

Vektormesonen in dichter und heißer Materie

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von
Dipl.-Phys. Michael Urban
aus Wiesbaden

Darmstadt 2001
D17

Referent: Prof. Dr. J. Wambach
Korreferent: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. A. Richter
Tag der Einreichung: 17. April 2001
Tag der Prüfung: 23. Mai 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
I Eigenschaften des Rho-Mesons in dichter und heißer Materie	8
1 Das Rho-Meson in kalter Materie	9
1.1 Die Lagrangedichte im Vektordominanzmodell	9
1.2 Das ρ -Meson im Vakuum	10
1.3 Das Pion in kalter Kernmaterie	12
1.4 $\rho\pi\pi$ - und $\rho\rho\pi\pi$ -Vertexkorrekturen	15
1.5 Die ρ -Meson-Pionwolke in kalter Kernmaterie	18
1.6 Die volle ρ -Selbstenergie in kalter Materie	20
2 Das Rho-Meson im Piongas	25
2.1 Berechnung zeitabhängiger Funktionen im Imaginärzeit-Formalismus	25
2.2 Die ρ -Meson-Pionwolke im Piongas	26
2.3 Die volle ρ -Selbstenergie im Piongas	28
3 Das Rho-Meson in heißer baryonenreicher Materie	32
3.1 Nukleonen- und Baryonendichte	32
3.2 Das Pion in heißer Materie	34
3.3 Die ρ -Meson-Pionwolke in heißer Materie	38
3.4 Die volle ρ -Selbstenergie in heißer Materie	40
4 Dileptonen- und Photonproduktion	44
4.1 Die Strom-Strom-Korrelationsfunktion	44
4.2 Vektordominanzmodell mit baryonischen Resonanzen	45
4.3 Numerische Ergebnisse	48
II Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren in einem chiral symmetrischen Modell	51
5 Konstruktion der Lagrangedichte	52
5.1 Das lineare σ -Modell	52

5.2	Das geeichte lineare σ -Modell	55
5.3	Beschränkung auf globale Symmetrie	59
5.4	Ankopplung des Photons und der W -Bosonen	62
6	Ein-Loop-Näherung	65
6.1	Eigenschaften der Näherung	65
6.2	Subtraktion der Divergenzen	66
6.3	Die Tadpole-Korrektur	69
6.4	σ - und ρ -Selbstenergie und -Propagator	71
6.5	Pion- und a_1 -Selbstenergie und -Propagator	73
6.6	Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren	77
6.7	Photon-Selbstenergie und Vektor-Korrelator	78
6.8	W -Selbstenergie und Axialvektor-Korrelator	79
7	Ergebnisse für das Vakuum	83
7.1	Anpassung der Modellparameter	83
7.2	ρ -Meson und Vektor-Korrelator im Vakuum	85
7.3	a_1 -Meson und Axialvektor-Korrelator im Vakuum	88
7.4	Der σ -Propagator	91
8	Ergebnisse für endliche Temperaturen	94
8.1	Das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ bei endlicher Temperatur	94
8.2	ρ -Meson und Vektor-Korrelator bei endlicher Temperatur	97
8.3	a_1 -Meson und Axialvektor-Korrelator bei endlicher Temperatur	101
	Zusammenfassung und Ausblick	105
A	Automatisierte Berechnung von Diagrammen	110
A.1	Bestimmung der Vertexfaktoren	110
A.2	Berechnung von Selbstenergie-Diagrammen im Vakuum	111
A.3	Berechnung von Selbstenergie-Diagrammen bei endlicher Temperatur	114
B	Der Zerfall $\tau \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^-\nu_\tau$	116
B.1	Drei-Pion-Massenverteilung	116
B.2	Zwei-Pion-Massenverteilung	117

Einleitung

In der Natur liegt stark wechselwirkende Materie fast nur in Form von Atomkernen vor. Die Nukleonendichte im Innern der schweren Kerne beträgt etwa $\rho_0 = 0.16/\text{fm}^3$, die Temperatur der Kerne ist null. Höhere Dichten, vermutlich über $4\rho_0$, gibt es nur im Innern von Neutronensternen, aber die Temperaturen sind auch dort schon kurz nach der Entstehung des Neutronensterns gemessen an den Energieskalen der starken Wechselwirkung sehr niedrig [1]. Beim Urknall herrschten hingegen für kurze Zeit Temperaturen über 200 MeV. Unter diesen extremen Bedingungen geht die stark wechselwirkende Materie vermutlich von der hadronischen Phase, in der sie aus Nukleonen, anderen Baryonen und Mesonen besteht, in eine andere Phase über, nämlich in das sogenannte Quark-Gluon-Plasma. In dieser Phase treten die heute als elementar angesehenen Quarks und Gluonen als Freiheitsgrade auf, die normalerweise in den Hadronen „confined“ sind.

Neben dem „Deconfinement“ erwartet man unter extremen Bedingungen noch einen anderen Phasenübergang: Zwei der sechs elementaren Quarks, nämlich die „up“- und „down“-Quarks (u und d), aus denen die normale Materie vorwiegend besteht, sind näherungsweise masselos. Dadurch besitzt die Quantenchromodynamik (QCD), die als fundamental angesehene Theorie der starken Wechselwirkung, eine Invarianz unter $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen der links- und rechtshändigen Quarks, die als chirale Symmetrie bezeichnet wird. Wenn wir uns ein Nukleon aus drei Quarks zusammengesetzt denken, folgt jedoch aus der Nukleonenmasse von $m_N = 939$ MeV, dass jedes dieser Konstituentenquarks eine Masse von rund 300 MeV besitzt. Die Konstituentenquarkmasse und damit die Masse der Hadronen erklärt man sich heute dadurch, dass die chirale Symmetrie der QCD im Vakuum spontan gebrochen ist. Ihre Wiederherstellung bei sehr hohen Temperaturen wird als chiraler Phasenübergang bezeichnet.

Die Untersuchung von Materie bei hohen Dichten und Temperaturen ist also nicht nur für viele astrophysikalische Probleme wie z.B. die Beschreibung der Neutronensterne oder des Urknalls, sondern auch für das allgemeine Verständnis der starken Wechselwirkung von großer Bedeutung, u.a. zur Klärung so grundsätzlicher Fragen wie nach dem „Confinement“ oder dem Ursprung der Nukleonenmasse.

Von theoretischer Seite wird die starke Wechselwirkung an sich, und damit auch stark wechselwirkende Materie bei hohen Dichten und Temperaturen, auf zwei sich ergänzende Weisen untersucht. Da man glaubt, dass die QCD die Theorie der starken Wechselwirkung ist, kann man direkt von ihr ausgehen. Wegen der Stärke der Kopplungskonstante ist jedoch eine störungstheoretische Behandlung nicht möglich. Deshalb versucht man, die QCD für ein endliches Gitter von Raum-Zeit-Punkten numerisch zu lösen [2]. Aus Gitter-QCD-Rechnungen weiß man z.B., dass der chirale Phasenübergang bei einer Temperatur

von ≈ 170 MeV stattfindet [3]. Außerdem gibt es Anzeichen dafür, dass der chirale Phasenübergang und das Deconfinement zusammenfallen [4]. Eine andere modellunabhängige Methode ist die chirale Störungstheorie [5], bei der die kleine explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die endlichen u - und d -Quarkmassen sowie die Impulse und Energien der wechselwirkenden Teilchen als Entwicklungsparameter dienen. Damit kann man nicht nur die Wechselwirkung von Nukleonen und Pionen bei niedrigen Energien und im Vakuum beschreiben, sondern z.B. auch, wie sich das Quarkcondensat, der Ordnungsparameter der chiralen Symmetriebrechung, bei niedrigen Temperaturen ändert [6].

Abgesehen von den beiden gerade genannten im Prinzip exakten, aber nur auf wenige Bereiche anwendbaren Methoden greift man häufig zu Modellen, die zwar nicht als fundamental angesehen werden, von denen man aber glaubt, dass sie die für das jeweilige Problem wesentlichen Elemente enthalten. Als Beispiel sei das Nambu–Jona-Lasinio-Modell [7] genannt, das heute als Modell für die Quark-Quark-Wechselwirkung interpretiert wird [8]. Es ist wie die QCD chiral symmetrisch, und es beschreibt die Brechung der chiralen Symmetrie bei niedrigen Temperaturen, die Entstehung der Konstituentenquarkmassen und die Eigenschaften einiger Mesonen, jedoch nicht das „Confinement“. Da unterhalb des Deconfinement-Phasenübergangs ausschließlich Hadronen, also Baryonen und Mesonen, als Freiheitsgrade auftreten, liegt es nahe, rein hadronische Modelle zu verwenden, in denen die Hadronen als elementare Teilchen betrachtet und durch entsprechende Felder beschrieben werden. Das ist der Weg, den wir in dieser Arbeit einschlagen werden.

Von experimenteller Seite werden zur Untersuchung von dichter und heißer Materie an einigen Laboratorien (CERN, GSI, RHIC, . . .) Schwerionenexperimente durchgeführt, bei denen zwei Atomkerne aufeinandergeschossen werden. Dabei entsteht für kurze Zeit ein dichter und heißer „Feuerball“. Am CERN-SPS wurden bereits Temperaturen über 200 MeV erreicht, so dass man davon ausgeht, das Quark-Gluon-Plasma und die chiral restaurierte Phase in den Experimenten erzeugt zu haben. Es ist jedoch nicht einfach, dies anhand der Spektren stark wechselwirkender Teilchen nachzuweisen, da diese in erster Linie Information über die sogenannten Ausfrierbedingungen des Feuerballs, d.h. die Dichte und Temperatur am Ende der Reaktion enthalten. Zur Untersuchung der dichten und heißen Phase sind deshalb Dileptonenpaare (e^+e^- - oder $\mu^+\mu^-$ -Paare), die nur elektromagnetisch wechselwirken, besser geeignet [9], auch wenn sie nur in viel geringerer Zahl produziert werden. Am CERN-SPS wurden im CERES- [10] und im HELIOS-3-Experiment [11] die Spektren von e^+e^- - bzw. $\mu^+\mu^-$ -Paaren gemessen. Auch bei der GSI und am RHIC sollen in Kürze Dileptonenspektren gemessen werden [12, 13]. In einem Dileptonenexperiment würde sich die Entstehung eines Quark-Gluon-Plasmas vor allem im Dileptonenspektrum im Bereich hoher invarianter Massen $M = \sqrt{q^2}$ (q = Gesamt-Viererimpuls des Paares) bemerkbar machen. Die Dileptonenpaare mit invarianten Massen unter 1 GeV stammen dagegen überwiegend aus der hadronischen Phase und können möglicherweise Aufschluss über den chiralen Phasenübergang geben.

Das im CERES-Experiment in S+Au-Stößen gemessenen Dileptonenspektrum wies deutliche Abweichungen von dem Spektrum auf, das man durch Addition aller bekannten Quellen („Cocktail“ aus π^0 -, η - und ω -Dalitz-Zerfällen, $\pi^+\pi^-$ -Annihilation und ω -Zerfällen) erwartet hatte. Während die Dalitz-Zerfälle vorwiegend zum Spektrum bei sehr niedrigen invarianten Massen beitragen, hat der elektromagnetische Formfaktor des Pi-

ons, der für die $\pi^+\pi^-$ -Annihilation entscheidend ist, ein Maximum bei der Masse des ρ -Mesons, $m_\rho \approx 770$ MeV. Genau in diesem Bereich ergab der Cocktail zu viele Dileptonen, während er für Massen zwischen 300 und 600 MeV das gemessene Spektrum erheblich unterschätzte.

Formal kann die Dileptonenproduktionsrate direkt mit der elektromagnetischen Strom-Strom-Korrelationsfunktion in Beziehung gesetzt werden. Diese ist im Rahmen des Vektordominanzmodells [14] durch die Spektralfunktionen der Vektormesonen ρ , ω und ϕ gegeben, wobei für den isovektoriellen $\pi^+\pi^-$ -Kanal nur der Anteil des ρ -Mesons eine Rolle spielt. Dieser ist im Vakuum eine um m_ρ konzentrierte Verteilung mit Breite $\Gamma_\rho \approx 150$ MeV. Die erste Interpretation der gemessenen Spektren war deshalb die, dass sich die ρ -Spektralfunktion im Feuerball zu niedrigeren Massen verschiebt, d.h. dass die Masse des ρ -Mesons abnimmt. Nach einer Hypothese von Brown und Rho [15] wäre dies ein Signal für die partielle Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, und tatsächlich ließen sich die Daten mit dem „Brown-Rho-Szenario“ gut erklären [16, 17].

Das Brown-Rho-Szenario ist jedoch äußerst umstritten. Beispielsweise wurden in der Elektronenstreuung an Kernen keine experimentellen Beweise für eine abnehmende ρ -Masse gefunden [18]. In theoretischen Untersuchungen schienen QCD-Summenregeln zwar zunächst darauf hinzudeuten, dass die ρ -Masse mit zunehmender Dichte abnimmt [19], jedoch können sie auch mit einer gleichbleibenden ρ -Masse erfüllt werden, wenn man eine im Medium erhöhte Breite zulässt [20, 21]. In der Tat ergeben die meisten Modelle, die ohne neue Annahmen nur bekannte Vielteilcheneffekte konsequent berücksichtigen, stets eine starke Verbreiterung des ρ -Mesons in dichter und heißer Materie. Die Effekte werden wir gleich im einzelnen benennen. Obwohl sich die Masse des ρ -Mesons in diesen Modellen nicht oder nur wenig ändert, lassen sich die Ergebnisse des CERES-Experiments damit erklären [22, 23, 24, 25]. Für einen Übersichtsartikel sei auf Ref. [26] verwiesen.

Die Änderung der Eigenschaften des ρ -Mesons im Medium kann auf die Selbstenergie des ρ -Mesons, Σ_ρ , zurückgeführt werden. Der Notation von Ref. [25] folgend unterscheiden wir drei Arten von Medium-Beiträgen: Der erste, $\Sigma_{\rho B}$, berücksichtigt die Anregung baryonischer Resonanzen in der ρN -Streuung [24, 27, 28, 29]. Der zweite, $\Sigma_{\rho M}$, wird durch die Anregung von mesonischen Resonanzen in der $\rho\pi$ -Streuung erzeugt [30]. Der dritte Beitrag, $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, stellt den Schwerpunkt des ersten Teils dieser Arbeit dar. Es handelt sich dabei um eine indirekte Modifikation des ρ -Mesons über seine Pionwolke. Die Breite des ρ -Mesons im Vakuum stammt von seinem Zerfall in zwei Pionen. Von diesen weiß man aber seit langem, dass sich ihre Eigenschaften in Materie erheblich ändern, vor allem durch ihre Kopplung an Delta-Loch-Anregungen. Es liegt deshalb nahe, zu untersuchen, wie sich die Änderungen der Pion-Eigenschaften auf die Eigenschaften des ρ -Mesons auswirken. Es handelt sich hierbei übrigens um denjenigen der drei Beiträge, der als erster in Betracht gezogen wurde, dessen Berechnung aber auch die größten Probleme aufwirft [32, 33, 34, 35].

In Ref. [36] und [37] hatten wir ein Modell für $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ in kalter Materie vorgestellt, welches im wesentlichen auf Ref. [34] und [35] aufbaute, aber erstmals auch ein relativ zum Medium bewegtes ρ -Meson zuließ ($\vec{q} \neq 0$). Das Problem dabei bestand darin, die Eichinvarianz des Modells nicht zu verletzen. In Kapitel 1 dieser Arbeit fassen wir dieses Modell kurz zusammen. In Kapitel 2 beschreiben wir die Verallgemeinerung des Vakuum-Beitrags von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ auf nichtverschwindende Temperaturen [38], d.h. wir berechnen ihn in einem Gas thermischer Pionen. Den zentralen Punkt des ersten Teils dieser Arbeit stellt

Kapitel 3 dar, in dem wir das Modell für $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ in kalter Materie für die Anwendung auf dichte und heiße Materie erweitern. In Kapitel 4 zeigen wir schließlich, welchen Einfluss die Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ auf die Dileptonenspektren haben.

Das im ersten Teil dieser Arbeit beschriebene Modell wurde erfolgreich zur Berechnung der Dileptonenspektren des CERES-Experiments angewendet. Es ist jedoch rein phänomenologisch und berücksichtigt nicht die Bedingungen, die aus der chiralen Symmetrie der QCD folgen. Die chirale Symmetrie ist zwar in der Natur in Folge der endlichen u - und d -Quarkmassen nicht exakt, aber sie schränkt dennoch die möglichen Wechselwirkungen verschiedener Teilchen stark ein und führt zu zum Teil sehr detaillierten modellunabhängigen Vorhersagen.

Ein im Zusammenhang mit der Dileptonenproduktion besonders wichtiges Beispiel ist das sogenannte „Mixing-Theorem“, welches genau angibt, wie sich im Falle der exakten chiralen Symmetrie (chiraler Limes) die Korrelationsfunktion des isovektoriellen vektorierten Stromes (im folgenden kurz „Vektor-Korrelator“ genannt) bei niedrigen Temperaturen T ändert [39]: Bis zur Ordnung T^2 ist der Vektor-Korrelator eine Linearkombination der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren im Vakuum. Ein ähnlicher Effekt tritt auch in dichter Materie auf [40]. Am chiralen Phasenübergang müssen die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren vollkommen identisch sein. Beim Axialvektor-Korrelator handelt es sich analog zum Vektor-Korrelator um die Korrelationsfunktion des isovektoriellen axialvektoriellen Stromes, die, ebenso wie der Vektor-Korrelator, im Vakuum experimentell gut bekannt ist [41, 42]. Während die Eigenschaften des Vektor-Korrelators von denen des ρ -Mesons dominiert werden, ist der Axialvektor-Korrelator eng mit den Eigenschaften des $a_1(1260)$ -Mesons verbunden, das der chirale Partner des ρ -Mesons ist.

Um das gerade geschilderte Verhalten zu untersuchen, ist es wichtig, in einem Modell für das ρ -Meson bzw. für den Vektor-Korrelator, das zur Berechnung der Medium-Effekte in dichter und heißer Materie verwendet werden soll, die chirale Symmetrie zu berücksichtigen. Wie bereits erwähnt wurde, erfüllt z.B. das Nambu–Jona-Lasinio-Modell diese Bedingung. In Ref. [43] konnte damit das ρ -Meson im Vakuum in einer chiral symmetrischen Weise beschrieben werden. Es ist jedoch einfacher, wie im ersten Teil dieser Arbeit gleich von einem hadronischen Modell auszugehen. Chiral symmetrische hadronische Modelle, die die spontane Brechung der chiralen Symmetrie und die daraus folgenden Niederenergie-Theoreme [44] richtig beschreiben, sind z.B. das lineare und das nichtlineare σ -Modell [45]. Das lineare σ -Modell enthält neben den drei Pionen auch noch das isoskalare skalare σ -Meson. Die direkte Erweiterung des im ersten Teil verwendeten Vektordominanzmodells auf die chirale Symmetrie führt auf das geeichte lineare σ -Modell [46], das neben den Pionen und σ -Mesonen auch die Vektormesonen ρ und a_1 enthält. Dieses Modell wurde z.B. in Ref. [47] zur Untersuchung einiger Eigenschaften des ρ -Mesons bei endlicher Temperatur herangezogen.

Bisher wurden jedoch die chiral symmetrischen hadronischen Modelle nur in der Baumgraphen-Näherung betrachtet, in der die Teilchen keine Breite haben. Schon für die realistische Beschreibung des ρ -Mesons im Vakuum ist aber die Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ nötig, in der Pion-Loops (Schleifen) auftreten. Das Ziel des zweiten Teils dieser Arbeit war deshalb die Entwicklung eines chiral symmetrischen Modells, das das ρ -Meson und den Vektor-Korrelator im Vakuum realistisch beschreibt, ohne dabei die chirale Symmetrie zu verletzen. Um das Modell auch auf endliche Temperaturen anwenden und Effekte

wie die Vermischung der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren studieren zu können, fordern wir weiterhin, dass es im Vakuum auch die Eigenschaften des a_1 -Mesons und des Axialvektor-Korrelators richtig wiedergibt.

In Kapitel 5 konstruieren wir dazu eine chiral symmetrische Lagrangedichte mit π -, σ -, ρ - und a_1 -Mesonen, die die zur Beschreibung des ρ - und a_1 -Mesons im Vakuum nötigen Wechselwirkungsterme enthält. Dabei konzentrieren wir uns vor allem auf die im Vakuum dominanten Zerfallsprozesse $\rho \rightarrow \pi\pi$ und $a_1 \rightarrow \pi\rho$. Um diese richtig beschreiben zu können, müssen wir auf die Annahme der Vektordominanz verzichten. In Kapitel 6 stellen wir die Näherung vor, in der wir diese Lagrangedichte behandeln, wobei wir besonderen Wert darauf legen, dass weder durch die Auswahl der Diagramme noch durch ein ungeeignetes Regularisierungsverfahren die chirale Symmetrie des Modells verletzt wird. Dazu verwenden wir eine Ein-Loop-Näherung für die Selbstenergien und subtrahieren die Divergenzen mittels chiral symmetrischer Counterterme. In Kapitel 7 diskutieren wir die in dieser Näherung erhaltenen numerischen Ergebnisse für die ρ - und a_1 -Mesonen sowie die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren im Vakuum. Dabei zeigt sich, dass mit diesem Modell die experimentell bestimmten Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren gut beschrieben werden können. Zum Abschluss wenden wir das Modell in Kapitel 8 auf die Berechnung der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren bei endlicher Temperatur an. Wie es die chirale Symmetrie verlangt, finden wir Anzeichen für die Vermischung der Korrelatoren im Sinne des Mixing-Theorems. Die Massen der Vektormesonen ändern sich jedoch in diesem Modell praktisch nicht.

Teil I

Eigenschaften des Rho-Mesons in dichter und heißer Materie

Kapitel 1

Das Rho-Meson in kalter Materie

Das Ziel des ersten Teils dieser Arbeit besteht darin, das in Ref. [36] entwickelte Modell für das ρ -Meson in kalter Materie ($T = 0$) auf endliche Temperaturen ($T > 0$) zu erweitern. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Bestandteile des Modells für $T = 0$ noch einmal kurz zusammengefasst.

1.1 Die Lagrangedichte im Vektordominanzmodell

Das ρ -Meson ist ein Vektormeson (d.h. $J^P = 1^-$) mit Isospin $I = 1$, Masse $m_\rho \approx 770$ MeV und Zerfallsbreite $\Gamma_\rho \approx 150$ MeV [48]. Es zerfällt zu praktisch 100 % in zwei Pionen. Experimentell kann man das ρ -Meson besonders gut im elektromagnetischen Formfaktor des Pions erkennen (in der Reaktion $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$), erstmals entdeckt wurde es allerdings in den Spektren der invarianten Massen von $\pi^-\pi^0$ - und $\pi^-\pi^+$ -Paaren in den Reaktionen $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p$ und $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + n$ [49].

Beim ρ -Meson handelt es sich also um eine $\pi\pi$ -Resonanz. Um diese zu beschreiben, nehmen wir an, dass es ein „nacktes“ ρ -Meson mit einer Masse m_0 gibt, das durch die $\pi\rho$ -Wechselwirkung seine Breite Γ_ρ und die beobachtete Masse m_ρ erhält. Bei der Konstruktion der $\pi\rho$ -Wechselwirkung folgen wir der Idee von Sakurai [14], dass das ρ -Meson als Eichboson einer lokalen Isospinsymmetrie aufgefasst werden kann, die allerdings durch den ρ -Meson-Massenterm gebrochen wird. Wenn wir uns auf das neutrale ρ -Meson beschränken, erhalten wir dann folgende Lagrangedichte [37]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu \vec{\pi} \cdot \mathcal{D}^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} m_\pi^2 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \frac{1}{4} \rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_0^2 \rho_\mu \rho^\mu. \quad (1.1)$$

Hierin ist $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu$ der ρ -Feldstärketensor, und die „kovariante Ableitung“ $\mathcal{D}_\mu \vec{\pi}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{D}_\mu \vec{\pi} = (\partial_\mu - ig \rho_\mu T_3) \vec{\pi}. \quad (1.2)$$

In dieser Gleichung bezeichnet g die $\rho\pi\pi$ -Kopplungskonstante und T_3 die dritte Komponente des Isospinoperators, $(T_3)_{ab} = -i\epsilon_{3ab}$.

Im Vektordominanzmodell von Sakurai [14, 50] koppelt das Photon nicht direkt an die Pionen, sondern nur über das ρ -Meson. Dies wird durch die Strom-Feld-Identität

ausgedrückt,

$$j_\mu = -\frac{m_0^2}{g}\rho_\mu + \dots, \quad (1.3)$$

worin j_μ den elektromagnetischen Strom bezeichnet. Die Punkte stehen für isoskalare Terme, die u.a. das ω -Meson enthalten. Die direkte Kopplung des Photons an das ρ -Meson wird über einen zusätzlichen Term in der Lagrangedichte bewerkstelligt,

$$\mathcal{L}_{\gamma\rho}^{(S)} = ej_\mu A^\mu = -\frac{e}{g}m_0^2\rho_\mu A^\mu. \quad (1.4)$$

Eine andere Möglichkeit, das Photon entsprechend der Strom-Feld-Identität in das Modell einzuführen, wurde von Kroll, Lee und Zumino vorgeschlagen [51]. Danach wird das Photon auf die übliche Art an das Pion gekoppelt, d.h. man erweitert die kovariante Ableitung in Gl. (1.2) auf

$$\mathcal{D}_\mu^{(KLZ)}\vec{\pi} = (\partial_\mu - ig\rho_\mu T_3 - ieA_\mu T_3)\vec{\pi}. \quad (1.5)$$

Daneben führt man wieder eine direkte $\gamma\rho$ -Kopplung ein, die allerdings im Gegensatz zu Gl. (1.4) nicht die Felder, sondern nur die Feldstärketensoren $\rho_{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ enthält und damit offensichtlich eichinvariant ist:

$$\mathcal{L}_{\gamma\rho}^{(KLZ)} = -\frac{e}{2g}\rho_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Wie in Ref. [51] formal gezeigt wurde, ist diese Variante des Vektordominanzmodells äquivalent zu der von Sakurai. Wir werden später darauf zurückkommen und diese Äquivalenz an einem Beispiel demonstrieren. Nach einer geringfügigen Modifikation ermöglicht die Variante von Kroll, Lee und Zumino jedoch, die Kopplungsstärken des ρ -Mesons und des Photons an bestimmte Hadronen unabhängig voneinander festzulegen und dadurch eine bessere Beschreibung von Daten zu erreichen [27]. Auch das werden wir noch näher ausführen.

1.2 Das ρ -Meson im Vakuum

Durch die minimale Substitution, Gl. (1.2), enthält die Lagrangedichte (1.1) eine $\rho\pi\pi$ - und eine $\rho\rho\pi\pi$ -Kopplung. In führender Ordnung (g^2 bei einer Entwicklung nach Potenzen von g bzw. 1-Loop bei einer Entwicklung nach der Anzahl von Loops) ist die Selbstenergie des ρ -Mesons also durch die beiden in Abb. 1.1 (a) und (b) gezeigten Diagramme gegeben. Das Diagramm (b) ist rein reell und trägt somit nur zur Masse des ρ -Mesons bei. Man darf es aber dennoch nicht weglassen, da die Eichinvarianz erfordert, dass die ρ -Selbstenergie $\Sigma^{\mu\nu}$ folgende Bedingungen erfüllt [35]:

$$q_\mu \Sigma^{\mu\nu}(q) = 0, \quad (1.7)$$

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = 0 \quad \text{für} \quad q^2 = 0. \quad (1.8)$$



Abbildung 1.1: Diagramme für die ρ -Selbstenergie im Vakuum. Die gestrichelten Linien bezeichnen Pionen, die Wellenlinien ρ -Mesonen.

Hierbei ist q der Viererimpuls des ρ -Mesons. Beide Bedingungen sind formal erfüllt, wenn man neben dem Diagramm (a) auch das Diagramm (b) berücksichtigt.

Nach den üblichen Feynman-Regeln ergibt sich folgender Ausdruck für die Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu}(q) = & ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k+q)^\mu(2k+q)^\nu}{((k+q)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon)} \\ & - 2ig^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die Integrale sind quadratisch divergent. Wir können sie jedoch nicht einfach abschneiden, da dann die Bedingungen (1.7) und (1.8) sowie die Lorentz-Invarianz verletzt würden. Um dies zu vermeiden, verwenden wir das Regularisierungsschema von Pauli und Villars. Dabei addiert man zur ursprünglichen Selbstenergie Terme von der gleichen Struktur, in denen man die Pionmasse m_π durch schwere Regulatormassen ersetzt. Wegen der quadratischen Divergenz benötigen wir hier zwei Regulatoren, d.h.

$$\Sigma^{\mu\nu}(q_0, \vec{q}; m_\pi) \longrightarrow \Sigma^{\mu\nu}(q_0, \vec{q}; m_\pi) + \sum_{i=1}^2 c_i \Sigma^{\mu\nu}(q_0, \vec{q}; M_i). \quad (1.10)$$

Wie in Ref. [37] wählen wir

$$\begin{aligned} c_1 = -2, \quad M_1 &= \sqrt{m_\pi^2 + \Lambda_\rho^2}, \\ c_2 = 1, \quad M_2 &= \sqrt{m_\pi^2 + 2\Lambda_\rho^2}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

so dass es nur einen Abschneideparameter Λ_ρ gibt.

Infolge der Lorentz-Invarianz und der Transversalität hat die ρ -Selbstenergie folgende Form:

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \Sigma(q^2). \quad (1.12)$$

Die skalare Funktion $\Sigma(q^2)$ wurde in Ref. [36] explizit angegeben. Sie kann auch mit Hilfe des im Anhang aufgeführten elementaren Integrals I_2 ausgedrückt werden:

$$\Sigma(q^2) = \frac{g^2}{48\pi^2} ((q^2 - 4m_\pi^2)I_2(q^2, m_\pi^2, m_\pi^2) + 4m_\pi^2 \ln m_\pi^2) + \text{Reg.} \quad (1.13)$$

„+Reg.“ bezieht sich hierbei auf die Regularisierungsvorschrift (1.10).

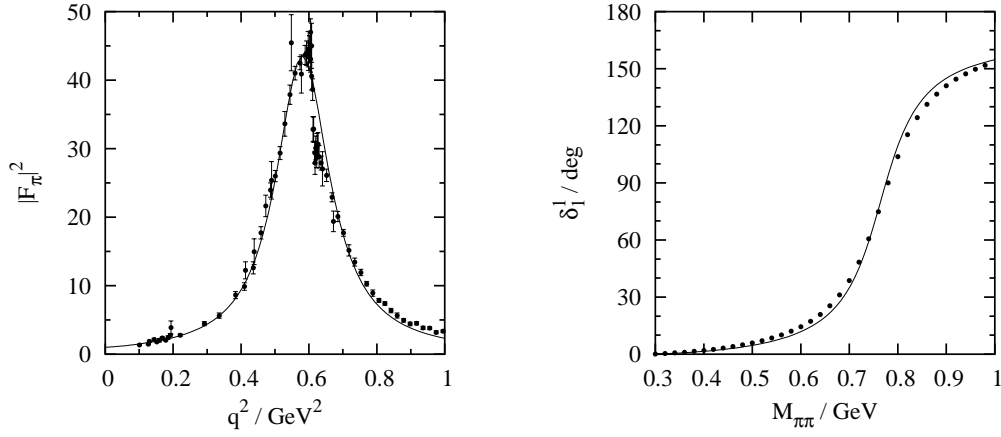


Abbildung 1.2: Links: Elektromagnetischer Formfaktor des Pions $|F_\pi(q^2)|^2$ mit Daten aus Ref. [52] und [53]. Rechts: $\pi\pi$ -Streuphasen im Kanal $I = 1, J = 1$ als Funktion von $M_{\pi\pi} = \sqrt{q^2}$. Die Punkte stammen aus einer Streuphasenanalyse von Froggatt und Petersen [54].

Den vollen ρ -Propagator erhalten wir nun durch Aufsummation der Dyson-Reihe, mit dem Ergebnis

$$G_\rho^{\mu\nu}(q) = \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) G_\rho(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{m_0^2 q^2} = \frac{\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu}}{q^2 - m_0^2 - \Sigma(q^2)} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_0^2 q^2}. \quad (1.14)$$

In unserem Modell gibt es drei freie Parameter: die nackte ρ -Masse m_0 , die $\rho\pi\pi$ -Kopplungskonstante g und die Abschneidemasse Λ_ρ . Λ_ρ muss so groß gewählt werden, dass die Schwellen der Regulatoren bei $2M_1$ und $2M_2$ außerhalb des betrachteten Energiebereichs liegen. Da unser hadronisches Modell oberhalb von 2 GeV sowieso nicht mehr gültig sein kann, setzen wir $\Lambda_\rho = 1 \text{ GeV}$. Allerdings hängen die Ergebnisse im betrachteten Energiebereich praktisch nicht von dieser Wahl ab. Die beiden restlichen Parameter passen wir so an, dass der elektromagnetische Formfaktor des Pions und die $\pi\pi$ -Streuphasen im Kanal $I = 1, J = 1$ gut wiedergegeben werden. Der Pion-Formfaktor F_π ist im Vektordominanzmodell einfach durch

$$F_\pi(q^2) = m_0^2 G_\rho(q^2) \quad (1.15)$$

gegeben. Unter der Annahme, dass im Bereich der Resonanz die $\pi\pi$ -Streuamplitude durch den ρ -Austausch im s -Kanal dominiert wird, können auch die Streuphasen δ_1^1 direkt mit dem ρ -Propagator in Verbindung gebracht werden:

$$\tan \delta_1^1 = \frac{\text{Im} G_\rho}{\text{Re} G_\rho}. \quad (1.16)$$

Die Anpassung ergibt für die beiden Parameter $m_0 = 853 \text{ MeV}$ und $g = 5.9$. Das Ergebnis der Anpassung ist in Abb. 1.2 gezeigt.

1.3 Das Pion in kalter Kernmaterie

In dem gerade beschriebenen Modell besteht das ρ -Meson aus einem nackten ρ -Meson und einer Pionwolke. Seit langem ist aber bekannt, dass sich die Eigenschaften des Pions

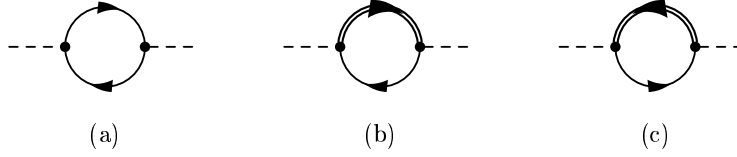


Abbildung 1.3: (a) Teilchen-Loch-Beitrag zur Pion-Selbstenergie in Materie, Σ_{Nh} . (b) und (c) Delta-Loch-Beiträge zur Pion-Selbstenergie, $\Sigma_{\Delta h}$ ((b) ist der vorwärts-, (c) der rückwärtslaufende Graph).

in Kernmaterie stark ändern [31], so dass anzunehmen ist, dass sich über die Pionwolke auch die Eigenschaften des ρ -Mesons ändern werden. Genau dies war die Grundidee von Ref. [34, 35, 23] und auch von Ref. [36], auf der diese Arbeit aufbaut. Wir wollen darum kurz das Modell für das Pion in Kernmaterie zusammenfassen, das zur Beschreibung des ρ -Mesons in Materie verwendet wird.

Bei nicht zu niedrigen Impulsen wird die Wechselwirkung des Pions mit isospin-symmetrischer Kernmaterie durch die p -Wellen- πN -Wechselwirkung dominiert, zu der vor allem die $\Delta(1232)$ -Resonanz einen wichtigen Beitrag liefert. Die entsprechenden πN - und $\pi N\Delta$ -Wechselwirkungs-Lagrangedichten lauten [55]

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \vec{\tau} \psi \cdot \partial_\mu \vec{\pi}, \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta} = -\frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi} \bar{\psi} \vec{T}^\dagger \psi^\mu \cdot \partial_\mu \vec{\pi} + \text{h.c.} \quad (1.18)$$

Als Kopplungskonstanten verwenden wir $f_{\pi NN}^2/(4\pi) = 0.081$ und $f_{\pi N\Delta} = 2f_{\pi NN}$ (Chew-Low-Wert). \vec{T} bezeichnet den Isospin-Übergangsoperator, der den Isospin 1 des Pions mit dem Isospin 1/2 des Nukleons zum Isospin 3/2 des Deltas koppelt. Im Limes schwerer Nukleonen- und Delta-Massen folgen aus diesen Lagrangedichten die häufig verwendeten nichtrelativistischen Feynman-Regeln, d.h. die πNN - und $\pi N\Delta$ -Vertizes lauten $(f_{\pi NN}/m_\pi) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \vec{\tau}$ bzw. $(f_{\pi N\Delta}/m_\pi) \vec{S} \cdot \vec{k} \vec{T}$ [36], wobei \vec{k} der Pion-Impuls und \vec{S} der Spin-Übergangsoperator ist. Diese Regeln werden wir im Folgenden verwenden.

Diese Wechselwirkungen führen dazu, dass ein Pion im Medium Teilchen-Loch- (Nh -) und Delta-Loch- (Δh -) Anregungen erzeugt. Die zugehörigen Selbstenergiediagramme für das Pion im Medium sind in Abb. 1.3 dargestellt. In den Nukleon- und Delta-Propagatoren vernachlässigen wir die Antiteilchenbeiträge, behalten aber die relativistische Energie-Impuls-Beziehung bei. So lautet z.B. der Nukleonpropagator

$$G_N(p) = \frac{\theta(p_F - |\vec{p}|)}{p_0 - \omega_N(\vec{p}) - i\varepsilon} + \frac{\theta(|\vec{p}| - p_F)}{p_0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon}, \quad (1.19)$$

mit $\omega_N(\vec{p}) = \sqrt{m_N^2 + \vec{p}^2}$. Der Fermi-Impuls der Nukleonen, p_F , hängt mit der Nukleondichte über $\varrho_N = 2p_F^3/(3\pi^2)$ zusammen. Die Breite der Delta-Resonanz approximieren wir durch einen konstanten Imaginärteil im Delta-Propagator,

$$G_\Delta(p) = \frac{1}{p_0 - \omega_\Delta(\vec{p}) + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta} \quad (1.20)$$

mit $\omega_\Delta(\vec{p}) = \sqrt{m_\Delta^2 + \vec{p}^2}$. Wegen der Struktur der πNN - bzw. $\pi N\Delta$ -Vertizes kann die Pion-Selbstenergie in der Form

$$\Sigma_\pi(k) = \vec{k}^2 \Pi(k) \quad (1.21)$$

mit einer dimensionslosen Funktion $\Pi(k)$ geschrieben werden. Die in Abb. 1.3 gezeigten Diagramme liefern dazu folgende Beiträge:

$$\Pi_{Nh}^{(0)}(k) = 4 \left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\theta(p_F - |\vec{p}|) \theta(|\vec{p} + \vec{k}| - p_F) 2(\omega_N(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p}))}{p_0^2 - (\omega_N(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p}))^2 + i\varepsilon}, \quad (1.22)$$

$$\Pi_{\Delta h}^{(0)}(k) = \frac{16}{9} \left(\frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\theta(p_F - |\vec{p}|) 2(\omega_\Delta(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p}) - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta)}{p_0^2 - (\omega_\Delta(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p}) - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta)^2}. \quad (1.23)$$

Ein Modell, das nur die in Abb. 1.3 gezeigten Prozesse enthält, also mit $\Pi(k) = \Pi_{Nh}^{(0)}(k) + \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k)$, wäre jedoch unrealistisch. Vielmehr muss die kurzreichweitige repulsive Wechselwirkung zwischen den Nukleonen bzw. zwischen dem Delta und den Nukleonen berücksichtigt werden. Dies geschieht mittels der phänomenologischen Migdal-Parameter g' [56] und führt auf folgende gekoppelten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Pi_{Nh}(k) &= \Pi_{Nh}^{(0)}(k) (1 + g'_{NN} \Pi_{Nh}(k) + g'_{N\Delta} \Pi_{\Delta h}(k)), \\ \Pi_{\Delta h}(k) &= \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k) (1 + g'_{N\Delta} \Pi_{Nh}(k) + g'_{\Delta\Delta} \Pi_{\Delta h}(k)). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dieses Gleichungssystem kann einfach durch Matrixinversion nach $\Pi_{Nh}(k)$ und $\Pi_{\Delta h}(k)$ aufgelöst werden. Des weiteren parametrisieren wir die endliche Ausdehnung des πNN - bzw. $\pi N\Delta$ -Vertex' mit einem Monopol-Formfaktor,

$$F_\pi(\vec{k}) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2}. \quad (1.25)$$

Die gesamte Pion-Selbstenergie ist dann durch

$$\begin{aligned} \Pi(k) &= F_\pi^2(\vec{k}) (\Pi_{Nh}(k) + \Pi_{\Delta h}(k)) \\ &= F_\pi^2(\vec{k}) \frac{\Pi_{Nh}^{(0)}(k) + \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k) - (g'_{NN} - 2g'_{N\Delta} + g'_{\Delta\Delta}) \Pi_{Nh}^{(0)}(k) \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k)}{1 - g'_{NN} \Pi_{Nh}^{(0)}(k) - g'_{\Delta\Delta} \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k) + (g'_{NN} g'_{\Delta\Delta} - g'^2_{N\Delta}) \Pi_{Nh}^{(0)}(k) \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

gegeben.

Die Werte für die Migdal-Parameter g' und für den Parameter Λ wurden in Ref. [37, 29] durch die Anpassung von Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitten eingeschränkt. Wir werden im Folgenden die Werte $g'_{NN} = 0.6$, $g'_{N\Delta} = g'_{\Delta\Delta} = 0.25$ und $\Lambda = 550$ MeV verwenden.

Den Einfluss der gerade beschriebenen Selbstenergie auf die Eigenschaften des Pions in Materie kann man folgendermaßen zusammenfassen. Statt der freien Dispersionsrelation $\omega_\pi(\vec{k})$ hat das Pion im Medium eine geänderte Dispersionsrelation $\omega_2(\vec{k})$, die wesentlich flacher verläuft. Daneben gibt es aber noch weitere Quasiteilchen, nämlich den „Spin-Isospin-Schall“, dessen Dispersionsrelation $\omega_1(\vec{k})$ bei kleinen Impulsen proportional zu $|\vec{k}|$

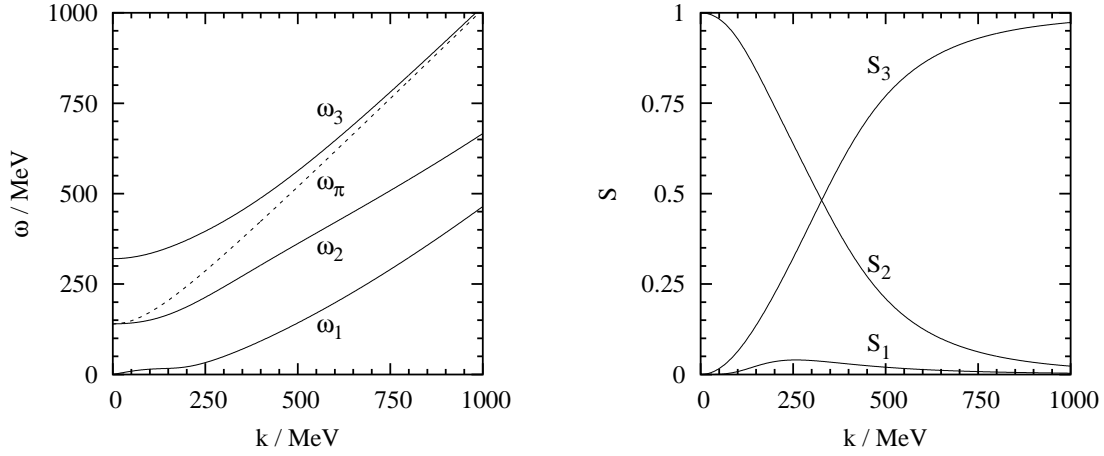


Abbildung 1.4: Realteile der Dispersionsrelationen $\omega_i(\vec{k})$ (links) und Stärken $S_i(\vec{k})$ (rechts) für den Pionpropagator in isospin-symmetrischer Kernmaterie ($\rho_N = \rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$). Zum Vergleich ist die Dispersionsrelation $\omega_\pi(\vec{k})$ eines freien Pions als gestrichelte Linie mit eingezeichnet.

anwächst, sowie den Δh -„Ast“ mit der Dispersionsrelation $\omega_3(\vec{k})$. Bei höheren Impulsen sind alle drei Äste stark verbreitert, d.h. die Dispersionsrelationen $\omega_i(\vec{k})$ sind komplex. Näherungsweise kann der Pionpropagator nun in der Form

$$G_\pi(k) = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i(\vec{k})}{k_0^2 - \omega_i^2(\vec{k})} \quad (1.27)$$

geschrieben werden. Diese Form („Drei-Niveau-Modell“) erhält man, wenn man in Gl. (1.22) und (1.23) die Fermi-Bewegung der Nukleonen vernachlässigt, also die Integrale über die Fermi-Kugel durch einen Faktor $4\pi p_F^3/3$ ersetzt. Deshalb ist diese Näherung eigentlich nur für kleine Dichten gültig. Der Verlauf der Dispersionsrelationen $\omega_i(\vec{k})$ und der Stärken $S_i(\vec{k})$ bei einfacher Kernmateriedichte ist in Abb. 1.4 dargestellt.

1.4 $\rho\pi\pi$ - und $\rho\rho\pi\pi$ -Vertexkorrekturen

Wie wir gerade gesehen haben, ändert sich der Pionpropagator in Materie durch die Anregung von Nh - und Δh -Zuständen. Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Änderungen über die Pionwolke auf die Eigenschaften des ρ -Mesons auswirken. Dazu genügt es allerdings nicht, einfach die Pionpropagatoren in Abb. 1.1 (a) und (b) durch die geänderten Pionpropagatoren zu ersetzen. Damit das ρ -Meson weiterhin an einen erhaltenen Strom koppelt, muss jetzt nämlich neben der Kopplung des ρ -Mesons an das Pion auch die Kopplung des ρ -Mesons an die Nh - und Δh -Zustände berücksichtigt werden, in die sich das Pion in Materie zeitweise umwandelt.

Formal wird dieser Sachverhalt durch die Ward-Takahashi-Identitäten ausgedrückt, die Beziehungen zwischen den $\rho\pi\pi$ - und $\rho\rho\pi\pi$ -Vertexfunktionen und dem Pionpropagator herstellen [35]. Definieren wir die Vertexfunktionen wie in Abb. 1.5 (a) und (b) dargestellt, so lauten die Ward-Takahashi-Identitäten:

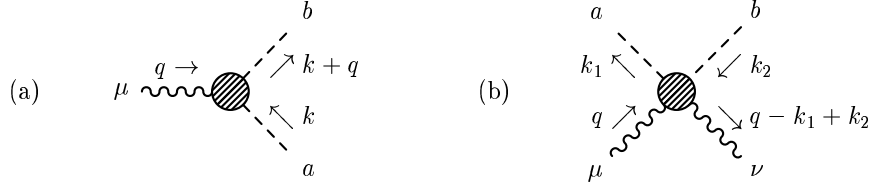


Abbildung 1.5: Definitionen der $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion $(\Gamma_{\rho\pi\pi}(k, q))_{ab}^{\mu}$ und der $\rho\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion $(\Gamma_{\rho\rho\pi\pi}(k_1, k_2, q))^{\mu\nu}$ in Materie.

$$q_{\mu}(\Gamma_{\rho\pi\pi}(k, q))_{ab}^{\mu} = -g\varepsilon_{3ab} \left(G_{\pi}^{-1}(k+q) - G_{\pi}^{-1}(k) \right), \quad (1.28)$$

$$q_{\mu}(\Gamma_{\rho\rho\pi\pi}(k, k, q))^{\mu\nu} = -ig \left(\varepsilon_{3ca} (\Gamma_{\rho\pi\pi}(k, -q))_{bc}^{\nu} - \varepsilon_{3bc} (\Gamma_{\rho\pi\pi}(k+q, -q))_{ca}^{\nu} \right). \quad (1.29)$$

Die zweite Identität haben wir für den Spezialfall $k_1 = k_2 = k$ angegeben, da dieser für die zu Abb. 1.1 (b) analogen Diagramme relevant ist.

Um die Ward-Takahashi-Identitäten im Medium zu erfüllen, müssen alle Vertexkorrekturen berücksichtigt werden, die man erhält, indem man ein bzw. zwei ρ -Mesonen an die Pion-Selbstenergiendiagramme ankoppelt. Als Beispiel sind in Abb. 1.6 einige Vertexkorrekturen gezeigt, die durch Ankopplung eines bzw. zweier ρ -Mesonen an das Nh -Diagramm in Abb. 1.3 (a) entstehen. Weitere Diagramme erhält man durch Vertauschung der externen ρ -Meson- und Pion-Linien. Außerdem gibt es entsprechende Diagramme auch mit Δh -Diagrammen.

Zur Berechnung dieser Korrekturen muss zunächst eine geeignete Wechselwirkungs-Lagrangedichte bestimmt werden. Dazu ersetzen wir alle Ableitungen, die in den freien Lagrangedichten [57, 58],

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m_N)\psi, \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_{\Delta} = -\bar{\psi}_{\mu}(i\rlap{/}\partial - m_{\Delta})\psi^{\mu} + \frac{i}{3}\bar{\psi}_{\mu}(\gamma^{\mu}\partial_{\nu} + \gamma_{\nu}\partial^{\mu})\psi^{\nu} - \frac{1}{3}\bar{\psi}_{\mu}\gamma^{\mu}(i\rlap{/}\partial + m_{\Delta})\gamma_{\nu}\psi^{\nu}, \quad (1.31)$$

sowie in den πNN - und $\pi N\Delta$ -Lagrangedichten, Gl. (1.17) und (1.18), vorkommen, durch kovariante Ableitungen analog zu Gl. (1.2). Dabei muss natürlich die jeweils passende Darstellung des Isospin-Operators (T_3 für die Pionen, $\tau_3/2$ für die Nukleonen und $T_3^{(3/2)}$

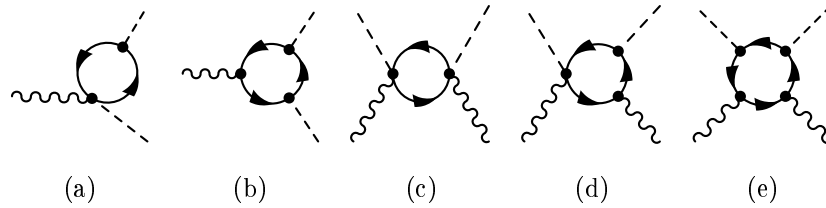


Abbildung 1.6: Einige der zur Pion-Selbstenergie aus Abb. 1.3 (a) gehörenden Vertexkorrekturen zu $\Gamma_{\rho\pi\pi}$ und $\Gamma_{\rho\rho\pi\pi}$.

für die Deltas) verwendet werden. Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}_{\rho N} = \frac{g}{2} \bar{\psi} \not{\rho} \tau_3 \psi, \quad (1.32)$$

$$\mathcal{L}_{\rho \Delta} = -g \bar{\psi}_\mu \not{\rho} T_3^{(3/2)} \psi^\mu + \frac{g}{3} \bar{\psi}_\mu (\gamma^\mu \rho_\nu + \gamma_\nu \rho^\mu) T_3^{(3/2)} \psi^\nu - \frac{g}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \not{\rho} T_3^{(3/2)} \gamma_\nu \psi^\nu, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{L}_{\rho \pi N} = ig \frac{f_N}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma^5 \not{\rho} \vec{\tau} \psi \cdot T_3 \vec{\pi}, \quad (1.34)$$

$$\mathcal{L}_{\rho \pi N \Delta} = -ig \frac{f_\Delta}{m_\pi} \bar{\psi} \vec{T} \not{\rho} \psi_\mu \rho^\mu \cdot T_3 \vec{\pi} + \text{h.c.} \quad (1.35)$$

Betrachtet man nun, wie bei der πN -Wechselwirkung, den nichtrelativistischen Grenzfall, so sieht man, dass in führender Ordnung in $1/m_N$ und $1/m_\Delta$ das Diagramm 1.6 (a) nur zu den räumlichen Komponenten $(\Gamma_{\rho\pi\pi})_{ab}^i$, das Diagramm (b) dagegen nur zur Nullkomponente $(\Gamma_{\rho\pi\pi})_{ab}^0$ beiträgt [37]. Aus demselben Grund trägt Diagramm (c) hauptsächlich zu $(\Gamma_{\rho\rho\pi\pi})_{ab}^{ij}$, Diagramm (d) zu $(\Gamma_{\rho\rho\pi\pi})_{ab}^{i0}$ und Diagramm (e) zu $(\Gamma_{\rho\rho\pi\pi})_{ab}^{00}$ bei. Entsprechendes gilt für die Vertexkorrekturen mit Δh -Graphen.

Die im vorangegangenen Abschnitt angegebene Pion-Selbstenergie enthält allerdings noch einige weitere Effekte. Die Delta-Breite lässt sich in den Vertexkorrekturen relativ einfach berücksichtigen, da sie energie- und impulsunabhängig angenommen wurde und deshalb zu keinen zusätzlichen Wechselwirkungen mit dem ρ -Meson führt. Aus diesem Grund haben wir übrigens darauf verzichtet, eine realistische, energieabhängige Parametrisierung für die Delta-Breite zu verwenden. Etwas komplizierter ist dagegen die Berücksichtigung des Monopol-Formfaktors F_π , Gl. (1.25), da er zusätzliche Beiträge zu den $\rho\pi NN$ - und $\rho\pi N\Delta$ -Vertizes erzeugt [59]. Die Migdal-Parameter g' sind dagegen impulsunabhängig, da wir den Formfaktor nicht wie z.B. in Ref. [24] in $\Pi^{(0)}$, sondern erst in Π eingeführt haben. Dies vereinfacht die Konstruktion der Vertexkorrekturen, mit denen die Ward-Takahashi-Identitäten erfüllt sind, erheblich. Details über die Bestimmung der Vertexkorrekturen sind in Ref. [37] nachzulesen.

Formal ist die ρ -Selbstenergie im Medium nun durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu}(q) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\pi(k) (\Gamma_{\rho\pi\pi}(k, q))_{ab}^\mu iG_\pi(k+q) (\Gamma_{\rho\pi\pi}(k+q, -q))_{ba}^\nu \\ &\quad + \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\pi(k) (\Gamma_{\rho\rho\pi\pi}(k, k, q))_{aa}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Mit Hilfe der Ward-Takahashi-Identitäten (1.28) und (1.29) kann man leicht zeigen, dass daraus auch im Medium wieder die Transversalität der Selbstenergie, Gl. (1.7), folgt. Deshalb können wir uns darauf beschränken, die räumlichen Komponenten der Selbstenergie, Σ^{ij} , zu berechnen, da die restlichen Komponenten, $\Sigma^{i0} = \Sigma^{0i}$ und Σ^{00} , aus diesen bestimmt werden können. Die expliziten Ausdrücke für die räumlichen Komponenten der

Vertexfunktionen lauten [36, 37]:

$$(\Gamma_{\rho\pi\pi}(k, q))_{ab}^i = -g\varepsilon_{3ab} \left\{ (2k + q)^i + \left[\frac{(k + q)^i \Lambda^2 - k^i (\vec{k} + \vec{q})^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2} \right] \Pi(k + q) + \left[\frac{k^i \Lambda^2 - (k + q)^i \vec{k}^2}{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2} \right] \Pi(k) \right\}, \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\rho\pi\pi}(k, k, q))_{ab}^{ij} &= ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b}) \left\{ -\delta^{ij} \right. \\ &+ \left[\frac{(2k + q)^i k^j + k^i (2k + q)^j}{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2} + \frac{2\vec{k}^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2} \left(\delta^{ij} - \frac{(2k + q)^i (2k + q)^j}{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2} \right) \right] \Pi(k) \\ &+ \left[-\delta^{ij} + \frac{(2k + q)^i (k + q)^j + (k + q)^i (2k + q)^j}{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2} - \frac{(2k + q)^i (2k + q)^j (\vec{k} + \vec{q})^2}{(\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2)^2} \right] \\ &\times \left. \left[\frac{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2} \right]^2 \Pi(k + q) \right\} + (q \leftrightarrow -q). \end{aligned} \quad (1.38)$$

1.5 Die ρ -Meson-Pionwolke in kalter Kernmaterie

Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt wurde, folgt aus den Ward-Takahashi-Identitäten, dass die ρ -Selbstenergie auch im Medium vierdimensional transversal ist, d.h. dass Gl. (1.7) weiterhin gilt. Da das Medium aber ein Bezugssystem auszeichnet, ist nun die Lorentz-Invarianz gebrochen, und man kann die Selbstenergie nicht mehr in der Form (1.12) schreiben. Statt einer gibt es nun zwei skalare Funktionen für die dreidimensional transversale und die dreidimensional longitudinale Komponente der Selbstenergie. Für diese Zerlegung definiert man zunächst die dreidimensional transversalen und dreidimensional longitudinalen Projektionsoperatoren

$$P_T^{\mu\nu}(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu = 0 \text{ oder } \nu = 0, \\ \delta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} & \text{für } \mu, \nu = 1, 2, 3, \end{cases} \quad P_L^{\mu\nu}(q) = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} - P_T^{\mu\nu}(q). \quad (1.39)$$

Die Selbstenergie hat nun folgende Struktur:

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = \Sigma^T(q) P_T^{\mu\nu}(q) + \Sigma^L(q) P_L^{\mu\nu}(q). \quad (1.40)$$

Die skalaren Funktionen Σ^T und Σ^L können leicht aus den räumlichen Komponenten der Selbstenergie, Σ^{ij} , berechnet werden. Der Zusammenhang lautet

$$\Sigma^T(q) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \Sigma^{ij}(q), \quad \Sigma^L(q) = \frac{q^2}{q_0^2} \frac{q_i q_j}{q^2} \Sigma^{ij}(q). \quad (1.41)$$

Setzt man die Vertexfunktionen in die räumlichen Komponenten von Gl. (1.36) ein und nutzt aus, dass man unter dem Integral $k \leftrightarrow -k - q$ ersetzen darf, so erhält man sieben Arten von Termen, die mit den sieben in Abb. 1.7 dargestellten Klassen von Diagrammen identifiziert werden können. Die Diagramme 1.7 (a) bis (d) entsprechen dabei dem Dia-

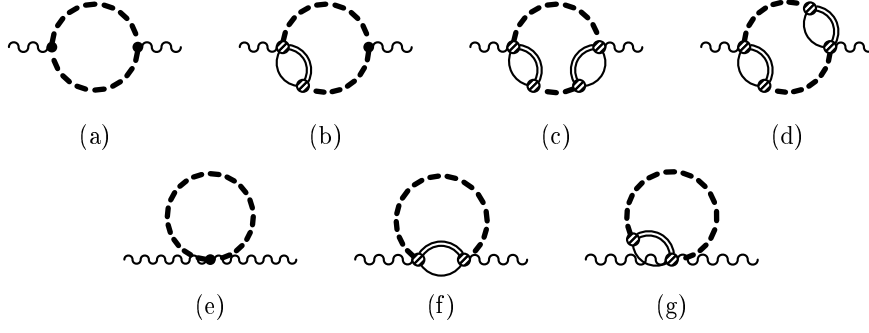


Abbildung 1.7: Diagramme für die Raumkomponenten der ρ -Selbstenergie in Materie. Die dicken gestrichelten Linien stehen für den Pionpropagator im Medium, und die Δh -Diagramme repräsentieren die volle Pion-Selbstenergie, wobei die schraffierten Kreise den Monopol-Formfaktor bzw. den durch den Monopol-Formfaktor modifizierten $\rho\pi NN$ - oder $\rho\pi N\Delta$ -Vertex andeuten sollen.

gramm 1.1 (a) mit modifizierten Pionpropagatoren und $\rho\pi\pi$ -Vertexkorrekturen, während die Diagramme 1.7 (e) bis (g) aus dem Diagramm 1.1 (b) mit $\rho\rho\pi\pi$ -Vertexkorrekturen hervorgehen.

Von den sieben Termen lassen sich solche, die das Produkt $\Pi^2(k)G_\pi(k)$ enthalten, weiter vereinfachen, indem man sie mit Hilfe der longitudinalen Spin-Isospin-Responsefunktion

$$\Pi_L(k) := \Pi(k) + \vec{k}^2 \Pi^2(k) G_\pi(k) = (k^2 - m_\pi^2) \Pi(k) G_\pi(k) \quad (1.42)$$

ausdrückt [34]. Das Ergebnis für die ρ -Selbstenergie lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\Sigma^{ij}(q) = g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^7 f_r^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) I_r(q, \vec{k}). \quad (1.43)$$

Hierbei bezeichnen die f_r^{ij} relativ einfache reelle Funktionen:

$$f_1^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) = \frac{(2k+q)^i (2k+q)^j}{2}, \quad (1.44)$$

$$f_2^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) = \frac{(k^i \Lambda^2 - (k+q)^i \vec{k}^2)(2k+q)^j}{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2} + (i \leftrightarrow j), \quad (1.45)$$

$$f_3^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) = \frac{(k^i \Lambda^2 - (k+q)^i \vec{k}^2)(k^j \Lambda^2 - (k+q)^j \vec{k}^2)}{\vec{k}^2 (\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2)^2}, \quad (1.46)$$

$$f_4^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) = \frac{(k^i \Lambda^2 - (k+q)^i \vec{k}^2)((k+q)^j \Lambda^2 - k^j (\vec{k} + \vec{q})^2)}{2(\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2)(\Lambda^2 + \vec{k}^2)} + (i \leftrightarrow j), \quad (1.47)$$

$$f_5^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) = \delta^{ij}, \quad (1.48)$$

$$f_6^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) \left(\frac{\Lambda^2 + \vec{k}^2}{\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2} \right)^2, \quad (1.49)$$

$$f_7^{ij}(\vec{k}, \vec{q}) = \left(-\frac{\delta^{ij} \vec{k}^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2} - \frac{(2k+q)^i (k^j \Lambda^2 - (k+q)^j \vec{k}^2)}{(\Lambda^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2)(\Lambda^2 + \vec{k}^2)} \right) + (i \leftrightarrow j). \quad (1.50)$$

Die Integration über k_0 ist in der Definition der Integrale I_r enthalten:

$$I_1(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 G_\pi(k) G_\pi(k+q), \quad (1.51)$$

$$I_2(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 \Pi(k) G_\pi(k) G_\pi(k+q), \quad (1.52)$$

$$I_3(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 \Pi_L(k) G_\pi(k+q), \quad (1.53)$$

$$I_4(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 \Pi(k) G_\pi(k) \Pi(k+q) G_\pi(k+q), \quad (1.54)$$

$$I_5(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 G_\pi(k), \quad (1.55)$$

$$I_6(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 \Pi(k) G_\pi(k+q), \quad (1.56)$$

$$I_7(q, \vec{k}) = \frac{i}{\pi} \int dk_0 \Pi(k) G_\pi(k). \quad (1.57)$$

Wie bereits erwähnt, können die sieben Beiträge weitgehend mit den sieben Diagrammen in Abb. 1.7 identifiziert werden. Die Identifikation der Terme mit $r = 3$ und $r = 6$ mit den Diagrammen (c) und (f) ist allerdings nicht ganz richtig. Vielmehr kann man das Pion-Selbstenergiendiagramm in Diagramm (f) in zwei Anteile zerlegen, nämlich einen longitudinalen Anteil, bei dem der Spin der Δh - bzw. Nh -Anregung parallel zu ihrem Impuls \vec{k} ist, und einen transversalen Anteil, bei dem der Spin senkrecht zum Impuls \vec{k} steht. Der Anteil von Diagramm (f), in dem die Δh - bzw. Nh -Anregung longitudinal ist, ergibt zusammen mit Diagramm (c), in dem nur longitudinale Δh - bzw. Nh -Anregungen auftreten, den Term mit $r = 3$. Der Term mit $r = 6$ dagegen enthält nur den Anteil von Diagramm (f), in dem die Δh - bzw. Nh -Anregung transversal ist.

Wenn man den Pionpropagator in der Form von Gl. (1.27) schreibt, kann man die Integrale I_1 bis I_7 analytisch berechnen und muss dann nur noch die Integrale über den Winkel $\vartheta = \angle(\vec{k}, \vec{q})$ und den Betrag des Impulses \vec{k} numerisch ausführen. Im Spezialfall $\vec{q} = 0$ entfällt sogar das Winkelintegral. Zur Regularisierung genügen die Regulatoren für die Selbstenergie im Vakuum, da der Mediumanteil endlich ist. Das kann man leicht einsehen, denn durch den Monopol-Formfaktor gehen die Pionpropagatoren für große Impulse oder Energien in die freien Pionpropagatoren über.

Die in Ref. [36] und [37] angegebenen Ergebnisse wurden auf die oben beschriebene Weise gewonnen. Wie bereits in Kap. 1.3 erwähnt, entspricht die Näherung in Gl. (1.27) jedoch einer Vernachlässigung der Fermi-Bewegung der Nukleonen, ist also nur für kleine Dichten gültig. In Ref. [36] und [37] wurde allerdings gezeigt, dass die Berücksichtigung der Fermi-Bewegung die Ergebnisse kaum ändert.

1.6 Die volle ρ -Selbstenergie in kalter Materie

Die bisher beschriebene Selbstenergie enthält nur Modifikationen der Pionwolke des ρ -Mesons im Medium. Es gibt jedoch noch andere wichtige Modifikationen, insbesondere

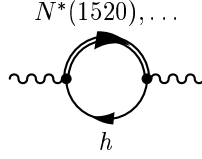


Abbildung 1.8: Ein typischer Beitrag zu $\Sigma_{\rho B}$.

durch die direkte Anregung von Nukleonresonanzen durch das ρ -Meson. Besonders hervorzuheben ist hier die Resonanz $N^*(1520)$. Das entsprechende ρ -Selbstenergiendiagramm ist in Abb. 1.8 dargestellt. Auf die Bedeutung derartiger Prozesse wurde erstmals in Ref. [27] hingewiesen. In Anlehnung an den Begriff „Pisobar“ für die Δh -Anregung durch das Pion in Materie (Abb. 1.3) wurde für Beiträge dieser Art die Bezeichnung „Rhosobar“ erfunden. Wir wollen im Folgenden den Beitrag der Pionwolke zur vollen Selbstenergie, den wir bisher Σ genannt haben, als $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bezeichnen, die Beiträge durch direkte ρN -Streuung mit Anregung von Nukleonresonanzen als $\Sigma_{\rho B}$. Die volle ρ -Selbstenergie ist dann durch

$$\Sigma_{\rho} = \Sigma_{\rho\pi\pi} + \Sigma_{\rho B} \quad (1.58)$$

gegeben. Die Beiträge zu $\Sigma_{\rho B}$ übernehmen wir von Ref. [29]. Dort wurde gezeigt, dass es möglich ist, mit diesem Modell die Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitte von Nukleonen und Kernen zu beschreiben, wobei $\Sigma_{\rho B}$ für die resonanten Beiträge und $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ für den Untergrund verantwortlich ist.

Wir wollen kurz zusammenfassen, welche Prozesse in $\Sigma_{\rho B}$ enthalten sind. Die Resonanzen B klassifiziert man zweckmäßigerweise danach, ob sie in der s - oder in der p -Welle der ρN -Streuamplitude auftreten. Bh -Anregungen mit s -Wellen-Resonanzen $B = N^*(1520), \Delta^*(1620), \Delta^*(1700)$ tragen sowohl zur transversalen als auch zur longitudinalen Selbstenergie bei. Nh - sowie Bh -Anregungen mit p -Wellen-Resonanzen $B = \Delta(1232), N^*(1720), \Delta^*(1905)$ treten hingegen nur in der transversalen Selbstenergie auf. Die Selbstenergien lassen sich in folgender Form schreiben [24, 28, 29]:

$$\Sigma_{\rho B}^T(q) = -q_0^2 \chi_{\rho,s}(q) - \vec{q}^2 \chi_{\rho,p}(q), \quad (1.59)$$

$$\Sigma_{\rho B}^L(q) = -q^2 \chi_{\rho,s}(q). \quad (1.60)$$

Die Suszeptibilitäten $\chi_{\rho,s}$ (s -Welle) bzw. $\chi_{\rho,p}$ (p -Welle) enthalten die Beiträge der oben genannten Resonanzen und sind bis auf das Vorzeichen ähnlich definiert wie Π in der Pion-Selbstenergie. Der Beitrag einer Resonanz B ist durch

$$\chi_{\rho Bh}^{(0)}(q) = -SI_{\rho Bh} \left(\frac{f_{\rho NB} F_{\rho NB}(\vec{q})}{m_{\rho}} \right)^2 \int_{|\vec{p}| < p_F} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{q_0 - \omega_B(\vec{p} + \vec{q}) + \omega_N(\vec{p}) + \frac{i}{2}\Gamma_B} - \frac{1}{q_0 + \omega_B(\vec{p} + \vec{q}) - \omega_N(\vec{p}) + \frac{i}{2}\Gamma_B} \right) \quad (1.61)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $SI_{\rho Bh}$ einen Spin-Isospin-Faktor, $f_{\rho NB}$ die ρNB -Kopplungskonstante, $F_{\rho NB}(\vec{q})$ einen Formfaktor analog zu Gl. (1.25) und Γ_B die (energieabhängige)

Breite der Resonanz, die neben der Zerfallsbreite im Vakuum auch einen dichteabhängigen Anteil enthält. Für die p -Welle werden wie in der Pion-Selbstenergie Migdal-Parameter verwendet, um der kurzreichweitigen repulsiven NN - und NB -Wechselwirkung Rechnung zu tragen. Dies führt analog zu Gl. (1.24) auf folgendes Gleichungssystem

$$\chi_{\rho Bh} = \chi_{\rho Bh}^{(0)} - \sum_{B'} \chi_{\rho Bh}^{(0)} g'_{BB'} \chi_{\rho B'h} \quad (1.62)$$

für $B, B' = N, \Delta(1232), N^*(1720), \Delta^*(1905)$. Die s -Wellen-Resonanzen scheinen dagegen im Medium nicht verschoben zu werden, so dass für $B = N^*(1520), \Delta^*(1620), \Delta^*(1700)$

$$\chi_{\rho Bh} = \chi_{\rho Bh}^{(0)} \quad (1.63)$$

angenommen wird. Die vollen Suszeptibilitäten $\chi_{\rho,p}$ und $\chi_{\rho,s}$ erhält man dann als Summe der entsprechenden Beiträge $\chi_{\rho Bh}$. Die Kopplungskonstanten, Formfaktoren, dichteabhängigen Zerfallsbreiten und Migdal-Parameter werden aus dem Bonn-Potential und durch die Anpassung von Zerfallsbreiten der Resonanzen und der Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitte von Nukleonen und Kernen gewonnen und sind, wie auch die Spin-Isospin-Faktoren, in Ref. [29] angegeben.

Als Beispiel für die Medium-Modifikationen der ρ -Selbstenergie sind in Abb. 1.9 (a) bis (d) Real- und Imaginärteile der transversalen und longitudinalen Selbstenergien $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ und $\Sigma_{\rho B}$ für einfache Kernmateriedichte sowie die ρ -Selbstenergie im Vakuum Σ_{Vak} gezeigt. Wir beginnen die Diskussion mit den Imaginärteilen. Wie man sieht, ist $-\text{Im} \Sigma_{\rho\pi\pi}$ im Medium (durchgezogene Linie) wesentlich größer als im Vakuum (gepunktete Linie), und die Schwelle, die im Vakuum bei der zweifachen Pionmasse liegt, ist verschwunden. Letzteres kann man sich dadurch erklären, dass das ρ -Meson nun auch in zwei Nh -Quasiteilchen zerfallen kann. Die Schulter, die in Abb. 1.9 (a) und (b) bei $M \approx 500$ MeV zu sehen ist, stammt zu einem großen Teil vom Zerfall des ρ -Mesons in ein Quasi-Pion und ein Δh -Quasiteilchen, wobei in Σ^T vorwiegend transversale und in Σ^L vorwiegend longitudinale Δh -Quasiteilchen auftreten. Aufgrund des kleinen Formfaktors ($\Lambda = 550$ MeV) ist der Medium-Effekt, d.h. die Differenz zwischen $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ und Σ_{Vak} kleiner als z.B. in Ref. [36]. Dafür werden jetzt aber auch die Resonanzen berücksichtigt, die ebenfalls einen sehr großen Imaginärteil ergeben (Strich-Punkt-Linie). Im Gegensatz zu $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, das nur kleine Unterschiede zwischen der transversalen und longitudinalen Komponente aufweist, ist die Aufspaltung zwischen $\Sigma_{\rho B}^T$ und $\Sigma_{\rho B}^L$ groß, was darauf zurückzuführen ist, dass die p -Wellen-Resonanzen, wie z.B. das $\Delta(1232)$, das das Maximum von $-\text{Im} \Sigma_{\rho B}^T$ bei $M \approx 200$ MeV verursacht, in der transversalen, aber nicht in der longitudinalen Komponente auftreten. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sowohl $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ als auch $\Sigma_{\rho B}$ den Imaginärteil im Vergleich zum Vakuum deutlich erhöhen und somit zu einer Verbreiterung des ρ -Mesons führen.

Wir betrachten nun die Realteile. Am auffälligsten ist hierbei, dass der Medium-Anteil von $\text{Re} \Sigma_{\rho\pi\pi}$, d.h. die Differenz zwischen den durchgezogenen und den gepunkteten Linien in Abb. 1.9 (c) und (d), deutlich repulsiv (positiv) ist. Das führt dazu, dass sich die „Masse“ des ρ -Mesons im Medium nach oben verschiebt. Der Realteil von $\Sigma_{\rho B}$ ist dagegen eher unwichtig, da er in der Nähe der ρ -Masse ($M \approx 800$ MeV) relativ klein ist.

Die Verbreiterung des ρ -Mesons und die Verschiebung der ρ -Masse lassen sich am besten an den transversalen und longitudinalen Spektralfunktionen des ρ -Mesons ablesen,

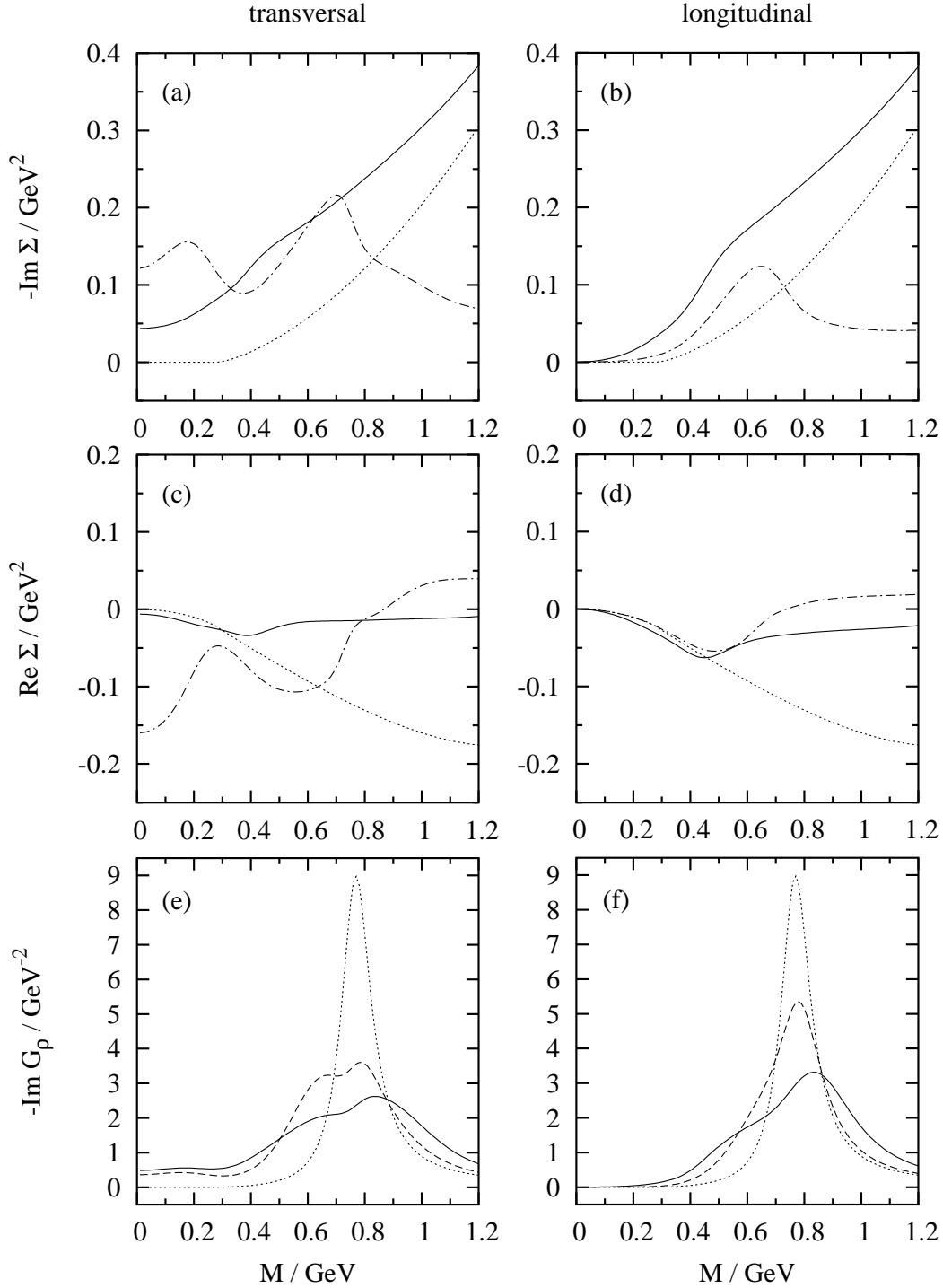


Abbildung 1.9: (a) bis (d) Transversale und longitudinale ρ -Selbstenergien als Funktion der invarianten Masse $M = \sqrt{q^2}$ für den Dreierimpuls $|\vec{q}| = 300$ MeV im Vakuum (gepunktete Linie) und in kalter Kernmaterie ($\varrho_N = \varrho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$): $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ (durchgezogene Linie) und $\Sigma_{\rho B}$ (Strich-Punkt-Linie). (e) und (f) Imaginärteile der transversalen und longitudinalen ρ -Propagatoren im Vakuum (gepunktete Linie) und in kalter Kernmaterie: volles Modell, d.h. mit $\Sigma_\rho = \Sigma_{\rho\pi\pi} + \Sigma_{\rho B}$ (durchgezogene Linie) und unter Vernachlässigung der Medium-Effekte in der Pionwolke, d.h. mit $\Sigma_\rho = \Sigma_{vak} + \Sigma_{\rho B}$ (gestrichelte Linie).

die proportional zu den in Abb. 1.9 (e) und (f) gezeigten Imaginärteilen der transversalen und longitudinalen ρ -Propagatoren sind. Die Zerlegung des Propagators in transversale und longitudinale Anteile erfolgt analog zu Gl. (1.40), d.h. im Medium gilt anstelle von Gl. (1.14)

$$\begin{aligned}
G_\rho^{\mu\nu}(q) &= G_\rho^T(q)P_T^{\mu\nu}(q) + G_\rho^L(q)P_L^{\mu\nu}(q) + \frac{q^\mu q^\nu}{m_0^2 q^2} \\
&= \frac{P_T^{\mu\nu}(q)}{q^2 - m_0^2 - \Sigma_\rho^T(q)} + \frac{P_L^{\mu\nu}(q)}{q^2 - m_0^2 - \Sigma_\rho^L(q)} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_0^2 q^2}. \tag{1.64}
\end{aligned}$$

Die gepunktete Linie stellt den Imaginärteil des Propagators im Vakuum dar. Man erkennt deutlich das Maximum bei der ρ -Masse von 770 MeV mit einer Breite von etwa 150 MeV. Der volle Propagator im Medium ist als durchgezogene Linie gezeigt. Wie erwartet ist das Maximum jetzt extrem verbreitert und auch etwas zu höheren Massen verschoben. Die gestrichelte Kurve ist gezeigt, um die Bedeutung der Medium-Modifikationen der Pionwolke, d.h. des Medium-Anteils von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, zu demonstrieren. Dazu wurde der Pionwolken-Beitrag zur ρ -Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ durch seinen Vakuumwert Σ_{Vak} ersetzt. In dieser Näherung, die der Vorgehensweise von Ref. [28] entspricht, ist das ρ -Meson im Vergleich zum Vakuum immer noch erheblich verbreitert, aber deutlich weniger als im vollen Modell.

Kapitel 2

Das Rho-Meson im Piongas

Bevor wir uns mit dem ρ -Meson in baryonischer Materie befassen, soll in diesem Kapitel zunächst auf den einfacheren Fall des ρ -Mesons in einem Piongas eingegangen werden. Wie im vorangegangenen Kapitel konzentrieren wir uns wieder auf Modifikationen der Pionwolke des ρ -Mesons.

2.1 Berechnung zeitabhängiger Funktionen im Imaginärzeit-Formalismus

Für feldtheoretische Berechnungen bei endlicher Temperatur T im thermischen Gleichgewicht kann man den Matsubara- oder Imaginärzeit-Formalismus verwenden [60]. Dieser erlaubt eine diagrammatische Entwicklung von thermischen Erwartungswerten, die sehr an Feynman-Graphen erinnert, wobei sich die Diagrammregeln allerdings etwas von den üblichen Feynman-Regeln unterscheiden. Eine Schwierigkeit dieses Formalismus besteht allerdings darin, zeitabhängige Funktionen wie z.B. Korrelationsfunktionen zu berechnen.

Anstelle der gewöhnlichen Greenfunktion $G(t, \vec{x})$, die von der Zeitdifferenz t zwischen zwei Punkten abhängt (die Abhängigkeit vom räumlichen Abstand \vec{x} ist hier nicht von Bedeutung), betrachtet man nämlich nun die Imaginärzeit-Greenfunktion $\mathcal{G}(\tau, \vec{x})$, wobei man τ formal als imaginäre Zeit auffassen kann. Da $\mathcal{G}(\tau, \vec{x})$, wie man zeigen kann, eine periodische Funktion in τ mit Periodenlänge $2/T$ ist, lässt sie sich als Fourier-Reihe mit den diskreten Matsubara-Frequenzen $\omega_n = n\pi T$ darstellen, wobei für Bosonen nur geradzahlige und für Fermionen nur ungeradzahlige n auftreten.

Um nun den Übergang von imaginären Zeiten bzw. Matsubara-Frequenzen zu reellen Zeiten bzw. Energien zu bewerkstelligen, betrachtet man $\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k})$ als Funktion einer kontinuierlichen komplexen Variablen ω_n . $\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k})$ hat eine verallgemeinerte Lehmann-Darstellung, an der man ablesen kann, dass $\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k})$ überall außer auf der imaginären Achse analytisch ist:

$$\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho(\omega', \vec{k})}{i\omega_n - \omega'}. \quad (2.1)$$

Als nächstes betrachtet man die Fourier-Transformierte $G(\omega, \vec{k})$ der retardierten Greenfunktion $G(t, \vec{x})$. Aus Gründen, die gleich offensichtlich werden, ist die retardierte Green-

funktion für Rechnungen bei endlicher Temperatur wesentlich besser geeignet als die zeitgeordnete Greenfunktion, die in normalen Feynman-Amplituden auftritt. Die Lehmann-Darstellung der retardierten Greenfunktion lautet nämlich

$$G(\omega, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho(\omega', \vec{k})}{\omega - \omega' + i\varepsilon}, \quad (2.2)$$

mit derselben Spektralfunktion $\rho(\omega', \vec{k})$ wie in Gl. (2.1). Die retardierte Greenfunktion $G(\omega, \vec{k})$ kann also als analytische Fortsetzung der Imaginärzeit-Greenfunktion $\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k})$ angesehen werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir daher anstelle von $\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k})$ gleich die Schreibweise $G(i\omega_n, \vec{k})$ verwenden.

Bei der Berechnung von Selbstenergien ist die Situation ähnlich. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Selbstenergie $\Sigma(i\omega_n, \vec{k})$ für große ω_n im Gegensatz zur Greenfunktion $G(i\omega_n, \vec{k})$ im allgemeinen nicht gegen null geht. Man kann sie aber in ein Polynom in $i\omega_n$ und einen Anteil, der sich wie $\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k})$ in Gl. (2.1) verhält, zerlegen.

Die analytische Fortsetzung von $G(i\omega_n, \vec{k})$ zu $G(\omega, \vec{k})$ bzw. von $\Sigma(i\omega_n, \vec{k})$ zu $\Sigma(\omega, \vec{k})$ ist in der Praxis manchmal sehr schwierig, insbesondere wenn $G(i\omega_n, \vec{k})$ bzw. $\Sigma(i\omega_n, \vec{k})$ nur numerisch bekannt ist. Wie wir sehen werden, tritt dieses Problem in unserem Fall aber nicht auf.

2.2 Die ρ -Meson-Pionwolke im Piongas

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen wollen wir nun die zwei Diagramme aus Abb. 1.1 (a) und (b), mit denen sich das ρ -Meson im Vakuum beschreiben lässt, auch bei endlicher Temperatur berechnen. Die Transversalität der ρ -Selbstenergie, Gl. (1.7), bleibt auch bei endlicher Temperatur erhalten, so dass es wie in Kap. 1.4 ausreicht, nur die räumlichen Komponenten der Selbstenergie zu betrachten.

Nach den Diagrammregeln des Matsubara-Formalismus [60] entsprechen die Diagramme in Abb. 1.1 folgendem Ausdruck für die Imaginärzeit-Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Sigma^{ij}(i\omega_n, \vec{q}) = & -g^2 T \sum_{m \text{ gerade}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(2k+q)^i (2k+q)^j}{(\omega_m^2 + \vec{k}^2 + m_\pi^2)((\omega_m + \omega_n)^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2 + m_\pi^2)} \\ & + g^2 T \sum_{m \text{ gerade}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\delta^{ij}}{\omega_m^2 + \vec{k}^2 + m_\pi^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei $\omega_m = m\pi T$ eine Matsubara-Frequenz bezeichnet. Unter Verwendung von

$$-T \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{m \text{ gerade}} \frac{e^{i\omega_m \eta}}{i\omega_m - \omega} = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} =: f(\omega) \quad (2.4)$$

und der Identität

$$f(-\omega) = -1 - f(\omega) \quad (2.5)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma^{ij}(i\omega_n, \vec{q}) = & g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2k+q)^i (2k+q)^j \left(\frac{(1+2n_{\vec{k}})(\omega_{\vec{k}+\vec{q}} + \omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}+\vec{q}}\omega_{\vec{k}}((i\omega_n)^2 - (\omega_{\vec{k}+\vec{q}} + \omega_{\vec{k}})^2)} \right. \\ & \left. + \frac{n_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}+\vec{q}} - \omega_{\vec{k}})}{\omega_{\vec{k}+\vec{q}}\omega_{\vec{k}}((i\omega_n)^2 - (\omega_{\vec{k}+\vec{q}} - \omega_{\vec{k}})^2)} \right) \\ & + g^2 \delta^{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1+2n_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit den Abkürzungen $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{k}^2}$ und $n_{\vec{k}} = f(\omega_{\vec{k}})$. Dabei haben wir in einigen Termen die Ersetzung $\vec{k} \leftrightarrow -\vec{k} - \vec{q}$ durchgeführt, um winkelabhängige Besetzungszahlfaktoren $n_{\vec{k}+\vec{q}}$ zu vermeiden.

In dieser Form ist die Selbstenergie ein Polynom vom Grade Null in $i\omega_n$ (dritter Term) plus eine Funktion von derselben Struktur wie Gl. (2.1) (erster und zweiter Term), d.h. die retardierte Selbstenergie als Funktion der Energie q_0 erhält man nun, indem man einfach $i\omega_n$ durch $q_0 + i\varepsilon$ ersetzt. Die $i\varepsilon$ -Vorschrift ist nötig, damit die Schnitte der beiden ersten Terme unterhalb der reellen Achse liegen, so wie es bei einer retardierten Funktion sein muss (vgl. Gl. (2.2)). Damit ergibt sich für die retardierte Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma^{ij}(q_0, \vec{q}) = & g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2k+q)^i (2k+q)^j \left(\frac{(1+2n_{\vec{k}})(\omega_{\vec{k}+\vec{q}} + \omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}+\vec{q}}\omega_{\vec{k}}((q_0 + i\varepsilon)^2 - (\omega_{\vec{k}+\vec{q}} + \omega_{\vec{k}})^2)} \right. \\ & \left. + \frac{n_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}+\vec{q}} - \omega_{\vec{k}})}{\omega_{\vec{k}+\vec{q}}\omega_{\vec{k}}((q_0 + i\varepsilon)^2 - (\omega_{\vec{k}+\vec{q}} - \omega_{\vec{k}})^2)} \right) \\ & + g^2 \delta^{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1+2n_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

In dieser Form kann man die Selbstenergie in einen Vakuum- und einen Medium-Anteil zerlegen. Den Vakuum-Anteil Σ_{Vak} erhält man im Grenzfall $T = 0$, d.h. $n_{\vec{k}} = 0$, während der Medium-Anteil Σ_{Med} durch die Terme proportional zu $n_{\vec{k}}$ gegeben ist. Der Vakuum-Anteil Σ_{Vak} ist bis auf das Vorzeichen des Imaginärteils bei negativen Energien identisch mit der in Kap. 1.2 erhaltenen Selbstenergie. Der Unterschied rührt daher, dass wir jetzt die retardierte Selbstenergie betrachten, während in Kap. 1.2 die zeitgeordnete Selbstenergie berechnet wurde. Da die Besetzungszahlfaktoren $n_{\vec{k}}$ für große \vec{k} exponentiell abnehmen, treten im Medium-Anteil Σ_{Med} keine zusätzlichen Divergenzen auf. Wir müssen also wie in Kap. 1.5 nur den Vakuum-Anteil regularisieren.

Wie man an den ersten beiden Termen sieht, erhält die Selbstenergie in zwei verschiedenen kinematischen Bereichen einen Imaginärteil, nämlich für $q_0 = \omega_{\vec{k}+\vec{q}} + \omega_{\vec{k}}$ (erster Term) und für $q_0 = \omega_{\vec{k}+\vec{q}} - \omega_{\vec{k}}$ (zweiter Term). Diese beiden Beiträge lassen sich leicht anschaulich interpretieren. Im ersten Fall zerfällt ein ρ -Meson mit Impuls \vec{q} in zwei Pionen mit Impulsen $\vec{k} + \vec{q}$ und $-\vec{k}$, siehe Abb. 2.1 (a). Dieser Beitrag ist proportional zu $1 + 2n_{\vec{k}}$, d.h. er entspricht gerade dem Zerfall des ρ -Mesons im Vakuum, der im Piongas durch die Anwesenheit der anderen Pionen verstärkt wird. Für diesen Prozess muss $q_0^2 - \vec{q}^2 \geq 4m_\pi^2$ sein. Der andere Beitrag zum Imaginärteil entspricht keinem Zerfall des ρ -Mesons, sondern



Abbildung 2.1: Prozesse, die bei endlicher Temperatur zum Imaginärteil von Diagramm 1.1 (a) beitragen: (a) $\rho \rightarrow \pi\pi$ (Zerfall des ρ -Mesons in zwei Pionen), (b) $\rho + \pi \rightarrow \pi$ (Absorption eines virtuellen ρ -Mesons an einem thermischen Pion).

der Absorption des ρ -Mesons an einem thermischen Pion mit Impuls \vec{k} , so dass das Pion anschließend den Impuls $\vec{k} + \vec{q}$ hat, siehe Abb. 2.1 (b). Man kann sich leicht überlegen, dass dieser Prozess nur im Fall $q_0^2 - \vec{q}^2 < 0$ möglich ist.

Für explizite Rechnungen ist es wieder günstiger, statt der räumlichen Komponenten Σ^{ij} die in Kap. 1.5 definierten transversalen und longitudinalen Komponenten Σ^T und Σ^L zu betrachten. Die Winkelintegrationen lassen sich noch analytisch ausführen, nur das verbleibende Integral über den Betrag von \vec{k} muss numerisch ausgewertet werden. Im Falle eines verschwindenden Dreierimpulses \vec{q} ist das Winkelintegral trivial, und man erhält für den Medium-Anteil

$$\Sigma_{Med}^T(q_0, \vec{q} = 0) = \Sigma_{Med}^L(q_0, \vec{q} = 0) = \frac{g^2}{3\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} \left(3 + \frac{4\vec{k}^2}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - 4\omega_{\vec{k}}^2} \right), \quad (2.8)$$

Im Fall $\vec{q} \neq 0$ sind Σ_{Med}^T und Σ_{Med}^L nicht mehr identisch, und die entsprechenden Formeln lauten

$$\Sigma_{Med}^T(q_0, \vec{q}) = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} \left(\frac{4(q_0^2 + \vec{q}^2)}{\vec{q}^2} + \frac{(q_0^2 - \vec{q}^2 + 2\omega_{\vec{k}}q_0)^2 - 4\vec{k}^2\vec{q}^2}{2|\vec{k}||\vec{q}|^3} L_+ + \frac{(q_0^2 - \vec{q}^2 - 2\omega_{\vec{k}}q_0)^2 - 4\vec{k}^2\vec{q}^2}{2|\vec{k}||\vec{q}|^3} L_- \right), \quad (2.9)$$

$$\Sigma_{Med}^L(q_0, \vec{q}) = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{q^2}{\vec{q}^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} \left(8 + \frac{(q_0 + 2\omega_{\vec{k}})^2}{|\vec{k}||\vec{q}|} L_+ + \frac{(q_0 - 2\omega_{\vec{k}})^2}{|\vec{k}||\vec{q}|} L_- \right), \quad (2.10)$$

mit

$$L_{\pm} = \ln \left(\frac{(q_0 + i\varepsilon)^2 - \vec{q}^2 - 2|\vec{k}||\vec{q}| \pm 2\omega_{\vec{k}}(q_0 + i\varepsilon)}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - \vec{q}^2 + 2|\vec{k}||\vec{q}| \pm 2\omega_{\vec{k}}(q_0 + i\varepsilon)} \right). \quad (2.11)$$

Ähnliche Formeln, deren Imaginärteile allerdings nur im Bereich $q^2 > 0$ gültig sind, wurden in Ref. [38] angegeben.

2.3 Die volle ρ -Selbstenergie im Piongas

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns ausschließlich auf einen von vielen Mediumeffekten beschränkt, die die Eigenschaften des ρ -Mesons ändern können, nämlich auf

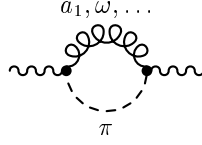


Abbildung 2.2: Ein typischer Beitrag zu $\Sigma_{\rho M}$.

Modifikationen der Pionwolke, d.h. auf den bisher als Σ bezeichneten Selbstenergiebeitrag $\Sigma_{\rho\pi\pi}$. So wie aber in kalter Kernmaterie außer den Modifikationen der Pionwolke noch Modifikationen durch resonante ρN -Streuung wichtig sind ($\Sigma_{\rho B}$), so gibt es im Piongas (bei höheren Temperaturen sollte man besser von einem Mesongas sprechen) noch Beiträge durch die Streuung des ρ -Mesons an thermischen Pionen (oder anderen thermischen Mesonen), die wir als $\Sigma_{\rho M}$ bezeichnen wollen. Ein typisches Selbstenergiediagramm dieser Art, das die Streuung eines ρ -Mesons an einem thermischen Pion mit Bildung eines $a_1(1260)$ - oder $\omega(782)$ -Mesons beschreibt, ist in Abb. 2.2 dargestellt.

Der Beitrag des a_1 -Mesons, das man auch als eine $\pi\rho$ -Resonanz bezeichnen könnte, ist besonders bei invarianten Massen $M = \sqrt{q_0^2 - \vec{q}^2}$ in der Nähe von m_ρ von Bedeutung und führt daher zu einer starken Verbreiterung des ρ -Mesons. Darüber hinaus ist dieser Beitrag im Zusammenhang mit der chiralen Symmetrie sehr wichtig. Darauf werden wir im zweiten Teil dieser Arbeit zurückkommen. Das ω -Meson dagegen ist kaum schwerer als das ρ -Meson, und es führt vor allem zu einer Vergrößerung des Imaginärteils der ρ -Selbstenergie und damit auch der ρ -Spektralfunktion weit unterhalb der freien ρ -Masse, nämlich bei invarianten Massen um 400 MeV.

Die oben genannten Beiträge wurden von Rapp und Gale gründlich untersucht [30]. Dabei wurden außerdem noch Beiträge von $h_1(1170)$ - und $\pi'(1300)$ -Mesonen berücksichtigt, die allerdings wesentlich schwächer als der Beitrag des a_1 -Mesons sind. Darüber hinaus wurde die Streuung des ρ -Mesons an thermischen Kaonen mit Bildung einer $K_1(1270)$ -Resonanz sowie an thermischen ρ -Mesonen mit Bildung einer $f_1(1285)$ -Resonanz in Betracht gezogen. Dabei stellte sich heraus, dass der f_1 -Beitrag unbedeutend ist.

Wenn man das in Abb. 2.2 gezeigte Diagramm im Matsubara-Formalismus berechnet, so erhält man, wie wir im vorigen Abschnitt bei der Berechnung des Diagramms aus Abb. 1.1 (a) gesehen haben, zwei Terme. Analog zum ersten Term in Gl. (2.7) existiert der erste dieser beiden Terme auch im Vakuum und beschreibt einen Zerfall des ρ -Mesons, hier also z.B. den Prozess $\rho \rightarrow \pi\omega$. Dieser Term wurde in Ref. [30] vernachlässigt, da die Schwelle für diesen Zerfall weit oberhalb der ρ -Masse liegt. Der andere Term dagegen, der dem zweiten Term in Gl. (2.7) entspricht, beschreibt genau die Streuprozesse, von denen oben die Rede war, also z.B. den Prozess $\pi + \rho \rightarrow \omega$.

Nach Ref. [30] ergibt sich für die Streuung eines ρ -Mesons an einem Meson $a = \pi, K, \bar{K}$ mit Bildung der Resonanz $b = \omega, a_1, h_1, \pi', K_1, \bar{K}_1$ folgende transversale bzw. longitudinale Selbstenergie:

$$\Sigma_{\rho ab}^{T,L}(q_0, \vec{q}) = G_{\rho ab}^2 IF \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_a(\vec{k})) - f(\omega_a(\vec{k}) + q_0)}{2\omega_a(\vec{k})(s - m_b^2 + im_b\Gamma_b(s))} F_{\rho ab}^2(q_{cm}) v_{\rho ab}^{T,L}(q_0, \vec{q}, \vec{k}). \quad (2.12)$$

Hierbei bezeichnet $\omega_a(\vec{k}) = \sqrt{m_a^2 + \vec{k}^2}$ die Energie des thermischen Mesons, $s = (\omega_a(\vec{k}) +$

$q_0)^2 - (\vec{k} + \vec{q})^2$ die quadrierte Schwerpunktsenergie der Resonanz, $\Gamma_b(s)$ die (energieabhängige) Breite der Resonanz, $G_{\rho ab}$ die ρab -Kopplungskonstante, IF einen Isospinfaktor, $F_{\rho ab}(q_{cm})$ den Formfaktor am ρab -Vertex, q_{cm} den Dreierimpuls des ρ -Mesons im Ruhesystem der Resonanz und $v_{\rho ab}^{T,L}$ einen Faktor, der von der Lorentz-Struktur der ρab -Vertexfunktion abhängt. Die zahlreichen Parameter dieses Modells wurden durch Anpassung der Zerfallsbreiten $b \rightarrow \rho a$ und $b \rightarrow \gamma a$ bestimmt.

Die volle ρ -Selbstenergie im Pion- bzw. Mesongas schreiben wir nun als

$$\Sigma_\rho = \Sigma_{\rho\pi\pi} + \Sigma_{\rho M}. \quad (2.13)$$

Den $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ -Beitrag berechnen wir nach Gl. (2.9) bis (2.10), während wir $\Sigma_{\rho M}$ von Ref. [30] übernehmen. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.3 dargestellt. Wir betrachten zunächst die Imaginärteile der Selbstenergien, die in Abb. 2.3 (a) und (b) zu sehen sind. Für den hier gewählten Dreierimpuls $|\vec{q}| = 300$ MeV liegt die Schwelle für den Zerfall in zwei Pionen, $\rho \rightarrow \pi\pi$, bei einer Energie von $q_0 = 410$ MeV. Der Imaginärteil von Σ_{Vak} (gepunktete Linie) und $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ (durchgezogene Linie) oberhalb dieser Energie wird vom ersten Term in Gl. (2.7) verursacht. Der Unterschied zwischen diesen beiden Kurven, der ausschließlich durch den Bose-Verstärkungsfaktor $1 + 2n_{\vec{k}}$ zustande kommt, ist offensichtlich selbst bei $T = 150$ MeV nur klein. Außerdem stellt man fest, dass der Unterschied zwischen der longitudinalen- und der transversalen Selbstenergie in diesem Bereich vernachlässigbar ist. Die Imaginärteile im raumartigen Bereich, d.h. bei $q_0 < 300$ MeV, werden vom zweiten Term in Gl. (2.7) generiert und entsprechen der Absorption des (virtuellen) ρ -Mesons an thermischen Pionen. Wie man sieht, ist der Unterschied zwischen der longitudinalen und der transversalen Selbstenergie in diesem Bereich sehr groß, was in erster Linie auf den Faktor q^2/q_0^2 in Gl. (1.41) zurückzuführen ist. Dieser Faktor ist auch dafür verantwortlich, dass der Imaginärteil von $\Sigma_{\rho\pi\pi}^L$ das Vorzeichen wechselt. Im Imaginärteil von $\Sigma_{\rho M}$ sieht man deutlich die Beiträge des ω -Mesons bei $q_0 \approx 600$ MeV und des a_1 -Mesons bei $q_0 \approx 1$ GeV.

Die Realteile der Selbstenergien sind in Abb. 2.3 (c) und (d) gezeigt. Der auffälligste Temperatureffekt in $\text{Re}\Sigma_{\rho\pi\pi}$, den man beim Vergleich der durchgezogenen mit den gepunkteten Linien bemerkt, ist die wachsende Repulsion, d.h. die Zunahme des Realteils. Dieser Effekt hat zwei Ursachen: Zum einen ergibt der dritte Term in Gl. (2.7), also das Diagramm in Abb. 1.1 (b), einen konstanten positiven Medium-Anteil. Außerdem erzeugt der zweite Term in Gl. (2.7), der für die Imaginärteile im raumartigen Bereich verantwortlich ist, im zeitartigen Bereich einen repulsiven Realteil. Das kann man z.B. am Anstieg von $\text{Re}\Sigma_{\rho\pi\pi}^T$ im raumartigen Bereich erkennen, siehe Abb. 2.3 (c).

In Abb. 2.3 (e) und (f) sind schließlich die Imaginärteile der transversalen und longitudinalen Propagatoren dargestellt. Die gepunktete Linie bezeichnet die Propagatoren im Vakuum, die durchgezogene Linie die Propagatoren im Mesongas (volles Modell). Sowohl das transversale als auch das longitudinale ρ -Meson werden also im Medium breiter, und infolge des repulsiven Medium-Anteils von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ verschiebt sich die Masse etwas nach oben. Die Verbreiterung ist aber bei weitem nicht so stark wie in Kernmaterie mit Dichte ρ_0 , siehe Abb. 1.9.

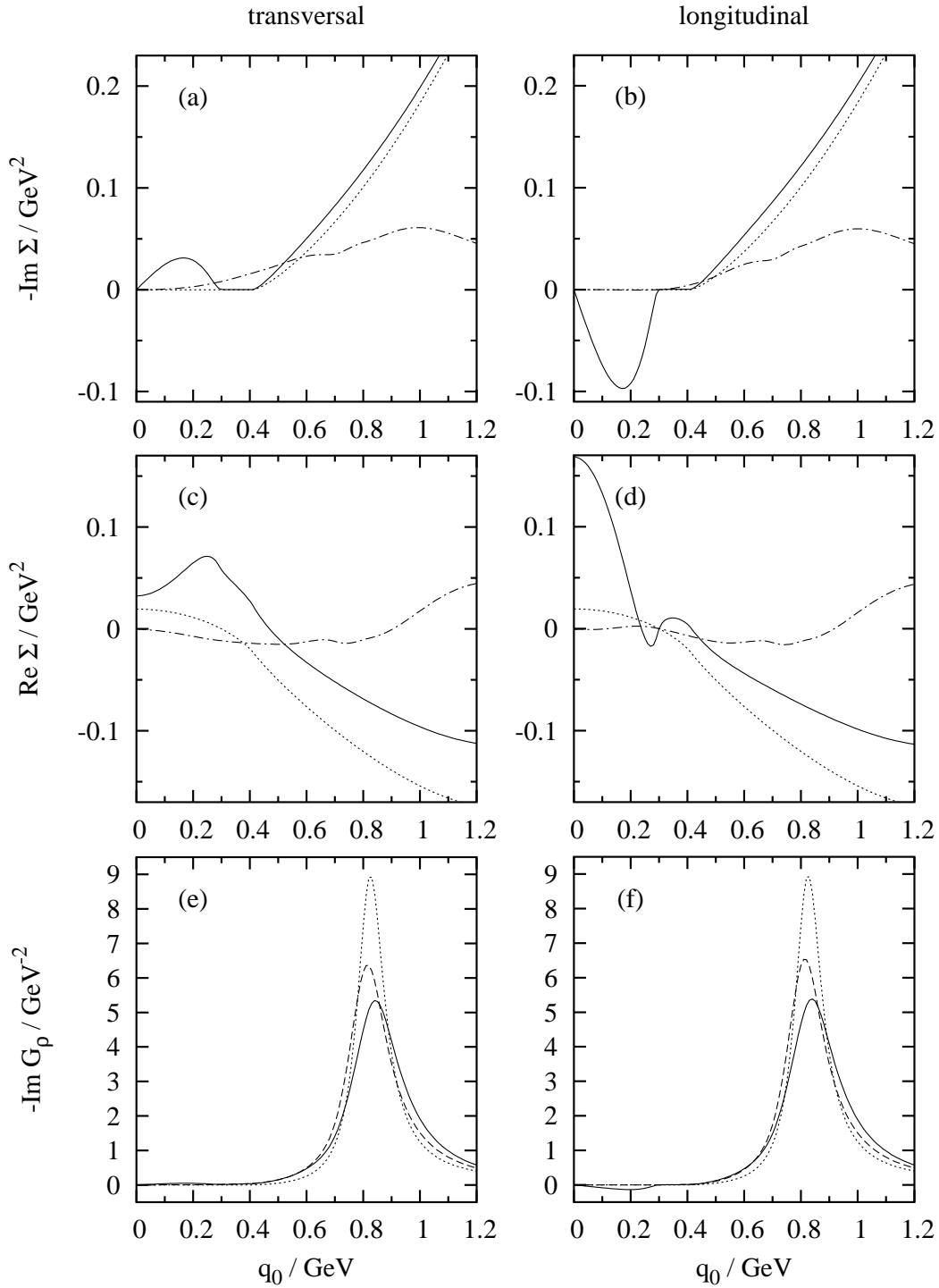


Abbildung 2.3: (a)–(d) Transversale und longitudinale ρ -Selbstenergien für Dreierimpuls $\vec{q} = 300$ MeV als Funktion der Energie q_0 im Vakuum (Σ_{vak} , gepunktete Linie) und bei $T = 150$ MeV ($\Sigma_{\rho\pi\pi}$, durchgezogene Linie und $\Sigma_{\rho M}$, Strich-Punkt-Linie). (e)–(f) Imaginärteile der transversalen und longitudinalen ρ -Propagatoren im Vakuum (gepunktete Linie) und bei $T = 150$ MeV (im vollen Modell, durchgezogene Linie und unter Vernachlässigung der Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, gestrichelte Linie).

Kapitel 3

Das Rho-Meson in heißer baryonenreicher Materie

In diesem Kapitel werden wir das Modell für das ρ -Meson in kalter Kernmaterie so erweitern, dass es auch auf endliche Temperaturen anwendbar ist. Dazu verwenden wir wie im vorigen Kapitel den Matsubara-Formalismus. Wir konzentrieren uns zunächst wieder auf Modifikationen der Pionwolke des ρ -Mesons.

3.1 Nukleonen- und Baryondichte

Kalte isospin-symmetrische Kernmaterie konnten wir einfach durch ihre Dichte ϱ_N bzw. ihren Fermi-Impuls p_F charakterisieren. Die Besetzungszahl eines Nukleonzustands mit Impuls \vec{p} war also durch $n_N(\vec{p}) = \theta(p_F - |\vec{p}|)$ gegeben. Dies ist natürlich nicht exakt, da Kernmaterie kein ideales Fermigas ist.

In heißer Materie ist die Situation etwas komplizierter. Nehmen wir zunächst einmal an, es gebe außer Nukleonen und Deltas keine Baryonen. Aufgrund von Prozessen wie $\Delta \leftrightarrow N\pi$ ist die Delta- und die Nukleonzahl nicht erhalten, wohl aber die Baryonenzahl. Im großkanonischen Bild gibt es also im isospin-symmetrischen Fall nur ein gemeinsames chemisches Potential μ_B für alle Baryonen. Wenn wir nun die Delta-Breite vernachlässigen, so lauten die Nukleonen- und Delta-Besetzungszahlen

$$n_{N,\Delta}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(\omega_{N,\Delta}(\vec{p}) - \mu_B)/T} + 1}, \quad (3.1)$$

und die Nukleonen- und Delta-Dichten sind durch

$$\varrho_N = 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_N(\vec{p}), \quad \varrho_\Delta = 16 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_\Delta(\vec{p}) \quad (3.2)$$

gegeben. Die Faktoren 4 und 16 geben dabei die Spin-Isospin-Entartung der Nukleonen- und Delta-Zustände an. Unter Vernachlässigung der Dichten der Antibaryonen, $\varrho_{\bar{N}}$ und $\varrho_{\bar{\Delta}}$, erhalten wir in diesem vereinfachten Modell die Baryondichte gemäß $\varrho_B = \varrho_N + \varrho_\Delta$. Halten wir nun $\varrho_N + \varrho_\Delta$ konstant und erhöhen die Temperatur, so nimmt die Delta-Dichte zu, während die Nukleonendichte entsprechend abnimmt, wie in Abb. 3.1 zu sehen ist.

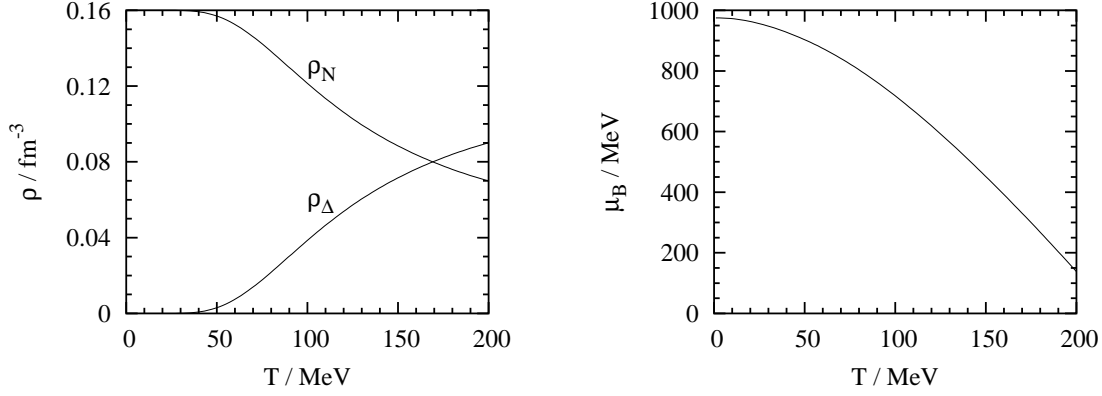


Abbildung 3.1: Nukleonen- und Delta-Dichte ϱ_N und ϱ_Δ (links) und chemisches Potential μ_B (rechts) als Funktion der Temperatur für festes $\varrho_N + \varrho_\Delta = \varrho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

Die gerade beschriebene Betrachtungsweise, bei der die Delta-Breite vernachlässigt wird, ist allerdings in sich etwas widersprüchlich, da gerade der Prozess $\Delta \leftrightarrow N\pi$, der für die Herstellung des chemischen Gleichgewichts zwischen Nukleonen und Deltas sorgt, auch für die Delta-Breite verantwortlich ist. Wie man das wechselwirkende $\pi N\Delta$ -System thermodynamisch konsistent behandeln kann, wurde in Ref. [61] untersucht. Dort wurde folgender Ausdruck für die Baryondichte angegeben:

$$\varrho_B = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(4 \frac{1}{e^{(\omega_N(\vec{p}) - \mu_B)/T} + 1} + 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\mathcal{B}(\omega, \vec{p})}{e^{(\omega - \mu_B)/T} + 1} \right). \quad (3.3)$$

Der erste Term entspricht der oben angegebenen naiven Formel für die Nukleondichte ϱ_N . Der zweite Term kann jedoch nicht direkt mit der Delta-Dichte ϱ_Δ identifiziert werden, da sich die Gewichtsfunktion \mathcal{B} etwas von der Delta-Spektralfunktion unterscheidet. Vielmehr berücksichtigt dieser Term, dass ein Delta-Zustand auch $N\pi$ -Beimischungen enthält und somit nicht nur zur Delta-, sondern auch zur Nukleondichte beiträgt. Der Einfachheit halber werden wir uns jedoch im Folgenden mit der durch Gl. (3.1) und (3.2) definierten Näherung zufrieden geben.

Bisher haben wir nur Nukleonen und Deltas betrachtet. In Wirklichkeit gibt es aber außer den Deltas noch zahlreiche andere baryonische Resonanzen B^* , deren Besetzungszahlen mit zunehmender Temperatur ebenfalls anwachsen. Die gesamte Baryondichte ist also durch

$$\varrho_B = \varrho_N + \varrho_\Delta + \sum_{B^*} \varrho_{B^*} \quad (3.4)$$

gegeben. Dies führt dazu, dass bei festgehaltener Baryondichte die Nukleondichte mit zunehmender Temperatur noch stärker abnimmt als in Abb. 3.1. So beträgt z.B. bei $T = 150 \text{ MeV}$ und $\mu_B = 436 \text{ MeV}$ die Nukleondichte nur etwa ein Drittel der Baryondichte [25].

3.2 Das Pion in heißer Materie

In kalter Kernmaterie ändern sich die Eigenschaften des Pions vor allem durch seine Kopplung an Δh - und Nh -Zustände. Die Pion-Selbstenergie ist daher durch die in Abb. 1.3 dargestellten Diagramme sowie Korrekturen durch die Migdal-Parameter gegeben. Wir gehen nun davon aus, dass sich die Selbstenergie des Pions in heißer Materie in analoger Weise berechnen lässt. Welche Effekte darüber hinaus wichtig werden könnten, werden wir weiter unten diskutieren.

Wir beginnen also damit, die Diagramme aus Abb. 1.3 mit den Diagrammregeln des Matsubara-Formalismus [60] zu berechnen. Für das Diagramm (a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi_{Nh}^{(0)}(i\omega_n, \vec{k}) &= 4 \left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \right)^2 T \sum_{m \text{ ungerade}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_m - \omega_N(\vec{p}) + \mu_B} \\ &\quad \times \frac{1}{i\omega_m + i\omega_n - \omega_N(\vec{p} + \vec{k}) + \mu_B}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für die Summen über ungerade Matsubara-Frequenzen können wir die Identität

$$T \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{m \text{ ungerade}} \frac{e^{i\omega_m \eta}}{i\omega_m - \omega} = \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} \quad (3.6)$$

verwenden und erhalten damit

$$\Pi_{Nh}^{(0)}(i\omega_n, \vec{k}) = 4 \left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_N(\vec{p}) - n_N(\vec{p} + \vec{k})}{i\omega_n - (\omega_N(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p}))}. \quad (3.7)$$

Offensichtlich kann man diesen Ausdruck einfach durch die Ersetzung $i\omega_n \rightarrow k_0 + i\varepsilon$ zu reellen Energien analytisch fortsetzen. Der Ausdruck für die retardierte Funktion $\Pi_{Nh}^{(0)}(k_0, \vec{k})$ lautet folglich

$$\Pi_{Nh}^{(0)}(k_0, \vec{k}) = 4 \left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_N(\vec{p}) - n_N(\vec{p} + \vec{k})}{k_0 - (\omega_N(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p})) + i\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ wird dieser Ausdruck für $k_0 > 0$ identisch mit Gl. (1.22), wovon man sich mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned} \theta(p_F - |\vec{p}|) - \theta(p_F - |\vec{p} + \vec{k}|) &= \theta(p_F - |\vec{p}|) \theta(|\vec{p} + \vec{k}| - p_F) \\ &\quad - \theta(p_F - |\vec{p} + \vec{k}|) \theta(|\vec{p}| - p_F) \end{aligned} \quad (3.9)$$

leicht überzeugen kann. Für $k_0 < 0$ hat dagegen der Imaginärteil das umgekehrte Vorzeichen, da wir hier die retardierte Funktion betrachten, während Gl. (1.22) die zeitgeordnete Funktion angibt.

Für die weitere Auswertung von Gl. (3.8) ist es wieder günstig, die winkelabhängige Besetzungszahl $n_N(\vec{p} + \vec{k})$ durch die Substitution $\vec{p} \leftrightarrow -\vec{p} - \vec{k}$ zu beseitigen. Anschließend kann die Winkelintegration analytisch ausgeführt werden, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \Pi_{Nh}^{(0)}(k_0, \vec{k}) &= -4 \left(\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \right)^2 \frac{1}{4\pi^2 |\vec{k}|} \int_0^\infty d|\vec{p}| |\vec{p}| n_N(\vec{p}) [2(\omega_{N+} - \omega_{N-}) + (\omega_N(\vec{p}) + k_0) L_{NN+} \\ &\quad + (\omega_N(\vec{p}) - k_0) L_{NN-}], \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit $\omega_{N\pm} = \sqrt{m_N^2 + (|\vec{p}| \pm |\vec{k}|)^2}$ und

$$L_{NN\pm} = \ln \left(\frac{\omega_{N+} - \omega_N(\vec{p}) \mp (k_0 + i\varepsilon)}{\omega_{N-} - \omega_N(\vec{p}) \mp (k_0 + i\varepsilon)} \right). \quad (3.11)$$

Die verbleibende $|\vec{p}|$ -Integration wird numerisch ausgewertet.

Wir wenden uns jetzt dem Δh -Anteil zu, der durch die Diagramme 1.3 (b) und (c) gegeben ist. Wenn wir die Delta-Breite zunächst vernachlässigen, können wir die vor Gl. (3.8) beschriebenen Schritte in analoger Weise durchführen und erhalten

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k_0, \vec{k}) = \frac{16}{9} \left(\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} & \left(\frac{n_N(\vec{p}) - n_\Delta(\vec{p} + \vec{k})}{k_0 - (\omega_\Delta(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p})) + i\varepsilon} \right. \\ & \left. + \frac{n_\Delta(\vec{p}) - n_N(\vec{p} + \vec{k})}{k_0 - (\omega_N(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_\Delta(\vec{p})) + i\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nun können wir die Delta-Breite einführen, ohne dadurch die Analytizität von $\Pi_{\Delta h}^{(0)}(k_0, \vec{k})$ in der oberen komplexen Halbebene zu zerstören, indem wir $i\varepsilon$ durch $i\Gamma_\Delta/2$ ersetzen:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k_0, \vec{k}) = \frac{16}{9} \left(\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} & \left(\frac{n_N(\vec{p}) - n_\Delta(\vec{p} + \vec{k})}{k_0 - (\omega_\Delta(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_N(\vec{p})) + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta} \right. \\ & \left. + \frac{n_\Delta(\vec{p}) - n_N(\vec{p} + \vec{k})}{k_0 - (\omega_N(\vec{p} + \vec{k}) - \omega_\Delta(\vec{p})) + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die in Kap. 1.3 angewendete Vorschrift, die Breite bereits in den Delta-Propagator einzufügen, würde hingegen dazu führen, dass überall in Gl. (3.12) ω_Δ durch $\omega_\Delta - i\Gamma_\Delta/2$ ersetzt wird, so dass der zweite Term einen Schnitt in der oberen komplexen Halbebene hätte. Darüber hinaus hat die hier angewendete Vorschrift auch noch den Vorteil, dass der Imaginärteil von $\Pi_{\Delta h}^{(0)}$ nun für $k_0 \rightarrow 0$ verschwindet, so wie es mit einer realistischen, energieabhängigen Parametrisierung der Breite der Fall wäre.

Wir verfahren nun weiter wie oben für $\Pi_{Nh}^{(0)}$ beschrieben und erhalten schließlich folgendes Integral, das leicht numerisch ausgewertet werden kann:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta h}^{(0)}(k_0, \vec{k}) = -\frac{16}{9} \left(\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \right)^2 \frac{1}{4\pi^2 |\vec{k}|} \int_0^\infty d|\vec{p}| |\vec{p}| \sum_{ab=N\Delta, \Delta N} n_a(\vec{p}) & \left[2(\omega_{b+} - \omega_{b-}) \right. \\ & \left. + \left(\omega_a(\vec{p}) + k_0 + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta \right) L_{ab+} + \left(\omega_a(\vec{p}) - k_0 - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta \right) L_{ab-} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit $\omega_{\Delta\pm} = \sqrt{m_\Delta^2 + (|\vec{p}| \pm |\vec{k}|)^2}$ und

$$L_{ab\pm} = \ln \left(\frac{\omega_{b+} - \omega_a(\vec{p}) \mp (k_0 + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta)}{\omega_{b-} - \omega_a(\vec{p}) \mp (k_0 + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta)} \right). \quad (3.15)$$

Im Gegensatz zu $\Pi_{Nh}^{(0)}$ verschwindet $\Pi_{\Delta h}^{(0)}$ nicht für $\vec{k} \rightarrow 0$. In diesem Spezialfall erhalten wir

$$\Pi_{\Delta h}^{(0)}(k_0, \vec{k} = 0) = \frac{16}{9} \left(\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \right)^2 \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{p}| \vec{p}^2 \frac{(n_N(\vec{p}) - n_\Delta(\vec{p}))(\omega_\Delta(\vec{p}) - \omega_N(\vec{p}))}{(k_0 + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta)^2 - (\omega_\Delta(\vec{p}) - \omega_N(\vec{p}))^2}. \quad (3.16)$$

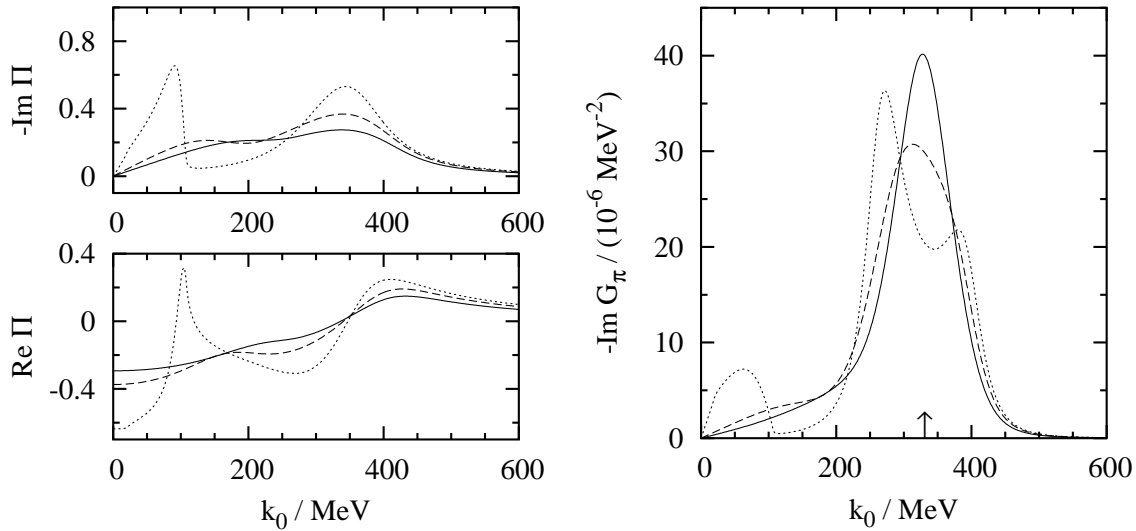


Abbildung 3.2: Pion-Selbstenergie (links) und Imaginärteil des Pion-Propagators (rechts) als Funktion der Energie für $|\vec{k}| = 300$ MeV und $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ bei drei verschiedenen Temperaturen: $T = 0$ ($\mu_B = 963$ MeV, gepunktete Linie), $T = 80$ MeV ($\mu_B = 766$ MeV, gestrichelte Linie) und $T = 150$ MeV ($\mu_B = 452$ MeV, durchgezogene Linie). Zum Vergleich kennzeichnet der Pfeil bei $k_0 = 331$ MeV die Lage des Pols des freien Pionpropagators.

Die volle Pion-Selbstenergie $\vec{k}^2\Pi(k_0, \vec{k})$ ergibt sich wie in kalter Materie aus $\Pi_{Nh}^{(0)}$ und $\Pi_{\Delta h}^{(0)}$ gemäß Gl. (1.26), und der Pionpropagator ist dann durch

$$G_\pi(k_0, \vec{k}) = \frac{1}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \omega_\pi^2(\vec{k}) - \vec{k}^2\Pi(k_0, \vec{k})} \quad (3.17)$$

gegeben.

In Abb. 3.2 sind numerische Ergebnisse für die Pion-Selbstenergie und den Imaginärteil des Pionpropagators bei verschiedenen Temperaturen, aber für festgehaltene Nukleonendichte $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ dargestellt. Wir betrachten zunächst den Propagator (rechte Seite). Die gepunktete Linie gilt für kalte Materie, d.h. für $T = 0$. Die drei Maxima entsprechen den drei Quasiteilchenanregungen, von denen in Kap. 1.3 die Rede war (Nh -Anregungen bei $k_0 \approx 60$ MeV, Pion-Ast bei $k_0 \approx 270$ MeV und Δh -Ast bei $k_0 \approx 380$ MeV). Die gestrichelte Kurve entspricht einer Temperatur von 80 MeV. Der Pion- und der Δh -Ast sind jetzt zu einer breiten Verteilung verschmolzen, während das Nh -Kontinuum stark unterdrückt und zu höheren Energien verschoben ist. Die durchgezogene Linie wurde mit $T = 150$ MeV berechnet. Bei dieser hohen Temperatur sind sämtliche Strukturen außer einem Maximum bei der freien Pion-Energie ($\omega_\pi = 331$ MeV) verschwunden. Man kann also zusammenfassend sagen, dass die Medium-Modifikationen des Pionpropagators mit zunehmender Temperatur schwächer werden.

Dafür gibt es mehrere Gründe, die man anhand der Selbstenergie verstehen kann (siehe linke Seite von Abb. 3.2). Die Spektren der Nh - und Δh -Anregungen in $\text{Im } \Pi$, die bei $T = 0$ relativ scharf voneinander abgegrenzt sind, werden infolge der thermischen Bewegung der Nukleonen abgeschwächt und über einen größeren Energiebereich verteilt, dass es bei $T = 150$ MeV keine Lücke mehr zwischen ihnen gibt. Infolge dessen wird auch

der Verlauf von $\text{Re } \Pi$ zunehmend flacher. Aus diesen Gründen könnte der Pionpropagator bei $T = 150 \text{ MeV}$ eher durch eine Breit-Wigner-Formel,

$$G_\pi(\omega, \vec{k}) \approx \frac{1}{(k_0 + i\Gamma_\pi/2)^2 - \omega_\pi^2(\vec{k})}, \quad (3.18)$$

als durch Gl. (1.27) parametrisiert werden.

Neben der thermischen Bewegung gibt es noch einen anderen Effekt, nämlich die Unterdrückung der Δh -Anregungen durch Pauli-Blocking der bei $T = 0$ stets freien, bei ansteigender Temperatur aber zunehmend besetzten Delta-Zustände. Formal erkennt man dies z.B. am Faktor $n_N(\vec{p}) - n_\Delta(\vec{p} + \vec{k})$ im ersten Term von Gl. (3.13). In Ref. [62] wurde u.a. vorgeschlagen, wie in Kap. 1.3 für $T = 0$ beschrieben die Fermi-Bewegung (bzw. thermische Bewegung) der Nukleonen zu vernachlässigen, dabei aber das Pauli-Blocking der Delta-Zustände zu berücksichtigen:

$$\Pi_{\Delta h}^{(0)}(k_0, \vec{k}) \approx \frac{16}{9} \left(\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \right)^2 \left(\frac{\varrho_N}{4} - \frac{\varrho_\Delta}{16} \right) \frac{2(\omega_\Delta(\vec{k}) - m_N)}{(k_0 + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta)^2 - (\omega_\Delta(\vec{k}) - m_N)^2}. \quad (3.19)$$

Dieser Ausdruck entspricht etwa dem Ausdruck bei $T = 0$, außer dass die Nukleonendichte ϱ_N durch $\varrho_N - \varrho_\Delta/4$ ersetzt wurde. Aus Abb. 3.1 geht jedoch hervor, dass bei $T = 150 \text{ MeV}$ die Delta-Dichte etwa gleich der Nukleonendichte ist, so dass das Pauli-Blocking der Deltas allein nur eine Abnahme der Δh -Stärke um 25% erklären könnte.

Die thermische Bewegung stellt also einen wichtigen, wenn nicht sogar den wichtigsten Temperatureffekt dar, so dass wir auf Näherungen wie Gl. (3.19) verzichten wollen. Damit lässt sich der Pionpropagator zwar nicht mehr wie in Gl. (1.27) schreiben, aber diese Form ist, wie wir oben festgestellt haben, bei höheren Temperaturen sowieso keine zutreffende Näherung mehr.

Bisher haben wir die Abnahme der Mediumeffekte bei zunehmender Temperatur und festgehaltener Nukleonendichte ϱ_N diskutiert. Würde man stattdessen aber die Baryonendichte ϱ_B konstant halten, so wäre der Effekt noch viel dramatischer, da dann auch die Nukleonendichte ϱ_N als Funktion der Temperatur abnehmen würde.

Zu einem gewissen Anteil ist diese Abnahme der Mediumeffekte aber ein Fehler unserer Näherung, auch bei endlicher Temperatur nur die drei Diagramme aus Abb. 1.3 zu berücksichtigen. Wenn nämlich außer Nukleonen auch noch Deltas vorhanden sind, so kann das Pion natürlich nicht nur mit den Nukleonen, sondern auch mit den Deltas wechselwirken. In der $\pi\Delta$ -Wechselwirkung werden aber weitere Resonanzen B^* mit $m_{B^*} > m_\Delta$ auftreten. Neben den hier beschriebenen $Nh = NN^{-1}$ - und $\Delta h = \Delta N^{-1}$ -Diagrammen müssten also auch $\Delta\Delta^{-1}$ - und $B^*\Delta^{-1}$ -Diagramme in Betracht gezogen werden. Für den Fall, dass die Massendifferenz $m_{B^*} - m_\Delta$ etwa der Massendifferenz $m_\Delta - m_N$ entspricht, könnten die $B^*\Delta^{-1}$ -Diagramme die Unterdrückung der ΔN^{-1} -Diagramme zumindest teilweise kompensieren. Im allgemeinsten Fall muss man also für alle Resonanzen B mit nicht vernachlässigbarer Dichte ϱ_B auch B^*B^{-1} -Diagramme mit $m_{B^*} > m_B$ berücksichtigen.

Eine derartige Rechnung wäre allerdings mit großen Unsicherheiten behaftet, da die πBB^* -Kopplungskonstanten in den meisten Fällen nicht bekannt sind. Dasselbe Problem tritt übrigens auch in der ρ -Selbstenergie $\Sigma_{\rho B}$ auf. Für diesen Fall hat eine konservative Abschätzung ergeben, dass B^*B^{-1} -Diagramme die Unterdrückung der B^*N^{-1} -Diagramme um etwa 40% reduzieren können [25].

3.3 Die ρ -Meson-Pionwolke in heißer Materie

Wie in Kap. 1.5 werden wir nun die ρ -Selbstenergie mit den durch das Medium modifizierten Pionpropagatoren berechnen. Dabei müssen auch wieder die in Kap. 1.4 diskutierten Vertexkorrekturen berücksichtigt werden. Zu den räumlichen Komponenten der ρ -Selbstenergie tragen dann wieder die in Abb. 1.7 gezeigten Diagramme bei, die analog zu Gl. (1.43) im Matsubara-Formalismus folgendem Ausdruck entsprechen:

$$\Sigma^{ij}(i\omega_n, \vec{q}) = g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^7 f_r^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) I_r(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}). \quad (3.20)$$

Die Funktionen f_r^{ij} sind dabei identisch mit denen aus Gl. (1.44) bis (1.50), aber anstelle der Integrale I_r aus Gl. (1.51) bis (1.57) müssen wir nun folgende Matsubara-Summen berechnen:

$$I_1(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} G_\pi(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}), \quad (3.21)$$

$$I_2(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} \Pi(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}), \quad (3.22)$$

$$I_3(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} \Pi_L(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}), \quad (3.23)$$

$$I_4(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} \Pi(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m, \vec{k}) \times \Pi(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}) G_\pi(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}), \quad (3.24)$$

$$I_5(\vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} G_\pi(i\omega_m, \vec{k}), \quad (3.25)$$

$$I_6(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} \Pi(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}), \quad (3.26)$$

$$I_7(\vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} \Pi(i\omega_m, \vec{k}) G_\pi(i\omega_m, \vec{k}). \quad (3.27)$$

Um die Matsubara-Summen auszuwerten, muss man auf die bereits in Kap. 2.1 erwähnten Spektraldarstellungen zurückgreifen. Die Spektraldarstellung der retardierten Pion-Selbstenergie für komplexe k_0 lautet

$$\Pi(k_0, \vec{k}) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\text{Im} \Pi(\omega, \vec{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon}. \quad (3.28)$$

In Wahrheit verletzt unsere Selbstenergie diese Relation, da die Delta-Breite nur näherungsweise berücksichtigt wurde und deshalb in Gl. (3.13) der Schnitt nicht entlang der reellen k_0 -Achse, sondern bei $\text{Im} k_0 = -i\Gamma_\Delta/2$ verläuft. Dennoch ist Gl. (3.28) für reelle k_0 numerisch sehr gut erfüllt. Die Abweichungen in der komplexen Ebene können jedoch unter Umständen zu unphysikalischen Ergebnissen führen. Daher ist es besser, für komplexe

k_0 die Darstellung (3.28) zu verwenden, als in Gl. (3.8) und (3.13) komplexe k_0 -Werte einzusetzen, was ebenfalls möglich wäre.

Wenn wir annehmen, Gl. (3.28) sei erfüllt, dann gelten analoge Spektraldarstellungen auch für die Funktionen $F = G_\pi$, ΠG_π und Π_L :

$$F(k_0, \vec{k}) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\text{Im } F(\omega, \vec{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon} \quad (3.29)$$

Mit Hilfe dieser Relationen können wir nun die Summen I_1 bis I_7 berechnen. Wir beginnen mit I_5 und I_7 , die folgende Struktur haben:

$$I(\vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} F(i\omega_m, \vec{k}). \quad (3.30)$$

Da sie gar nicht von der Matsubara-Frequenz ω_n bzw. der Energie q_0 des ρ -Mesons abhängen, müssen sie auch nicht auf die reelle q_0 -Achse fortgesetzt werden. Setzen wir nun Gl. (3.29) in Gl. (3.30) ein und verwenden Gl. (2.4) und die für reelle ω gültigen Beziehungen (2.5) und

$$\text{Im } F(-\omega, \vec{k}) = -\text{Im } F(\omega, \vec{k}), \quad (3.31)$$

so erhalten wir

$$I(\vec{k}) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega (1 + 2f(\omega)) \text{Im } F(\omega, \vec{k}). \quad (3.32)$$

Die restlichen Summen, I_1 , I_2 , I_3 , I_4 und I_6 , haben dagegen folgende Struktur:

$$I(i\omega_n, q, \vec{k}) = -2T \sum_{m \text{ gerade}} F_1(i\omega_m, \vec{k}) F_2(i\omega_m + i\omega_n, \vec{k} + \vec{q}). \quad (3.33)$$

Darin ersetzen wir nun F_1 und F_2 durch ihre Spektraldarstellungen und erhalten dann mit Hilfe von Gl. (2.4) folgenden Ausdruck:

$$I(i\omega_n, \vec{q}, \vec{k}) = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 (f(\omega_1) - f(\omega_2)) \frac{\text{Im } F_1(\omega_1, \vec{k}) \text{Im } F_2(\omega_2, \vec{k} + \vec{q})}{i\omega_n + \omega_1 - \omega_2}. \quad (3.34)$$

In dieser Form lässt sich I einfach durch die Ersetzung $i\omega_n \rightarrow q_0 + i\varepsilon$ auf die reelle Achse fortsetzen:

$$I(q_0, \vec{q}, \vec{k}) = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 (f(\omega_1) - f(\omega_2)) \frac{\text{Im } F_1(\omega_1, \vec{k}) \text{Im } F_2(\omega_2, \vec{k} + \vec{q})}{q_0 + \omega_1 - \omega_2 + i\varepsilon}. \quad (3.35)$$

Anhand dieses Ausdrucks kann man sich leicht davon überzeugen, dass I die Eigenschaft

$$\text{Im } I(-q_0, \vec{q}, \vec{k}) = -\text{Im } I(q_0, \vec{q}, \vec{k}) \quad (3.36)$$

besitzt und die Dispersionsrelation

$$\text{Re } I(q_0, \vec{q}, \vec{k}) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega^2 \frac{\text{Im } I(\omega, \vec{q}, \vec{k})}{q_0^2 - \omega^2} \quad (3.37)$$

erfüllt, die wir später zur Berechnung des Realteils verwenden werden. Jetzt betrachten wir erst einmal nur den Imaginärteil, wobei wegen der entstehenden δ -Funktion eines der beiden Integrale wegfällt. Das verbleibende Integral kann für $q_0 \geq 0$ mit Hilfe von Gl. (2.5) und (3.31) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \text{Im } I(q_0, \vec{q}, \vec{k}) = & -\frac{2}{\pi} \int_0^{q_0} d\omega (1 + f(\omega) + f(q_0 - \omega)) \text{Im } F_1(\omega, \vec{k}) \text{Im } F_2(q_0 - \omega, \vec{k} + \vec{q}) \\ & -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega (f(\omega) - f(q_0 + \omega)) (\text{Im } F_1(\omega, \vec{k}) \text{Im } F_2(q_0 + \omega, \vec{k} + \vec{q}) \\ & + \text{Im } F_1(q_0 + \omega, \vec{k}) \text{Im } F_2(\omega, \vec{k} + \vec{q})) . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Zur numerischen Berechnung der ρ -Selbstenergie spalten wir diese wieder in Vakuum- und Medium-Anteile, Σ_{Vak} und Σ_{Med} , auf. Zunächst berechnen wir $\text{Im } \Sigma_{\text{Med}}$, indem wir vom vollen Imaginärteil den Vakuum-Anteil (ohne die Beiträge der Regulatoren) subtrahieren:

$$\text{Im } \Sigma_{\text{Med}}^{ij}(q_0, \vec{q}) = g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{r=1,2,3,4,6} f_r^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) \text{Im } I_r(q_0, \vec{q}, \vec{k}) - \Sigma_{\text{Vak}}^{ij}(q_0, \vec{q}) , \quad (3.39)$$

mit

$$\text{Im } \Sigma_{\text{Vak}}^{ij}(q) = \left(\frac{q^i q^j}{q^2} - g^{ij} \right) \frac{g^2}{48\pi} q^2 \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2} \right)^{3/2} \theta(q^2 - 4m_\pi^2) . \quad (3.40)$$

Der Realteil, $\text{Re } \Sigma_{\text{Med}}$, ergibt sich nach Gl. (3.37) aus dem Dispersionsintegral über $\text{Im } \Sigma_{\text{Med}}$ und den Medium-Anteilen von I_5 und I_7 :

$$\begin{aligned} \text{Re } \Sigma_{\text{Med}}^{ij}(q_0, \vec{q}) = & -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega^2 \frac{\text{Im } \Sigma_{\text{Med}}^{ij}(\omega, \vec{q})}{q_0^2 - \omega^2} \\ & + g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{r=5,7} f_r^{ij}(\vec{q}, \vec{k}) (I_r(\vec{k}) - I_{r, \text{Vak}}(\vec{k})) , \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit

$$I_{5, \text{Vak}}(\vec{k}) = \frac{1}{\omega_\pi(\vec{k})} , \quad I_{7, \text{Vak}}(\vec{k}) = 0 . \quad (3.42)$$

3.4 Die volle ρ -Selbstenergie in heißer Materie

In heißer, baryonenreicher Materie gibt es neben den im vorangegangenen Abschnitt berechneten Medium-Modifikationen der Pionwolke, $\Sigma = \Sigma_{\rho\pi\pi}$, sowohl die bereits für den Fall kalter Materie diskutierten ρ -Nukleon-Streuprozesse, $\Sigma_{\rho B}$, sowie die für heiße, aber baryonenfreie Materie besprochenen Streuprozesse mit thermischen Mesonen, $\Sigma_{\rho M}$. Die volle ρ -Selbstenergie ist also durch

$$\Sigma_\rho = \Sigma_{\rho\pi\pi} + \Sigma_{\rho B} + \Sigma_{\rho M} \quad (3.43)$$

gegeben.

Die Formel (1.61) für die Selbstenergie $\Sigma_{\rho B}$ in kalter Materie kann, ähnlich wie wir es für die Pion-Selbstenergie getan haben, relativ einfach auf endliche Temperaturen erweitert werden. Analog zu Gl. (3.13) ergibt sich dann

$$\chi_{\rho B h}^{(0)}(q) = -SI_{\rho B h} \left(\frac{f_{\rho N B} F_{\rho N B}(\vec{q})}{m_\rho} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{n_N(\vec{p}) - n_B(\vec{p} + \vec{q})}{q_0 - \omega_B(\vec{p} + \vec{q}) + \omega_N(\vec{p}) + \frac{i}{2}\Gamma_B} + \frac{n_B(\vec{p}) - n_N(\vec{p} + \vec{q})}{q_0 - \omega_N(\vec{p} + \vec{q}) + \omega_B(\vec{p}) + \frac{i}{2}\Gamma_B} \right). \quad (3.44)$$

Die Bedeutung der Abkürzungen ist unter Gl. (1.61) erklärt. Ein Vergleich mit den in Ref. [24] angegebenen Formeln zeigt, dass $\chi_{\rho B h}^{(0)}$ nach Gl. (3.44) exakt der Summe $\chi_{\rho B N^{-1}}^{(0)} + \chi_{\rho N B^{-1}}^{(0)}$ in der Bezeichnung von Ref. [24] entspricht. Wie schon bei der Diskussion der Pion-Selbstenergie in Kap. 3.2, so ergibt sich auch hier das Problem, dass die Beiträge zu $\Sigma_{\rho B}$ mit zunehmender Temperatur infolge der abnehmenden Nukleonendichte immer schwächer werden. Zumindest teilweise ist dies aber ein Fehler der Näherung, $B^* B^{-1}$ -Anregungen mit zwei Resonanzen B und B^* zu vernachlässigen. Wie bereits in Kap. 3.2 erwähnt wurde, ist die quantitative Berücksichtigung dieser Anregungen aber kaum möglich, da nur sehr wenig über die Wechselwirkung des ρ -Mesons mit Resonanzen bekannt ist.

Den Beitrag $\Sigma_{\rho M}$ übernehmen wir wie in Kap. 2.3 von Ref. [30], d.h. wir vernachlässigen die Dichteabhängigkeit dieses Beitrags. Das ist sicher nur eine grobe Näherung, denn wie wir bereits wissen, ändert sich z.B. $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ in baryonischer Materie bei Berücksichtigung der Medium-Modifikationen der Pionen sehr stark, und ähnliche Änderungen sind auch für $\Sigma_{\rho M}$ zu erwarten. Dennoch hat sich dieses Modell bei der Erklärung von Dileptonenspektren als sehr erfolgreich erwiesen [25].

In Abb. 3.3 (a) bis (d) sind numerische Ergebnisse für $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ und für $\Sigma_{\rho B} + \Sigma_{\rho M}$ gezeigt. Wir beginnen die Diskussion wieder mit den Imaginärteilen der Selbstenergien. Die gestrichelte Linie zeigt den Verlauf von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ und $T = 0$. Sie entspricht also etwa der durchgezogenen Linie in Abb. 1.9, nur ist jetzt wegen der niedrigeren Nukleonendichte die Differenz zur Selbstenergie im Vakuum (gepunktete Linie) nur etwa halb so groß. Die durchgezogene Linie in Abb. 3.3 bezeichnet die Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ und $T = 150$ MeV. Man erkennt eine deutliche Zunahme des Imaginärteils im Vergleich zur gestrichelten Linie, und zwar vor allem bei niedrigen Energien. Das ist auf den ersten Blick erstaunlich, da ja die Modifikationen des Pionpropagators für konstante Nukleonendichte mit zunehmender Temperatur kleiner werden. Dass der Imaginärteil dennoch zunimmt, hat zwei Ursachen, die man an Gl. (3.38) ablesen kann. Der erste Term (proportional zu $1 + f(\omega) + f(q_0 + \omega)$) beschreibt dieselben Prozesse, die auch bei $T = 0$ zur Breite des ρ -Mesons beitragen, nämlich den Zerfall des ρ -Mesons in zwei durch das Medium verbreiterte Pionen. Im Rahmen des Drei-Niveau-Modells konnte dies als Zerfall in zwei Quasiteilchen mit den Quantenzahlen des Pions gedeutet werden, z.B. $\rho \rightarrow \pi + \Delta h$. Diese Prozesse werden bei endlicher Temperatur um den Faktor $1 + f(\omega) + f(q_0 + \omega)$ verstärkt, der stärker ist als die Unterdrückung der Medium-Effekte im Pionpropagator. Außerdem gibt es bei $T > 0$ noch den zweiten Term in Gl. (3.38) (proportional zu $f(\omega) - f(q_0 + \omega)$). Im Piongas trägt dieser Term nur für raumartige Impulse etwas zum Imaginärteil der

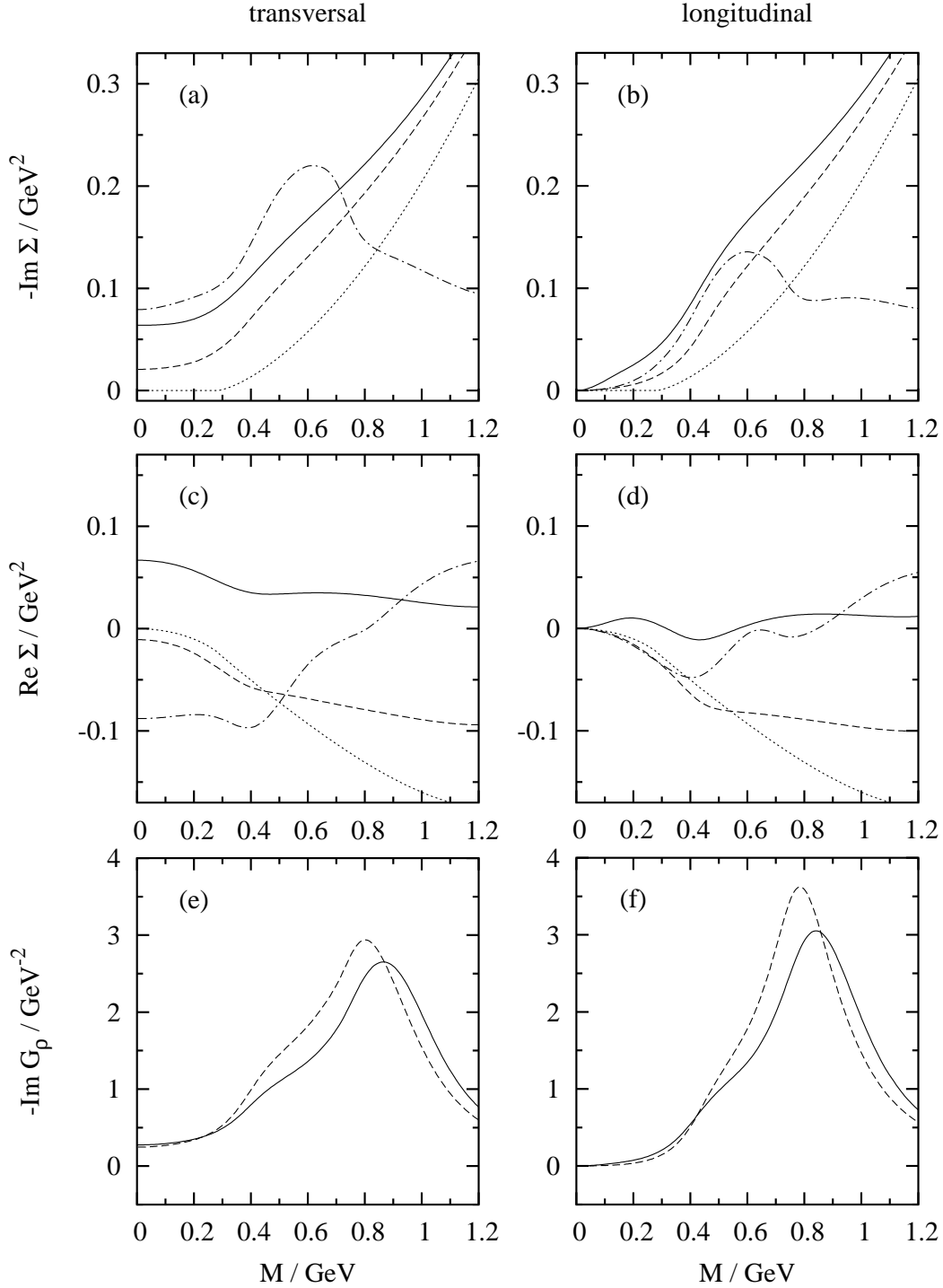


Abbildung 3.3: (a)–(d) Transversale und longitudinale ρ -Selbstenergien für Dreierimpuls $\vec{q} = 300$ MeV als Funktion der Energie q_0 im Vakuum (Σ_{Vak} , gepunktete Linie) und in baryonenreicher Materie mit $\varrho_N = 0.55\varrho_0$: $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $T = 0$ ($\mu_B = 963$ MeV, gestrichelte Linie), $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $T = 150$ MeV ($\mu_B = 452$ MeV, durchgezogene Linie) und $\Sigma_{\rho B} + \Sigma_{\rho M}$ bei $T = 150$ MeV (Strich-Punkt-Linie). (e)–(f) Imaginärteile der transversalen und longitudinalen ρ -Propagatoren bei $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ und $T = 150$ MeV (durchgezogene Linie) und unter Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ (gestrichelte Linie).

Selbstenergie bei, d.h. für $q_0 < |\vec{q}|$. Dort kann er als Absorption eines virtuellen ρ -Mesons an einem thermischen Pion interpretiert werden. In baryonischer Materie dagegen ist dies wegen der endlichen Breite des Pions auch für zeitartige Impulse möglich, d.h. für $q_0 > |\vec{q}|$, nämlich wenn das auslaufende Pion eine höhere Masse hat als das einlaufende. Im Rahmen des Drei-Niveau-Modells könnte man einen solchen Prozess z.B. als $\pi + \rho \rightarrow \Delta h$ oder $Nh + \rho \rightarrow \pi$ bezeichnen. Für die in Abb. 3.3 gezeigten Imaginärteile ist der zweite Term für $M \lesssim 200$ MeV wichtiger als der erste.

Am Imaginärteil von $\Sigma_{\rho B} + \Sigma_{\rho M}$ ist im Vergleich zu Abb. 1.9 am auffälligsten, dass das zur Delta-Resonanz gehörende Maximum von $-\text{Im} \Sigma_{\rho\pi\pi}^T$ bei $M \approx 200$ MeV verschwunden ist. Das hat dieselben Gründe, aus denen auch die Medium-Modifikationen des Pions mit zunehmender Temperatur schwächer werden: die im Vergleich zu Abb. 1.9 geringere Nukleonendichte, das Verwischen aller Strukturen durch die thermische Bewegung der Nukleonen und die Verringerung der Stärke durch das Pauli-Blocking der Delta-Zustände.

Als nächstes betrachten wir nun die Realteile der Selbstenergien. Schon bei $T = 0$ ist $\text{Re} \Sigma_{\rho\pi\pi}$ in baryonischer Materie deutlich repulsiver als im Vakuum, wie man beim Vergleich der gestrichelten und der gepunkteten Linie erkennt. Besonders auffällig ist aber, dass $\text{Re} \Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei der gleichen Nukleonendichte als Funktion der Temperatur stark anwächst (gestrichelte Linie: $T = 0$, durchgezogene Linie: $T = 150$ MeV). Denselben Effekt haben wir schon in Kap. 2.3 beobachtet, allerdings ist er in Anwesenheit der Baryonen wesentlich stärker. Der Realteil von $\Sigma_{\rho B} + \Sigma_{\rho M}$ hat dagegen bei $M \approx 800$ MeV gerade seinen Nulldurchgang, so dass er die Masse des ρ -Mesons nicht wesentlich verschiebt.

In Abb. 3.3 (e) und (f) sind die Imaginärteile der transversalen und longitudinalen ρ -Propagatoren dargestellt. Dabei bezeichnet die durchgezogene Linie das Ergebnis des vollen Modells, wie es oben beschrieben wurde. In der gestrichelten Linie wurde dagegen $\Sigma_{\rho\pi\pi}(q_0, \vec{q}; \varrho_N, T)$ durch $\Sigma_{\rho\pi\pi}(q_0, \vec{q}; \varrho_N, T = 0)$ ersetzt, um die Bedeutung der Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ hervorzuheben. Wie schon aus der Diskussion der Selbstenergien zu erwarten war, ist das ρ -Meson im Vergleich zum Vakuum sehr stark verbreitert, und die Masse ist deutlich nach oben verschoben. Allerdings ist die Breite der durchgezogenen Kurve nicht größer als die der gestrichelten, obwohl $-\text{Im} \Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $T = 150$ MeV deutlich größer war als bei $T = 0$. Dies lässt sich mit der gleichzeitigen Zunahme von $\text{Re} \Sigma_{\rho\pi\pi}$ erklären, die die ρ -Masse nach oben verschiebt und dadurch $-\text{Im} G_\rho$ bei niedrigen Massen, bei denen $-\text{Im} \Sigma_{\rho\pi\pi}$ in erster Linie anwächst, unterdrückt. Insgesamt verschiebt sich das Maximum von $-\text{Im} G_\rho^T$ von 770 MeV im Vakuum auf 865 MeV, und das von $-\text{Im} G_\rho^L$ auf 840 MeV, und rund 70% dieser Verschiebung sind auf die Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ zurückzuführen.

Kapitel 4

Dileptonen- und Photonenproduktion

In diesem Kapitel werden wir den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des ρ -Mesons in heißer Materie und der Dileptonen- und Photonproduktion in Schwerionenstößen herstellen. Dazu betrachten wir zuerst die Strom-Strom-Korrelationsfunktion, die im Vektordominanzmodell mit dem ρ -Propagator verknüpft werden kann. Im Zusammenhang mit den in $\Sigma_{\rho B}$ enthaltenen baryonischen Resonanzen ist es allerdings notwendig, das ursprüngliche Vektordominanzmodell leicht abzuwandeln.

4.1 Die Strom-Strom-Korrelationsfunktion

Ein Schwerionenstoß stellt eine sehr komplizierte Reaktion dar. Um überhaupt feldtheoretische Methoden anwenden zu können, wird häufig die vereinfachende Annahme gemacht, dass sich der bei dem Stoß gebildete „Feuerball“ wenigstens lokal so verhält wie unendlich ausgedehnte Materie einer bestimmten Dichte und Temperatur im thermischen Gleichgewicht.

Wir betrachten also z.B. die Produktionsrate $R_{e^+e^-} = dN_{e^+e^-}/d^4x$ von e^+e^- -Paaren in unendlich ausgedehnter Materie mit einer Temperatur T . Wie in Ref. [34] gezeigt wurde, ist die differentielle Rate für die Erzeugung von e^+e^- -Paaren mit Gesamtimpuls q durch

$$\frac{dR_{e^+e^-}}{d^4q} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2 q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \sum_{i,f} \frac{e^{-E_i/T}}{Z} \langle i | j^\nu(0) | f \rangle \langle f | j^\mu(0) | i \rangle (2\pi)^3 \delta(q + p_f - p_i) \quad (4.1)$$

gegeben, wobei $\alpha = e^2/(4\pi)$ die Feinstrukturkonstante, Z die Zustandssumme und j^μ den Operator des elektromagnetischen Stromes bezeichnet. $|i\rangle$ und $|f\rangle$ sind die unbeobachteten hadronischen Anfangs- und Endzustände, die wegen der Translationsinvarianz Energie- und Impuls-Eigenzustände sind. Die zugehörigen Viererimpulse sind $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$ und p_f . Die Elektronenmasse wurde in dieser Formel vernachlässigt.

Wie wir gleich sehen werden, kann Gl. (4.1) mit Hilfe der retardierten Strom-Strom-

Korrelationsfunktion $\Pi^{\mu\nu}$ geschrieben werden, die folgendermaßen definiert ist:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \sum_i \frac{e^{-E_i/T}}{Z} \langle i | [j^\mu(x), j^\nu(0)] | i \rangle \theta(x_0). \quad (4.2)$$

Schiebt man einen vollständigen Satz von Energie- und Impuls-Eigenzuständen $|f\rangle$ zwischen den beiden Operatoren ein und nutzt die Symmetrie von $\Pi^{\mu\nu}$ aus, so erhält man für den Imaginärteil

$$\text{Im } \Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,f} \frac{e^{-E_i/T}}{Z} \langle i | j^\mu(0) | f \rangle \langle f | j^\nu(0) | i \rangle (2\pi)^4 (\delta(q + p_i - p_f) - \delta(q + p_f - p_i)). \quad (4.3)$$

Durch Vertauschen der Summationsvariablen i und f kann man dies weiter umformen und erhält

$$\text{Im } \Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{e^{q_0/T} - 1}{2} \sum_{i,f} \frac{e^{-E_i/T}}{Z} \langle i | j^\mu(0) | f \rangle \langle f | j^\nu(0) | i \rangle (2\pi)^4 \delta(q + p_f - p_i). \quad (4.4)$$

Durch Vergleich mit Gl. (4.1) ergibt sich nun folgende einfache Formel für die Dileptonenrate:

$$\frac{dR_{e^+e^-}}{d^4q} = \frac{\alpha^2}{3\pi^3 q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) f(q_0) \text{Im } \Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{\alpha^2 f(q_0)}{3\pi^3 q^2} (2 \text{Im } \Pi^T(q) + \text{Im } \Pi^L(q)), \quad (4.5)$$

wobei $f(q_0) = 1/(e^{q_0/T} - 1)$ wieder die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion bezeichnet. Für den letzten Schritt haben wir die Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ analog zur ρ -Selbstenergie in Gl. (1.40) in dreidimensional transversale und longitudinale Komponenten Π^T und Π^L zerlegt.

Analog zur gerade beschriebenen Dileptonenproduktion kann auch die Produktion reeller Photonen mit Impuls \vec{q} und Energie $q_0 = |\vec{q}|$ in heißer Materie untersucht werden. Für die Rate $R_\gamma = dN_\gamma/d^4x$ ergibt sich dann [63]

$$q_0 \frac{dR_\gamma}{d^3q} = \frac{\alpha f(q_0)}{\pi^2} \text{Im } \Pi^T(q). \quad (4.6)$$

Beide Prozesse können also mit ein und derselben Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ beschrieben werden. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Funktion mit dem ρ -Propagator in Beziehung setzen.

4.2 Vektordominanzmodell mit baryonischen Resonanzen

Im Rahmen des in Kap. 1.1 beschriebenen Vektordominanzmodells hängt die im vorigen Abschnitt eingeführte retardierte Strom-Strom-Korrelationsfunktion $\Pi^{\mu\nu}$ direkt mit dem retardierten ρ -Propagator zusammen. Aus der Strom-Feld-Identität (1.3) folgt nämlich sofort

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{m_0^4}{g^2} G_\rho^{\mu\nu}(q) + \dots \quad (4.7)$$

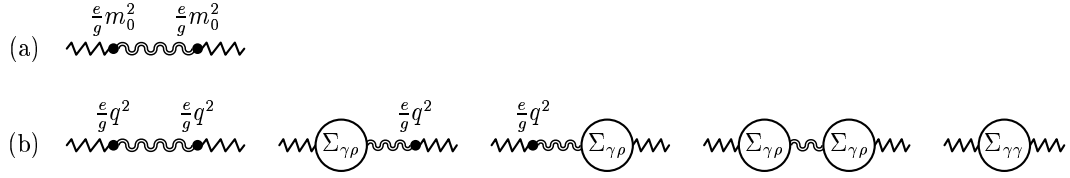


Abbildung 4.1: Photon-Selbstenergie Σ_γ im Vektordominanzmodell (a) nach Sakurai und (b) nach Kroll, Lee und Zumino. Die Zickzacklinien bezeichnen Photonen, und die doppelten Wellenlinien stehen für den vollen ρ -Propagator. Die Kreise repräsentieren alle einteilchenirreduziblen Diagramme mit den entsprechenden externen Linien.

Die Punkte stehen für isoskalare Beiträge, die z.B. proportional zum ω -Propagator sind, und die wir im Folgenden nicht weiter beachten werden. Anstelle der Strom-Strom-Korrelationsfunktion $\Pi^{\mu\nu}$ kann man auch die Photon-Selbstenergie $\Sigma_\gamma^{\mu\nu}$ betrachten, die bis zur Ordnung e^2 gerade durch $\Pi^{\mu\nu}$ gegeben ist:

$$\Sigma_\gamma^{\mu\nu}(q) = -e^2 \Pi^{\mu\nu}(q). \quad (4.8)$$

Da das Photon im Vektordominanzmodell von Sakurai [14] nur über das ρ -Meson an die Hadronen koppelt, besteht die Photon-Selbstenergie nur aus dem in Abb. 4.1 (a) dargestellten Diagramm, also dem Produkt von zwei $\gamma\rho$ -Vertizes em_0^2/g und einem vollen ρ -Propagator, so dass sich zusammen mit Gl. (4.8) wieder Gl. (4.7) ergibt.

In Kap. 1.1 wurde aber bereits erwähnt, dass es neben dem eben betrachteten Vektordominanzmodell von Sakurai noch eine andere Version von Kroll, Lee und Zumino gibt [51], in der das Photon nicht nur über das ρ -Meson, sondern auch direkt an die anderen Hadronen koppelt. Dadurch gibt es natürlich noch weitere Beiträge zur Photon-Selbstenergie, die in Abb. 4.1 (b) diagrammatisch dargestellt sind. Außerdem hat der $\gamma\rho$ -Vertex eine andere Struktur, nämlich $e(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})/g$. Mit den in Abb. 4.1 eingeführten Bezeichnungen $\Sigma_{\gamma\rho}$ und $\Sigma_{\gamma\gamma}$ ergibt sich nun für die Photon-Selbstenergie:

$$\Sigma_\gamma^{T,L}(q) = \left(\frac{e}{g} q^2 - \Sigma_{\gamma\rho}^{T,L}(q) \right)^2 G_\rho^{T,L}(q) + \Sigma_{\gamma\gamma}^{T,L}(q). \quad (4.9)$$

Die Indizes T und L bezeichnen wieder die dreidimensional transversalen und longitudinalen Komponenten. Wie in Kap. 1.1 beschrieben wurde, wird im Modell von Kroll, Lee und Zumino das Photon in derselben Weise wie das ρ -Meson an die Hadronen gekoppelt, mit dem einzigen Unterschied, dass die Kopplungskonstante durch e statt durch g gegeben ist. Folglich gilt

$$\Sigma_{\gamma\rho}^{T,L}(q) = \frac{e}{g} \Sigma_\rho^{T,L}(q), \quad \Sigma_{\gamma\gamma}^{T,L}(q) = \left(\frac{e}{g} \right)^2 \Sigma_\rho^{T,L}(q). \quad (4.10)$$

Verwendet man außerdem Gl. (1.64), so kann man Gl. (4.9) wie folgt umformen:

$$\Sigma_\gamma^{T,L}(q) = \left(\frac{e}{g} \right)^2 (q^2 + m_0^2 + m_0^4 G_\rho^{T,L}(q)). \quad (4.11)$$

Bildet man hiervon den Imaginärteil, so findet man wie im Sakuraischen Vektordominanzmodell

$$\text{Im } \Pi^{T,L}(q) = -\frac{m_0^4}{g^2} \text{Im } G_\rho^{T,L}(q). \quad (4.12)$$

Diese Übereinstimmung ist nicht überraschend, da schon in Ref. [51] formal gezeigt wurde, dass beide Modelle äquivalent sind. Andererseits hat das Modell von Kroll, Lee und Zumino gegenüber dem Modell von Sakurai den Vorteil, dass es explizit eichinvariant ist. Setzt man z.B. in Gl. (4.11) $q^2 = 0$, so erhält man im Vakuum unter Verwendung von Gl. (1.8) sofort $\Sigma_\gamma(q^2 = 0) = 0$, d.h. das Photon bleibt im Vakuum masselos.

Friman und Pirner haben allerdings schon vor einiger Zeit darauf hingewiesen, dass das ursprüngliche Vektordominanzmodell im Zusammenhang mit Baryonen zu unrealistischen Ergebnissen führt [27]. Betrachten wir z.B. die Zerfallsbreiten für $N^*(1720) \rightarrow N + \rho$ und $N^*(1720) \rightarrow N + \gamma$. Mit der ρNN^* -Kopplungskonstanten $f_{\rho NN^*}/m_\rho$ ist im Vektordominanzmodell auch das magnetische Übergangsmoment μ_{NN^*} , d.h. die γNN^* -Kopplungskonstante, folgendermaßen festgelegt:

$$\mu_{NN^*} = \frac{e}{g} \frac{f_{\rho NN^*}}{m_\rho}. \quad (4.13)$$

Mit diesem Wert ergibt sich jedoch ein viel zu großes Verzweigungsverhältnis $\Gamma_{N^* \rightarrow N + \gamma} / \Gamma_{N^* \rightarrow N + \rho}$ d.h. bei einer realistischen Kopplung des ρ -Mesons an NN^* wird das magnetische Übergangsmoment μ_{NN^*} überschätzt.

In Ref. [27] wurde folgende Lösung für dieses Problem vorgeschlagen, die einer Abwandlung des Modells von Kroll, Lee und Zumino entspricht. Da in diesem Modell die Kopplungskonstante μ_{NN^*} für die direkte Kopplung des Photons an NN^* explizit in der Lagrangedichte auftritt, kann diese auch auf einen anderen als den in Gl. (4.13) angegebenen Wert gesetzt werden. Dann ist zwar der ursprüngliche Zweck des Modells, nämlich in einer eichinvarianten Weise die Strom-Feld-Identität (1.3) sicherzustellen, nicht mehr erfüllt, aber dafür können die beiden Zerfallsbreiten $\Gamma_{N^* \rightarrow N + \rho}$ und $\Gamma_{N^* \rightarrow N + \gamma}$, deren experimentell bestimmtes Verhältnis offensichtlich im Widerspruch zur Strom-Feld-Identität steht, richtig beschrieben werden. Anstelle von Gl. (4.13) wählt man also

$$\mu_{NN^*} = r_{N^*} \frac{e}{g} \frac{f_{\rho NN^*}}{m_\rho}, \quad (4.14)$$

wobei $r_{N^*} < 1$ die Abweichung vom ursprünglichen Vektordominanzmodell angibt.

Die Stärke der Kopplung des Photons an die Resonanzen beeinflusst natürlich nicht nur den Zerfall, sondern auch die Anregung der Resonanzen. Im ursprünglichen Vektordominanzmodell ist deshalb der Beitrag der Resonanzen zum Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt des Nukleons viel zu groß. Auch das kann mit der gerade beschriebenen Abwandlung des Vektordominanzmodells korrigiert werden. Im Prinzip ist es möglich, für jede Resonanz B^* einen entsprechenden Parameter r_{B^*} unabhängig festzulegen. In Ref. [29], von der wir unsere Modellparameter übernehmen, wurde jedoch gezeigt, dass die experimentellen Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitte mit einem gemeinsamen Wert $r_B = 0.7$ für alle Resonanzen gut wiedergegeben werden können.

Wenn man das gerade beschriebene Verfahren anwendet, ist Gl. (4.12) nicht mehr gültig. Anstelle von Gl. (4.10) gilt jetzt

$$\begin{aligned}\Sigma_{\gamma\rho}^{T,L}(q) &= \frac{e}{g}(\Sigma_{\rho\pi\pi}^{T,L}(q) + \Sigma_{\rho M}^{T,L}(q) + r_B \Sigma_{\rho B}^{T,L}(q)), \\ \Sigma_{\gamma\gamma}^{T,L}(q) &= \left(\frac{e}{g}\right)^2 (\Sigma_{\rho\pi\pi}^{T,L}(q) + \Sigma_{\rho M}^{T,L}(q) + r_B^2 \Sigma_{\rho B}^{T,L}(q)).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Setzt man dies in Gl. (4.9) ein und bildet den Imaginärteil, so erhält man nach einigen Umformungen [25, 27]:

$$\begin{aligned}\text{Im } \Pi^{T,L}(q) &= -\frac{1}{g^2} [(\text{Im } \Sigma_{\rho\pi\pi}^{T,L}(q) + \text{Im } \Sigma_{\rho M}^{T,L}(q)) |d_\rho^{T,L}(q) - 1|^2 \\ &\quad + \text{Im } \Sigma_{\rho B}^{T,L}(q) |d_\rho^{T,L}(q) - r_B|^2],\end{aligned}\quad (4.16)$$

mit

$$d_\rho^{T,L}(q) = \frac{q^2 - \Sigma_{\rho\pi\pi}^{T,L}(q) - \Sigma_{\rho M}^{T,L}(q) - r_B \Sigma_{\rho B}^{T,L}(q)}{q^2 - m_0^2 - \Sigma_{\rho\pi\pi}^{T,L}(q) - \Sigma_{\rho M}^{T,L}(q) - \Sigma_{\rho B}^{T,L}(q)}.\quad (4.17)$$

4.3 Numerische Ergebnisse

Wir sind nun in der Lage, die Dileptonen- und Photonproduktionsraten dichter und heißer Materie zu berechnen. Die Dileptonenrate folgt aus Gl. (4.5), wobei für $\text{Im } \Pi^T$ und $\text{Im } \Pi^L$ jeweils Gl. (4.16) anzuwenden ist¹. In Anlehnung an die Darstellung experimenteller Dileptonenspektren tragen wir die über alle Impulse \vec{q} integrierte Rate als Funktion der invarianten Masse $M = \sqrt{q^2}$ des Dileptonenpaares auf:

$$\frac{dR_{e^+e^-}}{dM^2} = \int \frac{d^3q}{\sqrt{M^2 + \vec{q}^2}} \frac{dR_{e^+e^-}(M, \vec{q})}{d^4q}.\quad (4.18)$$

Das Ergebnis für $T = 150$ MeV und $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ ($\mu_B = 452$ MeV) ist in der linken Hälfte von Abb. 4.2 gezeigt. Diese Parameter entsprechen etwa den Bedingungen, wie sie vermutlich in Schwerionenstößen am CERN-SPS bei einer Strahlenergie von $E_{lab} = 40$ A GeV erreicht werden. Um ein wirklich mit dem Experiment vergleichbares Spektrum zu erhalten, müsste man allerdings über das Volumen und die Zeitentwicklung des „Feuerballs“ integrieren. Außerdem gibt es im betrachteten Bereich noch andere Beiträge zu den experimentellen Dileptonenspektren, die in unserem Modell nicht enthalten sind, und zwar insbesondere Zerfälle von ω -Mesonen in e^+e^- bei $M \approx 780$ MeV sowie

¹In Ref. [25, 64] wurde Gl. (4.16) nur für $\text{Im } \Pi^T$ verwendet, während für $\text{Im } \Pi^L$ die Gültigkeit der Formel (4.12) aus dem ursprünglichen Vektordominanzmodell angenommen wurde. Die Begründung hierfür war, dass der Parameter r_B , der in Gl. (4.16) eingeht, nur durch Prozesse mit reellen Photonen bestimmt wird, zu denen $\text{Im } \Pi^L$ nicht beiträgt. Andererseits müssen aber $\text{Im } \Pi^L$ und $\text{Im } \Pi^T$ im Limes $\vec{q} \rightarrow 0$ identisch werden, und das ist nur möglich, wenn Gl. (4.16) auch für $\text{Im } \Pi^L$ verwendet wird. Unsere Ergebnisse unterscheiden sich aber trotzdem kaum von denen aus Ref. [64]; die größte Abweichung bei der Dileptonenrate liegt im Bereich um $q^2 \approx (400 \text{ MeV})^2$ und beträgt dort etwa 4%.

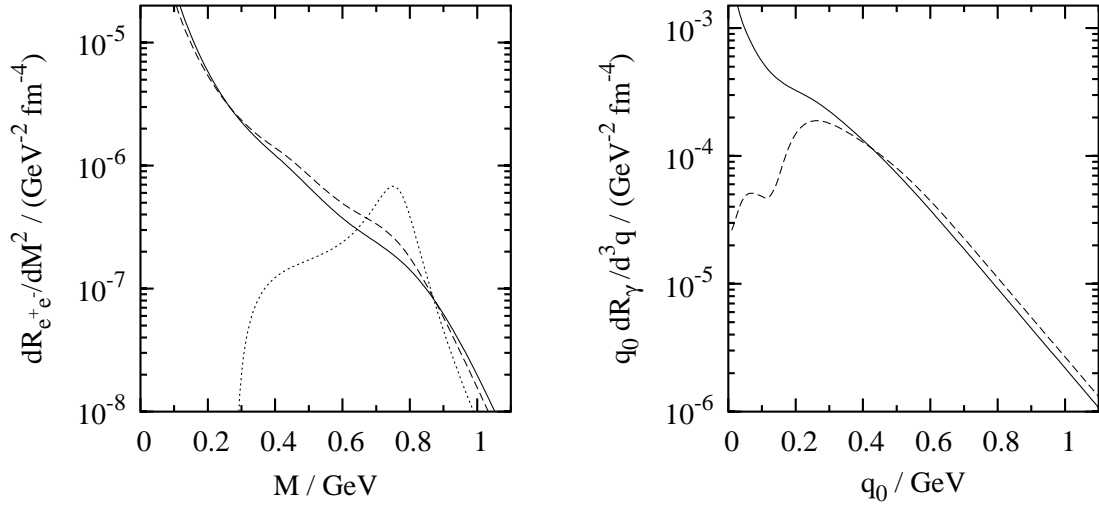


Abbildung 4.2: Dileptonenspektrum (links) und Photonenspektrum (rechts) bei $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ und $T = 150$ MeV ($\mu_B = 452$ MeV). Die durchgezogenen Linien entsprechen der vollen Rechnung, während für die gestrichelten Linien die Temperaturabhängigkeit von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ für festgehaltene Nukleonendichte vernachlässigt wurde. Die gepunktete Linie erhält man, wenn man sämtliche Mediumeffekte vernachlässigt.

Dalitz-Zerfälle von π^0 -, η - und ω -Mesonen bei kleinen invarianten Massen. Darüber hinaus müsste die experimentelle Akzeptanz berücksichtigt werden.

Ganz ohne Medium-Modifikationen des ρ -Mesons hätte das Dileptonenspektrum eine Schwelle bei $M = 2m_\pi$ und ein Maximum bei $M = m_\rho = 770$ MeV (gepunktete Linie in Abb. 4.2). Mit Medium-Modifikationen erhält man dagegen ein vollkommen anderes Spektrum (durchgezogene Linie), in dem das Maximum bei der ρ -Masse verschwunden und die Rate für $M \lesssim 650$ MeV stark erhöht ist. Die Ursache hierfür ist in erster Linie die Verbreiterung des ρ -Mesons, die in der Nähe des Maximums zu einer Verringerung, weiter entfernt vom Maximum dagegen zu einer Erhöhung der Rate führt. Da der Imaginärteil der ρ -Selbstenergie im Medium keine Schwelle mehr hat (vgl. Abb. 3.3), nimmt die Rate bei kleinen invarianten Massen besonders wegen des Faktors $f(q_0)/q^2$ in Gl. (4.5) stark zu. Aber auch bei Massen $M \gtrsim 850$ MeV ist eine Zunahme zu erkennen.

Um den Einfluss der Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ zu demonstrieren, ist als gestrichelte Kurve das Ergebnis einer Rechnung gezeigt, bei der $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $T = 0$, aber ebenfalls $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ berechnet wurde. In dieser Näherung wird die Zunahme der Dileptonenrate im Bereich $300 \text{ MeV} \lesssim M \lesssim 650 \text{ MeV}$ etwas überschätzt (um etwa 15% bei $M = 400$ MeV). Am größten ist die Abweichung im Bereich der ρ -Masse $M \approx 770$ MeV. Dort ergibt die volle Rechnung eine um rund 30% niedrigere Rate als die Rechnung ohne Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, was vor allem auf die Verschiebung der ρ -Masse zurückzuführen ist. Die Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, insbesondere die Verschiebung der ρ -Masse, können also die Beschreibung der gemessenen Dileptonenrate in diesem Bereich verbessern, die dort zu einem großen Teil schon allein aus den Zerfällen von ω -Mesonen erklärt werden kann.

Neben Dileptonenpaaren können auch direkte Photonen, d.h. Photonen, die im Innern des Feuerballs produziert werden, Aufschluss über die dichte und heiße Phase in Schwe-

rionenreaktionen geben. Die Rate für die Erzeugung solcher Photonen ist in Gl. (4.6) angegeben worden, wobei Π^T nach Gl. (4.16) zu berechnen ist. Numerische Ergebnisse für die Rate als Funktion der Photon-Energie $q_0 = |\vec{q}|$ sind in der rechten Hälfte von Abb. 4.2 gezeigt, und zwar wieder für $T = 150$ MeV und $\varrho_N = 0.55\varrho_0$ im vollen Modell (durchgezogene Linie) sowie unter Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ für festgehaltene Nukleonendichte ϱ_N (gestrichelte Linie). Hier erkennt man, dass die volle Rechnung bei Energien unter 300 MeV eine wesentlich höhere Rate vorhersagt als die Rechnung, für die $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei $T = 0$ verwendet wurde. Dieser Anstieg ist in erster Linie auf die Emission von Photonen in Prozessen wie $\pi \rightarrow \pi + \gamma$ zurückzuführen, die aufgrund der endlichen Breite der Pionen im Medium möglich sind. Im Rahmen des Drei-Niveau-Modells könnte man dies z.B. als $\Delta h \rightarrow \pi + \gamma$ interpretieren. Es handelt sich um die Umkehrung des bei der Diskussion der ρ -Selbstenergie bereits besprochenen Prozesses $\pi + \rho \rightarrow \pi$.

Teil II

**Vektor- und
Axialvektor-Korrelatoren in einem
chiral symmetrischen Modell**

Kapitel 5

Konstruktion der Lagrangedichte

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir ein phänomenologisches Modell für das ρ -Meson in dichter und heißer Materie beschrieben. Im zweiten Teil geht es nun darum, ein Modell für das ρ -Meson zu entwickeln, das auch die chirale Symmetrie berücksichtigt. Das schließt eine gleichzeitige Beschreibung des a_1 -Mesons ein, da dieses der chirale Partner des ρ -Mesons ist.

Das Modell, das wir hier vorstellen werden, stellt eine Erweiterung des mesonischen Anteils des linearen σ -Modells von Gell-Mann und Lévy dar, das Pionen und σ -Mesonen enthält. Die Tatsache, dass die Existenz des σ -Mesons nicht allgemein anerkannt ist, soll uns nicht davon abhalten, dieses Modell zu verwenden, da sie vermutlich darauf zurückzuführen ist, dass das σ -Meson infolge seines Zerfalls in zwei Pionen eine sehr große Breite hat. Das lineare σ -Modell wurde bereits 1968 von Lee und Nieh um ρ - und a_1 -Mesonen erweitert. Dazu wurde das Eichprinzip, das Sakurai für die Isospinsymmetrie gefordert hatte, auf die chirale Symmetrie ausgedehnt. Das Ergebnis war das geeichte lineare σ -Modell. Da dieses jedoch in einigen wesentlichen Punkten versagt, wurde es von Anfang an immer stärker abgewandelt. Wir werden schließlich von dem Eichprinzip überhaupt keinen Gebrauch mehr machen.

5.1 Das lineare σ -Modell

Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung des mesonischen Anteils des linearen σ -Modells von Gell-Mann und Lévy [45]. Da wir Pion- und σ -Meson von nun an in einer symmetrischen Weise behandeln wollen, ist es zweckmäßig, ein vierkomponentiges Feld einzuführen, das sowohl die drei Pionfelder als auch das σ -Feld enthält:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma \\ \vec{\pi} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

Damit kann die Lagrangedichte des linearen σ -Modells wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi - \frac{\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2. \quad (5.2)$$

Wenn $\mu^2 > 0$ wäre, hätte μ die Bedeutung einer Pion- oder σ -Masse. Der interessantere Fall, den wir weiter unten besprechen werden, liegt jedoch für $\mu^2 < 0$ vor. λ^2 bezeichnet eine Kopplungskonstante, die die $\pi\pi\pi\pi$ -, $\pi\pi\sigma\sigma$ - und $\sigma\sigma\sigma\sigma$ -Wechselwirkung bestimmt.

Man sieht sofort, dass die Lagrangedichte (5.2) invariant unter Drehungen des vierkomponentigen Vektors Φ , also unter $O(4)$ -Transformationen ist. Diese Transformationen kann man in der Form

$$\Phi \rightarrow U\Phi, \quad U = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}+i\vec{\beta}\cdot\vec{T}^5} \quad (5.3)$$

schreiben, wobei die sechs in zwei dreikomponentigen Vektoren zusammengefassten 4×4 -Matrizen \vec{T} und \vec{T}^5 die Generatoren der $O(4)$ -Drehungen darstellen. \vec{T} ist der gewöhnliche Isospinoperator, der nur auf die Pionfelder wirkt, während \vec{T}^5 axiale Transformationen erzeugt, die Pion- und σ -Felder ineinander umwandeln. Genauer gesagt erzeugt T_i eine Drehung um die π_i -Achse und T_i^5 eine Drehung in der $\sigma\pi_i$ -Ebene:

$$T_i \begin{pmatrix} \sigma \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\vec{e}_i \times \vec{\pi} \end{pmatrix}, \quad T_i^5 \begin{pmatrix} \sigma \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\vec{e}_i \cdot \vec{\pi} \\ -i\vec{e}_i \sigma \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Hierbei bezeichnet \vec{e}_i den Einheitsvektor in π_i -Richtung. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass \vec{T} und \vec{T}^5 die Kommutatorrelationen

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k, \quad [T_i, T_j^5] = i\varepsilon_{ijk} T_k^5, \quad [T_i^5, T_j^5] = i\varepsilon_{ijk} T_k \quad (5.5)$$

und die Normierungsbedingungen

$$\text{tr } T_i T_j = 2\delta_{ij}, \quad \text{tr } T_i T_j^5 = 0, \quad \text{tr } T_i^5 T_j^5 = 2\delta_{ij} \quad (5.6)$$

erfüllen.

Wir wollen nun zeigen, dass die Invarianz der Lagrangedichte unter den von \vec{T} und \vec{T}^5 erzeugten $O(4)$ -Transformationen (5.3) genau der chiralen Symmetrie entspricht, die eine Invarianz unter $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen bezeichnet. Um zu sehen, dass die $O(4)$ -Gruppe als Produkt einer $SU(2)_L$ - und einer $SU(2)_R$ -Gruppe geschrieben werden kann, bilden wir die Linearkombinationen

$$T_i^L = \frac{1}{2}(T_i - T_i^5), \quad T_i^R = \frac{1}{2}(T_i + T_i^5). \quad (5.7)$$

Diese haben nun die gewünschten Kommutatorrelationen:

$$[T_i^L, T_j^L] = i\varepsilon_{ijk} T_k^L, \quad [T_i^L, T_j^R] = 0, \quad [T_i^R, T_j^R] = i\varepsilon_{ijk} T_k^R. \quad (5.8)$$

Die Lagrangedichte (5.2) ist also chiral symmetrisch. In der Natur ist die chirale Symmetrie jedoch nicht exakt erfüllt, sondern explizit gebrochen. Deshalb führen wir noch den explizit symmetriebrechenden Term

$$\mathcal{L}_{sb} = c\sigma \quad (5.9)$$

in die Lagrangedichte ein.

Wie bereits erwähnt wurde, betrachten wir die Lagrangedichte (5.2) für den Fall $\mu^2 < 0$. In diesem Fall hat nämlich das „Potential“

$$V(\Phi) = \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi + \frac{\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 \quad (5.10)$$

sein Minimum bei $|\Phi| = |\Phi_0| \neq 0$. Folglich hat das Feld Φ nun im Grundzustand einen nichtverschwindenden Erwartungswert Φ_0 , durch den eine Richtung ausgezeichnet wird. Dies bezeichnet man als spontane Brechung der chiralen Symmetrie. Wir legen unser Koordinatensystem so, dass Φ_0 in Richtung des σ -Feldes zeigt. Nimmt man noch die explizite Symmetriebrechung, Gl. (5.9), hinzu, so erhält man statt Gl. (5.10) das Potential

$$V(\Phi) = \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi + \frac{\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 - c\sigma, \quad (5.11)$$

dessen Minimum für $c > 0$ stets in σ -Richtung liegt. Das Minimum von V , und damit auch der Erwartungswert σ_0 des σ -Feldes, wird durch die Gleichung

$$\lambda^2 \sigma_0^3 + \mu^2 \sigma_0 - c = 0 \quad (5.12)$$

beschrieben.

Im weiteren Verlauf ist es nützlich, statt mit dem ursprünglichen σ -Feld mit einem neuen σ -Feld zu arbeiten, dessen Erwartungswert verschwindet:

$$\sigma_{neu} = \sigma_{alt} - \sigma_0, \quad \Phi_{neu} = \Phi_{alt} - \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \Phi_{alt} - \Phi_0, \quad (5.13)$$

Schreibt man nun die Lagrangedichte mit den neuen statt mit den alten Feldern, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{sb} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\mu^2}{2} (\Phi + \Phi_0) \cdot (\Phi + \Phi_0) - \frac{\lambda^2}{4} ((\Phi + \Phi_0) \cdot (\Phi + \Phi_0))^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{\mu^2 + 3\lambda^2 \sigma_0^2}{2} \sigma^2 - \frac{\mu^2 + \lambda^2 \sigma_0^2}{2} \vec{\pi}^2 \\ &\quad - \lambda^2 \sigma_0 \sigma (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - V(\Phi_0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im zweiten Schritt wurde ausgenutzt, dass die in σ linearen Terme wegen Gl. (5.12) verschwinden. Wie man sieht, hat die Symmetriebrechung zwei wichtige Konsequenzen: Erstens sind Pion und σ -Meson nicht mehr entartet, sondern es gilt

$$m_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda^2 \sigma_0^2 \quad m_\pi^2 = \mu^2 + \lambda^2 \sigma_0^2, \quad (5.15)$$

und zweitens treten neue $\sigma\sigma\sigma$ - und $\sigma\pi\pi$ -Vertizes mit der Kopplungskonstante $\lambda^2 \sigma_0$ auf. Mit Hilfe von Gl. (5.12) kann man die Pionmasse folgendermaßen ausdrücken:

$$m_\pi^2 = \frac{c}{\sigma_0}. \quad (5.16)$$

Daran sieht man sofort, dass im Falle einer spontan gebrochenen exakten chiralen Symmetrie, d.h. $\sigma_0 \neq 0$ und $c = 0$, das Pion masselos wäre. Dies ist ein Spezialfall des Goldstone-Theorems, das besagt, dass es zu jeder spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrie ein masseloses Boson geben muss [65].

5.2 Das geeichte lineare σ -Modell

Nachdem wir kurz die wichtigsten Eigenschaften des linearen σ -Modells zusammengefasst haben, wollen wir nun beschreiben, wie dieses Modell von Lee und Nieh [46] um die Vektormesonen erweitert wurde. Dazu erinnern wir an Kap. 1.1, in dem wir, wie von Sakurai [14] vorgeschlagen, die $\pi\rho$ -Wechselwirkung dadurch konstruiert haben, dass wir das ρ -Meson als Eichboson einer lokalen Isospinsymmetrie betrachtet haben. Allerdings haben wir uns im ersten Teil dieser Arbeit auf das neutrale ρ -Meson beschränkt, d.h. unsere „Eichgruppe“ bestand nur aus den von der dritten Komponente des Isospinoperators erzeugten Isospinrotationen und war deshalb abelsch. Nur aus diesem Grund konnten wir z.B. den ρ -Feldstärketensor in der einfachen Form $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu$ schreiben.

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die Lagrangedichte des linearen σ -Modells, Gl. (5.2), invariant unter den von \vec{T} und \vec{T}^5 erzeugten globalen $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen U , die nach Gl. (5.3) mit sechs Parametern $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ geschrieben werden können. Lee und Nieh forderten nun eine Invarianz auch unter lokalen „Eichtransformationen“ $U(x)$ mit ortsabhängigen Parametern $\vec{\alpha}(x)$ und $\vec{\beta}(x)$. Nach Yang und Mills [66] muss man dazu Eichfelder einführen, die in unserem Fall genau mit den Vektorfeldern $\vec{\rho}^\mu$ und \vec{a}_1^μ identifiziert werden können¹. Da diese Felder fast immer im Zusammenhang mit den Matrizen \vec{T} und \vec{T}^5 auftreten werden, ist es vorteilhaft, folgendes matrixwertiges Vektorfeld Y^μ einzuführen:

$$Y^\mu = \vec{\rho}^\mu \cdot \vec{T} + \vec{a}_1^\mu \cdot \vec{T}^5. \quad (5.17)$$

Die ursprünglichen Felder $\vec{\rho}^\mu$ und \vec{a}_1^μ kann man aus diesem mit Hilfe von Gl. (5.6) zurückgewinnen: $\vec{\rho}^\mu = \text{tr} \vec{T} Y^\mu / 2$ und $\vec{a}_1^\mu = \text{tr} \vec{T}^5 Y^\mu / 2$. Die Lagrangedichte (5.2) wird nun unter den Eichtransformationen $U(x)$ invariant gemacht, indem man die Ableitungen $\partial_\mu \Phi$ durch „kovariante Ableitungen“ $\mathcal{D}_\mu \Phi$ ersetzt:

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = (\partial_\mu - ig Y_\mu) \Phi = \begin{pmatrix} \partial_\mu \sigma + g \vec{a}_{1\mu} \cdot \vec{\pi} \\ \partial_\mu \vec{\pi} + g \vec{\rho}_\mu \times \vec{\pi} - g \vec{a}_{1\mu} \sigma \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Wenn man nämlich fordert, dass sich die Vektorfelder unter Eichtransformationen wie

$$Y_\mu \rightarrow U Y_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger. \quad (5.19)$$

verhalten, dann verhält sich $\mathcal{D}_\mu \Phi$ genauso wie das Feld Φ , und die Lagrangedichte ist invariant.

Der Feldstärketensor wird in der für nichtabelsche Eichtheorien üblichen Weise

$$Y_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu + ig [Y_\mu, Y_\nu] =: \vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{T} + \vec{a}_{1\mu\nu} \cdot \vec{T}^5 \quad (5.20)$$

definiert, wobei wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu + g \vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + g \vec{a}_{1\mu} \times \vec{a}_{1\nu}, \\ \vec{a}_{1\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu \vec{a}_{1\mu} + g \vec{a}_{1\mu} \times \vec{\rho}_\nu + g \vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} \end{aligned} \quad (5.21)$$

¹Anmerkung zur Notation: Der Vektorpfeil bezieht sich auf den Isospinraum, während der Index μ die Raum-Zeit-Komponenten bezeichnet. Das im ersten Teil dieser Arbeit mit ρ^μ bezeichnete neutrale ρ -Feld heißt jetzt ρ_3^μ .

eingeführt haben. Der Feldstärketensor verhält sich unter Eichtransformationen $U(x)$ wie $Y_{\mu\nu} \rightarrow UY_{\mu\nu}U^\dagger$. Folglich ist der Yang-Mills-Term

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{8} \text{tr} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{\rho}^{\mu\nu} + \vec{a}_{1\mu\nu} \cdot \vec{a}_1^{\mu\nu}), \quad (5.22)$$

der neben dem kinetischen Term für die Vektorfelder auch noch Selbstwechselwirkungen der Vektorfelder enthält, ebenfalls eichinvariant.

Zum Schluss führen wir noch einen Massenterm für die Vektorfelder ein:

$$\mathcal{L}_{m_0} = \frac{m_0^2}{4} \text{tr} Y_\mu Y^\mu = \frac{m_0^2}{2} (\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \vec{a}_{1\mu} \cdot \vec{a}_1^\mu) \quad (5.23)$$

Dieser Term ist zwar unter globalen Transformationen U invariant, bricht jedoch, wie bereits in Kap. 1.1 erwähnt, die Eichinvarianz. Mit Hilfe der sogenannten Gell-Mann-Lévy-Gleichungen [45] kann man übrigens zeigen, dass genau diese Brechung der Eichinvarianz auf die Strom-Feld-Identität des Vektordominanzmodells führt, die jetzt nicht nur den isovektoriellen Vektorstrom mit dem ρ -Feld, sondern zusätzlich den isovektoriellen Axialvektorstrom mit dem a_1 -Feld in Verbindung bringt [67].

Die vollständige Lagrangedichte des geeichten linearen σ -Modells ergibt sich nun als Summe der bisher besprochenen Terme:

$$\mathcal{L}_{geeicht} = (\mathcal{L}_\Phi)_{\partial_\mu \Phi \rightarrow \mathcal{D}_\mu \Phi} + \mathcal{L}_{sb} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{m_0} \quad (5.24)$$

Wir wollen kurz zusammenfassen, welche Wechselwirkungen sich hinter den vielen Abkürzungen verbergen: \mathcal{L}_Φ enthält, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, eine $\sigma\sigma\sigma\sigma$ -, eine $\sigma\sigma\pi\pi$ - und eine $\pi\pi\pi\pi$ -Kopplung. Durch die kovarianten Ableitungen $\mathcal{D}_\mu \Phi$ entstehen zum einen die bereits aus Kap. 1.1 bekannten $\rho\pi\pi$ - und $\rho\rho\pi\pi$ -, zum anderen aber auch noch $a_1\sigma\pi$ -, $\rho a_1\sigma\pi$ -, $a_1 a_1\sigma\sigma$ - und $a_1 a_1\pi\pi$ -Vertizes. Als besonders problematisch werden sich die $\rho\rho\rho$ - und $\rho a_1 a_1$ -Wechselwirkungen erweisen, die in \mathcal{L}_Y enthalten sind. Außerdem enthält \mathcal{L}_Y noch $\rho\rho\rho\rho$ -, $\rho\rho a_1 a_1$ - und $a_1 a_1 a_1 a_1$ -Kopplungen. Wie wir schon im linearen σ -Modell gesehen haben, wird die Anzahl der Vertizes durch die spontane Symmetriebrechung noch weiter zunehmen.

Wie im vorigen Abschnitt betrachten wir nun wieder den Fall $\mu^2 < 0$, in dem die chirale Symmetrie spontan gebrochen ist und das σ -Feld einen nichtverschwindenden Erwartungswert σ_0 annimmt. Deshalb ersetzen wir wieder σ_{alt} durch σ_{neu} , so wie es in Gl. (5.13) angegeben ist. Dadurch wird jetzt nicht nur die Pion- und die σ -Masse, sondern auch die a_1 -Masse geändert:

$$m_{\pi_0}^2 = \mu^2 + \lambda^2 \sigma_0^2, \quad m_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda^2 \sigma_0^2, \quad m_\rho^2 = m_0^2, \quad m_{a_1}^2 = m_0^2 + g^2 \sigma_0^2. \quad (5.25)$$

Die Bezeichnung m_{π_0} soll andeuten, dass es sich hierbei noch nicht um die endgültige Pionmasse handelt. Wie bereits erwähnt, erhalten wir außerdem einige neue Vertizes, darunter die bereits aus dem vorigen Abschnitt bekannten $\sigma\sigma\sigma$ - und $\sigma\pi\pi$ -Vertizes. Weitere neue Kopplungen sind πa_1 , $\rho a_1\pi$ und $a_1 a_1\sigma$.

Die πa_1 -Kopplung

$$\mathcal{L}_{\pi a_1} = -ig Y_\mu \Phi_0 \cdot \partial^\mu \Phi = -g\sigma_0 \vec{a}_{1\mu} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \quad (5.26)$$

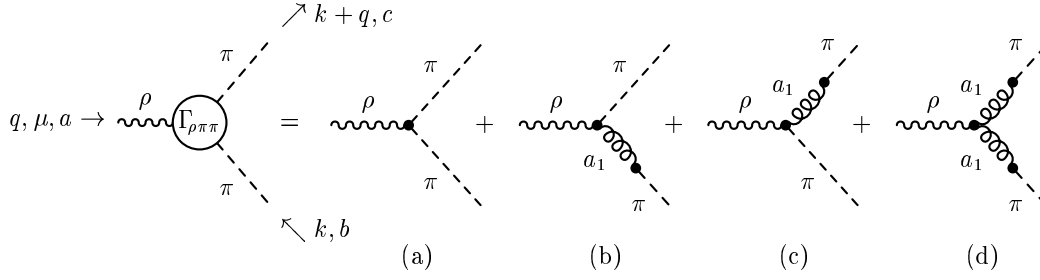


Abbildung 5.1: $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion im geeichten linearen σ -Modell nach der Symmetriebrechung.

bewirkt, dass sich ein Pion in ein (vierdimensional) longitudinal polarisiertes „ a_1 -Meson“ umwandeln kann, was als „ πa_1 -Mixing“ bezeichnet wird². Diese Kopplung wird gewöhnlich durch eine Umdefinition des a_1 -Feldes, $\vec{a}_{1\mu\text{neu}} = \vec{a}_{1\mu\text{alt}} + g\sigma_0/m_{a_1}^2 \partial_\mu \vec{\pi}$, gefolgt von einer Wellenfunktionsrenormierung des Pions, $\vec{\pi}_{\text{neu}} = \vec{\pi}_{\text{alt}}/\sqrt{Z}$ mit $Z = m_{a_1}^2/m_\rho^2$, eliminiert. Dadurch erhöht sich die physikalische Pionmasse um einen Faktor \sqrt{Z} ,

$$m_\pi = \frac{m_{a_1}}{m_\rho} m_{\pi 0}, \quad (5.27)$$

während sich die Pionzerfallskonstante, die im linearen σ -Modell durch $f_\pi = \sigma_0$ gegeben ist, um einen Faktor $1/\sqrt{Z}$ verringert,

$$f_\pi = \frac{m_\rho}{m_{a_1}} \sigma_0. \quad (5.28)$$

Zum Abschluss der Diskussion des geeichten linearen σ -Modells möchten wir noch kurz darauf eingehen, warum es in der gerade beschriebenen Form keine realistische Beschreibung der Vektormesonen ρ und a_1 ermöglicht. Dazu betrachten wir die dominanten Zerfallsprozesse dieser Mesonen, nämlich $\rho \rightarrow \pi\pi$ und $a_1 \rightarrow \pi\rho$. Durch das πa_1 -Mixing gibt es zu beiden Zerfalls-Matrixelementen mehrere Beiträge, die in Abb. 5.1 und 5.2 dargestellt sind. Zur $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion tragen vier Diagramme bei, die folgenden Vertexfaktoren entsprechen:

$$(\Gamma_{\rho\pi\pi}^{(a)})^\mu_{abc} = -g \varepsilon_{abc} (2k^\mu + q^\mu), \quad (5.29)$$

$$(\Gamma_{\rho\pi\pi}^{(b+c)})^\mu_{abc} = \frac{g^3 \sigma_0^2}{m_{a_1}^2} \varepsilon_{abc} (2k^\mu + q^\mu), \quad (5.30)$$

$$(\Gamma_{\rho\pi\pi}^{(d)})^\mu_{abc} = \frac{g^3 \sigma_0^2}{m_{a_1}^4} \varepsilon_{abc} (q^2 k^\mu - k \cdot q q^\mu). \quad (5.31)$$

Die Kopplungskonstante g kann aus Gl. (5.25) und (5.28) und den empirischen Werten von f_π , m_ρ und m_{a_1} bestimmt werden. Mit $m_\rho = 770$ MeV, $m_{a_1} \approx \sqrt{2} m_\rho = 1090$ MeV und $f_\pi = 93$ MeV ergibt sich $g = 5.9$, d.h. genau der Wert, mit dem wir in Kap. 1.2 eine

²Die vierdimensional longitudinal polarisierte Komponente eines Vektorfeldes hat im Gegensatz zu den drei transversalen Komponenten Spin 0 [70]. In ein wirkliches a_1 -Meson (Spin 1) kann sich das Pion (Spin 0) natürlich nicht umwandeln.

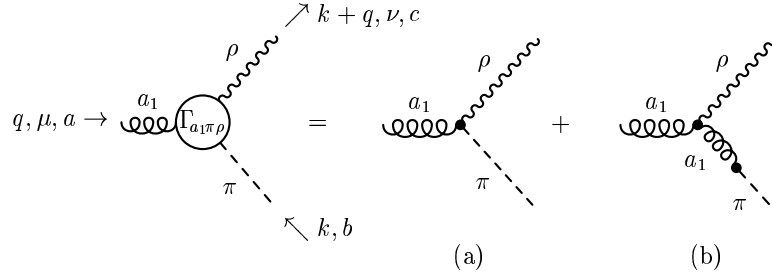


Abbildung 5.2: $a_1\pi\rho$ -Vertexfunktion im geeichten linearen σ -Modell nach der Symmetriebrechung.

hervorragende Beschreibung der Eigenschaften des ρ -Mesons im Vakuum erzielt haben. Allerdings bestand in Kap. 1.2 die $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion nur aus dem Diagramm (a). Die Diagramme (b) und (c) haben genau dieselbe Struktur wie Diagramm (a) und verkleinern die $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion um einen Faktor $1 - g^2\sigma_0^2/m_{a_1}^2 = m_\rho^2/m_{a_1}^2 = 1/Z$. Dieser Faktor kürzt sich genau gegen die Faktoren \sqrt{Z} weg, die man bei der Berechnung des Zerfalls $\rho \rightarrow \pi\pi$ den beiden externen Pionlinien zuweisen muss. Folglich ergeben die Diagramme (a) bis (c) im geeichten linearen σ -Modell dasselbe Ergebnis wie Diagramm (a) in dem Modell ohne a_1 -Mesonen, das wir im ersten Teil dieser Arbeit verwendet haben, d.h. mit den Diagrammen (a) bis (c) und $g = 5.9$ könnte das ρ -Meson im Vakuum gut beschrieben werden. Leider gibt aber außerdem noch den Beitrag von Diagramm (d), der eine starke q^2 -Abhängigkeit der Vertexfunktion erzeugt. Das führt nicht nur zu einer zu kleinen Breite für $\rho \rightarrow \pi\pi$ (jedenfalls mit $g = 5.9$, wie es sich aus den empirischen Massen der Teilchen ergibt) sondern auch zu einer falschen Form des elektromagnetischen Pion-Formfaktors und der $\pi\pi$ -Streuphasen als Funktion von q^2 , die, wie Abb. 1.2 beweist, mit dem einfachen Vertex $\propto (2k^\mu + q^\mu)$ ohne zusätzliche Impulsabhängigkeit sehr gut wiedergegeben werden. Die Ursache für den Beitrag (d) ist die durch die nichtabelschen Terme in den Feldstärketensoren erzeugte $\rho a_1 a_1$ -Wechselwirkung,

$$\mathcal{L}_{YY} = -\frac{ig}{2} \text{tr} \partial_\mu Y_\nu [Y^\mu, Y^\nu]. \quad (5.32)$$

Ein ähnliches Problem tritt bei der Beschreibung des Zerfalls $a_1 \rightarrow \pi\rho$ auf. Wie in Abb. 5.2 zu sehen ist, gibt es zwei Beiträge zur $a_1\pi\rho$ -Vertexfunktion, die folgenden Vertexfaktoren entsprechen:

$$(\Gamma_{a_1\pi\rho}^{(a)})^{\mu\nu} = ig^2\sigma_0 \varepsilon_{abc} g^{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

$$(\Gamma_{a_1\pi\rho}^{(b)})^{\mu\nu} = -i\frac{g^2\sigma_0}{m_{a_1}^2} \varepsilon_{abc} (k^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu - (k^2 + 2k \cdot q) g^{\mu\nu}). \quad (5.34)$$

Der zweite Beitrag, dessen Ursache wieder die $\rho a_1 a_1$ -Wechselwirkung aus den nichtabelschen Feldstärketensoren ist, sorgt auch hier für eine zusätzliche Impulsabhängigkeit der Vertexfunktion. Sie führt dazu, dass die Amplitude für den Zerfall $a_1 \rightarrow \pi\rho$ für Pionen und ρ -Mesonen auf den jeweiligen Massenschalen eine Nullstelle bei einer invarianten Masse des a_1 -Mesons von $\sqrt{q^2} = \sqrt{m_{a_1}^2 + m_\rho^2} \approx 1340$ MeV hat. Dieser Wert liegt noch

um einiges unter der τ -Masse von 1777 MeV, bis zu der das Massenspektrum des Zerfalls $a_1 \rightarrow \pi\rho$ experimentell gut bekannt ist. Das experimentelle Spektrum weist jedoch nirgends ein Minimum auf [41, 42].

5.3 Beschränkung auf globale Symmetrie

Die am Ende des vorigen Abschnitts erwähnten Probleme zwingen uns dazu, die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{geeicht}$, Gl. (5.24), abzuwandeln. Wie wir gesehen haben, werden die Probleme in erster Linie von den nichtabelschen Termen in den Feldstärketensoren verursacht, die wiederum eine notwendige Folge der Forderung sind, dass die Lagrangedichte bis auf den Massenterm \mathcal{L}_{m_0} auch unter lokalen $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen invariant sein soll. Diese Forderung ist aber außer durch den Wunsch nach einer ästhetischen Theorie vor allem durch den Erfolg des Vektordominanzmodells begründet, da sich, wenn die lokale Symmetrie nur durch \mathcal{L}_{m_0} gebrochen wird, genau die Strom-Feld-Identität ergibt [67]. Ein weiteres in der Literatur angeführtes Argument ist die durch diese Forderung eingeschränkte Zahl unabhängiger Parameter [68]. Da aber die chirale Symmetrie in der QCD, die ja als die zugrundeliegende fundamentale Theorie angesehen wird, nur eine globale Symmetrie ist, kann man auf diese zusätzliche Forderung auch verzichten. Im übrigen wurde dies in der Literatur bereits teilweise getan [69].

Das Eichprinzip, das auf die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{geeicht}$ führt, hat zwei Konsequenzen: Erstens erscheint dieselbe Kopplungskonstante g in verschiedenen Wechselwirkungstermen, und zweitens sind nicht alle Wechselwirkungsterme, die mit der globalen Symmetrie verträglich sind, zugelassen. Z.B. lautet die allgemeinste chiral symmetrische Kopplung zweier Φ -Felder mit zwei Y -Feldern ohne Ableitungskopplungen folgendermaßen:

$$\mathcal{L}_{\Phi\Phi YY} = -\frac{h_1}{2} Y_\mu \Phi \cdot Y^\mu \Phi + \frac{h_2}{4} \Phi \cdot \Phi \operatorname{tr} Y_\mu Y^\mu. \quad (5.35)$$

Das Eichprinzip verlangt $h_1 = g^2$ und $h_2 = 0$. Wir werden jedoch, wie z.B. auch Ko und Rudaz [69], g , h_1 und h_2 als unabhängige Parameter behandeln³. Die schwerwiegendsten Probleme des geeichten linearen σ -Modells hängen aber mit den Vektormeson-Selbstwechselwirkungen zusammen. Wenn wir auf das Eichprinzip verzichten, könnten diese z.B. folgende Form annehmen:

$$\mathcal{L}_{YYY} + \mathcal{L}_{YYYY} = -\frac{ig_1}{2} \operatorname{tr} \partial_\mu Y_\nu [Y^\mu, Y^\nu] + \frac{g_2^2}{4} \operatorname{tr} Y_\mu Y_\nu [Y^\mu, Y^\nu] + \frac{g_3^2}{16} (\operatorname{tr} Y_\mu Y^\mu)^2. \quad (5.36)$$

Im geeichten linearen σ -Modell gilt $g_1 = g_2 = g$ und $g_3 = 0$, aber nun können wir g_1 , g_2 und g_3 vollkommen beliebig wählen, also z.B. auf null setzen. Die meisten der in den folgenden Kapiteln beschriebenen Rechnungen haben wir für beliebige Werte von g_1 , g_2 und g_3 durchgeführt. Dabei hat sich gezeigt, dass die beste simultane Beschreibung der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren im Vakuum mit $g_1 = 0$ erzielt werden kann, während die Ergebnisse von g_2 und g_3 nicht abhängen. Der Einfachheit halber wählen wir deshalb für den Rest der Arbeit $g_1 = g_2 = g_3 = 0$.

³Die Parameter h_1 und h_2 hängen über $h_1 = g^2(1 + 2c)$ and $h_2 = g^2(b - c)$ mit den in Ref. [69] verwendeten Parametern b und c zusammen.

Eine weitere Abwandlung der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{geeicht}$ betrifft den kinetischen Term der Vektorfelder. Der in $\mathcal{L}_{geeicht}$ enthaltene freie Vektormeson-Anteil, die sogenannte Proca-Lagrangedichte, führt nämlich auf Vektormeson-Propagatoren, die für große Impulse nicht gegen null gehen und deshalb bei der Berechnung von Loop-Diagrammen zu unangenehmen Divergenzen führen. Da wir im nächsten Kapitel aber Loop-Diagramme mit Vektormesonen berechnen wollen, ist es günstig, anstelle der Proca- die Stückelberg-Lagrangedichte [70]

$$\mathcal{L}_{\text{kin}Y} = -\frac{1}{8} \text{tr} (\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu)(\partial^\mu Y^\nu - \partial^\nu Y^\mu) - \frac{\xi}{4} \text{tr} (\partial_\mu Y^\mu)^2 \quad (5.37)$$

zu verwenden. Den ursprünglichen kinetischen Term erhält man hieraus im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$. Der freie ρ -Propagator hat nun folgende Gestalt:

$$G_\rho^{\mu\nu}(k) = \frac{\frac{k^\mu k^\nu}{m_\rho^2} - g^{\mu\nu}}{k^2 - m_\rho^2} - \frac{\frac{k^\mu k^\nu}{m_\rho^2}}{k^2 - m_\rho^2/\xi}. \quad (5.38)$$

Dieser Propagator hat den Vorteil, dass er für große Impulse wie $1/k^2$ abfällt. Diesen Vorteil haben wir uns mit der Einführung unphysikalischer skalarer Teilchen mit der Masse $m_\rho/\sqrt{\xi}$, nämlich longitudinal polarisierter „ ρ -Mesonen“ (siehe Fußnote auf S. 57), erkauft. Wir betrachten dies als eine Form der Regularisierung und verlangen deshalb, dass der Parameter ξ so klein gewählt werden muss, dass die Schwellen für die Produktion der unphysikalischen Teilchen oberhalb des betrachteten Energiebereichs liegen⁴.

Die übrigen Teile übernehmen wir von der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{geeicht}$ des geeichten linearen σ -Modells. Damit erhalten wir für unser Modell folgende Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi - ig Y_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{h_1}{2} Y_\mu \Phi \cdot Y^\mu \Phi + \frac{h_2}{4} \Phi \cdot \Phi \text{tr} Y_\mu Y^\mu \\ & - \frac{\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 + c\sigma - \frac{1}{8} \text{tr} (\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu)(\partial^\mu Y^\nu - \partial^\nu Y^\mu) - \frac{\xi}{4} \text{tr} (\partial_\mu Y^\mu)^2 \\ & + \frac{m_0^2}{4} \text{tr} Y_\mu Y^\mu. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Wie im linearen σ -Modell und im geeichten linearen σ -Modell verschieben wir wieder das alte σ -Feld um seinen Vakuumerwartungswert, siehe Gl. (5.13) und (5.12). Wegen der neuen Parameter h_1 und h_2 ergeben sich jetzt aber etwas andere Massen für die ρ - und a_1 -Mesonen. Anstelle von Gl. (5.25) gilt nun

$$m_{\pi^0}^2 = \mu^2 + \lambda^2 \sigma_0^2, \quad m_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda^2 \sigma_0^2, \quad m_\rho^2 = m_0^2 + h_2 \sigma_0^2, \quad m_{a_1}^2 = m_0^2 + (h_1 + h_2) \sigma_0^2. \quad (5.40)$$

Interessanterweise ist es damit möglich, die Parameter so zu wählen ($m_0 = 0$, $h_2 = m_\rho^2/\sigma_0^2$), dass die Massen der Vektormesonen ausschließlich durch die spontane Symmetriebrechung

⁴In einer Eichtheorie hat ξ die Bedeutung eines Eichfixierungsparameters. Dort sind die Ergebnisse unabhängig von ξ , da sich die Beiträge der unphysikalischen skalaren Teilchen genau mit den Beiträgen der Geister wegheben.

(a) $k \rightarrow \text{---}\pi\text{---} = \text{---}\pi\text{---} + \text{---}\pi\text{---}\text{---}a_1\text{---}\pi\text{---}$

(b) $k, \mu \rightarrow \text{---}a_1\text{---}\nu = \text{---}a_1\text{---} + \text{---}a_1\text{---}\pi\text{---}a_1\text{---}$

(c) $k \rightarrow \text{---}\pi\text{---}\text{---}a_1\text{---}\mu$

Abbildung 5.3: Propagatoren mit πa_1 -Mixing: (a) Pionpropagator $iG_\pi(k)$, (b) a_1 -Propagator $iG_{a_1}^{\mu\nu}(k)$ und (c) gemischter Propagator $iG_{\pi a_1}^\mu(k)$.

erzeugt werden. In diesem Fall würde man naiv erwarten, dass sowohl die ρ - als auch die a_1 -Masse in einem dichten oder heißen Medium, in dem die chirale Symmetrie teilweise oder vollständig wiederhergestellt ist, abnehmen („Brown-Rho-Scaling“ [15]). Wir werden jedoch sehen, dass dies in einem heißen Medium ohne Baryonen nicht geschieht.

Die in Gl. (5.40) angegebene Pionmasse enthält noch nicht die Effekte des πa_1 -Wechselwirkungsterms $\mathcal{L}_{\pi a_1}$, Gl. (5.26). Im geeichten linearen σ -Modell konnte dieser Term durch eine Umdefinition des a_1 -Feldes eliminiert werden. Wegen des Stückelberg-Terms ($\propto \xi$) ist dies jetzt nicht mehr möglich. Stattdessen summieren wir die Dyson-Gleichung mit der von $\mathcal{L}_{\pi a_1}$ erzeugten Pion-Selbstenergie auf, so wie es in Abb. 5.3 (a) dargestellt ist. Der Pionpropagator kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$G_\pi(k) = \frac{1}{k^2 - m_{\pi 0}^2 + \frac{g^2 \sigma_0^2 k^2}{\xi k^2 - m_{a_1}^2}} = \sum_{i=1}^2 \frac{Z_{\pi i}}{k^2 - m_{\pi i}^2}. \quad (5.41)$$

Der erste Pol bei $m_{\pi 1}$ entspricht dem physikalischen Pion, während der zweite Pol bei $m_{\pi 2}$ zum unphysikalischen, longitudinal polarisierten a_1 -Meson gehört. Die Massen $m_{\pi 0}$, $m_{\pi 1}$ und $m_{\pi 2}$ sind über folgende Relationen mit der physikalischen Pionmasse verknüpft:

$$m_{\pi 1}^2 = m_\pi^2, \quad m_{\pi 2}^2 = \frac{m_{a_1}^2 (m_{a_1}^2 - g^2 \sigma_0^2 - \xi m_\pi^2)}{\xi (m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2)}, \quad m_{\pi 0}^2 = \frac{m_\pi^2 (m_{a_1}^2 - g^2 \sigma_0^2 - \xi m_\pi^2)}{m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2}. \quad (5.42)$$

Für die Residuen der Pole, $Z_{\pi 1}$ und $Z_{\pi 2}$, gelten folgende Beziehungen:

$$Z_{\pi 1} = \frac{m_{a_1}^2 - \xi m_{\pi 1}^2}{\xi (m_{\pi 2}^2 - m_{\pi 1}^2)}, \quad Z_{\pi 2} = 1 - Z_{\pi 1}. \quad (5.43)$$

Der Faktor $Z_{\pi 1}$ hat die Bedeutung des im vorigen Abschnitt eingeführten Faktor Z . Wie nicht anders zu erwarten, erhält man für $\xi \rightarrow 0$, $h_1 = g^2$ und $h_2 = 0$ wieder genau die Beziehungen aus dem geeichten linearen σ -Modell.

In Abb. 5.3 (b) und (c) ist gezeigt, wie man den aufsummierten Pionpropagator zur Definition eines aufsummierten a_1 -Propagators G_{a_1} und eines gemischten Propagators $G_{\pi a_1}$ verwenden kann. Dabei ergibt sich

$$G_{a_1}^{\mu\nu}(k) = \frac{\frac{k^\mu k^\nu}{m_{a_1}^2} - g^{\mu\nu}}{k^2 - m_{a_1}^2} + k^\mu k^\nu \sum_{i=1}^2 \frac{Z_{a_1 i}}{k^2 - m_{\pi i}^2}, \quad (5.44)$$

$$G_{\pi a_1}^\mu(k) = i k^\mu \sum_{i=1}^2 \frac{Z_{\pi a_1 i}}{k^2 - m_{\pi i}^2}, \quad (5.45)$$

mit folgenden Z -Faktoren:

$$Z_{a_1 1} = \frac{m_{\pi 1}^2 - m_{\pi 0}^2}{\xi m_{\pi 1}^2 (m_{\pi 2}^2 - m_{\pi 1}^2)}, \quad Z_{a_1 2} = -\frac{1}{m_{a_1}^2} - Z_{a_1 1}, \quad (5.46)$$

$$Z_{\pi a_1 1} = -\frac{g\sigma_0}{\xi(m_{\pi 2}^2 - m_{\pi 1}^2)}, \quad Z_{\pi a_1 2} = -Z_{\pi a_1 1}. \quad (5.47)$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir wieder die $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion, zu der jetzt nur noch die Diagramme (a) bis (c) aus Abb. 5.1 beitragen. Für den Zerfallsprozess $\rho \rightarrow \pi\pi$ ist nur der Spezialfall relevant, in dem sich die beiden Pionen auf ihren Massenschalen befinden, d.h. $k^2 = (k+q)^2 = m_\pi^2$. In diesem Fall lautet der Vertexfaktor

$$(\Gamma_{\rho\pi\pi})_{abc}^\mu = -\left(g - \frac{h_1\sigma_0^2}{m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2}\right) \varepsilon_{abc} (2k^\mu + q^\mu). \quad (5.48)$$

Zusammen mit den Faktoren $\sqrt{Z_{\pi 1}}$ für die auslaufenden Pionen ergibt sich daraus eine effektive $\rho\pi\pi$ -Kopplungskonstante:

$$g_{\rho\pi\pi}^{\text{eff}} = \left(g - \frac{h_1\sigma_0^2}{m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2}\right) Z_{\pi 1} = g \frac{(m_\rho^2 - \xi m_\pi^2)(m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2)}{(m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2)^2 - g^2\sigma_0^2 m_{a_1}^2}. \quad (5.49)$$

Da das Diagramm (d) aus Abb. 5.1 nicht mehr existiert, hat der $\rho\pi\pi$ -Vertex nun die gewünschte minimale Impulsabhängigkeit.

5.4 Ankopplung des Photons und der W -Bosonen

Wie bereits erwähnt wurde, besitzt unser Modell keine lokale Symmetrie und erfüllt deshalb nicht die Strom-Feld-Identität, die z.B. die elektromagnetische Strom-Strom-Korrelationsfunktion direkt mit dem ρ -Propagator in Beziehung setzt, und von der wir im ersten Teil dieser Arbeit mehrfach Gebrauch gemacht haben. Bevor wir unser Modell etwa zur Beschreibung des elektromagnetischen Formfaktors des Pions oder zur Berechnung von Dileptonenspektren heranziehen können, muss also zuerst geklärt werden, wie das elektromagnetische Feld an die Teilchen unseres Modells zu koppeln ist. Wenn wir außerdem den Zerfall des τ -Leptons beschreiben wollen, müssen wir darüber hinaus auch die schwache Wechselwirkung, und zwar die Ankopplung der W -Bosonen, berücksichtigen. Der τ -Zerfall ist deshalb von herausragender Bedeutung, weil die Messung der Massenspektren der hadronischen Zerfallsprodukte des τ -Leptons eine sehr präzise Bestimmung der Spektralfunktionen der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren im Vakuum erlaubt [41, 42].

Wir betrachten zunächst, wie das elektromagnetische Feld und die W -Bosonen in der QCD an die Quarkfelder gekoppelt werden. Da wir uns bei den Mesonen auf die $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie beschränken, berücksichtigen wir nur die leichten u - und d -Quarks: $\psi = (u, d)$. Die Ableitung $\partial_\mu\psi$ in der QCD-Lagrangedichte muss nun einfach durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu - ie A_\mu \frac{\tau_3}{2} - \frac{ie \cos\theta_C}{\sin\theta_W} \frac{1-\gamma_5}{2} \left(W_{1\mu} \frac{\tau_1}{2} + W_{2\mu} \frac{\tau_2}{2}\right) + \dots\right)\psi \quad (5.50)$$

ersetzt werden [48]. Dabei stehen die Punkte für den isoskalaren Anteil der elektromagnetischen Wechselwirkung und die Kopplung des Z -Bosons, die beide im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Rolle spielen werden. θ_C bezeichnet den Cabibbo-Winkel, θ_W den Weinberg-Winkel.

Diese Vorschrift lässt sich direkt auf den $(\sigma, \vec{\pi})$ -Mesonsektor übertragen. Der auf die Quarks wirkende Isospinoperator $\vec{\tau}/2$ entspricht im Mesonraum gerade dem Operator \vec{T} , und der Operator $\gamma_5 \vec{\tau}/2$ kann mit dem Operator \vec{T}^5 identifiziert werden. Wir müssen also in Gl. (5.39) alle Ableitungen $\partial_\mu \Phi$ durch

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \left(\partial_\mu - ie A_\mu T_3 - \frac{ie \cos \theta_C}{\sin \theta_W} (W_{1\mu} T_1^L + W_{2\mu} T_2^L) \right) \Phi \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu \sigma \\ \partial_\mu \vec{\pi} \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{A}_\mu \times \vec{\pi} \end{pmatrix} + \frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\vec{W}_\mu \cdot \vec{\pi} \\ \vec{W}_\mu \times \vec{\pi} + \vec{W}_\mu \sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.51)$$

ersetzen. In der zweiten Zeile haben wir die Abkürzungen

$$\vec{A}_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad \vec{W}_\mu = \begin{pmatrix} W_{1\mu} \\ W_{2\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

verwendet.

In analoger Weise wollen wir nun auch mit den Vektormesonen verfahren. Dazu benötigen wir die den Operatoren \vec{T} und \vec{T}^5 entsprechenden Operatoren im Vektormesonraum, \vec{T}_Y und \vec{T}_Y^5 . Die einfachste Möglichkeit, diese Operatoren zu finden, besteht darin, das Transformationsverhalten der Vektorfelder unter infinitesimalen, globalen Transformationen zu betrachten. Für infinitesimale, ortsunabhängige $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ reduziert sich Gl. (5.19) in Verbindung mit Gl. (5.3) auf

$$Y_\mu \rightarrow Y_\mu + i(\vec{\alpha} \cdot [\vec{T}, Y_\mu] + \vec{\beta} \cdot [\vec{T}^5, Y_\mu]) =: Y_\mu + i(\vec{\alpha} \cdot \vec{T}_Y Y_\mu + \vec{\beta} \cdot \vec{T}_Y^5 Y_\mu). \quad (5.53)$$

Die kovariante Ableitung der Vektorfelder lautet also

$$\begin{aligned} D_\mu Y_\nu &= \partial_\mu Y_\nu - ie A_\mu [T_3, Y_\nu] - \frac{ie \cos \theta_C}{\sin \theta_W} (W_{1\mu} [T_1^L, Y_\nu] + W_{2\mu} [T_2^L, Y_\nu]) \\ &=: D_\mu \vec{\rho}_\nu \cdot \vec{T} + D_\mu \vec{a}_{1\nu} \cdot \vec{T}^5, \end{aligned} \quad (5.54)$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} D_\mu \vec{\rho}_\nu &= \partial_\mu \vec{\rho}_\nu + e \vec{A}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + \frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \vec{W}_\mu \times (\vec{\rho}_\nu - \vec{a}_{1\nu}), \\ D_\mu \vec{a}_{1\nu} &= \partial_\mu \vec{a}_{1\nu} + e \vec{A}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} + \frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \vec{W}_\mu \times (\vec{a}_{1\nu} - \vec{\rho}_\nu) \end{aligned} \quad (5.55)$$

eingeführt haben.

Es sollte noch erwähnt werden, dass die Ableitungen in Gl. (5.24) durch die kovarianten Ableitungen ersetzt werden müssen, bevor das σ -Feld nach Gl. (5.13) umdefiniert wird. Bei der Umdefinition des σ -Feldes entstehen dann πW - und $a_1 W$ -Vertizes. Diese führen

dazu, dass es zwei Beiträge zum Pionzerfall gibt, nämlich erstens über den πW -Vertex und zweitens über das πa_1 -Mixing und den $a_1 W$ -Vertex. Die resultierende Formel für die Pionzerfallskonstante lautet

$$f_\pi = \sqrt{Z_{\pi 1}} \left(\sigma_0 - \frac{g^2 \sigma_0^3}{m_{a_1}^2 - \xi m_{\pi 1}^2} \right) = \frac{\sigma_0 (m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2 - g^2 \sigma_0^2)}{\sqrt{(m_{a_1}^2 - \xi m_\pi^2)^2 - g^2 \sigma_0^2 m_{a_1}^2}}. \quad (5.56)$$

Bisher haben wir offensichtlich keinerlei Annahmen über Vektordominanz gemacht, sondern wir haben die Eichfelder A und W einfach durch minimale Substitution an alle Mesonen gekoppelt, ohne dass die Vektormesonen eine Sonderrolle spielen. Die A - und W -Felder koppeln einfach an die Noether-Ströme, und zusätzlich gibt es „Seagull“-Beiträge mit zwei A - oder W -Feldern. Eine direkte $\gamma\rho$ - oder $W\rho$ -Kopplung gibt es dagegen bisher nicht. Wir werden jedoch sehen, dass diese Kopplung auf Ein-Loop-Ebene auf natürliche Weise entsteht, da man dann zur Subtraktion der Divergenzen einen Counterterm der Form

$$\mathcal{L}_{\gamma Y} + \mathcal{L}_{W Y} = -\frac{f}{4} \text{tr} (\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu) \partial^\mu \left(e A^\nu T_3 + \frac{e \cos \theta_C}{\sin \theta_W} (W_1^\nu T_1^L + W_2^\nu T_2^L) \right) \quad (5.57)$$

benötigt. Der $\gamma\rho$ -Anteil dieses Terms hat genau die Form der $\gamma\rho$ -Kopplung $\mathcal{L}_{\gamma\rho}^{(KLZ)}$, Gl. (1.6). Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Kopplungskonstante f in Gl. (1.6) auf den Wert $1/g$ fixiert war, während sie nun ein freier Parameter ist.

Kapitel 6

Ein-Loop-Näherung

Im vorigen Kapitel haben wir eine Lagrangedichte konstruiert, die invariant unter globalen $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen ist und deren $\rho\pi\pi$ - und $a_1\pi\rho$ -Vertexfunktionen die einfachste mögliche Impulsabhängigkeit haben, so dass wir hoffen, den Zerfall der ρ - und a_1 -Mesonen, d.h. ihre Spektralfunktionen, gut beschreiben zu können. Allerdings sind die Teilchen in der bisher betrachteten Baumgraphen-Näherung scharf. Um ihre verbreiterten Propagatoren berechnen zu können, müssen wir Selbstenergien mit mindestens einem Loop berechnen, so wie wir es in Kap. 1.2 in einem wesentlich einfacheren Modell für das ρ -Meson getan haben.

Ein technisches Problem besteht darin, dass die Lagrangedichte sehr unübersichtlich und die Anzahl der zu berechnenden Diagramme sehr hoch ist. Infolge dessen ist es praktisch unmöglich, alle Diagramme von Hand fehlerfrei zu berechnen, so dass man auf die Verwendung eines symbolisch rechnenden Computerprogramms angewiesen ist. Die Funktionsweise dieses Programms ist im Anhang beschrieben. Die von diesem Programm generierten Formeln können numerisch ausgewertet werden, sind jedoch für das Verständnis wenig hilfreich. Wir werden deshalb in diesem Teil darauf verzichten, explizite Ausdrücke für die Ein-Loop-Selbstenergien anzugeben.

6.1 Eigenschaften der Näherung

Wir haben zwar eine chirale symmetrische Lagrangedichte konstruiert, aber wie man weiß, sind die meisten Näherungsverfahren, die über die Baumgraphen-Näherung hinausgehen, nicht symmetrieehaltend. Ein Beispiel hierfür ist die Hartree-Fock- oder Mean-Field-Näherung im linearen σ -Modell, in der die Pionen im Widerspruch zum Goldstone-Theorem massiv werden. Erst wenn darüber hinaus auch RPA-Fluktuationen berücksichtigt werden, ist das Goldstone-Theorem wieder erfüllt [71]. In diesem Fall ist das Schema allerdings nicht mehr selbstkonsistent, da sich die masselosen Pionen und die breiten σ -Mesonen, die sich als RPA-Anregungen ergeben, von den massiven und scharfen Hartree-Fock-Pionen und $-\sigma$ -Mesonen unterscheiden, die in den RPA-Loops propagieren. Eine etwas allgemeinere Untersuchung dieses Problems ergab, dass es anscheinend keine selbstkonsistente Näherung gibt, die die Symmetrien auf Korrelator-Ebene erfüllt [72].

Eine besonders einfache symmetrieehaltende Näherung ist durch die Störungstheorie

gegeben. Da wir durch die Verschiebung des σ -Feldes nach Gl. (5.12) und (5.13) schon beliebige Ordnungen in der Kopplungskonstanten λ^2 gemischt haben, ordnen wir die Störungsreihe nach der Anzahl der Loops, so dass es sich um eine Entwicklung in Potenzen von \hbar handelt. Um verbreiterte Propagatoren zu berechnen, muss man in den Selbstenergien mindestens Ein-Loop-Diagramme berücksichtigen. Die Breiten werden dabei von den Diagrammen verursacht, die an beiden Enden je ein Zerfalls-Matrixelement enthalten. Die anderen Diagramme derselben Ordnung müssen dann ebenfalls berücksichtigt werden, damit die Symmetrien nicht verletzt werden. So konnten wir z.B. in Kap. 1.2 durch Berechnung des Diagramms 1.1 (a) die Verbreiterung des ρ -Mesons durch den Zerfall $\rho \rightarrow \pi\pi$ beschreiben, mussten aber auch das Diagramm 1.1 (b) berücksichtigen, um die Eichinvarianz zu erfüllen.

Wie wir sehen werden, erfüllt die Ein-Loop-Näherung für die Selbstenergien die folgenden Forderungen:

1. Im chiralen Limes, d.h. für $c = 0$, ist das Pion masselos (Goldstone-Theorem [65]).
2. Die Differenzen der Selbstenergien chiraler Partner ($\pi - \sigma$ und $\rho - a_1$) verschwinden, wenn die chirale Symmetrie restauriert ist, d.h. für $\sigma_0 = 0$.
3. Die dominanten Zerfallskanäle der Mesonen, nämlich $\rho \rightarrow \pi\pi$, $a_1 \rightarrow \pi\rho$ und $\sigma \rightarrow \pi\pi$ sind in dem Schema enthalten.

Zum letzten Punkt ist anzumerken, dass das a_1 -Meson in der Natur natürlich in drei Pionen und nicht in $\pi\rho$ zerfällt. Allerdings erfolgt dieser Zerfall dominant über einen $\pi\rho$ -Zwischenzustand [41]. Da unsere Näherung nicht selbstkonsistent ist, zerfällt unser a_1 -Meson jedoch in ein Pion und ein scharfes ρ -Meson. Das Schwellenverhalten der a_1 -Selbstenergie werden wir deshalb erst oberhalb von $m_\pi + m_\rho$ näherungsweise beschreiben können.

6.2 Subtraktion der Divergenzen

In einer stark wechselwirkenden Theorie kann man nicht erwarten, dass eine Störungsentwicklung konvergiert. Ein solches Modell ist deshalb nicht nur durch seine Lagrangedichte definiert, sondern auch durch die Näherung, in der diese behandelt wird. Wenn wir z.B. festlegen, dass unsere Lagrangedichte die Teilchen richtig beschreibt, wenn man die Selbstenergien bis zu einem Loop berechnet, dann bedeutet dies, dass alle höheren, nichtperturbativen Effekte in den Vertizes und Propagatoren absorbiert sind. Die Vertizes sind also nicht als punktförmig zu verstehen, und es wäre nicht nur legitim, sondern auch wesentlich realistischer, wenn man dieser Tatsache durch die Einführung von Formfaktoren an den Vertizes Rechnung tragen würde. Solche Formfaktoren werden häufig verwendet, um divergente Diagramme zu vermeiden. Da die Formfaktoren nicht aus der Lagrangedichte berechnet werden können, müssen sie als freie Parameter angesehen werden.

Wenn wir z.B. in den in Abb. 1.1 dargestellten Diagrammen an jedem Vertex einen Formfaktor $v(\vec{k})$ einführen würden, der Impulse der Pionen oberhalb eines Wertes Λ_ρ unterdrückt, so wäre die ρ -Selbstenergie endlich. Aber wie bereits in Kap. 1.2 erwähnt wurde, zerstört ein solcher Formfaktor die Lorentz- und die Eichinvarianz. Aus diesem

Grunde haben wir statt eines Formfaktors Pauli-Villars-Regulatoren mit Abschneidemasse Λ_ρ verwendet.

Wir wollen nun untersuchen, in welcher Weise die Selbstenergie bei niedrigen Energien ($q^2 \ll 4\Lambda_\rho^2$) vom Abschneideparameter Λ_ρ abhängt. Dazu entwickeln wir die in Gl. (1.13) mit „+ Reg.“ bezeichneten Anteile der Regulatoren um $q^2 = 0$ und erhalten mit $I_2(q^2, m^2, m^2) = \ln m^2 - q^2/(6m^2) + \dots$ folgendes Ergebnis:

$$\Sigma(q^2) = \frac{g^2}{48\pi^2} \left[(q^2 - 4m_\pi^2) I_2(q^2, m_\pi^2, m_\pi^2) + 4m_\pi^2 \ln m_\pi^2 - \frac{2}{3}q^2 - q^2 \ln \frac{M_1^4}{M_2^2} + \dots \right]. \quad (6.1)$$

Wegen $\Lambda_\rho^2 \gg m_\pi^2$ gilt $\ln(M_1^4/M_2^2) \approx \ln(\Lambda_\rho^2/2)$. Die Abhängigkeit der Selbstenergie vom Abschneideparameter Λ_ρ besteht also in guter Näherung nur aus einem additiven Term $\propto q^2 \ln \Lambda_\rho^2$.

Ähnliches gilt auch bei der Verwendung eines dreidimensionalen Formfaktors $v(\vec{k})$, wenn man einmal von den Problemen absieht, die ein solcher Formfaktor mit sich bringt. Als Beispiel betrachten wir das Diagramm (a) aus Abb. 1.1. Wenn wir an beiden Vertizes einen Formfaktor $v(\vec{k})$ anbringen, wobei \vec{k} der Impuls der Pionen im Ruhesystem des ρ -Mesons ist ($\vec{q} = 0$), können wir den Imaginärteil folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{(v)}(q^2) &= -\frac{g^2}{48\pi^2} v^2(\sqrt{q^2/4 - m_\pi^2}) q^2 \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}\right)^{3/2} \theta(q^2 - 4m_\pi^2) \\ &= v^2(\sqrt{q^2/4 - m_\pi^2}) \text{Im } \Sigma(q^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Hierbei bezeichnen $\Sigma_{(v)}$ und Σ die Selbstenergien, die man mit bzw. ohne den Formfaktor $v(\vec{k})$ erhält. Unter der Annahme $v(\vec{k}) \approx 1$ für $|\vec{k}| \lesssim \Lambda_\rho$ ändert sich der Imaginärteil der Selbstenergie bis $q^2 \approx 4(\Lambda_\rho^2 + m_\pi^2)$ praktisch nicht.

Bei sehr hohen Energien sorgt der Formfaktor dafür, dass der Imaginärteil gegen null geht. Dies erlaubt, den Realteil der Selbstenergie mit Hilfe eines Dispersionsintegrals aus dem Imaginärteil zu berechnen,

$$\text{Re } \Sigma_{(v)}(q^2) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds v^2(\sqrt{s/4 - m_\pi^2}) \frac{\text{Im } \Sigma(s)}{q^2 - s}. \quad (6.3)$$

Wir ersetzen nun dieses Integral durch ein zweifach subtrahiertes Dispersionsintegral:

$$\text{Re } \Sigma_{(v)}(q^2) = \text{Re } \Sigma_{(v)}(0) + q^2 \text{Re } \Sigma'_{(v)}(0) - \frac{q^4}{\pi} \mathcal{P} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds v^2(\sqrt{s/4 - m_\pi^2}) \frac{\text{Im } \Sigma(s)}{s^2(q^2 - s)}. \quad (6.4)$$

Nach den beiden Subtraktionen ist das Integral auch ohne den Formfaktor konvergent, und für kleine q^2 können die Beiträge von großen s zum Integral näherungsweise vernachlässigt werden. Damit können wir schreiben:

$$\text{Re } \Sigma_{(v)}(q^2) \approx \text{Re } \Sigma_{(v)}(0) + q^2 \text{Re } \Sigma'_{(v)}(0) - \frac{q^4}{\pi} \mathcal{P} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im } \Sigma(s)}{s^2(q^2 - s)}, \quad (6.5)$$

d.h. die bei niedrigen q^2 führende Abhängigkeit des Ergebnisses vom Formfaktor ist in den Konstanten $\text{Re } \Sigma_{(v)}(0)$ und $\text{Re } \Sigma'_{(v)}(0)$ enthalten. Für die volle ρ -Selbstenergie aus Kap. 1.2 müsste natürlich wegen der Eichinvarianz $\text{Re } \Sigma_{(v)}(0) = 0$ gelten.

Das oben an konkreten Beispielen gefundene Ergebnis lässt sich etwas allgemeiner in folgender Form zusammenfassen: Die bei hohen Impulsen auftretenden Abweichungen von punktförmigen Vertizes führen dazu, dass die Selbstenergien bei niedrigen Energien in erster Näherung bis auf einfache additive Terme festgelegt sind, die z.B. die Form von Wellenfunktions- oder Massen-Renormierungskonstanten haben und mit den Symmetrien der Theorie vereinbar sein müssen.

In unserem chiral symmetrischen Modell tritt aber im Vergleich zu Kap. 1.2 auch noch ein vollkommen neues Problem auf. Dort hatten wir eine nackte ρ -Masse $m_\rho = m_0 = 853$ MeV, die sich von der physikalischen, durch die Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ korrigierten ρ -Masse $m_\rho^{(1)} \approx 770$ MeV unterschied. Das war nicht weiter schlimm, da wir uns nie für das nackte ρ -Meson interessierten. Andererseits haben wir für das Pion im Vakuum überhaupt keine Selbstenergie berechnet. Wir haben also die nackte Pionmasse m_π auf den physikalischen Wert gesetzt und uns nicht um die korrigierte Pionmasse $m_\pi^{(1)}$ gekümmert. In unserem neuen Modell wollen wir aber dieselben σ -, π -, ρ - und a_1 -Mesonen beschreiben, die auch in den Loops propagieren. Damit die Selbstenergien das richtige Schwellenverhalten haben, müssen wir also fordern, dass sowohl die nackten als auch die korrigierten Mesonmassen die physikalischen Werte haben.

Am einfachsten könnte man dies durch die Anwendung subtrahierter Dispersionsrelationen erreichen. Im Falle der ρ -Selbstenergie aus Kap. 1.2 würde man z.B. die volle Selbstenergie nach Gl. (6.5) berechnen, wobei man wegen der Eichinvarianz $\text{Re} \Sigma_{(v)}(0)$ auf null setzen müsste. Den freien Parameter $\text{Re} \Sigma'_{(v)}(0)$ könnte man aber so anpassen, dass sich die ρ -Masse durch die Selbstenergie nicht ändert.

In unserem chiral symmetrischen Modell ist diese einfache Vorgehensweise leider nicht mit der Symmetrie verträglich. Etwas vereinfacht dargestellt, muss man nämlich von den Selbstenergien chiraler Partner dieselben unendlichen Konstanten subtrahieren. Dies ist jedoch mathematisch nicht definiert, und folglich benötigt man ein systematischeres Verfahren, um die Konsistenz der Subtraktionen sicherzustellen.

Die gerade erwähnten unendlichen Subtraktionen können auch als unendliche große Counterterme in der Lagrangedichte aufgefasst werden. Sie sind also genau dann mit der chiralen Symmetrie verträglich, wenn die Counterterme chiral symmetrisch sind. Wie wir sehen werden, genügt es in unserem Fall sogar, nur solche Counterterme einzuführen, die von derselben Form sind wie die ursprünglich in der Lagrangedichte vorhandenen Terme. Unsere Counterterm-Lagrangedichte für die Mesonen lautet:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & -\frac{\delta Z_\Phi}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\delta\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi - \frac{\delta\lambda^2}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 \\ & + \frac{\delta Z_Y}{8} \text{tr} (\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu) (\partial^\mu Y^\nu - \partial^\nu Y^\mu) + \frac{\delta m_0^2}{4} \text{tr} Y_\mu Y^\mu \\ & - i\delta g Y_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - \frac{\delta h_1}{2} Y_\mu \Phi \cdot Y^\mu \Phi + \frac{\delta h_2}{4} \Phi \cdot \Phi \text{tr} Y_\mu Y^\mu. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Darüber hinaus werden wir auch Counterterme für die Kopplung des Photons und der W -Bosonen an die Mesonen einführen müssen. Diese kann man zum Teil konstruieren, indem man die in Kap. 5.4 beschriebenen minimalen Substitutionen auch in der Counterterm-Lagrangedichte durchführt, also in Gl. (6.6) die partiellen Ableitungen $\partial_\mu \Phi$ und $\partial_\mu Y$ durch die kovarianten Ableitungen $D_\mu \Phi$, Gl. (5.51), und $D_\mu Y$, Gl. (5.54), ersetzt. Daneben wird

aber, wie bereits in Kap. 5.4 erwähnt, ein Counterterm von der Form einer direkten γY - und WY -Kopplung nötig sein:

$$\delta\mathcal{L}_f = -\frac{\delta f}{4} \text{tr} (\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu) \partial^\mu \left(e A^\nu T_3 + \frac{e \cos \theta_C}{\sin \theta_W} (W_1^\nu T_1^L + W_2^\nu T_2^L) \right). \quad (6.7)$$

Die Werte der Counterterme werden wie folgt bestimmt [73]. Zuerst berechnen wir die Selbstenergie-Diagramme in dimensionaler Regularisierung, d.h. wir berechnen die Loop-Integrale nicht in vier, sondern in d Raum-Zeit-Dimensionen,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \dots \longrightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{\Lambda^2}{4\pi} \right)^{\frac{4-d}{2}} \dots \quad (6.8)$$

Wenn wir das Ergebnis um $d = 4$ entwickeln, erscheinen die Divergenzen als Pole $\propto 1/(4-d)$. Eine Selbstenergie Σ können wir also wie folgt schreiben:

$$\Sigma = \bar{\Sigma} + \Sigma_\infty \left(\frac{1}{4-d} - \frac{\gamma}{2} \right), \quad (6.9)$$

wobei $\bar{\Sigma}$ und Σ_∞ mathematisch wohldefinierte, endliche Ausdrücke sind. Damit haben wir die Selbstenergie in einen endlichen und einen unendlichen Anteil zerlegt. Die Eulerische Konstante $\gamma = 0.577\dots$ ist zwar endlich, so dass man den Term $-\Sigma_\infty \gamma/2$ genauso gut dem endlichen Anteil $\bar{\Sigma}$ hätte zuteilen können, aber die Zerlegung nach Gl. (6.9) ergibt kompaktere Ausdrücke, da die Terme $1/(4-d)$ und $-\gamma/2$ immer mit dem gleichen Koeffizienten erscheinen. Ebenso wie die Selbstenergien zerlegen wir auch die Counterterme in endliche und unendliche Anteile, z.B. $\delta Z_\Phi = \overline{\delta Z_\Phi} + (\delta Z_\Phi)_\infty (1/(4-d) - \gamma/2)$, $\delta\mu^2 = \overline{\delta\mu^2} + (\delta\mu^2)_\infty (1/(4-d) - \gamma/2)$ usw. Die unendlichen Anteile der Counterterme, also $(\delta Z_\Phi)_\infty$, $(\delta\mu^2)_\infty$ usw., müssen so gewählt werden, dass der unendliche Anteil der Selbstenergie, also Σ_∞ , verschwindet. Wir werden dies im nächsten Abschnitt anhand eines überschaubaren Beispiels demonstrieren. Die Festlegung der endlichen Anteile der Counterterme, also $\overline{\delta Z_\Phi}$, $\overline{\delta\mu^2}$ usw., erfolgt üblicherweise durch sogenannte Renormierungsbedingungen, wie z.B. die bereits erwähnte Forderung, dass die Massen der Teilchen in der Ein-Loop-Näherung mit denen in der Baumgraphen-Näherung übereinstimmen sollen. Abgesehen von dieser Bedingung werden wir die endlichen Anteile der Counterterme jedoch als freie Parameter behandeln.

Der Faktor $(\Lambda^2/(4\pi))^{(4-d)/2}$ in Gl. (6.8) stellt sicher, dass die Dimension des Integrals nicht von d abhängt. Es zeigt sich, dass der unendliche Teil des Integrals von Λ unabhängig ist, während der endliche Teil des Integrals von Λ abhängt. Die physikalischen Ergebnisse sind jedoch von Λ unabhängig, da die Änderung des endlichen Anteils des Integrals durch eine Neuanpassung der endlichen Anteile der Counterterme kompensiert werden kann. Um z.B. nach der Ersetzung $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ wieder die ursprünglichen Ergebnisse zu erhalten, muss man nur alle Counterterme wie $\overline{\delta\mu^2} \rightarrow \overline{\delta\mu^2} + (\delta\mu^2)_\infty \ln(\Lambda'/\Lambda)$, $\overline{\delta Z_\Phi} \rightarrow \overline{\delta Z_\Phi} + (\delta Z_\Phi)_\infty \ln(\Lambda'/\Lambda)$ usw. ändern.

6.3 Die Tadpole-Korrektur

In der Baumgraphen-Näherung kann keine σ -Linie im Vakuum enden, da bei der Verschiebung des σ -Feldes, Gl. (5.13), der Wert σ_0 nach Gl. (5.12) gerade so gewählt wurde,

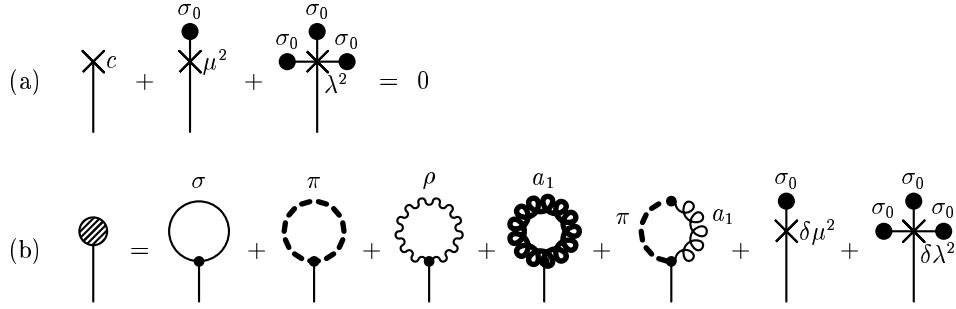


Abbildung 6.1: (a) Diagrammatische Veranschaulichung von Gl. (5.12), die zeigt, dass σ -Linien in Baumgraphen-Näherung nicht im Vakuum enden können. (b) Tadpole-Graphen T in Ein-Loop-Näherung. Die Bedeutung der dicken und dünnen Linien ist in Abb. 5.3 definiert.

dass das Minimum des Potentials bei $\sigma = 0$ liegt und folglich alle in σ linearen Terme verschwinden. Gl. (5.12) und die Tatsache, dass σ -Linien nicht im Vakuum enden können, lassen sich auch diagrammatisch deuten, so wie es in Abb. 6.1 (a) dargestellt ist. In Ein-Loop-Näherung können σ -Linien aber durchaus im Vakuum enden, so wie es in Abb. 6.1 (b) gezeigt ist. Die beiden letzten Beiträge werden dabei von den Countertermen $\delta\mu^2$ und $\delta\lambda^2$ aus Gl. (6.6) generiert. Wir wollen nun exemplarisch zeigen, wie die Divergenzen der anderen fünf Diagramme von diesen Countertermen kompensiert werden können, so dass nur endliche Ausdrücke übrig bleiben.

Wenn man die externen σ -Linien amputiert, stehen die in Abb. 6.1 (b) dargestellten Diagramme für folgenden Ausdruck:

$$T = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (3\lambda^2\sigma_0 G_\sigma(k) + 3\lambda^2\sigma_0 G_\pi(k) - 3h_2\sigma_0 g_{\mu\nu} G_\rho^{\mu\nu}(k) - 3(h_1 + h_2)\sigma_0 g_{\mu\nu} G_{a_1}^{\mu\nu}(k) + 3ig_1 k_\mu G_{\pi a_1}^\mu(k)) - i\sigma_0\delta\mu^2 - i\sigma_0^3\delta\lambda^2. \quad (6.10)$$

Die weiteren Umformungen dieses Ausdrucks haben wir mit Hilfe des im Anhang beschriebenen Programms vorgenommen. Nach dimensionaler Regularisierung und Zerlegung in endliche und unendliche Anteile ergibt sich

$$T_\infty = \frac{3i\sigma_0}{8\pi^2} \left(\frac{(h_1 + 2h_2 - g^2)m_0^2}{\xi^2} - \frac{g^2\mu^2}{\xi} + (3h_1 + 6h_2)m_0^2 + 2\lambda^2\mu^2 \right) + \frac{3i\sigma_0^3}{8\pi^2} \left(\frac{(h_1 + h_2 - g^2)^2 + h_2^2}{\xi^2} - \frac{2g^2(h_1 + h_2)}{\xi} + 3(h_1 + h_2)^2 + 3h_2^2 + 4\lambda^2 \right) - i\sigma_0(\delta\mu^2)_\infty - i\sigma_0^3(\delta\lambda^2)_\infty. \quad (6.11)$$

Hieran sieht man, dass mit der Wahl

$$(\delta\mu^2)_\infty = \frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{(h_1 + 2h_2 - g^2)m_0^2}{\xi^2} - \frac{g^2\mu^2}{\xi} + (3h_1 + 6h_2)m_0^2 + 2\lambda^2\mu^2 \right), \quad (6.12)$$

$$(\delta\lambda^2)_\infty = \frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{(h_1 + h_2 - g^2)^2 + h_2^2}{\xi^2} - \frac{2g^2(h_1 + h_2)}{\xi} + 3(h_1 + h_2)^2 + 3h_2^2 + 4\lambda^2 \right) \quad (6.13)$$

der unendliche Anteil T_∞ der Tadpole-Korrektur unabhängig von σ_0 verschwindet, so dass $T = \bar{T}$ endlich wird. Wie wir noch sehen werden, haben auch alle anderen Counterterme

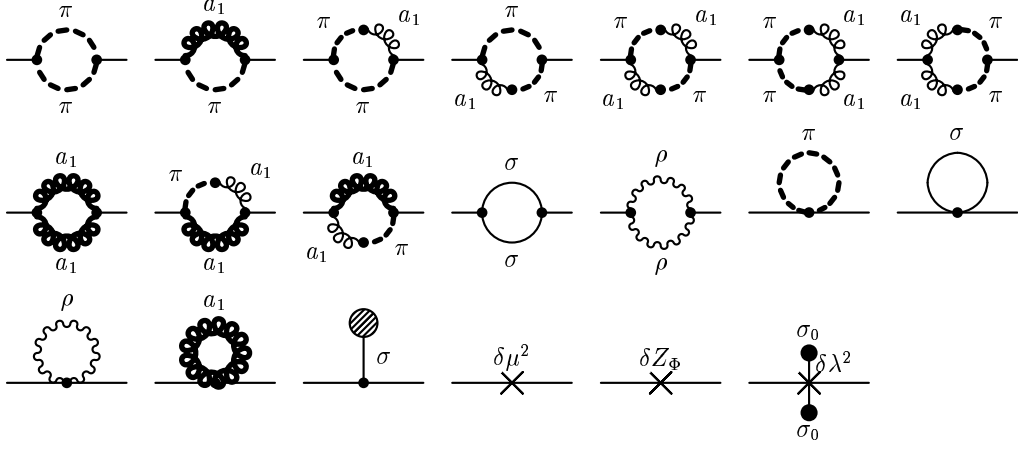


Abbildung 6.2: Ein-Loop-Beiträge zur σ -Selbstenergie, $-i\Sigma_\sigma$.

die Eigenschaft, dass ihre unendlichen Anteile nicht von der spontanen oder expliziten Symmetriebrechung, also von σ_0 oder c , abhängen. Dies wurde bereits von Lee [74] für das lineare σ -Modell ohne Vektormesonen und von Ram Mohan [73] für das lineare σ -Modell mit Nukleonen bei endlicher Temperatur und Dichte gezeigt.

In diesem Zusammenhang wollen wir noch anmerken, dass es im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ nicht mehr möglich ist, die Divergenzen mit von σ_0 unabhängigen Counterterme zu subtrahieren. Um dies zu sehen, betrachten wir den dritten Beitrag aus Abb. 6.1 (b), der sich wie folgt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned}
 -3h_2\sigma_0 g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_\rho^{\mu\nu}(k) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 3h_2\sigma_0 \left(\frac{3}{k^2 - m_\rho^2} + \frac{1}{\xi k^2 - m_\rho^2} \right) \\
 &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} h_2^n \sigma_0^{2n-1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3}{(k^2 - m_0^2)^n} + \frac{1}{(\xi k^2 - m_0^2)^n} \right).
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Für $\xi > 0$ sind die Terme mit $n = 1$ und $n = 2$ quadratisch bzw. logarithmisch divergent, während alle Terme mit $n > 2$ endlich sind. Aus diesem Grund sind zwei von σ_0 unabhängige Counterterme ausreichend. Im Fall $\xi = 0$ sind dagegen alle Terme quartisch divergent. Man benötigt in diesem Fall also entweder eine unendliche Zahl von Countertermen, die von σ_0 unabhängig sind, oder eine endliche Zahl von Countertermen, die von σ_0 abhängen.

6.4 σ - und ρ -Selbstenergie und -Propagator

Wie bereits erwähnt, berechnen wir die Meson-Selbstenergien in der Ein-Loop-Näherung, summieren dann aber für den Propagator wie in Kap. 1.2 die Dyson-Reihe auf. Als erstes betrachten wir das σ -Meson, da die σ -Selbstenergie und der σ -Propagator Skalare sind und die Dyson-Reihe deshalb besonders einfach aufsummiert werden kann. Die zur σ -Selbstenergie beitragenden Diagramme sind in Abb. 6.2 dargestellt. Für die Berechnung

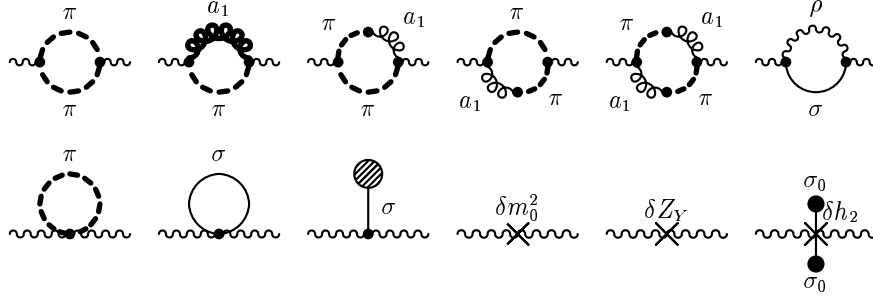


Abbildung 6.3: Ein-Loop-Beiträge zur ρ -Selbstenergie, $-i\Sigma_\rho$.

der Diagramme verwenden wir das im Anhang beschriebenen Programm. Die drei letzten Diagramme stellen die Beiträge der Counterterme $\delta\mu^2$, δZ_Φ und $\delta\lambda^2$ aus Gl. (6.6) dar. Die unendlichen Anteile der Counterterme werden aus der Forderung bestimmt, dass Σ_σ endlich sein soll. Dabei erhalten wir für die unendlichen Anteile von $\delta\mu^2$ und $\delta\lambda^2$ wieder genau die Bedingungen (6.12) und (6.13) aus dem vorangegangenen Abschnitt. Die Bedingung für δZ_Φ lautet

$$(\delta Z_\Phi)_\infty = \frac{3g^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\xi} - 3 \right). \quad (6.15)$$

Der Zusammenhang zwischen der σ -Selbstenergie und dem σ -Propagator ist einfach durch

$$G_\sigma(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_\sigma^2 - \Sigma_\sigma(q^2)} \quad (6.16)$$

gegeben.

Beim ρ -Meson ist die Situation wegen der Tensorstruktur der Selbstenergie und des Propagators etwas komplizierter. Die Ein-Loop-Diagramme für die ρ -Selbstenergie sind in Abb. 6.3 gezeigt. Die letzten drei Diagramme entstehen durch die Counterterme δm_0^2 , δZ_Y und δh_2 aus Gl. (6.6). Durch explizites Ausrechnen der Loop-Diagramme mit Hilfe des im Anhang beschriebenen Programms zeigt sich, dass diese Counterterme in unserem Fall genügen, um alle auftretenden Divergenzen zu subtrahieren, und zwar mit

$$(\delta Z_Y)_\infty = \frac{g^2}{24\pi^2}, \quad (6.17)$$

$$(\delta m_0^2)_\infty = \frac{\mu^2(h_1 + 2h_2 - g^2)}{4\pi^2}, \quad (6.18)$$

$$(\delta h_2)_\infty = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{h_1^2 + 2h_2^2 - g^2(8h_1 + 6h_2 - 4g^2)}{\xi} + 3h_1^2 + 6h_2^2 - 4\lambda^2(h_1 - 3h_2 + g^2) \right). \quad (6.19)$$

Es ist jedoch keineswegs selbstverständlich, dass wir ohne einen Counterterm der Form

$$\delta\mathcal{L}_\xi = -\frac{\delta\xi}{4} \text{tr} (\partial_\mu Y^\mu)^2 \quad (6.20)$$

auskommen¹, da die Divergenzen alle mit der Symmetrie verträglichen Formen annehmen können [80].

Zum Aufsummieren der Dyson-Reihe für den ρ -Propagator haben wir im ersten Teil dieser Arbeit von der Transversalität der Selbstenergie, Gl. (1.7), Gebrauch gemacht, die zu einer bestimmten Tensorstruktur der Selbstenergie, Gl. (1.12), führte. Die Transversalität folgte aber aus der Verwendung des Vektordominanzmodells, in dem das ρ -Meson an einen erhaltenen Strom koppelte. In unserem chiral symmetrischen Modell haben wir jedoch auf die Konzepte der lokalen Symmetrie und der Vektordominanz verzichtet. Folglich koppelt das ρ -Meson nicht mehr an einen erhaltenen Strom, und die Selbstenergie ist nicht mehr transversal. Um die Dyson-Reihe aufzusummieren, ist es nun zweckmäßig, die Selbstenergie in vierdimensional transversale und longitudinale Anteile zu zerlegen:

$$\Sigma_{\rho}^{\mu\nu}(q) = \Sigma_{\rho}^t(q^2) \left(\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \Sigma_{\rho}^l(q^2) \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2}. \quad (6.21)$$

Es sei betont, dass Σ_{ρ}^t und Σ_{ρ}^l nichts mit den im ersten Teil dieser Arbeit verwendeten dreidimensional transversalen und longitudinalen Komponenten Σ_{ρ}^T und Σ_{ρ}^L zu tun haben. In derselben Weise wie die Selbstenergie zerlegen wir nun auch den ρ -Propagator. Dann läßt sich die Dyson-Reihe für die vierdimensional transversalen und longitudinalen Komponenten getrennt aufsummieren, und das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} G_{\rho}^{(1)\mu\nu}(q) &= G_{\rho}^{(1)t}(q^2) \left(\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + G_{\rho}^{(1)l}(q^2) \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} \\ &= \frac{\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} - g^{\mu\nu}}{q^2 - m_{\rho}^2 - \Sigma_{\rho}^t(q^2)} + \frac{\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2}}{m_{\rho}^2 - \xi q^2 - \Sigma_{\rho}^l(q^2)}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

6.5 Pion- und a_1 -Selbstenergie und -Propagator

Die Dyson-Reihen für den Pion- und den a_1 -Propagator sind wegen des πa_1 -Mixings etwas komplizierter als die für die gerade besprochenen σ - und ρ -Propagatoren, da sie nicht getrennt voneinander aufsummiert werden können. Hier ist es zweckmäßig, die Begriffe der einteilchenirreduziblen und der eigentlichen („proper“) Selbstenergien zu unterscheiden. Bei der einteilchenirreduziblen Selbstenergie des Pions, $\Sigma_{\pi\pi}$, oder des a_1 -Mesons, $\Sigma_{a_1 a_1}$, handelt es sich um alle Diagramme, die nicht durch Aufschneiden einer einzelnen Linie in zwei unverbundene Teile zertrennt werden können. Im Gegensatz hierzu besteht die eigentliche Pion-Selbstenergie Σ_{π} aus allen Diagrammen, die nicht durch Aufschneiden einer einzelnen Pionlinie, aber möglicherweise durch Aufschneiden einer einzelnen a_1 -Linie zertrennt werden können. Nach dieser Definition hat das Pion z.B. in der Baumgraphen-Näherung keine einteilchenirreduzible, aber eine eigentliche Selbstenergie, nämlich das in Abb. 5.3 (a) ganz rechts abgebildete Diagramm. Entsprechend bezeichnen wir mit der eigentlichen a_1 -Selbstenergie, Σ_{a_1} , alle Diagramme, die sich nicht durch Aufschneiden einer

¹Ein solcher Term wäre in der Tat notwendig, wenn wir in Gl. (5.36) die Kopplungskonstante g_1 der $\rho\rho\rho$ - und $\rho a_1 a_1$ -Wechselwirkung auf einen von null verschiedenen Wert gesetzt hätten. In diesem Fall würden nämlich zusätzliche Diagramme auftreten, deren Divergenzen unter anderem $(\delta\xi)_{\infty} = g_1^2/(8\pi^2)$ erforderten.

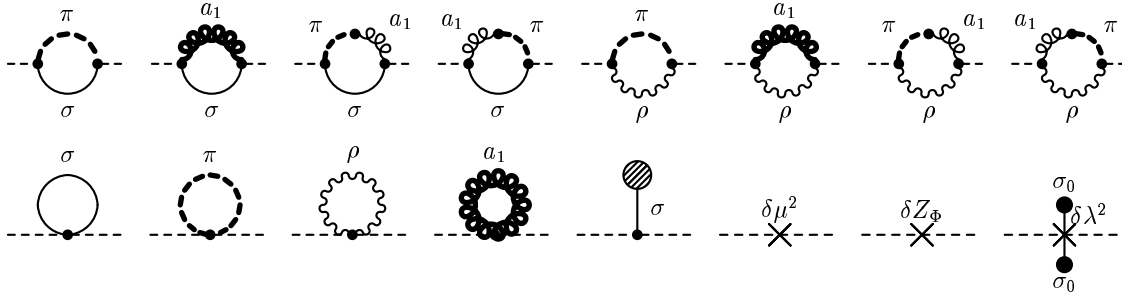


Abbildung 6.4: Ein-Loop-Beiträge zur einteilchenirreduziblen Pion-Selbstenergie, $-i\Sigma_{\pi\pi}$.

einzelnen a_1 -Linie, aber möglicherweise durch Aufschneiden einer einzelnen Pionlinie in zwei unverbundene Teile zertrennen lassen.

Die Ein-Loop-Diagramme für die einteilchenirreduzible Pion-Selbstenergie, $\Sigma_{\pi\pi}$, sind in Abb. 6.4 dargestellt. Die drei letzten Diagramme stellen wieder die Beiträge der Counterterme $\delta\mu^2$, δZ_Φ und $\delta\lambda^2$ dar. Die unendlichen Anteile werden wieder dadurch bestimmt, dass die Selbstenergie-Diagramme mit Hilfe des im Anhang beschriebenen Programms berechnet und in endliche und unendliche Anteile zerlegt werden, und man dann fordert, dass die unendlichen Anteile der Loop-Diagramme von den unendlichen Anteilen der Counterterme weggehoben werden. Dadurch erhalten wir genau dieselben Bedingungen wie im vorangegangenen Abschnitt über die σ -Selbstenergie, so wie es die chirale Symmetrie verlangt.

Wie wir weiter unten sehen werden, erfordert das Goldstone-Theorem [65], dass nicht nur die eigentliche, sondern auch schon die einteilchenirreduzible Selbstenergie des Pions im chiralen Limes, d.h. für $c = 0$, bei $q^2 = 0$ verschwinden muss. In der Tat kann man anhand des expliziten analytischen Ausdrucks für $\Sigma_{\pi\pi}$ zeigen, dass

$$\Sigma_{\pi\pi}(0) = 0 \quad \text{für } c = 0 \quad (6.23)$$

erfüllt ist. Diese Relation gilt unabhängig von der Wahl der Counterterme. Um dies zu sehen, betrachten wir den von den Countertermen erzeugten Anteil $\Sigma_{\pi\pi}^{(CT)}$ der Selbstenergie. Dabei ist zu beachten, dass die Counterterme nicht nur in den drei letzten Diagrammen von Abb. 6.4, sondern auch in der Tadpole-Korrektur T vorkommen:

$$\Sigma_{\pi\pi}^{(CT)}(q^2) = -\frac{2i\lambda^2\sigma_0}{m_\sigma^2}T^{(CT)} + \delta\mu^2 + q^2\delta Z_\Phi + \sigma_0^2\delta\lambda^2. \quad (6.24)$$

Der Beitrag der Counterterme zur Tadpole-Korrektur T ist durch

$$T^{(CT)} = -i\sigma_0\delta\mu^2 - i\sigma_0^3\delta\lambda^2 \quad (6.25)$$

gegeben, siehe Gl. (6.11). Setzt man dies in Gl. (6.24) ein und nutzt die Beziehungen für die σ -Masse m_σ und das Kondensat σ_0 , Gl. (5.40) und (5.12), aus, so erhält man

$$\Sigma_{\pi\pi}^{(CT)}(q^2) = q^2\delta Z_\Phi + \frac{c}{m_\sigma^2\sigma_0}(\delta\mu^2 + \sigma_0^2\delta\lambda^2), \quad (6.26)$$

d.h. die Counterterme liefern für $c = 0$ bei $q^2 = 0$ keinen Beitrag.

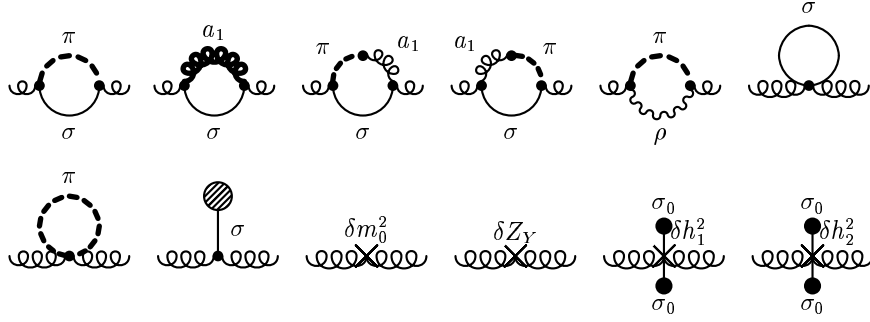


Abbildung 6.5: Ein-Loop-Beiträge zur einteilchenirreduziblen a_1 -Selbstenergie, $-i\Sigma_{a_1 a_1}$.

Im nächsten Schritt berechnen wir die einteilchenirreduziblen Beiträge zur a_1 -Selbstenergie, $\Sigma_{a_1 a_1}$, die in Abb. 6.5 gezeigt sind. Die letzten vier Diagramme stellen wieder die Beiträge der Counterterme dar. Neben den Countertermen δm_0^2 , δZ_Y und δh_2 , deren unendliche Anteile wir bereits aus der Forderung, dass die ρ -Selbstenergie endlich sein soll, festgelegt haben, tritt hier noch der Counterterm δh_1 auf. Damit $\Sigma_{a_1 a_1}$ endlich wird, muss sein unendlicher Anteil auf

$$(\delta h_1)_\infty = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{h_1(h_1 + 2h_2) + g^2(h_1 - 2h_2 - g^2)}{\xi} + 3h_1(h_1 + 2h_2) + 2\lambda^2(h_1 - g^2) \right) \quad (6.27)$$

gesetzt werden.

Um die eigentliche Pion-Selbstenergie zu berechnen, benötigen wir außerdem noch die Loop-Korrekturen zum πa_1 -Vertex, $\Sigma_{\pi a_1}$. Die entsprechenden Ein-Loop-Diagramme sind in Abb. 6.6 dargestellt. Da der πa_1 -Vertex in der Baumgraphen-Näherung nur die Kopplungskonstante g enthält, tritt in der Ein-Loop-Näherung nur der Counterterm δg auf. Dieser ist tatsächlich geeignet, die Divergenz von $\Sigma_{\pi a_1}$ wegzuheben, wenn sein unendlicher Anteil auf

$$(\delta g)_\infty = \frac{g}{8\pi^2} \left(6h_1 + 3h_2 - \frac{g^2}{\xi} \right) \quad (6.28)$$

gesetzt wird.

Die a_1 -Selbstenergie und den a_1 -Propagator zerlegen wir wieder in vierdimensional transversale und longitudinale Komponenten, so wie wir es bereits für die ρ -Selbstenergie und den ρ -Propagator getan haben. Da der transversale Anteil der a_1 -Selbstenergie vom πa_1 -Mixing nicht betroffen ist, gilt

$$\Sigma_{a_1}^t(q^2) = \Sigma_{a_1 a_1}^t(q^2). \quad (6.29)$$

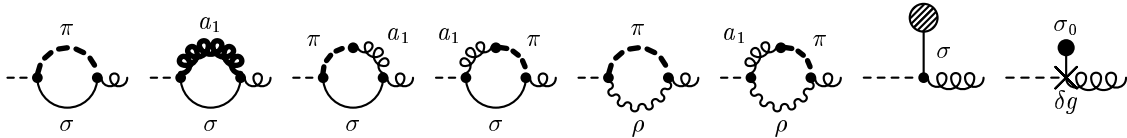


Abbildung 6.6: Ein-Loop-Korrekturen zum πa_1 -Vertex, $-i\Sigma_{\pi a_1}^\mu$.

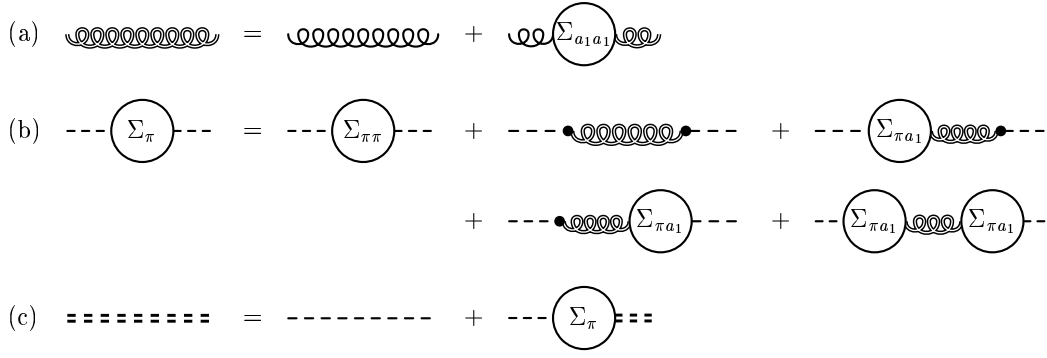


Abbildung 6.7: Veranschaulichung der Dyson-Reihe für den Pionpropagator mit πa_1 -Mixing: (a) teilweise aufsummierter a_1 -Propagator, der nur die einteilchenirreduzible Selbstenergie $\Sigma_{a_1 a_1}$ enthält; (b) eigentliche Pion-Selbstenergie, $-i\Sigma_\pi$; (c) voller Pionpropagator, iG_π .

Den transversalen Anteil des a_1 -Propagators,

$$G_{a_1}^{(1)t}(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_{a_1}^2 - \Sigma_{a_1}^t(q^2)}, \quad (6.30)$$

erhält man also einfach durch Aufsummieren der einteilchenirreduziblen a_1 -Selbstenergie $\Sigma_{a_1 a_1}^t$, so wie es in Abb. 6.7 (a) zu sehen ist.

Die eigentliche Pion-Selbstenergie Σ_π erhält man in der in Abb. 6.7 (b) dargestellten Weise. Aufgrund der Lorentz-Invarianz ist die πa_1 -Vertexfunktion $\Gamma_{\pi a_1}(q)$, die sowohl den Vertex in Baumgraphen-Näherung als auch die Ein-Loop-Korrekturen enthält, proportional zum Viererimpuls des Pions, und wir können sie folgendermaßen schreiben:

$$(\Gamma_{\pi a_1}(q))_{ab}^\mu = -\delta_{ab}(g\sigma_0 q^\mu + i\Sigma_{\pi a_1}^\mu(q)) =: -q^\mu \delta_{ab} F_{\pi a_1}(q^2). \quad (6.31)$$

Nach Abb. 6.7 (b) ergibt sich damit für die eigentliche Pion-Selbstenergie:

$$\Sigma_\pi(q^2) = \Sigma_{\pi\pi}(q^2) + \frac{q^2 (F_{\pi a_1}(q^2))^2}{m_{a_1}^2 - \xi q^2 - \Sigma_{a_1 a_1}^l(q^2)}. \quad (6.32)$$

Da der zweite Term proportional zu q^2 ist, erfüllt die eigentliche Selbstenergie genau dann das Goldstone-Theorem, d.h. $\Sigma_\pi(0) = 0$ für $c = 0$, wenn Gl. (6.23) erfüllt ist.

Mit der eigentlichen Pion-Selbstenergie läßt sich nun auch der Pionpropagator sehr einfach ausdrücken:

$$G_\pi^{(1)}(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_{\pi 0}^2 - \Sigma_\pi(q^2)}. \quad (6.33)$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass in dieser Gleichung, analog zu Gl. (5.41), nicht die Pionmasse m_π in Baumgraphennäherung, sondern die wesentlich kleinere Masse $m_{\pi 0}$ auftritt. Da das Pion ein scharfes Teilchen ist, kann der Pionpropagator in der Nähe des Pols durch

$$G_\pi^{(1)}(q^2) \approx \frac{Z_\pi^{(1)}}{q^2 - m_\pi^{(1)2}} \quad (6.34)$$

angenähert werden, wobei $m_\pi^{(1)}$ und $Z_\pi^{(1)}$ durch

$$m_\pi^{(1)2} = m_{\pi 0}^2 + \Sigma_\pi(m_\pi^{(1)2}), \quad Z_\pi^{(1)} = \left(1 - \frac{d}{dq^2} \Sigma_\pi(q^2) \Big|_{q^2=m_\pi^{(1)2}}\right)^{-1} \quad (6.35)$$

gegeben sind.

6.6 Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren

In Kap. 4.1 haben wir bereits die Strom-Strom-Korrelationsfunktion des elektromagnetischen Stromes, $\Pi^{\mu\nu}$, eingeführt, von der wir in den darauf folgenden Abschnitten allerdings nur den isovektoriellen Anteil verwendet haben. Dieser stellt die Korrelationsfunktion der dritten Komponente des isovektoriellen Vektorstromes $j_{3\mu}$ dar. Jetzt betrachten wir auch die anderen Komponenten dieses Stromes, \vec{j}_μ , sowie den isovektoriellen Axialvektorstrom, \vec{j}_μ^5 . Im folgenden werden wir diese beiden Ströme kurz als Vektor- und Axialvektorströme bezeichnen. Mit Quarkfeldern $\psi = (u, d)$ ausgedrückt lauten sie $\vec{j}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi/2$ und $\vec{j}_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi/2$. Im Vakuum definieren wir ihre zeitgeordneten Korrelationsfunktionen wie folgt:

$$\Pi_{Vab}^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T(j_a^\mu(x) j_b^\nu(0)) | 0 \rangle, \quad (6.36)$$

$$\Pi_{Aab}^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T(j_a^{5\mu}(x) j_b^{5\nu}(0)) | 0 \rangle, \quad (6.37)$$

wobei $|0\rangle$ den Vakuumzustand und $T(\dots)$ das Zeitordnungsprodukt bezeichnet.

Bei endlicher Temperatur wird es wieder günstiger sein, wie in Kap. 4.1 mit der retardierten Korrelationsfunktion zu arbeiten. Im Vakuum sind die zeitgeordneten und die retardierten Korrelationsfunktionen aber bis auf das Vorzeichen des Imaginärteils bei negativen Energien identisch.

Infolge der Isospinsymmetrie haben die Korrelationsfunktionen die Form $\Pi_{V,Aab}^{\mu\nu} = \Pi_{V,A}^{\mu\nu} \delta_{ab}$. Zur Vermeidung der Lorentz-Indizes zerlegen wir sie in vierdimensional transversale und longitudinale Komponenten, $\Pi_{V,A}^t$ und $\Pi_{V,A}^l$. Die vektorielle Korrelationsfunktion, Π_V , ist allerdings wegen der Stromerhaltung von \vec{j}_μ transversal, so dass Π_V^l verschwindet. Π_A^l verschwindet hingegen nicht, da der Axialvektorstrom \vec{j}_μ^5 wegen der expliziten Brechung der chiralen Symmetrie nicht erhalten ist.

Durch Einschreiben eines vollständigen Satzes von Energie- und Impuls-Eigenzuständen in Gl. (6.36) und (6.37) kann man für Π_V und Π_A Spektraldarstellungen herleiten. Nach den Definitionen aus Ref. [42] sind die Spektralfunktionen durch

$$v_1(q^2) = \frac{4\pi}{q^2} \text{Im} \Pi_V^t(q^2), \quad a_1(q^2) = \frac{4\pi}{q^2} \text{Im} \Pi_A^t(q^2), \quad a_0(q^2) = \frac{4\pi}{q^2} \text{Im} \Pi_A^l(q^2) \quad (6.38)$$

gegeben.

Ähnlich wie in Kap. 4.2 wird es sich als günstig erweisen, anstelle der Korrelationsfunktionen Π_V und Π_A die Photon- und W -Selbstenergien zu betrachten, mit denen sie

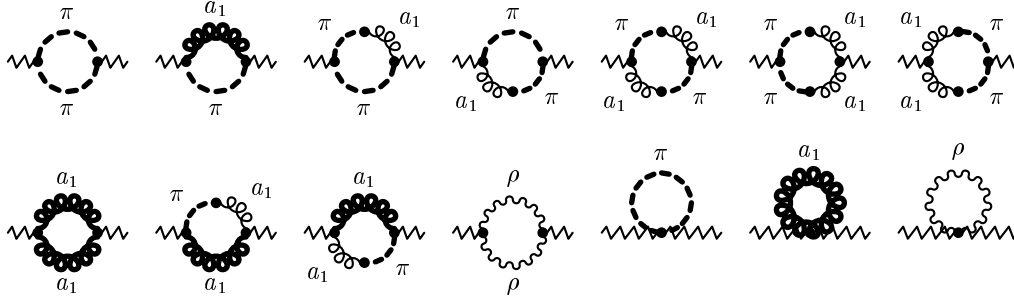


Abbildung 6.8: Ein-Loop-Diagramme für die einteilchenirreduzible Photon-Selbstenergie, $-i\Sigma_{\gamma\gamma}^{\mu\nu}$.

über

$$\Sigma_{\gamma}^{\mu\nu} = -e^2\Pi_V^{\mu\nu} + \dots, \quad (6.39)$$

$$\Sigma_W^{\mu\nu} = -\left(\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W}\right)^2 (\Pi_V^{\mu\nu} + \Pi_A^{\mu\nu}) \quad (6.40)$$

zusammenhängen. Die Punkte in Gl. (6.39) stehen für die isoskalaren Anteile der Photon-Selbstenergie.

6.7 Photon-Selbstenergie und Vektor-Korrelator

Die Berechnung der vektoriellen Korrelationsfunktion Π_V erfolgt ähnlich wie im Vektordominanzmodell von Kroll, Lee und Zumino über die Berechnung der Photon-Selbstenergie Σ_{γ} , zu der die in Abb. 4.1 (b) gezeigten Diagramme beitragen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die $\gamma\rho$ -Kopplungskonstante e/g in Abb. 4.1 (b) nun durch ef ersetzt werden muss. Wir benötigen also außer dem ρ -Propagator noch die einteilchenirreduzible Photon-Selbstenergie $\Sigma_{\gamma\gamma}$ und die Loop-Korrekturen zum $\gamma\rho$ -Vertex, $\Sigma_{\gamma\rho}$.

In Abb. 6.8 sind alle Ein-Loop-Beiträge zu $\Sigma_{\gamma\gamma}$ dargestellt. Während $\Sigma_{\gamma\gamma}$ und $\Sigma_{\gamma\rho}$ im Vektordominanzmodell direkt proportional zur ρ -Selbstenergie Σ_{ρ} waren, ist dies in unserem chiral symmetrischen Modell nicht mehr der Fall. Da das Photon z.B. an die geladenen Vektormesonen koppelt, treten in $\Sigma_{\gamma\gamma}$ Vektormeson-Loops auf, die in Σ_{ρ} nicht vorkommen, da wir die $\rho\rho\rho$ -Kopplungskonstante g_1 auf null gesetzt haben. Andererseits koppelt das Photon überhaupt nicht an das σ -Meson, während zur ρ -Selbstenergie auch Diagramme mit σ -Mesonen beitragen (siehe Abb. 6.3). Counterterme zur Subtraktion der Divergenzen von $\Sigma_{\gamma\gamma}$ benötigen wir nicht, da wir uns zur Berechnung der Spektralfunktion v_1 nur für den Imaginärteil von $\Sigma_{\gamma\gamma}$ interessieren, der von vornherein endlich ist.

Durch explizites Ausrechnen der Diagramme stellt man fest, dass $\Sigma_{\gamma\gamma}$ im Rahmen der dimensional Regularisierung die für die Eichinvarianz erforderlichen Eigenschaften

$$q_{\mu}\Sigma_{\gamma\gamma}^{\mu\nu}(q) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma_{\gamma\gamma}^{\mu\nu}(0) = 0 \quad (6.41)$$

besitzt. Das war auch zu erwarten, da wir das Photon über die minimale Substitution an die Mesonen gekoppelt haben.

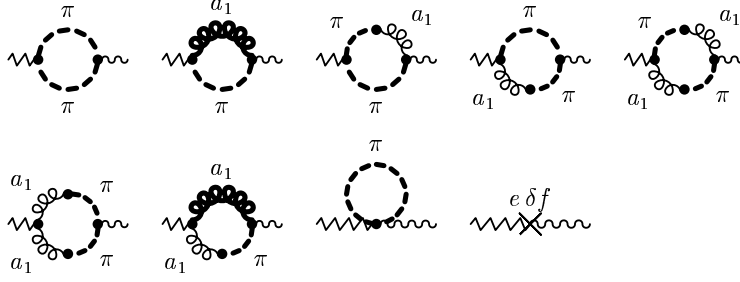


Abbildung 6.9: Ein-Loop-Beiträge zur $\gamma\rho$ -Kopplung, $-i\Sigma_{\gamma\rho}^{\mu\nu}$.

Die Ein-Loop-Beiträge zur $\gamma\rho$ -Kopplung, $\Sigma_{\gamma\rho}$, sind in Abb. 6.9 gezeigt. Auch diese sind eichinvariant, d.h.

$$q_\mu \Sigma_{\gamma\rho}^{\mu\nu}(q) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma_{\gamma\rho}^{\mu\nu}(0) = 0. \quad (6.42)$$

Aus diesem Grund kann die verbleibende Divergenz nur noch die Form des direkten $\gamma\rho$ -Vertex' aus dem Vektordominanzmodell von Kroll, Lee und Zumino haben. Um diese Divergenz wegzuheben, benötigen wir den Counterterm δf , dessen Beitrag als letztes Diagramm abgebildet ist. Der unendliche Anteil dieses Counterterms hat den Wert

$$(\delta f)_\infty = -\frac{g}{24\pi^2}. \quad (6.43)$$

Die volle $\gamma\rho$ -Vertexfunktion, also die direkte Kopplung proportional zu f und die Ein-Loop-Korrekturen $\Sigma_{\gamma\rho}$, lassen sich nun in folgender Form schreiben:

$$(\Gamma_{\gamma\rho}(q))_a^{\mu\nu} = i\delta_{3a}(ef(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) - \Sigma_{\gamma\rho}^{\mu\nu}(q)) =: ie\delta_{3a}(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) F_{\gamma\rho}(q^2). \quad (6.44)$$

Hierin bezeichnet a den Isospin-Index des ρ -Mesons.

Wegen Gl. (6.41) und (6.42) ist auch die volle Photon-Selbstenergie Σ_γ eichinvariant, und nur der transversale Anteil des ρ -Propagators trägt zu ihr bei. Der longitudinale Anteil, Σ_γ^l , verschwindet also, während der transversale, Σ_γ^t , durch

$$\Sigma_\gamma^t(q^2) = \Sigma_{\gamma\gamma}^t(q^2) + \frac{(eq^2 F_{\gamma\rho}(q^2))^2}{q^2 - m_\rho^2 - \Sigma_\rho^t(q^2)} \quad (6.45)$$

gegeben ist. Die Spektralfunktion $v_1(q^2)$ erhält man, indem man hiervon den Imaginärteil bildet, siehe Gl. (6.38) und (6.39).

6.8 W -Selbstenergie und Axialvektor-Korrelator

Um die axialvektorielle Korrelationsfunktion zu berechnen, betrachten wir die Selbstenergie des W -Bosons. Diese kann, wie aus Gl. (6.40) hervorgeht, in vektorielle und axialvektorielle Beiträge, Σ_W^V und Σ_W^A , zerlegt werden, von denen wir in diesem Abschnitt nur den axialvektoriellen Beitrag, Σ_W^A , betrachten werden. Dessen einteilchenirreduziblen Anteil bezeichnen wir mit Σ_{WW}^A . Da wir uns nur für den Imaginärteil interessieren, brauchen wir

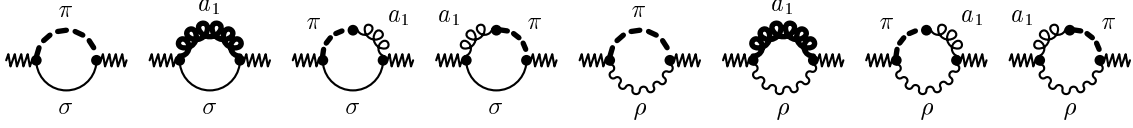


Abbildung 6.10: Ein-Loop-Beiträge zur einteilchenirreduziblen axialvektoriellen W -Selbstenergie, $-i\Sigma_{WW}^{A\mu\nu}$ (ohne Beiträge von Seagull- und Tadpole-Graphen). Die Zickzacklinien stehen hierbei für W -Bosonen.

die rein reellen sogenannten Seagull- und Tadpole-Graphen nicht zu berücksichtigen. Alle übrigen Ein-Loop-Diagramme sind in Abb. 6.10 dargestellt. Da der Axialvektorstrom \vec{j}_μ^5 nicht erhalten ist, ist Σ_{WW}^A nicht transversal und kann in transversale und longitudinale Komponenten, Σ_{WW}^{At} und Σ_{WW}^{Al} , zerlegt werden.

Neben den einteilchenirreduziblen Beiträgen gibt es noch Beiträge mit einem a_1 -Meson oder Pion im Zwischenzustand. Wir betrachten zuerst die Ein-Loop-Korrekturen zum Wa_1 -Vertex, Σ_{Wa_1} , die in Abb. 6.11 gezeigt sind. Die Tatsache, dass der Axialvektorstrom nicht erhalten ist, führt nicht nur zu einem longitudinale Anteil $\Sigma_{Wa_1}^l$, sondern auch zu einem nichtverschwindenden Wert von $\Sigma_{Wa_1}^{\mu\nu}$ bei $q^2 = 0$. Deshalb ist der δf -Counterterm, der im vorigen Abschnitt verwendet wurde, um die Divergenzen von $\Sigma_{\gamma\rho}$ wegzuheben, nicht mehr ausreichend. Der Counterterm δg aus Gl. (6.6) trägt aber ebenfalls zu Σ_{Wa_1} bei (letztes Diagramm in Abb. 6.11), wenn man die Ableitung $\partial^\mu\Phi$ durch die kovariante Ableitung $D^\mu\Phi$ ersetzt. In der Tat führt die Bedingung (6.28) für den unendlichen Anteil von δg genau dazu, dass die verbleibende Divergenz von $\Sigma_{Wa_1}^{\mu\nu}$ aufgehoben wird. Der Wa_1 -Vertex mit Ein-Loop-Korrektur kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{Wa_1}(q))^{\mu\nu} &= -i\delta_{ab} \left(\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} (f(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) + g\sigma_0^2 g^{\mu\nu}) + \Sigma_{Wa_1}^{\mu\nu} \right) \\
 &=: -i\delta_{ab} \frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \left(\left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) F_{Wa_1}^t(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} F_{Wa_1}^l(q^2) \right), \quad (6.46)
 \end{aligned}$$

wobei a den Index des W -Bosons (1 oder 2) und b den Isospin-Index des a_1 -Mesons bezeichnet.

Da Ein-Pion-Zustände nur zum longitudinalen Anteil der W -Selbstenergie, Σ_W^{Al} bei-

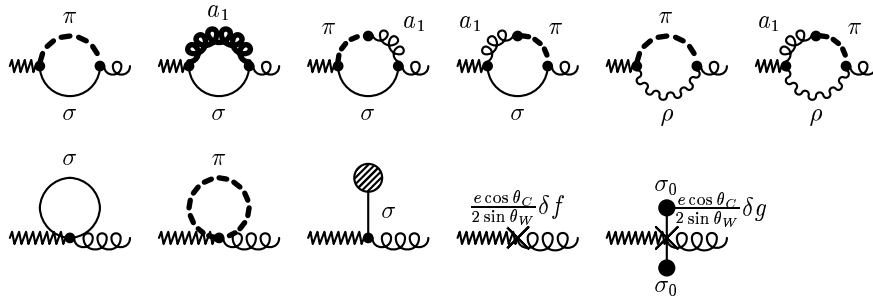


Abbildung 6.11: Ein-Loop-Korrekturen zum Wa_1 -Vertex, $-i\Sigma_{Wa_1}^{\mu\nu}$.

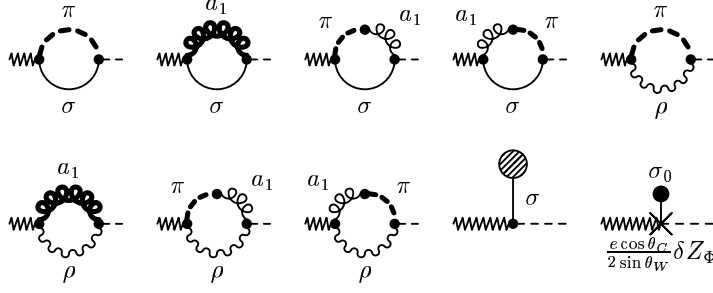


Abbildung 6.12: Ein-Loop-Korrekturen zum einteilchenirreduziblen $W\pi$ -Vertex, $-i\Sigma_{W\pi}^\mu$.

tragen können, erhalten wir für den transversalen Anteil

$$\Sigma_W^{At}(q^2) = \Sigma_{WW}^{At}(q^2) + \left(\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \right)^2 \frac{(F_{W a_1}^t(q^2))^2}{q^2 - m_{a_1}^2 - \Sigma_{a_1}^t}. \quad (6.47)$$

Die Spektralfunktion des transversalen axialen Korrelators, $a_1(q^2)$, folgt hieraus mit Hilfe von Gl. (6.38) und (6.40).

Um auch den longitudinalen Anteil von Σ_W^A zu berechnen, benötigt man die korrigierte $W\pi$ -Vertexfunktion. Diese besteht aus dem direkten $W\pi$ -Vertex, den einteilchenirreduziblen Korrekturen zum $W\pi$ -Vertex, $\Sigma_{W\pi}$, und Beiträgen mit einem a_1 -Meson im Zwischenzustand. Die Ein-Loop-Diagramme für $\Sigma_{W\pi}$ sind in Abb. 6.12 dargestellt. Das letzte Diagramm wird dabei vom δZ_Φ -Counterterm erzeugt. Die Kopplung des W -Bosons an den δZ_Φ -Term in Gl. (6.6) entsteht, wie bereits für den δg -Term beschrieben, durch die minimale Substitution $\partial_\mu \Phi \rightarrow D_\mu \Phi$. Zusammen mit dem direkten $W\pi$ -Vertex ist die einteilchenirreduzible Vertexfunktion $\Gamma_{W\pi}$ nun durch

$$(\Gamma_{W\pi}(q))_{ab}^\mu = -\delta_{ab} \left(\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \sigma_0 q^\mu + i \Sigma_{W\pi}^\mu(q) \right) =: -\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} q^\mu \delta_{ab} F_{W\pi}(q^2), \quad (6.48)$$

gegeben, wobei q den einlaufenden Impuls des W -Bosons bezeichnet. Die volle Vertexfunktion erhält man, indem man darüber hinaus noch den Graphen berücksichtigt, in dem sich das W -Boson zunächst über den $W a_1$ -Vertex in ein a_1 -Meson umwandelt, welches dann über den $a_1 \pi$ -Vertex an das Pion koppelt. Unter Verwendung von Gl. (6.31) und (6.46) erhält man

$$\begin{aligned} (\Gamma_{W\pi}^{tot}(q))_{ab}^\mu &= -\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} q^\mu \delta_{ab} \left(F_{W\pi}(q^2) - \frac{F_{W a_1}^l(q^2) F_{\pi a_1}(q^2)}{m_{a_1}^2 - \xi q^2 - \Sigma_{a_1 a_1}^l(q^2)} \right) \\ &=: -\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} q^\mu \delta_{ab} F_{W\pi}^{tot}(q^2). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Mit den oben angegebenen Funktionen lässt sich nun der longitudinale Anteil der W -Selbstenergie leicht angeben:

$$\Sigma_W^{Al}(q^2) = \Sigma_{WW}^{Al}(q^2) + \left(\frac{e \cos \theta_C}{2 \sin \theta_W} \right)^2 \left(\frac{(F_{W a_1}^l(q^2))^2}{m_{a_1}^2 - \xi q^2 - \Sigma_{a_1 a_1}^l(q^2)} + \frac{q^2 (F_{W\pi}^{tot}(q^2))^2}{q^2 - m_{\pi 0}^2 - \Sigma_\pi(q^2)} \right). \quad (6.50)$$

Hieraus ergibt sich die longitudinale Spektralfunktion $a_0(q^2)$ nach Gl. (6.38) und (6.40).

Die volle $W\pi$ -Vertexfunktion kann auch dazu verwendet werden, die korrigierte Pionzerfallskonstante $f_\pi^{(1)}$ zu berechnen. Sie ist durch

$$f_\pi^{(1)} = F_{W\pi}^{tot}(m_\pi^{(1)2}) \sqrt{Z_\pi^{(1)}} \quad (6.51)$$

gegeben, wobei $m_\pi^{(1)}$ und $Z_\pi^{(1)}$ durch Gl. (6.35) definiert sind.

Kapitel 7

Ergebnisse für das Vakuum

In diesem Kapitel werden wir einige numerische Ergebnisse diskutieren, die wir mit dem in den beiden vorangegangenen Kapiteln entwickelten Modell erhalten. Im Anschluss an die Anpassung der Modellparameter diskutieren wir die Spektralfunktionen der ρ - und a_1 -Mesonen, die sich, da wir keine Vektordominanz voraussetzen, von denen der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren unterscheiden.

7.1 Anpassung der Modellparameter

In unserer Lagrangedichte, Gl. (5.39), sind folgende „nackte“ Parameter enthalten:

$$\mu^2, \lambda^2, c, \xi, m_0^2, g, h_1, h_2 \text{ und } f.$$

Außer diesen müssen, wie bereits in Kap. 6.2 erläutert, die endlichen Anteile der Counterterme,

$$\overline{\delta Z_\Phi}, \overline{\delta\mu^2}, \overline{\delta\lambda^2}, \overline{\delta Z_Y}, \overline{\delta m_0^2}, \overline{\delta g}, \overline{\delta h_1}, \overline{\delta h_2} \text{ und } \overline{\delta f},$$

bestimmt werden. Allerdings sind nicht alle der oben aufgelisteten Parameter unabhängig voneinander: Die Kopplungskonstante f und der Counterterm $\overline{\delta f}$ sowie die Counterterme $\overline{\delta m_0^2}$ und $\overline{\delta h_2}$ treten stets in den Kombinationen $f + \overline{\delta f}$ bzw. $\overline{\delta m_0^2} + \overline{\delta h_2}\sigma_0^2$ auf. Insgesamt gibt es also 16 unabhängige Parameter.

In der Praxis ist es günstig, die nackten Parameter $\mu^2, \lambda^2, c, g, h_1$ und h_2 mit Hilfe der Gln. (5.12), (5.40), (5.42), (5.49) und (5.56) durch die physikalischeren Größen

$$m_\pi, m_\sigma, m_\rho, m_{a_1}, f_\pi, \text{ und } g_{\rho\pi\pi}^{\text{eff}}$$

auszudrücken.

Bei der Anpassung der Parameter müssen wir beachten, dass unsere Näherung nicht selbstkonsistent ist. Insbesondere zerfallen die Teilchen in Ein-Loop-Näherung in Teilchen in Baumgraphen-Näherung. Folglich müssen die Teilchen nicht erst in Ein-Loop-Näherung, sondern auch schon in Baumgraphen-Näherung die empirischen Massen haben, wenn unser Modell die Phänomenologie richtig beschreiben soll. So wird z.B. der Zerfall $a_1 \rightarrow \pi\pi\pi$ in unserem Modell durch $a_1 \rightarrow \pi\rho$, zu einem sehr geringen Anteil auch

durch $a_1 \rightarrow \pi\sigma$, modelliert. Da der a_1 -Zerfall auch in der Natur dominant über einen $\pi\rho$ -Zwischenzustand erfolgt [41], funktioniert unsere Näherung oberhalb der $\pi\rho$ -Schwelle recht gut, wenn sowohl das Pion als auch das ρ -Meson bereits in Baumgraphen-Näherung ihre physikalischen Massen haben.

Diese Forderung erinnert sehr an die Renormierungsbedingungen, die bei der strengen Renormierung einer Theorie verwendet werden, um die Counterterme festzulegen. In der Tat können wir die vier Bedingungen $m_\pi = m_\pi^{(1)}$, $m_\sigma = m_\sigma^{(1)}$, $m_\rho = m_\rho^{(1)}$ und $m_{a_1} = m_{a_1}^{(1)}$ dazu verwenden, vier Counterterme zu bestimmen. Dabei stellt sich allerdings die Frage, wie die Masse eines breiten Teilchens zu definieren ist. Wir wählen als Definitionen für $m_\sigma^{(1)}$, $m_\rho^{(1)}$ und $m_{a_1}^{(1)}$ die Energien, bei denen die Imaginärteile der jeweiligen Propagatoren maximal sind. Es wäre genauso gut möglich, die Masse als die Energie zu definieren, bei der der Realteil des Propagators seinen Nulldurchgang hat. Außer beim a_1 -Meson unterscheiden sich die beiden Definitionen nur sehr wenig, aber beim a_1 -Meson liegt der Nulldurchgang des Realteils fast 100 MeV über dem Maximum des Imaginärteils.

Außer der Pionmasse passen wir auch die Pionzerfallskonstante an ihren empirischen Wert $f_\pi = 93$ MeV an, und verlangen außerdem $f_\pi = f_\pi^{(1)}$. Diese Renormierungsbedingung wird bei der Anwendung des Modells auf endliche Temperaturen von Nutzen sein, bei denen die Effekte von thermischen Pionen in Baumgraphen-Näherung dominiert werden. In der Literatur findet man hingegen sehr oft die Forderung, dass die Tadpole-Korrektur verschwinden müsse [74]. Diese Bedingung ist ungefähr gleichbedeutend mit der Bedingung $f_\pi = f_\pi^{(1)}$ und würde lediglich zu einer Diskrepanz von etwa 2% zwischen f_π und $f_\pi^{(1)}$ führen.

Um die Masse und Breite des ρ -Mesons anzupassen, verwenden wir wie in Kap. 1.2 die $\pi\pi$ -Streuphasen im Kanal $I = 1$, $J = 1$ und den elektromagnetischen Formfaktor des Pions. Mit letzterem eng verbunden ist die von der ALEPH-Kollaboration [42] gemessene Spektralfunktion des Vektor-Korrelators, $v_1(q^2)$. Zur Anpassung der Parameter des a_1 -Mesons verwenden wir die ebenfalls von der ALEPH-Kollaboration gemessene Spektralfunktion des Axialvektor-Korrelators, $a_1(q^2)$. Dies ist wesentlich zuverlässiger, als die Werte für Massen und Breiten aus Ref. [48] zu übernehmen, die größtenteils auf dem Modell von Isgur et al. [75] oder anderen Modellen basieren und daher auf unser Modell nicht ohne weiteres übertragen werden können. Im Gegensatz zur ρ - und a_1 -Masse ist die σ -Masse praktisch nicht durch experimentelle Daten eingeschränkt. Wir werden unsere Rechnungen daher mit zwei verschiedenen Werten durchführen, nämlich mit 600 MeV und 800 MeV.

Wir kommen nun zu einigen Details der Anpassungsprozedur. Wir beginnen mit der Festlegung der Massen und der Pionzerfallskonstante in Baumgraphen- und Ein-Loop-Näherung. Dadurch sind bereits zehn Parameter festgelegt. Die Breite des ρ -Mesons hängt dann noch von zwei Parametern ab, nämlich von $g_{\rho\pi\pi}^{\text{eff}}$ und $\overline{\delta Z}_Y$. Der letztere beeinflusst auch die Breite des a_1 -Mesons, die, wenn die Massen in Baumgraphen-Näherung festgehalten werden, von keinem anderen Parameter mehr merklich abhängt. Folglich können $g_{\rho\pi\pi}^{\text{eff}}$ und $\overline{\delta Z}_Y$ durch Anpassung der Breiten von $v_1(q^2)$ und $a_1(q^2)$ bestimmt werden. Anschließend wird der Wert des Maximums von $v_1(q^2)$ mit dem Parameter $f + \overline{\delta f}$ eingestellt. Das Maximum von $a_1(q^2)$ kann dann mit Hilfe von $\overline{\delta g}$ angepasst werden. Davon werden allerdings wegen des πa_1 -Mixings auch etliche der anderen Parameter beeinflusst, die dann

entsprechend korrigiert werden müssen. Zu einer vollständigen Bestimmung der 16 Parameter fehlen nun noch zwei Bedingungen. Wir könnten also z.B. die Parameter ξ und m_0 beliebig vorgeben.

Der Parameter ξ stellt eine Art Abschneideparameter für die Impulse der longitudinal polarisierten Vektormesonen dar. Wir setzen willkürlich $\xi = 0.1$, so dass die Massen der longitudinal polarisierten Vektormesonen $\gtrsim 2$ GeV sind, also noch im Bereich hadronischer Skalen liegen, aber noch nicht zu unphysikalischen Schwellen im von uns betrachteten Energiebereich führen.

Die Größe m_0 kann als die Masse der Vektormesonen in der chiral restaurierten Phase angesehen werden. Interessanterweise kann der Wert dieses Parameters teilweise durch die experimentellen oberen Grenzen für das Verzweigungsverhältnis $a_1 \rightarrow \pi\sigma$ eingeschränkt werden. Die $a_1\pi\sigma$ -Vertexfunktion $\Gamma_{a_1\pi\sigma}$ hängt auf folgende Weise mit m_0 zusammen: $\Gamma_{a_1\pi\sigma}$ hat zwei Beiträge, die den Diagrammen 5.2 (a) und (b) entsprechen, wenn man die auslaufenden ρ -Meson-Linien jeweils durch σ -Meson-Linien ersetzt. Die Summe der beiden Diagramme ergibt

$$\left(\Gamma_{a_1\pi\sigma}^{(a+b)}\right)_{ab}^\mu = -g\delta_{ab} \left(\frac{m_0^2 - \xi k^2}{m_{a_1}^2 - \xi k^2} 2k^\mu + q^\mu \right). \quad (7.1)$$

Für transversal polarisierte a_1 -Mesonen trägt der q^μ -Term nichts bei. Für $\xi m_\pi^2 \ll m_{a_1}^2$ ist also die partielle Zerfallsbreite $a_1 \rightarrow \pi\sigma$ proportional zu m_0^4 . Wegen der direkten $W\pi\sigma$ -Kopplung (in den ersten vier Diagrammen in Abb. 6.10) hat die axialvektorielle Spektralfunktion $a_1(q^2)$ aber auch für $m_0 = 0$ noch kleine $\pi\sigma$ -Beiträge.

Es zeigt sich, dass wir für $m_0 \lesssim 400$ MeV vernünftige Ergebnisse für $a_1(q^2)$ erhalten. Ein besonders interessanter Fall ist $m_0 = 0$, der, jedenfalls in Baumgraphen-Näherung, einer verschwindenden Vektormesonmasse in der restaurierten Phase entspricht („Brown-Rho-Szenario“ [15]). Aus diesem Grund werden wir im Folgenden Ergebnisse für $m_0 = 0$ und $m_0 = 400$ MeV zeigen. Zusammen mit den beiden Werten für die σ -Masse, $m_\sigma = 600$ MeV und $m_\sigma = 800$ MeV, ergibt das vier verschiedene Parametersätze (Fit A bis Fit D), die in Tabelle 7.1 aufgelistet sind.

Wie bereits in Kap. 6.2 erklärt wurde, kann der Skalenparameter Λ willkürlich gewählt werden, da die Abhängigkeit der Ergebnisse von Λ in den endlichen Anteilen der Counterterme absorbiert werden kann. Andererseits sind die numerischen Zahlenwerte für die endlichen Anteile der Counterterme nur dann aussagekräftig, wenn der Wert von Λ bekannt ist, und aus diesem Grunde haben wir ihn in Tabelle 7.1 angegeben.

7.2 ρ -Meson und Vektor-Korrelator im Vakuum

Wir werden nun die Ergebnisse diskutieren, die wir mit den gerade bestimmten Parametersätzen (Tabelle 7.1) für das ρ -Meson bzw. dem Vektor-Korrelator erhalten. Dazu beginnen wir mit dem ρ -Propagator G_ρ , dessen Real- und Imaginärteil für die Parametersätze A und D auf der linken Seite von Abb. 7.1 gezeigt ist. Durch die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Anpassungsprozedur sehen die mit den beiden Parametersätze A und D erhaltenen Propagatoren sehr ähnlich aus. Die nicht abgebildeten Ergebnisse für die Parametersätze B und C liegen zwischen den gezeigten Kurven.

		Fit A	Fit B	Fit C	Fit D
vorgegeben	m_π / MeV	140	140	140	140
	m_σ / MeV	600	600	800	800
	f_π / MeV	93	93	93	93
	ξ	0.1	0.1	0.1	0.1
	m_0 / MeV	0	400	0	400
	Λ / MeV	1000	1000	1000	1000
bestimmt durch Anpassung von v_1 und a_1 und aus Renormierungsbe- dingungen	m_ρ / MeV	767	767	767	767
	m_{a_1} / MeV	1064	1062	1056	1054
	$g_{\rho\pi\pi}^{\text{eff}}$	7.63	7.77	7.92	7.97
	$(f + \overline{\delta f})$	0.076	0.078	0.083	0.084
	$\overline{\delta Z}_\Phi$	-9.36	-9.30	-8.48	-8.56
	$\overline{\delta \mu}^2 / \text{MeV}^2$	6666 ²	3873 ²	6211 ²	3522 ²
	$\overline{\lambda}^2$	-3147	-1421	-2671	-1221
	$\overline{\delta Z}_Y$	0.260	0.064	0.069	-0.056
	$(\overline{\delta m}_0^2 + \overline{\delta h}_2 \sigma_0^2) / \text{MeV}^2$	2352 ²	2197 ²	2245 ²	2128 ²
	$\overline{\delta h}_1$	20.1	14.9	15.4	9.11
$\overline{\delta g}$	33.7	32.5	29.3	29.0	
berechnet aus den oben angegebenen Parametern	σ_0 / MeV	150.9	152.5	153.7	154.1
	$m_{\pi 0} / \text{MeV}$	86.1	85.3	84.6	84.4
	λ^2	7.74	7.58	13.4	13.3
	c / MeV^3	103.8 ³	103.5 ³	103.2	103.1
	g	5.55	5.52	5.47	5.45
	h_1	23.9	23.2	22.3	22.0
	h_2	25.8	18.4	24.9	18.0
$-i\overline{T}/m_\sigma^2 / \text{MeV}$	9.80	14.40	7.65	10.82	

Tabelle 7.1: Modellparameter und daraus abgeleitete Größen in vier verschiedenen Parametersätzen.

Dass der ρ -Propagator den richtigen Verlauf hat, sieht man durch Vergleich der Streuphasen im Kanal $I = 1, J = 1$, die in der Nähe der ρ -Resonanz über Gl. (1.16) direkt mit dem ρ -Propagator zusammenhängen, mit den experimentellen Daten. Die Übereinstimmung ist bis zu einer Schwerpunktsenergie $M_{\pi\pi}$ von etwa 1 GeV sehr gut, wie auf der rechten Seite von Abb. 7.1 zu sehen ist. Die vier Parametersätze A bis D ergeben für die Streuphasen praktisch identische Ergebnisse.

Da die Strom-Feld-Identität in unserem Modell nicht erfüllt ist, ist der elektromagnetische Formfaktor des Pions nicht mehr einfach durch Gl. (1.15) gegeben, sondern es muss auch die direkte Kopplung des Photons an das Pion berücksichtigt werden. Deshalb ist der elektromagnetische Formfaktor nun durch

$$F_\pi(q^2) = 1 + \frac{q^2 F_{\gamma\rho}(q^2) g_{\rho\pi\pi}^{\text{eff}}}{q^2 - m_\rho^2 - \Sigma_\rho^t(q^2)} \quad (7.2)$$

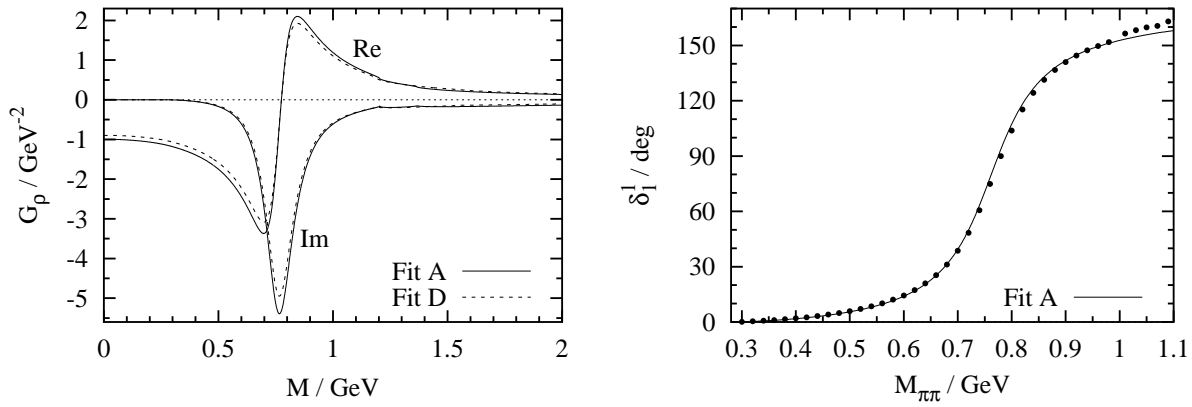


Abbildung 7.1: Links: Real- und Imaginärteil des ρ -Propagators als Funktion von $M = \sqrt{q^2}$ für die in Tabelle 7.1 angegebenen Parametersätze A und D. Rechts: $\pi\pi$ -Streuphasen im Kanal $J = 1, I = 1$ für Parametersatz A. Die drei anderen Parametersätze ergeben praktisch dasselbe Ergebnis. Die Datenpunkte wurden aus Ref. [54] entnommen.

gegeben. Die linke Seite von Abb. 7.2 zeigt die mit den Parametersätzen A und D erhaltenen Ergebnisse zusammen mit den experimentellen Daten, im Gegensatz zu Abb. 1.2 in logarithmischer Auftragung, damit man das Verhalten bei hohen q^2 besser erkennen kann. Bis auf die kleine, durch $\rho\omega$ -Mixing verursachte Struktur bei $q^2 = 0.61 \text{ GeV}^2$ werden die Daten bis zu $q^2 \approx 1.5 \text{ GeV}^2$ (Fit D) oder sogar noch höher (Fit A) gut wiedergegeben.

Auf der rechten Seite von Abb. 7.2 zeigen wir unsere Ergebnisse für die vektorielle Spektralfunktion $v_1(q^2)$. Die Datenpunkte stammen von der ALEPH-Kollaboration [42] und wurden durch Untersuchung von τ -Zerfällen erhalten. Im Resonanzbereich werden die Daten hervorragend beschrieben, aber im Kontinuumsbereich oberhalb von $q^2 \approx 1 \text{ GeV}^2$ erhalten wir nur einen kleinen Anteil der im Experiment beobachteten Stärke. Dies ist darauf zurückzuführen, dass oberhalb von 1 GeV^2 Vier-Pion-Kanäle wichtig werden. Diese sind in unserem Modell in Form von πa_1 -, $\sigma\rho$ - und $\rho\rho$ -Kanälen teilweise enthalten. Die Schwelle für den $\sigma\rho$ -Kanal, die für die Parametersätze A und D bei $q^2 = 1.87 \text{ GeV}^2$ bzw. 2.46 GeV^2 liegt, ist gut sichtbar. Der $\rho\rho$ -Kanal liefert oberhalb von 2.35 GeV^2 ebenfalls einen beträchtlichen Beitrag. Nur der πa_1 -Kanal tritt fast gar nicht auf. Das ist auf den ersten Blick überraschend, da dieser Kanal bei hohen hohen Energien einen wichtigen Beitrag zur ρ -Meson-Spektralfunktion darstellt (der kleine Knick, den man in der linken Hälfte von Abb. 7.1 bei 1.2 GeV erkennen kann, stammt von der $\pi\rho$ -Schwelle). In der vektoriellen Spektralfunktion tritt jedoch destruktive Interferenz der Amplituden ($\gamma \rightarrow \pi a_1$) und ($\gamma \rightarrow \rho \rightarrow \pi a_1$) auf. Da es für die $\sigma\rho$ - und $\rho\rho$ -Kanäle nur jeweils eine Amplitude gibt, nämlich ($\gamma \rightarrow \rho \rightarrow \sigma\rho$) und ($\gamma \rightarrow \rho\rho$), kommt es in diesen Kanälen nicht zu Interferenzen.

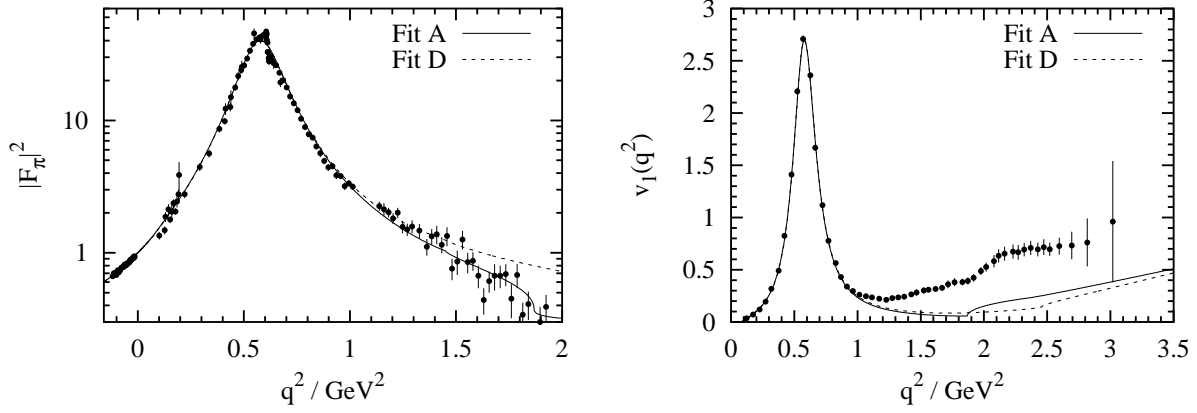


Abbildung 7.2: Links: Elektromagnetischer Formfaktor des Pions für die Parametersätze A und D aus Tabelle 7.1. Die Ergebnisse für die Parametersätze B und C liegen zwischen den abgebildeten Kurven. Die Daten stammen aus Ref. [52, 53]. Rechts: Vektorielle Spektralfunktion $v_1(q^2)$ zusammen mit Daten aus Ref. [42].

7.3 a_1 -Meson und Axialvektor-Korrelator im Vakuum

Vor der präzisen Untersuchung der τ -Zerfalls durch die ALEPH-Kollaboration [42] waren die experimentellen Daten über die Eigenschaften des a_1 -Mesons und des Axialvektor-Korrelators relativ unsicher und zum Teil auch widersprüchlich. Auch im aktuellen „Review of Particle Properties“ [48] sind die Masse und vor allem die Breite des a_1 -Mesons mit relativ großen Fehlern angegeben: $m_{a_1} = 1230 \pm 40 \text{ MeV}$ und $\Gamma_{a_1} = 250$ bis 600 MeV . Allerdings wurde in Ref. [75] darauf hingewiesen, dass die Diskrepanzen der Daten zu einem großen Teil auf die unterschiedlichen Parametrisierungen des a_1 -Propagators zurückzuführen sind, die bei den Datenanalysen verwendet wurden. Bei der Untersuchung hadronischer Reaktionen besteht eine zusätzliche Unsicherheit in der Parametrisierung des Untergrundes. Diese Problematik sollte man stets bedenken, wenn man die modellabhängigen Parameter m_{a_1} und Γ_{a_1} aus Ref. [48] übernimmt. Wir haben es deshalb vorgezogen, die axialvektorielle Spektralfunktion $a_1(q^2)$ selbst anzupassen, und unsere Parameter nicht auf die in Ref. [48] angegebenen Werte einzuschränken.

Real- und Imaginärteil des resultierenden transversalen a_1 -Propagators sind in der linken Hälfte von Abb. 7.3 dargestellt. Definieren wir die a_1 -Masse über das Maximum der a_1 -Spektralfunktion ($\propto -\text{Im } G_{a_1}^t$), so erhalten wir die relativ niedrigen, in Tabelle 7.1 angegebenen Werte. Nach der ebenfalls gebräuchlichen Definition, wonach die Masse die Nullstelle von $\text{Re } G_{a_1}^t$ bezeichnet, würden sich deutlich höhere Werte zwischen $m_{a_1} = 1136 \text{ MeV}$ (Fit D) und $m_{a_1} = 1159 \text{ MeV}$ (Fit A) ergeben. Die Breite des a_1 -Mesons definieren wir als die Differenz der Massen, bei denen die Spektralfunktion die Hälfte ihres maximalen Wertes annimmt. Nach dieser Definition finden wir Breiten zwischen $\Gamma_{a_1} = 393 \text{ MeV}$ (Fit D) und $\Gamma_{a_1} = 424 \text{ MeV}$ (Fit A).

Das Ergebnis unserer Anpassung der transversalen axialvektoriellen Spektralfunktion $a_1(q^2)$ an die von der ALEPH-Kollaboration in τ -Zerfällen gemessenen Daten ist in der

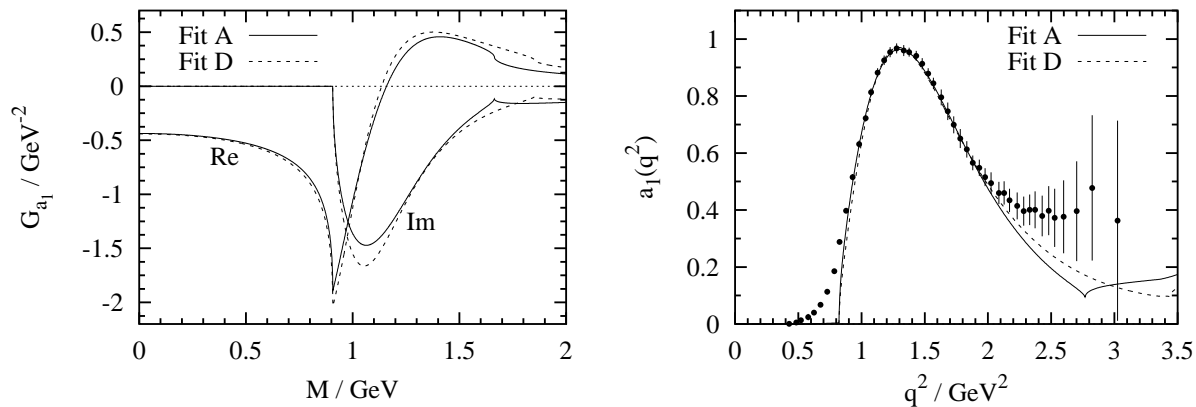


Abbildung 7.3: Links: Real- und Imaginärteil des a_1 -Propagators $G_{a_1}^t$ als Funktion von $M = \sqrt{q^2}$ für die Parametersätze A und D aus Tabelle 7.1. Die Ergebnisse für die Parametersätze B und C liegen zwischen den gezeigten Kurven. Rechts: Transversale axialvektorielle Spektralfunktion a_1 als Funktion von q^2 . Die Datenpunkte wurden aus Ref. [42] entnommen.

rechten Hälfte von Abb. 7.3 gezeigt. Im Bereich um das Maximum wird die Spektralfunktion von Drei-Pion-Zuständen dominiert, die bereits etwas oberhalb von $q^2 = (m_\pi + m_\rho)^2$, nämlich etwa ab 0.9 GeV^2 , gut durch $\pi\rho$ -Zustände mit einem scharfen ρ -Meson approximiert werden können. Deshalb wird der Bereich um das Maximum gut wiedergegeben, und die im Schwellenbereich unter 0.9 GeV^2 fehlende Stärke ist nicht sehr groß. Ab $q^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$ ergeben sich allerdings große Abweichungen, die darauf zurückzuführen sind, dass das dort beginnende Fünf-Pion-Kontinuum in unserem Modell nicht gut wiedergegeben wird. Nur ein kleiner Anteil der Fünf-Pion-Kanäle ist in unserem Modell in Form von σa_1 - und ρa_1 -Kanälen enthalten. Die σa_1 -Schwelle bei 2.77 GeV^2 (Fit A) ist im rechten Teil von Abb. 7.3 gut sichtbar.

Dass der Drei-Pion-Endzustand wirklich sehr gut durch einen $\pi\rho$ -Endzustand mit einem scharfen ρ -Meson angenähert werden kann, ist im linken Teil von Abb. 7.4 zu sehen, in dem wir die in unserem Modell berechnete sowie die von der ARGUS-Kollaboration [41] gemessene Verteilung der invarianten Massen der drei Pionen aus dem Zerfall $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \nu_\tau$ zeigen. In unserem Modell ist das $\pi^- \pi^- \pi^+$ -Spektrum durch $1/2$ mal das $\pi\rho$ -Spektrum und $2/3$ mal das $\pi\sigma$ -Spektrum gegeben. Eine ausführliche Beschreibung, wie die Kurven in Abb. 7.4 berechnet wurden, ist im Anhang zu finden. Der Anteil des $\pi\sigma$ -Kanals am integrierten Spektrum liegt zwischen 1.3% (Fit C) und 5.4% (Fit B), also unter den in Ref. [41] als obere Grenze angegebenen 6% .

Der Grund, warum unsere Näherung so gut funktioniert, wird aus dem rechten Teil von Abb. 7.4 klar. Dieses Bild zeigt die gemessene Verteilung der invarianten Massen der $\pi^+ \pi^-$ -Paare im Zerfall $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \nu_\tau$ (Punkte; zwei Einträge pro Zerfall) im Vergleich mit der gemessenen Verteilung der invarianten Massen der $\pi^- \pi^-$ -Paare (Kreuze). Man erkennt, dass die Verteilung der $\pi^+ \pi^-$ -Paare in sehr guter Näherung der Summe der $\pi^- \pi^-$ -Verteilung und einer um die ρ -Masse konzentrierten Verteilung entspricht, woraus man schließen kann, dass das positiv geladene und eines der beiden negativ geladenen Pionen aus einem ρ^0 -Zwischenzustand stammen. Dass die $\pi^+ \pi^-$ -Verteilung bei niedrigen

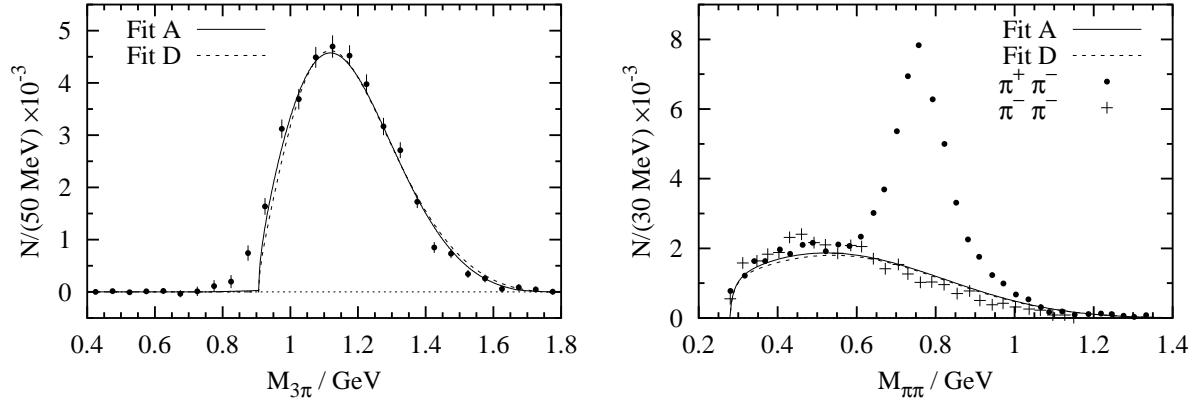


Abbildung 7.4: Links: Verteilung der invarianten Massen der drei Pionen im Zerfall $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \nu_\tau$ für die Parametersätze A und D aus Tabelle 7.1. Rechts: Verteilung der invarianten Massen der $\pi^- \pi^-$ -Paare (theoretische Kurven und Kreuze) sowie der $\pi^+ \pi^-$ -Paare (Punkte) im Zerfall $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \nu_\tau$. Die Daten stammen aus Ref. [41].

invarianten Massen etwas unter der $\pi^- \pi^-$ -Verteilung liegt, ist eine Folge der destruktiven Interferenz der beiden Amplituden, die man durch Vertauschen der beiden Pionen im Endzustand erhält. In unserem Modell sind dagegen die Verteilungen der $\pi^+ \pi^-$ -Paare und der $\pi^- \pi^-$ -Paare bis auf eine δ -Funktion bei $M_{\pi\pi} = m_\rho$ (und eine wesentlich schwächere bei $M_{\pi\pi} = m_\sigma$) identisch, da unser Modell weder die Breite des ρ -Meson-Zwischenzustandes noch den Interferenzterm enthält. Das aus unserem Modell folgende $\pi^- \pi^-$ -Spektrum ist ebenfalls im rechten Teil von Abb. 7.4 dargestellt, sie stimmt gut mit der gemessenen überein.

Bisher haben wir nur den transversalen Anteil des Axialvektor-Korrelators betrachtet. Da der Axialvektorstrom aber nicht erhalten ist, hat der axiale Korrelator im Gegensatz zum Vektor-Korrelator auch eine longitudinale Komponente. Diese hat einen Pol bei der Pionmasse $m_\pi^{(1)}$, dessen Residuum nach Gl. (6.50) und (6.51) durch $4\pi^2 f_\pi^{(1)2}$ gegeben ist. Folglich gilt für die longitudinale Spektralfunktion

$$a_0(q^2) = 4\pi^2 f_\pi^2 \delta(q^2 - m_\pi^2) + \tilde{a}_0(q^2), \quad (7.3)$$

wobei $\tilde{a}_0(q^2)$ den Beitrag der Mehrteilchen-Kanäle bezeichnet. Den Index „(1)“ für Größen mit Loop-Korrekturen haben wir in Gl. (7.3) weggelassen, da wir bei der Anpassung der Modellparameter die Bedingungen $m_\pi^{(1)} = m_\pi$ und $f_\pi^{(1)} = f_\pi$ erfüllt haben.

Wie in Gl. (6.50) angegeben, besteht die longitudinale W -Boson-Selbstenergie aus drei Termen. Die entsprechenden Beiträge zu $\tilde{a}_0(q^2)$ sind in Abb. 7.5 gezeigt. Der erste Term ergibt einen positiven Beitrag, während die anderen Terme Interferenzen verschiedener Amplituden enthalten und deshalb negativ sind. Die Summe ist natürlich positiv, aber um einen Faktor 10^{-4} kleiner als der erste Term und deshalb in Abb. 7.5 nicht von null zu unterscheiden. Für einen quantitativen Vergleich integrieren wir die Stärke von $\tilde{a}_0(q^2)$ bis zu $m_\tau = 1777$ MeV. Mit dem Parametersatz A aus Tabelle 7.1 finden wir z.B. $\int_0^{m_\tau^2} dq^2 \tilde{a}_0(q^2) = 75$ MeV². Im Vergleich hierzu hat die δ -Funktion des Ein-Pion-Beitrags die Stärke $4\pi^2 f_\pi^2 = 0.34$ GeV².

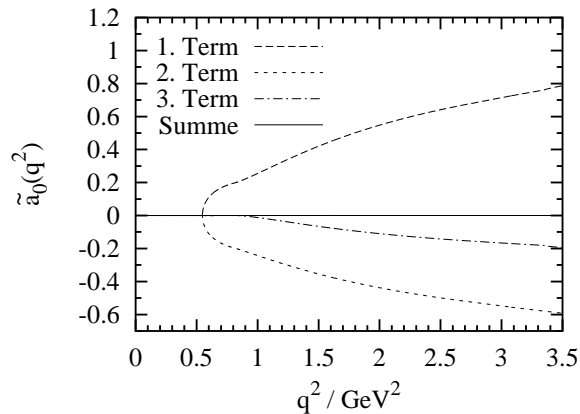


Abbildung 7.5: Mehrteilchen-Beiträge zur longitudinalen axialvektoriellen Spektralfunktion $\tilde{a}_0(q^2)$, Berechnet mit dem Parametersatz A aus Tabelle 7.1. Zur Bedeutung der drei Terme siehe Gl. (6.50).

Die Tatsache, dass $\tilde{a}_0(q^2)$ vernachlässigbar klein ist, entspricht gerade der PCAC-Hypothese („Partially Conserved Axial Current“). Diese wird gewöhnlich in der Form

$$\partial^\mu \vec{j}_\mu^5 = f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi} \quad (7.4)$$

formuliert. Auf Baumgraphen-Ebene kann man diese Gleichung für den zu den axialen Transformationen $e^{i\vec{\beta}\cdot\vec{T}^5}$ gehörenden Noetherstrom leicht verifizieren, da in unserer Lagrangedichte nur der Term $c\sigma$ die chirale Symmetrie explizit bricht. Geht man jedoch über die Baumgraphen-Näherung hinaus, so hat Gl. (7.4) keine wohldefinierte Bedeutung mehr, da dann der Pion-Feldoperator π_a nichtverschwindende Matrixelemente $\langle f|\pi_a|0\rangle$ nicht nur für Ein-Pion-Zustände $|f\rangle$ hat, sondern auch für Mehrteilchen-Zustände, z.B. in unserem Modell für $\pi\sigma$ -, $\pi\rho$ -, $a_1\sigma$ - und $a_1\rho$ -Zustände. Weinberg wies deshalb darauf hin, dass die PCAC-Hypothese besser so interpretiert werden sollte, dass die Spektralfunktion $\tilde{a}_0(q^2)$, die direkt mit dem Mehrteilchen-Anteil von $\partial^\mu j_{\mu a}^5|0\rangle$ zusammenhängt, vernachlässigbar ist [76]. Dies ist in unserem Modell offensichtlich sehr gut erfüllt.

7.4 Der σ -Propagator

Ein generelles Problem aller Modell mit linear realisierter chiraler Symmetrie besteht darin, dass diese ein auf Baumgraphen-Ebene scharfes skalares isoskalares Teilchen vorher sagt, welches experimentell nicht gefunden wurde. Allerdings enthält der neueste „Review of Particle Properties“ [48] ein Meson mit diesen Quantenzahlen, welches unter dem Namen „ $f_0(400 - 1200)$ oder σ “ aufgeführt wird. Dieses Teilchen hat durch seinen Zerfall in zwei Pionen eine sehr große Breite (fast so groß wie die Masse). Da unser Modell den Graphen $\sigma \rightarrow \pi\pi$ enthält (erstes Diagramm in Abb. 6.2), sollte man denken, dass es möglich ist, das breite σ -Meson zufriedenstellend zu beschreiben. Leider ist dies aus den folgenden Gründen nicht der Fall:

Der $\sigma\pi\pi$ -Vertex hat analog zum $\rho\pi\pi$ -Vertex im geeichten linearen σ -Modell (Abb. 5.1) vier Beiträge. Diese Amplituden interferieren destruktiv. Für auslaufende Pionen auf der

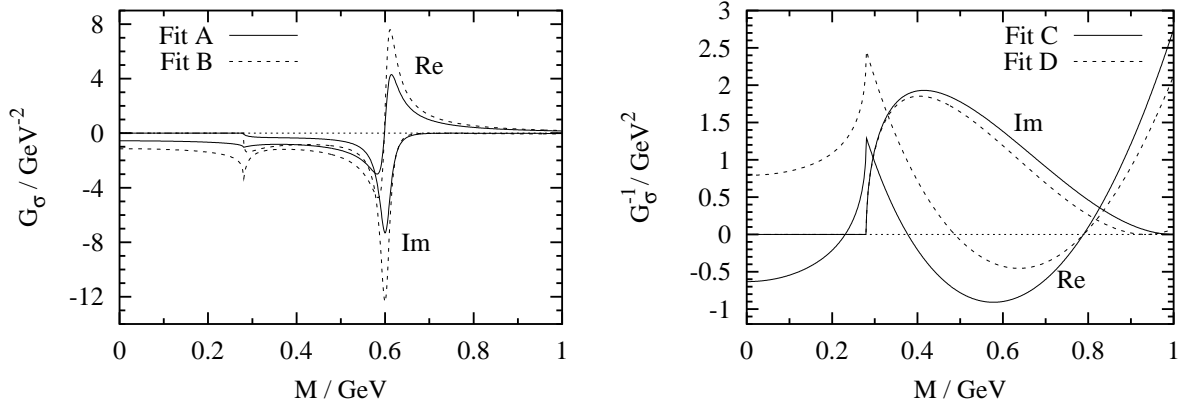


Abbildung 7.6: Links: Real- und Imaginärteil des σ -Propagators für die Parametersätze A und B aus Tabelle 7.1. Rechts: Real- und Imaginärteil des inversen σ -Propagators für die Parametersätze C und D.

Massenschale hat die gesamte Vertexfunktion bei einer bestimmten invarianten Masse M des σ -Mesons eine Nullstelle. Für die Parametersätze A und B aus Tabelle 7.1 liegt diese Nullstelle bei 754 MeV bzw. 705 MeV. Das liegt zwar oberhalb der σ -Masse in Baumgraphen-Näherung, $m_\sigma = 600$ MeV, aber die Amplitude ist für $M \approx m_\sigma$ bereits sehr klein. Ko und Rudaz [69] hatten gehofft, dass dieser Effekt die Beschreibung des σ -Mesons verbessern würde, da sie davon ausgingen, dass die σ -Breite im linearen σ -Modell viel zu groß sei. Jetzt ist die Breite allerdings zu klein, wie auf der linken Seite von Abb. 7.6 zu sehen ist. Dort sind Real- und Imaginärteil des σ -Propagators für die Parametersätze A und B dargestellt. Die unterschiedlichen Normierungen resultieren daraus, dass wir den Counterterm $\delta\overline{Z}_\Phi$ an Pion-Daten und nicht an den σ -Propagator angepasst haben.

Ein anderes Problem kommt daher, dass die σ -Selbstenergie im Bereich der Zwei-Pion-Schwelle im allgemeinen stark attraktiv, d.h. negativ ist. Da die $\sigma\pi\pi$ -Vertexfunktion bei niedrigen q^2 vom gewöhnlichen Vertex $\propto \lambda^2\sigma_0$ aus dem linearen σ -Modell dominiert wird, mit $\lambda^2 \propto m_\sigma^2 - m_{\pi^0}^2$, wird dieser Effekt umso stärker, je größer die σ -Masse ist, und ist folglich mit den Parametersätzen C und D am stärksten ausgeprägt. Im Fall von Parametersatz C erhalten wir aufgrund dieses Effekts einen gebundenen Zwei-Pion-Zustand, und mit Parametersatz D hat der σ -Propagator bei niedrigen M sogar das verkehrte Vorzeichen und einen Pol in der komplexen Ebene. Zur Veranschaulichung haben wir den inversen σ -Propagator für diese beiden Parametersätze in der rechten Hälfte von Abb. 7.6 gezeigt.

Offensichtlich kann das σ -Meson im Rahmen einer Ein-Loop-Rechnung nicht beschrieben werden, da sich der an der Schwelle schnell anwachsende Imaginärteil der Selbstenergie zwangsläufig in der gerade beschriebenen Weise auf den Realteil auswirkt. Die nichtperturbativen Effekte im vollen $\sigma\pi\pi$ -Vertex können also nicht das Verhalten von Formfaktoren haben, die hohe Impulse abschneiden, da diese den Imaginärteil an der Schwelle überhaupt nicht beeinflussen. Eine mögliche Lösung scheint in der Verwendung des nichtperturbativen RPA-Schemas zu liegen, mit dem im linearen σ -Modell eine gute Beschreibung des σ -Mesons erreicht werden kann [77]. In diesem Schema ist die volle $\sigma\pi\pi$ -Vertexfunktion durch bis in beliebige Ordnungen aufsummierte $\pi\pi$ -Loops gegeben, so dass sie, ganz an-

ders als bei der Verwendung eines Formfaktors, besonders im Schwellenbereich von einer Konstanten abweicht. Dadurch gelingt es, die Attraktion der Selbstenergie an der Schwelle erheblich zu verringern. Im linearen σ -Modell konnte so eine gute Beschreibung des σ -Mesons erreicht werden. Die Anwendung des RPA-Schemas auf unsere Lagrangedichte wäre jedoch extrem schwierig. Andererseits sind wir in erster Linie an der Beschreibung der Vektormesonen interessiert, und dafür scheint die Ein-Loop-Rechnung ausreichend zu sein.

Kapitel 8

Ergebnisse für endliche Temperaturen

Die Motivation zur Entwicklung des in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Modells bestand u.a. darin, dass das Modell zur Berechnung von Dileptonenspektren heißer Materie verwendet werden sollte. Insbesondere herrscht großes Interesse an der Frage, in welcher Weise sich der chirale Phasenübergang und die partielle Wiederherstellung der chiralen Symmetrie auf die Spektren auswirken. Zur Beantwortung dieser Frage muss die vektorielle Korrelationsfunktion in einem chiral symmetrischen Modell bei endlicher Temperatur berechnet werden.

In diesem Kapitel werden wir zunächst durch Berechnung des Erwartungswertes des σ -Feldes als Funktion der Temperatur zeigen, dass unser Modell Effekte der partiellen Wiederherstellung der chiralen Symmetrie richtig wiedergibt. Den chiralen Phasenübergang können wir jedoch nicht beschreiben, da unser Schema die Temperatureffekte nur perturbativ berücksichtigt. Anschließend untersuchen wir das Verhalten des Vektor-Korrelators bei endlicher Temperatur. Um der Frage nach der Vermischung der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren nachzugehen, betrachten wir anschließend auch das Temperaturverhalten des Axialvektor-Korrelators.

8.1 Das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ bei endlicher Temperatur

Der Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$ des (unverschobenen) σ -Feldes ($\sigma = \sigma_{alt}$) kann als Ordnungsparameter der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie angesehen werden, da er in der Phase mit gebrochener Symmetrie, $T < T_c \approx 170$ MeV [3], einen endlichen Wert hat und in der Phase mit vollständig wiederhergestellter Symmetrie, $T > T_c$, verschwinden muss. Da die chirale Symmetrie aber in der Natur auch explizit gebrochen ist, gibt es keinen wirklichen Phasenübergang, und $\langle\sigma\rangle$ verschwindet auch bei sehr hohen Temperaturen nicht vollständig.

Der Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$ kann auch mit dem Quarkkondensat $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ der QCD in Verbindung gebracht werden. Der symmetriebrechende Anteil der QCD-Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{QCD, sb} = -m_q \bar{\psi}\psi, \quad (8.1)$$

wobei m_q die Stromquarkmasse bezeichnet. Bilden wir nun den Erwartungswert, so erhalten wir $\langle \mathcal{L}_{QCD, sb} \rangle = -m_q \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, während sich in unserem Modell $\langle \mathcal{L}_{sb} \rangle = c\langle \sigma \rangle$ ergibt. Wir können also $\langle \sigma \rangle$ mit $-(m_q/c)\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ identifizieren. Mit einer mittleren Quarkmasse von $m_q \approx (m_u + m_d)/2 \approx 7.5$ MeV [78] erhalten wir dann z.B. für den Parametersatz A aus Tabelle 7.1 einen Wert von $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx -2(224 \text{ MeV})^3$, der hervorragend mit dem aus QCD-Summenregeln bestimmten Wert $-2[(229 \pm 9) \text{ MeV}]^3$ [78] übereinstimmt.

Indem wir die in Kap. 6 gezeigten Diagramme mit Hilfe des im Anhang beschriebenen Programms auch bei endlicher Temperatur berechnen, können wir untersuchen, wie sich $\langle \sigma \rangle$ im Rahmen unseres Modells als Funktion der Temperatur ändert. In Ein-Loop-Näherung gilt

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 - \frac{iT}{m_\sigma^2} =: \sigma_0 + \Delta\sigma_0, \quad (8.2)$$

wobei T die Tadpole-Graphen aus Abb. 6.1 (b) bezeichnet. Um Verwechslungen mit der ebenfalls mit dem Buchstaben T abgekürzten Temperatur zu vermeiden, werden wir in diesem Kapitel die Größe $\Delta\sigma_0$ verwenden.

Bei der Bestimmung der Counterterme haben wir nicht gefordert, dass $\Delta\sigma_0$ verschwindet, sondern dass sich die Pionzerfallskonstante f_π in Ein-Loop-Näherung im Vergleich zur Baumgraphen-Näherung nicht ändert. Folglich hat $\langle \sigma \rangle$ in Ein-Loop-Näherung einen leicht von σ_0 verschiedenen Wert. Die Werte, die sich mit den Parametersätzen A bis D für $\Delta\sigma_0$ im Vakuum ergeben, sind in der letzten Zeile von Tabelle 7.1 angegeben.

Bei endlicher Temperatur zerlegen wir $\Delta\sigma_0$ in einen Vakuum- und einen Medium-Anteil, d.h. wir schreiben

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 + \Delta\sigma_{0 \text{ Vak}} + \Delta\sigma_{0 \text{ Med}}. \quad (8.3)$$

Wie im Anhang beschrieben, ist es möglich, den Medium-Anteil der Diagramme auf ein Integral über $|\vec{k}|$ zurückzuführen. Für die Diagramme aus Abb. 6.1 (b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{0 \text{ Med}} = & -\frac{3\sigma_0}{2\pi^2 m_\sigma^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \left[\lambda^2 \frac{n_\sigma}{\omega_\sigma} + 3h_2 \frac{n_\rho}{\omega_\rho} + \frac{h_2}{\xi} \frac{n_{\rho l}}{\omega_{\rho l}} + 3(h_1 + h_2) \frac{n_{a_1}}{\omega_{a_1}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^2 \left(\lambda^2 Z_{\pi i} - m_{\pi i}^2 (h_1 + h_2) Z_{a_1 i} - m_{\pi i}^2 g \frac{Z_{\pi a_1 i}}{\sigma_0} \right) \frac{n_{\pi i}}{\omega_{\pi i}} \right], \end{aligned} \quad (8.4)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\omega_a = \sqrt{m_a^2 + \vec{k}^2}, \quad n_a = \frac{1}{e^{\omega_a/T} - 1}, \quad m_{\rho l} = \frac{m_\rho}{\sqrt{\xi}} \quad (8.5)$$

verwendet haben.

Zumindest bei niedrigen Temperaturen liefern die Pionen, die mit Abstand am leichtesten angeregt werden können, den größten Beitrag zum Medium-Anteil. Im chiralen Limes, d.h. für $c = 0$ und folglich $m_\pi = 0$, kann man diesen sogar analytisch berechnen.

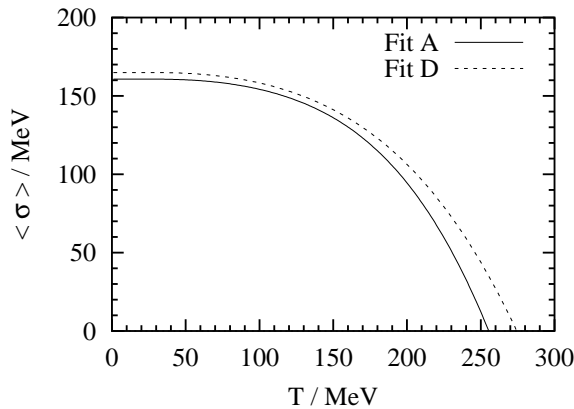


Abbildung 8.1: Kondensat $\langle \sigma \rangle$ als Funktion der Temperatur für die Parametersätze A und D aus Tabelle 7.1.

Durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke für m_σ , $Z_{\pi 1}$, f_π usw. in Gl. (8.4) erhalten wir für $m_\pi = 0$ und unter Vernachlässigung der zu n_σ, n_ρ usw. proportionalen Beiträge

$$\Delta\sigma_{Med} = -\frac{3\sigma_0}{4\pi^2 f_\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi} = -\frac{\sigma_0 T^2}{8f_\pi^2}. \quad (8.6)$$

Im letzten Schritt haben wir die Identität $\int_0^\infty dx x/(e^x - 1) = \pi^2/6$ verwendet. Da im chiralen Limes die für das Vakuum geforderte Bedingung $f_\pi^{(1)} = f_\pi$ nur mit $\Delta\sigma_{Vak} = 0$ erfüllt werden kann, können wir statt Gl. (8.6) schreiben

$$\langle \sigma \rangle_{T \neq 0} = \langle \sigma \rangle_{T=0} \left(1 - \frac{T^2}{8f_\pi^2} + \dots \right). \quad (8.7)$$

Unter Berücksichtigung der Proportionalität $\langle \sigma \rangle \propto \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ ist das genau das modellunabhängige Ergebnis für das Temperaturverhalten des Quarkkondensats aus Ref. [6].

In Abb. 8.1 sind die numerischen Ergebnisse gezeigt, die wir mit den Parametersätzen A und D, also mit einer realistischen Pionmasse von $m_\pi = 140$ MeV, erhalten haben. Das Kondensat $\langle \sigma \rangle$ wird zwar mit zunehmender Temperatur kleiner, aber bei $T \approx 170$ MeV, wo man bereits den chiralen Phasenübergang erwartet [3], hat es noch nicht einmal um 25% abgenommen. Der Nulldurchgang bei $T \approx 255$ MeV (Fit A) bzw. $T = 275$ MeV (Fit D) darf nicht mit einem Phasenübergang verwechselt werden. Ein Phasenübergang kann nur mit nichtperturbativen Methoden beschrieben werden (z.B. Flussgleichungen mit Renormierungsgruppen-Verbesserung [79]).

Die wichtigste Ursache dafür, dass das Kondensat in unserem Modell zu langsam abnimmt, liegt vermutlich in der mangelnden Selbstkonsistenz. Die Teilchen, die in Gl. (8.4) die Abnahme des Kondensats hervorrufen, haben nämlich keine Breite, und ihre Massen sind durch die Baumgraphen-Näherung gegeben, also temperaturunabhängig. In einem selbstkonsistenten Modell wäre dagegen z.B. das σ -Meson am Phasenübergang genauso leicht wie das Pion und würde demzufolge den Pion-Beitrag zu $\Delta\sigma_{Med}$ um einen Faktor 4/3 verstärken (da die Pionen in drei verschiedenen Ladungszuständen auftreten). Auch die Beiträge der ρ -Mesonen wären viel größer, wenn man ihre Verbreiterung im Vakuum und aufgrund der Temperatureffekte berücksichtigen würde.

8.2 ρ -Meson und Vektor-Korrelator bei endlicher Temperatur

Wie bereits im ersten Teil dieser Arbeit erwähnt wurde, ist bei endlicher Temperatur, d.h. in einem Gas thermisch angeregter Mesonen, die Lorentz-Invarianz gebrochen, und die Selbstenergien, Propagatoren und Korrelatoren sind nicht mehr Funktionen von $q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2$, sondern von q_0 und $|\vec{q}|$. Außerdem haben wir gesehen, dass z.B. eine vierdimensional transversale Selbstenergie $\Sigma^{\mu\nu}$ in dreidimensional longitudinale und transversale Komponenten Σ^T und Σ^L zerlegt werden kann, siehe Gl. (1.40). Da die ρ -Selbstenergie jedoch in unserem chiral symmetrischen Modell nicht vierdimensional transversal ist, gibt es bei endlicher Temperatur sogar vier voneinander unabhängige Funktionen. Wenn nämlich $u^\mu = (1, \vec{0})$ die Vierergeschwindigkeit des Mediums bezeichnet, können wir die Selbstenergie in der Form $\Sigma^{\mu\nu} = Ag^{\mu\nu} + Bu^\mu u^\nu + Cq^\mu q^\nu + D(u^\mu q^\nu + q^\mu u^\nu)$ schreiben. Wenn wir unser Koordinatensystem so legen, dass \vec{q} in Richtung der z -Achse zeigt, können wir anstelle der vier Funktionen A, B, C und D auch die vier voneinander unabhängigen Komponenten $\Sigma^{00}, \Sigma^{03}, \Sigma^{11}$ und Σ^{33} angeben. Die restlichen Komponenten folgen dann aus den Beziehungen $\Sigma^{01} = \Sigma^{02} = \Sigma^{12} = \Sigma^{23} = 0, \Sigma^{22} = \Sigma^{11}$ und $\Sigma^{\mu\nu} = \Sigma^{\nu\mu}$.

Um die gerade beschriebenen Schwierigkeiten zu vermeiden, werden wir uns im folgenden auf den einfacheren Spezialfall $\vec{q} = 0$ beschränken. In diesem Fall sind die Vierervektoren u^μ und q^μ linear abhängig, und wie im Vakuum gilt Gl. (6.21), mit $\Sigma^t = \Sigma^{11} = \Sigma^{33}$ und $\Sigma^l = \Sigma^{00}$. Das im Anhang beschriebene Programm erlaubt nun die Berechnung der Medium-Anteile der retardierten Selbstenergien Σ^t und Σ^l . Um die vollen retardierten Selbstenergien zu erhalten, machen wir wie schon im ersten Teil dieser Arbeit von der Tatsache Gebrauch, dass der Vakuum-Anteil der retardierten Selbstenergie für $q_0 > 0$ mit der zeitgeordneten Selbstenergie im Vakuum identisch ist.

Bevor wir die numerischen Ergebnisse diskutieren, wollen wir erst einmal untersuchen, welche Temperatureffekte überhaupt zu erwarten sind. Dazu betrachten wir den einfachen Grenzfall verschwindender Pionmasse (chiraler Limes) und kleiner Temperaturen. Genauer gesagt betrachten wir nur Terme bis zur Ordnung T^2 . Von besonders großem Interesse ist das Verhalten der Masse des ρ -Mesons als Funktion der Temperatur, welches in erster Linie vom Realteil des Medium-Anteils der ρ -Selbstenergie, $\Sigma_{\rho Med}^t$, abhängt.

Vor allem mit den Parametersätzen A und C aus Tabelle 7.1 würde man naiv eine Abnahme der ρ -Masse als Funktion der Temperatur erwarten. Da mit dieser Wahl der Parameter die ρ -Masse m_ρ auf Baumgraphen-Ebene nur durch das Kondensat σ_0 erzeugt wird ($m_0 = 0, m_\rho = \sqrt{h_2} \sigma_0$), könnte man nämlich annehmen, dass die ρ -Masse $m_\rho^{(1)}$ in Ein-Loop-Näherung etwa proportional zum Erwartungswert $\langle \sigma \rangle = \sigma_0 + \Delta\sigma_0$ ist, der als Funktion der Temperatur abnimmt. In der Tat erzeugt der Tadpole-Beitrag (neuntes Diagramm aus Abb. 6.3) den Term

$$\Sigma_\rho^{t(Tadpole)} = 2h_2 \sigma_0 \Delta\sigma_0, \quad (8.8)$$

der, wenn es die anderen Diagramme nicht gäbe, mit zunehmender Temperatur zu einer Abnahme des Realteils führen würde, die für $\Delta\sigma_0 \ll \sigma_0$ genau dem „Brown-Rho-Szenario“ [15] $m_\rho^{(1)} = \sqrt{h_2} \langle \sigma \rangle$ entspräche.

Im chiralen Limes ($m_\pi = 0$) kann man jedoch leicht sehen, dass die Wahl des Parameters h_2 auf das Temperaturverhalten überhaupt keinen Einfluss hat. Wenn man nur die Pion-Beiträge zum Medium-Anteil berücksichtigt, tritt die Kopplungskonstante h_2 nämlich außer im Tadpole- (neuntes Diagramm aus Abb. 6.3) nur noch im $\rho\rho\pi\pi$ -Seagull-Beitrag (siebtes Diagramm aus Abb. 6.3) auf. Dessen Medium-Anteil ist durch

$$\Sigma_{\rho Med}^{t(\rho\rho\pi\pi \text{ Seagull})} = \frac{(2h_1 + 3h_2)Z_{\pi 1}}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi} \quad (8.9)$$

gegeben, mit den in Gl. (8.5) definierten Abkürzungen. Der Medium-Anteil des Tadpole-Beitrags ist hingegen (siehe Gl. (8.8) und (8.4))

$$\Sigma_{\rho Med}^{t(\text{Tadpole})} = -2h_2\sigma_0 \frac{3\lambda^2\sigma_0 Z_{\pi 1}}{2\pi^2 m_\sigma^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi}. \quad (8.10)$$

Da im chiralen Limes $m_\sigma^2 = 2\lambda^2\sigma_0^2$ gilt, heben sich die Beiträge $\propto h_2$ genau weg. Das Brown-Rho-Szenario tritt also mit keinem Parametersatz ein!

Wir haben gezeigt, dass die ρ -Masse trotz des Tadpole-Beitrags nicht nach unten verschoben wird. Stattdessen scheint es jetzt aber so, als würde der verbleibende Teil des Seagull-Beitrags ($\propto h_1$) die ρ -Masse wie im ersten Teil dieser Arbeit nach oben verschieben. Man kann jedoch zeigen, dass der repulsive Seagull-Beitrag genau vom attraktiven Realteil des πa_1 -Beitrags kompensiert wird, so dass sich die ρ -Masse überhaupt nicht ändert. Für das geeichte lineare σ -Modell, d.h. für den Spezialfall $h_1 = g^2$ und $h_2 = 0$, wurde dies schon in Ref. [47] gezeigt. Im chiralen Limes und bis zur Ordnung T^2 braucht neben den bereits diskutierten Tadpole- und $\rho\rho\pi\pi$ -Seagull-Beiträgen nur noch der πa_1 -Beitrag (zweites Diagramm in Abb. 6.3) berücksichtigt zu werden. Der $\pi\pi$ -Beitrag ist, außer für $q_0 = 0$, vernachlässigbar, da die Pionen nur in der p -Welle mit dem ρ -Meson wechselwirken können. Für $\vec{q} = 0$ erfordert das aber einen endlichen Pion-Impuls \vec{k} , der bei niedrigen Temperaturen unterdrückt ist. Unter Vernachlässigung der Besetzungszahlen n_{a_1} und höherer Potenzen des Pion-Impulses \vec{k} ist der πa_1 -Beitrag durch

$$\Sigma_{\rho Med}^{t(\pi a_1)}(q_0, \vec{0}) = \frac{h_1^2\sigma_0^2 Z_{\pi 1}}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi \omega_{a_1}} \left(\frac{\omega_{a_1} - \omega_\pi}{q_0^2 - (\omega_{a_1} - \omega_\pi)^2} + \frac{\omega_{a_1} + \omega_\pi}{q_0^2 - (\omega_{a_1} + \omega_\pi)^2} \right) \quad (8.11)$$

gegeben (zur Berechnung des Imaginärteils ist q_0 durch $q_0 + i\varepsilon$ zu ersetzen). Für Energien, die nicht gerade in der Nähe der a_1 -Masse liegen, d.h. $|q_0 - m_{a_1}| \gg T$, können wir in der Klammer die Impulse \vec{k} und wegen $m_\pi = 0$ auch die Energien ω_π der Pionen vernachlässigen und erhalten

$$\Sigma_{\rho Med}^{t(\pi a_1)}(q_0, \vec{0}) = \frac{h_1^2\sigma_0^2 Z_{\pi 1}}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi} \frac{2}{q_0^2 - m_{a_1}^2}. \quad (8.12)$$

Wir betrachten nun den Realteil der Selbstenergie speziell bei $q_0 = m_\rho$, da dadurch die Änderung der ρ -Meson-Polmasse bestimmt wird. Unter Verwendung von $m_{a_1}^2 - m_\rho^2 = h_1\sigma_0^2$ sieht man sofort, dass $\Sigma_{\rho Med}^{t(\pi a_1)}(m_\rho, \vec{0})$ gerade den h_1 -Beitrag von $\Sigma_{\rho Med}^{t(\rho\rho\pi\pi \text{ Seagull})}$, Gl. (8.9), weghebt, d.h. insgesamt gilt bis zur Ordnung T^2

$$\Sigma_{\rho Med}^t(m_\rho, \vec{0}) = \Sigma_{\rho Med}^{t(\text{Tadpole})} + \Sigma_{\rho Med}^{t(\rho\rho\pi\pi \text{ Seagull})} + \Sigma_{\rho Med}^{t(\pi a_1)}(m_\rho, \vec{0}) = 0. \quad (8.13)$$

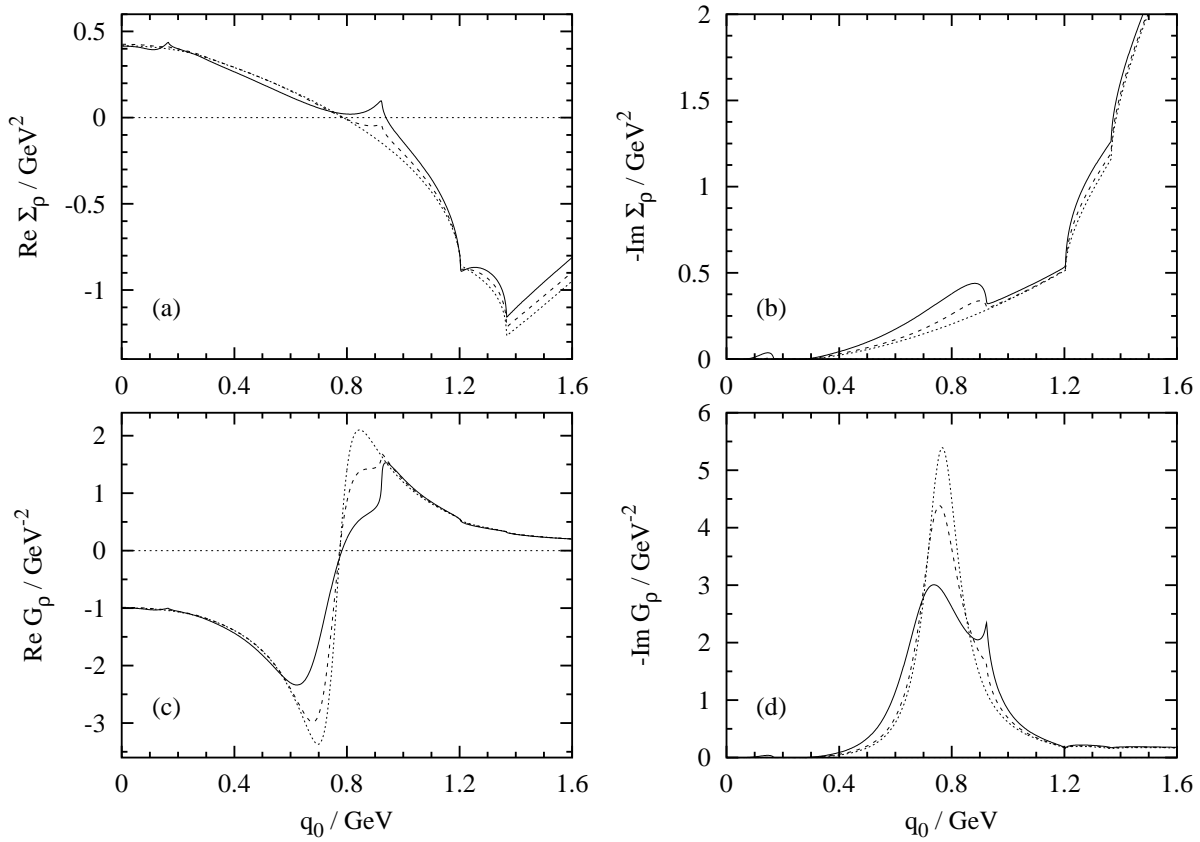


Abbildung 8.2: Real- und Imaginärteile der ρ -Selbstenergie Σ_ρ^t und des ρ -Propagators G_ρ^t als Funktion von q_0 für $\vec{q} = 0$, berechnet mit dem Parametersatz A aus Tabelle 7.1 für drei verschiedene Temperaturen: $T = 0$ (gepunktete Linien), $T = 100$ MeV (gestrichelte Linien) und $T = 150$ MeV (durchgezogene Linien).

In Abb. 8.2 zeigen wir die numerischen Ergebnisse für die realistische Pionmasse $m_\pi = 140$ MeV und die Temperaturen 0, 100 MeV und 150 MeV. Wir haben dafür den Parametersatz A aus Tabelle 7.1 verwendet, aber in den anderen Parametersätzen erhalten wir praktisch identische Ergebnisse. Nach der vorangegangenen Diskussion ist das nicht mehr überraschend.

Wir beginnen die Diskussion mit dem Imaginärteil der Selbstenergie (Abb. 8.2 (b)). Im Vakuum ($T = 0$) liegt die Schwelle bei $q_0 = 2m_\pi = 280$ MeV. Weitere Schwellen erkennt man bei $m_\pi + m_{a_1} = 1204$ MeV und bei $m_\sigma + m_\rho = 1367$ MeV.

Bei endlichen Temperaturen ist besonders die starke Zunahme des Imaginärteils unterhalb von $q_0 = m_{a_1} - m_\pi = 924$ MeV auffällig. Diese Zunahme ist auf den Prozess $\rho + \pi \rightarrow a_1$ zurückzuführen, d.h. dieser Anstieg entspricht etwa dem Beitrag von $\Sigma_{\rho M}$ aus dem ersten Teil dieser Arbeit, also den Strich-Punkt-Linien in Abb. 2.3 (a) und (b). Dass der πa_1 -Beitrag in Abb. 8.2 bei $m_{a_1} - m_\pi$ abrupt endet, während er sich in Abb. 2.3 bis über 1.2 GeV hinaus erstreckt, hat zwei Ursachen: Erstens wurde für den Beitrag $\Sigma_{\rho M}$ in Abb. 2.3 eine wesentlich höhere a_1 -Masse von 1230 MeV angenommen [30], und zweitens hatte das a_1 -Meson in Abb. 2.2 bzw. Gl. (2.12) eine Breite von $\Gamma_{a_1} = 400$ MeV, während es sich in unserer Ein-Loop-Rechnung um ein scharfes a_1 -Meson handelt. Diese etwas unrealistische Eigenschaft unseres Modells ist der Preis, den wir dafür zahlen müssen, dass

die chirale Symmetrie in unserem Modell exakt erfüllt ist. Eine chiral symmetrische Beschreibung, die auch die Breiten der in den Loops propagierenden Mesonen berücksichtigt, gibt es bisher nicht.

Neben dem Imaginärteil des πa_1 -Beitrags tritt natürlich wie im ersten Teil dieser Arbeit eine Bose-Verstärkung des $\pi\pi$ -Beitrags auf. Ein weiterer Temperatureffekt ist der kleine Imaginärteil, der bei Energien zwischen 100 und 200 MeV zu sehen ist. Er entspricht dem Prozess $\rho + \sigma \rightarrow \rho$ und wird deshalb erst bei sehr hohen Temperaturen sichtbar, bei denen es neben den thermisch angeregten Pionen auch thermisch angeregte σ -Mesonen gibt.

Wir betrachten nun den Realteil der Selbstenergie (Abb. 8.2 (a)). Da wir in unserem Modell auf die Vektordominanz verzichtet haben, verschwindet der Realteil auch im Vakuum ($T = 0$) nicht bei $q_0 = 0$. Als Funktion der Temperatur ändert sich der Realteil fast gar nicht, nur bei $m_{a_1} - m_\pi$ bildet sich infolge des abrupten Endes des πa_1 -Beitrags eine kleine Spitze aus. Die oben für den chiralen Limes und kleine Temperaturen gezeigte Temperaturunabhängigkeit des Realteils bei $q_0 = m_\rho$ scheint also auch für $m_\pi = 140$ MeV, Temperaturen bis 150 MeV und große Energiebereiche weitgehend erfüllt zu sein.

In Abb. 8.2 (d) ist zu sehen, wie sich die gerade besprochene Selbstenergie auf die ρ -Spektralfunktion ($\propto \text{Im } G_\rho^t$) auswirkt. Als erstes ist die mit der Temperatur stark zunehmende Verbreiterung des Maximums festzuhalten. Wenn wir die Masse als das Maximum der ρ -Spektralfunktion, also von $-\text{Im } G_\rho^t$ definieren, so sehen wir, dass sie als Funktion der Temperatur doch etwas abnimmt. Wie wir aber gerade gesehen haben, ist das nicht auf eine attraktive ρ -Selbstenergie zurückzuführen. Das geht auch aus Abb. 8.2 (c) hervor. Dort erkennt man, dass sich der Nulldurchgang von $\text{Re } G_\rho^t$ fast gar nicht verschiebt. Das Maximum von $-\text{Im } G_\rho^t$ verschiebt sich also nur aufgrund der im Bereich um m_ρ sehr starken Energieabhängigkeit der Selbstenergie, die u.a. wieder mit der Vernachlässigung der a_1 -Breite Γ_{a_1} in den Loops zu tun hat. Das ist auch der Grund für die Spitze, die sich bei $T = 150$ MeV in $\text{Im } G_\rho^t$ bei $m_{a_1} - m_\pi$ ausbildet.

Die z.B. für die Erzeugung von Dileptonenpaaren in Schwerionenstößen relevante Größe ist nicht die Spektralfunktion des ρ -Mesons, sondern die Spektralfunktion v_1 des Vektor-Korrelators. Diese beiden Funktionen sind in unserem neuen Modell nicht mehr proportional zueinander. In Abb. 8.3 sind die Ergebnisse für $v_1(q_0, \vec{q} = 0)$ gezeigt. Wie man sieht, wird das Maximum von v_1 etwa genauso stark verbreitert wie das Maximum von $-\text{Im } G_\rho^t$, und auch die Position des Maximums verschiebt sich etwa in derselben Weise. Die Spitze bei $m_{a_1} - m_\pi$ scheint in v_1 schwächer ausgeprägt zu sein als in $\text{Im } G_\rho^t$, aber das ist nur eine Folge des Faktors $1/q^2$ in der Definition von v_1 , Gl. (6.38).

Da die Dileptonenrate direkt proportional zu v_1 ist, kann man an Abb. 8.3 sofort ablesen, dass zumindest für kleine Gesamtimpulse \vec{q} das Dileptonenspektrum bei Energien zwischen $2m_\pi$ und ≈ 700 MeV aufgrund der Temperatureffekte deutlich anwachsen wird. Für große Gesamtimpulse \vec{q} können wir hier noch keine Aussage machen, da wir bisher nur den Fall $\vec{q} = 0$ untersucht haben.

Die Zunahme von v_1 unterhalb von ≈ 700 MeV ist wesentlich stärker als in Kap. 2.3 (vgl. Abb. 2.3 (e) und (f)). Das liegt daran, dass in Kap. 2.3 der Realteil von $\Sigma_{\rho M}$ nur leicht attraktiv war und den stark repulsiven Beitrag von $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ nicht kompensieren konnte, so dass die gesamte Spektralfunktion zu höheren Energien verschoben wurde. In unserem neuen Modell wird dagegen der repulsive $\rho\rho\pi\pi$ -Seagull-Beitrag vom attraktiven

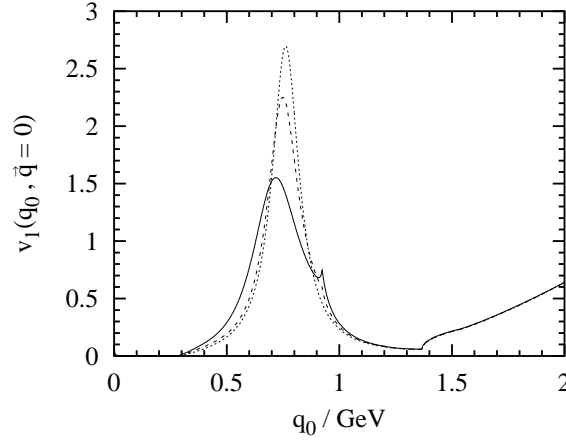


Abbildung 8.3: Spektralfunktion $v_1(q_0, \vec{q} = 0)$ des Vektor-Korrelators, berechnet mit dem Parametersatz A aus Tabelle 7.1 für drei verschiedene Temperaturen: $T = 0$ (gepunktete Linien), $T = 100$ MeV (gestrichelte Linien) und $T = 150$ MeV (durchgezogene Linien).

πa_1 -Beitrag kompensiert. Der πa_1 -Beitrag in $\Sigma_{\rho M}$ aus Kap. 1.2 unterscheidet sich von unserem πa_1 -Beitrag u.a. dadurch, dass wir hier nicht nur den Prozess $\rho + \pi \rightarrow a_1$, sondern auch $\rho \rightarrow \pi a_1$ berücksichtigen, der zwar unterhalb von $m_{a_1} + m_\pi$ keinen Imaginärteil, aber einen attraktiven Realteil ergibt (zweiter Term in der Klammer von Gl. (8.11)).

Neben der Zunahme von v_1 unterhalb von ≈ 700 MeV ist auch eine Zunahme oberhalb von ≈ 880 MeV zu beobachten, insbesondere in der Nähe der Spitze bei $m_{a_1} - m_\pi$. Dies kann möglicherweise als Anzeichen für die modellunabhängig vorhergesagte Vermischung der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren interpretiert werden. Das „Mixing-Theorem“ besagt, dass die Temperaturabhängigkeit der Korrelatoren im chiralen Limes bis zur Ordnung T^2 folgende Form hat [39]:

$$\begin{aligned} v_1(q) &= (1 - \epsilon) v_1^{Vak}(q) + \epsilon a_1^{Vak}(q), \\ a_1(q) &= (1 - \epsilon) a_1^{Vak}(q) + \epsilon v_1^{Vak}(q), \end{aligned} \quad (8.14)$$

mit $\epsilon = T^2/(6f_\pi^2)$. Da wir nicht im chiralen Limes rechnen, können sich die Korrelatoren natürlich nicht in dieser idealen Weise vermischen, sondern die Argumente der beigemischten Korrelatoren müssen um $\pm m_\pi$ verschoben sein, z.B.

$$v_1(q_0, \vec{0}) = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) v_1^{Vak}(q_0, \vec{0}) + \epsilon_1 a_1^{Vak}(q_0 - m_\pi, \vec{0}) + \epsilon_2 a_1^{Vak}(q_0 + m_\pi, \vec{0}). \quad (8.15)$$

Außerdem steigen die Koeffizienten $\epsilon_{1,2}$ nicht mit T^2 an, sondern sind mit $e^{-m_\pi/T}$ unterdrückt. Es liegt nun nahe, die Spitze bei $q_0 = m_{a_1} - m_\pi$ als Beimischung des axialen Korrelators mit Argument $q_0 - m_\pi$ zu interpretieren, wobei der beigemischte axiale Korrelator wegen der in den Loops vernachlässigten a_1 -Breite scharf ist.

8.3 a_1 -Meson und Axialvektor-Korrelator bei endlicher Temperatur

Im vorigen Kapitel haben wir Effekte gefunden, die möglicherweise auf eine Vermischung der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren bei endlicher Temperatur hindeuten. Deshalb

ist es interessant, auch den Axialvektor-Korrelator bei endlicher Temperatur zu berechnen und nach entsprechenden Effekten zu suchen. Wie schon im vorigen Abschnitt beschränken wir uns auf den Fall $\vec{q} = 0$.

Wir beginnen wieder mit einer kurzen Diskussion des Temperaturverhaltens im chiralen Limes bis zur Ordnung T^2 . Ähnlich wie wir beim ρ -Meson zeigen konnten, dass sich die ρ -Masse als Funktion der Temperatur bis zur Ordnung T^2 nicht ändert, so werden wir jetzt sehen, dass $\text{Re } \Sigma_{a_1, Med}^t(m_{a_1}, \vec{0})$ bis zur Ordnung T^2 verschwindet. Definiert als Nullstelle von $\text{Re } G_{a_1}^t$ ändert sich also auch die a_1 -Masse bis zur Ordnung T^2 nicht. In der betrachteten Näherung müssen nur der Tadpole- (achtes Diagramm aus Abb. 6.5), der $a_1 a_1 \pi \pi$ -Seagull- (siebtes Diagramm aus Abb. 6.5) und der $\pi \rho$ -Beitrag (fünftes Diagramm aus Abb. 6.5) berücksichtigt werden. Die Medium-Anteile der anderen Diagramme enthalten entweder Besetzungszahlen schwererer Teilchen oder höhere Potenzen von \vec{k} . Im einzelnen ergeben diese Diagramme folgende Beiträge:

$$\Sigma_{a_1 Med}^{t(Tadpole)} = -2(h_1 + h_2)\sigma_0 \frac{3\lambda^2 \sigma_0 Z_{\pi 1}}{2\pi^2 m_\sigma^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi}, \quad (8.16)$$

$$\Sigma_{a_1 Med}^{t(a_1 a_1 \pi \pi Seagull)} = \frac{(h_1 + 3h_2)Z_{\pi 1}}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi}, \quad (8.17)$$

$$\Sigma_{a_1 Med}^{t(\pi\rho)}(q_0, \vec{0}) = \frac{h_1^2 \sigma_0^2 Z_{\pi 1}}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| \vec{k}^2 \frac{n_\pi}{\omega_\pi \omega_\rho} \left(\frac{\omega_\rho - \omega_\pi}{q_0^2 - (\omega_\rho - \omega_\pi)^2} + \frac{\omega_\rho + \omega_\pi}{q_0^2 - (\omega_\rho + \omega_\pi)^2} \right). \quad (8.18)$$

Wenn wir nun wieder genauso verfahren wie im vorigen Abschnitt unter Gl. (8.11) besprochen, so erhalten wir unmittelbar

$$\Sigma_{a_1 Med}^t(m_{a_1}, \vec{0}) = \Sigma_{a_1 Med}^{t(Tadpole)} + \Sigma_{a_1 Med}^{t(a_1 a_1 \pi \pi Seagull)} + \Sigma_{a_1 Med}^{t(\pi\rho)}(m_{a_1}, \vec{0}) = 0. \quad (8.19)$$

Ebenso wie die ρ -Masse ändert sich also auch die a_1 -Masse bis zur Ordnung T^2 nicht. Das ist auch nötig, damit das „Mixing-Theorem“, Gl. (8.14), gelten kann.

In Abb. 8.4 sind numerische Ergebnisse für realistische Parameter dargestellt. Wir betrachten zuerst den Imaginärteil der a_1 -Selbstenergie, $\text{Im } \Sigma_{a_1}^t$ (Abb. 8.4 (b)). Im Vakuum ($T = 0$) liegt die Schwelle bei $q_0 = m_\pi + m_\sigma = 740$ MeV, jedoch ist der $\pi\sigma$ -Beitrag so schwach, dass er im Vergleich zum $\pi\rho$ -Beitrag, der bei 907 MeV beginnt, nicht sichtbar ist. Die Schwelle bei 1664 MeV stammt vom σa_1 -Beitrag.

Bei $T = 100$ MeV sind zwei Bereiche zu erkennen, in denen sich $\text{Im } \Sigma_{a_1}^t$ ändert, nämlich unterhalb von $m_\rho - m_\pi = 627$ MeV und oberhalb von $m_\rho + m_\pi$. Die führenden Temperatureffekte treten also, wie bereits erwähnt, im $\pi\rho$ -Beitrag auf. Erst bei sehr hohen Temperaturen (z.B. $T = 150$ MeV) erhält auch der $\pi\sigma$ -Beitrag einen sichtbaren Medium-Anteil unterhalb von $m_\sigma - m_\pi = 460$ MeV. Der physikalische Grund, warum der $\pi\sigma$ -Beitrag im Vergleich zum $\pi\rho$ -Beitrag unterdrückt ist, ist leicht zu verstehen: Der Prozess $a_1 + \pi \rightarrow \sigma$ ist nur möglich, wenn das a_1 -Meson und das Pion relativen Bahndrehimpuls eins haben. Im Fall $\vec{q} = 0$, also für ein ruhendes a_1 -Meson, ist die Amplitude deshalb proportional zum Impuls \vec{k} des Pions. Bei niedrigen Temperaturen sind jedoch die Impulse der thermischen Pionen klein. Der Prozess $a_1 + \pi \rightarrow \rho$ ist dagegen auch mit ruhenden Pionen möglich und deshalb bei niedrigen Temperaturen führend.

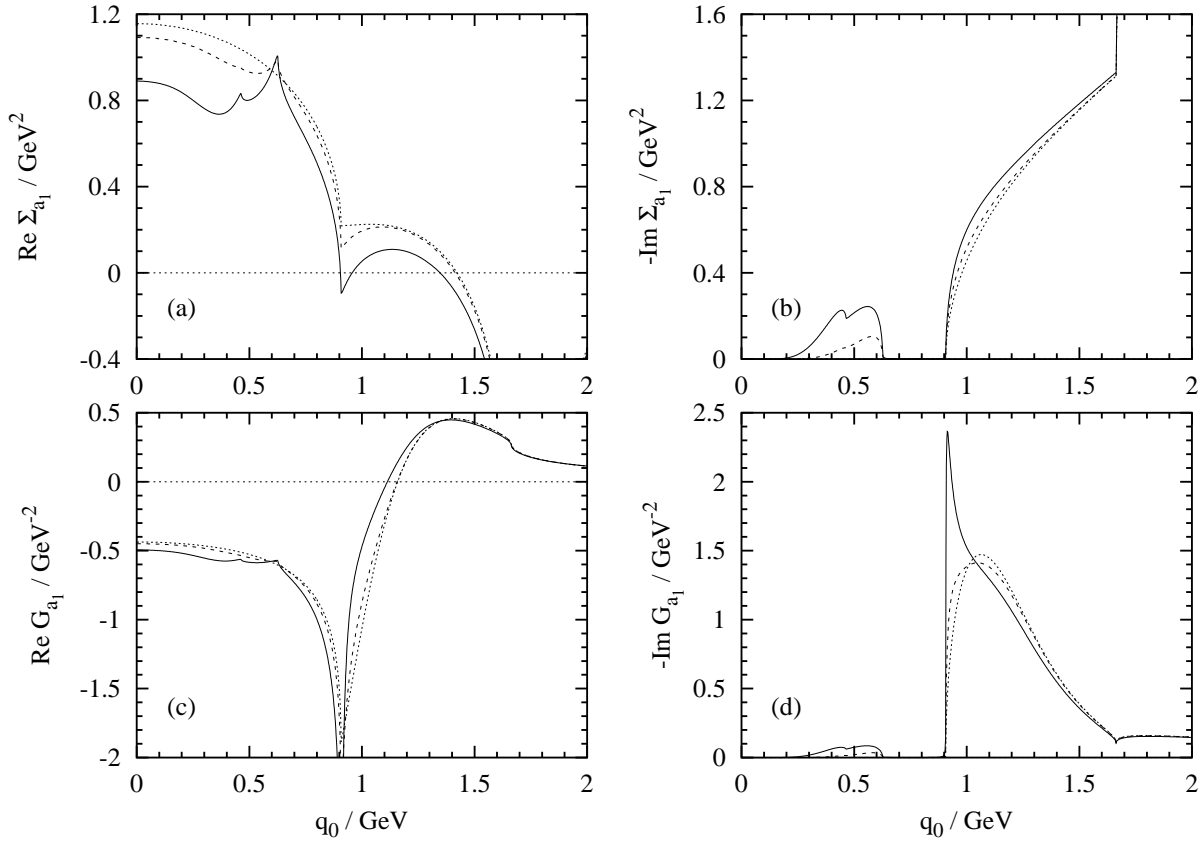


Abbildung 8.4: Real- und Imaginärteile der a_1 -Selbstenergie $\Sigma_{a_1}^t$ und des a_1 -Propagators $G_{a_1}^t$ als Funktion von q_0 für $\vec{q} = 0$, berechnet mit dem Parametersatz A aus Tabelle 7.1 für drei verschiedene Temperaturen: $T = 0$ (gepunktete Linien), $T = 100$ MeV (gestrichelte Linien) und $T = 150$ MeV (durchgezogene Linien).

Der Realteil der Selbstenergie, $\text{Re } \Sigma_{a_1}^t$, ändert sich in der Nähe der a_1 -Masse bis $T = 100$ MeV nur wenig. Für den chiralen Limes haben wir gesehen, dass das bis zur Ordnung T^2 exakt gilt. Jedoch bildet sich, ausgehend von $m_\pi + m_\rho$, mit zunehmender Temperatur eine attraktive Spitze in $\text{Re } \Sigma_{a_1}^t$. Bei sehr hohen Temperaturen, z.B. $T = 150$ MeV, wird der Realteil der Selbstenergie praktisch im gesamten Energiebereich deutlich attraktiver.

Wegen des gerade beschriebenen Verhaltens der Selbstenergie ändert sich der a_1 -Propagator bis $T = 100$ MeV nur wenig. Das Maximum von $-\text{Im } G_{a_1}^t$ (Abb. 8.4 (d)) verlagert sich etwas zu niedrigeren Energien, aber der Nulldurchgang von $\text{Re } G_{a_1}^t$ (Abb. 8.4 (c)) bleibt bei seinem Vakuum-Wert. Bei sehr hohen Temperaturen wird sowohl das Maximum von $-\text{Im } G_{a_1}^t$ als auch der Nulldurchgang von $\text{Re } G_{a_1}^t$ zu niedrigeren Energien verschoben. Die sich dabei in $\text{Im } G_{a_1}^t$ ausbildende Spitze bei $m_\rho + m_\pi$ ist eine Folge der in den Loops vernachlässigten Breite des ρ -Mesons.

Zum Abschluss betrachten wir die Spektralfunktion a_1 des axialen Korrelators, die in Abb. 8.5 dargestellt ist. Das ursprüngliche Maximum von $a_1(q_0, \vec{q} = 0)$ bei ≈ 1.1 GeV verschiebt sich mit zunehmender Temperatur fast gar nicht, sondern es wird nur etwas niedriger. Gleichzeitig entsteht bei $m_\rho + m_\pi$ ein weiteres Maximum, und bei niedrigen Energien wird der Imaginärteil des $\pi\rho$ - und bei $T = 150$ MeV auch der des $\pi\sigma$ -Beitrags sichtbar.

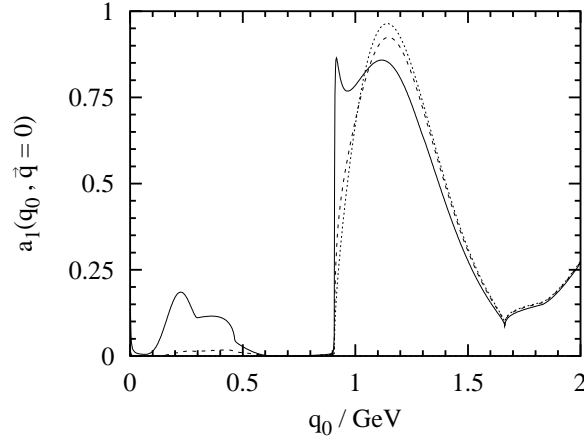


Abbildung 8.5: Spektralfunktion $a_1(q_0, \vec{q} = 0)$ des Axialvektor-Korrelators, berechnet mit dem Parametersatz A aus Tabelle 7.1 für drei verschiedene Temperaturen: $T = 0$ (gepunktete Linien), $T = 100$ MeV (gestrichelte Linien) und $T = 150$ MeV (durchgezogene Linien).

Im Sinne des Mixing-Theorems, Gl. (8.14), können nun das mit zunehmender Temperatur kleiner werdende Maximum bei ≈ 1.1 GeV und die neu auftretenden Maxima bei $m_\rho + m_\pi$ und unterhalb von $m_\rho - m_\pi$ als

$$a_1(q_0, \vec{0}) = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) a_1^{Vak}(q_0, \vec{0}) + \epsilon_1 v_1^{Vak}(q_0 - m_\pi, \vec{0}) + \epsilon_2 v_1^{Vak}(q_0 + m_\pi, \vec{0}) \quad (8.20)$$

interpretiert werden. Dass das neue Maximum bei $m_\pi + m_\rho$ scharf ist, liegt dabei wieder an der Vernachlässigung der ρ -Breite in den Loops. Die Breite des neuen Maximums unterhalb von $m_\rho - m_\pi$ stammt ausschließlich von der thermischen Bewegung der Pionen. Diese sorgt auch dafür, dass das Maximum nicht bei $m_\rho - m_\pi$, sondern bei einer niedrigeren Energie liegt.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir zwei Modelle zur Beschreibung von Vektormesonen in dichter und heißer Materie diskutiert. Im ersten Teil handelte es sich um ein einfach gehaltenes Modell für das ρ -Meson im Vakuum, welches dann durch die konsequente Berücksichtigung bekannter Vielteilcheneffekte für die Anwendung auf dichte und heiße Materie erweitert wurde. Im zweiten Teil haben wir ein Modell vorgestellt, mit dem im Vakuum das ρ -Meson und sein chiraler Partner, das $a_1(1260)$, gleichzeitig beschrieben werden konnten, wobei besonderer Wert auf die exakte Berücksichtigung der chiralen Symmetrie gelegt wurde. Anschließend haben wir die Eigenschaften der ρ - und a_1 -Mesonen sowie der Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren in einem heißen Piongas im Rahmen dieses Modells untersucht.

Die Grundlage des im ersten Teil verwendeten Modells bildet das Vektordominanzmodell [14], welches die Form der Wechselwirkung zwischen dem ρ -Meson und den Pionen und darüber hinaus auch ihre elektromagnetische Wechselwirkung bis auf eine einzige Kopplungskonstante g festlegt. Die Eigenschaften des ρ -Mesons sind in diesem Modell direkt mit dem elektromagnetischen Formfaktor des Pions verknüpft. Um diesen im Vakuum zu beschreiben, muss nur die Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, die das ρ -Meson durch seine Wechselwirkung mit den Pionen erhält, bis zur Ordnung g^2 oder – äquivalent – bis zu einem Loop berechnet werden. Im Vektordominanzmodell erfordert die Eichinvarianz, dass die ρ -Selbstenergie transversal ist. Um dies zu gewährleisten, wird zur Regularisierung der Loops das Verfahren von Pauli und Villars mit einer endlichen Abschneidemasse Λ_ρ verwendet.

Die Erweiterung dieses Modells für $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ auf kalte Kernmaterie erfolgte, aufbauend auf Ref. [34, 35], bereits in Ref. [36]. Die Grundidee bestand darin, die seit langem bekannten Änderungen der Pion-Eigenschaften im Medium durch die Kopplung des Pions an Δh - und Nh -Anregungen in der Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ zu berücksichtigen, wobei die Eichinvarianz im Vektordominanzmodell erfordert, dass sich nicht nur die Pion-Propagatoren, sondern zugleich auch die $\rho\pi\pi$ - und $\rho\rho\pi\pi$ -Vertizes im Medium ändern. Neben den dadurch beschriebenen Medium-Modifikationen der Pionwolke des ρ -Mesons, $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, sind aber auch noch Änderungen der ρ -Meson-Eigenschaften durch die direkte ρN -Wechselwirkung mit Anregung brayonischer Resonanzen von Bedeutung ($\Sigma_{\rho B}$). Diese wurden in Ref. [24, 27, 28, 29] untersucht. Das wichtigste Ergebnis ist die starke Zunahme der ρ -Breite. Obwohl in diesem Modell in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ noch keine Temperatureffekte berücksichtigt wurden, konnte es in Ref. [23, 24, 25, 26] erfolgreich auf die Berechnung von Dileptonenspektren in Schwerionenstößen angewendet werden.

Trotz des Erfolgs bei der Beschreibung von Dileptonenspektren war es natürlich unbefriedigend, dass in einer Rechnung bei hohen Temperaturen in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, einem der wichtigsten

Beiträge zu den Änderungen der ρ -Meson-Eigenschaften im Medium, Temperatureffekte völlig vernachlässigt wurden. Der Schwerpunkt des ersten Teils dieser Arbeit lag deshalb auf der Erweiterung des Beitrags $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ auf endliche Temperaturen. Dazu diskutierten wir zunächst, wie sich die Diagramme, die $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ im Vakuum beschreiben, bei endlichen Temperaturen ändern. Wie in Ref. [38] fanden wir eine Zunahme der ρ -Breite und zugleich auch einen geringfügigen Anstieg der ρ -Masse. Für eine realistische Beschreibung der ρ -Meson-Eigenschaften in einem Piongas müssen aber neben den Diagrammen, die $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ im Vakuum beschreiben, auch noch die Beiträge mesonischer Resonanzen, $\Sigma_{\rho M}$, berücksichtigt werden. Diese haben wir von Ref. [30] übernommen.

Nach der Diskussion des ρ -Mesons im Piongas kamen wir zum eigentlichen Ziel unserer Untersuchung, nämlich der Berechnung des Beitrags $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ bei endlichen Baryondichten und Temperaturen. Dazu wurde zuerst das für das Pion in Materie verwendete Modell mit Δh - und Nh -Anregungen auf endliche Temperaturen erweitert. Dabei zeigte sich, dass die von kalter Kernmaterie bekannte charakteristische Aufspaltung der Pion-Spektralfunktion in mehrere Moden (Nh -, Pion- und Δh -Ast) bei hohen Temperaturen völlig verschwindet, und die Pion-Spektralfunktion mit ursprünglich drei Maxima mit zunehmender Temperatur in eine glatte Verteilung mit nur noch einem Maximum bei der freien Pion-Energie übergeht. Die Ursachen hierfür sind die zunehmende thermische Bewegung der Nukleonen, die bei festgehaltener Baryondichte abnehmende Nukleondichte und das Pauli-Blocking der Delta-Zustände. Wird nun das so modifizierte Pion zur Berechnung der ρ -Selbstenergie $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ verwendet, so findet man trotz der bei hohen Temperaturen kleiner werdenden Medium-Effekte im Pionpropagator einen zunehmenden Medium-Effekt in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$. Die Verbreiterung des ρ -Mesons bleibt aber dennoch nahezu gleich, da die Zunahme des Imaginärteils der Selbstenergie vorwiegend bei kleinen Energien stattfindet, während der zunehmende Realteil die ρ -Masse nach oben verschiebt und dadurch die Spektralfunktion des ρ -Mesons bei niedrigen Energien unterdrückt.

Zum Abschluss des ersten Teils untersuchten wir den Einfluss der Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ auf die Dileptonenproduktion. Im Zusammenhang mit den in $\Sigma_{\rho B}$ enthaltenen Resonanzen musste dazu, wie in Ref. [25, 27, 29] beschrieben, das ursprüngliche Vektordominanzmodell leicht abgewandelt werden, so dass die Strom-Strom-Korrelationsfunktion, die für die Dileptonenproduktion relevant ist, nicht mehr proportional zum ρ -Propagator ist. Das Ergebnis für das Dileptonenspektrum kann folgendermaßen zusammengefasst werden: Wenn im Selbstenergie-Beitrag $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ die Temperatureffekte vernachlässigt werden, steigt die Dileptonenproduktionsrate für invariante Massen M der Dileptonenpaare unterhalb von ≈ 650 MeV im Vergleich zu einer Rechnung ohne Medium-Effekte stark an. Deshalb war das Modell bei der Beschreibung der im CERES-Experiment gemessenen Dileptonenspektren [10] so erfolgreich. Die Temperatureffekte in $\Sigma_{\rho\pi\pi}$ ändern dieses Verhalten zwar nicht qualitativ, führen aber im Bereich von invarianten Massen zwischen 300 und 800 MeV zu einer spürbaren Verringerung der Dileptonenrate. Der Grund hierfür ist die leicht nach oben verschobene ρ -Masse.

Über das Verhalten der ρ -Masse als Funktion der Dichte und Temperatur gibt es schon seit einiger Zeit viele als modellunabhängig bezeichnete Vorhersagen, die zumeist direkt auf der chiralen Symmetrie der QCD beruhen. Die bekannteste, aber auch umstrittenste, stellt sicher die Hypothese von Brown und Rho [15] dar, nach der die Masse des ρ -Mesons infolge der partiellen Wiederherstellung der chiralen Symmetrie mit zuneh-

mender Dichte und Temperatur abnehmen sollte. Andererseits verlangt das sogenannte „Mixing-Theorem“, welches unmittelbar aus der Stromalgebra der chiralen Symmetrie folgt [39], dass sich die Masse des ρ -Mesons jedenfalls in führender Ordnung einer Niedertemperaturentwicklung nicht ändert. Dadurch wird deutlich, dass die im ersten Teil dieser Arbeit gefundenen Effekte, besonders der Anstieg der ρ -Masse, möglicherweise im Widerspruch zur chiralen Symmetrie stehen. Das liegt daran, dass bei der Entwicklung des Modells die Bedingungen, die die chirale Symmetrie an die Wechselwirkungsterme und die verwendeten Näherungen stellt, nicht berücksichtigt wurden. Das Ziel des zweiten Teils dieser Arbeit bestand deshalb darin, ein chiral symmetrisches Modell für das ρ -Meson zu entwickeln.

Schon im Vakuum erwies sich die Konstruktion eines chiral symmetrischen Modells für das ρ -Meson als relativ aufwendig. Da das a_1 -Meson der chirale Partner des ρ -Mesons ist, sollte das Modell in der Lage sein, nicht nur die Eigenschaften des ρ -Mesons, sondern auch die des a_1 -Mesons richtig zu beschreiben. Die direkte Verallgemeinerung des Vektordominanzmodells führt auf das geeichte lineare σ -Modell [46], welches auch schon zur Untersuchung einiger Aspekte des Temperaturverhaltens des ρ -Mesons, z.B. der ρ -Masse im chiralen Limes, verwendet wurde [47]. Es ist jedoch schon lange bekannt [67], dass dieses Modell ohne Erweiterungen die Eigenschaften der ρ - und a_1 -Mesonen im Vakuum nicht richtig beschreibt, da besonders die $\rho\pi\pi$ - und $\rho\pi a_1$ -Vertizes die falsche Impulsabhängigkeit besitzen. Um dieses Problem zu lösen, haben wir auf das dem Vektordominanzmodell zugrunde liegende Eichprinzip verzichtet und stattdessen ein Modell vorgestellt, das wie die QCD nur unter globalen chiralen Transformationen invariant ist, und in dem die Vertizes nur eine minimale Impulsabhängigkeit besitzen. Eine weitere Konsequenz der Beschränkung auf globale chirale Symmetrie ist, dass nicht nur die a_1 -Masse, sondern auch die ρ -Masse einen Beitrag durch die spontane Symmetriebrechung erhalten kann.

Wie bereits erwähnt, ist die eigentlich interessante Größe nicht der ρ -Propagator selbst, sondern vielmehr der Vektor-Korrelator. Nur im Vektordominanzmodell ist dieser direkt proportional zum ρ -Propagator. Die experimentellen Daten über das a_1 -Meson stammen größtenteils aus der Untersuchung des Axialvektor-Korrelators, dessen Spektralfunktion aus der Massenverteilung der Zerfallsprodukte des τ -Leptons bestimmt werden kann. Auch zwischen dem Axialvektor-Korrelator und dem a_1 -Propagator gibt es nur im Rahmen des Vektordominanzmodells einen direkten Zusammenhang. Die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren können aber direkt mit den Photon- und W -Boson-Selbstenergien in Verbindung gebracht werden. Ohne die Annahme der Vektordominanz koppeln das Photon und das W -Boson nicht mehr ausschließlich über die Vektormesonen ρ und a_1 , sondern auch direkt an alle Mesonen. Damit liegt in unserem Modell eine ähnliche Situation vor wie im ersten Teil der Arbeit, nachdem wir bei der Ankopplung des Photons an die baryonischen Resonanzen ebenfalls das Vektordominanzmodell in seiner ursprünglichen Form fallen lassen mussten. Die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren stehen nicht mehr in einem direkten Zusammenhang zu den ρ - und a_1 -Propagatoren.

Um die Spektralfunktionen der ρ - und a_1 -Mesonen zu berechnen, mussten wir, wie schon im ersten Teil, die Selbstenergien bis zu mindestens einem Loop berechnen. Wenn es nur darum gegangen wäre, den Teilchen eine Breite zu geben, hätten natürlich schon einige wenige ausgewählte Diagramme genügt. Da wir aber nicht schon durch die Auswahl der Diagramme die chirale Symmetrie verletzen wollten, haben wir systematisch alle ein-

teilchenirreduziblen Selbstenergiediagramme bis zu einem Loop berechnet. Eine weitere Schwierigkeit bestand darin, die auftretenden Divergenzen in einer mit der Symmetrie verträglichen Weise zu subtrahieren. Dazu haben wir die Methode der dimensional Regularisierung verwendet, die in einer mathematisch wohldefinierten Weise die Zerlegung der divergenten Ausdrücke in endliche und unendliche Anteile gestattet. Wir haben gezeigt, dass die unendlichen Anteile mit chiral symmetrischen Countertermen in der Lagrange-dichte subtrahiert werden können, so dass die chirale Symmetrie durch dieses Verfahren nicht verletzt wird. Die Propatoren der Teilchen erhalten wir durch Aufsummieren der Dyson-Gleichungen. In ähnlicher Weise ergeben sich auch die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren. Die Konsistenz des Modells mit der chiralen Symmetrie zeigt sich u.a. darin, dass das Goldstone-Theorem erfüllt ist.

Durch die Anpassung der Modellparameter ist es uns gelungen, die gemessenen Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren sowie einige damit verwandte Größen gut zu beschreiben. Größere Abweichungen treten im vektoriiellen Kanal erst ab dem Einsetzen des Vier-Pion-Kontinuums bei Energien oberhalb von ≈ 1 GeV und im axialvektoriellen Kanal ab dem Einsetzen des Fünf-Pion-Kontinuums oberhalb von ≈ 1.5 GeV auf. Daneben gibt es im axialvektoriellen Kanal im Schwellenbereich eine Abweichung dadurch, dass in unserer nicht selbstkonsistenten Ein-Loop-Rechnung die Drei-Pion-Zustände durch $\pi\rho$ -Zustände mit scharfen ρ -Mesonen angenähert werden. Aber schon kurz oberhalb der $\pi\rho$ -Schwelle erweist sich diese Näherung als sehr gut. Für den longitudinalen Anteil des Axialvektor-Korrelators finden wir eine gute Übereinstimmung mit der PCAC-Hypothese, d.h. er wird vom Ein-Pion-Beitrag dominiert und verschwindet im chiralen Limes. Bei der Beschreibung des σ -Mesons treten jedoch Probleme auf, die vor allem auf die starke Attraktion im Bereich der Zwei-Pion-Schwelle, aber auch auf die Impulsabhängigkeit des $\sigma\pi\pi$ -Vertex in unserem Modell zurückzuführen sind.

Nachdem wir die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren im Vakuum beschreiben konnten, haben wir das Modell auch auf endliche Temperaturen angewendet. Da es sich nur um eine Ein-Loop-Rechnung handelt, erhalten wir zwar keinen chiralen Phasenübergang, aber die partielle Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, die sich in der Abnahme des Ordnungsparameters $\langle\sigma\rangle$ äußert, wird bei niedrigen Temperaturen richtig beschrieben. Für die Vektormesonen kann man zeigen, dass im chiralen Limes ($m_\pi = 0$) sowohl die a_1 - als auch die ρ -Masse in führender Ordnung einer Niedertemperaturentwicklung unverändert bleiben, und zwar selbst dann, wenn beide Massen allein durch die spontane Symmetriebrechung generiert werden. Das von Brown und Rho vorgeschlagene Szenario kann also in diesem Modell unabhängig von der Wahl der Parameter nicht eintreten. In numerischen Rechnungen mit realistischen Parametern bleibt die a_1 -Masse bis zu $T \approx 100$ MeV, die ρ -Masse sogar bis zu noch höheren Temperaturen nahezu unverändert. Für das ρ -Meson konnten wir zeigen, dass der repulsive Beitrag aus $\Sigma_{\rho\pi\pi}$, der im ersten Teil dieser Arbeit die Masse des ρ -Mesons mit zunehmender Temperatur nach oben verschoben hat, durch den πa_1 -Beitrag genau weggehoben wird. Die Breite des ρ -Mesons nimmt auch in diesem Modell als Funktion der Temperatur zu. Darüber hinaus ergeben sich sowohl im Vektor- als auch im Axialvektor-Korrelator Anzeichen für die Vermischung der Korrelatoren im Sinne des Mixing-Theorems.

Die im chiral symmetrischen Modell gefundenen Ergebnisse sind durchaus relevant für die Berechnung von Dileptonenspektren, da die bereits im ersten Teil gefundene Verbrei-

terung des ρ -Mesons eintritt, die gleichzeitige Zunahme der ρ -Masse aber ausbleibt, so dass im Bereich unterhalb der ρ -Masse deutlich mehr Dileptonen zu erwarten sind. Für die Berechnung der Dileptonenspektren muss das Modell aber noch in einigen Punkten erweitert werden:

Das am einfachsten zu lösende Problem besteht in der Berechnung des Vektor-Korrelators nicht nur für Gesamtimpuls $\vec{q} = 0$, sondern auch für endliche Impulse des Dileptonenpaares. Die im zweiten Teil dieser Arbeit vorgenommene Beschränkung auf den Fall $\vec{q} = 0$ erfolgte nur aus Gründen der Übersichtlichkeit, nicht aus prinzipiellen Schwierigkeiten.

Wesentlich schwieriger wird es dagegen sein, auch die Effekte von Baryonen in einer chiral symmetrischen Weise in das Modell einzubauen. Zwar ist die in ultrarelativistischen Schwerionenstößen (z.B. beim RHIC) erreichte Netto-Baryondichte, $\varrho_B - \varrho_{\bar{B}}$, klein, aber z.B. die Effekte von $\Sigma_{\rho B}$ sind nicht proportional zur Netto-Baryondichte, sondern zur Summe der Baryonen- und Antibaryondichte, $\varrho_B + \varrho_{\bar{B}}$, die nicht vernachlässigt werden kann.

Auch der mesonische Teil des Modells müsste noch realistischer gemacht werden. Dabei ist in erster Linie an die Berücksichtigung der ρ - und a_1 -Breiten in den Loops zu denken. Anzustreben ist natürlich eine selbstkonsistente Beschreibung, bei der die Teilchen in den Loops mit den „angezogenen“ Teilchen übereinstimmen. Vermutlich wird es dann aber nicht mehr möglich sein, die chirale Symmetrie weiterhin exakt zu erfüllen.

Von großem theoretischen Interesse wäre es, die Eigenschaften des Modells im chiralen Limes ($m_\pi = 0$) genauer zu untersuchen. Dann könnte man insbesondere der Frage nachgehen, ob das Mixing-Theorem für die Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren auch quantitativ erfüllt ist.

Anhang A

Automatisierte Berechnung von Diagrammen

Zählt man alle im zweiten Teil dieser Arbeit abgebildeten Loop-Diagramme zusammen, so kommt man auf genau 100 zu berechnende Diagramme. Erschwerend kommt hinzu, dass die Lagrangedichte, wenn man sie mit den Feldern $\sigma = \sigma_{neu}$, $\vec{\rho}_\mu$, $\vec{a}_{1\mu}$, A_μ und \vec{W}_μ explizit hinschreibt, sehr unübersichtlich ist, so dass schon das Ermitteln der Vertexfaktoren keine triviale Aufgabe ist. Wir benötigen also ein Programm, das in der Lage ist, folgende algebraische Umformungen weitgehend automatisch durchzuführen:

1. Berechnung eines Vertexfaktors aus der Lagrangedichte.
2. Im Fall $T = 0$: Zerlegung eines einem Diagramm entsprechenden Integrals in einen unendlichen Anteil $\propto 1/(4-d)$ und endliche Terme, die mit Hilfe elementarer Funktionen analytisch angegeben werden sollen.
3. Im Fall $T > 0$: Berechnung des Integranden des verbleibenden Dreierimpuls-Integrals für den Medium-Anteil eines Diagramms.

Wir führen diese Schritte mit Hilfe des Programms MATHEMATICA durch, da dieses erlaubt, symbolische Regeln für die Manipulation von Ausdrücken zu definieren. Zur Kontraktion der doppelt auftretenden Lorentz-Indizes verwenden wir die vom Paket TRACER bereitgestellten Regeln. Da die Stärke von MATHEMATICA im symbolischen und nicht im numerischen Rechnen liegt, wandeln wir das Ergebnis am Ende mit der Funktion `FortranForm` in Fortran-Code um.

Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung der Grundregeln, nach denen die Diagramme berechnet werden. Diese machen allerdings nur einen kleinen Teil des Programms aus, da das größte Problem darin besteht, das Ergebnis in eine einigermaßen einfache Form zu bringen.

A.1 Bestimmung der Vertexfaktoren

Sei φ_α ein Feld mit allen zugehörigen Indizes und $\partial_\mu \varphi_\alpha$ seine Ableitung. Ein Vertex mit n Beinchen ist durch die Felder $\varphi_1 \dots \varphi_n$, deren Indizes $\alpha_1 \dots \alpha_n$ und die zugehörigen

einlaufenden Impulse $p_1 \dots p_n$ charakterisiert. Den Vertexfaktor erhält man nun nach der Formel

$$(V_{\varphi_1 \dots \varphi_n}(p_1, \dots, p_n))_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{1 \alpha_1}} - i p_{1 \mu_1} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_1} \varphi_{1 \alpha_1})} \right) \dots \dots \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{n \alpha_n}} - i p_{n \mu_n} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu_n} \varphi_{n \alpha_n})} \right) \mathcal{L} \Big|_{\varphi=0}, \quad (\text{A.1})$$

wobei die partiellen Ableitungen nach den Feldern nach eigens hierfür definierten Regeln gebildet werden. Nach den MATHEMATICA-eigenen Ableitungsregeln würde man nämlich z.B. folgendes erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_a^\mu} \varepsilon_{bcd} \rho_b^\nu \pi_c \partial_\nu \pi_d = 0, \quad (\text{A.2})$$

da der Ausdruck ρ_a^μ in der abzuleitenden Funktion nicht auftritt. Wir wollen jedoch

$$\frac{\partial}{\partial \rho_a^\mu} \varepsilon_{bcd} \rho_b^\nu \pi_c \partial_\nu \pi_d = \varepsilon_{bcd} \delta_{ab} g_\mu^\nu \pi_c \partial_\nu \pi_d. \quad (\text{A.3})$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Ausdrucks dienen dann die vom Paket TRACER bereitgestellten Regeln zur Summation über doppelt auftretende Lorentz-Indizes, wie hier z.B. den Index ν , sowie einige selbstdefinierte Regeln für die Summation über doppelt auftretende Isospin-Indizes, wie hier z.B. den Index b . In der Praxis ist noch zu beachten, dass vor der Auswertung von Gl. (A.1) in \mathcal{L} auftretende interne Summationsindizes umbenannt werden müssen, wenn sie denselben Namen haben wie einer der Indizes α_i , die am Ende an den Beinchen des Vertex' stehen sollen. Nach der Auswertung der Ableitungen müssen außerdem noch alle evtl. übriggebliebenen Felder auf null gesetzt werden, wie in Gl. (A.1) durch die Schreibweise $\dots |_{\varphi=0}$ angedeutet ist.

A.2 Berechnung von Selbstenergie-Diagrammen im Vakuum

Der erste Schritt bei der Berechnung eines Selbstenergie-Diagramms besteht darin, den dem Diagramm entsprechenden Integranden durch seine Vertizes, Propagatoren und Symmetriefaktoren zu definieren. So würde man z.B. den Integranden des $\pi\pi$ -Beitrags zur ρ -Selbstenergie folgendermaßen eingeben:

$$f_{ab}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (V_{\rho\pi\pi}(q, k, -k - q))_{acd}^\mu (V_{\rho\pi\pi}(-q, -k, k + q))_{bcd}^\mu iG_\pi(k) iG_\pi(k + q). \quad (\text{A.4})$$

Dann müssen geeignete Kontraktionen der externen Indizes durchgeführt werden, so dass nur ein skalärer Integrand übrig bleibt. So hat z.B. die oben angegebene Selbstenergie zwei Lorentz- und zwei Isospin-Indizes. Da man aber weiß, dass das Ergebnis (also das Integral) die Struktur

$$\Sigma_{ab}^{\mu\nu}(q) = \delta_{ab} \left[\Sigma^t(q^2) \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \Sigma^l(q^2) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \quad (\text{A.5})$$

hat, genügt es, als Integranden die zwei skalaren Funktionen $\delta_{ab}g_{\mu\nu}f_{ab}^{\mu\nu}$ und $\delta_{ab}q_{\mu}q_{\nu}f_{ab}^{\mu\nu}$ zu betrachten.

Alles weitere erfolgt dann automatisch entsprechend dem folgenden Schema: Da der Integrand keine freien Indizes mehr hat, kann über alle Indizes summiert werden. Dabei ist zu beachten, dass in d Dimensionen $g_{\mu}^{\mu} = d$ ist. Diese Regel ist dem Programmpaket TRACER bekannt. Wir betrachten nun den Fall, dass im Loop nur ein Propagator auftritt. Das Integral hat dann folgende Gestalt:

$$A_1 = \left(\frac{\Lambda^2}{4\pi}\right)^{(4-d)/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{P(k^2, q^2, k \cdot q)}{k^2 - m^2}, \quad (\text{A.6})$$

wobei P ein Polynom ist.

Etwas komplizierter ist die Situation bei Loops mit zwei Propagatoren, für die das Integral folgende Form hat:

$$A_2 = \left(\frac{\Lambda^2}{4\pi}\right)^{\frac{4-d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{P(k^2, q^2, k \cdot q)}{((k+q)^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)}. \quad (\text{A.7})$$

In diesem Fall wird ein Feynman-Parameterintegral über x eingeführt und die Substitution $k_{\text{neu}} = k_{\text{alt}} + xq$ durchgeführt:

$$A_2 = \int_0^1 dx \left(\frac{\Lambda^2}{4\pi}\right)^{\frac{4-d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{P(k^2 - 2xk \cdot q + x^2 q^2, k \cdot q - xq^2, q^2)}{[k^2 - xm_1^2 - (1-x)m_2^2 + x(1-x)q^2]^2} \quad (\text{A.8})$$

Wir betrachten nun die Integration über k , und zwar gemeinsam für Gl. (A.6) und (A.8). Im Zähler des Integranden auftretende Potenzen von $k \cdot q$ können mit folgender Formel beseitigt werden:

$$\int d^d k (k \cdot q)^n f(k^2) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{d(d+2)(d+4) \cdots (d+n-2)} q^n \int d^d k k^n f(k^2) & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Danach kann das k -Integral in Summanden der Form

$$B = \left(\frac{\Lambda^2}{4\pi}\right)^{\frac{4-d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^n}{(k^2 - M^2)^m} \quad (\text{A.10})$$

zerlegt werden. Nach einer Wick-Rotation erhalten wir ein Integral über den euklidischen Impuls k_E :

$$B = i(-1)^{l+n} \left(\frac{\Lambda^2}{4\pi}\right)^{\frac{4-d}{2}} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{(k_E^2)^n}{(k_E^2 + M^2)^m}. \quad (\text{A.11})$$

Dieses Integral kann mit der bekannten Formel [80]

$$\int d^d k_E \frac{(k_E^2)^n}{(k_E^2 + M^2)^m} = \frac{\Gamma(n + \frac{d}{2})\Gamma(l - n - \frac{d}{2})}{(m-1)!\Gamma(\frac{d}{2})} \pi^{d/2} (M^2)^{n-m+d/2} \quad (\text{A.12})$$

ausgewertet werden. Nach Anwendung dieser Formel erhält man das Integral B als Funktion der Dimension d , also $B(d)$. Um nun die endlichen und die unendlichen Anteile zu

trennen, machen wir eine Taylor-Entwicklung der bei $d = 4$ stetigen Funktion $(4-d)B(d)$ und erhalten schließlich

$$B(d \approx 4) = \frac{\lim_{d \rightarrow 4} (4-d)B(d)}{4-d} + \lim_{d \rightarrow 4} ((4-d)B(d))' + \mathcal{O}(4-d). \quad (\text{A.13})$$

Da MATHEMATICA die Eigenschaften der Γ -Funktion kennt, kann die Grenzwertbildung und das Differenzieren unmittelbar mit den MATHEMATICA-eigenen Funktionen `Limit` und `D` geschehen. Für Loop-Diagramme mit nur einem Propagator sind wir damit am Ziel.

Für Loops mit zwei Propagatoren müssen wir noch das Feynman-Parameterintegral auswerten. Dazu unterscheiden wir zwischen „einfachen“ und „komplizierten“ Integralen. Ein einfaches Integral liegt vor, wenn der Integrand des Feynman-Parameterintegrals ein Polynom in x ist. In diesem Fall wird für die Feynman-Parameterintegration die MATHEMATICA-eigene Funktion `Integrate` verwendet. Die komplizierten Integrale lassen sich in Summanden folgender Form zerlegen:

$$I_1^{(n)}(q^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 dx \frac{x^n}{xm_1^2 + (1-x)m_2^2 - x(1-x)q^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$I_2^{(n)}(q^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 dx x^n \ln(xm_1^2 + (1-x)m_2^2 - x(1-x)q^2). \quad (\text{A.15})$$

Zunächst werden die Integrale $I_2^{(n)}$ mit Hilfe der Integrale $I_1^{(n)}$ ausgedrückt. Dies geschieht mittels partieller Integration:

$$I_2^{(n)}(q^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{n+1} (\ln m_1^2 + (q^2 + m_2^2 - m_1^2) I_1^{(n+1)}(q^2, m_1^2, m_2^2)). \quad (\text{A.16})$$

Die Integrale $I_1^{(n)}$ mit $n > 1$ brauchen nicht berechnet zu werden, da für $n \geq 2$ der Integrand in Gl. (A.14) in ein Polynom und einen gebrochen rationalen Anteil, dessen Zähler höchstens linear in x ist, zerlegt werden kann (MATHEMATICA-Funktion `Apart`). Das Integral $I_1^{(1)}$ kann schließlich mittels partieller Integration durch das Integral $I_1^{(0)}$ ausgedrückt werden:

$$I_1^{(1)}(q^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{\ln m_1^2 - \ln m_2^2 + (q^2 + m_2^2 - m_1^2) I_1^{(0)}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{2q^2}. \quad (\text{A.17})$$

Wir haben jetzt also alle Integrale auf ein elementares Integral, $I_1^{(0)}$, zurückgeführt.

Für die numerische Auswertung verwenden wir jedoch statt $I_1^{(0)}$ das an der Schwelle (d.h. bei $q^2 = (m_1 + m_2)^2$) stetige Integral

$$I_2(q^2, m_1^2, m_2^2) := I_2^{(0)}(q^2, m_1^2, m_2^2), \quad (\text{A.18})$$

das über

$$\begin{aligned} & I_1^{(0)}(q^2, m_1^2, m_2^2) \\ &= \frac{-2q^2 I_2(q^2, m_1^2, m_2^2) - 4q^2 + (q^2 + m_1^2 - m_2^2) \ln m_1^2 + (q^2 + m_2^2 - m_1^2) \ln m_2^2}{(q^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

mit $I_1^{(0)}$ zusammenhängt. Die in den numerischen Rechnungen verwendete Formel für I_2 lautet

$$I_2(q^2, m_1^2, m_2^2) = \begin{cases} x_+ \ln\left(\frac{x_+}{x_+ - 1}\right) + x_- \ln\left(\frac{x_-}{x_- - 1}\right) - 2 + \ln m_1^2 & \text{für } q^2 \neq 0, \\ \frac{m_1^2 \ln m_1^2 - m_2^2 \ln m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} - 1 & \text{für } q^2 = 0 \text{ und } m_1^2 \neq m_2^2, \\ \ln m_1^2 & \text{für } q^2 = 0 \text{ und } m_1^2 = m_2^2, \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

mit

$$x_{\pm} = \frac{q^2 + m_2^2 - m_1^2 \pm \sqrt{(q^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - 4q^2(m_2^2 - i\varepsilon)}}{2q^2}. \quad (\text{A.21})$$

A.3 Berechnung von Selbstenergie-Diagrammen bei endlicher Temperatur

Bevor die automatische Berechnung des Medium-Anteils eines Diagramms beginnen kann, muss erst der Integrand definiert werden. Das geschieht genauso wie im Vakuum, siehe z.B. Gl. (A.4). Integranden mit Isospin- oder Lorentz-Indizes müssen dann wieder auf skalare Funktionen reduziert werden. Bei Diagrammen mit Lorentz-Indizes wie z.B. der ρ -Selbstenergie $\Sigma^{\mu\nu}$ ist dabei zu beachten, dass sie aufgrund der im Medium gebrochenen Lorentz-Invarianz eine kompliziertere Tensorstruktur haben als im Vakuum. Da wir aber im zweiten Teil dieser Arbeit nur den Spezialfall $\vec{q} = 0$ untersucht haben, gibt es trotzdem nur zwei voneinander unabhängige Komponenten, z.B. Σ^{00} und Σ^{33} . Die 00-Komponente wird mit den Ersetzungen $q^\mu = q^\nu = q_0$, $k^\mu = k^\nu = k_0$ und $g^{\mu\nu} = 1$ ausgewählt, und die 33-Komponente entsprechend durch $q^\mu = q^\nu = 0$, $k^\mu = k^\nu = |\vec{k}|z$ ($z = \cos\vartheta$) und $g^{\mu\nu} = -1$.

Im nächsten Schritt wird wieder über doppelt auftretende Indizes summiert. Da der Medium-Anteil endlich ist, kann dies gleich für Dimension 4 geschehen, d.h. $g_\mu^\mu = 4$. Der dabei entstehende Ausdruck enthält die Skalarprodukte k^2 , $k \cdot q$ und q^2 , die wegen $\vec{q} = 0$ durch $k_0^2 - \vec{k}^2$, $k_0 q_0$ und q_0^2 ersetzt werden können. Der resultierende Integrand ist jetzt also eine Funktion von q_0 , k_0 , $|\vec{k}|$ und z .

Wir betrachten zuerst den Fall, dass nur ein Propagator im Loop auftritt. In diesem Fall hat der entsprechende Ausdruck im Vakuum die Form

$$A_1(q_0, \vec{q} = 0; T = 0) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{P(q_0, k_0, |\vec{k}|, z)}{k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m^2}. \quad (\text{A.22})$$

Bei endlicher Temperatur wird aus dem k_0 -Integral eine Matsubara-Summe [60]:

$$A_1(i\omega_n, \vec{q} = 0, T > 0) = -iT \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{m \text{ gerade}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{P(i\omega_n, i\omega_m, |\vec{k}|, z) e^{i\omega_m \eta}}{\omega_m^2 + |\vec{k}|^2 + m^2}. \quad (\text{A.23})$$

Die Summe wird nun durch ein Wegintegral in der komplexen Ebene ersetzt, wobei der Weg C die imaginäre Achse im positiven Sinn umkreist, jedoch die Pole bei $x = \pm i\omega_{\vec{k}} =$

$\pm\sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2}$ nicht einschließt:

$$A_1(i\omega_n, \vec{q} = 0; T > 0) = i \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{P(i\omega_n, x, |\vec{k}|, z) e^{x\eta}}{x^2 - \omega_{\vec{k}}^2} \frac{1}{e^{z/T} - 1}. \quad (\text{A.24})$$

Da wegen der Exponentialfunktionen die Kreisbögen im Unendlichen nichts beitragen können, kann der Weg C so deformiert werden, dass er schließlich nur noch die Pole $x = \pm\omega_{\vec{k}}$ im negativen Sinn umkreist. Damit ergibt sich

$$A_1(i\omega_n, \vec{q} = 0; T > 0) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{P(i\omega_n, \omega_{\vec{k}}, |\vec{k}|, z)}{2\omega_{\vec{k}}(e^{\omega_{\vec{k}}/T} - 1)} - \frac{P(i\omega_n, -\omega_{\vec{k}}, |\vec{k}|, z)}{2\omega_{\vec{k}}(e^{-\omega_{\vec{k}}/T} - 1)} \right). \quad (\text{A.25})$$

Auf diese Weise wird übrigens Gl. (2.4) bewiesen. Ersetzen wir nun noch $i\omega_n \rightarrow q_0$ und bilden den Medium-Anteil, so erhalten wir mit der Bezeichnung $n_{\vec{k}} = 1/(e^{\omega_{\vec{k}}/T} - 1)$

$$A_1^{Med}(q_0, \vec{q} = 0; T > 0) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} \left(P(q_0, \omega_{\vec{k}}, |\vec{k}|, z) + P(q_0, -\omega_{\vec{k}}, |\vec{k}|, z) \right). \quad (\text{A.26})$$

Die Winkelintegration kann noch analytisch ausgeführt werden, aber das Integral über $|\vec{k}|$ wird numerisch ausgewertet.

Nun betrachten wir den Fall, dass zwei Propagatoren im Loop auftreten. In diesem Fall hat der entsprechende Ausdruck im Vakuum die Form

$$A_2(q_0, \vec{q} = 0; T = 0) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{P(q_0, k_0, |\vec{k}|, z)}{(k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m_1^2)((k_0 + q_0)^2 - |\vec{k}|^2 - m_2^2)}. \quad (\text{A.27})$$

Analog zur gerade beschriebenen Weise erhalten wir hierfür bei endlicher Temperatur

$$\begin{aligned} A_2^{Med}(q_0, \vec{q} = 0; T > 0) = & \\ & -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{n_1(\vec{k})}{2\omega_1(\vec{k})} \left(\frac{P(q_0, \omega_1(\vec{k}), |\vec{k}|, z)}{[q_0 + i\varepsilon + \omega_1(\vec{k})]^2 - \omega_2^2(\vec{k})} + \frac{P(q_0, -\omega_1(\vec{k}), |\vec{k}|, z)}{[q_0 + i\varepsilon - \omega_1(\vec{k})]^2 - \omega_2^2(\vec{k})} \right) \right. \\ & \left. + \frac{n_2(\vec{k})}{2\omega_2(\vec{k})} \left(\frac{P(q_0, -\omega_2(\vec{k}) - q_0, |\vec{k}|, z)}{[q_0 + i\varepsilon + \omega_2(\vec{k})]^2 - \omega_1^2(\vec{k})} + \frac{P(q_0, \omega_2(\vec{k}) - q_0, |\vec{k}|, z)}{[q_0 + i\varepsilon - \omega_2(\vec{k})]^2 - \omega_1^2(\vec{k})} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

mit den Abkürzungen $\omega_i(\vec{k}) = \sqrt{m_i^2 + |\vec{k}|^2}$ und $n_i(\vec{k}) = 1/(e^{\omega_i(\vec{k})/T} - 1)$. Das Winkelintegral kann wieder analytisch ausgeführt werden. Das $|\vec{k}|$ -Integral wird anschließend numerisch ausgewertet.

Anhang B

Der Zerfall $\tau \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^- \nu_\tau$

B.1 Drei-Pion-Massenverteilung

Die differentielle τ -Zerfallsbreite für den Zerfall in drei geladene Pionen hat die Form

$$\frac{d\Gamma_{\tau \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \nu_\tau}}{dM_{3\pi}} = G_F^2 \cos^2 \theta_C \frac{(m_\tau^2 - M_{3\pi}^2)^2}{2\pi^2 m_\tau^3 M_{3\pi}} (m_\tau^2 H_{\pi^- \pi^- \pi^+}^l + (m_\tau^2 + 2M_{3\pi}^2) H_{\pi^- \pi^- \pi^+}^t). \quad (\text{B.1})$$

Hierin bezeichnet $G_F = e^2/(4\sqrt{2} \sin^2 \theta_W m_W^2)$ die Fermi-Kopplungskonstante [48] und $H_{\pi^- \pi^- \pi^+}^t$ und $H_{\pi^- \pi^- \pi^+}^l$ sind die transversalen bzw. longitudinalen Komponenten des sogenannten Hadron-Tensors. Unter der Annahme von PCAC kann die longitudinale Komponente vernachlässigt werden.

Da in unserem Modell gar keine Drei-Pion-Endzustände vorkommen, ist das $\pi^- \pi^- \pi^+$ -Spektrum als 1/2 mal das $\pi\rho$ -Spektrums plus 2/3 mal das $\pi\sigma$ -Spektrum aufzufassen, d.h.

$$H_{\pi^- \pi^- \pi^+}^t(M_{3\pi}^2) = \frac{1}{2} H_{\pi\rho}^t(M_{3\pi}^2) + \frac{2}{3} H_{\pi\sigma}^t(M_{3\pi}^2). \quad (\text{B.2})$$

Die $\pi\rho$ - und $\pi\sigma$ -Hadrontensoren sind durch

$$\begin{aligned} H_{\pi\rho}^t(q^2) &= \frac{1}{3} \left(\frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} - g_{\mu\mu'} \right) \int \frac{d^3 k_\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_\pi^0} \int \frac{d^3 k_\rho}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_\rho^0} (2\pi)^4 \delta(q - k_\pi - k_\rho) \\ &\quad \times Z_{\pi 1} \left(\frac{k_{\rho\nu} k_{\rho\nu'}}{m_\rho^2} - g_{\nu\nu'} \right) (A_{W\pi\rho})_{1bc}^{\mu\nu} (A_{W\pi\rho}^*)_{1bc}^{\mu'\nu'}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} H_{\pi\sigma}^t(q^2) &= \frac{1}{3} \left(\frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} - g_{\mu\mu'} \right) \int \frac{d^3 k_\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_\pi^0} \int \frac{d^3 k_\sigma}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_\sigma^0} (2\pi)^4 \delta(q - k_\pi - k_\sigma) \\ &\quad \times Z_{\pi 1} (A_{W\pi\sigma})_{1b}^\mu (A_{W\pi\sigma}^*)_{1b}^{\mu'} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

gegeben, mit $k_\pi^0 = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{k}_\pi^2}$, $k_\rho^0 = \sqrt{m_\rho^2 + \vec{k}_\rho^2}$ und $k_\sigma^0 = \sqrt{m_\sigma^2 + \vec{k}_\sigma^2}$. Die Amplituden $A_{W\pi\rho}$ und $A_{W\pi\sigma}$ bezeichnen die vollen (d.h. nicht nur eiteilchenirreduziblen) Vertexfunk-

tionen, jedoch ohne die lästigen Konstanten, die bereits in G_F hineingezogen wurden:

$$(A_{W\pi\rho})_{abc}^{\mu\nu} = \frac{\sin\theta_W}{e\cos\theta_C} \left((\Gamma_{W\pi\rho})_{abc}^{\mu\nu} + (\Gamma_{Wa_1})_{ad}^{\mu\kappa} i(G_{a_1}(q^2))_{\kappa\lambda} (\Gamma_{a_1\pi\rho})_{dbc}^{\lambda\nu} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$(A_{W\pi\sigma})_{ab}^{\mu} = \frac{\sin\theta_W}{e\cos\theta_C} \left((\Gamma_{W\pi\sigma})_{ab}^{\mu} + (\Gamma_{Wa_1})_{ad}^{\mu\kappa} i(G_{a_1}(q^2))_{\kappa\lambda} (\Gamma_{a_1\pi\sigma})_{db}^{\lambda} \right). \quad (\text{B.6})$$

Die hier verwendeten Vertexfunktionen $\Gamma_{W\pi\rho}$ und $\Gamma_{W\pi\sigma}$ sind analog zu Abb. 5.2 definiert.

Die in der linken Hälfte von Abb. 7.4 gezeigten Kurven wurden folgendermaßen normiert:

$$\frac{dN_{\pi^-\pi^-\pi^+}}{dM_{3\pi}} = N_{\tau^-} \tau_{\tau^-} \frac{d\Gamma_{\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+\nu_\tau}}{dM_{3\pi}} = \frac{N_{\pi^-\pi^-\pi^+\tau_{\tau^-}}}{B(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+\nu_\tau)} \frac{d\Gamma_{\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+\nu_\tau}}{dM_{3\pi}}, \quad (\text{B.7})$$

wobei $N_{\pi^-\pi^-\pi^+} = 37170$ die Gesamtzahl der gemessenen $\pi^-\pi^-\pi^+$ -Ereignisse [41], $\tau_{\tau^-} = 290.0$ fs die τ -Lebensdauer [42] und $B(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+\nu_\tau) = 9.15\%$ das Verzweigungsverhältnis des τ -Leptons in drei geladene Pionen bezeichnet [42].

B.2 Zwei-Pion-Massenverteilung

Da in unserem Modell der $\pi^-\pi^-\pi^+$ -Endzustand durch $\pi^-\rho^0$ - und $\pi^-\sigma$ -Endzustände angenähert wird, kann die $\pi^-\pi^-$ -Verteilung nicht direkt berechnet werden. Stattdessen muss das ρ^0 - oder σ -Meson im Endzustand mit Impuls k_ρ bzw. k_σ in geeigneter Weise als $\pi^+\pi^-$ -Paar mit Impulsen p_{π^+} und p_{π^-} (d.h. $p_{\pi^+} + p_{\pi^-} = k_\rho$ bzw. k_σ) interpretiert werden. Der Einfachheit halber betrachten wir zuerst den $\pi\sigma$ -Endzustand.

Im Ruhesystem des σ -Mesons ist die Kinematik durch

$$\begin{aligned} k_\sigma &= (m_\sigma, \vec{0}), \\ k_{\pi^-} &= (q_0 - m_\sigma, \vec{q}), \quad q_0 = \frac{q^2 - m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2m_\sigma}, \quad |\vec{q}| = \frac{\sqrt{(q^2 - m_\pi^2 - m_\sigma^2)^2 - 4m_\pi^2 m_\sigma^2}}{2m_\sigma}, \\ p_{\pi^\pm} &= \left(\frac{m_\sigma}{2}, \mp \vec{p} \right), \quad |\vec{p}| = \sqrt{\frac{m_\sigma^2}{4} - m_\pi^2}, \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| z. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

gegeben. Folglich hängt die invariante Masse des $\pi^-\pi^-$ -Paares nur von q^2 und $z = \cos(\vec{p}, \vec{q})$ ab:

$$M_{2\pi}^2 = \frac{q^2 - m_\sigma^2 + 3m_\pi^2}{2} - 2|\vec{p}| |\vec{q}| z. \quad (\text{B.9})$$

Sei nun $P_\sigma(z)$ die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Winkel zwischen \vec{p} und \vec{q} . Da das σ -Meson in ein $\pi^+\pi^-$ -Paar in s -Welle zerfällt, ist die Winkelverteilung in seinem Ruhesystem isotrop, d.h. $P_\sigma(z) = \text{const.} = 1/2$. Damit kann der $\pi\sigma$ -Beitrag zum $\pi^-\pi^-$ -

Spektrum folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{\pi^-\pi^-}}{dM_{2\pi}^2} &= \int_{9m_\pi^2}^{\infty} dq^2 \left(\frac{dN_{\pi^-\pi^-\pi^+}^{(\pi\sigma)}}{dM_{3\pi}^2} \right)_{M_{3\pi}^2=q^2} \\
&\quad \times \int_{-1}^1 dz P_\sigma(z) \delta(M_{2\pi}^2 - (q^2 - m_\sigma^2 + 3m_\pi^2)/2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|z) \\
&= \int_{q_-^2}^{q_+^2} dq^2 \left(\frac{dN_{\pi^-\pi^-\pi^+}^{(\pi\sigma)}}{dM_{3\pi}^2} \right)_{M_{3\pi}^2=q^2} \frac{1}{2|\vec{p}||\vec{q}|} P_\sigma((q^2 - m_\sigma^2 + 3m_\pi^2 - 2M_{2\pi}^2)/(4|\vec{p}||\vec{q}|)).
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Hierbei bezeichnet $dN_{\pi^-\pi^-\pi^+}^{(\pi\sigma)}/dM_{3\pi}^2$ den $\pi\sigma$ -Beitrag zum $\pi^-\pi^-\pi^+$ -Spektrum (siehe Anhang B.1), und die Integrationsgrenzen q_\pm^2 in der letzten Zeile sind durch

$$q_\pm^2 = \frac{2m_\pi^4 + m_\sigma^2 M_{2\pi}^2 \pm 2|\vec{p}|m_\sigma M_{2\pi} \sqrt{M_{2\pi}^2 - 4m_\pi^2}}{2m_\pi^2} \tag{B.11}$$

gegeben.

Für den $\pi\rho$ -Beitrag ist die Situation sehr ähnlich, wenn man überall m_σ durch m_ρ ersetzt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Winkelverteilung nicht als isotrop angenommen werden kann, weil das ρ -Meson in ein $\pi^+\pi^-$ -Paar in p -Welle zerfällt. Um die Winkelverteilung zu erhalten, stellen wir uns vor, das ρ -Meson werde vor seinem Zerfall in zwei Pionen in einem fiktiven Detektor registriert, wodurch es auf seine Massenschale gesetzt wird, während der Spin völlig unbeeinflusst bleibt. Unter diesen Bedingungen ist die Winkelverteilung durch das Betragsquadrat der Amplitude

$$B^\mu \varepsilon_{abc} = (A_{W\pi\rho})_{abc}^{\mu\nu} (p_{\pi^- \nu} - p_{\pi^+ \nu}) \tag{B.12}$$

gegeben, welches über die drei transversalen W -Polarisationen gemittelt und für die oben angegebene Kinematik (aber mit m_ρ statt m_σ) ausgewertet werden muss. Das Ergebnis lässt sich dann in der Form

$$P_\rho(z) \propto \left(\frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} - g_{\mu\mu'} \right) B^\mu B^{*\mu'} = c_0 + c_2 z^2. \tag{B.13}$$

schreiben. Diese Verteilung muss dann nur noch normiert werden:

$$P_\rho(z) = \frac{c_0 + c_2 z^2}{2(c_0 + c_2/3)}. \tag{B.14}$$

Literaturverzeichnis

- [1] F. Weber, Acta Phys. Polon. B 30 (1999) 3149.
- [2] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories, An Introduction*, World Scientific, Singapore 1992.
- [3] F. Karsch, Preprint hep-ph/0103314 (2001).
- [4] S. Digal, E. Laermann and H. Satz, Eur. Phys. J. C 18 (2001) 583.
- [5] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. 158, (1984) 142.
- [6] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Lett. B 184 (1987) 83.
- [7] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345; 124 (1961) 246.
- [8] U. Vogl and W. Weise, Progr. Part. and Nucl. Phys. 27 (1991) 195.
- [9] E.V. Shuryak, Phys. Lett. B 78 (1979) 150.
- [10] G. Agakichiev et al. (CERES Collaboration), Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1272;
P. Wurm for the CERES Collaboration, Nucl. Phys. A 590 (1995) 103c.
- [11] N. Masera for the HELIOS-3 Collaboration, Nucl. Phys. A 590 (1995) 93c.
- [12] J. Friese for the HADES Collaboration, Nucl. Phys. A 654, (1999) 1017c.
- [13] Y. Akiba et al., Nucl. Phys. A 638 (1998) 565.
- [14] J.J. Sakurai, Ann. Phys. 11 (1960) 1.
- [15] G.E. Brown and M. Rho, Phys. Rev. Lett. 66, (1991) 2720.
- [16] G.Q. Li, C.M. Ko and G.E. Brown, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4007; Nucl. Phys. A 606 (1996) 568.
- [17] W. Cassing, W. Ehehalt and C. M. Ko, Phys. Lett. B 363 (1995) 35.
- [18] P. von Neumann-Cosel, F. Neumeyer, B. Reitz, A. Richter and J. Wambach, Phys. Rev. C 62 (2000) 34307.
- [19] T. Hatsuda and S.H. Lee, Phys. Rev. C 46 (1992) R34.

- [20] S. Leupold, W. Peters and U. Mosel, Nucl. Phys. A 628 (1998) 311.
- [21] F. Klingl, N. Kaiser and W. Weise, Nucl. Phys. A 624 (1997) 527.
- [22] R. Rapp, Dissertation, Bonn 1996.
- [23] G. Chanfray, R. Rapp and J. Wambach, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 368.
- [24] R. Rapp, G. Chanfray and J. Wambach, Nucl. Phys. A 617 (1997) 472.
- [25] R. Rapp and J. Wambach, Eur. Phys. J. A 6 (1999) 415.
- [26] R. Rapp and J. Wambach, Adv. Nucl. Phys. 25 (2000) 1.
- [27] B. Friman and H.J. Pirner, Nucl.Phys. A 617 (1997) 496.
- [28] W. Peters, M. Post, H. Lenske, S. Leupold and U. Mosel, Nucl. Phys. 632 (1998) 109.
- [29] R. Rapp, M. Urban, M. Buballa and J. Wambach, Phys. Lett. B 417 (1998) 1.
- [30] R. Rapp and C. Gale, Phys. Rev. C 60 (1999) 24903.
- [31] T. Ericson and W. Weise, *Pions and Nuclei*, Oxford University Press, New York 1988.
- [32] C. Gale and J. Kapusta, Phys. Rev. C 35 (1987) 2107.
- [33] C. L. Korpa and S. Pratt, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1502.
- [34] G. Chanfray and P. Schuck, Nucl. Phys. A 555 (1993) 329.
- [35] M. Herrmann, Dissertation D17, Darmstadt 1992;
M. Herrmann, B. Friman and W. Nörenberg, Nucl. Phys. A 560 (1993) 411.
- [36] M. Urban, Diplomarbeit, Darmstadt 1997 (unveröffentlicht).
- [37] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp and J. Wambach, Nucl. Phys. A 641 (1998) 433.
- [38] C. Gale and J.I. Kapusta, Nucl.Phys. B 357 (1991) 65.
- [39] M. Dey, V.L. Eletsky and B.L. Ioffe, Phys. Lett. B 252 (1990) 620;
V.L. Eletsky and B.L. Ioffe, Phys. Rev. D 51 (1995) 2371.
- [40] G. Chanfray, J. Delorme and M. Ericson, Nucl. Phys. A 637 (1998) 421;
G. Chanfray, J. Delorme, M. Ericson and M. Rosa-Clot, Preprint nucl-th/9809007 (1998);
- [41] H. Albrecht et al. (ARGUS Collaboration), Z. Phys. C 58 (1993) 61.
- [42] R. Barate et al. (ALEPH Collaboration), Eur. Phys. J. C 4 (1998) 409.

- [43] M. Oertel, Dissertation D17, Darmstadt 2000;
M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach, Nucl. Phys. A 676 (2000) 247.
- [44] S.L. Adler and R.F. Dashen, *Current Algebra*, Benjamin, New York 1968.
- [45] M. Gell-Mann and M. Lévy, Nuovo Cimento 16 (1960) 705.
- [46] B.W. Lee and H.T. Nieh, Phys. Rev. 166 (1968) 1507.
- [47] R.D. Pisarski, Preprint hep-ph/9505257 (1995); Phys. Rev. D 52 (1995) R3773.
- [48] D.E. Groom et al. (Particle Data Group), Eur. Phys. J. C 15 (2000) 1.
- [49] A.R. Erwin, R. March, W.D. Walker and E. West, Phys. Rev. Lett. 6 (1961) 628.
- [50] M. Gell-Mann and F. Zachariasen, Phys. Rev. 124 (1961) 953.
- [51] N.M. Kroll, T.D. Lee and B. Zumino, Phys. Rev. 157 (1967) 1376.
- [52] S.R. Amendolia et al., Phys. Lett. B 138 (1984) 454; Phys. Lett. B 146 (1984) 116.
- [53] L.M. Barkov et al., Nucl. Phys. B 256 (1985) 365.
- [54] C.D. Froggatt and J.L. Petersen, Nucl. Phys. B 129 (1977) 89.
- [55] M. Cubero, Dissertation D17, Darmstadt 1990.
- [56] A.B. Migdal, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 107.
- [57] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York 1964; *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York 1965.
- [58] W. Rarita and J. Schwinger, Phys. Rev. 60 (1941) 61.
- [59] J.F. Mathiot, Nucl. Phys. A 412 (1984) 201.
- [60] A.L. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York 1971.
- [61] W. Weinhold, B. Friman and W. Nörenberg, Phys. Lett. B 433 (1998) 236.
- [62] P.A. Henning and H. Umezawa, Nucl. Phys. A 571 (1994) 617.
- [63] J.V. Steele, H. Yamagishi and I. Zahed, Phys. Rev. D 56 (1997) 5605.
- [64] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp and J. Wambach, Nucl. Phys. A 673 (2000) 357.
- [65] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961) 154;
J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965.
- [66] C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191.
- [67] S. Gasiorowicz and D.A. Geffen, Rev. Mod. Phys. 41 (1969) 531.

- [68] U.-G. Meißner, Phys. Rep. 161 (1988) 213.
- [69] P. Ko and S. Rudaz, Phys. Rev. D 50 (1994) 6877.
- [70] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1980.
- [71] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck and J. Wambach, Nucl. Phys. A 603 (1996) 458.
- [72] H. van Hees, Dissertation D17, Darmstadt 2000.
- [73] L.R. Ram Mohan, Phys. Rev. D 14 (1976) 2670.
- [74] B.W. Lee, Nucl. Phys. B 9 (1969) 649.
- [75] N. Isgur, C. Morningstar and C. Reader, Phys. Rev. D 39 (1989) 1357.
- [76] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II: Modern Applications*, Cambridge University Press, New York 1996.
- [77] Z. Aouissat, P. Schuck and J. Wambach, Nucl. Phys. A 618 (1997) 402.
- [78] H.D. Dosch and S. Narison, Phys. Lett. B 417 (1998) 173.
- [79] B.-J. Schaefer and H.-J. Pirner, Nucl. Phys. A 660 (1999) 439;
O. Bohr, B.-J. Schaefer and J. Wambach, Preprint hep-ph/0007098 (2000).
- [80] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I: Foundations*, Cambridge University Press, New York 1995.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. J. Wambach, für die Anregung zu dieser Arbeit, sein ständiges Interesse und seine Unterstützung in vielen Dingen bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Richter, der nicht nur das Korreferat übernommen, sondern mich auch während meiner gesamten Studienzeit gefördert hat. Ich danke ihm insbesondere dafür, dass er meine Entscheidung, von der experimentellen wieder zur theoretischen Physik zurückzukehren, akzeptiert hat.

Allen Mitgliedern der NHC-Gruppe danke ich für die angenehme und anregende Atmosphäre. Mein größter Dank gilt dabei Dr. M. Buballa für seine ständige Diskussionsbereitschaft. Daneben habe ich besonders von Diskussionen mit Dr. Z. Aouissat, Dr. B.-J. Schaefer und Dr. A. Wirzba profitiert.

Ein besonderer Dank gebührt Dr. R. Rapp für seine kritischen Anmerkungen und dafür, dass er mir numerische Ergebnisse seiner Programme zur Verfügung gestellt hat. Herrn Prof. Dr. G. Chanfray bin ich für anregende Diskussionen während seines Gastaufenthalts in Darmstadt zu Dank verpflichtet.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes danke ich für die Förderung seit Oktober 1999.

Zum Schluss möchte ich mich ganz besonders bei Dr. Micaela Oertel bedanken, und zwar nicht nur für die vielen physikalischen Diskussionen auch noch zu später Stunde, sondern vor allem dafür, dass sie mich auch an andere Dinge als an Physik denken ließ.

Lebenslauf

Name: Michael Urban

Geburtsdatum: 4. Januar 1973

Geburtsort: Wiesbaden

1979 - 1983: Besuch der Rudolf-Dietz-Schule in Wiesbaden

1983 - 1992: Besuch der Leibnizschule in Wiesbaden

Juni 1992: Abitur

Oktober 1992: Beginn des Physikstudiums an der Technischen Hochschule Darmstadt

Oktober 1994: Vordiplom

Juli 1996 - Sept. 1997: Diplomarbeit bei Prof. Dr. J. Wambach über das Rho-Meson in kalter Kernmaterie

Oktober 1997: Beginn einer Doktorarbeit bei Prof. Dr. A. Richter im Rahmen des Graduiertenkollegs „Physik und Technik von Beschleunigern“

Januar 1998: Studien-Förderpreis der WE-Heraeus-Stiftung

Jan. - Feb. 1998: Besuch der „Joint Universities Accelerator School“ (JUAS) in Ar-champs (Frankreich)

Oktober 1998: Wechsel zu Prof. Dr. J. Wambach und Beginn der Arbeit über „Vektormesonen in dichter und heißer Materie“

seit Oktober 1999: Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes