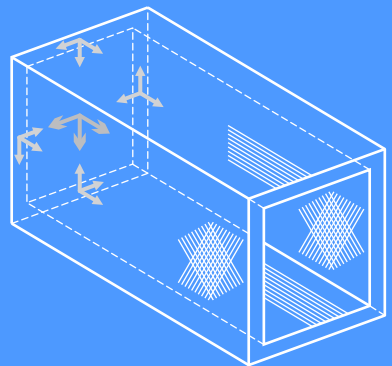
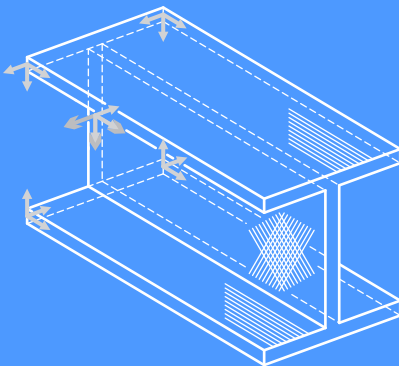




# Strukturmechanische Modellierung und Analyse des Tragverhaltens von dünnwandigen hochbelasteten Composite-Biege- und Querkraftträgern

Andreas Markus Kroker





# **Strukturmechanische Modellierung und Analyse des Tragverhaltens von dünnwandigen hochbelasteten Composite-Biege- und Querkraftträgern**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Andreas Markus Kroker**

aus Kreuztal, Kreis Siegen-Wittgenstein

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Becker
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. H. Schürmann
Tag der Einreichung:	06. November 2012
Tag der mündlichen Prüfung:	22. Januar 2013

Darmstadt 2013

D17

Kroker, Andreas Markus

**Strukturmechanische Modellierung und Analyse des Tragverhaltens von dünnwandigen hochbelasteten Composite-Biege- und Querkraftträgern**

Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt  
Band 28

**Herausgeber:**

Studienbereich Mechanik  
Technische Universität Darmstadt  
Hochschulstr. 1  
D-64289 Darmstadt  
Germany

© 2013 Andreas Markus Kroker  
kroker@mytum.de

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Werk ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

ISBN 978-3-935868-28-0

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit habe ich eigenständig während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt im Rahmen eines DFG-Projektes angefertigt. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung.

Ich möchte mich herzlich bei allen bedanken, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Becker danke ich für sie Unterstützung, Förderung und Begleitung während des gesamten Entstehungsprozesses der Arbeit. Hierzu zählen insbesondere die vielen konstruktiven Diskussionen wie auch die gewährte Freiheit bei der Bearbeitung des Themas. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Schürmann bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferats und das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit.

Allen Kollegen danke ich für das stets angenehme Arbeitsklima und die kollegiale Unterstützung bei der Bewältigung der am Fachgebiet anstehenden Aufgaben. Besonders möchte ich Herrn Dr.-Ing. J. Wackerfuß für die Diskussionen danken, die zur numerischen Umsetzung der Lösung des DGL-Systems führten.

An dieser Stelle möchte ich besonders meinen Eltern und meiner Großmutter herzlich danken für die Ermöglichung und bestmögliche Unterstützung meiner akademischen Ausbildung. Meiner Ehefrau und meinen Kindern danke ich für ihre große Geduld, die sie bei der Fertigstellung dieser Arbeit aufbringen mussten und möchte mich in aller Form für die vielen, vielen Stunden meiner Abwesenheit entschuldigen. Der gesamten Familie gegenüber drücke ich meinen herzlichsten Dank für den starken Rückhalt und die stete Motivation aus.

Meiner Familie

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>VII</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Problemstellung . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	2
1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit . . . . .	9
<b>2 Grundlagen ebener Lamine</b>	<b>11</b>
2.1 Verhalten einer Lamineinzelschicht . . . . .	11
2.2 Verhalten eines Laminats . . . . .	13
2.2.1 Laminataufbau . . . . .	13
2.2.2 Kinematik der klassischen Laminattheorie . . . . .	14
2.2.3 Konstitutives Verhalten . . . . .	14
2.2.4 Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	16
<b>3 Theoriebildung unterschiedlicher Feinheit für prismatische Balken</b>	<b>17</b>
3.1 Annahmen und Voraussetzungen . . . . .	17
3.2 Herleitung der Verschiebungsansätze . . . . .	19
3.3 Herleitung der Differentialgleichungen . . . . .	20
3.4 Lösung der Differentialgleichungen . . . . .	21
3.5 Modellbildung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse . . . . .	23
3.5.1 Schubstarre Theorie . . . . .	23
3.5.2 Schubdeformationstheorie erster Ordnung . . . . .	29
3.5.3 Schubdeformationstheorie höherer Ordnung . . . . .	37
3.6 Modellbildung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse . . . . .	47
3.6.1 Schubdeformationstheorie erster Ordnung . . . . .	47
3.6.2 Schubdeformationstheorie höherer Ordnung . . . . .	57
<b>4 Entwicklung eines numerischen Lösungsverfahrens für die Strukturmodelle</b>	<b>71</b>
4.1 Herleitung des semi-analytischen Verfahrens . . . . .	71
4.2 Anwendung auf die erweiterte Schubdeformationstheorie höherer Ordnung	76
<b>5 Beispiele und Vergleiche</b>	<b>81</b>
5.1 Konvergenzstudie . . . . .	81
5.2 Verifikation . . . . .	83
5.3 Validierung der hergeleiteten Balkenmodelle . . . . .	91
5.4 Untersuchung des Einflusses der Randbedingungen . . . . .	96
5.5 Untersuchung des Einflusses der Querkontraktion . . . . .	96
5.6 Parameterstudie - Ertragbare Querkraftbelastung in Abhängigkeit vom Biegemoment . . . . .	109

<b>6 Optimierung des Lagenaufbaus eines Trägers aus Mehrschichtverbunden</b>	<b>113</b>
6.1 Definition der Optimierungsaufgabe . . . . .	113
6.1.1 Optimierungsmodellbildung . . . . .	114
6.1.2 Auswahl des Strukturmodells für die Optimierung . . . . .	115
6.1.3 Wahl des Optimierungsalgorithmus . . . . .	116
6.2 Maximierung der Trägerfestigkeit . . . . .	121
6.3 Minimierung der Trägerabsenkung . . . . .	121
6.4 Gleichzeitige Maximierung der Festigkeit und Minimierung der Absenkung	126
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>131</b>
<b>A Anhang</b>	<b>135</b>
A.1 Materialkennwerte . . . . .	135
A.2 Schubstarre Theorie mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse	135
A.3 Matrizen für das numerische Lösungsverfahren . . . . .	138
A.3.1 Schubdeformationstheorie erster Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse . . . . .	138
A.3.2 Schubdeformationstheorie höherer Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse . . . . .	139
A.3.3 Schubdeformationstheorie erster Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse . . . . .	141
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

CFK	kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
DE2 bzw. DE3	Schubdeformationstheorie erster Ordnung ohne bzw. mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse
DH2 bzw. DH3	Schubdeformationstheorie höherer Ordnung ohne bzw. mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FEM	Finite-Elemente-Methode
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
GFK	glasfaserverstärkter Kunststoff
S2 bzw. S3	Schubstarre Theorie ohne bzw. mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse
SHM	Strukturüberwachung / Structural Health Monitoring
UD-Schicht	unidirektional faserverstärkte Einzelschicht
VTB	Verallgemeinerte Technische Biegetheorie

## Notation und Indizes

$\underline{(\dots)}$	Vektor
$\underline{\underline{(\dots)}}$	Matrix
$(\dots)_{,m}$	partielle Ableitung nach $x_m$
$(\dots)_{,mn}$	gemischte partielle Ableitung nach $x_m$ und $x_n$
$(\dots)'$	partielle Ableitung nach der globalen Koordinate $X$
$(\dots)_{\square}$	die Größe bezieht sich auf den Kastenträger
$\delta(\dots)$	virtuelle Größe
$(\dots)^*$	Wert im Optimum
$(\dots)^e$	Größe bezieht sich auf das Element $e$
$(\dots)_G$	die Größe bezieht sich auf die Gurte des Profils
$(\dots)_{[i]}$	die Größe bezieht sich auf den $i$ -ten Profilabschnitt

$(\dots)_{\mathbb{I}}$	die Größe bezieht sich auf den I-Träger
$(\dots)^{\{k\}}$	die Größe bezieht sich auf die $k$ -te Laminatschicht
$(\dots)_S$	die Größe bezieht sich auf den/die Steg(e) des Profils
$(\dots)^T$	Transponierte Größe
$\hookrightarrow$	Gleichung wird auf der nächsten Seite fortgeführt

## Lateinische Buchstaben

$\underline{A}, A_{mn}$	Dehnsteifigkeit(en)
$b$	Profilbreite
$\underline{B}, B_{mn}$	Kopplungssteifigkeit(en)
$c_m$	Konstanten
$\underline{C}, C_{mn}$	Steifigkeitsmatrix bzw. Steifigkeiten
$dd$	Konstante
$\underline{D}, D_{mn}$	Biegesteifigkeit(en)
$e$	Element- bzw. Knotennummer
$el$	Anzahl der Elemente in $X$ -Richtung
$\underline{ev}, \underline{ev}_{pj}^{(q)}$	Hauptvektor $q$ -ter Stufe zum $p$ -ten Eigenvektor des Eigenwerts $\lambda_j$
$E, E_m$	Elastizitätsmodul
$\underline{E}$	Einheitsmatrix
$\tilde{f}, \underline{\tilde{f}}$	Zielfunktion(en)
$\underline{F}$	Vektor äußerer Einzellasten
$F_Z, F_Z^0$	von außen angreifende Quer- oder Transversalkraft in $Z$ -Richtung
$\underline{g}$	inhomogener Anteil des DGL-Systems
$\tilde{g}, \underline{\tilde{g}}$	Ungleichheitsrestriktion(en)
$G, G_{mn}$	Schubmodul
$\underline{G}$	Matrix des DGL-Systems
$h$	Profilhöhe
$i$	$i$ -ter Profilabschnitt
$I$	Anzahl der Profilabschnitte
$I_{yy}$	Flächenträgheitsmoment
$j, o, p$	Konstanten
$J_m$	Konstanten

$\underline{J}$	Matrix in Jordanscher Normalform
$\underline{J}_m$	Jordanzelle
$k$	$k$ -te Laminatschicht
$\underline{k}$	Elementsteifigkeitsmatrix
$K$	Anzahl der Laminatschichten
$Kom$	Konstante
$\underline{K}$	globale Steifigkeitsmatrix
$l$	Trägerlänge
$M$	Biegemoment
$M_{KG}$	Kippmoment
$M_{WG}, M_{WS}$	Wölbmomente
$M_x, M_y, M_{xy}$	Biege- und Drillmomente
$M_Y, M_Y^0$	von außen angreifendes Biegemoment um die $Y$ -Achse
$n_n$	Komponente des Normalenvektors zu $dA$
$N_L, N_M, N_1, N_2$	Formfunktionen für das zwei-Knoten-Element
$N_x, N_y, N_{xy}, \tilde{N}$	Schnittkräfte(vektor)
$\underline{Q}, \underline{\bar{P}}, \underline{\hat{P}}$	Kopplungsmatrizen für das numerische Lösungsverfahren
$p_x, p_y, p_d$	äußere Lasten auf ein Laminat
$\tilde{p}$	Präferenzfunktion
$p_{\perp\parallel}^+, p_{\perp\parallel}^-, p_{\perp\perp}^+, p_{\perp\perp}^-$	Neigungsparameter der Bruchkurve
$q$	Konstante
$Q, Q_x, Q_y$	Querkraft
$Q_G, Q_S$	Querschnittsverwölbung in den Gurten und in dem/den Steg(en)
$\underline{\bar{Q}}, \bar{Q}_{mn}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix bzw. reduzierte Steifigkeiten
$\underline{\underline{R}}_{11}, \underline{\underline{R}}_{12}, \underline{\underline{R}}_{22}$	Untermatrizen für das numerische Lösungsverfahren
$R_{\parallel}^+, R_{\parallel}^-$	Zug- bzw. Druckfestigkeit parallel zur Faserrichtung der UD-Schicht
$R_{\perp}^+, R_{\perp}^-$	Zug- bzw. Druckfestigkeit quer zur Faserrichtung der UD-Schicht
$R_{\perp\parallel}$	Schubfestigkeit in der UD-Schichtebene
$s$	Laufkoordinate entlang eines Querschnitts
$\underline{S}, S_{mn}$	Nachgiebigkeitsmatrix bzw. Nachgiebigkeiten
$t$	Laminatdicke eines Querschnittabschnitts

$t_0$	Schichtdicke der 0°-Lage
$t_\alpha$	Schichtdicke einer Winkellage
$\underline{T}$	Transformationsmatrix
$\underline{\delta u}, \delta u_m$	virtuelle Verrückung(en)
$\underline{u}, u_m, u, v, w$	Verschiebungen
$u_G$	Kopplungsterm im Verschiebungsansatz
$vd$	Dickenverhältnis
$vol$	Trägervolumen
$w_G, w_S$	Kopplungsterme im Verschiebungsansatz
$\delta W_{in}$ bzw. $\delta W_{au}$	innere bzw. äußere virtuelle Arbeit
$x, y, z$	lokales Koordinatensystem
$x_1, x_2, x_3$	Materialhauptachsen-Koordinatensystem
$x_e$	Elementkoordinate
$\tilde{x}, \tilde{y}$	Entwurfsvariable(nvektor)
$X, Y, Z$	globales Koordinatensystem

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Lagenwinkel
$\alpha_1 ML, \alpha_2 ML, \alpha_3 ML$	Konstanten für das numerische Lösungsverfahren
$\alpha_\beta, \beta$	Konstanten
$\gamma_{mn}$	technische Gleitung
$\underline{\varepsilon}, \varepsilon_m, \underline{\underline{\varepsilon}}, \varepsilon_{mn}$	Verzerrung(en)
$\underline{\underline{\varepsilon}}^0, \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$	Verzerrungen der Laminatmittelebene
$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}, \delta \varepsilon_m, \delta \underline{\underline{\varepsilon}}, \delta \varepsilon_{mn}$	virtuelle Verzerrung(en)
$\underline{\underline{\Theta}}, \Theta_m, \underline{\underline{\hat{\Theta}}}, \hat{\Theta}_m$	unbekannte Funktion(en) zu Deformationsmoden
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	Verkrümmungen der Laminatmittelebene
$\lambda, \lambda_m$	Eigenwert
$\nu, \nu_{mn}$	Querkontraktionszahl
$\prod_{in}$ bzw. $\prod_{au}$	inneres bzw. äußeres Potential
$\underline{\sigma}, \sigma_m, \underline{\underline{\sigma}}, \sigma_{mn}, \tau_{mn}$	Spannung(en)
$\phi$	Lastwinkel
$\underline{\Psi}_{-p j}^{(q)}$	spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der strukturmechanischen Modellierung von dünnwandigen Trägern. Als Querschnittsform werden rechteckige, geschlossene Kasten- und offene I-Profile betrachtet, die aus Mehrschichtverbunden aufgebaut sind. Diese Verbunde, auch Lamine genannt, sollen aus unidirektional faserverstärkten Kunststoffschichten bestehen und besitzen häufig stark anisotrope Materialeigenschaften. Betrachtet werden symmetrische, ausgeglichene Schichtaufbauten. Die Trägerbelastung erfolgt ausschließlich in Form von Querkräften und Biegemomenten. Die Ergebnisse der Trägermodellierung sollen bei Optimierungsaufgaben eingesetzt werden. Dabei ist es vorteilhaft Modelle zu verwenden, die geschlossen-analytisch oder zumindest teilweise geschlossen-analytisch gelöst werden können. Im Gegensatz zu aufwendigen, rechenintensiven Finite-Elemente Berechnungen lässt sich der analytische Weg mit geringem numerischen Aufwand effizient beschreiben. Auf diese Weise ergibt sich eine für den gesamten Trägerbereich gültige Lösung. Ein geeignetes Modell muss zusätzlich die speziellen Eigenschaften der Mehrschichtverbunde berücksichtigen. Insbesondere im Hinblick auf die vielfältigen Modellparameter, wie z. B. das verwendete Material, die äußeren geometrischen Abmessungen der Profile, die Anzahl, die Faserwinkel und die Dicke der Einzelschichten, die den Grad der anisotropen Eigenschaften bestimmen, besteht die Notwendigkeit, schnell lösbare, analytische Lösungen zu finden.

Gesucht wird ein Modell, das sowohl die globalen als auch die lokalen Eigenschaften abbilden kann. Hierfür werden in der vorliegenden Arbeit mehrere Trägermodelle auf der Basis von speziell angepassten, segmentweisen Verschiebungsansätzen für das Kasten- und das I-Profil entwickelt. Die Ergebnisse, die sich mit den einzelnen Modellen ergeben, werden mit ABAQUS-Finite-Elemente-Berechnungen auf der Basis von Schalenelementen als Referenzlösung verglichen. Auf diese Weise kristallisieren sich die Vorteile aber auch die Unzulänglichkeiten einzelner Modellierungen heraus. Es zeigt sich, dass einzig ein Schubdeformationsmodell mit Verschiebungsansätzen höherer Ordnung in der Lage ist, das Strukturverhalten eines Trägers aus Mehrschichtverbunden mit hoher Genauigkeit wiederzugeben. Die Profilverformung ist hierfür sowohl in Balkenlängsrichtung als auch senkrecht zu dieser zu berücksichtigen. Bei diesem Strukturmodell werden für die Verschiebung in Längsrichtung im Bereich der Gurte quadratische und im Bereich des/der Steg(e) kubische Ansätze verwendet. Diese sind notwendig, damit der Schubfluss und die Gleitung auf direktem Weg ermittelt werden können. Die segmentweisen Verschiebungsansätze in den transversalen Richtungen berücksichtigen teilweise Glieder bis zur zweiten Ordnung. Zusätzlich werden schubstarre Modelle sowie Modelle mit Verschiebungsansätzen erster Ordnung, teilweise unter Berücksichtigung einer Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse, betrachtet. Diese weisen aber je nach verwendetem Layup größere Schwächen auf und eignen sich nur für Spezialfälle.

Anhand des umfassenden Schubdeformationsmodells werden die Einflüsse der gewählten Randbedingungen der Trägereinspannung sowie der Profilverformung aufgrund einer Querkontraktion des Mehrschichtverbundes auf das Strukturverhalten untersucht. In einer Parameterstudie werden für einen Kragträger unter einer kombinierten Biegemomenten- und Querkraftbelastung die Versagenskurven für unterschiedliche Lagenaufbauten auf Basis des Tsai-Wu Kriteriums und des Puck'schen Wirkebenenkriteriums ermittelt. Im Rahmen einer Strukturoptimierung für einen Winkelverbund mit zusätzlicher 0°-Lage

in den Gurten wird die Schichtgestaltung untersucht. Dabei werden drei Ziele verfolgt: Erstens wird der Träger auf eine möglichst große Festigkeit ausgelegt, zweitens wird die maximale, absolute Trägerabsenkung minimiert und drittens wird das gleichzeitige (PARETO-)Optimum für die beiden zuerst genannten Ziele gesucht.

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Problemstellung

Stäbe und Balken sind seit jeher die am weitesten verbreiteten strukturmechanischen Konstruktionselemente. Sie gehören zu den eindimensionalen, linienförmigen Elementen, weil sie in den zwei Raumrichtungen, die den Querschnitt beschreiben, wesentlich kleinere Abmessungen besitzen als in der Dritten, die die Länge des Elementes charakterisiert. Diese Art von Strukturelementen wird im klassischen Maschinen- und Anlagenbau, dem Fahrzeugbau, in der Luft- und Raumfahrtindustrie sowie dem Bauingenieurwesen – oft als dünnwandiger I- oder Kastenträger aus Gründen des Leichtbaus und der Einsparung von Ressourcen durch einen beanspruchungsgerechten Querschnitt – eingesetzt.

In der Vergangenheit wurde als Werkstoff zuerst Holz und danach vermehrt Gusseisen, Stahl und Aluminium verwendet. In den letzten Jahrzehnten wurden auf vielen Gebieten zunehmend Composite-Werkstoffe insbesondere Faser-Kunststoff-Verbunde (FKV) z. B. kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (CFK) oder glasfaserverstärkter Kunststoff (GFK) in Form von Mehrschichtverbunden (Laminaten) eingesetzt. Durch eine Änderung der Schichtungsreihenfolge (Layout) können die mechanischen Eigenschaften über einen weiten Bereich an die gegebenen Erfordernisse angepasst werden. Anfangs kamen FKV nur in wenigen Bereichen, in denen die Kosten eine eher untergeordnete Rolle spielen oder die gewünschten Eigenschaften nicht anders erzielt werden können, wie in der Raumfahrt (z. B. Satelliten, Trägersysteme) und dem Hochleistungssport (Segelflugzeuge, Boote, Autos, Fahrräder etc.) zum Einsatz. Heute sind sie aus Serienprodukten wie z. B. Rotorblättern von Helikoptern und Windturbinen, Flugzeug- oder Fahrzeugteilen nicht mehr wegzudenken. Durch große Fortschritte in der Fertigungstechnik konnten die Kosten deutlich gesenkt und neue Verarbeitungsmöglichkeiten entwickelt werden.

Einen guten Überblick zum Konstruieren, Berechnen und Auslegen von Strukturelementen aus Composite-Werkstoffen geben die Werke von Altenbach et al. [3, 5], Jones [33], Reddy [74] und Schürmann [86].

Die besonderen Vorteile der faserverstärkten Kunststoffe sind ihre hohe spezifische Festigkeit und Steifigkeit in Kombination mit einem sehr geringen spezifischen Gewicht. Außerdem besitzen sie eine gute Korrosionsbeständigkeit und eine höhere Ermüdungsfestigkeit als Stahl. Beides führt zu einer längeren Nutzungsdauer bei gleichzeitiger Reduktion der Wartungskosten. Wenn das Eigengewicht von schweren Konstruktionen wie z. B. Brücken u. Ä. durch den Einsatz von FKV verringert wird, können diese vorgefertigt und in größeren Einheiten zur Baustelle transportiert werden. Dieses beschleunigt und erleichtert die Endmontage. Für bewegliche Strukturen bietet ein verringertes Bauteilgewicht zudem weitere Vorteile wie geringere Trägheitsmomente oder ein besseres Verhältnis von Belastungen aus dem Eigengewicht zu Betriebslasten. Auf diese Weise können z. B. Roboter bei gleichem Antrieb eine höhere Nutzlast bewegen oder größere Beschleunigungen ausführen. Alternativ kann bei gleichen Betriebsdaten ein kleinerer Antrieb verbaut werden.

Entscheidende Nachteile bei der Verwendung von FKV sind die bisher fehlenden (Langzeit-)Erfahrungen mit dem Werkstoff bei vielen Anwendungen. Bauteilkonstruktionen aus isotropen Materialien wie Stahl oder Aluminium können nicht einfach auf FKV übertragen werden. Zudem fehlen weitgehend angemessene Analyse- und Nachweisverfahren für die Auslegung. Viele Dimensionierungen erfolgen durch aufwendige,

zerstörende Belastungsversuche. Ein weiterer kritischer Punkt sind die Krafteinleitungsstellen. Diese bedürfen einer besonderen Begutachtung, weil sich eine lokal begrenzte Materialüberanspruchung bei FKV nicht durch plastisches Fließen abbauen kann. Trotz neuer Fertigungstechniken sind die spezifischen Kosten gegenüber herkömmlichen Werkstoffen höher und müssen an anderer Stelle kompensiert werden.

Mit dem Einzug neuer Werkstoffe mit neuen Eigenschaften und Anforderungen in die Praxis ist es wichtig, die Methoden zur Bewertung einer Konstruktion im Hinblick auf Sicherheit und Haltbarkeit zu überprüfen und zu erweitern. Für die Beurteilung der Bauteileigenschaften ist es notwendig, möglichst leistungsfähige analytische und numerische Modelle für die Vorhersage des Strukturverhaltens von dem Gesamtsystem zu entwickeln. Die für die bisherigen Anwendungen notwendigen, meist umfangreichen Versuche und aufwendigen, detaillierten und somit zeitintensiven Finite-Elemente-Analysen (FEA) müssen weitgehend durch effizientere Verfahren der Modellbildung ersetzt und unterstützt werden.

Ein weiteres wichtiges Aufgabengebiet für die Modellbildung ist die Schadensfrüherkennung bzw. -vorhersage zusammengefasst im Structural Health Monitoring (SHM). Hierbei wird der Zustand einer Struktur durch verschiedene Sensoren, die in die Struktur eingearbeitet oder außen aufgebracht worden sind, (permanent) überwacht und eine Aussage über ein mögliches Auftreten, den Ort, die Art, das Ausmaß von Schädigungen und die noch verbleibende Tragfähigkeit getroffen. Dieses Vorgehen ist nur möglich, wenn entsprechend leistungsfähige strukturmechanische Modelle vorhanden sind.

Für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Balkenstrukturen sind beispielsweise die folgenden Anwendungen denkbar: Im Nutzfahrzeugbau werden an vielen Stellen Leiterraumstrukturen eingesetzt (z. B. LKW-Zugmaschinen und Anhänger). Diese können zur Gewichtseinsparung durch FKV-Strukturen substituiert werden. Bei Anwendungen im Maschinenbau ist es u. a. denkbar Roboterarme<sup>1</sup>, das Querhaupt einer Portalfräsmaschine, Transportträgersysteme in der Automobilindustrie<sup>2</sup> oder die Brücke eines Laufkrans als FKV-Profil auszuführen. Nicht zuletzt wird das Bauingenieurwesen durch einen Einsatz von Profilen aus diesem korrosionsbeständigen Werkstoff profitieren. Hier können z. B. tragende Elemente von Brücken, die bisher als Beton- oder Stahlträger ausgeführt werden, ersetzt werden. Versuche und erste Realisierungen von Projekten im Brückenbau mit Composite-Trägern, die mit unterschiedlichen Fertigungsverfahren hergestellt worden sind, werden beispielsweise in [28, 82, 87, 98, 110] vorgestellt.

## 1.2 Stand der Forschung

### Balken und Stäbe

Obwohl Stäbe und Balken zu den ältesten Strukturelementen des Menschen gehören und es schon im Altertum empirische Untersuchungen und Regeln zur Auslegung und Abschätzung gegeben haben muss, geht das heute bekannteste Balkenmodell auf J. Bernoulli (1655-1705) zurück, nachdem die Elastizitätstheorie von G. Galilei (1564-1642) begründet worden war<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>Die Augsburger Firma KUKA AG hat bereits einige Roboter mit CFK-Elementen im Produktprogramm.

<sup>2</sup>Dieses Anwendungsbeispiel wurde auf der Hannover Messe 2011 auf dem Stand der Volkswagen AG in Zusammenarbeit mit IBG Automation und der KUKA AG gezeigt.

<sup>3</sup>Vgl. Timoshenko [107]

Für das klassische Balkenmodell nach Bernoulli werden die folgenden geometrischen Hypothesen aufgestellt: Querschnitte, die senkrecht auf der Balkenmittellinie stehen, bleiben unter Verformung durch Biegung eben und weiterhin senkrecht. Die Mittellinie erfährt keine Dehnung. Mit diesem Modell können die Normalspannungen parallel zur Balkenlängsachse vorhergesagt werden. Die Schubspannungen aufgrund einer Querkraft können nur über das Kräftegleichgewicht ermittelt werden. Dieses Modell eignet sich sowohl für Voll-, Hohl- sowie für dünnwandige offene und geschlossene Querschnitte.

Ein Modell für einen Torsionsstab wurde von J. C. Saint-Venant (1797-1886) für den Fall einer reinen Torsionsbelastung mit unbehinderter Querschnittsverwölbung hergeleitet. Hierbei verformen sich die Querschnitte in ihrer Schnittebene (nicht deformierbare Querschnittskontur) nicht, können sich aber verwölben. In Längsrichtung findet keine Dehnung statt und somit liegen in sämtlichen Querschnitten senkrecht zur Längsachse die gleichen Verwölbungen vor.

R. Bredt (1842-1900) veröffentlichte 1896 in seinen „kritische(n) Bemerkungen zur Drehungselastizität“ [13] seine Überlegungen zu Schubspannungen und Verformungen durch Torsion bei Stäben. In diesen stellte er u. a. die nach ihm benannten Bredt'schen Formeln für dünnwandige, geschlossene Profile auf.

Mit dem von S. P. Timoshenko (1878-1972) aufgestellten Balkenmodell wird einer Schubverformung durch eine Querkraftbelastung Rechnung getragen. Für dieses Modell werden die Hypothesen von Bernoulli mit der Ausnahme übernommen, dass die Querschnitte unter Verformung nicht mehr senkrecht auf der Balkenmittellinie stehen müssen. Insbesondere für dickere, kürzere Balken unter Querkraftbelastung kann die auftretende Schubverformung berücksichtigt werden. In [106] veröffentlichte Timoshenko 1945 eine Theorie zur Behandlung offener, dünnwandiger Profile unter allgemeiner Biegung und Torsion mit Berücksichtigung von Stabilitätsversagen.

E. Reissner (1913-1996) untersuchte 1946 in [77] den Einfluss des Shear-Lag-Effekts, d. h. den Einfluss mittragender Breiten, einer Ungleichverteilung der Normalspannungen in den Gurten aufgrund der Schubverformbarkeit, anhand eines Kastenträgers unter Biegung mit Hilfe des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials.

In [61] erstellte Nowinski 1959 eine umfangreiche Zusammenfassung über die existierenden Balkentheorien für dünnwandige offene und geschlossene Profile. Bis heute sind immer wieder neue verschiebungsbasierte Theorien höherer Ordnung für Balken aus isotropem Material mit Vollquerschnitt oder Abwandlungen bekannter Modelle entstanden. So wurde von Shi und Voyiadjis in [91] (2011) ein Schubdeformationsmodell dritter Ordnung aufgestellt. In [16] (2011) untersuchten Carrera und Petrolo den Einfluss von Ansätzen höherer Ordnung für Balken unter Zug, Biegung und Torsion. Es zeigte sich, dass sowohl die Querschnittsform als auch der Lastfall für die Wahl der einzelnen Ansatzglieder und damit für die Genauigkeit der Ergebnisse entscheidend ist.

Eine spezielle Theorie zur Erfassung von isotropen, dünnwandigen Stäben und Balken, den sog. Stabschalen, wurde in den späten 30er Jahren von Wlassow (1906-1958) entwickelt und in russischer Sprache veröffentlicht. Deutsche Übersetzungen seiner wichtigsten Werke [120-122] erschienen zwischen 1953 und 1965. In ihnen beschrieb er eine allgemeine Schalentheorie, sein halbmomentenfreies Schalenmodell, sowie dünnwandige, elastische Stäbe. Wlassow berücksichtigte in seinem Modell keine Verformung der Querschnittskontur in der Ebene und setzte lineare Ansätze für die Verschiebungen der Profilecken in axialer Richtung voraus. Hieraus ergab sich eine begrenzte Anzahl notwendiger Freiheitsgrade für die Beschreibung des Problems.

Die Theorie von Wlassow wurde in den 90er Jahren von H. und J. Altenbach und W. Kissing in [3, 6] u. a. um anisotrope Materialien in Form von Laminaten erweitert und neu strukturiert. Die Einteilung in Modellklassen erfolgte, indem von einem vollständigen

Modell aus, immer weiter vereinfachende Annahmen getroffen oder bestimmte Effekte berücksichtigt wurden. Eine Verformung der Querschnittskontur senkrecht zur Balkenlängsrichtung wurde in der verallgemeinerten Theorie für die Einordnung der Modelle in Erwägung gezogen, aber nicht konsequent verfolgt. Diese Art der Verformung sei nur bei geschlossenen Profilen von Bedeutung. Sie wurde aber an zahlreichen Stellen selbst bei geschlossenen Profilen vernachlässigt, weil der Einfluss mit steiferen Wänden abnahm.

R. Schardt beschrieb in [84] seine Verallgemeinerte Technische Biegetheorie (VTB) erster Ordnung für isotrope Materialien. Sie folgte dem Bestreben die Theorie dünnwandiger Stäbe mit der klassischen Faltwerkstheorie in ein einheitliches Konzept zu überführen. Durch konsequente Anwendung einer Methode zur Orthogonalisierung konnte eine Entkopplung des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems erfolgen. Nach einer Aussage von Schardt in der Einführung seines Buches wäre die Zusammenführung der Arbeiten von Wlassow und der VTB nur „eine Frage der Zeit gewesen“.

In einem Literaturüberblick [35] verglichen 1999 Jung et al. verschiedene Modellierungskonzepte für dünn- und dickwandige Composite Balken. Hierbei zeigte sich, dass im wesentlichen schubstarre Theorien oder Schubdeformationstheorien erster Ordnung verwendet wurden. Eine Querschnittsverformung senkrecht zur Balkenlängsrichtung wurden nur in den seltensten Fällen berücksichtigt. Hierzu können als Beispiele die Arbeiten an Schalenelementen für Kastenträger von Jeon et al. [32] (1995), McCarthy und Chattopadhyay [52] (1997) sowie Suresh und Malhotra [103] (1997) genannt werden. Erstere berücksichtigten große Verschiebungen und Drehungen bei kleinen Verzerrungen, zweite erfüllten mit ihrem Modell die Randbedingungen für die Schubspannungen an den Oberflächen durch einen Ansatz dritter Ordnung in Dickenrichtung und letztere nutzten einen linearen Ansatz in Dickenrichtung für ihrer Parameterstudie.

Zu den einfachen Schubdeformationstheorien für dünnwandige Balken ohne Berücksichtigung einer Querschnittsverformung senkrecht zur Balkenlängsrichtung zählen u. a. die folgenden Arbeiten: Song und Librescu untersuchten 1993 in [100] mit ihrem Modell spezielle Effekte aus Kopplungseigenschaften anisotropen Materials bei freien Schwingungen. Im Jahr 1995 stellten Bhaskar und Librescu ihre nicht-lineare Balkentheorie zu begrenzten Verschiebungen und beliebig großen Verdrehungen vor [11]. Für das erweiterte Schubdeformationsmodell erster Ordnung [102] (1996) von Suresh und Nagaraj für offene und geschlossene Querschnitte mit beliebigem Layup wurden die Verwölbungsfunktionen für Biegung und Torsion geschlossen-analytisch hergeleitet. Maddur und Chaturvedi stellten 1999 bzw. 2000 in [50, 51] ihre Schubdeformationstheorie erster Ordnung für Verdrehungen und Verwölbungen aus ungleichförmiger Torsion vor. Die Gleichgewichtsbedingungen wurden mit Hilfe der FEM gelöst. Die 2001 und 2002 erschienenen Arbeiten von Song et al. [101] bzw. von Qin und Librescu [68] basierten auf dem gleichen Verschiebungsansatz. Erstere beschrieben eine geschlossen-analytische Lösung für einen I-Träger unter statischer Biegebelastung für eine nicht-geschichtete Struktur. Letztere untersuchten statische und dynamische Probleme. Das Gleichungssystem wurde dabei mit einem erweiterten Galerkin-Verfahren gelöst. Yaping et al. veröffentlichten in [123] (2002) eine analytisch lösbare Balkentheorie für symmetrisch laminierte Kastenträger unter Biegebelastung. Das Schubdeformationsmodell erster Ordnung beschrieb sowohl die Schubverformung wie auch den Shear-Lag-Effekt. Letzterer wurde durch eine kubische Ansatzfunktion senkrecht zur Längsachse und zur Belastungsrichtung in der Gleichung für die axiale Verschiebung berücksichtigt. 2003 stellten De Lorenzis und La Tegola ihre Arbeit [21] zum statischen Verhalten von pultrudierten Trägern für offene und geschlossene Querschnitte vor. Ihre Schubdeformationstheorie war eine Erweiterung eines 1964 von Capurso entwickelten Modells. Eine Theorie für offene Profile unter Berücksichtigung von Kopplungseigenschaften, Schubdeformation, Torsionsverwölbung und Verwölbungsbehinderung wurde von Jung

und Lee [34] (2003) veröffentlicht. Die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen aus dem Reissner'schen Funktional erfolgte auf geschlossen-analytischem Weg. Lee entwickelte 2005 eine Schubdeformationstheorie erster Ordnung für I-Profile unter Biegebelastung und beliebigem Lagenaufbau [47]. Die Differentialgleichungen wurden aus dem Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials gewonnen und mit Hilfe der FEM gelöst. Für Kasten- und I-Profilträger wurde von Sheikh und Thomsen [88, 89] (2007, 2008) ein Balkenelement mit drei Knoten entwickelt. Dieses berücksichtigte Schubdeformationen, Kopplungseigenschaften, Torsion, schiefe Biegung und Stabdehnung. Die Steifigkeiten des Querschnitts wurden analytisch hergeleitet. Vo und Lee bzw. Vo et al. veröffentlichten zwischen 2007 und 2011 eine Reihe von Artikeln zu dünnwandigen Balken aus I- und Kastenprofilen [111–117]. Sie nutzten dabei ein verschiebungsbasiertes, eindimensionales finites Element. Eine Querschnittsverformung senkrecht zur Balkenlängsrichtung wurde nicht berücksichtigt. In Dickenrichtung wurde entweder der Ansatz der klassischen Laminattheorie oder der Schubdeformationstheorie erster Ordnung für einen beliebigen Schichtaufbau verwendet. Im Zeitraum von 2002 bis 2011 wurden mehrere Arbeiten u. a. [18, 92–97] von Camotim et al. zur Untersuchung des Beul- und Nachbeulverhaltens von dünnwandigen Compositeträgern mit beliebig geformtem Querschnitt veröffentlicht. Diese basierten auf der Theorie von Wlassow bzw. der VTB von Schardt. Durch entsprechende Erweiterungen wurden einige Einschränkungen aufgehoben und orthotrope Laminare einbezogen.

Neben Balkentheorien für dünnwandige Querschnitte existieren weiterhin eine Vielzahl Modellierungen dicker Balken bzw. Balken mit Vollquerschnitten. Diese finden sich teilweise in ähnlicher Form bei den Plattentheorien wieder. Kapania und Raciti führten 1989 eine Literatursichtung [36] der bis 1987 erschienenen Balken- und Plattentheorien für Laminare durch. Rand untersuchte in seiner Arbeit [69] aus dem Jahr 2000 den Einfluss von Querschnittsverwölbungen bei laminierten Balken mit Vollquerschnitt unter Biegebelastung. Diese wurden 2001 von Dufort et al. experimentell nachgewiesen [23] und in [22] durch ein Modell beschrieben. Ein FEM-Balkenelement zur Berechnung von unsymmetrischen Laminatlagenaufbauten auf Basis der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung wurde 2005 von Murthy et al. in [58] vorgestellt. Afsar et al. beschrieben in ihrer Arbeit [1] 2008 ein Finite Differenzen Modell auf der Grundlage einer Verschiebungspotentialfunktion für eine unidirektional verstärkte Einzelschicht. Im gleichen Jahr untersuchten Boay und Wee den Einfluss der Kopplungseigenschaften für beliebig aufgebaute Laminatträger [12] mit Hilfe eines schubstarren Balkenmodells. Ein Vergleich unterschiedlicher, verschiebungsbasierter Modelle für laminierte Composite und Sandwichbalken [126] wurde von Zhen und Wanji durchgeführt. 2009 zeigten Tessler et al. in ihrer Arbeit [105] ein verfeinertes lagenweises Balkenmodell, welches die Nachteile bestehender verwandter Theorien beseitigte.

Eine Alternative zu spannungs- und verschiebungsbasierten Ansätzen sind asymptotische Verfahren auf der Basis von Grenzwertbetrachtungen für die globale Analyse. Diese setzen für die Problembehandlung keine vorherigen Annahmen voraus und berücksichtigen auch Schubdeformationseffekte. Balkenmodelle dieser Kategorie wurden u. a. 2007 von Kollár [40] bzw. 2010 von Kollár und Pluzsik [41] vorgestellt. Zusätzliche Literatur zur Behandlung von Composite-Balken wurde von Altenbach et al. [5] (1996), Kollár und Springer [42] (2003) sowie von Librescu und Song [48] (2005) veröffentlicht.

Auf dem Gebiet der experimentellen Untersuchungen von dünnwandigen Balkenstrukturen liegen bereits seit längerer Zeit Erkenntnisse vor. Von Potter et al. und Qiao et al. wurden 2001 [64] bzw. 2003 [67] Untersuchungen an I-Trägern durchgeführt, um nur zwei Beispiele zu nennen.

## Platten

Platten sind zweidimensionale, flächenartige Strukturelemente, die in zwei Raumrichtungen eine ähnliche Ausdehnung besitzen und in der Dritten, der Plattendicke, im Vergleich zu den anderen, erheblich kleiner sind. Viele Balken- und Plattenmodelle weisen Parallelen in der Theorie und den Annahmen auf. Häufig werden die einzelnen Segmente bei dünnwandigen Balken als Platte modelliert. Aus diesem Grund sollen an dieser Stelle auch einige Plattentheorien erwähnt werden. Einleitende Literatur zu Theorien aus isotropen bzw. anisotropen Werkstoffen ist in Altenbach et al. [4, 5] zu finden. Reddy stellte in seinem Buch [74] neben klassischen auch höhere und lagenweise Theorien für Platten aus Laminaten vor. Hier findet sich eine ausführliche Zusammenfassung seiner Schubdeformationstheorie dritter Ordnung.

Die einfachste Plattentheorie für isotrope Werkstoffe beruht auf den 1850 veröffentlichten Kirchhoff'schen Annahmen [39]. Diese besagen, ähnlich den Bernoulli'schen Annahmen für dessen Balkentheorie, dass Querschnitte, die senkrecht auf der Mittelfläche stehen, unter Verformung eben und weiterhin senkrecht bleiben. In der Mittelfläche tritt keine Dehnung auf. Für die Lösung des Gleichungssystems sind je Rand zwei Randbedingungen notwendig. Die Querkräfte werden mit den Drillmomenten zu den sog. Kirchhoff'schen Ersatzquerkräften zusammen gefasst.

Eine spannungsbasierte Plattentheorie erster Ordnung wurde von E. Reissner zwischen 1944 und 1979 in [75, 76, 78–81] vorgestellt, weiterentwickelt und auf anisotrope Platten erweitert. Er nahm eine lineare Verteilung für die ebenen Spannungen über die Plattendicke an. Über Gleichgewichtsbetrachtungen wurde für die senkrechte Normalspannung bzw. die transversalen Schubspannungen in Dickenrichtung ein kubischer respektive quadratischer Verlauf ermittelt. Diese Theorie schloss Schubverformungen ein. Die Lösung der Plattendifferentialgleichung setzte drei Randbedingungen pro Rand voraus. Die Grundzüge der Reissner'schen Plattentheorie wurden im Buch von Panc [63] zusammengefasst.

Mindlin veröffentlichte 1951 seine verzerrungsbasierte Plattentheorie erster Ordnung [53]. Diese ging von den gleichen Annahmen wie denen für die Kirchhoff'sche Platte aus, allerdings mussten die Querschnitte unter Verformung nicht mehr senkrecht auf der Mittelfläche stehen bleiben. Hierdurch war es möglich Schubverformungen zu erfassen, ähnlich dem Balkenmodell von Timoshenko. Je Rand waren drei Randbedingungen notwendig.

In [62] stellte Pagano 1970 ein Lösungsverfahren für rechteckige Platten mit beliebig vielen isotropen oder anisotropen Schichten mit symmetrischem Aufbau vor. Ausgehend von dem dreidimensionalen Elastizitätsgesetz wurden sowohl die Randbedingungen als auch die Übergangsbedingungen zwischen den Einzelschichten erfüllt und für das Problem eine analytische Lösung gefunden. Cheng [17] präsentierte 1979 eine erweiterte Theorie für isotrope, dicke Platten. Vom dreidimensionalen Elastizitätsgesetz leitete er drei analytisch lösbare Differentialgleichungen ab, so dass für diese Theorie keine vorherigen Annahmen, sondern nur jeweils drei Randbedingungen notwendig waren.

In [70] leitete Reddy im Jahr 1984 seine Schubdeformationstheorie dritter Ordnung für Lamine her. Durch Verschiebungsansätze dritter Ordnung konnten die transversalen Schubspannungen korrekt wiedergegeben und die Randbedingungen erfüllt werden. 1987 stellte Reddy in [71] eine verschiebungsbasierte verallgemeinerte Schubdeformationstheorie für laminierte Platten auf der Basis von Reihenansätzen vor. Ein Glied bestand dabei aus zwei Faktoren. Einer war eine Funktion, die nur von den Querschnittsgrößen abhing und der andere war eine Funktion, die nur von der Längskoordinate beeinflusst wurde. Auf diese Weise ergaben sich als Sonderfälle aus diesem Ansatz viele in der Literatur bekannte Theorien (klassische Laminattheorie, Schubdeformationstheorie erster und dritte Ordnung

etc.). Die Theorie berücksichtigte die transversalen Schubspannungen und konnte um nichtlineare Effekte erweitert werden.

Zwei Übersichtsartikel von Reddy erschienen 1990. In [72] verglich er die in den vorangegangenen 20 Jahren veröffentlichten Schubdeformationstheorien dritter Ordnung. Er kam dabei zu dem Schluss, dass sämtliche veröffentlichten Theorien, die das Variationsprinzip nutzten, auf dem gleichen Verschiebungsansatz basierten, den er 1984 vorgestellt hatte. Zusätzlich erweiterte er in diesem Artikel seine Theorie um eine Dehnung in Dickenrichtung. Ein allgemeiner Literaturüberblick [73] beschäftigte sich mit Plattentheorien unterschiedlichster Art.

Noor und Burton führten 1989 eine umfangreiche Vergleichsstudie [60] verschiedener Theorien für laminierte Platten durch. In [2] veröffentlichte H. Altenbach 1998 eine Zusammenfassung verschiedener Theorien zu Laminat- und Sandwichplatten seit den Anfängen, die er in unterschiedliche Gruppen einteilte.

2008 beschrieben Fares und Elmarghany in [24] eine Schubdeformationstheorie erster Ordnung für anisotrope Platten. Diese Theorie ging lagenweise vor und erfüllte die Übergangsbedingungen für die Spannungen zwischen den einzelnen Schichten und am Rand. Im gleichen Jahr beschäftigen sich Gawandi et al. in [27] mit der Problematik natürlicher Randbedingungen bei Biegung anisotroper Mehrschichtplatten durch einen Lösungsansatz in variabeltrennbarer Form. Zhen et al. untersuchten 2008 in [125] die auftretenden Schubdeformationseffekte höherer Ordnung für Plattenbiegung, -schwingungen und -beulen bei Mehrschichtverbunden.

### Optimierung von FKV-Balken

Neben der Analyse des Strukturverhaltens von Balkenelementen stellt sich die Frage nach einer optimalen Bauteilgestaltung. Bei Composite-Trägern ergeben sich, neben den geometrischen Größen, wie sie bei homogenen, isotropen Werkstoffen verwendet werden, weitere zusätzliche Freiheitsgrade. Hierzu zählen die Anzahl der verwendeten Schichten, die jeweiligen Lagenwinkel oder die Einzelschichtdicken der Laminats zur Anpassung an die gegebenen Anforderungen unter Berücksichtigung der Restriktionen. Zur Lösung dieser Aufgabenstellung gibt es die vielfältigen Methoden der Strukturoptimierung. Bei [8, 29, 85] handelt es sich um weiterführende Literatur zu den verschiedenen Optimierungsalgorithmen.

In der Literatur gibt es verschiedene Untersuchungen zu dem Einfluss bestimmter Größen in Form von einfachen Parameterstudien für Balken mit Kasten- oder I-Profil. Als Strukturmodell werden sowohl einfache (geschlossen-) analytische Verfahren und Abschätzungen, als auch FEM-Schalen-Modelle verwendet.

Eine Mehrkriterienoptimierung von I-Profilen wurde 1996 in [20] von Davalos et al. bezüglich ertragbarer Querkraft, Absenkung, Beulwiderstand und Materialversagen (Tsai-Hill) durchgeführt. Als Entwurfsvariablen dienten Lagenwinkel und Faseranteil. Als Strukturmodell wurde ein Schubdeformationsmodell verwendet. Die Materialwerte wurden auf Basis eines Mikro/Makro-Modells aus dem Faseranteil bestimmt. Diese Arbeit wurde 1999 in [19] aufgegriffen und weiterentwickelt. Walker stellte 1998 in [118] eine Untersuchung einerseits zur Maximierung der Knick- und Beullast sowie andererseits zur Maximierung der Kombination aus der Beullast und der Nachbeulsteifigkeiten für ein I-Profil vor. Entwurfsvariablen waren die Lagenwinkel. Gan et al. suchten 1999 in [25] in einer Parameterstudie die optimale Querschnittsgestaltung für einen Kastenträger gegen lokales Beulen. Hierzu wurden verschiedene Versteifungen an unterschiedlichen Positionen in den Träger eingebracht. In [26] untersuchten die gleichen Autoren die Einflüsse auf die Verbindung bzw. den Übergang von den Flanschen und dem Steg für I-Profile mit Hilfe von

FEM Rechnungen. Als Entwurfsvariablen wählten sie den Übergangsradius und die mechanischen Eigenschaften der Füllung. Zusätzlich konnten versteifende Elemente in Form von Verstrebungen vorgesehen werden. Ziel war die Maximierung der kritischen Last für lokales Beulen. In [83] setzten Savic et al. 2001 eine vereinfachte Schubdeformationstheorie zur Beschreibung der Systemgleichungen für einen I-Träger ein. Für die Maximierung der Balkenbiegesteifigkeit oder der Balkendehnsteifigkeit wurden als Entwurfsvariable die Lagenwinkel verwendet. Die Restriktionen leiteten sich aus den Fertigungsmöglichkeiten ab. Es wurde ein globaler Algorithmus mit einer Zufallssuche über eine Zufallssuchrichtung für die Optimierung verwendet.

Schwarm-, gradientenbasierte und generische Optimierungsalgorithmen wurden 2007 von Kathiravan und Ganguli [37] bzw. von Suresh et al. [104] für Helikopterrotorblätter eingesetzt. Als Entwurfsvariablen dienten geometrische Abmessungen und Lagenwinkel. Der Entwurf wurde hinsichtlich gewünschter Steifigkeiten, elastischer Kopplungen sowie der Festigkeit (mit Hilfe des Tsai-Wu Kriteriums) optimiert. Naik et al. veröffentlichten 2008 eine Studie [59] zur Gewichtsminimierung mit Hilfe genetischer Algorithmen. Als Restriktionen wurden das Kriterium maximaler Spannungen und das Tsai-Wu Kriterium genutzt. In [15] setzten 2011 Cardoso und Valido Methoden der nichtlinearen Programmierung zur Optimierung von offenen und geschlossenen Trägerprofilen ein.

### **Festigkeitskriterien und Laminatrandeffekt**

Für die Analyse von Strukturelementen wie Balken mit Kasten- oder I-Profil ist es wichtig deren Tragfähigkeit abschätzen zu können. Hierzu können Festigkeitsnachweise in Form von verzerrungs- oder spannungsbasierten Versagenskriterien dienen. Im Gegensatz zu isotropen, homogenen Werkstoffen stellt sich die Beurteilung für anisotrope Mehrschichtverbunde schwieriger dar, weil verschiedene sehr unterschiedliche Versagensarten und -mechanismen wie Faserbruch, Matrixbruch, Faser-Matrix-Ablösung oder Delamination auftreten können<sup>4</sup>. Ähnlich den Steifigkeiten besitzen auch die Festigkeiten einen stark anisotropen Charakter. Durch die Anwendung von geeigneten Versagenskriterien können die auftretenden Materialbeanspruchungen den entsprechenden Festigkeiten gegenübergestellt und verglichen werden.

Eine Reihe moderner Kriterien wurde zwischen 1998 und 2002 von Hinton, Soden et al. einem umfangreichen Benchmarktest [30, 31, 99] unterzogen. Hierbei schnitt das Festigkeitskriterium nach Puck (Puck'sches Wirkebenenkriterium) mit einer Abweichung von weniger als 10% in den meisten Testfällen besonders gut ab. Auch das sehr verbreitete Tsai-Wu-Kriterium schnitt in diesem Test gut ab. Trotzdem kann es unter bestimmten Bedingungen zu größeren Abweichungen in der Vorhersage kommen.

Die für die vorliegende Arbeit verwendeten zwei Festigkeitskriterien sind das bekannte von Tsai und Wu [108] aufgestellte Kriterium, das keine Unterscheidung in die verschiedenen Versagensarten vornimmt, und das Puck'sche Wirkebenenkriterium [65, 66]. Das zuletzt genannte Kriterium hat Einzug in die VDI-Richtlinie 2014 [109] zur Berechnung von FKV-Bauteilen gefunden. In [119] wurde ein Verfahren von Wiegand et al. veröffentlicht, mit dem die Bestimmung des Winkels der Bruchebene über ein Approximationsverfahren beschleunigt werden konnte. Für den ebenen Spannungszustand (ESZ), wie er für Laminat häufig angenommen werden kann, ist die Winkelermittlung jedoch nicht notwendig.

---

<sup>4</sup>Vgl. Becker und Gross [9]

## 1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein neuartiges Balkenmodell höherer Ordnung mit dünnwandiger Querschnittskontur für rechteckige, geschlossene Kastenprofile sowie für offene I-Profile aus Composite-Material zu entwickeln. Die Gurte und Stege der Profile bestehen dabei aus Mehrschichtverbunden, die ihrerseits aus unidirektional faserverstärkten Kunststoffschichten zusammengesetzt sind. Die Verbindung der Gurte und Stege wird als ideal angenommen. Der Balken wird auf Biegung mit und ohne Übertragung einer Querkraft beansprucht. Dabei wird der Autor der vorliegenden Arbeit von dem Zitat A. Einsteins geleitet: „Eine Theorie sollte so einfach wie möglich sein, jedoch nicht einfacher.“

Im Gegensatz zu den Modellen, die in der in Kapitel 1.2 aufgeführten Literatur beschrieben werden, wird in dieser Arbeit ein Modell mit segmentweisen, höheren Verschiebungsansätzen dritter Ordnung gewählt, die eine Verformung des Querschnitts nicht nur aus der Schnittebene heraus in axialer Richtung, sondern auch senkrecht zur Balkenlängsachse zulassen. Die Notwendigkeit dieses Vorgehens für bestimmte Lagenaufbauten wird anhand von Beispielen demonstriert. Mit dem Modell ist es möglich die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen in den einzelnen Schichten vorherzusagen und auf dieser Basis Aussagen bezüglich der Festigkeit mit Hilfe von Versagenskriterien zu treffen.

Das Modell bildet die globalen und lokalen Eigenschaften ab und ist in vereinfachter Form geschlossen-analytisch lösbar. In der allgemeineren Form, mit Berücksichtigung einer Querschnittsverformung senkrecht zur Balkenlängsachse, wird das Gleichungssystem für die Größen, die einen Querschnitt beschreiben, analytisch gelöst. Entlang der Balkenlängsachse wird eine Diskretisierung vorgenommen und das Problem numerisch gelöst. Durch die gewählten Verschiebungsansätze höherer Ordnung ist es insbesondere möglich die Einflüsse von Schubverformungen aufgrund von Querkraften abzubilden. Eine Validierung findet gegenüber einem numerischen Schalenmodell statt, das mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst wird.

Im Gegensatz zu einem FEM-Schalenmodell muss nicht der gesamte Balken in Längs- und Umfangsrichtung diskretisiert werden. Aus diesem Grund ist die Anzahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade stark reduziert und das zu lösende Gleichungssystem entsprechend kleiner. Eine gefundene Lösung gilt für den gesamten Balkenquerschnitt bzw. im Fall des vereinfachten Modells für den gesamten Balken und nicht nur für die durch die Vernetzung und Elementauswahl vorgegebenen Integrationspunkte. Aus diesem Grund kann das Verhalten des Trägers durch den (semi-)analytischen Lösungsweg sehr viel schneller und mit einem erheblich geringeren Aufwand analysiert werden.

Aufgrund seines hohen analytischen Anteils ist das Modell besonders als Basis für Optimierungsaufgaben geeignet. Diese können damit effizient umgesetzt und gelöst werden. Dieses ist notwendig, weil sich aus den möglichen Entwurfsvariablen, wie z. B. Anzahl, Dicke, Material und Winkel der Einzelschichten sowie den geometrischen Abmessungen des Balkens, viele Freiheitsgrade und Variationsmöglichkeiten ergeben.

Spannungen in Mehrschichtverbunden aufgrund von Temperaturänderungen, die schon durch den Herstellungsprozess bedingt sind, können zu einer erheblichen Belastung des Bauteils und einem damit verbundenen Festigkeitsverlust führen. Aus Gründen der Vereinfachung und der Übersichtlichkeit werden diese in der vorliegenden Arbeit vernachlässigt. Ebenso bleiben hygromechanische Probleme ausgeblendet. Bei Bedarf können aber auch hygrothermische Probleme berücksichtigt werden.

Die Arbeit ist in sieben Kapitel untergliedert. Im Anschluss an das einleitende Kapitel werden in Kapitel zwei die für das Verständnis relevanten theoretischen Grundlagen für die Analyse des Verhaltens der Einzelschicht und des gesamten Laminats dargestellt.

Kapitel drei beschäftigt sich mit der Theoriebildung verschiedener Balkenmodelle für beide Querschnittformen. Es werden die grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen für die einzelnen Theorien beschrieben. Zusätzlich wird das allgemeine Vorgehen für das Aufstellen und die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen gezeigt. Es folgt die detaillierte Herleitung mehrerer Balkentheorien mit einer unterschiedlichen Anzahl von Freiheitsgraden und der Berücksichtigung verschiedener Effekte. Das umfassendste Modell basiert auf einer Schubdeformationstheorie höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Aus dieser können die übrigen Theorien abgeleitet werden. In Kapitel vier wird ein numerisches Lösungsverfahren für die Gleichungssysteme der im vorherigen Kapitel hergeleiteten Modelle entwickelt. Durch seine Flexibilität kann das Verfahren ohne großen Aufwand an die unterschiedlichsten Randbedingungen angepasst werden. Beispiele und Vergleiche der einzelnen Modelle untereinander sowie mit einem FEM-Referenzmodell werden in Kapitel fünf gezeigt. Hierzu zählen eine Konvergenzstudie zur Bestimmung der notwendigen Elementanzahl in Balkenlängsrichtung sowie die Verifikation und Validierung der Modelle. Zusätzlich wird der Einfluss der gewählten Randbedingungen auf das Systemverhalten und der der Querkontraktion auf die Profilverformung untersucht. Eine Parameterstudie zeigt die Abhängigkeit von ertragbarer Belastung aus einer Querkraft und einem Biegemoment in Form von Versagenskurven. In Kapitel sechs werden die Ergebnisse von drei Strukturoptimierungsaufgaben, die mit Hilfe des erweiterten Modells gelöst werden, präsentiert. Im einzelnen wird die Trägerfestigkeit, die Trägerabsenkung sowie die Kombination aus beidem untersucht. Das abschließende Kapitel sieben fasst die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen. Darüber hinaus werden zukünftige Erweiterungsmöglichkeiten, Anwendungen und weiterer Forschungsbedarf aufgezeigt.

## 2 Grundlagen ebener Laminat

In diesem Kapitel werden die Grundlagen und Begrifflichkeiten ebener Laminat in dem für das weitere Verständnis der vorliegenden Arbeit erforderlichen Umfang erläutert. Für eine umfassende Einführung und Erläuterung wird auf weiterführende Fachliteratur wie z. B. Altenbach et al. [3, 5], Becker und Gross [9], Jones [33], Schürmann [86] und Reddy [74] verwiesen.

Flächentragwerke, die aus mehreren Schichten aufgebaut sind, werden als Mehrschichtverbunde bzw. Laminat bezeichnet. Dabei ist es möglich, faserverstärkte Einzelschichten unterschiedlicher Orientierungen zu kombinieren und auf diese Weise das Bauteil an die gegebenen Erfordernisse anzupassen.

Im Folgenden werden die Eigenschaften einer Laminat einzelschicht, des Laminataufbaus sowie Teile der klassischen Laminattheorie näher erläutert.

### 2.1 Verhalten einer Laminat einzelschicht

Die Einzelschichten eines Laminats können aus beliebigen anisotropen oder isotropen Materialien bestehen. In der Regel werden faserverstärkte Einzelschichten aus unidirektional angeordneten Fasern oder Fasergeweben verwendet. Die Fasern sollen die Lasten tragen und Steifigkeit und Festigkeit gewährleisten. Die sie umgebende Kunststoffmatrix hat die Funktion, die Fasern zu schützen, zu stützen und die Lasten zwischen den Fasern zu verteilen.

Die Beschreibung des konstitutiven Verhaltens der Einzelschicht bezieht sich auf das Materialhauptachsen-Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$ . Dieses wird an der Faserorientierung ausgerichtet, wie Abbildung 2.1 zeigt.

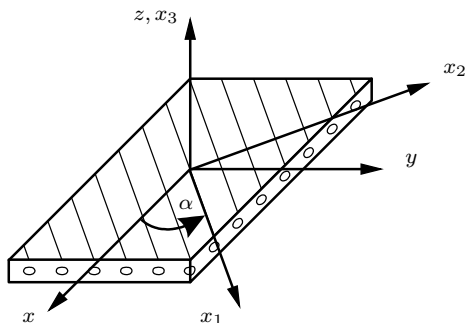


Abbildung 2.1: Koordinatensysteme für die Einzelschicht

Im Fall eines anisotropen, linear-elastischen Materialverhaltens beschreibt das Hooke'sche Gesetz über den Elastizitätstensor vierter Stufe den Zusammenhang von Span-

nungen und Verzerrungen durch 21 voneinander unabhängige Konstanten. Davon bleiben im orthotropen Fall, wie er für die zu beschreibenden Einzelschichten vorliegt, neun unabhängige Elastizitätskonstanten übrig. Unter Verwendung der Voigt-Notation lautet die Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Die Komponenten der Steifigkeitsmatrix können auch über die sogenannten verallgemeinerten Ingenieurkonstanten ausgedrückt werden. Die Zusammenhänge lauten:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}.$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix  $\underline{\underline{S}}$  ergibt sich analog über die Beziehung  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{S}}^{-1}$ :

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Aufgrund der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix sind von der zwölf verallgemeinerten Ingenieurkonstanten lediglich neun unabhängig und es gelten die folgenden Reziprozitätsrelationen:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (2.4)$$

Für die weitere Betrachtung wird ein ebener Spannungszustand, wie er auch in der Scheiben- und Kirchhoff'schen Plattentheorie sowie in der klassischen Laminattheorie angenommen wird, für die Einzelschicht zugrunde gelegt. Das Hooke'sche Gesetz vereinfacht sich für  $\sigma_3 = 0$ ,  $\tau_{23} = 0$  und  $\tau_{13} = 0$  zu:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

mit den reduzierten Steifigkeiten  $Q_{mn}$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}.$$

Bisher wurde immer das Materialhauptachsensystem für die Beschreibung des Materialverhaltens verwendet. Im Hinblick auf das konstitutive Verhalten des gesamten Laminats aus Einzelschichten mit unterschiedlicher Ausrichtung ist es zweckmäßig, ein globales Koordinatensystem ( $x$ ,  $y$ , und  $z$ ), wie es in Abbildung 2.1 zu sehen ist, zu definieren. Die Drehung erfolgt um den Winkel  $\alpha$  und die  $z$ - bzw.  $x_3$ -Achse. Im globalen Koordinatensystem ergibt sich das Hooke'sche Gesetz mit den transformierten reduzierten Steifigkeiten  $\underline{\underline{Q}}$  zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Die Transformationsgleichungen für die Spannungen und Verzerrungen ergeben sich aus der Drehung des Koordinatensystems wie sie in Abbildung 2.1 dargestellt ist. Sie werden in Altenbach et al. [5] detailliert hergeleitet und lauten folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{T}}^T \quad (2.8)$$

mit

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Verhalten eines Laminats

### 2.2.1 Laminataufbau

Laminats entstehen durch das Zusammenfügen mehrerer Einzelschichten. Ihre Eigenschaften werden wesentlich durch die Schichtungsreihenfolge bestimmt. Der Aufbau in Dickenrichtung entlang der lokalen  $z$ -Koordinate wird durch den sogenannten Laminatcode beschrieben. Hierbei werden in eckigen Klammern die Lagenwinkel der einzelnen Schichten, die in positiver  $z$ -Richtung nacheinander folgen, aufgeführt. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.2a abgebildet. Ein tiefer gestellter Index  $s$  wird abkürzend für einen symmetrischen Aufbau verwendet. Die geometrischen Bezeichnungen und Definitionen für den Aufbau eines aus  $K$  Schichten bestehenden Laminats sind in Abbildung 2.2b dargestellt.

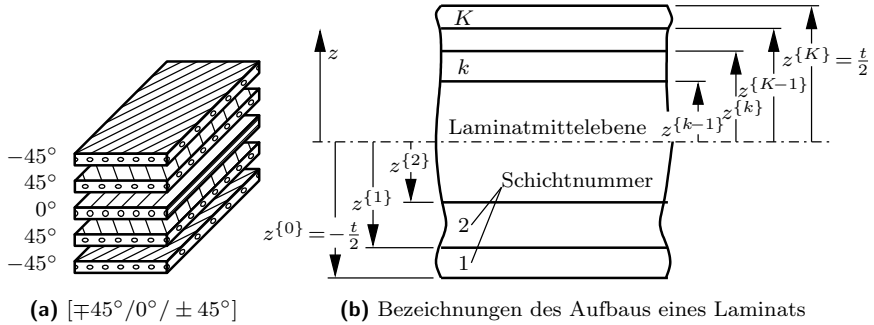


Abbildung 2.2: Laminataufbau: Geometrie und Definition

### 2.2.2 Kinematik der klassischen Laminattheorie

Die klassische Laminattheorie eignet sich für die Beschreibung des Verhaltens dünner Laminate. Sie basiert auf den gleichen kinematischen Annahmen wie die Scheibentheorie und die Kirchhoff'sche Plattentheorie und geht von einem ebenen Spannungszustand aus. Ebenen senkrecht zur Laminatmittelebene bleiben unter Deformation senkrecht und eben. Damit verschwinden die Schubdeformationen  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$ . Zusätzlich wird angenommen, dass eine Dickenänderung  $\varepsilon_z$  vernachlässigt werden kann. Daher ergeben sich die folgenden Verschiebungsansätze  $u$ ,  $v$  und  $w$  für die drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$ :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Konstitutives Verhalten

Mit den Annahmen für die Verschiebungen können über den linearisierten Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (u_m, n + u_n, m) \quad (2.10)$$

die Verzerrungen des gesamten Laminataufbaus ermittelt werden. Diese setzen sich aus Verzerrungen (Index 0) und Verkrümmungen  $\kappa$  der Laminatmittelebene zusammen. Damit nimmt das Hooke'sche Gesetz für die  $k$ -te Einzelschicht die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{\{k\}} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{\{k\}} \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{\{k\}} \left( \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} w_{0,xx} \\ w_{0,yy} \\ 2w_{0,xy} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Durch eine Integration der über die Laminatdicke  $t$  verteilten Spannungen können die resultierenden Schnittgrößen wie Schnittkräfte und Schnittmomente gewonnen werden. Die Schnittkräfte lauten:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^K \int_{z^{\{k-1\}}}^{z^{\{k\}}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz. \quad (2.12)$$

Die Biege- bzw. Drillmomente ergeben sich zu:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^K \int_{z^{\{k-1\}}}^{z^{\{k\}}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz. \quad (2.13)$$

Durch Einsetzen von (2.11) in (2.12) und (2.13) und anschließende Integration ergibt sich das konstitutive Verhalten mit der Laminatsteifigkeitsmatrix (ABD-Matrix), durch die das mechanische Verhalten des Gesamtlaminats charakterisiert wird:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{\bar{B}} & \underline{D} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Größen  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{D}$  werden als Dehnsteifigkeiten (Scheibenquadrant), Kopplungssteifigkeiten (Koppelquadrant) und Biegesteifigkeiten (Plattenquadrant) bezeichnet. Sie können folgendermaßen berechnet werden:

Dehnsteifigkeiten:

$$A_{mn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{mn} dz = \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{mn}^{\{k\}} [z^{\{k\}} - z^{\{k-1\}}], \quad (2.15)$$

Kopplungssteifigkeiten:

$$B_{mn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{mn} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{mn}^{\{k\}} \left[ (z^{\{k\}})^2 - (z^{\{k-1\}})^2 \right], \quad (2.16)$$

Biegesteifigkeiten:

$$D_{mn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{mn} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{mn}^{\{k\}} \left[ (z^{\{k\}})^3 - (z^{\{k-1\}})^3 \right]. \quad (2.17)$$

Die unterschiedlichen Kopplungseigenschaften der Schnittgrößen mit den Deformationsgrößen werden durch den Laminataufbau, d. h. die Anzahl der Schichten, die Reihenfolge, die Orientierung und die Dicke der Einzelschichten vorgegeben<sup>1</sup>. Keine Kopplungen zwischen Zug und Schub, Biegung und Dehnung sowie Biegung und Verdrillung liegen für ein Verschwinden der Steifigkeitskomponenten  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  und sämtlicher Kopplungssteifigkeiten  $\underline{B}$  vor. Für ausgeglichene Laminate, insbesondere Winkelverbunde, verschwinden die Größen  $A_{16}$  und  $A_{26}$ . Tritt keine Drillkopplung auf, sind die Steifigkeiten  $D_{16}$  und  $D_{26}$  nicht vorhanden. Sämtliche symmetrischen Laminataufbauten sind frei von Biege-Dehn-Kopplungen in Form der Größen  $B_{mn}$ , die das Scheiben- und Plattenverhalten verknüpfen.

### 2.2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Damit die Feldgleichungen für die Bestimmung des Verlaufs der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen vollständig sind, fehlen noch die Gleichgewichtsbedingungen. Diese lassen sich durch das Aufstellen der Platten- und Scheibengleichgewichtsbedingungen ermitteln:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= -p_x, \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= -p_y, \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} &= -p_d. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Die Größen  $p_x$  und  $p_y$  bezeichnen dabei die äußeren Kräfte, die pro Mittelfächeneinheit auf das Laminat wirken und  $p_d$  beschreibt den Druck auf die Laminatoberfläche.

Für die vollständige Beschreibung des Laminatrandwertproblems müssen noch die Randbedingungen angegeben werden. Je Randteil werden vier Randbedingungen benötigt. Diese setzen sich aus den ebenen Verschiebungen oder den zugehörigen Schnittkräften normal bzw. tangential zur Schnittebene, der Verdrehung des Randes oder dem Biegemoment sowie der Absenkung des Randes oder der Kirchhoff'schen Ersatzquerkraft zusammen. Detailliertere Ausführungen hierzu können z. B. in Altenbach et al. [5] oder Becker und Gross [9] gefunden werden.

---

<sup>1</sup>Anschaulich wird die Bedeutung verschiedener Kopplungskomponenten in Altenbach et al. [5] oder auch in Schürmann [86] illustriert.

### 3 Theoriebildung unterschiedlicher Feinheit für prismatische Balken

In diesem Kapitel werden die vom Autor der vorliegenden Arbeit entwickelten verschiebungsbasierten Balkentheorien für prismatische Kasten- und I-Profile unter Biegebelastung hergeleitet. Sämtliche vorgestellten Modelle können dabei von dem zum jeweiligen Profil gehörigen erweiterten Balkenmodell mit Berücksichtigung der Querschnittsverformung senkrecht zur Balkenlängsachse abgeleitet werden. Einige der Modelle sind bereits in den Arbeiten von Kroker und Becker [44–46] veröffentlicht und diskutiert worden. Zu Beginn des aktuellen Kapitels werden die notwendigen Voraussetzungen und Annahmen der Modelle benannt. Danach wird die allgemeine Vorgehensweise für die Herleitung der Verschiebungsansätze, des daraus folgenden Differentialgleichungssystems sowie das verwendete Lösungsverfahren gezeigt. Darauf basierend werden im Anschluss Theorien mit unterschiedlich angepassten Verschiebungsansätzen hergeleitet.

#### 3.1 Annahmen und Voraussetzungen

In der vorliegenden Arbeit werden die folgenden Annahmen getroffen. Diese bilden die grundlegenden Voraussetzungen für die Gültigkeit der betrachteten Balkenmodelle und der gewählten Vereinfachungen. In den meisten technischen Anwendungen sind diese Annahmen erfüllt, weil sie in der Regel erwünscht sind. Sie stellen somit keine nachteilige Einschränkung dar.

1. Es wird von dünnwandigen Profilquerschnitten ausgegangen, d. h., dass deren Dicke  $t$  klein ist im Vergleich zu den beiden übrigen Querschnittsabmessungen (Breite  $b$  und Höhe  $h$ ).
2. Die Querschnittsform des unverformten Balkens ändert sich entlang der Länge  $l$  nicht.
3. Der jeweilige Querschnitt wird in  $I$  verschiedene durchnummerierte Abschnitte oder Segmente gegliedert. Die Gurte (Index  $G$ ) und der/die Steg(e) (Index  $S$ ) von den betrachteten Kasten- und I-Trägern sind aus Laminaten gefertigt. Diese bestehen wiederum aus  $K_{[i]}$  unidirektional verstärkten Einzelschichten unterschiedlicher Dicke, Faserwinkel und Anzahl (siehe Abbildung 3.1).
4. Gurte und Steg(e) dürfen ein unterschiedliches Layup besitzen.
5. Das jeweilige Layup muss symmetrisch und ausgeglichen sein, damit sowohl sämtliche Biege-Dehn-Kopplungen  $B_{mn}$ , als auch eine Schubkopplung in Form von  $A_{16}$  bzw.  $A_{26}$  verschwinden.
6. Die Gurte und der/die Steg(e) sind an den Berührungspunkten ideal miteinander verbunden.
7. Es sollen nur kleine Verschiebungen auftreten, so dass die Gesetze der linearen Elastizitätstheorie anwendbar sind.

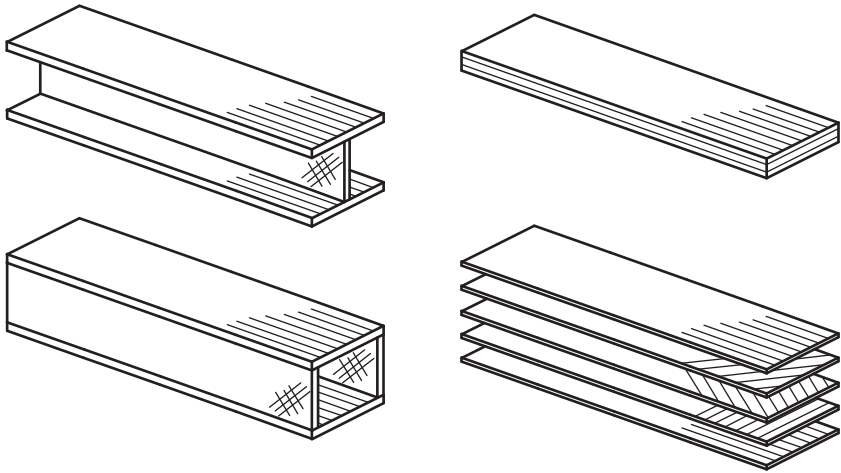


Abbildung 3.1: Aufbau der Querschnitte

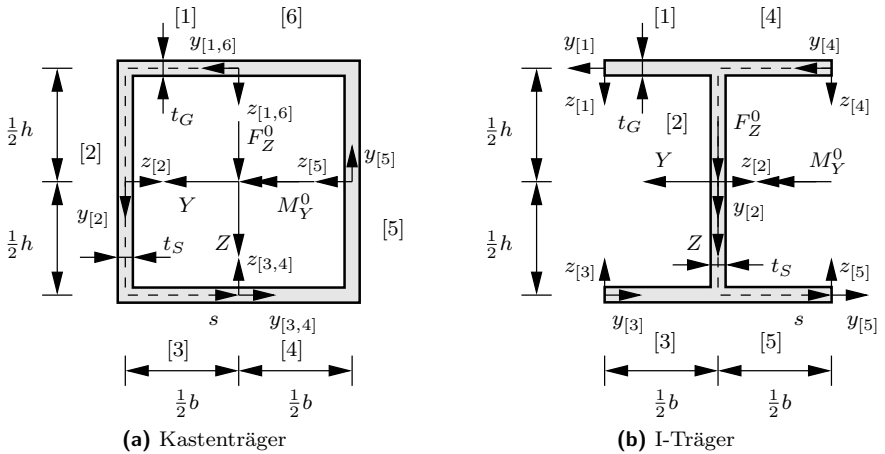


Abbildung 3.2: Verwendete Koordinatensysteme und Abmessungen der Träger

Die verwendeten Koordinatensysteme und die Abmessungen der Träger können der Abbildung 3.2 entnommen werden. Sie beziehen sich, wenn nicht anders gekennzeichnet, auf die Laminatmittelebene. Jeder Querschnittsabschnitt  $i$  bzw.  $[i]$  hat sein eigenes lokales Koordinatensystem  $(x_{[i]}, y_{[i]}, z_{[i]})$ . Zusätzlich wird ein globales Koordinatensystem  $(X, Y, Z)$  definiert. Die lokale Koordinate  $x_{[i]}$  verläuft für jeden Abschnitt parallel zur globalen  $X$ -Koordinate. Daher wird im Weiteren ausschließlich Letztere verwendet. In Dickenrichtung des im Abschnitt verwendeten Laminats weist jeweils die lokale Koordinate  $z_{[i]}$ . Entlang der Mittelebene des Profilquerschnitts läuft die Koordinate  $s$  in der eingezeichneten Richtung. Die Zugehörigkeit einzelner Größen zum Kasten- bzw. I-Träger ist durch die Indizes  $\square$  bzw.  $\mathbb{I}$  gekennzeichnet.

## 3.2 Herleitung der Verschiebungsansätze

Sämtliche in den Kapiteln 3.5 und 3.6 vorgestellten Balkentheorien verwenden für jeden Profilabschnitt eines Querschnitts angepasste Verschiebungsansätze. Diese basieren auf einem Separationsansatz, der eine Variablentrennung nach der Längskoordinate  $X$  und den Koordinaten in Umfangs- und Dickenrichtung  $y_{[i]}, z_{[i]}$  ermöglicht. Die Verschiebungsansätze sind sowohl für den/die Steg(e), als auch für die Gurte in Dickenrichtung konstant, d. h. unabhängig von der Koordinate  $z_{[i]}$ . Es findet keine Verkrümmung der entsprechenden Lamine statt. Die Gültigkeit dieser Annahme hat drei Gründe:

Erstens liegen in symmetrischen Laminaten keine Biege-Dehn-Kopplungen vor (Annahme aus Kapitel 3.1, Punkt 5). Somit können Verzerrungen keine Verkrümmungen hervorrufen.

Zweitens ist die Laminatdicke der Gurte klein gegenüber der Steghöhe (Annahme aus Kapitel 3.1, Punkt 1). Daher kann eine Verkrümmung der Gurte vernachlässigt und ausschließlich eine vorliegende Verzerrung angenommen werden. Untersuchungen mit in diesem Punkt erweiterten Theorien haben gezeigt, dass eine Verkrümmung nur für dicke Lamine notwendig ist. In diesen Fällen kann eine lineare Verkipfung oder eine Verwölbung dritter Ordnung, wie sie in der Schubdeformationstheorie von Reddy [70, 74] verwendet wird, in den Verschiebungsansätzen vorgesehen werden.

Drittens wird/werden der/die Steg(e) nur parallel zu ihrer Mittelebene belastet. Aus diesem Grund treten auch hier nur Verzerrungen und keine Verkrümmungen des Laminats auf.

Der grundlegende Aufbau der Verschiebungsansätze wird in Anlehnung an die Reddy'sche Schubdeformationstheorie dritter Ordnung für Platten gewählt. Der Ansatz für die drei Verschiebungen  $u_{[i]}, v_{[i]}$  und  $w_{[i]}$  in jedem Profilabschnitt ist eine Potenzreihenentwicklung bezüglich  $y_i$ . Die Koeffizienten der Reihe werden durch unbekannte Funktionen  $\Theta_m(X)$  (Freiheitsgrade), die nur von der Längskoordinate  $X$  abhängig sind, gebildet. Ein Abbruch der Reihe erfolgt je nach Modellordnung bzw. der zu berücksichtigenden Effekte. Allgemein ausgedrückt lautet der Ansatz für den Abschnitt  $i$  wie folgt:

$$\begin{aligned} u_{[i]}(X, y_{[i]}) &= \Theta_1(X) + \Theta_2(X) y_{[i]} + \Theta_3(X) y_{[i]}^2 + \Theta_4(X) y_{[i]}^3 + \dots, \\ v_{[i]}(X, y_{[i]}) &= \Theta_5(X) + \Theta_6(X) y_{[i]} + \Theta_7(X) y_{[i]}^2 + \Theta_8(X) y_{[i]}^3 + \dots, \\ w_{[i]}(X, y_{[i]}) &= \Theta_9(X) + \Theta_{10}(X) y_{[i]} + \Theta_{11}(X) y_{[i]}^2 + \Theta_{12}(X) y_{[i]}^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Verschiebungen der einzelnen Abschnitte werden mit Hilfe von geometrischen Kompatibilitätsbedingungen verknüpft. Auf diese Weise werden die Deformationen von Gurten und Steg(en) aneinander gekoppelt und die geometrische Verträglichkeit ist von vornherein

gewährleistet. Zusätzlich tritt eine Reduktion der unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  ein. Eine Kopplung über die Kraftgrößen, insbesondere einen stetigen Schubfluss, findet nicht statt, obwohl hierdurch die Anzahl der unbekannt Funktionen weiter reduziert werden könnte. Dies würde jedoch die Interpretation der Randbedingungen erschweren bzw. unmöglich machen. Der Grund ist die unterschiedliche Ordnung der auftretenden Differentialquotienten der unbekannt Funktionen in den Differentialgleichungen. Das Gleichgewicht kann deshalb mit diesen Verschiebungsansätzen nicht in der starken Form, sondern nur in der schwachen Form im Sinne des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials erfüllt werden.

### 3.3 Herleitung der Differentialgleichungen

Die den in den Kapiteln 3.5 und 3.6 vorgestellten Balkenmodellen zugrunde liegenden Differentialgleichungen können gleichwertig auf zwei verschiedenen Wegen gewonnen werden. Einerseits kann das Gesamtpotential  $\Pi = \Pi_{in} + \Pi_{au}$  des System aufgestellt werden. Anschließend wird über eine Variationsformulierung das Minimum dieses Potentials  $\delta \Pi = \delta (\Pi_{in} + \Pi_{au}) = 0$  bestimmt und auf diese Weise das Differentialgleichungssystem ermittelt. Andererseits ist es möglich dieses Gleichungssystem über das Prinzip der virtuellen Verrückungen zu gewinnen, wie es in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird. Auf beiden Wegen ergeben sich mit dem Aufstellen der Differentialgleichungen gleichzeitig die notwendigen Randbedingungen zur eindeutigen Lösung des Systems.

Für das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist es notwendig, die geleistete innere Arbeit  $\delta W_{in}$  aus Gleichung (3.2) durch die virtuellen Verzerrungen  $\delta \underline{\varepsilon}$  sowie die durch die virtuellen Verrückungen  $\delta \underline{u}$  geleistete äußere Arbeit  $\delta W_{au}$  aus Gleichung (3.3) zu bestimmen. Volumenkräfte und Streckenlasten sollen vernachlässigt und nicht berücksichtigt werden. Die virtuellen Verzerrungen ergeben sich dabei über den linearisierten Verzerrungstensor nach Gleichung (2.10) ebenso wie die virtuellen Verrückungen aus den Verschiebungsansätzen. Die tatsächlichen Spannungen  $\underline{\sigma}$  werden mit den konstitutiven Beziehungen nach Gleichung (2.14) aus den Verzerrungen gewonnen. Für die Berechnung der virtuellen inneren Arbeit werden ausschließlich die ebenen Spannungen berücksichtigt, weil mit den verwendeten Verschiebungsansätzen die interlaminaeren Spannungen  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  und  $\sigma_z$  nicht direkt erfasst werden können. Die virtuellen Arbeiten lauten folglich:

$$\begin{aligned} \delta W_{in} &= \int_V \sigma_{mn} \delta \varepsilon_{mn} dV = \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dV \\ &= \sum_{[i]=1}^I \iint \left[ \int \sigma_x dz \delta \varepsilon_x + \int \sigma_y dz \delta \varepsilon_y + \int \tau_{xy} dz \delta \gamma_{xy} \right] dy_{[i]} dX \\ &= \sum_{[i]=1}^I \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \end{aligned} \quad (3.2)$$

und

$$\delta W_{au} = \int_{\partial V} t_m \delta u_m dA = \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA = \sum_{[i]=1}^I \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]}. \quad (3.3)$$

Das Volumenintegral in Gleichung (3.2) kann aufgelöst und die Integration der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  bezüglich der Dickenkoordinate  $z_i$  direkt durchgeführt werden, weil keine Abhängigkeit der virtuellen Verzerrungen von der Dickenrichtung vorhanden ist. Aus der vorgezogenen Integration ergeben sich die aus der klassischen Laminattheorie (Kapitel 2.1) bekannten Schnittkräfte  $N_x$ ,  $N_y$  und  $N_{xy}$ . Diese hängen aufgrund der fehlenden Verkrümmungen (siehe Annahmen Kapitel 3.1) nur von den Verzerrungen der Laminatmittelfläche  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^0$  und den Dehnsteifigkeiten  $\underline{\underline{A}}$  ab. Die Berechnung der virtuellen Arbeiten wird für jeden Profilschnitt  $i$  separat mit den zugehörigen Größen durchgeführt.

Die virtuellen Arbeiten werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen gleichgesetzt. Anschließend erfolgt eine mehrfache partielle Integration der auftretenden partiellen Ableitungen der virtuellen unbekannt Funktionen  $\delta\Theta_m$  bezüglich  $X$  in der Art, dass diese nur noch ableitungsfrei unter dem Integral über  $dX$  auftreten. In dem Integral sind danach die zugrunde liegenden Differentialgleichungen enthalten. Die notwendigen Randbedingungen ergeben sich aus den Termen außerhalb dieses Integrals. Damit führt das beschriebene Vorgehen zu den Differentialgleichungen für die unbekannt Funktionen  $\Theta_m$ . Die gesuchten Funktionen können mit den Randbedingungen eindeutig bestimmt werden.

### 3.4 Lösung der Differentialgleichungen

Die Grundgleichungen für die in den Kapiteln 3.5 und 3.6 vorgestellten Balkenmodelle für Kasten- und I-Trägerprofile bestehen bis auf das schubstarre Modell ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse aus gekoppelten linearen Differentialgleichungssystemen höherer Ordnung. Diese können nach einem in Burg et al. [14]<sup>1</sup> gezeigten Verfahren geschlossen-analytisch gelöst werden<sup>2</sup>.

Das Verfahren setzt ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung in der Form

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{\Theta}} + \underline{\underline{g}} \tag{3.4}$$

voraus, wobei die  $(a \times a)$ -Matrix  $\underline{\underline{G}}$  nicht unbedingt symmetrisch sein muss. Die hergeleiteten Gleichungen werden deshalb in ein entsprechendes System erster Ordnung überführt, wobei sich die Anzahl der Differentialgleichungen erhöht. Aufgrund der Vernachlässigung von Volumenkräften und Streckenlasten liegt in (3.4) ein homogenes System mit  $\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{0}}$  vor. Damit muss ein Fundamentalsystem als allgemeine Lösung gefunden werden.

Durch eine Transformation des homogenen Teils der Gleichung (3.4) mit der Beziehung

$$\underline{\underline{\Theta}} = \underline{\underline{T}}\underline{\underline{\tilde{\Theta}}} \tag{3.5}$$

sind eine Lösung des Differentialgleichungssystems möglich. In dem transformierten System

$$\underline{\underline{\tilde{\Theta}}}' = \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{J}}}\underline{\underline{\tilde{\Theta}}} = \begin{bmatrix} \boxed{\underline{\underline{J}}_1} & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & \boxed{\underline{\underline{J}}_2} & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \boxed{\underline{\underline{J}}_n} \end{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\Theta}}} \tag{3.6}$$

<sup>1</sup>Vgl. Seite 194ff

<sup>2</sup>Auch für das Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse trifft dies zu, der notwendige Aufwand wird aber zu groß.

besitzt  $\underline{J}$  die Jordansche Normalform. In dieser speziellen Halbdiaagonalform befinden sich ausschließlich Einträge in den einzelnen Jordanzellen auf der Haupt- und der ersten oberen Nebendiagonalen. Jede Jordanzelle  $\underline{J}_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ) besitzt den folgenden Aufbau:

$$\underline{J}_m = \begin{bmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_m & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Auf der Hauptdiagonalen von  $\underline{J}$  stehen die  $a$  Eigenwerte der Matrix  $\underline{G}$ . Für die unterschiedlichen Eigenwerte  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, o$ ) existiert jeweils eine Untermatrix  $\underline{T}_j$ . Aus diesen ergibt sich die Transformationsmatrix  $\underline{T}$  wie folgt:

$$\underline{T} = [\underline{T}_1, \underline{T}_2, \dots, \underline{T}_o] \quad (3.8)$$

mit

$$\underline{T}_j = [\underline{ev}_{1j}^{(1)}, \dots, \underline{ev}_{1j}^{(\alpha_1)}, \underline{ev}_{2j}^{(1)}, \dots, \underline{ev}_{2j}^{(\alpha_2)}, \dots, \underline{ev}_{\beta j}^{(1)}, \dots, \underline{ev}_{\beta j}^{(\alpha_\beta)}]. \quad (3.9)$$

Jede Matrix  $\underline{T}_j$  enthält die zu dem Eigenwert  $\lambda_j$  gehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren  $\underline{ev}_{pj}^{(q)}$ , aus denen das Fundamentalsystem zum homogenen Teil der Gleichung (3.4) konstruiert werden kann.

Ein Hauptvektor  $q$ -ter Stufe des Eigenwertes  $j$  ist folgendermaßen definiert:

$$\left(\underline{G} - \lambda_j \underline{E}\right)^q \underline{ev}_j^{(q)} = \underline{0} \quad \text{und} \quad \left(\underline{G} - \lambda_j \underline{E}\right)^{q-1} \underline{ev}_j^{(q)} \neq \underline{0}. \quad (3.10)$$

Eigenvektoren sind demnach Hauptvektoren erster Stufe. Beginnend mit dem  $p$ -ten Eigenvektor kann ein zugehöriger Hauptvektor  $q$ -ter Stufe durch rekursives Vorgehen gefunden werden mit

$$\left(\underline{G} - \lambda_j \underline{E}\right) \underline{ev}_{pj}^{(q)} = \underline{ev}_{pj}^{(q-1)}. \quad (3.11)$$

In der transformierten Gleichung (3.6) kann das Gleichungssystem für jede Jordanzelle separat gelöst werden. Nach der Rücktransformation können die  $a$  linear unabhängigen Lösungen

$$\underline{\Psi}_{pj}^{(q)} = \left( \underline{ev}_{pj}^{(1)} \frac{X^{q-1}}{(q-1)!} + \underline{ev}_{pj}^{(2)} \frac{X^{q-2}}{(q-2)!} + \dots + \underline{ev}_{pj}^{(q-1)} X + \underline{ev}_{pj}^{(q)} \right) e^{\lambda_j X} \quad (3.12)$$

der Ausgangsgleichung angegeben werden, die das Fundamentalsystem bilden. Die allgemeine Lösung lautet wie folgt:

$$\underline{\Theta} = \sum_{j=1}^o \sum_{p=1}^{\beta} \sum_{q=1}^{\alpha_\beta} konst_{j p q} \underline{\Psi}_{pj}^{(q)}. \quad (3.13)$$

## 3.5 Modellbildung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse

Im folgenden Abschnitt werden die Balkenmodelle ohne eine Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse für das Kasten- und das I-Profil hergeleitet und gegenübergestellt. Einzelne Punkte eines Profilquerschnitts können sich nur in  $X$ - und  $Z$ -Richtung verschieben. Begonnen wird mit einem schubstarren Modell, welches auf den Bernoulli'schen Annahmen für den/die Steg(e) beruht. Es folgt ein Modell mit einer auf Timoshenko basierten Kinematik. Anschließend wird ein Verwölbungsmodell in Anlehnung an die Schubdeformationstheorie dritter Ordnung für dicke Platten von Reddy entwickelt.

### 3.5.1 Schubstarre Theorie (S2)

Das einfachste in dieser Arbeit vorgestellte Balkenmodell basiert auf den Bernoulli'schen Annahmen für die Verschiebungen der/des Stege(s). Hierbei bleiben die Querschnitte eben, ohne eine Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Für den/die Steg(e) wird als Verschiebungsansatz eine lineare Verkippungsfunktion  $\Theta_2$  in axialer Richtung angenommen. Zur Balkenachse senkrechte Schnitte bleiben auch unter Verformung weiterhin senkrecht zu dieser. In dem schubstarren Balkenmodell ist daher der negative Neigungswinkel der/des Stege(s)  $-\Theta_2$  gleich der ersten Ableitung der Balkenabsenkungskurve  $\Theta'_1$ :

$$-\Theta_2 = \Theta'_1. \quad (3.14)$$

Hieraus resultiert ein Verschwinden der Gleitung  $\gamma_{xy}$  und somit der Schubspannung  $\tau_{xy}$  für den Bereich der/des Stege(s). Die Gurte können sich in diesem Modell ausschließlich gleichförmig über ihrer Dicke und Breite in axialer Richtung um der Wert  $u_G$  verschieben. Dieses führt dazu, dass keine Schubspannungen auftreten. Als geometrische Kompatibilitätsbedingung muss die axiale Verschiebung der Gurte und der/des Stege(s) am jeweiligen Verbindungspunkt identisch sein. Hieraus resultiert die folgende Beziehung:

$$u_G = -\frac{h}{2}\Theta_2 = \frac{h}{2}\Theta'_1. \quad (3.15)$$

Damit besitzt dieses Balkenmodell die unbekannte Funktion  $\Theta_1$  (Trägerabsenkung) als Freiheitsgrad zur Beschreibung des Trägerverhaltens unter Biegemomenten- und Querkraftbelastung. Die Verschiebungen und die sich daraus mit dem linearisierten Verzerrungstensor 2.10 ergebenden Verzerrungen für den Kasten- und I-Träger sind in den Tabellen 3.1 und 3.2 aufgeführt. Die zu der unbekanntenen Funktionen  $\Theta_1$  und deren Ableitung  $\Theta'_1$  gehörenden Deformationsmoden sind in den Abbildungen 3.3 und 3.4 dargestellt.

Die virtuellen Arbeiten für den Kastenträger berechnen sich aus den Gleichungen (3.2) und (3.3). Für die virtuelle innere Arbeit folgt:

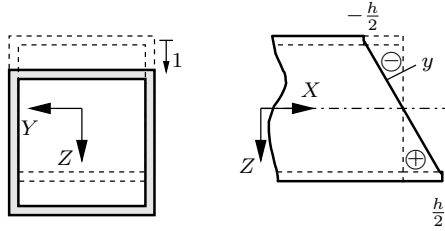
$$\begin{aligned} \delta W_{in \square} &= \sum_{[i]=1}^6 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\ &= 4 \iint \frac{h^2}{4} A_{11G} \Theta''_1 \delta \Theta'_1 dy_{[1]} dX + 2 \iint A_{11S} y^2 \Theta''_1 \delta \Theta'_1 dy_{[2]} dX \\ &= \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \left[ \int_0^l \Theta_1^{IV} \delta \Theta_1 dX + \Theta'_1 \delta \Theta_1 \Big|_0^l - \Theta''_1 \delta \Theta_1 \Big|_0^l \right]. \quad (3.16) \end{aligned}$$

**Tabelle 3.1:** S2: Verschiebungen und Verzerrungen des Kastenträgers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1, 6]: $u = u_G = \frac{h}{2} \Theta'_1$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	$\varepsilon_x = u'_G = \frac{h}{2} \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$
[2]: $u = y \Theta_2 = -y \Theta'_1$ $v = \Theta_1$ $w = 0$	$\varepsilon_x = y \Theta'_2 = -y \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1 = 0$
[3, 4]: $u = -u_G = -\frac{h}{2} \Theta'_1$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	$\varepsilon_x = -u'_G = -\frac{h}{2} \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$
[5]: $u = -y \Theta_2 = y \Theta'_1$ $v = -\Theta_1$ $w = 0$	$\varepsilon_x = -y \Theta'_2 = y \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_2 - \Theta'_1 = 0$

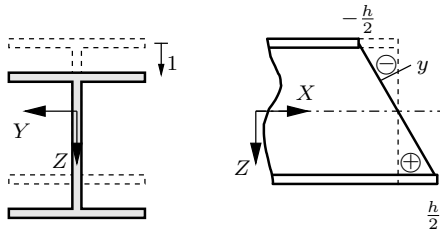
**Tabelle 3.2:** S2: Verschiebungen und Verzerrungen des I-Trägers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1, 4]: $u = u_G = \frac{h}{2} \Theta'_1$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	$\varepsilon_x = u'_G = \frac{h}{2} \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$
[2]: $u = y \Theta_2 = -y \Theta'_1$ $v = \Theta_1$ $w = 0$	$\varepsilon_x = y \Theta'_2 = -y \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1 = 0$
[3, 5]: $u = -u_G = -\frac{h}{2} \Theta'_1$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	$\varepsilon_x = -u'_G = -\frac{h}{2} \Theta''_1$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$



(a)  $\Theta_1$ : Absenkung      (b)  $\Theta_2 = -\Theta'_1$ :  
Stegverkipfung

Abbildung 3.3: S2:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den Kastenträger



(a)  $\Theta_1$ : Absenkung      (b)  $\Theta_2 = -\Theta'_1$ :  
Stegverkipfung

Abbildung 3.4: S2:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den I-Träger

Die virtuelle äußere Arbeit aus den an den Stellen  $X = 0$  und  $l$  angreifenden äußeren Lasten ergibt sich nach Gleichung (3.3) aus:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au\Box} &= \sum_{[i]=1}^6 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m \, dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left( \frac{h}{2} \sigma_x \delta \Theta_1' + \tau_{xz} \delta \Theta_1 \right) dA_{[1]} \Big|_0^l + \int \left( -\sigma_x y \delta \Theta_1' + \tau_{xy} \delta \Theta_1 \right) dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta \Theta_1 \Big|_0^l - M_Y \delta \Theta_1' \Big|_0^l. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ergeben sich die Differentialgleichung (3.19) und die zugehörigen Randbedingungen (3.20) und (3.21):

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in\Box} - \delta W_{au\Box} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \int_0^l \Theta_1^{IV} \delta \Theta_1 \, dX \\
 &+ \left[ \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta_1'' + M_Y \right] \delta \Theta_1' \Big|_0^l \\
 &- \left[ \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta_1''' + F_Z \right] \delta \Theta_1 \Big|_0^l = 0. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichung für den Kastenträger lautet:

$$\text{DGL: } \Theta_1^{IV} = 0 \tag{3.19}$$

mit den zwei Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta_1''' = -F_Z \tag{3.20}$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint \frac{h}{2} \sigma_x' \, dA_{[1]} - 2 \iint \sigma_x' y \, dA_{[2]} = -F_Z \quad \text{oder} \quad \delta \Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta_1'' = -M_Y \tag{3.21}$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint \frac{h}{2} \sigma_x \, dA_{[1]} - 2 \iint \sigma_x y \, dA_{[2]} = -M_Y \quad \text{oder} \quad \delta \Theta_1' = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (3.19) kann direkt durch mehrfache Integration gewonnen werden und sieht folgendermaßen aus:

$$\Theta_1(X) = \frac{Ko_1}{6} X^3 + \frac{Ko_2}{2} X^2 + Ko_3 X + Ko_4. \tag{3.22}$$

Die vier Konstanten  $Ko_1$  bis  $Ko_4$  können über die Randbedingungen ermittelt werden. Für jeden Rand ist jeweils eine geometrische oder dynamische Bedingung aus den Gleichungen (3.20) und (3.21) erforderlich.

Ein Vergleich für einen isotropen Werkstoff mit  $A_{11G} = E t_G$  und  $A_{11S} = E t_S$  zeigt, dass die gewonnenen Gleichungen in diesem Fall identisch mit den Gleichungen aus dem bekannten Bernoulli'schen Balkenmodell sind. Die Gleichung (3.19) entspricht der Balkendifferentialgleichung  $(E I_{yy} w'')'' = q$  für eine verschwindende Streckenlast  $q$  und die Gleichungen (3.20) und (3.21) bilden die Randbedingungen  $(E I_{yy} w'')' = -Q$  und  $E I_{yy} w'' = -M$ . Der Ausdruck in runden Klammern in den Gleichungen (3.18) bis (3.21) ist die Biegesteifigkeit  $E I_{yy}$  für ein dünnwandiges Kastenprofil, wobei für das Flächenträgheitsmoment  $I_{yy}$  der Gurte nur deren Steiner'scher-Anteil berücksichtigt wird.

Analog ergeben sich die Ausdrücke für die virtuellen Arbeiten für das I-Profil. Für die virtuelle innere Arbeit folgt:

$$\begin{aligned} \delta W_{in\bar{I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\ &= 4 \iint \frac{h^2}{4} A_{11G} \Theta_1'' \delta \Theta_1' dy_{[1]} dX + \iint A_{11S} y^2 \Theta_1'' \delta \Theta_1'' dy_{[2]} dX \\ &= \left( \frac{b h^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \left[ \int_0^l \Theta_1^{IV} \delta \Theta_1 dX + \Theta_1'' \delta \Theta_1 \Big|_0^l - \Theta_1''' \delta \Theta_1 \Big|_0^l \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Gleichung für die virtuelle äußere Arbeit lautet:

$$\begin{aligned} \delta W_{au\bar{I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\ &= \int \left( \frac{h}{2} \sigma_x \delta \Theta_1' + \tau_{xz} \delta \Theta_1 \right) dA_{[1]} \Big|_0^l + \int (-\sigma_x y \delta \Theta_1' + \tau_{xy} \delta \Theta_1) dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\ &= F_Z \delta \Theta_1 \Big|_0^l - M_Y \delta \Theta_1' \Big|_0^l. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ergeben sich die Differentialgleichung (3.26) und die zugehörigen Randbedingungen (3.27) und (3.28) für den I-Träger:

$$\begin{aligned} \delta W_{in\bar{I}} - \delta W_{au\bar{I}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{b h^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \int_0^l \Theta_1^{IV} \delta \Theta_1 dX \\ &+ \left[ \left( \frac{b h^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_1'' + M_Y \right] \delta \Theta_1' \Big|_0^l \\ &- \left[ \left( \frac{b h^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_1''' + F_Z \right] \delta \Theta_1 \Big|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichung für den I-Träger lautet:

$$\text{DGL: } \Theta_1^{IV} = 0 \quad (3.26)$$

mit den zwei Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_1''' = -F_Z \quad (3.27)$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint \frac{h}{2} \sigma'_x \, dA_{[1]} - \iint \sigma'_x y \, dA_{[2]} = -F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_1'' = -M_Y \quad (3.28)$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint \frac{h}{2} \sigma_x \, dA_{[1]} - \iint \sigma_x y \, dA_{[2]} = -M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1' = 0.$$

Die Differentialgleichung (3.26) und deren allgemeine Lösung (3.22) sind identisch mit denen des Kastenträgers. Die vier Konstanten werden aus den geänderten Randbedingungen ermittelt, wobei für jeden Rand jeweils eine geometrische oder dynamische Bedingung aus den Gleichungen (3.27) und (3.28) erforderlich ist.

Die Lösungen der Modelle des Kasten- und I-Trägers sind identisch bei der Verwendung gleicher Lagenaufbauten in Gurten und Stegen. Zusätzlich müssen die Einzelschichtdicken im Steg des I-Trägers genau doppelt so groß gewählt werden, wie die in den Stegen des Kastenträgers; d. h. es gilt  $A_{11S\text{I}} = 2 A_{11S\text{K}}$ .

Aufgrund der gewählten Verschiebungsansätze des schubstarren Modells kann der Schubflussverlauf  $N_{xy}$  nicht direkt über das Hooke'sche Gesetz in Form der Laminatsteifigkeitsmatrix aus den Verzerrungen ermittelt werden. Sowohl für den/die Steg(e) als auch für die Gurte verschwindet dieser. Eine Ermittlung ist über Gleichgewichtsbetrachtungen an einem freigeschnittenen Element möglich. Die Bestimmungsgleichung lautet:

$$N_{xy}(s) = - \int_{s_0}^s \sigma'_x \, dz \, ds^* + N_{xy_0}. \quad (3.29)$$

Liegt ein positiver Schubfluss vor, weisen die Schubspannung  $\tau_{xy}$  und die Laufkoordinate  $s$  entlang des Querschnitts in die gleiche Richtung. Hieraus ergibt sich der Schubfluss in den einzelnen Abschnitten für den Kastenträger:

$$[1]: N_{xy_{[1]}}(y_{[1]}) = - \int_0^{y_{[1]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' \, dy = - \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[1]},$$

$$\begin{aligned} [2]: N_{xy_{[2]}}(y_{[2]}) &= \int_{-h/2}^{y_{[2]}} A_{11S} y \Theta_1''' \, dy + N_{xy_{[1]}} \left( \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} A_{11S} \Theta_1''' \left[ y_{[2]}^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] - \frac{bh}{4} A_{11G} \Theta_1''', \end{aligned}$$

$$[3]: N_{xy_{[3]}}(y_{[3]}) = \int_{-b/2}^{y_{[3]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' \, dy + N_{xy_{[2]}} \left( \frac{h}{2} \right) = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[3]},$$

$$[4]: N_{xy_{[4]}}(y_{[4]}) = \int_0^{y_{[4]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' \, dy = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[4]},$$

$$\begin{aligned}
 [5]: \quad N_{xy_{[5]}}(y_{[5]}) &= - \int_{-h/2}^{y_{[5]}} A_{11S} y \Theta_1''' dy + N_{xy_{[4]}}\left(\frac{b}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} A_{11S} \Theta_1''' \left[ y_{[5]}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] + \frac{bh}{4} A_{11G} \Theta_1''', \\
 [6]: \quad N_{xy_{[6]}}(y_{[6]}) &= - \int_{-b/2}^{y_{[6]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' dy + N_{xy_{[5]}}\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[6]}. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Für das I-Profil folgt analog:

$$\begin{aligned}
 [1]: \quad N_{xy_{[1]}}(y_{[1]}) &= - \int_0^{y_{[1]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' dy = -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[1]}, \\
 [2]: \quad N_{xy_{[2]}}(y_{[2]}) &= \int_{-h/2}^{y_{[2]}} A_{11S} \Theta_1''' y dy - \frac{bh}{2} A_{11G} \Theta_1''' \\
 &= \frac{1}{2} A_{11S} \Theta_1''' \left[ y_{[2]}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] - \frac{bh}{2} A_{11G} \Theta_1''', \\
 [3]: \quad N_{xy_{[3]}}(y_{[3]}) &= \int_0^{y_{[3]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' dy = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[3]}, \\
 [4]: \quad N_{xy_{[4]}}(y_{[4]}) &= - \int_0^{y_{[4]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' dy = -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[4]}, \\
 [5]: \quad N_{xy_{[5]}}(y_{[5]}) &= \int_0^{y_{[5]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' dy = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_1''' y_{[5]}. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

### 3.5.2 Schubdeformationstheorie erster Ordnung (DE2)

Dieses Modell basiert auf ähnlichen Annahmen für die Verschiebungen wie die zuvor beschriebene schubstarre Theorie im Kapitel 3.5.1. Allerdings werden für die Schubdeformationstheorie erster Ordnung die erste Ableitung der Balkenabsenkungskurve  $\Theta_1'$  und der Neigungswinkel (Verkippung) der/des Stege(s)  $\Theta_2$  nicht gekoppelt. Auf diese Weise wird eine Schubverformung der/des Stege(s) ermöglicht. Die Querschnitte bleiben eben und weisen keine Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse auf. Der lineare Verlauf der Verschiebungen in dem/den Steg(en) führt zu einer konstanten Gleitung  $\gamma_{xy}$  und Schubspannung  $\tau_{xy}$  in diesem Bereich. Die Gurte können sich gleichförmig in axialer Richtung verschieben. Daher treten in ihnen keine Schubspannungen auf. Zur Gewährleistung der geometrischen Kompatibilität müssen an den jeweiligen Verzweigungspunkten Gurte und Steg(e) die gleiche axiale Verschiebung  $u_G$  aufweisen. Diese wird wie folgt definiert:

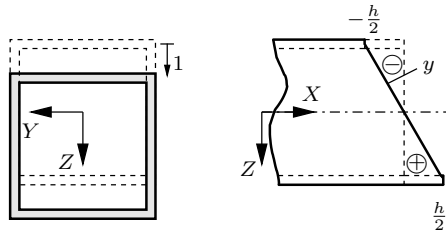
$$u_G = -\frac{h}{2} \Theta_2. \quad (3.32)$$

**Tabelle 3.3:** DE2: Verschiebungen und Verzerrungen des Kastenträgers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1, 6]: $u = u_G = -\frac{h}{2} \Theta_2$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	 $\varepsilon_x = u'_G = -\frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$
[2]: $u = y \Theta_2$ $v = \Theta_1$ $w = 0$	 $\varepsilon_x = y \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1$
[3, 4]: $u = -u_G = \frac{h}{2} \Theta_2$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	 $\varepsilon_x = -u'_G = \frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$
[5]: $u = -y \Theta_2$ $v = -\Theta_1$ $w = 0$	 $\varepsilon_x = -y \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_2 - \Theta'_1$

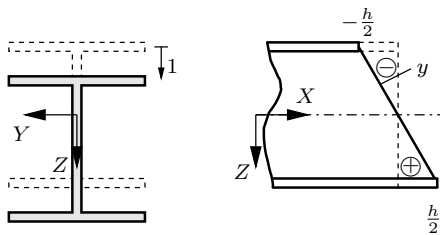
**Tabelle 3.4:** DE2: Verschiebungen und Verzerrungen des I-Trägers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1, 4]: $u = u_G = -\frac{h}{2} \Theta_2$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	 $\varepsilon_x = u'_G = -\frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$
[2]: $u = y \Theta_2$ $v = \Theta_1$ $w = 0$	 $\varepsilon_x = y \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1$
[3, 5]: $u = -u_G = \frac{h}{2} \Theta_2$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	 $\varepsilon_x = -u'_G = \frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$



(a)  $\Theta_1$ : Absenkung      (b)  $\Theta_2$ : Stegverkipfung

**Abbildung 3.5:** DE2:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den Kastenträger



(a)  $\Theta_1$ : Absenkung      (b)  $\Theta_2$ : Stegverkipfung

**Abbildung 3.6:** DE2:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den I-Träger

Das Schubdeformationsmodell erster Ordnung besitzt somit die zwei Freiheitsgrade Trägerabsenkung  $\Theta_1$  und Stegverkipfung  $\Theta_2$  in Form von unbekanntem Funktionen. Die Verschiebungen und die sich daraus mit Gleichung (2.10) ergebenden Verzerrungen für den Kasten- und I-Träger sind in den Tabellen 3.3 und 3.4 zusammengefasst. Die Deformationsmoden zu den zwei unbekanntem Funktionen  $\Theta_m$  ( $m = 1, 2$ ) können den Abbildungen 3.5 und 3.6 entnommen werden.

Die virtuelle innere Arbeit für den Kastenträger kann nach Gleichung (3.2) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in\Box} &= \sum_{[i]=1}^6 \iint [N_x \delta\varepsilon_x + N_y \delta\varepsilon_y + N_{xy} \delta\gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\
 &= 4 \iint \frac{h^2}{4} A_{11G} \Theta'_2 \delta\Theta'_2 dy_{[1]} dX \\
 &\quad + 2 \iint (A_{11S} y^2 \Theta'_2 \delta\Theta'_2 + A_{66S} (\Theta_2 + \Theta'_1) (\delta\Theta_2 + \delta\Theta'_1)) dy_{[2]} dX \\
 &= \int \left[ \left( \left( -\frac{bh^2}{2} A_{11G} - \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta'_2 + 2h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta'_1) \right) \delta\Theta_2 \right. \\
 &\quad \left. - 2h A_{66S} (\Theta'_2 + \Theta'_1) \delta\Theta_1 \right] dX \\
 &\quad + \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta'_2 \delta\Theta_2 \Big|_0^l + 2h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta'_1) \delta\Theta_1 \Big|_0^l. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Die an den Stellen  $X = 0$  und  $l$  angreifenden äußeren Lasten leisten eine virtuelle äußere Arbeit, die sich nach Gleichung (3.3) ergibt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au\Box} &= \sum_{[i]=1}^6 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left( -\frac{h}{2} \sigma_x \delta\Theta_2 + \tau_{xz} \delta\Theta_1 \right) dA_{[1]} \Big|_0^l + \int (\sigma_x y \delta\Theta_2 + \tau_{xy} \delta\Theta_1) dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta\Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta\Theta_2 \Big|_0^l. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (3.36) und (3.37) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.38) und (3.39) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in\Box} - \delta W_{au\Box} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \int \left[ \left( \left( -\frac{bh^2}{2} A_{11G} - \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta'_2 + 2h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta'_1) \right) \delta\Theta_2 \right. \\
 &\quad \left. - 2h A_{66S} (\Theta'_2 + \Theta'_1) \delta\Theta_1 \right] dX \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta'_2 - M_Y \right] \delta\Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + [2h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta'_1) - F_Z] \delta\Theta_1 \Big|_0^l = 0. \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den Kastenträger lauten:

$$\text{DGL 1: } \underbrace{\left( -\frac{bh}{2} A_{11G} - \frac{h^2}{6} A_{11S} \right)}_{c_1 \square} \Theta_2'' + \underbrace{2 A_{66S}}_{c_2 \square} (\Theta_2 + \Theta_1') = 0, \quad (3.36)$$

$$\text{DGL 2: } \Theta_2' + \Theta_1'' = 0 \quad (3.37)$$

mit den zwei Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } 2h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') = F_Z \quad (3.38)$$

$$\Leftrightarrow 2 \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{6} A_{11S} \right) \Theta_2' = M_Y \quad (3.39)$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint -\frac{h}{2} \sigma_x dA_{[1]} + 2 \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0.$$

Auf die gleiche Weise können die virtuellen Arbeiten für den I-Träger ermittelt werden. Die virtuelle innere Arbeit ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \delta W_{in I} &= \sum_{[i]=1}^5 \iint [N_x \delta\varepsilon_x + N_y \delta\varepsilon_y + N_{xy} \delta\gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\ &= 4 \iint \frac{h^2}{4} A_{11G} \Theta_2' \delta\Theta_2' dy_{[1]} dX \\ &\quad + \iint (A_{11S} y^2 \Theta_2' \delta\Theta_2' + A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') (\delta\Theta_2 + \delta\Theta_1')) dy_{[2]} dX \\ &= \int \left[ \left( \left( -\frac{bh^2}{2} A_{11G} - \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_2'' + h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') \right) \delta\Theta_2 \right. \\ &\quad \left. - h A_{66S} (\Theta_2' + \Theta_1'') \delta\Theta_1 \right] dX \\ &\quad + \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_2' \delta\Theta_2 \Big|_0^l + h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') \delta\Theta_1 \Big|_0^l \end{aligned} \quad (3.40)$$

und für die virtuelle äußere Arbeit folgt:

$$\begin{aligned} \delta W_{au I} &= \sum_{[i]=1}^5 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\ &= \int \left( -\frac{h}{2} \sigma_x \delta\Theta_2 + \tau_{xz} \delta\Theta_1 \right) dA_{[1]} \Big|_0^l + \int (\sigma_x y \delta\Theta_2 + \tau_{xy} \delta\Theta_1) dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\ &= F_Z \delta\Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta\Theta_2 \Big|_0^l. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die Differentialgleichungen (3.43) und (3.44) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.45) und (3.46) werden wieder über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 & \delta W_{inI} - \delta W_{auI} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \int \left[ \left( \left( -\frac{bh^2}{2} A_{11G} - \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_2'' + h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') \right) \delta \Theta_2 \right. \\
 & \quad \left. - h A_{66S} (\Theta_2' + \Theta_1'') \delta \Theta_1 \right] dX \dots \\
 & + \left[ \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_2' - M_Y \right] \delta \Theta_2 \Big|_0^l \\
 & + \left[ h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') - F_Z \right] \delta \Theta_1 \Big|_0^l = 0.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den I-Träger lauten:

$$\text{DGL 1: } \underbrace{\left( -\frac{bh}{2} A_{11G} - \frac{h^2}{12} A_{11S} \right)}_{c_{11}} \Theta_2'' + \underbrace{A_{66S}}_{c_{21}} (\Theta_2 + \Theta_1') = 0, \tag{3.43}$$

$$\text{DGL 2: } \Theta_2' + \Theta_1'' = 0 \tag{3.44}$$

mit den zwei Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } h A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') = F_Z \tag{3.45}$$

$$\Leftrightarrow \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta \Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \left( \frac{bh^2}{2} A_{11G} + \frac{h^3}{12} A_{11S} \right) \Theta_2' = M_Y \tag{3.46}$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint -\frac{h}{2} \sigma_x dA_{[1]} + \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta \Theta_2 = 0.$$

Die Gleichungssysteme für beide Querschnittsprofile können mit dem in Kapitel 3.4 beschriebenen Verfahren geschlossen-analytisch gelöst werden. Das hierfür notwendige äquivalente Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet mit  $\alpha = \Theta_2'$  und  $\beta = \Theta_1'$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_2' \\ \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}}_{\underline{\Theta}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\underline{\Theta}} = \underline{0} \tag{3.47}$$

bzw.

$$\underline{\Theta}' = \underbrace{-\underline{\underline{M}}_1^{-1} \underline{\underline{M}}_2}_{\underline{\underline{G}}} \underline{\Theta} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c_2}{c_1} & 0 & -\frac{c_2}{c_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Der dreifache Eigenwert der Matrix  $\underline{G}$  lautet  $\lambda = 0 = \lambda_m$  ( $m = 1 \dots 3$ ). Zu diesem mehrfachen Eigenwert gehören die folgenden Hauptvektoren:

$$\underline{ev}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{ev}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{ev}_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 - \frac{c_1}{c_2} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Mit diesen lautet die Lösung von Gleichung (3.48):

$$\begin{aligned} \underline{\Theta} &= \begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_2' \\ \Theta_1' \end{bmatrix} \\ &= Ko_1 \left( \underline{ev}_1^{(3)} + X \underline{ev}_1^{(2)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_1^{(1)} \right) + Ko_2 \left( \underline{ev}_1^{(2)} + X \underline{ev}_1^{(1)} \right) + Ko_3 \underline{ev}_1^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} Ko_3 + Ko_2 X + Ko_1 \left( 1 + \frac{X^2}{2} \right) \\ Ko_2 + Ko_1 X \\ -Ko_3 - Ko_2 X + Ko_1 \left( -1 - \frac{c_1}{c_2} - \frac{X^2}{2} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen für den Kastenträger (3.36) und (3.37) sowie für den I-Träger (3.43) und (3.44) ergibt sich nach Integration von  $\Theta_1'$  zu:

$$\Theta_1 = Ko_4 - Ko_3 X - Ko_2 \frac{X^2}{2} + Ko_1 \left( \left( -1 - \frac{c_1}{c_2} \right) X - \frac{X^3}{6} \right) \quad (3.51)$$

und

$$\Theta_2 = Ko_3 + Ko_2 X + Ko_1 \left( 1 + \frac{X^2}{2} \right). \quad (3.52)$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  sind entsprechend dem verwendeten Modell zu wählen. Die vier Konstanten  $Ko_1$  bis  $Ko_4$  der allgemeinen Lösung können über die Randbedingungen bestimmt werden, wobei für jeden Rand jeweils eine geometrische oder dynamische Bedingung aus den Gleichungen (3.38) und (3.39) bzw. aus den Gleichungen (3.45) und (3.46) erforderlich ist.

Die Lösungen der Modelle des Kasten- und I-Trägers sind für die Schubdeformationstheorie erster Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse identisch bei der Verwendung gleicher Lagenaufbauten in Gurten und Stegen. Zusätzlich müssen die Einzelschichtdicken im Steg des I-Trägers genau doppelt so groß gewählt werden, wie die in den Stegen des Kastenträgers; d. h. es gilt  $A_{11S \text{ I}} = 2 A_{11S \text{ K}}$ .

Wie bei dem schubstarren Modell aus Kapitel 3.5.1 kann der Schubflussverlauf  $N_{xy}$  nicht direkt über die konstitutiven Beziehungen aus den Verzerrungen ermittelt werden. Aufgrund der gewählten Verschiebungsansätze verschwindet er im Bereich der Gurte und ist im Stegbereich konstant über der Trägerhöhe. Über eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem freigeschnittenen Element kann der Schubfluss mit der Gleichung (3.29) ermittelt

werden. Der Schubflussverlauf lautet für den Kastenträger:

$$\begin{aligned}
 [1]: \quad N_{xy_{[1]}}(y_{[1]}) &= \int_0^{y_{[1]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[1]}, \\
 [2]: \quad N_{xy_{[2]}}(y_{[2]}) &= - \int_{-h/2}^{y_{[2]}} A_{11S} y \Theta_2'' \, dy + N_{xy_{[1]}}\left(\frac{b}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} A_{11S} \Theta_2'' \left[ y_{[2]}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] + \frac{bh}{4} A_{11G} \Theta_2'', \\
 [3]: \quad N_{xy_{[3]}}(y_{[3]}) &= - \int_{-b/2}^{y_{[3]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy + N_{xy_{[2]}}\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[3]}, \\
 [4]: \quad N_{xy_{[4]}}(y_{[4]}) &= - \int_0^{y_{[4]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy = -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[4]}, \\
 [5]: \quad N_{xy_{[5]}}(y_{[5]}) &= \int_{-h/2}^{y_{[5]}} A_{11S} y \Theta_2'' \, dy + N_{xy_{[4]}}\left(\frac{b}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} A_{11S} \Theta_2'' \left[ y_{[5]}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] - \frac{bh}{4} A_{11G} \Theta_2'', \\
 [6]: \quad N_{xy_{[6]}}(y_{[6]}) &= \int_{-b/2}^{y_{[6]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy + N_{xy_{[5]}}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[6]} \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

und für den I-Träger:

$$\begin{aligned}
 [1]: \quad N_{xy_{[1]}}(y_{[1]}) &= \int_0^{y_{[1]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[1]}, \\
 [2]: \quad N_{xy_{[2]}}(y_{[2]}) &= - \int_{-h/2}^{y_{[2]}} A_{11S} \Theta_2'' y \, dy + \frac{bh}{2} A_{11G} \Theta_2'' \\
 &= -\frac{1}{2} A_{11S} \Theta_2'' \left[ y_{[2]}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] + \frac{bh}{2} A_{11G} \Theta_2'', \\
 [3]: \quad N_{xy_{[3]}}(y_{[3]}) &= - \int_0^{y_{[3]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy = -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[3]}, \\
 [4]: \quad N_{xy_{[4]}}(y_{[4]}) &= \int_0^{y_{[4]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' \, dy = \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[4]},
 \end{aligned}$$

$$[5]: N_{xy_{[5]}}(y_{[5]}) = - \int_0^{y_{[5]}} \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' dy = - \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' y_{[5]}. \quad (3.54)$$

### 3.5.3 Schubdeformationstheorie höherer Ordnung (DH2)

Das Schubdeformationsmodell höherer Ordnung ist eine Erweiterung des zuvor in Kapitel 3.5.2 beschriebenen Modells. Der Querschnitt des Profils muss nicht eben bleiben, sondern kann sich zusätzlich zum Verkippen verwölben. Dieses wird durch einen Verschiebungsansatz in axialer Richtung aus der Ebene des Querschnitts heraus für den/die Steg(e) in Form eines Polynoms dritten Grades ermöglicht<sup>3</sup>. Durch diesen Ansatz kann die Gleitung  $\gamma_{xy}$  bzw. die Schubspannung  $\tau_{xy}$  bis zu einem quadratischen Verlauf über der Profilhöhe direkt aus den zu Grunde liegenden Systemgleichungen gewonnen werden. Ein Umweg über die Integration der Gleichgewichtsbetrachtungen an einem freigeschnittenen Element wie bei den zuvor beschriebenen Modellen ist nicht notwendig. Aufgrund der Symmetrie der Schubspannung  $\tau_{xy}$  bezüglich der globalen Y-Achse bei Biegung und des Fehlens von Axialkräften als Belastungsfall wird sowohl das konstante wie auch das quadratische Glied des Verschiebungsansatzes vernachlässigt. Eine Verformung des Profils senkrecht zur Balkenlängsrichtung wird nicht vorgesehen. Daher ist die Trägerabsenkung für sämtliche Punkte eines Querschnitts identisch. Für die Gurte wird in axialer Richtung ein quadratischer Verschiebungsansatz gewählt. Auf diese Weise kann ein linearer Verlauf der Gleitung  $\gamma_{xy}$  bzw. der Schubspannung  $\tau_{xy}$  im Bereich der Gurte wiedergegeben werden. Die Schubspannung  $\tau_{xy}$  muss sowohl für das Kasten- als auch das I-Trägerprofil an den Stellen für  $y = 0$  verschwinden. Aus diesem Grund muss das lineare Glied im Verschiebungsansatz der Gurte verschwinden. Die geometrische Kompatibilität an den jeweiligen Verzweigungspunkten zwischen Gurten und Steg(en) in axialer Richtung wird durch eine Verknüpfung über das konstante Glied  $u_G$  des Verschiebungsansatzes gewährleistet:

$$u_G = - \frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \frac{b^2}{4} \Theta_5. \quad (3.55)$$

Eine zusätzliche Kraftübergangsbedingung in Form eines stetigen Schubflusses  $N_{xy}$  wird nicht eingeführt, obwohl sich dadurch die Anzahl der Freiheitsgrade um einen reduzieren würde. Ausschlaggebend hierfür ist, dass sich aus der dann notwendigen mehrfachen partiellen Integration Ableitungen der virtuellen unbekanntenen Funktionen  $\delta\Theta_m$  als Randbedingung ergeben. Diese Bedingungen lassen sich nicht eindeutig physikalischen Größen zuordnen. Das Kräftegleichgewicht wird deshalb nur in der schwachen Form über das Prinzip der virtuellen Verrückungen berücksichtigt. Die für dieses Modell verwendeten Verschiebungsansätze und die sich über Gleichung (2.10) ergebenden Verzerrungen sind für den Kasten- und I-Träger in den Tabellen 3.5 bzw. 3.6 zusammengefasst. Die zugehörigen Deformationsmoden zu den auftretenden vier unbekanntenen Funktionen  $\Theta_m$  ( $m = 1, 2, 3, 5$ ) sind den Abbildungen 3.7 bzw. 3.8 zu entnehmen.

Die virtuelle innere Arbeit nach Gleichung (3.2) für den Kastenträger lautet:

$$\delta W_{in \square} = \sum_{[i]=1}^6 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX = \leftrightarrow$$

<sup>3</sup>Reddy nutzt einen ähnlichen Ansatz in seiner Schubdeformationstheorie dritter Ordnung für dicke Platten (siehe [70] und [74]). In seinem Fall wird der Ansatz dritter Ordnung für die Ermittlung der transversalen Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  über der Plattendicke verwendet.

**Tabelle 3.5:** DH2: Verschiebungen und Verzerrungen des Kastenträgers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1]: $u = u_G + y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	$\varepsilon_x = u'_G + y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 + 2y \Theta_5$ $= 2y \Theta_5$
[2]: $u = y \Theta_2 + y^3 \Theta_3$ $v = \Theta_1$ $w = 0$	$\varepsilon_x = y \Theta'_2 + y^3 \Theta'_3$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + 3y^2 \Theta_3 + \Theta'_1$
[3]: $u = -u_G + y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	$\varepsilon_x = -u'_G + y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 - 2y \Theta_5$ $= -2y \Theta_5$
[4]: $u = -u_G - y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	$\varepsilon_x = -u'_G - y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 - 2y \Theta_5$ $= -2y \Theta_5$
[5]: $u = -y \Theta_2 - y^3 \Theta_3$ $v = -\Theta_1$ $w = 0$	$\varepsilon_x = -y \Theta'_2 - y^3 \Theta'_3$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_2 - 3y^2 \Theta_3 - \Theta'_1$
[6]: $u = u_G - y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	$\varepsilon_x = u'_G - y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 + 2y \Theta_5$ $= 2y \Theta_5$

**Tabelle 3.6:** DH2: Verschiebungen und Verzerrungen des I-Trägers

<b>Verschiebungen:</b>	<b>Verzerrungen:</b>
[1]: $u = u_G + y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	$\varepsilon_x = u'_G + y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 + 2y \Theta_5$ $= 2y \Theta_5$
[2]: $u = y \Theta_2 + y^3 \Theta_3$ $v = \Theta_1$ $w = 0$	$\varepsilon_x = y \Theta'_2 + y^3 \Theta'_3$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + 3y^2 \Theta_3 + \Theta'_1$
[3]: $u = -u_G + y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	$\varepsilon_x = -u'_G + y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 - 2y \Theta_5$ $= -2y \Theta_5$
[4]: $u = u_G - y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = \Theta_1$	$\varepsilon_x = u'_G - y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 + 2y \Theta_5$ $= 2y \Theta_5$
[5]: $u = -u_G - y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = 0$ $w = -\Theta_1$	$\varepsilon_x = -u'_G - y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 - 2y \Theta_5$ $= -2y \Theta_5$

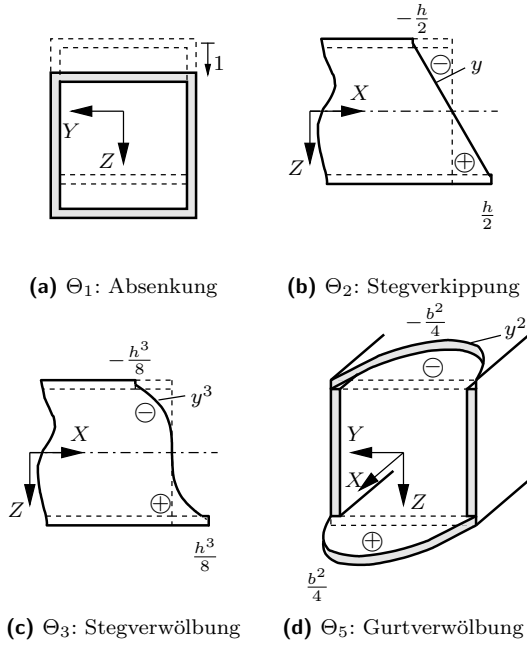
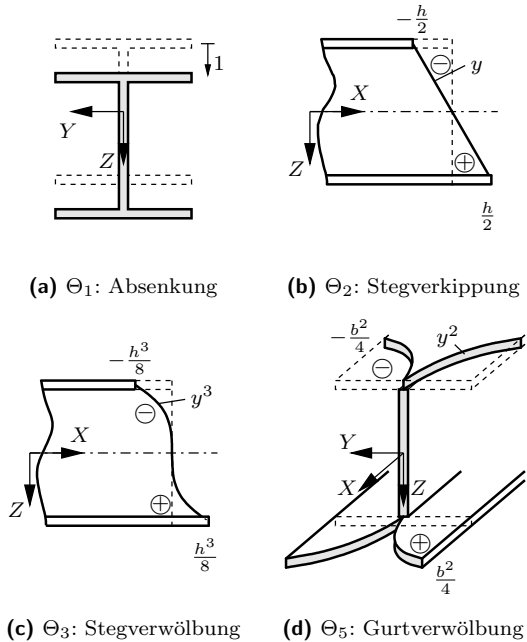


Abbildung 3.7: DH2:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den Kastenträger



$$\begin{aligned}
 &= 4 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[1]} dy_{[1]}}_{J_1} \left( -\frac{h}{2} \delta\Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \delta\Theta'_3 - \frac{b^2}{4} \delta\Theta'_5 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int N_{x[1]} y_{[1]}^2 dy_{[1]}}_{J_2} \delta\Theta'_5 + 2 \underbrace{\int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_3} \delta\Theta_5 \right] dX \\
 &\quad + 2 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_4} \delta\Theta'_2 + \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]}^3 dy_{[2]}}_{J_5} \delta\Theta'_3 \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[2]} dy_{[2]}}_{J_6} (\delta\Theta'_1 + \delta\Theta_2) + 3 \underbrace{\int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]}}_{J_7} \delta\Theta_3 \right] dX \\
 &= \int \left[ -2J'_6 \delta\Theta_1 + 2(hJ'_1 - J'_4 + J_6) \delta\Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_1 - 2J'_5 + 6J_7 \right) \delta\Theta_3 \right. \\
 &\quad \left. + (b^2 J'_1 - 4J'_2 + 8J_3) \delta\Theta_5 \right] dX + 2J_6 \delta\Theta_1 \Big|_0^l + 2(-hJ_1 + J_4) \delta\Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + \left( -\frac{h^3}{2} J_1 + 2J_5 \right) \delta\Theta_3 \Big|_0^l + (-b^2 J_1 + 4J_2) \delta\Theta_5 \Big|_0^l. \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Abkürzungen für die Integrale über den Profilabschnitt:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int N_{x[1]} dy_{[1]} = -\frac{b}{4} A_{11G} \left( h\Theta'_2 + \frac{h^3}{4}\Theta'_3 + \frac{b^2}{3}\Theta'_5 \right), \\
 J_2 &= \int N_{x[1]} y_{[1]}^2 dy_{[1]} = -\frac{b^3}{48} A_{11G} \left( h\Theta'_2 + \frac{h^3}{4}\Theta'_3 + \frac{b^2}{5}\Theta'_5 \right), \\
 J_3 &= \int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]} = \frac{b^3}{12} A_{66G} \Theta_5, \\
 J_4 &= \int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} A_{11S} \left( \Theta'_2 + \frac{3h^2}{20}\Theta'_3 \right), \\
 J_5 &= \int N_{x[2]} y_{[2]}^3 dy_{[2]} = \frac{h^5}{80} A_{11S} \left( \Theta'_2 + \frac{5h^2}{28}\Theta'_3 \right), \\
 J_6 &= \int N_{xy[2]} dy_{[2]} = h A_{66S} \left( \Theta'_1 + \Theta_2 + \frac{h^2}{4}\Theta_3 \right), \\
 J_7 &= \int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} A_{66S} \left( \Theta'_1 + \Theta_2 + \frac{9h^2}{20}\Theta_3 \right). \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

Die an den Stellen  $X = 0$  und  $l$  angreifenden äußeren Lasten leisten nach Gleichung (3.3) eine virtuelle äußere Arbeit von:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au \square} &= \sum_{[i]=1}^6 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m \, dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left[ \sigma_x \left( -\frac{h}{2} \delta \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \delta \Theta_3 + \left( y_{[1]}^2 - \frac{b^2}{4} \right) \delta \Theta_5 \right) + \tau_{xz} \delta \Theta_1 \right] dA_{[1]} \Big|_0^l \\
 &\quad + \int \left[ \sigma_x \left( y_{[2]} \delta \Theta_2 + y_{[2]}^3 \delta \Theta_3 \right) + \tau_{xy} \delta \Theta_1 \right] dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta \Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta \Theta_2 \Big|_0^l + M_{WS} \delta \Theta_3 \Big|_0^l + M_{WG} \delta \Theta_5 \Big|_0^l. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

Die äußeren Lasten in Form von angreifenden Spannungen werden zu einer Transversalkraft  $F_Z$ , einem Biegemoment  $M_Y$  und zwei Wölbmomenten  $M_{WS}$ ,  $M_{WG}$  für Steg(e) und Gurte zusammengefasst. Die Differentialgleichungen (3.60) bis (3.63) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.64) bis (3.67) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in \square} - \delta W_{au \square} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \int \left[ -2J'_6 \delta \Theta_1 + 2(hJ'_1 - J'_4 + J_6) \delta \Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_1 - 2J'_5 + 6J_7 \right) \delta \Theta_3 \right. \\
 &\quad \left. + (b^2 J'_1 - 4J'_2 + 8J_3) \delta \Theta_5 \right] dX \\
 &\quad + (2J_6 - F_Z) \delta \Theta_1 \Big|_0^l + (-2hJ_1 + 2J_4 - M_Y) \delta \Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + \left( -\frac{h^3}{2} J_1 + 2J_5 - M_{WS} \right) \delta \Theta_3 \Big|_0^l + (-b^2 J_1 + 4J_2 - M_{WG}) \delta \Theta_5 \Big|_0^l. \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den Kastenträger lauten:

$$\text{DGL 1: } 4(\Theta'_1 + \Theta'_2) + \underbrace{h^2}_{c_1} \Theta'_3 = 0, \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 2: } &\underbrace{-20h(6A_{11G}b + 2A_{11S}h)}_{c_2 \square} \Theta''_2 - \underbrace{3h^3(10A_{11G}b + 2A_{11S}h)}_{c_3 \square} \Theta''_3 \\
 &\underbrace{-40A_{11G}b^3}_{c_4} \Theta''_5 + \underbrace{480A_{66S}}_{c_5 \square} (\Theta'_1 + \Theta'_2) + \underbrace{120A_{66S}h^2}_{5c_6 \square} \Theta_3 = 0, \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 3: } &\underbrace{-84h(10A_{11G}b + 2A_{11S}h)}_{c_7 \square} \Theta''_2 - \underbrace{15h^3(14A_{11G}b + 2A_{11S}h)}_{c_8 \square} \Theta''_3 \\
 &\underbrace{-280A_{11G}b^3}_{7c_4} \Theta''_5 + \underbrace{3360A_{66S}(\Theta'_1 + \Theta'_2)}_{7c_5 \square} + \underbrace{1512A_{66S}h^2}_{63c_6 \square} \Theta_3 = 0, \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

$$\text{DGL 4: } \underbrace{-20A_{11G}h}_{c_9} \Theta''_2 - \underbrace{5A_{11G}h^3}_{c_{10}} \Theta''_3 - \underbrace{8A_{11G}b^2}_{c_{11}} \Theta''_5 + \underbrace{80A_{66G}}_{c_{12}} \Theta_5 = 0 \tag{3.63}$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \frac{1}{2} A_{66S} h^3 \Theta_3 + 2A_{66S} h (\Theta_2 + \Theta'_1) = F_Z \quad (3.64)$$

$$\Leftrightarrow 2 \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \frac{h}{240} (40A_{11G} b^3 \Theta'_5 + 3h^3 (10A_{11G} b + 2A_{11S} h) \Theta'_2) + 20h(6A_{11G} b + 2A_{11S} h) \Theta'_2 = M_Y \quad (3.65)$$

$$\Leftrightarrow -2h \iint \sigma_x dA_{[1]} + 2 \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0,$$

$$\text{RB 3: } \frac{h^3}{6720} (280A_{11G} b^3 \Theta'_5 + 15h^3 (14A_{11G} b + 2A_{11S} h) \Theta'_2) + 84h(10A_{11G} b + 2A_{11S} h) \Theta'_2 = M_{WS} \quad (3.66)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{h^3}{2} \iint \sigma_x dA_{[1]} + 2 \iint \sigma_x y^3 dA_{[2]} = M_{WS} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_3 = 0,$$

$$\text{RB 4: } \frac{A_{11G} b^3}{120} (8b^2 \Theta'_5 + 5h^3 \Theta'_3 + 20h \Theta'_2) = M_{WG} \quad (3.67)$$

$$\Leftrightarrow -b^2 \iint \sigma_x dA_{[1]} + 4 \iint \sigma_x y^2 dA_{[1]} = M_{WG} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_5 = 0.$$

Auf dem gleichen Weg werden die virtuellen Arbeiten für den I-Träger ermittelt. Die virtuelle innere Arbeit ergibt mit den vom Kastenträger bekannten Abkürzungen (3.57):

$$\begin{aligned} \delta W_{in I} &= \sum_{[i]=1}^5 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\ &= 4 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[1]} dy_{[1]}}_{J_1} \left( -\frac{h}{2} \delta \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \delta \Theta'_3 - \frac{b^2}{4} \delta \Theta'_5 \right) \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{x[1]} y_{[1]}^2 dy_{[1]}}_{J_2} \delta \Theta'_5 + 2 \underbrace{\int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_3} \delta \Theta_5 \right] dX \\ &\quad + \int \left[ \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_4} \delta \Theta'_2 + \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]}^3 dy_{[2]}}_{J_5} \delta \Theta'_3 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[2]} dy_{[2]}}_{J_6} (\delta \Theta'_1 + \delta \Theta_2) + 3 \underbrace{\int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]}}_{J_7} \delta \Theta_3 \right] dX = \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left[ -J'_6 \delta\Theta_1 + (2h J'_1 - J'_4 + J_6) \delta\Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_1 - J'_5 + 3J_7 \right) \delta\Theta_3 \right. \\
 &\quad \left. + (b^2 J'_1 - 4 J'_2 + 8 J_3) \delta\Theta_5 \right] dX + J_6 \delta\Theta_1 \Big|_0^l + (-2h J_1 + J_4) \delta\Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + \left( -\frac{h^3}{2} J_1 + J_5 \right) \delta\Theta_3 \Big|_0^l + (-b^2 J_1 + 4J_2) \delta\Theta_5 \Big|_0^l. \tag{3.68}
 \end{aligned}$$

Die virtuelle äußere Arbeit lässt sich analog zum Kastenträger folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au \text{ I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left[ \sigma_x \left( -\frac{h}{2} \delta\Theta_2 - \frac{h^3}{8} \delta\Theta_3 + \left( y_{[1]}^2 - \frac{b^2}{4} \right) \delta\Theta_5 \right) + \tau_{xz} \delta\Theta_1 \right] dA_{[1]} \Big|_0^l \\
 &\quad + \int \left[ \sigma_x \left( y_{[2]} \delta\Theta_2 + y_{[2]}^3 \delta\Theta_3 \right) + \tau_{xy} \delta\Theta_1 \right] dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta\Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta\Theta_2 \Big|_0^l + M_{WS} \delta\Theta_3 \Big|_0^l + M_{WG} \delta\Theta_5 \Big|_0^l. \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (3.71) und (3.72) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.75) und (3.76) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 &\delta W_{in \text{ I}} - \delta W_{au \text{ I}} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\int \left[ -J'_6 \delta\Theta_1 + (2h J'_1 - J'_4 + J_6) \delta\Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_1 - J'_5 + 3J_7 \right) \delta\Theta_3 \right. \\
 &\quad \left. + (b^2 J'_1 - 4 J'_2 + 8 J_3) \delta\Theta_5 \right] dX \\
 &\quad + (J_6 - F_Z) \delta\Theta_1 \Big|_0^l + (-2h J_1 + J_4 - M_Y) \delta\Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + \left( -\frac{h^3}{2} J_1 + J_5 - M_{WS} \right) \delta\Theta_3 \Big|_0^l + (-b^2 J_1 + 4J_2 - M_{WG}) \delta\Theta_5 \Big|_0^l. \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den I-Träger lauten:

$$\text{DGL 1: } 4(\Theta'_1 + \Theta'_2) + \underbrace{h^2}_{c_1} \Theta'_3 = 0, \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 2: } &\underbrace{-20h(6A_{11G} b + A_{11S} h)}_{c_{2 \text{ I}}} \Theta''_2 - \underbrace{3h^3(10A_{11G} b + A_{11S} h)}_{c_{3 \text{ I}}} \Theta''_3 \\
 &\underbrace{-40A_{11G} b^3}_{c_4} \Theta''_5 + \underbrace{240A_{66S}}_{c_{5 \text{ I}}} (\Theta'_1 + \Theta_2) + \underbrace{60A_{66S} h^2}_{5c_{6 \text{ I}}} \Theta_3 = 0, \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

$$\text{DGL 3: } \underbrace{-84h(10A_{11G} b + A_{11S} h)}_{c_{7I}} \Theta_2'' - \underbrace{15h^3(14A_{11G} b + A_{11S} h)}_{c_{8I}} \Theta_3'' - \underbrace{280A_{11G} b^3}_{7c_4} \Theta_5'' + \underbrace{1680A_{66S} (\Theta_1' + \Theta_2)}_{7c_{5I}} + \underbrace{756A_{66S} h^2}_{63c_{6I}} \Theta_3 = 0, \quad (3.73)$$

$$\text{DGL 4: } \underbrace{-20A_{11G} h}_{c_9} \Theta_2'' - \underbrace{5A_{11G} h^3}_{c_{10}} \Theta_3'' - \underbrace{8A_{11G} b^2}_{c_{11}} \Theta_5'' + \underbrace{80A_{66G}}_{c_{12}} \Theta_5 = 0 \quad (3.74)$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \frac{1}{4} A_{66S} h^3 \Theta_3 + A_{66S} h (\Theta_2 + \Theta_1') = F_Z \quad (3.75)$$

$$\Leftrightarrow \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \frac{h}{240} (40A_{11G} b^3 \Theta_5' + 3h^3(10A_{11G} b + A_{11S} h)\Theta_3' + 20h(6A_{11G} b + A_{11S} h)\Theta_2') = M_Y \quad (3.76)$$

$$\Leftrightarrow -2h \iint \sigma_x dA_{[1]} + \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0,$$

$$\text{RB 3: } \frac{h^3}{6720} (280A_{11G} b^3 \Theta_5' + 15h^3(14A_{11G} b + A_{11S} h)\Theta_3' + 84h(10A_{11G} b + A_{11S} h)\Theta_2') = M_{WS} \quad (3.77)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{h^3}{2} \iint \sigma_x dA_{[1]} + \iint \sigma_x y^3 dA_{[2]} = M_{WS} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_3 = 0,$$

$$\text{RB 4: } \frac{A_{11G} b^3}{120} (8b^2 \Theta_5' + 5h^3 \Theta_3' + 20h \Theta_2') = M_{WG} \quad (3.78)$$

$$\Leftrightarrow -b^2 \iint \sigma_x dA_{[1]} + 4 \iint \sigma_x y^2 dA_{[1]} = M_{WG} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_5 = 0.$$

Die Differentialgleichungssysteme und Randbedingungen des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse sind für beide Profile gleich aufgebaut, genauso wie es bei den zwei in den vorangehenden Kapiteln 3.5.1 und 3.5.2 beschriebenen Modellen der Fall war. Identische Lösungen der Modelle des Kasten- und I-Trägers ergeben sich bei der Verwendung gleicher Lagenaufbauten in Gurten und Stegen. Zusätzlich müssen die Einzelschichtdicken im Steg des I-Trägers genau doppelt so groß gewählt werden, wie die in den Stegen des Kastenträgers; d. h. es gilt  $A_{11S\text{I}} = 2 A_{11S\text{II}}$ .

Eine Lösung des Gleichungssystems der beiden Profile kann mit dem im Kapitel 3.4 beschriebenen Verfahren gefunden werden. Eine geschlossen-analytische Lösung ist somit möglich. Das äquivalente Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet:

$$\underline{\underline{M}}_1 \Theta' + \underline{\underline{M}}_2 \Theta = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Theta' = -\underbrace{\underline{\underline{M}}_1^{-1} \underline{\underline{M}}_2}_{\underline{\underline{G}}} \Theta \quad (3.79)$$

mit

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_5 \\ \Theta_3 \\ \Theta_2 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_5 \\ \Theta_3 \\ \Theta_2 \\ \Theta'_5 \\ \Theta'_3 \\ \Theta'_2 \\ \Theta'_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7c_4 & c_8 & c_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{10} & c_9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{M}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 4 & 0 \\ 0 & 5c_6 & c_5 & 0 & 0 & 0 & c_5 \\ 0 & 63c_6 & 7c_5 & 0 & 0 & 0 & 7c_5 \\ c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Die Matrix  $\underline{\underline{G}}$  hat den dreifachen Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  zu dem die Hauptvektoren

$$\underline{ev}_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{ev}_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{ev}_{11}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{c_9}{c_{12}} \\ -7c_2 + c_7 \\ \frac{28c_6}{63c_2 - 5c_7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

gehören. Zusätzlich existieren die paarweisen Eigenwerte  $\lambda_2 = -\lambda_3$  und  $\lambda_4 = -\lambda_5$  mit den Hauptvektoren  $\underline{ev}_{12}^{(1)}$  bis  $\underline{ev}_{15}^{(1)}$ , die hier nicht dargestellt werden.

Die Lösung von Gleichung (3.79) lautet mit den ermittelten Eigenwerten und Hauptvektoren:

$$\underline{\Theta} = Ko_1 \left( \underline{ev}_{11}^{(3)} + X \underline{ev}_{11}^{(2)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) + Ko_2 \left( \underline{ev}_{11}^{(2)} + X \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) + Ko_3 \underline{ev}_{11}^{(1)} \\ + Ko_4 \underline{ev}_{12}^{(1)} e^{\lambda_2 X} + Ko_5 \underline{ev}_{13}^{(1)} e^{\lambda_3 X} + Ko_6 \underline{ev}_{14}^{(1)} e^{\lambda_4 X} + Ko_7 \underline{ev}_{15}^{(1)} e^{\lambda_5 X}. \quad (3.82)$$

Dies ist gleichzeitig, bis auf die unbekannte Funktion  $\Theta_1$ , die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen für den Kastenträger (3.60) bis (3.63) sowie für den I-Träger (3.71) bis (3.74). Die fehlende Lösung für  $\Theta_1$  ergibt sich nach einmaliger Integration von  $\Theta'_1$  aus der letzten Zeile von Gleichung (3.82):

$$\int \underline{\Theta} dX = Ko_1 \left( X \underline{ev}_{11}^{(3)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_{11}^{(2)} + \frac{X^3}{6} \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) + Ko_2 \left( X \underline{ev}_{11}^{(2)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) \\ + Ko_3 X \underline{ev}_{11}^{(1)} + \frac{Ko_4}{\lambda_2} \underline{ev}_{12}^{(1)} e^{\lambda_2 X} + \frac{Ko_5}{\lambda_3} \underline{ev}_{13}^{(1)} e^{\lambda_3 X} \\ + \frac{Ko_6}{\lambda_4} \underline{ev}_{14}^{(1)} e^{\lambda_4 X} + \frac{Ko_7}{\lambda_5} \underline{ev}_{15}^{(1)} e^{\lambda_5 X} + Ko_8. \quad (3.83)$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_{12}$  sind entsprechend dem verwendeten Modell zu wählen. Die acht Konstanten  $Ko_1$  bis  $Ko_8$  der allgemeinen Lösung können über die Randbedingungen bestimmt werden, wobei für jeden Rand jeweils eine geometrische oder dynamische Bedingung aus den Gleichungen (3.64) bis (3.67) bzw. aus den Gleichungen (3.75) bis (3.78) erforderlich ist.

## 3.6 Modellbildung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse

Die Balkenmodelle mit einer Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse für den Kasten- und I-Träger werden in dem folgenden Unterkapitel hergeleitet. Zusätzlich zu den Verschiebungen in der X-Z-Ebene, die im Kapitel 3.5 behandelt wurden, sind Verschiebungen in Y-Richtung zulässig. Die drei zuvor betrachteten Modelle werden um mögliche Profilverformungen senkrecht zur Balkenlängsachse erweitert. Hierdurch können die tatsächlichen Verformungen besser angenähert und eine genauere Vorhersage getroffen werden. Der Einfluss dieser Erweiterung ist von dem gewählten Schichtaufbau abhängig und wird im später folgenden Kapitel 5 näher untersucht. Auf das erweiterte schubstarre Modell (S3) wird in den später folgenden Kapiteln der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen. Aus diesem Grund werden die zu diesem Modell gehörenden Gleichungen im Anhang A.2 zusammengefasst.

### 3.6.1 Schubdeformationstheorie erster Ordnung (DE3)

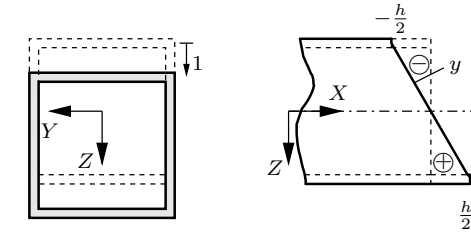
Die Theorie basiert auf der in Kapitel 3.5.2 vorgestellten Schubdeformationstheorie erster Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Diese wird um eine Verformbarkeit des Querschnitts in globaler Y- und Z-Richtung erweitert. Im Übrigen gelten die gleichen Annahmen. Eine Verkipfung der/des Stege(s) in axialer Richtung wird durch einen linearen Verschiebungsansatz dargestellt, wobei Trägerabsenkung und Verkipfung nicht gekoppelt sind. Auf diese Weise wird eine Schubverformung der/des Stege(s) ermöglicht. Der lineare Verlauf der Verschiebungen in dem/den Steg(en) führt zu einem konstanten Anteil bei der Gleitung  $\gamma_{xy}$  und der Schubspannung  $\tau_{xy}$  in diesem Bereich. Aufgrund des Fehlens von Axialkräften als Belastungsfall wird das konstante Glied des axialen Verschiebungsansatzes vernachlässigt. Die Absenkung des/der Steg(e) in globaler Z-Richtung wird durch ein quadratisches Polynom vorgesehen. Hierbei wird das lineare Glied aufgrund der Symmetrie der Schubspannung  $\tau_{xy}$  bezüglich  $Z = 0$  vernachlässigt. Auf diese Weise kann eine Absenkung des gesamten Trägerquerschnitts sowie eine Stauchung des Profils im Bereich  $Z < 0$  bei gleichzeitiger Streckung im Bereich  $Z > 0$  – oder umgekehrt – angenommen werden. Beim Kastenträger muss zusätzlich einem Verkippen der Stege um die globale X-Achse um kleine Winkel wegen einer unbehinderten Querdehnung der Gurte Rechnung getragen werden. Dieses geschieht mit Hilfe eines linearen Ansatzes ohne konstantes Glied in lokaler z-Richtung. Bei den Gurten wird ein konstanter Ansatz in axialer Richtung für eine gleichförmige Verschiebung gewählt. In Richtung der lokalen y-Achse der Gurte ist eine konstante Querdehnung zulässig. Diese wird durch einen linearen Verschiebungsansatz ermöglicht, wobei die Verschiebung beim Kastenträger an den Stellen  $y = 0$  und beim I-Träger bei  $y = \pm \frac{b}{2}$  in den Gurten verschwindet. Oberer und unterer Gurt werden jeweils um den gleichen Betrag aufgrund der Biegung verzerrt, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. In sämtlichen Punkten im Bereich der Gurte ist die Trägerabsenkung identisch. Aufgrund der gewählten Verschiebungsansätze für den/die Steg(e) und die Gurte ist es mit diesem Modell – wie mit den in den Kapiteln 3.5.1 und 3.5.2 beschriebenen Modellen – nicht auf direktem Weg möglich einen realistischen Verlauf der Schubspannung  $\tau_{xy}$  wiederzugeben. Am Ende

**Tabelle 3.7:** DE3: Verschiebungen und Verzerrungen des Kastenträgers

<b>Verschiebungen:</b>	<b>Verzerrungen:</b>
[1, 6]: $u = u_G = -\frac{h}{2} \Theta_2$ $v = y \Theta_6$ $w = w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$	 $\varepsilon_x = u'_G = -\frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = \Theta_6$ $\gamma_{xy} = y \Theta'_6$
[2]: $u = y \Theta_2$ $v = \Theta_1 + y^2 \Theta_7$ $w = y w_S = \frac{b}{h} y \Theta_6$	 $\varepsilon_x = y \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 2y \Theta_7$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1 + y^2 \Theta'_7$
[3, 4]: $u = -u_G = \frac{h}{2} \Theta_2$ $v = -y \Theta_6$ $w = -w_G = -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$	 $\varepsilon_x = -u'_G = \frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = -\Theta_6$ $\gamma_{xy} = -y \Theta'_6$
[5]: $u = -y \Theta_2$ $v = -\Theta_1 - y^2 \Theta_7$ $w = -y w_S = -\frac{b}{h} y \Theta_6$	 $\varepsilon_x = -y \Theta'_2$ $\varepsilon_y = -2y \Theta_7$ $\gamma_{xy} = -\Theta_2 - \Theta'_1 - y^2 \Theta'_7$

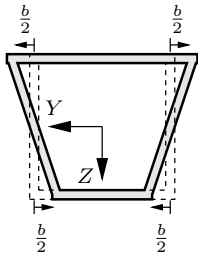
**Tabelle 3.8:** DE3: Verschiebungen und Verzerrungen des I-Trägers

<b>Verschiebungen:</b>	<b>Verzerrungen:</b>
[1, 4]: $u = u_G = -\frac{h}{2} \Theta_2$ $v_{[1]} = \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $v_{[4]} = \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $w = w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$	 $\varepsilon_x = u'_G = -\frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = \Theta_6$ $\gamma_{xy [1]} = \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$ $\gamma_{xy [4]} = \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$
[2]: $u = y \Theta_2$ $v = \Theta_1 + y^2 \Theta_7$ $w = 0$	 $\varepsilon_x = y \Theta'_2$ $\varepsilon_y = 2y \Theta_7$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1 + y^2 \Theta'_7$
[3, 5]: $u = -u_G = \frac{h}{2} \Theta_2$ $v_{[3]} = -\left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $v_{[5]} = -\left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $w = -w_G = -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$	 $\varepsilon_x = -u'_G = \frac{h}{2} \Theta'_2$ $\varepsilon_y = -\Theta_6$ $\gamma_{xy [3]} = -\left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$ $\gamma_{xy [5]} = -\left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$

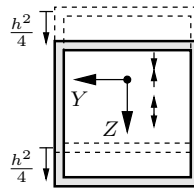


(a)  $\Theta_1$ : Absenkung

(b)  $\Theta_2$ : Stegverkippung

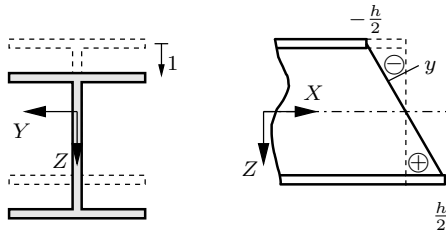


(c)  $\Theta_6$ : Gurtquerdehnung



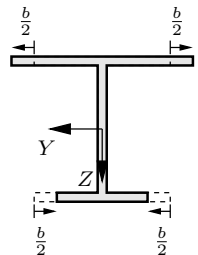
(d)  $\Theta_7$ : Stegquerdehnung

Abbildung 3.9: SDEO\_3D:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den Kastenträger

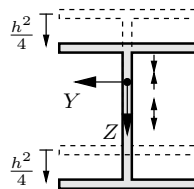


(a)  $\Theta_1$ : Absenkung

(b)  $\Theta_2$ : Stegverkippung



(c)  $\Theta_6$ : Gurtquerdehnung



(d)  $\Theta_7$ : Stegquerdehnung

Abbildung 3.10: SDEO\_3D:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den I-Träger <sup>49</sup>

dieses Kapitels wird ein Weg zur näherungsweise Ermittlung gezeigt. Zur Erfüllung der geometrischen Kompatibilität an den Verzweigungspunkten zwischen Steg(en) und Gurten werden die folgenden Beziehungen eingeführt. In axialer Richtung wird die Verknüpfung über das konstante Glied  $u_G$  des Verschiebungsansatzes der Gurte für das jeweilige Modell hergestellt:

$$u_G = -\frac{h}{2}\Theta_2. \quad (3.84)$$

In globaler Y-Richtung ist dies nur für den Kastenträger über

$$w_S = \frac{b}{h}\Theta_6 \quad (3.85)$$

notwendig. Bei dem I-Träger verschieben sich die Verbindungspunkte der Gurte in dieser Richtung nicht, weil in diesem Fall der Steg parallel zur X-Z-Ebene bleibt und nicht in Querrichtung wie die Stege beim Kastenträger verkippt. Die Verknüpfung in globaler Z-Richtung geschieht für beide Modelle durch:

$$w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4}\Theta_7. \quad (3.86)$$

Das Schubdeformationsmodell erster Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse besitzt somit die vier Freiheitsgrade Trägerabsenkung  $\Theta_1$ , Stegverkipfung  $\Theta_2$  und Querdehnungen für Gurte  $\Theta_6$  und Steg(e)  $\Theta_7$  in Form von unbekanntnen Funktionen. Die Verschiebungen und die sich daraus mit Gleichung (2.10) ergebenden Verzerrungen für den Kasten- und I-Träger sind in den Tabellen 3.7 und 3.8 zusammengefasst. Die Deformationsmoden zu den vier unbekanntnen Funktionen  $\Theta_m$  ( $m = 1, 2, 6, 7$ ) können den Abbildungen 3.9 und 3.10 entnommen werden.

Die virtuelle innere Arbeit für den Kastenträger kann nach Gleichung (3.2) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \delta W_{in \square} &= \sum_{[i]=1}^6 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\ &= 4 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[1]} dy_{[1]}}_{J_1} \left(-\frac{h}{2}\right) \delta \Theta'_2 + \underbrace{\int N_{y[1]} dy_{[1]}}_{J_2} \delta \Theta_6 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_4 \square} \delta \Theta'_6 \right] dX \\ &+ 2 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_5} \delta \Theta'_2 + \underbrace{\int N_{y[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_6} \delta \Theta_7 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[2]} dy_{[2]}}_{J_7} (\delta \Theta'_1 + \delta \Theta_2) + \underbrace{\int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]}}_{J_8} \delta \Theta'_7 \right] dX = \leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left[ -2J_7' \delta\Theta_1 + 2(hJ_1' - J_5' + J_7) \delta\Theta_2 + 4(J_2 - J_4'_{\square}) \delta\Theta_6 \right. \\
 &\quad \left. + (4J_6 - 2J_8') \delta\Theta_7 \right] dX \\
 &\quad + 2J_7 \delta\Theta_1 \Big|_0^l + 2(-hJ_1 + J_5) \delta\Theta_2 \Big|_0^l + 4J_4_{\square} \delta\Theta_6 \Big|_0^l + 2J_8 \delta\Theta_7 \Big|_0^l. \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Es gelten für die beiden Profile die folgenden Abkürzungen der Integrale über dem jeweiligen Profilabschnitt:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int N_{x[1]} dy_{[1]} = \frac{b}{4} (2A_{12G} \Theta_6 - A_{11G} h \Theta_2'), \\
 J_2 &= \int N_{y[1]} dy_{[1]} = \frac{b}{4} (2A_{22G} \Theta_6 - A_{12G} h \Theta_2'), \\
 J_3 &= \int N_{xy[1]} dy_{[1]} = \frac{1}{8} A_{66G} b^2 \Theta_6', \\
 J_{4\square} &= \int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]} = \frac{b^3}{24} A_{66G} \Theta_6', \\
 J_{4\text{I}} &= -\frac{b^3}{48} A_{66G} \Theta_6', \\
 J_5 &= \int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} (2A_{12S} \Theta_7 + A_{11S} \Theta_2'), \\
 J_6 &= \int N_{y[2]} y_{[2]} dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} (2A_{22S} \Theta_7 + A_{12S} \Theta_2'), \\
 J_7 &= \int N_{xy[2]} dy_{[2]} = A_{66S} h (\Theta_2 + \Theta_1') + \frac{h^3}{12} A_{66S} \Theta_7', \\
 J_8 &= \int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} A_{66S} (\Theta_2 + \Theta_1') + \frac{h^5}{80} A_{66S} \Theta_7'. \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

Die an den Stellen  $X = 0$  und  $l$  angreifenden äußeren Lasten leisten eine virtuelle äußere Arbeit, die sich nach Gleichung (3.3) ergibt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au\square} &= \sum_{[i]=1}^6 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left[ \sigma_x \left( -\frac{h}{2} \right) \delta\Theta_2 + \tau_{xy} y_{[1]} \delta\Theta_6 + \tau_{xz} \left( \delta\Theta_1 + \frac{h^2}{4} \delta\Theta_7 \right) \right] dA_{[1]} \Big|_0^l \\
 &\quad + \int \left[ \sigma_x y_{[2]} \delta\Theta_2 + \tau_{xy} \left( \delta\Theta_1 + y_{[2]}^2 \delta\Theta_7 \right) + \tau_{xz} \frac{b}{h} y_{[2]} \delta\Theta_6 \right] dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta\Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta\Theta_2 \Big|_0^l + Q_G \delta\Theta_6 \Big|_0^l + Q_S \delta\Theta_7 \Big|_0^l. \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

Die äußeren Lasten in Form von angreifenden Spannungen werden zu einer Transversalkraft  $F_Z$ , einem Biegemoment  $M_Y$  und zwei Größen für die Querschnittsverformung  $Q_S$ ,  $Q_G$  für Steg(e) und Gurte zusammengefasst. Die Differentialgleichungen (3.91) bis (3.94) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.95) bis (3.98) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned} & \delta W_{in \square} - \delta W_{au \square} = 0 \\ \Leftrightarrow & \int \left[ -2J'_7 \delta\Theta_1 + 2(hJ'_1 - J'_5 + J_7) \delta\Theta_2 + 4(J_2 - J'_{4\square}) \delta\Theta_6 + (4J_6 - 2J'_8) \delta\Theta_7 \right] dX \\ & + (2J_7 - F_Z) \delta\Theta_1 \Big|_0^l + (-2hJ_1 + 2J_5 - M_Y) \delta\Theta_2 \Big|_0^l \\ & + (4J_{4\square} - Q_G) \delta\Theta_6 \Big|_0^l + (2J_8 - Q_S) \delta\Theta_7 \Big|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den Kastenträger lauten:

$$\text{DGL 1: } 12\Theta'_1 + \underbrace{h^2}_{c_1} \Theta''_7 + 12\Theta'_2 = 0, \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \text{DGL 2: } & \underbrace{(6A_{11G}bh + 2A_{11S}h^2)}_{c_2\square} \Theta''_2 - \underbrace{24A_{66S}}_{c_3\square} \Theta'_1 - \underbrace{12A_{12G}b}_{c_4} \Theta'_6 \\ & + \underbrace{2h^2(2A_{12S} - A_{66S})}_{c_5\square} \Theta'_7 - \underbrace{24A_{66S}}_{c_3\square} \Theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\text{DGL 3: } \underbrace{A_{66G}b^2}_{c_6} \Theta''_6 + \underbrace{6A_{12G}h}_{c_7} \Theta'_2 - \underbrace{12A_{22G}}_{c_8} \Theta_6 = 0, \quad (3.93)$$

$$\text{DGL 4: } \underbrace{-20A_{66S}}_{c_9} \Theta'_1 - \underbrace{3A_{66S}h^2}_{c_{10}} \Theta''_7 + \underbrace{20(2A_{12S} - A_{66S})}_{c_{11}} \Theta'_2 + \underbrace{80A_{22S}}_{c_{12}} \Theta_7 = 0 \quad (3.94)$$

mit den vier Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \frac{h}{6} A_{66S} (12\Theta_2 + 12\Theta'_1 + h^2 \Theta'_7) = F_Z \quad (3.95)$$

$$\Leftrightarrow 2 \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \frac{h}{6} (-6A_{12G}b\Theta_6 + 2A_{12S}h^2\Theta_7 + (3A_{11G}bh + A_{11S}h^2)\Theta'_2) = M_Y \quad (3.96)$$

$$\Leftrightarrow -2h \iint \sigma_x dA_{[1]} + 2 \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0,$$

$$\text{RB 3: } \frac{b^3}{6} A_{66G} \Theta'_6 = Q_G \quad (3.97)$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint \tau_{xy} y dA_{[1]} = Q_G \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_6 = 0,$$

$$\text{RB 4: } \frac{h^3}{120} A_{66S} (20\Theta_2 + 20\Theta'_1 + 3h^2 \Theta'_7) = Q_S \quad (3.98)$$

$$\Leftrightarrow 2 \iint \tau_{xy} y^2 dA_{[2]} = Q_S \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_7 = 0.$$

Auf die gleiche Weise können die virtuellen Arbeiten für den I-Träger ermittelt werden. Für die virtuelle innere Arbeit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in \bar{I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\
 &= 4 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[1]} dy_{[1]}}_{J_1} \left(-\frac{h}{2}\right) \delta \Theta'_2 + \underbrace{\int N_{y[1]} dy_{[1]}}_{J_2} \delta \Theta_6 \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{b}{2} \underbrace{\int N_{xy[1]} dy_{[1]}}_{J_3} + \underbrace{\int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_{4\bar{I}}} \right) \delta \Theta'_6 \right] dX \\
 &\quad + \int \left[ \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_5} \delta \Theta'_2 + 2 \underbrace{\int N_{y[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_6} \delta \Theta_7 \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[2]} dy_{[2]}}_{J_7} (\delta \Theta'_1 + \delta \Theta_2) + \underbrace{\int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]}}_{J_8} \delta \Theta'_7 \right] dX \\
 &= \int \left[ -J'_7 \delta \Theta_1 + (2h J'_1 - J'_5 + J_7) \delta \Theta_2 + (4J_2 - 2b J'_3 - 4J'_{4\bar{I}}) \delta \Theta_6 \right. \\
 &\quad \left. + (2J_6 - J'_8) \delta \Theta_7 \right] dX + J_7 \delta \Theta_1 \Big|_0^l + (-2h J_1 + J_5) \delta \Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + (2b J_3 + 4J_{4\bar{I}}) \delta \Theta_6 \Big|_0^l + J_8 \delta \Theta_7 \Big|_0^l \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

und die virtuelle äußere Arbeit lautet:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au \bar{I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left[ \sigma_x \left(-\frac{h}{2}\right) \delta \Theta_2 + \tau_{xy} \left(y_{[1]} + \frac{b}{2}\right) \delta \Theta_6 + \tau_{xz} \left(\delta \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \delta \Theta_7\right) \right] dA_{[1]} \Big|_0^l \\
 &\quad + \int \left[ \sigma_x y_{[2]} \delta \Theta_2 + \tau_{xy} \left(\delta \Theta_1 + y_{[2]}^2 \delta \Theta_7\right) \right] dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta \Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta \Theta_2 \Big|_0^l + Q_G \delta \Theta_6 \Big|_0^l + Q_S \delta \Theta_7 \Big|_0^l. \tag{3.100}
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (3.102) bis (3.105) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.106) bis (3.109) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 & \delta W_{in\mathbb{I}} - \delta W_{au\mathbb{I}} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \int \left[ -J'_7 \delta\Theta_1 + (2h J'_1 - J'_5 + J_7) \delta\Theta_2 + (4J_2 - 2b J'_3 - 4J'_{4\mathbb{I}}) \delta\Theta_6 \right. \\
 & \left. + (2J_6 - J'_8) \delta\Theta_7 \right] dX + (J_7 - F_Z) \delta\Theta_1 \Big|_0^l + (-2h J_1 + J_5 - M_Y) \delta\Theta_2 \Big|_0^l \\
 & + (2b J_3 + 4J_{4\mathbb{I}} - Q_G) \delta\Theta_6 \Big|_0^l + (J_8 - Q_S) \delta\Theta_7 \Big|_0^l = 0. \tag{3.101}
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den I-Träger lauten:

$$\text{DGL 1: } 12\Theta''_1 + \underbrace{h^2}_{c_1} \Theta''_7 + 12\Theta'_2 = 0, \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 2: } & \underbrace{(6A_{11G} b h + A_{11S} h^2)}_{c_{2\mathbb{I}}} \Theta''_2 - \underbrace{12A_{66S}}_{c_{3\mathbb{I}}} \Theta'_1 - \underbrace{12A_{12G} b}_{c_4} \Theta'_6 \\
 & + h^2 \underbrace{(2A_{12S} - A_{66S})}_{c_{5\mathbb{I}}} \Theta'_7 - \underbrace{12A_{66S}}_{c_{3\mathbb{I}}} \Theta_2 = 0, \tag{3.103}
 \end{aligned}$$

$$\text{DGL 3: } \underbrace{A_{66G} b^2}_{c_6} \Theta''_6 + \underbrace{6A_{12G} h}_{c_7} \Theta'_2 - \underbrace{12A_{22G}}_{c_8} \Theta_6 = 0, \tag{3.104}$$

$$\text{DGL 4: } \underbrace{-20A_{66S}}_{c_9} \Theta''_1 - \underbrace{3A_{66S} h^2}_{c_{10}} \Theta''_7 + \underbrace{20(2A_{12S} - A_{66S})}_{c_{11}} \Theta'_2 + \underbrace{80A_{22S}}_{c_{12}} \Theta_7 = 0 \tag{3.105}$$

mit den vier Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \frac{h}{12} A_{66S} (12\Theta_2 + 12\Theta'_1 + h^2 \Theta'_7) = F_Z \tag{3.106}$$

$$\Leftrightarrow \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\text{RB 2: } \frac{h}{12} (-12A_{12G} b \Theta_6 + 2A_{12S} h^2 \Theta_7 + (6A_{11G} b h + A_{11S} h^2) \Theta'_2) = M_Y \tag{3.107}$$

$$\Leftrightarrow -2h \iint \sigma_x dA_{[1]} + \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0,$$

$$\text{RB 3: } \frac{b^3}{6} A_{66G} \Theta'_6 = Q_G \tag{3.108}$$

$$\Leftrightarrow 2b \iint \tau_{xy} dA_{[1]} + 4 \iint \tau_{xy} y dA_{[1]} = Q_G \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_6 = 0,$$

$$\text{RB 4: } \frac{h^3}{240} A_{66S} (20\Theta_2 + 20\Theta'_1 + 3h^2 \Theta'_7) = Q_S \tag{3.109}$$

$$\Leftrightarrow \iint \tau_{xy} y^2 dA_{[2]} = Q_S \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_7 = 0.$$

Die Gleichungen für beide Querschnittsprofile können mit dem in Kapitel 3.4 beschriebenen Verfahren geschlossen-analytisch gelöst werden. Das hierfür notwendige äquivalente Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet:

$$\underline{\underline{M}}_1 \underline{\Theta}' + \underline{\underline{M}}_2 \underline{\Theta} = \underline{0} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\Theta}' = \underbrace{-\underline{\underline{M}}_1^{-1} \underline{\underline{M}}_2}_{\underline{\underline{G}}} \underline{\Theta} \quad (3.110)$$

mit

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_7 \\ \Theta_6 \\ \Theta_2 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_7 \\ \Theta_6 \\ \Theta_2 \\ \Theta_7' \\ \Theta_6' \\ \Theta_2' \\ \Theta_1' \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{10} & 0 & 0 & c_9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{M}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_5 & c_4 & 0 & c_3 \\ 0 & c_8 & 0 & 0 & 0 & c_7 & 0 \\ c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Die Matrix  $\underline{\underline{G}}$  hat den dreifachen Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  zu dem die Hauptvektoren  $\underline{ev}_{11}^{(1)}$ ,  $\underline{ev}_{11}^{(2)}$  und  $\underline{ev}_{11}^{(3)}$  gehören. Zusätzlich existieren die paarweisen Eigenwerte  $\lambda_2 = -\lambda_3$  und  $\lambda_4 = -\lambda_5$  mit den Hauptvektoren  $\underline{ev}_{12}^{(1)}$  bis  $\underline{ev}_{15}^{(1)}$ .

Die Lösung von Gleichung (3.110) lautet mit den ermittelten Eigenwerten und Hauptvektoren:

$$\underline{\Theta} = K_{01} \left( \underline{ev}_{11}^{(3)} + X \underline{ev}_{11}^{(2)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) + K_{02} \left( \underline{ev}_{11}^{(2)} + X \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) + K_{03} \underline{ev}_{11}^{(1)} \\ + K_{04} \underline{ev}_{12}^{(1)} e^{\lambda_2 X} + K_{05} \underline{ev}_{13}^{(1)} e^{\lambda_3 X} + K_{06} \underline{ev}_{14}^{(1)} e^{\lambda_4 X} + K_{07} \underline{ev}_{15}^{(1)} e^{\lambda_5 X}. \quad (3.112)$$

Dies ist gleichzeitig, bis auf die unbekannte Funktion  $\Theta_1$ , die allgemeine Lösung der Gleichgewichtsbedingungen für den Kastenträger (3.91) bis (3.94) sowie für den I-Träger (3.102) bis (3.105). Die fehlende Lösung für  $\Theta_1$  ergibt sich nach einmaliger Integration von  $\Theta_1'$  aus der letzten Zeile von Gleichung (3.112):

$$\int \underline{\Theta} dX = K_{01} \left( X \underline{ev}_{11}^{(3)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_{11}^{(2)} + \frac{X^3}{6} \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) + K_{02} \left( X \underline{ev}_{11}^{(2)} + \frac{X^2}{2} \underline{ev}_{11}^{(1)} \right) \\ + K_{03} X \underline{ev}_{11}^{(1)} + \frac{K_{04}}{\lambda_2} \underline{ev}_{12}^{(1)} e^{\lambda_2 X} + \frac{K_{05}}{\lambda_3} \underline{ev}_{13}^{(1)} e^{\lambda_3 X} \\ + \frac{K_{06}}{\lambda_4} \underline{ev}_{14}^{(1)} e^{\lambda_4 X} + \frac{K_{07}}{\lambda_5} \underline{ev}_{15}^{(1)} e^{\lambda_5 X} + K_{08}. \quad (3.113)$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_{12}$  sind entsprechend dem verwendeten Modell zu wählen. Die acht Konstanten  $Ko_1$  bis  $Ko_8$  der allgemeinen Lösung können über die Randbedingungen bestimmt werden, wobei für jeden Rand jeweils eine geometrische oder dynamische Bedingung aus den Gleichungen (3.95) bis (3.98) bzw. aus den Gleichungen (3.106) bis (3.109) erforderlich ist.

Die Lösungen der Modelle des Kasten- und I-Trägers sind für die Schubdeformationstheorie erster Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse identisch bei der Verwendung gleicher Lagenaufbauten in Gurten und Stegen. Zusätzlich müssen die Einzelschichtdicken im Steg des I-Trägers genau doppelt so groß gewählt werden, wie die in den Stegen des Kastenträgers; d. h. es gilt  $A_{11S\text{I}} = 2 A_{11S\text{K}}$ .

Wie für die in den Kapitel (3.5.1) und (3.5.2) beschriebenen Modelle kann der Schubflussverlauf  $N_{xy}$  nicht direkt über die konstitutiven Beziehungen aus den Verzerrungen ermittelt werden. Er kann jedoch über eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem freigeschnittenen Element kann der Schubfluss mit der Gleichung (3.29) ermittelt werden. Der Schubflussverlauf lautet für den Kastenträger schließlich:

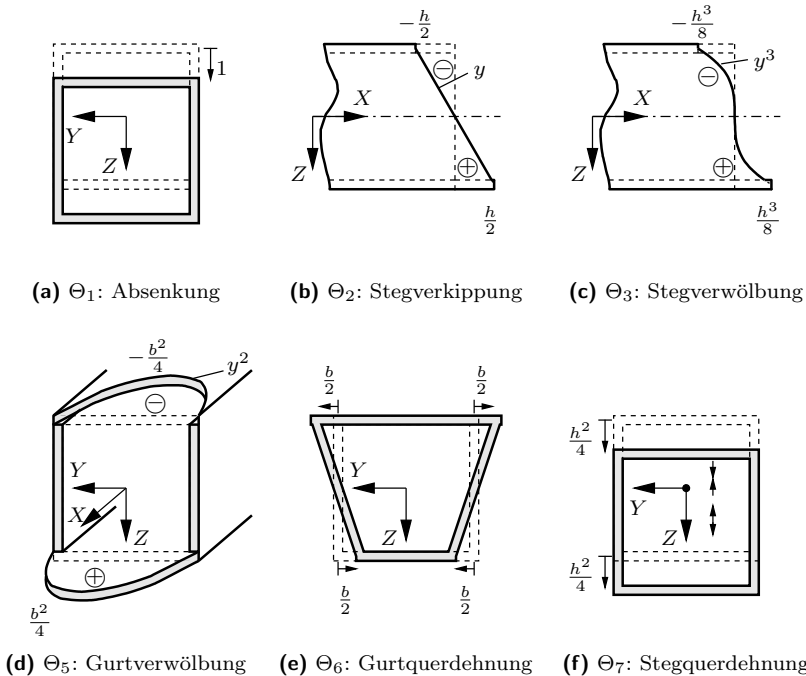
$$\begin{aligned}
 [1]: \quad N_{xy_{[1]}}(y_{[1]}) &= - \int_0^{y_{[1]}} \left[ -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right] dy = \left( \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right) y_{[1]}, \\
 [2]: \quad N_{xy_{[2]}}(y_{[2]}) &= - \int_{-h/2}^{y_{[2]}} [A_{11S} \Theta_2'' + 2A_{12S} \Theta_7'] y dy + N_{xy_{[1]}} \left( \frac{b}{2} \right) \\
 &= - \frac{1}{2} (A_{11S} \Theta_2'' + 2A_{12S} \Theta_7') \left( y_{[2]}^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\
 &\quad + \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right), \\
 [3]: \quad N_{xy_{[3]}}(y_{[3]}) &= - \int_{-b/2}^{y_{[3]}} \left[ \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right] dy + N_{xy_{[2]}} \left( \frac{h}{2} \right) \\
 &= - \left( \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right) y_{[3]}, \\
 [4]: \quad N_{xy_{[4]}}(y_{[4]}) &= - \int_0^{y_{[4]}} \left[ \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right] dy = - \left( \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right) y_{[4]}, \\
 [5]: \quad N_{xy_{[5]}}(y_{[5]}) &= - \int_{-h/2}^{y_{[5]}} [-A_{11S} \Theta_2'' - 2A_{12S} \Theta_7'] y dy + N_{xy_{[4]}} \left( \frac{b}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (A_{11S} \Theta_2'' + 2A_{12S} \Theta_7') \left( y_{[5]}^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right), \\
 [6]: \quad N_{xy_{[6]}}(y_{[6]}) &= - \int_{-b/2}^{y_{[6]}} \left[ -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right] dy + N_{xy_{[5]}} \left( \frac{h}{2} \right) \\
 &= - \left( -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right) y_{[6]} \tag{3.114}
 \end{aligned}$$

und für den I-Träger:

$$\begin{aligned}
 [1]: \quad N_{xy_{[1]}}(y_{[1]}) &= - \int_0^{y_{[1]}} \left[ -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right] dy \\
 &= \left[ \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right] y_{[1]}, \\
 [2]: \quad N_{xy_{[2]}}(y_{[2]}) &= - \int_{-h/2}^{y_{[2]}} [A_{11S} \Theta_2'' + 2A_{12S} \Theta_7'] y dy \\
 &\quad - \left( -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right) b \\
 &= -\frac{1}{2} (A_{11S} \Theta_2'' + 2A_{12S} \Theta_7') \left( y_{[2]}^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right) b, \\
 [3]: \quad N_{xy_{[3]}}(y_{[3]}) &= - \int_0^{y_{[3]}} \left[ \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right] dy \\
 &= \left[ -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right] y_{[3]}, \\
 [4]: \quad N_{xy_{[4]}}(y_{[4]}) &= - \int_0^{y_{[4]}} \left[ -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right] dy \\
 &= \left[ \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right] y_{[4]}, \\
 [5]: \quad N_{xy_{[5]}}(y_{[5]}) &= - \int_0^{y_{[5]}} \left[ \frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' - A_{12G} \Theta_6' \right] dy \\
 &= \left[ -\frac{h}{2} A_{11G} \Theta_2'' + A_{12G} \Theta_6' \right] y_{[5]}. \tag{3.115}
 \end{aligned}$$

### 3.6.2 Schubdeformationstheorie höherer Ordnung (DH3)

Das Modell für Kasten- und I-Träger basiert auf der Schubdeformationstheorie höherer Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse, die in Kapitel 3.5.3 vorgestellt wurde. Eine Verformung des Querschnitts nicht nur in  $X$ -Richtung, sondern auch quer zu dieser (in  $Y$ - und  $Z$ -Richtung), wird nun zusätzlich berücksichtigt. Für den/die Steg(e) wird in axialer Richtung aus der Querschnittsebene heraus als Verschiebungsansatz ein Polynom dritter Ordnung gewählt. Dadurch kann eine Verkipfung und Verwölbung, sowie ein quadratischer Verlauf der Gleitung  $\gamma_{xy}$  bzw. der Schubspannung  $\tau_{xy}$  über der Profilhöhe erfasst werden. Wiederum wird aufgrund der Symmetrie der Schubspannung bezüglich der globalen  $Y$ -Achse bei Biegung und des Fehlens von Axialkräften als Belas-



**Abbildung 3.11:** DH3:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den Kastenträger

tungsfall sowohl das konstante, als auch das quadratische Glied des Verschiebungsansatzes vernachlässigt. Die Absenkung des/der Steg(e) in globaler  $Z$ -Richtung wird durch ein quadratisches Polynom modelliert. Hierbei wird das lineare Glied aufgrund der Symmetrie der Schubspannung  $\tau_{xy}$  vernachlässigt. Auf diese Weise kann eine Absenkung des gesamten Trägerquerschnitts sowie eine Stauchung des Profils im Bereich  $Z < 0$  bei gleichzeitiger Streckung im Bereich  $Z > 0$  – oder umgekehrt – angenommen werden. Beim Kastenträger muss zusätzlich einem Verkippen der Stege um die globale  $X$ -Achse um kleine Winkel wegen einer unbehinderten Querdehnung der Gurte Rechnung getragen werden. Dieses wird durch einen linearen Ansatz ohne konstantes Glied in lokaler  $z$ -Richtung erreicht. Wie bei der Schubdeformationstheorie höherer Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse wird ein quadratisches Polynom als axialer Verschiebungsansatz für die Gurte gewählt, um hier einen linearen Verlauf der Gleitung  $\gamma_{xy}$  bzw. der Schubspannung  $\tau_{xy}$  abbilden zu können. Beim Kastenträger wird dabei das lineare Glied vernachlässigt, weil an den Stellen für  $y = 0$  in den Gurten die Schubspannung verschwinden muss. Bei dem I-Träger wird dieses Glied benötigt. In Richtung der lokalen  $y$ -Achse ist eine konstante Querdehnung zulässig. Diese wird durch einen linearen Verschiebungsansatz

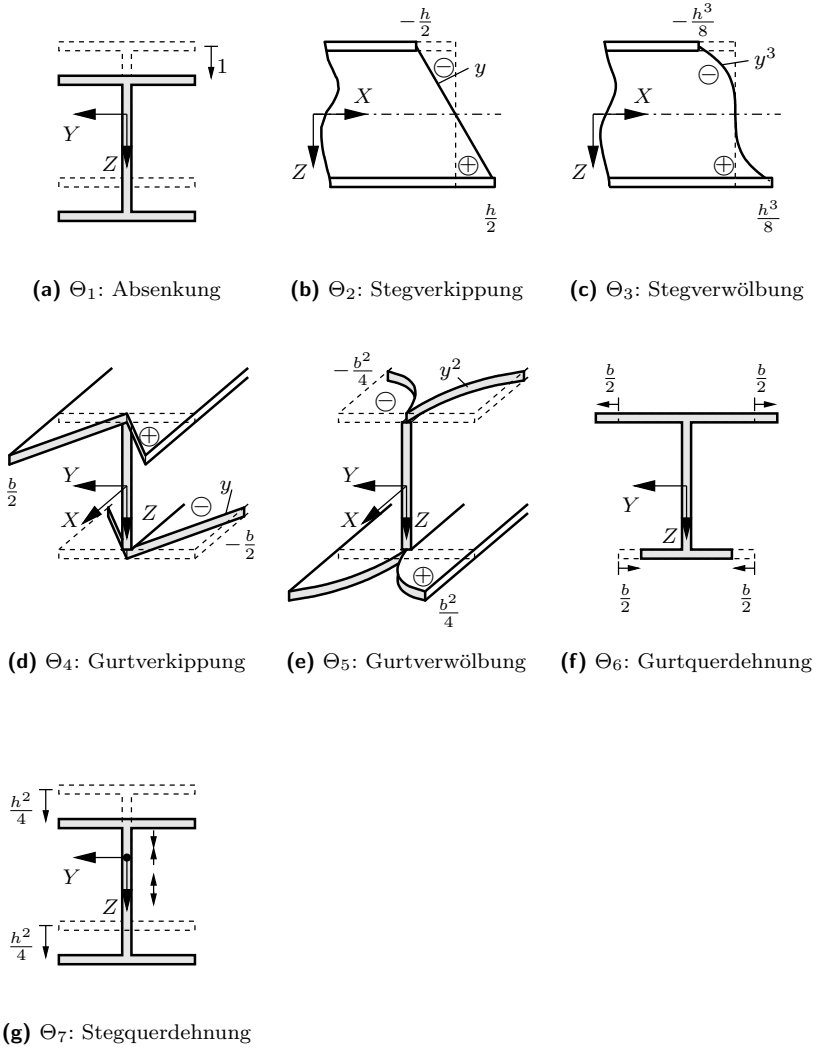


Abbildung 3.12: DH3:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den I-Träger

**Tabelle 3.9:** DH3: Verschiebungen und Verzerrungen des Kastenträgers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1]: $u = u_G + y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = y \Theta_6$ $w = w_G$ $= \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = u'_G + y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = \Theta_6$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 + 2y \Theta_5 + y \Theta'_6$ $= 2y \Theta_5 + y \Theta'_6$
[2]: $u = y \Theta_2 + y^3 \Theta_3$ $v = \Theta_1 + y^2 \Theta_7$ $w = y w_S = \frac{b}{h} y \Theta_6$	$\varepsilon_x = y \Theta'_2 + y^3 \Theta'_3$ $\varepsilon_y = 2y \Theta_7$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + 3y^2 \Theta_3 + \Theta'_1 + y^2 \Theta'_7$
[3]: $u = -u_G + y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = -y \Theta_6$ $w = -w_G$ $= -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = -u'_G + y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = -\Theta_6$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 - 2y \Theta_5 - y \Theta'_6$ $= -2y \Theta_5 - y \Theta'_6$
[4]: $u = -u_G - y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = -y \Theta_6$ $w = -w_G$ $= -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = -u'_G - y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = -\Theta_6$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 - 2y \Theta_5 - y \Theta'_6$ $= -2y \Theta_5 - y \Theta'_6$
[5]: $u = -y \Theta_2 - y^3 \Theta_3$ $v = -\Theta_1 - y^2 \Theta_7$ $w = -y w_S = -\frac{b}{h} y \Theta_6$	$\varepsilon_x = -y \Theta'_2 - y^3 \Theta'_3$ $\varepsilon_y = -2y \Theta_7$ $\gamma_{xy} = -\Theta_2 - 3y^2 \Theta_3 - \Theta'_1 - y^2 \Theta'_7$
[6]: $u = u_G - y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = y \Theta_6$ $w = w_G$ $= \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = u'_G - y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = \Theta_6$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 + 2y \Theta_5 + y \Theta'_6$ $= 2y \Theta_5 + y \Theta'_6$

**Tabelle 3.10:** DH3: Verschiebungen und Verzerrungen des I-Trägers

Verschiebungen:	Verzerrungen:
[1]:	
$u = u_G + y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3$ $+ \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_4 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $w = w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = u'_G + y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3$ $+ \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_4 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = \Theta_6$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 + 2y \Theta_5 + \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$
[2]:	
$u = y \Theta_2 + y^3 \Theta_3$ $v = \Theta_1 + y^2 \Theta_7$ $w = 0$	$\varepsilon_x = y \Theta'_2 + y^3 \Theta'_3$ $\varepsilon_y = 2y \Theta_7$ $\gamma_{xy} = \Theta_2 + 3y^2 \Theta_3 + \Theta'_1 + y^2 \Theta'_7$
[3]:	
$u = -u_G + y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 + \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_4$ $- \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = -\left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $w = -w_G = -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = -u'_G + y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 + \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_4$ $- \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = -\Theta_6$ $\gamma_{xy} = \Theta_4 - 2y \Theta_5 - \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$
[4]:	
$u = u_G - y \Theta_4 + y^2 \Theta_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \Theta_3$ $- \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_4 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $w = w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = u'_G - y \Theta'_4 + y^2 \Theta'_5$ $= -\frac{h}{2} \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \Theta'_3$ $- \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_4 + \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = \Theta_6$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 + 2y \Theta_5 + \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$
[5]:	
$u = -u_G - y \Theta_4 - y^2 \Theta_5$ $= \frac{h}{2} \Theta_2 + \frac{h^3}{8} \Theta_3 - \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_4$ $- \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta_5$ $v = -\left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_6$ $w = -w_G = -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$	$\varepsilon_x = -u'_G - y \Theta'_4 - y^2 \Theta'_5$ $= \frac{h}{2} \Theta'_2 + \frac{h^3}{8} \Theta'_3 - \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_4$ $- \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Theta'_5$ $\varepsilon_y = -\Theta_6$ $\gamma_{xy} = -\Theta_4 - 2y \Theta_5 - \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_6$

vorgesehen, wobei die Verschiebung beim Kastenträger an den Stellen  $y = 0$  und beim I-Träger bei  $y = \pm \frac{b}{2}$  verschwindet. Oberer und unterer Gurt werden jeweils um den gleichen Betrag aufgrund der Biegung verzerrt, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Trägerabsenkung ist für sämtliche Punkte im Bereich der Gurte identisch. Zur Erfüllung der geometrischen Kompatibilität an den Verzweigungspunkten zwischen Steg(en) und Gurten werden die folgenden Beziehungen eingeführt: In axialer Richtung wird die Verknüpfung über das konstante Glied  $u_G$  des Verschiebungsansatzes der Gurte für das jeweilige Modell hergestellt:

$$u_{G\Box} = -\frac{h}{2}\Theta_2 - \frac{h^3}{8}\Theta_3 - \frac{b^2}{4}\Theta_5, \quad (3.116)$$

$$u_{GI} = -\frac{h}{2}\Theta_2 - \frac{h^3}{8}\Theta_3 + \frac{b}{2}\Theta_4 - \frac{b^2}{4}\Theta_5. \quad (3.117)$$

In globaler  $Y$ -Richtung ist dies nur für den Kastenträger über

$$w_S = \frac{b}{h}\Theta_6 \quad (3.118)$$

notwendig. Bei dem I-Träger verschieben sich die Verbindungspunkte der Gurte in dieser Richtung nicht, weil sich der Steg nicht aus der  $X$ - $Z$ -Ebene seitlich verkippt. Die Verknüpfung in globaler  $Z$ -Richtung geschieht für beide Modelle über:

$$w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4}\Theta_7. \quad (3.119)$$

Auch bei dieser Schubdeformationstheorie könnte die Anzahl der Freiheitsgrade durch eine zusätzliche Kraftübergangsbedingung in Form eines stetigen Schubflusses  $N_{xy}$  um einen reduziert werden. Hiervon wird aus den schon in Kapitel 3.5.3 genannten Gründen abgesehen. Damit wird das Kräftegleichgewicht nur in der schwachen Form über das Prinzip der virtuellen Verrückungen berücksichtigt. Die für dieses Modell verwendeten Verschiebungsansätze und die sich über Gleichung (2.10) ergebenden Verzerrungen sind für den Kasten- und I-Träger in den Tabellen 3.9 bzw. 3.10 zusammengefasst. Die zugehörigen Deformationsmoden zu den auftretenden sechs unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  ( $m = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ ) für den Kasten- und den sieben unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  ( $m = 1, \dots, 7$ ) beim I-Träger sind den Abbildungen 3.11 bzw. 3.12 zu entnehmen.

Die virtuelle innere Arbeit lautet nach Gleichung (3.2) für den Kastenträger:

$$\begin{aligned} \delta W_{in\Box} &= \sum_{[i]=1}^6 \iint [N_x \delta\varepsilon_x + N_y \delta\varepsilon_y + N_{xy} \delta\gamma_{xy}] dy_{[i]} dX \\ &= 4 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[1]} dy_{[1]}}_{J_{1\Box}} \left( -\frac{h}{2}\delta\Theta'_2 - \frac{h^3}{8}\delta\Theta'_3 - \frac{b^2}{4}\delta\Theta'_5 \right) + \underbrace{\int N_{x[1]} y_{[1]}^2 dy_{[1]}}_{J_{3\Box}} \delta\Theta'_5 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{y[1]} dy_{[1]}}_{J_{4\Box}} \delta\Theta_6 + \underbrace{\int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_{6\Box}} (2\delta\Theta_5 + \delta\Theta'_6) \right] dX \quad \hookrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]} \delta\Theta'_2}_{J_7} + \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]}^3 dy_{[2]} \delta\Theta'_3}_{J_8} + 2 \underbrace{\int N_{y[2]} y_{[2]} dy_{[2]} \delta\Theta_7}_{J_9} \right. \\
 & \left. + \underbrace{\int N_{xy[2]} dy_{[2]} (\delta\Theta'_1 + \delta\Theta_2)}_{J_{10}} + \underbrace{\int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]} (3\delta\Theta_3 + \delta\Theta'_7)}_{J_{11}} \right] dX \\
 & = \int \left[ -2J'_{10} \delta\Theta_1 + 2(hJ'_{1\Box} - J'_7 + J_{10}) \delta\Theta_2 \right. \\
 & \quad + \left( \frac{h^3}{2} J'_{1\Box} - 2J'_8 + 6J_{11} \right) \delta\Theta_3 + (b^2 J'_{1\Box} - 4J'_{3\Box} + 8J_{6\Box}) \delta\Theta_5 \\
 & \quad \left. + 4(J_{4\Box} - J'_{6\Box}) \delta\Theta_6 + (4J_9 - 2J'_{11}) \delta\Theta_7 \right] dX \\
 & \quad + 2J_{10} \delta\Theta_1 \Big|_0^l + 2(-hJ_{1\Box} + J_7) \delta\Theta_2 \Big|_0^l + \left( -\frac{h^3}{2} J_{1\Box} + 2J_8 \right) \delta\Theta_3 \Big|_0^l \\
 & \quad + (-b^2 J_{1\Box} + 4J_{3\Box}) \delta\Theta_5 \Big|_0^l + 4J_{6\Box} \delta\Theta_6 \Big|_0^l + 2J_{11} \delta\Theta_7 \Big|_0^l. \tag{3.120}
 \end{aligned}$$

Es gelten für die beiden Profile die folgenden Abkürzungen der Integrale über den Profilabschnitt:

$$\begin{aligned}
 J_{1\Box} &= \int N_{x[1]} dy_{[1]} = -\frac{b}{4} A_{11G} \left( h\Theta'_2 + \frac{h^3}{4} \Theta'_3 + \frac{b^2}{3} \Theta'_5 \right) + \frac{b}{2} A_{12G} \Theta_6, \\
 J_{1\bar{1}} &= -\frac{b}{4} A_{11G} \left( h\Theta'_2 + \frac{h^3}{4} \Theta'_3 - \frac{b}{2} \Theta'_4 + \frac{b^2}{3} \Theta'_5 \right) + \frac{b}{2} A_{12G} \Theta_6, \\
 J_{2\bar{1}} &= \int N_{x[1]} y_{[1]} dy_{[1]} \\
 &= \frac{b^2}{192} A_{11G} (12h\Theta'_2 + 3h^3\Theta'_3 - 4b\Theta'_4 + 3b^2\Theta'_5) - \frac{b^2}{8} A_{12G} \Theta_6, \\
 J_{3\Box} &= \int N_{x[1]} y_{[1]}^2 dy_{[1]} = -\frac{b^3}{48} A_{11G} \left( h\Theta'_2 + \frac{h^3}{4} \Theta'_3 + \frac{b^2}{5} \Theta'_5 \right) + \frac{b^3}{24} A_{12G} \Theta_6, \\
 J_{3\bar{1}} &= -\frac{b^3}{48} A_{11G} \left( h\Theta'_2 + \frac{h^3}{4} \Theta'_3 - \frac{b}{4} \Theta'_4 + \frac{b^2}{5} \Theta'_5 \right) + \frac{b^3}{24} A_{12G} \Theta_6, \\
 J_{4\Box} &= \int N_{y[1]} dy_{[1]} = -\frac{b}{48} A_{12G} (12h\Theta'_2 + 3h^3\Theta'_3 + 4b^2\Theta'_5) + \frac{b}{2} A_{22G} \Theta_6, \\
 J_{4\bar{1}} &= -\frac{b}{48} A_{12G} (12h\Theta'_2 + 3h^3\Theta'_3 - 6b\Theta'_4 + 4b^2\Theta'_5) + \frac{b}{2} A_{22G} \Theta_6, \\
 J_{5\bar{1}} &= \int N_{xy[1]} dy_{[1]} = \frac{b}{8} A_{66G} (4\Theta_4 + b(-2\Theta_5 + \Theta'_6)), \\
 J_{6\Box} &= \int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]} = \frac{b^3}{24} A_{66G} (2\Theta_5 + \Theta'_6), \\
 J_{6\bar{1}} &= \frac{b^2}{48} A_{66G} (-6\Theta_4 + 4b\Theta_5 - b\Theta'_6),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_7 &= \int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} A_{11S} \left( \Theta'_2 + \frac{3h^2}{20} \Theta'_3 \right) + \frac{h^3}{6} A_{12S} \Theta_7, \\
 J_8 &= \int N_{x[2]} y_{[2]}^3 dy_{[2]} = \frac{h^5}{80} A_{11S} \left( \Theta'_2 + \frac{5h^2}{28} \Theta'_3 \right) + \frac{h^5}{40} A_{12S} \Theta_7, \\
 J_9 &= \int N_{y[2]} y_{[2]} dy_{[2]} = \frac{h^3}{240} A_{12S} (20\Theta'_2 + 3h^2 \Theta'_3) + \frac{h^3}{6} A_{22S} \Theta_7, \\
 J_{10} &= \int N_{xy[2]} dy_{[2]} = h A_{66S} \left( \Theta'_1 + \Theta_2 + \frac{h^2}{4} \Theta'_3 + \frac{h^2}{12} \Theta'_7 \right), \\
 J_{11} &= \int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]} = \frac{h^3}{12} A_{66S} \left( \Theta'_1 + \Theta_2 + \frac{9h^2}{20} \Theta'_3 + \frac{3h^2}{20} \Theta'_7 \right). \quad (3.121)
 \end{aligned}$$

Die an den Stellen  $X = 0$  und  $l$  angreifenden äußeren Lasten leisten nach Gleichung (3.3) die folgende virtuelle äußere Arbeit:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au\Box} &= \sum_{[i]=1}^6 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left[ \sigma_x \left( -\frac{h}{2} \delta \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \delta \Theta_3 + \left( y_{[1]}^2 - \frac{b^2}{4} \right) \delta \Theta_5 \right) + \tau_{xy} y_{[1]} \delta \Theta_6 \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{xz} \left( \delta \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \delta \Theta_7 \right) \right] dA_{[1]} \Big|_0^l + \int \left[ \sigma_x \left( y_{[2]} \delta \Theta_2 + y_{[2]}^3 \delta \Theta_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{xy} \left( \delta \Theta_1 + y_{[2]}^2 \delta \Theta_7 \right) + \tau_{xz} \frac{b}{h} y_{[2]} \delta \Theta_6 \right] dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta \Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta \Theta_2 \Big|_0^l + M_{WS} \delta \Theta_3 \Big|_0^l + M_{WG} \delta \Theta_5 \Big|_0^l \\
 &\quad + Q_G \delta \Theta_6 \Big|_0^l + Q_S \delta \Theta_7 \Big|_0^l. \quad (3.122)
 \end{aligned}$$

Die äußeren Lasten in Form von angreifenden Spannungen werden zu einer Transversalkraft  $F_Z$ , einem Biegemoment  $M_Y$  und zwei Wölbmomenten  $M_{WS}$ ,  $M_{WG}$  sowie zwei Größen für die Querschnittsverformung  $Q_S$ ,  $Q_G$  für Steg(e) und Gurte zusammengefasst. Die Differentialgleichungen (3.124) bis (3.129) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.130) bis (3.135) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in\Box} - \delta W_{au\Box} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \int \left[ -2J'_{10} \delta \Theta_1 + 2(hJ'_{1\Box} - J'_7 + J_{10}) \delta \Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_{1\Box} - 2J'_8 + 6J_{11} \right) \delta \Theta_3 \right. \\
 &\quad \left. + (b^2 J'_{1\Box} - 4J'_{3\Box} + 8J_{6\Box}) \delta \Theta_5 + 4(J_{4\Box} - J'_{6\Box}) \delta \Theta_6 + (4J_9 - 2J'_{11}) \delta \Theta_7 \right] dX \\
 &\quad + (2J_{10} - F_Z) \delta \Theta_1 \Big|_0^l + (-2hJ_{1\Box} + 2J_7 - M_Y) \delta \Theta_2 \Big|_0^l \quad \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( -\frac{h^3}{2} J_{1\Box} + 2J_8 - M_{WS} \right) \delta\Theta_3 \Big|_0^l + (-b^2 J_{1\Box} + 4J_{3\Box} - M_{WG}) \delta\Theta_5 \Big|_0^l \\
 & + (4J_{6\Box} - Q_G) \delta\Theta_6 \Big|_0^l + (2J_{11} - Q_S) \delta\Theta_7 \Big|_0^l.
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den Kastenträger lauten:

$$\text{DGL 1: } 12\Theta_1'' + h^2 \Theta_7'' + 12\Theta_2' + 3h^2 \Theta_3' = 0, \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 2: } & 20h(3A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_2'' + 3h^3(5A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_3'' \\
 & + 20A_{11G}b^3 \Theta_5'' - 240A_{66S} \Theta_1' - 120A_{12G}b \Theta_6' \\
 & + 20h^2(2A_{12S} - A_{66S}) \Theta_7' - 240A_{66S} \Theta_2 - 60A_{66S} h^2 \Theta_3 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 3: } & 84h(5A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_2'' + 15h^3(7A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_3'' \\
 & + 140A_{11G}b^3 \Theta_5'' - 1680A_{66S} \Theta_1' - 840A_{12G}b \Theta_6' \\
 & + 84h^2(2A_{12S} - 3A_{66S}) \Theta_7' - 1680A_{66S} \Theta_2 - 756A_{66S} h^2 \Theta_3 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 4: } & -20A_{11G}h \Theta_2'' - 5A_{11G}h^3 \Theta_3'' - 8A_{11G}b^2 \Theta_5'' \\
 & + 40(-A_{12G} + A_{66G}) \Theta_6' + 80A_{66G} \Theta_5 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 5: } & 2A_{66G}b^2 \Theta_6'' + 12A_{12G}h \Theta_2' + 3A_{12G}h^3 \Theta_3' \\
 & + 4b^2(A_{12G} + A_{66G}) \Theta_5' - 24A_{22G} \Theta_6 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 6: } & -20A_{66S} \Theta_1' - 3A_{66S} h^2 \Theta_7' + 20(2A_{12S} - A_{66S}) \Theta_2' \\
 & + 3h^2(2A_{12S} - 3A_{66S}) \Theta_3' + 80A_{22S} \Theta_7 = 0
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \frac{h}{6} A_{66S} (12\Theta_2 + 3h^2 \Theta_3 + 12\Theta_1' + h^2 \Theta_7') = F_Z \tag{3.130}$$

$$\Leftrightarrow 2 \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \text{RB 2: } & \frac{h}{120} (-120A_{12G}b \Theta_6 + 40A_{12S}h^2 \Theta_7 + 20h(3A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_2' \\
 & + 3h^3(5A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_3' + 20A_{11G}b^3 \Theta_5') = M_Y
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$\Leftrightarrow -2h \iint \sigma_x dA_{[1]} + 2 \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \text{RB 3: } & \frac{h^3}{3360} (-840A_{12G}b \Theta_6 + 168A_{12S}h^2 \Theta_7 + 84h(5A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_2' \\
 & + 15h^3(7A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_3' + 140A_{11G}b^3 \Theta_5') = M_{WS}
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{h^3}{2} \iint \sigma_x dA_{[1]} + 2 \iint \sigma_x y^3 dA_{[2]} = M_{WS} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_3 = 0,$$

$$\text{RB 4: } \frac{b^3}{120} (-40A_{12G} \Theta_6 + A_{11G} (20h \Theta_2' + 5h^3 \Theta_3' + 8b^2 \Theta_5')) = M_{WG} \tag{3.133}$$

$$\Leftrightarrow -b^2 \iint \sigma_x dA_{[1]} + 4 \iint \sigma_x y^2 dA_{[1]} = M_{WG} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_5 = 0,$$

$$\text{RB 5: } \frac{b^3}{6} A_{66G} (2\Theta_5 + \Theta'_6) = Q_G \quad (3.134)$$

$$\Leftrightarrow 4 \iint \tau_{xy} y \, dA_{[1]} = Q_G \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_6 = 0,$$

$$\text{RB 6: } \frac{h^3}{120} A_{66S} (20\Theta_2 + 9h^2 \Theta_3 + 20\Theta'_1 + 3h^2 \Theta'_7) = Q_S \quad (3.135)$$

$$\Leftrightarrow 2 \iint \tau_{xy} y^2 \, dA_{[2]} = Q_S \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_7 = 0.$$

Auf dem gleichen Weg werden die virtuellen Arbeiten für den I-Träger ermittelt. Die virtuelle innere Arbeit lautet mit den zuvor definierten Abkürzungen (3.121):

$$\begin{aligned} \delta W_{in \text{ I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \iint [N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}] dy_{[i]} \, dX \\ &= 4 \int \left[ \underbrace{\int N_{x[1]} dy_{[1]}}_{J_{1\text{I}}} \left( -\frac{h}{2} \delta \Theta'_2 - \frac{h^3}{8} \delta \Theta'_3 + \frac{b}{2} \delta \Theta'_4 - \frac{b^2}{4} \delta \Theta'_5 \right) \right. \\ &\quad + \underbrace{\int N_{x[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_{2\text{I}}} \delta \Theta'_4 + \underbrace{\int N_{x[1]} y_{[1]}^2 dy_{[1]}}_{J_{3\text{I}}} \delta \Theta'_5 + \underbrace{\int N_{y[1]} dy_{[1]}}_{J_{4\text{I}}} \delta \Theta_6 \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[1]} dy_{[1]}}_{J_{5\text{I}}} \left( \delta \Theta_4 + \frac{b}{2} \delta \Theta'_6 \right) + \underbrace{\int N_{xy[1]} y_{[1]} dy_{[1]}}_{J_{6\text{I}}} (2\delta \Theta_5 + \delta \Theta'_6) \right] dX \\ &\quad + \int \left[ \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_7} \delta \Theta'_2 + \underbrace{\int N_{x[2]} y_{[2]}^3 dy_{[2]}}_{J_8} \delta \Theta'_3 + 2 \underbrace{\int N_{y[2]} y_{[2]} dy_{[2]}}_{J_9} \delta \Theta_7 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int N_{xy[2]} dy_{[2]}}_{J_{10}} (\delta \Theta'_1 + \delta \Theta_2) + \underbrace{\int N_{xy[2]} y_{[2]}^2 dy_{[2]}}_{J_{11}} (3\delta \Theta_3 + \delta \Theta'_7) \right] dX \\ &= \int \left[ -J'_{10} \delta \Theta_1 + (2h J'_{1\text{I}} - J_7 + J_{10}) \delta \Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_{1\text{I}} - J'_8 + 3J_{11} \right) \delta \Theta_3 \right. \\ &\quad + (-2b J'_{1\text{I}} - 4J'_{2\text{I}} + 4J_{5\text{I}}) \delta \Theta_4 + (b^2 J'_{1\text{I}} - 4J'_{3\text{I}} + 8J_{6\text{I}}) \delta \Theta_5 \\ &\quad \left. + (4J_{4\text{I}} - 2b J'_{5\text{I}} - 4J'_{6\text{I}}) \delta \Theta_6 + (2J_9 - J'_{11}) \delta \Theta_7 \right] dX + J_{10} \delta \Theta_1 \Big|_0^l \\ &\quad + (-2h J_{1\text{I}} + J_7) \delta \Theta_2 \Big|_0^l + \left( -\frac{h^3}{2} J_{1\text{I}} + J_8 \right) \delta \Theta_3 \Big|_0^l + (2b J_{1\text{I}} + 4J_{2\text{I}}) \delta \Theta_4 \Big|_0^l \\ &\quad + (-b^2 J_{1\text{I}} + 4J_{3\text{I}}) \delta \Theta_5 \Big|_0^l + (2b J_{5\text{I}} + 4J_{6\text{I}}) \delta \Theta_6 \Big|_0^l + J_{11} \delta \Theta_7 \Big|_0^l. \quad (3.136) \end{aligned}$$

Die virtuelle äußere Arbeit lässt sich analog zum Kastenträger folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{au\text{I}} &= \sum_{[i]=1}^5 \int_{\partial V} \sigma_{mn} n_n \delta u_m \, dA_{[i]} \Big|_0^l \\
 &= \int \left[ \sigma_x \left( -\frac{h}{2} \delta \Theta_2 - \frac{h^3}{8} \delta \Theta_3 + \left( y_{[1]} + \frac{b}{2} \right) \delta \Theta_4 + \left( y_{[1]}^2 - \frac{b^2}{4} \right) \delta \Theta_5 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{xy} \left( y_{[1]} + \frac{b}{2} \right) \delta \Theta_6 + \tau_{xz} \left( \delta \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \delta \Theta_7 \right) \right] dA_{[1]} \Big|_0^l \\
 &\quad + \int \left[ \sigma_x \left( y_{[2]} \delta \Theta_2 + y_{[2]}^3 \delta \Theta_3 \right) + \tau_{xy} \left( \delta \Theta_1 + y_{[2]}^2 \delta \Theta_7 \right) \right] dA_{[2]} \Big|_0^l \dots \\
 &= F_Z \delta \Theta_1 \Big|_0^l + M_Y \delta \Theta_2 \Big|_0^l + M_{WS} \delta \Theta_3 \Big|_0^l + M_{KG} \delta \Theta_4 \Big|_0^l + M_{WG} \delta \Theta_5 \Big|_0^l \\
 &\quad + Q_G \delta \Theta_6 \Big|_0^l + Q_S \delta \Theta_7 \Big|_0^l. \tag{3.137}
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (3.139) und (3.145) sowie die zugehörigen Randbedingungen (3.146) und (3.152) werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in\text{I}} - \delta W_{au\text{I}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \int \left[ -J'_{10} \delta \Theta_1 + (2h J'_{1\text{I}} - J'_7 + J_{10}) \delta \Theta_2 + \left( \frac{h^3}{2} J'_{1\text{I}} - J'_8 + 3J_{11} \right) \delta \Theta_3 \right. \\
 &\quad \left. + (-2b J'_{1\text{I}} - 4J'_{2\text{I}} + 4J_{5\text{I}}) \delta \Theta_4 + (b^2 J'_{1\text{I}} - 4J'_{3\text{I}} + 8J_{6\text{I}}) \delta \Theta_5 \right. \\
 &\quad \left. + (4J_{4\text{I}} - 2b J'_{5\text{I}} - 4J'_{6\text{I}}) \delta \Theta_6 + (2J_9 - J'_{11}) \delta \Theta_7 \right] dX \\
 &\quad + (J_{10} - F_Z) \delta \Theta_1 \Big|_0^l + (-2h J_{1\text{I}} + J_7 - M_Y) \delta \Theta_2 \Big|_0^l \\
 &\quad + \left( -\frac{h^3}{2} J_{1\text{I}} + J_8 - M_{WS} \right) \delta \Theta_3 \Big|_0^l + (2b J_{1\text{I}} + 4J_{2\text{I}} - M_{KG}) \delta \Theta_4 \Big|_0^l \\
 &\quad + (-b^2 J_{1\text{I}} + 4J_{3\text{I}} - M_{WG}) \delta \Theta_5 \Big|_0^l + (2b J_{5\text{I}} + 4J_{6\text{I}} - Q_G) \delta \Theta_6 \Big|_0^l \\
 &\quad + (J_{11} - Q_S) \delta \Theta_7 \Big|_0^l. \tag{3.138}
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsdifferentialgleichungen für den I-Träger lauten:

$$\text{DGL 1: } 12\Theta_1'' + h^2 \Theta_7'' + 12\Theta_2' + 3h^2 \Theta_3' = 0, \tag{3.139}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DGL 2: } &20h(6A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_2'' + 3h^3(10A_{11G}b + A_{11S}h) \Theta_3'' \\
 &- 60A_{11G}b^2 \Theta_4'' + 40A_{11G}b^3 \Theta_5'' - 240A_{66S} \Theta_1' - 240A_{12G}b \Theta_6' \\
 &+ 20h^2(2A_{12S} - A_{66S}) \Theta_7' - 240A_{66S} \Theta_2 - 60A_{66S} h^2 \Theta_3 = 0, \tag{3.140}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DGL 3: } & 84h(10A_{11G}b + A_{11S}h)\Theta_2'' + 15h^3(14A_{11G}b + A_{11S}h)\Theta_3'' \\ & - 420A_{11G}b^2\Theta_4'' + 280A_{11G}b^3\Theta_5'' - 1680A_{66S}\Theta_1' - 1680A_{12G}b\Theta_6' \\ & + 84h^2(2A_{12S} - 3A_{66S})\Theta_7' - 1680A_{66S}\Theta_2 - 756A_{66S}h^2\Theta_3 = 0, \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned} \text{DGL 4: } & 12A_{11G}bh\Theta_2'' + 3A_{11G}bh^3\Theta_3'' - 8A_{11G}b^2\Theta_4'' + 5A_{11G}b^3\Theta_5'' \\ & - 24(A_{12G} - A_{66G})b\Theta_6' + 96A_{66G}\Theta_4 - 48A_{66G}b\Theta_5 = 0, \end{aligned} \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} \text{DGL 5: } & 40A_{11G}bh\Theta_2'' + 10A_{11G}bh^3\Theta_3'' - 25A_{11G}b^2\Theta_4'' + 16A_{11G}b^3\Theta_5'' \\ & 40b(-2A_{12G} + A_{66G})\Theta_6' + 240A_{66G}\Theta_4 + -160A_{66G}b\Theta_5 = 0, \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} \text{DGL 6: } & 2A_{66G}b^2\Theta_6'' + 12A_{12G}h\Theta_2' + 3A_{12G}h^3\Theta_3' + 6b(A_{66G} - A_{12G})\Theta_4' \\ & + 2b^2(2A_{12G} - A_{66G})\Theta_5' - 24A_{22G}\Theta_6 = 0, \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} \text{DGL 7: } & -20A_{66S}\Theta_1'' - 3A_{66S}h^2\Theta_7'' + 20(2A_{12S} - A_{66S})\Theta_2' \\ & + 3h^2(2A_{12S} - 3A_{66S})\Theta_3' + 80A_{22S}\Theta_7 = 0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{RB 1: } \frac{h}{12}A_{66S}(12\Theta_2 + 3h^2\Theta_3 + 12\Theta_1' + h^2\Theta_7') = F_Z \quad (3.146)$$

$$\Leftrightarrow \iint \tau_{xy} dA_{[2]} = F_Z \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{RB 2: } & \frac{h}{240}(-240A_{12G}b\Theta_6 + 40A_{12S}h^2\Theta_7 + 20h(6A_{11G}b + A_{11S}h)\Theta_2' \\ & + 3h^3(10A_{11G}b + A_{11S}h)\Theta_3' - 60A_{11G}b^2\Theta_4' + 40A_{11G}b^3\Theta_5') = M_Y \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\Leftrightarrow -2h \iint \sigma_x dA_{[1]} + \iint \sigma_x y dA_{[2]} = M_Y \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{RB 3: } & \frac{h^3}{6720}(-1680A_{12G}b\Theta_6 + 168A_{12S}h^2\Theta_7 \\ & + 84h(10A_{11G}b + A_{11S}h)\Theta_2' + 15h^3(14A_{11G}b + A_{11S}h)\Theta_3' \\ & - 420A_{11G}b^2\Theta_4' + 280A_{11G}b^3\Theta_5') = M_{WS} \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{h^3}{2} \iint \sigma_x dA_{[1]} + \iint \sigma_x y^3 dA_{[2]} = M_{WS} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_3 = 0,$$

$$\text{RB 4: } \frac{b^2}{48}(24A_{12G}\Theta_6 - A_{11G}(12h\Theta_2' + 3h^3\Theta_3' - 8b\Theta_4' + 5b^2\Theta_5')) = M_{KG} \quad (3.149)$$

$$\Leftrightarrow 2b \iint \sigma_x dA_{[1]} + 4 \iint \sigma_x y dA_{[1]} = M_{KG} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{RB 5: } & \frac{b^3}{240}(-80A_{12G}\Theta_6 \\ & + A_{11G}(40h\Theta_2' + 10h^3\Theta_3' - 25b\Theta_4' + 16b^2\Theta_5')) = M_{WG} \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\Leftrightarrow -b^2 \iint \sigma_x dA_{[1]} + 4 \iint \sigma_x y^2 dA_{[1]} = M_{WG} \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_5 = 0,$$

$$\text{RB 6: } \frac{b^2}{6}A_{66G}(3\Theta_4 + b(-\Theta_5 + \Theta_6')) = Q_G \quad (3.151)$$

$$\Leftrightarrow 2b \iint \tau_{xy} dA_{[1]} + 4 \iint \tau_{xy} y dA_{[1]} = Q_G \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_6 = 0,$$

$$\text{RB 7: } \frac{h^3}{240} A_{66S} (20\Theta_2 + 9h^2\Theta_3 + 20\Theta'_1 + 3h^2\Theta'_7) = Q_S \quad (3.152)$$

$$\Leftrightarrow \iint \tau_{xy} y^2 dA_{[2]} = Q_S \quad \text{oder} \quad \delta\Theta_7 = 0.$$

Im Gegensatz zu den Modellen ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse aus Kapitel 3.5 unterscheiden sich die Differentialgleichungen und Randbedingungen des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse für das Kasten- und I-Profil in der Anzahl der unbekannt Funktionen. Zur Beschreibung des I-Trägers sind sieben und für den Kastenträger sechs Freiheitsgrade notwendig. Aus diesem Grund existieren bei dem I-Träger eine Differentialgleichung und für jedes Trägerende jeweils eine Randbedingung zusätzlich.

Die Lösungen der Modelle des Kasten- und I-Trägers sind bei der Verwendung gleicher Lagenaufbauten in Gurten und Stegen einander ähnlich, aber selbst unter Vernachlässigung des zusätzlichen Freiheitsgrads beim I-Träger nicht identisch. Zusätzlich müssen die Einzelschichtdicken im Steg des I-Trägers genau doppelt so groß gewählt werden, wie die in den Stegen des Kastenträgers; d. h. es gilt  $A_{11S\text{I}} = 2 A_{11S\text{K}}$ .

Die Differentialgleichungen sind vom gleichen Typ wie die bei den vorherigen Modellen. Eine Überführung in ein homogenes Gleichungssystem erster Ordnung ist möglich. Somit kann eine geschlossen-analytische Lösung des Gleichungssystems der beiden Profile theoretisch mit dem im Kapitel 3.4 beschriebenen Verfahren gefunden werden. Soll das gekoppelte Gleichungssystem durch dieses Vorgehen mit Hilfe der Programme MATLAB oder MATHEMATICA gelöst werden, treten numerische Schwierigkeiten in Form von nahezu singulären Matrizen auf. Diese werden durch Terme mit stark variierender Größenordnung hervorgerufen. Daher wird in der vorliegenden Arbeit für dieses Modell ausschließlich das im folgenden Kapitel 4 beschriebene Lösungsverfahren angewandt.



## 4 Entwicklung eines numerischen Lösungsverfahrens für die Strukturmodelle

Mit Hilfe des in diesem Kapitel vorgestellten Verfahrens können die gekoppelten Differentialgleichungssysteme der im vorherigen Kapitel 3 hergeleiteten Balkenmodelle unter Einhaltung der Randbedingungen numerisch gelöst werden. Dies ist insbesondere für die Balkentheorie höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse von großem Vorteil. Bei diesem Modell treten Probleme mit einer geschlossen-analytischen Lösung auf, weil ein Teil der Gleichungssysteme nahezu singular wird. Durch eine numerische Approximation der Gleichungen kann diese Schwierigkeit abgemildert werden. Für die anderen Modelle bietet das Verfahren die Möglichkeit sehr einfach einen veränderten Verschiebungsansatz oder geänderte Randbedingungen testen zu können. Die numerische Lösung der Gleichungssysteme für die einzelnen Modelle ist aber stets aufwendiger und ineffizienter als die geschlossen-analytische Lösung. Das zugrunde liegende mathematische Vorgehen wurde in Diskussionen des Autors mit Wackerfuß<sup>1</sup> von diesem für isotrope Materialien entwickelt und vom Autor der vorliegenden Arbeit auf anisotrope Mehrschichtverbunde erweitert und implementiert.

### 4.1 Herleitung des semi-analytischen Verfahrens

Das numerische Lösungsverfahren basiert auf einer Finite-Elemente-Formulierung für die unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  in Balkenlängsrichtung. Sämtliche Größen, die von den Koordinaten  $y_{[i]}$  und  $z_{[i]}$  innerhalb eines Querschnitts abhängen, können vorab analytisch berechnet werden. Auf diese Weise kann das dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales reduziert und somit der numerische Aufwand erheblich gesenkt werden.

Für eine übersichtlichere Darstellung werden die Verschiebungen  $u_{[i]}$ ,  $v_{[i]}$  und  $w_{[i]}$  der einzelnen Segmente sowie die unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  in vektorieller Schreibweise zusammengefasst. Der Zusammenhang zwischen beiden wird über die Matrix  $\underline{\underline{O}}_{[i]}$  aus den Verschiebungsansätzen hergestellt:

$$\underline{u}_{[i]} = \begin{bmatrix} u_{[i]} \\ v_{[i]} \\ w_{[i]} \end{bmatrix} = \underline{\underline{O}}_{[i]} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \underline{\underline{O}}_{[i]} \underline{\Theta}. \quad (4.1)$$

Die Verzerrungen  $\varepsilon_x [i]$ ,  $\varepsilon_y [i]$  und  $\gamma_{xy} [i]$  und die Spannungen  $\sigma_x [i]$ ,  $\sigma_y [i]$  und  $\tau_{xy} [i]$  werden in Voigt-Notation geschrieben. Erstere werden mit den unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  und deren partiellen Ableitungen  $\Theta_{m, X}$  über den Verzerrungstensor (2.10) verknüpft:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{[i]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x [i] \\ \varepsilon_y [i] \\ \gamma_{xy} [i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[i], X} \\ v_{[i], y_{[i]}} \\ u_{[i], y_{[i]}} + v_{[i], X} \end{bmatrix} = \hookrightarrow$$

---

<sup>1</sup>Dr.-Ing. Jens Wackerfuß, Leiter der Emmy-Noether-Gruppe MISMO, TU Darmstadt

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hat{P}}_{[i]} \\ \underline{\hat{P}}_{[i]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_{1, X} \\ \Theta_{2, X} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{P}}_{[i]} \\ \underline{\hat{P}}_{[i]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Theta} \\ \underline{\Theta}_{, X} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Letztere ergeben sich schichtenweise mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen (2.11) aus den Verzerrungen. Durch Integration über die Laminatdicke ergibt sich der Zusammenhang von den Schnittkräften  $N_x^{[i]}$ ,  $N_y^{[i]}$  und  $N_{xy}^{[i]}$  und den Verzerrungen  $\underline{\varepsilon}_{[i]}$  über die Dehnsteifigkeiten  $\underline{A}_{[i]}$  des Profilschnitts:

$$\underline{\tilde{N}}_{[i]} = \begin{bmatrix} N_x^{[i]} \\ N_y^{[i]} \\ N_{xy}^{[i]} \end{bmatrix} = \int \underline{\sigma}_{[i]} dz = \int \underline{\bar{Q}}_{[i]} \underline{\varepsilon}_{[i]} dz = \underline{A}_{[i]} \underline{\varepsilon}_{[i]}. \quad (4.3)$$

Für die virtuellen Größen gelten analog die folgenden Beziehungen:

$$\delta \underline{u}_{[i]} = \underline{O}_{[i]} \delta \underline{\Theta}, \quad (4.4)$$

$$\delta \underline{\varepsilon}_{[i]} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{P}}_{[i]} \\ \underline{\hat{P}}_{[i]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{\Theta} \\ \delta \underline{\Theta}_{, X} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Differentialgleichungen werden wie in dem vorherigen Kapitel 3 über das Prinzip der virtuellen Verrückungen gewonnen. Nach der Gleichung (3.2) gilt für die virtuelle innere Arbeit

$$\delta W_{in} = \sum_{[i]=1}^I \iint \underline{\tilde{N}}_{[i]}^T \delta \underline{\varepsilon}_{[i]} dy dX \quad (4.6)$$

und für die virtuelle äußere Arbeit nach Gleichung (3.3) zusammengefasst

$$\delta W_{au} = \sum_{[j]=1}^J \underline{F}^T(X_j) \delta \underline{\Theta}(X_j). \quad (4.7)$$

Die virtuelle innere Arbeit wird für sämtliche  $I$  Profilschnitte berechnet, während die virtuelle äußere Arbeit für die  $J$  äußeren Einzellasten  $\underline{F}$  an den Angriffspunkten  $X_j$  ermittelt wird.

Das ursprünglich dreidimensionale Problem wird in zwei Stufen geschlossen-analytisch auf eine eindimensionale Aufgabenstellung reduziert. Die erste Reduktion erfolgt in Gleichung (3.2) durch Integration über die Laminatdicke. Für eine weitere Vereinfachung werden die Beziehungen (4.2), (4.3) und (4.5) in die Gleichung (4.6) eingesetzt. Unter der

Berücksichtigung, dass die Matrix der Dehnsteifigkeiten  $\underline{\underline{A}}$  symmetrisch ist, folgt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{in} &= \sum_{[i]=1}^I \iint \underline{\underline{\varepsilon}}_{[i]}^T \underline{\underline{A}}_{[i]} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{[i]} \, dy \, dX \\
 &= \sum_{[i]=1}^I \iint \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{\Theta}}, X \end{array} \right]^T \left[ \underline{\underline{P}}_{[i]}, \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]} \right]^T \underline{\underline{A}}_{[i]} \left[ \underline{\underline{P}}_{[i]}, \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]} \right] \left[ \begin{array}{c} \delta \underline{\underline{\Theta}} \\ \delta \underline{\underline{\Theta}}, X \end{array} \right] \, dy \, dX \\
 &= \sum_{[i]=1}^I \int_l \int_{y_{[i]}} \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{\Theta}}, X \end{array} \right]^T \int_{y_{[i]}} \left[ \underline{\underline{P}}_{[i]}, \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]} \right]^T \underline{\underline{A}}_{[i]} \left[ \underline{\underline{P}}_{[i]}, \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]} \right] \, dy \left[ \begin{array}{c} \delta \underline{\underline{\Theta}} \\ \delta \underline{\underline{\Theta}}, X \end{array} \right] \, dX. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Ausschließlich die Matrizen  $\underline{\underline{P}}_{[i]}$  bzw.  $\underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]}$  besitzen in Gleichung (4.8) eine Abhängigkeit von  $y_{[i]}$ . Daher wird das Integral über  $y_{[i]}$  nur auf die in der Mitte befindlichen Terme angewendet. Diese können mit den Untermatrizen

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{R}}_{11} &= \sum_{[i]=1}^I \int_{y_{[i]}} \underline{\underline{P}}_{[i]}^T \underline{\underline{A}}_{[i]} \underline{\underline{P}}_{[i]} \, dy, \\
 \underline{\underline{R}}_{12} &= \sum_{[i]=1}^I \int_{y_{[i]}} \underline{\underline{P}}_{[i]}^T \underline{\underline{A}}_{[i]} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]} \, dy = \underline{\underline{R}}_{21}^T, \quad (4.9) \\
 \underline{\underline{R}}_{22} &= \sum_{[i]=1}^I \int_{y_{[i]}} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]}^T \underline{\underline{A}}_{[i]} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[i]} \, dy
 \end{aligned}$$

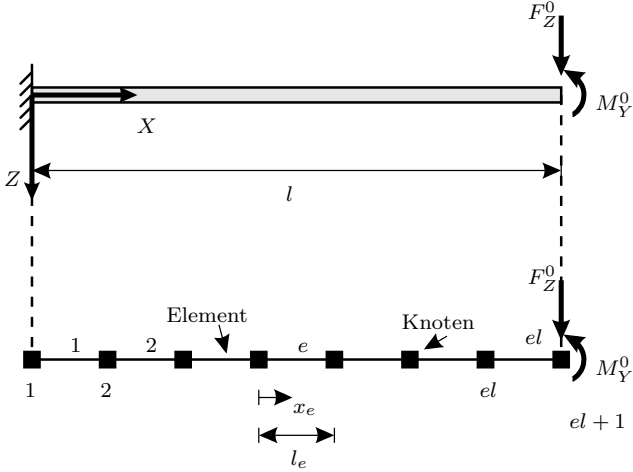
folgendermaßen zusammengefasst

$$\delta W_{in} = \int_l \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{\Theta}}, X \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{R}}_{11} & \underline{\underline{R}}_{12} \\ \underline{\underline{R}}_{21} & \underline{\underline{R}}_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \delta \underline{\underline{\Theta}} \\ \delta \underline{\underline{\Theta}}, X \end{array} \right] \, dX \quad (4.10)$$

und analytisch bestimmt werden. Zusätzlich wird die Summe über alle Profilabschnitte  $I$  in die Untermatrizen (4.9) einbezogen. Die unbekannt Funktionen  $\underline{\underline{\Theta}}$  und deren Ableitungen  $\underline{\underline{\Theta}}, X$  werden im Weiteren über eine eindimensionale Finite-Elemente-Formulierung numerisch bestimmt.

Hierzu wird der Träger in eine endliche Anzahl von Elementen zerlegt. Sowohl im Fall von Abbildung 4.1 als auch in den Implementierungen der vorliegenden Arbeit werden lineare zwei-Knoten-Elemente mit einer Länge  $l_e$  ( $l = \sum_{e=1}^{nel} l_e$ ) verwendet. Dies führt zu  $el$  Elementen bei  $el+1$  Knoten. Für jedes Element  $e$  wird ein lokales Koordinatensystem  $x_e$  eingeführt. Dieses weist entlang der Balkenlängsachse in Richtung globaler  $X$ -Koordinate. Einzellasten können an jedem Knoten angreifen. In dieser Arbeit werden ausschließlich Randlasten bei  $X = l$  vorgesehen. Die unbekannt Funktionen  $\underline{\underline{\Theta}}$ , deren Ableitung und die jeweiligen virtuellen Größen werden wie folgt approximiert:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\Theta}}^e &= \sum_{L=1}^2 N_L \hat{\underline{\underline{\Theta}}}_L^e, \quad \delta \underline{\underline{\Theta}}^e = \sum_{M=1}^2 N_M \delta \hat{\underline{\underline{\Theta}}}_M^e \\
 \underline{\underline{\Theta}}, X^e &= \sum_{L=1}^2 N_{L,X} \hat{\underline{\underline{\Theta}}}_L^e, \quad \delta \underline{\underline{\Theta}}, X^e = \sum_{M=1}^2 N_{M,X} \delta \hat{\underline{\underline{\Theta}}}_M^e. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$



**Abbildung 4.1:** FE-Diskretisierung des Trägers mit 2-Knoten-Elementen

Dabei lauten die linearen Formfunktionen für das zwei-Knoten-Element:

$$N_1^e = 1 - \frac{x_e}{l_e}, \quad N_2^e = \frac{x_e}{l_e} \quad \text{und} \quad N_{1,x_e}^e = -\frac{1}{l_e} = -N_{2,x_e}^e. \quad (4.12)$$

Die Indizes  $L$  und  $M$  kennzeichnen die Knoten eines Elements und  $\hat{\Theta}_L^e$  repräsentiert die unbekannt Werte am Knoten  $L$ .

Mit den Elementapproximationen (4.11) und den Formfunktionen (4.12) ergibt sich die virtuelle innere Arbeit aus Gleichung (4.10) für das Element  $e$ :

$$\delta W_{in}^e = \sum_{L=1}^2 \sum_{M=1}^2 \hat{\Theta}_L^{eT} \underline{k}_{LM}^e \delta \hat{\Theta}_M^e, \quad (4.13)$$

Hierbei wird die Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{k}_{[i]LM}^e$  ausgedrückt durch:

$$\underline{k}_{LM}^e = \alpha_{1LM} \underline{R}_{11} + \alpha_{2ML} \underline{R}_{12}^T + \alpha_{2LM} \underline{R}_{12} + \alpha_{3LM} \underline{R}_{22} \quad (4.14)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{1LM} &= \int_0^{l_e} N_L^e N_M^e dx_e : \alpha_{111} = 2\alpha_{112} = 2\alpha_{121} = \alpha_{122} = \frac{l_e}{3}, \\ \alpha_{2LM} &= \int_0^{l_e} N_L^e N_{M,x_e}^e dx_e : \alpha_{211} = -\alpha_{212} = \alpha_{221} = -\alpha_{222} = -\frac{1}{2}, \\ \alpha_{3LM} &= \int_0^{l_e} N_{L,x_e}^e N_{M,x_e}^e dx_e : \alpha_{311} = -\alpha_{312} = -\alpha_{321} = \alpha_{322} = \frac{1}{l_e}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die in (4.10) verbliebene Integration wird für jedes Element gesondert durchgeführt, wobei nur noch die Formfunktionen  $N_L^e$  und ihre Ableitungen  $N_{L, x_e}^e$  in (4.15) eine Abhängigkeit von  $X$  bzw.  $x_e$  aufweisen. Damit kann die Steifigkeitsmatrix  $\underline{k}_{LM}^e$  für jedes Element analytisch bestimmt werden.

Die virtuelle äußere Arbeit aus Gleichung (4.7) für ein Element lautet zusammen mit den Elementapproximationen (4.11):

$$\delta W_{au}^e = \sum_{M=1}^2 \tilde{F}_M^{eT} N_M^e \delta \hat{\Theta}_M^e. \quad (4.16)$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ergibt sich für ein Element:

$$\begin{aligned} \delta W_{in}^e - \delta W_{au}^e &= 0 \\ \sum_{L=1}^2 \sum_{M=1}^2 \hat{\Theta}_L^{eT} \underline{k}_{LM}^e \delta \hat{\Theta}_M^e - \sum_{M=1}^2 \tilde{F}_M^{eT} N_M^e \delta \hat{\Theta}_M^e &= 0 \\ \sum_{L=1}^2 \sum_{M=1}^2 \left( \hat{\Theta}_L^{eT} \underline{k}_{LM}^e - \tilde{F}_M^{eT} N_M^e \right) \delta \hat{\Theta}_M^e &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Für das Gesamtsystem werden die Beiträge der Elemente zu einer globalen Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  mit Diagonalform und einem globalen Lastvektor  $\hat{F}$ , der die an den einzelnen Knoten angreifenden Einzellasten enthält, zusammengesetzt. Das globale Gleichungssystem sieht wie folgt aus:

$$\underline{K} \hat{\Theta} = \hat{F} \quad (4.18)$$

mit

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \underline{k}_{11}^1 & \underline{k}_{12}^1 \\ \underline{k}_{21}^1 & \underline{k}_{22}^1 + \underline{k}_{11}^2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ \underline{k}_{12}^2 & 0 \end{matrix} & \cdots \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \underline{k}_{22}^2 + \underline{k}_{11}^3 \\ \underline{k}_{21}^3 & \underline{k}_{22}^3 + \underline{k}_{11}^4 \end{matrix}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^T, \quad \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_1 \\ \hat{\Theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\Theta}_{el+1} \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^1 \\ \tilde{F}_2^1 + \tilde{F}_1^2 \\ \vdots \\ \tilde{F}_2^{el+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \vdots \\ \hat{F}_{el+1} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Der Vektor  $\hat{\Theta}$  enthält die einzelnen Werte der unbekanntenen Funktionen an den Knoten für sämtliche Elemente. Durch eine Einarbeitung der geometrischen Randbedingungen wird die zuvor singuläre Steifigkeitsmatrix positiv definit und damit das Gleichungssystem (4.18) eindeutig lösbar. Durch das vorgestellte Vorgehen kann der Einfluss einzelner Deformationsmoden auf das gesamte System durch eine Veränderung der Randbedingungen bzw. das Festsetzen einzelner Moden ermittelt werden.

## 4.2 Anwendung auf die erweiterte Schubdeformationstheorie höherer Ordnung

Im Folgenden werden die notwendigen Matrizen für die Schubdeformationstheorie höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH3) für den Kasten- und I-Träger angegeben. Für weitere Modelle sind die entsprechenden Matrizen im Anhang A.3 zu finden. Die Zugehörigkeit der jeweiligen Matrizen zum Kasten- bzw. I-Träger ist durch die Indizes  $\square$  bzw.  $\mathbb{I}$  gekennzeichnet.

Aus Gleichung (4.1) ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{O}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{O}}_{[2]} \\ \underline{\underline{O}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{O}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & -\frac{b^2}{4} + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & y & y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{by}{h} & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & \frac{b^2}{4} - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & -y & -y^3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{by}{h} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{O}}_{[1]} \\ \underline{\underline{O}}_{[2]} \\ \underline{\underline{O}}_{[3]} \\ \underline{\underline{O}}_{[4]} \\ \underline{\underline{O}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & \frac{b}{2} + y & -\frac{b^2}{4} + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} + y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & y & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & -\frac{b}{2} + y & \frac{b^2}{4} - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} - y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & \frac{b}{2} - y & -\frac{b^2}{4} + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} + y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & -\frac{b}{2} - y & \frac{b^2}{4} - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} - y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Aus Gleichung (4.2) folgt für  $\underline{\underline{\hat{P}}}$  und  $\underline{\underline{\hat{P}}}$ :

$$\left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[2]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[5]} \end{array} \right]_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 3y^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2y \\ 0 & -1 & -3y^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[1]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[2]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[3]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[4]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[5]} \end{array} \right]_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 3y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2y & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.23)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[2]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[5]} \end{array} \right]_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & -\frac{b^2}{4} + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ \hline 0 & y & y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 \\ \hline 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & \frac{b^2}{4} - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ \hline 0 & -y & -y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{P} \\ \hat{P} \\ \hat{P} \\ \hat{P} \end{bmatrix}_{\text{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & \frac{b}{2} + y & -\frac{b^2}{4} + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} + y & 0 \\ 0 & y & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & -\frac{b}{2} + y & \frac{b^2}{4} - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} - y & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & \frac{b}{2} - y & -\frac{b^2}{4} + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} + y & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & -\frac{b}{2} - y & \frac{b^2}{4} - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} - y & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Aus Gleichung (4.9) folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{11 \square} \\ \underline{R}_{11 \text{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 A_{66S} h & \frac{A_{66S} h^3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{66S} h^3}{2} & \frac{9 A_{66S} h^5}{40} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2 A_{66G} b^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 A_{22G} b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2 A_{22S} h^3}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{11 \text{I}} \\ \underline{R}_{11 \text{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{66S} h & \frac{A_{66S} h^3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{66S} h^3}{4} & \frac{9 A_{66S} h^5}{80} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 A_{66G} b & -A_{66G} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{66G} b^2 & \frac{2 A_{66G} b^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 A_{22G} b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{22S} h^3}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{R}}_{12\text{I}} = b^3 h^3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2 A_{66S}}{b^3 h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66S}}{6b^3 h^2} \\ \frac{A_{66S}}{2b^3 h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 A_{66S}}{40b^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66G}}{3h^5} & 0 \\ 0 & -\frac{A_{12G}}{b^2 h^4} & -\frac{A_{12G}}{4b^2 h^2} & -\frac{A_{12G}}{3h^5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{12S}}{3b^3 h^2} & \frac{A_{12S}}{20b^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.28) \\
 \underline{\underline{R}}_{12\text{II}} = b^3 h^5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{66S}}{b^3 h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66S}}{12b^3 h^2} \\ \frac{A_{66S}}{4b^3 h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 A_{66S}}{80b^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66G}}{2bh^5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{66G}}{6h^5} & 0 \\ 0 & -\frac{A_{12G}}{b^2 h^4} & -\frac{A_{12G}}{4b^2 h^2} & \frac{A_{12G}}{2bh^5} & -\frac{A_{12G}}{3h^5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{12S}}{6b^3 h^2} & \frac{A_{12S}}{40b^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{R}}_{22 \square} = b^5 h^7 \begin{bmatrix} \frac{2A_{66S}}{b^5 h^6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66S}}{6b^5 h^4} \\ 0 & \frac{A_{11G}}{2b^4 h^5} + \frac{A_{11S}}{6b^5 h^4} & \frac{A_{11G}}{8b^4 h^3} + \frac{A_{11S}}{40b^5 h^2} & \frac{A_{11G}}{6b^2 h^6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{11G}}{8b^4 h^3} + \frac{A_{11S}}{40b^5 h^2} & \frac{A_{11G}}{32b^4 h} + \frac{A_{11S}}{224b^5} & \frac{A_{11G}}{24b^2 h^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{11G}}{6b^2 h^6} & \frac{A_{11G}}{24b^2 h^4} & \frac{A_{11G}}{15h^7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66G}}{6b^2 h^7} & 0 \\ \frac{A_{66S}}{6b^5 h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66S}}{40b^5 h^2} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\underline{\underline{R}}_{22 \square} = b^5 h^7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_{66S}}{b^5 h^6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66S}}{12b^5 h^4} \\ 0 & \frac{A_{11G}}{2b^4 h^5} + \frac{A_{11S}}{12b^5 h^4} & \frac{A_{11G}}{8b^4 h^3} + \frac{A_{11S}}{80b^5 h^2} & -\frac{A_{11G}}{b^3 h^6} & \frac{A_{11G}}{6b^2 h^6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{11G}}{8b^4 h^3} + \frac{A_{11S}}{80b^5 h^2} & \frac{A_{11G}}{32b^4 h} + \frac{A_{11S}}{448b^5} & -\frac{A_{11G}}{16b^3 h^4} & \frac{A_{11G}}{24b^2 h^4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_{11G}}{4b^3 h^6} & -\frac{A_{11G}}{16b^3 h^4} & \frac{A_{11G}}{6b^2 h^7} & -\frac{5A_{11G}}{48bh^7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{11G}}{6b^2 h^6} & \frac{A_{11G}}{24b^2 h^4} & -\frac{5A_{11G}}{48bh^7} & \frac{A_{11G}}{15h^7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66G}}{6b^2 h^7} & 0 \\ \frac{A_{66S}}{12b^5 h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{66S}}{80b^5 h^2} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

## 5 Beispiele und Vergleiche

In diesem Kapitel werden Beispiele und Vergleiche zu den in Kapitel 3 beschriebenen Balkentheorien gezeigt und deren Leistungsfähigkeit demonstriert. Das Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH3) wird in der vorliegenden Arbeit semi-analytisch gelöst. Auf diese Weise können die zuvor beschriebenen Schwierigkeiten durch nahezu singuläre Matrizen im geschlossen-analytischen Lösungsverfahren umgangen werden. Mit Hilfe einer Konvergenzstudie für dieses Modell wird die notwendige Elementanzahl in Balkenlängsrichtung für eine konvergierte Lösung ermittelt. Das numerische Verfahren wird anhand des Schubdeformationsmodells erster Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DE2) durch einen Vergleich mit seiner analytischen Lösung verifiziert<sup>1</sup>. Darauf folgt die Validierung einer Auswahl der Modelle mit Hilfe eines ABAQUS-Schalenmodells. Weitere Unterkapitel beschäftigen sich mit dem Einfluss der Randbedingungen und der Querkontraktion. Außerdem wird eine Parameterstudie zum Trägerversagen unter verschiedenen Lastfällen präsentiert.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf einen einseitig bei  $X = 0$  mm starr eingespannten Kasten- oder I-Träger, wie er in Abbildung 5.1 zu sehen ist ( $\Theta_m(0) = 0$ ). Die Deformationsmöglichkeiten des Trägers am nicht eingespannten Ende werden in den Beispielen direkt beschrieben. Der Träger besitzt eine Breite  $b$  von 100 mm, eine Höhe  $h$  von 200 mm und eine Länge  $l$  von 1000 mm. Sämtliche geometrische Angaben und Koordinaten beziehen sich auf die in Abbildung 3.2 dargestellten Querschnitte. Der Träger wird durch eine bei  $X = l$  angreifende Querkraft  $F_Z^0$  in globaler  $Z$ -Richtung und ein um die  $Y$ -Achse wirkendes Biegemoment  $M_Y^0$  beansprucht, welche im Flächenschwerpunkt des Profils angreifen. Der Lastfall für die vier unterschiedlichen Laminataufbauten ist eine Kombination aus Querkraft- und Biegebelastung in der Art, dass das Biegemoment in der Trägermitte bei  $X = l/2$  verschwindet. Einzig die Belastungshöhe variiert von Fall zu Fall. Hierbei handelt es sich um eine Skalierung, die keinen qualitativen Unterschied hervorruft, weil das zugrunde liegende Materialgesetz linear aufgebaut ist. Die verwendeten Lagenaufbauten für Gurte und Steg(e), auf die in den Unterkapiteln Bezug genommen wird, sind in Tabelle 5.1 ebenso aufgelistet wie die dazugehörigen Lastfälle. Die Einzelschichten sollen aus CFK (T300/LY556) bestehen. Dessen verwendete Materialkennwerte sind im Anhang A.1 aufgeführt. Die Untersuchungen werden jeweils für den Kasten- und den I-Träger durchgeführt. Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt zwecks Vergleichbarkeit übereinander.

### 5.1 Konvergenzstudie

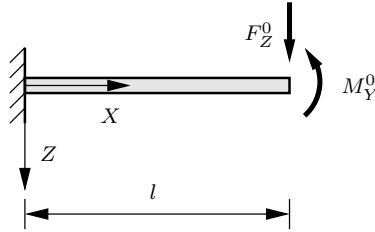
In diesem Unterkapitel wird das Konvergenzverhalten des im Kapitel 4 beschriebenen numerischen Lösungsverfahrens für den Kragträger aus Abbildung 5.1 untersucht. Auf diese Weise soll die notwendige Elementanzahl in Balkenlängsrichtung für eine netzunabhängige Lösung ermittelt werden. Das semi-analytische Verfahren ist notwendig geworden, um die bei dem erweiterten Schubdeformationsmodell höherer Ordnung (DH3) mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse auftretenden Schwierigkeiten zu umgehen.

<sup>1</sup>Ausführliche Informationen zu Verifikation und Validierung sind in [7] zu finden.

**Tabelle 5.1:** In den Beispielen verwendete Layups und Belastungen

	Steg(e)			Gurte		
	Schicht $k$	Lagenwinkel $\alpha$ [°]	Schichtdicke $t_{[i]}^{\{k\}}$ [mm] $\square/\text{I}$	Schicht $k$	Lagenwinkel $\alpha$ [°]	Schichtdicke $t_{[i]}^{\{k\}}$ [mm]
Aufbau 1	1	45	2 / 4	1	0	8
	2	-45	2 / 4			
	3	-45	2 / 4			
	4	45	2 / 4			
Aufbau 2	1	0	8 / 16	1	0	8
Aufbau 3	1	45	2 / 4	1	45	2
	2	-45	2 / 4	2	-45	2
	3	-45	2 / 4	3	-45	2
	4	45	2 / 4	4	45	2
Aufbau 4	1	45	0,625 / 1,25	1	45	0,625
	2	-45	0,625 / 1,25	2	-45	0,625
	3	45	0,625 / 1,25	3	45	0,625
	4	-45	0,625 / 1,25	4	-45	0,625
	5	-45	0,625 / 1,25	5	0	5
	6	45	0,625 / 1,25	6	-45	0,625
	7	-45	0,625 / 1,25	7	45	0,625
	8	45	0,625 / 1,25	8	-45	0,625
				9	45	0,625

	Belastung	
	Querkraft $F_Z^0$ [kN]	Biegemoment $M_Y^0$ [kNm]
Aufbau 1	300	150
Aufbau 2	200	100
Aufbau 3	1250	625
Aufbau 4	1000	500



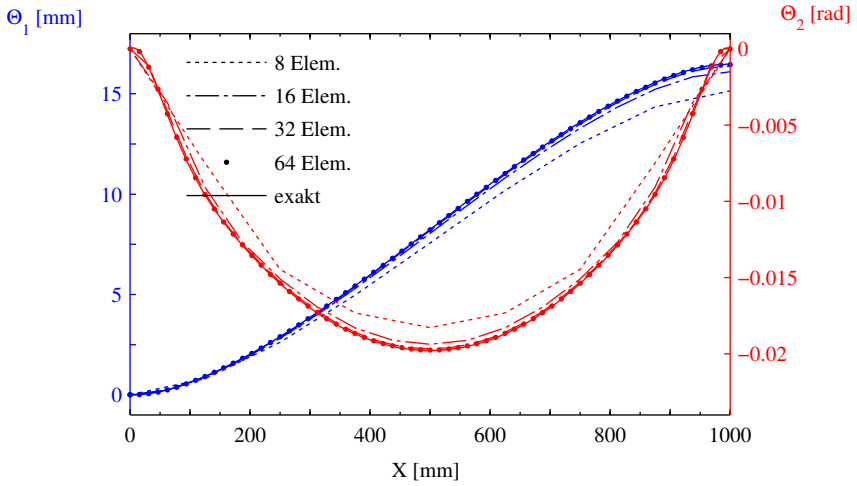
**Abbildung 5.1:** Kragträger: Angreifende Kraft  $F_Z^0$  und Biegemoment  $M_Y^0$

Die Untersuchungen werden deshalb exemplarisch an diesem Modell durchgeführt. Die Gurte und der/die Steg(e) besitzen den in Tabelle 5.1 beschriebenen Lageraufbau 1. Die dort aufgeführten Belastungen greifen am nicht eingespannten Trägerende an. Für dieses sind nur eine Absenkung und eine Stegverkipfung als Deformationsmoden zulässig. Damit ergibt sich ein Verhalten, als ob eine starre Platte mit dem Trägerende verbunden wäre ( $\Theta_3, \dots, \Theta_7 = 0$ ). Untersucht wird die Diskretisierung durch äquidistante zwei-Knoten-Elementen mit  $el = 8, 16, 32, 64$  und 2000 (als exakt bezeichnet) Elementen. Dargestellt sind die Ergebnisse sowohl für die 7 unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  (siehe Abbildungen 5.2 bis 5.5) als auch für die Verzerrungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  und die Schnittkräfte  $N_x, N_y, N_{xy}$  (siehe Abbildungen 5.6 und 5.7). Die vier in den letzten zwei Abbildungen zusammengefassten Diagramme beziehen sich auf einen Querschnitt bei  $X = 125$  mm, für den ein eher ungünstiges Konvergenzverhalten zu erwarten ist. Die Größe  $\Theta_4$  existiert nur für den I-Träger.

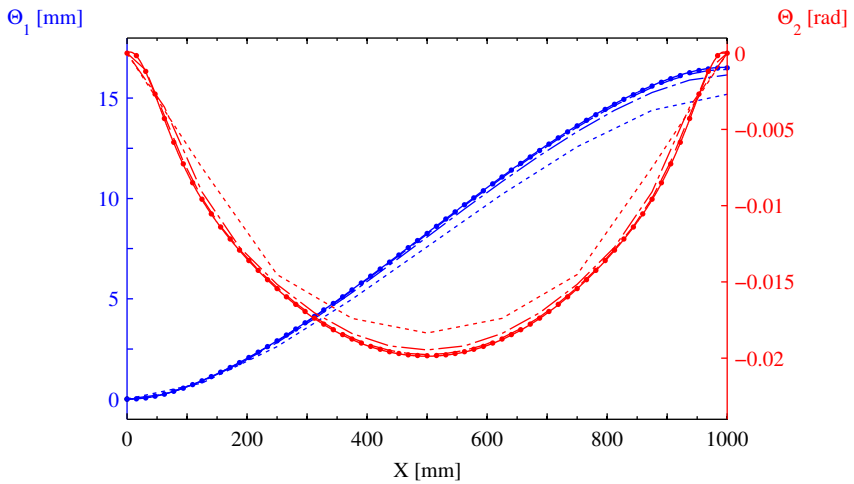
Sämtliche Diagramme sowohl für den Kasten- als auch für den I-Träger zeigen ein stetiges Konvergenzverhalten mit steigender Elementanzahl gegen die Referenzlösung mit 2000 Elementen. Ab einer Anzahl von 32 Elementen ist zu noch feineren Diskretisierungen für die unbekannt Funktionen kein wesentlicher Unterschied feststellbar. Dies gilt auch für die an dem ausgewählten Querschnitt bei  $X = l/8$  ermittelten Größen. Daher wird eine Anzahl von 32 und mehr Elementen als ausreichend betrachtet. Die Ergebnisse zeigen auch, dass es über der Balkenlängsachse große Unterschiede im Konvergenzverhalten gibt. Für die Betrachtung bestimmter Querschnitte würde auch eine geringere Elementanzahl für die Diskretisierung genügen.

## 5.2 Verifikation

Nach der Konvergenzstudie wird eine Lösung, die mit dem semi-analytischen Verfahren gewonnen wurde, mit dem Ergebnis, einer auf dem geschlossen-analytischen Weg gefunden Lösung, verglichen und auf diese Weise die numerische Methode verifiziert. Die Verifikation des numerischen Lösungsverfahrens wird exemplarisch anhand des Schubdeformationsmodells erster Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DE2) durchgeführt. Für die Untersuchung wird ein Kragträger, wie er in Abbildung 5.1 zu sehen ist, mit dem Lageraufbau 1 aus Tabelle 5.1 verwendet. Die dort genannte Belastung erfolgt über das nicht eingespannte Balkenende, an dem, wie von der verwendeten Theorie vorgesehen, eine Absenkung und eine Stegverkipfung zulässig sind. Für die Verifikation wird ein Vergleich der Lösungen zwischen der numerischen Lösungsmethode für eine mit äquidistanten zwei-Knoten-Elementen durchgeführte Diskretisierung mit  $el = 8, 16, 32$

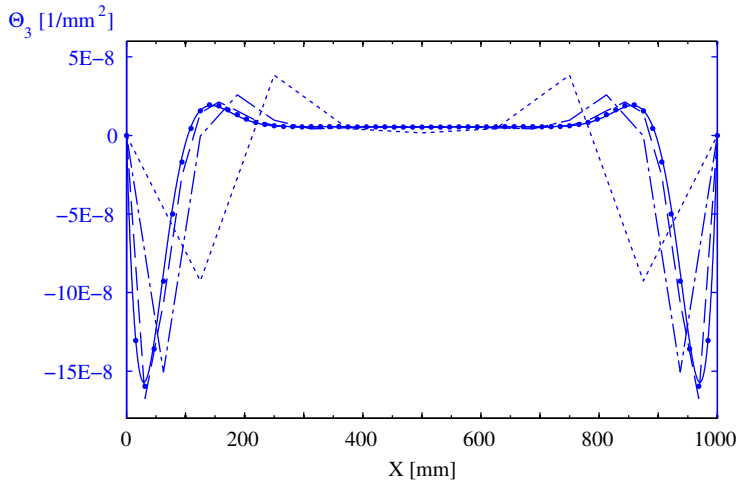
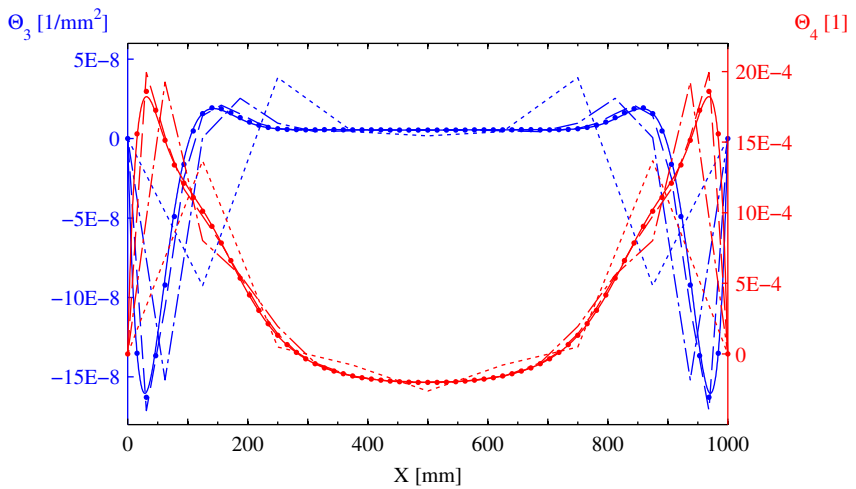


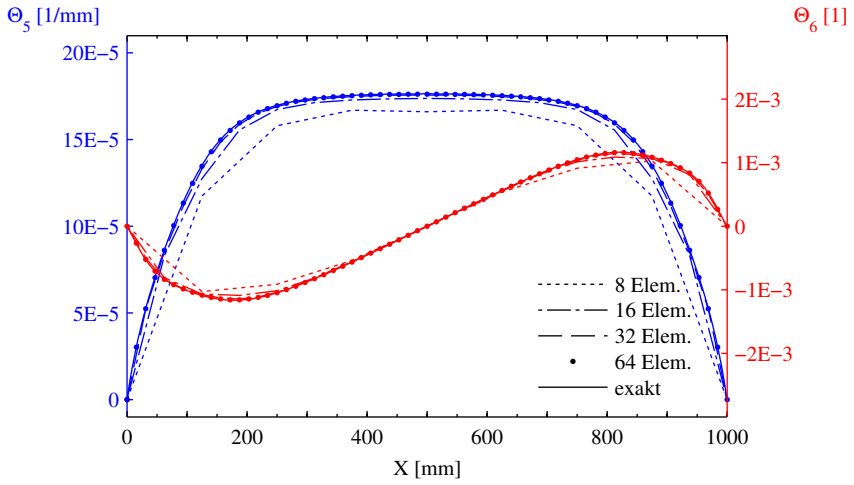
(a)  $\Theta_1$  u.  $\Theta_2$ : Kastenträger



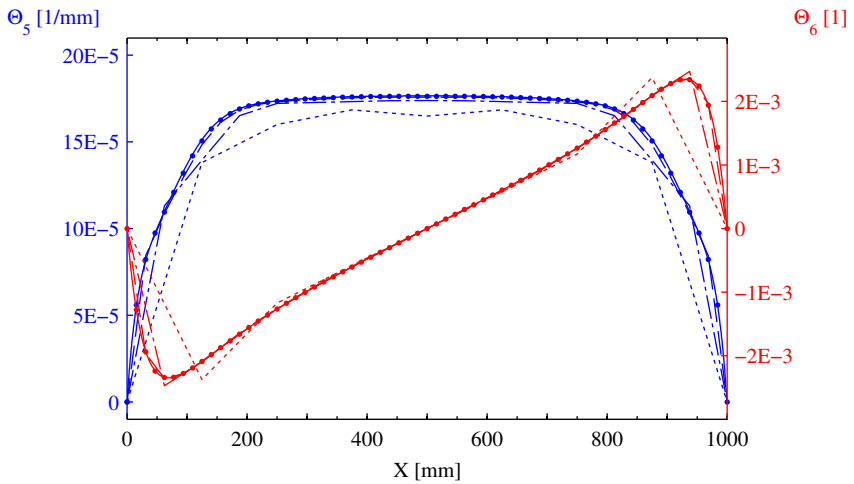
(b)  $\Theta_1$  u.  $\Theta_2$ : I-Träger

Abbildung 5.2: Konvergenzstudie, Teil 1: DH3, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

(a)  $\Theta_3$ : Kastenträger(b)  $\Theta_3$  u.  $\Theta_4$ : I-Träger**Abbildung 5.3:** Konvergenzstudie, Teil 2: DH3, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

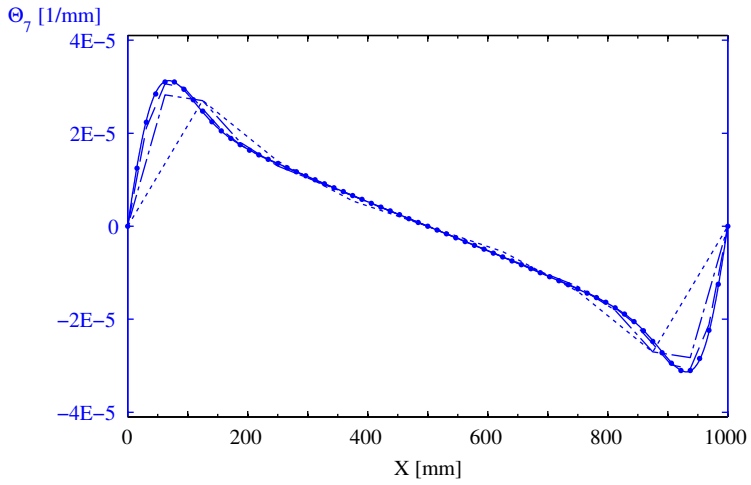


(a)  $\Theta_5$  u.  $\Theta_6$ : Kastenträger

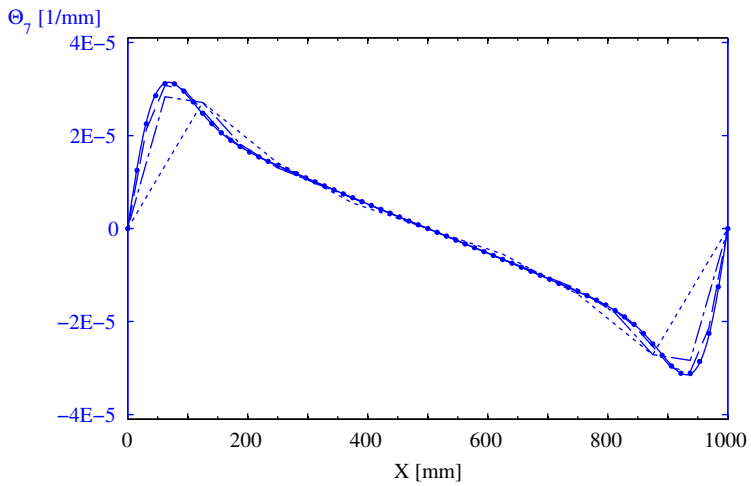


(b)  $\Theta_5$  u.  $\Theta_6$ : I-Träger

Abbildung 5.4: Konvergenzstudie, Teil 3: DH3, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

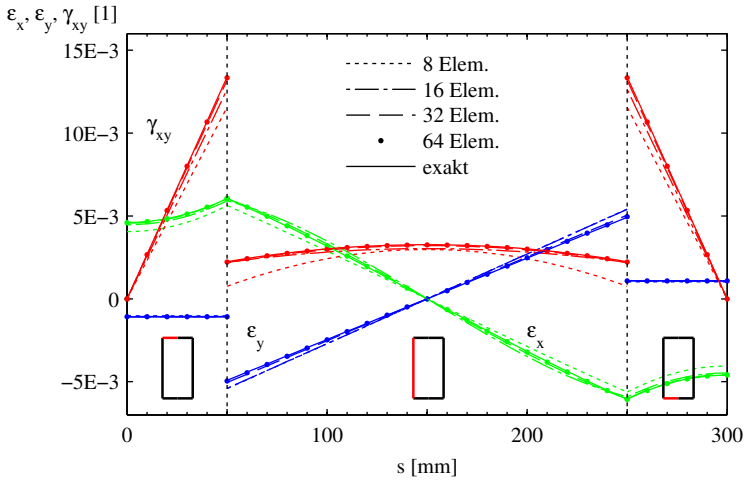


(a)  $\Theta_7$ : Kastenträger

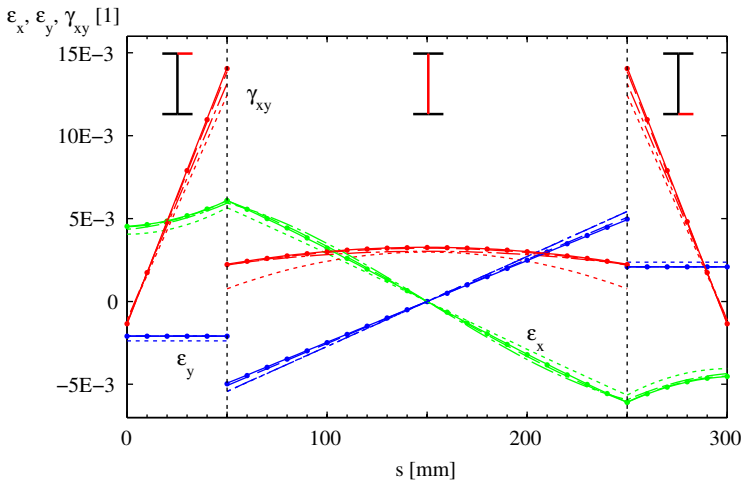


(b)  $\Theta_7$ : I-Träger

Abbildung 5.5: Konvergenzstudie, Teil 4: DH3, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

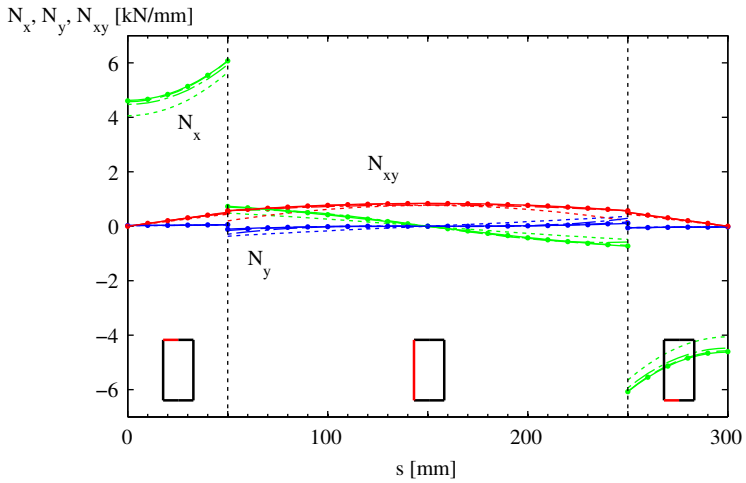
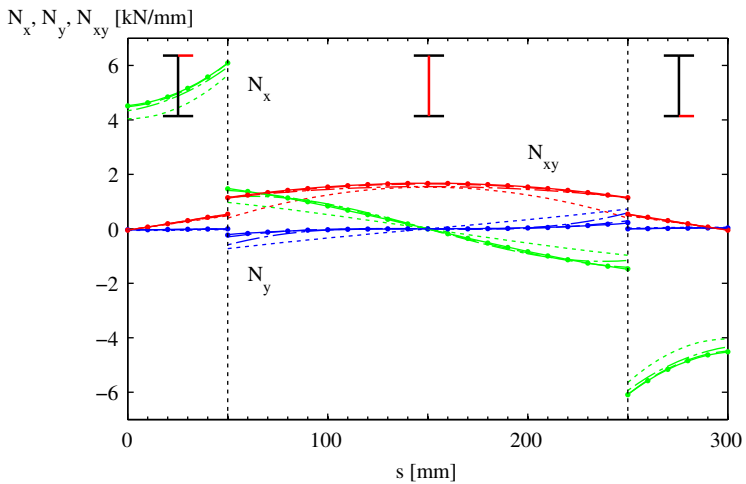


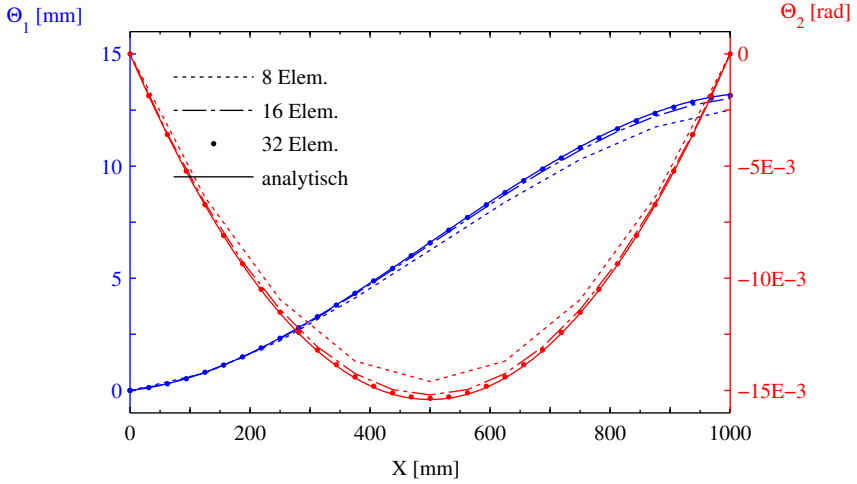
(a) Verzerrungen bei  $X = l/8$ : K-Träger



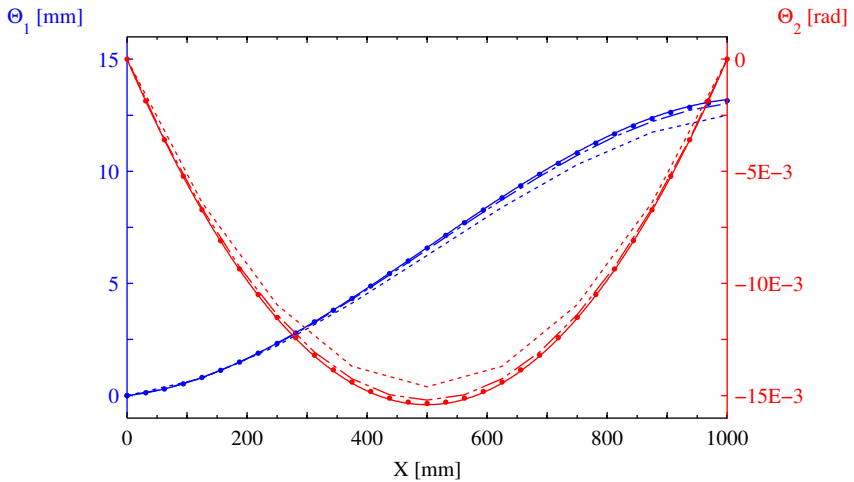
(b) Verzerrungen bei  $X = l/8$ : I-Träger

Abbildung 5.6: Konvergenzstudie, Teil 5: DH3, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

(a) Schnittkräfte bei  $X = l/8$ : K-Träger(b) Schnittkräfte bei  $X = l/8$ : I-Träger**Abbildung 5.7:** Konvergenzstudie, Teil 6: DH3, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )



(a)  $\Theta_1$  u.  $\Theta_2$ : Kastenträger



(b)  $\Theta_1$  u.  $\Theta_2$ : I-Träger

**Abbildung 5.8:** Verifikation des numerischen Lösungsverfahrens anhand des DE2-Modells, Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

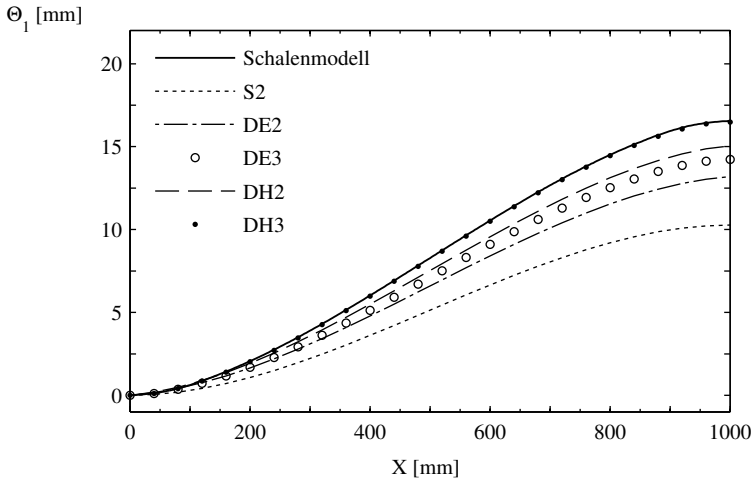
Elementen und der geschlossen-analytischen Lösung dieses Modells vorgenommen. Auf diese Weise wird gezeigt, dass das eingesetzte numerische Lösungsverfahren gegen die zugrunde liegende geschlossen-analytische Lösung des Modells konvergiert. Hieraus wird die Schlussfolgerung abgeleitet, dass die Lösung aus dem numerischen Verfahren ebenso bei den anderen Modellen insbesondere dem Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH3) der Lösung der jeweiligen Gleichgewichtsbedingungen entspricht. Dargestellt werden in der Abbildung 5.8 die Ergebnisse für die beiden unbekannt Funktionen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  sowohl für den Kasten- als auch den I-Träger.

Die beiden Diagramme für die zwei Profilquerschnitte sind aufgrund der gewählten Schichtdickenverhältnisse identisch. Sie zeigen ein stetiges Konvergenzverhalten mit steigender Elementanzahl gegen die geschlossen-analytische Lösung. Bei einer Anzahl von 32 Elementen ist zwischen den beiden Lösungswegen für die zwei unbekannt Funktionen kein wesentlicher Unterschied feststellbar. Die beiden Funktionen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  weisen eine Abhängigkeit in ihrem Konvergenzverhalten von der Position in Richtung der Balkenlängsachse und den gewählten Randbedingungen auf.

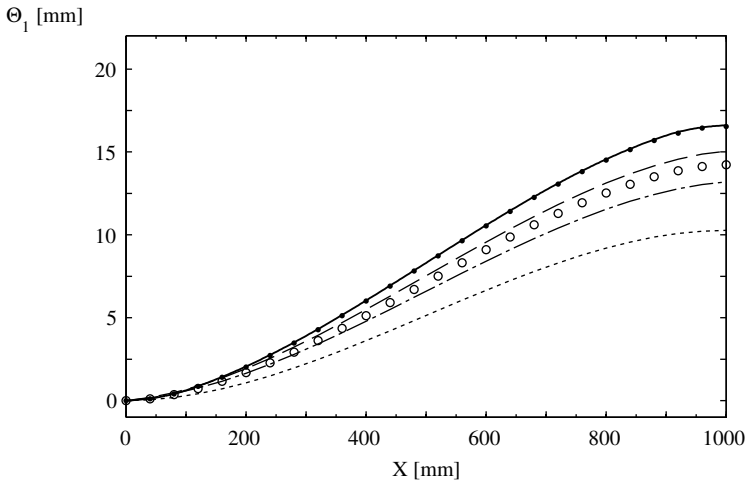
### 5.3 Validierung der hergeleiteten Balkenmodelle

In diesem Unterkapitel werden die in Kapitel 3 vorgestellten Balkentheorien mit der Lösung eines Finite-Elemente Schalenmodells verglichen. Auf diese Weise sollen das Potenzial und die Unterschiede der einzelnen Theorien aufgezeigt sowie das Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH3) validiert werden. Darüber hinaus wird der Einfluss zusätzlicher Deformationsmöglichkeiten im direkten Vergleich zum schubstarrten Modell ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse sichtbar. Als Bezugsbasis bzw. Referenzlösung dient ein ABAQUS Schalenmodell aus S4-Elementen. Das auskonvergierte, äquidistante Netz besitzt für beide Profile 320 Elemente in  $X$ -, für jeden Gurt 40 in  $Y$ - sowie für jeden Steg 80 in globaler  $Z$ -Richtung. Für das numerische Lösungsverfahren des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse werden die Träger in axialer Richtung mit 128 Elementen diskretisiert. Als Lastfall wird der in Abbildung 5.1 dargestellte Kragträger verwendet. Als Layup wird der Lagenaufbau 1 verwendet. Die zugehörige Belastung ist der Tabelle 5.1 zu entnehmen. Am belasteten und nicht eingespannten Trägerende ist eine Absenkung und eine Stegverkipfung zulässig; andere Verformungen werden unterbunden. Die Ergebnisse des Vergleichs werden in den Abbildungen 5.9 bis 5.12 zusammengefasst. Gezeigt wird die Trägerabsenkung des Schwerpunktes der Profile ( $\Theta_1$ ) über der Trägerlänge  $l$  sowie für einen ausgewählten Querschnitt bei  $X = l/8$  die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , die Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  und die Schnittkräfte  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ .

Die einzelnen Modelle können die Absenkung  $\Theta_1$  des Trägerschwerpunktes unterschiedlich gut abbilden. Die Ergebnisse des DH3-Modells und der Referenzlösung weisen über der gesamten Trägerlänge keine wesentlichen Abweichungen auf. Ebenso sind zwischen diesen beiden Lösungen für den ausgewählten Querschnitt nur geringe Unterschiede bei den Verschiebungen, den Verzerrungen und den Schnittkräften erkennbar. Die übrigen Modelle können das Trägerverhalten nur mit Einschränkungen wiedergeben. Dies ist einem nicht ausreichend verformbaren Profilquerschnitt sowie einer ungenügenden Berücksichtigung des Schubeinflusses und der auftretenden axialen Verschiebungen geschuldet. Die Verschiebung  $v$ , die Verzerrung  $\varepsilon_y$  und die Schnittkraft  $N_y$  können nur durch das Zulassen einer Verformbarkeit des Querschnittes senkrecht zur Balkenlängsachse ermittelt werden. Die Wiedergabe des quadratischen Verlaufs der Verschiebung  $u$  im Bereich der Gurte bzw. des

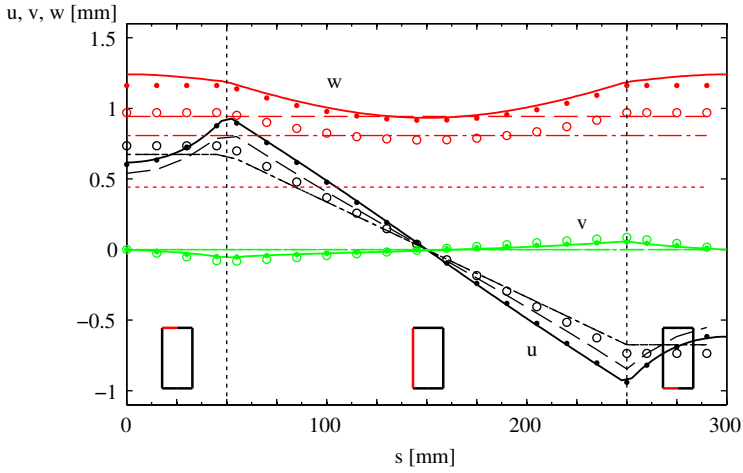
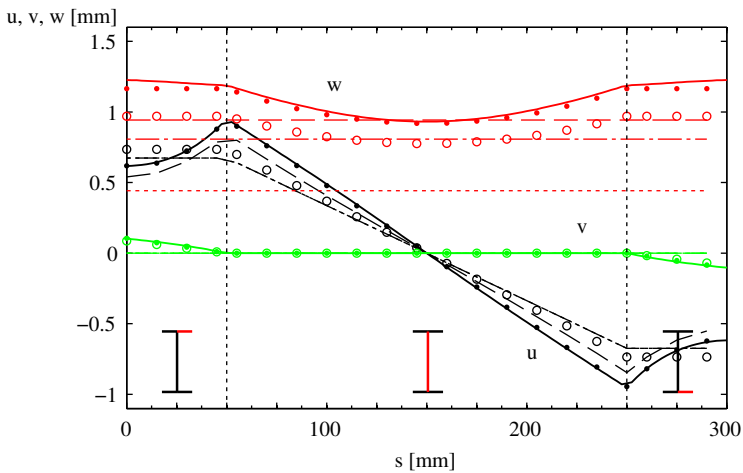


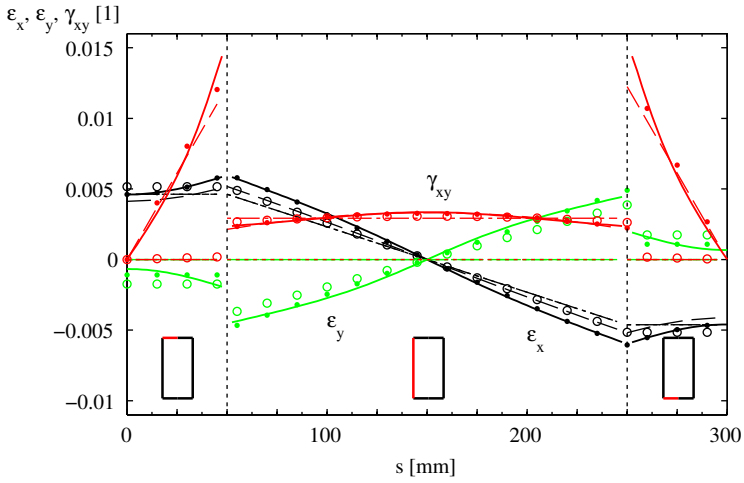
(a)  $\Theta_1$ : Kastenträger



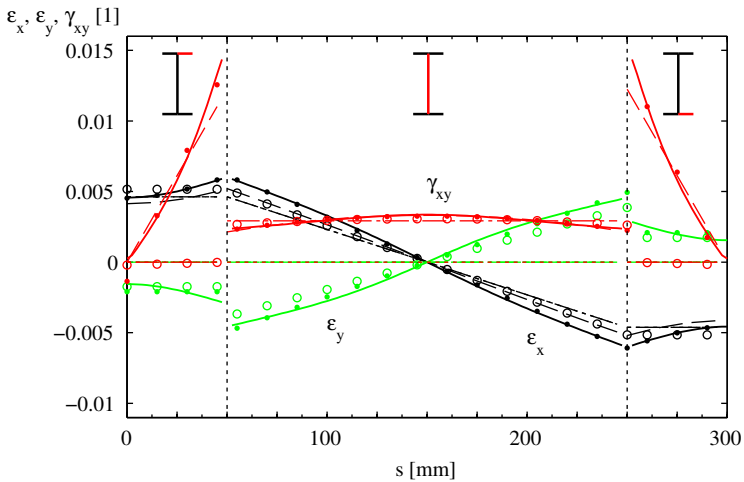
(b)  $\Theta_1$ : I-Träger

**Abbildung 5.9:** Validierung, Teil 1: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

(a) Verschiebungen bei  $X = l/8$ : K-Träger(b) Verschiebungen bei  $X = l/8$ : I-Träger**Abbildung 5.10:** Validierung, Teil 2: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

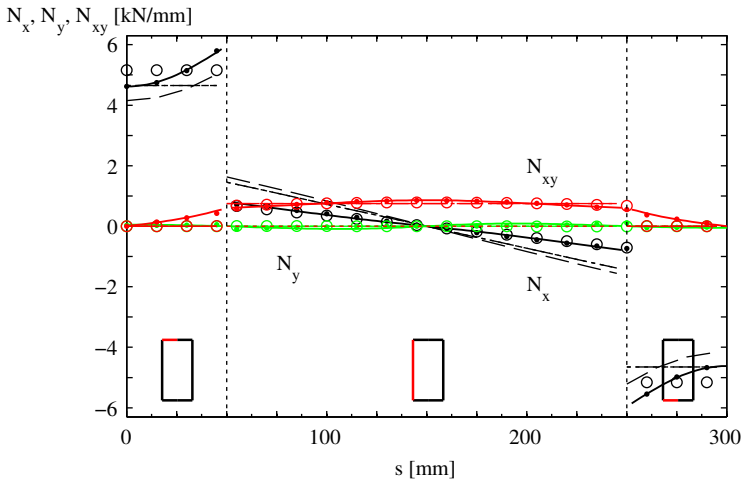


(a) Verzerrungen bei  $X = l/8$ : K-Träger

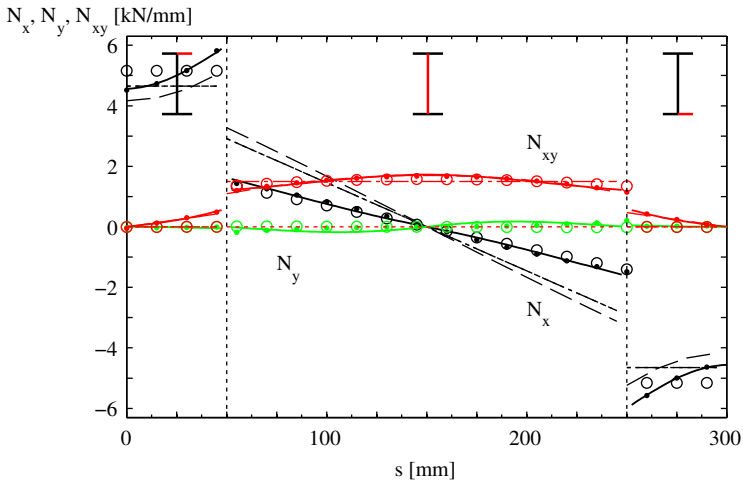


(b) Verzerrungen bei  $X = l/8$ : I-Träger

**Abbildung 5.11:** Validierung, Teil 3: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )



(a) Schnittkräfte bei  $X = l/8$ : K-Träger



(b) Schnittkräfte bei  $X = l/8$ : I-Träger

Abbildung 5.12: Validierung, Teil 4: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

kubischen Verhaltens im Bereich des/der Steg(e) setzt entsprechende Ansatzfunktionen voraus. Nur über diese Ansätze ist die Schnittkraft  $N_{xy}$  direkt über das Hooke'sche Gesetz aus der Verzerrung  $\gamma_{xy}$  ermittelbar. Für das Schubdeformationsmodell erster Ordnung kann diese Schnittkraft ersatzweise über das Kräftegleichgewicht an einem freigeschnittenen Element in einer Nachlaufrechnung ermittelt werden. Je nach gewähltem Lagenaufbau kann die Güte der Übereinstimmung der Ergebnisse variieren und können sich die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen verändern. Stets wird für die Modelle ohne und mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse jeweils vom schubstarrten Modell über das Schubdeformationsmodell erster Ordnung zum Schubdeformationsmodell höherer Ordnung eine größere Genauigkeit erzielt. Hierbei liefert in allen Fällen die Variante mit erweiterter Profilverformung mindestens ebenso gute, meist aber erheblich bessere Ergebnisse, als das vergleichbare Modell ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Auf diese Problematik wird in dem Unterkapitel 5.5 näher eingegangen.

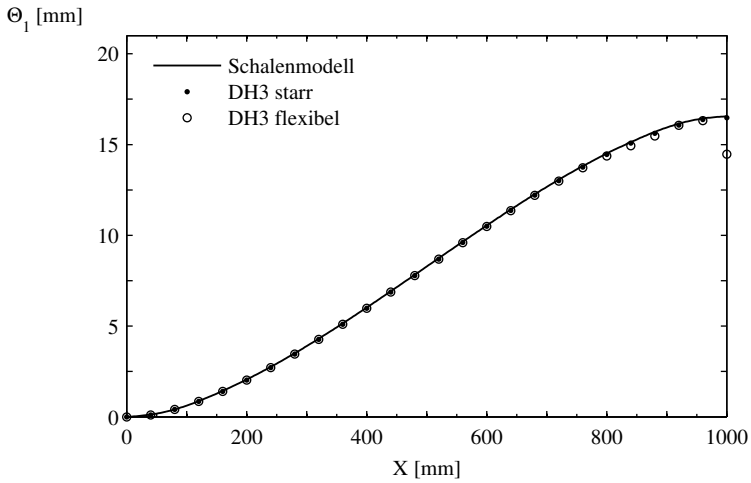
## 5.4 Untersuchung des Einflusses der Randbedingungen

In diesem Unterkapitel findet eine Untersuchung des Einflusses der Randbedingungen auf das Trägerverhalten statt. Betrachtet wird der in Abbildung 5.1 dargestellte Kragträger, dessen Randbedingungen an seinem nicht eingespannten, rechten Ende verändert werden. Das andere Ende soll fest eingespannt sein. Die Vergleiche werden anhand des Lagenaufbaus 1 und der zugehörigen Belastung aus Querkraft  $F_Z^0$  und Biegemoment  $M_Y^0$  nach Tabelle 5.1 durchgeführt. Dabei werden die Ergebnisse der Trägerabsenkung des Schwerpunktes der Profile ( $\Theta_1$ ) über der Profillänge  $l$  sowie der Verzerrung  $\varepsilon_y$  an ausgewählten Querschnitten bei  $X = 0,8l$  und  $0,9l$  verglichen. Untersucht werden die Auswirkungen an dem Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH3) mit einerseits einer nicht deformierbaren, starren Platte als Abschluss ( $\Theta_3, \dots \Theta_7 = 0$ , DH3 starr) und andererseits einem frei verformbaren Ende (DH3 flexibel). Die numerische Lösung wird mit einer Diskretisierung von 128 Elementen in axialer Richtung gewonnen. Als Referenz dient ein ABAQUS Schalenmodell aus S4-Elementen, dessen Knoten am rechten Ende in einer Art und Weise gekoppelt sind, die einer starren Platte als Abschluss gleicht. Das auskonvergierte, äquidistante Netz besitzt 320 Elemente in  $X$ -, für jeden Gurt 40 in  $Y$ - sowie für jeden Steg 80 in globaler  $Z$ -Richtung. Die Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen die Ergebnisse für das Kasten- und das I-Profil.

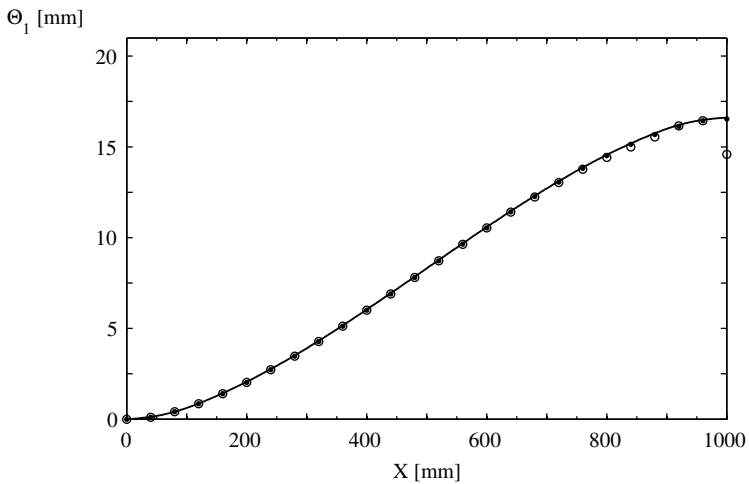
Die Ergebnisse der Trägerabsenkung und der Querdehnung von dem Schalenmodell im Vergleich zum starren DH3-Modell weisen keine wesentlichen Unterschiede auf. Für die Absenkung  $\Theta_1$  treten am rechten Ende Abweichungen zwischen dem Träger mit starrem und flexiblem Rand insbesondere ab einer Position von  $X = 950$  mm auf. Im Fall des frei deformierbaren Trägerendes fallen in diesem Bereich große Verformungen in allen drei Raumrichtungen auf. Durch die zwei beispielhaft in der Abbildung betrachteten Positionen der Verzerrung  $\varepsilon_y$  des Querschnitts wird deutlich, dass bis zu einer Trägerlänge von  $X = 800$  mm der Einfluss der Randbedingungen auf das globale Verhalten gering ist. Ab dieser Position wird die Abhängigkeit der Ergebnisse von den zulässigen Deformationsmöglichkeiten zum Trägerende hin größer. Für die in diesem Bereich auftretenden Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen kommt somit der Wahl der Randbedingungen eine besondere Bedeutung zu.

## 5.5 Untersuchung des Einflusses der Querkontraktion

In Kapitel 5.3 wurde im Zusammenhang mit der Validierung der Balkenmodelle bereits auf eine Abhängigkeit der Vorhersagegüte des Strukturverhaltens einiger Balkenmodelle

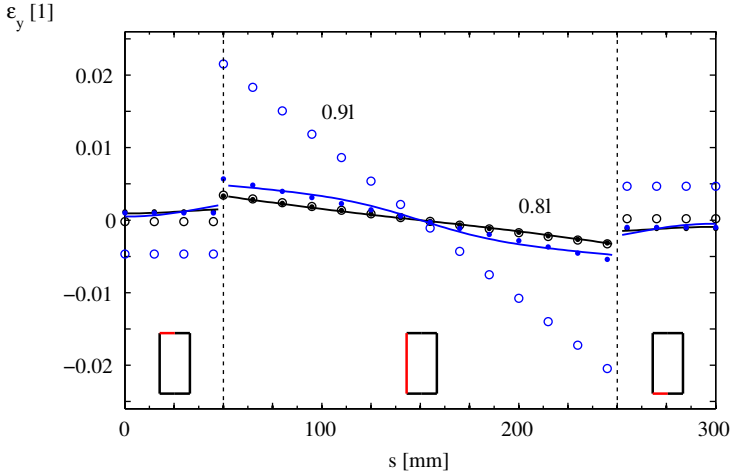


(a)  $\Theta_1$ : Kastenträger

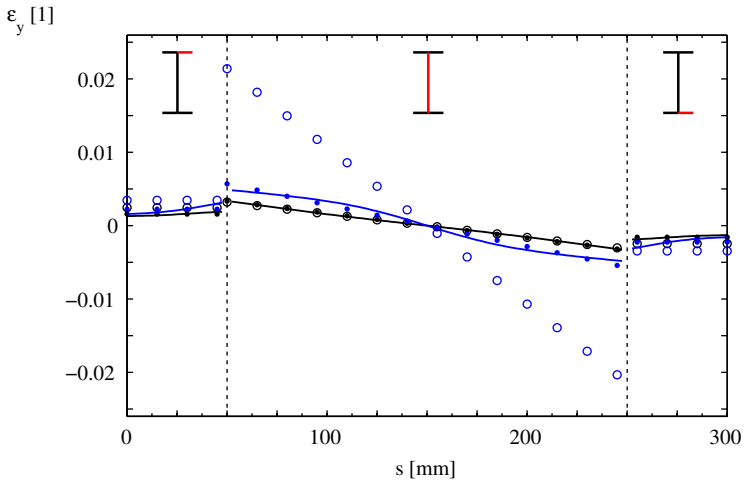


(b)  $\Theta_1$ : I-Träger

Abbildung 5.13: Einfluss der Randbedingungen, Teil 1: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )



(a) Verzerrung  $\varepsilon_y$ : K-Träger



(b) Verzerrung  $\varepsilon_y$ : I-Träger

**Abbildung 5.14:** Einfluss der Randbedingungen, Teil 2: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

**Tabelle 5.2:** Einfluss der Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  auf die Dehnsteifigkeiten  $\underline{A}$

Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ ):

$$\nu_{12} = 0,34 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.02 & 0 \\ & 0.06 & 0 \\ & & 0.04 \end{bmatrix} * 10^3, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 3.15 & 2.38 & 0 \\ & 3.15 & 0 \\ & & 2.56 \end{bmatrix} * 10^2 \quad (5.1)$$

$$\nu_{12} = 0 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ & 0.06 & 0 \\ & & 0.04 \end{bmatrix} * 10^3, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 3.03 & 2.26 & 0 \\ & 3.03 & 0 \\ & & 2.65 \end{bmatrix} * 10^2 \quad (5.2)$$

Laminat 2 (Gurt/Steg:  $[0^\circ]$ ):

$$\nu_{12} = 0,34 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.02 & 0 \\ & 0.06 & 0 \\ & & 0.04 \end{bmatrix} * 10^3, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.02 & 0 \\ & 0.06 & 0 \\ & & 0.04 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (5.3)$$

$$\nu_{12} = 0 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ & 0.06 & 0 \\ & & 0.04 \end{bmatrix} * 10^3, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ & 0.06 & 0 \\ & & 0.04 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (5.4)$$

Laminat 3 (Gurt/Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ ):

$$\nu_{12} = 0,34 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 3.15 & 2.38 & 0 \\ & 3.15 & 0 \\ & & 2.56 \end{bmatrix} * 10^2, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 3.15 & 2.38 & 0 \\ & 3.15 & 0 \\ & & 2.56 \end{bmatrix} * 10^2 \quad (5.5)$$

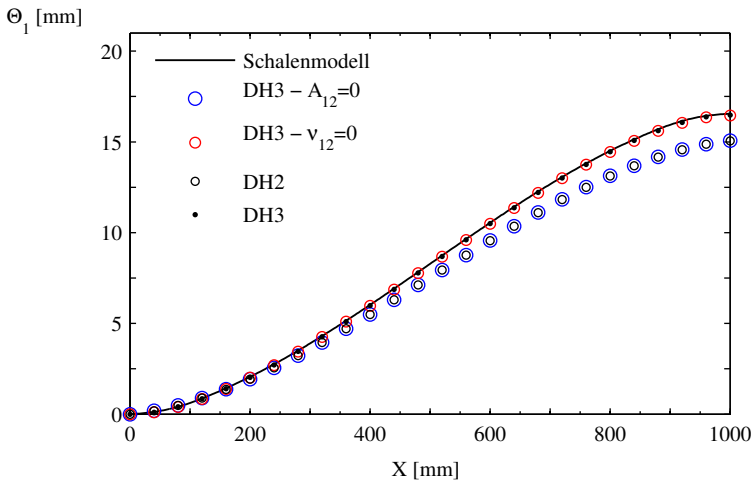
$$\nu_{12} = 0 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 3.03 & 2.26 & 0 \\ & 3.03 & 0 \\ & & 2.65 \end{bmatrix} * 10^2, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 3.03 & 2.26 & 0 \\ & 3.03 & 0 \\ & & 2.65 \end{bmatrix} * 10^2 \quad (5.6)$$

Laminat 4 (Gurt:  $[\pm 45^\circ_2, 0^\circ]_s$ , Steg:  $[\pm 45^\circ_2]_s$ ):

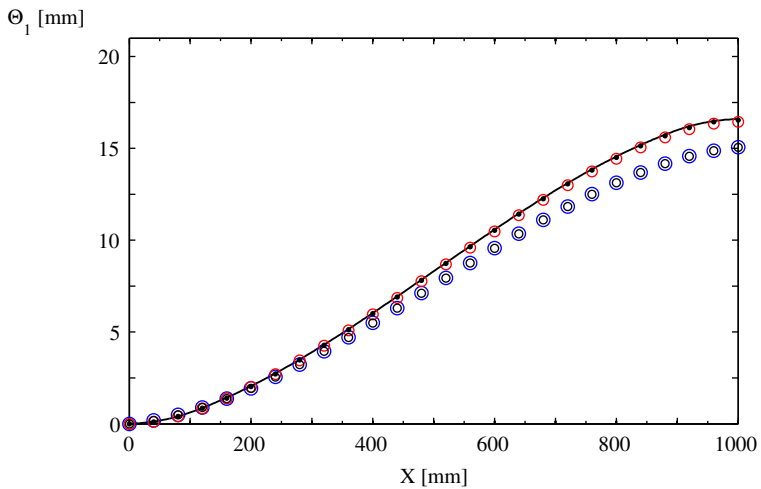
$$\nu_{12} = 0,34 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 8.26 & 1.62 & 0 \\ & 2.34 & 0 \\ & & 1.84 \end{bmatrix} * 10^2, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 1.97 & 1.49 & 0 \\ & 1.97 & 0 \\ & & 1.60 \end{bmatrix} * 10^2 \quad (5.7)$$

$$\nu_{12} = 0 : \underline{A}_G = \begin{bmatrix} 8.15 & 1.42 & 0 \\ & 2.27 & 0 \\ & & 1.90 \end{bmatrix} * 10^2, \underline{A}_{S\Box} = \begin{bmatrix} 1.90 & 1.42 & 0 \\ & 1.89 & 0 \\ & & 1.66 \end{bmatrix} * 10^2 \quad (5.8)$$

Die Dehnsteifigkeiten des I-Trägerstegs  $\underline{A}_{S\Box}$  ergeben sich aufgrund der in Tabelle 5.1 angegebenen Schichtdicken über die Beziehung  $\underline{A}_{S\Box} = 2\underline{A}_{S\Box}$ . Die Dehnsteifigkeiten sind in [kN/mm] angegeben.

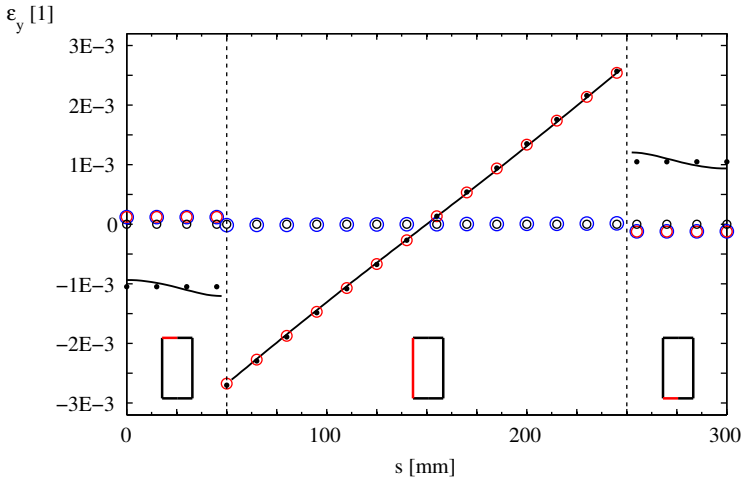


(a)  $\Theta_1$ : Kastenträger

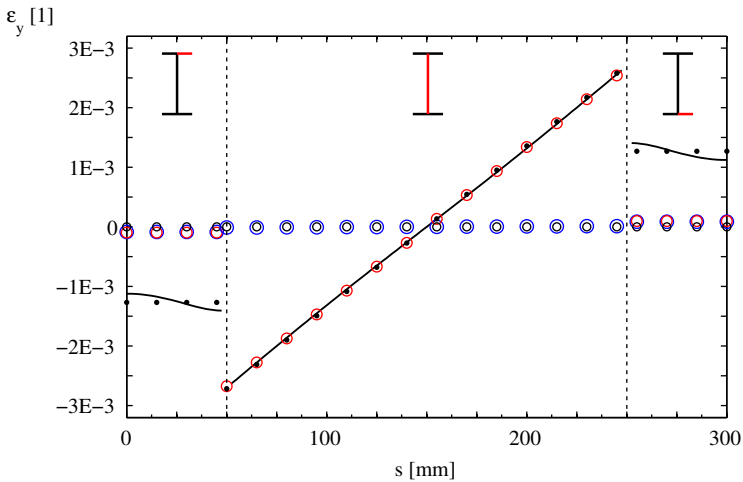


(b)  $\Theta_1$ : I-Träger

**Abbildung 5.15:** Einfluss der Querkontraktion, Teil 1: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

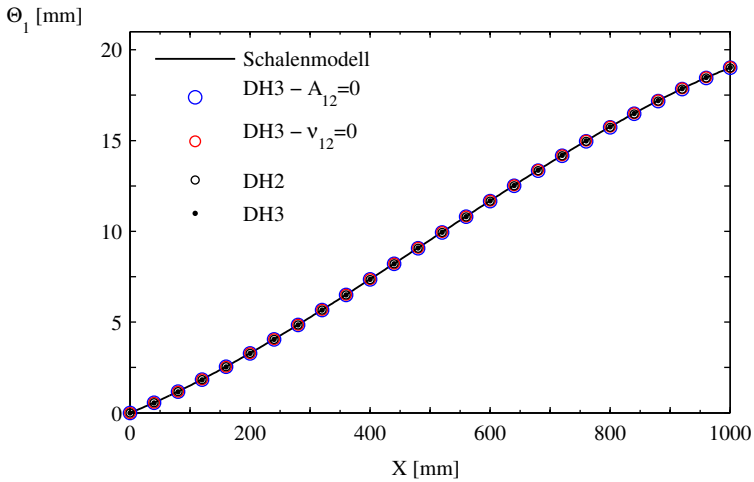


(a) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : K-Träger

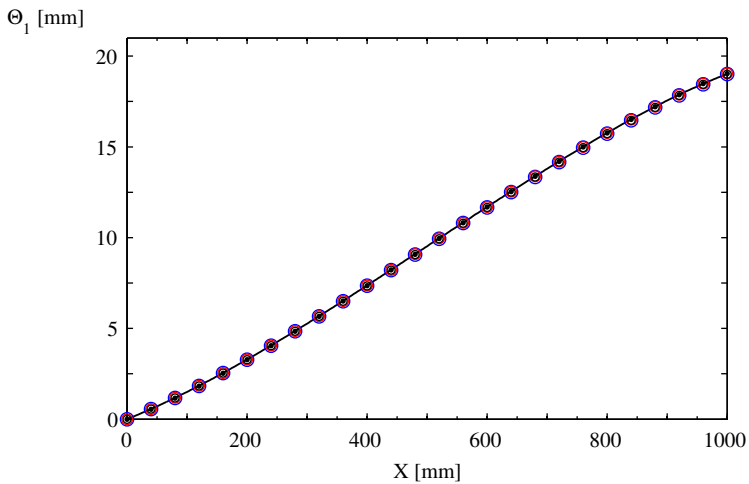


(b) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : I-Träger

Abbildung 5.16: Einfluss der Querkontraktion, Teil 2: Laminat 1 (Gurt:  $[0^\circ]$ , Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

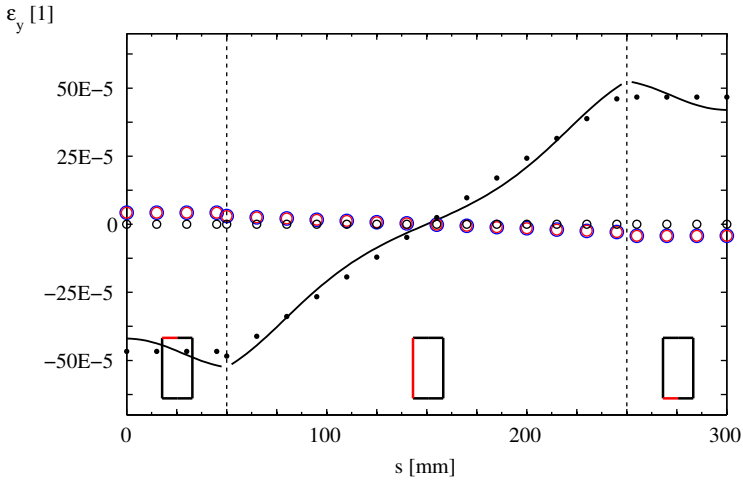


(a)  $\Theta_1$ : Kastenträger

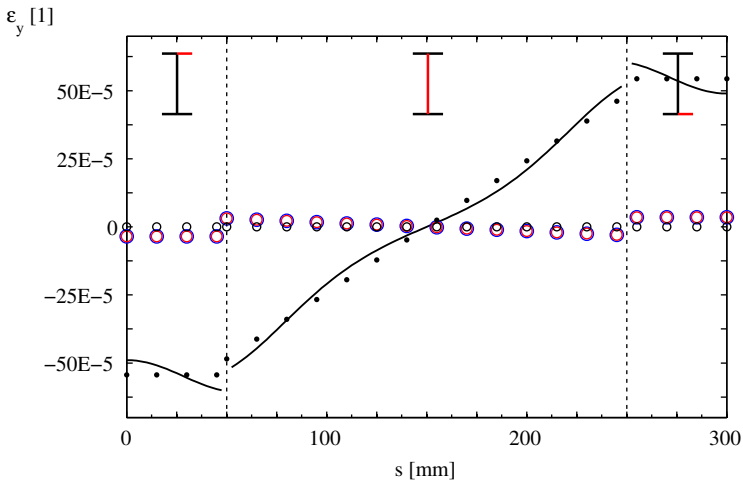


(b)  $\Theta_1$ : I-Träger

Abbildung 5.17: Einfluss der Querkontraktion, Teil 1: Laminat 2 (Gurt/Steg:  $[0^\circ]$ )

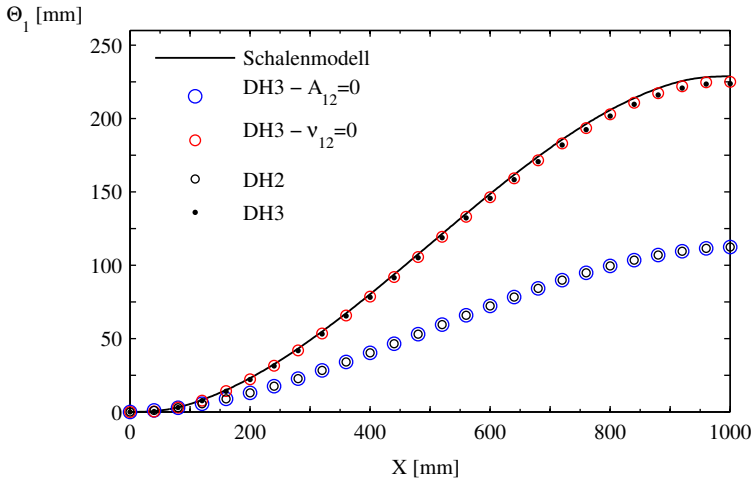


(a) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : K-Träger

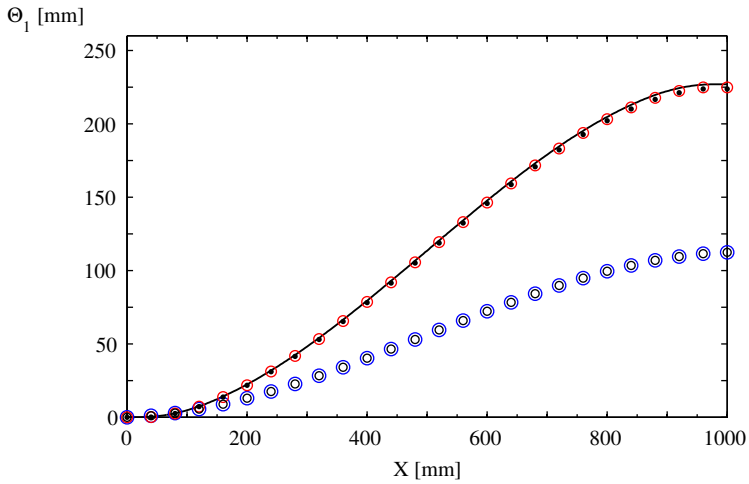


(b) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : I-Träger

Abbildung 5.18: Einfluss der Querkontraktion, Teil 2: Laminat 2 (Gurt/Steg:  $[0^\circ]$ )

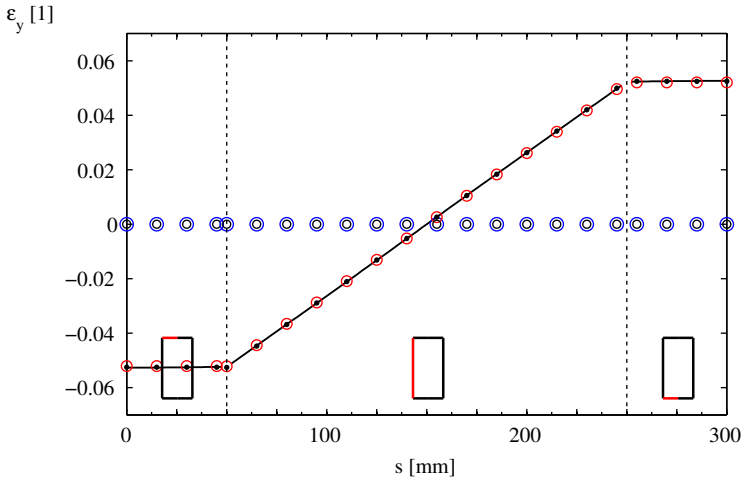


(a)  $\Theta_1$ : Kastenträger

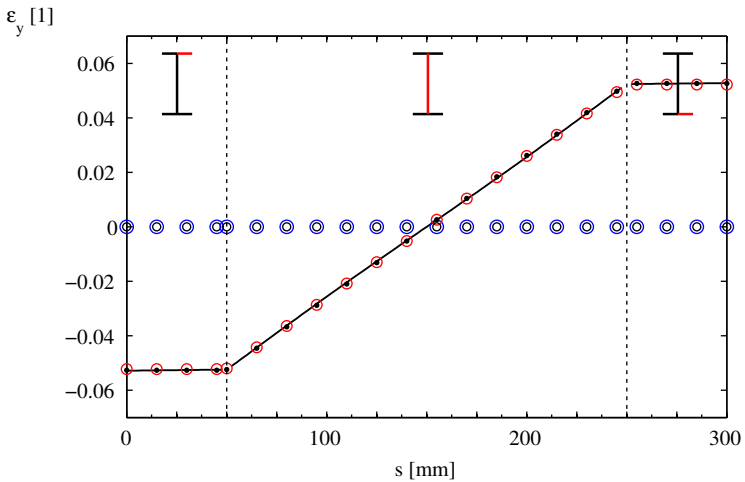


(b)  $\Theta_1$ : I-Träger

Abbildung 5.19: Einfluss der Querkontraktion, Teil 1: Laminat 3 (Gurt/Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

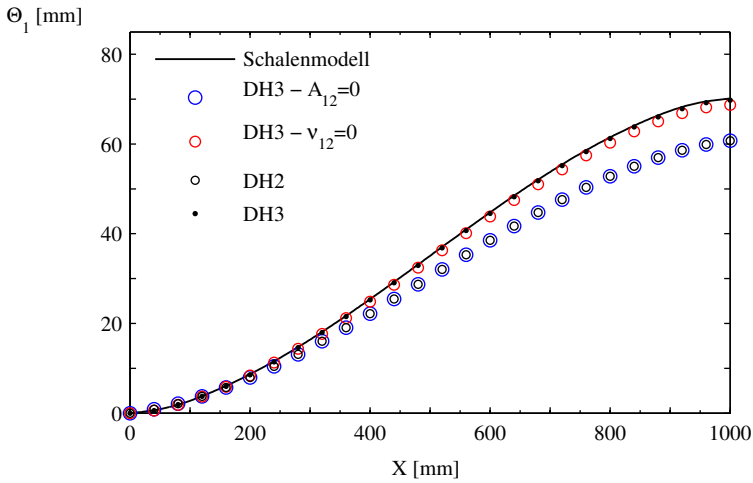


(a) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : K-Träger

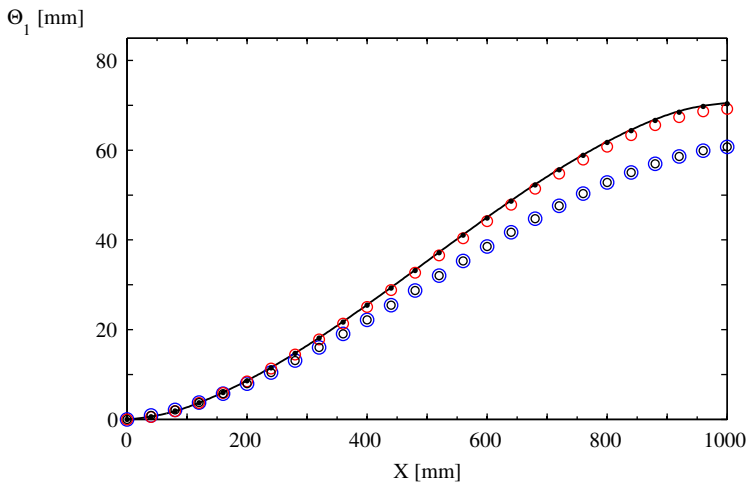


(b) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : I-Träger

Abbildung 5.20: Einfluss der Querkontraktion, Teil 2: Laminat 3 (Gurt/Steg:  $[\pm 45^\circ]_s$ )

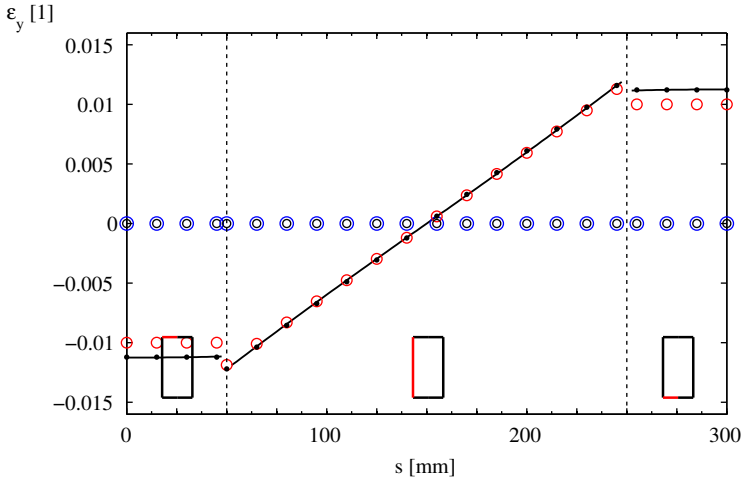


(a)  $\Theta_1$ : Kastenträger

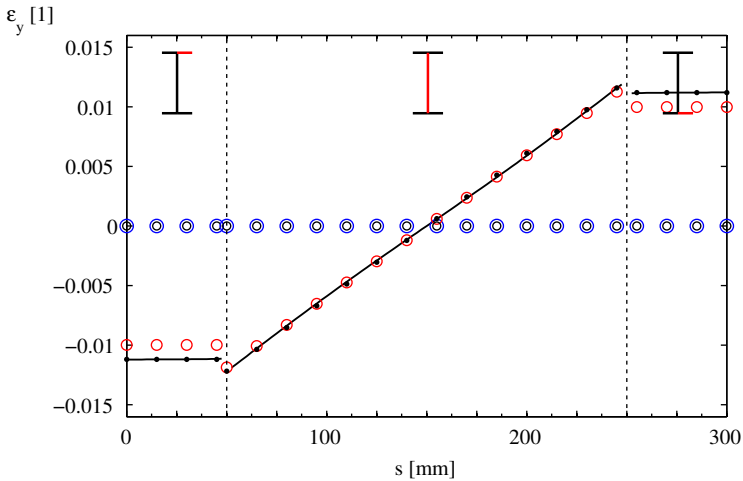


(b)  $\Theta_1$ : I-Träger

**Abbildung 5.21:** Einfluss der Querkontraktion, Teil 1: Laminat 4 (Gurt:  $[\pm 45_2^0]_s$ , Steg:  $[\pm 45_2^0]_s$ )



(a) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : K-Träger



(b) Verzerrung  $\varepsilon_y$  bei  $X = l/4$ : I-Träger

**Abbildung 5.22:** Einfluss der Querkontraktion, Teil 2: Laminat 4 (Gurt:  $[\pm 45_2^0]_s$ , Steg:  $[\pm 45_2^0]_s$ )

von dem gewählten Lagenaufbau hingewiesen. Der Grund hierfür liegt in der unterschiedlichen Verformung der Profilquerschnitte senkrecht zur Balkenlängsachse unter Belastung. Anhand von vier unterschiedlichen Laminatlagenaufbauten für den in Abbildung 5.1 dargestellten Kragträger werden die Umstände in diesem Unterkapitel näher untersucht. Die verwendeten Lagenaufbauten und die zugehörigen Belastungen aus Biegemoment  $M_Y^0$  und Querkraft  $F_Z^0$  sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Das rechte Ende des Trägers ist in allen Freiheitsgraden fest eingespannt. Auf der linken Seite sind eine Absenkung des Profilschwerpunktes  $\Theta_1$  sowie eine Verkippung des/der Steg(e)  $\Theta_2$  zulässig. Verglichen werden die Ergebnisse der folgenden fünf Balkenmodelle:

- Schalenmodell: ABAQUS Referenzlösung. Das auskonvergierte, äquidistante Netz des Schalenmodells besteht aus 320 S4-Elementen in X-, für jeden Gurt 40 in Y- sowie für jeden Steg 80 in globaler Z-Richtung.
- DH3 -  $A_{12} = 0$ : Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Die Dehnsteifigkeit  $A_{12}$  wird zu null gesetzt, d. h. bei axialer Belastung tritt keine Querdehnung auf.
- DH3 -  $\nu_{12} = 0$ : Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Die Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  wird zu null gesetzt, d. h. bei Belastung der Einzelschicht in Faserrichtung bzw. senkrecht dazu tritt keine Querdehnung auf. Werden ausschließlich  $0^\circ$  und  $90^\circ$ -Lagen verwendet trifft dies auch auf das gesamte Laminat zu.
- DH2: Schubdeformationstheorie höherer Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (unverändert).
- DH3: Schubdeformationstheorie höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (unverändert).

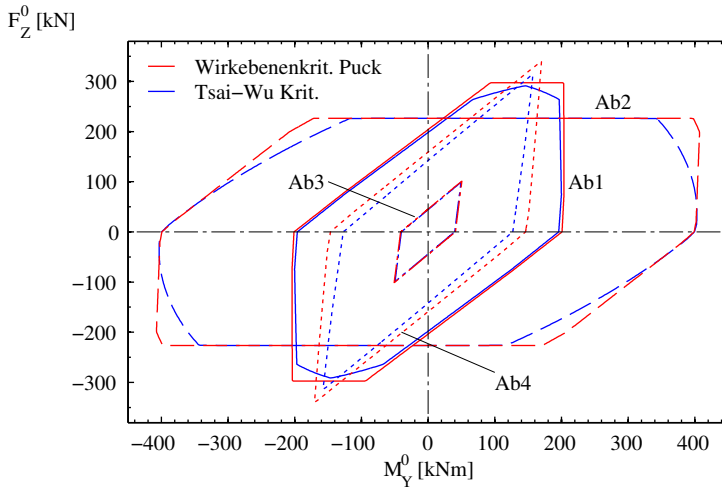
Der numerische Lösungsansatz für die DH3-Modelle verwendet eine Diskretisierung von 128 Elementen in Trägerlängsrichtung. Zu jedem Lagenaufbau werden vier Diagramme erzeugt. Dargestellt werden sowohl für den Kasten- als auch für den I-Träger die Absenkung des Profilschwerpunktes  $\Theta_1$  über der Trägerlänge sowie die Querdehnung  $\varepsilon_y$  für einen Querschnitt bei  $X = l/4$  entlang der Profilkoordinate  $s$ . Die Ergebnisse der einzelnen Modelle sind in den Abbildungen 5.15 bis 5.22 zusammengefasst.

Die Resultate des Schalen- und des unveränderten DH3-Modells stimmen sowohl bei der Trägerabsenkung als auch bei der Querdehnung für beide Profilformen wie auch für alle vier Laminataufbauten sehr gut überein. Die Ergebnisse des DH2- und des DH3-Modells mit zu null gesetzter Dehnsteifigkeit  $A_{12}$  sind nahezu identisch. Beide weisen je nach eingesetztem Lagenaufbau aber erhebliche Abweichungen bei der Trägerabsenkung zum unveränderten DH3-Modell auf (siehe Laminat 3, Abbildung 5.19 (a) und (b)). Auf diese Weise kann anschaulich gezeigt werden, dass die Steifigkeit  $A_{12}$  der effektiven Querkontraktionszahl des gesamten Laminats entspricht. Daher können die beiden Modelle die Querdehnung des Profilquerschnitts nicht wiedergeben. Das DH3-Modell mit zu null gesetzter Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  der Einzelschichten liefert für die Trägerabsenkung der betrachteten Fälle ähnliche Ergebnisse wie das unveränderte DH3-Modell. Allerdings wird die Querdehnung nur in Bereichen mit einem Laminataufbau ohne reine  $0^\circ$ -Winkellagen annähernd richtig abgebildet. Für das Laminat 1 trifft dies z. B. für den Bereich des/der Steg(e) zu. Bei dem Lagenaufbau 2 kann die Querdehnung über den gesamten Profilquerschnitt nicht korrekt dargestellt werden. Somit zeigt sich, dass der Einfluss der Querkontraktionszahl

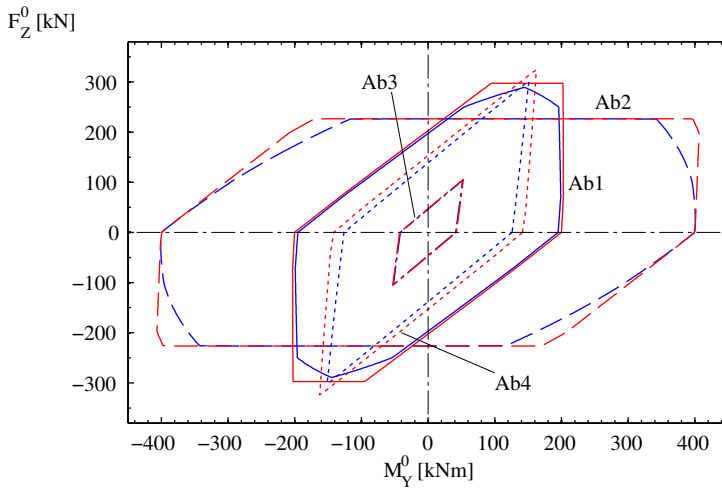
$\nu_{12}$  nur begrenzt ist. Dieses wird umso deutlicher wenn die geringen Veränderungen der Dehnsteifigkeiten  $\underline{A}$  in den Gurten und in dem/den Steg(en) in der Tabelle 5.2 für die vier Laminataufbauten betrachtet werden. Ausschließlich für die Aufbauten, die aus reinen  $0^\circ$ - oder  $90^\circ$ -Lagen bestehen, wird die Kopplung der Schnittkraft  $N_x$  mit der Querdehnung  $\varepsilon_y$  sowie die der Schnittkraft  $N_y$  mit der Längsdehnung  $\varepsilon_x$  über die Dehnsteifigkeit  $A_{12}$  aufgehoben. In allen anderen Fällen bleibt sie bestehen. Eine entscheidende Rolle für die Verformung der Querschnitte senkrecht zur Balkenlängsachse kommt somit der Dehnsteifigkeit  $A_{12}$  zu. Je geringer der Unterschied der Steifigkeiten  $A_{11}$  und  $A_{12}$  ist, desto größer ist der beobachtete Einfluss. Durch ein zu null setzen der Größe  $A_{12}$  im DH3-Modell kann erreicht werden, dass dessen Verhalten dem des DH2-Modells, das keine Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse vorsieht, gleicht. Aus diesem Grund ist es wichtig für die Wahl des Balkenmodells, die Eigenschaften des verwendeten Laminataufbaus zu berücksichtigen. Insbesondere im Hinblick auf Optimierungsaufgaben, in deren Verlauf Einfluss auf Eigenschaften des Aufbaus, d. h. der Dehnsteifigkeiten genommen wird, muss das Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse verwendet werden. Andernfalls ergibt sich die Möglichkeit, dass das verwendete Modell das Ergebnis beeinflusst.

## 5.6 Parameterstudie - Ertragbare Querkraftbelastung in Abhängigkeit vom Biegemoment

In diesem Unterkapitel wird eine Parameterstudie mit Hilfe des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH3) durchgeführt. Durch dieses semi-analytische Modell ist es erst möglich geworden, das Strukturverhalten einer großen Anzahl verschiedenster Laminataufbauten innerhalb kürzester Zeit zu simulieren. Anhand der Studie soll die Leistungsfähigkeit des Verfahrens demonstriert werden. Dabei soll untersucht werden, welcher Belastung als Kombination aus Biegemoment  $M_Y^0$  und Querkraft  $F_Z^0$  der in Abbildung 5.1 gezeigte Kragträger standhalten kann. Das Ergebnis der Berechnungen sind Versagenskurven, deren Ermittlung die Simulation sehr vieler Lastfälle bedarf. Der Träger ist an seinem linken Ende fest eingespannt und die Belastung wird am rechten Ende aufgebracht. Am nicht eingespannten Ende ist nur eine Stegverkipfung und eine Absenkung des gesamten Profilquerschnitts möglich. Das numerische Lösungsverfahren verwendet eine Diskretisierung von 128 Elementen in Trägerlängsrichtung. Für die Beurteilung der Anstrengung werden sowohl das Tsai-Wu Kriterium als auch das Puck'sche Wirkebenenkriterium eingesetzt. Ausgewertet werden für dieses Beispiel die Belastungsergebnisse exemplarisch in einem Bereich von 10 bis 90% der Trägerlänge  $l$ , damit der Einfluss der Randbedingungen reduziert wird und eine Übertragbarkeit der Schlussfolgerungen auf leicht variierte Randbedingungen möglich ist. In den Abbildungen 5.23 und 5.24 sind die Versagenskurven für verschiedene Laminataufbauten des Kasten- und des I-Profiles dargestellt. Die Ergebnisse mit den beiden Versagenskriterien zu den in Tabelle 5.1 aufgeführten Aufbauten sind in den Diagrammen 5.23 (a) und (b) dargestellt. Die Diagramme 5.24 (a) und (b) zeigen die Versagenskurven mit dem Puck'schen Wirkebenenkriterium für Gurte und Steg(e) für  $[\pm\alpha]_s$ -Winkelverbunde mit einer Schichtdicke von 2 mm. Für den Steg des I-Trägers wird von der doppelten Lagenstärke ausgegangen. Untersucht werden die Lagenwinkel  $0^\circ$  bis  $25^\circ$  in  $5^\circ$ -Schritten sowie  $35^\circ$  und  $45^\circ$ . Die Winkelverbunde mit  $0^\circ$  und  $45^\circ$  entsprechen den Lagenaufbauten 2 und 3 aus Tabelle 5.1. Die einzelnen Versagenskurven werden ermittelt, indem für verschiedene Belastungskombinationen das Biegemoment und die Querkraft gesucht werden, bei der eine maximale Anstrengung von 1 im betrachteten

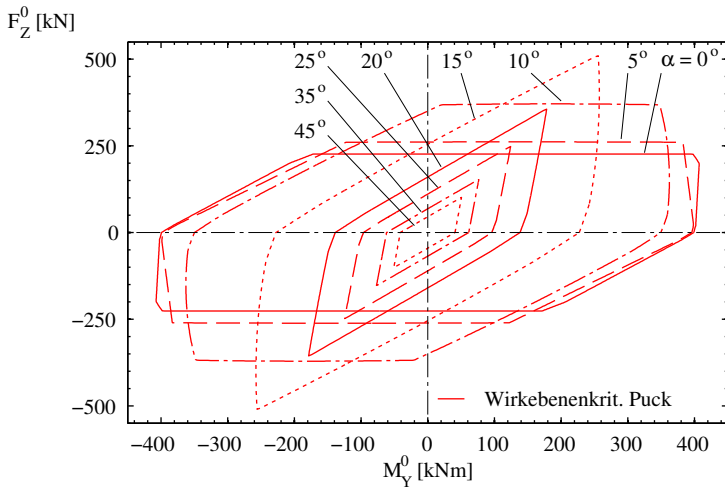


(a) Kastenträger: Laminataufbau 1 bis 4

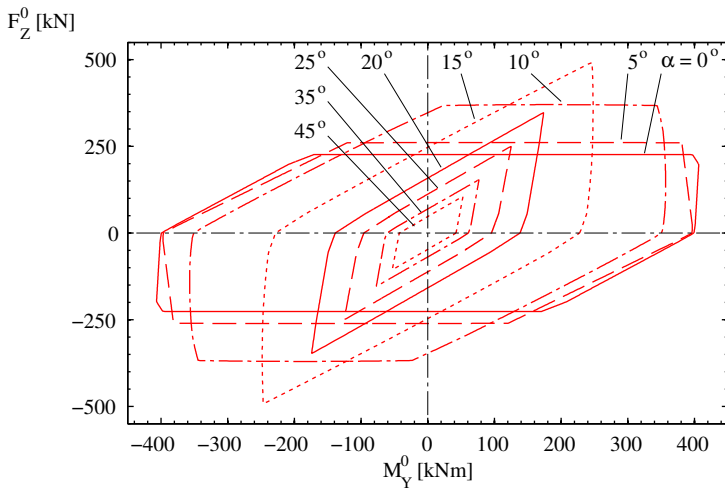


(b) I-Träger: Laminataufbau 1 bis 4

**Abbildung 5.23:** Versagenkurve für eine Kombination aus Querkraft und Biegemoment, Teil 1: Vergleich von Puck'schem Wirkebenenkriterium und Tsai-Wu Kriterium für versch. Laminataufbauten



(a) Kastenträger: Winkelverbunde  $[\pm\alpha]_s$



(b) I-Träger: Winkelverbunde  $[\pm\alpha]_s$

**Abbildung 5.24:** Versagenskurve für eine Kombination aus einer Querkraft und einem Biegemoment, Teil 2: Vergleich versch. Winkelverbunde mit dem Puck'schen Wirkebenenkriterium

Bereich vorliegt. Lastkombinationen, die außerhalb der Kurven liegen, führen zu einem Trägerversagen.

Die Resultate von Kasten- und I-Träger sind ähnlich. Der Vergleich der Versagenkurven aus den Diagrammen 5.23 (a) und (b), die mit dem Tsai-Wu Kriterium und dem Puck'schen Wirkebenenkriterium für die Laminataufbauten 1 bis 4 ermittelt werden, zeigt, dass in den betrachteten Fällen das erste Kriterium das konservative ist. Die Ergebnisse nach Puck lassen eine gleich große oder größere Belastung zu. Das größte Biegemoment kann unter Verwendung reiner  $0^\circ$ -Lagen ertragen werden (Lagenaufbau 2). Die geringsten Belastungswerte ergeben sich aus dem symmetrischen Winkelverbund mit  $45^\circ$  (Lagenaufbau 3). Wird dieser zusätzlich durch eine  $0^\circ$ -Lage in den Gurten verstärkt, steigt die Belastungsfähigkeit erheblich (Lagenaufbau 4). Die in den Diagrammen 5.24 (a) und (b) betrachteten symmetrischen Winkelverbunde zeigen, dass mit steigendem Lagenwinkel  $\alpha$  das ertragbare Biegemoment stetig abnimmt. Die maximal zulässige Querkraft steigt bis zu einem Faserwinkel von ca.  $15^\circ$  an und fällt danach stark ab.

## 6 Optimierung des Lagenaufbaus eines Trägers aus Mehrschichtverbunden

Zur Lösung eines Optimierungsproblems ist es notwendig möglichst viele Berechnungen mit unterschiedlichen Parametern innerhalb kürzester Zeit durchführen zu können. Aus diesem Grund werden für diesen Anwendungsfall analytische bzw. semi-analytische Modelle bevorzugt verwendet. Eine klassische Finite-Elemente-Berechnung würde einen erheblichen numerischen Mehraufwand insbesondere mit steigender Schichtenanzahl bedeuten. Ein Optimierungsbeispiel soll das Verbesserungspotential des Kasten- und des I-Trägers in verschiedenen Lastfällen aufzeigen. Hierfür kommen die Methoden der Strukturoptimierung zur Anwendung. Die Untersuchungen werden anhand des semi-analytischen Schubdeformationsmodells höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse durchgeführt.

Zu Beginn erfolgt die Definition der Optimierungsaufgabe und die Beschreibung des Optimierungsproblems über die Formulierung des Optimierungsmodells, die Festlegung auf ein spezielles Strukturmodell und die Auswahl des Optimierungsalgorithmus. Anschließend werden drei Optimierungsziele verfolgt: Die Maximierung der Trägerfestigkeit; die Minimierung der Trägerabsenkung sowie die gleichzeitige, bestmögliche Erfüllung dieser beiden Ziele durch eine Mehrkriterienoptimierung.

### 6.1 Definition der Optimierungsaufgabe

In der Optimierungsaufgabe wird ein Kragträger, wie er in Abbildung 6.1 zu sehen ist, untersucht. Die Einzelschichten sollen aus CFK (T300/LY556) bestehen, dessen

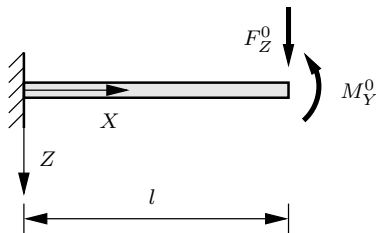


Abbildung 6.1: Kragträger: Angreifende Kraft  $F_Z^0$  und Biegemoment  $M_Y^0$

zugehörige Materialkennwerte im Anhang A.1 aufgeführt sind. Die äußeren geometrischen Abmessungen der Träger sollen unveränderbar sein und werden festgelegt auf

$$b = 100 \text{ mm}, \quad (6.1)$$

$$h = 200 \text{ mm}, \quad (6.2)$$

$$l = 1000 \text{ mm}. \quad (6.3)$$

**Tabelle 6.1:** Lastfälle für die Optimierungsbeispiele

Lastfall	Querkraft	Biegemoment
	$F_Z^0$ [kN]	$M_Y^0$ [kNm]
1	0.00	1.00
2	0.50	0.87
3	0.87	0.50
4	1.00	0.00

Betrachtet werden die vier in Tabelle 6.1 aufgeführten Lastfälle. Diese berücksichtigen verschiedene Lastkombinationen aus Biegemoment und Querkraft, von einer reinen Biegebelastung des Trägers im Lastfall 1 bis hin zu einer alleinigen Querkraftbelastung im Lastfall 4. Jeder Lastfall wird gesondert untersucht und eine getrennte Optimierung durchgeführt.

Ein globales und lokales Stabilitätsversagen bleiben bei den folgenden Untersuchungen unberücksichtigt, weil diese nur als Demonstrationsbeispiel für das prinzipielle Vorgehen dienen. Im einem konkreten Anwendungsfall müssen weitere Restriktionen eingeführt werden, die diese Versagensart berücksichtigen. Ebenso müssen Beschränkungen, die aus den Fertigungsmöglichkeiten resultieren wie z. B. Schichtdicken oder Lagenwinkel, in die Problemstellung eingearbeitet werden.

### 6.1.1 Optimierungsmodellbildung

Der Kragträger soll hinsichtlich der bestmöglichen Layupgestaltung für die einzelnen Lastfälle optimiert werden. Exemplarisch wird für die Gurte ein Laminat mit einem Lagenaufbau von  $[\alpha, -\alpha, 0^\circ]_s$  und für den/die Steg(e) von  $[\alpha, -\alpha]_s$  verwendet. Dies entspricht z. B. einem mit über den Umfang konstantem Lagenwinkel gewickelten Kastenträger, in dessen Gurte eine  $0^\circ$ -Lage eingearbeitet wurde.

Der Entwurfsvariablenvektor  $\underline{\tilde{x}}$  setzt sich aus dem Lagenwinkel  $\alpha$  sowie dem Dickenverhältnis  $vd$  zusammen. Letzteres wird folgendermaßen definiert:

$$vd = \frac{t_0}{t_\alpha}. \quad (6.4)$$

Hierbei ist  $t_0$  die Dicke der zentralen  $0^\circ$ -Lage und  $t_\alpha$  die einer Winkellage. Die Optimierung wird für ein konstantes Trägervolumen von  $vol = 4 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$  durchgeführt. Durch die Vorgabe des Dickenverhältnisses lassen sich die einzelnen Schichtdicken über

$$\begin{aligned} t_0 &= vd \frac{dd}{4} \\ t_\alpha &= \frac{dd}{4} \end{aligned} \quad (6.5)$$

mit

$$dd_{\square} = \frac{vol}{2l \left( b \left( 1 + \frac{vd}{4} \right) + h \right)} \quad \text{bzw.} \quad dd_{\text{I}} = \frac{vol}{\left( 2b \left( 1 + \frac{vd}{4} \right) + h \right) l}$$

bestimmen. Dies bedeutet, dass bei einem Dickenverhältnis von  $vd = 0$  die  $0^\circ$ -Lage in den Gurten verschwindet und ihre Dicke mit ansteigenden Werten zunimmt, wohingegen die Dicke der Winkellagen im gesamten Querschnitt abnimmt. Im zulässigen Bereich soll der Lagenwinkel  $\alpha$  immer zwischen Werten von  $0^\circ$  und  $90^\circ$  und das Dickenverhältnis  $vd$  zwischen 0 und 6 liegen.

Der zulässige Entwurf der Optimierungsaufgabe muss unabhängig von der Wahl des Versagenskriteriums eine Anstrengung kleiner oder gleich 1 besitzen. Dies wird als Ungleichheitsrestriktion in Form von  $\hat{g} \leq 0$  formuliert.

Je nach Optimierungsziel wird eine andere Zielfunktion  $\tilde{f}$  gewählt. Für die Maximierung der Trägerfestigkeit wird das Minimum der maximalen Anstrengung des gesamten Trägers  $\tilde{f}_1$  für den jeweiligen Lastfall gesucht. Bei der Untersuchung der Trägerabsenkung wird die absolute Auslenkung  $\tilde{f}_2$  minimiert. Die Optimierungsaufgabe kann in beiden Fällen folgendermaßen beschrieben werden:

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \mid \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0 \right\}. \quad (6.6)$$

Als dritte Optimierungsaufgabe sollen die beiden zuvor genannten Ziele gleichzeitig erreicht werden. Dieses geschieht über eine Mehrkriterien- bzw. Vektoroptimierung. Hierbei tritt häufig ein Zielkonflikt auf, d. h. es gibt keine Lösung, bei der für sämtliche Zielfunktionen im Vektor  $\tilde{\mathbf{f}}$  das Optimum erreicht ist. In der Regel existiert ein Bereich in dem die sog. PARETO-Optima<sup>1</sup> liegen. Die Lösung wird in diesem Fall über ein Ersatzproblem mit einer skalaren Präferenzfunktion  $\tilde{p}$  gefunden. Diese dient als Ersatz für den Zielfunktionsvektor. Das neue Optimierungsproblem lautet:

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{X}}} \left\{ \tilde{p} \left[ \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) \right] \right\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{X}} := \{ \tilde{\mathbf{x}} \mid \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0 \}. \quad (6.7)$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine Präferenzfunktion zu definieren. Für die Mehrkriterienoptimierung in Kapitel 6.4 wird der Euklidischen Abstand der beiden zu minimierenden Zielfunktionen zu einem zuvor definierten Anspruchsniveau verwendet:

$$\tilde{p} \left[ \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) \right] = \sqrt{\left( \frac{\tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}) - 0,95\tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1^*)}{\tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1^*)} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}) - 0,95\tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}_2^*)}{\tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}_2^*)} \right)^2}. \quad (6.8)$$

Das Anspruchsniveau ergibt sich mit dem Entwurfsvariablenvektor  $\tilde{\mathbf{x}}_1^*$  des Optimums der Maximierung der Trägerfestigkeit bzw.  $\tilde{\mathbf{x}}_2^*$  der Minimierung der Trägerabsenkung. Diese Werte werden um 5% verringert, damit die einzelnen Optima nicht erreicht werden und das Anspruchsniveau stets geringer als ein erreichbares PARETO-Optimum ist. Zusätzlich wird eine Normierung der Zielfunktionen mit dem zugehörigen Anspruchsniveau durchgeführt, weil häufig unterschiedliche Größenordnungen vorliegen.

### 6.1.2 Auswahl des Strukturmodells für die Optimierung

Es stehen vier verschiedene Strukturmodelle für die Optimierung zur Verfügung. Im Rahmen von Voruntersuchungen hat sich gezeigt, dass die mit Hilfe dieser Modelle gewonnenen Aussagen bis auf kleine Abweichungen identisch sind. Daher wird in diesem Teilkapitel ein Modell ausgewählt, mit dem sämtliche Optimierungsaufgaben gelöst werden können. Als Entscheidungshilfe werden die Ergebnisse aus zwei Vergleichen präsentiert.

Zur Auswahl stehen die zwei Schubdeformationsmodelle höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse für den Kasten- und I-Träger. Beide können für eine Festigkeitsbeurteilung sowohl mit dem Tsai-Wu als auch dem Puck'schen Wirkebenkriterium kombiniert werden. Der Träger wird mit 128 Elementen in der Längsrichtung diskretisiert.

<sup>1</sup>„Ein Entwurf  $\tilde{\mathbf{x}}^* \in \tilde{\mathbf{X}}$  heißt dann PARETO-optimal oder *funktionaleffizient*, wenn kein Vektor  $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{X}}$  existiert mit der Eigenschaft  $\tilde{f}_m(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \tilde{f}_m(\tilde{\mathbf{x}}^*)$  für alle  $m$  und  $\tilde{f}_m(\tilde{\mathbf{x}}) < \tilde{f}_m(\tilde{\mathbf{x}}^*)$  für mindestens ein  $m$ .“ aus Schuhmacher [85]

Die Vergleiche werden anhand der Zielfunktion der maximalen Anstrengung der Träger durchgeführt. Sie umfassen im zulässigen Bereich  $\tilde{X}$  die Funktionswerte der Zielfunktion für 2353 Entwürfe ( $\alpha$ : 0:0,5:90,  $vd$ : 0:0,5:6).

### Vergleich der Ergebnisse von Tsai-Wu und Puck'schem Wirkebenenkriterium

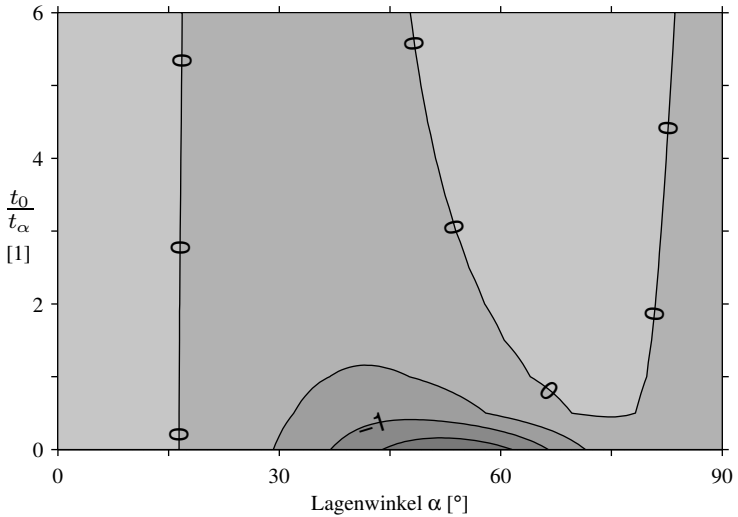
In den Abbildungen 6.2 und 6.3 wird die maximale Anstrengung, die einerseits mit dem Tsai-Wu und andererseits mit dem Puck'schen Wirkebenenkriterium ermittelt wird, anhand des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung mit Profilverformung in der Ebene für den I-Träger verglichen. Die einzelnen Diagramme beziehen sich auf die angegebenen Lastfälle. Sie zeigen für den zulässigen Bereich die prozentualen Abweichungen beider Modelle bezogen auf den höchsten im Gebiet auftretenden Funktionswert. Für jeden der vier betrachteten Lastfälle sind die festgestellten Abweichungen kleiner als 2%, obwohl beide Versagenskriterien von unterschiedlichen Annahmen ausgehen. Das Tsai-Wu Kriterium berücksichtigt eine glatte Versagensfläche ohne Unterscheidung verschiedener Versagensarten, während beim Puck'schen Wirkebenenkriterium eine Unterscheidung in mehrere Faser- und Zwischenfaserbruchmodi getroffen wird. Die Untersuchungen von Hinton, Soden et al. in einem umfangreichen Benchmarktest [30, 31, 99] ließen einen größeren Unterschied erwarten. Aufgrund der effizienteren numerischen Implementierung des Tsai-Wu Kriteriums wird diesem für die weiteren Untersuchungen Vorrang eingeräumt, wengleich ein Austausch durch das weiter entwickelte Puck'sche Wirkebenenkriterium jederzeit möglich ist.

### Vergleich der Ergebnisse von Kasten- und I-Träger

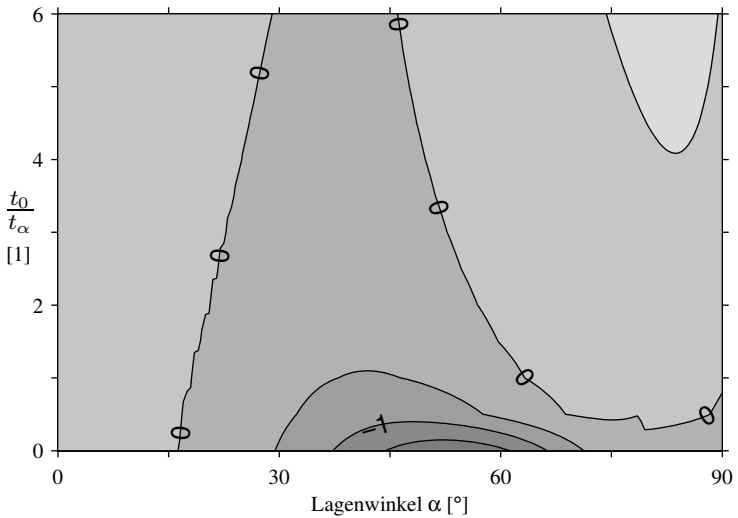
Die Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen die prozentuale Abweichung der maximalen Anstrengung, ermittelt mit dem Tsai-Wu Kriterium, zwischen dem Kasten- und dem I-Träger für den zulässigen Bereich mit dem Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung in der Ebene. Die Abweichung wird auf den höchsten im Gebiet auftretenden Funktionswert der Zielfunktionen bezogen. Dabei treten Abweichungen im Bereich des Optimums von weniger als 3% auf. Lokal eng begrenzt sind im gesamten zulässigen Bereich, besonders bei höheren Trägerslastungen, aber auch Abweichungen über 10% möglich. Die Unterschiede sind mit den leicht unterschiedlichen Einzelschichtdicken der beiden Trägerquerschnitte bei gleichem Dickenverhältnis aufgrund des identischen Trägervolumens zu begründen. Weil nur geringe Differenzen im Bereich des Optimums auftreten, wird im Weiteren ausschließlich das Modell für den I-Träger verwendet. Die aus den später folgenden Kapiteln 6.2 bis 6.4 erhaltenden Ergebnisse sind auf den Kastenträger übertragbar.

## 6.1.3 Wahl des Optimierungsalgorithmus

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe wird die Optimierungstoolbox von MATLAB eingesetzt. Als Gleichungslöser kommt das implementierte *fmincon*-Verfahren für restriktionsbehaftete, nichtlineare Probleme mit mehreren Entwurfsvariablen zum Einsatz. Aufgrund der zu erwartenden Nichtlinearität der Optimierungsprobleme wird die sequentielle quadratische Programmierung als Lösungsalgorithmus verwendet. Es werden neun gleichmäßig über den zulässigen Bereich verteilte Startentwürfe gewählt. Diese sind in den Abbildungen 6.6 bis 6.11 durch weiße Punkte dargestellt. Zwei Abbruchkriterien werden für die präsentierten Beispiele definiert und entsprechende Schwellwerte festgelegt. Sobald eine Schrittweite von  $1 \cdot 10^{-8}$  zwischen den letzten beiden Entwurfsvektoren oder eine Differenz von  $1 \cdot 10^{-8}$  der letzten beiden ermittelten Zielfunktionswerte unterschritten

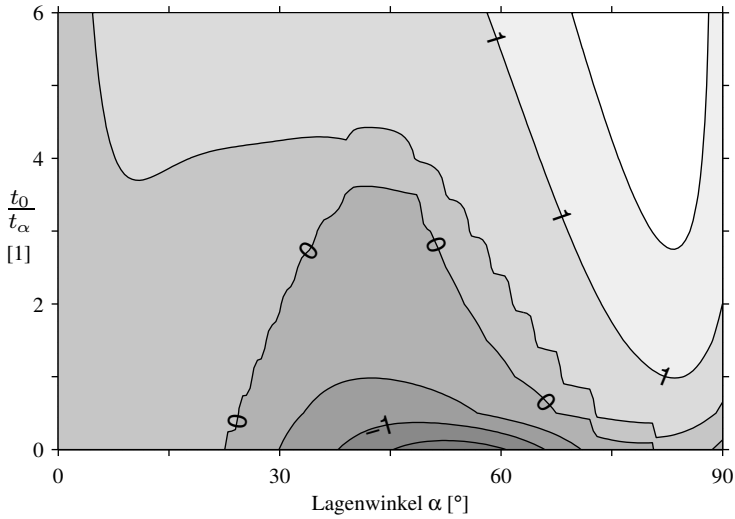


(a) Lastfall 1

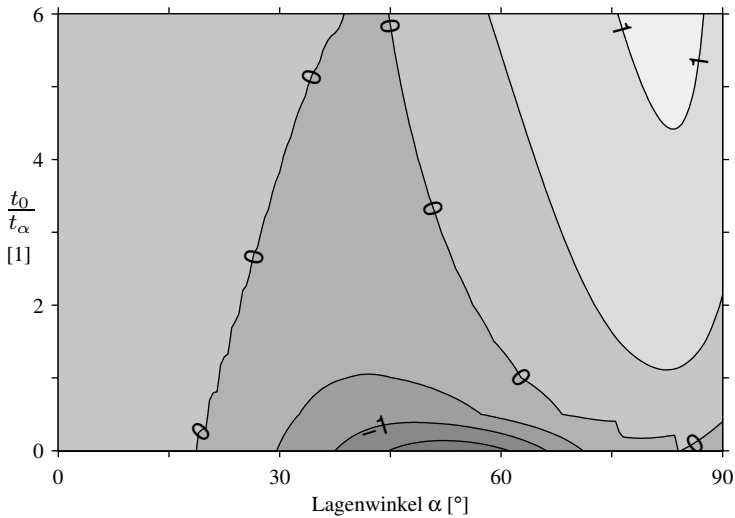


(b) Lastfall 2

**Abbildung 6.2:** Prozentuale Abweichung auf die maximale Anstrengung bezogen von Tsai-Wu und Puck'schem Wirkebenenkriterium anhand des DH3-Modells für den I-Träger, Teil 1

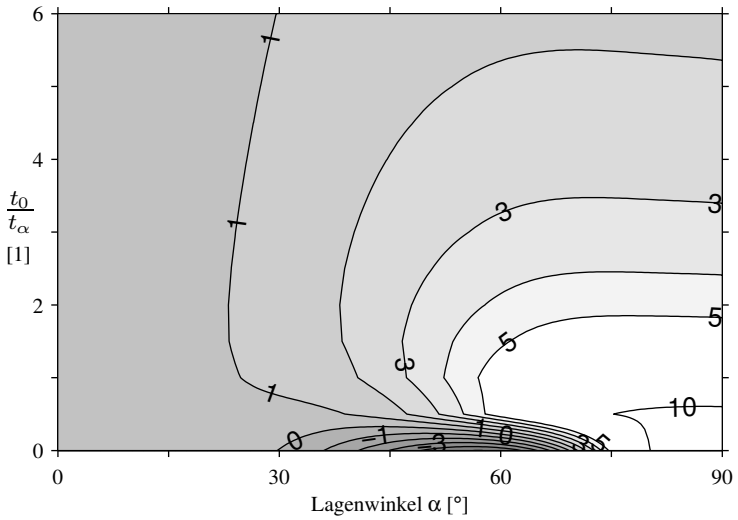


(a) Lastfall 3

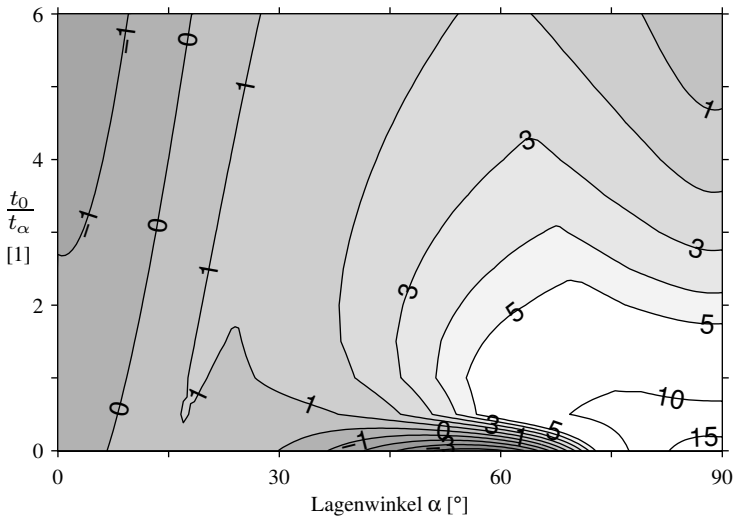


(b) Lastfall 4

**Abbildung 6.3:** Prozentuale Abweichung auf die maximale Anstrengung bezogen von Tsai-Wu und Puck'schem Wirkebenenkriterium anhand des DH3-Modells für den I-Träger, Teil 2

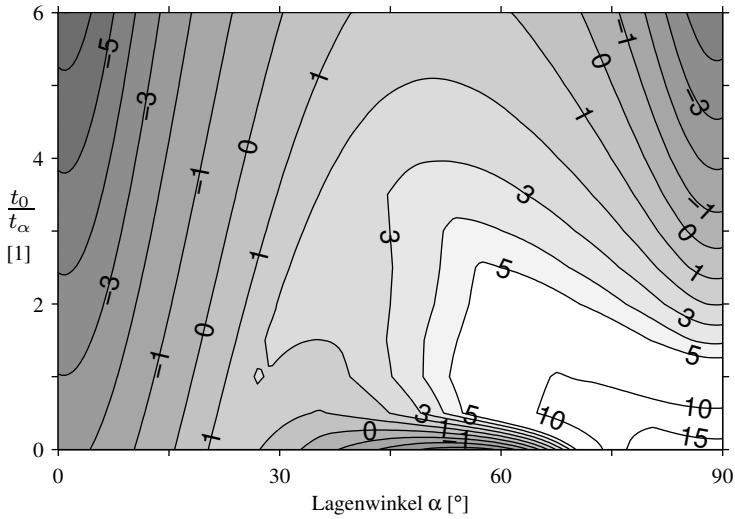


(a) Lastfall 1

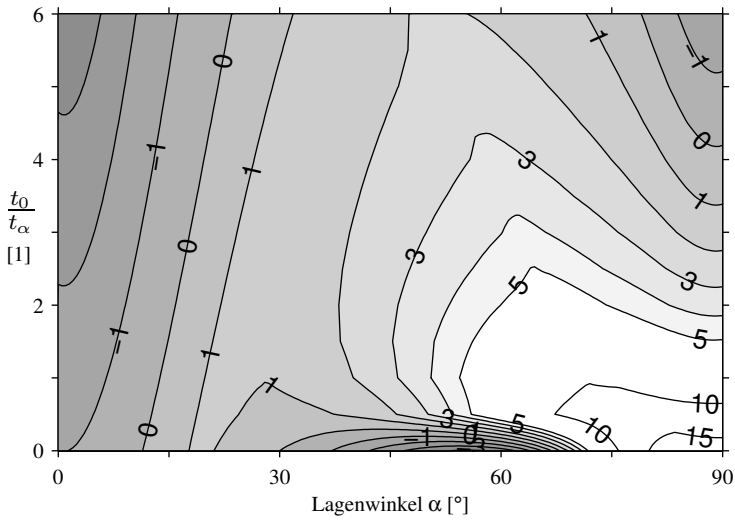


(b) Lastfall 2

**Abbildung 6.4:** Prozentuale Abweichung auf die maximale Anstrengung bezogen von Kasten- und I-Träger anhand des DH3-Modells, Teil 1



(a) Lastfall 3



(b) Lastfall 4

**Abbildung 6.5:** Prozentuale Abweichung auf die maximale Anstrengung bezogen von Kasten- und I-Träger anhand des DH3-Modells, Teil 2

wird, ist ein Optimum gefunden. Wie erwartet zeigt sich, dass nicht alle Startentwürfe zu dem globalen Optimum im zulässigen Bereich führen.

## 6.2 Maximierung der Trägerfestigkeit

In diesem Abschnitt wird der optimale Faserwinkel  $\alpha^*$  und das optimale Dickenverhältnis  $vd^*$  der Einzelschichten für die maximale Festigkeit des I-Trägers gesucht. Die Problemstellung wird dabei in der Art abgewandelt, dass ein Minimierungsproblem vorliegt, damit der gewählte Optimierungsalgorithmus ohne Modifikationen angewendet werden kann. Gesucht wird aus diesem Grund nicht direkt das Maximum der Trägerfestigkeit, sondern das Minimum der maximalen Anstrengung des gesamten Trägers. Beide sind äquivalent, weil der Träger im Minimum die höchste Belastung ertragen kann.

Die Abbildungen 6.6 und 6.7 basieren auf der Auswertung der Zielfunktion an den 2353 aus Kapitel 6.1.2 bekannten Entwürfen im zulässigen Bereich für jeden der vier Lastfälle. Dies dient dazu, die Resultate aus der Optimierung leichter nachvollziehen zu können. Für jeden der in weiß eingezeichneten neun Startentwürfe wird eine getrennte Optimierung durchgeführt. Die gefundenen Minima sind durch rote Kreuze und das globale Minimum durch einen roten Kreis gekennzeichnet. Wie erwartet enden nicht alle Durchläufe im globalen Minimum. Die Endergebnisse sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst.

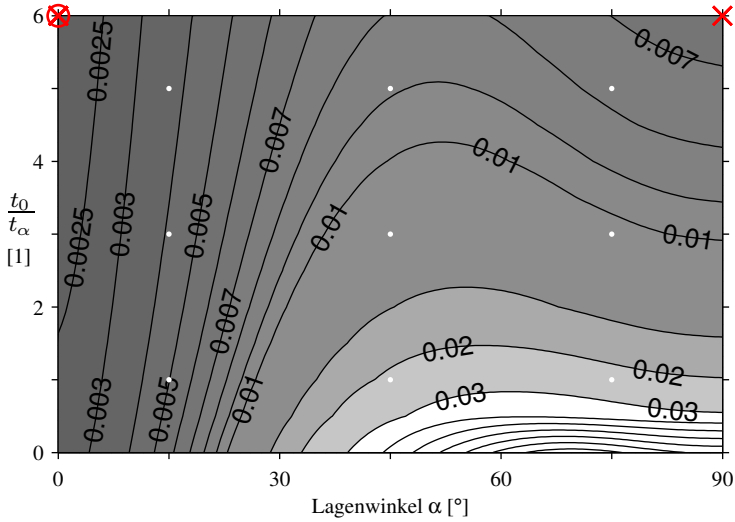
**Tabelle 6.2:** Optima der Maximierung der Trägerfestigkeit für den I-Träger bzw. Minimierung der Anstrengung aus dem Tsai-Wu Kriterium

Lastfall	Globales Optimum $\tilde{x}^*$ $\alpha^*$	$(t_0/t_\alpha)^*$	Zielfunktionswert $\tilde{f}^*$	Gl. Optimum wird erreicht
1	0,0°	6,0	0,00223	6/9
2	0,0°	0,0	0,00439	3/9
3	15,8°	0,0	0,00442	9/9
4	11,6°	0,0	0,00676	9/9

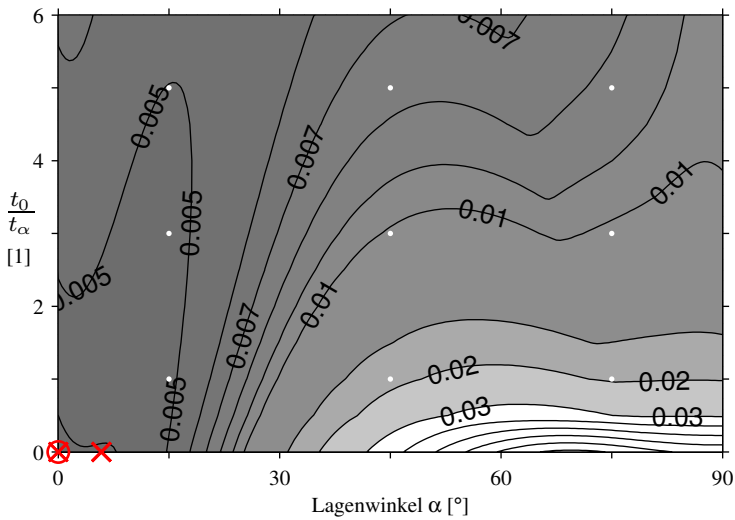
Die Ergebnisse zeigen, dass für eine reine bzw. überwiegende Biegebelastung (siehe Abbildung 6.6a und 6.6b) die geringste Trägeranstrengung erreicht wird, indem ausschließlich 0°-Lagen in den Gurten, als auch in dem/den Steg(en) verwendet werden. Bei reiner Biegebeanspruchung wird die gesamten Last in Form von axialen Spannungen durch die Gurte getragen. Daher müssen in diesem Bereich die 0°-Lagen dominieren und die Gurte möglichst dick werden. Beides wird durch ein hohes Dickenverhältnis erreicht. Mit steigendem Lastwinkel und gleichzeitig wachsendem Querkraftanteil wird der Einfluss des Schubs größer. Aus diesem Grund werden Schichten mit einem von 0° verschiedenen Winkel notwendig. Der Steg bzw. die Stege werden dicker, d. h. das Dickenverhältnis kleiner. Eine reine 0°-Lage in den Gurten ist nicht notwendig, stattdessen werden um das gesamte Profil laufende Lagen mit einem Winkel von deutlich kleiner als 45°, im Beispiel von kleiner als 20°, verwendet. Diese versetzen den Träger in die Lage, sowohl der Schub- als auch der Zug-/Druckbeanspruchung durch die Lasten standzuhalten.

## 6.3 Minimierung der Trägerabsenkung

In diesem Abschnitt wird der optimale Faserwinkel  $\alpha^*$  und das optimale Dickenverhältnis  $vd^*$  der Einzelschichten für die minimale Absenkung des I-Trägers gesucht. Betrachtet wird die maximale, absolute Trägerauslenkung in globaler Z-Richtung.

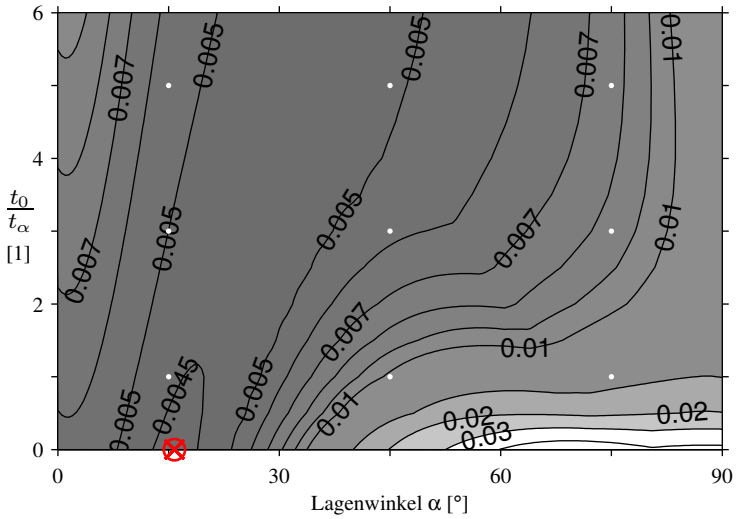


(a) Lastfall 1

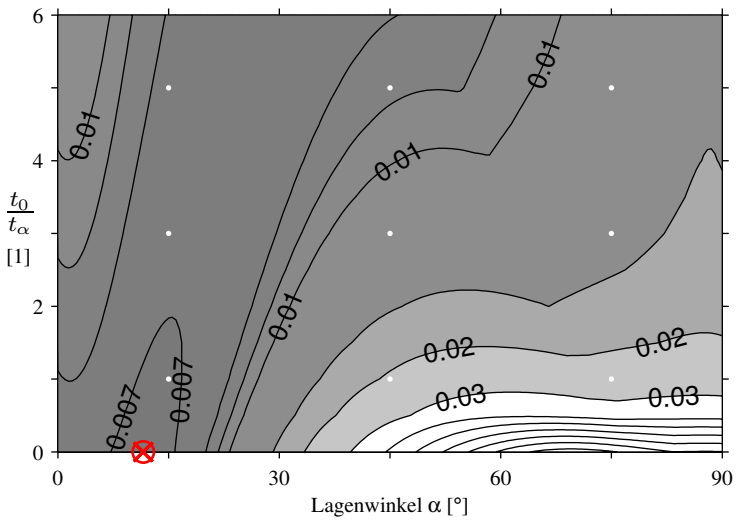


(b) Lastfall 2

Abbildung 6.6: Anstrengung aus dem Tsai-Wu Kriterium für den I-Träger, Teil 1

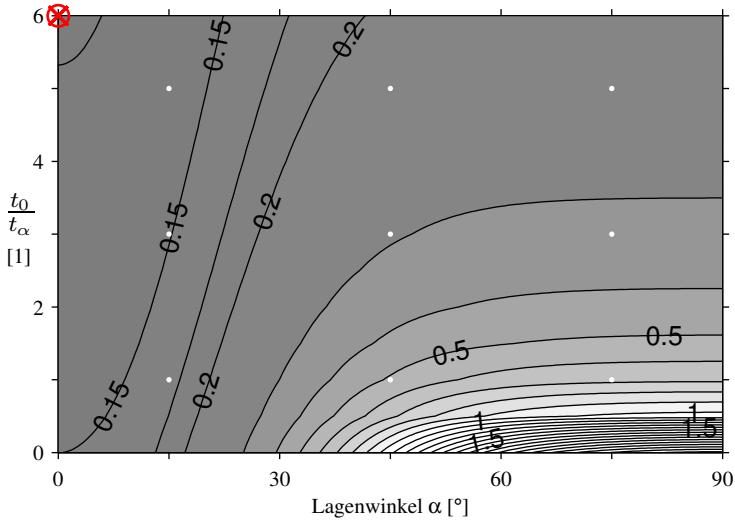


(a) Lastfall 3

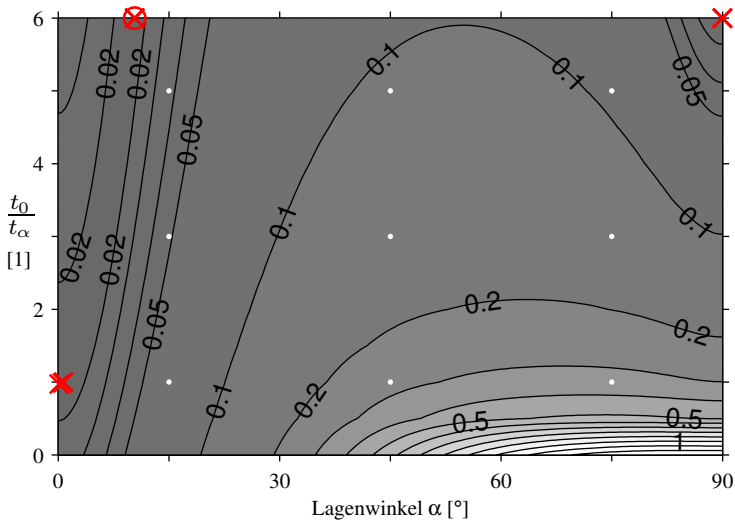


(b) Lastfall 4

Abbildung 6.7: Anstrengung aus dem Tsai-Wu Kriterium für den I-Träger, Teil 2

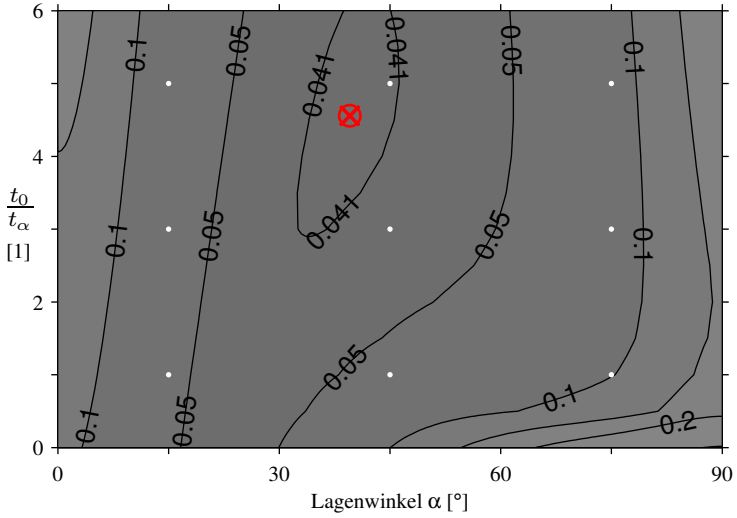


(a) Lastfall 1

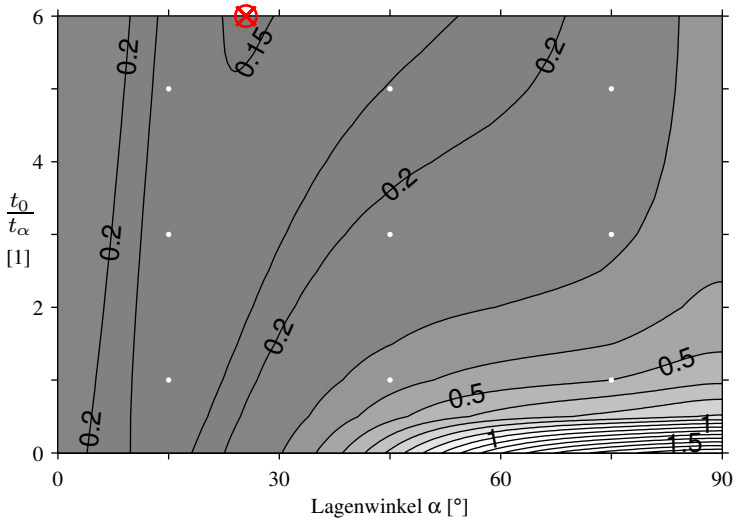


(b) Lastfall 2

Abbildung 6.8: Trägerabsenkung am Balkenende für den I-Träger, Teil 1



(a) Lastfall 3



(b) Lastfall 4

Abbildung 6.9: Trägerabsenkung am Balkenende für den I-Träger, Teil 2

Die Auswertung der Zielfunktion an den 2353 aus Kapitel 6.1.2 bekannten Entwürfen im zulässigen Bereich für jeden der vier Lastfälle ist in den Abbildungen 6.8 und 6.9 dargestellt. Auf diese Weise können die aus der Optimierung gewonnenen Ergebnisse leichter nachvollzogen werden. Die neun Startentwürfe sind weiß markiert. Die über eine getrennt durchgeführte Optimierung gefundenen Minima sind durch rote Kreuze und das globale Minimum durch einen roten Kreis gekennzeichnet. Nicht alle Durchläufe enden im globalen Minimum. Die Tabelle 6.3 fasst die Ergebnisse zusammen.

**Tabelle 6.3:** Optima der Minimierung der Trägerabsenkung

Lastfall	Globales Optimum $\alpha^*$	$\bar{x}^*$ $(t_0/t_\alpha)^*$	Zielfunktionswert $\bar{f}^*$	Gl. Optimum wird erreicht
1	0,0°	6,0	0,12349	9/9
2	10,4°	6,0	0,01346	3/9
3	39,5°	4,6	0,04035	9/9
4	25,5°	6,0	0,14866	9/9

Liegt eine reine Biegebelastung vor, geschieht die Trägerverformung durch eine Dehnung bzw. Stauchung der Gurte des Profils. Um diese zu vermindern muss in diesem Bereich ein hoher 0° Anteil im Layup vorliegen. Aus diesem Grund ist ein möglichst hohes Dickenverhältnis anzustreben. Der/die Steg/e dienen bei diesem Lastfall dazu, die Gurte auf Distanz zu halten (siehe Abbildung 6.8a). Kommt eine Querkraftbelastung hinzu, werden zusätzlich Einzelschichten mit einem von 0° verschiedenen Lagenwinkel insbesondere in dem/den Steg/en benötigt, damit die Schubverformung gering gehalten wird. Auf die zentrale 0°-Lage in den Gurten kann im Gegensatz zum Maximum der Trägerfestigkeit für diese Lastfälle nicht verzichtet werden, weil die Verformung durch Zug/Druck das Geschehen dominiert. Die erforderlichen Lagenwinkel sind kleiner als 40°.

## 6.4 Gleichzeitige Maximierung der Festigkeit und Minimierung der Absenkung

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem optimalen Faserwinkel  $\alpha^*$  und dem optimalen Dickenverhältnis  $vd^*$  der Einzelschichten für den Kompromiss aus maximaler Festigkeit und minimaler Absenkung des I-Trägers. Es wird eine Kombination der in den beiden vorangegangenen Unterkapiteln 6.2 und 6.3 gefundenen Optima gesucht. Die bisherigen Untersuchungen zeigen, dass beide Ziele nicht für alle Lastfälle gleichermaßen erfüllt werden können. Nur für den Fall der reinen Biegung liegen die Optima bei einem möglichst großen Dickenverhältnis und einer Ausrichtung von 0° für die Winkellagen. Alle anderen Lastfälle müssen gesondert über eine Mehrkriterienoptimierung für das Auffinden eines PARETO-Optimums behandelt werden.

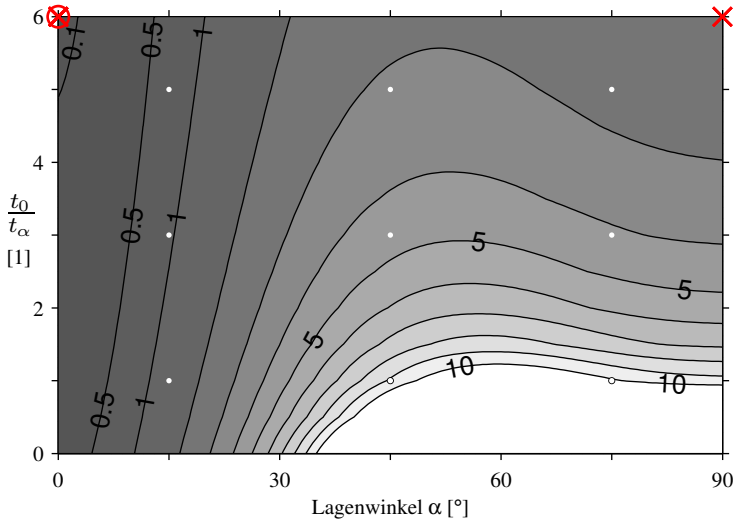
In diesem Unterkapitel wird exemplarisch gezeigt, wie für die Lastfälle 2 bis 4 ein PARETO-Optimum bestimmt werden kann. Hierfür wird die Präferenzfunktion (6.8) aus Kapitel 6.1.1 verwendet. Soll die Menge aller PARETO-Optima, d. h. der funktional-effiziente Rand, abgeschätzt werden, dann sind entsprechend viele Präferenzfunktionen mit unterschiedlichen Anspruchsniveaus notwendig. Für die Abbildungen 6.10 und 6.11 wird die Präferenzfunktion mit den 2353 aus Kapitel 6.1.2 bekannten Entwürfen im zulässigen Bereich für jeden der vier Lastfälle ausgewertet. Auf diesem Weg können die Resultate aus der Optimierung leichter nachvollzogen werden. Eine gesonderte Optimierung wird für jeden der in weiß eingezeichneten neun Startentwürfe durchgeführt. Die gefundenen

Minima sind durch rote Kreuze und das globale Minimum durch einen roten Kreis gekennzeichnet. Das globale Minimum wird nicht von jedem Startentwurf aus erreicht. Die Tabelle 6.4 fasst die Ergebnisse der Optimierung zusammen.

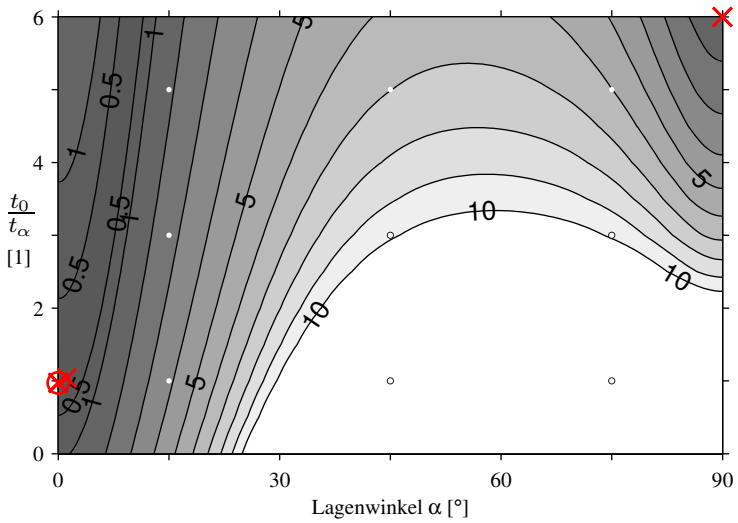
**Tabelle 6.4:** PARETO-Optima: Gleichzeitige Maximierung der Festigkeit und Minimierung der Absenkung

Lastfall $\phi$	Globales Optimum $\alpha^*$	Globales Optimum $\tilde{x}^*$ $(t_0/t_\alpha)^*$	Präferenz- funktionswert $\tilde{p}^*$	Gl. Optimum wird erreicht
1	0,0°	6,0	0,07071	6/9
2	0,0°	1,0	0,18167	5/9
3	35,4°	4,8	0,11715	9/9
4	26,9°	6,0	0,13746	9/9

Die Präferenzfunktion stellt eine Verknüpfung zwischen den beiden Einzelzielen her. Je nach Gewichtung wird das eine oder andere Ziel bevorzugt und ein anderes PARETO-Optimum erreicht. Mit der ausgewählten Definition der Funktion ergibt sich für alle Lastfälle, dass eine zentrale 0°-Lage in den Gurten vorhanden sein muss. Mit einem stärker werdendem Einfluss der Querkraftbelastung bei größeren Lastwinkeln müssen zusätzlich die Winkellagen in realen Anwendungsfällen eine Ausrichtung von ungefähr 30° annehmen.

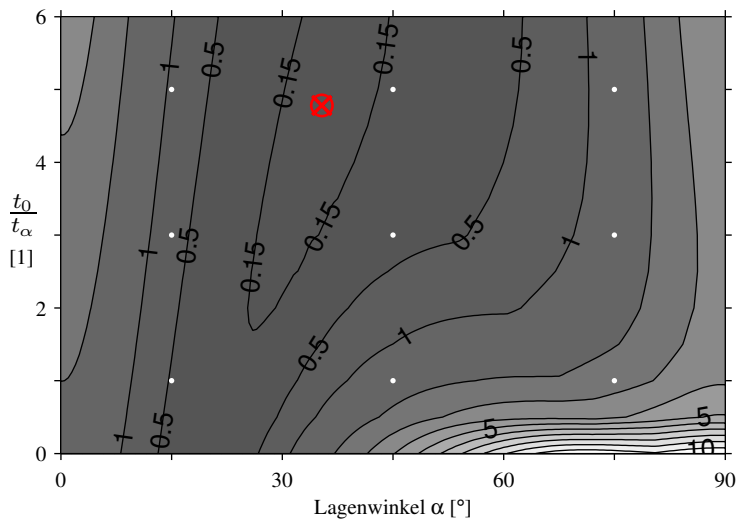


(a) Lastfall 1

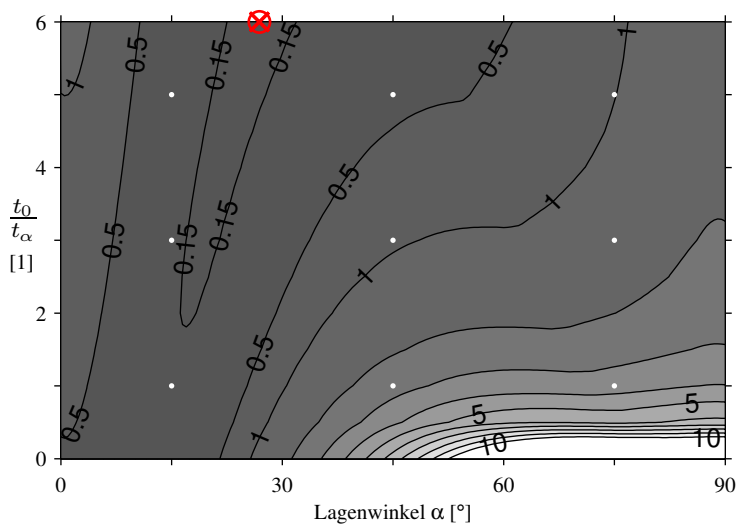


(b) Lastfall 2

**Abbildung 6.10:** Gleichzeitige Maximierung der Festigkeit und Minimierung der Absenkung für den I-Träger, Teil 1



(a) Lastfall 3



(b) Lastfall 4

**Abbildung 6.11:** Gleichzeitige Maximierung der Festigkeit und Minimierung der Absenkung für den I-Träger, Teil 2



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung eines analytisch lösbaren Strukturmodells für dünnwandige Träger mit Kasten- oder I-Profilquerschnitt aus Composite-Material. Gurte und Stege der Profile bestehen dabei aus Mehrschichtverbunden. Aufgrund der getroffenen Annahmen bei der Herleitung muss der gewählte Verbund für die vorgestellten Modelle symmetrisch und ausgeglichen sein. Als Belastung wird eine Kombination aus einer Querkraft und einem Biegemoment angenommen. Das endgültige Modell ist dabei in der Lage, die globalen und lokalen Effekte abzubilden, d. h. die Trägerverformungen sowie die Verzerrungen und Spannungen in den einzelnen Schichten wiederzugeben. Auf diese Weise ist es möglich, eine Aussage über die Festigkeit des betrachteten Trägers zu treffen.

Die verschiedenen Balkenmodelle werden aus segmentweisen, verschiebungsbasierten Ansätzen unterschiedlicher Ordnung hergeleitet, die zugehörigen gekoppelten Differentialgleichungssysteme für die unbekanntenen Deformationsgrößen aufgestellt und die Lösungswege beschrieben. Die sechs entwickelten Modelle basieren auf einer Schubstarren Theorie, auf einer Schubdeformationstheorie erster Ordnung sowie auf einer Schubdeformationstheorie höherer Ordnung jeweils ohne und mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse. Der Fokus liegt auf der erweiterten Schubdeformationstheorie höherer Ordnung. Die Verschiebungsansätze in axialer Richtung werden so gewählt, dass sie den Verlauf des Schubflusses aufgrund einer Querkraftbelastung in den Gurten und dem/den Steg(en) möglichst gut abbilden. Dies bedeutet, dass die Verschiebungsansätze des/der Stegs/Stege von dritter Ordnung und die der Gurte von zweiter Ordnung sein müssen, weil der Schubfluss in diesen Bereichen quadratisch bzw. linear verläuft. Erweiterte Verschiebungsansätze, die eine Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse zulassen, sind für bestimmte Mehrschichtaufbauten notwendig. Der überwiegende Anteil der Modelle ist geschlossen-analytisch lösbar. Einzig bei dem Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Berücksichtigung einer Querschnittsverformung senkrecht zur Balkenlängsachse, wird das Gleichungssystem nur für die Querschnittsgrößen analytisch gelöst. Entlang der Balkenlängsachse wird eine Diskretisierung vorgenommen und das Problem numerisch behandelt. Im Gegensatz zu einem FEM-Schalenmodell ist die Anzahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade stark reduziert und das zu lösende Gleichungssystem entsprechend kleiner, weil nicht der gesamte Balken in Längs- und Umfangsrichtung diskretisiert werden muss. Durch den (semi-)analytischen Lösungsweg kann das Verhalten des Trägers sehr viel schneller und mit einem erheblich geringeren Aufwand analysiert werden.

Auf die Vorstellung eines numerischen Lösungsverfahrens für die Differentialgleichungen der Balkenmodelle folgt die Demonstration der Fähigkeiten der zuvor beschriebenen Balkenmodelle anhand eines Kragträgerbeispiels. Eine Netzstudie zeigt ein gutmütiges Konvergenzverhalten und legt die für die folgenden Untersuchungen notwendige Elementanzahl in axialer Richtung fest. Die Verifikation des numerischen Lösungsverfahrens gegenüber dem geschlossen-analytischen Lösungsweg wird am Beispiel eines Schubdeformationsmodells erster Ordnung durchgeführt. Größere Abweichungen zwischen beiden treten nicht auf. Eine Validierung der Balkenmodelle findet gegenüber einem numerischen Schalenmodell als Referenz statt, das mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst wird. Am Beispiel der Trägerabsenkung zeigt sich, dass Abweichungen in den Ergebnissen der einzelnen Modelle in Abhängigkeit vom gewählten Lagenaufbau vorliegen. Ausschließlich das Schubdeformationsmodell höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur

Balkenlängsachse weist eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Referenzmodell auf. Dies trifft auch auf die betrachteten Verschiebungen, Verzerrungen und Schnittkräfte zu, die von den anderen Modellen je nach den verwendeten Verschiebungsansätzen nur grob oder gar nicht wiedergegeben werden können. Eine Untersuchung des Einflusses der gewählten Randbedingungen auf das Systemverhalten zeigt, dass dieser im betrachteten Beispiel in weniger als 20% der Trägerlänge von dem entsprechenden Rand abklingt. Der Vergleich des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung ohne und mit erweiterter Profilverformung demonstriert den Einfluss der Querkontraktion auf die Vorhersagegüte der Strukturmodelle. Es wird gezeigt, dass das Verhältnis der Dehnsteifigkeiten  $A_{11}$  und  $A_{12}$  entscheidend ist. Mit steigender Querdehnsteifigkeit  $A_{12}$  der verwendeten Mehrschichtverbunde, d. h. mit sinkender Differenz der beiden Steifigkeiten, wird es wichtiger die Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse zu berücksichtigen. Die Größe der Querkontraktionszahl  $\nu_{12}$  der Einzelschicht beeinflusst das Trägerverhalten nur im Fall eines Mehrschichtverbundes mit ausschließlich reinen  $0^\circ$ - oder  $90^\circ$ -Lagen. Eine Parameterstudie zeigt die Abhängigkeit von ertragbarer Belastung aus einer Querkraft und einem Biegemoment in Form von Versagenskurven. Für einen Winkelverbund mit einem Lagenaufbau von  $[\pm\alpha]_s$  ergibt sich unter reiner Biegung das größte übertragbare Moment unter Verwendung von reinen  $0^\circ$ -Lagen in den Gurten und dem/den Steg(en). Die größtmögliche Querkraftbelastung wird mit einem Faserwinkel von ca.  $15^\circ$  erreicht.

Drei Strukturoptimierungsaufgaben werden mit Hilfe des Schubdeformationsmodells höherer Ordnung mit Profilverformung gelöst. Dieses erweist sich aufgrund seines hohen analytischen Anteils und seiner Unabhängigkeit von den verwendeten Lagenaufbauten als eine geeignete Basis für Optimierungsaufgaben. Eine effiziente Lösung dieser Probleme ist notwendig, weil sich aus den möglichen Entwurfsvariablen, wie z. B. Anzahl, Dicke, Material und Winkel der Einzelschichten sowie den geometrischen Abmessungen des Balkens, viele Freiheitsgrade und Variationsmöglichkeiten ergeben. Im Einzelnen wird die Trägerfestigkeit, die Trägerabsenkung sowie die Kombination aus beiden an einem Kragträgerbeispiel für verschiedene Lastfälle untersucht. Gurte und Steg(e) besitzen einen Lagenaufbau aus einem Winkelverbund. In die Gurte wird eine zusätzliche  $0^\circ$ -Lage eingefügt. Als Entwurfsvariablen werden das Dickenverhältnis von  $0^\circ$ - zu Winkellage sowie der Faserwinkel verwendet, wobei das Trägervolumen konstant ist. Die maximale Trägerfestigkeit wird für einen reinen Winkelverbund mit kleinen Faserwinkeln unter  $20^\circ$  ohne zusätzliche  $0^\circ$ -Lage in den Gurten erreicht, falls kein Zustand reiner Biegung vorliegt. Die minimale Trägerabsenkung wird hingegen für eine möglichst dicke  $0^\circ$ -Lage erreicht. Somit ergibt sich für die Kombination aus beiden Zielen die Suche nach einem PARETO-Optimum über eine Präferenzfunktion.

Anzumerken ist, dass sämtliche gewonnenen Ergebnisse für den Kasten- und den I-Träger nahezu identisch und somit auf die jeweils andere Profilform übertragbar sind. Die Ähnlichkeit bzw. die Übereinstimmung der Gleichungssysteme für die beiden Profile wird durch die getroffene Wahl der lokalen Koordinatensysteme bei der Modellbildung ermöglicht.

Im Rahmen der Erstellung dieser Arbeit sind weitere interessante Themenpunkte hinzugekommen, deren nähere Betrachtung sich für fortführende Arbeiten lohnen würde. So ist es wichtig für die Festigkeit des Trägers, dass keine Schwächung der verwendeten Mehrschichtaufbauten durch eine Delamination vorliegt. Beide Trägerprofile weisen spezifische Anfälligkeiten auf, die einer näheren Untersuchung bedürfen.

In den Ecken des Kastenträgers können Spannungen in Dickenrichtung auftreten, die ein Ablösen der Schichten bewirken, wenn die entsprechende Ecke des Profilquerschnitts aufgebogen wird. Entscheidend für die Höhe der Spannungen ist insbesondere die Größe des Krümmungsradius der Ecken. In der Literatur liegen neben Untersuchungen zu

---

Stäben und Balken mit gerader Längsachse und ebenen Laminaten auch solche zu gekrümmten Strukturen vor. Als Beispiele können folgende genannt werden: Shenoj und Wang [90] stellten 2001 eine Untersuchung zur Festigkeit und Delaminationsneigung von gekrümmten orthotropen Laminaten vor. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass sowohl der Krümmungsradius wie auch die Schichtungsreihenfolge des Laminats einen erheblichen Einfluss besitzen. Kress et al. [43] beschrieben 2005 ein Modell für einfach gekrümmte Laminats. Es wurden Untersuchungen für unidirektional verstärkte Laminats und Kreuzverbunde durchgeführt. Die Querschnitte blieben unter Verformung senkrecht auf der Mittellinie stehen. Aus der Kinematik folgte dennoch eine nichtlineare Verzerrungsverteilung über die Dicke des Laminats. In [49] beschrieben Lin und Hsieh 2007 ihr Modell für gekrümmte Balken mit variablem Krümmungsradius und beliebigem Lagenaufbau. Für das zugrunde liegende Gleichungssystem kann eine geschlossen-analytische Lösung gefunden werden. Yu et al. veröffentlichten 2011 in [124] ihr Modell für gekrümmte und verdrehte geschlossene dünnwandige Composite-Profile. Effekte wie Verwölbung durch Torsion, Schubdeformation und Effekte aus den Kopplungen der verwendeten Laminats und der ursprünglich vorhandenen Krümmung wurden berücksichtigt.

I-Träger weisen zwei besonders zu betrachtende Bereiche im Hinblick auf eine erhöhte Delaminationsneigung auf. Zum einen die Stöße zwischen den Gurten und dem Steg und zum anderen die freien Laminatkanten und -ecken, die durch den Laminatrandeffekt beherrscht werden. Interlaminare Spannungskonzentrationen an den Rändern mit teilweise singulärem Verhalten können Schälspannungen zwischen den Schichten des Laminats hervorrufen und zu einer Randdelamination führen. Hervorgerufen wird der Effekt durch die unterschiedlichen Verzerrungen der Laminats einzelschichten. Durch eine Änderung der Schichtungsreihenfolge kann der Laminatrandeffekt abgemildert oder ins Gegenteil verkehrt werden. Bei Nachweisverfahren auf Basis von FEM Modellen wächst mit steigender Schichtanzahl die Anzahl der Freiheitsgrade und somit der Lösungsaufwand stark an. Daher sind analytische Näherungsverfahren vorzuziehen. Literatur hierzu findet sich u. a. in den folgenden Werken: Im Jahr 2000 veröffentlichten Kim et al. [38] eine Analyse des Randeffekts mit Hilfe einer erweiterten Kantorovich-Methode zur Ermittlung der interlaminaren Spannungen. Einen umfangreichen Überblick zur Literatur auf diesem Gebiet seit 1967 boten Mittelstedt und Becker [55] in ihrer 2004 erschienenen Arbeit. Die beiden Autoren veröffentlichten bis 2007 weitere Artikel [56, 57] mit eigenen Forschungen zu geschlossen-analytischen Näherungsverfahren, die auch den Randeffekt an freien Ecken mit einschließen und als anerkannte Berechnungsgrundlagen in die Fachliteratur [10] eingingen. Von Mittelstedt wurde 2006 eine Dissertation [54] zu diesem Thema verfasst.

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Schubdeformationstheorie höherer Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse kann als Grundlage für eine Betrachtung der Kanten- bzw. Eckeefekte beim Kastenträger und des Laminatrandeffektes beim I-Träger genutzt werden, weil sie Verschiebungs-, Spannungs- oder Verzerrungsrandbedingungen liefert. Neben den Versagenskriterien ist für einen Festigkeitsnachweis die Berücksichtigung weiterer Effekte, die zu einem Bauteilversagen führen können, notwendig. Hierzu zählt insbesondere das lokale und globale Stabilitätsversagen.

Viele der oben genannten Effekte lassen sich reduzieren oder ins Gegenteil umkehren durch eine geschickte Wahl der Schichtreihenfolge und eine Optimierung des Layups im Hinblick auf die verwendeten Einzelschichtdicken. Zusätzliche Probleme bei der Verwendung von faserverstärkten Kunststoffen als Trägermaterial bereiten die Lasteinleitungspunkte. Für die Betrachtung von Auflagereffekten sind daher gesonderte, lokale Modellierungen notwendig. Diese können wiederum auf die Belastungsaussagen der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Modelle zurückgreifen.



## A Anhang

### A.1 Materialkennwerte

#### CFK (T300/LY556)

Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse basieren ausschließlich auf den folgenden Materialkennwerten für T300/LY556.

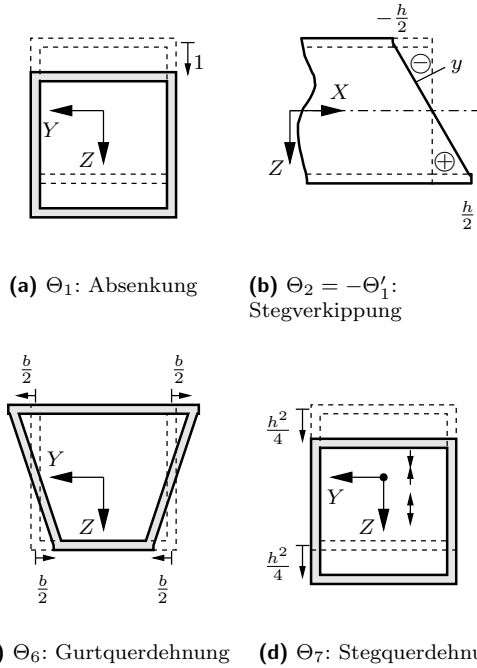
$$\begin{aligned}E_1 &= 125.000 \text{ N/mm}^2; E_2 = E_3 = 7.400 \text{ N/mm}^2; \\G_{12} &= G_{13} = 4.800 \text{ N/mm}^2; G_{23} = 2.701 \text{ N/mm}^2; \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = 0,34; \nu_{23} = 0,37; \\ R_{\parallel}^+ &= 1.860 \text{ N/mm}^2; R_{\parallel}^- = 1.500 \text{ N/mm}^2; \\ R_{\perp}^+ &= 51 \text{ N/mm}^2; R_{\perp}^- = 165 \text{ N/mm}^2; \\ R_{\perp\parallel} &= 85 \text{ N/mm}^2; \\ p_{\perp\parallel}^+ &= 0,25; p_{\perp\parallel}^- = 0,3; p_{\perp\perp}^+ = 0,25; p_{\perp\perp}^- = 0,25.\end{aligned}$$

### A.2 Schubstarre Theorie mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (S3)

Die grundlegenden Gleichungen für die Verschiebungen und Verzerrungen des Kasten- und I-Trägers für das schubstarre Modell mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse sind in den Tabellen A.1 bzw. A.2 zusammengefasst. Es gelten die folgenden geometrischen Kompatibilitätsbedingungen

$$\begin{aligned}\Theta_2 &= -\Theta'_1, \quad u_G = \frac{h}{2}\Theta'_1, \\ w_S &= \frac{b}{h}\Theta_6, \quad w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4}\Theta_7.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Die Abbildungen A.1 bzw. A.2 zeigen, die zu den unbekannt Funktionen  $\Theta_m$  ( $m = 1, 6, 7$ ) zugehörigen, Deformationsmoden.



(a)  $\Theta_1$ : Absenkung

(b)  $\Theta_2 = -\Theta'_1$ :  
Stegverkipfung

(c)  $\Theta_6$ : Gurtquerdehnung

(d)  $\Theta_7$ : Stegquerdehnung

**Abbildung A.1:** S3:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den Kastenträger

**Tabelle A.1:** S3: Verschiebungen und Verzerrungen des Kastenträgers

**Verschiebungen:**

**Verzerrungen:**

[1, 6]:

$$u = u_G = \frac{h}{2} \Theta'_1$$

$$v = y \Theta_6$$

$$w = w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7$$

$$\varepsilon_x = u'_G = \frac{h}{2} \Theta''_1$$

$$\varepsilon_y = \Theta_6$$

$$\gamma_{xy} = y \Theta'_6$$

[2]:

$$u = y \Theta_2 = -y \Theta'_1$$

$$v = \Theta_1 + y^2 \Theta_7$$

$$w = y w_S = \frac{b}{h} y \Theta_6$$

$$\varepsilon_x = y \Theta'_2 = -y \Theta''_1$$

$$\varepsilon_y = 2y \Theta_7$$

$$\gamma_{xy} = \Theta_2 + \Theta'_1 + y^2 \Theta'_7 = y^2 \Theta'_7$$

[3, 4]:

$$u = -u_G = -\frac{h}{2} \Theta'_1$$

$$v = -y \Theta_6$$

$$w = -w_G = -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7$$

$$\varepsilon_x = -u'_G = -\frac{h}{2} \Theta''_1$$

$$\varepsilon_y = -\Theta_6$$

$$\gamma_{xy} = -y \Theta'_6$$

[5]:

$$u = -y \Theta_2 = y \Theta'_1$$

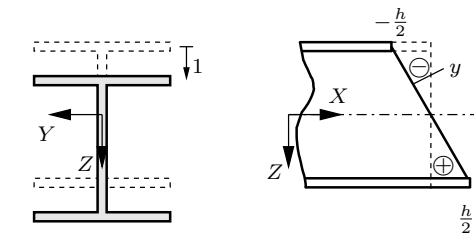
$$v = -\Theta_1 - y^2 \Theta_7$$

$$w = -y w_S = -\frac{b}{h} y \Theta_6$$

$$\varepsilon_x = -y \Theta'_2 = y \Theta''_1$$

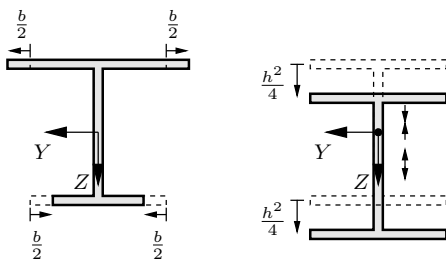
$$\varepsilon_y = -2y \Theta_7$$

$$\gamma_{xy} = -\Theta_2 - \Theta'_1 - y^2 \Theta'_7 = -y^2 \Theta'_7$$



(a)  $\Theta_1$ : Absenkung

(b)  $\Theta_2 = -\Theta'_1$ :  
Stegverkipfung



(c)  $\Theta_6$ : Gurtquerdehnung

(d)  $\Theta_7$ : Stegquerdehnung

**Abbildung A.2:** S3:  $\Theta_m$  und zugehörige Deformationsmoden für den I-Träger

**Tabelle A.2:** S3: Verschiebungen und Verzerrungen des I-Trägers

**Verschiebungen:**

**Verzerrungen:**

[1, 4]:

$$\begin{aligned} u &= u_G = \frac{h}{2} \Theta'_1 \\ v_{[1]} &= \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_6 \\ v_{[4]} &= \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_6 \\ w &= w_G = \Theta_1 + \frac{h^2}{4} \Theta_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u'_G = \frac{h}{2} \Theta''_1 \\ \varepsilon_y &= \Theta_6 \\ \gamma_{xy}[1] &= \left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_6 \\ \gamma_{xy}[4] &= \left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_6 \end{aligned}$$

[2]:

$$\begin{aligned} u &= y \Theta_2 = -y \Theta'_1 \\ v &= \Theta_1 + y^2 \Theta_7 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= y \Theta'_2 = -y \Theta''_1 \\ \varepsilon_y &= 2y \Theta_7 \\ \gamma_{xy} &= \Theta_2 + \Theta'_1 + y^2 \Theta'_7 = y^2 \Theta'_7 \end{aligned}$$

[3, 5]:

$$\begin{aligned} u &= -u_G = -\frac{h}{2} \Theta'_1 \\ v_{[3]} &= -\left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta_6 \\ v_{[5]} &= -\left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta_6 \\ w &= -w_G = -\Theta_1 - \frac{h^2}{4} \Theta_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -u'_G = -\frac{h}{2} \Theta''_1 \\ \varepsilon_y &= -\Theta_6 \\ \gamma_{xy}[3] &= -\left(y - \frac{b}{2}\right) \Theta'_6 \\ \gamma_{xy}[5] &= -\left(y + \frac{b}{2}\right) \Theta'_6 \end{aligned}$$

### A.3 Matrizen für das numerische Lösungsverfahren

An dieser Stelle werden die einzelnen Matrizen des numerischen Lösungsverfahrens aus Kapitel 4 für das Schubdeformationsmodell erster und höherer Ordnung ohne (DE2 bzw. DH2) sowie erster Ordnung mit Profilverformung (DE3) senkrecht zur Balkenlängsachse angegeben.

#### A.3.1 Schubdeformationstheorie erster Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DE2)

Aus Gleichung (4.1) ergibt sich für die beiden Profile:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{O}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{O}}_{[2]} \\ \underline{\underline{O}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{O}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{y}{0} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{\frac{h}{2}}{0} \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{-y}{0} \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{O}}_{[1+4]} \\ \underline{\underline{O}}_{[2]} \\ \underline{\underline{O}}_{[3+5]} \end{bmatrix}_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{0}{y} \\ 1 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{-\frac{h}{2}} \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Aus Gleichung (4.2) folgt für  $\underline{\underline{P}}$  und  $\underline{\underline{\hat{P}}}$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{P}}_{[2]} \\ \underline{\underline{P}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{P}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{1}{0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_{[1+4]} \\ \underline{\underline{P}}_{[2]} \\ \underline{\underline{P}}_{[3+5]} \end{bmatrix}_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & \frac{1}{0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[2]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{y} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{0}{-\frac{h}{2}} \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{-y} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{P}}}_{[1+4]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[2]} \\ \underline{\underline{\hat{P}}}_{[3+5]} \end{bmatrix}_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{y} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{0}{\frac{h}{2}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Aus Gleichung (4.9) folgt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}}_{11 \square} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A_{66S} h \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}}_{12 \square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2A_{66S} h & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{R}}_{22 \square} &= \begin{bmatrix} 2A_{66S} h & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} h^2 (3A_{11G} b + A_{11S} h) \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}}_{11 \text{I}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{66S} h \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}}_{12 \text{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{66S} h & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{R}}_{22 \text{I}} &= \begin{bmatrix} A_{66S} h & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} h^2 (6A_{11G} b + A_{11S} h) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

### A.3.2 Schubdeformationstheorie höherer Ordnung ohne Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DH2)

Aus Gleichung (4.1) ergibt sich für die beiden Profile:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{Q}}_{[2]} \\ \underline{\underline{Q}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{Q}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & -\frac{b^2}{4} + y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & -\frac{1}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & \frac{b^2}{4} - y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & -\frac{1}{y^3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_{[1+4]} \\ \underline{\underline{Q}}_{[2]} \\ \underline{\underline{Q}}_{[3+5]} \end{bmatrix}_{\text{I}} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & -\frac{h^3}{8} & -\frac{b^2}{4} + y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & -\frac{1}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8} & \frac{b^2}{4} - y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$



Aus Gleichung (4.9) folgt:

$$\underline{\underline{R}}_{11 \square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_{66S} h & \frac{A_{66S} h^3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{A_{66S} h^3}{2} & \frac{9A_{66S} h^5}{40} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2A_{66G} b^3}{3} \end{bmatrix}, \underline{\underline{R}}_{12 \square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2A_{66S} h & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{66S} h^3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\underline{\underline{R}}_{22 \square} = \begin{bmatrix} 2A_{66S} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} h^2 (3A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{40} h^4 (5A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{6} A_{11G} b^3 h \\ 0 & \frac{1}{40} h^4 (5A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{224} h^6 (7A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{24} A_{11G} b^3 h^3 \\ 0 & \frac{1}{6} A_{11G} b^3 h & \frac{1}{24} A_{11G} b^3 h^3 & \frac{A_{11G} b^5}{15} \end{bmatrix};$$

$$\underline{\underline{R}}_{11 \text{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{66S} h & \frac{A_{66S} h^3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{A_{66S} h^3}{4} & \frac{9A_{66S} h^5}{80} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2A_{66G} b^3}{3} \end{bmatrix}, \underline{\underline{R}}_{12 \text{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{66S} h & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{66S} h^3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\underline{\underline{R}}_{22 \text{I}} = \begin{bmatrix} A_{66S} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} h^2 (6A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{80} h^4 (10A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{6} A_{11G} b^3 h \\ 0 & \frac{1}{80} h^4 (10A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{448} h^6 (14A_{11G} b + A_{11S} h) & \frac{1}{24} A_{11G} b^3 h^3 \\ 0 & \frac{1}{6} A_{11G} b^3 h & \frac{1}{24} A_{11G} b^3 h^3 & \frac{A_{11G} b^5}{15} \end{bmatrix}$$

### A.3.3 Schubdeformationstheorie erster Ordnung mit Profilverformung senkrecht zur Balkenlängsachse (DE3)

Aus Gleichung (4.1) ergibt sich für die beiden Profile:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{O}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{O}}_{[2]} \\ \underline{\underline{O}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{O}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ -\frac{1}{0} & 0 & 0 & \frac{h^2}{4} \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y^2 \\ -\frac{0}{0} & 0 & \frac{by}{h} & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -y^2 \\ 0 & 0 & -\frac{by}{h} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{O}}_{[1]} \\ \underline{\underline{O}}_{[2]} \\ \underline{\underline{O}}_{[3]} \\ \underline{\underline{O}}_{[4]} \\ \underline{\underline{O}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} + y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{h^2}{4} \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} - y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \\ 0 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} + y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{h^2}{4} \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} - y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{4} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Aus Gleichung (4.2) folgt für  $\underline{\underline{P}}$  und  $\underline{\underline{\hat{P}}}$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_{[1+6]} \\ \underline{\underline{P}}_{[2]} \\ \underline{\underline{P}}_{[3+4]} \\ \underline{\underline{P}}_{[5]} \end{bmatrix}_{\square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -2y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_{[1+4]} \\ \underline{\underline{P}}_{[2]} \\ \underline{\underline{P}}_{[3+5]} \end{bmatrix}_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{P}_{\square[1+6]} \\ \hat{P}_{\square[2]} \\ \hat{P}_{\square[3+4]} \\ \hat{P}_{\square[5]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -y^2 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} \hat{P}_{\mathbb{I}[1]} \\ \hat{P}_{\mathbb{I}[2]} \\ \hat{P}_{\mathbb{I}[3]} \\ \hat{P}_{\mathbb{I}[4]} \\ \hat{P}_{\mathbb{I}[5]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} + y & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} - y & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} + y & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} - y & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (4.9) folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{R}_{11\square} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_{66S} h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{22G} b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2A_{22S} h^3}{3} \end{bmatrix}, \\
 \underline{R}_{12\square} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2A_{66S} h & 0 & 0 & \frac{A_{66S} h^3}{6} \\ 0 & -A_{12G} b h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{12S} h^3}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.15} \\
 \underline{R}_{22\square} &= \begin{bmatrix} 2A_{66S} h & 0 & 0 & \frac{A_{66S} h^3}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} h^2 (3A_{11G} b + A_{11S} h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{66G} b^3}{6} & 0 \\ \frac{A_{66S} h^3}{6} & 0 & 0 & \frac{A_{66S} h^5}{40} \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{R}}_{11\text{I}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{66S} h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{22G} b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{22S} h^3}{3} \end{bmatrix}, \\
 \underline{\underline{R}}_{12\text{I}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{66S} h & 0 & 0 & \frac{A_{66S} h^3}{12} \\ 0 & -A_{12G} b h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{12S} h^3}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \underline{\underline{R}}_{22\text{I}} &= \begin{bmatrix} A_{66S} h & 0 & 0 & \frac{A_{66S} h^3}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} h^2 (6A_{11G} b + A_{11S} h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{66G} b^3}{6} & 0 \\ \frac{A_{66S} h^3}{12} & 0 & 0 & \frac{A_{66S} h^5}{80} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

## Literaturverzeichnis

- [1] AFSAR, A. M. ; NATH, S. K. D. ; AHMED, S. R. ; SONG, J. L.: Displacement potential based finite difference solution to elastic field in a cantilever beam of orthotropic composite. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), Nr. 5, S. 386–399
- [2] ALTENBACH, H.: Theories for laminated and sandwich plates. In: *Mechanics of Composite Materials* 34 (1998), Nr. 3, S. 243–252
- [3] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; KISSING, W.: *Mechanics of composite structural elements*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2004
- [4] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; NAUMENKO, K.: *Ebene Flächentragwerke – Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 1998
- [5] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke – Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Stuttgart : Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1996
- [6] ALTENBACH, J. ; KISSING, W. ; ALTENBACH, H.: *Dünnwandige Stab- und Stabschalen-tragwerke – Modellierung und Berechnung im konstruktiven Leichtbau*. Braunschweig; Wiesbaden : Vieweg, 1994
- [7] BABUSKA, I. ; ODEN, J. T.: Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 36-38, S. 4057–4066
- [8] BAIER, H. ; SEESSELBERG, C. ; SPECHT, B.: *Optimierung in der Strukturmechanik*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1994
- [9] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2002
- [10] BECKER, W. ; MITTELSTEDT, C.: Laminat-Randeffekte. In: *Luftfahrttechnisches Handbuch* Bd. FL 33 100-16. Faserverbund-Leichtbau, 2007
- [11] BHASKAR, K. ; LIBRESCU, L.: A geometrically non-linear theory for laminated anisotropic thin-walled beams. In: *International Journal of Engineering Science* 33 (1995), Nr. 9, S. 1331–1344
- [12] BOAY, C. G. ; WEE, Y. C.: Coupling effects in bending, buckling and free vibration of generally laminated composite beams. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), Nr. 7-8, S. 1664–1670

- [13] BREDT, R.: Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität. In: *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure* 40 (1896), S. 785–790, 813–817
- [14] BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F. ; MEISTER, A.: *Höhere Mathematik für Ingenieure – Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. Auflage 5. Wiesbaden : Vieweg+Teuber, 2009
- [15] CARDOSO, J. B. ; VALIDO, A. J.: Cross-section optimal design of composite laminated thin-walled beams. In: *Computers and Structures* 89 (2011), Nr. 11-12, S. 1069–1076
- [16] CARRERA, E. ; PETROLO, M.: On the effectiveness of higher-order terms in refined beam theories. In: *Journal of Applied Mechanics* 78 (2011), Nr. 2, S. 021013–021013–17
- [17] CHENG, S.: Elasticity theory of plates and a refined theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 46 (1979), Nr. 3, S. 644–650
- [18] CORREIA, J.R. ; BRANCO, F.A. ; SILVA, N.M.F. ; CAMOTIM, D. ; SILVESTRE, N.: First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams. Part 1: Experimental study. In: *Computers and Structures* 89 (2011), Nr. 21-22, S. 2052–2064
- [19] DAVALOS, J. F. ; QIAO, P.: A computational approach for analysis and optimal design of FRP beams. In: *Computers and Structures* 70 (1999), Nr. 2, S. 169–183
- [20] DAVALOS, J. F. ; QIAO, P. ; BARBERO, E. J.: Multiobjective material architecture optimization of pultruded FRP I-beams. In: *Composite Structures* 35 (1996), Nr. 3, S. 271–281
- [21] DE LORENZIS, L. ; LA TEGOLA, A.: Static behavior of pultruded fiber-reinforced polymer thin-walled beams. In: *Composite Structures* 60 (2003), Nr. 3, S. 231–244
- [22] DUFORT, L. ; DRAPIER, S. ; GRÉDIAC, M.: Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending. In: *Composite Structures* 52 (2001), Nr. 2, S. 233–246
- [23] DUFORT, L. ; GRÉDIAC, M. ; SURREL, Y.: Experimental evidence of the cross-section warping in short composite beams under three point bending. In: *Composite Structures* 51 (2001), Nr. 1, S. 37–47
- [24] FARES, M. E. ; ELMARGHANY, M. K.: A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. In: *Composite Structures* 82 (2008), Nr. 1, S. 71–83
- [25] GAN, L.-H. ; YE, L. ; MAI, Y.-W.: Optimum design of cross-sectional profiles of pultruded box beams with high ultimate strength. In: *Composite Structures* 45 (1999), Nr. 4, S. 279–288
- [26] GAN, L.-H. ; YE, L. ; MAI, Y.-W.: Simulations of mechanical performance of pultruded I-beams with various flange-web conjunctions. In: *Composites Part B: Engineering* 30 (1999), Nr. 4, S. 423–429

- 
- [27] GAWANDI, A. ; WHITNEY, J. M. ; BROCKMAN, R. A.: Natural boundary conditions in the bending of anisotropic laminated plates. In: *Composite Structures* 82 (2008), Nr. 2, S. 201–208
- [28] GUTIÉRREZ, E. ; PRIMI, S. ; MIERES, J. M. ; CALVO, I.: Structural testing of a vehicular carbon fiber bridge: Quasi-static and short-term behavior. In: *Journal of Bridge Engineering* 13 (2008), Nr. 3, S. 271–281
- [29] HARZHEIM, L.: *Strukturoptimierung – Grundlagen und Anwendungen*. Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch, 2008
- [30] HINTON, M. J. ; KADDOUR, A. S. ; SODEN, P. D.: A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 12-13, S. 1725–1797
- [31] HINTON, M. J. ; SODEN, P. D.: Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 7, S. 1001–1010
- [32] JEON, S. M. ; CHO, M. H. ; LEE, I.: Static and dynamic analysis of composite box beams using large deflection theory. In: *Computers and Structures* 57 (1995), Nr. 4, S. 635–642
- [33] JONES, R. M.: *Mechanics of composite materials*. Auflage 2. Philadelphia : Taylor & Francis, 1999
- [34] JUNG, S. N. ; LEE, J.-Y.: Closed-form analysis of thin-walled composite I-beams considering non-classical effects. In: *Composite Structures* 60 (2003), Nr. 1, S. 9–17
- [35] JUNG, S. N. ; NAGARAJ, V. T. ; CHOPRA, I.: Assessment of composite rotor blade modeling techniques. In: *Journal of the American Helicopter Society* 44 (1999), Nr. 3, S. 188–205
- [36] KAPANIA, R. K. ; RACITI, S.: Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I: Shear effects and buckling. In: *AIAA Journal* 27 (1989), Nr. 7, S. 923–935
- [37] KATHIRAVAN, R. ; GANGULI, R.: Strength design of composite beam using gradient and particle swarm optimization. In: *Composite Structures* 81 (2007), Nr. 4, S. 471–479
- [38] KIM, H. S. ; CHO, M. ; KIM, G.-I.: Free-edge strength analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method. In: *Composite Structures* 49 (2000), Nr. 2, S. 229–235
- [39] KIRCHHOFF, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850), S. 51–88
- [40] KOLLÁR, L. P.: Cross sectional properties of thin-walled composite beams. In: *16th International conference on composite materials, Kyoto, Japan, 2007*

- [41] KOLLÁR, L. P. ; PLUZSIK, A.: General theory of thin walled composite beams. In: *14th European conference on composite materials*. Budapest, Hungary, 7-10 June 2010
- [42] KOLLÁR, L. P. ; SPRINGER, G. S.: *Mechanics of composite structures*. Cambridge, New York, Melbourne : Cambridge University Press, 2003
- [43] KRESS, G. ; ROOS, R. ; BARBEZAT, M. ; DRANSFELD, C. ; ERMANNI, P.: Model for interlaminar normal stress in singly curved laminates. In: *Composite Structures* 69 (2005), Nr. 4, S. 458–469
- [44] KROKER, A. M. ; BECKER, W.: Closed-form analysis of a higher-order composite box beam theory. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* 9 (2009), Nr. 1, S. 213–214
- [45] KROKER, A. M. ; BECKER, W.: A higher-order beam theory for composite box beams. In: *Proceedings ICCM17, 27-31 July 2009, Edinburgh, UK*, 2009
- [46] KROKER, A. M. ; BECKER, W.: A higher-order composite beam theory for closed-form analysis of beams with box and I cross-section. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* 10 (2010), Nr. 1, S. 179–180
- [47] LEE, J.: Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory. In: *Composite Structures* 70 (2005), Nr. 2, S. 212–222
- [48] LIBRESCU, L. ; SONG, O. ; GLADWELL, G. M. L. (Hrsg.): *Solid Mechanics and its Applications*. Bd. 131: *Thin-walled composite beams – Theory and application*. Dordrecht, The Netherlands : Springer, 2006
- [49] LIN, K. C. ; HSIEH, C. M.: The closed form general solutions of 2-D curved laminated beams of variable curvatures. In: *Composite Structures* 79 (2007), Nr. 4, S. 606–618
- [50] MADDUR, S. S. ; CHATURVEDI, S. K.: Laminated composite open profile sections: first order shear deformation theory. In: *Composite Structures* 45 (1999), Nr. 2, S. 105–114
- [51] MADDUR, S. S. ; CHATURVEDI, S. K.: Laminated composite open profile sections: non-uniform torsion of I-sections. In: *Composite Structures* 50 (2000), Nr. 2, S. 159–169
- [52] MCCARTHY, T. R. ; CHATTOPADHYAY, A.: A refined higher-order composite box beam theory. In: *Composites Part B: Engineering* 28 (1997), Nr. 5-6, S. 523–534
- [53] MINDLIN, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), S. 31–38
- [54] MITTELSTEDT, C.: Free-edge and free-corner effects in composite laminates; Closed-form analytical and semi-analytical approaches. In: *Fortschritt-Berichte VDI* Bd. Reihe 18. VDI Verlag, 2006
- [55] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Interlaminar stress concentrations in layered structures: part I – A selective literature survey on the free-edge effect since 1967. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), Nr. 12, S. 1037–1062

- 
- [56] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Interlaminar stress concentrations in layered structures: part II – Closed-form analysis of stresses at laminated rectangular wedges with arbitrary non-orthotropic layup. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), Nr. 12, S. 1063–1090
- [57] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Free-edge effects in composite laminates. In: *Applied Mechanics Reviews* 60 (2007), Nr. 5, S. 217–245
- [58] MURTHY, M. V. V. S. ; MAHAPATRA, D. R. ; BADARINARAYANA, K. ; GOPALAKRISHNAN, S.: A refined higher order finite element for asymmetric composite beams. In: *Composite Structures* 67 (2005), Nr. 1, S. 27–35
- [59] NAIK, G. N. ; GOPALAKRISHNAN, S. ; GANGULI, R.: Design optimization of composites using generic algorithms and failure mechanism based failure criterion. In: *Composite Structures* 83 (2008), Nr. 4, S. 354–367
- [60] NOOR, A. K. ; BURTON, W. S.: Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. In: *Applied Mechanics Reviews* 42 (1989), Nr. 1, S. 1–13
- [61] NOWINSKI, J.: Theory of thin-walled bars. In: *Applied Mechanics Reviews* 12 (1959), Nr. 4, S. 219–227
- [62] PAGANO, N. J.: Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. In: *Journal of Composite Materials* 4 (1970), S. 20–34
- [63] PANC, V.: *Theories of elastic plates*. Leyden, NL : Noordhoff Intern. Pub., 1975
- [64] POTTER, K. D. ; DAVIES, R. ; BARRETT, M. ; GODBEHERE, A. ; BATEUP, L. ; WISNOM, M. ; MILLS, A.: Heavily loaded bonded composite structure: design, manufacture and test of ‘I’ beam specimens. In: *Composite Structures* 51 (2001), Nr. 4, S. 389–399
- [65] PUCK, A. ; KOPP, J. ; KNOPS, M.: Guidelines for the determination of the parameters in Puck’s action plane strength criterion. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 3, S. 371–378
- [66] PUCK, A. ; SCHÜRMAN, H.: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 7, S. 1045–1067
- [67] QIAO, P. ; ZOU, G. ; DAVALOS, J. F.: Flexural–torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams. In: *Composite Structures* 60 (2003), Nr. 2, S. 205–217
- [68] QIN, Z. ; LIBRESCU, L.: On a shear-deformable theory of anisotropic thin-walled beams: further contribution and validations. In: *Composite Structures* 56 (2002), Nr. 4, S. 345–358
- [69] RAND, O.: On the importance of cross-sectional warping in solid composite beams. In: *Composite Structures* 49 (2000), Nr. 4, S. 393–397
- [70] REDDY, J. N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984), Nr. 4, S. 745–752

- [71] REDDY, J. N.: A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. In: *Communications in Applied Numerical Methods* 3 (1987), Nr. 3, S. 173–180
- [72] REDDY, J. N.: A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25 (1990), Nr. 6, S. 677–686
- [73] REDDY, J. N.: A review of refined theories of laminated composite plates. In: *The Shock and Vibration Digest* 22 (1990), Nr. 1, S. 3–17
- [74] REDDY, J. N.: *Mechanics of laminated composite plates – Theory and analysis*. Auflage 2. Boca Raton, FL : CRC Press, 1997
- [75] REISSNER, E.: On the theory of bending of elastic plates. In: *Journal of Mathematics and Physics* 23 (1944), S. 184–191
- [76] REISSNER, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 12 (1945), S. A–69–A–77
- [77] REISSNER, E.: Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 4 (1946), Nr. 3, S. 268–278
- [78] REISSNER, E.: On bending of elastic plates. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 5 (1947), Nr. 1, S. 55–68
- [79] REISSNER, E.: On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. In: *International Journal of Solids and Structures* 11 (1975), Nr. 5, S. 569–573
- [80] REISSNER, E.: On the theory of transverse bending of elastic plates. In: *International Journal of Solids and Structures* 12 (1976), Nr. 8, S. 545–554
- [81] REISSNER, E.: Note on the effect of transverse shear deformation in laminated anisotropic plates. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 20 (1979), Nr. 2, S. 203–209
- [82] ROTH, T. ; MEIER, H.: Swissfiber bridge VC02: A modular pedestrian bridge system in FRP – A step forward in FRP bridge construction. In: *Proceedings of the COBRAE Conference 2005: Bridge Engineering with Polymer Composites*. Zurich, Switzerland, 2005
- [83] SAVIC, V. ; TUTTLE, M. E. ; ZABINSKY, Z. B.: Optimization of composite I-sections using fiber angles as design variables. In: *Composite Structures* 53 (2001), Nr. 3, S. 265–277
- [84] SCHARDT, R.: *Verallgemeinerte technische Biegetheorie – lineare Theorie*. Bd. 1. Auflage 2. Darmstadt : Metrum-Verlag, 2007
- [85] SCHUMACHER, A.: *Optimierung mechanischer Strukturen – Grundlagen und industrielle Anwendungen*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2005

- 
- [86] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2005
- [87] SEDLACEK, G. ; TRUMPF, H.: Mobile Leichtbau-Festbrücken aus pultrudierten faserverstärkten Polymerprofilen. In: *Bauingenieur* 78 (2003), S. 451–458
- [88] SHEIKH, A. H. ; THOMSEN, O. T.: A thin-walled composite beam element for open and closed sections. In: *16th International conference on composite materials, Kyoto, Japan, 2007*
- [89] SHEIKH, A. H. ; THOMSEN, O. T.: An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), Nr. 10-11, S. 2273–2281
- [90] SHENOI, R. A. ; WANG, W.: Through-thickness stresses in curved composite laminates and sandwich beams. In: *Composites Science and Technology* 61 (2001), Nr. 11, S. 1501–1512
- [91] SHI, G. ; VOYIADJIS, G. Z.: A sixth-order theory of shear deformable beams with variational consistent boundary conditions. In: *Journal of Applied Mechanics* 78 (2011), Nr. 2, S. 021019–1–021019–11
- [92] SILVA, N.M.F. ; CAMOTIM, D. ; SILVESTRE, N. ; CORREIA, J.R. ; BRANCO, F.A.: First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams. Part 2: Numerical simulation. In: *Computers and Structures* 89 (2011), Nr. 21-22, S. 2065–2078
- [93] SILVA, N.M.F. ; CAMOTIM, D. ; SILVESTRE, N. ; DEGENHARDT, R.: On the use of generalized beam theory to assess the buckling and postbuckling behavior of laminated CFRP cylindrical stiffened panels. In: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 10 (2010), Nr. 4, S. 737–760
- [94] SILVA, N.M.F. ; SILVESTRE, N. ; CAMOTIM, D.: GBT formulation to analyse the buckling behaviour of FRP composite open-section thin-walled columns. In: *Composite Structures* 93 (2010), Nr. 1, S. 79–92
- [95] SILVESTRE, N. ; CAMOTIM, D.: First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. In: *Thin-Walled Structures* 40 (2002), Nr. 9, S. 755–789
- [96] SILVESTRE, N. ; CAMOTIM, D.: Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. In: *Thin-Walled Structures* 40 (2002), Nr. 9, S. 791–820
- [97] SILVESTRE, N. ; CAMOTIM, D.: GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members. In: *Computers and Structures* 81 (2003), Nr. 18-19, S. 1889–1904
- [98] SOBRINO, J. A. ; DOLORES, M. ; PULIDO, G.: Towards advanced composite material footbridges. In: *Structural Engineering International* 12 (2002), Nr. 2, S. 84–86
- [99] SODEN, P. D. ; HINTON, M. J. ; KADDOUR, A. S.: Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 7, S. 1011–1022

- [100] SONG, O. ; LIBRESCU, L.: Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour. In: *Journal of Sound and Vibration* 167 (1993), Nr. 1, S. 129–147
- [101] SONG, O. ; LIBRESCU, L. ; JEONG, N.-H.: Static response of thin-walled composite I-beams loaded at their free-end cross-section: analytical solution. In: *Composite Structures* 52 (2001), Nr. 1, S. 55–65
- [102] SURESH, J. K. ; NAGARAJ, V. T.: Higher-order shear deformation theory for thin-walled composite beams. In: *Journal of Aircraft* 33 (1996), Nr. 5, S. 978–986
- [103] SURESH, R. ; MALHOTRA, S. K.: Some studies on static analysis of composite thin-walled box beam. In: *Computers and Structures* 62 (1997), Nr. 4, S. 625–634
- [104] SURESH, S. ; SUJIT, P. B. ; RAO, A. K.: Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design. In: *Composite Structures* 81 (2007), Nr. 4, S. 598–605
- [105] TESSLER, A. ; DI SCIUVA, M. ; GHERLONE, M.: A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams. In: *Journal of Composite Materials* 43 (2009), Nr. 9, S. 1051–1081
- [106] TIMOSHENKO, S. P.: Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross section. In: *Journal of the Franklin Institute* 239 (1945), S. 201–219, 249–268, 343–361
- [107] TIMOSHENKO, S. P.: *History of strength of materials*. New York : Dover Publication, 1983
- [108] TSAI, S. W. ; WU, E. M.: A general theory of strength for anisotropic materials. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), Nr. 1, S. 58–80
- [109] VDI: VDI 2014; Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund – Berechnungen. In: *VDI-Richtlinien*. Berlin : Beuth Verlag GmbH, 2006
- [110] VERHEUS, A. ; TROMP, L. ; SOUREN, W.: Can vacuum infusion complement pultrusion in bridge and civil engineering? In: *Tagungshandbuch der 11. Internationalen AVK Tagung*, 2008
- [111] VO, T. P. ; LEE, J.: Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams. In: *Engineering Structures* 29 (2007), Nr. 8, S. 1774–1782
- [112] VO, T. P. ; LEE, J.: Free vibration of thin-walled composite box beams. In: *Composite Structures* 84 (2008), Nr. 1, S. 11–20
- [113] VO, T. P. ; LEE, J.: Geometrically nonlinear analysis of thin-walled composite box beams. In: *Computers and Structures* 87 (2009), S. 236–245
- [114] VO, T. P. ; LEE, J.: Free vibration of axially loaded thin-walled composite Timoshenko beams. In: *Archive of Applied Mechanics* Online First™, 21 September (2010)
- [115] VO, T. P. ; LEE, J.: Geometrically nonlinear analysis of thin-walled open-section composite beams. In: *Computers and Structures* 88 (2010), Nr. 5-6, S. 347–356

- 
- [116] VO, T. P. ; LEE, J.: Geometrical nonlinear analysis of thin-walled composite beams using finite element method based on first order shear deformation theory. In: *Archive of Applied Mechanics* 81 (2011), Nr. 4, S. 419–435
- [117] VO, T. P. ; LEE, J. ; LEE, K. ; AHN, N.: Vibration analysis of thin-walled composite beams with I-shaped cross-sections. In: *Composite Structures* 93 (2011), Nr. 2, S. 812–820
- [118] WALKER, M.: Multiobjective optimisation of laminated I-beams for maximum crippling, buckling and postbuckling strength. In: *Composites Part B: Engineering* 29B (1998), Nr. 3, S. 263–270
- [119] WIEGAND, J. ; PETRINIC, N. ; ELLIOTT, B.: An algorithm for determination of the fracture angle for the three-dimensional Puck matrix failure criterion for UD composites. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), Nr. 12, S. 2511–2517
- [120] WLASSOW, W. S.: *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*. Berlin : Akademie-Verlag, 1958
- [121] WLASSOW, W. S.: *Dünnwandige elastische Stäbe*. Bd. 1. Berlin : VEB Verlag für Bauwesen, 1964
- [122] WLASSOW, W. S.: *Dünnwandige elastische Stäbe*. Bd. 2. Berlin : VEB Verlag für Bauwesen, 1965
- [123] YAPING, W. ; YUANLIN, Z. ; YUANMING, L. ; WEIDENG, P.: Analysis of shear lag and shear deformation effects in laminated composite box beams under bending loads. In: *Composite Structures* 55 (2002), Nr. 2, S. 147–156
- [124] YU, A. M. ; YANG, J. W. ; NIE, G. H. ; YANG, X. G.: An improved model for naturally curved and twisted composite beams with closed thin-walled sections. In: *Composite Structures* 93 (2011), Nr. 9, S. 2322–2329
- [125] ZHEN, W. ; CHEUNG, Y. K. ; LO, S. H. ; WANJI, C.: Effects of higher-order global-local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates. In: *Composite Structures* 82 (2008), Nr. 2, S. 277–289
- [126] ZHEN, W. ; WANJI, C.: An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams. In: *Composite Structures* 84 (2008), Nr. 4, S. 337–349



## **Bisher sind in dieser Reihe erschienen**

### **Band 1**

Zur mikrorissinduzierten Schädigung spröder Materialien

B. Lauterbach, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-01-4

### **Band 2**

3D-Simulation der Mikrostrukturentwicklung in Zwei-Phasen-Materialien

R. Müller, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-02-2

### **Band 3**

Zur numerischen Simulation von Morphologieänderungen in mikroheterogenen Materialien

S. Kolling, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-03-0

### **Band 4**

Theoretische und numerische Untersuchung von Versagensmechanismen in Metall-Keramik-Verbundwerkstoffen

T. Emmel, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-04-9

### **Band 5**

On microcrack dominated problems in dynamics and statics of brittle fracture: a numerical study by boundary element techniques

S. Rafiee, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-05-7

### **Band 6**

Kontinuumsmechanik anisotroper Festkörper und Fluide

H. Ehrentraut, Habilitationsschrift 2002, ISBN 3-935868-06-5

### **Band 7**

Plane unsteady inviscid incompressible hydrodynamics of a thin elastic profile

N. Blinkova, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-07-3

### **Band 8**

Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten

H. Baaser, Habilitationsschrift 2004, ISBN 3-935868-08-1

### **Band 9**

Orts- und zeitadaptive DAE-Methoden zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens innerhalb der FEM

S. Eckert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-09-X

### **Band 10**

Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: Parameter Sensitivity Tests and Temperature-Dependent Rate Factor

A. Humbert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-10-3

### **Band 11**

A Thermo-mechanical Continuum Theory with Internal Length of Cohesionless Granular Materials

Chung Fang, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-11-1

### **Band 12**

Modeling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions: Numerical Simulation and Laboratory Analyses

Chiou Min-Ching, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-12-X

### **Band 13**

Configurational forces in defect mechanics and in computational methods

R. Müller, Habilitationsschrift 2005, ISBN 3-935868-13-8

**Band 14**

Hyperelastic dynamics in physical and material space  
S. Kolling, Habilitationsschrift 2007, ISBN 978-3-935868-14-3

**Band 15**

Phenomenological modeling of ferroelectric material behavior  
V. Mehling, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-15-0

**Band 16**

Ein mischungsbasiertes Materialmodell zum Knochenumbau  
R.-R. Kühn, Dissertation 2006, ISBN 978-3-935868-16-7

**Band 17**

Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten

J. Artel, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-17-4

**Band 18**

Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken

H. Wigger, Dissertation 2008, ISBN 978-3-935868-18-1

**Band 19**

Rotationseffekte in der Kristallplastizität

C. Bröse, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-19-8

**Band 20**

Finite-Element-Modelle zur Simulation von Delaminationen dünner Filme auf Substraten

V. D. Pham, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-20-4

**Band 21**

Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

C. Sator, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-21-1

**Band 22**

Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse

J. Hebel, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-22-8

**Band 23**

Some Contributions to the Homogenization of Macroscopically Isotropic Composites

V. Salit, Dissertation 2011, ISBN 978-3-935868-23-5

**Band 24**

Asymptotic Analysis of the Load Transfer on Double-Lap Bolted Joints

J. Kratochvíl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-24-2

**Band 25**

Untersuchung zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

W. Mayland, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-25-9

**Band 26**

Plastizität und Skaleneffekte sowie Deformations- und Versagensmodellierung dünner metallischer Schichten bei Nanoindentation

A. Trondl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-26-6

**Band 27**

Theoretical modeling and parallel programming of a nonlinear composite finite shell element based on a mixed global-local variational principle

M. Schürg, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-27-3



In der vorliegenden Arbeit wird ein neuartiges dünnwandiges Balkenmodell höherer Ordnung für rechteckige, geschlossene Kastenprofile sowie für offene I-Profile aus Composite-Material entwickelt. Dieses bildet die globalen und lokalen Eigenschaften ab. Die Gurte und Stege der Profile bestehen dabei aus Mehrschichtverbunden, die ihrerseits aus unidirektional faserverstärkten Kunststoffschichten zusammengesetzt sind. Der Balken wird auf Biegung mit und ohne Übertragung einer Querkraft beansprucht.

Das Modell besitzt segmentweise, höhere Verschiebungsansätze dritter Ordnung, die eine Verformung des Querschnitts nicht nur aus der Schnittebene heraus in axialer Richtung, sondern auch in dieser Ebene zulassen. Die Notwendigkeit dieser Kinematik für bestimmte Lagenaufbauten wird anhand von Beispielen demonstriert. Mit dem Modell ist es möglich die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen in den einzelnen Schichten vorherzusagen und auf dieser Basis Aussagen bezüglich der Festigkeit mit Hilfe von Versagenskriterien treffen zu können.

Zusätzlich ist das Modell besonders als Basis für Optimierungsaufgaben geeignet, die damit effizient umgesetzt und gelöst werden können.