienen bei der Betrachtung des Klebschichtversagens Finite-Elemente-Analysen mit der in ABAQUS 6.14-1 implementierten Kohäsivzonenmodellierung. Solche numerischen Umsetzungen von Kohäsivzonenmodellen werden oftmals zur Analyse des Tragverhaltens von Klebfügungen verwendet und haben sich für viele Fügekonfigurationen bewährt, vgl. Kapitel 3.3.

Die Referenzmodelle der einzelnen Fügekonfigurationen sind wiederum über die in ABAQUS 6.14-1 bereitgestellte Python-Schnittstelle parametrisch implementiert. Zweidimensionale Modelle der jeweiligen Fügungen mit zugehörigen Randbedingungen sind vorgesehen. Es wird linear-elastisches Materialverhalten für die Füge­teile und die Klebschicht angenommen. Die Belastung erfolgt aufgrund eines besseren Stabilitätsverhaltens der Rechnungen verschiebungsgesteuert.⁵⁶ Darüber hinaus werden geometrisch nichtlineare Effekte wie sie beispielsweise bei axial belasteten einschnittigen Überlappungsfügungen auftreten, vgl. Kapitel 3, durch eine iterative Lösung mit jeweiliger Neuberechnung der Steifigkeiten berücksichtigt.⁵⁷ Die Belastung wird in einzelnen Teilinkrementen aufgebracht, in denen iterativ das Erfüllen der Gleichgewichtsbedingungen angestrebt wird. Hierbei ist anzumerken, dass weiterhin mit linearisierten Verzerrungen gerechnet wird, sodass mit dem Vorgehen eine geometrische und keine materielle Nichtlinearität abgebildet wird. Die Diskretisierung der einzelnen Finite-Elemente-Modelle ist automatisch mit den in ABAQUS bereitgestellten Werkzeugen mit kleiner werdenden

⁵⁶Dies ist insbesondere bei instabilem Risswachstum von besonderer Bedeutung, da in diesem Fall der Riss ohne weitere Belastungssteigerung dynamisch fortschreitet.

⁵⁷In ABAQUS wird dieses Vorgehen durch die Option NLGEOM aktiviert.

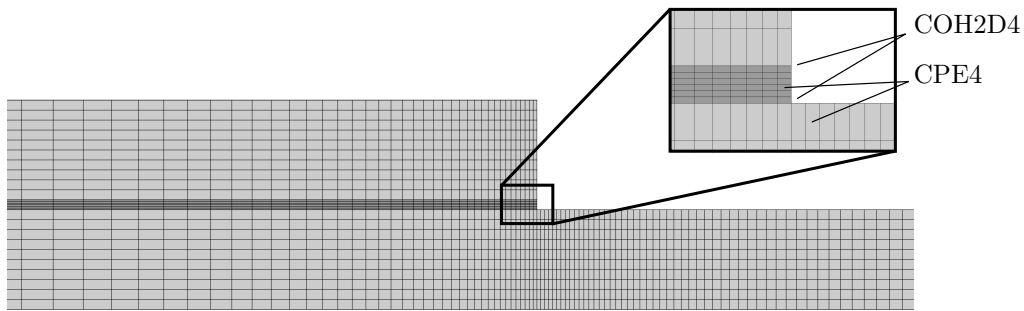


Abbildung 4.7: Beispielfähige Darstellung eines Ausschnittes des Rechenetzes für eine einschnittige Überlappungsfügung mit den Dimensionen $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $t = 0.2$ mm. Zusätzlich ist eine Vergrößerung des Netzes am Ende der Überlappung mit den zugehörigen Elementtypen abgebildet.

Elementen in Richtung des Überlappungsendes erstellt. Über die Klebschichtdicke sind in vertikaler Richtung mindestens sechs Elemente und über die Fügeteildicke mindestens zehn Elemente vorgesehen. Für die Vernetzung werden vierknotige Kontinuums-elemente unter Bedingungen des ebenen Verzerrungszustandes sowie vierknotige Kohäsivzonenelemente verwendet.⁵⁸ Dabei ist die Anzahl der Elemente gerade so gewählt, dass die Ergebnisse der zu bestimmenden Versagenslasten unabhängig von der Vernetzung ist. Eine beispielhafte Umsetzung der Vernetzung ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

Für die Kohäsivzonenmodellierung wird ein lokaler Ansatz verfolgt. Kohäsivzonenelemente mit verschwindend kleiner Dicke werden entlang der potentiellen Risspfade platziert. Im Falle einschnittiger Überlappungsfügungen sind dies die Grenzschichten zwischen Fügeteil und Klebschicht. Ein bilineares Spannungs-Separationsgesetz verknüpft die durch den Riss verursachten Verschiebungssprünge der gegenüberliegenden Rissflanken mit den daraus resultierenden Spannungen. Zunächst beschreibt das Gesetz linear-elastisches Materialverhalten bis ein in ABAQUS vorgesehene Schadensinitiiierungskriterium erreicht ist. Da Überlappungsfügungen allgemein unter Mixed-Mode-Beanspruchungen versagen, wird für die folgenden Berechnungen das Schadensinitiiierungskriterium

$$\left(\frac{\langle\sigma\rangle}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2 = 1 \quad (4.56)$$

vorgesehen, wobei σ und τ die Normal- und Schubspannungen innerhalb der Grenzschicht bezeichnen. Die Klammer $\langle\cdot\rangle$ wird auch als Macaulay- oder Föppl-Klammer bezeichnet und garantiert, dass Druckspannungen nicht zu einer Schadensinitiiierung führen.⁵⁹ Die initiale Steifigkeit im elastischen Bereich wird dabei auf den von Gonçalves et al. (2000) vorgeschlagenen Wert von 10^6 N/mm³ gesetzt, sodass die globale Steifigkeit der Struktur von den Kohäsivzonenelementen unbeeinflusst bleibt. Ist das Schadensinitiiierungskriterium (4.56) erreicht, erfolgt eine lineare Degradation der Steifigkeit gemäß eines skalaren

⁵⁸In der ABAQUS-Elementbibliothek sind diese Elementtypen jeweils mit den Namen CPE4 und COH2D4 hinterlegt.

⁵⁹Es gilt: $g(x) = \langle x \rangle$ mit $g(x) = x$ für $x \geq 0$ und $g(x) = 0$ für $x < 0$.

4.6 Versagensbewertung mittels numerischem Modell

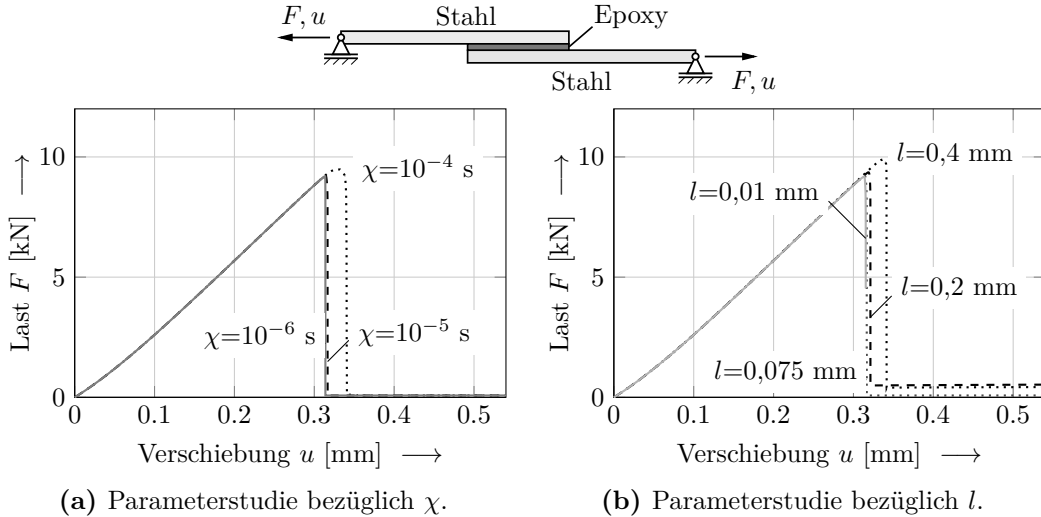


Abbildung 4.8: Last-Verschiebungsdiagramme der Parameterstudien zur Identifizierung der geeigneten Kohäsivzonenelementlänge l und des viskosen Parameters χ zur Konvergenzverbesserung für eine einschnittige Überlappungsfügung. Dimensionen: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $t = 0,2$ mm, $b = 25$ mm. Verwendete Versagensparameter des Klebstoffes: $\sigma_c = 40$ MPa, $\tau_c = 30$ MPa, $2\mathcal{G}_{Ic} = \mathcal{G}_{IIc} = 0,6$ N/mm.

Schädigungsparameters D . Das komplette Lösen der initial aufeinander liegenden Knoten erfolgt, sobald das lineare Interaktionsgesetz

$$\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}} + \frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{IIc}} = 1 \quad (4.57)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnen \mathcal{G}_I und \mathcal{G}_{II} jeweils die Energiefreisetzungsraten für reine Rissöffnungsmodi I und II zugehörig zu den Grenzschichtspannungen und -separationen.

Für jede Fügekonfiguration werden dabei die charakteristische Kohäsivzonenelementlänge l sowie der viskose Regularisierungsparameter χ zur Verbesserung der Konvergenz mittels Parameterstudien identifiziert. Die Bestimmung einer maximalen Kohäsivzonenelementlänge bzw. minimalen Anzahl von Kohäsivzonenelementen innerhalb der Kohäsivzone ist notwendig, damit die Spannungen in dem relevanten Bereich der Grenzschicht korrekt abgebildet werden können. Wird hingegen über den Regularisierungsparameter zu viel Viskosität in das Materialverhalten der Kohäsivzonenelemente eingebracht, führt dies zu einer künstlichen Erhöhung der Bruchzähigkeit. Allerdings führen eine beliebig kleine Kohäsivzonenelementlänge und ein beliebig kleiner Regularisierungsparameter zu einem enormen Rechenaufwand. Im letzteren Fall kann sogar ein Abbruch der Rechnung auftreten, da keine Konvergenz beim Erfüllen der Gleichgewichtsbedingungen erreicht wird. Da eine ungünstig große Wahl beider Parameter eine Überschätzung der Versagenslast zur Folge hat, werden Rechnungen mit kleiner werdenden Parametern durchgeführt bis Konvergenz bezüglich der Versagenslast erreicht wird. Exemplarisch sind entsprechende Parameterstudien für eine einschnittige Stahl-Epoxy-Stahl-Überlappungsfügung in Abbildung 4.8 illustriert. In diesem Beispiel haben sich eine Kohäsivzonenelementlänge von 0,075 mm und ein Regularisierungsparameter von $\chi = 10^{-5}$ als zweckmäßig erwiesen. Eine weitere Reduzierung der Parameter ergibt

Änderungen der errechneten Versagenslasten unter 1%. Hierbei ist zu erwähnen, dass die Finite-Elemente-Analysen mit Kohäsivzonenmodellierung bei den im Folgenden betrachteten Überlappungsfügungen Rechenzeiten von durchschnittlich einer Stunde benötigen.⁶⁰ Darüber hinaus sind für jede Konfiguration entsprechende Parameterstudien durchzuführen.

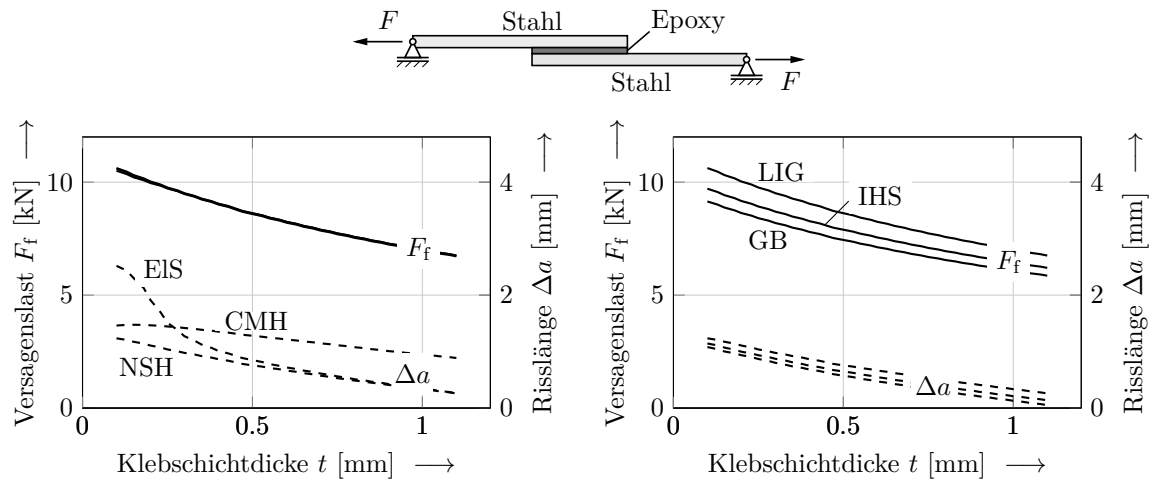
4.7 Ergebnisse

Im Folgenden wird der Einfluss verschiedener Versagenskriterien im Rahmen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums untersucht. Darüber hinaus erfolgt für verschiedene Überlappungskonfigurationen ein Vergleich der Ergebnisse des analytischen Modells mit numerischen Referenzlösungen sowie experimentellen Befunden aus der Literatur.

4.7.1 Einfluss der einzelnen Versagenskriterien

Zunächst wird am Beispiel einer einschnittigen Stahl-Epoxy-Stahl-Überlappungsfügung der Einfluss verschiedener Spannungs- und Energiekriterien auf die Versagenslasten und zugehörigen Risslängen analysiert. Abbildung 4.9 zeigt die Ergebnisse einer Studie bezüglich des Klebschichtdickeneffekts. Ein Vergleich der Ergebnisse unter Verwendung verschiedener Spannungs-kriterien und des linearen Interaktionsgesetzes (4.50) (siehe Abbildung 4.9(a)) zeigt, dass die errechnete Versagenslast nahezu unbeeinflusst von der Wahl des Spannungs-kriteriums bleibt. Die berechneten finiten Risslängen hingegen zeigen insbesondere im Bereich dünner Klebschichtdicken ($t < 0,5$ mm) aufgrund der vergleichsweise hohen Spannungslokalisationen am Rand der Überlappung eine starke Abhängigkeit des verwendeten Spannungs-kriteriums. Abbildung 4.9(b) illustriert die Auswirkungen verschiedener Energiekriterien unter Verwendung der Normalspannungshypothese (4.48) auf die berechnete Versagenslasten und finiten Risslängen. Hierbei ist Gegensätzliches zu beobachten. Die Wahl des Energiekriteriums hat sichtbare Auswirkungen auf die Versagenslasten und wenig Einfluss auf die berechneten Risslängen. Dabei ergeben sich bei allen drei Energiekriterien qualitativ gleichwertige Verläufe, die sich lediglich in ihrem Versagenslastniveau unterscheiden. Da der Mixed-Mode-Winkel ψ über die Klebschichtdicke nahezu unverändert bleibt, hängt dies maßgeblich mit den unterschiedlichen Interaktionsansätzen der Energiekriterien für eine Mixed-Mode-Beanspruchung zusammen. Aus Gründen der Vergleichbarkeit mit den numerischen Referenzlösungen werden für die folgenden Berechnungen das elliptische Spannungs-kriterium (4.49) und das lineare Interaktionsgesetz der Energiefreisetzungsraten (4.50) verwendet.

⁶⁰Analog zu Kapitel 4.5 beziehen sich die Angaben auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit einem Intel[®] Core[™] i5 Prozessor mit 4 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.



(a) Vergleich verschiedener Spannungskriterien. (b) Vergleich verschiedener Energiekriterien.

Abbildung 4.9: Einfluss verschiedener Versagenskriterien im Rahmen des gekoppelten Kriteriums auf die Versagenslasten und finiten Risslängen am Beispiel einer einschnittigen Stahl-Epoxy-Stahl-Überlappungsfügung. Dimensionen: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $b = 25$ mm. Verwendete Versagensparameter des Klebstoffes: $\sigma_c = 40$ MPa, $\tau_c = 30$ MPa, $2\mathcal{G}_{Ic} = \mathcal{G}_{IIc} = 0,8$ N/mm. (CMH: COULOMB-MOHR Hypothese, EIS: Elliptisches Spannungskriterium, NSH: Normalspannungshypothese, LIG: Lineares Interaktionsgesetz, GB: GRIFFITHSches Bruchkriterium, IHS: Interaktionsgesetz nach Hutchinson u. Suo (1991))

4.7.2 Vergleich analytischer, numerischer und experimenteller Daten

Im folgenden Abschnitt werden die durch die analytische Umsetzung des gekoppelten Kriteriums gewonnenen Ergebnisse mit numerischen Referenzlösungen sowie experimentellen Daten aus der Literatur verglichen.

Für den Vergleich mit experimentellen Daten werden sechs Studien zum Einfluss geometrischer Parameter auf die Versagenslasten von einschnittigen Überlappungsfügungen, Schälgefügen sowie zweisechnittigen Überlappungsfügungen herangezogen. Dabei werden ausschließlich Experimente mit spröden Klebstoffen sowie hochfesten Fügeteilen berücksichtigt. Zunächst wird eine Studie zum Klebschichtdickeneffekt einschnittiger Überlappungsfügungen von da Silva et al. (2006a) betrachtet. Dabei werden Stahlfügeteile mittels zweier Epoxidharzklebstoffe, Araldite AV138 mit Härter HV998 der Firma Huntsman und Hysol EA 9321 der Firma Henkel, verklebt. Beides sind Zweikomponentensysteme aus Harz und Härter, die bei Raumtemperatur aushärten. Darüber hinaus wird die Studie zum Einfluss der Überlappungslänge auf die Versagenslasten von einschnittigen Überlappungsfügungen von da Silva et al. (2004) zum Vergleich herangezogen. Dabei werden Stahlfügeteile mit dem heißhärtenden Einkomponentenklebstoff Redux 326 der Firma Hexcel Corporation verklebt. Es wird zusätzlich die Studie von Campilho et al. (2013b) über einschnittige Überlappungsfügungen mit unidirektional faserverstärkten Kunststofffügeteilen mit dem Layup $[0^\circ]_{16}$ betrachtet. Die verwendeten Materialparameter einer Einzelschicht sind in Tabelle 4.3 zu finden. Diese sind ebenfalls mit dem Klebstoff Araldite AV138/HV998 verklebt. Des Weiteren wird

Tabelle 4.3: Elastische Kenngrößen einer unidirektionalen CFK-Schicht SEAL[®] Texipreg HS 160 RM (Campilho et al., 2013b). Die 1-Richtung stellt dabei die Faserichtung dar. Der Schubkorrekturfaktor wurde mit der Methode von Klarmann u. Schweizerhof (1993) berechnet.

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12} [-]	$\kappa([0^\circ])$
109	8,819	4,315	0,342	0,7

eine Studie von Goglio et al. (2008) herangezogen, in der sowohl eine große Anzahl verschiedener einschnittiger Überlappungsfügungen sowie Schälfügungen von Stahlfügeteilen untersucht werden, die mit dem Acrylatklebstoff Loctite 330 der Firma Henkel verklebt sind. Darüber hinaus wird eine Studie von Mendoza-Navarro et al. (2013) betrachtet, die zweischnittige Überlappungsfügungen unter Biegung analysiert. Die Stahlfügeteile werden mittels eines selbst hergestellten, bei Raumtemperatur aushärtendem Polyesterharzes verklebt. Schließlich wird eine Studie von Carneiro et al. (2017) analysiert, in der der Einfluss der Fügeteildicke auf die Versagenslast von Schälfügungen untersucht wird. Aluminiumbleche sind dafür mit dem Klebstoff AV138/HV998 gefügt. Details der Versuchsaufbauten sowie -bedingungen sind den jeweiligen Publikationen zu entnehmen.

Die mechanischen Eigenschaften sowie die benötigten Parameter der einzelnen Klebstoffe für das analytische und numerische Versagensmodell, d.h. Festigkeiten und Bruchzähigkeiten, sind weitestgehend der Literatur entnommen. Da für die betrachteten Klebstoffe wenige bis keine Daten zur Bruchzähigkeit in Modus II gefunden werden konnten, wird im Folgenden als Approximation das Doppelte der Bruchzähigkeit in Modus I angenommen ($\mathcal{G}_{IIc} = 2\mathcal{G}_{Ic}$). Dies stellt für die meisten spröden Strukturklebstoffe eine hinreichend gute Approximation dar (da Silva et al., 2006a, Lee et al., 2010). Allein für den Acrylatklebstoff Loctite 330 konnten keine einheitlichen Werte der Versagensparameter in der Literatur gefunden werden. Um dennoch die Versuchsergebnisse adäquat mit den implementierten Versagensmodellen abbilden zu können, wurde eine Kalibrierung der Zugfestigkeit sowie der Bruchzähigkeit in Modus I mittels des analytischen Modells an den experimentellen Ergebnissen von Goglio et al. (2008) für zehn Konfigurationen einschnittiger Überlappungsfügungen durchgeführt. Hierbei wurde für einen großen Bereich von Versagensparameterpaaren ($\sigma_c, \mathcal{G}_{Ic}$) Versagenslastvorhersagen mittels des vorgestellten analytischen Modells unter Verwendung der Normalspannungshypothese berechnet, um die Parameter für eine bestmögliche Vorhersage zu bestimmen. Dies wurde durch eine Minimierung der relativen Abweichung

$$\Delta_{\text{FBM}} = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{F_{f,\text{Exp}}^i - F_{f,\text{FBM}}^i}{F_{f,\text{Exp}}^i} \right)^2} \quad (4.58)$$

erreicht, wobei $F_{f,\text{Exp}}^i$ und $F_{f,\text{FBM}}^i$ die jeweiligen experimentell ermittelten und vorhergesagten Versagenslasten der zehn Konfigurationen darstellen. Die Abkürzung FBM (Finite BruchMechanik) bezeichnet hier und im Folgenden die durch die analytische Umsetzung des gekoppelten Kriteriums ermittelten Größen. Die durch die Minimierung von Gleichung (4.58) ermittelten Parameter ($\sigma_c = 35$ MPa, $\mathcal{G}_{Ic} = 0,12$ N/mm) führen

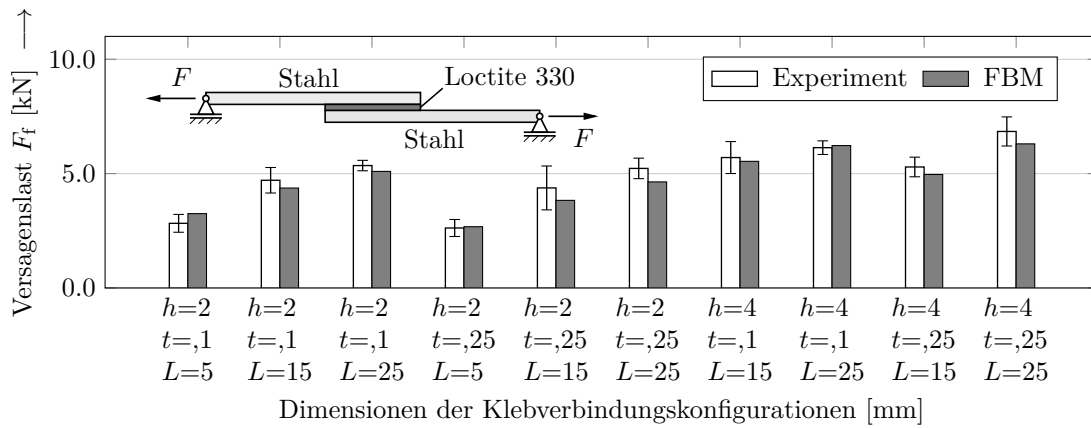


Abbildung 4.10: Vergleich der vorhergesagten mit den von Goglio et al. (2008) experimentell ermittelten Versagenslasten mittels der durch die Kalibrierung bestimmten Versagensparametern für einschnittige Überlappungsfügungen ($b = 20$ mm).

auf eine relative Abweichung von $\Delta_{\text{FBM}} = 0,07$ und werden im Folgenden für alle Berechnungen mit dem Klebstoff Loctite 330 verwendet.⁶¹ Als Indikator für die Qualität der ermittelten Versagensparameter dient die relative Abweichung der experimentell ermittelten Daten, die sich zu

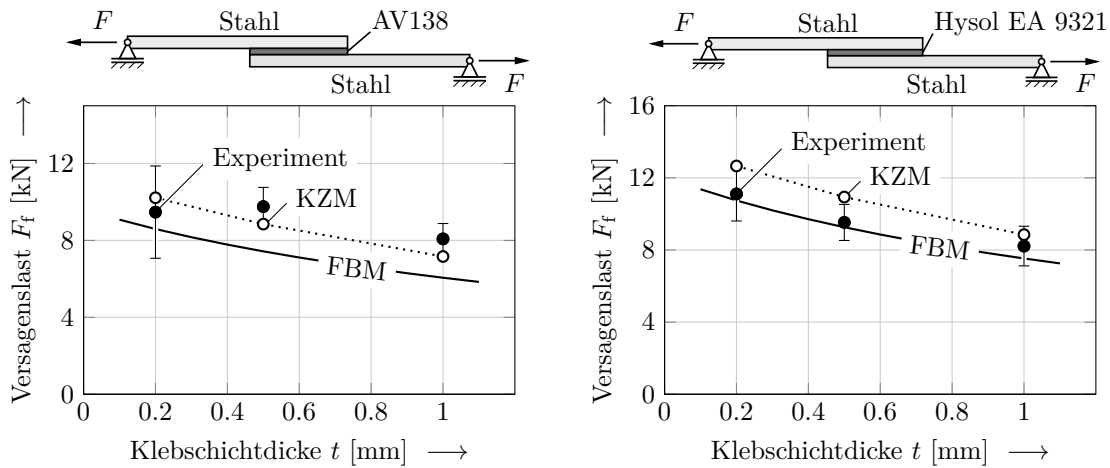
$$\Delta_{\text{Exp}} = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{\Delta F_{f,\text{Exp}}^i}{F_{f,\text{Exp}}^i} \right)^2} = 0,12 \quad (4.59)$$

ergibt, wobei $\Delta F_{f,\text{Exp}}^i$ die jeweilige Streuung der Versuchsergebnisse bezeichnet. Die zugehörigen Versagenslastvorhersagen und ein Vergleich mit experimentellen Daten sind in Abbildung 4.10 illustriert. Eine Abschätzung für die Schubfestigkeit ergibt sich mittels des VON MISES-Kriteriums ausgewertet für einen reinen Schubspannungszustand $\tau_c = 1/\sqrt{3}\sigma_c \approx 20,2$ MPa. Die verwendeten Materialparameter der Klebstoffe sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst dargestellt.

Tabelle 4.4: Materialkenngrößen der verwendeten Klebstoffe.

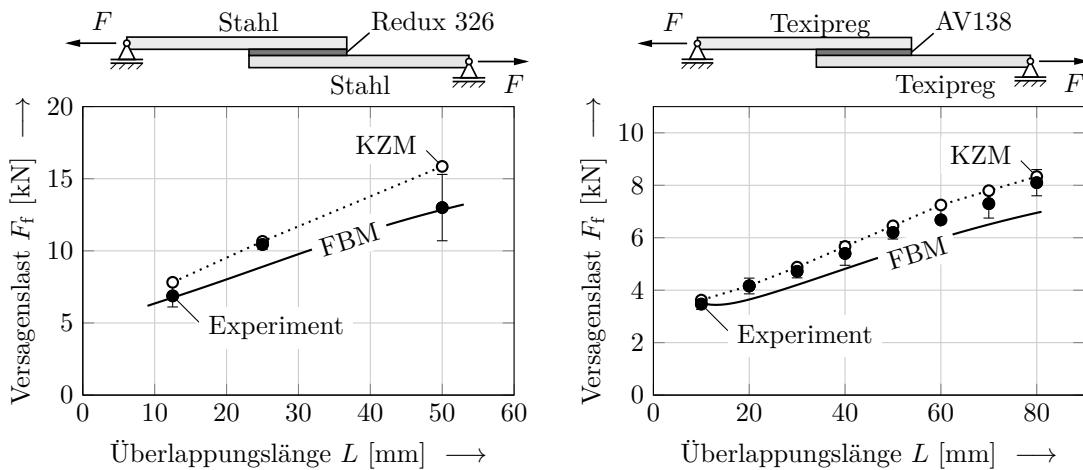
	AV138/HV998	Hysol EA 9321	Redux 326	Loctite 330	Polyesterharz
$E^{(a)}$ [GPa]	4,89	3,87	4,44	0,88	3,13
$\nu^{(a)}$ [-]	0,35	0,36	0,35	0,15	0,35
σ_c [MPa]	39,45	46,0	50,9	35,0	29,9
τ_c [MPa]	30,2	33,0	36,6	20,2	13,0
\mathcal{G}_{Ic} [N/mm]	0,3	0,45	0,3	0,12	0,052
\mathcal{G}_{IIc} [N/mm]	0,6	0,9	0,6	0,24	0,104
Quellen	da Silva et al. (2006a)	da Silva et al. (2006a)	da Silva et al. (2009b)	Goglio et al. (2008)	Mendoza-Navarro et al. (2013)

⁶¹Die ermittelte Bruchzähigkeit in Modus I liegt zwischen den in der Literatur gefunden Werten $\mathcal{G}_{Ic} = 0,09$ N/mm (Pirondi u. Nicoletto, 2002) und $\mathcal{G}_{Ic} = 0,55$ N/mm (Pirondi u. Nicoletto, 2000).



(a) Untersuchung des Klebschichtdickeneffekts (da Silva et al., 2006a). Dimensionen: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $b = 25$ mm.

(b) Untersuchung des Klebschichtdickeneffekts (da Silva et al., 2006a). Dimensionen: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $b = 25$ mm.

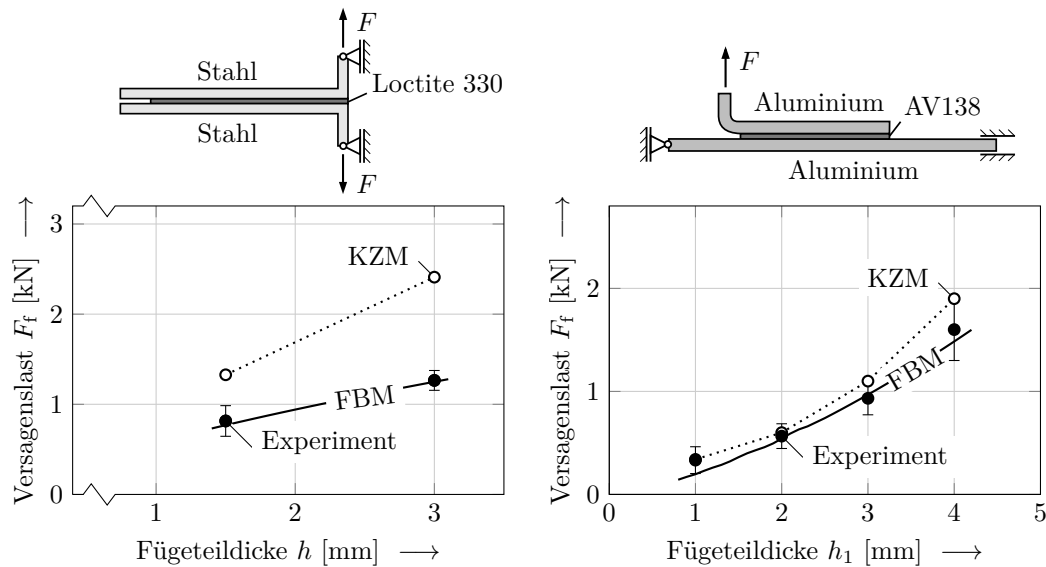


(c) Untersuchung des Einflusses der Überlappung (da Silva et al., 2004). Dimensionen: $t = 0,12$ mm, $h_1 = h_2 = 1,5$ mm, $b = 25$ mm.

(d) Untersuchung des Einflusses der Überlappung (Campilho et al., 2013b). Dimensionen: $t = 0,2$ mm, $h_1 = h_2 = 2,4$ mm, $b = 15$ mm.

Abbildung 4.11: Vergleich der analytischen Versagenslastvorhersagen mittels finiter Bruchmechanik (FBM) mit numerisch umgesetzten Kohäsivzonenmodell-Rechnungen (KZM) und experimentell ermittelten Versagenslasten.

Der Vergleich der Ergebnisse mit experimentellen Befunden für unter Zug belastete einschnittige Überlappungsfügungen ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Es ergeben sich gute Übereinstimmungen mit den Experimenten und in allen Fällen eine konservative Abschätzung gegenüber den Ergebnissen der numerischen Referenzlösung. In den meisten Fällen liegen die Vorhersagen innerhalb der Streuung der Experimente. Es ergibt sich lediglich eine maximale Abweichung von (-24%) für eine Klebschichtdicke von $t = 0,5$ mm für die Stahl-AV138/HV998-Stahl-Fügung dargestellt in Abbildung 4.11(a). Sowohl der Klebschichtdickeneffekt, vgl. Diskussion in Kapitel 3.1.2, als auch der Einfluss der Überlappungslänge auf die Versagenslast werden von beiden Versagensmo-



(a) Untersuchung der Fügeteildicken (Goglio et al., 2008). Dimensionen: $L = 150$ mm, $t = 0,1$ mm, $b = 20$ mm.

(b) Untersuchung der oberen Fügeteildicke (Carneiro et al., 2017). Dimensionen: $L = 25$ mm, $t = 0,2$ mm, $h_2 = 3$ mm, $b = 25$ mm.

Abbildung 4.12: Vergleich der analytischen Versagenslastvorhersagen mittels finiter Bruchmechanik (FBM) mit numerisch umgesetzten Kohäsivzonenmodell-Rechnungen (KZM) und experimentell ermittelten Versagenslasten für Abschälfügungen.

dellen korrekt abgebildet. Ersteres lässt sich insbesondere durch die Berücksichtigung der Spannungen als auch der Energiebilanz in den Versagensmodellen erklären. Trotz sinkender Spannungsniveaus am Ende der Überlappung steigt mit steigender Klebschichtdicke die gespeicherte Formänderungsenergie, die bei Rissinitiierung freigesetzt wird. Darüber hinaus ist es bemerkenswert, dass das vorgestellte analytische Modell gut übereinstimmende Versagenslastvorhersagen für Mehrschichtverbundfügungen, vgl. Abbildung 4.11(d), liefert. Dies ist mit den bisherigen Umsetzungen des gekoppelten Kriteriums für einschnittige Überlappungsfügungen (Weißgraeber u. Becker, 2011a,b, 2013) nicht möglich.

In Abbildung 4.12 und 4.13 sind die Vergleiche der Ergebnisse mit experimentellen Befunden für zwei Abschälfügungen sowie eine zweiseitige Überlappungsfügung unter Biegung dargestellt. Für die Abschälfügung in Abbildung 4.12(a) ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung verglichen mit den durch das analytische Modell ermittelten Versagenslastvorhersagen und experimentellen Daten. Hierbei ist erwähnenswert, dass die Versagensparameter des Klebstoffes Loctite 330 zwar an Experimenten kalibriert wurden. Allerdings handelte es sich dabei ausschließlich um unter Zug belastete einschnittige Überlappungsfügungen. Abbildung 4.12(a) zeigt, dass hier eine Übertragung der Qualität der Versagenslastvorhersagen auf eine andere Struktursituation möglich ist. Die numerische Referenzlösung unter Verwendung der kalibrierten Versagensparameter überschätzt hingegen die experimentell ermittelten Versagenslasten. Für die Abschälfügung aus Aluminiumblechen zeigt sich in Abbildung 4.12(b) eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse des analytischen Modells mit denen des numerischen Modells sowie den Experimenten. Sowohl die Versagenslastvorhersagen des numerischen Modells als auch

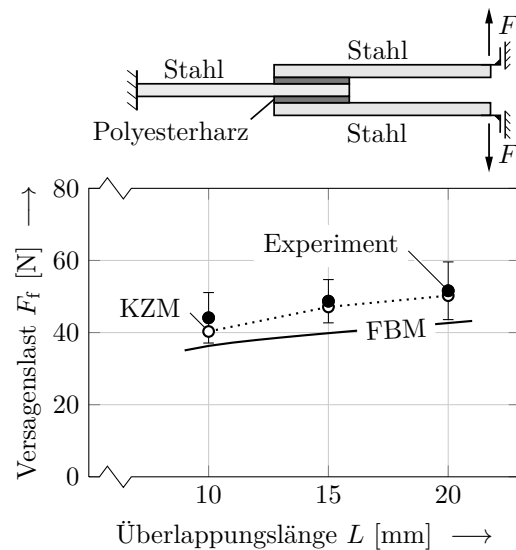


Abbildung 4.13: Vergleich der Versagenslastvorhersagen mit experimentell ermittelten Versagenslasten zur Untersuchung des Einflusses der Überlappung (Mendoza-Navarro et al., 2013). Dimensionen: $t = 0,5$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm, $b = 12,5$ mm.

des analytischen Modells liegen innerhalb der experimentellen Streuung. Abbildung 4.13 zeigt, dass ebenfalls eine gute Übereinstimmung der Versagenslastvorhersagen mit den experimentellen Befunden für zweischichtige Überlappungsfügen unter Biegung vorliegt. Die maximale Abweichung zwischen Versagenslastvorhersagen mittels FBM und experimentellen Befunden beträgt -17%. Im Vergleich zu den Ergebnissen der numerischen Referenzrechnungen ergeben sich mittels des analytischen Berechnungsverfahrens konservative Versagenslastvorhersagen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die vorgestellte analytische Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums Versagenslastvorhersagen mit einer guten bis sehr guten Übereinstimmung zu experimentellen Befunden ermöglicht. Im Vergleich zu numerischen Referenzlösungen mit Kohäsivzonenmodellierung zeigen sich stets konservative Vorhersagen und eine ähnlich gute Qualität der Ergebnisse. Dabei ist erwähnenswert, dass die jeweilige Rissinitiierung unter verschiedenen Mixed-Mode-Beanspruchungen stattfindet. Sowohl der Einfluss der Klebschichtdicke als auch der Überlappungslänge und Füge-teildicken wird für verschiedene Fügekonfigurationen korrekt wiedergegeben. Hierbei hat insbesondere die korrekte Vorhersage des Klebschichtdickeneffekts bei einschichtigen Überlappungsfügen eine besondere Bedeutung, da die meisten klassischen Versagensmodelle dies nicht ermöglichen, vgl. Kapitel 3.3.

4.8 Einfluss der Sprödigkeit auf die Versagensbewertung

Im folgenden Kapitel wird ein Ansatz zur Bewertung der Bedingung „hinreichender Sprödigkeit“ für das vorgestellte analytische Versagensmodell vorgestellt. Dabei ist zu erwähnen, dass Sprödigkeit dabei nicht als Materialeigenschaft sondern als

Struktureigenschaft anzusehen ist. Dies lässt sich bei den Versagensvorgängen unterschiedlichster Struktursituationen mit Hinblick auf die Größe der jeweiligen Strukturen erkennen (Bazant u. Planas, 1997). Zur Beschreibung solcher Größeneffekte werden dimensionslose Kennzahlen, sogenannte Sprödigkeitszahlen bzw. -ziffern, eingeführt, die neben Versagensparametern auch eine charakteristische Strukturgröße berücksichtigen. Bei Klebverbindungen stellt die Klebschichtdicke (Gleich et al., 2001, Cornetti et al., 2012) die charakteristische Strukturgröße dar. Weißgraeber u. Becker (2013) schlugen im Rahmen einer Modellierung des gekoppelten Kriteriums eine Formulierung einer Sprödigkeitsziffer für Klebverbindungen unter Mixed-Mode-Beanspruchung vor,

$$\mu = \frac{\sigma_{\text{NSH}}^2 \mathcal{G}_{\text{Ic}}}{\mathcal{G} \sigma_c^2}, \quad (4.60)$$

wobei \mathcal{G} gerade die in Gleichung (4.44) eingeführte differentielle Energiefreisetzungsrate einer *weak-interface*-Lösung, die explizit von der Klebschichtdicke t abhängt und σ_{NSH} die Hauptnormalspannung am Rand der Klebschicht darstellt. Das Spannungskriterium wird gerade so in das Verhältnis zu einem Energiekriterium gesetzt, dass sich bei gleichzeitigem Erfüllen beider Teilkriterien der Wert $\mu = 1$ ergibt.⁶² Diese Formulierung ist dadurch motiviert, dass der Wert $\mu = 1$ einer Initiierung eines Risses mit infinitesimaler Länge, was ideal sprödem Verhalten entspricht, zugeordnet werden kann. Analog lässt sich abhängig von der jeweiligen Wahl des Spannungs- und Energiekriteriums eine Sprödigkeitszahl für das vorgestellte analytische Modell herleiten. Für die in Kapitel 4.7.2 verwendeten Kriterien ergibt sich beispielsweise

$$\mu = \frac{\left(\frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}^{(a)}}{\tau_c}\right)^2}{\frac{\mathcal{G}_{\text{I}}}{\mathcal{G}_{\text{Ic}}} + \frac{\mathcal{G}_{\text{II}}}{\mathcal{G}_{\text{IIc}}}}, \quad (4.61)$$

sodass sich wiederum bei gleichzeitigem Erfüllen des Spannungs- und Energieteilkriteriums $\mu = 1$ ergibt. Der Fall $\mu \rightarrow \infty$ hingegen charakterisiert ideal-plastisches Verhalten. Eine solche Sprödigkeitszahl, die von der Wahl der Kriterien abhängt, ist zwar keine Sprödigkeitsziffer im klassischen Sinne wie in Bazant u. Planas (1997) beschrieben. Allerdings ermöglicht die Formulierung (4.61) Grenzen des Modells explizit zu beziffern.

Exemplarisch wird der Einfluss der Sprödigkeit auf die Versagenslastvorhersagen von einschnittigen Überlappungsfügungen anhand der Studie zum Klebschichtdickeneffekt von Castagnetti et al. (2011) aufgezeigt. Dabei wurde neben dem bereits eingeführten Klebstoff Loctite 330, der heißhärtende Einkomponentenkleber Hysol EA 9514 der Firma Henkel mit den in Tabelle 4.5 dargestellten Materialkenngrößen verwendet. Abbildung 4.14 zeigt die Ergebnisse der Versagenslastvorhersagen im Vergleich zu experimentellen Befunden und den Verlauf der Sprödigkeitsziffer (4.61) über die Klebschichtdicke. Dabei zeigt für beide Testreihen die Sprödigkeitsziffer ein hyperbelartiges Verhalten über die Klebschichtdicke. In Abbildung 4.14(a) erkennt man zunächst, dass

⁶²Eingehende Untersuchungen zur Abhängigkeit der Zugfestigkeit und Bruchzähigkeit auf die Sprödigkeit findet man bei Weißgraeber et al. (2014).

Tabelle 4.5: Materialkenngrößen des Klebstoffes Hysol EA 9514 (Pirondi u. Moroni, 2009, Castagnetti et al., 2011).

$E^{(a)}$ [GPa]	$\nu^{(a)}$ [-]	σ_c [MPa]	τ_c [MPa]	\mathcal{G}_{Ic} [N/mm]	\mathcal{G}_{IIc} [N/mm]
1,78	0,33	49,0	28,3	0,92	1,84

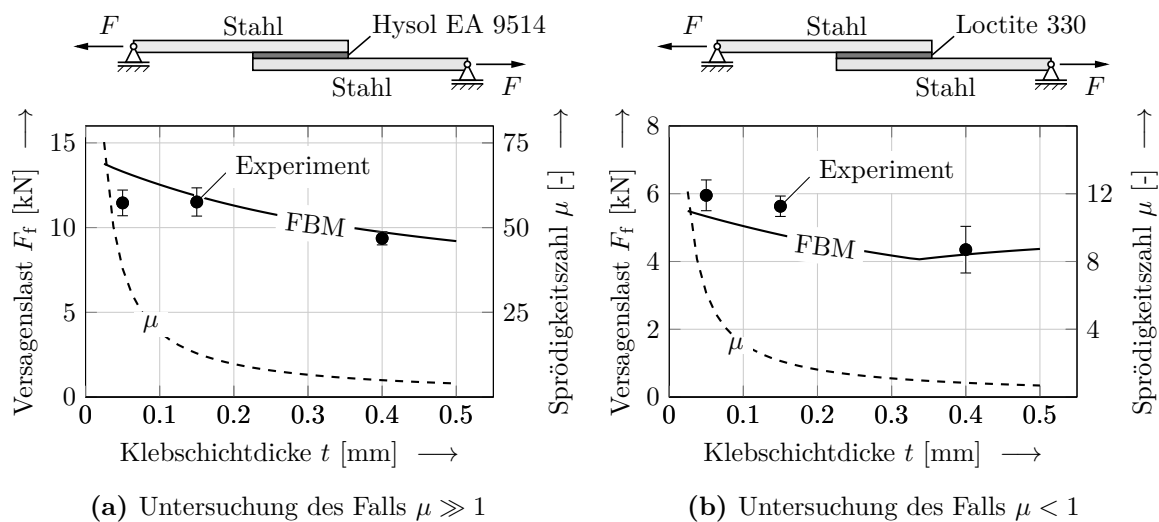


Abbildung 4.14: Vergleich der vorhergesagten Versagenslasten (FBM) mit experimentellen Befunden von Castagnetti et al. (2011) und Untersuchung des Einflusses der Sprödigkeit an Fügungen der Dimensionen: $L = 12,7$ mm, $h_1 = h_2 = 1,6$ mm, $b = 25$ mm.

für hinreichend große Klebschichtdicken eine gute Übereinstimmung zwischen vorhergesagten und experimentell ermittelten Versagenslasten vorliegt. Allerdings überschätzt das vorgestellte analytische Modell die Versagenslasten für kleine Klebschichtdicken. Es ergibt sich ein Fehler von +18% für $t = 0,05$ mm bei einer Sprödigkeitszahl von $\mu = 38$. Für die in Kapitel 4.7.2 untersuchten Klebverbindungen ergaben sich hingegen gute bis sehr gute Übereinstimmungen mit experimentellen Befunden mit konservativen Abweichungen bei Sprödigkeitsziffern $\mu < 13$. Daraus lässt sich schließen, dass die Auswertung der Sprödigkeitsziffer als Indiz für hinreichende Sprödigkeit und damit für die Qualität der Versagenslastvorhersage verwendet werden kann.

Abbildung 4.14(b) illustriert hingegen den Grenzfall von Sprödigkeitsziffern kleiner eins. Für kleine Klebschichtdicken liegt zunächst hinreichend sprödes Verhalten vor, sodass das vorgestellte Modell eine konservative Versagenslastvorhersage ermöglicht. Ab einer Klebschichtdicke von $t = 0,34$ mm sinkt jedoch die Sprödigkeitszahl auf unter eins, sodass das Energiekriterium immer erfüllt ist und nur das Spannungskriterium ausschlaggebend für die Versagensbewertung ist. In diesem Fall tritt das in Kapitel 3.3 beschriebene Verhalten der Versagenslastvorhersagen mittels reiner Spannungskriterien auf. Es werden steigende Versagenslasten mit steigender Klebschichtdicke vorhergesagt.

Zusammengefasst ermöglicht die Betrachtung einer Sprödigkeitszahl der Form (4.61) die

Einordnung in sprödes bzw. duktilen Versagensgeschehen und damit auch die a-priori-Abschätzung der Qualität der Versagensbewertung. Bei besonders hohen Sprödigkeitszahlen liegt ein duktilen Verhalten der Klebschicht vor und die Versagenslasten werden überschätzt. Bei kleinen Sprödigkeitszahlen hingegen liegt sprödes Verhalten vor und das analytische Modell liefert adäquate Versagenslastvorhersagen mit konservativen Abschätzungen. Je nach Formulierung der Sprödigkeitsziffer muss die obere Grenze für hinreichend sprödes Materialverhalten jedoch neu ermittelt werden. Sinkt die Sprödigkeitszahl unter eins, entspricht das vorgestellte Modell gerade der Anwendung eines klassischen Spannungskriteriums der Form (2.61).

4.9 Grenzen des Modells

Infolge der Modellierung und den zugrunde liegenden Idealisierungen ergeben sich neben der Forderung hinreichender Sprödigkeit weitere Grenzen des vorgestellten Modells.

Die Füge­teile werden in der Modellierung mittels linear Elastizitätstheorie beschrieben. Dies setzt voraus, dass die Füge­teile unter Belastung kein nichtlineares Materialverhalten aufweisen. Ferner wird das Versagen der Füge­teile nicht berücksichtigt, sodass vorrangig Fügungen hochfester Füge­teile mit der vorgestellten Modellierung beschrieben werden können. Die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung zur Modellierung der Füge­teile erlegt mit ihren Idealisierungen, vgl. Kapitel 2.2.2, weitere Anforderungen an die Geometrie auf. Ähnlich zur Balkentheorie muss eine gewisse Schlankheit der Füge­teile L/h als untere Grenze vorliegen, damit eine Anwendung der Theorie möglich ist. Nach Gross et al. (2007a) bzw. Altenbach et al. (1996) wird in der EULER-BERNOULLI Balkentheorie eine Schlankheit von $L/h > 5$ bzw. $L/h > 10$ gefordert. Da Verbundwerkstoffe im allgemeinen schubweicher sind als traditionelle Werkstoffe haben Querschubdeformationen für Laminat­e nicht nur für kurze, gedrungene Balken einen maßgeblichen Einfluss auf das Verformungsverhalten. Bei der Anwendung der klassischen Laminat­theorie findet man in der Literatur als Empfehlung $L/h > 25$ (Altenbach et al., 1996). Für die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung ergibt sich in den gezeigten Beispielen in Altenbach et al. (1996) eine Mindestschlankheit von $L/h > 10$. Bei der vorgestellten Modellierung ergibt sich allerdings bei näherer Betrachtung der Ergebnisse in Abbildung 4.11(d), dass sich für die dargestellte Konfiguration ebenfalls hinreichend gute Ergebnisse für $L/h > 4,2$ ergeben. Darüber hinaus ergeben sich Einschränkungen bezüglich des Laminat­aufbaus aufgrund der ebenen Modellierung. Infolge der in Kapitel 4.2 vorgestellten Annahmen und zugehörigen Gleichungen ist ersichtlich, dass nur ausgeglichene Laminat­e ($A_{16} = A_{26} = 0$) frei von Drillkopplung ($D_{16} = D_{26} = 0$) und ohne Biege-Dehn-Kopplungen der Form B_{16}, B_{26} analysiert werden können. Dazu gehören insbesondere Kreuzverbunde mit symmetrischen und asymmetrischen Lagenaufbauten, die aus 0° - und 90° -Laminat­einzelschichten aufgebaut sind.

Weitere Einschränkungen ergeben sich aus den vereinfachten kinematischen Annahmen für die Klebschicht. Der *weak-interface*-Ansatz basiert auf asymptotischen Methoden bezüglich der Klebschicht­dicke, sodass eine hinreichend dünne und nachgiebige Klebschicht zur Anwendung des Ansatzes vorliegen muss, vgl. Kapitel 3.2.1. Für die

betrachteten Strukturklebungen mit Klebschichtdicken bis zu 1 mm ist dies ohne weitere Einschränkungen erfüllt. Dickschichtklebungen mit Klebschichtdicken $t > 10$ mm, wie sie typischerweise bei Dichtstoffen ausgeführt werden, lassen sich mit dem vorgestellten Ansatz nicht berechnen.

4.10 Anmerkungen und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit Klebschichtversagen von Strukturklebungen. Die Modellierung lässt sich jedoch leicht erweitern, sodass auch Fügeiteilveragen betrachtet werden kann. Dabei müssen abhängig von der Art der Fügeiteile (Mehrschichtverbund bzw. isotroper spröder oder duktiler Werkstoff) verschiedene Versagensmodi berücksichtigt werden. Einfache Gleichungen zur Bestimmung von Versagenslasten infolge duktilen Fügeiteilveragens sind beispielsweise bei Karachalios et al. (2013a) aufgeführt. Sie basieren auf der Annahme, dass die Fügung bei Fließbeginn bzw. bei kompletter Plastifizierung des Fügeiteils versagt. Schließlich müssen alle Versagenslasten zu den möglich auftretenden Versagensmodi berechnet werden. Die Versagenslast der Fügung ergibt sich dann als minimale Versagenslast der berechneten Werte.

Aufgrund der analytischen Natur der vorliegenden Modellierung eignet sich der Ansatz insbesondere zur Anwendung in Strukturoptimierungen. Dabei können sowohl Optimierungsprobleme hinsichtlich der einzelnen Werkstoffe, der Geometrieparameter als auch der Fügungskonfiguration formuliert werden. Typische Zielfunktionen der Optimierungsprobleme in Vorentwurfsprozessen stellen dabei Gewicht, Kosten oder Traglast der betrachteten Fügungen dar.

Kapitel 5

Analyse von Gradientenklebverbindungen

„[...] alle exakte Wissenschaft wird vom Gedanken der Annäherung beherrscht.“
Bertrand Russel, britischer Philosoph, Mathematiker und Logiker.

Das folgende Kapitel stellt eine *general sandwich-type*-Modellierung im ebenen Verzerrungszustand zur Spannungsanalyse von überlappenden Gradientenklebverbindungen mit Mehrschichtverbundfügeteilen vor. Dabei bilden die in Kapitel 4.2 vorgestellten Annahmen die Basis der Modellierung. Die ortsabhängige Variation der mechanischen Eigenschaften des Klebstoffes wird mittels eines Elastizitätsmodulverlaufs in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x modelliert. Die entstehenden Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten werden mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes effizient gelöst. Ergebnisse der vorgestellten Modellierung zur Spannungsanalyse werden mit detaillierten Finite-Elemente-Analysen validiert und diskutiert. Weitergehende Studien hinsichtlich des Gradierungsprofils zeigen die Möglichkeiten und Vorteile von Gradientenklebstoffen gegenüber homogenen Klebstoffen auf. Schließlich werden, basierend auf den Resultaten, Empfehlungen für die Anwendung von Gradientenklebstoffen erarbeitet. Die vorgestellte Modellierung mit den dargestellten Ergebnissen wurde in international begutachteten Fachzeitschriften publiziert (Stein et al., 2016c, 2017b,c).

5.1 Einführung

Mit dem Aufkommen neuer Produktionstechnologien haben sich zur konstruktiven Verbesserung des Traglastverhaltens von Klebfügungen Gradientenklebstoffe bewährt, vgl. Kapitel 3.1.3. Allerdings existieren bis heute nur wenige analytische Ansätze zur Spannungsanalyse solcher Gradientenklebverbindungen. Die Ergebnisse des vorherigen Kapitels zeigen, dass ein *general sandwich-type*-Modellierungsansatz die Analyse einer Vielzahl von überlappenden Fügekonfigurationen mit hinreichend guten Ergebnissen ermöglicht. Daher wird im Folgenden ein solches Modell für beliebige überlappende Gradientenklebverbindungen basierend auf den in Kapitel 4.2 dargestellten Annahmen vorgestellt. Das Modell stellt damit eine direkte Verallgemeinerung der *shear-lag*-Modelle von Carbas et al. (2014a) und Stein et al. (2017b) sowie des auf Goland u. Reissner (1944) basierten Modells von Stein et al. (2016a) für Gradientenklebverbindungen hinsichtlich Fügekonfigurationen und Mehrschichtverbundfügeteilen dar.

5.2 Modellierung des Gradientenklebstoffes

Zunächst wird ein Modellierungsansatz der Klebfügungen analog zu Kapitel 4.2 vorgesehen. Gemäß Abbildung 4.1 wird lediglich der Überlappungsbereich der Fügung mit beliebigen Schnittlasten an den Fügeteilenden für die Analyse berücksichtigt. Die Fügeteile werden mittels Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und die Klebschicht mittels eines *weak-interface*-Ansatzes modelliert. Die Gleichungen (4.1)–(4.12) bilden weiterhin die Grundgleichungen des Modells. Allerdings werden im Konstitutivgesetz des Klebstoffes (4.12) keine konstanten sondern mit der horizontalen Koordinate x variierende Steifigkeiten berücksichtigt:

$$\sigma_{zz}^{(a)} = \frac{E^{(a)}(x)}{1 - \nu^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \quad \sigma_{yy}^{(a)} = \frac{\nu^{(a)} E^{(a)}(x)}{1 - \nu^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \quad \tau_{xz}^{(a)} = \frac{E^{(a)}(x)}{2(1 + \nu^{(a)})} \gamma_{xz}^{(a)}. \quad (5.1)$$

Die Querkontraktionszahl $\nu^{(a)}$ wird dabei als erste Näherung über die Überlappung als konstant angenommen. Infolge der beliebigen Variation der Steifigkeiten des Klebstoffes entlang der Überlappung ergibt sich ein im Vergleich zum System (4.25) komplexeres zu lösendes Differentialgleichungssystem.

5.3 Differentialgleichungssystem

Für die meisten analytischen Spannungslösungen für Klebverbindungen wird ein Differentialgleichungssystem in Abhängigkeit der Klebschichtspannungen mittels Differentiation und Einsetzen der Grundgleichungen hergeleitet, vgl. Kapitel 3. Dabei haben die Ableitungsordnungen und die Form der auftretenden Größen erheblichen Einfluss darauf, ob ein Differentialgleichungssystem angegeben werden kann, das nur von den Spannungen abhängt. Da im Rahmen der vorgestellten Modellierung die Steifigkeiten ebenfalls von der horizontalen Koordinate x abhängen und bei der Differentiation der Spannungen mittels Kettenregel berücksichtigt werden müssen, ist dies für Gradientenklebverbindungen nicht möglich. Allerdings hat sich in bereits veröffentlichten Arbeiten (Carbas et al., 2014a, Stein et al., 2016a) gezeigt, dass es für Gradientenklebverbindungen möglich ist ein Differentialgleichungssystem herzuleiten, das nur von den Klebschichtverzerrungen abhängt. Im Folgenden wird analog vorgegangen und das resultierende Differentialgleichungssystem mittels eines Potenzreihenansatzes gelöst.

5.3.1 Herleitung und Potenzreihenlösungsansatz

Analog zu Kapitel 4.3.1, startet die Herleitung mit der ersten Ableitung der Schubverzerrung der Klebschicht nach x , vgl. Gleichung (4.17). Differenziert man zwei weitere Male nach x und setzt die Gleichgewichtsbedingungen (4.1)–(4.3) ein, lassen sich wiederum alle Schnittkräfte eliminieren. Berücksichtigt man bei der Differentiation der Spannungen die Kettenregel aufgrund der Abhängigkeit des Elastizitätsmodul des

Klebstoffes von der horizontalen Koordinate x , ergibt sich durch Einsetzen des Konstitutivgesetzes der Klebschicht (5.1) eine Differentialgleichung in Abhängigkeit der Verzerrungen

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(a)'''} - \zeta_1 \left(E^{(a)'} \gamma_{xz}^{(a)} + E^{(a)} \gamma_{xz}^{(a)'} \right) + \zeta_2 E^{(a)} \varepsilon_{zz}^{(a)} \\ - \zeta_3 \left(E^{(a)''} \varepsilon_{zz}^{(a)} + 2E^{(a)'} \varepsilon_{zz}^{(a)'} + E^{(a)} \varepsilon_{zz}^{(a)''} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1}{E^{(a)}} \quad \text{und} \quad \zeta_{2,3} = \frac{2}{E^{(a)} (1 - \nu^{(a)})} \eta_{2,3}. \quad (5.3)$$

Auf gleiche Art und Weise erhält man mittels Differentiation von Gleichung (4.21) nach x eine zweite Differentialgleichung ohne Schnittgrößen. Setzt man das Konstitutivgesetz der Klebschicht (5.1) in diese Gleichung ein und berücksichtigt beim Differenzieren die Kettenregel, erhält man eine Differentialgleichung, die nur von den Verzerrungen der Klebschicht abhängt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{(a)''''} - \zeta_4 \left(E^{(a)} \varepsilon_{zz}^{(a)''} + 2E^{(a)'} \varepsilon_{zz}^{(a)'} + E^{(a)''} \varepsilon_{zz}^{(a)} \right) \\ + \zeta_5 E^{(a)} \varepsilon_{zz}^{(a)} - \zeta_6 \left(E^{(a)} \gamma_{xz}^{(a)'} + E^{(a)'} \gamma_{xz}^{(a)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit

$$\zeta_{4,5} = \frac{\eta_{4,5}}{E^{(a)}} \quad \text{und} \quad \zeta_6 = \frac{1 - \nu^{(a)}}{2E^{(a)}} \eta_6. \quad (5.5)$$

Die beiden Differentialgleichungen (5.2) und (5.4) bilden ein homogenes, gewöhnliches Differentialgleichungssystem siebter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Im speziellen Falle eines konstanten Elastizitätsmoduls vereinfacht sich das System von Differentialgleichungen. Multipliziert man Gleichung (5.2) mit dem Schubmodul des Klebstoffes $G^{(a)}$ und Gleichung (5.4) mit dem Elastizitätsmoduls für den EVZ $E^{(a)}/(1 - \nu^{(a)^2})$ ergeben sich die homogenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für homogene spröde Klebstoffe (4.18) und (4.22). Im allgemeinen Fall eines über die Überlappungslänge variablen Elastizitätsmoduls ergeben sich jedoch gemäß der Gleichungen (5.2) und (5.4) zusätzliche Ableitungen infolge der Kettenregel bei der Differentiation der Spannungen.

Im Allgemeinen existieren nur in speziellen Fällen geschlossen-analytische Lösungen für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten. Allerdings lassen sich mittels eines Potenzreihenansatzes analytische Lösungsausdrücke herleiten. Nach Theorem 37.51 in Tenenbaum u. Pollard (2012) lassen sich eindeutige Lösungen $\gamma_{xz}^{(a)}$ und $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ der Gleichungen (5.2) und (5.4) angeben, sofern die Koeffizienten, d.h. die Gradierungsverläufe des Elastizitätsmoduls und deren Ableitungen, an der Stelle $x = 0$ analytisch sind. Als analytisch bezeichnet man dabei Funktionen, die sich lokal an der Entwicklungsstelle durch eine konvergente Potenzreihe darstellen lassen. Folglich müssen die Gradierungsverläufe des Elastizitätsmoduls und deren Ableitungen als Taylorreihen an der Entwicklungsstelle $x = 0$ darstellbar sein und in der Umgebung um $x = 0$ gegen die Gradierungsverläufe und deren Ableitungen konvergieren. In diesem Falle existieren

Kapitel 5 Analyse von Gradientenklebverbindungen

eindeutige Lösungen $\gamma_{xz}^{(a)}$ und $\varepsilon_{zz}^{(a)}$, die ebenfalls analytisch um den Entwicklungspunkt $x = 0$ sind. Um die Voraussetzungen für eindeutige Lösungen $\gamma_{xz}^{(a)}$ und $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ zu garantieren, werden zunächst die folgenden Potenzreihenansätze für die Verzerrungen und den variierenden Elastizitätsmodul angesetzt

$$\gamma_{xz}^{(a)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \varepsilon_{zz}^{(a)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad E^{(a)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (5.6)$$

wobei a_n, b_n und c_n die Koeffizienten der jeweiligen Terme der Ordnung n darstellen. Die zugehörigen k -ten Ableitungen nach der horizontalen Koordinate x ergeben sich darausfolgend zu

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(a)(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n, & \varepsilon_{zz}^{(a)(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} b_{n+k} x^n, \\ E^{(a)(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} x^n. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Im Folgenden werden die Ansätze (5.6) und (5.7) in die gekoppelten Differentialgleichungen (5.2) und (5.4) eingesetzt. Verwendet man das CAUCHY-Produkt für die Multiplikation von Potenzreihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n, \quad (5.8)$$

ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+3)!}{n!} a_{n+3} - \zeta_1 d_n + \zeta_2 e_n - \zeta_3 f_n \right) x^n = 0, \quad (5.9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+4)!}{n!} b_{n+4} - \zeta_4 f_n + \zeta_5 e_n - \zeta_6 d_n \right) x^n = 0. \quad (5.10)$$

mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^n \left((k+1)c_{k+1}a_{n-k} + c_k(n-k+1)a_{n-k+1} \right), \\ e_n &= \sum_{k=0}^n c_k b_{n-k}, \\ f_n &= \sum_{k=0}^n \left(c_k \frac{(n-k+2)!}{(n-k)!} b_{n-k+2} + 2c_{k+1}(n-k+1)(k+1)b_{n-k+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k+2)!}{k!} c_{k+2} b_{n-k} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ein Koeffizientenvergleich der beiden Gleichungen (5.9) und (5.10) mit der rechten Seite liefert ein System von Gleichungen für die Unbekannten a_n und b_n . Nach einfachen

Umformungen lassen sich die unbekanntenen Koeffizienten a_n und b_n über Rekursionsgleichungen wie folgt angeben

$$a_{n+3} = \frac{n!}{(n+3)!} \left(\zeta_1 d_n - \zeta_2 e_n + \zeta_3 f_n \right), \quad (5.12)$$

$$b_{n+4} = \frac{n!}{(n+4)!} \left(\zeta_4 f_n - \zeta_5 e_n + \zeta_6 d_n \right). \quad (5.13)$$

Die verbleibenden Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 sowie b_0, b_1, b_2 und b_3 sind freie Konstanten, die über entsprechende Randbedingungen bestimmt werden müssen. In dieser Form stellt der Potenzreihenansatz (5.6) mit den Rekursionsformeln (5.12) und (5.13) die analytische Lösung der Differentialgleichungen (5.2) und (5.4) dar. Da für die numerische Umsetzung eine unendliche Potenzreihe nicht umsetzbar ist, muss eine geeignete Approximationsordnung $n_{\max} = m$ für den Potenzreihenansatz der Klebschichtverzerrungen (5.6) gewählt werden. Nach geeigneter Wahl können die freien Konstanten bestimmt und die Rekursionsformeln (5.12) und (5.13) bis zur gewünschten Ordnung der Approximation ausgewertet werden. Lösungen $\gamma_{xz}^{(a)}$ sowie $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ erhält man schließlich durch Einsetzen der berechneten Koeffizienten in die Potenzreihenansätze (5.6). Die Klebschichtspannungen ergeben sich durch Auswerten des Konstitutivgesetzes der Klebschicht (5.1).

5.3.2 Randbedingungen

Die Randbedingungen zur Bestimmung der sieben freien Konstanten a_0, a_1, a_2 sowie b_0, b_1, b_2 und b_3 ergeben sich analog zu Kapitel 4.3.2. Zunächst wird mittels der Randbedingung das horizontale Kräftegleichgewicht bei einem horizontalen Schnitt des Überlappungsbereiches entlang der Überlappung gefordert

$$b \int_{-L/2}^{L/2} G^{(a)} \gamma_{xz}^{(a)} dx = N^{11} - N^{12}. \quad (5.14)$$

Sechs weitere Randbedingungen ergeben sich aus den Gleichungen der Herleitung ausgewertet an den Rändern der Überlappung. Mit den eingeführten Hilfsgrößen H_{ij} ergeben sich zunächst die Randbedingungen

$$\left(\gamma_{xz}^{(a)'} - \zeta_3 \varepsilon_{zz}^{(a)} \right) \Big|_{\frac{L}{2}} = \frac{1}{G^{(a)}} (H_{22} + H_{12}), \quad (5.15)$$

$$\left(\gamma_{xz}^{(a)'} - \zeta_3 \varepsilon_{zz}^{(a)} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}} = \frac{1}{G^{(a)}} (H_{21} + H_{11}). \quad (5.16)$$

Auf identische Weise wie bei den Randbedingungen (4.41) folgen mit den Hilfsgrößen J_{ij} die beiden Bedingungen

$$\left(\varepsilon_{zz}^{(a)''} - \zeta_4 \varepsilon_{zz}^{(a)} \right) \Big|_{\frac{L}{2}} = \frac{1 - \nu^{(a)2}}{E^{(a)}} (J_{12} - J_{22}), \quad (5.17)$$

$$\left(\varepsilon_{zz}^{(a)'''} - \zeta_4 \varepsilon_{zz}^{(a)'} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}} = \frac{1 - \nu^{(a)2}}{E^{(a)}} (J_{11} - J_{21}). \quad (5.18)$$

Schließlich ergibt sich analog zu den Randbedingungen (4.43)

$$\left(\varepsilon_{zz}^{(a)''''} - \zeta_4 \varepsilon_{zz}^{(a)''} - \zeta_6 \gamma_{xz}^{(a)} \right) \Big|_{\frac{L}{2}} = \frac{1}{t} \left(\frac{A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} Q^{12} - \frac{A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} Q^{22} \right), \quad (5.19)$$

$$\left(\varepsilon_{zz}^{(a)''''} - \zeta_4 \varepsilon_{zz}^{(a)''} - \zeta_6 \gamma_{xz}^{(a)} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}} = \frac{1}{t} \left(\frac{A_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} Q^{11} - \frac{A_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} Q^{21} \right). \quad (5.20)$$

Zur Bestimmung der sieben freien Konstanten liegt damit ein lineares Gleichungssystem vor.

5.4 Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die Konvergenz der Ergebnisse des vorgestellten Berechnungsverfahrens hinsichtlich der Approximationsordnung der Reihendarstellungen (5.6) untersucht und die resultierenden Spannungsfelder verschiedenster Überlappungskonfigurationen mit Finite-Elemente-Referenzlösungen verglichen.

Das dargestellte Berechnungsverfahren wurde in dem Programmpaket MATLAB umgesetzt. Zur Ermittlung der Spannungsfelder müssen sowohl die Rekursionsformeln bis zum gewünschten Grad der Approximation als auch das Gleichungssystem zugehörig zu den Randbedingungen gelöst werden. Dabei hat sich eine iterative Implementierung der Rekursionsformeln als effizienter im Vergleich zu einer rekursiven Umsetzung herausgestellt. Infolge der analytischen Natur der zugrunde liegenden Gleichungen und der effizienten Implementierung ergeben sich bei einer Ordnung der Approximation von $m = 30$ für die Klebschichtverzerrungen Rechenzeiten von durchschnittlich 25 ms.⁶³ Eine entsprechende Implementierung, die sowohl mit dem Programmpaket MATLAB als auch GNU OCTAVE kompatibel ist, wurde als ergänzendes Material zur Veröffentlichung Stein et al. (2016c) online bereitgestellt.

Als Voraussetzung für die Anwendbarkeit des vorgestellten Verfahrens müssen nach Kapitel 5.3.1 die Gradierungsverläufe um den Entwicklungspunkt $x = 0$ analytisch sein. Daher werden im Folgenden alle betrachteten Gradierungsprofile entlang der Überlappung als Potenzreihen dargestellt, sodass obige Bedingung automatisch erfüllt ist und die zugehörigen Koeffizienten c_n des Ansatzes (5.6) direkt aus den Gleichungen ablesbar sind. Es werden sowohl symmetrische als auch asymmetrische Gradierungsprofile bezüglich der Überlappungsmittelpunkte betrachtet, vgl. Abbildung 5.1. Bei der Auswahl der symmetrischen Gradierungsprofile ist die Grundidee von Gradientenklebverbindungen berücksichtigt, d.h. ein nachgiebiger Klebstoff wurde am Überlappungsende und ein steifer Klebstoff in der Mitte der Überlappung vorgesehen. Zunächst sind gemäß Abbildung 5.1(a) ein parabolischer, ein biquadratischer und ein kosinusförmiger

⁶³Die Angaben beziehen sich wiederum auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit einem Intel® Core™ i5 Prozessor mit 4 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.

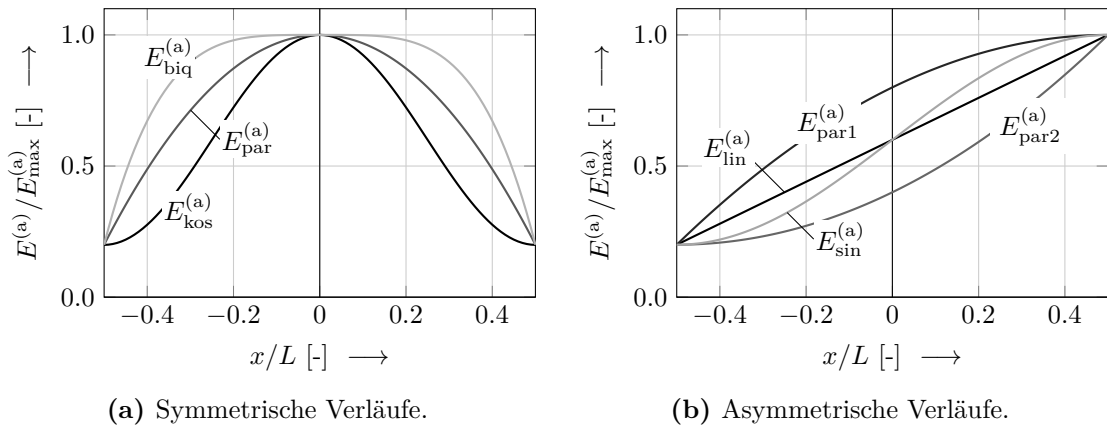


Abbildung 5.1: Symmetrische (a) und asymmetrische (b) Gradierungsverläufe im Verhältnis $E_{\max}^{(a)} = 5E_{\min}^{(a)}$ entlang der Überlappung. Gezeigt ist der entdimensionalisierte Elastizitätsmodul $E^{(a)}/E_{\max}^{(a)}$ bezüglich der mit der Überlappungslänge entdimensionalisierten horizontalen Koordinate x/L .

Ansatz für den Elastizitätsmodulverlauf vorgesehen. Sie lassen sich jeweils angeben als

$$E_{\text{par}}^{(a)}(x) = E_{\max}^{(a)} - 4 \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{L^2} x^2, \quad (5.21)$$

$$E_{\text{biq}}^{(a)}(x) = E_{\max}^{(a)} - 16 \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{L^4} x^4, \quad (5.22)$$

$$E_{\text{kos}}^{(a)}(x) = E_{\max}^{(a)} + \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{2} \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2\pi}{L} x \right)^{2n}, \quad (5.23)$$

wobei für den kosinusförmigen Ansatz die Reihendarstellung des Kosinus auf den entsprechenden Definitions- und Wertebereich projiziert wurde. $E_{\max}^{(a)}$ und $E_{\min}^{(a)}$ bezeichnen dabei die maximalen und minimalen Werte, die der Elastizitätsmodul entlang der Überlappung annimmt. Als asymmetrische Verläufe werden gemäß Abbildung 5.1(b) ein linearer, zwei parabolische und ein sinusförmiger Ansatz betrachtet:

$$E_{\text{lin}}^{(a)}(x) = E_{\max}^{(a)} + \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right), \quad (5.24)$$

$$E_{\text{par1}}^{(a)}(x) = E_{\max}^{(a)} - \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{L^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2, \quad (5.25)$$

$$E_{\text{par2}}^{(a)}(x) = E_{\min}^{(a)} + \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{L^2} \left(x + \frac{L}{2} \right)^2, \quad (5.26)$$

$$E_{\text{sin}}^{(a)}(x) = \frac{E_{\max}^{(a)} + E_{\min}^{(a)}}{2} + \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\min}^{(a)}}{2} \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{L} x \right)^{2n+1}, \quad (5.27)$$

wobei wiederum für den sinusförmigen Ansatz die entsprechende Reihendarstellung verwendet wurde. Die in Abbildung 5.1(b) dargestellten Verläufe lassen sich bezüglich der y -Achse durch Vertauschen des minimalen und maximalen Elastizitätsmoduls spiegeln.

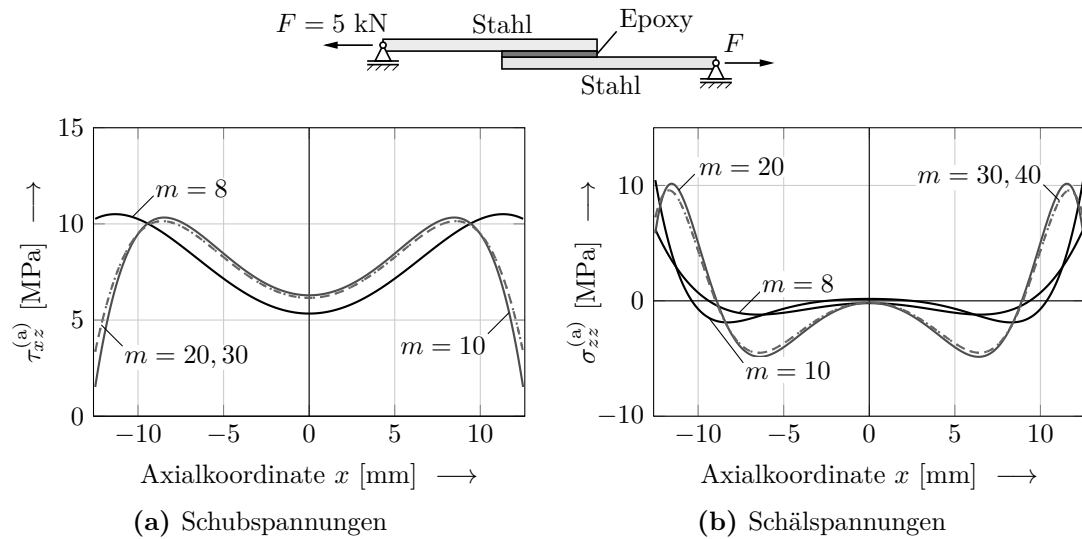


Abbildung 5.2: Konvergenzuntersuchung für eine einschnittige Überlappungsgradientenklevverbindung mit parabolischem Gradierungsprofil $E_{\text{par}}^{(a)}$ entlang der Überlappung. Konfiguration: $L = 25 \text{ mm}$, $h_1 = h_2 = 2 \text{ mm}$, $t = 0,5 \text{ mm}$, $E_{\text{max}}^{(a)} = 2,7 \text{ GPa}$ und $E_{\text{min}}^{(a)} = 0,28 \text{ GPa}$.

5.4.1 Konvergenz der Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Approximationsordnung m des Potenzreihenansatzes (5.6) für die Klebschichtverzerrungen auf die Ergebnisse untersucht.

Dazu wird eine symmetrische einschnittige Überlappungsfügung mit Stahlfügeteilen analysiert, vgl. Abbildung 5.2. Die Materialdaten der Fügeteile und des betrachteten Epoxidharzes sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Entlang der Überlappung ist ein Gradientenklevstoff vorgesehen. Die Belastung des Überlappungsbereiches ist identisch zur illustrierten Fügekonfiguration in Abbildung 4.3(b) und Tabelle 4.2 zu entnehmen. Für symmetrische Konfigurationen mit Fügeteilen ohne Biege-Dehn-Kopplung gilt $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_6 = 0$ und die Rekursionsformeln (5.12) und (5.13) liegen entkoppelt vor. In diesem Fall lässt sich der Einfluss der Approximationsordnung auf die berechneten Schub- und Schälspannungen gesondert untersuchen.

Abbildung 5.2(a) zeigt das Schubspannungsfeld in der Klebschicht für verschiedene Approximationsordnungen m . Während für $m = 8$ der qualitative Verlauf der Schubspannungen signifikant von den restlichen Ergebnissen abweicht, liegen für $m = 10$ bereits nahezu konvergente Ergebnisse vor. Eine Erhöhung auf $m = 20$ liefert lediglich minimale Abweichungen. Die Ergebnisse für $m = 30$ zeigen schließlich, dass der Schubspannungsverlauf für $m = 20$ bereits die voll auskonvergierte Lösung darstellt. Die Konvergenzuntersuchung für die Schälspannungen ist in Abbildung 5.2(b) illustriert. Für $m = 8$ und $m = 10$ ergeben sich abweichende Spannungsverläufe. Erst ab einer Approximationsordnung von $m \geq 30$ liegt eine auskonvergierte Lösung vor. Bei der Betrachtung des Überlappungsrandes ergibt sich für beide Spannungskomponenten ein ähnliches Bild. Die maximalen Spannungen liegen im Gegensatz zu Fügungen mit homogenen Klebstoffen nicht direkt am Rand der Überlappung sondern in einem gewissen Abstand vom

Tabelle 5.1: Schnittlasten pro Einheitstiefe und Temperaturänderung bei einer angenommenen Gesamtlängungslänge von 225 mm und einer Tiefe von $b = 25$ mm. Schnittkräfte N und Q in N/mm, Schnittmomente M in Nmm/mm und Temperaturänderung ΔT in K.

Abbildung	N^{11}	Q^{11}	M^{11}	N^{12}	Q^{12}	M^{12}	N^{21}	Q^{21}	M^{21}	N^{22}	Q^{22}	M^{22}	ΔT
5.3(a)	200	2	200	0	0	0	0	0	0	200	2	-200	0
5.3(b)	0	0	0	0	0	0	2000	0	0	2000	0	0	100
5.3(c)	0	0	0	0	0	200	0	0,8	88,8	0	0,8	-88,8	0
5.3(d)	300	0	0	0	0	0	0	0	0	300	0	0	-100

Überlappungsende entfernt. Darüber hinaus sind die maximal auftretenden Spannungswerte signifikant geringer gegenüber Klebverbindungen mit homogenen Klebstoffen, vgl. Abbildung 4.3(b). Dies stellt ein typisches Ergebnis für Gradientenklebverbindungen dar und wird im folgenden Abschnitt eingehend diskutiert.

Die Ergebnisse zeigen ein eindeutiges Konvergenzverhalten derart, dass mit steigender Approximationsordnung eine immer geringere Abweichung der Ergebnisse erreicht wird. Für die hier und im Folgenden betrachteten Fügekonfigurationen hat sich eine Approximationsordnung von $m = 30$ für die Potenzreihenansätze der Klebschichtverzerrungen (5.6) schließlich als ausreichend erwiesen.

5.4.2 Vergleich mit Finite-Elemente-Analysen

Im Folgenden werden die Ergebnisse des vorgestellten Berechnungsverfahrens für exemplarische Fügekonfigurationen mit Ergebnissen von Finite-Elemente-Analysen verglichen. Dazu wird das in Kapitel 4.4 eingeführte Finite-Elemente-Modell erweitert. Die variierenden Materialeigenschaften des Gradientenklebstoffs sind mittels der Subroutineschnittstelle von ABAQUS umgesetzt. Dabei wurde die Subroutine USDFLD (Engl.: User subroutine to define field variables at a material point) verwendet, die an den Integrationspunkten jeden Elements die Definition von Materialeigenschaften in Abhängigkeit der Feldvariablen ermöglicht.⁶⁴ Für die folgenden Finite-Elemente-Rechnungen werden die Elastizitätsmodulverläufe als Funktion der horizontalen Koordinate gemäß den Gleichungen (5.21)–(5.27) implementiert.

Analog zu Kapitel 4.4 werden im Folgenden oberhalb der jeweiligen Diagramme die zugehörige Struktursituation zur Übersicht illustriert. Die jeweils zugehörigen Randlasten sind in Tabelle 5.1 angegeben. Sie sind mittels einfacher Gleichgewichtsbedingungen berechnet. Die Materialdaten der Fügebauteile und des betrachteten Klebstoffes sind wiederum Tabelle 4.1 zu entnehmen. Weiterhin wird ein Gradientenklebstoff mit den Grenzwerten des Elastizitätsmoduls von $E_{\max}^{(a)} = 2,7$ GPa und $E_{\min}^{(a)} = 0,28$ GPa betrachtet. Zum direkten Vergleich wird neben den Spannungsverläufen der jeweiligen Fügungen mit

⁶⁴Diese Methode ist nur für lineare FEA geeignet. Für geometrisch nichtlineare Rechnungen werden alternative Methoden benötigt, da die Subroutine USDFLD die Koordinaten der Referenzkonfiguration verwendet. Eine ausführliche Diskussion findet sich bei Martínez-Pañeda u. Gallego (2015), Stein et al. (2017b).

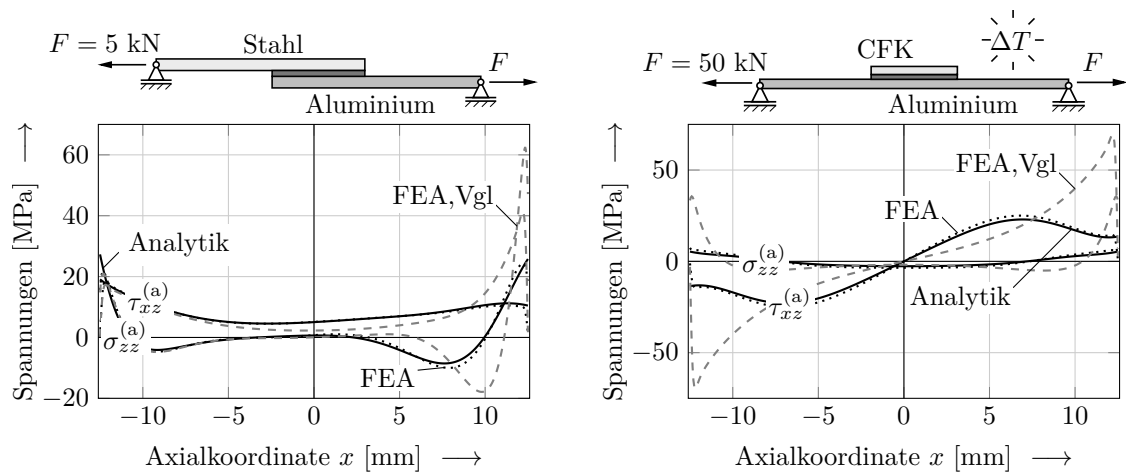
Gradientenklebstoff auch das resultierende Spannungsfeld einer FEA für die gleiche Fügungskonfiguration mit homogenem Klebstoff mit Elastizitätsmodul $E^{(a)} = E_{\max}^{(a)}$ gezeigt. Die zugehörigen Verläufe sind als grau gestrichelte Linien dargestellt und mit der Abkürzung „FEA,Vgl“ gekennzeichnet.

Abbildung 5.3(a) zeigt zunächst die Spannungsverläufe für eine asymmetrische einschnittige Überlappungsfügung zwischen Stahl- und Aluminiumfügeteilen unter mechanischer Last. Infolge des Gradientenklebstoffes mit asymmetrischen Gradierungsprofil werden die an dem Überlappungsende zugehörig zum nachgiebigeren Fügeteil auftretenden Spannungsspitzen reduziert, sodass eine gleichmäßigere Lastübertragung stattfinden kann. In der linken Hälfte der Überlappung ($x < 0$) zeigt der Einsatz des Gradientenklebstoffes wenig Einfluss auf den Spannungsverlauf, während in der rechten Hälfte ($x > 0$) das Spannungsniveau maßgeblich reduziert wird. Dadurch liegt ein annähernd symmetrisches Spannungsfeld vor. Abbildung 5.3(b) illustriert die Spannungsverläufe für ein auf ein Aluminiumsubstrat verklebtes Verstärkungspflaster aus symmetrisch aufgebautem CFK mit Layup $[0^\circ/90^\circ]_S$ unter kombinierter mechanischer und thermischer Last. Der Einsatz eines Gradientenklebstoffes mit symmetrischem Gradierungsprofil $E_{\text{kos}}^{(a)}$ ermöglicht im Vergleich zur Fügung mit homogenem Klebstoff einen gleichförmigeren Lastübertrag. Die Spannungsspitzen am Rand werden in Richtung Mitte der Überlappung verlagert und reduziert. Der gewinnbringende Einsatz von Gradientenklebstoffen ist ebenso in Abbildung 5.3(c) anhand einer T-Fügung aus Aluminium und Stahl unter Biegung aufgezeigt. Durch ein asymmetrisches Gradierungsprofil mit nachgiebigerem Klebstoff am rechten Rand können lokal die Spannungsspitzen vermindert werden. Das gleiche Ergebnis lässt sich mittels eines asymmetrischen Gradierungsprofils an einer zweischnittigen Überlappungsfügung unter kombinierter mechanischer und thermischer Last erreichen, vgl. Abbildung 5.3(d). Das Spannungsniveau insbesondere in der rechten Hälfte der Überlappung wird infolge des Gradientenklebstoffes vermindert und der Lastübertrag erfolgt gleichmäßiger entlang der Überlappung.

Für alle betrachteten Konfigurationen ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse des analytischen Berechnungsverfahrens mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Referenzlösung. An den jeweiligen Enden der Überlappung können weiterhin die spannungsfreien Ränder nicht abgebildet werden. Allerdings liegt im Vergleich zu den Ergebnissen in Kapitel 4.4 über einen größeren Bereich eine sehr gute Übereinstimmung vor. Dies lässt sich durch die verminderten Spannungsspitzen infolge der Anwendung von Gradientenklebstoffen und die damit verbundenen gleichmäßigeren Spannungsverläufe erklären. Diese lassen sich mittels der polynomialen Ansätze (5.6) mit hinreichender Güte approximieren.

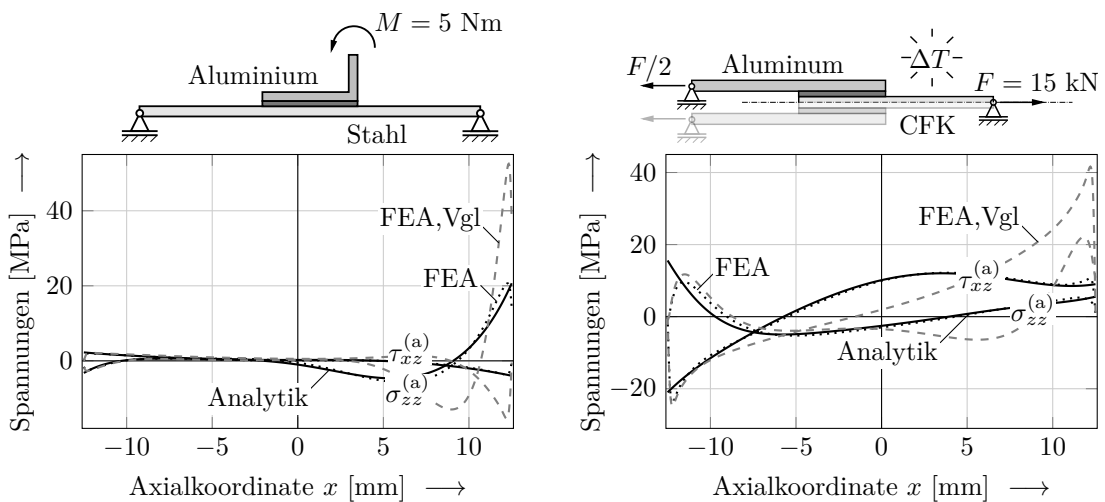
5.5 Studien

In den bisher betrachteten Konfigurationen mit Gradientenklebstoffen sind gezielt Gradierungsprofile gewählt worden, die zu einer Homogenisierung der Lastübertragung entlang der Überlappung führen. Für eine geeignete Wahl des Gradierungsprofils muss das Spannungsfeld a priori bekannt sein. Ist dies nicht der Fall, stellt sich die Frage wie ein möglichst zweckmäßiges Profil auszusehen hat. Im Folgenden werden daher verschiedene



(a) Konfiguration: $L = 25$ mm, $h_1 = 2$ mm $h_2 = 1,5$ mm, $t = 0,5$ mm. Gradierungsprofil: $E_{\text{lin}}^{(a)}$ mit $E^{(a)}(-L/2) = E_{\text{max}}^{(a)}$ und $E^{(a)}(L/2) = E_{\text{min}}^{(a)}$.

(b) Konfiguration: $L = 25$ mm, $2h_1 = h_2 = 4$ mm, $t = 0,5$ mm (CFK Layup: $[0^\circ/90^\circ]_S$). Gradierungsprofil: $E_{\text{kos}}^{(a)}$ mit $E^{(a)}(-L/2) = E_{\text{min}}^{(a)}$ und $E^{(a)}(0) = E_{\text{max}}^{(a)}$.



(c) Konfiguration: $L = 25$ mm, $2h_1 = h_2 = 4$ mm, $t = 0,5$ mm. Gradierungsprofil: $E_{\text{par1}}^{(a)}$ mit $E^{(a)}(-L/2) = E_{\text{max}}^{(a)}$ und $E^{(a)}(L/2) = E_{\text{min}}^{(a)}$.

(d) Konfiguration: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm, $t = 0,5$ mm (CFK Layup: $[0^\circ/90^\circ]_S$). Gradierungsprofil: $E_{\text{sin}}^{(a)}$ mit $E^{(a)}(-L/2) = E_{\text{max}}^{(a)}$ und $E^{(a)}(L/2) = E_{\text{min}}^{(a)}$.

Abbildung 5.3: Vergleich der Spannungsergebnisse des analytischen Berechnungsverfahrens mit Ergebnissen der Finite-Elemente-Referenzlösung für eine einschnittige Überlappungsfügung (a), ein Verstärkungspflaster (b), eine T-Fügung (c) sowie eine zweischnittige Überlappungsfügung (d).

Studien bezüglich des Einflusses des Gradierungsprofils und des Steifigkeitsverhältnisses $E_{\text{max}}^{(a)}/E_{\text{min}}^{(a)}$ auf das Spannungsfeld dargestellt, die zu einem besseren Verständnis für die Auswirkungen verschiedener Gradierungsprofile auf die Lastübertragung beitragen. Des Weiteren wird ein Verfahren zur Bestimmung eines optimierten Gradierungsprofils bezüglich einer vordefinierten Zielfunktion eingeführt. Anhand einiger Beispiele werden

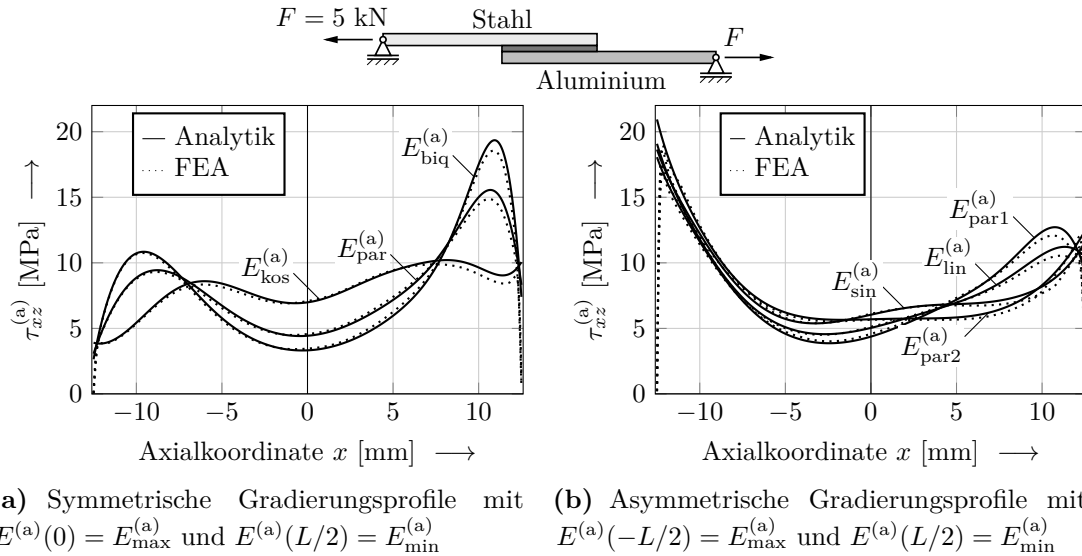


Abbildung 5.4: Studie zum Einfluss des Gradierungsprofils auf die Schubspannungen einer einschnittigen Überlappungsfügung. Konfiguration: $L = 25$ mm, $h_1 = 2$ mm, $h_2 = 1,5$ mm, $t = 0,5$ mm, $E_{\max}^{(a)} = 2,7$ GPa und $E_{\min}^{(a)} = 0,28$ GPa.

die Ergebnisse gezeigt und diskutiert.

5.5.1 Einfluss des Gradierungsprofils

Im folgenden Abschnitt wird der Einfluss der in Kapitel 5.4 eingeführten Gradierungsprofile (5.21)-(5.27) auf die Spannungsverläufe am Beispiel einer einschnittigen Überlappungsfügung mit Gradientenklebstoff untersucht. Die Dimensionen und verwendeten Materialien der untersuchten Fügung entsprechen denen, der in Abbildung 5.3(a) betrachteten Struktursituation. Die Analyse zeigt, dass die verschiedenen Profile bei gleichbleibendem $E_{\max}^{(a)}$ und $E_{\min}^{(a)}$ einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Verläufe der Schälspannungen haben. Daher werden im Folgenden nur die Schubspannungen betrachtet.

Abbildung 5.4(a) zeigt zunächst, dass bei symmetrischen Gradierungsprofilen mit steigendem Gradienten des Profils zum Rand der Überlappung erhöhte Spannungsspitzen vorliegen. Am rechten Rand der Überlappung ergeben sich im Vergleich zum kosinusförmigen Profil jeweils eineinhalb und zweimal so hohe Spannungsspitzen für das parabolische und biquadratische Gradierungsprofil. Im Vergleich zum Schubspannungsverlauf der Fügung mit homogenem Klebstoff, vgl. Abbildung 5.3(a), liegen diese in Richtung der Überlappungsmitte verschoben vor. Ähnliche Ergebnisse zeigen sich für die in Abbildung 5.4(b) illustrierten asymmetrischen Gradierungsprofile. Die Anwendung des Profils $E_{\text{par1}}^{(a)}(x)$ liefert eine im Vergleich zu den anderen Profilen erhöhte Spannungsspitze verschoben in Richtung der Überlappungsmitte. Die beiden Profile $E_{\text{kos}}^{(a)}(x)$ und $E_{\text{sin}}^{(a)}(x)$ mit einem verschwindenden Anstieg $E_{\text{kos}}^{(a)'} = E_{\text{sin}}^{(a)'} = 0$ zum Überlappungsrand liefern bei der betrachteten Struktursituation den gleichmäßigsten Lasttransfer.

Tabelle 5.2: Schnittlasten pro Einheitstiefe. Schnittkräfte N und Q in N/mm und Schnittmomente M in Nmm/mm.

Konfiguration	N^{11}	Q^{11}	M^{11}	N^{12}	Q^{12}	M^{12}	N^{21}	Q^{21}	M^{21}	N^{22}	Q^{22}	M^{22}
(1)	200	2,2	222,2	0	0	0	0	0	0	200	2,2	-222,2
(2)	0	0	0	0	0	0	2000	0	0	2000	0	0
(3)	300	0	0	0	0	0	0	0	0	300	0	0

5.5.2 Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses

Neben der Wahl des jeweiligen Gradierungsprofil stellt sich die Frage, welches Verhältnis zwischen maximalem und minimalem Grenzwert der Elastizitätsmoduli $E_{\max}^{(a)}$ und $E_{\min}^{(a)}$ eingestellt werden soll. Daher wird im Folgenden der Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die maximal auftretenden Spannungsüberhöhungen untersucht. Dazu werden verschiedene Klebverbindungskonfigurationen mit Gradientenklebstoffen analysiert. Sowohl einschnittige Überlappungsfügungen (1) als auch Verstärkungspflaster (2) und zweischnittige Überlappungsfügungen (3) werden als Fügekonfigurationen untersucht. Die zugehörigen Randlasten sind Tabelle 5.2 zu entnehmen. Ausgehend von einer Fügekonfiguration mit homogenem Klebstoff mit zugehöriger Steifigkeit $E^{(a)} = 2,7$ GPa werden Konfigurationen mit Gradientenklebstoffen betrachtet, bei denen sukzessive der minimale Grenzwert der Steifigkeit von $E_{\min}^{(a)} = 2,7$ GPa bis zu $E_{\min}^{(a)} = 0,28$ GPa reduziert wird.

Abbildung 5.5 zeigt den Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses $E_{\max}^{(a)}/E_{\min}^{(a)}$ auf die auftretenden Spannungsüberhöhungen normiert auf die Überhöhung zugehörig zur jeweiligen Fügekonfiguration mit homogenem Klebstoff. In Abbildung 5.5(a) sind zunächst die Auswirkungen auf die Schälspannungsüberhöhungen illustriert. Unabhängig von der Struktursituation ist für die normierte Spannungsüberhöhung der gleiche qualitative Verlauf bezüglich des Steifigkeitsverhältnisses zu erkennen. Mit sinkendem $E_{\min}^{(a)}$ sind reduzierte Spannungsüberhöhungen sichtbar. Ab einem gewissen Steifigkeitsverhältnis $E_{\max}^{(a)}/E_{\min}^{(a)} \approx 9$ tritt jedoch keine weitere signifikante Reduzierung auf. Abbildung 5.5(b) zeigt den Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die Schubspannungsüberhöhungen. Dabei liegen zunächst unabhängig von der Struktursituation ebenfalls sinkende Spannungsüberhöhungen mit steigendem Steifigkeitsverhältnis vor. Ab einem von der Struktursituation abhängigen Steifigkeitsverhältnis bleibt die Spannungsüberhöhung jedoch auch bei steigendem Steifigkeitsverhältnis konstant. Bei den betrachteten Struktursituationen tritt dies im Intervall $E_{\max}^{(a)}/E_{\min}^{(a)} \in [5, 6]$ auf. Wenn das Steifigkeitsverhältnis darüber hinaus gesteigert wird, dann wird die Spannungsüberhöhung in Richtung der Mitte der Überlappung verschoben, vgl. Abbildungen 5.3 und 5.4. Neben den Vorhersagen des Berechnungsverfahrens sind für das Verstärkungspflaster auch Ergebnisse von Finite-Elemente-Referenzlösungen illustriert. Ein Vergleich zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des Berechnungsverfahrens und der Finite-Elemente-Referenzlösungen.

Schlussendlich ermöglichen die Ergebnisse der Analyse allgemeine Empfehlungen für die Anwendung zu formulieren. Mittels den in Abbildung 5.5 gezeigten Ergebnissen lässt sich schlussfolgern, wie das Steifigkeitsverhältnis des Gradientenklebstoffes eingestellt

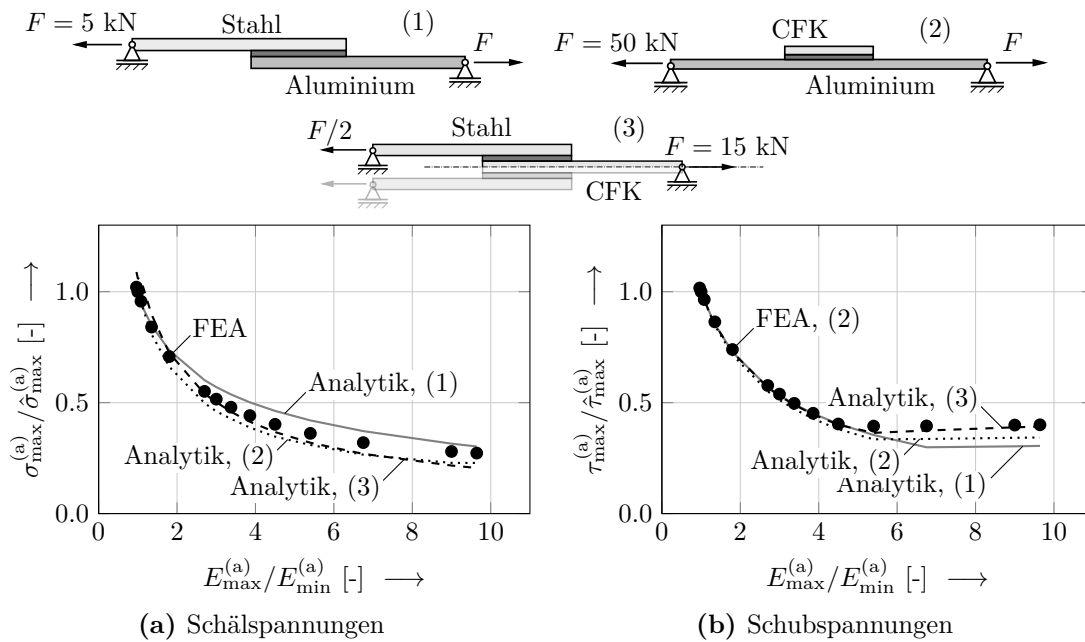


Abbildung 5.5: Studie zum Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die Spannungsüberhöhungen von Gradientenklebverbindungen. Die maximal auftretende Spannungsüberhöhung ist normiert auf die Spannungsüberhöhung einer Fügung mit homogenem Klebstoff dargestellt. Konfigurationen: (1) einschnittige Überlappungsfügung mit $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $t = 0,5$ mm und Profil $E_{\text{kos}}^{(a)}$ (2) Verstärkungspflaster mit $L = 25$ mm, $2h_1 = h_2 = 4$ mm, $t = 0,5$ mm und Profil $E_{\text{kos}}^{(a)}$ (3) zweischnittige Überlappungsfügung mit $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm, $t = 0,5$ mm und Profil $E_{\text{sin}}^{(a)}$. Für die laminierten Fügeteile wurde jeweils das Layup $[0^\circ/90^\circ]_S$ vorgesehen.

werden muss, um eine bestimmte Reduzierung der Spannungsüberhöhungen zu erreichen. Ist beispielsweise eine Reduktion der Schälspannungen um 50% beabsichtigt, empfiehlt sich nach Abbildung 5.5 ein Steifigkeitsverhältnis $E_{\text{max}}^{(a)} / E_{\text{min}}^{(a)} > 4$ zu realisieren. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass bezüglich der Schubspannungsspitzen eine maximale Reduzierung von ungefähr 40% mittels eines Gradientenklebstoffes erreicht werden kann. Eine weitere Erhöhung des Steifigkeitsverhältnisses führt lediglich zu einer Veränderung des Ortes der auftretenden Spannungsspitze.

5.5.3 Optimierung des Gradierungsprofils

Schließlich lässt sich unabhängig von a priori definierten Gradierungsprofilen ein auf die Struktursituation optimierter Steifigkeitsverlauf mittels eines Optimierungsproblems finden. Dazu ist für die Anwendung zunächst eine geeignete Zielfunktion zu wählen, die bestmöglich erfüllt werden soll. Zielfunktionen könnten dabei so formuliert werden, dass bestimmte Spannungen wie beispielsweise Vergleichsspannungen entlang der Überlappung minimiert werden. Anschließend ist ein Optimierungsproblem zu formulieren und zu lösen.

Die Wahl der Zielfunktion hängt von dem mechanischen Verhalten des verwendeten

Klebstoffes und dem Konstruktionsziel der Ingenieurin oder des Ingenieurs ab. Für die vorliegende Arbeit wird eine Formulierung der Zielfunktion in Abhängigkeit einer Vergleichsspannung σ_V gewählt, da nach Kapitel 3.3 eine erstmalige Versagensbewertung mittels einfacher Festigkeitskriterien intuitiv ist. Eine entsprechende Darstellung der Zielfunktionen lässt sich beispielsweise wie folgt angeben

$$Z(\mathbf{c}, \sigma_V) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\sigma_V(x, \mathbf{c}) - \bar{\sigma}_V)^2 dx, \quad (5.28)$$

wobei $\bar{\sigma}_V = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_V dx$ die über die Überlappung gemittelte Vergleichsspannung darstellt. Nach Kapitel 3.3 bietet sich bei Verwendung eines zunächst spröden Klebstoffes die maximal auftretende Hauptnormalspannung (NSH) und bei Verwendung eines duktilen Klebstoffes die von Mises Vergleichsspannung (vM) als geeignete Vergleichsspannung an.⁶⁵ Im Rahmen der vorgestellten Modellierung lassen sich die beiden Vergleichsspannungen angeben als

$$\sigma_{\text{NSH}} = \frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{2}\right)^2 + (\tau_{xz}^{(a)})^2}, \quad (5.29)$$

und

$$\sigma_{\text{vM}} = \sqrt{\sigma_{yy}^{(a)2} + \sigma_{zz}^{(a)2} - \sigma_{yy}^{(a)}\sigma_{zz}^{(a)} + 3\tau_{xz}^{(a)2}}. \quad (5.30)$$

In den meisten Fällen unterliegt die Optimierung der entsprechenden Zielfunktion mit ihren Parametervariationen bestimmten Restriktionen wie etwa Fertigungsrestriktionen. Naheliegend ist dabei beispielsweise die Forderung die Steifigkeit des Gradientenklebstoffes innerhalb der experimentell umsetzbaren Grenzwerte $E_{\min}^{(a)}$ und $E_{\max}^{(a)}$ zu halten. Dementsprechend kann ein solches Optimierungsproblem für eine Fügung unter konstanter äußerer Last wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}} \quad & Z(\mathbf{c}) \\ \text{u.d.B.} \quad & E_{\min}^{(a)} \leq E^{(a)}(x, \mathbf{c}) \leq E_{\max}^{(a)} \quad \forall x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

wobei der Vektor $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_k]^T$ alle Koeffizienten der Reihendarstellung des Elastizitätsmoduls (5.6) bis zur Ordnung k enthält und $Z(\mathbf{c})$ die Zielfunktion darstellt.

Das Problem (5.31) mit der Zielfunktion (5.28) stellt ein restringiertes nichtlineares Optimierungsproblem dar. Im Folgenden wird das Optimierungsproblem für verschiedene Konfigurationen mittels der Optimierungstoolbox des Programmpakets MATLAB gelöst. Dabei wurde aus der Klasse der lokalen Optimierungsalgorithmen ein Algorithmus

⁶⁵Es sei darauf hingewiesen, dass sich abhängig von der Gradierung des Klebstoffes das mechanische Verhalten und der finale Versagensprozess des Gradientenklebstoffes vom homogenen Ausgangsklebstoff signifikant unterscheiden können. In diesem Fall ist es zu empfehlen experimentelle Vorstudien hinsichtlich des mechanischen Verhaltens des Gradientenklebstoffes durchzuführen und eine entsprechende Vergleichsspannung zu wählen. Alternativ lassen sich auch Zielfunktionen formulieren, die mehrere Vergleichsspannungen berücksichtigen.

Tabelle 5.3: Schnittlasten pro Einheitstiefe und Temperaturänderung. Schnittkräfte N und Q in N/mm, Schnittmomente M in Nmm/mm und Temperaturänderung ΔT in K.

Abbildung	N^{11}	Q^{11}	M^{11}	N^{12}	Q^{12}	M^{12}	N^{21}	Q^{21}	M^{21}	N^{22}	Q^{22}	M^{22}	ΔT
5.6	200	2,2	222,2	0	0	0	0	0	0	200	2,2	-222,2	-100
5.7	0	0	0	0	0	0	2000	0	0	2000	0	0	100

basierend auf der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) verwendet.⁶⁶ Um eine globale Lösung zu erhalten, wurden verschiedene Startpunkte \mathbf{c}^i ($i = 1, \dots, 13$) herangezogen.⁶⁷ Diese entsprechen den Koeffizienten \mathbf{c} zugehörig zu den homogenen Elastizitätsmoduli $E_{\min}^{(a)}$, $E_{\max}^{(a)}$, den drei symmetrischen Gradierungsprofilen sowie den vier asymmetrischen Gradierungsprofilen. Vier weitere Startpunkte erhält man durch Spiegelung der asymmetrischen Gradierungsprofile bezüglich der y -Achse. Der verwendete Löser beruht auf der Formulierung eines quadratischen Teilproblems (QP) mittels Linearisierung der Nebenbedingungen und einem BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNO (BFGS)-Update der Hesse-Matrix der zugehörigen Lagrangefunktion des Problems in jedem Schritt. Das QP wird durch die von Gill et al. (1984) vorgeschlagene Projektionsmethode gelöst. Die Lösung des quadratischen Teilproblems wird mit einem Schrittparameter, der mittels einer Liniensuche bestimmt wird, für die nächste Iteration des SQP verwendet. Schlussendlich ergibt sich bei einer nicht signifikant weiteren Verbesserung der Iterationen die Lösung des SQP Problems. Die Lösung der SQPs mit den jeweils oben angegebenen Startwerten mit dem minimalen Wert der Zielfunktion bildet schließlich die gesuchte globale Lösung. Weitere Details und eine umfangreiche Einführung in die nichtlineare Optimierung findet sich beispielsweise bei Nocedal u. Wright (2006).

Im Folgenden werden beispielhaft die optimierten Steifigkeitsverläufe mit zugehörigen Spannungsverläufen für zwei Fügekonfigurationen mit unterschiedlichen Zielfunktionen berechnet. Eine einschnittige Überlappungsfügung mit ungleichen Fügeanteilen sowie ein Verstärkungspflaster werden exemplarisch analysiert. Die zugehörigen Randlasten sind Tabelle 5.3 zu entnehmen. Dabei werden Zielfunktionen der Form (5.28) mit der Schubspannung $\sigma_V = \tau_{xz}^{(a)}$, der maximale Hauptnormalspannung $\sigma_V = \sigma_{NSH}$ und der VON MISES-Vergleichsspannung $\sigma_V = \sigma_{vM}$ verwendet. In den folgenden Abbildungen werden die Spannungen, die mittels des vorgestellten Berechnungsverfahrens und der Finite-Elemente-Referenzlösungen berechnet wurden, jeweils als durchgezogene und gepunktete Linien dargestellt. Zum direkten Vergleich ist in jedem Diagramm in grau und mit „FEA,Vgl“ gekennzeichnet die jeweilige Vergleichsspannung für die gleiche Fügekonfiguration mit einem homogenen Klebstoff mit konstantem Elastizitätsmodul $E^{(a)} = 2,7$ GPa dargestellt. Das optimierte Gradierungsprofil entlang der Überlappung ist als gestrichelte Linie abgebildet.

⁶⁶SQP-Verfahren beruhen auf der Idee eine zunächst notwendige Bedingung für Optimalität von Problemen mit Nebenbedingungen, die sogenannten KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)-Bedingungen, zu erfüllen. Eine Anwendung des Newton-Verfahrens auf die KKT-Bedingungen führt letztlich auf ein quadratisches Problem.

⁶⁷Im Programmpaket MATLAB wird dieses Vorgehen als Multiple Starting Point Search bezeichnet.

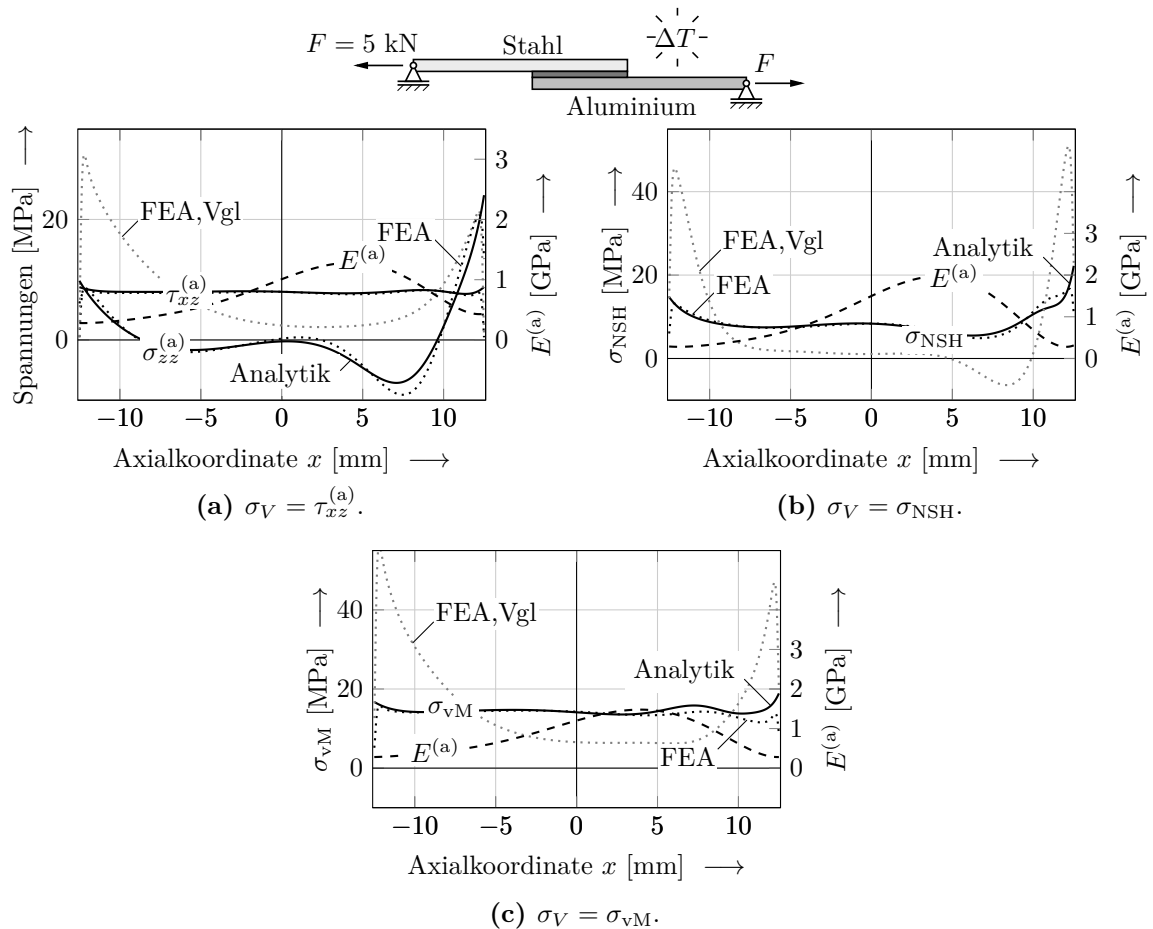


Abbildung 5.6: Optimierte Gradierungsprofile des Elastizitätsmoduls und zugehörige Spannungsverläufe einer einschnittigen Überlappungsfügung mit Gradientenklebstoff bezüglich verschiedener Zielfunktionen der Form (5.28). Dabei werden Zielfunktionen mit drei Vergleichsspannungen verwendet: (a) die Schubspannung (b) die maximale Hauptnormalspannung und (c) die von MISES-Vergleichsspannung. Konfiguration: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $t = 0,5$ mm.

Abbildung 5.6 illustriert die jeweils optimierten Gradierungsprofile sowie die zugehörigen Spannungsverläufe entlang der Überlappung für eine einschnittige Überlappungsfügung unter kombinierter mechanischer und thermischer Last. Zunächst zeigt sich, dass sich mittels der optimierten Gradierungsprofile bei allen drei Zielfunktionen nahezu konstante Vergleichsspannungen realisieren lassen. Hohe Steifigkeitswerte treten in Bereichen mit niedrigen Spannungsniveaus im Falle des homogenen Klebstoffs und umgekehrt auf. Dadurch ergeben sich unabhängig von der Wahl der Vergleichsspannung qualitativ ähnliche Gradierungsprofile. Diese gleichen in vielen Aspekten den zuvor betrachteten kosinus- und sinusförmigen Steifigkeitsverläufen, vgl. Abbildung 5.1. Es ergeben sich glatte Verläufe mit verschwindenden Gradienten zu den Rändern der Überlappung. Im Falle der maximalen Hauptnormalspannung als Vergleichsspannung tritt lediglich in Richtung des rechten Überlappungsrandes eine vergleichsweise schnelle Änderung des Steifigkeitsverlaufes infolge des großen Spannungsgradienten auf, vgl. Abbildung 5.6(b). Bei allen drei Gradierungsprofilen liegt der maximale Steifigkeitswert unter dem ferti-

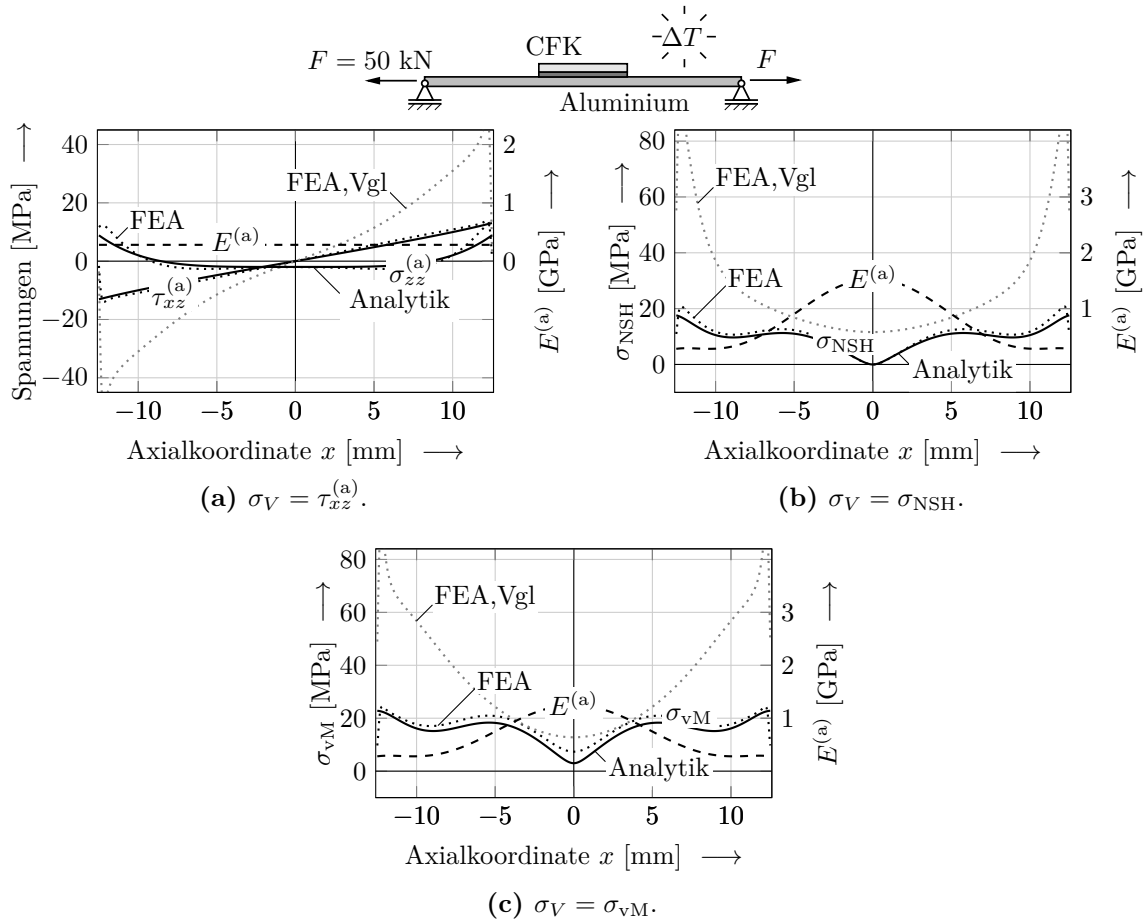


Abbildung 5.7: Optimierte Gradierungsprofile des Elastizitätsmoduls und zugehörige Spannungsverläufe eines Verstärkungspflasters mit Gradientenklebstoff bezüglich verschiedener Zielfunktionen der Form (5.28). Dabei werden Zielfunktionen mit drei Vergleichsspannungen verwendet: (a) die Schubspannung (b) die maximale Hauptnormalspannung und (c) die VON MISES-Vergleichsspannung. Konfiguration: $L = 25 \text{ mm}$, $h_1 = 2 \text{ mm}$, $h_2 = 5 \text{ mm}$, $t = 0,5 \text{ mm}$ (CFK Layup $[90^\circ/0^\circ]$).

gungsbedingten Grenzwert.

Abbildung 5.7 stellt die Ergebnisse für ein Verstärkungspflaster aus CFK mit asymmetrischem Aufbau dar. Für diese Fügekonfiguration unterscheiden sich die einzelnen optimierten Gradierungsprofile maßgeblich voneinander. Aufgrund des punktsymmetrischen Schubspannungsverlaufes für das Verstärkungspflaster mit homogenem Klebstoff ergibt sich als Lösung des Optimierungsproblems mit $\sigma_V = \tau_{xz}^{(a)}$ ein konstantes Gradierungsprofil mit minimaler Steifigkeit $E^{(a)}(x) = 0,28 \text{ GPa}$, vgl. Abbildung 5.7(a). Infolge der Gradierung wird die Steigung des nahezu linearen Schubspannungsverlaufes reduziert. Im Falle der Fügung mit homogenem Klebstoff erhält man für $\sigma_V = \sigma_{NSH}$ sowie $\sigma_V = \sigma_{vM}$ hingegen ein symmetrisches Gradierungsprofil mit nachgiebigerem Klebstoff an den Rändern der Überlappung infolge der Spannungsspitzen. Mittels des optimierten Gradierungsprofils lässt sich dadurch eine nahezu konstante Vergleichsspannung erreichen. Weiterhin ähneln die Verläufe wiederum den zuvor betrachteten kosinusförmigen Gradierungsprofilen.

Insgesamt zeigt sich, dass der Einfluss der verschiedenen Gradierungsprofile auf das Spannungsfeld gering ist im Vergleich zum Einfluss des realisierten Steifigkeitsverhältnisses. Den gleichmäßigsten Lasttransfer ermöglichen hierbei Gradierungsprofile, die auf trigonometrischen Ansatzfunktionen beruhen. Das Verhältnis von maximal zu minimal auftretendem Elastizitätsmodul zeigt erhebliche Auswirkungen auf die maximal auftretende Schub- sowie Schälspannungen unabhängig von der Fügekonfiguration. Die in Kapitel 5.5.2 vorgestellten Diagramme ermöglichen dabei Aussagen über das benötigte Elastizitätsmodulverhältnis für eine bestimmte Reduktion der Spannungsspitzen zu formulieren. Mit Hilfe des vorgestellten Optimierungsverfahrens lässt sich darüber hinaus gezielt das bestmögliche Gradierungsprofil für eine vorgegebene Struktursituation ermitteln. Dies ermöglicht eine maßgebliche Homogenisierung der betrachteten Vergleichsspannung. Mit Ausnahme der Ergebnisse in Abbildung 5.7(a) ergeben sich Gradierungsprofile mit einem verschwindenden Gradienten zum Überlappungsrand, die den zuvor untersuchten kosinus- und sinusförmigen Gradierungsprofilen in vielen Aspekten ähneln. Weiterhin zeigt sich, dass unabhängig vom Gradierungsprofil und Steifigkeitsverhältnis eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Finite-Elemente-Referenzlösung und dem vorgestellten Berechnungsverfahren vorliegen.

5.6 Anmerkungen und Ausblick

Die vorliegende Arbeit umfasst die Analyse der Spannungen in Gradientenklebverbindungen. Hierbei wurde eingehend der Einfluss verschiedener Gradierungsprofile und Steifigkeitsverhältnisse auf die Spannungen in Gradientenklebverbindungen untersucht. Eine Bewertung des Tragverhaltens wurde allerdings nicht ausgeführt. Dies ist darin begründet, dass eine Bewertung nicht wie in Kapitel 4 mittels eines einzelnen Versagensmodells direkt erfolgen kann, da abhängig von der Gradierung des Klebstoffes verschiedene Versagensprozesse auftreten können. Da eine effiziente und automatisierte Produktion von Gradientenklebstoffen Gegenstand der Forschung ist, liegen hierzu wenig bis keine experimentelle Daten vor. Daher ist zunächst eine eingehende experimentelle Untersuchung der zugrunde liegenden Versagensprozesse notwendig, um eine geeignete Modellierung bereitstellen zu können. Dazu gehört auch eine Charakterisierung der Versagensparameter des Klebstoffes in Abhängigkeit der Gradierung. Bis heute ist nicht umfassend geklärt wie sich die Gradierung eines Klebstoffes auf die Festigkeit, Bruchdehnung oder Bruchzähigkeit auswirkt. Erste experimentelle Untersuchungen, vgl. Kapitel 3.1.3, zeigen jedoch eingehend eine signifikante Verbesserung der Fügefestigkeit bei Verwendung eines Gradientenklebstoffes, sodass eine weitere Untersuchung hinreichend Motivation findet. Eine Erweiterung des vorgestellten Berechnungsverfahren zur Versagensbewertung von Gradientenklebstoffen ist darüber hinaus naheliegend aufgrund seiner Effizienz und Genauigkeit.

Kapitel 6

Analyse von Klebverbindungen mit duktilen Klebstoffen

*„Design cannot come first, but must follow analysis and understanding.“
Robert D. Adams, Professor der angewandten Mechanik*

Es werden im Folgenden Klebverbindungen mit duktilen Klebstoffen analysiert. Basierend auf den in Kapitel 4.2 beschriebenen Annahmen wird ein general sandwich-type-Berechnungsmodell für duktile Klebverbindungen mit Mehrschichtverbundfügeteilen vorgestellt. Spannungsfelder charakteristischer Überlappungsfügungen werden mittels Finite-Elemente-Analysen validiert und der Einfluss der Vergleichsspannung sowie der Spannungs-Dehnungskurvenapproximation analysiert und diskutiert. Abschließend werden verschiedene Versagenskriterien zur Analyse duktiler Klebverbindungen vorgestellt und die zugehörigen Versagensvorhersagen mit experimentellen Befunden verglichen und diskutiert. Das dargestellte Berechnungsmodell zur Analyse von duktilen Klebverbindungen mit zugehörigen Ergebnissen wurde in international begutachteten Fachzeitschriften und Tagungsbänden publiziert (Stein et al., 2018, Rosendahl et al., 2018).

6.1 Einführung

Neben spröden Klebstoffen werden aufgrund ihrer in vielen Situationen gewünschten Nachgiebigkeit mit zugehörigen hohen Bruchdehnungen duktile Klebstoffe im strukturellen Bereich eingesetzt. Eine Analyse des mechanischen Verhaltens erweist sich im Vergleich zu spröden Klebverbindungen jedoch als aufwendig. Es existieren nur einige wenige analytische Modelle, vgl. Kapitel 3.2.2, sodass in den meisten Fällen aufwendige Finite-Elemente-Analysen durchgeführt werden müssen. Um Zugang zur Analyse beliebiger Überlappungsfügungen mit duktilen Klebstoffen zu erlangen, wird im Folgenden der bereits zuvor vorgestellte *general sandwich-type*-Modellierungsansatz basierend auf den in Kapitel 4.2 eingeführten Annahmen auf duktile Klebstoffe erweitert. Dazu wird das mechanische Verhalten der Klebschicht mittels der Deformationstheorie der Plastizität, vgl. Kapitel 2.3, modelliert. Das Modell stellt somit eine direkte Erweiterung der Modelle von Bigwood u. Crocombe (1990) und Smeltzer u. Klang (2003) bezüglich der Analyse von duktilen Klebverbindungen mit Mehrschichtverbundfügeteilen dar. Die vorgestellte Arbeit und Ergebnisse wurden mit dankbarer Unterstützung von P. L. Rosendahl publiziert (Stein et al., 2018, Rosendahl et al., 2018).

6.2 Modellierung der Klebstoffplastizität

Wie bereits zuvor wird ein *general sandwich-type*-Modellierungsansatz gemäß Kapitel 4.2 vorgesehen. Nur der Überlappungsbereich der Fügung mit beliebiger äußerer Belastung wird berücksichtigt. Mehrschichtverbundfügeteile mit Biege-Dehn-Kopplungen sind mittels Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und die Klebschicht als *weak-interface* modelliert. Weiterhin gelten die Gleichungen (4.1)–(4.12) als Grundgleichungen des Problems. Allerdings wird in Gleichung (4.12) gemäß Kapitel 2.3 ein von der Belastung abhängiger Elastizitätsmodul (Sekantenmodul) $E_s^{(a)}$ sowie die Querkontraktionszahl $\nu_s^{(a)}$ vorgesehen:

$$\sigma_{zz}^{(a)} = \frac{E_s^{(a)}}{1 - \nu_s^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \quad \sigma_{yy}^{(a)} = \frac{\nu_s^{(a)} E_s^{(a)}}{1 - \nu_s^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \quad \tau_{xz}^{(a)} = \frac{E_s^{(a)}}{2(1 + \nu_s^{(a)})} \gamma_{xz}^{(a)}. \quad (6.1)$$

Zur Ermittlung des Sekantenmoduls ist eine geeignete Vergleichsspannung zu wählen, die mehrachsige Spannungszustände auf einen skalaren Wert projiziert. In Kapitel 2.3 wurde dazu eine bestimmte Oktaederschubspannung, die VON MISES-Vergleichsspannung (2.64), verwendet. Im Rahmen des betrachteten Modellierungsansatzes lässt sie sich wie folgt schreiben

$$\sigma_{vM}^{(a)} = \sqrt{\sigma_{yy}^{(a)2} + \sigma_{zz}^{(a)2} - \sigma_{yy}^{(a)} \sigma_{zz}^{(a)} + 3\tau_{xz}^{(a)2}}. \quad (6.2)$$

Durch Einsetzen des Konstitutivgesetzes (6.1) und des Ansatzes für den Sekantenmodul (2.59) ergibt sich die zugehörige Vergleichsdehnung zu

$$\varepsilon_{vM}^{(a)} = \frac{1}{1 - \nu^{(a)2}} \sqrt{(1 - \nu^{(a)} + \nu^{(a)2}) \varepsilon_{zz}^{(a)2} + \frac{3}{4} (1 - \nu^{(a)})^2 \gamma_{xz}^{(a)2}}. \quad (6.3)$$

Die über den deviatorischen Anteil des Spannungstensors definierte VON MISES-Vergleichsspannung (vgl. Gleichung (2.64)) vernachlässigt den zugehörigen hydrostatischen Anteil. In Experimenten (Adams et al., 1997) zeigen duktile Klebstoffe jedoch druckempfindliches Verhalten, sodass für eine adäquate Modellierung der hydrostatische Anteil des Spannungstensors Berücksichtigung finden muss. Für Polymere existieren in dieser Form zwei gängige Formulierungen: eine Linearkombination und ein quadratisches Interaktionsgesetz der hydrostatischen und deviatorischen Anteile. Erstere wurde von Gali et al. (1981) vorgeschlagen und lässt sich mittels des Verhältnisses der Fließspannung unter uniaxialem Druck und Zug $s = \sigma_y^{(a)+} / \sigma_y^{(a)-}$ angeben als

$$\sigma_G^{(a)} = \frac{1}{2s} ((s - 1)I_1 + (1 + s)\sigma_{vM}). \quad (6.4)$$

Das von Raghava et al. (1973) vorgeschlagene quadratische Interaktionsgesetz lässt sich schreiben als

$$\sigma_R^{(a)} = \frac{1}{2s} \left((s - 1)I_1 + \left(I_1^2 (s - 1)^2 + 4s \sigma_{vM}^2 \right)^{1/2} \right). \quad (6.5)$$

Die zugehörigen Vergleichsdehnungen lassen sich analog zu Gleichung (6.3) herleiten und wie folgt angeben

$$\varepsilon_G^{(a)} = \frac{1}{2s} \left(\frac{s - 1}{1 - \nu^{(a)}} \varepsilon_{zz}^{(a)} + (1 + s) \varepsilon_{vM}^{(a)} \right), \quad (6.6)$$

$$\varepsilon_{\text{R}}^{(\text{a})} = \frac{1}{2s} \left(\frac{s-1}{1-\nu^{(\text{a})}} \varepsilon_{zz}^{(\text{a})} + \left(\left(\frac{s-1}{1-\nu^{(\text{a})}} \varepsilon_{zz}^{(\text{a})} \right)^2 + 4s \varepsilon_{\text{VM}}^2 \right)^{1/2} \right). \quad (6.7)$$

Im Falle $s = 1$ reduzieren sich die Vergleichsgrößen (6.4)–(6.7) auf die der VON MISES-Vergleichsspannung. Alternativ lassen sich auch weitere Vergleichsgrößen definieren, sofern die Äquivalenz von einachsigen und mehrachsigen Zuständen erhalten bleibt, vgl. Kapitel 2.3. Eine umfangreiche Übersicht über Vergleichsspannungen und Versagenskriterien findet man bei Altenbach et al. (2014).

Die im Allgemeinen deformationsabhängige Querkontraktionszahl $\nu_s^{(\text{a})}$ ist in dieser Arbeit aus Vereinfachungsgründen als konstant angenommen ($\nu_s^{(\text{a})} = 0,47$).⁶⁸ Vorherige Arbeiten (Bigwood u. Crocombe, 1990) sowie Vorstudien (Stein et al., 2017c) zeigten, dass diese Annahme keinen maßgeblichen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Eine von der Belastung abhängige Querkontraktionszahl würde zu einer gegenseitigen Abhängigkeit der Querkontraktionszahl und des Sekantenmoduls führen, die eine effiziente analytische Betrachtung ausschließt.

6.3 Differentialgleichungssystem

Infolge der Modellierung der Klebschicht mittels der Deformationstheorie der Plastizität ergibt sich ein komplexes Differentialgleichungssystem, das einer Lösung bedarf. Infolge der Nichtlinearität des Konstitutivgesetzes des Klebstoffs (6.1) ergibt sich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem. Im Gegensatz zu den zuvor vorgestellten Modellierungsansätzen ist es nicht möglich ein System, das nur von den Spannungen oder Verzerrungen abhängt, herzuleiten. Stattdessen werden die Schnittkräfte sowie die Verzerrungen als freie Funktionen angesetzt. Das resultierende Differentialgleichungssystem mit Randbedingungen lässt sich effizient mittels eines Finite-Differenzen-Verfahrens lösen.

6.3.1 Herleitung und Lösung

Die ersten drei Differentialgleichungen ergeben sich direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen (4.1)–(4.3) durch Einsetzen des Konstitutivgesetzes (6.1)

$$N^{(1)'} = -\frac{E_s^{(\text{a})}}{2(1+\nu^{(\text{a})})} \gamma_{xz}^{(\text{a})}, \quad (6.8)$$

$$V^{(1)'} = -\frac{E_s^{(\text{a})}}{1-\nu^{(\text{a})}{}^2} \varepsilon_{zz}^{(\text{a})}, \quad (6.9)$$

$$M^{(1)'} = V^{(1)'} - \frac{h_1 + t}{2} \frac{E_s^{(\text{a})}}{2(1+\nu^{(\text{a})})} \gamma_{xz}^{(\text{a})}. \quad (6.10)$$

⁶⁸Diese Annahme wurde insbesondere von Ilyushin (1945, 1948) in den frühen Tagen der Deformationstheorie zur Herleitung von analytischen Lösungen für Plastizitätsprobleme verwendet.

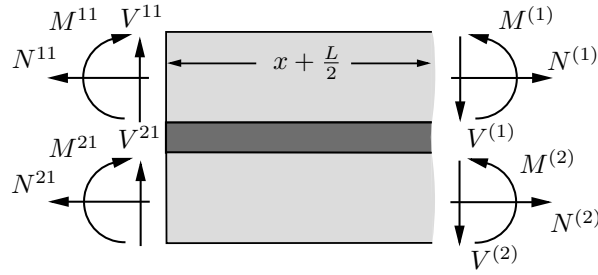


Abbildung 6.1: Freikörperbild des Überlappungsbereiches mit einem vertikalen Schnitt an der Stelle x .

Zwei weitere Differentialgleichungen ergeben sich durch Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen (4.1)–(4.3) und des Konstitutivgesetzes (6.1) in die Ableitungen der Klebschichtkinematik (4.9) und (4.10)

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(a)'} &= \frac{1}{t\Delta^{(2)}} \left(\left(D_{11}^{(2)} + \frac{h_2 + t}{2} B_{11}^{(2)} \right) N^{(2)} - \left(B_{11}^{(2)} + \frac{h_2 + t}{2} A_{11}^{(2)} \right) M^{(2)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{t\Delta^{(1)}} \left(\left(D_{11}^{(1)} - \frac{h_1 + t}{2} B_{11}^{(1)} \right) N^{(1)} - \left(B_{11}^{(1)} - \frac{h_1 + t}{2} A_{11}^{(1)} \right) M^{(1)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^{(2)} A_{55}^{(2)}} - \frac{1}{k^{(1)} A_{55}^{(1)}} \right) \frac{E_s^{(a)}}{1 - \nu^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{(a)''} &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\Delta^{(1)}} \left(-B_{11}^{(1)} N_1 + A_{11}^{(1)} M_1 \right) - \frac{1}{\Delta^{(2)}} \left(-B_{11}^{(2)} N_2 + A_{11}^{(2)} M_2 \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{k^{(1)} A_{55}^{(1)}} + \frac{1}{k^{(2)} A_{55}^{(2)}} \right) \frac{E_s^{(a)}}{1 - \nu^{(a)2}} \varepsilon_{zz}^{(a)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dabei werden die Schnittkräfte des unteren Fügeparts mittels der Schnittkräfte des oberen Fügeparts und der äußeren Belastung eliminiert. Dazu wird gemäß Abbildung 6.1 ein beliebiger vertikaler Schnitt der Überlappung an der Stelle x betrachtet und die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt. Auflösen nach den Schnittkräften des unteren Fügeparts liefert schließlich

$$N^{(2)} = N^{11} + N^{21} - N^{(1)}, \quad (6.13)$$

$$V^{(2)} = V^{11} + V^{21} - V^{(1)}, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} M^{(2)} &= M^{11} + M^{21} - M^{(1)} + (V^{11} + V^{21}) \left(x + \frac{L}{2} \right) \\ &\quad + (N^{(1)} - N^{11}) \left(t + \frac{h_1 + h_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Zur Lösung des Systems nichtlinearer Differentialgleichungen, hat sich vor der Anwendung des Finite-Differenzen-Schemas das Zurückführen des Differentialgleichungssystems auf ein System erster Ordnung bewährt. Dazu wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung (6.12) durch Berücksichtigung der Größen $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ und $\varepsilon_{zz}^{(a)'}$ als freie Funktionen so umgeformt, dass zwei Differentialgleichungen erster Ordnung entstehen. Schließlich

lässt sich das System von Differentialgleichungen in folgender kurzer Form darstellen

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}), \quad (6.16)$$

mit dem Vektor der freien Funktionen $\mathbf{y} = [N^{(1)}, V^{(1)}, M^{(1)}, \gamma_{xz}^{(a)}, \varepsilon_{zz}^{(a)}, \varepsilon_{zz}^{(a)'}]^T$.

6.3.2 Randbedingungen

Zugehörig zum System nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit sechs freien Funktionen werden sechs Randbedingungen benötigt. Diese ergeben sich direkt aus den äußeren Randlasten des Überlappungsbereiches gemäß Abbildung 4.1 zu

$$\begin{aligned} N^{(1)} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} &= N^{11}, & N^{(1)} \Big|_{x=\frac{L}{2}} &= N^{12}, \\ V^{(1)} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} &= V^{11}, & V^{(1)} \Big|_{x=\frac{L}{2}} &= V^{12}, \\ M^{(1)} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} &= M^{11}, & M^{(1)} \Big|_{x=\frac{L}{2}} &= M^{12}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Das Differentialgleichungssystem (6.16) mit den Randbedingungen (6.17) bildet schlussendlich ein nichtlineares Randwertproblem.

6.4 Ergebnisse und Studien

Im Folgenden werden die resultierenden Spannungs- und Verzerrungsfelder in der Klebschicht mit Finite-Elemente-Referenzlösungen verglichen und der Einfluss der Spannungs-Dehnungskurvenapproximation zur Bestimmung des Sekantenmoduls sowie der Vergleichsspannung analysiert.

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems (6.16) mit den Randbedingungen (6.17) wird ein bereits implementierter Löser des Programmpakets MATLAB verwendet. Der verwendete Löser basiert auf einem dreistufigen Lobatto IIIa implizitem Runge-Kutta-Schema.⁶⁹ Dies ist eine Kollokationsmethode mit einem C^1 -stetigen, abschnittsweise kubischem Polynom, die eine stetige und stetig differenzierbare globale Lösung entlang der Überlappung liefert. Die numerische Methode unterteilt das Integrationsgebiet in Unterabschnitte und bestimmt eine Lösung durch Lösen eines globalen Systems algebraischer Gleichungen bestehend aus den Kollokationsbedingungen auf allen Unterabschnitten und den Randbedingungen. Anschließend wird der numerische Fehler abgeschätzt. Wird ein Toleranzkriterium nicht erreicht, folgt eine Anpassung der Unterteilung der Unterabschnitte und die Prozedur wiederholt sich bis eine hinreichend gute

⁶⁹Im Programmpaket MATLAB wird der Löser mit der Abkürzung `bvp4c` bezeichnet.

Tabelle 6.1: Materialdaten der in diesem Kapitel verwendeten Klebstoffe.

	E_{el} [GPa]	ν_{el} [-]	E_{pl} [MPa]	σ_y [MPa]	s [-]	Quellen
Araldite 2015	1,85	0,36	142,35	16,49	1,4	de Sousa et al. (2017)

Lösung ermittelt wurde. Eine komplette Analyse einer beliebigen Fügekonfiguration erfordert Rechenzeiten unter 2 s.⁷⁰

Für die Anwendung des vorgestellten Berechnungsverfahrens müssen geeignete Materialdaten des Klebstoffes vorliegen. Zunächst ist es möglich experimentell ermittelte Daten einer uniaxialen Spannungs-Dehnungskurve direkt als Eingabedaten zu verwenden. Allerdings haben sich einfache Näherungsformeln als hinreichend gute und effiziente Approximationen bei einer Reduzierung der Anzahl benötigter Eingabedaten erwiesen. Dabei werden in der Literatur vorrangig elastisch-perfekt plastische (EPP), bi-lineare (BLA) oder hyperbolische Tangensapproximationen (HTA) verwendet. Erstere nimmt zunächst einen linear-elastischen Verlauf bis zu einem kritischen Spannungswert und einer anschließend uneingeschränkten Zunahme der Dehnungen bis zur Bruchdehnung an. Bei der bi-linearen Approximation wird die Spannungs-Dehnungskurve durch zwei lineare Abschnitte, definiert durch den Elastizitätsmodul im elastischen Bereich $E_{el}^{(a)}$, der Fließspannung $\sigma_y^{(a)}$, der Spannung sowie Dehnung bei Versagen $\sigma_f^{(a)}$ und $\varepsilon_f^{(a)}$, beschrieben

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_{el}^{(a)} \varepsilon & \varepsilon \leq \frac{\sigma_y^{(a)}}{E_{el}^{(a)}} \\ \sigma_y^{(a)} + \left(\frac{\sigma_f^{(a)} - \sigma_y^{(a)}}{\varepsilon_f^{(a)} - \frac{\sigma_y^{(a)}}{E_{el}^{(a)}}} \right) \left(\varepsilon - \frac{\sigma_y^{(a)}}{E_{el}^{(a)}} \right) & \varepsilon \geq \frac{\sigma_y^{(a)}}{E_{el}^{(a)}} \end{cases} \quad (6.18)$$

Die hyperbolische Tangensapproximation lässt sich schließlich wie folgt angeben

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_y^{(a)} \tanh \left(\frac{E_{el}^{(a)} - E_{pl}^{(a)}}{\sigma_y^{(a)}} \varepsilon \right) + E_{pl}^{(a)} \varepsilon \quad (6.19)$$

wobei $E_{pl}^{(a)}$ den Elastizitätsmodul im plastischen Bereich bezeichnet. Dieser lässt sich mittels einer Anpassung der Approximation an die experimentell ermittelten Daten bestimmen. Abbildung 6.2 zeigt beispielhaft eine experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungskurve des duktilen Zweikomponentenklebstoffes Araldite 2015 und die zugehörige Approximationen. Der untersuchte Klebstoff Araldite 2015 ist ein zähelastisches Zweikomponentenklebstoffsystem aus Harz und Härter, das bei Raumtemperatur aushärtet. Die zur Formulierung der Approximationen benötigten Materialdaten sind in Tabelle 6.1 aufgeführt. Dieser Klebstoff wird in den folgenden Kapiteln zur Validierung des Modells und Untersuchung der Spannungs-Dehnungskurvenapproximationen sowie der Vergleichsspannung verwendet.

⁷⁰Die Angaben beziehen sich auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit einem Intel® Core™ i5 Prozessor mit 4 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.

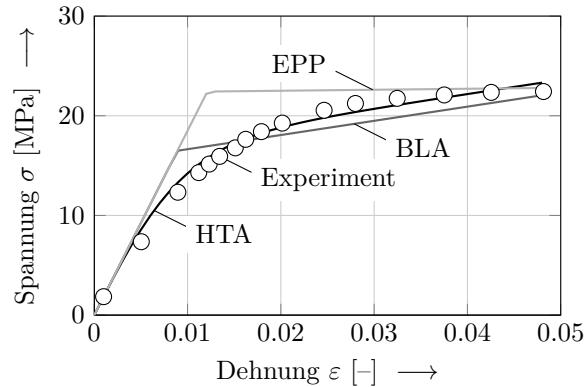


Abbildung 6.2: Spannungs-Dehnungskurve des Klebstoffes Araldite 2015. Punkte stellen experimentelle Daten und durchgezogene Linien die jeweiligen Approximationen dar.

Tabelle 6.2: Schnittlasten pro Einheitstiefe bei einer angenommenen Gesamtlängung von 225 mm und einer Tiefe von $b = 25$ mm. Schnittkräfte N und Q in N/mm, Schnittmomente M in Nmm/mm.

Abbildung	N^{11}	Q^{11}	M^{11}	N^{12}	Q^{12}	M^{12}	N^{21}	Q^{21}	M^{21}	N^{22}	Q^{22}	M^{22}
6.3(a)	200	2,2	222,2	0	0	0	0	0	0	200	2,2	-222,2
6.3(b)	0	0	0	0	0	0	1000	0	0	1000	0	0
6.3(c)	100	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0

6.4.1 Vergleich mit Finite-Elemente-Analysen

Zum Vergleich der Ergebnisse des vorgestellten Berechnungsmodells mit den Ergebnissen von Finite-Elemente-Analysen wird das in Kapitel 4.4 eingeführte Finite-Elemente-Modell erweitert. Für den Klebstoff wird elastisch-plastisches Materialverhalten mit isotroper Verfestigung vorgesehen. Als Fließkriterium wird die VON MISES-Vergleichsspannung mit der zum Klebstoff zugehörigen Fließspannung verglichen.⁷¹ Das Materialverhalten wird mittels des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktionszahl im elastischen Bereich sowie der plastischen Spannungen und Dehnungen in tabellarischer Form vorgegeben. Dabei ist erwähnenswert, dass das verwendete Plastizitätsmodell in ABAQUS auf inkrementeller Theorie beruht. Gemäß Kapitel 2.3 sind jedoch die Ergebnisse inkrementeller Theorie und Deformationstheorie im Falle monotoner Belastung und isotroper Verfestigung, wie sie auch im Folgenden betrachtet werden, koinzident. Die betrachteten Spannungen sind letztlich der Mitte der Klebschicht entlang der Überlappung entnommen. Für die Fügeteile werden die in Tabelle 4.1 und für den Klebstoff Araldite 2015 die in Tabelle 6.1 angegebenen Kenngrößen verwendet. Die jeweiligen Randlasten am Überlappungsbereich jeder Struktursituation sind in Tabelle 6.2 zu finden.

Abbildung 6.3(a) zeigt zunächst die vom vorgestellten Berechnungsmodell und mittels

⁷¹Das VON MISES-Kriterium wurde hier der Einfachheit halber zur Beschreibung des Fließbeginns gewählt, da es bereits in ABAQUS implementiert vorliegt.

Finite-Elemente-Analyse berechneten Schub- und Schälspannungen sowie die zugehörige Vergleichsspannung über die Überlappung für eine einschnittige Aluminium-Araldite 2015-Aluminium-Überlappungsfügung. Im Bereich $-6 \text{ mm} < x < 6 \text{ mm}$ ergibt sich ein für eine Klebverbindung mit sprödem Klebstoff charakteristischer Spannungsverlauf. In den verbleibenden äußeren Bereichen liegt die Vergleichsspannung über der Fließspannung und plastisches Fließen setzt ein. Es liegen deutlich geringere Spannungsspitzen am Rand der Überlappung im Vergleich zu rein elastischen Lösungen, wie beispielsweise in Abbildung 4.3(b) gezeigt, vor. Anders als im Falle spröder Klebstoffe überschätzt das vorgestellte Berechnungsmodell die Spannungsspitzen nur geringfügig. Das monoton fallende Verhalten der Schubspannungen zum Rand der Überlappung wird sogar adäquat abgebildet. Zusätzlich ist das zugehörige Verzerrungsfeld gezeigt. Hier zeigt sich ein gleichmäßiger glatter Verlauf der Schub- und Schälverzerrung über die Überlappung. Die auftretenden Maximalwerte in der unmittelbaren Umgebung des Überlappungsrandes werden adäquat vorhergesagt. In Abbildung 6.3(b) sind die Spannungsverläufe für ein CFK-Verstärkungspflaster auf einem Aluminium-Substrat dargestellt. Das CFK-Pflaster ist ein asymmetrischer $[0^\circ/90^\circ]$ -Verbund. Die Übergänge der in der Mitte elastisch und an den Rändern plastischen Bereiche sind deutlich erkennbar. Für die Schub- und Schälspannungen ergeben sich sehr gute Übereinstimmungen zwischen den Ergebnissen des Berechnungsmodells und der Finite-Elemente-Analyse. Dies gilt ebenfalls für die Schub- und Schälverzerrungen, die einen qualitativ ähnlichen Verlauf aufzeigen. Die Abweichungen bei der Vergleichsspannung lassen sich mittels der vereinfachten Kinematik der Klebschicht erklären, vgl. Kapitel 4.2. Abbildung 6.3(c) zeigt letztlich die Ergebnisse für eine axial belastete zweischrittige Überlappungsfügung aus Stahl und Aluminiumfügeteilen. Hier ist zusätzlich im Diagramm der Klebschichtspannungen eine Detailansicht des Randes der Überlappung gezeigt. Das vorgestellte Berechnungsmodell ermöglicht zwar nicht den Abfall der Spannungen hin zum Rand der Überlappung darzustellen. Allerdings liefern die berechneten Spannungen am Rand der Überlappung eine gute Abschätzung der maximal auftretenden Spannungswerte in der unmittelbaren Umgebung des Randes. Die gleiche Schlussfolgerung lässt sich für die berechneten Verzerrungen angeben.

Insgesamt ergibt sich eine sehr gute bis gute Übereinstimmung der Ergebnisse des vorgestellten Berechnungsverfahrens mit denen der Finite-Elemente-Analysen. Im Vergleich zu Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen, vgl. Kapitel 4, liegen wesentlich kleinere Abweichungen für die Spannungsverläufe am Rand vor. Die Spannungs- und Verzerrungswerte am Rand ermöglichen eine Abschätzung der maximal auftretenden Werte in der unmittelbaren Umgebung des Überlappungsrandes, die maßgeblich für eine Bewertung von Bedeutung sind.

6.4.2 Einfluss der Spannungs-Dehnungskurvenapproximation

Betrachtet man die vielseitigen Möglichkeiten die Materialdaten des Klebstoffes als Eingangsgrößen zu implementieren, stellt sich die Frage nach dem Einfluss der verschiedenen Spannungs-Dehnungskurvenapproximationen. Abbildung 6.4 zeigt die Spannungsfelder einer ein- und zweischrittigen Überlappungsfügung für die in Abbildung 6.2 gezeigten Approximationen der Spannungs-Dehnungskurve des Klebstoffes Araldite 2015. Die

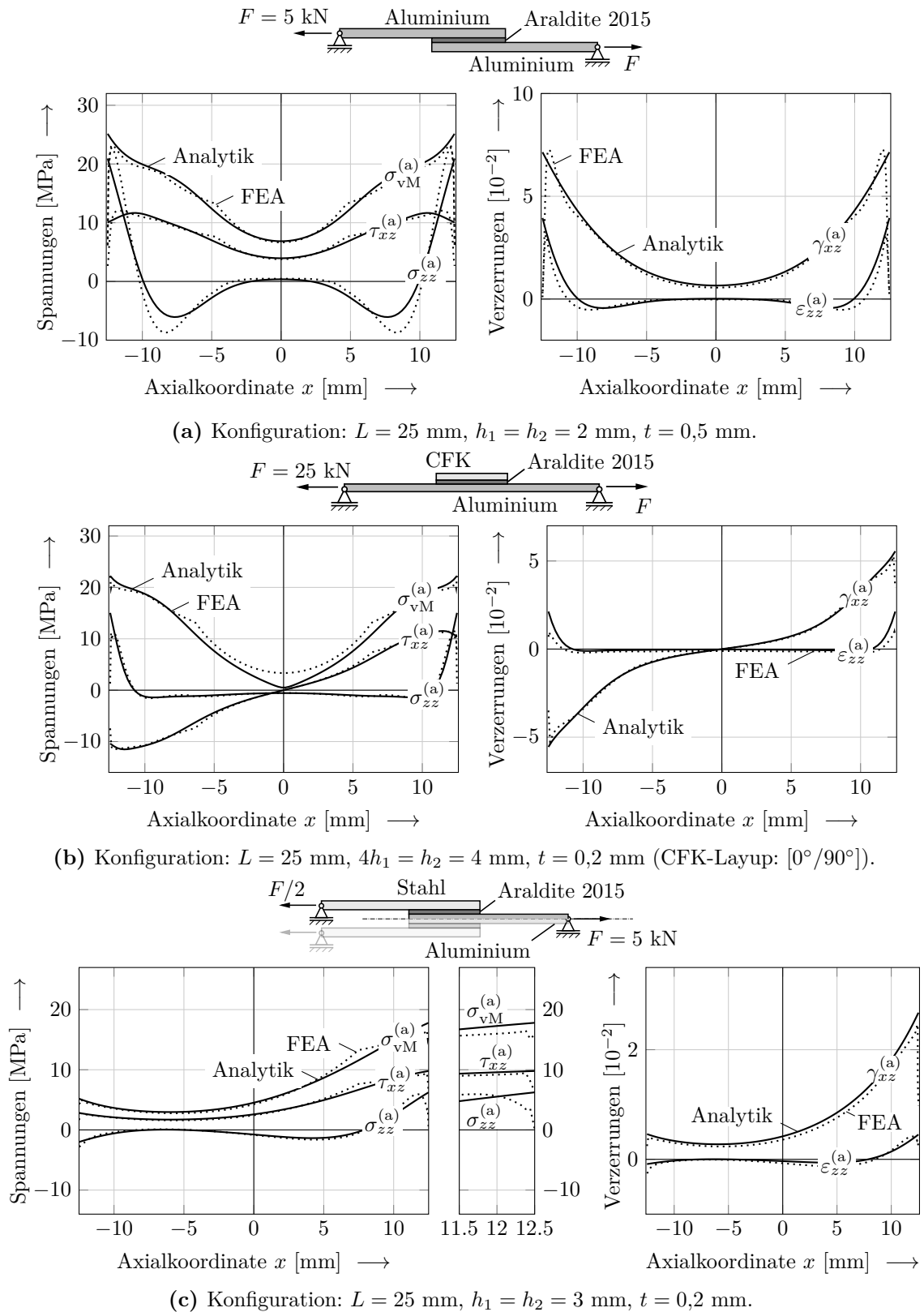


Abbildung 6.3: Vergleich der Ergebnisse des vorgestellten Berechnungsverfahrens mit Ergebnissen der Finite-Elemente-Analysen für eine einschnittige Überlappungsfügung (a), ein Verstärkungspflaster (b) sowie eine zweischnittige Überlappungsfügung (c).

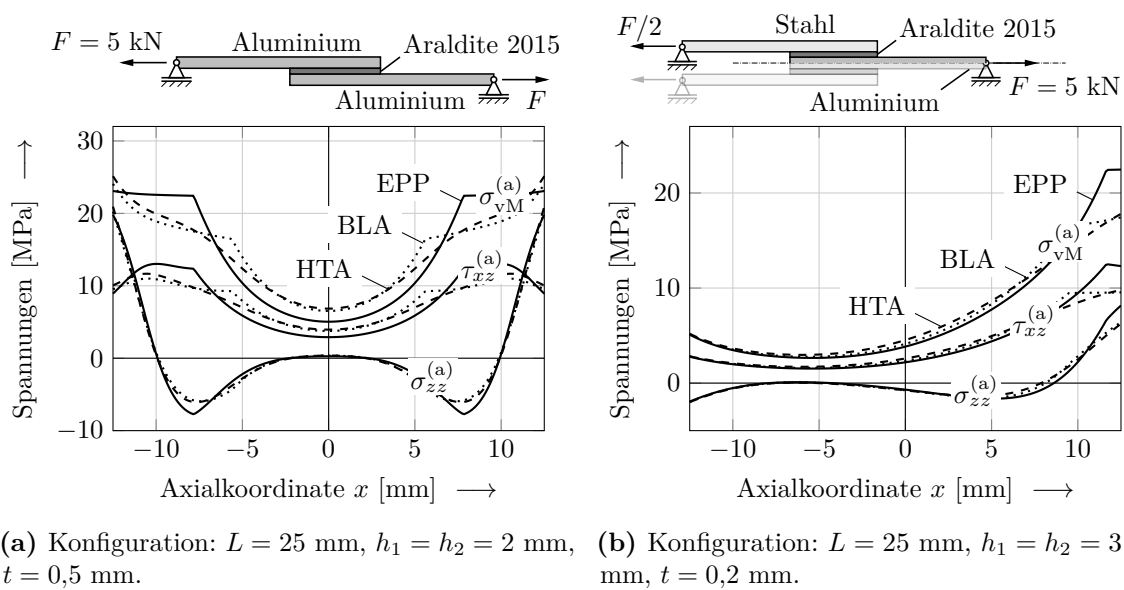


Abbildung 6.4: Einfluss der Spannungs-Dehnungskurvenapproximation auf die Spannungsfelder einer einschnittigen Überlappungsfügung (a) und einer zweischnittigen Überlappungsfügung (b).

Fügekongfigurationen in Abbildung 6.4(a) und 6.4(b) entsprechen den jeweils in Abbildung 6.3(a) und 6.3(c) gezeigten Konfigurationen. Der Einfluss auf die Schälspannungen ist bei beiden Konfigurationen vernachlässigbar klein. Bei der Vergleichsspannung erkennt man bei der elastisch-perfekt plastischen Approximation den charakteristischen konstanten Verlauf im plastischen Bereich. Der Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich ist hier aufgrund der vergleichsweise hohen Fließspannung näher am Rand zu finden. Bei der einschnittigen Überlappungsfügung, vgl. Abbildung 6.4(a), steigen die Schubspannungen zunächst nach dem Übergang zum plastischen Bereich an und fallen zum Rand hin wieder ab. Bei den bi-linearen und der hyperbolischen Tangensapproximationen sind für beide Konfigurationen kaum Unterschiede erkennbar. Letztere liefert allerdings stets stetig und glatte Spannungsverläufe. Da die hyperbolische Tangensapproximation nach Abbildung 6.2 bestmöglich die experimentelle Spannungs-Dehnungskurve annähert, wird sie für die weiteren Berechnungen verwendet.

6.4.3 Einfluss der Vergleichsspannung

Im Folgenden wird der Einfluss der Wahl der in Kapitel 6.2 vorgestellten Vergleichsspannung betrachtet. Es werden die beiden gleichen Struktursituationen wie in Kapitel 6.4.2 zum Vergleich herangezogen. Abbildung 6.5 zeigt die Spannungsfelder für verschiedene Vergleichsspannungen mit der hyperbolischen Tangensapproximation für die Spannungs-Dehnungskurve des Klebstoffes Araldite 2015. Es zeigen sich bei beiden Struktursituationen kaum Unterschiede. Lediglich beim Verlauf der Vergleichsspannung ergeben sich für die VON MISES-Vergleichsspannung geringe Abweichungen im Verlauf.

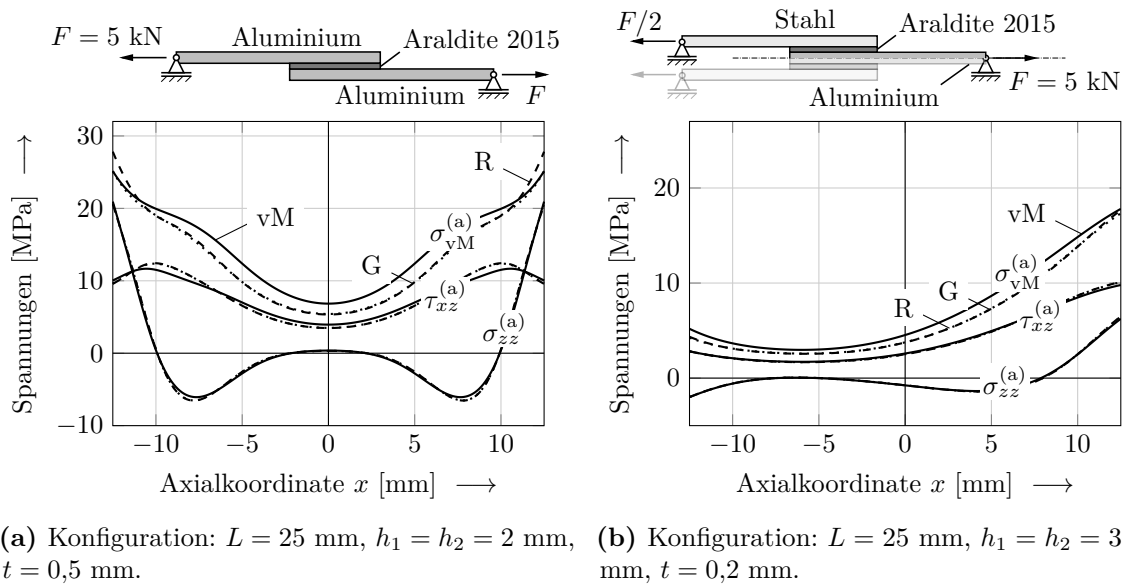


Abbildung 6.5: Einfluss der Wahl der Vergleichsspannung auf die Spannungsfelder einer einschnittigen Überlappungsfügung (a) und einer zweischnittigen Überlappungsfügung (b).

Dies lässt sich auf die Vernachlässigung des hydrostatischen Anteils des Spannungstensors zurückführen. Letztlich wird das Maß der Abweichungen über das Verhältnis der Fließspannungen unter uniaxalem Druck und Zug gesteuert. Ist der Klebstoff unter Druck wesentlich empfindlicher als unter Zug (vergleichsweise großes s), ergeben sich größere Abweichungen. Im vorliegenden Fall von $s = 1,4$ sind die Unterschiede der Vergleichsspannungen nahezu vernachlässigbar. Nichtsdestotrotz wird für die weiteren Berechnungen aus physikalischen Gründen, siehe Kapitel 6.2, die von Raghava et al. (1973) vorgeschlagene Vergleichsspannung verwendet.

6.5 Versagensbewertung mittels analytischem Modell

Im folgenden Kapitel werden basierend auf dem eingeführten Berechnungsmodell zur Analyse der Lastübertragung verschiedene Versagensmodelle zur Untersuchung des Tragverhaltens von Klebverbindungen mit duktilen Klebstoffen vorgestellt. Als primäre Versagensart wird duktile Rissinitiierung vom Rand der Überlappung aus betrachtet. Da nach Kapitel 6.4 die ermittelten Feldgrößen am Rand der Überlappung als Abschätzung der maximal auftretenden Werte in der direkten Umgebung des Randes genügen, werden diese vorrangig in der Auswertung von Versagenskriterien verwendet.

Nach Kapitel 3.3 haben sich als gängigste Bewertungsansätze dehnungsbasierte Kriterien für duktilen Versagen bewährt. Dabei wird Versagen postuliert, wenn bestimmte Dehnungsgrößen kritische Werte erreichen. Diese können beispielsweise die Schubverzerrung oder die effektive Vergleichsdehnung sein (Bigwood u. Crocombe, 1990, Rodríguez

et al., 2012). Gemäß Gleichung (2.62) lassen sich die zugehörigen Kriterien angeben als

$$\gamma_{xz}^{(a)} = \gamma_f^{(a)}, \quad (6.20)$$

$$\varepsilon_V^{(a)} = \varepsilon_f^{(a)}, \quad (6.21)$$

wobei $\gamma_f^{(a)}$ und $\varepsilon_f^{(a)}$ jeweils die kritische Schubverzerrung und Bruchdehnung darstellen.

Bei besonders duktilen Klebstoffen hat sich hingegen das Konzept des globalen Fließens⁷² bewährt, das Versagen vorhersagt, wenn über den kompletten Überlappungsbereich die Fließgrenze erreicht ist. Für einschnittige Überlappungsfügungen lässt sich die zugehörige Versagenslast für das Konzept des globalen Fließens vereinfacht wie folgt angeben (Karachalios et al., 2013b)

$$F_f = bL\tau_y^{(a)}, \quad (6.22)$$

wobei $\tau_y^{(a)}$ die Fließgrenze unter Schub, b die Tiefe der Fügekonfiguration und L die Überlappungslänge sind.

Neben diesen beiden Konzepten haben sich bruchmechanische Ansätze als zweckmäßig erwiesen (Fernlund et al., 1994, Wang et al., 2003b). Eine ausführliche Beschreibung verschiedener Ansätze findet sich in Kapitel 3.3. Gemäß Kapitel 2.5.2 lässt sich ein Versagenskriterium im Rahmen elastisch-plastischer Bruchmechanik wie folgt angeben:

$$J = \mathcal{G}_c^{(a)}, \quad (6.23)$$

wobei $\mathcal{G}_c^{(a)}$ die Bruchzähigkeit darstellt. Im Rahmen der *weak-interface*-Modellierung lässt sich das J -Integral als Produkt von Klebschichtdicke und Formänderungsenergie-dichte formulieren, vgl. Gleichung (4.44). Anders als bei spröden Klebstoffen, die mittels linearer Elastizitätstheorie beschrieben werden, lässt sich im Kontext der Deformationstheorie der Plastizität die Energiedichte nicht direkt mittels der maximal auftretenden Randspannungen ausdrücken. Sie muss mittels Integration, siehe Gleichung (2.27), ermittelt werden. Im Rahmen der vorgestellten Modellierung lässt sie sich angeben als

$$W = \int_0^{\bar{\varepsilon}_{zz}^{(a)}} \sigma_{zz}^{(a)} d\varepsilon_{zz}^{(a)} + \int_0^{\bar{\gamma}_{xz}^{(a)}} \tau_{xz}^{(a)} d\gamma_{xz}^{(a)} \quad (6.24)$$

$$= \int_0^{\bar{\varepsilon}_{zz}^{(a)}} \frac{E_s^{(a)}}{1 - \nu_s^{(a)}} \varepsilon_{zz}^{(a)} d\varepsilon_{zz}^{(a)} + \int_0^{\bar{\gamma}_{xz}^{(a)}} \frac{E_s^{(a)}}{2(1 + \nu_s^{(a)})} \gamma_{xz}^{(a)} d\gamma_{xz}^{(a)}, \quad (6.25)$$

wobei $\bar{\varepsilon}_{zz}^{(a)}$ und $\bar{\gamma}_{xz}^{(a)}$ den Endverzerrungszustand darstellen. Da der Sekantenmodul $E_s^{(a)}$ sowohl von der Schubverzerrung $\gamma_{xz}^{(a)}$ als auch der Dehnung $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ abhängt, erfordert die genaue Auswertung der Integrale einigen Aufwand und muss numerisch erfolgen. Dazu wird für die Auswertung des J -Integrals die aufgebrauchte Last in eine vorgegebene

⁷²engl.: Global yielding (GY)

Anzahl von Inkrementen unterteilt und mittels des vorgestellten Berechnungsmodell jeweils der zu den Inkrementen zugehörige Verzerrungszustand ermittelt. Anschließend dienen diese Daten zur Bestimmung der Integrationspunkte und des zugehörigen Sekantenmoduls für die numerische Integration der einzelnen Integrale in Gleichung (6.25). Eine Auswertung des J -Integrals für eine bestimmte Last benötigt daher die Anzahl der Integrationspunkte an Auswertungen des vorgestellten Berechnungsmodells zur Analyse der Lastübertragung. Eine obere Grenze des J -Integrals, ferner bezeichnet mit J^+ , lässt sich effizienter ermitteln durch Berechnen der Integrale mit zu Null gesetzten Verzerrungen mit Ausnahme der Verzerrungen nach der integriert wird. Dazu wird lediglich eine Auswertung des Berechnungsmodells benötigt. Zur Berücksichtigung des Mixed-Mode-Verhaltens wird der von Hutchinson u. Suo (1991) vorgeschlagene und in Kapitel 4.5.2 vorgestellte Ansatz verfolgt. Gemäß Gleichung (4.51) wird eine vom Mixed-Mode-Winkel ψ abhängige Bruchzähigkeit vorgesehen.

Die Auswertung der Versagensmodelle ist ebenfalls im Programmpaket MATLAB umgesetzt. Dazu werden die einzelnen Kriterien in die Form $f(F) = 0$ transformiert und die zugehörige Versagenslast mittels einer einfachen Nullstellensuche berechnet. Bei zwanzig Integrationspunkten für die genaue Auswertung des J -Integrals und einer Fehlertoleranz von aufeinander folgenden Auswertungen der Versagenslast von 10^{-4} bei der Nullstellensuche ergaben sich für alle betrachteten Fügekonfigurationen Rechenzeiten unter 15 s⁷³. Dabei wurde die von MATLAB bereitgestellte Option der Parallellisierung für die Ermittlung der Verzerrungszustände zugehörig zu den einzelnen Integrationspunkten genutzt. Bei der Verwendung der effizienter zu implementierenden Versagenskriterien – Gleichungen (6.20) und (6.21) sowie $J^+ = \mathcal{G}_c(\psi)$ – ergaben sich Rechenzeiten von unter 4 s.

6.6 Ergebnisse

Die zuvor vorgestellte Modellierung zur Bewertung des Tragverhaltens von Überlappungsfügungen mit duktilen Klebstoffen wird im Folgenden mittels experimenteller Daten validiert. Die Ergebnisse der Versagenslastvorhersagen werden analysiert und die Anwendbarkeit sowie Güte der einzelnen Kriterien diskutiert.

Zur Validierung werden sechs Studien zur Untersuchung des Einflusses geometrischer Parameter auf die Versagenslastvorhersagen von Überlappungsfügungen herangezogen. Dabei werden nur experimentelle Testserien betrachtet, bei denen hochfeste Fügebauteile mit duktilen Klebstoffen analysiert wurden, sodass Klebschichtversagen die dominierende Versagensart darstellt.

Zunächst werden Untersuchungen zum Einfluss der Überlappungslänge auf die Versagenslasten von einschnittigen Überlappungsfügungen mit Aluminium- bzw. Mehrschichtverbundfügebauteilen und dem bereits zuvor untersuchten Klebstoff Araldite 2015 von de Sousa et al. (2017) bzw. Campilho et al. (2013b) betrachtet. Bei Campilho et al.

⁷³Die Angabe von Rechenzeiten bezieht sich wiederum auf die Auswertung auf einem Arbeitsplatzrechner mit einem Intel® Core™ i5 Prozessor mit 4 Kernen und jeweiliger Taktfrequenz von 3 GHz.

Tabelle 6.3: Materialkenngrößen der verwendeten Klebstoffe.

	$E_{el}^{(a)}$ [GPa]	$\nu_{el}^{(a)}$ [-]	E_{pl} [MPa]	s [-]	τ_y [MPa]	σ_y [MPa]	γ_f [%]	ε_f [%]	\mathcal{G}_{Ic} [$\frac{N}{mm}$]	\mathcal{G}_{IIc} [$\frac{N}{mm}$]
Araldite 2015 ⁷⁴	1,85	0,36	142,35	1,4	14,6	16,49	43,9	4,77	0,43	4,7
AV 119 ⁷⁵	3,45	0,35	117,6	1,3	49,0	67,1	30,0	8,0	1,37	3,85
Hysol EA 9361 ⁷⁶	0,67	0,4	4,96	1,8	16,5	20,0	–	44,0	2,61	5,22

(2013b) werden Fügungen zwischen unidirektional faserverstärkten Kunststofffügeteilen mit dem Layup $[0^\circ]_{16}$ untersucht, deren Materialdaten Tabelle 4.3 zu entnehmen sind. Des Weiteren wird eine Studie zum Einfluss der Überlappungslänge von Adams et al. (1997) untersucht. Dabei werden Stahlfügeteile mit dem Klebstoff AV 119 der Marke Araldite analysiert. AV 119 ist ein Epoxid-Einkomponentenklebsystem, das bei 120°C – 180°C aushärtet und vorrangig für Metallfügungen ausgelegt ist. Eine experimentelle Studie zum Einfluss der Klebschichtdicke einschnittiger Überlappungsfügungen mit Stahlfügeteilen auf die Fügefestigkeit von da Silva et al. (2006a) wird ebenfalls untersucht. Die Fügeteile sind mit dem duktilen Klebstoff Hysol EA 9361 verbunden. Dieser ist ein Zweikomponentenklebsystem, das bei Raumtemperatur aushärtet und für Anwendungen mit hohen Dehnungen vorgesehen ist. Zusätzlich wird der Einfluss verschiedener Fügeteildicken auf die Versagenslasten von Aluminiumfügungen in der Studie von Pinto et al. (2014) betrachtet. Die Fügeteile wurden wiederum mit dem Klebstoff Araldite 2015 verklebt. Abschließend wird eine Abschälfügung zwischen zwei Aluminiumblechen untersucht, die ebenfalls mit dem Klebstoff Araldite 2015 gefügt wurden. Die Materialdaten sowie Versagensparameter der einzelnen Klebstoffe sind Tabelle 6.3 zu entnehmen.

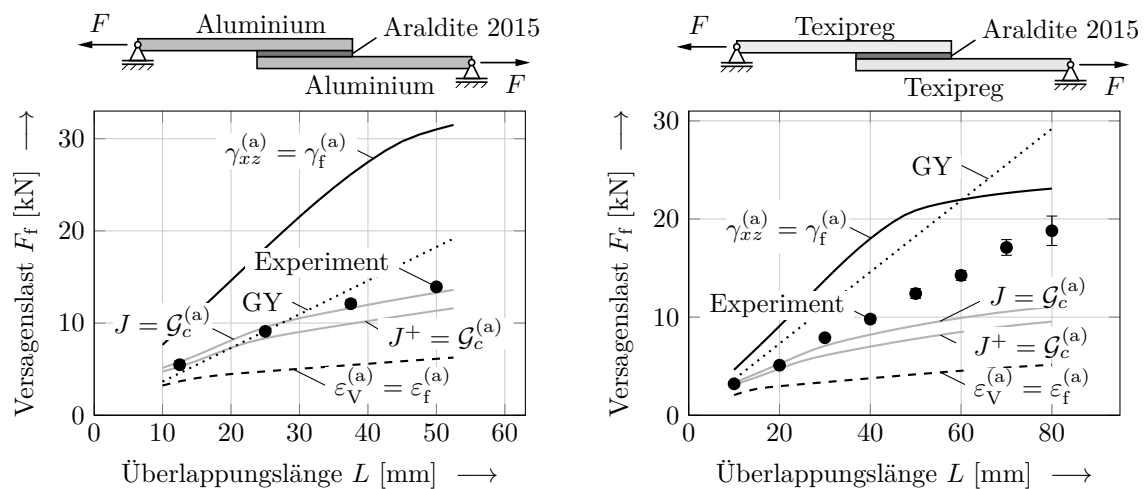
Die jeweiligen Randlasten am Überlappungsbereich sind bei allen einschnittigen Überlappungsfügungen mit der Berechnungsmethode von Talmon l'Armée et al. (2016) und bei der Abschälfügung mittels einfacher Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Neben den experimentellen Daten sind in jedem Bild zum Vergleich die Versagenslastvorhersagen mittels der in Kapitel 6.5 vorgestellten Kriterien aufgeführt. Die zugehörige Struktursituation ist oberhalb der einzelnen Diagramme dargestellt.

Die Abbildungen 6.6(a) und 6.6(b) zeigen zunächst die Ergebnisse der Testreihen einschnittiger Überlappungsfügungen mit dem Klebstoff Araldite 2015. Es zeigt sich zunächst, dass das Konzept des globalen Fließens die Versagenslasten nur für Fügungen mit kurzer Überlappungslänge adäquat abbilden kann. Für größere Überlappungslängen tritt Risseintritt ein, bevor der komplette Überlappungsbereich fließt. Die Versagenslasten werden somit überschätzt. Das Kriterium basierend auf der Vergleichsdehnung (6.21) unterschätzt die experimentellen Ergebnisse massiv. Das Kriterium basierend auf den Schubverzerrungen (6.20) überschätzt die Versagenslasten hingegen signifikant, obwohl es in Verbindung mit dem EPP-Ansatz von Hart-Smith (1973c) in vorherigen Arbeiten gute Vorhersagen lieferte. Dabei ist erwähnenswert, dass in EPP-Ansätzen typischerweise die Schubspannungs-Dehnungskurve als Eingangsgröße verwendet wird. Die kritische

⁷⁴de Sousa et al. (2017)

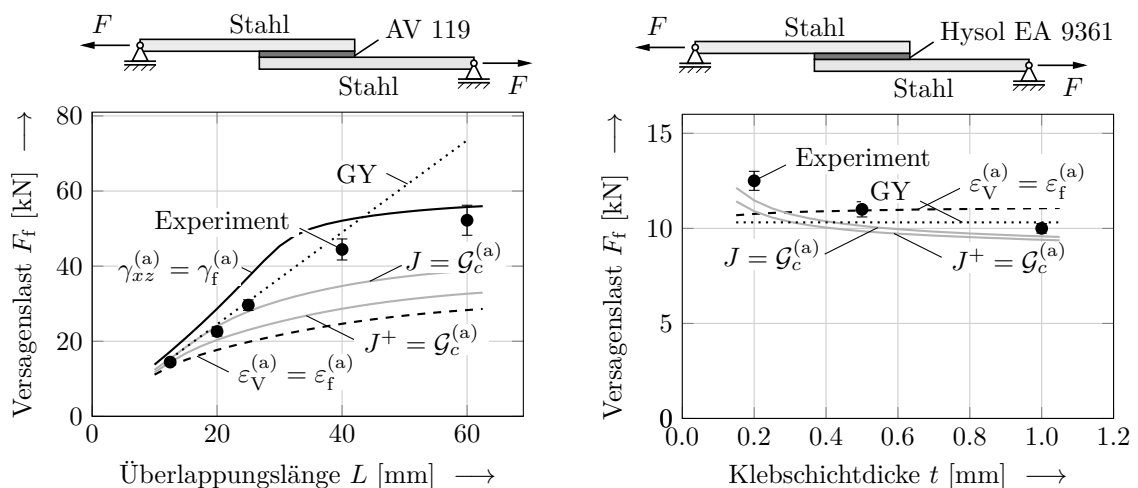
⁷⁵da Silva et al. (2009b), Xu (2010)

⁷⁶da Silva et al. (2006a,b)



(a) Untersuchung des Einflusses der Überlappungslänge (de Sousa et al., 2017). Dimensionen: $h_1 = h_2 = 3$ mm, $t = 0,2$ mm, $b = 25$ mm.

(b) Untersuchung des Einflusses der Überlappungslänge (Campilho et al., 2013b). Dimensionen: $h_1 = h_2 = 2,4$ mm, $t = 0,2$ mm, $b = 15$ mm.



(c) Untersuchung des Einflusses der Überlappungslänge (Adams et al., 1997). Dimensionen: $h_1 = h_2 = 1,6$ mm, $t = 0,2$ mm, $b = 25$ mm.

(d) Untersuchung des Klebschichtdickeneffekts (da Silva et al., 2006a). Dimensionen: $L = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $b = 25$ mm.

Abbildung 6.6: Vergleich der Versagenslastvorhersagen der vorgestellten Versagensmodelle mit experimentell ermittelten Daten.

Schubverzerrung des Klebstoffes ist vergleichsweise hoch ($\gamma_f = 43,9\%$), sodass die Annahme des Schubmoduls $G_s^{(a)} = E_s^{(a)}/(2(1 + \nu_s^{(a)}))$ im vorgestellten Modell nur eine grobe Abschätzung liefert. Das Kriterium basierend auf Spannungsintensitäten mit exakter sowie konservativer Auswertung des J -Integrals liefert insbesondere für kleine Überlappungslängen annehmbare bis gute Ergebnisse mit konservativen Abschätzungen der Versagenslasten. Der qualitative Trend steigender Versagenslasten mit steigender Überlappungslänge wird adäquat abgebildet. Ergebnisse für einschnittige Überlappungsfügungen mit dem Klebstoff AV 119 finden sich in Abbildung 6.6(c). Hier zeigen sich zunächst ähnliche Ergebnisse. Die Verwendung des Schubverzerrungskriteriums (6.20)

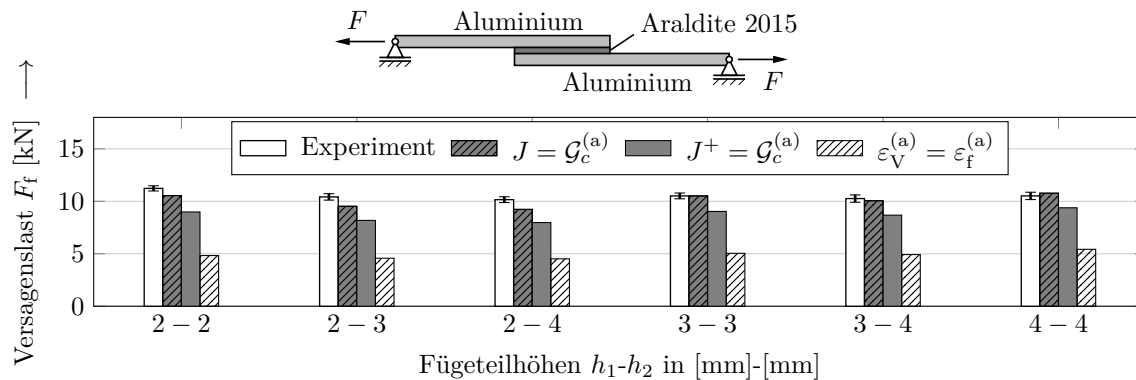


Abbildung 6.7: Vergleich der Versagenslastvorhersagen mit experimentellen Daten der Studie von Pinto et al. (2014). Dimensionen: $L = 30$ mm, $t = 0,2$ mm, $b = 25$ mm

liefert jedoch eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Die kritische Schubverzerrung des Klebstoffes AV 119 ist kleiner ($\gamma_f = 30\%$) als die des Klebstoffes Araldite 2015, sodass die zugrundeliegenden Annahmen des Modells hier als ausreichend erscheinen.

Abbildung 6.6(d) stellt die Ergebnisse für den Klebschichtdickeneffekt einschnittiger Überlappungsfügungen mit dem Klebstoff Hysol EA 9361 dar, mit Ausnahme der Ergebnisse des Kriteriums basierend auf den Schubverzerrungen. Unglücklicherweise konnte für diesen Klebstoff kein Wert der kritischen Schubverzerrung in der Literatur gefunden werden. Das Kriterium basierend auf der Vergleichsdehnung (6.21) und das Konzept des globalen Fließens, das eine konstante Versagenslast vorhersagt, können offensichtlich nicht den qualitativen Trend fallender Versagenslasten mit steigender Klebschichtdicke abbilden. Das Kriterium basierend auf dem J -Integral liefert hingegen Versagenslastvorhersagen mit einer guten Übereinstimmung mit den experimentellen Daten und konservativen Abschätzungen. Wie bereits in Kapitel 4.7 bei Klebverbindungen mit spröden Klebstoffen ist es notwendig das J -Integral, genauer gesagt die Energiebilanz im Rahmen linearer Elastizitätstheorie, in die Bewertung des Traglastverhaltens mit einzubeziehen um den Klebschichtdickeneffekt korrekt abzubilden zu können.

Abbildung 6.7 zeigt die Ergebnisse zur Studie des Einflusses des Fugeteildickenverhältnisses von Pinto et al. (2014). Die Experimente zeigen, dass eine Erhöhung des Dickenverhältnisses der Fugeteile zu niedrigeren Versagenslasten führen. Die Versagenslastvorhersagen auf Basis der Schubverzerrungen sind wiederum nicht aufgeführt, da sie die experimentellen Ergebnisse weit überschätzen ($F_f > 19$ kN). Die Ergebnisse des Konzept des globalen Fließens sind ebenfalls nicht gezeigt, da es für alle Konfigurationen eine Versagenslast von $F_f = 10,95$ kN vorhersagt. Dies liefert zwar eine annehmbare Übereinstimmung mit den Experimenten. Allerdings bildet dies den qualitativen Trend der Versagenslasten nicht ab. Versagensvorhersagen mittels Gleichung (6.21) liefern wiederum signifikant kleinere Lasten im Vergleich zu den Experimenten. Das Kriterium basierend auf dem J -Integral liefert Versagenslasten mit guter Übereinstimmung oder konservativen Abschätzungen und einer guten Abbildung des qualitativen Trends. Insbesondere die exakte Auswertung des J -Integrals liefert für

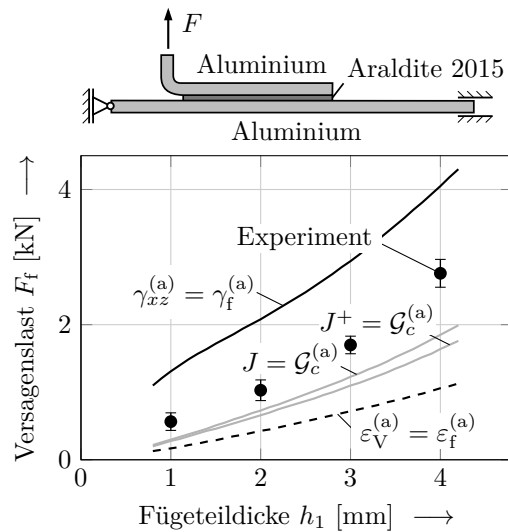


Abbildung 6.8: Vergleich der Versagenslastvorhersagen mit experimentellen Befunden von Carneiro et al. (2017). Dimensionen: $L = 25$ mm, $t = 0,2$ mm, $h_2 = 3$ mm, $b = 25$ mm, $R = 5$ mm.

Fügeiteildicken $h_1, h_2 > 3$ mm Versagenslastvorhersagen innerhalb der experimentellen Streuung.

Abschließend wird eine Abschliffung von Aluminiumblechen verbunden mit dem Klebstoff Araldite 2015 analysiert. Abbildung 6.8 stellt die Versagenslastvorhersagen des vorgestellten Berechnungsmodells im Vergleich zu experimentellen Daten von Carneiro et al. (2017) dar. Dabei sind keine Versagenslastvorhersagen für das Konzept des globalen Fließens gezeigt, da die Definition (6.22) zunächst nur für einschnittige Überlappungsfügungen physikalisch sinnvoll erscheint. Bei der vorliegenden Abschliffung liegt eine reine Modus I-Belastung vor. Eine Auswertung von Gleichung (6.22) liefert eine konstante Versagenslast von 9,125 kN unabhängig von der Fügeiteildicke. Die beiden dehnungsbasierten Kriterien (6.20) und (6.21) liefern wiederum jeweils zu hohe bzw. signifikant zu niedrige Versagenslasten. Die Kriterien basierend auf dem J -Integral liefern konservative Abschätzungen der Versagenslasten mit einer korrekten Abbildung des physikalischen Trends von höheren Versagenslasten mit größerer Fügeiteildicke. Dabei ist bemerkenswert, dass für kleine Fügeiteildicken beide Energiekriterien nahezu identische Versagenslastvorhersagen liefern. Im Falle reiner Modus I-Belastung approximiert die vereinfachte Berechnungsformel des J -Integrals die exakte Auswertung sehr gut, da die Dehnungen in Abschliffrichtung dominieren. Schlussendlich ergeben sich mit den energiebasierten Kriterien die akkuratesten Versagenslastvorhersagen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass eine Auswertung der Schubverzerrung und der Vergleich mit der kritischen Bruchdehnung nur für Klebstoffe mit moderaten Bruchdehnungen annehmbare Versagenslastvorhersagen liefert. Eine Auswertung der Vergleichsdehnung gemäß (6.21) liefert zu konservative Versagenslasten. Das Konzept des globalen Fließens liefert gute Vorhersagen für Fügungen mit besonders kurzer Überlappung und hochduktilen Klebstoffen, genauer gesagt für Fügungen deren ge-

samer Überlappungsbereich fließt bevor finales Versagen eintritt. Der Einfluss geometrischer Parameter auf die Versagenslasten kann allerdings nicht wiedergegeben werden. Die besten Versagenslastvorhersagen ergeben sich mittels des Kriteriums basierend auf der Betrachtung von Spannungsintensitäten. Eine exakte Auswertung des J -Integrals liefert Versagenslastvorhersagen innerhalb der experimentellen Streuung für kleine und konservative Abschätzungen für große Überlappungslängen. Genügt weniger Genauigkeit, lässt sich mittels der Abschätzung des J -Integrals eine hocheffiziente Versagenslastvorhersage ermöglichen. Bei allen experimentellen Testreihen konnte der Einfluss geometrischer Parameter mit diesem Kriterium korrekt wiedergegeben werden.

6.7 Anmerkungen und Ausblick

Die vorgestellte Untersuchung beschränkt sich wie bereits in Kapitel 4 auf Klebschichtversagen. Die vorliegende Modellierung lässt sich allerdings auch auf Fügeteilversagen, wie in Kapitel 4.10 beschrieben, leicht erweitern. Darüber hinaus verbleibt der Vergleich der Versagenslastvorhersagen mit numerischen Referenzrechnungen wie beispielsweise Finite-Elemente-Analysen mit Kohäsivzonenmodellen. Dazu müssen jedoch zunächst geeignete Vorstudien zur Modellierung duktiler Klebverbindungen mit Kohäsivzonenmodellen durchgeführt werden. Diese können mittels eines lokalen Ansatzes, d.h. Kohäsivzonenelemente mit verschwindend kleiner Dicke und Kontinuumselementen mit elastisch-plastischem Materialverhalten für den Rest der Klebschicht, oder eines Kontinuumsansatzes, genauer gesagt Kohäsivzonenelementen mit finiter Dicke, implementiert werden. Bei ersterem Ansatz muss jedoch die Bruchenergie von der dissipierten Energie eindeutig getrennt werden, während in letzterem der physikalische Prozess des duktilen Bruchs nur verschmiert dargestellt werden kann, siehe Kapitel 3.3.

Eine Anwendung und Vergleich nicht-lokaler Versagenskriterien für duktilen Bruch auf Basis der vorgestellten Spannungslösung ist in diesem Rahmen ebenfalls interessant. Ein solches nicht-lokales Versagenskriterium wurde beispielsweise von Sheppard et al. (1998) vorgeschlagen⁷⁷. Allerdings wird, wie bereits in Kapitel 3.3 beschrieben, ein zusätzlicher empirischer Längenparameter für dessen Auswertung sowie eine wesentlich größere Anzahl an Auswertungen der Spannungslösung benötigt.

Des Weiteren ermöglicht die *general sandwich-type*-Modellierung die Implementierung eines EPP-Ansatzes. Dazu muss analog zur Arbeit von Hart-Smith (1973c) der Überlappungsbereich in rein elastische und plastische Abschnitte eingeteilt und getrennt betrachtet werden. Dieser Ansatz verspricht eine noch effizientere Spannungslösung für duktile Klebverbindungen. Ein Vergleich beider Arbeiten würde es schließlich ermöglichen, weitere Eigenschaften sowie Vor- und Nachteile der Modellierungsansätze herauszuarbeiten.

⁷⁷Sheppard et al. (1998) bezeichnen ihren vorgeschlagenen Ansatz als sogenanntes Schädigungszonenmodell (engl.: damage zone model)

Schließlich verbleibt die Analyse von hochduktilen Klebstoffen mit besonders hohen Nachgiebigkeiten. Dazu müsste die Modellierung bezüglich großer Rotationen und möglicherweise sogar Deformationen erweitert werden. Allerdings verbleibt die Frage inwieweit ein solcher Aufwand gegenüber einer detaillierten Finite-Elemente-Analyse lohnenswert ist.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden neue analytische und semi-analytische Modelle zur Analyse von Klebverbindungen mit spröden, duktilen sowie Gradientenklebstoffen vorgestellt. Diese ermöglichen in wenigen Sekunden sowohl die Analyse der Lastübertragung als auch die Bewertung des Tragverhaltens von beliebig geformten Überlappungsklebverbindungen mit Mehrschichtverbundfügeteilen. Die vorgestellten Methoden bieten einen umfangreichen Zugang zum Verständnis des mechanischen Verhaltens von Klebverbindungen und tragen somit zur steigenden Nutzung der Klebtechnik als Fügetechnologie bei. Die effizienten Umsetzungen der Modelle ermöglichen die vorteilhafte Verwendung in der Vorauslegung von Überlappungsklebverbindungen und sind insbesondere für Parameterstudien und Optimierungen erfolgreich einsetzbar.

Zur Bestimmung der Spannungen innerhalb der Klebschicht wurde eine gesonderte Modellierung des Überlappungsbereiches unter beliebigen äußeren Lasten umgesetzt. Diese sogenannte *general sandwich-type*-Modellierung ermöglicht die Untersuchung beliebig geformter Überlappungsfügungen unter mechanischer und thermischer Last. Dabei wurde die Klebschicht als vereinfachtes Kontinuum bestehend aus einer Ansammlung von linearen und im Falle duktiler Klebstoffe nichtlinearen Federn dargestellt. Das nichtlineare Federgesetz wurde mittels der Deformationstheorie der Plastizität modelliert. Diese Modellierung führt im Falle homogener spröder Klebstoffe bzw. Gradientenklebstoffe auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten bzw. variablen Koeffizienten. Für ersteres wurden analytische Lösungen angegeben, während für Gradientenklebstoffe Lösungsdarstellungen als Potenzreihe hergeleitet wurden. Im Falle duktiler Klebstoffe ergibt sich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem, das mittels eines Finite-Differenzen-Schematas gelöst wurde.

Die ermittelten Spannungsfelder zeigten für eine große Anzahl verschiedener Überlappungsfügungen eine sehr gute Übereinstimmung mit Ergebnissen von Finite-Elemente-Referenzrechnungen. Die über die Überlappung variierenden mechanischen Eigenschaften von Gradientenklebstoffen wurden dabei im Finite-Elemente-Programmpaket ABAQUS mit Hilfe einer Subroutine implementiert. Weiterhin wurde der Einfluss vorgegebener Gradierungsprofile sowie des Steifigkeitsverhältnisses von maximal zu minimal auftretenden Elastizitätsmoduli auf die Spannungsfelder untersucht. Während sich für ersteres kaum Auswirkungen auf die Spannungsfelder zeigten, ermöglichte letzteres Empfehlungen zur Auslegung von Gradientenklebverbindungen zu formulieren. Unabhängig von der Struktursituation zeigte sich eine Reduzierung maximal auftretender Spannungen im Bezug auf die Spannungen ohne Gradientenklebstoff abhängig vom Steifigkeitsverhältnis, sodass an den vorgestellten Diagrammen die notwendige Gradierung des Klebstoffes für eine bestimmte Spannungsreduktion abgelesen werden kann.

Abschließend wurde eine Methode vorgestellt, die die Ermittlung eines optimierten Gradierungsprofils für eine vorgegebene Struktursituation ermöglicht. Dazu wurde ein Optimierungsproblem formuliert und mittels eines effizienten Verfahrens gelöst, sodass hinsichtlich einer vorgegeben Zielfunktion das bestmögliche Gradierungsprofil ermittelt werden kann.

Für spröde Klebstoffe wurde eine Bewertung des Tragverhaltens mittels des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Finiten Bruchmechanik umgesetzt. Zur Bestimmung der Energiefreisetzungsraten wurden dafür analytische Lösungen herangezogen. Im Falle linearer Probleme lieferte eine implizite Gleichung die Rissinitiierungslast während für axial belastete einschnittige Überlappungsfügungen ein effizienter iterativer Lösungsweg vorgeschlagen wurde. Eine umfangreiche Studie zeigte, dass das vorgestellte Berechnungsmodell für verschiedenste Überlappungsfügungen Versagenslastvorhersagen mit sehr guter Übereinstimmung mit experimentellen Befunden sowie Finite-Elemente-Vergleichsrechnungen mit Kohäsivzonenmodellen liefert. Darüber hinaus wurde der Einfluss verschiedener Versagenskriterien sowie der Sprödigkeit auf die Versagenslastvorhersagen untersucht. Letzteres führte auf die Formulierung einer Sprödigkeitsziffer, die die Grenzen des vorliegenden analytischen Modells definiert. Für duktile Klebstoffe wurden verschiedene Versagenskriterien vorgestellt. Anhand einer Vielzahl von experimentellen Daten wurden die mittels der eingeführten Versagenskriterien berechneten Versagenslastvorhersagen validiert und die Ergebnisse diskutiert. Kriterien basierend auf Spannungsintensitäten lieferten dabei die besten Versagenslastvorhersagen. Sowohl für Fügungen mit spröden als auch mit duktilen Klebstoffen ergaben sich stets konservative Versagenslastvorhersagen und eine korrekte Abbildung des Einflusses geometrischer Parameter auf die Versagenslast.

Anmerkungen sowie Ausblicke auf mögliche Erweiterungen der vorgestellten Modelle und weiterführende Fragestellungen sind am Ende jeden Kapitels zu finden.

Literaturverzeichnis

- [Adams et al. 1986] ADAMS, R. D. ; ATKINS, R. W. ; HARRIS, J. A. ; KINLOCH, A. J.: Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic/steel double-lap joints. In: *The Journal of Adhesion* 20 (1986), Nr. 1, S. 29–53
- [Adams et al. 1997] ADAMS, R. D. ; COMYN, J. ; WAKE, W. C.: *Structural adhesive joints in engineering*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 1997
- [Adams u. Harris 1987] ADAMS, R. D. ; HARRIS, J. A.: The influence of local geometry on the strength of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 7 (1987), Nr. 2, S. 69–80
- [Adams u. Peppiatt 1974] ADAMS, R. D. ; PEPPIATT, N. A.: Stress analysis of adhesive-bonded lap joints. In: *Journal of Strain Analysis* 9 (1974), Nr. 3, S. 185–196
- [Aleck 1949] ALECK, B. J.: Thermal stresses in a rectangular plate clamped along an edge. In: *Journal of Applied Mechanics* 16 (1949), Nr. 2, S. 118–122
- [Allman 1977] ALLMAN, D. J.: A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 30 (1977), Nr. 4, S. 415–436
- [Altenbach 2015] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die material-unabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2015
- [Altenbach et al. 2004] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; KISSING, W.: *Mechanics of composite structural elements*. 2004
- [Altenbach et al. 1996] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Stuttgart: Deutscher Verlag Grundstoffindustrie, 1996
- [Altenbach et al. 2014] ALTENBACH, H. ; BOLCHOUN, A. ; KOLUPAEV, V. A.: Phenomenological yield and failure criteria. In: *Plasticity of Pressure-Sensitive Materials*. Springer, 2014, S. 49–152
- [Anderson u. Devries 1987] ANDERSON, G. P. ; DEVRIES, K. L.: Predicting bond strength. In: *The Journal of Adhesion* 23 (1987), Nr. 4, S. 289–302
- [Anderson u. Devries 1989] ANDERSON, G. P. ; DEVRIES, K. L.: Predicting strength of adhesive joints from test results. In: *International Journal of Fracture* 39 (1989), Nr. 1, S. 191–200
- [Anderson 2005] ANDERSON, T. L.: *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. Boca Raton: CRC press, 2005

- [Andersons et al. 2010] ANDERSONS, J. ; TARASOV, S. ; SPĀRNIŠ, E.: Finite fracture mechanics analysis of crack onset at a stress concentration in a UD glass/epoxy composite in off-axis tension. In: *Composites Science and Technology* 70 (2010), Nr. 9, S. 1380–1385
- [Andersson u. Stigh 2004] ANDERSSON, T. ; STIGH, U.: The stress–elongation relation for an adhesive layer loaded in peel using equilibrium of energetic forces. In: *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), Nr. 2, S. 413–434
- [Ascione 2009] ASCIONE, F.: Mechanical behaviour of FRP adhesive joints: a theoretical model. In: *Composites Part B: Engineering* 40 (2009), Nr. 2, S. 116–124
- [ASTM D3165 2014] ASTM D3165: *Standard Test Method for Strength Properties of Adhesives in Shear by Tension Loading of Single-Lap-Joint Laminated Assemblies*. ASTM International, West Conshohocken, Philadelphia, USA, 2014
- [Banea u. da Silva 2009] BANE, M. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Adhesively bonded joints in composite materials: an overview. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications* 223 (2009), Nr. 1, S. 1–18
- [Barenblatt 1959] BARENBLATT, G. I.: The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 23 (1959), Nr. 3, S. 622–636
- [Bazant u. Planas 1997] BAZANT, Z. P. ; PLANAS, J.: *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Bd. 16. Boca Raton: CRC press, 1997
- [Becker u. Gross 2002] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2002
- [Belingardi et al. 2002] BELINGARDI, G. ; GOGGIO, L. ; TARDITI, A.: On the optimization of single lap metal/plastics adhesive joints. In: *Key Engineering Materials* Bd. 221 Trans Tech Publ, 2002, S. 161–172
- [Benveniste u. Miloh 2001] BENVENISTE, Y. ; MILOH, T.: Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. In: *Mechanics of Materials* 33 (2001), Nr. 6, S. 309–323
- [Bigwood u. Crocombe 1989] BIGWOOD, D. A. ; CROCOMBE, A. D.: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 3 (1989), Nr. 11, S. 229–242
- [Bigwood u. Crocombe 1990] BIGWOOD, D. A. ; CROCOMBE, A. D.: Non-linear adhesive bonded joint design analyses. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 10 (1990), Nr. 1, S. 31–41
- [Bigwood u. Crocombe 1992] BIGWOOD, D. A. ; CROCOMBE, A. D.: Development of a full elasto-plastic adhesive joint design analysis. In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 27 (1992), Nr. 4, S. 211–218
- [Bishopp 1997] BISHOPP, J. A.: The history of Redux® and the Redux bonding process. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 17 (1997), Nr. 4, S. 287 – 301

- [Bogy 1971] BOGY, D. B.: Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction. In: *Journal of Applied Mechanics* 38 (1971), S. 377
- [Broberg 1999] BROBERG, K. B.: *Cracks and fracture*. Academic Press, 1999
- [Brockmann et al. 2009] BROCKMANN, W. ; GEISS, L. R. ; KLINGEN, J. ; SCHRÖDER, B.: *Klebtechnik: Klebstoffe, Anwendungen und Verfahren*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2009
- [Budhe et al. 2017] BUDHE, S. ; BANEJA, M. D. ; BARROS, S. de ; DA SILVA, L. F. M.: An updated review of adhesively bonded joints in composite materials. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 72 (2017), S. 30–42
- [Camanho et al. 2012] CAMANHO, P. P. ; ERÇİN, G. ; CATALANOTTI, G. ; MAHDI, S. ; LINDE, P.: A finite fracture mechanics model for the prediction of the open-hole strength of composite laminates. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 43 (2012), Nr. 8, S. 1219–1225
- [Campilho et al. 2011a] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEJA, M. D. ; CHAVES, F. J. P. ; DA SILVA, L. F. M.: eXtended Finite Element Method for fracture characterization of adhesive joints in pure mode I. In: *Computational Materials Science* 50 (2011), Nr. 4, S. 1543–1549
- [Campilho et al. 2013a] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEJA, M. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Tensile behaviour of a structural adhesive at high temperatures by the extended finite element method. In: *The Journal of Adhesion* 89 (2013), Nr. 7, S. 529–547
- [Campilho et al. 2013b] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEJA, M. D. ; NETO, J. A. B. P. ; DA SILVA, L. F. M.: Modelling adhesive joints with cohesive zone models: effect of the cohesive law shape of the adhesive layer. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 44 (2013), S. 48–56
- [Campilho et al. 2011b] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEJA, M. D. ; PINTO, A. M. G. ; DA SILVA, L. F. M. ; DE JESUS, A. M. P.: Strength prediction of single-and double-lap joints by standard and extended finite element modelling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 31 (2011), Nr. 5, S. 363–372
- [Campilho et al. 2005] CAMPILHO, R. D. S. G. ; DE MOURA, M. F. S. F. ; DOMINGUES, J. J. M. S.: Modelling single and double-lap repairs on composite materials. In: *Composites Science and Technology* 65 (2005), Nr. 13, S. 1948–1958
- [Campilho et al. 2008] CAMPILHO, R. D. S. G. ; DE MOURA, M. F. S. F. ; DOMINGUES, J. J. M. S.: Using a cohesive damage model to predict the tensile behaviour of CFRP single-strap repairs. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), Nr. 5, S. 1497–1512
- [Carbas et al. 2014a] CARBAS, R. J. C. ; DA SILVA, L. F. M. ; CRITCHLOW, G. W.: Adhesively bonded functionally graded joints by induction heating. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 48 (2014a), S. 110–118

- [Carbas et al. 2014b] CARBAS, R. J. C. ; VIANA, G. M. S. O. ; DA SILVA, L. F. M. ; CRITCHLOW, G. W.: Functionally graded adhesive patch repairs of wood beams in civil applications. In: *Journal of Composites for Construction* 19 (2014b), Nr. 2, S. 14–38
- [Carneiro et al. 2017] CARNEIRO, M. A. S. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; SILVA, F. J. G.: Experimental and numerical analysis of adhesively-bonded T joints under peel loads. In: *Procedia Manufacturing* 13 (2017), S. 51–58
- [Carpinteri et al. 2009] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N.: Edge debonding in FRP strengthened beams: Stress versus energy failure criteria. In: *Engineering Structures* 31 (2009), Nr. 10, S. 2436–2447
- [Carrère et al. 2015] CARRÈRE, N. ; MARTIN, E. ; LEGUILLON, D.: Comparison between models based on a coupled criterion for the prediction of the failure of adhesively bonded joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 138 (2015), S. 185–201
- [Castagnetti et al. 2011] CASTAGNETTI, D. ; SPAGGIARI, A. ; DRAGONI, E.: Effect of bondline thickness on the static strength of structural adhesives under nearly-homogeneous shear stresses. In: *The Journal of Adhesion* 87 (2011), Nr. 7-8, S. 780–803
- [Chai 1988] CHAI, H.: Shear fracture. In: *International Journal of Fracture* 37 (1988), Nr. 2, S. 137–159
- [Charalambides et al. 1992] CHARALAMBIDES, M. ; KINLOCH, A. J. ; WANG, Y. ; WILLIAMS, J. G.: On the analysis of mixed-mode failure. In: *International Journal of Fracture* 54 (1992), Nr. 3, S. 269–291
- [Chen u. Cheng 1983] CHEN, D. ; CHENG, S.: An Analysis of Adhesive-Bonded Single-Lap Joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), S. 109–115
- [Chen u. Nelson 1979] CHEN, W. T. ; NELSON, C. W.: Thermal stress in bonded joints. In: *IBM Journal of Research and Development* 23 (1979), Nr. 2, S. 179–188
- [Clark u. McGregor 1993] CLARK, J. D. ; MCGREGOR, I. J.: Ultimate tensile stress over a zone: a new failure criterion for adhesive joints. In: *The Journal of Adhesion* 42 (1993), Nr. 4, S. 227–245
- [Cornetti u. Carpinteri 2011] CORNETTI, P. ; CARPINTERI, A.: Modelling the FRP-concrete delamination by means of an exponential softening law. In: *Engineering Structures* 33 (2011), Nr. 6, S. 1988–2001
- [Cornetti et al. 2012] CORNETTI, P. ; MANTIČ, V. ; CARPINTERI, A.: Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 7, S. 1022–1032
- [Cornetti et al. 2006] CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; CARPINTERI, A. ; TAYLOR, D.: Finite fracture mechanics: a coupled stress and energy failure criterion. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 14, S. 2021–2033

- [Cornetti et al. 2015] CORNETTI, P. ; CORRADO, M. ; DE LORENZIS, L. ; CARPINTERI, A.: An analytical cohesive crack modeling approach to the edge debonding failure of FRP-plated beams. In: *International Journal of Solids and Structures* 53 (2015), S. 92–106
- [Cottone u. Giambanco 2009] COTTONE, A. ; GIAMBANCO, G.: Minimum bond length and size effects in FRP–substrate bonded joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), Nr. 13, S. 1957–1976
- [Crocombe 1989] CROCOMBE, A. D.: Global yielding as a failure criterion for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 9 (1989), Nr. 3, S. 145–153
- [Crocombe 2008] CROCOMBE, A. D.: Incorporating environmental degradation in closed form adhesive joint stress analyses. In: *The Journal of Adhesion* 84 (2008), Nr. 3, S. 212–230
- [Crocombe u. Adams 1981a] CROCOMBE, A. D. ; ADAMS, R. D.: Influence of the spew fillet and other parameters on the stress distribution in the single lap joint. In: *The Journal of Adhesion* 13 (1981), Nr. 2, S. 141–155
- [Crocombe u. Adams 1981b] CROCOMBE, A. D. ; ADAMS, R. D.: Peel analysis using the finite element method. In: *The Journal of Adhesion* 12 (1981), Nr. 2, S. 127–139
- [Cui et al. 2003] CUI, J. ; WANG, R. ; SINCLAIR, A. N. ; SPELT, J. K.: A calibrated finite element model of adhesive peeling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 23 (2003), Nr. 3, S. 199–206
- [da Silva u. Adams 2002] DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D.: The strength of adhesively bonded T-joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 22 (2002), Nr. 4, S. 311 – 315
- [da Silva et al. 2004] DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D. ; GIBBS, M.: Manufacture of adhesive joints and bulk specimens with high-temperature adhesives. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 24 (2004), Nr. 1, S. 69–83
- [da Silva u. Lopes 2009] DA SILVA, L. F. M. ; LOPES, M. J. C. Q.: Joint strength optimization by the mixed-adhesive technique. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 5, S. 509–514
- [da Silva et al. 2009a] DA SILVA, L. F. M. ; NEVES, P. J. C. ; ADAMS, R. D. ; SPELT, J. K.: Analytical models of adhesively bonded joints–Part I: Literature survey. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, S. 319–330
- [da Silva et al. 2009b] DA SILVA, L. F. M. ; NEVES, P. J. C. ; ADAMS, R. D. ; WANG, A. ; SPELT, J. K.: Analytical models of adhesively bonded joints–Part II: Comparative study. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, S. 331–341
- [da Silva et al. 2012] DA SILVA, L. F. M. ; ÖCHSNER, A. ; ADAMS, R. D.: *Handbook of Adhesion Technology*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2012

- [da Silva et al. 2006a] DA SILVA, L. F. M. ; RODRIGUES, T. ; FIGUEIREDO, M. A. V. ; MOURA, M. F. S. F. ; CHOUSAL, J. A. G.: Effect of adhesive type and thickness on the lap shear strength. In: *The Journal of Adhesion* 82 (2006), Nr. 11, S. 1091–1115
- [da Silva u. Adams 2007] DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D.: Techniques to reduce the peel stresses in adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 27 (2007), Nr. 3, S. 227–235
- [da Silva u. Campilho 2012] DA SILVA, L. F. M. ; CAMPILHO, R. D. S. G.: *Advances in numerical modelling of adhesive joints*. Springer, 2012b
- [da Silva et al. 2008] DA SILVA, L. F. M. ; CRITCHLOW, G. W. ; FIGUEIREDO, M. A. V.: Parametric study of adhesively bonded single lap joints by the Taguchi method. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 22 (2008), Nr. 13, S. 1477–1494
- [da Silva et al. 2006b] DA SILVA, L. F. M. ; RAMOS, J. E. ; FIGUEIREDO, M. V. ; STROHAECKER, T. R.: Influence of the adhesive, the adherend and the overlap on the single lap shear strength. In: *Journal of Adhesion and Interface* 7 (2006), Nr. 4, S. 1–9
- [De Bruyne 1944] DE BRUYNE, N. A.: The strength of glued joints. In: *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 16 (1944), Nr. 4, S. 115–118
- [Delale et al. 1981] DELALE, F. ; ERDOGAN, F. ; AYDINOGLU, M. N.: Stresses in adhesively bonded joints: a closed-form solution. In: *Journal of Composite Materials* 15 (1981), Nr. 3, S. 249–271
- [Dickson et al. 1972] DICKSON, J. N. ; HSU, T.-M. ; MCKINNEY, J. M.: *Development of an Understanding of the Fatigue Phenomena of Bonded and Bolted Joints in Advanced Filamentary Composite Materials. Volume 1. Analysis Methods*. Forschungsbericht AFFDL-TR-72-64-1, Air Force Flight Dynamics Lab, Ohio, USA, 1972
- [Dillard et al. 2009] DILLARD, D. A. ; SINGH, H. K. ; POHLIT, D. J. ; STARBUCK, J. M.: Observations of decreased fracture toughness for mixed mode fracture testing of adhesively bonded joints. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009), Nr. 10-11, S. 1515–1530
- [DIN EN 10365 1995] DIN EN 10365: Klebstoffe - Bezeichnung der wichtigsten Bruchbilder. In: *Deutsche Norm, Beuth-Verlag* (1995)
- [DIN EN 1464 2010] DIN EN 1464: Klebstoffe - Bestimmung des Schälwiderstandes von Klebungen - Rollenschälversuch. In: *Deutsche Norm, Beuth-Verlag* (2010)
- [DIN EN 1465 2009] DIN EN 1465: Klebstoffe - Bestimmung der Zugscherfestigkeit von Überlappungsklebungen. In: *Deutsche Norm, Beuth-Verlag* (2009)
- [DIN EN 923 2015] DIN EN 923: Klebstoffe - Benennungen und Definitionen. In: *Deutsche Norm, Beuth-Verlag* (2015)
- [Dugdale 1960] DUGDALE, D. S.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), Nr. 2, S. 100–104

- [El Haddad et al. 1980] EL HADDAD, M. H. ; DOWLING, N. E. ; TOPPER, T. H. ; SMITH, K. N.: J integral applications for short fatigue cracks at notches. In: *International Journal of Fracture* 16 (1980), Nr. 1, S. 15–30
- [Eschenauer u. Schnell 1993] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie. Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*. III. Aufl. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag, 1993
- [Felger et al. 2017a] FELGER, J. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Asymptotic finite fracture mechanics solution for crack onset at elliptical holes in composite plates of finite-width. In: *Engineering Fracture Mechanics* 182 (2017a), S. 621–634
- [Felger et al. 2017b] FELGER, J. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Mixed-mode fracture in open-hole composite plates of finite-width: an asymptotic coupled stress and energy approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 122-123 (2017b), S. 14–24
- [Feraren u. Jensen 2004] FERAREN, P. ; JENSEN, H. M.: Cohesive zone modelling of interface fracture near flaws in adhesive joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004), Nr. 15, S. 2125–2142
- [Fernandes et al. 2015] FERNANDES, T. A. B. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEJA, M. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Adhesive selection for single lap bonded joints: Experimentation and advanced techniques for strength prediction. In: *The Journal of Adhesion* 91 (2015), Nr. 10-11, S. 841–862
- [Fernlund et al. 1994] FERNLUND, G. ; PAPINI, M. ; MCCAMMOND, D. ; SPELT, J. K.: Fracture load predictions for adhesive joints. In: *Composites Science and Technology* 51 (1994), Nr. 4, S. 587–600
- [Fernlund u. Spelt 1991] FERNLUND, G. ; SPELT, J. K.: Failure load prediction of structural adhesive joints: Part 1: Analytical method. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 11 (1991), Nr. 4, S. 213–220
- [Fitton u. Broughton 2005] FITTON, M. D. ; BROUGHTON, J. G.: Variable modulus adhesives: an approach to optimised joint performance. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 25 (2005), S. 329–336
- [Fraisse u. Schmit 1993] FRAISSE, P. ; SCHMIT, F.: Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints. In: *International Journal of Fracture* 63 (1993), Nr. 1, S. 59–73
- [Frostig et al. 1999] FROSTIG, Y. ; THOMSEN, O. T. ; MORTENSEN, F.: Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet-high-order theory approach. In: *Journal of Engineering Mechanics* 125 (1999), Nr. 11, S. 1298–1307
- [Gali et al. 1981] GALI, S. ; DOLEV, G. ; ISHAI, O.: An effective stress/strain concept in the mechanical characterization of structural adhesive bonding. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 1 (1981), Nr. 3, S. 135–140

- [García u. Leguillon 2012] GARCÍA, I. G. ; LEGUILLON, D.: Mixed-mode crack initiation at a v-notch in presence of an adhesive joint. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 15, S. 2138–2149
- [Geymonat et al. 1999] GEYMONAT, G. ; KRASUCKI, F. ; LENCI, S.: Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 4 (1999), Nr. 2, S. 201–225
- [Gill et al. 1984] GILL, P. E. ; MURRAY, W. ; SAUNDERS, M. A. ; WRIGHT, M. H.: Procedures for optimization problems with a mixture of bounds and general linear constraints. In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 10 (1984), Nr. 3, S. 282–298
- [Gleich et al. 2001] GLEICH, D. M. ; VAN TOOREN, M. J. L. ; BEUKERS, A.: Analysis and evaluation of bondline thickness effects on failure load in adhesively bonded structures. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 15 (2001), Nr. 9, S. 1091–1101
- [Goglio u. Rossetto 2010] GOGLIO, L. ; ROSSETTO, M.: Stress intensity factor in bonded joints: influence of the geometry. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 5, S. 313–321
- [Goglio et al. 2008] GOGLIO, L. ; ROSSETTO, M. ; DRAGONI, E.: Design of adhesive joints based on peak elastic stresses. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 28 (2008), Nr. 8, S. 427–435
- [Goland u. Reissner 1944] GOLAND, M. ; REISSNER, E.: The stresses in cemented joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 11 (1944), Nr. 1, S. 17–27
- [Gonçalves et al. 2000] GONÇALVES, J. P. M. ; DE MOURA, M. F. S. F. ; DE CASTRO, P. M. S. T. ; MARQUES, A. T.: Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. In: *Engineering Computations* 17 (2000), Nr. 1, S. 28–47
- [Grant et al. 2009a] GRANT, L. D. R. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Experimental and numerical analysis of single-lap joints for the automotive industry. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009a), Nr. 4, S. 405 – 413
- [Grant et al. 2009b] GRANT, L. D. R. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Experimental and numerical analysis of T-peel joints for the automotive industry. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009b), Nr. 2, S. 317–338
- [Grant et al. 2009c] GRANT, L. D. R. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Experimental and numerical analysis of clinch (hemflange) joints used in the automotive industry. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009c), Nr. 12, S. 1673–1688
- [Grant u. Taig 1976] GRANT, P. ; TAIG, I. C.: *Strength and stress analysis of bonded joints*. Forschungsbericht Nr. SOR(P) 109, British Aircraft Corp. Ltd., Military Aircraft Division, Maidstone, England, 1976
- [Greenwood 1969] GREENWOOD, L.: The strength of a lap joint. In: *Aspects of Adhesion* Bd. 5 ed. by D. Alner (University of London Press, London, 1969), 1969

- [Griffith 1921] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221 (1921), S. 163–198
- [Grimes et al. 1972] GRIMES, G. C. ; GRIEMANN, L. F. ; WAH, L. F. ; COMMERFORD, G. E. ; BLACKSTONE, W. R.: *The development of non-linear analysis methods for bonded joints in advanced filamentary composite structures*. Forschungsbericht AFFDL-TR-72-97, Air Force Flight Dynamics Lab, Ohio, USA, 1972
- [Gross et al. 2007a] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2007
- [Gross et al. 2007b] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2007
- [Gross u. Seelig 2011] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2011
- [Groth 1988] GROTH, H. L.: Stress singularities and fracture at interface corners in bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 8 (1988), Nr. 2, S. 107–113
- [Guild et al. 2001] GUILD, F. J. ; POTTER, K. D. ; HEINRICH, J. ; ADAMS, R. D. ; WINSOM, M. R.: Understanding and control of adhesive crack propagation in bonded joints between carbon fibre composite adherends II. Finite element analysis. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 21 (2001), Nr. 6, S. 445 – 453
- [Habenicht 2006] HABENICHT, G.: *Kleben: Grundlagen, Technologie, Anwendungen*. Bd. 5. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag (VDI Buch), 2006
- [Harris u. Adams 1984] HARRIS, J. A. ; ADAMS, R. D.: Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 4 (1984), Nr. 2, S. 65–78
- [Hart-Smith 1973a] HART-SMITH, L. J.: *Adhesive bonded double-lap joints*. Forschungsbericht CR-112235, NASA, Langley Research Center, Hampton Virginia, USA, 1973a
- [Hart-Smith 1973b] HART-SMITH, L. J.: *Adhesive bonded scarf and stepped-lap joints*. Forschungsbericht CR-112237, NASA, Langley Research Center, Hampton Virginia, USA, 1973b
- [Hart-Smith 1973c] HART-SMITH, L. J.: *Adhesive bonded single-lap joints*. Forschungsbericht CR-112236, NASA, Langley Research Center, Hampton Virginia, USA, 1973c
- [Hashin 1996] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, S. 1129–1145
- [Hashin 2002] HASHIN, Z.: Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002), Nr. 12, S. 2509–2537

- [Hebel u. Becker 2008] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), Nr. 6-7, S. 410–420
- [Hebel et al. 2010] HEBEL, J. ; DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Modelling brittle crack formation at geometrical and material discontinuities using a finite fracture mechanics approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 18, S. 3558–3572
- [Hell et al. 2014] HELL, S. ; WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: A coupled stress and energy criterion for the assessment of crack initiation in single lap joints: a numerical approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 117 (2014), S. 112–126
- [Hell u. Becker 2015] HELL, S. ; BECKER, W.: The scaled boundary finite element method for the analysis of 3D crack interaction. In: *Journal of Computational Science* 9 (2015), S. 76–81
- [Higgins 2000] HIGGINS, A.: Adhesive bonding of aircraft structures. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 20 (2000), Nr. 5, S. 367–376
- [Högberg et al. 2007] HÖGBERG, J. L. ; SØRENSEN, B. F. ; STIGH, U.: Constitutive behaviour of mixed mode loaded adhesive layer. In: *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), Nr. 25, S. 8335–8354
- [Hu et al. 1992] HU, G. K. ; FRANCOIS, D. ; SCHMIT, F.: Non linear fracture mechanics for adhesive lap joints. In: *The Journal of Adhesion* 37 (1992), Nr. 4, S. 261–269
- [Hu 1995] HU, G.: Mixed mode fracture analysis of adhesive lap joints. In: *Composites Engineering* 5 (1995), Nr. 8, S. 1043–1050
- [Hutchinson 1968] HUTCHINSON, J. W.: Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (1968), Nr. 1, S. 13–31
- [Hutchinson u. Suo 1991] HUTCHINSON, J. W. ; SUO, Z.: Mixed mode cracking in layered materials. In: *Advances in Applied Mechanics* 29 (1991), S. 63–191
- [Ikegami et al. 1990] IKEGAMI, K. ; TAKESHITA, T. ; MATSUO, K. ; SUGIBAYASHI, T.: Strength of adhesively bonded scarf joints between glass fibre-reinforced plastics and metals. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 10 (1990), Nr. 3, S. 199–206
- [Ilyushin 1945] ILYUSHIN, A. A.: Relation between the theory of Saint-Venant-Levy-Mises and the theory of small elastic-plastic deformations. In: *Prikladnaja Matematika i Mekhanika* 9 (1945), S. 207–218
- [Ilyushin 1948] ILYUSHIN, A. A.: *Plasticity (Plastischnosti), Part 1 Elastic-plastic deformations*. Moskau - Leningrad : State Publisher of Technical-Theoretical literature, 1948
- [Industrieverband Klebstoffe e.V. 2017] INDUSTRIEVERBAND KLEBSTOFFE E.V.: (2017). <http://www.klebstoffe.com>. – Eingesehen am 01.12.2017

- [Irwin 1957] IRWIN, G. R.: Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. In: *Journal of Applied Mechanics* (1957)
- [John et al. 1991] JOHN, S. J. ; KINLOCH, A. J. ; MATTHEWS, F. L.: Measuring and predicting the durability of bonded carbon fibre/epoxy composite joints. In: *Composites* 22 (1991), Nr. 2, S. 121–127
- [Jones 1999] JONES, R. M.: *Mechanics of composite material*. Taylor & Francis, New York, 1999
- [Jones 2009] JONES, R. M.: *Deformation theory of plasticity*. Bull Ridge Corporation, 2009
- [Kachanov 1971] KACHANOV, L. M.: *Foundations of the Theory of Plasticity*. Bd. 12. Amsterdam - London: North-Holland Publishing Company, 1971
- [Karachalios et al. 2013a] KARACHALIOS, E. F. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Single lap joints loaded in tension with ductile steel adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 43 (2013), S. 96–108
- [Karachalios et al. 2013b] KARACHALIOS, E. F. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Single lap joints loaded in tension with high strength steel adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 43 (2013), S. 81–95
- [Kim u. Lee 2008] KIM, W. S. ; LEE, J. J.: Interfacial fracture analysis of adhesive-bonded joints. In: *Advanced Materials Research* Bd. 33 Trans Tech Publ, 2008, S. 327–332
- [Kinloch u. Shaw 1981] KINLOCH, A. J. ; SHAW, S. J.: A fracture mechanics approach to the failure of structural joints. In: *Developments in adhesives 2. London, Applied Science Publishers, 1981*, (1981), S. 83–124
- [Klarbring u. Movchan 1998] KLARBRING, A. ; MOVCHAN, A.: Asymptotic modelling of adhesive joints. In: *Mechanics of Materials* 28 (1998), Nr. 1, S. 137–145
- [Klarmann u. Schweizerhof 1993] KLARMANN, R. ; SCHWEIZERHOF, K.: A priori improvement of shear correction factors for the analysis of layered anisotropic shell structures. In: *Archive of Applied Mechanics* 63 (1993), Nr. 2
- [Krenk 1992] KRENK, S.: Energy release rate of symmetric adhesive joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 43 (1992), Nr. 4, S. 549–559
- [Kumar 2009] KUMAR, S.: Analysis of tubular adhesive joints with a functionally modulus graded bondline subjected to axial loads. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 8, S. 785–795
- [Kumar u. Scanlan 2010] KUMAR, S. ; SCANLAN, J. P.: Stress analysis of shaft-tube bonded joints using a variational method. In: *The Journal of Adhesion* 86 (2010), Nr. 4, S. 369–394
- [Kumar u. Scanlan 2013] KUMAR, S. ; SCANLAN, J. P.: On axisymmetric adhesive joints with graded interface stiffness. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 41 (2013), S. 57–72

- [Kumar et al. 2016] KUMAR, S. ; WARDLE, B. L. ; ARIF, M. F.: Strength and Performance Enhancement of Bonded Joints by Spatial Tailoring of Adhesive Compliance via 3D Printing. In: *ACS Applied Materials & Interfaces* (2016)
- [Lang u. Mallick 1998] LANG, T. P. ; MALLICK, P. K.: Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 3, S. 167–177
- [Leblond u. Mouro 1999] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a preexisting flaw at a notch root. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy* 327 (1999), Nr. 6, S. 581–587
- [Leblond u. Mouro 2000a] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root. I. Introduction and general form of the stress intensity factors at the initial crack tip. In: *International Journal of Fracture* 104 (2000a), Nr. 3, S. 209–222
- [Leblond u. Mouro 2000b] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root—II: Detailed form of the stress intensity factors at the initial crack tip and conclusion. In: *International Journal of Fracture* 104 (2000b), Nr. 3, S. 223–237
- [Lee u. Kim 2007] LEE, J. ; KIM, H.: Elasto-plastic analysis of adhesively bonded symmetric single lap joints under in-plane tension and edge moments. In: *The Journal of Adhesion* 83 (2007), Nr. 9, S. 837–870
- [Lee et al. 2010] LEE, M. J. ; CHO, T. M. ; KIM, W. S. ; LEE, B. C. ; LEE, J. J.: Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 5, S. 322–328
- [Leffler et al. 2007] LEFFLER, K. ; ALFREDSSON, K. S. ; STIGH, U.: Shear behaviour of adhesive layers. In: *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), Nr. 2, S. 530–545
- [Leguillon 1999] LEGUILLON, D.: Asymptotic analysis of a spontaneous crack growth. Application to a blunt crack. In: *IUTAM Symposium on Non-linear Singularities in Deformation and Flow* Springer, 1999, S. 169–180
- [Leguillon 2002] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21 (2002), Nr. 1, S. 61–72
- [Lenci 2001] LENCI, S.: Analysis of a crack at a weak interface. In: *International Journal of Fracture* 108 (2001), Nr. 3, S. 275–290
- [Li u. Zhang 2006] LI, J. ; ZHANG, X.: A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 4, S. 505–523
- [Liljedahl et al. 2006] LILJEDAHL, C. D. M. ; CROCOMBE, A. D. ; WAHAB, M. A. ; ASHCROFT, I. A.: Damage modelling of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Fracture* 141 (2006), Nr. 1, S. 147–161

- [Liu et al. 2014] LIU, Z. ; HUANG, Y. ; YIN, Z. ; BENNATI, S. ; VALVO, P. S.: A general solution for the two-dimensional stress analysis of balanced and unbalanced adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 54 (2014), S. 112–123
- [Lubliner 1998] LUBLINER, J.: *Plasticity Theory*. Macmillan Publication Company, 1998
- [Mantič 2009] MANTIČ, V.: Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), Nr. 6, S. 1287–1304
- [Mantič u. París 2004] MANTIČ, V. ; PARÍS, F.: Relation between SIF and ERR based measures of fracture mode mixity in interface cracks. In: *International Journal of Fracture* 130 (2004), Nr. 2, S. 557–569
- [Mantič et al. 2015] MANTIČ, V. ; TÁVARA, L. ; BLÁZQUEZ, A. ; GRACIANI, E. ; PARÍS, F.: A linear elastic-brittle interface model: application for the onset and propagation of a fibre-matrix interface crack under biaxial transverse loads. In: *International Journal of Fracture* 195 (2015), Nr. 1-2, S. 15–38
- [Marques u. da Silva 2008] MARQUES, E. A. S. ; DA SILVA, L. F. M.: Joint strength optimization of adhesively bonded patches. In: *The Journal of Adhesion* 84 (2008), Nr. 11, S. 915–934
- [Martin et al. 2010] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 9, S. 1297–1305
- [Martin et al. 2012] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A coupled strength and toughness criterion for the prediction of the open hole tensile strength of a composite plate. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 26, S. 3915–3922
- [Martínez-Pañeda u. Gallego 2015] MARTÍNEZ-PAÑEDA, E. ; GALLEGO, R.: Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. In: *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 11 (2015), Nr. 4, S. 405–424
- [Mayland 2012] MAYLAND, W.: *Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode*. Bd. 25. Studienbereich Mechanik, 2012
- [Mendoza-Navarro et al. 2013] MENDOZA-NAVARRO, E. L. ; DIAZ-DIAZ, A. ; CASTAÑEDA-BALDERAS, R. ; HUNKELER, S. ; NORET, R.: Interfacial failure in adhesive joints: Experiments and predictions. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 44 (2013), S. 36–47
- [Mittelstedt u. Becker 2016] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminate*. Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2016

- [Modniks et al. 2014] MODNIKS, J. ; SPĀRNIŅŠ, E. ; ANDERSONS, J. ; BECKER, W.: Analysis of the effect of a stress raiser on the strength of a UD flax/epoxy composite in off-axis tension. In: *Journal of Composite Materials* 49 (2014), Nr. 9, S. 1071–1080
- [Moradi et al. 2013] MORADI, A. ; CARRÈRE, N. ; LEGUILLON, D. ; MARTIN, E. ; COGNARD, J.-Y.: Strength prediction of bonded assemblies using a coupled criterion under elastic assumptions: Effect of material and geometrical parameters. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 47 (2013), S. 73–82
- [Mortensen u. Thomsen 2002] MORTENSEN, F. ; THOMSEN, O. T.: Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 7, S. 1011–1031
- [Mortensen u. Thomsen 1997] MORTENSEN, F. ; THOMSEN, O. T.: Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates. In: *Composite Structures* 38 (1997), Nr. 1-4, S. 281–294
- [Mubashar et al. 2014] MUBASHAR, A. ; ASHCROFT, I. A. ; CROCOMBE, A.: Modelling damage and failure in adhesive joints using a combined XFEM-cohesive element methodology. In: *The Journal of Adhesion* 90 (2014), Nr. 8, S. 682–697
- [das Neves et al. 2009a] NEVES, P. J. C. ; DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D.: Analysis of mixed adhesive bonded joints part I: theoretical formulation. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009a), Nr. 1, S. 1–34
- [das Neves et al. 2009b] NEVES, P. J. C. ; DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D.: Analysis of mixed adhesive bonded joints part II: parametric study. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009b), Nr. 1, S. 35–61
- [Nocedal u. Wright 2006] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S.: *Numerical Optimization*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 2006
- [Ojalvo u. Eidinoff 1978] OJALVO, I. U. ; EIDINOFF, H. L.: Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joint. In: *AIAA Journal* 16 (1978), Nr. 3, S. 204–211
- [Papini et al. 1994] PAPINI, M. ; FERNLUND, G. ; SPELT, J. K.: The effect of geometry on the fracture of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 14 (1994), Nr. 1, S. 5–13
- [Pickett u. Hollaway 1985] PICKETT, A. K. ; HOLLAWAY, L.: The analysis of elastic-plastic adhesive stress in bonded lap joints in FRP structures. In: *Composite Structures* 4 (1985), Nr. 2, S. 135–160
- [Pinto et al. 2014] PINTO, A. M. G. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; MENDES, I. R. ; BAPTISTA, A. P. M.: Numerical and experimental analysis of balanced and unbalanced adhesive single-lap joints between aluminium adherends. In: *The Journal of Adhesion* 90 (2014), Nr. 1, S. 89–103
- [Pires et al. 2003] PIRES, I. ; QUINTINO, L. ; DURODOLA, J. F. ; BEEVERS, A.: Performance of bi-adhesive bonded aluminium lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 23 (2003), Nr. 3, S. 215–223

- [Pirondi u. Moroni 2009] PIRONDI, A. ; MORONI, F.: An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 8, S. 796–805
- [Pirondi u. Nicoletto 2000] PIRONDI, A. ; NICOLETTO, G.: Comportamento a frattura di un adesivo strutturale. In: *Convegno IGF XV Bari*, 2000, S. 459—466
- [Pirondi u. Nicoletto 2002] PIRONDI, A. ; NICOLETTO, G.: Mixed mode I/II fracture toughness of bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 22 (2002), Nr. 2, S. 109–117
- [Pirvics 1974] PIRVICS, J.: Two dimensional displacement-stress distributions in adhesive bonded composite structures. In: *The Journal of Adhesion* 6 (1974), Nr. 3, S. 207–228
- [Potter et al. 2001] POTTER, K. D. ; GUILD, F. J. ; HARVEY, H. J. ; WISNOM, M. R. ; ADAMS, R. D.: Understanding and control of adhesive crack propagation in bonded joints between carbon fibre composite adherends I. Experimental. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 21 (2001), Nr. 6, S. 435–443
- [Raghava et al. 1973] RAGHAVA, R. ; CADDELL, R. M. ; YEH, G. S. Y.: The macroscopic yield behaviour of polymers. In: *Journal of Materials Science* 8 (1973), Nr. 2, S. 225–232
- [Raphael 1965] RAPHAEL, C.: Variable-adhesive bonded joints. In: *Proceedings of the Applied Polymer Symposium* 3, 1965, S. 99–108
- [Reddy 2004] REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC press, 2004
- [Renton u. Vinson 1975a] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: On the behavior of bonded joints in composite material structures. In: *Engineering Fracture Mechanics* 7 (1975b), Nr. 1, S. 41–52
- [Renton u. Vinson 1975b] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: The efficient design of adhesive bonded joints. In: *The Journal of Adhesion* 7 (1975a), Nr. 3, S. 175–193
- [Rice u. Rosengren 1968] RICE, J. R. ; ROSENGREN, G. F.: Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (1968), Nr. 1, S. 1–12
- [Rispler et al. 2000] RISPLER, A. R. ; TONG, L. ; STEVEN, G. P. ; WISNOM, M. R.: Shape optimisation of adhesive fillets. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 20 (2000), Nr. 3, S. 221–231
- [Rodríguez et al. 2012] RODRÍGUEZ, R. Q. ; PAIVA, W. P. ; SOLLERO, P. ; RODRIGUES, M. R. B. ; ALBUQUERQUE, É. L.: Failure criteria for adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 37 (2012), S. 26–36
- [Rosendahl et al. 2018] ROSENDAHL, P. L. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Stress solutions for joints with nonlinear adhesives. In: *PAMM* 17 (2018), Nr. 1, S. 341–342

- [Rosendahl et al. 2017] ROSENDAHL, P. L. ; WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Asymmetric crack onset at open-holes under tensile and in-plane bending loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 113–114 (2017), S. 10–23
- [Sadd 2009] SADD, M. H.: *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Burlington - Oxford: Academic Press, 2009
- [Sancaktar u. Kumar 2000] SANCAKTAR, E. ; KUMAR, S.: Selective use of rubber toughening to optimize lap-joint strength. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 14 (2000), Nr. 10, S. 1265–1296
- [Santos u. Campilho 2017] SANTOS, T. F. ; CAMPILHO, R. D. S. G.: Numerical modelling of adhesively-bonded double-lap joints by the eXtended Finite Element Method. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 133 (2017), S. 1–9
- [Sator u. Becker 2012] SATOR, C. ; BECKER, W.: Closed-form solutions for stress singularities at plane bi-and trimaterial junctions. In: *Archive of Applied Mechanics* 82 (2012), Nr. 5, S. 643–658
- [Sator 2010] SATOR, C.: *Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale*. Bd. 21. Techn. Univ., Studienbereich Mechanik, 2010
- [Schürmann 2007] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Bd. 2. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag (VDI Buch), 2007
- [Sheppard et al. 1998] SHEPPARD, A. ; KELLY, D. ; TONG, L.: A damage zone model for the failure analysis of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 6, S. 385–400
- [Smeltzer u. Klang 2003] SMELTZER, S. S. ; KLANG, E. C.: Analysis method for inelastic, adhesively bonded joints with anisotropic adherends. In: *Proceedings of the American Society for Composites 18th Technical Conference*, 2003, S. 1–17
- [de Sousa et al. 2017] SOUSA, C. C. R. G. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; MARQUES, E. A. S. ; COSTA, M. ; DA SILVA, L. F. M.: Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications* 231 (2017), Nr. 1-2, S. 210–223
- [Spaggiari u. Dragoni 2014] SPAGGIARI, A. ; DRAGONI, E.: Regularization of torsional stresses in tubular lap bonded joints by means of functionally graded adhesives. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 53 (2014), S. 23–28
- [Srinivas 1975] SRINIVAS, S.: *Analysis of bonded joints*. Forschungsbericht D-7855, NASA, Langley Research Center, Hampton Virginia, 1975
- [Stapleton et al. 2012] STAPLETON, S. E. ; WAAS, A. M. ; ARNOLD, S. M.: Functionally graded adhesives for composite joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 35 (2012), S. 36 – 49
- [Stein et al. 2017a] STEIN, N. ; DÖLLING, S. ; CHALKIADAKI, K. ; BECKER, W. ; WEISSGRAEBER, P.: Enhanced XFEM for crack deflection in multi-material joints. In: *International Journal of Fracture* 207 (2017), Nr. 2, S. 193–210

- [Stein et al. 2017b] STEIN, N. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: Analytical models for functionally graded adhesive single lap joints: comparative study. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 76 (2017), S. 70–82
- [Stein et al. 2016a] STEIN, N. ; MARDANI, H. ; BECKER, W.: An efficient analysis model for functionally graded adhesive single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 70 (2016), S. 117–125
- [Stein et al. 2017c] STEIN, N. ; ROSENDAHL, P. L. ; BECKER, W.: Homogenization of thermal and mechanical stresses in functionally graded adhesive joints. In: *Composites Part B: Engineering* 111 (2017), S. 279–293
- [Stein et al. 2018] STEIN, N. ; ROSENDAHL, P. L. ; BECKER, W.: Modelling load transfer and mixed-mode fracture of ductile adhesive composite joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 82 (2018), S. 299–310
- [Stein et al. 2015] STEIN, N. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A model for brittle failure in adhesive lap joints of arbitrary joint configuration. In: *Composite Structures* 133 (2015), S. 707–718
- [Stein et al. 2016b] STEIN, N. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Brittle failure in adhesive lap joints - a general Finite Fracture Mechanics approach. In: *Procedia Structural Integrity* 2 (2016), S. 1967–1974
- [Stein et al. 2016c] STEIN, N. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Stress solution for functionally graded adhesive joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 97 (2016), S. 300–311
- [Stein et al. 2016d] STEIN, N. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A coupled stress and energy failure model for crack initiation in arbitrarily shaped adhesive lap joints. In: *PAMM* 16 (2016), Nr. 1, S. 175–176
- [Stuparu et al. 2016] STUPARU, F. ; CONSTANTINESCU, D. ; APOSTOL, D. ; SANDU, M.: A Combined Cohesive Elements—XFEM Approach for Analyzing Crack Propagation in Bonded Joints. In: *The Journal of Adhesion* 92 (2016), Nr. 7-9, S. 535–552
- [Sugiman et al. 2013] SUGIMAN, S. ; CROCOMBE, A. ; ASCHROFT, I.: Modelling the static response of unaged adhesively bonded structures. In: *Engineering Fracture Mechanics* 98 (2013), S. 296–314
- [Suhir 1986] SUHIR, E.: Stresses in bi-metal thermostats. In: *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), Nr. 3, S. 657–660
- [Suhir 1989] SUHIR, E.: Interfacial stresses in bimetal thermostats. In: *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989), Nr. 3, S. 595–600
- [Suhir 2009] SUHIR, E.: Predictive analytical thermal stress modeling in electronics and photonics. In: *Applied Mechanics Reviews* 62 (2009), Nr. 4, S. 1–20
- [Sun et al. 2015] SUN, Z. ; OOI, E. T. ; SONG, C.: Finite fracture mechanics analysis using the scaled boundary finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 134 (2015), S. 330–353

- [Suo u. Hutchinson 1990] SUO, Z. ; HUTCHINSON, J. W.: Interface crack between two elastic layers. In: *International Journal of Fracture* 43 (1990), Nr. 1, S. 1–18
- [Tada et al. 2000] TADA, H. ; PARIS, P. C. ; IRWIN, G. R.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition*. ASME Press, 2000
- [Talmon l'Armée et al. 2016] TALMON L'ARMÉE, A. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Bending moment calculation for single lap joints with composite laminate adherends including bending-extensional coupling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 66 (2016), S. 41–52
- [Távvara et al. 2016] TÁVARA, L. ; MANTIČ, V. ; GRACIANI, E. ; PARÍS, F.: Modeling interfacial debonds in unidirectional fibre-reinforced composites under biaxial transverse loads. In: *Composite Structures* 136 (2016), S. 305–312
- [Taylor 2007] TAYLOR, D.: *The theory of critical distances: A new perspective in fracture mechanics*. Elsevier Science, 2007
- [Tenenbaum u. Pollard 2012] TENENBAUM, M. ; POLLARD, H.: *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, Incorporated, 2012 (Dover Books on Mathematics Series)
- [Timoshenko 1925] TIMOSHENKO, S.: Analysis of bi-metal thermostats. In: *Journal of the Optical Society of America* 11 (1925), Nr. 3, S. 233–255
- [Tong 1998] TONG, L.: Strength of adhesively bonded single-lap and lap-shear joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 20, S. 2601–2616
- [Tran et al. 2012] TRAN, V. X. ; LEGUILLON, D. ; KRISHNAN, A. ; XU, L. R.: Interface crack initiation at V-notches along adhesive bonding in weakly bonded polymers subjected to mixed-mode loading. In: *International Journal of Fracture* (2012), S. 1–15
- [Trondl 2013] TRONDL, A.: *Plastizität und Skaleneffekte sowie Deformations- und Versagensmodellierung dünner metallischer Schichten bei Nanoindentation*. Bd. 26. Studienbereich Mechanik, 2013
- [Tsai u. Morton 1995] TSAI, M. Y. ; MORTON, J.: The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints. In: *Composite Structures* 32 (1995), Nr. 1-4, S. 123–131
- [Tsai et al. 1998] TSAI, M. Y. ; OPLINGER, D. W. ; MORTON, J.: Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 12, S. 1163–1185
- [Turon et al. 2007] TURON, A. ; DAVILA, C. G. ; CAMANHO, P. P. ; COSTA, J.: An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 10, S. 1665–1682

- [Vallée et al. 2010] VALLÉE, T. ; TANNERT, T. ; MURCIA-DELISO, J. ; QUINN, D. J.: Influence of stress-reduction methods on the strength of adhesively bonded joints composed of orthotropic brittle adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 7, S. 583–594
- [Volkersen 1938] VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. In: *Luftfahrtforschung* 15 (1938), Nr. 1/2, S. 41–47
- [Waddoups et al. 1971] WADDOUPS, M. E. ; EISENMANN, J. R. ; KAMINSKI, B. E.: Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), Nr. 4, S. 446–454
- [Wagner u. Stett 2015] WAGNER, A. ; STETT, A.: Sicheres Kleben / Naturwissenschaftlichen und Medizinischen Institut (NMI) der Universität Tübingen. 2015. – Studie
- [Wah 1973] WAH, T.: Stress Distribution in a Bonded Anisotropic Lap Joint. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 95 (1973), Nr. 3, S. 174–181
- [Wang u. Zeng 2008] WANG, J. ; ZENG, S.: Thermal stresses analysis in adhesive/solder bonded bimaterial assemblies. In: *Journal of Applied Physics* 104 (2008), Nr. 11, S. 1–8
- [Wang et al. 2003a] WANG, R. X. ; CUI, J. ; SINCLAIR, A. N. ; SPELT, J. K.: Strength of adhesive joints with adherend yielding: I. Analytical model. In: *The Journal of Adhesion* 79 (2003), Nr. 1, S. 23–48
- [Wang et al. 2003b] WANG, R. X. ; SINCLAIR, A. N. ; SPELT, J. K.: Strength of adhesive joints with adherend yielding: II. Peel experiments and failure criteria. In: *The Journal of Adhesion* 79 (2003), Nr. 1, S. 49–66
- [Wegman u. Van Twisk 2012] WEGMAN, R. F. ; VAN TWISK, J.: *Surface preparation techniques for adhesive bonding*. Elsevier Science, 2012
- [Weißgraeber u. Becker 2011a] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A New Finite Fracture Mechanics Approach for Assessing the Strength of Bonded Lap Joints. In: *Key Engineering Materials* 471 (2011), S. 1075–1080
- [Weißgraeber u. Becker 2011b] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Predicting effective strengths of bonded lap joints with a finite fracture mechanics criterion. In: *Proceedings of the 32nd Risø International Symposium in Materials Science Composite Materials for Structural Performance: Towards higher Limits*. Technical University of Denmark, 2011, S. 479–486
- [Weißgraeber u. Becker 2013] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 14–15, S. 2383–2394
- [Weißgraeber et al. 2016a] WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; GEIPEL, D. ; BECKER, W.: Cracks at elliptical holes: stress intensity factor and finite fracture mechanics solution. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 55 (2016c), S. 192–198

- [Weißgraeber et al. 2015] WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; TALMON L'ARMÉE, A. ; BECKER, W.: Crack initiation in single lap joints: effects of geometrical and material properties. In: *International Journal of Fracture* 192 (2015), Nr. 2, S. 155–166
- [Weißgraeber et al. 2016b] WEISSGRAEBER, P. ; HELL, S. ; BECKER, W.: Crack nucleation in negative geometries. In: *Engineering Fracture Mechanics* 168 (2016a), S. 93–104
- [Weißgraeber et al. 2016c] WEISSGRAEBER, P. ; LEGUILLON, D. ; BECKER, W.: A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. In: *Archive of Applied Mechanics* 86 (2016b), Nr. 1, S. 375–401
- [Weißgraeber et al. 2014] WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: A general sandwich-type model for adhesive joints with composite adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 55 (2014), S. 56–63
- [Weißgraeber 2014] WEISSGRAEBER, P.: *Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen*. Bd. 33. Studienbereich Mechanik, 2014
- [Williams 1988] WILLIAMS, J.: On the calculation of energy release rates for cracked laminates. In: *International Journal of Fracture* 36 (1988), Nr. 2, S. 101–119
- [Wong 2015] WONG, E. H.: Interfacial stresses in sandwich structures subjected to temperature and mechanical loads. In: *Composite Structures* 134 (2015), S. 226–236
- [Wong u. Wong 2008] WONG, E. H. ; WONG, C. K.: Tri-layer structures subjected to combined temperature and mechanical loadings. In: *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies* 31 (2008), Nr. 4, S. 790–800
- [Xie et al. 2006] XIE, D. ; SALVI, A. G. ; SUN, C. E. ; WAAS, A. M. ; CALISKAN, A.: Discrete cohesive zone model to simulate static fracture in 2D triaxially braided carbon fiber composites. In: *Journal of Composite Materials* 40 (2006), Nr. 22, S. 2025–2046
- [Xu 2010] XU, B.: *Fracture mechanisms and failure criteria of adhesive joints and toughened epoxy adhesives*, Queen Mary College, London, Diss., 2010
- [Xu et al. 1999] XU, J.-Q. ; LIU, Y.-H. ; WANG, X.-G.: Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients. In: *Engineering Fracture Mechanics* 63 (1999), Nr. 6, S. 775–790
- [Yamada 1988] YAMADA, S. E.: The J-integral for augmented double cantilever beams and its application to bonded joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 29 (1988), Nr. 6, S. 673–682
- [Yang et al. 2004] YANG, C. ; HUANG, H. ; TOMBLIN, J. S. ; SUN, W.: Elastic-plastic model of adhesive-bonded single-lap composite joints. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), Nr. 4, S. 293–309
- [Yang u. Pang 1996] YANG, C. ; PANG, S.-S.: Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension. In: *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME* 118 (1996), Nr. 2, S. 247–255

- [Yang u. Thouless 2001] YANG, Q. D. ; THOULESS, M. D.: Mixed-mode fracture analyses of plastically-deforming adhesive joints. In: *International Journal of Fracture* 110 (2001), Nr. 2, S. 175–187
- [Yousefsani u. Tahani 2013] YOUSEFSANI, S. A. ; TAHANI, M.: Analytical solutions for adhesively bonded composite single-lap joints under mechanical loadings using full layerwise theory. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 43 (2013), S. 32–41
- [Yuan et al. 2004] YUAN, H. ; TENG, J. G. ; SERACINO, R. ; WU, Z. ; YAO, J.: Full-range behavior of FRP-to-concrete bonded joints. In: *Engineering Structures* 26 (2004), Nr. 5, S. 553–565
- [Zhao et al. 2011a] ZHAO, X. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Single lap joints with rounded adherend corners: stress and strain analysis. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 25 (2011a), Nr. 8, S. 819–836
- [Zhao et al. 2011b] ZHAO, X. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Single lap joints with rounded adherend corners: experimental results and strength prediction. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 25 (2011b), Nr. 8, S. 837–856
- [Zhao et al. 2010] ZHAO, X. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: A new method for the determination of bending moments in single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 2, S. 63–71

Insgesamt 273 Referenzen.