

Renormierungsgruppen-Flussgleichungen und der chirale Phasenübergang

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von
Dipl.-Phys. Oliver Bohr
aus Idar-Oberstein

Darmstadt 2001
D17

Referent: Prof. Dr. J. Wambach
Korreferent: Prof. Dr. J. Kübler

Tag der Einreichung: 29.05.2001
Tag der Prüfung: 02.07.2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
I Das $O(N)$-Modell im Renormierungsgruppenzugang	7
1 Das $O(N)$-Modell	8
1.1 Anwendungen des $O(N)$ -Modells	8
1.2 Grundlagen	9
1.3 Symmetrie und Ströme	10
1.4 Spontane Symmetriebrechung	11
2 Der Renormierungsgruppenzugang	14
2.1 Das Konzept der Renormierungsgruppe	14
2.2 Die Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie	17
2.3 Die effektive Wirkung	20
3 Das $O(N)$-Modell im Renormierungsgruppenzugang	23
3.1 Ableitung der Flussgleichungen	23
3.1.1 Eigenzeit-Regularisierung und Heat-Kernel-Entwicklung	25
3.1.2 Heat-Kernel-Abschneidefunktion	30
3.2 Flussgleichungen bei $T=0$	34
3.3 Flussgleichungen bei endlicher Temperatur	36
3.4 Vergleich mit der Methode der exakten Renormierungsgruppen	39
3.4.1 Konstruktion der gemittelten Wirkung Γ_k^{av}	40
3.4.2 Funktional-Flussgleichung für Γ_k^{av}	41
3.4.3 Flussgleichung für das gemittelte Potential U_k^{av}	42
4 Ergebnisse für das $O(N)$-Modell	44
4.1 Numerische Implementierung	44
4.2 Startwerte und Evolution	45
4.3 Das effektive Potential und der chirale Phasenübergang	47
5 Das kritische Verhalten am Phasenübergang	52
5.1 Reskalierte ($T = 0$)-Flussgleichungen	52
5.1.1 Kanonische Dimension und Reskalierung	52

5.2	Die Skalierungslösung	54
5.3	Wilson-Fisher-Fixpunkt	58
5.4	Beta-Funktionen und Fixpunkte	60
5.5	Kritische Exponenten	67
5.6	Einfluss der Wahl des Regularisierungsschemas	72
II Das Dilaton-Modell im Renormierungsgruppenzugang		74
6	Das Dilaton-Modell	75
6.1	Das Dilaton-Potential	76
6.2	Flussgleichungen für das Dilaton-Modell	78
7	Numerische Ergebnisse für das Dilaton-Modell	80
7.1	Lösen der Flussgleichung	80
7.2	Das Dilaton-Modell bei endlichen Temperaturen	83
8	Kopplung des Dilaton-Modells an das $O(4)$-Modell	87
8.1	Die Lagrangedichte des gekoppelten Modells	87
8.2	Die Flussgleichungen	88
8.2.1	Entwicklung des Potentials	90
8.2.2	Flussgleichungen für die Kopplungen und die Erwartungswerte	90
8.2.3	Erweiterung der Flussgleichungen des gekoppelten Systems auf endliche Temperaturen	92
9	Numerische Auswertung des gekoppelten Modells	94
9.1	Die Evolution bei $T = 0$	95
9.2	Ergebnisse bei endlichen Temperaturen	96
9.3	Der chirale Phasenübergang im gekoppelten Modell	99
9.3.1	Reskalierte Flussgleichungen	99
9.3.2	Numerische Ergebnisse	99
Zusammenfassung und Ausblick		102
A	Mathematische Relationen	104
A.1	Gammafunktion	104
A.2	Wichtige Integrale	104
A.3	Zur Spurbildung der Fluktuationsmatrix $\tilde{\mathcal{M}}$	105
B	Details zur Berechnung der Flussgleichungen	106
B.1	Vereinfachung der Ausdrücke in Gleichung (3.20)	106
B.2	Berechnung der Heat-Kernel-Abschneidefunktion	108
B.3	Ableitung der Beziehung $G(x, y) = (\Gamma_k^{av,(2)} + R_k)^{-1}$	108

Einleitung

In Experimenten und Beobachtungen hat man bisher vier fundamentale Kräfte in der Natur gefunden. Da sind auf der einen Seite die Gravitation und die elektromagnetische Kraft, die uns in unseren alltäglichen Erfahrungen begegnen und auf der anderen Seite die schwache und die starke Kraft, die sich aufgrund ihrer kurzen Reichweite der alltäglichen Erfahrung entziehen. Die Untersuchungen dieser Arbeit sind von dem Wunsch motiviert, ein tieferes Verständnis der starken Kraft zu gewinnen. Wir werden aber sehen, dass die dazu verwendete Methode der Renormierungsgruppe und teilweise auch die untersuchten Modelle nicht auf die starke Kraft beschränkt sind, sondern auch Anwendung in anderen Gebieten finden, beispielsweise in der Erforschung des Ferromagnetismus.

Man kann Teilchen anhand ihrer Wechselwirkungen in verschiedene Gruppen einteilen. Von besonderem Interesse für das Verständnis der starken Kraft sind natürlich die Teilchen, die über die starke Kraft wechselwirken. Diese Teilchen bezeichnet man als Hadronen, zu ihnen zählen die Nukleonen, die weiteren Baryonen und die Mesonen. Die Hadronen sind wiederum von den heute als elementar angesehenen Quarks und Gluonen aufgebaut. In der gewöhnlichen, als hadronisch bezeichneten Materie sind die Quarks und Gluonen in den Hadronen eingeschlossen. Unter diesen Bedingungen, d.h. bei einfacher Kernmateriedichte und im Vergleich zu den Energieskalen der starken Wechselwirkung niedrigen Temperaturen beobachtet man keine freien Quarks oder Gluonen.

Die hadronische Phase ist jedoch nicht die einzig mögliche Form der Materie. Kosmologische Beobachtung wie die Rotverschiebung des Spektrums ferner Galaxien oder die Drei-Kelvin-Hintergrundstrahlung weisen darauf hin, dass sich das Universum zu einem früheren Zeitpunkt in einem dichteren und heisseren Zustand befand. Zu Zeiten kurz nach dem Urknall waren die Dichte und Temperatur im Universum vermutlich so hoch, dass die Quarks und Gluonen nicht in einzelnen Hadronen eingeschlossen waren, sondern ein Plasma bildeten, in dem sie sich frei bewegen konnten, das Quark-Gluon-Plasma. Geht man von dieser Annahme aus, so muss in der Folgezeit ein Phasenübergang vom Quark-Gluon-Plasma zur hadronischen Phase stattgefunden haben.

Experimentell versucht man heute den umgekehrten Weg zugehen. In relativistischen Schwerionenstößen am CERN (Genf) oder bei RHIC (Brookhaven) ist man in der Lage, für kurze Zeiten Dichten und Temperaturen zu erzeugen, die möglicherweise bereits zur Erzeugung eines Quark-Gluon-Plasmas ausreichen. Es gibt jedenfalls Hinweise darauf, dass in Schwerionenexperimenten am CERN bereits ein Quark-Gluon-Plasma erzeugt wurde. Den Übergang von der hadronischen Phase der Materie zum Quark-Gluon-Plasma bezeichnet man auch als Deconfinement-Phasenübergang.

Neben dem Deconfinement-Phasenübergang erwartet man unter den gleichen oder ähn-

lichen Bedingungen für Druck und Temperatur einen weiteren Phasenübergang, den sogenannten chiralen Phasenübergang. Es gibt Hinweise, dass die beiden Phasenübergänge zusammenfallen, diese Frage ist bisher jedoch nicht abschließend geklärt. Die fundamentale Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik (QCD). Im chiralen Limes, d.h. im Grenzfall masseloser Quarks, ist die QCD chiral symmetrisch und damit invariant unter Transformationen der Gruppe $SU(N)_L \times SU(N)_R$. In der Natur ist die chirale Symmetrie durch die verschiedenen Stromquarkmassen explizit gebrochen. Die Masse der beiden leichtesten Quarks, des up-Quarks und des down-Quarks, sind jedoch so gering, dass man zumindest in diesem Sektor die QCD als annähernd chiral symmetrisch betrachten kann. Neben der expliziten Brechung ist in der hadronischen Welt die chirale Symmetrie auch noch spontan gebrochen. Mit der spontanen Symmetriebrechung erklärt man heute die Massen der Nukleonen. Die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei hohen Temperaturen bezeichnet man als chiralen Phasenübergang. Diese beiden Phasenübergänge, der chirale Phasenübergang und der Deconfinement-Phasenübergang, zumindest in einer effektiven Realisierung, sind ein wesentliches Ziel der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit.

Zur theoretischen Behandlung der QCD gibt es mehrere Ansatzpunkte. Aufgrund der Stärke der Kopplungskonstanten ist eine perturbative Behandlung der QCD bei niedrigen Energien nicht möglich. Bei hohen Energien wird die Kopplungskonstante klein, dies führt zur asymptotischen Freiheit der QCD und ermöglicht eine perturbative Behandlung. Einen anderen Weg schlägt man in der Gitter-QCD ein. Dort versucht man die QCD auf einem endlichen Raum-Zeit-Gitter direkt numerisch zu lösen. Der Vorteil der Gitter-QCD liegt darin, dass man auf keine Modellannahmen angewiesen ist. Der numerische Aufwand ist jedoch sehr hoch und teilweise treten auch konzeptionelle Schwierigkeiten auf. Eine weitere modellunabhängige Methode ist die chirale Störungstheorie. In der chiralen Störungstheorie dienen die kleinen Massen der leichten Quarks und die Energien und Impulse der untersuchten Teilchen als Entwicklungsparameter. Damit ist man in der Lage, die QCD bei niedrigen Energien zu behandeln. Ein anderer Ansatzpunkt, den wir in dieser Arbeit verfolgen, liegt in der Verwendung von effektiven Modellen. Effektive Modelle versucht man so zu konstruieren, dass sie die für das jeweils untersuchte Problem wichtigen Aspekte der QCD widerspiegeln.

Im ersten Teil der Arbeit untersuchen wir den Phasenübergang von spontan gebrochener Symmetrie zu restaurierter Symmetrie in $O(N)$ -Modellen. Vom teilchenphysikalischen Standpunkt aus betrachtet, beschreiben diese Modelle Systeme aus jeweils einem σ -Meson und $N - 1$ Pionen. Die $O(N)$ -Modelle sind in ihrer Anwendung jedoch nicht auf die Teilchenphysik beschränkt, sondern finden in ganz unterschiedlichen Gebieten Verwendung. In Hinblick auf die QCD ist wegen der Isomorphie der Gruppe $O(4)$ zur chiralen Gruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$ die Untersuchung des $O(4)$ -Modells besonders interessant für die Teilchenphysik. Darüberhinaus besteht die Hoffnung, dass die QCD für zwei Quark-Flavors und das $O(4)$ -Modell in der gleichen Universalitätsklasse liegen. Dies hätte zur Folge, dass beide das gleiche kritische Verhalten an der Phasengrenze aufweisen und die gleichen kritischen Exponenten besitzen.

Im zweiten Teil steht die Untersuchung der Brechung der Skaleninvarianz der QCD in Folge der Spur-Anomalie im Mittelpunkt. Dazu konstruieren wir durch Vergleich mit der Spur des Energie-Impuls-Tensors der QCD ein Dilaton-Modell, dessen Potential die Ska-

leninvarianz bricht und untersuchen das Modell bei endlichen Temperaturen.

An einem Phasenübergang zweiter Ordnung, wie wir ihn im $O(N)$ -Modell finden, treten Infrarot-Divergenzen auf, die eine nichtperturbative Behandlung des Modells erforderlich machen. Daher verwenden wir zur Behandlung beider Modelle die nichtperturbative Methode der Renormierungsgruppe, die die Berechnung von Quantenfluktuationen und thermischen Fluktuationen auch an der Phasengrenze erlaubt. Der Renormierungsgruppenzugang ist eine Methode, die sich insbesondere zur Behandlung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden eignet. Die einzelnen Freiheitsgrade sind in den hier betrachteten Systemen durch die unendlich vielen Impulsmoden der untersuchten Teilchen gegeben. Bei der Erweiterung der Beschreibung auf endliche Temperaturen im Rahmen des Matsubara-Formalismus treten zusätzliche Freiheitsgrade in Form der diskreten Matsubara-Frequenzen auf. Die Renormierungsgruppe stellt eine Methode dar, die es erlaubt, all diese Freiheitsgrade sukzessive auszuintegrieren und so die Zustandssumme oder die effektive Wirkung des zugrundeliegenden Systems zu berechnen.

Wie bereits angeklungen, lässt sich die Arbeit grob in zwei Teile aufspalten und ist dabei folgendermaßen organisiert. Im ersten Teil wird der verwendete Renormierungsgruppenzugang entwickelt und damit das $O(N)$ -Modell untersucht. Im zweiten Teil wird die gleiche Methode dann auf ein einfaches Dilaton-Modell zur Untersuchung der Spur-Anomalie der QCD angewandt.

Das erste Kapitel hat einen einleitenden Charakter und dient der Formulierung des $O(N)$ -Modells und seiner Symmetrieeigenschaften. Im zweiten Kapitel wird das Konzept der Renormierungsgruppe vorgestellt und die Anwendung in der Quantenfeldtheorie erläutert. Dies führt auf die Berechnung eines allgemeinen Ein-Schleifen-Ausdrucks für die effektive Wirkung, der als Ausgangspunkt für die Ableitung der Flussgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung im $O(N)$ -Modell im dritten Kapitel dient. Ziel dieses Kapitels ist es, die wesentlichen Elemente unseres Renormierungsgruppenzugangs zu beleuchten, insbesondere die Besonderheit der Verwendung der Eigenzeit-Regularisierung in Verbindung mit der Heat-Kernel-Entwicklung. Am Ende des dritten Kapitels wird dann noch ein Vergleich mit dem von Wetterich et al. entwickelten Zugang aus dem Bereich der exakten Renormierungsgruppen (ERG) angestellt. Das vierte Kapitel beginnt mit einer Diskussion der zur Lösung der Flussgleichungen verwendeten numerischen Methoden und Algorithmen. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf der Lösung der Flussgleichungen bei $T = 0$ und bei endlichen Temperaturen. Die Berechnungen bei $T = 0$ dienen dabei im Wesentlichen der Fixierung der Anfangsbedingungen. Ausgehend von diesen Anfangsbedingungen werden dann Temperaturvorhersagen, beispielsweise für das Verhalten des Ordnungsparameters des chiralen Phasenübergangs, gemacht. Das fünfte Kapitel ist der Untersuchung des kritischen Verhaltens am chiralen Phasenübergang gewidmet. Hier werden insbesondere die kritischen Exponenten des $O(N)$ -Modells berechnet und der Wilson-Fisher-Fixpunkt untersucht. Die gefundenen Resultate werden mit verschiedenen anderen Zugängen verglichen, unter anderem mit Gitter-Ergebnissen und Berechnungen aus dem Bereich der ERG. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Untersuchung der Abhängigkeit der gewonnenen Ergebnisse von der verwendeten Heat-Kernel-Abschneidefunktion.

Zur Untersuchung der QCD Spur-Anomalie im zweiten Teil der Arbeit wird im sechsten Kapitel ein einfaches Dilaton-Modell entwickelt. Mit Hilfe der im ersten Teil beschriebenen

Methode werden dazu die zugehörigen Renormierungsgruppen-Flussgleichungen abgeleitet. Im siebten Kapitel erfolgt dann die numerische Auswertung dieser Flussgleichungen zur Analyse des Temperaturverhaltens des Modells. Das achte und neunte Kapitel schließlich sind der Untersuchung der Kopplung des $O(4)$ -Modells und des Dilaton-Modells gewidmet. Ziel dieser Kapitel ist die Untersuchung des Einflusses des Dilaton-Felds auf den chiralen Phasenübergang.

Am Ende folgt noch eine Zusammenfassung mit Ausblick und ein Anhang, der wichtige mathematische Relationen und Details zu den Ableitungen der verschiedenen Flussgleichungen enthält.

Teil I

Das $O(N)$ -Modell im Renormierungsgruppenzugang

Kapitel 1

Das $O(N)$ -Modell

1.1 Anwendungen des $O(N)$ -Modells

Das $O(N)$ -Modell besitzt für verschiedene Werte von N eine Reihe von Anwendungen in ganz unterschiedlichen Feldern der Physik. So entspricht beispielsweise das $O(3)$ -Modell dem aus der Festkörperphysik bekannten Heisenberg-Modell zur Beschreibung des ferromagnetischen Phasenübergangs. Von besonderer Relevanz für die QCD ist das $O(4)$ -Modell, das als effektives Modell für die Niederenergie-QCD im Falle zweier Quark-Flavors dient und als lineares σ -Modell bekannt ist. Das lineare σ -Modell in seiner zur $O(4)$ -Symmetrie isomorphen $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -symmetrischen Version wurde 1960 von Gell-Mann und Lévy [1] als Modell für die Pion-Nukleon Wechselwirkung eingeführt. Das Modell beinhaltet in seiner ursprünglichen Form ein fermionisches Isospin-Dublett massiver Nukleonen, ein Triplet pseudoskalarer Pionen und ein skalares Feld σ , nach dem das Modell seinen Namen erhalten hat. Durch die Einführung des skalaren σ Mesons als chiralem Partner der Pionen erzeugt man die chirale Symmetrie im mesonischen Sektor des Modells.

Es ist eine Gemeinsamkeit all dieser unterschiedlichen Systeme, deren Verhalten man durch $O(N)$ -Modelle beschreiben kann, dass sie bei endlichen Temperaturen einen Phasenübergang zweiter Ordnung aufweisen. An einem Phasenübergang zweiter Ordnung divergiert die Korrelationslänge des Systems und interessierende Größen, wie z.B. die spezifische Wärme, können trotz des kontinuierlichen Phasenübergangs ein nicht-analytisches Verhalten zeigen. Dieses nicht-analytische Verhalten von Systemen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung kann durch kritische Exponenten klassifiziert werden. Dabei beobachtet man, dass ganz unterschiedliche Systeme die gleichen kritischen Exponenten aufweisen. Dieses Phänomen bezeichnet man als Universalität und führt zur Formulierung von Universalitätsklassen. Alle Systeme innerhalb einer Universalitätsklasse haben die gleichen kritischen Exponenten. Dies bedeutet, dass die Untersuchung des kritischen Verhaltens eines Systems einer Universalitätsklasse relevante Ergebnisse auch für alle anderen Systeme in der gleichen Universalitätsklasse liefert. Besonders interessant im Hinblick auf die QCD für zwei masselose Quarkflavors ist daher die Untersuchung des $O(4)$ -Modells. Nach einer Hypothese von Pisarski und Wilczek [2], liegen beide in der gleichen Universalitätsklasse [3]. Diese Hypothese wird von Gitter-QCD-Rechnungen unterstützt, die

darauf hindeuten, dass der chirale Phasenübergang in der QCD für zwei Quarkflavors zweiter Ordnung ist mit $O(4)$ kritischen Exponenten. Einzelheiten hierzu findet man beispielsweise in [4].

1.2 Grundlagen

Diese Arbeit beschränkt sich im ersten Teil auf die Untersuchung rein mesonischer Modelle mit $O(N)$ -Symmetrie, die in der Literatur häufig ebenfalls als lineare σ -Modelle bezeichnet werden. Um Konfusionen zu vermeiden wird daher im Folgenden nur die Bezeichnung $O(N)$ -Modelle verwendet, worunter folgende Lagrangedichte im Minkowski Raum verstanden sei

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} m_0^2 (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 . \quad (1.1)$$

Die für die Lagrangedichte verwendete Notation lehnt sich an die Notation im linearen σ -Modell von Gell-Mann und Lévy an. Somit bezeichnet $\vec{\pi}$ in (1.1) den $N - 1$ komponentigen Vektor der Pionen, σ bezeichnet das skalare σ -Meson, m_0 die Baumgraphen-Massen der Mesonen und λ die quartische Kopplungskonstante. Aus Gründen der Einfachheit und der einheitlichen Beschreibung werden im Folgenden für alle N neben der Notation auch die Bezeichnungen aus dem linearen σ -Modell verwendet.

Im Weiteren Verlauf der Untersuchung wird die Heat-Kernel Technik verwendet werden, um Flussgleichungen für das System abzuleiten. Hierzu ist eine euklidische Formulierung notwendig, daher werden die folgenden Betrachtungen sämtlich im euklidischen Raum formuliert. Der Zusammenhang zwischen der Formulierung im Euklidischen und im Minkowski Raum für ein willkürliches Feld ϕ lautet

$$x_0 = -ix_0^E \quad ; \quad d^4x = -id^4x^E \quad ; \quad \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -\partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi , \quad (1.2)$$

wobei auf den hochgestellten Index E , der die Größen im euklidischen Raum kennzeichnet, im Weiteren verzichtet wird. Mit der Einführung des generischen $O(N)$ -Vektors $\vec{\Phi} = (\sigma, \vec{\pi})$ lässt sich schließlich die Lagrangedichte im euklidischen Raum etwas kompakter schreiben als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\Phi} \partial_\mu \vec{\Phi} + \frac{1}{2} m_0^2 \vec{\Phi}^2 - \frac{\lambda}{4} (\vec{\Phi}^2)^2 . \quad (1.3)$$

Im euklidischen Raum ist die Lagrangedichte mit dem Potential und der kinetischen Energie über die Beziehung

$$\mathcal{L} = -T - V \quad (1.4)$$

verknüpft. Man erhält damit für das Potential den Ausdruck

$$V = -\frac{1}{2} m_0^2 \vec{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{4} (\vec{\Phi}^2)^2 . \quad (1.5)$$

1.3 Symmetrie und Ströme

Das Vorzeichen des quadratischen Masseterms in (1.5) entscheidet über die Realisierung der $O(N)$ -Symmetrie. Im Falle des hier gewählten negativen Vorzeichens befindet man sich in der Goldstone-Realisierung, bei positivem Vorzeichen liegt die Wigner-Weyl-Realisierung vor.

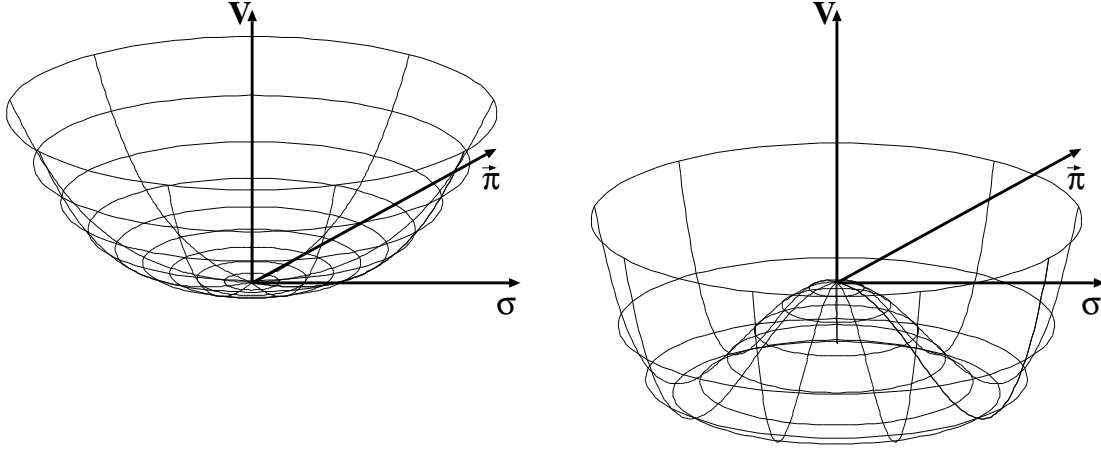


Abbildung 1.1: Potential in der Wigner-Weyl-Realisierung (links) und in der Goldstone-Realisierung (rechts) der $O(N)$ -Symmetrie.

In der Wigner-Weyl-Realisierung hat das Potential nur ein Minimum bei verschwindenden Feldern, während das Potential in der Goldstone-Realisierung ein relatives Maximum für verschwindende Felder besitzt und auf dem sogenannten “chiralen Kreis”, bei $|\vec{\Phi}| = \Phi_0$, minimal wird (siehe Abb. 1.1). In der vorliegenden Goldstone-Realisierung lässt sich unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Ableitung des Potentials nach den Feldern am Minimum $\vec{\Phi}_0$ verschwinden muss, das Potential (1.5) schreiben als

$$V = \frac{\lambda}{4} \left(\vec{\Phi}^2 - \vec{\Phi}_0^2 \right)^2 - \frac{\lambda}{4} \vec{\Phi}_0^4 . \quad (1.6)$$

Wie die Bezeichnung $O(N)$ -Modell andeutet, ist die Lagrangedichte des Modells invariant unter globalen Transformationen der orthogonalen Gruppe $O(N)$. Auf der Basis des generischen Feldes $\vec{\Phi}$ bedeutet dies Invarianz der Lagrangedichte unter Transformationen

$$\Phi_i \longrightarrow R_{ij} \Phi_j \quad (1.7)$$

für alle orthogonalen $N \times N$ Matrizen R_{ij} . Da es sich bei diesen Transformationen um kontinuierliche Transformationen handelt, genügt es, zugehörige infinitesimale Transformationen zu betrachten. Bezeichnet man die Generatoren der $O(N)$ -Gruppe mit F_{ij}^α , so lauten die infinitesimalen $O(N)$ -Transformationen

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi_i + \epsilon^\alpha F_{ij}^\alpha \Phi_j , \quad (1.8)$$

darin bezeichnen die ϵ^α infinitesimale Transformationsparameter. Die zu diesen Transformationen gehörigen erhaltenen Noetherströme ergeben sich zu

$$J^{\mu\alpha} = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi_i)}F_{ij}^\alpha\Phi_j = \partial_\mu\Phi_i F_{ij}^\alpha\Phi_j \quad (1.9)$$

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha} = 0. \quad (1.10)$$

Diesen Strom kann man aufspalten in einen Vektorstrom $V^{\mu\alpha}$ und einen Axialvektorstrom $A^{\mu\alpha}$, die beide getrennt erhalten sind. Die Erhaltung der Ströme sieht man direkt, wenn man eine Darstellung der Generatoren einsetzt. Drückt man $\vec{\Phi}$ wieder durch $(\sigma, \vec{\pi})$ aus, so lassen sich $V^{\mu\alpha}$ und $A^{\mu\alpha}$ schreiben als

$$V^{\mu\alpha} = \partial_\mu\pi_i F_{ij}^\alpha\pi_j \quad (1.11)$$

$$A^{\mu\alpha} = \partial_\mu\sigma F_{0j}^\alpha\pi_j + \partial_\mu\pi_i F_{i0}^\alpha\sigma \quad (1.12)$$

$$\partial_\mu V^{\mu\alpha} = 0 \quad (1.13)$$

$$\partial_\mu A^{\mu\alpha} = 0, \quad (1.14)$$

wobei die Indizes i, j hier von 1 bis $(N - 1)$ laufen. Man erkennt daran, dass der Vektorstrom $V^{\mu\alpha}$ zu einer $O(N - 1)$ Rotationssymmetrie im Pionsektor gehört, während der Axialvektorstrom $A^{\mu\alpha}$ zu Transformationen zwischen dem Pionsektor und dem σ gehört.

1.4 Spontane Symmetriebrechung

Im vorigen Abschnitt wurde ausgeführt, dass in der vorliegenden Goldstone-Realisierung der $O(N)$ -Symmetrie der Grundzustand unendlich entartet ist. Jeder Zustand $\vec{\Phi}$, der der Bedingung

$$\vec{\Phi}^2 = (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \Phi_0^2 \quad (1.15)$$

genügt, gehört zum unendlich entarteten Grundzustand. Hierin spiegelt sich die $O(N)$ -Symmetrie des Grundzustands wider. Durch die Auszeichnung eines Zustands als wahren Grundzustand wird diese Symmetrie spontan gebrochen. Für die weiteren Untersuchungen wird der Zustand

$$\vec{\Phi}_0 = (\sigma_0, \vec{0}) \quad (1.16)$$

als wahrer Grundzustand festgelegt. Damit gilt für die Vakuumerwartungswerte

$$\langle 0|\vec{\pi}|0\rangle = \vec{0} \quad (1.17)$$

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = \sigma_0. \quad (1.18)$$

Der so ausgezeichnete Grundzustand besitzt nur noch eine $O(N - 1)$ -Symmetrie, die die Pionen untereinander rotiert. Da die Lagrangedichte natürlich weiterhin $O(N)$ -symmetrisch ist, wird durch die Auszeichnung eines Zustands als Grundzustand die Symmetrie des Modells spontan von der $O(N)$ -Symmetrie hin zur $O(N - 1)$ -Symmetrie gebrochen. Nach dem Goldstone-Theorem ist die spontane Brechung einer kontinuierlichen

Symmetrie mit dem Auftreten masseloser Anregungen verbunden, die man als Goldstone-Bosonen bezeichnet. Die Anzahl der auftretenden masselosen Teilchen oder Anregungen ist gegeben durch die Differenz der Anzahl der Generatoren der ursprünglichen Symmetrie und der nach der spontanen Symmetriebrechung vorliegenden Symmetrie. Da eine $O(N)$ -Symmetrie $N(N - 1)/2$ Generatoren aufweist, treten bei spontaner Symmetriebrechung hin zur $O(N - 1)$ -Symmetrie $N - 1$ masselose Teilchen auf, die $N - 1$ Pionen. Dies kann man leicht sehen, wenn man die Lagrangedichte (1.3) durch die verschobenen Felder

$$\hat{\sigma} = \sigma - \sigma_0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\Phi} = (\hat{\sigma} + \sigma_0, \vec{\pi}) \quad (1.19)$$

ausdrückt. Man erhält für die Lagrangedichte ausgedrückt in diesen Feldern

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \hat{\sigma})^2 + m_0^2 \hat{\sigma}^2 - \frac{\lambda}{4}(\hat{\sigma}^2 + \vec{\pi}^2)^2 \\ & - \lambda \sigma_0 \hat{\sigma}^3 - \lambda \sigma_0 \hat{\sigma} \vec{\pi}^2 + \frac{\lambda}{4} \sigma_0^4 . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Daran kann man sofort ablesen, dass ein massives σ -Meson und $N - 1$ masselose Pionen vorliegen. Durch die Verschiebung im σ -Feld besitzt diese Lagrangedichte keine $O(N)$ -Symmetrie in den Feldern $\hat{\sigma}$ und $\vec{\pi}$, bezüglich σ und $\vec{\pi}$ besteht die Symmetrie jedoch weiterhin, man bezeichnet die Symmetrie daher auch als “versteckt”. Die Masse m_0 ist über

$$m_0^2 = -\lambda \sigma_0^2 \quad (1.21)$$

mit dem Vakuumerwartungswert des σ -Mesons verknüpft. Damit erkennt man in (1.20), dass im Grenzfall $\sigma_0 \rightarrow 0$ die Symmetrie nicht länger spontan gebrochen ist. Der Grenzfall entspricht dem Übergang von einer Phase mit spontaner Brechung der $O(N)$ -Symmetrie in der Goldstone-Realisierung zu einer Phase mit restaurierter $O(N)$ -Symmetrie in der Wigner-Weyl-Realisierung für verschwindende Massen. Die Untersuchung dieses Phasenübergangs durch Berücksichtigung von thermischen Fluktuationen und Quantenfluktuationen im Rahmen eines Renormierungsgruppenzugangs ist ein Ziel dieser Arbeit. Ein weiterer Punkt, der später noch wichtig werden wird, ist die Verknüpfung des Vakuumerwartungswerts σ_0 mit der Pionzerfallskonstanten f_π . Dazu betrachten wir das Matrixelement des schwachen Zerfalls des Pions, in dem der Axialvektorstrom auftritt, es gilt

$$\langle 0 | A^{\mu\alpha}(x) | \pi^\beta(p) \rangle = i f_\pi p_\mu \delta^{\alpha\beta} e^{-ipx} . \quad (1.22)$$

Der Pionimpuls p_μ ist der einzige Lorentzvektor im Prozess und muss daher auch auf der rechten Seite auftreten. Man überprüft leicht, dass die Beziehung

$$A_{Pion}^{\mu\alpha}(x) = f_\pi \partial_\mu \pi^\alpha(x) \quad (1.23)$$

für den axialen Strom des Pions der obigen Gleichung genügt. Durch Koeffizientenvergleich mit (1.12) findet man die gesuchte Verknüpfung

$$f_\pi = \sigma_0 . \quad (1.24)$$

Im vierten Kapitel werden wir diese Beziehung zur Fixierung von Anfangswerten ausnutzen.

Wie bereits oben angedeutet, hat die Bedeutung des linearen σ -Modells als effektives Modell für die QCD diese Arbeit motiviert. Insbesondere die Hypothese von Pisarski und Wilzcek, wonach das lineare σ -Modell und die QCD in der gleichen Universalitätsklasse liegen, macht das lineare σ -Modell interessant, da damit die Untersuchung des chiralen Phasenübergangs im linearen σ -Modell direkte Aussagekraft hat für den chiralen Phasenübergang der QCD.

Von dieser Warte aus betrachtet ist der Startpunkt in der Phase spontan gebrochener Symmetrie die naheliegende Wahl, da in der hadronischen Welt die $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Symmetrie gebrochen ist. Wäre die $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Symmetrie eine exakte Symmetrie der Natur, so hätte dies das Auftreten chiraler Partner mit entarteter Masse im Hadronenspektrum zur Folge. Da man diese nicht beobachtet, muss die Symmetrie gebrochen sein. Wie bereits erwähnt, hat die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie das Auftreten masseloser Goldstone-Bosonen zur Folge. Die leichtesten Hadronen, die man beobachtet sind die Pionen, die bereits weiter oben mit den Goldstone-Bosonen identifiziert wurden. Die Pionen sind zwar die leichtesten Hadronen, die man kennt, dennoch besitzen sie eine nichtverschwindende Masse. Aus diesem Grund muss die $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Symmetrie nicht nur spontan, sondern auch explizit gebrochen sein. Eine solche explizite Symmetriebrechung, kann man beispielsweise durch die Addition eines in σ linearen Terms erreichen. Die Addition eines Terms $c\sigma$ zur Lagrangedichte (1.20) hat zur Folge, dass die Krümmung des Potentials am Minimum in $\vec{\pi}$ -Richtung nicht länger null ist, was bedeutet, dass die Pionen in diesem Fall nicht länger masselos sind.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit beschränken sich jedoch auf den chiralen Limes verschwindender expliziter Symmetriebrechung.

Kapitel 2

Der Renormierungsgruppenzugang

2.1 Das Konzept der Renormierungsgruppe

Der Renormierungsgruppenzugang ist eine Methode, die sich zur Behandlung von Systemen mit essenziell vielen Freiheitsgraden eignet. In diesem Abschnitt soll die Idee der Renormierungsgruppen erläutert und die praktische Umsetzung dieser Idee zur Behandlung konkreter Probleme skizziert werden. Aus der reichhaltigen Literatur zu den Themen dieses Abschnitts sei auf [5] - [10] und [14] verwiesen, dort findet man gute Einführungen in das Thema dieses Kapitels und weitere Details.

Viele theoretische Methoden zur Behandlung physikalischer Systeme sind in der praktischen Anwendung auf Systeme mit wenigen Freiheitsgraden beschränkt. In vielen physikalischen Systemen hat man es jedoch mit sehr vielen Freiheitsgraden zu tun. Makroskopische Kristalle oder Gase beispielsweise sind Systeme, deren Anzahl von Freiheitsgraden in der Größenordnung der Avogadroschen Zahl liegt. Natürlich ist es nicht möglich, die gesamte Wellenfunktion eines solchen Systems zu berechnen und so eine vollständige Beschreibung des Systems auf mikroskopischer Ebene zu erhalten. Meist lassen sich jedoch makroskopische Systeme aus vielen Freiheitsgraden durch wenige Parameter beschreiben. Diese Parameter des makroskopischen Systems lassen sich wiederum oft schon aus einem mikroskopischen Teilsystem ermitteln. Beispielsweise wird eine Probe von 10^4 Molekülen eines Gases in der Regel bereits den gleichen Druck und die gleiche Temperatur besitzen wie das Gesamtsystem. Diese Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade durch Betrachtung immer kleinerer Teilsysteme lässt sich jedoch nicht beliebig fortsetzen ohne qualitative Unterschiede in den Eigenschaften des beobachteten Systems. Die entscheidende Größe ist hier die Korrelationslänge der Freiheitsgrade. Betrachtet man ein Subsystem, dessen Ausdehnung geringer ist als die Korrelationslänge, so kann man nicht mehr erwarten, das qualitativ gleiche Verhalten wie im Gesamtsystem zu beobachten. Die Korrelationslänge der Freiheitsgrade eines Systems hängt vom Zustand ab, in dem sich das System befindet. Ist die Korrelationslänge klein, so stellen beispielsweise perturbative Methoden gute Näherungen dar und liefern verlässliche Beschreibungen. In der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung wird jedoch die Korrelationslänge sehr groß und divergiert schließlich am Phasenübergang. Hier brechen die perturbativen Methoden zusammen und die Anwendung nichtperturbativer Methoden, wie die der Renormierungsgruppe, wird erforderlich.

Es scheint generell einen qualitativen Unterschied zwischen Systemen mit vielen und Systemen mit wenigen Freiheitsgraden innerhalb eines Bereichs von der Ausdehnung der Korrelationslänge zu geben. In die Klasse der Probleme mit vielen Freiheitsgraden innerhalb der Korrelationslänge gehören die kritischen Phänomene an Phasenübergängen zweiter Ordnung, die in dieser Arbeit von besonderem Interesse sind, aber prinzipiell auch die gesamte relativistische Quantenfeldtheorie. In der Quantenfeldtheorie dient das Feld an jedem Raumpunkt als Freiheitsgrad, so dass man innerhalb einer endlichen Korrelationslänge unendlich viele Freiheitsgrade hat.

Das Verhalten von Systemen mit wenigen Freiheitsgraden innerhalb der Korrelationslänge ist im Wesentlichen bestimmt durch die in der Hamiltondichte gegebenen mikroskopischen Wechselwirkungen der Freiheitsgrade. Dagegen ist das Verhalten von Systemen mit vielen Freiheitsgraden innerhalb der Korrelationslänge im Wesentlichen vom kollektiven, makroskopischen Verhalten der Freiheitsgrade und der Art der Freiheitsgrade selbst bestimmt. Die langreichweitigen Korrelationen solcher Systeme sind überwiegend durch globale Symmetrien und die Dimension des Systems festgelegt. Die mikroskopische Wechselwirkung der Freiheitsgrade, wie sie in der Hamiltondichte gegeben ist, und die daraus folgenden kurzreichweitigen Fluktuationen spielen hier nur eine untergeordnete Rolle. Die mikroskopische Wechselwirkung in solchen Systemen ist somit für das langreichweitige Verhalten nicht wichtig und es zeigt sich, dass sogar Systeme mit ganz unterschiedlicher mikroskopischer Wechselwirkung das gleiche langreichweitige Verhalten zeigen. Diese Eigenschaft ist eine Quelle für das universelle kritische Verhalten von solchen Systemen am Phasenübergang zweiter Ordnung.

Die ersten Ideen zur Renormierungsgruppe stammen aus den Jahren 1953/54 [11], [12], der Renormierungsgruppenzugang in seiner heutigen Form geht auf Wilson und Kadanoff [13] zurück. Die Idee besteht in der sukzessiven Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade bzw. der Reduktion der Dichte der Freiheitsgrade durch Ersetzen der Freiheitsgrade durch neue effektive Freiheitsgrade. Für auf einem Gitter formulierte Ising-artige Modelle beispielsweise entspricht diese sukzessive Reduktion der Freiheitsgrade Blockspintransformationen auf dem Gitter. Mit jeder Transformation wird dabei die Dichte der Freiheitsgrade verringert, bis schließlich der Abstand zweier effektiver Freiheitsgrade von der Größenordnung der Korrelationslänge ist. Damit hat man das Problem auf ein System mit wenigen, effektiven Freiheitsgraden zurückgeführt, welches man gegebenenfalls mit anderen Methoden weiterbehandeln kann.

Für die Behandlung von quantenfeldtheoretischen Modellen ist oftmals eine Formulierung im Impulsraum vorteilhaft. Das Analogon zu den sukzessiven Blockspintransformationen auf dem Gitter ist in der Impulsraumformulierung der Quantenfeldtheorie die sukzessive Ausintegration von Impulsmoden. Dazu führt man eine Skala k ein, mit deren Hilfe man die Impulsmoden des ursprünglichen Feldes $\phi(p)$ in zwei Anteile separiert,

$$\phi(p) = \phi(p < k) + \phi(p > k) , \quad (2.1)$$

worin $\phi(p > k)$ den hochfrequenten und $\phi(p < k)$ den niederfrequenten Anteil des Feldes bezeichnet. Den sukzessiven Blockspintransformationen entspricht im Impulsraum die schrittweise Verkleinerung der Skala k um Δk . In jedem dieser Schritte werden, zusätzlich zu den bereits ausintegrierten Moden oberhalb der Skala k , die Impulsmoden innerhalb der aktuellen Impulsschale Δk ausintegriert. Der Vergleich der beiden Formulierungen im

Ortsraum und im Impulsraum ist in Abb. 2.1 illustriert. Formal kann man die sukzessi-

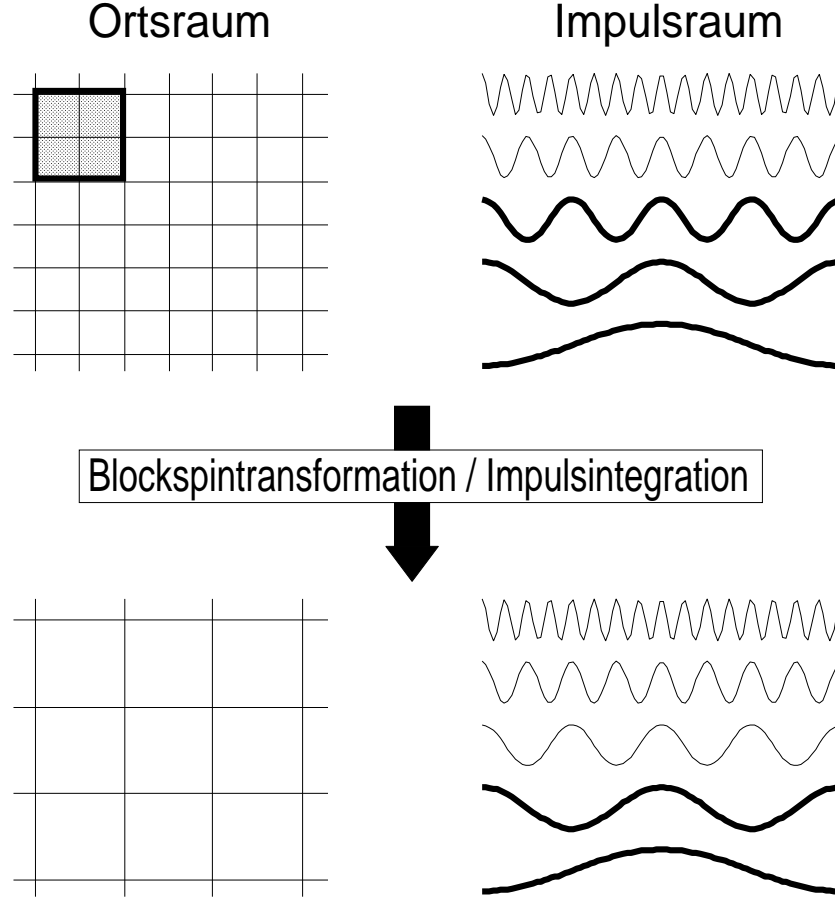


Abbildung 2.1: Schematische Illustration der Zusammenfassung von Freiheitsgraden zu effektiven Freiheitsgraden im Ortsraum, die der Ausintegration von Impulsmoden im Impulsraum entspricht. Die beiden weiteren Schritte der Transformation R , die Renormierung der Felder und die Reskalierung der relevanten Längen- und Energie-Maßstäbe sind nicht dargestellt.

von Blockspintransformationen auf dem Gitter wie auch die schrittweise Verkleinerung der Skala k mit der Ausintegration der zugehörigen Impulsschalen Δk als eine Transformation R schreiben. Diese Transformation R wirkt auf den Parameterraum der Kopplungen der Hamiltondichte und überführt im ersten Schritt die ursprüngliche Hamiltondichte \mathcal{H}_0 in eine effektive Hamiltondichte \mathcal{H}_1 . Allgemein transformiert R die effektive Hamiltondichte \mathcal{H}_n in \mathcal{H}_{n+1} ,

$$R(\mathcal{H}_0) = \mathcal{H}_1 \quad , \quad R(R(\mathcal{H}_0)) = \mathcal{H}_2 \quad , \quad R(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_{n+1} \quad . \quad (2.2)$$

Den hier mit jeder Anwendung der Transformation um eins erhöhten Index n der Hamiltondichte identifiziert man in der Impulsraumformulierung mit der Skala k , die in jedem Schritt um Δk verkleinert wird. Die Transformation R wirkt ähnlich wie ein Mikroskop, dessen anfänglich hohe Auflösung schrittweise verringert wird, wodurch man von der mikroskopischen zur makroskopischen Beschreibung gelangt. Wesentlich für die Methode

ist, dass sowohl die ursprüngliche Hamiltondichte \mathcal{H}_0 , als auch die Folge der durch die Iteration von R erzeugten Hamiltondichten \mathcal{H}_n nur lokale Wechselwirkungen enthalten. Dies stellt sicher, dass die Wechselwirkung nur benachbarte Freiheitsgrade miteinander koppelt.

Die Transformation R setzt sich formal aus drei Schritten zusammen. Der erste Schritt besteht in der Zusammenfassung von mehreren Freiheitsgraden zu einem neuen effektiven Freiheitsgrad, wie sie in Abb. 2.1 illustriert ist. Der zweite Schritt ist die anschließende Renormierung der Felder und der dritte die Reskalierung der relevanten Längen- und Energie-Maßstäbe. Die durch Iteration der Transformation R gewonnene Folge von effektiven Hamiltondichten kann im Prinzip periodisches, ergodisches oder turbulentes Verhalten zeigen [10]. Das einfachste Ergebnis, das man erhalten kann, wenn man die Transformation R viele Male iteriert, ist das Erreichen eines Fixpunkts der Transformation,

$$R(\mathcal{H}^*) = \mathcal{H}^* . \quad (2.3)$$

Ein solcher Fixpunkt ist eine Eigenschaft der Transformation R . Die Transformation kann auch mehrere Fixpunkte aufweisen. Ob und gegebenenfalls welcher Fixpunkt erreicht wird, hängt von der Wahl der ursprünglichen Hamiltondichte \mathcal{H}_0 ab. Ein mögliches kollektives Verhalten des betrachteten Systems im Renormierungsgruppenzugang ist verknüpft mit dem Auftreten eines Fixpunkts in R . Kritisches Verhalten eines Systems an einem Fixpunkt ist somit eng an die Eigenschaften der Transformation R gebunden. Hier liegt eine Quelle für das Auftreten von universellem kritischem Verhalten an Phasenübergängen zweiter Ordnung.

Dieses Konzept der Renormierungsgruppe für den Übergang von der mikroskopischen zur makroskopischen Ebene soll im Folgenden zur Untersuchung des kritischen Verhaltens in $O(N)$ -Modellen angewendet werden. Dazu wird die Methode der Renormierungsgruppen in einem selbstkonsistenten Flussgleichungsschema formuliert.

2.2 Die Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie

Die Formulierung der Quantenfeldtheorie steht in enger Analogie zur statistischen Mechanik. Die zentrale Größe der Quantenfeldtheorie, das erzeugende Funktional der n -Teilchen Korrelationsfunktionen, ist das Analogon der Zustandssumme in der statistischen Mechanik. Beide sind definiert als Integral über alle möglichen Zustände oder Konfigurationen des Systems gewichtet mit einem exponentiellen Gewichtungsfaktor. Die enge Analogie wird besonders in der hier verwendeten Formulierung im euklidischen Raum deutlich. Nach der Wick-Rotation (1.2) vom Minkowskiraum in den euklidischen Raum lässt sich das erzeugende Funktional der n -Teilchen Korrelationsfunktionen in Form eines Funktio-

nalintegrals in d Dimensionen schreiben als

$$Z[\vec{J}] = N \int \mathcal{D}\vec{\Phi} e^{-\int d^D x (-\mathcal{L} - \vec{J}\vec{\Phi})} . \quad (2.4)$$

Darin bezeichnet \vec{J} äußere Quellen entsprechend den externen Feldern in der statistischen Mechanik, N einen Normierungsfaktor und $\vec{\Phi}$ ein generisches Feld, dessen Komponenten beispielsweise mit den Mesonen des linearen σ -Modells identifiziert werden kann. Neben dem erzeugenden Funktional der n -Teilchen Korrelationsfunktionen $Z[\vec{J}]$ ist das erzeugende Funktional der verbundenen n -Teilchen Korrelationsfunktionen $W[\vec{J}]$ von besonderem Interesse. In der Sprache der Feynman-Diagramme erzeugt $W[\vec{J}]$ alle verbundenen Feynman-Diagramme der betrachteten Theorie. Die beiden Funktionale sind über

$$W[\vec{J}] = \ln Z[\vec{J}] \quad (2.5)$$

miteinander verknüpft. Die verbundenen n -Teilchen Korrelationsfunktionen erhält man durch funktionale Differentiation aus $W[\vec{J}]$, z.B.

$$\frac{\delta W}{\delta J_i(x)} = \langle \Phi_i(x) \rangle \equiv \Phi_{cl,i}(x) \quad (2.6)$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J_i(x) \delta J_j(y)} = \langle \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle - \langle \Phi_i(x) \rangle \langle \Phi_j(y) \rangle . \quad (2.7)$$

Im Folgenden soll jedoch nicht direkt $W[\vec{J}]$ berechnet werden, sondern die effektive Wirkung $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$. Die effektive Wirkung ist das erzeugende Funktional der Ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Korrelationsfunktionen, d.h. der Feynman-Diagramme, die man durch Aufschneiden einer Linie nicht in zwei getrennte Diagramme zerlegen kann. Sie ist mit dem erzeugenden Funktional der verbundenen n -Teilchen Korrelationsfunktionen $W[\vec{J}]$ über eine Legendre-Transformation verknüpft,

$$\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}] = -W[\vec{J}] + \int d^D x \vec{J}(x) \vec{\Phi}_{cl}(x) . \quad (2.8)$$

Durch funktionale Differentiation von $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ erhält man die wichtige Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \Phi_{cl,i}(y)} \Gamma[\vec{\Phi}_{cl}] &= -\frac{\delta}{\delta \Phi_{cl,i}(y)} W[\vec{J}] + \int d^D x \frac{\delta \vec{J}(x)}{\delta \Phi_{cl,i}(y)} \vec{\Phi}_{cl}(x) + J_i(y) \\ &= -\int d^D x \frac{\delta \vec{J}(x)}{\delta \Phi_{cl,i}(y)} \frac{\delta W[\vec{J}]}{\delta \vec{J}(x)} + \int d^D x \frac{\delta \vec{J}(x)}{\delta \Phi_{cl,i}(y)} \vec{\Phi}_{cl}(x) + J_i(y) \\ &= J_i(y) , \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei im letzten Schritt (2.6) verwendet wurde. Daraus folgt, dass für verschwindende äußere Quellen die effektive Wirkung der Beziehung

$$\frac{\delta}{\delta \Phi_{cl,i}(y)} \Gamma[\vec{\Phi}_{cl}] = 0 \quad (2.10)$$

genügt. Die in der effektiven Wirkung auftretenden Funktionalintegrale können in der Regel nicht exakt berechnet werden. Eine zusätzliche Schwierigkeit ist das Auftreten von Infrarot-Divergenzen. Die Methode der Renormierungsgruppen bietet eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, aber auch hier kommt man nicht ohne Näherungen aus.

Die Idee der Methode der Renormierungsgruppen zur Berechnung von $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$, wie sie bereits im letzten Abschnitt dargestellt wurde, liegt in der Aufspaltung des Felds $\vec{\Phi}(x)$ in hoch- und niederfrequente Impulsmoden (2.1),

$$\vec{\Phi}(x) = \vec{\Phi}_{q>k}(x) + \vec{\Phi}_{q\leq k}(x) , \quad (2.11)$$

durch Einführung der Impulsskala k . Statt nun die Integration in einem Schritt auszuführen, integrieren wir im ersten Schritt nur die hochfrequenten Impulsmoden oberhalb der Skala k aus, die Skala k wirkt somit als ein Impulsabschneideparameter. Die kurzreichweitigen Fluktuationen, die nicht sensitiv sind auf die Physik für große Korrelationslängen, werden auf diese Weise eliminiert. Man erhält eine k -abhängige effektive Wirkung

$$\Gamma_k[\vec{\Phi}_{cl}(x)] = -W_k[\vec{J}] + \int d^D x \vec{J}(x) \vec{\Phi}_{cl}(x) . \quad (2.12)$$

Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ ergibt sich daraus das volle erzeugende Funktional der 1PI Korrelationsfunktionen. Die k -abhängige effektive Wirkung stellt somit eine Interpolation dar zwischen der klassischen Wirkung S_{kl} , an einer willkürlich gewählten ultravioletten Impuls-Abschneideskala Λ , an der keine Quantenfluktuationen berücksichtigt sind, und der alle Quantenfluktuationen beinhaltenden, vollen effektiven Wirkung $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Gamma_\Lambda[\vec{\Phi}_{cl}(x)] = S_{kl} \quad , \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\vec{\Phi}_{cl}(x)] = \Gamma[\vec{\Phi}_{cl}(x)] . \quad (2.13)$$

Betrachten wir einmal nur das erzeugende Funktional der n -Teilchen Korrelationsfunktionen $Z[\vec{J}]$, so können wir das prinzipielle Vorgehen folgendermaßen zusammenfassen:

$$Z[\vec{J}] = N \int \mathcal{D}\vec{\Phi}(x) e^{-\int d^D x (-\mathcal{L} - \vec{J}\vec{\Phi})} \quad (2.14)$$

$$= N \int \mathcal{D}\vec{\Phi}_{q\leq k}(x) \mathcal{D}\vec{\Phi}_{q>k}(x) e^{-\int d^D x (-\mathcal{L} - \vec{J}\vec{\Phi})} \quad (2.15)$$

$$= \int \mathcal{D}\vec{\Phi}_{q\leq k}(x) Z_k[\vec{J}] , \quad (2.16)$$

mit

$$Z_k[\vec{J}] = N \int \mathcal{D}\vec{\Phi}_{q>k}(x) e^{-\int d^D x (-\mathcal{L} - \vec{J}\vec{\Phi})} \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} Z_k[\vec{J}] = Z[\vec{J}] . \quad (2.18)$$

Im nächsten Abschnitt wird dargestellt, wie und in welcher Näherung man mit diesem Konzept die effektive Wirkung $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ berechnen kann.

2.3 Die effektive Wirkung

Die effektive Wirkung $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ ist das erzeugende Funktional der 1PI Korrelationsfunktionen und beinhaltet die gesamte Information des betrachteten Quantensystems. Entwickelt nach Invarianten der Symmetrien des betrachteten Systems, stellt $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ eine unendliche Summe von Kopplungen multipliziert mit den möglichen Invarianten dar. Daher lässt sich $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ im Allgemeinen nicht exakt berechnen und man ist, wie bereits erwähnt, zur expliziten Berechnung der effektiven Wirkung $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ auf Näherungen angewiesen. Eine mögliche Näherung besteht in der Entwicklung von $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ in Potenzen der Felder, dabei entwickelt man $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ in die n-Punkt Funktionen $\Gamma^{(n)}$. Diese Entwicklung basiert direkt auf der Eigenschaft von $\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]$ als erzeugendem Funktional,

$$\frac{\delta^n \Gamma[\vec{\Phi}_{cl}]}{\delta \Phi_{cli}(x_1) \dots \delta \Phi_{clj}(x_n)} = \langle \Phi_i(x_1) \dots \Phi_j(x_n) \rangle \equiv \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) . \quad (2.19)$$

Die Entwicklung der effektiven Wirkung in Potenzen der Felder um ein willkürlich gewähltes Feld $\vec{\Phi}(x)$ lautet damit

$$\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \left(\prod_{i=0}^n d^D x_i \left(\vec{\Phi}_{cl}(x_i) - \vec{\Phi}(x) \right) \right) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) . \quad (2.20)$$

Die Näherung besteht darin, diese Entwicklung bei einer endlichen Ordnung abubrechen. Ein andere Möglichkeit zur näherungsweise Berechnung der effektiven Wirkung ist die Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung. Die Ableitungsentwicklung, die wir im Folgenden zur Berechnung der effektiven Wirkung verwenden werden, entspricht in der Impulsraumdarstellung einer Entwicklung in Potenzen der Impulse. Die Invarianten der Ableitungsentwicklung werden klassifiziert nach der Ordnung der auftretenden Ableitungen der Felder. In der d-dimensionalen Ortsraumdarstellung nimmt die Ableitungsentwicklung für ein einkomponentiges skalares Feld folgende Form an:

$$\Gamma[\Phi_{cl}] = \int d^D x \left\{ U(\Phi_{cl}) + \frac{1}{2} Z(\Phi_{cl}) (\partial_\mu \Phi_{cl})^2 + Y(\Phi_{cl}) ((\partial_\mu \Phi_{cl})^2)^2 + \dots \right\} . \quad (2.21)$$

Der Term niedrigster Ordnung dieser Entwicklung bezeichnet das effektive Potential, Z bezeichnet die Wellenfunktionsrenormierung und die höheren Terme Vertex-Korrekturen. Im Falle eines konstanten Feldes $\Phi_{cl} = const.$ verschwinden alle Ableitungsterme und es gilt

$$\Gamma[\Phi_{cl}] = \mathcal{V}_D U(\Phi_{cl}) , \quad (2.22)$$

worin \mathcal{V}_D das D-dimensionale Volumen bezeichnet und zu beachten ist, dass das effektive Potential auf der rechten Seite der Gleichung kein Funktional, sondern eine gewöhnliche Funktion von Φ_{cl} darstellt. Das effektive Potential kann damit ausgedrückt werden als die Summe aller 1PI n-Punkt Funktionen $\Gamma^{(n)}$, deren externe Linien verschwindende Impulse tragen. Außerdem folgt aus der Legendre-Transformation (2.8), dass das effektive Potential eine konvexe Funktion ist.

Ausgangspunkt der folgenden Berechnung der effektiven Wirkung in der durch (2.21) gegebenen Ableitungsentwicklung ist die Legendre-Transformation (2.8), die die effektive Wirkung mit dem erzeugenden Funktional der n-Teilchen Korrelationsfunktionen $W[\vec{J}]$ verknüpft. $W[\vec{J}]$ lässt sich wiederum mit (2.4) und (2.5) ausdrücken als

$$e^{W[\vec{J}]} = N \int \mathcal{D}\vec{\Phi} e^{-S_{kl}[\vec{\Phi}, \vec{J}]} , \quad (2.23)$$

darin bezeichnet N einen Normierungsfaktor und S_{kl} die klassische Wirkung,

$$S_{kl}[\vec{\Phi}, \vec{J}] = \int d^D x \left(-\mathcal{L} - \vec{J}\vec{\Phi} \right) . \quad (2.24)$$

Das Pfadintegral in (2.23) berechnen wir in einer Sattelpunktsnäherung. Zu diesem Zweck entwickeln wir die Wirkung S_{kl} um das Feld $\vec{\Phi}_0(x)$, an dem die Wirkung stationär ist,

$$\begin{aligned} S_{kl}[\vec{\Phi}, \vec{J}] &= S_{kl}[\vec{\Phi}_0, \vec{J}] + \int d^D x \left. \frac{\delta S_{kl}}{\delta \Phi_i(x)} \right|_{\vec{\Phi}_0} (\Phi_i(x) - \Phi_{0i}(x)) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y (\Phi_i(x) - \Phi_{0i}(x)) \left. \frac{\delta^2 S_{kl}}{\delta \Phi_i(x) \delta \Phi_j(y)} \right|_{\vec{\Phi}_0} (\Phi_j(y) - \Phi_{0j}(y)) + \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Das Feld $\vec{\Phi}_0(x)$ hängt von den externen Quellen \vec{J} ab und genügt den klassischen Bewegungsgleichungen mit einem Quellterm,

$$\left. \frac{\delta S_{kl}[\vec{\Phi}, \vec{J}]}{\delta \Phi_i} \right|_{\vec{\Phi}_0} = -\partial^\mu \partial_\mu \Phi_{0i} + V'(\vec{\Phi}_0) - J_i = 0 , \quad (2.26)$$

wobei V' die Ableitung des Potentials nach Φ_i bezeichnet. Mit (2.25) und einer Aufspaltung der Felder in den Hintergrundanteil $\vec{\Phi}_0$ und Fluktuationen $\vec{\tilde{\Phi}}$ um diesen ergibt sich für $W[\vec{J}]$

$$\begin{aligned} e^{W[\vec{J}]} &= N \int \mathcal{D}\vec{\Phi} e^{-S_{kl}[\vec{\Phi}, \vec{J}]} \\ &= N e^{-S_{kl}[\vec{\Phi}_0, \vec{J}]} \int \mathcal{D}\vec{\tilde{\Phi}} e^{-\frac{1}{2} \int d^D x d^D y \vec{\tilde{\Phi}}(x) \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0} \vec{\tilde{\Phi}}(y) + \dots} \\ &= N e^{-S_{kl}[\vec{\Phi}_0, \vec{J}]} \prod_i (\det m_{\Phi_i})^{-\frac{1}{2}} \\ &= N e^{-S_{kl}[\vec{\Phi}_0, \vec{J}]} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0}} , \end{aligned} \quad (2.27)$$

darin bezeichnet m_{Φ_i} die Eigenwerte der Matrix \mathcal{M} und die Determinante ist definiert über den Funktionalraum. Die Matrix \mathcal{M} ist nach (2.25) gegeben durch

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{\delta^2 S_{kl}}{\delta \Phi_i(x) \delta \Phi_j(y)} . \quad (2.28)$$

Durch Logarithmieren von (2.27) erhalten wir schließlich für das erzeugende Funktional der n-Teilchen Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} W[\vec{J}] &= -N' - S_{kl}[\vec{\Phi}_0, \vec{J}] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0} \\ &= -N' - S_{kl}[\vec{\Phi}_0] + \int d^D x \vec{\Phi}_0(x) \vec{J}(x) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Legendre-Transformation (2.8) ergibt sich für die effektive Wirkung

$$\Gamma[\vec{\Phi}_{cl}] = N' + S_{kl}[\vec{\Phi}_0] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0} - \int d^D x \vec{\Phi}_0(x) \vec{J}(x) + \int d^D x \vec{\Phi}_{cl}(x) \vec{J}(x) . \quad (2.30)$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung auftretenden Felder $\vec{\Phi}_{cl}$ und $\vec{\Phi}_0$ sind nicht notwendig identisch. $\vec{\Phi}_0$ stellt den stationären Punkt der klassischen Wirkung dar, aus (2.10) folgt andererseits, dass im Fall verschwindender äußerer Quellen $\vec{\Phi}_{cl}$ der stationäre Punkt der effektiven Wirkung ist. Auf dem Baumgraphen-Niveau sind damit in diesem Fall offensichtlich $\vec{\Phi}_{cl}$ und $\vec{\Phi}_0$ identisch, da auf dem Baumgraphen-Niveau die klassische und die effektive Wirkung identisch sind. Man kann jedoch zeigen [15], dass in einer perturbativen Entwicklung $\vec{\Phi}_{cl}$ und $\vec{\Phi}_0$ auch auf dem Ein-Schleifen Niveau übereinstimmen. Da wir in den Untersuchungen dieser Arbeit nicht über das Ein-Schleifen Niveau hinausgehen werden, finden wir, im Grenzfall verschwindender äußerer Quellen, für die effektive Wirkung

$$\Gamma[\vec{\Phi}_0] = N' + S_{kl}[\vec{\Phi}_0] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0} . \quad (2.31)$$

Dieser Ausdruck stellt den Ausgangspunkt für die Untersuchung des $O(N)$ -Modells im Renormierungsgruppenzugang im nächsten Kapitel dar.

Kapitel 3

Das $O(N)$ -Modell im Renormierungsgruppenzugang

Die Grundlagen und Konzepte der vorangegangenen Abschnitte sollen nun auf das $O(N)$ -Modell angewendet werden. Das Ziel ist die Ableitung von Flussgleichungen für die effektive Wirkung, genauer gesagt für die ersten beiden Terme der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung, das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung.

3.1 Ableitung der Flussgleichungen

Die Flussgleichungen für das $O(N)$ -Modell, die im Folgenden abgeleitet werden, bilden ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen, das die Abhängigkeit der effektiven Wirkung von der Impulsskala k modelliert. Die Anfangsbedingung zur Lösung des Systems der Flussgleichungen ist die effektive Wirkung $\Gamma_{k=\Lambda}[\vec{\Phi}_0]$ an der Impuls-Abschneideskala Λ im Ultraviolett-Bereich der Theorie. An dieser Skala sind noch keine Quantenfluktuationen berücksichtigt und die effektive Wirkung ist gleich der klassischen Wirkung S_{kl} . Die Lösung des Systems für $k \rightarrow 0$, ausgehend von dieser Anfangsbedingung, entspricht der sukzessiven Ausintegration von Quantenfluktuationen der effektiven Wirkung. Auf diese Weise berechnet man im Laufe der Evolution der Impulsskala k gegen den Infrarot-Bereich eine effektive Wirkung $\Gamma_k[\vec{\Phi}_0]$, die die Quantenfluktuationen mit Impulsmoden oberhalb der Skala $k \leq \Lambda$ beinhaltet. Im Grenzfall $k = 0$ schließlich sind alle Quantenfluktuationen berücksichtigt und man erhält die volle effektive Wirkung.

Die Lagrangedichte des $O(N)$ -Modells an der Skala Λ im ultravioletten Bereich der Theorie, in der Phase spontan gebrochener chiraler Symmetrie, ist durch die klassische oder Baumgraphen-Lagrangedichte (1.3) gegeben. Um auch die Wellenfunktionsrenormierung der Felder berechnen zu können, setzen wir die Lagrangedichte mit expliziter Wellenfunktionsrenormierung der Felder an

$$\mathcal{L}_\Lambda = -\frac{1}{2}Z_\sigma (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}Z_\pi (\partial_\mu \vec{\pi})^2 - V(\vec{\Phi}^2) \quad , \quad V(\vec{\Phi}^2) = \frac{\lambda}{4} \left(\vec{\Phi}^2 - \vec{\Phi}_0^2 \right)^2 - \frac{\lambda}{4} \vec{\Phi}_0^4 \quad , \quad (3.1)$$

mit dem N -komponentigen Vektor $\vec{\Phi} = (\sigma, \vec{\pi})$. Da das Potential additiv eindeutig ist, können wir den konstanten Term $-\frac{\lambda}{4}\vec{\Phi}_0^4$ im Weiteren vernachlässigen. Das negative Vor-

zeichen im Potentialterm vor $\vec{\Phi}_0$ signalisiert die gebrochene Phase, bei positivem Vorzeichen befindet man sich in der symmetrischen Phase. Das Feld $\vec{\Phi}_0$ bezeichnet den Wert, an dem das Potential sein Minimum annimmt. Im Falle eines konstanten Feldes $\vec{\Phi}_0 = \text{const.}$ reduziert sich die Ableitungsentwicklung (2.21) der effektiven Wirkung auf die niedrigste Ordnung, das effektive Potential, mit einem standardmäßigen kinetischen Term, d.h. $Z_\sigma = Z_\pi = 1$. In der Literatur wird diese Näherung als “local potential approximation” bezeichnet, da die Annahme, dass Terme mit Ableitungen höherer Ordnung weniger wichtig sind, gleichbedeutend ist mit der Annahme, dass die Wirkung ein lokales Funktional ist. Für den Fall eines x -abhängigen Feldes $\vec{\Phi}_0(x)$ lassen sich auch Terme höherer Ordnung in der Ableitungsentwicklung berechnen (siehe z.B. [16], [17], [18]). Die Verallgemeinerung der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung von einem skalaren Feld (2.21) auf ein N -komponentiges Vektorfeld $\vec{\Phi}(x)$ lautet

$$\Gamma[\vec{\Phi}] = \int d^D x \left\{ U(\vec{\Phi}^2) + \frac{1}{2} Z_1(\vec{\Phi}^2) (\partial_\mu \vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2} Z_2(\vec{\Phi}^2) (\vec{\Phi} \partial_\mu \vec{\Phi})^2 + \mathcal{O}(\partial^4) \right\} . \quad (3.2)$$

In dieser Ordnung treten zwei unabhängige Wellenfunktionsrenormierungen Z_1 und Z_2 auf, die man mit der Wellenfunktionsrenormierung für das $\vec{\pi}$ - und das σ -Feld in Verbindung bringen kann [19],

$$Z_\pi = Z_1 \quad ; \quad Z_\sigma = Z_1 + \vec{\Phi}_0^2 Z_2 . \quad (3.3)$$

In der nächsten Ordnung der Ableitungsentwicklung treten zehn unabhängige Terme auf. In dieser Arbeit beschränken wir uns jedoch auf die Untersuchung des effektiven Potentials und der Wellenfunktionsrenormierung. Dabei machen wir die weitere Näherung einer einheitlichen Wellenfunktionsrenormierung für die σ - und $\vec{\pi}$ -Felder, d.h. wir vernachlässigen die Feldabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung

$$Z_\sigma = Z_\pi \equiv Z . \quad (3.4)$$

In dieser Näherung gilt gemäß (3.3) $Z_1 = Z$ und $Z_2 = 0$, was die Ableitungsentwicklung (3.2) formal auf die Ableitungsentwicklung für $N = 1$ (2.21) zurückführt. Zur Untersuchung des Phasenübergangs sollte dies eine gute Näherung sein, da am Phasenübergang der Vakuumerwartungswert der Felder verschwindet und die Wellenfunktionsrenormierungen Z_σ und Z_π entarten.

Zur Berechnung der effektiven Wirkung in dieser Näherung geht man von (2.31) aus. Die darin auftretende Fluktuationsmatrix \mathcal{M} ist nach (2.28) durch funktionale Ableitung der klassischen Wirkung gegeben und lautet im $O(N)$ -Fall

$$\mathcal{M}_{ij} = -\delta_{ij} Z \square + \delta_{ij} \lambda \left(\vec{\Phi}^2(y) - \vec{\Phi}_0^2(y) \right) + 2\lambda \Phi_i(y) \Phi_j(y) . \quad (3.5)$$

In (2.31) ist die Matrix \mathcal{M} am Minimum $\vec{\Phi}_0$ ausgewertet. Möchte man jedoch die volle Feldabhängigkeit des effektiven Potentials und nicht nur den Wert des Potentials und einer beschränkten Anzahl von Kopplungen am Minimum berechnen, so muss man die volle Feldabhängigkeit in \mathcal{M} beibehalten. Selbst bei Einschränkung des Potentials auf bestimmte Kopplungen benötigt man aus technischen Gründen die Feldabhängigkeit in \mathcal{M}

zur Ableitung der Flussgleichungen für die betrachteten Kopplungen, die dann jedoch am Minimum ausgewertet werden. Der nächste Schritt zur Ableitung der Flussgleichungen ist die Berechnung der Spur über den Logarithmus von \mathcal{M} . Dieser Ein-Schleifen-Ausdruck ist divergent und muss regularisiert werden. Eine häufig verwendete Methode zur Regularisierung solcher Ausdrücke ist die Eigenzeit-Regularisierung, die wir hier in Verbindung mit einer Heat-Kernel-Entwicklung zur Berechnung von $\text{Tr} \ln \mathcal{M}$ verwenden werden.

3.1.1 Eigenzeit-Regularisierung und Heat-Kernel-Entwicklung

Die Eigenzeit-Regularisierung wurde von Schwinger [20] eingeführt und stellt ein Regularisierungsschema dar, das in der hier verwendeten Form weder von der Dimension des Systems abhängt noch Symmetrien des Systems verletzt. Insbesondere die für uns wichtige chirale Symmetrie wird nicht verletzt. In der Eigenzeit-Regularisierung regularisiert man den Logarithmus eines Operators, woraus man dann die regularisierte Form der Determinante des Operators ableiten kann.

Realisiert man die Eigenzeit-Regularisierung in Verbindung mit einem scharfen Impuls-Abschneideparameter [21], so läuft man Gefahr, Symmetrien des betrachteten Systems zu verletzen. In Eichtheorien z.B. zerstört ein scharfer Impuls-Abschneideparameter die zugrundeliegende Eichinvarianz. Dieses Problem lässt sich vermeiden, indem man den Eigenzeit-Abschneideparameter durch eine geeignete Wahl einer regularisierende Funktion f_k im Integranden der Eigenzeit-Integration ersetzt. Die einfachste Wahl für f_k ist die einer Stufenfunktion, die aber wiederum einem scharfen Impuls-Abschneideparameter entspricht. Im exakten Renormierungsgruppen (ERG) Zugang führt diese Wahl von f_k auf die Wegner-Houghton-Gleichungen [22] für die effektive Wirkung. Diese ergeben in vier Dimensionen die korrekten Ergebnisse für die Wellenfunktionsrenormierung und damit für die anomale Dimension η , versagen jedoch zur Beschreibung von η am Wilson-Fisher-Fixpunkt in drei Dimensionen [18], [23]. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden verwenden wir eine glatte und *a priori* unbekannte Heat-Kernel-Abschneidefunktion, die später noch genauer spezifiziert wird.

Die Eigenzeit-Regularisierung basiert auf der Identität

$$\text{Tr}(\ln \mathcal{M}_1 - \ln \mathcal{M}_2) = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \text{Tr}(e^{-\tau \mathcal{M}_1} - e^{-\tau \mathcal{M}_2}) . \quad (3.6)$$

Ultraviolett-Divergenzen für kleine Abstände oder große Impulse treten im Integral als Divergenzen bei $\tau = 0$ auf, während Infrarot-Divergenzen für große Abstände bzw. kleine Impulse als Divergenz im Grenzfall $\tau \rightarrow \infty$ sichtbar werden. Um diesen Ausdruck zu regularisieren, multiplizieren wir den Integranden auf der rechten Seite von (3.6) mit der Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k(\tau k^2)$. Diese wird so gewählt, dass wir den Ultraviolett-Abschneideparameter der unteren Integrationsgrenze Λ in $f_k(\tau k^2)$ absorbieren. Damit folgt

$$\text{Tr}(\ln \mathcal{M}_1 - \ln \mathcal{M}_2)|_{reg.} = - \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} f_k(\tau k^2) \text{Tr}(e^{-\tau \mathcal{M}_1} - e^{-\tau \mathcal{M}_2}) . \quad (3.7)$$

Die Eigenschaften, die $f_k(\tau k^2)$ aufweisen muss, um (3.6) zu regularisieren, ermitteln wir später durch Vergleich mit einem scharfen Impuls-Abschneideparameter. Durch Einführung von $f_k(\tau k^2)$ in (3.7) wird die Eigenzeit-Integration regularisiert. Im Gegensatz zur Wahl eines konventionellen scharfen Impuls-Abschneideparameters wird durch die Einführung eines Impuls-Abschneideparameters k über die Funktion $f_k(\tau k^2)$ die Spur im Funktionalraum in (3.6) jedoch nicht eingeschränkt. Aus diesem Grund erhält diese Eigenzeit-Regularisierung in dieser Form die Symmetrien des Systems.

Zur weiteren Auswertung der rechten Seite von (3.6) muss man Ausdrücke der Form $\text{Tr} e^{-\tau \mathcal{D}}$ berechnen, wobei in unserem Fall \mathcal{D} einen Differentialoperator der Form

$$\mathcal{D} \equiv -D_\mu D_\mu + X \quad (3.8)$$

darstellt, worin wiederum D_μ im Allgemeinen durch

$$D_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A_\mu \quad (3.9)$$

gegeben ist. X und A_μ sind beliebige matrixwertige Funktionen, die keine Differentialoperatoren enthalten. \mathcal{D} in obiger Form ist ein positiv elliptischer Operator (für Details diesbezüglich siehe [24] und [25]), daher kann man die Ausdrücke der rechten Seite von (3.7) mit dem Diagonalanteil des Heat-Kernels des Differentialoperators \mathcal{D} identifizieren. Die Formulierung im euklidischen Raum stellt sicher, dass es sich bei D_μ um einen elliptischen Operator handelt und ermöglicht so die Anwendung der Heat-Kernel-Methode. Der Heat-Kernel von D_μ lässt sich als

$$H(x, x', \tau) \equiv \langle x | e^{-\tau \mathcal{D}} | x' \rangle \quad (3.10)$$

schreiben. Die Bezeichnung Heat-Kernel stammt von der Beobachtung, dass $H(x, x', \tau)$ der Diffusionsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} H(x, x', \tau) = \mathcal{D}_x H(x, x', \tau) \quad (3.11)$$

mit der Randbedingung

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} H(x, x', \tau) = \delta(x - x')$$

genügt, dabei deutet der Index x an \mathcal{D} an, dass der Operator auf den x -abhängigen Anteil des Heat-Kernels wirkt. Die Heat-Kernel-Entwicklung, die wir im Folgenden verwenden werden, wurde ursprünglich von DeWitt [26] für gekrümmte Raumzeit-Mannigfaltigkeiten eingeführt. Die Entwicklung basiert auf der von Schwinger eingeführten Eigenzeit-Regularisierung und wird daher in der Literatur häufig auch als Schwinger-DeWitt-Entwicklung bezeichnet. Die ursprüngliche Methode von DeWitt basiert auf Rekursionsrelationen zur Berechnung der Heat-Kernel-Entwicklung. Wir folgen hier der Arbeit von Nepomechie [27], der eine nichtrekursive Methode zur Berechnung der Heat-Kernel-Entwicklung verwendet, die mit den früheren Arbeiten von Fujikawa [28] verbunden ist und sich besser auf unseren Fall anwenden lässt. Eine detaillierte Einführung in die Heat-Kernel-Technik findet man in [24] und im Anhang von [29].

Durch Einführen eines vollständigen Satzes ebener Wellen kann man den Kernel (3.10) in einer besser handhabbaren Form angeben,

$$\begin{aligned}
H(x, x', \tau) &= \langle x | e^{-\tau \mathcal{D}} | x' \rangle \\
&= e^{-\tau \mathcal{D}_x} \langle x | x' \rangle \\
&= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau \mathcal{D}_x} \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle \\
&= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ipx'} e^{-\tau \mathcal{D}_x} e^{ipx} , \tag{3.12}
\end{aligned}$$

wobei der Index x an \mathcal{D} andeuten soll, dass der Operator auf $\langle x |$ wirkt. Unter Verwendung der Identität

$$e^{-ipx} \mathcal{D}_x e^{ipx} = p^2 - 2ip_\mu D_\mu + \mathcal{D}_x \tag{3.13}$$

folgt daraus für den Diagonalanteil des Heat-Kernels

$$H(x, x, \tau) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau(p^2 - 2ip_\mu D_\mu + \mathcal{D}_x)} . \tag{3.14}$$

Unter Verwendung dieses Ausdrucks für den Diagonalanteil des Heat-Kernels in der Eigenzeit-Regularisierung (3.7) können wir nun die effektive Wirkung in der oben beschriebenen Näherung (3.2) berechnen.

Für die Spur über den Logarithmus der Fluktuationmatrix \mathcal{M} im $O(N)$ -Modell (3.5) erhalten wir mit Hilfe der Eigenzeit-Regularisierung und des Heat-Kernels schließlich

$$\text{Tr} \ln \mathcal{M} = - \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \text{tr} e^{-\tau(-2Z ip_\mu \partial_\mu \mathbf{1} - Z \partial_\mu^2 \mathbf{1} + \tilde{\mathcal{M}})} , \tag{3.15}$$

worin die verbleibende Spur tr über die inneren N Freiheitsgrade zu bilden ist. Die in (3.15) auftretende $\mathbf{1}$ bezeichnet die $N \times N$ -Einheitsmatrix und die Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ ist definiert durch

$$\mathcal{M} = -Z \partial_\mu^2 \mathbf{1} + \tilde{\mathcal{M}} . \tag{3.16}$$

Mit diesem Zwischenergebnis (3.15) finden wir für die effektive Wirkung

$$\Gamma_k[\vec{\Phi}] = N' + S_{kl}[\vec{\Phi}_0] - \frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \text{tr} e^{-\tau(-2Z ip_\mu \partial_\mu \mathbf{1} - Z \partial_\mu^2 \mathbf{1} + \tilde{\mathcal{M}})} , \tag{3.17}$$

der Index k kennzeichnet die Abhängigkeit von der Skala k . Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung hängen nicht von der Skala k ab und liefern daher keinen

Beitrag zu den Flussgleichungen, die wir ableiten wollen. Aus diesem Grund können wir im Weiteren die beiden Terme vernachlässigen und der Ausdruck für die effektive Wirkung reduziert sich zu

$$\Gamma_k[\vec{\Phi}] = -\frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \text{tr} e^{-\tau(-2Z i p_\mu \partial_\mu \mathbf{1} - Z \partial_\mu^2 \mathbf{1} + \tilde{\mathcal{M}})} . \quad (3.18)$$

Die Spur über die N inneren Felder kann mit Standardtechniken [30], [31] analytisch berechnet werden. Wir folgen hier der Arbeit von Oleszczuk [32], die wir von der skalaren ϕ^4 -Theorie auf den $O(N)$ -symmetrischen Fall verallgemeinern.

Ausgehend von (3.18) werden wir die effektive Wirkung in der durch (3.2) gegebenen Näherung berechnen. Dazu entwickeln wir den Ausdruck

$$e^{-\tau(-2Z i p_\mu \partial_\mu \mathbf{1} - Z \partial_\mu^2 \mathbf{1} + \tilde{\mathcal{M}})} \quad (3.19)$$

bis zur zweiten Ordnung in den Ableitungen, um daraus durch Koeffizientenvergleich mit (3.2) Flussgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung zu berechnen. Diese Entwicklung der effektiven Wirkung bis zur zweiten Ordnung liefert

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,2} = & -\frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \quad (3.20) \\ & \cdot \text{tr} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\tilde{\mathcal{M}})^n \tau^n}{n!} + Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{\mathcal{M}})^k \partial_\mu^2 (\tilde{\mathcal{M}})^{n-1-k} \right. \\ & \left. - 4Z^2 p_\mu p_\nu \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} (\tilde{\mathcal{M}})^k \partial_\mu \sum_{l=0}^{n-2-k} (\tilde{\mathcal{M}})^l \partial_\nu (\tilde{\mathcal{M}})^{n-2-l-k} \right\} , \end{aligned}$$

worin bereits alle in den Impulsen p_μ linearen Terme vernachlässigt wurden, da sie bei der p -Integration verschwinden werden. Im Fall der skalaren ϕ^4 -Theorie reduziert sich die Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ auf eine skalare Größe, die Masse des ϕ -Feldes. Die zusätzliche Schwierigkeit in der Verallgemeinerung auf den $O(N)$ -symmetrischen Fall rührt von der Nichtkommutativität der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ und ihrer Ableitungen her.

Der wesentliche Schritt, um den Ausdruck (3.20) weiter zu vereinfachen, besteht in der Einführung von Projektionsoperatoren

$$X_1 = \frac{\Phi_i \Phi_j}{\vec{\Phi}^2} \quad \text{und} \quad X_2 = \delta_{ij} - \frac{\Phi_i \Phi_j}{\vec{\Phi}^2} \quad \text{mit } i, j = 1, \dots, N . \quad (3.21)$$

Diese Projektionsoperatoren haben folgende Eigenschaften

$$X_a X_b = \delta_{ab} X_a \quad , \quad \text{für } a, b = 1, 2 \quad (3.22)$$

$$\text{Tr} X_1 = 1 \quad ; \quad \text{Tr} X_2 = N - 1 \quad (3.23)$$

$$\partial_\mu X_1 = -\partial_\mu X_2 . \quad (3.24)$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$m_\sigma^2 = \lambda(3\vec{\Phi}^2 - \vec{\Phi}_0^2) \quad (3.25)$$

$$m_\pi^2 = \lambda(\vec{\Phi}^2 - \vec{\Phi}_0^2) \quad (3.26)$$

lässt sich die Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ mit Hilfe der Projektionsoperatoren schreiben als

$$\tilde{\mathcal{M}} = m_\sigma^2 X_1 + m_\pi^2 X_2 . \quad (3.27)$$

Durch Ersetzen der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ in (3.20) durch die rechte Seite der obigen Gleichung wird die Problematik der Nichtkommutativität auf die Berechnung von Spuren über die Produkte von Projektionsoperatoren und deren Ableitungen reduziert. Es treten drei Varianten dieser Spuren auf, die sich direkt aus den Definitionen der Projektionsoperatoren berechnen lassen:

$$Tr [X_a \partial_\mu X_b] = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c = 1, 2 , \quad (3.28)$$

$$Tr [X_a \partial_\mu^2 X_b] = 2(-1)^{\delta_{ab}+1} \left(\frac{(\vec{\Phi} \partial_\mu \vec{\Phi})^2}{(\vec{\Phi}^2)^2} - \frac{(\partial_\mu \vec{\Phi})^2}{\vec{\Phi}^2} \right) , \quad (3.29)$$

$$Tr [X_a \partial_\mu X_b \partial_\mu X_c] = (-1)^{\delta_{bc}} \left(\frac{(\vec{\Phi} \partial_\mu \vec{\Phi})^2}{(\vec{\Phi}^2)^2} - \frac{(\partial_\mu \vec{\Phi})^2}{\vec{\Phi}^2} \right) . \quad (3.30)$$

Weiterhin können alle endlichen Summen in (3.20) analytisch berechnet werden und die unendlichen Summen lassen sich wieder auf Exponentialfunktionen zurückführen. Für weitere Details der Rechnung sei auf den Anhang B.1 verwiesen. Als Ergebnis dieser Umformungen lässt sich die effektive Wirkung in der betrachteten Ordnung in zwei Anteile

$$\Gamma_{k,2} = \Gamma_{k,2}^{(0)} + \Gamma_{k,2}^{(2)} \quad (3.31)$$

aufspalten. Der erste Anteil $\Gamma_{k,2}^{(0)}$ beinhaltet keine Ableitungen und entspricht dem effektiven Potential U ,

$$\Gamma_{k,2}^{(0)} = -\frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \left\{ e^{-\tau m_\sigma^2} + (N-1) e^{-\tau m_\pi^2} \right\} . \quad (3.32)$$

Der zweite Anteil $\Gamma_{k,2}^{(2)}$ beinhaltet zwei Ableitungen und kann mit der Wellenfunktionsnormierung Z identifiziert werden,

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,2}^{(2)} = & \frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \left\{ Z \left(\frac{\tau^2}{2} \partial_\mu^2 m_\sigma^2 - \frac{\tau^3}{3} \partial_\mu m_\sigma^2 \partial_\mu m_\sigma^2 \right) e^{-\tau m_\sigma^2} \right. \\ & \left. + Z(N-1) \left(\frac{\tau^2}{2} \partial_\mu^2 m_\pi^2 - \frac{\tau^3}{3} \partial_\mu m_\pi^2 \partial_\mu m_\pi^2 \right) e^{-\tau m_\pi^2} \right. \\ & \left. - 2Z \left(\frac{2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \left(e^{-\tau m_\sigma^2} - e^{-\tau m_\pi^2} \right) + \tau \left(e^{-\tau m_\sigma^2} + e^{-\tau m_\pi^2} \right) \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{(\Phi_a \partial_\mu \Phi_a)^2}{(\vec{\Phi}^2)^2} - \frac{(\partial_\mu \Phi_a)^2}{\vec{\Phi}^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Z^2 p^2 \delta^{\mu\nu}}{D} \left[\left(\frac{2\tau^3}{3} \partial_\mu^2 m_\sigma^2 - \frac{\tau^4}{2} \partial_\mu m_\sigma^2 \partial_\mu m_\sigma^2 \right) e^{-\tau m_\sigma^2} \right. \\
& + (N-1) \left(\frac{2\tau^3}{3} \partial_\mu^2 m_\pi^2 - \frac{\tau^4}{2} \partial_\mu m_\pi^2 \partial_\mu m_\pi^2 \right) e^{-\tau m_\pi^2} \\
& + 2\tau \left(\frac{2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \left(e^{-\tau m_\sigma^2} - e^{-\tau m_\pi^2} \right) + \tau \left(e^{-\tau m_\sigma^2} + e^{-\tau m_\pi^2} \right) \right) \\
& \left. \left(\frac{(\partial_\mu \Phi_a)^2}{\vec{\Phi}^2} - \frac{(\Phi_a \partial_\mu \Phi_a)^2}{(\vec{\Phi}^2)^2} \right) \right] \Bigg\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Für $N = 1$ reduzieren sich diese Ergebnisse auf das Resultat für die ϕ^4 -Theorie [32]. Die in diesen Ausdrücken verbleibenden Impulsintegrationen können alle analytisch ausgeführt werden, die entsprechenden Formeln findet man im Anhang A.2 aufgelistet. Durch Vergleich von (3.33) mit der Ableitungsentwicklung (3.2) können wir nun die Beiträge zum effektiven Potential und zur Wellenfunktionsrenormierung extrahieren. Für das effektive Potential findet man

$$U_k = -\frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d\tau}{\tau} \frac{1}{(Z\tau)^{D/2}} f_k \left\{ e^{-\tau m_\sigma^2} + (N-1)e^{-\tau m_\pi^2} \right\} \tag{3.34}$$

und für die Wellenfunktionsrenormierung in der Näherung einer einheitlichen Wellenfunktionsrenormierung für die σ - und $\vec{\pi}$ -Felder ergibt sich

$$\begin{aligned}
Z_k = & \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{Z}{\Phi_0^2} \int \frac{d\tau}{\tau} \frac{1}{(Z\tau)^{D/2}} f_k \\
& \left\{ \tau \left(e^{-\tau m_\sigma^2} + e^{-\tau m_\pi^2} \right) + \frac{2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \left(e^{-\tau m_\sigma^2} - e^{-\tau m_\pi^2} \right) \right\} \Bigg|_{\vec{\Phi}_0}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Aus diesen Ausdrücken lassen sich durch Ableitung nach der Skala k Flussgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung gewinnen. Dazu ist die Kenntnis der Ableitung der Heat-Kernel-Abschneidefunktion nach der Skala k notwendig. Die Resultate für das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung sind unabhängig von der Wahl der Heat-Kernel-Abschneidefunktion. Die Wahl der Heat-Kernel-Abschneidefunktion bestimmt jedoch das Aussehen der Flussgleichungen und hat damit Einfluss auf deren Konvergenzverhalten. Daneben muss die Heat-Kernel-Abschneidefunktion gewissen Bedingungen genügen, um die Eigenzeit-Integration zu regularisieren und ist damit nicht völlig willkürlich. Die Wahl der Heat-Kernel-Abschneidefunktion wird im nächsten Unterabschnitt genauer diskutiert, bevor die damit gewonnen Flussgleichungen angegeben werden.

3.1.2 Heat-Kernel-Abschneidefunktion

Die Heat-Kernel-Abschneidefunktion dient dazu, die divergierenden Impulsbeiträge zu den Flussgleichungen zu regularisieren. Eine Heat-Kernel-Abschneidefunktion f_k muss,

um dieser Aufgabe gerecht zu werden, den folgenden drei Bedingungen genügen (siehe dazu auch [33] und [34]).

Erstens muss f_k aus Dimensionsgründen offensichtlich eine dimensionslose Funktion sein. Dies wird durch Wahl von f_k als Funktion des dimensionslosen Arguments $\tau Z k^2$ gewährleistet. Der Faktor Z im Argument trägt der Skalierung der Impulse mit \sqrt{Z} Rechnung. Zweitens muss $f_k(\tau Z k^2 \rightarrow 0) = 1$ gelten, um sicherzustellen, dass Γ_k in diesem Grenzfall in die volle effektive Wirkung übergeht. Dies impliziert, dass im Limes $k \rightarrow 0$ der Infrarot-Abschneideparameter verschwindet und alle Moden ausintegriert werden.

Drittens muss $f_k(\tau Z k^2)$ für große Argumente $\tau Z k^2$ hinreichend schnell gegen null gehen, um die kleinen Impulsmoden zu unterdrücken und damit den Infrarotbereich zu regularisieren.

Im Prinzip können wir nun eine Funktion f_k , die diesen Bedingungen genügt, frei wählen [35]. Wir folgen in dieser Arbeit dem in [36] vorgeschlagenen Weg und ermitteln die Heat-Kernel-Abschneidefunktion durch Vergleich mit einem scharfen Impuls-Abschneideparameter Λ . Dieser Vergleich ist keine Notwendigkeit, er ermöglicht jedoch eine Verbindung zu anderen Arbeiten und Resultaten.

In den Formeln zur Berechnung des effektiven Potentials und der Wellenfunktionsrenormierung treten Impulsintegrale von unterschiedlichem Grad an Divergenz auf. Wir können nun formal für jede Impulsintegration durch Vergleich mit einem scharfen Impuls-Abschneideparameter eine Differentialgleichung aufstellen und aus deren Lösung jeweils eine Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$ ableiten. Auf diese Weise erhalten wir für die verschiedenen Impulsintegrationen jeweils eine zugehörige Heat-Kernel-Abschneidefunktion. Es stellt sich jedoch für die Konvergenz der Flussgleichungen als günstig heraus, sich an der Impulsintegration mit dem höchsten auftretenden Grad an Divergenz zu orientieren und die so gewonnene Heat-Kernel-Abschneidefunktion für alle Impulsintegrationen zu verwenden.

Betrachten wir nur das effektive Potential, so tritt nur eine Impulsintegration vom Typ

$$I_0 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} \quad (3.36)$$

auf. Der Vergleich mit einem scharfen Impuls-Abschneideparameter Λ lautet für diesen Fall

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} f_k^{(0)} \int_0^\infty \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int_k^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} . \quad (3.37)$$

Nach Ausführen der Impulsintegration auf der linken Seite erhält man daraus durch Ableiten beider Seiten nach der Skala k

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k^{(0)} = -\frac{2}{\Gamma(d/2)} (\tau Z k^2)^{d/2} e^{-\tau Z k^2} . \quad (3.38)$$

Der Index an $f_k^{(0)}$, den wir hier eingeführt haben, deutet an, dass es sich bei der betrachteten Impulsintegration um die mit dem niedrigsten auftretenden Grad an Divergenz handelt. In der Berechnung der Wellenfunktionsrenormierung tritt eine Integration mit

einem höheren Divergenzgrad auf. Das entsprechende Impulsintegral ist vom Typ

$$I_1 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \sqrt{Z} p_\mu \sqrt{Z} p_\nu e^{-\tau Z p^2} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} Z p^2 e^{-\tau Z p^2} . \quad (3.39)$$

Ein (3.37) entsprechender Vergleich der scharf abgeschnittenen Impulsintegration mit einer neuen Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(1)}$ führt auf folgenden Ausdruck für die Ableitung der Heat-Kernel-Abschneidefunktion,

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k^{(1)} = -\frac{4}{\Gamma(d/2)d} (\tau Z k^2)^{d/2+1} e^{-\tau Z k^2} . \quad (3.40)$$

Jede weitere Potenz von $Z p^2$ im Integranden der Impulsintegration führt im Vergleich auf eine neue Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$ mit jeweils einer um eins erhöhten Potenz von $\tau Z k^2$. Die Verallgemeinerung von (3.38) und (3.40) lautet dementsprechend

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k^{(i)} = c^{(i)} (\tau Z k^2)^{d/2+i} e^{-\tau Z k^2} , \quad (3.41)$$

wobei die Vorfaktoren $c^{(i)}$ durch

$$c^{(i)} = -\frac{2^{i+1}(d-2)!!}{\Gamma(d/2)(d-2+2i)!!} \quad \text{für } i \geq 0 \quad (3.42)$$

gegeben sind. Die Differentialgleichung in (3.41) lässt sich direkt integrieren, die entsprechende Rechnung ist im Anhang B.2 ausgeführt, man erhält

$$f_k^{(i)} = -\frac{1}{2} c^{(i)} \Gamma\left(\frac{d}{2} + i, \tau k^2\right) , \quad (3.43)$$

darin bezeichnet $\Gamma(a, x)$ die unvollständige Gammafunktion. In vier Dimensionen vereinfacht sich (3.43) zu

$$f_k^{(i)} = -\frac{(i+1)!}{2} c^{(i)} e^{-\tau Z k^2} \sum_{l=0}^{i+1} \frac{1}{l!} (\tau Z k^2)^l . \quad (3.44)$$

Die Auswirkungen der unterschiedlichen Heat-Kernel-Abschneidefunktionen $f_k^{(i)}$ auf die Integration soll am Beispiel

$$\int \frac{d\tau}{\tau} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau Z p^2} k \frac{\partial f^{(i)}}{\partial k} \quad (3.45)$$

verdeutlichen werden. Dazu vertauscht man die Integrationsreihenfolge und führt die Integration über die Eigenzeit für verschiedene $f_k^{(i)}$ aus. Der normierte resultierende Integrand der verbleibenden Impulsintegration ist in Abb. (3.1) in vier Dimensionen für $Z = 1$ bei fixiertem k für $f_k^{(0)}$, $f_k^{(1)}$ und $f_k^{(2)}$ dargestellt.

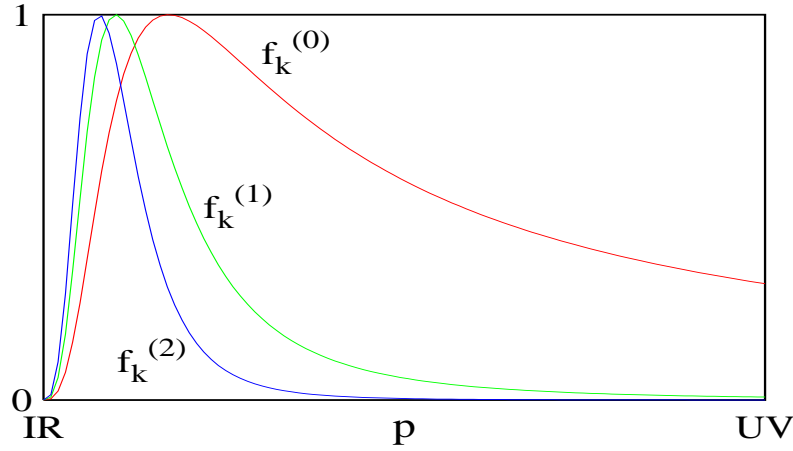


Abbildung 3.1: Normierter Integrand der Impulsintegration in (3.45) als Funktion des Impulses für $f_k^{(0)}$, $f_k^{(1)}$ und $f_k^{(2)}$ bei $k=1$ und $Z=1$.

Man erkennt, dass mit größer werdendem i durch den Einfluss von $f_k^{(i)}$ immer schärfer werdende Impulsschalen selektiert werden.

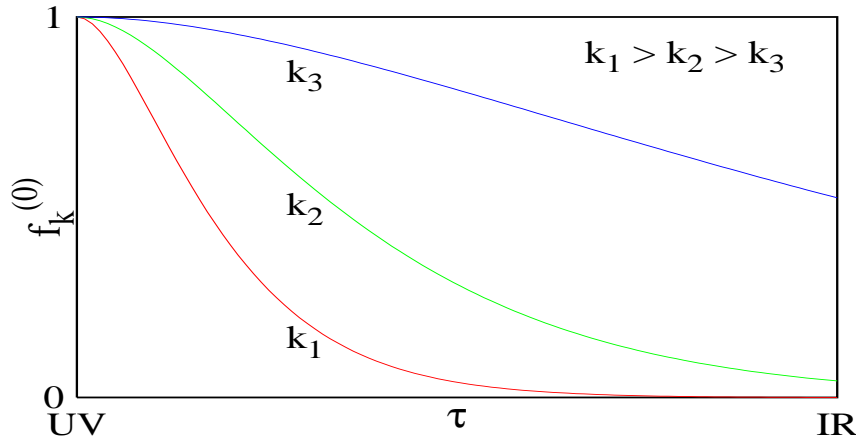


Abbildung 3.2: Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(0)}$ für drei unterschiedliche Werte von k (siehe Text).

Die Wahl von Heat-Kernel-Abschneidefunktionen höherer Ordnung verbessert in unserer Approximation die Konvergenz der Flussgleichungen. Aus diesem Grund werden wir für alle auftretenden Integrationen einheitlich $f_k^{(1)}$ als Heat-Kernel-Abschneidefunktion wählen. Der Einfluss der gewählten Heat-Kernel-Abschneidefunktion auf die Konvergenz der Flussgleichungen wird später (in Abschnitt 5.6) genauer untersucht. Zur Illustration der Eigenschaften der Heat-Kernel-Abschneidefunktion ist in Abb. 3.2 $f_k^{(0)}$ für $d=4$ und $Z=1$ als Funktion von τ für drei unterschiedliche, aber jeweils konstante Werte von k dargestellt. Für grosse Werte von k geht f_k schnell gegen Null, so dass die meisten Infrarot-Moden abgeschnitten werden. Im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ werden alle Quantenfluktuationen abgeschnitten und die Wirkung Γ_k entspricht der klassischen Wirkung. Verkleinert man k sukzessive, so werden immer mehr Infrarot-Moden berücksichtigt. Im Grenzfall

$k \rightarrow 0$ wird der Abschneideparameter effektiv entfernt und die Wirkung Γ_k geht in die volle effektive Wirkung über.

3.2 Flussgleichungen bei $\mathbf{T}=0$

Mit dem allgemeinen Ausdruck für die Ableitung der Heat-Kernel-Abschneidefunktion (3.41) haben wir alles beisammen, um aus (3.34) und (3.35) die Flussgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung zu berechnen. Wie bereits angesprochen werden wir dazu einheitlich für alle Integrationen die Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(1)}$ verwenden. Nach Ableiten der beiden Ausdrücke (3.34) und (3.35) nach der Skala k und Ausführen der Eigenzeit-Integration erhält man für die Flussgleichungen

$$k \frac{\partial U}{\partial k} = S_D \frac{k^D}{D} \left[\frac{1}{1 + 2 \frac{V'}{Zk^2} + 4 \vec{\Phi}^2 \frac{V''}{Zk^2}} + \frac{N-1}{1 + 2 \frac{V'}{Zk^2}} \right] \quad (3.46)$$

für das effektive Potential und

$$-\frac{1}{Z} \partial_t Z = \frac{2S_D}{\vec{\Phi}^2 Zk^2} \frac{k^D}{D} \left[1 + \frac{1}{(1 + 4 \vec{\Phi}^2 \frac{V''}{Zk^2})^2} + \frac{1}{2 \vec{\Phi}^2 \frac{V''}{Zk^2}} \left(\frac{1}{1 + 4 \vec{\Phi}^2 \frac{V''}{Zk^2}} - 1 \right) \right] \Big|_{\vec{\Phi}^2 = \vec{\Phi}_0^2} \quad (3.47)$$

für die Wellenfunktionsrenormierung. Der in diesen Formeln auftretende Faktor S_D ist durch

$$S_D = \frac{2}{\Gamma(D/2)(4\pi)^{D/2}} \quad (3.48)$$

gegeben. In den beiden Flussgleichungen wurden die in (3.25) und (3.26) abkürzend eingeführten Bezeichnungen m_σ^2 und m_π^2 durch Ableitungen des Baumgraphen-Potentials V ausgedrückt. Des weiteren bezeichnet der Strich am Potential eine Ableitung des Potentials nach $\vec{\Phi}^2$. Auf Grund der Vernachlässigung der Feldabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung wird die Flussgleichung für Z , im Gegensatz zu der des Potentials, nur am Minimum des Potentials $\vec{\Phi}_0^2$ ausgewertet.

Die Flussgleichungen in dieser Form berücksichtigen nur Ein-Schleifen Beiträge und vernachlässigen alle wichtigen Modifikationen durch die Rückkopplung der höheren, bereits ausintegrierten Moden auf die Evolution. Alle Impulsmoden oberhalb der Skala k werden in einem Schritt ausintegriert, ohne einen Einfluss auf die weitere Evolution. Mit einer Renormierungsgruppenverbesserung (RG Verbesserung) gehen wir über diese sogenannte "independent mode approximation" hinaus.

Die RG Verbesserung besteht darin, das Baumgraphen-Potential V und seine Ableitungen auf der rechten Seite der Flussgleichungen durch das k -abhängige, evolvierende Potential U und dessen Ableitungen zu ersetzen. Die Flussgleichungen bilden damit ein System selbstkonsistenter gekoppelter Gleichungen. In jedem Schritt der Evolution wird die Impulsskala um Δk von k auf $k - \Delta k$ reduziert (vgl. Abb. 3.3) und das Potential durch die

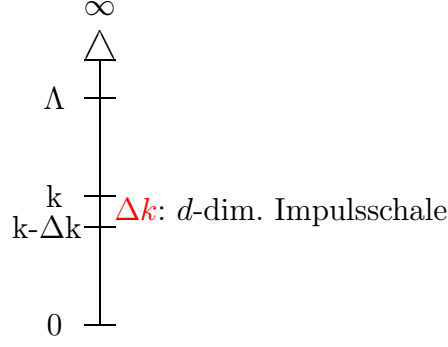


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der Ausintegration der Impulsmoden in der d -dimensionalen Impulsschale Δk , alle Moden oberhalb der Skala k sind bereits ausintegriert.

Ausintegration der in der Impulsschale Δk befindlichen Moden modifiziert. Die Ersetzung von V durch U bewirkt, dass in Folge der Selbstkonsistenz der Gleichungen die Ausintegration der jeweiligen Impulsschale Δk mit dem im vorhergehenden Schritt modifizierten Potential U erfolgt. Dadurch wird eine Rückkopplung der Dynamik der bereits ausintegrierten Moden auf die weitere Evolution erzeugt (siehe auch [40]). Die RG Verbesserung ist eine Analogie zur Aufsummierung von Daisy- und Super-Daisydiagrammen und nicht planaren Schleifendiagramme höherer Ordnung, ähnlich einer Schwinger-Dyson Summation. Diese hier verwendete RG Verbesserung entspricht anderen in der Literatur beschriebenen RG Verbesserungen [41], [42]. Mit der RG-Verbesserung gibt man jedoch auf der anderen Seite die strenge Verbindung zur Pfadintegral-Formulierung der effektiven Wirkung auf. Die Verbindung dieses RG-Zugangs zu den exakten Renormierungsgruppen (ERG) ist zur Zeit noch eine offene Fragestellung. Die RG verbesserten Flussgleichungen lauten schließlich

$$k \frac{\partial U}{\partial k} = S_D \frac{k^D}{D} \left[\frac{1}{1 + 2 \frac{U'}{Zk^2} + 4 \vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}} + \frac{N-1}{1 + 2 \frac{U'}{Zk^2}} \right] \quad (3.49)$$

für das effektive Potential und

$$-\frac{1}{Z} \partial_t Z = \frac{2S_D}{\vec{\Phi}^2 Zk^2} \frac{k^D}{D} \left[1 + \frac{1}{(1 + 4 \vec{\Phi}^2)^2 \frac{U''}{Zk^2}} + \frac{1}{2 \vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}} \left(\frac{1}{1 + 4 \vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}} - 1 \right) \right] \Big|_{\vec{\Phi}^2 = \vec{\Phi}_0^2} \quad (3.50)$$

für die Wellenfunktionsrenormierung. Diese Flussgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung ist die gleiche für alle N , da der Faktor N in der Flussgleichung selbst nicht auftritt. Der Grund hierfür ist die Näherung (3.4) der einheitlichen Wellenfunktionsrenormierung für die σ - und $\vec{\pi}$ -Felder, die wir machen. Die Funktionen in den eckigen Klammern der Flussgleichungen beschreiben das Schwellenverhalten der massiven Felder im Laufe der Evolution der Skala k und werden daher in der Literatur manchmal auch als ‘‘Schwellenfunktionen’’ [37], [38] bezeichnet. Hier zeigt sich ein Vorteil der gewählten Heat-Kernel-Abschneidefunktionen, da sie auf analytische Ausdrücke für die Schwellenfunktionen führen.

In der Flussgleichung für das Potential findet man zwei Beiträge in der eckigen Klammer,

die Schwellenfunktion des σ -Mesons und die der $N - 1$ Pionen. Die Masse der einzelnen Felder ist durch die zweite Ableitung des Potential nach den Feldern am Minimum bestimmt. Damit erkennt man an den Schwellenfunktionen, dass die σ -Mesonen auf Grund ihrer Masse im Laufe der Evolution von der weiteren Evolution entkoppeln. Sie liefern keinen weiteren Beitrag mehr zu den Flussgleichungen, da die Schwellenfunktion für alle Werte von $\vec{\Phi}$ für $k \rightarrow 0$ gegen null geht. Auf der anderen Seite zeigen die $N - 1$ masselosen Pionen, die hier die Rolle der Goldstone-Bosonen spielen, kein Schwellenverhalten. Sie liefern während der gesamten Evolution einen Beitrag zu den Flussgleichungen, da ihre Schwellenfunktion am Minimum $\vec{\Phi}_0$ immer den Wert 1 hat. Auf die Schwellenfunktionen kommen wir im nächsten Abschnitt, im Zusammenhang mit den Anfangsbedingungen der Evolution bei endlichen Temperaturen, noch einmal zurück.

3.3 Flussgleichungen bei endlicher Temperatur

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe des Matsubara-Formalismus die Formulierung der Flussgleichungen auf endliche Temperaturen erweitern ¹. Die Matsubara-Technik besteht darin, die D -dimensionale Impulsintegration in (3.32) und (3.33) in eine $(D - 1)$ -dimensionale Impulsintegration und eine Integration über die Nullkomponente der Impulse aufzuspalten. Der entscheidende Schritt besteht dann darin, die Integration über die Nullkomponente der Impulse durch eine Summation diskreter Matsubara-Frequenzen $\omega_n = 2n\pi T$ zu ersetzen (vgl. Abb. 3.3):

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p^2) \quad \Rightarrow \quad T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^{D-1} p}{(2\pi)^{D-1}} f(\vec{p}^2 + \omega_n^2) . \quad (3.51)$$

Dies führt auf einen wichtigen Unterschied in den Schwellenfunktionen der Flussgleichungen, die dadurch bei endlicher Temperatur halbzahlige Exponenten im Nenner aufweisen. Durch die Ersetzung (3.51) wird eine zusätzliche Skala, die inverse Temperatur $\beta = T^{-1}$, eingeführt, die es ermöglicht, neben den Quantenfluktuationen auch thermische Fluktuationen zu beschreiben.

Aus Gründen der Konsistenz mit den Flussgleichungen bei $T = 0$ machen wir bei endlichen Temperaturen die gleichen Näherungen und verwenden die gleiche Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(1)}$. Die Skala k dient bei endlichen Temperaturen als Infrarot-Abschneideparameter für die $(D - 1)$ -dimensionale Impulsintegration. Für die Summation der Matsubara-Frequenzen führen wir keine zusätzliche Abschneidefunktion ein, numerisch werden wir jedoch die Summation bei einer festen endlichen Ordnung abschneiden. Der Einfluss der Wahl einer zusätzlichen Heat-Kernel-Abschneidefunktion für die Matsubara-Summation oder auch die Wahl einer kombinierten Heat-Kernel-Abschneidefunktion für beide Moden ist in [40] detailliert untersucht worden.

¹Eine Implementierung der Wilson'schen Renormierungsgruppe im "real-time"-Formalismus kann man beispielsweise in [39] finden.

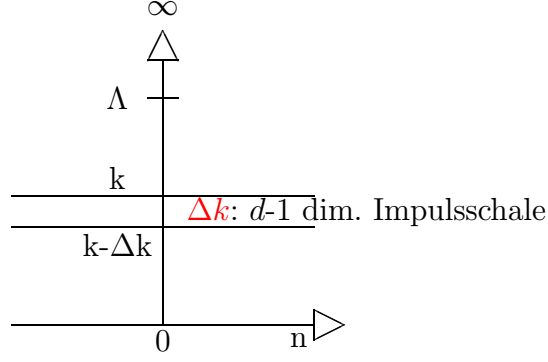


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der Ausintegration der Impulsmoden in der $(D-1)$ -dimensionalen Impulsschale Δk , die Matsubara-Summation läuft über alle $n \in \mathbb{Z}$.

Um die Ausdrücke für die Flussgleichungen etwas übersichtlicher zu schreiben, führen wir die Abkürzungen

$$\mathcal{M}_\sigma(i, j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\omega_n^2)^i}{\left(1 + \frac{\omega_n^2}{k^2} + 2\frac{U'}{Zk^2} + 4\vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}\right)^j} \quad (3.52)$$

$$\mathcal{M}_\pi(i, j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\omega_n^2)^i}{\left(1 + \frac{\omega_n^2}{k^2} + 2\frac{U'}{Zk^2}\right)^j} \quad (3.53)$$

für die Schwellenfunktionen ein. Mit diesen Abkürzungen lauten die Flussgleichungen bei endlicher Temperatur

$$k \frac{\partial U}{\partial k} = \frac{2k^{D-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) (4\pi)^{\frac{D-1}{2}} D} \left\{ \mathcal{M}_\sigma\left(0, \frac{3}{2}\right) + (N-1) \mathcal{M}_\pi\left(0, \frac{3}{2}\right) \right\} \quad (3.54)$$

für das effektive Potential und

$$\begin{aligned} k \frac{\partial Z}{\partial k} = & - \frac{4ZTk^{\frac{D+2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) (4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \vec{\Phi}_0^2 D} \left\{ \frac{4\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{d+1}{2d}}{4\vec{\Phi}^2 U''} \left[\mathcal{M}_\sigma\left(0, \frac{3}{2}\right) - \mathcal{M}_\pi\left(0, \frac{3}{2}\right) \right] \right. \\ & + \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \frac{d+1}{2d}}{Zk^2} \left[\mathcal{M}_\sigma\left(0, \frac{5}{2}\right) + \mathcal{M}_\pi\left(0, \frac{5}{2}\right) \right] \\ & - \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{dk^2 4\vec{\Phi}^2 U''} \left[\mathcal{M}_\sigma\left(1, \frac{5}{2}\right) - \mathcal{M}_\pi\left(1, \frac{5}{2}\right) \right] \\ & \left. - \frac{2\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{dZk^4} \left[\mathcal{M}_\sigma\left(1, \frac{7}{2}\right) + \mathcal{M}_\pi\left(1, \frac{7}{2}\right) \right] \right\} \Big|_{\vec{\Phi}^2 = \vec{\Phi}_0^2} \quad (3.55) \end{aligned}$$

für die Wellenfunktionsrenormierung. Wie im Fall $T = 0$ vernachlässigen wir auch bei endlichen Temperaturen die Feldabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung. Diese Flussgleichungen lassen sich im Grenzfall $k \rightarrow 0$ analytisch auf die Flussgleichungen für

verschwindende Temperaturen (3.49) und (3.50) zurückführen. Die Schwellenfunktionen lauten in diesem Grenzfall

$$\mathcal{M}_\sigma(0, j) \rightarrow \frac{k (2j-3)!!}{\pi T (2j-2)!!} \frac{1}{\left(1 + 2\frac{U'}{Zk^2} + 4\vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}\right)^{\frac{(2j-1)}{2}}} \quad (3.56)$$

und

$$\mathcal{M}_\sigma(1, j) \rightarrow \frac{k^3 (2j-5)!!}{2\pi T (2j-4)!!} \frac{1}{(j-1)} \frac{1}{\left(1 + 2\frac{U'}{Zk^2} + 4\vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}\right)^{\frac{(2j-3)}{2}}}, \quad (3.57)$$

siehe hierzu auch [38]. Die Schwellenfunktionen für die Pionen unterscheiden sich von den obigen nur durch das Fehlen des Terms $4\vec{\Phi}^2 \frac{U''}{Zk^2}$. Einsetzen dieser Ausdrücke in die Flussgleichungen für endliche Temperatur liefert die $T = 0$ Flussgleichungen zurück.

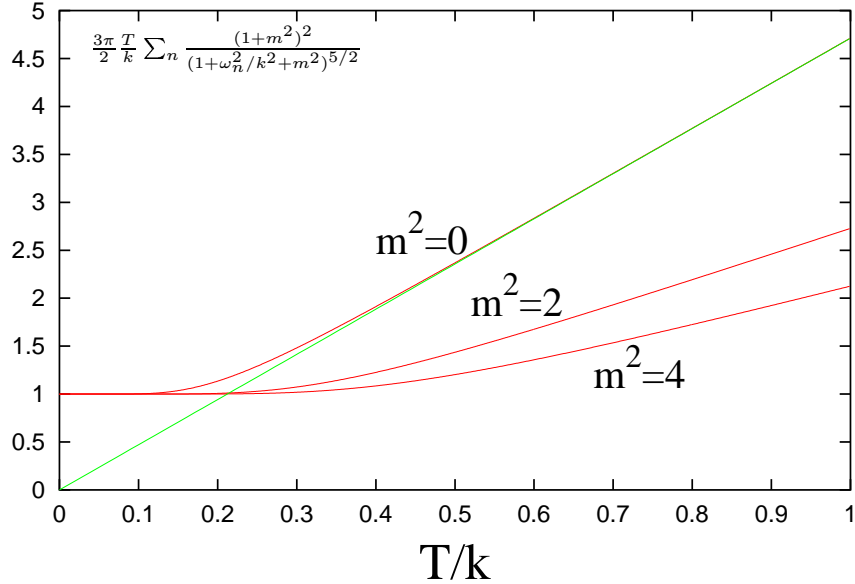


Abbildung 3.5: Verhältnis der Schwellenfunktion $\mathcal{M}_{m^2} \left(0, \frac{5}{2}\right)$ bei $T = 0$ und bei endlicher Temperatur als Funktion von T/k für unterschiedliche Parameter $m^2 = 0, 2, 4$. Für große Werte von T/k zeigen die Schwellenfunktionen ein lineares Verhalten (siehe Text).

In Abb. 3.5 ist am Beispiel einer willkürlich herausgegriffenen Schwellenfunktion das Verhältnis einer Schwellenfunktion bei $T = 0$ und bei endlicher Temperatur als Funktion von T/k für unterschiedliche Parameter $m^2 = 0, 2, 4$ dargestellt. Die Grafik zeigt, dass unterhalb von etwa $T/k = 0.14$ das Verhältnis eins ist. Das bedeutet, dass in dem Bereich der Evolution, der der Bedingung $T/k < 0.14$ genügt das Verhalten der Schwellenfunktionen identisch mit dem $T = 0$ Verhalten ist. Insbesondere ermöglicht uns dies die Temperaturabhängigkeit der Anfangsbedingungen an der Skala Λ im Temperaturbereich

bis 0.14Λ zu vernachlässigen. Umgekehrt bedeutet dies, dass bei Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit der Anfangsbedingungen für die Flussgleichungen die Temperaturvorhersage auf diesen Bereich beschränkt ist.

Die Grafik zeigt weiter, dass für große Werte von T/k das Verhältnis der Schwellenfunktionen einen linearen Anstieg zeigt. Für große Werte von T/k trägt nur noch die $n = 0$ Mode zur Matsubara-Summe bei und ist für das lineare Verhalten verantwortlich. Im Grenzfall großer Temperaturen wird das D -dimensionale Verhalten des Systems auf ein $(D - 1)$ -dimensionales Verhalten reduziert. Dieses Phänomen bezeichnet man als dimensionale Reduktion und es wird uns ermöglichen, das kritische Verhalten am Phasenübergang durch $(D - 1)$ -dimensionale $T = 0$ Flussgleichungen zu beschreiben.

3.4 Vergleich mit der Methode der exakten Renormierungsgruppen

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten Renormierungsgruppen-Flussgleichungen auf Basis einer Heat-Kernel-Regularisierung abgeleitet. Bevor wir im nächsten Kapitel mit Hilfe dieser Flussgleichungen das $O(N)$ -Modell numerisch untersuchen, werden wir in diesem Abschnitt einen Vergleich mit der Methode der exakten Renormierungsgruppen (ERG) anstellen.

Es gibt eine Reihe verschiedener ERG Formulierungen, die alle bis auf die Wahl des Regularisors äquivalent sind. Beispielsweise entsprechen Polchinskis Gleichungen im Grenzfall einer scharfen Impuls-Abschneidefunktion den Wegner-Houghton Gleichungen. Die ERG Gleichungen selbst sind hochgradig nichtlineare Funktionalgleichungen, die man in der Regel nähern muss, um physikalisch relevante Größen zu extrahieren. Dies kann jedoch dazu führen, dass die per Konstruktion vom Regularisierungsschema unabhängigen ERG Gleichungen eine Abhängigkeit von der gewählten Regularisierung erhalten.

Abgesehen von den verwendeten Näherungen, liegt die Gemeinsamkeit aller ERG Gleichungen darin, dass sie alle eine exakte Verbindung zur Pfadintegral-Formulierung der effektiven Wirkung besitzen. Auf der anderen Seite ist die analytische Verbindung zu den von uns verwendeten Renormierungsgruppen-Gleichungen bisher noch eine offene Frage in der Literatur. Wir wollen jedoch in diesem Abschnitt die Ähnlichkeit der Zugänge verdeutlichen. Zu diesem Zweck wird im Folgenden eine spezielle ERG Formulierung, der Zugang von Wetterich et al. [17] über die gemittelte Wirkung, dargestellt. Wir folgen dabei im Wesentlichen der Darstellung in [9].

3.4.1 Konstruktion der gemittelten Wirkung Γ_k^{av}

Die gemittelte Wirkung Γ_k^{av} ist eine einfache Verallgemeinerung der effektiven Wirkung Γ , wobei der Unterschied darin besteht, dass in Γ_k^{av} nur Impulsmoden mit $p^2 > k^2$ berücksichtigt werden. Die Berechnung der effektiven Wirkung folgt der allgemeinen Idee zur Berechnung der effektiven Wirkung in Renormierungsgruppenzugängen, wie sie im vorigen Kapitel geschildert wurde. Die gemittelte Wirkung ist für $k = 0$ per Definition gleich der effektiven Wirkung. Auf der anderen Seite geht sie für $k = \Lambda$ im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ in die klassische oder mikroskopische Wirkung S über. Man kann die gemittelte Wirkung als Mittelwert der Felder über ein Volumen der Größe k^{-d} auffassen. Γ_k^{av} interpoliert somit zwischen der klassischen Wirkung und der vollen effektiven Wirkung oder anders ausgedrückt zwischen der mikroskopischen und der makroskopischen Betrachtung des Systems. Die gemittelte Wirkung Γ_k^{av} ist damit die analoge Größe zur k -abhängigen effektiven Wirkung Γ_k im von uns verwendeten Zugang.

Ausgangspunkt der Konstruktion von Γ_k^{av} ist ebenfalls das erzeugende Funktional der verbundenen n -Teilchen Korrelationsfunktionen $W[J]$. Während wir jedoch unseren Regulator f_k erst zur Regularisierung der Spur über den Logarithmus der Fluktuationsmatrix einführen (3.15), führt man hier bereits im Funktionalintegral der Zustandssumme einen Regulator R_k ein, der später wieder abgezogen wird. Der Ausdruck für das erzeugende Funktional der verbundenen n -Teilchen Korrelationsfunktionen für ein Modell mit reellem skalaren Feld ϕ in D Dimensionen lautet damit

$$W_k^{av}[J] = \ln Z_k^{av}[J] = \ln \int \mathcal{D}\phi e^{(-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int d^D x J\phi)} . \quad (3.58)$$

Die Modifikation des gewöhnlichen Ausdrucks für $W[J]$ darin besteht in dem zusätzlichen Term $\Delta S_k[\phi]$. Dieser enthält den Regulator R_k und ist durch

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} R_k(p) \phi(p) \phi(-p) . \quad (3.59)$$

gegeben. An den Regulator R_k sind ähnliche Anforderungen gestellt, wie an das von uns verwendete f_k . R_k muss für $k \rightarrow 0$ verschwinden und für $k \rightarrow \infty$ bei festem p^2 divergieren. Eine mögliche Wahl für R_k , die diesen Anforderungen genügt, ist

$$R_k(p) \sim \frac{p^2}{e^{\frac{p^2}{k^2}} - 1} . \quad (3.60)$$

Die Wirkungsweise von R_k lässt sich leicht anschaulich interpretieren. Für $p^2 \gg k^2$ verschwindet R_k , so dass die funktionale Integration für hohe Impulsmoden nicht beeinflusst wird. Für kleine Impulse $p^2 \ll k^2$ auf der anderen Seite verhält sich $R_k(p) \sim k^2$. Da $\Delta S_k[\phi]$ quadratisch in den Feldern ist bedeutet dies, dass die Moden mit Impulsen kleiner k eine zusätzliche effektive Masse $\sim k$ erhalten. Diese Masse wirkt als effektiver Infrarot-Abschneideparameter, der die kleinen Impulsmoden unterdrückt.

Den Erwartungswert des Felds ϕ in Gegenwart des Terms $\Delta S_k[\phi]$ und äußerer Quellen J erhält man analog zu (2.6) gemäß

$$\frac{\delta W_k^{av}[J]}{\delta J(x)} = \langle \phi(x) \rangle \equiv \phi_{cl}(x) . \quad (3.61)$$

Mit Hilfe einer modifizierten Legendre-Transformation erhält man damit schließlich die gemittelte Wirkung

$$\Gamma_k^{av}[\phi_{cl}] = -W_k^{av}[J] + \int d^D x J(x) \phi_{cl}(x) - \Delta S_k[\phi_{cl}] . \quad (3.62)$$

Die Subtraktion des Terms $\Delta S_k[\phi_{cl}]$ auf der rechten Seite der Gleichung ist entscheidend für eine vernünftige Definition der freien Energie. Er stellt die Eigenschaft $\Gamma_\Lambda^{av} = S$ im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ sicher und garantiert, dass der einzige Unterschied zwischen der effektiven Wirkung und der gemittelten Wirkung die Infrarot-Abschneidefunktion in den Fluktuationen ist und

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k^{av}[\phi_{cl}] = \Gamma[\phi_{cl}] \quad (3.63)$$

gilt.

3.4.2 Funktional-Flussgleichung für Γ_k^{av}

Aus dem Ausdruck (3.62) für die gemittelte Wirkung lässt sich leicht eine Funktional-Flussgleichung für Γ_k^{av} ableiten. Dazu schreibt man zunächst die modifizierte Legendre-Transformation (3.62) in eine gewöhnliche Legendre-Transformation um und leitet diesen Ausdruck dann nach der Skala k ab. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_k^{av}}{\partial k}[\phi_{cl}] + \frac{\partial \Delta S_k}{\partial k}[\phi_{cl}] + \int d^D x \frac{\delta(\Gamma_k^{av} + \Delta S_k)}{\delta \phi_{cl}(x)} \frac{\partial \phi_{cl}(x)}{\partial k} \\ = -\frac{\partial W_k^{av}}{\partial k}[J] - \int d^D x \frac{\delta W_k^{av}}{\delta J(x)} \frac{\partial J(x)}{\partial k} + \int d^D x \phi_{cl}(x) \frac{\partial J(x)}{\partial k} + \int d^D x J(x) \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial k} . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Unter Ausnutzung von (3.61) und der Beziehung

$$\frac{\delta(\Gamma_k^{av} + \Delta S_k)}{\delta \phi_{cl}(x)} = J(x) \quad (3.65)$$

reduziert sich (3.64) zu

$$\frac{\partial \Gamma_k^{av}}{\partial k}[\phi_{cl}] + \frac{\partial \Delta S_k}{\partial k}[\phi_{cl}] = -\frac{\partial W_k^{av}}{\partial k}[J] . \quad (3.66)$$

Aus der Definition von $W_k^{av}[J]$ (3.58) erkennt man, dass nur der Anteil $\Delta S_k[\phi]$ von k abhängt und damit einzig zur k -Ableitung in (3.66) beiträgt, so dass man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_k^{av}}{\partial k}[\phi_{cl}] + \frac{\partial \Delta S_k}{\partial k}[\phi_{cl}] &= \frac{1}{Z^{av}[J]} \int \mathcal{D}\phi \frac{\partial}{\partial k} \Delta S_k[\phi] e^{(-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int d^D x J(x) \phi(x))} \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial k} \Delta S_k[\phi] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \phi(x) \frac{\partial}{\partial k} R_k(x, y) \phi(y) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.67)$$

erhält, worin die Notation $R_k(x, y) \equiv R_k(i\partial_x)\delta(x - y)$ verwendet wurde. Im Folgenden bezeichne

$$G(x, y) = \frac{\delta^2 W_k^{av}}{\delta J(x)\delta J(y)} \quad (3.68)$$

die verbundenen zwei-Punkt Funktionen. Damit lassen sich die zwei-Punkt Funktionen in einen verbundenen und einen nicht verbundenen Anteil aufspalten:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(y) \rangle &= G(x, y) + \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle \\ &= G(x, y) + \phi_{cl}(x)\phi_{cl}(y) . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Einsetzen dieser Aufspaltung in (3.67) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_k^{av}}{\partial k}[\phi_{cl}] + \frac{\partial \Delta S_k}{\partial k}[\phi_{cl}] &= \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \left[\frac{\partial}{\partial k} R_k(x, y) G(x, y) + \phi_{cl}(x) \frac{\partial}{\partial k} R_k(x, y) \phi_{cl}(y) \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} \text{Tr} \left[G \frac{\partial}{\partial k} R_k \right] + \frac{\partial \Delta S_k}{\partial k}[\phi_{cl}] . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Unter Ausnutzung der Beziehung

$$G(x, y) = \left(\Gamma_k^{av,(2)}[\phi_{cl}] + R_k \right)^{-1} , \quad (3.71)$$

die im Anhang B.3 abgeleitet wird, folgt daraus direkt die Flussgleichung für die gemittelte Wirkung Γ_k^{av} :

$$\frac{\partial}{\partial k} \Gamma_k^{av}[\phi_{cl}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{av,(2)}[\phi_{cl}] + R_k \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial k} R_k \right] . \quad (3.72)$$

Diese Flussgleichung lässt sich auch über eine Renormierungsgruppenverbesserung aus einem Ein-Schleifen Ausdruck ableiten, ähnlich der von uns verwendeten Herleitung unserer Flussgleichung. Dazu geht man im Wesentlichen vom gleichen Ein-Schleifen Ausdruck (2.31) aus, in den man zusätzlich den Regulator R_k einbaut:

$$\Gamma_k^{av}[\phi_{cl}] = S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(S^{(2)}[\phi_{cl}] + R_k \right) . \quad (3.73)$$

Ableiten dieser Gleichung nach der Skala k mit anschließender Renormierungsgruppenverbesserung $S^{(2)} \rightarrow \Gamma_k^{av,(2)}$ führt direkt auf die exakte Funktional-Flussgleichung (3.72).

3.4.3 Flussgleichung für das gemittelte Potential U_k^{av}

Die Flussgleichung für die gemittelte Wirkung Γ_k^{av} ist eine Funktional-Differentialgleichung, die sich nicht ohne weiteres lösen lässt. Entwickelt nach Invarianten der Symmetrie des betrachteten Modells stellt diese Funktional-Differentialgleichung für

Γ_k^{av} ein gekoppeltes System nicht-linearer partieller Differentialgleichung für unendlich viele Kopplungen dar. Für praktische Rechnungen ist man darauf angewiesen, ein solches System zu nähern. Wetterich et al. [17] verwenden hierzu die gleiche Ableitungsentwicklung, die auch wir verwenden (2.21). Aus Gründen der Einfachheit beschränken wir uns im Folgenden auf die niedrigste Ordnung der Ableitungsentwicklung, das gemittelte Potential U_k^{av} , welches unserem effektiven Potential U_k entspricht. In diesem Fall vereinfacht sich die Funktional-Flussgleichung (3.72) für ein konstantes Feld ϕ zu

$$\frac{\partial}{\partial k} U_k^{av} = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\partial R_k}{\partial k} \left[\frac{N-1}{p^2 + R_k(p) + 2U_k^{av'}} + \frac{1}{p^2 + R_k(p) + 2U_k^{av'} + 4\phi^2 U_k^{av''}} \right], \quad (3.74)$$

worin die Striche Ableitungen nach ϕ^2 kennzeichnen. Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial k} U_k^{av} = S_D \frac{k_D}{D} \left[(N-1) l_0^D \left(\frac{2U_k^{av'}}{k^2} \right) + l_0^D \left(\frac{2U_k^{av'} + 4\phi^2 U_k^{av''}}{k^2} \right) \right] \quad (3.75)$$

schreiben. Darin bezeichnet l_0^D dimensionslose Schwellenfunktionen, die hier als

$$l_0^D(w) = \frac{1}{2} k^{-D} \frac{D}{S_D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\frac{\partial}{\partial k} R_k(p)}{p^2 + R_k(p) + k^2 w} \quad (3.76)$$

definiert sind. Ein Vergleich dieser Flussgleichung für das gemittelte Potential mit der Flussgleichung für das effektive Potential (3.34) zeigt die Ähnlichkeit der Zugänge. Beide Flussgleichungen besitzen die gleiche Struktur und unterscheiden sich nur in der Definition der Schwellenfunktionen. In Kapitel 5 werden wir sehen, dass dementsprechend auch die numerischen Ergebnisse der beiden Zugänge für die universellen kritischen Größen sehr gute Übereinstimmung zeigen.

Kapitel 4

Ergebnisse für das $O(N)$ -Modell

Im vorigen Kapitel wurden, im Rahmen des vorgestellten RG-Zugangs, Flussgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktionsrenormierung sowohl für $T = 0$ ((3.49), (3.50)) als auch für endliche Temperaturen ((3.54), (3.55)) abgeleitet. In diesem Kapitel werden die aus diesen Flussgleichungen gewonnenen numerischen Resultate vorgestellt und diskutiert, zuvor wird im ersten Abschnitt der zur Lösung der Flussgleichungen verwendete Algorithmus skizziert.

4.1 Numerische Implementierung

Die abgeleiteten Flussgleichungen für das effektive Potential beinhalten die volle Feldabhängigkeit des effektiven Potentials und gehen somit über jede endliche polynomielle Entwicklung hinaus. Wir diskretisieren das Feld $\vec{\Phi}^2$ auf einem Gitter, um damit die volle Feldabhängigkeit des effektiven Potentials zu modellieren. Dies führt auf ein System gekoppelter Flussgleichungen für jeden Gitterpunkt, das wir numerisch lösen. Die Anfangsbedingungen zur Lösung dieses Systems werden an der UV-Startskala bei $k = \Lambda$ vorgegeben, die Lösung selbst erhält man durch Evolution der Skala k für $k \rightarrow 0$. Das Gitter, auf dem das Feld diskretisiert wird, bleibt während der gesamten Evolution fixiert. Da das Hauptaugenmerk der folgenden Untersuchungen dem Minimum des Potentials gilt, ist die Größe des Gitters so zu wählen, dass die Evolution des Minimums Φ_0 vollständig im Bereich des Gitters abläuft.

Die Flussgleichungen für U und Z enthalten Ableitungen des effektiven Potentials U bis zur zweiten Ordnung. Zur Lösung der Flussgleichungen ist die Kenntnis dieser Ableitungen während der gesamten Evolution auf dem ganzen Gitter nötig. Bei der verwendeten Anzahl von Gitterpunkten, die wiederum durch den numerischen Aufwand beschränkt ist, stellt sich eine direkte numerische Berechnung dieser Ableitungen aus dem effektiven Potential als zu ungenau heraus. Daher erweitern wir das System um Flussgleichungen für die ersten beiden Ableitungen des effektiven Potentials U' und U'' . Diese Flussgleichungen erhält man direkt aus der Differentiation der Flussgleichung für U . Die so gewonnenen Flussgleichungen für U' und U'' enthalten wiederum Ableitungen von U bis zur dritten bzw. vierten Ordnung. Diese Systematik setzt sich weiter fort, so dass das System sich auf diese Weise nicht schliessen läßt. Wir folgen der in [43] beschriebenen Methode, um diese

Schwierigkeit zu überwinden und bestimmen die gesuchten Ableitungen U''' und U'''' aus Stetigkeitsbedingungen der Ableitungen an intermediären Gitterpunkten. Die Idee besteht einfach darin U' und U'' an jedem Gitterpunkt in eine Taylor-Reihe bis zu Ableitungen vierter Ordnung zu entwickeln und zu fordern, dass die Taylorentwicklungen benachbarter Gitterpunkte in der Mitte zwischen den Gitterpunkten übereinstimmen. Für ein System von n Gitterpunkten erhält man auf diese Weise $2n - 2$ Bedingungsgleichungen für die $2n$ unbekanntenen Ableitungen U''' und U'''' . Die beiden fehlenden Bedingungen erhält man durch die Stetigkeitsforderung der Taylor-Entwicklung der dritten Ableitung U''' an den Giterrändern. Damit sind U''' und U'''' vollständig durch U' und U'' bestimmt und das System der Flussgleichungen ist geschlossen.

Auf diese Weise erhält man ein System von $3n$ gekoppelten Flussgleichungen für U , U' und U'' . Da wir die Feldabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung vernachlässigen, wird die Flussgleichung für Z nur am Minimum Φ_0 ausgewertet, wodurch eine weitere Flussgleichung im System auftritt. Das Gesamtsystem von $3n + 1$ gekoppelten Flussgleichungen lösen wir mit einem Cash-Karp Runge-Kutta Algorithmus fünfter Ordnung mit adaptiver Schrittweite [44].

4.2 Startwerte und Evolution

Die folgenden Untersuchungen werden in der Phase spontan gebrochener chiraler Symmetrie im chiralen Limes durchgeführt, die Methode selbst ist jedoch nicht auf diesen Bereich beschränkt. Als Anfangsbedingungen zur Lösung der Flussgleichungen (3.49), (3.50) und (3.54), (3.55) mit dem oben beschriebenen Algorithmus verwenden wir eine Tree-Level Parametrisierung des effektiven Potentials an der Startskala $k = \Lambda$ tief im ultravioletten Bereich. Die Annahme dabei ist, dass das Tree-Level Potential

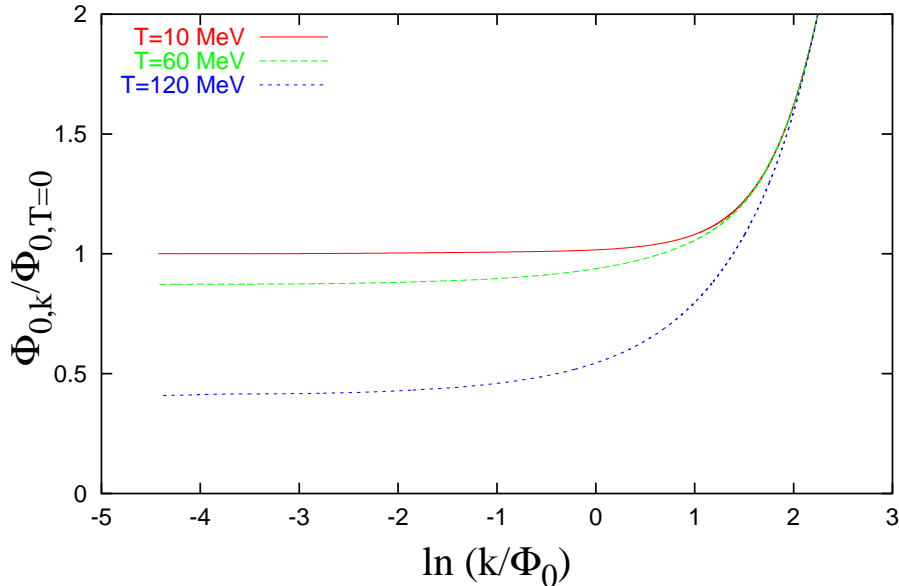


Abbildung 4.1: Evolution des Minimums des Potentials für $k \rightarrow 0$ bei drei verschiedenen Temperaturen ($N = 4$).

an dieser Skala Λ eine hinreichend gute effektive Beschreibung darstellt. Unter dieser Voraussetzung treten, neben der zu wählenden Wellenfunktionsrenormierung Z_Λ , nur zwei frei Parameter λ_Λ und $\Phi_{0,\Lambda}$ in den Anfangsbedingungen an der Startskala Λ auf. Diese Parameter werden so fixiert, dass wir bei verschwindender Temperatur im chiralen Limes für $k \rightarrow 0$ eine Pionzerfallskonstante von $f_\pi \sim 89$ MeV reproduzieren (vgl. (1.24)). Die Startwerte λ_Λ und $\Phi_{0,\Lambda}$ sind durch diese Bedingung jedoch nicht eindeutig bestimmt, es besteht eine gewisse Freiheit in der Wahl der Anfangsbedingungen, die weiter unten etwas genauer untersucht wird. Die Resultate dieses Abschnitts wurden beispielsweise mit den Startwerten $\Lambda = 800$ MeV, $\Phi_{0,\Lambda} = 140$ MeV, $\lambda_\Lambda = 49$ und $Z_\Lambda = 0.8$ gewonnen. Wir fixieren die Parameter der Anfangsbedingungen bei $T = 0$ und verwenden die so fixierten Parameter als Anfangsbedingungen für die Rechnungen bei endlichen Temperaturen. Im letzten Kapitel, im Zusammenhang mit der Diskussion der Schwellenfunktionen, wurde bereits gezeigt, dass diese Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit der Anfangsbedingungen in einem bestimmten, von Λ abhängigen Temperaturbereich gerechtfertigt ist. Wir haben numerisch überprüft, dass bei den hier verwendeten Werten von Λ diese Annahme für Temperaturen bis zum Phasenübergang berechtigt ist. Die berechneten Resultate sind, innerhalb vernünftiger Grenzen, unempfindlich gegenüber Änderungen des Ultraviolet-Abschneideparameters Λ .

In Abb. 4.1 ist die Evolution des Minimums des Potentials $\Phi_{0,k}$ in Einheiten des Endwerts dieser Evolution bei $T = 0$ ($\Phi_{0,T=0}$) in vier Dimensionen am Beispiel $N = 4$ für drei verschiedene Temperaturen dargestellt. Den Wert von $\Phi_{0,k}$ im Laufe der Evolution ermitteln wir durch lineare Interpolation zwischen den beiden Gitterpunkten, an denen es in der ersten Ableitung des effektiven Potentials U' zu einem Vorzeichenwechsel kommt. Für alle Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur T_c wird das Minimum des

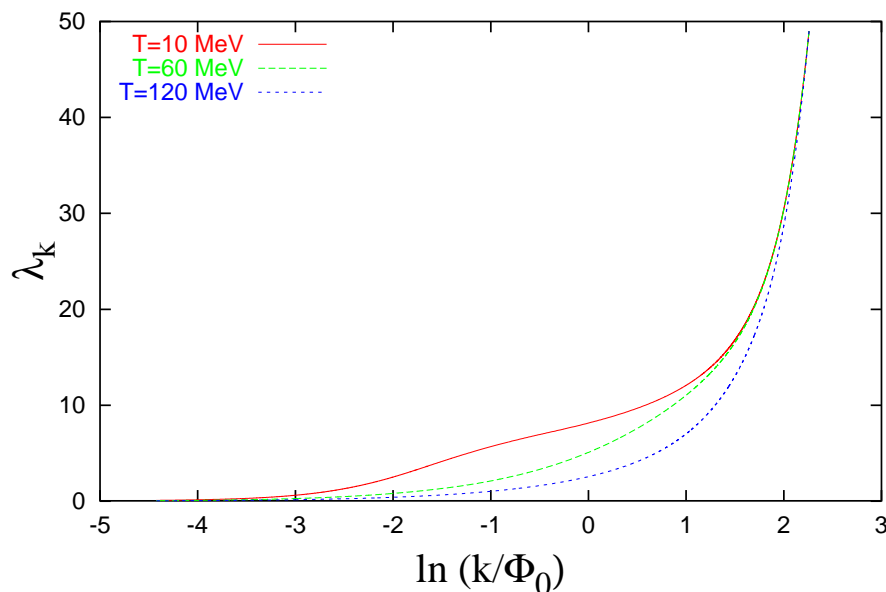


Abbildung 4.2: Evolution der quartischen Kopplung λ_k für $k \rightarrow 0$ bei drei verschiedenen Temperaturen ($N = 4$).

Potentials im Laufe der Evolution kleiner und nimmt schließlich bei kleinen Werten von k

einen konstanten Wert an, so dass wir dort die Evolution anhalten und den renormierten Vakuumerwartungswert Φ_0 ($\Phi_{0,k=0}$) extrahieren können (vgl. hierzu auch [45]). Dieser Wert ist der physikalische Ordnungsparameter für den chiralen Phasenübergang im $O(N)$ -Modell. Die quartische Kopplung λ_k , die in vier Dimensionen eine dimensionslose Größe ist, zeigt während der Evolution $k \rightarrow 0$ ein logarithmisches Laufen gegen null. Die quartische Kopplung λ_k ist während der Evolution durch den Wert der zweiten Ableitung des Potentials am Minimum $\Phi_{0,k}$ bestimmt. In Abb. 4.2 ist das logarithmische Laufen der quartischen Kopplung am Beispiel $N = 4$ illustriert. Die Ausbuchtung in der $T = 10$ MeV Kurve ist ein numerischer Artefakt, der auf den endlichen Gitterabstand zurückzuführen ist.

4.3 Das effektive Potential und der chirale Phasenübergang

Der Vakuumerwartungswert der Felder im $O(N)$ -Modell ist der Ordnungsparameter des chiralen Phasenübergangs. Er ist gegeben als das dimensionsbehaftete Minimum des vollen effektiven Potentials bezüglich der Felder $\Phi_{0,k \rightarrow 0}$, das wir hier einschließlich Wellenfunktionsrenormierungs-Korrekturen berechnen. In Abb. 4.1 ist die k -Evolution

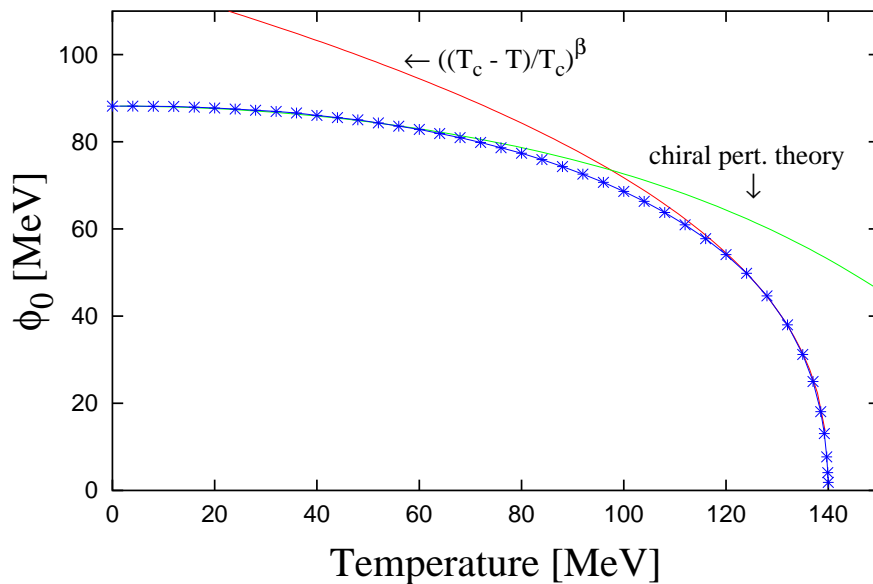


Abbildung 4.3: Temperaturabhängigkeit des Ordnungsparameters für das $O(4)$ -Modell im Vergleich mit einer Rechnung in chiraler Störungstheorie und dem Skalierungsverhalten an T_c .

des Minimums des Potentials für drei verschiedene Temperaturen dargestellt. Der Wert

des Ordnungsparameters an der jeweiligen Temperatur ist durch den Grenzwert der Evolution ($k \rightarrow 0$) gegeben, an dem das Potential in das volle effektive Potential übergeht. In Abb. 4.3 ist der Ordnungsparameter für den Fall $N = 4$ als Funktion der Temperatur aufgetragen. Das Verhalten des Ordnungsparameters darin signalisiert einen Phasenübergang zweiter Ordnung bei einer kritischen Temperatur von $T_c \approx 140$ MeV. Die kritische Temperatur ist keine universelle Größe und hängt daher von den gewählten Anfangsbedingungen ab. Es wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt angesprochen, dass man eine gewisse Freiheit in der Wahl dieser Anfangsbedingungen hat. Um die Abhängigkeit der gewonnenen Resultate von den Anfangsbedingungen zu überprüfen, haben wir die Anfangswerte an der UV-Skala in einem weiten Bereich variiert. Dabei zeigte sich nur eine schwache Abhängigkeit der kritischen Temperatur von den gewählten Anfangswerten. Die Form der Kurve, soweit es den gezeigten Vergleich mit der chiralen Störungstheorie und das Skalierungsverhalten angeht, wurde durch die Variation der Anfangswerte nicht beeinflusst. Für die in diesem Unterkapitel gezeigten Abbildungen wurden die Startwerte $\Lambda = 800$ MeV, $\Phi_{0,\Lambda} = 135$ MeV, $\lambda_\Lambda = 10$ und $Z_\lambda = 0.8$ verwendet.

Der Ordnungsparameter ist durch den Vakuumerwartungswert der Felder gegeben, im Quarkbild entspricht dieser Vakuumerwartungswert einem Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle$. Das Temperaturverhalten des Ordnungsparameters wird in Abb. 4.3 mit einer Rechnung in chiraler Störungstheorie für das Quarkkondensat [46] verglichen. Der zum Vergleich in Abb. 4.3 gezeigte Drei-Schleifen-Ausdruck aus der Entwicklung der chiralen Störungstheorie lautet:

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \langle \bar{q}q \rangle_0 \left[1 - \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{T^2}{12f_\pi^2} - \frac{N_f^2 - 1}{2N_f^2} \left(\frac{T^2}{12f_\pi^2} \right)^2 - N_f(N_f^2 - 1) \left(\frac{T^2}{12f_\pi^2} \right)^3 \ln \frac{\Lambda_q}{T} + \mathcal{O}(T^8) \right], \quad (4.1)$$

mit $\Lambda_q = 470 \pm 110$ MeV, daneben bezeichnet N_f die Anzahl der Quarkflavors, für den Fall $N = 4$ ist $N_f = 2$. Der Vergleich mit der chiralen Störungstheorie zeigt perfekte Übereinstimmung bis zu einer Temperatur von etwa $T \approx 45$ MeV, mit zunehmender Temperatur werden kleine Abweichungen sichtbar, die für höhere Temperaturen größer werden. Solche Abweichungen erwartet man, da die gezeigte Rechnung der chiralen Störungstheorie nur für kleine Temperaturen Sinn macht. In der chiralen Störungstheorie stammt die Temperaturabhängigkeit von den Schleifen-Diagrammen und stellt Korrekturen zum Tree-Level Beitrag $\langle \bar{q}q \rangle_0$ dar, der unabhängig von der Temperatur ist.

Für Temperaturen in der Nähe von T_c findet man in Abb. 4.3 außerdem einen Vergleich der Temperaturabhängigkeit des Ordnungsparameters mit der Widom-Skalierungsfunktion. Tatsächlich ist es möglich, den Wert des kritischen Exponenten β numerisch zu bestimmen, indem man das Potenzverhalten des Ordnungsparameters in der Nähe der kritischen Temperatur analysiert. Dazu tragen wir $\ln(\phi_0)$ gegen den Logarithmus der reduzierten Temperatur $\ln(T_c - T)/T_c$ auf in Abb. 4.4 auf. Die Datenpunkte liegen auf einer Geraden, daher skaliert der Ordnungsparameter in diesem Bereich wie

$$\phi_0 \sim \left| \frac{T_c - T}{T_c} \right|^\beta, \quad (4.2)$$

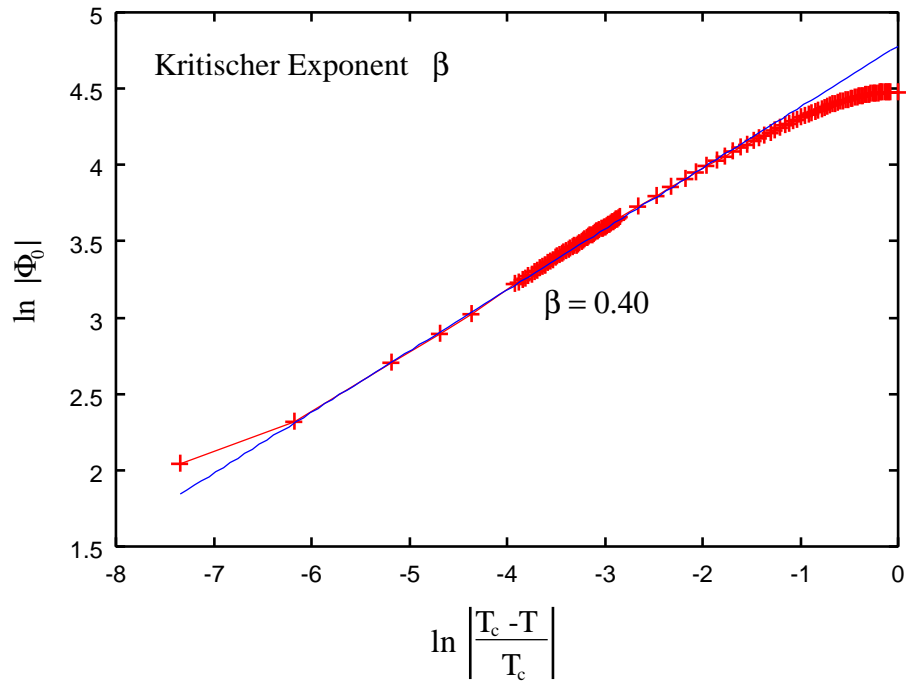


Abbildung 4.4: Bestimmung des kritischen Exponenten β für $N = 4$ aus dem Temperaturverlauf des Ordnungsparameters ϕ_0 .

mit einem kritischen Exponenten $\beta \approx 0.40$. Das universelle kritische Verhalten am Phasenübergang wird im nächsten Kapitel detailliert untersucht, dort findet man auch einen Vergleich mit den Ergebnissen aus anderen Zugängen.

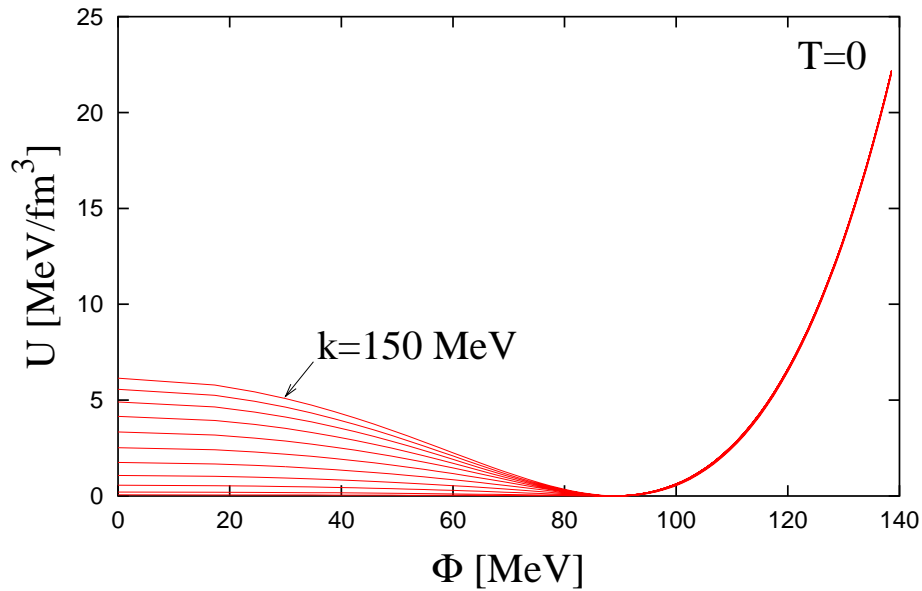


Abbildung 4.5: Evolution des dimensionsbehafteten Potentials für $k \rightarrow 0$ bei $T = 0$.

Die Untersuchungen dieses Kapitels sind am Beispiel $N = 4$ dargestellt. Man findet jedoch für alle N das prinzipiell gleiche Verhalten des Ordnungsparameters, mit einem Phasenübergang zweiter Ordnung und dem Skalierungsverhalten an der kritischen Temperatur, wobei die kritische Temperatur und der Exponent β vom gewählten N abhängen. Bevor im nächsten Kapitel das universelle kritische Verhalten näher untersucht wird, betrachten wir das effektive Potential und die Evolution hin zum effektiven Potential etwas genauer. Nach (2.8) ist die effektive Wirkung mit dem erzeugenden Funktional der verbundenen n -Teilchen-Korrelationsfunktionen $W[\vec{J}]$ über eine Legendre-Transformation verknüpft. Daraus folgt mit (2.21) wiederum, dass das effektive Potential hier eine konvexe Funktion sein muss. Thermodynamisch entspricht das Potential bei $k = 0$ der freien Energiedichte, die aufgrund der Konvexität eine flache Funktion um den Ursprung sein sollte. Die Berechnungen für das volle Potential in dieser Arbeit werden nicht durch polynomiale Entwicklungen eingeschränkt. Daher kennen wir, im Gegensatz zu früheren Arbeiten [36], [38], das gesamte Potential als Funktion des Feldes $\vec{\Phi}$. Das versetzt uns in die Lage, das Krümmungsverhalten des Potentials auch am Ursprung zu untersuchen. In Abb. 4.5 ist ein

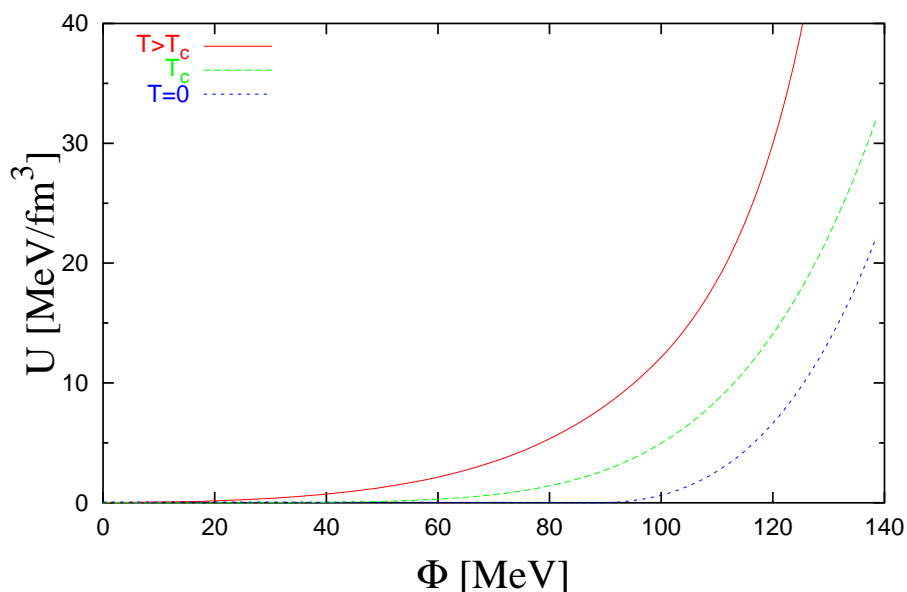


Abbildung 4.6: Das dimensionsbehaftete Potential am Ende der k -Evolution für drei verschiedene Temperaturen.

Ausschnitt der Evolution des Potentials von $k = 150$ MeV bis $k \rightarrow 0$ bei verschwindender Temperatur abgebildet. Das Potential hat in der Phase spontan gebrochener Symmetrie an der UV-Skala die typische “Mexican Hat”-Form (vgl. auch Abb. 1.1). Diese Form besitzt das Potential während der gesamten Evolution, erst im Grenzfall $k = 0$ nimmt das Potential eine konvexe Gestalt an. Numerisch müssen wir die Evolution bei einem kleinen, jedoch endlichen k -Wert anhalten, wodurch die konvexe Form nicht ganz erreicht wird. Die Evolution des Potentials hin zur Maxwell-Konstruktion findet man auch in [47]. In der symmetrischen Phase, oberhalb von T_c , besitzt das Potential bereits an der UV-Skala nur ein Extremum am Ursprung. Aus diesem Grund ist das Potential in der symmetrischen Phase während der gesamten Evolution eine konvexe Funktion. In Abb. 4.6 ist das

Potential am Ende der Evolution für drei verschiedene Temperaturen $T = 0$, $T = T_c$ und $T > T_c$ gezeigt. Auch das in dieser Abbildung gezeigte Verhalten stimmt mit der Interpretation eines Phasenübergangs zweiter Ordnung überein. Der Wert, an dem das Potential sein Minimum annimmt, geht mit steigender Temperatur kontinuierlich gegen Null. An T_c schließlich und für Temperaturen oberhalb von T_c verschwindet der Ordnungsparameter, wie dies in Abb. 4.3 zu sehen ist.

Kapitel 5

Das kritische Verhalten am Phasenübergang

In diesem Kapitel wird das universelle kritische Verhalten des $O(N)$ -Modells am Phasenübergang untersucht. An der kritischen Temperatur ist die Evolution des Systems $(D - 1)$ dimensional. Aufgrund dieses Phänomens der dimensional Reduktion, das bereits in Kapitel 3 im Zusammenhang mit den Schwellenfunktionen diskutiert wurde (siehe auch [42]), lässt sich das Verhalten des Systems am Phasenübergang durch $(D - 1)$ dimensionale $(T = 0)$ -Flussgleichungen beschreiben.

5.1 Reskalierte $(T = 0)$ -Flussgleichungen

Für die Untersuchung des kritischen Bereichs ist es vorteilhaft mit reskalierten Flussgleichungen zu arbeiten, da in diesem Fall die Skala k nicht länger explizit in den Flussgleichungen auftritt. Nur geeignet reskalierte Größen zeigen ein Skalierungsverhalten am Phasenübergang. Um die dimensionsbehafteten Flussgleichungen (3.49) und (3.50) zu reskalieren, ermitteln wir zunächst die kanonische Dimensionen der einzelnen Größen. Dabei bezeichnet $d = D - 1$ im Folgenden die reduzierte Dimension des Systems an der kritischen Temperatur.

5.1.1 Kanonische Dimension und Reskalierung

Ziel des Reskalierens ist die Formulierung des Modells durch dimensionslose Größen. Dabei werden die ursprünglichen, dimensionsbehafteten Größen durch Multiplikation mit geeigneten Potenzen der Impulsskala k in dimensionslose Größen überführt. Im System der so reskalierten Flussgleichungen übernimmt die dimensionslose Größe

$$t = \ln \left(\frac{k}{\Lambda} \right) \tag{5.1}$$

die Rolle der Skala k , womit

$$k \frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial \ln \left(\frac{k}{\Lambda} \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2}$$

gilt. Da auf diese Weise im System der dimensionslosen Flussgleichungen die Skala k nicht mehr explizit auftritt, tritt auch die Startskala Λ nicht mehr explizit auf. Die Evolution beginnt bei $t = 0$ und läuft gegen $t = -\infty$. Zur Ermittlung der kanonischen Dimension des Felds $\vec{\Phi}$ und des Potentials U gehen wir von der Lagrangedichte aus. Der Ausdruck $\int d^d x \mathcal{L}$ stellt eine dimensionslose Größe dar. Da der Ort x umgekehrt proportional zum Impuls k ist, gilt für die Dimension der Lagrangedichte:

$$[\mathcal{L}] = [k]^d , \quad (5.3)$$

wobei hier und im Folgenden die eckigen Klammern die kanonische Dimension der entsprechenden Größen bezeichnet. Mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U , \quad (5.4)$$

folgt somit für die kanonische Dimension des Potentials

$$[U] = [k]^d . \quad (5.5)$$

Für die kanonische Dimension des Felds ergibt sich

$$[\vec{\Phi}^2] = [k]^{d-2} . \quad (5.6)$$

Aus der Bestimmung der kanonischen Dimension ergeben sich die Definitionen für die dimensionslosen Größen, die im Folgenden mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden. Das dimensionslose Feld $\vec{\phi}$ definieren wir als

$$\vec{\phi}^2 := k^{-(d-2+\eta)} \vec{\Phi}^2 , \quad (5.7)$$

worin die anomale Dimension

$$\eta = -\frac{\partial}{\partial t} \ln Z_k \quad (5.8)$$

eingeführt wurde. Die anomale Dimension ist über diese Beziehung mit der Wellenfunktionsrenormierung verknüpft. Durch Vergleich mit der kanonischen Dimension des Felds (5.6) erkennt man, wie η die kanonische Dimension des Felds modifiziert, woher der Name anomale Dimension stammt. Wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, gibt es im $O(N)$ -Modell im Allgemeinen zwei anomale Dimensionen, eine für die radiale Mode und eine für die Goldstone-Bosonen. Da wir jedoch die Näherung einer einheitlichen Wellenfunktionsrenormierung machen, tritt auch nur eine anomale Dimension η auf. Insbesondere für die Untersuchung des kritischen Verhaltens an T_c ist dies eine sehr gute Näherung, da an der kritischen Temperatur die beiden Wellenfunktionsrenormierungen und damit die beiden anomalen Dimensionen entarten. Neben dem Feld reskalieren wir das Potential gemäß (5.5) zu

$$u(\phi^2) := k^{-d} U(\Phi^2) . \quad (5.9)$$

Die in der Flussgleichung ebenfalls auftretenden Ableitungen des Potentials nach ϕ^2 , u' und u'' , ergeben sich aus (5.9) zu

$$u'(\phi^2) := k^{-2+\eta}U'(\Phi^2) \quad (5.10)$$

$$u''(\phi^2) := k^{d-4+2\eta}U''(\Phi^2) \quad (5.11)$$

Für die reskalierte quartische Kopplung $\tilde{\lambda}$, die durch die zweite Ableitung des Potential am Minimum gegeben ist, folgt damit direkt

$$\tilde{\lambda} = k^{d-4+2\eta}\lambda . \quad (5.12)$$

Da im Weiteren nur reskalierte Größen betrachtet werden, bezeichne λ im Folgenden die reskalierte quartische Kopplung.

Aus den Flussgleichungen (3.49) und (3.50) für $T = 0$ erhält man die folgenden dimensionslosen, reskalierten Flussgleichungen in d Dimensionen, indem man die dimensionsbehafteten Größen gemäß den obigen Definitionen durch die dimensionslosen Größen ersetzt. Daraus ergibt sich für das Potential

$$\partial_t u(\phi^2) = -du + (d - 2 + \eta)\phi^2 u' + \frac{S_d}{d} \left[\frac{1}{1 + 2u' + 4\phi^2 u''} + \frac{N - 1}{1 + 2u'} \right] \quad (5.13)$$

und für die Wellenfunktionsrenormierung

$$-\frac{1}{Z}\partial_t Z = \frac{2S_d}{\phi^2 d} \left[1 + \frac{1}{(1 + 4\phi^2 u'')^2} + \frac{1}{2\phi^2 u''} \left(\frac{1}{1 + 4\phi^2 u''} - 1 \right) \right] \Big|_{\phi=\phi_0} . \quad (5.14)$$

Diese Gleichungen sind in skalenunabhängiger Form, die Skala k tritt nicht länger explizit in den Flussgleichungen auf. Aufgrund des Phänomens der dimensional Reduktion geht das ursprünglich vierdimensionale Verhalten des Systems am Phasenübergang in ein effektiv dreidimensionales Verhalten für verschwindende Temperaturen über. Daher benötigt man die temperaturabhängigen Flussgleichungen zur Beschreibung des kritischen Verhaltens am Phasenübergang nicht, sondern nur die obigen Flussgleichungen für verschwindende Temperaturen in drei Dimensionen, ausgedrückt durch dimensionslose Größen.

5.2 Die Skalierungslösung

Ein Phasenübergang zweiter Ordnung ist mit einem Fixpunkt der Renormierungsgruppentransformation im Infraroten verbunden. Daher ist die Physik in der Nähe der Phasengrenze skalenunabhängig und das kritische Verhalten lässt sich durch eine skalenunabhängige, sogenannte Skalierungslösung beschreiben.

Wir lösen das System der reskalierten Flussgleichungen auf die gleiche, in Abschnitt 4.1 beschriebene Weise wie die dimensionsbehafteten Flussgleichungen, durch Diskretisieren des dimensionslosen Felds auf einem Gitter. Dazu verwenden wir für beliebige N die

gleichen Startwerte der Evolution bei $t = 0$. Wir wählen λ willkürlich zu $\lambda = 0.5$ und justieren dann jeweils $\phi_0^2|_{t=0}$ so, dass wir möglichst nahe an die t -unabhängige Lösung der Flussgleichungen, die gesuchte Skalierungslösung, herankommen.

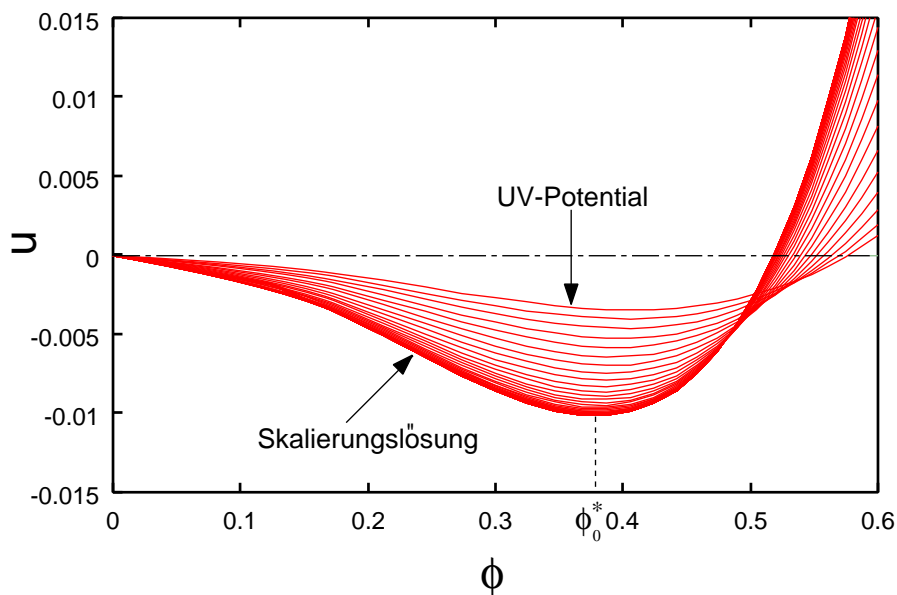


Abbildung 5.1: Evolution des dreidimensionalen reskalierten Potentials gegen die Skalierungslösung für den Fall $N = 4$.

In Abb. 5.1 ist die Evolution des dreidimensionalen reskalierten Potentials am Beispiel $N = 4$ zu sehen. Darin wurde Startwert für $\phi_0^2|_{t=0}$ so feinjustiert, dass die Evolution in etwa

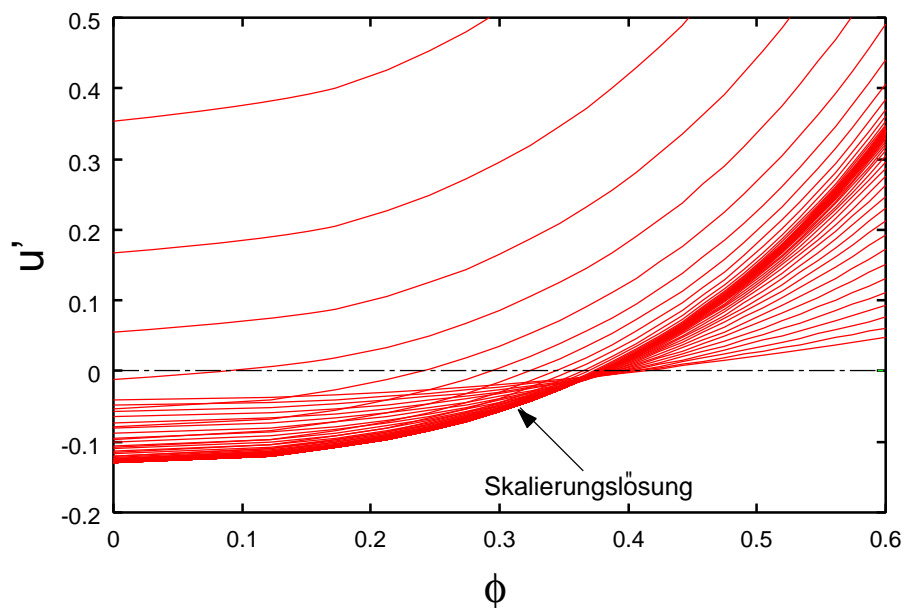


Abbildung 5.2: Evolution der Ableitung des dreidimensionalen reskalierten Potentials nach ϕ^2 gegen die Skalierungslösung für den Fall $N = 4$.

am kritischen Wert $\phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ beginnt, der exakt auf die Skalierungslösung führt, den wir aber nur näherungsweise numerisch bestimmen können. Die Evolution beginnt bei $t = 0$ mit der in der Abbildung als UV-Potential bezeichneten Kurve und strebt dann für $t \rightarrow -\infty$ gegen die Skalierungslösung, in deren Bereich wir die Evolution angehalten haben. In Abb. 5.2 findet man die für die gleichen Startwerte berechnete Evolution der Ableitung des dreidimensionalen reskalierten Potentials nach ϕ^2 . In diesem Fall wurde die Evolution jedoch nicht im Bereich der Skalierungslösung angehalten. Auf der Skalierungslösung verschwinden die t -Ableitungen des Potentials und der Ableitungen des Potentials nach ϕ^2 ,

$$\frac{\partial}{\partial t}u = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}u' = 0 \quad , \quad \dots \quad (5.15)$$

Man erkennt in Abb. 5.2 wie das System, nachdem es eine gewisse “Fluss-Zeit” auf der Skalierungslösung verbracht hat, von dieser wieder abweicht. Die Ursache für dieses Abweichen liegt darin, dass es nicht möglich ist den kritischen Startwert $\phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ exakt einzustellen. Es ist jedoch durch entsprechende Feineinstellung der Parameter möglich, die Dauer der Evolution, die das System auf der Skalierungslösung verbringt, beliebig einzustellen. Dies ist in Abb. 5.3 demonstriert. Darin ist die Evolution von ϕ_0^2 als

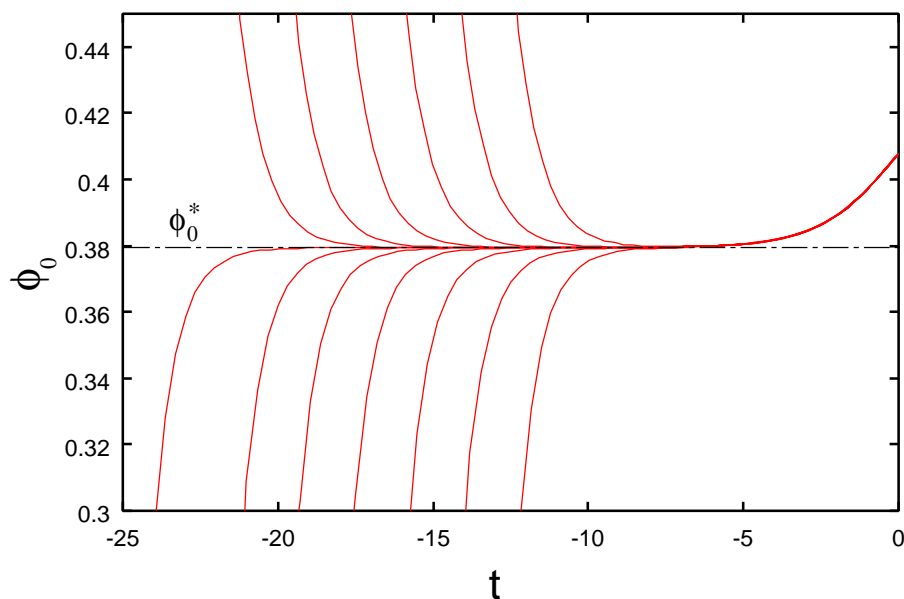


Abbildung 5.3: Evolution des dimensionslosen Minimums ϕ_0^2 als Funktion der “Fluss-Zeit” t für $N = 4$ und unterschiedliche Startwerte bei $t = 0$ in der Nähe des kritischen Werts $\phi_0^2|_{t=0}^{cr}$.

Funktion der “Fluss-Zeit” $t = \ln(k/\Lambda)$ für verschiedene Startwerte $\phi_0^2|_{t=0}$ aufgetragen. Die Evolution in den Abb. 5.1 und 5.2 entspricht einer der nach unten abknickenden Kurven in Abb. 5.3. Je dichter der gewählte Startwert $\phi_0^2|_{t=0}$ am kritischen Wert $\phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ liegt, desto länger verweilt das System auf der Skalierungslösung, die in der Abbildung als waagerechte Linie eingezeichnet ist, bevor es davon abweicht. Die Richtung der Abweichung von der Skalierungslösung hängt von der Wahl des Startwerts $\phi_0^2|_{t=0}$ an

der UV-Skala $t = 0$ ab. Ist der Wert etwas größer als der kritische Wert, so bleibt das System während der gesamten Evolution in der gebrochenen Phase ($\phi_0 \neq 0$), und die Kurven knicken nach oben ab, wenn sie von der Skalierungslösung abweichen. Ist der Wert etwas kleiner als der kritische Wert, so knicken die Kurven nach unten ab, und das System evolviert in die symmetrische Phase ($\phi_0 = 0$). Das divergierende Verhalten des dimensionslosen Minimums ϕ_0^2 in der gebrochenen Phase ist auf das Reskalieren zurückzuführen. Das dimensionsbehaftete Minimum evolviert in der gebrochenen Phase für $k \rightarrow 0$ gegen einen konstanten Wert (siehe z.B. Abb. 4.1). Das divergierende Verhalten ist unter diesen Umständen direkt auf (5.7) zurückzuführen.

Neben dem dimensionslosen Minimum zeigen auch die dimensionslose quartische Kopplung λ und die anomale Dimension η ein Skalierungsverhalten an der kritischen Temperatur, dies ist in Abb. 5.4 dargestellt. Alle drei in der Abbildung gezeigten Größen

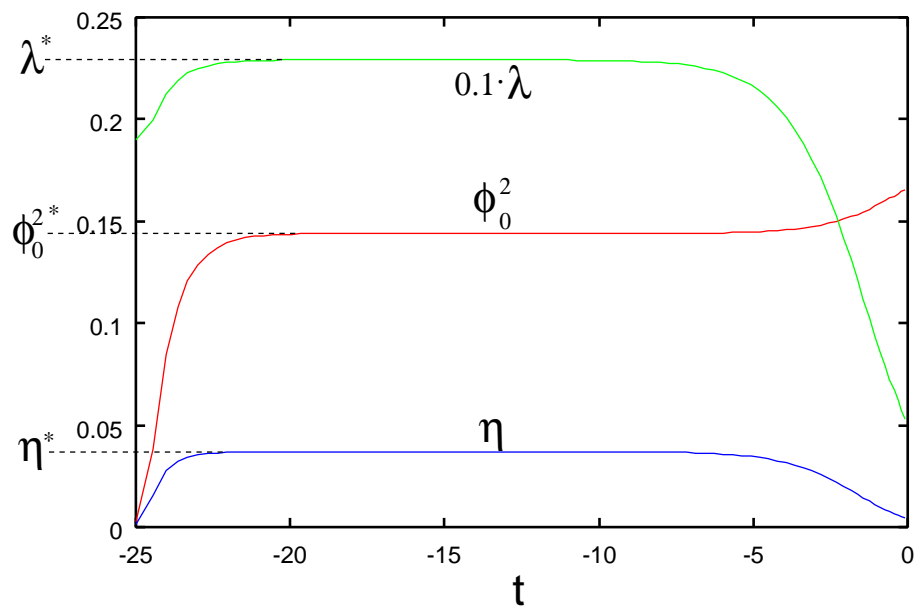


Abbildung 5.4: Evolution des dimensionslosen Minimums ϕ_0^2 , der reskalierten, dimensionslosen Kopplung λ und der anomalen Dimension η als Funktion der “Fluss-Zeit” t für den Fall $N = 4$.

erreichen die Skalierungslösung bei $t \approx -8$ und beginnen bei $t \approx -20$ wieder von ihr abzuweichen (vgl. Abb. 5.3). Um die Skalierungslösung mit dieser Genauigkeit zu erreichen, ist die Kenntnis der Startwerte bei $t = 0$ auf eine Genauigkeit von 10^{-13} erforderlich. Im Bereich der Skalierungslösung nehmen die Größen die konstanten Werte λ^* , ϕ_0^{2*} und η^* an, die ebenfalls in der Grafik eingezeichnet sind. Könnte man den Wert $\phi_0^2|_{t=0}$ als Startwert exakt einstellen, so würden λ , ϕ_0^2 und η , sobald sie einmal die Skalierungslösung erreicht haben, während der gesamten weiteren Evolution bis $t = -\infty$ nicht mehr von den Werten λ^* , ϕ_0^{2*} und η^* abweichen.

5.3 Wilson-Fisher-Fixpunkt

In Abschnitt 2.1, im Zusammenhang mit der allgemeinen Beschreibung der Renormierungsgruppentransformation, wurde bereits die Möglichkeit des Auftretens eines Fixpunkts in der Renormierungsgruppentransformation diskutiert. Überträgt man Gl. (2.3) auf das reskalierte Potential, so lautet die Bedingung für das Auftreten eines Fixpunkts der Transformation

$$R(u^*) = u^* , \quad (5.16)$$

worin R wiederum die Renormierungsgruppentransformation bezeichnet und u^* das reskalierte Potential am Fixpunkt. Das Auftreten der Skalierungslösung in der Evolution des Potentials entspricht genau dieser Situation. Ist die Skalierungslösung erreicht, so ist das bis dahin evolvierte reskalierte Potential u^* unter weiteren Renormierungsgruppentransformationen invariant. Die Skalierungslösung des reskalierten Potential ist die Realisierung eines Fixpunkts der Transformation.

Generell unterscheidet man nach ihren Eigenschaften attraktive, repulsive und gemischte Fixpunkte. Wie der Name schon andeutet, ziehen attraktive Fixpunkte alle Trajektorien im Raum der Kopplungen in ihrer Nähe an. Entsprechend stoßen repulsive Fixpunkte alle Trajektorien in ihrer Nähe ab. Alle wirklich interessanten Fixpunkte gehören jedoch in die dritte Kategorie der gemischten Fixpunkte. Gemischte Fixpunkte sind in bestimmte Richtungen attraktiv und in die anderen repulsiv. Dementsprechend unterscheidet man die Kopplungen in irrelevante und relevante Kopplungen. In Richtung der relevanten Kopplungen ist der gemischte Fixpunkt repulsiv und in Richtung der irrelevanten Kopplungen ist er attraktiv. Den Grenzfall von Kopplungen, die weder relevant noch irrelevant sind, bezeichnet man auch als marginale Kopplungen.

Das $O(N)$ -Modell in drei Dimensionen weist neben einem attraktiven Hoch-Temperatur-Fixpunkt und einem attraktiven Nieder-Temperatur-Fixpunkt einen solchen gemischten Fixpunkt auf. Der Bereich um diesen, als Wilson-Fisher-Fixpunkt [48] bezeichneten gemischten Fixpunkt ist in Abb. 5.5 dargestellt. In der Grafik sind die dimensionslosen Größen ϕ_0^2 und λ für das Beispiel $N = 4$ gegeneinander aufgetragen. Die einzelnen Kurven darin stellen die Trajektorien der Evolution des Systems von verschiedenen Startwerten aus dar. Die Pfeile in der Abbildung deuten die Richtung der Evolution bezüglich der Skala t gegen minus unendlich an.

Universalitätsklassenargumenten zur Folge gibt es im $O(N)$ -Modell im Allgemeinen zwei relevante physikalische Parameter, die entsprechend feinjustiert werden müssen, damit das System den gemischten Fixpunkt erreicht. Im ferromagnetischen Spin-Ising-Modell mit diskreter Z_2 -Symmetrie, dem das $O(1)$ -Modell entspricht, sind die relevanten Parameter die Temperatur und das externe magnetische Feld. Im Fall des chiralen Limes, den wir in dieser Arbeit untersuchen, treten jedoch keine externen Quellen oder Massen auf, daher bleibt nur ein relevanter Parameter, die Temperatur oder ein temperaturartiger Parameter übrig. Im vorliegenden Fall des dimensional reduzierten Systems, das wir durch Flussgleichungen für verschwindende Temperatur modellieren, übernimmt ϕ_0^2 die Rolle der Temperatur. Die temperaturartige Variable wird in der Literatur auch als thermische Skalierungsvariable bezeichnet.

Man erkennt an Abb. 5.5, dass ϕ_0^2 die relevante Variable ist, da wiederholte

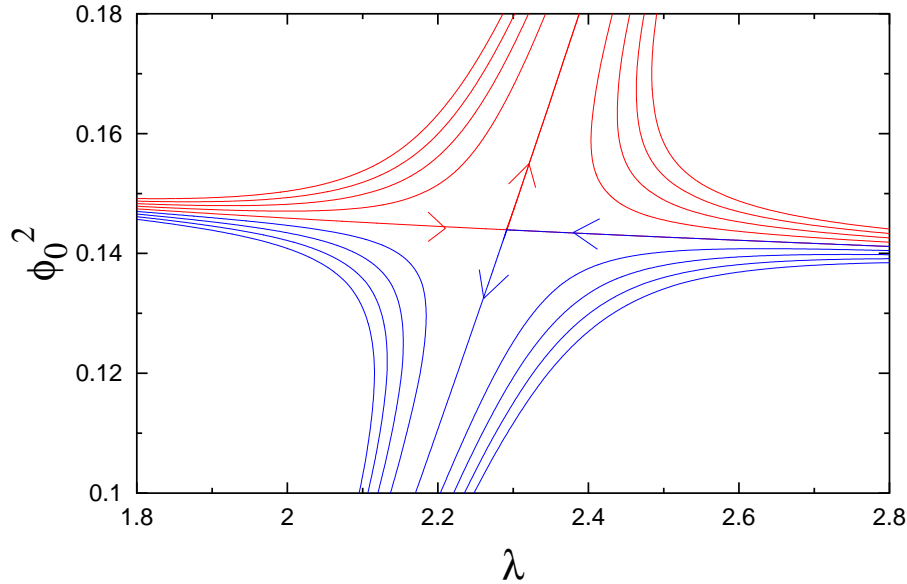


Abbildung 5.5: Der gemischte Wilson-Fisher-Fixpunkt für $N = 4$.

Renormierungsgruppen-Iterationen ϕ_0^2 je nach Startwert zu großen oder kleinen Werten hin vom Fixpunkt-Wert entfernen. Der Wilson-Fisher-Fixpunkt ist in ϕ_0^2 -Richtung repulsiv. Auf der anderen Seite evolviert λ für ausreichend nahe am Fixpunkt liegende Startwerte in Richtung des Fixpunkts, daher ist λ die irrelevante Variable und der Fixpunkt in λ -Richtung attraktiv. Es gibt eine eindimensionale Kurve von Startwerten, die sogenannte kritische Oberfläche, von denen aus die Evolution exakt in den Fixpunkt führt. Man sieht in Abb. 5.5 sehr schön, wie die kritische Oberfläche die Phase spontan gebrochener und restaurierter Symmetrie separiert. Für Startwerte mit $\phi_0^2|_{t=0} > \phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ und endlichem λ , d.h. oberhalb der kritischen Oberfläche, findet die gesamte Evolution des System in der oberen Hemisphäre von Abb. 5.5 statt und das System wird letztlich zum Nieder-Temperatur-Fixpunkt hin evolviere. Das System besitzt in diesem Bereich immer einen endlichen Wert von ϕ_0 und befindet sich damit in der Phase spontan gebrochener Symmetrie. Andererseits spielt sich die Evolution bei Wahl von Startwerten unterhalb der kritischen Oberfläche vollständig in der unteren Hemisphäre ab und strebt letztlich zum Hoch-Temperatur-Fixpunkt. In diesem Bereich evolviert das System für alle Startwerte gegen $\phi_0 = 0$ und endet damit immer in der symmetrischen Phase. Nur für Startwerte exakt auf der kritischen Oberfläche, für die $\phi_0^2|_{t=0} = \phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ gilt, führt die Trajektorie in den gemischten Fixpunkt und erreicht diesen für $t \rightarrow -\infty$.

Die Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts sind gerade durch ϕ_0^{2*} und λ^* gegeben, die Werte, die die Kopplungen an der Skalierungslösung annehmen (vgl. Abb. 5.4). Bereits im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass das System, nach dem es eine gewisse, beliebig einstellbare “Fluss-Zeit” auf der Skalierungslösung und damit in der Nähe des Fixpunkts verbracht hat, wieder davon abweicht, wie dies auch in Abb. 5.5 zu sehen ist. Sobald das System wieder von der Skalierungslösung abweicht, ist die Form des Potential unabhängig von der Wahl der Anfangswerte für die klassische Theorie an der UV-Skala. Diese Eigenschaft spiegelt sich in dem universellen kritischen Verhalten am Phasenübergang

zweiter Ordnung wieder. Hier wird auch die Vorhersagekraft dieses nichtperturbativen Zugangs deutlich. Während der Evolution in der Nähe der Skalierungslösung verliert das System die Erinnerung an die Startwerte. Die effektiv dreidimensionale Dynamik am Phasenübergang ist damit vollständig durch den Wilson-Fisher-Fixpunkt bestimmt und daher unabhängig von den Details der betrachteten mikroskopischen Wechselwirkung bei kleinen Abständen. Neben dem Wilson-Fisher-Fixpunkt und den angesprochenen Hoch- und Nieder-Temperatur-Fixpunkten gibt es im $O(N)$ -Modell einen weiteren Fixpunkt, den Gauß'schen Fixpunkt, der im nächsten Abschnitt, im Zusammenhang mit den Beta-Funktionen, näher diskutiert wird.

5.4 Beta-Funktionen und Fixpunkte

Die Koordinaten eines Fixpunkts sind mit den Nullstellen der zugehörigen Beta-Funktionen verknüpft. Für den Wilson-Fisher-Fixpunkt sind dies die Beta-Funktionen $\beta_{\phi_0^2}$ und β_λ .

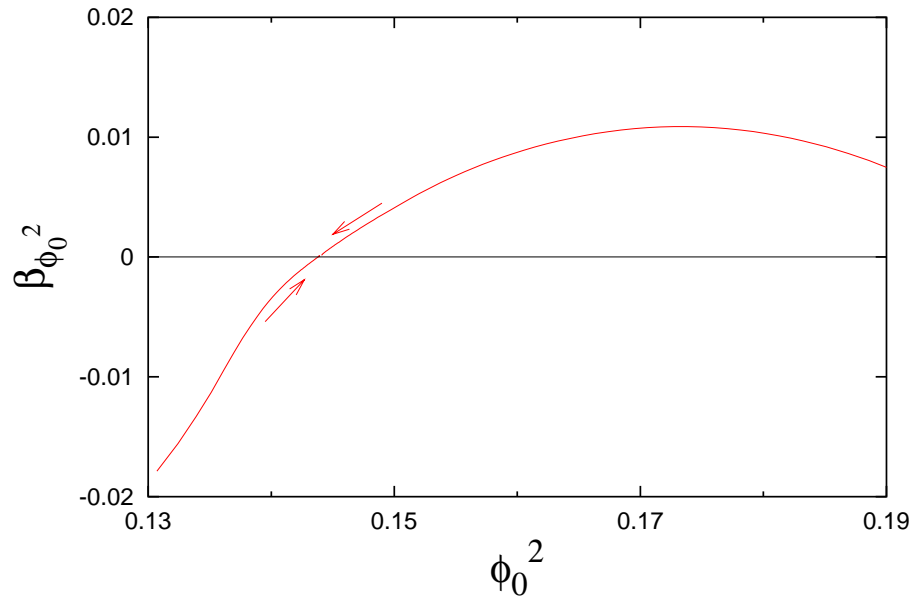


Abbildung 5.6: Die Beta-Funktion $\beta_{\phi_0^2}(\phi_0^2)$ für das $O(4)$ -Modell. Die Pfeile deuten die Richtung der Evolution der Skala $t \rightarrow -\infty$ an.

Aus der Definition der Beta-Funktionen ergibt sich für $\beta_{\phi_0^2}$:

$$\begin{aligned}
k \frac{d}{dk} u' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} &= 0 = k \frac{\partial u'}{\partial \phi^2} \frac{d\phi^2}{dk} \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} + k \frac{\partial u'}{\partial k} \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} \\
&\Rightarrow k u'' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} \frac{d\phi_0^2}{dk} = -k \frac{\partial u'}{\partial k} \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} \\
&\Rightarrow \beta_{\phi_0^2} = -k \frac{1}{u''} \frac{\partial}{\partial k} u' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

In Abb. 5.6 ist die Beta-Funktion $\beta_{\phi_0^2}$ für $N = 4$ als Funktion von ϕ_0^2 dargestellt. Sie hat eine Nullstelle bei $\phi_0^{2*} = 0.144$, die mit der ϕ_0^2 -Koordinate des Wilson-Fisher-Fixpunkts für $N = 4$ korrespondiert. Aus der Definition für β_λ gewinnen wir, unter Verwendung der Beziehung (5.17), den folgenden Ausdruck für die Beta-Funktion der reskalierten quartischen Kopplung:

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda &= k \frac{d}{dk} \lambda \\
&= 2k \frac{\partial}{\partial k} u'' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} + 2k u''' \frac{d\phi^2}{dk} \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} \\
&= 2k \frac{\partial}{\partial k} u'' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} + 2u''' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} \beta_{\phi_0^2} ,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

wobei außerdem

$$\lambda = 2u'' \Big|_{\phi_0^2}$$

ausgenutzt wurde. In Abb. 5.7 ist die Beta-Funktion β_λ als Funktion von λ wiederum für den Fall $N = 4$ abgebildet. In der RG-Rechnung findet man zwei Nullstellen, eine bei $\lambda^* = 0$ und eine bei $\lambda^* = 2.28$. Die Nullstelle bei $\lambda^* = 2.28$ korrespondiert mit der λ -Koordinate des Wilson-Fisher-Fixpunkts für $N = 4$ (vgl. Abb. 5.5). Die Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts und die entsprechenden Nullstellen der zugehörigen Beta-Funktionen hängen von der expliziten Form der RG-Flussgleichungen und damit insbesondere von der Wahl der Heat-Kernel-Abschneidefunktion f_k ab. Physikalische Resultate, wie z.B. die kritischen Exponenten, die im nächsten Abschnitt berechnet werden, dürfen jedoch davon nicht abhängen. Eine Diskussion dieser Thematik findet sich weiter unten in diesem Kapitel.

Die RG-Ergebnisse für die Beta-Funktionen in den beiden obigen Grafiken gewinnt man numerisch, indem man in jedem Schritt der Evolution der Skala t die Ausdrücke (5.17) und (5.18) auswertet. Durch die Evolution der Skala t ist es möglich einen Richtungssinn zu definieren und den abgebildeten Kurven zuweisen. Wir starten die Evolution immer bei $t = 0$ im Ultraviolett und lassen das System dann gegen $t = -\infty$ ins Infrarot evolviere. Daher ist es naheliegend, den Richtungssinn der Kurven und Trajektorien so zu definieren, dass sie vom Ultraviolett ins Infrarot führen. Die so definierte Richtung wird jeweils durch Pfeile in den Abbildungen angedeutet.

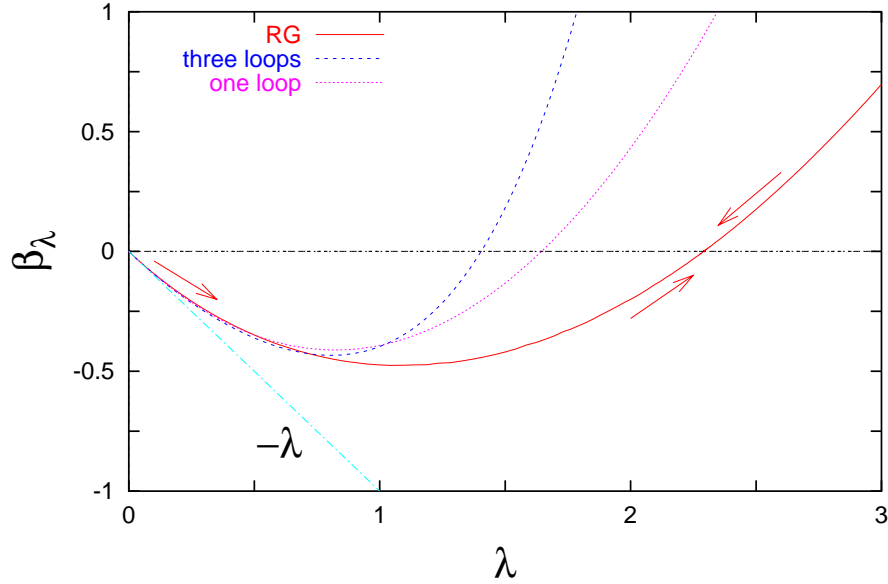


Abbildung 5.7: Die Beta-Funktion $\beta_\lambda(\lambda)$ für das $O(4)$ -Modell. Das Ergebnis der RG-Rechnung wird mit einer Ein- und Drei-Schleifen ϵ -Entwicklung für drei Dimensionen verglichen. Die Pfeile deuten die Richtung der Evolution der Skala $t \rightarrow -\infty$ im RG-Ergebnis an.

Universelle Größen können störungstheoretisch beispielsweise durch eine ϵ -Entwicklung [51] berechnet werden, wobei der Parameter ϵ über $\epsilon = 4 - d$ mit der Dimension des betrachteten Systems verknüpft ist. In Abb. 5.7 wird unser numerisch ermitteltes Resultat der RG-Rechnung für die Beta-Funktion β_λ mit dem Ergebnis einer ϵ -Entwicklung für verschiedene Ordnungen verglichen. Die ϵ -Entwicklung für ein $O(N)$ -Modell bis zur Drei-Schleifen Ordnung [50], [49] ist für $\epsilon = 1$ in drei Dimensionen durch

$$\beta_\lambda = -g + \frac{(N+8)}{6}g^2 - \frac{(3N+14)}{12}g^3 + \frac{33N^2 + 922N + 2960 + 96(5N+22)\zeta(3)}{12^3}g^4 + O(g^5) \quad (5.19)$$

gegeben, wobei $\zeta(3) = 1.202057$ und die Abkürzung

$$g = \frac{12\lambda}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

verwendet wurden. Die Beta-Funktion β_λ selbst stellt in ihrer Gesamtheit keine universelle Größe dar, insbesondere die λ -Koordinate des Wilson-Fisher-Fixpunkts und damit die nichttriviale Nullstelle von β_λ hängt von der speziellen Form der Flussgleichungen ab. Der qualitative Verlauf der Beta-Funktion und die daraus folgende Klassifizierung der Fixpunkte ist jedoch universell. Durch Linearisieren der Beta-Funktion um die Fixpunkte lassen sich außerdem universelle kritische Exponenten extrahieren. Universelles kritisches Verhalten manifestiert sich im Verlauf der Beta-Funktion in der Nähe ihrer

Nullstellen. Daher erwartet man Übereinstimmung des RG-Ergebnisses mit der aus der ϵ -Entwicklung berechneten Beta-Funktion für kleine λ in der Nähe der trivialen Nullstelle bei $\lambda = 0$. Auf dem Drei-Schleifen Niveau finden wir Übereinstimmung bis etwa $\lambda \approx 0.55$, während auf dem Ein-Schleifen Niveau bereits ab etwa $\lambda \approx 0.45$ Abweichungen auftreten. Neben der Übereinstimmung für kleine Werte von λ , für die die ϵ -Entwicklung eine gute Näherung darstellt, liefert die ϵ -Entwicklung wie erwartet die gleiche qualitative Fixpunkt-Klassifizierung wie die RG-Rechnung.

Es ist im Allgemeinen schwierig die Nullstellen der Beta-Funktionen zu berechnen, da dazu über die Störungstheorie hinausgehende Methoden nötig sind. In Abb. 5.7 erkennt man, dass die Beta-Funktion β_λ neben der mit dem Wilson-Fisher-Fixpunkt korrespondierenden Nullstelle noch eine Nullstelle bei $\lambda^* = 0$ besitzt. Auch die Beta-Funktion $\beta_{\phi_0^2}$ besitzt eine zweite Nullstelle, die im Fall $N = 4$ bei $\phi_0^{2*} = 0.203$ liegt, der entsprechende Bereich ist in Abb.5.6 jedoch nicht dargestellt. Den zu diesen Nullstellen zugehörigen Fixpunkt bezeichnet man als Gauß'schen Fixpunkt, da die Hamilton-Funktion an diesem Fixpunkt auf ein Gauß-Integral für die Zustandssumme führt. Die Eigenschaften des Gauß'schen Fixpunkts hängen davon ab, ob die Dimension des Systems größer oder kleiner als vier ist. Oberhalb von vier Dimensionen ist nur ϕ_0^2 relevant und λ sowie alle höheren Kopplungen sind irrelevant. Da in diesem Fall λ irrelevant ist, ist der Gauß'sche Fixpunkt in vier oder mehr Dimensionen infrarot-stabil. Er besitzt eine kritische Oberfläche, auf der die Trajektorien im Lauf der Evolution $t \rightarrow -\infty$ in den Fixpunkt führen. In vier Dimensionen ist die quartische Kopplung marginal, der Gauß'sche Fixpunkt aber weiterhin infrarot-stabil. Unterhalb von vier Dimensionen wird die quartische Kopplung λ relevant, daher ist der Gauß'sche Fixpunkt in weniger als vier Dimensionen infrarot-instabil und damit ultraviolett-stabil. In Abb. 5.8 sind für $N = 4$ in drei Dimensionen der ultraviolett-

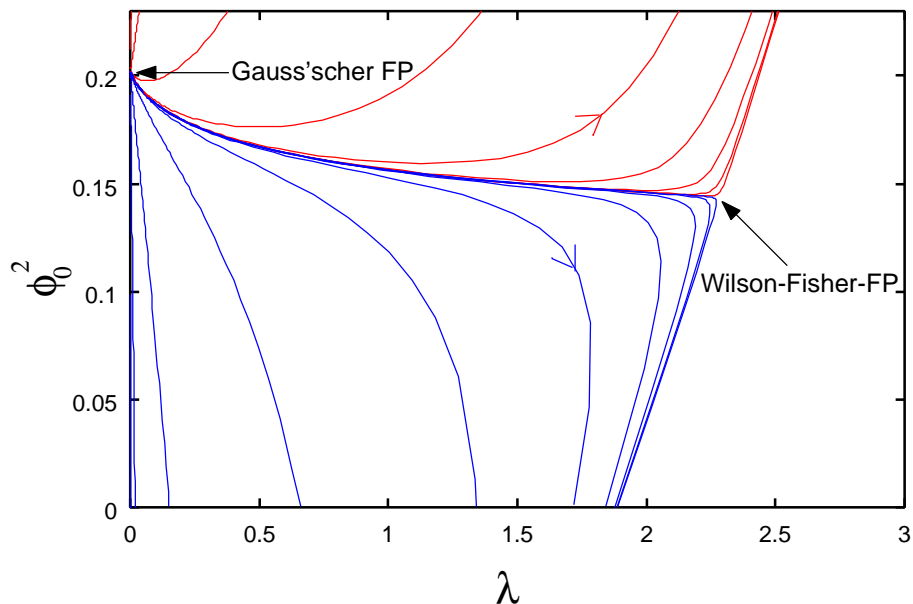


Abbildung 5.8: Fluss vom infrarot-instabilen Gauß'schen Fixpunkt zum infrarot stabilen Wilson-Fisher-Fixpunkt in drei Dimensionen für den Fall $N = 4$, die Pfeile kennzeichnen die Flussrichtung der Evolution.

stabile Gauß'sche Fixpunkt und der infrarot-stabile Wilson-Fisher-Fixpunkt dargestellt. Die Pfeile in der Abbildung kennzeichnen die Richtung der Evolution. Man erkennt, wie das System von Startwerten in der Nähe des in drei Dimensionen ultraviolett-stabilen Gauß'schen Fixpunkts in λ -Richtung zum Wilson-Fisher-Fixpunkt hin evolviert. Dieses Verhalten und die Klassifizierung der Fixpunkte spiegelt sich auch in der Beta-Funktion β_λ in Abb. 5.7 wieder. Aus der negativen Steigung am Gauß'schen Fixpunkt und der positiven Steigung am Wilson-Fisher-Fixpunkt ist dort bereits der ultraviolett-stabile Charakter des Gauß'schen Fixpunkts und der infrarot-stabile Charakter des Wilson-Fisher-Fixpunkts erkennbar.

Die bisherigen Betrachtungen dieses Kapitels wurden am Beispiel $N = 4$ illustriert. Qualitativ findet man für beliebige N das gleiche Verhalten. Dies wird in Abb. 5.9 deutlich, in der die Beta-Funktion β_λ für drei verschiedene Werte von N zu sehen ist. Daneben verdeutlicht die Abbildung die Entwicklung des Systems im Grenzfall großer Werte von N . Man beobachtet in diesem Grenzfall, dass der Wilson-Fisher-Fixpunkt gegen den Gauß'schen Fixpunkt wandert. In Tab. 5.1 sind die entsprechenden Zahlenwerte für die Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkt im Vergleich mit den Koordinaten des Gauß'schen Fixpunkts für einige ausgewählte Werte von N zusammengefasst. Sind die beiden Fixpunkte

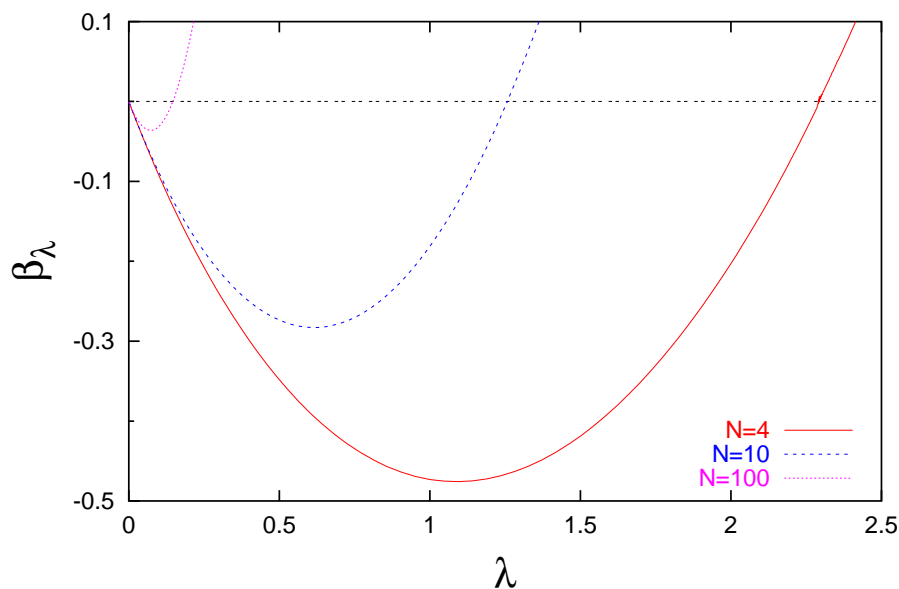


Abbildung 5.9: Die Beta-Funktion $\beta_\lambda(\lambda)$ für drei verschiedene Werte von N , zur Demonstration des Verhaltens im Grenzfall großer N .

genügend dicht beisammen, so ist es möglich, analytisch die universellen Eigenschaften des einen Fixpunkts durch die des anderen Fixpunkts auszudrücken. Da im Grenzfall großer N die anomale Dimension gegen Null geht, vereinfachen wir die analytische Rechnung, indem wir den Einfluß der Wellenfunktionsrenormierung vernachlässigen. Im ersten Schritt berechnet man die Koordinaten des Gauß'schen Fixpunkts durch Nullsetzen der Beta-Funktion für ϕ_0^2 unter Vernachlässigung aller darin auftretenden höheren Ableitungen des

	ϕ_0^{2*} (W.-F.)	λ^* (W.-F.)	ϕ_0^{2*} (G)	λ^* (G)
N=1	0.062	3.20	0.101	0
N=2	0.087	2.88	0.135	0
N=3	0.115	2.58	0.168	0
N=4	0.144	2.29	0.202	0
N=10	0.336	1.26	0.404	0
N=100	3.369	0.15	3.440	0

Tabelle 5.1: Vergleich der numerisch ermittelten Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts und des Gauß'schen Fixpunkts in drei Dimensionen für verschiedene Werte von N .

Potentials:

$$\begin{aligned}
\beta_{\phi_0^2} &= -k \frac{1}{u''} \frac{\partial}{\partial k} u' \Big|_{\phi^2=\phi_0^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow 0 &= -\phi_0^2 + \frac{1}{6\pi^2} \left[\frac{6}{1+2\lambda\phi_0^2} + 2(N-1) \right] .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Vernachlässigung der höheren Ableitungen des Potentials stellt in der Berechnung der Koordinaten des Gauß'schen Fixpunkts keine weitere Näherung dar. Da am Gauß'schen Fixpunkt am Minimum des Potentials $u' = u'' = 0$ gilt, folgt dort $u''' = u'''' = 0$ direkt aus dem in Abschnitt 4.1 beschriebenen Schließen des Systems der Flussgleichungen. In der Berechnung der Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts stellt diese Vernachlässigung jedoch eine zusätzliche Näherung dar. Unter Ausnutzung von

$$\frac{\lambda}{2} = u'' = 0$$

folgt für die Koordinaten des Gauß'schen Fixpunkts:

$$\lambda_G = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{0G}^2 = \frac{1}{6\pi^2} [6 + 2(N-1)] . \tag{5.21}$$

Entwickeln der β -Funktionen um diese Koordinaten des Gauß'schen Fixpunkts liefert:

$$\beta_\lambda = -\lambda + 2 \frac{N+8}{3\pi^2} \lambda^2 + O(\lambda^3) \tag{5.22}$$

$$\beta_{\phi_0^2} = \frac{6 + 2(N-1)}{6\pi^2} - \left(1 + \frac{2\lambda^*}{\pi^2} \right) \phi_0^2 + \frac{4\lambda^{*2}}{\pi^2} (\phi_0^2)^2 + O((\phi_0^2)^3) , \tag{5.23}$$

wobei das λ_* in der zweiten Gleichung den aus der ersten Gleichung ermittelten Wert für die λ -Koordinate des Wilson-Fisher-Fixpunkts bezeichnet. Aus den Nullstellen der beiden Gleichungen erhält man die Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts. Die analytisch berechneten Fixpunkt-Koordinaten sind in Tab. 5.2 zusammengefasst. Für den Gauß'schen Fixpunkt findet man eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen Daten

	ϕ_0^{2*} (W.-F.)	λ^* (W.-F.)	ϕ_0^{2*} (G)	λ^* (G)
N=1	0.081	1.645	0.101	0
N=2	0.113	1.480	0.135	0
N=3	0.145	1.346	0.169	0
N=4	0.178	1.234	0.203	0
N=10	0.382	0.822	0.405	0
N=100	3.439	0.137	3.445	0

Tabelle 5.2: Vergleich der analytisch ermittelten Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts und des Gauß'schen Fixpunkts in drei Dimensionen für verschiedene Werte von N .

mit den analytischen Ergebnissen. Die kleinen Abweichungen sind auf die Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung in der analytischen Rechnung zurückzuführen. Die analytischen Ergebnisse für die Koordinaten des Wilson-Fisher-Fixpunkts gewinnen wir aus einer Entwicklung um den Gauß'schen Fixpunkt. Das ist der Grund für die Beobachtung, dass die analytisch bestimmten Koordinaten um so besser mit den numerischen Ergebnissen übereinstimmen, je größer N ist. Der Wilson-Fisher-Fixpunkt wandert für große N gegen den Gauß'schen, wodurch zum einen die Entwicklung um die Koordinaten des Gauß'schen Fixpunkts immer besser wird und zum anderen die Vernachlässigung der höheren Ableitungen des Potentials eine immer bessere Näherung wird.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch das Verhalten der anomalen

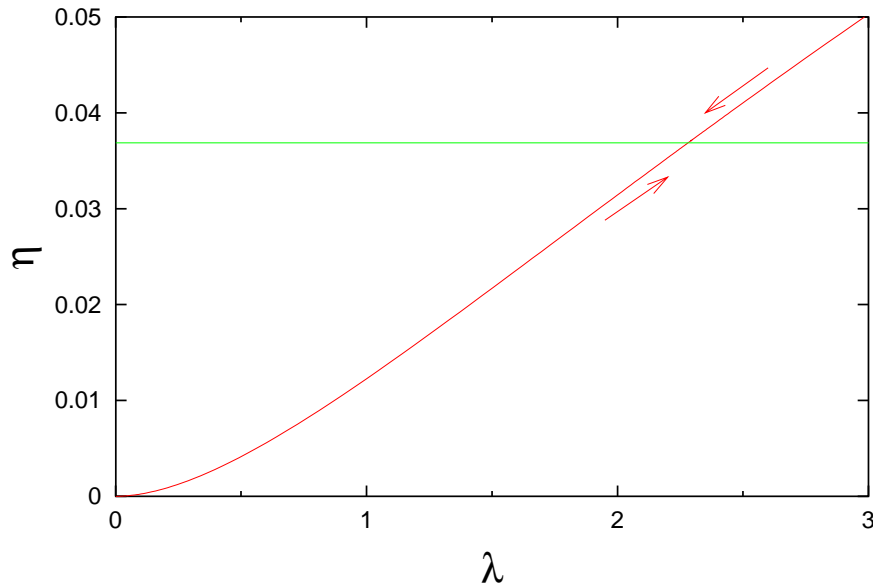


Abbildung 5.10: Die anomale Dimension η als Funktion der reskalierten quarkischen Kopplung λ . Die waagerechte Linie kennzeichnet den Wert von η am Wilson-Fisher-Fixpunkt und die Pfeile deuten die Richtung der Evolution an.

Dimension am Phasenübergang. In Abb. 5.4 war bereits zu sehen, dass auch die anomale Dimension η auf der Skalierungslösung einen konstanten, von null verschiedenen Wert annimmt. In Abb. 5.10 ist die Evolution der anomalen Dimension als Funktion der reskalierten quartischen Kopplung dargestellt. Mit Hilfe der darin eingezeichneten Pfeile, die die Richtung der Evolution andeuten, erkennt man auch hier, dass die anomale Dimension η am Wilson-Fisher-Fixpunkt einen von null verschiedenen Wert annimmt. Die anomale Dimension stellt einen der kritischen Exponenten des $O(N)$ -Modells dar, die Thema des nächsten Abschnitts sind.

5.5 Kritische Exponenten

Das Skalierungsverhalten des $O(N)$ -Modell in der Nähe des Phasenübergangs ist von kritischen Exponenten bestimmt. Diese kritischen Exponenten sind universelle Größen und parametrisieren das nicht-analytische Verhalten der freien Energiedichte am Phasenübergang. Für das $O(N)$ -Modell gibt es sechs kritische Exponenten α , β , γ , δ , ν und die anomale Dimension η . Es gibt vier Skalierungsrelationen, die diese kritischen Exponenten miteinander verknüpfen,

$$\alpha = 2 - d\nu \quad (5.24)$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \quad (5.25)$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu \quad (5.26)$$

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}, \quad (5.27)$$

so dass nur zwei der kritischen Exponenten unabhängig sind. Kennt man also zwei kritische Exponenten des $O(N)$ -Modells, so lassen sich die vier anderen über die Skalierungsrelationen berechnen. Wir werden im Folgenden β , ν , δ und η unabhängig voneinander berechnen und können damit die Skalierungsrelationen als Konsistenztest für unsere Methode verwenden.

Im Allgemeinen hängen die universellen kritischen Exponenten nur von internen Symmetrien und der Dimension des Systems ab. Dabei beschreiben die Exponenten η und δ das Verhalten des Systems exakt an der kritischen Temperatur, während die verbleibenden vier Exponenten das System im Bereich des Fixpunkts in der Nähe der kritischen Temperatur ($T \neq T_c$) parametrisieren.

In den dreidimensionalen Flussgleichungen für $T = 0$ ist die Differenz $(\phi_0^2|_{t=0} - \phi_0^2|_{t=0}^{cr})$ ein Maß für den Abstand vom Phasenübergang. Interpretiert man $\phi_0^2|_{t=0}$ als Funktion der Temperatur, so ist diese Differenz proportional zur Abweichung von der kritischen Temperatur, also proportional zu $(T - T_c)$. Die Größe $\phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ definiert somit in drei Dimensionen die kritische Temperatur.

Wir haben bereits in Abschnitt 4.3 gesehen, dass der kritische Exponent β den Verlauf des Ordnungsparameters in der Phase gebrochener Symmetrie in der Nähe der kritischen

Temperatur parametrisiert. In diesem Abschnitt berechneten wir mit Hilfe der dimensionsbehafteten Flussgleichungen den Verlauf des Ordnungsparameters als Funktion der Temperatur und konnten aus diesem Verlauf in der Nähe der kritischen Temperatur β extrahieren. Hier werden wir nun β mit Hilfe der dimensionslosen Flussgleichungen (5.13) und (5.14) berechnen, was numerische Vorteile hat und die Bestimmung von β mit einer höheren Genauigkeit erlaubt. Den kritischen Exponenten β gewinnen wir numerisch aus der Steigung der Geraden, die sich durch Auftragen des Logarithmus von Φ_0 als Funktion von $\ln(\phi_0^2|_{t=0} - \phi_0^2|_{t=0}^{cr})$ ergibt. Dazu stoppt man die Evolution für die verschiedenen Startwerte $\phi_0^2|_{t=0}$ nach dem Verlassen der Skalierungslösung jeweils am gleichen Wert für ϕ_0^2 und liest dort den jeweiligen Wert von t ab. In Abb. 5.11 sind die entsprechenden Ergebnisse für den Fall $N = 4$ grafisch dargestellt.

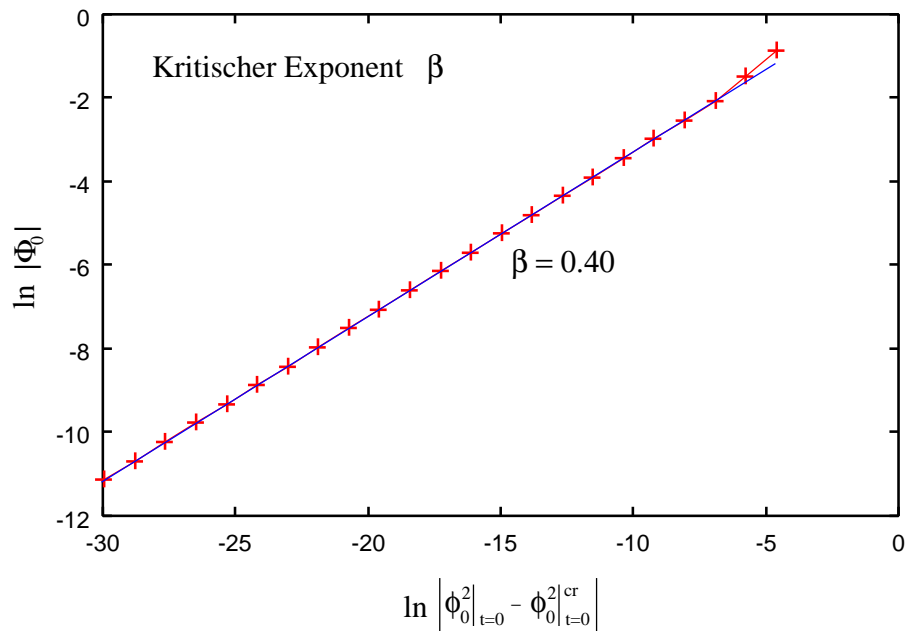


Abbildung 5.11: Der kritische Exponent β für $N = 4$.

Weitere Ergebnisse für andere Werte von N sind in Tab. 5.3 zusammengefasst. Für $N = 4$ finden wir hier $\beta = 0.4$. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 4.3 ermittelten Wert (vgl. Abb. 4.4).

Der kritische Exponent ν beschreibt das Skalierungsverhalten der renormierten Masse in der Umgebung des Phasenübergangs. Die renormierte Masse ist proportional zum Inversen der Korrelationslänge ξ , für die wiederum

$$\xi = (T - T_c)^{-\nu} \quad (5.28)$$

gilt. Damit folgt für beliebige N

$$m^2 \sim \left| \phi_0^2|_{t=0} - \phi_0^2|_{t=0}^{cr} \right|^{2\nu}, \quad (5.29)$$

wobei die renormierte Masse in der symmetrischen Phase durch

$$m^2 = k^2 u'(0) \quad \text{für } k \rightarrow 0 \quad (5.30)$$

gegeben ist. Exakt an der kritischen Temperatur divergiert die Korrelationslänge und die renormierte Masse verschwindet. Zur Bestimmung des Exponenten ν über die Beziehung (5.29) berechnen wir m^2 für verschiedene Startwerte $\phi_0^2|_{t=0} < \phi_0^2|_{t=0}^{cr}$ und tragen $\ln(m^2)$ als Funktion von $\ln|\phi_0^2|_{t=0} - \phi_0^2|_{t=0}^{cr}|$ auf. Die so gewonnenen Ergebnisse sind in Abb. 5.12 dargestellt. Aus der Steigung der sich ergebenden Geraden gewinnt man den kritischen

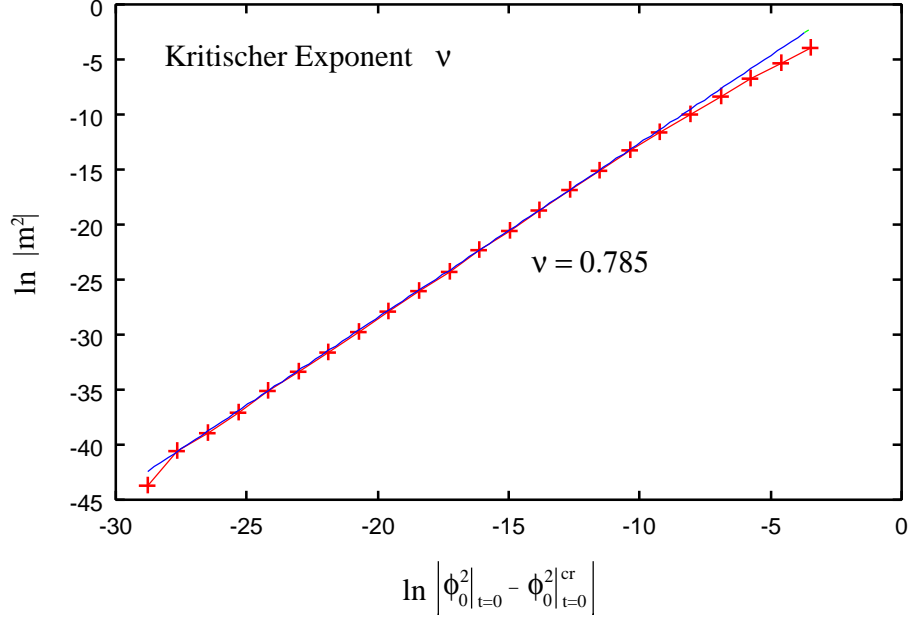


Abbildung 5.12: Der kritische Exponent ν für $N = 4$.

Exponenten ν . Die Werte von ν für verschiedene N sind ebenfalls in Tab. 5.3 zusammengefasst. Bei der Bestimmung von ν ist zu beachten, dass die renormierte Masse m^2 nur in der symmetrischen Phase einen positiven Wert aufweist. Aus diesem Grund muss man sicherstellen, dass man jeweils die symmetrische Phase erreicht, d.h. $\phi_0^2 \rightarrow 0$, bevor man die t -Evolution stoppt.

An der Skalierungslösung vereinfacht sich für große Werte von ϕ^2 die Flussgleichung (5.13) für das reskalierte Potential. Für große Werte von ϕ^2 wird auch u' groß, daneben gilt an der Skalierungslösung $\partial_t u(\phi^2) = 0$, damit findet man folgende asymptotische Gleichung für $\phi^2 \rightarrow \infty$:

$$0 = -d \cdot u_* + (d - 2 + \eta)\phi^2 u_*' , \quad (5.31)$$

wobei der Stern an u_* und u_*' für den Bereich der Skalierungslösung in der t -Evolution steht. Diese Gleichung läßt sich analytisch lösen, man findet

$$u_*(\phi^2) \sim \phi^{\frac{2d}{d-2+\eta}} . \quad (5.32)$$

Mit Hilfe der Skalierungsrelation (5.27), die die anomale Dimension η mit dem kritischen Exponenten δ verknüpft, erhält man daraus den Zusammenhang

$$\frac{\partial u_*}{\partial \phi} \sim \phi^\delta . \quad (5.33)$$

Diese Beziehung ist auch aus der statistischen Physik bekannt. Dort beschreibt der kritische Exponent δ die Variation der Magnetisierung (hier Φ) in einem externen Feld B für den Grenzfall $B \rightarrow 0$ an T_c :

$$B = \frac{\partial U(\Phi)}{\partial \Phi} \sim \Phi^\delta . \quad (5.34)$$

Aus technischen Gründen bestimmen wir δ nicht direkt aus (5.33), sondern aus der entsprechenden Beziehung für u' , die in Abb. 5.13 in einem doppelt logarithmischen Dia-

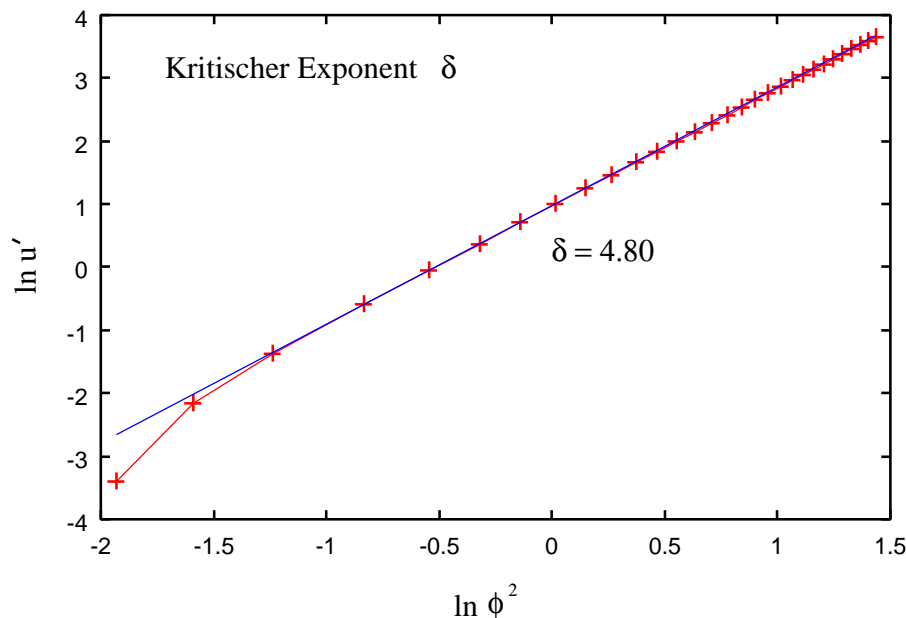


Abbildung 5.13: Der kritische Exponent δ für $N = 4$.

gramm ausgewertet ist. Aus der Steigung der sich ergebenden Geraden gewinnt man den kritischen Exponenten δ . Die Ergebnisse für δ , die wir daraus für die verschiedenen Werte von N gewinnen, sind ebenfalls in Tab. 5.3 zusammengefasst.

Neben der Zusammenfassung unserer Resultate für die kritischen Exponenten η , δ , ν und β aus dem RG-Zugang findet man in Tab. 5.3 einen Vergleich mit den Ergebnissen anderer Methoden. Die Bezeichnungen RG(1) und RG(2) in der Tabelle stehen beide für Ergebnisse, die wir im Rahmen unseres RG-Zugangs gewonnen haben und kennzeichnen alternative Berechnungen der kritischen Exponenten δ und η . Für die RG(1)-Ergebnisse haben wir die Werte von η an der Skalierungslösung gemäß Abb. 5.4 direkt abgelesen und dann δ über die Skalierungsrelation (5.27) bestimmt. In den mit RG(2) bezeichneten Ergebnissen haben wir den kritischen Exponenten δ über die Gleichung (5.33) für den Grenzfall großer Werte von ϕ an der Skalierungslösung ermittelt und daraus η über (5.27) gewonnen.

	η	δ	ν	β	
N=0	RG(1)	0.039	4.77	0.59	0.30
	RG(2)	0.034	4.80		
	lattice	0.041(25)	4.77(14)	0.592(3)	0.308(6)
	ϵ	0.032(3)	4.81(2)	0.588(2)	0.304(2)
	<i>SPS</i>	0.027(4)	4.84(3)	0.588(2)	0.302(2)
N=1	RG(1)	0.044	4.75	0.64	0.32
	RG(2)	0.045	4.74		
	lattice	0.044(31)	4.75(17)	0.631(2)	0.329(9)
	ϵ	0.038(3)	4.78(2)	0.631(2)	0.327(2)
	<i>SPS</i>	0.032(3)	4.81(2)	0.630(2)	0.325(2)
<i>average</i>	0.045		0.638	0.333	
N=2	RG(1)	0.043	4.75	0.69	0.35
	RG(2)	0.042	4.76		
	lattice	0.038(18)	4.78(10)	0.674(2)	0.350(5)
	ϵ	0.040(3)	4.77(2)	0.671(5)	0.349(4)
	<i>SPS</i>	0.033(4)	4.81(3)	0.670(2)	0.346(2)
<i>average</i>	0.042		0.7	0.365	
N=3	RG(1)	0.041	4.76	0.74	0.37
	RG(2)	0.038	4.78		
	lattice	0.038(17)	4.78(10)	0.711(2)	0.369(5)
	ϵ	0.040(3)	4.77(2)	0.710(7)	0.368(4)
	<i>SPS</i>	0.033(4)	4.81(3)	0.705(3)	0.365(3)
<i>average</i>	0.038		0.752	0.390	
N=4	RG(1)	0.037	4.79	0.785	0.40
	RG(2)	0.034	4.80		
	lattice	0.0254(38)	4.851(22)	0.7479(90)	0.3836(46)
	ϵ	0.03(1)	4.82(6)	0.73(2)	0.38(1)
<i>average</i>	0.034		0.791	0.409	
N=5	RG(1)	0.034	4.80	0.81	0.41
	RG(2)	0.034	4.81		
N=10	RG(1)	0.021	4.88	0.91	0.45
	RG(2)	0.017	4.90		
	<i>average</i>	0.019		0.906	0.461
N=100	RG(1)	0.0025	4.99	0.99	0.49
	RG(2)	0.002	4.99		
	<i>average</i>	0.003		0.992	0.496
large- N	0	5	1.0	0.5	

Tabelle 5.3: Kritische Exponenten für verschiedene N im Vergleich mit einer Störungstheorie-Rechnung (*SPS*), der ϵ -Entwicklung (ϵ) [51], Gitter-Ergebnissen [52] und dem ‘‘Average Action’’ Zugang (*average*) [37]. RG(1) und RG(2) bezeichnen unsere Resultate (siehe Text).

Diese Ergebnisse sind in der Tabelle mit Gitter-Rechnungen [52], einer ϵ -Entwicklung (mit ϵ bezeichnet) [51], einer Borel-summierten Störungsrechnung bis zur drei-Schleifen Ordnung in drei Dimensionen (mit *SPS* bezeichnet) [50] und mit dem Effective Average Action Zugang [37] verglichen. Man findet durchweg eine gute Übereinstimmung unserer RG-Ergebnisse mit den Ergebnissen der anderen Methoden.

Es ist bekannt, dass im Grenzfall großer Werte von N die “local potential approximation” exakt wird und die anomale Dimension η verschwindet [16]. Dementsprechend beobachten wir die Konvergenz aller berechneten kritischen Exponenten für große Werte von N gegen die mit large- N bezeichneten Werte des Grenzfalls $N \rightarrow \infty$. Zum Abschluss dieses Kapitels wird im folgenden Abschnitt die Abhängigkeit der berechneten kritischen Exponenten von der verwendeten Heat-Kernel-Abschneidefunktion untersucht.

5.6 Einfluss der Wahl des Regularisierungsschemas

Wir haben bereits bei der Ableitung der selbstkonsistenten RG-Flussgleichungen in Kap. 3 gesehen, dass die Struktur der Flussgleichungen von der *a priori* unbekanntem Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$ abhängt. Aus diesem Grund führen unterschiedliche Realisierungen der regulierenden Heat-Kernel-Abschneidefunktion zu einer Unsicherheit in der Bestimmung der kritischen Exponenten. Darin liegt die Schwierigkeit der eindeutigen Bestimmung der kritischen Exponenten und einer Abschätzung des gemachten Fehlers. Die exakten Renormierungsgruppen (ERG) Gleichungen sind per Konstruktion unabhängig vom gewählten Regularisierungsschema. Diese Unabhängigkeit ist jedoch in den praktisch verwendeten Näherungen nicht notwendigerweise weiterhin gewährleistet. Es wäre aber in jedem Falle interessant, eine mögliche tiefere analytische Verbindung des in dieser Arbeit vorgestellten RG-Zugangs zu den ERG-Gleichungen herzustellen. Dies ist jedoch noch immer ein offenes Problem in der Literatur.

Um die Abhängigkeit unserer Ergebnisse vom verwendeten Regularisierungsschema abzuschätzen, berechnen wir in diesem Abschnitt die kritischen Exponenten ν und β für verschiedene Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$. Dabei vernachlässigen wir aus Gründen der Einfachheit den Einfluss der Wellenfunktionrenormierung. Ähnliche Analysen findet man in [53], in [36] wurde die Wahl unterschiedlicher Heat-Kernel-Abschneidefunktionen im Rahmen der Untersuchung einer polynomialen Entwicklung des Potentials studiert. Im Folgenden sind die zu den Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$ für $i = 0, 1, 2$ korrespondierenden Flussgleichungen aufgelistet:

$$f_k^{(0)} : \quad \partial_t U = -\frac{k^d}{2} S_d [\ln(k^2 + m_\sigma^2) + (N-1) \ln(k^2 + m_\pi^2)] \quad (5.35)$$

$$f_k^{(1)} : \quad \partial_t U = \frac{k^d}{d} S_d \left[\frac{1}{(1 + m_\sigma^2/k^2)} + \frac{N-1}{(1 + m_\pi^2/k^2)} \right] \quad (5.36)$$

$$f_k^{(2)} : \quad \partial_t U = \frac{2k^d S_d}{d(d+2)} \left[\frac{1}{(1 + m_\sigma^2/k^2)^2} + \frac{N-1}{(1 + m_\pi^2/k^2)^2} \right]. \quad (5.37)$$

In der folgenden Tabelle sind am Beispiel $N = 4$ die Werte für die kritischen Exponenten ν und β für verschiedene Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$ verglichen. Man beobachtet

i	ν	β
0	0.853	0.42
1	0.815	0.405
2	0.814	0.403

Tabelle 5.4: Die kritischen Exponenten ν und β am Beispiel $N = 4$ für unterschiedliche Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f_k^{(i)}$ unter Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung.

einen leichten systematischen Abfall der Werte mit steigender Ordnung i . Bereits für $i \geq 1$ ist jedoch die Abweichung sehr klein, was die Beobachtung in [36] bestätigt. Dies erlaubt die Schlussfolgerung, dass die Konvergenz der Flussgleichungen für höhere Heat-Kernel-Abschneidefunktion stabiler wird, während man beobachtet, dass sich die gewonnenen Resultate denen anderer Methoden wie der ϵ -Entwicklung oder Gitter-Rechnungen weiter annähern.

Die Wahl der Heat-Kernel-Abschneidefunktion und des Einflusses auf die gewonnen Ergebnisse ist in der Literatur eine offene Frage und wird kontrovers diskutiert. In [23] finden Bonanno und Zappalà für $N = 1$ ebenfalls einen systematischen Abfall der Werte der berechneten kritischen Exponenten mit steigender Ordnung i , allerdings finden sie erst für höhere Ordnungen stabile, von i unabhängige, Ergebnisse. Auf der anderen Seite erhält Litim in [54] die von uns verwendete Funktion $f_k^{(i)}$ als die optimierte Heat-Kernel-Abschneidefunktion.

Teil II

Das Dilaton-Modell im Renormierungsgruppenzugang

Kapitel 6

Das Dilaton-Modell

Auf dem klassischen Level, im Grenzfall verschwindender Quarkmassen besitzt die QCD für N Quarkflavors eine globale chirale $U(N)_L \times U(N)_R$ -Symmetrie. Aufgrund von Anomalien sind nicht alle zu dieser Symmetrie zugehörigen Ströme erhalten, wodurch die Symmetrie zu einer $SU(N)_L \times SU(N)_R$ -Symmetrie gebrochen wird. Diese Symmetrie ist bei niedrigen Energien wiederum spontan zur Gruppe $SU(N)_{L+R}$ gebrochen. Neben der Invarianz unter den entsprechenden chiralen Transformationen ist die QCD im Grenzfall verschwindender Quarkmassen zusätzlich invariant unter Skalen-Transformationen. Diese Skaleninvarianz bezeichnet man auch als Dilatations-Symmetrie. Die Skaleninvarianz ist ebenfalls durch Quantenkorrekturen gebrochen, was auch als Spuranomalie der QCD bezeichnet wird. Bei Betrachtung endlicher Quarkmassen sind sowohl die chirale Symmetrie als auch die Skaleninvarianz durch die endlichen Quarkmassen zusätzlich explizit gebrochen.

Die spontan gebrochene chirale Symmetrie der QCD wird bei hohen Temperaturen restauriert. Daneben zeigen Störungstheorie- und Gitter-QCD-Rechnungen, dass Quarks und Gluonen bei höheren Temperaturen nicht länger in Hadronen eingeschlossen sind, sondern ein Quark-Gluon-Plasma bilden. Es muss also einen sogenannten Deconfinement-Übergang bei endlichen Temperaturen (und Dichten) geben, an dem die bei niedrigen Temperaturen in den Hadronen eingeschlossenen Quarks und Gluonen anfangen ein Quark-Gluon-Plasma zu bilden. Ergebnisse der Gitter-QCD deuten darauf hin, dass der chirale Phasenübergang und der Deconfinement-Übergang zusammenfallen.

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir das $O(N)$ -Modell untersucht und in diesem Rahmen insbesondere auch den chiralen Phasenübergang im $O(4)$ -Modell. Die Gruppe $O(4)$ ist isomorph zur chiralen Gruppe $SU(2) \times SU(2)$. Aus diesem Grund dient das $O(4)$ -Modell auch als effektives Modell der QCD für zwei Quarkflavors. Die Untersuchung der chiralen Symmetrie und deren Restaurierung bei hohen Temperaturen im $O(4)$ -Modell hat, aufgrund von Universalitätsklassenargumenten, möglicherweise sogar direkte Relevanz für die QCD.

Wir werden im Folgenden ein effektives Modell, das Dilaton-Modell, konstruieren, das die Skaleninvarianz der QCD, bzw. deren anomale Brechung simuliert. In einem weiteren Schritt soll dieses Modell dann an das $O(4)$ -Modell gekoppelt und der Einfluss des Dilaton-Felds χ auf den chiralen Phasenübergang im $O(4)$ -Sektor untersucht werden.

Die Untersuchung des Dilaton-Modells werden wir im Rahmen des, auf einer Eigenzeit-

Regularisierung beruhenden, Renormierungsgruppenzugangs durchführen, den wir im ersten Teil entwickelt haben. Zur numerischen Auswertung werden wir ebenfalls im Wesentlichen auf die gleichen Methoden und Algorithmen wie im ersten Teil zurückgreifen.

6.1 Das Dilaton-Potential

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion der Lagrangedichte eines effektiven skalaren Modells zur Simulation der Spuranomalie der QCD (siehe auch [55]):

$$\mathcal{L}_{dil} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - V_{dil} . \quad (6.1)$$

Das in dieser Gleichung auftretende Dilaton-Potential V_{dil} bricht die Skaleninvarianz. Mit Hilfe des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors der QCD werden wir eine Bedingungsgleichung für dieses Dilaton-Potential ableiten, welche die Erfüllung der Spuranomalie sicherstellt.

Eine Skalen-Transformation eines skalaren Feldes kann man als Transformation der Variablen,

$$\phi(x) \rightarrow e^{-D\sigma} \phi(xe^{-\sigma}) , \quad (6.2)$$

definieren, wobei $D = 1$ die kanonische Massen-Dimension des Feldes bezeichnet. Falls diese Transformation eine Invarianz-Transformation der Lagrangedichte ist, so besitzt die betrachtete Theorie einen erhaltenen Strom J_{dil}^μ , den man als Dilatations-Strom bezeichnet. Der Dilatations-Strom steht in einem einfachen Zusammenhang mit dem symmetrischen Energie-Impuls-Tensor, $J_{dil}^\mu = \Theta^{\mu\nu} x_\nu$, so dass die Divergenz des Dilatations-Stroms durch die Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors gegeben ist:

$$\partial_\mu J_{dil}^\mu = \Theta_\mu^\mu . \quad (6.3)$$

Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ ist über

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} + \frac{1}{6} (\partial_\mu \partial_\nu - g^{\mu\nu} \square) \chi^2 \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} \partial_\nu \chi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{1}{6} (\partial_\mu \partial_\nu - g^{\mu\nu} \square) \chi^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit dem kanonischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ verknüpft [56]. Für die Divergenz des Dilatations-Stroms der QCD im Fall masseloser Quarks [57] gilt:

$$\partial_\mu J_{dil}^\mu = \Theta_\mu^{\mu QCD} = \frac{\beta(g)}{2g} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} . \quad (6.5)$$

Auf der anderen Seite folgt mit (6.4) für die Spur der Lagrangedichte unseres Dilaton-Modells (6.1):

$$\Theta_{\mu}^{\mu dil} = 4V_{dil} - \chi \frac{\partial V_{dil}}{\partial \chi}, \quad (6.6)$$

wobei in der Ableitung dieser Beziehung die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung ausgenutzt wurde. Ein Vergleich mit der QCD Spuranomalie (6.5) zeigt, dass die Spur des

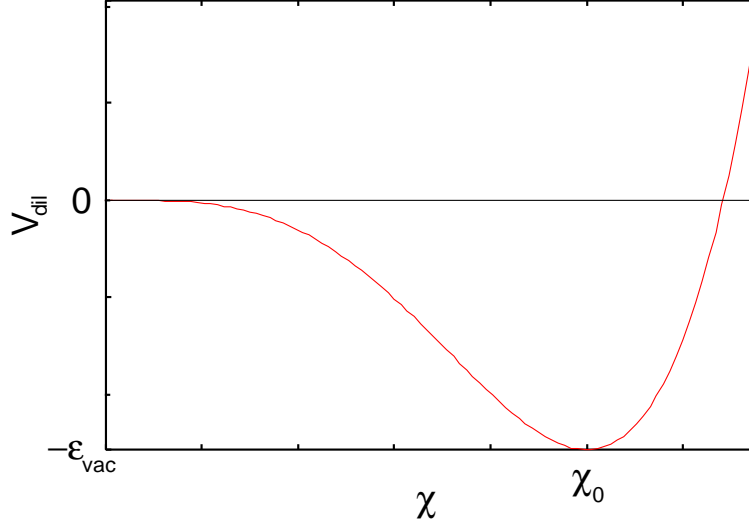


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des logarithmischen Dilaton-Potentials.

Energie-Impuls-Tensor die Skalendimension vier haben muss. Dies legt eine Proportionalität des Energie-Impuls-Tensors mit χ^4 nahe, da χ die Skalendimension eins besitzt. Damit erhält man schließlich die Differentialgleichung

$$4V_{dil} - \chi \frac{\partial V_{dil}}{\partial \chi} = -C\chi^4, \quad (6.7)$$

der das Dilaton-Potential V_{dil} genügen muss. Das Potential

$$V = h \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^4 \ln \left(\frac{\chi}{\chi_0 e^{\frac{1}{4}}} \right) \quad (6.8)$$

genügt dieser Bedingungsgleichung, wobei sich die Proportionalitätskonstante zu

$$C = \frac{h}{\chi_0^4}$$

ergibt. Abb. 6.1 illustriert schematisch die Form des Dilaton-Potentials. Der Parameter χ_0 in (6.8) bezeichnet das Minimum des Potentials und bestimmt die Krümmung der Kurve. Der Parameter h gibt die Tiefe des Potentials am Minimum an, er ist mit der Bag-Konstanten B oder der Vakuum-Energiedichte ϵ_{vac} über

$$\frac{h}{4} = B = V_{dil}(0) - V_{dil}(\chi_0) = -\epsilon_{vac} \quad (6.9)$$

verknüpft. Damit lautet die Lagrangedichte des Dilaton-Modells:

$$\mathcal{L}_{dil} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - h\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^4 \ln\left(\frac{\chi}{\chi_0 e^{\frac{1}{4}}}\right). \quad (6.10)$$

Diese effektive Realisierung erlaubt es, eine Verbindung des Gluonkondensats der QCD $\langle 0|G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}|0\rangle$ mit dem Vakuumerwartungswert $\chi_0 \equiv \langle 0|\chi|0\rangle$ des effektiven Dilaton-Modells mit gebrochener Skaleninvarianz herzustellen.

Aufgrund des nicht-Abel'schen Charakters der QCD zeigen die Gluonen eine Selbstwechselwirkung untereinander. Dies führt dazu, dass die Gluonen farbneutrale gebundene Zustände, sogenannte Gluebälle, bilden können. Solche Gluebälle hat man in Gitter-Rechnungen gefunden [59], daneben gibt es auch experimentelle Bemühungen für den Nachweis der Existenz von Gluebällen. Gluebälle sind massive skalare Anregungen mit $J^{PC} = 0^{++}$, die wir im Folgenden mit Anregungen des Dilaton-Felds χ um das asymmetrische Minimum des effektiven Potentials bei χ_0 identifizieren werden. Diese Interpretation ist jedoch für den Grenzfall $\chi_0 = 0$ nicht mehr möglich, da das Potential für diesen Fall nicht existiert.

Einer Idee von Campbell et al. [58] zur Folge kann man, aufgrund der Verbindung des Gluonkondensats mit dem Vakuumerwartungswert χ_0 , den Vakuumerwartungswert des Dilaton-Felds als Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang betrachten. Die Situation ist damit analog zur Verwendung des Quarkkondensats $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ als Ordnungsparameter für den chiralen Phasenübergang. Am Phasenübergang geht der Ordnungsparameter χ_0 gegen Null, damit ist, nach dem oben gesagten, dort eine Teilchen-Interpretation nicht länger möglich. Campbell et al. betrachten dieses Phänomen als Hinweis darauf, dass die Gluebälle an diesem Punkt nicht mehr existieren und sich in Gluonen auflösen. Das ist der Deconfinement-Übergang, die Quarks und Gluonen stellen ab diesem Punkt die relevanten Freiheitsgrade der Theorie dar. Wir werden jedoch sehen, dass unsere Ergebnisse dieser Interpretation widersprechen.

Eine Taylor-Entwicklung des Dilaton-Potentials (6.8) bricht am Ursprung zusammen. Dies führt in vielen Zugängen zu Schwierigkeiten (vgl. z.B. [60]). Im Rahmen unseres Renormierungsgruppenzugangs können wir diese Schwierigkeiten vermeiden und das Dilatonpotential auch bei endlichen Temperaturen für jeden Wert des Felds berechnen und somit auch die Ordnung eines möglichen Phasenübergangs direkt untersuchen.

6.2 Flussgleichungen für das Dilaton-Modell

Die Ableitung der Flussgleichungen für das Dilaton-Modell erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie die Ableitung der Flussgleichungen für das $O(N)$ -Modell im ersten Teil dieser Arbeit. Daher werden im Folgenden nur die wesentlichen Schritte zur Ableitung der Flussgleichungen kurz dargestellt. Aus Gründen der Einfachheit beschränken wir uns hier jedoch auf die führende Ordnung in der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung und vernachlässigen Wellenfunktionskorrekturen.

Der erste Schritt zur Ableitung der Flussgleichungen für ein beliebiges Modell in unserem RG-Zugang besteht in Berechnung der effektiven Wirkung des Modells im Pfadintegral-Formalismus. Diese berechnen wir auf dem Ein-Schleifen Niveau in einer Sattelpunktnäherung. Der resultierende Ausdruck für die effektive Wirkung enthält die divergente Spur über den Logarithmus der Fluktuationsmatrix, den wir mit Hilfe der Eigenzeit-Regularisierung behandeln. Durch Vergleich des so gewonnenen Ausdrucks mit der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung erhalten wir schließlich die Flussgleichung für das effektive Potential.

Im Dilaton-Modell tritt nur ein einzelnes skalares Feld χ auf, die Ableitungsentwicklung (3.2) der effektiven Wirkung Γ_{dil} reduziert sich in diesem Fall in der ‘‘local potential approximation’’ auf

$$\Gamma_{dil}[\chi] = \int d^D x \left\{ U_{dil}(\chi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \mathcal{O}(\partial^4) \right\} , \quad (6.11)$$

worin U_{dil} das effektive Potential des Dilaton-Modells bezeichnet. Auf der anderen Seite vereinfacht sich die Fluktuationsmatrix \mathcal{M} (3.5) für das Dilaton-Modell zu einer skalaren Größe:

$$\mathcal{M}_{dil} = -\square + \frac{\partial^2 V_{dil}}{\partial \chi^2} . \quad (6.12)$$

Mit diesem einfachen Ausdruck für die Fluktuationsmatrix ergibt sich für die effektive Wirkung

$$\Gamma_{dil}[\vec{\Phi}] = -\frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k^{(1)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau p^2} \text{tr} e^{-\tau(-2ip_\mu \partial_\mu \mathbf{1} - \partial_\mu^2 \mathbf{1} + V_{dil}'')} , \quad (6.13)$$

darin bezeichnet τ wieder die Eigenzeit, V_{dil}'' die zweite Ableitung des Potential nach dem Dilaton-Feld χ und $f_k^{(1)}$ die Heat-Kernel-Abschneidefunktion (3.43). Wir verwenden in der Eigenzeit-Regularisierung die gleiche Heat-Kernel-Abschneidefunktion wie im $O(N)$ -Modell. Diesen Ausdruck für die effektive Wirkung kann man direkt auswerten, ohne Projektionsoperatoren einzuführen. Durch Vergleich mit der Ableitungsentwicklung (6.11) erhält man für das effektive Potential des Dilaton-Modells in D Dimensionen:

$$U_{dil} = -\frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d\tau}{\tau} \frac{1}{(\tau)^{d/2}} f_k^{(1)} e^{-\tau V_{dil}''} . \quad (6.14)$$

Durch Einsetzen der Heat-Kernel-Abschneidefunktion und Ausführen der Eigenzeit-Integration ergibt sich daraus sofort die Flussgleichung für das effektive Potential in D Dimensionen bei verschwindender Temperatur:

$$k \frac{\partial U_{dil}}{\partial k} = \frac{S_D k^{D+2}}{D} \frac{1}{k^2 + U_{dil}''} \quad (6.15)$$

In dieser Flussgleichungen haben wir bereits, analog zum $O(N)$ -Fall, eine Renormierungsgruppenverbesserung durchgeführt, indem wir das Dilaton-Potential V_{dil} auf der rechten Seite der Gleichung durch das effektive Dilaton-Potential U_{dil} ersetzt haben.

Diese Flussgleichung bildet den Ausgangspunkt der numerischen Untersuchung des Dilaton-Modells im folgenden Kapitel.

Kapitel 7

Numerische Ergebnisse für das Dilaton-Modell

Unser Ziel ist, durch Untersuchung des effektiven Dilaton-Modells die anomale Brechung der Skaleninvarianz der QCD zu studieren. Dazu haben wir in Abschnitt 6.1 die Lagrangedichte (6.10) konstruiert, deren Potential die Skaleninvarianz effektiv bricht und dabei gleichzeitig die aus der Spuranomalie der QCD abgeleitete Bedingungsgleichung (6.7) erfüllt. Das so konstruierte Dilaton-Modell dient an der UV-Skala Λ als effektives Modell für die anomale Brechung der Skaleninvarianz der QCD. Die Annahme dabei ist, dass an dieser UV-Skala Λ die Quark- und Gluon-Freiheitsgrade bereits ausintegriert sind, wodurch es zur anomalen Brechung der Skaleninvarianz des klassischen QCD-Lagrangians kommt. Mit den Flussgleichungen studieren wir dann den Einfluss von Quantenfluktuationen auf dem Niveau der Glueball-Freiheitsgrade. Im nächsten Schritt wird dann mit Hilfe der Flussgleichungen für endliche Temperaturen der Einfluss von thermischen Fluktuationen untersucht.

7.1 Lösen der Flussgleichung

Zur numerischen Lösung der Flussgleichung für das effektive Potential des Dilaton-Modells verwenden wir die gleiche Methode wie für das $O(N)$ -Modell im ersten Teil der Arbeit. Dort diskretisierten wir das Potential auf einem Gitter und berechneten Flussgleichungen für das Potential und dessen erste und zweite Ableitung an jedem Gitterpunkt. Die in dem resultierenden System auftretenden dritten und vierten Ableitungen des Potentials haben wir aus Stetigkeitsbedingungen an intermediären Gitterpunkten, basierend auf Taylor-Entwicklungen um die einzelnen Gitterpunkte, bestimmt und auf diese Weise das System der Flussgleichungen geschlossen. Im Unterschied zu den Untersuchungen des $O(N)$ -Modells beschränken wir uns hier auf die Berechnung der Flussgleichung des Potentials und dessen erster Ableitung, die wir dann ebenfalls auf einem Gitter diskretisieren. Das System schließen wir dann auf die gleiche Weise wie im $O(N)$ -Fall, indem

wir die nächsten beiden Ableitungen, d.h. hier die zweite und die dritte Ableitung, aus Stetigkeitsbedingungen an intermediären Gitterpunkten bestimmen. Das sich ergebende System gekoppelter Differentialgleichungen lösen wir dann wieder mit einem Cash-Karp Runge-Kutta Algorithmus fünfter Ordnung. Die vierte Ableitung des Dilaton-Potentials ist am Ursprung nicht definiert. Daher hat die Beschränkung auf das Potential und dessen

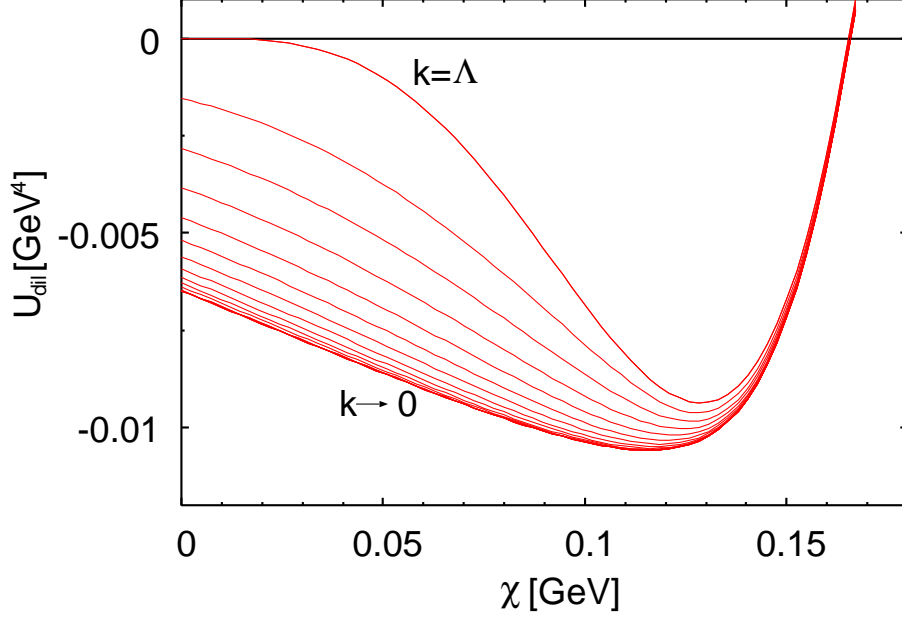


Abbildung 7.1: Die k -Evolution des Dilaton-Potential V_{dil} als Funktion des Dilaton-Felds χ . Die Anfangswerte der Evolution an der UV-Skala $\Lambda = 1.6$ GeV lauten $\chi_0 = 0.129$ GeV und $h^{\frac{1}{4}} = 0.44$ GeV.

erste Ableitung im Falle des Dilaton-Potential große Vorteile, da die vierte Ableitung des Potentials nicht länger in den Flussgleichungen auftritt. Somit sind wir in der Lage, die Evolution des gesamten Potentials, einschließlich des Potentials am Ursprung, zu berechnen und so beispielsweise die Bag-Konstante gemäß (6.9) zu ermitteln.

Wir starten die Evolution der Flussgleichungen im UV-Bereich der Theorie an der UV-Skala Λ . Die Anfangsbedingungen zur Lösung des Systems an dieser Skala werden durch die Wahl der Parameter χ_0 und h des Dilaton-Potentials (6.8), mit dem wir die Evolution starten, fixiert. Zur Festlegung der beiden Parameter verwenden wir die Glueballmasse und die Bag-Konstante als Vorgaben, d.h. wir wählen die Parameter so, dass wir im Infraroten für $k \rightarrow 0$ die gewünschten Werte für die Glueballmasse und die Bag-Konstante erhalten. Die Bag-Konstante erhalten wir dabei über die Beziehung (6.9) aus dem Potential und die Glueballmasse aus der Krümmung des Potentials am Minimum. Wir haben einen UV-Abschneideparameter von $\Lambda = 1.6$ GeV, eine Kopplungskonstante von $h = (0.44 \text{ GeV})^4$ und $\chi_0 = 0.129$ GeV gewählt. Mit diesen Anfangswerten finden wir im Infraroten eine Bag-Konstante von etwa $B^{\frac{1}{4}} = 0.25$ GeV und eine Glueballmasse von $m_\chi = 1.5$ GeV. Der gewählte UV-Abschneideparameter sollte stets größer sein als die Massen-Skala der betrachteten Theorie, die in diesem Fall durch die Glueballmasse von etwa 1.5 GeV gegeben ist. Dieser Wert für die Glueballmasse ist durch Gitter-QCD-

Rechnungen [59] motiviert. Experimentell ist die Frage der Glueballmasse bisher nicht geklärt, favorisiert werden Kandidaten im Bereich 1.4 ... 1.8 GeV. Ein Kandidat ist beispielsweise das Meson $f_0(1599)$, aber auch $f_0(1370)$ und $f_0(1710)$. Auch der Wert der Bag-Konstanten ist nicht exakt bekannt. In der Literatur findet man Werte zwischen $B^{\frac{1}{4}} = 0.14$ GeV und $B^{\frac{1}{4}} = 0.24$ GeV, die etwas kleiner sind als der von uns eingestellte Wert. Da wir im Rahmen des Modells die Glueballmasse und die Bag-Konstante nicht völlig unabhängig voneinander einstellen können, haben wir diesen etwas größeren Wert für die Bag-Konstante gewählt, um die Glueballmasse auf 1.5 GeV fixieren zu können. Die k -Evolution des Dilaton-Potentials U_{dil} ins Infrarote ist in Abb. 7.1 als Funktion des Dilaton-Felds dargestellt, in Abb. 7.2 findet man die k -Evolution des normierten Minimums. Im Laufe der Evolution wird die Form des logarithmischen Dilaton-Potentials durch die ausintegrierten Quantenfluktuationen modifiziert. Im Infraroten wird das Potential konvex für alle Werte von χ .

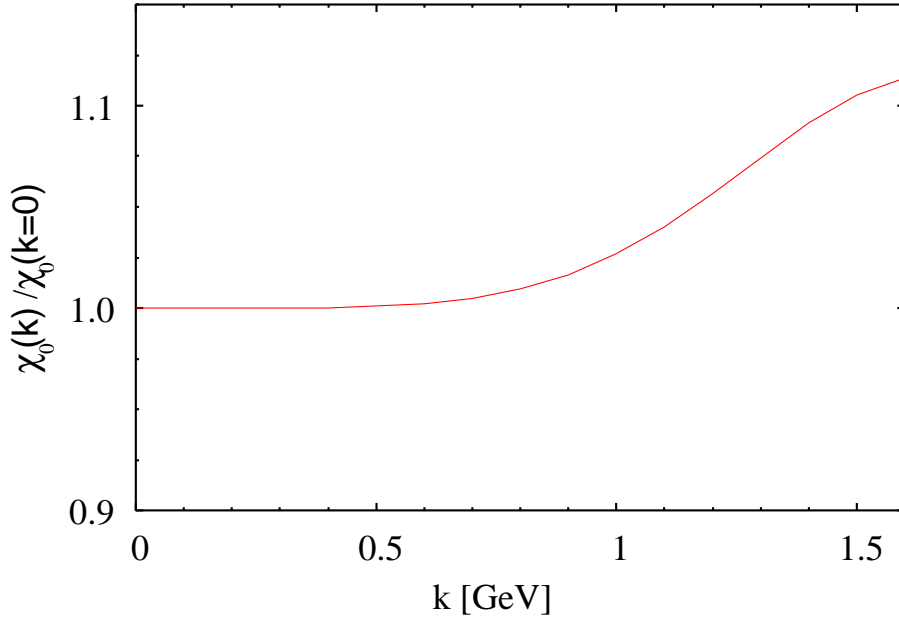


Abbildung 7.2: Die k -Evolution des normierten Minimums $\chi_0(k)/\chi_0(k = 0)$ als Funktion der Skala k . Die Anfangswerte der Evolution an der UV-Skala $\Lambda = 1.6$ GeV lauten $\chi_0 = 0.129$ GeV und $h^{\frac{1}{4}} = 0.44$ GeV.

Die Struktur der Schwellenfunktionen in den Flussgleichungen des Dilaton-Modells ist sehr ähnlich denen im $O(N)$ -Modell. Aufgrund der negativen Krümmung des Potentials bei kleinen Werten von χ , die typisch ist für spontan gebrochene Symmetrien, kann es zum Auftreten von Polen in den Schwellenfunktionen kommen. Beispielsweise ist für kleine Werte von χ der Ausdruck U''_{dil}/k^2 zu Beginn der Evolution negativ, daher gibt es eine Korrelation der Anfangswerte h , χ_0 und der UV-Skala Λ , so dass diese nicht unabhängig voneinander gewählt werden können. Um das Auftreten eines Pols zu vermeiden, muss man die Anfangswerte so wählen, dass $U''_{dil}/\Lambda^2 > -1$ und U''_{dil} im Lauf der Evolution ins Infrarote positiv wird für alle Feldamplituden χ .

7.2 Das Dilaton-Modell bei endlichen Temperaturen

Die Untersuchung des Dilaton-Modells bei verschwindender Temperatur im vorangegangenen Abschnitt diente uns im Wesentlichen zur Fixierung der Anfangswerte der Evolution. In diesem Abschnitt werden wir die Flussgleichungen auf endliche Temperaturen erweitern und mit den bei $T = 0$ gewonnenen Anfangswerten Temperaturvorhersagen für die Glueballmasse, das normierte Minimum des Potentials und das Verhalten des Potentials selbst machen. Die Erweiterung der Flussgleichungen auf endliche Temperaturen erfolgt, ganz analog dem Vorgehen im $O(N)$ -Modell (3.51), im Rahmen des Matsubara-Formalismus. Ausgehend von Gleichung (6.13) für die effektive Wirkung ersetzt man die Integration über die Nullkomponente der Impulse durch eine Summation über diskrete Matsubara-Frequenzen $\omega_n = 2n\pi T$. Die führt auf folgenden Ausdruck für das Dilaton-Potential in D Dimensionen bei endlichen Temperaturen:

$$U_{dil} = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int d\tau f_k^{(1)} \tau^{-\frac{D+1}{2}} e^{-\tau(\omega_n^2 U_{dil}'')} . \quad (7.1)$$

Nach Einsetzen der Heat-Kernel-Abschneidefunktion und Ausführen der Eigenzeit-Integration ergibt sich daraus die Flussgleichung für das effektive Potential in D Dimensionen bei endlichen Temperaturen:

$$k \frac{\partial U_{dil}}{\partial k} = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \frac{k^{D+2}}{D} T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2 + U_{dil}'')^{\frac{3}{2}}} . \quad (7.2)$$

Die Lösung dieser Flussgleichung erfolgt wie bei verschwindender Temperatur durch Dis-

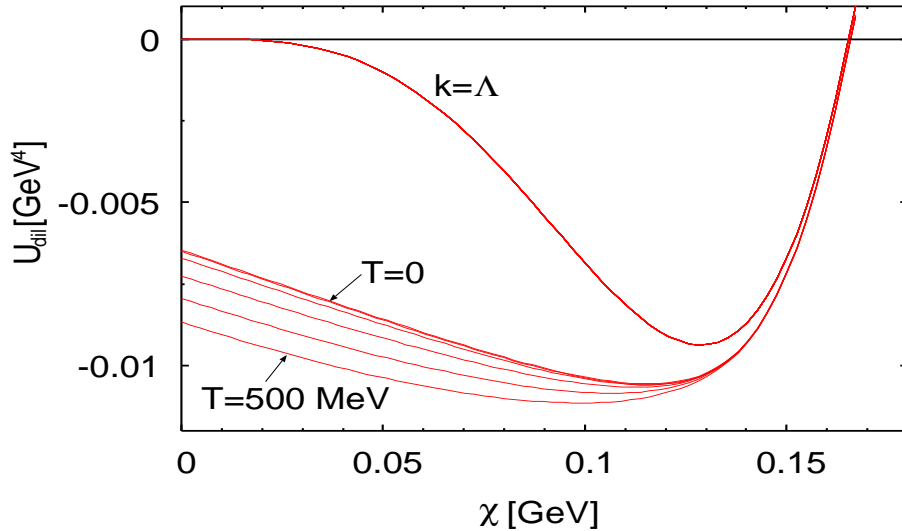


Abbildung 7.3: Das Dilaton-Potential an der UV-Skala und im Infraroten für verschiedene Temperaturen (siehe Text für Details). Die Anfangswerte der Evolution an der UV-Skala $\Lambda = 1.6$ GeV lauten jeweils $\chi_0 = 0.129$ GeV und $h^{\frac{1}{4}} = 0.44$ GeV.

kretisieren des Felds χ . Man erhält dadurch wiederum ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen für jeden Gitterpunkt. Als Anfangsbedingungen zur Lösung dieses Systems verwenden wir die bei $T = 0$ fixierten Werte für die Parameter h und χ_0 . Indem wir für alle Temperaturen die gleichen Anfangswerte verwenden, vernachlässigen wir die Temperaturabhängigkeit der Anfangswerte. Aus diesem Grund sind unsere Temperaturvorhersagen auf einen gewissen Temperaturbereich eingeschränkt. Dieser Bereich wird von den Schwellenfunktionen bestimmt und ist von der Wahl des UV-Abschneideparameters Λ abhängig. Bei einer Wahl von $\Lambda = 1.6$ GeV können wir die Temperaturabhängigkeit der Anfangswerte bis zu einer Temperatur von etwa 250 MeV vernachlässigen.

In Abb. 7.3 ist das Temperaturverhalten des Dilaton-Potentials im Infraroten dargestellt. Die verwendeten UV-Startwerte sind die bei $T = 0$ fixierten Werte von $h = (0.44 \text{ GeV})^4$ und $\chi_0 = 0.129 \text{ GeV}$. Die obere Kurve in der Grafik entspricht dem Startpotential an der UV-Skala, das, aufgrund der Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit der An-

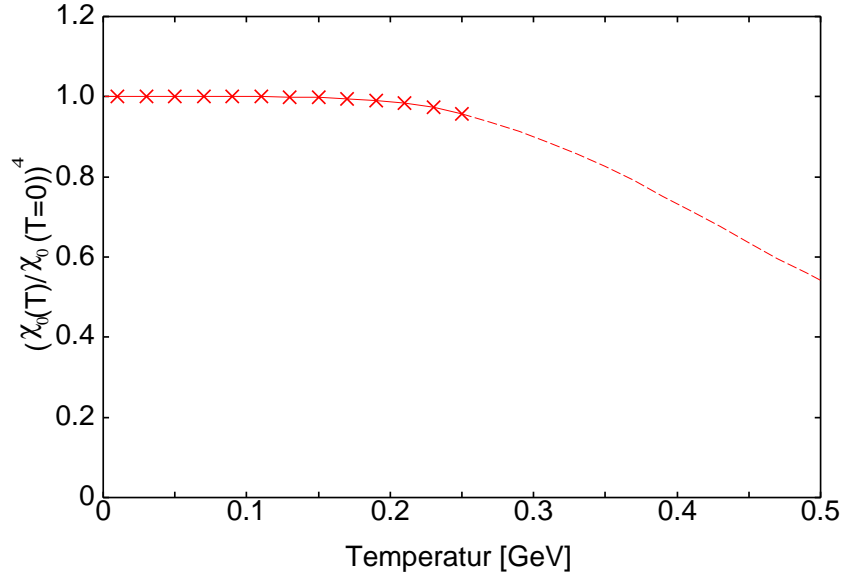


Abbildung 7.4: Temperaturabhängigkeit des normierten Minimums des Potentials. Die Anfangswerte der Evolution an der UV-Skala $\Lambda = 1.6$ GeV lauten jeweils $\chi_0 = 0.129 \text{ GeV}$ und $h^{\frac{1}{4}} = 0.44 \text{ GeV}$.

fangswerte, für alle Temperaturen gleich ist. Die unteren Kurven zeigen das Potential für verschiedene Temperaturen jeweils am Ende der Evolution im Infraroten. Die oberste dieser Kurven stellt dabei das Potential im Infraroten bei $T = 0$ dar, während die folgenden Kurven bei jeweils um 100 MeV erhöhter Temperatur berechnet wurden. In Abschnitt 6.1 wurde bereits angesprochen, dass man eine Verbindung des Vakuumerwartungswerts des Dilaton-Felds mit dem Gluonkondensat herstellen kann:

$$\left\langle \frac{\beta(g)}{2g} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle = -C \langle \chi^4 \rangle \approx -C \langle \chi \rangle^4, \quad (7.3)$$

wobei wir auf die Näherung $\langle O^n \rangle \sim \langle O \rangle^n$ angewiesen sind, da wir numerisch nur $\langle \chi \rangle$ ermitteln können. In Abb. 7.4 ist das Verhalten des normierten Minimums des Potentials $(\chi_0(T)/\chi_0(T = 0))^4$ bei endlichen Temperaturen dargestellt. Der Temperaturbereich

oberhalb von 250 MeV ist gestrichelt gezeichnet, da die Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit der Anfangswerte in diesem Bereich zu einem Fehler führt. Man be-

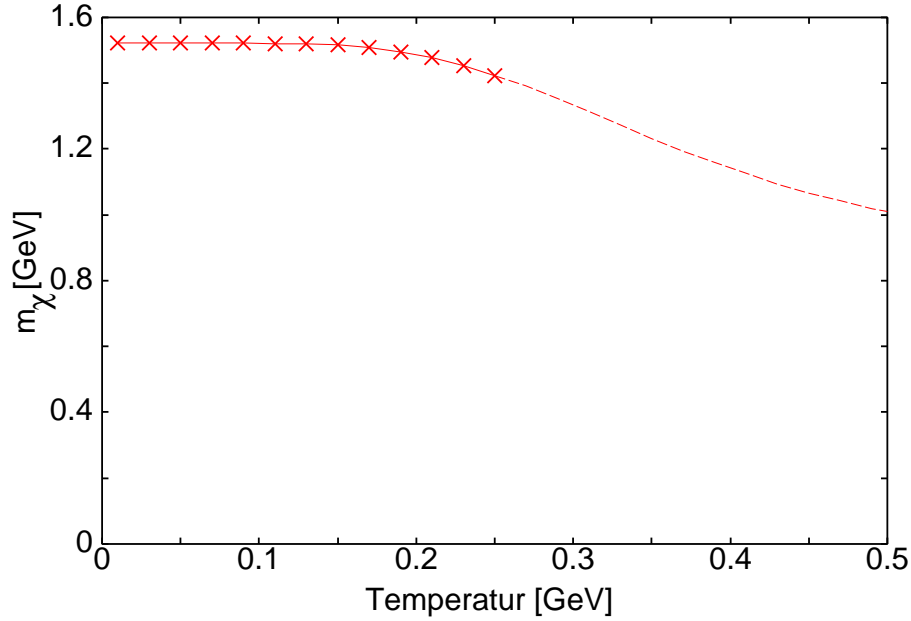


Abbildung 7.5: Die Glueballmasse als Funktion der Temperatur. Die Anfangswerte der Evolution an der UV-Skala $\Lambda = 1.6$ GeV lauten jeweils $\chi_0 = 0.129$ GeV und $h^{\frac{1}{4}} = 0.44$ GeV.

obachtet ein Abschmelzen des normierten Minimums bei endlichen Temperaturen, das jedoch, insbesondere in dem Temperaturbereich, in dem wir verlässliche Aussagen machen können, sehr gering ist. Diese Beobachtung deckt sich mit den Ergebnissen der Autoren in [60], die, sowohl im reinen Dilaton-Modell, als auch in einer an das nicht-lineare σ -Modell gekoppelten Version, das Gluonkondensat untersucht haben und im Temperaturbereich unterhalb von 200 MeV jeweils einen stabilen Wert für das Gluonkondensat finden. Greifen wir die Idee von Campbell et al., den Vakuumerwartungswert des Dilaton-Felds als Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang zu betrachten, auf, so bedeutet dies, dass, zumindest unterhalb von Temperaturen um 250 MeV, kein Deconfinement-Phasenübergang in unserem Dilaton-Modell auftritt. Dies könnte darauf hindeuten, dass das Gluonkondensat nicht der richtige Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang ist. Gitter-Resultate weisen darauf hin, dass der Deconfinement-Phasenübergang für Quarks und Gluonen mit dem chiralen Phasenübergang zusammenfällt und bereits bei deutlich kleineren Temperaturen stattfindet. Daneben findet man in Gitter-Rechnungen für den reinen Gluon-Sektor der QCD einen Phasenübergang bei ca. 264 MeV und beobachtet sogar negative Werte für das Gluonkondensat oberhalb von T_c [61].

In Abb. 7.5 findet man die Temperaturabhängigkeit der Glueballmasse. Ähnlich zum Verhalten des normierten Minimums findet man ein Abschmelzen der Glueballmasse mit steigender Temperatur. Es stellt sich heraus, dass dieses Verhalten der Glueballmasse relativ unabhängig von der Wahl des UV-Abschneideparameters Λ ist. Selbst bei Variation

von Λ zwischen ein und zwei GeV, bei gleichzeitiger Fixierung der Bag-Konstanten und der Glueballmasse bei $T = 0$, beobachtet man keine Abweichungen bei Temperaturen unterhalb von 200 MeV. Das Verhalten der Bag-Konstanten B als Funktion der Temperatur

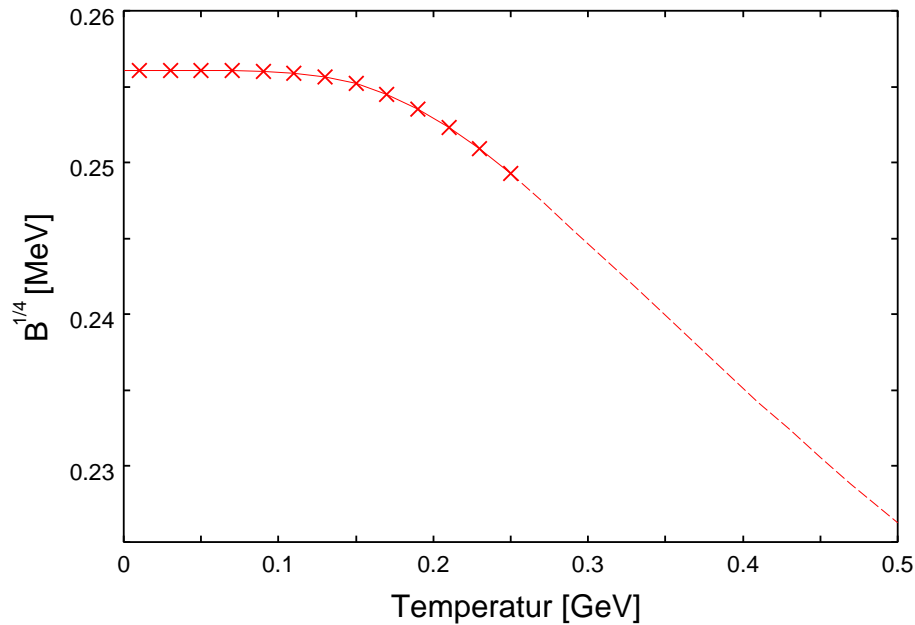


Abbildung 7.6: Die Bag-Konstante als Funktion der Temperatur. Die Anfangswerte der Evolution an der UV-Skala $\Lambda = 1.6$ GeV lauten jeweils $\chi_0 = 0.129$ GeV und $h^{\frac{1}{4}} = 0.44$ GeV.

ist in Abb. 7.6 aufgetragen. Die Temperaturabhängigkeit ist qualitativ sehr ähnlich dem Verhalten der Glueballmasse und des normierten Minimums bei endlichen Temperaturen, wobei das Abschmelzen des Werts der Bag-Konstanten etwas früher bei Temperaturen um $T = 150$ MeV einsetzt. Bei kleineren Werten für die Bag-Konstante beobachtet man eine etwas stärkere und bei geringeren Temperaturen einsetzende Beeinflussung der Glueballmasse und des normierten Minimums. Diese Beobachtung wird auch von den Autoren in [60] gestützt, die ein ähnliches Verhalten beobachten.

Kapitel 8

Kopplung des Dilaton-Modells an das $O(4)$ -Modell

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln das Dilaton-Modell und das $O(N)$ -Modell getrennt voneinander betrachtet haben, werden wir im vorliegenden Kapitel das Dilaton-Modell mit dem $O(4)$ -Modell koppeln. Das Ziel der Kopplung ist die Untersuchung des Einflusses der Gluebälle auf den chiralen Phasenübergang im $O(4)$ -Sektor. Aus Gründen der Einfachheit werden wir im Folgenden auch im $O(4)$ -Sektor die Wellenfunktionsrenormierung vernachlässigen.

8.1 Die Lagrangedichte des gekoppelten Modells

Die Kopplung des mesonischen und des Dilaton-Anteils sollte so erfolgen, dass zum einen der mesonische Sektor im gekoppelten Modell weiterhin chiral invariant ist und zum anderen die Skaleninvarianz nur durch den reinen Dilaton-Anteil im Potential gebrochen wird. Die Form des reinen Dilaton-Anteils im Potential ist dabei so gewählt, dass eine effektive Realisierung der QCD Spur-Anomalie gewährleistet ist. In der Literatur findet man verschiedene Modelle, die diesen Anforderungen genügen, beispielsweise in [62], [55] oder in [63]. Wir werden die folgende Lagrangedichte verwenden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{4}\lambda\left(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \frac{\sigma_0^2}{\chi_0^2}\chi^2\right)^2 \\ & -h\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^4\left(\ln\frac{\chi}{\chi_0e^{\frac{1}{4}}}\right). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Diese Lagrangedichte ist chiral invariant und bis auf den letzten Term, der die Skaleninvarianz bricht, auch skaleninvariant und genügt damit den gestellten Anforderungen. Prinzipiell könnten wir das gekoppelte System analog zur Untersuchung des $O(N)$ -Modells und des Dilaton-Modells behandeln. Dort diskretisierten wir die Felder auf einem eindimensionalen Gitter und leiteten Flussgleichungen für jeden Gitterpunkt ab. Im gekoppelten Modell führt diese Vorgehensweise auf ein zweidimensionales Feldgitter und damit zu Problemen bei der Bestimmung höherer Ableitungen des Potentials, die nötig sind, um

das System der Flussgleichungen zu schließen. Um diese technischen Schwierigkeiten zu vermeiden und den numerischen Aufwand in Grenzen zu halten, werden wir das Potential des gekoppelten Systems in einer polynomialen Entwicklung um das Minimum des Potentials abschneiden und Flussgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten ableiten. Zur Ableitung dieser Flussgleichungen im nächsten Abschnitt führen wir das generische Feld $\vec{\Phi}$ mit

$$\vec{\Phi} = (\sigma, \vec{\pi}, \chi) \quad \text{und} \quad \vec{\Phi}_0 = (\sigma_0, \vec{0}, \chi_0) \quad (8.2)$$

ein. Damit gelingt es, die Ableitung der Flussgleichungen des eingeschränkten Systems formal weitgehend auf die Berechnungen im ersten Teil der Arbeit zurückzuführen.

8.2 Die Flussgleichungen

In der Ableitung des Ausdrucks (2.31) für die effektive Wirkung im zweiten Kapitel haben wir von der expliziten Form der Lagrangedichte des zugrundeliegenden Modells keinen Gebrauch gemacht. Wir haben nur angenommen, dass man die Wirkung als Funktion des generischen Felds $\vec{\Phi}$ schreiben kann, wie wir das auch hier tun können. Daher erhalten wir als Ausgangspunkt zur Berechnung der Flussgleichungen wiederum

$$\Gamma[\vec{\Phi}_0] = N' + S_{kl}[\vec{\Phi}_0] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}|_{\vec{\Phi}_0} . \quad (8.3)$$

Dieser Ausdruck ist formal identisch mit (2.31), der Unterschied liegt jedoch in der expliziten Form der Matrix \mathcal{M} . Formal gilt weiterhin

$$\mathcal{M}_{kl} = \frac{\delta^2 S_{kl}}{\delta \Phi_k \delta \Phi_l} , \quad (8.4)$$

wobei jedoch im Unterschied zum reinen $O(4)$ -Modell die Indizes von $k, l = 1, \dots, 5$ laufen. Wertet man die Funktionalableitungen explizit aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij} &= -\delta_{ij} \square + \delta_{ij} \lambda \left(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_0^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \right) + 2\lambda \Phi_i \Phi_j \\ \mathcal{M}_{5i} &= \mathcal{M}_{i5} = 2\lambda \frac{\sigma_0^2}{\chi_0^2} \Phi_i \chi \\ \mathcal{M}_{55} &= -\square - \lambda \frac{\sigma_0^2}{\chi_0^2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + 3\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^4} \chi^2 + 4h \frac{\chi^2}{\chi_0^4} + 12h \frac{\chi^2}{\chi_0^4} \ln \frac{\chi}{\chi_0} , \end{aligned} \quad (8.5)$$

wobei die Indizes von $i, j = 1, \dots, 4$ laufen. Zur Auswertung der Spur über den Logarithmus der Fluktuationmatrix greifen wir wieder auf die Eigenzeit-Regularisierung in Verbindung mit der Heat-Kernel-Entwicklung zurück, wie sie im dritten Kapitel eingeführt wurde. Die Rechnung ist identisch mit der im $O(N)$ -Fall und soll daher hier nicht wiederholt werden.

Unter Verwendung von (3.16) erhält man für die effektive Wirkung analog zu (3.18) die Beziehung

$$\Gamma_k[\vec{\Phi}_0] = -\frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau p^2} \text{tr} e^{-\tau(-2ip_\mu \partial_\mu \mathbf{1} - \partial_\mu^2 \mathbf{1} + \tilde{\mathcal{M}})} . \quad (8.6)$$

Die Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung entspricht einer Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit der Felder. Dies hat zur Folge, dass wir den Ausdruck (8.6) nur für ein konstantes Hintergrundfeld $\vec{\Phi}_0$ auswerten müssen. Für diesen Fall ist der einzig relevante Term im Exponenten $\tilde{\mathcal{M}}$. Damit können wir, unter Ausnutzung der Beziehung (siehe Anhang A.3)

$$\text{tr} e^{-\tau \tilde{\mathcal{M}}} = \sum_{i=1}^5 e^{-\tau \kappa_i} , \quad (8.7)$$

die Spurbildung in (8.6) auf die Berechnung der Eigenwerte κ_i der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ zurückführen. Nach Ausführen der Impulsintegration erhält man für die effektive Wirkung

$$\Gamma_k[\vec{\Phi}_0] = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int d^D x \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \frac{1}{\tau^{\frac{D}{2}}} \sum_{i=1}^5 e^{-\tau \kappa_i} . \quad (8.8)$$

Durch Vergleich mit der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung (2.21) ergibt sich, in der Näherung vernachlässigter Wellenfunktionsrenormierung, daraus für das effektive Potential

$$U = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int \frac{d\tau}{\tau} f_k \frac{1}{\tau^{\frac{D}{2}}} \sum_{i=1}^5 e^{-\tau \kappa_i} . \quad (8.9)$$

Als Heat-Kernel-Abschneidefunktion zur Regularisierung der Eigenzeit-Integration verwenden wir wieder die in unserer Notation als $f_k^{(1)}$ bezeichnete Funktion, deren Ableitung durch

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k^{(1)} = -\frac{4}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) D} (\tau k^2)^{\frac{D}{2}+1} e^{-\tau k^2} \quad (8.10)$$

gegeben ist. Ableiten des effektiven Potentials nach der Skala k ergibt dann die Flussgleichung. Nach Ausführen der Eigenzeit-Integration erhält man schließlich

$$k \frac{\partial}{\partial k} U = \frac{S_D k^{D+2}}{D} \left[\sum_{i=1}^5 \frac{1}{k^2 + \kappa_i} \right] . \quad (8.11)$$

Der darin auftretende Faktor S_D ist in (3.48) definiert. Die Flussgleichung in dieser Form gilt für das vollständige effektive Potential des gekoppelten Modells. Ausgehend von dieser Flussgleichung für das effektive Potential werden wir im weiteren Verlauf der Rechnung Flussgleichungen für die Koeffizienten einer Entwicklung des Potentials ableiten.

8.2.1 Entwicklung des Potentials

Wie bereits im vorigen Abschnitt angesprochen werden wir die Flussgleichung für das effektive Potential nicht direkt, d.h. durch diskretisieren der Felder auf einem Gitter lösen. Statt dessen werden wir das Potential in einer polynomialen Entwicklung um das Minimum abschneiden und Flussgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten ableiten. Den $O(4)$ -Anteil des Potentials schneiden wir bei der quartischen Kopplung λ ab und ersetzen den Dilaton-Anteil des Potentials durch eine Reihenentwicklung, die wir bei Potenzen der Ordnung m in χ abschneiden. Damit nimmt das Baumgraphen-Potential die Form

$$V = \frac{1}{4}\lambda \left(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \sigma_0^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \right)^2 + \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{j!} (\chi - \chi_0)^j \quad (8.12)$$

an. Für die Flussgleichungen der einzelnen Kopplungen, die wir auf Basis dieser Entwicklung ableiten werden, benötigen wir noch die Eigenwerte κ_i der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ für das in der Entwicklung eingeschränkte Potential und deren Ableitungen nach den verschiedenen Feldern. Diese Ausdrücke sind dann jeweils am Minimum auszuwerten. Von den fünf Eigenwerten der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ sind drei identisch und verbunden mit den drei Pionen, die beiden anderen entsprechen dem σ -Meson und dem Glueball. Ausgewertet am Minimum $\vec{\Phi}_0$ findet man für die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \kappa_\pi|_{\vec{\Phi}_0} &= 0 \\ \kappa_\sigma|_{\vec{\Phi}_0} &= \lambda\sigma_0^2 + 2\frac{h}{\chi_0^2} + \lambda\frac{\sigma_0^4}{\chi_0^2} + \frac{1}{\chi_0^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\chi_0^2 c_2 + \lambda\sigma_0^2(\sigma_0^2 + \chi_0^2)\right)^2 - 2\lambda c_2 \sigma_0^2 \chi_0^4} \\ \kappa_\chi|_{\vec{\Phi}_0} &= \lambda\sigma_0^2 + 2\frac{h}{\chi_0^2} + \lambda\frac{\sigma_0^4}{\chi_0^2} - \frac{1}{\chi_0^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\chi_0^2 c_2 + \lambda\sigma_0^2(\sigma_0^2 + \chi_0^2)\right)^2 - 2\lambda c_2 \sigma_0^2 \chi_0^4}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Es ist zu beachten, dass man zur Ableitung der Flussgleichungen für die einzelnen Koeffizienten und Erwartungswerte die volle Feldabhängigkeit der Eigenwerte benötigt. Durch die Entwicklung ist auch das effektive Potential auf die Form (8.12) eingeschränkt. Im Gegensatz zur Rechnung für das volle Potential können dadurch im Lauf der Evolution keine neuen Vertices erzeugt werden. Für den reinen Dilaton-Anteil bedeutet dies somit eine doppelte Einschränkung, da der Logarithmus an sich bereits unendlich viele Kopplungen beinhaltet.

8.2.2 Flussgleichungen für die Kopplungen und die Erwartungswerte

Konzentrieren wir uns zunächst auf die Flussgleichungen für die Erwartungswerte σ_0^2 und χ_0 . An der Startskala Λ sind die Bedingungsgleichungen für beide Größen durch die

Forderung gegeben, dass die Ableitung des Potentials V nach σ^2 bzw. χ an der Stelle $\vec{\Phi}_0$ verschwindet:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \sigma^2} \right|_{\vec{\Phi}_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \chi} \right|_{\vec{\Phi}_0} = 0 . \quad (8.14)$$

Diese Beziehungen gelten auch für das k -abhängige effektive Potential. Ableiten der entsprechenden Bedingungen nach der Skala k liefert das System

$$\begin{aligned} k \frac{d}{dk} \left. \frac{\partial U}{\partial \sigma^2} \right|_{\vec{\Phi}_0} &= 0 = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial (\sigma^2)^2} k \frac{\partial \sigma^2}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2 \partial \chi} k \frac{\partial \chi}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} + k \left. \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial U}{\partial \sigma^2} \right|_{\vec{\Phi}_0} \\ k \frac{d}{dk} \left. \frac{\partial U}{\partial \chi} \right|_{\vec{\Phi}_0} &= 0 = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} k \frac{\partial \chi}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2 \partial \chi} k \frac{\partial \sigma^2}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} + k \left. \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial U}{\partial \chi} \right|_{\vec{\Phi}_0} . \end{aligned} \quad (8.15)$$

Durch Auflösen dieses gekoppelten Systems nach den Flussgleichungen für σ_0^2 und χ_0 erhält man

$$k \frac{\partial}{\partial k} \sigma_{0,k}^2 = \left(-\frac{2}{\lambda} - 4 \frac{\sigma_0^4}{c_2 \chi_0^2} \right) \left. \frac{\partial}{\partial \sigma^2} k \frac{\partial U}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} - \frac{2\sigma_0^2}{c_2 \chi_0} \left. \frac{\partial}{\partial \chi} k \frac{\partial U}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} \quad (8.16)$$

$$k \frac{\partial}{\partial k} \chi_{0,k} = -\frac{1}{c_2} \left. \frac{\partial}{\partial \chi} k \frac{\partial U}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} - \frac{2\sigma_0^2}{c_2 \chi_0} \left. \frac{\partial}{\partial \sigma^2} k \frac{\partial U}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} . \quad (8.17)$$

An diesen Flussgleichungen führen wir nun noch eine Renormierungsgruppenverbesserung durch, indem wir alle Größen auf der rechten Seite durch die zugehörigen laufenden Größen ersetzen. Um die Notation zu erleichtern, werden wir im Folgenden den zusätzlichen Index k zur Kennzeichnung der Skalenabhängigkeit verzichten. Dies sollte nicht zu Verwirrungen führen, da wir an allen Flussgleichungen eine Renormierungsgruppenverbesserung durchführen, so dass am Ende alle Größen von k abhängen. Die in den obigen Flussgleichungen auftretenden Ableitungen der Flussgleichung für das effektive Potential nach den Feldern gewinnt man durch entsprechenden Ableitungen von (8.11) mit anschließender Auswertung an $\vec{\Phi}_0$.

In Folge der Entwicklung des Potentials ist die quartische Kopplung λ durch die zweifache Ableitung des effektiven Potentials nach σ^2 an $\vec{\Phi}_0$ gegeben. Damit folgt für die Flussgleichung

$$k \frac{\partial}{\partial k} \lambda = 2k \left. \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \frac{\partial U}{\partial k} \right|_{\vec{\Phi}_0} . \quad (8.18)$$

Die Entwicklungskoeffizienten des reinen Glueball-Anteils am effektiven Potential lassen sich durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} c_0 &= U|_{\vec{\Phi}_0} \\ c_2 &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} U \right|_{\vec{\Phi}_0} - 2\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^2} \\ c_3 &= \left. \frac{\partial^3}{\partial \chi^3} U \right|_{\vec{\Phi}_0} - 6\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= \left. \frac{\partial^4}{\partial \chi^4} U \right|_{\vec{\Phi}_0} - 6\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^4} \\
c_5 &= \left. \frac{\partial^5}{\partial \chi^5} U \right|_{\vec{\Phi}_0} \\
c_6 &= \left. \frac{\partial^6}{\partial \chi^6} U \right|_{\vec{\Phi}_0} \\
&\dots
\end{aligned}$$

aus dem effektiven Potential extrahieren. Da wir die c_i als Koeffizienten einer Entwicklung um das laufende Minimum betrachten, muss man bei der Ableitung der Flussgleichungen das Laufen des Minimums berücksichtigen. Dies führt auf zusätzliche Nachableitungsterme beim Ableiten der obigen Beziehungen nach der Skala k . Unter Berücksichtigung dieser Terme und der Renormierungsgruppenverbesserung findet man folgende Flussgleichungen:

$$k \frac{\partial}{\partial k} c_0 = k \frac{\partial}{\partial k} U \Big|_{\vec{\Phi}_0} \quad (8.19)$$

$$k \frac{\partial}{\partial k} c_2 = k \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{\vec{\Phi}_0} - 2 \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^2} k \frac{\partial}{\partial k} \lambda - 5\lambda \frac{\sigma_0^2}{\chi_0^2} k \frac{\partial}{\partial k} \sigma_0^2 + \left(c_3 + 10\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^3} \right) k \frac{\partial}{\partial k} \chi_0 \quad (8.20)$$

$$k \frac{\partial}{\partial k} c_3 = k \frac{\partial^3}{\partial \chi^3} \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{\vec{\Phi}_0} - 6 \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^3} k \frac{\partial}{\partial k} \lambda - 12\lambda \frac{\sigma_0^3}{\chi_0^2} k \frac{\partial}{\partial k} \sigma_0^2 + \left(c_4 + 24\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^4} \right) k \frac{\partial}{\partial k} \chi_0 \quad (8.21)$$

$$k \frac{\partial}{\partial k} c_4 = k \frac{\partial^4}{\partial \chi^4} \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{\vec{\Phi}_0} - 6 \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^4} k \frac{\partial}{\partial k} \lambda - 12\lambda \frac{\sigma_0^2}{\chi_0^4} k \frac{\partial}{\partial k} \sigma_0^2 + \left(c_5 + 24\lambda \frac{\sigma_0^4}{\chi_0^5} \right) k \frac{\partial}{\partial k} \chi_0 \quad (8.22)$$

$$k \frac{\partial}{\partial k} c_5 = k \frac{\partial^5}{\partial \chi^5} \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{\vec{\Phi}_0} + c_6 k \frac{\partial}{\partial k} \chi_0 \quad (8.23)$$

...

Damit haben wir die Flussgleichungen aller benötigten Erwartungswerte und Entwicklungskoeffizienten bei verschwindender Temperatur beisammen. Bevor wir jedoch die numerische Auswertung beginnen, soll im nächsten Abschnitt noch die Erweiterung der Flussgleichungen auf endliche Temperaturen diskutiert werden.

8.2.3 Erweiterung der Flussgleichungen des gekoppelten Systems auf endliche Temperaturen

Für die Erweiterung der Flussgleichungen (8.16)-(8.23) auf endliche Temperaturen genügt es, die Erweiterung der Flussgleichung für das effektive Potential auf endliche Temperaturen zu betrachten.

Die Berechnung der Flussgleichungen bei endlichen Temperaturen erfolgt wie zuvor im Rahmen des Matsubara-Formalismus. Die Rechnung ist ganz analog zu denen im reinen $O(N)$ - oder Dilaton-Modell. Für Details zur Rechnung sei daher auf die vorangegangenen Kapitel verwiesen. Wir verwenden weiterhin die Heat-Kernel-Abschneidefunktion $f^{(1)}$

und erhalten damit als Flussgleichung für das effektive Potential in D Dimensionen bei endlichen Temperaturen

$$k \frac{\partial}{\partial k} U = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) D} T k^{D+2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^5 \frac{1}{k^2 + \omega_n^2 + \kappa_i} \right]. \quad (8.24)$$

Nachdem damit die Flussgleichungen sowohl bei $T = 0$ als auch bei endlichen Temperaturen bekannt sind, werden wir im nächsten Kapitel diese Flussgleichungen numerisch auswerten.

Kapitel 9

Numerische Auswertung des gekoppelten Modells

Im reinen $O(N)$ -Modell und im reinen Dilaton-Modell haben wir in vier Dimensionen die Flussgleichungen bei verschwindender Temperatur dazu verwendet, die Anfangsbedingungen zu fixieren und damit Vorhersagen bei endlichen Temperaturen zu machen. Hier werden wir versuchen, den gleichen Weg zu beschreiten. Im reinen $O(N)$ -Modell hatten wir zwei freie Parameter, λ_Λ und $\sigma_{0,\Lambda}$ an der UV-Skala. Diese fixierten wir so, dass man bei $T = 0$ im Infraroten den Wert der Pionzerfallskonstanten reproduziert, während die quartische Kopplung λ gegen null geht. Im reinen Dilaton-Modell hatten wir ebenfalls zwei freie Parameter, h_Λ und $\chi_{0,\Lambda}$, an der UV-Skala. Dort verwendeten wir die Bag-Konstante und den Wert der Glueballmasse als Fitparameter. Dazu wählten wir Werte für die freien Parameter an der UV-Skala, die auf die vorgegebene Bag-Konstante und Glueballmasse im Infraroten führten.

Im $O(4)$ -Sektor des gekoppelten Modells können wir die gleiche Strategie zur Wahl der Parameter wie im reinen $O(N)$ -Modell anwenden. Im Dilaton-Sektor stößt man jedoch auf Probleme. Durch die Entwicklung des Potentials um sein Minimum hat man, insbesondere im Infraroten, nur in der Nähe dieses Minimums verlässliche Kenntnis von Wert und Verlauf des Potentials. Damit ist man zwar in der Lage, aus der Krümmung des Potentials am Minimum die Glueballmasse zu bestimmen. Man kennt jedoch nicht den Wert des Potential am Ursprung und besitzt damit keine Kenntnis über die Bag-Konstante (vgl. dazu z.B. [60]).

Unter der Annahme, dass die Evolution im gekoppelten Modell ähnlich der in den ungekoppelten Modellen ist, kann man versuchen die gleichen Anfangsbedingungen einzusetzen. Dies führt jedoch bereits im reinen Dilaton-Modell beim Vergleich der Rechnung für das volle Potential mit der bei endlicher Entwicklungsordnung abgeschnittenen Version zu numerischen Problemen. Die abgeschnittene Version des reinen Dilaton-Modells kann man durch Wahl von $\lambda_\Lambda = 0$ und Ausschalten der Flussgleichungen für λ und σ_0^2 im gekoppelten Modell erzeugen. Die numerischen Probleme, auf die man stößt, sind der Gestalt, dass bei endlichem Wert von k der Koeffizient c_2 (das Quadrat der Glueballmasse) gegen null geht. Als Folge davon divergieren die anderen Entwicklungskoeffizienten. Dieses Verhalten verstärkt sich noch, wenn man höhere Ordnungen der Entwicklung berücksichtigt, da die absoluten Werte der Entwicklungskoeffizienten

mit der Ordnung größer werden.

Dieses Ergebnis ist nicht zu überraschend, da man erwarten konnte, dass die Evolution durch die Einschränkung des Potentials auf eine bestimmte Entwicklungsordnung qualitativ anders und die obige Annahme nicht gerechtfertigt ist. Durch die Entwicklung hat man es mit einem ganz anderen System von Flussgleichungen zu tun, welches andere Anfangswerte erfordert.

Bisher ist unklar welche zweite Bestimmungsgröße im Dilaton-Sektor des gekoppelten Modells verwendet werden soll, so dass nur die Glueballmasse bleibt, um die zwei freien Parameter an der UV-Skala, h_Λ und $\chi_{0,\Lambda}$, festzulegen. Wir werden daher zwei Strategien verfolgen, um trotz der resultierenden Freiheit in der Wahl der Startwerte sinnvolle Aussagen machen zu können. Zum einen werden wir die Startwerte, bei Fixierung der Glueballmasse im Infraroten, in einem möglichst weiten Bereich variieren und den Einfluss dieser Variation auf die betrachteten Größen untersuchen. Zum anderen besteht das Hauptziel der Betrachtung des gekoppelten Modells in der Untersuchung des Einflusses der Gluebälle auf den chiralen Phasenübergang im $O(4)$ -Sektor. Zu diesem Zweck werden wir das Modell auch in drei Dimensionen untersuchen und mit diesen Ergebnissen die Resultate in vier Dimensionen überprüfen. In drei Dimensionen stellt man die Parameter so ein, dass man bei Existenz eines Fixpunkts die Skalierungslösung findet. Auf diese Weise können wir zumindest die Verlässlichkeit der Aussagen testen, die den chiralen Phasenübergang betreffen.

9.1 Die Evolution bei $T = 0$

Die in diesem und in den folgenden Abschnitten dargestellten Ergebnisse wurden für eine Entwicklung des Dilaton-Sektors bis zur fünften Ordnung ($m = 5$) ermittelt (8.12). Untersucht haben wir Entwicklungen von der dritten bis zur siebten Ordnung, dabei zeigte sich jedoch kein qualitativer Unterschied in der Evolution, wenn man auch die Startwerte für jede Ordnung anpassen musste.

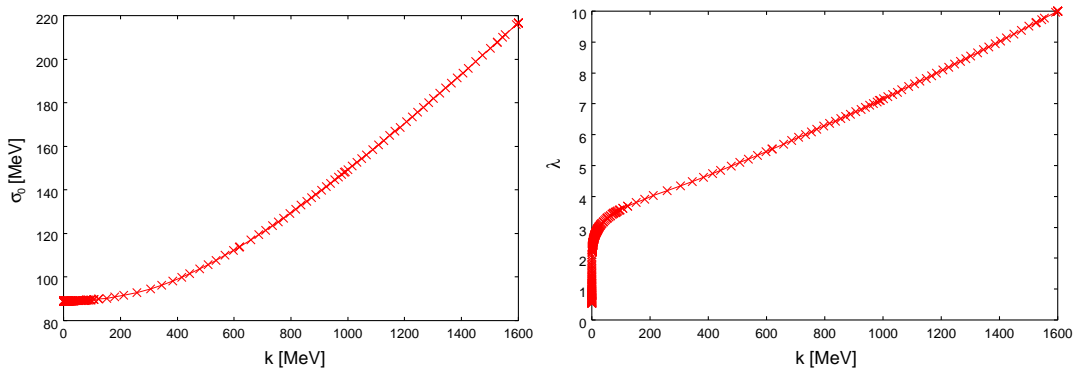


Abbildung 9.1: k -Evolution des Ordnungsparameters σ_0 und der Kopplung λ bei $T=0$.

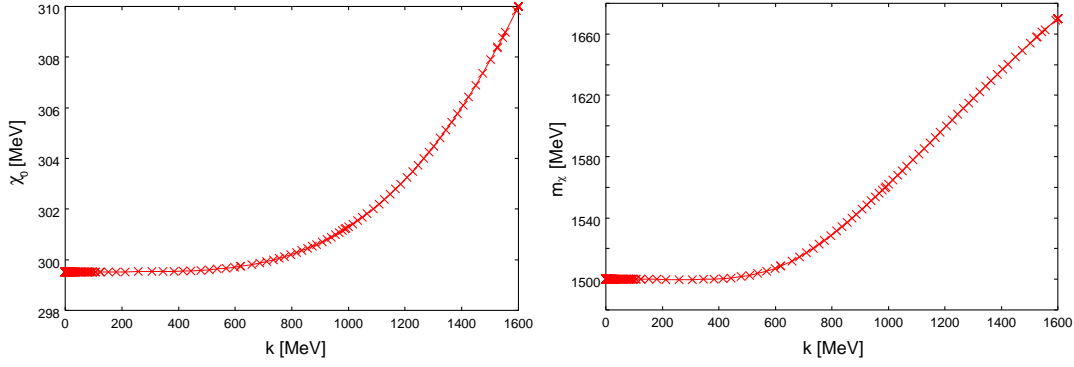


Abbildung 9.2: k -Evolution von χ_0 und der Glueballmasse m_χ bei $T=0$.

In den Abb. 9.1 und 9.2 ist die Evolution von σ_0 , λ , χ_0 und der Glueballmasse m_χ dargestellt. Die zur Berechnung der abgebildeten Kurven verwendeten Startwerte bei $\Lambda = 1.6$ GeV lauten

$$\sigma_0 = 216.7 \text{ MeV} \quad , \quad \lambda = 10 \quad , \quad \chi_0 = 310 \text{ MeV} \quad , \quad h = 508.8^4 \text{ MeV}^4 \quad .$$

Man erkennt, dass die Kurven bei etwa $k = 150$ MeV in eine Sättigung gehen, während λ , wie auch im $O(N)$ -Modell, ein logarithmisches Laufen gegen null zeigt. Dieses Verhalten rechtfertigt das Anhalten der Evolution bei einem kleinen endlichen Wert von k .

Ein Variation der Startwerte um die obigen Werte, bei gleichzeitiger Fixierung der Infrarotwerte für die Glueballmasse und σ_0 , ändert nichts am qualitativen Verlauf der Evolution.

Mit den auf diese Weise bei $T = 0$ gewonnenen Startwerten werden wir im nächsten Abschnitt die Evolution des gekoppelten Modells bei endlichen Temperaturen untersuchen.

9.2 Ergebnisse bei endlichen Temperaturen

In diesem Abschnitt werden wir den Einfluss endlicher Temperaturen auf das Verhalten des gekoppelten Systems untersuchen. Insbesondere werden wir den Verlauf des Ordnungsparameters im $O(4)$ -Sektor ermitteln und daraus den kritischen Exponenten β bestimmen. Das Temperaturverhalten der Erwartungswerte der Felder, σ_0 und χ_0 , ist in Abb. 9.3 dargestellt. Das Verhalten im mesonischen-Sektor ist sehr ähnlich dem Verhalten im reinen $O(4)$ -Modell. Man findet einen Phasenübergang zweiter Ordnung bei etwa $T_c = 150$ MeV und beobachtet ein Skalieren des Ordnungsparameters in der Nähe der kritischen Temperatur mit einem kritischen Exponenten von $\beta = 0.39$. In der logarithmischen Darstellung in Abb. 9.4 ist das Skalieren des Ordnungsparameters direkt ersichtlich. Der kritische Exponent β ist darin als die Steigung der Geraden ablesbar. Der Wert von $\beta = 0.39$, den wir hier finden, stimmt sehr gut mit $\beta = 0.40$ aus dem reinen $O(4)$ -Modell überein.

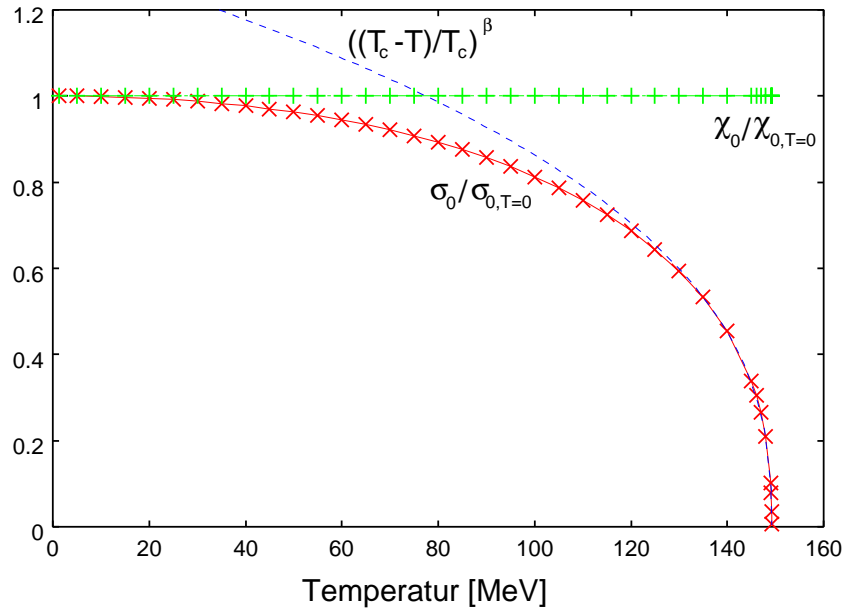


Abbildung 9.3: Temperaturverlauf der bei $T = 0$ normierten Erwartungswerte der Felder σ_0 und χ_0 und Vergleich mit der Widom-Skalierungsfunktion.

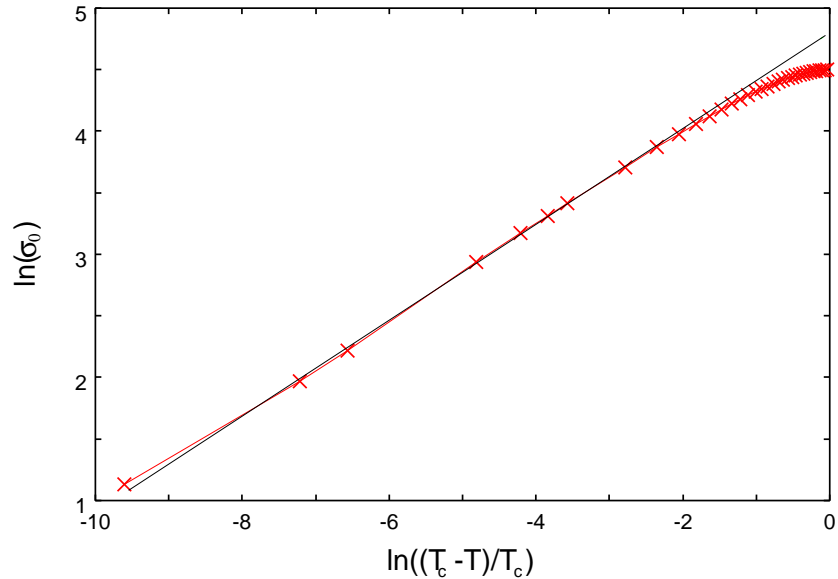


Abbildung 9.4: Skalierungsverhalten des Ordnungsparameters σ_0 als Funktion der reduzierten Temperatur. Der kritische Exponent β ist durch die Steigung der Geraden gegeben.

Auf der anderen Seite ändern sich die Eigenschaften des Dilaton-Felds im Temperaturbereich unterhalb von 150 MeV nur sehr wenig. Die Änderung sowohl der Glueballmasse als auch des Vakuumerwartungswerts der Gluebälle (vgl. Abb. 9.3) ist geringer als 0.1%. Die Untersuchungen, die hier am Beispiel der Entwicklung des Dilaton-Felds bis zur fünf-

ten Ordnung dargestellt wurden, bestätigen sich für alle betrachteten Ordnungen. Man findet jeweils eine kritische Temperatur für den Phasenübergang im $O(4)$ -Sektor von $T_c \approx 150$ MeV und eine Skalieren des Ordnungsparameters mit $\beta = 0.39$, während sich die Eigenschaften der Gluebälle unterhalb von T_c kaum ändern.

In der Behandlung des reinen Dilaton-Modells haben wir gesehen, dass man über die Beziehung (7.3) eine Verbindung des Vakuumerwartungswerts χ_0 mit dem Gluonkondensat herstellen kann. In Abb. 9.5 ist ein Vergleich des Temperaturverhaltens des Vakuumer-

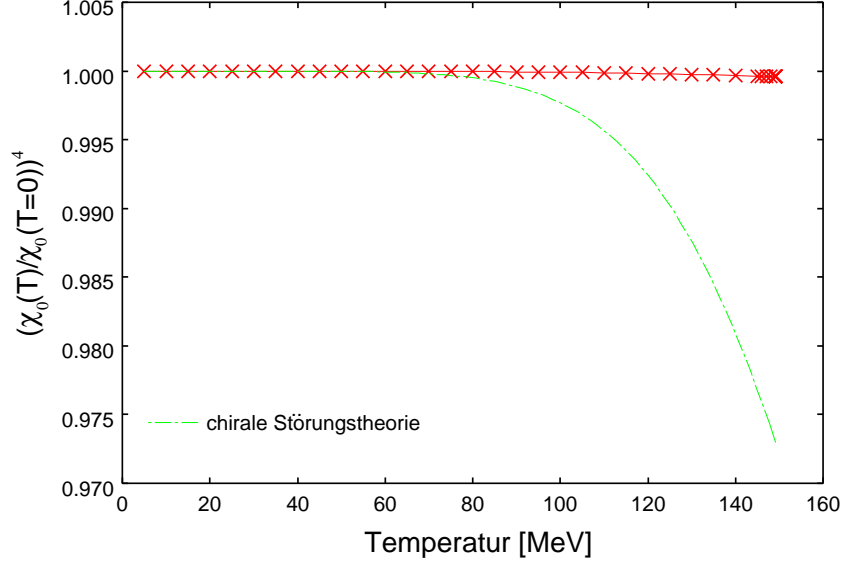


Abbildung 9.5: Vergleich des Temperaturverhaltens des Vakuumerwartungswerts des Dilaton-Felds mit einer Rechnung in chiraler Störungstheorie für das bei $T = 0$ normierte Gluonkondensat.

wartungswerts des Dilaton-Felds mit einer Rechnung in chiraler Störungstheorie für das normierte Gluonkondensat gezeigt. Die für den Vergleich herangezogene Beziehung für das bei $T = 0$ normierte Gluonkondensat gilt im chiralen Limes für den Fall zweier Quarkflavors und lautet [64], [65]

$$\frac{\langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle(T)}{\langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle(T=0)} = 1 - \frac{16\pi^4}{135} \frac{3}{29} \frac{T^8}{f_\pi^4 \langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle(T=0)} \left(\ln \frac{\Lambda_p}{T} - \frac{1}{4} \right), \quad (9.1)$$

wobei für die Konstante $\Lambda_p \simeq 275$ MeV gilt und ein Wert von $\langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle(T=0) = 0.5 \text{ GeV}^4$ angenommen wurde. Der Vergleich zeigt eine Übereinstimmung mit den Ergebnissen der chiralen Störungstheorie bis zu Temperaturen von etwa 60 MeV, bei höheren Temperaturen führt die Rechnung in chiraler Störungstheorie auf ein stärkeres Abschmelzen des Gluonkondensats. An der kritischen Temperatur des chiralen Phasenübergangs ist das in chiraler Störungstheorie berechnete Gluonkondensat um ca. 3% abgeschmolzen, während die Änderung der vierten Potenz des normierten Vakuumerwartungswerts des Dilaton-Felds in der Größenordnung von 0.1% liegt.

9.3 Der chirale Phasenübergang im gekoppelten Modell

Analog zum Vorgehen in der Untersuchung des reinen $O(N)$ -Modells werden wir auch hier das kritische Verhalten am Phasenübergang mit Hilfe von reskalierten Flussgleichungen in drei Dimensionen untersuchen.

9.3.1 Reskalierte Flussgleichungen

Die reskalierten, dimensionslosen Größen werden im Folgenden mit einer Tilde gekennzeichnet. Die Reskalierung der einzelnen Größen in einem D -dimensionalen System lautet

$$\sigma_0^2 = k^{D-2} \tilde{\sigma}_0^2 \quad , \quad \chi_0 = k^{\frac{D}{2}-1} \tilde{\chi}_0 \quad , \quad \lambda = k^{4-D} \tilde{\lambda}$$

$$c_j = k^{j-\frac{D}{2}(j-2)} \tilde{c}_j \quad , \quad U = k^D \tilde{U} .$$

Für die Reskalierung der Eigenwerte folgt daraus

$$\kappa_i = k^2 \tilde{\kappa}_i .$$

Mittels dieser Reskalierung kann man die rechte Seite der Flussgleichung (8.11) durch die dimensionslosen Eigenwerte ausdrücken

$$k \frac{\partial}{\partial k} U = \frac{S_D k^D}{D} \left[\sum_{i=1}^5 \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}_i} \right] . \quad (9.2)$$

Die dimensionsbehafteten Flussgleichungen (8.16)-(8.23) lassen sich nun leicht in Flussgleichungen für die dimensionslosen reskalierten Größen überführen. Dazu muss man nur alle Größen in den Flussgleichungen gemäß den obigen Reskalierungen durch die entsprechenden dimensionslosen Größen ersetzen. Die numerische Auswertung der so erzeugten reskalierten Flussgleichungen ist Thema des nächsten Abschnitts.

9.3.2 Numerische Ergebnisse

Ein Phasenübergang zweiter Ordnung ist generell mit einem Fixpunkt der Renormierungsgruppentransformation im Infraroten verbunden. Die Situation im $O(4)$ -Sektor ist ganz analog zu der im reinen $O(N)$ -System. Daher werden wir hier die gleiche Analyse durchführen.

In den Lösungen der Flussgleichungen ist der Fixpunkt mit dem Auftreten einer Skalierungslösung verknüpft. Zur Untersuchung des Phasenübergangs in drei Dimensionen und der Bestimmung der kritischen Exponenten muss man daher die Anfangswerte so justieren,

dass man die Skalierungslösung erreicht. Je genauer man dabei die kritischen Startwerte einzustellen vermag, desto länger verbleibt das System auf der Skalierungslösung und ermöglicht so eine genauere Bestimmung der kritischen Exponenten.

Im von uns untersuchten Parameterbereich stellt man fest, dass es, unabhängig von der Wahl der Anfangswerte im Dilaton-Sektor, immer möglich ist, die Startwerte im $O(4)$ -Sektor so zu justieren, dass man eine Skalierungslösung findet. Auf der anderen Seite haben wir im Dilaton-Sektor im untersuchten Parameterbereich keine Anzeichen für eine Skalierungslösung gefunden. In Abb. 9.6 sind der Wilson-Fisher-Fixpunkt und die Skalierungslösung von $\tilde{\sigma}_0^2$ und $\tilde{\lambda}$, wie man sie im $O(4)$ -Sektor findet, dargestellt. Die Un-

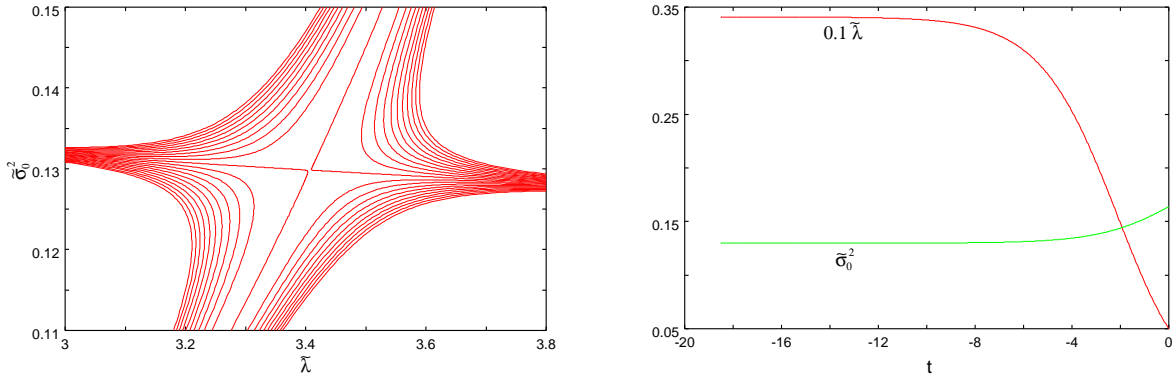


Abbildung 9.6: Wilson-Fisher-Fixpunkt und Skalierungslösung im $O(4)$ -Sektor des gekoppelten Modells.

tersuchungen führen bei der Variation der Startwerte im Dilaton-Sektor jeweils zu dem qualitativ gleichen Verhalten des Systems und darüber hinaus auf die gleichen kritischen Exponenten für den Phasenübergang im $O(4)$ -Sektor.

Aus den Steigungen der Geraden in Abb. 9.7 liest man für die kritischen Exponenten die Werte $\beta = 0.398$ und $\nu = 0.79$ ab. Die in den Abbildungen verwendete Notation ist die

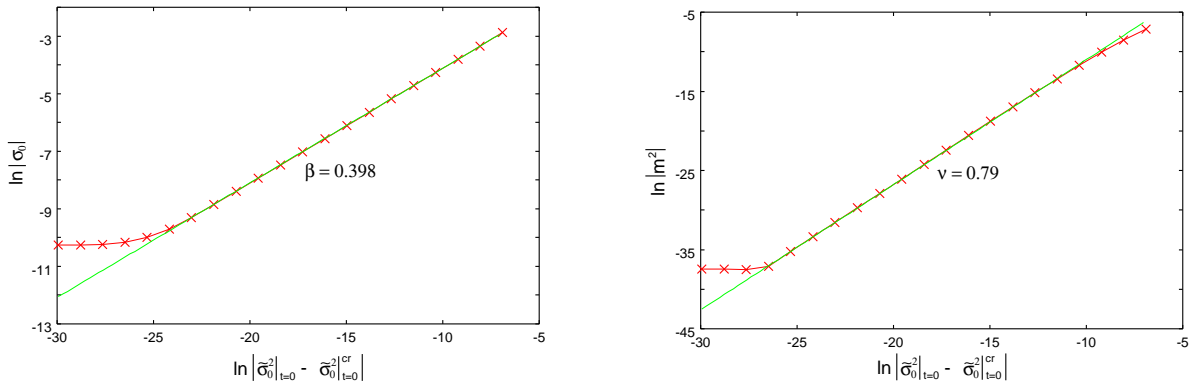


Abbildung 9.7: Bestimmung der kritischen Exponenten β und ν des Phasenübergangs im $O(4)$ -Sektor.

gleiche wie in Kap. 5, wobei die renormierte Masse zur Bestimmung von ν hier durch

$$m^2 = \lambda\sigma_0^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \Big|_{min} = \lambda\sigma_0^2 \quad \text{für } k \rightarrow 0 \quad (9.3)$$

gegeben ist (vgl. dazu (5.30)). Der Wert für den kritischen Exponenten β stimmt innerhalb des numerischen Fehlers mit dem Resultat aus der Untersuchung in vier Dimensionen überein. Darüber hinaus findet man sehr gute Übereinstimmung mit den Werten der kritischen Exponenten ν und β , die wir im reinen $O(4)$ -Modell gefunden haben. Mit Hilfe der Skalierungsrelationen (5.24)-(5.27) folgt daraus außerdem die Übereinstimmung der anderen kritischen Exponenten mit denen aus dem reinen $O(4)$ -Modell.

Wir finden somit im $O(4)$ -Sektor des gekoppelten Modell das gleiche kritische Verhalten, mit einem nichttrivialen Wilson-Fisher-Fixpunkt und den gleichen kritischen Exponenten, wie im ungekoppelten $O(4)$ -Modell. Diese Beobachtung legt die Schlussfolgerung nahe, dass die Kopplung der Gluebälle an das $O(4)$ -Modell keinen, oder zumindest nur einen sehr geringen Einfluss auf den chiralen Phasenübergang im mesonischen Sektor des gekoppelten Modells hat. Campbell et al. untersuchen in [62], [55] eine Verbindung zwischen dem chiralen Phasenübergang und dem Deconfinementübergang. Dazu betrachten sie ein effektives Modell mit nichtlinearer Realisierung der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie und durch ein Dilaton-Feld gebrochener Skaleninvarianz. In diesem Modell identifizieren sie den Vakuumerwartungswert des Dilaton-Felds mit dem Ordnungsparameter für den Deconfinementübergang und das Quarkkondensat mit dem chiralen Ordnungsparameter, wobei der Wert des Quarkkondensats mit dem Dilaton-Feld skaliert. Dies führt auf zwei unterschiedliche Szenarien. Findet der chirale Phasenübergang bei kleineren Temperaturen statt, so wird er vom Verhalten des Vakuumerwartungswerts des Dilaton-Felds zwar beeinflusst, ist aber weiterhin zweiter Ordnung. Für den Vakuumerwartungswert des Dilaton-Felds selbst finden sie einen Phasenübergang erster Ordnung. Sollte daher die Übergangstemperatur dieses Phasenübergangs geringer sein als die des chiralen Phasenübergangs, so hat das zur Folge, dass an dieser Temperatur auch das Quarkkondensat auf Null springt. In diesem Szenario löst der Deconfinement Phasenübergang quasi den chiralen Phasenübergang aus. Das erste Szenario ist mit unseren Ergebnissen verträglich. Das zweite Szenario können wir dagegen in unserem Modell ausschließen, da wir weder im gekoppelten Modell, noch im reinen Dilaton-Modell Anzeichen für einen Phasenübergang im Dilaton-Sektor gefunden haben. Neben dem verschwindenden Einfluss der Gluebälle auf den chiralen Phasenübergang im mesonischen Sektor des Modells ändern sich die Eigenschaften der Gluebälle selbst unterhalb der kritischen Temperatur auch nur in sehr geringem Maße. Beide Beobachtungen sind wahrscheinlich auf die große Masse der Gluebälle von etwa 1.5 GeV zurückzuführen, da bei den betrachteten Temperaturen die thermischen Fluktuationen nicht ausreichen, um die schweren Gluebälle nennenswert anzuregen.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir im Wesentlichen zwei Zielsetzungen verfolgt, die sich in den beiden Teilen der Arbeit widerspiegeln. Ziel des ersten Teils war es, den verwendeten Renormierungsgruppenzugang vorzustellen und durch Vergleich der Ergebnisse mit anderen Zugängen seine Leistungsfähigkeit zu überprüfen. Im zweiten Teil stand dann die Anwendung des Zugangs auf kompliziertere Modelle im Vordergrund.

Den Rahmen für die Untersuchungen im ersten Teil bildet das $O(N)$ -Modell, dessen Eigenschaften im einleitenden ersten Kapitel vorgestellt wurden. Aufgrund der vielen Untersuchungen in der Literatur ist das $O(N)$ -Modell als Testobjekt besonders geeignet, da sich vielfältige Vergleichsmöglichkeiten bieten. Die Besonderheit des von uns verwendeten Zugangs besteht in der Kombination der Schwinger-Eigenzeit-Regularisierung mit einer Heat-Kernel-Entwicklung zur Ableitung von Renormierungsgruppen-Flussgleichungen. Die Ableitung dieser Flussgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktions-Renormierung wurde im zweiten und dritten Kapitel im Detail dargestellt und ausführlich diskutiert. Daneben findet sich dort ein Vergleich mit den exakten Renormierungsgruppen. Die Äquivalenz mit den exakten Renormierungsgruppen-Flussgleichungen konnte zwar nicht analytisch gezeigt werden, aber die numerischen Untersuchungen zeigten eine sehr gute Übereinstimmung. Es wäre wünschenswert, diese Verbindung auch analytisch herzustellen.

Im vierten und fünften Kapitel stand die numerische Auswertung der zuvor abgeleiteten Flussgleichungen im Mittelpunkt. Die dazu verwendeten numerischen Methoden gestatteten die Berechnung des vollen effektiven Potentials im Infrarotbereich der Theorie. Neben dem generellen Temperaturverhalten des effektiven Potentials und der Wellenfunktions-Renormierung lag unser besonderes Interesse auf der Untersuchung des kritischen Verhaltens am Phasenübergang von der Phase spontan gebrochener zu restaurierter $O(N)$ -Symmetrie. Dieser Phasenübergang ist in drei Dimensionen mit dem Auftreten des nicht-trivialen Wilson-Fisher-Fixpunkts verbunden. Im Rahmen der Untersuchung dieses Fixpunkts berechneten wir die zugehörigen Beta-Funktionen und die kritischen Exponenten. Aufgrund ihres nicht-perturbativen Charakters sind die Renormierungsgruppen-Flussgleichungen für solche Untersuchungen des kritischen Verhaltens an Phasenübergängen zweiter Ordnung besonders geeignet. Vier der sechs kritischen Exponenten des $O(N)$ -Modells berechneten wir unabhängig voneinander, dabei erhielten wir eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Zugänge, wie z.B. Gitter-Rechnungen oder auch störungstheoretischen Berechnungen. Das versetzte uns in die Lage, die vier Skalierungsrelationen, die die kritischen Exponenten miteinander

verbinden, als weiteren Test für die Konsistenz unserer Ergebnisse zu verwenden. Den Abschluss des ersten Teils bildete eine Betrachtung zur Abhängigkeit der Resultate vom gewählten Regularisierungsschema, um den Einfluss der Wahl der verwendeten Regulator-Funktion zu untersuchen.

Im zweiten Teil wurde der so getestete Zugang zur Untersuchung einer effektiven Realisierung der Spur-Anomalie der QCD auf das Dilaton-Modell angewandt. Das Dilaton-Feld identifizierten wir mit einem Glueball. Bei endlichen Temperaturen untersuchten wir dann unter anderem das Verhalten der Glueballmasse und den Erwartungswert des Dilaton-Felds, der mit dem Gluon-Kondensat verbunden ist. Im untersuchten Temperaturbereich fanden wir keine Anzeichen für einen Phasenübergang im Dilaton-Modell, den man unter Umständen mit dem Deconfinementübergang identifizieren könnte.

In einem weiteren Schritt koppelten wir das Dilaton-Modell mit dem $O(4)$ -Modell und studierten den Einfluss der Gluebälle auf den Phasenübergang im $O(4)$ -Sektor. Hier waren wir aus technischen Gründen dazu gezwungen, das Potential in einer Entwicklung abzuschneiden, was zu Schwierigkeiten bei der Fixierung der Anfangsbedingungen führte. Eine Erweiterung auf die Behandlung des vollen Potentials, wäre daher eine Möglichkeit diese Schwierigkeiten zu vermeiden. Es zeigte sich, dass die Kopplung an die Gluebälle das kritische Verhalten im $O(4)$ -Sektor nicht beeinflusst und wir weiterhin einen Phasenübergang zweiter Ordnung mit $O(4)$ -kritischen Exponenten finden.

Neben den angesprochenen technischen Verbesserungsmöglichkeiten und des Nachweises der Exaktheit des Zugangs gibt es noch eine Reihe lohnenswerter Erweiterungen. Es wäre beispielsweise wünschenswert, den Zugang auf endliche Dichten zu erweitern, um im Zuge dessen das gesamte Phasendiagramm sowohl bei endlichen Temperaturen als auch bei endlichen Dichten untersuchen zu können. Unter der Voraussetzung, dass man Phasenübergänge unterschiedlicher Ordnung bei endlicher Temperatur und endlicher Dichte findet, könnte man damit einen möglichen trikritischen Punkt im Phasendiagramm untersuchen. Ein weiterer interessanter Punkt ist die Anwendung des Zugangs auf andere Modelle, wie z.B. das NJL-Modell.

Anhang A

Mathematische Relationen

A.1 Gammafunktion

Definition:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.1})$$

Eigenschaft der Gammafunktion:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A.2})$$

Spezielle Funktionswerte:

$$\Gamma(1) = 1 \quad ; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Wichtige Integrale

Integrale in d -Dimensionen:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{d}{2}}} e^{-tm^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} = \frac{2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty dp p^{d-1} = S_d \int_0^\infty dp p^{d-1} \quad (\text{A.5})$$

Verallgemeinerte Gauß-Integrale:

$$\int d^d p (2\pi)^d e^{tp^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \quad (\text{A.6})$$

$$\int d^d p (2\pi)^d e^{tp^2} p_\mu p_\nu = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{d}{2}+1}} \quad (\text{A.7})$$

Integrale aus der Eigenzeit-Regularisierung:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{A.8})$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad (\text{A.9})$$

A.3 Zur Spurbildung der Fluktuationmatrix $\tilde{\mathcal{M}}$

Die folgende Beziehung wurde im achten Kapitel zur Berechnung der Spur von $\exp(-\tau\tilde{\mathcal{M}})$ benutzt:

$$\begin{aligned} \text{tr} e^{-\tau\tilde{\mathcal{M}}} &= \text{tr} e^{-\tau S^{-1}\tilde{D}S} \\ &= \text{tr} e^{-\tau\tilde{D}} \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{1} + (-\tau)\tilde{D} + \frac{(-\tau)^2}{2!}\tilde{D}^2 + \frac{(-\tau)^3}{3!}\tilde{D}^3 + \dots \right] \\ &= N + 1 + (-\tau) \sum_i EW_i + \frac{(-\tau)^2}{2!} \sum_i EW_i^2 + \frac{(-\tau)^3}{3!} \sum_i EW_i^3 + \dots \\ &= \sum_i e^{-\tau EW_i} , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

worin EW_i die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\mathcal{M}}$ und \tilde{D} die zugehörige Diagonalmatrix bezeichnet.

Anhang B

Details zur Berechnung der Flussgleichungen

B.1 Vereinfachung der Ausdrücke in Gleichung (3.20)

Die Rechnung zur Auswertung der Ausdrücke in Gleichung (3.20) soll am Beispiel des Terms

$$T_1 = \text{tr} \left[Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{\mathcal{M}})^k \partial_\mu^2 (\tilde{\mathcal{M}})^{n-1-k} \right] \quad (\text{B.1})$$

demonstriert werden. Mit Hilfe der Projektionsoperatoren (3.21) und unter Ausnutzung von deren Eigenschaften (3.24) lässt sich T_1 schreiben als

$$\begin{aligned} T_1 &= -\text{tr} \left[Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \left(m_\sigma^{2k} X_1 + m_\pi^{2k} X_2 \right) \partial_\mu^2 \left(m_\sigma^{2n-1-k} X_1 + m_\pi^{2n-1-k} X_2 \right) \right] \\ &= -\text{tr} \left[Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} m_\sigma^{2k} (\partial_\mu^2 m_\sigma^{2n-1-k}) X_1 + m_\pi^{2k} (\partial_\mu^2 m_\pi^{2n-1-k}) X_2 + m_\sigma^{2n-1} X_1 \partial_\mu^2 X_1 \right. \\ &\quad \left. + m_\pi^{2n-1} X_2 \partial_\mu^2 X_2 + m_\sigma^{2k} m_\pi^{2n-1-k} X_1 \partial_\mu^2 X_2 + m_\pi^{2k} m_\sigma^{2n-1-k} X_2 \partial_\mu^2 X_1 \right] \\ &= -\text{tr} \left[Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left((n-1-k) m_\sigma^{2n-2} \partial_\mu^2 m_\sigma^2 + (n-1-k)(n-2-k) m_\sigma^{2n-3} \partial_\mu m_\sigma^2 \partial_\mu m_\sigma^2 \right) X_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left((n-1-k) m_\pi^{2n-2} \partial_\mu^2 m_\pi^2 + (n-1-k)(n-2-k) m_\pi^{2n-3} \partial_\mu m_\pi^2 \partial_\mu m_\pi^2 \right) X_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(m_\sigma^{2n-1} + m_\pi^{2n-1} - m_\pi^{2k} m_\sigma^{2n-1-k} - m_\sigma^{2k} m_\pi^{2n-1-k} \right) X_1 \partial_\mu^2 X_1 \right\} \right]. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werten wir die Summe über den Index k aus. Für die einzelnen Summen findet man

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) = \frac{n^2-n}{2} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k)(n-2-k) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_\sigma^{2^{n-1}} = nm_\sigma^{2^{n-1}}. \quad (\text{B.5})$$

Damit vereinfacht sich T_1 zu

$$\begin{aligned} T_1 = & -\text{tr} \left[Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \left\{ \right. \\ & \left(\frac{n^2-n}{2} m_\sigma^{2^{n-2}} \partial_\mu^2 m_\sigma^2 + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) m_\sigma^{2^{n-3}} \partial_\mu m_\sigma^2 \partial_\mu m_\sigma^2 \right) X_1 \\ & \left(\frac{n^2-n}{2} m_\pi^{2^{n-2}} \partial_\mu^2 m_\pi^2 + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) m_\pi^{2^{n-3}} \partial_\mu m_\pi^2 \partial_\mu m_\pi^2 \right) X_2 \\ & \left. + \left(nm_\sigma^{2^{n-1}} + nm_\pi^{2^{n-1}} - 2 \frac{m_\sigma^{2^n} - m_\pi^{2^n}}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \right) X_1 \partial_\mu^2 X_1 \right\} \right]. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Der nächst Schritt besteht darin, die Summe über den Index n durch Exponentialfunktionen auszudrücken:

$$\begin{aligned} T_1 = & - \left(\frac{1}{2} \tau^2 \partial_\mu^2 m_\sigma^2 - \frac{1}{3} \tau^3 \partial_\mu m_\sigma^2 \partial_\mu m_\sigma^2 \right) e^{-m_\sigma^2 \tau} \text{tr} [X_1] \\ & - \left(\frac{1}{2} \tau^2 \partial_\mu^2 m_\pi^2 - \frac{1}{3} \tau^3 \partial_\mu m_\pi^2 \partial_\mu m_\pi^2 \right) e^{-m_\pi^2 \tau} \text{tr} [X_2] \\ & + \tau \left(e^{-m_\sigma^2 \tau} - 1 \right) \text{tr} [X_1 \partial_\mu^2 X_1] + \tau \left(e^{-m_\pi^2 \tau} - 1 \right) \text{tr} [X_1 \partial_\mu^2 X_1] \\ & - \frac{2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \left(\left(e^{-m_\pi^2 \tau} + m_\pi^2 \tau - 1 \right) - \left(e^{-m_\sigma^2 \tau} + m_\sigma^2 \tau - 1 \right) \right) \text{tr} [X_1 \partial_\mu^2 X_1] \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man noch etwas zusammenfassen, so dass man schließlich

$$\begin{aligned} T_1 = & - \left(\frac{1}{2} \tau^2 \partial_\mu^2 m_\sigma^2 - \frac{1}{3} \tau^3 \partial_\mu m_\sigma^2 \partial_\mu m_\sigma^2 \right) e^{-\tau m_\sigma^2} \text{tr} [X_1] \\ & - \left(\frac{1}{2} \tau^2 \partial_\mu^2 m_\pi^2 - \frac{1}{3} \tau^3 \partial_\mu m_\pi^2 \partial_\mu m_\pi^2 \right) e^{-\tau m_\pi^2} \text{tr} [X_2] \\ & - \left(\frac{2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \left(e^{-\tau m_\pi^2} - e^{-\tau m_\sigma^2} \right) - \tau \left(e^{-\tau m_\sigma^2} + e^{-\tau m_\pi^2} \right) \right) \text{tr} [X_1 \partial_\mu^2 X_1] \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

erhält. Auswerten der auftretenden Spuren gemäß (3.28)-(3.30) führt direkt auf die entsprechenden Terme in den Gleichungen (3.32) und (3.33).

B.2 Berechnung der Heat-Kernel-Abschneidefunktion

In der Berechnung der effektiven Wirkung haben wir, durch Vergleich mit einer scharf abgeschrittenen Impulsintegration, folgenden Ausdruck für die Ableitung der Heat-Kernel-Abschneidefunktion gefunden,

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k^{(i)} = c^{(i)} (\tau Z k^2)^{d/2+i} e^{-\tau Z k^2}, \quad (\text{B.9})$$

wobei die Vorfaktoren $c^{(i)}$ durch

$$c^{(i)} = -\frac{2^{i+1}(d-2)!!}{\Gamma(d/2)(d-2+2i)!!} \quad \text{für } i \geq 0 \quad \text{für } i \geq 1 \quad (\text{B.10})$$

gegeben sind. Diese Differentialgleichung läßt sich direkt integrieren, dazu machen wir die Substitution $u = \tau Z k^2$,

$$\begin{aligned} f_k^{(i)} &= -c^{(i)} \int_{\tau Z k^2}^{\infty} \frac{1}{2} u^{(d/2+i)-1} e^{-u} du \\ &= -\frac{1}{2} c^{(i)} \Gamma\left(\frac{d}{2} + i, \tau Z k^2\right), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

darin bezeichnet Γ die unvollständige Gammafunktion.

B.3 Ableitung der Beziehung $G(x, y) = (\Gamma_k^{av,(2)} + R_k)^{-1}$

In Abschnitt 3.4.2 wurde diese Beziehung zur Ableitung der Funktionalflussgleichung im “average action”-Zugang verwendet. Darin bezeichnen $G(x, y)$ die verbundenen zwei-Punkt Funktionen, $\Gamma_k^{av,(2)}$ die zweite Funktionalableitung der “average action” nach dem Erwartungswert des Felds ϕ_{cl} und R_k den eingeführten Regulator. Unter Verwendung von (3.59) für ΔS_k findet man

$$\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} (\Gamma_k^{av}[\phi_{cl}] + \Delta S_k[\phi_{cl}]) = \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \Gamma_k^{av}[\phi_{cl}] + R_k. \quad (\text{B.12})$$

Dies lässt sich wiederum schreiben als

$$\Gamma_k^{av,(2)}[\phi_{cl}] + R_k = \frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)}. \quad (\text{B.13})$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} W_k^{av}[J] \\ &= \frac{\delta\phi(x)}{\delta J(y)}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt sofort

$$\int d^d y G(x, y) \left(\Gamma_k^{av,(2)}[\phi_{cl}] + R_k \right) (y, z) = \delta(x - z) \quad (\text{B.15})$$

und damit

$$G(x, y) = \left(\Gamma_k^{av,(2)}[\phi_{cl}] + R_k \right)^{-1}, \quad (\text{B.16})$$

die gesuchte Beziehung.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Gell-Mann, M. Lévy, *Nuovo Cimento*, **16**, (1960) 705
- [2] R. Pisarski, F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 338.
- [3] H. Meyer-Ortmanns, *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 473 und Referenzen darin.
- [4] K. Rajagopal, *Quark-Gluon Plasma 2*, World Scientific, 1995.
- [5] J. J. Binney, N.J. Dowrick, A. J. Fisher and M. E. J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1993.
- [6] K. I. Aoki, *Int. J. Mod. Phys.* **B14** (2000) 1249.
- [7] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford University Press, 1995.
- [8] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995.
- [9] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, [hep-ph/0005122](#).
- [10] K. G. Wilson, J. Kogut, *Physics Reports* **12**, No. 2 (1974) 75-200.
- [11] E. C. G. Stueckelberg, A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26** (1953) 499.
- [12] M. Gell-Mann, F. E. Low, *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300.
- [13] L.P. Kadanoff, *Physica* **2** (1966) 263; K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4** (1971) 3174, 3184.
- [14] C. Bagnuls, C. Bervillier, [hep-th/0002034](#).
- [15] R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9** 1686 (1974).
- [16] T. R. Morris, *Phys. Lett.* **B334** (1994) 355; T. R. Morris, M.D. Turner, *Nucl. Phys.* **B509** (1998) 637.
- [17] C. Wetterich, *Z. Phys.* **C57** (1993) 451.
- [18] A. Bonanno, V. Branchina, H. Mohrbach, D. Zappalà, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 065009.

- [19] N. Tetradis, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B 422** (1994) 541.
- [20] J. Schwinger, Phys. Rev **82** (1951) 664.
- [21] J. Schwinger, Phys. Rev **D13** (1976) 3224.
- [22] F. J. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev **A8**, (1972) 401.
- [23] A. Bonanno, D. Zappalà, Phys. Rev. **D57** (1998) 7383.
- [24] R. D. Ball, Phys. Rep. **182** (1989) 1; B.-J. Schaefer, H.-J. Pirner, Nucl. Phys. **A627** (1997) 481.
- [25] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, K. D. Rothe *Non-Perturbative Methods in two dimensional Quantum Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1991).
- [26] B. S. De Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York, 1965.
- [27] R. I. Nepomechie, Phys. Rev. **D31** (1985) 3291.
- [28] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195; Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1733.
- [29] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein
Dynamics of the Standard Model, Cambridge University Press, 1992.
- [30] C. M. Fraser, Z. Phys. **C28** (1985) 101.
- [31] J. A. Zuk, Phys. Rev. **D32** (1985) 2653.
- [32] M. Oleszczuk, Z. Phys. **C64** (1994) 533.
- [33] R. Floreanini, R. Percacci, Phys. Lett. **B356** (1995) 205.
- [34] S.-B. Liao, Phys. Rev. **D53** (1996) 2020.
- [35] A. Bonanno, D. Zappalà, hep-th/0010095.
- [36] G. Papp, B.-J. Schaefer, H.-J. Pirner, J. Wambach, Phys. Rev. **D61** (2000) 096002.
- [37] C. Wetterich, Phys. Lett. **B301** (1993) 90; D.-U. Jungnickel and C. Wetterich, Phys. Rev. **D53** (1996) 5142; J. Berges, D.-U. Jungnickel and C. Wetterich, Phys. Rev. **D59** (1999) 034010; J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, hep-ph/0005122
- [38] B.-J. Schaefer and H.-J. Pirner, Nucl. Phys. **A660** (1999) 439.
- [39] M. D’Attanasio, M Pietroni, Nucl. Phys. **B472** (1996) 711; B. Bergerhoff, J. Reingruber, Phys. Rev. **D60** (1999) 105036.
- [40] S.-B. Liao and M. Strickland, Nucl. Phys. **B532** (1998) 753.

- [41] J. Polonyi, *nucl-th/9902006 Hirschegg Proceedings 1999*; S.-B. Liao and J. Polonyi, *Annals of Physics* **222** (1993) 122.
- [42] S.-B. Liao and M. Strickland, *Nucl. Phys.* **B497** (1997) 611.
- [43] J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt, F. Freire, N. Tetradis and Ch. Wetterich, *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 2367.
- [44] W. H. Press et al., *Numerical Recipes*, 2nd edition, (Cambridge University Press, 1992).
- [45] N. Tetradis, C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B398** (1993) 659; M. Reuter, N. Tetradis, C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B401** (1993) 567; C. Wetterich, N. Tetradis, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 4029; N. Tetradis, C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B422** (1994) 541.
- [46] J. Gasser, H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B184** (1987) 83; P. Gerber, H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B321** (1989) 387.
- [47] J. Polonyi, *nucl-th/9902006 Hirschegg Proceedings 1999*; S.-B. Liao, J. Polonyi, *Annals of Physics* **222** (1993) 122.
- [48] K. G. Wilson, M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 240.
- [49] H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin, *Phys. Lett.* **B 272** (1991) 39.
- [50] G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel and D. I. Meiron, *Phys. Rev.* **B17** (1978) 1365; G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, M. S. Green and D. I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1351; J. Zinn-Justin, *hep-th/0002136*.
- [51] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1990) Kapitel 25 und Referenzen darin.
- [52] K. Kanaya and S. Kaya, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 2404.
- [53] K. I. Aoki, K. Morikawa, W. Souma, J. I. Sumi, H. Terao, *Prog. Theor. Phys.* **99** (1998) 451; J. O. Andersen, M. Strickland, *cond-mat/9811096*.
- [54] D. F. Litim, *hep-th/0103195*.
- [55] E. K. Heide, S. Rudaz, P. J. Ellis, *Phys. Lett.* **B 293** (1992) 259.
- [56] C. G. Callan, S. Coleman, R. Jackiw, *Ann. Phys.* **59** (1970) 42.
- [57] R. J. Crewther, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 1421; M. S. Chanowitz, J. Ellis, *Phys. Lett.* **B40** (1972) 397; J. C. Collins, A. Duncan, S. D. Joglekar, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 438.
- [58] B. A. Campbell, J. Ellis, K. A. Olive, *Phys. Lett.* **235B** (1990) 325; *Nucl. Phys.* **B345** (1990) 57.

- [59] K. M. Bitar et. al., Nucl. Phys. **B20** (proc. Suppl.) (1991) 390.
- [60] J. Sollfrank, U. Heinz, Z. Phys. **C65** (1995) 111.
- [61] D. E. Miller, BI-TP 2000/17, [hep-ph/0008031](#).
- [62] P. J. Ellis, E. K. Heide, S. Rudaz , Phys. Lett. B 282 (1992) 271.
- [63] H. Gomm, J. Schechter , Phys. Lett. B 158 (1985) 449.
- [64] H. Leutwyler, Bern Univ, -BUTP-91-43.
- [65] N. O. Agasian, [hep-ph/0104014v2](#).

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Wambach für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung während der Arbeit bedanken.

Herrn Prof. Dr. J. Kübler danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. B.-J. Schaefer für die hervorragende Zusammenarbeit und seine ständige Diskussionsbereitschaft.

Weiterhin möchte ich allen Mitgliedern der NHC-Gruppe für die angenehme und freundliche Arbeitsatmosphäre danken.

Meinen Eltern schließlich danke ich für ihre Hilfe und Unterstützung während meiner gesamten Studienzzeit.

Lebenslauf

Angaben zur Person:

Name: Oliver Bohr
Geburtsdatum: 19. September 1970
Geburtsort: Idar-Oberstein (Rheinland-Pfalz)
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Bildungsweg:

1977 - 1981: Besuch der Grundschule in Geinsheim
1981 - 1983: Besuch der Förderstufe der Mittelpunktschule in Trebur
1983 - 1990: Besuch des Prälat-Diehl-Gymnasiums Groß-Gerau
Juni 1990: Abitur

Oktober 1991: Beginn des Physikstudiums an der Technischen Hochschule Darmstadt

März 1994 : Vordiplom
November 1997: Diplom

seit Dezember 1997: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kernphysik der TU Darmstadt