# Methoden und Anwendungen zur Polvorgabe mittels strukturbeschränkter Rückführungen

Vom Fachbereich
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Ing. Gregor Lukas Stein**

geboren in Frankfurt am Main

| | |
|---|---|
| Referent: | Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski |
| Korreferent: | Prof. Dr.-Ing. Thilo Bein |

| | |
|---|---|
| Tag der Einreichung: | 30. April 2019 |
| Tag der Prüfung: | 11. September 2019 |

D 17 · Darmstadt 2019

Stein, Gregor Lukas:
Methoden und Anwendungen zur Polvorgabe mittels strukturbeschränkter Rückführungen

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt
Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUprints: 2020
URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-117026
Tag der mündlichen Prüfung: 11.09.2019

Veröffentlicht unter CC BY-NC-ND 4.0 International:
https://creativecommons.org/licenses/

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand zum größten Teil während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski, der mir die Möglichkeit zur Promotion geboten und mich in Bezug auf meine Forschungstätigkeit jederzeit unterstützt hat. Er war mir während meiner Zeit am Fachgebiet in fachlicher wie auch persönlicher Hinsicht stets ein Vorbild. Herrn Prof. Dr.-Ing. Thilo Bein danke ich herzlichst für sein Interesse an meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Für unzählige Stunden fachlicher Diskussionen, aber auch solcher, die sich mit den Trivialitäten des Alltags befassen, möchte ich mich bei meinen Kollegen am Fachgebiet und insbesondere bei Eric Lenz, Oliver Janda und Jan Strubel bedanken. Während arbeitsreicher Tage sowie auch einer Reihe von Aktivitäten nach Feierabend sind Freundschaften entstanden, von denen ich überzeugt bin, dass sie ein Leben lang halten werden. Ein ganz besonderer Dank gilt zudem den administrativen Mitarbeitern des Fachgebiets, die durch ihre ungemein herzliche und hilfsbereite Art wesentlich zur hervorragenden Arbeitsatmosphäre beigetragen haben.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen Eltern und meinem Bruder, deren Unterstützung und Förderung ich mir stets sicher sein konnte, was mir einen enormen Rückhalt gab.

Eschborn, April 2020

*Gregor Lukas Stein*

# Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Methoden und Anwendungen zur Pol- bzw. Eigenwertvorgabe linearer, zeitinvarianter dynamischer Systeme diskutiert. Im Fokus stehen hierbei Aufgabenstellungen des integrierten Regler- und Strukturentwurfs. Bei diesen beinhaltet die Entwurfsaufgabe, neben der Auslegung einer Regelung, die geeignete Wahl beeinflussbarer Parameter der Regelstrecke. Als gemeinsamer Ausgangspunkt der betrachteten Syntheseverfahren dient die Formulierung entsprechender Aufgabenstellungen als Entwurfsprobleme statischer, strukturbeschränkter Rückführungen.

Es wird zunächst eine Vorgehensweise vorgestellt, die im Falle der Rückführung aller Zustände eine parametrische Lösung des Polvorgabeproblems unter Einbeziehung der Freiheitsgrade der Regelstrecke erlaubt. Unter Verwendung der resultierenden parametrischen Darstellung der Matrix der Zustandsrückführung wird ein Optimierungsproblem formuliert, das darauf abzielt, insbesondere die Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu verbessern.

Oftmals ist es wünschenswert, restriktive Strukturbeschränkungen bezüglich einer auszulegenden Rückführung berücksichtigen zu können. In diesem Kontext werden Ansätze zur Pol- und Polbereichsvorgabe sowie zur Erhöhung von Eigenwert-Dämpfungsgraden vorgestellt, bei denen die Entwurfsprobleme direkt als Optimierungsprobleme in den beeinflussbaren Elementen der Matrix der Rückführung formuliert werden. Eigenschaften der in diesem Zusammenhang auftretenden Funktionen von Eigenwerten werden bei der Formulierung dieser Optimierungsprobleme sowie bei der Auswahl geeigneter Algorithmen zur Suche nach Lösungen gezielt beachtet.

Die Beschreibung aller vorgestellten Verfahren wird von ausführlich diskutierten Entwurfsbeispielen begleitet, die sich mit Problemstellungen zur Minderung von Strukturschwingungen mittels aktiver und passiver Regelsysteme befassen.

# Abstract

This thesis discusses methods and applications of pole or eigenvalue placement for linear time-invariant dynamical systems. The focus lies on problems that involve integrating structure and control design, i.e. problems where, in addition to the design of a feedback controller, tunable parameters of the plant are to be chosen. Reformulating the respective design tasks as structured, static output feedback problems serves as a common framework for all considered design procedures.

It is shown how, in case of a full state feedback, a parametric solution of the pole placement problem can be derived that encompasses the degrees of freedom due to the controller as well as the degrees of freedom available in terms of tunable parameters of the plant. The resulting parametrization of the state feedback controller is subsequently utilized in an optimization procedure in order to enhance the robustness properties of the closed-loop system.

Oftentimes, it is desirable to design feedback controllers that adhere to restrictive structural constraints. In this context, design procedures for exact pole placement or the placement of poles in specified regions in the complex plane as well as an approach to increase eigenvalue damping ratios are presented. These design procedures involve optimization problems which directly consider the tunable elements of the feedback matrix as variables. Properties of the functions of eigenvalues that occur in connection with these optimization problems are taken into account, specifically with respect to the choice of suitable solvers.

The discussion of the design procedures given in this thesis is complemented by detailed application examples that particularly deal with the problem of damping structural vibrations using active and passive devices.

# Inhaltsverzeichnis

**Symbole und Abkürzungen** **IX**

**1 Einleitung** **1**

**2 Strukturbeschränkte Ausgangsrückführungen** **6**
2.1 Rechenregeln für Systeme in Zustandsraumdarstellung . . . . . 8
2.1.1 Konstante Ausgangsrückführungen . . . . . 8
2.1.2 Allgemeine Verknüpfung zweier Systeme . . . . . 10
2.1.3 Dynamische Ausgangsrückführungen . . . . . 11
2.1.4 Anwendungsbeispiel – Standardregelkreis mit PI-Regler . . . . . 12
2.2 Darstellung parameterabhängiger Systeme . . . . . 14
2.2.1 Definitionen und grundlegende Zusammenhänge . . . . . 14
2.2.2 Parameterabhängige Zustandsraumdarstellungen . . . . . 18
2.2.3 Anwendungsbeispiel – Mehrmassenschwinger mit gedämpften Tilgern . 22
2.3 Zusammenfassung . . . . . 27

**3 Entwurf von Zustandsrückführungen** **28**
3.1 Problemstellung . . . . . 28
3.2 Entwurfsgleichungen und Freiheitsgrade . . . . . 32
3.2.1 Systemdynamische Bedeutung der Eigen- und Steuervektoren . . . . . 38
3.2.2 Reelle Form der Entwurfsgleichungen . . . . . 39
3.3 Parameteroptimierung . . . . . 41
3.3.1 Gütekriterium . . . . . 41
3.3.2 Optimierungsproblem . . . . . 46
3.4 Anwendungsbeispiele . . . . . 47
3.4.1 Entwurfsbeispiele . . . . . 48
3.4.2 Zweimassenschwinger . . . . . 49
3.5 Zusammenfassung . . . . . 52

**4 Direkte Verfahren zur Polvorgabe** **54**
4.1 Kleinste-Quadrate-Formulierungen des Polvorgabeproblems . . . . . 55
4.1.1 Formulierung mittels der Eigenwerte . . . . . 56
4.1.2 Formulierung mittels des charakteristischen Polynoms . . . . . 60
4.1.3 Gegenüberstellung der Gütekriterien . . . . . 65
4.2 Berücksichtigung weiterer Entwurfsforderungen . . . . . 67
4.2.1 Minimierung der Reglernorm . . . . . 68
4.2.2 Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm . . . . . 69
4.3 Anwendungsbeispiel – Balkenversuchsstand . . . . . 74

4.3.1 Modellbildung . . . . . 75
4.3.2 Reglerentwurf . . . . . 85
4.4 Zusammenfassung . . . . . 92

**5 Entwurf zur Erhöhung von Eigenwert-Dämpfungsgraden 93**
5.1 Funktionen von Eigenwerten . . . . . 94
5.2 Beschränkte Min-Max-Optimierungsprobleme . . . . . 100
5.3 Anwendungsbeispiele . . . . . 106
5.3.1 Mehrmassenschwinger mit gedämpften Tilgern . . . . . 107
5.3.2 Passive Schwingungsminderung mittels piezoelektrischer Wandler . . . . 109
5.3.3 Vorgabe mehrfacher Eigenwerte . . . . . 121
5.4 Zusammenfassung . . . . . 122

**6 Zusammenfassung 123**

**A Eigenwerte linearer dynamischer Systeme 125**
A.1 Systemdynamische Bedeutung der Eigenwerte . . . . . 126
A.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . . 128

**B Ergänzungen zum Entwurf von Zustandsrückführungen 131**
B.1 Spezielle Wahl der Nullraumbasen . . . . . 131
B.2 Gradientenberechnung . . . . . 135
B.2.1 Grundlegende Zusammenhänge und Notation . . . . . 135
B.2.2 Einfache Differentiale . . . . . 136
B.2.3 Gradient der Gütefunktion . . . . . 137

**C Der Balkenversuchsstand 142**

**Literaturverzeichnis 143**

**Eigene Veröffentlichungen 152**

# Symbole und Abkürzungen

## Symbole

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | reelle Zahlen |
| $\mathbb{R}^n$ | reeller Vektor mit $n$ Elementen |
| $\mathbb{R}^{n\times m}$ | reelle $n \times m$ Matrix |
| $\mathbb{C}$ | komplexe Zahlen |
| $\mathbb{C}_-$ | offene linke Halbebene |
| $\mathbb{C}^n$ | komplexer Vektor mit $n$ Elementen |
| $\mathbb{C}^{n\times m}$ | komplexe $n \times m$ Matrix |
| $\mathcal{S}^n$ | Menge der Permutationen der natürlichen Zahlen von 1 bis $n$ |
| $\mathbb{B}_\epsilon(x)$ | abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Radius $\epsilon$ und Mittelpunkt $x$ |
| | |
| $(x_1, \ldots, x_n)$ | $n$-Tupel mit den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ |
| $e_i$ | $i$-ter kanonischer Basisvektor |
| $I_n$ | $n \times n$ Einheitsmatrix; $I$, sofern sich die Dimension aus dem Kontext ergibt |
| $0_{m,n}$ | $m \times n$ Nullmatrix; 0, sofern sich die Dimension aus dem Kontext ergibt |
| $X^*$ | (elementweise) konjugiert Komplexe der Matrix $X$ |
| $X^{\mathrm{T}}$ | Transponierte der Matrix $X$ |
| $X^{\mathrm{H}}$ | Adjungierte (konjugiert komplex Transponierte) der Matrix $X$ |
| $X^{-1}$ | Inverse der Matrix $X$ |
| $X^{-\mathrm{T}}$ | Transponierte der Inversen der Matrix $X$ |
| $X^+$ | Pseudoinverse der Matrix $X$ |
| $X \otimes Y$ | Kronecker-Produkt der Matrizen $X$ und $Y$ |
| $X[\alpha, \beta]$ | Submatrix von $X$ gegeben durch die Indexmengen $\alpha$ und $\beta$ |
| | |
| $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ | direkte Summe zweier Untervektorräume $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ |
| | |
| $\sigma(X)$ | Spektrum (Eigenwerte) der Matrix $X$ |
| $\sigma_i(X)$ | $i$-ter Singulärwert der Matrix $X$ |
| $\overline{\sigma}(X)$ | größter Singulärwert der Matrix $X$ |
| $\underline{\sigma}(X)$ | kleinster Singulärwert der Matrix $X$ |
| | |
| $\lVert x \rVert_2$ | 2-Norm des Vektors $x$ |
| $\lVert x \rVert_\infty$ | $\infty$-Norm des Vektors $x$ |
| $\lVert x \rVert_p$ | $p$-Norm des Vektors $x$ |
| $\lVert X \rVert_2$ | Spektralnorm der Matrix $X$; größter Singulärwert $\overline{\sigma}(X)$ |
| $\lVert X \rVert_{\mathrm{F}}$ | Frobenius-Norm der Matrix $X$ |
| $\lVert X \rVert_p$ | $p$-Norm der Matrix $X$ |

| | |
|---|---|
| $\mathrm{i}$ | Imaginäre Einheit |
| $\mathrm{Re}(X)$ | Realteil der Matrix $X$ |
| $\mathrm{Im}(X)$ | Imaginärteil der Matrix $X$ |
| | |
| $\mathrm{bild}(X)$ | Spaltenraum der Matrix $X$ |
| $\det(X)$ | Determinante der Matrix $X$ |
| $\mathrm{diag}(X,Y,\dots)$ | Blockdiagonalmatrix mit den Blöcken $X,Y,\dots$ |
| $\dim(\mathcal{X})$ | Dimension eines Untervektorraums $\mathcal{X}$ |
| $\ker(X)$ | Untervektorraum der Lösungen von $Xa = 0$ |
| $\mathrm{kond}_p(X)$ | Konditionszahl der Matrix $X$ bezüglich der Matrix $p$-Norm |
| $\mathrm{kond}_{\mathrm{F}}(X)$ | Konditionszahl der Matrix $X$ bezüglich der Frobenius-Norm |
| $\mathrm{rang}(X)$ | Rang der Matrix $X$ |
| $\mathrm{spur}(X)$ | Spur der Matrix $X$ |
| $\mathrm{vec}(X)$ | Vektorisierung der Matrix $X$ |
| | |
| $\mathrm{e}^X$ | Matrixexponentialfunktion |
| $\mathrm{e}^{A(t-t_0)}$ | Transitionsmatrix eines Systems mit der Systemmatrix $A$ |
| | |
| $\mathrm{d}f(x;u)$ | Differential der Funktion $f$ am Punkt $x$ mit dem Inkrement $u$ |
| $\mathrm{D}f(x)$ | Jacobi-Matrix der Funktion $f$ |
| $f'(x;u)$ | einseitige Richtungsableitung der Funktion $f$ am Punkt $x$ in Richtung $u$ |
| $\nabla f(x)$ | Gradient der Funktion $f$ |
| | |
| $\mathcal{F}_{\mathrm{l}}(\cdot,\cdot)$ | untere LFT |
| $\mathcal{F}_{\mathrm{u}}(\cdot,\cdot)$ | obere LFT |
| $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ | Redheffer Star-Product |
| | |
| $\mathcal{O}(\cdot)$ | Landau-Symbol |

### Abkürzungen

| | |
|---|---|
| BFGS | Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (Algorithmus) |
| GS | *engl.* Gradient Sampling |
| LFR | *engl.* Linear Fractional Representation |
| LFT | *engl.* Linear Fractional Transformation |
| PPP | Pshenichnyi-Pironneau-Polak (Algorithmus) |
| SQP | *engl.* Sequential Quadratic Programming |

# 1 Einleitung

Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Regelungstechnik beinhalten neben dem eigentlichen Reglerentwurf in vielen Fällen die geeignete Wahl beeinflussbarer Parameter der betrachteten Regelstrecke. Solche Freiheitsgrade im Systementwurf, die nicht bereits im Vorfeld durch konstruktive Notwendigkeiten festgelegt sind, können verschiedenster Art sein. Ein anschauliches Beispiel ist die geeignete Positionierung von Aktoren und Sensoren für komplexe mechatronische oder adaptronische Systeme bzw. Strukturen [62, 108]. Oftmals wird die Wahl der für den Struktur- sowie Reglerentwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade in aufeinander folgenden Entwurfsschritten durchgeführt. Ein grundsätzliches Problem eines mehrstufigen Ansatzes ist die wechselseitige Beeinflussung der Struktureigenschaften und des Reglerentwurfs. Die mittels einer Regelung für den geschlossenen Regelkreis erreichbare Güte, bewertet mittels eines geeignet gewählten Gütekriteriums, wird in teils erheblichem Maße von den vorgelagerten Entwurfsschritten beeinflusst. Andererseits kann eine gewählte Reglerstruktur Konsequenzen für die Auslegung des Systems haben. Insofern erscheint es generell wünschenswert, die Wahl aller zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade in einem integrierten Regler- und Strukturentwurf zusammenzufassen [27, 59, 82].

Denen sich durch einen solchen integrierten Ansatz offensichtlich ergebenden Vorteilen steht eine unter Umständen deutlich erhöhte Komplexität der resultierenden Entwurfsaufgabe gegenüber. Zur gezielten Berücksichtigung von Freiheitsgraden eines betrachteten Systems in einem modellbasierten Reglerentwurf muss deren Einfluss in geeigneter Weise durch die gewählte Systembeschreibung dargestellt werden können. Bei technischen Systemen können somit beispielsweise Beschreibungsformen problematisch sein, die das Resultat einer nicht physikalisch motivierten Modellbildung sind. Ebenso muss eine durch die Berücksichtigung der zusätzlichen Freiheitsgrade veränderte Struktur des Entwurfsproblems in geeigneter Weise von einem gewählten Verfahren berücksichtigt werden können.

Diese einleitenden Überlegungen motivieren die in dieser Arbeit diskutierten Methoden und Anwendungen zur Pol- bzw. Eigenwertvorgabe linearer, zeitinvarianter dynamischer Systeme. In der Literatur werden beide Bezeichnungen für Entwurfsverfahren verwendet, die sich mit der gezielten Beeinflussung der Eigenwerte der Systemmatrix bzw. der Systempole des geschlossenen Regelkreises befassen [43, 86, 102]. Wird anstatt die Lage der Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene exakt vorzugeben, ein zulässiger Bereich gewählt, wird dies auch als Polbereichsvorgabe bezeichnet. Berücksichtigt ein Entwurf neben den Eigenwerten ebenfalls die Eigenvektoren der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises, wird mitunter von der Vorgabe der Eigenstruktur gesprochen [80]. Die unterschiedlichen, insbesondere klassischen, Ansätze zur Polvorgabe zählen zu den bekanntesten Entwurfsverfahren für Ein- und Mehrgrößenregelungen linearer dynamischer Systeme. Die vorliegende Arbeit versucht hier einen Beitrag zu leisten, indem verschiedene solcher Syntheseverfahren mit Fokus auf die Auslegung strukturbeschränkter Rückführungen im

Allgemeinen und Aufgabenstellungen des integrierten Regler- und Strukturentwurfs im Speziellen angepasst beziehungsweise interpretiert werden. Die Beschreibung dieser Verfahren wird von ausführlich diskutierten Entwurfsbeispielen begleitet, die sich insbesondere mit Problemstellungen zur Minderung von Strukturschwingungen mittels aktiver und passiver Regelsysteme befassen [91, 100].

#### Struktur der Arbeit und Literaturübersicht

Das Hauptaugenmerk der in den folgenden Kapiteln diskutierten Verfahren und insbesondere der betrachteten Anwendungsbeispiele liegt auf der systematischen Berücksichtigung beeinflussbarer Parameter verschiedener Komponenten des betrachteten Systems bzw. der aufeinander abgestimmten Auslegung aktiver und passiver Systemkomponenten mittels Methoden der Polvorgabe. Dabei wird eine Klasse linearer, zeitinvarianter Systeme betrachtet, für welche die Matrizen der Zustandsraumdarstellungen rationale Funktionen der beeinflussbaren Parameter sind. Zwar stellt dies eine Einschränkung dar, bietet allerdings Vorteile hinsichtlich der Analyse der vorgestellten Syntheseverfahren. Insbesondere ermöglicht diese Voraussetzung die Gültigkeit einiger Aussagen, die im Zusammenhang mit den betrachteten Verfahren von Interesse sind, generisch bzw. für fast jede Wahl der für den Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade zu etablieren. Eine kompakte Einführung bzw. Präzisierung dieser Begriffe unter Zuhilfenahme von Resultaten aus dem Bereich der algebraischen Geometrie ist in [126] gegeben.

Weiterhin existieren automatisierte Verfahren, um für derartige Systeme äquivalente Darstellungen als Verknüpfung eines parameterunabhängigen Systems mit einer strukturbeschränkten statischen Rückführung anzugeben. In dieser Darstellung entsprechen einzelne Elemente der Rückführung den, unter Umständen geeignet transformierten, Entwurfsparametern. Das hierfür genutzte Werkzeug sind die sogenannten linear gebrochen rationalen Realisierungen bzw. Transformationen [130]. Diese finden im Kontext regelungstechnischer Methoden insbesondere im Zusammenhang mit der Modellierung und Analyse parametrischer Unsicherheiten Verwendung [32, 56, 75, 114, 122]. Sie werden jedoch auch zur Erzeugung standardisierter Systembeschreibungen für den Entwurf strukturbeschränkter Regler eingesetzt. Hier sind insbesondere die in den Veröffentlichungen von Gahinet und Apkarian [47, 48], Apkarian, Gahinet und Buhr [3] sowie Apkarian und Noll [4, 5] diskutierten Syntheseverfahren zu nennen. Diese erlauben die Berücksichtigung verschiedener Entwurfsziele, insbesondere die Minimierung von $\mathcal{H}_2$- und $\mathcal{H}_\infty$-Normen, und sind hervorragend für Problemstellungen geeignet, in denen beeinflussbare Parameter in verschiedenen Komponenten eines betrachteten Systems zu berücksichtigen sind.

Da sich dynamische Rückführungen durch geeignete Systemumformungen ebenfalls als statische Rückführung für ein erweitertes Streckenmodell darstellen lassen, können alle für den Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade der Regelstrecke sowie des Reglers in der Matrix einer statischen strukturbeschränkten Ausgangsrückführung zusammengefasst werden. Im Rahmen dieser Arbeit ergibt sich durch Verwendung dieser Umformungen und der entsprechenden Darstellung des Entwurfsproblems vor allem eine Vereinfachung der Beschreibung der verschiedenen Entwurfsmethoden sowie deren Implementierung. Kapitel 2 gibt einen Überblick über die im Zu-

sammenhang mit diesen Transformationen gebräuchliche Notation, deren Eigenschaften sowie eine Reihe weiterer wohlbekannter Systemumformungen [102, 130], die in den nachfolgenden Kapiteln genutzt werden.

Die weiteren Kapitel des Haupttextes sind verschiedenen Entwurfsverfahren gewidmet. Diese unterscheiden sich hinsichtlich des gewählten Ansatzes, der Voraussetzungen sowie der im Fokus stehenden Anwendungen und können weitestgehend unabhängig voneinander betrachtet werden. Ausgangspunkt des in Kapitel 3 vorgestellten Verfahrens sind Methoden zur Auslegung von Zustandsrückführungen durch Vorgabe der Eigenstruktur des geschlossenen Regelkreises. Bekanntermaßen können für ein vollständig steuerbares lineares System sämtliche Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mittels einer statischen Zustandsrückführung beliebig vorgegeben werden [127]. Im Falle eines Systems mit mehreren Eingangsgrößen bietet eine solche Rückführung Freiheitsgrade, die genutzt werden können, um neben der Zuweisung der Eigenwerte weitere Entwurfsziele zu erfüllen [92]. Ausgehend von Parametrierungen der Reglermatrix, die für jede bzw. fast jede Wahl der Parameter die Zuweisung eines vorgegebenen Spektrums im geschlossenen Regelkreis garantieren, bestimmen verschiedene Verfahren diese Parameter unter Nutzung geeignet formulierter Ein- und Mehrzieloptimierungsprobleme. Gebräuchlich sind insbesondere Gütekriterien, die darauf abzielen die Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu verbessern [24, 28, 66, 80, 106, 121]. Dieser Vorgehensweise folgend, wird ein Verfahren vorgestellt, das Freiheitsgrade der Regelstrecke in einer solchen Parametrierung der Zustandsrückführung und der auf dieser aufsetzenden Parameteroptimierung geeignet berücksichtigt.

Ein Vorteil dieses parametrischen Ansatzes ist, dass die Stabilität sowie eine gewisse Dynamik des geschlossenen Regelkreises unabhängig vom Resultat der Parameteroptimierung sichergestellt sind. Die Notwendigkeit der Kenntnis des gesamten Zustandsvektors stellt jedoch hinsichtlich des Einsatzes des Verfahrens in der Praxis eine Einschränkung dar, da oftmals nur eine begrenzte Anzahl von Messgrößen zur Verfügung steht. Eine Möglichkeit, dieser Problematik zu begegnen, ist der Übergang zu dynamischen Ausgangsrückführungen. Ist das betrachtete System beobachtbar, kann beispielsweise der Zustandsvektor näherungsweise durch einen Zustandsbeobachter rekonstruiert werden [44, 84, 85]. Sollen dynamische Rückführungen relativ hoher Ordnung, wie sie bei diesem Vorgehen mitunter resultieren, vermieden werden, ist es von Interesse, Entwurfsverfahren zur Polvorgabe mittels statischer Ausgangsrückführungen zu betrachten.

Die Frage nach der Lösbarkeit des Polvorgabeproblems als solchem ist in diesem Kontext wesentlich komplexer als im Falle einer Zustandsrückführung. In den vergangenen Jahrzehnten wurde diese Thematik in einer Vielzahl von Veröffentlichungen aufgegriffen. So konnten Hermann und Martin [58] zeigen, dass die fast beliebige Vorgabe sämtlicher Eigenwerte mittels einer komplexen Rückführung für generische Systeme möglich ist, sofern das Produkt der Anzahl der Ein- und Ausgangsgrößen größer oder gleich der Anzahl der Zustandsgrößen ist. Eine entsprechende Bedingung für reelle Rückführungen, das Produkt der Anzahl der Ein- und Ausgangsgrößen ist größer der Anzahl der Zustände, wurde von Wang [123, 124] angegeben. Ein zusammenfassender Überblick bezüglich dieser sowie einer Reihe weiterer bekannter Resultate findet sich in [119]. Unabhängig von den genannten Bedingungen lässt sich zeigen, dass die Polvorgabe mittels statischen Ausgangsrückführungen im Allgemeinen NP-schwer ist [46]. Wenngleich letztgenanntes

Resultat die Suche nach allgemeinen, nicht-iterativen Lösungen des Polvorgabeproblems für statische Ausgangsrückführungen unter der von Wang angegebenen Bedingung wenig aussichtsreich erscheinen lässt, existieren eine Reihe von Verfahren, die parametrische Lösungen in bestimmten Fällen erlauben [7, 72]. Ein kompakter, genereller Überblick über in der Literatur beschriebene Syntheseverfahren ist in [128] gegeben. Hinsichtlich iterativer Verfahren seien ergänzend die Arbeiten von Konigorski [71] sowie Franke und Röbenack [45] genannt.

Für eine Vielzahl der im Fokus dieser Arbeit stehenden Anwendungen des integrierten Regler- und Strukturentwurfs ergeben sich Problemstellungen, bei denen nur eine sehr begrenzte Anzahl von Freiheitsgraden in der Rückführung zur Verfügung steht. Dies berücksichtigend, sind insbesondere iterative Verfahren von Interesse, die es erlauben, Strukturbeschränkungen der Rückführung in einfacher Weise in den Entwurf einzubeziehen. Zudem ist eine gewisse Flexibilität bezüglich der Vorgabe der Eigenwerte wünschenswert bzw. notwendig. Als Beispiel hierfür seien Reglerentwürfe zur Schwingungsminderung flexibler mechanischer Strukturen genannt. Bei diesen weisen die Modelle der betrachteten Systeme oftmals eine relativ hohe Ordnung auf und beinhalten Dynamikanteile, die sich außerhalb des im Fokus der Anwendung liegenden Frequenzbereichs befinden. Eine exakte Vorgabe aller Eigenwerte eines solchen Systems ist, sofern sie mit den gegebenen Freiheitsgraden überhaupt möglich ist, aufwändig und mitunter kontraproduktiv. Geeignete Strukturbeschränkungen der auszulegenden Rückführung können in diesem Zusammenhang beispielsweise dazu dienen, für die Implementierung vorteilhafte dezentrale Regelungsstrukturen zu realisieren. Hier versuchen die in Kapitel 4 und Kapitel 5 beschriebenen Verfahren geeignete Lösungsansätze zur Synthese strukturbeschränkter Ausgangsrückführungen aufzuzeigen.

In Kapitel 4 werden direkte Verfahren zur Polvorgabe für statische, strukturbeschränkte Ausgangsrückführungen betrachtet. Die Bezeichnung als direktes Verfahren ist [71] entliehen und bezieht sich hier auf den Ansatz, den Polvorgabeentwurf als Optimierungsproblem in den Elementen der Matrix der Rückführung zu formulieren. Ausgehend von den in [71] sowie [128] beschriebenen Entwurfsverfahren werden Gütekriterien basierend auf dem charakteristischen Polynom des geschlossenen Regelkreises sowie dem Abstand der Eigenwerte von vorgegebenen Punkten in der komplexen Ebene verwendet. Die Formulierung der resultierenden Optimierungsprobleme erlaubt es, die vorgegebenen Eigenwerte als zusätzliche Entwurfsparameter aufzufassen. So können für den Fall, dass die Freiheitsgrade der Rückführung nicht ausreichen, das Polvorgabeproblem exakt oder, bedingt durch den iterativen Ansatz, in ausreichend guter Näherung zu lösen, unter Umständen die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises in geeignet vorgegebenen Bereichen zugewiesen werden. Neben einer Gegenüberstellung der betrachteten Gütekriterien sowie der Diskussion von Möglichkeiten, gegebenenfalls wiederum über die Polvorgabe hinausgehende Entwurfsziele zu berücksichtigen, wird die vorgestellte Vorgehensweise anhand eines komplexen Anwendungsbeispiels, der gemeinsamen Auslegung von Reglerparametern und Sensorpositionen an einem Balkenversuchsstand, illustriert.

In Kapitel 5 wird ein Entwurfsverfahren zur Erhöhung von Eigenwert-Dämpfungsgraden beschrieben. Deren Maximierung ist hinsichtlich der Minderung von Strukturschwingungen von Interesse, wenn die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade nur sehr eingeschränkte Möglichkeiten zur Beeinflussung des betrachteten Systems bieten [132]. Die resultierende Aufgabenstellung

ähnelt der bei der Suche nach stabilisierenden Rückführungen relevanten Minimierung der spektralen Abszisse und des spektralen Radius, das Maximum der Realteile der Eigenwerte bzw. das Maximum deren Beträge [15, 21, 23]. Durch die Eigenschaften dieser Funktionen der Eigenwerte resultieren Optimierungsprobleme mit nichtkonvexen und nichtglatten Gütefunktionen. Insbesondere fallen bei diesen Funktionen Punkte, an denen diese nicht differenzierbar sind, oftmals mit lokalen Minima bzw. Maxima zusammen, was bei der Auswahl eines geeigneten Optimierungsverfahrens zu berücksichtigen ist. Nach einer Einordnung der Problemstellung sowie auch der in Kapitel 4 zur Polvorgabe verwendeten Funktionen in diesen Kontext, wird eine Vorgehensweise zur Suche nach Lösungen der betrachteten Optimierungsprobleme diskutiert. Diese orientiert sich an den in den Softwarepaketen HIFOO ($\mathcal{H}_\infty$-*Fixed Order Optimization*) [51] bzw. HANSO (*Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization*) [20, 79] implementierten Verfahren für nichtglatte, nichtkonvexe Optimierungsprobleme. Verschiedene Aspekte des resultierenden Entwurfs werden anhand mehrerer Anwendungsbeispiele illustriert. Im Besonderen wird ein Versuchsaufbau zur Schwingungsminderung flexibler Strukturen mittels piezoelektrischer Wandler in Verbindung mit passiven elektrischen Netzwerken betrachtet. Eine kurze Zusammenfassung der Resultate in Kapitel 6 und drei Anhänge, in denen unter anderem auch eine kurze Einführung zu Eigenwerten linearer dynamischer Systeme gegeben ist, beschließen diese Arbeit.

# 2 Strukturbeschränkte Ausgangsrückführungen

Grundlage flexibel anwendbarer Analyse- und Syntheseverfahren ist ein einheitlicher Rahmen zur Beschreibung des Entwurfsproblems. Die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Methoden nutzen hierfür Varianten der in Bild 2.1 allgemein dargestellten Verknüpfung eines linearen zeitinvarianten dynamischen Systems $G$, gegeben durch eine Zustandsraumdarstellung, und einer statischen strukturbeschränkten Rückführung $K$, welche die durch das Entwurfsverfahren zu wählenden Parameter enthält. Gegenstand dieses Kapitels ist es aufzuzeigen, wie eine Vielzahl von Entwurfsproblemen, im Besonderen aus dem Bereich des integrierten Regler- und Strukturentwurfs, in geeigneter Weise in eine solche Darstellung überführt werden kann.

Die Zustandsraumdarstellung des Systems $G$ aus Bild 2.1 kann allgemein in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

mit $x(t_0) = x_0$ angegeben werden. Hierbei bezeichnet $x(t) \in \mathbb{R}^n$ den Zustandsvektor, $x_0$ den Anfangszustand,

$$u(t) := \begin{bmatrix} u_1^{\mathrm{T}}(t) & u_2^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

den Eingangsvektor und

$$y(t) := \begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{T}}(t) & y_2^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p_1+p_2}$$

den Ausgangsvektor des Systems. Für die Systemmatrix $A$, die Eingangsmatrix $B := [\ B_1 \quad B_2\ ]$, die Ausgangsmatrix $C := [\ C_1^{\mathrm{T}} \quad C_2^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}$ sowie die Durchgriffsmatrix

$$D := \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

werden passende Dimensionen vorausgesetzt. Das Regelgesetz

$$u_2(t) = Ky_2(t) \quad \text{mit} \quad K \in \mathcal{K} \tag{2.2}$$

beschreibt die im Allgemeinen strukturbeschränkte statische Rückführung, wobei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m_2 \times p_2}$ die Menge der zulässigen Matrizen bezeichnet. Der Einfachheit halber wird im Weiteren bei entsprechenden Darstellungen zumeist auf die explizite Angabe des Anfangszustands $x_0$ sowie der Zeitabhängigkeit der Zustands-, Ein- und Ausgangsvektoren verzichtet. Zudem werden je nach Bedarf verschiedene Bezeichnungen für die Dimensionen und mögliche Partitionierungen der in dieser Darstellung auftretenden Matrizen und Vektoren gewählt.

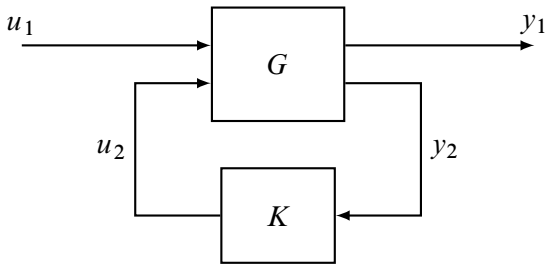



**Bild 2.1:** Verallgemeinerter Regelkreis

Die in Bild 2.1 dargestellte Struktur mit einer statischen Rückführung kann als Spezialfall der Rückführung über ein dynamisches Systems angesehen werden, die als Ausgangspunkt einer Vielzahl von Syntheseverfahren für lineare Systeme dient [112, 130, 40, 102]. Während hierbei klassischerweise die Ausgänge $y_2$ die gemessenen Größen und $u_2$ die durch den Regler erzeugten Stellgrößen bezeichnen, werden mit $u_1$ und $y_1$ externe Ein- und Ausgänge gekennzeichnet, die zur Definition geeigneter Gütefunktionen für die Reglersynthese beziehungsweise zur Bewertung des Systemverhaltens genutzt werden.

Die Beschränkung auf statische Rückführungen bedeutet in diesem Zusammenhang jedoch keine tatsächliche Einschränkung, da sich für dynamische Rückführungen stets eine bezüglich des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises äquivalente Darstellung mit einer statischen Rückführung angeben lässt. Das entsprechende Vorgehen wird, nachdem zunächst einige allgemein nützliche Rechenregeln für die Verknüpfung linearer zeitinvarianter Systeme angegeben werden, in Abschnitt 2.1 beschrieben.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Betrachtung von Systemen, die Freiheitsgrade bei der Parametrierung verschiedener Systemkomponenten bieten, um das dynamische Verhalten zu beeinflussen. Hierfür werden äquivalente Darstellungen parameterabhängiger Systeme in der durch (2.1) und (2.2) gegebenen Form genutzt. In diesem Zusammenhang werden in Abschnitt 2.2 die sogenannten linear gebrochen rationalen Realisierungen (LFR, engl. *linear fractional realization*) beziehungsweise Transformationen (LFT, engl. *linear fractional transformation*) [130] betrachtet. Diese erlauben es, Systeme, für welche die Matrizen der Zustandsraumdarstellung rationale Funktionen der beeinflussbaren Systemparameter sind, äquivalent als Verknüpfung eines parameterunabhängigen Systems und einer statischen Rückführung darzustellen, wobei nur die Diagonalelemente der Matrix der Rückführung von Null verschieden sind. Die hierfür notwendigen Operationen lassen sich mittels gängiger Software automatisiert ausführen. Für einfache Parameterabhängigkeiten können solche Darstellungen auch direkt aus der Anschauung heraus, beziehungsweise mit Hilfe weniger elementarer Umformungen, angegeben werden. Ein Beispiel für Letzteres wird zur Illustration der Vorgehensweise genutzt.

## 2.1 Rechenregeln für Systeme in Zustandsraumdarstellung

In diesem Abschnitt werden einige nützliche Rechenregeln für Systeme in Zustandsraumdarstellung im Hinblick auf verschiedene Rückführungsstrukturen angegeben, die im Weiteren Verwendung finden. Die betrachteten Zusammenhänge ergeben sich grundsätzlich durch elementare Operationen, so dass diese zum größten Teil ohne Herleitung angegeben werden. Ausführlichere Beschreibungen finden sich beispielsweise in [102] und [130].

Wenngleich Operationen für Systeme in Zustandsraumdarstellung von Interesse sind, ist es oftmals zweckmäßig, diese mit Hilfe von Übertragungsmatrizen zu definieren, deren Realisierungen durch die entsprechenden Zustandsraumbeschreibungen gegeben sind. Dies erlaubt im Besonderen eine kompakte Darstellung von Verknüpfungen verschiedener Systeme. Ist für ein System $G$ eine Zustandsraumbeschreibung durch das Quadrupel $(A,B,C,D)$ beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

gegeben, ist

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =: \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

eine gebräuchliche Notation für die Übertragungsmatrix $G(s)$ des Systems.

### 2.1.1 Konstante Ausgangsrückführungen

Für die in Bild 2.1 gezeigte Rückführungsstruktur mit einem System

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$$

und einer statischen Rückführung $K$ ergibt sich der geschlossene Regelkreis zu

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{cl}}(s) &:= \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(G(s), K) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}C_2 & B_1 + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}C_2 & D_{11} + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21} \end{array}\right] \\ &=: \left[\begin{array}{c|c} A_{\mathrm{cl}} & B_{\mathrm{cl}} \\ \hline C_{\mathrm{cl}} & D_{\mathrm{cl}} \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Im Vorgriff auf die Ausführungen in Abschnitt 2.2 wird hier die Rückführung mittels der als untere LFT bezeichneten Abbildung $\mathcal{F}_{\mathrm{l}}(\cdot,\cdot)$ ausgedrückt. Die Gültigkeit von (2.3) lässt sich leicht prüfen, indem, unter Berücksichtigung der gegebenen Partitionierung, zunächst

$$\begin{aligned} & u_2 = Ky_2 = K(C_2x + D_{21}u_1 + D_{22}u_2) \\ \Leftrightarrow\ & u_2 = (I - KD_{22})^{-1}(KC_2x + KD_{21}u_1) \end{aligned}$$

betrachtet wird. Einsetzen von $u_2$ in die entsprechenden Zustands- und Ausgangsgleichungen liefert

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2(I - KD_{22})^{-1}KC_2)x + (B_1 + B_2(I - KD_{22})^{-1}KD_{21})u_1 \\ y_1 &= (C_1 + D_{12}(I - KD_{22})^{-1}KC_2)x + (D_{11} + D_{12}(I - KD_{22})^{-1}KD_{21})u_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

für die Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Regelkreises. Als Konsequenz der auch als Schur-Formeln bezeichneten Ausdrücke für Determinanten von Blockmatrizen [102, 112] gilt

$$\det \begin{bmatrix} I & K \\ D_{22} & I \end{bmatrix} = \det(I - KD_{22}) = \det(I - D_{22}K). \tag{2.5}$$

Die Matrix $(I - KD_{22})$ ist somit genau dann regulär, wenn die Matrix $(I - D_{22}K)$ regulär ist. Wie sich einfach zeigen lässt gilt zudem

$$(I - KD_{22})^{-1}K = K(I - D_{22}K)^{-1}. \tag{2.6}$$

Mit (2.6) ergibt sich aus (2.4) die Darstellung des geschlossenen Regelkreises (2.3). Es ist leicht möglich, den in (2.3) gegebenen Ausdruck auch ohne die explizite Verwendung von (2.6) abzuleiten. Die Kenntnis dieses Zusammenhangs ist allerdings bei einer Reihe von Umformungen von Nutzen.

Die Rückführung beziehungsweise der geschlossene Regelkreis wird als sinnvoll konfiguriert bezeichnet (im Englischen *well-posed* [40]), wenn die Matrix $(I - D_{22}K)$ beziehungsweise äquivalent hierzu $(I - KD_{22})$ regulär ist. Für $D_{22} = 0$ ist dies für beliebige Matrizen $K$ stets der Fall. Sind alle Durchgriffsterme identisch Null folgt

$$G_{\mathrm{cl}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2KC_2 & B_1 \\ \hline C_1 & 0 \end{array}\right] \tag{2.7}$$

aus (2.3).

Tatsächlich bewertet der Großteil der in den folgenden Kapiteln beschriebenen Verfahren die Güte des geschlossenen Regelkreises ohne auf externe Ein- und Ausgänge zurückzugreifen. Es wird lediglich der Ausdruck für die aus der Rückführung resultierenden Systemmatrix benötigt. Sind keine externen Ein- und Ausgänge definiert, existieren die in (2.3) beziehungsweise (2.7) gegebenen Übertragungsfunktionen nicht. Die Dynamik des geschlossenen Regelkreises kann selbstverständlich dennoch durch die Ausdrücke für die entsprechenden Systemmatrizen

$$A_{\mathrm{cl}} = A + B_2(I - KD_{22})^{-1}KC_2$$

beziehungsweise

$$A_{\mathrm{cl}} = A + B_2KC_2$$

für $D_{22} = 0$ beschrieben werden.

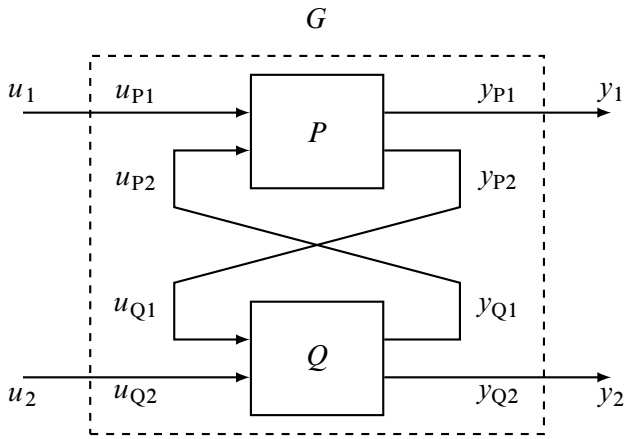



**Bild 2.2:** Allgemeine Verknüpfung zweier Systeme

### 2.1.2 Allgemeine Verknüpfung zweier Systeme

Einen allgemeineren Fall einer Rückführungsstruktur mit zwei dynamischen Systemen zeigt Bild 2.2. Sind die Systeme $P$ und $Q$ mit

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_{\mathrm{P}} & B_{\mathrm{P1}} & B_{\mathrm{P2}} \\ \hline C_{\mathrm{P1}} & D_{\mathrm{P11}} & D_{\mathrm{P12}} \\ C_{\mathrm{P2}} & D_{\mathrm{P21}} & D_{\mathrm{P22}} \end{array}\right] \quad \text{und} \quad Q(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_{\mathrm{Q}} & B_{\mathrm{Q1}} & B_{\mathrm{Q2}} \\ \hline C_{\mathrm{Q1}} & D_{\mathrm{Q11}} & D_{\mathrm{Q12}} \\ C_{\mathrm{Q2}} & D_{\mathrm{Q21}} & D_{\mathrm{Q22}} \end{array}\right]$$

gegeben, resultiert als Ergebnis der dargestellten Verknüpfung das System

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{2.8}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{P}} + B_{\mathrm{P2}} R^{-1} D_{\mathrm{Q11}} C_{\mathrm{P2}} & B_{\mathrm{P2}} R^{-1} C_{\mathrm{Q1}} \\ B_{\mathrm{Q1}} \hat{R}^{-1} C_{\mathrm{P2}} & A_{\mathrm{Q}} + B_{\mathrm{Q1}} \hat{R}^{-1} D_{\mathrm{P22}} C_{\mathrm{Q1}} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\mathrm{P1}} + B_{\mathrm{P2}} R^{-1} D_{\mathrm{Q11}} D_{\mathrm{P21}} & B_{\mathrm{P2}} R^{-1} D_{\mathrm{Q12}} \\ B_{\mathrm{Q1}} \hat{R}^{-1} D_{\mathrm{P21}} & B_{\mathrm{Q2}} + B_{\mathrm{Q1}} \hat{R}^{-1} D_{\mathrm{P22}} D_{\mathrm{Q12}} \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\mathrm{P1}} + D_{\mathrm{P12}} R^{-1} D_{\mathrm{Q11}} C_{\mathrm{P2}} & D_{\mathrm{P12}} R^{-1} C_{\mathrm{Q1}} \\ D_{\mathrm{Q21}} \hat{R}^{-1} C_{\mathrm{P2}} & C_{\mathrm{Q2}} + D_{\mathrm{Q21}} \hat{R}^{-1} D_{\mathrm{P22}} C_{\mathrm{Q1}} \end{bmatrix}$$

$$D := \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{22} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{\mathrm{P11}} + D_{\mathrm{P12}} R^{-1} D_{\mathrm{Q11}} D_{\mathrm{P21}} & D_{\mathrm{P12}} R^{-1} D_{\mathrm{Q12}} \\ D_{\mathrm{Q21}} \hat{R}^{-1} D_{\mathrm{P21}} & D_{\mathrm{Q22}} + D_{\mathrm{Q21}} \hat{R}^{-1} D_{\mathrm{P22}} D_{\mathrm{Q12}} \end{bmatrix}$$

sowie $R := (I - D_{\mathrm{Q11}} D_{\mathrm{P22}})$ und $\hat{R} := (I - D_{\mathrm{P22}} D_{\mathrm{Q11}})$, siehe [130]. Diese Verknüpfung ist wohldefiniert, sofern die Matrizen $R$ beziehungsweise $\hat{R}$ regulär sind, wobei analog zu dem in (2.5) diskutierten Zusammenhang wiederum $\det(R) = \det(\hat{R})$ gilt. Offensichtlich ist die Regularität sichergestellt, falls $D_{\mathrm{P22}} = 0$ oder $D_{\mathrm{Q11}} = 0$ gilt, mindestens eines der Systeme also keinen

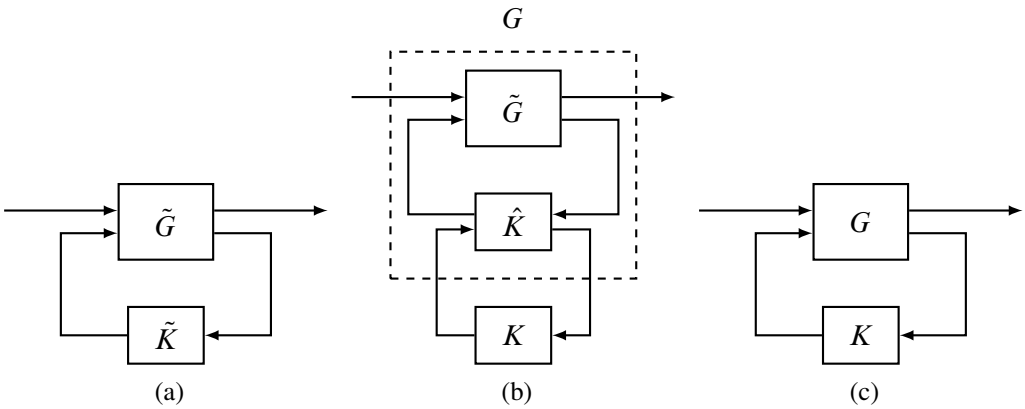



**Bild 2.3:** Äquivalente Darstellungen dynamischer Ausgangsrückführungen

Durchgriffsterm im für die Rückführung relevanten Übertragungspfad aufweist. Die in Bild 2.2 gezeigte Verknüpfung der Systeme $P$ und $Q$ wird auch als *Redheffer Star-Product* [130]

$$G(s) := \mathcal{S}(P(s), Q(s))$$

bezeichnet. Für das Anwenden der mit $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ bezeichneten Operation ist, wenngleich nicht explizit gekennzeichnet, das Festlegen der Partitionierung der beteiligten Systeme beziehungsweise der für die Verknüpfung zu verwendenden Ein- und Ausgänge notwendig.

### 2.1.3 Dynamische Ausgangsrückführungen

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel dargelegt, bedeutet die Beschränkung auf statische Regler bei der Diskussion der Entwurfsmethoden keine tatsächliche Einschränkung. Bekanntermaßen kann für eine dynamische Rückführung in einfacher Weise eine äquivalente Darstellung mit einer statischen Rückführung angegeben werden, indem die Strecke geeignet um die dynamische Ordnung des Reglers erweitert wird. Die notwendigen Umformungen lassen sich anhand der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Rechenregeln nachvollziehen.

Es wird die in Bild 2.3a gezeigte Rückführung eines Systems

$$\tilde{G}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{2.9}$$

mit einem dynamischen Regler

$$\tilde{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_\mathrm{K} & B_\mathrm{K} \\ \hline C_\mathrm{K} & D_\mathrm{K} \end{array}\right], \tag{2.10}$$

$A_\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{K}\times n_\mathrm{K}}$, $B_\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{K}\times m_\mathrm{K}}$, $C_\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{p_\mathrm{K}\times n_\mathrm{K}}$ sowie $D_\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{p_\mathrm{K}\times m_\mathrm{K}}$ betrachtet. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der dynamische Regler äquivalent mittels der Rückführung des Systems

$$\hat{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c:cc} 0 & 0 & I_{n_\mathrm{K}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{p_\mathrm{K}} \\ \hdashline I_{n_\mathrm{K}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_\mathrm{K}} & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.11}$$

und der Matrix

$$K = \begin{bmatrix} A_\mathrm{K} & B_\mathrm{K} \\ C_\mathrm{K} & D_\mathrm{K} \end{bmatrix}$$

dargestellt werden kann, beziehungsweise $\tilde{K}(s) = \mathcal{F}_l(\hat{K}(s), K)$ gilt. Die gestrichelten Linien in (2.11) kennzeichnen die zu Bild 2.3b passende Partitionierung der Ein-, Ausgangs- und Durchgriffsmatrizen des dynamischen Systems $\hat{K}$.

Zum Überführen der Darstellung aus Bild 2.3b nach Bild 2.3c kann die im letzten Abschnitt beschriebene Verknüpfung $\mathcal{S}(\tilde{G}(s), \hat{K}(s))$ verwendet werden. Es gilt

$$G(s) = \mathcal{S}(\tilde{G}(s), \hat{K}(s)) = \left[\begin{array}{cc|c:cc} A & 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_\mathrm{K}} & 0 \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ \hdashline 0 & I_{n_\mathrm{K}} & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 & D_{22} \end{array}\right]. \tag{2.12}$$

Die Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Regelkreises ergibt sich schließlich gemäß (2.3), wobei auch die spezielle Struktur des um die Zustände des Reglers erweiterten Systems (2.12) genutzt werden kann. Für die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} A_\mathrm{cl} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_{n_\mathrm{K}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\mathrm{K} & B_\mathrm{K} \\ C_\mathrm{K} & D_\mathrm{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_\mathrm{K}} & 0 \\ -D_{22}C_\mathrm{K} & I - D_{22}D_\mathrm{K} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_{n_\mathrm{K}} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}C_2 & B_2 C_\mathrm{K} + B_2 D_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}D_{22}C_\mathrm{K} \\ B_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}C_2 & A_\mathrm{K} + B_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}D_{22}C_\mathrm{K} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}C_2 & B_2(I - D_\mathrm{K}D_{22})^{-1}C_\mathrm{K} \\ B_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}C_2 & A_\mathrm{K} + B_\mathrm{K}(I - D_{22}D_\mathrm{K})^{-1}D_{22}C_\mathrm{K} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Matrizen $B_\mathrm{cl}$, $C_\mathrm{cl}$ und $D_\mathrm{cl}$ können entsprechend bestimmt werden. Ein Vergleich mit (2.8) zeigt, dass sich dieses Resultat selbstverständlich auch unter Verwendung der Beziehungen für die allgemeine Verknüpfung zweier dynamischer Systeme ausgehend von den Darstellungen (2.9) und (2.10) ergibt.

### 2.1.4 Anwendungsbeispiel – Standardregelkreis mit PI-Regler

Als einfaches Beispiel zur Illustration der Anwendung der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Rechenregeln, wird der in Bild 2.4 dargestellte Standardregelkreis mit dem Regler

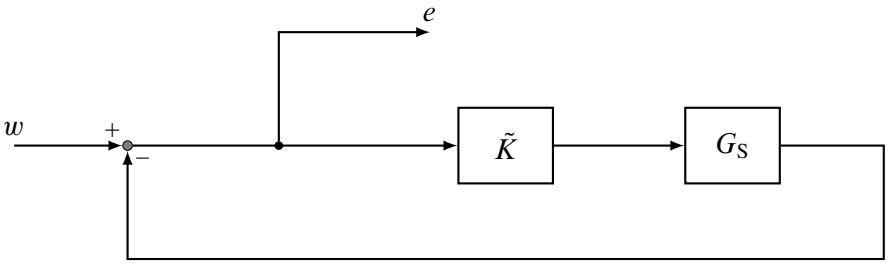



**Bild 2.4:** Standardregelkreis mit Regelstrecke $G_S$ und Regler $\tilde{K}$

$\tilde{K}$ und der Strecke $G_S$ betrachtet. In diesem Fall wird als externer Eingang die skalare Führungsgröße $w$ und als externer Ausgang die Regelabweichung $e$ verwendet. Weitere Eingänge, die an dieser Stelle üblicherweise definiert werden, sind an verschiedenen Stellen angreifende Störungen. Als zusätzlicher Ausgang wäre beispielsweise die Reglerausgangsgröße geeignet.

Der gegebene Regelkreis wird zunächst in die in Bild 2.3a dargestellte Form gebracht. Ist die Strecke durch

$$G_S(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_S & b_S \\ \hline c_S^T & d_S \end{array}\right]$$

gegeben, lässt sich leicht erkennen, dass das System $\tilde{G}$ durch

$$\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -G_S(s) \\ 1 & -G_S(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_S & 0 & b_S \\ \hline -c_S^T & 1 & -d_S \\ -c_S^T & 1 & -d_S \end{array}\right]$$

realisiert wird. Die Eingänge dieses Systems sind die Führungsgröße $w$ sowie der Ausgang des Reglers. Da die Regelabweichung $e$ sowohl als externer Ausgang als auch als Eingang für den Regler benötigt wird, erscheint der entsprechende Ausgang doppelt.

Soll das System mit einem PI-Regler geregelt werden gilt

$$\tilde{K}(s) = k_P + k_I \frac{1}{s}$$

mit den Verstärkungsfaktoren $k_P$ und $k_I$ des P- beziehungsweise I-Glieds. Eine Realisierung der Übertragungsfunktion des PI-Reglers kann in der Form

$$\tilde{K}(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} = k_P + \left[\begin{array}{c|c} 0 & k_I \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & k_I \\ \hline 1 & k_P \end{array}\right] \tag{2.13}$$

angegeben werden.

Dem Vorgehen im vorangegangenen Abschnitt folgend, ergibt sich die Darstellung aus Bild 2.3c mit

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c:cc} A_\mathrm{S} & 0 & 0 & 0 & b_\mathrm{S} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -c_\mathrm{S}^\mathrm{T} & 0 & 1 & 0 & -d_\mathrm{S} \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_\mathrm{S}^\mathrm{T} & 0 & 1 & 0 & -d_\mathrm{S} \end{array}\right] \quad \text{und} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & k_\mathrm{I} \\ 1 & k_\mathrm{P} \end{bmatrix}.$$

Wird allgemein eine strukturbeschränkte Rückführung $K \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ entworfen, muss die Menge $\mathcal{K}$ derart definiert werden, dass das Ergebnis wiederum mittels eines PI-Reglers darstellbar ist. In diesem Fall müssen die Elemente der Rückführung den Bedingungen $K[1,1] = 0$ und $K[2,1] = 1$ genügen. Werden zudem nicht negative Verstärkungen gefordert, kann diese Forderung in Form von Ungleichungsbedingungen $K[1,2] = k_\mathrm{I} \geq 0$ beziehungsweise $K[2,2] = k_\mathrm{P} \geq 0$ berücksichtigt werden.

## 2.2 Darstellung parameterabhängiger Systeme

Im Folgenden wird das in dieser Arbeit verwendete Vorgehen beschrieben, Systeme, für welche die Matrizen der Zustandsraumdarstellung rationale Funktionen beeinflussbarer Systemparameter sind, äquivalent als Verknüpfung parameterunabhängiger Systeme mit statischen Rückführungen darzustellen. Hierfür werden zunächst einige grundlegende Definitionen und Zusammenhänge für die als LFT (engl. *linear fractional transformation*) bezeichneten Abbildungen angegeben, die in diesem Zusammenhang eine zentrale Rolle spielen. Diesen Abbildungen ist in [130] ein Kapitel gewidmet, an welchem sich der nachfolgende Abschnitt orientiert und auf das für eine ausführlichere Diskussion der Thematik verwiesen sei.

Die angesprochenen äquivalenten Darstellungen parameterabhängiger Zustandsraumdarstellungen werden in Abschnitt 2.2.2 diskutiert. In der Anwendung bietet es sich meist an, diese Darstellungen mittels geeigneter Softwarelösungen automatisiert zu generieren, weswegen bei den meisten in dieser Arbeit gegebenen Beispielen hierauf nicht explizit eingegangen wird. Zur Illustration wird jedoch in Abschnitt 2.2.3 ausführlich die Modellbildung für ein System beschrieben, das in Kapitel 5 als Anwendungsbeispiel für die dort diskutierte Entwurfsmethodik aufgegriffen wird.

### 2.2.1 Definitionen und grundlegende Zusammenhänge

Für eine partitionierte Matrix der Form

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2)\times(m_1+m_2)}$$

wird gemäß [130] die Abbildung

$$\mathcal{F}_{\mathrm{u}}(M,\cdot) : \mathbb{C}^{m_1\times p_1} \to \mathbb{C}^{p_2\times m_2}$$

bezüglich einer Matrix $K_{\mathrm{u}} \in \mathbb{C}^{m_1\times p_1}$ mit

$$\mathcal{F}_{\mathrm{u}}(M,K_{\mathrm{u}}) := M_{22} + M_{21}K_{\mathrm{u}}(I - M_{11}K_{\mathrm{u}})^{-1}M_{12}, \tag{2.14}$$

sofern $(I - M_{11}K_{\mathrm{u}})$ regulär ist, als obere LFT (engl. *upper linear fractional transformation*) bezeichnet. Entsprechend wird die Abbildung

$$\mathcal{F}_{\mathrm{l}}(M,\cdot) : \mathbb{C}^{m_2\times p_2} \to \mathbb{C}^{p_1\times m_1}$$

bezüglich $K_{\mathrm{l}} \in \mathbb{C}^{m_2\times p_2}$ mit

$$\mathcal{F}_{\mathrm{l}}(M,K_{\mathrm{l}}) := M_{11} + M_{12}K_{\mathrm{l}}(I - M_{22}K_{\mathrm{l}})^{-1}M_{21}, \tag{2.15}$$

sofern $(I - M_{22}K_{\mathrm{l}})$ regulär ist, als untere LFT (engl. *lower linear fractional transformation*) bezeichnet. Diese beiden Abbildungen lassen sich durch einfaches Umsortieren der Matrix $M$ ineinander überführen. Es gilt

$$\mathcal{F}_{\mathrm{l}}(M, K_{\mathrm{l}}) = \mathcal{F}_{\mathrm{u}}(\tilde{M}, K_{\mathrm{l}})$$

mit

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_2} \\ I_{p_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{m_1} \\ I_{m_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{bmatrix}.$$

Die Benennung dieser Abbildungen erschließt sich aus den in Bild 2.5 dargestellten Verknüpfungen. Wird beispielsweise die untere LFT betrachtet, ist ersichtlich, dass diese der in Bild 2.5b gezeigten Rückführung entspricht. In diesem Fall gilt

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

und $u_2 = K_{\mathrm{l}}y_2$, mit $u_1 \in \mathbb{C}^{m_1}$, $u_2 \in \mathbb{C}^{m_2}$, $y_1 \in \mathbb{C}^{p_1}$ und $y_2 \in \mathbb{C}^{p_2}$. Einsetzen liefert

$$u_2 = K_{\mathrm{l}}(M_{21}u_1 + M_{22}u_2) \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = (I - K_{\mathrm{l}}M_{22})^{-1}K_{\mathrm{l}}M_{21}u_1,$$

sofern die Matrix $(I - K_{\mathrm{l}}M_{22})$ regulär ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $(I - M_{22}K_{\mathrm{l}})$ regulär ist. Zudem gilt analog zu den in (2.5) und (2.6) diskutierten Zusammenhängen

$$(I - K_{\mathrm{l}}M_{22})^{-1}K_{\mathrm{l}} = K_{\mathrm{l}}(I - M_{22}K_{\mathrm{l}})^{-1}. \tag{2.16}$$

Somit ergibt sich

$$y_1 = (M_{11} + M_{12}K_{\mathrm{l}}(I - M_{22}K_{\mathrm{l}})^{-1}M_{21})u_1 = \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(M,K_{\mathrm{l}})u_1.$$

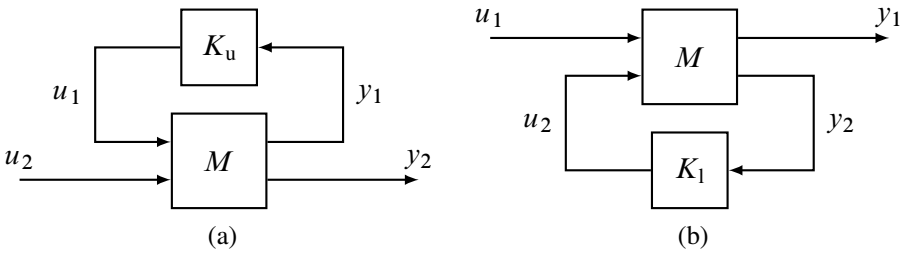



**Bild 2.5:** Darstellung der oberen (a) und unteren (b) LFT als Rückführungen

Zu den wesentlichen algebraischen Eigenschaften der in (2.14) und (2.15) definierten Abbildungen zählt, dass Operationen wie beispielsweise Additionen, Multiplikationen oder Verknüpfungen zweier LFTs durch eine Rückführung wiederum als LFT dargestellt werden können. Einen Überblick über eine Reihe dieser Rechenregeln gibt [130]. Die entsprechenden Herleitungen ergeben sich zumeist mittels elementarer Umformungen aus den Definitionen der LFT [13]. Exemplarisch und als Referenz zur Verwendung in folgenden Abschnitten werden an dieser Stelle die Multiplikation zweier LFT-Darstellungen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, K_1\right)\mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, K_2\right) \\
=&\mathcal{F}_l\left(\left[\begin{array}{c|cc} M_{11}N_{11} & M_{12} & M_{11}N_{12} \\ \hline M_{21}N_{11} & M_{22} & M_{21}N_{12} \\ N_{21} & 0 & N_{22} \end{array}\right], \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

und die für eine reguläre Matrix $T$ von passender Dimension gültige Beziehung

$$\mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, TKT^{-1}\right) = \mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}T \\ T^{-1}M_{21} & T^{-1}M_{22}T \end{bmatrix}, K\right) \tag{2.18}$$

angegeben.

Die beschriebenen Abbildungen und ihre Eigenschaften erweisen sich in vielen Bereichen als nützliche Werkzeuge. Im Rahmen dieser Arbeit von besonderem Interesse ist die Möglichkeit, Matrizen, deren Einträge rationale Funktionen mehrerer Veränderlicher sind, mittels einer LFT darzustellen [130, 13, 56]. Ist im Speziellen $F(\theta)$ eine Matrix, deren Elemente rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten in den reellen Veränderlichen $\theta := [\ \theta_1 \ \cdots \ \theta_q\ ]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^q$ sind, existieren Darstellungen der Form

$$F(\theta) = \mathcal{F}_l(M, K) = \mathcal{F}_u(\tilde{M}, K) \tag{2.19}$$

mit reellen Matrizen $M$, $\tilde{M}$ und $K := \operatorname{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \ldots, \theta_q I_{r_q})$, sofern $F(0)$ endlich ist, beziehungsweise keines der Nennerpolynome eine Nullstelle für $\theta = 0$ aufweist [130]. Die Summe der Anzahl der Wiederholungen $r := \sum_{i=1}^{q} r_i$ der Elemente von $\theta$ auf der Hauptdiagonalen der Matrix $K$ wird in diesem Zusammenhang auch als Ordnung der LFT-Darstellung (2.19) bezeichnet.

Es bietet sich an dieser Stelle an, das einfache, jedoch wichtige Beispiel affiner Parameterabhängigkeiten zu betrachteten, für das sich eine Darstellung als LFT sofort angeben lässt. Die beschriebene Vorgehensweise ist wiederum [130] entnommen.

**Beispiel 2.1.** *Betrachtet wird eine Matrix*

$$F(\theta) = F_0 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i F_i$$

*deren Elemente affine Funktionen von $\theta$ sind. Für jede der Matrizen $F_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$ lässt sich eine Zerlegung der Form $F_i = U_i V_i^{\mathrm{T}}$ mit $U_i \in \mathbb{R}^{p\times r_i}$, $V_i \in \mathbb{R}^{m\times r_i}$ und $r_i \leq \min\{p, m\}$ angeben. Eine Möglichkeit, geeignete Matrizen $U_i$ und $V_i$ zu bestimmen, ist die Singulärwertzerlegung von $F_i$. Folglich gilt*

$$\theta_i F_i = U_i \theta_i I_{r_i} V_i^{\mathrm{T}}$$

*und somit*

$$F(\theta) = F_0 + \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_q \end{bmatrix} \operatorname{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \ldots, \theta_q I_{r_q}) \begin{bmatrix} V_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ V_q^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

*Mit*

$$M_{11} = F_0, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_q \end{bmatrix}, \quad M_{21} = \begin{bmatrix} V_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ V_q^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

*und $K = \operatorname{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \ldots, \theta_q I_{r_q})$ ergibt sich schließlich*

$$F(\theta) = \mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, K\right).$$

Im Allgemeinen sind Darstellungen einer Matrix $F(\theta)$ in der Form (2.19) weder eindeutig noch weisen sie eine minimale Ordnung, das heißt kleinstmögliches $r$, auf. Methoden zur Erzeugung von LFT-Darstellungen, Diskussionen zur Problematik, Darstellungen möglichst geringer Ordnung zu erhalten und entsprechende Softwarelösungen, finden sich beispielsweise in [75], [114], [32], [122], [57] und [56]. Insbesondere zu bemerken ist, dass Algorithmen zur Erzeugung von LFT-Darstellungen in der Robust Control Toolbox™ von MATLAB® [8] implementiert und somit für viele Anwender verfügbar sind.

Im Zusammenhang mit der Darstellung als LFT ebenfalls gebräuchlich sind Transformationen beziehungsweise Normierungen der Parameter. Eine recht allgemeine Form einer solchen Transformation ist durch die Beziehung

$$\theta_i = \tau_i(\kappa_i) := \frac{\gamma_i + \alpha_i \kappa_i}{1 + \beta_i \kappa_i} = \mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} \gamma_i & \alpha_i - \gamma_i \beta_i \\ 1 & -\beta_i \end{bmatrix}, \kappa_i\right) \tag{2.20}$$

gegeben [33, 56]. Ist beispielsweise durch $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$ das für einen Parameter zulässige Intervall gegeben, führt die Wahl

$$\alpha_i = \frac{\overline{\theta}_i - \underline{\theta}_i}{2}, \quad \gamma_i = \frac{\overline{\theta}_i + \underline{\theta}_i}{2} \quad \text{sowie} \quad \beta_i = 0$$

auf eine affine Funktion $\tau_i(\cdot)$, für die

$$\tau(0) = \frac{\overline{\theta}_i + \underline{\theta}_i}{2}, \quad \tau(-1) = \underline{\theta}_i \quad \text{sowie} \quad \tau(1) = \overline{\theta}_i$$

gilt. Die Beschränkung $|\kappa_i| \leq 1$ entspricht somit dem für $\theta_i$ definierten zulässigen Intervall und der Wert $\kappa_i = 0$ ergibt dessen Mittelwert. Für $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$ und $\gamma_i = 0$ ergibt sich der triviale Zusammenhang $\theta_i = \kappa_i$. Wie den genannten Quellen zu entnehmen ist, kann für eine Matrix $F(\tau(\kappa))$, die sich für die transformierten Parameter ergibt, wiederum eine Darstellung mittels einer LFT angegeben werden. Abgesehen davon, dass eine Normierung der Parameter üblich ist, werden entsprechende Transformationen notwendig, sofern $\theta = 0$ einer Nullstelle der Nennerpolynome von $F(\theta)$ entspricht. Letzteres kann mittels eines einfachen Beispiels illustriert werden.

**Beispiel 2.2.** *Die Funktion $F(\theta) = 1/\theta$ kann nicht direkt mittels einer LFT der Form* (2.19) *mit $K = \theta$ dargestellt werden. Für $\theta = \gamma + \alpha\kappa$ mit $\alpha \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ ist jedoch durch*

$$F(\gamma + \alpha\kappa) = \frac{1}{\gamma + \alpha\kappa} = \mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\begin{bmatrix} 1/\gamma & -\alpha/\gamma^2 \\ 1 & -\alpha/\gamma \end{bmatrix}, \kappa\right)$$

*eine LFT für den Parameter $\kappa$ gegeben.*

### 2.2.2 Parameterabhängige Zustandsraumdarstellungen

Betrachtet wird ein lineares zeitinvariantes System, dessen Zustandsraumdarstellung in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}(\theta)x + \hat{B}(\theta)u, \\ y &= \hat{C}(\theta)x + \hat{D}(\theta)u \end{aligned} \tag{2.21}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^p$ gegeben ist. $\hat{A}(\theta)$, $\hat{B}(\theta)$, $\hat{C}(\theta)$ und $\hat{D}(\theta)$ sind reelle Matrizen von passender Dimension, deren Einträge rationale Funktionen von $q$ Entwurfsparametern sind, die im Vektor $\theta \in \mathbb{R}^q$ zusammengefasst werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass für die Entwurfsparameter eine Menge zulässiger Werte $\mathcal{P}_\theta \subset \mathbb{R}^q$ gegeben ist. Die im Rahmen dieser Arbeit diskutierten Syntheseverfahren führen auf verschiedene Parameteroptimierungsprobleme, welche wiederum die durch die Menge $\mathcal{P}_\theta$ formulierten Restriktionen berücksichtigen müssen.

Für die als Freiheitsgrade für den Systementwurf zur Verfügung stehenden Parameter der Regelstrecke sind als Beschränkungen vor allem explizit gegebene obere und untere Grenzen relevant, so dass $\underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \overline{\theta}_i$ für $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{b}} \subset \{1, \ldots, q\}$ gilt. Ein breites Spektrum konstruktionsbedingter oder anderweitig notwendiger Restriktionen lässt sich mittels Gleichungs- und Ungleichungsnebenbdingungen ausdrücken. Diese werden durch Funktionen $\eta_{\mathrm{g}} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{c_{\mathrm{g}}}$ und $\eta_{\mathrm{u}} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{c_{\mathrm{u}}}$ repräsentiert, wobei $c_{\mathrm{g}}$ und $c_{\mathrm{u}}$ die Anzahl der Gleichungs- beziehungsweise Ungleichungsnebenbedingungen bezeichnen. Die Menge der zulässigen Werte für die Entwurfsparameter hat in diesem Fall die Form

$$\mathcal{P}_\theta := \left\{\theta \in \mathbb{R}^q : \ \eta_{\mathrm{u}}(\theta) \leq 0, \eta_{\mathrm{g}}(\theta) = 0, \underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \overline{\theta}_i, i \in \mathcal{I}_{\mathrm{b}}\right\}. \tag{2.22}$$

Wird zusätzlich davon ausgegangen, dass $\eta_{\mathrm{g}}$ und $\eta_{\mathrm{u}}$ affine Funktionen sind, so ist die für die Vektoren $\theta$ zulässige Menge $\mathcal{P}_\theta$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^q$ und im Speziellen ein Polyeder. Die Beschränkung auf derartige konvexe Mengen ist für die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Entwurfsverfahren im Allgemeinen nicht zwingend erforderlich, vereinfacht jedoch in vielen Fällen die Diskussion der Verfahren und ist von Vorteil bei deren Implementierung, beziehungsweise hinsichtlich der Auswahl geeigneter Methoden der Parameteroptimierung. Insofern finden sich in den folgenden Kapiteln an verschiedenen Stellen Einschränkungen der Menge (2.22).

Die Systemdarstellung (2.21) kann äquivalent in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}(\theta) & \hat{B}(\theta) \\ \hat{C}(\theta) & \hat{D}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} =: \hat{S}(\theta) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

notiert werden. Offensichtlich ergibt sich für die Matrix $\hat{S}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)}$, beziehungsweise deren Elemente, wiederum eine rationale Abhängigkeit von den Elementen des Vektors $\theta$. Wie im vorigen Abschnitt diskutiert, lässt sich für eine solche Matrix eine Darstellung als LFT in der Form (2.19) angeben, wobei die Matrix, welche die Parameterabhängigkeiten beschreibt, Diagonalgestalt aufweist. Im Kontext regelungstechnischer Anwendungen findet dieses Vorgehen insbesondere im Zusammenhang mit Untersuchungen zur Robustheit von Systemen mit unsicheren Parametern Verwendung [129, 130]. In diesem Zusammenhang wird meist von normierten Unsicherheiten, beziehungsweise im Allgemeinen von einer normierten Rückführung ausgegangen. Anstatt der Parameter $\theta_i$ im Intervall $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$ werden hierbei üblicherweise Parameter $\kappa_i$ im Intervall $[-1,1]$, beziehungsweise mit $|\kappa_i| \leq 1$, betrachtet. Wenngleich eine solche Normierung des Parametervektors auch im Hinblick auf die Verwendung entsprechend beschränkter Parameter als Freiheitsgrade in einem Entwurfsverfahren eine sinnvolle Konvention sein kann, ist sie keinesfalls zwingend erforderlich. Wie im vorangegangenen Abschnitt und im Besonderen in Beispiel 2.2 diskutiert, kann allerdings eine Transformation des Parametervektors notwendig sein, falls die Matrix $\hat{S}(\theta)$ für $\theta = 0$ nicht definiert und somit nicht mittels einer LFT darstellbar ist.

Wichtige Spezialfälle der in diesem Zusammenhang relevanten Transformation

$$\theta_i = \tau_i(\kappa_i) := \frac{\gamma_i + \alpha_i \kappa_i}{1 + \beta_i \kappa_i}$$

aus (2.20) ergeben sich für $\beta_i = 0$ und $\alpha_i \neq 0$, wofür im vorangegangen Abschnitt ebenfalls bereits ein Beispiel gegeben ist. Die Transformation des Vektors $\theta$ ist in diesem Fall eine affine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ mit

$$\theta = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_q \end{bmatrix} + \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_q \end{bmatrix} =: \tau(\kappa)$$

beziehungsweise

$$\kappa = \operatorname{diag}(1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_q) \left( \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_q \end{bmatrix} \right) =: \tau^{-1}(\theta).$$

Dies ist von Vorteil, wenn in der Definition der Menge (2.22) durch affine Gleichungen beziehungsweise Ungleichungen gegebene Beschränkungen vorliegen. Hinsichtlich des Vektors $\kappa$ resultieren unter diesen Voraussetzungen wiederum affine Funktionen $\eta_{\mathrm{g}}(\tau(\kappa))$ und $\eta_{\mathrm{u}}(\tau(\kappa))$ zur Beschreibung der gegebenen Beschränkungen. Die im Entwurf zu berücksichtigenden Beschränkungen werden demnach durch den Übergang zum Vektor $\kappa$ nicht verkompliziert.

Naheliegende Möglichkeiten für die Wahl der Transformationsvorschrift sind die Normierung der beschränkten Parameter $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$ auf das Intervall $[-1,1]$ mittels

$$\theta_i = \gamma_i + \alpha_i \cdot \kappa_i, \quad \alpha_i = \left(\overline{\theta}_i - \underline{\theta}_i\right)/2 \quad \text{und} \quad \gamma_i = \left(\overline{\theta}_i + \underline{\theta}_i\right)/2 \tag{2.24}$$

oder $\alpha_i = 1$ und der Wahl von $\gamma_i$ derart, dass die Matrix $\hat{S}(\tau(\kappa))$ für $\kappa = 0$ definiert ist. Die Menge der für den Vektor $\kappa$ zulässigen Werte ergibt sich mit (2.22) zu

$$\mathcal{P}_\kappa = \left\{\kappa \in \mathbb{R}^q : \ \eta_{\mathrm{u}}(\tau(\kappa)) \leq 0, \ \eta_{\mathrm{g}}(\tau(\kappa)) = 0, \underline{\theta}_i \leq \tau_i(\kappa_i) \leq \overline{\theta}_i, i \in \mathcal{I}_{\mathrm{b}}\right\} \tag{2.25}$$

und im Speziellen für die in (2.24) gegebene Festlegung zu

$$\mathcal{P}_\kappa = \left\{\kappa \in \mathbb{R}^q : \ \eta_{\mathrm{u}}(\tau(\kappa)) \leq 0, \ \eta_{\mathrm{g}}(\tau(\kappa)) = 0, |\kappa_i| \leq 1, i \in \mathcal{I}_{\mathrm{b}}\right\}.$$

Eine LFR der Matrix $\hat{S}(\theta)$ in (2.23) lässt sich somit in der Form

$$\hat{S}(\tau(\kappa)) = S_{11} + S_{12}K(I - S_{22}K)^{-1}S_{21} = \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(S,K)$$

mit

$$S := \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p+r)\times(n+m+r)}$$

und $K := \operatorname{diag}(\kappa_1 I_{r_1}, \ldots, \kappa_q I_{r_q})$ angeben. Hierbei gibt $r_i$ wiederum die Anzahl der Wiederholungen des $i$-ten Elements des Vektors $\kappa$ auf der Diagonalen der Matrix $K$ an und $r = \sum_{i=1}^{q} r_i$ entspricht der Ordnung der LFR. Es gilt

$$S_{11} = \begin{bmatrix} \hat{A}(\gamma) & \hat{B}(\gamma) \\ \hat{C}(\gamma) & \hat{D}(\gamma) \end{bmatrix},$$

mit $\gamma := [\ \gamma_1 \ \ \ldots \ \ \gamma_q\ ]^{\mathrm{T}}$.

Mit den Definitionen $A := \hat{A}(\gamma)$, $B_1 := \hat{B}(\gamma)$, $C_1 := \hat{C}(\gamma)$, $D_{11} := \hat{D}(\gamma)$,

$$S_{12} =: \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}, \quad B_2 \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad D_{12} \in \mathbb{R}^{p\times r},$$
$$S_{21} =: \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}, \quad C_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}, \quad D_{21} \in \mathbb{R}^{r\times m},$$

und $D_{22} := S_{22}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(S,K) &= \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} K(I - D_{22}K)^{-1} \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}C_2 & B_1 + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21} \\ C_1 + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}C_2 & D_{11} + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Einsetzen in (2.23) liefert

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}C_2 & B_1 + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21} \\ C_1 + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}C_2 & D_{11} + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

Wie ein Vergleich mit (2.3) beziehungsweise (2.4) zeigt, ist somit eine Darstellung der Form (2.1) mit der statischen Rückführung $K$ gefunden. Die Rückführung weist eine Diagonalgestalt auf und es gilt

$$K \in \mathcal{K} = \left\{ \operatorname{diag}(\kappa_1 I_{r_1}, \ldots, \kappa_q I_{r_q}) : \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \right\}. \tag{2.27}$$

Die Ordnung der LFR bestimmt die Anzahl der Ein- und Ausgänge $r$ der Rückführung beziehungsweise die Dimensionen der Matrizen $B_2$, $C_2$, $D_{12}$, $D_{21}$ und $D_{22}$. Sicherlich ist eine möglichst geringe Ordnung der LFR wünschenswert. Hinsichtlich der in den nächsten Kapiteln beschriebenen Syntheseverfahren ist der Einfluss der Größe der Blöcke $I_{r_1}, \ldots, I_{r_q}$ auf den Rechenaufwand jedoch eher unproblematisch.

Im Allgemeinen ist die Darstellung (2.21) geeignet, einen geschlossenen Regelkreis darzustellen, also sowohl die beeinflussbaren Systemparameter als auch die freien Parameter der Rückführung in dem Vektor $\theta$ zusammenzufassen. Es bietet sich jedoch hinsichtlich der Entwurfsmethodik sowie auch der algorithmischen Implementierung der in dieser Arbeit beschriebenen Syntheseverfahren meist an, Regler, die bereits in der Form statischer Zustands- und Ausgangsrückführungen vorliegen, in dieser Form zu belassen. Die den Regler und die Parameterabhängigkeiten des Systems beschreibenden statischen Rückführungen können in diesem Fall einfach zusammengefasst werden.

Um dies zu illustrieren wird (2.21) betrachtet, wobei die Ein- und Ausgänge des Systems gemäß

$$u = \begin{bmatrix} u_\mathrm{e}^\mathrm{T} & u_\mathrm{c}^\mathrm{T} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{m_\mathrm{e}+m_\mathrm{c}} \quad \text{beziehungsweise} \quad y = \begin{bmatrix} y_\mathrm{e}^\mathrm{T} & y_\mathrm{c}^\mathrm{T} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{p_\mathrm{e}+p_\mathrm{c}}$$

unterteilt werden. Hierbei bezeichnen $u_\mathrm{e}$ und $y_\mathrm{e}$ externe Ein- und Ausgänge und $u_\mathrm{c}$ und $y_\mathrm{c}$ solche, die in Verbindung mit einer statischen Rückführung $u_\mathrm{c} = K_\mathrm{c} y_\mathrm{c}$ verwendet werden. Mit der in diesem Abschnitt diskutierten Umformung der parameterabhängigen Strecke ergibt sich ein System mit $r$ zusätzlichen Ein- und Ausgängen $u_\mathrm{p}$ und $y_\mathrm{p}$, welches in der in (2.1) gegebenen Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

dargestellt werden kann, wobei $u_1 = u_\mathrm{e}$, $y_1 = y_\mathrm{e}$,

$$u_2 = \begin{bmatrix} u_\mathrm{c}^\mathrm{T} & u_\mathrm{p}^\mathrm{T} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{m_\mathrm{c}+r} \quad \text{sowie} \quad y_2 = \begin{bmatrix} y_\mathrm{c}^\mathrm{T} & y_\mathrm{p}^\mathrm{T} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{p_\mathrm{c}+r}$$

gilt. Die zugehörige statische Rückführung weist eine Blockdiagonalgestalt

$$K = \begin{bmatrix} K_\mathrm{c} & 0 \\ 0 & K_\mathrm{p} \end{bmatrix}$$

auf, mit den Matrizen $K_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{p_\mathrm{c} \times m_\mathrm{c}}$ sowie $K_\mathrm{p}$, einer Diagonalmatrix der in (2.27) gezeigten Gestalt. Ebenso wie die Menge zulässiger Einträge auf der Diagonalen der Matrix $K_\mathrm{p}$ zusätzlich eingeschränkt werden kann, vgl. (2.25), können derartige Nebenbedingungen für die Einträge der Matrix $K_\mathrm{c}$ berücksichtigt werden. Entsprechende Darstellungen für Systeme mit dynamischen Rückführungen ergeben sich nach geeigneter Anpassung des Systems, siehe Abschnitt 2.1.3.

Es kann jedoch auch sinnvoll sein, insbesondere wenn dynamische Regler mit komplexeren Strukturbeschränkungen betrachtet werden, eine LFT-Darstellung der in diesem Abschnitt beschriebenen Gestalt zu nutzen. Als Beispiel für die sich ergebenden, unterschiedlichen Strukturen, kann der PI-Regler aus dem in Abschnitt 2.1.4 gegebenen Anwendungsbeispiel herangezogen werden.

**Beispiel 2.3.** *Zwei mögliche Darstellungen für den PI-Regler aus* (2.13) *sind durch*

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}(s) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & k_\mathrm{I} \\ \hline 1 & k_\mathrm{P} \end{array}\right] \\
&= \mathcal{F}_\mathrm{l}\left(\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \begin{bmatrix} 0 & k_\mathrm{I} \\ 1 & k_\mathrm{P} \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathcal{F}_\mathrm{l}\left(\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \begin{bmatrix} k_\mathrm{I} & 0 \\ 0 & k_\mathrm{P} \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

*gegeben. Erstere Darstellung entspricht der in Abschnitt 2.1.4 verwendeten Beschreibungsform, Letztere lässt sich einfach ablesen oder formal mittels der in Beispiel 2.1 beschriebenen Vorgehensweise bestimmen.*

Bei Verknüpfungen mehrerer parameterabhängiger Systeme bietet es sich unter Umständen an, LFT-Darstellungen von Teilsystemen zu erzeugen und die resultierenden Systemdarstellungen anschließend geeignet zusammenzufassen. Ein Beispiel hierfür ist im folgenden Abschnitt gegeben.

### 2.2.3 Anwendungsbeispiel – Mehrmassenschwinger mit gedämpften Tilgern

Zur Illustration des Vorgehens zur äquivalenten Beschreibung parameterabhängiger Systeme mittels statischer Rückführungen wird die Formulierung eines Tilgerentwurfsproblems für einen Fünfmassenschwinger mit zwei Tilgern nach Bild 2.6 betrachtet. Dieses System wird zudem als Anwendungsbeispiel des in Kapitel 5 beschriebenen Verfahrens genutzt.

Der Begriff Tilger wird an dieser Stelle synonym für ein schwingungsfähiges Zusatzsystem zur Reduzierung von Schwingungen einer Struktur verwendet. Bei einer Kopplung von Zusatzmassen mit Feder- und Dämpferelementen wird in diesem Zusammenhang auch von gedämpften Tilgern gesprochen [90].

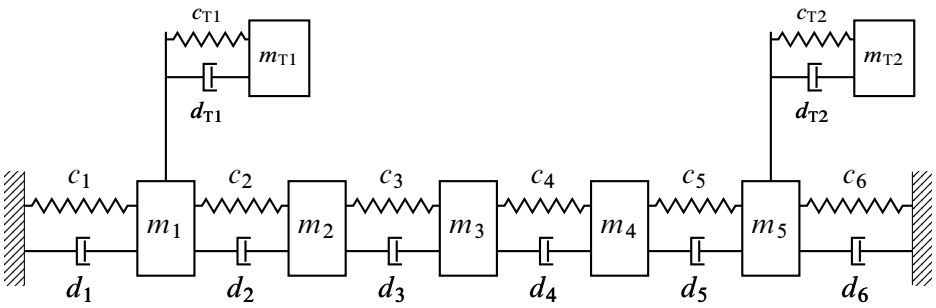



**Bild 2.6:** Mehrmassenschwinger mit gedämpften Tilgern

Das Ziel der Modellbildung ist die Formulierung des Entwurfsproblems für die Massen $m_{T1}$ und $m_{T2}$, Federsteifigkeiten $c_{T1}$ und $c_{T2}$, sowie Dämpferkonstanten $d_{T1}$ und $d_{T2}$ der beiden Tilger in der in Bild 2.1 gezeigten Rückführungsstruktur. Im Folgenden soll ein anschaulicher, modularer Ansatz für die Modellbildung diskutiert werden, der die Flexibilität der in diesem Kapitel beschriebenen Vorgehensweise illustriert. Wie in den vorangegangenen Abschnitten erwähnt, kann die gewünschte Darstellung mittels gängiger Software auch automatisiert erzeugt werden.

Es werden zunächst Modelle des Fünfmassenschwingers und der beiden Tilger erstellt und diese geeignet verknüpft. Die Bewegungsgleichungen des Fünfmassenschwingers lassen sich als System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Form

$$\hat{M}\ddot{z} + \hat{D}\dot{z} + \hat{S}z = f$$

darstellen, wobei die Auslenkungen der einzelnen Massen zum Vektor $z := [\ z_1 \ \cdots \ z_5\ ]^{\mathrm{T}}$ und an diesen Massen angreifende, externe Kräfte zum Vektor $f := [\ f_1 \ \cdots \ f_5\ ]^{\mathrm{T}}$ zusammengefasst werden. Die Matrizen

$$\hat{M} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5),$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & -d_4 & 0 \\ 0 & 0 & -d_4 & d_4 + d_5 & -d_5 \\ 0 & 0 & 0 & -d_5 & d_5 + d_6 \end{bmatrix}$$

und

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & -c_5 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5 + c_6 \end{bmatrix}$$

der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsterme ergeben sich aus Bild 2.6. Wird als Zustandsvektor $x_\mathrm{S} := [\ z^\mathrm{T} \quad \dot{z}^\mathrm{T}\ ]^\mathrm{T}$ gewählt, kann für dieses System eine Darstellung der Form

$$G_\mathrm{S}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_\mathrm{S} & B_{\mathrm{S}1} & B_{\mathrm{S}2} \\ \hline C_{\mathrm{S}1} & 0 & 0 \\ C_{\mathrm{S}2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mit der Systemmatrix

$$A_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\hat{M}^{-1}\hat{S} & -\hat{M}^{-1}\hat{D} \end{bmatrix}$$

angegeben werden. Um die Tilger mit dem System zu verknüpfen, werden die Matrizen $B_{\mathrm{S}2}$ und $C_{\mathrm{S}2}$ so gewählt, dass die Eingänge $u_{\mathrm{S}2} = [\ f_1 \quad f_5\ ]^\mathrm{T}$ auf die erste und fünfte Masse wirkenden Kräften und die Ausgänge $y_{\mathrm{S}2} = [\ \dot{z}_1 \quad \dot{z}_5\ ]^\mathrm{T}$ den Geschwindigkeiten dieser Massen entsprechen. Die Matrizen $B_{\mathrm{S}1}$ und $C_{\mathrm{S}1}$ der externen Ein- und Ausgänge $u_{\mathrm{S}1}$ und $y_{\mathrm{S}1}$ können, sofern benötigt, geeignet gewählt werden.

Zur Beschreibung des $i$-ten Tilgers, beziehungsweise einer Tilgermasse, die über ein Feder- und ein Dämpferelement mit der $j$-ten Masse des Mehrmassenschwingers verbunden ist, wird wiederum eine geeignete Zustandsraumdarstellung gesucht. Der Eingang dieses Systems ist die Geschwindigkeit der $j$-ten Masse des Mehrmassenschwingers, der Ausgang die Summe der über das Feder- und Dämpferelement wirkenden Kräfte. Da diese Kräfte von der relativen Position und Geschwindigkeit der Struktur sowie der Tilgermasse abhängen, wird als Zustandsvektor des Tilgers $x_{\mathrm{T}i} = [\ z_{\mathrm{T}i} - z_j \quad \dot{z}_{\mathrm{T}i}\ ]^\mathrm{T}$ gewählt und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\mathrm{T}i} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_{\mathrm{T}i}}{m_{\mathrm{T}i}} & -\frac{d_{\mathrm{T}i}}{m_{\mathrm{T}i}} \end{bmatrix} x_{\mathrm{T}i} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{d_{\mathrm{T}i}}{m_{\mathrm{T}i}} \end{bmatrix} u_{\mathrm{T}i} \\ y_{\mathrm{T}i} &= [\ c_{\mathrm{T}i} \quad d_{\mathrm{T}i}\ ]\, x_{\mathrm{T}i} - d_{\mathrm{T}i}\, u_{\mathrm{T}i} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\hat{G}_{\mathrm{T}i}(s) := \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{c_{\mathrm{T}i}}{m_{\mathrm{T}i}} & -\frac{d_{\mathrm{T}i}}{m_{\mathrm{T}i}} & \frac{d_{\mathrm{T}i}}{m_{\mathrm{T}i}} \\ \hline c_{\mathrm{T}i} & d_{\mathrm{T}i} & -d_{\mathrm{T}i} \end{array}\right]. \tag{2.28}$$

Die Elemente der Matrizen der resultierenden Zustandsraumbeschreibung sind rationale Funktionen der Parameter $m_{\mathrm{T}i}$, $c_{\mathrm{T}i}$ und $d_{\mathrm{T}i}$. Wie im vorangegangenen Abschnitt dargelegt, lässt sich für dieses System eine äquivalente Beschreibung in Form einer LFT angeben. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Parameter des Tilgers Werte in den Bereichen $m_{\mathrm{T}i} \in [\underline{m}_{\mathrm{T}i}, \overline{m}_{\mathrm{T}i}]$, $c_{\mathrm{T}i} \in [\underline{c}_{\mathrm{T}i}, \overline{c}_{\mathrm{T}i}]$ und $d_{\mathrm{T}i} \in [\underline{d}_{\mathrm{T}i}, \overline{d}_{\mathrm{T}i}]$ annehmen und Normierungen

$$m_{\mathrm{T}i} = \frac{\overline{m}_{\mathrm{T}i} + \underline{m}_{\mathrm{T}i}}{2} + \frac{\overline{m}_{\mathrm{T}i} - \underline{m}_{\mathrm{T}i}}{2}\,\kappa_{\mathrm{m}i} =: m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} + m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}\,\kappa_{\mathrm{m}i}, \tag{2.29}$$

$$c_{\mathrm{T}i} = \frac{\overline{c}_{\mathrm{T}i} + \underline{c}_{\mathrm{T}i}}{2} + \frac{\overline{c}_{\mathrm{T}i} - \underline{c}_{\mathrm{T}i}}{2}\,\kappa_{\mathrm{c}i} =: c_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} + c_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}\,\kappa_{\mathrm{c}i} \tag{2.30}$$

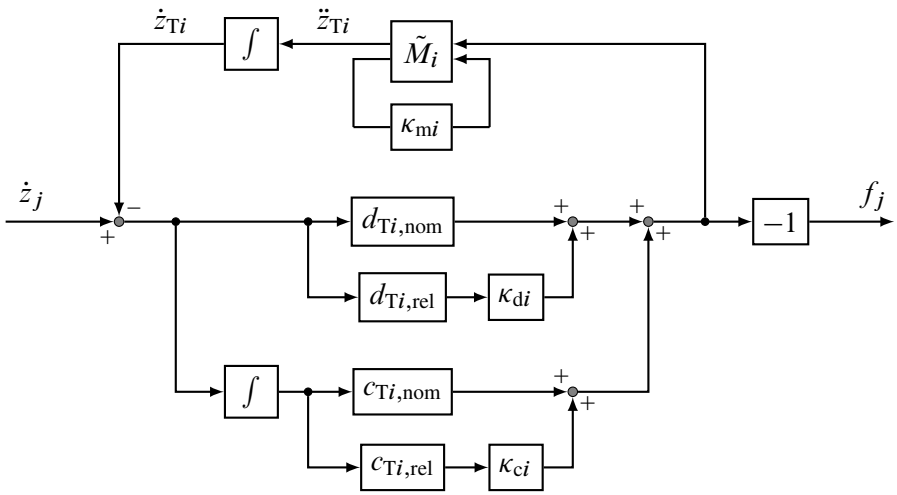



**Bild 2.7:** Blockschaltbild eines einzelnen Tilgers

und

$$d_{\mathrm{T}i} = \frac{\overline{d}_{\mathrm{T}i} + \underline{d}_{\mathrm{T}i}}{2} + \frac{\overline{d}_{\mathrm{T}i} - \underline{d}_{\mathrm{T}i}}{2}\,\kappa_{\mathrm{d}i} =: d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} + d_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}\,\kappa_{\mathrm{d}i}, \tag{2.31}$$

mit $\kappa_{\mathrm{m}i}, \kappa_{\mathrm{c}i}, \kappa_{\mathrm{d}i} \in [-1,1]$ gemäß (2.24) verwendet werden. Für den Kehrwert der Tilgermasse wird die aus Beispiel 2.2 bekannte Darstellung

$$\frac{1}{m_{\mathrm{T}i}} = \frac{1}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} + m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}\kappa_{\mathrm{m}i}} = \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(\tilde{M}_i, \kappa_{\mathrm{m}i})$$

mit

$$\tilde{M}_i := \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} & -\frac{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}}{m^2_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} \\ 1 & -\frac{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} \end{bmatrix}$$

genutzt.

Mit den derart normierten Parametern ergibt sich für einen einzelnen Tilger das in Bild 2.7 dargestellte Blockschaltbild. Werden in diesem Blockschaltbild die Verbindungen vor und hinter den Blöcken mit den Elementen $\kappa_{\mathrm{c}i}$, $\kappa_{\mathrm{d}i}$ und $\kappa_{\mathrm{m}i}$ aufgetrennt und diese über neu definierte Ein- und Ausgänge mit dem System verbunden, ergibt sich die Darstellung

$$\hat{G}_{\mathrm{T}i}(s) = \mathcal{F}_l(G_{\mathrm{T}i}(s), K_{\mathrm{T}i}) \tag{2.32}$$

mit

$$G_{\mathrm{T}i}(s) = \left[\begin{array}{cc|c:ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} & -\frac{d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} & \frac{d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} & \frac{1}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} & \frac{1}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} & -\frac{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}}{m^2_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} \\ \hline c_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} & d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} & d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline -c_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}} & d_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} & -d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} & d_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} & 1 & 1 & -\frac{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}}{m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}}} \end{array}\right]$$

$$=: \left[\begin{array}{c|cc} A_{\mathrm{T}i} & B_{\mathrm{T}i,1} & B_{\mathrm{T}i,2} \\ \hline C_{\mathrm{T}i,1} & D_{\mathrm{T}i,11} & D_{\mathrm{T}i,12} \\ C_{\mathrm{T}i,2} & D_{\mathrm{T}i,21} & D_{\mathrm{T}i,22} \end{array}\right]$$

und $K_{\mathrm{T}i} := \mathrm{diag}(\kappa_{\mathrm{c}i}, \kappa_{\mathrm{d}i}, \kappa_{\mathrm{m}i})$. Diese Realisierung mittels einer LFT weist die kleinstmögliche Ordnung auf. Die durch (2.32) gegebene Verknüpfung ist wohldefiniert, sofern $I - D_{\mathrm{T}i,22}K_{\mathrm{T}i}$ regulär ist. Die Struktur der Matrix $D_{\mathrm{T}i,22}$ berücksichtigend, ist dies äquivalent zu der Forderung

$$m_{\mathrm{T}i} = m_{\mathrm{T}i,\mathrm{nom}} + m_{\mathrm{T}i,\mathrm{rel}}\,\kappa_{\mathrm{m}i} \neq 0$$

und gleichbedeutend mit der Existenz der das System (2.28) definierenden System- und Eingangsmatrizen.

Abschließend werden die Beschreibungen der beiden einzelnen Tilger zusammengefasst, deren Ein- und Ausgänge geeignet umsortiert und das resultierende System mit dem Mehrmassenschwinger verknüpft, so dass sich die gesuchte Darstellung eines Systems mit einer strukturbeschränkten, statischen Ausgangsrückführung ergibt. Es gilt

$$G_{\mathrm{cl}}(s) := \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(\mathcal{S}(G_{\mathrm{S}}(s), G_{\mathrm{T}}(s)), K)$$

mit

$$G_{\mathrm{T}}(s) := \left[\begin{array}{cc|cc:cc} A_{\mathrm{T1}} & 0 & B_{\mathrm{T1},1} & 0 & B_{\mathrm{T1},2} & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{T2}} & 0 & B_{\mathrm{T2},1} & 0 & B_{\mathrm{T2},2} \\ \hline C_{\mathrm{T1},1} & 0 & D_{\mathrm{T1},11} & 0 & D_{\mathrm{T1},12} & 0 \\ 0 & C_{\mathrm{T2},1} & 0 & D_{\mathrm{T2},11} & 0 & D_{\mathrm{T2},12} \\ \hdashline C_{\mathrm{T1},2} & 0 & D_{\mathrm{T1},21} & 0 & D_{\mathrm{T1},22} & 0 \\ 0 & C_{\mathrm{T2},2} & 0 & D_{\mathrm{T2},21} & 0 & D_{\mathrm{T2},22} \end{array}\right]$$

und $K = \mathrm{diag}(K_{\mathrm{T1}}, K_{\mathrm{T2}})$. Die Strukturbeschränkungen der Rückführung sind in diesem Fall durch die geforderte Diagonalgestalt und die Beschränkung der für die Parameter der Tilger zulässigen Wertebereiche gegeben. Für die normierten Parameter bedeutet letzteres eine Einschränkung auf das Intervall $[-1,1]$. Weitere Entwurfsforderungen, wie beispielsweise eine obere Schranke für die Summe der beiden Zusatzmassen, lassen sich in einfacher Weise durch Gleichungs- beziehungsweise Ungleichungsbedingungen bezüglich der Parameter formulieren.

## 2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden einige wohlbekannte Resultate hinsichtlich der Verknüpfung linearer dynamischer Systeme sowie äquivalenter Darstellungen parameterabhängiger Systeme angegeben. Insbesondere die Diskussion der LFT-Darstellungen zeigt, wie eine Vielzahl relevanter Problemstellungen des integrierten Regler- und Strukturentwurfs in Entwurfsprobleme der zu Beginn dieses Kapitels gegebenen Form überführt werden können. Die einfache Gestalt der resultierenden Systembeschreibungen ist in Bezug auf die Diskussion und Implementierung der in den folgenden Kapiteln beschriebenen Verfahren vorteilhaft.

# 3 Entwurf von Zustandsrückführungen

Ausgangspunkt für das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren zur Vorgabe von Eigenwerten mittels einer Zustandsrückführung ist ein in Zustandsraumdarstellung gegebenes System

$$\dot{x} = \hat{A}(\kappa)x + \hat{B}(\kappa)u_{\mathrm{c}} \tag{3.1}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ sowie $u_{\mathrm{c}} \in \mathbb{R}^{m_{\mathrm{c}}}$ und einer statischen Rückführung

$$u_{\mathrm{c}} = K_{\mathrm{c}}x. \tag{3.2}$$

Die reellen Matrizen $\hat{A}(\kappa)$ und $\hat{B}(\kappa)$ seien von passender Dimension und ihre Einträge sind rationale Funktionen von $q$ Entwurfsparametern, die im Vektor $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa \subset \mathbb{R}^q$ zusammengefasst sind. Es wird an dieser Stelle vereinbart, dass die Menge $\mathcal{P}_\kappa$ durch voneinander verschiedene untere und obere Schranken bezüglich der Einträge des Vektors $\kappa$ gegeben ist. Ferner seien die Matrizen $\hat{A}(\kappa)$ und $\hat{B}(\kappa)$ für alle $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$ definiert und es gilt $0 \in \mathcal{P}_\kappa$. Letzteres lässt sich, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, durch eine geeignete Transformation erreichen.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst die betrachtete Problemstellung konkretisiert, wobei die in Kapitel 2 beschriebene Darstellung des parameterabhängigen Systems mittels einer LFT verwendet wird. Darauf aufbauend werden in Abschnitt 3.2 die Entwurfsgleichungen für eine Zustandsrückführung zur Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises angegeben. Es resultiert eine Parametrierung der Rückführmatrix mit dem Vektor $\kappa$ der Freiheitsgrade im Systementwurf sowie, je nach Dimension des Vektors $u_{\mathrm{c}}$, weiterer Freiheitsgrade der Zustandsrückführung. Da sich die gewünschte Eigenwertkonfiguration unabhängig von der Wahl dieser Parameter einstellt, können diese genutzt werden, um weitere Entwurfsziele zu erfüllen. Eine Möglichkeit, diese verbleibenden Freiheitsgrade zu nutzen, wird in Abschnitt 3.3 beschrieben. Es wird ein Parameteroptimierungsproblem mit dem Ziel formuliert, die Robustheit des geschlossenen Regelkreises sowie die Stellgrößennutzung zu verbessern. In Abschnitt 3.4 sind Beispiele für die Anwendung des Verfahrens gegeben.

## 3.1 Problemstellung

Das Spektrum $\sigma(\hat{A}(\kappa) + \hat{B}(\kappa)K_{\mathrm{c}})$ bezeichnet die Menge der Eigenwerte der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{x} = (\hat{A}(\kappa) + \hat{B}(\kappa)K_{\mathrm{c}})x,$$

wobei diese, gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit, mehrfach als Nullstellen des charakteristischen Polynoms auftreten können. Das Ziel eines zunächst allgemein formulierten Entwurfs

zur Polvorgabe ist es, die Matrix der Zustandsrückführung $K_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{m_\mathrm{c} \times n}$ sowie den Vektor $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$ derart zu bestimmen, dass die Eigenwerte mit einer vorgegeben Menge $\Lambda := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho\}$ von $\rho$ reellen oder komplexen Zahlen und den assoziierten algebraischen Vielfachheiten $\eta_i$, mit $\eta_1 + \cdots + \eta_\rho = n$, übereinstimmen. Eine notwendige Bedingung, um das gewünschte Spektrum mit einer reellen Matrix $K_\mathrm{c}$ zuweisen zu können, ist bekanntermaßen, dass sofern die Menge $\Lambda$ komplexe Zahlen enthält, die entsprechenden konjugiert komplexen Zahlen ebenfalls Elemente von $\Lambda$ sind und die assoziierten Vielfachheiten übereinstimmen. Hiervon wird im Folgenden stets ausgegangen. Eine solche Menge komplexer Zahlen wird in diesem Kontext auch als symmetrisch bezeichnet [126].

Bevor die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Aufgabenstellung konkretisiert wird, erfolgt der Übergang zu einer äquivalenten Darstellung des in (3.1) gegebenen Systems mittels der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Methoden. Wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, existieren Matrizen

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+r \times n+m_\mathrm{c}+r}$$

und $K_\mathrm{p} = \mathrm{diag}(\kappa_1 I_{r_1}, \ldots, \kappa_q I_{r_q})$ mit $\kappa = [\ \kappa_1 \ \cdots \ \kappa_q\ ]^\mathrm{T} \in \mathcal{P}_\kappa \subset \mathbb{R}^q$, so dass

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\kappa) & \hat{B}(\kappa) \end{bmatrix} = \mathcal{F}_\mathrm{l}(S, K_\mathrm{p}) = S_{11} + S_{12} K_\mathrm{p} (I - S_{22} K_\mathrm{p})^{-1} S_{21} \tag{3.3}$$

gilt. Hierbei bezeichnet $r = \sum_{i=1}^{q} r_i$ wiederum die Ordnung der LFR. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} S_{11} &=: \begin{bmatrix} A & B_\mathrm{c} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{n \times m_\mathrm{c}}, \\ S_{12} &=: B_\mathrm{p} \in \mathbb{R}^{n \times r} \\ S_{21} &=: \begin{bmatrix} C_\mathrm{p} & D_\mathrm{pc} \end{bmatrix}, \quad C_\mathrm{p} \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad D_\mathrm{pc} \in \mathbb{R}^{r \times m_\mathrm{c}} \end{aligned}$$

und

$$S_{22} =: D_\mathrm{pp} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

ist ersichtlich, dass für das System (3.1) mit der Rückführung (3.2) eine Darstellung in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \hline y_\mathrm{c} \\ y_\mathrm{p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \\ \hline I & 0 & 0 \\ C_\mathrm{p} & D_\mathrm{pc} & D_\mathrm{pp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline u_\mathrm{c} \\ u_\mathrm{p} \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

mit

$$u = Ky \tag{3.5}$$

und

$$K := \begin{bmatrix} K_\mathrm{c} & 0 \\ 0 & K_\mathrm{p} \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Die Eingänge $u_\mathrm{c}$ beziehungsweise die Ausgänge $y_\mathrm{c} = x$ korrespondieren zur Zustandsrückführung, während die Ein- und Ausgänge $u_\mathrm{p}$ und $y_\mathrm{p}$ zusammen mit der Matrix $K_\mathrm{p}$ der

Beschreibung des Einflusses der vorgebbaren Systemparameter dienen. Für das System (3.4) mit der Rückführung (3.5) ergibt sich die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{cl}} &= A + BK(I - DK)^{-1}C \\
&= A + \begin{bmatrix} B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\mathrm{c}} & 0 \\ 0 & K_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{\mathrm{pc}}K_{\mathrm{c}} & I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ C_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \\
&= A + \begin{bmatrix} B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\mathrm{c}} & 0 \\ K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})^{-1}D_{\mathrm{pc}}K_{\mathrm{c}} & K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \\
&= A + \begin{bmatrix} B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\mathrm{c}} \\ K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})^{-1}D_{\mathrm{pc}}K_{\mathrm{c}} + K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})^{-1}C_{\mathrm{p}} \end{bmatrix}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Der geschlossene Regelkreis ist genau dann sinnvoll konfiguriert, wenn die Matrix $(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})$ regulär ist, was wiederum gleichbedeutend mit der Wohldefiniertheit der in (3.3) gegebenen LFT ist. Der Ausdruck (3.6) für die Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ ist äquivalent zu der entsprechenden Matrix des parameterabhängigen Systems. Es gilt

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{cl}} &= \left(A + B_{\mathrm{p}}K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})^{-1}C_{\mathrm{p}}\right) + \left(B_{\mathrm{c}} + B_{\mathrm{p}}K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}}K_{\mathrm{p}})^{-1}D_{\mathrm{pc}}\right)K_{\mathrm{c}} \\
&= \hat{A}(\kappa) + \hat{B}(\kappa)K_{\mathrm{c}}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Sind die Matrizen $\hat{A}(\kappa)$ und $\hat{B}(\kappa)$ affine Funktionen der Parameter, ergibt sich eine einfachere Form der Zustandsraumdarstellung (3.4) beziehungsweise der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ aus (3.6). In diesem Fall gilt $S_{22} = D_{\mathrm{pp}} = 0$. Dies kann aus der Betrachtung des Beispiels 2.1 gefolgert werden. Zudem gilt $D_{\mathrm{pc}} = 0$, sofern $\hat{B}$ konstant ist und entsprechend $C_{\mathrm{p}} = 0$, sofern $\hat{A}$ keine Parameterabhängigkeiten aufweist.

Für $\kappa = 0$ beziehungsweise $K_{\mathrm{p}} = 0$ ergibt sich für die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises aus (3.6) beziehungsweise (3.7) die bekannte Darstellung

$$A_{\mathrm{cl}} = A + B_{\mathrm{c}}K_{\mathrm{c}} \qquad (3.8)$$

eines mittels Zustandsrückführung geregelten Systems. Ist das Paar $(A, B_{\mathrm{c}})$ steuerbar, ist es bekanntermaßen möglich, sämtliche Eigenwerte der Matrix $A + B_{\mathrm{c}}K_{\mathrm{c}}$ durch geeignete Wahl der Matrix $K_{\mathrm{c}}$ beliebig vorzugeben [126, 127]. Entsprechendes gilt für (3.7), wenn das Paar $(\hat{A}(\kappa), \hat{B}(\kappa))$ für einen gegebenen Vektor $\kappa$ steuerbar ist.

Werden Matrizen $\hat{A}(\kappa)$ und $\hat{B}(\kappa)$ betrachtet, deren Einträge rationale Funktionen der Parameter sind, lässt sich feststellen [83], dass die mit der Steuerbarkeit des Paares $(\hat{A}(\kappa), \hat{B}(\kappa))$ für ein gegebenes $\kappa$ gleichbedeutende Rangbedingung bezüglich der assoziierten Steuerbarkeitsmatrix entweder für kein $\kappa \in \mathbb{R}^q$ oder aber generisch beziehungsweise für fast jede Wahl dieses Vektors erfüllt ist. Eine kompakte Einführung der in diesem Zusammenhang relevanten Terminologie aus dem Bereich der algebraischen Geometrie, und im Besonderen der Definitionen „generischer“ Eigenschaften beziehungsweise solcher, die für „fast jede“ Wahl der Parameter eines Problems gelten, ist in [126] gegeben. Eine Eigenschaft wird als generisch bezüglich der Wahl eines Vektors von Parametern im $\mathbb{R}^q$ bezeichnet, sofern eine Wahl der Parameter existiert, für welche diese

Eigenschaft gegeben ist, und die Menge der Punkte, für welche die Eigenschaft nicht erfüllt ist, die Menge der gemeinsamen Nullstellen einer endlichen Anzahl von Polynomen in den Parametern ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese Begriffe insbesondere im Zusammenhang mit Eigenschaften verwendet, die gelten, sofern bestimmte Determinanten einer Matrix nicht verschwinden. Beispiele hierfür sind die bereits angesprochenen Rangbedingungen und die Regularität von Matrizen, deren Einträge durch Polynome, oder auch rationale Funktionen, der Parameter gegeben sind. Generische Eigenschaften hinsichtlich der Wahl eines Vektors im $\mathbb{R}^q$ sind auf einer bezüglich der euklidischen Topologie offenen und dichten Teilmenge erfüllt. Das Lebesgue-Maß der Menge der Punkte, für welche die Eigenschaft nicht gilt, ist Null.

Die Steuerbarkeit des Paares $(A, B_\mathrm{c})$ voraussetzend, stellt sich somit nicht die Frage nach der Existenz einer Rückführung zur Zuweisung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, wohl aber, wie diese konkret bestimmt wird und vor allem inwiefern verbleibende Freiheitsgrade genutzt werden können, um über eine reine Vorgabe der Eigenwerte hinausgehende Entwurfsziele zu erfüllen. Für den klassischen Fall eines über eine Zustandsrückführung geregelten Systems, vgl. (3.8), ergeben sich entsprechende Freiheitsgrade stets für $m_\mathrm{c} \geq 2$, sofern also mehr als eine Eingangsgröße vorhanden ist [126, 92]. Für den hier betrachteten Fall des integrierten Systementwurfs stehen zudem weitere $q$ Freiheitsgrade in Form der Elemente des Vektors $\kappa$ zur Verfügung.

Nach diesen einführenden Betrachtungen kann die in den folgenden Abschnitten betrachtete Problemstellung konkretisiert werden. Ausgehend von der Systemdarstellung (3.4) wird angenommen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Paar $(A, B_\mathrm{c})$ ist steuerbar.
- Es gilt $\operatorname{rang}(B_\mathrm{c}) = m_\mathrm{c} \leq n$.

Neben der Steuerbarkeit des Paares $(A, B_\mathrm{c})$ wird somit gefordert, dass die Matrix $B_\mathrm{c}$ keine linear abhängigen Spalten aufweist.

Es sind die Matrix $K_\mathrm{c}$ und der Vektor $\kappa$ derart zu bestimmen, dass die Eigenwerte der in (3.6) beziehungsweise (3.7) gegebenen Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises einer vorgegebenen symmetrischen Menge $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ von $n$ verschiedenen reellen oder komplexen Zahlen entsprechen. Verbleibende Freiheitsgrade werden geeignet gewählt, so dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises möglichst robust beziehungsweise unempfindlich gegenüber Störungen in den gegebenen Matrizen sind und die Matrix $K_\mathrm{c}$ möglichst kleine Verstärkungen aufweist. Die beiden letztgenannten Entwurfsforderungen sind natürlich zu präzisieren. Hierfür sei auf Abschnitt 3.3.1 verweisen.

Bezüglich der Vorgabe der Eigenwerte unterscheidet sich die in dieser Form umrissene Aufgabenstellung von dem zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten allgemeinen Polvorgabeproblem, indem anstatt $n$ beliebiger, $n$ voneinander verschiedene reelle oder konjugiert komplexe Zahlen vorgegeben werden. Dies vereinfacht die Diskussion des Verfahrens und stellt auch im Hinblick auf die praktische Relevanz kaum eine Einschränkung dar. Es ist jedoch anzumerken, dass auch

bestimmte Probleme mit mehrfachen Eigenwerten mittels des beschriebenen Verfahrens gelöst werden können. Dies wird im Anschluss an die Herleitung der Entwurfsgleichungen kurz diskutiert.

## 3.2 Entwurfsgleichungen und Freiheitsgrade

Das im Folgenden vorgestellte Vorgehen orientiert sich an bekannten Methoden zur Polvorgabe mittels Zustands- beziehungsweise Ausgangsrückführungen, siehe beispielsweise [92], [106] oder [72]. Der Unterschied besteht im Vorhandensein der Matrix $K_\mathrm{p}$ und der sich dadurch ergebenden Struktur der Rückführung, welche den Einfluss der zusätzlich zur Zustandsrückführung für den Systementwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade beschreibt.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Systemmatrix des geschlossenen Regelkeises

$$A_\mathrm{cl} = A + BK(I - DK)^{-1}C \tag{3.9}$$

gemäß (3.6). Die ursprüngliche Herleitung der Entwurfsgleichungen, beschrieben in [135], differenziert bezüglich der Gestalt der Matrix $A_\mathrm{cl}$ zwei Fälle. Für

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_\mathrm{pc} & D_\mathrm{pp} \end{bmatrix} = 0$$

ergibt sich eine affine Abhängigkeit dieser Matrix bezüglich der Rückführung $K$. Bedingt durch die Blockdiagonalgestalt von $K = \mathrm{diag}(K_\mathrm{c}, K_\mathrm{p})$ gilt in diesem Fall

$$A_\mathrm{cl} = A + B_\mathrm{c}K_\mathrm{c} + B_\mathrm{p}K_\mathrm{p}C_\mathrm{p}.$$

Im Hinblick auf das Systemdarstellung aus (3.1) bedeutet dies, wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, dass lediglich die Matrix $\hat{A}(\theta)$ affine Abhängigkeiten von den Parametern aufweist, während die Eingangsmatrix konstant ist. Für den allgemeinen Fall mit $D \neq 0$, wird das System in eine Deskriptordarstellung überführt, die wiederum keinen Durchgriffsterm aufweist, siehe beispielsweise [89]. Das Vorgehen zur Vorgabe der $n$ Eigenwerte des Systems ohne Durchgriffsterm lässt sich ohne größere Anpassungen auf das Entwurfsproblem der Vorgabe der $n$ endlichen Eigenwerte des Systems in Deskriptorform übertragen. Im Folgenden wird abweichend von dieser Vorgehensweise die Darstellung (3.9) mit Durchgriff verwendet. Zwar wird die Herleitung der Entwurfsgleichungen hierdurch etwas aufwändiger, es kann jedoch auf die Einführung und Diskussion von Resultaten für Deskriptorsysteme verzichtet werden.

Die $n$ Elemente der Menge $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ bilden das Spektrum $\sigma(A_\mathrm{cl})$ der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises, sofern Vektoren $v_i \neq 0$ existieren, so dass mit $\lambda_i$ und $v_i$ Lösungen des Eigenwertproblems

$$A_\mathrm{cl}v_i = (A + BK(I - DK)^{-1}C)v_i = \lambda_i v_i$$

gegeben sind beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ K(I - DK)^{-1} C v_i \end{bmatrix} = 0$$

für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Unter Berücksichtigung der Struktur der Matrix $K$ können diese Gleichungen gemäß (3.6) auch in der Form

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ K_\mathrm{c} v_i \\ K_\mathrm{p}(I - D_\mathrm{pp} K_\mathrm{p})^{-1}(D_\mathrm{pc} K_\mathrm{c} + C_\mathrm{p}) v_i \end{bmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

geschrieben werden. Aus obiger Darstellung ist ersichtlich, dass jeweils

$$\begin{bmatrix} v_i \\ K_\mathrm{c} v_i \\ K_\mathrm{p}(I - D_\mathrm{pp} K_\mathrm{p})^{-1}(D_\mathrm{pc} K_\mathrm{c} + C_\mathrm{p}) v_i \end{bmatrix} \in \ker\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \end{bmatrix}\right) \tag{3.11}$$

gelten muss, um diese Beziehungen zu erfüllen. Im Folgenden werden aus diesem Grund zunächst spezielle Basen der entsprechenden Nullräume gewählt.

Für das, gemäß Voraussetzung, steuerbare Paar $(A, B_\mathrm{c})$ gilt nach dem Popov-Belevitch-Hautus Kriterium

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_\mathrm{c} \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

siehe beispielsweise [40], und entsprechend

$$\dim\left(\ker\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \end{bmatrix}\right)\right) = m_\mathrm{c} + r \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Es ist somit möglich, Matrizen $N_{\mathrm{c},i} \in \mathbb{C}^{n \times m_\mathrm{c}}$, $N_{\mathrm{p},i} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $M_{\mathrm{c},i} \in \mathbb{C}^{m_\mathrm{c} \times m_\mathrm{c}}$, $M_{\mathrm{p},i} \in \mathbb{C}^{m_\mathrm{c} \times r}$ und $R_i \in \mathbb{C}^{r \times r}$ zu bestimmen, die

$$\operatorname{bild}\left(\begin{bmatrix} N_{\mathrm{c},i} \\ M_{\mathrm{c},i} \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B_\mathrm{c} \end{bmatrix}\right) \tag{3.12}$$

und

$$\operatorname{bild}\left(\begin{bmatrix} N_{\mathrm{c},i} & N_{\mathrm{p},i} \\ M_{\mathrm{c},i} & M_{\mathrm{p},i} \\ 0 & R_i \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \end{bmatrix}\right) \tag{3.13}$$

für $i = 1, \ldots, n$ erfüllen. Offensichtlich können für konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_j^*$ die Matrizen so gewählt werden, dass

$$\begin{bmatrix} N_{\mathrm{c},i} & N_{\mathrm{p},i} \\ M_{\mathrm{c},i} & M_{\mathrm{p},i} \\ 0 & R_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\mathrm{c},j}^* & N_{\mathrm{p},j}^* \\ M_{\mathrm{c},j}^* & M_{\mathrm{p},j}^* \\ 0 & R_j^* \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

gilt, wovon im Folgenden stets ausgegangen wird.

Die spezielle Wahl der Nullraumbasen in (3.13) vereinfacht, wie sich im Weiteren zeigen wird, die Diskussion des Verfahrens und erlaubt es in einfacher Weise, Zusammenhänge zu dem von Moore [92] beschriebenen Verfahren herzustellen, welches zu (3.12) äquivalente Beziehungen verwendet. Der Übersichtlichkeit halber werden mögliche Vorgehensweisen zur Bestimmung dieser speziellen Nullraumbasen und sich für die entsprechenden Matrizen ergebende Eigenschaften in Anhang B.1 vorgestellt. Im Besonderen ist festzustellen, dass die Matrizen $R_i$ stets regulär sind und die Matrizen $N_{\mathrm{c,i}}$ unter der Voraussetzung $\operatorname{rang}(B_{\mathrm{c}}) = m_{\mathrm{c}} \leq n$ vollen Spaltenrang aufweisen.

Um (3.10) für ein gegebenes $i$ zu erfüllen muss, unter Berücksichtigung von (3.11) und (3.13), ein Vektor $[\ f_i^{\mathrm{T}} \quad g_i^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{m_{\mathrm{c}}+r}$ existieren, so dass die Gleichungen

$$v_i = N_{\mathrm{c},i} f_i + N_{\mathrm{p},i} g_i, \tag{3.15a}$$

$$h_i := K_{\mathrm{c}} v_i = M_{\mathrm{c},i} f_i + M_{\mathrm{p},i} g_i \tag{3.15b}$$

$$K_{\mathrm{p}}(I - D_{\mathrm{pp}} K_{\mathrm{p}})^{-1}(D_{\mathrm{pc}} K_{\mathrm{c}} + C_{\mathrm{p}}) v_i = R_i g_i \tag{3.15c}$$

mit $v_i \neq 0$ erfüllt sind. Der Vektor $h_i = K_{\mathrm{c}} v_i$ wird hierbei in Anlehnung an [89, 88] als Steuervektor zum $i$-ten Eigenwert des geregelten Systems bezeichnet. Diese Bezeichnung ist auch im Hinblick auf die Definition der mit diesen Vektoren assoziierten Steuermodi in [104] eingängig, wobei anzumerken ist, dass in der genannten Quelle der Begriff des Steuervektors als Synonym für den Vektor der Eingangsgrößen verwendet wird. In englischsprachigen Veröffentlichungen ist in diesem Zusammenhang die Bezeichnung *input direction* gebräuchlich [72, 6].

Es ist an dieser Stelle zweckmäßig, die Gleichungen (3.15) im Kontext entsprechender Verfahren für den Entwurf von Zustandsrückführungen für Systeme ohne zusätzliche Freiheitsgrade im Systementwurf zu diskutieren. Hierfür wird die Wahl $K_{\mathrm{p}} = 0$ betrachtet, so dass der geschlossene Regelkreis durch (3.8) gegeben ist. Bedingt durch die Regularität der Matrizen $R_i$ folgt aus (3.15c) zwangsläufig $g_i = 0$. Werden (3.15a) und (3.15b) für die $n$ Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises zusammengefasst, ergibt sich

$$K_{\mathrm{c}} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

mit $v_i = N_{\mathrm{c},i} f_i$ und $h_i = M_{\mathrm{c},i} f_i$. Da das Paar $(A, B_{\mathrm{c}})$ gemäß Voraussetzung steuerbar ist und $\operatorname{rang}(B_{\mathrm{c}}) = m_{\mathrm{c}}$ gilt, sind die $m_{\mathrm{c}}$ Spalten der Matrizen $N_{\mathrm{c},i}$ linear unabhängig und bilden Basen der dem geschlossenen Regelkreis zuweisbaren Eigenräume zu den Eigenwerten $\lambda_i$. In diesem Zusammenhang wird auch von den $(A, B_{\mathrm{c}})$-charakteristischen Unterräumen gesprochen [6]. Die Dimension der Summe einer Anzahl $s \leq n$ dieser Untervektorräume zu $s$ voneinander verschiedenen Eigenwerten ist stets größer oder gleich $s$, siehe [69]. Somit existiert eine Wahl der Vektoren $f_i$, für welche die Vektoren $v_i$, $i = 1, \ldots, n$, linear unabhängig sind. Für eine derartige Wahl der Vektoren $f_i$ beziehungsweise $v_i$ ist die Matrix $[\ v_1 \quad \cdots \quad v_n\ ]$ regulär und eine Rückführung zur Zuweisung der Eigenwerte ist durch

$$K_{\mathrm{c}} = [\ h_1 \quad \cdots \quad h_n\ ][\ v_1 \quad \cdots \quad v_n\ ]^{-1} \tag{3.16}$$

gegeben [92, 6, 72, 106].

Da eine reelle Rückführung $K_\mathrm{c}$ gesucht wird, werden die zu reellen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren $v_i$, beziehungsweise entsprechend die Vektoren $f_i$, reell gewählt. Für Paare konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_j^*$ wird $v_i = v_j^*$ beziehungsweise $f_i = f_j^*$ vereinbart, da bei Eigenvektoren zu komplexen Eigenwerten reeller Matrizen die zu diesen konjugiert komplexen Vektoren stets Element der Eigenräume der entsprechend konjugiert komplexen Eigenwerte sein müssen.

Die Regularität der zu invertierenden Matrix der Eigenvektoren ist generisch beziehungsweise für fast jede Wahl der Vektoren $f_i$ gegeben, womit diese Vektoren als Freiheitsgrade hinsichtlich der Auslegung der Rückführung angesehen werden können. Es ist jedoch ersichtlich, dass eine mittels (3.16) bestimmte Matrix $K_\mathrm{c}$ von einer Skalierung der Parametervektoren $f_i$, und damit entsprechend der Vektoren $v_i$ und $h_i$, mit von Null verschiedenen Skalaren nicht beeinflusst wird. Insofern bieten die für reelle Eigenwerte reell gewählten Parametervektoren $m_\mathrm{c} - 1$ Freiheitsgrade zur Beeinflussung der resultierenden Rückführung. Für ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_j^*$ bieten die entsprechend konjugiert komplex gewählten Vektoren $f_i = f_j^*$ nunmehr $m_c - 1$ komplexe beziehungsweise $2(m_\mathrm{c} - 1)$ reelle Freiheitsgrade [72]. Für den Entwurf der Rückführung ergeben sich somit $n \cdot (m_\mathrm{c} - 1)$ Freiheitsgrade, was der Anzahl der Elemente der Matrix $K_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{m_\mathrm{c} \times n}$ abzüglich $n$ Freiheitsgraden entspricht, die für die Vorgabe der $n$ Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises benötigt werden.

An dieser Stelle lässt sich ebenfalls der Zusammenhang der in (3.16) gegebenen Parametrierung der Matrix $K_\mathrm{c}$ zum Verfahren der vollständigen modalen Synthese, vgl. [104], angeben. Sind die vorgegebenen Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises von denen der Matrix $A$ verschieden, so erfüllen die Matrizen $N_{\mathrm{c},i} = -(A - \lambda_i I)^{-1} B_\mathrm{c}$ und $M_{\mathrm{c},i} = I$ die Bedingung (3.12). Die Parametrierung des Zustandsreglers kann in diesem Fall in der Form

$$K_\mathrm{c} = [\ f_1 \ \cdots \ f_n\ ] \cdot [\ -(A - \lambda_1 I)^{-1} B_\mathrm{c} f_1 \ \cdots \ -(A - \lambda_n I)^{-1} B_\mathrm{c} f_n\ ]^{-1}$$

angegeben werden.

Im allgemeinen Fall, welcher nun wiederum betrachtet wird, sind die Vektoren $g_i$ in (3.15) von Null verschieden. Aus (3.15c) folgt durch Einsetzen von (3.15a) und (3.15b)

$$K_\mathrm{p}(I - D_\mathrm{pp} K_\mathrm{p})^{-1} \left( (D_\mathrm{pc} M_{\mathrm{c},i} + C_\mathrm{p} N_{\mathrm{c},i}) f_i + (D_\mathrm{pc} M_{\mathrm{p},i} + C_\mathrm{p} N_{\mathrm{p},i}) g_i \right) = R_i g_i .$$

Wird erneut die Beziehung $K_\mathrm{p}(I - D_\mathrm{pp} K_\mathrm{p})^{-1} = (I - K_\mathrm{p} D_\mathrm{pp})^{-1} K_\mathrm{p}$ genutzt, ergibt sich der zu obiger Gleichung äquivalente Ausdruck

$$K_\mathrm{p} \left( (D_\mathrm{pc} M_{\mathrm{c},i} + C_\mathrm{p} N_{\mathrm{c},i}) f_i + (D_\mathrm{pc} M_{\mathrm{p},i} + C_\mathrm{p} N_{\mathrm{p},i} + D_\mathrm{pp} R_i) g_i \right) = R_i g_i$$

beziehungsweise kompakter notiert

$$K_\mathrm{p} P_{\mathrm{c},i} f_i - \left( R_i - K_\mathrm{p} P_{\mathrm{p},i} \right) g_i = 0 \tag{3.17}$$

mit $P_{\mathrm{c},i} := D_\mathrm{pc} M_{\mathrm{c},i} + C_\mathrm{p} N_{\mathrm{c},i}$ und $P_{\mathrm{p},i} := D_\mathrm{pc} M_{\mathrm{p},i} + C_\mathrm{p} N_{\mathrm{p},i} + D_\mathrm{pp} R_i$. Werden die Beziehungen (3.15b) für die $n$ vorgegebenen Eigenwerte in Matrixform notiert, ergibt sich wiederum eine Gleichung der Gestalt

$$K_\mathrm{c} V = H$$

mit

$$V := \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}, \quad v_i = N_{\mathrm{c},i} f_i + N_{\mathrm{p},i} g_i,$$

und

$$H := \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{bmatrix}, \quad h_i = M_{\mathrm{c},i} f_i + M_{\mathrm{p},i} g_i.$$

Ist die Matrix $V$ regulär, ist die gesuchte Rückführung durch

$$K_{\mathrm{c}} = HV^{-1}$$

gegeben. Die Vektoren $f_i \in \mathbb{C}^{m_{\mathrm{c}}}$ und $g_i \in \mathbb{C}^r$ stellen in diesem Fall allerdings keine nahezu beliebig zu wählenden Freiheitsgrade des Entwurfs dar, sondern müssen in Verbindung mit der Wahl der Matrix $K_{\mathrm{p}}$ die in (3.17) gegebene Beziehung erfüllen.

Hinsichtlich der angestrebten Nutzung der Parametrierung der Rückführung im Rahmen eines Optimierungsverfahrens hat diese Formulierung den Nachteil, dass die Elemente der $r$-dimensionalen Vektoren $g_i$ als Parameter auftreten und die Gleichungen (3.17) als Nebenbedingungen berücksichtigt werden müssen. Für die Zuweisung von $n$ Eigenwerten sind dies $n \cdot r$ Elemente der Vektoren $g_i$ sowie $n \cdot r$ nichtlineare Gleichungen. Bei Betrachtung der durch (3.17) gegebenen Gleichungen zeigt sich jedoch, dass zwischen der Wahl der Vektoren $f_i$ und $g_i$ ein eindeutiger Zusammenhang der Form

$$g_i = (R_i - K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{p},i})^{-1} K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{c},i} f_i \tag{3.18}$$

besteht, sofern die Matrix $(R_i - K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{p},i})$ regulär ist. Letzteres ist, bedingt durch die Regularität der Matrizen $R_i$, im Speziellen für die Wahl $K_{\mathrm{p}} = 0$ erfüllt. Da die Determinante dieser Matrix ein Polynom in den Elementen der Matrix $K_{\mathrm{p}}$ ist, ist die Regularität zudem wiederum für fast jede Wahl dieser Matrix gegeben. Einsetzen von (3.18) in die Ausdrücke für die Eigenvektoren $v_i$ und Steuervektoren $h_i$ ergibt

$$v_i = N_i f_i$$

sowie

$$h_i = M_i f_i$$

mit

$$N_i := N_{\mathrm{c},i} + N_{\mathrm{p},i} (R_i - K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{p},i})^{-1} K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{c},i} \tag{3.19}$$

beziehungsweise

$$M_i := M_{\mathrm{c},i} + M_{\mathrm{p},i} (R_i - K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{p},i})^{-1} K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{c},i}. \tag{3.20}$$

**Bemerkung 3.1.** *Die in* (3.19) *und* (3.20) *definierten Matrizen können wiederum als LFT geschrieben werden. Es gilt*

$$N_i(\kappa) = \mathcal{F}_\mathrm{l}\left(\begin{bmatrix} N_{\mathrm{c},i} & N_{\mathrm{p},i} R_i^{-1} \\ P_{\mathrm{c},i} & P_{\mathrm{p},i} R_i^{-1} \end{bmatrix}, K_\mathrm{p}(\kappa)\right)$$

*und entsprechend*

$$M_i(\kappa) = \mathcal{F}_\mathrm{l}\left(\begin{bmatrix} M_{\mathrm{c},i} & M_{\mathrm{p},i} R_i^{-1} \\ P_{\mathrm{c},i} & P_{\mathrm{p},i} R_i^{-1} \end{bmatrix}, K_\mathrm{p}(\kappa)\right),$$

*wobei die Abhängigkeit der Matrizen vom Vektor $\kappa$ an dieser Stelle explizit angegeben wird. Mittels dieser Formulierung können die Matrizen $N_i(\kappa)$ und $M_i(\kappa)$ hinsichtlich der Vorgehensweise für parameterunabhängige Systeme interpretiert werden. Offensichtlich ist $N_i(0) = N_{\mathrm{c},i}$ sowie $M_i(0) = M_{\mathrm{c},i}$. Diese Matrizen bilden gemäß* (3.12) *Basen der Nullräume der Matrizen $[\ A - \lambda_i I \quad B_\mathrm{c}\ ]$. Allerdings gilt*

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\kappa) - \lambda_i I & \hat{B}(\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i(\kappa) \\ M_i(\kappa) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

*für jede Wahl von $\kappa$, für welche die Matrizen $\big(I - D_\mathrm{pp} K_\mathrm{p}(\kappa)\big)$ und $\big(R_i - K_\mathrm{p}(\kappa) P_{\mathrm{p},i}\big)$ regulär sind. Die Spalten der Matrizen $[\ N_i(\kappa)^\mathrm{T} \quad M_i(\kappa)^\mathrm{T}\ ]^\mathrm{T}$ sind somit jeweils Elemente der entsprechenden Nullräume des parameterabhängigen Systems. Der Nachweis hierfür ist in Anhang B.1 gegeben.*

Nach diesen Betrachtungen kann das Vorgehen für den Entwurf der Matrix $K_\mathrm{c}$ der Zustandsrückführung zusammengefasst werden. Es sind der Vektor $\kappa$ sowie die Vektoren $f_i$, $i = 1, \ldots, n$, derart zu wählen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Es gilt $\det(I - D_\mathrm{pp} K_\mathrm{p}(\kappa)) \neq 0$ sowie $\det(R_i - K_\mathrm{p}(\kappa) P_{\mathrm{p},i}) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$.
- Es gilt $\det(V) \neq 0$ mit $V = [\ v_1 \ \cdots \ v_n\ ] = [\ N_1(\kappa) f_1 \ \cdots \ N_n(\kappa) f_n\ ]$ und $N_i(\kappa)$ gemäß (3.19).
- Ist $\lambda_i$ reell, so wird $f_i$ ebenfalls reell gewählt.
- Für Paare konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_j^*$ wird $f_i = f_j^*$ gewählt, so dass $v_i = v_j^*$ gilt.

Wird zudem $H = [\ h_1 \ \cdots \ h_n\ ] = [\ M_1(\kappa) f_1 \ \cdots \ M_n(\kappa) f_n\ ]$ gewählt, weist die Matrix

$$K_\mathrm{c} = H V^{-1} \tag{3.22}$$

dem geschlossenen Regelkreis die gewünschten Eigenwerte zu, es gilt

$$\left(\hat{A}(\kappa) + \hat{B}(\kappa) K_\mathrm{c}\right) v_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

In praktischer Hinsicht stellen die genannten Anforderungen an die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade kaum eine Einschränkung dar. Die Beschränkung auf reelle beziehungsweise konjugiert komplexe Vektoren $f_i$ stellt lediglich sicher, dass sich eine reelle Rückführung ergibt. Die Matrizen, deren Regularität gefordert wird, sind rationale Funktionen der gegebenen Parameter. Da durch die Steuerbarkeit des Paares $(A, B_c)$ sichergestellt ist, dass die entsprechenden Determinanten nicht für jede Wahl der Parameter identisch verschwinden, sind diese für fast jede Wahl der Parameter von Null verschieden.

Bei der Herleitung der Entwurfsgleichungen wurde davon ausgegangen, dass für den geschlossenen Regelkreis lediglich einfache Eigenwerte vorgegeben werden. In praktischer Hinsicht ist es eher selten erforderlich mehrfache Eigenwerte vorzugeben. Wird das in diesem Abschnitt beschriebene Entwurfsverfahren betrachtet, ist jedoch ersichtlich, dass die Berücksichtigung eines $m_c$-fachen Eigenwerts $\lambda_i$ keine Probleme bereitet, da eine entsprechende Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises aus dem Bild der Matrix $N_{c,i}$, beziehungsweise im Allgemeinen aus dem Bild der Matrix $N_i$, gewählt werden kann. Die Vorgabe mehrfacher Eigenwerte ist somit möglich, sofern eine ausreichende Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises gefunden werden kann. Die Vorgabe einer Eigenstruktur mit mehrfachen Eigenwerten, deren algebraische Vielfachheit größer ist als deren geometrische Vielfachheit, ist bei der gegebenen Form der Entwurfsgleichungen nicht möglich. Hierfür müssten neben den Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises eine entsprechende Anzahl von Hauptvektoren berücksichtigt werden. Ein solches Vorgehen für den Entwurf von Zustandsrückführungen ohne die Berücksichtigung von Freiheitsgraden im Systementwurf ist in [107] gezeigt.

### 3.2.1 Systemdynamische Bedeutung der Eigen- und Steuervektoren

Ein zentraler Aspekt der gegebenen Entwurfsgleichung ist die Parametrierung der Eigen- und Steuervektoren $v_i$ und $h_i = K_c v_i$ des geschlossenen Regelkreises. Auf die systemdynamische Bedeutung der Eigenvektoren wird in Anhang A.1 und Abschnitt 3.3 eingegangen. Es bietet sich an dieser Stelle jedoch an, diese sowie insbesondere die Bedeutung der Steuervektoren kurz zu diskutieren. Die Darstellung orientiert sich hierbei an [104].

Betrachtet wird das sich im geschlossenen Regelkreis ergebende autonome System

$$\dot{x}(t) = \left(\hat{A}(\kappa) + \hat{B}(\kappa)K_c\right)x(t) = A_{cl}x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Sind die Eigenwerte $\lambda_i$ des geschlossenen Regelkreises einfach, so ist die Matrix $A_{cl}$ mittels der Matrix der Eigenvektoren $V = [\ v_1 \ \cdots \ v_n\ ]$ diagonalisierbar und die Zeitlösung ist in der Form

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{0,i}\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\, v_i$$

mit

$$[\ \tilde{x}_{0,1} \ \cdots \ \tilde{x}_{0,n}\ ]^{\mathrm{T}} = V^{-1}x_0$$

darstellbar. Der Zeitverlauf des Zustandsvektors ist als Linearkombination der Ausdrücke $\mathrm{e}^{\lambda_i t}\, v_i$ in Abhängigkeit des Anfangszustands eindeutig festgelegt. Hinsichtlich der Steuervektoren ergibt sich eine ähnliche Interpretation, allerdings bezogen auf den Stellgrößenverlauf $u_\mathrm{c}(t)$. Es gilt

$$u_\mathrm{c}(t) = K_\mathrm{c} x(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{0,i}\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\, K_\mathrm{c} v_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{0,i}\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\, h_i .$$

Der Stellgrößenverlauf ist demnach als Linearkombination der Ausdrücke $\mathrm{e}^{\lambda_i t}\, h_i$ darstellbar. Ebenso wie die Eigenvektoren die Aufteilung der Eigenbewegungen des Systems auf den Zustandsvektor angeben, ist durch die Steuervektoren die Aufteilung der Eigenbewegungen auf die Stellgrößen gegeben.

### 3.2.2 Reelle Form der Entwurfsgleichungen

Die in (3.22) gegebene Parametrierung der Matrix $K_\mathrm{c}$ zur Zuweisung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises beinhaltet komplexe Größen, sofern die Menge $\Lambda$ komplexe Elemente enthält. Für die Bestimmung der Rückführung und die im Folgenden beschriebene Parameteroptimierung ist es günstig, zu einer zu (3.22) äquivalenten Formulierung mit rein reellen Größen überzugehen.

Die Matrix $K_\mathrm{c}$ der Zustandsregelung wird nicht von einer Multiplikation der Matrizen $V$ und $H$ aus (3.22) von rechts mit einer regulären Matrix $T$ beeinflusst. Es gilt

$$K_\mathrm{c} = HT(VT)^{-1} = HTT^{-1}V^{-1} = HV^{-1}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass für $\nu$ konjugiert komplexe Eigenwertpaare und $n - 2\nu$ reelle Eigenwerte die Matrizen $V$ und $H$ in der Form

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_1^* & \cdots & v_\nu & v_\nu^* & v_{2\nu+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

beziehungsweise

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_1^* & \cdots & h_\nu & h_\nu^* & h_{2\nu+1} & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

vorliegen. Wird nun eine Matrix

$$T := \mathrm{diag}(T_1, \ldots, T_\nu, I_{n-2\nu}) \tag{3.24}$$

mit

$$T_i = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

gewählt, ergibt sich die gesuchte reelle Form der Matrizen

$$V_\mathrm{Re} := VT = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(v_1) & \mathrm{Im}(v_1) & \cdots & \mathrm{Re}(v_\nu) & \mathrm{Im}(v_\nu) & v_{2\nu+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

beziehungsweise

$$H_{\mathrm{Re}} := HT = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(h_1) & \mathrm{Im}(h_1) & \cdots & \mathrm{Re}(h_\nu) & \mathrm{Im}(h_\nu) & h_{2\nu+1} & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

und es gilt

$$K_{\mathrm{c}} = HV^{-1} = H_{\mathrm{Re}} V_{\mathrm{Re}}^{-1}. \tag{3.26}$$

Real- und Imaginärteil der zu einem komplexen Eigenwert korrespondierenden Vektoren $v_i = N_i f_i$ und $h_i = M_i f_i$ mit (3.19) und (3.20) lassen sich bestimmen, indem eine geeignete reelle Darstellung, siehe [98], der in den Ausdrücken auftretenden Matrizen verwendet wird. Für die Vektoren $v_i$ ergibt sich beispielsweise eine reelle Darstellung der Form

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(v_i) \\ \mathrm{Im}(v_i) \end{bmatrix} = \Bigg( & \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(N_{\mathrm{c},i}) & -\mathrm{Im}(N_{\mathrm{c},i}) \\ \mathrm{Im}(N_{\mathrm{c},i}) & \mathrm{Re}(N_{\mathrm{c},i}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(N_{\mathrm{p},i}) & -\mathrm{Im}(N_{\mathrm{p},i}) \\ \mathrm{Im}(N_{\mathrm{p},i}) & \mathrm{Re}(N_{\mathrm{p},i}) \end{bmatrix} \\
\cdot \Bigg( & \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(R_i) & -\mathrm{Im}(R_i) \\ \mathrm{Im}(R_i) & \mathrm{Re}(R_i) \end{bmatrix} - \mathrm{diag}(K_{\mathrm{p}}, K_{\mathrm{p}}) \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_{\mathrm{p},i}) & -\mathrm{Im}(P_{\mathrm{p},i}) \\ \mathrm{Im}(P_{\mathrm{p},i}) & \mathrm{Re}(P_{\mathrm{p},i}) \end{bmatrix} \Bigg)^{-1} \\
\cdot \mathrm{diag}(K_{\mathrm{p}}, K_{\mathrm{p}}) & \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_{\mathrm{c},i}) & -\mathrm{Im}(P_{\mathrm{c},i}) \\ \mathrm{Im}(P_{\mathrm{c},i}) & \mathrm{Re}(P_{\mathrm{c},i}) \end{bmatrix} \Bigg) \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(f_i) \\ \mathrm{Im}(f_i) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Die entsprechende reelle Darstellung der Vektoren $h_i$ ist durch

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(h_i) \\ \mathrm{Im}(h_i) \end{bmatrix} = \Bigg( & \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(M_{\mathrm{c},i}) & -\mathrm{Im}(M_{\mathrm{c},i}) \\ \mathrm{Im}(M_{\mathrm{c},i}) & \mathrm{Re}(M_{\mathrm{c},i}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(M_{\mathrm{p},i}) & -\mathrm{Im}(M_{\mathrm{p},i}) \\ \mathrm{Im}(M_{\mathrm{p},i}) & \mathrm{Re}(M_{\mathrm{p},i}) \end{bmatrix} \\
\cdot \Bigg( & \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(R_i) & -\mathrm{Im}(R_i) \\ \mathrm{Im}(R_i) & \mathrm{Re}(R_i) \end{bmatrix} - \mathrm{diag}(K_{\mathrm{p}}, K_{\mathrm{p}}) \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_{\mathrm{p},i}) & -\mathrm{Im}(P_{\mathrm{p},i}) \\ \mathrm{Im}(P_{\mathrm{p},i}) & \mathrm{Re}(P_{\mathrm{p},i}) \end{bmatrix} \Bigg)^{-1} \\
\cdot \mathrm{diag}(K_{\mathrm{p}}, K_{\mathrm{p}}) & \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_{\mathrm{c},i}) & -\mathrm{Im}(P_{\mathrm{c},i}) \\ \mathrm{Im}(P_{\mathrm{c},i}) & \mathrm{Re}(P_{\mathrm{c},i}) \end{bmatrix} \Bigg) \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(f_i) \\ \mathrm{Im}(f_i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

gegeben.

Im Rahmen des im folgenden Abschnitt behandelten Optimierungsproblems wird unter anderem die Konditionszahl

$$\mathrm{kond}(\hat{V})_{\mathrm{F}} = \|\hat{V}\|_{\mathrm{F}} \|\hat{V}^{-1}\|_{\mathrm{F}}$$

der Matrix der normierten Eigenvektoren

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|_2} & \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2} & \cdots & \frac{v_\nu}{\|v_\nu\|_2} & \frac{v_\nu^*}{\|v_\nu\|_2} & \frac{v_{2\nu+1}}{\|v_{2\nu+1}\|_2} & \cdots & \frac{v_n}{\|v_n\|_2} \end{bmatrix}$$

bezüglich der Frobenius-Norm zur Definition eines geeigneten Gütekriteriums verwendet. Entsprechend wird für diese Matrix eine Transformation zu einer reellen Darstellung gesucht, welche die Frobenius-Norm nicht ändert. Eine solche Transformation ergibt sich, wenn anstatt der Matrix $T$ aus (3.24) die unitäre Matrix

$$\hat{T} := \mathrm{diag}(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_\nu, I_{n-2\nu}) \tag{3.27}$$

mit $\hat{T}_i := \sqrt{2} \cdot T_i$ für den Übergang zu der reellen Darstellung

$$\hat{V}_{\mathrm{Re}} := \hat{V}\hat{T}$$

verwendet wird. Dies lässt sich anhand der Invarianz der Frobenius-Norm gegenüber Multiplikationen mit unitären Matrizen

$$\mathrm{kond}(\hat{V})_{\mathrm{F}} = \|\hat{V}\|_{\mathrm{F}}\|\hat{V}^{-1}\|_{\mathrm{F}} = \|\hat{V}\hat{T}\|_{\mathrm{F}}\|\hat{T}^{-1}\hat{V}^{-1}\|_{\mathrm{F}} = \|\hat{V}_{\mathrm{Re}}\|_{\mathrm{F}}\|\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{kond}(\hat{V}_{\mathrm{Re}})_{\mathrm{F}}$$

erkennen.

## 3.3 Parameteroptimierung

In den vorangegangen Abschnitten wurden parametrische Ausdrücke des Reglers $K_{\mathrm{c}}$ in Abhängigkeit der Vektoren $f_i$, $i = 1, \ldots, n$, und der Matrix $K_{\mathrm{p}}$ beziehungsweise des Vektors $\kappa$ derart bestimmt, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises weitestgehend unabhängig von der Wahl dieser Parameter einer vorgegebenen Menge $\Lambda$ entsprechen. Im Folgenden wird die Möglichkeit diskutiert, diese Parameter durch Lösen eines Optimierungsproblems zu bestimmen, um das Verhalten des geschlossenen Regelkreises, beurteilt anhand eines geeignet gewählten Gütekriteriums, zu verbessern.

### 3.3.1 Gütekriterium

Für die Wahl eines Kriteriums zur Beurteilung der Güte einer gegebenen Parameterkonfiguration gibt es im Allgemeinen vielfältige Möglichkeiten. Aus Anwendersicht wird die geeignete Wahl eines solchen Gütekriteriums, im Hinblick auf eine konkrete Entwurfsaufgabe, maßgeblich von der Gestalt der für den geschlossenen Regelkreis definierten Anforderungen beeinflusst. Hinsichtlich der Implementierung eines flexibel einsetzbaren Entwurfsverfahrens sind ebenso Faktoren wie die Eigenschaften des resultierenden Optimierungsproblems sowie Bedienbarkeit und Ausführungsgeschwindigkeit einer entsprechenden Softwarelösung bei der Ausgestaltung des Gütekriteriums zu berücksichtigen.

Unter Verfahren zur Optimierung der Freiheitsgrade von Zustands- und Ausgangsreglern, die dem geschlossenen Regelkreis ein vorgegebenes Spektrum zuweisen, sind Kriterien weit verbreitet, welche die Sensitivität der Eigenwerte bezüglich Störungen in den Daten der Systembeschreibung sowie eine Norm der Matrix der Rückführung bewerten [106, 66, 24, 121, 39]. Die sich ergebenden Problemstellungen werden in der englischsprachigen Literatur unter anderem als *robust exact pole placement problem* beziehungsweise *minimum gain robust exact pole placement problem* [106] oder auch *mininum norm robust eigenvalue assignment problem* [121] bezeichnet.

Zur Motivation des in dieser Arbeit gewählten Gütekriteriums werden zunächst übliche Maßzahlen für die Sensitivität von Eigenwerten diskutiert. Wird in diesem Abschnitt von der Robustheit

des geregelten Systems gesprochen, ist hiermit die Empfindlichkeit der vorgegebenen Eigenwerte gegenüber Störungen oder Unsicherheiten in den Daten der Problembeschreibung gemeint.

Ausgangspunkt von Sensitivitätsanalysen diagonalisierbarer Matrizen ist oftmals der Satz von Bauer-Fike [50, 61]. Für die hier verwendeten Matrizen lässt sich dieser wie folgt formulieren.

**Satz 3.2** ([50, Theorem 7.2.2]). *Ist $\mu$ ein Eigenwert der Matrix $A_{\mathrm{cl}} + E$ und $A_{\mathrm{cl}}$ diagonalisierbar mit $V^{-1}A_{\mathrm{cl}}V = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, dann gilt*

$$\min_{\lambda \in \sigma(A_{\mathrm{cl}})} |\lambda - \mu| \leq \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \|E\|_p = \mathrm{kond}_p(V)\|E\|_p, \tag{3.28}$$

*wobei $\|\cdot\|_p$ eine beliebige $p$-Norm bezeichnet.*

Ist also eine Matrix $V$ gegeben, so dass $V^{-1}A_{\mathrm{cl}}V = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gilt, ist die Sensitivität eines Eigenwerts $\lambda_i$ bezüglich Störungen der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ durch Konditionszahlen der Matrix $V$ beschränkt. Die Beziehung (3.28) gilt auch für mehrfache Eigenwerte, sofern deren geometrische und algebraische Vielfachheiten übereinstimmen. Für nicht diagonalähnliche Matrizen lassen sich ebenfalls geeignete Maßzahlen definieren [29, 107], wobei Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten, deren algebraische Vielfachheit größer der geometrischen ist, in dieser Hinsicht im Allgemeinen ungünstigere Eigenschaften aufweisen [50, 66]. Da die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Problemstellung einfache Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises voraussetzt, beschränkt sich die Diskussion im Folgenden auf diesen Fall.

Neben der Betrachtung einer generellen oberen Schranke, wie sie durch den Satz von Bauer-Fike gegeben ist, kann die Sensitivität einzelner Eigenwerte betrachtet werden. Eine Größe, die hierbei Verwendung findet ist die Kondition eines einfachen Eigenwertes [115, 125, 66]. Diese Maßzahl lässt sich wie folgt motivieren. Ist $\lambda$ ein einfacher Eigenwert der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ mit einem Rechtseigenvektor $v$ und einem Linkseigenvektor $w$, dann existiert ein Eigenwert $\mu$ der gestörten Matrix $A_{\mathrm{cl}} + E$, so dass

$$\mu = \lambda + \frac{w^{\mathrm{H}} E v}{w^{\mathrm{H}} v} + \mathcal{O}(\|E\|^2) \tag{3.29}$$

gilt [115, Theorem IV.2.3]. Aus diesem Resultat lässt sich auf die Differenzierbarkeit einfacher Eigenwerte und auf einen Ausdruck für deren Ableitung schließen, siehe auch [115, Corollary 2.4], [61], [118] und [87]. Wird speziell die Matrix $A_{\mathrm{cl}} + \epsilon E$ als Funktion von $\epsilon$ betrachtet existieren in der Umgebung von $\epsilon = 0$ differenzierbare Funktionen $v(\epsilon)$ und $\lambda(\epsilon)$, so dass

$$(A_{\mathrm{cl}} + \epsilon E)v(\epsilon) = \lambda(\epsilon)v(\epsilon)$$

mit $\lambda(0) = \lambda$ und $v(0) = v$ gilt, siehe [50] oder [61, Theorem 6.3.12]. Differenzieren dieses Ausdrucks nach $\epsilon$ liefert

$$\left.\frac{d\lambda(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{w^{\mathrm{H}} E v}{w^{\mathrm{H}} v} \tag{3.30}$$

und aus (3.30) folgt

$$\left| \left. \frac{d\lambda(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right| = \left| \frac{w^{\mathrm{H}} E v}{w^{\mathrm{H}} v} \right| \leq \frac{\|v\|_2 \|w\|_2}{|w^{\mathrm{H}} v|} \|E\|_2 = \vartheta \|E\|_2.$$

Der in der Ungleichung auftretende Ausdruck $\vartheta := \|v\|_2 \|w\|_2 / |w^{\mathrm{H}} v|$ wird als Konditionszahl des Eigenwerts $\lambda$ bezüglich der 2-Norm bezeichnet. Anschaulich nimmt diese Konditionszahl den Wert 1 an, wenn die Links- und Rechtseigenvektoren in dieselbe Richtung zeigen und sehr große Werte, wenn die Vektoren nahezu orthogonal zueinander sind. Im Hinblick auf das in Satz 3.2 formulierte Resultat lässt sich zeigen, dass

$$\max_{i=1,\ldots,n} \vartheta_i \leq \mathrm{kond}_2(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$$

für die zu $n$ einfachen Eigenwerten der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ gehörenden Konditionszahlen $\vartheta_i$, $i = 1, \ldots, n$, gilt [125]. Durch die Spektralnorm ist demnach eine obere Schranke für die Kondition der einzelnen Eigenwerte gegeben.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen ist ersichtlich, dass grundsätzlich eine Reihe von Kriterien geeignet sind, die Sensitivität der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises oder deren Robustheit gegenüber Störungen in den Matrizen der Systembeschreibung zu bewerten. Eine ausführlichere Diskussion findet sich in [66]. Eine Auflistung weiterer Kriterien ist in [28] gegeben. Im Rahmen dieser Arbeit fällt die Wahl auf die in diesem Zusammenhang häufig verwendete Konditionszahl der Eigenvektormatrix bezüglich deren Frobenius-Norm [106, 24, 121]. Zwar ist die Frobenius-Norm nicht wie in Satz 3.2 gefordert eine $p$-Norm beziehungsweise eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm, sie ist jedoch stets größer als die Spektralnorm einer entsprechenden Matrix und somit gilt

$$\min_{\lambda \in \sigma(A_{\mathrm{cl}})} |\lambda - \mu| \leq \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \|E\|_2 \leq \|V\|_{\mathrm{F}} \|V^{-1}\|_{\mathrm{F}} \|E\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{kond}_{\mathrm{F}}(V) \|E\|_{\mathrm{F}}$$

sowie

$$\max_{i=1,\ldots,n} \vartheta_i \leq \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \leq \|V\|_{\mathrm{F}} \|V^{-1}\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{kond}_{\mathrm{F}}(V).$$

Sind die Eigenvektoren geeignet normiert $\hat{v}_i := v_i / \|v_i\|_2$, so dass $\|\hat{v}_i\|_2 = 1$ gilt, ergibt sich zudem mit $\hat{V} := [\ \hat{v}_1 \ \cdots \ \hat{v}_n\ ]$

$$\mathrm{kond}_{\mathrm{F}}(\hat{V}) = \|\hat{V}\|_{\mathrm{F}} \|\hat{V}^{-1}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{n} \cdot \|\hat{V}^{-1}\|_{\mathrm{F}}. \tag{3.31}$$

Das Verwenden der Forbeniusnorm anstatt der Spektralnorm motiviert sich aus praktischen Gesichtspunkten hinsichtlich der Definition eines für eine Parameteroptimierung geeigneten Gütekriteriums. Im Besonderen ist das Quadrat der Frobenius-Norm eine einfach auszuwertende und zudem differenzierbare Funktion. Weiterhin ergibt sich für die Konditionszahl der normierten Eigenvektormatrix (3.31) ein Zusammenhang mit den Konditionszahlen der einzelnen Eigenwerte [66]. Werden Linkseigenvektoren $\hat{w}_i$ so gewählt, dass $\hat{w}_i^{\mathrm{H}} \hat{v}_i = 1$ gilt, ist die Inverse der normierten Eigenvektormatrix durch

$$\hat{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{w}_1^{\mathrm{H}} \\ \vdots \\ \hat{w}_n^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}$$

gegeben und es gilt

$$\vartheta_i = \frac{\|\hat{v}_i\|_2 \|\hat{w}_i\|_2}{|\hat{w}_i^{\mathrm{H}} \hat{v}_i|} = \|\hat{w}_i\|_2.$$

Aus (3.31) ergibt sich somit

$$\mathrm{kond}_{\mathrm{F}}(\hat{V}) = \sqrt{n} \cdot \|\hat{V}^{-1}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|\hat{w}_i\|_2^2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^2}.$$

Die Frobenius-Norm der Inversen der Matrix der normierten Eigenvektoren entspricht der euklidischen Norm des Vektors $[\ \vartheta_1 \ \cdots \ \vartheta_n\ ]^{\mathrm{T}}$ der Konditionszahlen der einzelnen Eigenwerte.

Neben dieser intuitiven Form der Skalierung der Eigenvektoren und der sich ergebenden Interpretation hinsichtlich der Konditionszahlen lassen sich entsprechende Resultate für weitere Skalierungen der Spaltenvektoren der Matrix $V$ angeben. Im Besonderen ergibt sich für die optimale Skalierung dieser Vektoren hinsichtlich der Forbeniusnorm der Matrix der Eigenvektoren ein Zusammenhang mit der 1-Norm des Vektors der Konditionszahlen [66, 113].

Ein weiterer Aspekt, der hinsichtlich der gezeigten Betrachtungen zur Sensitivität gegenüber Störungen in den Einträgen einer Matrix relevant ist, ist, ob diese eine gewisse Struktur aufweisen. Wird die Systemmatrix eines linearen dynamischen Systems betrachtet, sind relevante Störungen meist Unsicherheiten in den Parametern der Systembeschreibung, welche im Allgemeinen nur einige Einträge dieser Matrix betreffen. In diesem Zusammenhang kann es sinnvoll sein die Struktur der möglichen Störungen zu berücksichtigen [67].

In [66] finden sich weitere Interpretationen hinsichtlich der systemdynamischen Bedeutung von Konditionszahlen der Matrix der Eigenvektoren sowie der mit diesen in Zusammenhang stehenden Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises. Diese sollen hier nicht in Gänze wiederholt, sondern lediglich ergänzend zu den bereits diskutierten Resultaten eine Abschätzung bezüglich des transienten Verhaltens des geschlossenen Regelkreises angegeben werden. Der Verlauf

$$x(t) = \mathrm{e}^{A_{\mathrm{cl}} t}\, x_0$$

der Zustandsgrößen $x(t)$ für das System

$$\dot{x}(t) = A_{\mathrm{cl}} x(t)$$

mit dem Anfangswert $x(0) = x_0$ lässt sich, wie schon in Abschnitt 3.2.1 diskutiert, in der Form

$$x(t) = \mathrm{e}^{A_{\mathrm{cl}} t}\, x_0 = V\, \mathrm{e}^{Lt}\, V^{-1} x_0 \tag{3.32}$$

mit $L := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ angeben. Aus (3.32) folgt für einen beliebigen Zeitpunkt $t$

$$\|x(t)\|_2 \leq \|V\| \|V^{-1}\| \cdot \|\,\mathrm{e}^{Lt}\,\| \cdot \|x_0\|_2 = \mathrm{kond}(V) \cdot \|\,\mathrm{e}^{Lt}\,\| \cdot \|x_0\|_2,$$

wobei diese Ungleichung für Matrixnormen gilt die submultiplikativ und verträglich mit der Vektor 2-Norm sind. Im Speziellen also sowohl für die Frobenius- als auch für die Spektralnorm. Für diese ergibt sich

$$\|x(t)\|_2 \leq \mathrm{kond}_2(V) \cdot \max_{i=1,\ldots,n} (|\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,|) \cdot \|x_0\|_2 \leq \mathrm{kond}_\mathrm{F}(V) \cdot \max_{i=1,\ldots,n} (|\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,|) \cdot \|x_0\|_2.$$

Um Missverständnisse zu vermeiden, sei darauf hingewiesen, dass die verwendeten Normen zeitabhängiger Vektoren an dieser Stelle die Vektornorm zu einem gegebenen Zeitpunkt bezeichnen und nicht entsprechende Signalnormen.

Neben der Kondition der Eigenvektormatrix soll das für die Parameteroptimierung verwendete Gütekriterium eine Norm der Reglermatrix $K_\mathrm{c}$ bewerten. Für den Vektor der Stellgrößen $u_\mathrm{c}(t) = K_\mathrm{c} x(t)$ gilt für beliebiges $t$

$$\|u(t)\|_2 \leq \|K_\mathrm{c}\| \|x(t)\|_2$$

wiederum für mit der Vektor 2-Norm verträgliche Matrixnormen. Das kleine Reglerverstärkungen in vielen Anwendungen prinzipiell wünschenswert sind, lässt sich im Gegensatz zu den soeben diskutierten Kriterien hinsichtlich der Robustheit des geschlossenen Regelkreises recht einfach illustrieren [71]. Über die Matrix $K_\mathrm{c}$ der Zustandsrückführung wirken bei praktischen Anwendungen neben den Messsignalen der Zustandsgrößen ebenfalls Störungen beziehungsweise Messrauschen auf die Stellgrößen. Bei großen Reglervestärkungen ergibt sich dadurch tendenziell ein unruhiges Systemverhalten. Auch unabhängig von auf das System wirkenden Störungen, sind die bei kleineren Reglerverstärkungen zu erwartenden geringeren Beträge der Stellgrößen hinsichtlich der ebenfalls stets zu berücksichtigender Stellgliedbeschränkungen vorteilhaft. Es bleibt jedoch festzustellen, dass die Norm der Reglermatrix aufgrund der nicht berücksichtigten Dynamik des geschlossenen Regelkreises nicht direkt mit der Stellgrößennutzung korrespondiert. In Abschnitt 4.2 wird diese Thematik aufgegriffen und es werden mögliche Alternativen diskutiert.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Zusammenhänge motivieren die Wahl des für die Optimierung der Freiheitsgrade des Entwurfs verwendeten Gütekriteriums

$$J := \alpha \cdot \mathrm{kond}_\mathrm{F}(\hat{V})^2 + (1-\alpha)\|K_\mathrm{c}\|_\mathrm{F}^2 = \alpha n \cdot \|\hat{V}^{-1}\|_\mathrm{F}^2 + (1-\alpha)\|K_\mathrm{c}\|_\mathrm{F}^2 \tag{3.33}$$

als gewichtete Summe der Quadrate der Konditionszahl bezüglich der Frobenius-Norm der normierten Eigenvektormatrix $\hat{V}$ und der Frobenius-Norm der Matrix $K_\mathrm{c}$. Diese nicht unübliche Wahl [121, 106] bietet vor allem auch hinsichtlich der Implementierung eines dieses Kriterium nutzenden Verfahrens Vorteile. Neben der Matrix $K_\mathrm{c}$ des Zustandsreglers wird die Matrix der Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises verwendet, die ohnehin zur Bestimmung der Matrix $K_\mathrm{c}$ benötigt wird. Das Quadrat der Forbeniusnorm der verwendeten Matrizen ist einfach zu bestimmen.

Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, kann ein zu (3.33) äquivalenter Ausdruck

$$J_\mathrm{Re} := \alpha n \cdot \|\hat{V}_\mathrm{Re}^{-1}\|_\mathrm{F}^2 + (1-\alpha)\|K_\mathrm{c}\|_\mathrm{F}^2 \tag{3.34}$$

angegeben werden, der nur reelle Größen nutzt, wovon im Folgenden Gebrauch gemacht wird. Hinsichtlich der Parameteroptimierung ist zudem interessant, dass diese Gütefunktion für Parameterkombinationen, für welche die in der Reglerparametrierung auftretenden Inversen existieren, differenzierbar ist. Die Herleitung eines Ausdrucks für den Gradienten ist in Anhang B.2 gegeben.

### 3.3.2 Optimierungsproblem

Unter Verwendung der Zielfunktion $J_{\mathrm{Re}}$ aus (3.34) lässt sich ein Optimierungsproblem formulieren. Die zu optimierenden Variablen sind die Einträge der Parametervektoren $f_i$, $i = 1,\ldots,n$, und die im Vektor $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$ zusammengefassten verschiedenen Diagonalelemente der Matrix $K_{\mathrm{p}}$. Werden $\nu$ konjugiert komplexe Eigenwertepaare und $n-2\nu$ reelle Eigenwerte vorgegeben, werden die Freiheitsgrade der entsprechenden Parametervektoren zu dem Vektor

$$f = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(f_1)^{\mathrm{T}} & \mathrm{Im}(f_1)^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathrm{Re}(f_\nu)^{\mathrm{T}} & \mathrm{Im}(f_\nu)^{\mathrm{T}} & f_{2\nu+1}^{\mathrm{T}} & \cdots & f_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m_{\mathrm{c}} \cdot n}$$

zusammengefasst. Das resultierende Optimierungsproblem kann somit in der Form

$$\begin{aligned} \min_{\kappa, f} \quad & \alpha n \cdot \|\hat{V}_{\mathrm{Re}}(\kappa, f)^{-1}\|_{\mathrm{F}}^2 + (1-\alpha)\|K_{\mathrm{c}}(\kappa, f)\|_{\mathrm{F}}^2 \\ \text{u. d. N.} \quad & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \end{aligned} \tag{3.35}$$

angegeben werden. Anzumerken ist hierbei, dass die in Abschnitt 3.2 diskutierten Bedingungen hinsichtlich der Regularität der Matrizen, deren Inverse für die Berechnung der Rückführung ermittelt werden müssen, nicht explizit als Nebenbedingungen berücksichtigt werden, da dies auf ein deutlich komplexeres Problem führen würde. Es hat sich bei keinem Test des im Folgenden beschriebenen Lösungsansatzes beziehungsweise der entsprechenden Implementierung, mit einer Vielzahl zufällig erzeugter Systeme sowie auch konkreter Anwendungsbeispiele, hiermit ein Problem ergeben, was im Hinblick auf die erwähnte generische Regularität der relevanten Matrizen plausibel ist.

Ist die Menge $\mathcal{P}_\kappa$, wie zu Beginn des Kapitels vereinbart, durch obere und untere Schranken bezüglich der Elemente des Vektors $\kappa$ gegeben, beschreibt (3.35) ein Optimierungsproblem mit nichtlinearer und nichtkonvexer Zielfunktion sowie konvexen Nebenbedingungen. Prinzipiell kann eine Vielzahl verschiedener Optimierungsverfahren, die es erlauben, derartige Nebenbedingungen zu berücksichtigen, zur Suche nach Lösungen dieses Problems verwendet werden. Durch die frei verfügbare Implementierung des in [25, 131, 93] beschriebenen L-BFGS-B-Algorithmus zur Minimierung nichtlinearer Funktionen mit eventuell vorhandenen oberen und unteren Schranken, ist beispielsweise eine leistungsfähige Softwarelösung gegeben, welche für die im folgenden Abschnitt diskutierten Anwendungsbeispiele verwendet wird. Weitere gängige Methoden sind Innere-Punkte-Verfahren und Verfahren zur sequentiellen quadratischen Programmierung für nichtlineare Probleme mit Nebenbedingungen unter Verwendung von Gradienteninformationen [95]. Verschiedene Implementierungen solcher Verfahren, beispielsweise in der Optimization Toolbox™ von MATLAB, erlauben ebenfalls allgemeiner formulierte Nebenbedingungen bezüglich der Optimierungsvariablen, die im Rahmen der betrachteten Aufgabenstellung im Allgemeinen problemlos berücksichtigt werden können.

Einige Anmerkungen zu dem durch (3.35) beschriebenen Optimierungsproblem im Allgemeinen und zur Gradientenberechnung im Speziellen sind an dieser Stelle angebracht. Die genannten Verfahren garantieren keineswegs das Auffinden globaler Optima, liefern jedoch in der Praxis meist überzeugende Ergebnisse. Aufgrund der lokalen Natur der vorgeschlagenen Optimierungsverfahren ist es allerdings stets empfehlenswert, eine Reihe zufällig gewählter Startwerte zur Initialisierung zu verwenden. Durch die, gemäß Voraussetzung, einfache Gestalt der in (3.35) auftretenden Nebenbedingungen ist es unproblematisch, zulässige Startwerte für das Optimierungsverfahren zu generieren. Hierbei kann ebenfalls Vorwissen für eine geeignete Wahl der Startwerte genutzt werden, wobei sich dies insbesondere in Bezug auf die Parametervektoren schwierig gestaltet. Der L-BFGS-B-Algorithmus garantiert zudem, dass die Variablen die Nebenbedingungen in jedem Iterationsschritt erfüllen.

Die direkte Bestimmung des Gradienten der Gütefunktion ist, bedingt durch die auftretenden Verkettungen von Funktionen von Matrizen, recht umständlich. Ein geeignetes Mittel dieses Problem strukturiert zu lösen, bietet die Verwendung von Differentialen [87]. Die entsprechende Vorgehensweise zur Bestimmung des Gradienten der Gütefunktion wird in Anhang B.2 gezeigt.

Wie bei der Diskussion der Entwurfsgleichungen für die Matrix $K_\mathrm{c}$ bereits festgestellt, wird der resultierende Regler von Skalierungen der Parametervektoren nicht beeinflusst, so dass durch diese tatsächlich nicht $m_\mathrm{c} \cdot n$, sondern $(m_\mathrm{c} - 1) \cdot n$ Freiheitsgrade für den Entwurf gegeben sind. Generell sind verschiedene alternative Parametrierungen denkbar. Es bietet sich beispielsweise an, eine Parametrierung zu wählen, so dass die Parametervektoren stets die Länge 1 aufweisen, was mittels stereografischer Projektionen [78] realisiert werden kann. Die resultierende Reduzierung der Variablen des Optimierungsproblems ist besonders interessant, wenn der Gradient anstatt über den analytischen Ausdruck beispielsweise durch numerische Differentiation mittels finiter Differenzen bestimmt wird. Hierbei steigt die Anzahl der hierfür notwendigen Auswertungen der Zielfunktion mit der Anzahl der Variablen. Im Rahmen der Untersuchung des gegebenen Optimierungsproblems wurde zu Testzwecken die angesprochene Normierung der Parametervektoren implementiert. Bei Verwendung der analytisch berechneten Gradienten haben Versuche mit zufällig erzeugten Systemen keine entscheidenden Vor- beziehungsweise Nachteile der beiden Parametrierungen aufgezeigt. Insofern wird, auch um die teils schon recht komplizierten Ausdrücke bei der Gradientenberechnung nicht weiter zu verkomplizieren, auf einen Wechsel der Parametrierung verzichtet.

## 3.4 Anwendungsbeispiele

Die Besonderheit des in diesem Kapitel beschriebenen Verfahrens gegenüber ansonsten vergleichbarer Methoden zu Auslegung von Zustandsrückführungen, insbesondere [106], ist die Möglichkeit, Freiheitsgrade in der Systembeschreibung gezielt zu nutzen. Die prinzipielle Eignung der beschriebenen Implementierung wird in Abschnitt 3.4.1 jedoch zunächst anhand der Anwendung auf eine Reihe von Systemen, die keine Freiheitsgrade im Systementwurf aufweisen, gezeigt. Hier besteht die Möglichkeit eines Vergleichs mit in verschiedenen Veröffentlichungen gegebenen Re-

**Tabelle 3.1:** Resultate für die Beispielsysteme aus [24]

| System | | | feste Gewichtung ($\alpha = 1$) | | variable Gewichtung | | | *place* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. | $n$ | $m_c$ | $\|K_c\|_F$ | $\mathrm{kond}_F(\hat{V})$ | $\alpha$ | $\|K_c\|_F$ | $\mathrm{kond}_F(\hat{V})$ | $\|K_c\|_F$ | $\mathrm{kond}_F(\hat{V})$ |
| 1 | 4 | 2 | 1,4338 | 6,4384 | – | – | – | 1,4776 | 6,5650 |
| 2 | 5 | 2 | 328,96 | 49,931 | – | – | – | 413,82 | 52,870 |
| 3 | 4 | 2 | 71,649 | 45,705 | 0,75 | 52,872 | 49,056 | 59,409 | 53,426 |
| 4 | 3 | 2 | 9,4456 | 13,421 | – | – | – | 9,8419 | 13,429 |
| 5 | 5 | 2 | 4,9026 | 141,88 | 0,01 | 4,4007 | 142,49 | 4,8496 | 146,18 |
| 6 | 4 | 2 | 21,788 | 5,9090 | 0,99 | 19,606 | 5,9328 | 21,500 | 6,0018 |
| 7 | 8 | 3 | 28,949 | 11,129 | 0,9 | 18,607 | 11,892 | 22,421 | 12,375 |
| 8 | 4 | 3 | 69,090 | 6,1821 | 0,75 | 56,442 | 12,264 | 64,520 | 36,986 |
| 9 | 4 | 2 | 896,88 | 23,895 | 0,9999 | 825,73 | 23,924 | 847,01 | 23,961 |
| 10 | 4 | 2 | 1,5174 | 4,0000 | 0,5 | 1,4872 | 4,0015 | 1,4897 | 4,0029 |
| 11 | 4 | 2 | 6620,3 | 14067 | – | – | – | 6692,1 | 14618 |

sultaten. Um die Vorteile zu illustrieren, die sich durch die Berücksichtigung von Freiheitsgraden im Systementwurf ergeben können, wird der Entwurf für eines der Systeme wiederholt, wobei zusätzliche Freiheitsgrade in Form einiger Einträge der Systemmatrix zur Verfügung stehen. Ausführlicher wird das Verfahren zum integrierten Regler- und Strukturentwurf in Abschnitt 3.4.2 anhand eines anschaulichen Beispiels, eines Zweimassenschwingers, gezeigt.

### 3.4.1 Entwurfsbeispiele

In [24] findet sich eine Zusammenstellung von elf Systemen verschiedener Ordnung sowie für diese vorgegebene Eigenwertkonfigurationen, die in einer Reihe von Veröffentlichungen zur robusten Polvorgabe als Benchmark-Probleme verwendet werden [2, 28, 106, 121]. Die sich für diese Systeme ergebenden Konditionszahlen der normierten Eigenvektormatrix sowie der Frobenius-Norm der Matrix $K_c$ sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Dargestellt sind die Ergebnisse der Optimierung mit dem in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren. Zusätzlich werden die mittels der Implementierung der in [66] diskutierten Methodik in der Funktion *place* der Control System Toolbox™ von MATLAB (R2012b) erzielten Ergebnisse angegeben. Die Suche nach Lösungen des Optimierungsproblems (3.35) erfolgt hierbei, wie beschrieben, unter Verwendung des L-BFGS-B-Algorithmus. Für jedes System werden zehn zufällig generierte Vektoren der Variablen als Startwerte für die Optimierung verwendet. Dargestellt ist jeweils des beste Ergebnis. Als Gewichtungsfaktor wird zunächst $\alpha = 1$ gewählt. Für jedes der betrachteten Systeme ergibt sich hierbei ein Wert der Konditionszahl der Matrix der normierten Eigenvektoren, der kleiner als der mittels *place* erzielte Wert ist. Ist der sich ergebende Wert der Frobenius-Norm der Matrix $K_c$ größer als der entsprechende Wert der mittels *place* ermittelten Matrix, wird durch einfaches ausprobieren ein Wert für $\alpha$ ermittelt, für den beide Maßzahlen kleiner sind. Diese Werte sind in der Tabelle ebenfalls gezeigt.

Für einen Vergleich mit anderen Verfahren können die genannten Veröffentlichungen herangezogen werden. Zu beachten ist dabei, dass die Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises, für welche die Werte angegeben sind, teils unterschiedlich skaliert sind. Insofern sei insbesondere auf [28] sowie [106] verwiesen, wo sich Ergebnisse für eine Reihe verschiedener Verfahren finden, die einen direkten Vergleich mit den Werten aus Tabelle 3.1 erlauben.

Das siebte Beispielsystem ist, nach [24], ein System mit $n = 8$ Zuständen und $m_c = 3$ Eingängen, dass durch zufällig gewählte Matrizen gegeben ist. Für dieses werden exemplarisch die acht Diagonalelemente der Systemmatrix als Parameter angesetzt, die um $\pm 100\%$ ihres nominellen Wertes verändert werden dürfen. Die Durchführung des Entwurfs für dieses System mit $\alpha = 0{,}9$ und wiederum 10 zufällig gewählten Startwerten für den Vektor der Entwurfsvariablen ergibt $\|K_\mathrm{c}\|_\mathrm{F} = 2{,}0497$ sowie $\mathrm{kond}_\mathrm{F}(\hat{V}) = 10{,}518$, und somit erwartungsgemäß eine merkliche Verringerung des Wertes der Zielfunktion.

### 3.4.2 Zweimassenschwinger

Um die Vorteile, die sich durch die Berücksichtigung von Freiheitsgraden im Systementwurf ergeben können, anschaulich darzustellen, wird der in Bild 3.1 dargestellte Zweimassenschwinger als einfaches akademisches Beispielsystem betrachtet. Für diesen soll eine Regelung zur Minderung der Schwingungen der Struktur ausgelegt werden.

Es bezeichnet $z_i$ die Auslenkung der $i$-ten Masse und $u_\mathrm{c}$ eine auf die erste Masse wirkende Kraft. Die Parameter der Feder- und Dämpferelemente $c_1 = 1\,\mathrm{kN/m}$ und $d_1 = 1\,\mathrm{Ns/m}$ sowie die Masse $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ sind festgelegt. Neben den Parametern einer Zustandsrückführung sollen die Parameter der Feder $c_2$ und des Dämpferelements $d_2$, welche die beiden Massen verbinden, sowie die Masse $m_2$ im Entwurf berücksichtigt werden. Die hierfür zulässigen Bereiche der Parameter sind mit

$$\begin{aligned} 10\,\mathrm{N/m} \leq\ & c_2 \leq 250\,\mathrm{N/m} \\ 0\,\mathrm{Ns/m} \leq\ & d_2 \leq 20\,\mathrm{Ns/m} \\ 0{,}25\,\mathrm{kg} \leq\ & m_2 \leq 1\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

gegeben. Eine Zustandsraumdarstellung dieses Systems lässt sich mit dem Zustandsvektor

$$x = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dot{z}_1 & \dot{z}_2 \end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

in der Form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & -\frac{d_1+d_2}{m_1} & \frac{d_2}{m_1} \\ \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} & \frac{d_2}{m_2} & -\frac{d_2}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_\mathrm{c}. \tag{3.36}$$

angeben. Die Einträge der Matrizen der Zustandsraumdarstellung dieses Systems sind rationale Funktionen der beeinflussbaren Systemparameter, so dass nach einer geeigneten Transformation

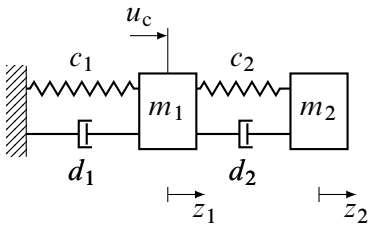



**Bild 3.1:** Zweimassenschwinger

der Parameter eine Darstellung der Form (3.1) vorliegt. Da das System nur eine Eingangsgröße ($m_c = 1$) aufweist, ist die Zustandsrückführung $K_c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ für eine gegebene Eigenwertkonfiguration und eine feste Wahl der Parameter $m_2$, $c_2$ und $d_2$ eindeutig bestimmt.

Um die für dieses Beispiel verwendete Wahl der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises zu motivieren, kann die Entwurfsaufgabe als Kombination der Auslegung eines gedämpften Tilgers, d.h. der Parameter der zweiten Masse, und einer aktiven Regelung zur Minderung der Schwingungen des Systems aufgefasst werden. Diese Interpretation lässt sich noch weiter strapazieren, indem bekannte Einstellregeln für solche gedämpften Tilger verwendet werden, um Werte für die Parameter $m_2$, $c_2$ und $d_2$ und der mit diesen resultierenden Eigenwerte des ungeregelten Systems zu erhalten. Von diesen ausgehend erfolgt die Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises.

Die vielleicht bekannteste Einstellregel für die Parameter gedämpfter Tilger ist die von Den Hartog [37]. Der verwendete Ansatz basiert auf der Wahl der Koeffizienten der Federsteifigkeit und des Dämpferelements eines gedämpften Tilgers, der mit einem ungedämpften Einmassenschwinger verbunden ist. Die Masse des Tilgers, beziehungsweise das Massenverhältnis $m_2/m_1$, wird hierbei als gegeben angesehen. Für die Federkonstante gilt

$$c_2^{\mathrm{DH}} = \frac{c_1 m_2}{m_1} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right)^2$$

und die Dämpferkonstante wird zu

$$d_2^{\mathrm{DH}} = 2\sqrt{c_1 m_1} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^3}{8\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^3}}$$

gewählt. Auch wenn diese Einstellregeln prinzipiell nur für ungedämpfte Einzelmassen gültig sind, können sie als Näherungslösung für schwach gedämpfte Systeme und sogar solche mit mehreren Resonanzen verwendet werden. Letzteres, sofern die Resonanzstellen nicht zu dicht beieinander liegen. Wird für die zweite Masse der maximal zulässige Wert $m_2^{\mathrm{DH}} = 1\,\mathrm{kg}$ gewählt, ergeben sich $c_2^{\mathrm{DH}} = 82{,}65\,\mathrm{N/m}$ und $d_2^{\mathrm{DH}} = 3{,}36\,\mathrm{Ns/m}$. Für das Gesamtsystem ergeben sich mit diesen Parametern die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2}^{\mathrm{DH}} = -0{,}82 \pm \mathrm{i}\,8{,}36 \quad \text{und} \quad \lambda_{3/4}^{\mathrm{DH}} = -1{,}08 \pm \mathrm{i}\,10{,}77. \tag{3.37}$$

Die zugehörigen Dämpfungsgrade $\zeta_i^{\mathrm{DH}} = -\operatorname{Re}(\lambda_i^{\mathrm{DH}})/|\lambda_i^{\mathrm{DH}}|$ sind

$$\zeta_{1/2}^{\mathrm{DH}} = 9{,}76 \cdot 10^{-2} \quad \text{und} \quad \zeta_{3/4}^{\mathrm{DH}} = 9{,}95 \cdot 10^{-2}.$$

Durch die Zustandsrückführung sollen diese Dämpfungsgrade weiter erhöht werden. Es werden für den geschlossenen Regelkreis die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -5{,}04 \pm \mathrm{i}\, 6{,}72 \quad \text{und} \quad \lambda_{3/4} = -6{,}5 \pm \mathrm{i}\, 8{,}66$$

vorgegeben, die jeweils einen Dämpfungsgrad von 0,6 aufweisen und deren Kennkreisfrequenzen denen der in (3.37) gegebenen Eigenwerte entsprechen. Die Zustandsrückführung, die diese Eigenwerte für die Wahl $m_2 = m_2^{\mathrm{DH}}$, $c_2 = c_2^{\mathrm{DH}}$ und $d_2 = d_2^{\mathrm{DH}}$ zuweist, ergibt sich zu

$$K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{DH}} = \begin{bmatrix} -561{,}5 & 561{,}56 & -192{,}73 & -19{,}37 \end{bmatrix}$$

mit $\|K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{DH}}\|_{\mathrm{F}} = 817{,}41$ sowie der Konditionszahl $\operatorname{kond}(\hat{V}^{\mathrm{DH}}) = 100{,}59$ der Matrix der normierten Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises.

Für die Zielfunktion des Optimierungsproblems (3.35) wird $\alpha = 0{,}5$ gewählt und die Optimierung der Parameter durchgeführt. Als Startwerte für das Optimierungsverfahren werden zwanzig zufällig generierte Parameterkonfigurationen verwendet, die in diesem Fall allerdings stets auf die Lösung $m_2^\star = 1\,\mathrm{kg}$, $c_2^\star = 82{,}92\,\mathrm{N/m}$ und $d_2^\star = 12{,}57\,\mathrm{Ns/m}$ führen. Für die Zustandsrückführung ergibt sich

$$K_{\mathrm{c}}^\star = \begin{bmatrix} 5{,}57 & -2{,}24 & -91{,}37 & -9{,}4 \end{bmatrix}$$

mit $\|K_{\mathrm{c}}^\star\|_{\mathrm{F}} = 92{,}05$ sowie $\operatorname{kond}(\hat{V}^\star) = 82{,}96$. Die Kondition der Matrix der Eigenvektoren und insbesondere die Norm der Reglermatrix können durch die Berücksichtigung der Freiheitsgrade im Systementwurf deutlich verringert werden. Wie sich dies auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises auswirkt wird im Folgenden kurz illustriert.

In Bild 3.2a ist der Verlauf der Auslenkung der ersten Masse für das ungeregelte sowie geregelte System mit den Parametern $m_2^{\mathrm{DH}}$, $c_2^{\mathrm{DH}}$ und $d_2^{\mathrm{DH}}$ und das geregelte System mit optimierten Parametern für eine impulsförmige Störung am Streckeneingang gezeigt. Die entsprechenden Verläufe der im geregelten Fall erzeugten Stellgrößen sind in Bild 3.2b dargestellt. Auf den sich ergebenden geringeren Betrag der Stellgröße für das System mit optimierten Parameterwerten, vor allem für Zeitpunkte kurz nach der Anregung, kann für die gewählte Form der Störung direkt aufgrund der deutlich kleineren Reglerverstärkungen, hier insbesondere des zur Geschwindigkeit der Masse $m_1$ korrespondierenden Koeffizienten, geschlossen werden.

Um den Robustheitsaspekt zu beleuchten, werden die Auswirkungen von Unsicherheiten in den Parametern $m_1$, $c_1$ und $d_1$ betrachtet. Es werden hierfür zufällig 500 Parametersätze erzeugt, wobei eine Gleichverteilung in einem Intervall von $\pm 5\%$ um die nominellen Werte dieser Parameter verwendet wird. Die resultierenden Eigenwertkonfigurationen des geschlossenen Regelkreises mit und ohne optimierte Parameter sind in Bild 3.3 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die sich einstellenden Abweichungen von den vorgegebenen Eigenwerten für die Systeme mit den Parametern $m_2^\star$, $c_2^\star$, $d_2^\star$ und der Rückführung $K_{\mathrm{c}}^\star$ wesentlich geringer ausfallen.

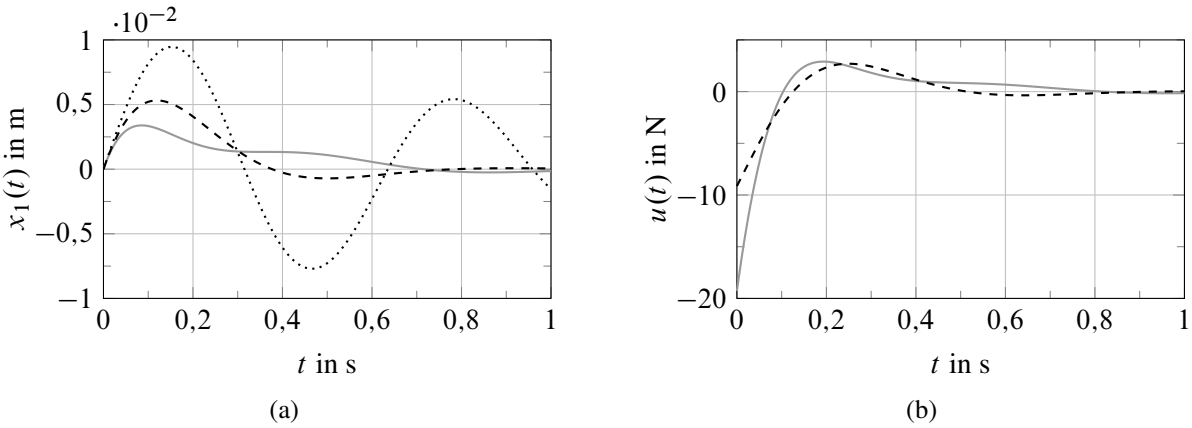



**Bild 3.2:** Impulsantworten des ungeregelten (·····) und des geregelten Systems (——) mit den Parametern $m_2^{\mathrm{DH}}$, $c_2^{\mathrm{DH}}$ und $d_2^{\mathrm{DH}}$ sowie des geregelten Systems mit optimierten Parameterwerten (- - -)

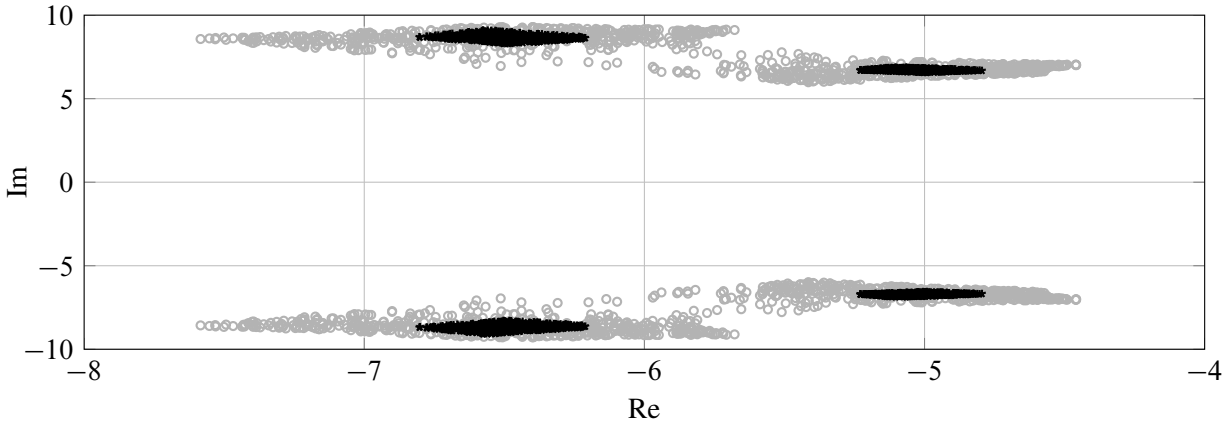



**Bild 3.3:** Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit (⋆) und ohne (∘) Optimierung der Freiheitsgrade im Systementwurf für verschiedene Störungen der Systemparameter

## 3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird eine Methodik für den Entwurf zur Polvorgabe mittels Zustandsrückführungen vorgestellt, die es erlaubt, neben den Freiheitsgraden, die solche Rückführungen bieten, Freiheitsgrade im Systementwurf zu berücksichtigen. Die hergeleitete parametrische Darstellung der Matrizen der Rückführung sowie der Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises werden in einem geeignet formulierten Optimierungsproblem genutzt, um die Robustheit sowie die Stellgrößennutzung zu verbessern.

Im Hinblick auf die Anwendbarkeit des Verfahrens stellt die Notwendigkeit der Kenntnis des gesamten Zustandsvektors die größte Einschränkung dar, da oftmals nur eine begrenzte Anzahl $p < n$ von Messgrößen zur Verfügung steht. Das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren orientiert sich bezüglich der Herleitung der Entwurfsgleichungen unter anderem am ersten Schritt des in [72] beschriebenen Verfahrens für den Entwurf parametrischer Ausgangsrückführungen. Die

weitere Vorgehensweise ebenfalls so anzupassen, dass Freiheitsgrade im Systementwurf berücksichtigt werden können, ist prinzipiell möglich. Hierbei ergeben sich allerdings, neben einer komplexeren Parametrierung, auch hinsichtlich eines entsprechend zu definierenden Optimierungsproblems eine Reihe weiterer Fragestellungen. Als Beispiel hierfür sei die im Allgemeinen notwendige Wahl einer Aufteilung des durch die Rückführung zuzuweisenden Spektrums genannt.

# 4 Direkte Verfahren zur Polvorgabe

Ausgangspunkt der in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren zur Polvorgabe ist die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sowie $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ eines linearen zeitinvarianten Systems mit einer strukturbeschränkten statischen Ausgangsrückführung

$$u = Ky, \quad K \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m\times p}. \tag{4.2}$$

Nach den Ausführungen in Kapitel 2 ist ersichtlich, wie eine Vielzahl von Problemstellungen, insbesondere aus dem Bereich des integrierten Regler- und Strukturentwurfs, in eine solche Darstellung überführt werden können. Es wird davon ausgegangenen, dass die Matrix der Rückführung eine affine Funktion $K(\kappa)$ von $q \leq mp$ Variablen, zusammengefasst im Vektor $\kappa \in \mathbb{R}^q$, ist, wobei die nicht konstanten Einträge von $K(\kappa)$ einzelnen Elementen von $\kappa$ entsprechen. Die für diesen Vektor hinsichtlich des Entwurfs zulässige Menge $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa \subset \mathbb{R}^q$ sei durch affine Gleichungen und Ungleichungen bezüglich $\kappa$ gegeben. Für die folgenden Betrachtungen ist es im Allgemeinen nicht entscheidend, ob die Elemente eines Vektors $\kappa$ oder die Einträge der Matrix $K$ selbst als die für den Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade angesehen werden, so dass zur Vereinfachung von Ausdrücken an einigen Stellen zwischen diesen beiden Formulierungen gewechselt wird. Insbesondere, wenn Strukturbeschränkungen der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Form vorliegen und $q$ deutlich kleiner als $m \cdot p$ ist, erscheint ersteres natürlicher. Die vorrangige Zielsetzung der in diesem Kapitel betrachteten Verfahren ist wiederum die Vorgabe der Eigenwerte der Systemmatrix

$$A_{\mathrm{cl}}(\kappa) = A + BK(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}C \tag{4.3}$$

des geschlossenen Regelkreises durch geeignete Wahl der im Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade.

Im folgenden Abschnitt werden zunächst zwei Möglichkeiten diskutiert, die Suche nach einer strukturbeschränkten Rückführung zur Zuweisung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises als Parameteroptimierungsproblem zu formulieren, und diese vergleichend gegenübergestellt. Die Problemformulierung wird dabei derart gewählt, dass es in einfacher Weise möglich ist, die vorgegebenen Eigenwerte als zusätzliche Entwurfsparameter aufzufassen, die in gegebenen Bereichen variieren dürfen. Die sich hierdurch ergebenden zusätzlichen Freiheitsgrade erlauben es unter Umständen, eine geeignete Lösung zu finden, selbst wenn die im Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade nicht für die Vorgabe beliebiger Eigenwertkonfigurationen ausreichen. Zudem

korrespondiert die Vorgabe von Eigenwerten in bestimmten Bereichen der komplexen Ebene oftmals eher mit den an den geschlossenen Regelkreis formulierten Anforderungen als die Vorgabe einer festen Eigenwertkonfiguration.

Reichen die im Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade aus, das Polvorgabeproblem zu lösen, stellt sich wiederum die Frage, inwiefern über eine reine Polvorgabe hinausgehende Entwurfsforderungen berücksichtigt werden können. In Abschnitt 4.2 wird die Möglichkeit betrachtet, den Entwurf in diesem Fall geeignet zu erweitern. Zum Abschluss des Kapitels wird in Abschnitt 4.3 der gesamte Entwurfsprozess, von der Erzeugung der für den Entwurf benötigten Modellstruktur bis hin zur Bestimmung des Reglers, für ein komplexes Anwendungsbeispiel beschrieben.

## 4.1 Kleinste-Quadrate-Formulierungen des Polvorgabeproblems

Im Folgenden werden die für den geschlossenen Regelkreis vorgegebenen Eigenwerte mit $\lambda_{\mathrm{v},i}$, $i = 1, \ldots, n$, und die für eine gegebene Wahl des Vektors $\kappa$ resultierenden Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ mit $\lambda_i(\kappa)$ bezeichnet, wobei mehrfache Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit mehrfach berücksichtigt werden. Soll die Suche nach einem Vektor $\kappa$, welcher das gewünschte Spektrum zuweist, als Optimierungsproblem formuliert werden, ist zunächst ein geeignetes Gütekriterium zu wählen. Eine intuitive Wahl für ein solches Gütekriterium ist die Bewertung des Abstands der Eigenwerte $\lambda_i(\kappa)$ von den vorgegebenen Werten $\lambda_{\mathrm{v},i}$. Es stellt sich hierbei jedoch die Frage, in welcher Weise eine geeignete Zuordnung zwischen den Elementen dieser beiden Mengen zu wählen ist. In diesem Zusammenhang kann zunächst eine Funktion

$$\tilde{d}(\kappa, \pi) := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},i}|^2$$

mit einer Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ definiert werden. $\mathcal{S}_n$ bezeichnet hierbei die Menge aller möglichen Permutationen der Zahlen von 1 bis $n$. Für eine gegebene Wahl des Vektors $\kappa$ und einer Permutation $\pi$ gibt die Funktion $\tilde{d}(\kappa, \pi)$ die Summe der Quadrate der Abstände zwischen den entsprechend sortierten komplexen Zahlen an. Wird aus allen möglichen Permutationen diejenige ausgewählt, welche diese Summe für ein gegebenes $\kappa$ minimiert, ergibt sich

$$d(\kappa) := \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},i}|^2. \tag{4.4}$$

Durch die Berücksichtigung aller möglichen Permutationen ist der Wert der Funktion $d(\kappa)$ invariant bezüglich der Sortierung der Eigenwerte, welche somit beliebig gewählt werden kann.

Gilt $d(\kappa^\star) = 0$, ist mit $\kappa^\star$ eine Lösung des Polvorgabeproblems gefunden. Im Rahmen eines Parameteroptimierungsproblems kann die Funktion $d(\kappa)$ auf der Suche nach einer solchen Lösung über alle zulässigen Vektoren $\kappa$ minimiert werden. Selbst wenn aufgrund unzureichender

Freiheitsgrade keine exakte Lösung gefunden werden kann, ergibt sich auf diese Weise unter Umständen eine geeignete Näherungslösung. Es gilt

$$d(\kappa) \geq \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},i}|^2.$$

Die Verwendung von Gütekriterien der Form (4.4) werden im Kontext inverser Eigenwertprobleme in [30] und in der Anwendung auf die Vorgabe von Eigenwerten mittels statischer Ausgangsrückführungen in [128] diskutiert. In Abschnitt 4.1.1 wird beschrieben, wie ausgehend von (4.4) ein geeignetes Optimierungsproblem für die in diesem Kapitel betrachtete Problemstellung abgeleitet und gelöst werden kann. Dies beinhaltet insbesondere auch den kombinatorischen Aspekt in der Definition der Funktion $d(\kappa)$. Der resultierende Entwurf baut auf der in [128] vorgestellten Vorgehensweise auf und erweitert diese um die Möglichkeiten, Strukturbeschränkungen der Rückführung zu berücksichtigen sowie die vorgegebenen Eigenwerte als zusätzliche Entwurfsfreiheitsgrade zu betrachten.

Als Alternative zu dieser Vorgehensweise wird in Abschnitt 4.1.2 eine weitere Möglichkeit vorgestellt, die vorliegende Entwurfsaufgabe in ein Optimierungsproblem zu überführen. Dieser auf der in [71] beschriebenen Methodik basierende Ansatz verwendet nicht direkt die Eigenwerte, sondern das charakteristische Polynom der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ zur Formulierung eines geeigneten Gütekriteriums. Eine Gegenüberstellung dieser beiden Problemformulierungen ist in Abschnitt 4.1.3 gegeben.

### 4.1.1 Formulierung mittels der Eigenwerte

Die Suche nach einem Vektor $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$, der $n$ reelle oder konjugiert komplexe Zahlen $\lambda_{\mathrm{v},i}$, mit $i = 1, \ldots, n$, als Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ zuweist, kann ausgehend von (4.4) als Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\kappa} \quad & \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},i}|^2 \\ \text{u. d. N.} \quad & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \end{aligned} \tag{4.5}$$

formuliert werden, wobei das gewählte Gütekriterium der mit dem Faktor $1/2$ multiplizierten Funktion $d(\kappa)$ entspricht. Die in (4.5) auftretenden Nebenbedingungen sind gemäß Vereinbarung durch affine Gleichungen und Ungleichungen bezüglich des Vektors $\kappa$ gegeben.

Die Auswertung des Gütekriteriums dieses Optimierungsproblems erfordert die Lösung eines kombinatorischen Problems. Es muss eine Zuordnung der für ein gegebenes $\kappa$ resultierenden Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ derart bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen von den vorgegebenen Eigenwerten minimiert wird. Bei $n$ Eigenwerten kommen hierfür $n!$ mögliche Zuordnungen in Frage. Liegen mehrfache Eigenwerte vor, reduziert sich die Anzahl der unterscheidbaren Zuordnungen, was jedoch für die folgenden Betrachtungen nicht gesondert berücksichtigt werden muss.

Es soll zunächst die Frage beantwortet werden, wie diese Funktion effizient ausgewertet werden kann. Das zu lösende Problem entspricht der Suche nach $n$ unabhängigen Elementen der Matrix

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} |\lambda_1(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},1}|^2 & \cdots & |\lambda_1(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},n}|^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\lambda_n(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},1}|^2 & \cdots & |\lambda_n(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},n}|^2 \end{bmatrix},$$

so dass deren Summe minimal ist [16]. Zwei Einträge der Matrix werden in diesem Zusammenhang als unabhängig bezeichnet, wenn sie sich weder in der selben Zeile noch in der selben Spalte befinden. Für das Ergebnis, die kleinstmögliche Summe unabhängiger Elemente, spielt es offensichtlich keine Rolle in welcher Weise die Zahlen $\lambda_i(\kappa)$ und $\lambda_{\mathrm{v},i}$, $i = 1, \ldots, n$, sortiert sind. Eine Lösung dieses Zuordnungsproblems liefert den gesuchten Wert der Gütefunktion des Optimierungsproblems zusammen mit der Permutation, für welche sich dieser ergibt. Allgemein werden Probleme dieser Form als lineare Zuordnungsprobleme (engl. *linear sum assignment problem*) bezeichnet. Eine Diskussion der Problemstellung, geeigneter Algorithmen und deren Implementierungen findet sich in [19]. Insbesondere existieren frei verfügbare Implementierungen der als Ungarische Methode bekannten Vorgehensweise mit einer Komplexität von $\mathcal{O}(n^3)$. Die Auswertung des Gütekriteriums aus (4.5) bzw. die Bestimmung einer optimalen Permutation $\pi$ ist mit diesen auch für größere Systemordnungen effizient möglich.

Wenngleich der kombinatorische Aspekt hinsichtlich der Auswertung des Gütekriteriums keine Schwierigkeiten bereitet, ist ersichtlich, dass die Funktion $d(\kappa)$ im Allgemeinen nicht differenzierbar ist. Selbst wenn davon ausgegangen werden könnte, dass $\lambda_i(\kappa)$ differenzierbare Funktionen in Abhängigkeit des Vektors $\kappa$ bezeichnen, bereiten Punkte, an denen die Zuordnung wechselt, in dieser Hinsicht sicherlich Probleme [30]. Zudem ist die Abbildung von den Einträgen einer Matrix auf die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bzw. auf die Eigenwerte als solche zwar stetig, im Allgemeinen aber nicht differenzierbar [65, 110]. Für die Suche nach Lösungen des Optimierungsproblems (4.5) scheinen sich somit zunächst Verfahren anzubieten, die nicht auf Ableitungen der Gütefunktion angewiesen sind. Wenngleich die Nutzung entsprechender Verfahren eine Option ist, wäre dies sicherlich ein Argument für die Verwendung alternativer Problemformulierungen, wie der im folgenden Abschnitt gegebenen, für die sich differenzierbare Gütefunktionen ergeben und entsprechend Informationen der ersten und eventuell zweiten Ableitungen verwendet werden können.

Wie in [128] diskutiert, ist es jedoch, unter Berücksichtigung gewisser Einschränkungen, durchaus zielführend, auf Verfahren zurückzugreifen, die Ableitungsinformationen verwenden. Dies lässt sich wie folgt motivieren. Es wird vorausgesetzt, dass $n$ voneinander verschiedene reelle oder als konjugiert komplexe Paare auftretende Zahlen $\lambda_{\mathrm{v},i}$, $i = 1, \ldots, n$, als Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Einfache Eigenwerte können bekanntermaßen in einer Umgebung, bezüglich der Einträge der entsprechenden Matrix, als differenzierbare Funktionen dieser Einträge ausgedrückt werden [87, 65]. Existiert nun ein $\kappa^\star$ , so dass $d(\kappa^\star) = 0$ gilt, dann existieren Umgebungen dieses Punktes, in denen alle Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ einfach sind und die Zuordnung zu den vorgegebenen Eigenwerten nicht wechselt. In einer solchen Umgebung ist die Funktion $d(\kappa)$ differenzierbar. Ausdrücke für die partiellen Ableitungen, die für

eine gewählte Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ resultieren, sind am Ende dieses Abschnitts angegeben. Diese sind für jeden Punkt, an dem die Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ einfach sind, definiert.

In der Nähe einer solchen Lösung bietet es sich demnach an, Verfahren für differenzierbare Funktionen zu nutzen. Es bleibt die Frage, wie sich die Situation darstellt, wenn von einem beliebigen Punkt aus gestartet werden soll. Prinzipiell besteht die Möglichkeit, zunächst ein direktes Suchverfahren, das nicht auf Gradienteninformationen angewiesen ist, zur Suche nach einer geeigneten Näherungslösung zu verwenden. Werden für den geschlossenen Regelkreis nur einfache Eigenwerte vorgegeben und existiert eine Lösung des Polvorgabeproblems, so zeigt sich jedoch, dass in der Praxis Verfahren für differenzierbare Funktionen auch für beliebige Startwerte sehr effektiv sind [128]. In Abschnitt 4.1.3 wird dies anhand einer Reihe zufällig generierter Systeme illustriert. Tatsächlich findet sich in der Dokumentation des dort zur Suche nach Lösungen des Optimierungsproblems verwendeten Verfahrens [49] ebenfalls ein Hinweis darauf, dass der Algorithmus auch bei isolierten Unstetigkeiten der Gütefunktion, die sich nicht in der Nähe lokaler Minima befinden, oftmals erfolgreich ist.

#### Vorgabe von Eigenwertbereichen

Die exakte Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises stellt für eine Vielzahl relevanter Problemstellungen eine unnötig restriktive Entwurfsforderung dar. Anstatt die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises fest vorzugeben, bietet es sich an, Bereiche in der komplexen Ebene festzulegen, in denen diese variieren dürfen [71]. Die hierdurch hinzugewonnen Freiheitsgrade für die Reglerauslegung sind insbesondere dann von Vorteil, wenn die Anzahl der Entwurfsfreiheitsgrade der Rückführung kleiner als die Anzahl der Eigenwerte ist und nicht davon ausgegangenen werden kann, dass beliebige Eigenwertkonfigurationen realisierbar sind. Ein solcher Fall wird in Abschnitt 4.3 ausführlich diskutiert.

Der zulässige Bereich für die vorgegebenen Eigenwerte $\lambda_{v,i} = \alpha_i + \mathrm{i}\beta_i$ wird durch obere und untere Schranken bezüglich deren Real- und Imaginärteile festgelegt. Wird davon ausgegangen, dass die mit den oberen und untere Schranken korrespondierenden Bereiche in der komplexen Ebene für verschiedene Eigenwerte keinen Schnitt aufweisen, ist dies analog zur Forderung einfacher fester Eigenwerte. Für $\nu$ konjugiert komplexe Eigenwertpaare und $n - 2\nu$ reelle Eigenwerte können entsprechend

$$\alpha := \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-\nu} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad \beta := \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_\nu \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.6}$$

als zusätzliche Variablen betrachtet werden. Unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Variablen und Nebenbedingungen resultiert das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\kappa,\alpha,\beta} \quad & \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta, \pi) \\ \text{u. d. N.} \quad & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \\ & \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i, \quad i = 1, \ldots, n-\nu \\ & \underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \overline{\beta}_i, \quad i = 1, \ldots, \nu \end{aligned} \tag{4.7}$$

zur Zuweisung der Eigenwerte, mit

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta,\pi) :=& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}|\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i-\mathrm{i}\beta_i|^2+\frac{1}{2}\sum_{i=\nu+1}^{n-\nu}|\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i|^2\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=n-\nu+1}^{n}|\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_{i-n+\nu}+\mathrm{i}\beta_{i-n+\nu}|^2.\end{aligned}$$

Der Sonderfall fest vorgegebener Eigenwerte ist in obiger Problemformulierung enthalten, wenn die oberen und unteren Schranken $\overline{\alpha}_i$ und $\underline{\alpha}_i$ bzw. $\overline{\beta}_i$ und $\underline{\beta}_i$ für die entsprechenden Variablen übereinstimmen. In diesem Fall ist es hinsichtlich der Implementierung sicherlich sinnvoll, diese Variablen direkt aus dem Optimierungsproblem zu entfernen, beziehungsweise konstant zu setzen.

#### Partielle Ableitungen des Gütekriteriums

Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta,\pi) =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\mathrm{i}\beta_i\right)\right)^2\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=\nu+1}^{n-\nu}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)\right)\right)^2\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=n-\nu+1}^{n}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_{i-n+\nu}\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)+\mathrm{i}\beta_{i-n+\nu}\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Für eine gegebene Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ ergeben sich die partiellen Ableitungen des Gütekriteriums aus (4.7) somit zu

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\kappa_j}\left(\tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta,\pi)\right)\\ &=\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i\right)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial\kappa_j}\right)+\mathrm{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\mathrm{i}\beta_i\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial\kappa_j}\right)\\ &+\sum_{i=\nu+1}^{n-\nu}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i\right)\right)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial\kappa_j}\right)+\mathrm{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial\kappa_j}\right)\\ &+\sum_{i=n-\nu+1}^{n}\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_{i-n+\nu}\right)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial\kappa_j}\right)\\ &+\sum_{i=n-\nu+1}^{n}\mathrm{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)+\mathrm{i}\beta_{i-n+\nu}\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial\kappa_j}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta,\pi)\right)\\ &=\begin{cases}-\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i\right)-\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i+n-\nu)}(\kappa)-\alpha_i\right), & i=1,\ldots,\nu\\ -\mathrm{Re}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa)-\alpha_i\right), & i=\nu+1,\ldots,n-\nu\end{cases}\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i}\left(\tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta,\pi)\right) = -\operatorname{Im}\left(\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \mathrm{i}\beta_i\right) + \operatorname{Im}\left(\lambda_{\pi(i+n-\nu)}(\kappa) + \mathrm{i}\beta_i\right).$$

Die in diesen Ausdrücken auftretenden komplexen Größen können in diesem Zusammenhang als Elemente eines zweidimensionalen reellen Vektorraums aufgefasst werden, so dass die Bildung der Real- bzw. Imaginärteile der Projektion auf die Koordinaten entspricht.

Die partiellen Ableitungen einfacher Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ sind durch

$$\frac{\partial \lambda_{\pi(i)}(\kappa)}{\partial \kappa_j} = w_{\pi(i)}^{\mathrm{H}} \frac{\partial A_{\mathrm{cl}}(\kappa)}{\partial \kappa_j} v_{\pi(i)}$$

gegeben, siehe beispielsweise [61]. Hierbei bezeichnen $v_{\pi(i)}$ und $w_{\pi(i)}$ zu dem entsprechenden Eigenwert gehörende Rechts- bzw. Linkseigenvektoren, die so normiert sind, dass $w_{\pi(i)}^{\mathrm{H}} v_{\pi(i)} = 1$ gilt.

Da die Struktur der Matrix $K(\kappa)$, wie in Kapitel 2 diskutiert, durchaus unterschiedlich gewählt werden kann, werden an dieser Stelle die partiellen Ableitungen der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(K)$ nach den Einträgen $k_{ij}$ der Matrix $K$ angegeben. Sind die nicht konstanten Einträge von $K(\kappa)$ durch einzelne Elemente des Vektors $\kappa$ gegeben, ergeben sich die Ableitungen nach den Elementen dieses Vektors in einfacher Weise. Es gilt

$$\frac{\partial A_{\mathrm{cl}}(K)}{\partial k_{ij}} = \frac{\partial}{\partial k_{ij}}\left(A + BK(I-DK)^{-1}C\right) \tag{4.8}$$

$$= Be_{m,i}e_{p,j}^{\mathrm{T}}(I-DK)^{-1}C + BK(I-DK)^{-1}De_{m,i}e_{p,j}^{\mathrm{T}}(I-DK)^{-1}C, \tag{4.9}$$

wobei $e_{i,j}$ den $j$-ten kanonischen Basisvektor im $\mathbb{R}^i$ bezeichnet. Die hierbei verwendete Beziehung für die Ableitung der Inversen einer Matrix findet sich beispielsweise in [87].

### 4.1.2 Formulierung mittels des charakteristischen Polynoms

Es wird wiederum die Systemmatrix

$$A_{\mathrm{cl}}(\kappa) = A + BK(\kappa))(I - DK(\kappa))^{-1}C$$

des geschlossenen Regelkreises betrachtet. Der Übersichtlichkeit halber soll im Folgenden zunächst von einer festen Wahl des Vektors $\kappa$ ausgegangen werden, für die sich konstante Matrizen $K$ bzw. $A_{\mathrm{cl}}$ ergeben. Die Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ entsprechen den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P_{\mathrm{cl}}(s) := \det(sI - A_{\mathrm{cl}}).$$

Einen Überblick über die in diesem Zusammenhang gebräuchliche Nomenklatur und grundlegende Zusammenhänge findet sich in Standardwerken zur linearen Algebra [41, 61, 63]. Die an dieser

Stelle gewählte Form des charakteristischen Polynoms ergibt ein normiertes oder auch monisches Polynom in $s$, welches eine Zerlegung

$$P_{\mathrm{cl}}(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)$$

gestattet, wobei $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, wiederum die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bezeichnen. Damit die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit $n$ vorgegebenen komplexen Zahlen $\lambda_{\mathrm{v},i}$, $i = 1, \ldots, n$, übereinstimmen, muss offensichtlich

$$P_{\mathrm{cl}}(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{\mathrm{v},i}) =: P_{\mathrm{v}}(s) \quad \forall s \in \mathbb{C} \tag{4.10}$$

gelten. Folgender Satz formuliert die wohlbekannte Tatsache, dass das Übereinstimmen der Funktionswerte an $n + 1$ paarweise verschiedenen Stützstellen notwendig und hinreichend für die Gleichheit zweier Polynome $n$-ten Grades ist.

**Satz 4.1** (Stoer [116]). *Zu beliebigen $n + 1$ Stützpunkten*

$$(a_i, b_i), \quad i = 1, \ldots, n + 1,$$

*mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ gibt es genau ein Polynom $P(s)$ mit Grad $n$ oder kleiner, so dass*

$$P(a_i) = b_i$$

*für $i = 1, \ldots, n + 1$ gilt.*

Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes gilt sowohl für reelle als auch für komplexe Polynome. Als Folgerung dieses Satzes gilt, dass zwei normierte Polynome mit dem Grad $n$ genau dann identisch sind, wenn sie an $n$ verschiedenen Stützpunkten übereinstimmen. Die in (4.10) geforderte Gleichheit der beiden normierten Polynome $P_{\mathrm{cl}}(s)$ und $P_{\mathrm{v}}(s)$ ist demnach genau dann gegeben, wenn

$$P_{\mathrm{cl}}(\xi_i) = P_{\mathrm{v}}(\xi_i), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.11}$$

für $n$ paarweise verschiedene Stützstellen $\xi_i$ gilt. Obige Beziehung ist äquivalent zur Forderung

$$\det(\xi_i I - A_{\mathrm{cl}}) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) = 0 \tag{4.12}$$

und geht für den speziellen Fall einfacher Regelungseigenwerte und der Wahl $\xi_i = \lambda_{\mathrm{v},i}$ über in

$$\det(\lambda_{\mathrm{v},i} I - A_{\mathrm{cl}}) = 0. \tag{4.13}$$

Im Hinblick auf die zu entwerfende Rückführung lässt sich somit Folgendes feststellen. Mit

$$\rho(s, \kappa) := P_{\mathrm{cl}}(s) - P_{\mathrm{v}}(s) = \det(sI - A_{\mathrm{cl}}(\kappa)) - P_{\mathrm{v}}(s)$$

stimmt nach (4.12) das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises genau dann mit dem vorgegebenen Polynom $P_{\mathrm{v}}(s)$ überein, wenn eine Lösung des sich für $n$ voneinander verschiedene Stützstellen $\xi_i$ ergebenden nichtlinearen Gleichungssystems

$$\rho(\xi_i, \kappa) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gefunden ist. Den Ausführungen in [71] folgend, werden diese Gleichungen zur Definition eines Optimierungsproblems mit dem Ziel der Zuweisung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises verwendet. Als Gütekriterium wird hierbei die gewichtete Summe

$$\tilde{J}_{\mathrm{det}}(\kappa) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i |\rho(\xi_i, \kappa)|^2, \quad w_i > 0,$$

für $n$ verschiedene Stützstellen $\xi_i$ gewählt. Ein Vektor $\kappa^\star$, der diese Gütefunktion minimiert, führt genau dann auf einen geschlossenen Regelkreis mit den gewünschten Eigenwerten $\lambda_{\mathrm{v},i}$ falls $\tilde{J}_{\mathrm{det}}(\kappa^\star) = 0$ gilt. Wird die Voraussetzung getroffen, dass für den geschlossenen Regelkreis $n$ voneinander verschiedene Eigenwerte vorgegeben werden, können diese als Stützstellen $\xi_i = \lambda_{\mathrm{v},i}$ verwendet werden und es ergibt sich

$$\tilde{J}_{\mathrm{det}}(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i |\rho(\lambda_{\mathrm{v},i}, \kappa)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i |\det(\lambda_{\mathrm{v},i} I - A_{\mathrm{cl}}(\kappa))|^2. \tag{4.14}$$

Der Wert der Determinante im $i$-ten Term der Summe entspricht dem Produkt der Differenzen der komplexen Zahl $\lambda_{\mathrm{v},i}$ und den Eigenwerten $\lambda_j(\kappa)$, $j = 1, \ldots, n$, der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$. Die Vorgabe mehrfacher Eigenwerte für den geschlossenen Regelkreis ist prinzipiell möglich, sofern die fehlenden Stützpunkte geeignet ersetzt werden.

Mit (4.14) kann ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min_{\kappa} \quad & \tilde{J}_{\mathrm{det}}(\kappa) \\ \text{u. d. N.} \quad & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \end{aligned} \tag{4.15}$$

zur Vorgabe einfacher Eigenwerte formuliert werden. Im Gegensatz zu den im vorangegangenen Abschnitt verwendeten Funktionen ist (4.14) in jedem Punkt der Definitionsmenge differenzierbar. Zur Suche nach Lösungen des Polvorgabeproblems bieten sich somit direkt eine Reihe von Verfahren für Optimierungsprobleme mit differenzierbaren Funktionen an, welche die Berücksichtigung der gegebenen Nebenbedingungen erlauben.

Im Hinblick auf die Auswertung dieses Gütekriteriums finden sich in [71] alternative Darstellungen, bei denen, anstatt der Determinanten $n \times n$-dimensionaler Matrizen, Determinanten $m \times m$- beziehungsweise $p \times p$-dimensionaler Matrizen ausgewertet werden. Mit den in (2.5) und (2.6)

diskutierten Zusammenhängen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\rho(\xi_i,\kappa) &= \det(\xi_i I - A_{\mathrm{cl}}(\kappa)) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) \\
&= \det(\xi_i I - A - BK(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}C) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) \\
&= \det(\xi_i I - A)\det(I_n - (\xi_i I - A)^{-1}BK(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}C) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) \\
&= \det(\xi_i I - A)\det(I_m - K(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}C(\xi_i I - A)^{-1}B) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) \\
&= \det(\xi_i I - A)\det(I_m - K(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}H(\xi_i)) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) \\
&= \frac{\det(\xi_i I - A)}{\det(I - K(\kappa)D)}\det(I_m - K(\kappa)G(\xi_i)) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

bzw. entsprechend

$$\begin{aligned}
\rho(\xi_i,\kappa) &= \det(\xi_i I - A)\det(I_p - H(\xi_i)K(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i) \\
&= \frac{\det(\xi_i I - A)}{\det(I - DK(\kappa))}\det(I_p - G(\xi_i)K(\kappa)) - P_{\mathrm{v}}(\xi_i)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

mit $H(\xi_i) := C(\xi_i I - A)^{-1}B$ und $G(\xi_i) = C(\xi_i I - A)^{-1}B + D$, sofern die in den Ausdrücken auftretenden Inversen existieren. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Stützstellen $\xi_i$ keinem Eigenwert des offenen Regelkreises entsprechen und der geschlossene Regelkreis sinnvoll konfiguriert ist.

#### Wahl der Gewichtungsfaktoren

Eine Wahl der Gewichte $w_i$, die sich im Hinblick auf das resultierende Optimierungsproblem als günstig erwiesen hat, wird in [71] diskutiert. Für das in (4.14) gegebene Gütekriterium werden Gewichte

$$w_i := \left|\frac{1}{P_{\mathrm{v}}'(\lambda_{\mathrm{v},i})}\right|^2 \tag{4.18}$$

verwendet, wobei

$$P_{\mathrm{v}}'(\lambda_{\mathrm{v},i}) = \prod_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}}(\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_{\mathrm{v},j})$$

mit $\mathcal{I} := \{1,\ldots,n\}$ der Ableitung des Polynoms $P_{\mathrm{v}}(s)$ ausgewertet am Punkt $\lambda_{\mathrm{v},i}$ entspricht. Es soll an dieser Stelle nicht die in [71] beschriebene Motivation dieser Gewichte wiederholt, sondern lediglich eine eher qualitative und recht anschauliche Deutung dieser Wahl gegeben werden. Wie bereits erwähnt, kann (4.14) auch unter Verwendung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises angegeben werden. Es gilt

$$\tilde{J}_{\det}(\kappa) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i|\det(\lambda_{\mathrm{v},i}I - A_{\mathrm{cl}}(\kappa))|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\left|\prod_{j\in\mathcal{I}}(\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_j(\kappa))\right|^2. \tag{4.19}$$

Für die Auswertung der Gütefunktion spielt die Sortierung der Eigenwerte keine Rolle, da die Produkte jeweils sämtliche Paarungen berücksichtigen. Für die folgenden Überlegungen wird jedoch davon ausgegangen, dass, wie im letzten Abschnitt, eine Zuordnung gewählt ist, welche die Summe der quadrierten Abstände minimiert. Es werden die Terme der Summe in obigem Ausdruck

$$w_i \left| \prod_{j\in\mathcal{I}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_j(\kappa)) \right|^2 = \left| \frac{\prod_{j\in\mathcal{I}} (\lambda_{\mathrm{v,i}} - \lambda_j(\kappa))}{\prod_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_{\mathrm{v},j})} \right|^2 = |\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_i(\kappa)|^2 \left| \frac{\prod_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_j(\kappa))}{\prod_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_{\mathrm{v},j})} \right|^2$$

für Punkte in einer Umgebung einer Lösung $\kappa^\star$ mit $\tilde{J}_{\mathrm{det}}(\kappa^\star) = 0$ des Polvorgabeproblems betrachtet, so dass die Abstände der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises von den vorgegebenen Werten deutlich kleiner sind als die Abstände der vorgegebenen Werte untereinander. In diesem Fall ist

$$\left| \frac{\prod_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_j(\kappa))}{\prod_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_{\mathrm{v},j})} \right|^2 \approx 1$$

und die Terme der Summe entsprechen ungefähr den quadrierten Abständen, wie sie sich in (4.4) ergeben.

#### Vorgabe von Eigenwertbereichen

Analog zu Abschnitt 4.1.1 können die Real- und Imaginärteile der vorgegebenen Eigenwerte $\lambda_{\mathrm{v},i} = \alpha_i + \mathrm{i}\beta_i$ in (4.15) bzw. (4.14) als zusätzliche Freiheitsgrade im Entwurf betrachtet werden. Für $\nu$ konjugiert komplexe Eigenwertpaare und $n - 2\nu$ reelle Eigenwerte werden diese wiederum gemäß (4.6) zu Vektoren $\alpha$ und $\beta$ zusammengefasst und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \min_{\kappa,\alpha,\beta} \quad & J_{\mathrm{det}}(\kappa,\alpha,\beta) \\ \text{u. d. N.} \quad & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \\ & \underline{\alpha}_i \le \alpha_i \le \overline{\alpha}_i, \quad i = 1,\dots,n-\nu \\ & \underline{\beta}_i \le \beta_i \le \overline{\beta}_i, \quad i = 1,\dots,\nu \end{aligned} \tag{4.20}$$

mit

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{det}}(\kappa,\alpha,\beta) = & \sum_{i=1}^{\nu} w_i(\alpha,\beta)|\rho(\alpha_i + \mathrm{i}\beta_i,\kappa)|^2 \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=\nu+1}^{n-\nu} w_i(\alpha,\beta)\rho(\alpha_i,\kappa)^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

In Abhängigkeit der Daten eines konkreten Entwurfsproblems bieten sich im Hinblick auf die Implementierung verschiedene Formulierungen der Gütefunktion an. Wie in (4.16) bzw. (4.17)

gezeigt, resultieren insbesondere für fest vorgegebene Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises und einer Anzahl von Ein- bzw. Ausgangsgrößen, die kleiner als die Anzahl der Zustandsgrößen ist, äquivalente Ausdrücke der Gütefunktion, die eine effizientere Auswertung erlauben.

Auf die Herleitung des Gradienten bzw. der partiellen Ableitungen der Gütefunktion wird an dieser Stelle verzichtet. Zwar sind diese nicht sonderlich kompliziert, bedingt durch die Abhängigkeiten der Gewichte $w_i(\alpha, \beta)$ von den Elementen der Vektoren $\alpha$ und $\beta$ allerdings recht langwierig. Hinzu kommt, dass sich, wie zuvor diskutiert, unter Umständen alternative Formulierungen der Gütefunktion anbieten, für die sich entsprechend angepasste Formulierungen des Gradienten ergeben. Es ist allerdings anzumerken, dass das Verwenden analytisch berechneter Gradienten für alle diskutierten Formulierungen des Entwurfsproblems dringend zu empfehlen ist, da die Approximation mittels finiter Differenzen oftmals sehr unbefriedigende Ergebnisse liefert.

### 4.1.3 Gegenüberstellung der Gütekriterien

Um die generelle Eignung der in Abschnitt 4.1.1 und Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Optimierungsprobleme zur Polvorgabe zu veranschaulichen, werden Resultate für eine Reihe zufällig generierter Systeme gezeigt. Zu diesem Zweck werden für Einträge der Matrizen $A$, $B$ und $C$ der Zustandsraumdarstellung normalverteilte (Pseudo-)Zufallszahlen mit Erwartungswert 0 und Varianz 50 gewählt. Für den geschlossenen Regelkreis werden als fest vorgegebene Eigenwerte die Elemente des Spektrums einer ebenfalls entsprechend zufällig gewählten $n \times n$-dimensionalen Matrix gewählt, von deren Realteil jeweils 50 abgezogen wird. Da die Vorgabe sinnvoller Strukturbeschränkungen der Rückführung sowie zulässiger Bereiche für die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises für zufällig generierte Systeme recht umständlich ist, wird an dieser Stelle darauf verzichtet. In Abschnitt 4.3 werden diese zusätzlichen Entwurfsmöglichkeiten anhand eines komplexen Anwendungsbeispiels diskutiert.

Für das in Abschnitt 4.1.2 beschriebene Optimierungsproblem mit nichtlinearem, differenzierbarem Gütekriterium und linearen Nebenbedingungen liegt es nahe, einen Algorithmus zu verwenden, der jeweils die analytisch berechneten Gradienten und zumindest Approximationen der Hesse-Matrix nutzt. Wie bereits ausgeführt, bietet sich, motiviert durch die in [128] diskutierten Ergebnisse, auch für das Gütekriterium der Form (4.4) die Verwendung eines entsprechenden Verfahrens für differenzierbare Funktionen an. Insofern kann, auch der besseren Vergleichbarkeit halber, in beiden Fällen der gleiche Algorithmus mit identischen Einstellungen verwendet werden. Bedingt durch die Verfügbarkeit einer leistungsfähigen Implementierung wird hierfür das in der Funktion *e04uc* der NAG-Bibliothek [120] implementierte SQP-Verfahren, siehe auch [49], verwendet. Insbesondere ist dieser Algorithmus ebenfalls geeignet, die in (4.7) bzw. (4.20) formulierten Nebenbedingungen zu berücksichtigen und kann somit auch im Falle gegebener Strukturbeschränkungen bzw. der Vorgabe von Eigenwertbereichen genutzt werden.

Tabelle 4.1 zeigt die erzielten Resultate für verschiedene Dimensionen der Zustands-, Ein- und Ausgangsgrößen für jeweils einhundert zufällig erzeugte Systeme. Die Kürzel *EW* bzw. *DET* stehen für die Gütekriterien aus Abschnitt 4.1.1 bzw. Abschnitt 4.1.2. Für letzteres wird hierbei die

**Tabelle 4.1:** Resultate für jeweils 100 zufällig generierte Systeme mit den angegebenen Dimensionen der Zustands-, Ein- und Ausgangsgrößen

| | *DET* | | | *EW* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(n, m, p)$ | Erfolgsrate | Laufz. in s | $\epsilon$ | Erfolgsrate | Laufz. in s | $\epsilon$ |
| (3,2,2) | 100 % | 0,01 | $2{,}4 \cdot 10^{-11}$ | 100 % | 0,012 | $1{,}5 \cdot 10^{-11}$ |
| (4,2,2) | 65 % | 0,018 | $3{,}6 \cdot 10^{-11}$ | 71 % | 0,021 | $4{,}5 \cdot 10^{-11}$ |
| (7,3,3) | 98 % | 0,111 | $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ | 97 % | 0,043 | $1{,}1 \cdot 10^{-9}$ |
| (8,4,2) | 57 % | 0,154 | $4{,}2 \cdot 10^{-10}$ | 61 % | 0,077 | $8{,}9 \cdot 10^{-11}$ |
| (9,5,2) | 85 % | 0,239 | $1 \cdot 10^{-9}$ | 89 % | 0,085 | $8{,}9 \cdot 10^{-11}$ |
| (12,4,4) | 88 % | 0,619 | $7 \cdot 10^{-10}$ | 93 % | 0,154 | $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ |
| (16,5,4) | 89 % | 1,896 | $6{,}7 \cdot 10^{-09}$ | 88 % | 0,33 | $2{,}5 \cdot 10^{-9}$ |
| (20,5,5) | 66 % | 4,001 | $9{,}1 \cdot 10^{-09}$ | 81 % | 0,665 | $4{,}1 \cdot 10^{-10}$ |
| (25,5,5) | 9 % | 10,444 | $9{,}1 \cdot 10^{-08}$ | 14 % | 3,087 | $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ |

Formulierung basierend auf (4.17) genutzt, da diese für die gegebenen Systemdimensionen insbesondere im Hinblick auf die Laufzeit Vorteile verspricht. Die dargestellte Erfolgsrate gibt an, wie groß der Anteil der Systeme ist, für die der Optimierungsalgorithmus ein $\kappa^\star \in \mathbb{R}^{mp}$ liefert, so dass

$$\sqrt{\min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa^\star) - \lambda_{\mathrm{v},i}|^2} = \epsilon < 10^{-3} \tag{4.22}$$

gilt, was der 2-Norm der Abweichungen von den vorgegebenen Eigenwerten entspricht. Da diese Schranke bzw. $\epsilon$ nicht als Abbruchkriterium im verwendeten Optimierungsalgorithmus auftritt, wird jeweils der Median der Werte von $\epsilon$ angegeben, der sich für die vom Algorithmus erfolgreich bestimmten Lösungen ergibt. Die angegebene Laufzeit bezeichnet wiederum den Median der Laufzeiten aller erfolgreichen Optimierungsläufe. Als Startwert für wird jeweils $\kappa = 0$ vorgegeben. Der Verzicht auf die Variation des Startwerts bei der Ermittlung der Erfolgsrate dient dazu, einen generellen Eindruck des Verhaltens der betrachteten Optimierungsverfahren unter den gegebenen Bedingungen zu vermitteln. Für den Algorithmus wird die maximal zulässige Anzahl an Iterationen auf 5000 festgelegt, für alle anderen Einstellungen werden die Vorgabewerte verwendet.

Zunächst kann festgestellt werden, dass beide Verfahren generell geeignet sind, das Polvorgabeproblem für eine Reihe von Systemen, für die $mp \geq n$ gilt, zu lösen. Erwartungsgemäß ist die Erfolgsrate für Systeme, bei denen $mp > n$ gilt, tendenziell höher als für solche, bei denen $mp = n$ gewählt wurde. Hierbei ist anzumerken, dass die absoluten Werte der angegebenen Evaluierungskriterien bei veränderten Varianzen der verwendeten Zufallszahlen sowie der erwähnten Verschiebung des Realteils der vorgegebenen Eigenwerte in der komplexen Ebene deutlich unterschiedlich ausfallen. Beispielsweise führt eine Anpassung der erwähnten Verschiebung der Realteile der vorgegebenen Eigenwerte zu deutlichen Änderungen insbesondere bei der Erfolgsrate. Dies ist in Tabelle 4.2 dargestellt. Die absoluten Werte der Laufzeiten werden sicherlich maßgeblich von der verwendeten Hardware, in diesem Fall ein Desktop-Rechner mit Intel® Core™

**Tabelle 4.2:** Resultate für jeweils 100 zufällig generierte Systeme mit $(n,m,p) = (9,5,2)$ für unterschiedliche Verschiebungen der Realteile der vorgegebenen Eigenwerte

| | *DET* | | | *EW* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Verschiebung | Erfolgsrate | Laufz. in s | $\epsilon$ | Erfolgsrate | Laufz. in s | $\epsilon$ |
| 0 | 89 % | 0,158 | $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ | 90 % | 0,061 | $7{,}2 \cdot 10^{-11}$ |
| −50 | 85 % | 0,239 | $1 \cdot 10^{-9}$ | 89 % | 0,085 | $8{,}9 \cdot 10^{-11}$ |
| −100 | 56 % | 0,531 | $4{,}3 \cdot 10^{-8}$ | 74 % | 0,217 | $3{,}8 \cdot 10^{-10}$ |
| −150 | 9 % | 1,239 | $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ | 34 % | 0,539 | $5{,}9 \cdot 10^{-09}$ |

i5-4670, und den Implementierungen der Gütefunktionen, deren Gradienten und des verwendeten Optimierungsalgorithmus bestimmt. Hierauf wird an dieser Stelle allerdings nicht ausführlicherer eingegangen, da der Vergleich der Laufzeiten der beiden Verfahren relativ zueinander und in qualitativer Hinsicht von Interesse ist.

Im Vergleich zeigen sich hinsichtlich der betrachteten Problemformulierungen insgesamt Vorteile für das Gütekriterium aus Abschnitt 4.1.1. Dieser Eindruck wird durch den Umstand verstärkt, dass die gewählten Beispiele, mit fest vorgegebenen Eigenwerten, ohne Durchgriffsterm und mit einer relativ zur Anzahl der Eigenwerte kleinen Anzahl von Ausgangsgrößen der Systeme, nach (4.17) eine in diesem Fall besonders effizient auszuwertende Form des Gütekriteriums aus Abschnitt 4.1.2 gestatten.

## 4.2 Berücksichtigung weiterer Entwurfsforderungen

In Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade für den Regler- und im Speziellen auch für den Strukturentwurf ergeben sich, wie auch beim Entwurf von Zustandsrückführungen, Möglichkeiten, weitere Entwurfsforderungen zu berücksichtigen. Je nach Anwendung kommen hierfür eine Reihe verschiedener Kriterien in Frage. Im Folgenden soll anhand zweier Beispiele exemplarisch erläutert werden, in welcher Form die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Optimierungsprobleme angepasst werden können, um neben der Vorgabe der Eigenwerte weitere Entwurfszeile zu erfüllen. In Anlehnung an [71] wird in Abschnitt 4.2.1 zunächst die Minimierung der gewichteten Norm der Einträge der Matrix der Rückführung betrachtet. Insbesondere wenn die zu entwerfende statische Rückführung, wie in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, tatsächlich einer dynamischen Rückführung entspricht oder Freiheitsgrade des Strukturentwurfs beschreibt, ist die Bewertung der Größe der Einträge der Matrix $K(\kappa)$ jedoch oftmals wenig zielführend. Als Alternative wird die Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm geeignet gewählter Übertragungsmatrizen des geschlossenen Regelkreises betrachtet.

Grundsätzlich können beide der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Optimierungsprobleme (4.7) und (4.21) bzw. die mit diesen assoziierten Gütekriterien als Ausgangspunkt der fol-

genden Betrachtungen dienen. Da der Wert des in (4.7) verwendeten Gütekriteriums

$$J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta) := \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \tilde{J}_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta, \pi) \tag{4.23}$$

im Hinblick auf die Lage der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises direkt interpretierbar ist und um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wird dieses im Folgenden verwendet. In den resultierenden Entwurfsproblemen kann dieser Ausdruck jedoch entsprechend durch die Funktion (4.21) ersetzt werden.

Zusätzliche Entwurfsforderungen lassen sich auf verschiedene Art mit dem beschriebenen Polvorgabentwurf verbinden. Bedingt durch die übergeordnete Zielsetzung, eine durch die Pol- bzw. Polbereichsvorgabe gegebene Dynamik zu gewährleisten, und speziell im Hinblick auf die Berücksichtigung der $\mathcal{H}_2$-Norm als Gütekriterium, welche nur für stabile Systeme definiert ist, wird im Folgenden eine Formulierung gewählt, die das Polvorgabekriterium als Nebenbedingung berücksichtigt. Der Entwurf selbst erfolgt in zwei Schritten. In einem ersten Entwurfsschritt wird eine Lösung des Polvorgabeproblems (4.7) gesucht. Ein zulässiger Punkt $(\kappa^\star, \alpha^\star, \beta^\star)$ wird entsprechend als Lösung des Polvorgabeproblems betrachtet, wenn $J_{\mathrm{ew}}(\kappa^\star, \alpha^\star, \beta^\star) = \epsilon$ für einen ausreichend kleinen Wert $\epsilon$ gilt, so dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises in guter Näherung mit den vorgegebenen Eigenwerten übereinstimmen. Ist ein solcher Punkt gefunden, wird dieser als Startwert für ein weiteres Optimierungsproblem verwendet, das die zusätzlichen Anforderungen in einem geeignet gewählten Gütekriterium und die Funktion $J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta)$ als Nebenbedingung berücksichtigt. Hierbei wird ein $\gamma \geq \epsilon$ definiert, welches als obere Schranke für die Abweichung von den vorgegebenen Eigenwerten bzw. Eigenwertbereichen dient. Es wird vorausgesetzt, dass dieser Wert deutlich kleiner als der kleinste Abstand der vorgegebenen Eigenwerte untereinander sowie deren Abstand von der imaginären Achse gewählt wird, so dass der geschlossene Regelkreis für zulässige $(\kappa, \alpha, \beta)$ mit $J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta) \leq \gamma$ einfache Eigenwerte mit negativem Realteil aufweist.

### 4.2.1 Minimierung der Reglernorm

Für die Minimierung der Reglernorm kann somit ein Optimierungsproblem in der Form

$$\begin{aligned} \min_{\kappa,\alpha,\beta} \quad & \sum_{i=1}^{q} c_i \kappa_i^2 \\ \text{u. d. N.} \quad & J_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta) \leq \gamma \\ & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \\ & \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i, \quad i = 1, \ldots, n-\nu \\ & \underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \overline{\beta}_i, \quad i = 1, \ldots, \nu \end{aligned} \tag{4.24}$$

angegeben werden, wobei $c_i \geq 0$ geeignet gewählte Gewichtungskoeffizienten bezeichnen. Da voraussetzungsgemäß die nicht konstanten Einträge der Matrix $K(\kappa)$ den Elementen des Vektors $\kappa$ entsprechen, ist dies äquivalent zu einer Bewertung der Einträge der Matrix der Rückführung.

Sind alle Koeffizienten $c_i > 0$, entspricht die verwendete Gütefunktion dem Quadrat einer gewichteten 2-Norm des Vektors $\kappa$. Im Allgemeinen ist es jedoch sinnvoll, auch $c_i = 0$ zuzulassen, da beispielsweise die Bewertung von Einträgen des Vektors $\kappa$, die Freiheitsgrade bei der Wahl von Parametern der Regelstrecke beschreiben, oftmals nicht gewünscht ist.

Das Optimierungsproblem (4.24) weist eine quadratische Gütefunktion sowie, zusätzlich zu den konvexen Nebenbedingungen, eine nichtlineare Ungleichungsbedingung bezüglich der Funktion $J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta)$ auf. Wird für diese Funktion die Formulierung mittels des charakteristischen Polynoms (4.21) verwendet, sind alle im Optimierungsproblem auftretenden Funktionen differenzierbar und es können generell Verfahren, welche die Berücksichtigung nichtlinearer Gütekriterien sowie Nebenbedingungen erlauben, zur Suche nach Lösungen der Entwurfsaufgabe genutzt werden. Insbesondere auch das bereits in Abschnitt 4.1.3 erwähnte SQP-Verfahren. Im Falle der Formulierung (4.23) ist die Nebenbedingung nicht an jedem Punkt differenzierbar. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 4.1.1 lässt sich allerdings feststellen, dass auch an dieser Stelle die Verwendung entsprechender Verfahren für Optimierungsprobleme mit differenzierbaren Funktionen durchaus erfolgversprechend ist. Insbesondere ist die Funktion $J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta)$ bei geeignet gewählter Schranke $\gamma$ für alle zulässigen Punkte differenzierbar. Dies berücksichtigend, bieten sich Algorithmen an, die ausgehend von einem zulässigen Punkt in jeder Iteration stets zulässige Punkte generieren. Beispiele für solche Algorithmen basierend auf SQP-Verfahren finden sich in [77, 76] und für Innere-Punkte-Verfahren mit entsprechenden Optionen in [26].

### 4.2.2 Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm

In den vorangegangenen Abschnitten werden die Entwurfsforderungen anhand des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises als autonomes System beziehungsweise hinsichtlich der Matrix der statischen Rückführung formuliert. Zusätzliche Flexibilität bei der Wahl des Gütekriteriums ergibt sich durch die Berücksichtigung des Übertragungsverhaltens des Systems bezüglich geeignet gewählter Ein- und Ausgangsgrößen.

Dementsprechend wird im Folgenden die Systemdarstellung (4.1) mit der Rückführung (4.2) um externe vektorwertige Ein- und Ausgänge $w(t)$ bzw. $z(t)$ erweitert, siehe Bild 4.1. Die Systemdarstellung ergibt sich in übersichtlicher Form mit der aus Kapitel 2 bekannten Notation zu

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_{\mathrm{w}} & B \\ \hline C_{\mathrm{z}} & D_{\mathrm{zw}} & D_{\mathrm{zu}} \\ C & D_{\mathrm{yw}} & D \end{array}\right].$$

Für den geschlossenen Regelkreis beziehungsweise dessen Übertragungsverhalten gilt nach (2.3)

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{zw}}(s) &:= \mathcal{F}_{\mathrm{l}}(G(s), K) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A + BK(I - DK)^{-1}C & B_{\mathrm{w}} + BK(I - DK)^{-1}D_{\mathrm{yw}} \\ \hline C_{\mathrm{z}} + D_{\mathrm{zu}}K(I - DK)^{-1}C & D_{\mathrm{zw}} + D_{\mathrm{zu}}K(I - DK)^{-1}D_{\mathrm{yw}} \end{array}\right] \\ &=: \left[\begin{array}{c|c} A_{\mathrm{cl}} & B_{\mathrm{cl}} \\ \hline C_{\mathrm{cl}} & D_{\mathrm{cl}} \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

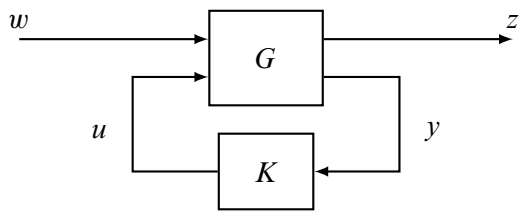



**Bild 4.1:** Regelkreisstruktur zur Berücksichtigung des Übertragungsverhaltens

Die Abhängigkeit der Matrix der Rückführung beziehungsweise der Matrizen des geschlossenen Regelkreises von dem Vektor $\kappa$ der Entwurfsparameter wird der Übersichtlichkeit halber nur im Zusammenhang mit dem resultierenden Optimierungsproblem explizit angegeben.

Sind geeignete Ein- und Ausgänge definiert, stellt sich die Frage, wie die Güte des Regelkreises anhand dieser zu bewerten ist. Im Allgemeinen wird hierfür die Anforderung formuliert, dass der Ausgang $z$, der beispielsweise der Regeldifferenz oder der Stellgröße entspricht, möglichst klein ist. Um diese vage gehaltene Forderung in eine quantitative Aussage zu überführen, finden Signal- und Systemnormen Anwendung, die Maße für die Größe der entsprechenden Signale beziehungsweise der Verstärkung des Systems definieren. Ausführliche Beschreibungen der gebräuchlichsten Normen finden sich beispielsweise in [40] und [130]. Eines der in diesem Zusammenhang bekanntesten Kriterien, das auch im Folgenden zur Bewertung des geschlossenen Regelkreises herangezogen wird, ist die $\mathcal{H}_2$-Norm. Zur Begründung dieser Wahl wird zunächst ein Überblick über die Eigenschaften dieser Norm sowie entsprechender Interpretationen im Zeit- und Frequenzbereich gegeben. Im Hinblick auf die resultierende Entwurfsaufgabe ist im Besonderen die Differenzierbarkeit dieser Norm, bzw. deren Quadrats, von Bedeutung.

Definitionsgemäß ist die $\mathcal{H}_2$-Norm

$$\|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{spur}\left(G_{\mathrm{zw}}^{\mathrm{H}}(\mathrm{i}\omega)G_{\mathrm{zw}}(\mathrm{i}\omega)\right) d\omega} \tag{4.26}$$

nur für stabile und streng propere Systeme erklärt [130]. Hinsichtlich des in (4.25) gegebenen Regelkreises bedeutet das, dass die $\mathcal{H}_2$-Norm nur angegeben werden kann, sofern die Bedingungen

$$\sigma(A_{\mathrm{cl}}) \in \mathbb{C}_- \quad \text{und} \quad D_{\mathrm{cl}} = D_{\mathrm{zw}} + D_{\mathrm{zu}}K(I - DK)^{-1}D_{\mathrm{yw}} = 0$$

erfüllt sind. Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird im Folgenden durch die Vorgabe entsprechender Eigenwerte bzw. Eigenwertbereiche sichergestellt, während die zweite Bedingung als Nebenbedingung im Entwurf zu berücksichtigen oder durch geeignete Wahl der betrachteten Ein- und Ausgänge sicherzustellen ist. Im Folgenden wird, da dies meist sinnvoll möglich ist, von letzterem ausgegangen.

Die verschiedenen Interpretationen der $\mathcal{H}_2$-Norm finden sich in der Standardliteratur, siehe [40], [112], [130] oder auch [111]. Bezüglich der Betrachtung des Frequenzgangs lässt sich zunächst der Unterschied zur $\mathcal{H}_\infty$-Norm herausstellen. Der in (4.26) gegebenen Ausdruck für die $\mathcal{H}_2$-Norm

kann auch in der Form

$$\|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i \sigma_i^2\left(G_{\mathrm{zw}}(\mathrm{i}\omega)\right)d\omega}$$

angegeben werden. Während die $\mathcal{H}_\infty$-Norm

$$\|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_\infty := \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}\left(G_{\mathrm{zw}}(\mathrm{i}\omega)\right)$$

den größten Singulärwert der Frequenzgangsmatrix über alle Frequenzen bewertet, bewertet die $\mathcal{H}_2$-Norm das Integral der Summe der Quadrate der Singulärwerte dieser Matrix über alle Frequenzen. Plakativ ausgedrückt wird bei der Minimierung der $\mathcal{H}_\infty$-Norm der größte Singulärwert verringert, während bei der Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm alle Singulärwerte über alle Frequenzen berücksichtigt werden.

Da die $\mathcal{H}_2$-Norm keine durch identische Signalnormen der Ein- und Ausgangssignale induzierte Norm ist, ergibt sich im Unterschied zur $\mathcal{H}_\infty$-Norm nicht direkt eine Interpretation in Abhängigkeit der entsprechenden Signalnormen [12]. Um zu einer Interpretation im Zeitbereich zu gelangen, kann zwischen einer stochastischen und einer deterministischen Sichtweise unterschieden werden. An dieser Stelle soll nur kurz auf letztere eingegangen werden. Ausführungen zur stochastischen Interpretationen finden sich beispielsweise in [112].

Als Folgerung aus Parseval's Beziehungen [130], ergibt sich

$$\begin{aligned}\|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_2 = \|g_{\mathrm{zw}}(t)\|_2 =: &\sqrt{\int_0^{\infty}\operatorname{spur}\left(g_{\mathrm{zw}}^{\mathrm{T}}(\tau)g_{\mathrm{zw}}(\tau)\right)d\tau}\\ = &\sqrt{\int_0^{\infty}\sum_{ij}|g_{\mathrm{zw},ij}(\tau)|^2 d\tau},\end{aligned}$$

wobei $g_{\mathrm{zw}}(t)$ die Matrix der Impulsantworten des Systems und $g_{\mathrm{zw},ij}(t)$ die Einträge dieser Matrix bezeichnen. Diese Beziehungen ergeben sich aus der Tatsache, dass durch die Fouriertransformation ein isometrischer Isomorphismus zwischen den entsprechenden normierten Vektorräumen im Zeit- und Frequenzbereich gegeben ist. Vertauschen der Integration und Summenbildung über die einzelnen Übertragungspfade in obigem Ausdruck liefert

$$\|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_2 = \sqrt{\sum_{ij}\int_0^{\infty}|g_{\mathrm{zw},ij}(\tau)|^2 d\tau} = \sqrt{\sum_{ij}\|g_{\mathrm{zw},ij}(t)\|_2^2}.$$

Hierdurch ergibt sich folgende Interpretation. Wird das System über den $j$-ten Eingang mit einem Impuls $w^{(j)}(t) = \delta(t)e_j$ angeregt, entspricht das Ausgangssignal $z^{(j)}(t) = g_{\mathrm{zw}}^{(j)}(t)$ der $j$-ten Spalte der Matrix der Impulsantworten, hier mit $g_{\mathrm{zw}}^{(j)}(t)$ bezeichnet, und es gilt

$$\sum_j \|z^{(j)}(t)\|_2^2 = \sum_j \|g_{\mathrm{zw}}^{(j)}(t)\|_2^2 = \|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_2^2.$$

Insofern kann die $\mathcal{H}_2$-Norm als Maß für die Signalenergie der Ausgangsgrößen bei impulsförmigen Eingangsgrößen aufgefasst werden [112].

Soll die $\mathcal{H}_2$-Norm, beziehungsweise deren Quadrat, im Entwurfsverfahren berücksichtigt werden, stellt sich zunächst die Frage, inwiefern sich diese günstig auswerten lässt. Die Antwort auf diese Frage gibt folgender Satz.

**Satz 4.2.** *Betrachtet wird das in* (4.25) *gegebene sinnvoll konfigurierte System, d.h.* $(I - DK)$ *ist regulär. Ferner sei* $D_{\mathrm{cl}} = 0$ *und* $\sigma(A_{\mathrm{cl}}) \in \mathbb{C}_-$. *Es gilt*

$$\|G_{\mathrm{zw}}(s)\|_2^2 = \operatorname{spur}\left(B_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} L_{\mathrm{o}} B_{\mathrm{cl}}\right) = \operatorname{spur}\left(C_{\mathrm{cl}} L_{\mathrm{c}} C_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}}\right), \tag{4.27}$$

*wobei* $L_{\mathrm{c}}$ *und* $L_{\mathrm{o}}$ *die Gramschen Steuer- beziehungsweise Beobachtbarkeitsmatrizen bezeichnen. Diese können als Lösungen der Lyapunov-Gleichungen*

$$A_{\mathrm{cl}} L_{\mathrm{c}} + L_{\mathrm{c}} A_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} + B_{\mathrm{cl}} B_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.28}$$

*beziehungsweise*

$$A_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} L_{\mathrm{o}} + L_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{cl}} + C_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} C_{\mathrm{cl}} = 0 \tag{4.29}$$

*bestimmt werden.*

Dieser Satz samt Herleitung findet sich in [130] und wird hier lediglich im Hinblick auf die weitere Verwendung bezüglich des geschlossenen Regelkreises formuliert. Die Gleichheit der beiden in (4.27) gegebenen Ausdrücke für das Quadrat der $\mathcal{H}_2$-Norm ist leicht ersichtlich, wenn (4.28) von links mit $L_{\mathrm{o}}$ und (4.29) mit $L_{\mathrm{c}}$ multipliziert und die Spur der resultierenden Ausdrücke gebildet wird.

Zur Bestimmung der $\mathcal{H}_2$-Norm des geschlossenen Regelkreises ist demnach eine der Lyapunov-Gleichungen (4.28) beziehungsweise (4.29) zu lösen. Diese Gleichungen und deren Eigenschaften sind im Rahmen regelungstechnischer Problemstellungen von großer Bedeutung und weithin bekannt. Die wichtigsten Punkte werden im Hinblick auf die gegebene Problemstellung kurz diskutiert. Zunächst ist zu bemerken, dass (4.28) und (4.29) lineare Gleichungen bezüglich der Variablen $L_{\mathrm{c}}$ und $L_{\mathrm{o}}$, wenn auch in ungewohnter Form, beschreiben. Durch Vektorisieren der Gleichungen gelangt man zu einem herkömmlichen linearen Gleichungssystemen, so dass sich die Lösungseigenschaften in bekannter Weise unter Berücksichtigung der Eigenschaften der bei der Vektorisierung auftretenden Kronecker-Produkte bzw. Kronecker-Summen ergeben. Es zeigt sich, dass die Stabilität der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ hinreichend für die Existenz und Eindeutigkeit einer entsprechenden Lösung ist [130].

Die Feststellung, dass für $\sigma(A_{\mathrm{cl}}) \in \mathbb{C}_-$ die positiv semidefinite Lösung von (4.28) durch

$$L_{\mathrm{c}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A_{\mathrm{cl}}\tau}\, B_{\mathrm{cl}} B_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{e}^{A_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}}\tau}\, d\tau \tag{4.30}$$

beziehungsweise von (4.29) durch

$$L_{\mathrm{o}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}}\tau}\, C_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{T}} C_{\mathrm{cl}}\, \mathrm{e}^{A_{\mathrm{cl}}\tau}\, d\tau \tag{4.31}$$

für beliebige Matrizen $B_{\mathrm{cl}}$ und $C_{\mathrm{cl}}$ gegeben ist, liefert die entsprechenden Lösungseigenschaften in anschaulicher Form [40]. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Matrizen $L_{\mathrm{c}}$ beziehungsweise $L_{\mathrm{o}}$ als Lösungen der Lyapunov-Gleichungen (4.28) und (4.29) eindeutig bestimmt und zumindest positiv semidefinit sind, sofern sämtliche Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}$ einen negativen Realteil aufweisen. Es bleibt anzumerken, dass im Hinblick auf die tatsächliche Bestimmung der Matrizen $L_{\mathrm{c}}$ und $L_{\mathrm{o}}$ weder die Vektorisierung der Lyapunov-Gleichungen noch die Darstellungen (4.30) und (4.31) günstig sind. Ein Standardverfahren für das Lösen von Lyapunov-Gleichungen, beziehungsweise im Allgemeinen von Sylvester-Gleichungen, ist der Bartels-Stewart Algorithmus, siehe [10] oder für eine kompakte Beschreibung [50].

Analog zu Abschnitt 4.2.1 wird mit dem Quadrat der $\mathcal{H}_2$-Norm als Gütekriterium

$$J_{\mathcal{H}_2}(\kappa) := \|G_{\mathrm{zw}}(s,\kappa)\|_2^2$$

ein Optimierungsproblem in der Form

$$\begin{aligned} \min_{\kappa,\alpha,\beta} \quad & J_{\mathcal{H}_2}(\kappa) \\ \text{u. d. N.} \quad & J_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta) \le \gamma \\ & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \\ & \underline{\alpha}_i \le \alpha_i \le \overline{\alpha}_i, \quad i = 1,\dots,n-\nu \\ & \underline{\beta}_i \le \beta_i \le \overline{\beta}_i, \quad i = 1,\dots,\nu \end{aligned} \tag{4.32}$$

formuliert. Wie bereits erwähnt, ist ein Argument für die Wahl der $\mathcal{H}_2$-Norm die Differenzierbarkeit des resultierenden Gütekriteriums $J_{\mathcal{H}_2}(\kappa)$. Diese ist gegeben, sofern die Rückführung derart gewählt ist, dass sich ein stabiler geschlossener Regelkreis ergibt beziehungsweise

$$\kappa \in \mathcal{D}_{\mathrm{s}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_{\mathrm{s}} := \{\kappa \in \mathbb{R}^q : \sigma(A_{\mathrm{cl}}(\kappa)) \in \mathbb{C}_-\}$$

gilt [103]. Zur Bestimmung eines Ausdrucks für den Gradienten kann die in [103] gezeigte Vorgehensweise auf die vorliegende Struktur angepasst werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla J_{\mathcal{H}_2}(\kappa) = & 2N^{\mathrm{T}} \operatorname{vec}\Big(\Big((I - DK(\kappa))^{-1} \big(CL_{\mathrm{c}}(\kappa)L_{\mathrm{o}}(\kappa)B + D_{\mathrm{yw}}B_{\mathrm{cl}}(\kappa)^{\mathrm{T}}L_{\mathrm{o}}(\kappa)B \\ & + CL_{\mathrm{c}}(\kappa)C_{\mathrm{cl}}(\kappa)^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{zu}}\big)\Big(I + K(\kappa)\,(I - DK(\kappa))^{-1}\,D\Big)\Big)^{\mathrm{T}}\Big), \end{aligned}$$

wobei sich die Matrix $N$ aus der angenommenen affinen Abhängigkeit der Matrix der Rückführung vom Vektor $\kappa$ ergibt. Vektorisiert kann diese in der Form $\operatorname{vec}(K(\kappa)) = M + N\kappa$ angegeben werden.

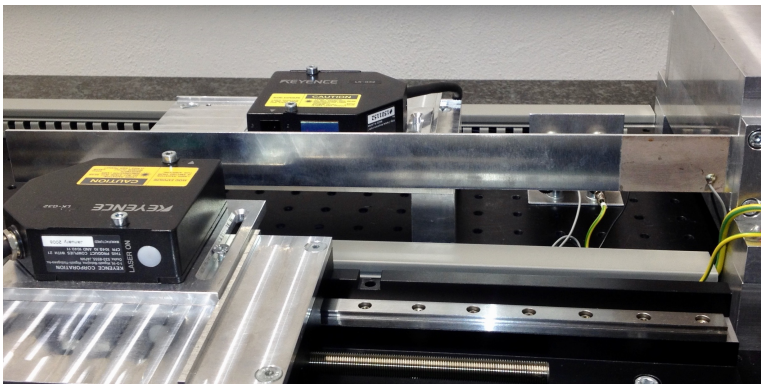



**Bild 4.2:** Balkenversuchsstand mit Linearversteller und Laser-Wegmesssensoren

Im Hinblick auf die Wahl geeigneter Verfahren zur Suche nach Lösungen des Optimierungsproblems (4.32) sind die Bemerkungen aus dem vorangegangenem Abschnitt, insbesondere hinsichtlich der Nebenbedingung bezüglich der Funktion $J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta)$, prinzipiell gültig. Ein wesentlicher Unterschied ergibt sich durch den Umstand, dass die Gütefunktion $J_{\mathcal{H}_2}(\kappa)$ nur definiert ist, sofern der geschlossene Regelkreis stabil ist. Ausgehend von einem zulässigen Punkt, für den ein stabiles System vorliegt, bieten sich somit Algorithmen an, welche die Gütefunktion nur an zulässigen Punkten auswerten, womit die Stabilität durch die Nebenbedingung bezüglich der Funktion $J_{\mathrm{ew}}(\kappa, \alpha, \beta)$ bei geeigneter Wahl der Schranke $\gamma$ gewährleistet werden kann. Beispiele für solche Verfahren sind die bereits in Abschnitt 4.2.1 angesprochenen SQP- und Innere-Punkte-Verfahren [77, 76, 26]. Ein Beispiel für ein Verfahren, dass dies zwar nicht garantiert, allerdings ungültige Rückgabewerte bei der Auswertung des Gütekriteriums erlaubt und in diesem Fall eine Schrittweitenanpassung vornimmt, ist das in der Funktion *fmincon* der Optimization Toolbox (Version 2012b [96]) von MATLAB implementierte Innere-Punkte-Verfahren.

## 4.3 Anwendungsbeispiel – Balkenversuchsstand

Als Anwendungsbeispiel für die in diesem Kapitel betrachteten Verfahren wird eine Reglerauslegung für den in Bild 4.2 gezeigten Balkenversuchsstand betrachtet. Zur Beeinflussung des Systems dient ein Paar von auf der Ober- beziehungsweise Unterseite eines einseitig eingespannten Balkens angebrachten Piezoaktoren. Als Messgrößen stehen die an zwei Punkten mittels Laser-Wegmesssensoren gemessenen transversalen Auslenkungen des Balkens zur Verfügung.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst ein Vorgehen zur Generierung eines linearen endlichdimensionalen Approximationsmodells dieses Aufbaus beschrieben. Die Orte, an denen die Auslenkung gemessen wird, sollen neben den Parametern des zu entwerfenden Reglers als Freiheitsgrade im Systementwurf zur Verfügung stehen. Die Approximation des vorliegenden örtlich verteilten Systems wird deshalb derart gewählt, dass die Einträge der Matrizen der resultierenden Zustandsraumdarstellung Polynome in den Ortskoordinaten der Messung sind und somit in der in Abschnitt 2.2.2 geforderten Form vorliegen. Ausgehend von dem so gewonnenen Modell des Versuchsstand wird der Entwurf zur Polvorgabe sowie der Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm für die

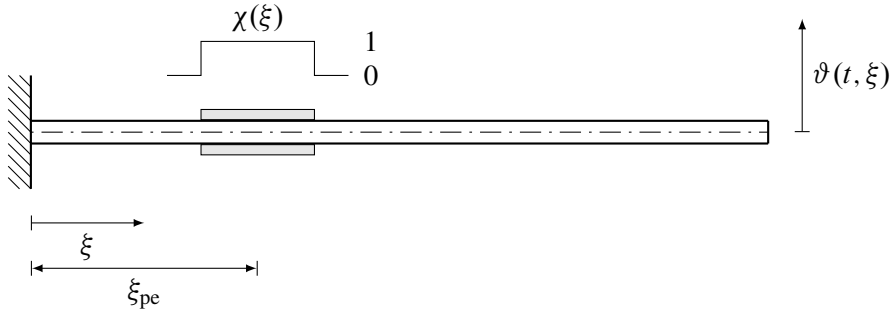



**Bild 4.3:** Schematische Darstellung eines einseitig eingespannten Balkens mit Piezoelementen

gemeinsame Auslegung der Freiheitsgrade des Systems und einer strukturbeschränkten dynamischen Rückführung demonstriert.

## 4.3.1 Modellbildung

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist der in Bild 4.3 schematisch dargestellte einseitig eingespannte Balken. Die Vorgehensweise zur Generierung eines für den Reglerentwurf geeigneten Modells erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst werden Bewegungsgleichungen des örtlich verteilten Systems angegeben. Diese werden in geeigneter Weise diskretisiert, so dass sich ein lineares endlich-dimensionales System ergibt, in dem die Ortskoordinaten der Auslenkungsmessung als Freiheitsgrade verbleiben. Da nicht alle Parameter des Systems hinreichend genau bekannt sind, erfolgt eine Anpassung dieser Parameter anhand am Versuchsstand aufgenommener Messwerte. Details bezüglich der im Versuchsaufbau verwendeten Komponenten und Gerätschaften sind in Anhang C zusammengestellt.

#### Bewegungsgleichungen des Balkens mit Piezoelementen

Die in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen für die transversale Bewegung des Balkens mit Piezoaktoren sind [9] entnommen. In der angegebenen Quelle finden sich ausführliche Diskussionen zur Herleitung der Bewegungsgleichungen einer Reihe von Strukturen, die im Besonderen den Beitrag von auf der Oberfläche angebrachten Piezoaktoren berücksichtigen. Unter anderem der hier betrachtete einseitig eingespannte Balken.

Es wird davon ausgegangen, dass es sich um einen homogenen Balken handelt, die Deformationen hinreichend klein sind, so dass eine lineare Beschreibung gerechtfertigt ist, und die Annahmen der Euler-Bernoulli Balkentheorie erfüllt sind. Die Dämpfung der Struktur wird in Form einer Kelvin-Voigt Dämpfung sowie eines zusätzlichen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsterms modelliert. Die Abmessungen des Balkens werden mit $l$ für die Länge, $h$ für die Höhe und $b$ für die Breite bezeichnet. Als Materialparameter treten der Elastizitätsmodul $E$, die Dichte $\rho$ sowie die Konstante der Kelvin-Voigt Dämpfung $c_{\mathrm{D}}$ in den Bewegungsgleichungen auf. Für die auf der Ober- und Unterseite des Balkens symmetrisch angeordneten, gleichartigen Piezoaktoren werden

die entsprechenden Größen mit $l_{\mathrm{pe}}$, $b_{\mathrm{pe}}$, $h_{\mathrm{pe}}$, $E_{\mathrm{pe}}$, $\rho_{\mathrm{pe}}$ und $c_{\mathrm{D,pe}}$ bezeichnet. Die Konstante der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung ist $d_{\mathrm{v}}$. Der Abschnitt des Balkens in $\xi$-Richtung, über welchem die Piezoaktoren angebracht sind, wird mittels der Ortsfunktionen

$$\chi(\xi) := \begin{cases} 1, & \xi_{\mathrm{pe}} - l_{\mathrm{pe}}/2 \leq \xi \leq \xi_{\mathrm{pe}} + l_{\mathrm{pe}}/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

charakterisiert. Wie in Bild 4.3 gezeigt, gibt $\xi_{\mathrm{pe}}$ die Koordinate des Mittelpunkts des Piezoaktors auf dem Balken an. Die Breite der Piezoaktoren entspricht der Breite des Balkens, so dass $b = b_{\mathrm{pe}}$ gilt.

Die partielle Differentialgleichung für die transversale Auslenkung $\vartheta(t,\xi)$ des Balkens, mit der Ortskoordinate $\xi$, wird nach [9] in der Form

$$\tilde{\rho}(\xi)\ddot{\vartheta}(t,\xi) + \left(\widetilde{EI}(\xi)\vartheta''(t,\xi) + \widetilde{c_{\mathrm{D}}I}(\xi)\dot{\vartheta}''(t,\xi)\right)'' + d_{\mathrm{v}}\dot{\vartheta}(t,\xi) = \gamma''(\xi)\left(v_{\mathrm{u}}(t) - v_{\mathrm{o}}(t)\right) \tag{4.33}$$

angegeben. Wie üblich bezeichnen hierbei $\dot{(\cdot)} := \partial(\cdot)/\partial t$ und $(\cdot)' := \partial(\cdot)/\partial\xi$ die partiellen Ableitung nach der Zeit beziehungsweise nach der Ortsvariable. Für den hier betrachteten Fall der Lagerung des Balkens, die einseitige Einspannung, muss die transversale Auslenkung den Randbedingungen am Punkt der Einspannung

$$\vartheta(t,0) = \vartheta'(t,0) = 0 \tag{4.34}$$

sowie am freien Ende

$$\widetilde{EI}(l)\vartheta''(t,l) + \widetilde{c_{\mathrm{D}}I}(l)\dot{\vartheta}''(t,l) = \left(\widetilde{EI}(l)\vartheta''(t,l) + \widetilde{c_{\mathrm{D}}I}(l)\dot{\vartheta}''(t,l)\right)' = 0$$

genügen. Durch die Berücksichtigung der Piezoaktoren sind die in (4.33) auftretenden Koeffizienten stückweise stetige Funktionen. Es gilt

$$\tilde{\rho}(\xi) := \rho h b + 2b\rho_{\mathrm{pe}}h_{\mathrm{pe}}\chi(\xi), \tag{4.35a}$$

$$\widetilde{EI}(\xi) := E\frac{h^3 b}{12} + \frac{2b}{3}E_{\mathrm{pe}}\left(\left(\frac{h}{2} + h_{\mathrm{pe}}\right)^3 - \frac{h^3}{8}\right)\chi(\xi), \tag{4.35b}$$

$$\widetilde{c_{\mathrm{D}}I}(\xi) := c_{\mathrm{D}}\frac{h^3 b}{12} + \frac{2b}{3}c_{\mathrm{D,pe}}\left(\left(\frac{h}{2} + h_{\mathrm{pe}}\right)^3 - \frac{h^3}{8}\right)\chi(\xi) \tag{4.35c}$$

sowie

$$\gamma(\xi) := \frac{1}{2}E_{\mathrm{pe}}bd_{31}\left(h + h_{\mathrm{pe}}\right)\chi(\xi) \tag{4.35d}$$

mit dem piezoelektrischen Deformationskoeffizienten $d_{31}$.

Die äußere Anregung erfolgt durch an die Piezoaktoren angelegte Spannungen $v_{\mathrm{o}}(t)$ und $v_{\mathrm{u}}(t)$. Durch die verwendeten Indizes wird zwischen den auf der Ober- beziehungsweise Unterseite des

Balkens angebrachten Aktoren unterschieden. Da der Balken über die beiden Aktoren, abgesehen von einem Vorzeichenwechsel, in gleicher Weise angeregt wird, ist es sinnvoll, diese zusammenzufassen. Bei gegenphasiger Anregung $v_\mathrm{o}(t) = -v_\mathrm{u}(t)$ kann vereinfachend

$$u(t) := \frac{1}{2}(v_\mathrm{u}(t) - v_\mathrm{o}(t)) = v_\mathrm{u}(t)$$

geschrieben werden. Für diese Wahl der Spannungen $v_\mathrm{o}(t)$ und $v_\mathrm{u}(t)$ wird zudem die hier nicht betrachtete longitudinale Bewegung des Balken nicht angeregt [9].

Ausgangspunkt für die Herleitung des im folgenden Abschnitt beschriebenen endlich-dimensionalen Approximationsmodells ist die schwache Form der Bewegungsgleichung. Diese ist durch

$$\int_0^l \left(\tilde{\rho}\ddot{\vartheta}\phi + \widetilde{EI}\vartheta''\phi'' + \widetilde{c_D I}\dot{\vartheta}''\phi'' + d_\mathrm{v}\dot{\vartheta}\phi - 2\gamma\phi'' u\right) \mathrm{d}\xi = 0, \tag{4.36}$$

gegeben, wobei der Übersichtlichkeit halber auf die Angabe der Funktionsargumente verzichtet wird. Eine Lösung des Problems in der schwachen Form muss obige Beziehung für alle Testfunktionen $\phi(\xi)$ eines geeignet gewählten Sobolev-Raums [1] erfüllen. Im Speziellen genügen die Testfunktionen den Randbedingungen (4.34) am Punkt der Einspannung, so dass

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0$$

gilt. Für eine detaillierte Diskussion der Herleitung von (4.36) und der assoziierten Funktionenräume sei wiederum auf [9] verwiesen. Die Betrachtung der schwachen Form der Bewegungsgleichung (4.36) zeigt zudem einen weiteren Vorzug dieser Art der Problemformulierung. Die sich aus der Berücksichtigung der Piezoaktoren ergebenden Unstetigkeiten in den ortsabhängigen Koeffizienten (4.35) führen bei Betrachtung der starken Form (4.33) zu Problemen, da in dieser Ableitungen der Koeffizienten auftreten, die im herkömmlichen Sinne nicht existieren. In der schwachen Form werden keine Ableitungen der Koeffizienten benötigt. Es treten lediglich Ableitungen der Auslenkung $\vartheta$ und der Testfunktionen $\phi$ auf.

Wie in der einleitenden Beschreibung des Versuchsstands erwähnt, stehen als Messgrößen die an zwei Punkten mittels Laser-Wegmesssensoren gemessenen transversalen Auslenkungen des Balkens zur Verfügung. Diese Form der Auslenkungsmessung kann als punktförmige Auswertung der Lösung $\vartheta(t, \xi)$ der Bewegungsgleichung aufgefasst werden. Werden die Koordinaten der beiden Messpunkte mit $\xi_{\mathrm{s}1}$ und $\xi_{\mathrm{s}2}$ bezeichnet, ergeben sich die Messgrößen $\vartheta(t, \xi_{\mathrm{s}1})$ und $\vartheta(t, \xi_{\mathrm{s}1})$.

#### Endlich-dimensionale Approximation

Basierend auf der schwachen Form der partiellen Differentialgleichung (4.36) wird ein endlich-dimensionales Approximationsmodell erstellt. Prinzipiell bieten sich hierfür unterschiedliche Vorgehensweisen beziehungsweise Verfahren an. Eine ausführliche Diskussion verschiedener Ansätze, gerade im Kontext regelungstechnischer Problemstellungen, ist in der Arbeit von Schlake [105] gegeben.

Unter Verwendung eines Galerkin-Ansatzes, wobei für die Basis- und Testfunktionen der gleiche Ansatz gewählt wird, ist die Approximation der Auslenkung als Linearkombination

$$\vartheta(t,\xi) \approx \vartheta^N(t,\xi) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\vartheta}_i(t)\phi_i(\xi) \tag{4.37}$$

von $N$ linear unabhängigen Basiselementen gegeben. Für eine geeignete Wahl der Basisfunktionen wird berücksichtigt, dass die Positionen $\xi_{s1}$ und $\xi_{s2}$ der Messung der Auslenkung als Freiheitsgrade im Systementwurf genutzt werden sollen. Damit dies im Rahmen der in dieser Arbeit beschriebenen Methodik möglich ist, müssen die Elemente der Matrizen des resultierenden endlich-dimensionalen Modells rationale Funktion in diesen Variablen sein. Da die Messungen, wie im vorigen Abschnitt diskutiert, als Punktauswertungen der Funktionen $\vartheta(t,\xi)$ modelliert sind, bietet es sich an, Polynome als Basisfunktionen für die Approximation $\vartheta^N(t,\xi)$ zu nutzen.

Für das betrachtete Beispiel werden rekombinierte Legendre-Polynome [101] als Basisfunktionen verwendet. Die Legendre-Polynome $P_i(\xi)$ können rekursiv über die Beziehungen

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad \text{und} \quad P_i(\xi) = \frac{2i-1}{i}\xi P_{i-1}(\xi) - \frac{i-1}{i}P_{i-2}(\xi)$$

bestimmt werden. In der gegebenen Form dienen diese als Basis auf dem Intervall $[-1,1]$. Die Anpassung auf das Intervall $[0,l]$ erfolgt mittels einer affinen Koordinatentransformation

$$\tilde{P}_i(\xi) = P_i(2/l \cdot \xi - 1).$$

Die als Basisrekombination [17, 105] bezeichnete Modifikation der üblichen Legendre-Basis wird derart gewählt, dass die resultierenden Polynome die Randbedingungen am Punkt der Einspannung erfüllen. Aus den Eigenschaften der Legendre-Polynome [17] ist ersichtlich, dass am Punkt der Einspannung

$$\tilde{P}_i(0) = (-1)^i \quad \text{sowie} \quad \tilde{P}_i'(0) = (-1)^{i-1}\frac{i(i+1)}{l}$$

gilt. Mit diesen Beziehungen lässt sich leicht überprüfen, dass die Funktionen

$$\phi_i(\xi) = \frac{i+1}{i}\tilde{P}_{i-1}(\xi) + \frac{2i+1}{i}\tilde{P}_i(\xi) + \tilde{P}_{i+1}(\xi), \quad i = 1,\ldots,N, \tag{4.38}$$

den Randbedingungen (4.34) genügen beziehungsweise

$$\phi_i(0) = \phi_i'(0) = 0$$

gilt.

Das Berücksichtigen dieses Ansatzes für die Testfunktionen in (4.36), Einsetzen von (4.37) und Auswerten der sich ergebenden Integrale ergibt das System

$$\hat{M}\ddot{\hat{q}} + \hat{D}\dot{\hat{q}} + \hat{S}\hat{q} = \hat{F}$$

von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der Vektor

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1 & \cdots & \hat{\vartheta}_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

enthält die Koeffizienten $\hat{\vartheta}_i$, $i = 1, \ldots, N$, der Approximation (4.37) und für die Matrizen gilt

$$\begin{aligned}
\hat{M}[i,j] &:= \int_0^l \tilde{\rho}(\xi)\phi_i(\xi)\phi_j(\xi)\mathrm{d}\xi, \\
\hat{S}[i,j] &:= \int_0^l \widetilde{EI}(\xi)\phi_i''(\xi)\phi_j''(\xi)\mathrm{d}\xi, \\
\hat{D}[i,j] &:= \int_0^l \left(\widetilde{c_D I}(\xi)\phi_i''(\xi)\phi_j''(\xi) + d_{\mathrm{v}}\phi_i(\xi)\phi_j(\xi)\right)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

sowie

$$\hat{F}[i] := \int_0^l 2\gamma(\xi)\phi_i''(\xi)\mathrm{d}\xi$$

für $i, j = 1, \ldots, N$. Teile dieser Ausdrücke können durch Ausnutzen der Orthogonalitätsbeziehungen der Legendre-Polynome in einfacher Weise analytisch ausgewertet werden. Aufgrund der Ortsabhängigkeit der Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung erfolgt jedoch im Allgemeinen eine numerische Auswertung der Integrale. Die Ableitungen der Basisfunktionen werden mittels der Beziehungen zwischen Legendre- und Gegenbauer-Polynomen bestimmt [17].

Wird

$$x = \begin{bmatrix} \hat{q} & \dot{\hat{q}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1 & \cdots & \hat{\vartheta}_N & \dot{\hat{\vartheta}}_1 & \cdots & \dot{\hat{\vartheta}}_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

als Zustandsvektor gewählt, ist somit durch

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\hat{M}^{-1}\hat{S} & -\hat{M}^{-1}\hat{D} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{M}^{-1}\hat{F} \end{bmatrix} u \\
y &= Cx
\end{aligned} \tag{4.39}$$

eine Zustandsraumdarstellung der endlich-dimensionalen Approximation des Balkens mit Piezoaktoren gegeben. In der Ausgangsgleichung ergibt sich die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_{\mathrm{s}1}) & \cdots & \phi_N(\xi_{\mathrm{s}1}) & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1(\xi_{\mathrm{s}2}) & \cdots & \phi_N(\xi_{\mathrm{s}2}) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

durch Auswerten der Basisfunktionen an den Punkten $\xi_{\mathrm{s}1}$ und $\xi_{\mathrm{s}2}$. Durch die Wahl der Basisfunktionen (4.38) sind die Einträge der $i$-ten Spalte, für $i = 1, \ldots, N$, der Matrix $C$ Polynome der Ordnung $i + 1$ in den Variablen $\xi_{\mathrm{s}1}$ beziehungsweise $\xi_{\mathrm{s}2}$.

**Tabelle 4.3:** Materialparameter von Balken und Piezokeramiken

| Symbol | Einheit | Wert | Beschreibung |
|---|---|---|---|
| $l$ | m | 0,375 | Länge des Balkens |
| $l_{\mathrm{pe}}$ | m | 0,05 | Länge der Piezokeramiken |
| $b$ | m | 0,03 | Breite des Balkens |
| $b_{\mathrm{pe}}$ | m | 0,03 | Breite der Piezokeramiken |
| $h$ | m | $2 \cdot 10^{-3}$ | Höhe des Balkens |
| $h_{\mathrm{pe}}$ | m | $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ | Höhe der Piezokeramiken |
| $\rho$ | $\mathrm{kg/m^3}$ | $2{,}67 \cdot 10^3$ | Dichte des Balkens |
| $\rho_{\mathrm{pe}}$ | $\mathrm{kg/m^3}$ | $7{,}8 \cdot 10^3$ | Dichte der Piezokeramiken |
| $E$ | $\mathrm{N/m^2}$ | $70 \cdot 10^9$ | Elastizitätsmodul des Balkens |
| $E_{\mathrm{pe}}$ | $\mathrm{N/m^2}$ | $62{,}1 \cdot 10^9$ | Elastizitätsmodul der Piezokeramiken |
| $d_{31}$ | m/V | $-180 \cdot 10^{-12}$ | Piezoelektrischer Deformationskoeffizient |

### Experimentelle Validierung und Parameteranpassung

Nachdem eine Zustandsraumbeschreibung des betrachteten Systems hergeleitet ist, gilt es dieses Modell anhand von Messungen am Versuchsstand zu verifizieren beziehungsweise geeignet anzupassen. Letzteres ist notwendig, um eine für den integrierten Regler- und Strukturentwurf ausreichend präzise Systembeschreibung zu erhalten. Dies gilt vor allem für die Parameter der Dämpfungsterme, für welche keine Werte vorliegen. Allerdings ist es sinnvoll, ebenfalls einige der aus den Datenblättern der verwendeten Werkstoffe bekannten Parameter in die Parameteranpassung einzubeziehen. Dies ermöglicht es, neben der Berücksichtigung von Toleranzen dieser Parameter, Abweichungen zwischen Modell und realem System auszugleichen.

Die meisten der in der partiellen Differentialgleichung auftretenden Parameter können recht zuverlässig angegeben werden. Dies gilt sicherlich für die Abmessungen, aber auch für die Materialkonstanten Dichte und Elastizätatsmodul des Balkens und der Piezoaktoren sowie den piezoelektrischen Deformationskoeffizienten, die den entsprechenden Datenblättern entnommen werden können. Eine Zusammenstellung ist in Tabelle 4.3 gegeben. Die Piezoaktoren werden in der Nähe der Einspannung, $\xi_{\mathrm{pe}} = 2{,}9\,\mathrm{cm}$, angebracht.

Zur Anpassung werden die Koeffizienten der Elastizitätsmodule, der Dichten und der Dämpfungen herangezogen. Die Wahl dieser Parameter erfolgt in Anlehnung an [9], wo Aspekte der Parameteridentifikation für Systeme wie das hier betrachtete ausführlich diskutiert werden. Zusätzlich wird eine Konstante $k_{\mathrm{S}}$ zum Anpassen der stationären Verstärkung des Modells eingeführt. Diese erlaubt es, Abweichungen in Parametern des Systems, wie beispielsweise des piezoelektrischen

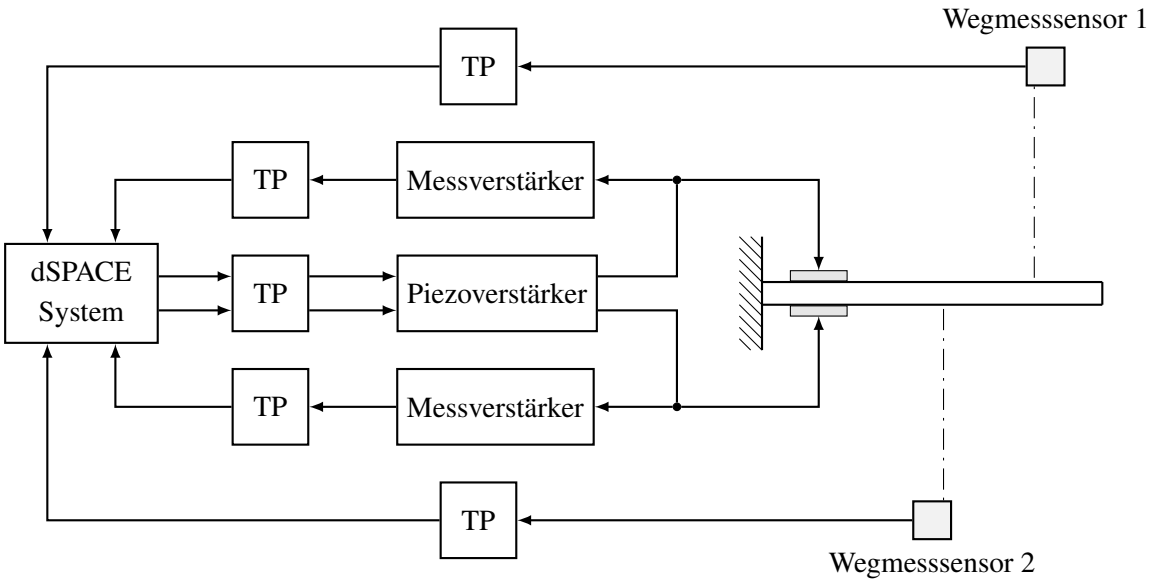



**Bild 4.4:** Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Deformationskoeffizienten, sowie solche, die sich durch Verstärkungsfaktoren der am Versuchsstand genutzten Mess- und Auswerteelektronik ergeben, abzubilden.

Der bei den im Folgenden diskutierten Messungen verwendete Versuchsaufbau ist in Bild 4.4 skizziert. Zur Erfassung der Messwerte und Implementierung der Regelalgorithmen wird ein DS1104 Controller-Board der Firma dSPACE verwendet. Zur Bandbegrenzung der Ein- und Ausgangssignale des dSPACE-Systems stehen analoge Tiefpassfilter zur Verfügung, die zwischen die Piezoverstärker sowie die Laser-Wegmesssensoren und das dSPACE-System geschaltet werden. Die Typenbezeichnungen der verwendeten Geräte sind in Anhang C zusammengestellt. Neben der Erfassung der Balkenauslenkung durch die Wegmesssensoren werden die Ausgangsspannungen der Piezoverstärker mittels als Spannungsfolger mit einstellbarer Verstärkung geschalteten Operationsverstärkern gemessen. Auf diese Weise kann das Übertragungsverhalten von den Ausgangsspannungen der Piezoverstärker auf die Messsignale der Laser-Wegmesssensoren betrachtet werden. Die Dynamik der Filter am Ausgang des dSPACE-Systems sowie der Piezoverstärker wirkt sich somit nicht störend auf die Messung aus.

Die auf der Ober- und Unterseite des Balkens angebrachten Piezoaktoren werden mit vom Betrag her gleichen Spannungen unterschiedlichen Vorzeichens beschaltet, so dass sich ein System mit einer Stellgröße ergibt. Als Anregungssignal zur Identifikation nichtparametrischer Frequenzgänge des Systems wird ein periodischer Gleitsinus mit Amplituden von 5 bis 15 V verwendet. Die geringen Spannungsamplituden sollen den Einfluss nichtlinearer Effekte, vor allem im Übertragungsverhalten der piezoelektrischen Aktoren, begrenzen. Für die im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Messergebnisse werden derart geringe Amplituden verwendet, um ein möglichst lineares Systemverhalten zu erzielen. Werden in der Anwendung, gerade im geregelten Betrieb, größere Verstärkerspannungen benötigt, ist es unter Umständen sinnvoll, den Einfluss der in den Aktoren präsenten Nichtlinearitäten, wie zum Beispiel Hystereseeffekte, durch den Einsatz ei-

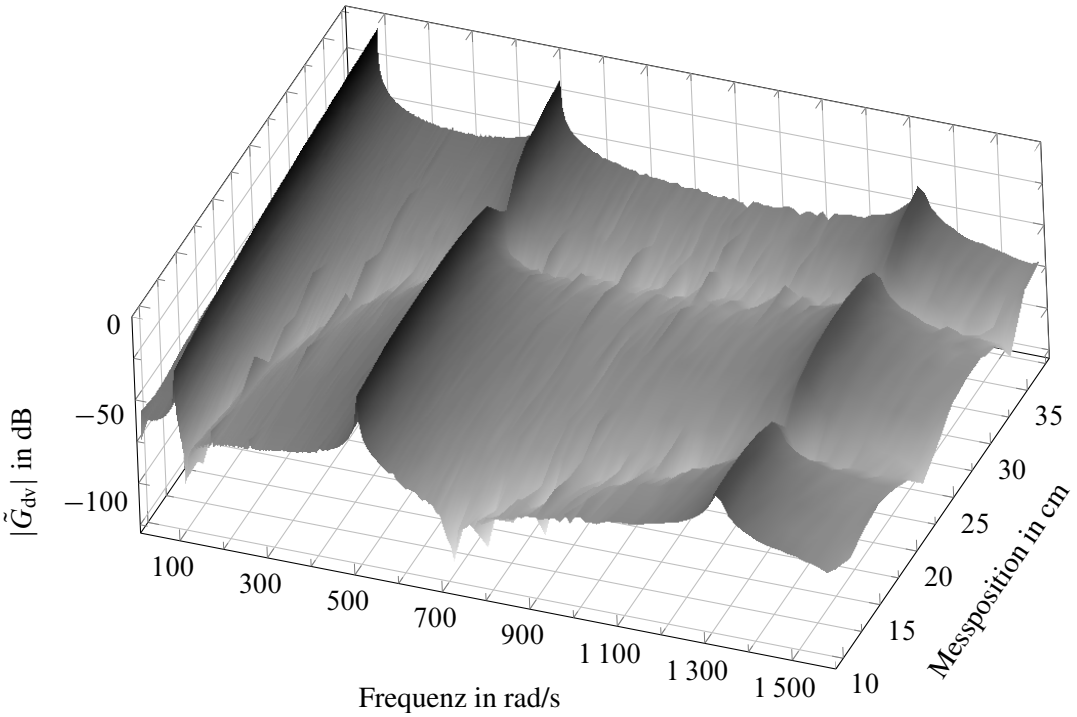



**Bild 4.5:** Darstellung des geschätzten, ortsabhängigen Amplitudengangs $\tilde{G}_{\mathrm{dv}}(\mathrm{i}\omega, \xi)$

ner geeigneten Vorsteuerung zu mindern. Möglichkeiten zur Auslegung solcher Vorsteuerungen werden ausführlich in [74] diskutiert.

Die Auslenkung des Balkens, gemessen in Millimetern, wird an 15 äquidistant im Bereich von 9,4 bis 37,4 cm in Längsrichtung des Balkens verteilten Positionen, ergänzt um zwei weitere Messpunkte in der Nähe der Knoten der dritten Mode, gemessen. Mit den aufgenommen Messdaten werden Frequenzgänge $\hat{G}_{\mathrm{dv}}(\mathrm{i}\omega, \xi_i)$, $i = 1, \ldots, 17$, geschätzt. Detaillierte Ausführungen zur Identifikation von Frequenzgängen finden sich in [98]. Um die anfallende Datenmenge zu begrenzen, wird die Abtastfrequenz auf 10 kHz beschränkt. Die Grenzfrequenz der als Anti-Aliasing Filter eingesetzten Tiefpässe, elliptische Filter sechster Ordnung, wird auf 2 kHz festgelegt. Zur Illustration der Ergebnisse dieses Identifikationsschrittes ist der resultierende, ortsabhängige Amplitudengang in Bild 4.5 dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber beschränkt sich die Darstellung auf die ersten drei Moden.

Ausgehend von den experimentell bestimmten Frequenzgängen erfolgt die Anpassung der Werte für die Dichten $\rho$ und $\rho_{\mathrm{pe}}$, die Elastizitätsmodule $E$ und $E_{\mathrm{pe}}$ sowie die Dämpfungskonstanten $c_{\mathrm{D}}$, $c_{\mathrm{D,pe}}$ und $d_{\mathrm{V}}$. Ziel der im nächsten Abschnitt beschriebenen Reglerauslegung ist vor allem die Beeinflussung der Dämpfungen der ersten beiden Moden der Struktur. Insofern erscheint es sinnvoll, eine hinreichend gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung mindestens für die ersten drei Moden sicherzustellen. Es werden zunächst die Eigenfrequenzen und Dämpfungsgrade der ersten drei Moden als charakteristische Größen des Systems aus den ermittelten Frequenzgängen geschätzt. Aufgrund der Verfügbarkeit einer entsprechenden Implementierung in der System Identification Toolbox™ von MATLAB, wird an dieser Stelle eine Subspace-Methode zur Identifikation eines zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells genutzt. Ein kompakter Überblick über das

**Tabelle 4.4:** Gegebene und geschätzte Werte der Parameter

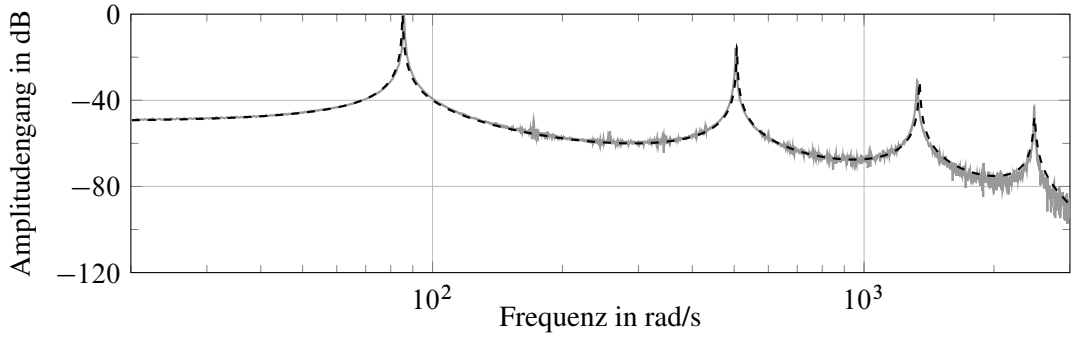
| Parameter | Einheit | Werkstofftabelle | Parameterschätzung |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | $\mathrm{kg/m^3}$ | $2{,}670 \cdot 10^3$ | $2{,}665 \cdot 10^3$ |
| $\rho_{\mathrm{pe}}$ | $\mathrm{kg/m^3}$ | $7{,}8 \cdot 10^3$ | $14{,}34 \cdot 10^3$ |
| $E$ | $\mathrm{N/m^2}$ | $70 \cdot 10^9$ | $70{,}33 \cdot 10^9$ |
| $E_{\mathrm{pe}}$ | $\mathrm{N/m^2}$ | $62 \cdot 10^9$ | $33{,}65 \cdot 10^9$ |
| $c_{\mathrm{D}}$ | $\mathrm{Ns/m^2}$ | – | 172,8 |
| $c_{\mathrm{D,pe}}$ | $\mathrm{Ns/m^2}$ | – | $1{,}199 \cdot 10^6$ |
| $d_{\mathrm{V}}$ | $\mathrm{Ns/m^2}$ | – | 0,045 |

**Tabelle 4.5:** Kennkreisfrequenzen $\omega_i$ und Dämpfungsgrade $\zeta_i$ des Modells für die ersten vier Moden

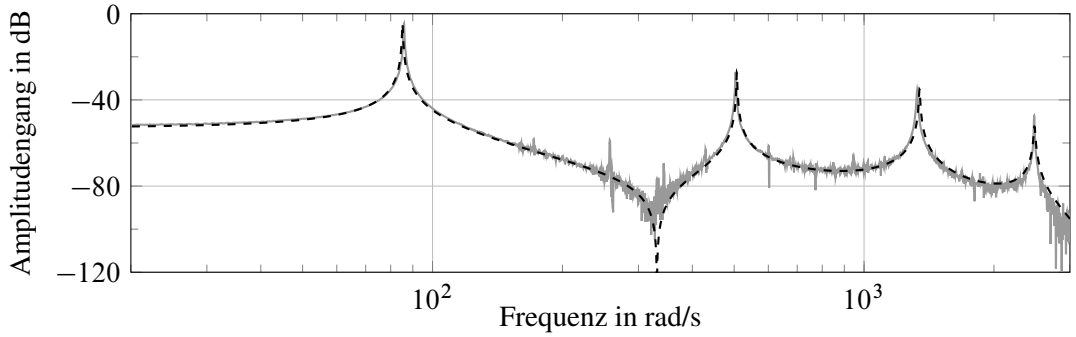
| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_i$ in rad/s | 85,2 | 507,3 | 1344 | 2483 |
| $\zeta_i$ | 0,19% | 0,148% | 0,252% | 0,372% |

prinzipielle Vorgehen bei der Identifikation mit dieser Methodik ist in [98] gegeben. Die Eigenwerte des resultierenden Modells liefern geeignete Schätzwerte der gesuchten modalen Größen. In einem zweiten Schritt wird die Summe der gewichteten Abweichungen der geschätzten Eigenfrequenzen und Dämpfungen der ersten drei Moden zu denen des Balkenmodells mittels einer nichtlinearen Optimierung minimiert. Ein Vorteil dieser simplen Vorgehensweise ist, dass über die Wahl der Gewichtung der einzelnen Summanden sehr anschaulich Einfluss auf die Schätzung der Parameter genommen werden kann. Für die Ordnung der Approximation hat sich in diesem Zusammenhang die Wahl $N = 10$ als sinnvoll erwiesen. Insbesondere ändern sich die Kennkreisfrequenzen und Eigenvektoren der ersten vier Moden bei einer Erhöhung der Ordnung kaum mehr.

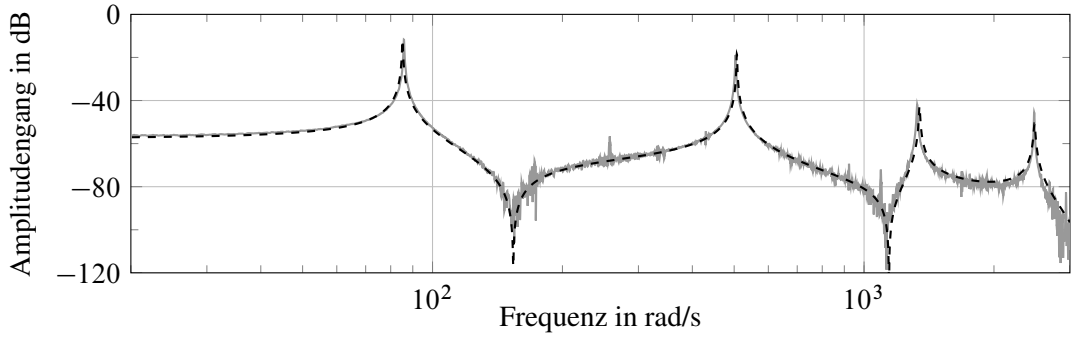
Das Ergebnis dieser Parameteranpassung ist in Tabelle 4.4 gezeigt. Dargestellt ist ebenfalls, sofern vorhanden, der Vergleich zu den aus den Werkstofftabellen entnommenen Werten. Zur Korrektur der stationären Verstärkung des Modells wird $k_{\mathrm{S}} = 1{,}15$ gewählt. Wie gut Messung und Modell übereinstimmen zeigt Bild 4.6. Auf Basis der im letzten Abschnitt beschriebenen Zustandsraumdarstellung werden Frequenzgänge $G_{\mathrm{dv}}(\mathrm{i}\omega, \xi)$ generiert und mit den Messdaten verglichen. Dargestellt sind die Amplitudengänge von Modell und Messung jeweils im Bereich von 20 bis 3000 rad/s. Es ist deutlich zu erkennen, dass das resultierende Modell das Verhalten des Systems in geeigneter Weise beschreibt. Die sich ergebenden Kennkreisfrequenzen $\omega_i$ und Dämpfungsgrade $\zeta_i$ der ersten vier Moden des identifizierten Modells sind in Tabelle 4.5 angegeben.



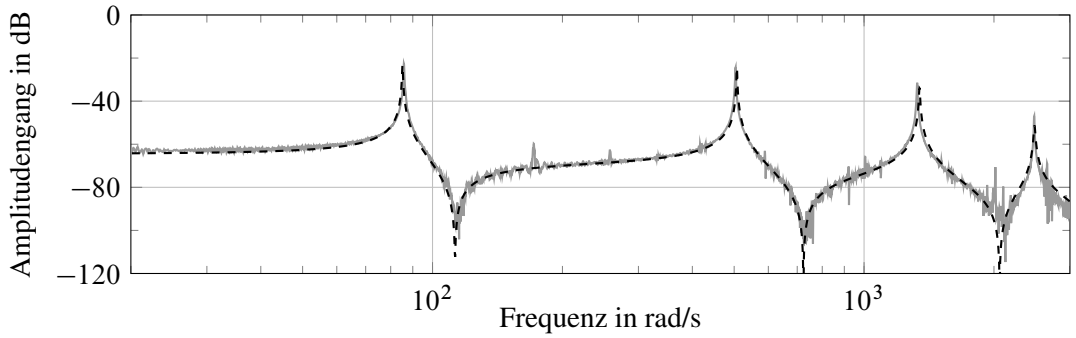

(a) Messung bei $\xi = 37{,}4\,\mathrm{cm}$




(b) Messung bei $\xi = 27{,}4\,\mathrm{cm}$




(c) Messung bei $\xi = 17{,}4\,\mathrm{cm}$




(d) Messung bei $\xi = 9{,}4\,\mathrm{cm}$

**Bild 4.6:** Vergleich der Amplitudengänge aus Messung $\hat{G}_{\mathrm{dv}}(\mathrm{i}\omega, \xi)$ (——) und Modell $G_{\mathrm{dv}}(\mathrm{i}\omega, \xi)$ (- - -) für verschiedene Messpunkte

Die durch die Parameteranpassung bestimmten Werte der Dichte und des Elastizitätsmoduls der Piezoaktoren weichen recht deutlich von denen ab, die den Werkstofftabellen entnommen sind. Letztlich wird über die Anpassung der Parameter allerdings auch versucht, Effekte zu kompensieren, die im Modell nicht berücksichtigt werden, wie beispielsweise der Einfluss der Klebstoffschicht zur Verbindung der Piezoaktoren mit dem Balken. Tatsächlich ergeben sich in [9] bei der Parameteridentifikation für einen vergleichbaren Aufbau ähnliche Verhältnisse.

Im Hinblick auf die Verwendung des Modells zur Auslegung eines Reglers ist schließlich noch zu prüfen, inwiefern die Dynamik der eingesetzten Verstärker, Messglieder und Filter, siehe Bild 4.4, zu berücksichtigen ist. Für die Versuche zur Reglerauslegung wird die Grenzfrequenz der Anti-Aliasing-Filter an den Eingängen des dSPACE-Systems auf 5 kHz eingestellt. Im Bereich der vierten Mode bewirken die eingesetzten elliptischen Filter sechster Ordnung eine Absenkung der Phase um ca. 15°. Dieser Effekt erscheint klein genug, um ihn nicht im für die Reglerauslegung verwendeten Modell zu berücksichtigen. Ebenso wird die Dynamik der Piezoverstärker nicht betrachtet. Die Grenzfrequenz der Filter zur Bandbegrenzung der Ausgangssignale des dSPACE-Systems, ebenfalls elliptische Filter sechster Ordnung, wird auf 1,5 kHz eingestellt, was eine merkliche Absenkung der Phase auch im Bereich der ersten vier Moden mit sich bringt. Um diesen Effekt zu berücksichtigen wird das Balkenmodell um ein Modell dieser Filter erweitert.

Mit der gewählten Ordnung der Approximation, $N = 10$, der partiellen Differentialgleichung und der Erweiterung des Modells des Balkens (4.39) um das Filter sechster Ordnung resultiert für die betrachtete Regelstrecke eine lineare Zustandsraumdarstellung $(A_\mathrm{S},\ B_\mathrm{S},\ C_\mathrm{S}(\theta), 0)$ der Ordnung 26. Der Vektor

$$\theta := \begin{bmatrix} \xi_{\mathrm{s}1} \\ \xi_{\mathrm{s}2} \end{bmatrix}$$

gibt hierbei die Abhängigkeit der Ausgangsmatrix $C_\mathrm{S}(\theta)$, vgl. (4.40), von den Positionen der Auslenkungsmessung an.

### 4.3.2 Reglerentwurf

Basierend auf dem Modell des Balkenversuchsstands mit der Spannung über den piezoelektrischen Aktoren als Eingang und zwei wählbaren Messpositionen als Ausgängen, gegeben durch

$$G_\mathrm{S}(s,\theta) := \left[\begin{array}{c|c} A_\mathrm{S} & B_\mathrm{S} \\ \hline C_\mathrm{S}(\theta) & 0 \end{array}\right],$$

erfolgt die Auslegung eines Reglers sowie das Festlegen der Freiheitsgrade im Systementwurf. Als primäres Ziel der Regelung wird die Erhöhung der Dämpfungsgrade der zu den ersten beiden Moden des Balkens gehörenden Eigenwerten gewählt. Hierfür soll ein möglichst einfacher Regler entworfen werden. Da die Balkenauslenkung gemessen wird, bietet es sich an, zur Erhöhung der Dämpfung des Systems einen Regler mit differenzierendem Verhalten zu verwenden. Speziell

wird ein Regler zweiter Ordnung der Form

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}(s) &:= 10^6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{sk_1}{(s-p_1)(s-p_2)} & \frac{sk_2}{(s-p_1)(s-p_2)} \end{bmatrix} \\
&= 10^6 \cdot \left[\begin{array}{c|c} p_2 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} p_1 & k_1 & k_2 \\ \hline p_1 & k_1 & k_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} p_2 & p_1 & k_1 & k_2 \\ 0 & p_1 & k_1 & k_2 \\ \hline 10^6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&=: \left[\begin{array}{c|c} A_\mathrm{K} & B_\mathrm{K} \\ \hline C_\mathrm{K} & D_\mathrm{K} \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

gewählt. Neben der Nullstelle im Ursprung der komplexen Ebene weist der Regler zwei reelle Eigenwerte $p_1$ und $p_2$ auf, damit sich ein realisierbares Übertragungsglied ergibt und eine Verringerung der Verstärkung von zumindest 20 dB pro Dekade für höhere Frequenzen gewährleistet ist. Der Faktor $10^6$ dient der Skalierung der Reglerverstärkungen $k_1$ und $k_2$. Dieser ist so gewählt, dass die Verstärkungen in den Übertragungspfaden des Reglers im niedrigen Frequenzbereich, für gewisse gegebene Bereiche der reellen Eigenwerte, in der Größenordnung eines idealen Differenzierers liegen.

Zusätzlich zur Vorgabe der Eigenwerte werden, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, weitere Anforderungen im Entwurf berücksichtigt. Im Speziellen wird hier die $\mathcal{H}_2$-Norm der Übertragungsfunktion einer Störung $w$ am Systemeingang auf die vom Regler erzeugte Stellgröße $z = u$ betrachtet. Bild 4.7 illustriert diese Anordnung in einem Blockschaltbild. Das hier eine am Systemeingang wirkender Störung berücksichtigt wird hat den Vorteil, dass die entsprechende Übertragungsfunktion zur Verifikation des Entwurfs direkt gemessen werden kann. Um die $\mathcal{H}_2$-Norm des Übertragungspfades im Entwurf zu berücksichtigen, wird das Modell der Regelstrecke um den entsprechenden Ein- und Ausgang erweitert. In der verallgemeinerten Regelkreisstruktur, vgl. Bild 4.1, hat die Regelstrecke somit die Form

$$
\tilde{G}(s) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ G_\mathrm{S}(s,\theta) & G_\mathrm{S}(s,\theta) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_\mathrm{S} & B_\mathrm{S} & B_\mathrm{S} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ C_\mathrm{S}(\theta) & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{4.42}
$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass sich für das Ein- und Ausgangspaar, bezüglich dessen die $\mathcal{H}_2$-Norm des geschlossenen Kreises bewertet werden soll, unabhängig von der Gestalt der Rückführung, kein Durchgriffsterm ergibt. Die $\mathcal{H}_2$-Norm dieses Übertragungspfades kann somit für jeden Regler, der zu einen stabilen geschlossenen Regelkreis führt, angegeben werden.

Wie in Kapitel 2 beschrieben wird das System (4.42) um die Zustände des Reglers erweitert und eine LFT-Darstellung bezüglich der Parameter $\xi_{s1}$ und $\xi_{s2}$ erzeugt. Letzteres erfolgt automatisiert mittels der in der Robust Control Toolbox von MATLAB vorhandenen Methoden, wobei die Parameter $\xi_{s1}$ und und $\xi_{s2}$ derart transformiert werden, dass ein zulässiger Bereich von 10 bis 37,4 cm in Längsrichtung des Balkens auf das Intervall $[-1, 1]$ abgebildet wird. Als Referenz für die ge-

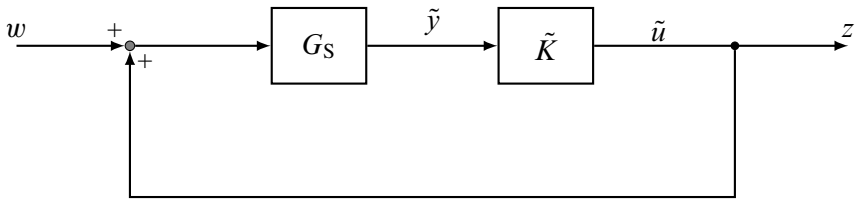



**Bild 4.7:** Struktur des Systems mit Rückführung sowie externem Ein- und Ausgang

wählten Bezeichnungen der Systeme sowie der Ein- und Ausgangsgrößen sind diese Umformungen der Systemdarstellung in Bild 4.8 dargestellt. Es resultiert ein System 28. Ordnung mit einer statischen Rückführung

$$K(\kappa) = \begin{bmatrix} A_K & B_K & 0 & 0 \\ C_K & D_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\xi_1} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{\xi_2} I_{11} \end{bmatrix}$$

mit

$$\kappa := \begin{bmatrix} \operatorname{vec}\begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \\ \kappa_{\xi_1} \\ \kappa_{\xi_2} \end{bmatrix}$$

die alle Freiheitsgrade des dynamischen Reglers sowie des Strukturentwurfs enthält. Im Hinblick auf die gewählte Implementierung der Verfahren zur Reglerauslegung werden hierbei die Matrizen der Zustandsraumdarstellung des dynamischen Reglers als Variablen berücksichtigt. Die Beschränkung auf die in (4.41) gegebene Struktur der dynamischen Rückführung ebenso wie die Beschränkung der Positionen der Auslenkungsmessung erfolgt durch die Definition der zulässigen Menge $\mathcal{P}_\kappa$ mittels geeignet gewählter linearer Gleichungs- und Ungleichungsbedinungen bezüglich $\kappa$.

Zur Durchführung des Polvorgabeentwurfs sind sämtliche 28 Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises geeignet vorzugeben. Da die exakte Vorgabe der Eigenwerte im Hinblick auf die gewählte, einfache Reglerstruktur kaum sinnvoll ist, werden jeweils zulässige Bereiche definiert. Der offene Regelkreis weist 13 konjugiert komplexe Eigenwertpaare sowie, bedingt durch die dynamische Erweiterung, zwei Eigenwerte im Ursprung der komplexen Ebene auf. Gezielt verschoben werden sollen die beiden Eigenwertpaare mit den niedrigsten Kennkreisfrequenzen. Für diese werden recht kleine Bereiche in der komplexen Ebene derart gewählt, dass sich Dämpfungsgrade von ca. 2,5% bei ungefähr gleichbleibenden Kennkreisfrequenzen ergeben. Für die verbleibenden konjugiert komplexen Eigenwertpaare werden geeignet gewählte Gebiete um die Eigenwerte des offenen Kreises vorgegeben. Weiterhin werden zulässige Bereiche für zwei reelle Eigenwerte auf der negativen reellen Achse definiert. Auf die spezielle Wahl der einzelnen Bereiche soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, sie sind jedoch in Bild 4.9 zusammen mit den Ergebnissen des Entwurfs illustriert.

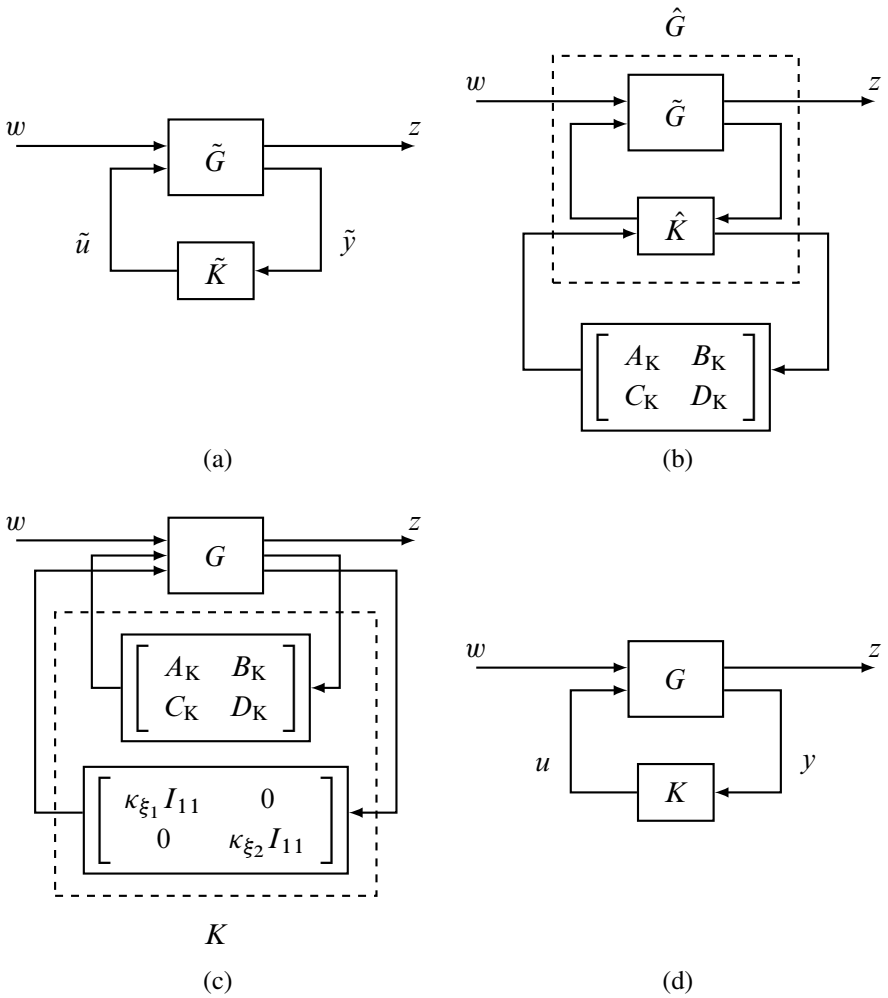



**Bild 4.8:** Umformung der Systemdarstellung (a) durch dynamische Erweiterung (b) und erzeugen der LFT-Darstellung (c) in die für den Reglerentwurf genutzte Struktur (d)

Für den Entwurf zur Vorgabe der Eigenwerte wird das in (4.7) gegebene Optimierungsproblem mit der direkten Berücksichtigung der Abstände der Eigenwerte gewählt. Als Variablen treten die Einträge im Vektor $\kappa \in \mathbb{R}^{14}$ sowie die Variablen zur Berücksichtigung der Bereiche der Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{R}^{15}$ und $\beta \in \mathbb{R}^{13}$ auf. Hinsichtlich der 14 Einträge des Vektors $\kappa$ ist anzumerken, dass unter Berücksichtigung der Strukturbeschränkung aus (4.41) in Form eines linearen Gleichungssystems bzw. durch Fixieren konstanter Elemente, lediglich sechs tatsächliche Freiheitsgrade verbleiben. Diese entsprechen den zwei Eigenwerten des dynamischen Reglers und dessen zwei Verstärkungsfaktoren sowie den Orten der Auslenkungsmessung. Zur Suche nach einer Lösung des Polvorgabeproblems wird die bereits erwähnte Funktion *e04uc* der NAG-Bibliothek [120] verwendet. Ist eine solche gefunden, wird diese als Startwert zur Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm, siehe (4.32), im gewählten Übertragungspfad verwendet, wobei das in der Funktion *fmincon* der Optimization Toolbox von MATLAB implementierte Innere-Punkte-Verfahren genutzt wird. Die obere Schranke $\gamma$ für die als Nebenbedingung zu berücksichtigte Funktion $J_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta)$ wird zu 0,1 gewählt.

**Tabelle 4.6:** Entwurfsparameter und Werte der Funktionen $J_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta)$ und $\sqrt{J_{\mathcal{H}_2}(\kappa)}$ vor und nach Minimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm

| | $p_1$ | $p_2$ | $k_1$ | $k_2$ | $\xi_{s1}$ in cm | $\xi_{s2}$ in cm | $J_{\mathrm{ew}}$ | $\sqrt{J_{\mathcal{H}_2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne $\mathcal{H}_2$-Min. | -2804 | -1372 | 10,35 | -11.83 | 27,64 | 27,09 | $1{,}25 \cdot 10^{-16}$ | 8,23 |
| Mit $\mathcal{H}_2$-Min. | -2886 | -1523 | -1,052 | -0,8829 | 24 | 13,53 | 0,1 | 4,708 |

Das Ergebnis eines solchen Entwurfs im Hinblick auf die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises ist in Bild 4.9 dargestellt. Im oberen Teil der Abbildung sind sämtliche Eigenwerte des geschlossenen Kreises mit Optimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm sowie die für diese vorgegebenen Bereiche gezeigt. Der besonders relevante Bereich der Eigenwerte mit niedrigen Kennkreisfrequenzen ist im unteren Teil des Bildes noch einmal vergrößert dargestellt. Zusätzlich werden dort auch die Eigenwerte des geschlossenen Kreises nach dem ersten Entwurfsschritt gezeigt. Es ist zu beobachten, dass sich die ersten beiden konjugiert komplexen Eigenwertpaare nach der Optimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm in Übereinstimmung mit der Schranke $\gamma$ außerhalb der vorgegebenen Bereiche befinden, während im ersten Entwurfsschritt die Bereiche wie vorgegeben erreicht werden ($J_{\mathrm{ew}} = 1{,}25 \cdot 10^{-16}$).

Die Werte der Entwurfsparameter sowie die Werte der Funktionen $J_{\mathrm{ew}}(\kappa,\alpha,\beta)$ und der $\mathcal{H}_2$-Norm bzw. der Quadratwurzel von $J_{\mathcal{H}_2}(\kappa)$ sind in Tabelle 4.6 für beide Entwurfsschritte angegeben. Für die $\mathcal{H}_2$-Norm ergibt sich eine Reduzierung um den Faktor 0,572 im Vergleich zur reinen Eigenwertvorgabe. Veranschaulicht wird dieses Resultat durch Betrachtung des Übertragungsverhaltens im geschlossenen Regelkreis im für den Entwurf relevanten Übertragungspfad. Dieses ist in Bild 4.10 dargestellt, das neben dem aus dem Modell bestimmten Amplitudengang mit und ohne Optimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm auch die Verifikation des Entwurfs am Versuchsstand zeigt. Insbesondere im Bereich der dritten Resonanzüberhöhung wird der Unterschied deutlich. Mit den im zweiten Entwurfsschritt bestimmten Parametern ist diese deutlich geringer ausgeprägt. Der Effekt der Erhöhung der Dämpfungsgrade ist in Bild 4.11 dargestellt. Dieses zeigt die am Versuchsstand gemessenen Amplitudengänge der Übertragungspfade $w \mapsto \tilde{y}$ im offenen sowie geschlossenen Regelkreis für die im zweiten Entwurfsschritt bestimmten Parameter.

Abschließend sind noch einige Bemerkungen hinsichtlich des beschriebenen Reglerentwurfs angebracht. Die Algorithmen zur Suche nach Lösung der betrachteten Optimierungsprobleme sind von der Wahl der Startwerte abhängig und garantieren in keiner Weise das Auffinden eines globalen Optimums. Die in Tabelle 4.6 angegeben Parametersätze entsprechen somit lediglich dem Ergebnis für einen bestimmten Startwert. Auf einen ausführlichen Vergleich von Ergebnissen für verschiedene Startwerte wird an dieser Stelle verzichtet. Es lässt sich feststellen, dass für eine Reihe entsprechender Versuche die gewünschte Eigenwertkonfiguration im ersten Entwurfsschritt in der überwältigenden Mehrzahl der Fälle erreicht wird, wobei sich die resultierenden Parametersätze im Allgemeinen unterscheiden. Was den zweiten Entwurfsschritt betrifft, ist der in Tabelle 4.6 dargestellte Wert der $\mathcal{H}_2$-Norm das am häufigsten erzielte sowie auch beste gefundene Ergebnis,

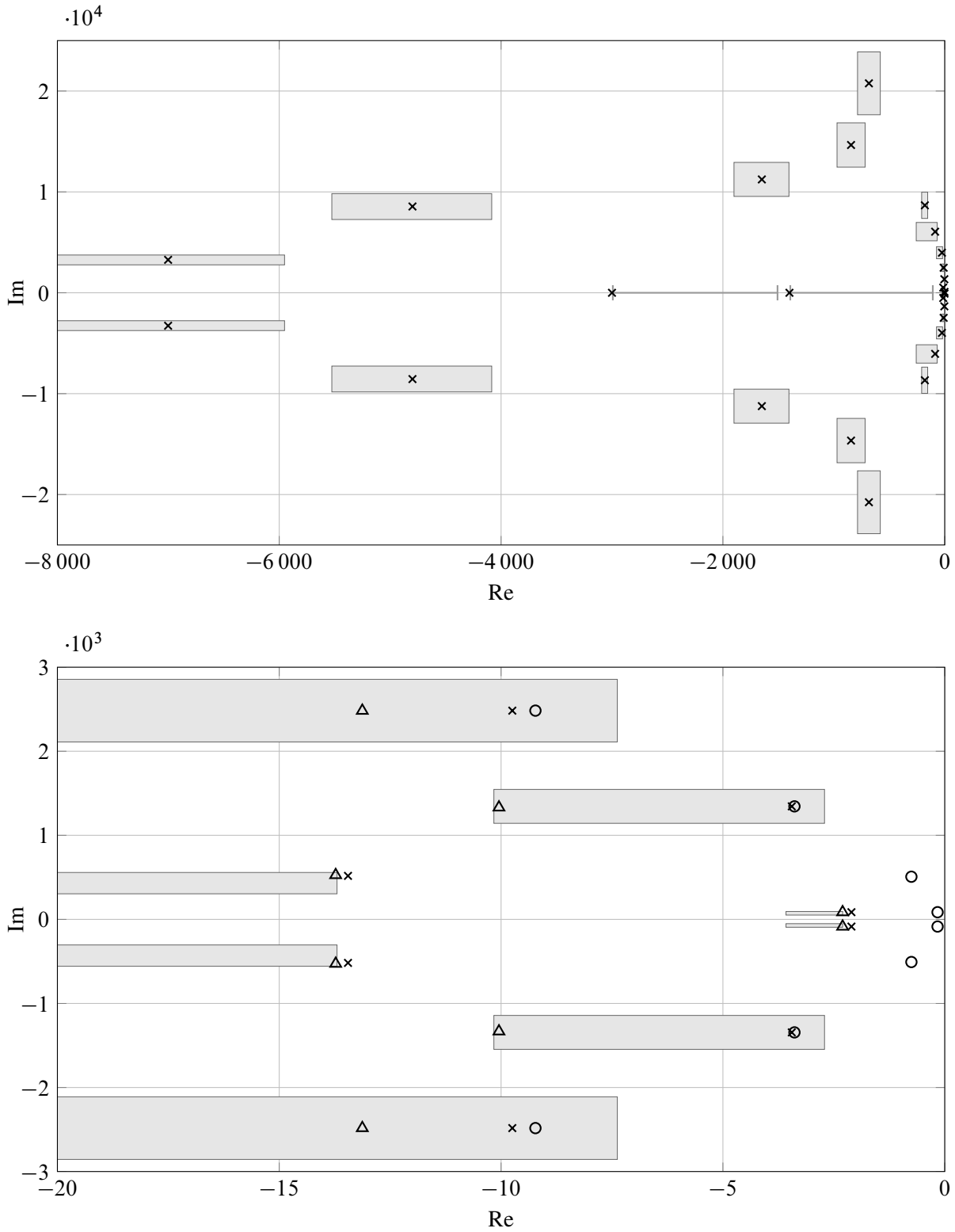



**Bild 4.9:** Darstellung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit (×) und ohne (△) Optimierung der $\mathcal{H}_2$-Norm, der Eigenwerte der Regelstrecke (○) und der vorgegebenen Gebiete

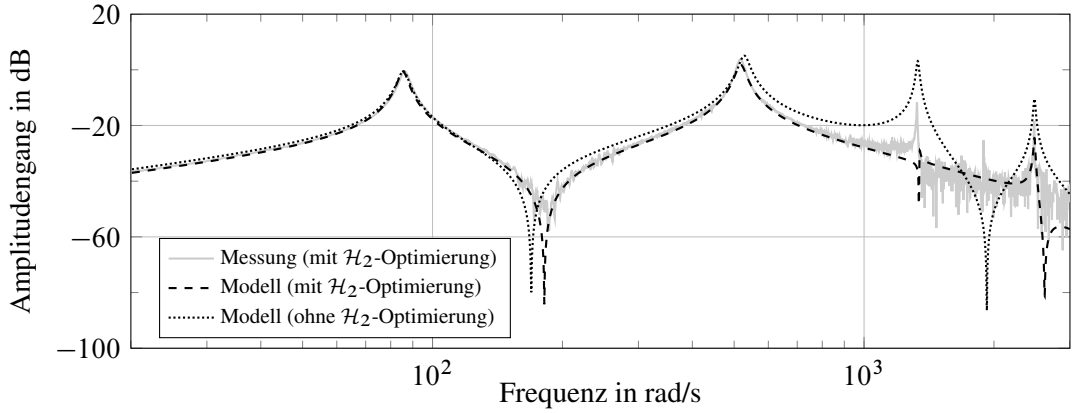
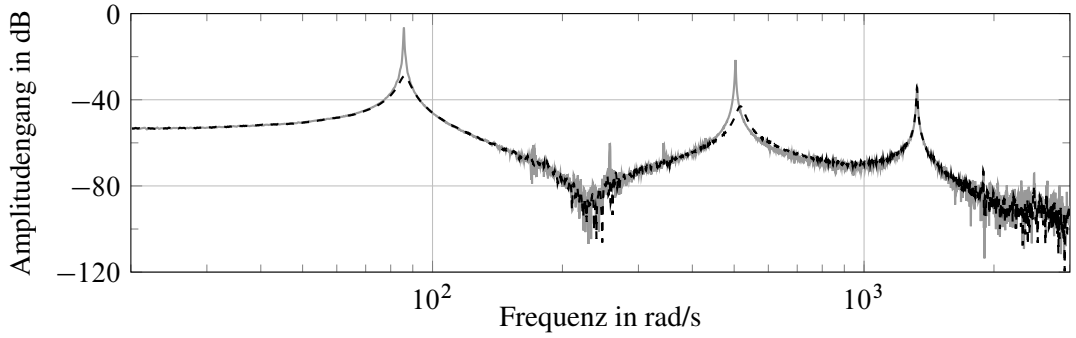
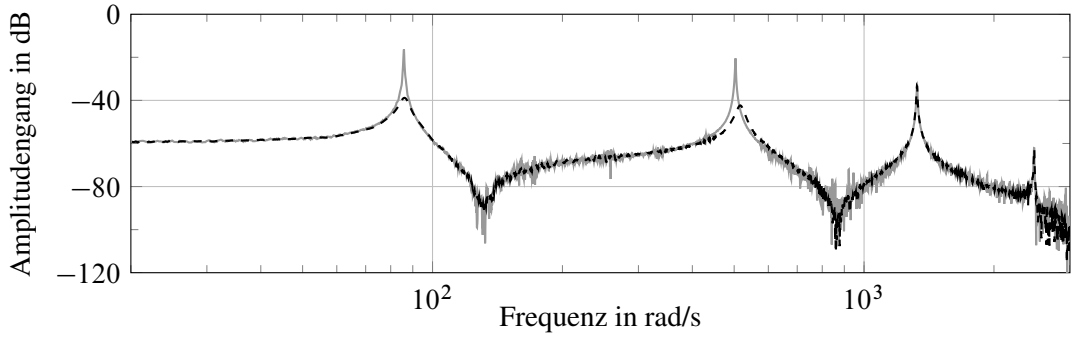



**Bild 4.10:** Vergleich der Amplitudengänge ($w \mapsto z$) des geschlossenen Regelkreises aus Messung und Modell




(a) Messung bei 24 cm




(b) Messung bei 13,53 cm

**Bild 4.11:** Vergleich der gemessenen Amplitudengänge ($w \mapsto \tilde{y}$) im offenen (——) und geschlossenen Regelkreis (- - -)

welches zudem stets mit äquivalenten, d.h. bis auf ein Vertauschen der Positionen der Auslenkungsmessungen und der Reglerverstärkungen, Parameterkonfigurationen erreicht wird.

## 4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten diskutiert, das Polvorgabeproblem als Parameteroptimierungsproblem zu formulieren. Der in Abschnitt 4.1.1 beschriebene Ansatz erscheint hierbei hinsichtlich der einfachen Interpretation des Wertes der Gütefunktion sowie auch der erzielten Resultate, bei einer Reihe von Versuchen mit zufällig erzeugten Systemen und praktischen Entwurfsproblemen, vorteilhaft. Das ausführlich diskutierte Entwurfsbeispiel verdeutlicht den Nutzen der Möglichkeit, zulässige Bereiche für die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorzugeben, sowie der Berücksichtigung zusätzlicher Entwurfsforderungen.

Um effiziente Verfahren für Optimierungsprobleme mit differenzierbaren Funktionen nutzen zu können, wird, speziell hinsichtlich des in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Verfahrens, die einschränkende Annahme getroffen, dass lediglich einfache Eigenwerte für den geschlossenen Regelkreis vorgegeben werden. Die Gütefunktion aus Abschnitt 4.1.2, ebenso wie beispielsweise das von Franke [45] vorgestellte Verfahren, das ein Optimierungsproblem bezüglich der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms betrachtet, erlauben dies grundsätzlich. Wenngleich die Beschränkung auf einfache Eigenwerte für die meisten praktischen Anwendungen unproblematisch ist, ist es dennoch wünschenswert, die Vorgabe mehrfacher Eigenwerte auch mit dem in Abschnitt 4.1.1 gegebenen Ansatz geeignet behandeln zu können. Diese Thematik wird im folgenden Kapitel im Rahmen der Diskussion von Optimierungsproblemen mit Funktionen von Eigenwerten aufgegriffen.

# 5 Entwurf zur Erhöhung von Eigenwert-Dämpfungsgraden

Für eine Vielzahl von Aufgabenstellungen ist es zielführend, anstatt sehr spezifischer Anforderungen bezüglich der Lage einzelner Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises allgemeinere Anforderungen an das Spektrum zu formulieren. Neben der generellen Problematik der Wahl geeigneter Eigenwerte, ist dies insbesondere relevant bei Systemen höherer Ordnung und solchen, bei denen die Anzahl der Eigenwerte deutlich größer als die für den Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade ist. Bei den im vorangegangenen Kapitel beschriebenen direkten Verfahren wird diesem Umstand durch die Möglichkeit der Vorgabe von Eigenwertbereichen Rechnung getragen.

Die vermutlich wichtigsten Beispiele für Funktionen, die Kenngrößen für das gesamte Spektrum darstellen, sind die spektrale Abszisse

$$\alpha(\kappa) := \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \operatorname{Re}(\lambda_i(\kappa)) \tag{5.1}$$

und der spektrale Radius

$$\rho(\kappa) := \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |\lambda_i(\kappa)| \,. \tag{5.2}$$

Die Minimierung dieser Funktionen über alle zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade $\kappa$ in der Systemmatrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ des geschlossenen Regelkreises mit den Eigenwerten $\lambda_i(\kappa)$ ist insbesondere im Zusammenhang mit der Suche nach stabilisierenden Rückführungen zeitkontinuierlicher beziehungsweise zeitdiskreter Systeme von Interesse [15, 21, 23]. Wenngleich es, abhängig von der gegebenen Entwurfsaufgabe eine Reihe verschiedener Ansätze zur Definition geeigneter Bereiche für das Spektrum gibt, werden diese im Allgemeinen derart gewählt, dass Anforderungen an die Dynamik des Systems, wie minimale und maximale Abklingkonstanten sowie eine Mindestdämpfung der Eigenwerte, berücksichtigt werden [70, 117]. Beispiele für Funktionen, die außerhalb derartiger Gebiete liegende Eigenwerte bestrafen und für den Reglerentwurf das Maximum entsprechender Straffunktionen über alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises minimieren, finden sich in [117, 136].

Im Folgenden wird hauptsächlich ein Entwurf zur Erhöhung der Eigenwert-Dämpfungsgrade

$$\zeta_i(\kappa) := -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_i(\kappa))}{|\lambda_i(\kappa)|}$$

betrachtet. Deren Maximierung in bestimmten Frequenzbereichen ist im Zusammenhang mit der Minderung von Strukturschwingungen, insbesondere mittels passiver Elemente, von Interesse [132, 134]. Durch die Ähnlichkeit dieser Problemstellung zur Minimierung des spektralen Radius und der spektralen Abszisse bietet es sich an, zunächst Funktionen von Eigenwerten in einem

generelleren Rahmen und speziell Gemeinsamkeiten und Unterschiede der genannten Problemstellungen zu diskutieren. In weiteren Abschnitten wird die Wahl eines geeigneten Vorgehens zur Suche nach Lösungen des resultierenden Parameteroptimierungsproblems sowie dessen Anwendung auf mehrere Entwurfsbeispiele beschrieben.

## 5.1 Funktionen von Eigenwerten

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die parameterabhängige Darstellung der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$A_{\mathrm{cl}}(\kappa) = A + BK(\kappa)(I - DK(\kappa))^{-1}C \tag{5.3}$$

mit den gleichen Vereinbarungen wie sie in Kapitel 4 bezüglich der Dimensionen der auftretenden Matrizen sowie der Abhängigkeit der Matrix $K(\kappa)$ vom Vektor $\kappa \in \mathbb{R}^q$ der Entwurfsvariablen getroffen werden. Insbesondere sind die Elemente der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$ rationale und somit stetige und differenzierbare Funktionen bezüglich des Vektors der Entwurfsvariablen $\kappa$. Hinsichtlich des Entwurfs kann die zulässige Menge $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa \subset \mathbb{R}^q$ geeignet eingeschränkt werden. Der Einfachheit halber wird wiederum davon ausgegangen, dass $\mathcal{P}_\kappa$ durch affine Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen bezüglich $\kappa$ gegeben und somit konvex ist. Es sind $\lambda_i(\kappa)$, $i \in \mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} := \{1, \ldots, n\}$, die Eigenwerte der Matrix $A_{\mathrm{cl}}(\kappa)$, wobei mehrfache Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit mehrfach berücksichtigt werden. Diese können zu einem Vektor $\lambda(\kappa) \in \mathbb{C}^n$ zusammengefasst werden. Eine spezielle Ordnung der Eigenwerte im Vektor $\lambda(\kappa)$ ist nicht von Belang und es kann prinzipiell eine beliebige Anordnung bzw. Sortierung gewählt werden.

Eine Funktion von Eigenwerten bezeichnet im Kontext dieser Arbeit eine verkettete Abbildung der Form $\psi(\kappa) := g \circ \lambda(\kappa)$. Hierbei ist $g$ eine Funktion, welche den komplexen Vektor der Eigenwerte auf die Menge der reellen Zahlen abbildet und dabei invariant gegenüber Permutationen der Elemente dieses Vektors ist, vgl. [22]. Letzteres stellt sicher, dass bei der Auswertung der Funktion die Sortierung bzw. Reihenfolge, in welcher die Eigenwerte berücksichtigt werden, keine Rolle spielt. Offensichtlich genügen die spektrale Abszisse (5.1) und der spektrale Radius (5.2) dieser Definition, wobei $g$ dem Maximum der Realteile bzw. der Beträge der Elemente des Vektors $\lambda(\kappa)$ entspricht. Entsprechendes gilt für die in [117] und [136] gegebenen Funktionen zur Bestrafung von Eigenwerten, die außerhalb zulässiger Bereiche liegen. Unter Verwendung dieser Notation können die mit den genannten Beispielen korrespondierenden Entwurfs- bzw. Parameteroptimierungsprobleme allgemein in der Form

$$\min_{\kappa \in \mathcal{P}_\kappa} \quad \psi(\kappa) \tag{5.4}$$

angegeben werden. Zur Diskussion spezieller Eigenschaften von Min-Max-Optimierungsproblemen ist es zweckmäßig, diese in der Form

$$\min_{\kappa \in \mathcal{P}_\kappa} \quad \max_{i \in \mathcal{I}} f_i(\kappa) \tag{5.5}$$

mit $\psi(\kappa) = \max_{i\in\mathcal{I}} f_i(\kappa)$ zu formulieren. Im Fall der Minimierung der spektralen Abszisse entsprechen somit die Funktionen $f_i(\kappa)$ beispielsweise den Realteilen der einzelnen Eigenwerte.

Im Zusammenhang mit Problemstellungen zur Schwingungsminderung linearer dynamischer Systeme und insbesondere zur Minderung von Strukturschwingungen bietet es sich an, die Dämpfung der am schwächsten gedämpften Eigenwerte

$$\min_{i\in\mathcal{I}} \zeta_i(\kappa) = \min_{i\in\mathcal{I}} -\frac{\mathrm{Re}\,(\lambda_i(\kappa))}{|\lambda_i(\kappa)|} \tag{5.6}$$

durch geeignete Wahl der Freiheitsgrade im Systementwurf zu erhöhen. Charakteristisch für entsprechende Entwurfsaufgaben ist, dass oftmals nur ein bestimmter Frequenzbereich von Interesse ist, beziehungsweise die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade nur ausreichen, die schwingungsfähigen Moden des Systems in einem begrenzten Frequenzband geeignet zu beeinflussen. Ein solches Frequenzband kann durch untere und obere Schranken $\omega_{\min}$ und $\omega_{\max}$ bezüglich der Kennkreisfrequenzen der Eigenwerte mit

$$\omega_{\min} \leq |\lambda_i(\kappa)| \leq \omega_{\max}$$

definiert werden. Eigenwerte, die sich nicht in diesem Bereich befinden, sollen möglichst keinen Einfluss auf den Entwurf haben. Um diese Beschränkung des für den Entwurf relevanten Frequenzbereichs näherungsweise zu berücksichtigen, können externe Straffunktionen der Form

$$\mu_i(\kappa) = \frac{1}{2}\gamma\left((|\lambda_i(\kappa)| - \omega_{\max})_+^2 + (\omega_{\min} - |\lambda_i(\kappa)|)_+^2\right)$$

eingeführt werden. Hierin ist $\gamma > 0$ eine Konstante zur Gewichtung der Straffunktionen und $(\cdot)_+ := \max\{0, \cdot\}$. Um diese Funktionen erweitert, ergibt sich aus (5.6)

$$\min_{i\in\mathcal{I}} \zeta_i(\kappa) + \mu_i(\kappa). \tag{5.7}$$

Wird nur jeweils eine obere oder untere Schranke oder keine Beschränkung des Frequenzbereichs benötigt, können die Funktionen $\mu_i(\kappa)$ angepasst werden bzw. gänzlich unberücksichtigt bleiben.

Die resultierende Entwurfsaufgabe besteht in der Maximierung des Ausdrucks (5.7) unter Verwendung der zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade. Um jedoch einen Ausdruck zu erhalten, der generell der in (5.4) bzw. (5.5) gegebenen Form entspricht, wird die äquivalente Problemstellung

$$\min_{\kappa\in\mathcal{P}_\kappa} \quad \max_{i\in\mathcal{I}} -\zeta_i(\kappa) - \mu_i(\kappa) \tag{5.8}$$

betrachtet. Weiterhin soll im Folgenden die Klasse der betrachteten Entwurfsprobleme an dieser Stelle insofern beschränkt werden, als dass sich für jede zulässige Wahl des Vektors $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$ ein stabiles System ergibt und sich die Eigenwerte entsprechend in der offenen linken Halbebene der komplexen Zahlenebene befinden. Wenngleich diese Einschränkung recht restriktiv erscheint, ist zu beachten, dass das Anwendungsgebiet insbesondere die Parameteroptimierung passiver Elemente zur Minderung von Strukturschwingungen ist, für welche die Stabilität des geschlossenen

Regelkreises in natürlicher Weise gegeben ist. Als Beispiele seien hier die Auslegung mechanischer Tilger und der Entwurf passiver elektrischer Netzwerke zur Minderung von Strukturschwingungen genannt, die als Anwendungsbeispiele in Abschnitt 5.3 dienen. Für Systeme, die aktive Komponenten beinhalten, kann diese Annahme ebenfalls gültig sein, sofern die geforderten Stabilitätseigenschaften, beispielsweise mittels einer passitivitätsbasierten Argumentation [68], sichergestellt werden können. Alternativ kann die betrachtete Problemstellung durch eine Erweiterung um geeignete Strafterme angepasst werden, um die Stabilität des resultierenden Systems zu gewährleisten.

Das Maximum

$$\delta(\kappa) := \max_{i \in \mathcal{I}} -\zeta_i(\kappa) - \mu_i(\kappa) \tag{5.9}$$

in (5.8) wird jeweils durch die Funktionen $\zeta_j(\kappa)$ und $\mu_j(\kappa)$ mit

$$j \in \hat{\mathcal{I}}(\kappa) := \{i \in \mathcal{I} : \ -\zeta_i(\kappa) - \mu_i(\kappa) = \delta(\kappa)\}$$

bestimmt. Für Eigenwerte $\lambda_i(\kappa) \in \mathbb{C}_-$ nehmen die Funktionen $\zeta_i(\kappa)$ Werte im Intervall (0,1] an. Bezüglich der Einschränkung des betrachteten Frequenzbereichs kann festgestellt werden, dass, sofern für einen gegebenen Vektor $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$ ein Eigenwert $\lambda_j(\kappa)$ mit

$$\omega_{\min} \leq |\lambda_j(\kappa)| \leq \omega_{\max}$$

existiert, kein Eigenwert $\lambda_k(\kappa)$, dessen Kennkreisfrequenz mehr als $\sqrt{2/\gamma}$ rad/s außerhalb des geforderten Frequenzbandes liegt, den Funktionswert $\delta(\kappa)$ bestimmen bzw. $k \in \hat{\mathcal{I}}(\kappa)$ gelten kann.

Eine wesentliche Vereinbarung, die zu Beginn dieses Abschnitts bei der Definition der Funktionen von Eigenwerten getroffen wird, ist, dass der Funktionswert unabhängig von der Sortierung der Eigenwerte ist. Eine Konsequenz dieser geforderten Invarianz gegenüber Permutationen des Vektors der Eigenwerte ist insbesondere, dass, sofern die Funktion $g$ in der Verkettung $g \circ \lambda(\kappa)$ stetig ist, die gesamte Abbildung $\psi(\kappa)$ ebenfalls stetig ist. Dies ergibt sich aus der Stetigkeit des unsortierten $n$-Tupels der Eigenwerte [22, 65], siehe auch Anhang A. Entsprechend ist die Funktion $\delta(\kappa)$, wie auch der spektrale Radius (5.2) und die spektrale Abszisse (5.1), unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen, stetig.

Hinsichtlich der Differenzierbarkeit stellt sich die Situation, abhängig von der konkreten Gestalt der Funktion $\psi(\kappa)$, komplizierter dar, was Auswirkungen auf die Auswahl geeigneter Optimierungsverfahren hat. Für $\psi(\kappa) = \delta(\kappa)$ sind die Funktionen

$$f_i(\kappa) = -\zeta_i(\kappa) - \mu_i(\kappa)$$

aus (5.5) differenzierbar, sofern der mit diesen assoziierte Eigenwert $\lambda_i(\kappa)$ einfach ist. Die partiellen Ableitungen der Funktionen $f_i(\kappa)$ sind in diesem Fall durch

$$\frac{\partial f_i(\kappa)}{\partial \kappa_j} = -\frac{\partial \zeta_i(\kappa)}{\partial \kappa_j} - \frac{\partial \mu_i(\kappa)}{\partial \kappa_j} \tag{5.10}$$

mit

$$\frac{\partial \zeta_i(\kappa)}{\partial \kappa_j} = \frac{\mathrm{Re}(\lambda_i)\,\mathrm{Im}(\lambda_i)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\right) - \mathrm{Im}(\lambda_i)^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\right)}{|\lambda_i|^3}$$

$$\frac{\partial \mu_i(\kappa)}{\partial \kappa_j} = \begin{cases} \gamma\,(1-\omega_{\max})\,\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\right)\mathrm{Re}(\lambda_i)+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\right)\mathrm{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} & |\lambda_i| \geq \omega_{\max} \\ \gamma\,(1-\omega_{\min})\,\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\right)\mathrm{Re}(\lambda_i)+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\right)\mathrm{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} & |\lambda_i| \leq \omega_{\min} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $\partial \lambda_i / \partial \kappa_j$ gemäß (4.8) gegeben. Die Herleitung dieser Ausdrücke für die partiellen Ableitungen der Funktionen $\zeta_i(\kappa)$ und $\mu_i(\kappa)$ ergibt sich in einfacher Weise, wenn die komplexen Größen als Elemente eines zweidimensionalen reellen Vektorraums aufgefasst werden. Die Bildung der Real- und Imaginärteile entspricht in diesem Fall der Projektion auf die Koordinatenachsen und die Betragsbildung der 2-Norm. Ersteres sind lineare Abbildungen und ein Ausdruck für das Differential der 2-Norm ist in (B.10) gegeben. Die Differenzierbarkeit der Funktion $\psi(\kappa)$ ist somit an allen Punkten $\hat{\kappa}$ gegeben, an denen nur ein $f_i(\hat{\kappa})$ das Maximum in (5.9) bestimmt bzw. die Menge

$$\hat{\mathcal{I}}(\hat{\kappa}) = \{i \in \mathcal{I} : \; f_i(\kappa) = \psi(\kappa)\}$$

nur ein Element aufweist. Gleiches gilt für zwei Elemente, sofern diese mit einem Paar einfacher konjugiert komplexer Eigenwerte korrespondieren. Beinhaltet $\hat{\mathcal{I}}(\hat{\kappa})$ mehrere Elemente, die jeweils mit einfachen Eigenwerten korrespondieren, liegt ein Maximum an dieser Stelle differenzierbarer Funktionen vor, das mittels der Theorie bezüglich der Anwendung des max-Operators auf differenzierbare Funktionen untersucht werden kann [36, 99]. Hierauf wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen.

Für die spektrale Abszisse, den spektralen Radius [21] sowie die Straffunktionen zur Polbereichsvorgabe [136] gelten entsprechende Aussagen. Generell kann festgestellt werden, dass ein Spektrum mit ausschließlich einfachen Eigenwerten, die in einer offenen Umgebung um den betrachteten Punkt durch differenzierbare Funktionen ausgedrückt werden können, den generischen Fall bezüglich der Eigenwerte einer Matrix als Funktion ihrer Elemente darstellt, siehe Anhang A. Somit ergeben sich im Allgemeinen für fast jede Wahl des Vektors $\kappa$ differenzierbare Funktionen $f_i(\kappa)$. Welche Problematik sich allerdings dennoch im Hinblick auf das Parameteroptimierungsproblem (5.5) ergeben kann, soll zunächst anhand zweier Beispiele illustriert werden.

**Beispiel 5.1.** *Betrachtet wird die Matrix*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa + 1/2 \end{bmatrix}$$

*in einer Veränderlichen $\kappa$. Diese entspricht der Systemmatrix einer Parallelschaltung eines* $\mathrm{PT}_2$*-Gliedes mit der Kennkreisfrequenz* $1\,\mathrm{rad/s}$ *und der Dämpfung $\kappa$ und eines* $\mathrm{PT}_1$*-Gliedes mit der*

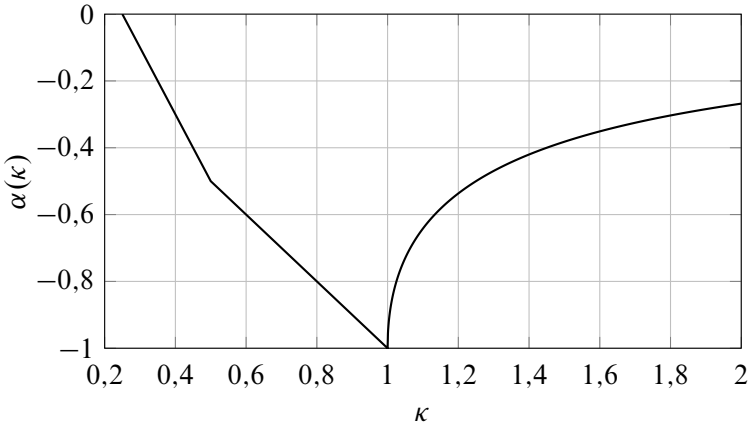



**Bild 5.1:** Spektrale Abszisse $\alpha(\kappa)$ der Matrix aus Beispiel 5.1

*Eckfrequenz* $-2\kappa + 1/2$ rad/s. *Die Eigenwerte dieser Matrix sind durch*

$$\lambda_{1/2}(\kappa) = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}$$
$$\lambda_3(\kappa) = -2\kappa + \frac{1}{2}$$

*gegeben. Der Wert der spektralen Abszisse*

$$\alpha(\kappa) = \begin{cases} -2\kappa + \frac{1}{2} & \kappa \leq \frac{1}{2} \\ -\kappa & \frac{1}{2} \leq \kappa \leq 1 \\ -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} & \kappa \geq 1 \end{cases}$$

*ergibt sich entsprechend. Diese ist in Bild 5.1 dargestellt. Von Interesse sind die Punkte* $\kappa = 0{,}5$ *und* $\kappa = 1$. *Ersterer markiert den Übergang des Werts der spektralen Abszisse von dem reellen Eigenwert auf den Realteil des an diesem Punkt konjugiert komplexen Eigenwertpaares. Alle Eigenwerte weisen an dieser Stelle den selben Realteil auf, sind allerdings einfach und dementsprechend differenzierbar, die Funktion* $\alpha(\kappa)$ *als Maximum der Realteile jedoch nicht. Der Punkt* $\kappa = 1$ *markiert den Übergang des konjugiert komplexen Eigenwertpaares zu zwei reellen Eigenwerten. Es liegt ein mehrfacher Eigenwert* $\lambda_{1/2}(1) = -1$ *vor, dessen geometrische Vielfachheit kleiner der algebraischen ist. Die Matrix ist an dieser Stelle somit nicht diagonalähnlich und die spektrale Abszisse nicht differenzierbar und nicht Lipschitz-stetig.*

In obigem Beispiel ist insbesondere zu beachten, dass die Funktion $\alpha(\kappa)$ an dem Punkt, an dem sie weder differenzierbar noch Lipschitz-stetig ist, ihr globales Minimum annimmt. Weitere Beispiele für die spektrale Abszisse bzw. den spektralen Radius in einer und mehreren Veränderlichen finden sich in [21] und [97]. Dass entsprechende Situationen auch bei der Funktion $\delta(\kappa)$ auftreten können, illustriert folgendes Beispiel.

**Beispiel 5.2.** *Betrachtet wird der in Bild 3.1 dargestellte Zweimassenschwinger, dessen Systemmatrix in* (3.36) *angegeben ist. In dieser werden* $m_1 = m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $c_1 = 1\,\mathrm{N/m}$ *sowie* $d_1 = 0\,\mathrm{Ns/m}$ *gewählt. Das resultierende System kann als ein ungedämpfter Schwinger mit einem gedämpften*

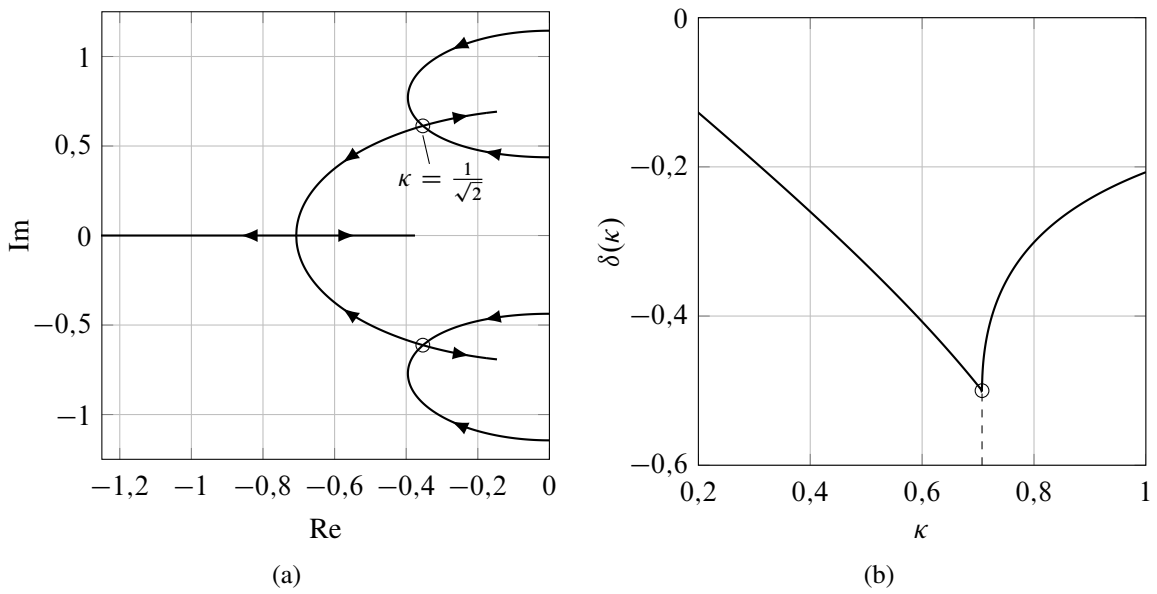



**Bild 5.2:** (a) Eigenwerte der Systemmatrix aus Beispiel 5.2 für $\kappa \in [0,1]$ und (b) Verlauf der Funktion $\delta(\kappa)$

*Tilger interpretiert werden. Ähnlich wie bei den in Abschnitt 3.4.2 erwähnten Einstellregeln nach Den Hartog [37] existieren für diesen Fall Einstellregeln für den Tilger zur Maximierung der Abklingraten dieser Anordnung [14]. Für das gegebene Verhältnis der beiden Massen liefern diese die Werte* $c_2 = 0{,}25\,\mathrm{N/m}$ *und* $d_2 = 1/\sqrt{2}\,\mathrm{Ns/m}$ *als Konstanten der zweiten Feder bzw. des zweiten Dämpferelements.*

*Für dieses Beispiel wird der Wert der Konstanten* $d_2$ *jedoch zunächst als Veränderliche betrachtet und im Ausdruck für die Systemmatrix durch* $\kappa$ *ersetzt, womit diese die Form*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\kappa & \kappa \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \kappa & -\kappa \end{bmatrix}$$

*annimmt. Die sich ergebenden Eigenwerte sind in Bild 5.2a und der Wert der Funktion* $\delta(\kappa)$*, ohne Beschränkung des relevanten Frequenzbereichs, in Bild 5.2b dargestellt. Für* $\kappa = 1/\sqrt{2}$ *ergeben sich mehrfache komplexe Eigenwerte*

$$\lambda_{1/2}(1/\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4} \quad \textit{bzw.} \quad \lambda_{3/4}(1/\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4},$$

*deren geometrische Vielfachheit kleiner der algebraischen ist. Die Matrix ist an dieser Stelle, welche augenscheinlich ein Minimum der Funktion* $\delta(\kappa)$ *ist, wiederum nicht diagonalisierbar.*

Die gegebenen Beispiele zeigen, dass wenngleich Systeme vorliegen, die nicht aufgrund ihrer Struktur stets mehrfache Eigenwerte aufweisen, die isolierten Punkte, an denen diese auftreten, Extrema der Funktion der Eigenwerte darstellen können und diese dort unter Umständen nicht

differenzierbar und nicht Lipschitz-stetig sind. Dieses für die spektrale Abszisse bzw. den spektralen Radius bekannte Verhalten [21, 22, 97] muss auch im Zusammenhang mit der Minimierung der Funktion $\delta(\kappa)$ berücksichtigt werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts ist noch ein Kommentar bezüglich der im vorangegangenen Kapitel behandelten Gütekriterien zur direkten Vorgabe der Eigenwerte angebracht, welcher diese in den Kontext der obigen Ausführungen einordnet. Zum Zwecke der folgenden Diskussion können die relevanten Funktionen in der Form

$$\min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \lambda_{\mathrm{v},i}|^2 \tag{5.11}$$

und

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i |\det(\lambda_{\mathrm{v},i} I - A_{\mathrm{cl}}(\kappa))|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i \left| \prod_{j \in \mathcal{I}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_j(\kappa)) \right|^2 \tag{5.12}$$

angegeben werden, siehe (4.5) bzw. (4.19). Beides sind Funktionen von Eigenwerten, bzw. lassen sich im Fall von (5.12) als eine solche ausdrücken. Die Entwurfsprobleme zur Zuweisung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises entsprechen somit der in (5.4) gegebenen Form. Die Eigenschaften der beiden Funktionen, insbesondere im Hinblick auf die Differenzierbarkeit, unterscheiden sich jedoch deutlich. Für (5.11) lassen sich einfache Beispiele mit mehrfachen Eigenwerten und Wechseln in der Zuordnung der Eigenwerte konstruieren, welche Probleme mit der Differenzierbarkeit illustrieren. Im Entwurfsverfahren werden diese adressiert, indem die für den geschlossenen Regelkreis vorgegebenen Eigenwerte einfach gewählt werden. Auf diese Weise ist in der Umgebung einer Lösung des Polvorgabeproblems, sofern eine solche existiert, die Differenzierbarkeit sichergestellt. Dieser Umstand hat die Verwendung von Verfahren für differenzierbare Funktionen motiviert, welche in der Anwendung auf das Entwurfsproblem überzeugende Resultate liefern. Die Funktion (5.12) veranschaulicht eine andere Situation. Sie ist ein Beispiel für eine Funktion der Eigenwerte, die, unabhängig vom Auftreten mehrfacher Eigenwerte, an jedem Punkt der Definitionsmenge differenzierbar ist. Dies ergibt sich direkt aus der Beziehung

$$\det(\lambda_{\mathrm{v},i} I - A_{\mathrm{cl}}(\kappa)) = \prod_{j \in \mathcal{I}} (\lambda_{\mathrm{v},i} - \lambda_j(\kappa)),$$

da die Determinante ein Polynom in den Einträgen der Matrix und somit bezüglich dieser stets differenzierbar ist.

## 5.2 Beschränkte Min-Max-Optimierungsprobleme

Nachfolgend werden Verfahren zur Suche nach Lösungen der im vorangegangenen Abschnitt angegebenen Optimierungsprobleme (5.4)

$$\min_{\kappa \in \mathcal{P}_\kappa} \quad \psi(\kappa)$$

mit einer im Allgemeinen nichtglatten Funktion $\psi(\kappa)$ beziehungsweise speziell des Min-Max-Optimierungsproblems (5.5)

$$\min_{\kappa \in \mathcal{P}_\kappa} \quad \max_{i \in \mathcal{I}} f_i(\kappa)$$

diskutiert, wobei die Funktionen $f_i(\kappa)$ für fast jede Wahl des Vektors $\kappa$ differenzierbar sind. Es wird davon ausgegangen, dass diese Funktionen jeweils mit einem Eigenwert der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises assoziiert und differenzierbar sind, sofern dieser Eigenwert einfach ist. Insbesondere von Interesse ist das Entwurfsproblem zur Erhöhung der Eigenwert-Dämpfungsgrade mit $\psi(\kappa) = \delta(\kappa)$ bzw. $f_i(\kappa) = -\zeta_i(\kappa) - \mu_i(\kappa)$. Wie im vorangegangenen Abschnitt festgestellt, sind die Eigenschaften dieser Gütefunktion denen des spektralen Radius und der spektralen Abszisse ähnlich. Entsprechend orientiert sich die Auswahl geeigneter Algorithmen an solchen, die im Zusammenhang mit diesen Funktionen in der Anwendung erfolgreich eingesetzt werden. Im Speziellen ist dies das in [20] beschriebene und in den Softwarepaketen HIFOO ($\mathcal{H}_\infty$-*Fixed Order Optimization*) [51] bzw. HANSO (*Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization*) [79] enthaltene und unter anderem zur Minimierung der spektralen Abszisse verwendete *Gradient Sampling* (GS) Verfahren für nichtglatte, nichtkonvexe Optimierungsprobleme. Das GS-Verfahren verlangt von den betrachteten Funktionen, dass diese nur fast überall bzw. auf einer offenen und dichten Teilmenge des Parameterraums $\mathbb{R}^q$ differenzierbar sind und eignet sich somit für eine Reihe nichtglatter Probleme. Die Benennung des Verfahrens resultiert aus dem Ansatz, anstatt nur Information des Gradienten für den in einem Iterationsschritt aktuellen Punkt zu nutzen, weitere Gradienten in der Umgebung dieses Punktes zur Bestimmung einer geeigneten Suchrichtung zu verwenden. Da der in [20] beschriebene Algorithmus Beschränkungen der Entwurfsvariablen nicht direkt berücksichtigt, wird die in [35] beschriebene Weiterentwicklung des GS-Ansatzes bzw. dessen Kombination mit einer SQP-Formulierung genutzt. Dieses im Folgenden als SQP-GS bezeichnete Verfahren erlaubt es, Nebenbedingung, die ebenfalls durch nichtglatte Funktionen gegeben sein können, direkt zu berücksichtigen.

Die Auswertung des Gradienten der Gütefunktionen an einer Reihe von zusätzlichen Punkten in jedem Iterationsschritt bedingt, dass die Iterationen dieses Verfahrens rechenintensiver als die entsprechender Algorithmen für glatte Probleme sind. Die Beobachtung, dass Verfahren für glatte Gütefunktionen auch in der Anwendung auf nichtglatte Probleme, die fast überall differenzierbar sind, oftmals gute Resultate liefern, siehe beispielsweise [79], motiviert deswegen die Verwendung zweier Optimierungsphasen in HIFOO. Für die unbeschränkte und im Allgemeinen nichtglatte Gütefunktion wird dort zunächst der Funktionswert ausgehend von einem vom Anwender vorgegeben oder zufällig gewählten Startwert mittels eines BFGS-Verfahrens reduziert. Erzielt dieses keinen Fortschritt mehr, erfolgt der Übergang zu dem GS-Verfahren.

Diese grundsätzliche Vorgehensweise wird für die in dieser Arbeit betrachteten Entwurfsbeispiele übernommen. Aus der Vielzahl von Möglichkeiten für Algorithmen für eine solche erste Phase wird im Folgenden der Box-Pshenichnyi-Pironneau-Polak (PPP) Algorithmus [99] betrachtet. Dieser ist ein besonders einfach zu implementierendes Verfahren zur Suche nach Lösungen beschränkter Min-Max-Optimierungsprobleme mit stetig differenzierbaren Funktionen. Da sich dieser Algorithmus in recht kompakter Form beschreiben lässt und für die in dieser Arbeit betrachteten Entwurfsbeispiele gemäß der gegebenen Beschreibung implementiert ist, wird er in

Gänze angegeben. Dies erlaubt es zudem, neben einigen generellen Betrachtungen zu Min-Max-Optimierungsproblemen, Ideen aus dem in [15] diskutierten Ansatz zur Minimierung der spektralen Abszisse für strukturbeschränkte Ausgangsrückführungen zu präsentieren, welche im Zusammenhang mit der Optimierung von Funktionen von Eigenwerten von generellem Interesse sind. Die Beschreibung des SQP-GS-Verfahrens beschränkt sich auf einen kurzen Überblick über dessen Eigenschaften. Eine Implementierung des Algorithmus in MATLAB ist frei verfügbar und in [35] referenziert.

#### Box-Pshenichnyi-Pironneau-Polak-Algorithmus

Die Beschreibung des Algorithmus ist prinzipiell [99] entnommen. In dieser Quelle wird davon ausgegangenen, dass die Funktionen $f_i(\kappa)$ aus (5.5) überall stetig differenzierbar sind. Auf diesen Fall beziehen sich auch die Konvergenzaussagen für das Verfahren. Wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, ist diese Annahme für die gegebene Problemstellung nicht im Allgemeinen erfüllt.

Die einseitige Richtungsableitung der Funktion $\psi(\kappa)$ an einem Punkt $\kappa \in \mathbb{R}^q$ in Richtung $h \in \mathbb{R}^q$ ist durch

$$\psi'(\kappa; h) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\psi(\kappa + \epsilon h) - \psi(\kappa)}{\epsilon}$$

gegeben. Es sei $\hat{\kappa} \in \mathcal{P}_\kappa$ ein zulässiger Punkt, an dem die Eigenwerte $\lambda_j(\hat{\kappa})$ mit $j \in \hat{\mathcal{I}}(\hat{\kappa})$ einfach und damit in einer offenen Umgebung um $\hat{\kappa}$ differenzierbar sind. Die einseitige Richtungsableitung existiert in diesem Fall und es gilt [36]

$$\psi'(\hat{\kappa}; h) = \max_{i \in \hat{\mathcal{I}}(\hat{\kappa})} \nabla f_i(\hat{\kappa})^{\mathrm{T}} h.$$

Ein solcher Punkt $\hat{\kappa}$ kann nur dann ein lokales Minimum für das Problem (5.4) sein, wenn

$$\psi'(\hat{\kappa}; \kappa - \hat{\kappa}) \geq 0 \quad \forall \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \tag{5.13}$$

gilt. Bedingt durch die Konvexität der Menge $\mathcal{P}_\kappa$ ist jede Richtung $h = \kappa - \hat{\kappa}$ eine zulässige Richtung in dem Sinne, dass $\hat{\kappa} + \epsilon h \in \mathcal{P}_\kappa$ für $\epsilon \in [0,1]$ sichergestellt ist.

Die Grundidee des Algorithmus besteht in der Nutzung einer durch

$$\begin{aligned} \theta(\kappa) &:= \min_{\kappa^* \in \mathcal{P}_\kappa} \max_{i \in \mathcal{I}} \left( f_i(\kappa) - \psi(\kappa) + \nabla f_i(\kappa)^{\mathrm{T}}(\kappa^* - \kappa) + \frac{1}{2}\eta \|\kappa^* - \kappa\|_2^2 \right) \\ &= \min_{h \in \mathcal{P}_\kappa - \{\kappa\}} \max_{i \in \mathcal{I}} \left( f_i(\kappa) - \psi(\kappa) + \nabla f_i(\kappa)^{\mathrm{T}} h + \frac{1}{2}\eta \|h\|_2^2 \right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

mit einem $\eta > 0$ gegebenen Optimalitätsfunktion (*engl. optimality function*) zur Überprüfung der Bedingung (5.13) bzw. zur Bestimmung geeigneter Suchrichtungen

$$h(\kappa) = \arg \min_{h \in \mathcal{P}_\kappa - \{\kappa\}} \max_{i \in \mathcal{I}} \left( f_i(\kappa) - \psi(\kappa) + \nabla f_i(\kappa)^{\mathrm{T}} h + \frac{1}{2}\eta \|h\|_2^2 \right),$$

falls diese nicht erfüllt ist. Wenngleich (5.14) quadratische Terme enthält, werden lediglich Informationen der ersten Ableitung genutzt und $\psi(\kappa) + \theta(\kappa)$ kann als Approximation erster Ordnung eines lokalen Minimums angesehen werden, vgl. [99]. Bezüglich der gegebenen Problemstellung ist zunächst zu bemerken, dass die in $\theta(\kappa)$ auftretenden Gradienten existieren, sofern die Eigenwerte für den betrachteten Punkt $\kappa$ einfach sind, wovon für die nachfolgenden Betrachtungen zunächst ausgegangen wird. Die Sortierung der Eigenwerte ist wiederum irrelevant, da der betrachtete Ausdruck invariant gegenüber Permutationen der Eigenwerte ist. Es kann festgestellt werden, dass an einem entsprechenden Punkt $\kappa \in \mathcal{P}_\kappa$ stets

$$\psi'(\kappa; h(\kappa)) \leq \theta(\kappa) \leq 0$$

und $\theta(\kappa) = 0$ genau dann gilt, wenn (5.13) erfüllt ist [99]. Ist $\theta(\kappa) < 0$, so ist durch $h(\kappa)$ eine zulässige Abstiegsrichtung bezüglich der Funktion $\psi(\kappa)$ gegeben. Dies lässt sich unter Verwendung der Definition der Richtungsableitung begründen. Aus dieser folgt, dass für diesen Fall ein $\epsilon^\star \in (0,1]$ existiert, so dass für alle $0 < \epsilon \leq \epsilon^\star$ die Beziehung

$$\psi(\kappa + \epsilon h(\kappa)) < \psi(\kappa)$$

mit

$$\kappa + \epsilon h(\kappa) \in \mathcal{P}_\kappa$$

erfüllt ist.

Der auf der Optimalitätsfunktion $\theta(\kappa)$ basierende Box-PPP-Algorithmus ist in Tabelle 5.1 angegeben. Bezüglich diesem sind zunächst einige generelle Anmerkungen angebracht. Das in (5.14) formulierte Optimierungsproblem ist äquivalent zu dem konvexen quadratischen Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\kappa^*, s} \quad & s + \frac{1}{2}\eta\|\kappa^* - \kappa\|_2^2 \\ \text{u. d. N.} \quad & f_i(\kappa) - \psi(\kappa) + \nabla f_i(\kappa)^{\mathrm{T}}(\kappa^* - \kappa) \leq s,\ i \in \mathcal{I} \\ & \kappa^* \in \mathcal{P}_\kappa \end{aligned} \tag{5.15}$$

zu dessen Lösung auf eine Reihe hoch effizienter Algorithmen zurückgegriffen werden kann. Ist eine solche Lösung $\kappa^\star$ bestimmt, entspricht $\theta(\kappa)$ dem Wert der Gütefunktion aus (5.15) an der entsprechenden Stelle und es gilt $h(\kappa) = \kappa^\star - \kappa$. Mit der so bestimmten Suchrichtung ist aufgrund der Konvexität der zulässigen Menge und der Tatsache, dass die Schrittweite $\xi$ stets kleiner eins gewählt wird, sichergestellt, dass für jede Iteration $\kappa^{(i)} \in \mathcal{P}_\kappa$ gilt. Die Initialisierung des Algorithmus mit einem geeigneten Startwert $\kappa^{(0)} \in \mathcal{P}_\kappa$ stellt keine Schwierigkeit dar und es ist aufgrund der lokalen Natur des PPP-Algorithmus generell empfehlenswert, eine Reihe verschiedener Startwerte für eine gegebene Problemstellung zu nutzen. Wird beispielsweise ein beliebiges $\hat{\kappa} \in \mathbb{R}^q$ gewählt, kann ein zulässiger Punkt als Projektion [18] auf die konvexe Menge $\mathcal{P}_\kappa$ unter Verwendung der euklidischen Norm durch Lösen des konvexen quadratischen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_{\kappa} \quad & \|\kappa - \hat{\kappa}\|_2^2 \\ \text{u. d. N.} \quad & \kappa \in \mathcal{P}_\kappa \end{aligned}$$

**Tabelle 5.1:** Box-PPP-Algorithmus [99]

Wähle $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\eta > 0$ und einen Startwert $\kappa^{(0)} \in \mathcal{P}_\kappa$. Setze $i = 0$.

1) Bestimme den Wert der Optimalitätsfunktion $\theta(\kappa^{(i)})$ und die zugehörige Suchrichtung $h(\kappa^{(i)})$.

2) Falls $\theta(\kappa^{(i)}) = 0$, Stopp. Andernfalls bestimme die Schrittweite

$$\xi(\kappa^{(i)}) = \arg\max_{j \in \mathbb{N}} \{\beta^j : \psi(\kappa^{(i)} + \beta^j h(\kappa^{(i)})) - \psi(\kappa^{(i)}) - \beta^k \alpha \theta(\kappa^{(i)}) \leq 0\}.$$

3) Setze $\kappa^{(i+1)} = \kappa^{(i)} + \xi(\kappa^{(i)}) h(\kappa^{(i)})$, ersetze $i$ durch $i+1$ und gehe zurück zu Schritt 1.

bestimmt werden.

Die Schritte des in Tabelle 5.1 beschriebenen Algorithmus sind für jeden Punkt definiert, für den die Funktionen $f_i(\kappa)$ differenzierbar sind, was im Fall einfacher Eigenwerte gegeben ist. Da dieser Fall generisch vorliegt, stellt dies zunächst keine größere Einschränkung für die Verwendung des Algorithmus dar. Es sind allerdings Probleme zu erwarten, wenn das Optimum, wie in Beispiel 5.2 illustriert, an einem Punkt mit mehrfachen Eigenwerten auftritt. Dies wird nachfolgend anhand der betrachteten Anwendungsbeispiele illustriert.

Unter der Annahme einfacher Eigenwerte können auch andere Verfahren für Min-Max-Probleme mit differenzierbaren Funktionen zur Suche nach Lösungen des Problems verwendet werden. Neben der einfachen Implementierung ist die Beschreibung des Box-PPP-Algorithmus im Rahmen dieser Arbeit allerdings vor allem durch Möglichkeiten der Anpassung der Vorgehensweise motiviert, durch welche bestimmte Spezialfälle des Auftretens mehrfacher Eigenwerte berücksichtigt werden können. In [99] findet sich neben der Beschreibung des Box-PPP-Algorithmus eine entsprechende unbeschränkte Variante [99, Algorithm 2.4.1] sowie eine Abwandlung dieser, der sogenannte $\epsilon$-Active PPP-Algorithmus [99, Algorithm 2.4.34]. Letzterer berücksichtigt in der Optimalitätsfunktion nur die Funktionen $f_i(\kappa)$ welche der erweiterten Menge der aktiven Indizes

$$\hat{\mathcal{I}}_\epsilon(\kappa) := \{i \in \mathcal{I} : \psi(\kappa) - f_i(\kappa) \leq \epsilon\}$$

mit $\epsilon > 0$ angehören. Im Hinblick auf die Optimierung mit Funktionen der Eigenwerte ergeben sich in einer entsprechend angepassten Problemformulierung an Punkten mit mehrfachen Eigenwerte keine Schwierigkeiten, sofern diese nicht zu Elementen der erweiterten Menge der aktiven Indizes gehören. Zudem ergibt sich durch eine Reduzierung der betrachteten Indexmenge eine Reduzierung der Anzahl der Ungleichungsnebenbedinungen für das in jedem Iterationsschritt zu lösende konvexe quadratische Optimierungsproblem.

Eine ähnliche Anpassung einer Optimalitätsfunktion wird in [15] im Zusammenhang mit der Minimierung der spektralen Abszisse für strukturbeschränkte Ausgangsrückführungen vorgenommen. In dieser Quelle finden sich ebenfalls Formulierungen der Optimalitätsfunktion unter Verwendung des Clarke Subdifferentials [31], welche die Berücksichtigung mehrfacher Eigenwerte

erlaubt, deren algebraische und geometrische Vielfachheiten übereinstimmen. In diesem Fall muss allerdings zur Bestimmung der Suchrichtung anstatt eines quadratischen ein semidefinites Optimierungsproblem gelöst werden. Zudem wird zur Beschleunigung der Konvergenz eine weitere Variante diskutiert, in der die konstant gewichteten quadratischen Terme in der Optimalitätsfunktion durch quadratische Terme mit einer positiv definiten Matrix ersetzt werden. Diese Matrix wird in jeder Iteration des Algorithmus mittels BFGS-Anpassungen bestimmt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf den Versuch verzichtet, diese Anpassungen für den Box-PPP-Algorithmus zu übernehmen. Der Grund hierfür ist, dass dieser in den betrachteten Beispielen als Möglichkeit genutzt wird, von einem gegebenen Startwert aus schnellen Fortschritt bezüglich der Reduzierung des Funktionswerts der Gütefunktion mit den wenig rechenintensiven Iterationen dieses Algorithmus zu erzielen, bevor zu dem aufwändigeren SQP-GS-Ansatz gewechselt wird.

#### SQP-GS Algorithmus

Der SQP-GS-Algorithmus [35] ist für die Suche nach lokalen Minima nichtkonvexer, nichtglatter Probleme mit Nebenbedingungen ausgelegt, für welche die Gütefunktion sowie die Funktionen zur Definition der Nebenbedingungen lokal Lipschitz-stetig und auf offenen und dichten Teilmengen des Raums der Entwurfsvariablen $\mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar sind. Die Nebenbedingungen sind hierbei durch Ungleichungs- oder Gleichungsbedingungen bezüglich entsprechender Funktionen gegeben. Das Verfahren kombiniert einen S$l_1$QP-Ansatz wie er für glatte Funktionen verwendet wird, siehe z.B. [95], mit dem in [20] beschriebenen GS-Verfahren. Im Unterschied zu Verfahren für glatte Funktionen, werden in jeder Iteration des Algorithmus zur Bestimmung der Suchrichtung nicht nur die Gradienten der Gütefunktion sowie der Funktionen der Nebenbedingung am aktuellen Punkt $\kappa^{(k)}$, sondern im Allgemeinen an mindestens $q+1$ zusätzlichen Punkten bestimmt. Diese zusätzlichen Punkte werden für jede der Funktionen anhand unabhängiger und identisch gleichverteilter Zufallsvariablen aus einer $\epsilon$-Umgebung

$$\mathbb{B}_\epsilon(\kappa^{(k)}) := \left\{\kappa : \|\kappa - \kappa^{(k)}\|_2 \leq \epsilon\right\}$$

gewählt. Für die gewählten Punkte ist prinzipiell sicherzustellen, dass die Funktionen an diesen differenzierbar sind, was jedoch gemäß Voraussetzung fast überall im $\mathbb{R}^q$ gegeben ist. Wie bei entsprechenden SQP-Verfahren üblich wird eine geeignete Straffunktion gewählt, welche die Gütefunktion sowie die Funktionen der Nebenbedingungen beinhaltet. Die Bestimmung der Suchrichtung erfolgt unter Verwendung einer quadratischen Approximation dieser Straffunktion, welche die zusätzlich bestimmten Gradienten verwendet. Über die Iterationen des Algorithmus wird der Radius $\epsilon$ der Mengen $\mathbb{B}_\epsilon(\kappa^{(k)})$ sukzessive reduziert mit dem Ziel, einen stationären Punkt der Straffunktion aufzuspüren. Der gesamte Algorithmus inklusive der verwendeten Liniensuche sowie der Strategie der Anpassung der auftretenden Parameter ist in [79, Algorithm 2.1] zusammengefasst. Wenngleich der Nachweis der Konvergenz voraussetzt, dass die Gütefunkion sowie Nebenbedingungen lokal Lipschitz-stetig sind, finden sich in [79] sowie auch [20] Kommentare sowie Beispiele, die nahe legen, dass das GS-Verfahren auch für den Fall, dass diese Annahme nicht erfüllt ist, vielfach sehr effektiv ist.

Der wesentliche Nachteil des Verfahrens besteht im erhöhten Aufwand durch die Notwendigkeit, in jeder Iteration des Algorithmus Gradienten für eine Reihe von Punkten auswerten zu müssen. Zudem erfordert die Bestimmung der Such- bzw. Abstiegsrichtung das Lösen eines konvexen quadratischen Optimierungsproblems, für welches die zu berücksichtigenden Nebenbedingungen ebenfalls von der Anzahl der zusätzlich betrachteten Punkte abhängen. Im Hinblick auf das Problem (5.4) kann der Aufwand insofern reduziert werden, als dass es für Funktionen, die im gesamten $\mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar sind, genügt, nur den Gradient am jeweils betrachteten Punkt zu berücksichtigen. Dies ist für die affinen Funktionen der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen, die das Gebiet $\mathcal{P}_\kappa$ definieren, der Fall.

## 5.3 Anwendungsbeispiele

Um die Anwendung der betrachteten Methodik zur Maximierung von Dämpfungsgraden von Eigenwerten zu illustrieren, werden zwei Beispielsysteme betrachtet. Zum Einen ist dies der bereits in Abschnitt 2.2.3 beschriebene und ebenfalls in [134] als Beispiel genutzte Mehrmassenschwinger mit gedämpften Tilgern. Als zweites Beispiel dient der im vorangegangenen Kapitel beschriebene Balkenversuchsstand. Anstatt einer aktiven Regelung wird in diesem Fall ein passives elektrisches Netzwerk mit den piezoelektrischen Wandlern verbunden, dessen Komponenten geeignet zu wählen sind. Ein Entwurfsbeispiel für ein System höherer Ordnung, eine Tragwerksstruktur, für die ebenfalls gedämpfte Tilger unter Verwendung des Box-PPP-Algorithmus ausgelegt werden, findet sich in [133].

Für die Lösung der konvexen quadratischen Probleme zur Bestimmung der Suchrichtung für den Box-PPP- sowie für den SQP-GS-Algorithmus wird Gurobi [52] verwendet. Dieser Löser hat in allen Versuchen hervorragende Resultate hinsichtlich Zuverlässigkeit und Effizienz gezeigt. Beide Verfahren werden jeweils einzeln und in Kombination in dem beschriebenen zweistufigem Ansatz genutzt. Bei Letzterem wird nach jeweils einhundert Iterationen des Box-PPP- zum SQP-GS-Algorithmus gewechselt (PPP/SQP-GS). Neben dem Box-PPP-Algorithmus wird als mögliche Wahl für die erste Phase das in der Funktion *fmincon* der Optimization Toolbox von MATLAB implementierte SQP-Verfahren betrachtet. Die verschiedenen Algorithmen bieten jeweils eine Reihe von Einstellmöglichkeiten, welche die mit diesen erzielten Ergebnisse beeinflussen. Als Beispiel seien die Parametrierung der Schrittweitenbestimmung des Box-PPP-Algorithmus oder die Toleranzen in den Abbruchbedingungen genannt. Auf den Großteil dieser Einstellmöglichkeiten wird im Folgenden nicht im Detail eingegangenen, wobei anzumerken ist, dass sich die dargestellten Ergebnisse in ähnlicher Form auch bei Anpassung dieser Parameter gezeigt haben. Ein wesentlicher Parameter des SQP-GS-Verfahrens ist die Anzahl der zusätzlichen Gradientenauswertungen. Diese wird für die Gütefunktion auf $4 \cdot q$ eingestellt. Für die Nebenbedingungen genügt, wie im letzten Abschnitt erwähnt, der Gradient am jeweils betrachten Punkt.

Dass insbesondere der SQP-GS-Algorithmus auch im Hinblick auf weitere Problemstellungen mit Funktionen von Eigenwerten von Interesse ist, wird in Abschnitt 5.3.3 illustriert. In diesem

**Tabelle 5.2:** Kennkreisfrequenzen $\omega_i$ und Dämpfungsgrade $\zeta_i$ des Fünfmassenschwingers

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_i$ in rad/s | 16,4 | 31,6 | 44,7 | 54,8 | 61,1 |
| $\zeta_i$ | $8{,}18 \cdot 10^{-5}$ | $1{,}58 \cdot 10^{-4}$ | $2{,}24 \cdot 10^{-4}$ | $2{,}74 \cdot 10^{-4}$ | $3{,}05 \cdot 10^{-4}$ |

Beispiel wird die Vorgabe mehrfacher Eigenwerte unter Verwendung der Gütefunktion (5.11) betrachtet.

### 5.3.1 Mehrmassenschwinger mit gedämpften Tilgern

Ausgehend von der in in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Modellbildung für einen Fünfmassenschwinger mit zwei gedämpften Tilgern wird das Entwurfsproblem der Auslegung der Federsteifigkeiten, Dämpferkonstanten und Massen dieser beiden Tilger betrachtet. Für die Parameter des Fünfmassenschwingers wird $m_i = 1\,\mathrm{kg}$ für die Massen, $c_i = 1\,\mathrm{kN/m}$ für die Federn sowie $d_i = 0{,}01\,\mathrm{Ns/m}$ für die Dämpfer, $i = 1, \ldots, 5$, gewählt. Für das System ohne Zusatzmassen ergeben sich die in Tabelle 5.2 dargestellten Kennkreisfrequnzen und Dämpfungsgrade.

Bezüglich der Parameter der beiden Tilger wird das zulässige Gebiet

$$\begin{aligned} 0{,}1\,\mathrm{kg} \leq \quad & m_{\mathrm{T}i} \quad \leq 0{,}5\,\mathrm{kg} \\ 0{,}15\,\mathrm{kN/m} \leq \quad & c_{\mathrm{T}i} \quad \leq 1\,\mathrm{kN/m} \\ 0{,}01\,\mathrm{Ns/m} \leq \quad & d_{\mathrm{T}i} \quad \leq 15\,\mathrm{Ns/m} \end{aligned}$$

definiert. Zudem wird die Gesamtmasse der beiden Zusatzmassen durch die Bedingung

$$m_{\mathrm{T1}} + m_{\mathrm{T2}} \leq 0{,}5\,\mathrm{kg}$$

auf 10% der Masse des ursprünglichen Systems limitiert. Es liegt somit ein Optimierungsproblem mit sechs Variablen vor, die durch untere und obere Schranken sowie eine Ungleichung beschränkt sind. Die normierten Variablen, siehe (2.29)-(2.31), werden im Vektor

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{\mathrm{c1}} & \kappa_{\mathrm{d1}} & \kappa_{\mathrm{m1}} & \kappa_{\mathrm{c2}} & \kappa_{\mathrm{d2}} & \kappa_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

zusammengefasst. Für diese kann das zulässige Gebiet in der Form

$$\mathcal{P}_\kappa = \left\{ \kappa \in \mathbb{R}^6 : \|\kappa\|_\infty \leq 1,\ \frac{1}{5}(\kappa_3 + \kappa_6) \leq -\frac{1}{10} \right\}$$

angegeben werden.

Es wird die Erhöhung der Eigenwert-Dämpfungsgrade im Bereich von $\omega_{\min} = 20\,\mathrm{rad/s}$ bis $\omega_{\max} = 60\,\mathrm{rad/s}$ angestrebt. Mit dieser Wahl weicht das Entwurfsproblem von einem klassischen

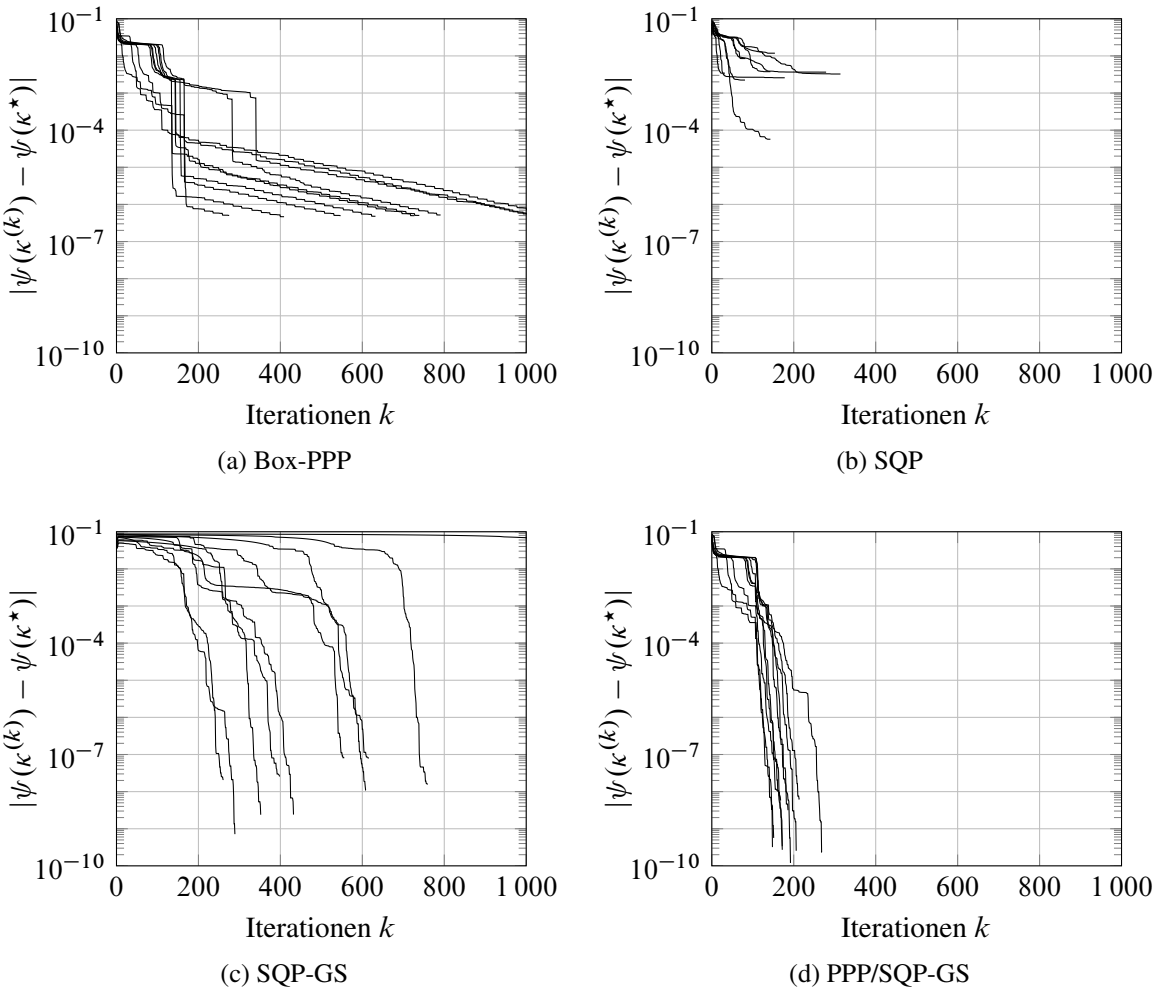



**Bild 5.3:** Abstand des Wertes der Gütefunktion zum besten ermittelten Wert über die Iteration des (a) Box-PPP, (b) SQP, (c) SQP-GS und (d) PPP/SQP-GS-Verfahren für zehn verschiedene Startwerte.

Tilgerentwurf insofern ab, als dass sich drei Moden im relevanten Frequenzbereich befinden, welche durch die beiden Zusatzmassen zu beeinflussen sind. Die Kennkreisfrequenz der fünften Mode liegt zudem nur knapp oberhalb der oberen Schranke des definierten Bereichs. Für den Entwurf wird das Optimierungsproblem (5.4) mit der Gütefunktion (5.9) und den entsprechenden Nebenbedingungen betrachtet. Der Parameter $\gamma$ der Funktionen $\mu_i$ in (5.9) wird zu eins gewählt.

Die verschiedenen Algorithmen werden mit zehn zufällig aus dem Gebiet $[-1,1]^6$ gewählten Startwerten initialisiert. Der Verlauf des Abstands der Werte der Gütefunktion $\psi(\kappa)$ von dem besten über alle Versuche bestimmten Wert $\psi(\kappa^\star) = -8{,}995 \cdot 10^{-2}$ ist in Bild 5.3 über die Iterationen der vier Varianten, jeweils für alle zehn Startwerte, gezeigt. Die beste gefundene Lösung liefert in diesem Fall die Kombination des SQP-GS- und des Box-PPP-Algorithmus mit

$$\kappa^\star = \begin{bmatrix} -0{,}4821 & 0{,}1521 & 0{,}5 & -0{,}7523 & -0{,}7537 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

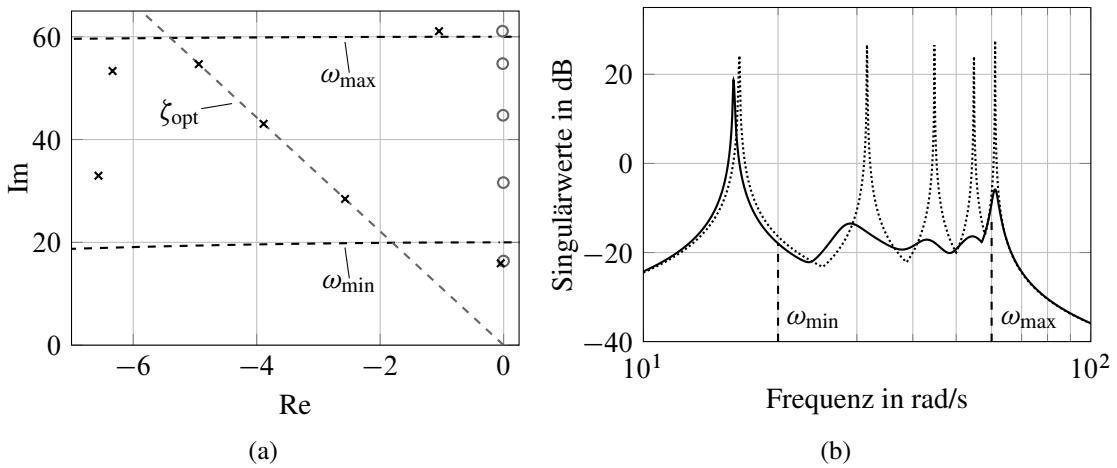



**Bild 5.4:** Ergebnisse des Entwurfs zur Erhöhung der Dämpfungsgrade. (a) Eigenwerte des Systems ohne (○) und mit (×) Tilgern (b) Verlauf der größten Singulärwerte $\overline{\sigma}(G_{\mathrm{S}}(\mathrm{i}\omega))$ (·····) und $\overline{\sigma}(G_{\mathrm{cl}}(\mathrm{i}\omega))$ (——) des Systems ohne und mit Tilgern.

In der Rundung auf vier Nachkommastellen ist dies nicht zu erkennen, das erzielte Ergebnis ist jedoch strikt zulässig. Bedingt durch die Symmetrie der Anordnung liefert das Austauschen der Parameter der beiden Zusatzmassen das gleiche Resultat bezüglich der Gütefunktion, welches für alle zehn Versuche mit dem Box-PPP-, dem SQP-GS- sowie dem PPP/SQP-GS-Verfahren in guter Näherung erzielt wird. Der verwendete SQP-Algorithmus zeigt für das betrachtete Problem schlechtere Resultate als die anderen Varianten.

Den Einfluss der ermittelten Parameter auf das Systemverhalten illustriert Bild 5.4. In Bild 5.4a sind die Eigenwerte des Systems mit und ohne den beiden Zusatzmassen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der niedrigste Dämpfungsgrad im relevanten Frequenzbereich zu drei einfachen Eigenwerten korrespondiert. In der Nähe von $\kappa^\star$ entspricht die Gütefunktion dem Maximum dreier differenzierbarer Funktionen, was die generelle Eignung des Box-PPP- sowie SQP-GS-Verfahrens erklärt. Bild 5.4b zeigt den Verlauf der größten Singulärwerte der Systeme $G_{\mathrm{S}}$ und $G_{\mathrm{cl}}$ ohne bzw. mit Zusatzmassen, vgl. Abschnitt 2.2.3, wobei als Eingänge auf die fünf Massen des Systems wirkende Kräfte und als Ausgänge die entsprechenden Geschwindigkeiten gewählt werden.

### 5.3.2 Passive Schwingungsminderung mittels piezoelektrischer Wandler

Die geeignete Beschaltung piezoelektrischer Wandler mit passiven elektrischen Netzwerken zur Minderung der Schwingungen flexibler Strukturen stellt eine interessante Anwendungsmöglichkeit des Entwurfs zur Erhöhung der Eigenwert-Dämpfungsgrade dar. Als Beispiel dient der bereits im vorangegangenen Kapitel betrachtete Balkenversuchsstand. Statt jedoch beide piezoelektrischen Wandler an den Piezoverstärker anzuschließen, wird einer der Wandler mit einem elektrischen Netzwerk verbunden. Das zweite Piezoelement bleibt mit dem Verstärker verbunden und wird zum Einbringen einer definierten Störung in das System verwendet. Schematische Darstellungen des Balkenabschnitts mit den beiden piezoelektrischen Wandlern und das lineare elek-

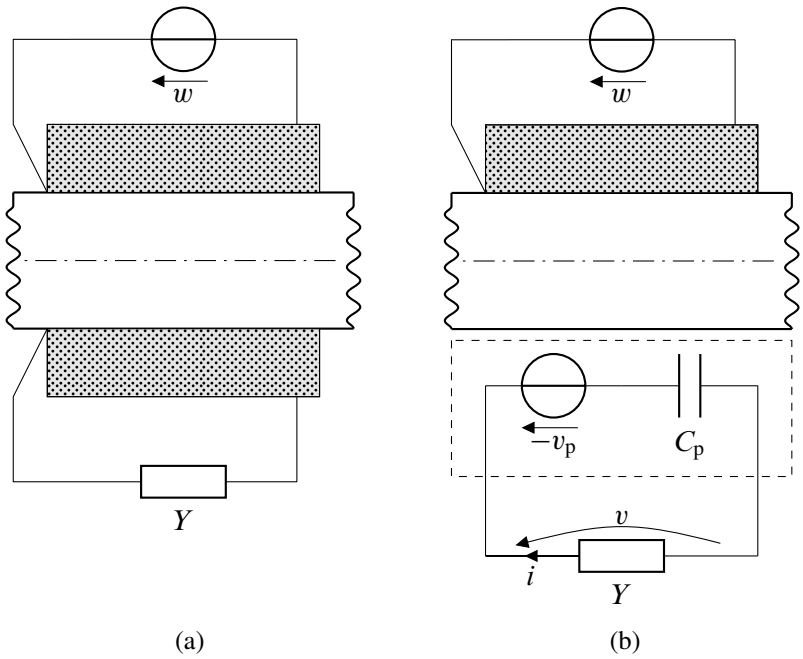



**Bild 5.5:** Schematische Darstellung eines Piezoelementes mit angeschlossener Admittanz (a) und elektrisches Ersatzschaltbild [91] (b)

trische Ersatzschaltbild des Wandlers mit angeschlossenem elektrischem Netzwerk [38, 91] sind in Bild 5.5 gezeigt. Hierbei bezeichnet $v_p$ die Spannung, die durch die Bewegung der Struktur beziehungsweise aufgrund der sensorischen Eigenschaften der Wandler erzeugt wird und $C_p$ die Kapazität des Piezoelements.

Ein Überblick von Verfahren zur Synthese elektrischer Netzwerk, die geeignet sind, eine oder mehrere Moden eines solchen Aufbaus zu dämpfen, sowie weiterführende Literatur findet sich in [91]. Wird ein einfaches Netzwerk mit dem piezoelektrischen Wandler verbunden, beispielsweise eine Reihenschaltung eines Widerstands und einer Spule, das mit der Kapazität des Piezoelements einen elektrischen Schwingkreis bildet, kann dieser geeignet eingestellt werden, um eine Mode der Struktur zu dämpfen [53]. Für schwach gedämpfte Strukturen lassen sich in diesem Fall einfache Einstellregeln für den auszulegenden Schwingkreis angeben [73]. Erweiterungen dieser Vorgehensweise für den Fall, dass mehrere Moden mit einem Element gedämpft werden sollen, werden beispielsweise in [11] beschrieben. Mit steigender Komplexität des verwendeten Netzwerks beziehungsweise mit einer steigenden Anzahl von Moden, die von diesem gedämpft werden sollen, ist es sinnvoll, zu einer numerischen Optimierung der Parameter des Netzwerks überzugehen, siehe beispielsweise [91, 60, 42].

Im Folgenden wird zunächst die Vorgehensweise zur Erstellung eines geeigneten Modells des betrachteten Systems beschrieben, um anschließend das Ergebnis einer Optimierung der Parameter eines entsprechenden elektrischen Netzwerks mit dem in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren zu beschreiben. Für das Netzwerk wird dabei eine Anordnung verwendet, die geeignet ist, die Dämpfungsgrade zweier Moden des Balkens zu erhöhen.

### Modellbildung

Bei der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Modellbildung des Balkenversuchsstands liegt der Fokus auf der analytischen Herleitung einer Systembeschreibung, die in der Lage ist, die Abhängigkeit von sich ändernden Messpositionen abzubilden. Bei dem in diesem Abschnitt betrachteten Beispiel beinhaltet die Struktur, bestehend aus dem Balken und den symmetrisch angeordneten piezoelektrischen Wandlern, keine Freiheitsgrade, die im Entwurf zu berücksichtigen sind. Insofern kann an dieser Stelle eine deutlich weniger aufwendige Art der Modellbildung gewählt werden. Die im Folgenden kurz beschriebene Vorgehensweise zur Erstellung eines linearen Modells des Aufbaus ist [91] entnommen, worauf für ausführlichere Erläuterungen verwiesen sei. Um eine weiterführende Recherche mit der genannten Quelle zu erleichtern, wird weitestgehend die dort verwendete Notation übernommen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen zur Modellbildung ist das elektrische Ersatzschaltbild des Piezoelements in Bild 5.5b. Aus dieser Darstellung können die Beziehungen

$$i(s) = -sC_\mathrm{p}\left(v(s) + v_\mathrm{p}(s)\right) \tag{5.16}$$

$$i(s) = Y(s)v(s) \tag{5.17}$$

im Laplace-Bereich abgeleitet werden. Wird mit $G_\mathrm{vw}(s)$ die Übertragungsfunktion der Störung $w$ auf die Spannung $v_\mathrm{p}$ bei kurzgeschlossenen Klemmen des Piezoelements, d.h. für

$$Z(s) = 1/Y(s) = 0,$$

und mit $G_\mathrm{vv}(s)$ die Übertragungsfunktion von der über den Klemmen des Elements anliegenden Spannung $v$ auf die Spannung $v_\mathrm{p}$ bezeichnet, gilt

$$v_\mathrm{p}(s) = G_\mathrm{vv}(s)v(s) + G_\mathrm{vw}(s)w(s). \tag{5.18}$$

Einsetzen von (5.17) in (5.16) liefert

$$\begin{aligned} Y(s)v(s) &= -sC_\mathrm{p}\left(v(s) + v_\mathrm{p}(s)\right) \\ \Leftrightarrow\ v(s) &= -\frac{Y(s)}{sC_\mathrm{p}}v(s) - v_\mathrm{p}(s), \end{aligned}$$

so dass sich in Verbindung mit (5.18) der in Bild 5.6 als Blockschaltbild dargestellte Zusammenhang ergibt. In der gezeigten Darstellung kann der Ausdruck

$$\tilde{K}(s) := \frac{1}{\frac{Y(s)}{sC_\mathrm{p}} + 1}$$

als zu entwerfender Regler in einer klassischen Rückführungsstruktur aufgefasst werden, wobei diese Interpretation im Hinblick auf das im Folgenden verwendete Entwurfsverfahren nicht benötigt wird.

Da für das in diesem Kapitel diskutierte Entwurfsverfahren nur die Dynamik des geschlossenen Regelkreises von Interesse ist, reicht es aus, Modelle des Übertragungsverhaltens $G_\mathrm{vv}(s)$ und

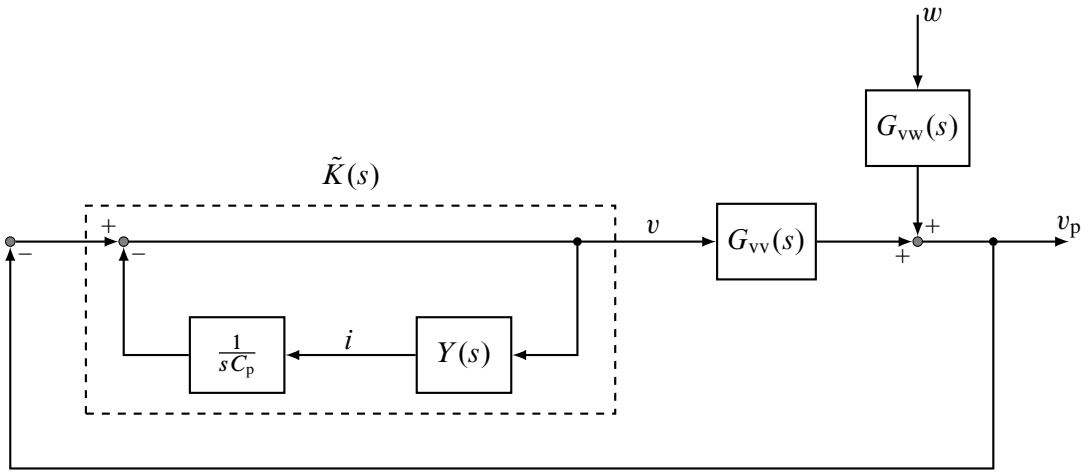



**Bild 5.6:** Struktur der Rückführung für den piezoelektrischen Wandler mit angeschlossenem elektrischen Netzwerk

der Admittanz $Y(s)$, sowie den Wert der Kapazität $C_p$ zu bestimmen. Hinsichtlich einer geeigneten Identifikation dieser Größen für den gegebenen Aufbau erweist sich jedoch auch das in Bild 5.6 gezeigte Ein-/Ausgangsverhalten als nützlich. Die Übertragungsfunktion $G_{vv}(s)$ beinhaltet die Dynamik des Balkens, für welche wieder eine endlich-dimensionale Approximation

$$
\begin{aligned}
G_{vv}(s) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\phi_j^2}{s^2 + 2\zeta_j\omega_j s + \omega_j^2} + d_{vv} \\
&= \left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
-\omega_1^2 & -2\zeta_1\omega_1 & & 0 & 0 & \phi_1 \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & & -\omega_N^2 & -2\zeta_N\omega_N & \phi_N \\
\hline
\phi_1 & 0 & \cdots & \phi_N & 0 & d_{vv}
\end{array}\right] \\
&=: \left[\begin{array}{c|c} A_{vv} & b_{vv} \\ \hline c_{vv}^T & d_{vv} \end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

angesetzt wird. Die spezielle Gestalt dieser Übertragungsfunktion motiviert sich aus der kollokierten Natur des betrachteten Übertragungsverhaltens [91, 100]. Mittels des Durchgriffsterms $d_{vv}$ wird der Einfluss der in der Approximation vernachlässigten Moden des kollokierten Systems als rein statischer Effekt modelliert.

Als Besonderheit der symmetrischen Anordnung der piezoelektrischen Wandler auf der Ober- und Unterseite des Balkens gilt $G_{\mathrm{vw}}(s) = -G_{\mathrm{vv}}(s)$ und somit

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{p}}(s) &= \frac{G_{\mathrm{vw}}(s)}{1 + \tilde{K}(s)G_{\mathrm{vv}}(s)} w(s) \\ &= \frac{-G_{\mathrm{vv}}(s)}{1 + \tilde{K}(s)G_{\mathrm{vv}}(s)} w(s). \end{aligned}$$

Hieraus kann ein einfacher Aufbau zur experimentellen Ermittlung des Frequenzgangs der Übertragungsfunktion $G_{\mathrm{vv}}(s)$ abgeleitet werden. Bei offenen Klemmen, $Y(s) = 0$, gilt

$$v(s) = -v_{\mathrm{p}}(s) = \frac{G_{\mathrm{vv}}(s)}{1 + G_{\mathrm{vv}}(s)} w(s) =: H(s)w(s).$$

Wird bei Anregung über die Spannung $w$ die Spannung $v$ bei offenen Klemmen gemessen, beziehungsweise der Frequenzgang $\hat{H}(\mathrm{i}\omega)$ experimentell ermittelt, kann mit diesem ein nichtparametrisches Modell des eigentlich benötigten Frequenzgangs

$$\hat{G}_{\mathrm{vv}}(\mathrm{i}\omega) = \frac{\hat{H}(\mathrm{i}\omega)}{1 - \hat{H}(\mathrm{i}\omega)}$$

bestimmt werden. Liegt ein nichtparametrisches Modell in Form des Frequenzgangs $\hat{G}(\mathrm{i}\omega)$ vor, werden die freien Parameter der Realisierung der Übertragungsfunktion $G_{\mathrm{vv}}(s)$ auf diesen angepasst. Hierfür wird, wie in [91] vorgeschlagen, eine zweistufige Vorgehensweise gewählt. Für die eigentliche Anpassung der Parameter wird das in der System Identification Toolbox von MATLAB implementierte Verfahren zur Minimierung des Vorhersagefehlers (*Prediction-Error Method*), siehe auch [81], verwendet. Da hierbei ein nichtkonvexes Optimierungsproblem zu lösen ist, trägt die Wahl geeigneter Startwerte wesentlich zum Gelingen des Verfahrens bei. Zum Auffinden solcher Startwerte wird zunächst mittels einer Subspace-Methode ein Modell in Zustandsraumdarstellung ermittelt, ohne dessen Struktur zu beschränken. Die Kennkreisfrequenzen und Dämpfungsgrade der Eigenwerte des resultierenden Modells dienen als Startwerte für die Anpassung der entsprechenden Parameter des in (5.19) gegebenen Zustandsraummodells.

Zur Identifikation wird der Bereich von 50 bis 4500 rad/s betrachtet, in dem sich die ersten fünf Moden des Balkens befinden. Das Ergebnis der Parameteridentifikation für ein Modell mit der Ordnung $N = 5$ der Approximation beziehungsweise zehn Zuständen ist in Bild 5.7 in Form der Amplitudengänge von Modell und Messung gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung ergibt. Die Kennkreisfrequenzen und Dämpfungsgrade des identifizierten Modells sind in Tabelle 5.3 gegeben. Ein Vergleich mit den in Abschnitt 4.3.1 ermittelten Werten lässt gewisse Abweichungen erkennen. Diese lassen sich unter anderem mit kleineren konstruktiven Anpassungen zwischen den beiden Versuchen erklären. Zudem ist der hier gewählte Ansatz etwas weniger restriktiv hinsichtlich der Abstimmung der Kenngrößen einzelner Moden, als die aus der analytischen Modellbildung resultierende Systembeschreibung, womit sich eine bessere Übereinstimmung von Messung und Modell ergibt.

Zur Bestimmung eines geeigneten Schätzwerts für die Kapazität $C_{\mathrm{p}}$ wird ein definierter Widerstand, hier $R_{\mathrm{m}} = 15\,\mathrm{k}\Omega$, an die Klemmen des piezoelektrischen Wandlers angeschlossen und die

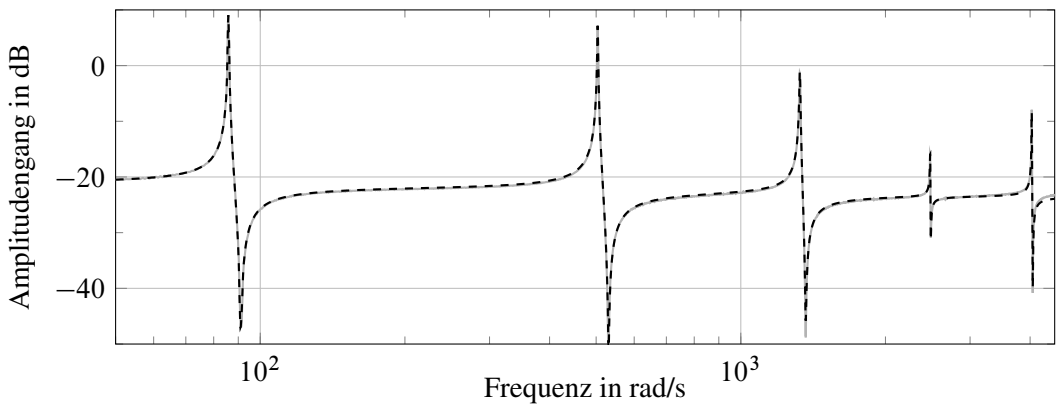



**Bild 5.7:** Vergleich der Amplitudengänge der Messung $\hat{G}_{\mathrm{vv}}(\mathrm{i}\omega)$ (——) und des identifizierten Modells $G_{\mathrm{vv}}(\mathrm{i}\omega)$ (- - -)

**Tabelle 5.3:** Kennkreisfrequenzen und Dämpfungsgrade des identifizierten Modells

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_j$ in rad/s | 85,88 | 503,7 | 1328 | 2479 | 4032 |
| $\zeta_j$ | 0,17% | 0,174% | 0,216% | 0,107% | 0,068% |

Spannung über diesem Widerstand bei einer Anregung über das zweite Element gemessen. Das vom Modell prädizierte Übertragungsverhalten für diese Wahl der Ein- und Ausgangsgrößen kann wiederum in einfacher Weise aus dem Blockschaltbild 5.6 abgelesen werden. Es gilt

$$v(s) = \frac{\tilde{K}(s)G_{\mathrm{vv}}(s)}{1 + \tilde{K}(s)G_{\mathrm{vv}}(s)} w(s)$$

mit

$$\tilde{K}(s) = \frac{1}{\frac{1}{sC_{\mathrm{p}}R_{\mathrm{m}}} + 1}.$$

Eine einfache Kurvenanpassung der resultierenden Frequenzgänge aus Messung und Modell, siehe Bild 5.8, liefert den Wert $C_{\mathrm{p}} = 34{,}5\,\mathrm{nF}$.

In Anlehnung an [60] wird als Struktur des elektrischen Netzwerks zur Erhöhung der Dämpfung zweier Moden des Balkens die in Bild 5.9 dargestellte Parallelschaltung einer RL- sowie einer

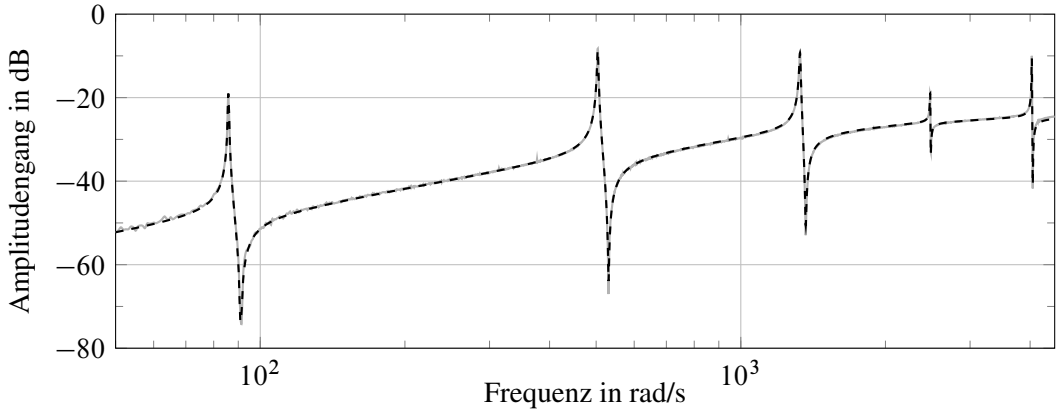



**Bild 5.8:** Vergleich der Amplitudengänge von der Anregung $w$ auf die Spannung $v$ aus Messung (——) und identifiziertem Modell (- - -) für $Y(s) = 1/R_\mathrm{m}$

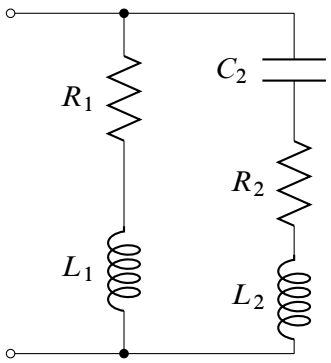



**Bild 5.9:** Schematische Darstellung des verwendeten elektrischen Netzwerks

RLC-Reihenschaltung gewählt. Eine Darstellung der resultierenden Admittanz ist durch

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \left[\begin{array}{ccc|c}
-\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} \\
0 & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\
0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
&=: \left[\begin{array}{c|c}
A_\mathrm{Y} & b_\mathrm{Y} \\
\hline
c_\mathrm{Y}^\mathrm{T} & 0
\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

gegeben. Die Zustände der damit gegebenen Zustandsraumdarstellung sind die Ströme in den beiden Zweigen sowie die Spannung über dem Kondensator $C_2$. Als Freiheitsgrade im Entwurf stehen die Werte für die Widerstände $R_1$ und $R_2$, die Induktivitäten $L_1$ und $L_2$ sowie die Kapazität $C_2$ zur Verfügung. Offensichtlich sind die Einträge der Matrizen der gegebenen Zustandsraumdarstellung wiederum rationale Funktionen der Parameter.

Ist lediglich die Dynamik des Systems mit angeschlossenem elektrischen Netzwerk von Interesse, ist es naheliegend, diese direkt als Verknüpfung eines die Struktur mit piezoelektrischen Wandlern repräsentierenden Modells und der Admittanz des Netzwerks darzustellen. Die Eingangsgröße eines solchen Modells ist der Strom $i$ und die Ausgangsgröße die Spannung $v$. Die gesuchte Systemdarstellung kann direkt aus Bild 5.6 abgelesen werden, wenn dieses vor beziehungsweise hinter der Admittanz $Y(s)$ aufgetrennt wird. Mit der Realisierung des Übertragungsverhaltens $G_{\mathrm{vv}}(s)$ aus (5.19)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\mathrm{vv}} &= A_{\mathrm{vv}} x_{\mathrm{vv}} + b_{\mathrm{vv}} v \\ v_{\mathrm{p}} &= c_{\mathrm{vv}}^{\mathrm{T}} x_{\mathrm{vv}} + d_{\mathrm{vv}} v \end{aligned}$$

ergibt sich die um einen Integrator, beziehungsweise um die Ladung $q$, geeignet erweiterte Systemdarstellung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathrm{vv}} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{\mathrm{vv}} - b_{\mathrm{vv}} (1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} c_{\mathrm{vv}}^{\mathrm{T}} & -b_{\mathrm{vv}} (1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} \cdot \frac{1}{C_{\mathrm{p}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{vv}} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i \\ v &= \begin{bmatrix} -(1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} c_{\mathrm{vv}}^{\mathrm{T}} & -(1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} \cdot \frac{1}{C_{\mathrm{p}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{vv}} \\ q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Verknüpfung mit der zum Übertragungsverhalten $Y(s)$ korrespondierenden Zustandsraumdarstellung gemäß (5.20)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\mathrm{Y}} &= A_{\mathrm{Y}} x_{\mathrm{Y}} + b_{\mathrm{Y}} v \\ i &= c_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{T}} x_{\mathrm{Y}} \end{aligned}$$

liefert die Beschreibung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathrm{vv}} \\ \dot{q} \\ \dot{x}_{\mathrm{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{vv}} - b_{\mathrm{vv}} (1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} c_{\mathrm{vv}}^{\mathrm{T}} & -b_{\mathrm{vv}} (1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} \cdot \frac{1}{C_{\mathrm{p}}} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{T}} \\ -b_{\mathrm{Y}} (1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} c_{\mathrm{vv}}^{\mathrm{T}} & -b_{\mathrm{Y}} (1 + d_{\mathrm{vv}})^{-1} \cdot \frac{1}{C_{\mathrm{p}}} & A_{\mathrm{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{vv}} \\ q \\ x_{\mathrm{Y}} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

der Dynamik des resultierenden Systems ohne äußere Anregung.

Zum Abschluss der Ausführungen hinsichtlich der Modellbildung beziehungsweise der Parameteridentifikation ist noch eine Anmerkung im Hinblick auf die hier gegebene Anordnung mit zwei gleichartigen Piezoelementen auf der Ober- und Unterseite der betrachteten Struktur angebracht. Wird in der Anwendung ein Aufbau mit nur einem Element betrachtet, kann ein geeignetes Modell aus Messungen der Spannung und des Stroms beziehungsweise der Ladung an einem Element bestimmt werden. Ausführliche Diskussionen der sich ergebenden Modellstrukturen für unterschiedliche Kombinationen von Ein- und Ausgangsgrößen sowie für die Betrachtung mehrerer Piezoelemente finden sich in [91].

**Parameteroptimierung und experimentelle Verifikation**

Zur Auslegung des elektrischen Netzwerks aus Bild 5.9 sind die Werte der Widerstände $R_1$ und $R_2$, der Induktivitäten $L_1$ und $L_2$ sowie der Kapazität $C_2$ geeignet zu wählen. Als zulässige Bereiche werden

$$\begin{aligned} 0\,\Omega \leq \quad & R_1 \quad \leq 10\,\mathrm{k}\Omega \\ 0\,\Omega \leq \quad & R_2 \quad \leq 10\,\mathrm{k}\Omega \\ 10\,\mathrm{H} \leq \quad & L_1 \quad \leq 100\,\mathrm{H} \\ 10\,\mathrm{H} \leq \quad & L_2 \quad \leq 100\,\mathrm{H} \\ 10\,\mathrm{nF} \leq \quad & C_2 \quad \leq 100\,\mathrm{nF} \end{aligned}$$

vorgegeben. Die Systemmatrix der Zustandsraumdarstellung (5.21) ist eine rationale Funktion dieser Parameter der Admittanz $Y(s)$ nach (5.20). Das Entwurfsproblem kann somit in die in dieser Arbeit genutzte Darstellung mit einer strukturbeschränkten Ausgangsrückführung überführt werden, deren Einträge den Elementen eines Vektors $\kappa \in \mathbb{R}^5$ entsprechen. Mit einer geeigneten Normierung hat die für diesen Vektor zulässige Menge die Form

$$\mathcal{P}_\kappa = \left\{\kappa \in \mathbb{R}^5 : \|\kappa\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Für den Entwurf zur Erhöhung der Eigenwert-Dämpfungsgrade wird mit $\omega_{\min} = 300\,\mathrm{rad/s}$ bis $\omega_{\max} = 1500\,\mathrm{rad/s}$ ein die zweite und dritte Mode des Balkens umfassender Bereich als relevantes Frequenzband definiert. Der Parameter $\gamma$ der Funktionen $\mu_i$ in (5.9) wird zu eins gewählt. Wie im vorherigen Beispiel wird die Parameteroptimierung mit den Box-PPP-, SQP-, SPQ-GS- und PPP/SQP-GS-Ansätzen für zehn zufällig aus dem Gebiet $[-1{,}1]^5$ gewählte Startwerte durchgeführt. Das beste Ergebnis $\psi(\kappa^\star) = -2{,}6662 \cdot 10^{-2}$ wird wiederum von der PPP/SQP-GS-Variante erzielt. Der ermittelte Vektor $\kappa^\star$ entspricht den Werten

$$R_1 = 811{,}34\,\Omega,\ R_2 = 6789{,}6\,\Omega,\ L_1 = 45{,}77\,\mathrm{H},\ L_2 = 39{,}85\,\mathrm{H} \text{ und } C_2 = 33{,}12\,\mathrm{nF}$$

für die auszulegenden Komponenten des Systems. Mit diesen Parametern ergeben sich für das System (5.21) vier Paare konjugiert komplexer Eigenwerte im relevanten Frequenzbereich, siehe Tabelle 5.4. Alle vier Paare weisen ähnliche Dämpfungsgrade auf, was typisch für das Ergebnis der Min-Max Optimierung ist. Zudem liegen die Eigenwerte paarweise sehr dicht beieinander, was wiederum typisch für die Optimierung von Eigenwert-Dämpfungsgraden im Zusammenhang mit der Auslegung mechanischer, oder wie in diesem Fall, elektrischer Schwingungstilger ist, wenn jeweils ein Tilger auf eine Mode des Systems abgestimmt wird, vgl. Beispiel 5.2. Für das an dieser Stelle betrachtete System ist die hohe Konditionszahl ($\approx 10^{10}$) der Matrix der Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises (5.21) ein Indiz für ein ebensolches Verhalten. Die sich hieraus im Hinblick auf die Parameteroptimierung ergebenden Schwierigkeiten illustriert der in Bild 5.10 gezeigte Verlauf des Abstands der Werte der Gütefunktion $\psi(\kappa)$ vom niedrigsten erreichten Wert $\psi(\kappa^\star)$ über die Iterationen der vier betrachteten Algorithmen. Nur die beiden Varianten die den GS-Ansatz verwenden erreichen reproduzierbar den besten gefunden Parametersatz, wobei hierfür mit der PPP/SQP-GS-Variante wiederum deutlich weniger Iterationen benötigt werden.

**Tabelle 5.4:** Eigenwerte, Kennkreisfrequenzen und Dämpfungsgrade des Systems mit angeschlossenem elektrischen Netzwerk im Bereich von 300 bis 1500 rad/s.

| Eigenwerte | Kennkreisfrequenz in rad/s | Dämpfungsgrad |
|---|---|---|
| $-13{,}4150 \pm \mathrm{i}\,502{,}9714$ | 503,1503 | $26{,}6621 \cdot 10^{-3}$ |
| $-13{,}4173 \pm \mathrm{i}\,503{,}0589$ | 503,2378 | $26{,}6620 \cdot 10^{-3}$ |
| $-35.4716 \pm \mathrm{i}\,1329{,}9386$ | 1330,4115 | $26{,}6622 \cdot 10^{-3}$ |
| $-35.4777 \pm \mathrm{i}\,1330{,}1757$ | 1330,6488 | $26{,}6619 \cdot 10^{-3}$ |

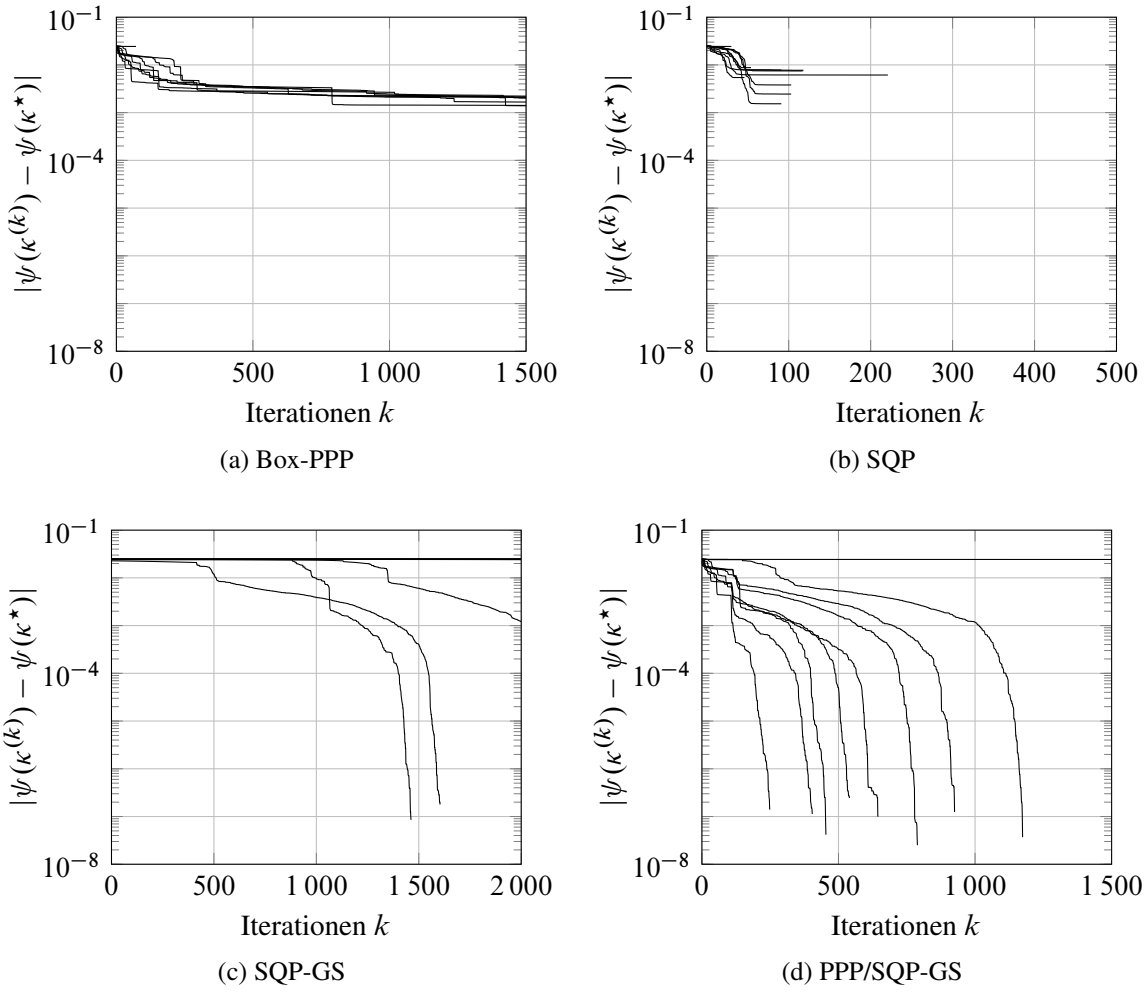
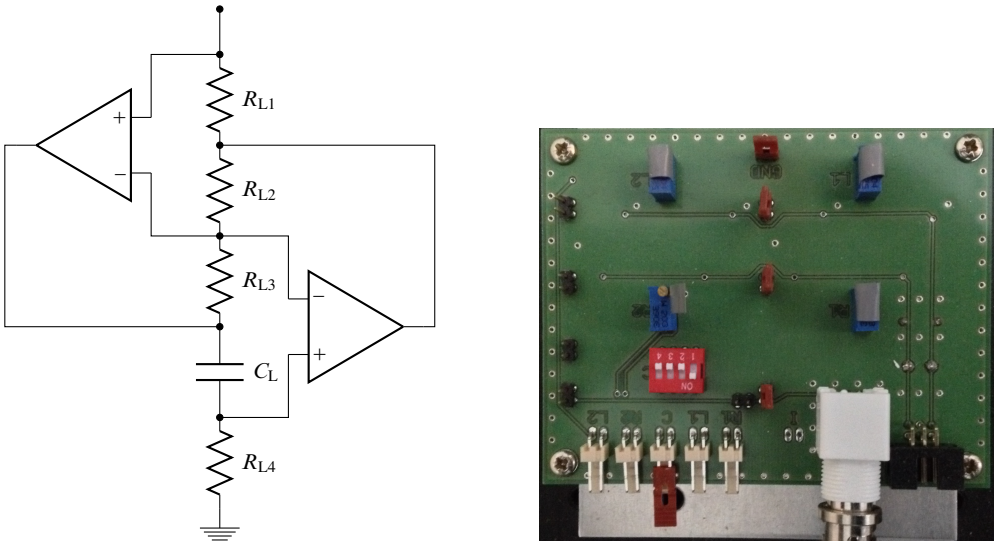



**Bild 5.10:** Abstand des Wertes der Gütefunktion zum besten ermittelten Wert über die Iteration des (a) Box-PPP, (b) SQP, (c) SQP-GS und (d) PPP/SQP-GS-Verfahrens für zehn verschiedene Startwerte.




(a) (b)

**Bild 5.11:** Realisierung des elektrischen Netzwerks zur Schwingungsminderung. (a) Schematische Darstellung der Operationsverstärkerschaltung als Ersatz für die Induktivitäten. (b) Aufbau der Schaltung aus [64].

Abschließend soll das Ergebnis der Parameteroptimierung am Versuchsstand validiert werden. Eine Schwierigkeit im Hinblick auf die Realisierung des elektrischen Netzwerks mit den ermittelten Bauteilwerten stellen die hohen Werte der Induktivitäten dar. Diese sind für Versuchsanordnungen der gegebenen Art, und insbesondere bei der Beeinflussung von Moden mit relativ niedrigen Kennkreisfrequenzen, typisch, siehe [60, 91]. Eine übliche Vorgehensweise beim Aufbau entsprechender Schaltungen ist das Verwenden von Schaltungen mit Operationsverstärkern, die das Verhalten der Induktivitäten nachbilden [91]. Ein Beispiel für eine solche Schaltung ist in Bild 5.11a dargestellt. Die Impedanz der Anordnung ist durch

$$Z_L(s) = s\frac{C_\mathrm{L} R_\mathrm{L1} R_\mathrm{L3} R_\mathrm{L4}}{R_\mathrm{L2}}$$

gegeben, vgl. [109]. Für die Nutzung am betrachteten Versuchsstand wurde eine Schaltung zur Realisierung des elektrischen Netzwerks aus Bild 5.9 unter Verwendung dieser Operationsverstärkerschaltungen im Rahmen einer studentischen Arbeit aufgebaut und getestet [64]. Diese ist in Bild 5.11b dargestellt und erlaubt es, die gewünschten Werte für die Widerstände und Induktivitäten über Potentiometer einzustellen. Die Einstellung der Kapazität ist in verschiedenen, fest vorgegebenen Stufen vorgesehen. Allerdings ist ein Kondensator mit einer Kapazität von 33 nF verfügbar, was in guter Näherung mit dem ermittelten Wert übereinstimmt.

Wie gut das auf diese Weise realisierte elektrische Netzwerk das erwartete Verhalten nachbildet ist in Bild 5.12 dargestellt. Zu sehen sind die Amplitudengänge aus Messung und Modell für das Übertragungsverhalten von einer Anregung über das zweite Piezoelement auf die Spannung an den Klemmen des elektrischen Netzwerks. Die Auswirkung der Erhöhung der Dämpfungsgrade wird in Bild 5.13 anhand der Amplitudengänge der entsprechenden Anregung auf die wiederum mittels eines Laser-Wegmesssensors gemessenen Auslenkung des Balkens illustriert.

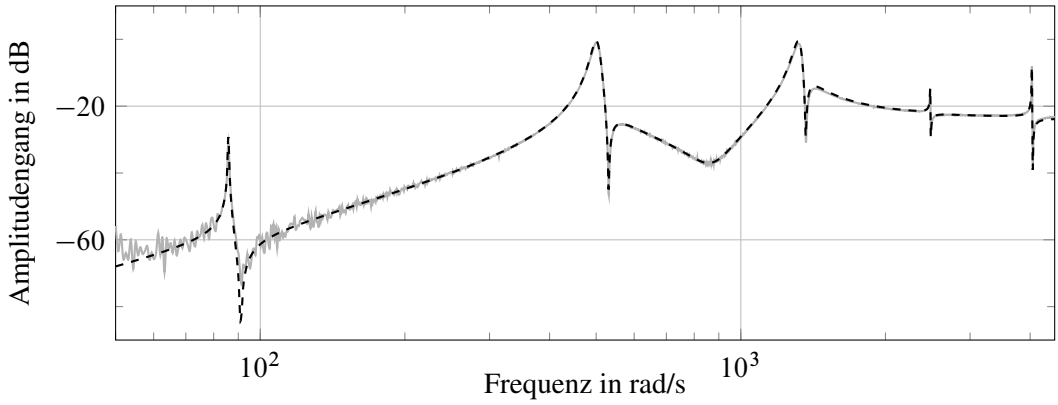
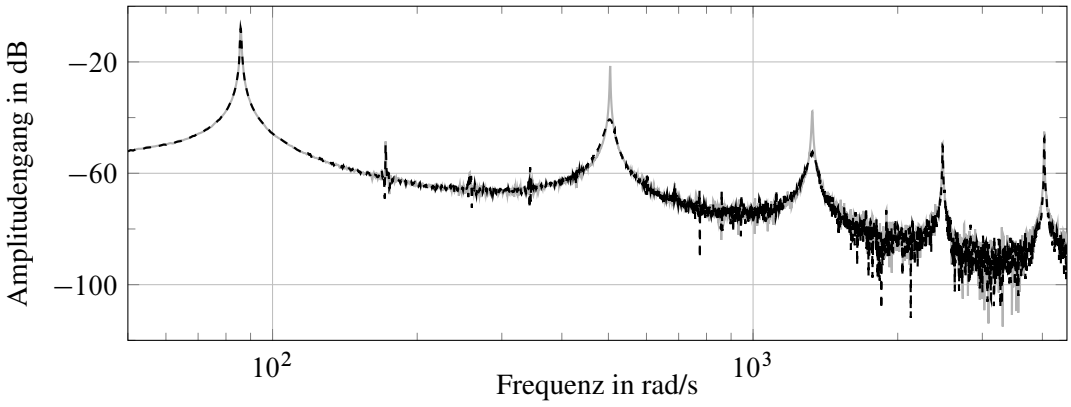



**Bild 5.12:** Vergleich der Amplitudengänge ($w \mapsto v$) aus Messung (——) und Modell (- - -) für das System mit angeschlossenem elektrischen Netzwerk.



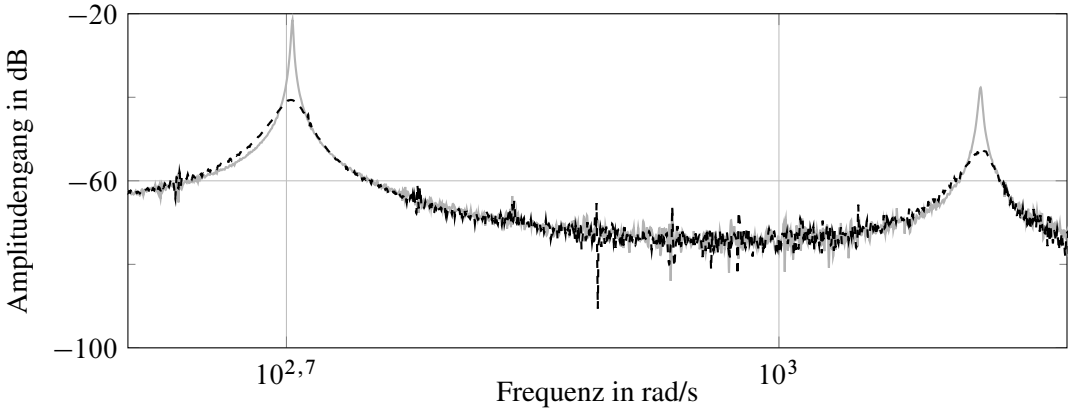




**Bild 5.13:** Vergleich der Amplitudengänge von der Anregung $w$ auf die Auslenkung am Balkenende für das Piezoelement mit kurzgeschlossenen Klemmen (——) sowie angeschlossenem elektrischen Netzwerk (- - -).

### 5.3.3 Vorgabe mehrfacher Eigenwerte

Für die Demonstration der Anwendung des SQP-GS-Verfahrens auf die Gütefunktion (5.11) wird das in [24, Example 7] gegebene System mit zufällig gewählten Einträgen in den System- und Eingangsmatrizen verwendet, das in Abschnitt 3.4.1 ebenfalls als Beispiel für den Entwurf von Zustandsrückführungen dient. Das betrachtete System weist acht Zustände und drei Eingangsgrößen auf. Anstatt alle Zustandsgrößen zurückzuführen werden nur die ersten drei Zustände für eine Ausgangsrückführung verwendet. Es werden zwei Konfigurationen

$$\lambda_{\mathrm{v}}^{(1)} := \begin{bmatrix} -0{,}1778 \\ -0{,}5113 + \mathrm{i}\,0{,}1013 \\ -0{,}5113 - \mathrm{i}\,0{,}1013 \\ 0{,}5628 \\ 0{,}6297 + \mathrm{i}\,0{,}5605 \\ 0{,}6297 - \mathrm{i}\,0{,}5605 \\ 1{,}2715 + \mathrm{i}\,0{,}3923 \\ 1{,}2715 - \mathrm{i}\,0{,}3923 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathrm{v}}^{(2)} := \begin{bmatrix} -0{,}1778 \\ -0{,}1778 \\ -0{,}1778 \\ 0{,}5628 \\ 0{,}6297 + \mathrm{i}\,0{,}5605 \\ 0{,}6297 - \mathrm{i}\,0{,}5605 \\ 1{,}2715 + \mathrm{i}\,0{,}3923 \\ 1{,}2715 - \mathrm{i}\,0{,}3923 \end{bmatrix}$$

für die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorgegeben. Erstere entspricht der im ursprünglichen Beispiel verwendeten Konfiguration, während die zweite einen mehrfachen reellen Eigenwert aufweist.

Die Entwurfsaufgabe besteht in der Auslegung eines Reglers $K \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bzw. eines Vektors $\kappa = \mathrm{vec}(K) \in \mathbb{R}^9$ für dessen Einträge keine Beschränkungen definiert werden. Zur Suche nach Lösungen des Polvorgabeproblems basierend auf (5.11) wird zum Einen das in der Funktion *e04uc* der NAG-Bibliothek [120] implementierte SQP- sowie das SQP-GS-Verfahren verwendet. Für beide Algorithmen wird jeweils $\kappa = 0$ als Startwert verwendet. Tabelle 5.5 zeigt die sich ergebenden Abweichungen von den vorgegebenen Eigenwerten gemäß (4.22). Es zeigt sich, dass beide Algorithmen für die Konfiguration $\lambda_{\mathrm{v}}^{(1)}$ mit einfachen Eigenwerten gute Ergebnisse liefern, wobei sich für das SQP-Verfahren geringere Abweichungen ergeben. Letzteres ist sicherlich unter anderem von den für die Algorithmen verwendeten Abbruchkriterien abhängig.

Für $\lambda_{\mathrm{v}}^{(2)}$ kehrt sich dieses Ergebnis um und der SQP-GS-Algorithmus erzielt eine höhere Präzision, wenngleich sich eine allgemein größere Abweichung ergibt. Dies ist in Bild 5.14 veranschaulicht. Von diesem Fall lässt sich sicherlich keine allgemeine Aussage bezüglich der Leistungsfähigkeit der Verfahren ableiten, da diese, wie in Abschnitt 4.1.3 diskutiert, ebenfalls stark von den Daten der Problemstellung abhängig ist. Eine Reihe von Tests mit verschiedenen zufällig erzeugten Systemen zeichnen aber zumindest ein ähnliches Bild.

**Tabelle 5.5:** Abweichungen von den für den geschlossenen Regelkreis vorgegebenen Eigenwertkonfigurationen

| | Abweichung $\epsilon$ für $\lambda_v^{(1)}$ | Abweichung $\epsilon$ für $\lambda_v^{(2)}$ |
|---|---|---|
| SQP | $8{,}511 \cdot 10^{-8}$ | $2{,}019 \cdot 10^{-1}$ |
| SQP-GS | $1{,}05 \cdot 10^{-6}$ | $6{,}027 \cdot 10^{-3}$ |

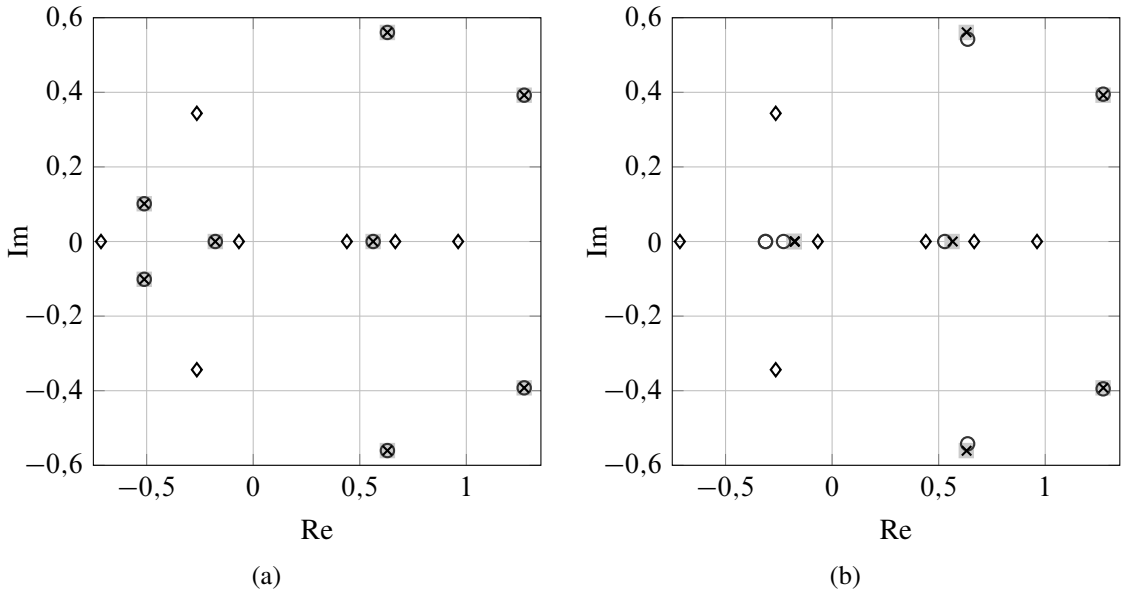



**Bild 5.14:** Eigenwerte der Strecke (◊) sowie des mit dem SQP (○) und dem SQP-GS (×) Verfahren bestimmten geschlossenen Regelkreises im Vergleich mit den vorgegebenen Eigenwerten (■) für (a) $\lambda_v^{(1)}$ und (b) $\lambda_v^{(2)}$

## 5.4 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden greifen Ansätze auf, die erfolgreich für die Optimierung von Funktionen von Eigenwerten, speziell der Minimierung der spektralen Abszisse und des spektralen Radius, eingesetzt werden. Es wird gezeigt, wie sich diese für das Entwurfsproblem zur Erhöhung von Eigenwert-Dämpfungsgraden in gegebenen Frequenzbändern anpassen lassen. Als günstige Vorgehensweise hat sich in diesem Zusammenhang der GS-Ansatz erwiesen, der im Rahmen des SQP-GS-Algorithmus auf Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen angewendet werden kann. Insbesondere die Kombination dieses vergleichsweise rechenintensiven Ansatzes mit einem Verfahren, das ausgehend von einem gegebenen Startwert schnellen Fortschritt erzielt, hat in der Anwendung überzeugende Resultate geliefert. Von Interesse für weiterführende Betrachtungen ist in diesem Zusammenhang sicherlich ein Vergleich mit weiteren Verfahren, die für Probleme mit nichtglatten Funktionen geeignet sind. Als Beispiel für ein solches sei das ebenfalls von den Autoren der Veröffentlichung zum SQP-GS-Algorithmus in einem kürzlich erschienenen Artikel beschriebene BFGS-SQP-Verfahren genannt [34].

# 6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Syntheseverfahren zur gezielten Beeinflussung der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mittels strukturbeschränkter Rückführungen vorgestellt. Die verschiedenen Entwurfsmethoden erweitern bekannte Verfahren zur Vorgabe der Eigenstruktur, der Pol- bzw. Polbereichsvorgabe sowie der Erhöhung von Eigenwert-Dämpfungsgraden. Im Fokus stehen hierbei Anwendungen, bei denen beeinflussbare Parameter in verschiedenen Komponenten des geschlossenen Regelkreises zu berücksichtigen sind, wofür die betrachteten Entwurfsprobleme strukturbeschränkter, statischer Ausgangsrückführungen einen geeigneten Rahmen bilden.

Die Anwendungsgebiete der unterschiedlichen Ansätze lassen sich unter anderem bezüglich Art und Anzahl der im Entwurf zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade bzw. der Art der Strukturbeschränkungen unterscheiden. So setzt das in Kapitel 3 beschriebene, parametrische Verfahren die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors voraus. Freiheitsgrade, die in Form beeinflussbarer Parameter der Regelstrecke vorliegen, fügen sich in gut interpretierbarer Weise in die parametrische Darstellung eines Reglers zur Vorgabe der Eigenstruktur des geschlossenen Regelkreises ein und erlauben eine Verbesserung der erreichbaren Regelgüte.

Die direkten Ansätze zur Polvorgabe gestatten hingegen die Behandlung von Problemstellungen mit deutlich restriktiveren Beschränkungen der betrachteten Rückführung. Konzeptionell heben diese zudem die Trennung zwischen den Freiheitsgraden des Reglers und der Regelstrecke auf, die im Falle des Verfahrens zur Auslegung von Zustandsrückführungen noch unterschieden werden. Wenngleich, bedingt durch die Eigenschaften der im Zusammenhang mit diesen Verfahren formulierten Optimierungsprobleme sowie der verwendeten Löser, das Auffinden einer Lösung des Polvorgabeproblems nicht garantiert ist, zeigen diese Verfahren für eine Vielzahl praktisch relevanter Problemstellungen überzeugende Resultate. Insbesondere durch die Option, anstatt die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises fest vorzugeben, zulässige Bereiche zu definieren, besteht zudem die Möglichkeit Aufgabenstellungen zu behandeln, bei denen die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade für eine exakte Polvorgabe unzureichend sind. Zur Berücksichtigung zusätzlicher Regelungsziele, unter Wahrung der durch die Eigenwerte gegebenen Dynamik des geschlossenen Regelkreises, hat sich der vorgestellte zweistufige Entwurf als zielführend erwiesen.

Das Hauptaugenmerk der Vorgehensweise zur Erhöhung von Dämpfungsgraden von Eigenwerten liegt auf Anwendungen, die nur eine sehr eingeschränkte Beeinflussung des betrachteten Systems zulassen, wie es beispielsweise bei der Minderungen von Strukturschwingungen mittels passiver Elemente der Fall ist. Hier ergibt sich ein einfaches Verfahren, bei dem ein Anwender im Allgemeinen lediglich den relevanten Frequenzbereich wählt. Speziell für komplexere Strukturen, die Systembeschreibungen hoher Ordnung erfordern, ist dies der Vorgabe spezifischer Regionen für einzelne Eigenwerte vorzuziehen. Die im Zusammenhang mit dieser Methodik diskutierten Be-

sonderheiten hinsichtlich der Optimierung mit Funktionen von Eigenwerten sowie die Lösungsansätze mittels Verfahren für nichtkonvexe, nichtglatte Optimierungsprobleme sind jedoch von generellem Interesse, was durch das gegebene Beispiel zur Vorgabe mehrfacher Eigenwerte illustriert wird. In diesem Kontext bietet sich die Betrachtung weiterer Verfahren für nichtglatte Optimierungsprobleme sowie ein ausführlicher Vergleich mit iterativen Ansätzen zur Lösung des Polvorgabeproblems, die unabhängig von der Vielfachheit der vorgegebenen Eigenwerte auf ein Optimierungsproblem mit differenzierbaren Funktionen führen, für nachfolgende Arbeiten an.

Neben der Beschreibung der Syntheseverfahren liegt ein Schwerpunkt dieser Arbeit darauf, deren Tauglichkeit für Entwurfsprobleme aus dem Bereich des integrierten Regler- und Strukturentwurfs zu betrachten. Wesentlich für die erfolgreiche Anwendung der Verfahren in der Praxis ist insbesondere, dass der Einfluss der Freiheitsgrade im Strukturentwurf auf das Systemverhalten durch das verwendete Modell akkurat beschrieben werden kann. Dies setzt im Allgemeinen eine geeignete Kombination von Methoden der analytischen sowie experimentellen Modellbildung bzw. Systemidentifikation voraus, was anhand der ausführlich diskutierten Entwurfsbeispiele zur aktiven sowie passiven Schwingungsminderung an einem Balkenversuchsstand demonstriert wird. Der hohe Grad der Übereinstimmung zwischen modelliertem und experimentell ermitteltem Verhalten der geregelten Systeme kann als Beleg für die Eignung der beschriebenen Ansätze angesehen werden.

# A Eigenwerte linearer dynamischer Systeme

Die folgenden Ausführungen dienen als kurze Erläuterung zu entsprechenden Passagen im Haupttext. Wenngleich an diesen Stellen jeweils geeignete Quellen referenziert sind, erscheint es zweckmäßig einige bekannte Resultate zu Eigenwerten im Allgemeinen sowie deren systemdynamischer Bedeutung in kompakter Form anzugeben.

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bekanntermaßen existiert eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, positive Zahlen $\nu$ und $n_1, \ldots, n_\nu$ mit $\sum_{i=1}^{\nu} n_i = n$ sowie skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{C}$, so dass

$$AV = VJ \tag{A.1}$$

mit $J = \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_\nu}(\lambda_\nu)$ und den Jordanblöcken

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k}$$

gilt [61, Theorem 3.1.11]. Dies ist die Aussage bezüglich der Existenz der Jordanschen Normalform einer beliebigen Matrix. Diese Zerlegung ist, bis auf Permutationen der Jordanblöcke, eindeutig und die Spaltenvektoren der Matrix $V$ bilden Basen der Eigen- bzw. Haupträume der Matrix $A$, siehe [41] oder [130, Theorem 2.4]. Ausgehend von der Darstellung (A.1) gelten folgende Aussagen [61]:

- Die Anzahl $\nu$ der Jordanblöcke entspricht der maximalen Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren der Matrix $A$.
- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist die Dimension des Eigenraums dieses Eigenwerts und entspricht der Anzahl der zu diesem Eigenwert gehörenden Jordanblöcke.
- Die Summe der Größen $n_i$, aller zu einem Eigenwert gehörenden Jordanblöcke, entspricht der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts, d.h. dessen Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.
- Die Matrix $A$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\nu = n$ gilt, also die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts gleich der algebraischen ist.

## A.1 Systemdynamische Bedeutung der Eigenwerte

Betrachtet wird das lineare dynamische System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0.$$

Die Lösung $x(t)$ der Zustandsgleichung kann mittels der Matrixexponentialfunktion

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

in der Form

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\, x_0$$

angegeben werden [44, Abschnitt 12.2.2]. Im Folgenden wird der Fall eines autonomen Systems, $u(t) = 0$, betrachtet sowie zum Zwecke einer übersichtlicheren Notation $t_0 = 0$ festgelegt, so dass die Lösung der Zustandsgleichung die Form

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\, x_0$$

annimmt. Mit $A = VJV^{-1}$, $x_0 = Vz_0$ und den Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion folgt hieraus

$$x(t) = V\,\mathrm{e}^{Jt}\,V^{-1}x_0 = V\,\mathrm{e}^{\mathrm{diag}(tJ_{n_1}(\lambda_1),\ldots,tJ_{n_\nu}(\lambda_\nu))}\,z_0 = V\,\mathrm{diag}(e^{tJ_{n_1}(\lambda_1)},\ldots,e^{tJ_{n_\nu}(\lambda_\nu)})z_0.$$

Hierbei gibt der Vektor $z_0$ die Koordinaten des Anfangszustands $x_0$ in der durch die Spalten der Matrix $V$ gegebenen Basis an. Der Beitrag

$$\mathrm{e}^{tJ_k(\lambda)} = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

der einzelnen Jordanblöcke, vgl. [40], kann somit unabhängig voneinander betrachtet werden. Werden die Matrix $V = [\ V_1 \ \cdots \ V_\nu\ ]$ und der Vektor $z_0^{\mathrm{T}} = [\ z_{0,1}^{\mathrm{T}} \ \cdots \ z_{0,\nu}^{\mathrm{T}}\ ]$ gemäß der Dimensionen $n_i$, $i = 1,\ldots,\nu$, der Jordanblöcke partitioniert, ergibt sich

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\nu} V_i\,\mathrm{e}^{tJ_{n_i}(\lambda_i)}\,z_{0,i}.$$

Ist die Matrix $A$ diagonalisierbar, nimmt die Lösung die Gestalt

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,z_{0,i}$$

an, wobei die Vektoren $v_i = V_i$ die Spaltenvektoren der Matrix $V$ bezeichnen. Ein zu einem reellen Eigenwert korrespondierender Summand in obigem Ausdruck weist, je nachdem ob der Eigenwert kleiner, größer oder gleich Null ist, bezüglich der Exponentialfunktion abklingendes, aufklingendes oder konstantes Verhalten auf. Ist ein paar komplexer Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_j^*$ gegeben, können die zu diesen korrespondierenden Eigenvektoren so gewählt werden, dass $v_i = v_j^*$ sowie $z_{0,i} = z_{0,j}^*$ gilt. Die entsprechenden Summanden können zusammengefasst werden, so dass sich

$$\begin{aligned}
& v_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,z_{0,i} + v_j\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}\,z_{0,j} \\
=& v_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,z_{0,i} + (v_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,z_{0,i})^* \\
=& 2\cdot\mathrm{Re}\left(v_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\,z_{0,i}\right) \\
=& 2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(v_i) & \mathrm{Im}(v_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)t) & \sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)t) \\ -\sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)t) & \cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(z_{0,i}) \\ -\mathrm{Im}(z_{0,i})\end{bmatrix} \\
=& 2\cdot|z_{0,i}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(v_i) & \mathrm{Im}(v_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)t+\alpha_i) \\ -\sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)t+\alpha_i)\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

mit $z_{0,i} =: |z_{0,i}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i}$ ergibt. Der durch diese Summanden gegebene Anteil der Lösungstrajektorie verbleibt in dem durch $\mathrm{Re}(v_i)$ und $\mathrm{Im}(v_i)$ aufgespannten zweidimensionalen Unterraum. Wiederum beschreibt der Realteil des Eigenwerts $\lambda_i$ das Auf- bzw. Abklingverhalten und der Imaginärteil bestimmt die Kreisfrequenz der Rotation in diesem Unterraum. Die verwendeten Begriffe im Zusammenhang mit einem komplexen Eigenwert $\lambda_i$ unterscheiden sich in verschiedenen Quellen. Im Rahmen dieser Arbeit werden der negative Realteil als Abklingkonstante, der Betrag

$$\omega_{0,i} := |\lambda_i|$$

als Eigenkreis- oder Kennkreisfrequenz sowie

$$\zeta_i := -\frac{\mathrm{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}$$

als Dämpfungsgrad oder Dämpfungsmaß bezeichnet, vgl. [90, 94]. Sind in einem Entwurfsverfahren Eigenwerte eines Systems bzw. des geschlossenen Regelkreises vorzugeben, so werden diese im Allgemeinen derart gewählt, dass sich deren Abklingkonstante in einem geeigneten Intervall befindet. Für einen komplexen Eigenwert mit negativem Realteil ist $0 < \zeta_i < 1$. Zur Interpretation der Eigenwert-Dämpfungsgrade kann das logarithmische Dekrement, siehe [94], herangezogen werden. Dieses ergibt sich als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses der Werte der Funktionen

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)t+\alpha_i)) \quad \text{und} \quad -\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)t+\alpha_i))$$

für zwei aufeinander folgende Maxima bzw. Minima der Sinus und Kosinusterme zu

$$\frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}\cdot 2\pi.$$

Bild A.1 veranschaulicht den Bereich in der komplexen Ebene der sich aus Anforderungen an eine gewisse Mindestdämpfung sowie Abklingrate ergibt.

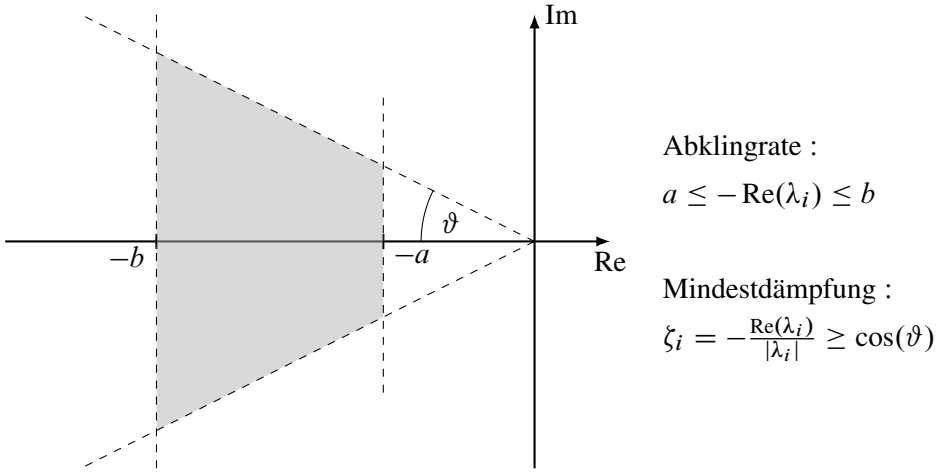



**Bild A.1:** Bereiche für die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises

## A.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Betrachtet wird eine quadratische Matrix $A(\kappa) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche als Funktion ihrer $n^2$ Einträge, zusammengefasst im Vektor $\kappa \in \mathbb{R}^{n^2}$, oder einer entsprechenden Untermenge, im Falle konstanter Einträge, gegeben ist. Es seien $\lambda_i(\kappa)$, $i = 1, \ldots, n$, die Eigenwerte dieser Matrix, wobei mehrfache Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit mehrfach gezählt werden. Diese können zu einem ungeordneten $n$-Tupel $\lambda(\kappa) = (\lambda_1(\kappa), \ldots, \lambda_n(\kappa))$ zusammengefasst werden [65]. Für solche ungeordneten $n$-Tupel kann ein Distanz- oder Abstandsbegriff in der Form

$$\mathrm{dist}\,(\lambda(\kappa), \lambda(\mu)) := \min_{\pi\in\mathcal{S}_n} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\lambda_{\pi(i)}(\kappa) - \lambda_i(\mu)|$$

mit $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^{n^2}$ und einer Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ definiert werden. Das Minimum im obigen Ausdruck ist so zu verstehen, dass aus allen möglichen Sortierungen der Eigenwerte diejenige gewählt wird, die den kleinsten maximalen Abstand der Elemente der $n$-Tupel ergibt. Unter Verwendung dieses Abstandsbegriffs kann festgestellt werden [65, Theorem 5.14], dass das unsortierte $n$-Tupel der Eigenwerte $\lambda(\kappa)$ eine stetige Funktion bezüglich $\kappa$ ist, insofern, als dass für jeden Punkt $\kappa$ die Distanz $\mathrm{dist}\,(\lambda(\kappa), \lambda(\kappa + e))$ für $\|e\| \to 0$ gegen 0 geht. In [61, Theorem 2.4.9.2] ist eine Herleitung angegeben, die auf den Begriff des ungeordneten Tupels verzichtet und sich stattdessen generell auf Permutationen von Eigenwerten bezieht. Eine weitere, alternative Herleitung findet sich in [110, Theorem 5.2].

Während die Stetigkeit der Eigenwerte, im oben beschriebenen Sinne, für beliebige Punkte $\kappa$ gegeben ist, ist dies im Hinblick auf die Differenzierbarkeit im Allgemeinen nicht der Fall. Dieser Umstand soll anhand zweier Beispiele illustriert werden.

**Beispiel A.1.** *Die Matrix*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}$$

*hat die Eigenwerte* $\pm\sqrt{\kappa}$*, welche für* $\kappa = 0$ *nicht differenzierbar sind. Die Matrix ist an dem entsprechenden Punkt nicht diagonalähnlich.*

Obiges Beispiel zeigt, dass es schon bei Matrizen, die nur von einer Variablen abhängen Situationen gibt, in denen die Eigenwerte nicht differenzierbar sind und dies an Punkten auftritt, an denen die Matrix einen mehrfachen Eigenwert aufweist.

**Beispiel A.2.** *[65, Example 5.12] Es wird die Matrix*

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & -\kappa_1 \end{bmatrix}$$

*betrachtet. Diese ist für eine beliebige Wahl des Vektors* $\kappa = [\ \kappa_1 \quad \kappa_2\ ]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ *symmetrisch. Entsprechend ist die Matrix an jedem Punkt diagonalisierbar und weist ein reelles Spektrum mit*

$$\lambda_{1/2}(\kappa) = \pm\sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}$$

*auf. Die Eigenwerte sind zwar an jedem Punkt partiell differenzierbar, bei* $\kappa = 0$ *allerdings nicht (total) differenzierbar.*

Auch in diesem zweiten Beispiel treten die Schwierigkeiten hinsichtlich der Differenzierbarkeit an einem Punkt auf, an dem die betrachtete Matrix einen mehrfachen Eigenwert aufweist.

Bekannte Resultate zur Differenzierbarkeit der Eigenwerte sind entsprechend für geeignete Einschränkungen des allgemeinen Falls gültig. So sind sämtliche Eigenwerte einer parameterabhängigen Matrix $A(\kappa)$, bzw. das entsprechende ungeordnete Tupel, an einem Punkt $\kappa_0$ genau dann partiell differenzierbar, wenn die Matrix $A(\kappa_0)$ diagonalisierbar ist [65, Theorem 5.15]. Sind darüber hinaus sämtliche Eigenwerte einfach, können diese in einer offenen Umgebung von $\kappa_0$ durch (unendlich oft) differenzierbare Funktionen ausgedrückt werden [65, Theorem 5.16]. Ein entsprechendes Resultat gilt für einzelne, einfache Eigenwerte unabhängig von der algebraischen Vielfachheit der restlichen Eigenwerte der Matrix [110, Theorem 5.3]. Die partiellen Ableitungen eines einfachen Eigenwerts $\lambda_i(\kappa)$ sind durch den Ausdruck

$$\frac{\partial \lambda_i(\kappa)}{\partial \kappa_j} = w_i^{\mathrm{H}} \frac{\partial A(\kappa)}{\partial \kappa_j} v_i$$

gegeben. Die hier angegebene Form der partiellen Ableitungen ergibt sich in einfacher Weise aus [61, Theorem 6.3.12], wobei $v_i$ und $w_i$ die Rechts- bzw. Linkseigenvektoren mit $w_i^{\mathrm{H}} v_i = 1$ zu dem entsprechenden Eigenwert am Punkt $\kappa$ bezeichnen.

Speziell im Hinblick auf Optimierungsprobleme, die Funktionen von Eigenwerten beinhalten, ist, unter Berücksichtigung dieser Resultate, die Fragestellung interessant, welcher der betrachteten Fälle im Allgemeinen zu erwarten ist. Die Antwort auf diese Frage ist erfreulicherweise, dass einfache Eigenwerte den generischen Fall beschreiben. Es lässt sich zeigen, dass die Menge der Matrizen mit einfachen Eigenwerten offen und dicht im entsprechenden Raum aller Matrizen ist

[55]. Für Matrizen, die eine spezielle Struktur aufweisen, ist insbesondere das Resultat aus [54] von Interesse. In dieser Quelle wird mittels der Resultanten, vgl. [41], gezeigt, dass in Unterräumen $n \times n$-dimensionaler Matrizen die Untermenge der Matrizen mit einfachen Eigenwerten entweder leer oder aber dicht ist. Die Argumentation mittels der Resultanten lässt sich auf den Fall übertragen, dass die Einträge der Matrix $A(\kappa)$ rationale Funktionen von $\kappa$ sind. Die Resultante ist ein Polynom in den Einträgen der betrachteten Matrix, das Null ergibt, sofern diese mindestens einen mehrfachen Eigenwert aufweist. Verschwindet die Resultante nicht für jede Wahl des Vektors $\kappa$, ist sie, im in [126] definierten Sinne, generisch von Null verschieden.

# B Ergänzungen zum Entwurf von Zustandsrückführungen

In den folgenden Abschnitten werden Resultate angegeben, die bei der Beschreibung des Verfahrens zum Entwurf von Zustandsrückführungen in Kapitel 3 genutzt werden, aber aus Gründen der Übersichtlichkeit im Hauptteil keinen Platz gefunden haben.

## B.1 Spezielle Wahl der Nullraumbasen

Bei dem Verfahren zur Vorgabe von Eigenwerten mittels Zustandsrückführungen wird mit speziell gewählten Nullraumbasen gearbeitet. Im Folgenden wird gezeigt, wie diese konstruiert werden können und es werden Eigenschaften der diese Basen repräsentierenden Matrizen erläutert.

Betrachtet wird eine Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{n\times m_\mathrm{c}}$, $B_\mathrm{p} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Das Paar $(A, B_\mathrm{c})$ sei steuerbar, woraus

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_\mathrm{c} \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

folgt [40]. Mit

$$\mathcal{S}(\lambda) := \ker\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_\mathrm{c} \end{bmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{T}(\lambda) := \ker\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_\mathrm{c} & B_\mathrm{p} \end{bmatrix}\right).$$

gilt somit $\dim(\mathcal{S}(\lambda)) = m_\mathrm{c}$ und $\dim(\mathcal{T}(\lambda)) = m_\mathrm{c} + r$. Für ein gegebenes $\lambda$ wird zunächst eine Matrix $S \in \mathbb{C}^{(n+m_\mathrm{c})\times m_\mathrm{c}}$ mit $\operatorname{bild}(S) = \mathcal{S}(\lambda)$ und $S^\mathrm{H} S = I$ bestimmt. Die Spalten der Matrix $S$ bilden demnach eine orthonormale Basis des Raums $\mathcal{S}(\lambda)$. Konkret kann eine solche Matrix beispielsweise mittels einer Singulärwertzerlegung erzeugt werden.

Für

$$T_1 = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+m_\mathrm{c}+r)\times m_\mathrm{c}}$$

gilt offensichtlich $T_1^\mathrm{H} T_1 = I$ und $\operatorname{bild}(T_1) =: \mathcal{T}_1(\lambda) \subset \mathcal{T}(\lambda)$. Gesucht wird nun ein Untervektorraum $\mathcal{T}_2(\lambda)$, beziehungsweise eine Basis dieses Raums, so dass sich $\mathcal{T}(\lambda) = \mathcal{T}_1(\lambda) \oplus \mathcal{T}_2(\lambda)$ als direkte Summe [41] der beiden Räume $\mathcal{T}_1(\lambda)$ und $\mathcal{T}_2(\lambda)$ ergibt. Wird wiederum eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{(n+m_\mathrm{c}+r)\times(m_\mathrm{c}+r)}$ mit $T^\mathrm{H} T = I$ und $\operatorname{bild}(T) = \mathcal{T}(\lambda)$ bestimmt, ergeben sich mehrere Möglichkeiten, die gesuchte Basis, beziehungsweise eine Matrix $T_2 \in \mathbb{C}^{(n+m_\mathrm{c}+r)\times r}$ mit

$\operatorname{bild}(T_2) = \mathcal{T}_2(\lambda)$, zu bestimmen. Beispielweise kann $T_2$ mittels des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens [61], ausgehend von den Spaltenvektoren von $T_1$ und unter Hinzunahme von Spalten von $T$, gebildet werden. Wird berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2(\lambda) &= \{x \in \mathcal{T}(\lambda) : x \perp \mathcal{T}_1(\lambda)\}\\ &= \left\{x \in \mathcal{T}(\lambda) : T_1^{\mathrm{H}} x = 0\right\}\\ &= \left\{x : x = Ty, T_1^{\mathrm{H}} T y = 0\right\}\\ &= \left\{x : x = Ty, y \in \ker(T_1^{\mathrm{H}} T)\right\}\end{aligned}$$

gilt, kann die gesuchte Matrix auch mittels $T_2 = TU$, mit $\operatorname{bild}(U) = \ker(T_1^{\mathrm{H}} T)$ und $U^{\mathrm{H}} U = I$, bestimmt werden. Für eine geeignet gewählte Partitionierung der Matrix

$$T_2 =: \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix}$$

ergibt sich somit die gesuchte Basis in der Form

$$\operatorname{bild}\left(\begin{bmatrix} S & Q \\ 0 & R \end{bmatrix}\right) = \mathcal{T}(\lambda). \tag{B.2}$$

Nachdem gezeigt ist, wie sich eine Basis des Nullraums der Matrix aus (B.1) unter den gegebenen Annahmen erzeugen lässt, können deren Eigenschaften betrachtet werden. Zunächst ist offensichtlich, dass wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Basis von $\mathcal{T}(\lambda)$ mit Matrizen $S$, $Q$ und $R$ gefunden ist, für $\lambda^*$ eine Basis von $\mathcal{T}(\lambda^*)$ mit $S^*$, $Q^*$ und $R^*$ angegeben werden kann. Folgender Satz zeigt, dass für die spezielle Wahl der Nullraumbasen die Matrix $R$ stets regulär ist.

**Satz B.1.** *Für die in* (B.1) *gegebene Matrix mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$, wobei das Paar $(A, B_{\mathrm{c}})$ steuerbar ist, sei die Basis des $(m_{\mathrm{c}}+r)$-dimensionalen Nullraums $\mathcal{T}(\lambda)$ in der Form* (B.2) *durch eine Matrix*

$$\begin{bmatrix} S & Q \\ 0 & R \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+m_{\mathrm{c}}+r)\times(m_{\mathrm{c}}+r)} \tag{B.3}$$

*gegeben. Die Matrix $R$ ist regulär.*

*Beweis.* Angenommen $R$ ist singulär. Dann existiert ein $x \neq 0$ mit $Rx = 0$ und

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Qx \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Aus obiger Beziehung folgt allerdings

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} Qx = 0$$

und somit $Qx \in \mathcal{S}(\lambda) = \operatorname{bild}(S)$. Dies impliziert, dass ein $y$ existiert, so dass

$$\begin{bmatrix} S & Q \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 0$$

gilt, was wiederum nur möglich ist, wenn die Matrix aus (B.3) linear abhängige Spalten besitzt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Forderung, dass die $m_c + r$ Spalten dieser Matrix eine Basis des Raums $\mathcal{T}(\lambda)$ bilden. □

Wird nun die in Abschnitt 3.2 gewählte Unterteilung der Basen in der Form

$$S =: \begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad Q =: \begin{bmatrix} N_p \\ M_p \end{bmatrix}$$

verwendet, ergibt sich die im folgenden Satz formulierte Aussage bezüglich des Rangs der Matrix $N_c$.

**Satz B.2.** *Betrachtet wird das steuerbare Paar* $(A, B_c)$ *mit* $\operatorname{rang}(B_c) = m_c \leq n$ *und einer Matrix*

$$S = \begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix},$$

*deren* $m_c$ *Spalten eine Basis des* $m_c$*-dimensionalen Nullraums der Matrix* $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_c \end{bmatrix}$ *bilden. Die Matrix* $N_c$ *hat vollen Spaltenrang.*

*Beweis.* Diese Aussage findet sich als Kommentar in [92] und lässt sich einfach zeigen. Angenommen es existiert ein $x \neq 0$, so dass $N_c x = 0$ gilt. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} x = B_c M_c x = 0.$$

Da die Matrix $B_c$ vollen Spaltenrang aufweist folgt daraus $M_c x = 0$. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Annahme, dass die Spalten der Matrix $S$ linear unabhängig sind. □

Abschließend wird die Aussage aus Bemerkung 3.1 diskutiert. Die im Weiteren auftretenden Matrizen entsprechen denen aus Abschnitt 3.2. Es wird lediglich davon ausgegangen, dass diese sich für ein beliebig gewähltes $\lambda$ ergeben, um auf die Indizierung zur Unterscheidung der zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Matrizen verzichten zu können. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\kappa) - \lambda I & \hat{B}(\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(\kappa) \\ M(\kappa) \end{bmatrix} = 0 \tag{B.4}$$

mit

$$N(\kappa) = \mathcal{F}_l\left( \begin{bmatrix} N_c & N_p R^{-1} \\ P_c & P_p R^{-1} \end{bmatrix}, K_p(\kappa) \right) \tag{B.5}$$

beziehungsweise

$$M(\kappa) = \mathcal{F}_l\left( \begin{bmatrix} M_c & M_p R^{-1} \\ P_c & P_p R^{-1} \end{bmatrix}, K_p(\kappa) \right) \tag{B.6}$$

für jede Wahl von $\kappa$ gilt, für welche die Matrizen $\big(I - D_{\mathrm{pp}} K_{\mathrm{p}}(\kappa)\big)$ und $\big(R - K_{\mathrm{p}}(\kappa) P_{\mathrm{p}}\big)$ regulär sind. Die Regularität der Matrix $\big(I - D_{\mathrm{pp}} K_{\mathrm{p}}(\kappa)\big)$ sichert die Wohldefiniertheit der die Matrizen $\hat{A}(\kappa)$ und $\hat{B}(\kappa)$ beschreibenden LFTs. Entsprechendes gilt bezüglich der Ausdrücke (B.5) und (B.6) und der Matrix $\big(R - K_{\mathrm{p}}(\kappa) P_{\mathrm{p}}\big)$. Letzteres ist leicht ersichtlich, da

$$\det(R - K_{\mathrm{p}}(\kappa) P_{\mathrm{p}}) = \det(I - K_{\mathrm{p}}(\kappa) P_{\mathrm{p}} R^{-1}) \cdot \det(R)$$

für reguläres $R$ gilt. Der in (B.4) beschriebene Zusammenhang kann durch Anwenden von für LFT-Darstellungen gültigen Zusammenhängen verifiziert werden. Es gilt

$$\begin{bmatrix} N(\kappa) \\ M(\kappa) \end{bmatrix} = \mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\left[\begin{array}{c:c} N_{\mathrm{c}} & N_{\mathrm{p}} R^{-1} \\ M_{\mathrm{c}} & M_{\mathrm{p}} R^{-1} \\ \hdashline P_{\mathrm{c}} & P_{\mathrm{p}} R^{-1} \end{array}\right], K_{\mathrm{p}}(\kappa)\right)$$

sowie mit (3.3)

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\kappa) - \lambda I & \hat{B}(\kappa) \end{bmatrix} = \mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\left[\begin{array}{cc:c} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \\ \hdashline C_{\mathrm{p}} & D_{\mathrm{pc}} & D_{\mathrm{pp}} \end{array}\right], K_{\mathrm{p}}(\kappa)\right).$$

Mit (2.17) ergibt sich für die Multiplikation der LFT Darstellungen der Matrizen

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\left[\begin{array}{cc:c} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} & B_{\mathrm{p}} \\ \hdashline C_{\mathrm{p}} & D_{\mathrm{pc}} & D_{\mathrm{pp}} \end{array}\right], K_{\mathrm{p}}(\kappa)\right) \mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\left[\begin{array}{c:c} N_{\mathrm{c}} & N_{\mathrm{p}} R^{-1} \\ M_{\mathrm{c}} & M_{\mathrm{p}} R^{-1} \\ \hdashline P_{\mathrm{c}} & P_{\mathrm{p}} R^{-1} \end{array}\right], K_{\mathrm{p}}(\kappa)\right) \\ &= \mathcal{F}_{\mathrm{l}}\big(Z, \operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}(\kappa), K_{\mathrm{p}}(\kappa))\big) \end{aligned} \tag{B.7}$$

wobei

$$\begin{aligned} Z &= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\mathrm{c}} \\ M_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} & B_{\mathrm{p}} \quad \begin{bmatrix} A - \lambda I & B_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\mathrm{p}} \\ M_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} R^{-1} \\ \hdashline \begin{bmatrix} C_{\mathrm{p}} & D_{\mathrm{p}c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\mathrm{c}} \\ M_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} & D_{\mathrm{pp}} \quad \begin{bmatrix} C_{\mathrm{p}} & D_{\mathrm{p}c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\mathrm{p}} \\ M_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} R^{-1} \\ P_{\mathrm{c}} & 0 \qquad P_{\mathrm{p}} R^{-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c:cc} 0 & B_{\mathrm{p}} & -B_{\mathrm{p}} \\ \hdashline P_{\mathrm{c}} & D_{\mathrm{pp}} & P_{\mathrm{p}} R^{-1} - D_{\mathrm{pp}} \\ P_{\mathrm{c}} & 0 & P_{\mathrm{p}} R^{-1} \end{array}\right] \end{aligned}$$

gilt. Für die reguläre Matrix

$$L := \begin{bmatrix} I_r & I_r \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & -I_r \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$\operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}(\kappa), K_{\mathrm{p}}(\kappa)) = L \operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}(\kappa), K_{\mathrm{p}}(\kappa)) L^{-1}$$

und mit (2.18) folgt aus (B.7)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(Z, \operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}(\kappa), K_{\mathrm{p}}(\kappa))\right) \\
=&\mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\left[\begin{array}{c:c} 0 & \begin{bmatrix} B_{\mathrm{p}} & -B_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} L \\ \hdashline L^{-1}\begin{bmatrix} P_{\mathrm{c}} \\ P_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} & L^{-1}\begin{bmatrix} D_{\mathrm{pp}} & P_{\mathrm{p}}R^{-1} - D_{\mathrm{pp}} \\ 0 & P_{\mathrm{p}}R^{-1} \end{bmatrix} L \end{array}\right], \operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}(\kappa), K_{\mathrm{p}}(\kappa))\right) \\
=&\mathcal{F}_{\mathrm{l}}\left(\left[\begin{array}{c:cc} 0 & B_{\mathrm{p}} & 0 \\ \hdashline 0 & D_{\mathrm{pp}} & 0 \\ P_{\mathrm{c}} & 0 & P_{\mathrm{p}}R^{-1} \end{array}\right], \operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}(\kappa), K_{\mathrm{p}}(\kappa))\right) = 0.
\end{aligned}
$$

## B.2 Gradientenberechnung

Die direkte Bestimmung des Gradienten der Gütefunktion des in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Optimierungsproblems ist, bedingt durch die auftretenden Verkettungen von Funktionen von Matrizen, recht umständlich. Ein geeignetes Mittel, dieses Problem strukturiert zu lösen, bietet die Verwendung der in [87] ausführlich diskutierten Differentiale. In den Abschnitten B.2.1 und B.2.2 werden zunächst einige grundlegende Zusammenhänge aus [87] zusammenfassend dargestellt. Aufbauend darauf wird in Abschnitt B.2.3 die Bestimmung der Gradienten der Gütefunktion beschrieben.

### B.2.1 Grundlegende Zusammenhänge und Notation

In diesem Abschnitt werden die im Zusammenhang mit der Verwendung von Differentialen genutzten Begriffe und Notation eingeführt. Hierbei wird auf die explizite Angabe der entsprechenden Definitionen und Sätze zugunsten einer kompakten Darstellung verzichtet. Diese finden sich in [87, Kapitel 5]

Ist $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine im Punkt $c$ differenzierbare Funktion, dann existiert eine Matrix $A(c)$, so dass

$$f(c+u) = f(c) + A(c)u + \varphi_c(u)$$

mit

$$\lim_{u \to 0} \frac{\varphi_c(u)}{\|u\|_2} = 0.$$

gilt. Die Matrix $A(c)$ bezeichnet in diesem Fall die erste Ableitung der Funktion am Punkt $c$ und das Differential $\mathrm{d}f(c;u) = A(c)u$ am Punkt $c$ mit dem Inkrement $u$ entspricht dem linearen Anteil einer affinen Approximation dieser Funktion. Wird die Jacobi-Matrix der Funktion $f$ mit

$$\mathrm{D}f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

bezeichnet gilt $\mathrm{D}f(c) = A(c)$ beziehungsweise $\mathrm{d}f(c;u) = (\mathrm{D}f(c))u$.

Die Berücksichtigung von Funktionen von Matrizen erfolgt in einfacher Weise durch Vektorisieren. Für eine im Punkt $C$ differenzierbare Funktion $F : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n\times q} \to \mathbb{R}^{m\times p}$ existiert eine Matrix $A(C)$, so dass

$$\operatorname{vec} F(C+U) = \operatorname{vec} F(C) + A(C)\operatorname{vec} U + \operatorname{vec}\varphi_C(U)$$

mit

$$\lim_{U\to 0}\frac{\varphi_C(U)}{\|U\|_{\mathrm{F}}} = 0.$$

gilt. Das Differential $\mathrm{d}F(C;U)$ der Funktion $F$ am Punkt $C$ mit dem Inkrement $U$ ist in diesem Fall eine durch die Beziehung

$$\operatorname{vec}\mathrm{d}F(C;U) = A(C)\operatorname{vec} U$$

definierte $m \times p$ Matrix. Für Differentiale lässt sich analog zur Kettenregel für Ableitungen die Beziehung

$$\mathrm{d}H(C;U) = \mathrm{d}G(B;\mathrm{d}F(C;U))$$

für eine Verkettung $H(X) = G(F(X))$ von an den Punkten $C$ und $B = F(C)$ differenzierbaren Funktionen $F$ und $G$ angeben. Diese Notation ist für längere Ausdrücke etwas unhandlich und es wird für das Differential einer Funktion $Y = F(X)$ verkürzend

$$\mathrm{d}Y = \mathrm{d}F(X;\mathrm{d}X)$$

beziehungsweise auch $\mathrm{d}F = \mathrm{d}F(X;\mathrm{d}X)$ geschrieben, siehe wiederum [87].

### B.2.2 Einfache Differentiale

In diesem Abschnitt werden einige einfache Resultate für Differentiale zusammengefasst, die im Weiteren verwendet werden. Sind $X$ und $Y$ Funktionen von Matrizen, $A$ eine konstante reelle Matrix und $\alpha$ ein Skalar gelten [87]

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= 0,\\
\mathrm{d}(\alpha X) &= \alpha\mathrm{d}X,\\
\mathrm{d}(X+Y) &= \mathrm{d}X + \mathrm{d}Y,\\
\mathrm{d}(XY) &= (\mathrm{d}X)Y + X\mathrm{d}Y,\\
\mathrm{d}X^{\mathrm{T}} &= (\mathrm{d}X)^{\mathrm{T}},\\
\mathrm{d}\operatorname{vec} X &= \operatorname{vec}\mathrm{d}X
\end{aligned}$$

sowie

$$\mathrm{d}\operatorname{spur} X = \operatorname{spur}\mathrm{d}X.$$

Als einfache Folge dieser Zusammenhänge ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\|X\|_{\mathrm{F}}^2 &= \mathrm{d}\,\mathrm{spur}(X^{\mathrm{T}}X) = \mathrm{spur}\,\mathrm{d}(X^{\mathrm{T}}X) \\ &= \mathrm{spur}(\mathrm{d}(X^{\mathrm{T}})X + X^{\mathrm{T}}\mathrm{d}X) \\ &= 2\,\mathrm{spur}(X^{\mathrm{T}}\mathrm{d}X). \end{aligned} \tag{B.8}$$

Dieses Resultat lässt sich ebenfalls in vektorisierter Form ausdrücken. Es gilt

$$\mathrm{spur}(Y^{\mathrm{T}}X) = (\mathrm{vec}\,Y)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{vec}\,X$$

und somit

$$\mathrm{d}\|X\|_{\mathrm{F}}^2 = 2\,\mathrm{spur}(X^{\mathrm{T}}\mathrm{d}X) = 2\,\mathrm{vec}(X)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{vec}(\mathrm{d}X).$$

Das Differential der Inversen einer regulären Matrix $X$ ist durch

$$\mathrm{d}X^{-1} = -X^{-1}\mathrm{d}(X)X^{-1} \tag{B.9}$$

gegeben, siehe ebenfalls [87]. Weiterhin werden Differentiale von Funktionen benötigt, welche die euklidische Norm von Vektoren beinhalten. Für von 0 verschiedene Vektoren $x$ gilt

$$\mathrm{d}\|x\|_2 = \mathrm{d}\left(x^{\mathrm{T}}x\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|x\|_2}x^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x \tag{B.10}$$

woraus

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\|x\|_2}\right) = -\frac{1}{\|x\|_2^3}x^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) &= \frac{1}{\|x\|_2}\mathrm{d}x - \frac{xx^{\mathrm{T}}}{\|x\|_2^3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\|x\|_2}\left(I - \frac{xx^{\mathrm{T}}}{\|x\|_2^2}\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{B.11}$$

folgt.

### B.2.3 Gradient der Gütefunktion

Für die im Optimierungsproblem (3.35) verwendete Gütefunktion

$$J_{\mathrm{Re}}(\kappa, f) = \alpha n \cdot \|\hat{V}_{\mathrm{Re}}(\kappa, f)^{-1}\|_{\mathrm{F}}^2 + (1-\alpha)\|K_{\mathrm{c}}(\kappa, f)\|_{\mathrm{F}}^2$$

soll der Gradient bezüglich der Vektoren der Variablen $\kappa$ und $f$ bestimmt werden. Um die Notation nicht zu ausladend zu gestalten, werden die Abhängigkeiten der einzelnen Funktionen von den Variablen zunächst nicht explizit angegeben. Für das Differential ergibt sich

$$\mathrm{d}J_{\mathrm{Re}} = \alpha n \cdot \mathrm{d}\|\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\|_{\mathrm{F}}^2 + (1-\alpha)\cdot \mathrm{d}\|K_{\mathrm{c}}\|_{\mathrm{F}}^2.$$

Die auftretenden Summanden werden zunächst einzeln und ohne die Skalierungen mit $n$ und dem Gewicht $\alpha$ betrachtet. Mit (B.8) und (B.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\|\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\|_{\mathrm{F}}^2 &= \mathrm{d}\,\mathrm{spur}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}) \\
&= 2\,\mathrm{spur}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\mathrm{d}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1})) \\
&= -2\,\mathrm{spur}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\mathrm{d}(\hat{V}_{\mathrm{Re}})\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}) \\
&= -2\,\mathrm{spur}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\mathrm{d}(\hat{V}_{\mathrm{Re}})).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Entsprechend gilt für den zweiten Summanden

$$\mathrm{d}\|K_{\mathrm{c}}\|_{\mathrm{F}}^2 = 2\,\mathrm{spur}\left(K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}K_{\mathrm{c}}\right).$$

Mit $K_{\mathrm{c}} = H_{\mathrm{Re}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}$ und (B.9) ergibt sich

$$\mathrm{d}K_{\mathrm{c}} = \mathrm{d}\left(H_{\mathrm{Re}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}\right) = (\mathrm{d}H_{\mathrm{Re}})V_{\mathrm{Re}}^{-1} - H_{\mathrm{Re}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}(\mathrm{d}V_{\mathrm{Re}})V_{\mathrm{Re}}^{-1}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\|K_{\mathrm{c}}\|_{\mathrm{F}}^2 &= 2\,\mathrm{spur}\left(K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{d}H_{\mathrm{Re}}V_{\mathrm{Re}}^{-1} - H_{\mathrm{Re}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}\mathrm{d}V_{\mathrm{Re}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}\right)\right) \\
&= 2\,\mathrm{spur}\left(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}H_{\mathrm{Re}}\right) - 2\,\mathrm{spur}\left(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{c}}\mathrm{d}V_{\mathrm{Re}}\right).
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Die in (B.12) und (B.13) auftretenden Summanden weisen eine ähnliche Struktur auf. Stellvertretend wird im Folgenden der erste Summand aus (B.13) ausführlicher betrachtet und die entsprechenden Ausdrücke für die weiteren Summanden angegeben. Die Spur des betrachteten Terms kann unter Verwendung der kanonischen Basisvektoren $e_i$ des $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise der Vektoren $\tilde{e}_i^{\mathrm{T}} := [\ e_{2i-1}^{\mathrm{T}} \quad e_{2i}^{\mathrm{T}}\ ]$ in der Form

$$\begin{aligned}
\mathrm{spur}\left(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}H_{\mathrm{Re}}\right) &= \sum_{i=1}^{\nu}\tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{diag}(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}, V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}})\cdot\mathrm{d}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(h_i)\\ \mathrm{Im}(h_i)\end{bmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=2\nu+1}^{n} e_i^{\mathrm{T}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}h_i
\end{aligned} \tag{B.14}$$

geschrieben werden. Mit

$$M_i = M_{\mathrm{c},i} + M_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{c},i}$$

aus (3.20) sind die Differentiale der reellen Steuervektoren $h_i = M_i f_i, i = 2\nu+1,\ldots,n$, durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h_i &= \mathrm{d}M_i f_i + M_i\mathrm{d}f_i \\
&= M_i\mathrm{d}f_i + M_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}\mathrm{d}K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{c},i}f_i \\
&\quad + M_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}\mathrm{d}K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{c},i}f_i \\
&= M_i\mathrm{d}f_i + M_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}\mathrm{d}K_{\mathrm{p}}\left(I + P_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}K_{\mathrm{p}}\right)P_{\mathrm{c},i}f_i \\
&= M_i\mathrm{d}f_i + \sum_{j=1}^{q}M_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}U_j\left(I + P_{\mathrm{p},i}(R_i - K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}K_{\mathrm{p}}\right)P_{\mathrm{c},i}f_i\cdot\mathrm{d}\kappa_j
\end{aligned}$$

mit $U_j := \operatorname{diag}(0_{r_1}, \ldots, 0_{r_{j-1}}, I_{r_j}, 0_{r_{j+1}}, \ldots, 0_{r_q})$ gegeben. Einer kompakteren Darstellung halber wird abkürzend

$$V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \mathrm{d} \cdot h_i = S_i \mathrm{d} f_i + \sum_{j=1}^{q} T_i U_j t_i \cdot \mathrm{d}\kappa_i$$

mit

$$S_i := V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} M_i, \quad T_i := V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} M_{\mathrm{p},i} (R_i - K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{p},i})^{-1}$$

und

$$t_i := \left(I + P_{\mathrm{p},i} (R_i - K_{\mathrm{p}} P_{\mathrm{p},i})^{-1} K_{\mathrm{p}}\right) P_{\mathrm{c},i} f_i.$$

geschrieben. Eine Verwechslung mit den im Hauptteil verwendeten Transformationsmatrizen beziehungsweise den Matrizen aus Anhang B.1 ist an dieser Stelle nicht zu befürchten. Für die Real- und Imaginärteile der zu den konjugiert komplexen Eigenwertpaaren gehörenden Vektoren ergibt sich entsprechend

$$\operatorname{diag}(V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}, V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}) \mathrm{d} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(h_i) \\ \mathrm{Im}(h_i) \end{bmatrix} = \tilde{S}_i \cdot \mathrm{d} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(f_i) \\ \mathrm{Im}(f_i) \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_i \tilde{U}_j \tilde{t}_i \cdot \mathrm{d}\kappa_j$$

unter Verwendung der reellen Darstellung aus Abschnitt 3.2.2 und den Abkürzungen

$$\tilde{S}_i := \operatorname{diag}(V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}, V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}) \tilde{M}_i, \quad \tilde{T}_i := \operatorname{diag}(V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}, V_{\mathrm{Re}}^{-1} K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}) \tilde{M}_{\mathrm{p},i} (\tilde{R}_i - \tilde{K}_{\mathrm{p}} \tilde{P}_{\mathrm{p},i})^{-1}$$

und

$$\tilde{t}_i := \left(I + \tilde{P}_{\mathrm{p},i} (\tilde{R}_i - \tilde{K}_{\mathrm{p}} \tilde{P}_{\mathrm{p},i})^{-1} \tilde{K}_{\mathrm{p}}\right) \tilde{P}_{\mathrm{c},i} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(f_i) \\ \mathrm{Im}(f_i) \end{bmatrix}$$

sowie

$$\tilde{M}_{\mathrm{c},i} := \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(M_{\mathrm{c},i}) & -\mathrm{Im}(M_{\mathrm{c},i}) \\ \mathrm{Im}(M_{\mathrm{c},i}) & \mathrm{Re}(M_{\mathrm{c},i}) \end{bmatrix}, \quad \tilde{M}_{\mathrm{p},i} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(M_{\mathrm{p},i}) & -\mathrm{Im}(M_{\mathrm{p},i}) \\ \mathrm{Im}(M_{\mathrm{p},i}) & \mathrm{Re}(M_{\mathrm{p},i}) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}_{\mathrm{c},i} := \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_{\mathrm{c},i}) & -\mathrm{Im}(P_{\mathrm{c},i}) \\ \mathrm{Im}(P_{\mathrm{c},i}) & \mathrm{Re}(P_{\mathrm{c},i}) \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_{\mathrm{p},i} := \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_{\mathrm{p},i}) & -\mathrm{Im}(P_{\mathrm{p},i}) \\ \mathrm{Im}(P_{\mathrm{p},i}) & \mathrm{Re}(P_{\mathrm{p},i}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_i := \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(R_i) & -\mathrm{Im}(R_i) \\ \mathrm{Im}(R_i) & \mathrm{Re}(R_i) \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_j := \operatorname{diag}(U_j, U_j), \quad \tilde{K}_{\mathrm{p}} := \operatorname{diag}(K_{\mathrm{p}}, K_{\mathrm{p}})$$

und

$$\tilde{M}_i := \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(M_i) & -\mathrm{Im}(M_i) \\ \mathrm{Im}(M_i) & \mathrm{Re}(M_i) \end{bmatrix}.$$

Für (B.14) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\operatorname{spur}\left(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}H_{\mathrm{Re}}\right) &= \sum_{i=1}^{\nu}\tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\left(\tilde{S}_i\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(f_i)\\ \mathrm{Im}(f_i)\end{bmatrix}+\sum_{j=1}^{q}\tilde{T}_i\tilde{U}_j\tilde{t}_i\cdot\mathrm{d}\kappa_j\right)\\ &\quad+\sum_{i=2\nu+1}^{n}e_i^{\mathrm{T}}\left(S_i f_i+\sum_{j=1}^{q}T_iU_jt_i\cdot\mathrm{d}\kappa_j\right)\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}&\operatorname{spur}\left(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}H_{\mathrm{Re}}\right)\\ &=\begin{bmatrix}\tilde{e}_1^{\mathrm{T}}\tilde{S}_1 & \cdots\tilde{e}_\nu^{\mathrm{T}}\tilde{S}_\nu & e_{2\nu+1}^{\mathrm{T}}S_{2\nu+1} & \cdots & e_n^{\mathrm{T}}S_n\end{bmatrix}\mathrm{d}f\\ &\quad+\left(\sum_{i=1}^{\nu}\begin{bmatrix}\tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\tilde{T}_i\tilde{U}_1\tilde{t}_i & \cdots & \tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\tilde{T}_i\tilde{U}_q\tilde{t}_i\end{bmatrix}+\sum_{i=2\nu+1}^{n}\begin{bmatrix}e_i^{\mathrm{T}}T_iU_1t_i & \cdots & e_i^{\mathrm{T}}T_iU_qt_i\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}\kappa\\ &=:g_{\mathrm{f},1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}f+g_{\kappa,1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\kappa.\end{aligned}$$

Der entsprechende Ausdruck für den zweiten Summanden aus (B.13) kann vollkommen analog bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}&\operatorname{spur}\left(V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{c}}\mathrm{d}V_{\mathrm{Re}}\right)\\ &=\begin{bmatrix}\tilde{e}_1^{\mathrm{T}}\tilde{W}_1 & \cdots\tilde{e}_\nu^{\mathrm{T}}\tilde{W}_\nu & e_{2\nu+1}^{\mathrm{T}}W_{2\nu+1} & \cdots & e_n^{\mathrm{T}}W_n\end{bmatrix}\mathrm{d}f\\ &\quad+\sum_{i=1}^{\nu}\begin{bmatrix}\tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\tilde{X}_i\tilde{U}_1\tilde{t}_i & \cdots & \tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\tilde{X}_i\tilde{U}_q\tilde{t}_i\end{bmatrix}\mathrm{d}\kappa+2\sum_{i=2\nu+1}^{n}\begin{bmatrix}e_i^{\mathrm{T}}X_iU_1t_i & \cdots & e_i^{\mathrm{T}}X_iU_qt_i\end{bmatrix}\mathrm{d}\kappa\\ &=:g_{\mathrm{f},2}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}f+g_{\kappa,2}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\kappa\end{aligned}$$

mit

$$W_i:=V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{c}}N_i,\quad X_i:=V_{\mathrm{Re}}^{-1}K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p},i}(R_i-K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}$$

und den entsprechend definierten Ausdrücken für die zu den komplexen Eigenwerten gehörenden Matrizen.

Im Hinblick auf den verbleibenden Term aus (B.12) muss zusätzlich die Normierung der Eigenvektoren und die angepasste Transformationsvorschrift (3.27) berücksichtigt werden, durch welche die Matrix $\hat{V}_{\mathrm{Re}}$ die Form

$$\hat{V}_{\mathrm{Re}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(v_1)}{\|v_1\|_2} & \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Im}(v_1)}{\|v_1\|_2} & \cdots & \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(v_\nu)}{\|v_\nu\|_2} & \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Im}(v_\nu)}{\|v_\nu\|_2} & \frac{v_{2\nu+1}}{\|v_{2\nu+1}\|_2} & \cdots & \frac{v_n}{\|v_n\|_2}\end{bmatrix}$$

aufweist. Mit (B.11) und $\tilde{v}_i:=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(v_i)^{\mathrm{T}} & \mathrm{Im}(v_i)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $i=1,\ldots,\nu$, ergibt sich

$$\begin{aligned}&\operatorname{spur}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\mathrm{d}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}))\\ &=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{\nu}\tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1},\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1})\frac{1}{\|\tilde{v}_i\|_2}\left(I-\frac{\tilde{v}_i\tilde{v}_i^{\mathrm{T}}}{\|\tilde{v}_i\|_2^2}\right)\mathrm{d}\tilde{v}_i\\ &\quad+\sum_{i=2\nu+1}^{n}e_i^{\mathrm{T}}V_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\frac{1}{\|v_i\|_2}\left(I-\frac{v_iv_i^{\mathrm{T}}}{\|v_i\|_2^2}\right)\mathrm{d}v_i.\end{aligned}$$

Nun kann wie zuvor verfahren werden und es resultiert der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{spur}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\mathrm{d}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}))\\
&=\begin{bmatrix} \tilde{e}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}_1 & \cdots \tilde{e}_\nu^{\mathrm{T}}\tilde{Y}_\nu & e_{2\nu+1}^{\mathrm{T}}Y_{2\nu+1} & \cdots & e_n^{\mathrm{T}}Y_n \end{bmatrix}\mathrm{d}f\\
&\quad+\sum_{i=1}^{\nu}\begin{bmatrix} \tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\tilde{Z}_i\tilde{U}_1\tilde{t}_i & \cdots & \tilde{e}_i^{\mathrm{T}}\tilde{Z}_i\tilde{U}_q\tilde{t}_i \end{bmatrix}\mathrm{d}\kappa + 2\sum_{i=2\nu+1}^{n}\begin{bmatrix} e_i^{\mathrm{T}}Z_iU_1t_i & \cdots & e_i^{\mathrm{T}}Z_iU_qt_i \end{bmatrix}\mathrm{d}\kappa\\
&=:g_{\mathrm{f},3}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}f + g_{\kappa,3}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\kappa
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
Y_i &:= \hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\frac{1}{\|v_i\|_2}\left(I-\frac{v_iv_i^{\mathrm{T}}}{\|v_i\|_2^2}\right)N_i,\\
Z_i &:= \hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\frac{1}{\|v_i\|_2}\left(I-\frac{v_iv_i^{\mathrm{T}}}{\|v_i\|_2^2}\right)N_{\mathrm{p},i}(R_i-K_{\mathrm{p}}P_{\mathrm{p},i})^{-1}\\
\tilde{Y}_i &:= \sqrt{2}\cdot\operatorname{diag}(\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1},\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1})\frac{1}{\|\tilde{v}_i\|_2}\left(I-\frac{\tilde{v}_i\tilde{v}_i^{\mathrm{T}}}{\|\tilde{v}_i\|_2^2}\right)\tilde{N}_i
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\tilde{Z}_i := \sqrt{2}\cdot\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-\mathrm{T}}\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\frac{1}{\|\tilde{v}_i\|_2}\left(I-\frac{\tilde{v}_i\tilde{v}_i^{\mathrm{T}}}{\|\tilde{v}_i\|_2^2}\right)\tilde{N}_{\mathrm{p},i}(\tilde{R}_i-\tilde{K}_{\mathrm{p}}\tilde{P}_{\mathrm{p},i})^{-1}.
$$

Durch Zusammenfassen dieser Ergebnisse kann das Differential der Gütefunktion

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}J_{\mathrm{Re}} &= \alpha n\cdot\mathrm{d}\|\hat{V}_{\mathrm{Re}}^{-1}\|_{\mathrm{F}}^2 + (1-\alpha)\cdot\mathrm{d}\|K_{\mathrm{c}}\|_{\mathrm{F}}^2\\
&= 2\left((1-\alpha)(g_{\kappa,1}^{\mathrm{T}}-g_{\kappa,2}^{\mathrm{T}})-\alpha n\cdot g_{\kappa,3}^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{d}\kappa + 2\left((1-\alpha)(g_{\mathrm{f},1}^{\mathrm{T}}-g_{\mathrm{f},2}^{\mathrm{T}})-\alpha n\cdot g_{\mathrm{f},3}^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{d}f
\end{aligned}
$$

bestimmt werden, womit auch der gesuchte Gradient gegeben ist. Wird, wie üblich, $J_{\mathrm{Re}}$ als skalarwertige Funktion des Vektors $x := [\ \kappa^{\mathrm{T}}\quad f^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}$ der Optimierungsvariablen aufgefasst, gilt

$$
\nabla J_{\mathrm{Re}}(x) = 2\cdot\begin{bmatrix} (1-\alpha)(g_{\kappa,1}-g_{\kappa,2})-\alpha n\cdot g_{\kappa,3}\\ (1-\alpha)(g_{\mathrm{f},1}-g_{\mathrm{f},2})-\alpha n\cdot g_{\mathrm{f},3}\end{bmatrix}.
$$

Die gegebene Herleitung lässt die Berechnung des Gradienten recht sperrig erscheinen. Allerdings gestaltet sich die Implementierung nicht schwierig. Im Besonderen ist anzumerken, dass durch die Multiplikation mit den Vektoren $e_i$ und $\tilde{e}_i$ beziehungsweise den Matrizen $U_j$ und $\tilde{U}_j$ jeweils nur bestimmte Zeilen oder Spalten der restlichen in den Ausdrücken auftretenden Matrizen relevant sind.

# C Der Balkenversuchsstand

Der Balkenversuchsstand findet als Beispiel für die in den Kapiteln 4 und 5 beschriebenen Entwurfsverfahren Verwendung. Für die unterschiedlichen Messungen werden verschiedene Konfigurationen der am Versuchsstand vorhandenen Gerätschaften genutzt, auf die jeweils in den entsprechenden Abschnitten eingegangen wird. An dieser Stelle werden Hersteller und Typbezeichnungen der wesentlichen Komponenten zusammenfassend angegeben.

- Echzeit-Regelsystem

  Hersteller dSPACE

  Modell DS1104 R&D Controller Board

- Piezo-Verstärker

  Hersteller Physik Instrumente

  Modell E-507.00

- Piezo-Keramiken

  Hersteller PI Ceramic

  Material PIC 255

- Linearversteller

  Hersteller Physik Instrumente

  Modell M-413.3PD

- CCD Laser-Wegmesssensoren

  Hersteller Keyence

  Steuerung LK-G3001P

  Messkopf LK-G32

- Filterbank

  Hersteller Kemo

  Modell BenchMaster 21M

# Literaturverzeichnis


[1] R. A. Adams und J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. 2. Aufl. Elsevier, Amsterdam, 2003.

[2] M. Ait Rami, S. El Faiz, A. Benzaouia und F. Tadeo. „Robust Exact Pole Placement via an LMI-Based Algorithm“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54.2 (2009), S. 394–398.

[3] P. Apkarian, P. Gahinet und C. Buhr. „Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers“. In: *2014 European Control Conference (ECC)*. 2014, S. 856–861.

[4] P. Apkarian und D. Noll. „Nonsmooth $H_\infty$ Synthesis“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.1 (2006), S. 71–86.

[5] P. Apkarian und D. Noll. „Optimization-Based Control Design Techniques and Tools“. In: *Encyclopedia of Systems and Control*. Hrsg. von J. Baillieul und T. Samad. Springer, London, 2013.

[6] O. Bachelier, J. Bosche und D. Mehdi. „On Pole Placement via Eigenstructure Assignment Approach“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.9 (2006), S. 1554–1558.

[7] O. Bachelier und D. Mehdi. „Non-iterative pole placement technique: A step further“. In: *Journal of the Franklin Institute* 345.3 (2008), S. 267–281.

[8] G. Balas, R. Chiang, A. Packard und M. Safonov. *Robust Control Toolbox - User's Guide*. R2015b. The MathWorks, Inc. 2015.

[9] H. T. Banks, R. C. Smith und Y. Wang. *Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control*. John Wiley & Sons, Chichester, 1996.

[10] R. H. Bartels und G. W. Stewart. „Solution of the Matrix Equation AX + XB = C [F4]“. In: *Communications of the ACM* 15.9 (1972), S. 820–826.

[11] S. Behrens, S. Moheimani und A. Fleming. „Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller“. In: *Journal of Sound and Vibration* 266.5 (2003), S. 929–942.

[12] D. S. Bernstein. „Some open problems in matrix theory arising in linear systems and control“. In: *Linear Algebra and its Applications* 162-164 (1992), S. 409–432.

[13] C. J. Bett und M. Lemmon. *On Linear Fractional Representations of Multidimensional Rational Matrix Functions*. Techn. Ber. Interdisciplinary Studies of Intelligent Systems Group, University of Notre Dame, 1997.

[14] P. Bisegna und G. Caruso. „Closed-form formulas for the optimal pole-based design of tuned mass dampers“. In: *Journal of Sound and Vibration* 331.10 (2012), S. 2291–2314.

[15] V. Bompart, P. Apkarian und D. Noll. „Non-smooth techniques for stabilizing linear systems“. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. 2007, S. 1245–1250.

[16] F. Bourgeois und J.-C. Lassalle. „An Extension of the Munkres Algorithm for the Assignment Problem to Rectangular Matrices“. In: *Communications of the ACM* 14.12 (1971), S. 802–804.

[17] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2. Aufl. Dover Publications, Inc., Mineola, 2001.

[18] S. Boyd und L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[19] R. Burkard, M. Dell'Amico und S. Martello. *Assignment Problems*. Society for Industrial und Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 2012.

[20] J. V. Burke, A. S. Lewis und M. L. Overton. „A Robust Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth, Nonconvex Optimization“. In: *SIAM Journal on Optimization* 15.3 (2005), S. 751–779.

[21] J. V. Burke und M. L. Overton. „Differential properties of the spectral abscissa and the spectral radius for analytic matrix-valued mappings“. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 23.4 (1994), S. 467–488.

[22] J. V. Burke und M. L. Overton. „Variational analysis of non-Lipschitz spectral functions“. In: *Mathematical Programming* 90.2 (2001), S. 317–351.

[23] J. Burke, D. Henrion, A. Lewis und M. Overton. „HIFOO - A Matlab Package for Fixed-Order Controller Design and $\mathcal{H}_\infty$ optimization“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 39.9 (2006). 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, S. 339–344.

[24] R. Byers und S. G. Nash. „Approaches to robust pole assignment“. In: *International Journal of Control* 49.1 (1989), S. 97–117.

[25] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal und C. Zhu. „A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 16.5 (1995), S. 1190–1208.

[26] R. H. Byrd, J. Nocedal und R. A. Waltz. „KNITRO: An Integrated Package for Nonlinear Optimization“. In: *Large-scale nonlinear optimization*. Springer, New York, 2006, S. 35–59.

[27] J. Camino, M. de Oliveira und R. Skelton. „Convexifying Linear Matrix Inequality Methods for Integrating Structure and Control Design“. In: *Journal of Structural Engineering* 129.7 (2003), S. 978–988.

[28] E. K.-W. Chu. „Pole assignment via the schur form “. In: *Systems & Control Letters* 56.4 (2007), S. 303–314.

[29] K.-w. E. Chu. „Generalization of the Bauer-Fike theorem“. In: *Numerische Mathematik* 49.6 (1986), S. 685–691.

[30] M. T. Chu und G. H. Golub. *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Aapplications*. Oxford University Press, Oxford, 2005.

[31] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. Society for Industrial und Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1990.

[32] J. Cockburn. „Linear fractional representations of systems with rational uncertainty“. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. Bd. 2. 1998, S. 1008–1012.

[33] J. C. Cockburn. „Discussion on: “Generalized LFT-Based Representation of Parametric Uncertain Models” “. In: *European Journal of Control* 10.4 (2004), S. 338–340.

[34] F. E. Curtis, T. Mitchell und M. L. Overton. „A BFGS-SQP method for nonsmooth, nonconvex, constrained optimization and its evaluation using relative minimization profiles“. In: *Optimization Methods and Software* 32.1 (2017), S. 148–181.

[35] F. E. Curtis und M. L. Overton. „A Sequential Quadratic Programming Algorithm for Nonconvex, Nonsmooth Constrained Optimization“. In: *SIAM Journal on Optimization* 22.2 (2012), S. 474–500.

[36] V. Dem'yanov, V. Malozemov und D. Louvish. *Introduction to Minimax*. Dover Publications, Inc., New York, 2014.

[37] J. P. Den Hartog. *Mechanical vibrations*. 4. Aufl. McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

[38] J. J. Dosch, D. J. Inman und E. Garcia. „A Self-Sensing Piezoelectric Actuator for Collocated Control“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 3.1 (1992), S. 166–185.

[39] G.-R. Duan. „Simple algorithm for robust pole assignment in linear output feedback“. In: *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications* 139.5 (1992), S. 465–469.

[40] G. E. Dullerud und F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory - A Convex Approach*. Bd. 36. Texts in Applied Mathematics. Springer, New York, 2000.

[41] G. Fischer. *Lineare Algebra : Eine Einführung für Studienanfänger*. 17. Aufl. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.

[42] A. J. Fleming und S. Moheimani. „Control orientated synthesis of high-performance piezoelectric shunt impedances for structural vibration control“. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 13.1 (2005), S. 98–112.

[43] O. Föllinger. *Regelungstechnik : Einführung in die Methoden und ihre Anwendungen*. 8., überarb. Aufl. Hüthig, Heidelberg, 1994.

[44] O. Föllinger. *Regelungstechnik : Einführung in die Methoden und ihre Anwendungen*. 10., durchges. Aufl. Hüthig, Heidelberg, 2008.

[45] M. Franke und K. Röbenack. „Calculation of Constant Output Feedback Matrices for Pole Placement by a Gauss-Newton Method“. In: *Control and Intelligent Systems* 42.3 (2014), S. 225–230.

[46] M. Fu. „Pole placement via static output feedback is NP-hard“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49.5 (2004), S. 855–857.

[47] P. Gahinet und P. Apkarian. „Decentralized and fixed-structure $H_\infty$ control in MATLAB“. In: *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. 2011, S. 8205–8210.

[48] P. Gahinet und P. Apkarian. „Structured $H_\infty$ Synthesis in MATLAB“. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*. 2011.

[49] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saubders und M. H. Wright. *Users' Guide for NPSOL (Version 4.0): A Fortran package for nonlinear programming*. Techn. Ber. Systems Optimization Laboratory, Stanford, 1986.

[50] G. H. Golub und C. F. Van Loan. *Matrix computations*. 4. Aufl. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.

[51] S. Gumussoy, D. Henrion, M. Millstone und M. L. Overton. „Multiobjective Robust Control with HIFOO 2.0“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 42.6 (2009). 6th IFAC Symposium on Robust Control Design, S. 144–149.

[52] Gurobi Optimization, Inc. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. 2016.

[53] N. Hagood und A. von Flotow. „Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks“. In: *Journal of Sound and Vibration* 146.2 (1991), S. 243–268.

[54] D. J. Hartfiel. „Dense Sets of Diagonalizable Matrices“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 123.6 (1995), S. 1669–1672.

[55] D. J. Hartfiel. *Matrix Theory and Applications with MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, 2000.

[56] S. Hecker. „Generation of low order LFT Representations for Robust Control Applications“. Diss. Technische Universität München, 2006.

[57] S. Hecker, A. Varga und J.-F. Magni. „Enhanced LFR-toolbox for Matlab“. In: *Aerospace Science and Technology* 9.2 (2005), S. 173–180.

[58] R. Hermann und C. Martin. „Applications of algebraic geometry to systems theory–Part I“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 22.1 (1977), S. 19–25.

[59] K. Hiramoto und K. M. Grigoriadis. „Integrated design of structural and control systems with a homotopy like iterative method“. In: *International Journal of Control* 79.9 (2006), S. 1062–1073.

[60] J. J. Hollkamp. „Multimodal Passive Vibration Suppression with Piezoelectric Materials and Resonant Shunts“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 5.1 (1994), S. 49–57.

[61] R. A. Horn und C. R. Johnson. *Matrix analysis*. 2. Aufl. Cambridge University Press, New York, 2013.

[62] O. Janda. „Modeling and Control of Sound and Vibration for Smart Structures“. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2014.

[63] K. Jänich. *Lineare Algebra*. 11. Auflage, 1. korrigierter Nachdruck. Springer, Berlin, 2011.

[64] A. Jentsch. „Aufbau eines Versuchsstands zur Schwingungsminderung mechanischer Strukturen mittels piezoelektrischer Wandler“. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, 2015.

[65] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Corrected Printing of the Second Edition. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 1995.

[66] J. Kautsky, N. K. Nichols und P. Van Dooren. „Robust pole assignment in linear state feedback“. In: *International Journal of Control* 41.5 (1985), S. 1129–1155.

[67] J. Kautsky und N. Nichols. „Robust pole assignment in systems subject to structured perturbations“. In: *Systems & Control Letters* 15.5 (1990), S. 373–380.

[68] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. 3. Aufl. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.

[69] H. Kimura. „Pole assignment by gain output feedback“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 20.4 (1975), S. 509–516.

[70] U. Konigorski. „Entwurf robuster strukturbeschränkter Zustandsregelungen durch Polgebietsvorgabe mittels Straffunktionen“. In: *at-Automatisierungstechnik* 35 (1987), S. 457–464.

[71] U. Konigorski. *Ein direktes Verfahren zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen durch Polvorgabe*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 156. VDI Verlag, Düsseldorf, 1988.

[72] U. Konigorski. „Pole placement by parametric output feedback“. In: *Systems & Control Letters* 61.2 (2012), S. 292–297.

[73] M. V. Kozlowski, D. G. Cole und R. Clark. „A Comprehensive Study of the RL Series Resonant Shunted Piezoelectric: A Feedback Controls Perspective“. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 133.1 (2011).

[74] K. Kuhnen. „Inverse Steuerung piezoelektrischer Aktoren mit Hysterese-, Kriech- und Superpositionsoperatoren“. Diss. Universität des Saarlandes, 2001.

[75] P. Lambrechts, J. Terlouw, S. Bennani und M. Steinbuch. „Parametric Uncertainty Modeling using LFTs“. In: *Proceedings of the 1993 American Control Conference*. 1993, S. 267–272.

[76] C. T. Lawrence und A. L. Tits. „A computationally efficient feasible sequential quadratic programming algorithm“. In: *SIAM Journal on optimization* 11.4 (2001), S. 1092–1118.

[77] C. T. Lawrence, J. L. Zhou und A. L. Tits. *User's Guide for CFSQP Version 2.0: A C Code for Solving (Large Scale) Constrained Nonlinear (Minimax) Optimization Problems, Generating Iterates Satisfying All Inequality Constraints*. 1994.

[78] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. 2. Aufl. Bd. 218. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 2013.

[79] A. S. Lewis und M. L. Overton. „Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods“. In: *Mathematical Programming* 141.1 (2013), S. 135–163.

[80] G. P. Liu und R. J. Patton. *Eigenstructure Assignment for Control Structure Design*. John Wiley & Sons, Chichester, 1998.

[81] L. Ljung. *System identification : Theory for the user*. 2. Aufl. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

[82] J. Lu und R. E. Skelton. „Integrating structure and control design to achieve mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ performance“. In: *International Journal of Control* 73.16 (2000), S. 1449–1462.

[83] K.-S. Lu. „The Controllability of Linear Systems over F(z)“. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 3. 2001, S. 2676–2681.

[84] D. Luenberger. „Observers for multivariable systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 11.2 (1966), S. 190–197.

[85] D. G. Luenberger. „An introduction to observers“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16.6 (1971), S. 596–602.

[86] J. Lunze. *Regelungstechnik 2 - Mehrgrößensysteme, digitale Regelung*. 4. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 2006.

[87] J. R. Magnus und H. Neudecker. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. 3. Aufl. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.

[88] M. Manderla und U. Konigorski. „Parametrischer Entwurf dynamischer Ausgangsrückführungen für reguläre Deskriptorsysteme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 59.2 (2011), S. 94–103.

[89] M. Manderla. *Eine Methodik zum Regler- und Beobachterentwurf für Mehrgrößensysteme in Deskriptorform*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1196. VDI Verlag, Düsseldorf, 2011.

[90] R. Markert. *Strukturdynamik*. Skrikpt zur Vorlesung, 1.Auflage. 2006.

[91] S. Moheimani und A. Fleming. *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. Advances in Industrial Control. Springer, London, 2006.

[92] B. Moore. „On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 21.5 (1976), S. 689–692.

[93] J. L. Morales und J. Nocedal. „Remark on “Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran Subroutines for Large-scale Bound Constrained Optimization”“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 38.1 (2011), 7:1–7:4.

[94] H. G. Natke. *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983.

[95] J. Nocedal und S. J. Wright. *Numerical optimization*. 2. Aufl. Springer series in operations research and financial engineering. Springer, New York, 2006.

[96] *Optimization Toolbox - User's Guide*. R2012b. The MathWorks, Inc. 2012.

[97] M. L. Overton und R. S. Womersley. „On Minimizing the Special Radius of a Nonsymmetric Matrix Function: Optimality Conditions and Duality Theory". In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 9.4 (1988), S. 473–498.

[98] R. Pintelon und J. Schoukens. *System Identification : A Frequency Domain Approach*. IEEE Press, New York, 2001.

[99] E. Polak. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Bd. 124. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 1997.

[100] A. Preumont. *Vibration Control of Active Structures : An Introduction*. 3. Aufl. Bd. 179. Solid mechanics and its applications. Springer, Berlin, 2011.

[101] A. Quarteroni und A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Bd. 23. Springer series in computational mathematics. Springer, Berlin, 1994.

[102] J. Raisch. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. R. Oldenburg Verlag, München, 1994.

[103] T. Rautert und E. W. Sachs. „Computational Design of Optimal Output Feedback Controllers". In: *SIAM Journal on Optimization* 7.3 (1997), S. 837–852.

[104] G. Roppenecker. *Vollständige modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 59. VDI Verlag, Düsseldorf, 1983.

[105] J. Schlake. *Modellbildung, Systemanalyse und Reglerentwurf örtlich verteilter Systeme basierend auf numerischen Approximationsmodellen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1194. VDI Verlag, Düsseldorf, 2011.

[106] R. Schmid, A. Pandey und T. Nguyen. „Robust Pole Placement With Moore's Algorithm". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 59.2 (2014), S. 500–505.

[107] R. Schmid, L. Ntogramatzidis, T. Nguyen und A. Pandey. „A unified method for optimal arbitrary pole placement ". In: *Automatica* 50.8 (2014), S. 2150–2154.

[108] I. Schulz. *Automatischer Entwurf adaptiver mechanischer Systeme im Frequenzbereich*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 20, Nr. 329. VDI Verlag, Düsseldorf, 2001.

[109] A. S. Sedra und K. C. Smith. *Microelectronic circuits*. 6. internat. ed. Oxford Univ. Press, New York, 2011.

[110] D. Serre. *Matrices : Theory and Applications*. 2. Aufl. Bd. 216. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 2010.

[111] R. Skelton, T. Iwasaki und K. Grigoriadis. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor & Francis, London, 1998.

[112] S. Skogestad und I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. 2. Aufl. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.

[113] R. A. Smith. „The condition numbers of the matrix eigenvalue problem“. In: *Numerische Mathematik* 10.3 (1967), S. 232–240.

[114] M. Steinbuch, J. C. Terlouw und O. Bosgra. „Robustness Analysis for Real and Complex Perturbations applied to an Electro-Mechanical System“. In: *1991 American Control Conference*. 1991, S. 556–561.

[115] G. W. Stewart und J.-g. Sun. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, New York, 1990.

[116] J. Stoer. *Numerische Mathematik 1*. 9. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 2005.

[117] J. Strubel. *Synchronisierung agentenbasierter dynamischer Systeme mittels struktur-beschränkter Regelungen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1250. VDI Verlag, Düsseldorf, 2016.

[118] J.-g. Sun. „Multiple eigenvalue sensitivity analysis“. In: *Linear Algebra and its Applications* 137–138 (1990), S. 183–211.

[119] V. Syrmos, C. Abdallah, P. Dorato und K. Grigoriadis. „Static output feedback—A survey“. In: *Automatica* 33.2 (1997), S. 125–137.

[120] *The NAG Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom www.nag.com*.

[121] A. Varga. „Robust pole assignment via Sylvester equation based state feedback parametrization“. In: *Proceedings of the 2000. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*. 2000, S. 13–18.

[122] A. Varga und G. Looye. „Symbolic and numerical software tools for LFT-based low order uncertainty modeling“. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*. 1999, S. 1–6.

[123] X. Wang. „Grassmannian, central projection, and output feedback pole assignment of linear systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41.6 (1996), S. 786–794.

[124] X. Wang. „Pole Placement by Static Output Feedback“. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control* 2.2 (1992), S. 205–218.

[125] J. H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. 1. publ. in paperback. Monographs on numerical analysis. Clarendon Press, Oxford, 1988.

[126] W. M. Wonham. *Linear multivariable control : a geometric approach*. 2. Aufl. Bd. 10. Applications of mathematics. Springer, New York, 1979.

[127] W. Wonham. „On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 12.6 (1967), S. 660–665.

[128] K. Yang und R. Orsi. „Static Output Feedback Pole Placement via a Trust Region Approach“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.11 (2007), S. 2146–2150.

[129] P. M. Young. „Robustness with Parametric and Dynamic Uncertainty“. Diss. California Institute of Technology, Pasadena, 1993.

[130] K. Zhou, J. Doyle und K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

[131] C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu und J. Nocedal. „Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran Subroutines for Large-scale Bound-constrained Optimization“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 23.4 (1997), S. 550–560.

[132] L. Zuo und S. Nayfeh. „Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers“. In: *Journal of Sound and Vibration* 272.3–5 (2004), S. 893–908.

# Eigene Veröffentlichungen

[133] S. Herold, D. Mayer, J. Pöllmann, C. Schäfer und G. L. Stein. „Optimization and realization of distributed vibration absorbers“. In: *Proceedings of ISMA2014 International Conference on Noise and Vibration Engineering*. 2014, S. 573–586.

[134] G. L. Stein und U. Konigorski. „Min-Max Optimization of Eigenvalue Damping Ratios for Vibration Damping“. In: *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. 2014, S. 1656–1661.

[135] G. L. Stein, J. Strubel und U. Konigorski. „A Robust Eigenvalue Assignment Approach to Integrated System and Control Design“. In: *23rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. 2015, S. 728–733.

[136] J. Strubel, G. L. Stein und U. Konigorski. „Synchronization of Heterogeneous Agents using Min-Max Optimization“. In: *2015 American Control Conference (ACC)*. 2015, S. 50–55.