

Analysis eines Drehprozesses: Stabilität und Hopfverzweigung einer Funktionaldifferentialgleichung mit zustandsabhängigem Delay

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Math. Ralf Pfeiderer
aus Bönningheim

Referent:	Prof. Dr. R. Farwig
Korreferent:	Prof. Dr. H.-O. Walther
Tag der Einreichung:	4.11.2005
Tag der Prüfung:	23.11.2005

Darmstadt 2005

D17

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich dem Problem der Veränderungen des Stabilitätsgebiets und der Lösungen von Funktionaldifferentialgleichungen bei Variation des Delays. Das ist unter anderem dann von Interesse, wenn man den Drehprozess in der Metallverarbeitung mit der Umdrehungsdauer als Delay modelliert. In der anwendungsorientierten Literatur wird fast ausschließlich mit konstanten Delays gerechnet, obwohl man stets mit Drehzahlschwankungen in der Größenordnung von 2% zu rechnen hat. Hat man eine Untersuchung der Stabilitätsgebiete mit konstanten Delays vorgenommen, stellt man eine Abweichung der Messergebnisse von der Theorie fest. Als mögliche Ursache wurde in vorhergehenden Arbeiten die Schwankung des Delays r genannt. Die Zielsetzung der Dissertation war es, den Einfluss eines variablen Delays auf die Stabilitätsanalyse und die Lösungen einer solchen Modellgleichung zu klären.

Um das Problem der Delayschwankungen analytisch erfassen zu können, wurde ausgehend von einem System mit einem Freiheitsgrad x ein Ansatz mit einem zweiten Freiheitsgrad ϕ , dem Rotationsfreiheitsgrad des Werkstücks, und einem zustandsabhängigen Delay $r(\phi_t)$ gewählt, wobei ϕ_t die Vergangenheit von $\phi(t)$ enthält. Das führte zu einer Funktionaldifferentialgleichung mit zustandsabhängigem Delay. Das dabei entstandene Delayfunktional r spielt die entscheidende Rolle. Der Nachweis der Differenzierbarkeit des Delayfunktionals unter schwachen Voraussetzungen kann als zentrale Stelle der vorliegenden Arbeit gelten. Die Linearisierung der rechten Seite der RFDE konnte damit bestimmt werden, und es stellte sich heraus, dass es sich dabei um eine RFDE mit konstantem Delay handelt. Damit war es möglich eine Stabilitätsanalyse durchzuführen, die ergab, dass die zustandsabhängige Variation des Delays keinen Einfluss auf die lineare Stabilität hat. Das bedeutet jedoch nicht, dass Delayvariationen keinen Einfluss auf den Verlauf der Lösungen haben, da sie als nichtlineare Einflüsse bei der linearen Stabilitätsanalyse außen vor bleiben. Über die Stabilitätsanalyse hinaus konnte eine Hopfbifurkation an der Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit eines für den Anwender wichtigen Parameters k nachgewiesen werden. Das bedeutet, dass die Nulllösung der nichtlinearen Gleichung beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze in eine instabile Nulllösung und eine periodische Lösung verzweigt. Diese periodische Lösung muss zwingend gegen Null strebende maximale Amplituden haben, wenn k von der instabilen Seite gegen die Stabilitätsgrenze strebt. Es wäre also denkbar, dass ein Streifen signifikanter Breite oberhalb der Grenze existiert, innerhalb dessen die periodische Lösung numerisch und experimentell als stabile Nulllösung fehlinterpretiert werden könnte. Schließlich wurde noch ein numerisches Lösungsverfahren verwendet, um Lösungen in der Nähe der Nulllösung

zu visualisieren. Dabei ergab sich, dass tatsächlich Lösungen im instabilen Bereich zu existieren scheinen, die nahe am technisch relevanten Bereich starke Unterschiede zur Lösung der Linearisierung aufweisen.

Insgesamt sind mit der vorliegenden Arbeit folgende Fortschritte erzielt worden: Die bisher offene Frage, ob Delayvariationen einen Einfluss auf die Stabilitätsgrenze haben, konnte weitgehend beantwortet werden. Im Falle autonomer Störungen aus einem gekoppelten zweiten Freiheitsgrad heraus ist keine Veränderung der Stabilitätsgrenze zu erwarten. Nichtautonome Störungen des Delays selbst, also ein explizit zeitabhängiger Delay, sind im vorliegenden Modell nicht enthalten. Sie stellen eine sehr künstliche Konstruktion dar, da man den Delay selbst nicht als zugängliche physikalische Größe vorliegen hat. Das zeigt sich durch den komplexen Zusammenhang zwischen der Drehwinkelfunktion mit dem Delay. Das entstandene Modell ist offen für die Implementierung weiterer Freiheitsgrade sowie nichtautonomer Störungen aller vorhandenen Freiheitsgrade. Ein weiterer Erfolg ist es, dass der Einfluss der Delayvariation im Rahmen einer nichtlinearen Analyse ein Stück weit geklärt werden konnte. Das ist schon bei ODE's eine sehr komplexe Aufgabe, weshalb der Nachweis der Hopfbifurkation als großer Fortschritt gewertet werden muss.

Abstract

The present work is dedicated to the problem of changes of stability regions and solutions of functional differential equations under variation of the delay. This is of interest, e.g. if the turning process in metal working industry is modeled with the turning time as the delay. In application-oriented literature the constant delay is used nearly exclusively, even though it comes quite often to turning-time-variations of approximately 2%. If the stability-chart has been calculated with constant delay there are discrepancies between model and theory. As one possible reason the variations of the delay r have been mentioned in previous works. The aim of the present work was to clarify the influence of a variable delay on the outcomes of a stability analysis and the solutions of such a model-equation.

To catch hold of the problem of a varying delay analytically, based on a system with one degree of freedom x , an ansatz with a second degree of freedom ϕ and a state dependent delay $r(\phi_t)$ has been chosen, while ϕ means the angle of rotation of the workpiece and ϕ_t contains the past of $\phi(t)$. This leads to a retarded functional differential equation (RFDE) with state dependent delay. The delay-functional which has been developed for this matter plays the crucial role. The proof of the differentiability of this functional may pass for the central theorem of the present work. It was possible to calculate the linearization and the linearization was proved to be a RFDE with constant delay. This allowed to accomplish a stability analysis, which has shown, that the state dependent delay variation has no influence on linear stability. This doesn't mean that state dependent delay variations have no effect on the solutions, because as nonlinear terms they naturally are not taken into account on linear stability analysis. Beyond the stability analysis a Hopf-bifurcation in dependence of an important user-related parameter k has been proven. This means, at the stability-border the stable zero-solution of the nonlinear equation underlies a bifurcation into an unstable zero-solution and a periodical solution. The amplitudes of this periodical solution must tend strictly to zero if k tends to the stability-border from the unstable side. Hence it is possible that above the stability-border there exists a stripe of significant broadness, in terms of k , in which the periodical solution could be misinterpreted as a zero-solution in experiments and numerical analysis. Finally the solutions of the RFDE near the zero-solution have been calculated and visualized with a numerical solver. Hence follows that there are numerical solutions of the nonlinear equation which differ very much from the solutions of the linearization.

Altogether the following progresses have been made with the present work: The hitherto open question whether delay-variations have influences onto the stability-border has been answered widely. In the case of autonomous disturbances out of a second degree of freedom there is no influence on stability. The model doesn't include non-autonomous disturbances of the delay itself, say an explicit time-dependent delay. This is a very artificial construction, because the delay isn't accessible directly as a physical value. This shows in the complex interdependence of the turning-angle-function and the delay. The new model is open for implementation of more degrees of freedom as well as non-autonomous disturbances of any degree of freedom. It is also a success that the influence of the delay-variations have been recovered a bit further in a nonlinear analysis. This is a complex task even with ODE's, wherefore the verification of the Hopf-bifurcation has to be valued as a great success.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	v
Problemstellung	1
0.1 Problemstellung	1
0.2 Inhalt der Arbeit	3
0.3 Ausblicke	6
1 Mathematische Grundlagen	7
1.1 Festlegungen	7
1.2 Differenzieren in Banachräumen	7
1.3 Ein einfaches Beispiel	8
1.4 Allgemeine Definitionen	9
1.4.1 Definition der RFDE	9
1.4.2 AWP und Halbfluss	12
1.5 Grundlegende Sätze	14
1.6 Lineare autonome RFDE's	15
1.6.1 Definition	15
1.6.2 Grundlegende Sätze für lineare RFDE's	15
1.7 Linearisierung autonomer RFDE's	18
1.7.1 Formale Linearisierung	18
1.7.2 Linearisierung durch Differentiation	19
2 Modellgleichungen und Stabilitätskriterien	21
2.1 Eindimensionales Modell	21
2.2 Ein Modell mit zwei Freiheitsgraden	26
2.2.1 Hinzunahme der y -Richtung	27
2.2.2 Hinzunahme der ϕ -Richtung	28
2.2.3 Zustandsabhängiger Delay	29
2.2.4 Geschwindigkeitsabhängiges Modell	33
2.2.5 Zusammenfassung	35
2.3 Eigenschaften der Modellgleichung	37
2.3.1 Lineare Näherung	37
2.3.2 Linearisierung	38
2.3.3 Invariante Mannigfaltigkeit	39

3 Stabilitätsanalyse	43
3.1 Ermittlung der Parameter	43
3.2 Analytische Untersuchungen für $l_x = 0$	49
3.3 Numerische Untersuchungen	52
3.3.1 $l_x = 0$	53
3.3.2 $l_x \neq 0$	58
3.4 Zusammenfassung	59
4 Nichtlineare Analyse	61
4.1 Zweite Ableitung des Delayfunktional	61
4.2 Hopfbifurkation	63
4.3 Numerische Lösungen des AWP's	80
Lebenslauf	91
Erklärung	95

Abbildungsverzeichnis

0.1	Der Drehprozess	1
0.2	Typische Stabilitätsgrenze einer Delaygleichung	2
2.1	Das Werkzeug als eindimensionaler harmonischer Oszillator	22
2.2	Die idealisierte Nulllösung	22
2.3	Parametrisierung der Kurven mit $Re(\lambda) = 0$	24
2.4	Theoretische und gemessene Stabilitätsgrenze	24
2.5	Der Drehprozess mit weiteren Freiheitsgraden	26
3.1	Messanordnung der Drehversuche	44
3.2	Verlauf der Schnittkraft F_y bei $V_c = 90m/min$ und $s_0 = 0,25mm$	45
3.3	F_x und F_y in Abhängigkeit der Schnitttiefe	46
3.4	F_x und F_y in Abhängigkeit der Schnittgeschwindigkeit	48
3.5	Stabilitätsgrenze im r - k -Raum	51
3.6	Numerisch bestimmte Eigenwerte der Gleichung im Startpunkt	54
3.7	Kritische Eigenwerte im Bifurkationspunkt	55
3.8	Darstellung eines Kreuzungspunktes	56
3.9	Zwei kritische Eigenwertpaare: $136000 < k_x < 137000$ und $r = 0,02035$	56
3.10	Zwei kritische Eigenwertpaare: $133000 < k_x < 134000$ und $r = 0,2035$	57
3.11	Stabilitätsgrenzen: Links 2FG-Modell, rechts 1FG-Modell	57
3.12	Fortsetzung der Stabilitätsgrenze	58
3.13	Vergleich bei Variation von l_x	58
3.14	Variation von l_x für $k_\phi = 150k_x$	59
4.1	Auswahl von Punkten zur Simulation	81
4.2	Vergleich von Lösungen in Punkt P1a	82
4.3	Vergrößerte Darstellung einer Lösungen in Punkt P1a	83
4.4	Vergleich von Lösungen in Punkt P1b	83
4.5	Vergleich von Lösungen und Delayvariation in Punkt P1b	84
4.6	Vergleich von Lösungen in Punkt P2a	84
4.7	Deutlich verschiedene Lösungen in Punkt P2a	85
4.8	Periodische Lösung in Punkt P2a	85
4.9	Lösung in Punkt P2a für $k_\phi = 8k_x$	86

Abbildungsverzeichnis

Danksagung

Folgenden Personen und Institutionen möchte ich meinen herzlichen Dank ausdrücken: Herrn DR. J. KLECKNER, der maßgeblich daran beteiligt war, das Projekt ins Leben zu rufen und mir wichtige Starthilfe gegeben hat. Der Firma ROBERT BOSCH, die das Projekt im Rahmen einer Doktorandenstelle unterstützt hat; in diesem Zusammenhang vor allem Herrn DR. ZELLER und Herrn HOPF, die als Abteilungs- und Gruppenleiter meine Einstellung befürwortet haben und Herrn Dr. Ivica Durdevic, der immer ein offenes Ohr für meine Probleme hatte. Herrn DR. MARTIN FRANK, der mir mit seiner Erfahrung aus einem vorangegangenen Projekt in zahllosen Diskussionen sehr geholfen hat. Meinen Kollegen Herrn DR. HELMUT ABELS, Herrn DR. PATRIZIO NEFF und Frau DIPL.-MATH. KATRIN KROHNE für konstruktive Diskussionen und Anregungen. Herrn PROF. DR. A. MIELKE für eine wirklich zündende Idee. Herrn PROF. DR. H.-O. WALTHER für Rat und Tat in Sachen zustandsabhängige Delays und seinem Mitarbeiter Herrn DR. MARKUS EICHMANN, mit dem sich eine wunderbare Zusammenarbeit ergeben hat. Großer Dank auch an die Kolleginnen Frau M. Tabbert und Frau Christiane Herdler für die vielen stilistischen und orthographischen Hinweise! Besonderer Dank geht an Herrn DR. JÜRGEN HELLMICH, der viele Stunden Freizeit geopfert hat, um mich auf meine TEXnischen und mathematisch stilistischen Fehler hinzuweisen, von allen anderen Fehlern einmal abgesehen. Danke Jürgen! Herzlicher Dank geht auch an alle meine Freunde, Verwandten und Bekannten, insbesondere auch aus dem TUD Schauspielstudio, für den Ausgleich und die persönliche Unterstützung. Nicht zuletzt und ganz besonders herzlich geht mein Dank an meinen Doktorvater Herrn PROF. DR. R. FARWIG, der mich in meiner Arbeit immer unterstützt und motiviert hat. Sowohl den fachlichen, als auch den persönlichen Umgang mit ihm habe ich außerordentlich schätzen gelernt. Danke Herr Farwig.

Einleitung

0.1 Problemstellung

Das der Arbeit zugrunde liegende Problem tritt unter anderem in der Metallverarbeitung auf. Beim so genannten Drehprozess nimmt ein fest stehendes Werkzeug von einem rotierenden Werkstück bei Drehfrequenzen in Größenordnungen um 10^2 bis $10^3 \frac{U}{min}$ Material ab. Dabei lassen sich z.B. die Drehfrequenz Ω_0 bzw. die Umdrehungsdauer r und die Schnitttiefe s_0 regeln, um möglichst effizient zu einem optimalen Ergebnis zu kommen. Bei der Modellierung des Prozesses kommen sowohl für das Werkstück als auch für das Werkzeug viele relevante Freiheitsgrade in Frage. So sind mindestens 2 der 3 translatorischen Freiheitsgrade, nämlich der in x -Richtung und der in y -Richtung, wichtig. Die Translation in z -Richtung kann beim sogenannten Einstechdrehen vernachlässigt werden, da in dieser Richtung kein Vorschub und kaum Kräfte auftreten. Der wichtigste Rotations-Freiheitsgrad ist der des Werkstücks um die z -Achse, siehe dazu Abbildung 0.1. In einer ersten Annäherung an das Problem geht man davon aus, dass sich das Werk-

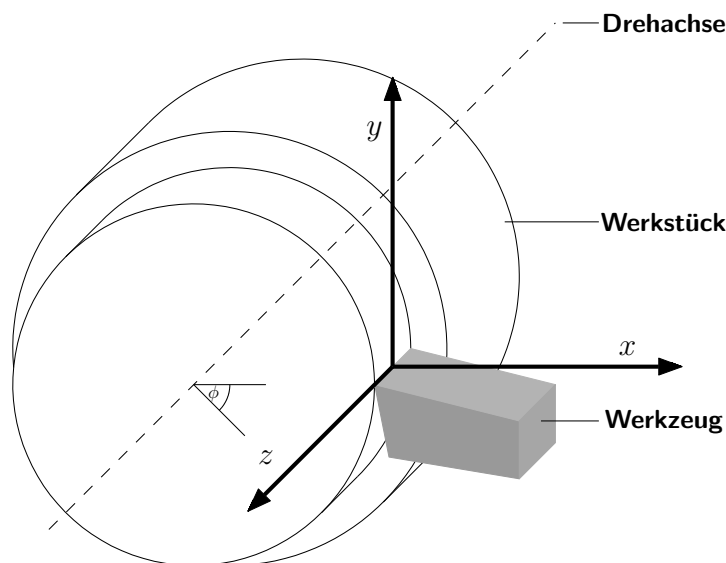


Abbildung 0.1: Der Drehprozess

zeug nur in x -Richtung bewegen kann, und modelliert dieses mittels klassischer Mechanik eines Massepunkts. Da die bearbeitete Oberfläche nach einer Umdrehung wieder auf das Werkzeug trifft und die auf das Werkzeug ausgeübte Kraft von der Beschaffenheit

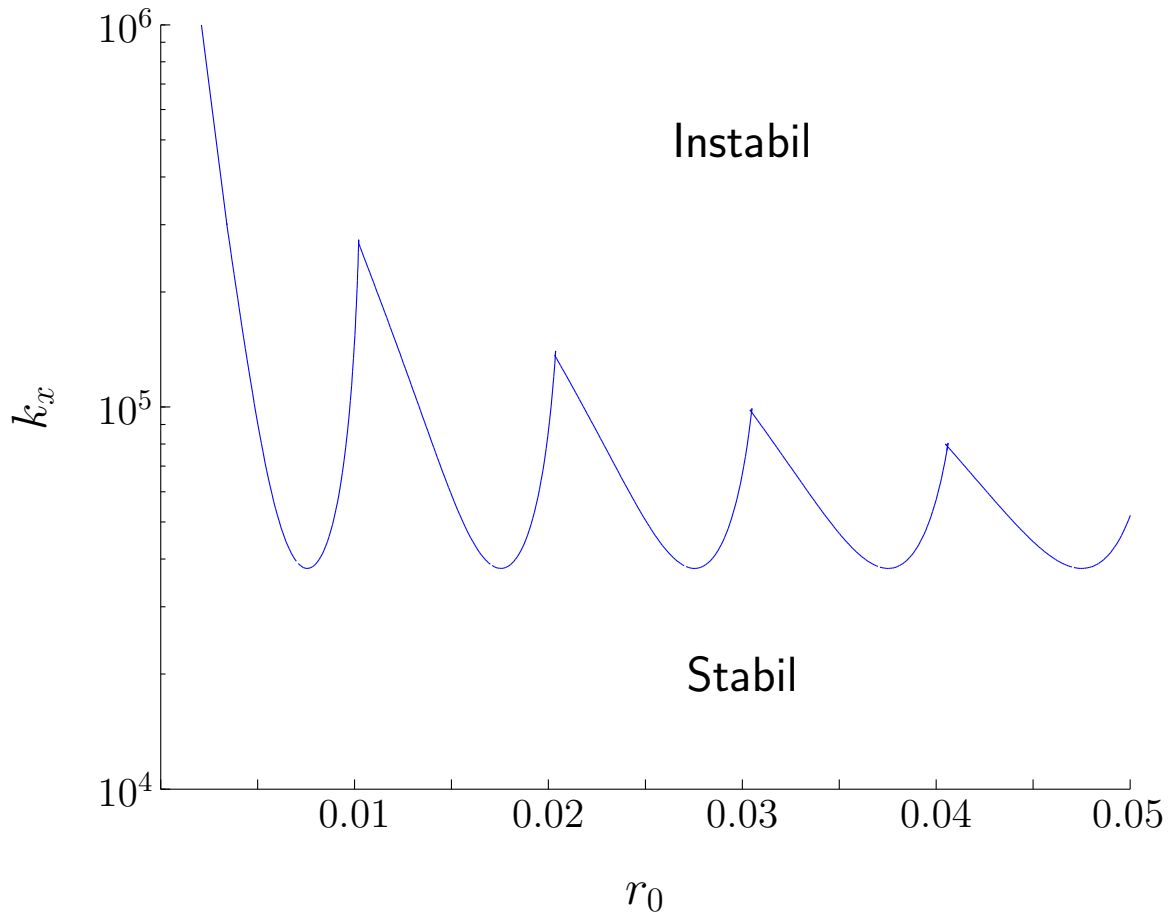


Abbildung 0.2: Typische Stabilitätsgrenze einer Delaygleichung in Abhängigkeit vom Delay r_0 und einem technisch interessanten Kopplungsparameter k_x .

der Oberfläche abhängt, hat die Position des Werkzeugs eine Umdrehung zuvor einen Einfluss auf die momentan wirkende Kraft. Darum tritt die Umdrehungsdauer als Verzögerungszeit auf, in der einschlägigen Literatur häufig Delay genannt. In der anwendungsorientierten Literatur wird fast ausschließlich mit konstanten Delays gerechnet, obwohl man stets mit Drehzahlschwankungen in der Größenordnung von 2% zu rechnen hat. Hat man eine Untersuchung der Stabilitätsgebiete, typischerweise durch ein Diagramm wie in Abbildung 0.2 dargestellt, mit konstanten Delays vorgenommen, stellt man eine Abweichung der Messergebnisse von der Theorie fest. Als mögliche Ursache wurden in der Diplomarbeit [Frank, 2002] von M. FRANK und der Dissertation [Kleckner, 2001] von DR. J. KLECKNER die Schwankungen des Delays r genannt, was unter anderem mittels einer speziellen Störungsrechnung aus [Schley und Gourley, 2000] untermauert wurde. Die Zielsetzung der folgenden Arbeit ist es, den Einfluss eines variablen Delays auf die Stabilitätsanalyse einer solchen Modellgleichung zu klären.

0.2 Inhalt der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird exemplarisch am Beispiel des Drehprozesses und auf der Grundlage der Vorarbeiten ein Modell erstellt, das auf eine zustandsabhängige retardierte Funktionaldifferentialgleichung hinausläuft. Trotz des exemplarischen Vorgehens sind die Ergebnisse universeller verwendbar. Jedes physikalische System, das mit Differentialgleichungen modelliert werden kann und zugleich eine Rückkopplung enthält, die mit einer signifikanten zeitlichen Verzögerung der Antwort einhergeht, kann auf eine solche Gleichung führen. Insbesondere, wenn die Verzögerungszeit nicht konstant ist, kann die vorliegende Arbeit als Beispiel für analytische Untersuchungen dienen. Beispiele solcher Systeme sind Phasengekoppelte Regelkreise [Wischert u. a., 1994], Roboter, die zeitlich verzögert mit der eigenen Aktion rückkoppeln [Eichmann, 2005], biologische Systeme, die mit verzögerten, selbst ausgesandte Reizen interagieren [Mahaffy u. a., 1998] und [Bélair u. a., 1996], und viele mehr.

In Kapitel 1 werden die nötigen mathematischen Grundlagen zum Thema der retardierten Funktionaldifferentialgleichungen (RFDE's) zusammengefasst und entsprechend referenziert. Besonderer Augenmerk gilt dabei autonomen Gleichungen mit variablem Delay.

Kapitel 2 enthält sowohl eine kurze Zusammenfassung der für diese Dissertation wichtigen Ergebnisse der Diplomarbeit [Frank, 2002], als auch die Modellierung eines neuen Ansatzes, der auf der dort verwendeten Grundgleichung aufbaut. Während in [Frank, 2002] noch von einem System mit einem Freiheitsgrad x ausgegangen wurde, was auf die RFDE

$$\dot{\bar{v}}(t) = \bar{A}\bar{v}(t) + \bar{B}\bar{v}(t - r(t))$$

mit zeitabhängigem Delay $r(t)$,

$$\bar{v}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

und 2×2 -Matrizen \bar{A} und \bar{B} geführt hat, enthält der neue Ansatz einen zweiten Freiheitsgrad ϕ und einen zustandsabhängigen Delay $r(\phi_t)$, wobei ϕ_t einen Funktionsabschnitt von $\phi(t)$ darstellt, was zur autonomen Gleichung

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(\phi_t))$$

mit

$$\bar{v}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

und 4×4 -Matrizen A und B führt. Diese Gleichung ist zwar spezieller, hat aber die entscheidenden Vorteile, sowohl die wichtigsten Delayschwankungen zu enthalten, als

auch einer Stabilitätsanalyse zugänglich zu sein. Das gelingt dadurch, dass die Drehzahl-schwankungen als Ursache der Delayschwankungen in das Modell implementiert werden. Das gelingt unter Zuhilfenahme der Drehwinkelfunktion $\phi(t)$, deren Ableitung die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ ist. Nach der Implementierung dieses zusätzlichen Freiheitsgrades konnte der Delay in Abhängigkeit eines Funktionsstückes der Drehwinkelfunktion beschrieben werden. Das damit entstandene Delayfunktional

$$r : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto r(\varphi) \in [-R, 0) \subset \mathbb{R}$$

spielt dabei die zentrale Rolle. Der zweite Teil von Kapitel 2 zeigt den Nachweis der Differenzierbarkeit des Delayfunktionalen unter schwachen Voraussetzungen, was als zentrale Stelle der vorliegenden Arbeit gelten kann. Neben Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ist der wichtigste weitere Aspekt, dass aufgrund der Differenzierbarkeit des Delayfunktionalen eine Linearisierung der Modellgleichung möglich wird. Die Linearisierung ist durch

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r_0)$$

gegeben, wobei die Tatsache, dass nur noch ein konstanter Delay verbleibt, von großer Bedeutung ist.

Kapitel 3 enthält die Stabilitätsanalyse der Modellgleichung. Das Hauptergebnis dieser Untersuchung ist noch auf analytischem Wege zu erhalten, da man zeigen kann, dass das Spektrum des Generators des Halbflusses der linearisierten RFDE in zwei Teile zerfällt, die eindeutig den beiden Freiheitsgraden x und ϕ zuzuordnen sind. Damit lassen sich die bereits in [Frank, 2002] gemachten Aussagen übertragen. Im Ergebnis heißt das, dass die Stabilitätsgrenze identisch mit der ist, die man im Modell mit nur einem Freiheitsgrad erhält. Das bedeutet, dass autonome, von einem zweiten Freiheitsgrad induzierte Delayvariationen keinen Einfluss auf die Stabilitätsgrenze haben. Das bedeutet jedoch nicht, dass Delayvariationen keinen Einfluss auf den Verlauf der Lösungen haben, da sie als nichtlineare Einflüsse bei der linearen Stabilitätsanalyse außen vor bleiben.

Da bisher ein Ansatz Verwendung fand, der lediglich die Abhängigkeit der Schnittkraft von der Schnitttiefe berücksichtigte, war noch von Interesse, ob es weitere Abhängigkeiten gibt, die das Ergebnis der Stabilitätsanalyse signifikant verändern. Im Vordergrund stehen dabei Abhängigkeiten, die der zweite Freiheitsgrad ϕ mit sich bringt, da dieser mit den autonomen Delayvariationen assoziiert ist. Macht man z.B. einen Ansatz für die Schnittkraft

$$F_x(s) \approx F_x(s_0, \dot{\phi}_0) + k_x(s - s_0) + l_x \dot{\phi},$$

mit der Schnitttiefe s und Konstanten k_x und l_x , so erhält man ein Modell, das eine Abhängigkeit von der Schnittgeschwindigkeit aufweist. Die Stabilitätsanalyse kann nur noch numerisch durchgeführt werden, was mit Hilfe des DDE-BIFTOOL gelang, das an der Katholischen Universität Leuven entwickelt wurde. Dabei ergaben sich keine signifikanten Veränderungen der Ergebnisse.

In Kapitel 4 werden die nichtlinearen Aspekte der Modellgleichung beleuchtet. Von besonderem Interesse ist dabei, wie sich Lösungen in der Nähe der Nulllösung verhalten. Die hier getroffenen Aussagen sind nur möglich geworden, da in zwei verschiedenen Forschungseinrichtungen kurz vor Beginn dieser Arbeit wichtige Fortschritte gemacht wurden. Das ist zum Einen die Entwicklung eines numerischen Werkzeuges, ANT, unter Leitung von DR. M. SCHANZ in der Abteilung Bildverstehen des IPVS der Uni Stuttgart, das die numerische Lösung von zustandsabhängigen RFDE's erlaubt. Zum Anderen ist es die Entwicklung eines Hopftheorems im Rahmen der Promotion von M. EICHMANN unter Betreuung von PROF. DR. H.-O. WALTHER, was für eine analytische Arbeit wie diese natürlich besonders wichtig ist.

Da die lineare Stabilitätsanalyse in keinem Fall eine Aussage darüber machen kann, innerhalb welcher Umgebung um die stationäre Lösung die Stabilität bzw. Instabilität sich auf Startfunktionen auswirkt, müssen andere Methoden, die die nichtlineare Gleichung betreffen, verwendet werden. In Abschnitt 4.2 wird dazu das erwähnte Hopftheorem formuliert und die Gültigkeit der Voraussetzungen bewiesen. Es zeigt, dass die Nulllösung der nichtlinearen Gleichung beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze in eine instabile Nulllösung und eine periodische Lösung verzweigt. Diese periodische Lösung muss zwingend gegen Null strebende maximale Amplituden haben, wenn man von der instabilen Seite gegen die Stabilitätsgrenze strebt. Es wäre also denkbar, dass ein Streifen signifikanter Breite oberhalb der Grenze existiert, innerhalb dessen eine technisch kaum zu realisierende attraktive periodische Lösung existiert, die numerisch und experimentell als stabile Nulllösung fehlinterpretiert werden könnte. In Abschnitt 4.3 wird das Programm ANT verwendet, um Lösungen in der Nähe der Nulllösung zu visualisieren. Dabei ergibt sich, dass tatsächlich Lösungen im instabilen Bereich zu existieren scheinen, die nahe am technisch relevanten Bereich starke Unterschiede zur Lösung der Linearisierung aufweisen. Der wesentliche Unterschied ist hierbei, dass die Lösungen der nichtlinearen Gleichung an bestimmten Punkten im Instabilitätsgebiet begrenzte Amplituden haben. Diese Begrenzung der Amplituden konnte durch eine Variation von k_ϕ stark beeinflusst werden. Im stabilen Bereich konnten bei den vorliegenden Parameterwerte keine nennenswerten Unterschiede festgestellt werden. Darüber hinaus konnten die zugehörigen Delayvariationen visualisiert werden.

Insgesamt sind mit der vorliegenden Arbeit folgende Fortschritte erzielt worden: Die bisher offene Frage, ob Delayvariationen einen Einfluss auf die Stabilitätsgrenze haben, konnte weitgehend beantwortet werden. Im Falle autonomer Störungen aus einem gekoppelten zweiten Freiheitsgrad heraus, ist keine Veränderung der Stabilitätsgrenze zu erwarten. Nichtautonome Störungen des Delays selbst, also ein zeitabhängiger Delay, sind im vorliegenden Modell zwar nicht enthalten, stellen auf der anderen Seite aber auch eine sehr künstliche Konstruktion dar, da man den Delay selbst nicht als zugängliche physikalische Größe vorliegen hat. Das zeigt sich durch den komplexen Zusammenhang zwischen der Drehwinkelfunktion mit dem Delay, der letztlich zur Definition des Delayfunktionals geführt hat. Das ist als ein weiterer Fortschritt aufzufassen, da es die Formulierung des Problems als zustandsabhängigen RFDE vorher nicht gab. Das

entstandene Modell ist außerdem offen für die Implementierung weiterer Freiheitsgrade und auch nichtautonomer Störungen aller vorhandenen Freiheitsgrade. Ein weiterer Erfolg ist es, dass der Einfluss der Delayvariation im Rahmen einer nichtlinearen Analyse ein Stück weit geklärt werden konnte. Das ist schon bei ODE's ein sehr komplexe Aufgabe, weshalb der Nachweis der Hopfbifurkation als großer Fortschritt gewertet werden muss. Die anschließenden numerischen Untersuchungen von Lösungen, die eine Vorstellung der Dynamik des zustandsabhängigen Systems geben konnten, können als Vorlage für weitere Untersuchungen gelten.

0.3 Ausblicke

Das spezielle Problem der vorliegenden Arbeit kann weiter verfolgt werden, wenn auch andere nichtlineare Einflüsse im Ansatz zugelassen werden, um sie mit den Einflüssen aus den Delayvariationen zu vergleichen. Zwar hat die Arbeit ergeben, dass man in erster Näherung Delayvariationen vernachlässigen kann, dennoch ist ihr Einfluss in Form der Nichtlinearitäten nicht vollständig geklärt.

Weiterhin kann man das vorliegende Modell verwenden, um direkt über den zweiten Freiheitsgrad nichtautonome Störungen zu modellieren. Das ist naheliegend, da die Drehzahl auch in der Praxis nicht als konstant anzusehen ist. Zum einen liegen Rückkopplungen mit den Schwingungen des Werkzeugs vor, die im vorliegenden Modell in vereinfachter Weise bereits enthalten sind. Zum anderen können auch andere Störungen des Antriebs vorliegen, die nun direkt in das System eingebracht werden können. Die daraus resultierenden Veränderungen des Stabilitätsverhaltens können dann analysiert werden.

Es besteht auch die Möglichkeit, weitere Freiheitsgrade in das Modell einzubringen, die Anfangs vernachlässigt wurden. In erster Linie muss man dabei an die y -Richtung des Werkstücks denken, die andere Eigenfrequenzen und Dämpfungen aufweist, wie die ϕ -Richtung und ebenfalls einen Einfluss auf den Delay hat. Eine andere mögliche Erweiterung stellt die Berücksichtigung mehrerer Eigenfrequenzen eines Freiheitsgrades dar.

Wie Eingangs des Kapitels erwähnt, lassen sich die hier vorgeführten Methoden auch universeller anwenden. Sobald in einer Anwendung, die auf Delaygleichungen führt, die physikalische Größe, die den Delay beeinflusst, als Differentialgleichung implementiert werden kann, steht die vorliegende Arbeit als Richtschnur zur Verfügung, wie eine Stabilitätsanalyse unternommen werden kann. Es wird auch vorgeführt, in welcher Weise der variable Delay modelliert und analysiert werden kann, um zu Ergebnissen zu kommen. Das gilt insbesondere deshalb, da die Forschung an zustandsabhängigen RFDE's im Moment große Fortschritte macht.

1 Mathematische Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden RFDE's in der benötigten Allgemeinheit definiert und die Theorien von Lösungen, Halbflüssen und Stabilität vorgestellt.

1.1 Festlegungen

Um mit der gebräuchlichen von J.K. HALE stammenden Notation eine sinnvolle Übereinstimmung zu erhalten, werden folgende Festlegungen getroffen.

Eine Differentialgleichung wird mit der englischen Abkürzung DE (Differential Equation) notiert. Damit ergeben sich dann die Abkürzungen LDE für lineare (linear) DE's, ODE für gewöhnliche (ordinary) DE's, RFDE für retardierte Funktional- (retarded functional) DE's usw.

Da auch vektorwertige Funktionen auf $[-R, 0] \subset \mathbb{R}$ nach \mathbb{R}^n betrachtet werden, ist es praktisch, dass $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ als vektorwertige Funktion mit Komponenten $\varphi_i \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$, dargestellt werden kann. Sofern nicht anders festgelegt wird auf dem Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R})$ die Supremumsnorm und auf \mathbb{R}^n eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ verwendet. Der Raum $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ wird mit der daraus definierten Norm $\|\varphi\|_0$ versehen.

1.2 Differenzieren in Banachräumen

Die Ableitung banachraumwertiger Funktionen wird als lineare Näherung definiert, siehe [Ambrosetti und Prodi, 1993].

Definition 1.2.1 Seien V und W Banachräume, $L(V, W)$ der Raum der stetigen linearen Operatoren von V nach W und $\eta, x \in V$. Die Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ heißt (**Fréchet**)**differenzierbar** in η , wenn es ein $A \in L(V, W)$ gibt, so dass für

$$R(x) := \phi(\eta + x) - \phi(\eta) - A(x)$$

die Beziehung

$$\frac{\|R(x)\|_W}{\|x\|_V} \xrightarrow{\|x\|_V \rightarrow 0} 0$$

folgt. Man schreibt dann

$$d\phi(\eta) = A.$$

Höhere Ableitungen gewinnt man, indem man die Abbildung

$$d\phi : \eta \mapsto d\phi(\eta)$$

wieder differenziert. Seien die selben Voraussetzungen wie in Definition 1.2.1 gewählt, $\phi : V \rightarrow W$ eine 2-mal (Fréchet)differenzierbare Abbildung und $x, y \in V$. Dann gelten für die Ableitungen an der Stelle $\eta \in V$ die Schreibkonventionen

- $d\phi(\eta) \in L(V, W)$ mit $x \mapsto d\phi(\eta)(x)$ ist eine lineare Abbildung.
- $d^2\phi(\eta)$ ist via $V \times V \ni (x, y) \mapsto d^2\phi(\eta)(x, y) := d^2\phi(\eta)(x)(y)$ eine bilineare Abbildung auf V .
- $d^2\phi(\eta) \in L(V, L(V, W))$ ist mit $y \mapsto d^2\phi(\eta)(y)(y)$ die zweite Ableitung von ϕ an der Stelle η angewandt auf y .

Die Ableitung auf Banachräumen ist wie im \mathbb{R}^n eine lineare Abbildung, die die ursprüngliche Funktion in einem Punkt approximiert. Im Unterschied zur Ableitung im \mathbb{R}^n ist es wegen des Fehlens einer endlichen Basis nicht möglich, die Ableitung als Matrix darzustellen. Spricht man von Richtungsableitung, auf Banachräumen durch die Gâteaux-Ableitung repräsentiert, so muss man sich im klaren sein, dass eine Richtung in Banachräumen nicht so leicht geometrisch interpretiert werden kann. Da lineare Abbildungen auf Banachräumen auch unstetig sein können, kommt eine weitere Komplikation hinzu, die in der vorliegenden Arbeit auch ein Rolle spielt. Einzelheiten können in [Ambrosetti und Prodi, 1993] nachgelesen werden.

1.3 Ein einfaches Beispiel

Zum besseren Verständnis der recht abstrakten Definition folgt ein möglichst einfaches Beispiel einer RDE. Die wohl einfachste Form einer retardierten Differentialgleichung ist folgende:

Definition 1.3.1 Sei $x(t)$ eine reellwertige Funktion, $a, b, R \in \mathbb{R}$ und $R > 0$. Eine Gleichung der Form

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - R) \tag{1.1}$$

heißt **retarded differential difference equation (RDDE)**.

Bemerkung 1.3.2 Das hier feste R , von „retarded“, wird auch *Delay* genannt.

Mit diesem Beispiel wird exemplarisch vorgeführt, wie man sich Lösungen vorstellen muss und was ein Anfangswertproblem ist. Der Ansatz

$$x(t) = ce^{\lambda t} \tag{1.2}$$

mit $c \neq 0$ wird eingesetzt und ergibt ähnlich wie bei ODE's eine Gleichung,

$$\chi(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda R} = 0, \tag{1.3}$$

die transzendente charakteristische Gleichung genannt wird. Folgender Satz gilt:

Satz 1.3.3 Sei λ eine Lösung von (1.3) mit Vielfachheit m . Dann gilt für $k \in \{0; \dots; m-1\}$:

$$t^k e^{\lambda t} \tag{1.4}$$

ist Lösung von Gleichung (1.1).

Der Beweis ist in [Hale, 1977, S. 18] nachzulesen.

Bemerkung 1.3.4 Aus diesem Satz geht zunächst weder hervor, wie viele $\lambda \in \mathbb{C}$ Gleichung (1.3) lösen, noch, ob es auch Lösungen von (1.1) gibt, die nicht von der Form (1.4) sind. Man kann zumindest zeigen, dass Summen von Lösungen immer und Reihen von Lösungen unter gewissen Bedingungen wieder Lösungen sind.

Daraus wird klar, dass die Dimension des Lösungsraums einer einfachen RDDE nicht auf der Hand liegt. Sehr deutlich sieht man das auch, wenn man versucht, ein Anfangswertproblem, im folgenden **AWP** genannt, zu formulieren. Im Falle der ODE gibt man einen Funktionswert $x(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0 vor und erhält unter geeigneten Voraussetzungen eindeutig eine spezielle Lösung. Bei festem t_0 wird damit der Lösungsraum durch Startwerte parametrisiert. Man sieht an folgendem Beispiel, dass die Vorgabe eines Startwerts im Falle einer RDDE nicht ausreicht.

Beispiel 1.3.5 Seien $a = 1$, $b = -1$ und $R = 1$. In diesem Fall löst $\lambda = 0$ Gleichung (1.3). Für die Anfangsbedingung $t_0 = 0$ und $x(0) = 1$ lösen sowohl $x_1(t) = 1$ als auch $x_2(t) = t + 1$ das Problem.

Wird statt eines Startwerts eine Startfunktion g auf dem Intervall $[t_0 - R; t_0]$ vorgeben, so erhält man weit weniger Lösungen. Fordert man in Beispiel 1.3.5 $x(t) = g(t) = \frac{1}{2}t + 1$ für $t \in [-1; 0]$, so erhält man für $t > 0$ ebenfalls $x(t) = \frac{1}{2}t + 1$ als Lösung, während $x_1(t)$ und $x_2(t)$ nicht mehr als Lösung in Frage kommen. Naheliegend sind an dieser Stelle zwei Fragen:

- Ist die Lösung dann eindeutig?
- Kann man aus einer vorgegebenen Lösung für $t > t_0$ eine eindeutige Startfunktion finden?

Die Antworten auf diese Fragen sind für erstere Ja und für letztere Nein. Da auf diese Eigenschaften in verallgemeinerter Form eingegangen wird, wird hier auf eine exakte Formulierung verzichtet.

1.4 Allgemeine Definitionen

1.4.1 Definition der RFDE

Abschnitt 1.3 hat gezeigt, dass trotz der Ähnlichkeit von RFDE's und ODE's große Unterschiede bestehen. Bei der folgenden Definition muss die Andersartigkeit der AWP's

und des Flusses berücksichtigt werden, was die Notation zuweilen etwas kompliziert erscheinen lässt. Darüber hinaus muss sie aber auch RFDE's umfassen, die mehr als eine Retardierung sowie variable Retardierungen enthalten.

Zunächst folgt die Definition einer Funktion, die gewissermaßen die Vorgeschichte einer Lösung repräsentiert.

Definition 1.4.1 Sei $x \in \mathcal{C}([-R + t_0, t_0 + M], \mathbb{R}^n)$ und $t \in [t_0, t_0 + M]$. Durch

$$x_t(\Theta) := x(t + \Theta), \quad \Theta \in [-R, 0] \quad (1.5)$$

wird die **Gedächtnisfunktion** $x_t \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ von x an der Stelle t definiert.

Im Folgenden wird festgelegt, was eine Differentialgleichung mit Retardierung sein soll.

Definition 1.4.2 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Die Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.6)$$

heißt **retarded functional differential equation (RFDE)**, wobei mit \dot{x} die rechtsseitige Ableitung gemeint ist. Dabei heißt R **maximale Retardierung** oder auch **maximaler Delay**.

Es ist nicht ohne weiteres klar, wie reichhaltig Definition 1.4.2 ist. Insbesondere heißt eine solche Gleichung RFDE, ohne dass sofort einzusehen ist, wo hier eine Retardierung bzw. ein Delay vorliegt. Folgende Beispiele können helfen, dafür ein Gespür zu entwickeln.

Beispiel 1.4.3 Für

$$f(t, x_t) = Ax_t(0) + Bx_t(-R) = Ax(t) + Bx(t - R) \quad (1.7)$$

mit $n \times n$ -Matrizen A und B ergibt sich eine RFDE. Für $n = 1$ erhält man darüber hinaus Beispiel 1.3.1.

Beispiel 1.4.4 Mit

$$f(t, x_t) = \sum_{i=1}^m A_i x_t(-r_i) = \sum_{i=1}^m A_i x(t - r_i) \quad (1.8)$$

mit den $n \times n$ -Matrizen A_i und $r_i \in [0, R]$, $1 \leq i \leq m$, wird eine RFDE definiert. Hier werden auf einfache Weise endlich viele unterschiedliche Retardierungen zugelassen.

Beispiel 1.4.5 Die Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) = Ax_t(0) + Bx_t(-r(t)) = Ax(t) + Bx(t - r(t)) \quad (1.9)$$

mit $n \times n$ -Matrizen A, B und $r(t) \in [0, R]$ für alle t ist eine RFDE. Hier ist der Delay zeitlich variabel.

An den Beispielen kann man erkennen, auf welche Weise Delays ins Spiel kommen. Da die Gedächtnisfunktion x_t die gesamte Information von $t - R$ bis t in sich trägt, kann f diese Information beliebig auswerten.

Andererseits kann sie auch nur die Information der Gegenwart berücksichtigen, womit ODE's in den RFDE's enthalten sind. Liegt eine ODE

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(t, x(t))$$

mit $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vor, so lässt sich diese zwanglos als RFDE auffassen, indem man \tilde{f} mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifiziert, wobei $K \subset \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ der Teilraum konstanter Funktionen ist.

Als zentraler Begriff wird definiert:

Definition 1.4.6 *Liegen in einer RFDE explizite Ausdrücke der Form*

$$x(t - r(t, x_t))$$

vor, so nennt man

$$r : \mathbb{R} \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

Retardierung oder auch **Delay**.

Bemerkung 1.4.7 *Diese Definition erhebt keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Sie soll nur dazu dienen, für die vorliegende Arbeit festzulegen, was im Folgenden unter Delay zu verstehen ist. Aufgrund der Kürze des Namens wird im Folgenden fast ausschließlich vom Begriff „Delay“ Gebrauch gemacht.*

Aus der Definition lässt sich ablesen, dass ein Delay keineswegs immer eine feste Zahl sein muss, was auch Thema der Arbeit ist. Folgende Definitionen legen fest, in welcher Art und Weise ein Delay variabel sein kann.

Definition 1.4.8 *Seien $r_0 \in [-R, 0)$, $s, t \in \mathbb{R}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$. Ein Delay r heißt*

- **konstant**, wenn für alle (t, φ) gilt

$$r(t, \varphi) = r_0,$$

- **zeitabhängig**, wenn für alle t und für alle φ, ψ gilt

$$r(t, \varphi) = r(t, \psi),$$

- **zustandsabhängig**, wenn für alle φ und für alle t, s gilt

$$r(t, \varphi) = r(s, \varphi).$$

Ist ein Delay zustandsabhängig, so schreibt man für $r(t, \varphi)$ kurz $r(\varphi)$.

Die Definitionen 1.4.8 sollen dazu dienen, die in der Literatur üblichen Schreibweisen für diese Arbeit eindeutig festzulegen. Der Fall des konstanten Delays ist in allen Definitionen als Sonderfall enthalten. Wirklich Sinn machen die Definitionen aber nur dann, wenn es z.B. bei einem zustandsabhängigen Delay φ und ψ gibt, so dass

$$r(\varphi) \neq r(\psi)$$

ist. Entsprechendes gilt für einen zeitabhängigen Delay. Der Fall, dass der Delay sowohl von der Zeit als auch vom Zustand abhängt, ist zwar denkbar, er kommt in der Arbeit jedoch nicht vor. Die Definition der Zustandsabhängigkeit kann in die Irre führen, wenn man sich darunter vorstellt, dass sich der Delay nicht mit der Zeit verändert. Gemeint ist aber damit, dass jegliche Abhängigkeit des Delays in den Zuständen zu suchen ist, auch wenn diese wiederum von der Zeit abhängen können. Ein zeitabhängiger Delay führt dann also zu einer nichtautonomen RFDE, während ein zustandsabhängiger Delay eine RFDE autonom belässt.

1.4.2 AWP und Halbfluss

In Beispiel 1.3.5 sieht man, dass ein zu naiv gestelltes AWP zu mehrdeutigen Lösungen führt. Bei gewöhnlichen ODE's mit lipschitzstetigem Vektorfeld reicht es aus, die Lösungsfunktionen durch Startbedingungen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zu parametrisieren. Das heißt, bei festem t_0 erhält man zu jedem Startwert x_0 eine eindeutige Lösung auf einem Intervall $[t_0, t_1]$. Folgende Definition erweist sich im Falle der RFDE's als vernünftig:

Definition 1.4.9 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion wie in Definition 1.4.2 und $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$. Man sagt, $x(t_0, \varphi)(t)$ oder auch kurz $x(t)$ löst das **Anfangswertproblem (AWP)**

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.10}$$

$$\varphi = x_{t_0}, \tag{1.11}$$

wenn $x(t)$ für $t \geq t_0$ Gleichung (1.10) löst, und nach Gleichung (1.11) die Gedächtnisfunktion von x an der Stelle t_0 identisch mit der Startfunktion φ ist. Man nennt $x(\varphi, t_0)(t)$ dann **Lösung** der RFDE mit der Startfunktion φ zum Zeitpunkt t_0 . Damit assoziiert ist die zugehörige Gedächtnisfunktion, die dann mit $x_t(\varphi, t_0)$ notiert wird. Wenn nicht anders angegeben, gilt $t_0 = 0$ und die Lösungen werden mit $x(\varphi)(t) := x(\varphi, t_0)(t)$ bzw. $x_t(\varphi) := x_t(\varphi, t_0)$ notiert.

Bemerkung 1.4.10 Man beachte, dass φ selbst beliebig wählbar ist, da die RFDE erst ab t_0 erfüllt sein muss.

Wenn solche AWP eindeutige Lösungen haben, dann kann der Lösungsraum durch Gedächtnisfunktionen $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ parametrisiert werden. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Umkehrung der Aussage, die bei ODE's selbstverständlich ist, bei

RFDE's im allgemeinen nicht gilt. Es ist bei unbekannter Vergangenheit nicht eindeutig eine Gedächtnisfunktion zu einer vorgegebenen Lösung zu finden.

Definition 1.4.11 Gegeben sei das AWP $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ mit der Startfunktion $\varphi = x_{t_0}$. Sei f stetig und es existiere für jedes AWP eine eindeutige Lösung. Die Menge $\{T_t\}$, $t \geq t_0$ der Abbildungen

$$T_t : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \quad (1.12)$$

$$\varphi \mapsto x_t(\varphi, t_0)$$

heißt **Halbfluss** der RFDE, wobei x_t die Gedächtnisfunktion zum Zeitpunkt t der Lösung x ist.

Die folgenden Definitionen für Stabilität sind in diesem Sinne in [Hale, 1977] zu finden. Sei $\|\cdot\|_0$ die zugrunde liegende Norm von $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und sei $\Omega \subset \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ offen. Es seien eine stetige Abbildung $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und das AWP

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.13)$$

$$\varphi = x_{t_0} \quad (1.14)$$

so gegeben, dass die Lösungen $x(t_0, \varphi)(t)$ stetig in (t_0, φ, t) sind, für alle $t \geq t_0$ existieren und $f(t, 0) = 0$ gilt, damit die Nulllösung stationär ist. Mit $K_\varepsilon(\varphi)$ wird die ε -Kugel in $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ um φ notiert.

Definition 1.4.12 Die Lösung $x \equiv 0$ heißt **stabil** in t_0 , wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle Lösungen $y(\varphi, t_0)$ mit $\varphi \in K_{\delta_0}(0)$ folgt

$$y_t(\varphi, t_0) \in K_\varepsilon(0)$$

für $t \geq t_0$.

Definition 1.4.13 Die Lösung $x = 0$ heißt **asymptotisch stabil** in t_0 , wenn sie in t_0 stabil ist und zusätzlich ein $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen y mit $\varphi \in K_\alpha(0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t_0, \varphi)(t) = 0$$

gilt.

Definition 1.4.14 Die Lösung $x = 0$ heißt **instabil** in t_0 , wenn sie nicht stabil ist.

Die Ergebnisse der Untersuchungen werden häufig in Form eines Diagramms veranschaulicht, wie in Abbildung 0.2 dargestellt. Der wichtigste Begriff dabei ist der der Stabilitätsgrenze.

Definition 1.4.15 Eine Teilmenge $G \subset P$ eines Parameterraums P heißt **Stabilitätsgrenze** der Lösung $x \equiv 0$, wenn sie der Rand der Menge $S \subset P$ ist, auf der $x \equiv 0$ asymptotisch stabil ist. S wird dann **Stabilitätsgebiet** genannt. Die Menge $I \subset P$, auf der $x \equiv 0$ instabil ist, heißt **Instabilitätsgebiet**. Im selben Sinne heißen dann Elemente des Stabilitätsgebiets bzw. des Instabilitätsgebiets **stabile** bzw. **instabile Punkte**. $x \equiv 0$ wird **Nulllösung** genannt.

In einem 2-dimensionalen Parameterraum besteht die Stabilitätsgrenze in der Regel aus stetigen Kurven, die das Stabilitätsgebiet vom Instabilitätsgebiet trennen. Dabei kann es auch dazu kommen, dass das Stabilitätsgebiet bzw. das Instabilitätsgebiet nicht als ganzes zusammenhängend ist.

1.5 Grundlegende Sätze

Im folgenden Abschnitt werden die grundlegenden Sätze bei RFDE's über Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von der Startfunktion auf dem Raum stetiger Funktionen formuliert.

Satz 1.5.1 (*Existenz*). Sei Ω offen in $\mathbb{R} \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann hat die RFDE

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

für alle (t_0, φ) eine Lösung $x(t_0, \varphi)(t)$ durch (t_0, φ) .

Beweis: Siehe [Hale, 1977, S. 41]. ■

Satz 1.5.2 (*Eindeutigkeit*). Seien f und Ω wie in Satz 1.5.1 gegeben. Sei zusätzlich f auf jeder kompakten Teilmenge von Ω Lipschitzstetig bezüglich φ . Dann ist die Lösung durch (t_0, φ) für alle (t_0, φ) eindeutig.

Beweis: Siehe [Hale, 1977, S. 42]. ■

Satz 1.5.3 (*Stetige Abhängigkeit*). Seien f und Ω wie in Satz 1.5.1 gegeben und sei x eine Lösung, die durch (t_0, φ) geht, auf $[t_0 - R, b]$ existiert und eindeutig ist. Sei

$$W := \{(t, x_t) : t \in [t_0 - R, b]\} \subset \Omega$$

die kompakte Menge aller Gedächtnisfunktionen der Lösung x und V eine Umgebung von W , auf der f beschränkt ist. Konvergiert eine Folge $(t^{(k)}, \varphi^{(k)}, f^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ komponentenweise gegen (t_0, φ, f) , so gibt es ein k_0 , so dass für alle $k > k_0$ eine Lösung $x^{(k)}$ von $f^{(k)}$ durch $(t^{(k)}, \varphi^{(k)})$ auf $[t^{(k)} - R, b]$ existiert. Sei weiter $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_1(\varepsilon)$, so dass $x^{(k)}(t)$ für $k \geq k_1$ auf $[t_0 - R + \varepsilon, b]$ existiert und gleichmäßig gegen x konvergiert. In dem Sinne kann man davon sprechen, dass $x^{(k)}$ auf $[t_0 - R, b]$ gleichmäßig gegen x konvergiert.

Beweis: Siehe [Hale, 1977, S. 41]. ■

1.6 Lineare autonome RFDE's

1.6.1 Definition

In der vorliegenden Arbeit sind lineare RFDE's von großer Wichtigkeit. Dazu folgende Definition.

Definition 1.6.1 Sei $L : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiger linearer Operator. Dann heißt die Gleichung

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \quad (1.15)$$

lineare autonome RFDE.

Es gilt dann insbesondere, dass L in der Form

$$L(\varphi) = \int_{-R}^0 \varphi(\theta) d\Lambda(\theta) \quad (1.16)$$

mit einer $n \times n$ -Matrix $\Lambda(\theta)$, deren Elemente von beschränkter Variation sind, ausgedrückt werden kann.

Folgendes Beispiel dient dazu, die Schreibweise verständlicher zu machen.

Beispiel 1.6.2 Sei $\Lambda(\theta)$ für $n = 1$ so gegeben, dass

$$L(\varphi) = \int_{-R}^0 \varphi(\theta) d\Lambda(\theta) = \int_{-R}^0 \varphi(\theta) \rho(\theta) d\theta \quad (1.17)$$

mit einer Dichte ρ gilt. Durch Einsetzen von Dichten erhält man so eine große Zahl von RFDE's. Mit einem geeigneten Punktmaß wird z.B. die lineare autonome RFDE

$$\dot{x}(t) = L(x_t) = ax_t(0) - bx_t(-R) = ax(t) - bx(t - R) \quad (1.18)$$

erzeugt.

Den mehrdimensionalen Fall erhält man dann durch komponentenweises Integrieren mit geeigneten Maßen.

1.6.2 Grundlegende Sätze für lineare RFDE's

Im linearen Fall lassen sich in Bezug auf die Stabilität von Lösungen Aussagen machen, die im nichtlinearen Fall so nicht möglich sind. Von besonderem Interesse ist der Halbfluss und dessen Generator.

Lemma 1.6.3 Im linearen Fall ist der Halbfluss T_t eine starkstetige Einparameterhalbgruppe linearer Operatoren auf $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$. Es existiert ein Generator

$$U : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$$

mit Definitionsbereich

$$D = \{\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t \varphi - \varphi}{t} \text{ existiert in der Norm von } \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)\}$$

und

$$U\varphi = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t \varphi - \varphi}{t} \quad (1.19)$$

für alle $\varphi \in D$. Ferner ist U auf $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ dicht definiert, und es gilt

$$\frac{d}{dt} T_t \varphi = T_t U \varphi = U T_t \varphi$$

für alle $\varphi \in D$.

Beweis: Siehe [Evans, 1998, S. 414 ff.]. ■

Darüber hinaus lassen sich sowohl der Generator also auch sein Definitionsbereich angeben, was in der vorliegenden Arbeit aber keine Verwendung findet. Näheres dazu in [Hale, 1993, S. 194].

Wie bei ODE's erhält man durch das Studium des Spektrums von U Informationen über den Lösungsraum und die Stabilität von Lösungen. Die Kenntnis einiger genereller Eigenschaften ist daher notwendig.

Satz 1.6.4 *Der Generator U besitzt reines Punktspektrum. Weiter ist $\lambda \in \sigma(U)$ genau dann, wenn λ die charakteristische Gleichung*

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \int_{-R}^0 e^{\lambda \theta} d\Lambda(\theta)) = 0, \quad (1.20)$$

mit Λ wie in 1.16, erfüllt. Das Spektrum von U hat einen nach oben beschränkten Realteil, und für jedes $\lambda \in \sigma(U)$ ist der generalisierte Eigenraum M_λ endlich-dimensional.

Beweis: Der Beweis kann [Hale, 1977, S. 168 ff.] entnommen werden. ■

Löst also ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die charakteristische Gleichung so ist λ Eigenwert des Generators und umgekehrt. Eine weitere wichtige Eigenschaft, die der algebraischen Vielfachheit, lässt sich ebenfalls übertragen.

Satz 1.6.5 *Sei $\lambda \in \sigma(U)$. Dann ist die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert aufgefasst, genau gleich der Ordnung von λ als Nullstelle von (1.20).*

Beweis: Der Satz ist Teil von Theorem 4.2. in [Hale, 1993, S. 207]. ■

Ein schon häufig erwähnter Spezialfall sind die Matrixgleichungen. Die charakteristische Gleichung ist dort besonders einfach zu erhalten.

Beispiel 1.6.6 Gegeben sei die Gleichung

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n A_i x(t - r_i) \quad (1.21)$$

mit $n \times n$ -Matrizen A_i . Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{1} - \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda r_i}) = 0. \quad (1.22)$$

Satz 1.6.7 Wenn für eine lineare RFDE mit dem Generator U für alle $\lambda \in \sigma(U)$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

gilt, ist die Nulllösung asymptotisch stabil. Darüber hinaus gibt es Konstanten K und δ , so dass für alle $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$

$$\|x_t(\varphi)\| \leq K e^{-\delta t} \|\varphi\|$$

für $t \geq 0$ gilt.

Gibt es hingegen ein $\lambda \in \sigma(U)$ mit

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0,$$

ist die Nulllösung instabil.

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus Korollar 6.1 in [Hale, 1993, S.215]. Die zweite Aussage ist eine Folgerung aus Theorem 2.1 [Hale, 1993, S.199], da die Menge der Spektralelemente mit positivem Realteil stets endlich ist. ■

Es gilt weiter folgende Aussage:

Satz 1.6.8 Für eine lineare RFDE der Form

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \quad (1.23)$$

gelten die Voraussetzungen der Sätze über Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten.

Beweis: Ein stetiger linearer Operator ist auch Lipschitzstetig mit dem Spektralradius als Lipschitzkonstante. ■

1.7 Linearisierung autonomer RFDE's

1.7.1 Formale Linearisierung

Der folgende Abschnitt geht aus der Veröffentlichung [Cooke und Huang, 1996] hervor, in der eine formale Linearisierung einer zustandsabhängigen RFDE gebildet wird. Zentraler Gedanke dabei ist, dass das Stabilitätsverhalten sowohl im Stabilitätsgebiet, als auch im Instabilitätsgebiet zwischen der Ausgangsgleichung und der linearen Näherung lokal sehr ähnlich sein muss. Das heißt, dass es für jeden Punkt im Parameterraum eine Umgebung um $0 \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ gibt, in der das Stabilitätsverhalten bezüglich der Nulllösung beider Gleichungen das selbe ist. Dazu wird zunächst eine spezielle Form einer RFDE angegeben.

Beispiel 1.7.1 Seien $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$, $f : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r_1, r_0 \geq 0$ mit $r_0 + r_1 \leq R$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Seien f und g stetig differenzierbar. Sei weiter $r : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, r_1]$ stetig und η von beschränkter Variation auf $[-r_0, 0]$. Dann ist durch

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x_t) \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (1.24)$$

mit

$$F(\varphi) = f(\varphi, \int_{-r_0}^0 g(\varphi(-r(\varphi) + s)) d\Lambda(s)) \quad (1.25)$$

eine zustandsabhängige RFDE definiert.

Ist eine RFDE wie in Beispiel 1.7.1 gegeben, so lässt sich folgender Satz formulieren, der die formale Linearisierung enthält und den Bezug zur Ausgangsgleichung herstellt.

Satz 1.7.2 Zu Beispiel 1.7.1 sei der lineare Operator $L : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$L(\varphi) = d_\varphi f(0, \hat{\Lambda}g(0))(\varphi) + d_y f(0, \hat{\Lambda}g(0))\left(\int_{-r_0}^0 dg(0)\varphi(-r(0) + s)d\Lambda(s)\right) \quad (1.26)$$

mit $\hat{\Lambda} = \int_{-r_0}^0 d\Lambda(s)$ gegeben. Es gelte $F(0) = 0$ und mit $d_\varphi f$ und $d_y f$ seien die partiellen Ableitungen von f nach der ersten bzw. zweiten Komponente notiert. Dann gilt:

1. Sei

$$\sup\{Re(\lambda) : \det(\lambda \mathbf{1} - L(e^{\lambda \cdot})) = 0\} = -\alpha < 0. \quad (1.27)$$

Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \alpha$ eine Konstante $k(\varepsilon)$ und eine Umgebung $V(\varepsilon) \subset \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ des Ursprungs, so dass für $\varphi \in V(\varepsilon)$ die Lösung $x_t(\varphi)$ von 1.24 für $t \geq 0$ definiert ist und zusätzlich gilt:

$$\|x_t(\varphi)\|_0 \leq k(\varepsilon)e^{-(\alpha-\varepsilon)t} \|\varphi\|_0. \quad (1.28)$$

2. Sei

$$\sup\{Re(\lambda) : \det(\lambda \mathbb{1} - L(e^\lambda \cdot)) = 0\} = \alpha > 0. \quad (1.29)$$

Dann ist die Nulllösung instabil.

Beweis: Siehe [Cooke und Huang, 1996, S. 1419 ff.] ■

Dabei wird jedoch nicht gezeigt, dass die Lösung des AWP auch eindeutig ist, was eine genauere Betrachtung der nichtlinearen Ausgangsgleichung nötig macht.

1.7.2 Linearisierung durch Differentiation

Wenn sich für eine RFDE

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \quad (1.30)$$

mit $f : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zeigen lässt, dass f stetig differenzierbar ist, dann ist die Linearisierung der RFDE per Definition durch die Ableitung gegeben.

2 Modellgleichungen und Stabilitätskriterien

Ziel des folgenden Kapitels ist es, darüber Aufschluss zu geben, inwieweit eine lineare Modellierung des Problems legitim ist. Insbesondere wird geklärt, ob die Stabilität der Nulllösung im autonomen Fall von Variationen des Delays beeinflusst wird. Der erste Abschnitt stellt eine Zusammenfassung der für das Kapitel wesentlichen Methoden und Ergebnisse aus [Frank, 2002] dar. Neben der Zusammenfassung im zweiten Abschnitt wird das Modell um einen Freiheitsgrad erweitert, was zum Ziel hat, Variationen des Delays als zustandsabhängigen, autonomen Prozess zu modellieren.

2.1 Eindimensionales Modell

Um eine erste Vorstellung davon zu bekommen, wie sich ein variabler Delay auf die Stabilität der Nulllösung einer Modellgleichung auswirkt, wird in [Frank, 2002] folgende Modellbildung vorgenommen, wie bereits in Stépán (1989) erschienen:

Es wird zunächst davon ausgegangen, dass das Werkzeug die einzige schwingfähige Komponente des Systems ist. Es sei lediglich der Freiheitsgrad in x -Richtung zugelassen, wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Die x -Richtung ist also der orthogonal auf das Werkstück zeigende translatorische Freiheitsgrad des Werkzeugs. Dabei muss man beachten, dass sich das Werkzeug nach einer Umdrehung um einen festen Wert tiefer im Werkstück befindet. Führt man nun ein Koordinatensystem ein, das mit konstanter Geschwindigkeit dem Werkzeug in das Werkstück folgt, so entspricht die Nulllösung $x(t) \equiv 0$ einem glatten spiralförmigen Schnitt. Abbildung 2.2 illustriert eine angestrebte Nulllösung, wobei das Verhältnis zwischen Schnitttiefe und Radius R_w extrem überzeichnet ist. Setzt man für die x -Richtung die Gleichung eines harmonischen, gedämpften, getriebenen Oszillators an, so erhält man die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + 2mD_x\omega_0\dot{x}(t) + m\omega_0^2x(t) = G_x(t). \quad (2.1)$$

Der nächste Schritt ist, die Größen zu identifizieren, die einen entscheidenden Einfluss auf die treibende Kraft $G_x(t)$ haben. In [Frank, 2002] wird davon ausgegangen, dass lediglich die momentane Spandicke bzw. Schnitttiefe $s(t)$ ins Gewicht fällt. In der gewünschten Schnitttiefe s_0 soll die Kraft verschwinden; es gilt also $G_x(t) = F_x(s(t)) - F_x(s_0)$. Das ist so zu erklären, dass im mitgeführten Koordinatensystem der Gleichgewichtszustand genau dann gegeben ist, wenn keine äußere Kraft wirkt, was genau dann gelten soll,

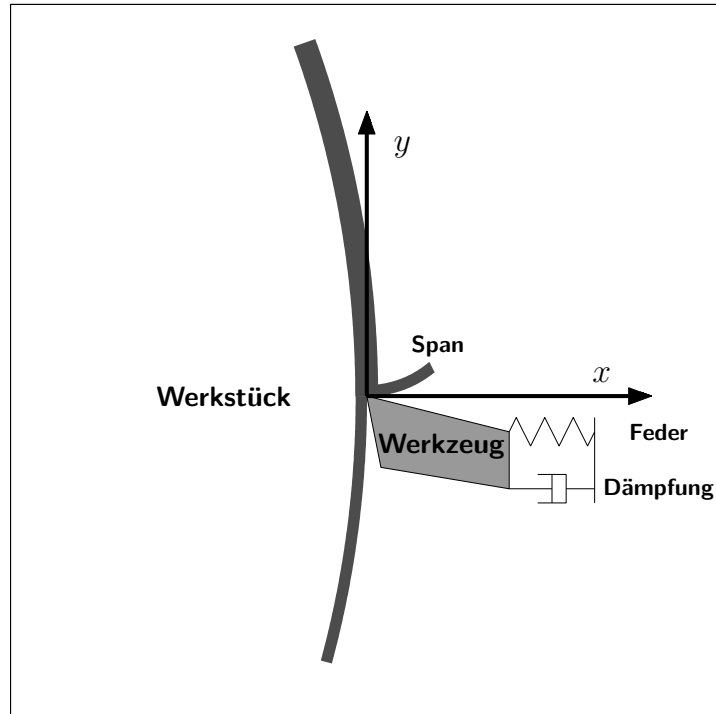


Abbildung 2.1: Das Werkzeug als eindimensionaler harmonischer Oszillator

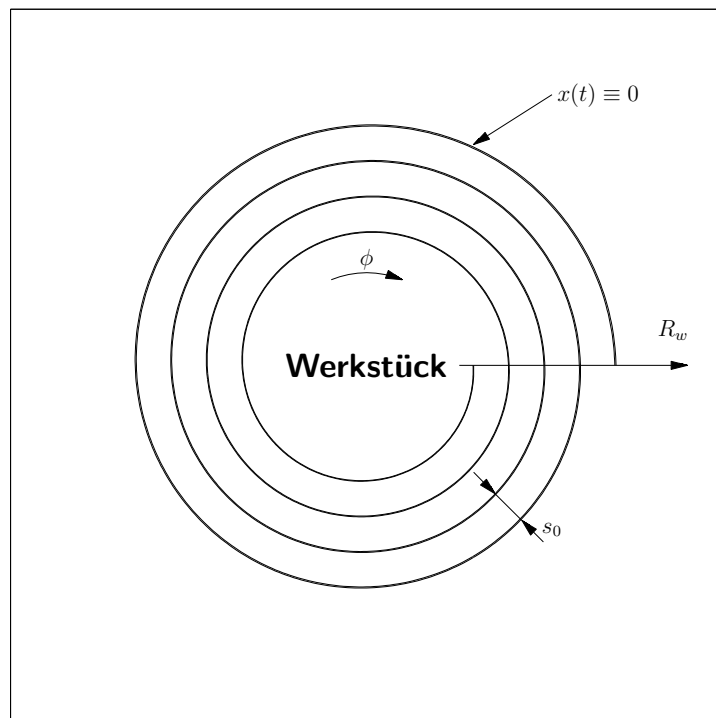


Abbildung 2.2: Die idealisierte Nulllösung

wenn die erwünschte Spandicke erreicht ist. Ohne die Abhängigkeit explizit zu kennen, wird eine lineare Näherung der Form

$$F_x(s) \approx F_x(s_0) + mk_x(s - s_0) \quad (2.2)$$

verwendet. Dabei wird $mk_x = d_s F_x(s_0)$ in der Literatur als Schnittkraftparameter bezeichnet. Ist das Werkzeug positiv ausgelenkt, so wird der Span dünner als erwünscht. War das Werkzeug eine Umdrehung zuvor positiv ausgelenkt, so trifft das Werkzeug nun auf eine Erhebung, der Span wird also dicker. Für die Schnitttiefe ergibt sich die Beziehung

$$s(t) = s_0 - x(t) + x(t - r). \quad (2.3)$$

Ausgehend von einer konstanten Umdrehungsdauer r ergibt sich insgesamt

$$\ddot{x}(t) + 2D_x\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) + k_x(x(t) - x(t - r)) = 0. \quad (2.4)$$

Äquivalent dazu ist das lineare ODE-System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t - r) \\ v_2(t - r) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

mit

$$v(t) := \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Das ist eine lineare autonome RFDE in Matrixform, wie in 1.6.6 eingeführt. Satz 1.6.4 ist also anwendbar, und für alle λ aus $\sigma(A)$ gilt nach der Substitution $y(s) := v(rs)$:

$$\frac{\lambda^2}{r^2} + 2D_x\omega_0\frac{\lambda}{r} + (\omega_0^2 + k_x) - k_x e^{-\lambda} = 0. \quad (2.7)$$

Die in [Frank, 2002] verwendete Methode der D-Subdivision aus [El'sgol'ts und Norkin, 1973] und [Cooke und Grossman, 1982], die im Wesentlichen darauf fußt, dass $Re(\lambda) = 0$ gesetzt wird, führt schließlich zu parametrisierten Kurven, die unter anderem das Stabilitätsgebiet begrenzen, siehe Bild 2.3. Beachtenswert ist hierbei, dass Gleichung 2.7 in der Regel abzählbar unendlich viele Lösungen hat, was das Auftreten der verschiedenen Kurvenäste, die sich stückweise im Instabilitätsgebiet befinden, plausibel macht. Das eigentliche Problem ist nun, dass die vorhergesagten Stabilitätsgebiete von Messungen an Drehmaschinen im Labormaßstab bestätigt werden, von größeren Modellen in der Fertigung jedoch nicht, wie in Bild 2.4 dargestellt. Die Achsenbeschriftung ist mit Größen vorgenommen, die in der Fertigung relevant sind und es gilt $a_{per} \sim k_x$ und $v_c \sim r_0$. Die durchgezogene Linie entspricht der theoretischen Stabilitätsgrenze, während mit Kreisen Punkte markiert sind, an denen sich laut Messung die Stabilität der Nulllösung ändert. Die gestrichelten Linien stellen Fehlergrenzen der Messung dar. Vergleiche hierzu auch [Kleckner, 2001, S. 141 f.]. Es ergibt sich die Frage, an welchen Stellen die bisherigen Annahmen zu verbessern sind. Mögliche kritische Stellen sind:

2 Modellgleichungen und Stabilitätskriterien

1. Die Annahme, r sei konstant.
2. Die Auffassung als Problem der Festkörpermechanik.
3. Die Modellierung mit einem Freiheitsgrad.

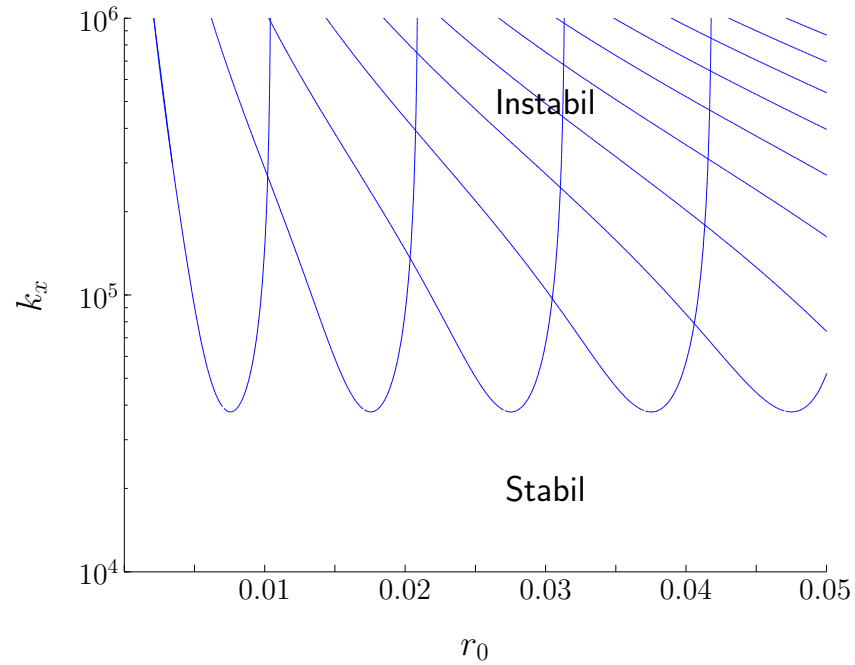


Abbildung 2.3: Parametrisierung der Kurven mit $Re(\lambda) = 0$

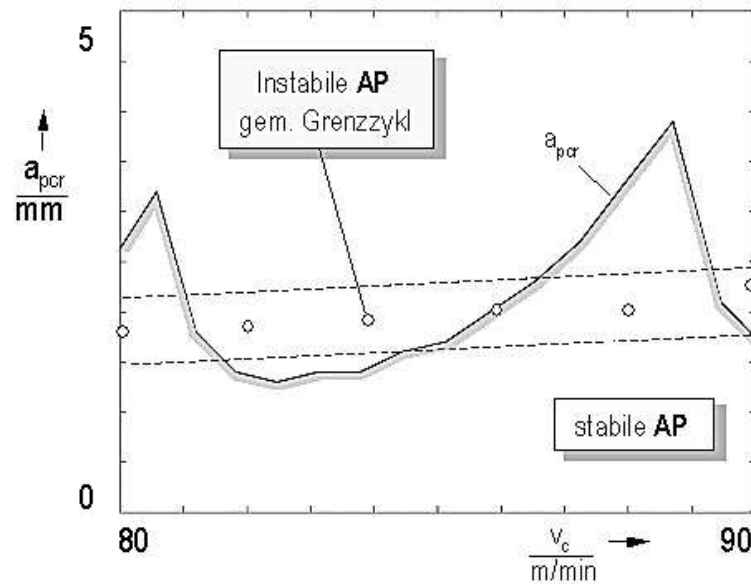


Abbildung 2.4: Theoretische und gemessene Stabilitätsgrenze

4. Die Annahme, dass $F_x(t)$ als $F_x(s(t))$ aufzufassen ist.
5. Der lineare Ansatz für $F_x(s)$.

Der erste Punkt war das motivierende Moment in [Frank, 2002]. Dort wurde die Frage geklärt, ob bzw. welchen Einfluss eine zeitliche Variation des Delays auf die Stabilitätsgrenzen hat. Das wurde mit einem störungstheoretischen Ansatz bewerkstelligt. Der Delay

$$r(t) := r_0 + \varepsilon f(t)$$

wurde dabei als zeitabhängig gestört angesetzt. Ziel war es, $f(t)$ als Fourierreihe zu entwickeln und Bedingungen für die Koeffizienten zu erhalten, die Rückschlüsse auf das Stabilitätsverhalten erlauben. Es zeigte sich jedoch, dass schon eine Entwicklung in erster Ordnung

$$f(t) = c_0 + c_1 \sin \omega t$$

außerordentlich komplexe Bedingungen nach sich zog. Die Bedingungen ergaben tatsächlich, dass es (c_1, ω) gibt, bei denen die asymptotisch stabile Nulllösung instabil bzw. eine instabile Nulllösung stabil wird. Da man dabei einen explizit zeitabhängigen Delay voraussetzt, verlässt man das Gebiet der autonomen RFDE's. Die dort gemachten Erfolge ließen es dennoch als lohnenswert erscheinen, dem Problem der variablen Delays weiter auf den Grund zu gehen, was in der vorliegenden Dissertation geschehen ist.

Punkt zwei ist darum als kritisch zu betrachten, da an der Schnittstelle Prozesse stattfinden, die der Kontinuumsmechanik zuzuordnen sind. Die beiden Körper berühren sich auf einer nicht zu vernachlässigend großen Fläche, wo zum Teil Fließprozesse zu beobachten sind. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch nicht näher darauf eingegangen, wie die Schnittkräfte dort entstehen und verteilt sind, sondern es wird weiter von einer resultierenden Schnittkraft zwischen Werkzeug und Werkstück ausgegangen, die an einem Punkt angreift.

Zu Punkt drei kann man feststellen, dass man z.B. das Werkzeug als komplexen mechanischen Körper modellieren könnte, der aus weit mehr als nur einem Massepunkt besteht, und jeder Massepunkt wieder alle drei Freiheitsgrade besitzt. Dasselbe gilt auch für das Werkstück. Da in dieser Arbeit die Delayvariationen im Vordergrund stehen, wird die grobe Vereinfachung so weit es geht beibehalten. In Kapitel 2.2 wird dennoch ein weiterer Freiheitsgrad in das System implementiert, was dort auch erläutert wird.

Zu vier lässt sich sagen, dass die Schnittkraft sicher von mehr Faktoren als nur der Schnittkraft abhängt und es ist sicher von Interesse alle relevanten Größen zu untersuchen, wenn man ein vollständiges Modell des Problems erhalten will. Aber auch hier ist es für die vorliegende Arbeit nur dann sinnvoll, eine Erweiterung vorzunehmen, wenn sie mit Delayvariationen korreliert.

Punkt fünf spricht das Problem an, dass man von vornherein nur eine lineare Modellierung der Schnittkraft zulässt. Will man zu einem der Wahrheit näherkommenden

Modell gelangen, so muss man wohl vor allem hier eine genauere Analyse ansetzen. Da im Verlauf der Arbeit jedoch nichtlineare Aspekte im Vordergrund stehen sollen, die sich ausschließlich auf Delayvariationen beziehen, bleiben andere nichtlineare Einflüsse in dieser Arbeit außen vor.

In der vorliegenden Arbeit wird lediglich der Aspekt des variablen Delays in seiner Wirkung auf die Stabilität der Nulllösung näher untersucht. Die hier gemachten Fortschritte lassen sich in weiterführenden Arbeiten sicher mit Ansätzen vereinen, die den anderen genannten Aspekten Rechnung tragen.

2.2 Ein Modell mit zwei Freiheitsgraden

Statt eines zeitabhängigen Ansatzes für den Delay ist auch ein zustandsabhängiger Ansatz denkbar. Die Idee ist dabei, dass der Delay nur dann variiert, wenn sich eine noch näher zu bestimmende Zustandsgröße der RFDE verändert. Bei der Modellbildung in Abschnitt 2.1 fällt allerdings auf, dass eine Variation des Delays nur zeitabhängig erfolgen kann, da eine Abhängigkeit des Delays von der x -Richtung nicht zu erkennen ist. Es gibt jedoch andere Freiheitsgrade, die in direktem Zusammenhang mit dem Delay stehen. Sowohl translatorische Schwingungen des Werkzeugs in y -Richtung als auch Drehschwingungen des Werkstücks in ϕ -Richtung, wie in Bild 2.5 dargestellt, haben einen direkten Einfluss auf den Delay. Damit ist es möglich, die Gleichung zu erweitern und einen variablen Delay zu erhalten. In den folgenden Abschnitten werden die

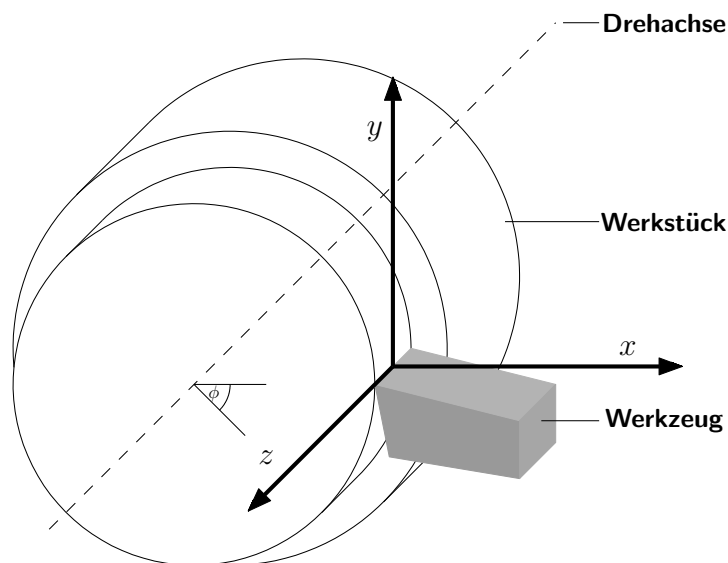


Abbildung 2.5: Der Drehprozess mit weiteren Freiheitsgraden

zwei Möglichkeiten vorgestellt, wie ein zweiter Freiheitsgrad implementiert werden kann. Dabei wird die Kopplung so einfach wie nur möglich gehalten, um dem ursprünglichen Modell nahe zu kommen. Der Delay wird zunächst nur mit r notiert, ohne dass näher

darauf eingegangen wird, in welcher Weise er variiert. Es folgt darauf hin ein Abschnitt, in dem die Eigenschaften des dann variablen Delays genau untersucht werden. Schließlich wird noch eine Modifikation der Grundannahmen vorgenommen, die sich auf die Hinzunahme weiterer Kopplungsparameter bezieht, um am Ende das für die weitere Arbeit zugrunde liegende Modell zu erhalten. Das Ziel ist dabei, ein möglichst einfaches zustandsabhängiges Modell zu finden, das trotzdem alle unbedingt nötigen Parameter enthält.

2.2.1 Hinzunahme der y -Richtung

Unter der Annahme, dass die Schnittkraft wie in Abschnitt 2.1 nur von der Schnitttiefe abhängt, gilt folgende ODE für $y(t)$:

$$m\ddot{y} + D_y m \mu_0 \dot{y} + m \mu_0^2 y = F_y(s) - F_y(s_0) \quad (2.8)$$

Die Masse des Werkzeugs wird später abdividiert, und alle Gleichungen werden ohne Einheiten verwendet. Wie in x -Richtung wird die lineare Näherung

$$F_y(s) \approx F_y(s_0) + m k_y (s - s_0) \quad (2.9)$$

mit $dF_y/ds(s_0) = m k_y$ angesetzt. Mit Gleichung 2.3 ergibt sich insgesamt das System 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + 2D_x \omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + k_x (x(t) - x(t - r)) = 0 \quad (2.10)$$

$$\ddot{y}(t) + 2D_y \mu_0 \dot{y}(t) + \mu_0^2 y(t) + k_y (x(t) - x(t - r)) = 0. \quad (2.11)$$

Das äquivalente System erster Ordnung lautet dann

$$\dot{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_y & 0 & -\mu_0^2 & -2D_y \mu_0 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v(t - r) \quad (2.12)$$

mit

$$v_1(t) := x(t), \quad v_2(t) := \dot{x}(t), \quad v_3(t) := y(t), \quad v_4(t) := \dot{y}(t). \quad (2.13)$$

Bei diesem Modell wurde die Abhängigkeit der Kraft von der y -Position und von der durch \dot{y} geänderten Schnittgeschwindigkeit vernachlässigt. Die Abhängigkeit der Kraft von y kommt durch die gekrümmte Oberfläche zustande, was sich für kleine Auslenkungen nur wenig auswirkt.

2.2.2 Hinzunahme der ϕ -Richtung

Statt der y -Richtung des Werkzeuges kann auch der Drehwinkel ϕ des Werkstücks als zweiter Freiheitsgrad verwendet werden. Wird von einer mittleren Winkelgeschwindigkeit n_0 ausgegangen und das Werkstück in einem mitrotierenden Koordinatensystem betrachtet, so ergibt sich für $\phi(t)$ die ODE

$$\ddot{\phi} + D_\phi \nu_0 \dot{\phi} + \nu_0^2 \phi = \frac{r_W}{J} (F_\phi(s) - F_\phi(s_0)). \quad (2.14)$$

Der Wert $\phi = 0$ bedeutet also, dass die Winkelgeschwindigkeit nicht von n_0 abweicht. Es wird wieder später durch den Quotienten aus Radius und Trägheit $\frac{r_W}{J} = 1$ dividiert und alle Gleichungen ohne Einheiten verwendet. Dabei wird r_W , der Radius der Walze, als konstant angenommen, da $r_W \gg x(t)$ ist. Es gilt zwar $F_y = -F_\phi$, da die auf das Werkzeug wirkende Schnittkraft F_y die Gegenkraft zu der tangential an der Welle angreifenden Kraft F_ϕ ist, aus Gründen der Konsistenz werden aber trotzdem verschiedene Bezeichnungen gewählt. Es gelte wieder

$$F_\phi(s) \approx F_\phi(s_0) + \frac{J}{r_W} k_\phi (s - s_0) \quad (2.15)$$

mit $dF_\phi/ds(s_0) = \frac{J}{r_W} k_\phi$. Mit Gleichung 2.3 ergibt sich insgesamt das System 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + 2D_x \omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + k_x (x(t) - x(t - r)) = 0 \quad (2.16)$$

$$\ddot{\phi}(t) + 2D_\phi \nu_0 \dot{\phi}(t) + \nu_0^2 \phi(t) + k_\phi (x(t) - x(t - r)) = 0. \quad (2.17)$$

Das äquivalente System erster Ordnung lautet dann

$$\dot{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi \nu_0 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v(t - r) \quad (2.18)$$

mit

$$v_1(t) := x(t), \quad v_2(t) := \dot{x}(t), \quad v_3(t) := \phi(t), \quad v_4(t) := \dot{\phi}(t). \quad (2.19)$$

Das Koordinatensystem des gekoppelten Systems ist kein anschauliches mehr, da es beim x -Freiheitsgrad translatorisch und beim ϕ -Freiheitsgrad rotatorisch mitgeführt wird. Im Unterschied zur y -Richtung ist eine Abhängigkeit der Schnittkraft von der momentanen Position ϕ allein nicht zu erkennen. Hier kommt jedoch das von x abhängige Moment hinzu, da sich der Radius verändert, was aufgrund des sehr großen Verhältnisses des Radius zu den betrachteten Auslenkungen in x -Richtung vernachlässigt wurde. Darüber hinaus wird die Abhängigkeit der Schnittkraft von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ vernachlässigt.

2.2.3 Zustandsabhängiger Delay

Es ist leicht einzusehen, dass der Delay in natürlicher Weise von der Drehzahl bzw. der Drehwinkelfunktion abhängt. Eine Abhängigkeit von der y -Koordinate des Werkstücks ist zwar gegeben, es gibt jedoch zwei wichtige Argumente, weshalb sie nicht berücksichtigt wird. Zum einen ist die Bildung des Delayfunktionalen über die Drehwinkelfunktion leichter zu bewerkstelligen. Zum anderen kann man die Drehschwingung des Werkstücks lokal auf eine transversale y -Schwingung des Werkzeugs transformieren und umgekehrt.

Die Ursache des Delays ist die Tatsache, dass ein Berührungspunkt des Werkstücks mit dem Werkzeug nach Vollendung einer Umdrehung wieder auf das Werkzeug trifft. Dabei ist zu beachten, dass sich eine Änderung der Geschwindigkeit über eine gesamte Umdrehungsdauer auf den momentan gültigen Delay auswirkt. Man muss also die gesamte Vergangenheit von ϕ über eine Umdrehung kennen, um den momentanen Delay zu bestimmen. Es wird daher darauf hinaus laufen, dass der bisher immer nur als r bezeichnete Delay zustandsabhängig ist, was am Ende auf eine Gleichung der Form

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(v_t))$$

führt. Im folgenden Abschnitt wird der Delay als Funktional definiert und seine zunächst wichtigen Eigenschaften werden geklärt. Da die zustandsabhängige Formulierung später zu den entscheidenden Ergebnissen führt und der Delay selbst dabei die tragende Rolle spielt, sind die folgenden Ausführungen von zentraler Bedeutung.

Die Dauer r hängt nicht explizit von der x -Koordinate des Werkzeugs ab, da letztere immer radial verläuft und im vorliegenden Modell die Winkelgeschwindigkeit statt der Oberflächengeschwindigkeit konstant gehalten wird. Sei nun der konstante Delay r_0 als die Dauer einer Umdrehung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n_0 festgelegt. Im festen, nicht rotierenden Koordinatensystem wird nun mit $\Omega(t)$ die Drehwinkelfunktion bezeichnet, die einem Zeitpunkt t den momentanen Stand des Werkstücks im Bogenmaß zuordnet. Bei konstanter Drehzahl ist also z.B. $\Omega(\frac{r_0}{2}) = \pi$, $\Omega(r_0) = 2\pi$ usw. Damit ist im selben Koordinatensystem die Winkelgeschwindigkeit durch $\dot{\Omega}(t)$ gegeben. Um in das neue Koordinatensystem zu gelangen, muss die mittlere Winkelgeschwindigkeit n_0 zur neuen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ im rotierenden Koordinatensystem addiert werden. Es sei also

$$\dot{\Omega}(t) = n_0 + \dot{\phi}(t), \quad (2.20)$$

wobei $\|\dot{\phi}(t)\|_0 < n_0$ für alle t gelten soll. Damit stellt $\dot{\phi}(t)$ die Abweichung von der mittleren Winkelgeschwindigkeit im alten System dar. Weiter gelte $n_0 r_0 = 2\pi$ für $r_0 \ll R$, damit der mittlere Delay r_0 hinreichend weit vom maximalen Delay R entfernt ist.

Entscheidend ist, dass man nur die Gedächtnisfunktion ϕ_t kennen muss, um den Delay bestimmen zu können, denn zu jedem Zeitpunkt ist die Dauer der letzten Umdrehung durch den Verlauf der Drehwinkelfunktion bis zum Zeitpunkt in der Vergangenheit festgelegt, in dem das Werkstück um 2π zurück gedreht war. Als mathematische Vereinfachung wird die Zeit um ein festes $R \gg r$ zurückgedreht, damit die entstehenden

Funktionen immer auf dem selben Intervall definiert sind. Damit stellt R eine obere Schranke für die Delays dar, die nie erreicht werden soll. Im Übrigen wird im Folgenden eine negative Zeit aus $[-R, 0]$ immer mit θ notiert, was immer eindeutig als Zeitpunkt in der Vergangenheit, ausgehend von einem momentanen Zeitpunkt t , identifiziert werden kann. Das Ziel ist es, Funktionen φ auf dem Intervall $[-R, 0]$ in dem Sinne einen Delay zuzuordnen, dass sie zunächst als Abweichung von der proportionalen Drehwinkelfunktion $\Omega_0(\theta) = n_0\theta$ mit $\theta \in [-R, 0]$ aufgefasst werden. Dann wird von $\theta = 0$ aus so weit in die Vergangenheit zurück gegangen, bis die Differenz der Drehwinkel genau 2π beträgt. Formal lässt sich das wie folgt bewerkstelligen. Die gestörte Drehwinkelfunktion sei durch

$$\Omega_\varphi(\theta) = n_0\theta + \varphi(\theta), \quad (2.21)$$

$\theta \in [-R, 0]$ gegeben. Dann ist für $\varphi \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R})$ mit $U := \{\varphi : |\dot{\varphi}(\theta)| < n_0\}$ das Delay-Funktional r , im Folgenden auch kurz Delay genannt, durch

$$\Omega_\varphi(-r) = \Omega_\varphi(0) - 2\pi = \varphi(0) - 2\pi$$

definiert. Damit ergibt sich r als Abbildung

$$\begin{aligned} r : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) \supset U &\rightarrow [0, R] \\ \varphi &\mapsto -\Omega_\varphi^{-1}(\varphi(0) - 2\pi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die Existenz der Umkehrabbildung ergibt sich aus den Voraussetzungen für φ .

Bemerkung 2.2.1 *Das Funktional ist auch dann wohldefiniert, wenn Ω_φ nicht invertierbar ist. Wenn für die Drehwinkelfunktion ab einem Zeitpunkt t_0 der Wert -2π für $\theta \in [-R, 0]$ immer existiert, kann der Delay als Funktional auf $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ gebildet werden. In diesem Fall ist $r(\varphi) = -\max\{\theta : \Omega_\varphi(\theta) = \varphi(0) - 2\pi\}$. Bildhaft dreht man also einfach die Zeit solange zurück, bis man zum ersten Mal eine volle Umdrehung vollendet hat. Das soll aber nicht Gegenstand der Untersuchungen sein.*

Als nächstes stellt sich die Frage nach der Gutartigkeit des Funktionals. Anders als im endlichdimensionalen Fall spielt die Wahl der Topologie im Urbildraum dabei eine entscheidende Rolle. Der Banachraum $(\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ mit $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_0 + \|\dot{\varphi}\|_0$ ist im vorliegenden Fall passend. Physikalisch interpretiert ist das der Raum aller stetigen Ortskurven, deren Geschwindigkeiten ebenfalls stetige Funktionen sind. Da in der klassischen Mechanik keine sprunghaften Änderungen von Ort und Geschwindigkeit auftreten, ist diese Voraussetzung sinnvoll.

Es lässt sich zeigen, dass das Funktional r in einer für die Behandlung des Problems ausreichend großen Umgebung von $0 \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R})$ stetig differenzierbar ist. Bei der vorliegenden Definition ist es nachvollziehbar, wie der Delay zustande kommt. Das Bilden der Umkehrfunktion selbst und auch die Tatsache, dass die Drehwinkelfunktion Ω nicht fest ist, sondern wiederum von φ abhängt, macht die Definition für analytische Zwecke ungeeignet. Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die Differenzierbarkeit über einen Umweg zu zeigen. Wenn sich eine differenzierbare Hilfsfunktion findet, die r und

φ als Parameter enthält, so lässt sich mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen die Differenzierbarkeit von r zeigen. Ist anschließend nachweisbar, dass der Parameter r genau der Definition des Delayfunktionalentspricht, so ist das Ziel erreicht. Die benutzten Grundlagen zu Ableitungen in Banachräumen sind in [Ambrosetti und Prodi, 1993] nachzulesen.

Lemma 2.2.2 Sei $U =: \{\eta \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) : \|\eta\|_1 < n_0\}$. Definiert man die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{r} : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\eta, r) &\mapsto r + \frac{1}{n_0}(\eta(0) - \eta(-r) - 2\pi), \end{aligned} \quad (2.23)$$

so ist diese in $\hat{U} := U \times [-R, 0]$ stetig differenzierbar.

Beweis: Betrachtet man die in (φ, t) stetige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} d\hat{r}(\eta, r) : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, t) &\mapsto \left(1 + \frac{\dot{\eta}(-r)}{n_0}\right)t + \frac{\varphi(0) - \varphi(-r)}{n_0}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

so gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{|\hat{r}(\eta + \varphi, r + t) - \hat{r}(\eta, r) - d\hat{r}(\eta, r)(\varphi, t)|}{\|\varphi\|_1 + |t|} \\ &= \frac{\left| r + t + \frac{\eta(0) + \varphi(0) - \eta(-r-t) - \varphi(-r-t) - 2\pi}{n_0} - \left(r + \frac{\eta(0) - \eta(-r) - 2\pi}{n_0}\right) - \left(1 + \frac{\dot{\eta}(-r)}{n_0}\right)t - \frac{\varphi(0) - \varphi(-r)}{n_0} \right|}{\|\varphi\|_1 + |t|} \\ &= \frac{|-\eta(-r-t) - \varphi(-r-t) + \eta(-r) - \dot{\eta}(-r)t + \varphi(-r)|}{n_0(\|\varphi\|_1 + |t|)} \\ &\leq \frac{|\eta(-r) - \eta(-r-t) - \dot{\eta}(-r)t|}{n_0 |t|} + \frac{|\varphi(-r) - \varphi(-r-t)|}{n_0 \|\varphi\|_1} \\ &\leq \frac{1}{n_0} \left(\left| \frac{\eta(-r) - \eta(-r-t)}{t} - \dot{\eta}(-r) \right| + |t| \right) \xrightarrow{|t| \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Letzteres gilt nach Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, was plausibel macht, warum die Supremumsnorm für die Differenzierbarkeit des Delayfunktionalentsprechend ist. Damit ist \hat{r} differenzierbar auf \hat{U} und $d\hat{r}(\eta, r)(\varphi, t)$ ist die Ableitung an der Stelle (η, r) , angewandt auf (φ, t) .

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (\eta, r) &\mapsto d\hat{r}(\eta, r) \end{aligned} \quad (2.26)$$

stetig in (η, r) ist. Man betrachtet hierzu für $\|\varphi\|_1 \leq 1$ und $|t| \leq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & |d\hat{r}(\eta + \mu, r + s)(\varphi, t) - d\hat{r}(\eta, r)(\varphi, t)| \\
 & \leq \left| \left(1 + \frac{\dot{\eta}(-r - s) + \dot{\mu}(-r - s)}{n_0} - 1 - \frac{\dot{\eta}(-r)}{n_0}\right)t + \frac{\varphi(0) - \varphi(-r - s) - \varphi(0) + \varphi(-r)}{n_0} \right| \\
 & \leq \frac{1}{n_0} (|t| (|\dot{\eta}(-r - s) - \dot{\eta}(-r) + \dot{\mu}(-r - s)|) + |\varphi(-r - s) - \varphi(-r)|) \\
 & \leq \frac{1}{n_0} (|t| |\dot{\eta}(-r - s) - \dot{\eta}(-r) + \dot{\mu}(-r - s)| + \|\varphi\|_1 |(-r - s) - (-r)|) \\
 & \leq \frac{1}{n_0} (|\dot{\eta}(-r - s) - \dot{\eta}(-r)| + |\dot{\mu}(-r - s)| + |s|) \xrightarrow{\|\mu\|_1 + |s| \rightarrow 0} 0. \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Da die Ungleichung unabhängig von (φ, t) ist, folgt, dass für $\|(\mu, s)\|$ gegen 0 auch $\|d\hat{r}(\eta + \mu, r + s) - d\hat{r}(\eta, r)\|_{\text{op}}$ gegen 0 geht, und damit ist \hat{r} stetig differenzierbar auf \hat{U} . ■

Aus der Ableitung von \hat{r} kann man auf einfache Weise die partiellen Ableitungen gewinnen. Sie sind durch

$$\begin{aligned}
 d_\eta \hat{r}(\eta, r)(\varphi) &= d\hat{r}(\eta, r)(\varphi, 0) = \frac{\varphi(0) - \varphi(-r)}{n_0}, \\
 d_r \hat{r}(\eta, r)(t) &= d\hat{r}(\eta, r)(0, t) = \left(1 + \frac{1}{n_0} \dot{\eta}(-r)\right)t
 \end{aligned}$$

gegeben. Damit lässt sich folgender Satz zeigen:

Satz 2.2.3 *Das Funktional*

$$\begin{aligned}
 r : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) \supset U &\rightarrow \mathbb{R} \\
 \varphi &\mapsto r(\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

ist auf $U = \{\eta \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) : \|\eta\|_1 < n_0\}$ stetig differenzierbar.

Beweis: Für $\|\eta\|_1 < n_0$ ist $d_r \hat{r}(\eta, r)$ invertierbar. Auf $M := \{(\eta, r) \in \hat{U} : \hat{r}(\eta, r) = 0\}$ ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar, und es gibt für alle $(\eta, r) \in M$ Umgebungen $U_\eta \subset U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $r_\eta : U_\eta \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\hat{r}(\varphi, r_\eta(\varphi)) = 0. \tag{2.29}$$

Nun ist nur noch zu zeigen, dass diese Funktion der gesuchten Funktion entspricht. Die Gleichung

$$r_\eta(\varphi) + \frac{1}{n_0}(\varphi(0) - \varphi(-r_\eta(\varphi)) - 2\pi) = 0 \tag{2.30}$$

führt zu

$$-n_0 r_\eta(\varphi) + \varphi(-r_\eta(\varphi)) = \varphi(0) - 2\pi. \tag{2.31}$$

Das entspricht aber

$$\Omega_\varphi(-r_\eta(\varphi)) = \varphi(0) - 2\pi, \quad (2.32)$$

und man kann die Umkehrfunktion von Ω_φ anwenden, was

$$-r_\eta(\varphi) = \Omega_\varphi^{-1}(\varphi(0) - 2\pi) \quad (2.33)$$

ergibt. Das ist für alle $\eta \in U$ gleich mit (2.22), womit alle r_η identisch dem Funktional r sind, das damit stetig differenzierbar ist. ■

Daraus lassen sich folgende nützliche Korollare folgern:

Korollar 2.2.4

$$r(\varphi) - r(0) = \frac{\varphi(-r(\varphi)) - \varphi(0)}{n_0}$$

Beweis: Setzt man $\frac{2\pi}{n_0} = r(0)$ in (2.30) ein, so folgt

$$r(\varphi) + \frac{1}{n_0}(\varphi(0) - \varphi(-r(\varphi))) - r(0) = 0. \quad (2.34)$$

■

Korollar 2.2.5

$$dr(\eta)(\varphi) = \frac{\varphi(-r(\eta)) - \varphi(0)}{n_0 + \dot{\eta}(-r(\eta))}$$

Beweis: Die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $r(\eta)$ ist durch

$$dr(\eta) = -(d_r \hat{r}(\eta, r(\eta)))^{-1} \circ d_\eta \hat{r}(\eta, r(\eta)) \quad (2.35)$$

gegeben. Auf φ angewandt ergibt das

$$dr(\eta)(\varphi) = -(1 + \frac{1}{n_0} \dot{\eta}(-r(\eta)))^{-1} \frac{\varphi(0) - \varphi(-r(\eta))}{n_0} = \frac{\varphi(-r(\eta)) - \varphi(0)}{n_0 + \dot{\eta}(-r(\eta))}. \quad (2.36)$$

■

2.2.4 Geschwindigkeitsabhängiges Modell

In den bisherigen Betrachtungen wurde eine wichtige Kopplungsgröße vernachlässigt. Wirft man einen Blick auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2D_x \omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + k_x(x(t) - x(t - r(\phi_t))) &= 0 \\ \ddot{\phi}(t) + 2D_\phi \nu_0 \dot{\phi}(t) + \nu_0^2 \phi(t) + k_\phi(x(t) - x(t - r(\phi_t))) &= 0, \end{aligned}$$

so stellt man fest, dass die Kopplung des zweiten Freiheitsgrades an den ersten nur über den zustandsabhängigen Delay erfolgt, was sich in der Stabilitätsanalyse entscheidend auswirken könnte. Da ein möglichst einfaches Modell gesucht ist, das den Einfluss von Delayvariationen klärt, sollten weitere Parameter nur dann implementiert werden, wenn sie einen entscheidenden Einfluss auf die Analyse haben. Die Schnittgeschwindigkeit, die proportional zu $\dot{\phi}(t)$ ist, hat zumindest einen starken Einfluss auf die Schnittkraft und kann deshalb nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Sie wird daher in das Modell implementiert, um zu klären, wie groß ihr Einfluss auf die Stabilitätsanalyse ist.

Es wird sowohl in x -Richtung als auch in ϕ -Richtung eine Modifikation der Ansätze vorgenommen. Die Kraft F_x hängt nun auch von $\dot{\phi}(t)$ ab. Es findet wieder eine lineare Approximation

$$F_x(s) \approx F_x(s_0, \dot{\phi}_0) + mk_x(s - s_0) + ml_x\dot{\phi} \quad (2.37)$$

mit $\dot{\phi}_0 = 0$ Verwendung. Für $\dot{\phi} \equiv 0$ ergibt sich damit eine Situation, die exakt dem alten Ansatz entspricht. Dabei wird hier $ml_x = \frac{dF_x}{d\dot{\phi}}(s_0)$ der Geschwindigkeitsparameter. Für die äußere Kraft ergibt sich

$$\frac{1}{m}G_x(s(t), \dot{\phi}(t)) = \frac{1}{m}F_x(s(t), \dot{\phi}(t)) - \frac{1}{m}F_x(s_0, \dot{\phi}_0) = k_x(x(t-r) - x(t)) + l_x\dot{\phi}(t), \quad (2.38)$$

was insgesamt zu

$$\ddot{x}(t) + 2D_x\omega_0\dot{x}(t) - l_x\dot{\phi}(t) + \omega_0^2x(t) + k_x(x(t) - x(t-r)) = 0 \quad (2.39)$$

führt. Analog dazu wird die Gleichung für den zweiten Freiheitsgrad modifiziert. Der Ansatz

$$F_\phi(s, \dot{\phi}) \approx F_\phi(s_0, \dot{\phi}_0) + \frac{J}{r_w}k_\phi(s - s_0) + \frac{J}{r_w}l_\phi\dot{\phi} \quad (2.40)$$

führt dann zu

$$\ddot{x}(t) + 2D_x\omega_0\dot{x}(t) - l_x\dot{\phi}(t) + \omega_0^2x(t) + k_x(x(t) - x(t-r)) = 0 \quad (2.41)$$

$$\ddot{\phi}(t) + (2D_\phi\nu_0 - l_\phi)\dot{\phi}(t) + \nu_0^2\phi(t) + k_\phi(x(t) - x(t-r)) = 0. \quad (2.42)$$

Es wurden damit zwei neue Parameter in das Modell aufgenommen, wovon sich jedoch einer durch eine Substitution eliminieren lässt. Setzt man

$$\hat{l}_\phi := \frac{l_\phi}{\nu_0},$$

so folgt

$$2D_\phi\nu_0 - l_\phi = 2D_\phi\nu_0 - \hat{l}_\phi\nu_0 = (2D_\phi - \hat{l}_\phi)\nu_0.$$

Das lässt die Definition

$$\hat{D}_\phi := \frac{2D_\phi - \hat{l}_\phi}{2}$$

zu, die zu

$$(2D_\phi - \hat{l}_\phi)\nu_0 = 2\hat{D}_\phi\nu_0$$

führt. Das bedeutet, dass sich der Parameter l_ϕ in eine modifizierte Dämpfungskonstante umrechnen lässt. Der Parameter l_ϕ braucht also nicht berücksichtigt zu werden, wenn man davon ausgeht, dass im realen Fall die Dämpfung des ϕ -Freiheitsgrades gemessen wird. Allerdings muss darauf geachtet werden, dass bei zu großem l_ϕ im Extremfall eine Entdämpfung des Systems eintritt. Es sollte also immer davon ausgegangen werden, dass

$$l_\phi < 2D_\phi\nu_0$$

gilt.

2.2.5 Zusammenfassung

Um die Modellierung abzuschliessen, wird der Ansatz aus Abschnitt 2.2.4 in Verbindung mit dem zustandsabhängigen Delay aus Abschnitt 2.2.3 verwendet. Das Delayfunktional muss dazu lediglich in den Ansatz für die Freiheitsgrade eingebettet werden.

Bisher wurde das Delayfunktional als Abbildung auf $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R})$ betrachtet. Im vorliegenden Fall sind die Startfunktionen jedoch aus dem Raum $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ zu wählen, was es aus Gründen der Konsistenz nötig macht, auch das Delayfunktional auf $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ zu definieren. Die Fortsetzung des Funktionals ist jedoch denkbar einfach, da es nicht explizit von den anderen Komponenten abhängt. Auch hier kommt der Ansatz zum Tragen, dass der Delay lediglich explizit von der Vergangenheit der Drehwinkelfunktion abhängt. Folgendes Lemma sorgt für Klarheit:

Lemma 2.2.6 *Sei*

$$\begin{aligned} \check{r} : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \check{r}(\varphi) \end{aligned} \tag{2.43}$$

ein stetig differenzierbares Funktional mit der Ableitung

$$\begin{aligned} d\check{r}(\eta) : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto d\check{r}(\eta)(\varphi). \end{aligned}$$

Sei weiter mit

$$\begin{aligned} r : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \check{r}(\varphi_k) \end{aligned} \tag{2.44}$$

ein Funktional definiert, wobei φ_k die k -te Koordinate des Vektors $\varphi(t)$ ist. Dann gilt: Das Funktional r ist stetig differenzierbar, und die Ableitung ist durch

$$dr(\eta)(\varphi) = d\check{r}(\eta_k)(\varphi_k)$$

gegeben.

Bemerkung 2.2.7 *Um Missverständnissen vorzubeugen, sei an dieser Stelle erwähnt, dass der Zweck des Lemmas nicht darin besteht, multiple Delays für jede Komponente zu definieren, sondern einen von einer Komponente abhängenden Delay formal als von allen Komponenten abhängig zu schreiben.*

Im Folgenden wird vor allem die Situation besprochen, dass $n = 4$ und $k = 3$ ist. Statt $\check{r}(\varphi)$ wird der Einfachheit halber dennoch weiter $r(\varphi)$ geschrieben. Da eine Funktion mit n Komponenten immer nur in einer Komponente ausgewertet wird, ist die Schreibweise immer eindeutig. Die Ableitung wird dann mit

$$dr(\eta)(\varphi) := d\check{r}(\eta)(\varphi) = \frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))}$$

notiert. Auch hier ist es irrelevant, ob man $r(\eta)$ oder $\check{r}(\eta_3)$ schreibt. Damit ist ein vollständiges Modell entstanden, das den Delay als zustandsabhängige Größe enthält. Die entstandene Gleichung

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(v_t)) = f(v_t) \quad (2.45)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 & 0 & +l_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 + l_\phi \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

wird durch den zustandsabhängigen Delay nichtlinear. Allerdings ist dadurch die Möglichkeit gegeben, bereits vorhandene Erkenntnisse im Bereich der zustandsabhängigen RFDE's zu nutzen.

Komplettierung des Modells

Es stellt sich noch die Frage, welche Fälle vom zuletzt genannten Modell nicht erfasst werden, die im eindimensionalen Modell enthalten sind. Alle durch Rückkopplung entstehenden Delayschwankungen können mit einem Modell wie im letzten Abschnitt eingeführt beschrieben werden. Lediglich von außen eingebrachte Störungen werden davon nicht erfasst. Der einzige praktikable Weg, um in der Realität Delayschwankungen zu erzeugen, ist es, die Drehzahl selbst zu variieren. Das lässt sich mit dem vorliegenden Modell ebenfalls direkt implementieren. Es bietet sich folgende Formulierung an:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2D_x\omega_0\dot{x}(t) - l_x\dot{\phi}(t) + \omega_0^2x(t) + k_x(x(t) - x(t - r_0)) &= 0 \\ \ddot{\phi}(t) + (2D_\phi\nu_0 - l_\phi)\dot{\phi}(t) + \nu_0^2\phi(t) + k_\phi(x(t) - x(t - r_0)) &= K(t) \end{aligned}$$

Dabei stellt $K(t)$ eine Funktion dar, mit der beliebige Kräfteinwirkungen auf den Antrieb modelliert werden können. Da eine solche Formulierung sehr viel näher an der

Wirklichkeit liegt, als eine beliebig vorgegebene Delayschwankung, ist sie ein guter Kandidat für ein Modell, das alle interessanten Fälle erfasst. Da in der vorliegenden Arbeit der Fokus auf der Analyse der autonomen Gleichung liegt, können nichtautonome Störungen Thema nachfolgender Arbeiten sein. Sollten sich dann auch mit diesem Modell die Phänomene nicht erklären lassen, so erscheint es notwendig, andere, am Ende von Abschnitt 2.1 erwähnte Vereinfachungen wieder fallen zu lassen.

2.3 Eigenschaften der Modellgleichung

Die vorhergehenden Abschnitte haben eine zustandsabhängige RFDE ergeben, die unter die allgemeine Definition fällt, wie sie in [Hale, 1993] bzw. den vorhergehenden Werken von J. K. HALE eingeführt wird. Es stellen sich unmittelbar die Fragen nach der Wohlgestellttheit eines Anfangswertproblems sowie der Anwendbarkeit von Stabilitätsanalysen. Letztere werden an der Linearisierung der Gleichung durchgeführt, die hier nicht ohne weiteres existiert. Die folgenden Abschnitte klären, welche Eigenschaften die vorliegende RFDE hat und wie eine Stabilitätsanalyse durchgeführt werden kann.

2.3.1 Lineare Näherung

Die zustandsabhängige RFDE (2.45) ist mit entsprechenden Dirac-Punktmaßen η_k eine Gleichung der Form

$$\dot{v}(t) = h\left(\int_{-R}^0 v(t+s)d\Lambda_1(s), \int_{-R}^0 v(t-r(v_t)+s)d\Lambda_2(s)\right), \quad (2.47)$$

mit

$$h(v, w) = Av + Bw \quad (2.48)$$

und den Matrizen aus Gleichung (2.46). Die lineare Näherung nach [Cooke und Huang, 1996] im Gleichgewicht $v^* = 0$

$$\dot{v}(t) = Lv_t \quad (2.49)$$

ist damit nach Satz 1.7.2 durch

$$\begin{aligned} L\phi &= D_1h(0, 0) \int_{-R}^0 \phi(s)d\Lambda_1(s) + D_2h(0, 0) \int_{-R}^0 \phi(-r(v^*)+s)d\Lambda_2(s) \\ &= A\phi(0) + B\phi(-r(0)) \end{aligned} \quad (2.50)$$

gegeben.

Es gilt

$$r(0) = -\Omega_0^{-1}(-2\pi) = \frac{1}{n_0} = r_0 \quad (2.51)$$

und damit ergibt sich die lineare Näherung von Gleichung (2.45) durch

$$\dot{v}(t) = f(t, v_t) = Av(t) + Bv(t - r_0). \quad (2.52)$$

Ohne weitere Kenntnis darüber ob f aus (2.45) bezüglich einer vernünftigen Norm differenzierbar ist, kann diese lineare Näherung lediglich unter den in (1.) und (2.) aus Satz 1.7.2 genannten Voraussetzungen Aufschluss über die Stabilität der Nulllösung $v^* = 0$ geben. Über einen darüber hinaus gehenden Zusammenhang zwischen der Ausgangsgleichung und der linearen Näherung ist an dieser Stelle noch nichts bekannt. Insbesondere ist auch das Problem der Eindeutigkeit von Lösungen des AWP damit nicht geklärt. Das lässt sich erst erreichen, wenn man höhere Anforderungen an den Raum der Startfunktionen stellt, um unter dieser Voraussetzung die Differenzierbarkeit der rechten Seite der RFDE zu erhalten, wie im folgenden Abschnitt gezeigt.

2.3.2 Linearisierung

Es kann gezeigt werden, dass es für die zustandsabhängige RFDE eine Linearisierung gibt, wenn von der Norm $\|\cdot\|_1$ ausgegangen wird. Folgendes Lemma ist dabei von Nutzen:

Lemma 2.3.1 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\Phi : U &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \varphi &\mapsto \varphi(-r(\varphi))\end{aligned}\tag{2.53}$$

ist auf $U = \{\eta \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) : \|\eta\|_1 < n_0\}$ stetig differenzierbar und die Ableitung ist durch

$$d\Phi(\eta)(\varphi) = -\dot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi) + \varphi(-r(\eta))\tag{2.54}$$

gegeben.

Beweis: Der Beweis vereinfacht sich durch eine Verschiebung um η im Urbild, wenn an der Stelle η die Ableitung gebildet werden soll. Es ergibt sich

$$\tilde{\Phi}(\varphi) := \Phi(\eta + \varphi) = (\eta + \varphi)(-r(\eta + \varphi)) = \eta(-r(\eta + \varphi)) + \varphi(-r(\eta + \varphi)),\tag{2.55}$$

wobei die Summanden im Einzelnen

$$\begin{aligned}\Phi_1(\varphi) &:= \eta(-r(\eta + \varphi)) \\ \Phi_2(\varphi) &:= \varphi(-r(\eta + \varphi))\end{aligned}\tag{2.56}$$

wieder Abbildungen von $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ nach \mathbb{R}^4 definieren, die sich leichter differenzieren lassen. Dabei ist zu beachten, dass η fest gewählt ist, und man Φ_1 und Φ_2 an der Stelle $0 \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ ableiten muss. Der erste Summand ergibt

$$d\Phi_1(0)(\varphi) = -\dot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi),\tag{2.57}$$

was durch Anwenden der Kettenregel zu erhalten ist.

Der zweite Summand führt zur Ableitung

$$d\Phi_2(0)(\varphi) = \varphi(-r(\eta)), \quad (2.58)$$

denn es gilt

$$\frac{|\varphi(-r(\eta + \varphi)) - \varphi(-r(\eta))|}{\|\varphi\|_1} \leq |r(\eta + \varphi) - r(\eta)| \xrightarrow{\|\varphi\|_1 \rightarrow 0} 0, \quad (2.59)$$

was durch Ausnutzung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung einzusehen ist.

Wichtig ist dass die in φ lineare Abbildung $d\Phi(\eta)(\varphi)$ auch stetig in $\eta \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ ist. Das ist für $dr(\eta)$ schon gezeigt, und für $\varphi \mapsto \varphi(-r(\eta))$ trivial.

Die Abbildung

$$\eta \mapsto d\Phi(\eta)(\varphi) \quad (2.60)$$

ist stetig für $\eta \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$, da sie eine Verkettung in η stetiger Abbildungen ist. ■

Hierdurch ist es einfach, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2.3.2 *Die Funktion*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.61)$$

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = A\varphi(0) + B\varphi(-r(\varphi)) \quad (2.62)$$

ist auf $U = \{\eta \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n) : \|\eta\|_1 < n_0\}$ differenzierbar, und die Ableitung an der Stelle η angewandt auf φ ist

$$df(\eta)(\varphi) = A\varphi(0) + B(-\dot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi) + \varphi(-r(\eta))). \quad (2.63)$$

Beweis: Der einzige nichtlineare Anteil der Abbildung ist $\Phi(\varphi) = \varphi(-r(\varphi))$, dessen Ableitung in Lemma 2.3.1 angegeben ist. ■

2.3.3 Invariante Mannigfaltigkeit

Die stetige Differenzierbarkeit alleine garantiert, wie in [Walther, 2003a, S.58] gezeigt, noch nicht die Wohlgestelltheit des Problems, da u.a. nicht davon ausgegangen werden kann, dass für alle $\varphi \in U$ die Gleichung

$$\dot{\varphi}(0) = f(\varphi) \quad (2.64)$$

erfüllt ist, um die Stetigkeit in $t = 0$ zu garantieren. Auch Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der RFDE (2.45) liegen nicht auf der Hand. Ein Ausweg ist es, in folgender Weise eine Kompatibilitätsbedingung an den Raum der Startfunktionen zu stellen:

$$X := \{\varphi \in U : \dot{\varphi}(0) = f(\varphi)\}. \quad (2.65)$$

Der Raum X eignet sich für eine Formulierung von Existenz und Eindeutig von Lösungen, wenn f folgenden Anforderungen genügt.

2 Modellgleichungen und Stabilitätskriterien

- (P1) Die Ableitung $df(\eta)$, lässt sich für jedes $\eta \in U$ stetig von $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_0$ fortsetzen.
- (P2) Für alle $\eta \in U$ existiert eine offene Umgebung $N \subset \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und eine Konstante L , so dass für alle $\varphi, \psi \in N$ die lokale Lipschitz-Bedingung

$$|f(\varphi) - f(\psi)| \leq L \|\varphi - \psi\|_0 \quad (2.66)$$

gilt.

Das sind hinreichende Voraussetzung für folgenden Satz, wie er in [Walther, 2003a, S.61] zu finden ist:

Satz 2.3.3 *Sei die RFDE*

$$\dot{v}(t) = f(v_t)$$

gegeben, sei $X \neq \emptyset$ und $\hat{X} = \{(t, \varphi) \in [0, \infty) \times X : t < t_e(\varphi)\}$. Es gelten weiterhin (P1) und (P2). Dann definieren die maximalen Lösungen

$$x(\varphi) : [-R, t_e(\varphi)) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Startfunktion $x(\varphi)_0 = \varphi \in X$ einen stetigen Halbfluss

$$F : \hat{X} \supset \Omega \rightarrow X$$

via

$$F(t, \varphi) := x(\varphi)_t$$

mit $0 \leq t < t_e(\varphi)$.

Beweis: Der Beweis ist [Walther, 2003a, S.61] zu entnehmen. ■

Mit t_e ist, ohne das genau zu definieren, die maximale Zeit gemeint, bis zu der sich eine Lösung fortsetzen läßt.

Damit sind insbesondere auch Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines AWP's mit Startwerten in X garantiert. Da insbesondere (P2) schwer direkt zu zeigen ist, kommt es gelegen, dass es eine weitere hinreichende Bedingung gibt, aus der (P2) folgt. Sei dazu $\bar{d}f(\eta)$ die stetige Fortsetzung der Abbildung

$$df(\eta) : \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^n$$

nach $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und $\|(\eta, \varphi)\|_{1,0} := \|\eta\|_1 + \|\varphi\|_0$. Dann lautet die Bedingung,

- (P3) Die Abbildung

$$U \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \ni (\eta, \varphi) \mapsto \bar{d}f(\eta)(\varphi)$$

für U offen in $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n)$, ist bezüglich $\|\cdot, \cdot\|_{1,0}$ stetig.

Damit lässt sich (P2) nachweisen, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 2.3.4 *Aus den Bedingungen (P1) und (P3) folgt (P2).*

Beweis: Der Beweis ist [Walther, 2004, S. 3 f.] zu entnehmen. ■

Kann man nun (P3) für die Abbildung Φ für die Modellgleichung

$$f(\varphi) = A\varphi(0) + B\Phi(\varphi) \quad (2.67)$$

nachweisen, so überträgt sie sich in natürlicher Weise auf f .

Satz 2.3.5 *Die Abbildung Φ aus Lemma 2.3.1 erfüllt (P1) und (P3), und damit (P2).*

Beweis: Die Ableitung

$$d\Phi(\eta)(\varphi) = -\dot{\eta}(-r(\eta)) \frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))} + \varphi(-r(\eta)) \quad (2.68)$$

ist für alle $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ wohldefiniert und stetig linear in φ . Damit gilt (P1).

Es ist noch die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} U \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\eta, \varphi) &\mapsto \bar{d}\Phi(\eta)(\varphi) \\ &= -\dot{\eta}(-r(\eta)) \frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))} + \varphi(-r(\eta)) \end{aligned} \quad (2.69)$$

bezüglich $\|\cdot, \cdot\|_{1,0}$ zu zeigen.

Zunächst ist

$$(\eta, \varphi) \mapsto \dot{\eta}(-r(\eta))$$

stetig, da gilt,

$$\begin{aligned} \|\dot{\eta}_k(-r(\eta_k)) - \dot{\eta}(-r(\eta))\| &= \|\dot{\eta}_k(-r(\eta_k)) - \dot{\eta}(-r(\eta_k)) + \dot{\eta}(-r(\eta_k)) - \dot{\eta}(-r(\eta))\| \\ &\leq \|\dot{\eta}_k(-r(\eta_k)) - \dot{\eta}(-r(\eta_k))\| + \|\dot{\eta}(-r(\eta_k)) - \dot{\eta}(-r(\eta))\| \\ &\xrightarrow{\|(\eta_k, \varphi_k) - (\eta, \varphi)\|_{1,0} \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Weiter ist

$$(\eta, \varphi) \mapsto \varphi(-r(\eta))$$

stetig, denn

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(-r(\eta_k)) - \varphi(-r(\eta))\| &= \|\varphi_k(-r(\eta_k)) - \varphi(-r(\eta_k)) + \varphi(-r(\eta_k)) - \varphi(-r(\eta))\| \\ &\leq \|\varphi_k(-r(\eta_k)) - \varphi(-r(\eta_k))\| + \|\varphi(-r(\eta_k)) - \varphi(-r(\eta))\| \\ &\leq \|\varphi_k - \varphi\|_0 + \|\varphi(-r(\eta_k)) - \varphi(-r(\eta))\| \\ &\xrightarrow{\|(\eta_k, \varphi_k) - (\eta, \varphi)\|_{1,0} \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

2 Modellgleichungen und Stabilitätskriterien

Stellt man $(\eta, \varphi) \mapsto dr(\eta)(\varphi)$ durch die Hintereinanderausführung

$$(\eta, \varphi) \mapsto (\varphi_3(-r(\eta)), \varphi_3(0), \dot{\eta}_3(-r(\eta))) = (x, y, z) \mapsto \frac{x - y}{n_0 + z} \quad (2.72)$$

dar, so sieht man die Stetigkeit jeder Teilabbildung. Damit ist $(\eta, \varphi) \mapsto \bar{d}f(\eta)(\varphi)$ stetig.

■

Damit ist das Problem der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Modellgleichung geklärt.

3 Stabilitätsanalyse

Im folgenden Kapitel wird die zustandsabhängige Gleichung

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(v_t)) \tag{3.1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 & 0 & +l_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 + l_\phi \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

betrachtet. Unter Anwendung von Satz 1.7.2 wird die Stabilitätsanalyse der Nulllösung anhand der linearen Näherung

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r_0) \tag{3.3}$$

durchgeführt.

3.1 Ermittlung der Parameter

Zur Veranschaulichung des Stabilitätsverhaltens der Modellgleichung kann man höchstens dreidimensionale Bilder verwenden. In der Regel versucht man also, Parameter, die man fest wählen kann, von solchen zu unterscheiden, die man variabel lässt. Im vorliegenden Fall gibt es bereits viel Erfahrung darin, welchen Kategorien die Parameter des translatorischen Freiheitsgrades zuzuordnen sind. Zwar haben sowohl ω_0 als auch D_x einen großen Einfluss auf die Lage der Stabilitätsgrenze, jedoch ist dieser Einfluss hinreichend bekannt. Von Interesse ist hier, wie die Grenze in einem Schnitt durch den Parameterraum, parallel zur $k_x - r_0$ -Ebene, verläuft. Zum Einen, um die Ergebnisse mit den in [Frank, 2002] erhaltenen vergleichen zu können, und zum Anderen, da dieses Diagramm in der einschlägigen Literatur der Ingenieurwissenschaften sehr häufig Verwendung findet. Für die neuen Parameter des rotatorischen Freiheitsgrades ist das zunächst nicht so klar. Die natürliche Vorgehensweise ist die, zunächst einmal physikalisch sinnvolle Grenzen festzulegen. So sind zum Einen sämtliche Eigenfrequenzen und Dämpfungen grundsätzlich positiv, also $D_x, D_\phi, \omega_0, \nu_0 > 0$. Zum Anderen ist auch der Delay $r_0 > 0$. Jedoch ist nicht alles, was physikalisch sinnvoll ist, von Interesse, da die

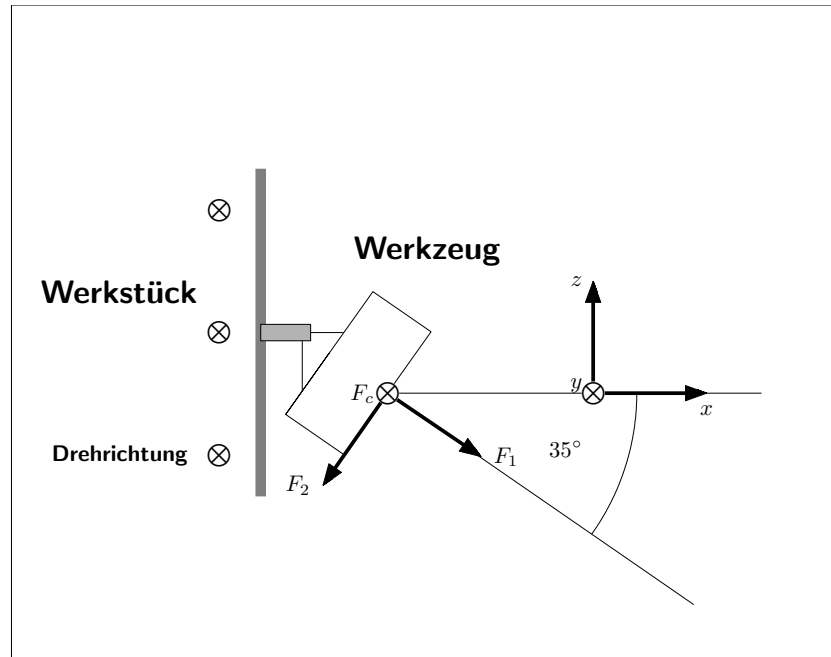


Abbildung 3.1: Messanordnung der Drehversuche

technische Machbarkeit bzw. die in der Praxis vorliegenden mechanischen Systeme, den Parameterraum weitaus stärker einschränken. Das ist vor allem deshalb sinnvoll, da es Bereiche im Parameterraum gibt, die zwar möglicherweise realisierbar, in der Realität aber zwecklos sind. Als Beispiel soll hier nur aufgeführt werden, dass man eine Drehmaschine bauen könnte, die eine so schwache Dämpfung D_ϕ aufweist, dass es für ein $l_\phi > 0$ zu einer negativen resultierenden Dämpfung führt. Bei einer solchen Maschine würden sich stets Schwingungen aufbauen, was sie völlig nutzlos macht. Es werden nun zunächst die Bereiche ermittelt, in denen sich die bisher unbekannt Parameter bewegen. Einige Größen können dabei der Literatur entnommen werden. So ergaben Messungen am IFW Hannover [Fröhlich, 2004], dass sich ν_0 im Bereich zwischen $20\frac{1}{s} - 100\frac{1}{s}$ bewegt. Das entspricht Eigenfrequenzen zwischen ungefähr $3Hz$ und $16Hz$. Das konnte durch Abschätzungen von Dämpfung und Steifigkeit bei der Firma Robert Bosch GmbH bestätigt werden. Von dort konnte auch die Abschätzung von $D_\phi \approx 0.05$ beigesteuert werden [Kleckner, 2005]. Schwieriger ist es bei den Größen k_ϕ , l_x und l_ϕ .

Um die Größenordnung festzulegen, in denen sich die Parameter bewegen, werden eigens dafür vorgenommene Messungen herangezogen. Eine mit Sensoren bestückte Drehmaschine vom Typ **Oerlikon-Boehringer VDF 180 C** am PTW der TU Darmstadt wurde hierfür mit einem Werkstück der Stahlsorte **C18** und einem Werkzeug des Typs **Iscar Einstechdrehmeißel Self-Grip SGIH 32-4** mit dem Schneidstoff **Hartmetall P35 IC-540, Breite: 5 mm** bestückt [Sahm, 2003]. Die Sensoren nahmen die Kräfte F_c , F_1 und F_2 auf, was Abbildung 3.1 zu entnehmen ist. Dabei ergeben sich die Kräfte

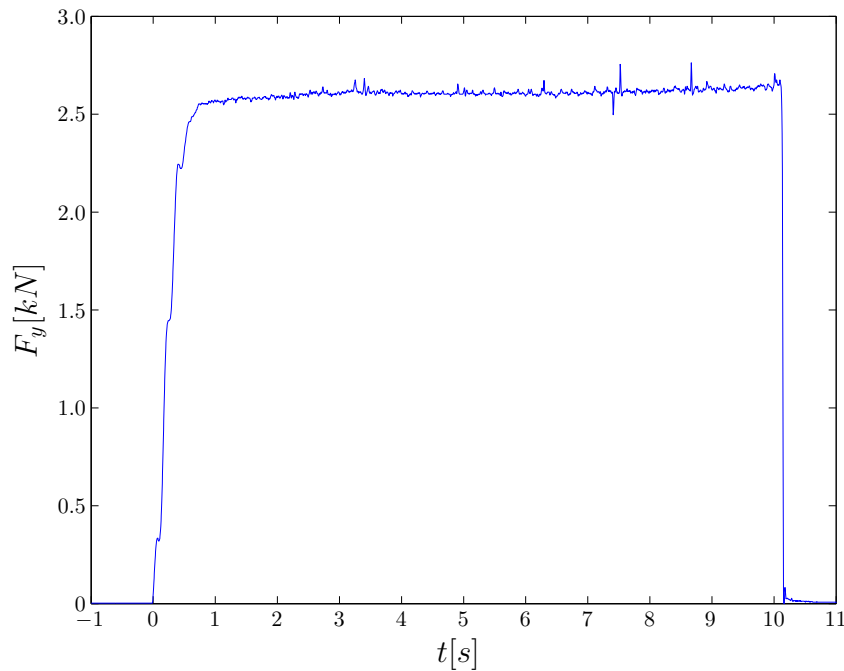


Abbildung 3.2: Verlauf der Schnittkraft F_y bei $V_c = 90\text{m}/\text{min}$ und $s_0 = 0,25\text{mm}$

in x - und y -Richtung durch die Beziehungen

$$F_y = F_c \quad (3.4)$$

$$F_x = F_1 \cos(35^\circ) - F_2 \sin(35^\circ). \quad (3.5)$$

Abbildung 3.2 zeigt einen typischen Verlauf der Schnittkraft über der Zeit. Zunächst erfolgt ein sprunghafter Anstieg, bis die gewünschte Schnitttiefe erreicht ist, dann folgt ein Plateau, auf dem die Kraft um eine mittlere Schnittkraft schwankt, und bei Beendigung des Drehvorgangs das rapide Abfallen, bis kein Kontakt des Werkzeugs zu Oberfläche mehr besteht. Man kann nun die mittlere Schnittkraft während eines Versuchs ermitteln, indem man den Beginn und das Ende der Messung so festlegt, dass man sicher nur Werte innerhalb des Plateaus erfasst. Abbildung 3.3 zeigt den Verlauf der mittleren Schnittkraft F_x bzw. F_y in Abhängigkeit der Schnitttiefe. Dasselbe wird in Abbildung 3.4 für die Schnittgeschwindigkeit dargestellt. Die Masse des Werkzeugs nebst Halter wurde mit ca. 85kg angegeben. Die drehende Masse beträgt ca. 120kg , wobei sie sich auf die annähernd zylindrischen Bauteile wie in Tabelle 3.1 dargestellt verteilt. Das Trägheitsmoment J der rotierenden Teile außerhalb des Antriebs beträgt somit ca. $0,5\text{kgm}^2$ unter der Annahme, dass es sich um Vollzylinder handelt. Je nach Bauart, z.B. bei hohlzylindrischen Bauteilen, kann dieser Wert bei der selben Masse bis auf das doppelte anwachsen. Man kann nun von den Annahmen ausgehend eine Beispielrechnung durchführen, um einen

3 Stabilitätsanalyse

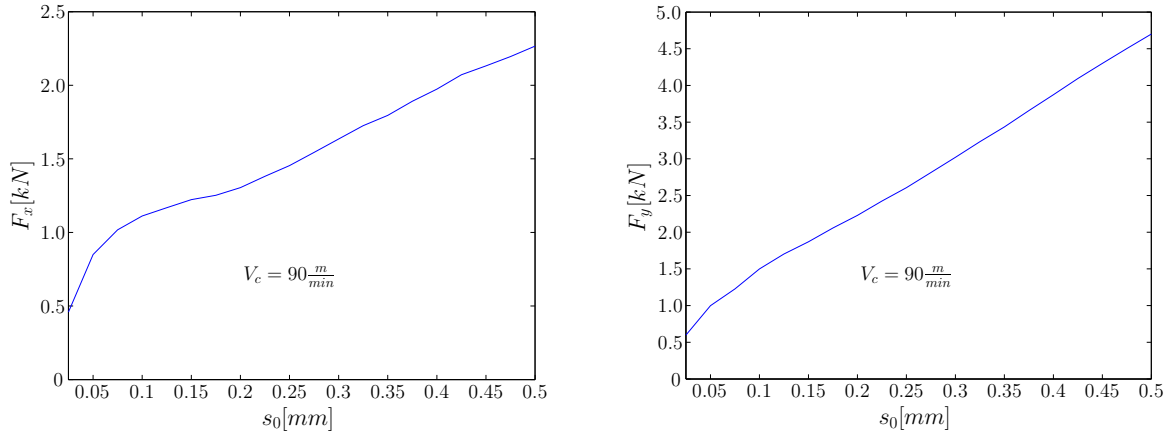


Abbildung 3.3: F_x und F_y in Abhängigkeit der Schnitttiefe

	d	m	$J = \frac{1}{8}md^2$
Spindel	150mm	20kg	0.057kgm ²
Futter	200mm	85kg	0.430kgm ²
Werkstück	80mm	15kg	0.012kgm ²

Tabelle 3.1: Daten der rotierenden Bauteile, als Vollzylinder angenommen

Parametersatz zu bestimmen. Die Modellgleichungen

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + 2D_x\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x) &= \tilde{k}_x(s - s_0) + \tilde{l}_x\dot{\phi} \\ \frac{J}{r_w}(\ddot{\phi} + 2D_\phi\nu_0\dot{\phi} + \nu_0^2\phi) &= \tilde{k}_\phi(s - s_0) + \tilde{l}_\phi\dot{\phi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

enthalten wieder die zuvor in die Konstanten eingerechneten Größen J , r_w und m , um die folgenden Ausführungen leichter nachvollziehbar zu machen, da die Masse und das Trägheitsmoment noch zu diskutieren sind. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{\tilde{l}_x}{m} & k_x &= \frac{\tilde{k}_x}{m} \\ l_\phi &= \frac{\tilde{l}_\phi r_w}{J} & k_\phi &= \frac{\tilde{k}_\phi r_w}{J} \end{aligned}$$

Um Werte für \tilde{l}_x und \tilde{l}_ϕ zu erhalten, müssen zuerst die Schnittgeschwindigkeiten in Winkelgeschwindigkeiten umgerechnet werden. Unter der Voraussetzung, dass der mittlere Umfang $0,2m$ beträgt, ergibt sich eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten in den jeweiligen Einheiten von

$$1 \frac{m}{min} \sim \frac{1}{6} \pi \frac{1}{s}. \quad (3.7)$$

Aus den den Abbildungen 3.3 und 3.4 zugrunde liegenden Daten konnten die jeweiligen Sekantensteigungen ermittelt werden. Der Übersichtlichkeit halber werden nur die jeweils

maximalen und minimalen Werte sowie das arithmetische Mittel aus allen Steigungen dargestellt. Mit dem Faktor aus 3.7 ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_{x,max} &= 6,71 \cdot 10^6 \frac{N}{m} & \tilde{k}_{x,min} &= 1,16 \cdot 10^6 \frac{N}{m} & \tilde{k}_{x,\emptyset} &= 4,78 \cdot 10^6 \frac{N}{m} \\
 \tilde{k}_{\phi,max} &= 10,88 \cdot 10^6 \frac{N}{m} & \tilde{k}_{\phi,min} &= 7,32 \cdot 10^6 \frac{N}{m} & \tilde{k}_{\phi,\emptyset} &= 8,51 \cdot 10^6 \frac{N}{m} \\
 \tilde{l}_{x,max} &= 3,37Ns & \tilde{l}_{x,min} &= -6,75Ns & \tilde{l}_{x,\emptyset} &= -3,37Ns \\
 \tilde{l}_{\phi,max} &= 1,91Ns & \tilde{l}_{\phi,min} &= -12,9Ns & \tilde{l}_{\phi,\emptyset} &= -5,66Ns,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dividiert man die Durchschnittswerte nun durch die Masse $m = 85kg$ bzw. durch den Quotienten aus Trägheitsmoment $J = 0,5kgm^2$ wie es in Tabelle 3.1 angegeben ist und mittlerem Radius $r_w \approx 0,032m$, so erhält man die Richtwerte

$$\begin{aligned}
 k_x &= 5,6 \cdot 10^4 \frac{N}{kgm} & k_\phi &= 5,4 \cdot 10^5 \frac{N}{kgm^2} \\
 l_x &= -4,0 \cdot 10^{-2} \frac{Ns}{kg} & l_\phi &= -0,35 \frac{Ns}{kgm}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Methode ist selbstverständlich nicht geeignet, exakte Daten zu erhalten, sie soll nur dazu dienen, ungefähre Richtwerte zu liefern. Man kann den Daten für die Schnitttiefenabhängigkeit entnehmen, dass zwischen k_x und k_ϕ in guter Näherung eine lineare Beziehung besteht, der Proportionalitätsfaktor liegt bei etwa $10 \frac{1}{m}$. Schätzungen für die Steifigkeit und die Dämpfung des rotatorischen Freiheitsgrades lassen jedoch vermuten, dass das tatsächlich messbare Trägheitsmoment weit höher ist. Das liegt vor allem daran, dass der Antrieb einen erheblichen Beitrag liefern kann. So ergab eine Abschätzung [Kleckner, 2005], dass man allein für den Antriebsriemen eine Winkelrichtgröße, in der Mechanik als Steifigkeit bekannt, von $c_\phi \approx 1000Nm$ ansetzen kann. Geht man gleichzeitig von den messbaren Eigenfrequenzen zwischen $\frac{6}{2\pi}Hz$ und $\frac{100}{2\pi}Hz$ aus, so führt das mittels der Beziehung

$$\nu_0^2 = \frac{c_\phi}{J} \tag{3.10}$$

zu den Grenzen

$$J_{\min} = 4kgm^2 \qquad J_{\max} = 1000kgm^2. \tag{3.11}$$

Das zeigt, wie groß der Bereich ist, in dem das Trägheitsmoment liegen kann, und dass es mit hoher Wahrscheinlichkeit weit höher als der zuvor ermittelte Wert liegt. Man muss jedoch in Betracht ziehen, dass die gewählte Steifigkeit selbst in einer sehr großen Bandbreite variieren kann und vermutlich mit der Frequenz korreliert, da das Trägheitsmoment bei einer Maschine eher als konstant anzunehmen ist.

Es zeigt sich also, dass sowohl die Steifigkeit als auch das Trägheitsmoment experimentell schwer zu bestimmen sind, insbesondere, da es eine sehr große Varietät an Drehmaschinen gibt. In der vorliegenden Arbeit kann man die analytische und numerische Verwertbarkeit der Daten in den Vordergrund stellen, wenn die ermittelten Daten mit einer großen Fehlertoleranz behaftet sind. Es kann dann in späteren Arbeiten genauer ausgearbeitet werden, welche Parametersätze für welche Maschine in Frage kommen. Es

3 Stabilitätsanalyse

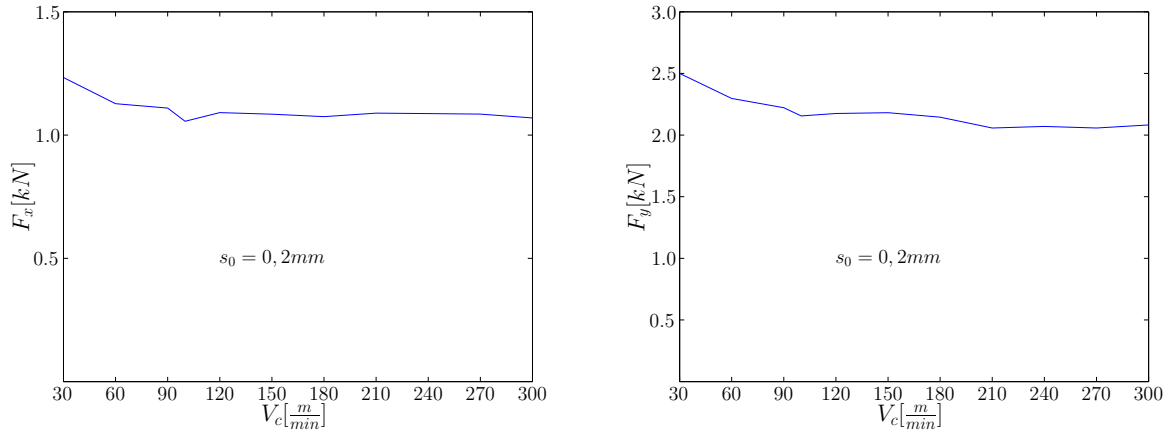


Abbildung 3.4: F_x und F_y in Abhängigkeit der Schnittgeschwindigkeit

soll daher ein Trägheitsmoment von ca. $1,5 \text{ kgm}^2$ verwandt werden, das zu der Annahme führt, dass $k_\phi \approx 3k_x$ gilt. Die Frequenz der Rotation betrage $\frac{100}{2\pi} \text{ Hz}$. Die mit diesem Trägheitsmoment neu berechneten Werte betragen dann

$$\begin{aligned} k_x &= 5,6 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{kgm}} & k_\phi &= 1,8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{kgm}^2} \\ l_x &= -4,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Ns}}{\text{kg}} & l_\phi &= -1,2 \cdot 10^{-1} \frac{\text{Ns}}{\text{kgm}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Unter diesen Voraussetzungen und unter der Prämisse die Ergebnisse mit den in [Frank, 2002] gemachten vergleichen zu können, kann man von den Parameterwerten

$$\omega_0 = 600 \quad D_x = 0.05 \quad \nu_0 = 100 \quad D_\phi = 0.05 \quad (3.13)$$

ausgehen. Die Parameter l_x und l_ϕ werden zwischen -1 und 1 variiert, um den realistischen Bereich mit hoher Wahrscheinlichkeit zu überdecken. Wählt man hier einen viel zu hohen Wert, z.B. $l_x = 20$, dann kommt es zu Resonanzeffekten, die das Stabilitätsgebiet stark verändern, bis hin zu einem Zustand, der bei bestimmten Drehzahlen immer zu einer instabilen Nulllösung führt. Das kann damit als unrealistisch gelten. In der Regel verhält es sich so, dass die Schnittkraft mit steigender Schnittgeschwindigkeit sinkt. Das ist zumindest im Bereich zwischen $v_c = 30 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ bis $v_c = 300 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ so, siehe Abbildung 3.4. Strikt negativ wird dieser Wert erst, wenn man sich in viel höheren Drehzahlen befindet, die jedoch dem Bereich des Hochgeschwindigkeitsdrehens zuzuordnen sind, das im vorliegenden Fall nicht untersucht wird. Dennoch werden negative Werte analysiert, da man nicht sicher davon ausgehen kann, dass nicht auch im hier gewählten Drehbereich negative l_x auftreten könnten. Zum Anderen kann man dann auch Übertragungen in den Hochgeschwindigkeitsbereich vornehmen, wenn man dort auf hochfrequente Schwingungen stößt, die mit Delaygleichungen beschrieben werden können.

Der zu untersuchende Parameterraum ist ein Teilraum von $\mathbb{R}_+^7 \times \mathbb{R}$, mit den Werten

$$(\omega_0, D_x, k_x, \nu_0, D_\phi, k_\phi, r_0, l_x)$$

in den angegebenen Grenzen. Im Folgenden werden dafür einheitenlose Zahlen verwendet.

3.2 Analytische Untersuchungen für $l_x = 0$

Setzt man $l_x = 0$, so kann man die Stabilitätsgrenze noch analytisch bestimmen. Ziel des Abschnittes ist es also, die Stabilität der Nulllösung, im Folgenden als $v \equiv 0$ bezeichnet, von Gleichung 3.3 für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

zu analysieren und die Stabilitätsgrenze im Parameterraum \mathbb{R}_+^7 zu bestimmen. Zunächst ist interessant, ob das erweiterte Modell die selben Ergebnisse hervorbringt wie die Ausgangsgleichung mit einem Freiheitsgrad. Geht man davon aus, dass $l_x = 0$ ist, die geschwindigkeitsabhängige Komponente der Schnittkraft also wegfällt, so beschreiben v_1, v_2 die ursprünglichen Koordinaten x, \dot{x} und Gleichung 3.3 ist in den ersten zwei Zeilen identisch mit Gleichung 2.5. Man beachte, dass in der Gesamtgleichung weitere drei Parameter enthalten sind. Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$h(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A - e^{-\lambda r_0} B), \quad (3.15)$$

was zu

$$\begin{aligned} h(\lambda) = & \lambda^4 + (2D_x\omega_0 + 2D_\phi\nu_0)\lambda^3 \\ & + (\nu_0^2 + 4D_\phi\nu_0D_x\omega_0 + k_x + \omega_0^2 - e^{-\lambda r_0}k_x)\lambda^2 \\ & + (2k_xD_\phi\nu_0 - 2e^{-\lambda r_0}k_xD_\phi\nu_0 + 2D_x\omega_0\nu_0^2 + 2\omega_0^2D_\phi\nu_0)\lambda \\ & + \omega_0^2\nu_0^2 - e^{-\lambda r_0}k_x\nu_0^2 + k_x\nu_0^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

führt. Ohne die Herkunft der Gleichung zu kennen, erscheint es schwierig, die Nullstellen zu bestimmen. Für $l_x \neq 0$ ergibt sich später eine Gleichung, die analytisch nicht mehr lösbar scheint. Betrachtet man jedoch die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t - r_0) \\ v_2(t - r_0) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\dot{\phi} := \begin{pmatrix} \dot{v}_3(t) \\ \dot{v}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_\phi(v_1(t - r_0) - v_1(t)) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_3(t) \\ \dot{v}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} =: \bar{L}\phi, \quad (3.19)$$

sowie die Generatoren G_x und G_v der Halbflüsse von (3.17) und (3.3), so kann man folgende Beobachtung machen: Man sieht, dass bei der Linearisierung für $l_x = 0$ die Kopplung von (3.18) in (3.17) entfallen ist. Außerdem tritt die Kopplung von (3.17) in (3.18) nur als Inhomogenität von Gleichung (3.19) auf. Der Gedanke liegt also nahe, dass das Spektrum von G_v zumindest teilweise aus dem Spektrum von G_x besteht, das in [Frank, 2002] Gegenstand der Untersuchung war. Das ist z.B. dann der Fall, wenn (3.16) in die charakteristische Gleichung von (3.17) und einen Rest faktorisiert. Das ist tatsächlich der Fall, denn es gilt,

$$h(\lambda) = (\lambda^2 + 2D_x\omega_0\lambda + \omega_0^2 + k_x(1 - e^{-\lambda r_0}))(\lambda^2 + 2D_\phi\nu_0\lambda + \nu_0^2). \quad (3.20)$$

Satz 3.2.1 *Seien $v^*, x^* \equiv 0$ Nulllösungen der Gleichungen (3.3) und (3.17) mit $D_\phi, \nu_0 > 0$, so gilt:*

1. $v^* \equiv 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $x^* \equiv 0$ asymptotisch stabil ist.
2. $v^* \equiv 0$ ist genau dann instabil, wenn $x^* \equiv 0$ instabil ist.

Beweis: Es gilt,

$$\sigma(G_v) = \sigma(G_x) \cup \{-D_\phi\nu_0 \pm \nu_0\sqrt{D_\phi^2 - 1}\}, \quad (3.21)$$

da $h(\lambda) = 0$ genau dann, wenn

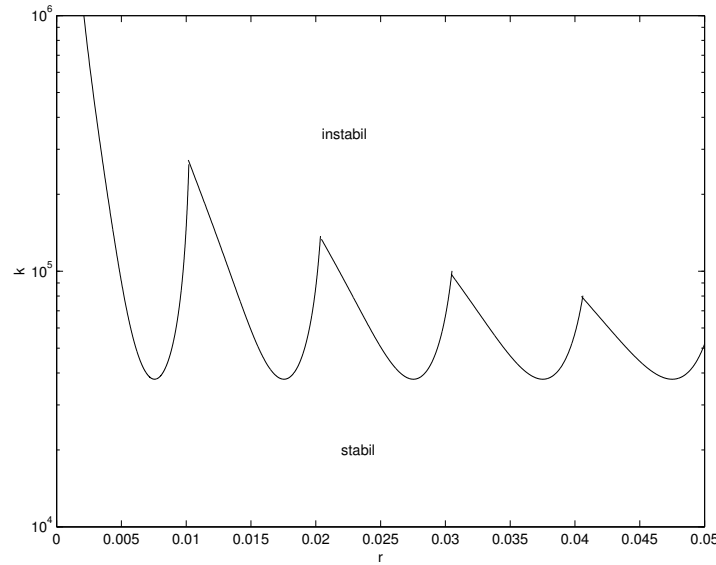
$$\lambda^2 + 2D_x\omega_0\lambda + \omega_0^2 + k_x(1 - e^{-\lambda r_0}) = 0 \quad (3.22)$$

oder

$$\lambda^2 + 2D_\phi\nu_0\lambda + \nu_0^2 = 0. \quad (3.23)$$

(3.22) ist genau für $\lambda \in G_x$ erfüllt, während (3.23) gilt, wenn $\lambda_\phi = -D_\phi\nu_0 \pm \nu_0\sqrt{D_\phi^2 - 1}$ ist, also die Lösung der Eigenwertgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators. Für $D_\phi, \nu_0 > 0$ gilt aber immer $Re(\lambda_\phi) < 0$, und insbesondere gilt für $D_\phi \in (0, 1)$, den normal gedämpften Bereich, dass $Re(\lambda_\phi) = -D_\phi\nu_0$ ist. Damit hängt die Antwort auf die Frage nach asymptotischer Stabilität von $v^* = 0$ lediglich vom Spektrum von G_x ab, und ist somit gleich der Antwort für $x^* = 0$. ■

Gleichung (3.17) war, wie in Kapitel 2 erwähnt, bereits in der Diplomarbeit [Frank, 2002] von M. FRANK Gegenstand von Stabilitätsuntersuchungen. In Abbildung 3.5 ist ein Ausschnitt einer $r - k$ -Schnittfläche des Parameterraums \mathbb{R}_+^4 für ein festes Paar (ω, D) zu sehen. Die Menge der Punkte mit rein imaginärem $\lambda \in \sigma(G_x)$ konnte analytisch parametrisiert werden, und stellte parabelähnliche Kurven dar, deren Schnittpunkte in den lokalen Spitzen liegen. Das Ziel ist nun, die bereits bestehenden Erkenntnisse auszunutzen und damit die Stabilitätsgrenze im erweiterten Parameterraum zu bestimmen.


 Abbildung 3.5: Stabilitätsgrenze im r - k -Raum

Lemma 3.2.2 Sei (3.17) gegeben. Dann ist die Stabilitätsgrenze von $x \equiv 0$ im $r_0 - k_x$ -Raum durch die Parametrisierung

$$k_x(\omega) = \frac{2D_x^2\omega_0^2}{\sin^2\omega} \left(1 - \cos\omega + \sqrt{(1 - \cos\omega)^2 + D_x^{-2}\sin^2\omega} \right) \quad (3.24)$$

$$r_0(\omega) = -\frac{\omega \sin\omega}{D_x\omega_0} \left(1 - \cos\omega + \sqrt{(1 - \cos\omega)^2 + D_x^{-2}\sin^2\omega} \right)^{-1} \quad (3.25)$$

mit

$$\omega \in \bigcup_{l \in \mathbb{N}} ((2l - 1)\pi, 2l\pi)$$

gegeben.

Beweis: Der Beweis ist in [Frank, 2002, S. 65ff] nachzulesen. ■

Satz 3.2.3 Im Parameterraum \mathbb{R}_+^6 ist die Stabilitätsgrenze unabhängig von D_ϕ, k_ϕ und ν_0 wie in Lemma 3.2.2 gegeben.

Beweis: Die Spektralelemente mit $\lambda = i\omega$ hängen nicht von D_ϕ, ν_0 oder k_ϕ ab. Damit lassen sich r_0 und k_x auf der Stabilitätsgrenze auf die selbe Weise parametrisieren wie in Lemma 3.2.2. ■

Das heißt also, dass die Kopplung an den zweiten Freiheitsgrad keinerlei Änderung der Stabilitätsgrenzen ergibt, solange der zweite Freiheitsgrad selbst gedämpft ist und die Schnittkraft nicht von der Schnittgeschwindigkeit abhängt.

3.3 Numerische Untersuchungen

Der vorige Abschnitt hat gezeigt, dass die Hinzunahme eines weiteren Freiheitsgrades trotz der darin schon enthaltenen autonomen Delayvariationen keine Auswirkungen auf die Stabilitätsgrenze hat, sofern man $l_x = 0$ wählt. Ziel des folgenden Abschnittes ist es, den Einfluss von l_x auf die Stabilitätsgrenze zu klären. Wie schon zu Ende von Abschnitt 3.1 erwähnt, kann eine zu große Wahl von l_x das Stabilitätsgebiet dramatisch verändern. Die Frage ist aber, ob eine Variation von l_x im Rahmen der ebenfalls in Abschnitt 3.1 ermittelten Grenzen substantielle Veränderungen der Stabilitätsgrenze ergibt. Das soll in den folgenden Ausführungen beantwortet werden.

Das System ist hier durch

$$\dot{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 & 0 & +l_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 + l_\phi \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v(t-r(v_t)) \quad (3.26)$$

gegeben. Das führt zur linearen Gleichung

$$\dot{v}(t) = f(v_t) = Av(t) + Bv(t - r_0), \quad (3.27)$$

was zu

$$\begin{aligned} h(\lambda) = & \lambda^4 + (2D_x\omega_0 + 2D_\phi\nu_0 - l_\phi)\lambda^3 \\ & + (\nu_0^2 + 4D_\phi\nu_0D_x\omega_0 - 2D_x\omega_0l_\phi + \omega_0^2 + k_x(1 - e^{-\lambda r_0}))\lambda^2 \\ & + (2D_x\omega_0\nu_0^2 + 2\omega_0^2D_\phi\nu_0 - \omega_0^2l_\phi + (2k_xD_\phi\nu_0 + l_xk_\phi - k_xl_\phi)(1 - e^{-\lambda r_0}))\lambda \\ & + \omega_0^2\nu_0^2 + k_x\nu_0^2(1 - e^{-\lambda r_0}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit den neu bestimmten Matrizen A, B führt. Eine analytische Lösung, auch mit dem D-Subdivisions-Verfahren, ist nicht mehr zu erwarten. Es bleibt aber die Möglichkeit, numerische Verfahren anzuwenden. Ein numerisches Verfahren kann zwar keinen analytischen Beweis ersetzen, aber es kann, richtig angewandt, sehr deutliche Hinweise darauf geben, ob Veränderungen der Stabilitätsgrenze zu erwarten sind oder nicht. Im folgenden Kapitel werden Ergebnisse präsentiert, die mit Hilfe der auf Matlab basierenden Algorithmen zu erhalten sind, die unter dem Namen DDE-BIFTOOL an der Katholischen Universität Leuven entwickelt wurden. Mehr Information ist über die Internetseite

ω_0	D_x	k_x	l_x	ν_0	D_ϕ	k_ϕ	l_ϕ	r
600	0.05	35000	0	100	0.05	$3k_x$	2	0.0075

Tabelle 3.2: Parametertabelle

<http://www.cs.kuleuven.ac.be/~koen/delay/ddebiftool.shtml>

zu erhalten. Die Erläuterungen über das Vorgehen des Tools sollen das Verständnis für die Entstehung der Ergebnisse erleichtern und haben keinen Anspruch auf mathematische Vollständigkeit. Die zu Grunde liegenden Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1(t) &= v_2(t) & (3.29) \\
 \dot{v}_2(t) &= -(\omega_0^2 + k_x)v_1(t) - 2D_x\omega_0v_2(t) + l_xv_4(t) + k_xv_1(t-r) \\
 \dot{v}_3(t) &= v_4(t) \\
 \dot{v}_4(t) &= -k_\phi v_1(t) - \nu_0^2 v_3(t) - (2D_\phi\nu_0 - l_\phi)v_4(t) + k_\phi v_1(t-r).
 \end{aligned}$$

Es werden die Parameter laut Tabelle 3.2 verwendet. Die Auswahl der Werte erfolgt nach Kriterien, die in Abschnitt 3.1 erläutert wurden. Die für die x -Richtung entscheidenden Parameter wurden exakt so gewählt, dass sie äquivalent zu der in [Frank, 2002] durchgeführten Stabilitätsanalyse sind. In ϕ -Richtung wird angenommen, dass die Eigenfrequenz des Werkstücks $\frac{100}{2\pi} Hz$ beträgt und eine der x -Richtung ähnliche Dämpfung herrscht. Der Geschwindigkeitsparameter l_ϕ mindert die Dämpfung der ϕ -Richtung und darf sinnvollerweise nicht zu hoch gewählt werden. Mit $l_\phi = 2$ ist er im Vergleich zu den Messungen sehr hoch gewählt. Das soll dazu dienen, die Anwendbarkeit des Tools zu testen, da dies für $l_x = 0$ keine Auswirkung zeigen darf. Man sieht auch, dass bei konstantem ν_0 der Parameter l_ϕ durch \tilde{D}_ϕ ersetzt werden könnte, denn es gilt $\tilde{D}_\phi = D_\phi - \frac{l_\phi}{2\nu_0}$.

3.3.1 $l_x = 0$

Zunächst werden die Ergebnisse der analytischen Untersuchung reproduziert.

Für $l_x = 0$ ist laut Satz 3.2.3 dasselbe Stabilitätsverhalten zu erwarten, wie bei der eindimensionalen Analyse. Die Parameter $k_x = 35000$ und $r = 0,0075$ sind so gewählt, dass sie sich knapp unterhalb eines Minimums der Stabilitätsgrenze befinden, was Abbildung 3.5 zu entnehmen ist. Bild 3.6 zeigt Lösungen der transzendenten charakteristischen Gleichung (3.28) in diesem Punkt, deren Realteil größer als -1400 ist, im Folgenden als Spektrum der Gleichung bezeichnet, und man kann daraus ablesen, dass es sich tatsächlich um einen stabilen Punkt im Parameterraum handelt. Da letztlich nur Eigenwerte interessant sind, die nahe der Imaginärachse liegen, wird auf diese ein besonderes Augenmerk gelegt. Solche Eigenwerte werden im Folgenden als **kritisch** bezeichnet. Die folgenden Ausführungen erläutern in groben Zügen die Funktionsweise von BIFTOOL, um das Zustandekommen der Kurven verständlich zu machen. Der Parameter k_x wird mit einer vorgegebenen maximalen Schrittweite erhöht und die Stabilität der Nulllösung

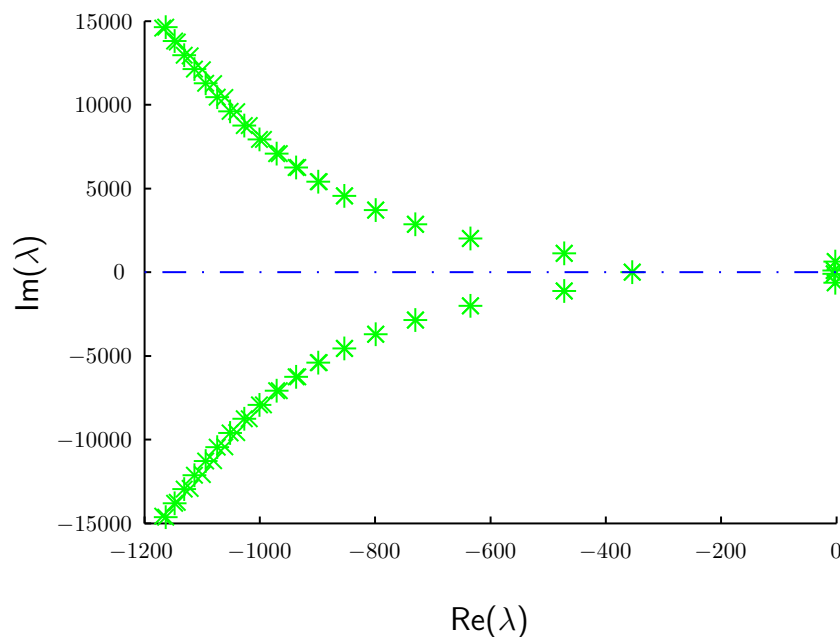


Abbildung 3.6: Numerisch bestimmte Eigenwerte der Gleichung im Startpunkt

eines jeden Punktes neu berechnet. Dafür wird stets das Spektralelement mit dem größten Realteil ermittelt, bis ein Überschreiten der Imaginärachse dieses Spektralelements registriert wird. Es wird ein Punkt nahe der Stabilitätsgrenze ausgewählt und durch BIF-TOOL so korrigiert, dass der Realteil des kritischen Eigenwerts eine festgelegte Grenze unterschreitet.

In Bild 3.7 sieht man, dass die Numerik eine Hopfbifurkation vermuten lässt, denn es hat den Anschein, dass ein einzelnes konjugiert komplexes Paar von Eigenwerten am Bifurkationspunkt die Imaginärachse überschreitet. Die tatsächlichen Voraussetzungen für das Vorliegen einer Hopfbifurkation sind im vorliegenden Fall jedoch weit komplexer, als das für ODE's der Fall ist. Dieser Tatsache wird in einem späteren Kapitel noch Rechnung getragen. Besonders interessant ist hier, dass die Eigenfrequenz der kritischen Eigenwerte ebenfalls abzulesen ist. Hier sind es ca. $\frac{600}{2\pi} Hz$. Der links davon liegende Punkt mit der Eigenfrequenz $\frac{100}{2\pi} Hz$ ist wahrscheinlich dem zweiten Freiheitsgrad, also dem Drehwinkel ϕ , zuzuordnen, da er den zu erwartenden Imaginärteil des zugehörigen Eigenwerts aufweist. Als nächstes wird der Parameter r_0 variiert und durch Änderung von k_x wieder die Stabilitätsgrenze aufgesucht. Die Punkte werden verbunden, und der Algorithmus beginnt von Neuem. Das Tool berechnet nun bis zu vorgegebenen Parametergrenzen den Verlauf der Stabilitätsgrenze für den kritischen Eigenwert.

Dabei ist zu beachten, dass ein etwaiges Kreuzen einer anderen Kurve, die einen anderen kritischen Eigenwert darstellt, in der Regel unbemerkt bleibt. Man muss also immer die Stabilität in jedem Punkt dieser Kurve bestimmen, um das Kreuzen von Kurven zu

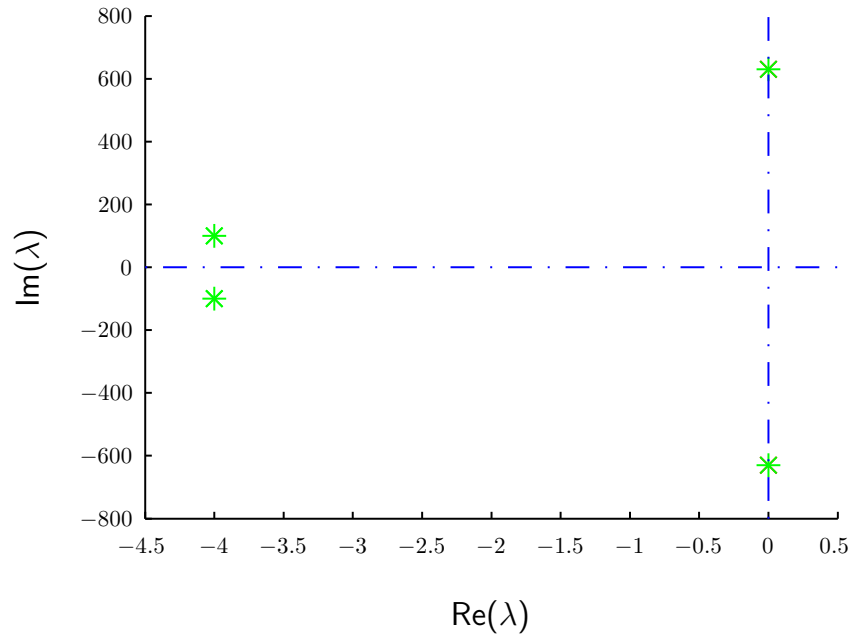


Abbildung 3.7: Kritische Eigenwerte im Bifurkationspunkt

registrieren. Im vorliegenden Fall wurde das durchgeführt und nach Identifikation der Kreuzungspunkte ein modifiziertes Verfahren angewandt, um die Stabilitätskurve der eindimensionalen Untersuchung zu reproduzieren. Einer der Kreuzungspunkte liegt bei $k_x = 136000$ und $r = 0,02035$, wie in Bild 3.8 dargestellt. Die beiden kritischen Eigenwertpaare sind in Bild 3.9 und Bild 3.10 dargestellt. Die Abbildungen zeigen jeweils ein doppeltes Eigenwertpaar, das beim Überschreiten des Kreuzungspunktes gleichzeitig die Imaginärachse zu passieren scheint. Je genauer man die Parameter in Richtung Kreuzungspunkt wählt, desto näher liegen beide Paare an der Imaginärachse. Die zum Eigenwert mit dem größeren Realteil gehörende Eigenschwingung wird aufgrund des exponentiellen Anstiegs der Amplituden die andere schnell dominieren. Das gilt selbstverständlich nur für die Linearisierung. Numerische Untersuchungen der Lösungen, die in einem späteren Kapitel folgen, können Aufschluss darüber geben, inwieweit die zugehörige nichtlineare Gleichung dasselbe Verhalten zeigt. Dann wird stets das oben beschriebene Verfahren, ausgehend von Punkten unterhalb der Minima der fünf ersten Äste, angewandt. Bild 3.11 zeigt den Vergleich der numerischen zum Ergebnis der eindimensionalen analytischen Untersuchung. Der Vergleich lässt den Schluss zu, dass das numerische Verfahren in dem gewählten Bereich sehr sicher ist, da es die analytischen Ergebnisse voll bestätigt. Da der erste Ast bei $r_0 = 0,01$ für $D = 0,2m$ einer Schnittgeschwindigkeit von $1200 \frac{m}{min}$ gleich kommt, was nicht im Bereich des Interesses liegt, wurden weitere Äste analysiert. Abbildung 3.12 zeigt, wie sich die Stabilitätsgrenze für größere r_0 weiter entwickelt. Der relevante Bereich liegt zwischen $30 \frac{m}{min}$ und $300 \frac{m}{min}$, was umgerechnet $r_0 = 0,4$ bis $r_0 = 0,04$ entspricht. Die Tatsache, dass bei der numerischen Analyse für $l_x = 0$ die analytischen Ergebnisse bestätigt werden, ist die Voraussetzung

3 Stabilitätsanalyse

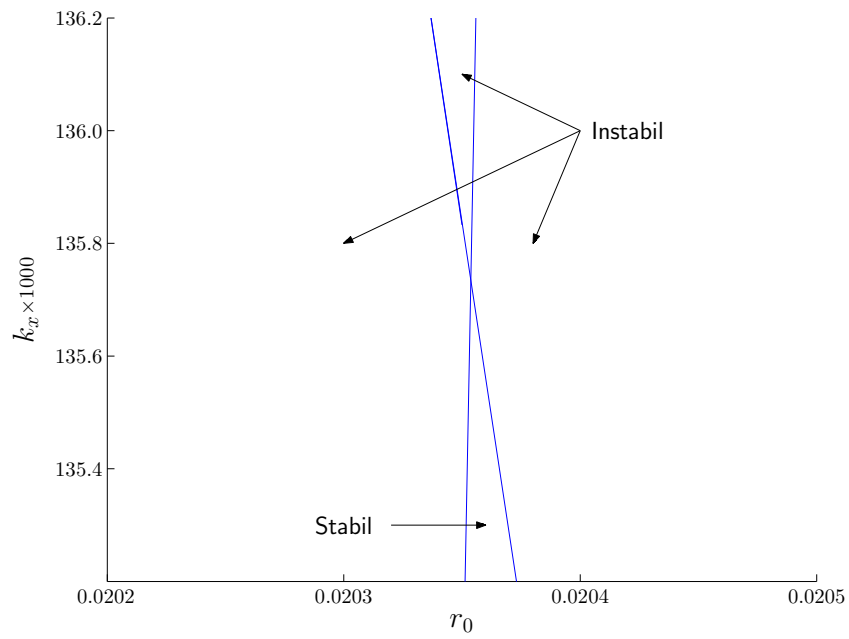


Abbildung 3.8: Darstellung eines Kreuzungspunktes

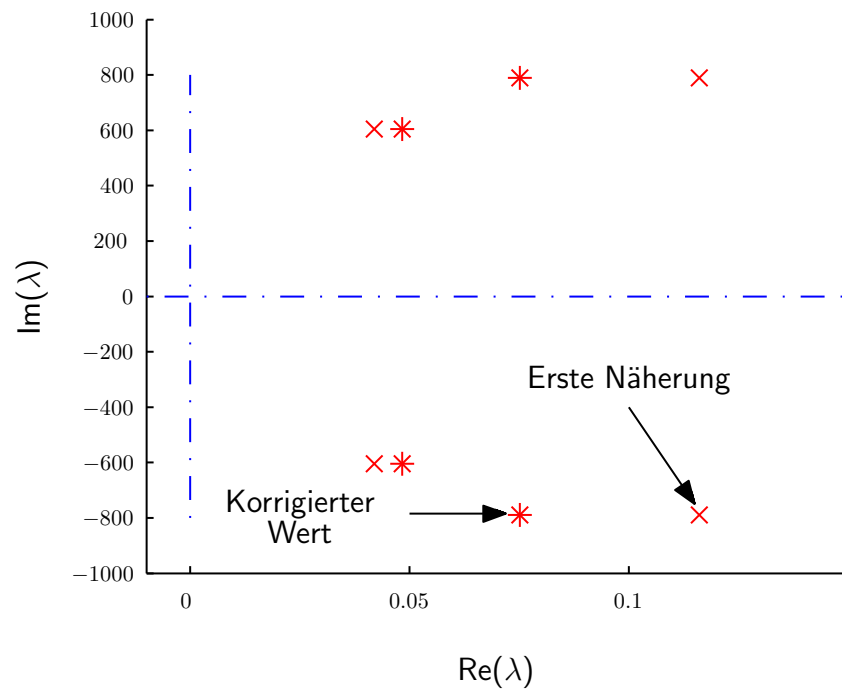


Abbildung 3.9: Zwei kritische Eigenwertpaare: $136000 < k_x < 137000$ und $r = 0,02035$

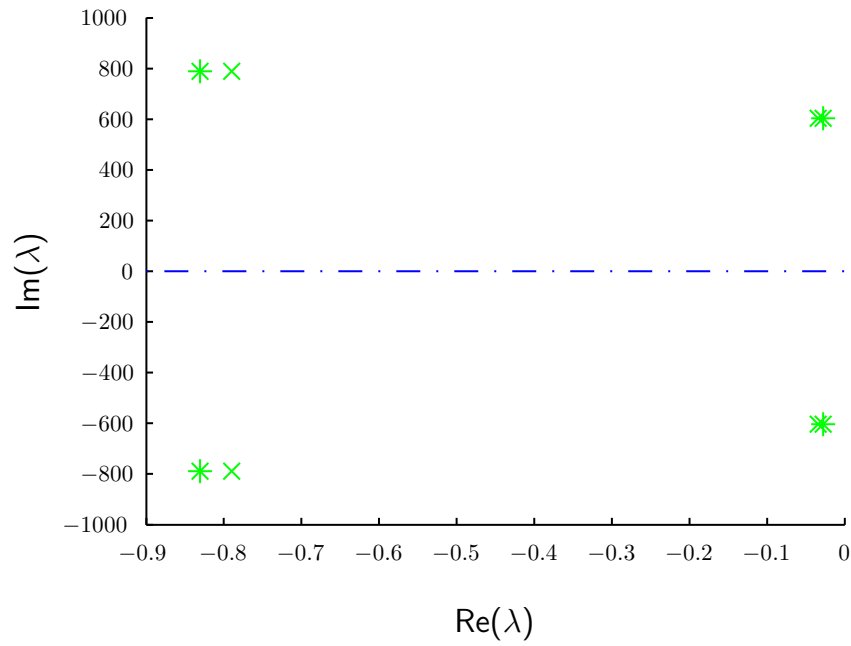


Abbildung 3.10: Zwei kritische Eigenwertpaare: $133000 < k_x < 134000$ und $r = 0, 2035$

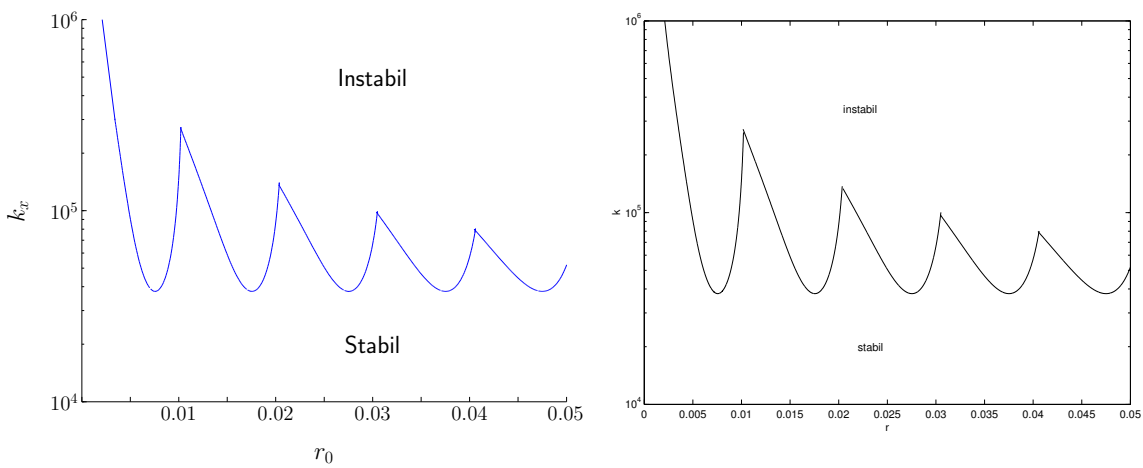


Abbildung 3.11: Stabilitätsgrenzen: Links 2FG-Modell, rechts 1FG-Modell

3 Stabilitätsanalyse

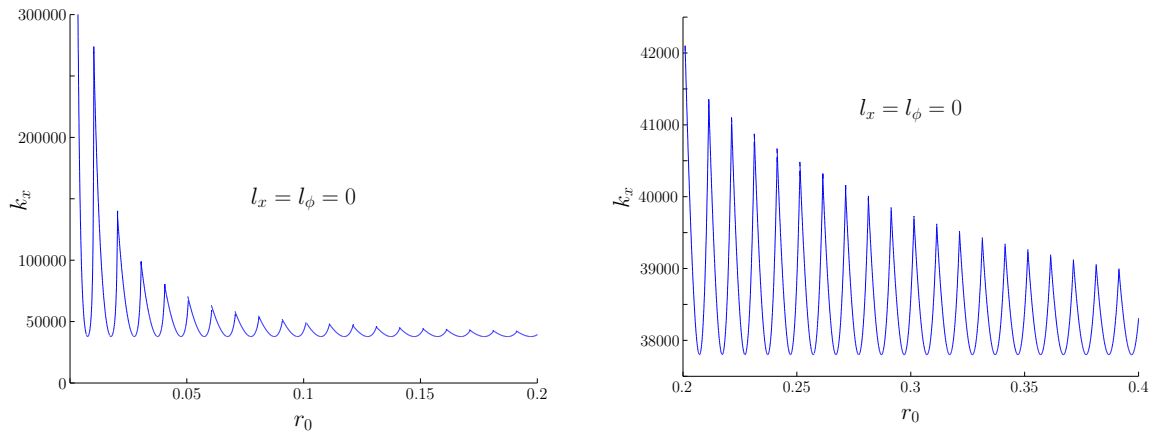


Abbildung 3.12: Fortsetzung der Stabilitätsgrenze

Parameter	ω_0	D_x	k_x	l_x	ν_0	D_ϕ	k_ϕ	l_ϕ	r
Wert	600	0.05	y -Achse	-1 bis 1	100	0.05	$3 \cdot k_x$	0	x -Achse

Tabelle 3.3: Parameter bei l_x -Variation

für die Benutzbarkeit des Tools für $l_x \neq 0$. Das ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

3.3.2 $l_x \neq 0$

Ausgiebige Studien mit BIFTOOL haben gezeigt, dass eine Variation von l_x und l_ϕ in realistischen Grenzen praktisch keine Auswirkung auf die Stabilitätsgrenze haben. Wählt man z.B. die Parameter wie in Tabelle 3.3 so kann man, wie in Abbildung 3.13 dargestellt, erkennen, dass die Kurve lediglich um die Differenz $\Delta k_x = 400$ verschoben ist, während sie insgesamt die selbe Erscheinung hat. Der Trend ist auch bei anderen l_ϕ zu beobachten. Selbst wenn man von einem viel niedrigeren Trägheitsmoment ausgeht, z.B. $J = 1$, womit man $k_\phi = 150k_x$ erhält, ergibt sich zwar ein stärkerer Einfluss für l_x ,

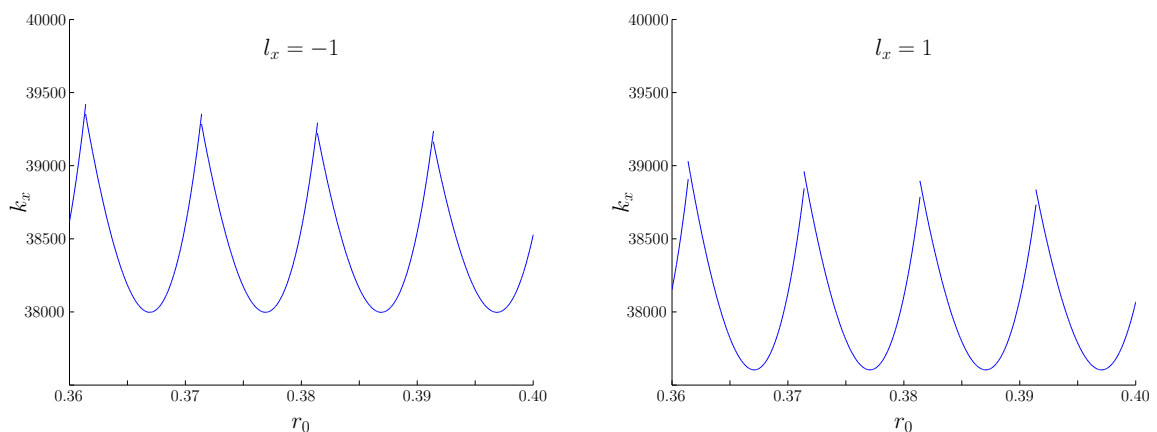
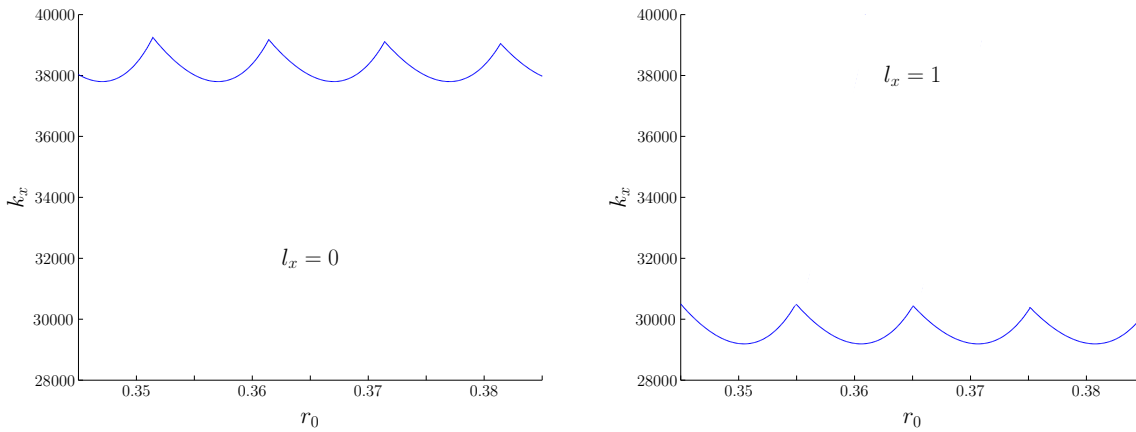


Abbildung 3.13: Vergleich bei Variation von l_x

Abbildung 3.14: Variation von l_x für $k_\phi = 150k_x$

dennoch kann man lediglich Verschiebungen der Grenze beobachten und keine nennenswerten anderen Veränderungen, wie in Abbildung 3.14 dargestellt. Erst bei extrem hohen und unrealistischen Werten für l_x treten die in Abschnitt 3.1 erwähnten Phänomene auf. Damit kann man davon ausgehen, dass sowohl für $k_\phi = 3k_x$ als auch $k_\phi = 150k_x$ weder l_x noch l_ϕ einen signifikanten Einfluss auf die Stabilitätsgrenze haben.

3.4 Zusammenfassung

Delayvariationen im vorliegenden Fall können mehrere Ursachen haben. Entweder wird das System durch eine äußere Ursache gestört, was jedoch nur zur Delayvariation führt, wenn sich die Drehzahl verändert, oder es erfolgt eine Rückkopplung. In beiden Fällen ist es jedoch so, dass die autonome Entwicklung des Systems von großem Interesse ist, will man die Dynamik verstehen. Denn ist eine Störung nicht permanent, so entscheidet die autonome Dynamik, wie das System auf eine solche reagiert. Das vorangegangene Kapitel hat gezeigt, dass für $l_x = 0$ keine Änderung der Stabilitätsgebiete erfolgt, und dass für eine Variation von l_x numerische Methoden keine signifikanten Änderungen der Stabilitätsgrenzen aufzeigen. Da die Stabilitätsanalyse jedoch nur lokale Aussagen mittels der linearisierten Gleichung macht und man den Bereich der Gültigkeit nicht kennt, ist der genaue Zusammenhang zwischen dem ursprünglichen 1-FG-Modell, der linearisierten 2-FG-Gleichung und dem nichtlinearen 2-FG-Modell nur in diesem Gebiet von unbekannter Größe geklärt. Ein weiteres Ziel kann es nun sein, den Gültigkeitsbereich abzuschätzen und die nichtlineare Dynamik zu beleuchten. Nichtlineare Eigenschaften werden im folgenden Kapitel diskutiert. Eine Vorstellung vom Gültigkeitsbereich wird am Ende von Kapitel 4 durch numerische Simulationen von Lösungen gegeben.

4 Nichtlineare Analyse

Ziel des Kapitels ist es, Eigenschaften der nichtlinearen Modellgleichung zu beleuchten, die nähere Auskunft über das Verhalten von Lösungen in der Nähe der Nulllösung geben können. Die lineare Stabilitätsanalyse von Kapitel 3 ergab eindeutig, dass eine zustandsabhängige Delayvariation keinen Einfluss auf die Stabilitätsgrenze hat. Dabei wird jedoch immer davon ausgegangen, dass man in hinreichend kleinen Umgebungen der Nulllösung startet, in denen die Ausgangsgleichung und die Linearisierung dasselbe asymptotische Verhalten zeigen. Diese Umgebungen können unter Umständen aber so klein sein, dass sie insbesondere in der Nähe der Stabilitätsgrenze kaum erreicht werden können. Vergrößert man die Umgebung für einen festen Parametersatz, so werden sich die Linearisierung und die Ausgangsgleichung im Verhalten ihrer Lösungen wahrscheinlich stark unterscheiden. Das kann z.B. heißen, dass für die selbe Startfunktion die Lösung der Linearisierung schnell gegen Null konvergiert, während die Lösung der Ausgangsgleichung durch die nichtlinearen Anteile von der Null weggetrieben wird. Im Fall der Instabilität wird eine Lösung der linearen Gleichung aus jeder Umgebung um die Null herausführen, während sich die Lösung der nichtlinearen auf attraktive Orbits oder Punkte zubewegen kann. Die folgenden Abschnitte zeigen, dass die Modellgleichung in der Nähe der Stabilitätsgrenze ein weit komplexeres Verhalten zeigt, als die Linearisierung. Dazu ist es zunächst nötig, eine höhere Ableitung des Delayfunktionals zu bestimmen, um anschließend eine Hopfbifurkation nachweisen zu können. Abschnitt 4.3 gibt mittels eines numerischen Integrationsverfahrens eine Anschauung davon, wie sich Lösungen der Modellgleichung verhalten.

4.1 Zweite Ableitung des Delayfunktionals

Für eine zweite Ableitung betrachtet man den Raum $\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ mit der Norm $\|\cdot\|_2$, die via

$$\|\varphi\|_2 := \|\varphi\|_0 + \|\dot{\varphi}\|_0 + \|\ddot{\varphi}\|_0$$

definiert wird. Das bedeutet physikalisch, dass die Konvergenz von Funktionenfolgen nun auch in der zweiten Ableitung, also der Beschleunigung, gleichmäßig erfolgen muss. Insbesondere sind die gegebenen Funktionen nun auch in der zweiten Ableitung stetig. Die erste Ableitung des Delayfunktionals ist nach entsprechender Einschränkung von r auf $\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), \mathbb{R}) \\ \eta &\mapsto dr(\eta) \end{aligned} \tag{4.1}$$

gegeben. Dabei ist $dr(\eta)$ konkret als linearer Operator in seiner Wirkung auf φ bekannt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto dr(\eta)(\varphi) = \frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wie in Abschnitt 1.2 eingeführt, muss die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), \mathbb{R}) \\ \psi &\mapsto dr(\psi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

an der Stelle η nochmals abgeleitet werden, um letztlich

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), \mathbb{R})) \\ \eta &\mapsto d^2r(\eta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

zu erhalten.

Satz 4.1.1 *Das Delayfunktional r ist in einer offenen Nullumgebung $U \subset \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ zweifach stetig differenzierbar. Für $\eta \in U$ gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\varphi, \psi) &\mapsto d^2r(\eta)(\varphi, \psi) \\ &= \frac{-\dot{\varphi}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi) + \dot{\eta}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi)dr(\eta)(\varphi) - \dot{\psi}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Beweis: Definiert man die zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} \Psi_1 : \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \psi &\mapsto \begin{pmatrix} -r(\psi) \\ \dot{\psi}_3(-r(\psi)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\varphi_3(x) - \varphi_3(0)}{n_0 + y}, \end{aligned}$$

für festes $\varphi \in \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$, so ist $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$. Die Teilabbildung Ψ_2 ist sicher stetig differenzierbar, wenn $|y| < n_0$ ist, und die Ableitung an der Stelle (x_0, y_0) ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\dot{\varphi}_3(x_0)}{n_0 + y_0} & -\frac{\varphi_3(x_0) - \varphi_3(0)}{(n_0 + y_0)^2} \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente von Ψ_1 ,

$$\begin{aligned}\Psi_{1,1} : \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto -r(\psi)\end{aligned}\quad (4.6)$$

ist bezüglich $\|\cdot\|_1$ stetig differenzierbar und somit auch bezüglich der feineren von $\|\cdot\|_2$ erzeugten Topologie. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\Psi_{1,2} : \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \dot{\psi}_3(-r(\psi))\end{aligned}\quad (4.7)$$

stetig differenzierbar ist. Vergleicht man $\Psi_{1,2}$ in (4.7) mit der Abbildung Φ in (2.53) aus Lemma 2.3.1, so lässt sich durch einen Analogieschluss die Ableitung zu

$$d\Psi_1(\eta)(\psi) = -\ddot{\eta}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi) + \dot{\psi}_3(-r(\eta)), \quad (4.8)$$

bestimmen. Der Beweis kann ebenfalls analog zu dem von Lemma 2.3.1 geführt werden, bis zu zeigen bleibt, dass $\dot{\psi}_3(-r(\eta))$ die Ableitung von $\psi \mapsto \dot{\psi}_3(-r(\eta + \psi))$ ist. Es gilt

$$\frac{|\dot{\psi}_3(-r(\eta + \psi)) - \dot{\psi}_3(-r(\eta))|}{\|\psi\|_2} \leq |r(\eta + \psi) - r(\eta)| \xrightarrow{\|\psi\|_2 \rightarrow 0} 0 \quad (4.9)$$

mit der Lipschitzkonstanten $\|\psi\|_2$, was zu zeigen war.

Damit ist Ψ stetig differenzierbar und die Ableitung lässt sich durch Anwenden der Kettenregel [Ambrosetti und Prodi, 1993, S. 12] bestimmen. Die Ableitung ist durch

$$d\Psi(\eta)(\psi) = d\Psi_2(\Psi_1(\eta))(\psi)d\Psi_1(\eta)(\psi)$$

gegeben. Das ergibt

$$\begin{aligned}d\Psi(\eta)(\psi) &= d\Psi_2(\Psi_1(\eta))(\psi)d\Psi_1(\eta)(\psi) \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\dot{\varphi}_3(-r(\eta))}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))} & -\frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{(n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta)))^2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -dr(\eta)(\psi) \\ -\ddot{\eta}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi) + \dot{\psi}_3(-r(\eta)) \end{array} \right) \\ &= \frac{-\dot{\varphi}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi) + \ddot{\eta}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi)dr(\eta)(\varphi) - \dot{\psi}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))}\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ■

4.2 Hopfbifurkation

Ändert eine von Parametern abhängige nichtlineare Differentialgleichung an einem Punkt im Parameterraum ihr Stabilitätsverhalten, so können an diesem Punkt so genannte Bifurkationen auftreten. Das kann heißen, dass sich an einem solchen Punkt eine stationäre

Lösung zu zwei oder mehreren stationären Lösungen verzweigt oder auch eine Verzweigung in periodische Lösungen auftritt, siehe z.B. [Chow und Hale, 1982]. Von besonderem Interesse ist die Hopfbifurkation. Sie bezeichnet die Verzweigung einer attraktiven stationären Lösung in eine repulsive stationäre und eine meist attraktive periodische Lösung. Im folgenden Abschnitt werden Hopftheoreme für den speziellen Fall von nichtlinearen RFDE's formuliert, also auf einem ∞ -dimensionalen Zustandsraum. Dennoch macht es Sinn, sich die Hopfbifurkation in 2-dimensionalen Zustandsräumen vorzustellen, da hier schon die elementaren Eigenschaften klar werden.

Sei für $x \in \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{R}$ eine nichtlineare ODE der Form

$$f(k, x, \dot{x}) = 0 \tag{4.10}$$

gegeben, und sei $x \equiv 0$ für alle k eine stationäre Lösung. Sei weiter $x \equiv 0$ für $k < 0$ asymptotisch stabil und für $k > 0$ instabil. Man spricht von einer Hopfbifurkation, wenn es für $k \in (0, \varepsilon)$ eine periodische Lösung gibt, die eine von k , dem sogenannten Bifurkationsparameter, abhängige Amplitude und Periode hat, wobei die Amplitude für $k \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 strebt und auch die Periode konvergent ist.

Folgendes hypothetische physikalische Beispiel kann eine Anschauung davon geben, was das in der Praxis bedeutet. Man nehme einen Massepunkt in einem von k abhängigen Kraftfeld an, der für $k < 0$ ein anziehendes Potential im Ursprung erfahre. Für $k > 0$ werde dieses Potential dann zwar abstoßend, allerdings so, dass es eine Kreisbahn mit dem Radius k gebe, auf dem der Massepunkt mit fester Frequenz ν rotieren könne. Die mathematische Beschreibung des Phänomens mittels einer ODE würde dann zu einer Hopfbifurkation führen.

Im allgemeinen hat man jedoch keine Kenntnis davon, wie die Abhängigkeit der Periode und der Amplitude der periodischen Lösung vom Bifurkationsparameter explizit beschaffen ist, und auch nicht davon, wie groß das Intervall $(0, \varepsilon)$ ist, auf dem die periodische Lösung existiert. Eine strenge mathematische Definition für einen 2-dimensionalen Zustandsraum findet sich in [Chow und Hale, 1982, S. 11], für einen n -dimensionalen Raum in [Chow und Hale, 1982, S. 99].

Obwohl die vorliegende RFDE keinen endlichdimensionalen Zustandsraum besitzt, ist das zuvor gemachte Bild einer Hopfbifurkation ausreichend, um sich die selbe Situation auf einem Banachraum vorstellen zu können. Die Hopfbifurkation ist auch auf höherdimensionalen Räumen so geartet, dass der Lösungsraum der linearisierten Gleichung einen genau 2-dimensionalen Teilraum aufweist, auf dem die Lösungen für $k > 0$ von der stationären Lösung wegstreben, während auf dem verbleibenden Raum alle Lösungen weiter asymptotisch gegen die stationäre Lösung konvergieren. Stellt man sich nun eine periodische Lösung der nichtlinearen Ausgangsgleichung auf dem 2-dimensionalen Teilraum vor, so ist man schon sehr nahe an der Wahrheit. Man kommt für die Formulierung eines Hopftheorems und dessen Interpretation im vorliegenden Fall ohne die

Konzepte der so genannten stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten und auch der Zentrumsmanigfaltigkeit aus. Für weitergehende Studien über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus sind sie jedoch unumgänglich. Näheres dazu lässt sich für RFDE's in [Diekmann u. a., 1995, S. 242ff] finden.

Um eine Hopfbifurkation im Fall der vorliegenden zustandsabhängigen RFDE

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(v_t)) = f(v_t) \quad (4.11)$$

nachzuweisen, kann man versuchen, die Voraussetzungen des entsprechenden Hopftheorems für RFDE's in [Hale, 1993, S. 331ff] nachzuprüfen. Das scheitert jedoch schon an der wichtigsten Voraussetzung, nämlich der Differenzierbarkeit von f auf $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$. In [Walther, 2003b, S. 47] wurde gezeigt, dass selbst bei einer einfachen Form einer zustandsabhängigen Gleichung, wie z.B.

$$\dot{x}(t) = g(x(t - r(x_t)))$$

mit $g : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}^n$, \mathcal{O} offen, und einem stetig differenzierbaren Delayfunktional

$$r : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \supset \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^n,$$

die resultierende Abbildung $f(x_t) = \dot{x}(t)$ nicht einmal lipschitzstetig ist. Das ist nachvollziehbar, wenn man f als

$$\tilde{f} = g \circ ev \circ (id \times r)$$

darstellt, und die Abbildung

$$ev : \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \times [-R, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$ev(\eta, s) = \eta(s)$$

betrachtet, die in nichttrivialen Fällen nur dann differenzierbar ist, wenn sie auf differenzierbare η angewandt wird. Das macht es nötig, für die gesamte Klasse der zustandsabhängigen RFDE's ein spezielles Hopftheorem zu formulieren. Danach ist zu zeigen, dass es Beispiele gibt, die den Voraussetzungen genügen. Das ist erst kürzlich in der Doktorarbeit von M. EICHMANN [Eichmann, 2005] gelungen. Es folgen die dafür nötigen Voraussetzungen.

Da im Folgenden häufig wechselnde kartesischen Produkte von Banachräumen mit unterschiedlichen Normen auftreten, zunächst eine Definition:

Definition 4.2.1 *Seien die Räume $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ mit den Normen $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gegeben. Für ein beliebiges endliches Kreuzprodukt*

$$\mathcal{C}_{n_1, n_2, \dots, n_k} := \mathcal{C}^{n_1}([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^{n_2}([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \dots \times \mathcal{C}^{n_k}([-R, 0], \mathbb{R}^4)$$

4 Nichtlineare Analyse

sei die Norm

$$\|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

wie folgt definiert: Für

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \mathcal{C}^{n_1}([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^{n_2}([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \dots \times \mathcal{C}^{n_k}([-R, 0], \mathbb{R}^4)$$

ist

$$\|\varphi\|_{n_1, n_2, \dots, n_k} := \|\varphi_1\|_{n_1} + \|\varphi_2\|_{n_2} + \dots + \|\varphi_k\|_{n_k}.$$

Tritt ein kartesisches Produkt in Kombination mit reellen oder komplexen Zahlen auf, so bezeichne

$$|\cdot| + \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

die Norm auf $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ oder $\mathbb{C} \times \mathcal{C}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Damit lassen sich die Voraussetzungen formulieren, mit denen man eine Hopfbifurkation nachweisen kann.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Omega^* \subset \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und $\Omega \subset \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ offen bezüglich $\|\cdot\|_2$ mit $\Omega^* = \Omega \cap \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^n)$ und $\|\cdot\|_1$. Sei

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Mit $d_2 f(\alpha, \eta)$ sei die partielle Ableitung in der zweiten Komponente bezeichnet. Dann sind mit (H1) bis (H6) folgende Eigenschaften gemeint:

- (H1): Die Abbildung f ist stetig differenzierbar bezüglich $|\cdot| + \|\cdot\|_1$ und es gibt eine konstante Funktion $\phi^* \in \Omega^*$ mit $f(\alpha, \phi^*) = 0$ für alle $\alpha \in I$
- (H2): Für die partielle Ableitung

$$d_2 f(\alpha, \eta) \in L(\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$$

mit $(\alpha, \eta) \in I \times \Omega$ existiert eine stetige Fortsetzung nach $L(\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, die mit $\bar{d}_2 f(\alpha, \eta)$ bezeichnet wird.

- (H3): Die Abbildung

$$I \times \Omega \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^n) \ni (\alpha, \eta, \psi) \mapsto \bar{d}_2 f(\alpha, \eta)(\psi) \quad (4.12)$$

ist bezüglich $|\cdot| + \|\cdot, \cdot\|_{1,0}$ stetig.

- (H4): Die Abbildung f ist zweimal stetig differenzierbar bezüglich $|\cdot| + \|\cdot\|_2$.
- (H5): Für die zweite partielle Ableitung

$$d_2^2 f(\alpha, \eta) \in L^2(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$$

existiert eine stetige Fortsetzung nach $L^2(\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, die mit $\bar{d}_2^2 f(\alpha, \eta)$ bezeichnet wird.

- (H6): Die Abbildungen

$$\begin{aligned} I \times \Omega \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, \eta, \psi_1, \psi_2) &\mapsto \bar{d}_2^2 f(\alpha, \eta)(\psi_1, \psi_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

und

$$\begin{aligned} I \times \Omega \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n) &\rightarrow L(\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n) \\ (\alpha, \eta, \psi) &\mapsto \bar{d}_2^2 f(\alpha, \eta)(\psi, \cdot) \end{aligned} \quad (4.14)$$

sind stetig bezüglich $|\cdot| + \|\cdot, \cdot, \cdot\|_{2,1,1}$ bzw. $|\cdot| + \|\cdot, \cdot\|_{2,1}$.

Seien $L(\alpha) := d_2 f(\alpha, 0)$ für alle α aus I und eine Parametrisierung von Eigenwerten des Generators von $L(\alpha)$

$$\begin{aligned} \iota : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\mapsto \lambda(\alpha) \end{aligned} \quad (4.15)$$

gegeben. Dann sind mit (L1) bis (L3) folgende Eigenschaften gemeint:

- (L1): $\lambda(0) = i\omega$ ist für $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$ einfacher Eigenwert des Generators des Halbflusses von $L(0)$, also ist der zu $\{-i\omega, i\omega\}$ gehörige Eigenraum zweidimensional. Es gibt kein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k\omega i$ ein anderer Eigenwert ist.
- (L2): Die Parametrisierung ι ist stetig differenzierbar und $\operatorname{Re} \frac{d\iota}{d\alpha}(0) \neq 0$.

Man beachte, dass aus (L1) lokal die Eigenschaft

- (L3): Für alle $\alpha \in I$ ist $\lambda(\alpha)$ einfacher Eigenwert des Generators des Halbflusses von $L(\alpha)$.

folgt. Damit lässt sich nun das Hopftheorem formulieren:

Satz 4.2.2 *Sei mit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (H1) bis (H6) und eine Parametrisierung ι mit (L1) bis (L3) gegeben. Dann gibt es ein offenes Intervall J und eine differenzierbare Abbildung*

$$J \ni a \mapsto (\varphi(a), \alpha(a), T(a)) \in \Omega \times I \times [0, \infty),$$

so dass $\varphi(a)$ die Startfunktion einer $T(a)$ -periodischen Lösung der RFDE

$$\dot{v}(t) = f(\alpha(a), v_t)$$

ist. Weiter gilt $\varphi(0) = 0$ und $T(0) = \frac{2\pi}{\omega}$.

Beweis: Der Beweis ist [Eichmann, 2005, S. 54ff] zu entnehmen. ■

Da für $l_x = 0$ die Stabilitätsgrenze der Modellgleichung wie in Abschnitt 3.2 durch eine Parametrisierung gegeben ist, die, dargestellt durch ein numerisches Verfahren, lediglich an den Kreuzungspunkten nicht invertierbar erscheint, kann man vermuten, dass auf den verbleibenden Kurvenstücken lediglich ein Lösungspaar $\lambda = \pm i\omega$ existiert. Das Ziel ist es, diesen Sachverhalt analytisch zu beweisen, um schließlich zu zeigen, dass außerhalb der Kreuzungspunkte eine Hopfbifurkation vorliegt.

Betrachtet man die RFDE

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(v_t)) \quad (4.16)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_x) & -2D_x\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

wie in Abschnitt 3.2, so lässt sich daraus eine parameterabhängige RFDE definieren, für die das Hopftheorem anwendbar ist. Die Stabilitätsgrenze ließ sich durch

$$k_x(\tilde{\omega}) = \frac{2D_x^2\omega_0^2}{\sin^2\tilde{\omega}} \left(1 - \cos\tilde{\omega} + \sqrt{(1 - \cos\tilde{\omega})^2 + D_x^{-2}\sin^2\tilde{\omega}} \right)$$

$$r_0(\tilde{\omega}) = -\frac{\tilde{\omega} \sin\tilde{\omega}}{D_x\omega_0} \left(1 - \cos\tilde{\omega} + \sqrt{(1 - \cos\tilde{\omega})^2 + D_x^{-2}\sin^2\tilde{\omega}} \right)^{-1} \quad (4.18)$$

mit

$$\tilde{\omega} \in \bigcup_{l \in \mathbb{N}} ((2l - 1)\pi, 2l\pi)$$

parametrisieren. Man beachte, dass $\tilde{\omega}$ nicht dem Imaginärteil der rein imaginären Lösung entspricht, da in [Frank, 2002, S. 65] zuvor eine Zeittransformation durchgeführt wurde, um die Parametrisierung zu erhalten. Die tatsächliche Lösung $\lambda = i\omega$ ist über die Beziehung

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}}{r_0(\tilde{\omega})}$$

gegeben. Für die folgenden Ausführungen sind einige Eigenschaften der Parametrisierung interessant.

Lemma 4.2.3 *Sei $\tilde{\omega} \in (\pi, 2\pi)$. Dann ist*

$$\tilde{\omega} \mapsto r_0(\tilde{\omega})$$

streng monoton wachsend.

Beweis: Sei $y \in (-1, 1)$. Dann gilt

$$\frac{1-y}{1+y}$$

ist positiv und streng monoton fallend. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \bar{r}_0^2(y) &:= \frac{1}{2\frac{1-y}{1+y} + 2\sqrt{\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2 + D_x^{-2}\frac{1-y}{1+y} + D_x^{-2}}} \\ &= \frac{1}{2\frac{1-y}{1+y} + 2\frac{1}{1+y}\sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} + D_x^{-2}} \\ &= \frac{1-y^2}{(1-y)^2 + 2(1-y)\sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} + (1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

ist streng monoton wachsend. Zieht man nun die Wurzel, so bleibt die Monotonie für

$$\bar{r}_0(y) = \sqrt{1-y^2} \left(1-y + \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)}\right)^{-1}.$$

erhalten. Da für $\tilde{\omega} := \arccos_1 y := -\arccos y + 2\pi$ gilt, dass $\arccos_1 y > 0$ und $\arccos_1 y$ streng monoton wachsend ist, folgt, dass

$$\hat{r}_0(y) = \arccos_1 y \sqrt{1-y^2} \left(1-y + \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)}\right)^{-1}$$

ebenfalls streng monoton wachsend ist. Nun substituiert man $y = \cos \tilde{\omega}$ und erhält die streng monoton wachsende Funktion

$$\tilde{\omega} \sqrt{1-\cos^2 \tilde{\omega}} \left(1-\cos \tilde{\omega} + \sqrt{(1-\cos \tilde{\omega})^2 + D_x^{-2}(1-\cos^2 \tilde{\omega})}\right)^{-1} = \omega_0 D_x r_0(\tilde{\omega}),$$

mit $\tilde{\omega} \in (\pi, 2\pi)$, was zu zeigen war. ■

Das bedeutet, dass man den ersten Ast der Parametrisierung, ein Teil davon ist als Kurvenstück mit Minimum bei $r_0 = 0,008$ in Abbildung 3.5 dargestellt, von r_0 und k_x auch als Funktion $r_0 \mapsto k_x(r_0)$ auffassen kann. Auch k_x zeigt ein besonderes Verhalten.

Lemma 4.2.4 Sei $\tilde{\omega} \in (\pi, 2\pi)$. Dann hat

$$\tilde{\omega} \mapsto k_x(\tilde{\omega})$$

genau ein lokales Minimum.

Beweis: Beginnt man mit derselben Substitution $\tilde{\omega} = \arccos_1 y$, so kann man den Term wie im vorigen Lemma in eine reziproke Form bringen.

$$\hat{k}_x(\tilde{\omega}) := \frac{k_x(\tilde{\omega})}{2\omega_0^2} = \frac{D_x^2}{1-\cos^2 \tilde{\omega}} \left(1-\cos \tilde{\omega} + \sqrt{(1-\cos \tilde{\omega})^2 + D_x^{-2}(1-\cos^2 \tilde{\omega})}\right)$$

führt zu

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_x(y) &= \frac{D_x^2}{1-y^2} \left(1-y + \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} \right) \\
 &= \frac{D_x^2((1-y)^2 - (1-y)^2 - D_x^{-2}(1-y^2))}{(1-y^2)(1-y - \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)})} \\
 &= \frac{-1}{1-y - \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} - (1-y)}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Ableitung des Nenners ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\hat{k}_x(y)} \right)' &= \left(\sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} - (1-y) \right)' = \frac{-(1-y) - D_x^{-2}y}{\sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)}} + 1 \\
 &= \frac{-(1-y) - D_x^{-2}y + \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)}}{\sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)}}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Dann gilt

$$\left(\hat{k}_x(y) \right)' = 0 \iff \sqrt{(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2)} = (1-y) + D_x^{-2}y. \tag{4.22}$$

Löst man die quadrierte Gleichung

$$(1-y)^2 + D_x^{-2}(1-y^2) = (1-y)^2 + 2D_x^{-2}y(1-y) + D_x^{-4}y^2$$

oder in Normalform

$$y^2 + \frac{2D_x^2}{1-D_x^2}y - \frac{D_x^2}{1-D_x^2} = 0,$$

so lauten die Lösungen

$$y_1 = \frac{D_x}{D_x + 1} \qquad y_2 = \frac{D_x}{D_x - 1} \tag{4.23}$$

mit $D_x \in (0, 1)$. Da die rechte Seite von Gleichung (4.22) in $y = y_2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 (1-y_2) + D_x^{-2}y_2 &= 1 - \frac{D_x}{D_x - 1} + \frac{D_x}{D_x^2(D_x - 1)} \\
 &= \frac{D_x(D_x - 1)}{D_x(D_x - 1)} - \frac{D_x^2}{D_x(D_x - 1)} + \frac{1}{D_x(D_x - 1)} = \frac{1 - D_x}{D_x(D_x - 1)} \\
 &= -\frac{1}{D_x} < 0
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

erfüllt, also vor dem Quadrieren negativ ist, fällt y_2 als Lösung von (4.22) heraus, und $y_1 \in (0, \frac{1}{2})$ ist die einzige verbleibende Lösung, da gilt

$$(1 - y_1) + D_x^{-2}y_1 = \frac{1}{D_x} > 0. \quad (4.25)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass damit ein Maximum von $\frac{1}{\hat{k}_x(y)}$ gegeben ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{k}_x(y_1)} &= \sqrt{\left(1 - \frac{D_x}{D_x + 1}\right)^2 + \frac{1 - \frac{D_x^2}{(D_x+1)^2}}{D_x^2}} + \frac{D_x}{D_x + 1} - 1 \\ &= \sqrt{\left(\frac{D_x}{D_x(D_x + 1)}\right)^2 + \frac{(D_x + 1)^2 - D_x^2}{(D_x + 1)^2 D_x^2}} + \frac{D_x^2 - D_x(D_x + 1)}{D_x(D_x + 1)} \\ &= \frac{D_x + 1 + D_x^2 - D_x(D_x + 1)}{D_x(D_x + 1)} \\ &= \frac{1 + D_x(D_x + 1) - D_x(D_x + 1)}{D_x(D_x + 1)} \\ &= \frac{1}{D_x(D_x + 1)} > 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Weiter gilt, dass

$$\frac{1}{\hat{k}_x(y)} = \sqrt{(1 - y)^2 + D_x^{-2}(1 - y^2)} - (1 - y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm 1} 0, \quad (4.27)$$

weshalb $\frac{1}{\hat{k}_x(y)}$ für $y = y_1$ genau ein Maximum, und damit $k_x(y)$ und aufgrund der Monotonie der Substitution auch $k_x(\tilde{\omega})$ genau ein Minimum hat. Das aber war zu zeigen. \blacksquare

Damit ist nun klar, dass der erste Ast der Parametrisierung für $\tilde{\omega} \in (\pi, 2\pi)$ auch als Funktion $(r_0(\pi), r_0(2\pi)) \ni r_0 \mapsto k_x(r_0)$ aufgefasst, genau ein lokales Minimum hat. Insbesondere kann jedem Punkt auf der Kurve eindeutig ein $\tilde{\omega} \in (\pi, 2\pi)$ zugeordnet werden, da $\gamma : \tilde{\omega} \mapsto r_0(\tilde{\omega})$ invertierbar ist. Wie sich die Eigenschaften auf die anderen Äste übertragen, zeigt folgendes Lemma:

Lemma 4.2.5 *Sei*

$$\tilde{\omega}_l := \tilde{\omega} + 2l\pi \in ((2l + 1)\pi, 2(l + 1)\pi)$$

mit $l \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$k_x(\tilde{\omega}_l) = k_x(\tilde{\omega}) = \frac{2D_x^2\omega_0^2}{\sin^2 \tilde{\omega}} \left(1 - \cos \tilde{\omega} + \sqrt{(1 - \cos \tilde{\omega})^2 + D_x^{-2} \sin^2 \tilde{\omega}}\right)$$

und

$$r_0(\tilde{\omega}_l) = \left(1 + \frac{2l\pi}{\tilde{\omega}}\right)r_0(\tilde{\omega}) = -\frac{\left(1 + \frac{2l\pi}{\tilde{\omega}}\right)\tilde{\omega} \sin \tilde{\omega}}{D_x\omega_0 \left(1 - \cos \tilde{\omega} + \sqrt{(1 - \cos \tilde{\omega})^2 + D_x^{-2} \sin^2 \tilde{\omega}}\right)}.$$

Beweis: Die erste Identität ist wegen der Periodizität von Cosinus und Sinus klar. Die zweite gilt aus demselben Grund, und da

$$\left(1 + \frac{2l\pi}{\tilde{\omega}}\right)\tilde{\omega} = (\tilde{\omega} + 2l\pi) = \tilde{\omega}_l$$

gilt. Damit ist die Aussage gezeigt. ■

Die vorhergehenden Lemmata erlauben nun eine analytische Formulierung dessen, was anhand der numerischen Darstellung der Stabilitätsgrenze offensichtlich scheint. Nämlich, dass die lokalen Minima der einzelnen Kurvenäste über jeweils einen Schnittpunkt mit dem nächsten Ast stetig verbunden werden können, und dass nur genau auf den Schnittpunkten ein doppeltes Lösungspaar $\lambda = \pm i\omega_1$ und $\lambda = \pm i\omega_2$ vorliegt. Abbildung 3.5 zeigt die ersten Äste. Die Schnittpunkte befinden sich in den lokalen Maxima der Stabilitätsgrenze.

Satz 4.2.6 *Seien $\tilde{\omega}_{l_1}$ und $\tilde{\omega}_{l_2}$ wie in Lemma 4.2.5 mit $l_1 \neq l_2$ gegeben. Dann haben die durch $\tilde{\omega}_{l_1}$ und $\tilde{\omega}_{l_2}$ parametrisierten Äste genau einen Schnittpunkt. Insbesondere gilt damit, dass $\tilde{\omega}$ auf jedem Ast an allen Stellen bis auf abzählbar viele Ausnahmen, den Schnittpunkten mit allen anderen Ästen, eindeutig ist.*

Beweis: Betrachtet man für $l = 0$ den ersten Ast mit $\tilde{\omega} \in (\pi, 2\pi)$, so ergeben sich wegen Lemma 4.2.5 alle anderen Äste durch eine Streckung in r_0 -Richtung mit dem variablen Faktor $1 + \frac{2l\pi}{\tilde{\omega}} \in (1+l, 1+2l)$. Alle Äste bestehen nach Lemma 4.2.3 und Lemma 4.2.4 aus einem streng monoton fallenden und einem streng monoton wachsenden Teil. Also sind sowohl alle streng monoton fallenden Teile, als auch alle streng monoton wachsenden Teile disjunkt, da für $l_2 > l_1$ auch $1 + \frac{2l_2\pi}{\tilde{\omega}} > 1 + \frac{2l_1\pi}{\tilde{\omega}}$ und damit $r_0(\tilde{\omega}_{l_2}) > r_0(\tilde{\omega}_{l_1})$ ist. Je zwei Äste können sich also nur schneiden, wenn sie unterschiedliche Monotonie aufweisen und zwar höchstens an einer Stelle. Ein solcher Schnittpunkt existiert immer, da aus (4.27) folgt, dass

$$k_x(\tilde{\omega}) \xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow l\pi} \infty$$

und für alle Minima $\tilde{\omega}_{l_k, \min}$ für alle $k, j \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$k_x(\tilde{\omega}_{l_k, \min}) = k_x(\tilde{\omega}_{l_j, \min})$$

ist. ■

Das heißt, dass man von einem Minimum ausgehend auf der Stabilitätsgrenze bis zu den Schnittpunkten genau eine Lösung der charakteristischen Gleichung hat, deren Realteil gleich Null ist, während alle anderen Eigenwerte links der Imaginärachse liegen. Damit lässt sich auf der Stabilitätsgrenze das Hopftheorem formulieren.

Satz 4.2.7 *Seien r_0, k auf der Stabilitätsgrenze außerhalb eines Schnittpunktes fest gewählt. Sei $k_s := k_x - k$. Dann erfüllt die RFDE*

$$\dot{v}(t) = f(k_s, v_t) = A(k_s)v(t) + B(k_s)(v(t - r(v_t)))$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_0^2 + k_s + k) & -2D_x\omega_0 & 0 & +l_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_\phi & 0 & -\nu_0^2 & -2D_\phi\nu_0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_s + k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

alle Voraussetzungen von Satz 4.2.2.

Beweis:

(H1)

Zunächst geht die Tatsache ein, dass die stetige Differenzierbarkeit von

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (k_s, \varphi, v) &\mapsto A(k_s)\varphi(0) + B(k_s)v \end{aligned}$$

trivial ist. Da die Differenzierbarkeit sich durch die Komposition von Abbildungen via

$$\begin{pmatrix} k_s \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_s \\ \varphi \\ \Phi(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_s \\ \varphi \\ \Psi \end{pmatrix} \mapsto A(k_s)\varphi(0) + B(k_s)\Psi = f(k_s, \varphi)$$

auf f überträgt, reicht es aus die stetige Differenzierbarkeit für die Abbildung

$$\Phi : \varphi \mapsto \varphi(-r(\varphi))$$

bezüglich $\|\cdot\|_1$ zu zeigen, was in Lemma 2.3.1 bereits geschehen ist.

(H2)

Die Abbildung

$$\varphi \mapsto d_2f(k_s, \eta)(\varphi) = A(k_s)\varphi(0) + B(k_s)d\Phi(\eta)(\varphi), \quad (4.29)$$

mit

$$\varphi \mapsto d\Phi(\eta)(\varphi) = -\dot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi) + \varphi(-r(\eta)) \quad (4.30)$$

ist stetig nach $\mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ fortsetzbar, da insbesondere

$$\varphi \mapsto dr(\eta)(\varphi) = \frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))}$$

für $\varphi \in \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ bezüglich $\|\cdot\|_0$ stetig ist.

(H3)

Analog zum Beweis von (H1) wird $(\eta, \varphi) \mapsto \bar{d}_2 f(\cdot, \eta)(\varphi)$ durch eine Komposition stetiger Funktionen und $(\eta, \varphi) \mapsto \bar{d}\Phi(\eta)(\varphi)$ dargestellt. Es bleibt also die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathcal{C}([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\eta, \varphi) &\mapsto \bar{d}\Phi(\eta)(\varphi) \\ &= -\dot{\eta}(-r(\eta)) \frac{\varphi_3(-r(\eta)) - \varphi_3(0)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))} + \varphi(-r(\eta)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

bezüglich $\|\cdot, \cdot\|_{1,0}$ zu zeigen. Das ist durch Satz 2.3.5 bereits geschehen.

(H4)

Die zweite stetige partielle Ableitung $d_2^2 f(k_s, \eta)$ nach η bezüglich $|\cdot| + \|\cdot\|_2$ existiert genau dann, wenn Φ zweimal stetig differenzierbar ist, da in der ersten partiellen Ableitung $d_2(k_s, \eta)(\varphi) = A(k_s)\varphi(0) + B(k_s)d\Phi(\eta)(\varphi)$ nur $d\Phi$ von η abhängt. Es muss also $\eta \mapsto d\Phi(\eta)$ differenziert werden, was die für festes φ an

$$d\Phi(\eta)(\varphi) = -\dot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi) + \varphi(-r(\eta))$$

durchgeführt werden kann. Φ ist sicher einmal stetig differenzierbar bezüglich $\|\cdot\|_2$, da die zugehörige Topologie feiner als die zu $\|\cdot\|_1$ gehörige ist. In Satz 4.1.1 wurde bereits gezeigt, dass r mit

$$d^2 r(\eta)(\varphi, \psi) = \frac{-\dot{\varphi}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi) + \ddot{\eta}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\psi)dr(\eta)(\varphi) - \dot{\psi}_3(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi)}{n_0 + \dot{\eta}_3(-r(\eta))}.$$

bezüglich $\|\cdot\|_2$ zweimal stetig differenzierbar ist. Den Rest erhält man dann durch Anwendung von Ketten- und Produktregel und durch eine Wiederholung des Beweises von Lemma 2.3.1 für die Abbildung $\eta \mapsto \dot{\eta}(-r(\eta))$, womit die Behauptung gezeigt ist. Die zweite Ableitung lautet dann

$$d^2 \Phi(\eta)(\varphi, \psi) = \ddot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi)dr(\eta)(\psi) - \dot{\eta}(-r(\eta))d^2 r(\eta)(\varphi)(\psi) - \dot{\varphi}(-r(\eta))dr(\eta)(\psi). \quad (4.32)$$

(H5)

Zu zeigen ist lediglich die stetige Fortsetzbarkeit von $d^2 \Phi(\eta)$ aus (4.32) nach $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$.

Zunächst wird die stetige Fortsetzbarkeit von

$$(\varphi, \psi) \mapsto d^2 r(\eta)(\varphi, \psi),$$

mit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ nach $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ gezeigt. Für festes η ist die Stetigkeit von

$$(\varphi, \psi) \mapsto dr(\eta)(\varphi)$$

unter der feineren Topologie von $\|\cdot, \cdot\|_{1,1}$ verglichen mit der Topologie von $\|\cdot, \cdot\|_{1,0}$ sicher gegeben, da der Ausdruck nicht von ψ abhängt. Das gilt analog für

$$(\varphi, \psi) \mapsto dr(\eta)(\psi)$$

und darum ist

$$(\varphi, \psi) \mapsto d^2r(\eta)(\varphi, \psi),$$

ebenfalls stetig, also auch stetig fortsetzbar nach $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$.

Betrachtet man nun $d^2\Phi$, so ist die stetige Fortsetzbarkeit aller anderen Komponenten nach $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ entweder bereits gezeigt oder trivial. Also ist $d^2f(k_s, \eta)$ stetig nach $\mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ zu $\bar{d}_2^2f(k_s, \eta)$ fortsetzbar.

(H6)

Zu zeigen ist,

$$\begin{aligned} I \times \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (k_s, \eta, \varphi, \psi) &\mapsto \bar{d}_2^2f(k_s)(\eta)(\varphi, \psi) \end{aligned} \quad (4.33)$$

und

$$\begin{aligned} I \times \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), \mathbb{R}^4) \\ (k_s, \eta, \varphi) &\mapsto \bar{d}_2^2f(k_s)(\eta)(\varphi, \cdot) \end{aligned} \quad (4.34)$$

sind stetig. Das wird für $\eta \in \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ und $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ anhand der Stetigkeit von

$$\bar{D}^2\Phi : (\eta, \varphi, \psi) \mapsto \bar{d}_2^2\Phi(\eta)(\varphi, \psi)$$

und

$$\tilde{D}^2\Phi : (\eta, \varphi) \mapsto \bar{d}_2^2\Phi(\eta)(\varphi, \cdot)$$

bezüglich $\|\cdot, \cdot, \cdot\|_{2,1,1}$ bzw. $\|\cdot, \cdot\|_{2,1}$ gezeigt. Bewiesen wird zunächst, dass

$$\bar{D}^2r : (\eta, \varphi, \psi) \mapsto d^2r(\eta)(\varphi, \psi)$$

stetig ist, indem \bar{D}^2r als die Hintereinanderabbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) \times \mathcal{C}^1([-R, 0], \mathbb{R}^4)^2 &\rightarrow \mathbb{R}^6 && \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_3(-r(\eta)) \\ \dot{\eta}_3(-r(\eta)) \\ \dot{\varphi}_3(-r(\eta)) \\ \dot{\psi}_3(-r(\eta)) \\ dr(\eta)(\varphi) \\ dr(\eta)(\psi) \end{pmatrix} &= & \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \frac{-wz + uyz - xy}{n_0 + v} \end{aligned} \quad (4.35)$$

dargestellt wird. Hier sind die Indizes als Komponenten von Vektoren zu lesen. Dann gilt

$$(\eta, \varphi, \psi) \mapsto u(\eta, \varphi, \psi) = \ddot{\eta}_3(-r(\eta))$$

ist stetig bezüglich $\|\cdot, \cdot, \cdot\|_{(2,1,1)}$, da (2.70) analog für die zweite Ableitung von η gilt.

$$(\eta, \varphi, \psi) \mapsto v(\eta, \varphi, \psi) = \dot{\eta}_3(-r(\eta))$$

ist ebenfalls wegen (2.70) und der Verfeinerung der Topologie stetig. Die Stetigkeit von

$$(\eta, \varphi, \psi) \mapsto w(\eta, \varphi, \psi) = \dot{\varphi}_3(-r(\eta))$$

und

$$(\eta, \varphi, \psi) \mapsto x(\eta, \varphi, \psi) = \dot{\psi}_3(-r(\eta))$$

ist wie in (2.71) mit der Norm $\|\cdot\|_1$ statt $\|\cdot\|_0$ zu zeigen.

$$(\eta, \varphi, \psi) \mapsto y(\eta, \varphi, \psi) = dr(\eta)(\varphi)$$

und

$$(\eta, \varphi, \psi) \mapsto z(\eta, \varphi, \psi) = dr(\eta)(\psi)$$

sind wegen (2.72) stetig, da lediglich eine feinere Topologie des Urbildraums vorliegt.

$$(u v w x y z)^t \mapsto \frac{-wz + uyz - xy}{n_0 + v}$$

ist sicher stetig, da $\dot{\eta} < n_0$ ist. Also ist $(\eta, \varphi, \psi) \mapsto d^2r(\eta)(\varphi, \psi)$ stetig. Betrachtet man nun wieder $\bar{D}^2\Phi$ mit

$$\bar{D}^2\Phi(\eta, \varphi, \psi) = \ddot{\eta}(-r(\eta))dr(\eta)(\varphi)dr(\eta)(\psi) - \dot{\eta}(-r(\eta))d^2r(\eta)(\varphi)(\psi) - \dot{\varphi}(-r(\eta))dr(\eta)(\psi),$$

so ist die Stetigkeit jedes Summanden und Faktors bereits gezeigt, also ist auch $\bar{D}^2\Phi$ stetig. Damit ist auch

$$(k_s, \eta, \varphi, \psi) \mapsto \bar{d}_2^2 f(k_s)(\eta)(\varphi, \psi) = B(k_s)\bar{D}^2\Phi(\eta, \varphi, \psi)$$

stetig.

Um die Stetigkeit der Abbildung in Gleichung (4.34) zu zeigen, kann man analog wie in (4.35) vorgehen und eine Zerlegung von $\tilde{D}^2\Phi$ vornehmen, mit dem Unterschied, dass die Komponenten x und z zu Operatoren werden. Die Stetigkeit von $u v w$ und y wurde bereits gezeigt, da diese Komponenten nicht von ψ abhängen. Bleibt also zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Delta_1 : \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), \mathbb{R}) \\ \eta &\mapsto \frac{d\cdot}{dt}(-r(\eta)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_2 : \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4) &\rightarrow L(\mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4), \mathbb{R}) \\ \eta &\mapsto dr(\eta)(\cdot) \end{aligned} \quad (4.37)$$

stetig sind. Zu beachten ist, dass Δ_1 und Δ_2 auf Funktionen $\psi \in \mathcal{C}^2([-R, 0], \mathbb{R}^4)$ operieren. Da r stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$ ist, folgt, dass

$$\begin{aligned} \|\Delta_1(\eta_n) - \Delta_1(\eta)\|_{op} &= \sup\{|\dot{\psi}(-r(\eta_n)) - \dot{\psi}(-r(\eta))| : \|\psi\|_2 = 1\} \\ &\leq \sup\{\|\psi\|_2 |r(\eta_n) - r(\eta)| : \|\psi\|_2 = 1\} \\ &\leq |r(\eta_n) - r(\eta)| \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Also ist Δ_1 stetig.

Da

$$\Delta_2(\eta)(\psi) = \frac{\psi_3(-r(\eta)) - \psi(0)}{n_0 + \eta_3(-r(\eta))}$$

lediglich im Zähler von ψ abhängige Terme enthält, im Nenner stetig von η und insgesamt nicht von ϕ abhängt, ist nur die Stetigkeit von

$$\eta \mapsto \Delta_3(\eta),$$

mit

$$\Delta_3(\eta)(\psi) := \psi_3(-r(\eta)) - \psi_3(0)$$

zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\Delta_3(\eta_n) - \Delta_3(\eta)\|_{op} &= \sup\{\|\psi_3(-r(\eta_n)) - \psi_3(-r(\eta))\| : \|\psi\|_2 = 1\} \\ &\leq \sup\{\|\psi\|_1 |r(\eta_n) - r(\eta)| : \|\psi\|_2 = 1\} \\ &\leq |r(\eta_n) - r(\eta)| \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Also ist Δ_2 stetig, und damit auch $\tilde{D}^2\Phi$. Daraus folgt, dass auch

$$(k_s, \eta, \varphi) \mapsto \bar{d}_2^2 f(k_s)(\eta)(\varphi, \cdot) = B(k_s) \tilde{D}^2\Phi(\eta, \varphi)$$

stetig ist, was zu zeigen war.

Also gelten (H1) bis (H6).

Um (L1) und (L2) zu zeigen, muss zunächst eine geeignete Parametrisierung gewählt werden. Die Linearisierung von f ist durch

$$L(k_s, \varphi) = A(k_s)\varphi(0) + B(k_s)\varphi(-r_0)$$

mit den Matrizen A, B wie in Gleichung (4.28) gegeben. Für festes r_0 ist für $k_s = 0$ genau die Stabilitätsgrenze erreicht, es gibt also nach Satz 4.2.6 genau ein $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$, das

die charakteristische Gleichung löst. Da die Eigenwerte des Generators des Halbflusses von $L(k_s)$ zumindest stetig von k_s abhängen, gibt es eine stetige Parametrisierung

$$\begin{aligned} \iota : J &\rightarrow \mathbb{C} \\ k_s &\mapsto \lambda(k_s) =: \varepsilon(k_s) + i\nu(k_s) \end{aligned} \quad (4.40)$$

dieses Eigenwerts. Damit lassen sich die Beweise führen.

(L1)

Nach Voraussetzung gilt $\lambda(0) = i\nu(0) = i\omega$. Aufgrund der Eindeutigkeit von ω auf der Stabilitätsgrenze kann es keine weitere rein imaginäre Lösung bis auf $\lambda = -i\omega$ geben. Die Lösung $\lambda(0)$ stammt aus dem Faktor

$$\begin{aligned} \chi &:= \lambda^2 + 2D_x\omega_0\lambda + \omega_0^2 + k_x(1 - e^{-\lambda r_0}) \\ &= \lambda^2 + 2D_x\omega_0\lambda + \omega_0^2 + (k_s + k)(1 - e^{-\lambda r_0}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

der charakteristischen Gleichung (3.16). Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (k_s, \lambda) &\mapsto \chi(k_s, \lambda), \end{aligned} \quad (4.42)$$

so ist χ sicher stetig differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} \chi_{k_s}(k_{s0}, \lambda_0) &= 1 - e^{-\lambda_0 r_0} \\ \chi_\lambda(k_{s0}, \lambda_0) &= 2\lambda_0 + 2D_x\omega_0 + r_0(k_{s0} + k)e^{-\lambda_0 r_0} \end{aligned}$$

gegeben. Aus $\chi(k_s, \lambda) = 0$ folgt, dass auch $Im(\chi(k_s, \lambda) = 0)$ gelten muss. Das führt für hinreichend kleines ε und $\nu \in K_\varepsilon(\omega)$ zu

$$\begin{aligned} &2\nu\varepsilon + 2D_x\omega_0\nu + (k_s + k)e^{-r_0\varepsilon} \sin r_0\nu = 0 \\ \implies &2\nu\varepsilon + 2D_x\omega_0\nu = -(k_s + k)e^{-r_0\varepsilon} \sin r_0\nu \\ \implies &\sin r_0\nu < 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Damit ist $\chi_\lambda(k_{s0}, \lambda_0)$ auf der Nullstellenmenge immer invertierbar, da in dem Fall

$$Im(\chi_\lambda(k_s, \lambda)) = 2\nu - r_0(k_s + k)e^{-\varepsilon r_0} \sin r_0\nu > 0 \quad (4.44)$$

gilt. Der Satz über implizite Funktionen garantiert nun, dass es offene Mengen $O_k \subset \mathbb{R}$ und $O_\lambda \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in O_k$ und $\lambda = i\omega \in O_\lambda$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} \iota : O_k &\rightarrow O_\lambda \\ k_s &\mapsto \lambda(k_s) \end{aligned} \quad (4.45)$$

mit

$$\chi(k_s, \lambda(k_s)) = 0$$

gibt. Um zu zeigen, dass der zugehörige Eigenraum sicher zweidimensional ist, muss noch nachgewiesen werden, dass die Lösung $\lambda = i\omega$ einfach ist. Dazu muss lediglich gezeigt werden, dass

$$\chi_\lambda(0, i\omega) \neq 0$$

gilt. Das ist durch (4.43) und (4.44) gezeigt. Damit ist der zu $\lambda = \pm i\omega$ gehörige Eigenraum zweidimensional.

(L2)

Wählt man O_k als Definitionsbereich der Parametrisierung, so ist sie identisch mit der differenzierbaren Abbildung (4.45). Bleibt zu zeigen, dass für den Realteil der Ableitung von ι gilt

$$(Re(\iota))'(0) = Re(\iota'(0)) \neq 0.$$

Die partiellen Ableitungen von χ in $(0, i\omega)$ ergeben sich zu

$$\chi_{k_s}(0, i\omega) = 1 - e^{-i\omega r_0}$$

und

$$\chi_\lambda(0, i\omega) = 2D_x\omega_0 + 2i\omega + r_0ke^{-i\omega r_0}.$$

Von letzterem wird die Inverse benötigt, die sich zu

$$\frac{1}{\chi_\lambda(0, i\omega)} = \frac{2D_x\omega_0 - 2i\nu + r_0ke^{i\omega r_0}}{|\chi_\lambda(0, i\omega)|^2}$$

ergibt. Damit lässt sich die Ableitung des Realteils zu

$$\begin{aligned} Re(\iota'(0)) &= Re\left(-\frac{1}{\chi_\lambda(0, i\omega)}\chi_{k_s}(0, i\omega)\right) = Re\left(\frac{-2D_x\omega_0 + 2i\omega - r_0ke^{i\omega r_0}}{|\chi_\lambda(0, i\omega)|^2}(1 - e^{-i\omega r_0})\right) \\ &= Re\left(\frac{-2D_x\omega_0 - r_0ke^{i\omega r_0} + 2D_x\omega_0e^{-i\omega r_0} - 2i\omega e^{-i\omega r_0} + r_0k}{|\chi_\lambda(0, i\omega)|^2}\right) \\ &= \frac{-2D_x\omega_0(1 - \cos \omega r_0) - 2\omega \sin \omega r_0 + r_0k(1 - \cos \omega r_0)}{|\chi_\lambda(0, i\omega)|^2} \\ &= \frac{(r_0k - 2D_x\omega_0)(1 - \cos \omega r_0) - 2\omega \sin \omega r_0}{|\chi_\lambda(0, i\omega)|^2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

bestimmen. Da $\sin \omega r_0 < 0$ und $1 - \cos \omega r_0 > 0$ ist, folgt aus

$$r_0k - 2D_x\omega_0 > 0 \quad (4.47)$$

$$Re(\iota'(0)) > 0$$

Es bleibt also (4.47) zu zeigen. Setzt man für r_0 und k auf der Stabilitätsgrenze die Parametrisierungen (4.18) ein, so ergibt sich für $\sin \tilde{\omega} < 0$

$$r_0k - 2D_x\omega_0 = -\frac{2D_x\omega_0\tilde{\omega}}{\sin \tilde{\omega}} - 2D_x\omega_0 = -2D_x\omega_0\left(\frac{\sin \tilde{\omega} + \tilde{\omega}}{\sin \tilde{\omega}}\right) > 0$$

da für

$$\tilde{\omega} \in \bigcup_{l \in \mathbb{N}} ((2l-1)\pi, 2l\pi)$$

auch $\tilde{\omega} > -\sin \tilde{\omega}$ ist. Also gilt (L2)

Damit gelten also alle Voraussetzungen (H1) bis (H6) und (L1) bis (L2), was zu zeigen war ■

Damit liegt auf allen Punkten (r_0, k) der Stabilitätsgrenze außerhalb der Schnittpunkte eine Hopfbifurkation vor. Betrachtet man für jeden Punkt das Intervall O_k so ergibt sich für variable r_0 zwischen den Schnittpunkten jeweils ein nach oben offener Streifen, in dem eine periodische Lösung existiert.

4.3 Numerische Lösungen des AWP's

Ziel des letzten Abschnittes ist es, mit Hilfe eines numerischen Tools, das auf dem Runge-Kutta-Verfahren beruht, Lösungen der nichtlinearen Gleichung

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r(v_t))$$

mit solchen der Linearisierung

$$\dot{v}(t) = Av(t) + Bv(t - r_0)$$

zu vergleichen. Das kann eine Vorstellung davon geben, inwieweit die Linearisierung ausreichend ist, um das Verhalten des Systems zu beschreiben. Die Matrizen A und B enthalten die in Abschnitt 3.1 ermittelten Parameter nach Tabelle 4.1. Die Parameter r_0 und k_x werden variiert. Alle auf die numerischen Ergebnisse hin gemachten Aussagen im folgenden Abschnitt sind lediglich auf die Betrachtung der zum Teil dargestellten Grafiken zurückzuführen. Sie sind dadurch alle subjektiven Charakters und als nicht bewiesen zu verstehen.

Da in Abschnitt 4.2 eine Hopfbifurkation nachgewiesen wurde, ist es in erster Linie von Interesse, im instabilen Bereich des Parameterraums eine periodische Lösung aufzufinden. Wenn die periodische Lösung auch größere Störungen anzieht und ihre Amplitude unterhalb des technischen Toleranzbereiches liegt, so kann sie auch mit der Nulllösung verwechselt werden, was in der Praxis eine Vergrößerung des Stabilitätsgebietes bedeuten würde. Außerdem ist es interessant, wie sich eine Lösung unterhalb der Spitzen, also

ω_0	D_x	l_x	ν_0	D_ϕ	k_ϕ	l_ϕ
600	0.05	0	100	0.05	$3k_x$	0

Tabelle 4.1: Parametertabelle

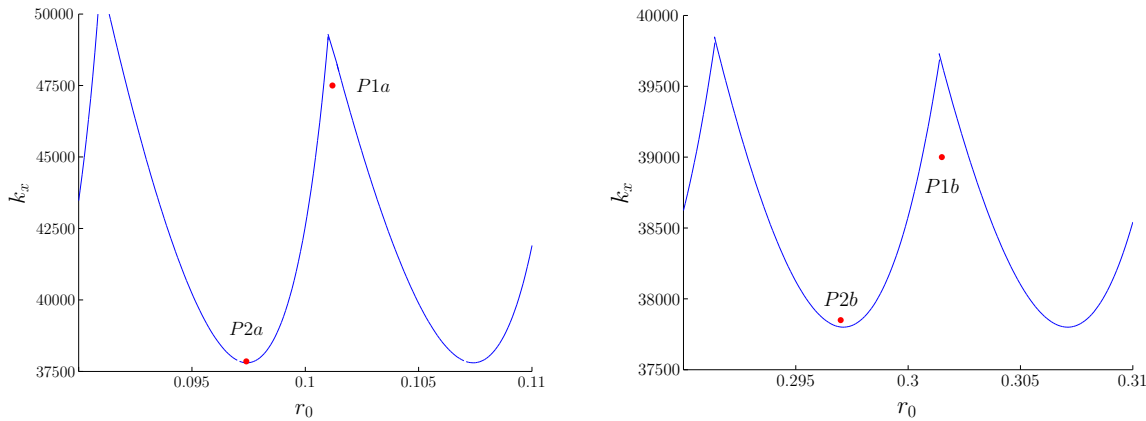


Abbildung 4.1: Auswahl von Punkten zur Simulation

noch im Stabilitätsgebiet, verhält. Hier kann man die Fragestellung umkehren. Es werden Lösungen gesucht, die bei einer kleinen Startfunktion zumindest vorübergehend so große Amplituden haben, dass sie die Oberfläche des Werkstücks unbrauchbar machen. Das käme dann einer Lösung im instabilen Bereich gleich, da sie zunächst zum Rattern führt. Bei jeder Darstellung einer Lösung wird im Vergleich dazu die Lösung der linearisierten Gleichung präsentiert, um den beobachteten Effekt zuordnen zu können. Die Lösungen werden in den meisten Fällen lediglich für bis zu 30 Sekunden beobachtet, da die Bearbeitungszeiten beim Drehen meist unterhalb dieser Zeitspanne liegen. Die folgenden Abbildungen visualisieren die Ergebnisse zahlreicher Versuche und stellen damit Beispiele der immer wieder beobachteten Phänomene dar.

Die vier Punkte $P1a$, $P2a$, $P1b$ und $P2b$ im Parameterraum sind wie in Abbildung 4.1 dargestellt im Bereich von $r_0 = 0,1s$ bzw. $r_0 = 0,3s$ gewählt, was den Drehzahlen von $600 \frac{U}{min}$ bzw. ca $200 \frac{U}{min}$ entspricht. Bei einem Umfang von $0,2m$ führt das zu Schnittgeschwindigkeiten von $120 \frac{m}{min}$ bzw. $40 \frac{m}{min}$.

Punkt $P1a$ liegt bei $r_0 = 0,1012$ und $k_x = 47500$, $P1b$ bei $r_0 = 0,3015$ und $k_x = 39000$. Es handelt sich also um Punkte im Stabilitätsgebiet, und es ist zumindest bei der linearen Gleichung ein exponentielles Abfallen gegen Null zu erwarten. Als Startfunktion wird

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 10^{-5} \sin(200\pi t) & \varphi_2(t) &= \dot{\varphi}_1(t) \\ \varphi_3(t) &= 0 & \varphi_4(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

gewählt. Der x -Freiheitsgrad ist also bereits in eine Schwingung versetzt, die nahe an der Eigenfrequenz liegt, was den Einschwingvorgang der Lösungen verkürzt. Die Drehzahlschwankung ist zunächst auf Null gesetzt. Die Amplitude liegt bei $0,01mm$, was bei Schnitttiefen zwischen $0,05mm$ und $0,5mm$ einer durchaus sichtbaren Störung des glatten Schnittes entspricht. Der Vergleich der Lösungen in Abbildung 4.2 zeigt, dass bei $r_0 = 0,1$ über 15 Sekunden keine nennenswerten Unterschiede der Lösungen zu erkennen sind. Beide Lösungen klingen scheinbar exponentiell ab. Da die Schwingungen sehr hochfrequent sind, ist bei der gewählten Vergrößerung lediglich eine eingefärbte Fläche

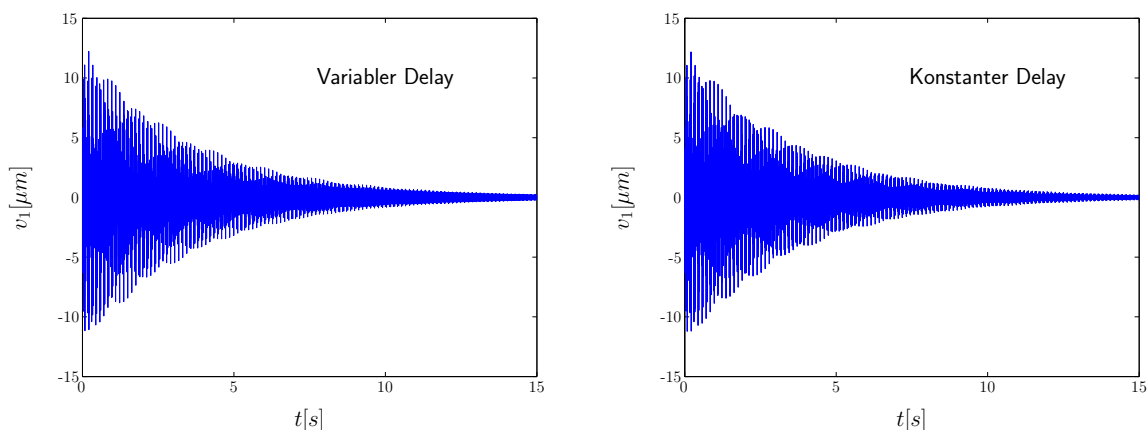


Abbildung 4.2: Vergleich von Lösungen in Punkt P1a

zu erkennen. Erst bei starker Vergrößerung der Zeitskala sind die einzelnen Schwingungen, wie in Abbildung 4.3 gezeigt, sichtbar. Die immer wieder auf- und abschwellenden Amplituden scheinen charakteristisch für die Lösungen der vorliegenden RFDE zu sein, da sie auch für andere Startwerte und Parameter immer wieder zu beobachten sind. Betrachtet man die Lösungen in Abbildungen 4.4, so fällt auf, dass die Lösungen bei $r_0 = 0,3$ für ca. $3s$ anwachsen. Danach fallen sie jedoch bei beiden Abbildungen ab, und man kann, wenn man die Lösungen über einen längeren Zeitraum beobachtet, ein exponentielles Abklingen erkennen. Abbildung 4.5 zeigt den Vergleich der Lösungen, nebst den zugehörigen Delayvariationen. Es sind ebenfalls kaum Unterschiede bei den Lösungen zu erkennen. Das könnte sich dadurch erklären, dass die Delayvariationen so klein sind, sie liegen im Mikrosekundenbereich, dass sie kaum mehr die Lösung beeinflussen können. Allerdings kann hier die Numerik auch schon an ihre Grenzen stoßen. Sollten sich die numerischen Ergebnisse als vertrauenswürdig erweisen, so kann man daraus ableiten, dass innerhalb der Spitzen im Stabilitätsgebiet die Linearisierung ausreichend ist, wenn man die Dynamik der Lösungen beobachten will. Man kann bereits bei der Linearisierung erkennen, dass die Lösung so langsam abklingt, dass eine sichtbare Störung auch nach mehreren Sekunden nicht zu einer hinreichend kleinen Lösung führt. Allerdings kann man nicht daraus schliessen, dass auch für größere Startwerte dasselbe Verhalten zu erwarten ist. Für Werte bis zur Größenordnung von Millimetern war allerdings kein anderes Verhalten zu beobachten. In der Praxis würde ein so langsames Abklingen als Rattern beurteilt werden, was letztlich nicht besser wäre, als eine Lösung im instabilen Bereich.

Die Punkte $P2a$ und $P2b$ sind mit $k_x = 37850$ knapp oberhalb der Stabilitätsgrenze gewählt. Wählt man dieselbe Startfunktion wie in (4.48), so scheint es in den ersten Sekunden keinen Unterschied zwischen den Lösungen zu geben. Abbildung 4.6 zeigt die Lösungen bzw. die Hüllkurven. Beobachtet man die Lösungen über einen Zeitraum von einigen Minuten, so scheint bei beiden exponentielles Wachstum vorzuliegen. Erhöht man jedoch die Amplitude der Startfunktion von $0,1mm$ auf $50mm$, so erkennt man, dass die Lösung der nichtlinearen Gleichung schnell gegen eine Lösung mit konstanter

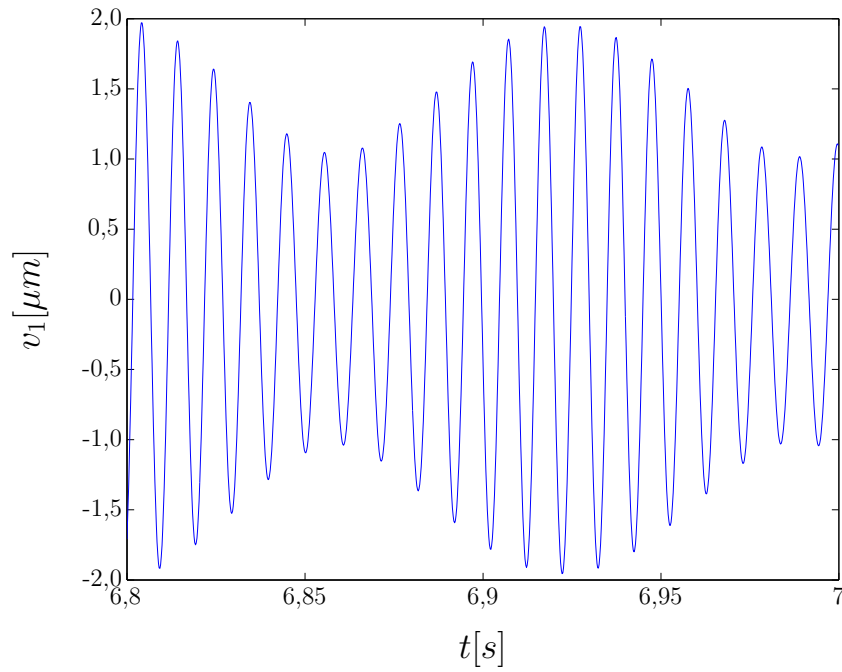


Abbildung 4.3: Vergrößerte Darstellung einer Lösungen in Punkt P1a

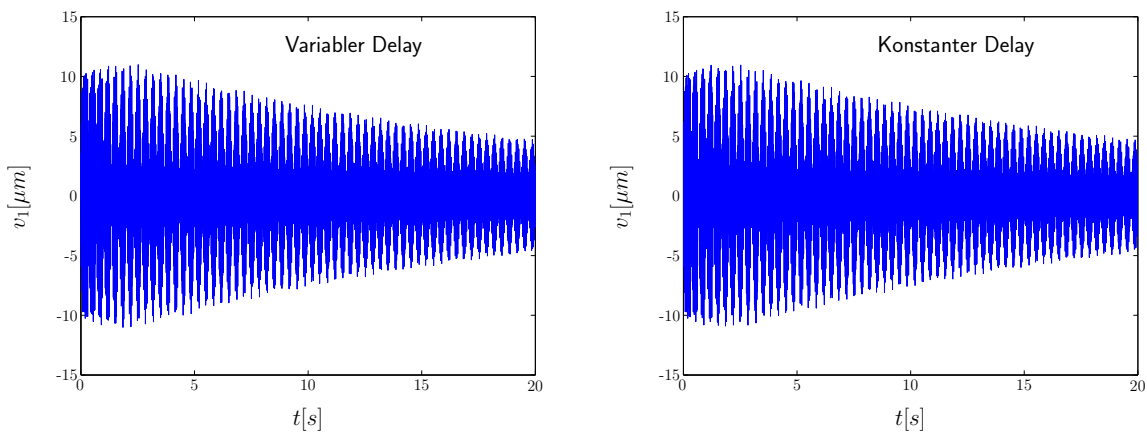


Abbildung 4.4: Vergleich von Lösungen in Punkt P1b

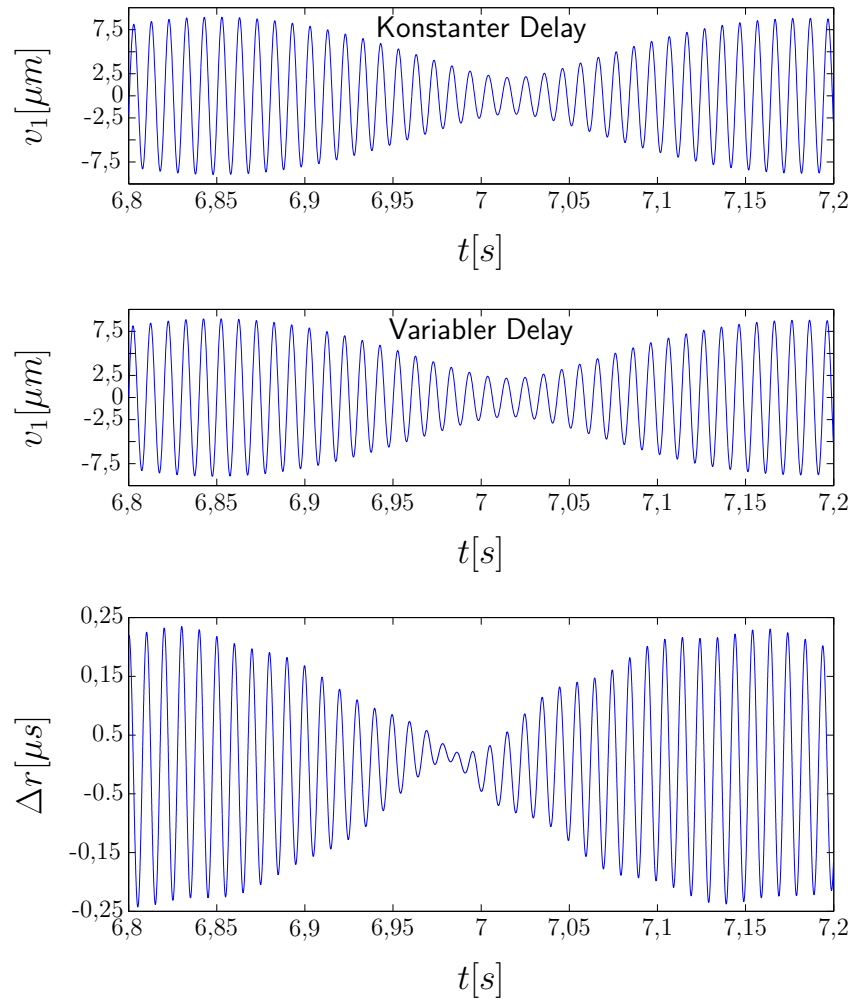


Abbildung 4.5: Vergleich von Lösungen und Delayvariation in Punkt P1b

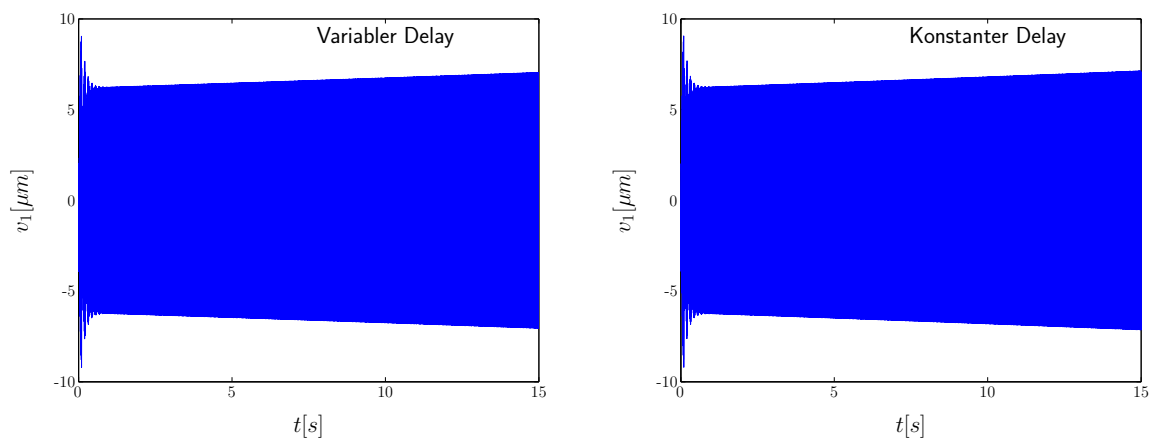


Abbildung 4.6: Vergleich von Lösungen in Punkt P2a

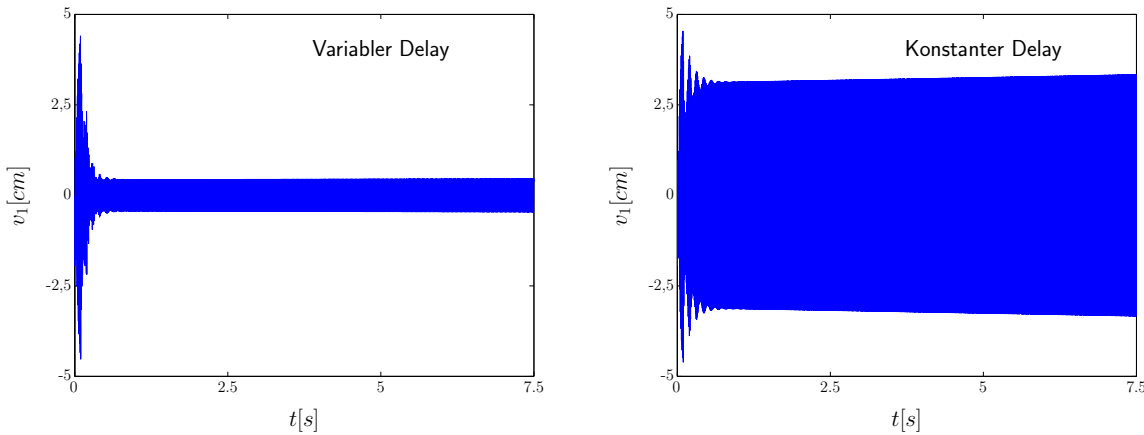


Abbildung 4.7: Deutlich verschiedene Lösungen in Punkt P2a

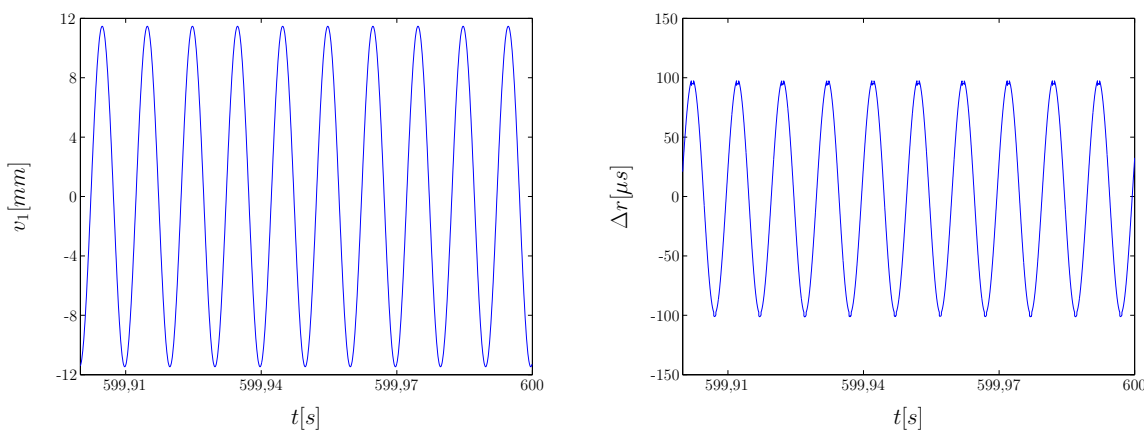
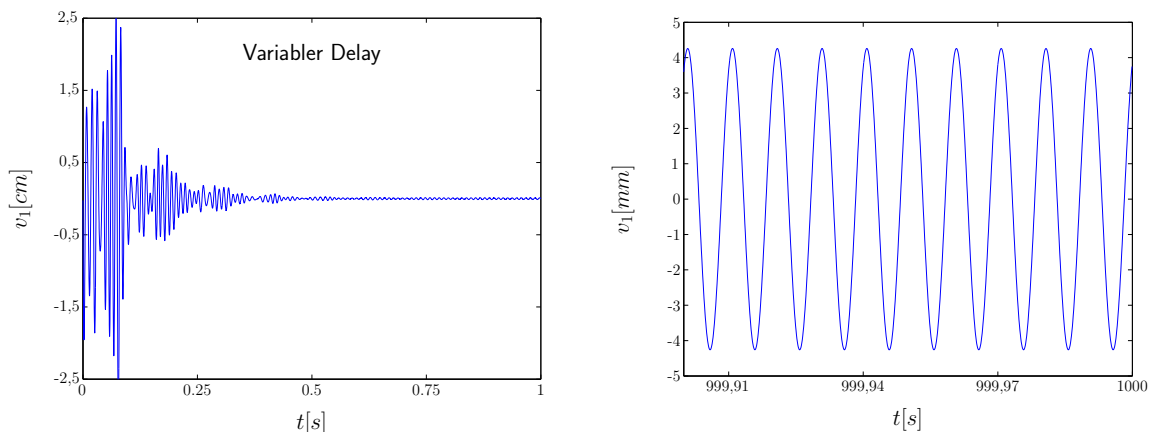


Abbildung 4.8: Periodische Lösung in Punkt P2a

Amplitude und Frequenz zu konvergieren scheint. Das ist selbstverständlich nur von mathematischem Interesse, da es den Bereich der erlaubten Schnitttiefen weit verlässt. Die Lösung der Linearisierung zeigt im Gegensatz dazu dasselbe Verhalten, wie bei der kleineren Startfunktion. Abbildung 4.7 zeigt den Vergleich. Eine Langzeitsimulation über 10 Minuten Echtzeit zeigte, dass sich eine periodische Lösung einzustellen scheint. Abbildung 4.8 stellt die Lösung nach 599,91 Sekunden nebst der zugehörigen Delayfunktion dar. Es könnte sich hierbei um die analytisch nachgewiesene periodische Lösung handeln. Ist das der Fall, so ist ihre Amplitude mit ca. $1,16\text{mm}$ größer als gewöhnliche Schnitttiefen, die zwischen $0,05\text{mm}$ und $0,5\text{mm}$ liegen. Auch bei kleineren Startfunktionen stellt sich dieser Wert von unten ein, während die Lösung der linearen Gleichung weiter exponentiell wächst. Der Bereich, in dem die Amplitude der periodischen Lösung unmessbar klein sein wird, kann dann nur ein sehr schmaler Streifen oberhalb der Stabilitätsgrenze sein.

Erhöht man im selben Punkt jedoch den Kopplungsparameter k_ϕ , so hat das eine starke

Abbildung 4.9: Lösung in Punkt P2a für $k_\phi = 8k_x$

Wirkung auf die Amplitude des periodischen Orbits. Das ist plausibel, da eine stärkere Kopplung des ϕ -Freiheitsgrades an den x -Freiheitsgrad auch den Delay stärker an x koppelt. Man kann also davon ausgehen, dass schon kleinere Schwingungen in x -Richtung, den Delay stärker schwanken lassen. Im vorliegenden Fall wurde im Punkt P2a der selbe Parametersatz verwandt, der zu den Lösungen in Abbildung 4.6 geführt hat, mit dem Unterschied, dass nun $k_\phi = 8k_x$ statt $k_\phi = 3k_x$ ist. In Abbildung 4.9 wird eine solche Lösung dargestellt. Man erkennt, dass die Lösung schon nach einer Sekunde sehr stark gedämpft wird. Sie scheint im weiteren Verlauf, was nicht dargestellt ist, langsamer anzuwachsen, bis sie sich, wie im rechten Bild gezeigt nach einigen 100 Sekunden auf eine Amplitude von knapp über 4mm einschwingt, statt 12mm bei $k_\phi = 3k_x$. Das steht ungefähr im antiproportionalen Verhältnis zur Veränderung von k_ϕ . Es wäre für nachfolgende Arbeiten interessant, ob ein solcher antiproportionaler Zusammenhang zwischen k_ϕ und der Amplitude der periodischen Lösung besteht.

Abschließend lässt sich feststellen, dass für die Parameter aus Tabelle 4.1 die Linearisierung im technisch relevanten Bereich weitgehend dasselbe Verhalten zeigt wie die Gleichung mit zustandsabhängigem Delay. Die vorliegenden Simulationen haben aber auch belegt, dass die zustandsabhängige Gleichung Parameter enthält, deren Veränderung die Situation gänzlich verändern könnten. Auf die Wahl von k_ϕ scheint die Gleichung stark zu reagieren, was weitere numerische Studien unter Veränderung dieses Parameters nahe legt. Das gilt insbesondere aufgrund der Tatsache, dass der Parameter k_ϕ nicht einfach zu bestimmen war, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt. Außerdem sollten sowohl die Eigenfrequenzen der beiden Freiheitsgrade als auch die Dämpfungen variiert werden, was zu völlig anderen Ergebnissen der numerischen Analyse führen kann. Man muss auch bedenken, dass in der vorliegenden Arbeit der ϕ -Freiheitsgrad herangezogen wurde, um einen zustandsabhängigen Delay zu erhalten, statt den y -Freiheitsgrad zu verwenden, wie in Abschnitt 2.2.1 vorggeführt. Beide Modelle sind sich zweifellos sehr ähnlich, führen aber sicher zu vollkommen anderen Kopplungsgrößen und Eigenfrequenzen, was es nahe legt, dieselben Ansätze für den y -Freiheitsgrad zu wiederholen und mit dann zu bestim-

menden Faktoren die Simulationen durchzuführen. Da man erwarten kann, dass dann die Kopplungen stärker werden, wird wahrscheinlich auch die periodische Lösung eine größere Rolle spielen. Das vorliegende Modell eignet sich auch dazu, andere nichtlineare Komponenten z.B. in der Modellierung der Schnittkraft zuzulassen bzw. eine nichtautonome Komponente, z.B. eine äußere Anregung der Drehschwingung, vorzunehmen. Bei beiden Vorgehensweisen sind die vorgeführten Methoden als Grundlage weiterer Analysen aufzufassen, die vor dieser Arbeit in der Weise nicht möglich gewesen sind.

Literaturverzeichnis

- [Ambrosetti und Prodi 1993] AMBROSETTI, A. ; PRODI, G.: *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge : University Press, 1993 7, 8, 31, 63
- [Bélair u. a. 1996] BÉLAIR, J. ; CAMPBELL, S.A. ; DRIESSCHE, P. van den: Frustration, stability and delay-induced oscillations in a neural network model. In: *SIAM J. Applied Mathematics* 56(1) (1996), S. 245–255 3
- [Chow und Hale 1982] CHOW, Shui-Nee ; HALE, Jack K.: *Methods of Bifurkation Theory*. New York : Springer, 1982 64
- [Cooke und Grossman 1982] COOKE, K. L. ; GROSSMAN, Z.: Discrete delay, distributed delay and stability switches. In: *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982), S. 592–627 23
- [Cooke und Huang 1996] COOKE, K.L. ; HUANG, W.: On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), S. 1417–1426 18, 19, 37
- [Diekmann u. a. 1995] DIEKMANN, O. ; GILS, S.A. van ; LUNEL, Sjord M. V. ; WALTHER, Hans-Otto: *Delay Equations*. New York : Springer, 1995 65
- [Eichmann 2005] EICHMANN, Markus: *A local Hopf Bifurcation Theorem for differential equations with state dependent delays*, Uni Giessen, Dissertation, 2005 3, 65, 68
- [El'sgol'ts und Norkin 1973] EL'SGOL'TS, L.E. ; NORKIN, S.B.: *Introduction to the Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments*. London : Academic Press, 1973 23
- [Evans 1998] EVANS, L.C.: *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19. American Mathematical Society, 1998 16
- [Frank 2002] FRANK, Martin: *Stabilitätsanalyse einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zeitabhängiger Retardierung*, TU Darmstadt, Diplomarbeit, 2002 2, 3, 4, 21, 23, 25, 43, 48, 50, 51, 53, 68
- [Fröhlich 2004] FRÖHLICH, B.: *Persönliche Mitteilung*. 2004 44
- [Hale 1977] HALE, Jack K.: *Theory of Functional Differential Equations*. New York : Springer, 1977 9, 13, 14, 16

- [Hale 1993] HALE, Jack K.: *Introduction to Functional Differential Equations*. New York : Springer, 1993 16, 17, 37, 65
- [Kleckner 2001] KLECKNER, J.: *Ein Beitrag zur Analyse dynamischer Interaktionen bei selbsterregungsfähigen Drehbearbeitungsprozessen*, TU Darmstadt, Dissertation, 2001 2, 23
- [Kleckner 2005] KLECKNER, J.: *Persönliche Mitteilung*. 2005 44, 47
- [Mahaffy u. a. 1998] MAHAFFY, J. M. ; BÉLAIR, J. ; MACKEY, M. C.: Hematopoietic model with moving boundary condition and state dependent delay: Applications in erythropoiesis. In: *J. Theor. Biol.* 190 190 (1998), S. 135–146 3
- [Sahm 2003] SAHM, A.: *Prognose der Schnittkräfte bei der HSC-Bearbeitung*, TU-Darmstadt, Dissertation, 2003 44
- [Schley und Gourley 2000] SCHLEY, D. ; GOURLEY, S.A.: Linear stability criteria for population models with periodically perturbed delays. In: *J. Mathematical Biology* 40 (2000), S. 500–524 2
- [Stépán 1989] STÉPÁN, Gabor: *Retarded Dynamical Systems*. Harlow : Longman, 1989 21
- [Walther 2003a] WALTHER, Hans-Otto: Differentiable semiflows for differential equations with state dependent delay. In: *Universitatis iagellonicae acta mathematica* 41 (2003), S. 57–66 39, 40
- [Walther 2003b] WALTHER, Hans-Otto: The solution manifold and C^1 -smoothness for differential equations with state dependent delay. In: *Journal of Differential Equations* 195 (2003), S. 46–65 65
- [Walther 2004] WALTHER, Hans-Otto: Smoothness properties of semiflows for differential equations with state-dependent delay. In: *J. Math. Sciences* 41 (2004), S. 53–62 41
- [Wischert u. a. 1994] WISCHERT, W. ; WUNDERLIN, A. ; PELSTER, A.: Delay-induced instabilities in nonlinear feedback systems. In: *Phys. Rev. E* 49 (1994), S. 203–219 3

Lebenslauf

von
Ralf Pfeiderer



Geburtsdatum 7.1.1969 in Bönningheim

Ausbildung

Mathematik

9/2002 bis jetzt

TU Darmstadt

Promotion am Fachbereich Mathematik, AG 6
zum Thema „Funktionaldifferentialgleichungen
mit variablen Delays“,

Abschlussprüfung am 23.11.2005 mit sehr gut bestanden

Mathematik

1995 bis 2002

Universität Stuttgart

Studium der Mathematik, 1. Staatsexamen Mai 2002,
wissenschaftliche Arbeit im Bereich

Quantenoptik mit dem Titel

„Stationäre Zustände auf dem Micromaser “

zusätzlich Diplom Mathematik April 2002

Physik

1995 bis 2002 Universität Stuttgart
Studium der Physik, 1. Staatsexamen April 2002
zusätzlich Vordiplom Physik April 1998

Chemie

1985 bis 1988 BASF Stuttgart
Betriebliche Ausbildung zum Chemielaboranten,
Abschluß Juli 1988

Schulen

1993 bis 1995 Technische Oberschule Stuttgart
Fachgebundene Hochschulreife
mit Belobigung Juni 1995

1992 bis 1993 Berufliches Schulzentrum Bietigheim
Fachhochschulreife mit Preis Juni 1993

1985 bis 1988 Kerschensteiner Schule Stuttgart
Abschluß der gewerblichen Berufsschule

1979 bis 1985 Realschule Bönnigheim
Mittlere Reife mit Belobigung Juni 1985

Berufserfahrung

Lehrerfahrung

ab 10/2005 TU Darmstadt
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik
Stellen von Klausuren, Übungsaufgaben, etc.
Geplante Mitarbeit an den Projekten VEMA, TIM, CIMS
und CALiMERO der AG Fachdidaktik Mathematik
im Bereich neue Medien im Mathematikunterricht

10/2002 bis 9/2005 Wissenschaftliche Hilfskraft am Fachbereich Mathematik

Übungsleiter in Analysis, Linearer Algebra,
Funktionalanalysis und Markovketten

10/1997 bis 9/2001

Universität Stuttgart
Wissenschaftliche Hilfskraft am mathematischen Institut
Übungsleiter in Höherer Mathematik

1993 bis 2002

Schülerhilfe e.V.
Tätigkeit als Lehrer für Mathematik, Physik und Chemie

Service

2001 bis 2002

Universität Stuttgart
Betreuung einer Homepage im Rahmen eines
Hochschulförderprojektes

5/2002 bis 9/2002

Administration von Netzwerkrechnern unter Windows und
Linux, Hard- und Software betreffend

Qualitätssicherung

6/1988 bis 9/1992

BASF Stuttgart
Technischer Angestellter in Labor und Technikum
Dabei ausgeübte Tätigkeiten: Prüfung von Pigmenten,
maschinelle Kunststoffverarbeitung, statistische Erfassung
mittels EDV

Zivildienst

11/1990 bis 1/1992

Klinik Markgröningen
Pflegehelfer sowohl in der orthopädischen Abteilung
als auch in der Reha-Abteilung für Querschnittgelähmte

Sonstiges

Ehrenamt

Mitglied des Vorstands des TUD-Schauspielstudio e.V.
seit 5/2004, Vorsitzender seit 5/2005

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die Dissertation selbständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Hilfsmitteln und Quellen angefertigt habe.

Darmstadt, den 1. Februar 2006

RALF PFLEIDERER