

Superscars und Statistik der Knotengebiete in einem symmetrischen Barrierenbillard

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

angefertigt von

Maksym Miski-Oglu
aus Mariupol (Ukraine)

Februar 2007

Darmstadt
D 17

Referent: Professor Dr. rer. nat. Dr. h.c. mult. A. Richter
Korreferent: Professor Dr. rer. nat. J. Wambach

Tag der Einreichung: 6 Februar 2007
Tag der Prüfung: 30 April 2007

Abstract

In the present doctoral thesis properties of the energy spectra and the wave functions of quantum billiards with flat microwave resonators, so-called microwave billiards, were investigated experimentally. Essentially two main issues were pursued. First, the localisation of the wave functions of pseudointegrable billiards, so-called superscars, and second, statistical properties of the nodal domains of the wave functions of such systems have been investigated.

To realise these studies, an experimental setup for the measurement of the intensity distribution of the electric field strength in microwave billiards was designed. The underlying technique is based on the perturbation body method which had been developed originally in the context of radar technics. With this setup the intensity distributions of highly excited resonance states, which were not experimentally accessible up to now, were measured. Using a reconstruction method, which was developed in the framework of the present doctoral thesis, the electric field strength distributions and therewith the wave functions of the corresponding quantum billiard were obtained.

The localisation properties of the wave functions of pseudointegrable systems were studied in a symmetric barrier billiard. This is a rectangular billiard containing an infinitely thin barrier along its symmetry line. This particular billiard was chosen for the studies because the structure of its classical periodic orbits is especially simple, thus facilitating the semiclassical construction of the superscar states. Due to the symmetry of the billiard there exist two symmetry classes for its eigenstates, namely states which are symmetric, and states which are antisymmetric with respect to reflection about the symmetry line of the barrier billiard. Using the measured intensity distributions the eigenvalue spectrum could be separated into two spectra, one corresponding to the symmetric, the other to the antisymmetric states, respectively. The spectral properties of both parts of the spectrum were studied separately.

For all intensity distributions corresponding to symmetric states the related wave function was reconstructed. Several wave functions with a pronounced localisation of field intensity around a family of periodic orbits were observed. A qualitative identification of the superscars was carried out by computing the overlap integral

of the experimental wave functions and, respectively, one of the analytically constructed superscar state. The agreement with the theoretical prediction is very good as at essentially every semiclassically predicted frequency an experimental wave function was found.

Recently, several theoretical and experimental studies showed, that the properties of the nodal domains of the wave functions of chaotic and regular systems differ. Accordingly, the statistical properties of the nodal domains were investigated in the present doctoral thesis for the pseudointegrable barrier billiard. For such systems there are still no theoretical results.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation werden die experimentellen Untersuchungen von Eigenschaften der Eigenenergiespektren und Wellenfunktionen von Quantenbillards mit flachen Mikrowellenresonatoren, sog. Mikrowellenbillards, vorgestellt. Es werden im Wesentlichen zwei Fragestellungen verfolgt. Erstens wird die Lokalisierung der Wellenfunktionen in pseudointegrablen Billards, sog. Superscars, untersucht, und zweitens werden die Eigenschaften von Knotengebieten der Wellenfunktionen dieser Billards betrachtet.

Um diese Untersuchungen zu ermöglichen wurde eine Messapparatur zur Messung von Intensitätsverteilungen des elektischen Feldes entwickelt. Die Messungen basieren auf der ursprünglich aus der Radartechnik stammenden und später in der Beschleunigerphysik eingesetzten Störkörpermethode. Mit diesem Aufbau konnten bisher experimentell nicht zugängliche Feldintensitätsverteilungen von hoch angeregten Resonanzen gemessen werden. Mit einem im Rahmen dieser Dissertation entwickelten Rekonstruktionsverfahren wurden aus den gemessenen Feldintensitätsverteilungen die elektrischen Feldamplituden selbst, und damit die zu einem Quantenbillard analogen Wellenfunktionen, bestimmt.

Insbesondere wurden mit dieser Messapparatur die Lokalisierungseigenschaften der Wellenfunktionen pseudointegrabler Billards am Beispiel des symmetrischen Barrierenbillards untersucht. Dies ist ein Rechteckbillard mit einer infinitesimal schmalen Barriere entlang einer Symmetrieachse. Das Barrierenbillard wurde für die Untersuchungen ausgewählt, weil es eine einfache Struktur der klassischen periodischen Bahnen besitzt, welche die semiklassische Konstruktion von lokalisierten Zustände ermöglicht. Auf Grund der Symmetrie des Billards existieren zwei Klassen von Eigenzuständen, die einen sind symmetrisch, die anderen antisymmetrisch. Mit Hilfe der gemessenen Feldintensitätsverteilungen war eine Zerlegung des Spektrums der Eigenfrequenzen in zwei Teilspektren mit jeweils nur symmetrischen bzw. antisymmetrischen Zuständen möglich. Die spektralen Eigenschaften beider Teilspektren wurden untersucht.

Aus den Intensitätsverteilungen der symmetrischen Zustände wurden mit dem Rekonstruktionsverfahren die entsprechenden Wellenfunktionen ermittelt. Es wurden viele Wellenfunktionen mit einer ausgeprägten Lokalisierung der Intensität

um eine Familie periodischer Bahnen beobachtet. Eine qualitative Identifizierung der Superscars erfolgte durch die Berechnung eines Überlappintegrals zwischen den experimentellen Wellenfunktionen und je einem analytisch konstruierten Superscar-Zustand. Eine ausgesprochen gute Übereinstimmung mit der Theorie wurde gefunden, fast bei jeder semiklassisch vorhergesagten Frequenz wurde eine experimentelle Wellenfunktion mit starker Lokalisierung gefunden.

Vor kurzem wurde in einigen theoretischen und experimentellen Arbeiten festgestellt, dass sich die Eigenschaften der Knotengebiete der Wellenfunktionen chaotischer und regulärer Systeme prinzipiell voneinander unterscheiden. Deshalb wurden in der vorliegenden Arbeit auch statistische Eigenschaften der Knotengebiete für das Barrierenbillard untersucht. Bisher gibt es hierzu aber noch keine theoretischen Vorhersagen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	4
2.1	Billardsysteme	4
2.2	Analogexperimente mit Mikrowellenbillards	6
3	Messung von Intensitätsverteilungen	10
3.1	Konstruktion des Barrierenbillards	10
3.2	Messprinzip	13
3.3	Messaufbau	15
3.4	Rekonstruktion der Wellenfunktionen	18
3.5	Zusammenfassung des Experiments	20
4	Spektrale Eigenschaften des Barrierenbillards	22
4.1	Struktur des Spektrums des symmetrischen Barrierenbillards	22
4.2	Statistische Analyse des Spektrums	23
5	Superscars im Barrierenbillard	29
5.1	Experimentell beobachtete Superscars	29
5.2	Periodische Bahnen im symmetrischen Barrierenbillard	32
5.3	Konstruktion von Superscar-Zuständen	35
5.4	Lokale Zustandsdichte	42
5.5	Ausblick für Superscars	45

6	Knotengebiete im Barrierenbillard	47
6.1	Vorbemerkung	47
6.2	Knotengebiete von Wellenfunktionen quantenchaotischer und regulärer Systeme	48
6.3	Knotengebiete der Wellenfunktionen im Barrierenbillard	52
6.4	Diskussion der Eigenschaften der Knotengebiete und Ausblick . .	57

1 Einleitung

Am Ende des 19. Jahrhunderts war die klassische Mechanik der Stolz der Physiker und galt als abgeschlossene Wissenschaft. Erst Poincaré hat in seinen Arbeiten zur Stabilität des Sonnensystems und zum Dreikörpersystem [1] festgestellt, dass die entsprechenden Bewegungsgleichungen nicht analytisch lösbar sind. Die zum damaligen Zeitpunkt bekannten Verfahren der Störungstheorie scheiterten. Er stellte fest, dass die Lösungen der Bewegungsgleichungen in einem Dreikörpersystem extrem empfindlich auf kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen reagieren. Diese extreme Empfindlichkeit bezüglich winziger Störungen der Anfangsbedingungen für die Bewegungsgleichung definiert seitdem den Begriff „Chaos“. Trotz der fundamentalen Bedeutung dieser Ergebnisse standen diese im Schatten der rasanten Entwicklung der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie. Seit den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts hat die klassische Dynamik mit Einbeziehung nichtlinearer Effekte durch die schnelle Entwicklung der Rechner und durch den Bedarf in den verschiedenen physikalisch-technischen Disziplinen wie z. B. der Plasmaforschung („Plasmaeinschluss“) [2], der quantitativen Wettervorhersage [3] und der Raumfahrttechnik [4, 5] eine Renaissance erlebt.

Seit den ersten Erfolgen in der Quantenmechanik versuchten Physiker den Zusammenhang zwischen der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik zu verstehen. Dies gelang zunächst nur für integrable klassische Systeme in Form der Bohr-Sommerfeld- und Einstein-Brillouin-Keller-Quantisierung. Hiermit konnte das Wasserstoffatom quantisiert werden, nicht jedoch das nächst schwierigere System, das Heliumatom. Erst nach Fortschritten im mathematischen Verständnis des klassischen Chaos und durch die Feynman-Pfadintegrale gelang Gutzwiller die semiklassische Beschreibung chaotischer Systeme [6, 7]. So entstand die Theorie periodischer Bahnen (periodic orbit theory). Gleichzeitig wurde im Bereich der Kernphysik durch Wigner und Dyson [8, 9] festgestellt, dass sich die chaotischen Eigenschaften eines Atomkerns (ein Vielteilchensystem) in den Energiespektren äußern. Es wurde gefunden, dass die statistischen Eigenschaften der Energiespektren, wie z. B. die Verteilung der Energieabstände benachbarter Energieniveaus, mit denen von Zufallsmatrizen übereinstimmen.

In den letzten drei Jahrzehnten haben auch sog. Billards bei diesen Betrachtungen eine Rolle gespielt [10–13]. Das klassische Billard ist ein einfaches System

(ein Einteilchensystem), mit dem die ganze Vielfalt der klassischen Dynamik modelliert werden kann. Es lag nahe, Verbindungen zwischen den Eigenschaften klassischer Billards und denen der quantenmechanischen Gegenstücke zu suchen. Bohigas, Giannoni und Schmit vermuteten [14], dass die spektralen Eigenschaften der quantenmechanischen Systeme, deren klassische Gegenstücke chaotisch sind, ein universelles Verhalten zeigen.

Eine wichtige Rolle für das Verständnis der Manifestation der Dynamik klassischer Systeme in den Eigenschaften des zugehörigen quantenmechanischen Systeme haben experimentelle Untersuchungen gespielt. Diese Experimente nutzen die Ähnlichkeit der wellenmechanischen Vorgänge. Die Struktur der Gleichungen, die Quantenbillards und flache Mikrowellenresonatoren, sog. Mikrowellenbillards, beschreiben, sind gleich. Dies erlaubt es, in relativ einfachen Aufbauten die Eigenschaften von Quantenbillards mit Mikrowellenbillards zu studieren. Die Analogexperimente werden in Kapitel 2 näher vorgestellt. Der Einsatz von supraleitenden Resonatoren macht es möglich, eine große Zahl an Resonanzfrequenzen experimentell zu bestimmen. Die Experimente an supraleitenden Resonatoren werden im Darmstädter Institut für Kernphysik durchgeführt [15–18]. Zahlreiche hochpräzise Tests der Aussagen der Theorie der Zufallsmatrizen und der Theorie periodischer Bahnen für Quantenbillards waren möglich. Intensive theoretische und experimentelle Arbeiten führten zu einem besseren Verständnis der statistischen Eigenschaften regulärer und chaotischer Quantensysteme.

Neben den Energieeigenwerten und deren spektralen Eigenschaften sind die Quadrate der Wellenfunktionen eines Quantenbillards eine zweite messbare Größe, die wichtige Informationen über das Quantensystem enthält. Die Messung der Intensitätsverteilungen des elektrischen Feldes der Eigenmoden eines Mikrowellenresonators ist aber mit wesentlich größerem experimentellen Aufwand verbunden als die Messung der Resonanzfrequenzen [19, 20]. Die in der Beschleunigerphysik oft verwendete Störkörpermethode zur Messung von Intensitätsverteilung ist in der vorliegenden Arbeit für eine schnellere und zuverlässigere Messung modifiziert worden. Diese Messmethode wird ausführlich in Kapitel 3 beschrieben. In der letzten Zeit hat sich der Schwerpunkt der Forschung von vollständig regulären bzw. chaotischen Systemen in Richtung gemischter, dissipativer und pseudointegrabler Quantensysteme verschoben. In Systemen mit gemischter Dynamik koexistieren Chaos und Regularität. Experimentelle Untersuchungen der

entsprechenden Quantensysteme wurden in [20–23] durchgeführt. In [24] wurde das Zeitverhalten wellenmechanischer Streuechos eines offenen Streukanals untersucht. Pseudointegrable Billards sind z. B. integrable Billards, welche ein diffraktives Element wie z. B. einen punktförmigen Streukörper enthalten. Ein weiteres Beispiel sind Polygonbillards, in denen mindestens eine Ecke einen Winkel von $\alpha = \pi m/n$ mit $m \neq 1$ einschließt; solche Ecken werden „diffraktive Ecken“ genannt. Punktförmige Streukörper und „diffraktive Ecken“ werden als Singularitäten bezeichnet. Trifft ein klassisches Teilchen auf eine Singularität, dann kann seine Bahn nicht eindeutig fortgesetzt werden. Der singuläre Charakter der klassischen Dynamik pseudointegrabler Billards schlägt sich in den Eigenschaften der Energieeigenwerte und der Wellenfunktionen des quantenmechanischen Analogons nieder. Die experimentellen Ergebnisse zu den spektralen Eigenschaften des symmetrischen Barrierenbillards sind in Kapitel 4 dargestellt. Die Eigenschaften der Wellenfunktionen solcher Billards werden durch diffraktive Phänomene an den Singularitäten bestimmt. Besonders stark äußert sich die Diffraktion in den Wellenfunktionen von pseudointegrablen Polygonbillards. Diese zeigen eine stark ausgeprägte Lokalisierung um Familien klassischer periodischer Bahnen, genannt Superscars [25, 26]. Die experimentelle Untersuchung dieser Lokalisierungen wird am Beispiel des Barrierenbillards in Kapitel 5 dieser Arbeit ausführlich diskutiert.

Chladni (1780) ist bei seinen Untersuchungen der Natur des Klangs [27] auf ein interessantes Phänomen gestoßen. Der Sand auf einer in Schwingung gebrachten Membran (Glas- oder Metallplatte) bildet verwickelte Muster. Der Sand wird bei Eigenschwingungen der Platte aus den Bereichen der Platte, die mit großer Amplitude schwingen, regelrecht weggeschleudert und wandert zu den Stellen, an denen keine Schwingung auftritt – den Knotenlinien. Aber erst fast 140 Jahre später hat Courant die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Eigenschaften der Knotenlinien von Eigenfunktionen einer Differentialgleichung gelenkt. In letzter Zeit wurde gezeigt, dass sich die Eigenschaften der Knotengebiete von Wellenfunktionen chaotischer und regulärer Billards prinzipiell voneinander unterscheiden [28, 29]. Dementsprechend war ein Ziel der vorliegenden Arbeit ein Antwort auf die Frage zu finden, was für Eigenschaften die Knotengebiete der Wellenfunktionen in pseudointegrablen Billards besitzen. Hierzu gibt es noch keine theoretischen Vorhersagen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Kapitel 6 dargestellt.

2 Grundlagen

2.1 Billardsysteme

Unter einem zweidimensionalen Billard versteht man ein ebenes, geschlossenes Gebiet, in dem sich ein punktförmiges Teilchen kräftefrei entlang gerader Strecken bewegt und bei Kollisionen mit dem Rand des Gebietes nach dem Reflexionsgesetz „Ausfallswinkel gleich Einfallswinkel“ reflektiert wird. Der Phasenraum des Billards wird von den Ortskoordinaten (x, y) und den Impulsen (p_x, p_y) aufgespannt. Die periodischen Bahnen können stabil, neutralstabil oder instabil sein. Um zwischen diesen verschiedenen Fällen unterscheiden zu können, betrachtet man den Abstand im Phasenraum zwischen zwei Bahnen mit ähnlichen Anfangsbedingungen. Für eine stabile Bahn bleibt der Abstand begrenzt während der Zeitentwicklung, für eine neutralstabile Bahn bleibt der Abstand konstant oder wächst höchstens linear mit der Zeit, und für eine instabile Bahn wächst der Abstand exponentiell mit der Zeit.

Die Dynamik des Systems hängt entscheidend von der Form des Randes ab und lässt sich durch die Gesamtheit der periodischen Bahnen und ihrer Eigenschaften vollständig charakterisieren [30]. In Abhängigkeit von der Form der Umrandung unterscheidet man in Billards verschiedene Arten der Dynamik – regulär, chaotisch, gemischt und pseudointegrabel.

Das Rechteckbillard (s. Abb. 2.1a) ist ein Beispiel für ein System mit regulärer

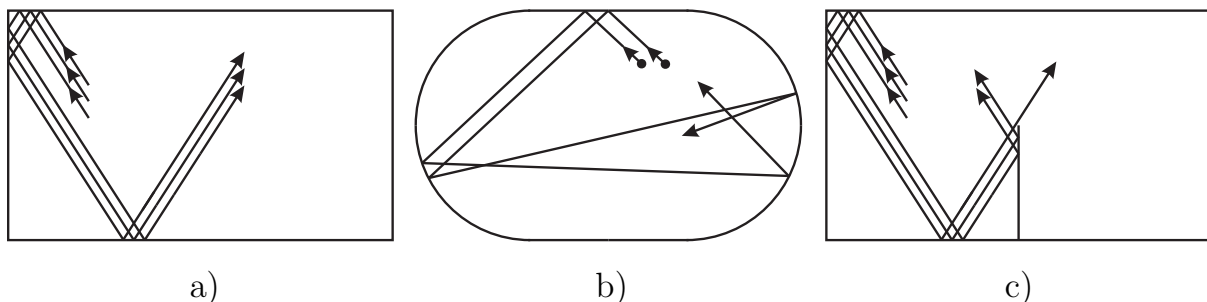


Abb. 2.1: Beispiele für die klassischen Teilchenbahnen in verschiedenen Billards.

In a) ist ein Rechteckbillard, in b) ein Stadionbillard und in c) ein Rechteckbillard mit einer symmetrisch angebrachten Barriere (Barrierenbillard) gezeigt.

Dynamik oder, mit anderen Worten, für ein integrables System. Anfangs parallelversetzte Bahnen besitzen nach mehreren Reflexionen am Rand die gleiche Bewegungsrichtung, und der Abstand zwischen den Bahnen bleibt konstant, d.h. in solchen Systemen sind die Bahnen neutralstabil. Im Rechteckbillard gibt es neben der Energie genügend Erhaltungsgrößen, z. B. $|p_x|$ oder $|p_y|$, um die Bewegungsgleichung integrieren zu können. Der Phasenraum dieses Systems ist vierdimensional und die Bahnen liegen im Phasenraum auf einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit mit der Topologie eines Torus [31].

Ein prominentes Beispiel für ein Billard mit chaotischer Dynamik ist das Stadionbillard [11]. Wie man aus Abb. 2.1b erkennt, besitzen zwei anfangs parallelversetzte Bahnen nach wenigen Reflexionen am Rand verschiedene Bewegungsrichtungen, was typisch für chaotische Bewegung ist. In diesem System gibt es nur eine Erhaltungsgröße – die Energie. Dies ist jedoch nicht ausreichend, um die Bewegungsgleichungen zu integrieren. Als Folge dessen decken die Bahnen im Phasenraum überall dicht eine dreidimensionale Energiefläche ab. Dies kann als eine Definition chaotischer Systeme betrachtet werden.

Eine andere für diese Arbeit wichtige Art der Dynamik besitzen Polygonbillards mit rationalen Winkeln $\alpha_j = \pi m_j/n_j$, wobei m_j und n_j teilerfremde ganze Zahlen sind. Polygonbillards mit $m_j = 1$ wie das Rechteckbillard oder Dreiecksbillards mit den Winkeln $(\pi/2; \pi/3; \pi/6)$, $(\pi/2; \pi/4; \pi/4)$ oder $(\pi/3; \pi/3; \pi/3)$ gehören zu den integrablen Systemen. Wenn manche $m_j \neq 1$ sind, dann liegen die Bahnen im Phasenraum jedoch auf einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit mit einer komplizierteren Topologie als der eines Torus [32]. Solche Systeme sind nicht mehr integrabel im gewöhnlichen Sinne, aber auch nicht chaotisch, weil alle Bahnen auf einer zweidimensionalen Fläche liegen und damit die dreidimensionale Energiefläche nicht überall dicht bedecken. Aus diesem Grund nennt man Polygonbillards mit $m_j \neq 1$ pseudointegrabel. Ein Beispiel für ein pseudointegrables Polygonbillard, das im Rahmen der vorliegenden Arbeit behandelt wird, ist das symmetrische Barrierenbillard [33, 34]. Das symmetrische Barrierenbillard ist ein Rechteckbillard mit der Länge $2l_x$, der Breite l_y und einer infinitesimal schmalen Barriere (s. Abb. 2.1c). Die Barriere liegt auf der Symmetrielinie $x = l_x$ und hat eine Länge von $l_y/2$, wobei l_y die Länge der kurzen Seite des Rechtecks ist. Das symmetrische Barrierenbillard mit rationalen Verhältnissen der Länge der Barriere zu Seitenlänge l_y gehört zu den sog. Veech-Polygonen [35, 36]. In diesem

Billard wird ein Bündel anfangs parallelversetzter Bahnen nach einer Reflexion an der Spitze der Barriere unstetig aufgespalten. Jedes mal, wenn eine klassische Bahn die Singularität an der Spitze der Barriere trifft, kann sie nicht in eindeutiger Weise fortgesetzt werden, so dass sich die Bahnen im Phasenraum auf einer zweidimensionalen Fläche, welche die Topologie einer Sphäre mit zwei Griffen hat [32, 34], befinden.

Möchte man Billardsysteme quantenmechanisch behandeln, so kann man nicht mehr den klassischen Bahnbegriff zur Charakterisierung von regulärem, chaotischem oder pseudointegrablen Verhalten benutzen, weil Ort und Impuls quantenmechanisch auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation nicht mehr gleichzeitig definiert sind. Ein Quantenbillard wird durch die stationäre Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_n = -\mathcal{E}_n \Psi_n \quad (2.1)$$

für ein freies Teilchen der Masse m mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\Psi_n = 0 \quad (2.2)$$

für die Wellenfunktion beschrieben. Die Randbedingung (2.2) gilt auf Grund des unendlich hohen Potentialsprungs am Rand des Billards. Das Quantenbillard wird vollständig durch die Eigenwerte \mathcal{E}_n und die Eigenfunktionen Ψ_n beschrieben. In deren statistischen Eigenschaften manifestieren sich die Eigenschaften der Dynamik der klassischen Billards [12]. Dies wurde auch in anderen Quantensystemen wie Atomen [37], Atomkernen [38] und in mesoskopischen Systemen [39] beobachtet.

2.2 Analogexperimente mit Mikrowellenbillards

Die Eigenschaften von Quantenbillards lassen sich in Analogexperimenten mit Mikrowellenresonatoren untersuchen. Diese Analogexperimente basieren auf der mathematischen Äquivalenz zwischen der Schrödinger-Gleichung für Quantenbillards und der skalaren Helmholtz-Gleichung. Die stationären elektrischen und magnetischen Feldverteilungen in einem Hohlraumresonator mit metallischen Wänden

werden durch die vektorielle Helmholtz-Gleichung [40]

$$\left(\Delta + \frac{\omega_n^2}{c^2}\right) \begin{Bmatrix} \vec{E}_n(\vec{r}) \\ \vec{B}_n(\vec{r}) \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

mit den Randbedingungen

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

auf der Berandung und der Kopplung

$$\vec{B}_n(\vec{r}) = \frac{i}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}_n(\vec{r}) \quad (2.5)$$

zwischen \vec{E}_n und \vec{B}_n beschrieben. Hierbei ist ω_n die Resonanzkreisfrequenz, c die Lichtgeschwindigkeit im Inneren des Resonators und \vec{n} der Normalenvektor senkrecht zum Resonatorrand. Gleichung (2.3) ist von der Struktur her ähnlich wie Gl. (2.1), gilt jedoch für vektorielle Funktionen. Für einen zylindrischen Resonator mit Höhe d bilden sich unterhalb der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{c}{2d} \quad (2.6)$$

nur sog. transversal magnetische (TM₀) Moden aus. Für TM₀ Moden existiert nur die z-Komponente des elektrischen Feldes, und man kann $\vec{E}_n(\vec{r}) = \psi_n(x, y) \cdot \vec{e}_z$ schreiben. Die skalare Funktion $\psi_n(x, y)$ genügt der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung

$$\Delta\psi_n = -\frac{\omega_n^2}{c^2}\psi_n \quad (2.7)$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$\psi_n = 0. \quad (2.8)$$

Das magnetische Feld ist durch Gl.(2.5) gegeben. Die Gleichungen (2.7) und (2.8) sind mathematisch äquivalent zu Gleichungen (2.1) und (2.2). Damit stellen flache zylindrische Hohlraumresonatoren ein Analogsystem für quantenmechanische Billards dar, wobei für die quantenmechanische Energie $\mathcal{E}_n \propto \omega_n^2$ gilt. Messungen der Resonanzfrequenzen und der entsprechenden elektrischen Feldintensitätsverteilungen erlauben eine experimentelle Untersuchung des Verhaltens in Quantenbillards.

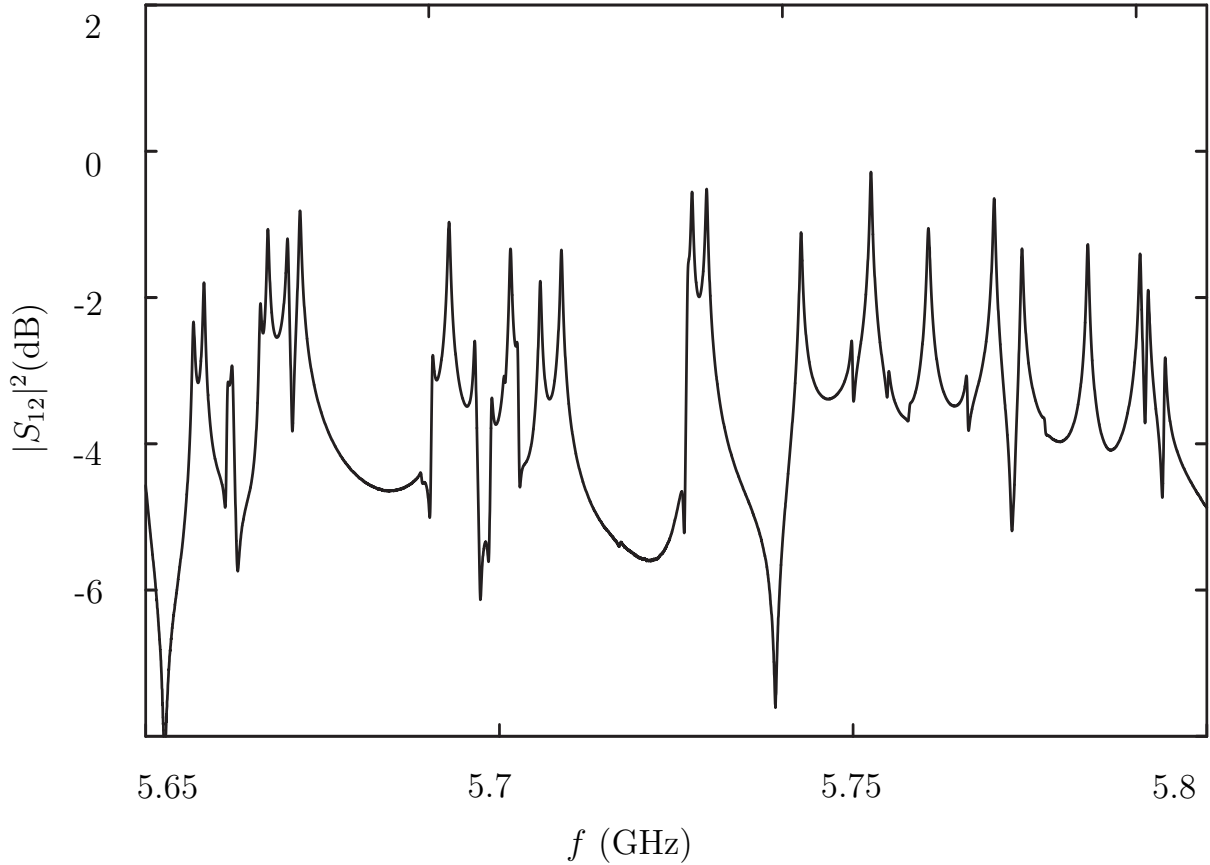


Abb. 2.2: Ein Ausschnitt aus dem gemessenen Transmissionsspektrum des Barrierenbillards.

Die Resonanzfrequenzen können in sogenannten Streuexperimenten gemessen werden. In diesen betrachtet man einen Mikrowellenresonator als ein Streusystem, die Einkopplungsantenne des Mikrowellenresonators als einen Eingangskanal a und die Auskopplungsantenne b als einen Ausgangskanal [16, 41]. So lassen sich die Eigenschaften des Resonators durch eine Streumatrix $S(f)$ beschreiben, wobei f die Frequenz der eingestrahlten Mikrowellenleistung ist. Die Streumatrixelemente $S_{ba}(f)$ sind komplexwertige Funktionen der Frequenz. Ihr Betragsquadrat ist gleich dem Verhältnis von ausgekoppelter zu eingekoppelter Leistung

$$|S_{ba}|^2 = \frac{P_{aus}}{P_{in}} \quad (2.9)$$

und $\text{Arg}(S_{ba})$ ist gleich der Differenz zwischen der Phase der ausgekoppelten und der eingekoppelten Mikrowelle. Mittels eines vektoriellen Netzwerkanalysators des Typs HP8510-C können sämtliche komplexen S-Matrixelemente als Funktion der Frequenz im Frequenzbereich zwischen 45 MHz und 50 GHz mit einer Auflösung von bis zu 1 Hz gemessen werden. Werden im Experiment eine Einkopplungs-

antenne und eine Auskopplungsantenne benutzt, so nennt man $|S_{ba}(f)|^2$ Transmissionsspektrum, wird genau eine Antenne benutzt, nennt man $|S_{aa}(f)|^2$ Reflexionspektrum. Abbildung 2.2 zeigt einen Teil des Transmissionsspektrums des Barrierenbillards. Resonanzartige Strukturen sind deutlich erkennbar. Jede Resonanz in diesem Spektrum entspricht einer Eigenfrequenz f_n des Billards und hat eine Halbwertsbreite Γ_n , die durch die Kopplung der Eigenfunktion an die Antennen und durch die Ohmschen Verluste in der Billardwand zustande kommen. Die Resonanzkurven und damit der Resonator selbst sind durch den Gütefaktor

$$Q = \left\langle \frac{f_n}{\Gamma_n} \right\rangle \quad (2.10)$$

charakterisiert, der ein Maß dafür ist, wie schnell die gespeicherte Energie im Resonator abklingt.

3 Messung von Intensitätsverteilungen

Experimentieren ist eine Kunst!

(A.R.)

Wie die Eigenwerte aus Gl. (2.1) spiegeln auch die Eigenfunktionen $\Psi_n(x, y)$ die Eigenschaften des Quantensystem wider. Der Satz der Eigenfunktionen $\{\Psi_n(x, y)\}$ enthält Informationen über die Dynamik des entsprechenden klassischen Systems [16]. Die Anzahl der Knotengebiete, d.h. der Teilgebiete in welche die Wellenfunktion durch Knotenlinien $\Psi_n(x, y) = 0$ unterteilt ist, ist verschieden für integrable und chaotische Systeme [28, 42]. Neben dem Satz der Eigenfunktionen kann sogar eine einzelne Eigenfunktion Informationen über die zugrunde liegende klassische Dynamik enthalten. Einige Eigenfunktionen zeigen eine starke Lokalisierung der Feldintensität um eine instabile periodische Bahn, sogenannte *Scars* (Narben). Dieses Phänomen wurde bereits in chaotischen Systemen wie dem Stadionbillard [25] und im Wasserstoffatom in einem starken magnetischen Feld beobachtet [43]. Eine starke Lokalisierung der Wellenfunktion um eine Familie von periodischen Bahnen ist auch in pseudointegrablen Billards möglich [26]. Alle oben genannten sowie weitere Phänomene [13, 20, 44] können in Analogexperimenten mit Mikrowellenbillards untersucht werden. Die Intensitätsverteilung der elektrischen Feldstärke wird mit der Störkörpermethode gemessen. Hierzu wird ein Störkörper mit Hilfe eines Führungsmagneten über die Billardfläche bewegt und es werden Verschiebungen der Resonanzfrequenz gemessen. In Abschnitt 3.2 wird die Messmethode im Detail beschrieben.

3.1 Konstruktion des Barrierenbillards

Für Untersuchungen der statistischen Eigenschaften von Wellenfunktionen [45], der Anzahl der Knotengebiete der Wellenfunktion [28] sowie der Eigenschaften von Superscars [26] sind viele Wellenfunktionen mit hohen Quantenzahlen nötig. Die Anzahl der Resonanzen in einem Mikrowellenbillard der Höhe d unterhalb der

Grenzfrequenz f_g (s. Gl. (2.6)) ist durch das erste Glied in der Weyl-Formel [12,46]

$$N(f_g) = \frac{A}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{c} f_g \right)^2 = \frac{A}{4\pi} \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 \quad (3.1)$$

gegeben, wobei A die Grundfläche des Resonators bezeichnet. Aus Gl.(3.1) folgt, dass die Anzahl der im Experiment zugänglichen Resonanzen mit der Resonatorfläche anwächst und mit der Resonatorhöhe abfällt. Die Resonanzen können in einem Streuexperiment nur dann aufgelöst werden, wenn die Resonanzbreite deutlich kleiner als der mittlere Niveauabstand ist. Um möglichst viele Resonanzfrequenzen und die dazu gehörigen Intensitätsverteilungen messen zu können, braucht man also eine Mikrowellenkavität mit einem großen Gütefaktor. Der Gütefaktor eines Mikrowellenresonators mit Volumen V und Oberfläche S des Hohlraums ist

$$Q \propto \frac{V}{S\delta}, \quad (3.2)$$

wobei δ die Skintiefe ist und für eine gegebene Frequenz proportional zum spezifischen Widerstand der Resonatorwand [40] ist. Um eine hohe Güte zu erreichen, werden die Messungen der Resonanzfrequenzen an supraleitenden Resonatoren vorgenommen [12, 15, 20, 47]. Die Supraleitung verringert den spezifischen Widerstand des Materials der Resonatorwände drastisch, und die Güten erreichen Werte bis zu $Q = 10^6$. In Messungen mit supraleitenden zweidimensionalen Mikrowellenbillards können lückenlos etwa 1000 Eigenwerten [48] und in dreidimensionalen Billards sogar bis zu 20000 [17, 18] bestimmt werden.

Es gibt zwei Hindernisse beim Einsatz der Supraleitung für Messungen der Intensitätsverteilungen: Zum einen muss der ganze mechanische Aufbau bei 4 K in einem Vakuum funktionieren, und zum anderen zerstört das statische magnetische Feld, das für die Kopplung zwischen dem Störkörper und dem Führungsmagneten sorgt, die Supraleitung. Eine andere Möglichkeit die Güte zu erhöhen ist, eine Kavität mit einem großen Volumen-zu-Oberfläche Verhältnis zu bauen und die Messungen der Intensitätsverteilung bei Raumtemperatur durchzuführen. Für zylindrische Resonatoren steigt einerseits die Güte mit der Resonatorhöhe an (s. Gl. (3.2)), aber die Anzahl der im Experiment zugänglichen Resonanzen fällt ab. Andererseits steigt die Anzahl der Resonanzen mit der Grundfläche A des zylindrischen Resonators an.

Um einen Kompromiss zwischen einer hohen Güte und einer möglichst großen Anzahl an Resonanzen zu bekommen, wurde ein Resonator mit einer Fläche in

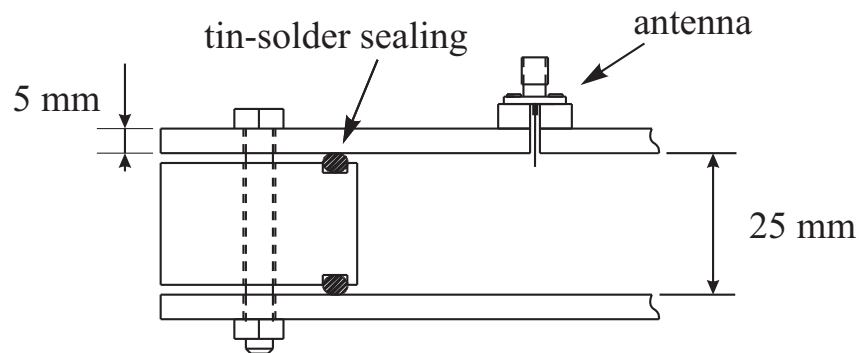
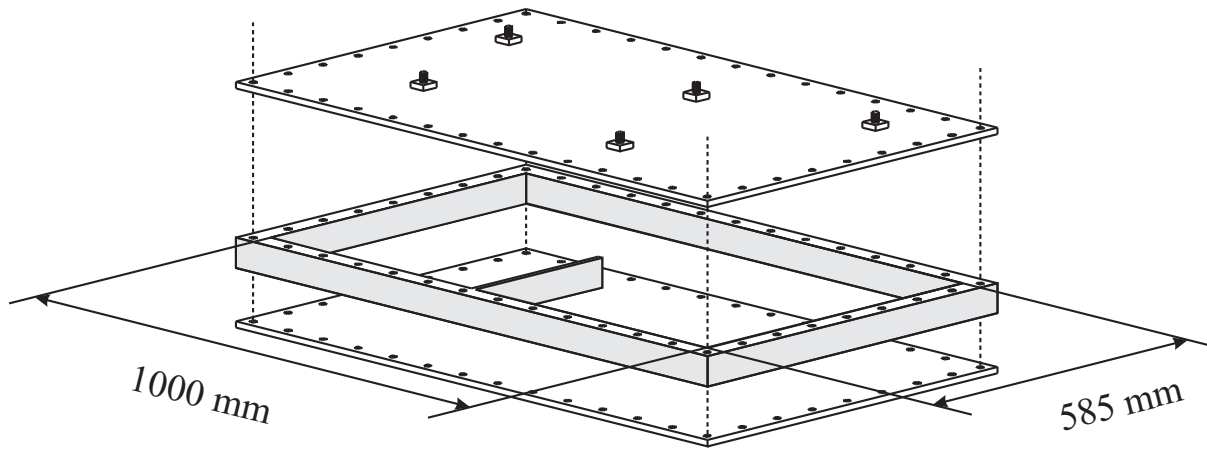


Abb. 3.1: Aufbau des modularen Rechteckresonators mit der Barriere. Unten ist der Querschnitt des Resonators skizziert.

der Größenordnung eines Quadratmeters und einer Höhe von 30 mm gebaut. Im Experiment wurde ein rechteckiger Mikrowellenresonator mit 1000 mm Länge, 585 mm Breite und 25 mm Höhe benutzt (s. Abb. 3.1). Um die Experimente mit dem Barrierenbillard durchführen zu können, wurde eine 297 mm lange, 4 mm breite und 25 mm hohe Barriere in die Kavität eingebracht. Wie in früheren Darmstädter Experimenten hat das Mikrowellenbillard einen modularen Aufbau [20, 24, 47, 49]. Es besteht aus einer Deckel- und einer Bodenplatte und einem rechteckigen Rahmen zwischen den Platten. Alle Teile sind mit M6-Schrauben miteinander verschraubt. Der Boden und Deckel sind aus 5 mm dicken, polierten Kupferplatten gefertigt. Der Billardrahmen besteht aus 10 zusammenschraubten Messingsegmenten. Es gelten die Randbedingungen Gl. (2.8) entlang des Randes des Rechtecks und der Barriere. Der leitende Kontakt zwischen Boden und Rahmen bzw. zwischen Rahmen und Deckel ist mittels einer Drahtschleife aus

flussmittelfreiem Lötzinn (60 % Pb / 40 % Sn) hergestellt.

Das Mikrowellenbillard hat eine Grenzfrequenz $f_g = 6$ GHz. Unterhalb dieser Frequenz liegen ca. 700 Resonanzen, der mittlere Gütefaktor beträgt $Q = 1.8 \cdot 10^4$ und der mittlere Niveauabstand ist 5 mal größer als die mittlere Niveaubreite. Die Messungen der Transmissionsspektren sowie der Intensitätsverteilungen hängen empfindlich von den Antennenpositionen ab: Wenn die Position einer Einkopplungs- oder Auskopplungsantenne in die Nähe einer Knotenlinie der Eigenfunktion geraten, können die Eigenschwingungen nicht angeregt werden. Daher werden die entsprechenden Resonanzen im Transmissionsspektrum fehlen. Um dies zu vermeiden, wurden am Billarddeckel fünf Antennen an zufällig gewählten Orten angebracht (s. Abb. 3.1).

3.2 Messprinzip

Die experimentelle Bestimmung einer Eigenfunktion ist eine wesentlich kompliziertere Aufgabe als die Messung eines Eigenwertes. Im Experiment soll die Verteilung des elektrischen Feldvektors im Inneren des Resonators gemessen werden. Dies erfolgt, wie oft in der Physik durch die Störung des physikalischen Systems. In den Experimenten mit Mikrowellenbillards haben sich zwei Methoden etabliert. Die erste Methode basiert auf der Messung der Transmission zwischen einer beweglichen und einer festen Antenne [19]. Diese erlaubt die Bestimmung sowohl des Betrags der Wellenfunktion als auch ihres Vorzeichens am Ort der beweglichen Antenne. Die Methode hat aber einen großen Nachteil, da eine der Resonatorplatten beweglich sein muss und in Folge ein Resonator mit nur niedrigem Gütefaktor untersucht werden kann. Damit können typischerweise nur die ersten 300 Anregungszustände vermessen werden. Die zweite Methode ist die oft in der Beschleunigertechnik verwendete Störkörpermethode [20, 50–52]. Diese läßt den Resonatorkörper unverändert und erlaubt so die Verwendung von Resonatoren mit hohem Gütefaktor. Die Störkörpermethode basiert auf dem Maier-Slater Theorem [50]. Der eingebrachte Störkörper ist meist ein Zylinder mit geringem Durchmesser. Er ändert die Resonanzfrequenz f_0 einer resonant angeregten Kavität. Nach dem Maier-Slater Theorem ist die verursachte Resonanzverschiebung

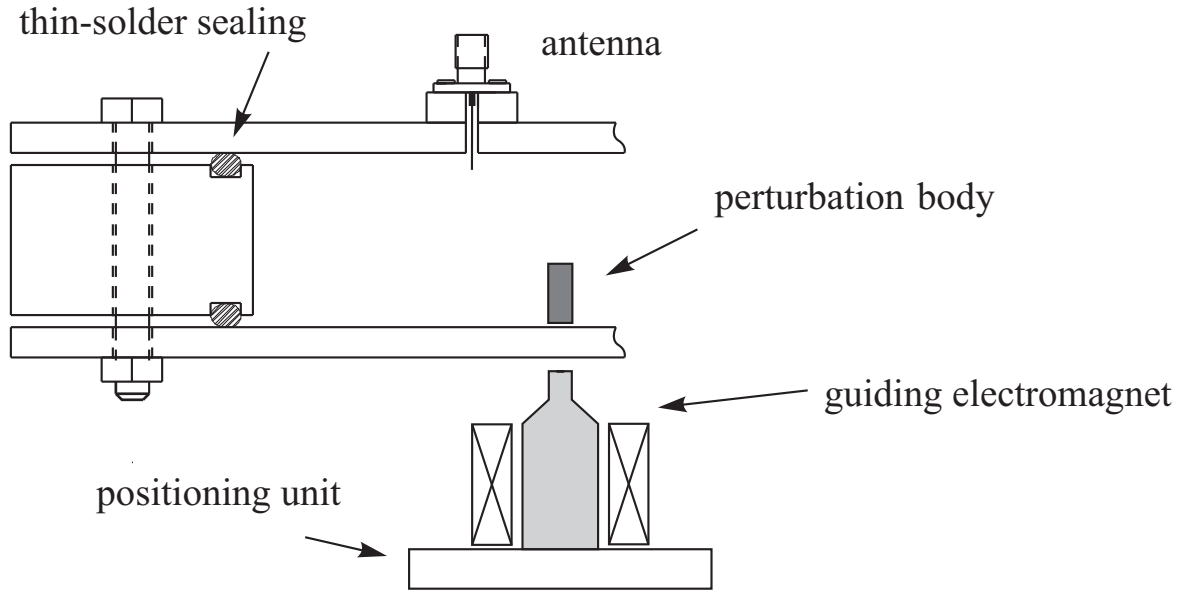


Abb. 3.2: Schematischer Querschnitt durch ein Mikrowellenbillard mit Störkörper und externer Positionierungseinheit.

proportional zu einer Linearkombination des Quadrats des elektrischen und des magnetischen Feldes am Ort \vec{r} des Störkörpers, also

$$\Delta f(\vec{r}) = f_0 - f(\vec{r}) = f_0 \left(c_1 \vec{E}_n^2(\vec{r}) - c_2 \vec{B}_n^2(\vec{r}) \right). \quad (3.3)$$

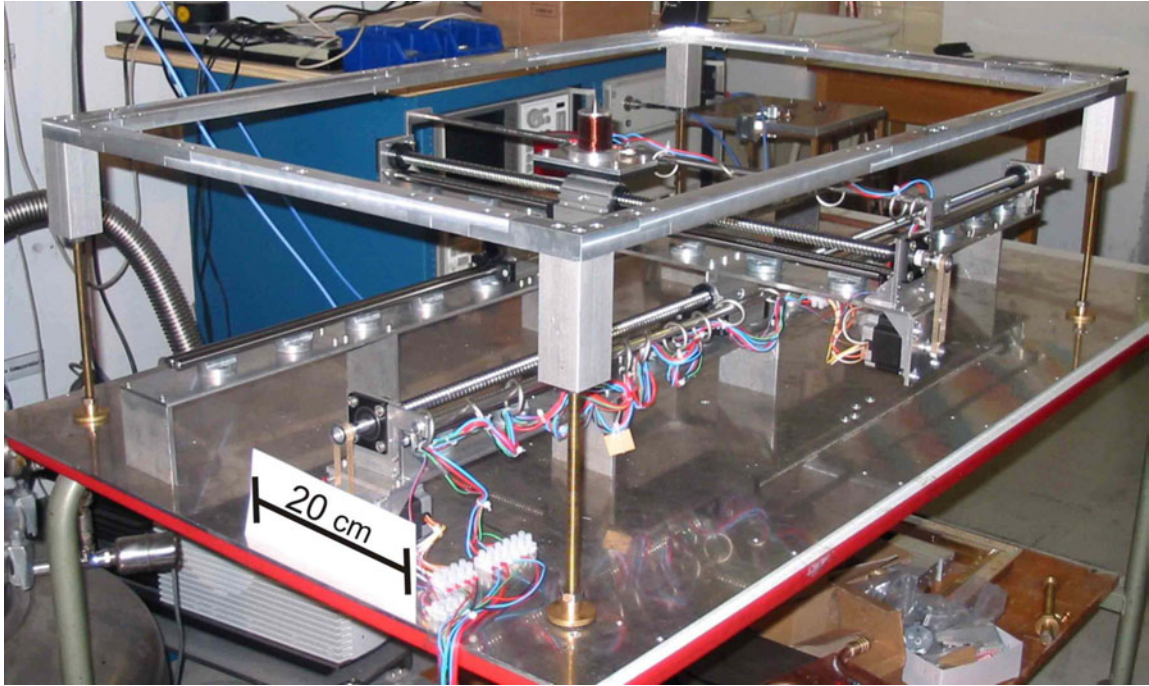
Hier sind c_1 und c_2 Konstanten, die durch die Geometrie, die Materialeigenschaften des Störkörpers und seine Ausrichtung relativ zum elektrischen und magnetischen Feld festgelegt sind. Zur Bestimmung der elektromagnetischen Feldintensitätsverteilung muss der Störkörper im Inneren des Resonators bewegt und gleichzeitig die Verschiebung der Resonanzfrequenz Δf bestimmt werden. In der vorliegenden Arbeit wurde ein magnetischer Störkörper benutzt, der mit dem auf einer Positionierungseinheit angebrachten Führungsmagneten magnetisch gekoppelt ist. Dies ist schematisch in Abb. 3.2a illustriert.

Gemessen werden soll nur das Quadrat des elektrischen Feldes, denn nur dieses korrespondiert zur quantenmechanischen quadrierten Wellenfunktion. Um dazu den Beitrag des magnetischen Feldes zur Frequenzverschiebung zu minimieren, muss der metallische Störkörper entlang der elektrischen Feldlinien eine wesentlich größere Ausdehnung als entlang der magnetischen haben [50]. In mehreren früheren Experimenten wurde als Störkörper ein senkrecht zum Billardboden stehender zylindrischer NdFeB-Permanentmagnet mit möglichst kleiner Grundfläche

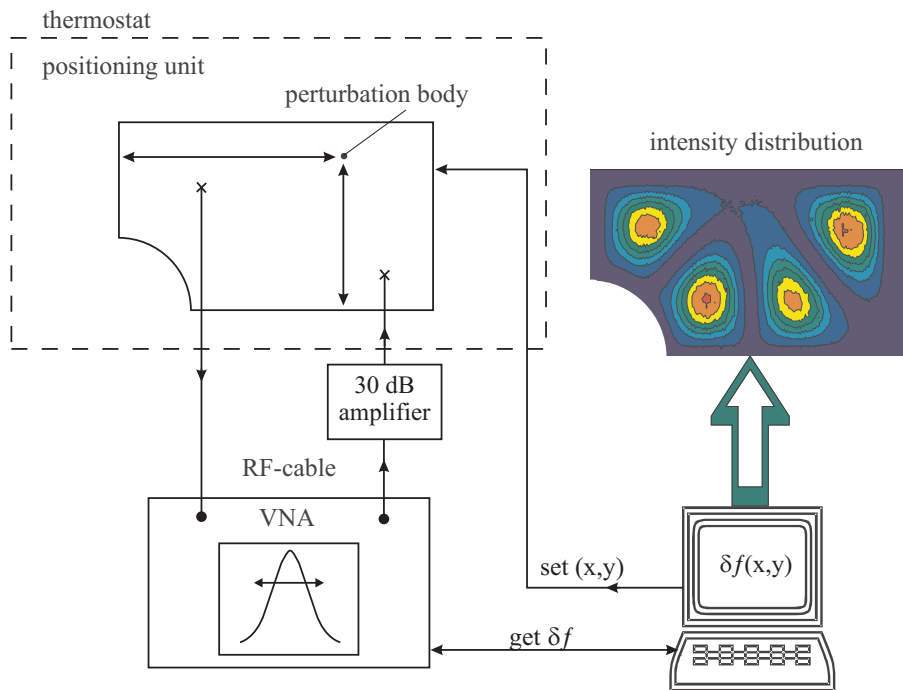
eingesetzt [20, 51, 52]. Die im Rahmen von [21, 53] durchgeführten Experimente haben gezeigt, dass ein zylindrischer Störkörper mit einem Verhältnis von Höhe zu Durchmesser von mehr als 4:1 nicht mehr stabil ist, d. h. er kann in der Bewegung umkippen. In Messungen mit einem zylindrischen Störkörper mit 1 mm Durchmesser und 4 mm Höhe wurden Frequenzverschiebungen detektiert die einem Anteil des magnetisches Feldes von bis zu 10% in Gl.(3.3) entsprechen. Dies macht eine Rekonstruktion der Wellenfunktion aus der gemessenen Intensitätsverteilung (s. Kap. 3.4) unmöglich. Aus diesem Grund ist in der vorliegenden Arbeit ein nichtmetallischer Störkörper aus „magnetischem Gummi“ benutzt worden [54]. Dabei handelt es sich um einen gummiähnlichen Kunststoff, dem vor der Polymerisation bis zu 90 Volumenprozent NdFeB-Pulver beigemischt wurde. Die mittlere Korngröße der NdFeB-Partikel beträgt $1.3 \mu\text{m}$ [55] und ist vergleichbar mit der Skintiefe von etwa $1 \mu\text{m}$ der im Experiment verwendeten Mikrowellen von 2 bis 6 GHz. Daher ist keine Ausbreitung von Wirbelströmen an der Oberfläche des Störkörpers möglich und damit auch keine Wechselwirkung mit dem hochfrequenten Magnetfeld, sondern nur mit dem statischen Magnetfeld des Führungsmagnets. Testmessungen in einem Rechteckresonator mit einem zylindrischen Störkörper der Höhe 5 mm und mit Durchmesser 2 mm zeigen typische Frequenzverschiebungen von 100 kHz bei einer Resonanzfrequenz von etwa 3 GHz. Innerhalb der Messgenauigkeit von 1 kHz wurden keine Einflüsse des hochfrequenten Magnetfeldes detektiert.

3.3 Messaufbau

Das Foto in Abb. 3.3 zeigt die im Rahmen der vorgelegten Dissertation konstruierte Positionierungseinheit. Sie wurde aus kommerziell erhältlichen Bauteilen in der Feinmechanikwerkstatt des Instituts gebaut. Der Elektromagnet zur Führung des Störkörpers ist auf einem Laufwagen befestigt, der mit Hilfe einer auf einer Gewindespindel aufgefädelten Kugelgewindemutter entlang der Y-Achse auf einer Führungsschiene bewegt wird.



a)



b)

Abb. 3.3: a) Das Photo der Positionierungseinheit. Unten b) ist der schematische Aufbau, bestehend aus dem Thermostat, der Positionierungseinheit, dem Netzwerkanalysator und dem Steuerrechner gezeigt.

Die Gewindespindel wird durch einen Schrittmotor über einen Zahnriemen betrieben. Das alles zusammen bildet die Y-Lineareinheit. Die Y-Lineareinheit wird durch eine ähnlich gebaute, schrittmotorgetriebene X-Lineareinheit entlang der X-Achse geführt. Die Positionierungseinheit erlaubt es, ein rechteckiges Gebiet von $585 \times 1180 \text{ mm}^2$ mit einer Ortsauflösung von bis zu 0.1 mm abzudecken. Abbildung 3.3.b zeigt schematisch den Messaufbau. Die Position (x, y) des Führungselektromagneten wird über zwei rechnergesteuerte Schrittmotoren eingestellt. Sobald die eingegebene Position erreicht ist, wird ein 3 A starker, mit 100 Hz pulsierender Stromstoß durch die Spule des Elektromagneten geschickt. Das gepulste magnetische Feld verringert den Fehler in der Positionierung des Störkörpers, der durch Reibung zwischen dem Billardboden und dem Störkörper zustande kommen. Die Verschiebung der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit der Position des Störkörpers $\Delta f(x, y)$ wird über eine im Rahmen von [49, 56] entwickelte Phasemessung bestimmt, die es erlaubt, auch kleine Verschiebungen der Resonanzfrequenz zu messen. Für kleine Änderungen der Resonanzfrequenz ist die Verschiebung der Resonanzfrequenz näherungsweise proportional zur Phasenänderung des S -Matrixelements S_{12} , also $\Delta f \sim \Delta\varphi$. Der vektorielle Netzwerkanalysator HP8510-C erlaubt die gleichzeitige Messung der Phasenverschiebungen bei bis zu 30 verschiedene Frequenzen. Dies ermöglicht eine drastische Verringerung der Messzeit. Eine gleichzeitige Aufnahme von 30 Intensitätsverteilungen mit einer räumlichen Auflösung von 117×200 Punkten dauert ca. 13 Stunden, also 1/2 Stunde pro Intensitätsverteilung. Die in dieser Arbeit benutzte Kavität besitzt ein deutlich größeres Volumen als die in anderen Experimenten eingesetzten Kavität [20, 47] und hat daher eine kleinere Dichte der elektromagnetische Energie. Diese Tatsache spiegelt sich in sehr kleinen Werten der Resonanzamplituden im Transmissionspektrum wider. Um das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu verbessern, ist ein 30 dB Leistungsverstärker mit einem Arbeitsbereich von 2 bis 8 GHz zwischen den Netzwerkanalysator und die Kavität eingebracht worden. Der Mikrowellenverstärker kann durch die von der Billard-Einkopplungsantenne reflektierte Mikrowellenleistung zerstört werden. Um das zu vermeiden, ist zusätzlich ein Mikrowellenisolator zwischen die Kavität und den Verstärker eingesetzt worden. Dieser lässt Leistung nur in eine Richtung durch und ist in der Regel nur für ein schmales Frequenzband ausgelegt. Für die Experimente mit dem Barrierenbillard wurden zwei kommerziell erhältliche Isolatoren der Fa. „MECA Electronics“ be-

nutzt, von denen einer im Frequenzbereich von 2 bis 4 GHz und der andere im Frequenzbereich von 4 bis 8 GHz betrieben werden kann.

Die Resonanzfrequenzen des Mikrowellenresonators reagieren sehr empfindlich auf Temperaturänderungen. Bei einer Temperaturänderung von 1 K ändern sich die Resonanzfrequenzen um bis zu 100 kHz, was vergleichbar mit der Verschiebung der Resonanzfrequenz durch das Einbringen des Störkörpers ist. Um diesen Temperaturdrift zu minimieren, wurde deshalb die gesamte Positionierungseinheit mit dem Billard in einen isolierten Behälter gestellt. Durch ein Peltier-Element wurde ein geschlossener Wasserkreislauf temperaturstabilisiert, welcher über einen Wärmetauscher an das Billard angekoppelt wird. Somit kann die Temperatur des Mikrowellenbillards bis auf 0.1 K konstant gehalten werden.

3.4 Rekonstruktion der Wellenfunktionen

Für viele Untersuchungen von Eigenschaften der Wellenfunktionen, wie die Anzahl der Knotengebiete oder spezieller Korrelationsfunktionen, benötigt man die Wellenfunktion selbst und nicht ihr Quadrat, wie es laut Gl. (3.3) aus der Messung erhalten wird. Im Rahmen der vorgelegten Dissertation wurde daher eine Rekonstruktionsmethode entwickelt, mit der die Wellenfunktion aus der gemessenen Intensitätsverteilung bestimmt werden kann. Hier bei wurde benutzt, dass die Wellenfunktion eines Quantenbillards mit Dirichlet-Randbedingungen entlang eines Schnitts $x = x_0$ durch das Billard allgemein als eine Sinusreihe dargestellt werden kann. Dementsprechend kann die bei einer Resonanzfrequenz f_0 gemessene elektrische Feldintensitätsverteilung entlang einer Linie $x = x_0$ durch das Billard als Quadrat einer Summe von Sinusfunktionen

$$\psi^2(x = x_0, y) = \left[\sum_{i=1}^n A_i(x_0) \sin(k_i y) \right]^2 \quad (3.4)$$

dargestellt werden, wobei $k_i = 2\pi i/l_y$, l_y die Länge der Linie $x = x_0$ und $A_i(x_0)$ die Entwicklungskoeffizienten sind. Diese Wahl von k_i erfüllt automatisch die Dirichlet-Randbedingungen am Billardrand. Die Anzahl der Glieder in der Entwicklung Gl. (3.4), die zu der Summe beitragen, ist gegeben durch die semiklassische Abschätzung $n \sim 2l_y/\lambda$ mit $\lambda = c/f_0$. Für die Bestimmung des Satzes

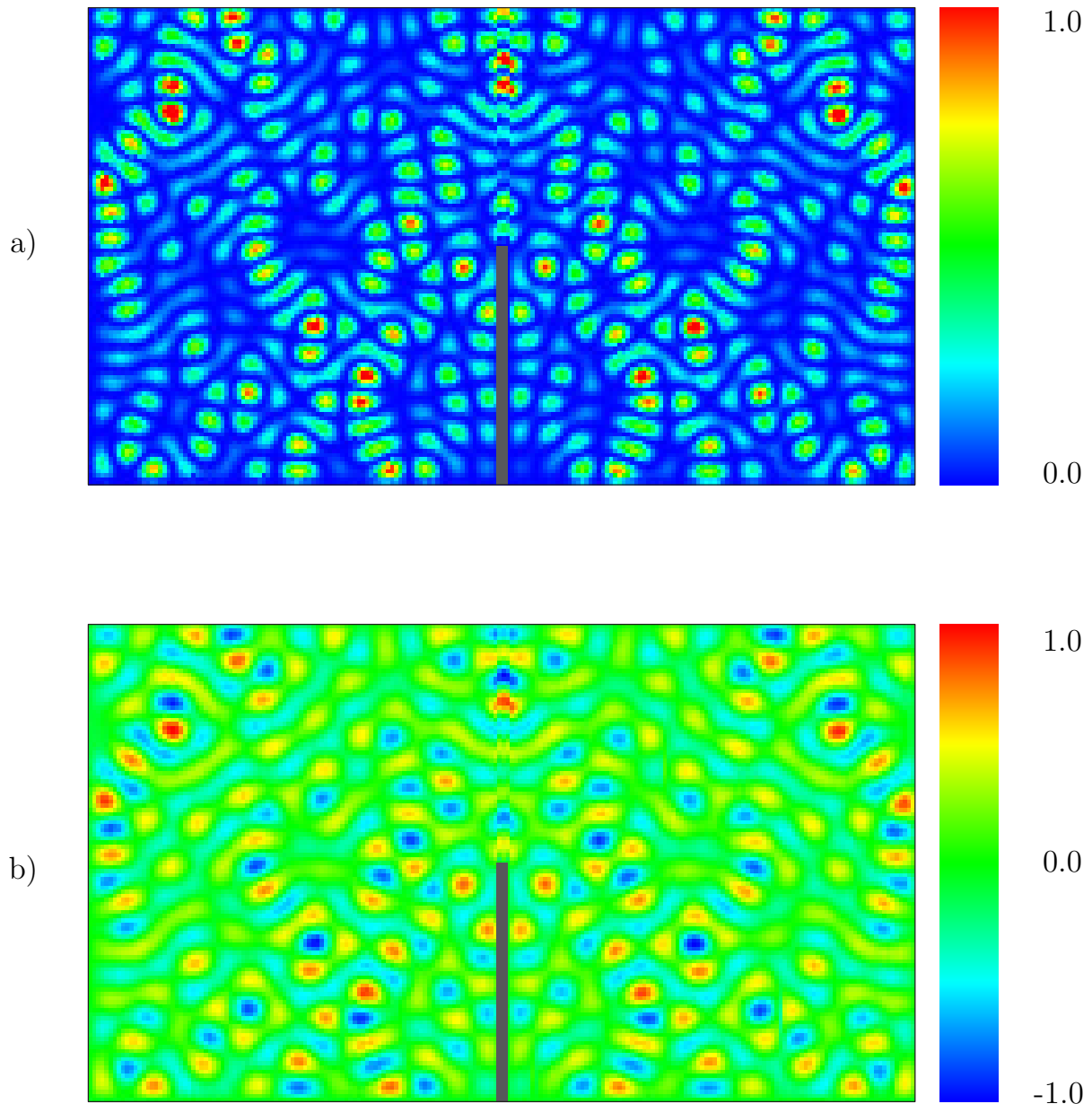


Abb. 3.4: a) Die gemessene Intensitätsverteilung des angeregten Zustands mit $N=613$ im Barrierenbillard. b) Die rekonstruierte Wellenfunktion. Die entsprechende Farbkodierung ist jeweils rechts vom Graphen abzulesen.

von Entwicklungskoeffizienten A_i ist ein Anpassungsverfahren basierend auf dem Levenberg-Marquardt Algorithmus [57] benutzt worden. Das nichtlineare Anpassungsverfahren benötigt einen anfänglichen Satz von Entwicklungskoeffizienten. Der Vektor der Entwicklungskoeffizienten wurde mit Zufallszahlen im Bereich von $-\max(|\psi(x = x_0, y)|)$ bis $\max(|\psi(x = x_0, y)|)$ initialisiert. Er enthält typischerweise 15 bis 25 Entwicklungskoeffizienten. Das nichtlineare Anpassungsverfahren ist nicht eindeutig, da der Levenberg-Marquardt Algorithmus nur ein lokales Minimum des χ^2 -Wertes liefert. Um ein globales Minimum zu finden, wird das Anpas-

sungsverfahren für 1000 zufällige generierte Anfangsvektoren durchgeführt. Der von dem Anpassungsverfahren gelieferte Satz von Entwicklungskoeffizienten mit dem kleinsten χ^2 -Wert ergibt die beste Näherung für die Wellenfunktion entlang des Schnittes $x = x_0$. Weil die Wellenfunktion stetig ist, kann man die aus dieser Anpassung bestimmten Koeffizienten für die nächstliegende Linie benutzen. Dieses Verfahren wird solange durchgeführt, bis die vollständige Wellenfunktion vorliegt. Ein Beispiel für eine gemessene Intensitätsverteilung ist in Abb. 3.4a gezeigt. Im Bereich oberhalb der Barriere kann man eine leichte Verzerrung der Intensitätsverteilung erkennen. Diese Verzerrung ist auf Ungenauigkeiten in der Positionierung des Störkörpers in der Nähe der Kante der Barriere zurückzuführen. Abbildung 3.4b zeigt die entsprechende rekonstruierte Wellenfunktion. Aus dem Vergleich von Abb. 3.4a und Abb. 3.4b erkennt man, dass die Maxima in der Intensitätsverteilung sich abwechselnden Maxima und Minima der rekonstruierte Wellenfunktion entsprechen.

3.5 Zusammenfassung des Experiments

Das Experiment mit dem symmetrischen Barrierenbillard wurde bei einer stabilen Temperatur von 30°C durchgeführt. Die Transmissionsspektren und die Intensitätsverteilungen wurden in zwei aufeinander folgenden Frequenzbereichen von 2 bis 4 GHz und von 4 bis 6 GHz gemessen. Die Unterteilung in zwei Frequenzbereiche erfolgte entsprechend der Arbeitsbereiche der eingesetzten Mikrowellenisolatoren. Um alle Resonanzen anregen zu können, sind die Transmissionsspektren sowie die Intensitätsverteilungen in allen möglichen 10 Antennenkombinationen gemessen worden. Die Intensitätsverteilungen der ca. 80 Resonanzen unterhalb von 2 GHz wurden auf Grund des starken Rauschens nicht gemessen. Die Intensitätsverteilungen im Bereich von 2 bis 4 GHz wurden mit einer räumlichen Auflösung von 58×100 Punkten, im Bereich von 4 bis 6 GHz von 117×200 Punkten aufgenommen. Insgesamt wurden in beiden Frequenzbereichen zwischen dem 80. und 680. Zustand 585 Intensitätsverteilungen gemessen. Im Bereich von 2 bis 4 GHz war es möglich, für jede der 231 Resonanzen die entsprechende Intensitätsverteilung zu messen. Diese wurden auch für die Untersuchungen der

spektralen Fluktuationen (s. Kap. 4) benutzt. Im Bereich von 4 bis 6 GHz war für einige Intensitätsverteilungen wegen nahezu überlappender Resonanzen eine Zuordnung der Resonanzfrequenz nicht möglich. Von den 290 gemessenen Verteilungen, die symmetrischen Eigenfunktionen entsprechen, wurden 230 Wellenfunktionen rekonstruiert. Für die restlichen 60 war wegen starken Rauschens oder nahezu überlappender Resonanzen eine Rekonstruktion nicht möglich.

4 Spektrale Eigenschaften des Barrierenbillards

Die Pseudointegrabilität der klassischen Dynamik eines Polygonbillards manifestiert sich in seinem quantenmechanischen Gegenstück unter anderem in den Fluktuationseigenschaften der Energieeigenwerte. Intensive numerische Untersuchungen der statistischen Eigenschaften der Eigenwertspektren von Polygonbillards zeigen, dass diese zwischen den Grenzfällen für quantenchaotische und reguläre Systeme liegen [34, 58]. Im folgenden Kapitel werden die experimentellen Untersuchungen der spektralen Eigenschaften des Barrierenbillards beschrieben.

4.1 Struktur des Spektrums des symmetrischen Barrierenbillards

Das Spektrum des symmetrischen Barrierenbillards enthält Zustände zweier Symmetrieklassen. Zu einer Klasse gehören Zustände, deren Eigenfunktionen symmetrisch bezüglich der Symmetrielinie des Systems sind, zur anderen Zustände, deren Eigenfunktionen antisymmetrisch bezüglich dieser Linie sind. Abbildung 4.1 zeigt die gemessenen Intensitätsverteilungen der 511. und der 512. Resonanz. Die antisymmetrischen Eigenfunktionen haben entlang der Symmetrielinie eine Knotenlinie, d.h. sie erfüllen dort die Dirichlet-Randbedingung (s. Abb. 4.1a), weswegen sie von der Barriere nicht beeinflusst werden und mit den Eigenfunktionen des Teilbillards mit Dirichlet-Randbedingungen in Abb. 4.2b übereinstimmen. Dieses Teilbillard ist ein integrables System und wird deshalb im Weiteren als integrables Teilbillard bezeichnet. Die symmetrischen Eigenfunktionen hingegen werden in nichttrivialer Weise durch die Barriere beeinflusst (s. Abb. 4.1b). Die Wellenfunktion verschwindet entlang der Barriere, und entlang des Restes der Symmetrielinie hat sie auf Grund der Symmetrie des Billards ein lokales Maximum, was die Neumann-Randbedingung impliziert. Die symmetrischen Eigenfunktionen des Barrierenbillards stimmen alle mit den Eigenfunktionen des Teilbillards mit gemischten Randbedingungen (s. Abb. 4.1c) überein. Dieses Teilbillard wird im Weiteren als reduziertes Barrierenbillard bezeichnet.

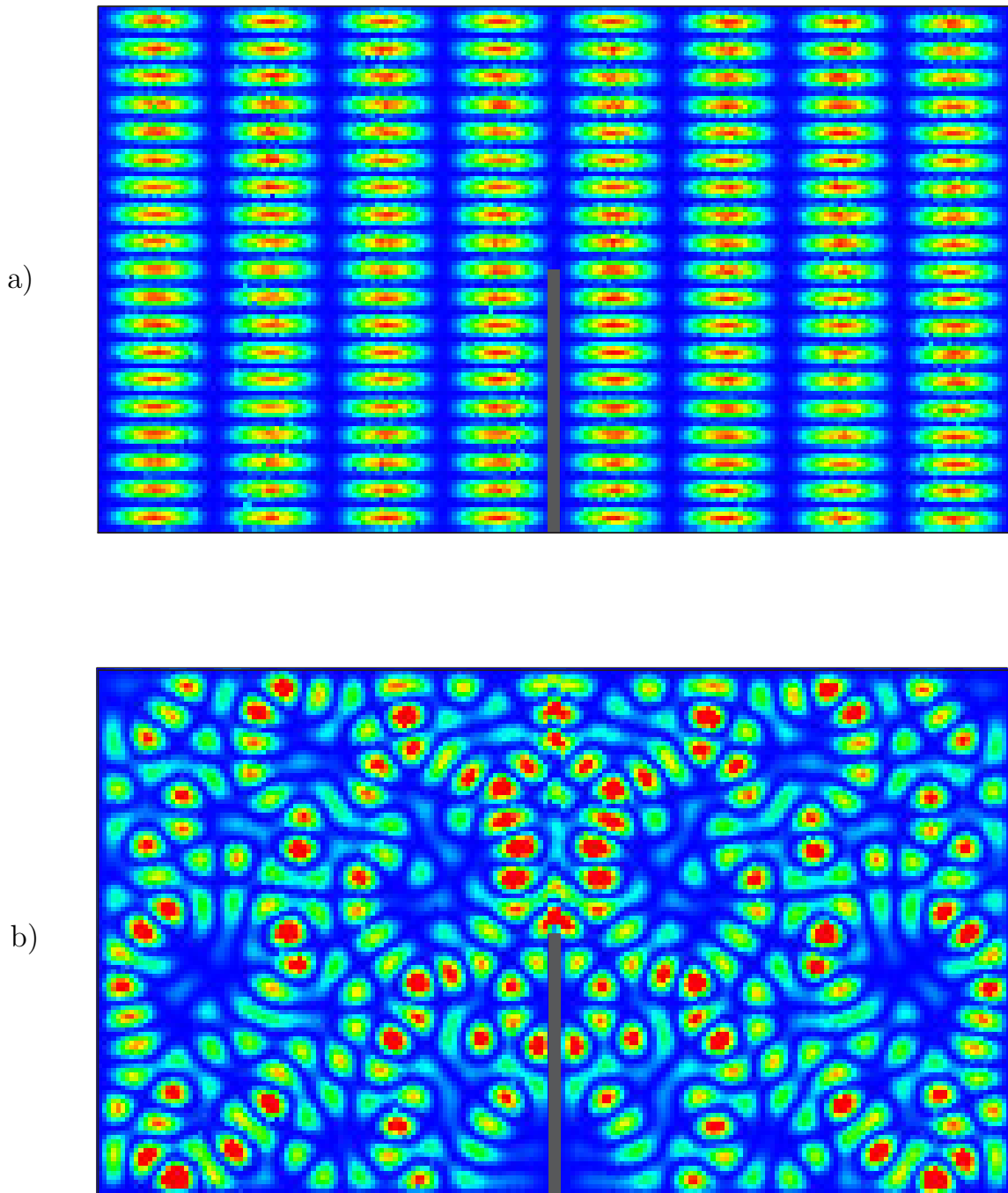


Abb. 4.1: Im Barrierbillard gemessene Intensitätsverteilungen. a) Intensitätsverteilung der antisymmetrischen Eigenfunktion mit der Frequenz $f_{511} = 5.011995$ GHz. b) Intensitätsverteilung der symmetrischen Eigenfunktion mit der Frequenz $f_{512} = 5.003560$ GHz.

4.2 Statistische Analyse des Spektrums

Die Sequenz der Resonanzfrequenzen enthält neben den Informationen über die klassische Dynamik des Systems auch Informationen über systemspezifische Größen

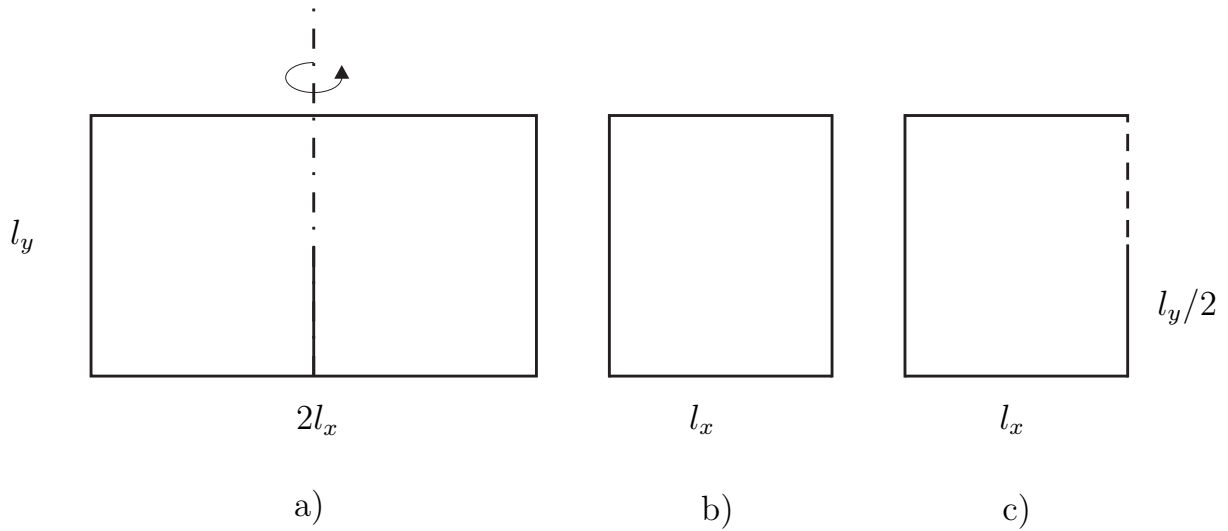


Abb. 4.2: a) Das symmetrische Barrierenbillard. Die strichpunktierte Linie deutet die Spiegelsymmetrie des Billards an. b) Das Teilbillard mit Dirichlet-Randbedingungen. c) Das Teilbillard mit gemischten Randbedingungen. Die durchgezogene Linie deutet die Dirichlet-Randbedingungen an, die gestrichelte die Neumann-Randbedingungen.

wie die Fläche, den Umfang des Billards sowie über die Randbedingungen an den Billardrändern. Ein Mikrowellenbillard mit Dirichlet-Randbedingungen, das die Fläche A und den Umfang U hat, besitzt unterhalb einer gegebenen Frequenz f , unabhängig von seiner Form insgesamt,

$$N_{\text{Weyl}}(f) = \frac{A}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{c} f \right)^2 + \frac{U}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{c} f \right) + \text{const.} \quad (4.1)$$

Resonanzen [46, 59]. Für ein Billard mit gemischten Randbedingungen lautet die Weyl-Formel [34, 60]

$$N_{\text{Weyl}}(f) = \frac{A}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{c} f \right)^2 + \frac{L_N - L_D}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{c} f \right) + \text{const.}, \quad (4.2)$$

wobei L_N die Länge des Teils des Umfangs mit Neumann-Randbedingungen ist und L_D die Länge des Teils mit Dirichlet-Randbedingungen. Diese Formeln geben die unter einer Frequenz erwartete Anzahl an Resonanzen, aber nicht die genauen Positionen der Resonanzen an. Die tatsächliche Anzahl der Resonanzfrequenzen $\{f_i\}$ im Spektrum eines Systems

$$N(f) = \sum_{f_i < f} \theta(f - f_i), \quad (4.3)$$

die sog. Treppenfunktion, fluktuiert um den durch Gl. (4.1) gegebenen Mittelwert

$$N_{\text{fluk}}(f) = N(f) - N_{\text{Weyl}}(f). \quad (4.4)$$

Diese Fluktuationen enthalten Informationen über die klassische Dynamik des Systems [12, 18, 61]. Für die statistische Analyse der gemessenen Sequenz von Resonanzfrequenzen muss das Spektrum zunächst entfaltet werden. Unter einer Entfaltung versteht man die Umskalierung des Spektrums auf dimensionslose Frequenzen ε_i mit dem mittleren lokalen Abstand $\langle s_i \rangle = \langle \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} \rangle = 1$. Die Entfaltung des Spektrums $\{f_i\}$ erfolgt durch die Transformation

$$\varepsilon_i = N_{\text{Weyl}}(f_i), \quad (4.5)$$

wobei die Koeffizienten in Gl. (4.1) durch eine Anpassung an die experimentellen Daten, d.h. an die Treppenfunktion Gl. (4.3), bestimmt werden. Mit der durch Gl. (4.5) gegebenen Entfaltung werden die für spektrale Untersuchungen irrelevanten systemspezifischen Informationen, wie die Fläche oder der Umfang des Billards, aus dem Spektrum entfernt. Neben der Entfaltung des Spektrums dient die Weyl-Formel auch als ein Maß, um die Vollständigkeit der Sequenz von Resonanzfrequenzen zu kontrollieren [48].

Um die spektralen Eigenschaften der beiden Teilbillards getrennt voneinander untersuchen zu können, wurde im Frequenzbereich von 2 bis 4 GHz von der 80. bis zur 310. Resonanz jeder eine gemessene Intensitätsverteilung zugeordnet. Damit ist eine Trennung in zwei Teilspektren erreicht worden. Abbildung 4.3 zeigt den fluktuierenden Anteil der Niveaunzahl im Barrierenbillard für beide Teilspektren. Die Anpassung der Weyl-Formel Gl. (4.1) an die Treppenfunktion Gl. (4.3) des Spektrums des integrablen Teilbillards ergibt für die Billardfläche $A_i = 2931 \text{ cm}^2$ und für den Umfang $U_i = 225 \text{ cm}$, sowie $A_r = 2946 \text{ cm}^2$ und $U_r = 185 \text{ cm}$ für das reduzierte Barrierenbillard. Die durch Anpassung gewonnenen Werte stimmen in sehr guter Näherung mit den tatsächlichen überein, und die beiden Kurven in Abb. 4.3 fluktuieren gleichmäßig um Null. Dies zeigt, dass die experimentellen Spektren lückenlos sind.

Die kurzreichweitigen Korrelationen zwischen den Eigenwerten lassen sich mittels der Häufigkeitsverteilung $P(s)$ der Abstände s benachbarter Niveaus, der sog. Nächste-Nachbar Abstandsverteilung (Nearest Neighbor spacing Distribution, NND) untersuchen. Für reguläre Systeme wurde die Vermutung, dass die

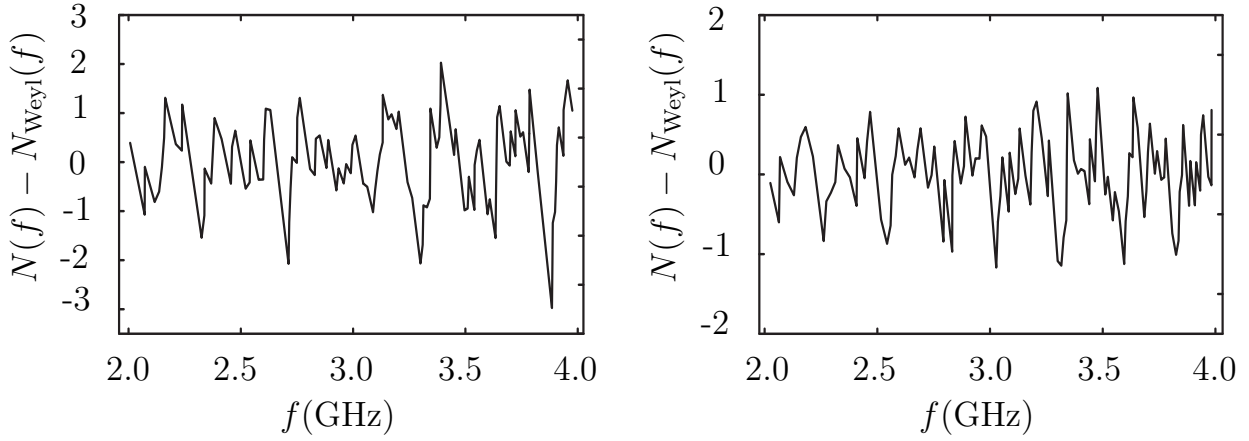


Abb. 4.3: Der fluktuierende Anteil der Niveauanzahl in den Teilbillards. Links ist der Anteil der Niveauanzahl für das integrable Teilbillard und rechts für das reduzierte Barrierenbillard dargestellt.

Abstände s_i nicht korreliert sind, anhand zahlreicher Beispiele bestätigt [6, 62, 63]. Als Folge ist die NND eine Poisson-Verteilung [64]

$$P_{\text{Poisson}}(s) = \exp(-s). \quad (4.6)$$

Im Gegensatz zu den Spektren regulärer Systeme sind bei chaotischen Systemen die Abstände s_i korreliert, und es kommt zur Niveauabstoßung, d.h. es gibt wenige Abstände, die klein gegen den mittleren Abstand 1 sind.

Die Eigenschaften der Fluktuationen chaotischer Systeme haben einen universellen Charakter und stimmen mit denen von Zufallsmatrizen überein. Zum Beispiel lassen sich die statistischen Eigenschaften der Eigenwertspektren von chaotischen Systemen mit Zeitumkehrinvarianz durch die von Zufallsmatrizen des Gaußschen Orthogonalen Ensembles (GOE) modellieren [12, 14]. Die entsprechende NND ist in guter Näherung durch eine Wigner-Verteilung

$$P_{\text{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (4.7)$$

gegeben [64, 65]. Die NND für die 117 Zustände des integrablen Teilbillards ist im linken Teil der Abbildung 4.4 als Histogramm dargestellt. Wie zu erwarten folgt sie der Poisson-Verteilung [66–68]. Im Gegensatz hierzu zeigt die NND für die Zustände des reduzierten Barrierenbillards (s. rechter Teil von Abb. 4.4) eine lineare Niveauabstoßung wie in der GOE-Verteilung und ein von der GOE abweichendes Verhalten für große Niveauabstände. Dieses Verhalten wurde bereits

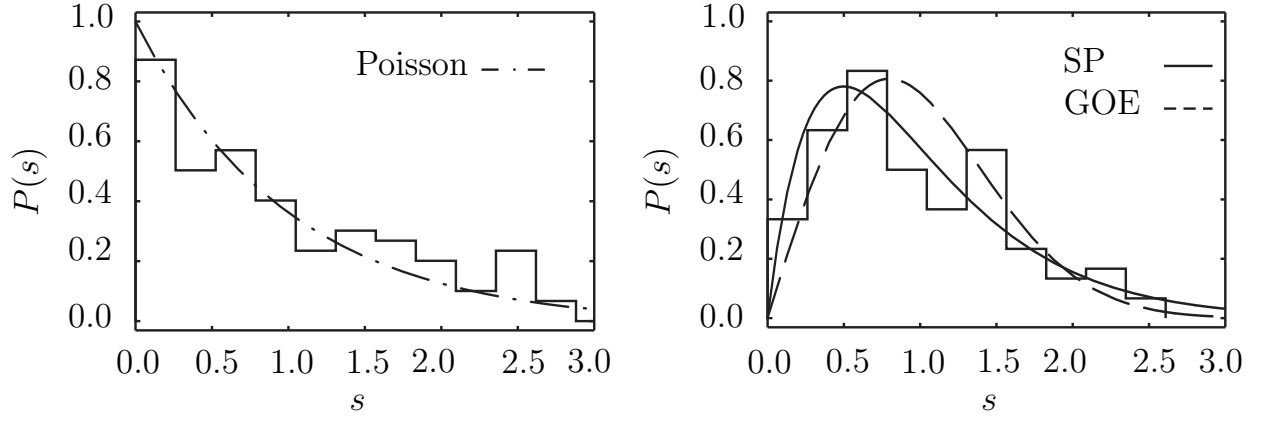


Abb. 4.4: Die linke Figur zeigt die NND als Histogramm für die 117 Eigenwerten des integrablen Teilbillards, in die rechte die NND für die 115 Eigenwerte des reduzierten Barrierenbillards. Die strichpunktiierte Kurve entspricht der Poisson-Verteilung, die gespichelte der Wigner-Verteilung, die durchgezogene der Semi-Poisson-Verteilung

bei numerischen Untersuchungen des Barrierenbillards [34] und anderer Polygonbillards [58] gefunden. Für die Beschreibung der NND in Polygonbillards wurde in [58] die sog. Semi-Poisson Verteilung vorgeschlagen,

$$P_{\text{SP}}(s) = 4s \exp(-2s). \quad (4.8)$$

Der Name Semi-Poisson ist mit der folgenden Konstruktion verbunden. Wenn aus einer Poisson verteilten Sequenz von Nächste-Nachbar-Abständen s_i eine neue Sequenz $y_i = (s_{i+1} + s_i)/2$ übernächster Nachbarn gebildet wird, sind die Nächste-Nachbar-Abstände in dieser Sequenz genau entsprechend Gl. (4.8) verteilt [58,69]. Neben der NND bietet sich für die statistische Analyse die aus ihr konstruierte integrierte nächste-Nachbar Abstandsverteilung

$$I(s) = \int_0^s P(s') ds' \quad (4.9)$$

an. Die integrierte NND lautet für die drei Verteilungen

$$I_{\text{Poisson}}(s) = 1 - \exp(-s), \quad (4.10)$$

$$I_{\text{GOE}}(s) = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right), \quad (4.11)$$

$$I_{\text{SP}}(s) = 1 - (2s + 1) \exp(-2s). \quad (4.12)$$

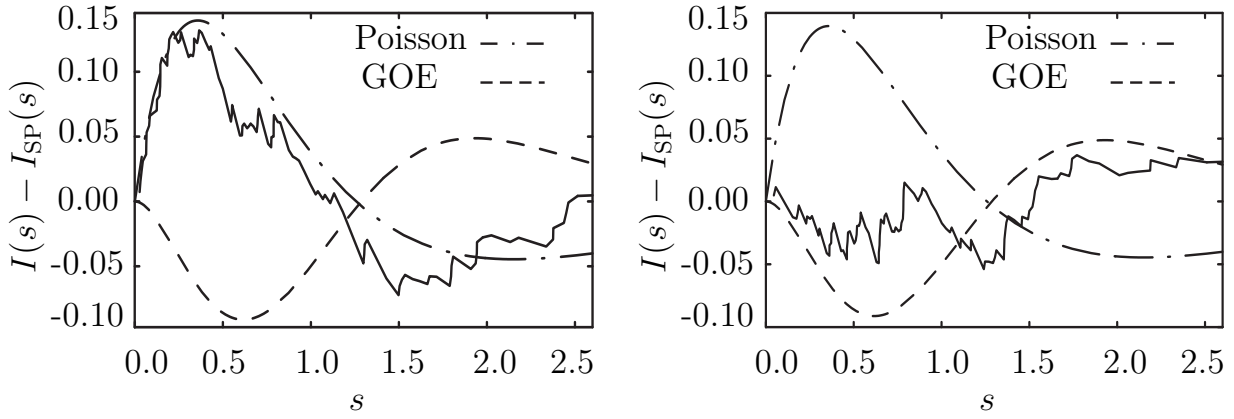


Abb. 4.5: Die linke Figur zeigt die Differenz zwischen der integrierten NND $I(s)$ für das integrable Teilbillard und $I_{\text{SP}}(s)$. Die rechte Figur zeigt die gleiche Auftragung für die integrierte NND $I(s)$ des reduzierten Barrierenbillards. Die gestrichelte Linie entspricht der Differenz $I_{\text{SP}}(s) - I_{\text{GOE}}(s)$ und die strichpunktierte Linie zeigt $I_{\text{SP}}(s) - I_{\text{Poisson}}(s)$. Die Null-Linie entspricht also dem Semi-Poisson Fall.

Zu den Vorteilen dieser Darstellung zählt unter anderem die Unabhängigkeit von der Unterteilung des Histogramms. Um die im Experiment beobachteten Abweichungen von einer GOE-Verteilung zu verdeutlichen, ist in Abb. 4.5 die Differenz zwischen der experimentellen integrierten NND und $I_{\text{SP}}(s)$ dargestellt. Wenn die experimentelle Verteilung mit der Semi-Poisson Verteilung übereinstimmen würde, dann würde die resultierende Kurve einer um Null fluktuierenden Kurve entsprechen. Die experimentelle Verteilung für das integrable Teilbillard folgt der Kurve, die einer Poisson Verteilung entspricht, die für das reduzierte Barrierenbillard weicht leicht von der Nulllinie ab. Die in dieser Arbeit beobachteten Abweichungen sind auf den begrenzten Datensatz von Eigenfrequenzen und damit gewisse Unsicherheiten in den Verteilungen der experimentellen Eigenwertspektren (jeweils nur etwa 115 Eigenwerte) zurückzuführen.

5 Superscars im Barrierenbillard

Wie bereits weiter oben angemerkt, wird die Lokalisierung der Wellenfunktionen eines quantenchaotischen Systems um eine instabile periodische Bahn als Scar (Narbe) bezeichnet. Scar-Wellenfunktionen wurden zum ersten Mal in den numerischen Untersuchungen des Quanten-Stadionbillards von McDonald beobachtet [70]. Zahlreiche theoretische Arbeiten haben gezeigt, dass Scars nur für Wellenfunktionen mit kleiner Zustandsnummer deutlich sichtbar sein sollen [25, 71]. Die Lokalisierung der Wellenfunktionen um eine Familie periodischer Bahnen in pseudointegrablen Polygonbillards hat allerdings die Besonderheit, dass die ausgeprägte Lokalisierung im semiklassischem Limes *nicht* verschwindet. Im Gegensatz zu den chaotischen Systemen werden die Wellenfunktionen mit steigender Zustandsnummer sogar stärker um eine Familie von periodischen Bahnen lokalisiert sein. Um diese Tatsache hervorzuheben, wurde in [26] diese Lokalisierung in pseudointegrablen Polygonbillards als *Superscar* getauft. Im Allgemeinen wird in Polygonbillards die visuelle Identifizierung von Superscars durch die komplizierte geometrische Gestalt der periodischen Bahnen erschwert, nicht jedoch im symmetrischen Barrierenbillard. In diesem Kapitel werden die experimentellen Ergebnisse sowie die analytische Konstruktion der Superscar-Zustände dargestellt.

5.1 Experimentell beobachtete Superscars

In vielen der experimentell beobachteten Wellenfunktionen werden Superscars beobachtet. Einige Beispiele sind in den Abbildungen 5.1 und 5.2 dargestellt. Alle gezeigten Wellenfunktionen weisen eine klare Struktur auf, die auf periodische Bahnen zurückzuführen ist. Diese sind in den Abbildungen 5.1 und 5.2 jeweils rechts angedeutet. Die Superscars in Abb. 5.1, Abb. 5.2.a, Abb. 5.2.b entsprechen Familien periodischer Bahnen, die nur einen Teil der Billardfläche abdecken. Als Folge dessen sind diese Wellenfunktionen nur im entsprechenden Bereich des Billards lokalisiert. Die Superscars, die in Abb. 5.2c und Abb. 5.2d dargestellt sind, entsprechen hingegen Familien periodischer Bahnen, die einen großen Bereich der Billardfläche abdecken. Das Superscar-Phänomen spiegelt die Besonderheiten der

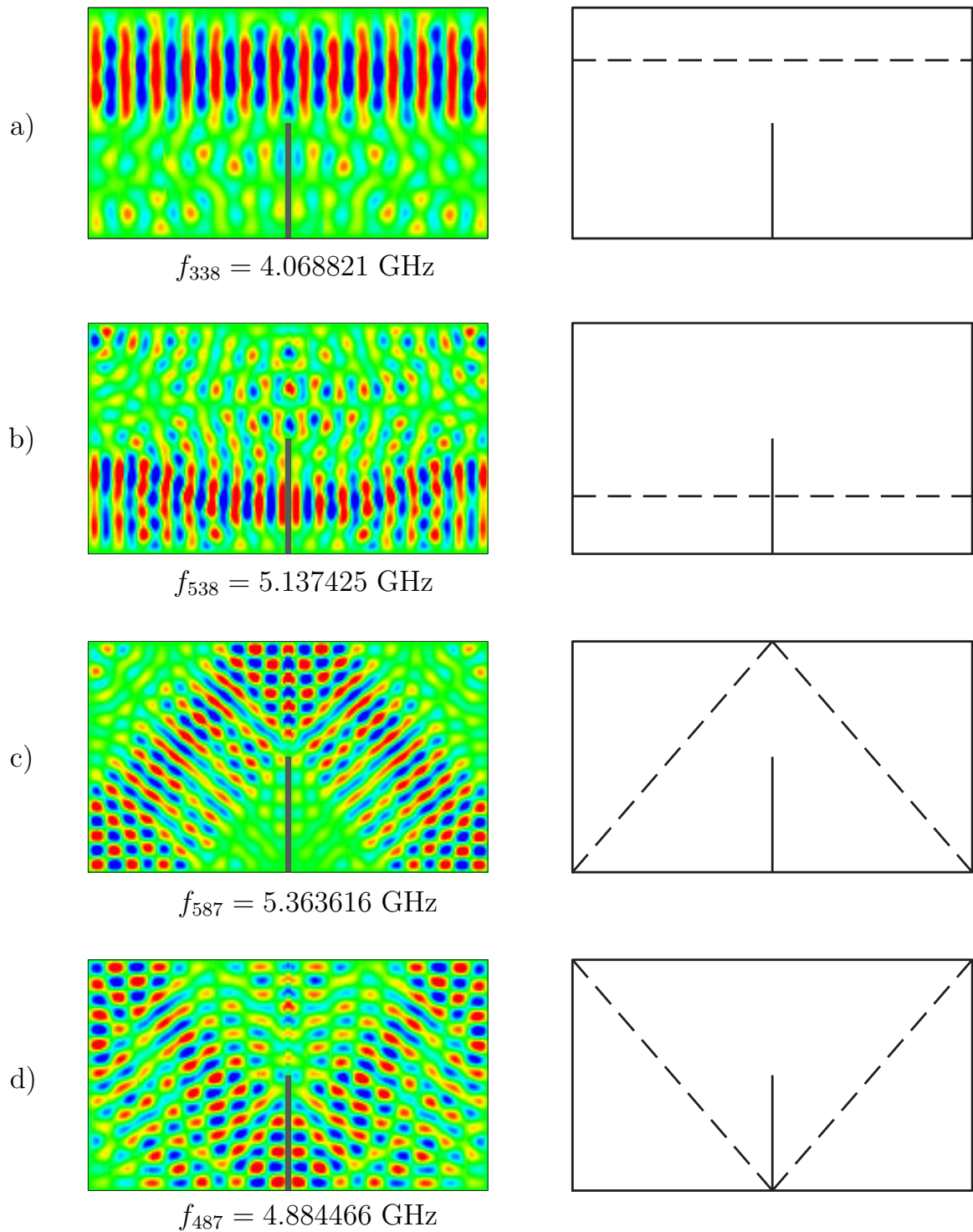


Abb. 5.1: Beispiele für experimentell beobachtete Superscars, die nur einen Teil der Billardfläche abdecken. Die entsprechenden periodische Bahnen sind jeweils rechts dargestellt (die Farbkodierung ist wie in Abb. 3.4b).

zu Grunde liegenden klassischen Dynamik wider, die im folgenden Unterkapitel erläutert werden.

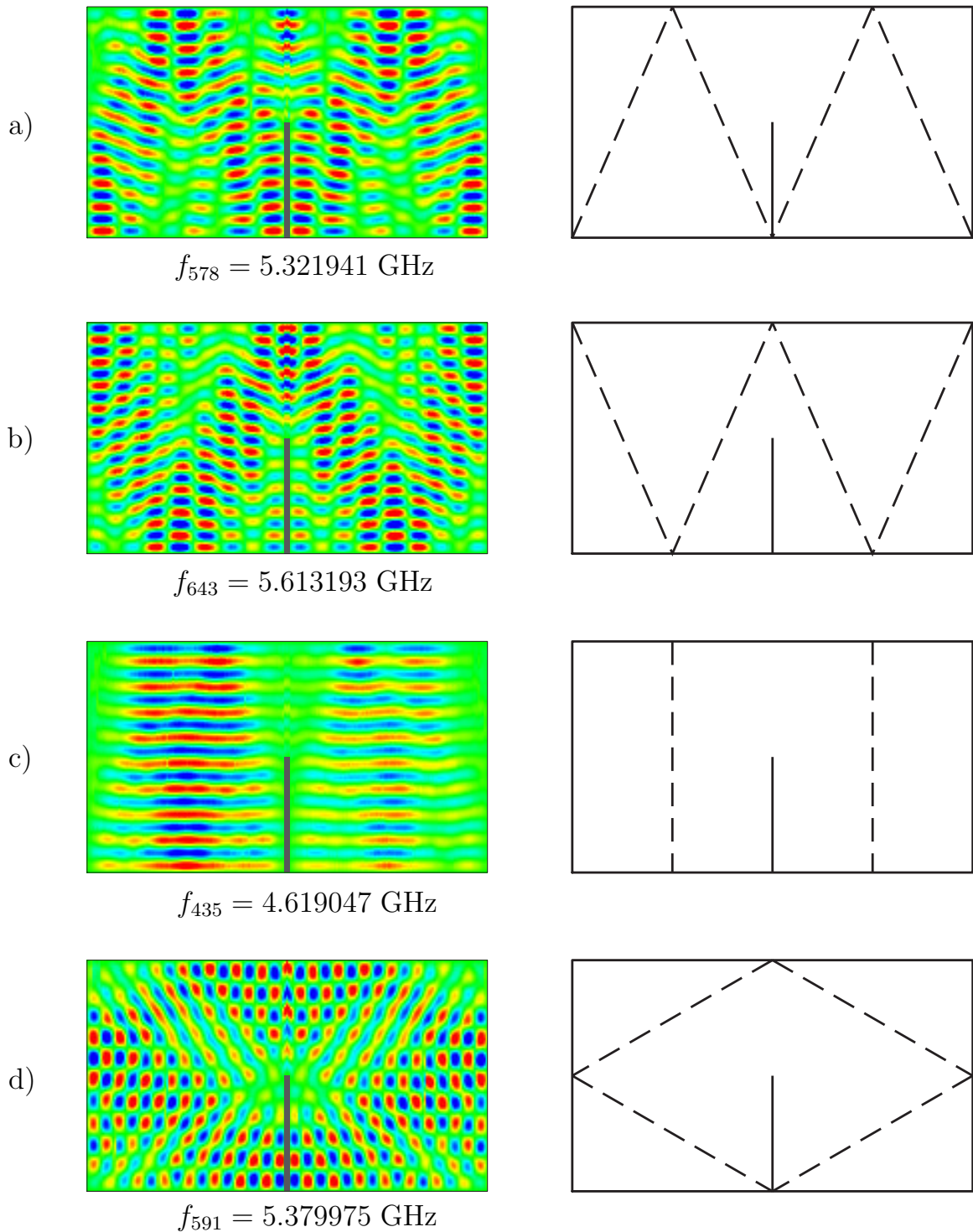


Abb. 5.2: a), b) Beispiele für experimentell beobachtete Superscars, die nur einen Teil der Billardfläche abdecken. c), d) Superscars welche die ganze Billardfläche abdecken. Die entsprechenden periodische Bahnen sind jeweils rechts dargestellt (die Farbkodierung ist wie in Abb. 3.4b).

5.2 Periodische Bahnen im symmetrischen Barrierenbillard

Die in Kapitel 4 eingeführte Reduzierung des gesamten Barrierenbillard auf ein Teilbillard (s. Abb. 4.2c) erleichtert die klassische Analyse deutlich und erlaubt einfache geometrische Betrachtungen. Für die Analyse der Struktur der periodischen Bahnen im reduzierten Barrierenbillard wird die für rationale Polygonbillards übliche Entfaltungstechnik eingesetzt [30,32,34,72]. Um die Orientierung des Billards festzulegen, wird in Abb. 5.3 die linke untere Ecke des Billards mit einem schwarzen Kreis markiert. Jedes Mal, wenn das Teilchen eine Seite des Rechtecks trifft, wird das Billard an dieser Seite gespiegelt und die Bahn des Teilchens in der Spiegelkopie fortgesetzt. Dieses Verfahren entspricht einem Übergang von einem Koordinatensystem, das im Billard definiert ist, in eines, welches mit dem sich fortbewegendem Teilchen verbunden ist. So kann die ganze Ebene mit Kopien des Billards abgedeckt werden. Die markierten Ecken des Billards bilden ein rechteckiges Gitter (s. Abb. 5.3). Als Ursprung des Koordinatensystems für dieses Gitter wird die markierte Ecke des ursprünglichem Billards gewählt. Jeder Vektor, der den Punkt $(0, 0)$ mit den anderen Punkten des Gitters (M, N) verbindet, definiert eine Richtung im Gitter. Alle Bahnen mit derselben Richtung gehören zu einer Familie periodischer Bahnen, welche durch ein Zahlenpaar (M, N) mit M und N teilerfremd und die Periodenlänge

$$L = \sqrt{(2l_x M)^2 + (2l_y N)^2} \quad (5.1)$$

gekennzeichnet werden. Die Familien periodischer Bahnen im reduzierten Barrierenbillard sind in sog. Kanäle periodischer Bahnen aufgeteilt. Jeder Kanal wird durch die beiden Linien, die die Spitzen der Barrieren verbinden, begrenzt. Diese Linien werden in der Fachliteratur [26, 36] als singuläre Diagonalen (singular diagonals) bezeichnet.

Für das reduzierte Barrierenbillard unterscheidet man zwei verschiedene Arten von Familien. Zur ersten Art gehören Familien, die durch ein ungerades M und beliebiges teilerfremdes N gekennzeichnet sind. Für gegebenes N und M verlaufen ihre Bahnen je nach Anzahl der während einer Periode getroffenen Billardseiten mit Dirichlet-Randbedingungen in zwei möglichen Kanälen. Diese Tatsache ist

für die spätere semiklassische Betrachtung des Billards wichtig. Ein Beispiel für die Entfaltung einer solchen Familie periodischer Bahnen ist in Abb. 5.4 dargestellt. Die sich periodisch wiederholenden Teile der Kanäle sind in verschiedenen Grautönen dargestellt. Im helleren Kanal durchquert das Teilchen während einer Periode des Kanals drei Seiten mit Dirichlet-Randbedingungen, im dunkleren vier. Jeder Kanal dieser Art hat die Breite

$$w = \frac{2l_x l_y}{L} \quad (5.2)$$

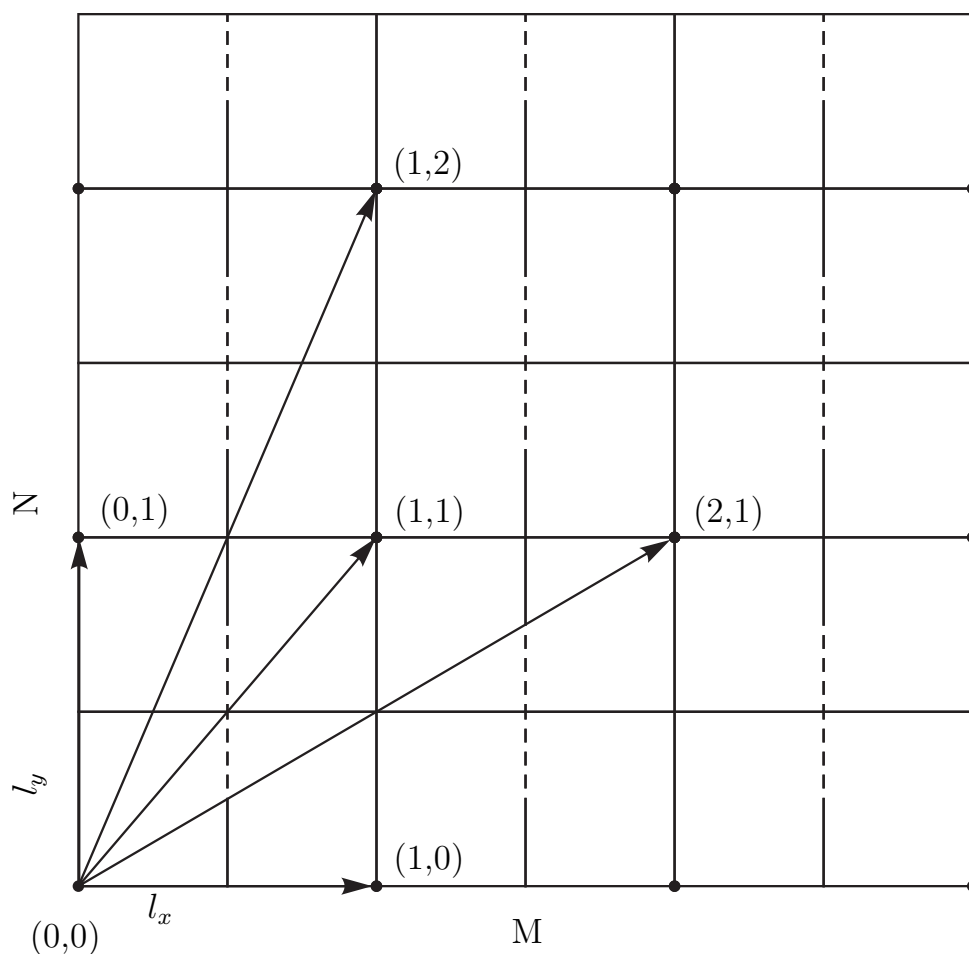


Abb. 5.3: Die Entfaltung der für das Experiment relevanten Familien von periodischen Bahnen im reduzierten Barrierenbillard der Länge l_x und der Breite l_y . Die mit verschiedenen Zahlenpaaren (M, N) (siehe Text) gekennzeichneten Vektoren deuten die Ausbreitungsrichtungen der verschiedenen Familien an. Die Länge der Vektoren ist gleich der Periode L der Familie. Die Seiten mit Dirichlet-Randbedingungen wurden als durchgezogene Linie, die mit Neumann-Randbedingungen als gestrichelte Linien dargestellt.

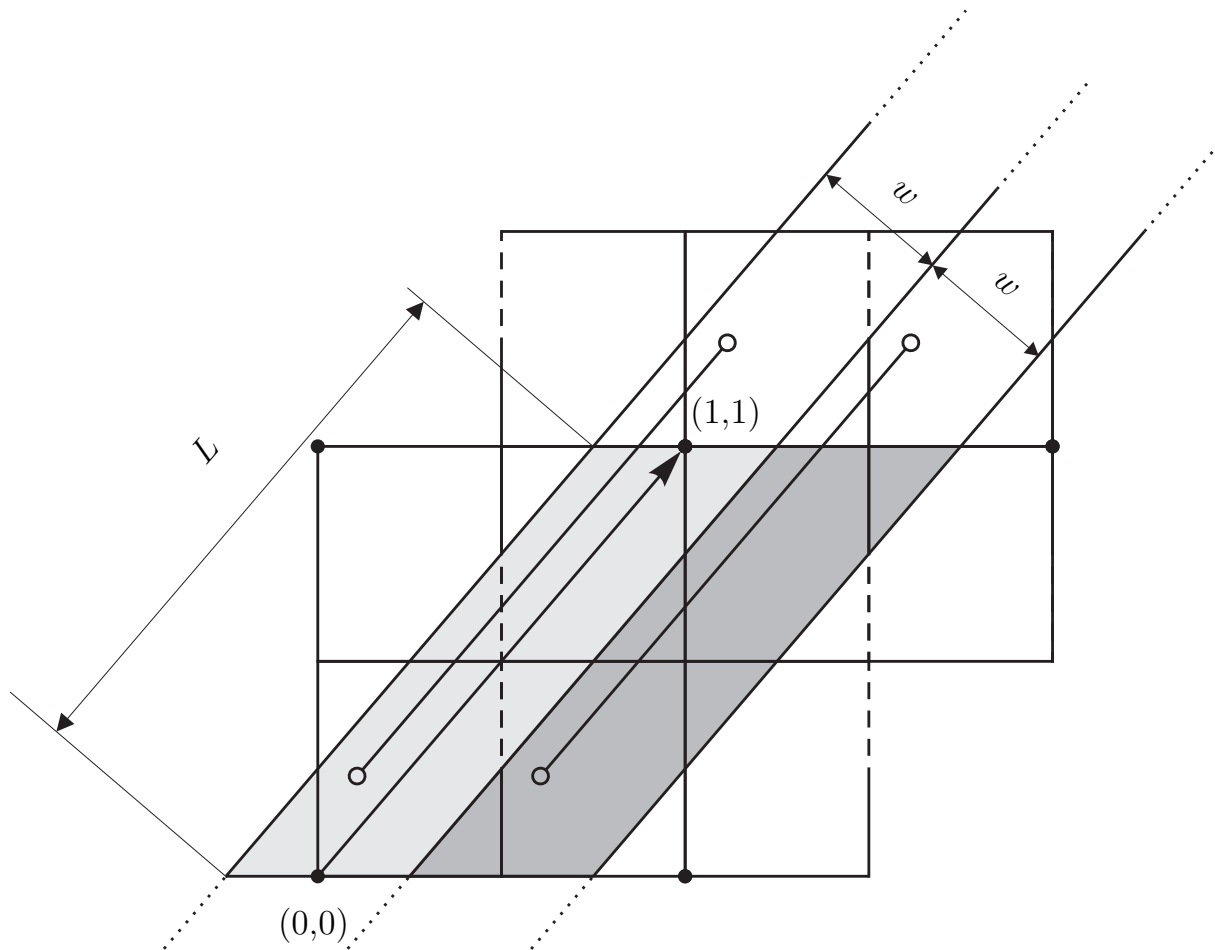


Abb. 5.4: Entfaltung der $(1,1)$ -Familie der periodischen Bahnen. Die sich periodisch wiederholenden Teile der Kanäle der Länge L und der Breite w sind in verschiedenen Grautönen dargestellt. In der Figur ist je ein Beispiel für eine Teilchenbahn der Länge L als eine Strecke mit Anfangs- und Endpunkt durch einen offenen Kreis dargestellt. Im helleren Kanal durchquert das Teilchen während einer Periode drei Seiten mit Dirichlet-Randbedingungen, im dunkleren vier Seiten.

und die Fläche

$$A = 2l_x l_y. \quad (5.3)$$

Wenn solche Kanäle wieder zurück-gefaltet werden, decken sie nur einen Teil der Billardfläche ab.

Zur zweiten Art gehören Familien, die durch gerades M und dazu teilerfremdes ungerades N gekennzeichnet sind. Ihre Bahnen befinden sich in nur einem Kanal und alle Bahnen durchqueren während einer Periode die gleiche Anzahl von Billardseiten mit Dirichlet-Randbedingungen. Ein Beispiel für die Entfaltung einer

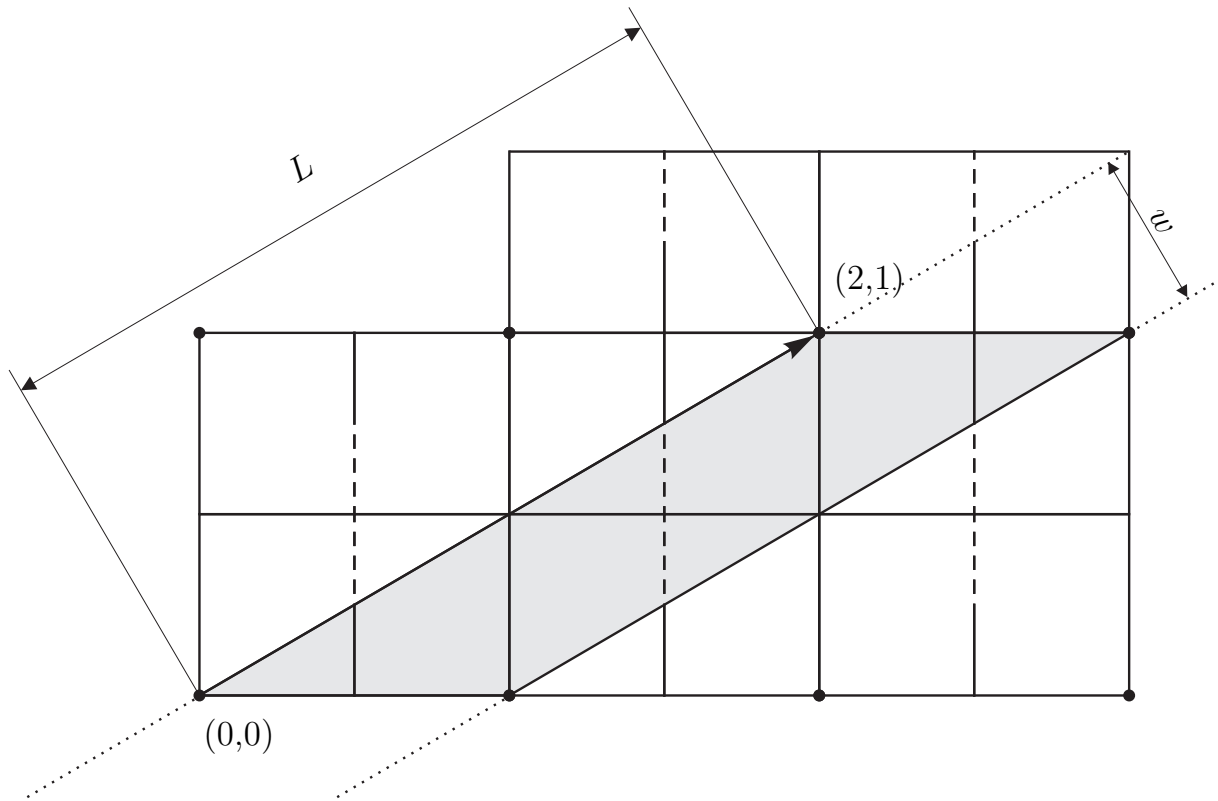


Abb. 5.5: Die Entfaltung der (2,1)-Familie der periodischen Bahnen. Der sich periodisch wiederholende Teil des Kanals der Länge L und der Breite w ist als grauer Bereich dargestellt.

solchen Familie periodischer Bahnen ist in Abb. 5.5 dargestellt. Jeder Kanal dieser Art hat die Breite

$$w = \frac{4l_x l_y}{L} \quad (5.4)$$

und die Fläche

$$A = 4l_x l_y \quad (5.5)$$

Wenn solche Kanäle wieder zurück-gefaltet werden, decken sie die komplette Billardfläche ab.

5.3 Konstruktion von Superscar-Zuständen

Im semiklassischen Limes der Quantenmechanik kann jede Teilchenbahn mit einer Welle assoziiert werden. Die sich im Kanal periodischer Bahnen ausbreitende Welle wird an einer unendlich langen Reihe von Abbildungen der Spitze der Barriere

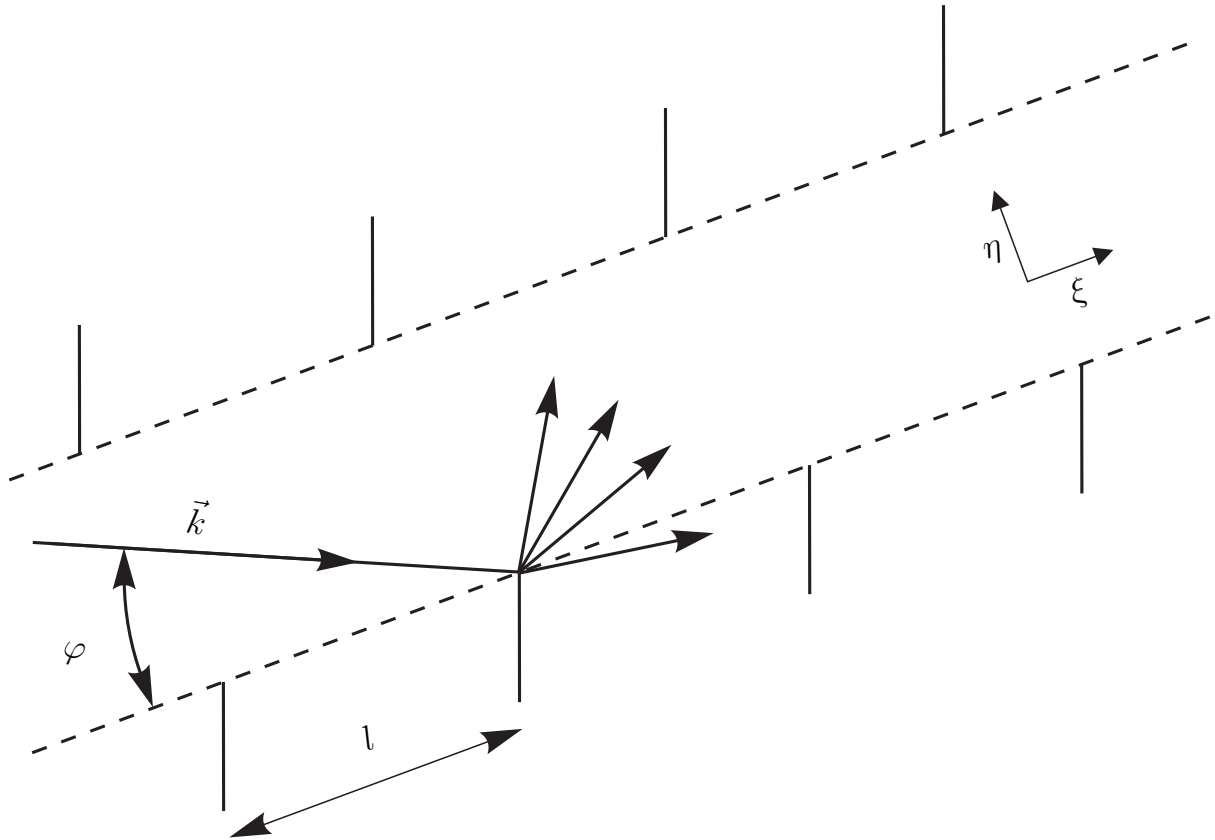


Abb. 5.6: Eine im periodischen Kanal laufende Welle mit dem Wellenvektor \vec{k} wird am periodischen Sequenz der Abbildungen der Barrierespitze gestreut. Die beiden singulären Diagonalen sind als gestrichelte Linien dargestellt. Die Koordinate entlang des Kanals und in der Querrichtung sind als ξ und η bezeichnet.

gestreut. Diese Streuung hängt von einem dimensionslosen Parameter

$$u = \sqrt{kl}\varphi \quad (5.6)$$

ab [26, 73], wobei $k = 2\pi f/c$ der Betrag des Wellenvektors, l der Abstand zwischen den Abbildungen der Barrierenspitze und φ der Einfallswinkel der Wellen (s. Abb. 5.6) ist. Für kleine Werte dieses Parameters $u \rightarrow 0$ und gleichzeitig großes $k \rightarrow \infty$ ist die Amplitude der an der singulären Diagonalen (der Grenze des Kanals) gestreuten Welle proportional zu $\sqrt{1/k}$. Für wachsendes k geht also die Amplitude der gestreuten Wellen tendenziell gegen Null, so dass die Welle an der singulären Diagonalen näherungsweise die Dirichlet-Randbedingung erfüllt [73]. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass in der Strahlenoptik die Schattengrenze eines parallel zur Kanalmitte strahlenden Scheinwerfers auf der singulären Diagonalen liegt. Dementsprechend können im semiklassischen Limes in jedem Kanal

näherungsweise Scarzustande ähnlich den Eigenzuständen eines Hohlleiters konstruiert werden

$$\Psi_{m,n}^{\text{scar}}(\xi, \eta) = e^{-ik_m \xi} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{w} \eta\right) \cdot \chi(\eta). \quad (5.7)$$

Hierbei ist ξ die Koordinate entlang des Kanals, η ($0 < \eta < w$) die Koordinate in senkrecht zu ξ und w die Breite des Kanals. Die Funktion $\chi(\eta)$ zwingt $\Psi_{m,n}^{\text{Scar}}(\xi, \eta)$ außerhalb des Kanals auf Null ($\chi(\eta) = 1$ wenn $0 < \eta < w$, und andernfalls $\chi(\eta) = 0$). Die Frequenzen der Eigenzustände im Kanal (Gl. (5.7)) sind

$$f_{m,n} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_m^2 + \left(\frac{\pi n}{w}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Für die Existenz der ausgeprägten Superscar-Zustände (Gl. (5.7)) mit der Frequenz aus Gl. (5.8) ist es notwendig, dass der Parameter u aus Gl. (5.6) klein wird, damit die Dirichlet-Randbedingung an der singulären Diagonalen in guter Näherung erfüllt wird. Dies wird in der Bedingung

$$\frac{\pi n}{w} \sqrt{\frac{l}{k}} \ll 1 \quad (5.9)$$

zusammengefasst. Hier wurde in Gl. (5.6) für den Einfallswinkel $\varphi \approx p_\eta/k$ eingesetzt, wobei $p_\eta = \pi n/w$ gleich dem Wellenimpuls in der Querrichtung des Kanals und k die Wellenzahl einer Eigenfunktion des Barrierenbillards mit Frequenz f ist. Aus dieser Bedingung (Gl. (5.9)) folgt

$$1 \leq n < n_{\text{max}}, \quad n_{\text{max}} \sim w \sqrt{\frac{k}{l}} \quad (5.10)$$

Dies bedeutet, dass in einem Kanal bei steigendem k stark lokalisierte Wellenfunktionen mit immer größerer Zahl n der Anregungen in Querrichtung des Kanals existieren können. Dieses Verhalten steht im Gegensatz zu Scars in chaotischen Systemen, bei denen der Beitrag der individuellen isolierten periodischen Bahn zur Wellenfunktion mit steigender Frequenz immer kleiner wird. Um dies zu betonen, haben Bogomolny and Schmit vorgeschlagen, dieses Lokalisierungsphanomen *Superscar*¹ zu nennen [26]. Außerdem wird es für eine feste Anzahl n von Anregungen in Querrichtung des Kanals Superscar-Wellenfunktionen geben, die mit

¹Heller hat in einer früheren Arbeit dieses Wort bereits in einem anderen Zusammenhang benutzt [25].

steigender Frequenz f (bzw. Wellenzahl k) Familien immer längerer periodischer Bahnen entsprechen.

Jedes Mal, wenn eine Welle im Kanal eine Billardseite mit Dirichlet-Randbedingungen trifft, sammelt sie eine zusätzliche Phase π auf. Wenn die periodische Bahn während einer Periode L eine gerade Anzahl von Billardseiten durchquert, impliziert dies eine periodische Randbedingung für die Funktion aus Gl. (5.7) entlang des Kanals

$$e^{-i k_m \xi} = e^{-i k_m \xi + L}, \quad (5.11)$$

wobei k_m in Gl. (5.8) durch die Lösungen dieser trigonometrischen Gleichung

$$k_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

gegeben ist. Wenn die periodische Bahn während einer Periode L eine ungerade Anzahl an Billardseiten durchquert, hat die Funktion Gl.(5.7) eine antiperiodische Randbedingung,

$$e^{-i k_m \xi} = -e^{-i k_m \xi + L} \quad (5.13)$$

entlang des Kanals mit

$$k_m = \frac{\pi(2m + 1)}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Abbildung 5.7 zeigt als ein Beispiel die Entfaltung einer gemessenen Superscar-Wellenfunktion (s. Abb. 5.1c). Dieser Superscar gehört zur (1,1)-Familie der periodischen Bahnen und entspricht dem Kanal, der in Abb. 5.4 in hellgrau dargestellt ist. Die periodische Bahn durchquert in diesem Kanal drei Billardseiten mit Dirichlet-Randbedingungen, d.h. der entfaltete Superscar-Zustand (Gl. (5.7)) erfüllt die antiperiodische Randbedingung entlang des Kanals, und für seine Frequenz (Gl. (5.8)) ergibt sich mit Gl. (5.14)

$$f_{m,n} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi(2m + 1)}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{w}\right)^2}. \quad (5.15)$$

Die entfaltete Wellenfunktion hat 55 Maxima entlang des Kanals und ein Maximum in Querrichtung. Dies entspricht den Quantenzahlen $m = 27$ und $n = 1$. Die Resonanzfrequenz der gemessenen Superscar Wellenfunktion ist $f_{587} =$

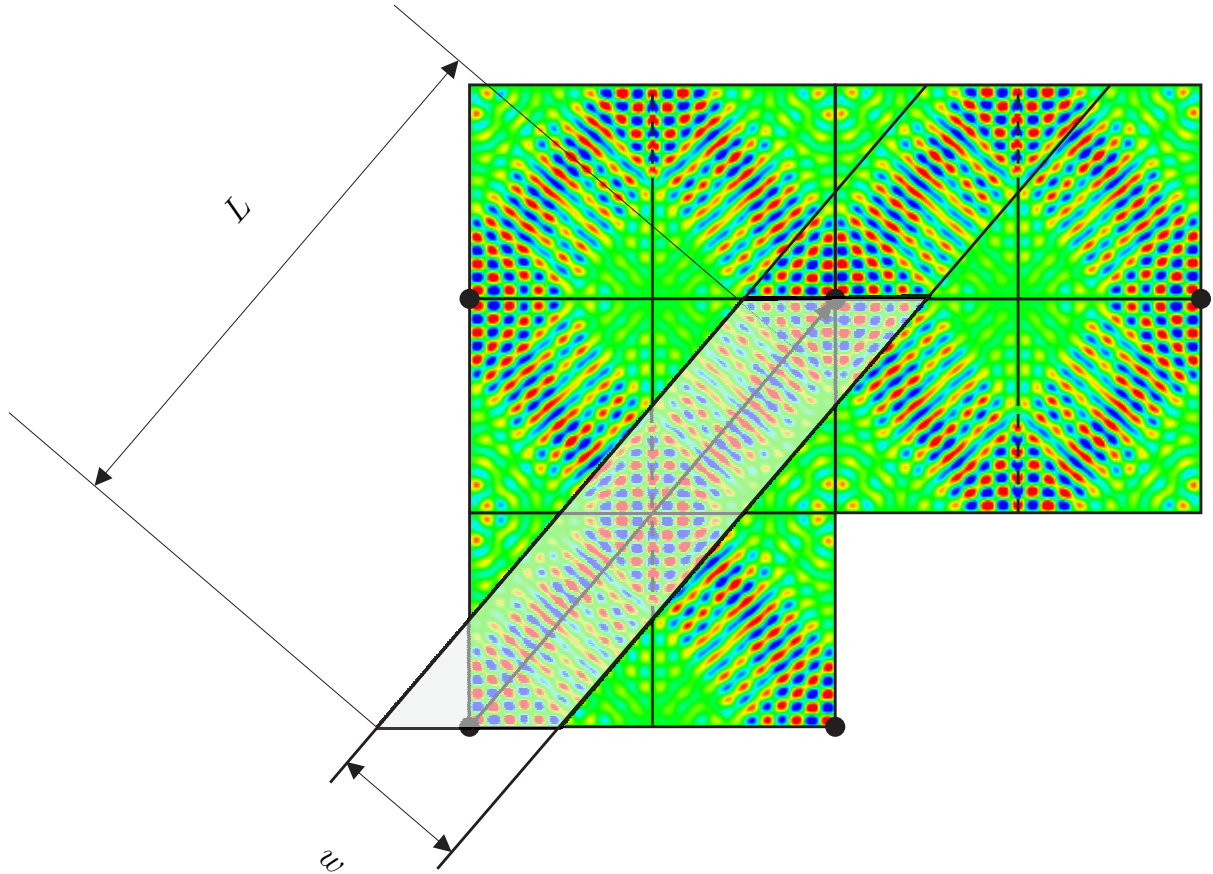


Abb. 5.7: Die Entfaltung der Superscar-Wellenfunktion des 587. Zustands. Die entfaltete Wellenfunktion hat 55 Maxima entlang des Kanals und ein Maximum in Querrichtung dazu.

5.363616 GHz und die für den entfalteten Superscar-Zustand berechnete Frequenz ist $f_{27,1} = 5.379975$ GHz. Beide Frequenzen unterscheiden sich um weniger als 0.2 %. Dies und die Tatsache, dass die Amplitude der Wellenfunktion am stärksten im periodischen Kanal konzentriert ist, spricht für die in [73] gemachte Näherung durch die Annahme der Dirichlet-Randbedingung entlang der singulären Diagonalen.

Abbildung 5.1d zeigt eine andere Superscar Wellenfunktion der (1,1)-Familie, die dem in Abb. 5.4 dunkelgrau dargestellten Kanal entspricht. Die periodische Bahn in diesem Kanal durchquert vier Mal Billardseiten mit Dirichlet-Randbedingungen, d. h. der entfaltete Superscar-Zustand (Gl. (5.7)) hat eine periodische Randbedingung entlang des Kanals, und für seine Frequenz aus Gl.(5.8) ergibt sich unter Verwendung von Gl.(5.12)

$$f_{m,n} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{w}\right)^2}. \quad (5.16)$$

Für einen detaillierten Vergleich zwischen experimentellen Wellenfunktionen und konstruierten Superscar-Zuständen, z. B. zur Ausrechnung eines Überlappintegrals (s. Kap. 5.4), muss der entfaltete Superscar-Zustand Gl. (5.7) wieder zurückgefaltet werden. Diese Rückfaltung erfolgt, indem aus der Funktion Gl. (5.7) zunächst eine lineare symmetrische Kombination bezüglich der Billardseiten mit Neumann-Randbedingung und anschließend eine antisymmetrische Kombination bezüglich der Billardseiten mit Dirichlet-Randbedingungen konstruiert wird. Hier wird diese Konstruktion für Superscar-Zustände im hellgrauen Kanal in Abb. (5.4) bzw. Abb. (5.7) ausgeführt. Zuerst muss die Gl. (5.7) in ein kartesisches Koordinatensystem transformiert werden

$$\Psi_{m,n}^{(0)}(x, y) = \Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta). \quad (5.17)$$

Hier wurde $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$, $\eta = -x \sin \theta + y \cos \theta$ in Gl. (5.7) eingesetzt, wobei θ den Neigungswinkel des Kanals bezeichnet und $\tan \theta = Nl_y/Ml_x$ ist. Entlang der Linie $x = l_x$ muss innerhalb des Kanals die Neumann-Randbedingung (gestrichelte Linie) erfüllt sein. Dementsprechend muss aus Gl. (5.17) eine bezüglich $x = l_x$ symmetrische

$$\Psi_{m,n}^{(1)}(x, y) = \Psi_{m,n}^{(0)}(x, y) + \Psi_{m,n}^{(0)}(-(x - 2l_x), y) \quad (5.18)$$

Linearkombination gebildet werden. Entlang den Linien $y = l_y$, $x = 0$, $x = 2l_x$ muss die Dirichlet-Randbedingung erfüllt sein. Dementsprechend bildet man aus Gl. (5.18) sukzessive antisymmetrische Linearkombinationen bezüglich der entsprechenden Linien

$$\begin{aligned} \Psi_{m,n}^{(2)}(x, y) &= \Psi_{m,n}^{(1)}(x, y) - \Psi_{m,n}^{(1)}(x, -(y - 2l_y)) \\ \Psi_{m,n}^{(3)}(x, y) &= \Psi_{m,n}^{(2)}(x, y) - \Psi_{m,n}^{(2)}(-x, y) \\ \Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x, y) &= \Psi_{m,n}^{(3)}(x, y) - \Psi_{m,n}^{(3)}(-(x - 4l_x), y). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Diese Prozedur ist unabhängig von der Reihenfolge der Rückfaltung. Die ursprünglich komplexe Eigenfunktion des Kanals ist nach der Rückfaltung rein reell oder rein imaginär. Die zurückgefalteten Superscar-Zustände in einem Teilbillard mit gemischten Randbedingungen (s. Abb. 4.2c) werden symmetrisch vervollständigt, bis sie das komplette Barrierenbillard ausfüllen. Die langen Ausdrücke wie Gl. (5.19) für $\Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x, y)$ wurden mit Hilfe des Programms für sym-

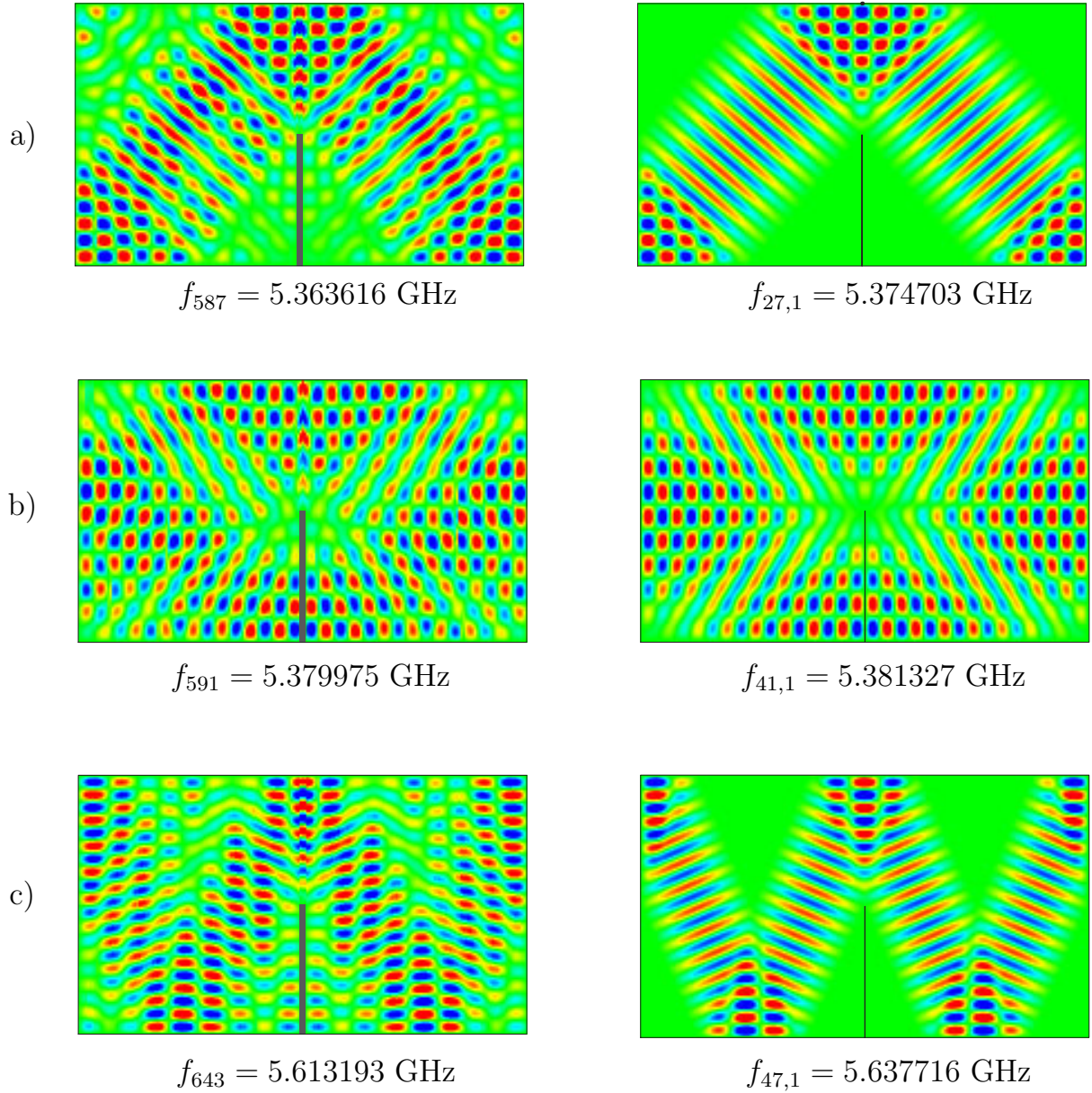


Abb. 5.8: Die gemessenen Wellenfunktionen (links) und die entsprechenden zurück-gefalteten Superscar-Zustände (rechts). Die tatsächlichen und theoretischen Frequenzen sind jeweils angegeben. a) Superscar der (1,1)-Familie. b) Superscar der (2,1)-Familie. c) Superscar der (1,2)-Familie.

bolische Mathematik “Mathematica“, berechnet und auf einem Gitter in kartesischen Koordinaten evaluiert. Der zurückgefaltete Superscar-Zustand erfüllt die Schrödinger-Gleichung (2.1) überall bis auf an den singulären Diagonalen. Dort sind auf Grund der Stufenfunktion $\chi(\eta)$ in Gl. (5.7) die erste und die zweite Ableitung der Funktion $\Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x, y)$ unstetig. Abbildung 5.8 zeigt gemessene Superscar-Wellenfunktionen und die entsprechenden zurückgefalteten Superscar-

Zustände. Die gemessenen Wellenfunktionen sind visuell in guter Übereinstimmung mit den konstruierten Superscar-Zuständen. Die mittlere Abweichung zwischen den berechneten und tatsächlichen Frequenzen beträgt 0.2 % für die (1,1)-Familie, 0.4 % für die (1,2)-Familie und 0.02 % für (2,1)-Familie. Die Abweichungen zwischen berechneten und tatsächlichen Resonanzfrequenzen für die (1,1)- und (1,2)-Familien sind deutlich größer als für die (2,1)-Familie, weil die Kanäle der ersten beiden Familien nach der Rückfaltung nur einen Teil der Billardfläche abdecken, und das Wellenfeld durch die Kanalgrenze ins restliche Billard tunneln kann. Im Gegensatz dazu deckt der Kanal der (2,1)-Familie nach der Rückfaltung die ganze Billardfläche ab, dementsprechend sind die mittleren Abweichungen wesentlich kleiner.

5.4 Lokale Zustandsdichte

Eine typische Wellenfunktion des Barrierenbillards (siehe z. B. Abb. 3.4a und Abb. 4.1b) kann durch mehrere Familien von Superscar-Zuständen beeinflusst werden. Ein quantitatives Maß für dieses Phänomen ist das Überlappintegral

$$C_{m,n}(\varepsilon_i) = \int \Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x, y) \psi_{\varepsilon_i}(x, y) dx dy. \quad (5.20)$$

Hierbei ist $\Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x, y)$ der zurückgefaltete Superscar-Zustand, $\psi_{\varepsilon_i}(x, y)$ die gemessene Wellenfunktion und ε_i die nach Gl. (4.5) reskalierte Frequenz. Um alle in experimentellen Wellenfunktionen $\{\psi_{\varepsilon_i}(x, y)\}$ enthaltenen Superscars mit einer bestimmten Anregung in Querrichtung des Kanals identifizieren zu können, wurde in der Berechnung des Überlappintegrals $n = 1$ gesetzt. Für m wird der Wert gewählt, für den die Differenz zwischen der nach Gl. (4.5) entfalteten Frequenz $\varepsilon_{m,n}$ des Superscar-Zustands $\Psi_{m,n}^{\text{scar}}(x, y)$ und ε_i minimal ist. Abbildung 5.9 zeigt das Betragsquadrat der Überlappkoeffizienten $C_{m,n}(\varepsilon_i)$ für zwei verschiedene Superscar-Familien. In der Nähe von fast allen theoretisch vorhergesagten Frequenzen gemäß Gl. (5.8), die mit Punkten markiert sind, ist eine Wellenfunktion mit einem starkem Beitrag des entsprechenden Superscar-Zustands zu finden. Die Größe des Beitrags ist proportional zur Höhe des Peaks.

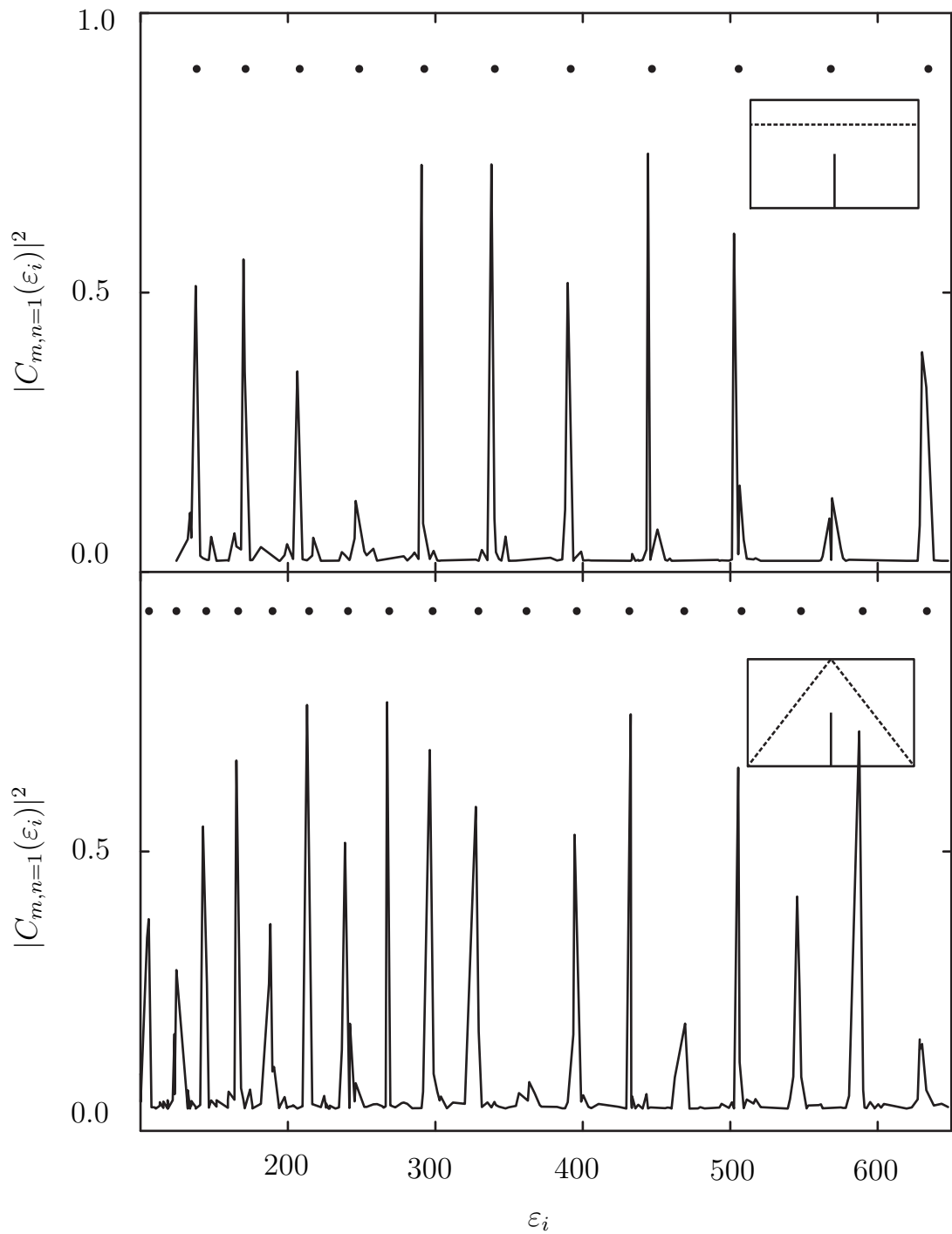


Abb. 5.9: Das Betragsquadrat der Überlappkoeffizienten in Abhängigkeit von der entfalteten Frequenz der gemessenen Wellenfunktionen für die Superscars der (0,1)-Familie (oben) und (1,1)-Familie (unten). Die Punkte zeigen die theoretisch vorhergesagten Frequenzen der Superscar-Zustände an.

Für die genaue Analyse dieses Einflusses ist für gegebenes n eine Mittelung

$$\rho_n(\varepsilon) = \left\langle \sum_i |C_{m,n}(\varepsilon_i)|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_i + \varepsilon_{m,n}) \right\rangle_m \quad (5.21)$$

über alle Überlappintegrale $C_{m,n}(\varepsilon_i)$ durchgeführt worden, wobei $\delta(x)$ die Dirac-Deltafunktion ist und $\langle \rangle_m$ eine Mittelung über m bedeutet.

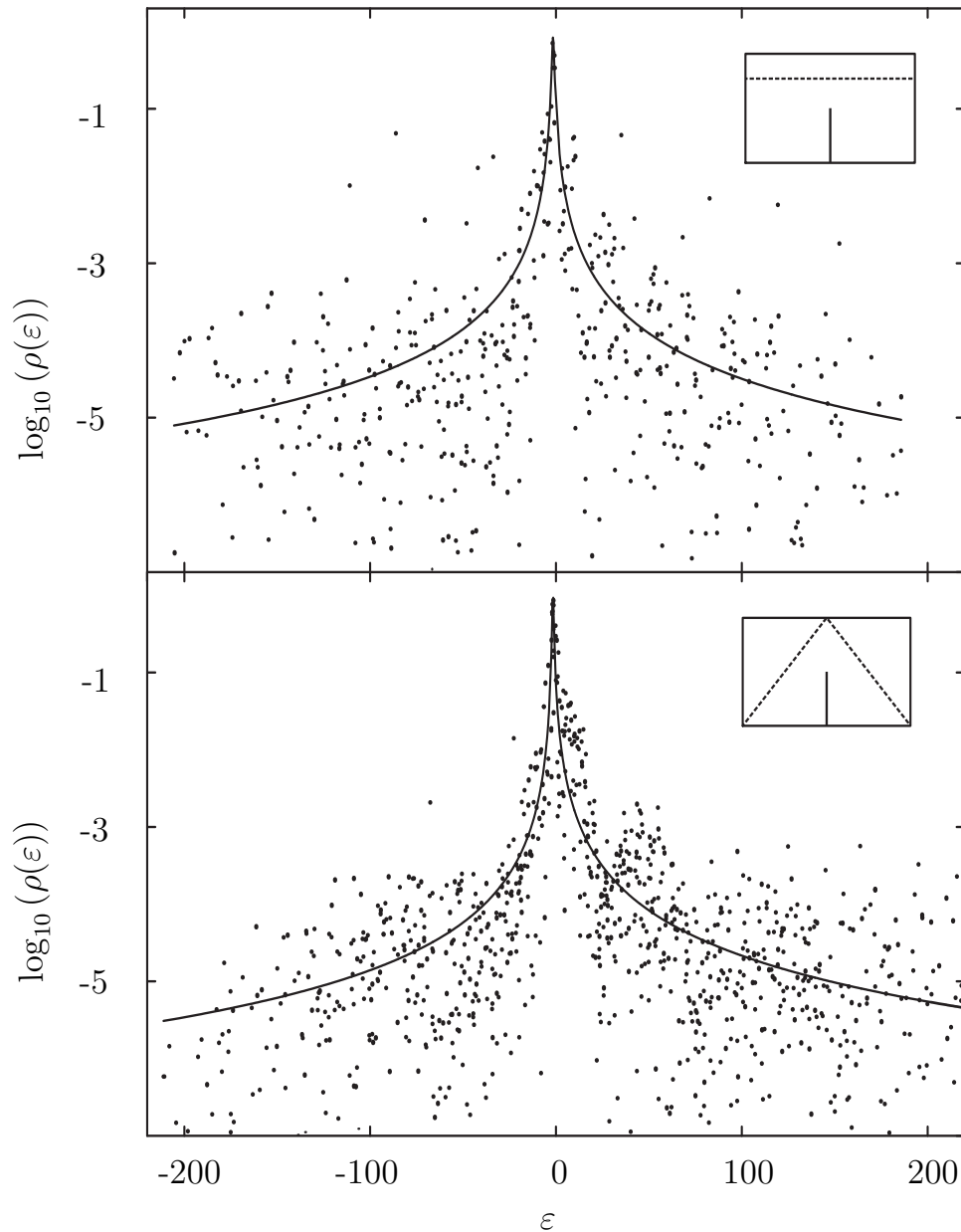


Abb. 5.10: Der obere Teil der Abbildung zeigt die lokale Zustandsdichte als Funktion der entfalteten Frequenz für die Superscar-Familie (0,1), der untere für die Superscar-Familie (1,1).

Die über Gleichung (5.21) definierte Größe $\rho_n(\varepsilon)$ wird als lokale Zustandsdichte (Local Density of States) bezeichnet [26, 74]. Hier wurde, im Gegensatz zu den in Abb. 5.9 dargestellten Rechnungen, m festgehalten und ε_i variiert. Die Deltafunktion in Gl. (5.21) bewirkt eine Verschiebung des Peaks um $\varepsilon = \varepsilon_i$ nach $\varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon_{m,n}$, so dass alle Peaks aus Abb. 5.9 um $\varepsilon = 0$ liegen. In Abb. 5.10 ist die lokale Zustandsdichte für zwei Superscar-Familien dargestellt. Die lokale Zustandsdichte in den Graphen der Abb. 5.10 zeigt ein resonanzartiges Verhalten. Die endliche Breite der Resonanzen bedeutet, dass die Dirichlet-Randbedingung entlang der singulären Diagonalen nur näherungsweise erfüllt ist, so dass das Wellenfeld aus dem Kanal „herausfließen“ kann. Ähnliche Verlustmechanismen sind für endliche Resonanzbreiten in Mikrowellenresonatoren, Atomen und Atomkernen verantwortlich, deren Beschreibung durch eine Breit-Wigner Kurve sinnvoll ist. Die Anpassung einer Breit-Wigner Kurve an die Datenpunkte ist als durchgezogene Linie dargestellt.

5.5 Ausblick für Superscars

Die Struktur der Familien periodischer Bahnen ist für das in dieser Arbeit diskutierte symmetrische Barrierenbillard einfach. Für die Untersuchung des Superscar-Phänomens stellt aber nur die Hälfte seiner Wellenfunktionen zur Verfügung. Für zukünftige Untersuchungen des Superscar-Phänomens wird deshalb ein Barrierenbillard mit einer asymmetrischen Anordnung der Barriere benutzt. Die Analyse der Struktur der zugehörigen Familien periodischer Bahnen ist wesentlich komplizierter als im symmetrischen Barrierenbillard und alle Wellenfunktionen werden in nichttrivialer Weise von der Barriere beeinflusst.

Ein weiteres Forschungsvorhaben zu Barrierenbillards ist die Untersuchung der Autokorrelationsfunktion von Wellenfunktionen. Für diese erwartet man für chaotische Systeme gemäß dem RPWS-Model eine Besselfunktion nullter Ordnung $J_0(kr)$. Voruntersuchungen an Wellenfunktionen des symmetrischen Barrierenbillards haben gezeigt, dass die Autokorrelationfunktion von Wellenfunktionen, die nicht von einem Superscar-Zustand beeinflusst werden, ein ähnliches Verhalten wie $J_0(kr)$ zeigen und immer stärker von $J_0(kr)$ abweichen, je näher die Frequenz

der Wellenfunktion bei der Frequenz eines Superscar-Zustands liegt [75].

Die Beschreibung von Superscar-Wellenfunktionen durch einen semiklassisch konstruierten Superscar-Zustand ist mit der Beschreibung von Riesenresonanzen in den Atomkernen durch „Doorway“-Zustände vergleichbar [76, 77]. In einem einfachen Bild (phänomenologisch) wird eine Riesenresonanz als kollektive Anregung, z. B. als Schwingung von Protonen gegen Neutronen, beschrieben. Solche Schwingungsmoden geben nur die Energielage der Riesenresonanz in einem bestimmten Atomkern an, machen aber keine Aussage über die Breite der Resonanz. Die Breite der Riesenresonanz wird durch die Summe zweier Beiträge erklärt. Zum einen zerfällt der Kern über den „Doorway“-Zustand. Zum anderen hat der „Doorway“ Zustand einen endlichen Überlapp mit vielen Zuständen, welche komplexen Bewegungen der Nukleonen im Kern entsprechen. Statistische Aussagen über den letzteren Beitrag zur Breite kann man machen, indem man den Überlapp zwischen dem „Doorway“ Zustand und den Eigenvektoren von GOE-Zufallsmatrizen berechnet. So wie ein zurückgefalteter Superscar-Zustand keine Eigenfunktion der Schrödinger-Gleichung ist, ist der „Doorway“-Zustand keine Eigenfunktion des tatsächlichen Hamiltonoperator des Atomkernes. Die Ähnlichkeiten zwischen Superscar-Zuständen und „Doorway“-Zuständen zeigen, dass die lokale Zustandsdichte von Superscar-Zuständen im Barrierenbillard als Analogon zu den Riesenresonanzen in Atomkernen gesehen werden kann. Diese Analogie bietet die Möglichkeit zur Simulation gewisser Eigenschaften von Riesenresonanzen in Atomkernen durch Quantenbillards der hier verwendeten Form. Entsprechende Überlegungen dazu sind – analog zu einer Arbeit zur Kopplung von sog. Isospinanalogsresonanzen an darunter liegende Zustände [78] – in Vorbereitung [79].

6 Knotengebiete im Barrierenbillard

6.1 Vorbemerkung

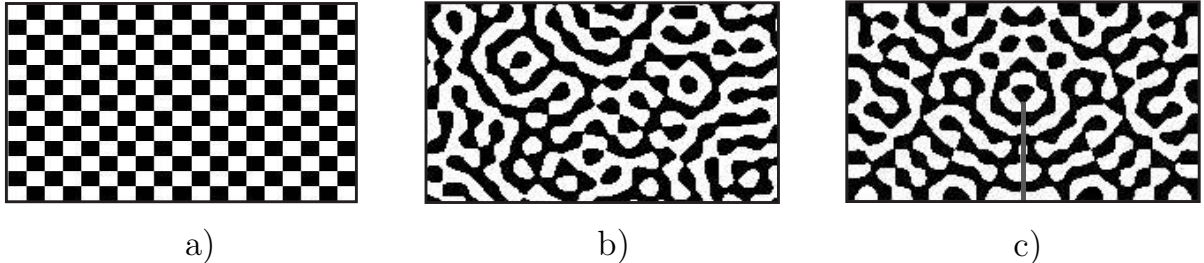


Abb. 6.1: Knotengebiete verschiedener Wellenfunktionen. a) Wellenfunktion des Rechteckbillards mit der Zustandsnummer $N = 394$. b) zufällige Überlagerung ebener Wellen, welche der Wellenfunktion mit Zustandsnummer $N = 398$ entsprechen. c) Wellenfunktion des Barrierenbillards, mit der Zustandsnummer $N = 398$. Knotengebiete mit positivem Vorzeichen der Wellenfunktion sind in Schwarz, die mit positiven Vorzeichen in Weiß dargestellt.

Trägt man eine Wellenfunktion $\Psi_N(x, y)$, welche eine Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.1) ist, als Funktion von x und y auf, dann findet man Bereiche, in denen die Wellenfunktion ein bestimmtes Vorzeichen hat, so genannte Knotengebiete. Knotengebiete mit unterschiedlichen Vorzeichen sind durch eine Knotenlinie von einander getrennt, wo $\Psi_N(x, y) = 0$ gilt. Beispiele von Knotengebieten verschiedener Wellenfunktionen sind in Abb. 6.1 dargestellt. In Abb. 6.1a ist ein Beispiel für die Wellenfunktion eines regulären, in Abb. 6.1b für die eines chaotischen und in Abb. 6.1c für die eines pseudointegrablen Systems gezeigt. In den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts fragte der Mathematiker Courant als Erster, wie viele Knotengebiete die N -te Eigenfunktion einer selbstadjungierten Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen hat. Courant bewies folgendes Theorem [80]: Die N -te Eigenfunktion einer selbstadjungierten Differentialgleichung (z. B. skalaren Helmholtz-Gleichung) mit homogenen Randbedingungen an den Grenzen des Gebiets G hat weniger als N Knotengebiete

$$n(N) \leq N, \tag{6.1}$$

wobei $n(N)$ die Anzahl der Knotengebiete ist. Erst dreißig Jahren später verstärkte Pleijel [81] das Courantsche Theorem durch eine asymptotische Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(N)}{N} \leq \left(\frac{2}{j_1}\right)^2 \approx 0.629, \quad (6.2)$$

wobei j_1 die erste Nullstelle der Besselfunktion $J_0(x)$ ist. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Knotengebiete einer Wellenfunktion mit der Zustandsnummer N wie

$$n(N) = aN + O(N), \quad a \leq \left(\frac{2}{j_1}\right)^2 \quad (6.3)$$

skaliert.

6.2 Knotengebiete von Wellenfunktionen quantenchaotischer und regulärer Systeme

In letzter Zeit wurden wichtige Ergebnisse für die Eigenschaften der Knotengebiete von Wellenfunktionen quantenchaotischer [29] und regulärer [28] Systeme erzielt. Das erste Ergebnis basiert auf einem statistischen Modell für die Wellenfunktionen chaotischer Systeme. Diese können im semiklassischen Limes durch ein Modell von zufälligen Überlagerungen ebener Wellen (Random Plane Wave Superposition, RPWS) beschrieben werden

$$\Psi_k(x, y) = \sum_i \cos(kx \cos \theta_i + ky \sin \theta_i + \phi_i). \quad (6.4)$$

Hier ist k die Wellenzahl, θ_i und ϕ_i sind zufällige, auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gleichmäßig verteilte Zahlen [82]. Dieses Modell impliziert, dass die Wahrscheinlichkeit $P(\Psi) d\Psi$, dass die Amplitude der Wellenfunktion einen Wert Ψ annimmt, einer Gaußverteilung

$$P(\Psi) d\Psi = \frac{A}{2\pi} \exp\left(-\frac{A\Psi^2}{2}\right) d\Psi \quad (6.5)$$

folgt, wobei A die Billardfläche ist. Nach der Transformation von Gl. (6.5) auf die Variable $y \equiv A\Psi^2$ für das Quadrat der Wellenfunktionsamplituden ergibt sich

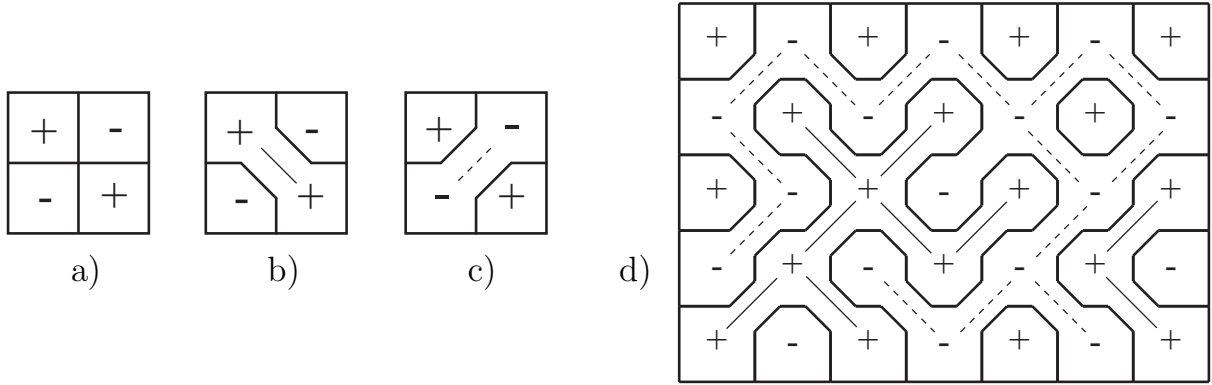


Abb. 6.2: a) Kreuzung der Knotenlinien. b) und c) Mögliche vermiedene Kreuzungen. d) Eine Realisierung der zufällige Umwandlung der Kreuzungen in die vermiedene Kreuzungen der Knotenlinien. Die „+“ und „-“ Zeichen bilden zwei duale Untergitter. Die durchgezogenen und gestrichelten geraden Strecken deuten die Verbindungen in entsprechenden Untergittern an.

die Verteilung

$$P(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-y/2)}{\sqrt{y}} dy. \quad (6.6)$$

Diese sog. Porter-Thomas Verteilung [65] divergiert für $y \rightarrow 0$, weshalb $P(y) dy$ auf die logarithmische Variable $x \equiv \log_{10} y$ zu

$$P(x) dx = \frac{\ln(10)}{\sqrt{2\pi}} 10^{x/2} \exp(-10^{x/2}) dx \quad (6.7)$$

transformiert wird. Zahlreiche numerische [45, 83, 84] und experimentelle [15, 16, 85] Untersuchungen bestätigten die Gültigkeit des RPWS-Modells nach Gl. (6.4) für die Wellenfunktionen chaotischer Systeme.

Bogomolny und Schmit vermuteten, dass das Muster von Knotengebieten einer RPWS-Wellenfunktion als eine Realisierung eines Zufallsprozesses betrachtet werden kann. Die mittlere Anzahl m der Nullstellen der RPWS-Wellenfunktion entlang einer Geraden der Länge L_x ist näherungsweise durch die Quantisierungsbedingung $\bar{k}_x L_x = \pi m_x$ gegeben, wobei $\bar{k}_x = \sqrt{k^2/2}$ die mittlere Wellenzahl entlang der x -Richtung ist. Da RPWS-Wellenfunktionen keine ausgewählte Richtung besitzen, gilt das auch entsprechend für die y -Richtung, $\bar{k}_y L_y = \pi m_y$. Die Knotenlinien einer chaotischen Wellenfunktion können also grob als ein effektives

rechteckiges Gitter mit der Anzahl

$$N_{\text{Seiten}} = m_x \cdot m_y = \frac{k^2 A}{2\pi^2} = \frac{2}{\pi} N_{\text{Weyl}}(k) \quad (6.8)$$

an den Seiten betrachtet werden, und in jeder Zelle dieses Gitter hat die Wellenfunktion ein Vorzeichen „+“ oder „-“ wie für die in Fig. 6.2 gezeigte Wellenfunktion des Rechteckbillards. Diese Abschätzung gilt jedoch nur im Mittel. Tatsächlich kreuzen sich die Knotenlinien von chaotischen Wellenfunktionen nicht, wie man klar in Abb. 6.2b und 6.2c erkennt. Deshalb wird die tatsächliche Wellenfunktion für die statistische Beschreibung der Knotengebiete geschrieben als

$$\Psi(x, y) = \bar{\Psi}(x, y) + \delta\Psi(x, y), \quad (6.9)$$

wobei sich die Knotenlinien der Funktion $\bar{\Psi}(x, y)$ kreuzen (s. Abb. 6.2a). Die Funktion $\delta\Psi(x, y)$ beschreibt einen zusätzlichen Beitrag, der eine Kreuzung in eine von zwei möglichen vermiedenen Kreuzungen umwandelt, wie in Abb. 6.2b und Abb. 6.2c gezeigt. Im Rahmen einer statistischen Beschreibung der Eigenschaften der Knotengebiete chaotischer Wellenfunktionen wird angenommen, dass in einem rechteckigen Gitter mit der Seitenzahl gemäß Gl. (6.8) jede Kreuzung mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ in eine der beiden möglichen vermiedenen Kreuzungen umgewandelt wird. Eine Realisierung dieses Zufallsprozesses ist in Abb. 6.2d dargestellt. Das ursprüngliche Gitter besteht aus zwei dualen Untergittern, einem „positiven“ und einem „negativen“, die zugehörigen Gitterpunkte liegen in der Mitte der Zellen, die jeweils mit „+“ und „-“ gekennzeichnet sind. Wenn eine Kreuzung in eine vermiedene Kreuzung der Art Abb. 6.2b übergeht, entspricht dies der Verbindung zweier nächster Gitterpunkte im „positiven“ Untergitter und entsprechend keiner Verbindung im „negativen“ Untergitter (und umgekehrt). Der Zufallsprozess der Umwandlung einer Kreuzung in eine vermiedene Kreuzung entspricht also der zufälligen Entstehung einer Verbindungen in einem der beiden Untergitter. Diese Verbindungen sind in Abb. 6.2d als durchgezogene und gestrichelte gerade Strecken für „positive“ und „negative“ Untergitter dargestellt. Der Zufallsprozess wird als *Kantenperkolation* (bond percolation) bezeichnet [86]. Jedes Gebiet von miteinander verbundenen Gitterpunkten entspricht einem Knotengebiet.

Die Besonderheit dieses Zugangs ist, dass alle interessanten Größen wie die Anzahl der Knotengebiete oder die Häufigkeitsverteilung $P(\xi)$ der reskalierten An-

zahl der Knotengebiete $\xi_N = n(N)/N$ analytisch berechnet werden können. Die Häufigkeitsverteilung $P(\xi)$ weist laut Perkolationsmodell die Dirac-Deltafunktion

$$P(\xi) = \delta(\xi - a), \quad a = \frac{3\sqrt{3} - 5}{\pi} \approx 0.0624 \quad (6.10)$$

als Grenzverteilung auf [29], wobei a genau der Skalierungsfaktor aus Gl. (6.3) ist. Da das RPWS-Modell universell für alle chaotischen Systeme gilt, vermuteten Bogomolny und Schmit, dass auch das Ergebnis in Gl. (6.10) universell auf chaotische Systeme anwendbar ist. Allgemein gelten die analytischen Ergebnisse des Perkolationsmodells aber nur, wenn die Anzahl der Gitterpunkte, die am Rand des Gitters liegen, klein gegen die gesamte Anzahl an Gitterpunkten ist. Für die statistischen Eigenschaften der Knotengebiete einer Wellenfunktion bedeutet dies, dass die Vorhersagen erst im semiklassischen Limes der Quantenmechanik gelten. Um den Einfluss des Billardrandes auf die Anzahl der Knotengebiete im Perkolationsmodell zu berücksichtigen, wurde in [28] eine Korrektur zu Gl. (6.3) eingeführt

$$n(N) = aN + b\sqrt{N}, \quad (6.11)$$

wobei b eine positive Konstante ist. Das Wurzelglied in Gl. (6.11) beschreibt die Anzahl $\nu = k \cdot U$ der Knotengebiete entlang des Billardumfangs U , denn aus dem ersten Glied der Weyl-Formel Gl. (3.1) folgt $k \sim \sqrt{N}$. Die Vorhersagen für den Skalierungsfaktor a aus Gl. (6.10) und das Skalierungsgesetz in Gl. (6.11) wurden in numerischen [28, 29, 42] und experimentellen [87, 88] Untersuchungen von chaotischen Systemen bestätigt.

Die Wellenfunktionen integrierbarer Systeme können im semiklassischen Limes mit dem Einstein Brillouin Keller (EBK) Quantisierungsverfahren beschrieben werden. Für eine Unterklasse integrierbarer Systeme, nämlich separable Systeme, haben Blum, Gnutzmann und Smilansky in [28] gefunden, dass die Häufigkeitsverteilung $P(\xi)$ ein generisches Verhalten zeigt. Im Limes $N \rightarrow \infty$ ist für solche Systeme $P(\xi)$ gegeben durch

$$P(\xi) = \begin{cases} 0 & : \quad \xi > \xi_{\max} \\ \frac{K}{\sqrt{\xi_{\max} - \xi}} & : \quad \xi < \xi_{\max} \end{cases}, \quad (6.12)$$

d.h. hier hat $P(\xi)$ eine Quadratwurzel-Singularität. Dabei sind K und $0 < \xi_{\max} < (2/j_1)^2$ systemspezifische Konstanten [28]. Für das Rechteckbillard ist $\xi_{\max} \approx 0.641$ und der Skalierungsfaktor $a \approx 0.41$.

6.3 Knotengebiete der Wellenfunktionen im Barrierenbillard

Die klassischen Eigenschaften und die Eigenschaften der Quantenenergiespektren des Barrierenbillards liegen zwischen den Grenzfällen für chaotische und reguläre Systeme. Ähnliches ist für die Eigenschaften der Wellenfunktionen zu erwarten. Entgegen den Erwartungen folgt die Häufigkeitsverteilung der Quadrate der Wellenfunktionen sehr gut der Vorhersage des RPWS-Modells. Abbildung 6.3a zeigt als Histogramm ein Beispiel der Häufigkeitsverteilung einer Wellenfunktion, die keine Lokalisierung zeigt. Die Verteilung folgt der Porter-Thomas-Verteilung (Gl. (6.7)). Erstaunlicherweise weichen auch die Häufigkeitsverteilungen von Superscar Wellenfunktionen nicht sehr stark von der Porter-Thomas-Verteilung ab, aber die Abweichungen sind statistisch signifikant, siehe das in Abb. 6.3b dargestellte Beispiel.

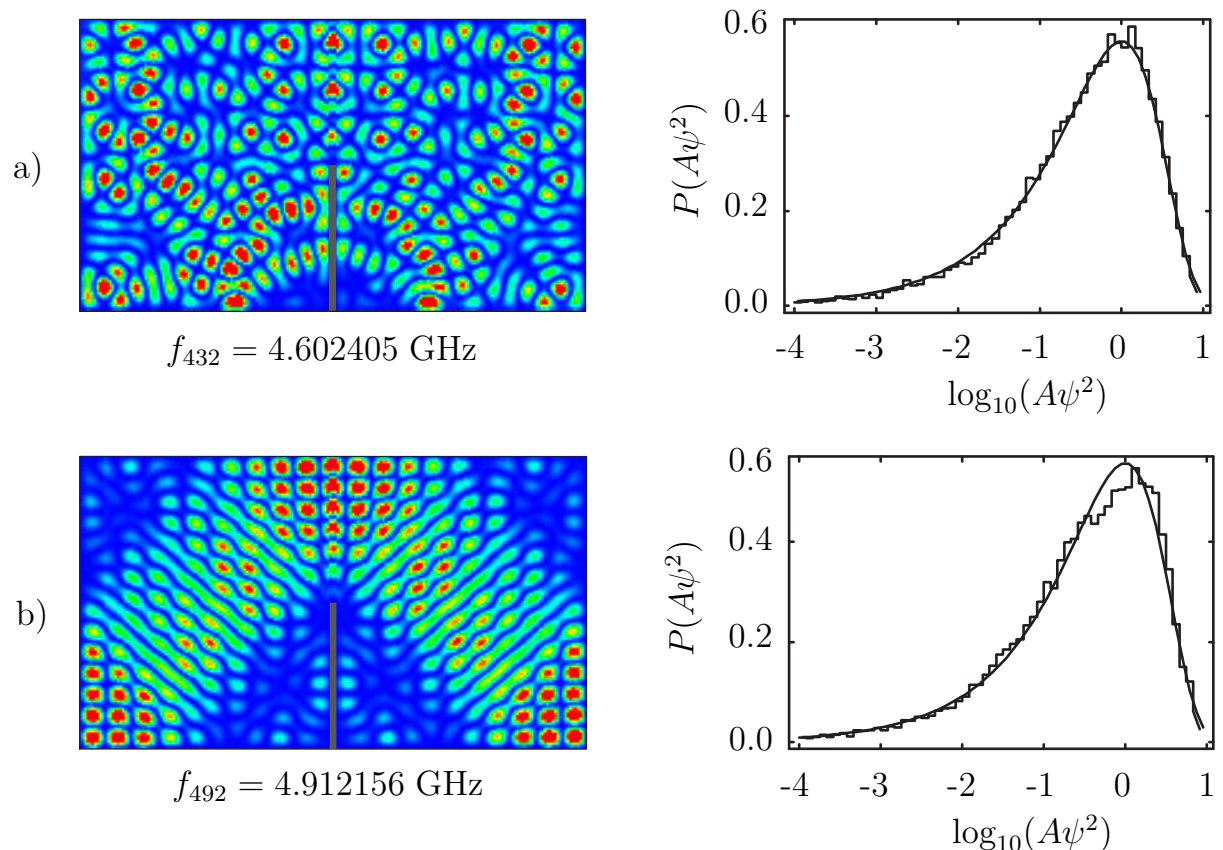


Abb. 6.3: Gemessene Intensitätsverteilungen (links) im Barrierenbillard und entsprechende Häufigkeitsverteilungen der Intensitäten als Histogramm (rechts). Die durchgezogene Kurve ist die Porter-Thomas-Verteilung.

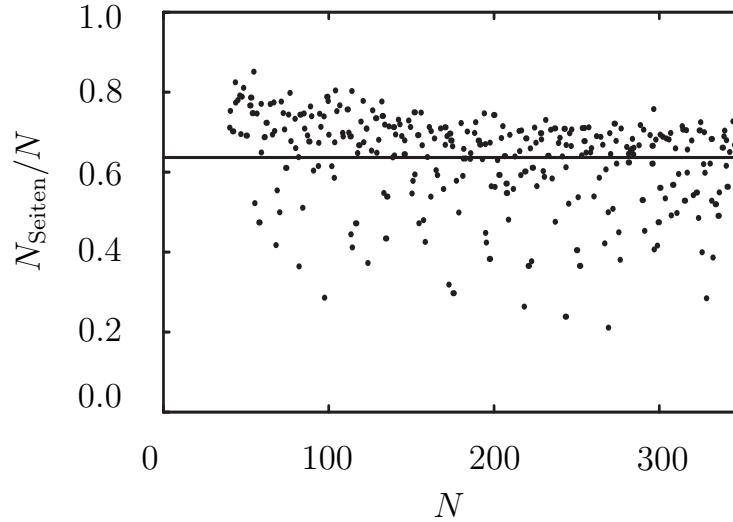


Abb. 6.4: Die reskalierte Anzahl der Gitterpunkte in einem effektiven rechteckigen Gitter für die Wellenfunktionen des Barrierenbillards. Die durchgezogene Linie zeigt den Mittelwert der Punktwolke $\langle N_{\text{Seiten}}/N \rangle = 0.636$. Die Vorhersage für das RPWS-Modell ist $\langle N_{\text{Seiten}}/N \rangle = 2/\pi \approx 0.637$.

Um die Anwendbarkeit des Perkulationsmodells auf statistische Eigenschaften der Knotengebiete der Wellenfunktionen des Barrierenbillards zu überprüfen, wurde für diese die reskalierte Anzahl der Gitterpunkte im effektiven rechteckigen Gitter berechnet. Hierzu wurde die mittlere Anzahl der Nullstellen der Wellenfunktion über hundert Linien in x -Richtung und die über hundert Linien in y -Richtung für jede Wellenfunktion berechnet und diese wurden miteinander multipliziert. Die resultierende Anzahl der Gitterpunkte ist in in Abb. 6.4 als Funktion der Zustandsnummer gezeigt. Die durchgezogene Linie in Abb. 6.4 zeigt die Mittelung über alle Wellenfunktionen $\langle N_{\text{Seiten}}/N \rangle = 0.637$. Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem Wert $2/\pi \approx 0.636$ aus Gl. (6.8) für die RPWS-Wellenfunktionen überein.

Aufgrund der beiden oben beschriebenen Ergebnisse ist es sinnvoll, die Eigenschaften der Knotengebiete der Wellenfunktionen des Barrierenbillards mit den Vorhersagen des Perkulationsmodells zu vergleichen. Weil die Vorhersagen dieses Modells erst im semiklassischen Limes gelten, wurden die Eigenschaften der Knotengebiete im Barrierenbillard mit den Eigenschaften der Knotengebiete von RPWS-Wellenfunktionen verglichen. Die Wellenfunktionen des RPWS-Modells (s. Gl. (6.4)) wurden in einem Rechteck gleicher Größe wie das Barrierenbillard für jedes k wie die gemessenen Wellenfunktionen evaluiert. Jede RPWS-Wellenfunktion entspricht einer Summe über 500 Kosinuswellen mit zufälligen

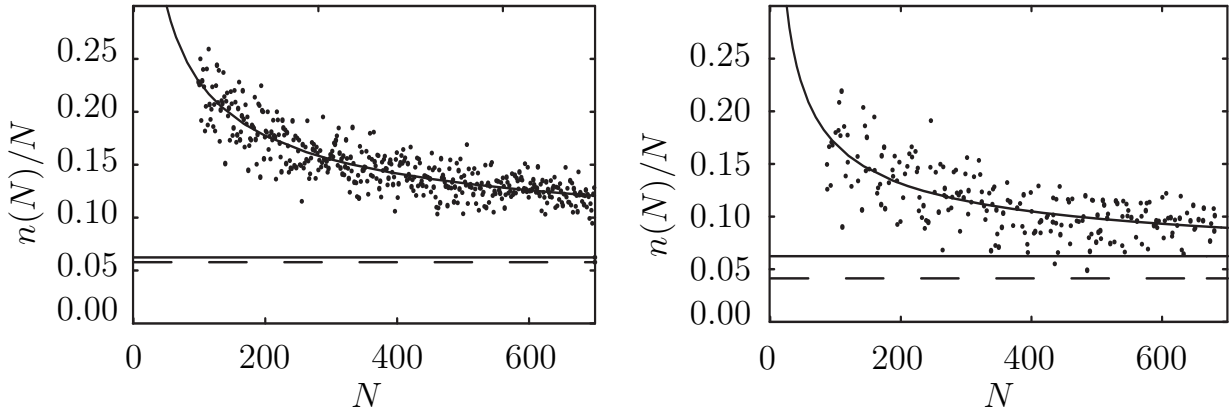


Abb. 6.5: Die reskalierte Anzahl der Knotengebiete $n(N)/N$ als Funktion der Zustandsnummer N für das RPWS-Modell (links) und für die Wellenfunktionen des Barrierenbillards (rechts). Die durchgezogene Kurve zeigt die Anpassung der Funktion Gl. (6.13) an die Daten. Die durchgezogene Gerade entspricht der Vorhersage des Perkolationsmodells $a = 0.0624$, die gestrichelte Gerade den Wert aus der Anpassung, $a = 0.058 \pm 0.003$ für das RPWS-Modell und $a = 0.041 \pm 0.005$ für das Barrierenbillard.

Richtungen. Die Anzahl der Knotengebiete ist mit einem Programm, in welchem der Hoshen-Koppelman-Algorithmus [89] implementiert ist, gezählt worden.

Die reskalierte Anzahl der Knotengebiete für RPWS-Wellenfunktionen und Wellenfunktionen des Barrierenbillards sind in Abb. 6.5 dargestellt. Die durchgezogene Kurve entspricht der Anpassung der Funktion

$$\frac{n(N)}{N} = a + \frac{b}{\sqrt{N}} \quad (6.13)$$

an die Datenpunkte. Der aus der Anpassung gewonnene Wert $a = 0.058 \pm 0.003$ für RPWS-Wellenfunktionen stimmt gut mit der Vorhersage des Perkolationsmodells überein, während der Wert $a = 0.041 \pm 0.005$ für das Barrierenbillards signifikant kleiner ist. In [28] wurde für das Stadion- und das Sinai-Billard gezeigt, dass die Anzahl der inneren Knotengebiete, welche den Billardrand nicht berühren, mit wachsender Zustandsnummer schneller zum asymptotischen Wert $a = 0.624$ konvergieren als die Anzahl aller Knotengebiete. Dies wurde auch für das Barrierenbillard überprüft. In Abb. 6.5 ist die reskalierte Anzahl der Knotengebiete für RPWS und Barrierenbillard Wellenfunktionen gezeigt. In der linken Figur der Abb. 6.6 kann man die Konvergenz der Anzahl der inneren Knotengebiete der RPWS-Wellenfunktionen mit steigender Zustandsnummer gegen die

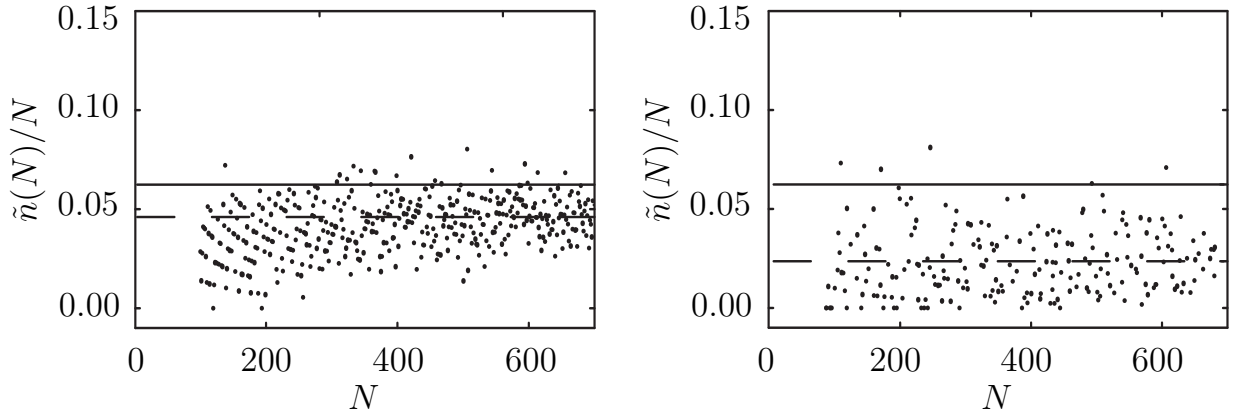


Abb. 6.6: Die reskalierte Anzahl der inneren Knotengebiete \tilde{n}/N als Funktion der Zustandsnummer N jeweils für das RPWS-Modell (links) und für die Wellenfunktionen des Barrierenbillards. Die durchgezogene Gerade ist die Vorhersage des Perkolationsmodells für die Konstante a , die gestrichelte Gerade ist an die Datenpunkte angepasst.

Vorhersage des Perkolationsmodells, die durch eine durchgezogene Gerade angedeutet ist, erkennen. Die gestrichelte Gerade zeigt den Mittelwert 0.048 an. Im Gegensatz dazu fluktuiert die Anzahl der Knotengebiete für das Barrierenbillard um den Mittelwert 0.026 und weist für die im Experiment zugänglichen Zustandsnummern (bis 700) kein Konvergenzverhalten auf. Es lässt sich daraus schließen, dass der Wert der Konstante a zwischen dem Wert aus der Anpassung (6.13) an die reskalierte Anzahl aller Knotengebiete und dem Mittelwert der reskalierten Anzahl der inneren Knotengebiete liegt, also $0.026 < a < 0.041$.

Das Perkolationsmodell liefert für chaotische Wellenfunktionen auch eine Vorhersage für die Häufigkeitsverteilung der Flächen der Knotengebiete

$$P(s/s_{\min}) \propto \left(\frac{s}{s_{\min}} \right)^{\tau}, \quad (6.14)$$

wobei $\tau = 187/91$ ist und $s_{\min} = \pi (j_1/k)^2$ die kleinstmögliche Fläche eines Knotengebiete für ein gegebenes k . In doppellogarithmischer Auftragung ist dies eine Gerade mit der Steigung τ . Der linke Teil von Abb. 6.7 zeigt die über sämtliche Wellenfunktionen gemittelte Häufigkeitsverteilung der Flächen der Knotengebiete für RPWS-Wellenfunktionen und rechts dasselbe für das Barrierenbillard. Die Mittelung wurde durchgeführt, indem für jede Wellenfunktion eine auf eins normierte Flächenverteilung ausgerechnet und dann eine Mittelung über alle Verteilungen durchgeführt wurde. Erstaunlicherweise liefern die beiden Verteilungen –

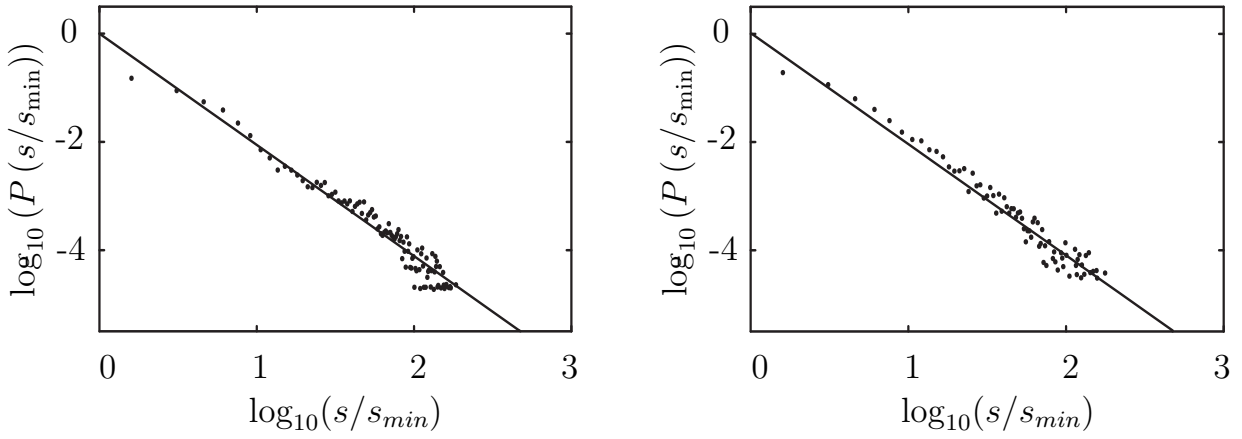


Abb. 6.7: Die über N gemittelte Häufigkeitsverteilung der normierten Flächen der Knotengebiete s/s_{\min} links für RPWS und rechts für Wellenfunktionen des Barrierenbillards. Die durchgezogene Gerade hat eine Steigung von $187/91$.

für RPWS und Barrierenbillard – denselben Wert für τ wie die Vorhersage des Perkolationsmodells (Gl. (6.14)). Interessant ist hierbei die folgende Feststellung: Während das Perkolationsmodell die Verteilung der Flächen der Knotengebiete richtig beschreibt, gibt es den Skalierungsfaktor a für die Anzahl der Knotengebiete nicht korrekt wieder.

6.4 Diskussion der Eigenschaften der Knotengebiete und Ausblick

Die Eigenschaften der klassischen Dynamik und die Fluktuationen der Energieeigenwerte des Barrierenbillards liegen zwischen denen für chaotische und reguläre Systeme. Im Gegensatz hierzu zeigen die statistischen Eigenschaften der Wellenfunktionen, wie z. B. die Häufigkeitsverteilungen der Amplituden oder der Flächen der Knotengebiete der Wellenfunktionen, nahezu ein ähnliches Verhalten wie die Wellenfunktionen chaotischer Systeme. Der Skalierungsfaktor a für die Anzahl der Knotengebiete zeigt ein Verhalten, das nicht zwischen dem von chaotischen Systemen ($a = 0.0624$) und dem des regulären Rechtecks ($a = 0.41$) liegt, sondern ergibt $0.026 < a < 0.041$. Um herauszufinden, ob diese Eingrenzung von a generisch für pseudointegrable Systeme ist, sind weitere experimentelle und numerische Untersuchungen an anderen pseudointegrablen Polygonbillards notwendig.

Die Anwesenheit der Superscars spiegelt sich in den Eigenschaften der Knotengebiete wider. Die Ausdehnung der Knotengebiete in der Querrichtung zum Kanal periodischer Bahnen ist deutlich größer als entlang des Kanals (s. z. B. Abb. 5.8a), dies führt zu den stark ausgeprägten langreichweitigen (über eine Wellenlänge) Korrelationen entlang einer Richtung, so dass das Perkolationsmodell in der in [29] gegebene Form vermutlich nicht mehr anwendbar ist, sondern im Modell diese Korrelationen berücksichtigt werden müssen.

Ein direkterer Zugang zu dem Problem der geringen Anzahl der Knotengebiete ist die Untersuchung der Anzahl der Knotengebiete direkt mit den konstruierten Superscar-Zuständen. Das Muster der Knotengebiete für die konstruierten Superscars, deren Kanäle die ganze Billardfläche abdecken, und der gemessenen Wellenfunktionen (s. Abb. 5.8.c) ist fast identisch. Es ist denkbar, dass man einen analytischen Ausdruck für die Anzahl der Knotengebiete herleiten oder numerisch einen Grenzwert bestimmen kann.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bezüglich der statistischen Eigenschaften der Wellenfunktionen des Barrierenbillards sind neu und noch nicht in Fachartikeln diskutiert. Es existiert kein in der Fachliteratur beschriebenes Modell für die Statistik von Knotengebieten der Wellenfunktionen pseudointegrabler Billards.

Somit steht in dieser Richtung der Erforschung wellenmechanischer Phänomene noch viel Arbeit bevor.

Literatur

- [1] H. Poincaré: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Gauthier-Villars, Paris, Paris, 1892,1893,1899), reprinted by Dover Publications, New York, 1957; Translated into English, edited, and introduced by D. L. Goroff: *New Methods of Celestial Mechanics* (AIP, New York, 1993).
- [2] A. J. Lichtenberg: *Phase-Space Dynamics of Particles* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969).
- [3] E. N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci **20**, 130 (1963).
- [4] D. Barton: *Lunar disturbing function*, Astron. J. **72**, 1281 (1966).
- [5] M. C. Gutzwiller: *Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem*, Rev. Mod. Phys. **70**, 589 (1998).
- [6] M. C. Gutzwiller: *Energy Spectrum According to Classical Mechanics*, J. Math. Phys. **11**, 1791 (1970).
- [7] M. C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [8] E. P. Wigner: *Statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47**, 790 (1951).
- [9] F. J. Dyson: *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I, II and III*, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).
- [10] Y. G. Sinai: *Dynamical systems with elastic reflections*, Russ. Math. Surv. **25**, 137 (1970).
- [11] L. A. Bunimovich: *On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards*, Comm. Math. Phys. **65**, 295 (1979).
- [12] A. Richter: *Playing Billiard with Microwaves - Quantum Manifestations of Classical Chaos*, in *Emerging Applications of Number Theory*, **109**, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Hrsg.: D. A. Hejhal, J. Friedmann, M. C. Gutzwiller and A. M. Odlyzko (Springer, New York, 1999), S. 479.

- [13] U. K. B. Eckhardt, U. Dörr and H.-J. Stöckmann: *Correlations of electromagnetic fields in chaotic cavities*, Europhys. Lett. **46**, 134 (1999).
- [14] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit: *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [15] H.-D. Gräf, H. L. Harney, H. Lengeler, C. H. Lewenkopf, C. Rangacharyulu, A. Richter, P. Schardt and H. A. Weidenmüller: *Distribution of Eigenmodes in a Superconducting Stadium Billiard with Chaotic Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1296 (1992).
- [16] H. Alt, H. D. Gräf, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, P. Schardt and H. A. Weidenmüller: *Gaussian Orthogonal Ensemble Statistics in a Microwave Stadium Billiard with Chaotic Dynamics: Porter-Thomas Distribution and Algebraic Decay of Time Correlations*, Phys. Rev. Lett. **74**, 62 (1995).
- [17] H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, R. Schuhmann and T. Weiland: *Wave Dynamical Chaos in a Superconducting Three-Dimensional Sinai Billiard*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1026 (1997).
- [18] C. Dembowski, B. Dietz, H.-D. Gräf, A. Heine, T. Papenbrock, A. Richter and C. Richter: *Experimental Test of a Trace Formula for a Chaotic Three-Dimensional Microwave Cavity*, Phys. Rev. Lett. **89**, 064101 (2002).
- [19] J. Stein and H.-J. Stöckmann: *Experimental Determination of Billiard Wave Functions*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2867 (1992).
- [20] C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, R. Hofferbert, H. Rehfeld and A. Richter: *First Experimental Evidence for Chaos-Assisted Tunneling in a Microwave Annular Billiard*, Phys. Rev. Lett. **84**, 867 (2000).
- [21] R. Hofferbert: *Wellendynamisches Chaos in einem supraleitenden 3D-Sinai-Billard und Chaos-Induziertes Tunneln in einem 2D-Ring-Billard*, Dissertation D17, TU Darmstadt, 1999.
- [22] H. Rehfeld: *Statistische Analyse und semiklassische Beschreibung von supraleitenden Limaçon-Billard und Raysplitting in supraleitenden Mikrowellenbillards*, Dissertation D17, TU Darmstadt, 2000.

- [23] T. Friedrich: *Eigenschaften von Pilsbillards und Korrelationsfunktionen von Streumatrixelementen in Mikrowellenresonatoren*, Dissertation D17, TU Darmstadt, 2007.
- [24] C. Dembowski, B. Dietz, T. Friedrich, H.-D. Gräf, A. Heine, C. Mejía-Monasterio, M. Miski-Oglu, A. Richter and T. H. Seligman: *First Experimental Evidence for Quantum Echoes in Scattering Systems*, Phys. Rev. Lett. **93**, 134102 (2004).
- [25] E. J. Heller: *Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems: Scars of Periodic Orbits*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).
- [26] E. Bogomolny and C. Schmit: *Structure of Wave Functions of Pseudointegrable Billiards*, Phys. Rev. Lett. **92**, 244102 (2004).
- [27] E. F. F. Chladni: *Entdeckungen über die Theorie des Klangs* (Weidmanns Erben & Reich, Leipzig, 1787).
- [28] G. Blum, S. Gnutzmann and U. Smilansky: *Nodal Domains Statistics: A Criterion for Quantum Chaos*, Phys. Rev. Lett. **88**, 114101 (2002).
- [29] E. Bogomolny and C. Schmit: *Percolation Model for Nodal Domains of Chaotic Wave Functions*, Phys. Rev. Lett. **88**, 114102 (2002).
- [30] M. Brack and R. K. Bhaduri: *Semiclassical Physics*, Frontiers in Physics (Addison-Wesley, Reading, USA, 1997).
- [31] V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2 Aufl. (Springer-Verlag, New York, 1989).
- [32] P. J. Richens and M. V. Berry: *Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics*, Physica D **2**, 495 (1981).
- [33] J. H. Hannay and R. J. McCraw: *Barrier billiards – a simple pseudointegrable system*, J. Phys. A **23**, 887 (1990).
- [34] J. Wiersig: *Spectral properties of quantized barrier billiards*, Phys. Rev. E **65**, 046217 (2002).
- [35] W. Veech: *The billiard in a regular polygon*, Geom. Funct. Analysis **2**, 341 (1992).

- [36] A. Eskin, H. Masur and M. Schmoll: *Billiards in Rectangles with Barriers*, Duke Math. J. **118**, 427 (2003).
- [37] H. Friedrich and D. Wintgen: *The hydrogen atom in a uniform magnetic field—An example of chaos*, Phys. Rep. **183**, 37 (1989).
- [38] R. U. Haq, A. Pandey and O. Bohigas: *Fluctuation Properties of Nuclear Energy Levels: Do Theory and Experiment Agree?*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1086 (1982).
- [39] C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins and A. C. Gosard: *Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures*, Phys. Rev. Lett. **69**, 506 (1992).
- [40] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3 Aufl. (John Wiley & Sons, Inc, New York, USA, 1998).
- [41] C. Dembowski: *Dissipation in Mikrowellenbillards: „Exceptional Points“ und Symmetriebrechung*, Dissertation D17, TU Darmstadt, 2003.
- [42] H. Aiba and T. Suzuki: *Nodal domain distribution for a nonintegrable two-dimensional anharmonic oscillator*, Phys. Rev. E **72**, 066214 (2005).
- [43] K. Müller and D. Wintgen: *Scars in wave functions of diamagnetic Kepler problem*, J. Phys. B **27**, 2693 (1994).
- [44] C. Dembowski, H.-D. Gräf, H. L. Harney, A. Heine, W. D. Heiss, H. Rehfeld and A. Richter: *Experimental Observation of the Topological Structure of Exceptional Points*, Phys. Rev. Lett. **86**, 787 (2001).
- [45] S. W. McDonald and A. N. Kaufman: *Wave chaos in the stadium: Statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation*, Phys. Rev. A **37**, 3067 (1988).
- [46] H. Weyl: *Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran und deren Begrenzung.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **141**, 1 (1912).
- [47] C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, H. Rehfeld, A. Richter and C. Schmit: *Gaussian unitary ensemble statistics in a time-reversal invariant microwave triangular billiard*, Phys. Rev. E **62**, R4516 (2000).

- [48] H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter and C. Schmit: *Experimental versus numerical eigenvalues of a Bunimovich stadium billiard: A comparison*, Phys. Rev. E **60**, 2851 (1999).
- [49] C. Dembowski: *Aufbau eines modularen supraleitenden Hohlraumresonators auf der Basis von verbleitem Kupfer und Anderson-Lokalisierung in Mikrowellenbillards*, Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1997 (unveröffentlicht).
- [50] L. C. Maier, Jr. and J. C. Slater: *Field Strength Measurements in Resonant Cavities*, J. Appl. Phys. **23**, 68 (1952).
- [51] S. Sridhar, D. Hogenboom and B. Willemsen: *Microwave Experiments on Chaotic Billiards*, J. Stat. Phys. **68**, 239 (1992).
- [52] A. Gokirmak, D.-H. Wu, J. S. A. Bridgewater and S. M. Anlage: *Scanned perturbation technique for imaging electromagnetic standing wave patterns of microwave cavities*, Rev. Sci. Instrum. **69**, 3410 (1998).
- [53] M. Miski-Oglu: *Spatial Autocorrelation function of wave function in a chaotic Microwave Billiard*, Diplomarbeit, TU Darmstadt/Karazin Kharkiv National University, 2002 (unveröffentlicht).
- [54] E. Bogomolny, B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer and C. Schmit: *First Experimental Observation of Superscars in a Pseudointegrable Barrier Billiard*, Phys. Rev. Lett. **97**, 254102 (2006).
- [55] H. Gressler: Fa. Baerman GmbH, Private Mitteilung, (2007).
- [56] C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter and T. Weiland: *Anderson localization in a string of microwave cavities*, Phys. Rev. E **60**, 3942 (1999).
- [57] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992).
- [58] E. Bogomolny, U. Gerland and C. Schmit: *Models of intermediate spectral statistics*, Phys. Rev. E **59**, R1315 (1999).
- [59] H. P. Baltes and E. R. Hilf: *Spectra of Finite Systems* (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976).

- [60] M. Siber, H. Primak and H. S. U. Smilansky I. Ussishkin: *Semiclassical quantization of billiards with mixed boundary conditions*, J. Phys. A **28**, 5041 (1995).
- [61] C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, T. Hesse, H. Rehfeld and A. Richter: *First Experimental Test of a Trace Formula for Billiard Systems Showing Mixed Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3284 (2001).
- [62] M. V. Berry and M. Tabor: *Level Clustering in the Regular Spectrum*, Proc. R. Soc. London. A. **356**, 375 (1977).
- [63] A. Relano, J. Dukelsky, J. M. G. Gomez and J. Retamosa: *Stringent numerical test of the Poisson distribution for finite quantum integrable Hamiltonians*, Phys. Rev. E. **70**, 026208 (2004).
- [64] M. L. Mehta: *Random Matrices*, 2 Aufl. (Academic Press, San Diego, 1991).
- [65] T. Guhr, A. Müller-Groeling and H. A. Weidenmüller: *Random-matrix theories in quantum physics: common concepts*, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
- [66] G. Casati, B. V. Chirikov and I. Guarneri: *Energy-Level Statistics of Integrable Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **54**, 1350 (1985).
- [67] M. Feingold: *Energy-Level Statistics of Integrable Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2626 (1985).
- [68] T. H. Seligman and J. J. M. Verbaarschot: *Energy-Level Statistics of Integrable Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **56**, 2767 (1986).
- [69] H. Hernández-Saldaña, J. Flores and T. H. Seligman: *Semi-Poisson statistics and beyond*, Phys. Rev. E **60**, 449 (1999).
- [70] S. W. McDonald: Technical Report No. LBL-14837, Lawrence Berkley Laboratory Report (unveröffentlicht).
- [71] T. M. Antonsen, E. Ott, Q. Chen and R. N. Oerter: *Statistics of wavefunction scars*, Phys. Rev. E **51**, 111 (1995).
- [72] E. Bogomolny, O. Giraud and C. Schmit: *Periodic Orbits Contribution to the 2-Point Correlation Form Factor for Pseudo-Integrable Systems*, Commun. Math. Phys. **222**, 327 (2001).

- [73] E. Bogomolny and C. Schmit: *Asymptotic behaviour of multiple scattering on an infinite number of parallel half-planes*, Nonlinearity. **16**, 2035 (2003).
- [74] L. Benet, F. Izrailev, T. Seligman and A. Suárez-Moreno: *Semiclassical properties of eigenfunctions and occupation number distribution for a model of two interacting particles*, Phys. Lett. A **277**, 87 (2000).
- [75] T. Guhr, M. Miski-Oglu, B. Dietz, T. Friedrich and A. Richter: *in Vorbereitung*, .
- [76] C. Mahaux and H. A. Weidenmüller: *Shell-Model Approach to Nuclear Reaction* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969).
- [77] P. F. Bortignon, A. Bracco and R. A. Broglia: *Giant Resonances Nuclear Structure at Finite Temperature* (Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1998).
- [78] S. Åberg, A. Heine, G. Mitchell and A. Richter: *Isospin symmetry breaking in ^{93}Tc and statistical properties*, Phys. Lett. B **70**, 42 (2004).
- [79] S. Åberg, T. Guhr, M. Miski-Oglu and A. Richter: *in Vorbereitung*, .
- [80] R. Courant: *Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differenzialausdrücke*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 81 (1923).
- [81] A. Pleijel: *Remarks on Courant's nodal line theorem*, Commun. Pure Appl. Math. **9**, 543 (1956).
- [82] M. Berry: *Regular and irregular semiclassical wavefunctions*, J. Phys. A **10**, 2083 (1977).
- [83] R. Aurich, A. Bäcker, R. Schubert and M. Tagliebe: *Maximum norms of chaotic quantum eigenstates and random waves*, Physica D **129**, 1 (1999).
- [84] A. Bäcker and R. Schubert: *Amplitude distribution of eigenfunctions in mixed systems*, J. Phys. A **35**, 527 (2002).
- [85] A. Kudrolli, V. Kidambi and S. Sridhar: *Experimental Studies of Chaos and Localization in Quantum Wave Functions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 822 (1995).

- [86] D. Stauffer and A. Aharony: *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1994).
- [87] O. Hul, N. Savytskyy, O. Tymoshchuk, S. Bauch and L. Sirko: *Investigation of nodal domains in the chaotic microwave ray-splitting rough billiard*, Phys. Rev. E. **72**, 066212 (2005).
- [88] N. Savytskyy, O. Hul and L. Sirko: *Experimental investigation of nodal domains in the chaotic microwave rough billiard*, Phys. Rev. E. **70**, 056209 (2004).
- [89] J. Hoshen, M. W. Berry and K. S. Minser: *Percolation and cluster structure parameters: The enhanced Hoshen-Kopelman algorithm*, Phys. Rev. E **56**, 1455 (1997).

Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei allen Menschen, die mir geholfen haben, bedanken.

An erster Stelle danke ich meinem Doktorvater Herrn Professor Dr. Dr. h.c. mult. Achim Richter für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und für die anspruchsvollen Aufgaben in meiner Doktorarbeit. Ich möchte ihm für das in mich gesetzte Vertrauen und seinen Enthusiasmus danken.

Für die Übernahme des Korreferats meiner Arbeit danke ich Herrn Professor Dr. J. Wambach sehr herzlich.

I also want to thank Dr. E. Bogomolny for fruitful discussions and for his kind invitations to Orsay.

Für die stetige Unterstützung und Hilfe, insbesondere während meiner ersten Zeit hier in Deutschland, danke ich Dr. H. Genz sowie Frau Sabine Genz sehr herzlich.

Weiterhin bedanke ich mich bei dem Dr. H.-D. Gräf für die Unterstützung in allen technischen Fragen.

Für das sorgfältige Lesen und Korrigieren meiner Doktorarbeit bedanke ich mich bei Dr. Barbara Dietz und Florian Schäfer.

Ebenso möchte ich mich bei meinen freundlichen Kollegen aus der Arbeitsgruppe Quantenchaos, im einzelnen Thomas Friedrich dem größten, Florian Schäfer dem fleißigsten, Barbara Dietz der weisesten, Stefan Bittner dem schlauesten und Pedro Oria Iriarte dem schnellsten bedanken.

Letztlich möchte ich auch meinen ehemaligen Kollegen Herrn Dr. C. Dembowski und Dr. A. Heine einen herzlichen Dank für die wertvollen Diskussionen bezüglich dieser Arbeit auszusprechen.

Diese Arbeit wurde durch Mittel aus dem DFG Graduiertenkolleg 410 sowie dem Sonderforschungsbereich 634 unterstützt.

Lebenslauf

Maksym Miski-Oglu

- | | |
|------------------|--|
| 21. Februar 1978 | Geboren in Mariupol (Ukraine) |
| 1984 – 1995 | Besuch der Schule Nr. 24 in Mariupol |
| 1995 – 2002 | Studium der Physik am Fachbereich für Physik und Technik der Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine |
| März 2002 | Abschluß des Studiums mit Diplom |
| seit 2002 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kernphysik der Technischen Universität Darmstadt |

Eidesstattliche Erklärung:

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig verfaßt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen habe.

Darmstadt, im Februar 2007

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, sweeping loop at the top and the letters 'llue' written in a cursive style below it.

