



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ein neuer Ansatz zur Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen

vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von
M. Sc. Alexander Dietz

Referent: Professor Dr. Ulrich Reif
Korreferent: Professor Dr. Kai Hormann
Korreferent: Professor Jörg Peters, Ph.D.

Darmstadt 2025

Dietz, Alexander: Ein Neuer Ansatz zur Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen
Darmstadt, Technische Universität Darmstadt
Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUPrints: 2025
URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-301942
DOI: <https://doi.org/10.26083/tuprints-00030194>
Tag der mündlichen Prüfung: 22. Mai 2025

Veröffentlicht unter CC-BY 4.0 International
<https://creativecommons.org/licenses/>

Published under CC-BY 4.0 International
<https://creativecommons.org/licenses/>

Verwandte Veröffentlichungen/Related Publications:

Englische Übersetzung/English Translation:
Dietz, Alexander: A New Approach to the Construction of Subdivision Algorithms
TUPrints. Darmstadt. 2025. DOI: <https://doi.org/10.26083/tuprints-00030195>

Softwarepaket/Software Package:
Dietz, Alexander: A New Approach to the Construction of Subdivision Algorithms: The MATLAB Software Package
TUDatalib. Darmstadt. 2025. DOI: <https://doi.org/10.48328/tudatalib-1841>

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen für verallgemeinerte quadratische und kubische B-Spline-Subdivision für Subdivisionsflächen und -volumen vorgestellt. Dabei wird zunächst ein Katalog von Qualitätskriterien für diese Subdivisionsalgorithmen erarbeitet, an denen sich die Konstruktion orientiert.

Die Konstruktion erstellt in einem ersten Schritt die gewünschten subdominanten Eigenvektoren als Ecken regelmäßiger konvexer 2-Polytope für Flächen und als Ecken konvexer 3-Polytope für Volumen mittels Kreispackungen. Anschließend wird mithilfe dieser Polytope eine Colin-de-Verdière-Matrix für die verallgemeinerte quadratische und eine Colin-de-Verdière-artige Matrix für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision erzeugt. Diese Matrizen werden anschließend mithilfe des Matrixexponentials so angepasst, dass die Subdivisionsmatrizen mit den gewünschten Eigenschaften entstehen.

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Subdivisionsalgorithmen weisen empirisch einen subdominanten Eigenwert $1/2$ mit gewünschter algebraischer und geometrischer Vielfachheit auf. Für den quadratischen Fall lässt sich diese Eigenschaft sogar formal beweisen. Außerdem bilden die zugehörigen Eigenvektoren im zentralen Bereich für die verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivisionsalgorithmen ein konvexes Polytop und für die verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivisionsalgorithmen bilden sie die Verfeinerung eines konvexen Polytops. Zusätzlich erfüllen die so konstruierten Subdivisionsalgorithmen eine Vielzahl weiterer Qualitätskriterien wie die der affinen Invarianz und die der konvexen Hülle. Zudem haben sie einen dominanten Eigenwert 1, respektieren alle Symmetrien der zugrundeliegenden Struktur und weisen geeignete Träger der Verfeinerungsregeln auf.

Der wissenschaftliche Mehrwert dieser Arbeit liegt in der Ausarbeitung der Qualitätskriterien und in der neuartigen Konstruktion der Subdivisionsalgorithmen mit zugehörigen Beweisen und empirischer Analyse. Speziell für verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivisionsflächen wird eine Alternative zum Catmull-Clark-Algorithmus mit subdominantem Eigenwert $1/2$ vorgestellt. Für verallgemeinerte volumetrische B-Spline-Subdivision werden insbesondere Subdivisionsalgorithmen mit geeignetem Spektrum vorgestellt, die damit vielversprechende Kandidaten für die Anwendung sind, beispielsweise für Simulation im Rahmen der isogeometrischen Analysis. Darüber hinaus wird gezeigt, dass sich der Catmull-Clark-Algorithmus [CC78] in seiner ursprünglichen Version nicht zur Verallgemeinerung auf volumetrische Subdivision eignet und dass die etablierten Subdivisionsalgorithmen [Baj+02] und [JM99] für etliche kombinatorische Anordnungen kein geeignetes Spektrum aufweisen. Zudem werden Forschungsansätze für den volumetrischen Fall zur Verallgemeinerung von hexaedrischen auf beliebige Strukturen vorgestellt.

Die Konstruktion der Subdivisionsmatrizen wurde zudem algorithmisch in Matlab umgesetzt. Das zugehörige Softwarepaket inklusive Funktionen zur uniformen Verfeinerung und zum Plotten von Subdivisionsvolumen findet sich unter: <https://doi.org/10.48328/tudatalib-1841>

Abstract

In this thesis, a new approach for constructing subdivision algorithms for generalized quadratic and cubic B-spline subdivision for subdivision surfaces and volumes is presented. First, a catalog of quality criteria for these subdivision algorithms is developed, serving as a guideline for the construction process.

The construction begins by generating the desired subdominant eigenvectors as the vertices of regular convex 2-polytopes for surfaces and convex 3-polytopes for volumes using circle packings. Subsequently, these polytopes are utilized to construct a Colin-de-Verdière-matrix for the generalized quadratic and a Colin-de-Verdière-like matrix for the generalized cubic B-spline subdivision. These matrices are then adjusted using the matrix exponential to obtain subdivision matrices with the desired properties.

All subdivision algorithms introduced in this paper empirically exhibit a subdominant eigenvalue of $1/2$ with the desired algebraic and geometric multiplicity. For the quadratic case, this property can even be formally proven. Moreover, the corresponding eigenvectors form a convex polytope in the central region for the generalized quadratic B-spline subdivision algorithms, while for the generalized cubic B-spline subdivision algorithms, they represent the refinement of a convex polytope. Additionally, the constructed subdivision algorithms fulfill various other quality criteria, such as affine invariance and convex hull preservation. Furthermore, they possess a dominant eigenvalue of 1, respect all symmetries of the underlying structure, and exhibit appropriate support for the refinement rules.

The scientific contribution of this work lies in the elaboration of the quality criteria and the novel construction of the subdivision algorithms, including corresponding proofs and empirical analyses. Specifically, an alternative to the Catmull-Clark algorithm with a subdominant eigenvalue of $1/2$ is presented for generalized cubic B-spline subdivision surfaces. For generalized volumetric B-spline subdivision, subdivision algorithms with a suitable spectrum are introduced, making them promising candidates for applications such as simulations in isogeometric analysis.

Furthermore, it is demonstrated that the original Catmull-Clark algorithm [CC78] is not suitable for generalization to volumetric subdivision and that the established subdivision algorithms [Baj+02] and [JM99] do not exhibit a suitable spectrum for several combinatorial configurations. Additionally, research approaches for the volumetric case are proposed, aiming to generalize from hexahedral to arbitrary structures.

The construction of the subdivision matrices was also implemented algorithmically in Matlab. The corresponding software package, including functions for uniform refinement and for plotting subdivision volumes, can be found at: <https://doi.org/10.48328/tudatalib-1841>¹

¹English translation supported by ChatGPT.

Danksagung

Diese Dissertation ist nicht nur das Ergebnis intensiver wissenschaftlicher Arbeit, sondern auch ein persönlicher Meilenstein, der über viele Jahre hinweg mit großem Einsatz entstanden ist. Der Weg dorthin war geprägt von Herausforderungen und verlangte Ausdauer, brachte jedoch auch viele schöne Erfahrungen mit sich. Dass ich ihn so gehen und abschließen konnte, verdanke ich der Unterstützung und Ermutigung vieler Menschen, denen ich an dieser Stelle danken möchte.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinem Doktorvater Ulrich Reif für die Betreuung bedanken, die bereits in meinem Bachelorstudium begonnen und sich bis zu meiner Promotion durchgezogen hat. Ohne die Vorlesungen, Seminare und Abschlussarbeiten hätte ich meine Begeisterung für das Thema der Subdivision nicht entdecken können. Die fachlichen Diskussionen, bei denen ich viel gelernt habe, und die herzliche und wertschätzende Atmosphäre waren ausschlaggebend für meine Entwicklung in den vergangenen Jahren. Die Freiheit, eigene Schwerpunkte zu setzen und neuen Ideen nachgehen zu können, und dabei immer Feedback, Einordnungen und Anregungen zu bekommen, haben diese Arbeit in der Form erst ermöglicht. Neben der fachlichen Förderung hat mich die Betreuung auch persönlich sehr weitergebracht. Die zahlreichen Konferenzen, die Unterstützung bei der Bewerbung meines Auslandsaufenthalts und die Möglichkeit, an verschiedenen Fortbildungen teilzunehmen, sind nur einige Punkte, die meine Promotionszeit geprägt haben und die ohne die Betreuung und Unterstützung nicht möglich gewesen wären.

Außerdem möchte ich dem GRAPES-Projekt der Marie Skłodowska-Curie Actions danken. Mein Auslandsaufenthalt in diesem Rahmen war fachlich, inhaltlich und persönlich eine große Bereicherung. Ich habe mich in der Arbeitsgruppe sehr wohl gefühlt und viel dazugelernt. Besonders danken möchte ich Kai Hormann, der diesen Aufenthalt ermöglicht hat. Die Zeit in Lugano mit den intensiven mathematischen Diskussionen und auch den zahlreichen sozialen Aktivitäten haben mir viele neue Perspektiven eröffnet. Ich blicke mit einem gewissen Fernweh darauf zurück.

Für die Begutachtung meiner Arbeit danke ich Jörg Peters sowie erneut Kai Hormann. Die sorgfältige Auseinandersetzung mit meiner Dissertation ist alles andere als selbstverständlich und verdient besondere Anerkennung.

Zudem möchte ich mich beim Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt bedanken, an dem ich sowohl mein Studium als auch meine Promotion absolviert habe. Durch die herzliche, wertschätzende und konstruktive Atmosphäre, sowohl unter den Studierenden als auch unter den Kolleginnen und Kollegen, hat mir das Lernen und Lehren viel Spaß gemacht. Ein besonderer Dank gilt der Arbeitsgruppe Geometrie. Das kollegiale und freundschaftliche Umfeld, sowohl im Arbeitsalltag als auch darüber hinaus, sowie die vielen bereichernden mathematischen Diskussionen haben meine Zeit am Fachbereich zu einer Zeit gemacht, an die ich sehr gerne zurückdenke.

Vielen Dank an Anna-Lisa Ihrig, Kaspar Philipp Seipel, Marcel Steinhardt, Roman Lucas Sulzbach und Sukie-Christin Vetter für das gründliche inhaltliche Korrekturlesen. Dass ihr euch so intensiv und aufmerksam mit meinen Gedanken auseinandergesetzt habt, hat der Arbeit in vielerlei Hinsicht gutgetan.

Außerdem danke ich meinen Eltern Christine und Thomas Dietz für ihre langjährige Unterstützung. Mit eurer Geduld, eurem Rat und eurer Ermutigung habt ihr mir viel ermöglicht und mich durch alle Phasen dieser Zeit getragen.

Ein besonderer Dank gilt meiner Partnerin Dominique Kreße. Dank deines scharfen Blicks für Sprache ist diese Dissertation nicht nur verständlicher, sondern auch deutlich fehlerärmer geworden. Deine Unterstützung in dieser Zeit, sei es durch kulinarische Highlights, deine Kunst, im richtigen Moment für Ablenkung zu sorgen, oder mich in schwierigen Situationen zu unterstützen und aufzubauen, hat mir sehr geholfen. Ohne dich wäre das alles deutlich schwieriger gewesen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Überblick über bestehende Ansätze und Theorie	5
1.2	Aufbau der Arbeit und Leseempfehlung	7
1.3	Konventionen und Notation	9
2	Subdivision, Subdivisionsmatrizen und deren Qualitätskriterien	13
2.1	Definitionen, Begriffe und Struktur	14
2.2	Subdivision	23
2.3	Invariante Strukturen	30
2.4	Qualitätskriterien	41
2.5	Einordnung, Ziele und generelle Konstruktion	66
3	Konstruktion konvexer Polytope	77
3.1	Grundlagen, Eingabevarianten und Validitätsprüfungen	77
3.1.1	Generierung von Zufallsbeispielen	84
3.2	Auswahl und Eigenschaften konvexer Polytope	86
3.3	Konstruktion dreidimensionaler Polytope	90
3.3.1	Konstruktion des Vierecksgraphen	93
3.3.2	Inverse stereographische Projektion und Konstruktion des primalen und dualen Polytops	108
3.4	Konstruktion zweidimensionaler Polytope	121
4	Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen	125
4.1	Definition und Eigenschaften von Colin-de-Verdière-Matrizen	125
4.2	Colin-de-Verdière-Matrizen für Graphen mit einem oder zwei Knoten	126
4.3	Colin-de-Verdière-Matrizen für 2-Polytope	128
4.4	Colin-de-Verdière-Matrizen für 3-Polytope	138
5	Verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision	143
5.1	Literaturübersicht und Verfeinerungsregeln für reguläre Initialelemente	143
5.2	Konstruktion der Subdivisionsmatrizen	145
5.2.1	Variante 1: Exaktes Spektrum	146
5.2.2	Variante 2: Colin-de-Verdière-Matrix und Matrixexponential	152
5.3	Beweise und Qualitätskriterien der Subdivisionsmatrizen	156
6	Verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision: Ein experimenteller Ansatz	187
6.1	Verfeinerungsregeln für reguläre Initialelemente, auswertbarer Bereich und Herausforderungen	188
6.2	Konstruktion der Subdivisionsmatrizen	197
6.2.1	Eigenstruktur der subdominanten Eigenwerte	198
6.2.2	Konstruktion einer Colin-de-Verdière-artigen Matrix	206
6.2.3	Aufteilung von $\tilde{C}$ und das Matrixexponential	229
6.3	Beweise und Qualitätskriterien der Subdivisionsmatrizen	241
7	Forschungsansätze für beliebige volumetrische Netze	269

8 Fazit und Ausblick	279
Anhang	283
A Graphen	285
A.1 Automorphismen von Graphen	286
A.2 Konnektivität	288
A.3 Planarität	289
A.4 Facetten	290
A.5 Zweidimensionale Dualität	292
B Matrizen	295
B.1 Eigenwerte und Eigenvektoren	297
B.2 Matrixexponential	303
B.3 Konkrete Matrixexponentiale	307
Index	315
Symbolverzeichnis	319
Literatur	325

1 Einleitung

Die Disziplin der Subdivision ist in den 1970er Jahren entstanden und damit inzwischen rund 50 Jahre alt. Die Motivation für und die Anwendung von Subdivision sind dabei sehr vielfältig. Neben den frühen Arbeiten von de Rham [Rha47] und [Rha56] stammt eine der ersten Arbeiten zu dem Thema von Chaikin [Cha74], dessen Motivation sich bereits im ersten Satz seines Abstracts [Cha74, S. 346] erkennen lässt: „A fast algorithm for the generation of arbitrary curves is described.“ Offensichtlich sah er den entscheidenden Mehrwert seiner Konstruktion in einem Algorithmus, der eine schnelle Generierung beliebig geformter Kurven ermöglicht. Blickt man in die Konstruktion, so lässt sich erkennen, dass die Grundlage des Algorithmus ein Polygonzug, also eine durch Linien verbundene Kette von Punkten, ist. Dieser Polygonzug wird durch sukzessives Einfügen von neuen Punkten immer weiter verfeinert und so geglättet, dass er gegen eine Kurve mit bestimmter Glattheit konvergiert. Die vorgeschlagene Verfeinerungsregel von Chaikin lässt sich dabei äquivalent mit der Matrix

$$S := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

darstellen. Jedes Paar benachbarter Punkte im Polygonzug wird mit dieser Matrix multipliziert und die neuen Kontrollpunkte werden entsprechend der Nachbarschaftsrelation des alten Kontrollpolygons verbunden.

Die sich anschließende Frage, gegen welche Kurve der immer weiter geglättete Polygonzug konvergiert, ist naheliegend und wurde von Riesenfeld in [Rie75] beantwortet. Er zeigte, dass der immer weiter verfeinerte Polygonzug gegen eine quadratische B-Spline-Kurve konvergiert. Damit lässt sich der Polygonzug als Kontrollpolygon des zugehörigen B-Splines interpretieren. Eine Illustration der Glättung eines Polygonzugs mit der $[3/4, 1/4]$ -Regel, aus Gleichung (1.1) und die Konvergenz zur betreffenden B-Spline-Kurve findet sich in Abbildung 1.1. Dieses Erkenntnis wurde von Riesenfeld in [Rie75, S. 309] wie folgt kommentiert:

Alas, one can feel disappointed to find that a new algorithm does not generate a new curve. On the other hand, this new scheme has clear merits of its own. It provides one more original way to view and to understand quadratic B-splines. As a hardware implementation scheme, it might have special appeal. But most importantly, it lends itself to natural generalizations that existing algorithms do not readily suggest.

Dass Chaikin keine neue Form von Kurve, sondern eine alternative Möglichkeit der Darstellung von quadratischen B-Spline-Kurven gefunden hat, ist daher kein Grund zur Enttäuschung. Im Gegenteil: Durch die Darstellung von quadratischen B-Spline-Kurven mit Chaikins Subdivisionsalgorithmus ergeben sich drei wesentliche Vorteile, die sich für die Anwendung von Subdivision nutzen lassen.

Der erste bedeutende Vorteil ist die einfache Darstellung von glatten Objekten im Kontext von computergestütztem Design (CAD). Anstatt B-Splines auswerten zu müssen, kann es für bestimmte Anwendungen genügen, das Kontrollpolygon hinreichend oft zu verfeinern, und dieses an Stelle der B-Spline-Auswertung zu verwenden. In der vierten Grafik von Abbildung 1.1 ist beispielsweise zu sehen, dass sich das Kontrollpolygon nach fünf Verfeinerungsschritten optisch nicht mehr von der B-Spline-Kurve unterscheidet.

Der zweite bedeutende Vorteil ist, dass durch Chaikins Subdivisionsalgorithmus eine Teilung der B-Spline-Segmente generiert wird. Genauer gesagt wird jedes Segment in zwei neue Segmente unterteilt, was ebenfalls in Abbildung 1.1 beispielhaft zu sehen ist. Dort verdoppelt sich die Frequenz des Wechsels der schwarzen und grauen Segmente der B-Spline-Kurve mit jeder Iteration. Die Verfeinerung der Basis von quadratischen B-Spline-Kurven ist also „frei Haus“, was für viele Anwendungen im Bereich der Approximation nützlich ist.

Der dritte Vorteil ist, dass die $[3/4, 1/4]$ -Regel sehr leicht zu verstehen, zu implementieren und anzuwenden ist. Da jedes Paar benachbarter Punkte im Polygonzug lediglich mit der Matrix aus Gleichung (1.1) multipliziert und

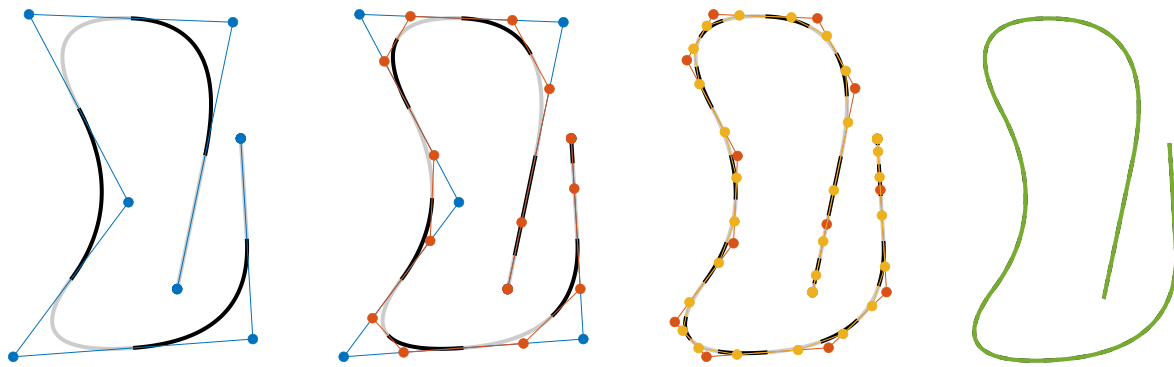


Abbildung 1.1: Von links nach rechts: Kontrollpolygon mit doppelten Randknoten in blau und zugehörigem quadratischen B-Spline mit grau-schwarz eingefärbten Segmenten (1), das originale in blau und das einmal verfeinerte Kontrollpolygon in rot mit eingefärbten Segmenten der B-Splinekurve bezüglich des verfeinerten Kontrollpolygons (2), das Pendant zu (2) mit einmal verfeinertem Kontrollpolygon in rot und zweimal verfeinertem Kontrollpolygon in gelb (3), das fünfmal verfeinerte Kontrollpolygon in grün (4).

die neuen Kontrollpunkte entsprechend der Nachbarschaftsrelation des alten Kontrollpolygons verbunden werden müssen, ist die Anwendung weder auf der Implementierungsebene noch auf der Laufzeitebene aufwendig.

Diese Vorteile ermöglichen es, Subdivision in verschiedenen Kontexten für verschiedene Ziele zu nutzen. Zunächst lässt sich das Verfahren auf den Flächenfall verallgemeinern. Doo und Sabin entwickelten das Flächenpendant zu Chaikins Algorithmus, also einen Subdivisionsalgorithmus für quadratische B-Spline-Flächen in [DS78]. Catmull und Clark entwickelten einen Subdivisionsalgorithmus für kubische B-Spline-Flächen in [CC78]. Konkret wurden in diesen beiden Arbeiten Matrizen entwickelt, die eine zweidimensionale Struktur von Kontrollpunkten verfeinern.

Zudem gibt es für den Flächenfall eine ausgereifte Theorie im Bezug auf die Glattheit der erzeugten Flächen, welche in [PR08] zu finden ist. Ein wesentliches Werkzeug der Theorie ist die diskrete Fourier-Transformation. Diese ermöglicht es, konkrete Aussagen über die Eigenwerte und damit über das Skalierungsverhalten von Subdivisionsmatrizen treffen zu können. Kurz gesagt nutzt die diskrete Fourier-Transformation die Rotationssymmetrie in den Subdivisionsmatrizen, um die Information der Eigenwerte und Eigenvektoren der Subdivisionsmatrix auf die Information der Einträge des Bereichs, der durch die Symmetrie rotiert wird, herunterzuberechnen.

Der größte industrielle Anwendungsbereich der durch die Subdivisionsalgorithmen generierten Subdivisionsflächen findet sich in der Unterhaltungsindustrie und dort insbesondere im Kontext von Animationsfilmen. Durch die drei oben beschriebenen Vorteile lassen sich die verschiedenen Objekte und Figuren in den Animationsfilmen ideal darstellen. Die wohl bekannteste Pionierarbeit in diesem Kontext ist der Kurzfilm „Geri’s Game“ [Pin+97] aus dem Jahr 1997, der im darauffolgenden Jahr den Oscar in der Kategorie „Animierter Kurzfilm“ gewonnen hat (vergleiche dazu [98]). Hintergrundinformationen zur Verwendung von Subdivision im Film Geri’s Game finden sich in [DKT98]. Für diesen Bereich ist die Theorie der Subdivisionsalgorithmen weitestgehend ausgereift.

Ein weiteres Anwendungsgebiet bildet die isogeometrische Analysis. Hier besteht allerdings noch erhebliches Forschungspotenzial. Die isogeometrische Analysis beruht auf der Idee für die Beschreibung des Objekts (Kurve, Fläche, Volumen) und für den Lösungsraum dieselbe Basis zu verwenden. Dieser Ansatz wird zur Approximation und insbesondere zum numerischen Lösen elliptischer partieller Differentialgleichungen verwendet. In diesem Kontext lassen sich die Vorteile der Subdivision, insbesondere der Vorteil der mitgelieferten Verfeinerung, voll ausnutzen. Allerdings werden für das Design von Objekten im Rahmen von CAD zumeist NURBS (non-uniform rational B-Splines) und für die Simulation zumeist klassische Methoden wie die FEM (finite element method) verwendet.

Nichtsdestotrotz bietet Subdivision durch die bereits genannten Vorteile ein erhebliches Potenzial zum numerischen Lösen partieller Differentialgleichungen im Rahmen der isogeometrischen Analysis. Neben der gegebenen Verfeinerung ist die Glattheit der Objekte ein großer Vorteil. Durch diese Glattheit werden, im Vergleich zu den Dreiecksnetzen anderer etablierter Methoden wie der finite Elemente Methode, zur Approximation wesentlich weniger Basisfunktionen benötigt. Dies führt zu einem kleineren Gleichungssystem beim Lösen der Differentialgleichungen. Die Subdivision lässt in diesem Kontext allerdings noch einige Fragen offen. Eine Liste von Herausforderungen, die für die Anwendung von Subdivision im Rahmen der isogeometrischen Analysis gelöst werden sollten, ist in [Die+23] zu finden.

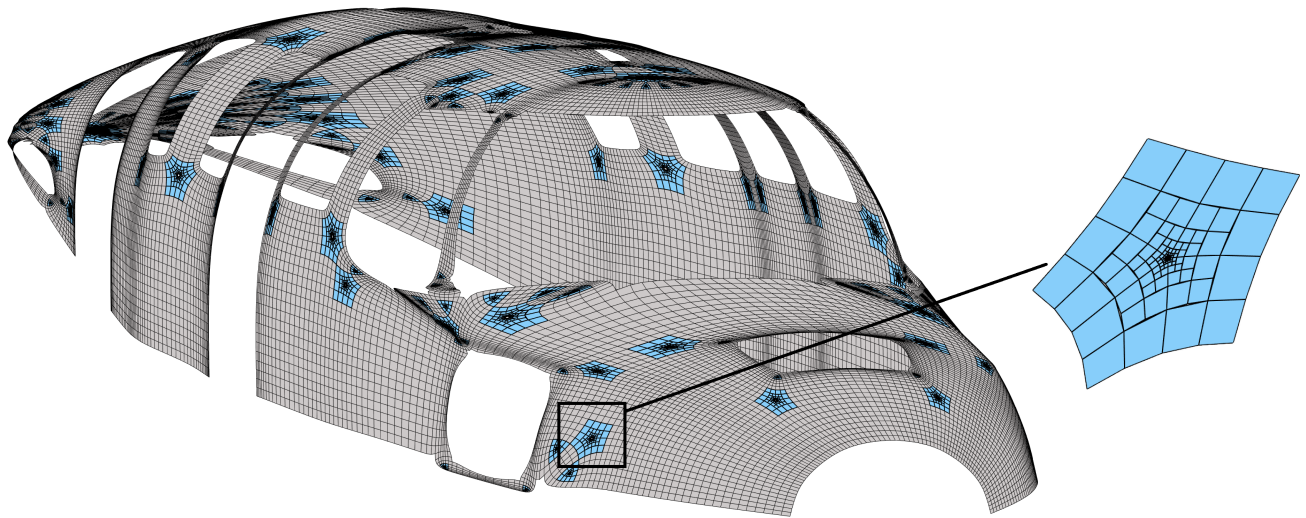


Abbildung 1.2: Beispielhafte Darstellung eines Flugzeugbauteils als Subdivisionsfläche mit einer vergrößerten Darstellung der Subdivisionsfläche um einen irregulären Punkt. Man erkennt, dass die blaue Struktur aus unendlich vielen Ringen von Vierecken besteht.

Eine dieser Herausforderungen für Subdivisionsflächen bilden die irregulären Punkte in der Struktur. Kurz gesagt besteht die Verallgemeinerung des oben beschriebenen Polygonzugs für den Flächenfall aus einem aus Vierecken bestehenden Gitter (oder dem dazu dualen Gitter). In diesem Gitter ist es möglich, dass beliebig viele Vierecke an einem Punkt des Gitters zusammenkommen können. Kommen mehr oder weniger als vier Vierecke in einem solchen inneren Punkt zusammen, so wird dieser *irregulärer Punkt* genannt.

Für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision geht in diesen Punkten nach [PR08] Glattheit verloren. Außerdem ist sowohl für die verallgemeinerte quadratische als auch für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision die Darstellung im Bereich um die irregulären Punkte nur durch eine fragmentierte Darstellung, konkret durch eine Folge sich ineinanderlegender aus Vierecken bestehender Ringe, möglich. Eine beispielhafte Illustration findet sich in Abbildung 1.2. Diese Folge von Ringen führt zu Herausforderungen bei der Integration der Subdivisionsflächen, die bereits in [Die18] besprochen wurden. Für die vorliegende Arbeit relevanter ist allerdings, dass für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision das Skalierungsverhalten der Ringfolge abhängig von der Anzahl der Vierecke um den irregulären Punkt ist, wie in Abschnitt 2.4 zu sehen sein wird. Dies hat ebenfalls Auswirkungen auf die Approximation partieller Differentialgleichungen, denn skalieren die Ringe nur langsam, so müssen für die Approximation mehr Ringe generiert und ausgewertet werden.

Im volumetrischen Fall liegt das Interesse vor allem im Bereich der isogeometrischen Analysis, denn für die optische Darstellung von volumetrischen Objekten genügt die Darstellung des Randes der Objekte.

Der volumetrische Fall ist bisher weitgehend unerforscht. Hier gibt es weder eine Regularitätstheorie noch existieren vielversprechende Werkzeuge, wie die diskrete Fourier-Transformation für Subdivisionsvolumen, mit deren Hilfe die Information der Eigenwerte auf die Information der Matrixeinträge eines Hexaeders heruntergebrochen werden kann. Aufgrund der fehlenden Theorie ist zudem noch nicht erarbeitet, wie die Güte eines volumetrischen Subdivisionsalgorithmus quantifiziert werden soll.

Das ursprüngliche Ziel der vorliegenden Arbeit war die Simulation auf mit verallgemeinerter B-Spline-Subdivision generierten Flächen und Volumen. Für ein physikalisches Definitionsgebiet in $\mathbb{R}^2$, das als Fläche durch verallgemeinerte B-Spline-Subdivision parametrisiert ist, konnten auch erste Ergebnisse erzielt werden. Eine beispielhafte Lösung einer elliptischen Differentialgleichung auf einem physikalisches Definitionsgebiet in $\mathbb{R}^2$ ist in Abbildung 1.3 zu finden. Hier wurde sowohl adaptive Verfeinerung als auch Techniken für eine effiziente Integration genutzt, um die Lösung zu erzeugen. Da die Simulation im Rahmen der isogeometrischen Analysis durchgeführt wurde, lässt sich der Graph der Lösung als Spur einer verallgemeinerten B-Spline-Subdivisionsfläche in $\mathbb{R}^3$ darstellen.

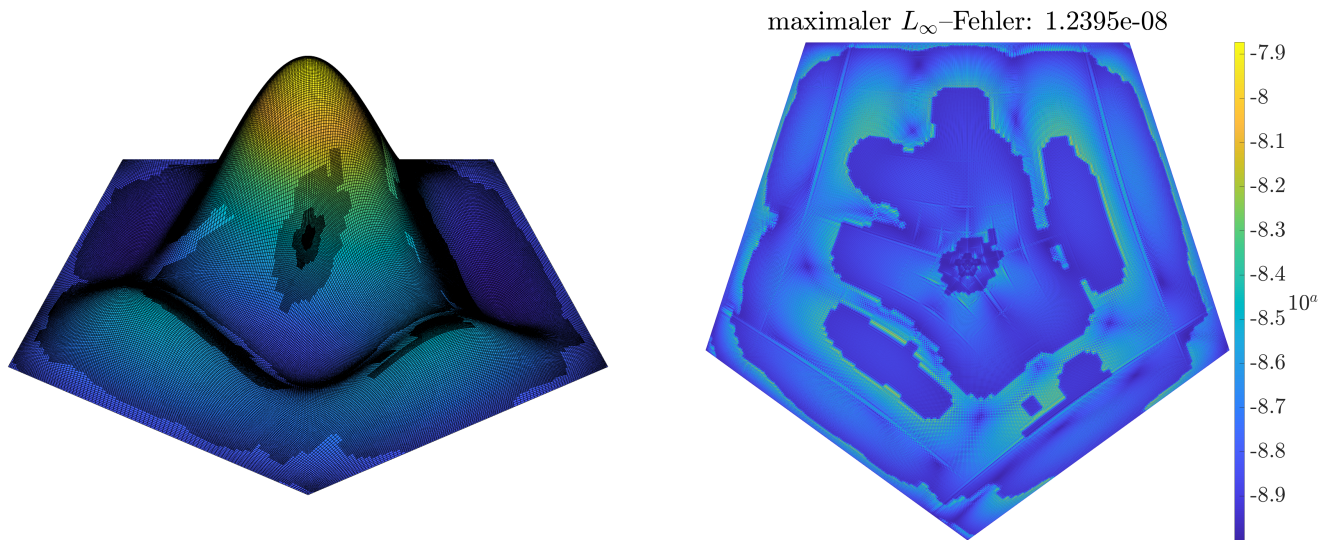


Abbildung 1.3: Beispielhafte Illustration einer Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung auf einem fünfeckigen physikalischen Definitionsgebiet in $\mathbb{R}^2$. Der Algorithmus sollte dabei die Differentialgleichung auf eine Genauigkeit von 10^{-7} berechnen. Die Verfeinerung der Zellen erfolgte dabei adaptiv. Im linken Bild sieht man den geplotteten Graphen der Lösung als Spur einer verallgemeinerten B-Spline-Subdivisionsfläche in $\mathbb{R}^3$ darstellt. Im rechten Bild sieht man den punktuellen Fehler. Für diesen wurde die numerische mit der exakten Lösung (die für dieses Beispiel bekannt ist) verglichen.

Mit diesem ersten „proof of concept“ sollte in einem nächsten Schritt die Simulation von elliptischen partiellen Differentialgleichungen auf verallgemeinerten B-Spline-Subdivisionsvolumen durchgeführt werden. Für verallgemeinerte trivariate kubische B-Spline-Subdivision gibt es in der Literatur bereits die beiden Pionierarbeiten [JM99] und [Baj+02], die kubische B-Spline-Subdivisionsvolumen erzeugen können. Beide Algorithmen haben allerdings deutliche Schwächen. Die gravierendste Schwäche ist, dass beide Algorithmen Matrizen mit bis zu drei unterschiedlichen subdominanten Eigenwerten generieren, die wiederum Strukturen produzieren, deren Skalierungsverhalten in den verschiedenen Koordinatenrichtungen unterschiedlich ist. Dies wird in den Abschnitten 2.4 und 2.5 zu sehen sein. Sie produzieren damit dreidimensionale Objekte, deren lokales asymptotisches Verhalten zunächst gegen etwas Flächenartiges und im weiteren Verlauf der Verfeinerung gegen etwas Linienartiges konvergiert. Die Folge davon im Kontext der isogeometrischen Analysis ist, dass Einträge des Galerkin-Gleichungssystems sehr klein werden, was wiederum zu Matrizen führt, deren Inverse nur noch mit großem Fehlerpotenzial berechnet werden kann.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung der beiden Subdivisionsalgorithmen hat sich zudem herausgestellt, dass für bestimmte kombinatorische Anordnungen diese beiden Subdivisionsalgorithmen nicht-injektive charakteristische Abbildungen aufweisen, sofern man bei drei ungleichen subdominanten Eigenwerten überhaupt von einer charakteristischen Abbildung sprechen kann. Dies wird unter anderem in Abschnitt 2.5 betrachtet und ist bisher noch nicht bekannt gewesen. Für den Volumenfall existiert zwar noch keine Regularitätstheorie, da aber die Injektivität und die Regularität der charakteristischen Abbildung im Flächenfall äquivalent dazu war, dass die generierte Fläche stetig differenzierbar in allen Punkten ist, ist das Fehlen der Injektivität der beiden Subdivisionsalgorithmen mindestens ungünstig. Außerdem ist dadurch das asymptotische Verhalten nicht nur, wie bereits beschrieben, flächen- und später linienartig. Im Verlauf der Verfeinerung dominieren durch das ungünstige Spektrum Eigenvektoren das asymptotische Verhalten, die nichts mehr mit der ursprünglichen volumetrischen Struktur zu tun haben.

Auf verallgemeinerte trivariate quadratische B-Spline-Subdivision auszuweichen war ebenfalls nicht möglich, denn unseres Kenntnisstands nach ist noch keine Konstruktion der zugehörigen Subdivisionsmatrizen bekannt. Quadratische B-Spline-Subdivisionsvolumen können also im Allgemeinen bisher nicht verfeinert und damit auch nicht genutzt werden.

So hat sich das Ziel der vorliegenden Arbeit deutlich verschoben. Um Subdivisionsvolumen im Rahmen der isogeometrischen Analysis sowie in anderen Anwendungsbereichen verwenden zu können, ist es notwendig, Subdivisionsma-

trizen zu konstruieren, die bestimmten Kriterien und insbesondere dem Kriterium der drei gleichen subdominanten Eigenwerte genügen. Daher ist das Forschungsziel dieser Arbeit:

Erstelle eine Liste an Qualitätskriterien für Subdivisionsmatrizen. Konstruiere anschließend Subdivisionsalgorithmen für verallgemeinerte quadratische und kubische B-Spline-Subdivisionsflächen und -volumen, die nach Möglichkeit diesen Kriterien entsprechen. Die Subdivisionsmatrizen sollen insbesondere einen zweifachen (für den Flächenfall) und einen dreifachen (für den Volumenfall) subdominanten Eigenwert $1/2$ zu einer geeigneten Eigenstruktur besitzen.

Neben der theoretischen Aufarbeitung und den Beweisen im Bezug auf die zu erarbeitenden Qualitätskriterien liegt der Fokus auch auf der praktischen Anwendung. Da die Erstellung der Subdivisionsmatrizen konstruktiv ist, lässt sie sich algorithmisch umsetzen. Daher werden in den entsprechenden Kapiteln und Abschnitten auch immer Algorithmen in Form von Pseudocode angegeben, um die für Anwender relevanten Informationen kondensiert darzustellen. Außerdem wird die Umsetzung in Matlab der in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmen unter einer CC-BY-Lizenz in [Die25] frei und ohne Zugangsbeschränkung zur Verfügung gestellt.

1.1 Überblick über bestehende Ansätze und Theorie

Im vorigen Abschnitt wurde bereits auf einige verwandte Arbeiten eingegangen, welche in diesem Abschnitt zur Einordnung noch einmal kurz erwähnt werden.

Zu Beginn werden Arbeiten zu konkreten Subdivisionsalgorithmen betrachtet. Neben den beiden Arbeiten von de Rham [Rha47] und [Rha56] ist hier für den eindimensionalen Fall zunächst die Arbeit von Chaikin [Cha74] zu nennen, der Riesenfeld [Rie75] zufolge einen Subdivisionsalgorithmus für quadratische B-Spline-Kurven entwickelt hat.

Für den Flächenfall sind die zwei Hauptarbeiten beziehungsweise -algorithmen der Doo-Sabin-Algorithmus aus [DS78] für quadratische B-Spline-Flächen und der Catmull-Clark-Algorithmus aus [CC78] für kubische B-Spline-Flächen zu nennen. Außerdem wurde in [ZS01] eine Verallgemeinerung für Subdivisionsalgorithmen bis zum Grad 9 konstruiert, die dadurch auch Varianten des Doo-Sabin- und des Catmull-Clark-Algorithmus erzeugen.

Es gibt zudem eine Reihe weiterer Subdivisionsalgorithmen für den Flächenfall. Zu nennen sind hier noch der Simplest-Subdivisionsalgorithmus von Peters und Reif aus [PR97] zur Verfeinerung von Polytopen zu geschlossenen C^1 -Flächen. Dieselbe Verfeinerungsstrategie wurde zudem in [HW99] parallel verwendet beziehungsweise entwickelt. Ein Subdivisionsalgorithmus für Dreiecksnetze wurde von Loop in [Loo87] entdeckt und für Strukturen, die sowohl aus Dreiecken als auch aus Vierecken bestehen, wurde ein Verfahren in [SW05] entwickelt. Daneben gibt es noch etliche weitere Subdivisionsalgorithmen, wie beispielsweise den Butterfly-Subdivisionsalgorithmus [DLG90] oder den $\sqrt{3}$ -Subdivisionsalgorithmus [Kob96].

Für den Volumenfall sind als die beiden wichtigsten Arbeiten der Subdivisionsalgorithmus von Joy und MacCracken [JM99] und der Subdivisionsalgorithmus von Bajaj, Schaefer, Warren und Xu [Baj+02] zu nennen. Beide Algorithmen konstruieren kubische B-Spline-Volumen aus Hexaedernetzen. Der in [JM99] vorgestellte Algorithmus hat für den semi-irregulären Fall allerdings keine Tensorproduktstruktur und beide Algorithmen haben keine drei gleichen subdominanten Eigenwerte. Für den Volumenfall der verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision sind unseres Wissens nach bisher noch keine Verfeinerungsregeln bekannt. Ein Subdivisionsalgorithmus für Tetraedernetze wurde zudem in [SHW04] vorgestellt.

Gerade vom Catmull-Clark-Algorithmus, also für den kubischen Flächenfall, gibt es etliche Varianten, die diesen im Bezug auf verschiedene Aspekte verbessern sollen. Dies ist auch unter dem Begriff „tuning“ bekannt. Im Bezug auf das Tuning der Subdivisionsmatrizen hinsichtlich des Verhältnisses λ^2/μ vom subdominanten zum subsubdominanten Eigenwert sind die Arbeiten [PU98], [ADS06] und [MM18] zu erwähnen. Die ersten beiden genannten Arbeiten geben allerdings die Größen der Masken des Catmull-Clark-Algorithmus auf. Der Ansatz aus [MM18] respektiert hingegen diese Struktur.

Eine weitere Art der Anpassung von Subdivision für Flächen ist das Gebiet der „guided subdivision“. Eine der Motivationen hierfür ist, dass klassische Subdivisionsalgorithmen, wie etwa der Catmull-Clark-Algorithmus, im Bereich der irregulären Punkte schlechte Reflexionslinien erzeugen (vgl. [KP18, S. 204]). Um dies zu verbessern

erstellt zunächst die guided Subdivision eine Richtfläche, an der die Verfeinerung ausgerichtet wird. Mithilfe dieser Richtfläche wird die Sequenz an Ringen erzeugt und diese kann bei Bedarf nach endlich vielen Schritten mit einer Kappe, die in das verbleibende Loch eingesetzt wird, geschlossen werden (vgl. [KP18, S. 204]). Frühe Arbeiten in diesem Bereich sind in [KP05] und [KP07] zu finden. Alternativen im Bezug auf den Catmull-Clark-Algorithmus finden sich in [KP18] und [KP19]. Varianten mit einem Skalierungsverhalten von $1/2$ finden sich zudem in [KP17] und [KP24].

In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich lineare Subdivision im Kontext der Approximation von B-Splines, konkret verallgemeinerte quadratische und kubische B-Spline-Subdivision, betrachtet. Dies bedeutet, dass ein Netz oder Polygonzug aus Kontrollpunkten linear, also durch die Anwendung einer Matrix, so verfeinert wird, dass das immer weiter verfeinerte Netz gegen etwas konvergiert (in unserem Fall gegen ein B-Spline-Element). Es gibt allerdings auch nichtlineare Subdivision. Hier ist die Dissertation von Ewald [Ewa20] zu nennen, die sich mit (nicht)linearer Subdivision von Kurven beschäftigt. Zudem wird Subdivision auch zur Interpolation verwendet. Einen Überblick über dieses Thema für den Flächenfall findet sich in dem Buchkapitel [Dyn02] von Dyn. Zudem stellen die Arbeiten [CMQ03] für Tetraedernetze und [Xie+20] für Hexaedernetze volumetrische Subdivisionsalgorithmen zur Interpolation vor.

Der existierende theoretische Hintergrund zur Subdivision fokussiert sich auf Subdivisionsflächen. Der Grund hierfür ist, dass für die lineare Subdivision von B-Spline-Kurven wenig zu diskutieren ist. Einmal erstellt, produzieren die Subdivisionsalgorithmen B-Spline-Kurven. Für allgemeine Kurven gibt es im Kontext der Subdivision eine breite Theorie, diese ist für die vorliegende Arbeit allerdings nicht relevant. Für den Volumenfall gibt es, wie bereits erwähnt, noch keine Theorie, sondern lediglich die oben aufgeführten Subdivisionsalgorithmen. Für den Flächenfall liefern Peters und Reif das Standardwerk [PR08]. Es bietet einen breiten und tiefen Überblick über Subdivisionsalgorithmen für Flächen, deren Analysis und deren Regularität. Im Folgenden werden einige wichtige Meilensteine dieses Gebiets beschrieben, die aus den bibliographischen Angaben von [PR08] entnommen sind.

Die Basis für die Theorie und insbesondere die Idee des charakteristischen Rings zur Beschreibung des lokalen asymptotischen Verhaltens stammt aus der Doktorarbeit [Rei93] von Reif. Die kondensierten Ergebnisse wurden in [Rei95] veröffentlicht. Neben den Kriterien für die Konvergenz findet sich dort auch eine Beschreibung der Rolle der subdominanten Eigenwerte im Bezug auf die Regularität der charakteristischen Abbildung. Die Verbindung zwischen der Regularität und Injektivität der charakteristischen Abbildung und der C^1 -Glattheit der Subdivisionsfläche stammt aus [PR98]. Die Auswirkungen des Verhältnisses λ^2/μ auf die Krümmung der erzeugten Subdivisionsflächen werden in [PR04] beschrieben, die Hintergründe zu den Polarartefakten, also zum nicht gleichmäßigen Skalierungsverhalten um irreguläre Punkte, in [SB03]. Ein Tuning für Dreiecksnetze ist zudem in [BK04] zu finden.

Im Bezug auf Subdivision gibt es noch großes Forschungspotenzial. Ein allgemeiner Überblick ist in [RS19] dargestellt. Ein speziellerer Überblick über die noch offenen Forschungsfragen von Subdivision im Kontext der isogeometrischen Analysis findet sich in [Die+23].

Wie bereits erwähnt, ist ein zentrales Anwendungsgebiet der Subdivision die isogeometrische Analysis. Der Begriff wurde durch die Arbeit [HCB05] geprägt. Die Idee ist, wie bereits beschrieben, dass der Lösungsraum der Differentialgleichung derselbe Raum ist, der für die Darstellung des Objekts verwendet wird. Subdivision wurde bereits in diesem Kontext angewendet. Hier sind unter anderem die Arbeiten [COS00] und [NKP14] für den Flächenfall sowie [BHU10] und [Xie+20] für den Volumenfall zu nennen. Letztere verwendet allerdings einen interpolierenden Ansatz zur Erzeugung der Volumen.

Für die Verwendung von Subdivisionselementen im Rahmen der isogeometrischen Analysis werden zudem praktische Werkzeuge, wie die Auswertung der Elemente und die Integration über die Elemente, benötigt. Die Auswertung von Subdivisionsflächen, insbesondere auch in und um die irregulären Stellen, wurde von Stam in [Sta98] vorgestellt. Die Integration spezieller Integrale ist in [HR16] beschrieben. Ansätze zur Integration von Funktionen über Subdivisionsflächen finden sich in [Die18] und für Subdivisionsvolumen in [Alt21].

Abschließend werden Alternativen für die Darstellung der irregulären Bereiche von B-Spline-Flächen betrachtet. Eine gute Übersicht ist in [Pet19] zu finden. Hier sind insbesondere die geometrisch stetigen Splines und die singulär parametrisierten Splines zu nennen. Erstere wurden bereits in [DeR90] beschrieben. Eine Übersicht über dieses Thema ist in [Pet02] zu finden. Letztere wurde in [Pet91] eingeführt und in [Rei97] sowie in [MR22] behandelt. Außerdem wurde volumetrische singuläre Parametrisierung in [Pet20] konstruiert und in [YP22] im Rahmen der isogeometrischen Analysis untersucht.

1.2 Aufbau der Arbeit und Leseempfehlung

Wie bereits beschrieben, ist das Ziel dieser Arbeit, für die vier beschriebenen Fälle der verallgemeinerten quadratischen und kubischen B-Spline-Subdivision von Flächen und Volumen Subdivisionsalgorithmen zu konstruieren. Dazu werden zunächst einige Vorbereitungen benötigt. Die erste ist allgemeiner Natur. Im nächsten Abschnitt 1.3 werden die Konventionen und die Notation dieser Arbeit beschrieben. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine klare Notation für diese Arbeit vorzugeben und die Lesbarkeit zu erhöhen.

Im Anschluss an die Notation empfiehlt es sich, einen kurzen Blick in den Anhang zu werfen. Hier werden die Grundlagen im Bezug auf Graphen und Matrizen, die für diese Arbeit vorausgesetzt werden, zusammengefasst. Der Abschnitt A zur Graphentheorie gliedert sich dabei in die Bereiche Automorphismen (Abschnitt A.1), Konnektivität (Abschnitt A.2), Planarität (Abschnitt A.3), Facetten (Abschnitt A.4) und zweidimensionale Dualität (Abschnitt A.5). Der Abschnitt B der Grundlagen zu Matrizen gliedert sich in die Bereiche Eigenwerte und Eigenvektoren (Abschnitt B.1), das Matrixexponential (Abschnitt B.2) und konkrete Matrixexponentiale (Abschnitt B.3).

Die Inhalte des Anhangs bestehen zum größten Teil aus basalen Definitionen und können daher übersprungen werden, allerdings finden sich dort auch spezielle Theoreme. Außerdem befinden sich gerade im Abschnitt B.3 der konkreten Matrixexponentiale Aussagen und Beweise, die für diese Arbeit zwar benötigt werden, aber müßig zu lesen sind. Der Anhang kann daher als Nachschlagewerk betrachtet werden, das an den entsprechenden Stellen der Arbeit zu Rate gezogen werden kann.

Nach diesen Vorbereitungen beginnt der eigentliche Teil der Arbeit mit Kapitel 2. Dieses beschreibt die Grundlagen der Subdivision. In Abschnitt 2.1 werden dabei zunächst die strukturbildenden Begriffe eingeführt. Dieser Bereich ist essenziell, denn die Begriffe werden speziell für diese Arbeit entwickelt, da ein Framework benötigt wird, welches für alle vier eingangs beschriebenen Fälle verwendet werden kann. Außerdem sind gerade für den dreidimensionalen Fall die kombinatorischen Anordnungen der Strukturen deutlich komplexer als im zweidimensionalen, weshalb eine allgemeine Struktur benötigt wird. Insbesondere die Zellen, die Initialelemente sowie deren Zusammenspiel sollte verinnerlicht werden, um dem weiteren Verlauf der Arbeit folgen zu können. Außerdem ist der Begriff der regulären Initialelemente entscheidend, denn aus diesem folgt, welche Bereiche der Struktur zu B-Spline-Elementen ausgewertet werden können. Abschnitt 2.2 beschäftigt sich anschließend mit der Verfeinerung der beschriebenen Begriffe und erklärt damit das Prinzip der Subdivision.

Der Abschnitt 2.3 betrachtet anschließend die Strukturen, die durch Verfeinerung invariant aufeinander abgebildet werden. Dort wird die Motivation der Definition der Initialelemente deutlich, denn diese sind in der Struktur die kleinsten Objekte, die invariant aufeinander abgebildet werden können. Zudem befindet sich in diesem Abschnitt der klassische Fall der Subdivision, nämlich die Folge von Ringen um eine Irregularität, wieder. Für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision ist wichtig, dass keine Folge von Ringen, sondern eine Folge von Doppelringen verwendet wird. Dies resultiert aus der gewollten Wahlfreiheit der Subdivisionsmatrix und wird auch in [MM18] verwendet. Nichtsdestotrotz ist diese Beschreibung in der Literatur nicht üblich und sollte daher auch von geübten Lesern beachtet werden. Außerdem wird dieses Konzept auf den dreidimensionalen Fall erweitert, indem Ringe und Doppelringe zu Schalen und Doppelschalen verallgemeinert werden.

In Abschnitt 2.4 erfolgt die erste inhaltliche Auseinandersetzung mit den Subdivisionsmatrizen. Es wird ein Katalog von 13 Qualitätskriterien erarbeitet. Einige dieser Kriterien sind obligatorisch, andere sind optional. Es wird allerdings für jedes Kriterium die Motivation besprochen sowie die Auswirkungen diskutiert, die eintreten, wenn die Kriterien (nicht) erfüllt sind.

Abschnitt 2.5 bereitet abschließend das Forschungsziel dieser Arbeit auf und motiviert insbesondere die Notwendigkeit des dreifachen subdominanten Eigenwerts für den dreidimensionalen Fall. Außerdem werden die bisher unbekannten Schwächen der etablierten volumetrischen Subdivisionsalgorithmen [Baj+02] und [JM99] aufgezeigt, denn für bestimmte kombinatorische Anordnungen stellen die drei größten Eigenwerte kleiner 1 keine injektive Schale dar. Am Ende von Kapitel 2 sind also sowohl die notwendigen Begriffe und Strukturen als auch das Ziel in Form der Qualitätskriterien sowie die Motivation und die Notwendigkeit neuer Subdivisionsalgorithmen dargestellt.

Kapitel 3 bis 6 beschäftigen sich mit der eigentlichen Konstruktion der Subdivisionsalgorithmen. Diese werden für Initialelemente, also für die kleinsten invariant verfeinerbaren Elemente, erstellt. Die Verfeinerung größerer Strukturen erfolgt dann über die Kombination der Verfeinerung der Initialelemente. Dabei werden neben den Subdivisionsmatrizen der Initialelemente auch die Subdivisionsmatrizen der (Doppel)Ringe und (Doppel)Schalen untersucht.

Die Konstruktion verläuft im Vergleich zu den in der Literatur üblichen Methoden eher unkonventionell. Typischerweise stellen die Veröffentlichungen Konstruktionen vor, die in expliziten Formeln für die Einträge der Subdivisionsmatrix enden. Gegebenenfalls werden anschließend bestimmte Qualitätskriterien überprüft. Die Konstruktion dieser Arbeit verläuft gänzlich anders, da es das Ziel ist, eine Subdivisionsmatrix mit einem dreifachen subdominanten Eigenwert $1/2$ und einer geeigneten Struktur der zugehörigen Eigenvektoren zu erstellen.

Die Strategie der Konstruktion verläuft deshalb im Gegensatz zur konventionellen Konstruktion genau andersherum. Zunächst wird eine geeignete Struktur der subdominanten Eigenvektoren generiert. Aus dieser wird anschließend eine Matrix konstruiert und in einem letzten Schritt wird diese Matrix so modifiziert, dass das Spektrum der gewünschten Struktur entspricht.

Die Konstruktion der Eigenstruktur erfolgt in Kapitel 3. Die Idee ist, dass die Eigenvektoren der subdominanten Eigenwerte für die verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision konvexe d -Polytope und für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision Verfeinerungen konvexer d -Polytope darstellen sollen. Gemeint ist damit, dass jede Zeile der Matrix aus den d Eigenvektoren einen Punkt in $\mathbb{R}^d$ darstellt und die konvexe Hülle dieser Punkte ein konvexes Polytop formen.

Daher beschäftigt sich Kapitel 3 mit der Konstruktion konvexer Polytope. Der Großteil des Kapitels betrachtet dabei dreidimensionale Polytope. Die zentrale Aussage ist der Satz von Steinitz 3.8, der die Verbindung von 3-zusammenhängenden planaren Graphen und konvexen 3-Polytopen erklärt. Mit dessen Hilfe kann die kombinatorische Struktur in Form eines Graphen in ein konvexes Polytop umwandelt werden.

Dazu werden in Abschnitt 3.1 zunächst einerseits die Grundlagen konvexer Polytope und andererseits Algorithmen zur Überprüfung und Generierung der Datenstruktur, wie ein 3-Zusammenhangstest, ein Planaritätstest und die Erstellung der Facettenliste eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen, betrachtet. Zudem wird in Abschnitt 3.1.1 die Generierung von Zufallsbeispielen beschrieben, die für die empirischen und numerischen Tests dieser Arbeit benötigt werden.

Da konvexe Polytope zu einer gegebenen Struktur nicht eindeutig sind, wird in Abschnitt 3.2 beschrieben, welche Form die erstellten 3-Polytope haben werden. Die Grundlage dafür ist das Koebe-Andreev-Thurston-Theorem 3.18. Für die vorliegende Arbeit ist im Grunde nur die finale Version Theorem 3.25 relevant. Da diese in dieser starken Formulierung nicht direkt aus der Literatur entnommen werden konnte, wird in Abschnitt 3.2 die Herleitung der finalen Version erläutert.

Die eigentliche Konstruktion der 3-Polytope und der zugehörigen dualen Polytope erfolgt in Abschnitt 3.3 und basiert auf der Konstruktion von Ziegler [Zie04]. Der Mehrwert dieses Abschnitts besteht in der algorithmischen Umsetzung, die von Ziegler nicht ausgeführt wurde. Daher ist der Abschnitt vor allem für Anwender interessant, denn er beschreibt die numerischen Probleme, die bei Zieglers Konstruktion auftreten, und bietet praktische Lösungsansätze, um die tatsächlichen Koordinaten der Ecken der Polytope mit hoher Genauigkeit erzeugen zu können.

Das Kapitel endet mit der Konstruktion von 2-Polytopen in Abschnitt 3.4, in welchem lediglich regelmäßige n -Ecke erzeugt werden, deren Zentrum der Ursprung ist.

Aus diesen Polytopen sollen anschließend Matrizen erzeugt werden. Dafür wird das Konzept der Colin-de-Verdière-Matrizen benötigt, welches in Kapitel 4 und konkret in Abschnitt 4.1 eingeführt wird. Vereinfacht gesagt lässt sich aus einem d -Polytop, das den Ursprung enthält, eine Matrix erzeugen, deren Kern von den Koordinatenvektoren des Polytops aufgespannt wird. Für 3-Polytope wird die Konstruktion von Lovász verwendet, die in Abschnitt 4.4 beschrieben wird. Für 2-Polytope gibt es eine Konstruktion von Izvestiev, die jedoch für diese Arbeit nicht direkt angewendet werden kann. Daher wird in Abschnitt 4.3 eine explizite Konstruktion einer Matrix für spezielle 2-Polytope entwickelt und anschließend gezeigt, dass deren Werte mit den theoretischen Resultaten von Izvestiev übereinstimmen. Für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision handelt es sich bei der die Eigenstruktur nicht um ein Polytop, sondern um die Verfeinerung eines Polytops. Deshalb lassen sich die Resultate aus Kapitel 4 nicht direkt anwenden. Für eine alternative Konstruktion werden für den d -dimensionalen Fall Colin-de-Verdière-Matrizen der Dimensionen 0 bis d benötigt, weshalb in Abschnitt 4.2 zusätzlich noch Colin-de-Verdière-Matrizen für 0- und 1-Polytope betrachtet werden.

Basierend auf den vorigen Kapiteln behandeln die Kapitel 5 und 6 die Konstruktion von verallgemeinerten quadratischen und kubischen B-Spline-Subdivisionsalgorithmen und bilden das Herzstück dieser Arbeit. In Kapitel 5 werden zunächst Subdivisionsmatrizen für die verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision vorgestellt. In Abschnitt 5.1 werden die Grundlagen aufgearbeitet und der Doo-Sabin-Algorithmus beschrieben. Außerdem werden

die Verfeinerungsregeln für reguläre Initialelemente erläutert.

Abschnitt 5.2 widmet sich der Konstruktion der neuen Subdivisionsalgorithmen. Für die verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision werden zwei Varianten vorgestellt. Die erste Variante nutzt die Eigenstruktur aus Kapitel 3 direkt und erzeugt eine Matrix mit einem Spektrum von $1, 1/2, \dots, 1/2, 1/4, \dots, 1/4$. Allerdings entstehen durch diese Konstruktion negative Matrixeinträge.

Die zweite Variante erzeugt aus der Eigenstruktur aus Kapitel 3 zunächst eine Colin-de-Verdière-Matrix nach Kapitel 4. Das Spektrum dieser Matrix wird mithilfe des Matrixexponentials anschließend so geshiftet, dass das Endprodukt das gewünschte Spektrum besitzt. Hier werden keine negativen Matrixeinträge erzeugt, dafür kann das Spektrum, abgesehen von dem dominantem und den subdominanten Eigenwerten, nicht exakt kontrolliert werden.

Abschnitt 5.3 widmet sich abschließend den Beweisen im Bezug auf die Qualitätskriterien. Für die verschiedenen Varianten wird untersucht, welche Qualitätskriterien (nicht) erfüllt werden. Unterstützend dazu werden die in Abschnitt 3.1.1 beschriebenen Zufallsbeispiele verwendet, um numerisch zu überprüfen, ob die Qualitätskriterien eingehalten werden.

Kapitel 6 behandelt die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision und ist analog zu Kapitel 5 aufgebaut. In Abschnitt 6.1 werden zunächst die Grundlagen und der Catmull-Clark-Algorithmus erklärt. Zudem wird die Verfeinerung der regulären Initialelemente besprochen. Außerdem wird besprochen, warum für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision die Doppelringstruktur für subdominante Eigenwerte $1/2$ notwendig ist, und wie dies mit dem auswertbaren Bereich zusammenhängt.

In Abschnitt 6.2 wird anschließend die Konstruktion beschrieben. Diese beginnt mit einem d -Polytop und verfeinert es, indem für jede Kante, für jede Facette und im Ursprung ein Punkt eingefügt wird und diese eingefügten Punkte mit Kanten entsprechend verbunden werden. Anschließend werden für die einzelnen Bereiche dieser Struktur Colin-de-Verdière-Matrizen für 0- bis d -Polytope erzeugt, welche zu einer Matrix kombiniert werden. Diese wird in zwei Dreiecksmatrizen aufgeteilt, deren Spektrum durch das Matrixexponential angepasst wird. Die beiden so modifizierten Matrizen werden abschließend multipliziert, um so die Subdivisionsmatrix zu erzeugen.

In Abschnitt 6.3 werden abschließend wieder die Qualitätskriterien betrachtet. Wie bereits im Titel des sechsten Kapitels zu erkennen ist, ist die Variante der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivision experimenteller Natur. Der Grund dafür ist, dass die so konstruierten Matrizen zwar einen d -fachen Eigenwert $1/2$ besitzen, aber nicht gezeigt werden konnte, dass die übrigen von 1 verschiedenen Eigenwerte betragsmäßig kleiner als $1/2$ sind. Daher sind für diese Variante die numerischen Experimente von großer Bedeutung, denn sie können zumindest eine qualitative Aussage darüber treffen, ob der so konstruierte Algorithmus prinzipiell funktioniert.

Die in dieser Arbeit verwendete hexaedrische Struktur der Zellen und der darauf aufbauenden Begriffe lässt sich für den volumetrischen Fall von Hexaedernetzen auf beliebige Netze erweitern. Die verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivisionsalgorithmen lassen sich ohne Änderung auf diesen Fall verallgemeinern. In Kapitel 7 wird diese Verallgemeinerung kurz betrachtet aber nicht mehr detailliert und mit mathematischer Strenge ausgeführt. Hier bieten sich Ansätze für weitere Forschung, die neben dem Fazit auch in Kapitel 8 beschrieben werden.

1.3 Konventionen und Notation

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden für diese Arbeit einige grundlegende Notationen verwendet. Eine komplette Übersicht aller Notationen findet sich im Symbolverzeichnis, hier wird nur die grundlegende Struktur der Notation beschrieben, die mit den Zahlenräumen beginnt:

Notation 1.1. Zahlenräume werden mit lichten Großbuchstaben bezeichnet, also beispielsweise $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0), $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ für die Menge der komplexen Zahlen. Spezifikationen werden als Subscripts dargestellt, also beispielsweise $\mathbb{N}_0$ für die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0 oder $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für die Menge der nicht negativen reellen Zahlen. Zudem wird der Einheitskreis mit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ und die Einheitssphäre mit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

In einem nächsten Schritt wird die generelle Symbolik skizziert:

Notation 1.2. Skalare Variablen werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, also beispielsweise als a , und Matrizen werden mit großen Buchstaben bezeichnet, also beispielsweise als M . Vektoren können je nach Praktikabilität als kleine oder große Buchstaben beschrieben werden.

Abbildungen werden mit kleinen fett gedruckten Buchstaben beschrieben, wie beispielsweise f , und Mengen werden mit großen fett gedruckten Buchstaben beschrieben, wie beispielsweise M . Da ein Graph G als Tupel, also als Menge, bestehend aus einer Menge an Knoten V und einer Menge von Kanten E interpretiert werden kann, sind insbesondere diese drei Elemente fett gedruckte Buchstaben.

Für jedes Objekt gibt es eine oder mehrere Standardbezeichnungen. Für Matrizen ist dies beispielsweise M und für Variablen a, b und c . Spezielle Objekte haben hingegen reservierte Buchstaben, wie beispielsweise x, y und z als Koordinatenvariablen oder E als Einheitsmatrix. Daher wird im unspezifischen Fall immer die Standardbezeichnung verwendet. Griechische Buchstaben haben keine spezielle Funktion und stellen lediglich eine Erweiterung des Alphabets dar. Sie können allerdings auch für bestimmte Begriffe reserviert werden. Eine Übersicht der reservierten Buchstaben findet sich im Symbolverzeichnis.

Als nächstes wird etwas genauer auf die Bezeichnung von Matrizen eingegangen:

Notation 1.3. Wie bereits beschrieben, werden Matrizen mit Großbuchstaben bezeichnet, also beispielsweise M für eine allgemeine Matrix. Einträge einer Matrix werden als Subskripttupel mit einfachen Klammern beschrieben. Dies bedeutet konkret:

- $M_{(i,:)}$ ist die i -te Zeile einer Matrix, mit $i \in \mathbb{N}$.
- $M_{(:,j)}$ ist die j -te Spalte einer Matrix, mit $j \in \mathbb{N}$.
- $M_{(i,j)}$ ist der (i, j) -te Eintrag einer Matrix, mit $i, j \in \mathbb{N}$.

Im Gegensatz dazu werden die Indizes durchnummerierter Matrizen ohne Klammern beschrieben, also beispielsweise beschreibt $\sum_{i=1}^n M_i$ die Summe von n Matrizen und nicht von n Einträgen einer Matrix. Wenn möglich werden Indizes als Subscripts dargestellt. Werden allerdings Matrixeinträge und Indizes gleichzeitig verwendet, werden letztere als Superscripts verwendet. Um Superscripts von Potenzen zu unterscheiden, werden jene mit einfachen Klammern notiert.

Der Ausdruck $\sum_{k=1}^n M_{(i,j)}^{(k)}$ ist beispielsweise die Summe aller (i, j) -ten Einträge einer Folge von n Matrizen, wohingegen $\sum_{k=1}^n M_{(i,j)}^k$ die Summe aller (i, j) -ten Einträge von Potenzen einer Matrix M darstellt.

Die einzig weitere Notation für Matrizen ist M^T und stellt die Transponierte einer Matrix dar. Hingegen sind Notationen wie M' , $\bar{M}$ oder $\tilde{M}$ speziell definierte Matrizen ohne einheitliche Verwendung. Der Ausdruck M' stellt also explizit nicht die Transponierte einer Matrix dar sowie der Ausdruck $\bar{M}$ explizit nicht die Adjungierte einer Matrix darstellt. Außerdem bezeichnen wir E_n die Einheitsmatrix und mit 0_n die Nullmatrix der Größe $n \times n$.

Für Vektoren ergibt sich die folgende Notation:

Notation 1.4. Wie bereits erwähnt, können Vektoren sowohl als kleine als auch als große Buchstaben beschrieben werden. Die jeweilige Dimension ergibt sich dabei, sofern nicht explizit definiert, jeweils aus dem Kontext. So ist beispielsweise klar, dass für $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der Vektor a der Gleichung

$$Ma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ein Spaltenvektor der Dimension 3×1 ist. Eine Sonderrolle nehmen die Bezeichnungen 0 und 1 ein. Diese sind typischerweise Zahlen, können aber auch Darstellungen für Vektoren sein. So geht aus der Gleichung

$$Ma = 0$$

hervor, dass 0 hier einen 3×1 Vektor aus Nulleinträgen darstellt. Um dies zu betonen, wird häufig, aber nicht immer, die Schreibweise $\vec{0}$ verwendet. Die Gleichung würde sich also beispielsweise auch als

$$Ma = \vec{0}$$

darstellen lassen. Dasselbe gilt analog auch für 1 und $\vec{1}$. Für Matrizen wird die Notation 0_n und 1_n verwendet, wenn eine $n \times n$ Matrix bestehend aus Nullen oder Einsen dargestellt werden soll.

Wir führen außerdem die folgende Notation im Bezug auf das Exponential ein:

Notation 1.5. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist das Exponential $\exp_2$ die Notation für

$$\exp_2(a) := \exp(\ln(2)a) = 2^a \quad \text{und} \quad \exp_2(M) := \exp(\ln(2) M) = 2^M.$$

Für Graphen ergibt sich noch folgende Konvention, die auch in Bemerkung A.19 eingebettet im Kontext der Graphentheorie beschrieben ist. Da diese Konvention für das Lesen dieser Arbeit wichtig ist, findet der relevante Teil hier zusätzlich Erwähnung:

Konvention 1.6. Graphen in dieser Arbeit sind zunächst abstrakt beschrieben und können abstrakt interpretiert werden. Behandelt man die Menge der Knoten als abstrakte Menge aus $|V|$ Elementen, so kann ein Graph durch die Informationen der Adjazenzmatrix erzeugt werden. Abstrakt interpretierte Graphen kodieren also zunächst durch die Kanten nur eine Struktur zwischen Objekten. Ein solcher Graph wird sprachlich auch als abstrakter Graph bezeichnet.

Den Knoten kann Bedeutung verliehen werden, indem diese mit konkreten Elementen identifiziert werden, oder besser noch, indem die Menge V der Knoten als diese konkreten Elemente definiert werden. So ist es durch die Definition des Graphen ohne Weiteres möglich, die Menge der Knoten als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ oder des $\mathbb{R}^3$ zu definieren. Ein solcher Graph wird auch als eingebetteter Graph oder realisierter Graph bezeichnet.

Diese Arbeit beschäftigt sich insbesondere in Kapitel 3 damit, aus einer Adjazenzmatrix zunächst einen abstrakten Graphen zu erzeugen und diesen dann mit Knoten aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ zu realisieren. Da diese Realisierung lediglich ein Isomorphismus zwischen abstrakten und konkreten Knoten ist, wird der abstrakte Graph und seine Realisierung(en) synonym verwendet. Dies ermöglicht eine erhebliche Vereinfachung der Notation und gestaltet die damit verbundenen Begriffe übersichtlicher.

Wir führen zudem folgende Notation im Bezug auf die Eigenwerte einer Matrix ein:

Notation 1.7. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix.

- Einen nicht spezifizierten Eigenwert der Matrix M wird mit λ_i bezeichnet, ohne das i weiter zu spezifizieren.
- Einen konkreten Eigenwert bezeichnen wir mit abweichendem Indizes, also etwa λ_0 , λ_1 , λ_t oder λ_n .
- Den subdominanten Eigenwert einer Matrix, wie in Definition 2.34 beschrieben, bezeichnen wir mit λ .
- Den subsubdominanten Eigenwert einer Matrix, wie in Definition 2.34 beschrieben, bezeichnen wir mit μ .

Damit wurde ein Überblick über die wichtigen Notationen dieser Arbeit gegeben, sodass der Inhalt mit dem nächsten Kapitel beginnen kann.

2 Subdivision, Subdivisionsmatrizen und deren Qualitätskriterien

Seit den 1970er Jahren wird die Subdivision als ein Bereich der Mathematik entwickelt und erforscht. Um sich dem Begriff für diese Arbeit zu nähern, formulieren wir zunächst die folgende, bewusst unscharfe Beschreibung:

Beschreibung. Eine Subdivisionsabbildung ist eine Abbildung bestehend aus Verfeinerungsregeln, die Kontrollpunkte mit einer gewissen Struktur in $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ auf Kontrollpunkte mit einer gewissen Struktur in $\mathbb{R}^d$ abbildet und die einen spezifischen Zweck erfüllen soll.

Unpräziser lässt sich ein Begriff wohl nicht ausdrücken. Die obige Beschreibung ermöglicht es jedoch, die verschiedenen Bereiche und Begriffe der Subdivision zu beschreiben.

Wir beginnen mit dem Begriff der *Abbildung*. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf lineare Subdivision, also auf Abbildungen, die sich durch Matrizen darstellen lassen. Selbstverständlich lässt sich Subdivision auch mit nichtlinearen Abbildungen realisieren. Eine Analyse von eindimensionalen Subdivisionsalgorithmen, sowohl linear als auch nicht linear, wurde beispielsweise von Ewald in [Ewa20] durchgeführt. Durch die Beschränkung auf lineare Subdivision geht zwar Freiraum bei der Gestaltung der Abbildung verloren, allerdings bietet diese Einschränkung auch viele Vorteile. Wir erhalten damit den in der Einleitung angesprochenen Vorteil der Einfachheit in der Darstellung und Implementierung. Außerdem ermöglicht die Einschränkung auf lineare Abbildungen, dass wir uns für die Analysis der Abbildungen auf Eigenschaften der jeweils zugehörigen Matrizen beziehen können. Die Theorie ist dadurch also spezifischer und für den spezifischen Fall lassen sich dann wiederum Aussagen formulieren.

Die nächste auffällige Phrase ist *Kontrollpunkte mit einer gewissen Struktur in $\mathbb{R}^d$* . Hier gibt es gleich drei Parameter, die es zu spezifizieren gilt: Zunächst betrachten wir die *Dimension d* . Die Dimension des Raumes, in dem die Kontrollpunkte liegen, spielt für die Theorie zunächst keine große Rolle. In Abbildung 1.1 sehen wir beispielsweise Kontrollpunkte in $\mathbb{R}^2$, die eine ebene Kurve darstellen. Chaikins Subdivisionsschema [Cha74] lässt sich aber ebenso gut auf ein Kontrollpolygon in $\mathbb{R}^3$, also für eine Raumkurve, anwenden. Genauso können Flächen und Volumen in höheren Dimensionen dargestellt und verwendet werden.

Besonders interessant ist allerdings die *Struktur* der Kontrollpunkte. Hier muss zunächst die Dimension der Subdivisionselemente betrachtet werden. Konkret beschäftigen wir uns in dieser Arbeit mit Subdivisionskurven, -flächen und -volumen, wobei Subdivisionskurven nur der Vollständigkeit halber genannt werden. Für die anderen beiden Fälle, also für Subdivisionsflächen und -volumen, werden wir konkrete Subdivisionsalgorithmen entwickeln. Außerdem ist die Geometrie der Elemente und wie diese zueinander stehen entscheidend. Dies wird im Laufe dieses Kapitels betrachtet. Subdivision lässt sich auch auf höherdimensionalere Objekte erweitern, was jedoch nicht Teil dieser Arbeit ist.

Entscheidend ist außerdem die *Anzahl* an Kontrollpunkten. Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich Subdivisionsmatrizen, die n (mit $n \in \mathbb{N}$) Kontrollpunkte auf n Kontrollpunkte abbilden. Die Matrix der Subdivisionsabbildung ist also immer quadratisch. Ein Beispiel dafür sehen wir in der Matrix aus Gleichung (1.1). Diese bildet immer zwei Kontrollpunkte auf zwei neue Kontrollpunkte ab. Da dies für jeden Abschnitt separat durchgeführt wird und sich die Abschnitte jeweils in einem Kontrollpunkt überlappen, kann sich die Anzahl der Kontrollpunkte durch die Subdivision erhöhen. Die Matrizen werden also jeweils lokal angewendet. Daher ist die Einschränkung auf quadratische Matrizen keine echte Beschränkung, sie ermöglicht es aber, die quadratischen Matrizen (zum Beispiel im Bezug auf das Spektrum) zu analysieren.

Das letzte zu spezifizierende Element ist der *Zweck* der Subdivision. Hier ist das Spektrum in der Literatur sehr groß. Wir betrachten hier Subdivision ausschließlich im Kontext von verallgemeinerter quadratischer und kubischer B-Spline-Subdivision, also die (Re)Produktion von B-Spline- beziehungsweise Subdivisionselementen.

Diese Aspekte werden in diesem Kapitel konkretisiert und ausgearbeitet. Dabei beschreiben wir, was Subdivision im Kontext dieser Arbeit ist und sein soll. In Abschnitt 2.1 betrachten wir zunächst die grundlegenden Begriffe und die Struktur, die wir benötigen. Anschließend definieren wir in Abschnitt 2.2 den Begriff der Subdivision und erläutern konkret, wie die eingangs beschriebenen Begriffe verfeinert werden. Bei der Subdivision treten invariante Teile der Struktur auf, welche wir in Abschnitt 2.3 beschreiben. Für die Subdivisionsmatrizen dieser invarianten Strukturen erarbeiten wir in Abschnitt 2.4 Qualitätskriterien. Dabei beleuchten wir die Hintergründe und beschreiben die Auswirkungen und Konsequenzen, die auftreten, falls eine Subdivisionsmatrix einem Qualitätskriterium (nicht) entspricht. Außerdem dienen diese Qualitätskriterien als Leitplanken für die in Kapitel 5 und 6 konstruierten Subdivisionsmatrizen und motivieren, warum gerade diese Konstruktion sinnvoll gewählt ist. Die Konstruktion folgt dabei für alle in dieser Arbeit neu entwickelten Subdivisionsalgorithmen einem gleichen Schema. Dieses Schema beschreiben wir in Abschnitt 2.5, nachdem wir die bisherigen Varianten in der Literatur eingeordnet haben. Insbesondere wird dadurch klar, warum die Kapitel 3 und 4 benötigt werden und wie sie sich in die Konstruktion einfügen.

2.1 Definitionen, Begriffe und Struktur

Mit den eben erörterten Spezifikationen können wir die für die Subdivision benötigten Begriffe definieren. Diese führen wir Schritt für Schritt ein und kombinieren sie dabei zu neuen Begriffen. Wie bereits erwähnt betrachten wir in dieser Arbeit Subdivision ausschließlich im Kontext der verallgemeinerten quadratischen und kubischen B-Spline-Subdivision. Entsprechend sind die Begriffe und Definitionen dieses Abschnitts auf diese Anwendung angepasst.

Wir beginnen mit Objekten im Definitionsbereich und fügen sukzessive Struktur hinzu, bis wir die Auswertung von Elementen (Kurve, Fläche, Volumen) beschreiben können. Die Begriffe werden an Beispielen illustriert, welche erst dann im Detail beschrieben werden können, wenn alle Begriffe vorhanden sind. Trotzdem wird empfohlen für die verschiedenen Definitionen die Abbildungen 2.2 und 2.3 in Augenschein zu nehmen, da dadurch ein intuitives Verständnis der Begriffe erlangt werden kann.

Da die ausgewerteten Elemente offensichtlich verschieden sein können, definieren wir zunächst deren Typ und Grad.

Definition 2.1. *Ein ausgewertetes Element ist je nach Dimension eine Kurve, eine Fläche oder ein Volumen. Wir bezeichnen mit $t \in \{1, 2, 3\}$ den Typ der ausgewerteten Elemente. Konkret setzen wir $t = 1$ für Kurven, $t = 2$ für Flächen und $t = 3$ für Volumen. Außerdem bezeichnen wir mit $g \in \{2, 3\}$ den Grad der Elemente. Konkret verwenden wir $g = 2$ für quadratische und $g = 3$ für kubische Elemente.*

Diese Definition ließe sich noch um weitere Grade und Typen erweitern. Es wäre beispielsweise möglich, beide Begriffe als Elemente der natürlichen Zahlen zu definieren und so auf quadratische Elemente oder auf Elemente höherer Dimension zu verallgemeinern. Allerdings werden in dieser Arbeit nur die sechs Kombinationen aus Grad und Typ betrachtet. Außerdem ist die obige Definition schon mit Hinblick auf den Zweck der Subdivision definiert: die (Re)Produktion von B-Spline Elementen.

Mithilfe des Typs wollen wir den Begriff des Spline-Definitionsgebiets einführen. Dieser lehnt sich an den Begriff der „spline domain“ aus [PR08, S. 42 f.] an und verallgemeinert ihn für beliebige Typen. Dafür benötigen wir zunächst einige Begriffe und Erklärungen, die auf [PR08, S. 39–43] beruhen. Wir beginnen mit der Definition einer Zelle:

Definition 2.2. *Sei $t \in \{1, 2, 3\}$ der Typ der ausgewerteten Elemente. Wir nennen*

$$s_i := [0, 1]^t \times \{i\} \quad \text{mit} \quad i \in \mathbb{N}$$

t-variate Zelle.

Eine Illustration der Zellen (jeweils ohne den Index i) findet sich in Abbildung 2.1. Jede Zelle ist für sich genommen ein topologischer Raum (basierend auf den offenen Mengen von $[0, 1]^t$). Wir wollen im nächsten Schritt verschiedene Zellen in einer geeigneten Art und Weise zu einem topologischen Raum kombinieren. Dazu definieren wir die folgende Äquivalenzrelation:

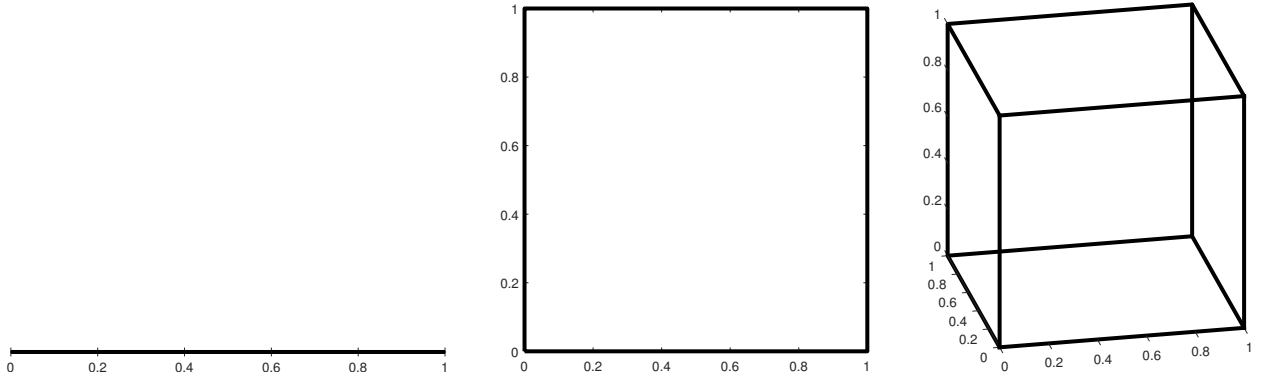


Abbildung 2.1: Illustration der t -variablen Zellen für $t = 1$ (links), $t = 2$ (Mitte) und $t = 3$ (rechts), jeweils ohne den Index i .

Definition 2.3. Sei $t \in \{1, 2, 3\}$ der Typ der ausgewerteten Elemente und $[0, 1]^t \times \mathbf{M}$ mit $\mathbf{M} \subset \mathbb{N}$ eine Menge von Zellen. Sei $\mathbf{d}$ eine Äquivalenzrelation auf $[0, 1]^t \times \mathbf{M}$ mit den Eigenschaften:

- Die Äquivalenzrelation $\mathbf{d}$ identifiziert ausschließlich $(t - 1)$ -dimensionale Ränder von Zellen punktweise miteinander. Für $t = 1$ sind diese Ränder die beiden Endpunkte 0 und 1, für $t = 2$ sind es die vier äußeren Kanten und für $t = 3$ sind es die sechs äußeren Facetten.
- Es werden nur komplette $(t - 1)$ -dimensionale Ränder miteinander identifiziert.
- Es werden keine zwei $(t - 1)$ -dimensionale Ränder derselben Zelle miteinander identifiziert.
- Es werden maximal zwei $(t - 1)$ -dimensionale Ränder verschiedener Zellen miteinander identifiziert.
- Zwei Zellen haben maximal einen miteinander identifizierten $(t - 1)$ -dimensionalen Rand.

Dann heißt $\mathbf{d}$ **D-Äquivalenzrelation** der Menge $[0, 1]^t \times \mathbf{M}$.

Mit diesen beiden Begriffen ist es möglich, das Spline-Definitionsgebiet zu definieren:

Definition 2.4. Sei $t \in \{1, 2, 3\}$ der Typ der ausgewerteten Elemente. Eine Menge von Zellen $[0, 1]^t \times \mathbf{M}$ mit $\mathbf{M} \subset \mathbb{N}$ zusammen mit einer **D-Äquivalenzrelation** $\mathbf{d}$ heißt **Spline-Definitionsgebiet** und wird als Tupel mit

$$\mathbf{D} := ([0, 1]^t \times \mathbf{M}, \mathbf{d}) = (\{s_i | i \in \mathbf{M}\}, \mathbf{d})$$

bezeichnet. Ist $\mathbf{M}$ eine endliche Menge, so bezeichnen wir $\mathbf{M}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\{1, \dots, n\}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und ist $\mathbf{M}$ eine unendliche Menge, so bezeichnen wir $\mathbf{M}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\mathbb{N}$. Außerdem bezeichnen wir die Anzahl der Zellen in $\mathbf{D}$ mit $|\mathbf{D}|$.

Damit ist $\mathbf{D}$ wieder ein topologischer Raum. Eine Menge in $\mathbf{D}$ ist dabei offen, sofern jeder Teil jeder Zelle der Menge offen ist.

Die **D-Äquivalenzrelation** erklärt also, wie die einzelnen Zellen des Spline-Definitionsgebiets $\mathbf{D}$ in Beziehung zueinander stehen. Bildlich gesprochen werden diese an ihren Rändern mit anderen Zellen zusammengeklebt. Dieses Prinzip des „gluing“ wird ebenfalls in [PR08, S. 41 f.] beschrieben. Bezüglich des Spline-Definitionsgebiets muss noch Folgendes bemerkt werden:

Bemerkung 2.5. Der topologische Hintergrund wurde hier nur kurz beschrieben. Da dieser nur ein Randthema der vorliegenden Arbeit ist, gehen wir nicht weiter im Detail darauf ein. Hintergründe zu topologischen Räumen finden sich beispielsweise in [Bro06, Kap. 2, S. 19 ff.]. Die zusammengeklebten Räume sind unter dem Fachbegriff **Adjunktionsraum** in der Literatur zu finden. Hintergründe finden sich beispielsweise ebenfalls in [Bro06, Abschn. 4.5, S. 118 ff.].

Bemerkung 2.6. Die hexaedrische Struktur der Zellen im Volumenfall lässt sich auf eine trapezoedrische Struktur verallgemeinern. Dies wird in Kapitel 7 erläutert.

Bemerkung 2.7. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Spline-Definitionsgebiet zusammenhängend ist, also dass man über die Identifikation der Punkte für $t = 1$, Kanten für $t = 2$ und Facetten für $t = 3$ von jeder Zelle zu jeder anderen gelangen kann. Ist dies nicht der Fall, so lassen sich die verschiedenen Zusammenhangskomponenten separat als einzelne Spline-Definitionsgebiete betrachten.

Wie bereits angesprochen, werden Zellen an ihren Rändern (Eckpunkte für $t = 1$, Kanten für $t = 2$ und Facetten für $t = 3$) zusammengeklebt. Damit kann es Zellen geben, die an jedem Rand mit anderen Zellen zusammengeklebt und damit benachbart sind, und andere, die dies nicht sind. Für die folgenden Definitionen ist es allerdings erforderlich, dass Zellen zwingend an jeder Klebestelle einen Nachbarn haben. Daher führen wir die folgende Konvention nach [PR08, S. 42] ein:

Konvention 2.8. Jede Definition in diesem Kapitel mit einem Rand lässt sich in geeigneter Art und Weise in ein Szenario ohne Rand mit denselben Regeln einbetten beziehungsweise fortsetzen. Die Elemente am Rand werden dann durch diese Einbettung beziehungsweise Fortsetzung beschrieben. Werden also für eine Geometriebeschreibung weitere Elemente benötigt, so gehen wir im Folgenden davon aus, dass diese Geometriebeschreibung durch eine Einbettung entsprechender Größe gegeben ist. Wir gehen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, dass alle betrachteten Definitionen und Elemente nicht am Rand, sondern im Inneren liegen.

Im nächsten Schritt beschreiben wir die Realisierung beziehungsweise Auswertung des Spline-Definitionsgebiets in $\mathbb{R}^d$. Dazu betrachten wir zunächst die Menge der Kontrollpunkte und verknüpfen diese anschließend mit dem Spline-Definitionsgebiet. Da sich die Verknüpfung für die Grade $g = 2$ und $g = 3$ unterscheidet, betrachten wir jene für die beiden Fälle separat.

Definition 2.9. Sei $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t mit $|\mathbf{D}| = n$ und sei $g = 2$ der Grad. Seien $m, d \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Die Matrix $P' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ bezeichnen wir als Matrix der Kontrollpunkte. Jede Zeile in P' stellt dabei einen Punkt in $\mathbb{R}^d$ dar und die gesamte Matrix beinhaltet damit m Kontrollpunkte. Jeder Kontrollpunkt wird mit einer Zelle $s_i \in \mathbf{D}$ assoziiert, die Kontrollpunkte liegen also dual zu den Ecken der Zellen. Es gilt $m \geq n$, da für Zellen mit Rand Kontrollpunkte auch mit Zellen der jeweiligen Einbettung assoziiert werden müssen.

Definition 2.10. Sei $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t und sei $g = 3$ der Grad. Sei n die Anzahl aller Eckpunkte aller Zellen von $\mathbf{D}$ (ohne Doppelzählung). Seien $m, d \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Die Matrix $P' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ bezeichnen wir als Matrix der Kontrollpunkte. Jede Zeile in P' stellt dabei einen Punkt in $\mathbb{R}^d$ dar und die gesamte Matrix beinhaltet damit m Kontrollpunkte. Jeder Kontrollpunkt wird mit einer Ecke einer Zelle $s \in \mathbf{D}$ assoziiert, die Kontrollpunkte liegen also primal zu den Ecken der Zellen. Es gilt $m \geq n$, da für Zellen mit Rand Kontrollpunkte auch mit Ecken von Zellen der jeweiligen Einbettung assoziiert werden müssen.

Die Kontrollpunkte sind damit Objekte im Bildbereich und sollen die Form der erstellten Elemente (Kurve, Fläche, Volumen) vorgeben. Um Subdivision, also Verfeinerung, betreiben zu können, benötigen wir eine Struktur, die wir durch Initialelemente beschreiben. Da sich diese in der konkreten Gestalt für den Grad $g = 2$ und $g = 3$ unterscheiden, definieren wir jene ebenfalls separat.

Definition 2.11. Sei $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t sei $g = 2$ der Grad. Sei $d, m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und sei $P' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ eine Matrix von Kontrollpunkten. Sei der Eckpunkt mit Index k ein Eckpunkt von n Zellen in $\mathbf{D}$. Für diesen Eckpunkt definieren wir ein Initialelement als Quadrupel

$$\mathbf{I}_k(\mathbf{D}) = (\mathbf{G}_k, A_k, S_k, P_k),$$

welches mit dem Eckpunkt mit Index k in $\mathbf{D}$ assoziiert ist. Die Elemente des Quadrupels entstehen dabei wie folgt:

- Der Graph $\mathbf{G}_k = (\mathbf{V}_k, \mathbf{E}_k)$ besteht aus Knoten $\mathbf{V}_k$ und Kanten $\mathbf{E}_k$. Er hat für jede Zelle, an dem der Eckpunkt mit Index k liegt, einen Knoten, es gilt also $|\mathbf{V}_k| = n$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden zugehörigen Zellen (an einem Knoten, einer Kante, einer Facette für jeweiliges t) zusammengeklebt sind. Der Graph ist also (wie die Kontrollpunkte für $g = 2$) dual zu den Ecken der Zellen.
- Die Adjazenzmatrix $A_k \in \{0, 1\}^{n \times n}$ geht direkt aus dem Graphen $\mathbf{G}_k$ hervor. Die Aufnahme in das Quadrupel ist damit überflüssig, allerdings ermöglicht die Notation einen direkten Zugriff auf die Gestalt des Graphen.
- Die Matrix $P_k \in \mathbb{R}^{n \times d}$ beschreibt die Matrix der Kontrollpunkte des Initialelements. Die Kontrollpunkte sind dabei diejenigen, die mit den am Eckpunkt mit Index k liegenden Zellen assoziiert sind. Wir erhalten damit n viele

Kontrollpunkte. Diese assoziieren wir mit den Knoten des Graphen G_k . Der Graph gibt den Kontrollpunkten des Initialelements damit eine Struktur.

- Die Subdivisionsmatrix $S_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschreibt, wie die Kontrollpunkte verfeinert werden. Die Konstruktion jener wird in Kapitel 5 beschrieben. Sie hängt komplett von der Struktur der Zellen ab, die den Eckpunkt mit Index k besitzen, also von

$$\{s_i \in \mathbf{D} \mid \text{der Eckpunkt mit Index } k \text{ ist ein Eckpunkt von } s_i\}.$$

Definition 2.12. Sei $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t und sei $g = 3$ der Grad. Sei $d, m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ und sei $P' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ eine Matrix von Kontrollpunkten. Sei der Eckpunkt mit Index k ein Eckpunkt von j Zellen in $\mathbf{D}$ und sei n die Anzahl der Eckpunkte dieser Zellen ohne Mehrfachzählung. Für diesen Eckpunkt mit Index k definieren wir ein Initialelement als Quadrupel

$$\mathbf{I}_k(\mathbf{D}) = (\mathbf{G}_k, A_k, S_k, P_k),$$

welches mit dem Eckpunkt mit Index k in $\mathbf{D}$ assoziiert ist. Die Elemente des Quadrupels entstehen dabei wie folgt:

- Der Graph $\mathbf{G}_k = (\mathbf{V}_k, \mathbf{E}_k)$ besteht aus Knoten $\mathbf{V}_k$ und Kanten $\mathbf{E}_k$. Er hat für jede Ecke einer Zelle, an dem der Eckpunkt mit Index k liegt, einen Knoten, es gilt also $|\mathbf{V}_k| = n$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden zugehörigen Ecken der Zellen durch eine Kante verbunden sind. Der Graph ist also (wie die Kontrollpunkte für $g = 3$) primal zu den Ecken der Zellen.
- Die Adjazenzmatrix $A_k \in \{0, 1\}^{n \times n}$ geht direkt aus dem Graphen $\mathbf{G}_k$ hervor. Die Aufnahme in das Quadrupel ist damit überflüssig, allerdings ermöglicht die Notation einen direkten Zugriff auf die Gestalt des Graphen.
- Die Matrix $P_k \in \mathbb{R}^{n \times d}$ beschreibt die Matrix der Kontrollpunkte des Initialelements. Die Kontrollpunkte sind dabei diejenigen, die mit den Ecken der am Eckpunkt mit Index k liegenden Zellen assoziiert sind. Wir erhalten damit n viele Kontrollpunkte. Diese assoziieren wir mit den Knoten des Graphen $\mathbf{G}_k$. Der Graph gibt den Kontrollpunkten des Initialelements damit eine Struktur.
- Die Subdivisionsmatrix $S_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschreibt, wie die Kontrollpunkte verfeinert werden. Die Konstruktion jener wird in Kapitel 6 beschrieben. Sie hängt komplett von der Struktur der Zellen und deren Nachbarn ab, die den Eckpunkt mit Index k besitzen, also von

$$\{s_i \in \mathbf{D} \mid \text{die Ecke mit Index } k \text{ ist eine Ecke von } s_i \text{ oder } s_i \text{ besitzt eine gemeinsame Ecke mit einer Zelle, dessen Ecke die Ecke mit Index } k \text{ ist}\}.$$

Wir assoziieren also jeden Eckpunkt im Spline-Definitionsgebiet mit einem Initialelement und erhalten damit eine Struktur von 2 für $t = 1$, 2×2 für $t = 2$ und $2 \times 2 \times 2$ für $t = 3$ Initialelementen pro Zelle. Damit ergibt sich die folgende Beziehung der Begriffe

$$\text{Spline-Definitionsgebiet } \mathbf{D} \leftrightarrow \text{Menge der Initialelemente } \mathbf{I} \leftrightarrow \text{Matrix aller Kontrollpunkte } P'$$

und im Bezug auf ein Element

$$\text{Zelle } s_i \leftrightarrow 2 \times \cdots \times 2 \text{ Initialelemente} \leftrightarrow \text{Matrix der Kontrollpunkte der konkreten Initialelemente.}$$

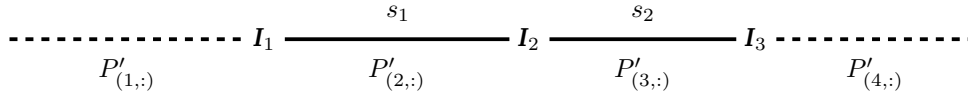
Dieser Zusammenhang wird in den Abbildungen 2.2 und 2.3 noch einmal verdeutlicht. Der Bezug oder genauer gesagt die Verknüpfung von Zellen und Initialelementen sollte noch tiefer ausgeführt werden. Bevor dies getan wird, betrachten wir zwei Beispiele, um den Zusammenhang der Begriffe zu verdeutlichen.

Beispiel 2.13. Mit diesem Beispiel soll eine quadratische B-Spline Kurve in $\mathbb{R}^2$ konstruiert werden. Dafür definieren wir zunächst $t = 1$ und $g = 2$. Zudem sei

$$\mathbf{D} := ([0, 1] \times \{1, 2\}, \mathbf{d}) = (\{s_1, s_2\}, \mathbf{d}),$$

wobei $\mathbf{d}$ gerade $\{1\} \times \{1\}$ mit $\{0\} \times \{2\}$ identifiziert.

Wir erhalten damit die folgende Struktur:



Durch die entsprechende Einbettung liegen die Eckpunkte von s_1 und s_2 also alle an $n = 2$ Zellen. Zudem definieren wir mit $m = 4$

$$P' := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit diesen Kontrollpunkten definieren wir drei Initialelemente

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= \left(\mathbf{G}_1, A, S, P'_{([1,2],:)} \right), \\
 I_2 &:= \left(\mathbf{G}_2, A, S, P'_{([2,3],:)} \right), \\
 I_3 &:= \left(\mathbf{G}_3, A, S, P'_{([3,4],:)} \right)
 \end{aligned}$$

mit

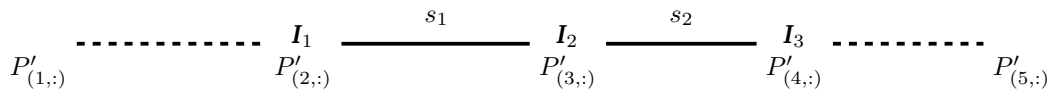
$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Adjazenzmatrix A ergibt sich direkt aus der Struktur von $\mathbf{D}$ und den mit Elementen aus $\mathbf{D}$ identifizierten Kontrollpunkten. Die Illustration dieses Beispiels ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Hier wird deutlich, dass sich benachbarte Initialelemente einen Kontrollpunkt teilen. Hervorzuheben ist, dass die Identifizierung der Kontrollpunkte mit den Zellen aus $\mathbf{D}$ willkürlich erfolgt ist. Ebenso wäre denkbar, weitere Zellen einzufügen oder die Identifizierung anders zu definieren (etwa $P'_{(1,:)}$ mit $P'_{(2,:)}$ zu tauschen). Die Geometrie entsteht somit nicht aus den Koordinaten der Kontrollpunkte, sondern aus $\mathbf{D}$.

Beispiel 2.14. Mit diesem Beispiel soll eine kubische B-Spline Kurve in $\mathbb{R}^2$ konstruiert werden. Dafür definieren wir zunächst $t = 1$ und $g = 3$. Zudem sei

$$\mathbf{D} := ([0, 1] \times \{1, 2\}, \mathbf{d})$$

wobei $\mathbf{d}$ gerade $\{1\} \times \{1\}$ mit $\{0\} \times \{2\}$ identifiziert. Wir erhalten damit die folgende Struktur:



Durch die entsprechende Einbettung liegen die Eckpunkte von s_1 und s_2 also alle an $j = 2$ Zellen, die wiederum zusammen jeweils $n = 3$ Eckpunkte ohne Mehrfachzählung besitzen. Zudem definieren wir mit $m = 5$

$$P' := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

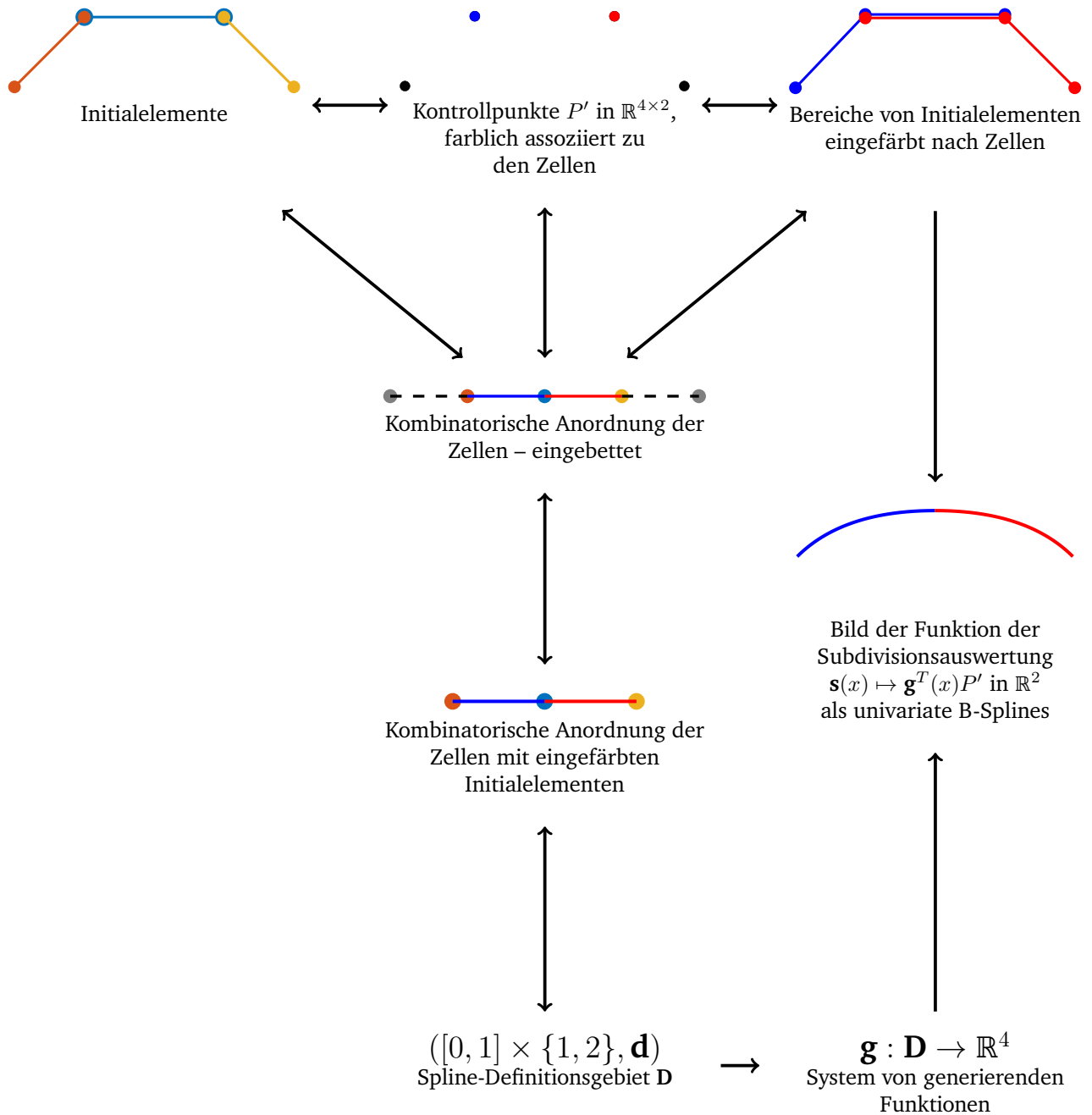


Abbildung 2.2: Illustration der verschiedenen Begriffe für den Fall $g = 2$ anhand des Beispiels 2.13.

Auf diesen Kontrollpunkten definieren wir drei Initialelemente

$$\begin{aligned} I_1 &:= (\mathbf{G}_1, A, S, P'_{([1,2,3],:)}), \\ I_2 &:= (\mathbf{G}_2, A, S, P'_{([2,3,4],:)}), \\ I_3 &:= (\mathbf{G}_3, A, S, P'_{([3,4,5],:)}), \end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S := \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Die Illustration dieses Beispiels ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Im Kontrast zur quadratischen B-Spline-Subdivision wird deutlich, dass sich zwei benachbarte Initialelemente in zwei Kontrollpunkten überlappen.

Wie bereits beschrieben, definiert das Spline-Definitionsgebiet die Struktur der Initialelemente. Dabei hängt der Graph $\mathbf{G}$ und damit auch die Adjazenzmatrix A eines Initialelements von der Struktur der Zellen um das Initialelement ab. Dasselbe gilt für die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente. Da die Kontrollpunkte P mit dem Graphen assoziiert sind, hängt die Auswahl der Kontrollpunkte ebenfalls, wie beschrieben, vom Spline-Definitionsgebiet ab. Die Lage der Kontrollpunkte, also ihre konkreten Werte in $\mathbb{R}^d$, ist davon unabhängig und bestimmt die Gestalt der erzeugten Elemente (Kurve, Fläche, Volumen).

Verschiedene Initialelemente können dabei gemeinsame Kontrollpunkte haben. Dies wird im Beispiel 2.13 verdeutlicht. Das blaue Initialelement teilt sich beispielsweise mit dem roten Initialelement einen Kontrollpunkt. Eine Illustration findet sich in Abbildung 2.2. Analog dazu ist in Beispiel 2.14 und Abbildung 2.3 zu sehen, dass sich für $g = 3$ der Überlappungsbereich auf zwei Kontrollpunkte erhöht.

Für Subdivisionsalgorithmen von höherem Typ können die kombinatorischen Anordnungen beziehungsweise Geometrien der Initialelemente entsprechend komplexer sein. Kommen beispielsweise für ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ $t = 2$ und Grad $g = 2$ in einem Eckpunkt der Zellen fünf Quadrate zusammen, so muss das Initialelement, das mit diesem Punkt assoziiert ist, entsprechend die Geometrie des Spline-Subdivisionsgebiets abbilden. In diesem Beispiel würde das bedeuten, dass das Initialelement ein Fünfeck sein muss. Eine Illustration findet sich in Abbildung 2.4.

Der nächste Schritt ist die Auswertung der oben beschriebenen Struktur zu Elementen (Kurven, Flächen Volumen). Für jede Kombination aus Grad und Typ definieren wir dafür zunächst ein reguläres Initialelement:

Definition 2.15. Sei t der Typ und g der Grad der ausgewerteten Elemente. Dann ist jedes Initialelement

$$I = (\mathbf{G}, A, S, P) \quad \text{mit} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ein reguläres Initialelement für den Typ $t = 1$ und den Grad $g = 2$. Außerdem ist jedes Initialelement

$$I = (\mathbf{G}, A, S, P) \quad \text{mit} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S := \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ein reguläres Initialelement für den Typ $t = 1$ und den Grad $g = 3$. Die regulären Elemente für die Typen 2 und 3 ergeben sich als t -fache Tensorprodukte aus den obigen Initialelementen und werden in den Kapiteln 5 und 6 explizit definiert.

Ob ein Initialelement regulär ist oder nicht, hängt mit der obigen Definition von seiner Struktur, nicht aber von den konkreten Kontrollpunkten ab. Mit den nächsten Definitionen legen wir fest, welche Initialelemente reguläre Initialelemente sein müssen.

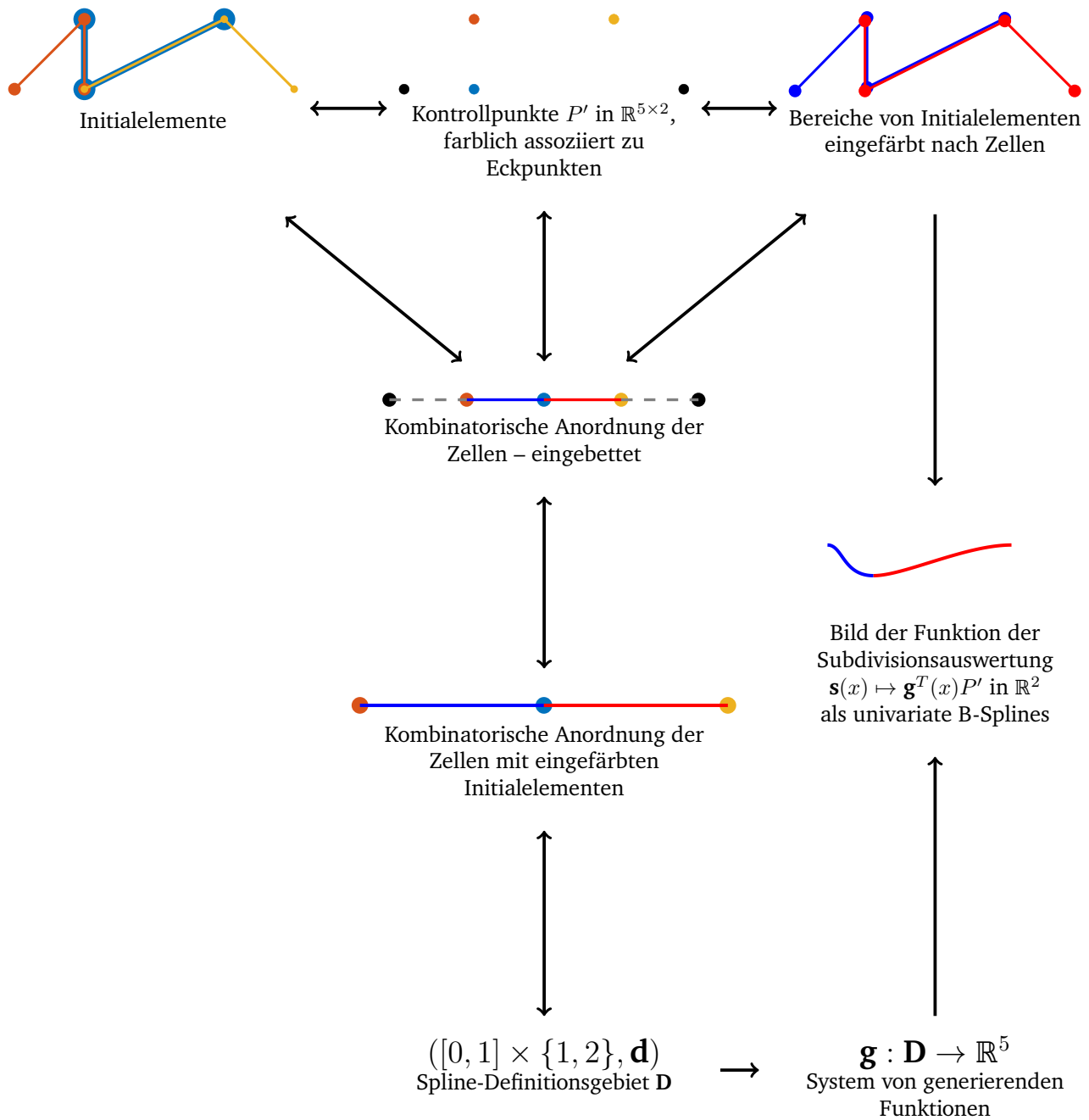


Abbildung 2.3: Illustration der verschiedenen Begriffe für den Fall $g = 3$ anhand des Beispiels 2.14.

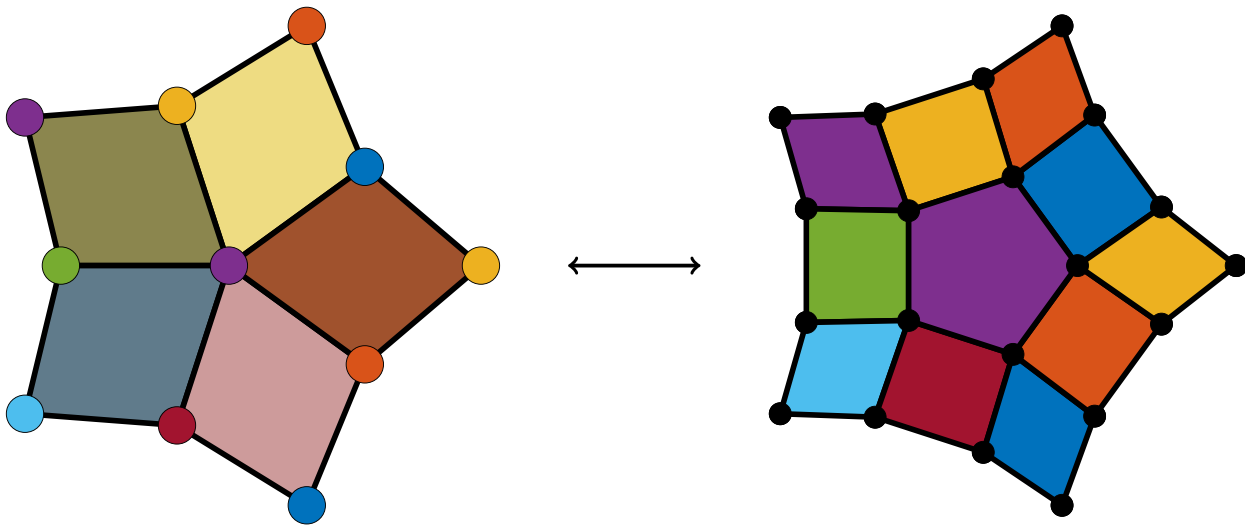


Abbildung 2.4: Beispiel für ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ $t = 2$ und Grad $g = 2$. Links sieht man fünf viereckige Zellen, deren Ecken mit Initialelementen assoziiert sind. Eine Illustration der entsprechend eingefärbten Initialelemente und der zugehörigen Kontrollpunkte in schwarz finden sich rechts. Da der zentrale Punkt des Spline-Definitionsgebiets an fünf Quadraten liegt, muss das zugehörige Initialelement ein Fünfeck sein.

Definition 2.16. Sei D ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t . Ein Initialelement hat eine reguläre Umgebung, wenn es Eckpunkt von

- 2, für $t = 1$,
- 2×2 , für $t = 2$,
- $2 \times 2 \times 2$, für $t = 3$

Zellen ist. Eine solche Anordnung von Zellen nennen wir reguläre Struktur.

Dies nutzen wir für die nächste Definition:

Definition 2.17. Wir definieren den Begriff der regulären Initialelemente für die Grade $g = 2$ und $g = 3$ separat:

1. Für $g = 2$ sind alle Initialelemente mit einer regulären Umgebung per Definition reguläre Initialelemente.
2. Sei $g = 3$. Sei I_k ein Initialelement mit einer regulären Umgebung, das also an einer regulären Struktur von Zellen liegt. Haben alle Initialelemente dieser Zellen eine reguläre Umgebung, so ist I_k per Definition ein reguläres Initialelement.

Alle übrigen Initialelemente können ebenfalls regulär sein, wenn sie Definition 2.15 erfüllen. Sie müssen aber, im Gegensatz zu den obigen Initialelementen, nicht zwingend regulär sein.

Wir erhalten damit automatisch folgende Bemerkung:

Bemerkung 2.18. Für $t = 1$ ergibt sich aus der obigen Definition, dass alle Initialelemente reguläre Initialelemente sind, da das Spline-Definitionsgebiet immer eine Kette von Zellen darstellt.

Für $g = 2$ erhalten wir damit eine einfache Beschreibung regulärer Initialelemente. Für $g = 3$ ist diese etwas komplizierter. Anschaulich betrachtet bedeutet dies jedoch nur, dass der „reguläre“ Bereich um jeweils ein Element größer sein muss. Wir verweisen hier schon einmal auf Beispiel 2.26, in welchem reguläre Initialelemente illustriert sind.

Die obige Definition 2.15 der regulären Initialelemente greift im Grunde den Kapiteln 5 und 6 vor. Die Adjazenzmatrix und der Graph eines Initialelements ergeben sich direkt aus der Struktur der Zellen, die das Initialelement beinhalten.

Damit sind diese beiden Objekte für Initialelemente mit regulären Umgebungen ohnehin eindeutig und wie in der obigen Definition festgelegt. Der Mehrwert dieser Definition ist, dass wir schon an dieser Stelle für bestimmte Konstellationen die Subdivisionsmatrizen festlegen. Dies geschieht hier, um eine erste Auswertung zu ermöglichen und, um im nächsten Abschnitt die Subdivision zu motivieren. Für die Auswertung beschreiben wir zunächst die generierenden Funktionen in der nächsten Definition:

Definition 2.19. Sei D ein Spline-Definitionsgebiet, die in Beziehung zu einer Matrix von Kontrollpunkten $P' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ steht. Dann heißt

$$\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{g}(x) \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(x) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_i : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(x) = 1 \quad \text{für alle} \quad x \in D$$

System von generierenden Funktionen. Dabei ist $\mathbf{g}_i$ die generierende Funktion zum Kontrollpunkt $P'_{(i, \cdot)}$. Außerdem heißt

$$\mathbf{s} : D \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{s}(x) \mapsto \mathbf{g}^T(x) P'$$

Funktion der Subdivisionsauswertung.

Noch offen ist, wie die generierenden Funktionen und damit die Funktion der Subdivisionsauswertung konkret aussehen. Dies konkretisieren wir in der nächsten Definition:

Definition 2.20. Sei D ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t und sei g der Grad. Eine Zelle

$$s_i = [0, 1]^t \times \{i\} \in D,$$

deren Eckpunkte mit regulären Initialelementen assoziiert sind, heißt reguläre Zelle und wird zu einem t -variaten B-Spline vom Grad g ausgewertet. Die zugehörigen generierenden Funktionen $\mathbf{g}$ sind in der Zelle uniforme Tensorprodukt-B-Spline-Basisfunktionen des Grades g und die Punkte P_{s_i} der Initialelemente der Zelle s_i (ohne Mehrfachzählung) mit den zugehörigen generierenden Funktionen $\mathbf{g}_{s_i}$ sind die Kontrollpunkte des B-Splines, die in einer $(g+1) \times \dots \times (g+1)$ Struktur durch die Initialelemente angeordnet sind. Damit ist die Auswertung auf der Zelle vollständig durch die obigen Punkte und deren generierende Funktion mit

$$\mathbf{s}([0, 1]^t \times \{i\}) := \mathbf{g}_{s_i}^T([0, 1]^t \times \{i\}) P_{s_i}$$

bestimmt. Insbesondere sind alle anderen generierenden Funktionen auf $[0, 1]^t \times \{i\}$ identisch 0.

Diese Auswertung der Beispiele 2.13 und 2.14 wird in den zugehörigen Abbildungen 2.2 und 2.3 illustriert. Da alle Initialelemente reguläre Initialelemente nach Definition des Beispiels sind, haben beide Zellen ausschließlich reguläre Initialelemente. Dadurch werden diese nach Definition 2.20 zu univariaten uniformen B-Spline Kurven ausgewertet.

Es schließt sich die Frage an, wie mit den anderen Zellen zu verfahren ist. Dafür nutzen wir das Konzept der Subdivision, welches im nächsten Abschnitt erläutert wird.

2.2 Subdivision

Im Wortsinne bedeutet Subdivision zunächst Unterteilung, die auf allen Ebenen der Struktur stattfindet. Wir beginnen mit der Beschreibung der Unterteilung des Spline-Definitionsgebiets:

Definition 2.21. Sei $D = D^{(1)} = ([0, 1]^t \times \{1, \dots, k\}, \mathbf{d}_1)$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t . Sei zudem

$$L := [0, \frac{1}{2}] \quad \text{und} \quad R := [\frac{1}{2}, 1].$$

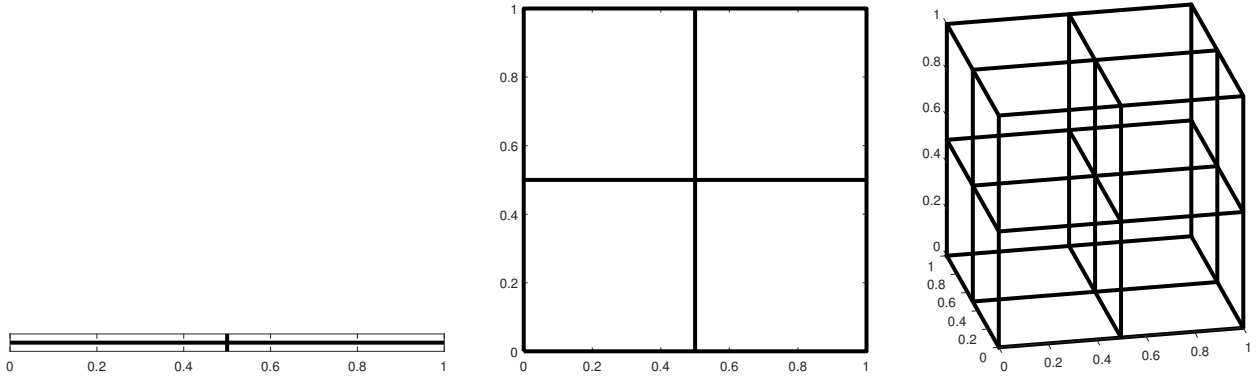


Abbildung 2.5: Illustration der Zerlegung einer Zelle für $t = 1$ (links), $t = 2$ (Mitte) und $t = 3$ (rechts), jeweils ohne Index der Zelle.

Dann ist

1. $D^{(2)} := (\{L, R\} \times \{1, \dots, k\}, d_2)$ für $t = 1$,
2. $D^{(2)} := (\{L \times L, L \times R, R \times L, R \times R\} \times \{1, \dots, k\}, d_2)$ für $t = 2$ und
3. $D^{(2)} := (\{L \times L \times L, L \times L \times R, L \times R \times L, L \times R \times R, R \times L \times L, R \times L \times R, R \times R \times L, R \times R \times R\} \times \{1, \dots, k\}, d_2)$ für $t = 3$

die Zerlegung des Spline-Definitionsgebiets. Damit ist $|D^{(2)}| = 2^t \cdot k$. Die D -Äquivalenzrelation d_2 ergibt sich durch d_1 . Äußere Bereiche von Zellen werden analog zu d_1 identifiziert und innere Bereiche von Zellen werden bei Überlappung identifiziert.

Eine Illustration der Zerlegung einer Zelle findet sich in Abbildung 2.5. Wir definieren zum verfeinerten Spline-Definitionsgebiet eine Reparametrisierung mit der folgenden Definition:

Definition 2.22. Sei $D = D^{(1)} = [0, 1]^t \times \{1, \dots, k\}$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t . Sei zudem $D^{(2)}$ die Zerlegung des Spline-Definitionsgebiets D und seien

$$L := [0, \frac{1}{2}] \quad \text{und} \quad R := [\frac{1}{2}, 1].$$

Wir definieren

$$r_L : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1], \quad r_L(a) \mapsto 2a \quad \text{und} \quad r_R : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1], \quad r_R(a) \mapsto 2a - 1$$

als Reparametrisierung und

$$\begin{aligned} i^1 : \{L, R\} &\rightarrow \{0, 1\}, & i^1(M) &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } M = L \\ 1 & \text{wenn } M = R \end{cases}, \\ i^2 : \{L, R\} \times \{L, R\} &\rightarrow \{0, \dots, 3\}, & i^2(M_1, M_2) &= 2 \cdot i^1(M_1) + i^1(M_2), \\ i^3 : \{L, R\} \times \{L, R\} \times \{L, R\} &\rightarrow \{0, \dots, 7\}, & i^3(M_1, M_2, M_3) &= 4 \cdot i^1(M_1) + 2 \cdot i^1(M_2) + i^1(M_3) \end{aligned}$$

als Indexverschiebung. Damit nennen wir

$$\begin{aligned} r : D^{(2)} &\rightarrow ([0, 1]^t \times \{1, \dots, 2^t \cdot k\}, \tilde{d}_2), \\ r(M_1 \times \dots \times M_t \times \{i\}, d_2) &\mapsto (r_{M_1}(M_1) \times \dots \times r_{M_t}(M_t) \times \{2^t \cdot (i - 1) + i^t(M_1, \dots, M_t) + 1\}, \tilde{d}_2) \end{aligned}$$

Reparametrisierungsabbildung und

$$\tilde{D}^{(2)} := r(D^{(2)})$$

Reparametrisierung von $D^{(2)}$. Die D -Äquivalenzrelation $\tilde{d}_2$ identifiziert dabei die Bilder bereits in $D^{(2)}$ identifizierter Bereiche miteinander.

Anschaulich betrachtet wandelt die Reparametrisierungsabbildung ein verfeinertes Spline-Definitionsgebiet in eine Gestalt um, die wiederum ein Spline-Definitionsgebiet ist. Dabei wird jedes verfeinerte Element auf $[0, 1]^t$ abgebildet und die Nummerierung wird entsprechend mit der Funktion $\mathbf{i}^t$ angepasst. Die Reparametrisierung $\tilde{\mathbf{D}}^{(2)}$ erfüllt also die Bedingungen von Definition 2.4 und ist damit wiederum ein Spline-Definitionsgebiet.

Damit die Zerlegung auf den Bildbereich übertragen werden kann, wird zunächst die Verfeinerung der Kontrollpunkte wie folgt konstruiert:

Definition 2.23. Sei $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet, $\mathbf{I} = \{\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Menge der zugehörigen Initialelemente und P' die Matrix der Kontrollpunkte. Diese einzelnen Initialelemente bezeichnen wir mit

$$\mathbf{I}_i = (\mathbf{G}_i, A_i, S_i, P_i).$$

Wir nennen die Matrix aller

$$S_i P_i$$

(ohne Mehrfachzählung) verfeinerte Kontrollpunkte und bezeichnen diese mit $P'^{(2)}$. Die verfeinerten Kontrollpunkte werden entsprechend dem verfeinerten Spline-Definitionsgebiet zugeordnet. Konkret bedeutet dies:

Sei i der Index eine Ecke von Zellen in $\mathbf{D}$, die mit $\mathbf{I}_i$ assoziiert ist. Sei s_n eine Zelle in $\mathbf{D}$, die die Ecke mit Index i als Eckpunkt hat.

Sei j der Index einer Ecke von Zellen in $\mathbf{D}^{(2)}$, die durch Reproduktion aus der Ecke mit Index i hervorgegangen ist und sei $s_m^{(2)}$ aus $\mathbf{D}^{(2)}$ die Zelle, die aus s_n hervorgegangen ist und die Ecke mit Index j als Eckpunkt besitzt.

- Sei $g = 2$ und $P'_{(k,:)}$ der Kontrollpunkt, der mit s_n assoziiert ist. Sei $P'^{(2)}_{(m,:)}$ der Kontrollpunkt, der aus $P'_{(k,:)}$ durch die Verfeinerung mit S_i des Initialelements $\mathbf{I}_i$ hervorgegangen ist. Dann identifizieren wir $P'^{(2)}_{(m,:)}$ mit $s_m^{(2)}$.
- Sei $g = 3$ und $P'_{(1,:)}, \dots, P'_{(2^t,:)}$, die Kontrollpunkte, die mit den Ecken von s_n assoziiert sind. Sei $P'^{(2)}_{(1,:)}, \dots, P'^{(2)}_{(2^t,:)}$ die Kontrollpunkte, die aus $P'_{(1,:)}, \dots, P'_{(2^t,:)}$ durch die Verfeinerung mit S_i des Initialelements $\mathbf{I}_i$ hervorgegangen sind. Dann identifizieren wir $P'^{(2)}_{(1,:)}, \dots, P'^{(2)}_{(2^t,:)}$ mit den Ecken von $s_m^{(2)}$.

Die Notation in der obigen Definition ist etwas umständlich. Bildlich gesprochen wird durch die Verfeinerung der Kontrollpunkte gerade die passende Struktur erzeugt, um die verfeinerten Kontrollpunkte mit den Zellen (für $g = 2$) beziehungsweise mit den Ecken der Zellen (für $g = 3$) zu assoziieren. Eine Illustration findet sich in Abbildung 2.6, in der die Struktur aus den Beispielen 2.13 und 2.14 verfeinert wird.

An der obigen Definition ist zu sehen, dass die Verfeinerung der Kontrollpunkte durch die Initialelemente bestimmt ist. Oder mit anderen Worten: Alle Kontrollpunkte, die durch Verfeinerung entstehen, entstehen durch die Initialelemente. Die Struktur wird über die Struktur der Initialelemente (dem Graphen $\mathbf{G}$) bestimmt, die Verfeinerung durch die Subdivisionsmatrix S , deren Konstruktion wir uns noch widmen müssen. Wir führen hier noch folgende Bemerkung an:

Bemerkung 2.24. Überlappen sich Initialelemente derart, dass zwei Initialelemente den selben verfeinerten Kontrollpunkt produzieren, so müssen die Verfeinerungsregeln für diesen identisch sein, damit die Verfeinerung wohldefiniert ist. Dieser Aspekt muss bei den konkreten Subdivisionsalgorithmen diskutiert werden.

Es wäre an dieser Stelle möglich, für die verfeinerten Initialelemente ebenfalls eine Definition zu erstellen. Allerdings definieren sich die Initialelemente über das Spline-Definitionsgebiet. Damit ergeben sich die neuen Initialelemente direkt durch das Anwenden von Definition 2.12 auf $\tilde{\mathbf{D}}^{(2)}$.

Abschließend stellt sich noch die Frage der Auswertung, also die Verfeinerung der generierenden Funktionen $\mathbf{g}$. Dazu betrachten wir die nächste Definition:

Definition 2.25. Sei $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet vom Typ t , das in Beziehung zu einer Matrix von Kontrollpunkten $P' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ steht. Sei zudem $\mathbf{g}$ ein System der generierenden Funktionen zu P' .

Seien $\mathbf{D}^{(2)}$ und $P'^{(2)}$ die Verfeinerungen von $\mathbf{D}$ und P' und sei $|\mathbf{D}^{(2)}| = k$ und m die Anzahl der Zeilen beziehungsweise Kontrollpunkte von $P'^{(2)}$. Außerdem sei $\tilde{\mathbf{D}}^{(2)}$ die Reparametrisierung von $\mathbf{D}^{(2)}$. Dann können wir für $(\tilde{\mathbf{D}}^{(2)}, P'^{(2)})$ mit

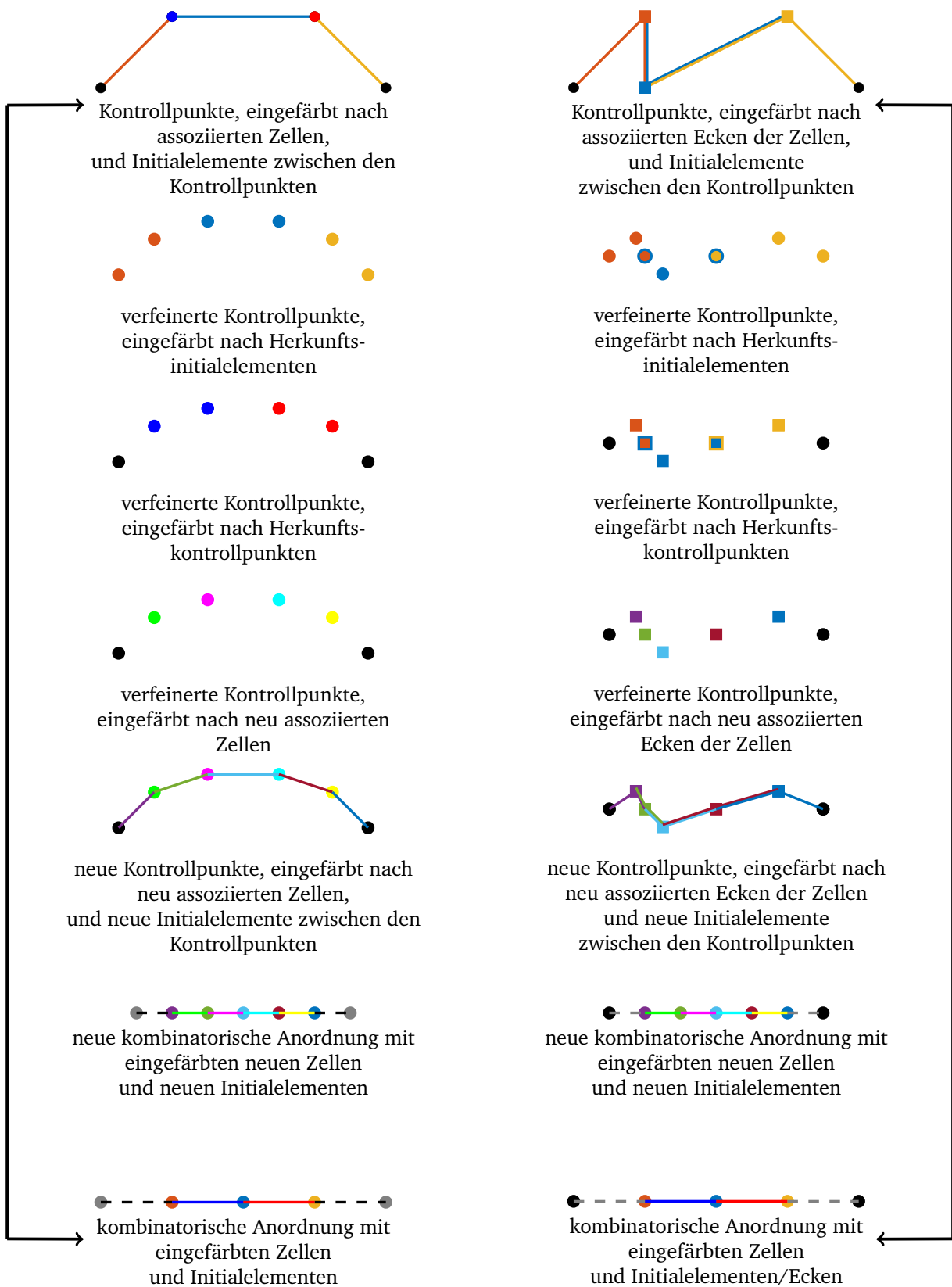


Abbildung 2.6: Verfeinerung der Zellen und Kontrollpunkte für die Beispiele 2.13 mit $g = 2$ (linke Säule) und 2.14 mit $g = 3$ (rechte Säule).

Definition 2.19 generierenden Funktionen

$$\mathbf{g}^{(2)} : \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{g}^{(2)}(x) \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{(2)}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_i^{(2)} : \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i^{(2)}(x) = 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbf{D}^{(2)}$$

definieren. Mit diesen generierenden Funktionen definieren wir rekursiv

$$\mathbf{s} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{s}(x) \mapsto \left(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{r}(x)) \right)^T \mathbf{P}'^{(2)} =: \mathbf{g}(x)^T \mathbf{P}'.$$

Für die Auswertung gilt entsprechend Definition 2.20, reguläre Bereiche werden also zu Tensorprodukt B-Splines ausgewertet.

An dieser Stelle müssen mehrere Aspekte diskutiert werden. Der erste Aspekt ist die Wohldefiniertheit. Wie in Definition 2.20 beschrieben, werden reguläre Zellen zu Tensorprodukt B-Splines ausgewertet. Damit die obige Definition wohldefiniert ist, muss die verfeinerte Auswertung für reguläre Zellen dasselbe Ergebnis wie die grobe Auswertung liefern. Oder anders ausgedrückt: Die Auswertung regulärer Bereiche muss durch Verfeinerung reproduziert werden. Die Subdivisionsmatrizen in Definition 2.15 sind gerade so gewählt beziehungsweise definiert, dass dies erfüllt ist.

Der nächste Aspekt ist die erneute Verfeinerbarkeit. Die verfeinerten Objekte haben genau die Gestalt, die als Eingabe für die Subdivision notwendig ist. Damit lässt sich die Verfeinerung für diese wiederum durchführen. Dies kann beliebig oft wiederholt werden.

Ein weiterer Aspekt ist der Mehrwert der Verfeinerung. Dieser lässt sich auf verschiedenen Ebenen feststellen. Im Bezug auf die generierenden Funktionen erstellt die Subdivision eine feinere Darstellungsform für dasselbe Objekt. Für die Simulation erhalten wir dadurch ein Objekt, dessen Verfeinerung in seiner Struktur verankert ist. Es ist damit möglich auf sehr einfache Weise die benötigte Auflösung für Simulationsanwendungen zu erzeugen, ohne sich Gedanken um die Erzeugung neuer Geometrien machen zu müssen. Dies ist ein entscheidender Vorteil im Vergleich zur Simulation auf Dreiecks- oder Tetraedernetzen.

Der hauptsächlich zu diskutierende Aspekt ist jedoch der Mehrwert der Verfeinerung im Bezug auf die Auswertung beziehungsweise Auswertbarkeit der irregulären Bereiche. Für $t = 1$ gibt es keinen, da hier alle Bereiche regulär sind und direkt ausgewertet werden können. Für $t = 2$ und $t = 3$ betrachten wir das folgende allgemeine Beispiel:

Beispiel 2.26. Wir betrachten eine Zelle eines Spline-Definitionsgebiets $\mathbf{D}$ für $t = 2$, also $[0, 1]^2 \times \{i\}$. Wir nehmen für dieses Beispiel an, dass wir nichts über die übrigen anderen Zellen aus $\mathbf{D}$ wissen. Insbesondere wissen wir nicht, ob die zu den Eckpunkten assoziierten Initialelemente eine reguläre Umgebung haben. Diese Zelle verfeinern wir mehrfach.

Dabei verwenden wir zunächst einen eckigen Marker, wenn das Initialelement eine reguläre Umgebung hat, und einen runden Marker, wenn dies nicht der Fall ist oder dies offen ist. Außerdem färben wir die Initialelemente der verfeinerten Struktur gelb ein, wenn offen ist, ob sie reguläre Initialelemente sind, und wir färben sie grün, wenn sie definitiv reguläre Initialelemente sind. Dieselbe Färbung führen wir für die Zellen durch, wobei grün bedeutet, dass eine Zelle vier reguläre Initialelemente als Eckpunkte hat und damit als bivariater B-Spline auswertbar ist. Die Färbung ist gelb, wenn dies offen oder nicht der Fall ist. Das Ergebnis für $g = 2$ findet sich in Abbildung 2.7 und für $g = 3$ in Abbildung 2.8.

Analog dazu erhalten wir für $t = 3$ für eine Zelle $[0, 1]^3 \times \{i\}$. Die dazu analogen Illustrationen beziehungsweise Ergebnisse lassen sich in den Abbildungen 2.9 für $g = 2$ und 2.10 für $g = 3$ betrachten.

Anhand dieses Beispiels wird die Idee und der Mehrwert der Subdivision deutlich. Unabhängig von der Struktur der Zellen ermöglicht der Prozess der Verfeinerung die Auswertung der Zellen. Dabei erweitert sich der auswertbare Bereich um die Irregularitäten mit jeder Verfeinerung. Für $t = 2$ lässt sich erkennen, dass sich der auswertbare Bereich den Ecken der Zellen annähert. Diese sind der entscheidende Bereich für $t = 2$. Sind die Initialelemente an den Ecken regulär, so wechselt der gelbe Bereich um die Ecke jeweils zu grün. Sind diese nicht regulär, so wird die Verfeinerung benötigt, um den Bereich um das Initialelement sukzessive zu beschreiben. Diese Regularität gießen wir in die nächste Definition:

Definition 2.27. Sei $t = 2$ und $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet. Liegt eine Ecke einer Zelle an einer regulären Struktur von Zellen, so nennen wir diese reguläre Ecke. Andernfalls nennen wir diese irreguläre Ecke.

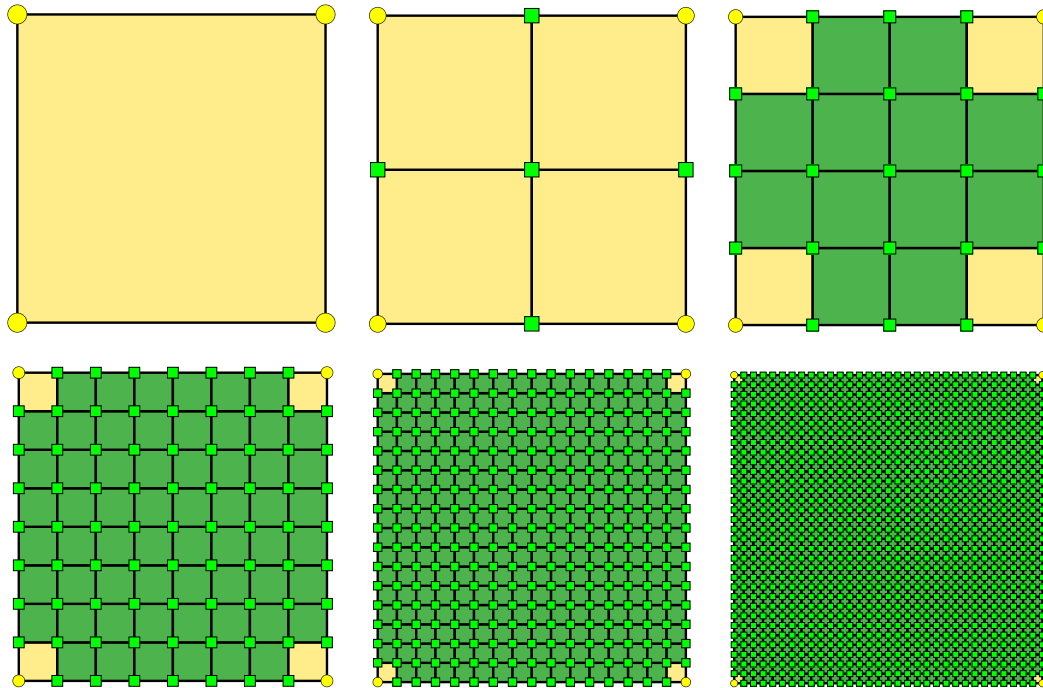


Abbildung 2.7: Initialelemente mit regulärer Umgebung (eckige Marker) und noch offener Umgebung (runde Marker) zu einer Zelle eines Spline-Definitionsgebiets mit $g = 2$, das uniform fünfmal verfeinert wird. Reguläre Initialelemente und Zellen werden grün und im Bezug auf die Regularität offene Initialelemente und Zellen werden gelb dargestellt.

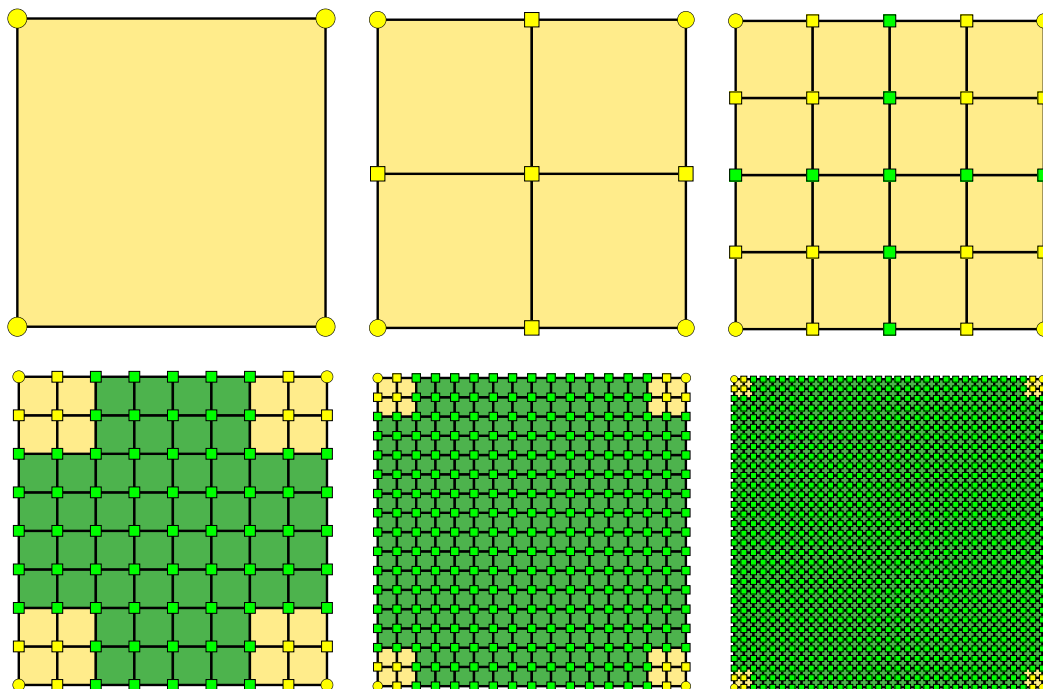


Abbildung 2.8: Analoge Illustration zu Abbildung 2.7 für $g = 3$.

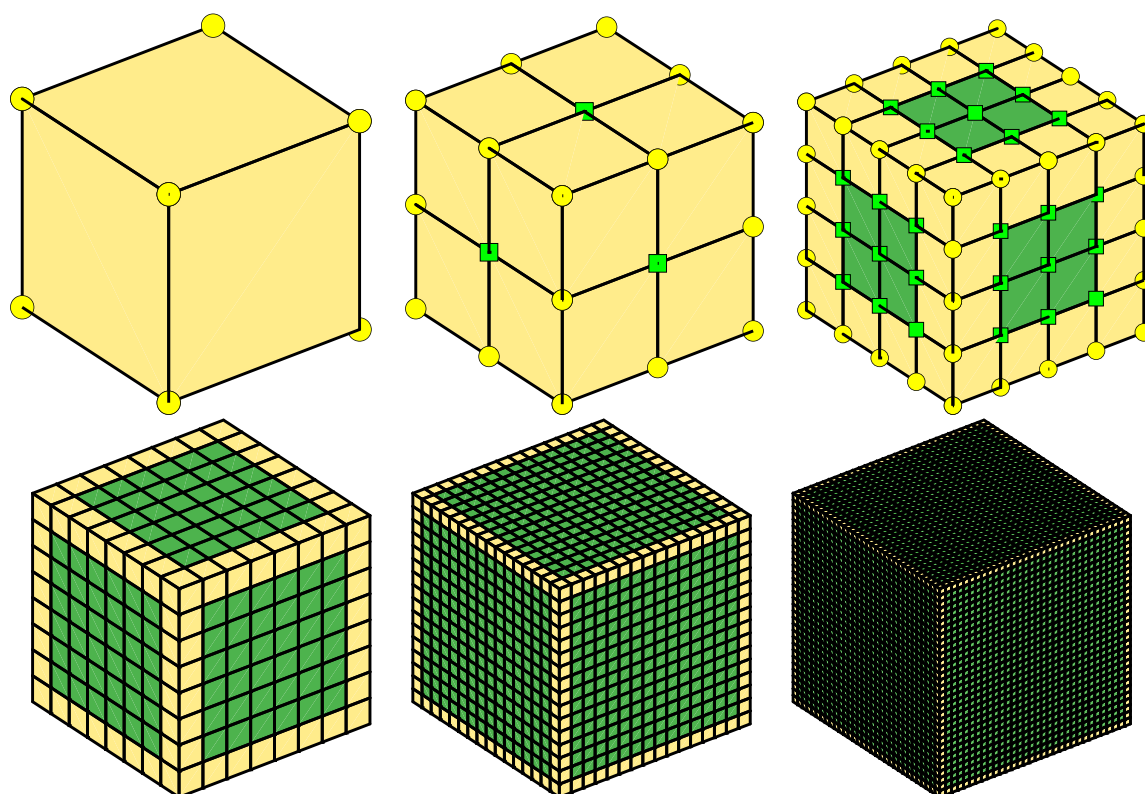


Abbildung 2.9: Analoge Illustration zu Abbildung 2.7 für $t = 3$ und $g = 2$.

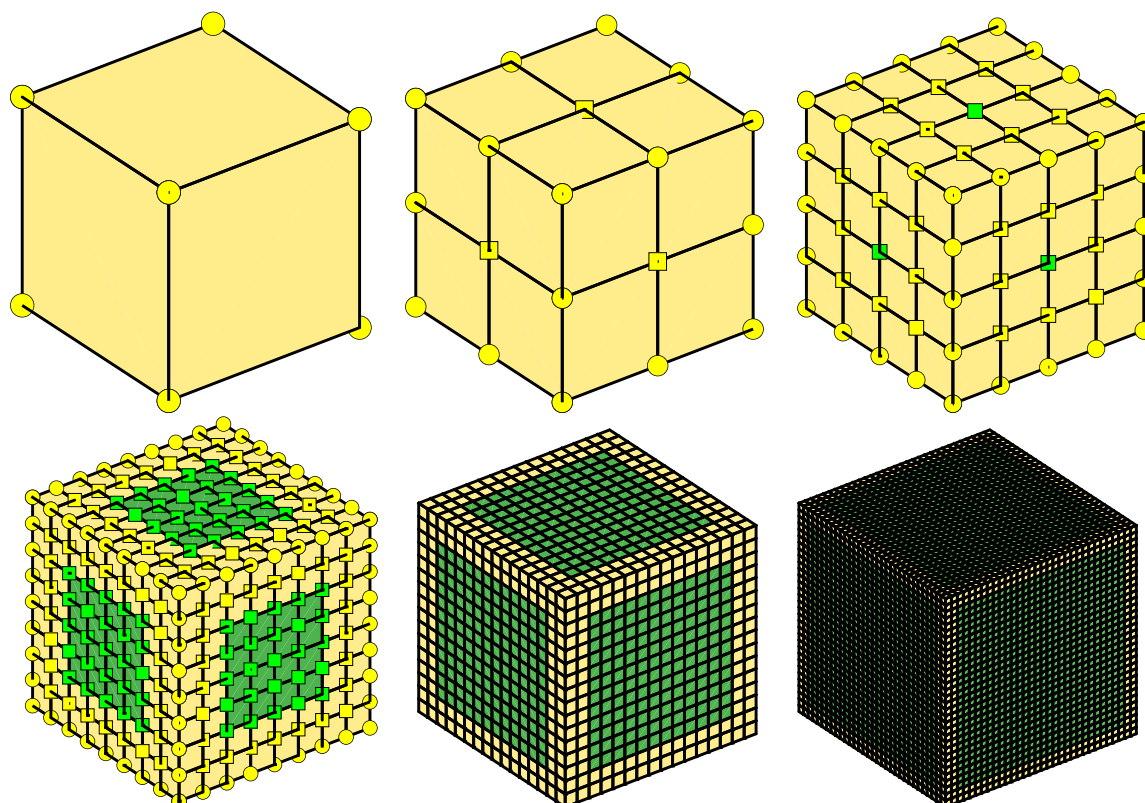


Abbildung 2.10: Analoge Illustration zu Abbildung 2.7 für $t = 3$ und $g = 3$.

Die Regularität der Ecke steht natürlich in direktem Verhältnis zur Regularität des damit assoziierten Initialelements. Für $g = 2$ ist dies eine Eins-zu-eins-Relation, für $g = 3$ muss für die Regularität des Initialelements noch der umgebene Bereich betrachtet werden.

Die wirklich entscheidenden Bereiche, die im Kontext der Subdivision betrachtet werden müssen, sind die irregulären Ecken. Im Detail wird darauf in Abschnitt 2.3 eingegangen. Allerdings können wir hier schon Folgendes bemerken:

Bemerkung 2.28. *Es lässt sich für $t = 2$ erkennen, dass nach einem Verfeinerungsschritt die Zellen mindestens drei reguläre Ecken beinhalten. Wir können also nach einem Verfeinerungsschritt im Folgenden davon ausgehen, dass jede Zelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit maximal eine irreguläre Ecke beinhaltet.*

Für $t = 3$ zeichnet sich ein ähnliches, aber etwas komplexeres Bild. Hier lässt sich beobachten, dass der fragliche Bereich sowohl an den Ecken als auch an den Kanten der Zellen zu finden ist. Analog zum obigen Fall erhalten wir Regularität für die Ecken, wenn diese an einer regulären Struktur von Zellen liegen und wir erhalten Regularität für die Kanten, wenn 2×2 Zellen an einer Kante zusammenkommen. Dazu führen wir folgende Definition ein:

Definition 2.29. *Sei $t = 3$ und D ein Spline-Definitionsgebiet. Liegt eine Ecke einer Zelle an einer regulären Struktur von Zellen, so nennen wir diese reguläre Ecke. Liegt sie an $n \times 2$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$) Zellen, so nennen wir diese semi-irreguläre Ecke. Andernfalls nennen wir sie irreguläre Ecke.*

Liegt eine Kante einer Zelle an 2×2 Zellen, so nennen wir diese reguläre Kante. Andernfalls nennen wir sie irreguläre Kante.

Es schließt sich hier analog zu $t = 2$ folgende Bemerkung an:

Bemerkung 2.30. *Sei $t = 3$. An dem obigen allgemeinen Beispiel lässt sich erkennen, dass nach einem Verfeinerungsschritt die Zellen maximal eine irreguläre Ecke und maximal drei semi-irreguläre Ecken enthalten. Alle anderen Ecken sind durch die Struktur regulär. Außerdem enthält jede Zelle maximal drei irreguläre Kanten, alle anderen Kanten sind regulär. Wir können damit analog zu $t = 2$ davon ausgehen, dass jede Zelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit maximal eine irreguläre Ecke beinhaltet.*

Auch im Fall $t = 3$ lässt sich erkennen, dass der auswertbare Bereich durch die Verfeinerung immer größer wird. Außerdem lässt sich sowohl für $t = 2$ als auch für $t = 3$ bemerken, dass der nicht auswertbare Bereich für $g = 3$ gerade um eine Einheit größer ist als für $g = 2$. Mit anderen Worten: Für $g = 3$ wird ein Verfeinerungsschritt mehr benötigt.

Hier schließt sich die Frage nach der Auswertbarkeit im Grenzwert, sowohl für irreguläre Kanten als auch für irreguläre Ecken, an. Wir verweisen dafür auf die Qualitätskriterien Q1 und Q3 in Abschnitt 2.4. Außerdem schließt sich die Frage nach einer direkten und schnellen Auswertung in den fraglichen Bereichen an. Hier ist die Arbeit von Stam [Sta98] für den Fall $t = 2$ zu nennen.

Durch die obige Beschreibung haben wir gesehen, dass sich durch Subdivision die Zellen sukzessive zu B-Spline Elementen auswerten lassen. Dabei müssen für irreguläre Bereiche die Zellen immer weiter verfeinert werden. Im nächsten Abschnitt widmen wir uns diesem Verfeinerungsprozess und erklären an invarianten Strukturen deren asymptotisches Verhalten.

2.3 Invariante Strukturen

Wie bereits beschrieben, hängt es von der Struktur der Zellen ab, welche Bereiche des Spline-Definitionsgebiets auswertbar sind. Um die zunächst nicht auswertbaren Bereiche zu beschreiben, ist es hilfreich, sich invariante Strukturen in der Verfeinerung anzusehen. Dies wird in [PR08] für den Fall $t = 2$ beschrieben. Diese Ideen werden wir hier für den Fall $t = 3$ erweitern. Wir beginnen mit den kleinsten invarianten Elementen, den Initialelementen.

Initialelemente sind mit den Ecken von Zellen identifiziert. Bei der Verfeinerung der Zellen werden sowohl Ecken reproduziert als auch neue Ecken eingefügt. Für eine reproduzierte Ecke ändert sich die unmittelbare Umgebung der Zellen um diese Ecke nicht. Mit anderen Worten: Durch die Verfeinerung wird die Struktur um eine reproduzierte Ecke ebenfalls reproduziert. Damit ergibt sich für Initialelemente das folgende Lemma:

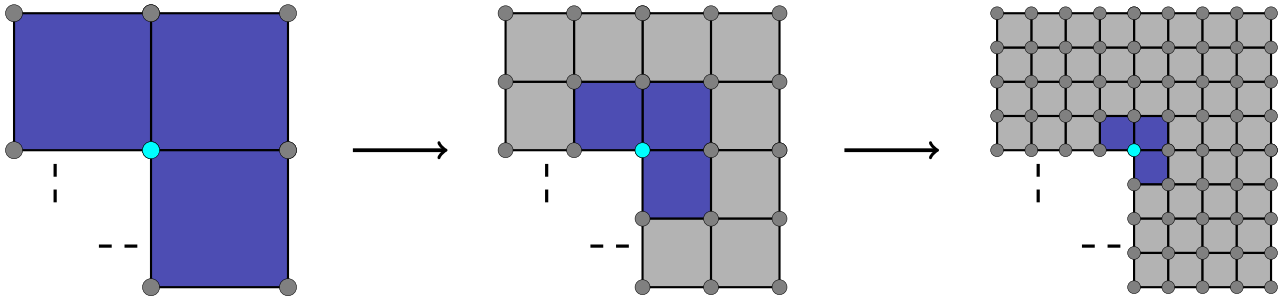


Abbildung 2.11: Ein Initialelement (cyan) und der für S relevante Bereich (dunkelblau) für $t = 2$ und $g = 2$. Durch die Verfeinerung verändert sich die Struktur des blauen Bereichs und damit auch S nicht.

Lemma 2.31. Sei D ein Spline-Definitionsgebiet, $I = \{I_1, \dots, I_n\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Menge der zugehörigen Initialelemente und P' die Matrix der Kontrollpunkte. Seien $D^{(2)}$ und $P'^{(2)}$ die Verfeinerungen von D und P' . Sei k der Index einer Ecke einer Zelle und

$$I_k = (G_k, A_k, S_k, P_k)$$

das damit assoziierte Initialelement. Für das Initialelement

$$I_k^{(2)} = (G_k^{(2)}, A_k^{(2)}, S_k^{(2)}, P_k^{(2)})$$

der aus der Ecke mit Index k reproduzierten Ecke gilt

$$G_k^{(2)} = G_k, \quad A_k^{(2)} = A_k \quad \text{und} \quad P_k^{(2)} = S_k P_k.$$

Für $g = 2$ erhalten wir zudem

$$S_k^{(2)} = S_k.$$

Für $g = 3$ erhalten wir dies ebenfalls unter der Voraussetzung, dass die Ecke k durch eine vorherige Verfeinerung bereits reproduziert wurde.

Beweis. Die Gleichheit der Graphenstruktur folgt direkt aus der Reproduktion der umliegenden Struktur der Initialelemente. Die Gleichung der Kontrollpunkte folgt direkt aus der Definition der Verfeinerung der Kontrollpunkte 2.23. Diese ist gerade so definiert.

Für $g = 2$ ist die Subdivisionsmatrix nur von der umliegenden Struktur der Zellen abhängig. Daher erhalten wir die obige Gleichheit in den Subdivisionsmatrizen. Für $g = 3$ fließt in die Bestimmung von S außerdem die nächstgrößere Umgebung der Zellen mit ein. Diese wird nach einem Verfeinerungsschritt ebenfalls reproduziert, weshalb die Gleichheit gilt, wenn die Ecke mit Index k aus einer Reproduktion durch Verfeinerung bereits hervorgegangen ist. $\square$

Für $t = 2$ wird das oben beschriebene Verhalten in Abbildung 2.11 für $g = 2$ und in Abbildung 2.12 für $g = 3$ illustriert.

Wir stellen hier dasselbe Verhalten wie in den obigen Abschnitten fest. Die Fälle $g = 2$ und $g = 3$ verhalten sich analog zueinander. Für $g = 3$ ist allerdings ein zusätzlicher Verfeinerungsschritt notwendig. Um die Notation zu vereinfachen nehmen wir im Folgenden an, dass die Ecke mit Index k bereits als Reproduktion einer Ecke durch Verfeinerung hervorgegangen ist.

Wir stellen mit dem obigen Lemma fest, dass sich damit das asymptotische Verhalten eines Initialelements durch

$$I_k^{(m)} = (G_k, A_k, S_k, S_k^m P_k)$$

beschreiben lässt. Die Struktur des Initialelements bleibt also gleich und die Kontrollpunkte werden durch m -faches Anwenden der Subdivisionsmatrix auf die Ausgangskontrollpunkte erzeugt. Damit ist S_k^m das zu untersuchende Objekt bezüglich der Initialelemente.

Eine weitere invariante Struktur lässt sich auf der Ebene der Zellen beobachten. Wir betrachten hier zunächst den

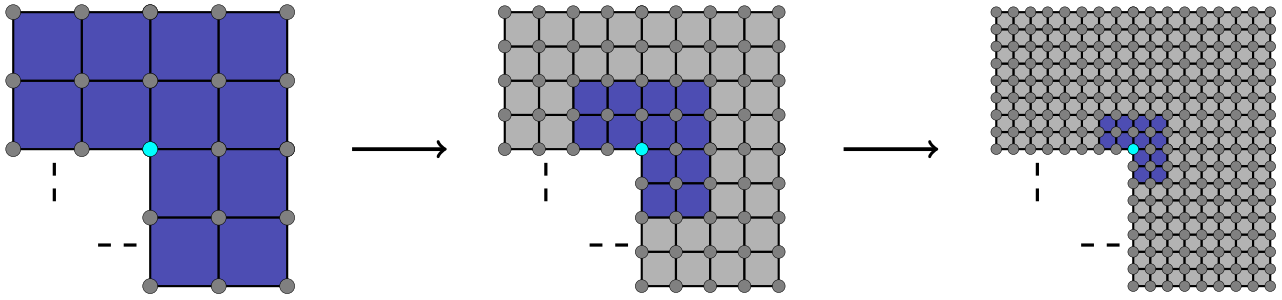


Abbildung 2.12: Zur Abbildung 2.12 analoge Illustration für $g = 3$. Hier ist der blaue Bereich jeweils um eine Zelle größer. Der cyanfarbene Punkt muss daher bereits durch Reproduktion aus einer Verfeinerung hervorgegangen sein, um die Struktur des blauen Bereichs zu garantieren. Danach verläuft dessen Reproduktion analog zum Fall $g = 2$.

Fall $g = 2$ und $t = 2$. Nach genügend vielen Verfeinerungsschritten erhalten wir mit Bemerkung 2.28 nur noch Zellen mit maximal einer irregulären Ecke (und mindestens drei regulären Ecken). Wird diese Zelle verfeinert, so entstehen drei Zellen mit jeweils vier regulären Ecken, und eine vierte Zelle mit maximal einer irregulären Ecke (und mindestens drei regulären Ecken). Diese vierte Zelle hat also dieselbe Struktur wie die Zelle, die verfeinert wurde. Da die Struktur bezüglich dieser vierten Zelle gleich bleibt, lassen sich die beiden Zellen jeweils aufeinander abbilden. Für die vier Initialelemente reproduzieren sich damit die Objekte $\mathbf{G}, A, S$ eins zu eins.

Die Beschreibung der Kontrollpunkte ist komplexer. Betrachten wir die Verfeinerung aller Kontrollpunkte aller Initialelemente so erhöht sich die Anzahl der Kontrollpunkte. Da allerdings die Struktur einer reproduzierten Zelle gleich bleibt, ist auch die Anzahl der für die neue Zelle benötigten Kontrollpunkte gleich der der Ausgangszelle. Wir können daher für die Kontrollpunkte eine Abbildung wie folgt definieren:

Definition 2.32. Sei $t = 2$, $g = 2$, $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet und $s \in \mathbf{D}$ eine Zelle mit mindestens drei regulären Ecken und einer vierten Ecke k . Seien zudem

$$\mathbf{I}_i = (\mathbf{G}_i, A_i, S_i, P_i) \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, 3, k\}$$

die vier Initialelemente der Zelle und $s^{(2)}$ die Verfeinerung von s , die die Reproduktion der Ecke k enthält und

$$\mathbf{I}_i^{(2)} = (\mathbf{G}_i, A_i, S_i, P_i^{(2)}) \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, 3, k\}$$

die dazugehörigen vier neuen Initialelemente. Wir definieren zudem P als die Matrix der Kontrollpunkte aller Initialelemente von s , $P^{(2)}$ als die Matrix der Kontrollpunkte aller Initialelemente von $s^{(2)}$ (jeweils ohne Mehrfachzählung) und n als die Anzahl dieser Kontrollpunkte von P . Außerdem ist

$$\mathbf{G} := \bigcup_i \mathbf{G}_i$$

der dazugehörige Graph, der die kombinatorische Anordnung von P beschreibt. Dann definieren wir

$$S \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad SP = P^{(2)}$$

als die zu $\mathbf{G}$ gehörige Subdivisionsmatrix. Die Zeilen von S sind dabei an den entsprechenden Einträgen die entsprechenden Zeilen der Subdivisionsmatrizen S_i , die zu den jeweiligen neuen Kontrollpunkten aus $P^{(2)}$ gehören, und 0 sonst.

Da wir die verfeinerte Zelle wieder als Ausgang für die obige Definition verwenden können, ergeben sich die Kontrollpunkte für m Verfeinerungen durch

$$P^{(m)} = S^m P, \tag{2.1}$$

das Verhalten ist also analog zu dem der Initialelemente. Eine Illustration der obigen Definition findet sich in Abbildung 2.13. Dort wird die gelbe Zelle auf deren Verfeinerung abgebildet. An der obigen Definition lässt sich

erkennen, dass sich aus den Subdivisionsmatrizen der Initialelemente größere Subdivisionsmatrizen erzeugen lassen, die dementsprechend größere Strukturen invariant auf deren Verfeinerung abbilden.

Wir betrachten im weiteren Verlauf des Abschnitts invariante Strukturen und deren Voraussetzungen, auf die sich die obige Definition übertragen lässt. Da die jeweiligen Definitionen redundant zur obigen sind, erläutern wir nur, welche Elemente aufeinander abgebildet werden, ohne für jeden Fall eine Definition zu beschreiben. Die Subdivisionsmatrix S und die zugehörigen Kontrollpunkte P ergeben sich direkt aus dem Kontext der Zellen und deren Initialelemente. Alle Fälle sind dabei so gewählt, dass Gleichung (2.1) gilt. Die Matrix S ist dabei insbesondere immer quadratisch.

Für $t = 2$ und $g = 3$ erhalten wir dieselbe Definition unter der Voraussetzung, dass s bereits aus einer Verfeinerung einer Zelle mit maximal einer irregulären Ecke hervorgegangen ist, denn dann ist die Struktur soweit verfeinert, dass sich die verschiedenen Elemente reproduzieren. Eine Illustration findet sich in Abbildung 2.14. Hier lässt sich erkennen, dass die gelbe Zelle auf ihre Verfeinerung abgebildet werden kann. Die ist allerdings erst möglich, nachdem die Zelle mit maximal einer irregulären Ecke bereits einmal verfeinert wurde. Erst dann ist die Umgebung für die Initialelemente von der Gestalt, dass sie sich reproduziert. Der zur Bestimmung der Subdivisionsmatrizen der Initialelemente relevante Teil ist nicht komplett in der Grafik abgebildet. Die Eindeutigkeit ergibt sich hier allerdings dadurch, dass die Ausgangszelle drei reguläre Ecken besitzt. Dies kann man sich mit der Abbildung 2.8 klar machen. Im zweiten Bild gibt es vier Zellen mit jeweils maximal einer irregulären Ecke. Fixiert man eine davon, so ist die Struktur durch die Bilder 3–6 erkennbar.

Diese invariante Struktur lässt sich auf die exakt analoge Weise auf beliebige Verfeinerungen von Zellen übertragen. Eine Verfeinerung einer Zelle besteht für $t = 2$ aus vier neuen Zellen. Diese Struktur aus Vieren lässt sich auf die Verfeinerung der Zelle mit der Ecke k abbilden, die ebenfalls eine Struktur aus Vieren ist. Dasselbe lässt sich für eine Struktur aus 16, 64, usw. Zellen umsetzen, für die jeweils eine analoge aber größere Subdivisionsmatrix S gebildet werden kann.

Die dabei interessante invariante Struktur ist die, bei der auswertbare Zellen auf wiederum auswertbare abgebildet werden. Damit werden also invariante Strukturen in den ausgewerteten Elementen (für $t = 2$ Flächen) erzeugt. In Abbildung 2.7 lässt sich erkennen, dass sich für $t = 2$ und $g = 2$ für eine Zelle mit drei regulären Ecken bereits nach einer Verfeinerung drei auswertbare Zellen und ein nicht auswertbare Zelle bilden. Die drei auswertbaren Zellen lassen sich dann zu drei B-Spline Flächen auswerten, die sich in einer „L-Form“ (siehe dazu [PR08, S. 60 ff.]) anordnen. Die vier Zellen lassen sich durch Verfeinerung auf die vier Zellen abbilden, die durch die Verfeinerung der Zelle mit der fraglichen Ecke mit Index k entstehen. Da durch die invariante Struktur wiederum drei Zellen regulär sind, wird damit das L-förmige Stück auf ein kleineres L-förmiges Stück abgebildet, dass sich gerade in die einspringende Ecke des vorherigen setzt. Dies ist ebenfalls in [PR08] ausführlich beschrieben. Der Vorgang wird in Abbildung 2.13 illustriert.

Für $t = 2$ und $g = 3$ entsteht ein auswertbarer Bereich einer Zelle mit mindestens drei regulären Ecken nach zwei Verfeinerungsschritten. Das Ausgangselement wird mit diesen beiden Schritten in 4×4 Elemente verfeinert, von denen zwölf auswertbar sind. Diese 4×4 Zellen können dann mittels Verfeinerung invariant auf 4×4 Zellen abgebildet werden. Damit werden die zwölf ausgewerteten Elemente (die ebenfalls ein L-Stück bilden) wiederum auf zwölf auswertbare Elemente abgebildet. Das neue L-Stück legt sich wie im Fall $g = 2$ in die einspringende Ecke des vorherigen L-Stücks. Dieser Vorgang wird in Abbildung 2.14 dargestellt.

Was für Zellen und für deren Verfeinerungen gilt, lässt sich auf Gruppen von Zellen verallgemeinern. Hier sind insbesondere Strukturen von Zellen interessant, die sich eine irreguläre Ecke teilen, denn deren Verfeinerung ermöglicht es, den Bereich um die irreguläre Ecke auszuwerten. Für $t = 2$ und $g = 2$ erhalten wir damit die in der Abbildung 2.13 dargestellte Struktur für $n \geq 3$ viele Zellen. Nach einem Verfeinerungsschritt ergeben sich pro Zelle drei auswertbare Flächen, für n Zellen also $3n$ auswertbare Flächen. Die L-Stücke fügen sich geometrisch zu einem Ring zusammen (vgl. [PR08, S. 60 ff.]). Durch die invariante Struktur der Verfeinerung wird damit ein Ring auf einen Ring abgebildet. Eine Illustration findet sich in Abbildung 2.15.

Für $g = 3$ erhalten wir ebenfalls einen Ring. Hier erhalten wir ein L-Stück aus zwölf Flächen und damit einen Ring aus $12n$ Elementen. Wir sprechen hier von einer *Doppelringstruktur*, da die $12n$ Flächen zwei Ringe bilden, die dann auf zwei Ringe abgebildet werden. Diese Doppelringstrukturen wurden bereits in der Literatur verwendet, beispielsweise in [MM18], [KP17], [KP18] und [KP19]. Die zugehörige Illustration findet sich in Abbildung 2.16.

Diese beiden invarianten Strukturen, also die Abbildung von (Doppel)Ring(en) auf (Doppel)Ringe, sind der Hauptge-

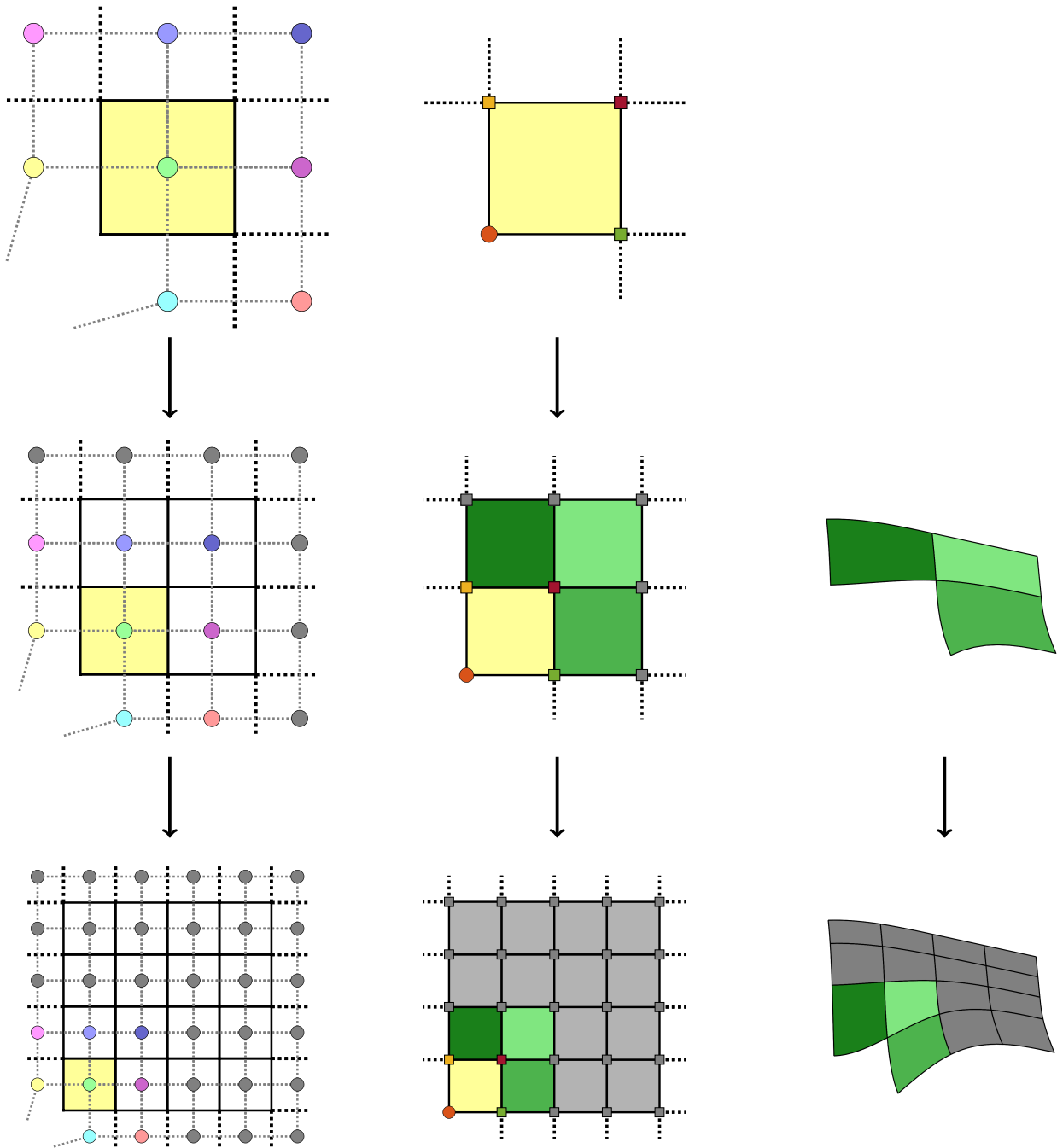


Abbildung 2.13: Die erste Zeile zeigt für $t = 2$ und $g = 2$ in der Mitte eine Zelle (gelb) mit mindestens drei regulären Ecken. Links davon sind die zu den vier Initialelementen gehörenden Kontrollpunkte zu sehen. In der zweiten und dritten Zeile ist die Verfeinerung der gelben Zelle mit den zugehörigen Verfeinerungen der Kontrollpunkte zu sehen. Die grünen Zellen in Zeile zwei sind auswertbare Zellen. Diese wurden in der rechten Grafik beispielhaft ausgewertet. Die gelbe und die drei grünen Zellen sind die Verfeinerung des gelben Zelle in der ersten Zeile und bilden eine Struktur von Vieren. Diese Struktur von Vieren wird in der dritten Zeile auf die entsprechende Struktur von Vieren invariant abgebildet. Die invariante Abbildung der Auswertung wurde im rechten Bild der dritten Zeile illustriert.

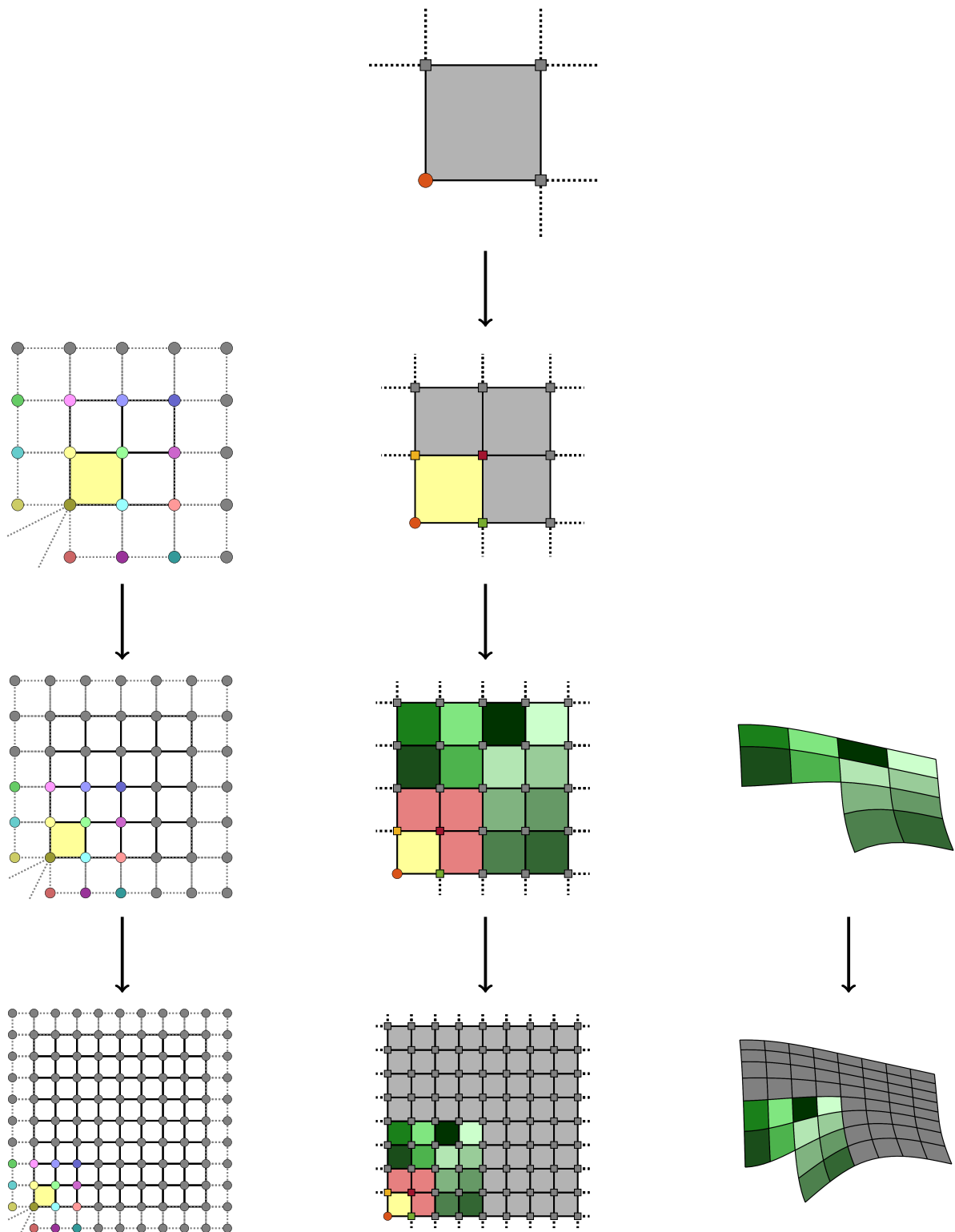


Abbildung 2.14: Die zu Abbildung 2.13 analoge Illustration für $g = 3$. Hier ist ein zusätzlicher Verfeinerungsschritt notwendig, weshalb die gelbe Zelle erst in Zeile 2 auftaucht. Dieses wird dann in Zeile 3 und 4 invariant abgebildet. Die Kontrollpunkte in der linken Spalte liegen im Vergleich zur vorherigen Abbildung primal zu den Ecken der Zelle. In Zeile 3 bilden die gelben, roten und grünen Zellen eine Struktur von 16 Zellen, die auf die Verfeinerung in Zeile 4 invariant abgebildet wird. Die auswertbaren Zellen bilden dabei ein L-Stück aus zwei Schichten.

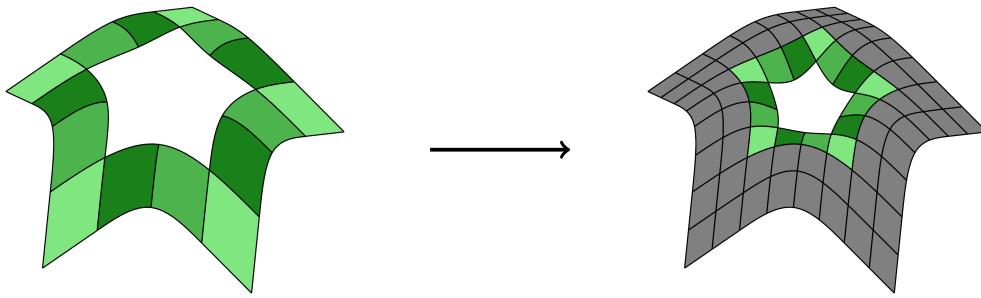


Abbildung 2.15: Für $t = 2$ und $g = 2$ wird ein Ring aus hier $3 \cdot 5$ Elementen auf einen Ring mit $3 \cdot 5$ Elementen abgebildet, der sich in das Loch des Vorigen legt.

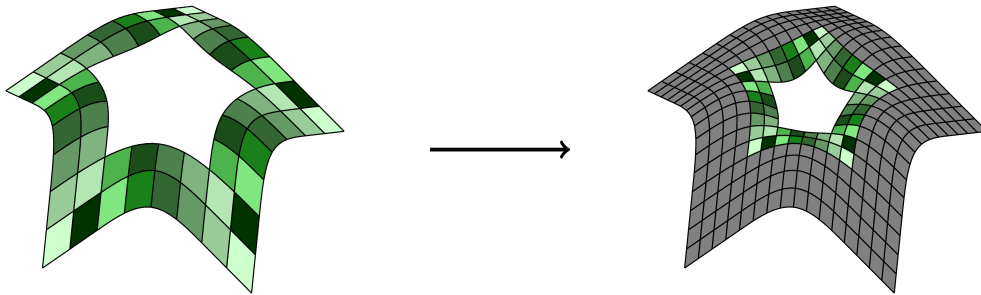


Abbildung 2.16: Für $t = 2$ und $g = 3$ wird ein Doppelring aus hier $12 \cdot 5$ Elementen auf einen Doppelring mit $12 \cdot 5$ Elementen abgebildet, der sich in das Loch des Vorigen legt.

genstand der Untersuchung von Subdivisionsflächen. Diese Struktur ist es, die in der Monographie [PR08] maßgeblich behandelt wird, denn durch die Abbildung von Ringen auf Ringe entsteht eine Fläche mit einem Loch, das durch Subdivision sukzessive ausgefüllt wird. Unter bestimmten Voraussetzungen (den Qualitätskriterien Q1 und Q3) lässt sich auch der zentrale Punkt (also der Grenzwert des Ringprozesses) auswerten. Dies ermöglicht es, Subdivisionsflächen analytisch auf deren Glattheit zu untersuchen, was einen Großteil von [PR08] einnimmt.

Für den Fall $t = 2$ ist daher die Untersuchung von zwei Subdivisionsmatrizen interessant. Zum einen die der Initialelemente, da sich aus diesen alle anderen Subdivisionsmatrizen zusammensetzen, und zum anderen die Subdivisionsmatrizen der eben beschriebenen (Doppel)Ringe. Für beide ist die Betrachtung aus Gleichung 2.1 interessant, weshalb sich die Qualitätskriterien im nächsten Abschnitt mit dem lokalen asymptotischen Verhalten, also mit S^m für $m \rightarrow \infty$, beschäftigen.

Da Lemma 2.31 unabhängig von t ist, verhalten sich die Initialelemente für den Fall $t = 3$ ebenso wie für $t = 2$. Für $t = 3$ und $g = 2$ lassen sich Zellen aufeinander abbilden, die maximal eine (semi-)irreguläre und zusätzlich maximal drei semi-irreguläre Ecken besitzen. Dies gilt mit Bemerkung 2.30 nach einem Verfeinerungsschritt für alle Zellen.

Für $g = 3$ erhalten wir analog dazu die invariante Struktur, wenn die Zelle s bereits aus der Verfeinerung eines solchen Zelle (mit maximal einer (semi-)irregulären und zusätzlich maximal drei semi-irregulären Ecken) hervorgegangen ist und die (semi-)irreguläre Ecke enthält. Dies lässt sich an dem gelben Element aus Abbildung 2.17 (für $g = 2$) und Abbildung 2.18 (für $g = 3$) erkennen.

Für Verfeinerungen von Zellen erhalten wir die zu $t = 2$ analogen Resultate unter den eben beschriebenen Voraussetzungen. Dies bedeutet, dass die Zelle vor Verfeinerung für $g = 2$ maximal eine (semi-)irreguläre und maximal drei semi-irreguläre Ecken enthält. Für $g = 3$ bedeutet dies, dass die Zelle vor Verfeinerung bereits aus einer Verfeinerung einer Zelle mit maximal einer (semi-)irregulären und maximal drei semi-irregulären Ecken hervorgegangen ist und die selbe Struktur innehat. Hier ist wiederum der Fall interessant, der auswertbare Elemente auf auswertbare Elemente abbildet. Für $g = 2$ sind dies Kombinationen aus $2 \times 2 \times 2$ Elementen, für $g = 3$ Kombinationen aus $4 \times 4 \times 4$ Elementen. Illustrationen finden sich ebenfalls in den Abbildungen 2.17 und 2.18. Die Gestalt der auswertbaren

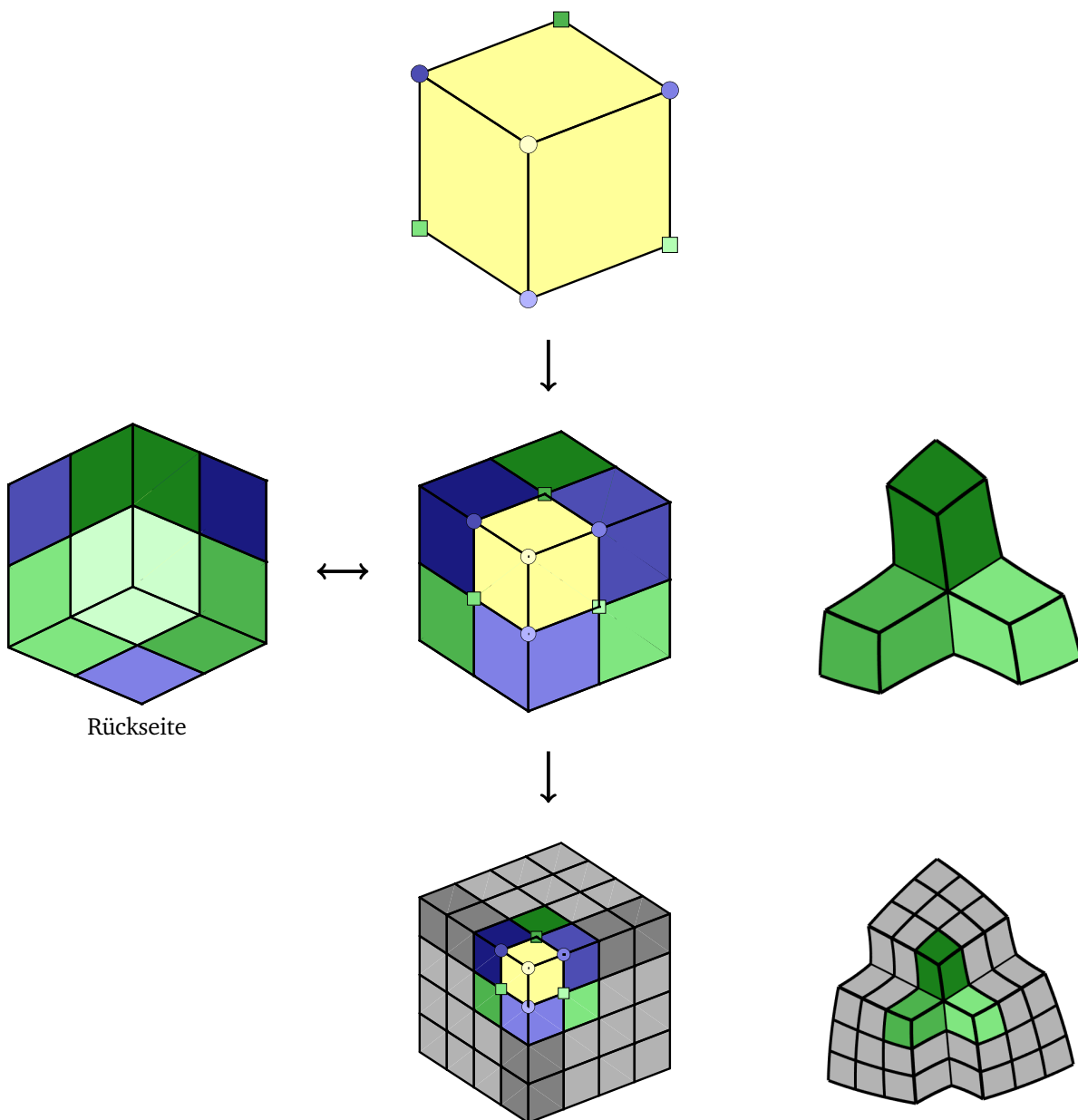


Abbildung 2.17: Verfeinerung einer Zelle für $t = 3$ und $g = 2$. In der ersten Zeile erkennt man eine Zelle (gelb) mit maximal einer (semi-)irregulären Ecke (gelb), maximal drei zusätzlichen semi-irregulären Ecken (blau) und vier regulären Ecken (grün). Durch die Verfeinerung in Zeile zwei und drei wird die Struktur der gelben Zelle reproduziert. In Zeile zwei sieht man eine Struktur aus $2 \times 2 \times 2$ Zellen, von denen vier auswertbar sind. Die blauen Zellen haben (maximal) eine irreguläre Kante und (maximal) zwei semi-irreguläre Punkte. Durch die Verfeinerung wird diese Struktur reproduziert, wie in Zeile drei erkennbar ist. Die Auswertung dieser $2 \times 2 \times 2$ Struktur ist ein Dreibein, erkennbar in der rechten Spalte. Diese Gestalt wird durch Verfeinerung reproduziert und legt sich in den jetzt größeren Bereich des vorherigen Dreibeins.

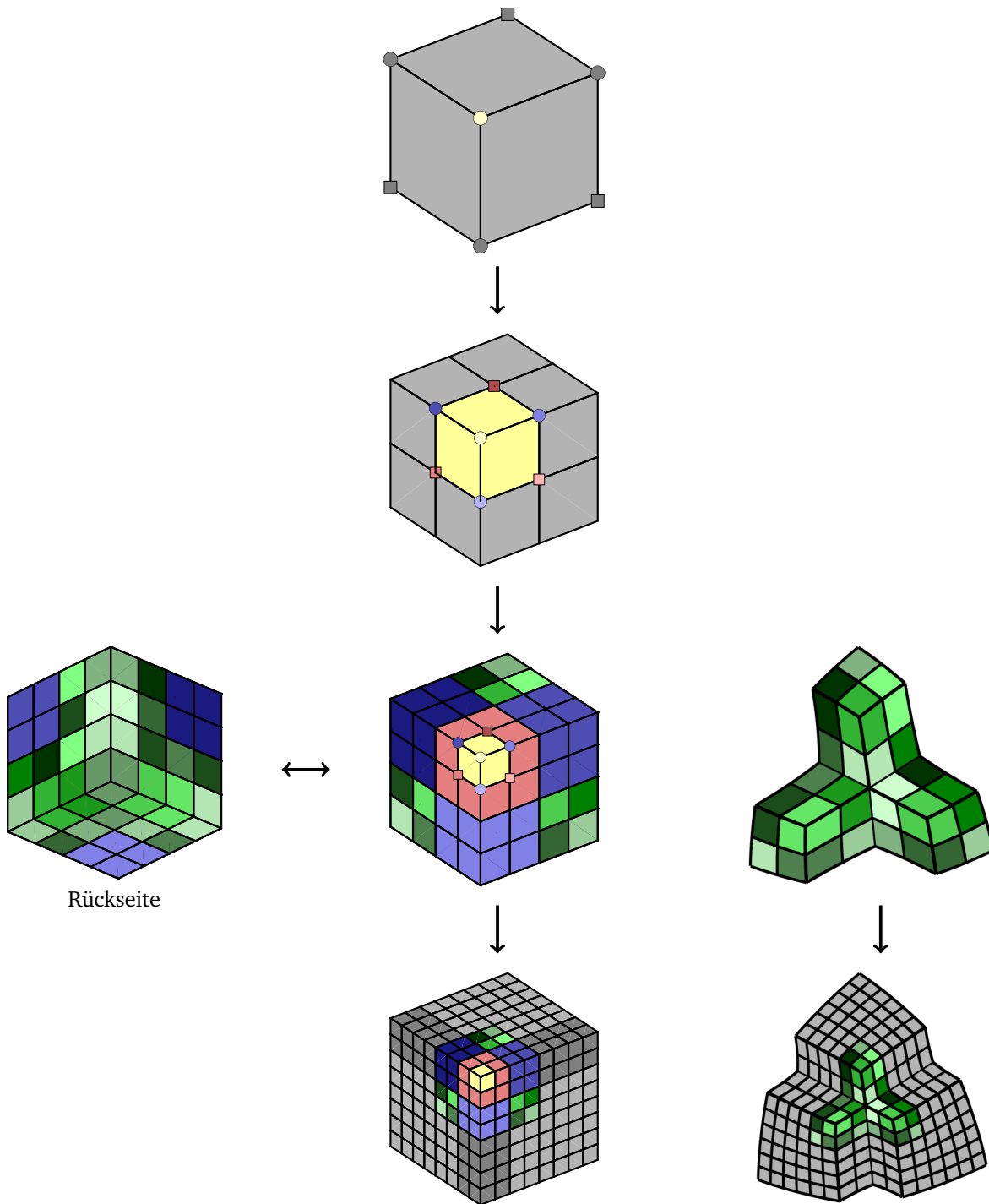


Abbildung 2.18: Zur Abbildung 2.17 analoge Illustration für $g = 3$. Die Gelbe Zelle ist erst in der zweiten Zeile zu sehen, da es durch Verfeinerung aus einer Zelle mit maximal einer (semi-)irregulären und maximal drei zusätzlichen semi-irregulären Ecken hervorgehen muss. In der dritten Zeile sieht man eine Struktur aus $4 \times 4 \times 4$ Elementen, die in Zeile vier invariant auf die feinere Struktur abgebildet werden. Das Dreibein besteht, im Gegensatz zu $g = 2$, aus zwei Schichten. Die invariante Verfeinerung ist in der rechten Spalte zu sehen.

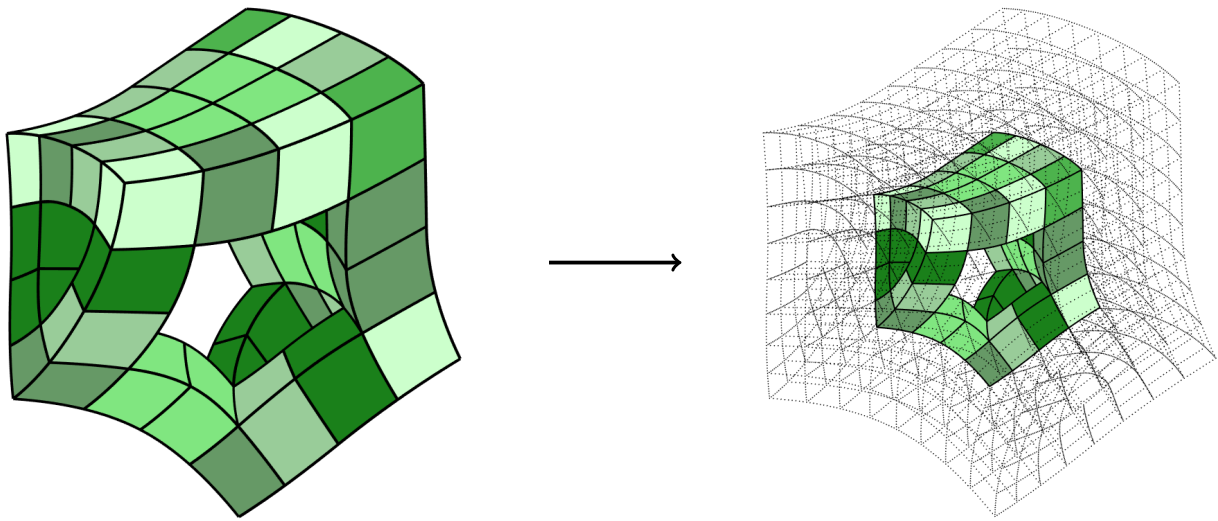


Abbildung 2.19: Eine Schale für $t = 3$ und $g = 2$ um eine irreguläre Ecke bestehend aus $8 \cdot 8$ Zellen und $8 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 40$ ausgewerteten B-Spline Volumen (links) und deren invariante Verfeinerung (rechts). Die Verfeinerung der äußeren Schale ist nur durch schwarze Ecklinien angedeutet. Es lässt sich erkennen, dass sich die neue Schale in das Innere der alten legt. Außerdem beinhaltet die Geometrie um die irreguläre Ecke zwei reguläre Kanten. Daher sind zwei Löcher in der Schale (oben und rechts hinten) auswertbar und ausgefüllt. Diese Auswertung wird durch die Verfeinerung ebenfalls invariant abgebildet.

Elemente ist hier ein *Dreibein* (beziehungsweise für $g = 3$ ein *Doppeldreibein*). Bei der Verfeinerung wird dieses wieder auf ein (Doppel)Dreibein abgebildet. Es lässt sich erkennen, dass der auswertbare Bereich in der äußeren Struktur (bei globaler Verfeinerung) ebenfalls größer wird. Damit legt sich das neue Dreibein in die einspringende Ecke des alten und wird durch die Vergrößerung des äußeren Bereichs in alle Richtungen von diesem umgeben.

Betrachten wir die $n \geq 4$ Zellen um eine irreguläre Ecke (mit den selben Voraussetzungen wie im obigen Teil des Abschnitts) so entsteht eine Struktur, die es näher zu betrachten gilt. Die Dreibeine fügen sich zu einer löchrigen Struktur zusammen. Die Löcher entstehen dabei um die irregulären Kanten beziehungsweise um die semi-irregulären Ecken. Erfüllen die Subdivisionsmatrizen das im nächsten Abschnitt eingeführte Qualitätskriterium Q8, ist also für den semi-irregulären Fall die dreidimensionale Struktur ein Tensorprodukt aus dem irregulären zweidimensionalen Fall und dem eindimensionalen Fall, so lassen sich diese Löcher auf natürliche Art und Weise füllen. Diese Füllung wird dann wiederum durch die Verfeinerung auf die Füllung des verfeinerten Objektes abgebildet.

Dies lässt sich am besten durch die Betrachtung des regulären Falls nachvollziehen. Sind die Kanten, die zu den Löchern gehören, regulär, so lässt sich das Loch, das dann aus vier regulären Zellen besteht, mit vier B-Spline Volumen füllen. Diese B-Spline Volumen werden dann invariant auf deren Verfeinerung abgebildet. Dies lässt sich in den Abbildungen 2.19 für $g = 2$ und 2.20 für $g = 3$ am jeweils oberen Bereich erkennen. Gleichzeitig erklärt dies, warum wir in den Definitionen von maximal drei semi-irregulären Ecken gesprochen haben. Diese Ecken können auch regulär sein, was die Struktur vereinfacht. Das oben beschriebene Dreibein erweitert sich dann jeweils um ein bis drei reguläre Zellen und damit um ein bis drei B-Spline Volumen. Kurz gesagt sind in diesem Fall die blauen Bereiche in den Abbildungen 2.17 und 2.18 grün. Für die semi-irregulären Bereiche erfolgt die Auswertung analog, nur muss vorher der zu den Zellen gehörende Bereich durch Verfeinerung gebildet werden. Im Tensorproduktfall lässt sich die Auswertung auf den einfacheren Flächenfall zurückführen.

Wir erhalten damit eine Struktur, die wir *Schale* nennen. Diese Schale (oder für $g = 3$ auch *Doppelschale*) wird durch Verfeinerung auf eine kleinere Schale abgebildet, und so wird sukzessive das Innere ausgefüllt (siehe Abbildung 2.19 und 2.20). Der zentrale Punkt, also das Ergebnis des Grenzwertprozesses, kann wieder explizit angegeben werden, sofern die Qualitätskriterien Q1 und Q3 des nächsten Abschnitts erfüllt sind. Die Schale kann damit als Ausgangsobjekt für die analytische Betrachtung dienen.

Analog zum Fall $t = 2$ ist für $t = 3$ die Untersuchung der Subdivisionsmatrizen der Initialelemente interessant, da diese die Verfeinerungsregeln festlegen. Für analytische Aspekte sind zudem die Subdivisionsmatrizen von Interesse,

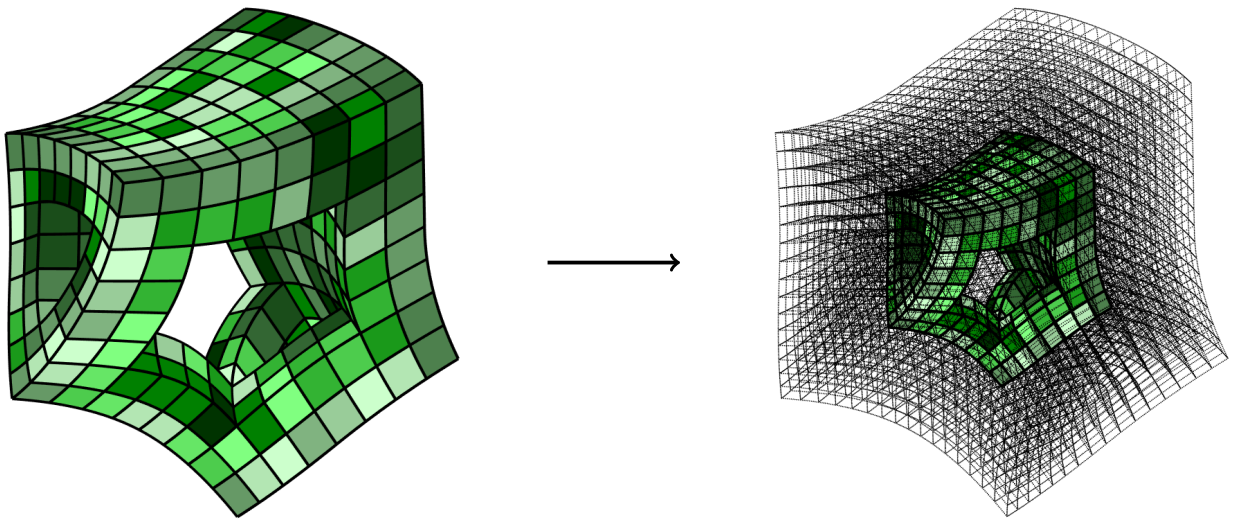


Abbildung 2.20: Die zur Abbildung 2.19 analoge Illustration für $t = 3$ und $g = 3$. Die Schale besteht hier aus zwei Schichten von B-Spline Volumen und ist damit die dreidimensionale Erweiterung zu Abbildung 2.16.

die die eben angesprochenen Schalen auf deren Verfeinerungen abbilden. Für beide ist wieder das lokale asymptotische Verhalten, also S^m , relevant.

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Begriff des Subdivisionsalgorithmus. Für $t = 2$ ist dieser in [PR08, Def. 4.27, S. 80] die Kombination aus generierenden Funktionen und einer Subdivisionsmatrix eines Rings um einen (irregulären) Punkt, die gewissen Kriterien genügen muss. Die Idee ist, dass mit diesen beiden Objekten die Auswertung der Subdivisionsfläche um einen irregulären Punkt beschrieben werden kann. Der Subdivisionsalgorithmus ist also ein Algorithmus zum Erzeugen von ausgewerteten Objekten durch Verfeinerung. Wir definieren diesen Begriff etwas allgemeiner:

Definition 2.33. Sei D ein Spline-Definitionsgebiet mit einer invarianten Struktur, wie in diesem Abschnitt beschrieben. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times d}$ die Matrix der Kontrollpunkte und $\mathbf{g}$ die zugehörigen generierenden Funktionen. Sei zudem $P^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ die Matrix der aus P invariant hervorgegangenen verfeinerten Kontrollpunkte und

$$S \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad SP = P^{(2)}$$

die zugehörige Subdivisionsmatrix, die die invariante Abbildung beschreibt. Dann nennen wir $(\mathbf{g}, S)$ Subdivisionsalgorithmus.

Zunächst muss bemerkt werden, dass die Kontrollpunkte P zwar in der Definition vorhanden sind, allerdings auf die beiden Elemente $\mathbf{g}$ und S keinen Einfluss haben. Die Erwähnung in der Definition erfolgt zum einen, weil die generierenden Funktionen für die Kontrollpunkte definiert sind, und zum anderen, weil sich damit die Subdivisionsmatrix übersichtlich beschreiben lässt, ohne auf Doppelnennungen der einzelnen Zeilen für verschiedene Initialelemente und gleiche Kontrollpunkte eingehen zu müssen.

Diese Definition fasst den Inhalt dieses Abschnitts gut zusammen. Die interessanten Elemente bezüglich der Verfeinerung sind die invarianten Strukturen, welche punktuelle Irregularitäten aufweisen. Durch die invarianten Strukturen lässt sich die Irregularität isolieren und verkleinern, und der reguläre Bereich lässt sich dann mithilfe der generierenden Funktionen auswerten. Interpretiert man größere Strukturen als Ansammlung dieser invarianten Elemente, so lässt sich die gesamte Struktur auswerten.

Im nächsten Abschnitt fokussieren wir uns auf die zu den invarianten Strukturen gehörenden Subdivisionsmatrizen und beschreiben, welchen Kriterien sie entsprechen sollen. Dabei erläutern wir insbesondere die Vorteile der Kriterien und die Konsequenzen bei (Nicht)Erfüllung.

2.4 Qualitätskriterien

In den Definitionen 2.11 und 2.12 wurden die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente zwar definiert, abgesehen von dem Einflussbereich wurden aber keine Bedingungen an die Matrizen gestellt. In Abschnitt 2.3 wurden in Definition 2.32 und im weiteren Verlauf des Abschnitts zudem größere Subdivisionsmatrizen definiert. Allerdings finden sich in der Definition ebenfalls keine Bedingungen an die Subdivisionsmatrizen. Demnach kann jede reelle quadratische Matrix eine Subdivisionsmatrix sein. Bereits im vorherigen Abschnitt haben wir allerdings anklingen lassen, dass Subdivisionsmatrizen bestimmte Eigenschaften haben sollten, um beispielsweise den zentralen Punkt des Verfeinerungsprozesses auswerten zu können.

In diesem Abschnitt beschreiben wir diese von uns gewünschten Eigenschaften. Wir ordnen zudem ein, wie zentral diese Eigenschaften sind und welche Konsequenzen es hat, falls diese (nicht) erfüllt werden. Dafür sei im Folgenden $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix beliebigen Grades, beliebigen Typs und beliebiger Größe (Initialelement, Ring, Schale, etc.). Bevor wir damit beginnen, benötigen wir die folgende Definition spezieller Eigenwerte:

Definition 2.34. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$.

1. Ist $|\lambda_0| > |\lambda_1|$, so nennen wir λ_0 den dominanten Eigenwert der Matrix S (nach [PR08, S. 75]).
2. Ist zusätzlich für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ der Eigenwert $\lambda := \lambda_1 = \dots = \lambda_k$, und (falls $k \neq n-1$)

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| = \dots = |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|,$$

und ist die geometrische Vielfachheit von λ gerade k , so ist λ der k -fache subdominante Eigenwert der Matrix S (nach [PR08, Def. 5.3, S. 84 f.]).

3. Ist zusätzlich für $m \in \{k+1, \dots, n-1\}$ der Wert $\mu := \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m$, und $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, und ist (falls $k \neq n-1$)

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| = \dots = |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}| = \dots = |\lambda_m| > |\lambda_{m+1}|,$$

so ist μ der subsubdominante Eigenwert der Matrix S (nach [PR08, S. 126 f.]).

Damit haben wir alle Voraussetzungen geschaffen, um mit der Beschreiben der Qualitätskriterien beginnen zu können.

Q1 Affine Invarianz

Definition 2.35. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix. Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q1 affine Invarianz, wenn

$$\sum_{j=1}^n S_{(i,j)} = 1 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

wenn sich also jede Zeile zu 1 aufsummiert.

Der Hintergrund dieses Kriteriums lässt sich geometrisch motivieren. Wird eine Zeile der Subdivisionsmatrix mit den Kontrollpunkten multipliziert, so lässt sich jeder Eintrag der Zeile als Gewicht interpretieren. Die Subdivisionsmatrix gewichtet also die alten Punkte, um neue Punkte zu erstellen. Dass sich die Gewichte zu 1 aufsummieren, ist daher eine natürliche Wahl. Die affine Invarianz ist ein obligatorisches Qualitätskriterium, das sowohl theoretisch als auch numerisch mit einer hohen Genauigkeit erfüllt sein sollte. In [PR08, Def. 4.27, S. 80] gehört dieses Kriterium zur Definition einer Subdivisionsmatrix für Subdivisionsflächen.

Die affine Invarianz lässt sich auch äquivalent durch folgendes Lemma darstellen (vgl. [PR08, S. 75], vgl. auch [FW79, Hs. 26, S. 15 f.] für stochastische Matrizen):

Lemma 2.36. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Die Zeilen der Matrix S summieren sich genau dann zu 1 auf, wenn $\vec{1}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist.

Beweis. Es ergibt sich trivialerweise, dass

$$S \cdot \vec{1} = \vec{1} \Leftrightarrow S_{(i,:)} \cdot \vec{1} = 1 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Und da

$$1 = S_{(i,:)} \cdot \vec{1} = \sum_{j=1}^n S_{(i,j)} \cdot 1 = \sum_{j=1}^n S_{(i,j)}$$

ist, gilt die obige Aussage. $\square$

Q2 Konvexe Hülle

Definition 2.37. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix. Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q2 konvexe Hülle, wenn das Qualitätskriterium Q1 gilt und zusätzlich

$$S_{(i,j)} \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n, \quad \text{und für alle } j = 1, \dots, n$$

ist, wenn also jeder Eintrag von S nicht-negativ ist.

Das Qualitätskriterium Q1 ist zwar Teil der Definition des Qualitätskriteriums Q2, um die Eigenschaft der affinen Invarianz zu betonen, erwähnen wir im weiteren Verlauf der Arbeit das Qualitätskriterium Q1 immer zusätzlich zum Qualitätskriterium Q2.

Das Qualitätskriterium Q2 ist keine notwendige Voraussetzung für eine Subdivisionsmatrix, allerdings zeigt sich im nächsten Lemma die Nützlichkeit des Kriteriums und die Verbindung zum Titel der konvexen Hülle:

Lemma 2.38. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und $P \in \mathbb{R}^{n \times d}$ eine Matrix von Kontrollpunkten. Sind die Qualitätskriterien Q1 und Q2 für S erfüllt, so liegt jede Zeile von $S \cdot P$ und damit jeder neue Kontrollpunkt in der konvexen Hülle (vgl. Definition 3.1) von $\{P_{(1,:)}, \dots, P_{(n,:)}\}$, also in der konvexen Hülle der alten Kontrollpunkte.

Beweis. Die konvexe Hülle von $\{P_{(1,:)}, \dots, P_{(n,:)}\}$ ist mit Lemma 3.2 gerade

$$\left\{ \varphi_1 P_{(1,:)} + \dots + \varphi_n P_{(n,:)} : \varphi_j \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \sum_{j=1}^n \varphi_j = 1 \right\}.$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die i -te Zeile von $S \cdot P$ gerade $S_{(i,:)} \cdot P$. Wir erhalten damit

$$S_{(i,:)} \cdot P = \sum_{j=1}^n S_{(i,j)} P_{(j,:)}.$$

Da sich mit Qualitätskriterium Q1 gerade $\sum_{j=1}^n S_{(i,j)} = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und mit Qualitätskriterium Q2 gerade $S_{(i,j)} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ergibt, erhalten wir mit $\varphi_j := S_{(i,j)}$ einen Punkt in der konvexen Hülle von $\{P_{(1,:)}, \dots, P_{(n,:)}\}$. $\square$

Mit den Qualitätskriterien Q1 und Q2 erhalten wir also die Kontrolle darüber, wo die neuen Kontrollpunkte liegen. Da der Zweck von Subdivisionsmatrizen die Verfeinerung ist und die Auswertung der Kontrollpunkte zu Elementen mit B-Spline Basisfunktionen geschieht, erwartet man, dass diese Verfeinerung lokal stattfindet und die neuen Kontrollpunkte auch dieser Lokalität Genüge tragen. Wie bereits angesprochen, ist dieses Qualitätskriterium dafür nicht notwendig, mit Qualitätskriterium Q1 aber hinreichend für die lokale Lage der Kontrollpunkte. Eine Illustration dieses Verhaltens findet sich in Abbildung 2.21.

Es ist noch wichtig anzumerken, dass mit den Qualitätskriterien Q1 und Q2 die Subdivisionsmatrix S gerade eine stochastische Matrix nach Definition B.39 ist. Dies ermöglicht es im Folgenden, dass wir, wenn die Qualitätskriterien Q1 und Q2 erfüllt sind, auf die Theoreme stochastischer Matrizen zugreifen können.

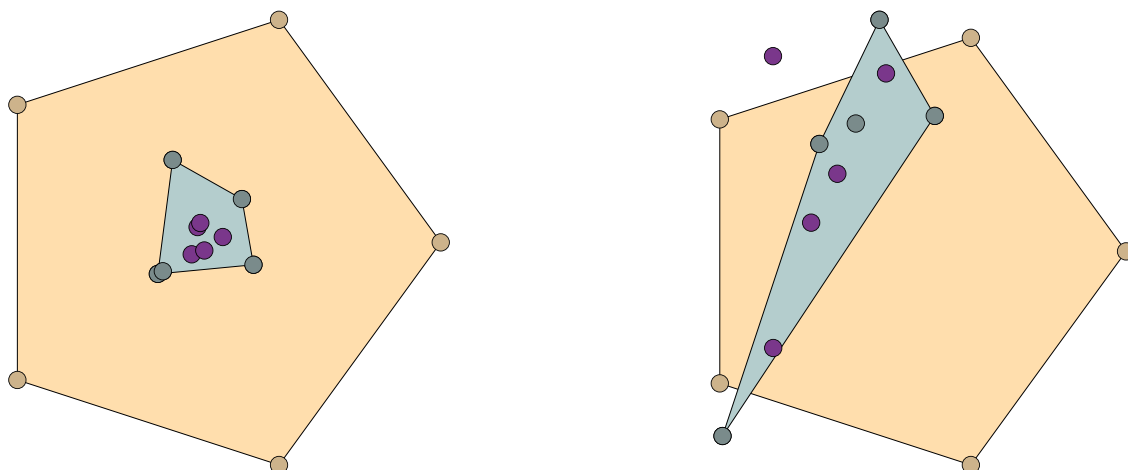


Abbildung 2.21: Illustration von Lemma 2.38. Eine Startkonfiguration von fünf Kontrollpunkten (gelb) wird mit einer Matrix verfeinert, die Qualitätskriterium Q1, aber nicht Qualitätskriterium Q2 erfüllt (rechts) und mit einer Matrix verfeinert, für die die Qualitätskriterien Q1 und Q2 gelten (links). Für die erste (grau) und die zweite (lila) Verfeinerung ist zu erkennen, dass sich links die neuen Punkte in der konvexen Hülle der alten befinden und rechts, dass jeweils mindestens ein Punkt außerhalb der konvexen Hülle liegt.

Q3 Dominanter Eigenwert 1

Definition 2.39. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix und seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$ die Eigenwerte der Matrix S . Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q3 dominanter Eigenwert 1, wenn

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_i| \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}$$

gilt, wenn also 1 ein einfacher und der betragsmäßig größte Eigenwert ist.

Dies ist ebenfalls eine Voraussetzung für einen Subdivisionsalgorithmus nach [PR08, Def. 4.27, S. 80] und damit ein obligatorisches Kriterium für eine Subdivisionsmatrix. Um den Nutzen dieses Qualitätskriteriums zu beschreiben, benötigen wir zunächst den Begriff der Konsistenz (nach [PR08, S. 75]):

Definition 2.40. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und $P \in \mathbb{R}^{n \times d}$ eine Matrix von Kontrollpunkten. Die Matrix S heißt konsistent, falls für jede Wahl von Kontrollpunkten P und für jede Wahl von $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^n a_{(i)} = 1$ der Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^T S^m P$$

existiert und (in Abhängigkeit von P) eindeutig ist.

Mit dieser Definition lässt sich das folgende Lemma beschreiben [PR08, Lem. 4.17, S. 75]:

Lemma 2.41. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix, für die die Qualitätskriterien Q1 und Q3 erfüllt sind. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times d}$ eine Matrix von Kontrollpunkten und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^n a_{(i)} = 1$. Ist $w_0 \in \mathbb{C}^n$ der linke Eigenvektor zum Eigenwert 1, also $w_0^T S = w_0^T$, so ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^T S^m P = \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \mathbf{1} \rangle} P$$

und damit ist S konsistent.

Beweis. Der Beweis in abgewandelter Form findet sich in [PR08, S. 75]. Wir geben hier trotzdem eine grobe Beschreibung, um zu zeigen, wie sich die verschiedenen Begriffe zusammenfügen. Zerlegt man die Matrix S , so lässt sie sich mit Theorem B.29 der Jordanzerlegung als

$$S = VJV^{-1}$$

darstellen, wobei

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{bmatrix}$$

die Matrix der Jordanblöcke von S ist. Gilt Qualitätskriterium Q3, ist also 1 einfach und der dominante Eigenwert von S , so ergibt sich für J

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_k \end{bmatrix}.$$

In [PR08, S. 72–75] wird gezeigt, dass J_i^m (mit $i \in \{1, \dots, k\}$) für $m \rightarrow \infty$ und für entsprechende Eigenwerte betragsmäßig kleiner als 1 gegen die 0-Matrix entsprechender Größe konvergiert. Damit ergibt sich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^T S^m P = \lim_{m \rightarrow \infty} a^T V J^m V^{-1} P = \lim_{m \rightarrow \infty} a^T V \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1^m & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_k^m \end{bmatrix} V^{-1} P = a^T V \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1} P.$$

Da $\frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle}$ die erste Zeile von V^{-1} ist, ergibt sich

$$a^T V \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1} P = a^T V \begin{bmatrix} \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} \\ \vec{0}^T \\ \vdots \\ \vec{0}^T \end{bmatrix} P$$

und, da nach Qualitätskriterium Q1 und Lemma 2.36 gerade $\vec{1}$ der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist und der Eigenwert 1 eine algebraische Vielfachheit von 1 besitzt, erhalten wir

$$a^T V \begin{bmatrix} \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} \\ \vec{0}^T \\ \vdots \\ \vec{0}^T \end{bmatrix} P = a^T \begin{bmatrix} \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} \\ \vdots \\ \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} \end{bmatrix} P.$$

Da sich die Einträge von a zu 1 aufsummieren, erhält man insgesamt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^T S^m P = a^T \begin{bmatrix} \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} \\ \vdots \\ \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} \end{bmatrix} P = \frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} P.$$

□

Wir sehen damit, dass die Qualitätskriterien Q1 und Q3 hinreichende Kriterien für die Konvergenz eines Subdivisionsalgorithmus sind. Mit diesen beiden Kriterien ist der zentrale Punkt, also der obige Grenzwert, auswertbar. Eine Illustration dieses Verhaltens findet sich in Abbildung 2.22.



Abbildung 2.22: Illustration von Lemma 2.41. Eine Startkonfiguration von fünf Kontrollpunkten (gelb) wird mit einer Matrix verfeinert, die die Qualitätskriterien Q1 und Q3 erfüllt (links) und mit einer Matrix verfeinert, für die die Qualitätskriterien Q1 und Q3 nicht gelten (rechts). Für die Verfeinerung nach zwei Schritten (grau) und die Verfeinerung nach vier Schritten (lila) lässt sich erkennen, dass links die neuen Punkte konvergieren, wohingegen rechts die neuen Kontrollpunkte willkürlich im Raum angeordnet sind.

Wir erhalten außerdem den folgenden Zusammenhang:

Lemma 2.42. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine irreduzible Subdivisionsmatrix, für die die Qualitätskriterien Q1 und Q2 erfüllt sind. Sei außerdem $\min_i S_{(i,i)} > 0$. Dann gilt auch Qualitätskriterium Q3 für die Subdivisionsmatrix S .

Beweis. Dies ist lediglich eine Umformulierung von Korollar B.41. □

Q4 Subdominanter Eigenwert mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit t

Definition 2.43. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix, die die Qualitätskriterien Q1 und Q3 erfüllt, und seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$ die Eigenwerte der Matrix S . Außerdem sei $t \in \{1, 2, 3\}$ der Typ der ausgewerteten Elemente. Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q4 subdominanter Eigenwert mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit t , wenn

$$\lambda_0 > |\lambda_1| = \dots = |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}|, \quad \lambda := \lambda_1 = \dots = \lambda_t,$$

und wenn die geometrische Vielfachheit von λ gerade t ist, wenn also λ der t -fache subdominante Eigenwert von S ist.

Dieses Kriterium ist durch [PR08, S. 84 ff.] motiviert und bildet zusammen mit Qualitätskriterium Q5 die Hauptmotivation für diese Arbeit. Wir erinnern zunächst daran, dass die Voraussetzung für einen subdominanten Eigenwert nach Definition 2.34 ein dominanter Eigenwert ist. Wir fordern also für dieses Kriterium zunächst, dass S einen dominanten Eigenwert besitzt, und da wir die Qualitätskriterien Q1 und Q3 bereits nach [PR08] als obligatorische Bedingungen für eine Subdivisionsmatrix identifiziert haben, setzen wir für dieses Qualitätskriterium voraus, dass die Qualitätskriterien Q1 und Q3 erfüllt sind.

Qualitätskriterium Q4 ist nicht notwendig, es ist aber für viele praktische Anwendungen von Subdivision wichtig. Sind die Qualitätskriterien Q1 und Q3 erfüllt, so konvergiert das wiederholte Ausführen der Subdivisionsmatrix auf eine Matrix von Kontrollpunkten P zu einem Punkt, wie wir im letzten Kriterium gesehen haben. Hat die Subdivisionsmatrix zudem einen t -fachen subdominanten Eigenwert, so nähert sich in diesem Prozess die Form der Kontrollpunkte für fast alle Konfigurationen einer Basis des Eigenraums des subdominanten Eigenwertes an.

Wie ist das zu verstehen und was bedeutet „fast alle“? Um diese Fragen zu beantworten, betrachten wir den Ausdruck

$$S^m P,$$

wobei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix vom Typ t und $P \in \mathbb{R}^{n \times d}$ eine Matrix von Kontrollpunkten ist. Wir nehmen an, dass die Qualitätskriterien Q1 und Q3 für S erfüllt sind, S einen subdominanten Eigenwert $\lambda_1 = \dots = \lambda_j$ mit $j \in \{1, \dots, t\}$ mit geometrischer Vielfachheit j besitzt und die Eigenwerte und Eigenvektoren in der Form

$$1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

angeordnet sind. Damit lässt sich die Matrix S als

$$S = VJV^{-1} \quad \text{mit} \quad J = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & J_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & J_k \end{array} \right]$$

darstellen. Hierbei sind $J_1, \dots, J_k$ die anderen Jordanblöcke der Matrix S . Für S^m erhalten wir entsprechend

$$S^m = VJ^mV^{-1} = V \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^m & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j^m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & J_k^m \end{array} \right] V^{-1}.$$

Da die Matrix V invertierbar ist, bilden die Spalten eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Damit existiert eine Matrix $P' \in \mathbb{R}^{n \times d}$, sodass

$$VP' = P.$$

Die Spalten von P' sind damit die Koordinaten der Spalten von P zur Basis V . Sie werden in [PR08, Def. 4.16, S. 74] auch als *Eigenkoeffizienten* bezeichnet. Wir erhalten damit

$$S^m P = VJ^mV^{-1}VP' = VJ^mP'.$$

Da die Jordanblöcke $J_1^m, \dots, J_k^m$ mit [PR08, S. 72–75] für steigendes m schneller fallen als $1^m, \lambda_1^m, \dots, \lambda_j^m$, strebt der obige Ausdruck mit $\lambda := \lambda_1 = \dots = \lambda_j$ gegen

$$\begin{bmatrix} \vec{1} & \lambda^m V_{(:,2)} & \dots & \lambda^m V_{(:,j+1)} & \vec{0} & \dots & \vec{0} \end{bmatrix} P' + \mathcal{O}(\lambda_{j+1}^m) = P'_{(:,1)} + \lambda^m \left(V_{(:,2)} P'_{(:,2)} + \dots + V_{(:,j+1)} P'_{(:,j+1)} \right) + \mathcal{O}(\lambda_{j+1}^m)$$

und mit der Notation aus Lemma 2.41 gegen

$$\frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} P + \lambda^m \left(V_{(:,2)} P'_{(:,2)} + \dots + V_{(:,j+1)} P'_{(:,j+1)} \right) + \mathcal{O}(\lambda_{j+1}^m).$$

An diesem Ausdruck lassen sich verschiedene Aspekte ablesen. Zum einen bestätigt es die Aussage aus Lemma 2.41. Für $m \rightarrow \infty$ bleibt nur noch der Summand

$$\frac{w_0^T}{\langle w_0^T, \vec{1} \rangle} P$$

übrig. Außerdem strebt für $m \rightarrow \infty$ der Ausdruck $\mathcal{O}(\lambda_{t+1}^m)$ schneller gegen 0 als

$$\lambda^m \left(V_{(:,2)} P'_{(2,:)} + \cdots + V_{(:,j+1)} P'_{(j+1,:)} \right), \quad (2.2)$$

weshalb das lokale asymptotische Verhalten von Ausdruck (2.2) bestimmt wird. Betrachten wir diesen etwas genauer. Zunächst ist

$$\left(V_{(:,2)} P'_{(2,:)} + \cdots + V_{(:,j+1)} P'_{(j+1,:)} \right) \in \mathbb{R}^{n \times j} \quad (2.3)$$

und stellt damit n Kontrollpunkte in $\mathbb{R}^j$ dar. Gilt $j < t$, so ist das lokale asymptotische Verhalten von einem Objekt bestimmt, das nicht dieselbe Dimension wie das zu verfeinernde Objekt hat. Die Vektoren $V_{(:,2)}, \dots, V_{(:,j+1)}$ spannen den Eigenraum zum Eigenwert λ auf und mit der Matrix P' erhalten wir j Vektoren aus diesem Eigenraum. Ist die Dimension des Eigenraums kleiner als t , so kann das lokale asymptotische Verhalten nicht die Dimension t haben. Gilt beispielsweise $t = 3$ und $j = 1$, so konvergiert das anfänglich dreidimensionale Objekt nach Reskalierung gegen etwas Linienartiges. Dies lässt sich in Abbildung 2.23 sehen.

Damit erhalten wir auch die Rechtfertigung für Qualitätskriterium Q4. Das lokale asymptotische Verhalten der Verfeinerung soll dieselbe Dimension wie das Ausgangsobjekt haben und dies ist nur möglich, wenn die algebraische und geometrische Vielfachheit des subdominanten Eigenwerts gerade t ist.

Das Qualitätskriterium Q4 ist für die Anwendung der Subdivision im Kontext von Simulation von Bedeutung. Benutzt man die erzeugte Fläche beziehungsweise das erzeugte Volumen als physisches Gebiet einer Differentialgleichung, so ist es entscheidend, dass die Volumen auch wirklich Volumen sind. Elemente, die sich Objekten niedrigerer Dimension annähern, führen in der Simulation zu fast singulären Matrizen.

Um diesen Vorgang noch etwas präziser zu betrachten, beleuchten wir die Eigenstruktur aus einer etwas anderen Perspektive. Sei $P' \in \mathbb{R}^{n \times t}$ mit $VP' = P$ (wir betrachten also den Spezialfall von Flächen in $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise Volumen in $\mathbb{R}^3$) und nehmen wir an, dass die Qualitätskriterien Q1 und Q3 erfüllt und die Eigenräume von $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ volldimensional sind. Dann hat S den Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$ und alle anderen Eigenwerte sind betragsmäßig kleiner als 1. Wir nehmen an, dass die Eigenwerte und Eigenvektoren in der Form

$$1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

angeordnet sind und die größten drei Eigenwerte (kleiner 1) jeweils die maximale geometrische Vielfachheit besitzen. Betrachten wir jetzt die Matrix

$$P'_{(2:t+1,:)}$$

Der (i, j) -te Eintrag dieser Matrix gibt an, wie groß der Einfluss des i -ten Eigenvektors auf die j -te Koordinate der Kontrollpunkte ist. Ist diese Matrix invertierbar, so haben alle t Eigenvektoren einen Einfluss auf die Kontrollpunkte. Insbesondere ist dann aber auch $P'_{(2:t+1,:)}$ eine Matrix eines Basiswechsels in $\mathbb{R}^t$ und wir können damit den obigen Ausdruck zu

$$S^m P = V J^m P' = V J^m P' P'^{-1}_{(2:t+1,:)} P'_{(2:t+1,:)} = V J^m \begin{bmatrix} P'_{(1,:)} \cdot P'^{-1}_{(2:t+1,:)} \\ E_t \\ P'_{(t+2:n,:)} \cdot P'^{-1}_{(2:t+1,:)} \end{bmatrix} P'_{(2:t+1,:)}$$

transformieren. Bezüglich der neuen Basis in $\mathbb{R}^t$ erhalten wir damit eine Verfeinerung in den Koordinaten

$$\begin{aligned} S^m P_{(:,1)} &= \left(P'_{(1,:)} \cdot P'^{-1}_{(2:t+1,1)} + \lambda_1^m V_{(:,2)} + \mathcal{O}(\lambda_{t+1}^m) \right) P'_{(2:t+1,:)} \\ &\vdots \\ S^m P_{(:,t)} &= \left(P'_{(1,:)} \cdot P'^{-1}_{(2:t+1,t)} + \lambda_t^m V_{(:,t+1)} + \mathcal{O}(\lambda_{t+1}^m) \right) P'_{(2:t+1,:)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ist also $P'_{(2:t+1,:)}$ eine invertierbare Matrix und $|\lambda_t| > |\lambda_{t+1}|$, so ist das asymptotische Verhalten der Subdivisionsmatrix dominiert durch

$$S^m P = P'_{(1,:)} + [\lambda_1^m \quad \dots \quad \lambda_t^m] V_{(:,2:t+1)} P'_{(2:t+1,:)} + \mathcal{O}(\lambda_{t+2}^m).$$

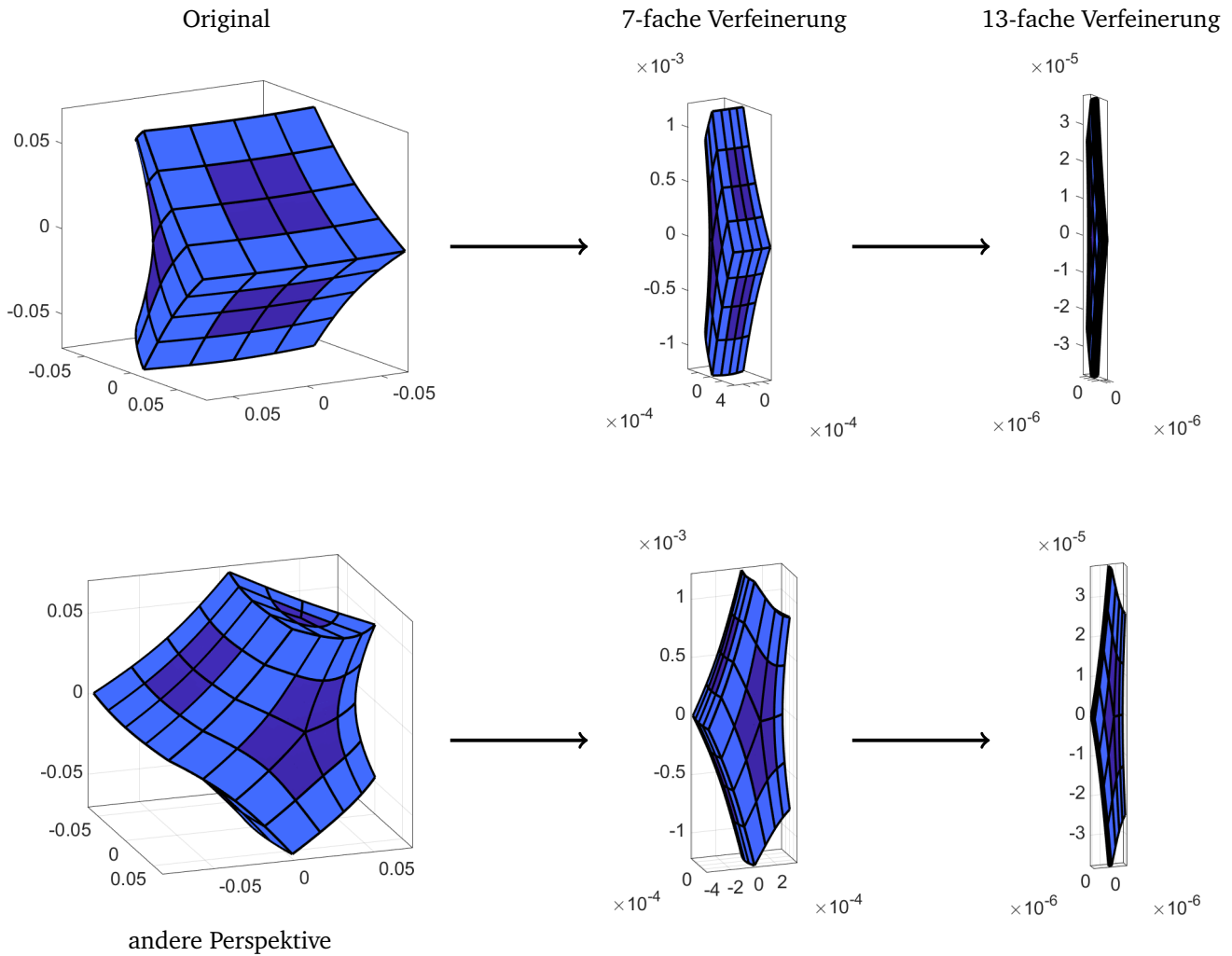


Abbildung 2.23: Die kombinatorische Anordnung aus Abbildung 2.20 mit $t = 3$ und $g = 3$. Diese wird mit einer Subdivisionsmatrix mit den in [Baj+02] beschriebenen Verfeinerungsregeln verfeinert. Die Eigenwerte der Subdivisionsmatrix sind $[1, 0.5604, 0.492, 0.4326, \dots]$. Damit hat die Subdivisionsmatrix einen subdominanten Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1, weshalb die volumetrische Struktur nach sieben Verfeinerungen ebenenartig und nach 13 Verfeinerungen linienartig aussieht.

Dabei erfüllt jede Komponente eine Funktion. $P'_{(1,:)}$ ist die Verschiebung im Raum und gleichzeitig der Konvergenzpunkt der Subdivision. Die Eigenwerte $\lambda_1^m, \dots, \lambda_t^m$ geben die Skalierung der Eigenvektoren an. Die Matrix $P'_{(2:t+1,:)}$ passt die Eigenvektoren $V_{(:,2:t+1)}$ an die räumliche Struktur des Objekts an. Anschaulich gesprochen hat jede Konfiguration von Kontrollpunkten P ihr eigene Projektion in dem Raum, der von $V_{(:,2:t+1)}$ aufgespannt wird. Diese Projektion ist damit ein affines Bild von $V_{(:,2:t+1)}$. Mit $V_{(:,2:t+1)}$ haben wir allerdings die Kontrolle über die Gestalt des lokalen asymptotischen Verhaltens.

Ein weiterer interessanter Fall ist der Fall, in dem $d > t$ ist, in dem also die Dimension des Raums größer als der Typ der Subdivision ist, beispielsweise für Flächen in $\mathbb{R}^3$ ($t = 2, d = 3$) oder Volumen in $\mathbb{R}^4$ ($t = 3, d = 4$). In diesem Fall verläuft die Konstruktion analog, nur die Basiswechsellmatrix

$$P'_{(2:t+1,:)}$$

wird zu

$$P'_{(2:d+1,:)}$$

Der Rest der Konstruktion verläuft analog mit $d + 1$ Komponenten. Gilt weiterhin, dass $|\lambda_t| > |\lambda_{t+1}|$, so hängen die neuen Komponenten von $\lambda_{t+1}^m, \dots, \lambda_{d+1}^m$ ab. Da diese schneller gegen 0 konvergieren, bleibt das lokale asymptotische Verhalten wie oben beschrieben. Eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ konvergiert nach Reskalierung also weiterhin gegen eine zweidimensionale Struktur, also gegen ein ebenenartiges Objekt. Wie die Ebene im Raum liegt, wird dann durch $P'_{(2:d+1,:)}$ bestimmt.

Wie bereits angesprochen, ermöglicht ein subdominanter Eigenwert von algebraischer und geometrischer Vielfachheit t ein lokales asymptotisches Verhalten von gewünschter Dimension für „fast alle“ Konfigurationen. „Fast alle“ bedeutet in diesem Fall, dass t Spalten von $P'_{(2:t+1,:)}$ linear unabhängig sind. Dies wird ebenfalls in [PR08, S. 84] gefordert. Wir betrachten zwei Spezialfälle, um dies zu verdeutlichen.

Die Kontrollpunkte P können so gewählt werden, dass $P'_{(2:t+1,:)} = 0$ ist, etwa, indem die Kontrollpunkte gerade Eigenvektoren von S sind, die nicht zu den ersten $t + 1$ größten Eigenwerten gehören. In diesem Fall wird das lokale asymptotische Verhalten von $\mathcal{O}(\lambda_{t+1}^m)$ bestimmt. Dieses Verhalten ist nur natürlich und lässt sich nicht verhindern, denn schließlich ist es gerade die Eigenschaft der Eigenvektoren, dass

$$SV = \lambda_i V$$

gilt. Die Kontrollpunkte können außerdem so gewählt werden, dass deren Spalten linear abhängig sind. In diesem Fall ist die Dimension des Ausgangsobjektes schon kleiner als t . Die Subdivisionsmatrix macht also beispielsweise aus einem anfänglich zweidimensionalen Objekt kein dreidimensionales.

Wir schließen dieses Kriterium mit verschiedenen Begriffen ab, die wir im weiteren Verlauf benötigen.

Definition 2.44. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix vom Typ t mit dominantem Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$ und seien die Eigenwerte entsprechend deren Größe geordnet, es gelte also

$$1 = \lambda_0 = |\lambda_0| > |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$$

und damit die Qualitätskriterien Q1 und Q3. Sei zudem V die Matrix zur Jordanzerlegung von S , es gelte also $S = VJV^{-1}$.

- Sei $t = 2$, $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet eines (Doppel)Rings und S eine Subdivisionsmatrix, die, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, einen (Doppel)Ring auf einen (Doppel)Ring abbildet. Sei zudem $\mathbf{g}$ ein System generierender Funktionen und $(S, \mathbf{g})$ ein Subdivisionsalgorithmus. Ersetzen wir in der Funktion der Subdivisionsauswertung die Kontrollpunkte durch $V_{(:,i)}$ mit $i = 1, \dots, n$, dann nennen wir

$$\mathbf{s} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{s}(x) \mapsto \mathbf{g}^T(x) V_{(:,i)}$$

einen Eigenring des Subdivisionsalgorithmus $(S, \mathbf{g})$ (nach [PR08, Def. 4.16, S. 74]).

- Sei $t = 3$ und $\mathbf{D}$ ein Spline-Definitionsgebiet einer (Doppel)Schale und S eine Subdivisionsmatrix, die, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, eine (Doppel)Schale auf eine (Doppel)Schale abbildet. Sei zudem $\mathbf{g}$ ein System generierender

Funktionen und $(S, \mathbf{g})$ ein Subdivisionsalgorithmus. Ersetzen wir in der Funktion der Subdivisionsauswertung die Kontrollpunkte durch $V_{(:,i)}$ mit $i = 1, \dots, n$, dann nennen wir

$$\mathbf{s} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{s}(x) \mapsto \mathbf{g}^T(x) V_{(:,i)}$$

eine Eigenschale des Subdivisionsalgorithmus $(S, \mathbf{g})$.

Gilt zudem

$$1 = \lambda_0 = |\lambda_0| > |\lambda_1| \geq |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}|,$$

dann definieren wir:

- Die Kombination der Eigenringe beziehungsweise Eigenschalen von $V_{(:,2:t+1)}$, also konkret

$$\mathbf{s} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{s}(x) \mapsto \mathbf{g}^T(x) V_{(:,2:t+1)}$$

heißt charakteristischer Ring für $t = 2$ beziehungsweise charakteristische Schale für $t = 3$ des Subdivisionsalgorithmus $(S, \mathbf{g})$ (nach [PRO8, Def. 5.4, S. 85 und Def. 5.10, S. 92 f.]). Spezifizieren wir t nicht, so nennen wir den obigen Ausdruck charakteristische Abbildung des Subdivisionsalgorithmus $(S, \mathbf{g})$.

- Sei A die Vereinigung aller Adjazenzmatrizen der Initialelemente, die S beinhaltet, und sei $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ der zugehörige Graph aus A , für den $\mathbf{V}$ mit den entsprechenden Zeilen von $V_{(:,2:t+1)}$ identifiziert wird. Dann nennen wir $\mathbf{G}$ den charakteristischen Graph von S . Die Realisierungen des Graphen in $\mathbb{R}^t$ mit Knoten, die den Zeilen von $V_{(:,2:t+1)}$ entsprechen, und Kanten, die die kürzesten Verbindungen dieser Knoten sind, heißt charakteristisches Netz von S .

Q5 Subdominanter Eigenwert $1/2$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit t

Definition 2.45. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix und seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$ die Eigenwerte der Matrix S . Außerdem sei $t \in \{1, 2, 3\}$ der Typ der ausgewerteten Elemente. Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q5 subdominanter Eigenwert $1/2$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit t , wenn Qualitätskriterium Q4 erfüllt ist und der subdominante Eigenwert λ gerade $1/2$ ist.

Dieses Kriterium ist eine Erweiterung des Qualitätskriteriums Q4. Wie bereits erläutert, beschreibt der Eigenraum des subdominanten Eigenwerts das lokale asymptotische Verhalten der Verfeinerung. Der subdominante Eigenwert selbst beschreibt das Skalierungsverhalten. Anschaulich gesprochen bestimmt er, wie groß das jeweils nächste invariante Element im Vergleich zum vorherigen ist. Der Wert $1/2$ ist dabei die natürliche Skalierung. Dies führen wir im Folgenden aus:

Eine Zelle wird zu 2^t Zellen verfeinert. Dabei werden jeweils in den Mitten der Kanten, in den Mitten der Facetten und (für $t = 3$) in den Mitten der Volumen jeweils neue Punkte eingesetzt. Ebenso wird das Spline-Definitionsgebiet in jeweils gleich große Teile unterteilt. Der Skalierungsfaktor $1/2$ zerlegt analog dazu die Struktur der Kontrollpunkte in gleich große Teile.

Der gegenteilige Effekt ist in Abbildung 2.24 zu sehen. Hier werden drei Netze mit dem Catmull-Clark-Algorithmus [CC78] verfeinert, der nicht diesem Qualitätskriterium entspricht. Es lässt sich erkennen, dass sich dadurch das anfängliche Netz nicht gleichmäßig verfeinert. Für eine Irregularität, die an drei Zellen liegt, zieht sich das Netz um die irreguläre Ecke zusammen und für eine Irregularität, die an neun Zellen liegt, drückt sich das Netz um die irreguläre Ecke auseinander.

Q6 Subsubdominanter Eigenwert μ mit $\mu = \lambda^2$

Definition 2.46. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix und seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$ die Eigenwerte der Matrix S . Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q6 subsubdominanter Eigenwert μ mit $\mu = \lambda^2$, wenn sie das Qualitätskriterium Q4 mit subdominantem Eigenwert λ erfüllt und S einen subsubdominanten Eigenwert μ mit $\mu = \lambda^2$ besitzt.

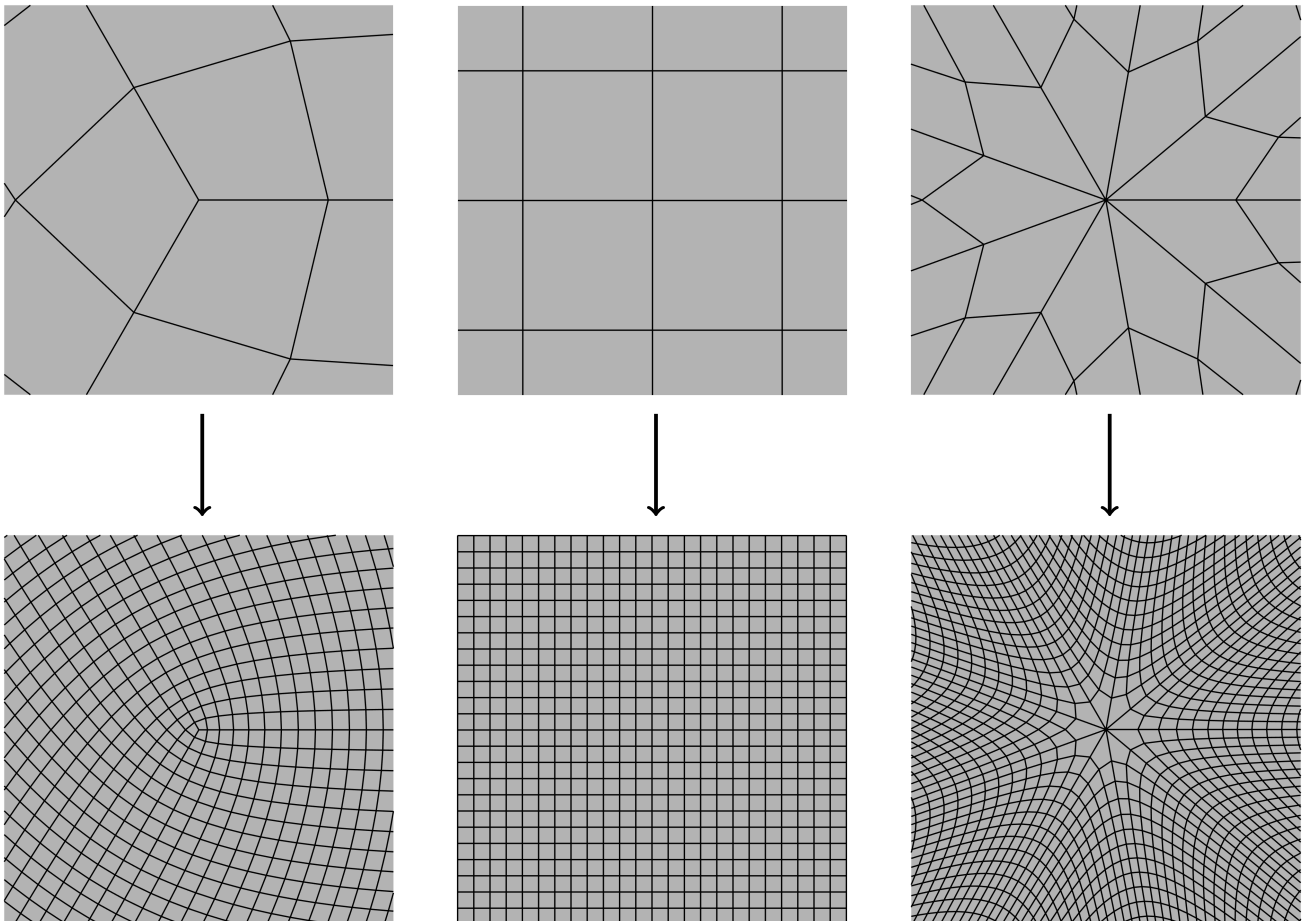


Abbildung 2.24: Drei Ausgangsnetze für $t = 2$ und $g = 3$ mit jeweils einer (ir)regulären Ecke mit den Valenzen 3, 4 und 9, die mit dem Catmull-Clark-Algorithmus [CC78] verfeinert werden. Die Subdivisionsmatrizen haben die (jeweils doppelten) subdominanten Eigenwerte $\lambda \approx 0,4101$ (links), $\lambda = 0,5$ (Mitte) und $\lambda \approx 0,6199$ (rechts). Es lässt sich erkennen, dass sich das linke Netz zusammenzieht, das mittlere Netz gleichmäßig verfeinert und das rechte Netz auseinandergedrückt wird.

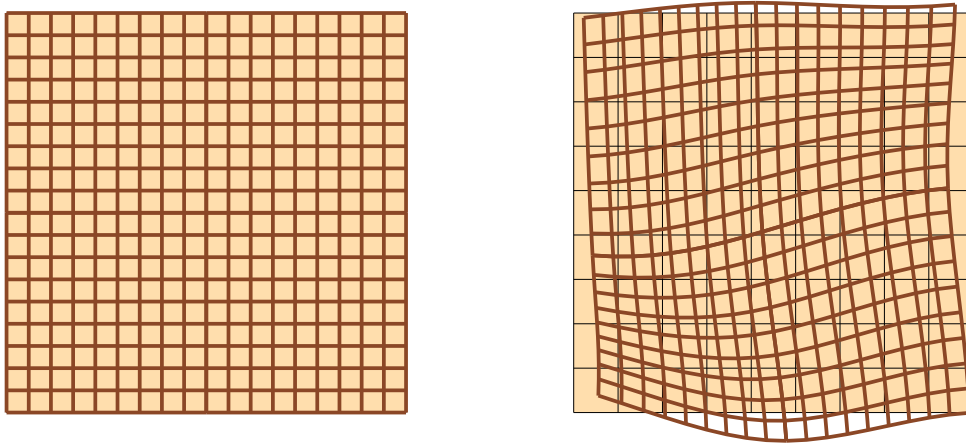


Abbildung 2.25: Die Auswertung einer regulären Zelle für $t = 2$ und $g = 3$ (gelb) und die Auswertung seiner Verfeinerung als Mesh (braun). Links wird der reguläre Fall reproduziert, das braune Mesh liegt genau über der gelben Fläche. Rechts wird der reguläre Fall nicht reproduziert, das braune Mesh weicht von der gelben Fläche ab.

Dieses Qualitätskriterium steht eher am Rande dieser Arbeit. Für den Fall $t = 2$ ist dieses Kriterium eine notwendige Bedingung für eine Subdivisionsmatrix, die eine Fläche erzeugt, die an den irregulären Ecken C^2 ist (vgl. [PR08, Thm. 7.15, S. 141]).

Unsere Konstruktionen in Kapitel 5 und 6 werden dieses Kriterium nicht erfüllen. Grundsätzlich ist allerdings ein kleiner subsubdominanter Eigenwert von Vorteil. Je größer der Abstand zum subdominanten Eigenwert ist, desto schneller konvergiert das ausgewertete Objekt gegen ein Element aus dem Eigenraum des subdominanten Eigenwerts. Anschaulich gesprochen setzt so das in Qualitätskriterium Q4 beschriebene lokale asymptotische Verhalten durch einen kleineren subsubdominanten Eigenwert schneller ein, da die Potenzen der anderen Eigenwerte schneller klein werden.

Q7 Reproduktion des regulären Falls

Definition 2.47. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix vom Typ t . Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q7 Reproduktion des regulären Falls, wenn jedes reguläre Initialelement, welches von S beinhaltet wird, das t -fache Tensorprodukt der jeweiligen univariaten Regel ist.

Dieses Qualitätskriterium ist in dieser Arbeit Teil der Definition einer Subdivisionsmatrix. Konkret beschreibt es Definition 2.15 und 2.17. Der Hintergrund ist, wie bereits in Abschnitt 2.1 beschrieben, dass die Tensorproduktstruktur in den regulären Bereichen eine Auswertung zu einem Tensorprodukt B-Spline ermöglicht. Ist dieses Qualitätskriterium nicht erfüllt, so würde das ausgewertete Element, dessen Zelle aus 2^t regulären Initialelementen besteht, bei der Verfeinerung nicht reproduziert werden. Dies ist in Abbildung 2.25 zu sehen. Das Kriterium ist also für die Wohldefiniertheit der Verfeinerung notwendig. Hier müssen zudem zwei Aspekte diskutiert werden.

Der erste Aspekt ist die Frage, welche Initialelemente reguläre Initialelemente sind. Wir haben diese Frage mit Definition 2.20 beantwortet. Für $g = 3$ produzieren allerdings die Subdivisionsalgorithmen aus [CC78], [JM99] und [Baj+02] reguläre Initialelemente und Zellen, die nach dieser Arbeit nicht zwingend regulär sein müssten. Auf die Hintergründe und die Vor- und Nachteile unserer Definition von regulären Elementen gehen wir in Kapitel 6 ein. Hier ist aber schon zu bemerken, dass es wichtig ist, für jede Art von Subdivisionsmatrix zu erläutern, welche Bereiche regulär sind und ausgewertet werden können.

Der zweite Aspekt ist die „natürliche Reproduktion“ des regulären Falls. Subdivisionsregeln und -matrizen werden typischerweise über ein Verfahren definiert, dass man auf die jeweilige kombinatorische Anordnung anwendet. Reproduzieren diese Verfahren für die reguläre kombinatorische Anordnung die regulären Subdivisionsregeln, so

entstehen sie in natürlicher Art und Weise. Dies ist allerdings für das Kriterium nicht zwingend notwendig. Es ist genauso valide, für jede oder für bestimmte kombinatorische Anordnungen konkrete Regeln anzugeben, die sich vom Verfahren der anderen unterscheiden.

Q8 Reproduktion des semi-irregulären Falls

Definition 2.48. Sei $S^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix vom Typ $t = 3$ eines Spline-Definitionsgebiets, das das Tensorprodukt eines zweidimensionalen Spline-Definitionsgebiets und eines eindimensionalen Spline-Definitionsgebiets ist. Die Matrix $S^{(3)}$ erfüllt Qualitätskriterium Q8 Reproduktion des semi-irregulären Falls, wenn eine Permutationsmatrix $H \in \{0, 1\}^{n \times n}$ existiert, sodass $HS^{(3)}H^{-1}$ das Kroneckerprodukt der zur zweidimensionalen Struktur gehörenden Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ mit der zur eindimensionalen Struktur gehörenden Subdivisionsmatrix $S^{(1)}$ ist. Konkret bedeutet dies: Die Matrix $HS^{(3)}H^{-1}$ ist das Kroneckerprodukt von $S^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S^{(2)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, wenn

$$HS^{(3)}H^{-1} = \text{kron} \left(S^{(1)}, S^{(2)} \right) = \begin{bmatrix} S_{(1,1)}^{(1)} S^{(2)} & \dots & S_{(1,n)}^{(1)} S^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{(n,1)}^{(1)} S^{(2)} & \dots & S_{(n,n)}^{(1)} S^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \cdot m \times n \cdot m}.$$

Diese etwas sperrige Definition hat eine simple Anschauung. Für $t = 2$ lassen sich verschiedene Subdivisionsmatrizen für verschiedene invariante Bereiche definieren. In Abschnitt 2.3 haben wir dies für Initialelemente, Zellen um eine irreguläre Ecke, Ringe und Doppelringe gesehen. Diese Strukturen lassen sich ins Dreidimensionale übertragen, indem man Schichten dieser zweidimensionalen Strukturen kombinatorisch in die dritte Dimension übereinanderlegt. So entstehen beispielsweise aus n zweidimensionalen Zellen, die sich eine Ecke teilen, mit einer zweiten Schicht n Hexaeder, die sich eine irreguläre Kante teilen und mit einer dritten Schicht $2 \times n$ Hexaeder, von denen sich jeweils n eine irreguläre Kante und alle $2n$ eine semi-irreguläre Ecke teilen. Das Übereinanderlegen dieser Schichten entspricht gerade einem Tensorprodukt der zweidimensionalen Struktur mit einer eindimensionalen. Illustrationen dazu finden sich in Abbildung 2.26.

Kombinieren wir also zweidimensionale Spline-Definitionsgebiete mit einem eindimensionalen Spline-Definitionsgebiet, so lassen sich daraus dreidimensionale Spline-Definitionsgebiete erzeugen. Diese Tensorproduktstrukturen können auch Teile einer größeren dreidimensionalen Struktur sein. Betrachten wir beispielsweise die Schalen aus Abbildung 2.19 und 2.20, so ist jede ausgewertete (volumetrische) Facette der Schale eine Kombination aus einer zweidimensionalen und einer eindimensionalen Struktur. Sind auch die Subdivisionsmatrizen und damit die Verfeinerungsregeln dieser (Teil)Strukturen Tensorprodukte von eindimensionalen und zweidimensionalen Subdivisionsmatrizen, so erfüllen diese das Qualitätskriterium Q8. Man kann auch sagen, dass die dreidimensionalen Subdivisionsregeln Verallgemeinerungen der entsprechenden zweidimensionalen sind. Die Permutation in der gerade beschriebenen Definition ist dabei notwendig, da die Anordnung der Zeilen und Spalten der Subdivisionsmatrix für die Tensorproduktstruktur nicht relevant ist. Sie müssen sich lediglich so anordnen lassen, dass diese Struktur erkennbar wird.

Dieses Qualitätskriterium ist nicht zwingend notwendig. Die Subdivisionsmatrizen von [JM99] erfüllen dieses Kriterium beispielsweise nicht. Dies wurde schon in [Baj+02, S. 353] bemerkt, deren Subdivisionsmatrizen das Kriterium erfüllen. Der Vorteil von Subdivisionsmatrizen mit diesem Kriterium ist, wie bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben, dass sich damit die Tensorproduktstruktur in allen Bereichen (Graph, Adjazenzmatrix, Subdivisionsmatrix) wiederfindet. Die Beschreibung der Strukturen und insbesondere der Analysis lässt sich damit als Tensorprodukt einer zweidimensionalen und einer eindimensionalen Struktur darstellen. Damit erhält man für die Bereiche den Zugriff auf Theoreme der ein- und zweidimensionalen Subdivisionsmatrizen. Insbesondere lassen sich damit die Löcher in den Schalen durch zweidimensionale Verfahren auswerten.

Es gilt hier noch zu bemerken, dass Qualitätskriterium Q7 gerade ein Spezialfall von Qualitätskriterium Q8 ist. Übertragen wir die Formulierung, so wird in Qualitätskriterium Q7 gefordert, dass die Subdivisionsmatrix einer Struktur, die aus dem Tensorprodukt von drei eindimensionalen Strukturen besteht, gerade das Kroneckerprodukt der Subdivisionsmatrizen dieser drei eindimensionalen Strukturen ist.

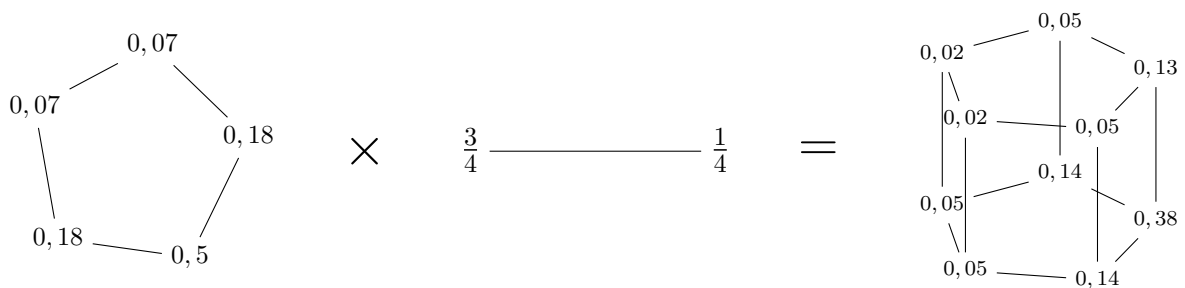
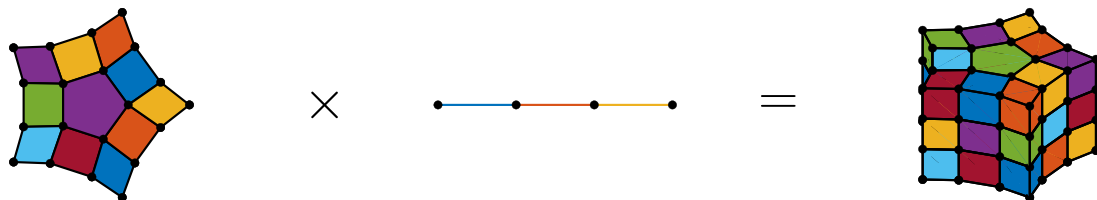
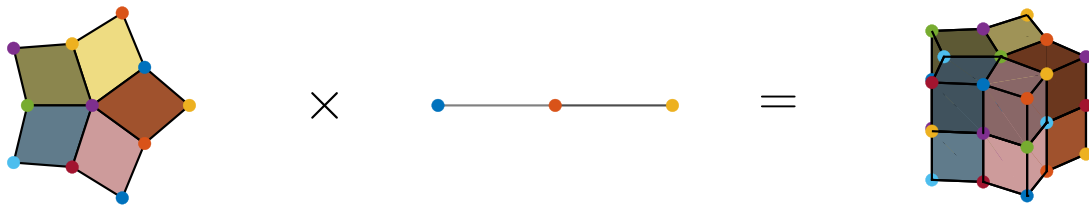
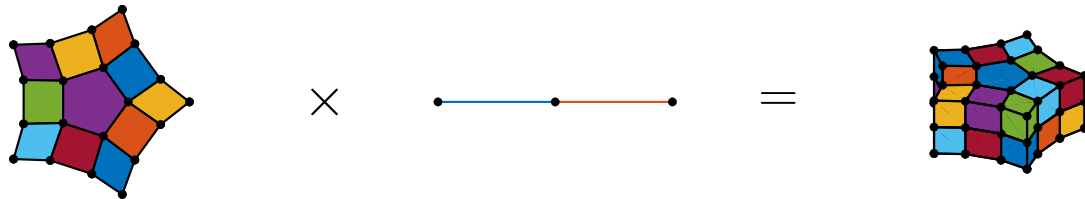
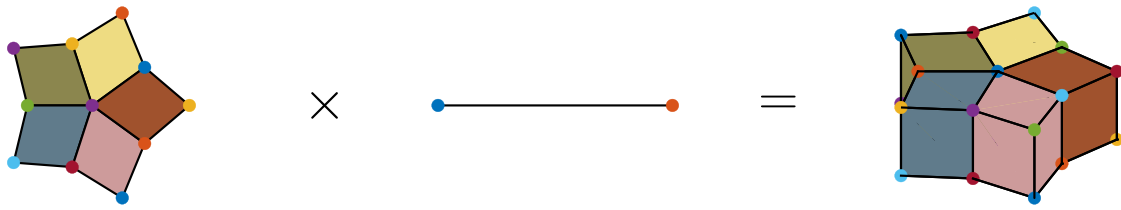


Abbildung 2.26: Drei Beispiele der Tensorproduktstruktur von einem zweidimensionalen und einem eindimensionalen Objekt. Oben sieht man fünf zweidimensionale Zellen (links), die sich eine irreguläre Ecke teilen. Kombiniert mit einer eindimensionalen Zelle ergeben sich fünf dreidimensionale Zellen, die sich eine irreguläre Kante teilen. In der Zeile darunter wurden beispielhaft die zugehörigen Initialelemente illustriert. Das mittlere Beispiel ist analog dazu. Hier ergibt die Kombination aus fünf zweidimensionalen und zwei eindimensionalen Zellen $2 \cdot 5$ dreidimensionale Zellen, die sich eine irreguläre Ecke teilen. Unten sieht man die Kombination zweier konkreter Verfeinerungsregeln, die jeweils einer Zeile der entsprechenden Subdivisionsmatrizen entsprechen. Kombiniert ergeben sie eine dreidimensionale Verfeinerungsregel, die eine Zeile der kombinierten Subdivisionsmatrix ist.

Q9 Für jede kombinatorische Anordnung lässt sich eine Subdivisionsmatrix erzeugen

Definition 2.49. Sei I ein Initialelement eines Spline-Definitionsgebiets D , das Ecke von $n \in \mathbb{N}$ Zellen ist. Der Algorithmus zur Erstellung der Subdivisionsmatrizen erfüllt Qualitätskriterium Q9 für jede kombinatorische Anordnung, wenn für jede valide kombinatorische Konfiguration von Zellen mit gemeinsamer Ecke eine Subdivisionsmatrix für das gemeinsame Initialelement I erzeugt werden kann.

Der hier zu diskutierende Begriff ist *valide*. Dazu definieren wir zunächst:

Definition 2.50. Sei $t = 2$ [$t = 3$] und I ein Initialelement eines Spline-Definitionsgebiets D , das Ecke von $n \in \mathbb{N}$ Zellen ist. Dann ist der kombinatorische Graph von I der Graph $G_K = (V_K, E_K)$ mit $V_K := \{v_1, \dots, v_n\}$ und

$$E_K := \{\{v_i, v_j\} \mid \text{Zelle mit Index } i \text{ und } j \text{ haben eine gemeinsame, die Ecke enthaltende Kante [Facette]}\}.$$

Mit dieser Definition können wir den Begriff der Validität beschreiben:

Definition 2.51. Sei I ein Initialelement eines Spline-Definitionsgebiets D , das Ecke von $n \in \mathbb{N}$ Zellen ist. Das Initialelement, die kombinatorische Konfiguration und der kombinatorische Graph G_K von I sind valide, wenn G_K

- für $t = 2$ ein Kreis (im graphentheoretischen Sinn nach Definition A.3) ist.
- für $t = 3$ planar und 3-zusammenhängend ist.

Für $t = 2$ ist die Definition wenig überraschend. Aufgrund von Definition 2.4 sind keine anderen kombinatorischen Anordnungen möglich. Die Definition für $t = 3$ ist hingegen mindestens ungewöhnlich und weicht von den in der Literatur zu findenden Definitionen für Subdivisionsmatrizen ab. Für [JM99, S. 20] und [Baj+02, S. 353] sind alle hexaedrischen Netze valide, also alle Konfigurationen, in denen die Zellen Hexaeder sind. Für den kombinatorischen Graphen G_K bedeutet dies, dass jeder Knoten an exakt drei Kanten liegt. Warum sollten wir von dieser Definition abweichen?

Zunächst müssen wir hier anmerken, dass planare 3-zusammenhängende Graphen die kombinatorische Struktur von dreidimensionalen konvexen Polytopen sind (vgl. dazu Theorem 3.8). Um die gerade beschriebene Frage zu beantworten, vergleichen wir die beiden Definitionen. Zum einen sind nicht alle kombinatorischen Graphen von hexaedrischen Initialelementen (Initialelemente, die ausschließlich an Zellen liegen, wie in Definition 2.4 gefordert) planar und 3-zusammenhängend. Zum anderen gehören nicht alle planaren 3-zusammenhängenden kombinatorischen Strukturen zu hexaedrischen Initialelementen. Beide Mengen haben also einen nichtleeren Schnitt (der zum Beispiel den Graphen, der zu einem Hexaeder gehört, beinhaltet), sie sind aber keine Teilmengen voneinander. Daher betrachten wir ein Beispiel eines kombinatorischen Graphen, für den alle Knoten an exakt drei Kanten liegen, der aber nicht planar und 3-zusammenhängend ist.

Beispiel 2.52. Wir betrachten den Graphen G_K , mit zugehöriger Adjazenzmatrix A . Der Graph G_K lässt sich auch über die Kreise, codiert in den Zeilen von M , beschreiben. Konkret sind die beiden Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 15 & 14 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 17 & 16 & 15 \\ 5 & 6 & 1 & 13 & 18 & 17 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 6 & 12 \\ 8 & 9 & 10 & 4 & 3 & 2 \\ 10 & 11 & 12 & 6 & 5 & 4 \\ 11 & 12 & 7 & 14 & 13 & 18 \\ 14 & 15 & 16 & 9 & 8 & 7 \\ 16 & 17 & 18 & 11 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

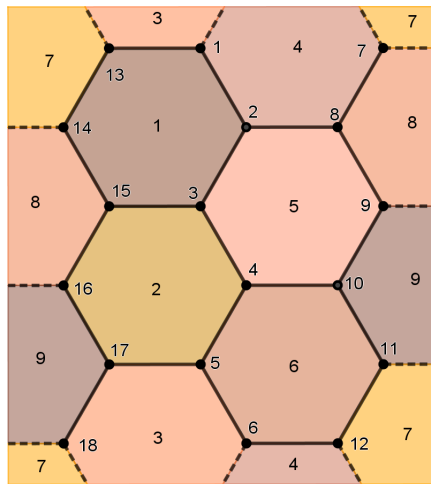


Abbildung 2.27: Illustration des Graphen $\mathbf{G}_K$ aus Beispiel 2.52. Klebt man die Abbildung (leicht verschoben) zunächst an der linken und rechten Kante und danach an der oberen und unteren Kante zusammen, entsteht ein Torus.

und

[illegible]

Die Struktur von $\mathbf{G}_K$ ist in Abbildung 2.27 zu sehen und lässt sich als Torus, bestehend aus 9 Hexagons, interpretieren. In diesem Beispiel liegt jeder Punkt an exakt drei Kanten, er ist also zulässig für die Algorithmen von [JM99] und [Baj+02]. Allerdings ist der Graph nicht planar, weshalb er in dieser Arbeit nicht valide ist. Wird die Subdivisionsmatrix für dieses Beispiel nach [Baj+02] erstellt, so erhalten wir eine Subdivisionsmatrix mit den Eigenwerten

<i>Index</i>	0	1	2	3	4	...	13	...
<i>Eigenwert</i>	1	0.5544	0.5544	0.5113	0.5113	...	0.25	...

wobei 0.25 der erste einfache Eigenwert kleiner als 1 ist. Das lokale asymptotische Verhalten konvergiert also gegen etwas Flächenartiges. Um eine Idee von der Form des lokalen asymptotischen Verhaltens zu bekommen, haben wir in Abbildung 2.28 die Volumenauswertungen verschiedener Kombinationen von Eigenvektoren geplottet (mit den nach [Baj+02] definierten auswertbaren Bereichen, die, wie bereits erwähnt, von der Definition dieser Arbeit abweichen). Wir stellen hier verschiedene Kombinationen dar, denn aufgrund der Struktur hat die Subdivisionsmatrix keine eindeutigen drei größten Eigenwerte kleiner als 1. Wie sich erkennen lässt, stellt das lokale asymptotische Verhalten und damit die Subdivisionsmatrix kein sinnvolles Objekt dar. Die Eigenschalen sind nicht injektiv und die Struktur durchdringt sich selbst.

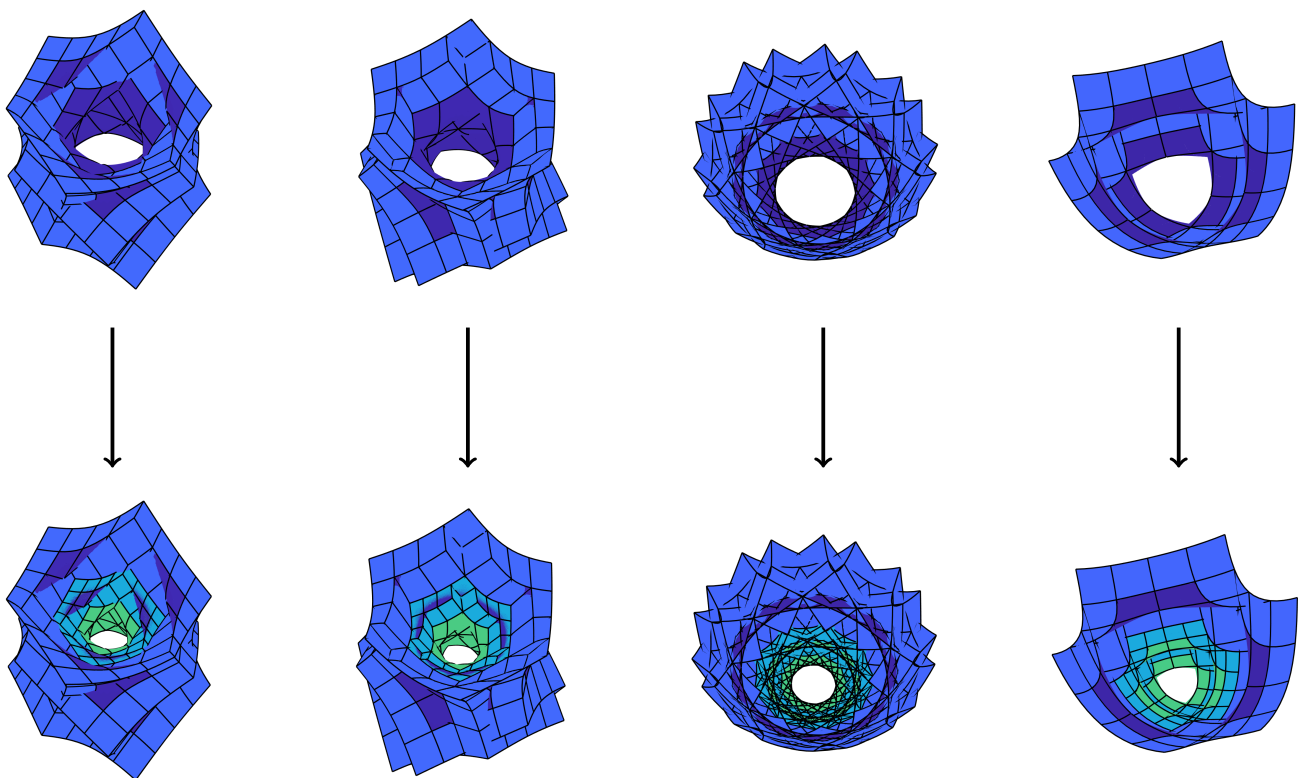


Abbildung 2.28: Illustrationen der Eigenschalen für die Eigenvektoren mit Indices $[2, 3, 4]$, $[2, 3, 5]$, $[2, 3, 14]$ und $[4, 5, 14]$ (oben) und deren Verfeinerungen (unten).

Damit es nicht zu Verwechslungen kommt, sei hier noch bemerkt, dass die kombinatorische Struktur zwar ein Torus ist, das ausgewertete Objekt allerdings kein Torus sein kann und soll, da sich hier alle Zellen eine Ecke teilen. Es ist aber selbstverständlich möglich mit Zellen ein Spline-Definitionsgebiet zu erzeugen, dessen Auswertung einen Torus darstellt. Für diesen Torus liegt dann auch die Verfeinerung nicht in dessen Loch. Das hier spezielle Verhalten ergibt sich durch die gemeinsame Ecke der Zellen.

Das obige Beispiel ist lediglich ein Spezialfall und kein Beweis dafür, dass es nicht doch ein sinnvolles Beispiel aus Hexaedern gibt, deren kombinatorischer Graph nicht planar und 3-zusammenhängend ist. Allerdings ist es geometrisch einleuchtend, dass für Anwendungen Strukturen aus Hexaedern, die nicht in einer polytopartigen Struktur in Beziehung zueinander stehen, nicht sinnvoll sind. Daher ist die Einschränkung von Graphen mit Knoten mit drei Kanten hin zu Graphen mit Knoten mit drei Kanten, die planar und 3-zusammenhängend sind, nicht restriktiv.

Die Verallgemeinerung von Graphen, die planar und 3-zusammenhängend sind und deren Knoten nicht exakt drei Kanten haben, betrachten wir in Kapitel 7.

Nachdem wir geklärt haben, welche kombinatorischen Anordnungen valide sind, schließt sich die Frage an, wie viele valide kombinatorische Anordnungen es gibt. Da die Menge der Prismen valide ist, ist die Antwort offensichtlich unendlich, aber man könnte sich beispielsweise fragen, wie viele kombinatorische Anordnungen es mit einer festen Anzahl an Knoten oder Kanten gibt. Eine erste Antwort findet sich in [DF81]. In der Veröffentlichung wird die Anzahl der kombinatorischen Anordnungen mit bis zu 22 Kanten berechnet. Für exakt 22 Kanten erhalten wir beispielsweise 485.704 verschiedene kombinatorische Anordnungen.

Q10 Die Subdivisionsmatrix respektiert alle Symmetrien der zugehörigen Graphenstruktur

Definition 2.53. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix eines Initialelements oder einer invarianten Struktur eines (Doppel)Rings oder einer (Doppel)Schale mit zugehörigem Graphen $\mathbf{G}$. Sei außerdem $\mathbf{G}_K$ der kombinatorische Graph des (zentralen) Initialelements der invarianten Struktur. Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q10 alle Symmetrien der zugehörigen Graphenstruktur werden respektiert, wenn für jeden von $\mathbf{G}_K$ induzierten Automorphismus $\mathbf{h}$ von $\mathbf{G}$ mit zugehöriger Permutationsmatrix H

$$H^{-1}SH = S$$

gilt.

Diese Definition muss zunächst inhaltlich geklärt werden. Graphen sind abstrakte Strukturen mit Knoten und Kanten, und Automorphismen sind bijektive Abbildungen, die einen Graphen auf sich selbst abbilden. Die Automorphismen repräsentieren damit, wie in Abschnitt A.1 beschrieben, die Symmetrien des zugrundeliegenden Graphen. Ist P eine Matrix von Kontrollpunkten, die mit den Knoten von $\mathbf{G}$ assoziiert ist, dann ist P eine Visualisierung von $\mathbf{G}$. Ist $\mathbf{h}$ ein Automorphismus von $\mathbf{G}$, dann ist die geometrische Visualisierung von P und $\mathbf{h}(P)$ identisch. Die Verfeinerung dieser Realisierung soll diese Eigenschaft erhalten. Es soll also für einen Automorphismus keine Rolle spielen, ob erst permutiert und dann verfeinert oder erst verfeinert und dann permutiert wird. Konkret bedeutet dies, dass

$$S \cdot \mathbf{h}(P) = \mathbf{h}(SP)$$

und damit

$$S(HP) = H(SP)$$

gelten soll. Die beiden Gleichungen gelten, wenn

$$SH = HS \quad \Leftrightarrow \quad H^{-1}SH = S$$

gilt. Wir stellen also an die Subdivisionsmatrix im Bezug auf Automorphismen dieselben Ansprüche wie an die Adjazenzmatrix (vgl. Charakterisierung A.8).

Der Ausdruck „von $\mathbf{G}_K$ induzierter Automorphismus“ meint hier, dass die Symmetrien, die die Automorphismen darstellen, die des kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ sein sollen. Für ein Initialelement mit $g = 2$ sind $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_K$ deckungsgleich. Hier ist also keine Einschränkung vorhanden. Für $g = 3$ besteht der Graph $\mathbf{G}$ aus Vierecken oder Hexaedern. Mit der Einschränkung auf den kombinatorischen Graphen ist hier gemeint, dass nur Automorphismen

von $\mathbf{G}$ berücksichtigt werden sollen, die Vierecke auf Vierecke beziehungsweise Hexaeder auf Hexaeder abbilden. Entsprechendes gilt auch für die größeren (Doppel)Ring- und (Doppel)Schalenstrukturen.

Ist dieses Kriterium nicht erfüllt, so bedeutet dies, dass das Ergebnis der Verfeinerung für zwei kombinatorisch symmetrische Konfigurationen abhängig von der Zuordnung der Kontrollpunkte zu den Knoten des Graphen ist. Das ermöglicht einerseits eine höhere Freiheit bei der Gestaltung von Subdivisionsmatrizen, auf der anderen Seite macht es die Nutzung der Subdivisionsmatrizen deutlich komplizierter und kann mit Hinblick auf die Anwendung und die Einfachheit nicht gewünscht sein. Die Auswirkungen sind im folgenden Beispiel beschrieben:

Beispiel 2.54. Wir betrachten ein Initialelement für $t = 2$ und $g = 2$ mit vier Kontrollpunkten

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

und einen Graphen $\mathbf{G}$ mit Adjazenzmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zudem betrachten wir die Permutation

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} P_{(1,:)} & P_{(2,:)} & P_{(3,:)} & P_{(4,:)} \\ P_{(2,:)} & P_{(3,:)} & P_{(4,:)} & P_{(1,:)} \end{pmatrix} \quad \text{mit zugehöriger Permutationsmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da $H^T A H = A$ gilt, ist $\mathbf{h}$ ein Automorphismus von $\mathbf{G}$. Für das Initialelement betrachten wir zwei verschiedene Subdivisionsmatrizen

$$S_1 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten jeweils

$$H^T S_1 H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = S_1 \quad \text{und} \quad H^T S_2 H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \neq S_2.$$

Damit erfüllt S_1 die Bedingung des Qualitätskriteriums Q10 für den Automorphismus $\mathbf{h}$. Für den Beweis des ganzen Kriteriums müssten jetzt noch alle anderen Automorphismen geprüft werden. Die Matrix S_2 erfüllt Qualitätskriterium Q10 hingegen nicht. Wir erhalten also

$$S_1(HP) = S_1 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 6 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 51 & 25 \\ 49 & 67 \\ 19 & 57 \\ 25 & 27 \end{bmatrix} = H \cdot \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 25 & 27 \\ 51 & 25 \\ 49 & 67 \\ 19 & 57 \end{bmatrix} = H(S_1 P)$$

und

$$S_2(HP) = S_2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 6 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 54 & 30 \\ 49 & 61 \\ 18 & 48 \\ 37 & 15 \end{bmatrix} \neq \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 48 & 26 \\ 41 & 51 \\ 10 & 42 \\ 29 & 23 \end{bmatrix} = H \cdot \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 29 & 23 \\ 48 & 26 \\ 41 & 51 \\ 10 & 42 \end{bmatrix} = H(S_2 P).$$

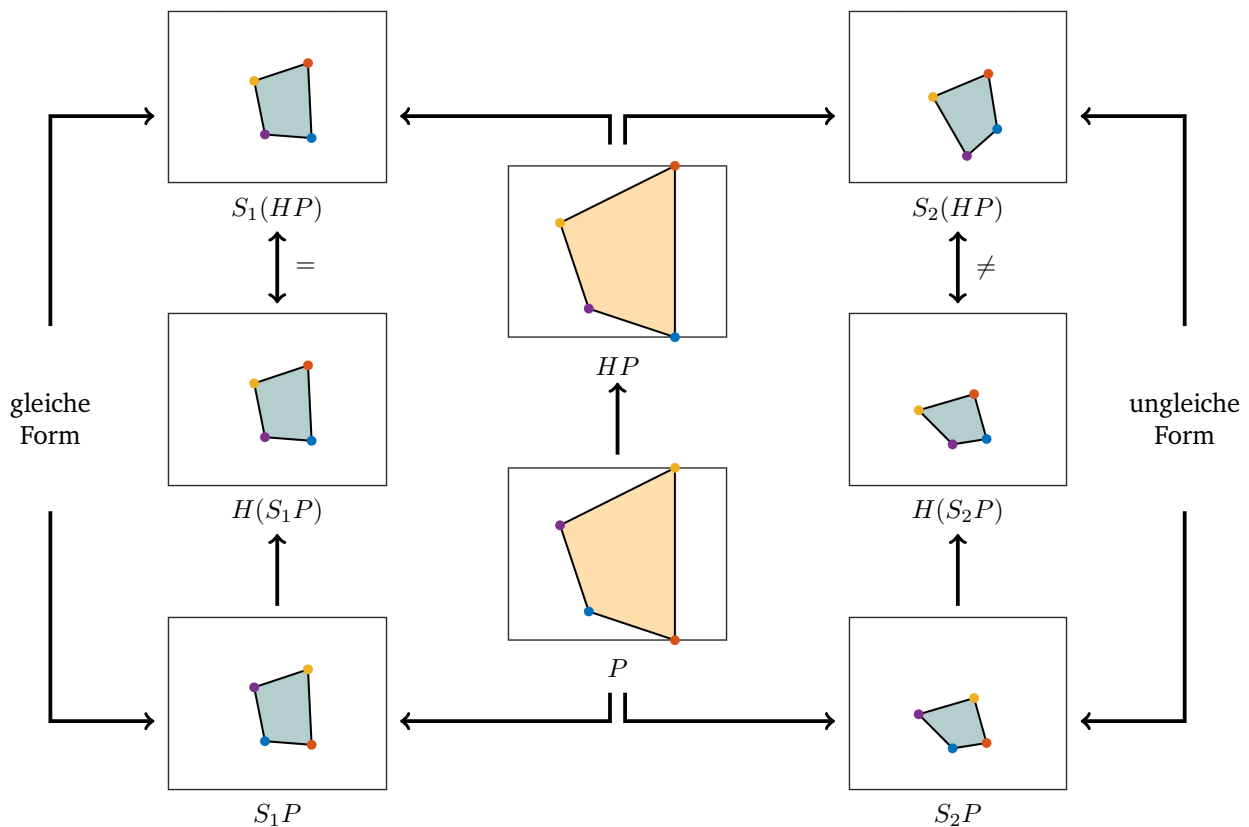


Abbildung 2.29: Illustration von Beispiel 2.54. Die Startkonfiguration in der Mitte wird links mit S_1 und rechts mit S_2 verfeinert. Da S_1 die Symmetrie respektiert, erhalten wir links die gleiche Form beziehungsweise das gleiche Objekt. Rechts hingegen wird die Symmetrie nicht respektiert, was zu unterschiedlichen Formen und Objekten führt.

Die Auswirkungen sind in Abbildung 2.29 zu sehen. Dadurch, dass die Symmetrie für S_2 nicht respektiert wird, ist die Form der Verfeinerungen von P und HP unterschiedlich. Es kommt also trotz der Symmetrie im Graphen auf die Zuordnung der Knoten an.

Bei diesem Beispiel ist noch anzumerken, dass das hier beschriebene Initialelement ein reguläres Initialelement ist und daher dessen Verfeinerungsmatrix nach Definition 2.15 gerade S_1 sein muss. Die Matrix S_2 dient hier nur zur Illustration, um das System an einem möglichst einfachen Beispiel zu verdeutlichen.

Q11 Geeigneter Träger der Verfeinerungsregeln

Definition 2.55. Sei D ein Spline-Definitionsgebiet mit Kontrollpunkten P' . Seien zudem $D^{(2)}$ und $P'^{(2)}$ die jeweiligen Verfeinerungen. Der Algorithmus zur Erstellung der Subdivisionsmatrizen erfüllt Qualitätskriterium Q11 geeigneter Träger der Verfeinerungsregeln, wenn die Verfeinerungsregel für jeden Kontrollpunkt aus $P'^{(2)}$, der aus der Verfeinerung mehrerer Initialelemente hervorgegangen ist, ausschließlich aus Kontrollpunkten besteht, die all diese Initialelemente gemeinsam haben.

Dieses Qualitätskriterium scheint auf den ersten Blick selbstverständlich und überflüssig. Für $g = 2$ ist es immer erfüllt, da hier kein verfeinerter Kontrollpunkt aus mehr als einem Initialelement hervorgeht. Auch für den Fall $g = 3$ haben wir mit Bemerkung 2.24 bereits festgestellt, dass die Verfeinerungsregeln für sich überlappende Initialelemente identisch sein müssen, damit die Verfeinerung wohldefiniert ist.

Die Definition der Initialelemente aus dieser Arbeit ist zwar sinnvoll gewählt, sie ließe sich allerdings auch anders

definieren, denn schließlich werden lediglich Kontrollpunkte linear auf neue Kontrollpunkte abgebildet. Wird diese Verfeinerung aller Kontrollpunkte als eine große Matrix aufgefasst, so können die Einträge dieser einen Matrix theoretisch frei gewählt werden. Somit lässt sich die Verfeinerung als ein globales Objekt und damit als eine Matrix betrachten.

In diesem Kontext sind die Verfeinerungsregeln von Initialelementen an irregulären Ecken für $g = 3$ von besonderem Interesse. Betrachten wir beispielhaft den Fall $t = 2$ und eine irreguläre Ecke von Valenz 5. Wir erhalten damit ein Initialelement mit elf Kontrollpunkten. Beispielhaft betten wir dieses Initialelement in ein Spline-Definitionsgebiet mit einer irregulären Ecke ein, dessen auswertbarer Bereich einem Doppelring entspricht. Die Struktur und Kontrollpunkte sind in Abbildung 2.30 zu sehen. Das beschriebene Initialelement hat drei verschiedene Arten von Kontrollpunkten. Erstens die Punkte 1 bis 5, die nicht mit dem Punkt 11 verbunden sind. Zweitens die Punkte 6 bis 10, die mit dem Punkt 11 verbunden sind und drittens der zentrale Punkt 11. Wir betrachten jetzt die Verfeinerungen dieser elf Kontrollpunkte bezüglich des irregulären Initialelements. Die Erläuterungen der nächsten Absätze sind in Abbildung 2.30 illustriert.

Die Verfeinerung des Punktes 1 geht aus den Initialelementen der Ecken, die mit den Kontrollpunkten 1, 6, 10 und 11 assoziiert sind, hervor. Diese haben die Kontrollpunkte 1, 6, 10 und 11 gemeinsam. Die Verfeinerungsregel darf mit Qualitätskriterium Q11 daher nur aus diesen vier Punkten bestehen. Die Punkte 2 bis 5 verhalten sich analog dazu.

Die Verfeinerung des Punktes 10 geht aus den Initialelementen der Ecken, die mit den Kontrollpunkten 10 und 11 assoziiert sind, hervor. Diese haben die Kontrollpunkte 1, 5, 6, 9, 10 und 11 gemeinsam. Die Verfeinerungsregel darf mit Qualitätskriterium Q11 daher nur aus diesen sechs Punkten bestehen. Die Punkte 6 bis 9 verhalten sich analog dazu.

Die Verfeinerung des Punktes 11 geht nur aus dem Initialelement der Ecke, die mit dem Kontrollpunkt 11 assoziiert ist, hervor. Daher darf mit Qualitätskriterium Q11 die Verfeinerungsregel aus allen elf Punkten bestehen. Damit erhalten wir eine Subdivisionsmatrix mit einer „sparsen“ Gestalt, wie in Abbildung 2.30 illustriert.

Aus verschiedenen Gründen, beispielsweise weil mehr Freiheit bei der Gestaltung der Subdivisionsmatrix gewünscht ist oder weil das Spektrum besser kontrolliert werden soll, kann es gewollt sein, dass die eben beschriebene Matrix voll besetzt ist. Dies widerspricht, wie bereits erwähnt, der in dieser Arbeit beschriebenen Struktur.

Der eigentliche Nachteil ist aber, dass sich der Träger der zu den Kontrollpunkten gehörenden generierenden Funktionen vergrößert. Dies ist einleuchtend. Hat ein Kontrollpunkt auf zusätzliche Verfeinerungsregeln Einfluss, so hat er auf zusätzliche verfeinerte Kontrollpunkte und damit auch auf die Auswertungen der Zellen Einfluss, die diese verfeinerten Kontrollpunkte in ihren Initialelementen haben. Passen wir also die Subdivisionsmatrix des zentralen Initialelements an, führt dies dazu, dass der Träger der zugehörigen generierenden Funktionen kein n -Eck mehr ist, sondern einspringende Ecken bekommt. Das Phänomen ist in Abbildung 2.31 zu sehen und überträgt sich entsprechend auf andere Konstellationen im Zweidimensionalen und auf irreguläre Ecken im Dreidimensionalen.

Die Auswirkungen solcher generierenden Funktionen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Allerdings zeigt dieses Verhalten, dass die Definitionen sinnvoll gewählt sind und das Qualitätskriterium seine Berechtigung hat.

Q12 Ein selbstdurchdringungsfreies Eigennetz

Definition 2.56. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix eines Initialelements oder einer invarianten Struktur analog zu Definition 2.32 mit zugehörigem Graphen G , für die Qualitätskriterium Q3 gilt. Sei zudem t der Typ der ausgewerteten Elemente. Es gelte zudem für die Eigenwerte von S

$$1 = \lambda_0 = |\lambda_0| > |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|.$$

Die Matrix S erfüllt Qualitätskriterium Q12 ein selbstdurchdringungsfreies Eigennetz, wenn der Eigenraum des subdominanten Eigenwerts eine Basis besitzt, für deren charakteristisches Netz

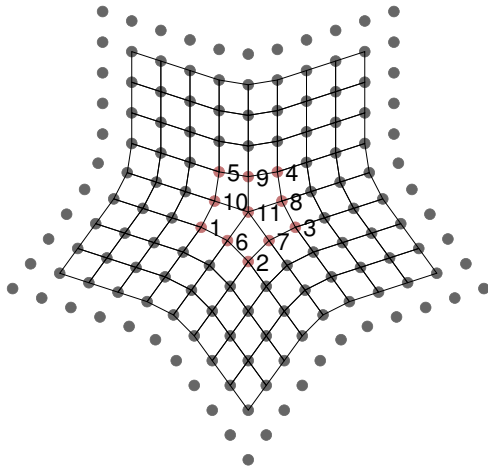
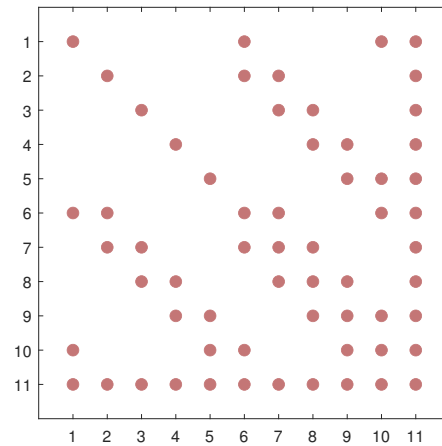
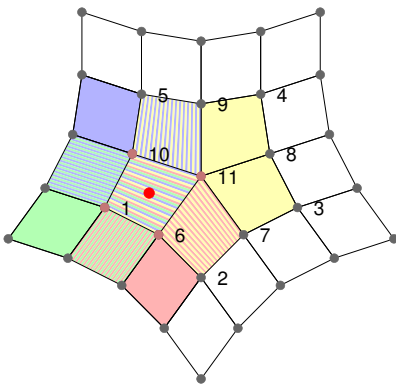
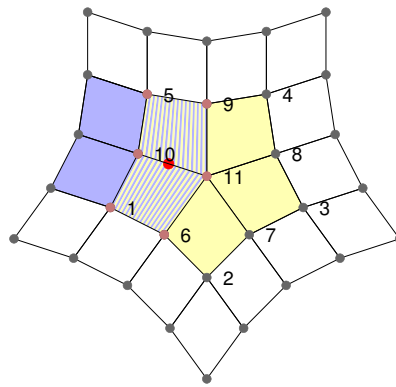
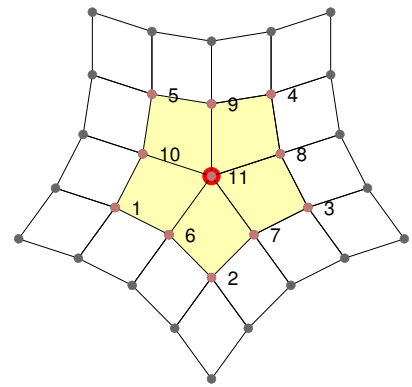
Doppelringstruktur mit eingefärbtem
zentralen Initialelement

Träger der Verfeinerungsregeln
des zentralen Initialelements

Initialelemente, deren
Verfeinerungen den
den roten Punkt beinhalten

Initialelemente, deren
Verfeinerungen den
den roten Punkt beinhalten

Initialelemente, deren
Verfeinerungen den
den roten Punkt beinhalten


Abbildung 2.30: Eine Doppelringstruktur für $t = 2$ und $g = 3$ mit eingefärbtem und durchnummeriertem zentralem Initialelement wurde beispielhaft in Zeile 1 (links) abgebildet. Die zwangsläufigen Träger der Verfeinerungsregeln wurden in einer Matrix in Zeile 1 (rechts) abgebildet. Die Begründung der Träger findet sich in Zeile 2. Hier sieht man für die roten Punkte die Initialelemente, welche die Verfeinerung der roten Punkte beinhalten. Für einen Facettenpunkt sind dies vier Initialelemente, für einen Kantenpunkt zwei Initialelemente und für den zentralen Punkt ein Initialelement. Die Verfeinerungsregeln dürfen entsprechend nur aus dem Schnitt der Punkte der Initialelemente bestehen. Die Punkte des Schnitts sind hellrot eingefärbt. In der linken Abbildung sind dies vier, in der mittleren sechs und in der rechten elf Punkte.

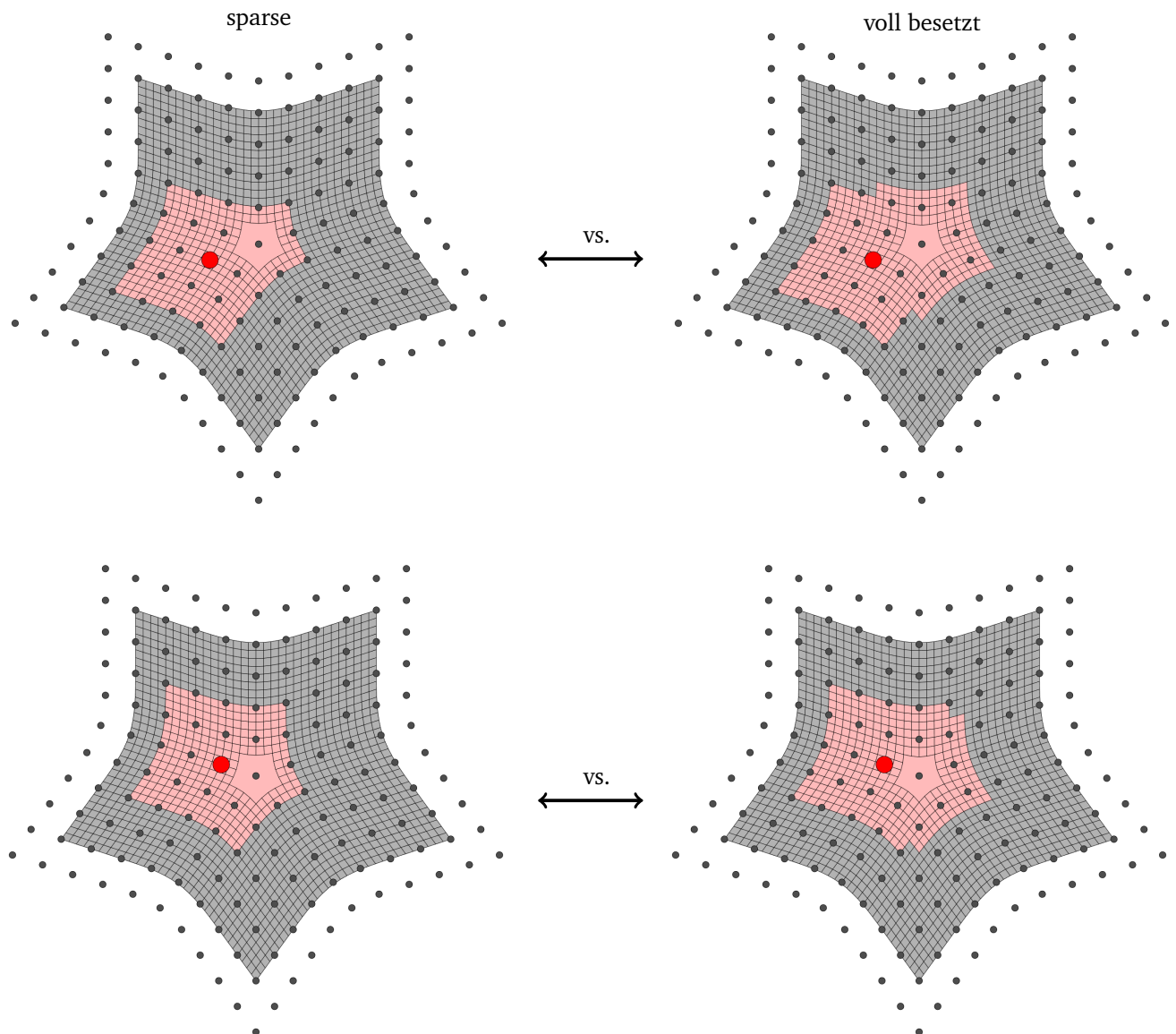


Abbildung 2.31: Träger der generierenden Funktion zum roten Kontrollpunkt (hellrot). Das Spline-Definitionsgebiet wurde entsprechend oft verfeinert, um den Träger exakt bestimmen zu können. Links sehen wir diesen für die in Abbildung 2.30 gezeigte sparse Version der Subdivisionsmatrix und rechts für eine voll besetzte Variante. Man erkennt, dass in der voll besetzten Variante der Träger der generierenden Funktion einspringende Ecken bekommt.

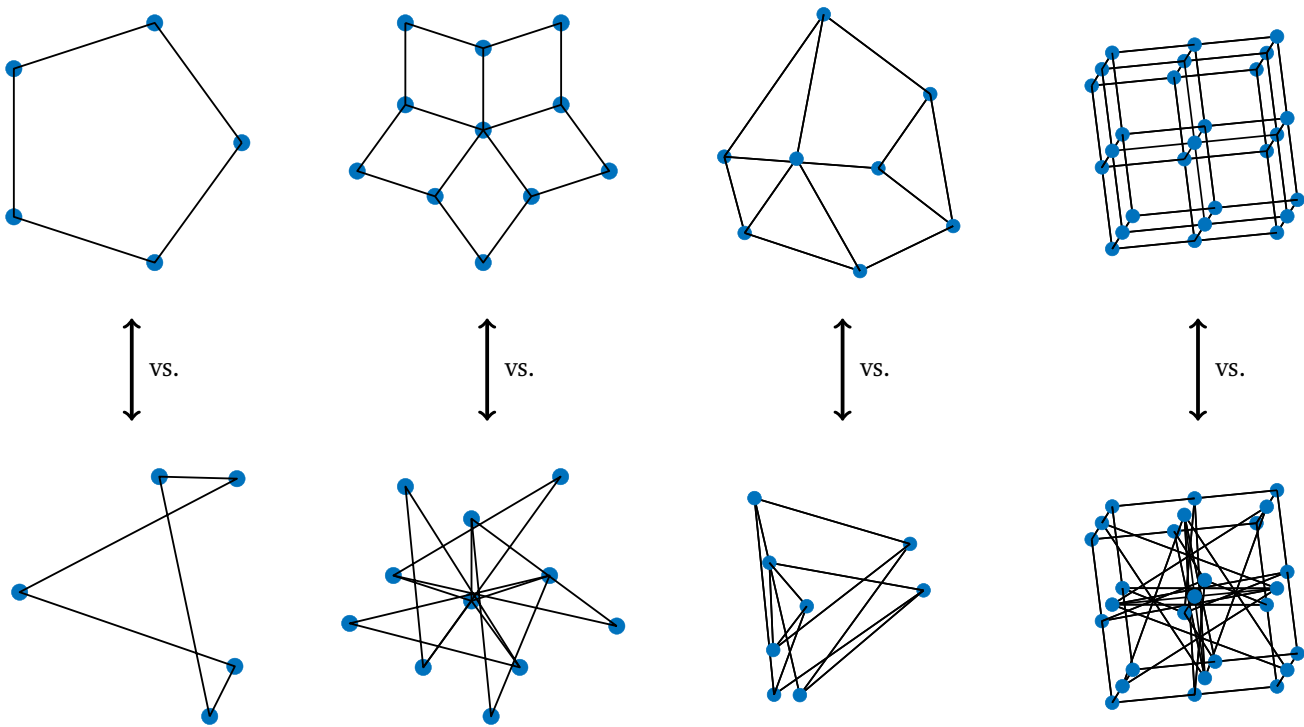


Abbildung 2.32: Illustrationen des Qualitätskriteriums Q12 für die subdominante Eigenvektorstruktur von Initialelementen. Oben ist jeweils ein Beispiel, in dem das Kriterium erfüllt wird, unten ist jeweils ein Beispiel, für welches das Kriterium nicht erfüllt wird. Die Initialelemente sind von links nach rechts für die Fälle $(t = 2, g = 2)$, $(t = 2, g = 3)$, $(t = 3, g = 2)$ und $(t = 3, g = 3)$ konstruiert.

- für $t = 2$ gilt, dass sich zwei Linien nur an Endpunkten schneiden,
- für $t = 3$ gilt, dass sich die konvexen Hüllen (vgl. Definition 3.2) zweier Facetten nur an Endlinien oder Endpunkten schneiden

und verschiedene Kontrollpunkte verschiedene Koordinaten haben.

Für $t = 3$ und $g = 2$ bezieht sich der Begriff der Facetten aus der obigen Definition auf die Facetten der Polytope aller Initialelemente der zugrundeliegenden Struktur. Für $t = 3$ und $g = 3$ bezieht sich der Begriff der Facetten auf alle Hexaeder der zugrundeliegenden Struktur.

Dieses Qualitätskriterium ist recht restriktiv formuliert, es lässt sich aber nicht anders darstellen. Die Idee ist hier, dass die Gitterstruktur des Eigenraums selbstdurchdringungsfrei, also nicht ineinander verwoben oder verknotet, ist. Für $t = 2$ lässt sich dies prüfen, indem man überprüft, ob sich zwei Linien kreuzen. Die Darstellung des Graphen durch den Eigenraum muss also planar sein. Für $t = 3$ ist dies komplizierter. Hier sollte man an eine Struktur denken, bei der die Facetten nicht von anderen Elementen wie Linien, Kontrollpunkten oder anderen Facetten durchdrungen sind. Da Facetten nicht notwendigerweise in einer Ebene liegen müssen, bemühen wir hier deren konvexe Hülle. Beispiele finden sich in Abbildung 2.32.

Dieses Kriterium soll als Vorbereitung für das nächste Kriterium dienen. Hier ist allerdings zu bemerken, dass ein selbstdurchdringungsfreies Gitter keine injektive Abbildung und eine injektive Abbildung kein selbstdurchdringungsfreies Gitter impliziert. Es lassen sich jeweils Beispiele konstruieren, für die jeweils die eine, aber nicht die andere Bedingung gilt. Die Hoffnung ist hier allerdings, dass eine selbstdurchdringungsfreie Struktur auch zu einer injektiven Abbildung führt. Umgekehrt besteht wenig Hoffnung, dass aus einer verknoteten Struktur etwas Injektives entsteht.

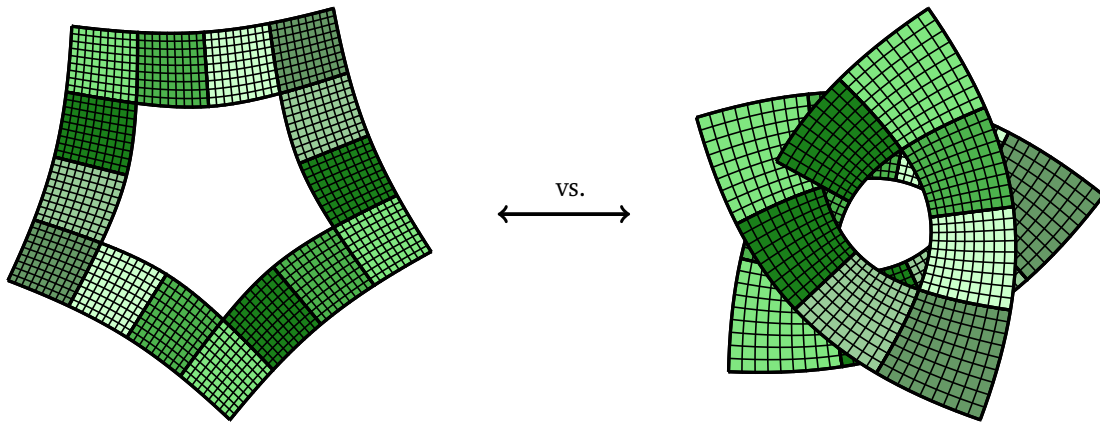


Abbildung 2.33: Für $t = 2$ und $g = 2$ eine injektive reguläre charakteristische Abbildung (links) und eine nicht-injektive charakteristische Abbildung (rechts).

Q13 Eine injektive reguläre charakteristische Abbildung

Definition 2.57. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Subdivisionsmatrix eines (Doppel)Rings oder einer (Doppel)Schale, für die Qualitätskriterium Q3 gilt. Sei zudem t der Typ der ausgewerteten Elemente, $\mathbf{D}$ das Spline-Definitionsgebiet zum (Doppel)Ring beziehungsweise zur (Doppel)Schale und $\mathbf{g}$ das System generierender Funktionen. Es gelte außerdem für die Eigenwerte von S

$$1 = \lambda_0 = |\lambda_0| > |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|.$$

Der Subdivisionsalgorithmus $(S, \mathbf{g})$ erfüllt Qualitätskriterium Q13 eine injektive reguläre charakteristische Abbildung, wenn dessen charakteristische Abbildung regulär und injektiv ist.

Dieses Qualitätskriterium ist als ein Langzeitziel der Subdivisionstheorie zu betrachten. Die Injektivität der charakteristischen Abbildung hat dabei viele Vorteile. Zum einen bestimmt diese das lokale asymptotische Verhalten der Verfeinerung und damit die optische und geometrische Struktur der Fläche beziehungsweise des Volumens. Ist hier Injektivität nicht gegeben, so überlappt sich langfristig die Fläche (das Volumen) mit sich selbst, was sie für ästhetische und simulatorische Zwecke unbrauchbar macht. Ein beispielhafte Illustration ist in Abbildung 2.33 zu finden.

Zum anderen ist die Injektivität und die Regularität entscheidend für die Analysis. Peters und Reif haben gezeigt, dass eine reguläre injektive charakteristische Abbildung für $t = 2$ äquivalent dazu ist, dass die Fläche in der Auswertung der zentralen irregulären Punkte gerade C^1 und im übrigen Bereich C^k ist, wobei k die Glattheit der regulären B-Spline Funktionen ist (siehe dazu [PR08, Thm. 5.8, S. 88]). Für den Fall $t = 3$ ist die Analysis der Regularität allerdings bisher komplett ungeklärt.

In dieser Arbeit wird es nicht möglich sein, Aussagen über die Injektivität und Regularität zu treffen. Allerdings kann das Qualitätskriterium Q12 als Vorbereitung zur Injektivität dienen, um zumindest eine gewisse Aussage über die Eigenstruktur zu treffen.

In diesem Abschnitt wurden insgesamt 13 Qualitätskriterien vorgestellt. Die Qualitätskriterien Q1 affine Invarianz, Q3 dominanter Eigenwert und Q7 regulärer Fall sind dabei obligatorisch, denn ohne Q1 und Q3 konvergieren die ausgewerteten Elemente gegebenenfalls nicht und ohne Q7 findet keine Reproduktion der erzeugten Auswertung statt.

Dass, wie in Qualitätskriterium Q9 beschrieben, für alle kombinatorischen Anordnungen eine Subdivisionsmatrix erzeugt werden kann, ist ebenfalls entscheidend, denn andernfalls müsste die in diesem Kapitel beschriebene Struktur für die Anwendung weiter eingeschränkt werden.

Im Bezug auf die Eigenwerte haben wir zudem mit Qualitätskriterium Q4 gesehen, dass zumindest ein t -facher subdominanter Eigenwert für das lokale asymptotische Verhalten entscheidend ist. Dieser ist mit Qualitätskriterium Q5 im besten Fall $1/2$ und optional ist der subsubdominante Eigenwert mit Qualitätskriterium Q6 gerade $1/4$.

Im Bezug auf die Struktur der Matrix haben wir die Qualitätskriterien Q2 konvexe Hülle, Q10 Symmetrie und Q8 semi-irregulären Fall betrachtet. Diese sind optional, führen jedoch zu vorteilhaften Eigenschaften der Subdivisionsmatrix.

Im Bezug auf die generierenden Funktionen haben wir Qualitätskriterium Q11 geeigneter Träger beschrieben, dessen Auswirkungen sich allerdings nicht abschätzen ließ, und im Bezug auf die Struktur haben wir die Qualitätskriterien Q12 selbstdurchdringungsfreies Eigennetz und Q13 injektive und reguläre charakteristische Abbildung betrachtet. Ob sich ersteres für letzteres nutzen lässt, ist bisher unklar. Letzteres Kriterium ist für den volumetrischen Fall ein Langzeitziel, für das bisher noch keine Theorie vorhanden ist.

2.5 Einordnung, Ziele und generelle Konstruktion

Die bekanntesten Algorithmen zum Erstellen der Subdivisionsmatrizen im Kontext der verallgemeinerten B-Spline-Subdivision sind der Doo-Sabin-Algorithmus [DS78] (für $t = 2$ und $g = 2$), der Catmull-Clark-Algorithmus [CC78] (für $t = 2$ und $g = 3$) und die Algorithmen der Arbeiten [JM99] und [Baj+02] (für $t = 3$ und $g = 3$). Für den Fall $t = 3$ und $g = 2$ existiert nach unserem Wissensstand noch kein Algorithmus.

Der Fall $t = 2$ ist bereits eingehend erforscht. Die Analysis der Algorithmen ist ausgereift und sehr treffend in [PR08] zusammengefasst. Insbesondere gilt für [DS78] und [CC78] das wohl entscheidendste Qualitätskriterium Q13 der regulären und injektiven charakteristischen Abbildung, welches die Glattheit der Subdivisionsfläche garantiert. Der einzige Schwachpunkt des Catmull-Clark-Algorithmus ist, dass der subdominante Eigenwert nicht $1/2$ ist. Daher ist die Aufgabe der aktuellen Forschung (wie in [Die+23, Aufg. 2.1, S. 146] beschrieben):

Study and employ variants on Catmull-Clark [...] with small polar artifact $|\lambda - \frac{1}{2}|$ and smallest possible μ .

Dabei ist λ der subdominante und μ der subsubdominante Eigenwert.

Der zweidimensionale Catmull-Clark-Algorithmus lässt sich zudem nicht ins Dreidimensionale erweitern, ohne wesentliche Qualitätskriterien einzubüßen. Dies wird im Folgenden erläutert.

Wir beginnen mit einer Subdivisionsmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für $t = 2$ und $g = 3$ konstruiert nach Catmull-Clark [CC78] für eine auswertbare Ringstruktur. Diese Matrix hat einen dominanten Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$ und einen doppelten subdominanten Eigenwert. Eine Erweiterung der Catmull-Clark-Regeln für den Fall $t = 3$ im semi-irregulären Fall würde bedeuten, dass sich die dreidimensionale Variante im Tensorproduktfall, also für Qualitätskriterium Q8, als

$$S^{(3)} = \text{kron}(M, S), \quad \text{mit} \quad M = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & & & & \\ & 1 & 6 & 1 & & & \\ & & 4 & 4 & & & \\ & & & 1 & 6 & 1 & \\ & & & & 4 & 4 & \\ & & & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & & & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

darstellen lässt. Hier ist zu bemerken, dass wir keine Doppelringstruktur, sondern die von [CC78] vorgegebene Auswertung verwenden. Damit erhalten wir also sieben Schichten von S , die mit sieben Schichten von Kontrollpunkten korrespondieren, die eine nach [CC78] auswertbare Schale liefern. [Baj+02] und [JM99] verwenden denselben Auswertungsbereich. Die Konstruktion ließe sich auch auf einem Initialelement beschreiben, dann wäre M entsprechend

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

der Rest der Konstruktion verläuft analog. Dasselbe gilt für $g = 2$. Hier würden wir für die Matrizen

$$M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

erhalten. Für das Ausgangsszenario lassen sich beide Matrizen in ihre Jordanform zerlegen. Wir erhalten entsprechend

$$S := VJV^{-1} \quad \text{und} \quad M := V'J'V'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} V'_{(:,3:7)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & \frac{1}{4} & & & & \\ & & & \frac{1}{8} & & & \\ & & & & \frac{1}{8} & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} V'^{-1}.$$

Mit Lemma B.9 erhalten wir

$$S^{(3)} = \text{kron}(V'J'V'^{-1}, VJV^{-1}) = \text{kron}(V', V) \text{kron}(J'V'^{-1}, JV^{-1}) = \text{kron}(V', V) \text{kron}(J', J) \text{kron}(V'^{-1}, V^{-1}).$$

Da J' eine Diagonalmatrix ist, ist

$$\text{kron}(J', J) = \begin{bmatrix} J & & & & & & \\ & \frac{1}{2}J & & & & & \\ & & \frac{1}{4}J & & & & \\ & & & \frac{1}{8}J & & & \\ & & & & \frac{1}{8}J & & \\ & & & & & 0J & \\ & & & & & & 0J \end{bmatrix}$$

eine Jordanmatrix zu $S^{(3)}$. Mit Lemma B.10 erhalten wir zudem, dass

$$\text{kron}(V', V)^{-1} = \text{kron}(V'^{-1}, V^{-1}).$$

Damit ist

$$S^{(3)} = \text{kron}(V', V) \text{kron}(J', J) \text{kron}(V', V)^{-1}$$

die Jordanzerlegung zu $S^{(3)}$. Dies ist gerade die Aussage von Theorem B.32. Die Eigenwerte zu $S^{(3)}$ sind damit die Eigenwerte von S , multipliziert mit den Eigenwerten von M .

Im nächsten Schritt schauen wir uns einige spezielle Eigenwerte und deren Eigenvektoren an. Wir beginnen mit dem Eigenwert 1. Dieser ist wieder einfach, da 1 der dominante Eigenwert von S und M ist. Dieser Eigenwert besitzt den Eigenvektor $\vec{1}$, da die entsprechende Zeile in $\text{kron}(V', V)$ gerade $\text{kron}(\vec{1}, \vec{1})$ ist.

Der zweite interessante Eigenwert ist der doppelte subdominante Eigenwert λ von S , kombiniert mit dem Eigenwert 1 aus M . Dieser ist in $S^{(3)}$ wieder ein doppelter Eigenwert zu den Eigenvektoren

$$\text{kron}(\vec{1}, V_{(:,2:3)}) = \begin{bmatrix} V_{(:,2:3)}^T & V_{(:,2:3)}^T & V_{(:,2:3)}^T & V_{(:,2:3)}^T & V_{(:,2:3)}^T & V_{(:,2:3)}^T & V_{(:,2:3)}^T \end{bmatrix}^T.$$

Für jede der sieben Schichten erhalten wir also dieselben Werte. Ist $|\lambda| > 1/2$, so hat $S^{(3)}$ wieder einen doppelten subdominanten Eigenwert λ . Ist $|\lambda| < 1/2$, so hat $S^{(3)}$ einen einfachen subdominanten Eigenwert $1/2$. Und ist $|\lambda| = 1/2$, so hat $S^{(3)}$ einen dreifachen subdominanten Eigenwert $1/2$.

Der (dritte) Eigenwert $1/2$ entsteht durch die Kombination des Eigenwertes 1 aus S und des Eigenwertes $1/2$ aus M . Der Eigenvektor ist entsprechend

$$\text{kron} \left(V'_{(:,2)}, \vec{1} \right) = [3 \cdots 3 \quad 2 \cdots 2 \quad \cdots \quad -3 \cdots -3]^T.$$

Jede Schicht hat also einen konstanten Wert, die Schichten unterscheiden sich aber. Hinge das lokale asymptotische Verhalten von diesen drei Eigenvektoren ab, so erhielte man eine volumetrische Struktur, die sich für $|\lambda| < 1/2$ einer Linie, für $|\lambda| = 1/2$ einem Volumen und für $|\lambda| > 1/2$ einer Fläche annähert. Dies lässt sich in Abbildung 2.34 sehen. Wir erhalten damit das erste Theorem dieser Arbeit:

Theorem 2.58. *Sei für $t = 3$ eine Subdivisionsmatrix $S^{(3)}$ eine dreidimensionale Erweiterung einer zweidimensionalen Subdivisionsmatrix S eines Initialelements oder eines (Doppel)Rings. Es gelte also Qualitätskriterium Q8 mit*

$$S^{(3)} = \text{kron} \left(S^{(1)}, S \right).$$

Sei zudem $S^{(1)}$ der Definition 2.48 gerade

$$S^{(1)} := M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{für } g = 2 \text{ und } S \text{ gehört zu einem Initialelement,}$$

$$S^{(1)} := M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } g = 2 \text{ und } S \text{ gehört zu einem Ring,}$$

$$S^{(1)} := M = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{für } g = 3 \text{ und } S \text{ gehört zu einem Initialelement,}$$

$$S^{(1)} := M = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & & & & & \\ & & 1 & 6 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 4 & & & & \\ & & & 1 & 6 & 1 & & & \\ & & & & 4 & 4 & & & \\ & & & & 1 & 6 & 1 & & \\ & & & & & 4 & 4 & & \\ & & & & & 1 & 6 & 1 & \\ & & & & & & 4 & 4 & \\ & & & & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & & & & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } g = 3 \text{ und } S \text{ gehört zu einem Doppelring.}$$

Dann gilt

$$S \text{ erfüllt Q3} \Leftrightarrow S^{(3)} \text{ erfüllt Q3}$$

und falls Qualitätskriterium Q3 für S beziehungsweise $S^{(3)}$ erfüllt ist, gilt

$$S \text{ erfüllt Q5} \Leftrightarrow S^{(3)} \text{ erfüllt Q5}$$

und

$$S \text{ erfüllt Q5 oder hat einen dreifachen subdominanten Eigenwert } > \frac{1}{2} \Leftrightarrow S^{(3)} \text{ erfüllt Q4.}$$

Beweis. Für diesen Beweis wiederholen wir kurz einige Aussagen. Zunächst ist das Qualitätskriterium Q3 das des dominanten Eigenwertes 1 und Qualitätskriterium Q5 das des subdominanten Eigenwertes $1/2$. Wir werden außerdem Theorem B.32 in diesem Beweis mehrfach nutzen, ohne dieses immer wieder zu benennen. Dieses sagt aus, dass die

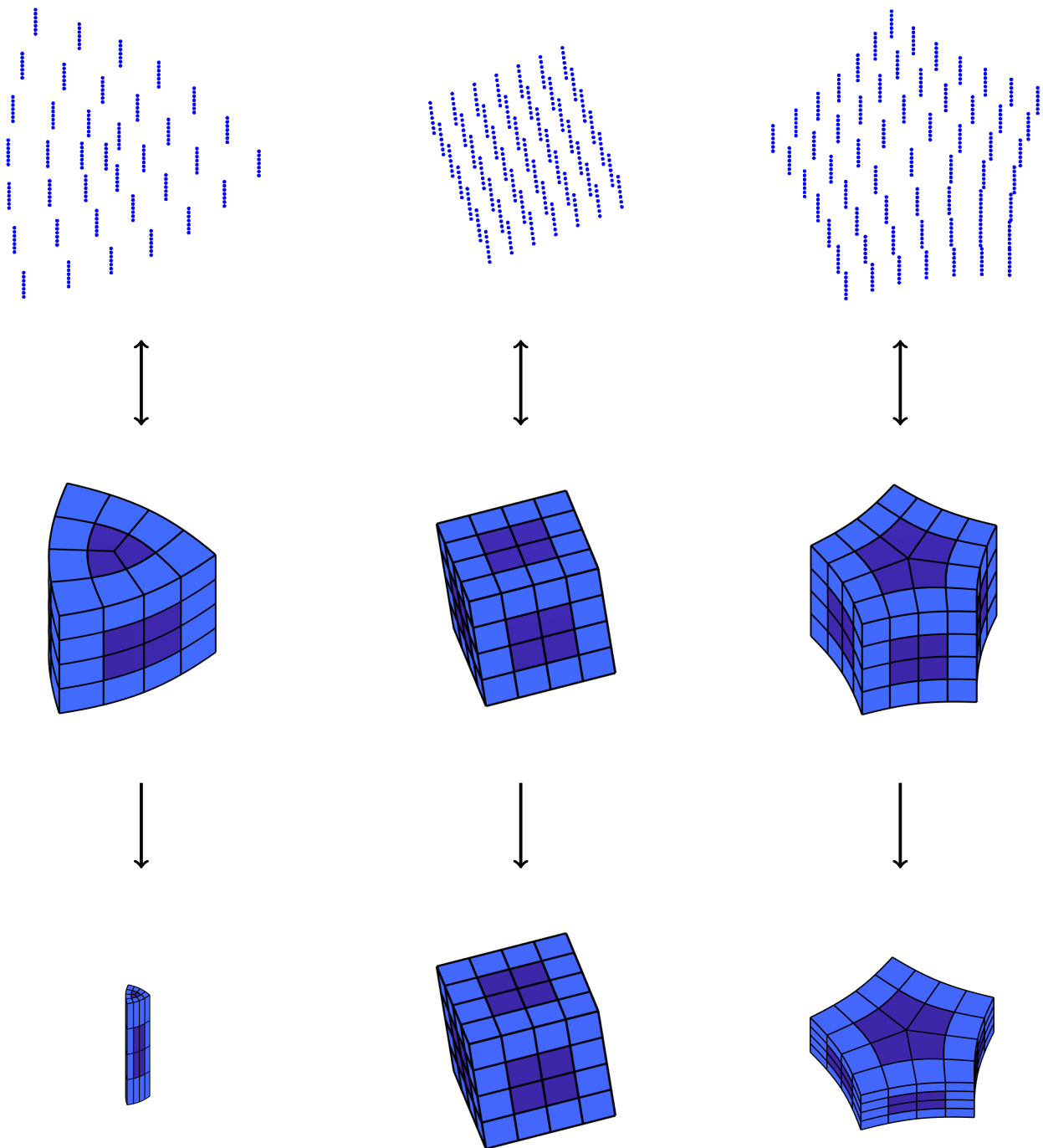


Abbildung 2.34: Tensorprodukterweiterung des Catmull-Clark-Algorithmus für die Valenzen 3 (links), 4 (Mitte) und 5 (rechts). Die erste Zeile zeigt jeweils die Kontrollpunkte der drei größten Eigenvektoren kleiner 1, die zweite Zeile zeigt deren Auswertung und die dritte Zeile zeigt die Auswertung nach zehnfacher Verfeinerung (jeweils reskaliert).

Eigenwerte des Kroneckerprodukts zweier quadratischer Matrizen das Kroneckerprodukt der Eigenwerte der beiden Matrizen ist. Die Eigenwerte von $S^{(3)}$ sind also das Kroneckerprodukt der Eigenwerte von $S^{(1)}$ und S . Zunächst sind die Eigenwerte der obigen Matrizen M gerade

$$(1, \frac{1}{2}) \quad \text{für} \quad M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0 \dots 0) \quad \text{für} \quad M = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & & & & & & \\ & 1 & 6 & 1 & & & & & & \\ & & 4 & 4 & & & & & & \\ & & & 1 & 6 & 1 & & & & \\ & & & & 4 & 4 & & & & \\ & & & & & 1 & 6 & 1 & & \\ & & & & & & 4 & 4 & & \\ & & & & & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & & & & & 4 & 4 \\ & & & & & & & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & & & & & & & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \quad \text{für} \quad M = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0) \quad \text{für} \quad M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

und haben volle geometrische Vielfachheit. Wir beweisen die Implikationen nacheinander.

- S erfüllt Q3 $\Rightarrow S^{(3)}$ erfüllt Q3:

Mit Qualitätskriterium Q3 ist 1 der einfache und betragsmäßig größte Eigenwert von S . Da 1 ebenfalls der betragsmäßig größte und einfache Eigenwert von jeder Variante von M ist, hat $S^{(3)}$ einen einfachen Eigenwert 1. Dieser ist auch der betragsmäßig größte, denn alle anderen Eigenwerte von $S^{(3)}$ sind die Kombinationen eines Eigenwerts, der betragsmäßig kleiner gleich 1 ist und eines Eigenwerts, der betragsmäßig echt kleiner als 1 ist.

- S erfüllt Q3 $\Leftarrow S^{(3)}$ erfüllt Q3:

Mit Qualitätskriterium Q3 ist 1 der einfache und betragsmäßig größte Eigenwert von $S^{(3)}$. Nehmen wir an, dass S einen Eigenwert größer als 1 hätte. Dann wäre dieser Eigenwert durch das Kroneckerprodukt mit M auch ein Eigenwert von $S^{(3)}$, was ein Widerspruch zur Annahme wäre.

Die Matrix S hat zudem einen Eigenwert 1, denn da alle Eigenwerte von S und M betragsmäßig kleiner gleich 1 sind, muss der Eigenwert 1 der Matrix $S^{(3)}$ als Produkt zweier Eigenwerte 1 der Matrizen S und M hervorgehen. Damit ist 1 der größte Eigenwert von S .

Nehmen wir an, S hätte mehrere Eigenwerte, die betragsmäßig gleich 1 sind. Dann wären diese ebenfalls Eigenwerte von $S^{(3)}$, was ebenfalls ein Widerspruch zur Annahme wäre. Damit besitzt S einen einfachen betragsmäßig größten Eigenwert 1.

- S erfüllt Q5 $\Rightarrow S^{(3)}$ erfüllt Q5:

Hat S einen doppelten subdominanten Eigenwert $\frac{1}{2}$, so ist dieser auch mit der Kombination des Eigenwerts 1 aus M im Kroneckerprodukt ein doppelter Eigenwert von $S^{(3)}$. Der dritte subdominante Eigenwert ergibt sich aus der Kombination des Eigenwerts 1 von S und des Eigenwerts $1/2$ von M im Kroneckerprodukt. Da weder S noch M einen Eigenwert betragsmäßig zwischen 1 und $1/2$ haben, sind alle anderen Eigenwerte von $S^{(3)}$ betragsmäßig kleiner als $1/2$.

- S erfüllt Q5 $\Leftarrow S^{(3)}$ erfüllt Q5:

Wir nehmen an, dass $S^{(3)}$ einen dreifachen subdominanten Eigenwert $\frac{1}{2}$ hat. Da die Eigenwerte von $S^{(3)}$ das Kroneckerprodukt der Eigenwerte von S und M sind, setzt sich einer der drei Eigenwerte $1/2$ von $S^{(3)}$ aus dem Eigenwert 1 von S und dem Eigenwert $1/2$ von M zusammen.

Wir nehmen an, dass sich ein weiterer Eigenwert $1/2$ von $S^{(3)}$ nicht als Kombination des Eigenwerts 1 von M

und eines Eigenwerts $1/2$ von S im Kroneckerprodukt zusammensetzt. Dann müsste S einen Eigenwert haben, der größer als $1/2$ ist. Dieser wäre dann aber als Kombination mit dem Eigenwert 1 von M im Kroneckerprodukt auch ein Eigenwert von $S^{(3)}$, was im Widerspruch zur Annahme stünde. Damit setzen sich die beiden anderen Eigenwerte $1/2$ von $S^{(3)}$ aus dem Eigenwert 1 von M und einem Eigenwert $1/2$ von S zusammen.

Mit dem gleichen Argument kann S keinen Eigenwert zwischen $1/2$ und 1 und außerdem keinen dritten Eigenwert $1/2$ haben und damit erfüllt S das Qualitätskriterium Q5.

- S erfüllt Q5 oder hat einen dreifachen subdominanten Eigenwert $> 1/2 \Leftarrow S^{(3)}$ erfüllt Q4:
Ist der subdominante Eigenwert von $S^{(3)}$ gerade $1/2$, so lässt sich die obige Aussage

$$S \text{ erfüllt Q5} \Leftarrow S^{(3)} \text{ erfüllt Q5}$$

nutzen und S hat einen doppelten subdominanten Eigenwert $1/2$. Ist dies nicht der Fall, so hat $S^{(3)}$ einen dreifachen subdominanten Eigenwert, der größer als $1/2$ ist, da $1/2$ durch die Kombination des Eigenwerts 1 der Matrix S und des Eigenwerts $1/2$ der Matrix M immer ein Eigenwert von $S^{(3)}$ ist. Dieser muss, da weder S noch M einen Eigenwert größer als 1 haben, aus einer Kombination des Eigenwerts 1 von M hervorgehen. Damit muss S einen dreifachen subdominanten Eigenwert haben.

- S erfüllt Q5 oder hat einen dreifachen subdominanten Eigenwert $> 1/2 \Rightarrow S^{(3)}$ erfüllt Q4:
Hat S einen doppelten subdominanten Eigenwert von $1/2$, so lässt sich die obige Aussage

$$S \text{ erfüllt Q5} \Rightarrow S^{(3)} \text{ erfüllt Q5}$$

nutzen. Hat S hingegen einen dreifachen subdominanten Eigenwert größer als $1/2$, so ist dieser auch ein dreifacher Eigenwert von $S^{(3)}$. Da M keinen Eigenwert zwischen $1/2$ und 1 besitzt, ist dieser ebenfalls der dreifache subdominante Eigenwert von $S^{(3)}$.

□

Mit diesem Theorem sehen wir, dass der Catmull-Clark Algorithmus kein guter Ausgangspunkt für eine dreidimensionale Verallgemeinerung ist. Nach [PR08, Thm. 6.1, S. 114] ist der (doppelte) subdominante Eigenwert des Catmull-Clark Algorithmus gerade

$$\lambda = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 5 + \sqrt{(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 9)(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1)}}{16},$$

wobei n die Anzahl der Zellen an einem Initialelement ist. Für $n > 4$ ist $\cos(2\pi/n) > 0$. Wir erhalten damit

$$\lambda > \frac{0 + 5 + \sqrt{(0 + 9)(0 + 1)}}{16} = \frac{5 + 3}{16} = \frac{1}{2}.$$

Da alle zweidimensionalen Catmull-Clark-Subdivisionsmatrizen einen doppelten subdominanten Eigenwert haben, folgt damit nach Theorem 2.58, dass die Tensorproduktvariante für $n > 4$ das Qualitätskriterium Q4 nicht erfüllen kann.

Die Ausgangssituation für den Catmull-Clark-Algorithmus ist allerdings noch ungeeigneter als bisher gezeigt. Ab $n > 4$ besitzt der Catmull-Clark-Algorithmus nach [PR08, S. 112] Eigenwerte der Form

$$\lambda'_1 = \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + 5 + \sqrt{(\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + 9)(\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + 1)}}{16}$$

und

$$\lambda'_2 = \frac{\cos\left(\frac{2(n-2)\pi}{n}\right) + 5 + \sqrt{(\cos\left(\frac{2(n-2)\pi}{n}\right) + 9)(\cos\left(\frac{2(n-2)\pi}{n}\right) + 1)}}{16}.$$

Da

$$\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n - 4\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi(n-2)}{n}\right),$$

ist $\lambda' := \lambda'_1 = \lambda'_2$. Für $n > 8$ ist $\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) > 0$ und damit ist, analog zum subdominanten Eigenwert,

$$\lambda' > \frac{1}{2} \quad \text{für } n > 8.$$

Der einzige Eigenwert nach [PR08, S. 112], der (für $n > 8$) zwischen λ' und λ liegen könnte, ist

$$\lambda_{a,b}^{1,2} = \frac{4a - 1 \pm \sqrt{(4a - 1)^2 + 8b - 4}}{8}.$$

Für den Catmull-Clark-Algorithmus ist $a = 1 - 7/(4n)$ und $b = 3/(2n)$. Damit ergeben sich für $n > 8$ zwei Möglichkeiten:

Entweder ist einer der $\lambda_{a,b}^{1,2}$ der subsubdominante Eigenwert oder λ' ist der subsubdominante Eigenwert. In beiden Fällen ist aber der subsubdominante Eigenwert größer als $1/2$ und damit ist der subsubdominante Eigenwert von $S^{(3)}$ als Kombination aus diesem und 1 von M größer als $1/2$. Der Eigenvektor beziehungsweise die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert sind dann aber Kombinationen aus den jeweiligen Eigenvektoren von S und dem Eigenvektor $\vec{1}$. Damit haben aber alle Kontrollpunkte, die Kombinationen aus den jeweiligen Eigenräumen von λ und μ von $S^{(3)}$ sind und die aus einem Kontrollpunkt von S hervorgegangen sind, die gleichen Koordinaten. Die sieben Schichten, die wir oben beschrieben haben, kollabieren damit bezüglich λ und μ zu einer Schicht. Damit erhalten wir das zweite Theorem dieser Arbeit:

Theorem 2.59. *Sei $t = 3$ und $S^{(3)}$ eine Subdivisionsmatrix, die eine dreidimensionale Erweiterung einer zweidimensionalen Subdivisionsmatrix S eines Initialelements oder eines Rings ist. Es gilt also Qualitätskriterium Q8. Es gelten zudem Qualitätskriterium Q3 und Qualitätskriterium Q4 für S . Ist $S^{(1)}$ aus Definition 2.48 wie in Theorem 2.58, dann gilt:*

Wenn der subsubdominante Eigenwert von S größer als $1/2$ ist, dann bildet die Auswertung jeder linear unabhängigen Auswahl von Eigenvektoren aus den Eigenräumen der beiden größten von 1 verschiedenen Eigenwerte eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ und ist damit nicht injektiv. Hat $S^{(3)}$ eine charakteristische Abbildung, so ist diese ebenfalls nicht injektiv.

Beweis. Sei die geometrische Vielfachheit des subsubdominanten Eigenwerts von S als $i \in \mathbb{N}$ definiert. Wie bereits beschrieben, sind die beiden größten von 1 verschiedenen Eigenwerte größer als $1/2$. Die Vektoren, die die entsprechenden Eigenräume aufspannen, sind damit

$$\text{kron}(\vec{1}, V_{(:, 2:3+i)}).$$

Damit hat jede Schicht eines Punktes von S , die von M erzeugt wird, dieselben Koordinaten und die Auswertung ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$. Da die Auswertung volumetrisch ist und auf eine Fläche abbildet, ist diese insbesondere nicht injektiv. $\square$

Ist einer der $\lambda_{a,b}^{1,2}$ der subsubdominante Eigenvektor, so sind die Eigenräume der drei größten von 1 verschiedenen Eigenwerte eindeutig. Daraus lässt sich direkt folgern, dass die charakteristische Abbildung eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ bildet und damit insbesondere nicht injektiv ist.

Ist hingegen λ' der subsubdominante Eigenwert, so sind die Eigenräume zusammen nicht mehr t -dimensional. Die Auswertung der Vektoren des lokalen asymptotischen Verhaltens ist damit nicht nur eine Fläche und somit nicht injektiv, ihre Form hängt zusätzlich noch von den Kontrollpunkten ab und die Kontrolle über das lokale asymptotische Verhalten geht verloren.

Hier ist noch wichtig zu erwähnen, dass dieses Verhalten unabhängig von der Wahl der Verfeinerungsregel des irregulären Punktes für den zweidimensionalen Catmull-Clark ist. Die Regel kann nur beeinflussen, ob der dritte Eigenvektor eindeutig ist oder von der Wahl der Kontrollpunkte abhängt.

Dieses Verhalten hat verschiedene Konsequenzen. Zum einen belegt es, dass der Catmull-Clark-Algorithmus kein guter Ausgangspunkt für einen dreidimensionalen Subdivisionsalgorithmus ist. Die regulären Regeln um den irregulären Punkt führen dazu, dass das Spektrum nicht beeinflusst werden kann. Ein Festhalten an diesen Regeln muss also zwangsläufig scheitern. Dies stützt die Argumentation dieser Arbeit, den irregulären Bereich um ein Element weiter zu fassen und die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision um irreguläre Punkte als invariante Abbildung von Doppelringen auf Doppelringe beziehungsweise Doppelschalen auf Doppelschalen zu begreifen und nicht als

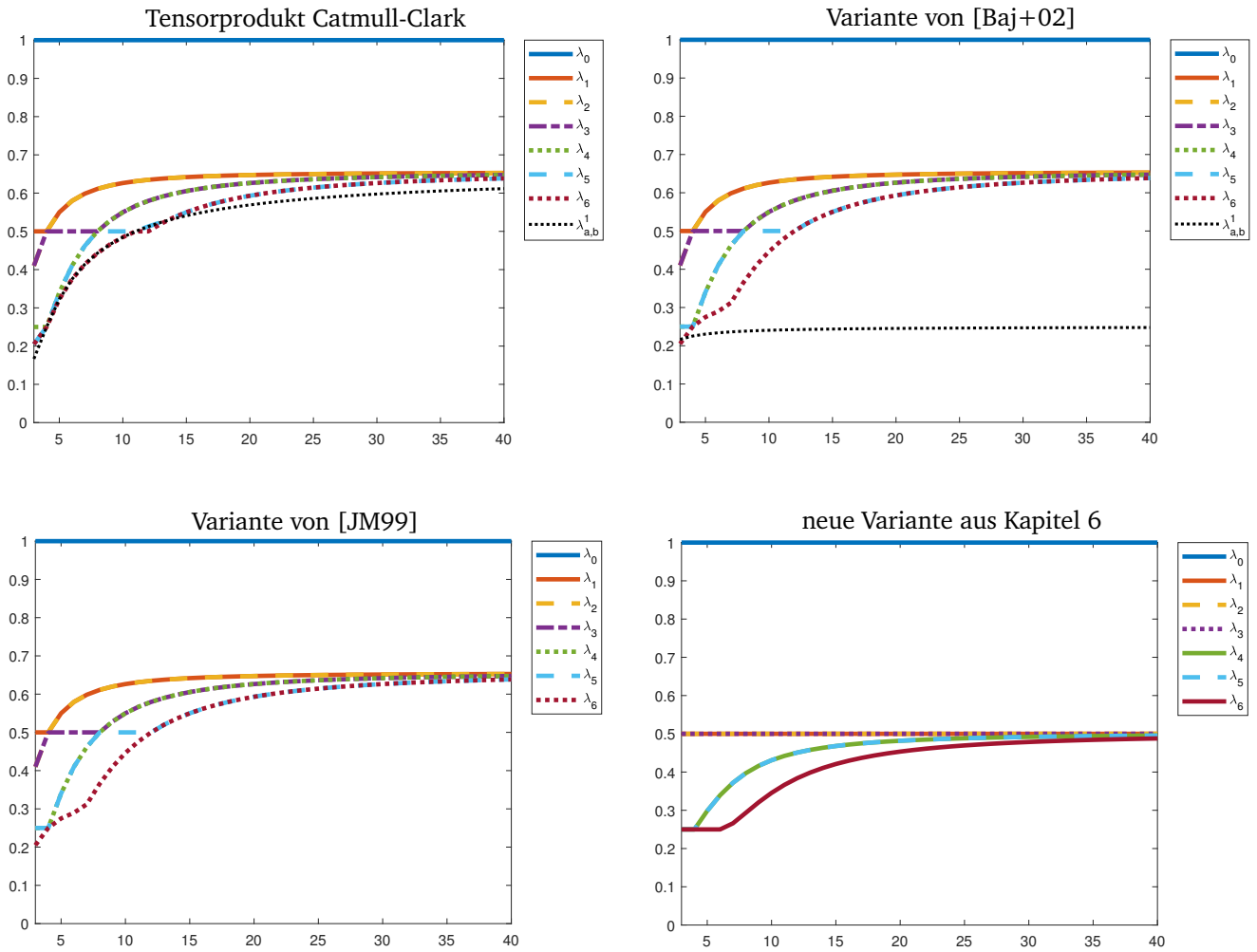


Abbildung 2.35: Die für $t = 3$ und $g = 3$ sieben größten Eigenwerte der Subdivisionsmatrizen des semi-regulären Falls in Abhängigkeit der Valenz des zentralen Knotens, jeweils für die drei besprochenen Varianten und für die entsprechenden Subdivisionsmatrizen, die in Kapitel 6 erzeugt werden.

Abbildung von Ringen auf Ringe aufzufassen. Um diesem Verhalten vorzubeugen, konkretisieren wir die obige Aufgabe zu:

Study and employ variants on Catmull-Clark with $\lambda = \frac{1}{2}$ and smallest possible μ .

Die Konsequenzen dieses Verhaltens erstrecken sich auch auf die in der Literatur zu findenden Subdivisionsalgorithmen. Der Algorithmus von [Baj+02] muss für den Tensorproduktfall zwangsläufig dasselbe Verhalten aufweisen wie die oben beschriebene Variante aus dem Catmull-Clark-Algorithmus. Die Variante von [Baj+02] enthält für den Tensorproduktfall dieselben Regeln wie der Catmull-Clark-Algorithmus, lediglich die Regeln für den zentralen Punkt weichen voneinander ab. Damit ergibt sich für $n > 8$ dasselbe Verhalten, welches wir für die Erweiterung des Catmull-Clark-Algorithmus beschrieben haben. Der Algorithmus von [JM99] hat zwar keine Tensorproduktstruktur, er zeigt aber dasselbe Verhalten wie die anderen beiden Algorithmen. Dies ist in Abbildung 2.35 zu sehen. Die Variante von [JM99] hat hier ebenfalls eine Eigenwertstruktur der Form

$$1 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| = |\lambda_4|.$$

Tests zeigen zudem, dass die Auswahl von drei linear unabhängigen Eigenschalen der beiden größten von 1 verschiedenen Eigenwerte mit [JM99] für die Tensorproduktfälle ebenfalls nicht injektiv sind. Siehe dazu beispielhaft Abbildung 2.36.

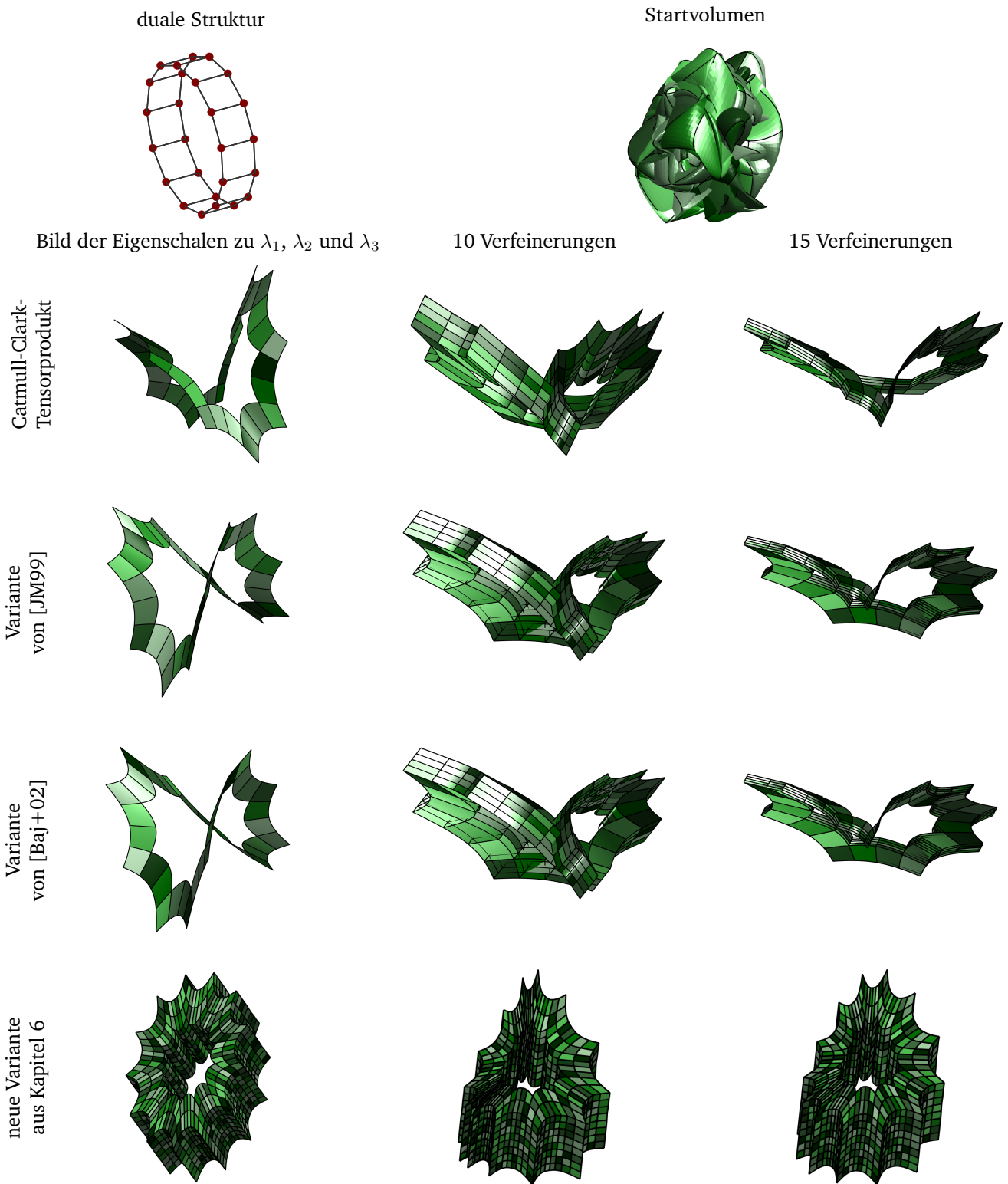


Abbildung 2.36: Die Tensorproduktstruktur für $t = 3$, entstanden aus einem zweidimensionalen Ring mit 13 Zellen. In der linken Spalte sieht man die duale Struktur und das Bild der charakteristische Abbildung beziehungsweise das Bild der Eigenschalen zu λ_1, λ_2 und λ_3 (für das Catmull-Clark-Tensorprodukt, [Baj+02] und [JM99] gilt $\lambda_3 = \lambda_4$) der zugehörigen Subdivisionsmatrizen. Diese wurde 10 beziehungsweise 15 mal auf zufällig gewählte Kontrollpunkte angewendet. Das Ausgangsvolumen sieht man in der ersten Zeile, die Verfeinerungen der jeweiligen Subdivisionsalgorithmen darunter.

Allerdings sind dies nicht die einzigen Fälle, für die charakteristischen Abbildungen von [Baj+02] und [JM99] nicht injektiv sind. Experimente zeigen, dass die beiden Algorithmen gut zu funktionieren scheinen, wenn die Abstände der Ecken der dualen Struktur möglichst weit voneinander entfernt sind. Verteilen sich diese möglichst gleichmäßig, so scheint die charakteristische Abbildung injektiv zu sein. Sobald die Abstände aber ungleich verteilt sind so scheint es, dass die charakteristische Abbildung ihre Injektivität verliert. Salopp gesagt, funktioniert der Fußball gut, die Torte aus n Stücken hingegen schlecht. Ein weiteres Beispiel dazu ist in Abbildung 2.37 zu sehen. Für dieses Beispiel sind die betragsmäßig größten Eigenwerte der Algorithmen

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
[Baj+02]	1	0,6957	0,6951	0,6347	0,6312
[JM99]	1	0,6957	0,6951	0,6347	0,6312
Variante Kapitel 6	1	0,5	0,5	0,5	0,4713

Die beiden etablierten Algorithmen lassen sich also insgesamt nicht empfehlen. Daher bestehen hier die aktuellen Aufgaben (nach [Die+23, Aufg. 2.2 und Aufg. 2.3, S. 147]) aus:

Construct a trivariate generalization of Catmull-Clark [Doo-Sabin] with triple subdominant eigenvalue $\lambda = \frac{1}{2}$ and smallest possible μ .

Der Lösung beziehungsweise der Beantwortung dieser drei Aufgaben widmet sich der Kern dieser Arbeit. Die Herangehensweise für die Konstruktion weicht allerdings vom üblichen Vorgehen ab. Anstatt Regeln beziehungsweise Formeln für einzelne Matrixeinträge vorzugeben, beginnen wir mit der Konstruktion eines konvexen Polytops. Dies geschieht in Kapitel 3. Dieses Polytop, beziehungsweise für $g = 3$ eine Variante davon, soll als Basis für den Eigenraum des subdominanten Eigenwerts dienen. In einem zweiten Schritt wird mithilfe dieses Polytops eine Matrix konstruiert, die einen t -fachen Eigenwert mit einem Eigenraum zur Basis des Polytops hat. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, wir werden aber priorisiert die Colin-de-Verdière-Matrizen aus Kapitel 4 nutzen, um diese Matrix zu konstruieren. Abschließend passen wir die so konstruierten Matrizen gegebenenfalls noch an, um die richtige Eigenwertstruktur zu erhalten. Dies geschieht in den Kapiteln 5 und 6.

In diesem Kapitel wurde die Grundlage für die neuen Ansätze zur Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen geschaffen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden. Zunächst haben wir dafür in Abschnitt 2.1 alle relevanten Begriffe bezüglich der Subdivision eingeführt und eine Struktur aufgebaut, die sich für alle Dimensionen von Objekten nutzen lässt. Anschließend haben wir in Abschnitt 2.2 die Subdivision selbst beschrieben, und in Abschnitt 2.3 die für uns interessanten invarianten Strukturen herausgearbeitet. In Abschnitt 2.4 haben wir Qualitätskriterien, die für Subdivisionsmatrizen gelten sollen, im Detail ausgearbeitet. Dabei sind wir insbesondere auf die Vorteile von Subdivisionsalgorithmen eingegangen, die den Kriterien entsprechen. Auch auf die Konsequenzen bei (Nicht)Einhaltung der Kriterien sind wir eingegangen. Abschließend haben wir in Abschnitt 2.5 die Probleme der in der Literatur zu findenden Subdivisionsalgorithmen untersucht und herausgearbeitet, welche Verbesserungen für die Verwendung von Subdivisionsalgorithmen notwendig sind.

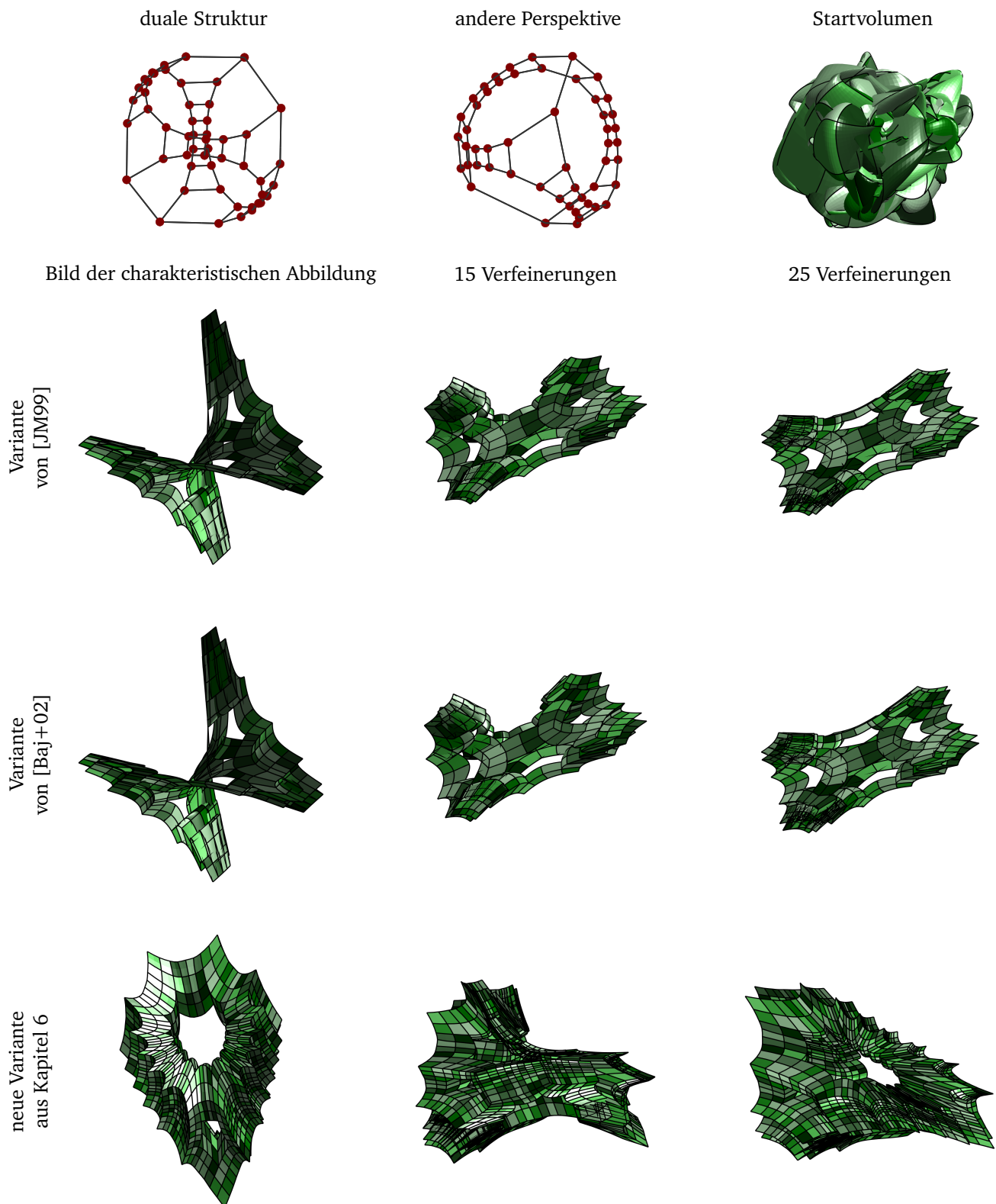


Abbildung 2.37: Zu Abbildung 2.36 analoge Abbildung. Das Beispiel ist aus einem 28-Eck entstanden, für das in der dualen Prismenstruktur oben und unten eine weitere Linie eingezeichnet wurde. Die beiden neuen Linien verlaufen dabei nicht parallel. Man erkennt, dass sowohl in der Eigenschale, als auch nach mehreren Verfeinerungsschritten die Varianten von [Baj+02] und [JM99] nicht injektiv sind.

3 Konstruktion konvexer Polytope

In diesem Kapitel beschreiben wir die Konstruktion konvexer Polytope. Konkret berechnen wir aus einer kombinatorischen Struktur die Eckpunkte des zugehörigen Polytops im entsprechenden Raum, $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Dabei fokussiert sich dieses Kapitel auf dreidimensionale Polytope. Lediglich am Ende wird kurz auf die Konstruktion zweidimensionaler Polytope eingegangen. Die Koordinatenvektoren der Eckpunkte sollen dann im weiteren Verlauf als Basis der subdominanten Eigenräume der Subdivisionsmatrizen dienen.

Das Konstruktionsverfahren basiert auf der Arbeit von [Zie04]. Dort findet sich ein konstruktiver Beweis des Koebe-Andreev-Thurston-Theorems (Theorem 3.18 in der Formulierung von Ziegler und Theorem 3.25 in der von uns genutzten Fassung), der eine Blaupause für die Konstruktion konvexer Polytope ist. Das Hauptresultat, das Ziegler in der Konstruktion nutzt, ist Theorem 3.35, welches das Funktional von Bobenko und Springborn aus [BS04] verwendet. Diese beiden Arbeiten bilden damit den Kern der Theorie dieses Kapitels. Darüber hinaus gehen wir auf weitere Eigenschaften der konstruierten Polytope ein, die wir für die Beweise der Qualitätskriterien der Subdivisionsmatrizen in den Kapitel 5 und 6 benötigen.

Wie bereits erwähnt, ist die Konstruktion der Polytope in [Zie04] bereits ausgearbeitet. Allerdings bleibt diese theoretisch. Die algorithmische Umsetzung ist zudem symbolisch mit einer realistischen Laufzeit nicht umsetzbar, weshalb diese in unserer Umsetzung numerische Verfahren beinhaltet. Da die Basis des Eigenraums aber möglichst exakt die Struktur und Form des Polytops wiedergeben soll, ist es notwendig, bei der Konstruktion möglichst genau zu rechnen. Daher liegt der Fokus dieses Kapitels auf der konkreten praktischen Umsetzung. Wir werden insbesondere auf die numerisch schwierigen Konstruktionsschritte eingehen und die algorithmische Umsetzung beschreiben. In diesem Feld ist auch der hauptsächliche Mehrwert dieses Kapitels zu sehen.

Es empfiehlt sich, dieses Kapitel aus der Perspektive eines Anwenders zu lesen. Die entsprechende Umsetzung in Matlab ist in [Die25] zu finden und dieses Kapitel kann als Anleitung dafür dienen.

Zunächst beschreiben wir in Abschnitt 3.1 die Grundlagen zu konvexen Polytopen. Da wir einen Algorithmus zur Konstruktion konvexer Polytope benötigen, gehen wir in diesem Abschnitt auch auf die Voraussetzungen und die Eingabevarianten des Algorithmus ein und erklären, wie wir diese auf Validität prüfen können. Abschnitt 3.2 ist eher theoretischer Natur. Da konvexe Polytope zu einer gegebenen abstrakten Struktur nicht eindeutig sind, diskutieren wir in diesem Abschnitt, welches Polytop wir konstruieren wollen und welche Eigenschaften es hat. In Abschnitt 3.3 beschreiben wir dann die konkrete Konstruktion und gehen insbesondere auf die algorithmische Umsetzung und die numerischen Herausforderungen ein. Abschnitt 3.4 rundet das Kapitel mit dem zweidimensionalen Analogon der konvexen Polytope ab.

3.1 Grundlagen, Eingabevarianten und Validitätsprüfungen

In diesem Abschnitt erörtern wir alle Voraussetzungen, die für die Konstruktion von 3-Polytopen benötigt werden. Dafür werden zunächst Begriffe im Kontext von Polytopen eingeführt. Außerdem wird beschrieben, welche Datenstruktur für 3-Polytope und die Graphen, die sie repräsentieren, verwendet werden kann. Da Polytope mit bestimmten Graphen assoziiert werden können, betrachten wir anschließend, wie die Eigenschaften dieser Graphen algorithmisch überprüft werden können und abschließend betrachten wir einen Generator für zufällige kombinatorische Anordnungen von 3-Polytopen.

Bevor wir die Konstruktion konvexer Polytope beschreiben können, muss zunächst erklärt werden, was ein konvexes Polytop ist. Daher beginnen wir mit der Definition von Konvexität nach [Zie94, S. 3–4]:

Definition 3.1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge.

1. Die Menge M ist konvex, wenn für jede Auswahl zweier beliebiger Punkte $a, b \in M$ auch die Verbindungslinie

$$\{\varphi a + (1 - \varphi)b \mid 0 \leq \varphi \leq 1\}$$

in M liegt.

2. Die konvexe Hülle von M ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die M enthalten, also

$$\text{conv}(M) := \bigcap \{M' \subseteq \mathbb{R}^d \mid M \subseteq M', M' \text{ konvex}\}.$$

Besteht die Menge M aus endlich vielen Punkten, so lässt sich die konvexe Hülle von M nach [Zie94, S. 4] wie folgt charakterisieren:

Lemma 3.2. Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge und sei $M := [a_1^T, \dots, a_n^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times d}$ die zugehörige Matrix, deren Zeilen die Punkte aus M repräsentieren. Dann ist die konvexe Hülle von M gerade

$$\text{conv}(M) := \text{conv}(M) = \left\{ \varphi_1 a_1 + \dots + \varphi_n a_n \mid \varphi_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \sum_{i=1}^n \varphi_i = 1 \right\}.$$

Außerdem erhalten wir das folgende Lemma nach [HL01, Satz 1.2.1, S. 22]:

Lemma 3.3. Seien M_1 und M_2 zwei konvexe Mengen. Dann ist $M_1 \cap M_2$ ebenfalls konvex.

Mithilfe der Beschreibungen konvexer Mengen lässt sich der Begriff des Polytops nach [Zie94, Def. 0.1, S. 4 f.] beschreiben:

Definition 3.4. Wir definieren:

- Ein V-Polytop ist die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge in $\mathbb{R}^d$.
- Ein H-Polytop ist der Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume in $\mathbb{R}^d$, welches in dem Sinne beschränkt ist, dass es keinen Strahl

$$\{a + \varphi b \mid \varphi \geq 0, a, b \in \mathbb{R}^d\}$$

enthält.

- Ein Polytop P ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, die sich als V-Polytop oder als H-Polytop darstellen lässt.
- Ein d -Polytop ist ein d -dimensionales Polytop in $\mathbb{R}^{d'}$ mit $d \leq d'$.

Diese Definition enthält zwei Darstellungsarten von Polytopen. Zum einen das V-Polytop, welches sich über seine Ecken beschreiben lässt, und zum anderen das H-Polytop, welches über die Halbräume beziehungsweise Facetten beschrieben wird. Das folgende Theorem aus [Zie94, Thm. 1.1, S. 29] zeigt die Äquivalenz der beiden Begriffe:

Theorem 3.5. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten (V-Polytop)

$$M = \text{conv}(P) \quad \text{mit} \quad P \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

genau dann, wenn sie ein beschränkter Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen (H-Polytop)

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times d} \quad \text{und} \quad b \in \mathbb{R}^m$$

ist.

Wie in [Zie94] beschrieben, ermöglicht dieses Theorem, dass wir Polytope auf zwei verschiedene Weisen darstellen können. Je nach Anwendung kann jeweils die eine oder andere Darstellung vorteilhafter sein. Außerdem sind Polytope mit diesem Theorem immer konvex. Sprechen wir im weiteren Verlauf von Polytopen, meinen wir also stets konvexe Polytope.

Für ein konvexes Polytop lässt sich auch ein dazu duales Polytop definieren. Da es verschiedene Formen von Dualität gibt, definieren wir hier die polare Dualität nach [Lov01, S. 224] und [Zie94, Def. 2.10, S. 61]:

Definition 3.6. Sei P ein konvexes d -Polytop in $\mathbb{R}^d$, das den Ursprung enthält. Dann ist das polar duale Polytop als

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1 \text{ für alle } a \in P\} \quad (3.1)$$

definiert.

Im Folgenden sprechen wir nur noch von dualen Polytopen und meinen damit stets polar duale Polytope. Für diese gelten die folgenden Aussagen [Zie94, Thm. 2.11, S. 62]:

Theorem 3.7. Sei P ein d -Polytop, das den Ursprung enthält, und P^* das duale Polytop zu P . Dann gilt:

1. P^* ist konvex.
2. $0 \in P^*$.
3. $(P^*)^* = P$.
4. Ist ein Polytop als $\text{conv}(P)$ mit $P \in \mathbb{R}^{n \times d}$ definiert, so ist das duale Polytop

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^d \mid P_{(i,:)} x \leq 1, \text{ für } i = 1 \dots, n\}.$$

Das duale Polytop ist damit konvex, beinhaltet den Ursprung, und die Facetten des dualen Polytops lassen sich über die Ecken des primalen Polytops beschreiben. Da das duale Polytop eines dualen Polytops wieder das primale Polytop ist, lassen sich auch umgekehrt die Facetten des primalen Polytops über die Ecken des dualen Polytops beschreiben.

In einem nächsten Schritt verbinden wir den Begriff des Polytops mit der Graphentheorie. Dazu nutzen wir die Arbeiten von Steinitz.¹ Er formulierte das folgende Theorem [SR76, S. 192]:

Wir haben im vorangehenden zwei Klassen normaler polyedrischer Komplexe, die sich durch besonders einfache Eigenschaften auszeichnen, ausführlicher behandelt, nämlich einmal die EULERSchen Komplexe, sodann die Polyeder ohne übergreifende Elemente. Hiernach wird man schon vermuten können, daß denjenigen Polyedern, welche beiden Klassen zugleich angehören, also den EULERSchen Polyedern ohne übergreifende Elemente, eine besonders wichtige Rolle zukommen muß. Wir bezeichnen sie als K -Polyeder, durch das K andeutend, daß sie mit den konvexen Polyedern in engster Beziehung stehen. Daß jedes konvexe Polyeder der EULERSchen Gleichung genügt und keine übergreifenden Elemente hat, somit ein K -Polyeder repräsentiert, haben wir schon im 1. Abschnitt S. 91 bemerkt. Es gilt nun aber auch umgekehrt, daß jedes K -Polyeder als konvexes Polyeder realisiert werden kann. Für diesen „Fundamentalsatz der konvexen Typen“ werden wir im nächsten Abschnitt mehrere Beweise erbringen.

In [Ste22, S. 77] wird es präziser formuliert:

Jedes K -Polyeder ist als konvexes Polyeder realisierbar.

Daß umgekehrt jedes konvexe Polyeder ein K -Polyeder repräsentiert, ist evident.

Da die Art der Formulierung eher umständlich ist, lässt sie sich nach [Zie94, Thm. 4.1, S. 103] wie folgt umformulieren:

Theorem 3.8 (Satz von Steinitz). Der Graph $G = (V, E)$ ist der Graph eines 3-Polytops genau dann, wenn er einfach, planar und 3-zusammenhängend ist.

¹Steinitz' Arbeit bezüglich der Polytope erschien erstmals in [Ste22] und später erneut in [Ste34]. Für die Referenz [Ste34] wurde die nachgedruckte Version von [SR76] verwendet.

Wir definieren daher:

Definition 3.9. Ein einfacher planarer 3-zusammenhängender Graph heißt Skelett oder Strukturgraph eines 3-Polytops.

Die kombinatorische Struktur eines 3-Polytops lässt sich also mit einem einfachen planaren 3-zusammenhängenden Graphen beschreiben. Anschaulich betrachtet, lässt sich jeder Knoten eines Strukturgraphen mit einer Ecke eines Polytops und jede Kante eines Strukturgraphen mit einer Kante eines Polytops identifizieren. Mit diesem Zusammenhang können wir das volle Potenzial der Graphentheorie im Kontext von Polytopen nutzen.

Für die Konstruktion eines 3-Polytops benötigen wir im Folgenden nur die Informationen seines Strukturgraphen. Daher definieren wir die Eingabe des Konstruktionsalgorithmus wie folgt:

Definition 3.10. Sei $G = (V, E)$ der Strukturgraph eines 3-Polytops. Eine zulässige Eingabe für den Algorithmus zur Konstruktion eines 3-Polytops ist eine der drei folgenden Varianten:

- Die Adjazenzmatrix

$$A \in \{0, 1\}^{|V| \times |V|}$$

von G .

- Eine Liste von Kanten

$$E \in \{1, \dots, |V|\}^{|E| \times 2}.$$

Jede Zeile in E steht dabei für eine Kante von G und die beiden Einträge einer Zeile stehen entsprechend für die beiden Knoten der Kante.

- Eine Liste der Facetten

$$F \in \{0, 1, \dots, |V|\}^{(2-|V|+|E|) \times m},$$

wobei m die maximale GröÙe beziehungsweise die maximale Anzahl der Knoten einer Facette von G ist. Jede Zeile in F steht dabei für eine Facette von G (vgl. hier den Satz von Euler A.29). Jeder Eintrag einer Zeile steht für einen Knoten. Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie in F nebeneinander stehen. Zudem sind der letzte und der erste Knoten durch eine Kante verbunden. Da die GröÙe der Facetten, also die Anzahl der Knoten in der Facette, variieren kann, richtet sich die Anzahl der Spalten von F nach der größten Facette. Der erste Eintrag einer jeden Zeile beinhaltet einen Knoten, überflüssige Einträge werden mit Nullen aufgefüllt.

Alle drei Arten genügen, um den Graphen G zu beschreiben. Die Adjazenzmatrix entspricht gerade der Darstellung des Graphen als Matrix. Mit der Liste der Kanten lässt sich die Adjazenzmatrix konstruieren und da für einen 3-zusammenhängenden planaren Graphen jede Kante Teil von exakt zwei Facetten ist (vgl. Theorem A.30), beinhaltet die Liste der Facetten jede Kante von G . Wir ermöglichen hier verschiedene Eingabevarianten, da sich, je nach Kontext, verschiedene Speicherformen besser eignen und übersichtlicher sein können als andere.

Aus praktischer Sicht ist hier noch zu erwähnen, dass die Knoten uniform von 1 bis $|V|$ durchnummeriert sein müssen. Adjazenzmatrizen mit leeren Zeilen beziehungsweise Spalten oder Listen von Kanten oder Facetten mit fehlenden Knoten produzieren einen Fehler, da diese als Graphen mit Knoten ohne Kanten interpretiert werden.

Alle drei Eingabevarianten werden in einem nächsten Schritt in eine Adjazenzmatrix umgewandelt. Dazu legen wir eine Nullmatrix entsprechender GröÙe an. Aus einer Facettenmatrix wird eine Liste von Kanten generiert, indem eine Kante pro benachbartem Paar angelegt wird. Aus einer Liste von Kanten wird dann eine Adjazenzmatrix erstellt, indem für jedes Paar (i, j) die beiden Einträge $A_{(i,j)}$ und $A_{(j,i)}$ auf 1 gesetzt werden.

Nachdem wir die Eingabe definiert haben, müssen wir in einem nächsten Schritt überprüfen, ob diese Eingabe valide ist, ob also der Graph, der sich aus der Eingabe ergibt, einfach, planar und 3-zusammenhängend ist. Das Vorgehen dafür beschreiben wir in den nächsten drei Paragraphen:

Einfach Ob der eingegebene Graph einfach ist, lässt sich leicht überprüfen. Um zu testen, ob der Graph Schleifen enthält, kann man sich die Diagonale der Adjazenzmatrix ansehen. Ist dort ein Eintrag ungleich 0, ist die Eingabe nicht valide. Mehrfachkanten werden von vornherein ausgeschlossen, da die Adjazenzmatrix ausschließlich Einträge aus $\{0, 1\}$ enthalten kann. Entsprechende Dopplungen in der Kanten- oder Facettenliste werden durch die Konstruktion der Adjazenzmatrix ignoriert. Um zu überprüfen, ob es gerichtete Kanten gibt, testen wir, ob

$$A^T - A = 0$$

ist. Ist ein Eintrag ungleich 0, so ist die Eingabe nicht valide. Erfüllt der Graph alle Kriterien, so ist er einfach.

3-zusammenhängend Um zu überprüfen, ob ein Graph $G = (V, E)$ 3-zusammenhängend ist, benutzen wir den Algorithmus aus [Eve11, Abschn. 6.2, S. 121–129], der wiederum den Satz von Menger A.15 und den Algorithmus von George Bernard Dantzig und Delbert Ray Fulkerson [DF57] nutzt. Dieser funktioniert wie folgt:

Seien $v_i, v_j \in V$ zwei Knoten und sei $n(v_i, v_j)$ die minimale Anzahl an Knoten aus V , die gelöscht werden müssten, damit v_i und v_j nicht mehr über einen Pfad verbunden sind. Sind v_i und v_j benachbart, so setzen wir

$$n(v_i, v_j) := |V| - 1,$$

da alle anderen und einer der beiden Knoten gelöscht werden müssten, damit beide nicht mehr benachbart wären. Andernfalls gibt $n(v_i, v_j)$ die Anzahl disjunkter Pfade zwischen v_i und v_j an. Der Algorithmus aus [Eve11] berechnet $n(v_i, v_j)$ für alle Kombinationen aus $v_i, v_j \in V$ und gibt anschließend

$$\min_{v_i, v_j \in V} n(v_i, v_j)$$

zurück. Wir haben unsere Variante nach [Eve11, Beweis von Thm. 6.4, S. 122–124] in Algorithmus 1 beschrieben.

Algorithmus 1: 3Zusammenhangstest

Data: Adjazenzmatrix A
Result: true oder false

```

1 begin
2    $G = (V, E) = \text{graph}(A)$ ;
3    $n = |V|$ ;
4    $n = \infty$ ;
5   Ersetze in  $G$  jede ungerichtete Kante durch zwei gerichtete Kanten;
6   Ersetze jeden Knoten  $v$  durch zwei Knoten  $v'$  und  $v''$ . Verbinde  $v'$  und  $v''$  durch die gerichtete Kante
   ( $v', v''$ ), also durch eine Kante von  $v'$  nach  $v''$ , mit Gewicht 1;
7   Nimm jede Kante, die auf  $v$  gerichtet war, und richte sie auf  $v'$ . Setze ihr Gewicht auf  $\infty$ ;
8   Nimm jede Kante, die  $v$  als Ausgangsknoten hatte, und setze ihren Ausgangsknoten als  $v''$ . Setze ihr
   Gewicht auf  $\infty$ ;
9   for  $i = 1 : n$  do
10    for  $j = 1 : n$  do
11      if  $i \neq j$  then
12        if  $(v''_i, v'_j) \in E \parallel (v''_j, v'_i) \in E$  then
13           $n' = |V| - 1$ ;
14        else
15           $n' = \text{Bestimme den maximalen Fluss des Graphen mit Quelle } v''_i \text{ und Senke } v'_j$ ;
16           $n = \min(n, n')$ ;
17   if  $n \geq 3$  then
18     return true;
19   else
20     return false;
```

Zunächst wird dabei der Graph so umgestaltet, dass mit dem Fluss die Anzahl der Wege berechnet werden kann. Dafür wird für jeden Knoten eine Konstruktion, bestehend aus v' und v'' , erstellt, die maximal den Wert 1 durchleiten kann. Im übertragenen Sinne kann so jeder Knoten im Fluss nur einmal besucht werden.

Sind v_i und v_j benachbart, so ist, wie bereits beschrieben, $n(v_i, v_j) = |V| - 1$. Andernfalls berechnen wir den

maximalen Fluss. Das Minimum über alle so generierten Werte wird in der Variable **n** gespeichert. Ist diese am Ende ≥ 3 so ist der Graph 3-zusammenhängend und es wird *true* zurückgegeben. Andernfalls ist der Graph nicht valide und es wird *false* zurückgegeben.

Planarität Um zu testen, ob der Graph $G = (V, E)$ planar ist, nutzen wir die Methode von Fraysseix und Rosenstiehl [FR85] in der Umsetzung von Brandes [Bra09]. Dazu muss zunächst Folgendes bemerkt werden:

Bemerkung 3.11. *Es gibt in der Literatur eine ganze Bandbreite verschiedener Algorithmen, um Planarität zu testen. Es ist möglich, Planarität in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|E|)$ zu testen. Die in der Literatur zu findenden Algorithmen nutzen geschickte Datenstrukturen, um diese Laufzeit zu erreichen. Allerdings wird dadurch sowohl die Programmierung als auch die Erklärung der Algorithmen sehr umfangreich und komplex, weshalb wir uns für die Variante von Ulrik Brandes [Bra09] entschieden haben. Diese hat zwar nur eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|E|^2)$, ist aber gut zu verstehen und zu implementieren. Da der Gesamtalgorithmus ohnehin keine lineare Laufzeit hat, überwiegen hier die genannten Vorteile.*

Wir erklären in Algorithmus 2 lediglich die Idee von Brandes Algorithmus und verweisen für Details auf [Bra09].

Algorithmus 2: PlanaritätsTest

Data: Adjazenzmatrix A
Result: true oder false

```
1 begin
2    $G = (V, E) = \text{graph}(A)$ ;
3   if  $|E| > 3|V| - 6$  then
4     return false;
5   Wähle einen zufälligen Knoten und konstruiere den orientierten DFS (depth-first search) Graphen;
6   Füge alle übrigen Kanten mit entgegengesetzter Richtung hinzu;
7   Weise jedem Knoten seine Höhe und seinen Nullpunktwert zu;
8   Berechne die Abhängigkeitsmatrix der Rückwärtskanten;
9   if die Abhängigkeitsmatrix ist ausbalanciert then
10    return true;
11  else
12    return false;
```

Initialisierung Zunächst wird aus der Adjazenzmatrix ein Graph konstruiert und die notwendige Bedingung für planare Graphen $|E| \leq 3|V| - 6$ überprüft. Das Überprüfen der Bedingung kostet fast keine Zeit und kann für viele Fälle Planarität ausschließen. Ist diese Bedingung erfüllt, kann der eigentliche Algorithmus beginnen.

Orientierter DFS Baum und Rückwärtskanten DFS steht für „depth first search“ und beschreibt die *Tiefensuche* ausgehend von einem Startknoten. Das Ergebnis ist ein Baum im graphentheoretischen Sinne mit gerichteten Kanten. Die Höhe jedes Knotens ist dabei die Position in der Reihenfolge, in der der Knoten durch den DFS-Algorithmus gesehen wurde. Die Kanten sind dabei von einem Knoten mit niedriger Höhe zu einem Knoten mit höherer Höhe gerichtet. Sie zeigen also vom Ausgangsknoten weg.

Dem Baum des DFS-Algorithmus fügen wir die übrigen Kanten des Ausgangsgraphen hinzu. Diese erhalten ebenfalls eine Richtung und sind von Knoten mit höherer Höhe zu Knoten mit niedrigerer Höhe gerichtet. Sie zeigen also in die zu den Baumkanten entgegengesetzte Richtung und werden daher als *Rückwärtskanten* bezeichnet. Der Nullpunktwert eines Knotens v_i ist die kleinste Höhe aller Knoten, die von v_i über beliebige Baumkanten und maximal einer Rückwärtskante erreicht werden können. Gibt es keinen solchen Knoten mit niedrigerer Höhe als v_i , so ist der Nullpunktwert von v_i die Höhe von v_i .

Abhängigkeitsmatrix der Rückwärtskanten Die Idee des Planaritätstest startet mit dem DFS-Baum. Dieser lässt sich planar darstellen. Dem DFS-Baum können schrittweise die Rückwärtskanten hinzugefügt werden, bis der vollständige

Graph gezeichnet ist. Beim Zeichnen der Rückwärtskanten muss entschieden werden, ob die Rückwärtskante links oder rechts der beiden Knoten gezeichnet werden soll. Dies ist am Anfang nicht klar und es besteht, je nach Graph, auch die Möglichkeit, eine Kante sowohl nach links als auch nach rechts zu zeichnen.

Allerdings gibt es Kanten, die zwingend auf verschiedenen Seiten gezeichnet werden müssen, weil sie sich sonst zwangsläufig kreuzen würden. Solche Kanten heißen *T-opposite*. Genauso gibt es Kanten, die zwingend auf dieselbe Seite gezeichnet werden müssen, weil beide Kanten etwa zur selben Kante *T-opposite* sind. Solche Kanten heißen *T-alike*. Diese Information wird in der Abhängigkeitsmatrix codiert. Gibt es zwei Kanten, die weder auf derselben noch auf verschiedenen Seiten liegen dürfen, ist der Graph nicht planar. Für die Details sei auf [Bra09] verwiesen.

Balanciertheit der Abhängigkeitsmatrix Dies bedeutet, dass überprüft werden muss, ob alle in der Abhängigkeitsmatrix codierten Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können. Ein Algorithmus inklusive einer detaillierten Beschreibung dafür findet sich in [HK80].

In diesem Abschnitt haben wir bereits erklärt, wie wir die Adjazenzmatrix aus den unterschiedlichen Eingabeoptionen erstellen. Der Algorithmus zur Erstellung des Polytops benötigt zusätzlich die Liste der Facetten des Graphen. Mit Abschnitt A.4 haben wir bereits alle benötigten Resultate, um eine solche Liste erstellen zu können. Zunächst ist zu bemerken, dass Facetten nach Definition A.22 nur für planare Graphen definiert sind und viele Resultate aus Abschnitt A.4 beziehen sich auf planare 3-zusammenhängende Graphen. Ist also der eben beschriebene Planaritäts- und 3-Zusammenhangstest erfolgreich, lässt sich mit Algorithmus 3 eine Liste der Facetten F konstruieren. Wir führen die einzelnen Schritte des Algorithmus im Folgenden aus:

Algorithmus 3: ErstelleFacettenliste

Data: Adjazenzmatrix A eines planaren 3-zusammenhängenden Graphen

Result: Facettenliste F

```

1 begin
2   Facettengröße=3;
3   Facettenliste=[];
4    $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}) = \text{graph}(A)$ ;
5   while  $|\text{Facettenliste}| < 2 - |\mathbf{E}| + |\mathbf{V}|$  do
6     Bestimme alle Kreise mit Größe Facettengröße von  $\mathbf{G}$ ;
7     Überprüfe für jeden gefundenen Kreis, ob er ein induzierter nicht-separierender Kreis ist. Falls ja, füge ihn der Facettenliste hinzu;
8     Überprüfe für jedes Paar gefundener Facetten, ob diese eine gemeinsame Kante haben. Falls ja, lösche die Kante aus dem Graphen  $\mathbf{G}$ ;
9     Facettengröße = Facettengröße + 1;
```

Mit Theorem A.27, Korollar A.28 und Theorem A.29 wissen wir, dass die Anzahl der Facetten für jede Darstellung des Graphen $2 - |\mathbf{E}| + |\mathbf{V}|$ ist.

Eine Facette ist nach Theorem A.25 ein induzierter nicht-separierender Kreis. Die Induziertheit ergibt sich direkt aus der Adjazenzmatrix. Haben zwei nicht benachbarte Knoten eines Kreises eine gemeinsame Kante, so ist der Kreis nicht induziert. Die Nicht-Separierbarkeit lässt sich überprüfen, indem der gefundene Kreis aus dem Graphen gelöscht und die Konnektivität anschließend mit der Matlabfunktion `conncomp` (vgl. [Mata]) überprüft wird.

Mit Theorem A.30 liegt eine Kante eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen an exakt zwei Facetten. Wurden diese beiden gefunden, so kann die Kante aus dem Graphen gelöscht werden, um die Laufzeit des Algorithmus zu verbessern.

Damit sind alle Vorbereitungen abgeschlossen. Bevor wir im nächsten Abschnitt die Eigenschaften der zu erzeugenden 3-Polytope beschreiben, erläutern wir noch die Generierung von Zufallsbeispielen.

3.1.1 Generierung von Zufallsbeispielen

Um die Erzeugung der Subdivisionsmatrizen in den Kapiteln 5 und 6 empirisch testen zu können, benötigen wir eine Vielzahl an Beispielen. Da beide Algorithmen dieselbe Eingabe wie in Definition 3.10 benötigen, beschreiben wir hier, wie wir zufällige Adjazenzmatrizen von 3-zusammenhängenden planaren Graphen konstruieren. Wir verwenden dazu Algorithmus 4, den wir im Folgenden erklären:

Algorithmus 4: ErstelleZufallsgraphen

Result: Adjazenzmatrix A eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen

```

1 begin
2   Kantenlöschung = Zufallswert aus 0 und 1;
3   while true do
4      $k = 100$ ;
5      $n = \text{Zufallszahl aus } \{4, \dots, k\}$ ;
6      $P^* = \text{Zufallsmatrix aus } [-0.5, 0.5]^{(n \times 3)}$ , wobei jede Zeile ungleich dem Ursprung ist;
7     Normiere jede Zeile von  $P^*$ , sodass jede Zeile beziehungsweise jeder Punkt auf dem Einheitskreis liegt;
8      $F^* = \text{Erstelle eine triangulierte Facettenliste der konvexen Hülle von } P^*$ ;
9      $A^* = \text{Adjazenzmatrix zu } F^*$ ;
10    if Kantenlöschung then
11      Setze zufällige Paare  $A^*_{(i,j)}$  und  $A^*_{(j,i)}$  auf 0, wenn diese vorher 1 waren;
12    Lösche alle Leerzeilen und -spalten von  $A^*$ ;
13     $G^* = \text{Graph zu } A^*$ ;
14    if  $G^*$  ist planar und 3-zusammenhängend then
15      Erstelle primalen Graphen  $G$  zu  $G^*$  mit Adjazenzmatrix  $A \in \{0, 1\}^{m \times m}$ ;
16      if  $G$  ist planar und 3-zusammenhängend und  $m \leq k$  then
17        return  $A$ 
  
```

Duales Polytop Zunächst erstellen wir ein duales Polytop, indem wir n Punkte auf dem Einheitskreis generieren. Die Auswahl zwischen 4 und k garantiert, dass wir die Mindestanzahl (4) an Punkten eines dualen Polytops erhalten, und die Maximalanzahl (k) garantiert, dass die Beispiele nicht zu groß werden. Für die in der vorliegende Arbeit genutzten Beispiele setzen wir diese Maximalanzahl willkürlich auf 100. Für diese Zufallspunkte generieren wir die Facetten der zugehörigen konvexen Hülle. Sollten (durch Zufall) mehr als drei Punkte in einer Facette liegen, so wird diese Facette zufällig trianguliert.

Mithilfe der Facetteninformation können wir anschließend eine Adjazenzmatrix A^* der Punkte generieren. Hier ist wichtig zu bemerken, dass das Polytop im Folgenden keine Rolle mehr spielt, es geht hier einzig um die in A^* generierte Struktur.

Dualer Graph und Kantenlöschung Die Adjazenzmatrix A^* ist die Adjazenzmatrix eines dualen Graphen. Da die Facetten in F^* alle Dreiecke sind, besitzt jeder Punkt eines potenziellen primalen Graphen drei Nachbarn. Dies ist die von uns präferierte Wahl eines Graphen, denn sie gehören zu einer hexaedrischen Struktur, die wir in Kapitel 2 definiert haben (vgl. dazu Definition 2.51 und Qualitätskriterium Q9). Da wir aber auch andere 3-zusammenhängende planare Graphen testen wollen, löschen wir aus einigen Beispielen Kanten heraus, sodass im primalen Graphen Knoten mit mehr als drei Nachbarn entstehen.

Primaler Graph Ist der aus A^* entstandene duale Graph G^* planar und 3-zusammenhängend, so konstruieren wir den zugehörigen primalen Graphen G . Für diesen überprüfen wir sicherheitshalber noch einmal, ob er ebenfalls planar und 3-zusammenhängend ist. Ist dies der Fall und besitzt G maximal k Knoten, so ist das Beispiel valide und die Adjazenzmatrix wird zurückgegeben. Da wir viele Beispiele betrachten, müssen wir die generierten Adjazenzmatrizen

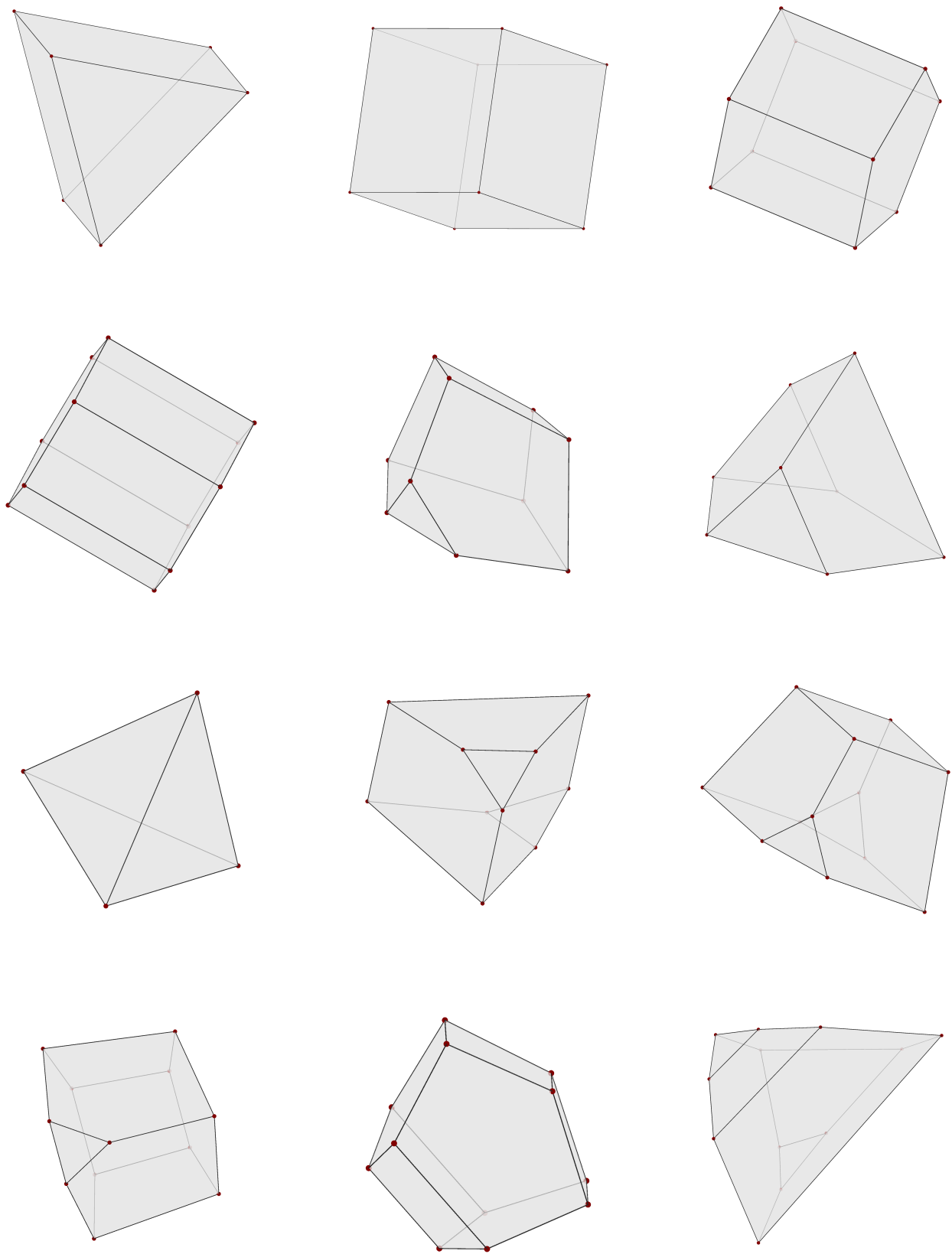


Abbildung 3.1: Galerie zufälliger 3-Polytope, deren Graphenstruktur mit Algorithmus 4 generiert wurde.

entsprechend speichern. Für die Speicherung setzen wir alle Adjazenzmatrizen in dasselbe Format, wofür wir die Grenze aus $k \times k$ Matriceinträge festlegen.

Datensatz Für diese Arbeit wurden insgesamt 305.095 Beispiele konstruiert, für die jeweils die Adjazenzmatrix gespeichert wurde. Duplikate, also exakt gleiche Adjazenzmatrizen, sind dabei nicht enthalten und wurden vor Speicherung aussortiert. Der Datensatz enthält aber isomorphe Graphen. Ist ein Graph isomorph zu einem anderen, wird diese Information ebenfalls gespeichert, um später die zugehörigen Subdivisionsmatrizen auf Isomorphie testen zu können. Insgesamt enthält der Datensatz 36.336 isomorphe Graphen und damit 268.759 einzigartige Beispiele.² Zudem sind 186.506 der Beispiele Graphen, bei denen jeder Knoten exakt drei Nachbarn hat, von denen wiederum 158.527 einzigartige Beispiele sind.

3.2 Auswahl und Eigenschaften konvexer Polytope

Bevor wir in Abschnitt 3.3 die Konstruktion von 3-Polytopen beschreiben können, betrachten wir noch einige theoretische Resultate, da wir für den weiteren Verlauf der Arbeit Polytope mit speziellen Eigenschaften benötigen. Die konstruierten Polytope sollen dabei aus Kanten bestehen, die tangential zur Einheitssphäre verlaufen. Des Weiteren sollen die tangentialen Punkte ihren Schwerpunkt im Ursprung haben und außerdem sollen alle Symmetrien der zugrundeliegenden Struktur vom Polytop wiedergegeben werden. Dasselbe soll auch für die zugehörigen dualen Polytope gelten. Die 3-Polytope dieser Arbeit werden mithilfe der speziellen Technik der *Kreispackung* erzeugt und aus dieser Kreispackung resultieren wiederum die speziellen gewünschten Eigenschaften. Der Kern dieser Theorie ist das Koebe-Andreev-Thurston-Theorem. Für uns ist die spezielle Formulierung aus Theorem 3.25 am Ende dieses Abschnitts relevant. Der Abschnitt versteht sich also als eine (historische) Hinleitung zu dieser finalen Formulierung.

Die erste Frage, die bei der Konstruktion konvexer Polytope aus Graphen aufkommt, ist, ob ein konvexes Polytop eine eindeutige Darstellung besitzt. Die triviale Antwort auf diese Frage ist natürlich nein. Jede konvexe Hülle von vier Punkten in $\mathbb{R}^3$, die nicht in einer Ebene liegen, ist ein Tetraeder und damit ein konvexes 3-Polytop. Wenn es also zu einer Graphenstruktur verschiedene Realisierungen eines Polytops gibt, stellt sich die Frage: Was ist die für uns richtige Wahl für die Konstruktion und Realisierung eines konvexen 3-Polytops?

Um das zu beantworten, benötigen wir das Koebe-Andreev-Thurston-Theorem aus dem Bereich des *circle packings* (Kreispackung). Dieses Theorem garantiert die Existenz eines Polytops mit den von uns gewünschten und in Theorem 3.25 zusammengefassten Eigenschaften. Die Historie dieses Theorems ist allerdings recht umfangreich und es existieren mehrere Formulierungen und Varianten. Daher gehen wir diese sukzessive durch und fügen dem Theorem immer mehr Aussagekraft hinzu, um am Ende des Abschnitts die für uns finale Version Theorem 3.25 zu formulieren. Viele hier zusammengetragene Informationen bezüglich des Inhalts und der Historie, stammen dabei aus [Zie94, S. 115–119].

Bei den Formulierungen der Varianten der Theoreme werden Begriffe auftauchen, die nicht im Detail erklärt werden. Ziel dieses Abschnitts ist es, einen Überblick über die verschiedenen Varianten zu geben und aus jeder dieser Varianten die Aspekte zu kondensieren, die benötigt werden. Im Laufe der Konstruktion der Polytope in Abschnitt 3.3 werden dann alle für diese Arbeit relevanten Begriffe detailliert beschrieben.

Die erste Version des Theorems ist die Formulierung von Koebe [Koe36, S. 162]:

Theorem 3.12 (Koebe). *Die Aufgabe, auf der Kugeloberfläche n Kreisflächen, deren Größe unbekannt bleibt, nebeneinander ohne gegenseitige Überdeckung so zu lagern, daß sie ein durch ein beliebiges gewöhnliches Triangulationsschema vorgeschriebenes Kontaktschema erfüllen (Schließungsproblem), gestattet immer eine und, abgesehen von einer Kreisverwandtschaft, nur eine Lösung.*

Eine modernere Formulierung findet sich in der Dissertation von Springborn [Spr03, Thm. 1.1, S. 1]:

Theorem 3.13 (Koebe zitiert nach Springborn). *Für jede abstrakte Triangulierung der Sphäre gibt es eine Kreispackung, deren Adjazenzgraph eine geometrische Realisierung der Triangulierung ist. Die zur Triangulierung gehörende Kreispackung ist eindeutig bis auf Möbius-Transformationen der Sphäre.*

²Sind mehrere Graphen isomorph zueinander wird in dieser Zählung einer als einzigartiges Beispiel und die anderen als Isomorphien gezählt.

Das Theorem von Koebe wurde von Thurston wiederentdeckt, der dessen Beweis auf ein Theorem von Andreev zurückführte. Ziegler verweist in diesem Kontext auf [And70], worin unter anderem das folgende Theorem zu finden ist [And70, S. 431]:

Theorem 3.14 (Andreev). *Sei m ein konvexes abstraktes dreidimensionales Polyeder mit Knoten vom simplizialen Typ, aber nicht ein Simplex. Die Bedingungen $m_0 - m_4$ sind notwendig und hinreichend für die Existenz eines konvex begrenzten Polyeders M im dreidimensionalen Lobačevskiĭ-Raum λ^3 mit Flächenwinkeln nicht größer als $\pi/2$, sodass $a_{ij}(M) = a_{ij}$.*

Die Originalquelle im Bezug auf Thurston sind seine Vorlesungsnotizen [Thu77]. Diese wurden auch Jahrzehnte später in [Thu22] veröffentlicht und daher nutzen wir diese Version als Quelle. Thurston verwendet darin die folgende Formulierung von Andreev [Thu22, Thm. 13.6.1, S. 290]:

Theorem 3.15 (Andreev zitiert nach Thurston). *Sei O eine Haken-Orbifaltigkeit mit*

$$X_O = D^3, \quad \sum_O = \partial D^3.$$

O hat eine hyperbolische Struktur, genau dann, wenn O keine inkompressiblen euklidischen Suborbifaltigkeiten hat.

Wenn O eine Haken-Orbifaltigkeit mit $X_O = D^3 - (\text{endlich viele Punkte})$ ist und $\sum_O = \partial D^3$ gilt, und wenn eine Nachbarschaft jedes gelöschten Punktes das Produkt einer euklidischen Orbifaltigkeit mit einem offenen Intervall ist (aber O selbst ist kein solches Produkt), dann hat O eine vollständige hyperbolische Struktur mit endlichem Volumen, genau dann, wenn jede inkompressible euklidische Teilorbifaltigkeit in eine der Produktnachbarschaften isotopiert werden kann.

Diese Formulierung findet sich in [And70] nicht, sie wird aber in der Literatur als die zugehörige Quelle verwendet.

Unabhängig davon formuliert Thurston, aufbauend auf das eben beschriebene Theorem, die beiden folgenden Theoreme (Thurston I: [Thu22, Kor. 13.6.2, S. 290] und Thurston II: [Thu22, Kor. 13.6.3, S. 293]):

Theorem 3.16 (Thurston I). *Sei G ein beliebiger Graph in $\mathbb{R}^2$, sodass jede Kante unterschiedliche Enden hat und keine zwei Knoten durch mehr als eine Kante verbunden sind. Dann gibt es eine Kreispackung in $\mathbb{R}^2$, deren Duales isotopisch zu G ist. Wenn G [nach Projektion] das 1-Skelett einer Triangulierung von $\mathbb{S}^2$ ist, dann ist diese Kreispackung bis auf Möbius-Transformation eindeutig.*

Theorem 3.17 (Thurston II). *Sei T eine beliebige Triangulierung von $\mathbb{S}^2$. Dann gibt es ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^3$, das kombinatorisch äquivalent zu T ist und dessen 1-Skelett tangential zur Einheitssphäre liegt (d.h., jede Kante von T ist tangential zur Einheitssphäre). Außerdem ist dieses Polyeder eindeutig bis auf projektive Transformationen des $\mathbb{R}^3$ [...], die die Einheitssphäre auf sich selbst abbilden.*

Aus den Arbeiten der drei Autoren Koebe, Andreev und Thurston entstand das sogenannte „Koebe-Andreev-Thurston Circle Packing-Theorem“. Wie bereits angesprochen, gibt es zahlreiche Varianten des Theorems, von denen wir im weiteren Verlauf einige betrachten. Wir beginnen mit der Fassung von Ziegler [Zie04, Thm. 1.3, S. 10]:

Theorem 3.18 (Koebe-Andreev-Thurston-Theorem zitiert nach Ziegler). *Jeder 3-zusammenhängende planare Graph kann durch ein [konvexes] 3-Polytop realisiert werden, bei dem alle Kanten tangential zur Einheitssphäre liegen. Außerdem ist diese Darstellung eindeutig bis auf Möbius-Transformationen (projektive Transformationen, die die Sphäre fixieren). Die kantentangentiale Realisierung, bei der der Schwerpunkt der Tangentenpunkte das Zentrum der Sphäre ist, ist eindeutig bis auf orthogonale Transformationen.*

Zunächst muss hier bemerkt werden, dass Ziegler in seiner Formulierung nicht explizit von konvexen Polytopen spricht. Er schreibt jedoch [Zie04, S. 3], alle in diesen Vorlesungsnotizen behandelten Polytope seien konvex, weshalb wir dies ergänzen können.

Mit diesem Theorem erhalten wir eine erste Aussage, die ein eindeutiges Polytop (bis auf Drehungen und Spiegelungen um den Ursprung) beschreibt und einen ersten Hinweis auf die Wahl des Polytops für diese Arbeit gibt. Allerdings beinhaltet die obige Formulierung noch nicht alle gewünschten Eigenschaften des Polytops, weshalb wir weitere Varianten des Theorems besprechen müssen.

Der Mehrwert von [Zie04] ist, dass Ziegler mithilfe des Funktional von Bobenko und Springborn [BS04] einen konstruktiven Beweis des Theorems vorstellt. Das oben erwähnte Polytop lässt sich also mit der Anleitung von Ziegler explizit konstruieren und wir nutzen diese Anleitung für unsere Konstruktion in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2.

Die Konstruktion von Ziegler hat allerdings auch einige Nachteile im Bezug auf die Implementierung. Der Beweis selbst endet nach der Konstruktion des speziellen Vierecksgraphen (siehe Abschnitt 3.3.1) mit der Aussage [Zie04, S. 24], dass sich, ausgehend von einer korrekten rechteckigen Kreispackung, die sphärische Kreispackung leicht rekonstruieren ließe (mithilfe einer inversen stereografischen Projektion). Die Wahl der richtigen Möbius-Transformation, die bewirkt, dass der Tangentenschwerpunkt nach der stereographischen Projektion im Ursprung liegt, wird jedoch nicht beschrieben. Mit dem Beweis von Ziegler ist zwar die Eindeutigkeit des Polytops bis auf Möbiustransformationen bewiesen, Aussagen über die Existenz einer speziellen Möbius-Transformation mit den von uns gewünschten Eigenschaften finden sich dort jedoch nicht. Daher betrachten wir eine zweite Formulierung des Theorems aus [Zie94], die eine Verallgemeinerung des obigen Theorems darstellt [Zie94, Thm. 4.13, S. 118]:

Theorem 3.19. *Für jeden planaren 3-zusammenhängenden Graphen gibt es eine Darstellung als Graph eines [konvexen] 3-Polytops, dessen Kanten alle die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ tangieren und den Schwerpunkt der Kontaktpunkte im Ursprung haben. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Drehungen und Spiegelungen des Polytops in $\mathbb{R}^3$. Insbesondere wird in dieser Darstellung jede kombinatorische Symmetrie des Graphen durch eine Symmetrie des Polytops realisiert.*

Konvexität kann hier ebenfalls ergänzt werden, da Zieglers Definition von 3-Polytopen mit Definition 3.4 übereinstimmt. Ziegler bezieht sich hier unter anderem auf die Arbeit von Schramm [Sch92], der das Koebe-Andreev-Thurston-Theorem von der Sphäre auf allgemeine konvexe Körper verallgemeinert. Das obige Theorem konzentriert sich auf die Realisierung des 3-Polytops mit 0 als Tangentenschwerpunkt und fügt eine Aussage über die Symmetrie des Polytops hinzu. In Zieglers Buch [Zie94] gibt es keinen detaillierten Beweis des Theorems, er bezieht sich jedoch auf seine Vorlesungsnotizen [Zie04], aus denen wir bereits Theorem 3.18 entnommen haben. Hier findet sich zudem die Referenz für die Existenz und Eindeutigkeit des 3-Polytops mit Tangentenschwerpunkt 0. Die dazu gehörige Argumentation inklusive Beweis ist in [Spr05] zu finden, aus der wir das folgende Theorem [Spr05, Thm. 2, S. 514] und Lemma [Spr05, Lem. 1, S. 514] entnehmen:

Theorem 3.20. *Für jede kombinatorische Anordnung eines konvexen dreidimensionalen Polyeders gibt es ein eindeutiges Polyeder (bis auf Isometrie), dessen Kanten die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ tangieren, sodass der Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt der Punkte ist, an denen die Kanten die Sphäre berühren.*

Lemma 3.21. *Seien $v_1, \dots, v_n$ mit $n \geq 3$ verschiedene Punkte auf der d -dimensionalen Einheitssphäre $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Es gibt eine Möbius-Transformation T von $\mathbb{S}^d$, sodass*

$$\sum_{j=1}^n T v_j = 0.$$

Wenn $\tilde{T}$ eine weitere solche Möbius-Transformation ist, dann ist $\tilde{T} = RT$, wobei R eine Isometrie von $\mathbb{S}^d$ ist.

Hiermit kann also die Existenz und Eindeutigkeit des Polytops mit Tangentenschwerpunkt 0 bis auf sphärenerhaltende Isometrien nachgewiesen werden. Was für den Beweis von Theorem 3.19 noch fehlt, ist die Argumentation der Symmetrie. Hierfür benötigen wir die Arbeit von [BE01]. Sie verwendet „quasikonvexe Programmierung“, um Mengen von Kreisen auf der Einheitssphäre mit bestimmten Bedingungen zu finden [BE01, S. 14–15]:

Sphärische Realisierungen von Graphen [Koe36]. Jeder eingebettete planare Graph kann als eine Sammlung von Tangentialkreisen auf einer Sphäre $\mathbb{S}^2$ dargestellt werden; diese Darstellung ist für maximal planare Graphen bis auf Möbius-Transformation eindeutig. Unsere Algorithmen können eine kanonische sphärische Darstellung eines beliebigen planaren Graphen finden, die den minimalen Kreistradius oder den minimalen Abstand zwischen zwei Scheitelpunkten optimiert und die alle Symmetrien, die in der gegebenen Einbettung implizit sind, realisiert.

Dies wird wie folgt weiter ausgeführt [BE01, S. 20]:

Da ein quasikonvexes Programm nur ein einziges globales Optimum hat, weist der transformierte Münzgraph alle Symmetrien auf, die in der ursprünglichen Grapheneinbettung vorhanden sind. Das heißt, jeder Homöomorphismus der Sphäre, der den ursprünglichen eingebetteten Graphen in sich selbst transformiert, wird einfach zu einer Drehung oder Spiegelung der Sphäre in der optimalen Einbettung. Wenn der Graph eine eindeutige Einbettung hat, wird jeder Isomorphismus des Graphen zu einer Drehung oder Spiegelung.

Springborn beschreibt die Verbindung seiner Arbeit zur eben zitierten [BE01] wie folgt [Spr05, S. 514–515]:

Ein ähnliches Zusammenspiel [zu Theorem 3.20 und Lemma 3.21] von Geometrien führt Bern und Eppstein zu einer anderen Wahl eines eindeutigen Repräsentanten für jeden Polyedertyp. Bei n Sphären in $\mathbb{S}^d$ wenden Bern und Eppstein jene Möbius-Transformation an, die den kleinsten Kreis so groß wie möglich macht [BE01]. Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese Möbius-Transformation bis auf Nachkomposition mit einer Drehung eindeutig ist, wenn $n \geq 3$ ist. Da kantentangentiale Polyeder Kreispackungen entsprechen, führt dies zu einer weiteren Wahl eines eindeutigen Repräsentanten für jeden Polyedertyp [Epp03].

Für symmetrische polyedrische Realisierungen (genauer gesagt, für solche polyedrischen Realisierungen mit einer Symmetriegruppe von orientierungserhaltenden Isomorphismen, die nicht nur eine zyklische Gruppe ist) stimmt die eindeutige Realisierung von Bern und Eppstein mit unserer überein.

Damit erhalten wir die Eigenschaft der Symmetrie, die eine wesentliche Rolle für das Qualitätskriterium Q10 spielen wird.

Der nächste Schritt ist eine weitere Verallgemeinerung von Theorem 3.19: Die Existenz und Konstruktion eines dualen Polytops. Dieses wird bei der Konstruktion der Colin-de-Verdière-Matrix im Abschnitt 4.4 und auch bei der Konstruktion der Subdivisionsmatrizen für $t = 3$ und $g = 3$ eine Rolle spielen. Das erste von [Zie94] erwähnte Ergebnis für die Dualität ist das folgende Theorem von Brightwell und Scheinerman [BS93, Thm. 6, S. 217–218]:

Theorem 3.22 (Brightwell und Scheinerman I). *Sei G ein planarer 3-zusammenhängender Graph mit einer festgelegten Außenfläche [im Bezug auf die planare Darstellung]. Es gibt eine Sammlung von Kreisen in der Ebene, wobei es einen Kreis für jeden Knoten und einen Kreis für jede Facette von G gibt. Diese Sammlung erfüllt die Eigenschaften (1)–(5). Darüber hinaus ist diese Sammlung bis auf Möbius-Transformationen und Spiegelungen der Ebene eindeutig.*

- (1) *Keine zwei Knotenkreise und keine zwei Facettenkreise kreuzen sich.*
- (2) *Für jede Kante e von G gibt es einen Punkt in der Ebene, in dem sich vier Kreise treffen, nämlich die Kreise, die den beiden Endpunkten von e und den beiden von e begrenzten Facetten entsprechen. Dieser Punkt wird als Kantenpunkt bezeichnet und soll e repräsentieren.*
- (3) *Ein Knotenkreis und ein Facettenkreis schneiden sich nur, wenn der entsprechende Knoten Teil der Facette ist.*
- (4) *Der Bereich, der von dem Kreis begrenzt wird, welcher der äußeren Facette entspricht, enthält alle anderen Facettenkreise. Abgesehen von dieser Ausnahme enthält keine der Kreisflächen, die von einem der Kreise begrenzt werden, einen anderen der Kreise. [...]*
- (5) *An jedem Kantenpunkt kreuzen die beiden Knotenkreise die beiden Facettenkreise im rechten Winkel.*

Wir verweisen hier schon einmal auf den Vierecksgraphen aus Definition 3.27, der dieser Beschreibung entspricht. Basierend auf diesem Theorem beweisen Brightwell und Scheinerman das folgende [BS93, Thm. 8, S. 218]:

Theorem 3.23 (Brightwell und Scheinerman II). *Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph und G^* sein planarer dualer Graph. Es ist möglich, G und G^* gleichzeitig in der Ebene mit geradlinigen Kanten zu zeichnen, sodass die Kanten von G die Kanten von G^* im rechten Winkel schneiden.*

Darauf basierend formuliert Grünbaum die folgende Verallgemeinerung des Koebe-Andreiev-Thurston-Theorems [Grü07, Thm. 3.1, S. 449]:

Theorem 3.24 (Grünbaum). *Wenn G ein planarer 3-zusammenhängender Graph ist, dann kann G durch ein konvexes Polyeder P mit den folgenden Eigenschaften realisiert werden:*

- *Alle Kanten von P tangieren eine Sphäre K , und der Schwerpunkt der Tangentialpunkte ist der Mittelpunkt von K .*
- *Der zu G duale Graph G^* wird durch ein zu P duales konvexes Polyeder P^* realisiert, wobei alle Kanten von P^* tangential zu S sind.*
- *Die Kanten von P und P^* , die einander durch die Dualität von G und G^* (und von P und P^*) entsprechen, stehen senkrecht zueinander.*

- Wenn K gegeben ist, dann sind P und P^* bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Die Kombination der Theoreme 3.19 und 3.24 führt uns zu unserer finalen Formulierung des Koebe-Andreev-Thurston-Theorems:

Theorem 3.25 (Finale Version des Koebe-Andreev-Thurston-Theorems). *Für jeden einfachen planaren 3-zusammenhängenden Graphen G gibt es eine Darstellung als Graph eines konvexen 3-Polytops P , dessen Kanten alle die Einheitssphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ tangieren, und zwar so, dass 0 der Schwerpunkt der Tangentenpunkte ist.*

Außerdem gibt es einen 3-zusammenhängenden planaren und zu G dualen Graphen G^ und ein konvexes duales 3-Polytop P^* , das für jede Facette einen Punkt, für jede Kante eine Kante und für jeden Punkt des primalen Polytops eine Facette besitzt. Alle Kanten dieses Polytops tangieren ebenfalls die Einheitssphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und der Schwerpunkt der Tangentenpunkte des dualen Polytops P^* ist ebenfalls 0 . Zwei zugehörige Kanten des primalen und des dualen Polytops treffen sich im Tangentenpunkt und sind orthogonal zueinander.*

Beide Darstellungen sind eindeutig bis auf Drehungen und Spiegelungen des korrespondierenden Polytops in $\mathbb{R}^3$. Insbesondere ist in dieser Darstellung jede kombinatorische Symmetrie des (primalen und dualen) Graphen durch eine Symmetrie des (primalen und dualen) Polytops realisiert.

Hier ist noch anzumerken, dass es eine ähnliche Formulierung in [Spr03, Thm. 1.3, S. 2–3] mit der gleichen Mächtigkeit und Allgemeinheit einschließlich eines Beweises gibt. Der Unterschied besteht darin, dass Springborn die Formulierung mit Begriffen der Zellzerlegung der Sphäre und nicht in Begriffen der Graphentheorie formuliert.

Dieses Theorem beantwortet die eingangs gestellte Frage nach der Wahl der Realisierung des konvexen Polytops. Das in Theorem 3.25 beschriebene Polytop lässt sich eindeutig konstruieren, es existiert ein für Kapitel 4 eindeutiges duales Polytop und beide erfüllen alle Symmetrien des zugrundeliegenden Graphen. Diese Eigenschaft wird ein zentraler Teil des Beweises der Qualitätskriterien Q7 (regulärer Fall), Q8 (semi-regulärer Fall) und Q10 (Symmetrien) sein. Die Beschreibung der verschiedenen Theoreme dieses Abschnitts war zwar ausführlich, da dies jedoch einer der zentralen Bausteine für die Konstruktion der Polytope und für die Beweise der Qualitätskriterien ist, ist entsprechende Sorgfalt an dieser Stelle angebracht. Im nächsten Abschnitt nutzen wir die Konstruktion von [Zie04], um das in Theorem 3.25 beschriebene Polytop und sein Duales zu erzeugen.

3.3 Konstruktion dreidimensionaler Polytope

In diesem Abschnitt beschreiben wir die konkrete Konstruktion der 3-Polytope in $\mathbb{R}^3$. Die Ideen dieses Abschnitts beruhen auf dem konstruktiven Beweis von Ziegler [Zie04]. Da seine Arbeit theoretischer Natur ist, arbeiten wir hier die konkrete Implementierung heraus. Wir gehen dabei insbesondere auf die numerischen Aspekte ein und beschreiben Herausforderungen und Lösungen der praktischen Umsetzung.

Um die Konstruktion besser nachvollziehen zu können und um eine Idee davon zu bekommen, wie die Konstruktionsschritte aussehen könnten, beschreiben wir zunächst oberflächlich die einfachere Rückrichtung, also wie man aus einem Polytop, dessen Kanten tangential zur Einheitssphäre liegen, eine planare Darstellung in $\mathbb{R}^2$ des zugehörigen Graphen erstellt. Dies Rückrichtung ist auch in [Zie04, S. 11] dargestellt und dient hier nur der Übersicht und Einordnung. Eine detaillierte Beschreibung erfolgt zusätzlich in Abschnitt 3.3.1, um daraus die einzelnen Schritte der Hinrichtung ableiten zu können.

Zunächst kann für jeden primalen und dualen Eckpunkt der Polytope ein Kreis erstellt werden. Dabei verläuft dieser Kreis durch alle Tangentenpunkte von Kanten an der Einheitssphäre, an denen der Punkt selbst liegt. Die dualen Kreise liegen damit auf den Facetten des primalen Polytops und umgekehrt. Diese Kreise können dann mittels stereographischer Projektion nach $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden. Davor wird das Polytop so gedreht, dass einer der Tangentenpunkte im Nordpol der Projektion liegt. Die vier Kreise, an denen der gedrehte Punkt $[0, 0, 1]$ liegt, werden dabei auf Geraden abgebildet, alle anderen auf Kreise. Aus den Mittel- und Schnittpunkten der projizierten Kreise lässt sich dann ein Graph konstruieren, den wir eingeschränkten Vierecksgraphen nennen werden. Mittelpunkte von primalen Kreisen gehören dabei zu primalen Punkten, Mittelpunkte der dualen Kreise zu dualen und Schnittpunkte der Kreise entsprechend zu den Tangentenpunkten. Eine Illustration ist in Abbildung 3.2 zu finden.

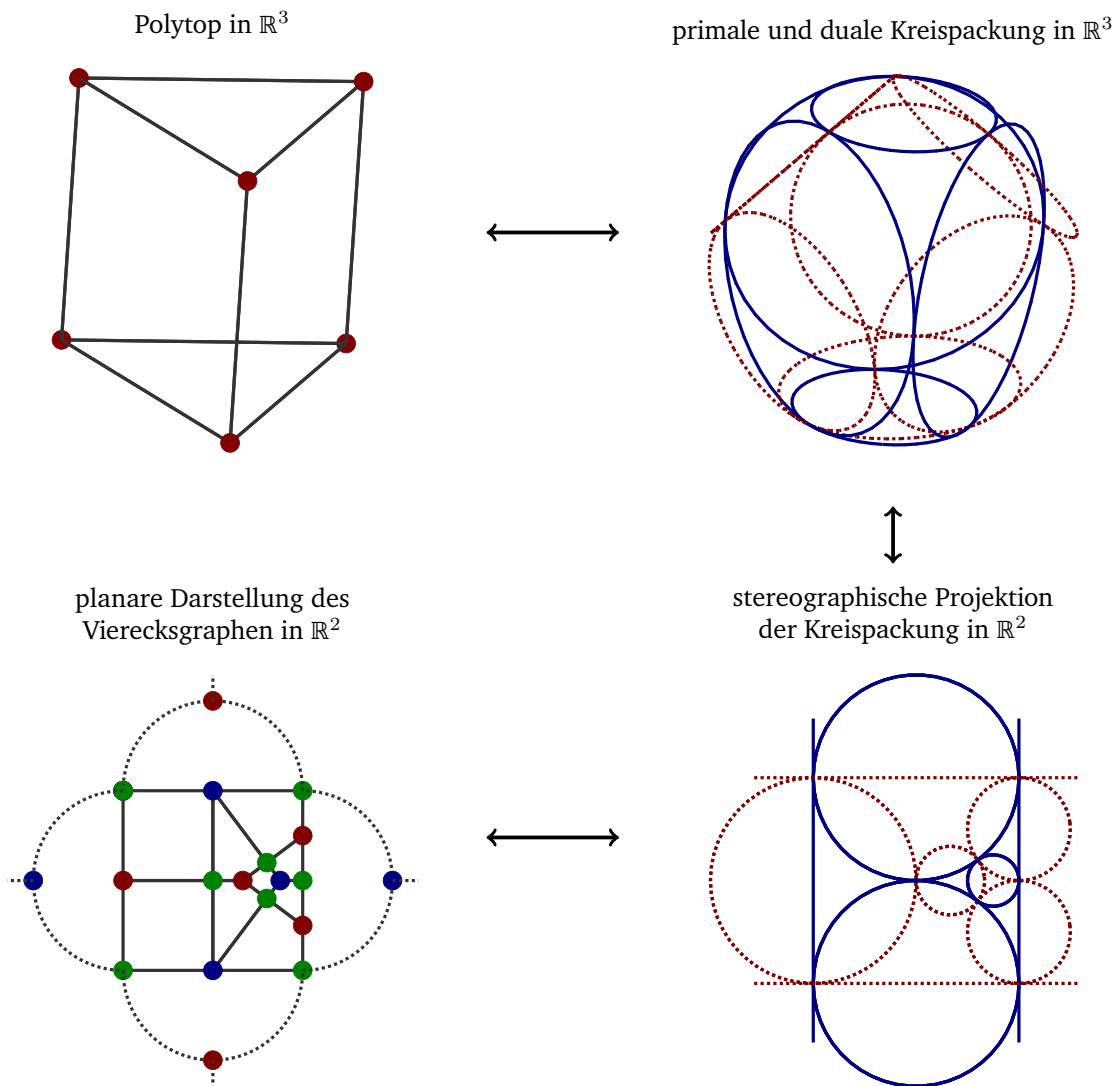


Abbildung 3.2: Generelles Vorgehen bei der Umwandlung eines Polytops in einen Vierecksgraphen und umgekehrt. Das Polytop wird zunächst in eine Kreispackung umgewandelt, welche mittels stereographischer Projektion nach $\mathbb{R}^2$ abgebildet und anschließend in einen Vierecksgraphen transformiert wird. Die Konstruktion des Polytops in diesem Kapitel verläuft entsprechend umgekehrt.

Algorithmus 5: Konstruktion3Polytop

Data: Adjazenzmatrix A oder Kantenliste E oder Facettenliste F eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen G nach Definition 3.10

Result: Eckpunktmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ des primalen 3-Polytops und Eckpunktmatrix $P^* \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ des dualen 3-Polytops mit den Eigenschaften aus Theorem 3.25

```

1 begin
2   if Eingabe ist E oder F then
3     | Erstelle Adjazenzmatrix A aus E oder F;
4     Teste mit  $\max |\text{diag}(A)| = 0$ , ob  $G$  keine Schleifen enthält;
5     Teste mit  $A^T = A$ , ob  $G$  ungerichtet ist;
6     Teste mit Algorithmus 1, ob  $G$  3-zusammenhängend ist;
7     Teste mit Algorithmus 2, ob  $G$  planar ist;
8     if einer der Tests war nicht erfüllt then
9       | return error('Eingabe war nicht valide');
10  if Eingabe ist nicht F then
11    | Erstelle mit Algorithmus 3 die Facettenliste F;
12  Erstelle aus  $G$  den Vierecksgraphen  $Q(G)$  der Definition 3.27 nach Abschnitt 3.3.1;
13  Erstelle aus  $Q(G)$  den eingeschränkten Vierecksgraphen  $Q'(G)$  der Definition 3.32 nach Abschnitt 3.3.1;
14  Erstelle eine Liste  $K$  aller (viereckigen) Facetten aus  $Q(G)$ , die ausschließlich Knoten aus  $Q'(G)$  enthalten.
    Dies sind die kombinatorischen Informationen der rechtwinkligen Drachen, die wir in den nächsten
    Schritten konstruieren werden. Jedes Viereck besteht aus einem primalen Punkt  $p$ , zwei Kantenpunkten
     $e_1$  und  $e_2$  und einem dualen Punkt  $f$ ;
15  Weise jedem primalen Punkt  $p \in V$  und jedem dualen Punkt  $f \in V^*$  einen Radius  $r$  zu. Berechne diese
    Radien nach Abschnitt 3.3.1 mit Algorithmus 6;
16  Realisiere den eingeschränkten Vierecksgraphen in  $\mathbb{R}^2$ , indem mithilfe der Radien  $r$  in Algorithmus 7
    jedes Viereck aus  $K$  als rechtwinkliger Drachen gezeichnet wird;
17  Berechne die Freiheitsgrade der inversen stereographischen Projektion  $a_x, a_y$  und  $a_z$  mit Algorithmus 8;
18  Verschiebe die Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen um  $(a_x, a_y)$  und multipliziere diese
    anschließend mit  $a_z$ ;
19  Projiziere mit der inversen stereographischen Projektion die Tangentenpunkte  $e$  der verschobenen und
    skalierten Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen auf die Einheitssphäre;
20  Bestimme die Ecken  $P$  des primalen Polytops  $P$  und die Ecken  $P^*$  des dualen Polytops  $P^*$  mithilfe eines
    Gleichungssystems, das aus den Tangentialebenen der zu den Eckpunkten  $p$  und  $f$  benachbarten
    Tangentenpunkte  $e$  auf der Sphäre hervorgeht;
21 return Eckpunkte  $P$  des primalen Polytops und Eckpunkte  $P^*$  des dualen Polytops;
```

Die Konstruktion des Polytops kehrt diese Schritte um und ist in zwei Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt 3.3.1 beschreiben wir die Konstruktion des eingeschränkten Vierecksgraphen inklusive der Bestimmung der zweidimensionalen Koordinaten der Realisierung der Knoten in $\mathbb{R}^2$. Dabei sind vor allem die Tangentenpunkte relevant. Im zweiten Abschnitt 3.3.2 beschreiben wir, wie wir diese Tangentenpunkte mittels der inversen stereographischen Projektion nach $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise auf die Einheitssphäre S^2 abbilden und daraus das primale und duale Polytop konstruieren. Eine Übersicht über alle im Folgenden beschriebenen Konstruktionsschritte findet sich in Algorithmus 5.

Außerdem führen wir für diesen Abschnitt die folgende Notation ein:

Notation 3.26. Wir werden in diesem Abschnitt aus einem planaren 3-zusammenhängenden Graphen ein 3-Polytop konstruieren. Dafür werden drei Kategorien von Punkten benötigt:

- Die erste Kategorie von Punkten bezeichnet die Eckpunkte des primalen Polytops. Diese sind mit den Knoten aus G assoziiert. Wir beschreiben alle zugehörigen Begriffe (Knoten, Realisierung in $\mathbb{R}^2$ und Realisierung in $\mathbb{R}^3$) dieser Eckpunkte mit p . In Grafiken sind diese Punkte stets rot dargestellt.
- Die zweite Kategorie von Punkten bezeichnet die tangentialen Kantenpunkte, die auf der Einheitssphäre liegen

werden. Sie werden im Folgenden auch kurz als Tangentenpunkte bezeichnet. Diese sind mit den Kanten aus G assoziiert. Wir beschreiben alle zugehörigen Begriffe (Realisierung in $\mathbb{R}^2$ und Realisierung in $\mathbb{R}^3$) dieser tangentialen Kantenpunkte mit e . In Grafiken sind diese Punkte stets grün dargestellt.

- Die dritte Kategorie von Punkten bezeichnet die Eckpunkte des dualen Graphen. Diese sind mit den Facetten aus G assoziiert. Wir beschreiben alle zugehörigen Begriffe (Realisierung in $\mathbb{R}^2$ und Realisierung in $\mathbb{R}^3$) dieser dualen Facettenpunkte mit f . In Grafiken sind diese Punkte stets blau dargestellt.

Außerdem verwenden wir in diesem Abschnitt die jeweiligen Graphen und deren Realisierungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ synonym. Dies gilt ebenso für die Begriffe Knoten und Punkt.

3.3.1 Konstruktion des Vierecksgraphen

Wie eingangs beschrieben, ist der erste Schritt der Konstruktion eine Darstellung des primalen und dualen Graphen in $\mathbb{R}^2$ zu finden, die dann im nächsten Abschnitt zu einem Polytop geformt werden kann. Diese Konstruktion bildet den Hauptteil von Zieglers Beweis des Koebe-Andreev-Thurston-Theorems. Entsprechend verläuft dieser Abschnitt analog zur Arbeit [Zie04]. Die Darstellung des primalen und dualen Graphen setzen wir in einem gemeinsamen Graphen um, den wir als Vierecksgraphen bezeichnen (vgl. [Zie04, S. 11 ff.]):

Definition 3.27. Sei $G = (V, E)$ ein planarer 3-zusammenhängender Graph und $G^* = (V^*, E^*)$ der dazu duale Graph. Dann ist der Vierecksgraph $Q(G) = (V_Q, E_Q)$ ein Graph mit den folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten in V_Q repräsentiert entweder einen Knoten von G , eine Kante von G oder eine Facette von G (und damit einen Knoten von G^*). Seien V_E die Knoten, die die Kanten von G repräsentieren. Dann ist

$$V_Q := V \cup V_E \cup V^*.$$

Die Reihenfolge der Knoten von $Q(G)$ in der Adjazenzmatrix und jedem anderen Objekt in diesem Kapitel ist $[V, V_E, V^*]$.

- Es gibt zwei Typen von Kanten in $Q(G)$. Ein Knoten aus V ist mit einem Knoten aus V_E über eine Kante verbunden, wenn der entsprechende Knoten aus V Teil der entsprechenden Kante aus E ist. Ein Knoten aus V^* ist mit einem Knoten aus V_E über eine Kante verbunden, wenn die entsprechende Kante aus E Teil der entsprechenden Facette ist, die dual zu dem entsprechenden Knoten aus V^* liegt. Kantenpunkte werden also mit den entsprechenden Knoten- und Facettenpunkten verbunden, an denen sie liegen und dies sind alle Kanten von $Q(G)$.

Die Struktur des Vierecksgraphen von G lässt sich direkt aus der Adjazenzmatrix A von G und der Facettenliste F von G erzeugen. Die Erstellung dieser beiden Objekte wurde bereits in Abschnitt 3.1 erläutert.

Für diesen Vierecksgraphen wollen wir eine Darstellung in $\mathbb{R}^2$ finden, die bestimmten Bedingungen genügt. Um diese Bedingung herauszuarbeiten, greifen wir die am Anfang des Abschnitts 3.3 beschriebene Rückwärtskonstruktion erneut auf und führen diese genauer aus. Wenn wir wissen, wie sich aus dem 3-Polytop die Realisierung des Vierecksgraphen in $\mathbb{R}^2$ bildet, können wir verstehen, wie die Realisierung des Vierecksgraphen zu zeichnen ist, damit wir daraus ein 3-Polytop bilden können. Für die Rückwärtskonstruktion verweisen wir auf Abbildung 3.2, in der die einzelnen Schritte illustriert sind.

Rückwärtskonstruktion

Wir beginnen mit einem konvexes Polytop mit zur Einheitssphäre tangentialen Kanten und einem dazu dualen Polytop mit ebenfalls zur Einheitssphäre tangentialen Kanten. Jeweils ein Paar aus Kanten des primalen und dualen Polytops hat dabei denselben Tangentenpunkt und die beiden Kanten liegen orthogonal zueinander (siehe Theorem 3.25).

Da jede Facette (primal und dual) Teil einer Ebene ist, die die Sphäre schneidet, liegen die zur Facette gehörenden Tangentenpunkte alle auf einem primalen und dualen Kreis. Zwei primale (duale) Kreise mit demselben Tangentenpunkt berühren sich und die Tangenten im Tangentenpunkt sind identisch. Zwei Tangenten eines primalen und

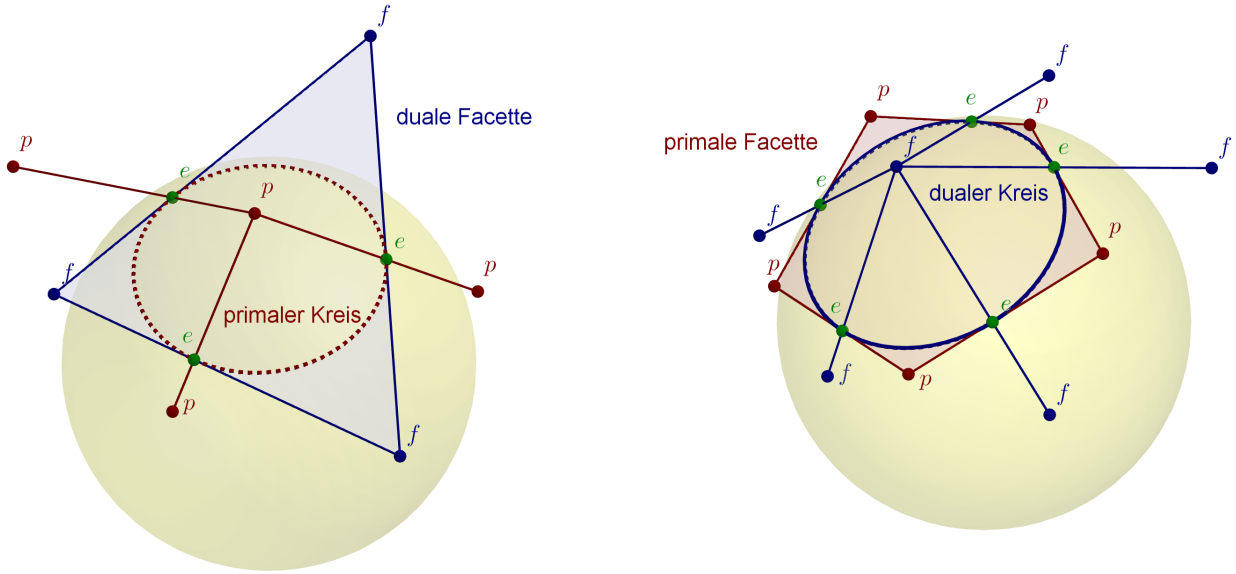


Abbildung 3.3: Beispielhafte Illustration eines primalen Kreises, der mit einem primalen Punkt assoziiert ist und in einer dualen Facette liegt (links), und eines dualen Kreises, der mit einem dualen Punkt assoziiert ist und in einer primalen Facette liegt (rechts).

dualen Kreises, die im selben Tangentenpunkt liegen, liegen orthogonal zueinander. Wir identifizieren den Kreis einer Facette des primalen Polytops mit dem entsprechenden Eckpunkt des dualen Polytops und umgekehrt. Konkret heißt das, dass ein primaler Kreis mit einem primalen Punkt assoziiert ist und in einer dualen Facette liegt, und dass ein dualer Kreis mit einem dualen Punkt assoziiert ist und in einer primalen Facette liegt. Eine Illustration findet sich in Abbildung 3.3. Die Menge dieser Kreise bezeichnen wir als *Kreispackung*.

Eine solche Kreispackung wollen wir mithilfe der stereographischen Projektion auf $\mathbb{R}^2$ abbilden. Dazu definieren wir nach [Lee20, Def. 3.1 und Def. 3.3, S. 47, 49]:

Definition 3.28. Für jeden Punkt $a \in \mathbb{S}^2 \setminus \{[0, 0, 1]\}$ existiert ein eindeutiger Punkt $b = [b_x, b_y]$, sodass die Linie von $[0, 0, 1]$ nach $[b_x, b_y, 0]$ durch a verläuft. Die bijektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, \quad \text{mit} \quad \phi(a) = \begin{cases} \infty & \text{für } a = [0, 0, 1] \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt stereographische Projektion. Die Umkehrabbildung

$$\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \quad \text{mit} \quad \phi^{-1}(b) = a$$

heißt inverse stereographische Projektion.

Diese Abbildung lässt sich mit dem folgenden Satz konkretisieren [Lee20, Satz 3.2, S. 48]:

Satz 3.29. Wir erhalten

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{z-1}, \frac{y}{z-1} \right) =: (\bar{x}, \bar{y})$$

und

$$\phi^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}, \frac{2\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}, \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \right) = (x, y, z).$$

Eine Illustration der stereographischen Projektion findet sich in Abbildung 3.4. Wir erhalten zudem die folgende Aussage über Winkel, die wir im weiteren Verlauf benötigen [Lee20, Thm. 3.5, S. 53]:

Theorem 3.30. Die stereographische Projektion ist winkelerhaltend.

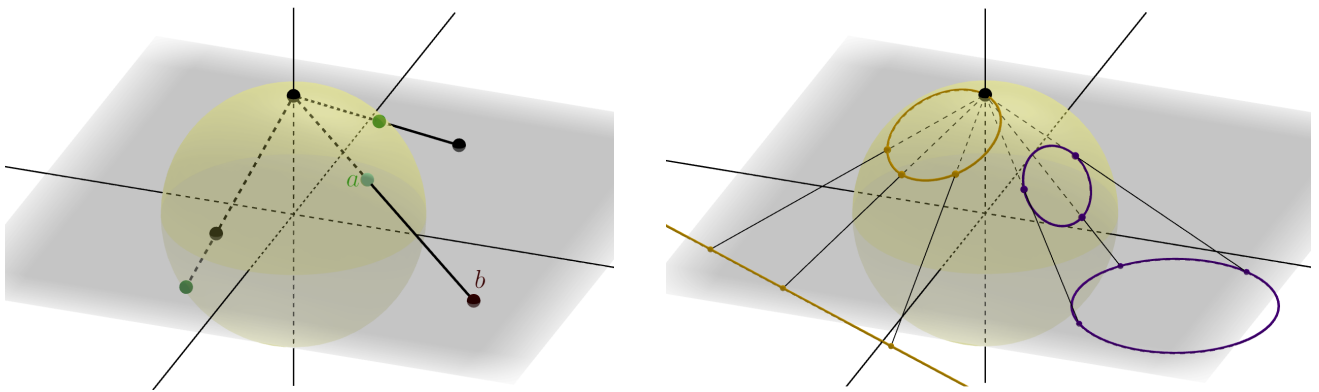


Abbildung 3.4: Beispielhafte Darstellung der stereographischen Projektion für drei Punkte (links) und Illustration des Theorems 3.31 (rechts).

Außerdem erhalten wir die folgende Aussage über die Abbildung von Kreisen mittels stereographischer Projektion nach [Lee20, Thm. 3.4, S. 49]:

Theorem 3.31. *Die stereographische Projektion bildet Kreise auf der Einheitssphäre, die den Punkt $[0, 0, 1]$ enthalten, auf Geraden in $\mathbb{R}^2$ ab und Kreise auf der Einheitssphäre, die den Punkt $[0, 0, 1]$ nicht enthalten, auf Kreise in $\mathbb{R}^2$ ab.*

Da die stereographische Projektion bijektiv ist, gilt entsprechend auch die Umkehrung: Geraden in $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ werden also auf Kreise auf der Sphäre, die den Punkt $[0, 0, 1]$ enthalten, abgebildet und Kreise in $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ werden auf Kreise auf der Sphäre, die den Punkt $[0, 0, 1]$ nicht enthalten, abgebildet.

Diese Theoreme nutzen wir für die Konstruktion des Vierecksgraphen. Wir beginnen mit dem Polytop und drehen es so, dass einer der Tangentenpunkte zu $[0, 0, 1]$ wird. Dies lässt sich durch die Drehung des Polytops um die Einheitssphäre erreichen. Die daraus resultierende Kreispackung enthält exakt vier Kreise, die den Punkt $[0, 0, 1]$ enthalten. Diese werden mit der stereographischen Projektion auf Geraden in $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ abgebildet. Da die stereographische Projektion winkelerhaltend ist, sind die Bilder der beiden primalen Kreise und die Bilder der beiden dualen Kreise unter ϕ parallel, die Kombination der Geraden aus primalen und dualen Kreisen ist orthogonal. Das Polytop lässt sich zudem so drehen, dass die Geraden parallel zur x - und y -Achse verlaufen (siehe Abbildung 3.2). Alle anderen Kreise der Kreispackung werden von ϕ auf Kreise abgebildet.

Diese zweidimensionale Kreispackung kann in einen Vierecksgraphen beziehungsweise in eine Realisierung des Vierecksgraphen in $\mathbb{R}^2$ umgewandelt werden, indem

- für den Mittelpunkt jedes primalen Kreises ein primaler Punkt p gesetzt wird. Dieser ist die Projektion des entsprechenden Eckpunkts des primalen Polytops.
- für den Mittelpunkt jedes dualen Kreises ein dualer Punkt f gesetzt wird. Dieser ist die Projektion des entsprechenden Eckpunkts des dualen Polytops.
- für den Schnittpunkt von primalen und dualen Kreisen ein Tangentenpunkt e gesetzt wird. Dieser ist die Projektion des entsprechenden Tangentenpunkts, der auf der Sphäre liegt.
- für jede Gerade ein primaler beziehungsweise dualer Punkt außerhalb des Rechtecks, das die Geraden bilden, gesetzt wird.
- für den Tangentenpunkt in $[0, 0, 1]$ ein Tangentenknoten außerhalb des Rechtecks, das die Geraden bilden, gesetzt wird.
- jeder primale Punkt mit den Tangentenpunkten, die am zugehörigen primalen Kreis liegen, durch eine Strecke verbunden wird.

- jeder duale Punkt mit den Tangentenpunkten, die am zugehörigen dualen Kreis liegen, durch eine Strecke verbunden wird.

Dies ist ebenfalls in Abbildung 3.2 zu sehen. Damit haben wir die Konstruktion des Vierecksgraphen aus einem Polytop erklärt und können daraus die Bedingungen an die Realisierung des Vierecksgraphen formulieren.

Bedingungen an die Realisierung des (eingeschränkten) Vierecksgraphen

Bei der Konstruktion der Realisierung des Vierecksgraphen beschränken wir uns auf den Teil des Graphen, der von den vier Geraden eingeschlossen wird (inklusive der Punkte auf den Geraden selbst). Diesen Teil konkretisieren wir mit der folgenden Definition:

Definition 3.32. Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph und sei $Q(G)$ der zugehörige Vierecksgraph. Sei zudem e ein ausgezeichnete Kantenpunkt aus V_E . Der Graph $Q'(G) = (V'_Q, E'_Q)$ mit

$$V'_Q = \{v \in V_Q \mid v \text{ ist nicht } e \text{ oder benachbart zu } e\} \quad \text{und} \quad E'_Q = \{\{v_1, v_2\} \in E_Q \mid v_1, v_2 \in V'_Q\}$$

heißt eingeschränkter Vierecksgraph von G .

Dieser genügt, um das Polytop zu rekonstruieren. Die Realisierung jedes Knotens des eingeschränkten Vierecksgraphen soll innerhalb des Rechtecks der vier Geraden (inklusive Rand) liegen. Da jede Kante des Polytops an zwei Eckpunkten und zwei Facetten liegt, hat jeder Tangentenpunkt des Vierecksgraphen vier Nachbarn. Da Kanten des Vierecksgraphen nur zwischen primalen Punkten und Tangentenpunkten und zwischen Tangentenpunkten und dualen Punkten verlaufen, ist jede zweidimensionale durch Kanten beschränkte Fläche der planaren Realisierung des Vierecksgraphen, also jede Facette des Vierecksgraphen, ein Viereck der Form

$$\text{primärer Knoten } p - \text{Tangentenknoten } e_1 - \text{dualer Knoten } f - \text{Tangentenknoten } e_2.$$

Die in der Rückwärtskonstruktion beschriebene Realisierung der Vierecke des eingeschränkten Vierecksgraphen in $\mathbb{R}^2$ hat eine besondere geometrische Form, die wir rechtwinkliger Drachen nennen und wie folgt definieren (vgl. [Zie04, S. 14]):

Definition 3.33. Ein rechtwinkliger Drachen ist ein Viereck in $\mathbb{R}^2$, bestehend aus vier Ecken und vier Kanten mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt zwei gegenüberliegende Punkte p und f , für die gilt, dass die beiden Linien an p dieselbe Länge und die beiden Linien an f dieselbe Länge haben.
2. Die beiden anderen Punkte heißen e_1 und e_2 . Die Innenwinkel an diesen Punkten sind 90° .

Eine beispielhafte Darstellung ist in Abbildung 3.5 zu finden. Ein rechtwinkliger Drachen ist damit die Vereinigung eines rechtwinkligen Dreiecks und dessen Spiegelbilds entlang der Hypotenuse. Jedes der Vierecke der Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen soll ein rechtwinkliger Drachen sein. Die Eigenschaft der Seitenlänge lässt sich über die Radien der primalen und dualen Kreise herleiten, deren Mittelpunkte gerade p und f sind. Die 90° -Winkel in den anderen beiden Punkten erhalten wir über die Winkelerhaltung der stereographischen Projektion aus Theorem 3.30. Für die Drachen des eingeschränkten Vierecksgraphen führen wir folgende Notation ein:

Definition/Notation 3.34. Sei $G = (V, E)$ ein planarer 3-zusammenhängender Graph und $G^* = (V^*, E^*)$ der zugehörige duale Graph. Sei $Q'(G)$ ein zu G gehörender eingeschränkter Vierecksgraph. Dann ist

$$K := \{\{p, f\} \mid p \in V, f \in V^* \text{ und } p \text{ und } f \text{ liegen in der Realisierung von } Q'(G) \text{ an einem gemeinsamen Viereck}\}$$

die Menge aller primalen und dualen Knoten, die an einem gemeinsamen Viereck liegen. Außerdem ist für $p \in V$ und $f \in V^*$

$$K(f) := \{p \in V \mid \{p, f\} \in K\} \quad \text{und} \quad K(p) := \{f \in V^* \mid \{p, f\} \in K\}$$

die Menge aller primalen Punkte, die an einem gemeinsamen Viereck mit f liegen beziehungsweise die Menge aller dualen Punkte, die an einem gemeinsamen Viereck mit p liegen.

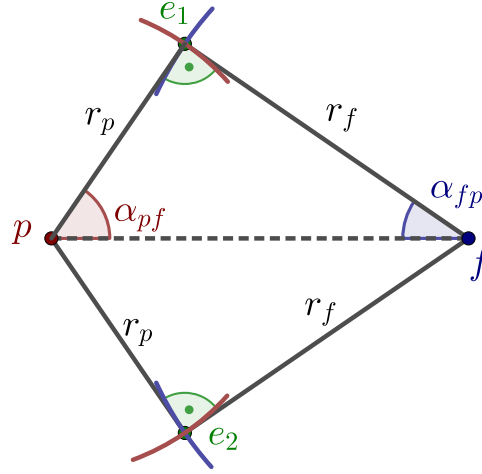


Abbildung 3.5: Beispielhafte Darstellung eines rechtwinkligen Drachens inklusive der Benennung der Bestandteile angelehnt an [Zie04, Abb. 1.13, S. 15].

Mit dieser Notation und mit diesen Vorgaben an die Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen (die äußeren Strecken bilden ein Rechteck und jedes Viereck ist ein rechtwinkliger Drache), können wir mit dessen eigentlicher Konstruktion beginnen. Dazu berechnen wir in einem ersten Schritt die Radien der primalen und dualen Kreise beziehungsweise die Kantenlängen der rechtwinkligen Drachen im eingeschränkten Vierecksgraphen.

Berechnung der Radien

Die Herausforderung der Konstruktion der Realisierung des Vierecksgraphen in $\mathbb{R}^2$ ist, dass zwar die Struktur bekannt, die Art der Darstellung jedoch unklar ist. Wie lassen sich also die Knoten des Graphen in $\mathbb{R}^2$ anordnen, damit ein eingeschränkter Vierecksgraph entsteht, dessen Facetten allesamt rechtwinklige Drachen sind? Ein erster Schritt dahin ist die Berechnung der Seitenlängen der rechtwinkligen Drachen und damit der Radien der zugehörigen primalen und dualen Kreise. Dies ist der Hauptschritt der Konstruktion von [Zie04].

Zunächst fügen wir in jedem rechtwinkligen Drachen eine Linie zwischen den Ecken p und f ein. Damit zerlegt sich ein rechtwinkliger Drache in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Die beiden anderen Winkel dieser Dreiecke lassen sich durch

$$\alpha_{pf} = \arctan\left(\frac{r_f}{r_p}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_{fp} = \arctan\left(\frac{r_p}{r_f}\right)$$

darstellen, wobei r_p die Länge der Linien an p und r_f die Länge der Linien an f ist (siehe Abbildung 3.5).

Fixieren wir einen dualen Punkt f , so können wir die Winkel am Punkt f aller rechtwinkligen Drachen, die an f liegen, aufsummieren. Die Summe ist dabei 2π , falls f im Inneren des eingeschränkten Vierecksgraphen liegt, und π , falls f am Rand liegt. Der Wert $\pi/2$ ist nicht möglich, da die Ecken des äußeren Vierecks immer Tangentenpunkte sind. Wir erhalten damit

$$\sum_{p \in K(f)} 2\alpha_{fp} = \sum_{p \in K(f)} 2 \arctan\left(\frac{r_p}{r_f}\right) =: \alpha_f := \begin{cases} \pi & \text{wenn } f \text{ am Rand liegt} \\ 2\pi & \text{wenn } f \text{ im Inneren liegt} \end{cases} \quad (3.2)$$

und analog für einen fixierten Punkt p

$$\sum_{f \in K(p)} 2\alpha_{pf} = \sum_{f \in K(p)} 2 \arctan\left(\frac{r_f}{r_p}\right) =: \alpha_p := \begin{cases} \pi & \text{wenn } p \text{ am Rand liegt} \\ 2\pi & \text{wenn } p \text{ im Inneren liegt} \end{cases} \quad (3.3)$$

Ob ein Punkt f oder p am Rand liegt, lässt sich feststellen, indem überprüft wird, ob er ein gemeinsames Viereck mit einem der Punkte hat, der an einem Viereck mit dem projizierten Punkt zu $[0, 0, 1]$ liegt. Erstellen wir die obige Gleichung (3.2) für jeden dualen Punkt f und die Gleichung (3.3) für jeden primalen Punkt p (nur für die Punkte des eingeschränkten Vierecksgraphen), so erhalten wir ein nichtlineares Gleichungssystem

$$\mathbf{q}(r) := \left[\sum_{p \in \mathbf{K}(f)} 2 \arctan \left(\frac{r_p}{r_f} \right) - \alpha_f, \quad \dots \quad \sum_{f \in \mathbf{K}(p)} 2 \arctan \left(\frac{r_f}{r_p} \right) - \alpha_p, \quad \dots \right]^T = \vec{0}.$$

Dabei enthält $\mathbf{q}$ eine Zeile für jeden primalen und dualen Punkt im eingeschränkten Vierecksgraphen, also insgesamt $|\mathbf{V}| + |\mathbf{F}| - 4$ Gleichungen, wobei $\mathbf{V}$ die Menge der Knoten und $\mathbf{F}$ die Menge der Facetten des Graphen $\mathbf{G}$ und damit des zugehörigen Polytops ist. Um dieses Gleichungssystem zu lösen, ersetzen wir zunächst jeden Radius durch seinem Logarithmus:

$$r'_f := \ln(r_f) \quad \text{und} \quad r'_p := \ln(r_p)$$

Da die Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen beliebig skaliert werden kann, legen wir für die Konstruktion die Normierung

$$\prod_f r_f \cdot \prod_p r_p = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_f r'_f + \sum_p r'_p = 0$$

fest. Im nächsten Schritt definieren wir die Hilfsfunktion

$$\mathbf{f}(a) := \arctan(\exp(a)).$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{f}(r'_p - r'_f) = \arctan(\exp(r'_p - r'_f)) = \arctan\left(\frac{\exp(r'_p)}{\exp(r'_f)}\right) = \arctan\left(\frac{r_p}{r_f}\right).$$

Wir können daher die obigen Gleichungen (3.2) und (3.3) zu

$$\sum_{p \in \mathbf{K}(f)} 2\mathbf{f}(r'_p - r'_f) = \alpha_f \quad \text{und} \quad \sum_{f \in \mathbf{K}(p)} 2\mathbf{f}(r'_f - r'_p) = \alpha_p$$

umformen und erhalten daraus das Gleichungssystem

$$\mathbf{q}'(r') := \left[\sum_{p \in \mathbf{K}(f)} 2\mathbf{f}(r'_p - r'_f) - \alpha_f, \quad \dots \quad \sum_{f \in \mathbf{K}(p)} 2\mathbf{f}(r'_f - r'_p) - \alpha_p, \quad \dots \right]^T = \vec{0}. \quad (3.4)$$

Mit

$$\bar{\mathbf{f}}(a) := \int_{-\infty}^a \mathbf{f}(b) \, db$$

erhalten wir das folgende von Bobenko und Springborn [BS04] entwickelte Funktional

$$\text{bs}(r') := \sum_{\{p, f\} \in \mathbf{K}} \left(\bar{\mathbf{f}}(r'_f - r'_p) + \bar{\mathbf{f}}(r'_p - r'_f) - \frac{\pi}{2} (r'_f + r'_p) \right) + \sum_f \alpha_f r'_f + \sum_p \alpha_p r'_p.$$

Die erste Summe läuft dabei über alle ungeordneten Paare von p und f , beinhaltet also einen Summanden pro rechtwinkligem Drachen. Dieses Funktional hat die folgenden Eigenschaften [Zie04, S. 16]:

Theorem 3.35. Für das obige Funktional $\text{bs}(r')$ gilt:

1. Die kritischen Punkte von $\text{bs}(r')$ sind genau die Lösungen des Gleichungssystems (3.4).
2. Das Funktional ist konvex: Ergänzt man die Nebenbedingung $\sum_f r'_f + \sum_p r'_p = 0$ der Normierung, so ist es positiv definit und damit ist der kritische Punkt von $\text{bs}(r')$ eindeutig, sofern er existiert.

3. Das Funktional wächst, wenn eine der Differenzen $r'_i - r'_j$ wächst. Damit muss das Funktional einen kritischen Punkt haben.

Damit existiert ein eindeutiger kritischer Punkt. Dieser ist die gesuchte Lösung des Gleichungssystems (3.4).

Beweis. Der Beweis findet sich in [Zie04, S. 17–23] und stellt den Kern dessen Arbeit dar. Wir zeigen hier nur, dass der Gradient des Funktionals die linke Seite des Gleichungssystems (3.4) ist. Leiten wir $bs(r')$ nach r'_p ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{bs}{\partial r'_p}(r') &= \sum_{f \in K(p)} \left(-f(r'_f - r'_p) + f(r'_p - r'_f) - \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_p \\ &= \sum_{f \in K(p)} \left(-\arctan\left(\frac{r'_f}{r'_p}\right) + \arctan\left(\frac{r'_p}{r'_f}\right) - \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_p. \end{aligned}$$

Mit

$$\arctan(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \quad \text{und} \quad \frac{r'_p}{r'_f} > 0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{bs}{\partial r'_p}(r') &= \sum_{f \in K(p)} \left(-\arctan\left(\frac{r'_f}{r'_p}\right) + \arctan\left(\frac{r'_p}{r'_f}\right) - \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_p \\ &= \sum_{f \in K(p)} \left(-\arctan\left(\frac{r'_f}{r'_p}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{r'_f}{r'_p}\right) - \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_p \\ &= \sum_{f \in K(p)} \left(-2 \arctan\left(\frac{r'_f}{r'_p}\right) \right) + \alpha_p \\ &= \sum_{f \in K(p)} (-2f(r'_f - r'_p)) + \alpha_p \\ &= - \left(\sum_{f \in K(p)} (2f(r'_f - r'_p)) - \alpha_p \right). \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich 0, so erhalten wir die entsprechende Gleichung des Gleichungssystems. Dies gilt analog für die Ableitung nach r'_f . $\square$

An dieser Stelle gibt es Folgendes zu bemerken:

Bemerkung 3.36. Zieglers Konstruktion ist theoretischer Natur und beschreibt im weiteren Verlauf den Beweis des obigen Theorems 3.35. Mit diesem ist für seine Arbeit die Konstruktion weitestgehend abgeschlossen. Nach der Berechnung von r' lässt sich jeweils r berechnen. Damit lässt sich der Vierecksgraph konstruieren und mittels der inversen stereographischen Projektion erhält man das Polytop. Da in unserer Arbeit die praktische Konstruktion im Vordergrund steht, arbeiten wir im Folgenden diese Schritte aus. Diese mögen aus einer theoretischen Sicht trivial erscheinen, allerdings zeigt sich, dass die praktische Umsetzung viele interessante numerische Herausforderungen enthält. Gerade mit diesen beschäftigen wir uns und beschreiben unsere konkrete algorithmische Umsetzung.

Im nächsten Schritt wollen wir eine Lösung für $\mathbf{q}'(r')$ finden. Dafür verwenden wir das Newton-Verfahren (Hintergründe und Beschreibungen finden sich beispielsweise in [Kel03]), für das wir zunächst die Hesse-Matrix von $bs(r')$, also die Ableitung von $\mathbf{q}'(r')$, bestimmen müssen. Für die Beschreibung verwenden wir die Zählvariablen i und j . Die Variable i steht dabei für die i -te Zeile von $\mathbf{q}'(r')$ und die Variable j für die j -te Variable von r' . Die beiden Zählvariablen können also Werte aus $\{1, \dots, |\mathbf{V}| + |\mathbf{F}| - 4\}$ annehmen und daher sowohl für primale als auch für duale Knoten stehen. Wir verwenden zusätzlich die Zählvariable $k \in \{1, \dots, |\mathbf{V}| + |\mathbf{F}| - 4\}$, um die Summen zu indizieren. Wir erhalten mit dieser Notation die folgenden Einträge für die Hesse-Matrix M :

- $i = j$:

$$\begin{aligned}
M_{(i,i)} &:= \frac{\partial}{\partial r'_i} \mathbf{q}'_i(r') = \frac{\partial}{\partial r'_i} \left(\sum_{k \in \mathbf{K}(i)} 2\mathbf{f}(r'_k - r'_i) - \alpha_i \right) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial r'_i} \left(\sum_{k \in \mathbf{K}(i)} \mathbf{f}(r'_k - r'_i) \right) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial r'_i} \left(\sum_{k \in \mathbf{K}(i)} \arctan(\exp(r'_k - r'_i)) \right) \\
&= -2 \left(\sum_{k \in \mathbf{K}(i)} \frac{\exp(r'_k + r'_i)}{\exp(2r'_k) + \exp(2r'_i)} \right)
\end{aligned}$$

- $i \neq j$ und die Knoten i und j haben einen gemeinsamen rechtwinkligen Drachen:

$$\begin{aligned}
M_{(i,j)} &:= \frac{\partial}{\partial r'_j} \mathbf{q}'_i(r') = \frac{\partial}{\partial r'_j} \left(\sum_{k \in \mathbf{K}(i)} 2\mathbf{f}(r'_k - r'_i) - \alpha_i \right) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial r'_j} \mathbf{f}(r'_j - r'_i) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial r'_j} \arctan(\exp(r'_j - r'_i)) \\
&= 2 \frac{\exp(r'_j + r'_i)}{\exp(2r'_j) + \exp(2r'_i)}
\end{aligned}$$

- $i \neq j$ und die Knoten i und j haben keinen gemeinsamen Drachen:

$$M_{(i,j)} := \frac{\partial}{\partial r'_j} \mathbf{q}'_i(r') = 0$$

Diese Hesse-Matrix hat keinen vollen Rang, was durch das Aufsummieren aller Spalten direkt erkennbar ist:

$$\sum_j M_{(i,j)} = 2 \left(\sum_{j \in \mathbf{K}(i)} \frac{\exp(r'_j + r'_i)}{\exp(2r'_j) + \exp(2r'_i)} \right) - 2 \left(\sum_{k \in \mathbf{K}(i)} \frac{\exp(r'_k + r'_i)}{\exp(2r'_k) + \exp(2r'_i)} \right) = 0$$

Dieses Verhalten lässt sich auch geometrisch begründen. Im obigen Gleichungssystem lässt sich jede Lösung mit einer Konstanten addieren und ist dann wiederum eine Lösung. Dies liegt an der Funktion $\mathbf{f}$. Addieren wir eine Konstante c auf jeden logarithmierten Radius r' , erhalten wir

$$\mathbf{f}((r'_j + c) - (r'_i + c)) = \mathbf{f}(r'_j + c - r'_i - c) = \mathbf{f}(r'_j - r'_i).$$

Da die Radien gerade den Exponentialen von r' entsprechen, wird aus dem Addieren einer Konstanten auf r' das Multiplizieren einer positiven Konstante mit r :

$$r = \exp(r') \quad \text{und} \quad \tilde{r} = \exp(r' + c) = \exp(r') \exp(c) = r \exp(c)$$

Dieses Verhalten haben wir bereits erwähnt. Der Vierecksgraph kann beliebig skaliert werden und daher kann das Gleichungssystem $\mathbf{q}'(r')$ keine eindeutige Lösung haben. Im Bezug auf die Hesse-Matrix ist dies eher ungünstig, da wir deren Inverse für das Newton-Verfahren benötigen. Wir passen daher das Gleichungssystem in den folgenden Schritten an und beginnen dazu mit dem folgenden Lemma:

Lemma 3.37. *Alle Zeilen in $\mathbf{q}'(r')$ summieren sich zu 0 auf.*

Beweis. Sei n die Anzahl der Zeilen von $\mathbf{q}'$. Summieren wir alle Zeilen von $\mathbf{q}'$ auf, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(r') = \sum_f \sum_{p \in \mathbf{K}(f)} 2\mathbf{f}(r'_p - r'_f) + \sum_p \sum_{f \in \mathbf{K}(p)} 2\mathbf{f}(r'_f - r'_p) - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p.$$

Die beiden ersten Summen verlaufen damit über alle rechtwinkligen Drachen. Wir können daher den obigen Ausdruck zu

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(r') = \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} 2\mathbf{f}(r'_p - r'_f) + \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} 2\mathbf{f}(r'_f - r'_p) - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p$$

vereinfachen. Die Ausdrücke $\{p, f\} \in \mathbf{K}$ verlaufen, wie bereits beschrieben, über alle ungeordneten Paare, jeder rechtwinklige Drachen wird also einmal indiziert. Wir können damit die beiden Summen zu

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(r') = \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} (2\mathbf{f}(r'_p - r'_f) + 2\mathbf{f}(r'_f - r'_p)) - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p$$

zusammenfassen. Mit

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) = \arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \quad \text{und} \quad \frac{r_p}{r_f} > 0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(r') &= \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} (2\mathbf{f}(r'_p - r'_f) + 2\mathbf{f}(r'_f - r'_p)) - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p \\ &= \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} \pi - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Für die weitere Argumentation benötigen wir einige Begriffe der zugrundeliegenden Graphen. Zunächst bezeichnen wir mit $|\mathbf{V}|$ die Anzahl der Knoten, mit $|\mathbf{E}|$ die Anzahl der Kanten beziehungsweise der Kantenpunkte und mit $|\mathbf{F}|$ die Anzahl der Facetten beziehungsweise Facettenpunkte. Außerdem bezeichnen wir mit $|\mathbf{Q}|$ die Anzahl der Facetten des Vierecksgraphen $\mathbf{Q}(\mathbf{G})$ und mit $|\mathbf{Q}'|$ die Anzahl der rechtwinkligen Drachen des eingeschränkten Vierecksgraphen.

Die Anzahl der Facetten von $\mathbf{Q}(\mathbf{G})$ ist zwei mal die Anzahl der Kantenpunkte in $\mathbf{Q}(\mathbf{G})$, da jeder Kantenpunkt an exakt vier Facetten liegt und jede Facette exakt zwei Kantenpunkte beinhaltet. Da die Anzahl der Kantenpunkte von $\mathbf{Q}(\mathbf{G})$ mit der Anzahl der Kanten $|\mathbf{E}|$ von $\mathbf{G}$ übereinstimmt, gilt

$$2|\mathbf{E}| = |\mathbf{Q}|.$$

Der eingeschränkte Vierecksgraph beinhaltet alle Knoten des Vierecksgraphen, bis auf einen Kantenpunkt e , zwei Knotenpunkte p_1 und p_2 und zwei Facettenpunkte f_1 und f_2 . Sei $\mathbf{v}(p)$ beziehungsweise $\mathbf{v}(f)$ die Anzahl der Facetten, an denen die Punkte p beziehungsweise f im Vierecksgraphen liegen.

Der eingeschränkte Vierecksgraph beinhaltet alle Facetten von $\mathbf{Q}(\mathbf{G})$, bis auf die Facetten, die die Punkte p_1 , p_2 , f_1 und f_2 beinhalten. Da die vier Facetten, an denen e liegt, jeweils ein Paar aus p_i und f_j (mit $i, j \in \{1, 2\}$) enthält, gilt für die Anzahl der rechtwinkligen Drachen in $\mathbf{Q}'(\mathbf{G})$

$$|\mathbf{Q}'| = |\mathbf{Q}| - \mathbf{v}(p_1) - \mathbf{v}(p_2) - \mathbf{v}(f_1) - \mathbf{v}(f_2) + 4 = 2|\mathbf{E}| - \mathbf{v}(p_1) - \mathbf{v}(p_2) - \mathbf{v}(f_1) - \mathbf{v}(f_2) + 4.$$

Wir erhalten damit für den ersten Summanden der Gleichung (3.5)

$$\sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} \pi = (2|\mathbf{E}| - \mathbf{v}(p_1) - \mathbf{v}(p_2) - \mathbf{v}(f_1) - \mathbf{v}(f_2) + 4) \pi.$$

Die anderen beiden Summen $\sum_f \alpha_f$ und $\sum_p \alpha_p$ bestehen jeweils aus $|\mathbf{V}| - 2$ und $|\mathbf{F}| - 2$ Summanden. Die erste Summe besteht aus Summanden 2π und π . Ein Summand π tritt dabei auf, wenn sich der entsprechende Facettenpunkt f

eine Facette mit p_1 oder p_2 im Vierecksgraphen $\mathbf{Q}(\mathbf{G})$ teilt. Dies sind damit $\mathbf{v}(p_1) - 2 + \mathbf{v}(p_2) - 2$ Summanden. Gleiches gilt für die zweite Summe, wenn man p und f tauscht. Wir erhalten also

$$\sum_f \alpha_f = 2\pi(|\mathbf{F}| - 2) - \pi(\mathbf{v}(p_1) - 2 - \mathbf{v}(p_2) - 2) \quad \text{und} \quad \sum_p \alpha_p = 2\pi(|\mathbf{V}| - 2) - \pi(\mathbf{v}(f_1) - 2 - \mathbf{v}(f_2) - 2).$$

Für den Ausdruck (3.5) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(r') &= \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} \pi - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p = (2|\mathbf{E}| - \mathbf{v}(p_1) - \mathbf{v}(p_2) - \mathbf{v}(f_1) - \mathbf{v}(f_2) + 4) \pi \\ &\quad - (2\pi(|\mathbf{F}| - 2) - \pi(\mathbf{v}(p_1) - 2 - \mathbf{v}(p_2) - 2)) \\ &\quad - (2\pi(|\mathbf{V}| - 2) - \pi(\mathbf{v}(f_1) - 2 - \mathbf{v}(f_2) - 2)) \\ &= \pi(2|\mathbf{E}| - 2|\mathbf{F}| - 2|\mathbf{V}| + 4). \end{aligned}$$

Mit der Eulerformel für Graphen aus Theorem A.27 erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(r') = \sum_{\{p,f\} \in \mathbf{K}} \pi - \sum_f \alpha_f - \sum_p \alpha_p = 0$$

und damit summieren sich die Zeilen von $\mathbf{q}'(r')$ zu 0 auf. □

Mit diesem Lemma lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit die letzte Zeile aus dem Gleichungssystem $\mathbf{q}'(\mathbf{r}')$ entfernen. Wir fügen dem Gleichungssystem zudem die Nebenbedingung $\sum_i r'_i = 0$ hinzu und erhalten (mit n als Anzahl der Zeilen von $\mathbf{q}'$)

$$\overline{\mathbf{q}'}(r') := \begin{bmatrix} \mathbf{q}'(r')_{(1:n-1)} \\ \sum_i r'_i \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Mit dieser Nebenbedingung ist das Gleichungssystem nach Theorem 3.35 eindeutig lösbar und die zugehörige Hesse-Matrix

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} M_{(1:n-1,:)} & \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ist quadratisch. Wir führen daher das Newton-Verfahren mit den in Algorithmus 6 beschriebenen Schritten aus, die wir im Folgenden erläutern:

Algorithmus 6: BerechneRadien

Data: Gleichungssystem $\overline{\mathbf{q}'}(r')$

Result: Radien r

```

1 begin
2    $r' = 0$ ;
3    $c = 0$ ;
4    $m = 100$ ;
5   while ( $\max(|\overline{\mathbf{q}'}(r')|) > 10^{-13}$ ) && ( $c < m$ ) do
6      $a = \overline{M}(r') \backslash \overline{\mathbf{q}'}(r')$ ;
7      $r' = r' - a$ ;
8      $c = c + 1$ ;
9   if  $c == m$  then
10     $\mathbf{fsolve}(\overline{\mathbf{q}'}(r') = 0)$ ;
11   $r = \exp(r')$ ;
```

Wir beginnen das Newton-Verfahren mit einem Startwert von $r' = 0$ und wenden es so lange an, bis die Genauigkeit der Lösung in jeder einzelnen Gleichung besser als 10^{-13} ist. Die Toleranz ist hier willkürlich gewählt. Da die

Maschinengenauigkeit für gewöhnlich 10^{-15} ist, eignet sich die Toleranz von 10^{-13} . Die einzelnen Summanden des Gleichungssystems können so noch genau genug dargestellt werden. In der Implementierung gibt es allerdings auch die Möglichkeit, die Toleranz selbst zu wählen.

In jeder Iteration werden das Gleichungssystem und die Hesse-Matrix für die konkreten Werte in r' aufgestellt. Die Zeile

$$a = \overline{M}(r') \backslash \overline{q}'(r') \Leftrightarrow \overline{M}(r') \cdot a = \overline{q}'(r')$$

bestimmt die Richtung für das Newton-Verfahren. Der *backslash* Operator $\backslash$ von Matlab (vgl. [Matd]) bestimmt dabei den Vektor a . Dieser ersetzt das rechenaufwendige invertieren der Matrix $\overline{M}(r')$. Anschließend wird mit der Richtung a der neue Wert für r' berechnet.

Die Variable c ist eine Zählvariable und als Sicherung gedacht. Um eine Endlosschleife zu verhindern, bricht das Newton-Verfahren nach m Iterationen ab. Wir haben hier willkürlich den Wert 100 gewählt. Falls bis dahin keine Lösung gefunden wurde, nutzen wir den Standardlöser `fsolve` von Matlab (vgl. [Matc]). In der Praxis zeigt sich jedoch, dass das Newton-Verfahren verlässliche Ergebnisse liefert. Zudem ist es deutlich schneller als der Standardlöser.

Abschließend berechnen wir die konkreten Radien r als Exponentiale von r' . Mit diesen können wir im nächsten Schritt den Vierecksgraphen erstellen.

Koordinatenberechnung des eingeschränkten Vierecksgraphen

Aus theoretischer Sicht sind mit den Radien alle Informationen für das Erstellen des eingeschränkten Vierecksgraphen vorhanden. Die konkrete Koordinatenberechnung ist allerdings nicht trivial und wird mit Algorithmus 7 durchgeführt. Wir erläutern im Folgenden die einzelnen Schritte des Algorithmus. Eine beispielhafte Illustration ist in Abbildung 3.6 zu finden.

Algorithmus 7: ZeichneEingeschränktenVierecksgraphen

Data: Eingeschränkter Vierecksgraph $Q = (V_Q, E_Q)$,

Liste der rechtwinkligen Drachen $M \in \{1, \dots, |V|\}^{n \times 4}$, Vektor der Radien r

Result: Koordinaten jedes Knotens $P \in \mathbb{R}^{|V_Q| \times 2}$

```

1 begin
2   DrachenBesucht = Nullvektor der Dimension  $|n| \times 1$ ;
3   KnotenBesucht = Nullvektor der Dimension  $|V_Q| \times 1$ ;
4   KantenPriorität = Vektor mit Einträgen  $\infty$  der Dimension  $|E_Q| \times 1$ ;
5    $e := v_e$  = Finde einen der vier Eckpunkte des eingeschränkten Vierecksgraphen;
6    $v := v_v$  = Finde den primalen Knoten, der eine Kante mit  $e$  besitzt;
7    $P_{(e,:)} = [0, 0]$ ;
8    $P_{(v,:)} = [0, -r_v]$ ;
9   Kantenpriorität( $[v, e]$ ) = 1;
10  Berechne alle Drachenbedingungen;
11  while  $\sum \text{DrachenBesucht} < n$  do
12    NiedrigstePrioritätsnummer = min(KantenPriorität);
13    AktuellerDrache = Finde einen bisher nicht gesehenen rechtwinkligen Drachen mit einer Kante, die
      die niedrigste Prioritätsnummer hat;
14    Bestimme die Koordinaten der vier Ecken des aktuellen rechtwinkligen Drachens und setze deren
      KnotenBesucht Wert auf 1;
15    Setze die KantenPriorität jeder Kante des rechtwinkligen Drachens auf NiedrigstePrioritätsnummer+1;
16    if eine der Drachenbedingungen ist verletzt then
17      Berechne die bisher berechneten Koordinaten der Knoten mit dem Newton-Verfahren neu;
  
```

Initialisierung Wir beginnen die Konstruktion des eingeschränkten Vierecksgraphen in einer seiner Ecken. Daher suchen wir zunächst nach einem der vier rechtwinkligen Drachen, der an einer solchen Ecke liegt. Ein solcher

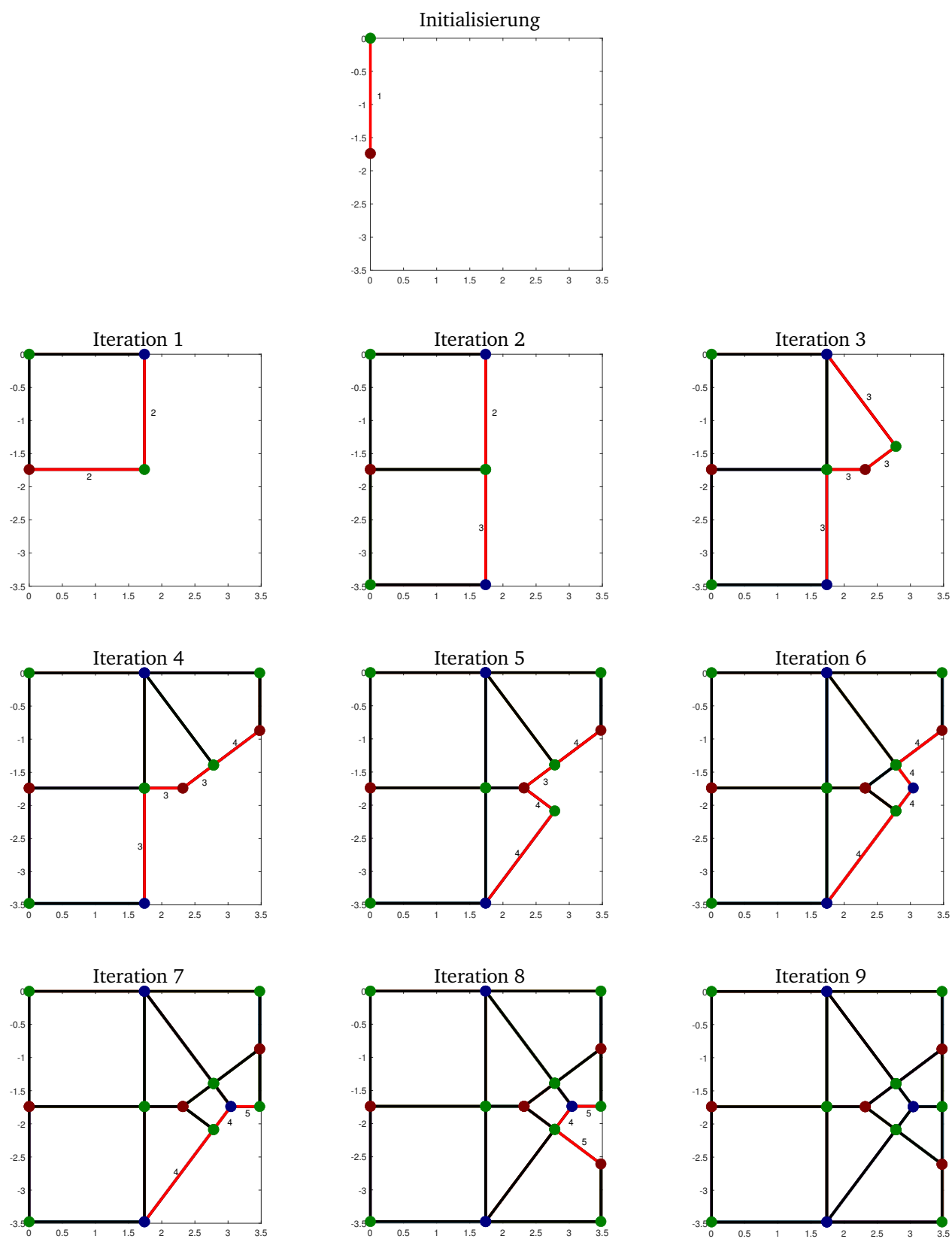


Abbildung 3.6: Beispielhafte Illustration der Konstruktion des Vierecksgraphen mit Algorithmus 7. Die erste Grafik ist die Initialisierung, alle anderen sind jeweils die Ergebnisse eines Durchlaufs der while-Schleife. Die Kanten mit noch nicht gesehenen rechtwinkligen Drachen sind rot markiert, die Kantenpriorität ist eingezeichnet.

rechtwinkliger Drachen besitzt einen primalen und dualen Punkt am Rand, also mit zugehörigen α_f α_p , die den Wert π besitzen. Die konkrete Auswahl des Startdrachen ist dabei willkürlich, aber reproduzierbar, denn sie hängt von der internen Nummerierung der Knoten und Kanten ab. Zudem spielt die Auswahl für das Polytop (bis auf Spiegelung und Rotation um die Einheitssphäre) keine Rolle.

Anschließend setzen wir den Eckknoten auf $[0, 0]$ und den primalen Knoten auf $[0, -r_p]$. Damit halten wir zum einen den Radius des primalen Knoten ein und zum anderen geben wir die Richtung vor, in der sich der Vierecksgraph aufbaut. Diese Richtung ist wiederum willkürlich gewählt, spielt aber für die Konstruktion (bis auf Rotation und Spiegelung) keine Rolle. Mit diesen beiden Punkten und der Richtung des zugehörigen dualen Punktes nach $[a, 0]$ mit $a > 0$ ist jeder andere Punkt des eingeschränkten Vierecksgraphen festgelegt und wird im Folgenden berechnet.

Generelles Vorgehen – BFS Der Algorithmus konstruiert jeden rechtwinkligen Drachen nacheinander. Um zu entscheiden, welcher rechtwinklige Drachen als nächstes gezeichnet wird, geben wir jeder Kante eine Prioritätsnummer. Diese ist am Anfang unendlich und verändert sich, sobald die Kante gezeichnet wurde. In der Initialisierung wird mit der Kante $[p, e]$ bereits die erste Kante gezeichnet und dieser wird die Priorität 1 zugewiesen. Der Algorithmus sucht in jeder Iteration die Kante mit der niedrigsten Prioritätsnummer und zeichnet anschließend den rechtwinkligen Drachen, der an diese Kante angrenzt und noch nicht gezeichnet ist. Die Prioritätsnummern der übrigen Kanten des neu gezeichneten rechtwinkligen Drachens werden anschließend auf den um eins erhöhten Prioritätswert der Ausgangskante gesetzt. Damit geben die Prioritätsnummern gerade den um eins erhöhten Abstand (in auf dem Weg gezeichneten rechtwinkligen Drachen) zum ersten rechtwinkligen Drachen an. Diese Vorgehensweise beziehungsweise Reihenfolge ist als *Breitensuche* („breadth-first search“) bekannt. Da die Radien mit numerischen Fehlern behaftet sind, bietet sich die Breitensuche an. Mit dieser können sich, aufgrund des möglichst niedrigen Abstands zum Startdrachen, numerische Fehler nicht so stark fortpflanzen.

Konstruktion eines rechtwinkligen Drachens Durch die Initialisierung und die Struktur des Algorithmus ist bei der Konstruktion immer eine Kante vorhanden. Diese besteht aus einem primalen oder dualen Punkt und einem Kantenpunkt. Den Kantenpunkt beschreiben wir mit e_1 , die Kante hat also die Form $\{p, e_1\}$ oder $\{e_1, f\}$. Um die Notation zu vereinfachen nehmen wir an, dass der primale Punkt bereits vorhanden ist, den wir mit p bezeichnen. Die Konstruktion mit einem bereits gezeichneten dualen Punkt f verläuft analog.

Mit diesen Informationen lässt sich der duale Punkt aufgrund des rechten Winkels in e_1 direkt durch

$$f = e_1 \pm r_f \frac{M \cdot (p - e_1)}{|p - e_1|} \quad \text{mit} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

konstruieren. Das Vorzeichen hängt davon ab, auf welcher Seite der Strecke (p, e_1) der schon gezeichnete rechtwinklige Drachen liegt. Für die Initialkante geben wir daher die Richtung $[r_f, 0]$ vor. Intern geben wir jeder Kante eine Richtung und speichern darüber die Information, auf welcher Seite der neue rechtwinklige Drachen gezeichnet werden muss.

Der vierte Punkt wird berechnet, indem wir zunächst das Lot von e_1 auf die Strecke (p, f) fällen. Diesen Punkt bezeichnen wir mit a . Der vierte Punkt ist dann

$$e_2 = e_1 + 2(a - e_1).$$

Wurde einer der beiden neuen Punkte f oder e_2 bereits gezeichnet (beispielhaft zu sehen in Iteration 5, 6, 7 und 9 der Abbildung 3.6), so setzten wir den Punkt als das arithmetische Mittel des alten und neu berechneten Punktes. Eine Illustration der einzelnen Konstruktionsschritte findet sich in Abbildung 3.7.

Drachenbedingungen Aus theoretischer Sicht sind die folgenden Bedingungen nicht notwendig, da durch die Radien und die Anfangsbedingungen des ersten rechtwinkligen Drachens die Form des eingeschränkten Vierecksgraphen eindeutig bestimmt ist. Da aber die Radien mit numerischen Fehlern behaftet sind, entstehen Fehler in der Konstruktion des eingeschränkten Vierecksgraphen, die sich im schlimmsten Fall potenzieren können. Um dem entgegenzuwirken nutzen wir, wie bereits beschrieben, die Breitensuche für die Reihenfolge der rechtwinkligen Drachen. Um vor allem für große Graphen sicherzustellen, dass wir die Fehler kontrollieren können, führen wir im Folgenden Bedingungen an den eingeschränkten Vierecksgraphen ein, die nach jedem Schritt überprüft werden. Dabei beziehen sich die im Folgenden beschriebenen ersten drei Bedingungen auf die zwei Dreiecke in einem

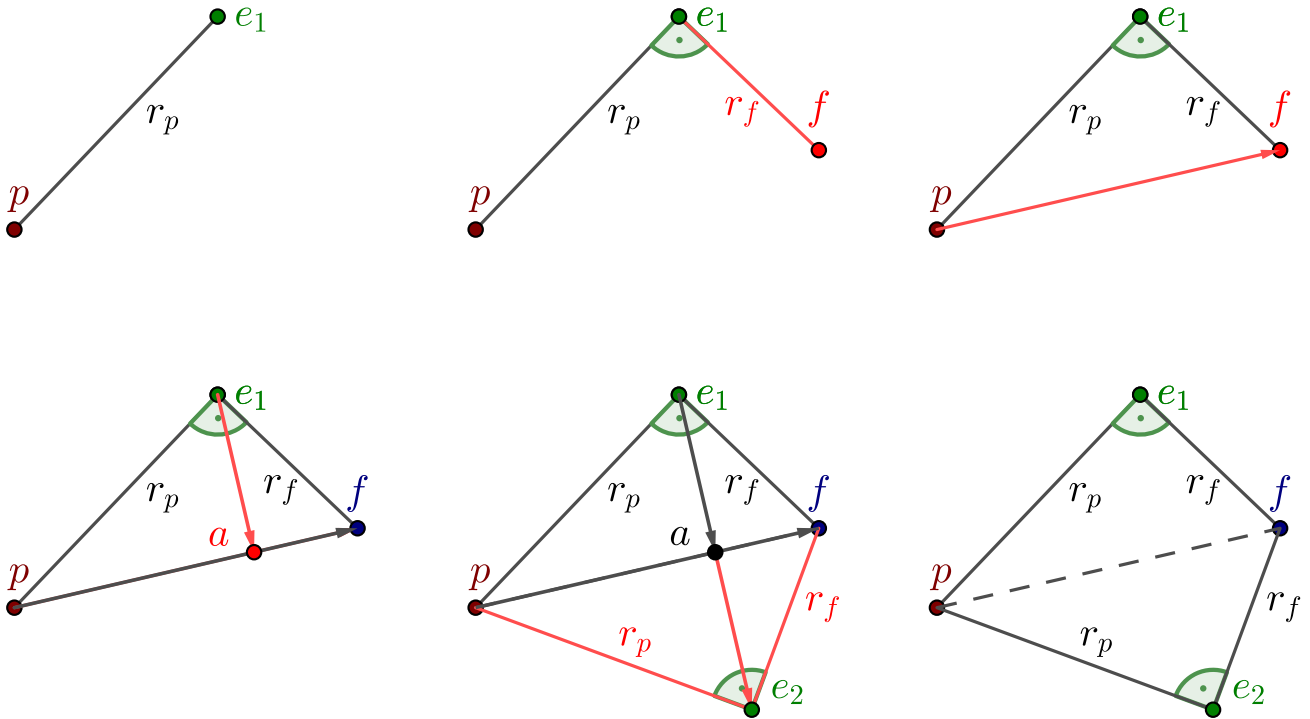


Abbildung 3.7: Beispielfhafte Konstruktion eines rechtwinkligen Drachens.

rechtwinkligen Drachens und die zweiten drei Bedingungen auf die Richtung des rechtwinkligen Drachens, um auszuschließen, dass sich zwei rechtwinklige Drachens überlappen.

1. In jedem rechtwinkligen Drachens muss der Abstand zwischen p und e_1 , und der Abstand zwischen p und e_2 gerade r_p sein, es muss also gelten:

$$|p - e_1| = |p - e_2| = r_p$$

2. In jedem rechtwinkligen Drachens muss der Abstand zwischen f und e_1 , und der Abstand zwischen f und e_2 gerade r_f sein, es muss also gelten:

$$|f - e_1| = |f - e_2| = r_f$$

3. Die Innenwinkel an e_1 und e_2 müssen rechte Winkel sein. Damit dies erfüllt ist, muss nach dem Satz von Pythagoras gelten:

$$|p - f| = \sqrt{r_p^2 + r_f^2}$$

4. Zwei Dreiecke innerhalb eines rechtwinkligen Drachens dürfen sich nicht überlappen. Damit muss der Abstand zwischen e_1 und e_2 echt positiv sein. Dieser Abstand lässt sich auch berechnen. Mit dem Satz des Thales (vergleiche [Euc86, Buch 3, Satz 31, S. 66] und [KK07, S. 144]) und dem Sinussatz (vergleiche [CG67, Thm. 1.11, S. 2]) erhalten wir

$$\frac{r_p r_f \sqrt{r_p^2 + r_f^2}}{2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{r_p^2 + r_f^2} \cdot \bar{a} \right)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{r_p^2 + r_f^2} \Leftrightarrow \frac{r_p r_f}{\bar{a}} = \sqrt{r_p^2 + r_f^2} \Leftrightarrow \bar{a} = \frac{r_p r_f}{\sqrt{r_p^2 + r_f^2}}.$$

Dabei ist $\bar{a}$ die Länge der Strecke zwischen e_1 und dem Punkt a aus Abbildung 3.7, der Wert $\sqrt{r_p^2 + r_f^2}$ die Distanz zwischen p und f , der Wert $\frac{1}{2} \sqrt{r_p^2 + r_f^2} \cdot \bar{a}$ der Flächeninhalt des Dreiecks und der Wert $\frac{1}{2} \sqrt{r_p^2 + r_f^2}$ der

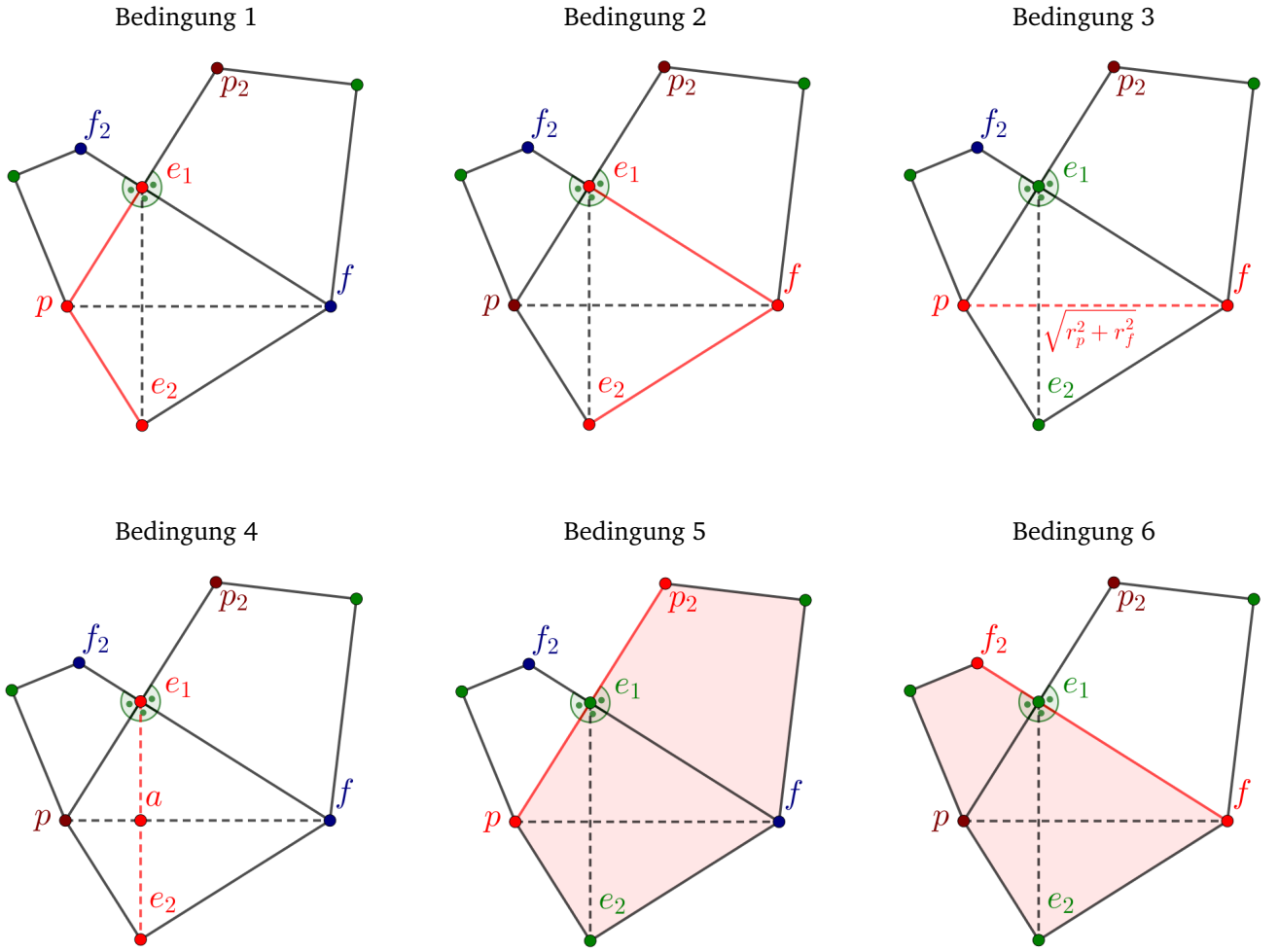


Abbildung 3.8: Illustration der sechs Drachenbedingungen.

Radius des Umkreises des rechtwinkligen Dreiecks. Für die Distanz zwischen e_1 und e_2 ergibt sich entsprechend

$$|e_1 - e_2| = 2\bar{a} = \frac{2r_p r_f}{\sqrt{r_p^2 + r_f^2}}.$$

5. Zwei rechtwinklige Drachen mit einer gemeinsamen Kante, die einen dualen Punkt enthält, dürfen sich nicht überlappen. Für die Abstände der beiden primalen Punkte der beiden rechtwinkligen Drachen muss damit gelten:

$$|p - p_2| = r_p + r_{p_2}$$

6. Zwei rechtwinklige Drachen mit einer gemeinsamen Kante, die einen primalen Punkt enthält, dürfen sich nicht überlappen. Für die Abstände der beiden dualen Punkte der beiden rechtwinkligen Drachen muss damit gelten:

$$|f - f_2| = r_f + r_{f_2}$$

Die Abstände der sechs Bedingungen sind in Abbildung 3.8 illustriert. Die Bedingungen lassen sich als ein homogenes Gleichungssystem für alle bereits gezeichneten rechtwinkligen Drachen darstellen. Die Variablen sind dabei die x - und y -Koordinaten der Knoten. Wir beschreiben eine Gleichung beispielhaft für Bedingung 3, alle anderen Gleichungen

bilden sich analog. Der Abstand von p und f lässt sich als

$$\sqrt{(p_x - f_x)^2 + (p_y - f_y)^2}$$

und die Gleichung daher als

$$\mathbf{q}(p, f) := \sqrt{(p_x - f_x)^2 + (p_y - f_y)^2} - \sqrt{r_p^2 + r_f^2} = 0$$

darstellen, wobei r_p und r_f im Bezug auf das Gleichungssystem Konstanten sind. Wird nach dem Zeichnen eines rechtwinkligen Drachens eine Bedingung durch die aktuelle Darstellung verletzt, so führen wir das Newton-Verfahren analog zu Algorithmus 6 für das Gleichungssystem mit allen Bedingungen der bereits gezeichneten rechtwinkligen Drachen durch. Die Einträge der Hesse-Matrix sind entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_x} \mathbf{q}(p, f) &= \frac{p_x - f_x}{\sqrt{(p_x - f_x)^2 + (p_y - f_y)^2}} & \frac{\partial}{\partial f_x} \mathbf{q}(p, f) &= \frac{f_x - p_x}{\sqrt{(p_x - f_x)^2 + (p_y - f_y)^2}} \\ \frac{\partial}{\partial p_y} \mathbf{q}(p, f) &= \frac{p_y - f_y}{\sqrt{(p_x - f_x)^2 + (p_y - f_y)^2}} & \frac{\partial}{\partial f_y} \mathbf{q}(p, f) &= \frac{f_y - p_y}{\sqrt{(p_x - f_x)^2 + (p_y - f_y)^2}} \end{aligned}$$

und als Startpunkt wählen wir die bereits berechneten Koordinaten des eingeschränkten Vierecksgraphen, da diese bereits sehr nah an einer möglichen Lösung liegen.

Damit haben wir den eingeschränkten Vierecksgraphen konstruiert und können im nächsten Abschnitt das Polytop mittels der inversen stereographischen Projektion erstellen.

3.3.2 Inverse stereographische Projektion und Konstruktion des primalen und dualen Polytops

In diesem Schritt wollen wir die Tangentenpunkte e des im vorherigen Abschnitt konstruierten Vierecksgraphen mithilfe der inversen stereographischen Projektion auf die Einheitssphäre projizieren. Dabei soll der Schwerpunkt der projizierten Tangentenpunkte, wie in Theorem 3.25 beschrieben, im Ursprung liegen. Ziegler geht darauf in [Zie04] nicht mehr ein, da der Fokus seiner Arbeit auf dem Beweis von Theorem 3.35 liegt. Wir führen daher im Folgenden die Konstruktion für das Polytop mit Kantenschwerpunkt 0 aus:

Zunächst haben wir bei der Konstruktion der Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen zwei wesentliche Annahmen getroffen. Mit der ersten Annahme haben wir die Radien r normiert und mit der zweiten Annahme haben wir die äußere Ecke des ersten rechtwinkligen Drachens im Punkt $[0, 0]$ fixiert. Diese beiden Annahmen sind willkürlich getroffen und können daher angepasst werden. Konkret erhalten wir die folgenden drei Freiheitsgrade für den bereits gezeichneten Vierecksgraphen:

1. Verschiebe den eingeschränkten Vierecksgraphen in x -Richtung mit der Konstante $a_x \in \mathbb{R}$.
2. Verschiebe den eingeschränkten Vierecksgraphen in y -Richtung mit der Konstante $a_y \in \mathbb{R}$.
3. Skaliere anschließend den eingeschränkten Vierecksgraphen mit dem Faktor $a_z \in \mathbb{R}$.

Übertragen wir diese Freiheitsgrade auf die Koordinaten der Tangentenknoten des eingeschränkten Vierecksgraphen, erhalten wir für die inverse stereographische Projektion

$$\phi^{-1}((\bar{x} + a_x)a_z, (\bar{y} + a_y)a_z) := \phi_{a_x, a_y, a_z}^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{[2(\bar{x} + a_x)a_z, 2(\bar{y} + a_y)a_z, ((\bar{x} + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y} + a_y)a_z)^2 - 1]}{((\bar{x} + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y} + a_y)a_z)^2 + 1}. \quad (3.6)$$

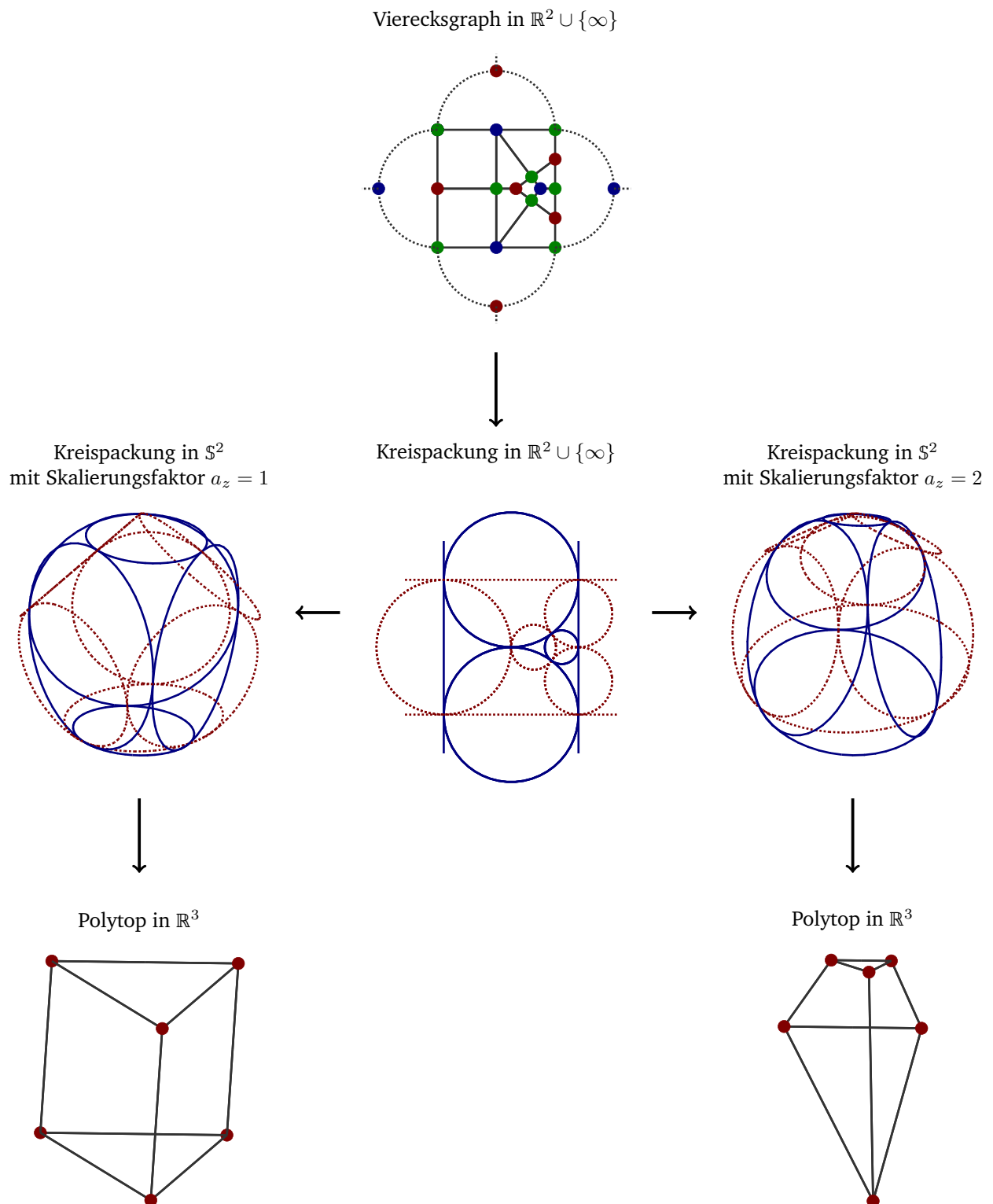


Abbildung 3.9: Die inverse stereographische Projektion der Kreispackung führt mit unterschiedlicher Skalierung zu unterschiedlichen Polytopen. Hier beispielhaft illustriert für zwei verschiedene Skalierungen.

Mit diesen drei Freiheitsgraden können wir also die Projektion auf die Einheitskugel beeinflussen. Dies ist in Abbildung 3.9 zu sehen, bei der in der rechten Spalte der gezeichnete Vierecksgraph vor der Projektion um den Faktor 2 skaliert wurde.

Um diese drei Freiheitsgrade a_x , a_y und a_z zu bestimmen, verwenden wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2(\bar{x}_i + a_x)a_z}{((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 + 1} &= 0 \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2(\bar{y}_i + a_y)a_z}{((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 + 1} &= 0 \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 - 1}{((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 + 1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dieses entsteht dadurch, dass jede Koordinate des Tangentenschwerpunkts 0 ergeben muss. Die $\bar{x}_i$ und $\bar{y}_i$ mit $i \in \{1, \dots, m-1\}$ sind dabei die Koordinaten der Tangentenpunkte des eingeschränkten Vierecksgraphen. Zusammen mit dem Tangentenpunkt $[0, 0, 1]$, der Teil des Vierecksgraphen aber nicht Teil des eingeschränkten Vierecksgraphen und damit unabhängig von der Wahl von a_x , a_y und a_z ist, ergibt sich der Tangentenschwerpunkt in jeder Koordinate durch das obige Gleichungssystem. Damit erhalten wir drei Gleichungen für drei Variablen beziehungsweise Freiheitsgrade.

Dieses Gleichungssystem ist mit der Fassung des Koebe-Andreiev-Thurston-Theorems aus Theorem 3.25 eindeutig lösbar, denn dieses garantiert die Existenz des 3-Polytops mit Tangentenschwerpunkt $\bar{0}$. Dies gilt selbstverständlich auch für den Fall, in dem einer der Tangentenpunkte des 3-Polytops in $(0, 0, 1)$ liegt und in dem die zu diesem Tangentenpunkt gehörenden Kreise der Kreispackung auf das beschriebene Rechteck abgebildet werden. Diese so konstruierte Fixierung stellt die Eindeutigkeit im Bezug auf die Drehungen und Spiegelungen dar, sofern festgelegt wird, welcher Kreis auf welche Gerade abgebildet werden soll. Da die stereographische Projektion eine Bijektion zwischen $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ ist, lassen sich die Tangentenpunkte des 3-Polytops nach $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ abbilden.

Die Rückrichtung gilt durch die Bijektion der stereographischen Projektion entsprechend. Für die Eindeutigkeit des obigen Gleichungssystems müsste allerdings noch das Vorzeichen von a_z festgelegt werden. Dieses spiegelt die x - und y -Koordinaten der Kantenpunkte des eingeschränkten Vierecksgraphen und muss für die Fixierung der Geraden feststehen. Da es für unsere Anwendung genügt, ein 3-Polytop mit Kantenschwerpunkt 0 zu finden, ist die Eindeutigkeit an dieser Stelle jedoch vernachlässigbar, entscheidend ist die Existenz der Lösung.

Das Gleichungssystem (3.7) werden wir ebenfalls mit dem Newton-Verfahren analog zu Algorithmus 6 lösen. Dafür definieren wir zunächst

$$z_z := ((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 - 1 \quad \text{und} \quad z_n := ((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 + 1$$

und betrachten die partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial a_x} 2(\bar{x}_i + a_x)a_z = 2a_z & \frac{\partial}{\partial a_y} 2(\bar{x}_i + a_x)a_z = 0 & \frac{\partial}{\partial a_z} 2(\bar{x}_i + a_x)a_z = 2(\bar{x}_i + a_x) \\ \frac{\partial}{\partial a_x} 2(\bar{y}_i + a_y)a_z = 0 & \frac{\partial}{\partial a_y} 2(\bar{y}_i + a_y)a_z = 2a_z & \frac{\partial}{\partial a_z} 2(\bar{y}_i + a_y)a_z = 2(\bar{y}_i + a_y) \\ \frac{\partial}{\partial a_x} z_z = 2a_z^2(\bar{x}_i + a_x) & \frac{\partial}{\partial a_y} z_z = 2a_z^2(\bar{y}_i + a_y) & \frac{\partial}{\partial a_z} z_z = 2a_z((\bar{x}_i + a_x)^2 + (\bar{y}_i + a_y)^2) \\ \frac{\partial}{\partial a_x} z_n = 2a_z^2(\bar{x}_i + a_x) & \frac{\partial}{\partial a_y} z_n = 2a_z^2(\bar{y}_i + a_y) & \frac{\partial}{\partial a_z} z_n = 2a_z((\bar{x}_i + a_x)^2 + (\bar{y}_i + a_y)^2). \end{array}$$

Die Einträge der Hesse-Matrix M des Gleichungssystems (3.7) ergeben sich entsprechend durch die Kombination der obigen Ableitungen mit der Quotientenregel und der Summe über die $m-1$ Punkte $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$

$$M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(a_z^2 \bar{x}_i^2 + a_z^2 \bar{y}_i^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 2a_z(-a_z^2 \bar{x}_i^2 + a_z^2 \bar{y}_i^2 + 1) & 4a_z^3 \bar{x}_i \bar{y}_i & -2\bar{x}_i(a_z^2 \bar{x}_i^2 + a_z^2 \bar{y}_i^2 - 1) \\ 4a_z^3 \bar{x}_i \bar{y}_i & 2a_z(a_z^2 \bar{x}_i^2 - a_z^2 \bar{y}_i^2 + 1) & -2\bar{y}_i(a_z^2 \bar{x}_i^2 + a_z^2 \bar{y}_i^2 - 1) \\ 4a_z^3 \bar{x}_i & 4a_z^3 \bar{y}_i & 4a_z(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

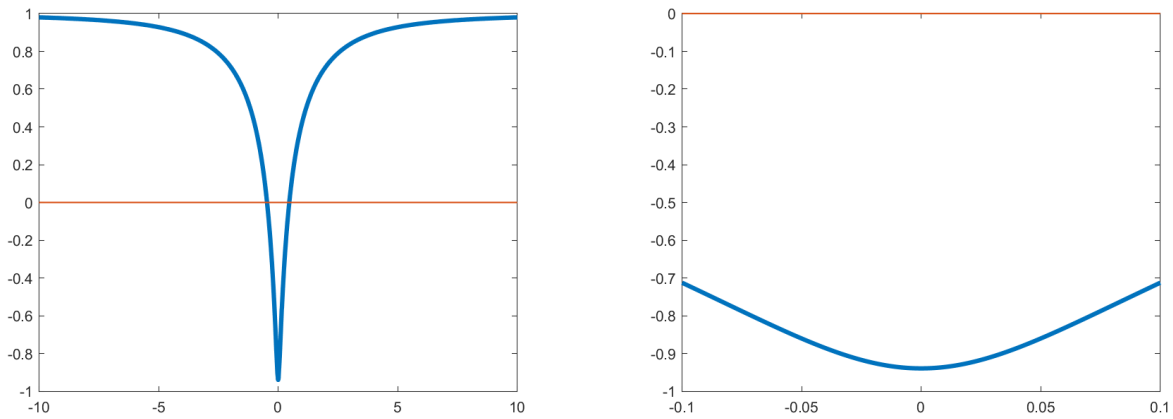


Abbildung 3.10: Der z -Wert des Tangentschwerpunkts in Abhängigkeit von a_z für ein Beispiel mit bereits exakt bestimmten a_x und a_y (links) und die Vergrößerung derselben Kurve um den Nullpunkt der x -Achse. Das Gleichungssystem wird durch die Werte von a_z gelöst, für die die blaue Kurve die rote Null-Linie schneidet. Da das Newtonverfahren auf den Tangenten der blauen Kurve beruht, kann das Verfahren für schlecht gewählte Startpunkte divergieren.

mit

$$\bar{\bar{x}}_i = \bar{x}_i + a_x \quad \text{und} \quad \bar{\bar{y}}_i = \bar{y}_i + a_y.$$

Da der Punkt $[0, 0, 1]$ nicht abhängig von den drei Variablen ist, hat er keinen Einfluss auf die Hesse-Matrix. Damit haben wir alle benötigten Komponenten für das Newton-Verfahren beschrieben.

Für das Ermitteln der Freiheitsgrade a_x , a_y und a_z ist das Newton-Verfahren allerdings höchst instabil. Dies kann man an folgendem Beispiel illustrieren: Nehmen wir für ein konkretes Beispiel an, wir hätten die exakten Werte für a_x und a_y bereits gefunden und wollten nur noch den Wert für a_z bestimmen. Dann hätte die dritte Gleichung als Funktion in Abhängigkeit von a_z die in Abbildung 3.10 illustrierte Gestalt. Diese Gestalt wurde für verschiedene Tests in ähnlicher Form reproduziert, es ist also anzunehmen, dass das Gleichungssystem diese Charakteristik aufweist. Wählt man also den Startpunkt des Newton-Verfahrens nicht nah genug an der Lösung, so divergiert das Newton-Verfahren.

Um dem entgegenzuwirken und einen möglichst guten Startwert für das Newton-Verfahren zu finden, nutzen wir eine Heuristik. Zunächst bildet die stereographische Projektion Punkte auf der unteren Halbkugel der Sphäre auf das Innere des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ ab und Punkte auf der oberen Halbkugel der Sphäre werden auf Punkte außerhalb des Einheitskreises abgebildet. Wenn wir davon ausgehen, dass die Tangentenpunkte annähernd gleich auf die Nord- und Südseite der Sphäre aufgeteilt sind, so ist die Punktdichte des eingeschränkten Vierecksgraphen für Punkte, die zur Südseite gehören, dichter, als für Punkte, die zur Nordseite gehören. Gehen wir zudem auf der Sphäre weiter Richtung Südpol, so steigt auch die Punktdichte im eingeschränkten Vierecksgraphen. Daher ist der Knoten des eingeschränkten Vierecksgraphen mit dem geringsten mittleren Abstand zu seinen Nachbarn ein guter Startwert für die x - und y -Verschiebung des Vierecksgraphen. Dieser wird entsprechend so verschoben, dass der Punkt mit dem geringsten mittleren Abstand in $[0, 0]$ liegt. Mit dieser Heuristik und Algorithmus 8 können wir die Freiheitsgrade für die inverse stereographische Projektion bestimmen. Die einzelnen Schritte des Algorithmus werden im Folgenden erklärt.

Initialisierung und Punktabstand Zuerst wird jedem gezeichneten Punkt des eingeschränkten Vierecksgraphen ein Wert zugewiesen, der als *Punktabstand* bezeichnet wird. Für die primalen Punkte p und die dualen Punkte f ist der Abstand der Radius der entsprechenden Kreise. Für die Tangentenpunkte ist der Abstand der durchschnittliche Abstand zu den vier Nachbarpunkten. Wir gehen davon aus, dass ein Startpunkt für das Newton-Verfahren im inneren Bereich des eingeschränkten Vierecksgraphen liegt. Daher wird für Punkte auf dem Rand des Graphen der

Algorithmus 8: BerechneFreiheitsgradeDerInversenStereographischenProjektion**Data:** Koordinaten der Knoten des eingeschränkten Vierecksgraphen $P = (P_x, P_y)$ **Result:** Freiheitsgrade der inversen stereographischen Projektion a_x, a_y, a_z

```

1 begin
2    $P_z = \text{Nullvektor der Dimension } |P| \times 1;$ 
3   Punktabstand = Nullvektor der Dimension  $|P| \times 1;$ 
4   LösungGefunden = false;
5   foreach  $P_{(i,:)}$  in  $P$  do
6     Punktabstand = Bestimme die mittlere Distanz von  $P_i$  zu dessen Nachbarn;
7     if  $P_i$  liegt auf dem Rand des eingeschränkten Vierecksgraphen then
8       Punktabstand =  $\infty$ ;
9   Sortiere die Punkte aufsteigend nach deren Punktabstand;
10   $i = 1;$ 
11  while LösungGefunden == false &&  $i \leq |P|$  do
12    Setze  $b_x = -(P_x)_{(i)}$  und  $b_y = -(P_y)_{(i)}$ ;
13    Finde  $b_z$  mit  $\sum_j \frac{(z_z)_i}{(z_n)_j} = 0$  für  $a_z = b_z$ ,  $a_x = b_x$  und  $a_y = b_y$  mithilfe des
      Intervallschachtelungsverfahrens;
14    Setze  $(P_z)_{(i)} := b_z$ ;
15    Benutze das Newton-Verfahren mit den Startwerten  $b_x, b_y, b_z$  um  $a_x, a_y, a_z$  zu bestimmen;
16    if das Newton-Verfahren war erfolgreich then
17      LösungGefunden = true;
18     $i = i + 1;$ 
19   $i = 1;$ 
20  while LösungGefunden == false &&  $i \leq |P|$  do
21    Setze  $b_x = -(P_x)_{(i)}$ ,  $b_y = -(P_y)_{(i)}$  und  $b_z = -(P_z)_{(i)}$ ;
22    Benutze fsolve mit den Startwerten  $b_x, b_y, b_z$  um  $a_x, a_y, a_z$  zu bestimmen;
23    if fsolve war erfolgreich then
24      LösungGefunden = true;
25     $i = i + 1;$ 
26  if LösungGefunden == false then
27    error('Die Freiheitsgrade der inversen stereographischen Projektion konnten nicht berechnet werden');
28  else
29    return  $a_x, a_y, a_z$ ;

```

Punktabstand auf ∞ gesetzt.

Nach der Bestimmung der Punktabstandswerte werden die Punkte in aufsteigender Reihenfolge im Bezug auf den Punktabstand sortiert. Damit wird der Punkt mit dem geringsten Punktabstand im weiteren Teil des Algorithmus zuerst betrachtet.

Die Variable P_z wird dafür benötigt, dass die Startwerte für a_z im zweiten Teil des Algorithmus nicht erneut berechnet werden müssen. Die Variable *LösungGefunden* ermöglicht, dass der Algorithmus nach erfolgreicher Suche abbricht und nicht erneut für andere Startwerte nach einer Lösung sucht.

Generelle Struktur Nach der Initialisierung versucht der Algorithmus die Werte a_x, a_y und a_z zu finden. Dafür verwenden wir zwei Methoden, nämlich das Newton-Verfahren (siehe erster Teil von Algorithmus 6) und den *fsolve*-Befehl von Matlab [Matc], wobei der *fsolve*-Befehl nur verwendet wird, wenn das Newton-Verfahren zu keiner Lösung führt. Für beide Strategien benötigen wir zunächst Startwerte b_x, b_y und b_z , die in Abhängigkeit zu den Koordinaten der Knoten des eingeschränkten Vierecksgraphen gewählt werden. Mit diesen Startwerten versuchen wir, eine Lösung für das obige System zu finden. Wenn eine Lösung gefunden wurde, bricht der Algorithmus ab

und gibt die Lösung zurück. Falls nicht, versucht er es erneut mit den Startwerten zu einem anderen Koordinatenpunkt.

Schlägt das Newton-Verfahren für alle Startwerte fehl, so versuchen wir, eine Lösung mit dem Standardlöser von Matlab für dieselben Startwerte zu finden. Gelingt dies ebenfalls nicht, so gibt der Algorithmus einen Fehler aus.

Startwertberechnung für das Newton-Verfahren Wie bereits erwähnt, verwenden wir als Startwerte für a_x und a_y den negativen Koordinatenwert des Punkts mit dem niedrigstem Punktabstandswert, um die Realisierung des eingeschränkten Vierecksgraphen so zu verschieben, dass besagter Punkt im Ursprung liegt. Damit benötigen wir nur noch einen geeigneten Startwert für a_z . Dazu schauen wir uns das Verhalten der dritten Koordinate der inversen stereographischen Projektion für die Variation von a_z an. Diese ist nach Gleichung (3.6)

$$\frac{((\bar{x} + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y} + a_y)a_z)^2 - 1}{((\bar{x} + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y} + a_y)a_z)^2 + 1} =: \frac{ca_z^2 - 1}{ca_z^2 + 1} \quad \text{mit} \quad c := (\bar{x} + a_x)^2 + (\bar{y} + a_y)^2 \geq 0. \quad (3.9)$$

Für $c = 0$ ist dieser Ausdruck konstant -1 . Nehmen wir an, dass $c > 0$ gilt. Leiten wir den Ausdruck (3.9) nach a_z ab, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial a_z} \left(\frac{ca_z^2 - 1}{ca_z^2 + 1} \right) = \frac{4ca_z}{(ca_z^2 + 1)^2}. \quad (3.10)$$

Mit $c > 0$ ist der Nenner des Ausdrucks (3.10) echt größer als 0 für alle a_z . Zudem kann mit $c > 0$ der Zähler des Ausdrucks (3.10) nur dann zu 0 werden, wenn $a_z = 0$ gilt. Mit dem Einsetzen verschiedener Werte und aufgrund der Stetigkeit ergibt sich, dass der Ausdruck (3.9) für $c > 0$ in $a_z = 0$ ein globales Minimum besitzt. Der Ausdruck (3.10) ist zudem für $a_z > 0$ größer als 0 und für $a_z < 0$ kleiner als 0.

Schlussfolgerungen daraus sind: Für $c = 0$ ist die dritte Koordinate der inversen stereographischen Projektion des zugehörigen Punkts unabhängig von a_z gleich -1 . Ist hingegen $c > 0$ und $a_z = 0$, so ist die dritte Koordinate der inversen stereographischen Projektion des zugehörigen Punkts ebenfalls gleich -1 .

Für $a_z > 0$ ist die dritte Koordinate der inversen stereographischen Projektion des zugehörigen Punkts mit steigendem a_z streng monoton wachsend, ebenso wie für $a_z < 0$ die dritte Koordinate der inversen stereographischen Projektion des zugehörigen Punkts mit fallendem a_z ebenfalls streng monoton wachsend ist. Da der Grenzwert des Ausdruck (3.9) für $|a_z| \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert, steigt also die dritte Koordinate der inversen stereographischen Projektion für betragsmäßig steigendes a_z .

Geometrisch wird durch das Variieren von a_z die Projektion eines Punktes mittels der inversen stereographischen Projektion auf dem zugehörigen Längengrad der Einheitssphäre variiert. Indem wir also $|a_z|$ erhöhen, verschieben wir einen Punkt auf der Sphäre entlang seines Längengrads Richtung $[0, 0, 1]$. Dieses Verhalten wird in Abbildung 3.11 illustriert.

Dieses Verhalten überträgt sich auf den Schwerpunkt der Tangentenpunkte. Dies können wir uns auch anhand der Gleichung (3.7) der dritten Koordinate des Tagentenschwerpunkts klar machen. Für $a_z > 0$ erhalten wir

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 - 1}{((\bar{x}_i + a_x)a_z)^2 + ((\bar{y}_i + a_y)a_z)^2 + 1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\bar{x}_i + a_x)^2 + (\bar{y}_i + a_y)^2 - \frac{1}{a_z^2}}{(\bar{x}_i + a_x)^2 + (\bar{y}_i + a_y)^2 + \frac{1}{a_z^2}} =: \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{c_i - \frac{1}{a_z^2}}{c_i + \frac{1}{a_z^2}}$$

mit $c_i \geq 0$. Sei $a'_z > a_z$. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{c_i - \frac{1}{a_z^2}}{c_i + \frac{1}{a_z^2}} < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{c_i - \frac{1}{a_z'^2}}{c_i + \frac{1}{a_z'^2}} < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{c_i - \frac{1}{a_z'^2}}{c_i + \frac{1}{a_z'^2}}.$$

Die dritte Koordinate des Schwerpunkts der Tangentenpunkte ist also für $a_z > 0$ mit steigendem a_z streng monoton wachsend.

Da wir einen Startwert b_z für a_z mit gegebenen b_x und b_y finden wollen, der möglichst nahe an einer Lösung liegt,

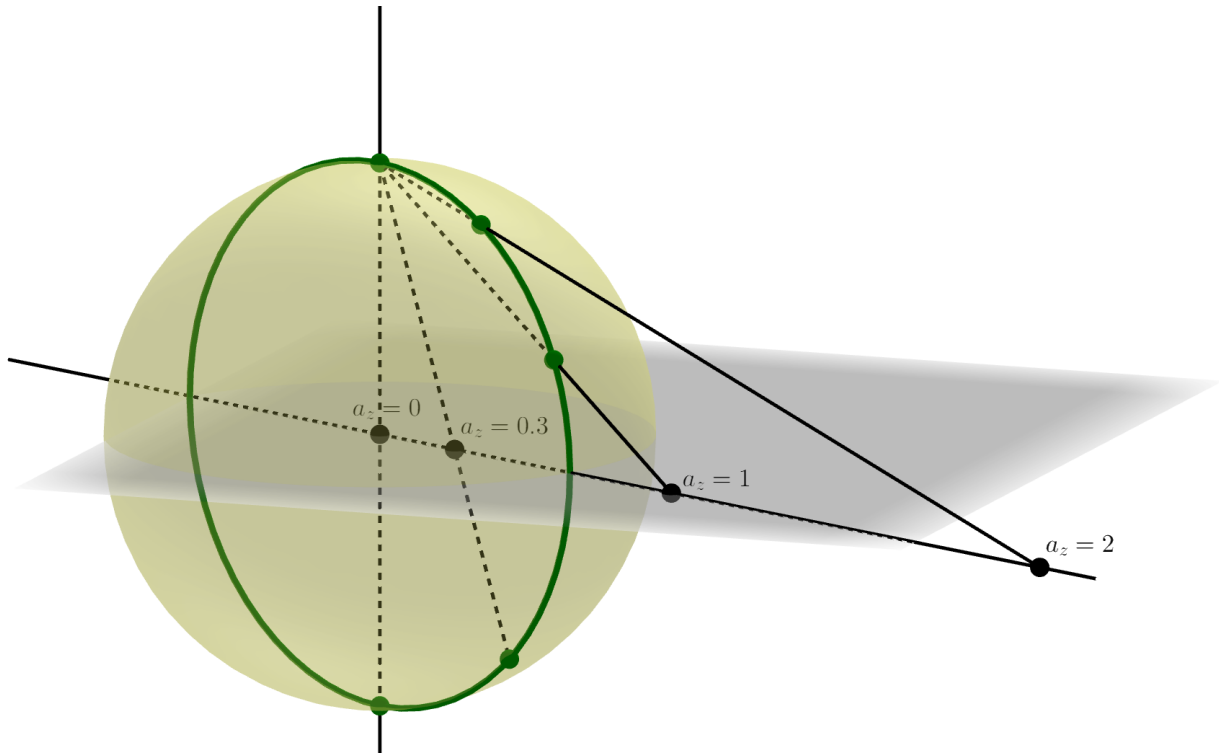


Abbildung 3.11: Ein Punkt wird in der $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ Ebene um den Faktor a_z gestreckt. Die auf die Sphäre projizierten Punkte werden dabei auf einem Längengrad verschoben.

wählen wir b_z so, dass die dritte Koordinate des Tangentschwerpunkts gleich 0 ist, also dass

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{((\bar{x}_i + b_x)b_z)^2 + ((\bar{y}_i + b_y)b_z)^2 - 1}{((\bar{x}_i + b_x)b_z)^2 + ((\bar{y}_i + b_y)b_z)^2 + 1} = 0$$

erfüllt ist. Für $b_z = 0$ ist die dritte Koordinate des Tangentschwerpunkts negativ. Durch die Monotonie existiert für $b_z > 0$ also nur eine Nullstelle, die wir mit dem Intervallschachtelungsverfahren bestimmen können. Dieses ist in Algorithmus 9 beschrieben und nähere Informationen finden sich beispielsweise in [Kön04, Abschn. 2.3 I, S. 11–13].

Im Intervallschachtelungsverfahren werden zunächst Grenzen gesucht, für die die dritte Koordinate des Tangentschwerpunkts kleiner ($b_l = 0$) und größer (b_r) als 0 ist. Danach bestimmen wir jeweils die dritte Koordinate des Tangentschwerpunkts für die Mitte des Intervalls $(b_l + b_r)/2$. Ist dieser kleiner als 0, so wird die linke Grenze (b_l) angepasst. Ist dieser größer als 0, so wird entsprechend die rechte Grenze (b_r) angepasst. Dies geschieht so lange, bis die dritte Koordinate des Tangentschwerpunkts nah genug (in unserem Fall besser als 10^{-13}) am Zielwert (0) liegt. Das Resultat nutzen wir anschließend als Startwert b_z .

Bestimme a_x , a_y und a_z Nach der Bestimmung der Startwerte b_x , b_y und b_z verwenden wir das Newton-Verfahren, wie bereits beschrieben. Den Gradienten haben wir bereits in Gleichung (3.7) und die Hesse-Matrix in Gleichung (3.8) konstruiert. In den Abbildungen 3.13 und 3.14 ist jeweils eine Grafik zu sehen, in der eingefärbt ist, für welche Startwerte das Newton-Verfahren erfolgreich war. Wir sehen, dass für diese Beispiele die Heuristik die inverse stereographische Projektion berechnen konnte. Der grüne zulässige Bereich liegt außerdem in der Umgebung, in der die Knoten des Graphen am dichtesten zusammenliegen. Insgesamt wurden für diese Arbeit über 300.000 verschiedene Polytope konstruiert (siehe Abschnitt 3.1.1). Die Konstruktion der inversen stereographischen Projektion war für jedes Beispiel möglich, was darauf hindeutet, dass die Heuristik sinnvoll gewählt ist.

Als Back-up haben wir trotzdem noch den Standardlöser `fsolve` von Matlab hinzugenommen. Dieser funktioniert hier ebenfalls mit einer akzeptablen Laufzeit, da er nur ein System aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten lösen muss.

Algorithmus 9: Intervallschachtelungsverfahren

Data: Koordinaten der Tangentenpunkte des eingeschränkten Vierecksgraphen $P = (P_x, P_y)$, Startwerte b_x und b_y für a_x und a_y

Result: Startwert b_z für a_z

```

1 begin
2    $b_l = 0$ ;
3    $b_r = 1$ ;
4    $m = |P| + 1$ ;
5   for  $i = 1 : |P|$  do
6      $c_i = ((P_x)_i + b_x)^2 + ((P_y)_i + b_y)^2$ ;
7   GrenzeGefunden = false;
8   while GrenzeGefunden == false do
9      $z = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_i \frac{c_i - \frac{1}{b_z^2}}{c_i + \frac{1}{b_z^2}}$ ;
10    if  $z > 0$  then
11      GrenzeGefunden = true;
12    else
13       $b_r = 10 \cdot b_r$ ;
14   $b_z = \frac{b_l + b_r}{2}$ ;
15   $z = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_i \frac{c_i - \frac{1}{b_z^2}}{c_i + \frac{1}{b_z^2}}$ ;
16  while  $|z| > 10^{-13}$  do
17    if  $z < 0$  then
18       $b_l = b_z$ ;
19    else
20       $b_r = b_z$ ;
21     $b_z = \frac{b_l + b_r}{2}$ ;
22     $z = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_i \frac{c_i - \frac{1}{b_z^2}}{c_i + \frac{1}{b_z^2}}$ ;
23  return  $b_z$ ;

```

Mit der inversen stereographischen Projektion ist es jetzt möglich, das Polytop zu konstruieren. Dafür werden zunächst alle Tangentenpunkte e des eingeschränkten Vierecksgraphen direkt auf die Sphäre projiziert. Der Tangentenpunkt in ∞ wird zudem auf den Punkt $[0, 0, 1]$ abgebildet. Wir beschreiben die jeweiligen Tangentialebenen an die Einheitssphäre in den projizierten Tangentenpunkten durch die Normalenform

$$(x - e)\vec{n} = 0.$$

Dabei ist x ein Punkt auf der Ebene, e der Tangentenpunkt und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene. In diesem speziellen Fall gilt $\vec{n} = e$ und wir erhalten

$$(x - e)e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, e \rangle = \langle e, e \rangle = 1.$$

Die Verbindungslinie von zwei primalen (dualen) Punkten soll nach Konstruktion tangential zur Sphäre verlaufen. Damit liegen alle primalen (dualen) Punkte des Polytops in den Tangentialebenen der zugehörigen Tangentenpunkte. Dies ist in Abbildung 3.12 illustriert. Wir können daher aus der obigen Gleichung ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} p = \vec{1} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} f = \vec{1}$$

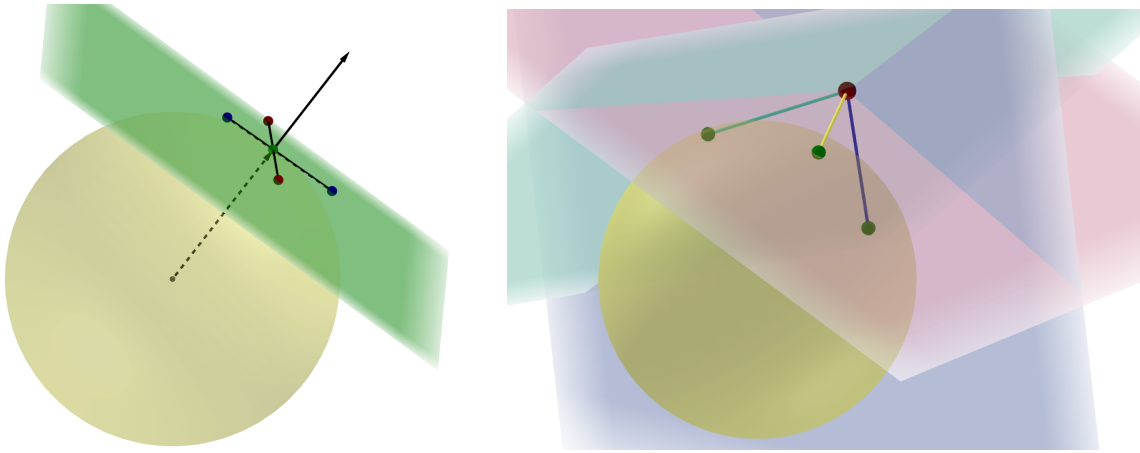


Abbildung 3.12: Tangentialebene in einem Tangentialpunkt mit den zwei zugehörigen primalen und dualen Punkten, die auf der Ebene liegen (links) und drei Tangentialebenen zu drei Tangentialpunkten, deren Schnitt ein primaler Punkt ist (rechts).

für jeden primalen und dualen Punkt bilden. Dabei sind $e_1, \dots, e_n$ die Tangentialpunkte, die im Vierecksgraphen eine Verbindung zum jeweiligen primalen oder dualen Punkt haben. Da sowohl die primalen als auch die dualen Graphen 3-zusammenhängend sind, besitzt jeder Punkt mindestens drei Nachbarn und das Gleichungssystem ist damit für jeden Punkt eindeutig lösbar. Besitzt ein Punkt mehr als drei Nachbarn, so verwenden wir zum Lösen des Gleichungssystems das lineare Ausgleichsproblem

$$\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \vec{1} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \vec{1}. \quad (3.11)$$

Es wäre in diesem Fall auch möglich, nur drei Gleichungen zufällig auszuwählen. Da die Koordinaten der Tangentialpunkte aber mit numerischen Fehlern behaftet sind, ist das lineare Ausgleichsproblem hier sinnvoll. Nachdem wir dies für jeden primalen und dualen Knoten durchgeführt haben, ist damit das Polytop vollständig konstruiert. In den Abbildungen 3.13 und 3.14 sind die einzelnen Schritte des gesamten Kapitels zur Konstruktion der Polytope an zwei etwas komplexeren Beispielen zu sehen.

Wir schließen diesen Abschnitt mit vier Aussagen über die konstruierten konvexen Polytope ab. Wir beginnen dabei mit dem folgenden Lemma, das, leicht anders formuliert, in [Cas89, Num. 2, S. 2] zu finden ist:

Lemma 3.38. Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre und $\mathbf{M}$ eine Ebene, die $\mathbb{S}^2$ schneidet. Sei $\mathbf{M}$ dabei eine Ebene, die nicht tangential an $\mathbb{S}^2$ liegt und die keine Ursprungsebene ist. Sei zudem $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene $\mathbf{M}$ der Länge 1, der vom Ursprung in Richtung der Ebene zeigt. Dann ist der Schnitt von $\mathbf{M}$ und $\mathbb{S}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt a . Außerdem hat der Ortsvektor von a dieselbe Richtung wie der Normalenvektor $\vec{n}$.

Beweis. Sei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene $\mathbf{M}$ und sei a der Schnitt der Ebene $\mathbf{M}$ mit der von $\vec{n}$ aufgespannten Ursprungsgeraden. Sei außerdem c ein beliebiger Punkt des Schnitts von $\mathbf{M}$ und $\mathbb{S}^2$. Dann hat das Dreieck $(0, a, c)$ einen rechten Winkel in a , da der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene steht. Der Abstand zwischen a und c kann dann mit dem Satz von Pythagoras durch

$$|a - c| = \sqrt{|c|^2 - |a|^2} = \sqrt{1 - |a|^2}$$

berechnet werden. Die Länge des Ortsvektors von c ist dabei 1, da c auf der Sphäre liegt. Damit hängt aber der Abstand von a zu jedem Punkt auf dem Schnitt zwischen $\mathbf{M}$ und $\mathbb{S}^2$ nur von a ab und ist damit konstant. Also ist der Schnitt zwischen $\mathbf{M}$ und $\mathbb{S}^2$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{1 - |a|^2}$ und Mittelpunkt a . Da a als Schnitt zwischen der Ebene $\mathbf{M}$ und der durch die Normale aufgespannten Ursprungsgeraden definiert wurde, zeigt der Ortsvektor des Kreismittelpunkts in dieselbe Richtung wie der Normalenvektor der Ebene $\mathbf{M}$. Eine Illustration des Beweises findet sich in Abbildung 3.15. $\square$

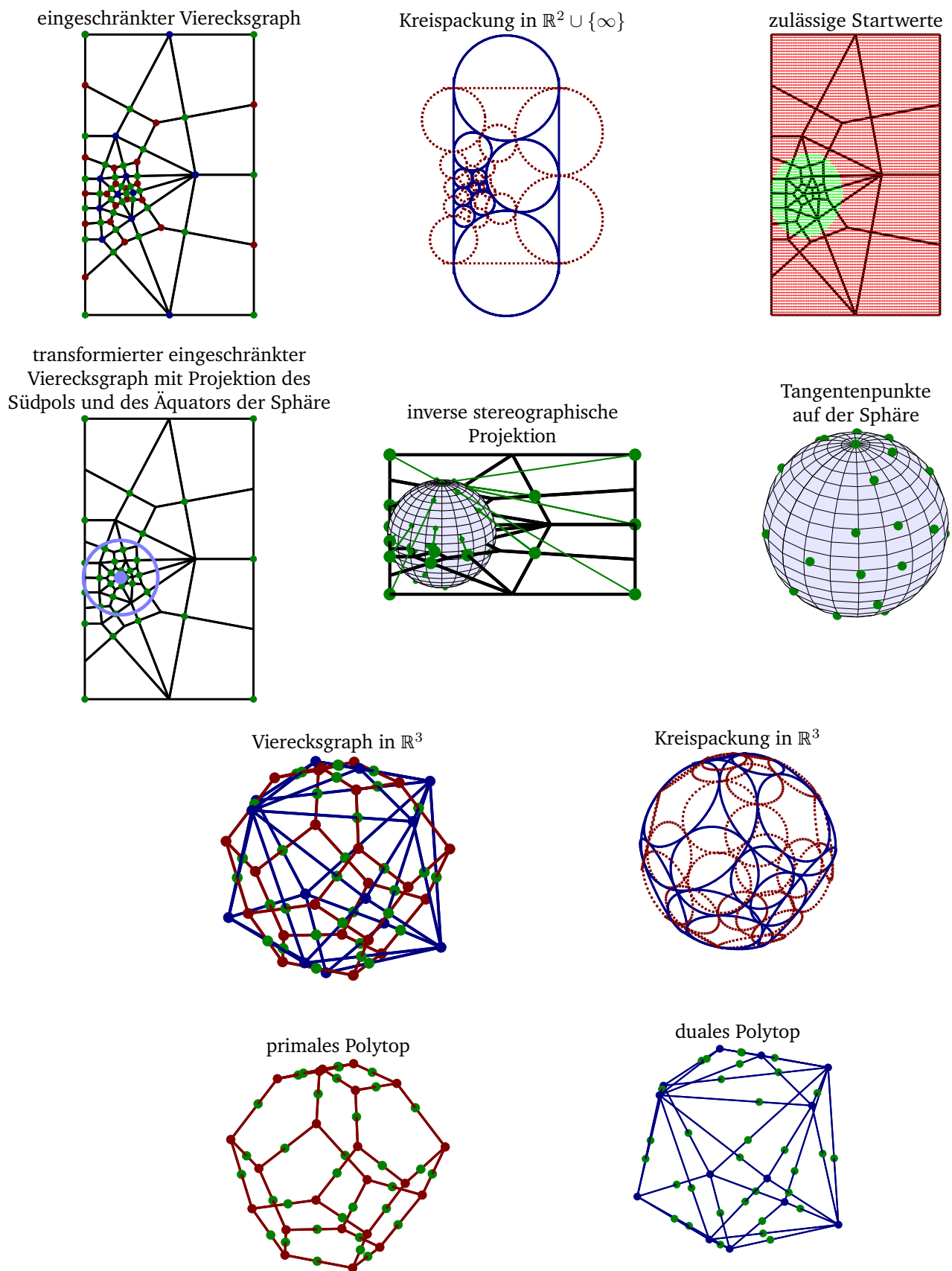


Abbildung 3.13: Die einzelnen Schritte der Konstruktion eines Polytops, hier beispielhaft für ein unsymmetrisches Polytop.

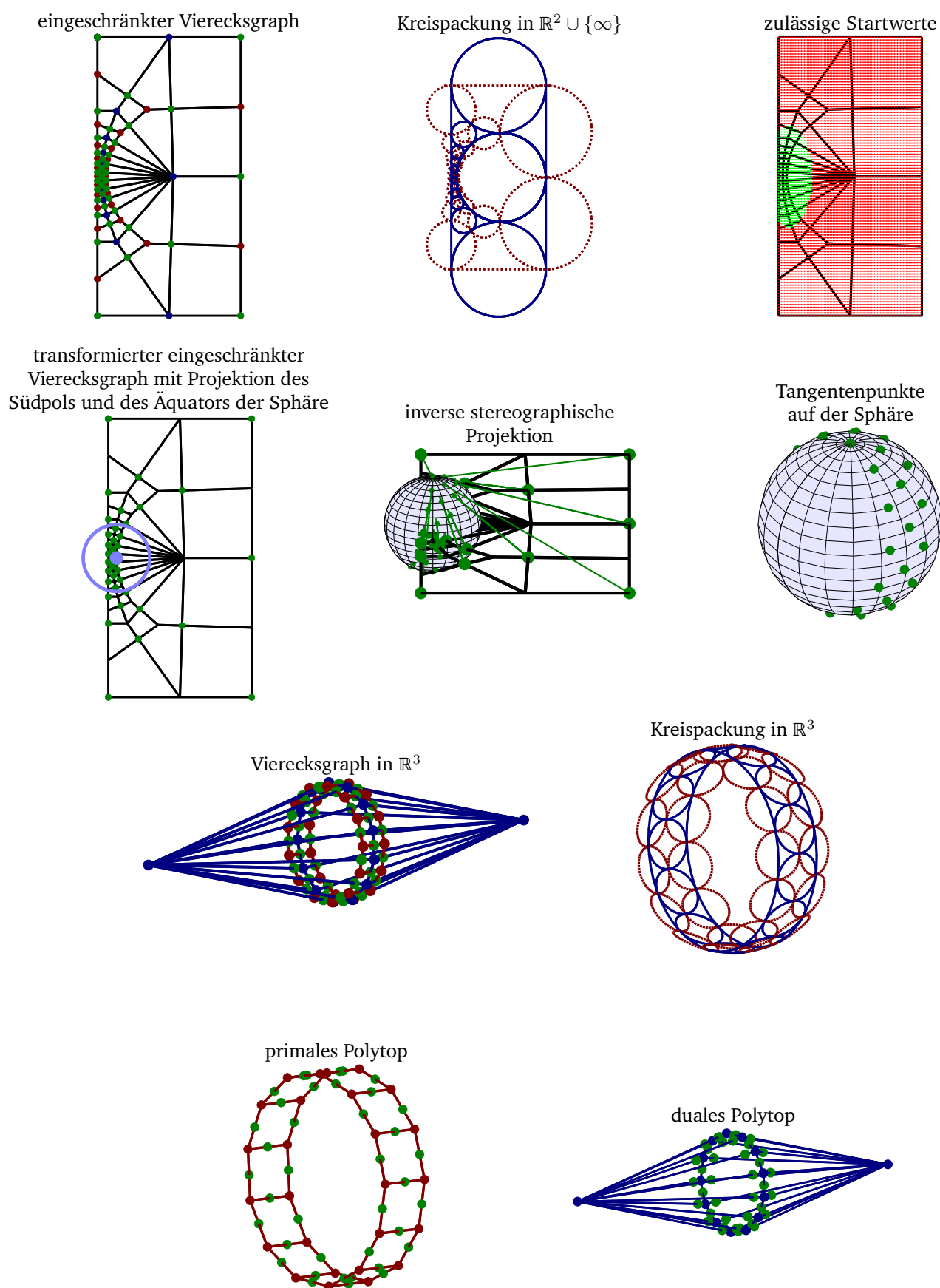


Abbildung 3.14: Die einzelnen Schritte der Konstruktion eines Polytops, hier beispielhaft für ein 13-seitiges Prisma.

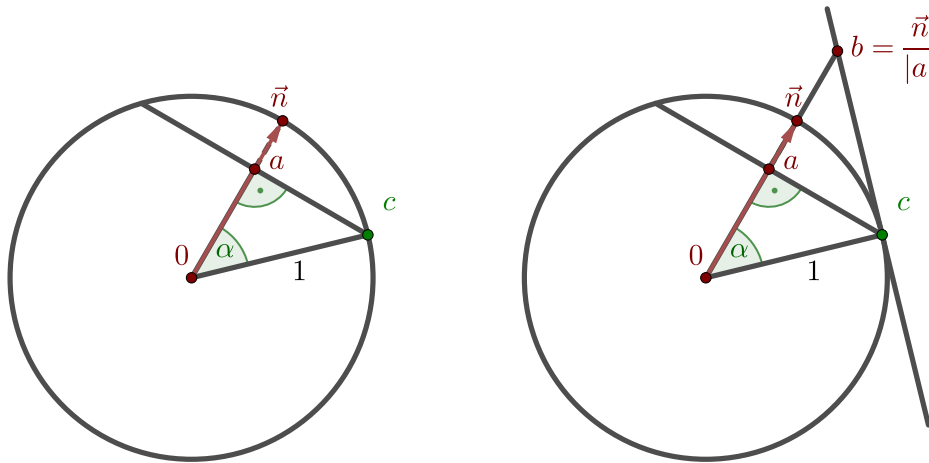


Abbildung 3.15: Skizze der Beweise von Lemma 3.38 (links) und Lemma 3.39 (rechts). Da alle Punkte in einer Ebene liegen, wurde hier nur die entsprechende Ebene gezeichnet.

Das folgende Lemma basiert auf dem obigen und beschreibt eine alternative Berechnungsmethode der primalen und dualen Punkte des Polytops:

Lemma 3.39. Sei S^2 die Einheitskugel und M eine Ebene, die S^2 schneidet. Sei $\mathbf{M}$ dabei eine Ebene, die nicht tangential an S^2 liegt und die keine Ursprungsebene ist. Sei zudem $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene $\mathbf{M}$ der Länge 1, der vom Ursprung in Richtung der Ebene zeigt und sei a der Mittelpunkt des Kreises des Schnitts von $\mathbf{M}$ und S^2 und c ein beliebiger Punkt dieses Schnitts. Der Punkt

$$b := \frac{1}{|a|} \vec{n} = \frac{1}{|a|^2} a$$

liegt auf der Tangentialebene von $\mathbb{S}^2$ durch den Punkt c .

Beweis. Wie bereits erwähnt, kann die Tangentialebene an die Sphäre im Punkt c mithilfe der Normalenform durch

$$\langle x, c \rangle = \langle c, c \rangle = 1$$

ausgedrückt werden. Betrachten wir $\langle b, c \rangle$, so erhalten wir

$$\langle b, c \rangle = \left\langle \frac{1}{|a|} \vec{n}, c \right\rangle = \frac{1}{|a|} \langle \vec{n}, c \rangle.$$

Sei α der Winkel zwischen $\vec{n}$ und dem Ortsvektor von c . Dann erhalten wir mit der Definition des Skalarprodukts

$$\langle b, c \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \vec{n}, c \rangle = \frac{1}{|a|} |c| |\vec{n}| \cos(\alpha) = \frac{1}{|a|} \cos(\alpha).$$

Da der Ortsvektor von a und $\vec{n}$ in dieselbe Richtung zeigen, ist der Winkel zwischen a und c gerade α . Da das Dreieck $(0, a, c)$ rechtwinklig ist, können wir $\cos(\alpha)$ zu

$$\cos(\alpha) = \frac{|a|}{|c|} = |a|$$

umschreiben. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\langle b, c \rangle = \frac{1}{|a|} \cos(\alpha) = \frac{1}{|a|} |a| = 1$$

und damit liegt der Punkt b auf der Tangentialebene durch den Punkt c . Eine Illustration des Beweises findet sich in Abbildung 3.15. □

Mit diesem Lemma können wir direkt das folgende Korollar formulieren:

Korollar 3.40. *Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre und $\mathbf{M}$ eine Ebene, die $\mathbb{S}^2$ schneidet. Sei $\mathbf{M}$ dabei eine Ebene, die nicht tangential an $\mathbb{S}^2$ liegt und die keine Ursprungsebene ist. Sei der Schnitt von $\mathbb{S}^2$ und $\mathbf{M}$ ein primaler oder dualer Kreis der dreidimensionalen Kreispackung mit Mittelpunkt a . Dann ist der Punkt*

$$b := \frac{1}{|a|^2} a$$

eine Ecke des primalen beziehungsweise dualen Polytops, die zum entsprechenden Kreis der Kreispackung gehört.

Beweis. Da der Punkt b in jeder Tangentialebene von jedem Punkt des Kreises liegt, liegt er auch im Schnitt aller Tangentialebenen. Da der primale beziehungsweise duale Punkt als eben dieser Schnitt von endlich vielen Tangentialebenen definiert ist, ist b gerade dieser Punkt. $\square$

Unsere Konstruktion verwendet für die Berechnung der primalen und dualen Punkte zwar das beschriebene Gleichungssystem (3.11), allerdings sind diese drei Aussagen aus theoretischer Sicht nützlich. Insbesondere lässt sich so die Projektion der Ecken des Polytops auf die Schnittebene beschreiben. Denn mit

$$|p| = \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{|p|} \quad \text{beziehungsweise} \quad |f| = \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{|f|}$$

erhält man

$$a = \frac{|a|}{|p|} p = |a|^2 p = \frac{1}{|p|^2} p \quad \text{beziehungsweise} \quad a = \frac{|a|}{|f|} f = |a|^2 f = \frac{1}{|f|^2} f. \quad (3.12)$$

Diese Gleichung werden wir unter anderem in Kapitel 6 benötigen.

Wir verwenden die bereits bewiesenen Aussagen für das nächste Lemma, welches sich auf das duale Polytop bezieht. Wir wollen zeigen, dass das konstruierte duale Polytop das polar duale Polytop aus Definition 3.6 ist.

Lemma 3.41. *Das in diesem Abschnitt konstruierte duale Polytop $\mathbf{P}^*$ zu $\mathbf{P}$ ist das polar duale Polytop zu $\mathbf{P}$.*

Beweis. Da die Kanten des Polytops tangential zur Sphäre liegen, beinhaltet das konstruierte Polytop den Ursprung. Sei p eine Ecke des primalen Polytops. Dann müssen wir zeigen, dass die zugehörige Facette des dualen Polytops als Teilmenge von

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid px = 1\}$$

beschrieben werden kann. Ist dies der Fall, so ist mit Theorem 3.7 das konstruierte Polytop gerade das polar duale Polytop. Ist p der primale Punkt, so ist mit Korollar 3.40 der Punkt

$$a := \frac{1}{|p|^2} p \quad (3.13)$$

der Mittelpunkt des primalen Kreises. Da die Tangentenpunkte des primalen und dualen Polytops gleich sind, liegen die zugehörigen Tangentenpunkte des dualen Polytops auf dem primalen Kreis und der primale Kreis liegt in einer Facette des dualen Polytops. Da mit Lemma 3.39 der Ortsvektor des Mittelpunkts des Kreises und der Normalenvektor der zugehörigen Ebene in dieselbe Richtung zeigen, lässt sich die Ebene mithilfe der Normalenform durch

$$(x - a)\vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - a) \frac{a}{|a|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle x, \frac{a}{|a|} \right\rangle - \left\langle a, \frac{a}{|a|} \right\rangle = 0$$

beschreiben. Da die Länge von a gerade $1/|p|$ ist, erhalten wir unter Verwendung der Definition von a in Gleichung (3.13)

$$\left\langle x, \frac{a}{|a|} \right\rangle - \left\langle a, \frac{a}{|a|} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle x, \frac{\frac{1}{|p|^2} p}{\frac{1}{|p|}} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{|p|^2} p, \frac{\frac{1}{|p|^2} p}{\frac{1}{|p|}} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle x, \frac{p}{|p|} \right\rangle - \left\langle \frac{p}{|p|^2}, \frac{p}{|p|} \right\rangle = 0.$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter zu

$$\left\langle x, \frac{p}{|p|} \right\rangle - \left\langle \frac{p}{|p|^2}, \frac{p}{|p|} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|p|} \langle x, p \rangle - \frac{1}{|p|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, p \rangle = 1$$

vereinfachen. Damit lassen sich die Facetten durch $px = 1$ darstellen. Definieren wir das duale Polytop über seine Facetten mit

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid p_i x \leq 1, \text{ für } i = 1 \dots, n\},$$

so erhalten wir exakt die Darstellung für das polar duale Polytop aus Theorem 3.7. Jede Ungleichung ist dabei ≤ 1 , da $p_i \cdot 0 < 1$ gilt und das konstruierte duale Polytop die 0 enthält. Somit ist das von uns konstruierte duale Polytop von $\mathbf{P}$ das polar duale Polytop $\mathbf{P}^*$ von $\mathbf{P}$. $\square$

Damit haben wir die Konstruktion primaler und dualer Polytope abgeschlossen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir noch kurz die Konstruktion von zweidimensionalen Polytopen.

3.4 Konstruktion zweidimensionaler Polytope

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Konstruktion konvexer 2-Polytope, welche zu Abschnitt 3.2 analoge Eigenschaften haben sollen. Wir wollen also ein konvexes Polytop mit Kanten tangential zur Einheitskreis und Tangentschwerpunkt 0 konstruieren. Die Konstruktion dieser 2-Polytope scheint zwar trivial zu sein, wir benötigen allerdings für den weiteren Verlauf dieser Arbeit, konkret für die zweidimensionale Variante der verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision ($t = 2, g = 2$) und für die zwei- und dreidimensionale Variante der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivision ($t = 2, g = 3$ und $t = 3, g = 3$), die konkreten Werte der Ecken der 2-Polytope, die verwendet werden. Zudem benötigen wir die Werte der Ecken der zugehörigen dualen Polytope.

Für die Konstruktion beginnen wir mit der folgenden Definition:

Definition 3.42. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und $n \geq 3$ Kanten, der nur aus einem Kreis besteht. Dann ist G der Graph eines 2-Polytops $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}$ ist die Realisierung von G .

Hier ist zu bemerken, dass der Graph G offensichtlich außenplanar ist.

Sei für die Konstruktion $n \geq 3$ die Anzahl der Ecken des Polytops. Dann besitzt das Polytop ebenfalls n Kanten. Wir definieren die Tangentenpunkte der n Kanten als

$$e_j = \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right] \quad \text{für } j \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (3.14)$$

Um den Schwerpunkt der Tangentenpunkte bestimmen zu können, formulieren wir zunächst das folgende Lemma nach [Kna09, S. 371]:

Lemma 3.43. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(a + jb) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right)$$

und

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(a + jb) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \cos\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right).$$

Wir erhalten damit direkt das folgende Korollar:

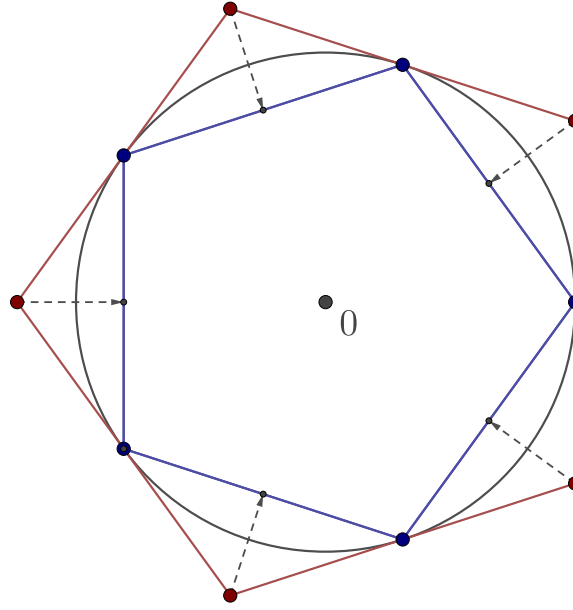


Abbildung 3.16: Primales (rot) und duales (blau) 2-Polytop für $n = 5$.

Korollar 3.44. Sei e_j mit $j \in \{0, \dots, n-1\}$ wie in Gleichung (3.14) definiert. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{n-1} e_j = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right), \sin \left(\frac{2\pi j}{n} \right) \right] = [0, 0].$$

Beweis. Setzen wir in Lemma 3.43 $a = 0$ und $b = 2\pi/n$, so erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin \left(0 + j \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\sin \left(\frac{n \frac{2\pi}{n}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2} \right)} \sin \left(0 + \frac{(n-1) \frac{2\pi}{n}}{2} \right) = \frac{\sin(\pi)}{\sin \left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2} \right)} \sin \left(0 + \frac{(n-1) \frac{2\pi}{n}}{2} \right) = 0$$

und

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos \left(0 + j \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\sin \left(\frac{n \frac{2\pi}{n}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2} \right)} \cos \left(0 + \frac{(n-1) \frac{2\pi}{n}}{2} \right) = \frac{\sin(\pi)}{\sin \left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2} \right)} \cos \left(0 + \frac{(n-1) \frac{2\pi}{n}}{2} \right) = 0.$$

□

Damit ist der Schwerpunkt der Tangentialpunkte gerade 0. Aus den Tangentialpunkten lassen sich die primalen Punkte des Polytops bestimmen. Ein primaler Punkt liegt jeweils auf den Tangenten zweier benachbarter Tangentialpunkte. Die Tangenten lassen sich analog zu den Tangentialebenen in Abschnitt 3.3 mit der Normalenform durch

$$\langle x, e \rangle = \langle e, e \rangle = 1 \quad (3.15)$$

beschreiben. Wir erhalten damit für jeden Punkt p_j das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) & \sin \left(\frac{2\pi j}{n} \right) \\ \cos \left(\frac{2\pi(j+1)}{n} \right) & \sin \left(\frac{2\pi(j+1)}{n} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (p_j)_x \\ (p_j)_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$p_j = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ \frac{\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Eine beispielhafte Illustration für $n = 5$ ist in Abbildung 3.16 zu finden. Da die Tangentenpunkte äquidistant auf dem Einheitskreis verteilt sind, ist die Länge jeder Kante des Polytops sowie der Winkel an jedem Punkt des Polytops gleich. Damit ist das 2-Polytop ein reguläres n -Eck, das alle Symmetrien der zugrundeliegenden Struktur beinhaltet.

Für die Konvexität führen wir noch folgendes Lemma nach [Lee13, Thm. 14.31, S. 266] an:

Lemma 3.45. *Jedes 2-Polytop, dessen Kanten alle tangential zu einem Kreis verlaufen und das diesen Kreis beinhaltet, ist konvex.*

Damit sind die in diesem Abschnitt generierten 2-Polytope alle konvex und für diese lassen sich ebenfalls duale Polytope konstruieren. Mit Theorem 3.7 lassen sich die Kanten eines solchen dualen Polytops über die Gleichung

$$\left[-\frac{\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \frac{\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \right] x = 1$$

beschreiben. Wir erhalten damit für die Ecken des 2-Polytops das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} & \frac{\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ -\frac{\sin\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(j+2)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} & \frac{\cos\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(j+2)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f_j)_x \\ (f_j)_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mithilfe verschiedener Additionstheoreme ergibt sich die Lösung

$$f_j = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right) \end{bmatrix}.$$

Dass die dualen Punkte mit den Tangentenpunkten übereinstimmen, ist auch geometrisch klar. Die Gleichungen für die primalen Punkte sind entstanden aus

$$\langle x, e \rangle = \langle e, e \rangle = 1.$$

Mit Theorem 3.7 sind dies gerade die Gleichungen der Kanten eines zu den Tangentenpunkten dualen Polytops. Da das duale Polytop eines dualen Polytops, welches den Ursprung enthält, mit Theorem 3.7 wieder das primale Polytop ist, ist dies auch geometrisch nachvollziehbar. Eine beispielhafte Illustration für ein primales und duales Polytop ist in Abbildung 3.16 zu finden.

Damit haben wir alle Aussagen über Polytope erörtert, die wir in den nächsten Kapiteln benötigen. Konkret haben wir dabei die Theorie konvexer Polytope erklärt und mithilfe des Koebe-Andreev-Thurston-Theorems beschrieben, welche Darstellung von 3-Polytopen wir wählen. Diese Darstellung haben wir anschließend konstruktiv mit dem Beweis von [Zie04] erzeugt. Da dessen Beschreibung eher theoretischer Natur war, haben wir die einzelnen Schritte mit dem Fokus auf die praktische Nutzung ausgearbeitet und insbesondere die inverse stereographische Projektion genutzt, um ein Polytop mit Tangentschwerpunkt 0 zu erzeugen. Abschließend haben wir noch einige Aussagen zu konvexen Polytopen bewiesen und die Konstruktion von 2-Polytopen beschrieben.

Die Polytope bilden die Basis für die Kapitel 5 und 6, denn aus den Polytopen wird der Eigenraum des subdominanten Eigenwerts der Subdivisionsmatrizen konstruiert. Dabei sind zum einen die theoretischen Aspekte, wie die Umsetzung der Symmetrie und die tangentialen Kanten, wichtig, denn diese benötigen wir für die Beweise der Qualitätskriterien der Subdivisionsmatrizen. Zum anderen sind aber auch die praktischen Aspekte, wie die Implementierbarkeit an sich und möglichst geringe numerische Fehler, entscheidend, denn für die Umsetzbarkeit und die empirischen Resultate spielen sie eine zentrale Rolle.

Im nächsten Abschnitt werden wir die in diesem Kapitel konstruierten Polytope nutzen, um Colin-de-Verdière-Matrizen zu erzeugen, welche eine Vorstufe der Subdivisionsmatrizen der Kapitel 5 und 6 darstellen.

4 Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen

Im vorherigen Kapitel haben wir die Konstruktion konvexer Polytope betrachtet und in diesem Kapitel widmen wir uns der konkreten Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen. Diese Matrizen werden Eigenräume besitzen, die von den im vorherigen Kapitel behandelten Polytopen erzeugt werden. Die n Eckpunkte konvexer 2- und 3-Polytope können nämlich als Matrix in $\mathbb{R}^{n \times 2}$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{n \times 3}$ interpretiert werden und die Spalten dieser Matrix sollen Eigenvektoren der in diesem Kapitel konstruierten Colin-de-Verdière-Matrizen sein.

Dies ist die Vorstufe zur Konstruktion der Subdivisionsmatrizen. Die Colin-de-Verdière-Matrizen haben dabei besondere Eigenschaften, die wir für die Beweise der Qualitätskriterien benötigen. Wie diese ineinandergreifen, beschreiben wir in den Kapiteln 5 und 6.

In Abschnitt 4.1 beginnen wir mit den theoretischen Aspekten und Grundlagen zu Colin-de-Verdière-Matrizen. In den darauffolgenden Abschnitten konstruieren wir die Colin-de-Verdière-Matrizen für Polytope der Dimensionen 0 bis 3. In Abschnitt 4.2 betrachten wir zunächst den trivialen Fall von Colin-de-Verdière-Matrizen für Polytope der Dimensionen 0 und 1. Danach beschreiben wir in Abschnitt 4.3 die Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen für 2-Polytope und in Abschnitt 4.4 die Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen für 3-Polytope. Für die verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivisionsalgorithmen werden wir lediglich die Colin-de-Verdière-Matrizen für 2-Polytope (für $t = 2$) und für 3-Polytope (für $t = 3$) benötigen. Da sich die relevanten Eigenräume der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivisionsmatrizen aus Zerlegungen von Polytopen ergeben, werden wir für deren Konstruktion Colin-de-Verdière-Matrizen aller hier beschriebenen Dimensionen benötigen. Die Abschnitte 4.2 und 4.3 werden hier also nicht allein der Vollständigkeit halber erwähnt, denn sie finden Anwendung bei der Konstruktion der Subdivisionsmatrizen in Kapitel 6.

4.1 Definition und Eigenschaften von Colin-de-Verdière-Matrizen

Die erstmalige Definition der Colin-de-Verdière-Matrizen stammt aus der Arbeit des gleichnamigen Mathematikers Colin de Verdière [Col90]. Diese wurde 1993 in [Col93] vom Französischen ins Englische übersetzt und damit bilden diese beiden Arbeiten den Ursprung des Begriffs. Eine recht ausführliche Übersicht über die Colin-de-Verdière-Matrizen und deren Anwendung findet sich in [HLS99], woraus wir auch die Definition der Colin-de-Verdière-Matrizen entnommen haben [HLS99, Def. 1.1, S. 31]:

Definition 4.1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten, es gilt also $|V| = n$. Sei $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenschaften

C1 Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ ist

$$C_{(i,j)} \begin{cases} < 0 & \text{wenn } \{v_i, v_j\} \in E. \\ = 0 & \text{wenn } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

C2 Die Matrix C hat genau einen negativen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1.

C3 Es gibt keine Nicht-Null-Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $M_{(i,j)} = 0$ wenn $i = j$ und $M_{(i,j)} = 0$ wenn $C_{(i,j)} \neq 0$, sodass $CM = 0$.

Dann heißt C Colin-de-Verdière-Matrix.

Wir betrachten diese Definition im Folgenden etwas genauer. Die Eigenschaft C1 bestimmt die Gestalt von C . Mit dieser Bedingung erinnert C an eine Adjazenzmatrix, denn abgesehen von der Diagonalen besitzen beide Matrizen dieselbe Struktur bezüglich der Nicht-Null-Einträge. Die Diagonale von C kann hingegen beliebige Werte annehmen, die insbesondere auch positiv sein können.

Die Eigenschaft C2 ist zunächst wohldefiniert, da symmetrische Matrizen mit Satz B.44 ausschließlich reelle Eigenwerte haben. Damit besitzt C nur einen negativen Eigenwert, alle anderen Eigenwerte sind ≥ 0 .

Die Eigenschaft C3 heißt *starke Arnold Eigenschaft* und geht auf die Veröffentlichung [Arn72] zurück.

Mit dieser Definition ist es möglich, eine invariante Größe für einen Graphen zu definieren. Diese wird ebenfalls in [Col93] eingeführt. Wir verwenden hier die Definition aus [Izm10, Def. 1.1, S. 427 f.]:

Definition 4.2. Sei G ein Graph und $\mathcal{C}(G)$ die Menge aller Colin-de-Verdière-Matrizen des Graphen G . Dann ist

$$c(G) := \max_{C \in \mathcal{C}(G)} (\dim(\ker(C)))$$

die Colin-de-Verdière-Nummer des Graphen G .

Die Colin-de-Verdière-Nummer gibt also an, wie groß die maximale Dimension des Kerns aller Colin-de-Verdière-Matrizen zu einem bestimmten Graphen ist. Da wir ausschließlich Colin-de-Verdière-Matrizen mit dieser maximalen Dimension des Kerns betrachten wollen, schließen wir folgende Definition nach [Izm10, Def. 1.1, S. 427 f.] an:

Definition 4.3. Eine Colin-de-Verdière-Matrix C des Graphen G heißt optimal, falls

$$\dim(\ker(C)) = c(G).$$

Für die Konstruktion optimaler Colin-de-Verdière-Matrizen benötigen wir eine Aussage darüber, wie groß die Colin-de-Verdière-Nummer bestimmter Graphen werden kann. Dies wird ermöglicht durch das folgende Theorem [HLS99, Num. 1.4, S. 35]:

Theorem 4.4. Es gelten die folgenden Aussagen für die Colin-de-Verdière-Nummer $c(G)$ eines Graphen G :

1. $c(G) \leq 1$ genau dann, wenn G eine disjunkte Menge von Pfaden ist.
2. $c(G) \leq 2$ genau dann, wenn G außenplanar ist.
3. $c(G) \leq 3$ genau dann, wenn G planar ist.
4. $c(G) \leq 4$ genau dann, wenn G schleifenfrei einbettbar ist.

Die Quelle [HLS99] gibt einen Überblick über die Historie der Beweise dieser Aussagen. Die Beweise der ersten drei Aussagen finden sich demnach in [Col90] beziehungsweise [Col93]. Der Beweis von Aussage vier setzt sich aus den Aussagen verschiedener Quellen zusammen. Eine Übersicht ist in [HLS99, S. 36] zu finden. Allerdings wird in unserer Arbeit Aussage vier nur der Vollständigkeit halber genannt und im weiteren Verlauf nicht benötigt, weshalb wir auf eine Literaturübersicht an dieser Stelle verzichten.

Der entscheidende Vorteil der Colin-de-Verdière-Matrizen ist, dass wir mit der Colin-de-Verdière-Nummer für optimale Matrizen eine Aussage über das Spektrum dieser Matrizen treffen können. Für optimale Colin-de-Verdière-Matrizen gibt es mit C2 nur einen negativen Eigenwert und $c(G)$ Eigenwerte gleich 0. Alle anderen Eigenwerte sind positiv.

Im nächsten Abschnitt konstruieren wir mithilfe der in diesem Abschnitt gesammelten Aussagen optimale Colin-de-Verdière-Matrizen für Graphen mit einem und zwei Knoten.

4.2 Colin-de-Verdière-Matrizen für Graphen mit einem oder zwei Knoten

Die beiden in diesem Abschnitt betrachteten Fälle sind die trivialen Fälle der Colin-de-Verdière-Matrizen. Da wir diese aber für die Konstruktion verallgemeinerter kubischer B-Spline-Subdivisionsalgorithmen benötigen, beschreiben wir

deren konkrete Konstruktion. Wir beginnen mit dem Graphen bestehend aus einem Knoten und keiner Kante, der sich als Realisierung in $\mathbb{R}^d$ auch als 0-Polytop interpretieren lässt:

Lemma 4.5. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v\}$ und $E = \emptyset$. Dann ist die Matrix

$$C := [-1]$$

eine optimale Colin-de-Verdière-Matrix zu G .

Beweis. Die Matrix C ist eine Colin-de-Verdière-Matrix, denn

- sie ist symmetrisch, da sie nur aus einer Zahl besteht.
- es gibt keine Nebendiagonaleinträge und damit ist C1 erfüllt.
- die Matrix hat exakt einen negativen Eigenwert -1 und damit ist C2 erfüllt.
- Da 0 die einzige Zahl mit $0 \cdot (-1) = 0$ ist, ist C3 erfüllt.

Außerdem ist C optimal. Da C nur aus einem Eintrag besteht, hat C nur einen Eigenwert. Damit ist

$$c(G) = 0 = \dim(\ker(C)).$$

□

Im nächsten Schritt betrachten wir den leicht komplexeren Fall eines Graphen mit zwei Knoten und einer Kante, der sich als Realisierung in $\mathbb{R}^n$ als 1-Polytop interpretieren lässt. Dafür betrachten wir das folgende Lemma:

Lemma 4.6. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, v_2\}$ und $E = \{\{v_1, v_2\}\}$. Sei außerdem $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $p_1, p_2 \neq 0$ die Realisierung des Graphen in $\mathbb{R}^3$ als 1-Polytop und sei 0 ein Punkt auf der Kante zwischen p_1 und p_2 . Dann ist die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{|p_2|}{|p_1|} & -1 \\ -1 & -\frac{|p_1|}{|p_2|} \end{bmatrix}$$

eine optimale Colin-de-Verdière-Matrix des Graphen G . Außerdem ist

$$\begin{bmatrix} |p_1| \\ -|p_2| \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor von C zum Eigenwert 0 .

Bevor wir mit dem Beweis beginnen ist hier zu bemerken, dass der eben beschriebene Eigenvektor als zwei Punkte in $\mathbb{R}$ interpretiert werden kann. Er beinhaltet damit die Ecken eines 1-Polytops in $\mathbb{R}$, das den Ursprung enthält.

Beweis. Wir prüfen hier wieder die Definition der Colin-de-Verdière-Matrizen. Zunächst ist C nach Definition symmetrisch. Außerdem gehören alle Nebendiagonaleinträge zu Kanten und sind negativ. Daher ist C1 erfüllt.

Um die Eigenwerte zu überprüfen, betrachten wir das charakteristische Polynom von C :

$$\det(C - \lambda_i E_2) = \lambda_i \left(\lambda_i + \left(\frac{|p_2|}{|p_1|} + \frac{|p_1|}{|p_2|} \right) \right)$$

Damit sind die Eigenwerte von C gerade

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = - \left(\frac{|p_2|}{|p_1|} + \frac{|p_1|}{|p_2|} \right)$$

und C hat genau einen negativen Eigenwert und einen Eigenwert gleich 0 , womit C2 erfüllt ist. Außerdem gilt

$$C \cdot \begin{bmatrix} |p_1| \\ -|p_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{|p_2|}{|p_1|}|p_1| + |p_2| \\ -|p_1| + \frac{|p_1|}{|p_2|}|p_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} |p_1| \\ -|p_2| \end{bmatrix}.$$

Damit ist $[|p_1|, -|p_2|]^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Abschließend ist jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die sowohl in allen Nebendiagonaleinträgen, in denen C ungleich 0 ist, als auch auf der Diagonalen den Wert 0 hat, die Nullmatrix. Damit ist C3 ebenfalls erfüllt und C ist eine Colin-de-Verdière-Matrix.

Zudem kann die Matrix C maximal einen Eigenwert gleich 0 haben und ist somit optimal, wie auch im ersten Fall des Theorems 4.4 ersichtlich. Da G eine disjunkte Menge von Pfaden ist (es gibt einen Pfad mit zwei Knoten und einer Kante), ist die Colin-de-Verdière-Nummer maximal 1. $\square$

Nach diesen beiden trivialen Fällen betrachten wir im nächsten Abschnitt Colin-de-Verdière-Matrizen für konvexe 2-Polytope.

4.3 Colin-de-Verdière-Matrizen für 2-Polytope

In diesem Abschnitt wollen wir eine Colin-de-Verdière-Matrix für ein 2-Polytop konstruieren. Dies ist der aufwendigste Teil des Kapitels, denn in der Literatur war keine Blaupause für diesen Fall zu finden. Wir werden allerdings das folgende Theorem verwenden, welches in [Izm10, Thm. 2.4, S. 434] in einer allgemeineren Form zu finden ist:

Theorem 4.7. *Sei G ein außenplanarer Graph, bestehend aus einem Kreis mit n Knoten und n Kanten, und sei P die Realisierung von G als 2-Polytop mit n Ecken, und $P := \text{conv}(P)$ mit $P \in \mathbb{R}^{n \times 2}$. Sei zudem mit Theorem 3.7 das zugehörige polar duale Polytop*

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P_{(i,:)}x \leq 1, \text{ für } i = 1 \dots, n\}$$

zum dualen Graphen G^* . Wir definieren außerdem

$$P^*(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P_{(i,:)}x \leq r_i, \text{ für } i = 1 \dots, n\} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}_{>0}^n$$

als die Facettenvariation des dualen Polytops P^* . Dann ist die Matrix

$$C_{(i,j)} := - \frac{\partial^2 \text{vol}(P^*(r))}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{r=\vec{1}}$$

eine Colin-de-Verdière-Matrix des Graphen G . Außerdem ist $\dim(\ker(C)) = 2$ und C ist damit nach Fall 2 von Theorem 4.4 optimal.

Unsere Strategie ist es, für den Spezialfall eines 2-Polytops, dessen Kanten tangential zum Einheitskreis liegen, eine Matrix zu konstruieren, deren Einträge mit denen von C des Theorems 4.7 übereinstimmen. Damit erhalten wir den Beweis, dass C eine Colin-de-Verdière-Matrix ist, direkt aus dem obigen Theorem. Hier ist zu beachten, dass das 2-Polytop nicht unbedingt ein regelmäßiges n -Eck sein muss. Es genügt, wenn die Kanten tangential zur Einheitssphäre liegen. Dieser Spezialfall genügt für den weiteren Verlauf dieser Arbeit.

Theorem 4.8. *Sei G ein außenplanarer Graph, bestehend aus einem Kreis mit n Knoten und n Kanten, und sei P die Realisierung von G . Wir betrachten in diesem Theorem zudem zyklische Indices in $\{1, \dots, n\}$, es gilt also $n+1 \equiv 1$ und $0 \equiv n$. Für P gelte:*

- $P := \text{conv}(P)$ mit $P \in \mathbb{R}^{n \times 2}$.
- P ist ein 2-Polytop mit den n Ecken $p_1 := P_{(1,:)}, \dots, p_n := P_{(n,:)}$.
- Zwischen p_i und p_{i+1} liegt eine Kante für $i \in \{1, \dots, n\}$ und diese sind alle Kanten der Realisierung des Graphen von G .
- P enthält den Punkt $(0, 0)$.
- Die Kanten von P liegen tangential zum Einheitskreis S^1 .

Dann ist die Matrix

$$C_{(i,j)} := \begin{cases} -\frac{1}{|p_i \times p_j|} & \text{für } i \neq j \text{ und } p_i \text{ und } p_j \text{ haben eine gemeinsame Kante} \\ 0 & \text{für } i \neq j \text{ und } p_i \text{ und } p_j \text{ haben keine gemeinsame Kante} \\ \frac{\cos(\alpha)}{|p_i|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|p_i|^2 \sin(\beta)} & \text{für } i = j \text{ mit } \alpha = \angle(p_{i-1}, p_i) \text{ und } \beta = \angle(p_i, p_{i+1}) \end{cases}$$

eine optimale Colin-de-Verdière-Matrix und es gilt

$$CP = C \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = 0.$$

Beweis. Um dieses Theorem zu beweisen, werden wir zeigen, dass die Einträge von C gerade denen aus Theorem 4.7 entsprechen. Dafür führen wir zunächst die folgenden Notationen und Aussagen ein:

- Wir bezeichnen mit e_i die Tangentenpunkte auf S^1 , die auf den Kanten zwischen p_i und p_{i+1} liegen.
- Für das duale Polytop P^* zu P gelten entsprechend die Gleichungen $\langle p_i, x \rangle \leq 1$. Die Punkte e_i erfüllen

$$\langle p_i, e_i \rangle = 1 \quad \text{und} \quad \langle p_{i+1}, e_i \rangle = 1.$$

Um dies zu zeigen, betrachten wir zunächst

$$\langle p_i, e_i \rangle = |p_i| |e_i| \cos(\angle(p_i, e_i)).$$

Das Dreieck $(0, e_i, p_i)$ hat einen rechten Winkel in e_i , denn die Strecke (e_i, p_i) liegt auf der Tangente am Einheitskreis in e_i . Somit ist

$$\langle p_i, e_i \rangle = |p_i| |e_i| \cos(\angle(p_i, e_i)) = |p_i| |e_i| \frac{|e_i|}{|p_i|} = 1.$$

Dies gilt auch analog für $\langle p_{i+1}, e_i \rangle$. Damit ist $\text{conv}(e_1, \dots, e_n)$ das polar duale Polytop zu P und e_i sind die Ecken des dualen Polytops.

- Die Projektion von p_i auf die Gerade $\langle p_i, x \rangle = 1$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{|p_i|^2} p_i, \quad \text{denn} \quad \left\langle p_i, \frac{1}{|p_i|^2} p_i \right\rangle = |p_i| \frac{|p_i|}{|p_i|^2} = 1.$$

Daher bezeichnen wir

$$q_i := \frac{1}{|p_i|^2} p_i.$$

Zudem zeigen p_i, q_i und der Normalenvektor der Geraden durch die Punkte e_{i-1} und e_i in dieselbe Richtung. Damit haben die Dreiecke

$$(e_{i-1}, q_i, 0) \quad \text{und} \quad (e_i, q_i, 0)$$

einen rechten Winkel in q_i .

Eine beispielhafte Illustration der Notationen, Aussagen und der rechten Winkel an den jeweiligen Punkten ist in Abbildung 4.1 zu sehen.

Um nachzuweisen, dass C mit der Matrix aus Theorem 4.7 übereinstimmt, müssen wir den Flächeninhalt des dualen Polytops betrachten. Dafür zerlegen wir das Polygon in die $2n$ rechtwinkligen Dreiecke

$$(0, e_i, q_i) \quad \text{und} \quad (0, e_i, q_{i+1}) \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

mit dem rechten Winkel jeweils in den Punkten q_i . Das aufsummierte Volumen dieser Dreiecke ist das Volumen des dualen Polytops. Eine Illustration der Dreiecke ist in Abbildung 4.2 zu finden. Variieren wir die Facetten des dualen

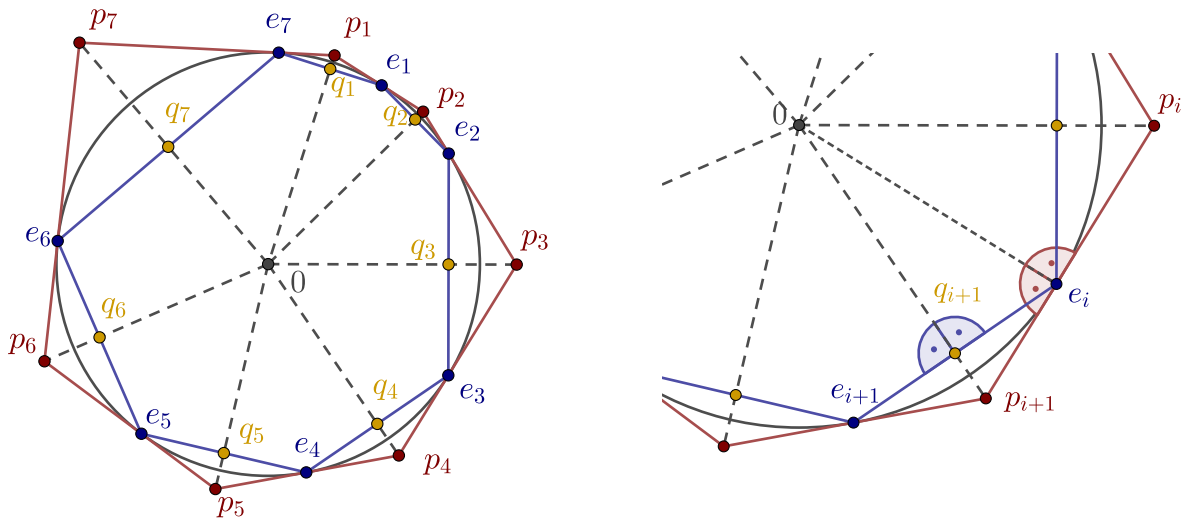


Abbildung 4.1: Beispielhaftes 2-Polytop P (rot), wie in Theorem 4.8 definiert, und das zugehörige polar duale Polytop P^* (blau). In der linken Abbildung sind die beschrifteten Punkte zu sehen, in der rechten Abbildung sind die rechten Winkel an den jeweiligen Punkten zu sehen.

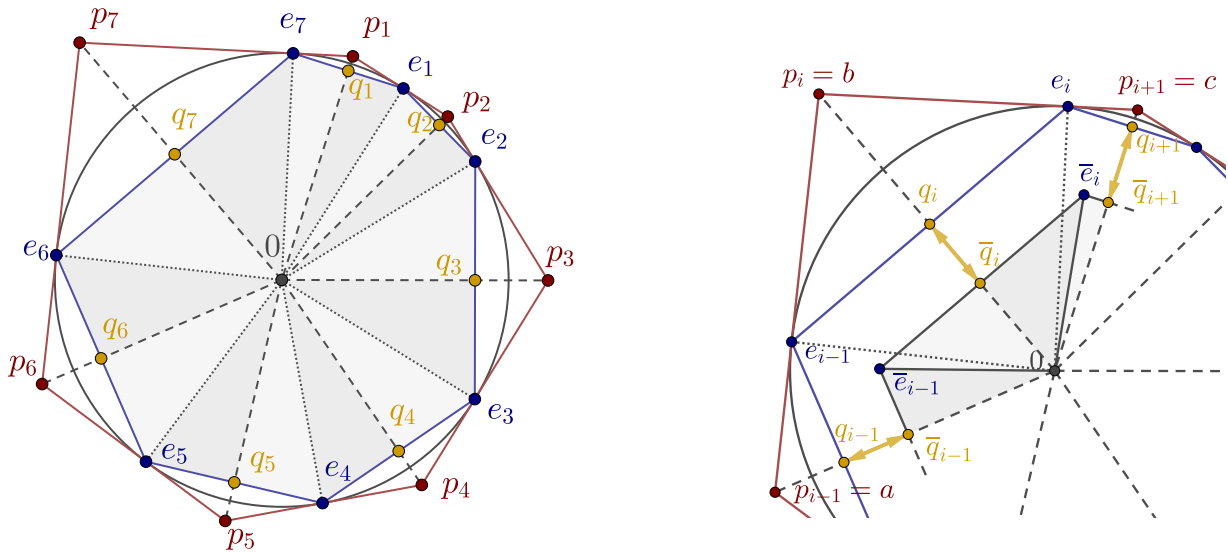


Abbildung 4.2: Die $2n$ Dreiecke des dualen Polytops (links) und die Variation der Facetten (rechts) inklusive der Benennung der einzelnen Punkte.

Polytops wie in Theorem 4.7, indem wir die Ungleichungen

$$\langle p_i, x \rangle \leq 1 \quad \text{zu} \quad \langle p_i, x \rangle \leq r_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \frac{p_i}{r_i}, x \right\rangle \leq 1 \quad \text{mit} \quad r_i \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

variieren, so verschieben wir die Kante (e_{i-1}, e_i) , denn

$$\left\langle \frac{p_i}{r_i}, r_i q_i \right\rangle = \langle p_i, q_i \rangle = 1.$$

Die Frage ist, welchen Einfluss dies auf den Flächeninhalt des Polytops hat. Zunächst ist zu bemerken, dass für diese Anwendung nur die Variation um $r = \vec{1}$ interessant ist, denn die Ableitung des Volumens nach den r_i in Theorem 4.7 muss nur in $r = \vec{1}$ ausgewertet werden. Daher genügt es, den Einfluss der Variation in einer kleinen Umgebung um $r = \vec{1}$ zu betrachten.

Fixieren wir einen Index i und variieren die zugehörige Ungleichung nur in einem kleinen Bereich, so hat das konkrete Auswirkungen auf den Punkt q_i und die Schnitte des Halbraums mit den benachbarten Halbräumen, also auf die Punkte e_{i-1} und e_i . Im Bezug auf den Flächeninhalt sind dann die Dreiecke

$$(0, q_{i-1}, e_{i-1}), \quad (0, q_i, e_{i-1}), \quad (0, q_i, e_i) \quad \text{und} \quad (0, q_{i+1}, e_i)$$

von der Variation betroffen. Fixieren wir umgekehrt die Dreiecke

$$(0, q_{i-1}, e_{i-1}) \quad \text{und} \quad (0, q_i, e_{i-1}),$$

so sind diese ausschließlich von der Variation der Variablen r_{i-1} und r_i abhängig (sofern die Variation in einer kleinen Umgebung um $\vec{1}$ stattfindet). Indem wir i um 1 erhöhen, erhalten wir analog, dass der Flächeninhalt der Dreiecke

$$(0, q_i, e_i) \quad \text{und} \quad (0, q_{i+1}, e_i)$$

von der Variation der Variablen r_i und r_{i+1} abhängt.

Fixieren wir wieder einen Index i , so bilden sich damit die vier von der Variation betroffenen Dreiecke aus dem Punkt $\vec{0}$ und fünf weiteren Punkten. Diese wollen wir in Abhängigkeit der Variation von r_{i-1} , r_i und r_{i+1} und der Punkte p_{i-1} , p_i und p_{i+1} darstellen. Da wir die expliziten x - und y -Koordinaten der Punkte zur Beschreibung benötigen, vereinfachen wir die Notation, indem wir

$$a := \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (p_{i-1})_x \\ (p_{i-1})_y \end{bmatrix} = p_{i-1}, \quad b := \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (p_i)_x \\ (p_i)_y \end{bmatrix} = p_i \quad \text{und} \quad c := \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (p_{i+1})_x \\ (p_{i+1})_y \end{bmatrix} = p_{i+1}$$

definieren. Mit diesen können wir die fünf Punkte der von r_i abhängigen Dreiecke als

$$\bar{q}_{i-1} := r_{i-1} q_{i-1} = r_{i-1} \frac{a}{|a|^2}, \quad \bar{q}_i := r_i q_i = r_i \frac{b}{|b|^2}, \quad \bar{q}_{i+1} := r_{i+1} q_{i+1} = r_{i+1} \frac{c}{|c|^2}$$

und

$$\bar{e}_{i-1}, \text{ abhängig von } r_{i-1} \text{ und } r_i, \quad \bar{e}_i, \text{ abhängig von } r_i \text{ und } r_{i+1}$$

beschreiben. Die Punkte $\bar{e}_{i-1}$ und $\bar{e}_i$ lassen sich konkret über das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a^T \\ b^T \end{bmatrix} \bar{e}_{i-1} = \begin{bmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} b^T \\ c^T \end{bmatrix} \bar{e}_i = \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{bmatrix}$$

berechnen, denn ein Punkt e_i liegt auf zwei Randgeraden des dualen Polytops und die variierten Randgeraden ließen sich durch die Gleichung $\langle p_i, x \rangle = r_i$ darstellen. Damit erhalten wir

$$\bar{e}_{i-1} = \left[\frac{b_y r_{i-1} - a_y r_i}{a_x b_y - a_y b_x}, \frac{a_x r_i - b_x r_{i-1}}{a_x b_y - a_y b_x} \right]^T \quad \text{und} \quad \bar{e}_i = \left[\frac{c_y r_i - b_y r_{i+1}}{b_x c_y - b_y c_x}, \frac{b_x r_{i+1} - c_x r_i}{b_x c_y - b_y c_x} \right]^T.$$

Eine Illustration der fünf Punkte findet sich ebenfalls in Abbildung 4.2. Mit diesen Punkten erhalten wir die beiden variierten Dreiecke

$$(0, \bar{q}_{i-1}, \bar{e}_{i-1}) \quad \text{und} \quad (0, \bar{q}_i, \bar{e}_{i-1}),$$

deren Flächeninhalt, abgesehen von den Punkten a , b und c , nur von r_{i-1} und r_i abhängt. Jener Flächeninhalt lässt sich mithilfe der Einbettung der Punkte in den $\mathbb{R}^3$ und des Kreuzprodukts durch

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(r_{i-1}, r_i) &= \frac{1}{2} |\bar{q}_{i-1} \times \bar{e}_{i-1}| + \frac{1}{2} |\bar{q}_i \times \bar{e}_{i-1}| \\ &= \frac{1}{2} \left| r_{i-1} \frac{a_x}{|a|^2} \cdot \frac{a_x r_i - b_x r_{i-1}}{a_x b_y - a_y b_x} - r_{i-1} \frac{a_y}{|a|^2} \cdot \frac{b_y r_{i-1} - a_y r_i}{a_x b_y - a_y b_x} \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| r_i \frac{b_x}{|b|^2} \cdot \frac{a_x r_i - b_x r_{i-1}}{a_x b_y - a_y b_x} - r_i \frac{b_y}{|b|^2} \cdot \frac{b_y r_{i-1} - a_y r_i}{a_x b_y - a_y b_x} \right| \\ &= \frac{|r_{i-1} a_x (a_x r_i - b_x r_{i-1}) - r_{i-1} a_y (b_y r_{i-1} - a_y r_i)|}{2|a|^2 |a_x b_y - a_y b_x|} \\ &\quad + \frac{|r_i b_x (a_x r_i - b_x r_{i-1}) - r_i b_y (b_y r_{i-1} - a_y r_i)|}{2|b|^2 |a_x b_y - a_y b_x|} \\ &= \frac{|r_{i-1} r_i \langle a, a \rangle - r_{i-1}^2 \langle a, b \rangle|}{2 \langle a, a \rangle |a \times b|} + \frac{|r_i^2 \langle a, b \rangle - r_{i-1} r_i \langle b, b \rangle|}{2 \langle b, b \rangle |a \times b|} \end{aligned} \quad (4.1)$$

darstellen. Analog erhalten wir den Flächeninhalt der anderen beiden variierten Dreiecke

$$(0, \bar{q}_i, \bar{e}_i) \quad \text{und} \quad (0, \bar{q}_{i+1}, \bar{e}_i),$$

durch

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(r_i, r_{i+1}) &= \frac{1}{2} |\bar{q}_i \times \bar{e}_i| + \frac{1}{2} |\bar{q}_{i+1} \times \bar{e}_i| \\ &= \frac{1}{2} \left| r_i \frac{b_x}{|b|^2} \cdot \frac{b_x r_{i+1} - c_x r_i}{b_x c_y - b_y c_x} - r_i \frac{b_y}{|b|^2} \cdot \frac{c_y r_i - b_y r_{i+1}}{b_x c_y - b_y c_x} \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| r_{i+1} \frac{c_x}{|c|^2} \cdot \frac{b_x r_{i+1} - c_x r_i}{b_x c_y - b_y c_x} - r_{i+1} \frac{c_y}{|c|^2} \cdot \frac{c_y r_i - b_y r_{i+1}}{b_x c_y - b_y c_x} \right| \\ &= \frac{|r_i b_x (b_x r_{i+1} - c_x r_i) - r_i b_y (c_y r_i - b_y r_{i+1})|}{2|b|^2 |b_x c_y - b_y c_x|} \\ &\quad + \frac{|r_{i+1} c_x (b_x r_{i+1} - c_x r_i) - r_{i+1} c_y (c_y r_i - b_y r_{i+1})|}{2|c|^2 |b_x c_y - b_y c_x|} \\ &= \frac{|r_i r_{i+1} \langle b, b \rangle - r_i^2 \langle b, c \rangle|}{2 \langle b, b \rangle |b \times c|} + \frac{|r_{i+1}^2 \langle b, c \rangle - r_i r_{i+1} \langle c, c \rangle|}{2 \langle c, c \rangle |b \times c|}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Das Volumen von $\mathbf{P}^*(r)$ des variierten dualen 2-Polytops ergibt sich entsprechend aus der Summe aller Volumen aller variierten Dreiecke.

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass die Ableitungen

$$\left. \frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{r=\vec{r}}$$

des variierten dualen Polytops aus Theorem 4.7 mit den Matrixeinträgen aus diesem Theorem übereinstimmen. Zur Berechnung der Ableitungen nutzen wir

$$\frac{\partial}{\partial r_{i-1} \partial r_i} |\mathbf{f}(r_{i-1}, r_i)| = \text{sgn}(\mathbf{f}(r_{i-1}, r_i)) \frac{\partial}{\partial r_{i-1} \partial r_i} \mathbf{f}(r_{i-1}, r_i) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial^2 r_i} |\mathbf{f}(r_i)| = \text{sgn}(\mathbf{f}(r_i)) \frac{\partial}{\partial^2 r_i} \mathbf{f}(r_{i-1}, r_i).$$

Wir betrachten zunächst den Fall $i \neq j$. Ist $j \neq i \pm 1$, so gibt es kein Dreieck, das von beiden Variationsvariablen r_i und r_j abhängig ist. Die obige Ableitung nach r_i und r_j ist entsprechend 0.

Nehmen wir also an $j \pm 1 = i$ und durch das Shiften des Index ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass $j = i - 1$. Dann sind die beiden Dreiecke $(0, \bar{q}_{i-1}, \bar{e}_{i-1})$ und $(0, \bar{q}_i, \bar{e}_{i-1})$ die einzigen, die von diesen beiden Variationsvariablen abhängig sind. Leiten wir also Gleichung 4.1 nach r_{i-1} und r_i ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2|a \times b| \left(\frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial r_{i-1} \partial r_i} \right) \Big|_{r=\bar{r}} &= \frac{\langle a, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \text{sgn}(r_{i-1} r_i \langle a, a \rangle - r_{i-1}^2 \langle a, b \rangle) - \frac{\langle b, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \text{sgn}(r_i^2 \langle a, b \rangle - r_{i-1} r_i \langle b, b \rangle) \Big|_{r=\bar{r}} \\ &= \text{sgn}(\langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle) - \text{sgn}(\langle a, b \rangle - \langle b, b \rangle) \\ &= \text{sgn}(\langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle) + \text{sgn}(\langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle) \\ &= \text{sgn}(|a|^2 - |a||b| \cos(\alpha)) + \text{sgn}(|b|^2 - |a||b| \cos(\alpha)) \\ &= \text{sgn}(|a| - |b| \cos(\alpha)) + \text{sgn}(|b| - |a| \cos(\alpha)), \end{aligned}$$

wobei $\alpha = \angle(p_{i-1}, p_i)$ als der Winkel zwischen $p_{i-1} = a$ und $p_i = b$ definiert wurde. Wir wollen im nächsten Schritt argumentieren, dass beide Vorzeichen positiv sind. Dazu betrachten wir mehrere Fälle:

1. $\cos(\alpha) \leq 0$. In diesem Fall sind beide Vorzeichen positiv.
2. $\cos(\alpha) = 1$. Dieser Fall ist nicht möglich, da für $\alpha = 0$ das Polytop $\mathbf{P}$ zwei übereinanderliegende Eckpunkte hätte, die durch einen einzigen Punkt ersetzt werden können.
3. $0 < \cos(\alpha) < 1$. Diesen Fall unterteilen wir wiederum in verschiedene Fälle:
 - a) $|a| = |b|$. In diesem Fall sind beide Vorzeichen positiv, da der Kosinus echt kleiner als 1 ist.
 - b) $|a| \neq |b|$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $|b| < |a|$. Dann ist das Vorzeichen

$$\text{sgn}(|a| - |b| \cos(\alpha))$$

gerade 1 und wir müssen nur noch das Vorzeichen

$$\text{sgn}(|b| - |a| \cos(\alpha))$$

betrachten. Zunächst ist die Länge von a und b größer als 1, da beide Eckpunkte des primalen Polytops sind, dessen Kanten tangential zum Einheitskreis liegen. Damit liegen die beiden Punkte außerhalb des Einheitskreises. Außerdem ist der Punkt

$$\frac{b}{|b|} |a| \cos(\alpha)$$

die orthogonale Projektion des Punktes a auf die Ursprungsgerade durch b . Diese Projektion hat die Länge $|a| \cos(\alpha)$. Da a auf der Tangente durch den Punkt e_{i-1} liegt, ist die Länge der orthogonalen Projektion von e_{i-1} länger als $|a| \cos(\alpha)$. Da die Projektion von e_{i-1} gerade q_i ist, erhalten wir

$$|a| \cos(\alpha) < |q_i| = \frac{1}{|b|^2} < 1 < |b|$$

und damit ist das zweite Vorzeichen ebenfalls positiv. Eine Illustration findet sich in Abbildung 4.3.

Wir erhalten damit insgesamt

$$-\frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial r_{i-1} \partial r_i} \Big|_{r=\bar{r}} = -\frac{1+1}{2|a \times b|} = -\frac{1}{|p_{i-1} \times p_i|}.$$

Somit stimmen die Werte für $i \neq j$ der Theoreme 4.7 und 4.8 überein.

In einem weiteren Schritt betrachten wir

$$\frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial^2 r_i} \Big|_{r=\bar{r}}$$

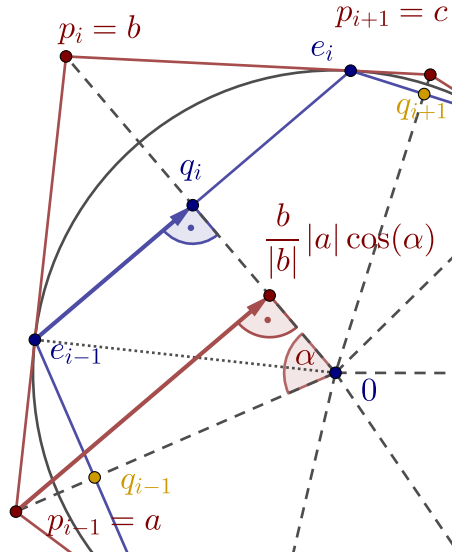


Abbildung 4.3: Orthogonale Projektion von e_{i-1} und a auf die Gerade durch 0 und b . Es ist zu erkennen, dass für $\alpha \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ die Länge der Projektion von a kleiner als die von e_{i-1} ist.

und erhalten analog mit Gleichung (4.1) und (4.2)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial^2 r_i} \right|_{r=\vec{1}} &= \frac{2\langle a, b \rangle \text{sgn}(r_i^2 \langle a, b \rangle - r_{i-1} r_i \langle b, b \rangle)}{2\langle b, b \rangle |a \times b|} - \frac{2\langle b, c \rangle \text{sgn}(r_{i+1} r_i \langle b, b \rangle - r_i^2 \langle b, c \rangle)}{2\langle b, b \rangle |c \times b|} \Big|_{r=\vec{1}} \\ &= \frac{\langle a, b \rangle \text{sgn}(\langle a, b \rangle - \langle b, b \rangle)}{\langle b, b \rangle |a \times b|} - \frac{\langle b, c \rangle \text{sgn}(\langle b, b \rangle - \langle b, c \rangle)}{\langle b, b \rangle |c \times b|} \end{aligned}$$

und mit derselben Argumentation der Vorzeichen

$$\left. \frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial^2 r_i} \right|_{r=\vec{1}} = -\frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle |a \times b|} - \frac{\langle b, c \rangle}{\langle b, b \rangle |c \times b|}.$$

Mit der Definition des Skalar- und Kreuzprodukts erhalten wir

$$-\left. \frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial^2 r_i} \right|_{r=\vec{1}} = \frac{|a||b| \cos(\alpha)}{|b|^2 |a||b| \sin(\alpha)} + \frac{|b||c| \cos(\beta)}{|b|^2 |b||c| \sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)}{|b|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|b|^2 \sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)}{|p_i|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|p_i|^2 \sin(\beta)}.$$

Damit stimmt die Matrix C des Theorems 4.7 mit der Matrix C des Theorems 4.8 überein und somit ist C eine optimale Colin-de-Verdière-Matrix.

Abschließend betrachten wir

$$C \cdot \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix}.$$

Für die i -te Zeile erhalten wir mit den Einträgen der Matrix C

$$C_{(i,:)} \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix} = -\frac{1}{|p_i \times p_{i-1}|} \cdot p_{i-1} + \frac{\cos(\alpha)}{|p_i|^2 \sin(\alpha)} \cdot p_i + \frac{\cos(\beta)}{|p_i|^2 \sin(\beta)} \cdot p_i - \frac{1}{|p_i \times p_{i+1}|} \cdot p_{i+1}.$$

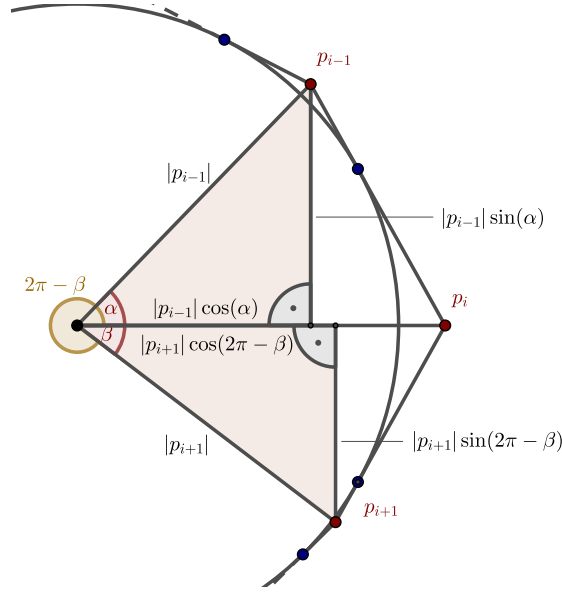


Abbildung 4.4: Das 2-Polytop, so gedreht, dass p_i auf der x -Achse liegt. Die jeweiligen Längen, aus denen sich die x - und y -Koordinaten der entsprechenden Punkte ableiten lassen, sind eingezeichnet.

Da wir über die einzelnen Koordinaten der vier Summanden argumentieren wollen, drehen wir für die Argumentation den Einheitskreis ohne Beschränkung der Allgemeinheit so, dass p_i auf der x -Achse liegt. Dies ist möglich, da alle Werte der obigen Gleichung Abstände und Winkel sind, die durch die Drehung unverändert bleiben. Wir erhalten damit für die Koordinaten der Gleichung

$$C_{(i,:)} \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{|p_{i-1}| \cos(\alpha)}{|p_i \times p_{i-1}|} \\ \frac{|p_{i-1}| \sin(\alpha)}{|p_i \times p_{i-1}|} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{|p_i|^2 \sin(\alpha)} |p_i| \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{|p_i|^2 \sin(\beta)} |p_i| \\ 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{|p_{i+1}| \cos(2\pi - \beta)}{|p_i \times p_{i+1}|} \\ \frac{|p_{i+1}| \sin(2\pi - \beta)}{|p_i \times p_{i+1}|} \end{bmatrix}^T.$$

Im letzten Vektor erhalten wir die Argumente $2\pi - \beta$, da die Punkte p_{i-1} und p_{i+1} auf unterschiedlichen Seiten der x -Achse liegen. Würde dies nicht gelten, so wäre der Punkt $\vec{0}$ nicht Teil des Polytops. Da wir für die Koordinaten den orientierten Winkel benötigen, erhalten wir für p_{i+1} den Außenwinkel $2\pi - \beta$ und nicht den Innenwinkel β . Eine Illustration der Koordinaten ist in Abbildung 4.4 zu finden. Durch die Definition des Kreuzprodukts, für das der Innenwinkel β benötigt wird, und mit

$$\cos(2\pi - \beta) = \cos(\beta) \quad \text{und} \quad \sin(2\pi - \beta) = -\sin(\beta)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} C_{(i,:)} \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{|p_{i-1}| \cos(\alpha)}{|p_i \times p_{i-1}|} \\ \frac{|p_{i-1}| \sin(\alpha)}{|p_i \times p_{i-1}|} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{|p_i|^2 \sin(\alpha)} |p_i| \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{|p_i|^2 \sin(\beta)} |p_i| \\ 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{|p_{i+1}| \cos(2\pi - \beta)}{|p_i \times p_{i+1}|} \\ \frac{|p_{i+1}| \sin(2\pi - \beta)}{|p_i \times p_{i+1}|} \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{|p_i| \sin(\alpha)} \\ \frac{\sin(\alpha)}{|p_i| \sin(\alpha)} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{|p_i| \sin(\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{|p_i| \sin(\beta)} \\ 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{|p_i| \sin(\beta)} \\ -\frac{\sin(\beta)}{|p_i| \sin(\beta)} \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{|p_i| \sin(\alpha)} \\ \frac{1}{|p_i|} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{|p_i| \sin(\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{|p_i| \sin(\beta)} \\ 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{|p_i| \sin(\beta)} \\ -\frac{1}{|p_i|} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Damit spannen die Spalten von P den Kern von C auf. □

Der eben beschriebene Beweis war recht technisch, das beschriebene Theorem liefert aber genau den Spezialfall, den wir in den Kapiteln 5 und 6 benötigen. Wir schließen hier noch folgende Aussage an, die wir für die Normierung der Colin-de-Verdière-Matrizen in den folgenden beiden Kapiteln benötigen:

Satz 4.9. *Sei C eine Colin-de-Verdière-Matrix wie in Theorem 4.8. Dann ist jede Zeilensumme von C negativ.*

Beweis. Jede Zeile von C hat exakt drei Nicht-Null-Einträge. Damit ist die Zeilensumme für i

$$\begin{aligned} \sum_j C_{(i,j)} &= -\frac{1}{|p_i \times p_{i-1}|} + \frac{\cos(\alpha)}{|p_i|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|p_i|^2 \sin(\beta)} - \frac{1}{|p_i \times p_{i+1}|} \\ &= -\frac{1}{|p_i \times p_{i-1}|} + \frac{\langle p_{i-1}, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle |p_i \times p_{i-1}|} + \frac{\langle p_i, p_{i+1} \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle |p_i \times p_{i+1}|} - \frac{1}{|p_i \times p_{i+1}|} \\ &= \frac{\langle p_{i-1}, p_i \rangle - \langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle |p_i \times p_{i-1}|} + \frac{\langle p_i, p_{i+1} \rangle - \langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle |p_i \times p_{i+1}|}. \end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Theorem 4.8 ist

$$\langle p_{i-1}, p_i \rangle < \langle p_i, p_i \rangle \quad \text{und} \quad \langle p_i, p_{i+1} \rangle < \langle p_i, p_i \rangle$$

und damit ist

$$\sum_j C_{(i,j)} < 0.$$

□

Wir beschreiben im nächsten Theorem noch die Konstruktion der Colin-de-Verdière-Matrix des zu $\mathbf{P}$ dualen Polytops:

Theorem 4.10. *Seien die Begriffe wie in Theorem 4.8 und sei $\mathbf{P}^*$ mit den Ecken $e_1, \dots, e_n$ das zu $\mathbf{P}$ duale Polytop. Dann ist die Matrix*

$$C_{(i,j)} := \begin{cases} -\frac{1}{|e_i \times e_j|} & \text{für } i \neq j \text{ und für } e_i \text{ und } e_j \text{ haben eine gemeinsame Kante} \\ 0 & \text{für } i \neq j \text{ und für } e_i \text{ und } e_j \text{ haben keine gemeinsame Kante} \\ \frac{\cos(\alpha)}{|e_i|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|e_i|^2 \sin(\beta)} & \text{für } i = j \text{ mit } \alpha = \angle(e_{i-1}, e_i) \text{ und } \beta = \angle(e_i, e_{i+1}) \end{cases}$$

eine optimale Colin-de-Verdière-Matrix für $\mathbf{P}^*$ und es gilt

$$C \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = 0.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 4.8, weshalb wir hier nur auf die wesentlichen Schritte eingehen und den Beweis im Vergleich zum obigen kürzen. Das primale Polytop, welches das duale des dualen Polytops ist, lässt sich in die Dreiecke

$$(0, e_i, p_i) \quad \text{und} \quad (0, e_i, p_{i+1})$$

zerlegen. Variieren wir die Kanten des primalen Polytops mit den Faktoren r_i , so sind die variierten Kantenpunkte

$$\bar{e}_i = r_i e_i.$$

Setzen wir

$$a := \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (e_{i-1})_x \\ (e_{i-1})_y \end{bmatrix} = e_{i-1}, \quad b := \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (e_i)_x \\ (e_i)_y \end{bmatrix} = e_i \quad \text{und} \quad c := \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (e_{i+1})_x \\ (e_{i+1})_y \end{bmatrix} = e_{i+1},$$

dann erhalten wir die variierten Eckpunkte durch

$$\bar{p}_i = \left[\frac{b_y r_{i-1} - a_y r_i}{a_x b_y - a_y b_x}, \frac{a_x r_i - b_x r_{i-1}}{a_x b_y - a_y b_x} \right]^T \quad \text{und} \quad \bar{p}_{i+1} = \left[\frac{c_y r_i - b_y r_{i+1}}{b_x c_y - b_y c_x}, \frac{b_x r_{i+1} - c_x r_i}{b_x c_y - b_y c_x} \right]^T.$$

Für das Volumen des variierten primalen Polytops in Abhängigkeit der Variablen r erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\text{vol}_2(r_{i-1}, r_i) &= \frac{1}{2} |\bar{e}_{i-1} \times \bar{p}_i| + \frac{1}{2} |\bar{e}_i \times \bar{p}_i| \\ &= \frac{|r_{i-1}r_i \langle a, a \rangle - r_{i-1}^2 \langle a, b \rangle|}{2 \langle a, a \rangle |a \times b|} + \frac{|r_i^2 \langle a, b \rangle - r_{i-1}r_i \langle b, b \rangle|}{2 \langle b, b \rangle |a \times b|} \\ &= \frac{|r_{i-1}r_i - r_{i-1}^2 \langle a, b \rangle|}{2 |a \times b|} + \frac{|r_i^2 \langle a, b \rangle - r_{i-1}r_i|}{2 |a \times b|}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\text{vol}_2(r_i, r_{i+1}) &= \frac{1}{2} |\bar{e}_i \times \bar{p}_{i+1}| + \frac{1}{2} |\bar{e}_{i+1} \times \bar{p}_{i+1}| \\ &= \frac{|r_i r_{i+1} \langle b, b \rangle - r_i^2 \langle b, c \rangle|}{2 \langle b, b \rangle |b \times c|} + \frac{|r_{i+1}^2 \langle b, c \rangle - r_i r_{i+1} \langle c, c \rangle|}{2 \langle c, c \rangle |b \times c|} \\ &= \frac{|r_i r_{i+1} - r_i^2 \langle b, c \rangle|}{2 |b \times c|} + \frac{|r_{i+1}^2 \langle b, c \rangle - r_i r_{i+1}|}{2 |b \times c|}.\end{aligned}$$

Die Vereinfachung kann hier erfolgen, da $|a| = |b| = |c| = 1$ gilt. Für die Ableitung ergibt sich entsprechend

$$2 |a \times b| \left(\frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial r_{i-1} \partial r_i} \Big|_{r=\vec{1}} \right) = \text{sgn}(1 - \cos(\alpha)) + \text{sgn}(1 - \cos(\alpha)) = 1$$

und

$$\frac{\partial^2 \text{vol}(\mathbf{P}^*(r))}{\partial^2 r_i} \Big|_{r=\vec{1}} = \frac{\langle a, b \rangle \text{sgn}(\langle a, b \rangle - 1)}{|a \times b|} - \frac{\langle b, c \rangle \text{sgn}(1 - \langle b, c \rangle)}{|c \times b|} = -\frac{\langle a, b \rangle}{|a \times b|} - \frac{\langle b, c \rangle}{|c \times b|}.$$

Damit ergeben sich die Matrixeinträge von C , wie im Theorem beschrieben, analog zum Beweis von Theorem 4.8. Betrachten wir noch

$$\begin{aligned}C_{(i,:)} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} &= -\frac{1}{|e_{i-1} \times e_i|} e_{i-1} - \frac{1}{|e_i \times e_{i+1}|} e_{i+1} + \frac{\cos(\alpha)}{|e_i|^2 \sin(\alpha)} e_i + \frac{\cos(\beta)}{|e_i|^2 \sin(\beta)} e_i \\ &= -\frac{e_{i-1}}{\sin(\alpha)} - \frac{e_{i+1}}{\sin(\beta)} + \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} e_i + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} e_i \\ &= \frac{\cos(\alpha) e_i - e_{i-1}}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta) e_i - e_{i+1}}{\sin(\beta)}.\end{aligned}$$

Die Vektoren der beiden Summanden zeigen in die jeweils entgegengesetzte Richtung und haben dieselbe Länge (vgl. Abbildung 4.4). Daher ist

$$C_{(i,:)} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

□

Wir fügen auch hier den folgenden Satz an:

Satz 4.11. *Die Zeilensummen der Matrix C , konstruiert nach Theorem 4.10, sind alle negativ.*

Beweis. Wir erhalten

$$-\frac{1}{|e_{i-1} \times e_i|} - \frac{1}{|e_i \times e_{i+1}|} + \frac{\cos(\alpha)}{|e_i|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|e_i|^2 \sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta) - 1}{\sin(\beta)}.$$

Da die Winkel α und β in $(0, \pi)$ liegen, gilt die obige Aussage. □

Im nächsten Abschnitt betrachten wir abschließend die Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen für 3-Polytope.

4.4 Colin-de-Verdière-Matrizen für 3-Polytope

Für die Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen zu 3-Polytopen orientieren wir uns an der Konstruktion von Lovász [Lov01]. Das Theorem 4.7 von Izestiev wird in [Izm10] für allgemeine d -Polytope formuliert und ließe sich ebenfalls nutzen. Beide Konstruktionen liefern dieselben Matrizen (der Beweis dafür findet sich in [Izm10]). Wir verwenden die Konstruktion von Lovász, da diese geometrisch und dadurch einfacher verständlich ist und beginnen mit der folgenden Definition [Lov01, S. 226]:

Definition 4.12. Eine Colin-de-Verdière-Matrix C eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen G heißt geeignet skaliert, wenn die Vektoren, die den Kern von C aufspannen, die Ecken einer Realisierung von G als konvexes Polytop P sind.

Wir fassen [Lov01, Abschn. 5, S. 228–231] und [Lov01, Thm. 6, S. 229] in dem folgenden Theorem zusammen:

Theorem 4.13. Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph und $P \in \mathbb{R}^3$ eine Realisierung des Graphen als konvexes 3-Polytop, das den Ursprung enthält. Sei zudem F die Liste der m Facetten von P und sei P^* das zu P polar duale Polytop mit Ecken $f_1, \dots, f_m$. Sei außerdem P die Matrix der Ecken des Polytops P und $p_1 := P_{(1,:)}, \dots, p_n := P_{(n,:)}$. Dann ist

$$C := \begin{cases} -\frac{|f_k - f_l|}{|p_i \times p_j|} & \text{für } i \neq j \text{ und } p_i \text{ und } p_j \text{ haben eine gemeinsame Kante} \\ & \text{mit } f_k, f_l \text{ als duale Punkte der primalen Facetten, die an der Kante } \{p_i, p_j\} \text{ liegen} \\ 0 & \text{für } i \neq j \text{ und } p_i \text{ und } p_j \text{ haben keine gemeinsame Kante} \\ -\frac{\langle p_i, \sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} & \text{für } i = j \end{cases}$$

eine optimale Colin-de-Verdière-Matrix des Graphen G und $CP = 0$, die Matrix C ist also geeignet skaliert.

Beweis. Der Beweis, dass C eine Colin-de-Verdière-Matrix ist, ist in [Lov01, S. 229–230] zu finden. Wir führen diesen hier nicht aus. Allerdings beschreiben wir die Motivation der Konstruktion und insbesondere die Begründung für $CP = 0$. Alle hier aufgeführten Schritte sind [Lov01] entnommen.

Zunächst muss bemerkt werden, dass P nicht unbedingt ein Polytop sein muss, dessen Kanten tangential zur Einheitskugel liegen.

Nehmen wir an, dass mit $i \neq j$ zwischen p_i und p_j eine Kante liegt, die zusätzlich an den zu f_k und f_l gehörenden Facetten liegt. Dann erhalten wir trotzdem über die Definition des polar dualen Polytops, dass

$$\langle p_i, f_k \rangle = \langle p_i, f_l \rangle = \langle p_j, f_k \rangle = \langle p_j, f_l \rangle = 1$$

gilt, denn die dualen Punkte f_k und f_l liegen an den dualen Facetten, die von p_i und p_j erzeugt werden. Damit erhalten wir

$$0 = \langle p_i, f_k \rangle - \langle p_i, f_l \rangle = \langle p_i, f_k - f_l \rangle \quad \text{und} \quad 0 = \langle p_j, f_k \rangle - \langle p_j, f_l \rangle = \langle p_j, f_k - f_l \rangle.$$

Der Vektor $f_k - f_l$ steht also orthogonal auf p_i und p_j und zeigt damit (modulo Vorzeichen) in dieselbe Richtung wie der Vektor $p_i \times p_j$. Eine Illustration findet sich in Abbildung 4.5. Damit lässt sich nach [Lov01] die Gleichung

$$f_k - f_l = C_{(i,j)} (p_i \times p_j)$$

aufstellen. Den Wert von $C_{(i,j)}$ können wir über den Längenvergleich von $f_k - f_l$ und $(p_i \times p_j)$ ermitteln. Das Vorzeichen ist nicht eindeutig und hängt von der Reihenfolge von p_i und p_j ab. Wir wählen diese gerade so, dass $C_{(i,j)}$ negativ ist. Damit lässt sich $C_{(i,j)}$ durch

$$C_{(i,j)} = -\frac{|f_k - f_l|}{|p_i \times p_j|}$$

berechnen.

Im Fall $i \neq j$ und p_i hat keine gemeinsame Kante mit p_j , setzen wir

$$C_{(i,j)} = 0.$$

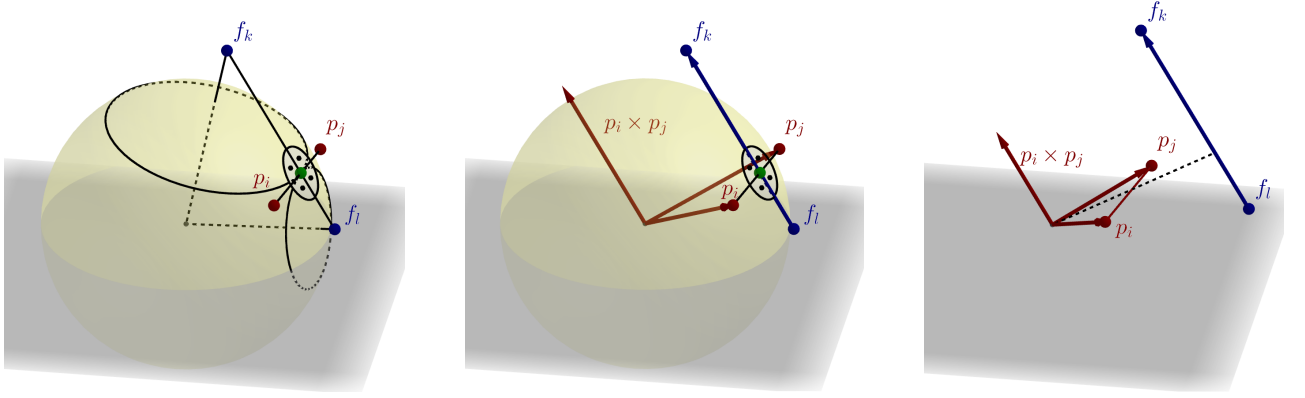


Abbildung 4.5: Orthogonalität der Kanten von primalen und dualen Punkten (links), Richtung des Vektors $f_k - f_l$ und des Vektors $p_i \times p_j$, die parallel zueinander sind (Mitte), und das zur Mitte analoge Bild für ein Polytop, dessen Kanten nicht tangential zur Einheitssphäre sind (rechts).

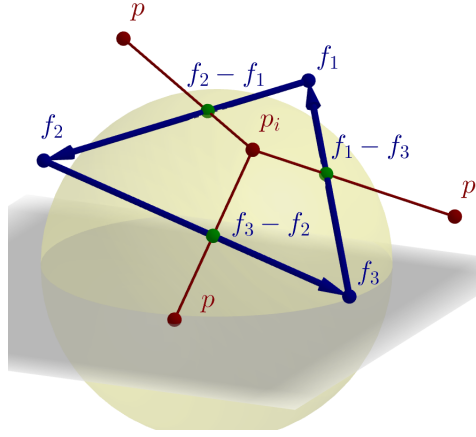


Abbildung 4.6: Ein primaler Punkt p_i mit drei benachbarten primalen Punkten. Zu jeder primalen Kante gehört eine duale Kante, sodass jeder duale Punkt der dualen Kanten des Dreiecks doppelt gezählt wird.

Diskutieren wir in einem nächsten Schritt den Fall $i = j$. Betrachten wir das Kreuzprodukt

$$\left(\sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j \right) \times p_i,$$

so erhalten wir

$$\left(\sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j \right) \times p_i = \sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} (p_j \times p_i) = \sum_{(k,l)} f_k - f_l,$$

wobei die letzte Summe über alle Kanten der zu p_i dualen Facette läuft. Durch die Fixierung von p_i im Kreuzprodukt $(p_j \times p_i)$ erhalten die Vektoren $f_k - f_l$ eine Umlaufrichtung. Damit wird jeder Punkt f , der per Konstruktion an zwei dieser Kanten liegt, einmal positiv und einmal negativ gezählt und wir erhalten damit

$$\left(\sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j \right) \times p_i = \sum_{k,l} f_k - f_l = 0. \quad (4.3)$$

Eine beispielhafte Illustration findet sich in Abbildung 4.6. Damit zeigt $\sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j$ in dieselbe Richtung wie p_i

und beide Vektoren sind parallel. Wir erhalten nach [Lov01] eine zweite Gleichung

$$\sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j = -C_{(i,i)} p_i, \quad (4.4)$$

die wir nach $C_{(i,i)}$ durch

$$\begin{aligned} \sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j = -C_{(i,i)} p_i &\Leftrightarrow p_i^T \sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j = -p_i^T C_{(i,i)} p_i \\ &\Leftrightarrow C_{(i,i)} = -\frac{\langle p_i, \sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} \end{aligned} \quad (4.5)$$

aufösen können. Damit können wir alle Matrixeinträge berechnen. Mit Gleichung (4.4) erhalten wir zudem

$$\sum_{j, j \neq i} C_{(i,j)} p_j = -C_{(i,i)} p_i \Leftrightarrow \sum_j C_{(i,j)} p_j = 0.$$

Damit ist $CP = 0$ und die Spalten der Matrix P deren Zeilen die Ecken des Polytops sind, spannen den Kern von C auf. Da die Dimension des Kerns mit Theorem 4.4 maximal 3 sein kann, ist C optimal, und da die Spalten von P linear unabhängig sind, ist C geeignet skaliert. □

Damit haben wir für alle in diese Arbeit relevanten Dimensionen die Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen beschrieben. Wir schließen das aktuelle Kapitel mit der folgenden Aussage über Colin-de-Verdière-Matrizen zu 3-Polytopen, welche wir für die Beweise in Kapitel 5 und 6 benötigen [Lov01, Gl. 11, S. 234]:

Theorem 4.14. *Sei $G = (V, E)$ ein 3-zusammenhängender planarer Graph und $|V| = n$. Sei P eine Realisierung von G , die den Ursprung enthält und sei P^* das zu P polar duale Polytop. Sei außerdem C die mit Theorem 4.13 aus P und P^* konstruierte Colin-de-Verdière-Matrix. Sei zudem a_i das Volumen des Kegels, der sich aus der konvexen Hülle von der zu p_i gehörenden dualen Facette und dem Ursprung ergibt. Dann gilt*

$$\sum_j C_{(i,j)} = -6a_i$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wir führen den Beweis hier nicht aus, aber eine Illustration des Kegels findet sich in Abbildung 4.7.

In diesem Kapitel haben wir die Theorie der Colin-de-Verdière-Matrizen zusammengetragen. Wir haben zudem die Konstruktion der beiden trivialen Fälle erarbeitet und für die benötigten Spezialfälle die Konstruktion von Colin-de-Verdière-Matrizen für zweidimensionale Polytope ausgearbeitet. Für 3-Polytope haben wir die Konstruktion aus der Literatur beschrieben. Dies können wir für die Konstruktion der Subdivisionsmatrizen im nächsten Kapitel nutzen.

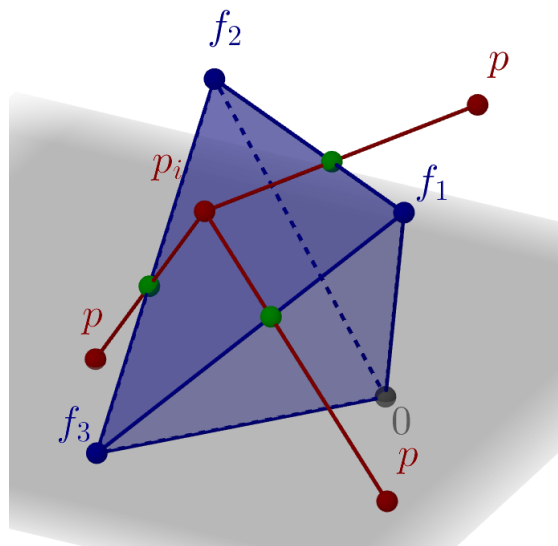


Abbildung 4.7: Ein primaler Punkt p_i und der Kegel, der von der zugehörigen dualen Facette und dem Ursprung aufgespannt wird.

5 Verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision

In diesem Kapitel betrachten wir die Konstruktion und die Eigenschaften verallgemeinerter quadratischer B-Spline-Subdivisionsalgorithmen und damit den Fall $g = 2$. Zusammen bilden Kapitel 5 und Kapitel 6 den Hauptteil dieser Arbeit.

In Abschnitt 5.1 erläutern wir die Entstehung verallgemeinerter quadratischer B-Spline-Subdivisionsalgorithmen und betrachten kurz den Fall $t = 1$. Für den Fall $t = 2$ beschreiben wir die Subdivisionsmatrix für ein reguläres Initialelement und gehen auf den Doo-Sabin-Algorithmus [DS78] ein, welcher in der Literatur der etablierte Subdivisionsalgorithmus für diesen Fall ist. Dieser liefert insbesondere für irreguläre Initialelemente Verfeinerungsregeln, die wir näher betrachten. Für $t = 3$ ließ sich in der Literatur keine Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen finden, weshalb wir in Abschnitt 5.1 nur die Verfeinerungsregeln des regulären Falls beschreiben.

Abschnitt 5.2 befasst sich dann mit der eigentlichen Konstruktion unserer Subdivisionsmatrizen für die Fälle $t = 2$ und $t = 3$. Dafür nutzen wir die Resultate der Kapitel 3 und 4. Wir stellen konkret zwei verschiedene Varianten vor, die für verschiedene Anwendungsmöglichkeiten konzipiert sind. Hier ist insbesondere der Fall $t = 3$ interessant, denn wie erwähnt scheint es so, dass bisher kein Vorschlag für mögliche Verfeinerungsregeln existiert.

In Abschnitt 5.3 gehen wir auf die Qualitätskriterien aus Kapitel 2 ein. Insbesondere zeigen wir, für welche unserer Varianten welche Kriterien gelten. Es wird nicht möglich sein, alle Kriterien für alle Varianten zu beweisen oder zu widerlegen, daher untermauern wir die Analyse mit einer empirischen Studie. Konkret testen wir die 305.095 Beispiele aus Abschnitt 3.1.1 numerisch auf die Kriterien, für die dies möglich ist.

Das Ziel dieses Kapitels ist es damit, neben der Konstruktion der Subdivisionsalgorithmen auch explizite Aussagen über diese zu treffen, um eine Empfehlung für deren Nutzung geben zu können.

5.1 Literaturübersicht und Verfeinerungsregeln für reguläre Initialelemente

In diesem Abschnitt beleuchten wir kurz die Geschichte und die bisher bekannten Subdivisionsalgorithmen und Verfeinerungen, die in der Literatur bekannt sind.

Wir beginnen mit dem eindimensionalen Fall. Der erste Unterteilungsalgorithmus für quadratische B-Splines wurde von Chaikin in [Cha74] entwickelt. Die vorgeschlagenen Verfeinerungsregeln waren allerdings zunächst unabhängig von der Idee, quadratische B-Splines zu verfeinern. Der Zusammenhang zwischen den Verfeinerungsregeln und der Verfeinerung quadratischer B-Splines wurde von Riesenfeld in [Rie75] bewiesen. Dies lässt sich als Startpunkt der Subdivision bezeichnen, denn die Idee, mit einfachen Verfeinerungsregeln die Basis von Raumkurven zu verfeinern, wurde von diesen beiden Arbeiten ausgehend auf die anderen Fälle $t \in \{2, 3\}$ und $g = 3$ übertragen.

Die ursprünglichen Verfeinerungsregeln benötigen drei Kontrollpunkte. Allerdings lassen sie sich so umwandeln, dass sie nur noch zwei Kontrollpunkte benötigen, und damit erhalten wir nach [Cha74] für den Fall $t = 1$ und $g = 2$ die Subdivisionsmatrix

$$S^{(1)} := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Eine Illustration der Verfeinerung findet sich in Abbildung 5.1.

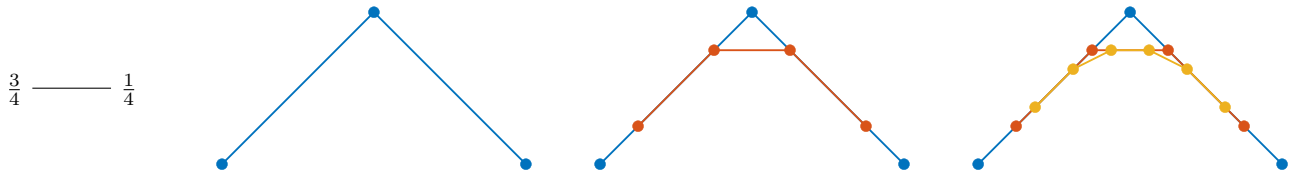


Abbildung 5.1: Eine der beiden Verfeinerungsregeln für $t = 1$ (links) und eine Beispielkonfiguration mit zwei Initialelementen (zweite von links). Verfeinert man beide Initialelemente, so entstehen vier Kontrollpunkte und drei Initialelemente (zweite von rechts) und verfeinert man ein weiteres mal, so entstehen sechs Kontrollpunkte und fünf Initialelemente (rechts).

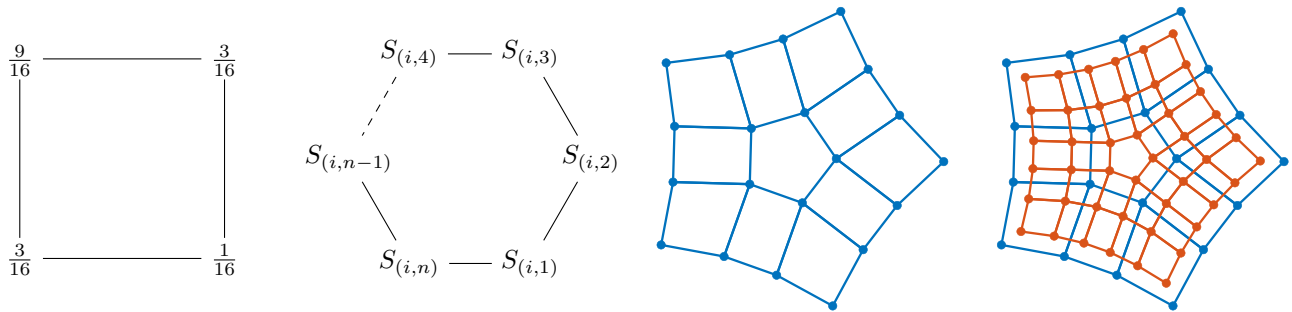


Abbildung 5.2: Eine der vier regulären Verfeinerungsregeln (links) und eine der n irregulären Verfeinerungsregeln (zweite von links) für $t = 2$ und eine Beispielkonfiguration mit elf Initialelementen (zweite von rechts). Verfeinert man die elf Initialelemente, so entstehen 31 neue Initialelemente (rechts).

Doo und Sabin verallgemeinerten diese Regeln in [DS78] auf den bivariaten Fall ($t = 2$), um quadratische B-Spline-Flächen konstruieren zu können. Für den regulären Fall, der das Tensorprodukt der $[3/4, 1/4]$ -Regel mit sich selbst ist, lautet die entsprechende Matrix

$$S^{(2)} := \text{kron} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Doo und Sabin gaben auch Regeln für den irregulären Fall, also für allgemeine n -Ecke, an. Dafür werden zunächst alle Ecken gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert. Die Subdivisionsmatrizen ergeben sich dann durch [DS78, S. 360]

$$S_{(i,j)} := \frac{\delta_{i,j}}{4} + \frac{3 + 2 \cos \left(\frac{2\pi(i-j)}{n} \right)}{4n} \quad \text{mit} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.1)$$

wobei $\delta_{i,j}$ das *Kronecker-Delta* ist. Eine Illustration der regulären und irregulären Verfeinerungsregeln sowie eine Beispielverfeinerung findet sich in Abbildung 5.2.

Der Doo-Sabin-Algorithmus erfüllt alle in dieser Arbeit genannten Qualitätskriterien. Viele der Beweise dazu finden sich in [PR08]. Die Subdivisionsmatrizen von [DS78] erfüllen insbesondere das Qualitätskriterium Q13 und konstruieren damit Flächen, die in den zentralen Punkten eine Glattheit von C^1 aufweisen (vgl. dazu [PR08, Thm. 6.2, S. 119]). Außerdem sind die Matrizen so gewählt, dass deren Eigenwerte für den Fall der Initialelemente

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{4}$$

sind.

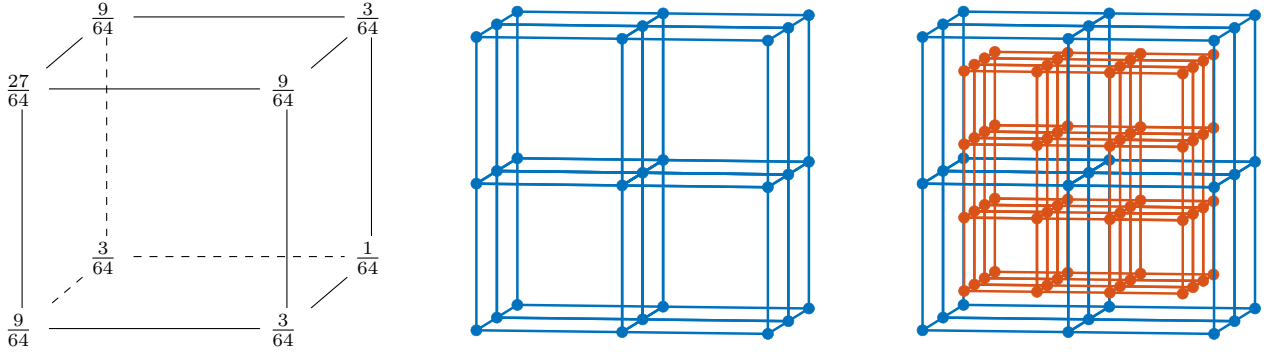


Abbildung 5.3: Eine der acht regulären Verfeinerungsregeln (links) und eine Beispielkonfiguration mit acht Initialelementen und 27 Kontrollpunkten (Mitte). Verfeinert man die acht Initialelemente, so entstehen 27 Initialelemente und 64 Kontrollpunkte (rechts).

Für $t = 3$ erhalten wir für reguläre Initialelemente die Subdivisionsmatrix

$$S^{(3)} := \text{kron} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{kron} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{kron} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 27 & 9 & 9 & 3 & 9 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 3 & 9 & 3 & 9 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 27 & 9 & 3 & 1 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 27 & 1 & 3 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 3 & 1 & 27 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 9 & 27 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 9 & 3 & 27 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 9 & 3 & 9 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Eine Illustration einer Verfeinerungsregel und eine beispielhafte Verfeinerung findet sich in Abbildung 5.3. Damit haben wir alle regulären Matrizen für den Fall $g = 2$ beschrieben. Dies sind die Matrizen für Definition 2.15, welche die reguläre Verfeinerung und damit auch die reguläre Auswertung zu quadratischen B-Spline-Elementen ermöglichen. Für die irregulären kombinatorischen Anordnungen des Typs $t = 3$ sind unseres Wissens nach keine Verfeinerungsregeln bekannt. Selbstverständlich ist es für den semi-irregulären Fall möglich, die zweidimensionalen Doo-Sabin-Regeln als Tensorprodukt mit dem eindimensionalen Fall ins Dreidimensionale zu übertragen. Die Herausforderung besteht allerdings darin, für die anderen kombinatorischen Anordnungen Verfeinerungsregeln zu entwickeln.

Das Ziel des nächsten Abschnitts ist es, für eine beliebige zulässige dreidimensionale kombinatorische Anordnung eine Subdivisionsmatrix zu erzeugen. Dabei konstruieren wir sowohl Regeln für den zweidimensionalen als auch für den dreidimensionalen Fall.

5.2 Konstruktion der Subdivisionsmatrizen

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Konstruktion von Subdivisionsmatrizen für Initialelemente. Da es für $g = 2$ keine sich überlappenden Initialelemente gibt, setzen sich die Subdivisionsmatrizen größerer Strukturen aus den hier konstruierten Subdivisionsmatrizen der Initialelemente zusammen.

Wir konstruieren in diesem Abschnitt zwei Varianten. Die erste Variante führt dabei zu einer Subdivisionsmatrix,

für die wir die Eigenwerte exakt bestimmen können. Da wir allerdings mit dieser Variante einige Qualitätskriterien einbüßen, konstruieren wir eine weitere Variante, die die Kontrolle über den subsubdominanten Eigenwert aufgibt, dafür aber die anderen Kriterien erfüllt. Je nach Anwendung bietet sich hier die eine oder die andere Variante an. Bevor wir mit der Konstruktion beginnen, ist noch Folgendes zu bemerken:

Bemerkung 5.1. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Strategien im Bezug auf die Konstruktion von Subdivisionsmatrizen ist durchaus ungewöhnlich. In den gängigen Verfahren der Literatur ist die Strategie zumeist, explizite Regeln für die Matrixeinträge anzugeben. Dies hat den entscheidenden Vorteil der Einfachheit. Aus Anwenderperspektive würde man sich auf die expliziten Formeln fokussieren, da diese einfach zu implementieren sind.

In unseren Verfahren geben wir keine konkreten Formeln an, sondern beschreiben eine indirekte Konstruktion der Subdivisionsmatrizen. Dazu wählen wir zunächst die konvexen Polytope aus Kapitel 3 als Basis des subdominanten Eigenraums der Subdivisionsmatrix und konstruieren anschließend eine Matrix mit diesem Eigenraum.

In Kapitel 3 haben wir aber gesehen, dass die Konstruktion konvexer Polytope mit einem gewissen (Programmier)Aufwand verbunden ist. Um diesen Nachteil auszugleichen stellen wir in [Die25] eine Bibliothek zur Verfügung, die eine Matlab-Implementierung aller in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmen enthält. Diese kann entweder als Blackbox genutzt oder in andere Programmiersprachen übertragen werden.

5.2.1 Variante 1: Exaktes Spektrum

Die Konstruktion der Subdivisionsmatrix der ersten Variante für ein Initialelement findet sich in Algorithmus 10. Alle in Abschnitt 5.2.1 vorkommenden Matrizen und Variablen beziehen sich auf die des Algorithmus 10. Wir beschreiben im Folgenden die einzelnen Schritte:

Algorithmus 10: Verallgemeinerte Quadratische B-Spline Subdivisionsmatrix Variante 1

Data: valider kombinatorischer Graph $\mathbf{G}$ eines Initialelements in der Eingabeform von Definition 3.10,

Typ $t \in \{2, 3\}$, subsubdominanter Eigenwert μ mit $0 \leq \mu < 1/2$

Result: Subdivisionsmatrix $S_1^{(t)}$

```

1 begin
2   if  $t == 2$  ||  $\mathbf{G}$  ist kein kombinatorischer Graph eines Prismas then
3      $P =$  (Koordinaten des  $t$ -Polytops zu  $\mathbf{G}$  konstruiert nach Kapitel 3) mit  $P \in \mathbb{R}^{n \times t}$ ;
4     if  $t == 3$  then
5        $P' = P - \frac{\sum_{i=1}^n P_{(i,:)} }{n}$ ;
6        $\tilde{P} = \text{orth}(P')$ ;
7     else
8        $\tilde{P} = P$ ;
9      $S_1^{(t)} := \left( \frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left( \frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \right) (1 - \mu) + \mu E_n$ ;
10  else
11     $n =$  Anzahl der Ecken der Grundfläche des Prismas;
12     $S^{(2)} :=$  Doo-Sabin-Matrix für  $n$  Ecken nach Formel (5.1);
13     $S^{(1)} := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ;
14     $S_1^{(t)} := \text{kron}(S^{(1)}, S^{(2)})$ ;

```

Eingabe und konvexes Polytop Wir beginnen mit einem konkreten Initialelement. Mit Definition 2.51 ist das Initialelement valide, wenn der kombinatorische Graph für $t = 2$ ein Kreis und für $t = 3$ ein planarer 3-zusammenhängender Graph ist. Wir setzen die Validität voraus und wählen als Eingabe den kombinatorischen Graphen des Initialelements.

Damit erhalten wir für $t = 2$ die Struktur eines Kreises (im graphentheoretischen Sinn) mit n Ecken und n Kanten und konstruieren, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, ein konvexes 2-Polytop als regelmäßiges n -Eck mit Kontrollpunkten $P \in \mathbb{R}^{n \times 2}$.

Für $t = 3$ erhalten wir einen planaren 3-zusammenhängenden Graphen und wählen dieselben Eingabeoptionen wie in Definition 3.10. Damit konstruieren wir mit dem in Abschnitt 3.3 beschriebenen Verfahren ein 3-Polytop mit den Eigenschaften aus Theorem 3.25.

Korrektur von P Für dieses Verfahren benötigen wir ein Polytop, dessen Eckenschwerpunkt 0 ist. Für $t = 2$ ist dies bereits gegeben. Summiert man die Einträge aus Gleichung (3.16) auf, so kommt jeder Eintrag

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

einmal positiv und einmal negativ vor (mit j jeweils Modulo n). Damit summieren sich alle Koordinateneinträge zu 0 auf. Der Korrekturschritt, der den Eckenschwerpunkt zentriert, ist also nur für den Fall $t = 3$ notwendig. Hier ist das in Kapitel 3 konstruierte 3-Polytop so gewählt, dass der Kantenschwerpunkt im Ursprung liegt. Daher muss das Polytop unter Umständen verschoben werden, um den Eckenschwerpunkt in den Ursprung zu verschieben. Dies erreichen wir durch

$$P' := P - \frac{\sum_{i=1}^n P_{(i,:)} }{n} := P - \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n P_{(i,:)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n P_{(i,:)} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Die Spalten von P' sollen im Eigenraum der Subdivisionsmatrix zum Eigenwert $1/2$ enthalten sein. Da die Koordinatenvektoren linear unabhängig sind, spannen sie einen t -dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ auf. Für diesen Unterraum benötigen wir in einem zweiten Schritt eine orthogonale Basis. Die Orthogonalität ist essenzieller Bestandteil des Beweises von Theorem 5.15. Ohne diese hat $S_1^{(t)}$ weder das gewünschte Spektrum, noch die gewünschten Eigenvektoren.

Für $t = 2$ sind die beiden Koordinatenvektoren bereits orthogonal zueinander. Dies folgt geometrisch aus deren Konstruktion. Da $(1, 0)$ ein Tangentenpunkt des 2-Polytops ist, erhalten wir eine zur x -Achse senkrechte Tangente, auf der die beiden Kontrollpunkte $P_{(1,:)}$ und $P_{(n,:)}$ liegen. Aus Symmetriegründen haben daher beide dieselbe x -Koordinate und entgegengesetzte y -Koordinaten. Damit erhalten wir

$$P_{(1,1)}P_{(1,2)} + P_{(n,1)}P_{(n,2)} = xy + x(-y) = 0.$$

Aus Symmetriegründen setzt sich dies für alle weiteren Punktepaare $P_{(2,:)}$ und $P_{(n-1,:)}$, $P_{(3,:)}$ und $P_{(n-2,:)}$, etc. fort. Ist die Anzahl der Kontrollpunkte ungerade, so liegt ein Kontrollpunkt auf der x -Achse. Da die y -Koordinate entsprechend 0 ist, ist auch dieser Teil des Skalarprodukts gleich 0 und wir erhalten

$$\langle P_{(:,1)}, P_{(:,2)} \rangle = 0.$$

Geometrisch lässt sich dieser Zusammenhang exemplarisch an Abbildung 3.16 erkennen. Wir definieren also

$$\tilde{P} := P' := P \in \mathbb{R}^{n \times 2}.$$

Für das konvexe 3-Polytop ist die Orthogonalität hingegen nicht gegeben. Die Koordinatenvektoren müssen nicht orthogonal zueinander sein und es lassen sich konkrete Beispiele konstruieren, für die sie es nicht sind. Da sie aber einen t -dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ aufspannen, können wir eine orthogonale Basis für diesen Unterraum konstruieren. Dafür verwenden wir die Matlabfunktion `orth` (vgl. [Mate]). Wir definieren damit

$$\tilde{P} := \text{orth}(P') \in \mathbb{R}^{n \times 3}.$$

Hier sind zwei Aspekte anzumerken. Der `orth`-Befehl gibt sogar eine Orthonormalbasis zurück. Um den Vorgang aber klarer zu beschreiben und konsistent zum Fall $t = 2$ zu halten, haben wir im Algorithmus 10 die Normierung der Spalten von P in der Formel für $S_1^{(t)}$ mit angegeben. Außerdem verwenden wir den `orth`-Befehl als Blackbox.

Ein mögliches Verfahren zum Erstellen einer Orthonormalbasis wäre zum Beispiel das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren aus Satz B.13.

Da sowohl die Spalten von P' als auch die Spalten von $\tilde{P}$ linear unabhängig sind und beide denselben Raum aufspannen, ist der `orth`-Befehl ein Basiswechsel, der durch

$$\tilde{P} = P' B \quad \text{mit} \quad B \in \mathbb{R}^{t \times t} \quad \text{und} \quad B \text{ ist invertierbar} \quad (5.3)$$

ausgedrückt werden kann. Die Zeilen von $\tilde{P}$ summieren sich, genauso wie die Zeilen von P' , zu 0 auf, denn für das bereits verschobene P' gilt

$$\sum_{i=1}^n \tilde{P}_{(i,j)} = \sum_{i=1}^n B_{(1,j)} P'_{(i,1)} + B_{(2,j)} P'_{(i,2)} + B_{(3,j)} P'_{(i,3)} = B_{(1,j)} \sum_{i=1}^n P'_{(i,1)} + B_{(2,j)} \sum_{i=1}^n P'_{(i,2)} + B_{(3,j)} \sum_{i=1}^n P'_{(i,3)} = 0$$

mit $j \in \{1, 2, 3\}$.

Konstruktion der Subdivisionsmatrix Im letzten Schritt konstruieren wir aus den orthogonalen Koordinatenvektoren eine Matrix. Diese wird konkret durch

$$S_1^{(t)} := \left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \right) (1-\mu) + \mu E_n \quad (5.4)$$

berechnet. Diese Variante haben wir bereits in abgewandelter Form in [Die+23, S. 148] vorgeschlagen. In Theorem 5.15 werden wir zeigen, dass die Matrix $S_1^{(t)}$ aus Gleichung (5.4) die Eigenwerte

$$1, \underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{t\text{-mal}}, \mu, \dots, \mu$$

besitzt. Die Gleichung (5.4) hat zudem eine direkte Verbindung zum Doo-Sabin-Algorithmus, welche wir im nächsten Lemma und im nächsten Korollar beschreiben:

Lemma 5.2. Für $t = 2$, $n \geq 3$ und $0 < \mu < 1/2$ sind die Matrixeinträge von $S_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gerade

$$(S_1^{(2)})_{(i,j)} = (1-\mu) \frac{2-2\mu + (2-4\mu) \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{n(2-2\mu)} + \mu \delta_{i,j}.$$

Beweis. Wir betrachten die Elemente von Formel (5.4) für $(S_1^{(2)})_{(i,j)}$ einzeln. Zunächst erhalten wir

$$\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die quadrierten Längen der Koordinatenvektoren erhalten wir mithilfe eines Computeralgebrasystems

$$\begin{aligned} |\tilde{P}_{(:,1)}|^2 &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \sum_{i=1}^n \left(\sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \right)^2 \\ &= |\tilde{P}_{(:,2)}|^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \sum_{i=1}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \right)^2 = \frac{2n \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Zudem erhalten wir für das Produkt der Vektoren ebenfalls mithilfe eines Computeralgebrasystems

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{(i,1)} \cdot \tilde{P}_{(j,1)}^T + \tilde{P}_{(i,2)} \cdot \tilde{P}_{(j,2)}^T &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \left(\sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \right) \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)\end{aligned}$$

und zusammen mit der Normierung ergibt sich

$$\frac{\tilde{P}_{(i,1)} \cdot \tilde{P}_{(j,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(i,2)} \cdot \tilde{P}_{(j,2)}^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} = \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{n}.$$

Das letzte Element ist trivialerweise

$$(E_n)_{(i,j)} = \delta_{i,j}.$$

Setzen wir die Komponenten in die Formel (5.4) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(S_1^{(2)}\right)_{(i,j)} &= (1-\mu) \cdot \frac{1}{n} + (1-\mu) \cdot \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \cdot \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{n} + \mu \delta_{i,j} \\ &= (1-\mu) \frac{2-2\mu + (2-4\mu) \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{n(2-2\mu)} + \mu \delta_{i,j}.\end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir direkt das folgende Korollar:

Korollar 5.3. Sei $t = 2$, $n \geq 3$ und $\mu = 1/4$. Dann erzeugt Algorithmus 10 mit der Eingabe der Adjazenzmatrix eines graphentheoretischen Kreises aus n Ecken die Regeln des Doo-Sabin-Algorithmus aus Formel (5.1).

Beweis. Setzen wir im obigen Lemma $\mu = 1/4$, so erhalten wir

$$\left(S_1^{(2)}\right)_{(i,j)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\frac{2}{4}}{2-\frac{2}{4}} \cdot \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{n} + \frac{1}{4} \delta_{i,j} = \frac{3 + 2 \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{4n} + \frac{\delta_{i,j}}{4},$$

was der Formel (5.1) entspricht.

□

Bezüglich der Eigenwerte schließen wir noch folgende Bemerkung an:

Bemerkung 5.4. Wir haben bereits im Abschnitt des Qualitätskriteriums Q5 dargelegt, aus welchen Gründen ein subdominanter Eigenwert von $1/2$ sinnvoll ist. Für bestimmte Anwendungen kann es sinnvoll sein, einen möglichst kleinen subdominanten Eigenwert zu haben. Ein kleiner subdominanter Eigenwert bewirkt beispielsweise, dass der irreguläre Bereich schnell klein wird, da sich die Fläche oder das Volumen um die Irregularität so schneller zusammenzieht (vgl. dazu Abbildung 2.24 linke Spalte). Will man für diese Konstruktion den subdominanten Eigenwert λ frei wählen, so muss man die obige Formel (5.4) zu

$$S_1^{(t)} := \left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{\lambda - \mu}{1 - \mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \right) (1 - \mu) + \mu E_n$$

abändern. Für den im nächsten Paragraphen beschriebenen Prismenfall bedeutet dies wiederum, dass man entweder die Tensorproduktstruktur aufgeben und auch im Prismenfall die gerade beschriebene Formel verwenden muss, oder, dass man für verschiedene Subdivisionsmatrizen um irreguläre Bereiche verschiedene subdominante Eigenwerte erhält.

Es ist zudem bemerkenswert, dass sich Parallelen zum semi-irregulären Fall aus [Pet20, Gl. 9, S. 9] und [YP22, Gl. A5, S. 13] finden lassen. Beide Arbeiten untersuchen verallgemeinerte B-Splines im Rahmen von singulärer Parametrisierung. Die Konstruktionen dieser Arbeiten weisen ebenfalls einen stationären Anteil (ähnlich zum ersten Summanden aus Gleichung (5.4)) und einen an die Valenz des Prismas angepassten Anteil (ähnlich zum zweiten Summanden aus Gleichung (5.4)) auf. Zudem treten in der Konstruktion ebenfalls Polytope auf.

Der Prismenfall Für $t = 3$ definieren wir für den Prismenfall eine alternative Regel. Der Grund hier ist, dass wir die Qualitätskriterien Q7 und Q8 erfüllen wollen. Dies ist aber mit der Formel (5.4) nicht möglich. Betrachten wir dafür die Eigenwerte von $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$. Wir erhalten

$$\text{eig}\left(S^{(1)}\right) = \left[1 \quad \frac{1}{2}\right] \quad \text{und} \quad \text{eig}\left(S^{(2)}\right) = \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}\right].$$

Damit sind mit Theorem B.32 die Eigenwerte von $\text{kron}\left(S^{(2)}, S^{(1)}\right)$ gerade

$$\text{eig}\left(S^{(3)}\right) = \text{eig}\left(\text{kron}\left(S^{(2)}, S^{(1)}\right)\right) = \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}\right].$$

Da die Matrix $S_1^{(t)}$ aus (5.4) die Eigenwerte

$$1, \quad \underbrace{\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}}_{t\text{-mal}}, \quad \mu, \quad \dots, \quad \mu$$

hat, kann nicht gleichzeitig ein Eigenwert von $1/4$ und $1/8$ erreicht werden. Dasselbe gilt analog für alle Prismen mit einer Grundfläche aus $n > 3$ Kanten. Daher wählen wir für diese Fälle das Tensorprodukt aus der zweidimensionalen Doo-Sabin-Variante, die mit unserer Konstruktion für $\mu = 1/4$ übereinstimmt, und der eindimensionalen regulären Regel.

Es ist durchaus interessant, dass die Subdivisionsmatrix im Nicht-Prismenfall nur drei verschiedene Eigenwerte enthält. Mit der obigen Konstruktion legen wir die Eigenräume für die vier Eigenwerte $1, 1/2, 1/2$ und $1/2$ fest. Dem übrigen Raum wird anschließend der Eigenwert μ zugewiesen. Will man eine natürliche Tensorproduktfortsetzung konstruieren, so muss man sich Gedanken über den übrigen Eigenraum zum Eigenwert μ machen und diesen sinnvoll in (mindestens) zwei Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten aufteilen. Dafür fehlt allerdings die Konstruktion, denn wie sollen die anderen Eigenvektoren sinnvoll gewählt werden?

Die Variante des nächsten Abschnitts legt unter anderem den Fokus auf genau diese Frage. Dies hat allerdings den Preis, dass wir den subsubdominanten Eigenwert nicht frei wählen können. Bevor wir die zweite Variante betrachten, zeigen wir die Konstruktion der ersten Variante exemplarisch an folgendem Beispiel, um eine Vorstellung der erzeugten Objekte zu bekommen:

Beispiel 5.5. Wir wählen die Facettenmatrix und die zugehörige Adjazenzmatrix als

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 14 & 18 & 8 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 14 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 13 & 17 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & 16 & 11 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 10 & 15 & 11 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 10 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 15 & 19 & 22 & 18 \\ 14 & 13 & 17 & 21 & 22 & 18 & 0 \\ 20 & 19 & 22 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 20 & 21 & 17 & 0 & 0 \\ 11 & 15 & 19 & 20 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und für $\mu = 0$ erhalten wir

$$S_1^{(3)} = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 101 & 91 & 72 & 44 & 41 & 68 & 93 & 90 & 83 & 60 & 10 & 7 & 50 & 74 & 20 & -7 & 14 & 68 & 5 & -8 & 2 & 21 \\ 91 & 100 & 95 & 71 & 43 & 47 & 69 & 82 & 92 & 85 & 41 & 7 & 20 & 41 & 51 & 9 & -5 & 43 & 17 & -1 & -8 & 10 \\ 72 & 95 & 110 & 103 & 64 & 41 & 47 & 56 & 83 & 94 & 76 & 27 & 2 & 9 & 70 & 37 & -8 & 6 & 22 & 12 & -12 & -8 \\ 44 & 71 & 103 & 133 & 111 & 64 & 38 & 9 & 44 & 68 & 102 & 76 & 18 & -6 & 60 & 74 & 21 & -38 & 13 & 28 & -2 & -30 \\ 41 & 43 & 64 & 111 & 137 & 110 & 68 & -7 & 6 & 14 & 71 & 105 & 73 & 35 & 8 & 72 & 68 & -28 & -12 & 27 & 20 & -28 \\ 68 & 47 & 41 & 64 & 110 & 121 & 101 & 28 & 16 & -1 & 20 & 79 & 101 & 82 & -22 & 34 & 75 & 25 & -21 & 9 & 27 & -3 \\ 93 & 69 & 47 & 38 & 68 & 101 & 109 & 69 & 51 & 21 & -3 & 36 & 88 & 96 & -14 & 0 & 50 & 64 & -13 & -5 & 18 & 17 \\ 90 & 82 & 56 & 9 & -7 & 28 & 69 & 108 & 96 & 74 & 4 & -16 & 34 & 73 & 47 & -9 & 9 & 102 & 45 & 15 & 26 & 66 \\ 83 & 92 & 83 & 44 & 6 & 16 & 51 & 96 & 102 & 96 & 37 & -11 & 7 & 39 & 72 & 7 & -9 & 69 & 48 & 17 & 10 & 45 \\ 60 & 85 & 94 & 68 & 14 & -1 & 21 & 74 & 96 & 109 & 72 & 3 & -16 & 6 & 99 & 35 & -14 & 40 & 66 & 36 & 12 & 39 \\ 10 & 41 & 76 & 102 & 71 & 20 & -3 & 4 & 37 & 72 & 113 & 73 & 2 & -20 & 93 & 96 & 32 & -18 & 66 & 72 & 39 & 21 \\ 7 & 7 & 27 & 76 & 105 & 79 & 36 & -16 & -11 & 3 & 73 & 111 & 73 & 33 & 26 & 93 & 91 & -5 & 33 & 69 & 66 & 22 \\ 50 & 20 & 2 & 18 & 73 & 101 & 88 & 34 & 7 & -16 & 2 & 73 & 111 & 99 & -19 & 35 & 96 & 63 & 12 & 36 & 66 & 47 \\ 74 & 41 & 9 & -6 & 35 & 82 & 96 & 73 & 39 & 6 & -20 & 33 & 99 & 112 & -11 & 4 & 72 & 99 & 19 & 22 & 57 & 65 \\ 20 & 51 & 70 & 60 & 8 & -22 & -14 & 47 & 72 & 99 & 93 & 26 & -19 & -11 & 118 & 70 & 9 & 33 & 100 & 77 & 48 & 66 \\ -7 & 9 & 37 & 74 & 72 & 34 & 0 & -9 & 7 & 35 & 96 & 93 & 35 & 4 & 70 & 104 & 70 & -2 & 72 & 90 & 72 & 44 \\ 14 & -5 & -8 & 21 & 68 & 75 & 50 & 9 & -9 & -14 & 32 & 91 & 96 & 72 & 9 & 70 & 107 & 48 & 45 & 73 & 91 & 64 \\ 68 & 43 & 6 & -38 & -28 & 25 & 64 & 102 & 69 & 40 & -18 & -5 & 63 & 99 & 33 & -2 & 48 & 135 & 69 & 44 & 72 & 112 \\ 5 & 17 & 22 & 13 & -12 & -21 & -13 & 45 & 48 & 66 & 66 & 33 & 12 & 19 & 100 & 72 & 45 & 69 & 118 & 99 & 89 & 108 \\ -8 & -1 & 12 & 28 & 27 & 9 & -5 & 15 & 17 & 36 & 72 & 69 & 36 & 22 & 77 & 90 & 73 & 44 & 99 & 103 & 95 & 89 \\ 2 & -8 & -12 & -2 & 20 & 27 & 18 & 26 & 10 & 12 & 39 & 66 & 66 & 57 & 48 & 72 & 91 & 72 & 89 & 95 & 107 & 103 \\ 21 & 10 & -8 & -30 & -28 & -3 & 17 & 66 & 45 & 39 & 21 & 22 & 47 & 65 & 66 & 44 & 64 & 112 & 108 & 89 & 103 & 131 \end{bmatrix}$$

mit jeweils auf drei Nachkommastellen gerundeten Werten. Die Auswertung eines Elements aus dem Eigenraum des subdominanten Eigenwerts zur zugehörigen Schalenmatrix ist in Abbildung 5.4 zu finden.

5.2.2 Variante 2: Colin-de-Verdière-Matrix und Matrixexponential

Wir wollen hier im Vergleich zur vorigen eine weitere Variante zur Konstruktion von verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivisionsmatrizen vorstellen. Dafür verwenden wir die Resultate aus Kapitel 3 und 4 und führen diese in Algorithmus 11 zusammen. Alle Variablen und Matrizen in Abschnitt 5.2.2 beziehen sich zudem auf die des Algorithmus 11.

Algorithmus 11: Verallgemeinerte Quadratische B-Spline-Subdivisionsmatrix Variante 2

Data: Valider kombinatorischer Graph $\mathbf{G}$ eines Initialelements in der Eingabeform von Definition 3.10,

Typ $t \in \{2, 3\}$

Result: Subdivisionsmatrix $S_2^{(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1 **begin**

2 **if** $t == 2$ **then**

3 $(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*) =$ Konstruiere ein primales und duales 2-Polytop für $\mathbf{G}$ nach Abschnitt 3.4;

4 $C =$ Konstruiere die Colin-de-Verdière-Matrix zur Realisierung $\mathbf{P}$ des Graphen $\mathbf{G}$
 und zur Realisierung $\mathbf{P}^*$ des dualen Graphen $\mathbf{G}^*$ nach Abschnitt 4.3;

5 **else if** $t == 3$ **then**

6 $(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*) =$ Konstruiere ein primales und duales 3-Polytop für $\mathbf{G}$ nach Abschnitt 3.3;

7 $C =$ Konstruiere die Colin-de-Verdière-Matrix zur Realisierung $\mathbf{P}$ des Graphen $\mathbf{G}$
 und zur Realisierung $\mathbf{P}^*$ des dualen Graphen $\mathbf{G}^*$ nach Abschnitt 4.4;

8 $N := \text{diag} \left(1./ \left(\sum_j C_{(:,j)} \right) \right);$

9 $S_2^{(t)} := \exp_2 (NC - E_n);$

Die ersten beiden Schritte des Algorithmus haben wir ausführlich in den Kapiteln 3 und 4 erläutert. Es bleibt damit nur noch, die Formel

$$S_2^{(t)} := \exp_2 (NC - E_n) \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

zu beschreiben. Dies führen wir in mehreren Schritten aus.

Normierung NC Zunächst enthält die Definition von N mehrere bisher nicht beschriebene Befehle. Der Befehl $1./$ entstammt der Matlab Notation und meint, dass die Zahl 1 durch jeden Eintrag eines Vektors oder einer Matrix geteilt wird. Wir sprechen hier auch von *punktweiser Division*. Der Matlab Befehl `diag` (vgl. [Matb]) wandelt entweder einen Vektor in eine Diagonalmatrix mit dem betreffenden Vektor als Diagonale um oder gibt die Diagonale einer quadratischen Matrix zurück. Damit erhalten wir für die Matrix N

$$N := \text{diag} \left(1./ \left(\sum_j C_{(:,j)} \right) \right) := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j C_{(1,j)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sum_j C_{(n,j)}} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix N normiert also die Zeilen von C , sodass sich die Zeilen von NC zu 1 aufsummieren. Die Matrix N ist zudem wohldefiniert, da mit Satz 4.9 für $t = 2$ und Theorem 4.14 für $t = 3$ die Zeilensummen von C negativ und somit insbesondere ungleich 0 sind.

Auf das Spektrum von $S_2^{(t)}$ gehen wir in Abschnitt 5.3 detailliert ein. Hier ist aber schon zu bemerken, dass der Kern von

$$\tilde{C} := NC \quad (5.6)$$

und C übereinstimmt. Sei dazu a ein Vektor aus dem Kern von C . Dann gilt

$$\tilde{C}a = NCa = N\vec{0} = \vec{0}. \quad (5.7)$$

Da N eine invertierbare Matrix ist, gibt es zudem keinen anderen Vektor $b \neq 0$ mit $Nb = 0$. Damit stimmt der Kern von $\tilde{C}$ und C überein. Außerdem besitzt $\tilde{C}$ mit Lemma 2.36 einen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$, da sich alle Zeilen von $\tilde{C}$ zu 1 aufsummieren.

Shiften des Spektrums von NC Wir greifen in diesem Absatz den Ergebnissen der Theoreme 5.17 und 5.18 vor, um das Shiften des Spektrums zu motivieren. Detaillierte begründungen zu den Aussagen finden sich entsprechend in den Beweisen der beiden Theoreme. Um das Shiften des Spektrums besser beschreiben zu können, argumentieren wir zunächst, dass $\tilde{C}$ diagonalisierbar ist.

Dafür betrachten wir die Matrix C . Da die Colin-de-Verdière-Matrix C nach Definition 4.1 symmetrisch ist, ist sie mit Lemma B.43 auch hermitesch. Zudem ist die Matrix N eine Diagonalmatrix mit ausschließlich negativen Diagonaleinträgen. Damit ist die Matrix $-N$ eine Diagonalmatrix mit ausschließlich positiven Diagonaleinträgen. Da $-N$ eine Diagonalmatrix ist, ist sie symmetrisch und somit ebenfalls hermitesch. Zudem sind die Eigenwerte von $-N$ gerade die Diagonaleinträge von $-N$ und folglich alle reell und positiv. Damit ist mit Charakterisierung B.47 die Matrix $-N$ positiv definit.

Mit Theorem B.48 ist folglich die Matrix $-\tilde{C} = -NC$ diagonalisierbar und somit ist $\tilde{C}$ ebenfalls diagonalisierbar.

Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$S_2^{(t)} = \exp_2 (\tilde{C} - E_n).$$

Da $\tilde{C}$ diagonalisierbar ist, lässt sich die Matrix als

$$\tilde{C} = V\tilde{D}V^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{D} \text{ ist eine Diagonalmatrix}$$

darstellen. Damit ist

$$\tilde{C} - E_n = V\tilde{D}V^{-1} - VE_nV^{-1} = V(\tilde{D} - E_n)V^{-1}.$$

Wir erhalten somit für $S_2^{(t)}$

$$S_2^{(t)} = \exp_2 (\tilde{C} - E_n) = \exp (\ln(2)(V(\tilde{D} - E_n)V^{-1})) = \exp (V \ln(2) (\tilde{D} - E_n) V^{-1}).$$

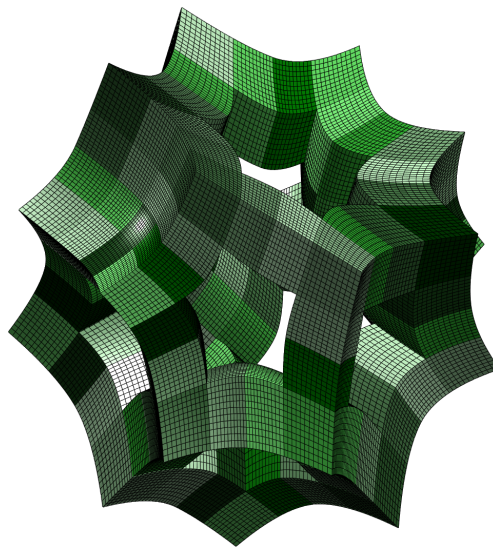


Abbildung 5.5: Ein ausgewertetes Element aus dem Eigenraum des subdominanten Eigenwerts der Subdivisionsmatrix aus Beispiel 5.7 für den invarianten Schalenfall.

und die entsprechend normierte Matrix

$$\tilde{C} = \frac{1}{100}$$

jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundet. Daraus entsteht die Subdivisionsmatrix

$$S_2^{(t)} = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 136 & 76 & 74 & 44 & 35 & 66 & 125 & 91 & 57 & 54 & 9 & 7 & 30 & 51 & 23 & 3 & 11 & 77 & 7 & 2 & 5 & 18 \\ 111 & 85 & 118 & 90 & 35 & 35 & 76 & 83 & 67 & 87 & 24 & 7 & 13 & 26 & 47 & 7 & 5 & 52 & 12 & 3 & 3 & 13 \\ 69 & 75 & 145 & 161 & 61 & 24 & 37 & 51 & 56 & 97 & 49 & 14 & 6 & 10 & 67 & 16 & 5 & 24 & 17 & 6 & 3 & 9 \\ 27 & 38 & 106 & 244 & 138 & 43 & 21 & 15 & 21 & 46 & 90 & 40 & 12 & 6 & 52 & 40 & 15 & 7 & 15 & 12 & 7 & 6 \\ 22 & 15 & 41 & 141 & 239 & 114 & 51 & 7 & 6 & 13 & 43 & 86 & 44 & 23 & 16 & 41 & 48 & 10 & 7 & 12 & 15 & 7 \\ 56 & 20 & 22 & 60 & 156 & 163 & 118 & 20 & 9 & 8 & 14 & 47 & 88 & 66 & 5 & 16 & 56 & 36 & 4 & 6 & 16 & 11 \\ 110 & 46 & 35 & 30 & 71 & 122 & 160 & 53 & 27 & 20 & 6 & 6 & 68 & 85 & 8 & 5 & 31 & 71 & 5 & 3 & 9 & 17 \\ 79 & 54 & 52 & 23 & 10 & 22 & 57 & 138 & 80 & 78 & 9 & 3 & 18 & 45 & 43 & 4 & 9 & 172 & 22 & 5 & 12 & 57 \\ 79 & 64 & 83 & 47 & 14 & 15 & 42 & 116 & 90 & 124 & 24 & 3 & 3 & 28 & 48 & 7 & 4 & 96 & 28 & 6 & 6 & 31 \\ 48 & 53 & 92 & 67 & 18 & 8 & 20 & 73 & 79 & 152 & 48 & 7 & 3 & 9 & 156 & 17 & 4 & 44 & 54 & 13 & 8 & 28 \\ 9 & 16 & 50 & 140 & 64 & 15 & 6 & 9 & 16 & 51 & 154 & 54 & 8 & 3 & 129 & 98 & 23 & 9 & 56 & 40 & 22 & 26 \\ 7 & 5 & 15 & 67 & 141 & 56 & 21 & 3 & 3 & 8 & 58 & 143 & 53 & 20 & 26 & 99 & 113 & 14 & 27 & 42 & 52 & 29 \\ 31 & 9 & 7 & 19 & 71 & 105 & 79 & 20 & 6 & 4 & 8 & 53 & 140 & 102 & 6 & 21 & 128 & 75 & 13 & 16 & 49 & 38 \\ 54 & 19 & 11 & 11 & 39 & 82 & 101 & 50 & 18 & 11 & 3 & 21 & 105 & 129 & 7 & 7 & 65 & 161 & 15 & 8 & 27 & 56 \\ 15 & 21 & 46 & 54 & 16 & 4 & 6 & 29 & 41 & 113 & 87 & 16 & 3 & 5 & 228 & 43 & 12 & 30 & 112 & 34 & 23 & 62 \\ 4 & 5 & 19 & 71 & 71 & 21 & 6 & 4 & 6 & 21 & 112 & 105 & 22 & 8 & 73 & 139 & 67 & 15 & 63 & 69 & 54 & 46 \\ 10 & 3 & 4 & 20 & 65 & 56 & 30 & 8 & 3 & 4 & 21 & 94 & 107 & 52 & 15 & 53 & 179 & 44 & 33 & 40 & 93 & 66 \\ 40 & 19 & 14 & 6 & 8 & 22 & 43 & 96 & 37 & 26 & 5 & 7 & 39 & 80 & 25 & 7 & 27 & 277 & 44 & 15 & 34 & 130 \\ 6 & 7 & 16 & 22 & 10 & 4 & 5 & 20 & 18 & 54 & 53 & 23 & 11 & 13 & 155 & 51 & 35 & 73 & 153 & 61 & 63 & 145 \\ 3 & 3 & 10 & 30 & 32 & 12 & 5 & 9 & 7 & 23 & 67 & 66 & 25 & 12 & 86 & 101 & 76 & 44 & 109 & 81 & 88 & 109 \\ 5 & 2 & 4 & 12 & 28 & 12 & 14 & 5 & 10 & 28 & 60 & 56 & 30 & 43 & 59 & 128 & 76 & 83 & 64 & 116 & 141 \\ 12 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 13 & 41 & 15 & 22 & 19 & 19 & 25 & 36 & 65 & 29 & 53 & 169 & 111 & 47 & 81 & 207 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

hier auf drei Nachkommastellen gerundet. Die Auswertung eines Elements aus dem Eigenraum des subdominanten Eigenwerts der zugehörigen Schalenmatrix ist in Abbildung 5.5 zu finden.

Damit haben wir die beiden Varianten für die Erstellung verallgemeinerter quadratischer B-Spline-Subdivisionsmatrizen beschrieben und betrachten im nächsten Abschnitt, welche Qualitätskriterien sie erfüllen.

5.3 Beweise und Qualitätskriterien der Subdivisionsmatrizen

Dieser Abschnitt bildet den Kern des Kapitels und ist einer von zwei Hauptteilen dieser Arbeit. Wir analysieren hier, welchen Qualitätskriterien die im vorigen Abschnitt konstruierten Subdivisionsmatrizen entsprechen und zeigen zusätzlich noch einige verwandte Resultate. Zudem betrachten wir acht verschiedene Kategorien von Subdivisionsmatrizen, die sich in drei Aspekten voneinander unterscheiden:

Definition 5.8. Wir benennen die acht Kategorien der Subdivisionsmatrizen mithilfe drei verschiedener Notationen:

- Matrizen S stellen Subdivisionsmatrizen für Initialelemente dar, wohingegen Matrizen $\bar{S}$ Matrizen für Ringe und Schalen darstellen.
- Matrizen S_1 sind Subdivisionsmatrizen aus Variante 1, die also mit Algorithmus 10 erstellt werden, wohingegen Matrizen S_2 Subdivisionsmatrizen sind, die aus Variante 2, also mit Algorithmus 11, erstellt werden.
- Matrizen $S^{(2)}$ sind Subdivisionsmatrizen vom Typ 2, wohingegen Matrizen $S^{(3)}$ Subdivisionsmatrizen vom Typ 3 sind.

Insgesamt erhalten wir damit acht verschiedene Kategorien von Subdivisionsmatrizen, welche auch in Tabelle 5.1 dargestellt sind.

Wir werden nicht für alle Kombinationen aus Qualitätskriterium und Kategorie der Subdivisionsmatrizen einen Beweis finden können. Deshalb verwenden wir für $t = 3$ die 305.095 in Abschnitt 3.1.1 beschriebenen Zufallsbeispiele, um entweder zu verifizieren, dass die theoretischen Resultate mit den empirischen Berechnungen übereinstimmen, oder, um anstelle eines Beweises zumindest eine qualitative Aussage treffen zu können. Für $t = 2$ betrachten wir empirisch die Subdivisionsmatrizen für 2-Polytope mit 3–100 Ecken, also für (Ir)Regularitäten mit einer Valenz kleiner gleich 100. Wir erhalten damit sechs Möglichkeiten für die Kombination aus Qualitätskriterium und Kategorie:

dunkelgrün	bewiesen und empirisch geprüft	grün	bewiesen
gelb	nicht bewiesen, aber empirisch geprüft	orange	unklar
rot	widerlegt oder Gegenbeispiel konstruiert	grau	nicht anwendbar

Die Resultate dieses Abschnitts haben wir übersichtlich in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Im Folgenden besprechen wir die Qualitätskriterien im Detail und beschreiben die zugehörigen Theoreme und Ergebnisse. Da die Subdivisionsmatrizen mit den Algorithmen aus Abschnitt 5.2 konstruiert sind, verwenden wir die Bezeichnungen der Konstruktion, ohne diese erneut zu definieren.

Q1 Affine Invarianz

Dieses Qualitätskriterium ist für alle Subdivisionsmatrizen erfüllt, was wir anhand der folgenden zwei Theoreme sehen:

Theorem 5.9. Die Subdivisionsmatrizen der vier Kategorien für $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen Qualitätskriterium Q1, es summieren sich also alle Zeilen aller Subdivisionsmatrizen zu 1 auf.

Beweis. Wir beginnen mit den Matrizen der Initialelemente und betrachten zunächst den Fall, in dem S_1 entweder für $t = 2$ oder für einen kombinatorischen Graph, der kein Prisma repräsentiert, definiert ist. Dafür erhalten wir

$$S_1^{(t)} = \left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1 - 2\mu}{2 - 2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \right) (1 - \mu) + \mu E_n.$$

		$S_1^{(2)}$	$\bar{S}_1^{(2)}$	$S_2^{(2)}$	$\bar{S}_2^{(2)}$	$S_1^{(3)}$	$\bar{S}_1^{(3)}$	$S_2^{(3)}$	$\bar{S}_2^{(3)}$
Q1	Affine Invarianz								
Q2	Konvexe Hülle								
Q3	Dominanter Eigenwert 1								
Q4	t subdominante Eigenwerte								
Q5	t subdominante Eigenwerte 0,5								
Q6	Subsubdominanter Eigenwert 0,25								
Q7	Regulärer Fall								
Q8	Semi-regulärer Fall								
Q9	Subdivisionsmatrix für jede Eingabe								
Q10	Symmetrien								
Q11	Geeigneter Träger								
Q12	Selbstdurchdringungsfreie Struktur								
Q13	Injektive und reguläre char. Abbildung								
	stochastisch								
	symmetrisch								
	diagonalisierbar								
	reelle Eigenwerte								

Tabelle 5.1: Übersicht der Qualitätskriterien sowie weitere Eigenschaften der einzelnen Subdivisionsmatrizen aus Definition 5.8.

Multiplizieren wir $S_1^{(t)}$ mit dem Vektor $\vec{1}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 S_1^{(t)} \cdot \vec{1} &= \left(\left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \right) (1-\mu) + \mu E_n \right) \vec{1} \\
 &= \left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} \vec{1} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \vec{1} \right) (1-\mu) + \mu E_n \vec{1}.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir in einem nächsten Schritt die einzelnen Summanden. Für den ersten Summanden erhalten wir

$$\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} \vec{1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \vec{1} = \vec{1}.$$

Da die Vektoren $\tilde{P}_{(:,i)}$ mit $i \in \{1, \dots, t\}$ so konstruiert sind, dass sie sich zu 0 aufsummieren, folgt

$$\frac{\tilde{P}_{(:,i)} \cdot \tilde{P}_{(:,i)}^T}{|\tilde{P}_{(:,i)}|^2} \vec{1} = \frac{\tilde{P}_{(:,i)} \cdot \tilde{P}_{(:,i)}^T \vec{1}}{|\tilde{P}_{(:,i)}|^2} = \frac{\tilde{P}_{(:,i)} \cdot \vec{0}}{|\tilde{P}_{(:,i)}|^2} = \vec{0}. \quad (5.11)$$

Abschließend ergibt sich für μE_n

$$\mu E_n \vec{1} = \mu \vec{1}.$$

Mit der Erläuterung dieser drei Summanden folgt für den Gesamtausdruck

$$S_1^{(t)} \cdot \vec{1} = \left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} \vec{1} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2} \right) \vec{1} \right) (1-\mu) + \mu E_n \vec{1} = (\vec{1} + \vec{0}) (1-\mu) + \mu \vec{1} = \vec{1}.$$

Hier zeigt sich, warum die Zentrierung des Polytops notwendig war. Sie bewirkt, dass der Summand aus Gleichung (5.11) zum Nullvektor wird. Ohne die Zentrierung würde der Gesamtausdruck oben folglich nicht den Einsvektor ergeben.

Für den Prismenfall in $t = 3$ verwenden wir Theorem B.32. Nach diesem sind die Eigenwerte und Eigenvektoren des Kroneckerprodukts zweier Matrizen gerade das Kroneckerprodukt der Eigenwerte und Eigenvektoren dieser beiden Matrizen. Da sowohl $S^{(1)}$ als auch $S^{(2)}$ einen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$ haben, hat $S_1^{(3)}$ im Prismenfall ebenfalls einen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$. Mit Lemma 2.36, in welchem der Zusammenhang zwischen dem Paar aus Eigenwert 1 und Eigenvektor $\vec{1}$ und der Zeilensumme der entsprechenden Matrix erklärt wurde, summiert sich jede Zeile von $S_1^{(3)}$ zu 1 auf. Damit haben wir die Aussage für die beiden Kategorien der Initialelemente gezeigt.

Für den Ring- beziehungsweise Schalenfall erhalten wir dasselbe Resultat. Die Ring- beziehungsweise Schalenmatrix setzt sich aus den Subdivisionsmatrizen der Initialelemente zusammen. Damit besteht jede Zeile einer solchen Ring- beziehungsweise Schalenmatrix aus den Einträgen der Subdivisionsmatrizen der Initialelemente, aufgefüllt mit Nulleinträgen. So überträgt sich die affine Invarianz von S_1 auf $\bar{S}_1$. $\square$

Für die Matrizen der vier Kategorien zu S_2 erhalten wir mit dem nächsten Theorem dasselbe Resultat:

Theorem 5.10. *Die Subdivisionsmatrizen der vier Kategorien für $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen Qualitätskriterium Q1, es summieren sich also für alle vier Kategorien die Zeilen der Subdivisionsmatrizen zu 1 auf.*

Beweis. Wir beginnen hier ebenfalls mit der Subdivisionsmatrix eines Initialelements. Die Zeilen der Matrix $\tilde{C}$ aus Gleichung (5.7) sind normiert, und damit summiert sich jede Zeile von $\tilde{C}$ zu 1 auf. Mit Lemma 2.36 hat somit $\tilde{C}$ einen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$.

Mit Gleichung (5.8), in der das Theorem B.53 zur Auslagerung der Eigenvektoren aus dem Matrixexponential verwendet wurde, haben $\tilde{C}$ und $S_2^{(t)}$ dieselben Eigenvektoren, denn Kombinationen aus Matrix und Inversem lassen sich aus dem Exponential herausziehen. Damit ist sowohl $S_2^{(t)}$ als auch $\tilde{C}$ mit der Matrix V diagonalisierbar und folglich besitzen beide Matrizen dieselben Eigenvektoren.

Die zugehörigen Eigenwerte von $S_2^{(t)}$ sind mit Gleichung (5.9) gerade $2^{\lambda_i - 1}$. Damit hat $S_2^{(t)}$ einen Eigenvektor $\vec{1}$ zum Eigenwert $2^{1-1} = 1$ und folglich summieren sich alle Zeilen von $S_2^{(t)}$ mit Lemma 2.36 zu 1 auf.

Der Beweis für die Ring- beziehungsweise Schalenmatrizen verläuft analog zum Beweis von Theorem 5.9. Da die Zeilen der Ring- und Schalenmatrizen aus den Einträgen der Subdivisionsmatrizen der Initialelemente, aufgefüllt mit Nulleinträgen, besteht, überträgt sich Qualitätskriterium Q1 von $S_2^{(t)}$ auf $\bar{S}_2^{(t)}$. $\square$

Neben den Beweisen ist es zudem interessant, empirisch zu testen, wie gut dieses Qualitätskriterium für die in Abschnitt 3.1.1 generierten Beispiele numerisch eingehalten wird. Die Ergebnisse für die beiden Subdivisionsmatrizen der Initialelemente für $t = 3$ sind in Abbildung 5.6 zu finden.

Hier lässt sich feststellen, dass der Fehler der Zeilensummen für die Variante 1 im Bereich 10^{-15} liegt, also im Bereich der Maschinengenauigkeit, wohingegen der Fehler für die Variante 2 im Bereich 10^{-13} zu verorten ist. Da die Matrix $\tilde{C}$ bereits normiert wurde, ist dies die Größenordnung des Fehlers, die durch die Operation

$$S_2^{(t)} = \exp_2(\tilde{C} - E_n)$$

entsteht. Wir verlieren also durch das Exponenzieren ungefähr zwei Größenordnungen an Genauigkeit. Das ist jedoch völlig akzeptabel, denn der Fehler bezieht sich hier nicht die einzelnen Matrixeinträge, sondern die Summen der Zeilen, die aus jeweils 4–100 Einträgen bestehen.

Für die acht Kategorien erhalten wir die folgenden Maximal- und Minimalwerte der Zeilensummen über alle Beispiele:

	$S_1^{(2)}$	$\bar{S}_1^{(2)}$	$S_2^{(2)}$	$\bar{S}_2^{(2)}$	$S_1^{(3)}$	$\bar{S}_1^{(3)}$	$S_2^{(3)}$	$\bar{S}_2^{(3)}$
$\max \sum -1$	8,88e-16	8,88e-16	7,70e-14	5,24e-14	1,33e-15	1,33e-15	3,03e-13	3,03e-13
$\min \sum -1$	-8,88e-16	-8,88e-16	-1,00e-13	-6,71e-14	-1,33e-15	-9,99e-16	-5,32e-13	-5,32e-13

Auffällig ist, dass die Werte der Ring- und Schalenmatrizen teilweise besser sind als die der Matrizen der Initialelemente, obwohl diese Teil der größeren Matrizen sind. Dieser Umstand ist allerdings mit generellen numerischen Ungenauigkeiten zu erklären. Insgesamt lässt sich festhalten, dass das Qualitätskriterium Q1 von allen Kategorien der Subdivisionsmatrizen sowohl formell als auch empirisch erfüllt ist.

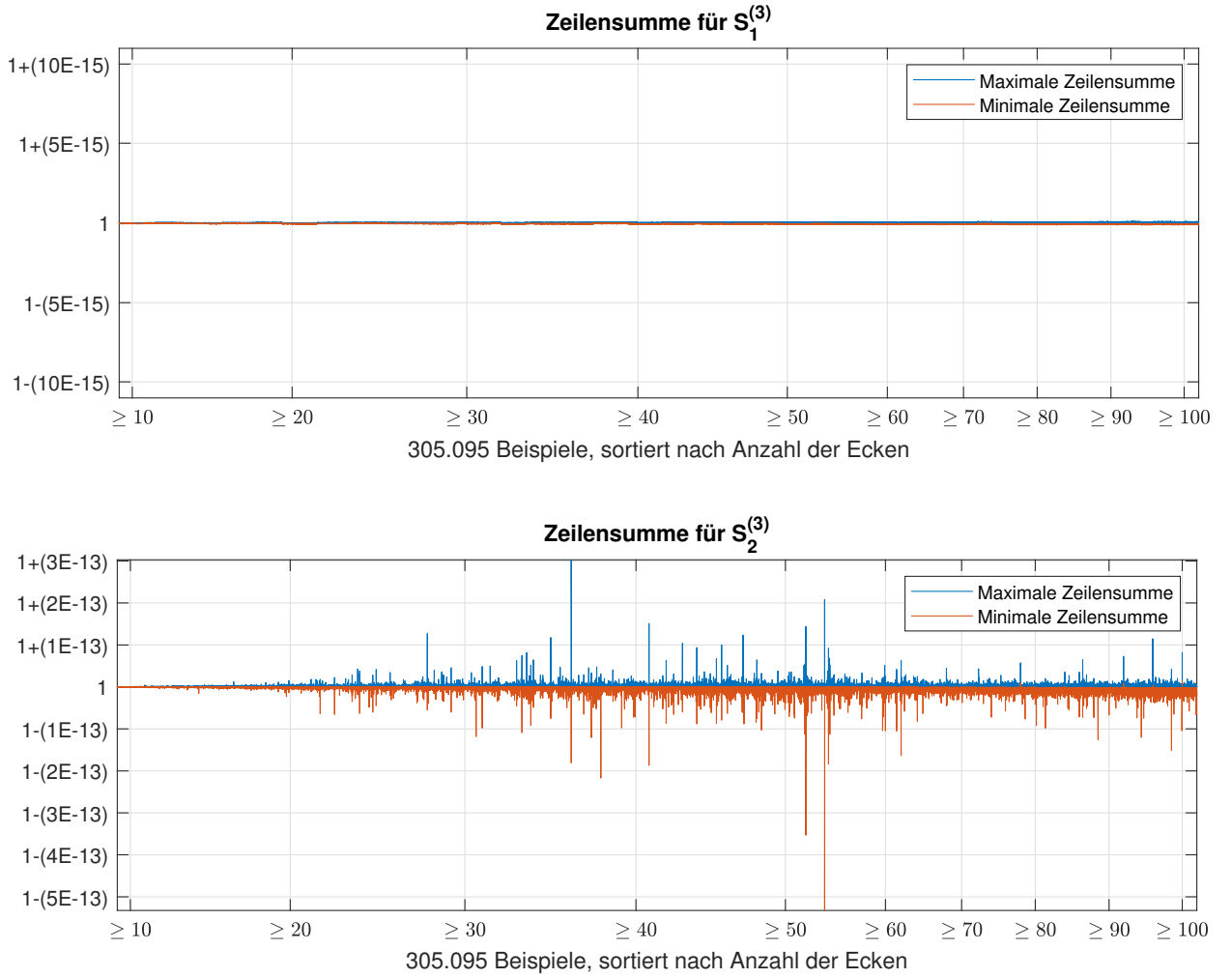


Abbildung 5.6: Maximale und minimale Zeilensumme der Subdivisionsmatrizen der volumetrischen Initialelemente für Variante 1 (oben) und Variante 2 (unten).

Q2 Konvexe Hülle

Hier erhalten wir schon ein differenzierteres Bild für die verschiedenen Kategorien. Wir beginnen mit dem folgenden Theorem:

Theorem 5.11. Für $t = 2$ besitzen die Subdivisionsmatrizen $S_1^{(2)}$ und $\bar{S}_1^{(2)}$ keine negativen Einträge und zusammen mit Qualitätskriterium Q1 erfüllen sie damit das Qualitätskriterium Q2 der konvexen Hülle.

Beweis. Mit Theorem 5.9 erfüllen $S_1^{(2)}$ und $\bar{S}_1^{(2)}$ das Qualitätskriterium Q1. Mit Lemma 5.2 sind die Einträge der Matrix $S_1^{(2)}$

$$\left(S_1^{(2)}\right)_{(i,j)} = (1 - \mu) \frac{2 - 2\mu + (2 - 4\mu) \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right)}{n(2 - 2\mu)} + \mu \delta_{i,j}.$$

Da mit $0 \leq \mu < 1/2$

$$2 - 2\mu > 2 - 4\mu > 0 \quad \text{und} \quad -1 \leq \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right) \leq 1$$

ist, erhalten wir

$$2 - 2\mu + (2 - 4\mu) \cos\left(\frac{2\pi(j-i)}{n}\right) > 0.$$

Zudem ist

$$\mu\delta_{i,j} > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \mu > 0$$

und folglich gilt

$$\left(S_1^{(2)}\right)_{(i,j)} > 0.$$

Da die Subdivisionsmatrix $\bar{S}_1^{(2)}$ nur aus Einträgen verschiedener Subdivisionsmatrizen $S_1^{(2)}$ und Nulleinträgen besteht, sind alle Einträge von $\bar{S}_1^{(2)}$ ebenfalls größer gleich 0. $\square$

Für den Fall $t = 3$ gilt das Qualitätskriterium Q2 hingegen nicht, was wir an Beispiel 5.5 sehen können. Beide Subdivisionsmatrizen für $\mu = 0$ und $\mu = 1/4$ enthalten negative Einträge. Wir können sogar die folgende Aussage treffen:

Satz 5.12. Für $0 \leq \mu \leq 1/4$ besitzt die Subdivisionsmatrix zur Adjazenzmatrix aus Beispiel 5.5 negative Einträge.

Beweis. Der Matrixeintrag $\left(S_1^{(3)}\right)_{(4,22)}$ ist für $\mu = 0$ und für $\mu = 1/4$ negativ. Dieser berechnet sich durch

$$\left(S_1^{(3)}\right)_{(4,22)} := \left(\frac{1}{22} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(4,1)} \cdot \tilde{P}_{(22,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(4,2)} \cdot \tilde{P}_{(22,2)}^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(4,3)} \cdot \tilde{P}_{(22,3)}^T}{|\tilde{P}_{(:,3)}|^2} \right) \right) (1-\mu).$$

Damit ist

$$a := \frac{\tilde{P}_{(4,1)} \cdot \tilde{P}_{(22,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(4,2)} \cdot \tilde{P}_{(22,2)}^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(4,3)} \cdot \tilde{P}_{(22,3)}^T}{|\tilde{P}_{(:,3)}|^2} < 0.$$

Die Funktion

$$f(\mu) := \frac{1-2\mu}{2-2\mu} = \frac{1}{2(\mu-1)} + 1$$

ist auf dem Intervall $[0, 1/4]$ positiv, stetig und streng monoton fallend. Damit ist die Funktion

$$f_2(\mu) = \frac{1}{22} + f(\mu)a = \frac{1}{22} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu}a$$

stetig und streng monoton wachsend. Da

$$\left(S_1^{(3)}\right)_{(4,22)} = f_2(\mu)(1-\mu)$$

für $\mu = 0$ und für $\mu = 1/4$ negativ ist, ist $f_2(\mu)$ für beide Werte von μ negativ. Aufgrund der Monotonie von $f_2(\mu)$ ist $f_2(\mu)$ auch für alle Werte auf dem Intervall $[0, 1/4]$ negativ. Damit ist $\left(S_1^{(3)}\right)_{(4,22)}$ für $0 \leq \mu \leq 1/4$ negativ. $\square$

Wir könnten an dieser Stelle der Frage nachgehen, ob es einen Wert μ gibt, für den alle Subdivisionsmatrizen positive Einträge haben. Der wesentliche Vorteil der ersten Variante ist jedoch, dass der Abstand zwischen λ und μ mindestens $\lambda/2$ ist. Würden wir also das Kriterium der konvexen Hülle erzwingen wollen, so würden wir den entscheidenden Vorteil dieser Variante verlieren.

Anders verhält sich die zweite Variante, für die wir das folgende Theorem erhalten:

Theorem 5.13. Alle Einträge der Subdivisionsmatrizen der vier Kategorien für S_2 sind nicht-negativ, sie erfüllen also zusammen mit Qualitätskriterium Q1 das Qualitätskriterium Q2 der konvexen Hülle.

Beweis. Mit Theorem 5.10 erfüllen alle vier Kategorien von S_2 das Qualitätskriterium Q1. Wir beginnen wieder mit den Subdivisionsmatrizen der Initialelemente. Die Nebendiagonaleinträge der Colin-de-Verdière-Matrix C zu S_2 sind

nach Definition 4.1 alle nicht-positiv. Alle Diagonaleinträge der Diagonalmatrix N sind mit Satz 4.9 und Theorem 4.14 negativ. Damit sind die Nebendiagonaleinträge von $\tilde{C}$ und folglich auch von

$$\ln(2)(\tilde{C} - E_n)$$

alle nicht-negativ.

Mit Lemma B.63, das die Exponentiale von Matrizen mit nicht-negativen Nebendiagonaleinträgen betrachtet, ist dementsprechend die Matrix

$$S_2^{(t)} = \exp_2(\tilde{C} - E_n)$$

nicht-negativ.

Da die Subdivisionsmatrix $\bar{S}_2^{(2)}$ nur aus Einträgen verschiedener Subdivisionsmatrizen $S_2^{(2)}$ und Nulleinträgen besteht, sind alle Einträge von $\bar{S}_2^{(2)}$ ebenfalls größer gleich 0. $\square$

Mit den beiden Qualitätskriterien Q1 und Q2 erhalten wir das folgende Korollar:

Korollar 5.14. Die Matrizen $S_1^{(2)}$, $\bar{S}_1^{(2)}$ und die Matrizen aller Kategorien von S_2 sind stochastisch.

Beweis. Die Matrizen dieser sechs Kategorien haben alle eine Zeilensumme von 1 und ausschließlich nicht-negative Einträge. Dies ist gerade die Definition B.39 stochastischer Matrizen. $\square$

Empirisch sind hier wieder die Einträge der dreidimensionalen Initialelemente interessant. Die zugehörige Auswertung findet sich in Abbildung 5.7. Für diese Auswertung ist insbesondere zu bemerken, dass die negativen Einträge der Variante 1 die Regel sind. Der prozentuale Anteil an Matrizen mit negativen Einträgen für die Beispiele aus Abschnitt 3.1.1 findet sich in der folgenden Tabelle:

	$S_1^{(2)}$	$\bar{S}_1^{(2)}$	$S_2^{(2)}$	$\bar{S}_2^{(2)}$	$S_1^{(3)}$	$\bar{S}_1^{(3)}$	$S_2^{(3)}$	$\bar{S}_2^{(3)}$
Beispiele mit negativen Einträgen in %	0	0	0	0	98,35	99,48	0	0

Dass es mehr Matrizen mit negativen Einträgen der Kategorie $\bar{S}_1^{(3)}$ als Matrizen der Kategorie $S_1^{(3)}$ gibt, erklärt sich dadurch, dass es in den Beispielen Adjazenzmatrizen zu planaren 3-zusammenhängenden Graphen gibt, die keine hexaedrische Struktur darstellen. Diese können dann für den Schalenfall Initialelemente enthalten, die keine Prismen sind. Die Einträge der Matrizen der Initialelemente zu diesen Nicht-Prismen-Strukturen enthalten dann gegebenenfalls negative Einträge. Dieser Fall wird in Kapitel 7 beschrieben.

Q3, Q4, Q5, Q6 und Q12 Eigenspektrum

In diesem Abschnitt fassen wir die Aussagen über das Eigenspektrum der Subdivisionsmatrizen zusammen. Wir betrachten dabei zunächst die Aussagen für die Matrizen der Initialelemente und gehen anschließend auf die Ring- und Schalenmatrizen ein. Wir beginnen mit Variante 1 im folgenden Theorem:

Theorem 5.15. Für den Fall $t = 2$ und für den Fall $t = 3$ und der zugehörige Graph G ist kein kombinatorischer Graph eines Prismas haben die Subdivisionsmatrizen $S_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S_1^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Eigenspektrum von

$$1, \underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{t\text{-mal}}, \underbrace{\mu, \dots, \mu}_{(n-t-1)\text{-mal}}$$

Für den Fall, dass $t = 3$ und G kombinatorischer Graph eines Prismas ist, haben sie ein Eigenspektrum von

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{(\frac{n}{2}-1)\text{-mal}}, \underbrace{\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{8}}_{(\frac{n}{2}-3)\text{-mal}}$$

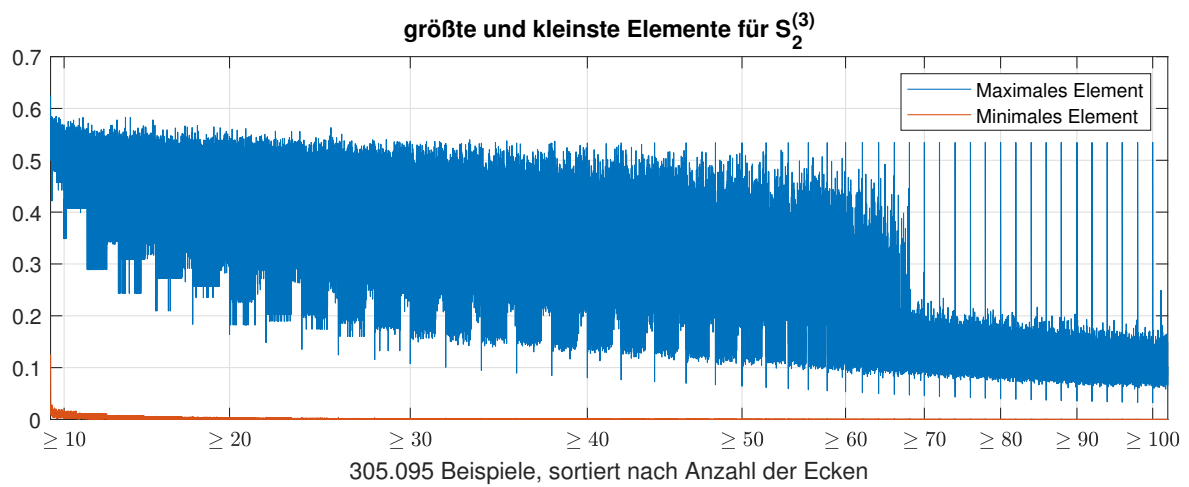
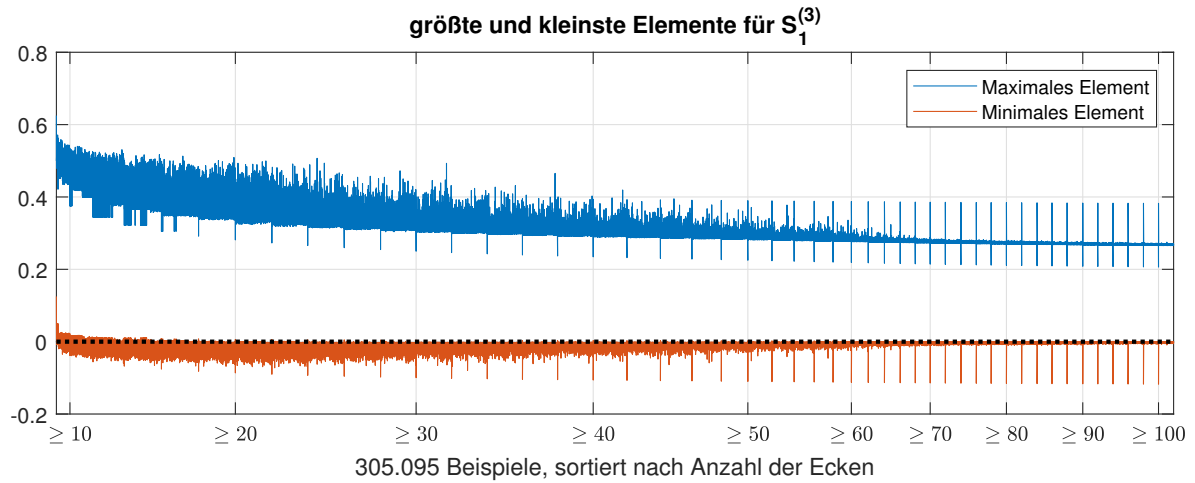


Abbildung 5.7: Größte und kleinste Einträge der Subdivisionsmatrizen der volumetrischen Initialelemente für Variante 1 (oben) und Variante 2 (unten).

Für $\mu = 1/4$ erfüllen sie damit die Qualitätskriterien Q3, Q4, Q5 und Q6. Zudem erfüllen beide Subdivisionsmatrizen Qualitätskriterium Q12.

Beweis. Wir beginnen mit dem Nicht-Prismenfall. Die Matrix $S_1^{(t)}$ berechnet sich nach Formel (5.4) aus den $t + 1$ Vektoren $\vec{1}$ und $\tilde{P}_{(:,1)}, \dots, \tilde{P}_{(:,t)}$. Für $t = 2$ sind die Vektoren $\tilde{P}_{(:,1)}$ und $\tilde{P}_{(:,2)}$ per Konstruktion orthogonal und für $t = 3$ sind die drei Vektoren $\tilde{P}_{(:,1)}$, $\tilde{P}_{(:,2)}$ und $\tilde{P}_{(:,3)}$ durch den `orth` Befehl von Matlab alle orthogonal zueinander. Die Orthogonalität zum Vektor $\vec{1}$ folgt aus Gleichung (5.11). Normieren wir die Spalten von $\tilde{P}$ und normieren wir den Vektor $\vec{1}$ zu $\vec{1}/\sqrt{n}$, so sind diese $t + 1$ Vektoren orthonormal zueinander.

Diese vier Vektoren lassen sich mit dem Basisergänzungssatz B.12 zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$ erweitern. Seien die Spalten der Matrix

$$M = \left[\frac{\vec{1}}{\sqrt{n}} \quad \frac{\tilde{P}_{(:,1)}}{|\tilde{P}_{(:,1)}|} \quad \dots \quad \frac{\tilde{P}_{(:,t)}}{|\tilde{P}_{(:,t)}|} \quad \dots \right]$$

diese Basis, dann können wir sie mit der Schmidtschen Orthonormalisierung aus Satz B.13 zu einer Orthonormalbasis umwandeln, die die Vektoren

$$\frac{\vec{1}}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\tilde{P}_{(:,1)}}{|\tilde{P}_{(:,1)}|}, \dots, \frac{\tilde{P}_{(:,t)}}{|\tilde{P}_{(:,t)}|}$$

enthält. Seien die Spalten der Matrix

$$\tilde{M} = \left[\frac{\vec{1}}{\sqrt{n}} \quad \frac{\tilde{P}_{(:,1)}}{|\tilde{P}_{(:,1)}|} \quad \dots \quad \frac{\tilde{P}_{(:,t)}}{|\tilde{P}_{(:,t)}|} \quad \dots \right]$$

diese Orthonormalbasis. Hier ist zu bemerken, dass für den Beweis die anderen Einträge von $\tilde{M}$ nicht berechnet werden müssen. Es genügt deren Existenz. Da alle Spalten von $\tilde{M}$ orthogonal zueinander sind und die Länge jedes Vektors in $\tilde{M}$ gleich 1 ist, gilt $\tilde{M}\tilde{M}^T = E_n$ und damit ist $\tilde{M}$ eine orthogonale Matrix.

Mithilfe dieser Matrix lässt sich die Formel (5.4) zu

$$S_1^{(t)} = \left(\tilde{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{M}^T + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \tilde{M} \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{t \text{ Spalten}} \tilde{M}^T \right) (1-\mu) + \mu \tilde{M} E_n \tilde{M}^T$$

umschreiben. Übertragen wir die Faktoren auf die Matrizen, erhalten wir

$$S_1^{(t)} = \tilde{M} \begin{bmatrix} 1-\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{M}^T + \tilde{M} \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1-2\mu}{2-2\mu}(1-\mu) & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1-2\mu}{2-2\mu}(1-\mu) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{t \text{ Spalten}} \tilde{M}^T \end{matrix} \tilde{M}^T + \tilde{M} \mu E_n \tilde{M}^T.$$

Summieren wir die Matrizen mit dem Assoziativgesetz auf, ergibt sich für $S_1^{(t)}$

$$S_1^{(t)} = \tilde{M} \begin{bmatrix} 1 - \mu + \mu & \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{t \text{ Spalten}} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1-2\mu}{2} + \mu & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1-2\mu}{2} + \mu & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mu & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix} \tilde{M}^T = \tilde{M} \begin{bmatrix} 1 & \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{t \text{ Spalten}} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mu & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix} \tilde{M}^T. \quad (5.12)$$

Damit ist 1 der dominante Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{1}$ und somit ist Qualitätskriterium Q3 erfüllt. Zudem hat $S_1^{(t)}$ einen t -fachen Eigenwert $1/2$ zu den Eigenvektoren $\vec{P}$ und damit sind die Qualitätskriterien Q4 und Q5 erfüllt. Setzen wir $\mu = 1/4$, so gilt zusätzlich das Qualitätskriterium Q6. Dass die geometrische Vielfachheit des subdominanten Eigenwerts gleich t ist, folgt aus der Diagonalisierbarkeit von S_1^t , die direkt aus der Gleichung (5.12) hervorgeht.

An diesem Teil des Beweises lässt sich die Notwendigkeit der Orthogonalität von $\vec{P}$ erkennen. Wäre diese nicht gegeben, so wäre für den eben beschriebenen Teil des Beweises die Matrix $\tilde{M}^T \neq \tilde{M}^{-1}$. Die Teilmatrix $\tilde{M}_{(2:t+1,:)}^{-1}$ ist in diesem Fall im Allgemeinen nicht gleich $\tilde{P}^T$. Damit wäre die obige Darstellung für $S_1^{(t)}$ nicht möglich. Experimente zeigen zudem, dass in diesem Fall $S_1^{(t)}$ weder das gewünschte Spektrum aufweist, noch, dass die Spalten von $\vec{P}$ Eigenvektoren von $S_1^{(t)}$ sind.

Für Qualitätskriterium Q12 betrachten wir den Ausdruck

$$S_1^{(t)} \left(P - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{(i,:)} \right).$$

Die Subtraktion ist hier analog zu Gleichung (5.2) zu verstehen. Mit Gleichung (5.3) erhalten wir

$$S_1^{(t)} \left(P - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{(i,:)} \right) = S_1^{(t)} \tilde{P} B^{-1} = \frac{1}{2} \tilde{P} B^{-1} = \frac{1}{2} \left(P - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{(i,:)} \right).$$

Da P die Matrix der Ecken eines konvexen Polytops ist, ist $P - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{(i,:)}$ ebenfalls ein konvexes Polytop. Damit lässt sich die subdominante Eigenstruktur von $S_1^{(t)}$ als konvexes Polytop darstellen und somit ist Qualitätskriterium Q12 erfüllt.

Betrachten wir noch den Prismenfall für $S_1^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir haben bereits in Korollar 5.3 gezeigt, dass für $t = 2$ die Doo-Sabin-Regeln mit den unseren für $\mu = 1/4$ übereinstimmen. Damit sind, wie wir im obigen Teil des Beweises gezeigt haben, die Eigenwerte von $S^{(2)}$ aus Algorithmus 10 gerade

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{(\frac{n}{2} - 3)\text{-mal}}.$$

Die Eigenwerte von $S^{(1)}$ sind 1 und $1/2$. Mit Theorem B.32, das die Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen beschreibt, die aus einem Kroneckerprodukt hervorgegangen sind, sind damit die Eigenwerte der Prismenmatrix das

Tensorprodukt der Eigenwerte von $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ und somit

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{(\frac{n}{2}-1)\text{-mal}}, \quad \underbrace{\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{8}}_{(\frac{n}{2}-3)\text{-mal}}.$$

Die Eigenvektoren zu $S^{(1)}$ sind

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{zum Eigenwert } 1 \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{zum Eigenwert } \frac{1}{2}$$

und der Eigenvektor von $S^{(2)}$ zum Eigenwert 1 ist der Vektor $\vec{1}$. Mit Theorem B.32 ist damit $\vec{1} = \text{kron}(\vec{1}, \vec{1})$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von $S_1^{(3)}$. Für den Prismenfall sind damit die Qualitätskriterien Q3, Q4, Q5 und Q6 ebenfalls erfüllt.

Betrachten wir noch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $1/2$ der Matrix $S_1^{(3)}$. Die Eigenvektoren der Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ zu den Eigenwerten $1/2$ erzeugen ein konvexes 2-Polytop. Sei dieses Polytop durch die Eckpunkte $P^{(2)} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times 2}$ erzeugt. Da die Eigenvektoren von $S_1^{(3)}$ mit Theorem B.32 das Kroneckerprodukt der Eigenvektoren der beiden Matrizen $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ sind, erhalten wir für die Eigenvektoren von $S_1^{(3)}$ zum Eigenwert $1/2$ die Vektoren

$$\text{kron} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_{(:,1)}^{(2)} \right) = \begin{bmatrix} P_{(:,1)}^{(2)} \\ P_{(:,1)}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \text{kron} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_{(:,2)}^{(2)} \right) = \begin{bmatrix} P_{(:,2)}^{(2)} \\ P_{(:,2)}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \text{kron} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{1} \right) = \begin{bmatrix} \vec{1} \\ -\vec{1} \end{bmatrix}.$$

Diese drei Vektoren bilden ein konvexes Prisma und damit ist Qualitätskriterium Q12 für den Prismenfall ebenfalls erfüllt. Da sie ein Prisma aufspannen sind sie zudem linear unabhängig. Damit ist die geometrische Vielfachheit des subdominanten Eigenwerts für den Prismenfall gerade $3 = t$. $\square$

Für die Subdivisionsmatrizen $S_1^{(2)}$ und $S_1^{(3)}$ erhalten wir zudem das folgende Korollar:

Korollar 5.16. Die Matrizen $S_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S_1^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind symmetrisch und damit diagonalisierbar.

Beweis. Für den Nicht-Prismenfall ist $S_1^{(t)}$ mit Gleichung (5.4) die Summe aus drei Matrizen. Die erste Matrix

$$\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2}$$

ist symmetrisch, da alle Einträge gleich sind. Die zweite Matrix

$$\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \dots + \frac{\tilde{P}_{(:,t)} \cdot \tilde{P}_{(:,t)}^T}{|\tilde{P}_{(:,t)}|^2}$$

ist symmetrisch, da das Produkt zweier Zahlen kommutiert, und die dritte Matrix ist symmetrisch, da sie bis auf einen Faktor die Einheitsmatrix ist. Damit ist auch $S_1^{(t)}$ als deren skalierte Summe symmetrisch.

Für den Prismenfall erhalten wir durch das Kroneckerprodukt eine Matrix der Form

$$S_1^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}S^{(2)} & \frac{1}{4}S^{(2)} \\ \frac{1}{4}S^{(2)} & \frac{3}{4}S^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Da die Matrizen $S^{(2)}$ nach Korollar 5.3 den Matrizen $S_1^{(2)}$ für $\mu = 1/4$ übereinstimmen und letztere mit der obigen Aussage symmetrisch sind, erhalten wir

$$\left(S_1^{(3)} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}S^{(2)} & \frac{1}{4}S^{(2)} \\ \frac{1}{4}S^{(2)} & \frac{3}{4}S^{(2)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(S^{(2)})^T & (\frac{1}{4}S^{(2)})^T \\ \frac{1}{4}(S^{(2)})^T & (\frac{3}{4}S^{(2)})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}S^{(2)} & \frac{1}{4}S^{(2)} \\ \frac{1}{4}S^{(2)} & \frac{3}{4}S^{(2)} \end{bmatrix} = S_1^{(3)}$$

und damit ist $S_1^{(3)}$ symmetrische Matrix.

Da alle Einträge von $S_1^{(t)}$ reell sind, folgt mit Theorem B.45, das die Diagonalisierbarkeit reeller symmetrischer Matrizen beschreibt, die Diagonalisierbarkeit von $S_1^{(t)}$. $\square$

Wir erhalten für die Matrizen S_2 zunächst analog zur ersten Variante die Diagonalisierbarkeit mit dem folgenden Theorem:

Theorem 5.17. Die Subdivisionsmatrizen $S_2^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S_2^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind diagonalisierbar.

Beweis. Da C eine reelle symmetrische Matrix ist, ist sie mit Satz B.45 diagonalisierbar. Mit Theorem B.48, in welchem die Diagonalisierbarkeit des Produkts einer hermiteschen und einer positiv definit hermiteschen Matrix betrachtet wird, ist $\tilde{C} = -(-NC)$ diagonalisierbar. Sei $\tilde{D}$ die zu $\tilde{C}$ ähnliche Diagonalmatrix. Dann ist mit Gleichung (5.8)

$$S_2 = V \begin{bmatrix} \exp_2(\tilde{D}_{(1,1)} - 1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp_2(\tilde{D}_{(n,n)} - 1) \end{bmatrix} V^{-1}$$

und damit ist S_2 ebenfalls diagonalisierbar. $\square$

Außerdem erhalten wir für die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente S_2 fast dasselbe Resultat im Bezug auf die Eigenwerte wie für die erste Variante:

Theorem 5.18. Die Subdivisionsmatrizen $S_2^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S_2^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ haben ein Eigenspektrum von

$$1, \underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{t\text{-mal}}, > \lambda_{t+1}, \geq \dots, \geq \lambda_{n-1} > 0$$

mit $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sie erfüllen damit die Qualitätskriterien Q3, Q4 und Q5. Zudem erfüllen beide Matrizen Qualitätskriterium Q12.

Beweis. Wir beginnen mit der Colin-de-Verdière-Matrix C . Diese ist nach Definition symmetrisch und reell und damit hermitesch. Mit Satz B.44 sind die Eigenwerte von hermiteschen Matrizen reell und damit sind die Eigenwerte der Matrix C reell. Außerdem besitzt die Matrix C durch ihre Definition genau einen negativen Eigenwert und mit Theorem 4.8 sowie Theorem 4.13 exakt t Eigenwerte gleich 0. Alle anderen Eigenwerte der Matrix C sind positiv.

Die Eigenwerte der diagonalen Normierungsmatrix N sind deren Diagonaleinträge und mit Satz 4.9 und Theorem 4.14 reell und negativ. Damit ist N negativ definit und $-N$ positiv definit.

Mit Theorem B.48 ist das Produkt $-NC$ aus einer hermitesch positiv definiten Matrix $-N$ und einer hermiteschen Matrix C diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Zudem sind die Vorzeichen der Eigenwerte von $-NC$ identisch mit denen der hermiteschen Matrix C . Für die Matrix

$$\tilde{C} = NC = -(-NC)$$

drehen sich die Vorzeichen der reellen Eigenwerte entsprechend um. Die Matrix $\tilde{C}$ besitzt also einen positiven Eigenwert, exakt t Eigenwerte gleich 0 und $n - (t + 1)$ negative Eigenwerte. Da die Matrix $\tilde{C}$ normiert ist, ist der positive Eigenwert gerade 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$.

Mit Gleichung (5.9) wird durch das Shiften mit der Einheitsmatrix E_n und dem anschließenden Exponenzieren der Eigenwert 1 auf 1 abgebildet, die Eigenwerte 0 werden auf $1/2$ abgebildet und alle anderen Eigenwerte werden auf Werte im Intervall $(0, 1/2)$ abgebildet. Da die Eigenvektoren in diesem Prozess mit Gleichung (5.8) unverändert bleiben, sind diese geshifteten Eigenwerte die Eigenwerte von S_2 . Diese sind folglich

$$1, \underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{t\text{-mal}}, > \lambda_{t+1}, \geq \dots, \geq \lambda_{n-1} > 0$$

mit $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ und somit erfüllen die Subdivisionsmatrizen $S_2^{(t)}$ die Qualitätskriterien Q3, Q4 und Q5.

Im nächsten Schritt betrachten wir Qualitätskriterium Q12. Seien P die Ecken des konvexen Polytops, aus dem die Matrix C konstruiert wurde. Mit Theorem 4.8 sowie Theorem 4.13 erhalten wir $CP = \vec{0}$.

Durch die Multiplikation NC verändert sich der Kern von C nicht, denn

$$NCP = N \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Damit sind die Spalten von P Eigenvektoren zum Eigenwert 0 der Matrix $\tilde{C}$ und folglich Eigenvektoren zum Eigenwert $1/2$ der Matrix S_2 . Somit wird der Eigenraum zum subdominanten Eigenwert von S_2 von einem konvexen Polytop aufgespannt und damit ist Qualitätskriterium Q12 erfüllt. Da die Spalten von P ein t -Polytop aufspannen, sind diese insbesondere linear unabhängig. Damit ist die geometrische Vielfachheit des subdominanten Eigenwertes gerade t . $\square$

Zudem erhalten wir die Symmetrie für $S_2^{(2)}$ mit dem folgenden Satz:

Satz 5.19. Die Subdivisionsmatrix $S_2^{(2)}$ ist symmetrisch.

Beweis. Die Colin-de-Verdière-Matrix C zu $S_2^{(2)}$ ist symmetrisch. Da durch die symmetrische Anordnung des 2-Polytops die Zeilensummen von C alle gleich sind, ist NC symmetrisch und damit auch $\ln(2)(NC - E_n)$. Da das Matrixexponential eine Reihe aus Potenzen von Matrizen ist und Potenzen symmetrischer Matrizen mit

$$(M^a)^T = (\underbrace{M \cdots M}_{a\text{-mal}})^T = \underbrace{M^T \cdots M^T}_{a\text{-mal}} = \underbrace{M \cdots M}_{a\text{-mal}} = M^a \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{N}$$

wieder symmetrisch sind, ist $S_2^{(2)}$ symmetrisch. $\square$

Qualitätskriterium Q6 gilt für S_2 hingegen nicht. Ein Gegenbeispiel für $t = 2$ ist eine kombinatorische Anordnung mit der unten angegebenen Adjazenzmatrix A . Die zugehörige Subdivisionsmatrix hat die Eigenwerte

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 0,1629 \quad \text{und} \quad 0,1629 \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{bmatrix}.$$

Ein Gegenbeispiel für $t = 3$ ist die Subdivisionsmatrix aus Beispiel 5.7. Diese hat die Eigenwerte (auf vier Nachkommastellen gerundet)

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 0,2172, \quad \dots$$

Damit können für diese beiden Fälle Gegenbeispiele konstruiert werden.

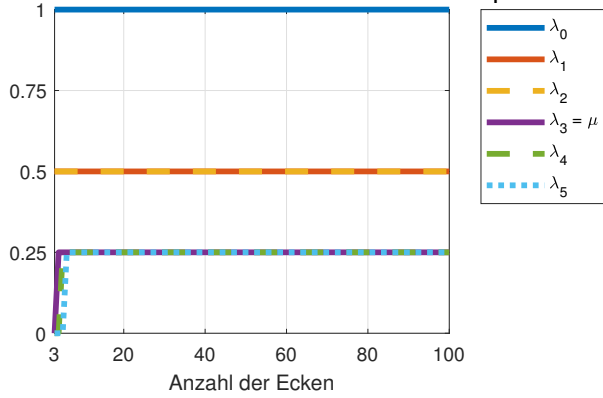
Die Subdivisionsmatrix $S_2^{(3)}$ ist zudem nicht symmetrisch. Ein Gegenbeispiel findet sich ebenfalls in Beispiel 5.7. So ist die Matrix aus Gleichung (5.10) nicht symmetrisch, denn die Colin-de-Verdière-Matrix C aus Theorem 4.13 hat hier unterschiedliche Zeilensummen. Damit ist die Matrix NC nicht symmetrisch und folglich auch die Matrix $S_2^{(3)}$ nicht.

Betrachten wir an dieser Stelle die empirischen Resultate für die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente. Die Eigenwerte der Beispielsammlung finden sich in Abbildung 5.8 und werden im Folgenden diskutiert.

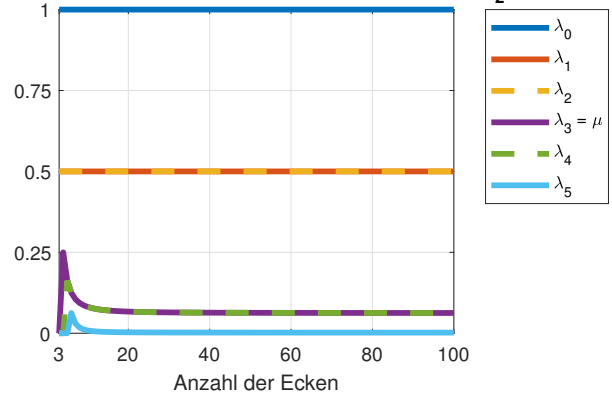
Zunächst fällt für alle Varianten auf, dass die Eigenwerte $\mu = \lambda_{t+1}$ und λ_{t+2} in Abbildung 5.8 für Beispiele mit niedriger Eckenzahl 0 zu sein scheinen. Die beiden kleinstmöglichen Beispiele sind für $t = 2$ das Drei- sowie das Viereck, und für $t = 3$ sind es das Tetraeder und die vierseitige Pyramide. Diese haben jeweils nur 3, 4 oder 5 Eigenwerte und damit werden in der Auswertung die Werte für $\mu = \lambda_{t+1}$ und λ_{t+2} entsprechend auf 0 gesetzt.

Für die Genauigkeit betrachten wir die folgende Tabelle, in der die relevanten Daten zusammengefasst werden:

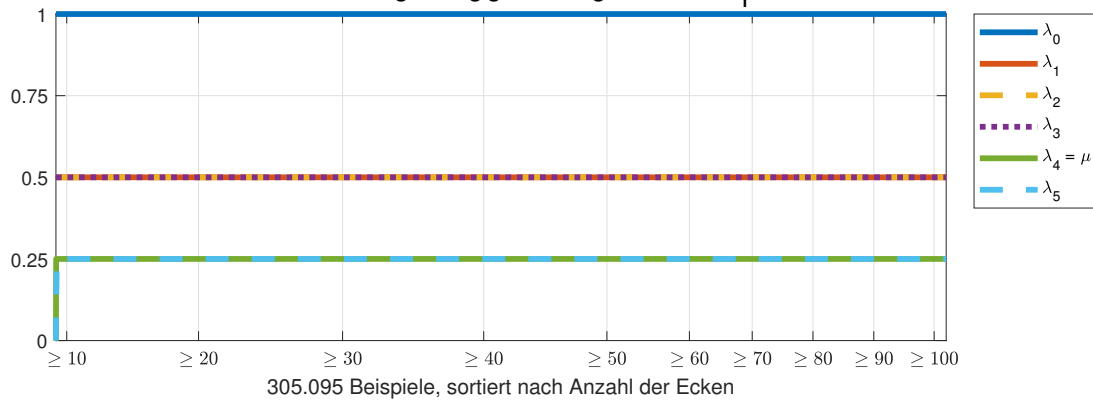
die sechs betragsmäßig größten Eigenwerte für $S_1^{(2)}$



die sechs betragsmäßig größten Eigenwerte für $S_2^{(2)}$



die sechs betragsmäßig größten Eigenwerte für $S_1^{(3)}$



die sechs betragsmäßig größten Eigenwerte für $S_2^{(3)}$

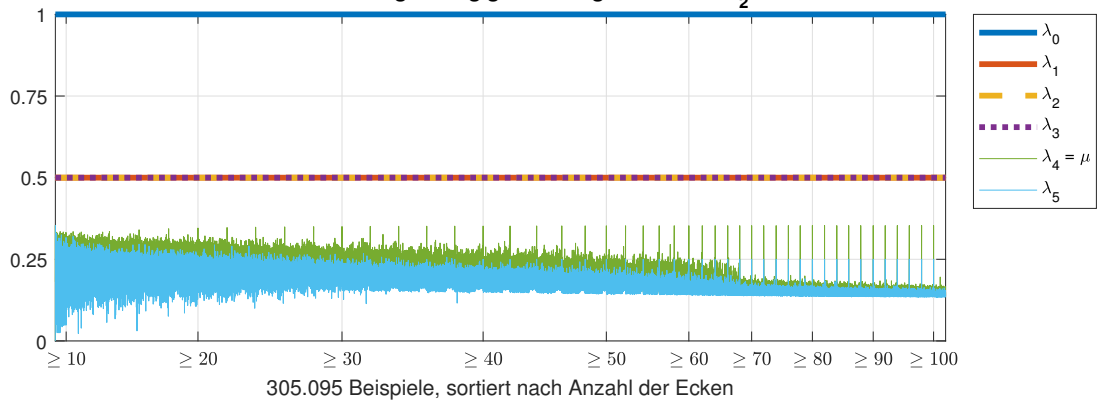


Abbildung 5.8: Die Eigenwerte der Matrizen der Initialelemente für die Varianten 1 und 2.

	$S_1^{(2)}$	$S_2^{(2)}$	$S_1^{(3)}$	$S_2^{(3)}$
$\max \lambda_0 - 1 $	1,1102e-15	7,9270e-14	2,5535e-15	1,36e-13
$\max \lambda_1 - 0.5 $	5,5511e-16	4,2411e-14	1,3323e-15	1,2013e-13
$\max \lambda_2 - 0.5 $	6,1062e-16	5,4734e-14	8,3267e-16	8,4543e-14
$\max \lambda_3 - 0.5 $			1,3878e-15	1,8152e-13
$\max \mu - 0.25 $	9,9920e-16		1,4988e-15	
$\max \mu $		0,25		0,35355
$\max SP - 0.5P $	1,1258e-15	8,6098e-14	1,026e-13	1,3305e-12

Hierbei läuft das Maximum, wie in den anderen Tabellen auch, über alle betrachteten Beispiele. Wir sehen hier, dass die Fehler alle in einem akzeptablen Bereich liegen und damit sind die Qualitätskriterien auch empirisch überprüft.

Interessant sind noch die maximalen Werte für μ der Matrizen der Variante 2. Für $t = 2$ scheinen diese mit steigender Eckenzahl kleiner zu werden, für $t = 3$ scheint dies hingegen nicht zu gelten. In Abbildung 5.8 ist zwar zu erkennen, dass im Schnitt der subsubdominante Eigenwert mit steigender Eckenzahl kleiner wird, es gibt allerdings immer Beispiele, in denen ein hoher Wert erreicht wird. Interessanterweise sind die Spitzen in Abbildung 5.8 die Trapezhedren, die wir in Kapitel 7 besprechen. Der gemessene Maximalwert für S_2^3 von 0,35 ist zwar größer als $1/4$, der Abstand zu $1/2$ ist aber immer noch groß genug, sodass sich das lokale asymptotische Verhalten der subdominanten Eigenwerte schnell genug durchsetzt.

Betrachten wir die Eigenwerte der Ring- und Schalenmatrizen, so können wir deutlich weniger Aussagen treffen. Wir erhalten aber immerhin die Übertragung der Eigenwerte der zugehörigen Subdivisionsmatrizen der Initialelemente:

Satz 5.20. *Sei $\bar{S}$ eine Subdivisionsmatrix der Form $\bar{S}^{(2)}$ oder $\bar{S}^{(3)}$, also eine Subdivisionsmatrix eines Rings oder einer Schale, mit einem zentralen Initialelement, dessen Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ oder $S^{(3)}$ ist. Dann sind die Eigenwerte von $S^{(t)}$ eine Teilmenge der Eigenwerte von $\bar{S}^{(t)}$.*

Beweis. Die Verfeinerungsregeln der Initialelemente sind mit Definition 2.11 und den Algorithmen 10 und 11 nur von den Kontrollpunkten des Initialelements abhängig. Da im Ring- und Schalenfall das zentrale Initialelement auf sich selbst abgebildet wird, sind in den entsprechenden Verfeinerungsregeln, und damit in den entsprechenden Zeilen der Matrix $\bar{S}$, alle Einträge, die nicht zu S gehören, gleich 0. Mit einer entsprechenden Permutation H lässt sich $\bar{S}$ in die Form

$$H\bar{S}H^T = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

bringen. Da $H\bar{S}H^T$ ähnlich zu $\bar{S}$ ist, besitzen beide mit Korollar B.31 dieselben Eigenwerte. Mit Satz B.34 sind die Eigenwerte von $H\bar{S}H^T$ die Eigenwerte von M_1 und von S . Damit sind die Eigenwerte von S eine Teilmenge der Eigenwerte von $\bar{S}$. $\square$

Wir können zusätzlich die folgende Aussage über die Ring-Matrizen treffen:

Theorem 5.21. *Die Matrizen $\bar{S}_1^{(2)}$ und $\bar{S}_2^{(2)}$ erfüllen die Qualitätskriterien Q3, Q4 und Q5. Die Matrix $\bar{S}_1^{(2)}$ erfüllt außerdem Qualitätskriterium Q6. Zudem haben beide Matrizen ausschließlich reelle Eigenwerte.*

Beweis. Für den Fall $t = 2$ bestehen die Subdivisionsmatrizen der Ringe nur aus regulären Initialelementen und dem zentralen Initialelement. Dieser Fall wird in [PR08, Abschn. 6.2, S. 116–120] besprochen. Peters und Reif zeigen, dass vom äußeren Bereich nur noch Eigenwerte $1/4$, $1/8$, $1/16$ und 0 hinzukommen (vgl. [PR08, S. 117]). Da dieser äußere Bereich in [PR08] mit unserem übereinstimmt, übertragen sich die Qualitätskriterien Q3, Q4 und Q5 von den Matrizen der Initialelemente auf die Ringmatrizen. Da für den subsubdominanten Eigenwert μ der Subdivisionsmatrix $S_1^{(2)}$ gerade $\mu \leq 1/4$ gilt, ist auch Qualitätskriterium Q6 für $\bar{S}_1^{(2)}$ erfüllt. Zudem sind mit dieser Argumentation die Eigenwerte beider Varianten reell. $\square$

Auf die Eigenwerte von $\bar{S}_1^{(3)}$ und $\bar{S}_2^{(3)}$ haben wir hingegen keinen Zugriff. Das zentrale Element für die Analyse der Eigenstruktur im Fall $t = 2$ ist die diskrete Fourier-Transformation. Es wird ausgenutzt, dass die Subdivisionsmatrizen zyklisch sind und es wird die diskrete Fourier-Transformation verwendet, um Aussagen über die Struktur zu treffen. Diese Zyklizität fehlt im Fall $t = 3$ (abgesehen vom Prismenfall), genauso wie der generelle theoretische Hintergrund.

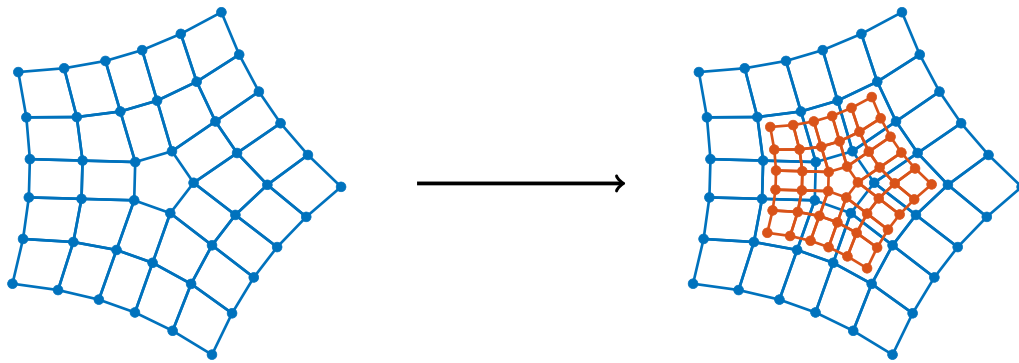


Abbildung 5.9: Die Gitterstruktur der Kontrollpunkte, die mit einer Ringmatrix verfeinert werden (links) sowie die invariante Verfeinerung (rechts). Man erkennt, dass der äußere Ring der Kontrollpunkte keinen Einfluss auf die Verfeinerung hat. Die zugehörigen Spalten in der Subdivisionsmatrix sind daher 0.

Was wir an dieser Stelle lediglich festhalten können, ist, dass die Eigenwerte von $\overline{S}_2^{(3)}$ betragsmäßig alle kleiner gleich 1 sind. Dies folgt daraus, dass $\overline{S}_2^{(3)}$ stochastisch ist. Ebenso wenig können wir eine Aussage über die Diagonalisierbarkeit und für $t = 3$ über die Reellwertigkeit der Eigenwerte treffen.

Dass die Ring- und Schalenmatrizen symmetrisch sind, können wir aber ausschließen. Aufgrund der invarianten Struktur gibt es sowohl für $t = 2$ als auch für $t = 3$ Spalten der Subdivisionsmatrizen, die ausschließlich aus Nulleinträgen bestehen. Da sich aber jede Zeile zu 1 aufsummiert, können die Matrizen nicht symmetrisch sein. Eine Illustration dazu findet sich in Abbildung 5.9.

Umso entscheidender ist an dieser Stelle die empirische Auswertung. Analog zum Fall der Initialelemente erhalten wir die in Abbildung 5.10 zusammengefassten Eigenwerte. Es lässt sich erkennen, dass die Qualitätskriterien zwar nicht bewiesen werden können, aber für die hier gezeigten Beispiele erfüllt sind.

Interessant ist außerdem das Verhalten des subsubdominanten Eigenwerts. Für $t = 2$ erhalten wir vom äußeren Teil der Ringstruktur Eigenwerte mit Wert $1/4$ und damit erfüllt die Matrix $S_2^{(2)}$ empirisch ebenfalls Qualitätskriterium Q6.

Für $t = 3$ gilt das Kriterium zwar nicht, jedoch scheint es so zu sein, dass vom äußeren Teil Eigenwerte mit Wert $1/4$ hinzukommen, weshalb die subsubdominanten Eigenwerte in der Grafik nach unten hin durch $1/4$ beschränkt sind.

Für die Fehler in den empirischen Auswertungen erhalten wir analog zu den Initialelementen die folgende Tabelle:

	$\overline{S}_1^{(2)}$	$\overline{S}_2^{(2)}$	$\overline{S}_1^{(3)}$	$\overline{S}_2^{(3)}$
$\max \lambda_0 - 1 $	3,1086e-15	6,7502e-14	8,8818e-15	1,3634e-13
$\max \lambda_1 - 0.5 $	8,8818e-16	3,2974e-14	6,4393e-15	1,1957e-13
$\max \lambda_2 - 0.5 $	1,6653e-15	3,2974e-14	4,3299e-15	8,3211e-14
$\max \lambda_3 - 0.5 $			6,2172e-15	1,808e-13
$\max \mu - 0.25 $	9,3708e-9	1,9429e-15	1,1702e-8	
$\max \mu $		0,25		0,353 55

Damit sind die Qualitätskriterien zumindest empirisch erfüllt.

Über Qualitätskriterium Q12 können wir für die Ring- und Schalenmatrizen keine Aussage treffen. Die Struktur des zentralen Initialelements muss zur Subdivisionsmatrix des Initialelements identisch sein. Den äußeren Teil der Kontrollpunkte können wir allerdings nicht beschreiben. Empirisch haben wir zudem keine Möglichkeit, dieses Kriterium zu quantifizieren, denn hier könnte man höchstens durch eine Sichtkontrolle eine qualitative Aussage treffen.

Q7 und Q8 Tensorproduktstruktur

Für den Fall $t = 2$ ist die einzige Tensorproduktstruktur die Reproduktion des regulären Falls als Kroneckerprodukt

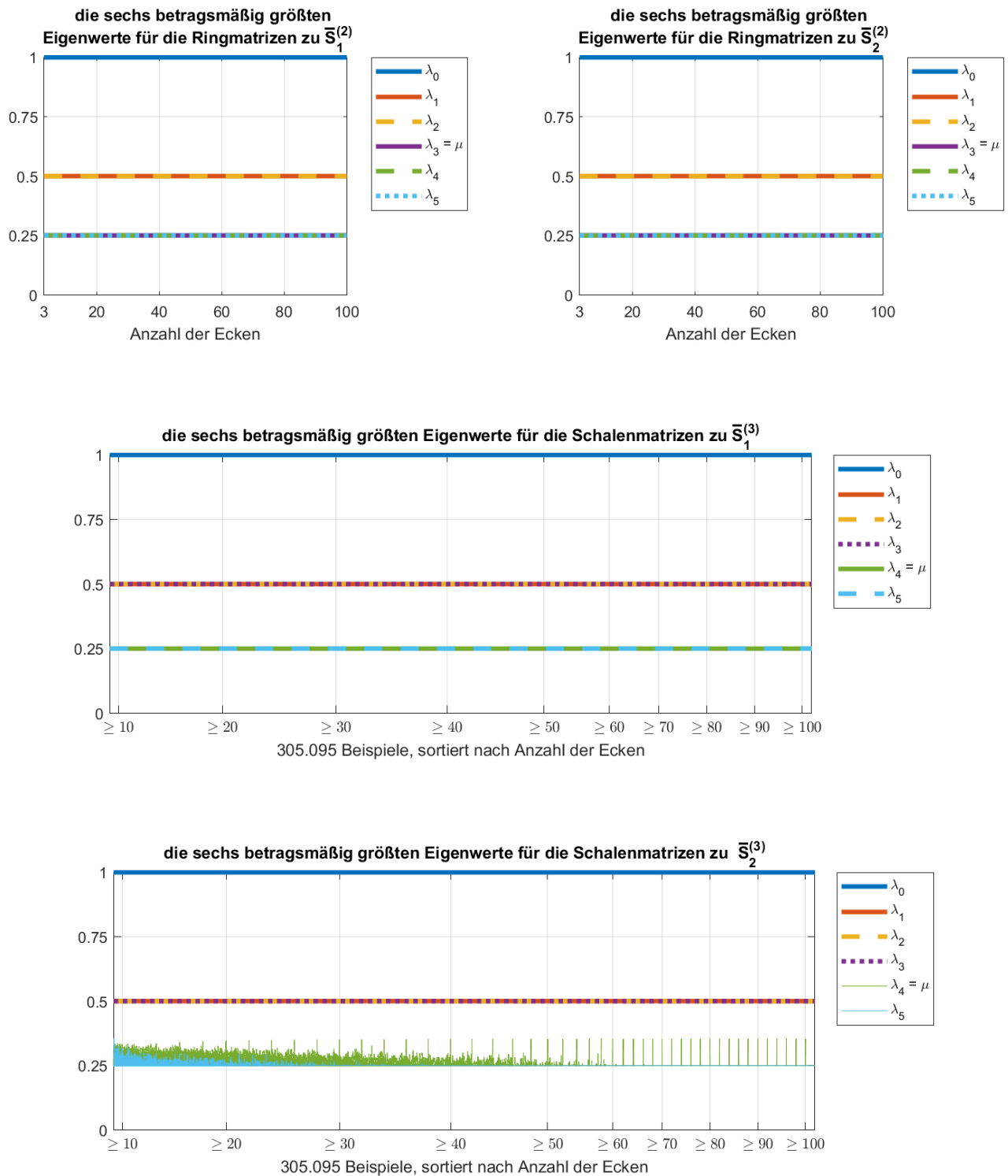


Abbildung 5.10: Die Eigenwerte der Ring- und Schalenmatrizen für die Varianten 1 und 2.

von zwei eindimensionalen Fällen. Variante 1 für $\mu = 1/4$ und Variante 2 erfüllen diese Reproduktion. Dies lässt sich durch einfaches Einsetzen der Graphenstruktur in die Algorithmen nachrechnen. Da sich für den regulären Fall die Ringmatrizen nur aus regulären Initialelementen zusammensetzen, ergibt sich die Tensorproduktstruktur für $\bar{S}^{(2)}$ ebenfalls. Damit ist für alle Varianten von $S^{(2)}$ und $\bar{S}^{(2)}$ Qualitätskriterium Q7 erfüllt.

Der in diesem Kontext interessante Fall ist der Fall $t = 3$. Für Initialelemente repräsentieren die Graphen im semi-irregulären und im regulären Fall Prismen. Betrachten wir zunächst Variante 1. Wie bereits im Abschnitt 5.2.1 beschrieben, kann Formel (5.4) den semi-irregulären und den regulären Fall nicht reproduzieren, da dafür die Subdivisionsmatrix mindestens vier verschiedene Eigenwerte haben müsste. Wir erzwingen daher die Tensorproduktstruktur, indem wir in Algorithmus 10 den Prismenfall separat behandeln und die Subdivisionsmatrix durch

$$S_1^{(3)} := \text{kron} \left(S^{(1)}, S^{(2)} \right)$$

berechnen. Damit ergibt sich direkt Qualitätskriterium Q8 für $S_1^{(3)}$. Die Reproduktion des regulären Falls und damit Qualitätskriterium Q7 ergibt sich durch direktes Einsetzen und ist mit dieser Konstruktion für $S_1^{(3)}$ ebenfalls erfüllt.

Die zweigeteilte Konstruktionsstrategie ist, wie in Abschnitt 2.4 für Qualitätskriterium Q8 beschrieben, zwar möglich, es wäre an dieser Stelle aber wünschenswert, eine einheitliche Konstruktion für alle Fälle zu haben.

Variante 2 erfüllt die beiden Qualitätskriterien hingegen mit einer einheitlichen Konstruktion der Subdivisionsmatrizen, was wir im Folgenden ausführen:

Theorem 5.22. *Sei $A^{(2)}$ die Adjazenzmatrix eines zweidimensionalen Initialelements mit n Ecken und sei*

$$A := \begin{bmatrix} A^{(2)} & E_n \\ E_n & A^{(2)} \end{bmatrix}$$

die Adjazenzmatrix eines Prismas für den Fall $t = 3$. Dann lässt sich $S_2^{(3)}$ als Kroneckerprodukt zweier Matrizen darstellen, von denen eine

$$S^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ist und die andere im Laufe des folgenden Beweises beschrieben wird.

Der folgende Beweis geht auf die Ideen von und die Diskussionen mit Kai Hormann zurück, der die Skizze hierfür entwickelt hat.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir für diesen Beweis

$$a := \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad b := \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

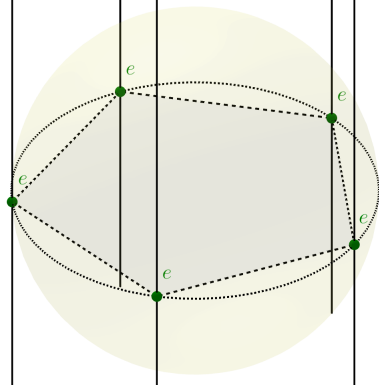
Um auf die konkreten Koordinaten des 3-Polytops zur Adjazenzmatrix A zugreifen zu können, konstruieren wir für diesen Beweis zunächst die Koordinaten eines Prismas mit n -seitiger Grundfläche, dessen Kanten tangential zur Einheitssphäre liegen. Wir beginnen dafür mit den Kanten der Mantelfläche. Die kantentangentialen Punkte legen wir äquidistant um den Äquator der Einheitssphäre. Konkret definieren wir die Punkte als

$$e_i := \left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right), 0 \right) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n.$$

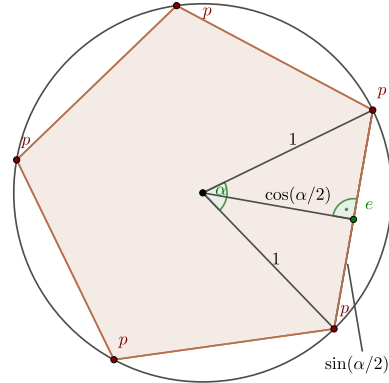
Wir setzen die Richtung der zugehörigen Kante des 3-Polytops als $[0, 0, 1]$. Damit liegen die Ecken der beiden Grundflächen alle auf den so beschriebenen Kanten und die x - und y -Koordinaten der Eckpunkte des 3-Polytops liegen fest. Die beiden Grundflächen sind damit regelmäßige n -Ecke mit einem Umkreisradius von 1. Eine Illustration ist in Abbildung 5.11 zu finden.

In einem nächsten Schritt müssen wir die Höhe der beiden Grundflächen so festlegen, dass deren Kanten ebenfalls tangential zur Einheitssphäre liegen. Dazu müssen wir die in Abbildung 5.11 eingezeichnete Grundfläche so nach oben und unten verschieben, bis deren Kanten die Einheitssphäre nur noch berühren.

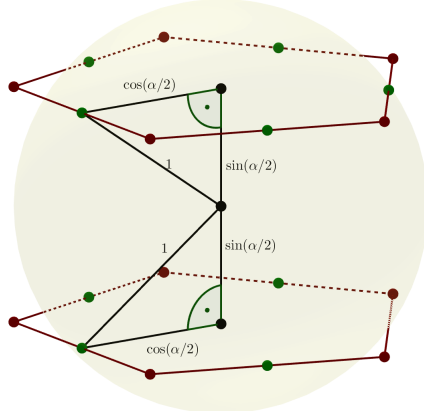
tangente Punkte mit Tangentengeraden



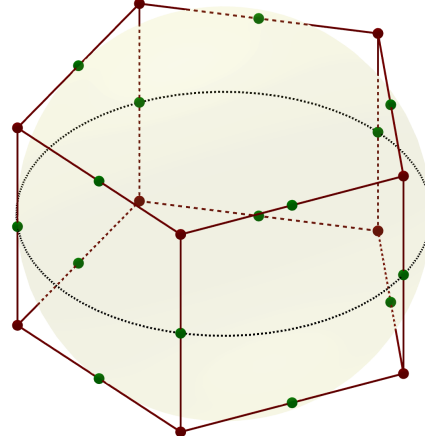
Abstand der Tangentenpunkte zum Facettenmittelpunkt



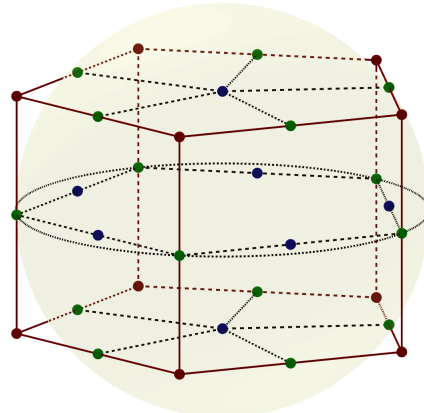
Berechnung der Höhe der beiden Grundflächen



primales Polytop



Projektionspunkte der dualen Punkte



primales und duales Polytop

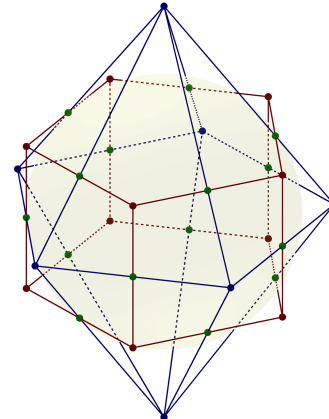


Abbildung 5.11: Verschiedene Konstruktionsschritte der primalen und dualen Punkte.

Aus Symmetriegründen liegt der Mittelpunkt der Kanten der beiden Grundflächen tangential zur Einheitssphäre. Da der Umkreis der Grundfläche gerade 1 ist, ist damit der Abstand des Tangentenpunkts zum Mittelpunkt des n -Ecks

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = a.$$

Eine Illustration ist in Abbildung 5.11 zu finden. Da die Tangentenpunkte auf dem Einheitskreis liegen, ist die Länge ihrer Ortsvektoren gerade 1 und damit ist die Höhe der Grundfläche

$$\sqrt{1 - a^2} = b \quad \Rightarrow \quad z = \pm b.$$

Eine Illustration ist ebenfalls in Abbildung 5.11 zu finden. Damit erhalten wir die folgenden Koordinaten für das primale Polytop:

$$\begin{aligned} p_i &= \left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right), b \right) && \text{für } i = 1, \dots, n \quad \text{und} \\ p_i &= \left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right), -b \right) && \text{für } i = n+1, \dots, 2n \end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden auf diese Punkte zugreifen. Um die Notation möglichst einfach zu halten, zählen wir die Punkte mit der Zählvariable i durch. Dieses i läuft für die obere Grundfläche von 1 bis n . In diesem Fall identifizieren wir $0 \equiv n$ und $n+1 \equiv 1$. Für die untere Grundfläche läuft i von $n+1$ bis $2n$. Für diesen Fall identifizieren wir $n \equiv 2n$ und $2n+1 \equiv n+1$.

Die Punkte des dualen Polytops können ebenfalls geometrisch bestimmt werden. Die Richtung der Normalen der Facetten der Mantelflächen verläuft orthogonal zum Äquator der Einheitssphäre. Da die Tangentenpunkte, wie in Abbildung 5.11 zu sehen, einen Umkreis von 1 haben, liegt die Projektion der dualen Punkte in

$$a \left(\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right), 0 \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und mit Gleichung (3.12) erhalten wir für die dualen Punkte

$$f_i = \frac{1}{a} \left(\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right), 0 \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Analog dazu erhalten wir für die dualen Punkte der beiden Grundflächen

$$f_0 = \left(0, 0, \frac{1}{b} \right) \quad \text{und} \quad f_{n+1} = \left(0, 0, -\frac{1}{b} \right).$$

Eine Illustration findet sich in Abbildung 5.11.

Mit diesen Koordinaten können wir die Colin-de-Verdière-Matrix des Polytops berechnen. Um lange Umformungen der Sinus- und Kosinusterme zu vermeiden, verwenden wir zu deren Berechnung ein CAS. Für die Nebendiagonaleinträge erhalten wir zwei verschiedene Werte. Wir beginnen mit den vertikalen Kanten und erhalten

$$|p_i \times p_{i+n}| = \left| \begin{bmatrix} -2 \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right) b \\ 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) b \\ 0 \end{bmatrix} \right| = 2b$$

und

$$|f_{i-1} - f_i| = \left| \frac{1}{a} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \right| = 2 \frac{b}{a}$$

für $i = 1, \dots, n$. Damit ergibt sich für die Nicht-Nulleinträge

$$C_{(i,i+n)} = C_{(i+n,i)} = -\frac{2\frac{b}{a}}{2b} = -\frac{1}{a}.$$

In einem nächsten Schritt betrachten wir die horizontalen Kanten. Für diese erhalten wir

$$|p_i \times p_{i+1}| = \left| \begin{bmatrix} \pm \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right)b \mp \sin\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right)b \\ \pm \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)b \mp \cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right)b \\ \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \end{bmatrix} \right| = 2b$$

für $i = 1, \dots, n$ sowie $i = n+1, \dots, 2n$. Des Weiteren erhalten wir

$$|f_i - f_0| = |f_i - f_{n+1}| = \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right) \\ \frac{1}{a} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{n}\right) \\ \pm \frac{1}{b} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{ba}$$

für $i = 1, \dots, n$. Insgesamt erhalten wir damit für die Nicht-Nulleinträge

$$C_{(i,i+1)} = C_{(i+1,i)} = -\frac{\frac{1}{ba}}{2b} = -\frac{1}{2b^2a}$$

für $i = 1, \dots, n$ sowie $i = n+1, \dots, 2n$. Damit müssen wir lediglich noch die Diagonaleinträge von C berechnen. Diese sind durch die Symmetrie des Prismas alle identisch und ergeben sich mit Umformung (4.5) durch

$$C_{(i,i)} = -\frac{\langle p_i, \sum_{j,j \neq i} C_{(i,j)} p_j \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}.$$

Die Summe im obigen Ausdruck besteht aus drei Summanden, die zu den zwei benachbarten Knoten in der Grundfläche und dem benachbarten Knoten in der gegenüberliegenden Grundfläche gehören. Wir erhalten damit

$$\sum_{j,j \neq i} C_{(i,j)} p_j = -\frac{1}{2b^2a} \left(\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \\ \pm b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \\ \pm b \end{bmatrix} \right) - \frac{1}{a} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \\ \mp b \end{bmatrix}.$$

Mithilfe verschiedener Additionstheoreme erhalten wir für die Länge des obigen Ausdrucks

$$\left| \sum_{j,j \neq i} C_{(i,j)} p_j \right| = \frac{a}{b^2} \sqrt{1+b^2}.$$

Für die Länge von p_i ergibt sich

$$|p_i| = \sqrt{1+b^2}.$$

Da p_i und $\sum_{j,j \neq i} C_{(i,j)} p_j$ mit Gleichung (4.3) in dieselbe Richtung (bis auf das Vorzeichen) zeigen, erhalten wir

$$|C_{(i,i)}| = \frac{\frac{a}{b^2} \sqrt{1+b^2}^2}{\sqrt{1+b^2}^2} = \frac{a}{b^2}.$$

Durch die Überprüfung des Vorzeichens erhalten wir

$$C_{(i,i)} = \frac{a}{b^2}.$$

Mit der Berechnung der obigen Einträge haben wir alle Einträge der Colin-de-Verdière-Matrix explizit bestimmt und erhalten

$$C = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} M & -E_n \\ -E_n & M \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad M = \frac{1}{2b^2} \begin{bmatrix} 2a^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2a^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2a^2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2a^2 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Zudem ist die Summe jeder Zeile gleich und ergibt sich durch

$$\sum_j C_{(i,j)} = -\frac{1}{a} - 2 \cdot \frac{1}{2b^2a} + \frac{2a^2}{2b^2a} = \frac{2a^2 - 2b^2 - 2}{2b^2a} = \frac{2 - 2b^2 - 2b^2 - 2}{2b^2a} = \frac{-2b^2}{b^2a} = -\frac{2}{a}.$$

Betrachten wir jetzt die Formel für die Subdivisionsmatrix. Diese lässt sich mit Satz B.53 zu

$$S_2^{(3)} = \exp_2(NC - E_{2n}) = \exp_2(NC) \exp_2(-E_{2n}) = \frac{1}{2} \exp_2(NC)$$

umformen. Da die Matrix N eine Diagonalmatrix mit gleichen Einträgen $-a/2$ auf der Diagonalen ist, erhalten wir

$$S_2^{(3)} = \frac{1}{2} \exp_2(NC) = \frac{1}{2} \exp_2\left(-\frac{a}{2}C\right).$$

Wir teilen die Matrix C in die Summe zweier Matrizen auf. Konkret definieren wir

$$M_1 := \frac{1}{a} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 := \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese beiden Matrizen kommutieren, denn es gilt

$$M_1 M_2 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} 0 & -M \\ -M & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{a} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = M_2 M_1.$$

Mit Satz B.53 ergibt sich damit

$$S_2^{(3)} = \frac{1}{2} \exp_2\left(-\frac{a}{2}(M_1 + M_2)\right) = \frac{1}{2} \exp_2\left(-\frac{a}{2}M_1\right) \exp_2\left(-\frac{a}{2}M_2\right).$$

Wir betrachten beide Exponentiale separat. Mit Korollar B.65 erhalten wir

$$\exp_2\left(-\frac{a}{2}M_1\right) = \exp\left(\ln(2)\left(-\frac{a}{2}M_1\right)\right) = \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) \end{bmatrix}$$

und mit Korollar B.70 ergibt sich

$$\exp_2\left(-\frac{a}{2}M_2\right) = \exp\left(\ln(2)\left(-\frac{a}{2}M_2\right)\right) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{\ln(2)}{2}E_n \\ \frac{\ln(2)}{2}E_n & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cosh\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)E_n & \sinh\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)E_n \\ \sinh\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)E_n & \cosh\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)E_n \end{bmatrix}.$$

Werden wir die cosh- und sinh-Ausdrücke aus, erhalten wir

$$\exp_2\left(-\frac{a}{2}M_2\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}}E_n & \frac{1}{2\sqrt{2}}E_n \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}E_n & \frac{3}{2\sqrt{2}}E_n \end{bmatrix}.$$

Multiplizieren wir beide Matrizen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S_2^{(3)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}}E_n & \frac{1}{2\sqrt{2}}E_n \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}E_n & \frac{3}{2\sqrt{2}}E_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) & \frac{1}{4\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) \\ \frac{1}{4\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) & \frac{3}{4\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und wir erhalten damit

$$S_2^{(3)} = \text{kron} \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\ln(2)}{2}M\right) \right) = \text{kron} \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \exp_2\left(-\frac{1}{2}M\right) \right).$$

Die Matrix $S_2^{(3)}$ lässt sich also als Kroneckerprodukt zweier Matrizen ausdrücken, von denen eine die Matrix $S^{(1)}$ ist. $\square$

Zudem erhalten wir aus dem Beweis des obigen Theorems das folgendes Korollar:

Korollar 5.23. Die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \exp_2\left(-\frac{1}{2}M\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (5.14)$$

mit M wie in Gleichung (5.13) aus dem obigen Beweis, stimmt mit $S_2^{(2)}$ für das 2-Polytop als regelmäßiges n -Eck überein.

Beweis. Wir definieren analog zum obigen Beweis

$$a := \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad b = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Wir konstruieren zunächst die Colin-de-Verdière-Matrix zu $S_2^{(2)}$. Mit Theorem 4.8 erhalten wir für die Einträge der Nebendiagonalen

$$C_{(i,j)} = -\frac{1}{|p_i \times p_j|} = -\frac{1}{|p_i||p_j|\sin(\alpha)} = -\frac{1}{a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = -\frac{a^2}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)},$$

wobei sich p_i und p_j eine gemeinsame Kante teilen und α der Winkel zwischen p_i und p_j ist. Eine Illustration der konkreten Werte findet sich in Abbildung 5.12. Für die Einträge der Diagonalen erhalten wir entsprechend

$$C_{(i,i)} = \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{1}{a^2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) a^2}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Für die Colin-de-Verdière-Matrix erhalten wir

$$C = \frac{a^2}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \begin{bmatrix} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix}.$$

Für die Zeilensummen von C erhalten wir

$$\sum_j C_{(i,j)} = \frac{a^2}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \left(2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 2 \right)$$

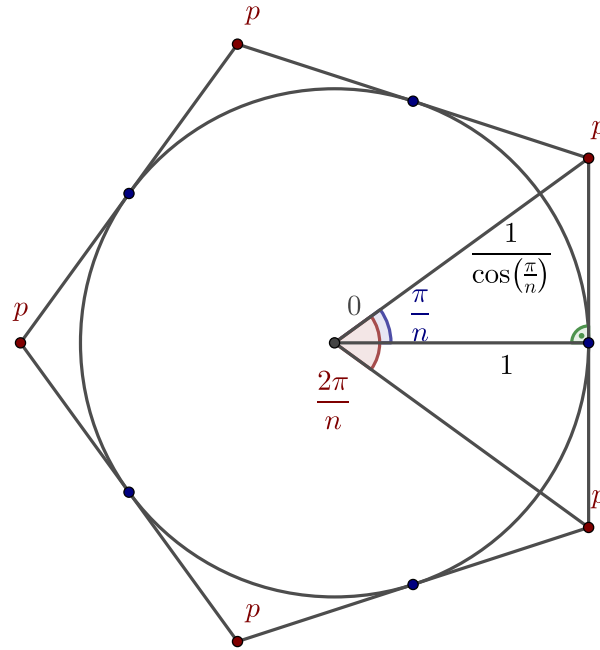


Abbildung 5.12: Illustration des regelmäßigen n -Ecks nach Abschnitt 3.4 mit den benötigten Werten.

und damit ergibt sich für die Normierung der Colin-de-Verdière-Matrix

$$N \cdot C = \frac{1}{(2 \cos(\frac{2\pi}{n}) - 2)} \begin{bmatrix} 2 \cos(\frac{2\pi}{n}) & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 \cos(\frac{2\pi}{n}) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos(\frac{2\pi}{n}) & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{bmatrix}.$$

Mithilfe verschiedener Additionstheoreme erhalten wir

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 2 = 2(2a^2 - 1) - 2 = 4a^2 - 4 = -4b^2$$

und

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2(2a^2 - 1) = 4a^2 - 2.$$

Damit ergibt sich für die normierte Matrix

$$N \cdot C = -\frac{1}{4b^2} \begin{bmatrix} 4a^2 - 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 4a^2 - 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4a^2 - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4a^2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Für $N \cdot C - E_n$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}
 N \cdot C - E_n &= -\frac{1}{4b^2} \begin{bmatrix} 4a^2 - 2 + 4b^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 4a^2 - 2 + 4b^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4a^2 - 2 + 4b^2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4a^2 - 2 + 4b^2 \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{4b^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt den Ausdruck (5.14). Für diesen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}} \exp_2 \left(-\frac{1}{2} M \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{\ln(2)}{2} M \right) = \exp \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) E_n \right) \exp \left(-\frac{\ln(2)}{2} M \right) = \exp \left(-\frac{\ln(2)}{2} E_n - \frac{\ln(2)}{2} M \right) \\
 &= \exp \left(\ln(2) \left(-\frac{1}{2} (E_n + M) \right) \right) = \exp_2 \left(-\frac{1}{2} (E_n + M) \right).
 \end{aligned}$$

Wir müssen also $NC - E_n$ mit dem Ausdruck $-(E_n + M)/2$ vergleichen. Für letzteren erhalten wir

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} (E_n + M) &= -\frac{1}{4b^2} \begin{bmatrix} 2a^2 + 2b^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2a^2 + 2b^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2a^2 + 2b^2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2a^2 + 2b^2 \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{4b^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = N \cdot C - E_n.
 \end{aligned}$$

Damit stimmen die beiden Matrizen vor dem Multiplizieren mit $\ln(2)$ und dem anschließenden Exponenzieren überein und sind damit identisch. $\square$

Aus diesen beiden Aussagen lässt sich das folgende Korollar ableiten:

Korollar 5.24. Die Matrizen $S_2^{(3)}$ erfüllen die Qualitätskriterien Q7 und Q8.

Beweis. Der reguläre Fall und damit Qualitätskriterium Q7 ergibt sich durch einfaches Einsetzen der entsprechenden Adjazenzmatrix in den Algorithmus.

Da mit Theorem 5.22 und Korollar 5.23 die Subdivisionsmatrix $S_2^{(3)}$ das Kroneckerprodukt aus der eindimensionalen und der zugehörigen zweidimensionalen Regel ist, gilt zudem Qualitätskriterium Q8. $\square$

Abschließend besprechen wir die Tensorproduktstruktur der Schalenmatrizen mit dem folgenden Theorem:

Theorem 5.25. Die Matrizen $\bar{S}^{(3)}$ erfüllen für beide Varianten die Qualitätskriterien Q7 und Q8.

Beweisskizze. Da sich für den regulären Fall die Subdivisionsmatrizen $\bar{S}^{(3)}$ ausschließlich aus regulären Initialelementen zusammensetzen, ist Qualitätskriterium Q7 erfüllt.

Für den semi-irregulären Fall bestehen die Subdivisionsmatrizen $\bar{S}^{(3)}$ aus der Subdivisionsmatrix des zentralen semi-irregulären Initialelements, den Subdivisionsmatrizen der zwei gegenüberliegenden semi-irregulären Initialelemente, und sonst ausschließlich aus den Subdivisionsmatrizen der regulären Initialelemente. Damit überträgt sich die Tensorprodukteigenschaft entsprechend und Qualitätskriterium Q8 ist ebenfalls erfüllt. $\square$

Q10 Symmetrie

Für dieses Kriterium müssen wir zeigen, dass für alle Permutationen H der Adjazenzmatrix A mit

$$H A H^T = A$$

für die zugehörigen Subdivisionsmatrizen S gerade

$$H S H^T = S$$

gilt. Für $t = 2$ erhalten wir für Variante 1 das folgende Ergebnis:

Theorem 5.26. Die Subdivisionsmatrix $S_1^{(2)}$ erfüllt $H S H^T = S$ für einen Automorphismus H des zugehörigen Graphen und erfüllt damit Qualitätskriterium Q10.

Beweis. Setzen wir in die obige Bedingung die Subdivisionsmatrix ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} H S_1^{(2)} H^T &= H \left(\left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(:,2)} \cdot \tilde{P}_{(:,2)}^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} \right) \right) (1-\mu) + \mu E_n \right) H^T \\ &= \left(\frac{H \vec{1} \cdot \vec{1}^T H^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{H \tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{H \tilde{P}_{(:,2)} \cdot \tilde{P}_{(:,2)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} \right) \right) (1-\mu) + \mu H E_n H^T. \end{aligned}$$

Betrachten wir die verschiedenen Summanden einzeln. Die Matrix $\vec{1} \cdot \vec{1}^T$ besteht nur aus Einträgen, die gleich 1 sind. Damit gilt für jede Permutation

$$H \vec{1} \cdot \vec{1}^T H^T = \vec{1} \cdot \vec{1}^T.$$

Da mit Theorem B.16 $H^T = H^{-1}$ ist, ist

$$H E_n H^T = E_n.$$

Mit Gleichung (5.5) sind die Längen $|\tilde{P}_{(:,1)}|^2$ und $|\tilde{P}_{(:,2)}|^2$ gleich, und wir erhalten

$$\frac{H \tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{H \tilde{P}_{(:,2)} \cdot \tilde{P}_{(:,2)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} = \frac{H \tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T H^T + H \tilde{P}_{(:,2)} \cdot \tilde{P}_{(:,2)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} = \frac{H \tilde{P} \cdot \tilde{P}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2}.$$

Weil $P = \tilde{P}$ als regelmäßiges n -Eck alle Symmetrien der zugrundeliegenden Graphenstruktur erfüllt und das Skalarprodukt nur relative Größen (Längen und Winkel) enthält, gilt

$$H \tilde{P} \cdot \tilde{P}^T H^T = \tilde{P} \cdot \tilde{P}^T.$$

Für den Gesamtausdruck erhalten wir damit

$$\begin{aligned} HS_1^{(2)}H^T &= \left(\frac{H\vec{1} \cdot \vec{1}^T H^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{H\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{H\tilde{P}_{(:,2)} \cdot \tilde{P}_{(:,2)}^T H^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} \right) \right) (1-\mu) + \mu H E_n H^T \\ &= \left(\frac{\vec{1} \cdot \vec{1}^T}{|\vec{1}|^2} + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} \left(\frac{\tilde{P}_{(:,1)} \cdot \tilde{P}_{(:,1)}^T}{|\tilde{P}_{(:,1)}|^2} + \frac{\tilde{P}_{(:,2)} \cdot \tilde{P}_{(:,2)}^T}{|\tilde{P}_{(:,2)}|^2} \right) \right) (1-\mu) + \mu E_n = S_1^{(2)} \end{aligned}$$

und folglich erfüllt $S_1^{(2)}$ alle Symmetrien der zugrundeliegenden Struktur. $\square$

Für $t = 3$ lässt sich über die Symmetrie der Variante 1 an dieser Stelle keine Aussage treffen. Es müsste bewiesen werden, dass $H\tilde{P} \cdot \tilde{P}^T H^T = \tilde{P} \cdot \tilde{P}^T$ gilt. Wir haben aber keinen direkten Zugriff auf die Werte von $\tilde{P}$, da diese als orthogonale Basis des durch P' aufgespannten Raums mithilfe des `orth` Befehls erzeugt wurden. Tests an einzelnen Beispielen legen allerdings nahe, dass die Symmetrie für die Variante 1 erfüllt ist. Einen Beweis dafür müssen wir an dieser Stelle aber schuldig bleiben.

Für Variante 2 erhalten wir hingegen das folgende Ergebnis:

Theorem 5.27. Die Subdivisionsmatrizen $S_2^{(t)}$ für $t \in \{2, 3\}$ erfüllen $HS_2^{(t)}H^{-1} = S_2^{(t)}$ für einen Automorphismus H des zugehörigen Graphen. Damit erfüllt $S_2^{(t)}$ Qualitätskriterium Q10.

Beweis. Zunächst erfüllt das konstruierte 2-Polytop als regelmäßiges n -Eck und das 3-Polytop mit Theorem 3.25 alle Symmetrien des zugrundeliegenden Graphen. Da die Einträge der Colin-de-Verdière-Matrizen aus den Theoremen 4.8 und 4.13 nur relative Informationen der Kontrollpunkte nutzen (Kreuzprodukte, Längen und Winkel), respektieren die Colin-de-Verdière-Matrizen ebenfalls alle Symmetrien, es gilt also

$$HCH^{-1} = C.$$

Dasselbe gilt entsprechend für die Summe der Zeilen von C und damit erhalten wir

$$HNH^{-1} = N.$$

Für den Gesamtausdruck erhalten wir damit und mit Satz B.53

$$\begin{aligned} HS_2H^{-1} &= H \exp_2(NC - E_n)H^{-1} \\ &= \exp_2(H(NC - E_n)H^{-1}) \\ &= \exp_2(HNCH^{-1} - HE_nH^{-1}) \\ &= \exp_2(HNH^{-1}HCH^{-1} - HE_nH^{-1}) \\ &= \exp_2(NC - E_n) \\ &= S_2 \end{aligned}$$

und folglich respektiert S_2 alle Symmetrien der zugrundeliegenden Struktur. $\square$

Die Symmetrie überträgt sich eins zu eins auf die Subdivisionsmatrizen der Ringe und Schalen, was wir im nächsten Theorem erläutern:

Theorem 5.28. Die Subdivisionsmatrizen $\bar{S}_2^{(t)}$ für $t \in \{2, 3\}$ und die Subdivisionsmatrix $\bar{S}_1^{(2)}$ erfüllen $H\bar{S}H^{-1} = \bar{S}$ für einen vom kombinatorischen Graphen des zentralen Initialelements induzierten Automorphismus H des zugehörigen Graphen. Für diese Subdivisionsmatrizen ist damit Qualitätskriterium Q10 erfüllt.

Beweisskizze. Die Subdivisionsmatrix des Ring- und Schalenfalls hängt durch die invariante Struktur und durch die Beschreibungen in Abschnitt 2.3 nur vom zentralen Initialelement ab. Jede Ecke des Polytops wird damit zu einer 3×3 beziehungsweise $3 \times 3 \times 3$ Struktur, deren Matrixeinträge sich für symmetrische Punkte gleich berechnen.

Mit „vom zentralen Initialelement induziert“ meinen wir hier, dass der Automorphismus diese Dreierblöcke aufeinander abbildet. Es ist an dieser Stelle nicht ausgeschlossen, dass es noch weitere Automorphismen des Graphen zum

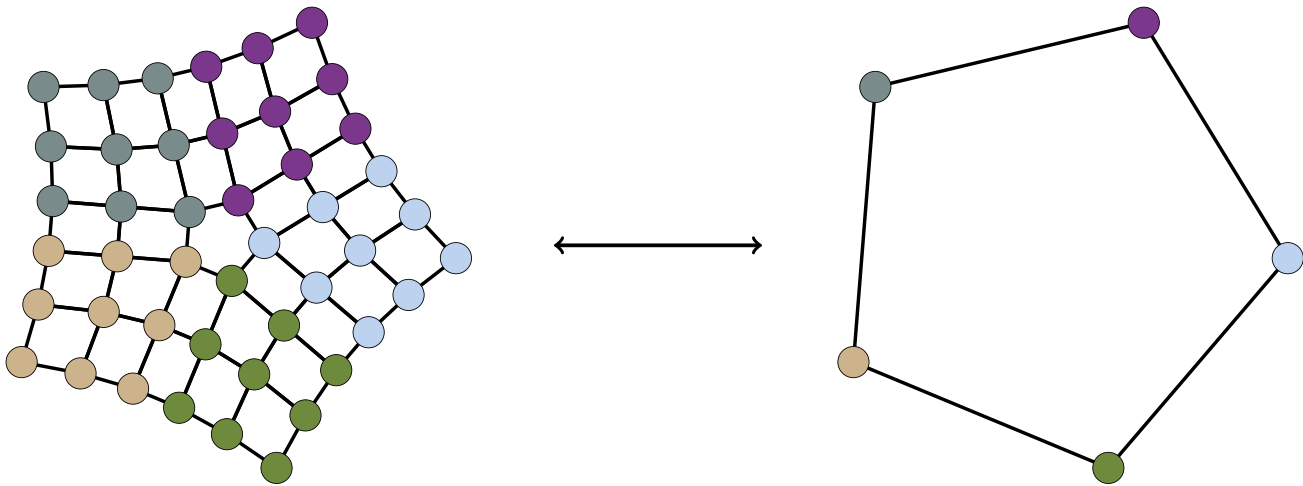


Abbildung 5.13: Zentrales Initialelement bestehend aus fünf Punkten (rechts) und Kontrollpunktstruktur der zugehörigen Ringmatrix (links). Für das Qualitätskriterium Q10 müssen für die von der rechten Struktur induzierten Automorphismen die Zeilen und Spalten von $\bar{S}^{(2)}$ der links eingefärbten 3×3 Blöcke aufeinander abgebildet werden.

Ring beziehungsweise zur Schale gibt. Relevant für das Kriterium der Symmetrie sind an dieser Stelle lediglich die so induzierten Automorphismen. Eine Illustration findet sich in Abbildung 5.13.

Da sich die Matrixeinträge der Dreierblöcke für symmetrische Punkte gleich berechnen, überträgt sich damit die Automorphismeigenschaft der Initialelemente auf die Ring- und Schalenmatrizen. $\square$

Die Symmetrieeigenschaft empirisch zu quantifizieren ist nur schwer möglich, denn das Problem, die Automorphismengruppe eines Graphen zu bestimmen, liegt in NP (vgl. [LS16, S. 13–15]) und dies für die Beispielsammlung des Falls $t = 3$ durchzurechnen, wäre zu aufwendig. Allerdings finden sich in der Beispielsammlung Adjazenzmatrizen, die isomorph zueinander sind. Diese Beispiele repräsentieren also dieselbe Struktur, die Nummerierung der Punkte ist jedoch unterschiedlich. Für diese können wir überprüfen, ob der Isomorphismus der Adjazenzmatrix einen Isomorphismus der Subdivisionsmatrix impliziert. Die maximalen Abweichungen in den zueinander gehörenden Einträgen über alle 36.336 isomorphen Beispiele finden sich in der folgenden Tabelle:

	$S_1^{(3)}$	$\bar{S}_1^{(3)}$	$S_2^{(3)}$	$\bar{S}_2^{(3)}$
$\max S - HSH^T $	3,0698e–14	3,0698e–14	1,3703e–13	1,3703e–13

Damit kann zumindest eine qualitative Aussage über die Symmetrie getroffen werden.

Q9, Q11 und Q13 Eingabe, Träger und Injektivität

Die ersten beiden Kriterien dieses Abschnitts lassen sich schnell beschreiben. Die Eingabe der Algorithmen 10 und 11 sind Graphen zu 2- und 3-Polytopen. Diese Eingabe stimmt mit Definition 2.51 überein und damit kann für jede valide Eingabe eine Subdivisionsmatrix für ein Initialelement erzeugt werden. Da die Ring- und Schalenmatrizen nur aus Initialelementen bestehen, kann für jede Konfiguration eine Subdivisionsmatrix erzeugt werden. Folglich ist Qualitätskriterium Q9 für alle in diesem Kapitel vorgestellten Subdivisionsmatrizen erfüllt.

Dasselbe gilt für die Träger der Verfeinerungsregeln. Jeder neue Kontrollpunkt in beiden Varianten ist nur von den Kontrollpunkten des zugehörigen Initialelements abhängig und damit ist Qualitätskriterium Q11 ebenfalls für alle Subdivisionsmatrizen dieses Kapitels erfüllt.

Die Injektivität ist hingegen, wie in Kapitel 2 bereits beschrieben, ein Langzeitziel. Für $\overline{S}_1^{(2)}$ können wir aber die folgende Aussage treffen:

Theorem 5.29. *Sei D ein Spline-Definitionsgebiet eines Rings, g das zugehörige System generierender Funktionen und $\overline{S}_1^{(2)}$ mit $\mu = 1/4$ die zugehörige Subdivisionsmatrix. Der Subdivisionsalgorithmus $(\overline{S}_1^{(2)}, g)$ hat eine injektive reguläre charakteristische Abbildung, für diesen ist also Qualitätskriterium Q13 erfüllt.*

Beweisskizze. Der Beweis basiert auf den Aussagen aus [PR08, Abschn. 6.2, S. 116–120] und bezieht sich auf die Theorie aus [PR08], die wir in dieser Arbeit nicht ausführen werden.

Allerdings betrachten Peters und Reif in [PR08] exakt die Subdivisionsmatrizen $\overline{S}_1^{(2)}$ mit $\mu = 1/4$, also die Verfeinerungsregeln des Doo-Sabin-Algorithmus für invariante Ringe. Damit ist deren charakteristische Abbildung nach [PR08, Thm. 6.2, S. 119] und mit [PR08, Thm. 5.8, S. 88] injektiv und regulär. $\square$

Das Qualitätskriterium Q13 könnte für die Variante $\overline{S}_2^{(2)}$ ebenfalls mit den Methoden aus [PR08] überprüft werden. Da wir in der vorliegenden Arbeit auf die dort beschriebene Theorie nicht eingegangen sind, führen wir diesen Gedanken nicht aus. Dieser kann aber ein Ansatz für weitere Forschung sein.

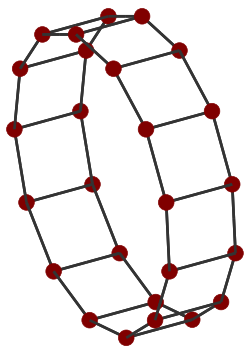
Über die Injektivität der Schalenmatrizen kann keine Aussage getroffen werden, da für deren Analyse jedwede Ansätze fehlen. Sie lässt sich auch empirisch nicht überprüfen, da für jedes Beispiel zumindest eine Sichtkontrolle notwendig wäre. Allerdings konnten wir für unsere Varianten auch keine Gegenbeispiele konstruieren. Die Gegenbeispiele, die wir in Abschnitt 2.5 für die Algorithmen [JM99] und [Baj+02] konstruiert haben, liefern für unsere Varianten injektive Eigenschalen, wie in Abbildung 5.14 zu sehen ist.

Betrachten wir nach dieser Analyse erneut Tabelle 5.1, so sehen wir, dass beide Algorithmen sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht geeignet sind. Der Vorteil von Variante 1 ist die exakte Bestimmung des subsubdominanten Eigenwerts zu Lasten der Nicht-Negativität der Einträge und der Beweisbarkeit der Symmetrien. Variante 2 ermöglicht die exakte Bestimmung des subsubdominanten Eigenwerts zwar nicht, die empirischen Resultate zeigen allerdings, dass der Abstand zum subdominanten Eigenwert genügend groß ist.

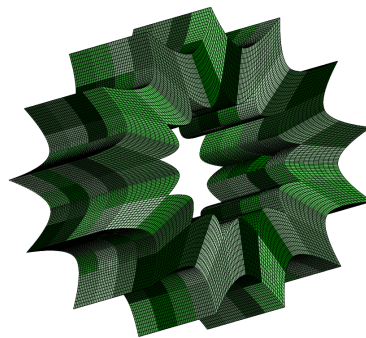
Ordnen wir die Analyse ein, so ist es erstmals gelungen eine dreidimensionale Variante für die verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision zu entwickeln. Zudem haben die beschriebenen Varianten der Initialelemente einen t -fachen subdominanten Eigenwert von $1/2$, was die bisher in der Literatur zu findenden Subdivisionsalgorithmen nicht aufweisen können. Außerdem liegt für diese Konstruktion noch kein Gegenbeispiel zur Injektivität vor, was sie ebenfalls von den bisherigen Subdivisionsalgorithmen unterscheidet. Insgesamt erreichen wir damit eine echte Verbesserung zu den bisher etablierten Subdivisionsalgorithmen.

Wir schließen diesen Abschnitt mit Abbildung 5.15, in der eine Galerie, bestehend aus Bildern der charakteristischen Abbildung verschiedener mit Variante 2 des Algorithmus 11 erzeugter Subdivisionsmatrizen, zu finden ist.

Polytopstruktur



Variante 1



Variante 2

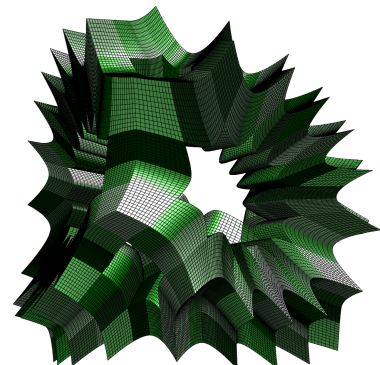
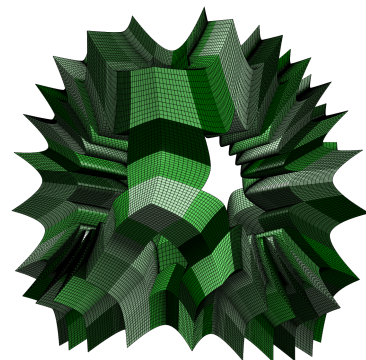
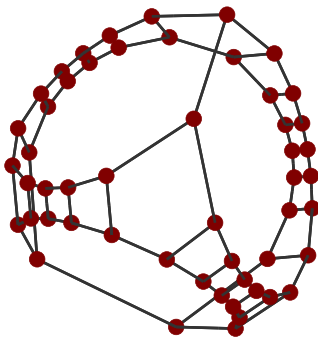
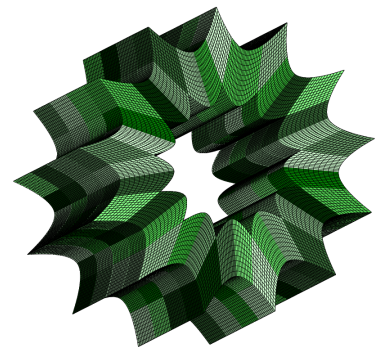


Abbildung 5.14: Die Beispiele aus Abbildung 2.36 (oben) und Abbildung 2.37 (unten). Links finden sich die Polygonstrukturen, in der Mitte die Eigenschalen der ersten Variante und rechts die der zweiten. Man erkennt, dass alle Schalen injektiv sind.

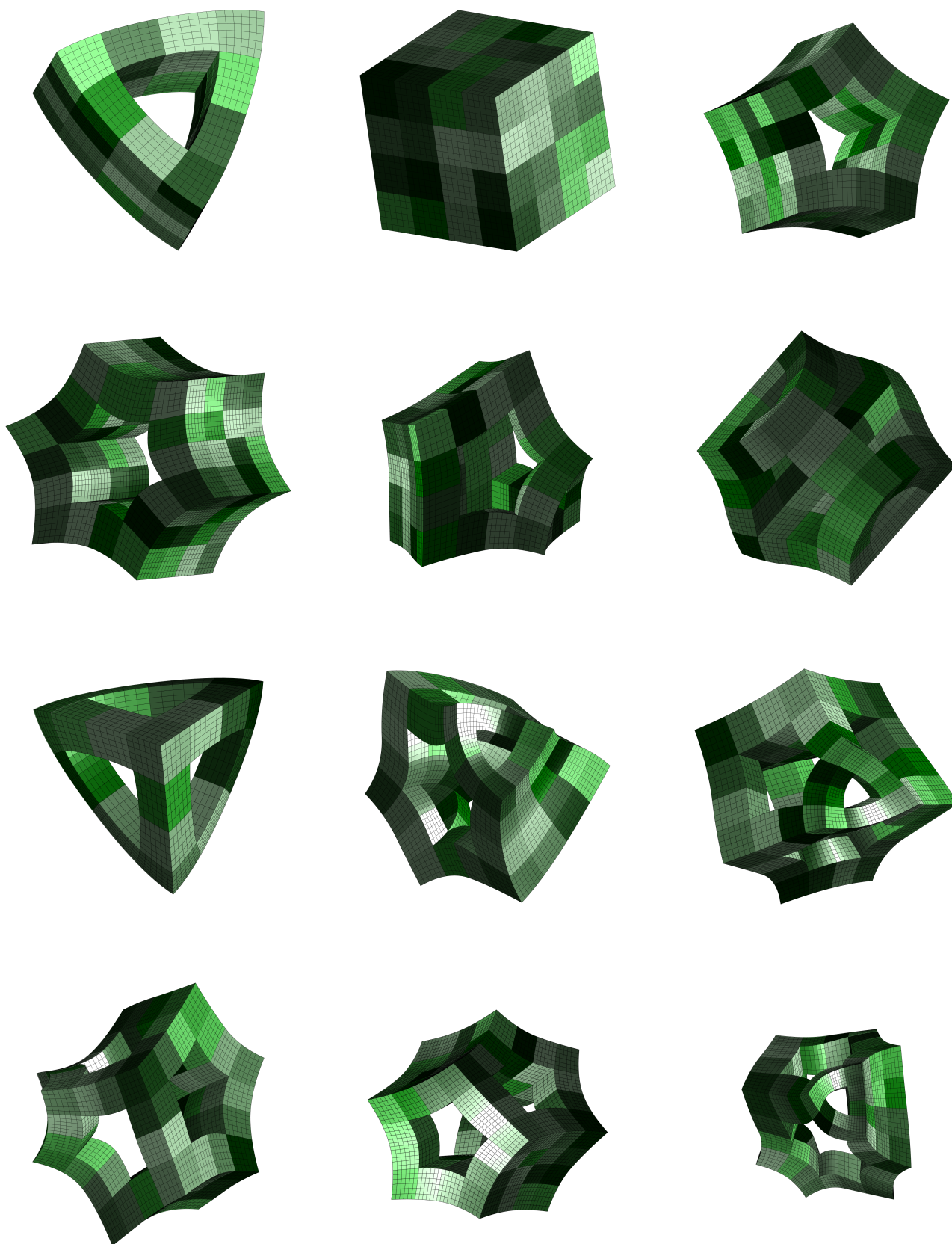


Abbildung 5.15: Galerie beispielhafter Bilder der charakteristischen Abbildung von Subdivisionsmatrizen zu den 3-Polytopen aus Abbildung 3.1, generiert mit Variante 2 des Algorithmus 11.

6 Verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision: Ein experimenteller Ansatz

Im Gegensatz zur verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision ist die Literatur der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivision vielfältiger. Dies könnte unter anderem daran liegen, dass der Catmull-Clark-Algorithmus [CC78] C_1^2 -Flächen generiert. Mit dieser Notation ist gemeint, dass die Flächen in den irregulären Punkten C^1 und überall sonst C^2 sind. Im Gegensatz dazu produziert der Doo-Sabin-Algorithmus für den Flächenfall „nur“ C_1^1 -Flächen, also Flächen, die überall, auch in den irregulären Punkten, C^1 sind. Die zugehörige Theorie der Subdivisionsflächen wird in [PR08] ausführlich behandelt. Die Theoreme der Glattheit der beiden Subdivisionsalgorithmen finden sich insbesondere in [PR08, Thm. 6.1, S. 114 f. und Thm. 6.2, S. 119].

Für den Flächenfall gibt es verschiedene Varianten oder Verbesserungen des Catmull-Clark-Algorithmus. Dieser Bereich ist in der Literatur als „tuning“ bekannt. Dies suggeriert für den Flächenfall, dass der Standard-Catmull-Clark-Algorithmus verbessert werden sollte. Der Hintergrund des Tunings ist zumeist die Krümmung der Subdivisionsflächen. Da diese Flächen für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision fast überall C^2 sind, lässt sich entsprechend auch fast überall die Krümmung der Fläche, die für diese Anwendungen typischerweise in $\mathbb{R}^3$ liegt, definieren. Das Verhalten der Krümmung in den irregulären Punkten hängt vom Verhältnis λ^2/μ ab. Ist dieses Verhältnis kleiner als 1, so konvergieren die beiden Hauptkrümmungen in den irregulären Punkten zu 0, was zu *flachen Punkten* führt. Ist dieses Verhältnis 1, so sind beide Hauptkrümmungen beschränkt und typischerweise ist eine von beiden ungleich 0. Ist das Verhältnis hingegen größer als 1, so divergiert mindestens eine der beiden Hauptkrümmungen. Einen Überblick über die Charakterisierung der Formen von Subdivisionsflächen inklusive der Aussagen über das Krümmungsverhalten findet sich in [PR04], [KPR04] und [PR08, Kap. 7].

Im Bezug auf das Tuning der Subdivisionsmatrizen hinsichtlich des Verhältnisses λ^2/μ sind die Arbeiten [ADS06] und [MM18] zu nennen. Beide verwenden alternative Regeln für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision, auf deren Träger wir später noch eingehen.

Zudem gibt es im Rahmen der guided Subdivision etliche Ansätze zur Verbesserung der Flächen, vor allem zur Verbesserung der Reflexionslinien in irregulären Bereichen. Hier sind zunächst die Varianten [KP18] und [KP19] zu nennen. Die Varianten [KP17] und [KP24] erzielen zudem ein Skalierungsverhalten von $1/2$ in irregulären Bereichen.

Für den volumetrischen Fall finden sich, im Vergleich zur verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision aus dem vorherigen Kapitel, Verfeinerungsregeln. Wie bereits erwähnt und in Abschnitt 2.5 diskutiert, sind hier die Veröffentlichungen von [JM99] und [Baj+02] zu nennen. Es ist also durchaus überraschend, dass es für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision Vorschläge für die Verfeinerungsregeln gibt, für die verallgemeinerte quadratische B-Spline-Subdivision hingegen nicht. Dies könnte daran liegen, dass sich erste Varianten der Verfeinerungsregeln als Tensorprodukte der zweidimensionalen Regeln herleiten lassen. Im Grunde muss für einen ersten Vorschlag lediglich eine Verfeinerungsregel für irreguläre Punkte konstruiert werden.

In diesem Kapitel stellen wir eine Konstruktion der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivision vor und orientieren uns dabei an der Variante 2 aus Kapitel 5. Diese bezieht sich, im Gegensatz zu dem in Kapitel 5 vorgestellten Ansatz, explizit auf eine Struktur aus Vierecken und Hexaedern. Die hier vorgestellte Konstruktion lässt sich also insbesondere nicht auf die in Kapitel 7 diskutierten Ansätze verallgemeinern.

Außerdem ist das Qualitätskriterium Q11 für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision eine echte Herausforderung. Daher ist es das Ziel dieses Kapitels eine Konstruktion vorzustellen, die sowohl das Qualitätskriterium Q5 als auch das Qualitätskriterium Q11 erfüllt.

Der hier vorgestellte Ansatz ist, wie der Titel bereits erahnen lässt, experimenteller Natur. Dies liegt daran, dass der t -fache subdominante Eigenwert $1/2$ nur empirisch überprüft und nicht bewiesen werden konnte. Zudem sind zwei der Beweise in Abschnitt 6.3 nur skizzenhaft beschrieben.

$$\frac{1}{2} \text{ — } \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{8} \text{ — } \frac{6}{8} \text{ — } \frac{1}{8}$$

Abbildung 6.1: Die Verfeinerungsregeln für $t = 1$ und $g = 3$. Die linke Verfeinerungsregel erstellt einen Kontrollpunkt in der Mitte von zwei Punkten und generiert damit einen Kontrollpunkt aus einer Kante, wohingegen die rechte Verfeinerungsregel einen Kontrollpunkt aus einem Kontrollpunkt generiert.

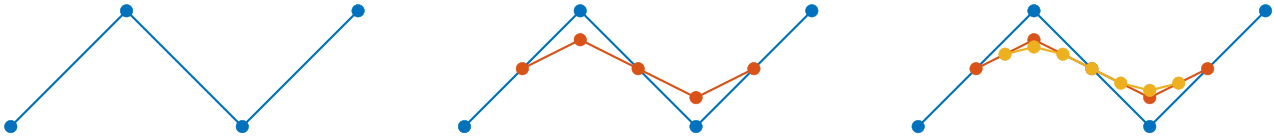


Abbildung 6.2: Eine Beispielkonfiguration mit zwei Initialelementen (links). Verfeinert man beide Initialelemente, so entstehen fünf Kontrollpunkte und drei Initialelemente (Mitte). Verfeinert man ein weiteres Mal, so entstehen sieben Kontrollpunkte und fünf Initialelemente (rechts). Man erkennt zudem, dass in jedem Kantenmittelpunkt ein neuer Kontrollpunkt eingefügt wird. Dieser entsteht durch die $[1/2, 1/2]$ -Regel. Die anderen Kontrollpunkte entstehen aus bereits vorhandenen Kontrollpunkten durch die $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regel.

Für die Ausarbeitung des Ansatzes beschreiben wir zunächst in Abschnitt 6.1 den regulären Fall, den auswertbaren Bereich sowie die Herausforderungen der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivision. Anschließend konstruieren wir in Abschnitt 6.2 die Subdivisionsmatrizen. Die Konstruktion teilt sich dabei in drei Abschnitte. Im ersten Abschnitt 6.2.1 erstellen wir die Eigenstruktur der subdominanten Eigenwerte, welche sich aus der Verfeinerung der Eigenstruktur aus Kapitel 5 ergibt. Anschließend generieren wir aus dieser Eigenstruktur eine Colin-de-Verdière-artige Matrix in Abschnitt 6.2.2. Diese wird sich aus dem Produkt zweier Matrizen zusammensetzen, die jeweils beide aus der Zusammensetzung verschiedener Colin-de-Verdière-Matrizen bestehen. Abschließend nutzen wir das Matrixexponential in Abschnitt 6.2.3, um die Subdivisionsmatrix zu erzeugen. Dafür müssen wir die Colin-de-Verdière-artige Matrix zunächst in die Summe zweier Matrizen aufteilen und anschließend deren Matrixexponentiale miteinander multiplizieren. Das Verfahren lässt sich dabei sowohl für den Flächenfall als auch für den Volumenfall in gleicher Art und Weise anwenden. In Abschnitt 6.3 geben wir abschließend einen Überblick darüber, welche Qualitätskriterien für die so konstruierten Subdivisionsmatrizen (nicht) erfüllt sind. Um die Aussagen zu stützen, betrachten wir ergänzend die empirischen Resultate der in Abschnitt 3.1.1 generierten Beispielsammlung.

6.1 Verfeinerungsregeln für reguläre Initialelemente, auswertbarer Bereich und Herausforderungen

Die regulären Verfeinerungsregeln für den ein- und zweidimensionalen Fall sind in [CC78] beschrieben. Analog zu Definition 2.15 und [CC78, S. 351] ist die eindimensionale Subdivisionsmatrix für ein Initialelement

$$S^{(1)} := \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Eine Illustration der Verfeinerungsregeln findet sich in Abbildung 6.1. Hier fällt die erste Besonderheit auf: Der Träger der Verfeinerungsregeln unterscheidet sich je nach Typ der Kontrollpunkte. So gibt es neue Punkte, die auf Linien des zugehörigen Gitters eingefügt werden. Diese sind nur von den beiden Endpunkten der Linien und daher nur von zwei Kontrollpunkten abhängig. Neue Kontrollpunkte, die aus alten Kontrollpunkten hervorgehen, sind hingegen von drei Kontrollpunkten abhängig: dem Vorgängerkontrollpunkt und dessen Nachbarn. Eine Illustration findet sich in Abbildung 6.2.

Dieser Unterschied zur verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision lässt sich durch die erhöhte Glattheit begründen. Da die Auswertung stückweise polynomiell ist, werden für die Auswertung der Zellen mehr generierenden

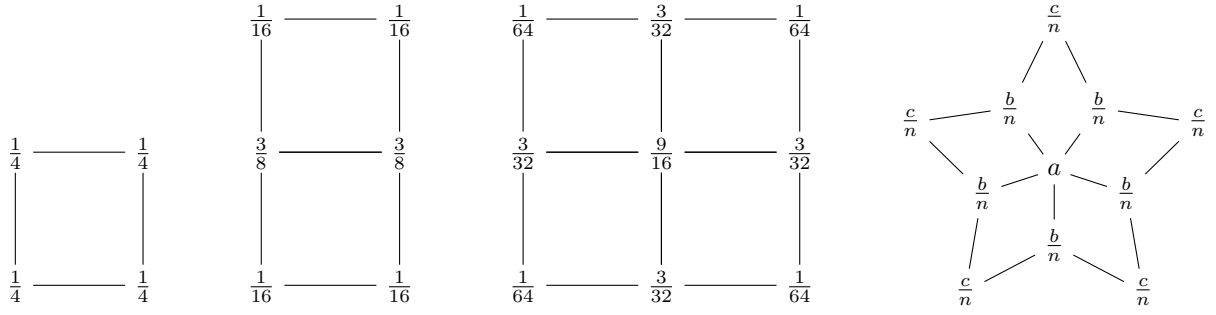


Abbildung 6.3: Die Verfeinerungsregeln für $t = 2$ und $g = 3$ des *Catmull-Clark-Algorithmus*. Die Verfeinerungsregel für einen Facettenpunkt (links), für einen Kantenpunkt (zweites von links), für einen regulären Knotenpunkt (zweites von rechts) und für einen irregulären Knotenpunkt (rechts).

Funktionen pro Element benötigt, was im Vergleich zur verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision zu größeren Initialelementen führt. Zudem haben die generierenden Funktionen einen größeren Träger, weshalb es notwendig ist, dass die Verfeinerungsregeln mehr Punkte umfassen.

Wir erhalten damit schon im Eindimensionalen verschiedene Typen von verfeinerten Kontrollpunkten, nämlich Kontrollpunkte, die aus Knoten beziehungsweise Kontrollpunkten durch die $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regel hervorgegangen sind, und Punkte, die aus Kanten mit der $[1/2, 1/2]$ -Regel hervorgegangen sind. Beide Typen haben einen unterschiedlichen Träger im Hinblick auf die Kontrollpunkte, die Einfluss auf die Verfeinerung haben.

Dieses Verhalten setzt sich für den zweidimensionalen Fall fort. Hier erhalten wir für den regulären Fall nach [CC78] in einer anderen Notation die Verfeinerungsmatrix

$$S^{(2)} := \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 16 & 16 & & & & & & & \\ & 4 & 24 & 4 & & & & & \\ & & 16 & 16 & & & & & \\ 4 & 4 & & & 24 & 24 & & & \\ 1 & 6 & 1 & & 6 & 36 & 6 & & \\ & & 4 & 4 & & 24 & 24 & & \\ & & & & 16 & 16 & & & \\ & & & & 4 & 24 & 4 & & \\ & & & & & 16 & 16 & & \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4S^{(1)} & 4S^{(1)} & 0S^{(1)} \\ 1S^{(1)} & 6S^{(1)} & 1S^{(1)} \\ 0S^{(1)} & 4S^{(1)} & 4S^{(1)} \end{bmatrix}$$

eines Initialelements als Kroneckerprodukt von $S^{(1)}$ mit sich selbst. Eine Illustration der Verfeinerungsregeln findet sich nach [PR08, Abb. 6.2, S. 110] in Abbildung 6.3. Hier sehen wir sogar drei verschiedene Verfeinerungsregeln. Die erste ist die Kombination aus zwei $[1/2, 1/2]$ -Regeln und erzeugt einen neuen Kontrollpunkt inmitten einer Facette. Diese Facettenpunkte entstehen also aus Facetten. Die Kombination aus einer $[1/2, 1/2]$ - und einer $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regel erzeugt einen neuen Kantenpunkt und die Kombination aus zwei $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regeln erzeugt einen neuen Knotenpunkt.

Da im Flächenfall in einer Ecke auch mehr oder weniger als vier Zellen zusammenkommen können, entstehen auch Initialelemente mit anderen kombinatorischen Anordnungen. Catmull und Clark verwenden für Facetten- und Eckpunkte die Verfeinerungsregeln des regulären Falls und für die Verfeinerung des Knotenpunkts nutzen sie die Gewichte [CC78] zitiert nach [PR08, Gl. 6.2 und Abb. 6.2, S. 110]

$$a = 1 - \frac{7}{4n}, \quad b = \frac{3}{2n} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{4n},$$

wobei n die Anzahl der Vierecke am zentralen Punkt ist. Das Gewicht a wird für den Knotenpunkt verwendet, das Gewicht b/n für Kontrollpunkte, die mit dem Knotenpunkt verbunden sind, und das Gewicht c/n für die übrigen Kontrollpunkte des Initialelements. Eine Illustration findet sich ebenfalls in Abbildung 6.3. Insgesamt erhalten wir so die Regeln für jedes Initialelement. Eine Beispielverfeinerung findet sich in Abbildung 6.4.

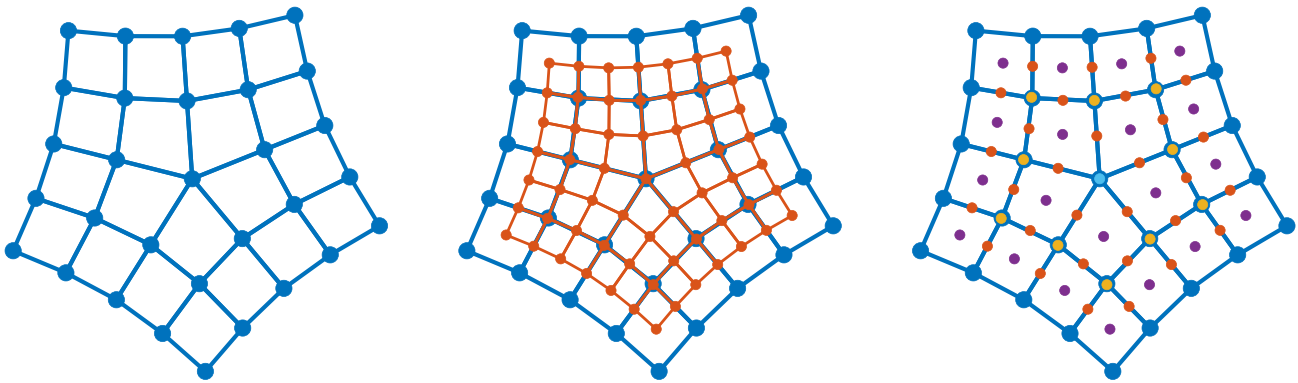


Abbildung 6.4: Eine Beispielkonfiguration mit elf Initialelementen und 31 Kontrollpunkten (links). Verfeinert man alle Initialelemente, so entstehen 61 Kontrollpunkte und 31 Initialelemente (Mitte). Im rechten Bild sind die neuen Kontrollpunkte eingefärbt nach den jeweiligen Regeln, aus denen sie entstanden sind. Die Farben korrespondieren mit den in Abbildung 6.3 gezeigten Regeln von links nach rechts durch lila, rot, gelb und hellblau.

Kombinieren wir die drei regulären Regeln des Zweidimensionalen mit den beiden eindimensionalen Regeln, so entstehen vier Kombinationen für den dreidimensionalen Fall. Die Kombination aus drei $[1/2, 1/2]$ -Regeln konstruiert dabei einen Kontrollpunkt aus einem Volumen, die Kombination aus zwei $[1/2, 1/2]$ -Regeln und einer $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regel einen Kontrollpunkt aus einer Facette, die Kombination aus einer $[1/2, 1/2]$ -Regel und zwei $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regeln einen Kontrollpunkt aus einer Kante und die Kombination aus drei $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regeln einen Kontrollpunkt aus einem Knoten beziehungsweise einem Kontrollpunkt. Eine Illustration der Regeln findet sich in Abbildung 6.6.

Für ein reguläres Initialelement erhalten wir damit 27 Kontrollpunkte, die durch die obigen Regeln auf 27 Kontrollpunkte abgebildet werden. Dies wird mit der Matrix

$$S^{(3)} := \frac{1}{512} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 64 & 64 & & 64 & 64 & & & & & & \\ 16 & 96 & 16 & 16 & 96 & 16 & & & & & \\ & 64 & 64 & & 64 & 64 & & & & & \\ \hline 16 & 16 & & 96 & 96 & & 16 & 16 & & & \\ 4 & 24 & 4 & 24 & 144 & 24 & 4 & 24 & 4 & & \\ & 16 & 16 & & 96 & 96 & & 16 & 16 & & \\ \hline & & & 64 & 64 & & 64 & 64 & & & \\ & & & 16 & 96 & 16 & 16 & 96 & 16 & & \\ & & & & 64 & 64 & & 64 & 64 & & \\ \hline 16 & 16 & & 16 & 16 & & 96 & 96 & & 96 & 96 \\ 4 & 24 & 4 & 4 & 24 & 4 & 24 & 144 & 24 & & 4 & 24 & 4 \\ & 16 & 16 & & 16 & 16 & & 96 & 96 & & 16 & 16 \\ \hline 4 & 4 & & 24 & 24 & & 4 & 4 & & 24 & 24 & & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 36 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 36 & 6 & 1 & 6 & 1 \\ & 4 & 4 & & 24 & 24 & & 4 & 4 & & 24 & 24 & & 4 & 4 \\ \hline & & & 16 & 16 & & 16 & 16 & & 96 & 96 & & 96 & 96 \\ & & & 4 & 24 & 4 & 4 & 24 & 4 & 24 & 144 & 24 & 24 & 144 & 24 \\ & & & 16 & 16 & & 16 & 16 & & 96 & 96 & & 96 & 96 \\ \hline & & & & & & 64 & 64 & & 64 & 64 & & 64 & 64 \\ & & & & & & 16 & 96 & 16 & 16 & 96 & 16 & & 16 & 96 & 16 \\ & & & & & & 64 & 64 & & 64 & 64 & & 64 & 64 \\ \hline & & & & & & 16 & 16 & & 16 & 16 & & 16 & 16 \\ & & & & & & 4 & 24 & 4 & 24 & 144 & 24 & 4 & 24 & 4 \\ & & & & & & 16 & 16 & & 16 & 16 & & 16 & 16 \\ \hline & & & & & & & 64 & 64 & & 64 & 64 & & 64 & 64 \\ & & & & & & & 16 & 96 & 16 & 16 & 96 & 16 & & 16 & 96 & 16 \\ & & & & & & & 64 & 64 & & 64 & 64 & & 64 & 64 \end{array} \right] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4S^{(2)} & 4S^{(2)} & 0S^{(2)} \\ 1S^{(2)} & 6S^{(2)} & 1S^{(2)} \\ 0S^{(2)} & 4S^{(2)} & 4S^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

realisiert. Eine beispielhafte Verfeinerung findet sich in Abbildung 6.5. Mit diesen drei regulären Verfeinerungsmatrizen $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ haben wir die Verfeinerung des regulären Falls, also die konkreten Matrizen für Definition 2.15 erklärt.

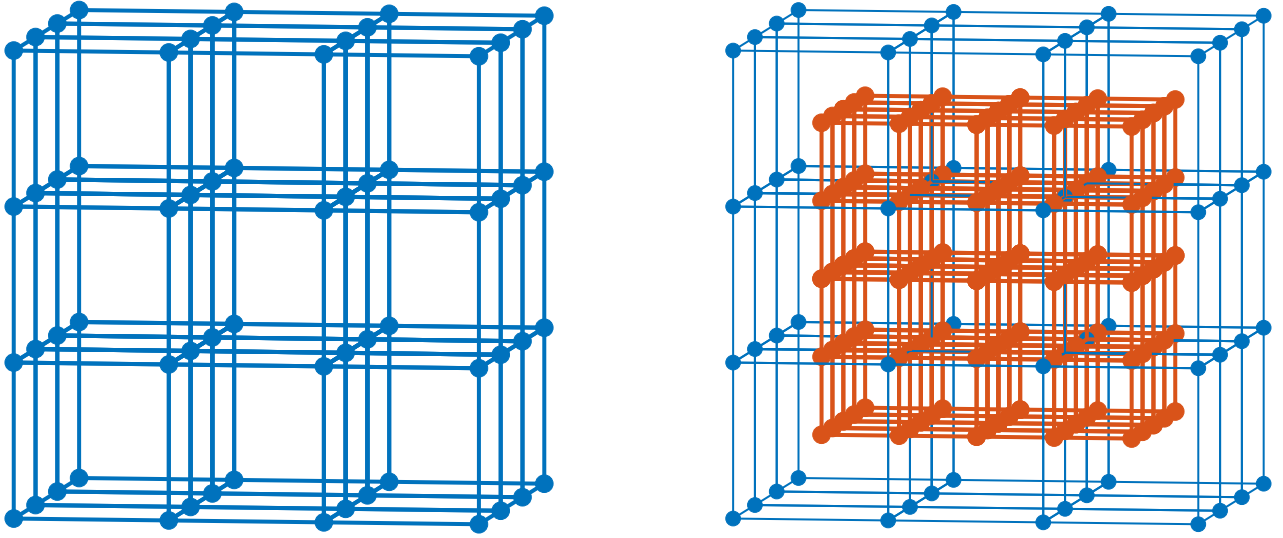


Abbildung 6.5: Eine Beispielkonfiguration mit acht Initialelementen und 64 Kontrollpunkten (links). Verfeinert man alle Initialelemente, so entstehen 125 Kontrollpunkte und 27 Initialelemente (rechts). Dabei wurden die Initialelemente mit der Subdivisionsmatrix aus Gleichung (6.1) verfeinert, deren Verfeinerungsregeln in Abbildung 6.6 illustriert sind.

An dieser Stelle könnten wir noch über die semi-irregulären und irregulären Konstellationen des dreidimensionalen Falls sprechen. Für den semi-irregulären Fall könnte man beispielsweise die zweidimensionalen Catmull-Clark-Regeln mit der $[1/2, 1/2]$ -Regel und der $[1/8, 6/8, 1/8]$ -Regel kombinieren und für den irregulären Fall könnte man die Subdivisionsmatrizen von [Baj+02] und [JM99] besprechen. Da diese allerdings, wie in Abschnitt 2.5 erläutert, kein geeignetes Spektrum anbieten, verzichten wir an dieser Stelle darauf und diskutieren die Voraussetzungen für unsere Varianten. Dabei betrachten wir verschiedene von dieser Arbeit abweichende Szenarien, um aufzuzeigen, was an ihnen nicht funktioniert.

Der erste zentrale Aspekt, der zur Diskussion steht, ist der auswertbare Bereich und damit die Definition, welches kombinatorische Initialelement ein reguläres Initialelement ist. Wir betrachten für diese Diskussion in einem ersten Szenario zunächst die Definition von [CC78], [Baj+02] und [JM99], die von der Definition in dieser Arbeit abweicht.

Betrachten wir beispielhaft ein Spline-Definitionsgebiet für $t = 2$ und $g = 3$ mit einer irregulären Ecke, illustriert in Abbildung 6.7. Für dieses Spline-Definitionsgebiet sind die Initialelemente nach Definition 2.12 mit den Ecken der Zellen assoziiert. Wir erhalten mit einer entsprechenden Einbettung eine Struktur an Kontrollpunkten, wie in Abbildung 6.7 dargestellt. Mit den Regeln von Catmull und Clark sind alle Initialelemente, die aus einer 3×3 Struktur bestehen, die also an vier Zellen liegen, nach Definition 2.15 regulär, denn sie haben $S^{(2)}$ als Subdivisionsmatrix, obwohl sie nach Definition 2.17 nicht zwingend regulär sein müssten. Dies sind im Beispiel von Abbildung 6.7 dementsprechend alle Initialelemente bis auf das Initialelement im zentralen Punkt. Die dieser Idee entsprechenden regulären und irregulären Initialelemente sind in Abbildung 6.8 zu sehen. Catmull und Clark haben also eine schärfere Definition davon, welche Initialelemente zwingend regulär sein müssen. Konkret wären nach deren Verständnis in Definition 2.17 alle Initialelemente, die eine reguläre Struktur haben, auch zwingend reguläre Initialelemente.

Führen wir diesen Gedanken weiter, so sind nach Definition 2.20 alle Zellen, deren Ecken mit regulären Initialelementen assoziiert sind, also alle Zellen, deren Ecken an genau vier Zellen angrenzen, auswertbar. Dies sind alle Zellen, die keine irreguläre Ecke besitzen. Eine Illustration der nach diesem Gedanken auswertbaren Zellen und deren Auswertung findet sich ebenfalls in Abbildung 6.8.

Die Verfeinerungsregeln von Catmull und Clark sind so gewählt, dass der auswertbare Bereich möglichst groß ist und die Wahl ist als Tensorprodukterweiterung des eindimensionalen Falls durchaus konsequent. Der Preis für den (im Vergleich zur Definition dieser Arbeit) größeren auswertbaren Bereich ist allerdings, dass die subdominanten Eigenwerte der Subdivisionsmatrizen nicht frei gewählt werden können. Die Argumentation dafür ist in [PR08, Abschn. 6.1, S. 109–120] zu finden. Wählt man die Verfeinerungsregeln für irreguläre Initialelemente so wie in [CC78],

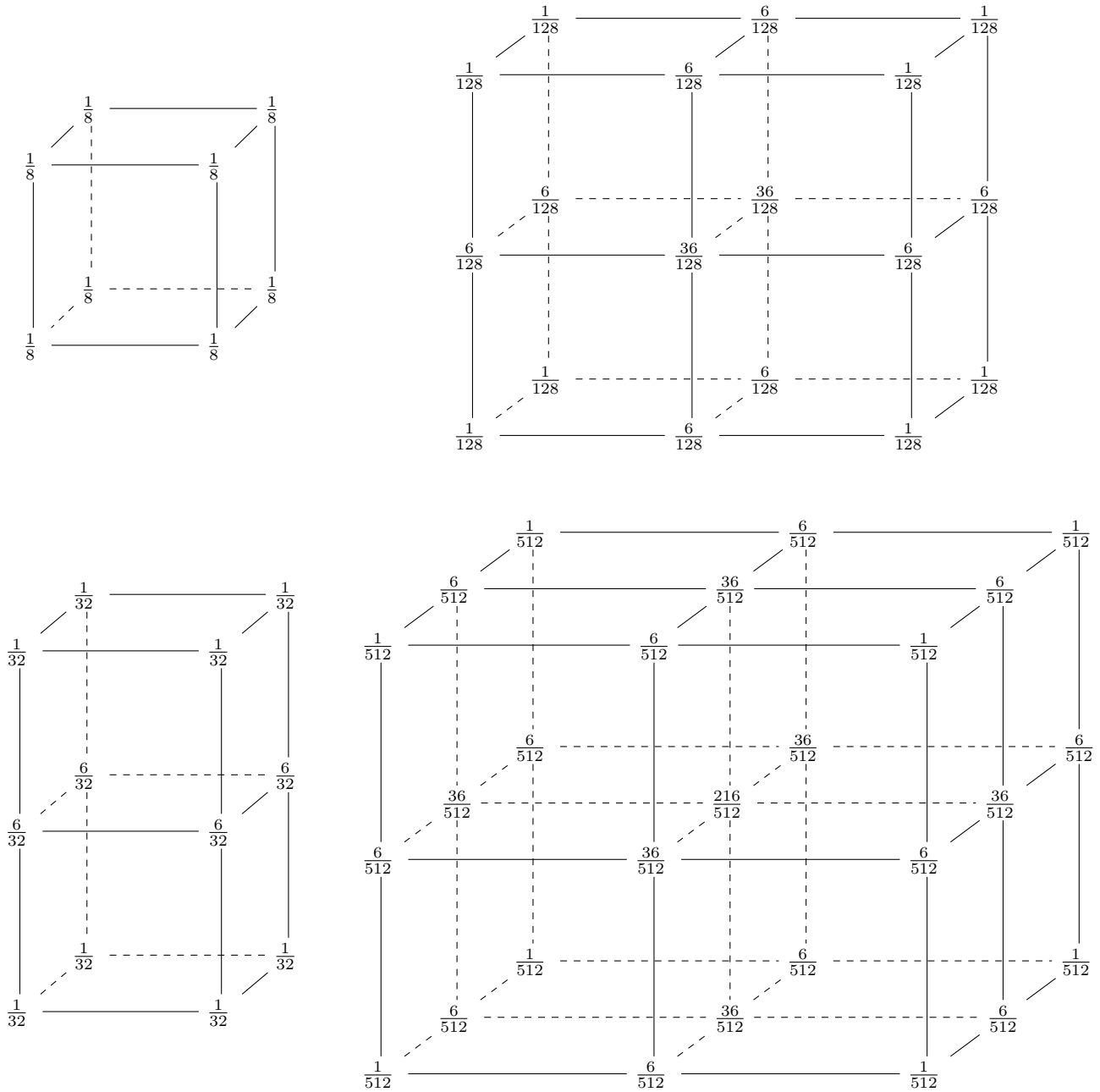


Abbildung 6.6: Die Verfeinerungsregeln für $t = 3$ und $g = 3$ des regulären Falls. Die Masken produzieren neue Kontrollpunkte aus Volumen (links oben), Flächen (links unten), Kanten (rechts oben) und Knoten beziehungsweise Kontrollpunkten (rechts unten).

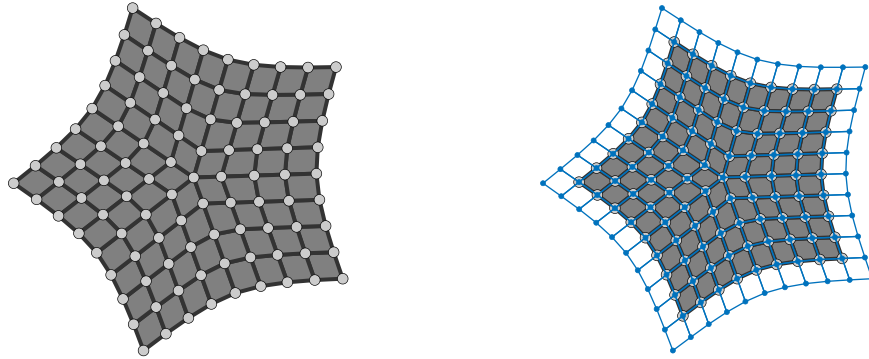


Abbildung 6.7: Eine beispielhafte Darstellung der kombinatorischen Anordnung eines Spline-Definitionsgebiets für $t = 2$ und $g = 3$ mit einer irregulären Ecke, an der fünf Zellen liegen (links). Bettet man die Struktur entsprechend ein, so entsteht eine Struktur von Kontrollpunkten (blau), die im rechten Bild zu sehen ist.

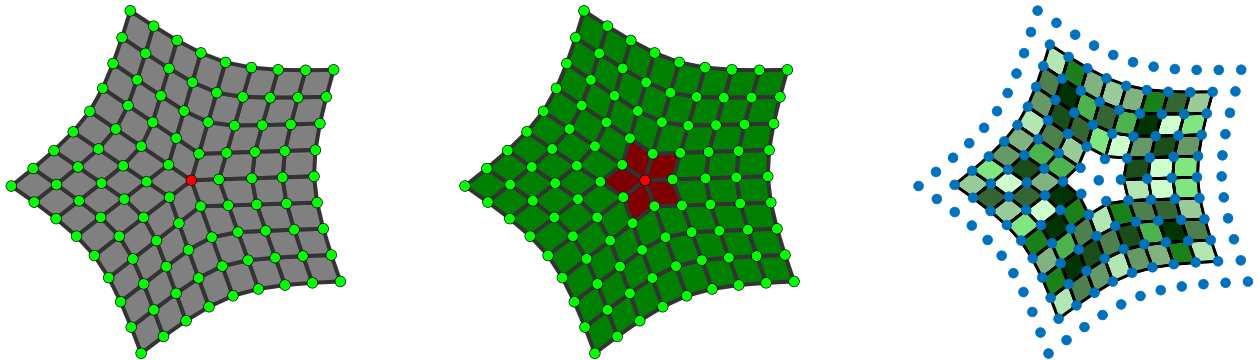


Abbildung 6.8: Das Spline-Definitionsgebiet aus Abbildung 6.7. Die Initialelemente sind mit den Subdivisionsmatrizen von [CC78] versehen. Die daraus resultierenden regulären Initialelemente sind grün eingefärbt, wohingegen die irregulären rot eingefärbt sind (links). Im mittleren Bild sieht man die auswertbaren Zellen in grün und die nicht auswertbaren in rot, was zu der Auswertung im rechten Bild führt. Hier ist wichtig zu bemerken, dass sich die regulären Initialelemente und die auswertbaren Bereiche durch die Regeln des Catmull-Clark-Algorithmus ergeben und von den Bereichen der in dieser Arbeit konstruierten Subdivisionsalgorithmen abweichen.

so definieren die Regeln, die nicht zum zentralen Punkt gehören, einen Großteil des Spektrums. Insbesondere die subdominanten Eigenwerte zu den gewünschten Eigenvektoren werden durch diese Fortsetzung der regulären Regeln bestimmt. Der Teil des Spektrums, der durch die Regel des zentralen Punktes, also durch die Wahl von a , b und c beeinflusst wird, darf explizit nicht den subdominanten Eigenwert bestimmen, da sich sonst das lokale asymptotische Verhalten nicht mehr an den gewünschten Eigenvektoren orientiert. Eine Grafik der Eigenwerte für den Catmull-Clark-Algorithmus findet sich in [PR08, Abb. 6.5, S. 115], ebenso wie eine ausführliche Erklärung und Analyse dieses Sachverhalts.

Für den dreidimensionalen Fall erhalten wir analoge Resultate. Die beiden Algorithmen [JM99] und [Baj+02] verwenden für die Verfeinerungsregeln der Volumen und Facetten die Tensorprodukte des ein- und zweidimensionalen Falls, also die Regeln aus Abbildung 6.6. Für reguläre Kanten und reguläre Punkte ergeben sich in beiden Fällen ebenfalls die Verfeinerungsregeln aus Abbildung 6.6, lediglich für irreguläre Kanten und Punkte wurden eigene Regeln konstruiert. Dies führt, wie in Abschnitt 2.5 beschrieben, zu einem ungeeigneten Spektrum, sowohl im Bezug auf die Eigenwerte als auch im Bezug auf die Eigenvektoren. Zwar ist die Theorie des dreidimensionalen Falls noch nicht ausgereift, wir haben aber bereits in Abschnitt 2.5 erklärt, dass sich dieses Verhalten durch das Anpassen der Verfeinerungsregel für irreguläre Kanten und Punkte nicht retten lässt, denn schon der semi-irreguläre Fall als Tensorprodukt des irregulären zweidimensionalen und des eindimensionalen Falls produziert keine drei gleichen subdominanten Eigenwerte. Daher müssen auch hier die regulären Verfeinerungsregeln für irreguläre Initialelemente aufgegeben werden.

Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass wir für die nach dieser Arbeit irregulären Initialelemente die Verfeinerungsregeln der Volumen, Facetten und Kanten anpassen müssen, um die Eigenwerte entsprechend beeinflussen zu können. Dies führt zu einer Reihe von Veränderungen und Herausforderungen, die wir im Einzelnen diskutieren müssen.

Wenn wir die regulären Regeln für irreguläre Initialelemente aufgeben, erlangen wir eine große Wahlfreiheit, die wiederum mit Konsequenzen für das Verhalten der Verfeinerung einhergeht.

Betrachten wir zunächst ein Szenario, in dem wir keine Einschränkungen an die Einträge der Subdivisionsmatrix eines irregulären Initialelements stellen. In diesem Szenario können wir zwar sehr flexibel Subdivisionsmatrizen erzeugen und insbesondere das Spektrum sehr gut kontrollieren. Entsteht aber eine vollbesetzte Matrix, sind also die Matrixeinträge, die im Fall von [CC78], [JM99] und [Baj+02] gleich 0 sind, explizit ungleich 0, so verletzen wir das Qualitätskriterium Q11. Die Auswirkungen haben wir bereits in Abschnitt 2.4 beschrieben. Es wird dadurch zum einen die in dieser Arbeit definierte Struktur von Initialelement und Einflussbereich aufgelöst und zum anderen werden die Träger der generierenden Funktionen größer und bekommen einspringende Ecken. Inwieweit diese Konsequenzen in Kauf genommen werden können kann Gegenstand weiterer Forschung sein. Für diese Arbeit wollen wir Subdivisionsalgorithmen konstruieren, die das Qualitätskriterium Q11 erfüllen. Wir setzen also die in Abschnitt 2.4 beschriebene sparse Struktur als Einschränkung für die Wahl der Subdivisionsmatrix fest.

Mit dieser Einschränkung erhalten wir für einen neuen Volumen- und Facettenpunkt denselben Träger der Verfeinerungsregel wie in Abbildung 6.3 und in Abbildung 6.6. Für Kanten- und Knotenpunkte erhalten wir im Zweidimensionalen ebenfalls den Träger aus Abbildung 6.3. Für den dreidimensionalen Fall erhalten wir als Träger der Kanten- und Knotenpunkte alle Kontrollpunkte aller Hexaeder, die an der jeweiligen Kante und an dem jeweiligen Punkt liegen. Die Nulleinträge stimmen damit mit denen von [CC78], [JM99] und [Baj+02] überein. Die Gewichte der jeweiligen Punkte, also die nicht-Nulleinträge, dürfen hingegen frei gewählt werden. Diese Einschränkung (nicht aber die Verfeinerungsregeln) stimmt für den zweidimensionalen Fall auch mit der Arbeit [MM18] überein. Dort findet sich auch die Doppelringstruktur, die wir im Folgenden motivieren. Vorher ist noch anzumerken, dass Mehringstrukturen bereits in der Literatur betrachtet wurden. Man findet diese neben der Arbeit von [MM18] beispielsweise auch in [KP17], [KP18] und [KP19].

Wie bereits in Definition 2.20 beschrieben, sind reguläre Zellen solche, deren Ecken ausschließlich mit regulären Initialelementen assoziiert sind. Diese werden dann zu Tensorprodukt-B-Spline-Elementen ausgewertet. Die Verfeinerungsmatrizen der regulären Initialelemente sind gerade so gewählt, dass die Auswertung nach der Verfeinerung reproduziert wird. Es verändert sich durch die Subdivision also die Parametrisierung der Fläche oder des Volumens, nicht aber deren Bild.

Verfeinern wir die Struktur aus Abbildung 6.8 mit den Regeln des Catmull-Clark-Algorithmus, so wird die Auswertung des bereits ausgewerteten Bereichs reproduziert. Außerdem erhöht sich der auswertbare Bereich um einen Ring, wie in Abbildung 6.9 zu sehen ist.

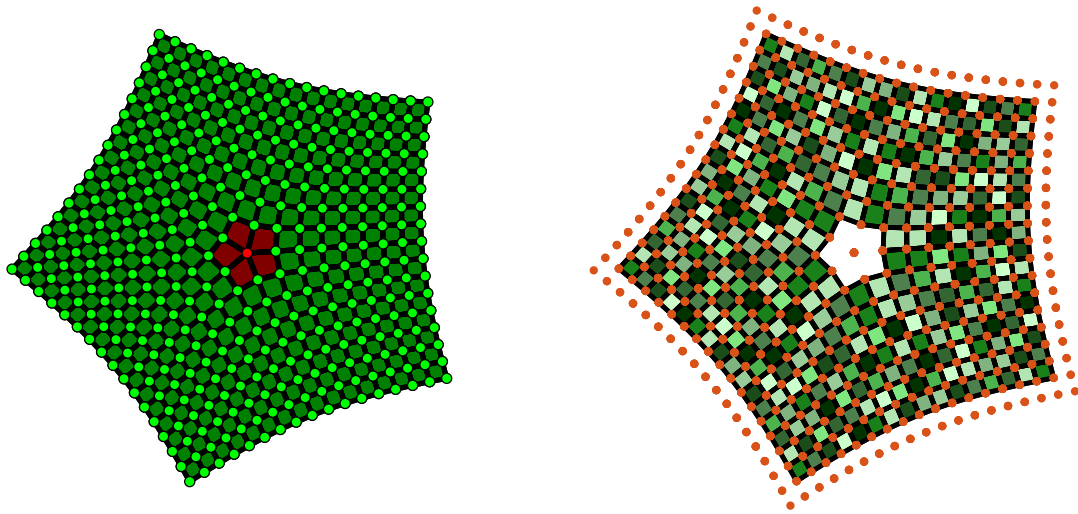


Abbildung 6.9: Das Spline-Definitionsgebiet aus Abbildung 6.7, verfeinert mit dem Catmull-Clark-Subdivisionsalgorithmus. Im linken Bild sieht man die verfeinerte Darstellung der kombinatorischen Anordnung des Spline-Definitionsgebiets mit den entsprechenden regulären und irregulären Initialelementen und mit den auswertbaren und nicht auswertbaren Zellen. Rechts sieht man die Auswertung inklusive der verfeinerten Kontrollpunkte.

Betrachten wir jetzt ein Szenario, in dem die regulären Regeln des irregulären Initialelements verändert werden. Für die Auswertung der Zellen könnte man sich für dieses Szenario, abweichend zu dieser Arbeit, auf den Standpunkt stellen, dass für $g = 3$ jede Zelle, deren Vereinigung der Kontrollpunkte seiner Initialelemente eine 4×4 Struktur bildet, zu einem B-Spline-Element ausgewertet werden kann. In diesem Szenario würde sich also in Definition 2.20 der Begriff *reguläres Initialelement* zu *Initialelement mit einer regulären Umgebung* abschwächen und die Auswertung um eine irreguläre Ecke wäre zunächst identisch zum Catmull-Clark-Szenario aus Abbildung 6.8.

Verfeinern wir jetzt einmal global, so weichen die Kontrollpunkte des verfeinerten irregulären Initialelements von den Kontrollpunkten des vorherigen Catmull-Clark-Szenarios ab. Damit weichen automatisch alle ausgewerteten B-Spline-Flächen, die mit diesen Kontrollpunkten ausgewertet wurden, von denen des vorigen Szenarios ab. Somit verändert sich zum einen der neu generierte Ring, welcher in Abbildung 6.10 gelb dargestellt ist. Dies ist unproblematisch, denn die Aufgabe des Subdivisionsalgorithmus ist es gerade, die neuen Ringe zu konstruieren. Allerdings verändern sich in diesem Szenario zum anderen auch die B-Spline-Elemente, die außen um den neuen Ring liegen. Diese sind in Abbildung 6.10 blau dargestellt. Diese Veränderung bewirkt insbesondere, dass Teile der B-Spline-Fläche nach der Verfeinerung anders sind als vorher, dass also durch die Verfeinerung die Auswertung nicht reproduziert wird.

Wir erkennen also durch dieses Szenario den Preis, den wir für die Wahlfreiheit der Verfeinerungsregeln der irregulären Initialelemente bezahlen müssen. Der nicht auswertbare Bereich erhöht sich entsprechend um einen Ring und die Definition 2.17 der zwingend regulären Initialelemente und die Definition 2.20 der Auswertung von Zellen ist sinnvoll gewählt. Beide Definitionen weichen zwar von denen aus [CC78], [JM99] und [Baj+02] ab, allerdings weichen auch die Verfeinerungsregeln der irregulären Initialelemente voneinander ab, was das Vorgehen dieser Arbeit rechtfertigt. Dasselbe Verhalten lässt sich analog auch auf den Fall $t = 3$ übertragen.

Nach diesen abweichenden und nicht zielführenden Szenarien betrachten wir jetzt die in dieser Arbeit intendierte Struktur der Auswertung in Kombination mit der Freiheit der Verfeinerungsregeln. Subdivisionsmatrizen irregulärer Initialelemente dürfen also, bis auf die notwendigen Nulleinträge, frei gewählt werden.

Wir erhalten damit zunächst für die Überlappungsbereiche der Initialelemente die Bedingung, dass die Verfeinerungsregeln einzelner Kontrollpunkte, die Teil der Verfeinerung verschiedener Initialelemente sind, gleich sein müssen. Diese Verfeinerungsregeln werden im nächsten Abschnitt beschrieben. Dort verwenden wir allerdings als Eingabe des Algorithmus nur Informationen der Initialelemente und nicht die Informationen der umliegenden Umgebung inklusive Überlappung. Daher definieren wir:

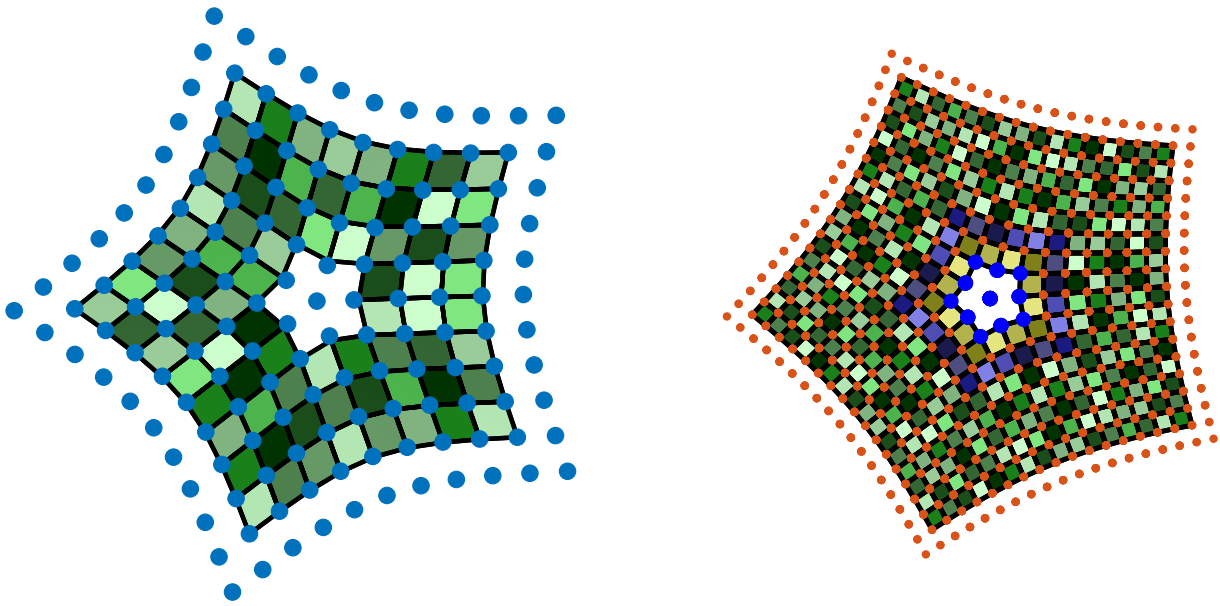


Abbildung 6.10: Ein experimentelles Szenario, das das Problem des auswertbaren Bereichs aufzeigen soll. Die Grundlage ist das Spline-Definitionsgebiet aus Abbildung 6.7. Das irreguläre Initialelement im Zentrum erhält für jeden Punkt alternative Verfeinerungsregeln, sodass die Initialelemente um das Zentrum ebenfalls irregulär werden. Dies wird bei der Auswertung im linken Bild ignoriert. Jede Zelle, deren Initialelemente alle reguläre Umgebungen haben, wird ausgewertet, was zu drei ausgewerteten Ringen führt. Verfeinert man das Spline-Definitionsgebiet global und wertet nach demselben Prinzip aus, so erhält man die Kontrollpunkte und die Auswertung des rechten Bilds. Die Kontrollpunkte, die aus den irregulären Regeln hervorgegangen sind, sind blau eingefärbt. Alle ausgewerteten Elemente, die diese blauen Kontrollpunkte bei der Auswertung beinhalten, sind gelb und blau eingefärbt. Die gelben Elemente sind neu, die blauen Elemente sind die Verfeinerungen bereits existierender Elemente des linken Bildes, konkret ein Teil des inneren Rings. Durch die Abweichung der Verfeinerungsregel reproduzieren die blauen ausgewerteten Elemente nicht die vorige gröbere Struktur. Daher ist die abweichende Auswertung dieses Szenarios nicht sinnvoll.

Definition 6.1. Wird ein Kontrollpunkt durch verschiedene Initialelemente verfeinert, so ist die Verfeinerungsregel nach der folgenden Prioritätsliste auszuwählen: Das Initialelement ist assoziiert mit einer

1. irregulären Ecke.
2. semi-irregulären Ecke.
3. regulären Ecke.

Liegen zwei gleichwertige Initialelemente vor, die verschiedene Verfeinerungsregeln für einen Kontrollpunkt vorschlagen, so muss die Verfeinerung von Hand ausgewählt werden. Da aber im Laufe der Verfeinerung der reguläre Bereich immer größer wird und die irregulären Bereiche zunehmend isoliert sind, tritt nach genügend vielen Verfeinerungsschritten dieser Konflikt nicht mehr auf und kann vernachlässigt werden.

Damit ist auch begründet, warum in Definition 2.12 die Subdivisionsmatrix eines Initialelements auch von deren Nachbarn abhängt. Kommt es zum Konflikt, so kann die Verfeinerungsregel auch prioritär von einem anderen Initialelement und damit von deren kombinatorischen Struktur abhängen. Beispiele für die Überlappungen für $t = 2$ finden sich in Abbildung 2.30.

Mit dieser Definition lässt sich die Regularität der Initialelemente für den Fall $g = 3$ beschreiben. Da die irregulären und semi-irregulären Verfeinerungsregeln Vorrang haben, sind deren Nachbarn, die mit diesen Initialelementen überlappende Verfeinerungsregeln haben, automatisch irregulär. Damit muss für den zwingend regulären Bereich ein Initialelement nicht nur eine reguläre Umgebung haben, sondern die umliegenden Initialelemente müssen ebenfalls

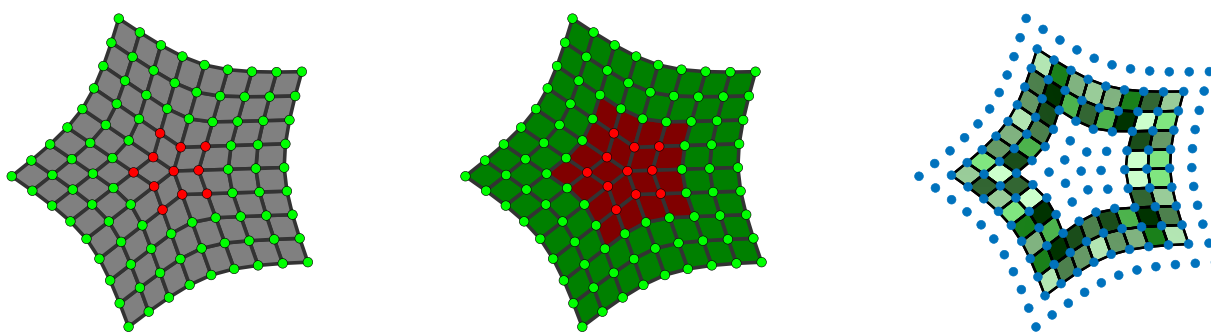


Abbildung 6.11: Das Spline-Definitionsgebiet aus Abbildung 6.7. Die Initialelemente sind mit den Subdivisionsmatrizen aus dieser Arbeit versehen. Die daraus resultierenden regulären Initialelemente sind grün eingefärbt, wohingegen die irregulären rot eingefärbt sind (links). Im mittleren Bild sieht man die auswertbaren Zellen in grün und die nicht auswertbaren in rot, was zu der Auswertung im rechten Bild führt. Der nicht auswertbare Bereich ist hier um einen Ring größer als in Abbildung 6.8.

eine reguläre Umgebung haben, wie in Definition 2.17 beschrieben. Wie bereits erläutert, vergrößert sich damit der nicht auswertbare Bereich um jeweils ein Element. Für das in diesem Abschnitt gewählte Beispiel ergibt sich damit der auswertbare Bereich aus Abbildung 6.11.

Um eine invariante auswertbare Struktur zu erzeugen, benötigen wir eine Doppelring- beziehungsweise eine Doppelschalenstruktur. Verfeinern wir das Spline-Definitionsgebiet global, so vergrößert sich der auswertbare Bereich der irreguläre Ecke um die Größe eines Elements des alten Spline-Definitionsgebiets, also um die Größe von zwei Elementen des neuen Spline-Definitionsgebiets. Daher müssen wir für die invariante Struktur immer zwei Ringe beziehungsweise zwei Schalen aufeinander abbilden. Dies ist für $t = 2$, wie bereits beschrieben, konsistent zu der Beschreibung in [MM18]. Eine Illustration findet sich in Abbildung 6.12. Der dreidimensionale Fall verhält sich analog.

Damit haben wir die Herausforderungen dieses Abschnitts und gleichzeitig die Ziele des nächsten Abschnitts herausgearbeitet. Die Zeilen einer Subdivisionsmatrix für $g = 3$ dürfen durch die Überlappungen der Initialelemente nur für die Einträge ungleich 0 sein, deren zugehörige Kontrollpunkte in allen Initialelementen vorkommen. Würden die Initialelemente verschiedene Verfeinerungsregeln vorschlagen, so haben Initialelemente zu irregulären und semi-irregulären Ecken Vorrang. Um auswertbare Strukturen aufeinander abzubilden, benötigen wir zudem Subdivisionsmatrizen, die Doppelringe und Doppelschalen auf Doppelringe und Doppelschalen abbilden. Im nächsten Abschnitt erklären wir die Konstruktion von Subdivisionsmatrizen für Initialelemente, aus denen sich dann die größeren Strukturen zusammensetzen.

6.2 Konstruktion der Subdivisionsmatrizen

Die Konstruktion der Subdivisionsmatrizen für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision gestaltet sich komplexer als die der verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision. Das liegt einerseits daran, dass die geometrischen Objekte, mit denen wir arbeiten, nicht mehr nur Polytope, sondern Verfeinerungen von Polytopen sind und wir daher einigen Aufwand betreiben müssen, um die Theorie der Kapitel 3 und 4 nutzen zu können. Außerdem haben wir, wie im letzten Abschnitt beschrieben, Einschränkungen an die Matrixeinträge, die sich in notwendigen Nulleinträgen äußern. Diese Einschränkung ist mit Variante 1 aus Abschnitt 5.2.1 nicht kompatibel, weshalb wir sie in diesem Kapitel nicht verwenden. Wir fokussieren uns daher auf die Anpassung der Variante 2 aus Abschnitt 5.2.2 und geben am Ende nur einen kurzen Hinweis auf eine Variante davon, die das Spektrum exakt definiert. Da die Konstruktion aufwendiger ist, geben wir in Algorithmus 12 nur einen kurzen Überblick über die einzelnen Schritte, die wir in den folgenden Unterabschnitten im Detail erklären. Wir beweisen zudem in den folgenden Unterabschnitten einige Lemmata, die wir sowohl für die Konstruktion als auch für die Qualitätskriterien in Abschnitt 6.3 benötigen.

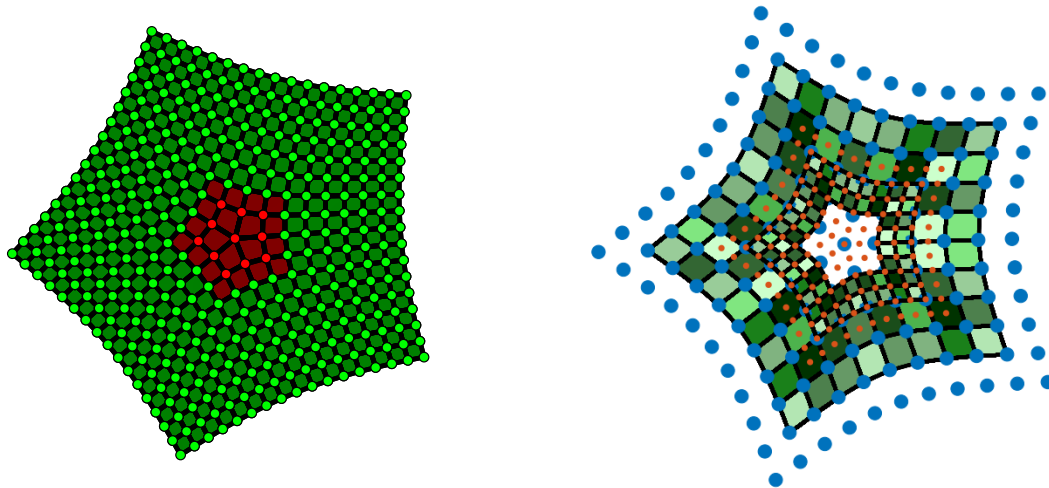


Abbildung 6.12: Das Spline-Definitionsgebiet aus Abbildung 6.7, verfeinert mit dem Subdivisionsalgorithmus dieser Arbeit. Im linken Bild sieht man eine Darstellung des verfeinerten Spline-Definitionsgebiets mit den entsprechenden regulären und irregulären Initialelementen und mit den auswertbaren und nicht auswertbaren Zellen. Rechts sieht man die Auswertung der Originalstruktur und die Auswertung der invariant verfeinerten Struktur inklusive Kontrollpunkte in einem Bild. Die neue Doppelringstruktur legt sich dabei in das Loch der alten.

Algorithmus 12: VerallgemeinerteKubischeBSplineSubdivisionsmatrixÜbersicht

Data: Typ $t \in \{2, 3\}$, valider kombinatorischer Graph $\mathbf{G}_K = (\mathbf{V}_K, \mathbf{E}_K)$ eines Initialelements in der Eingabeform von Definition 3.10, für den jeder Knoten aus $\mathbf{V}_K$ exakt t Nachbarn hat

Result: Subdivisionsmatrix $S^{(t)}$

1 **begin**

- 2 Erstelle nach Abschnitt 6.2.1 aus dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ eine t -dimensionale Realisierung $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times t}$ des Graphen $\mathbf{G}$ des Initialelements, die als Basis des subdominanten Eigenraums dienen soll;
 - 3 Erstelle aus der t -dimensionalen Struktur $\tilde{P}$ eine Colin-de-Verdière-artige Matrix $\tilde{C}$ nach Abschnitt 6.2.2;
 - 4 Teile die Matrix $\tilde{C}$ nach Abschnitt 6.2.3 in die Summe zweier Matrizen auf. Bilde das Matrixexponential dieser beiden Summanden und multipliziere die beiden Exponentiale, um die Subdivisionsmatrix $S^{(t)}$ zu erhalten;
-

Um dem weiteren Verlauf des Abschnitts folgen zu können, ist Folgendes essenziell: Jeder Konstruktionsschritt in den Unterabschnitten 6.2.1, 6.2.2 und 6.2.3 wird durch einen Algorithmus beschrieben. In den Unterabschnitten werden diese Algorithmen erklärt und zusätzlich werden einige Aussagen für die in den Algorithmen vorkommenden Variablen und Matrizen gezeigt. Die Notation, Matrizen und Variablen in diesen Unterabschnitten beziehen sich dabei immer auf die der jeweiligen Algorithmen.

6.2.1 Eigenstruktur der subdominanten Eigenwerte

Um die Eigenstruktur der subdominanten Eigenwerte erstellen zu können, müssen wir zunächst die kombinatorische Struktur der Initialelemente betrachten. Der Graph $\mathbf{G}$ eines Initialelements besteht nach Definition 2.12 aus der Struktur der Zellen, die an der mit dem Initialelement assoziierten Ecke liegen. Damit repräsentiert der Graph $\mathbf{G}$ eine Ansammlung von kombinatorischen Vierecken für $t = 2$ oder kombinatorischen Hexaedern für $t = 3$. An dieser Stelle ist wichtig zu erwähnen, dass wir im Laufe der Konstruktion oft von diesen Vierecken oder Hexaedern sprechen

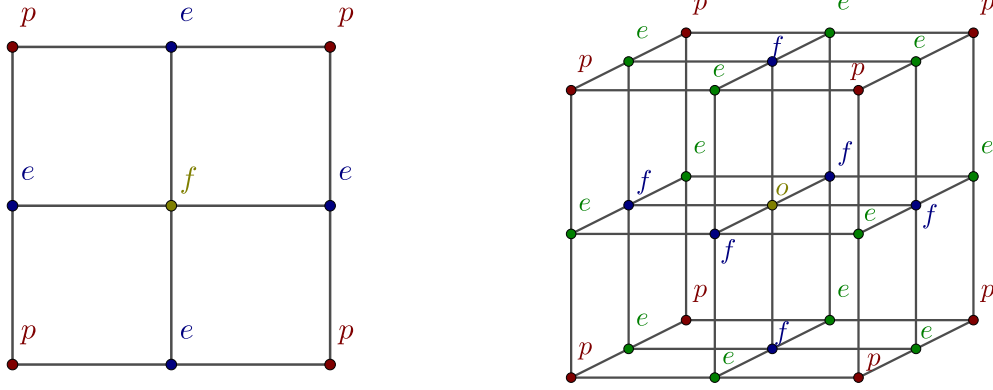


Abbildung 6.13: Eigenstruktur der regulären Initialelemente für $t = 2$ (links) und $t = 3$ (rechts) mit der entsprechenden Kategorisierung der Knoten.

werden. Gemeint sind damit immer und ausschließlich die Vierecke und Hexaeder, die mit den entsprechenden Zellen assoziiert werden können.

Mit Definition 2.51 haben wir die Struktur der Initialelemente weiter eingeschränkt. Der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ des Initialelements aus Definition 2.50 kann für $g = 3$ als volumetrisch dualer Graph der Struktur in $\mathbf{G}$ interpretiert werden. Dieser muss für $t = 2$ ein Kreis im graphentheoretischen Sinne und für $t = 3$ ein planarer 3-zusammenhängender Graph sein. Hier ist wichtig zu erwähnen, dass wir für dieses Kapitel explizit voraussetzen, dass das Initialelement aus einer viereckigen beziehungsweise hexaedrischen Struktur hervorgeht. Jeder Knoten in $\mathbf{G}_K$ muss also exakt t Nachbarn haben.

Die Gestalt der Eigenstruktur ist zunächst vollkommen offen. Wir können uns lediglich an den regulären Initialelementen orientieren, denn deren Subdivisionsmatrizen sind die einzigen, die bereits festgesetzt sind. Diese Eigenstrukturen sind in Abbildung 6.13 dargestellt.

Es wäre an dieser Stelle möglich für $t = 2$ die Eigenräume des Catmull-Clark-Algorithmus zu verwenden, die weitere Konstruktion wird allerdings bestimmte Eigenschaften der Eigenstruktur nutzen, die die Eigenvektoren des Catmull-Clark-Algorithmus nicht besitzen. Für $t = 3$ haben wir keine Vorlage oder Orientierung, da die Subdivisionsalgorithmen von [Baj+02] und [JM99] keine geeigneten Eigenräume anbieten, wie wir in Abschnitt 2.5 gesehen haben.

Daher konstruieren wir einen eigenen Vorschlag für eine Eigenstruktur. Da sich diese für $t = 2$ und $t = 3$ stark voneinander unterscheiden, teilen wir diesen Abschnitt in die beiden Fälle $t = 2$ und $t = 3$ auf. Wir beginnen mit dem ersten Fall.

Der Fall $t=2$

Die Konstruktion der subdominanten Eigenstruktur für $t = 2$ findet sich in dem folgenden Algorithmus 13, dessen Schritte wir im Einzelnen erklären. Wie bereits erwähnt, beziehen sich also die Variablen und Matrizen dieses Teilabschnitts auf die in Algorithmus 13.

Der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ ist die Eingabe des Algorithmus 12 und aus jenem wollen wir die Eigenstruktur zum Graphen $\mathbf{G}$ konstruieren. Es ist wichtig hervorzuheben, dass der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ nicht der Graph $\mathbf{G}$ des Initialelements ist.

Konstruktion des Graphen $\mathbf{G}$ Wir beschreiben zunächst die Struktur des Graphen $\mathbf{G}$. Sprachlich verwenden wir hier die Begriffe Punkt und Knoten synonym, da wir aus den abstrakten Knoten des Graphen $\mathbf{G}$ eine Realisierung in $\mathbb{R}^2$ generieren wollen. Dazu teilen wir die Punkte der Realisierung von $\mathbf{G}$ in die folgenden Kategorien auf:

Definition 6.2. Sei $\mathbf{G}$ der Graph eines Initialelements für $t = 2$ und $g = 3$, der durch Definition 2.12 aus einer Ansammlung von Vierecken besteht, die alle einen gemeinsamen Knoten besitzen. Die Realisierung dieses gemeinsamen

Algorithmus 13: EigenstrukturVerallgemeinerteKubischeBSplineSubdivisionsmatrix2D

Data: Valider kombinatorischer Graph $\mathbf{G}_K = (\mathbf{V}_K, \mathbf{E}_K)$ eines Initialelements in der Eingabeform von Definition 3.10, für den jeder Knoten aus $\mathbf{V}_K$ exakt 2 Nachbarn hat

Result: Kontrollpunkte $[P^T, E^T, f^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, deren Spalten die subdominanten Eigenvektoren der Subdivisionsmatrix darstellen sollen

```

1 begin
2   Konstruiere den Graphen  $\mathbf{G}$  aus dem kombinatorischen Graphen  $\mathbf{G}_K$  mit den drei Knotenarten  $p, e$  und  $f$ ;
3   Erstelle das primale und das duale Polytop als Realisierung von  $\mathbf{G}_K$  nach Abschnitt 3.4;
4   Setze die Koordinaten der Eckpunkte  $P$  als die Ecken des primalen Polytops;
5   Setze die Koordinaten der Kantenpunkte  $E$  als die Ecken des dualen Polytops;
6   Setze die Koordinaten des Facettenpunkts  $f$  als  $(0, 0)$ ;
7   return  $[P^T, E^T, f^T]^T$ ;

```

Knotens nennen wir Facettenpunkt und bezeichnen diesen mit $f \in \mathbb{R}^2$.

Die Realisierung aller Knoten in $\mathbf{G}$, die eine gemeinsame Kante mit f besitzen, nennen wir Kantenpunkte. Einen Kantenpunkt bezeichnen wir mit $e \in \mathbb{R}^2$ und die Matrix aller Kantenpunkte eines Graphen bezeichnen wir mit $E \in \mathbb{R}^{n \times 2}$.

Alle übrigen Punkte nennen wir Eckpunkte. Einen Eckpunkt bezeichnen wir mit $p \in \mathbb{R}^2$ und die Matrix aller Eckpunkte eines Graphen bezeichnen wir mit $P \in \mathbb{R}^{m \times 2}$. Zudem definieren wir

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P \\ E \\ f \end{bmatrix}.$$

Mit dieser Definition enthält der Graph $\mathbf{G}$ nur Kanten der Form $\{p, e\}$ und $\{e, f\}$. Die Motivation dieser Begriffe und die Konstruktion des Graphen $\mathbf{G}$ aus dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ wird im Folgenden beschrieben.

Da jedes Viereck exakt einen Eckpunkt besitzt, lässt sich die Struktur des kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ nutzen, um den Graphen $\mathbf{G}$ zu erzeugen. Wir identifizieren in einem ersten Schritt die Knoten des kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ mit den Eckpunkten P . Sind im kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ zwei Knoten benachbart, so teilen sich die zugehörigen Vierecke des Graphen $\mathbf{G}$ eine (innere) Kante. An dieser (inneren) Kante liegt also ein Kantenpunkt e . Der Punkt p liegt nicht an dieser (inneren) Kante, denn die miteinander identifizierten Kanten beinhalten immer den Punkt f . Wir können damit den kombinatorischen Graphen um die Punkte E erweitern, indem wir jede Kante in zwei Kanten aufteilen und in deren Mitte die Punkte E einfügen. Den Graphen $\mathbf{G}$ erhalten wir dann in einem letzten Schritt, indem wir den Facettenpunkt f einfügen und diesen mit jedem Kantenpunkt e durch eine Kante verbinden. Damit genügt der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ um den Graphen $\mathbf{G}$ zu erzeugen, und zudem lassen sich die Punkte beziehungsweise Knoten des Graphen $\mathbf{G}$ in drei disjunkte Mengen aufteilen.

Konstruktion der Koordinaten Da sich die Punkte P mit den Knoten des Graphen $\mathbf{G}_K$ identifizieren lassen, können wir diesen nutzen, um die Koordinaten der Punkte P zu erzeugen. Dazu erstellen wir mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.4 das primale Polytop zu $\mathbf{G}_K$ und setzen die Koordinaten von P als die Ecken dieser Realisierung.

Realisieren wir den Graphen $\mathbf{G}_K$ über die so konstruierten Punkte P , so liegen die Kanten der Realisierung von $\mathbf{G}_K$ tangential zum Einheitskreis. Die Tangentenpunkte der Kanten zum Einheitskreis sind die Eckpunkte des zu $\mathbf{G}_K$ dualen Polytops und wir definieren die Punkte E als diese dualen Tangentenpunkte. Die zwei Kanten $\{p_1, e\}$ und $\{e, p_2\}$ ersetzen damit die Kante $\{p_1, p_2\}$ aus $\mathbf{G}_K$.

Den Punkt f setzen wir in den Mittelpunkt des Einheitskreises, also in $(0, 0)$, und verbinden diesen über Kanten mit den Kantenpunkten E . Das Verfahren ist in Abbildung 6.14 illustriert.

Selbstverständlich ist dieses für $t = 2$ beschriebene Vorgehen trivial. Ein n -Eck wird schlicht in n Vierecke zerlegt. Wir führen dieses Verfahren hier dennoch ausführlich aus, um einerseits die Konstruktion vollständig zu beschreiben und um andererseits die Idee der Konstruktion zu vermitteln, die im weiteren Verlauf des Abschnitts auf den wesentlich komplexeren Fall $t = 3$ übertragen wird. Daher werden die nächsten beiden Lemmata für die Punkte $[P^T, E^T, f^T]^T$ auch ausführlich bewiesen:

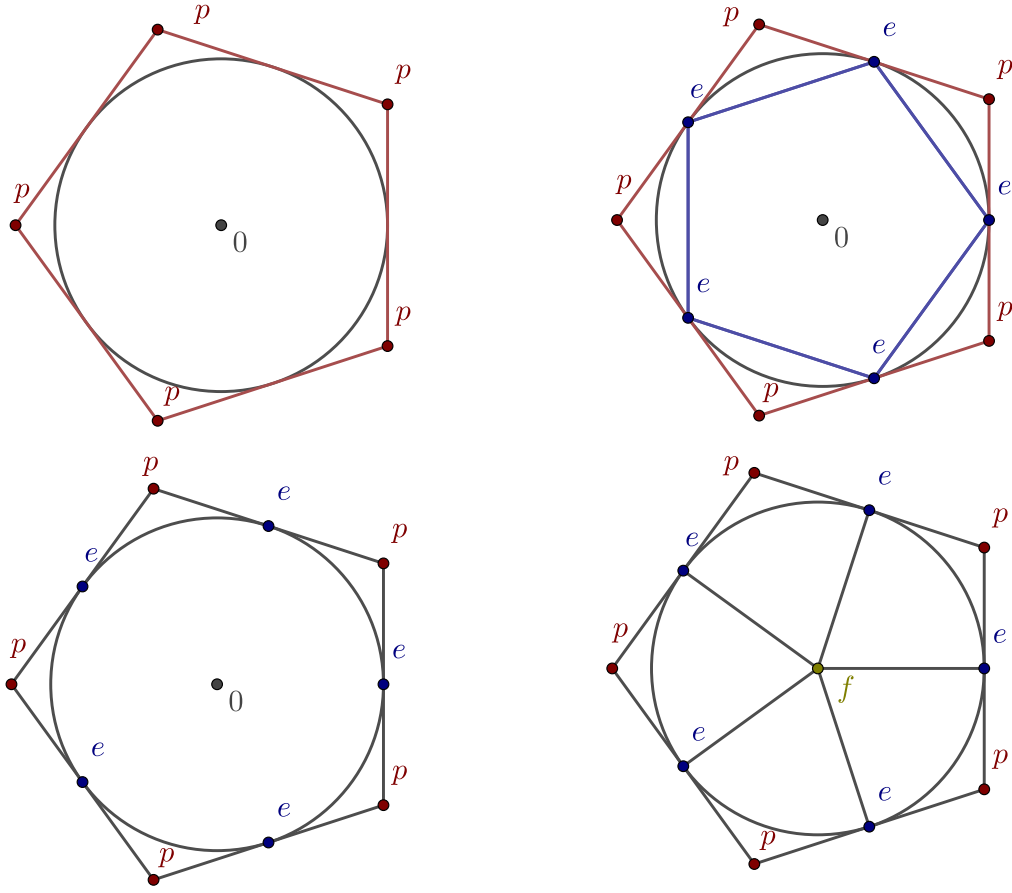


Abbildung 6.14: Konstruktionsschritte der subdominanten Eigenstruktur für $t = 2$. Zunächst wird das primale Polytop zu $\mathbf{G}_K$ erzeugt und dessen Ecken werden mit den Punkten P assoziiert (links oben). Dann wird das duale Polytop erzeugt und dessen Ecken werden mit den Punkten E assoziiert (rechts oben). Anschließend werden die Kanten des primalen Polytops durch zwei Kanten ersetzt (links unten) und abschließend wird der Facettenpunkt f im Nullpunkt eingefügt und mit den Punkten von E durch Kanten verbunden (rechts unten).

Lemma 6.3. Sei für $t = 2$ und $g = 3$ die Realisierung von $\mathbf{G}$, bestehend aus den Punkten $[P^T, E^T, f^T]^T$, konstruiert nach Algorithmus 13. Dann sind die zu den Kanten $\{p, e\}$ und $\{e, f\}$ gehörenden Strecken mit gemeinsamem Punkt e orthogonal zueinander.

Beweis. Dieses Lemma ist nach Konstruktion erfüllt, es lässt sich aber auch nachrechnen. Wir beschreiben die Strecken über die Vektoren $p - e$ und $f - e$. Das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren ist

$$\langle p - e, f - e \rangle = \langle p - e, -e \rangle = \langle p, -e \rangle + \langle -e, -e \rangle = -\langle p, e \rangle + 1.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da die Punkte e auf dem Einheitskreis liegen. Da die Punkte p mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.4 über Gleichung (3.15) konstruiert wurden, gilt

$$\langle p, e \rangle = 1$$

und damit

$$\langle p - e, f - e \rangle = -1 + 1 = 0.$$

Somit sind die beiden Strecken orthogonal zueinander. □

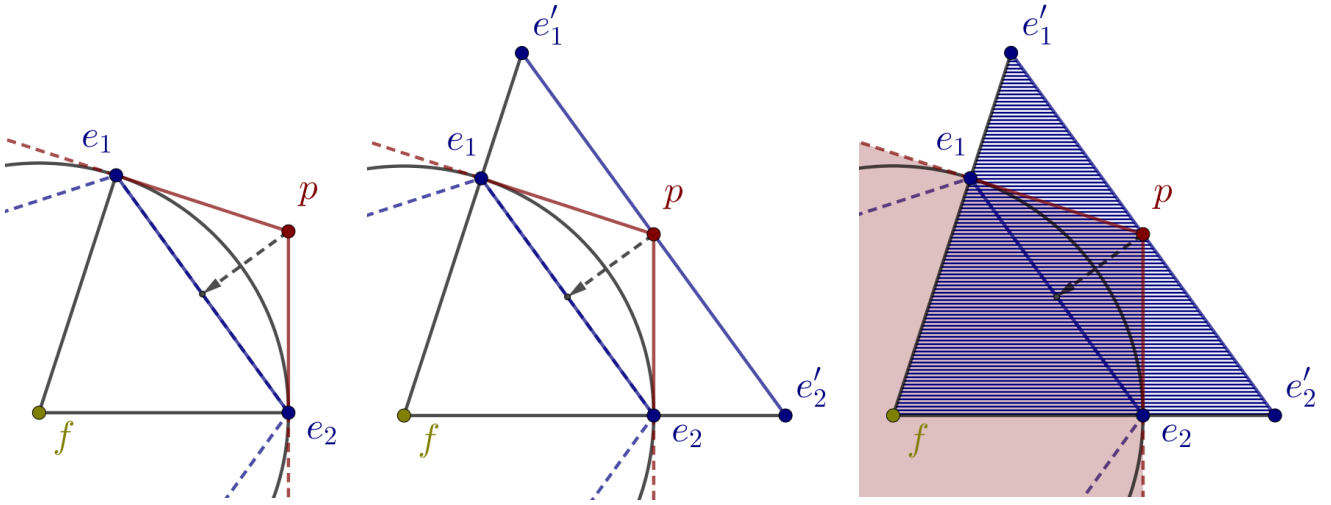


Abbildung 6.15: Illustration des Beweises von Lemma 6.4. Links sieht man die vier Punkte des Vierecks und die Projektion des Punkts p auf die Strecke (e_1, e_2) . In der Mitte sieht man die Verschiebung der von e_1 und e_2 aufgespannten Gerade, sodass der Punkt p auf der neuen Gerade liegt. Daraus lassen sich die Punkte e'_1 und e'_2 konstruieren. Rechts sieht man die zwei konvexen Mengen, deren Schnitt das Viereck (f, e_1, p, e_2) ist.

Lemma 6.4. Sei für $t = 2$ und $g = 3$ die Realisierung von $\mathbf{G}$, bestehend aus den Punkten $[P^T, E^T, f^T]^T$, konstruiert nach Algorithmus 13. Dann ist die Realisierung jedes Vierecks des Graphen $\mathbf{G}$ bestehend aus den Punkten p, e_1, e_2 und f konvex.

Beweis. Zunächst ist die Realisierung des kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$, bestehend aus den Punkten P , tangential zum Einheitskreis konstruiert und enthält diesen. Damit ist sie mit Lemma 3.45, das die Konvexität von genau diesem Objekt beschreibt, konvex. Außerdem beinhaltet sie das oben beschriebene Viereck.

Das Dreieck (f, e_1, e_2) ist Teil des dualen Polytops und zudem konvex und nicht-leer, da die drei Punkte nicht auf einer Linie liegen. Der Teilgraph von $\mathbf{G}$, bestehend aus den Ecken P und den Tangentenpunkten E , ist ein Kreis im graphentheoretischen Sinne. Auf diesem liegt zwischen zwei Kantenpunkten e_1 und e_2 immer ein Eckpunkt p . Die orthogonale Projektion von p auf die Gerade (e_1, e_2) in Richtung des Nullpunkts liegt damit auf der Strecke (e_1, e_2) .

Die Strecke (e_1, e_2) ist Teil des zur Realisierung von $\mathbf{G}_K$ dualen Polytops und wird durch die Gleichung

$$\langle p, x \rangle = 1$$

bestimmt. Zudem ist p nicht im dualen Polytop enthalten, da das duale Polytop eine Teilmenge des Einheitskreises ist und die Ecken P außerhalb des Einheitskreises liegen. Wir konstruieren jetzt eine neue Gerade durch die Gleichung

$$\langle p, x \rangle = |p|^2.$$

Diese Gerade verläuft parallel zur Linie (e_1, e_2) und beinhaltet den Punkt p , denn $\langle p, p \rangle = |p|^2$. Schneiden wir diese Gerade mit den beiden durch $(0, e_1)$ und $(0, e_2)$ aufgespannten Geraden, so entsteht ein Dreieck $(0, e'_1, e'_2)$, welches das Viereck (p, e_1, f, e_2) enthält. Da jenes ein Dreieck ist, ist es ebenfalls konvex.

Der Schnitt von $(0, e'_1, e'_2)$ mit der Realisierung von $\mathbf{G}_K$ ist damit das Viereck (p, e_1, f, e_2) und da beide Mengen des Schnitts konvex sind, ist mit Lemma 3.3, das den Schnitt zweier konvexer Mengen betrachtet, das Viereck (p, e_1, f, e_2) konvex. Eine Illustration des Beweises findet sich in Abbildung 6.15. $\square$

Damit wurde die Konstruktion der Eigenstruktur für $t = 2$ beschrieben. Im nächsten Teilabschnitt betrachten wir die Konstruktion für $t = 3$.

Der Fall $t=3$

Für den Fall $t = 3$ verfahren wir analog zum vorigen, allerdings ist die Konstruktion der Eigenstruktur etwas aufwendiger. Wir beschreiben diese in Algorithmus 14 und gehen im Folgenden auf die einzelnen Schritte des Algorithmus ein. Damit beziehen sich alle Matrizen und Variablen dieses Teilschnitts auf die des Algorithmus 14.

Algorithmus 14: EigenstrukturVerallgemeinerteKubischeBSplineSubdivisionsmatrix3D

Data: Valider kombinatorischer Graph $\mathbf{G}_K = (\mathbf{V}_K, \mathbf{E}_K)$ eines Initialelements in der Eingabeform von Definition 3.10, für den jeder Knoten aus $\mathbf{V}_K$ exakt 3 Nachbarn hat

Result: Kontrollpunkte $[P^T, E^T, F^T, o^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, deren Spalten die subdominanten Eigenvektoren der Subdivisionsmatrix darstellen sollen

1 **begin**

2 Konstruiere den Graphen $\mathbf{G}$ aus dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ mit den vier Knotenarten p, e, f und o ;

3 Erstelle das primale und das duale Polytop als Realisierung von $\mathbf{G}_K$ nach Abschnitt 3.3;

4 Setze die Koordinaten der Punkte P als die Ecken des primalen Polytops;

5 Setze die Koordinaten der Punkte E als die Tangentenpunkte des primalen Polytops zur Einheitssphäre beziehungsweise als die Schnittpunkte des primalen und dualen Polytops;

6 Projiziere die Ecken des dualen Polytops auf die Facetten des primalen Polytops und setze die Koordinaten der Punkte F als diese Projektionen;

7 Setze die Koordinaten des Punktes o als $(0, 0, 0)^T$;

8 **return** $P := [P^T \ E^T \ F^T \ o^T]^T$;

Konstruktion des Graphen $\mathbf{G}$ Wir beschreiben wieder zuerst die Struktur des Graphen $\mathbf{G}$. Sprachlich verwenden wir hier ebenfalls die Begriffe Punkt und Knoten synonym. In einem ersten Schritt teilen wir die Punkte der Realisierung von $\mathbf{G}$ in die folgenden Kategorien auf:

Definition 6.5. Sei $\mathbf{G}$ der Graph eines Initialelements für $t = 3$ und $g = 3$, der durch Definition 2.12 aus einer Ansammlung von Hexaedern besteht, die alle einen gemeinsamen Knoten besitzen. Die Realisierung dieses gemeinsamen Knotens nennen wir Volumenpunkt und bezeichnen diesen mit $o \in \mathbb{R}^3$.

Die Realisierung aller Knoten in $\mathbf{G}$, die eine gemeinsame Kante mit o besitzen, nennen wir Facettenpunkte. Einen Facettenpunkt bezeichnen wir mit $f \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix aller Facettenpunkte eines Graphen bezeichnen wir mit $F \in \mathbb{R}^{n \times 3}$.

Die Realisierung aller Knoten in $\mathbf{G}$, die eine gemeinsame Kante mit einem Facettenpunkt besitzen und nicht der Punkt o sind, nennen wir Kantenpunkte. Einen Kantenpunkt bezeichnen wir mit $e \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix aller Kantenpunkte eines Graphen bezeichnen wir mit $E \in \mathbb{R}^{m \times 3}$.

Alle übrigen Punkte nennen wir Eckpunkte. Einen Eckpunkt bezeichnen wir mit $p \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix aller Eckpunkte eines Graphen bezeichnen wir mit $P \in \mathbb{R}^{k \times 3}$. Zudem definieren wir

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix}.$$

Damit enthält der Graph $\mathbf{G}$ nur Kanten der Form $\{p, e\}$, $\{e, f\}$ und $\{f, o\}$.

Da jedes Hexaeder exakt einen Eckpunkt besitzt, lässt sich die Struktur des kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ nutzen um den Graphen $\mathbf{G}$ zu erzeugen. Wir identifizieren in einem ersten Schritt die Knoten des kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ mit den Eckpunkten P . Sind im kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ zwei Knoten benachbart, so teilen sich die zugehörigen Hexaeder des Graphen $\mathbf{G}$ eine (innere) Facette. An dieser (inneren) Facette liegen der zentrale Punkt o , zwei Facettenpunkte f_1 und f_2 und ein Kantenpunkt e , der mit den jeweiligen Eckpunkten p verbunden ist.

Wir können damit den kombinatorischen Graphen um die Punkte E erweitern, indem wir jede Kante in zwei Kanten aufteilen und in deren Mitte die Punkte e einfügen. Da jeder Kantenpunkt e mit zwei Facettenpunkten

verbunden ist, erhalten wir die Facettenpunkte, indem wir in den Mitten der Facetten von $\mathbf{G}_K$ die Facettenpunkte einfügen und diese mit den jeweiligen Kantenpunkten verbinden.

Den Graphen $\mathbf{G}$ erhalten wir abschließend, indem wir den Volumenpunkt o einfügen und diesen mit jedem Facettenpunkt f durch eine Kante verbinden. Damit genügt der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ auch für $t = 3$, um den Graphen $\mathbf{G}$ zu erzeugen, und die Punkte beziehungsweise Knoten des Graphen $\mathbf{G}$ lassen sich in vier disjunkte Mengen aufteilen. Eine Illustration der regulären Eigenstruktur inklusive der Benennungen findet sich in Abbildung 6.13.

Konstruktion der Koordinaten Da sich die Punkte P mit dem Graphen $\mathbf{G}_K$ identifizieren lassen, können wir diesen nutzen, um die Koordinaten der Punkte P zu erzeugen. Dazu verwenden wir das Verfahren aus Abschnitt 3.3 und setzen die Koordinaten P als die Eckpunkte des primalen Polytops. Die Tangentenpunkte werden ebenfalls bei der Konstruktion des primalen Polytops erzeugt, daher erhalten wir die Koordinatenpunkte der Kantenpunkte E ebenfalls über das primale Polytop.

Die Konstruktion der Facettenpunkte gestaltet sich etwas aufwendiger. An dieser Stelle wäre ein alternativer Ansatz, direkt die Koordinaten des dualen Polytops zu verwenden. Allerdings würde dies der Eigenstruktur des regulären Falls, die wir über die Matrix aus Gleichung (6.1) kennen, entgegenstehen. Wir erkennen aber durch die Eigenstruktur des regulären Falls, dass die Facettenpunkte in den Facetten des primalen Polytops liegen, welches durch die Eckpunkte P aufgespannt wird. Daher projizieren wir die Punkte des dualen Polytops mit Gleichung (3.12) auf die Facetten des primalen Polytops und erhalten

$$f = \frac{1}{|a|^2} a,$$

wobei a eine Ecke des dualen Polytops ist. Abschließend setzen wir den Volumenpunkt o auf den Ursprung $(0, 0, 0)$. Das Verfahren wird in Abbildung 6.16 illustriert.

Um eine weitere Verbindung herzustellen, merken wir an, dass die Struktur der Punkte P , E und F und deren Kanten gerade die des eingeschränkten Vierecksgraphen aus Definition 3.27 ist.

Analog zum zweidimensionalen Fall diskutieren wir die folgenden Lemmata:

Lemma 6.6. *Sei für $t = 3$ und $g = 3$ die Realisierung von $\mathbf{G}$, bestehend aus den Punkten $[P^T, E^T, F^T, o^T]^T$, konstruiert nach Algorithmus 14. Dann sind die zu den Kanten $\{p, e\}$ und $\{e, f\}$ gehörenden Strecken mit gemeinsamem Punkt e orthogonal zueinander. Außerdem sind die zu den Kanten $\{e, f\}$ und $\{f, o\}$ gehörenden Strecken mit gemeinsamem Punkt f orthogonal zueinander.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Kantenpaar $\{p, e\}$ und $\{e, f\}$. Das primale Polytop wurde durch eine Kreispackung konstruiert. Damit ist der Schnitt jeder Facette des primalen Polytops mit der Einheitssphäre ein Kreis, an dem alle Tangentenpunkte der Facette liegen. Eine Illustration findet sich in Abbildung 3.3. Zudem ist mit Korollar 3.40 die Projektion des dualen Punktes, die wir als f bezeichnen, der Mittelpunkt dieses Kreises.

Verschieben wir den Kreis so, dass f im Ursprung liegt, verläuft mit dieser Argumentation der Rest dieses Teils des Beweises analog zum Beweis des Lemmas 6.3. Wir erhalten

$$\langle p - e, f - e \rangle = \langle p - e, -e \rangle = \langle p, -e \rangle + \langle -e, -e \rangle = -\langle p, e \rangle + |e|^2.$$

Da der Punkt p auf der Tangente des Kreises mit Tangentenpunkt e liegt, gilt nach der Verschiebung analog, dass

$$\langle p, e \rangle = |e|^2$$

ist, denn dies ist die Geradengleichung der Tangente mit Stützpunkt e . Damit erhalten wir

$$\langle p - e, f - e \rangle = -|e|^2 + |e|^2 = 0.$$

Da die Verschiebung des Kreises die Orthogonalität nicht beeinflusst, gilt dies entsprechend auch für die unverschobenen Punkte.

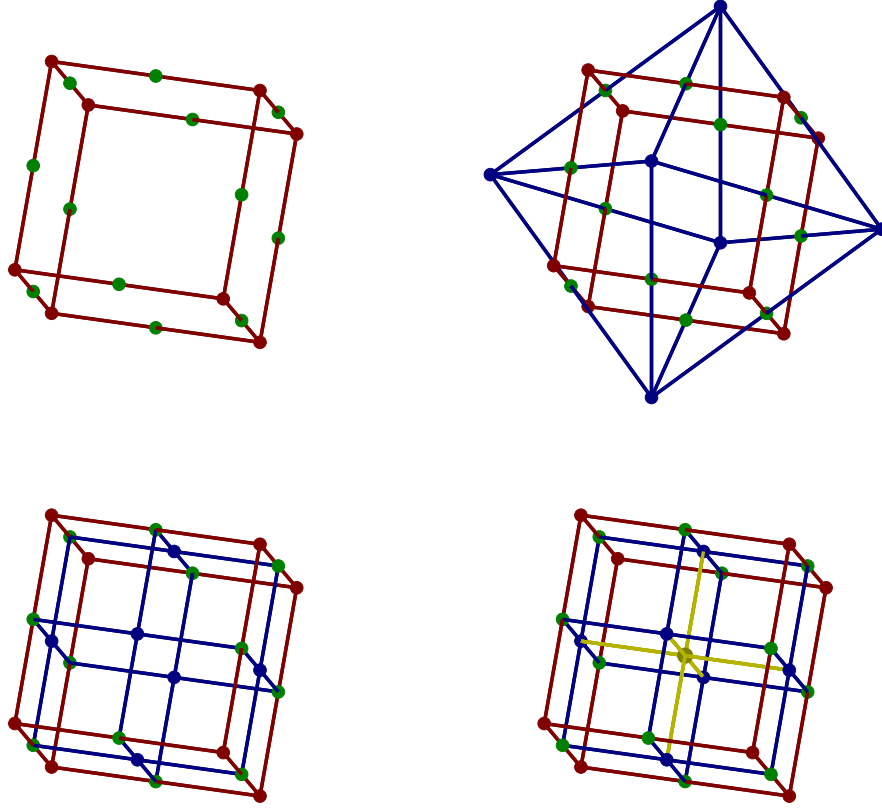


Abbildung 6.16: Konstruktionsschritte der subdominanten Eigenstruktur für $t = 3$. Die Punkte P sind in rot, die Punkte E in grün und die Punkte F in blau dargestellt. Außerdem ist der Punkt o in gelb dargestellt. Zunächst wird das primale Polytop zu $\mathbf{G}_K$ erzeugt. Dessen Ecken werden mit den Punkten P und dessen Tangentialpunkte werden mit den Punkten E assoziiert (links oben). Anschließend wird das duale Polytop erzeugt (rechts oben). Die Eckpunkte des dualen Polytops werden auf die Facetten des primalen Polytops projiziert und mit den Punkten F assoziiert (links unten). Abschließend wird der Volumenpunkt o in $(0, 0, 0)$ eingefügt (rechts unten).

Für das Kantenpaar $\{e, f\}$ und $\{f, o\}$ nutzen wir ebenfalls, dass der Schnitt der Einheitssphäre und der Facette, die zu f gehört, ein Kreis ist, deren Mittelpunkt f ist. Der Tangentialpunkt e liegt auf diesem Kreis und damit liegt die zur Kante $\{e, f\}$ gehörende Strecke in der Ebene, die von der Facette erzeugt wird.

Die zur Kante $\{f, o\}$ gehörende Strecke lässt sich auch als Ortsvektor von f , also als Ortsvektor des Mittelpunkts des Kreises interpretieren. Mit Lemma 3.39 zeigt dieser Ortsvektor in dieselbe Richtung wie der Normalenvektor der Ebene, die die Facette zu f enthält. Da die zur Kante $\{e, f\}$ gehörende Strecke in dieser Ebene liegt, sind die beiden zu den Kanten $\{e, f\}$ und $\{f, o\}$ gehörenden Strecken orthogonal zueinander und haben einen rechten Winkel im gemeinsamen Punkt f . Eine Illustration mit anderen Bezeichnungen findet sich in Abbildung 3.15. $\square$

Lemma 6.7. Sei für $t = 3$ und $g = 3$ die Realisierung von $\mathbf{G}$, bestehend aus den Punkten $[P^T, E^T, F^T, o^T]^T$, konstruiert nach Algorithmus 14. Dann ist die Realisierung jedes Hexaeders des Graphen $\mathbf{G}$, bestehend aus den Punkten $p, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ und o , konvex.

Beweis. Wir wenden hier eine analoge Strategie zum Beweis von Lemma 6.4 an. Zunächst ist die Realisierung von $\mathbf{G}_K$, bestehend aus den Punkten P , nach der finalen Version des Koebe-Andreev-Thurston-Theorems 3.25 konvex und enthält das Hexaeder.

Seien f'_1, f'_2 und f'_3 die Ecken des zur Realisierung von $\mathbf{G}_K$ dualen Polytops, die zu den Projektionspunkten f_1, f_2 und f_3 gehören, es gilt also

$$f_i = \frac{1}{|f'_i|^2} f'_i \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Das Tetraeder, das durch die konvexe Hülle der Punkte f'_1, f'_2, f'_3 und o erzeugt wird, ist per Definition konvex. Da die Punkte f'_1, f'_2 und f'_3 außerhalb des Einheitskreises liegen, liegen die Punkte f_1, f_2 und f_3 innerhalb des Einheitskreises. Folglich liegen die Punkte f_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ auf den Verbindungslinien von f'_i und o und somit im eben beschriebenen Tetraeder.

Die Punkte f'_1, f'_2 und f'_3 bilden eine Facette des zur Realisierung von $\mathbf{G}_K$ dualen Polytops. Der Schnitt dieser Facette mit der Einheitssphäre ist durch die Kreispackung ein Kreis, der die Punkte e_1, e_2 und e_3 enthält. Da die Punkte e_1, e_2 und e_3 auf den drei Kanten der eben beschriebenen Facette liegen, enthalten die anderen drei Facetten des Tetraeders jeweils eine Facette des Hexaeders. Diese sind konkret (o, f_1, e_2, f_2) , (o, f_2, e_3, f_3) und (o, f_3, e_1, f_1) . Damit besteht der Schnitt des Tetraeders mit dem konvexen Polytop ausschließlich aus Punkten des Hexaeders.

Zusätzlich ist mit Korollar 3.40 die Projektion von p auf die von f'_1, f'_2 und f'_3 erzeugte Facette der Mittelpunkt des Kreises, der als Schnitt der Facette mit der Einheitssphäre erzeugt wird. Damit lässt sich dieser Mittelpunkt als

$$p' = \frac{1}{|p|^2} p$$

beschreiben, sowie sich die Ebene, die die Facette enthält, mit Lemma 3.39 als

$$\langle p', x \rangle = |p'|^2$$

beschreiben lässt. Verschieben wir diese Ebene, die die Punkte p', f_1, f_2 und f_3 enthält, so, dass

$$\langle p', x \rangle = 1$$

gilt, dann ist p Teil dieser verschobenen Ebene, denn

$$\langle p', p \rangle = |p| |p'| = |p| \frac{1}{|p|^2} |p| = 1.$$

Mit dieser verschobenen Ebene können wir ein zweites Tetraeder konstruieren. Wir beginnen mit der konvexen Hülle der Punkte f'_1, f'_2, f'_3 und o und verschieben dann die oben beschriebene Ebene, die durch die Punkte f'_1, f'_2, f'_3 aufgespannt wird, so, dass sie den Punkt p enthält. Dieses neue Tetraeder ist konvex und enthält alle acht Eckpunkte des Hexaeders und damit das ganze Hexaeder.

Der Schnitt der Realisierung von $\mathbf{G}_K$, bestehend aus den Punkten P , mit dem konstruierten Tetraeder ist das Hexaeder, bestehend aus den acht genannten Punkten, denn sowohl das Ausgangstetraeder als auch das Tetraeder mit der verschobenen Facette enthält nur Punkte der Realisierung von $\mathbf{G}_K$, die zum Hexaeder gehören. Da mit Lemma 3.3 der Schnitt zweier konvexer Mengen wieder konvex ist, ist damit das Hexaeder konvex. Eine Illustration des Beweises findet sich in Abbildung 6.17. $\square$

Mit dieser Konstruktion haben wir einen Kandidaten für die Eigenstruktur der Subdivisionsmatrizen konstruiert. Im nächsten Abschnitt beschreiben wir die Konstruktion einer Matrix, die diese Eigenstruktur enthält.

6.2.2 Konstruktion einer Colin-de-Verdière-artigen Matrix

In diesem Abschnitt wollen wir eine Colin-de-Verdière-artige Matrix $\tilde{C}$ aus der eben konstruierten Eigenstruktur erstellen. Hierzu müssen wir zunächst beschreiben, was Colin-de-Verdière-artig bedeutet und wie solch eine Matrix aussehen soll.

Wir haben bereits in Kapitel 4 beschrieben, was eine Colin-de-Verdière-Matrix ist und wie sich diese aus d -Polytopen erzeugen lässt. Der Graph $\mathbf{G}$ ist allerdings kein Graph eines d -Polytops, da er für $t = 2$ aus mehreren Vierecken und für $t = 3$ aus mehreren Hexaedern besteht.

Wir werden im Folgenden kurz eine Alternative basierend auf einer naheliegenden Idee diskutieren, die jedoch nicht zielführend ist. Löscht man aus dem Graphen $\mathbf{G}$ den zentralen Punkt f beziehungsweise o und die an f beziehungsweise o liegenden Kanten, so erhält man eine Graphenstruktur, die für $t = 2$ ein Kreis und für $t = 3$ planar

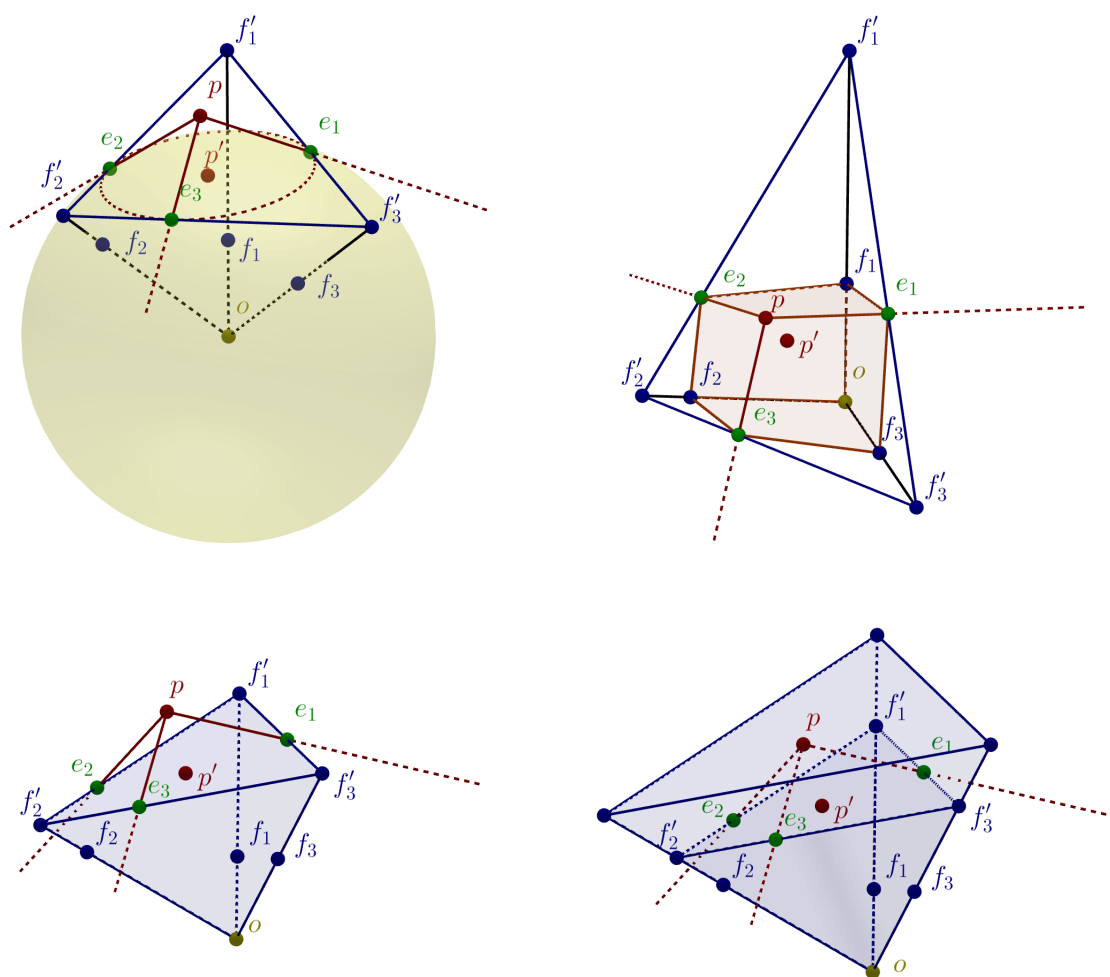


Abbildung 6.17: Illustration des Beweises zu Lemma 6.7. Oben links erkennt man beispielhaft alle im Beweis beschriebenen Punkte. Oben rechts sieht man das Hexaeder und unten links das Tetraeder. Unten rechts ist das Tetraeder mit der verschobenen Facette zu erkennen.

und 3-zusammenhängend ist. Für $t = 2$ ist dies sofort klar, für $t = 3$ müsste es erst bewiesen und diskutiert werden. Durchgeführte Tests stützen diese Aussage allerdings.

Für diesen Graphen könnte man mithilfe von Kapitel 3 eine Eigenstruktur konstruieren, für die man mithilfe von Kapitel 4 eine echte Colin-de-Verdière-Matrix erzeugen könnte. Bei diesem Ansatz treten allerdings zwei Probleme auf. Das erste Problem ist, dass nicht klar ist, wie man mit dem zentralen Punkt verfahren soll. In der Eigenstruktur könnte man ihn im Ursprung einfügen, aber wie die Matrixeinträge in der zugehörigen Zeile und Spalte der Colin-de-Verdière-Matrix aussehen sollen, ist unklar.

Dies ist aber kein gravierendes Problem, denn dafür ließe sich eine Lösung finden. Viel entscheidender ist das zweite Problem: Die Realisierung der konvexen Polytope stimmt nicht mit denen des regulären Falls überein. Die Unterschiede für $t = 3$ sind in Abbildung 6.18 zu sehen.

Sehen wir davon ab und nehmen die im vorigen Abschnitt erzeugte Eigenstruktur, so könnten wir aus ihr den zentralen Punkt löschen und für diese Eigenstruktur eine Colin-de-Verdière-Matrix erzeugen. Der so generierte Input ist allerdings für die Konstruktion der Colin-de-Verdière-Matrizen nicht valide. Der Grund hierfür ist, dass in der modifizierten Eigenstruktur mehrere Kanten beziehungsweise Facetten in einer Ebene liegen, wie in der rechten Illustration von Abbildung 6.18 zu sehen ist. Damit sind einerseits die Facettenpunkte keine Ecken des Polytops und andererseits haben die in einer Ebene liegenden Facetten dieselben dualen Punkte. Folglich fällt die gesamte Konstruktion in sich zusammen. Für $t = 3$ sind damit Matrixeinträge benachbarter Punkte auf der Nebendiagonalen

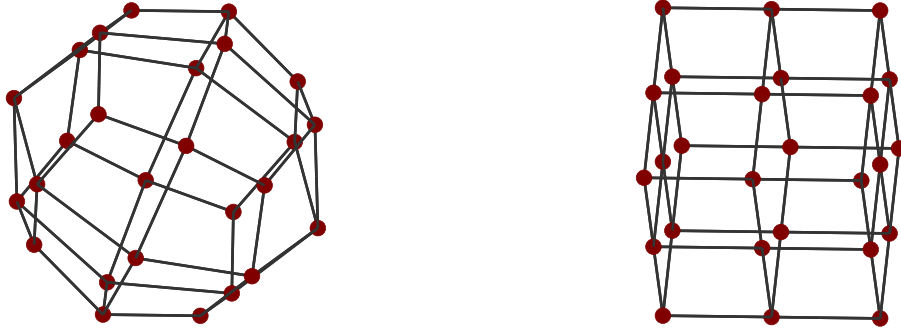


Abbildung 6.18: Konvexes Polytop, erzeugt aus der kombinatorischen Anordnung der Vereinigung von primalem und dualen Polytop des Hexaeders (links), und Eigenstruktur des regulären Falls ohne zentralen Punkt (rechts). Beide Realisierungen unterscheiden sich.

durch deren Definition

$$-\frac{|f_k - f_l|}{|p_i \times p_j|} = 0,$$

da in diesem Fall $f_k = f_l$ ist. Dies widerspricht jedoch der Definition 4.1 von Colin-de-Verdière-Matrizen und aus diesem Grund ist dieser Ansatz nicht zielführend.

Daher verfolgen wir eine andere Strategie. Wir wollen eine Colin-de-Verdière-artige Matrix $\tilde{C}$ konstruieren, die an die Matrix $\tilde{C}$ aus Gleichung (5.6) angelehnt ist und folgenden Eigenschaften haben soll:

Definition 6.8. Seien für $t = 2$ die Kontrollpunkte $\tilde{P}$ und der Graph $G = (V, E)$ wie in Definition 6.2, und seien für $t = 3$ die Kontrollpunkte $\tilde{P}$ und der Graph $G = (V, E)$ wie in Definition 6.5, und sei $n = |V|$. Eine Matrix $\tilde{C}$ heißt Colin-de-Verdière-artige Matrix zum Graphen G , falls die folgenden vier Eigenschaften gelten:

- E1 $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei n die Anzahl der Knoten von G ist. Jede Zeile und jede Spalte von $\tilde{C}$ korrespondiert damit mit einem Knoten von G .
- E2 Jede Zeile von $\tilde{C}$ summiert sich zu 1 auf.
- E3 Die Zeilen und Spalten von $\tilde{C}$ sind so angeordnet, dass

$$\tilde{C} \begin{bmatrix} P \\ E \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P \\ E \\ f \end{bmatrix} \text{ für } t = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{C} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix} \text{ für } t = 3$$

gilt. Damit ist einerseits die Ordnung der Zeilen und Spalten von $\tilde{C}$ festgelegt und andererseits sind die Spalten der Eigenstruktur aus Abschnitt 6.2.1 Eigenvektoren von $\tilde{C}$ zum Eigenwert $1/2$.

- E4 Sei A die Adjazenzmatrix von G . Dann soll

$$\tilde{C}_{(i,j)} = \begin{cases} > 0 & \text{für } i \neq j \text{ und } A_{(i,j)} = 1 \\ = 0 & \text{für } i \neq j \text{ und } A_{(i,j)} = 0 \end{cases}$$

gelten. Abgesehen von der Diagonalen, die beliebig sein kann, hat damit die Matrix $\tilde{C}$ dieselbe Nicht-Null-Struktur wie die Adjazenzmatrix A .

Hierzu müssen wir zunächst einige Aspekte erläutern. Die Matrix $\tilde{C}$ ist noch nicht die Subdivisionsmatrix S , auch wenn die obigen Eigenschaften dies vermuten lassen. Sie ist aber direkt eine normierte Matrix. Im Vergleich zu Colin-de-Verdière-Matrizen ist sie nicht symmetrisch, ebenso wie die normierte Matrix der Gleichung (5.6) aus Kapitel 5 nicht mehr symmetrisch war.

Eine weitere Änderung zum vorangegangenen Kapitel ist, dass die konstruierte Eigenstruktur den Eigenraum zum Eigenwert $1/2$ und nicht zum Eigenwert 0 aufspannt. Der Grund dahinter ist, dass wir das Shiften des Spektrums im nächsten Abschnitt ebenfalls anders gestalten müssen und daher für die Matrix $\tilde{C}$ ein anderes Spektrum benötigen.

Wir können hier zudem das Spektrum der Matrix $\tilde{C}$ nicht kontrollieren. Die Eigenschaften C2 und C3 müssen für die Matrix $\tilde{C}$ dieses Kapitels also nicht gelten. Generell werden wir viele der in Abschnitt 2.4 beschriebenen eigenwertbezogenen Qualitätskriterien im Abschnitt 6.3 nicht beweisen können, weshalb der hier beschriebene Ansatz auch experimentell ist. Was aber im Bezug auf die Colin-de-Verdière-Matrizen besteht bleibt, ist die (Nicht-)Null-Struktur der Eigenschaft C1 mit invertiertem Vorzeichen, welche in E4 umgesetzt wurde.

Die Konstruktion der Matrix $\tilde{C}$ ist in Algorithmus 15 beschrieben. Diese erscheint zunächst aufwendig und wenig motiviert, wir werden die Eigenschaften der Konstruktion aber in den nächsten Abschnitten benötigen. Die einzelnen Schritte erläutern wir im Folgenden. Außerdem beziehen sich alle Variablen und Matrizen dieses Abschnitts auf die in Algorithmus 15.

Generelle Struktur und Initialisierung Wir beschreiben hier grob die Struktur des Algorithmus, um einen ersten Eindruck von der Funktionsweise zu vermitteln. Die einzelnen Schritte sind dann in den folgenden Paragraphen ausgearbeitet.

Der Algorithmus ist im Wesentlichen in drei Schritte unterteilt: die Initialisierung, die Konstruktion der Matrix $\overline{M}$ und die Konstruktion der Matrix $\overline{B}$. Im Initialisierungsschritt wird zunächst zwischen dem Fall $t = 2$ und $t = 3$ unterschieden. Diese Unterscheidung bezieht sich vor allem auf die Punkte $\tilde{P}$ und ist rein technischer Natur, um den Algorithmus nicht doppelt beschreiben zu müssen. Die Punkte $\tilde{P}$ sind die Realisierung des Graphen G aus dem vorigen Abschnitt und unterscheiden sich je nach Typ. Wichtig zu bemerken ist, dass die Eckpunkte P an einigen Stellen des Algorithmus explizit verwendet werden. Die Variable P beschreibt also immer die Eckpunkte und damit einen Teil von $\tilde{P}$. Zudem werden wir die Einzelelemente der Struktur von G , also die Vierecke beziehungsweise Hexaeder, betrachten. Diese nennen wir im weiteren Verlauf auch *Objekte*, um die ständige Doppelbenennung zu vermeiden.

Im zweiten Teil des Algorithmus wird die Matrix $\overline{M}$ konstruiert. Für diese wird für jedes Objekt, also für jedes Viereck für $t = 2$ beziehungsweise für jedes Hexaeder für $t = 3$, eine Colin-de-Verdière-Matrix erzeugt. Diese Colin-de-Verdière-Matrizen werden dann in der Matrix $\overline{M}$ zusammengefasst. Diese hat $ka > n$ Zeilen. Die Vierecke beziehungsweise Hexaeder teilen sich Punkte mit anderen Vierecken beziehungsweise Hexaedern. Diese Dopplung erhöht die Anzahl der Zeilen von $\overline{M}$. Multiplizieren wir die Matrix $\overline{M}$ also mit den Kontrollpunkten $\tilde{P}$, so werden einige Kontrollpunkte auf mehrere Kontrollpunkte abgebildet. Die Eckpunkte werden nur auf einen Punkt, die Kantenpunkte auf zwei Punkte, die Facettenpunkte auf (Anzahl der Ecken der Facette) Punkte, und der Volumenpunkt auf (Anzahl der Hexaeder) Punkte abgebildet.

Diese Mehrfachabbildung wird dann im letzten Schritt durch die Matrix $\overline{B}$ eingefangen. Die Kopien der Punkte werden so gewichtet, dass sie zusammen auf die Hälfte des Ausgangspunkts abbilden. Diesen Vorgang samt Begründung beschreiben wir an entsprechender Stelle.

Da die Konstruktionen der Matrix $\overline{M}$ und $\overline{B}$ des Algorithmus 15 umfangreich ist, beschreiben wir diese in den nächsten beiden Teilabschnitten. In diesen beweisen wir zudem einige Aussagen der in den Teilabschnitten vorkommenden Objekte.

Konstruktion der Matrix $\overline{M}$

In diesem Teilabschnitt beschreiben wir die Konstruktion der Matrix M aus Algorithmus 15, wir betrachten also konkret die Zeilen 13–23 des Algorithmus 15. Alle Bezeichnungen in diesem Teilabschnitt beziehen sich dabei auf die des Algorithmus 15.

Wir beginnen mit dem Index i aus Zeile 13. Dieser läuft mit der for-Schleife über alle Eckpunkte beziehungsweise über alle Objekte (Vierecke oder Hexaeder) des Graphen G . Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ wird in Zeile 14 die Matrix I erstellt. Diese soll im Wesentlichen die Indizes der Punkte des Vierecks beziehungsweise des Hexaeders enthalten. Für ein Viereck sind dies vier Punkte, bestehend aus einem Eck-, zwei Kanten- und einem Facettenpunkt. Für ein Hexaeder sind es acht Punkte, bestehend aus einem Eck-, drei Kanten-, drei Facetten- und dem Volumenpunkt. Diese

Algorithmus 15: Konstruktion von $\tilde{C}$

Data: Graph $\mathbf{G}$ eines Initialelements, kombinatorischer Graph $\mathbf{G}_K$ des Initialelements, Typ t des Initialelements und Kontrollpunkte $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times t}$

Result: Matrix $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

```

1 begin
2   if  $t == 2$  then
3      $a := 4$ ;
4      $\text{Objekt} := \text{Viereck}$ ;
5      $\tilde{P} = [P^T, E^T, f^T]^T$ ;
6   else if  $t == 3$  then
7      $a := 8$ ;
8      $\text{Objekt} := \text{Hexaeder}$ ;
9      $\tilde{P} = [P^T, E^T, F^T, o^T]^T$ ;
10   $k := \text{Anzahl der Objekte in } \mathbf{G}$ ;
11   $\overline{M} := \text{Nullmatrix der Dimension } k \cdot a \times n$ ;
12   $\overline{I} := \text{Nullmatrix der Dimension } k \cdot a \times 2$ ;
13  for  $i = 1 : k$  do
14     $I := \text{Erstelle } I \text{ wie folgt: Bestimme die sortierten Zeilennummern der Ecken des } i\text{-ten Objekts aus } \tilde{P}$ 
      mit  $I \in \{1, \dots, n\}^a$ . Damit ist  $I_{(1)} = i$  der Index des Eckpunkts,  $I_{(2:t+1)}$  die Indizes der Kantenpunkte,
      für  $t = 3$ :  $I_{(5:7)}$  die Indizes der Facettenpunkte und  $I_{(a)} = n$  der Index des zentralen Facetten-
      beziehungsweise Volumenpunkts;
15     $P' := \tilde{P}_{(I,:)} - \frac{1}{2}P_{(i,:)};$ 
16    if  $t == 2$  then
17      | Skaliere  $P'$  so, dass der Umkreis des Vierecks der Einheitskreis ist;
18     $M := \text{Erstelle eine Colin-de-Verdière-Matrix zum Objekt mit den Ecken } P' \text{ nach Kapitel 4}$ ;
19     $N := \text{diag}\left(1./\left(\sum_j M_{(:,j)}\right)\right);$ 
20     $M' := NM$ ;
21     $\overline{M}_{(a(i-1)+1:ai,I)} = M'$ ;
22     $\overline{I}_{(a(i-1)+1:ai,1)} = I$ ;
23     $\overline{I}_{(a(i-1)+1:ai,2)} = i$ ;
24   $\overline{B} = \text{Nullmatrix der Dimension } n \times k \cdot a$ ;
25  for  $j = 1 : n$  do
26     $K := \text{Finde die Indizes der Zeilen, für die } \overline{I}_{(:,1)} = j \text{ ist}$ ;
27     $K' := \overline{I}_{(K,2)}$ ;
28     $\hat{P} := \text{Verschiebe die Kontrollpunkte } P_{(K',:)} \text{ wie im Verlauf des Abschnitts beschrieben und setze } \hat{P} \text{ als}$ 
      diese verschobenen und skalierten Punkte;
29     $B := \text{Erstelle die Colin-de-Verdière-Matrix der Punkte } \hat{P} \text{ mit der kombinatorischen Anordnung von } \mathbf{G}_K$ 
      nach Kapitel 4. Dies kann eine Colin-de-Verdière-Matrix der folgenden Dimensionen sein: Dimension
      0 für  $\hat{P}$  repräsentiert einen Punkt in  $\mathbf{G}_K$ , Dimension 1 für  $\hat{P}$  repräsentiert eine Linie in  $\mathbf{G}_K$ ,
      Dimension 2 für  $\hat{P}$  repräsentiert eine Facette in  $\mathbf{G}_K$  und für  $t = 3$  Dimension 3 für  $\hat{P}$  repräsentiert
      den ganzen Graphen  $\mathbf{G}_K$ ;
30     $B' := \sum_l B_{(l,:)};$ 
31     $\overline{B}_{(j,K)} := \sum_{B'} B'$ ;
32   $\tilde{C} := \overline{B} \cdot \overline{M}$ ;
33 return  $\tilde{C}$ ;

```

werden im Weiteren mit

$$p, e_1, e_2 \text{ und } f \text{ für } t = 2 \quad \text{beziehungsweise} \quad p, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3 \text{ und } o \text{ für } t = 3$$

bezeichnet.

Die Kontrollpunkte dieser Objekte werden mit Zeile 15 um den Wert $P_{(i,:)} / 2 =: p/2$ verschoben (und für $t = 2$ mit Zeile 17 skaliert). Diese verschobenen (und gegebenenfalls skalierten) Punkte bezeichnen wir mit

$$P' := r \left(\tilde{P}_{(I,:)} - \frac{1}{2} P_{(i,:)} \right) \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{für } t = 2 \quad \text{und} \quad P' := \tilde{P}_{(I,:)} - \frac{1}{2} P_{(i,:)} \quad \text{für } t = 3.$$

Die obige Notation ist dabei zeilenweise zu verstehen. Jede Zeile von $\tilde{P}_{(I,:)}$ wird also mit dem Vektor $-\frac{1}{2} P_{(i,:)}$ addiert. Damit liegt der Ursprung im jeweiligen Objekt und für $t = 2$ auf der Strecke $(p - p/2, f - p/2)$ beziehungsweise für $t = 3$ auf der Strecke $(p - p/2, o - p/2)$. Die verschobenen Punkte bezeichnen wir mit

$$p', e'_1, e'_2 \text{ und } f' \quad \text{für } t = 2 \quad \text{beziehungsweise} \quad p', e'_1, e'_2, e'_3, f'_1, f'_2, f'_3 \text{ und } o' \quad \text{für } t = 3.$$

Eine Illustration für $t = 2$ findet sich in Abbildung 6.19 und für $t = 3$ in Abbildung 6.20.

Wir erstellen anschließend in Zeile 18 eine Colin-de-Verdière-Matrix M dieses verschobenen Objektes, also zu den Kontrollpunkten P' .

Hier betrachten wir zunächst den Fall $t = 2$. Das verschobene Viereck aus Zeile 15 liegt so, dass der Mittelpunkt der Strecke zwischen p' und f' im Ursprung liegt. In Zeile 17 skalieren wir das Viereck so, dass der Abstand von f' und p' zum Ursprung gerade 1 ist. Mit Lemma 6.3 hat das Ausgangsviereck in den beiden Punkten e_1 und e_2 einen rechten Winkel. Mit dem Satz des Thales liegen damit die beiden verschobenen und skalierten Kantenpunkte ebenfalls auf dem Einheitskreis. Das verschobene und skalierte Viereck ist zudem konvex, denn nach Lemma 6.4 ist das Ausgangsviereck konvex und die Verschiebung und Skalierung erhält diese Eigenschaft. Eine Illustration lässt sich in Abbildung 6.22 finden.

So verschoben können wir das Viereck als das duale Polytop aus Theorem 4.10 interpretieren und mit diesem dessen Colin-de-Verdière-Matrix M erzeugen. Diese ist auch eine Colin-de-Verdière-Matrix für das unskalierte aber verschobene Viereck, bestehend aus den Punkten P'/r (mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$), denn

$$M \frac{1}{r} P' = \frac{1}{r} M P' = 0 \frac{1}{r} = 0 \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Für $t = 3$ können wir die Konstruktion aus Theorem 4.13 verwenden. Das verschobene Hexaeder ist nach Lemma 6.7 konvex und nach der Verschiebung enthält es den Ursprung und daher sind die Bedingungen von Theorem 4.13 erfüllt. Die Ecken des dualen Polytops, die für die Konstruktion benötigt werden, können wie folgt berechnet werden.

Seien die Punkte p', e'_1, e'_2 und f' oder die Punkte e', f'_1, f'_2 und o' die Eckpunkte einer Facette des Hexaeders mit den Koordinaten aus den Zeilen von P' . Dann erhalten wir die Koordinaten des dualen Punkts der Facette über das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} p'^T \\ e_1'^T \\ e_2'^T \\ f'^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{bmatrix} e'^T \\ f_1'^T \\ f_2'^T \\ o'^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Damit haben wir alle benötigten Punkte zur Erzeugung der Colin-de-Verdière-Matrix M für $t = 3$.

Die Colin-de-Verdière-Matrix M wird anschließend in Zeile 20 analog zur Gleichung (5.6) normiert. Die normierte Matrix wird dabei als M' bezeichnet. Die Normierung ist wohldefiniert, da nach Satz 4.11 und Satz 4.14 die Zeilensummen von M negativ sind.

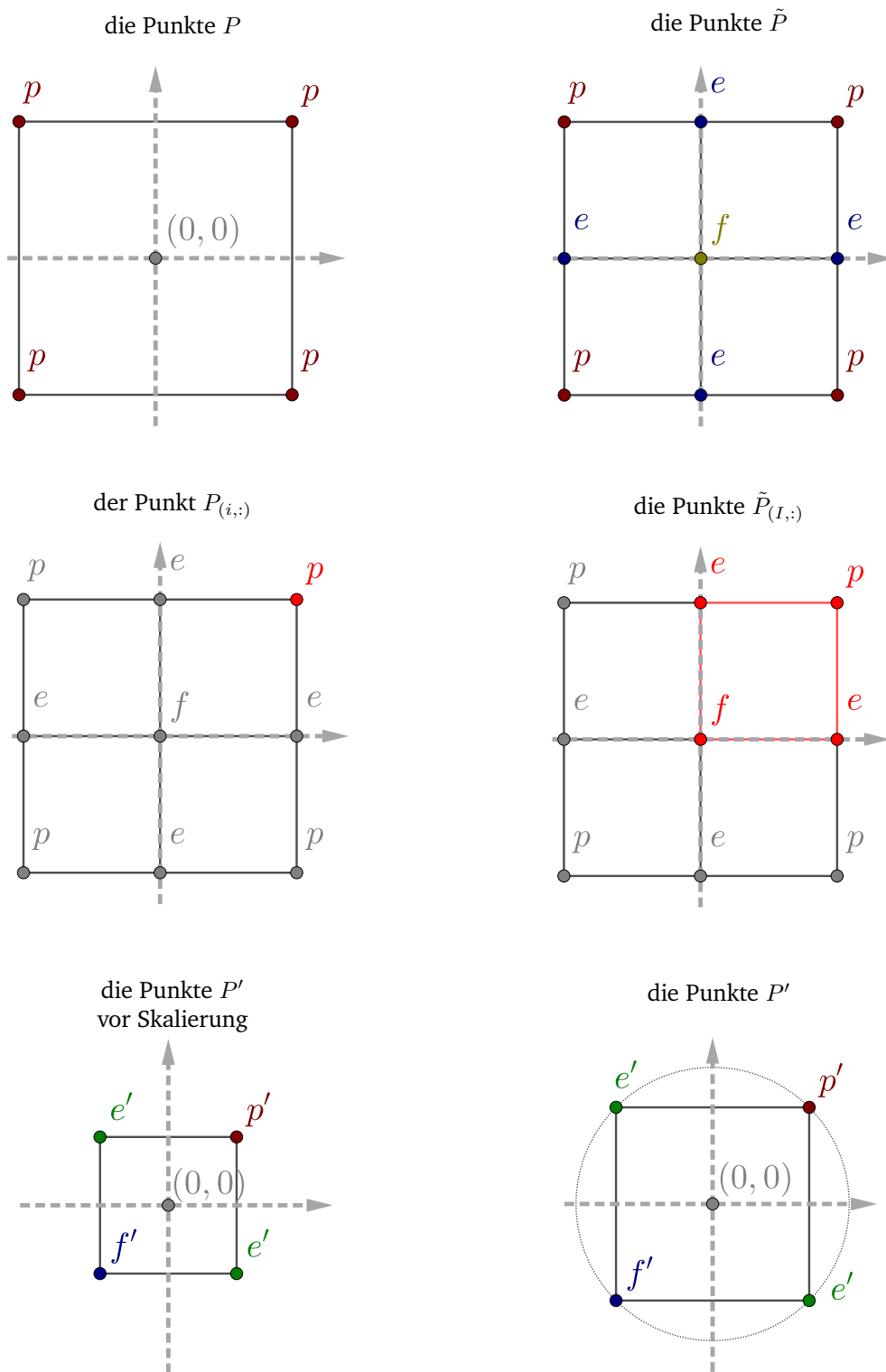


Abbildung 6.19: Beispielhafte Illustration der verschiedenen Kontrollpunkte aus Algorithmus 15 zur Konstruktion von M für $t = 2$. Die Punkte P sind die Eckpunkte des 2-Polytops. Die Punkte $\tilde{P}$ wurden mit Algorithmus 13 erzeugt und sind die Eingabe des Algorithmus 15. Mit der for-Schleife aus Zeile 13 wird jeder Punkt $P_{(I,:)}$ angesteuert und mit der Matrix I werden die Punkte $\tilde{P}_{(I,:)}$ des zu $P_{(I,:)}$ gehörenden Vierecks bestimmt. Diese werden anschließend verschoben und skaliert und mit P' bezeichnet. Für diese Punkte P' wird abschließend die Colin-de-Verdière-Matrix M generiert.

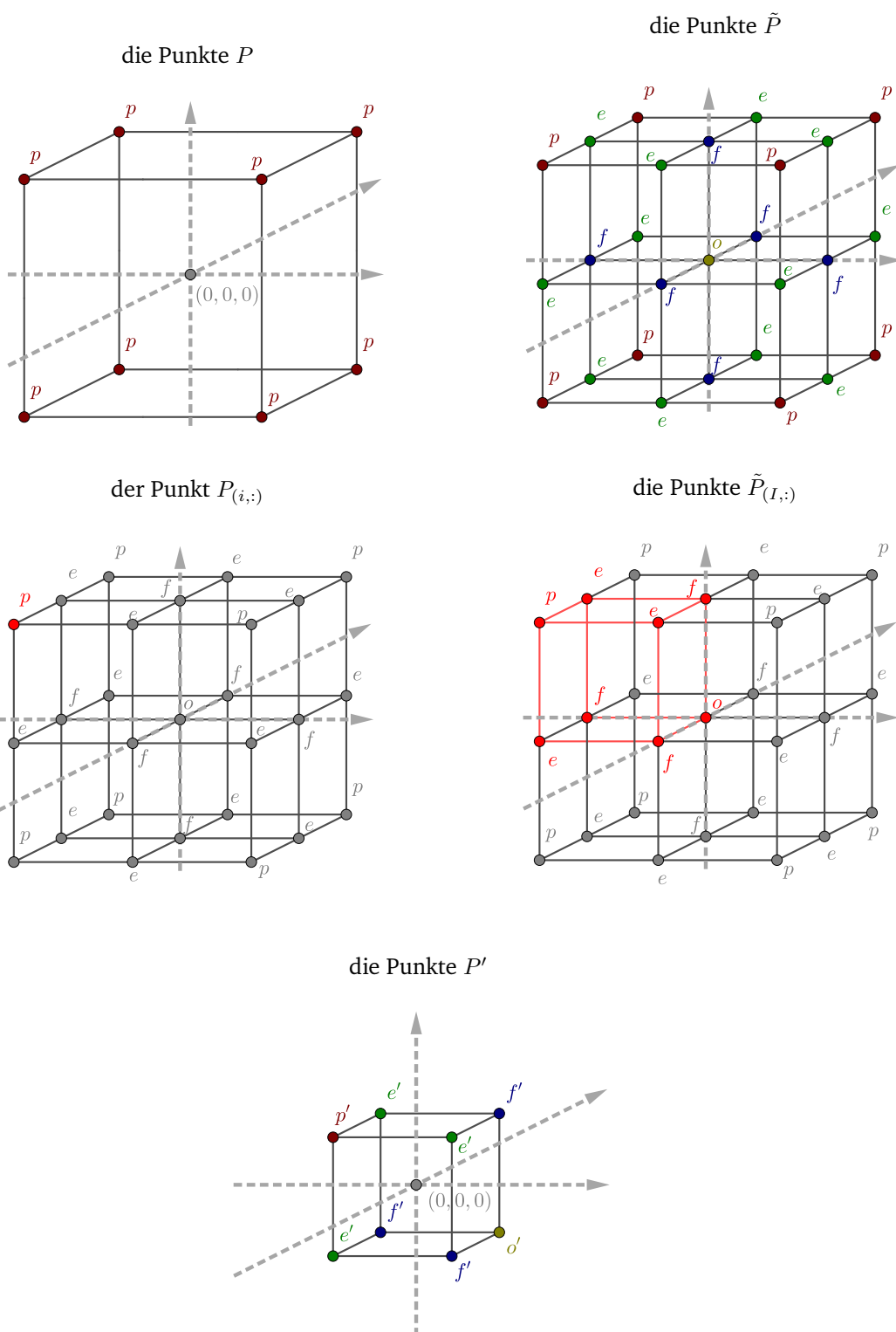


Abbildung 6.20: Zur Abbildung 6.19 analoge beispielhafte Abbildung der verschiedenen Kontrollpunkte für $t = 3$. Hier müssen die Punkte P' im letzten Schritt jedoch nicht skaliert werden.

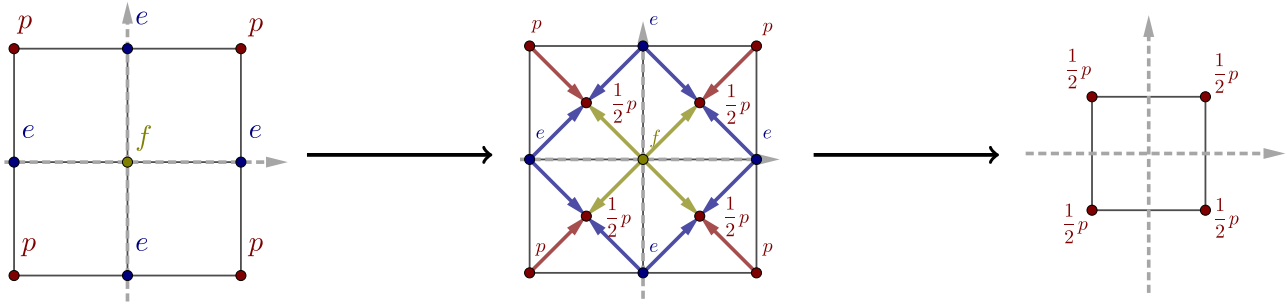


Abbildung 6.21: Beispielhafte Illustration des Effekts der Matrix $\bar{M}$. Links sieht man beispielhaft die Punkte $\tilde{P}$. Diese werden mit $\bar{M}\tilde{P}$ auf die Punkte des rechten Bildes abgebildet. Dabei liegen mehrere Punkte übereinander. Die Zuordnung zwischen den Punkten $\tilde{P}$ und den Punkten $\bar{M}\tilde{P}$, die in der Indexmatrix $\bar{I}$ codiert ist, ist im mittleren Bild zu sehen.

Diese normierte Matrix bildet das unverschobene Objekt, also die Punkte $\tilde{P}_{(I,:)}$, auf den jeweiligen Punkt $P_{(i,:)} / 2 = p^T / 2$ ab, denn

$$M' \tilde{P}_{(I,:)} = M' \left(\tilde{P}_{(I,:)} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p^T \\ \vdots \\ p^T \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p^T \\ \vdots \\ p^T \end{bmatrix} \right) = M' \left(\tilde{P}_{(I,:)} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p^T \\ \vdots \\ p^T \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{2} M' \begin{bmatrix} p^T \\ \vdots \\ p^T \end{bmatrix} = M' P' + \frac{1}{2} M' \begin{bmatrix} p^T \\ \vdots \\ p^T \end{bmatrix}.$$

Der erste Summand ist $\vec{0}$, da die Spalten von P' den Kern von M' aufspannen (vgl. Theorem 4.10 für $t = 2$ und Theorem 4.13 für $t = 3$) und der zweite Summand ist $\frac{1}{2}[p \dots p]^T$, da sich die Zeilen von M' zu 1 aufsummieren. Wir erhalten damit

$$M' \tilde{P}_{(I,:)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p^T \\ \vdots \\ p^T \end{bmatrix}.$$

Aus den normierten Colin-de-Verdière-Matrizen M' aller Objekte konstruieren wir in Zeile 21 die Matrix $\bar{M}$. Die Zeilen von $\bar{M}$ korrespondieren mit den Zeilen der Matrizen M' , die untereinander angeordnet werden. Für die Spalten werden die Matrizen M' so in $\bar{M}$ eingefügt, dass für das Produkt $\bar{M}\tilde{P}$ die entsprechenden Einträge von $\bar{M}$ mit den zugehörigen Kontrollpunkten aus $\tilde{P}$ multipliziert werden. Insgesamt erhalten wir

$$\bar{M}\tilde{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_{(1,:)}^T & \dots & P_{(1,:)}^T & \dots & P_{(k,:)}^T & \dots & P_{(k,:)}^T \end{bmatrix}^T.$$

Die Matrix $\bar{M}$ bildet damit jedes Objekt auf den jeweiligen Punkt $P_{(i,:)} / 2$ ab. Da die Eckpunkte und der Kantenpunkt für $t = 2$ und die Eckpunkte, die Kantenpunkte und der Volumenpunkt für $t = 3$ in mehreren Objekten liegen, werden von diesen Punkten durch die Matrix $\bar{M}$ „Kopien“ erstellt. Die Matrix $\bar{M}$ hat also mehr Zeilen als Spalten und die Matrix $\bar{M}\tilde{P}$ hat mehr Zeilen als die Matrix $\tilde{P}$. Wenden wir also die Matrix $\bar{M}$ auf die Kontrollpunkte $\tilde{P}$ an, so ist das Bild eine Struktur, die dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$, also den Kontrollpunkten P (bis auf Skalierung) entspricht. In diesem Bild liegen zudem mehrere Kontrollpunkte übereinander. Eine Illustration für $t = 2$ findet sich in Abbildung 6.21.

Die Matrix $\bar{I}$, deren Werte in den Zeilen 22 und 23 festgelegt werden, speichert die Information der Zuordnung. Für jede Zeile in $\bar{I}$ ist im ersten Eintrag notiert, zu welchem Kontrollpunkt aus $\tilde{P}$ die entsprechende Zeile aus $\bar{M}$ gehört, und im zweiten Eintrag ist notiert, aus welchem Objekt die Zeile in $\bar{M}$ hervorgegangen ist.

Damit haben wir die Konstruktion der Matrix $\bar{M}$ beschrieben. Bevor wir im nächsten Teilabschnitt die Konstruktion der Matrix $\bar{B}$ betrachten, beweisen wir im Folgenden einige Aussagen über die normierte Colin-de-Verdière-Matrix M' , die wir im weiteren Verlauf benötigen.

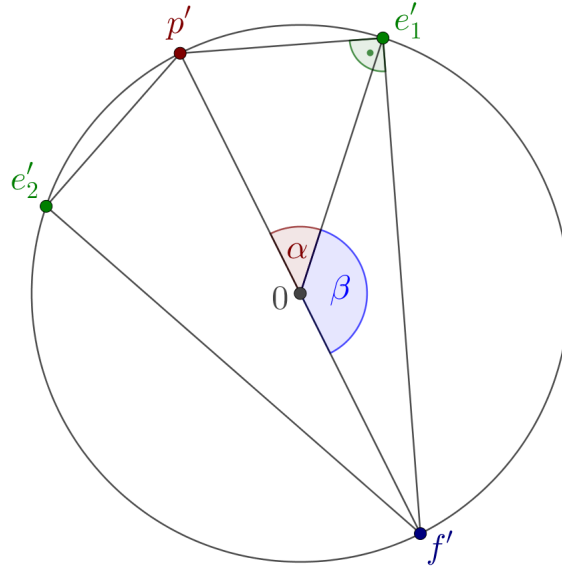


Abbildung 6.22: Die im Beweis von Lemma 6.9 verwendeten Elemente inklusive des verschobenen Vierecks.

Sortieren wir für $t = 2$ die Zeilen und Spalten der Matrix M' nach der Reihenfolge p, e_1, e_2, f , so hat sie die Gestalt

$$M' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} ? & ? & ? & 0 \\ \hline a & ? & 0 & b \\ a & 0 & ? & b \\ \hline 0 & ? & ? & ? \end{array} \right],$$

für welche die folgende Aussage gilt:

Lemma 6.9. Sei für $t = 2$ die Matrix M' eine normierte Colin-de-Verdière-Matrix in der obigen Form, konstruiert nach Algorithmus 15. Dann ist $a = b = 1/2$.

Beweis. Ein Viereck, für das eine Colin-de-Verdière-Matrix erstellt wird, besitzt die vier Ecken p, e_1, e_2 und f . Die um $-p/2$ verschobenen und um den Wert $r \in \mathbb{R}_{>0}$ skalierten Ecken des verschobenen und skalierten Vierecks definieren wir als p', e'_1, e'_2 und f' .

Wir betrachten zunächst den Wert a für die zweite Zeile der Matrix M' . Der Wert a für die dritte Zeile berechnet sich komplett analog zum Wert a der zweiten Zeile.

Zunächst gilt

$$f' = \left(0 - \frac{1}{2}p\right)r = -p'.$$

Damit ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen p' und f' der Ursprung und die Ortsvektoren beider Punkte haben dieselbe Länge. Das Dreieck (p', e'_1, f') hat per Konstruktion der Eigenstruktur aus dem vorigen Abschnitt einen rechten Winkel in e'_1 . Mit dem Satz des Thales gilt damit für die Länge des Ortsvektors von e'_1

$$|e'_1| = |p'|.$$

Die Ortsvektoren der drei Punkte p', e'_1 und f' haben damit alle dieselbe Länge.

Sei $\alpha = \angle(p', e'_1)$ und $\beta = \angle(e'_1, f')$. Da die Strecke (p', f') den Ursprung enthält, ist damit $\alpha + \beta = \pi$.

Die Zeilensumme c der zweiten Zeile von M ist aufgrund der Konstruktion in Theorem 4.10

$$c := -\frac{1}{|p' \times e'_1|} - \frac{1}{|e'_1 \times f'|} + \frac{\cos(\alpha)}{|e'_1|^2 \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{|e'_1|^2 \sin(\beta)}.$$

Mit den identischen Längen der Ortsvektoren der Punkte p' , e'_1 und f' erhalten wir

$$c = \frac{\sin(\beta)(\cos(\alpha) - 1) + \sin(\alpha)(\cos(\beta) - 1)}{|e'_1|^2 \sin(\alpha) \sin(\beta)}.$$

Damit ist der Eintrag a der zweiten Zeile von M'

$$a = \frac{-\frac{1}{|e'_1 \times p'|}}{c} = -\frac{|e'_1|^2 \sin(\alpha) \sin(\beta)}{|p'| |e'_1| \sin(\alpha) (\sin(\beta)(\cos(\alpha) - 1) + \sin(\alpha)(\cos(\beta) - 1))}$$

und weiter

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\frac{1}{|e'_1 \times p'|}}{c} = -\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta)(\cos(\alpha) - 1) + \sin(\alpha)(\cos(\beta) - 1)} \\ &= -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)(\cos(\alpha) - 1) + \sin(\alpha)(\cos(\pi - \alpha) - 1)}. \end{aligned}$$

Mithilfe eines Computeralgebrasystems erhalten wir

$$a = \frac{1}{2}.$$

Den Wert b erhalten wir auf analoge Weise, indem wir $|e'_1 \times p'|$ durch $|e'_1 \times f'|$ ersetzen. Eine Illustration der verschiedenen Punkte und Winkel findet sich in Abbildung 6.22. $\square$

Sortieren wir für $t = 3$ die Zeilen und Spalten der Matrix M' nach der Reihenfolge $p, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, o$, so hat sie die Gestalt

$$M' = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & ? & 0 & 0 & ? & ? & ? & 0 \\ a & 0 & ? & 0 & ? & ? & ? & 0 \\ a & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & ? & ? & 0 & 0 & b \\ 0 & ? & ? & ? & 0 & ? & 0 & b \\ 0 & ? & ? & ? & 0 & 0 & ? & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

für welche die folgende Aussage gilt:

Lemma 6.10. *Sei für $t = 3$ die Matrix M' eine normierte Colin-de-Verdière-Matrix in der obigen Form, konstruiert nach Algorithmus 15. Dann ist $a = b = 1/2$.*

Beweis. Für den Beweis dieses Lemmas benötigen wir einige Bezeichnungen, die wir im Folgenden erklären. Das Ursprungshexaeder besteht aus acht Punkten. Davon ist ein Punkt ein Eckpunkt, drei Punkte sind Kantenpunkte, drei Punkte sind Facettenpunkte und ein Punkt ist ein Volumenpunkt. Diese bezeichnen wir mit

$$p, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3 \text{ und } o.$$

Diese Punkte werden um $-p/2$ verschoben und für diese verschobenen Punkte wird die Colin-de-Verdière-Matrix M erstellt. Die verschobenen Punkte bezeichnen wir mit

$$p', e'_1, e'_2, e'_3, f'_1, f'_2, f'_3, \text{ und } o'.$$

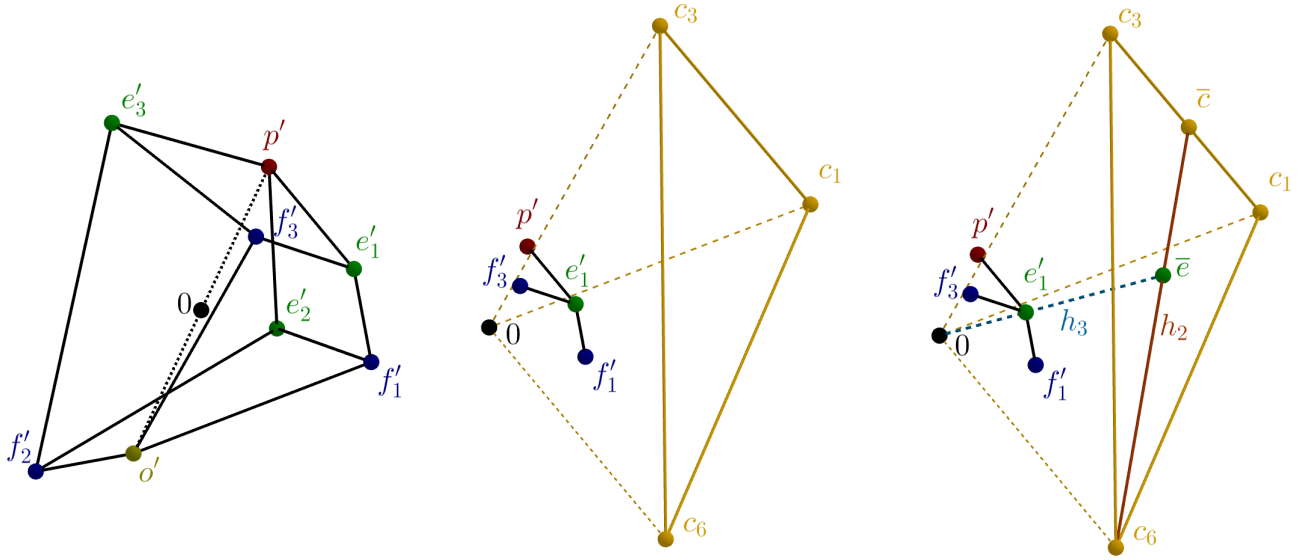


Abbildung 6.23: Verschobenes Hexaeder mit den acht verschobenen Punkten (links), ein Teil des verschobenen Hexaeders und das Tetraeder T zum Kantenpunkt e'_1 (Mitte), die Höhen h_2 und h_3 sowie die Punkte $\bar{e}$ und $\bar{c}$ (rechts).

Das verschobene Hexaeder besitzt die sechs Facetten

$$(p', e'_1, f'_1, e'_2), \quad (p', e'_2, f'_2, e'_3), \quad (p', e'_3, f'_3, e'_1), \quad (o', f'_1, e'_2, f'_2), \quad (o', f'_2, e'_3, f'_3) \quad \text{und} \quad (o', f'_3, e'_1, f'_1).$$

Für die Konstruktion der Colin-de-Verdière-Matrix benötigen wir das zum verschobenen Hexaeder duale Polytop. Dieses besitzt sechs Ecken, die zu den eben beschriebenen sechs Facetten gehören. Diese sechs Eckpunkte bezeichnen wir mit $c_1, \dots, c_6$. Die Zuordnung geschieht in der obigen Reihenfolge. Wir werden zudem das Tetraeder benötigen, das aus der konvexen Hülle der Punkte $0, c_1, c_3$ und c_6 hervorgeht. Wir definieren daher

$$T := \text{conv}(0, c_1, c_3, c_6).$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir mit der Berechnung des Werts von a beginnen. Wir wählen zunächst die zweite Zeile von M' zum Kantenpunkt e_1 . Die Argumentation für die anderen Zeilen der Kantenpunkte e_2 und e_3 verläuft analog mit den jeweils zugehörigen anderen Punkten. Wir führen hier nur den Beweis für die zweite Zeile der Matrix M' durch. Der Wert zu a der Colin-de-Verdière-Matrix M ergibt sich mit Theorem 4.13 durch

$$-\frac{|c_1 - c_3|}{|p' \times e'_1|}.$$

Dieser Wert wird anschließend durch die Matrix N normiert. Mit Theorem 4.14 ist die Zeilensumme von $M_{(2,:)}$ gerade $-6 \text{vol}(T)$, denn c_1, c_3 und c_6 sind die dualen Punkte zu den Facetten, an denen e'_1 liegt. Damit ergibt sich

$$a = \frac{|c_1 - c_3|}{6 \text{vol}(T) |p' \times e'_1|}. \quad (6.3)$$

Eine Illustration der für die Berechnung von a relevanten Punkte inklusive des Tetraeders T findet sich in Abbildung 6.23. In einem nächsten Schritt definieren wir das Dreieck

$$M := \text{conv}(c_1, c_3, c_6)$$

und h_3 als die Höhe des Lots des Ursprungs auf das Dreieck M im Tetraeder T . Wenden wir die Formel des Volumens eines Tetraeders auf T an, so erhalten wir

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{3} h_3 \text{vol}(M).$$

Wir definieren zudem h_2 als die Höhe des Lots von c_6 auf die Strecke (c_1, c_3) . Damit erhalten wir für den Flächeninhalt des Dreiecks

$$\text{vol}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} |c_1 - c_3| h_2.$$

Setzen wir diese Zusammenhänge in die Formel (6.3) von a ein, so erhalten wir

$$a = \frac{|c_1 - c_3|}{6 \text{vol}(\mathbf{T}) |p' \times e'_1|} = \frac{|c_1 - c_3|}{6 \frac{1}{3} h_3 \text{vol}(\mathbf{M}) |p' \times e'_1|} = \frac{|c_1 - c_3|}{6 \frac{1}{3} h_3 \frac{1}{2} |c_1 - c_3| h_2 |p' \times e'_1|} = \frac{1}{h_3 h_2 |p' \times e'_1|}.$$

Eine Illustration der beiden Höhen findet sich in Abbildung 6.23.

Wir betrachten im nächsten Schritt die Höhe h_3 . Die Ebene $\mathbf{M}$, in der die Punkte c_1 , c_3 und c_6 liegen, wird mit Definition 3.6 des dualen Polytops durch die Gleichung

$$\langle e'_1, x \rangle = 1$$

erzeugt. Mit der hesseschen Normalenform ist damit der Abstand der Ebene $\mathbf{M}$ zum Ursprung und damit die Höhe h_3

$$h_3 = \frac{1}{|e'_1|}.$$

Wir definieren $\alpha = \angle(p', e'_1)$ als den Winkel zwischen den Ortsvektoren von p' und e'_1 . Dann erhalten wir für a

$$a = \frac{|c_1 - c_3|}{6 \text{vol}(\mathbf{T}) |p' \times e'_1|} = \frac{1}{h_3 h_2 |p' \times e'_1|} = \frac{1}{h_3 h_2 |p'| |e'_1| \sin(\alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{|e'_1|} h_2 |p'| |e'_1| \sin(\alpha)} = \frac{1}{h_2 |p'| \sin(\alpha)}. \quad (6.4)$$

Damit müssen wir nur noch die Höhe h_2 bestimmen. Für diese definieren wir zunächst eine weitere Ebene

$$\mathbf{M}' := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p' \times e'_1, x \rangle = 0\}.$$

In dieser Ebene liegen alle für die Bestimmung von h_2 relevanten Punkte, was wir im Folgenden beschreiben. Für diese Ebenengleichung gilt

$$\langle p' \times e'_1, p' \rangle = 0, \quad \langle p' \times e'_1, e'_1 \rangle = 0, \quad \langle p' \times e'_1, o' \rangle = \langle p' \times e'_1, -p' \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle p' \times e'_1, \vec{0} \rangle = 0,$$

die vier Punkte $\vec{0}$, e'_1 , o' und p' sind also Teil der Ebene $\mathbf{M}'$.

Der Vektor $p' - e'_1$ ist durch die Konstruktion der Eigenstruktur orthogonal zu einer weiteren Ebene, die durch die Punkte e'_1 , f'_1 und f'_3 aufgespannt wird. Wir können daher den zur Facette (o', f'_3, e'_1, f'_1) dualen Punkt c_6 durch

$$c_6 = \varphi (p' - e'_1) \quad \text{mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

darstellen. Setzen wir diesen in die Ebenengleichung ein, so erhalten wir

$$\langle p' \times e'_1, c_6 \rangle = \langle p' \times e'_1, \varphi (p' - e'_1) \rangle = \langle p' \times e'_1, \varphi p' \rangle - \langle p' \times e'_1, \varphi e'_1 \rangle = 0 - 0 = 0,$$

der Punkt c_6 liegt also ebenfalls in der konstruierten Ebene $\mathbf{M}'$.

Die beiden Vektoren $c_1 - c_3$ und $p' \times e'_1$ zeigen, wie im Beweis von Theorem 4.13 besprochen, in dieselbe Richtung. Mit dieser Argumentation und weil zudem c_6 Teil der konstruierten Ebene $\mathbf{M}'$ ist, ist die Linie zu h_2 , also das Lot von c_6 auf die Strecke (c_1, c_3) , ebenfalls Teil der Ebene $\mathbf{M}'$. Den Lotpunkt bezeichnen wir im Folgenden mit $\bar{c}$.

Zudem ist der Punkt

$$\bar{e} := \frac{1}{|e'_1|^2} e'_1$$

Teil der Ebene $\mathbf{M}'$ und Teil der Ebene, die durch die drei dualen Punkte c_1 , c_3 und c_6 aufgespannt wird. Er liegt also auf der Strecke $(0, \bar{e})$ und gleichzeitig auf der Strecke $(c_6, \bar{c})$, und da der Ortsvektor von e'_1 in dieselbe Richtung wie ein Normalenvektor der Ebene $\mathbf{M}$ der drei dualen Punkte c_1 , c_3 und c_6 zeigt, sind diese beiden Strecken orthogonal zueinander. Damit haben wir alle benötigten Informationen, um h_2 zu berechnen. Eine Illustration der Punkte und aller im Folgenden genutzten Begriffe findet sich in Abbildung 6.24.

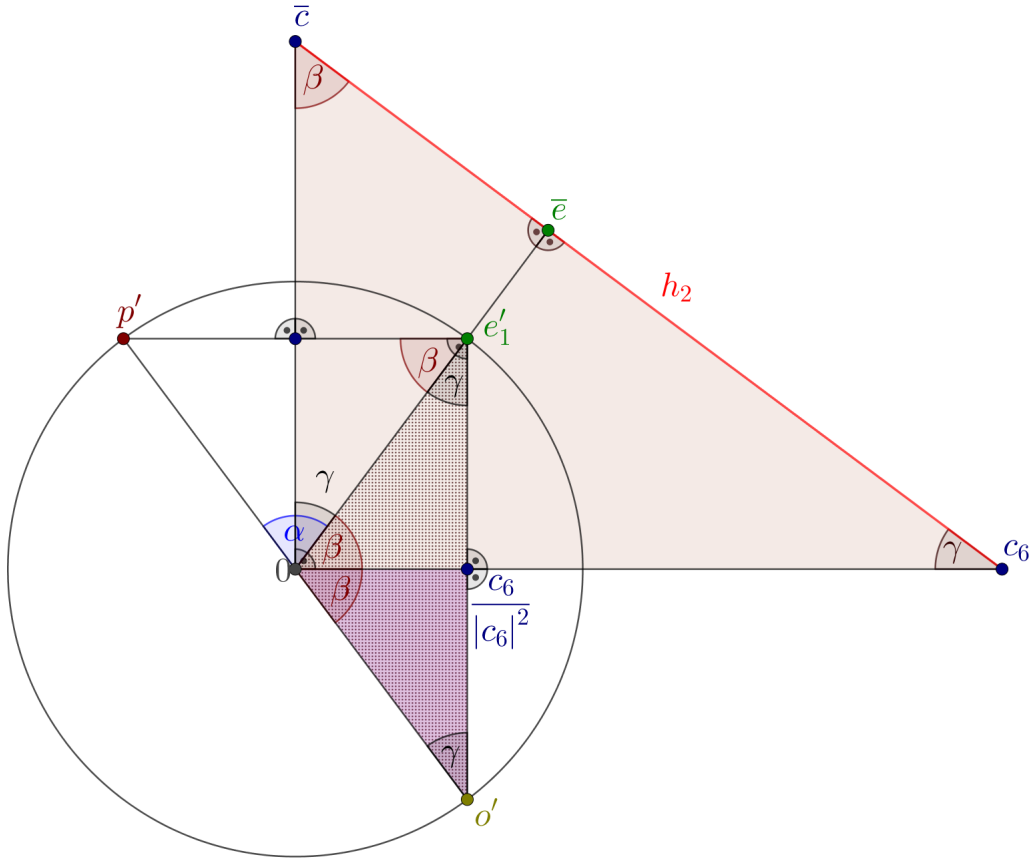


Abbildung 6.24: Die Ebene $\mathbf{M}'$ inklusive aller Punkte, Strecken und Winkel, die zur Berechnung von h_2 benötigt werden.

Wir wollen jetzt die Länge h_2 mithilfe der eben beschriebenen Punkte in der Ebene $\mathbf{M}'$ bestimmen. Dafür diskutieren wir zunächst die Orthogonalität verschiedener Strecken. Zunächst ist durch die Konstruktion des dualen Polytops die Strecke (c_1, c_3) (die nicht in der Ebene $\mathbf{M}'$ liegt) orthogonal zur Strecke (p', e_1') . Dies ist in Abbildung 4.5 mit anderen Bezeichnungen gut zu sehen. Zusätzlich ist die Strecke (p', e_1') orthogonal zur Strecke $(0, c_1)$ und orthogonal zur Strecke $(0, c_3)$, denn (p', e_1') ist Teil der zu c_1 und c_3 gehörenden Facetten.

Damit ist die Strecke (p', e_1') orthogonal zu der Ebene, die durch die drei Punkte $0, c_1$ und c_3 aufgespannt wird. Dies führt wiederum dazu, dass die Strecke $(0, \bar{c})$, die in dieser Ebene liegt, ebenfalls orthogonal zur Strecke (p', e_1') ist.

Die Strecke (p', e_1') ist wiederum orthogonal zur Strecke (o', e_1') . Dies resultiert aus der Konstruktion der Eigenstruktur aus dem vorigen Abschnitt, in welcher der Vektor $e_1 - 0 = e_1$ orthogonal auf der Strecke (p', e_1') steht. Die Begründung dafür ist, dass (p', e_1') in der Konstruktion des primalen und dualen Polytops auf der Tangentialebene von e_1 zum Einheitskreis liegt. Verschieben wir alle Punkte um $-p/2$, so verändert sich diese Orthogonalität nicht.

Da die beiden Punkte e_1' und o' in der Facette (o', f_3', e_1', f_1') liegen, ist zudem die Strecke (e_1', o') orthogonal zur Strecke $(0, c_6)$. Wir erhalten damit insgesamt

$$(0, \bar{c}) \perp (p', e_1') \perp (e_1', o') \perp (0, c_6)$$

und da alle Punkte in einer Ebene liegen, folgt direkt

$$(0, \bar{c}) \perp (0, c_6).$$

Damit wissen wir, dass das Dreieck $(0, \bar{c}, c_6)$ einen rechten Winkel im Nullpunkt hat. Somit lässt sich der Flächeninhalt

dieses Dreiecks auf zwei verschiedene Arten durch

$$\frac{1}{2}|\bar{c}||c_6| = \text{vol}(0, \bar{c}, c_6) = \frac{1}{2}|\bar{e}|h_2$$

darstellen. Wir erhalten damit

$$h_2 = \frac{|\bar{c}||c_6|}{|\bar{e}|}.$$

Betrachten wir die drei Längen in der eben erstellten Gleichung. Zunächst ist 0 der Mittelpunkt der Strecke (p', o') . Da das Dreieck (p', e'_1, o') in e'_1 einen rechten Winkel hat, gilt nach dem Satz des Thales

$$|e'_1| = |p'| = |o'|.$$

Für die Länge von c_6 betrachten wir zunächst die Projektion des Punktes c_6 auf die Facette (o', f'_3, e'_1, f'_1) . Dieser Projektionspunkt ist $c_6/|c_6|^2$ und hat die Länge $1/c_6$. Dieser Punkt liegt auf dem Dreieck $(0, e'_1, o')$. Mit dem Sinussatz erhalten wir für dieses Dreieck

$$\frac{|(e'_1, o')|}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{|(e'_1, o')||e'_1||o'|}{2 \text{vol}(0, e'_1, o')} = \frac{|(e'_1, o')||e'_1||o'|}{2 \frac{1}{2} |(e'_1, o')| \frac{1}{|c_6|}}.$$

Formen wir diesen Ausdruck nach $|c_6|$ um, so erhalten wir

$$|c_6| = \frac{|(e'_1, o')|}{\sin(\alpha)|e'_1||o'|}.$$

Die Länge von $\bar{c}$ erhalten wir mit dem Strahlensatz (vergleiche [Euc86, Buch 6, Satz 2, S. 111] und [AF15, Satz 1, S. 1]). Das Dreieck $(0, \bar{c}, c_6)$ hat dieselben Winkel wie das Dreieck $(c_6/|c_6|^2, 0, o')$. Wir erhalten damit durch den Strahlensatz

$$\frac{\frac{|\bar{c}|}{|c_6|^2}}{\frac{|c_6|}{|c_6|^2}} = \frac{|c_6|}{\left| \left(o', \frac{c_6}{|c_6|^2} \right) \right|} \Leftrightarrow |\bar{c}| = \frac{1}{\left| \left(o', \frac{c_6}{|c_6|^2} \right) \right|} = \frac{2}{|(o', e'_1)|}.$$

Insgesamt ergibt sich folglich für die Höhe h_2

$$h_2 = \frac{\frac{2}{|(o', e'_1)|} \frac{|(e'_1, o')|}{\sin(\alpha)|e'_1||o'|}}{\frac{1}{|e'_1|}} = \frac{2}{\sin(\alpha)|o'|}.$$

Setzen wir diese in die Gleichung (6.4) ein, ergibt sich

$$a = \frac{1}{\frac{2}{\sin(\alpha)|o'|}|p'| \sin(\alpha)} = \frac{1}{2}.$$

Den analogen Fall für b erhalten wir, indem wir

$$p' \leftrightarrow o' \quad \text{und} \quad f' \leftrightarrow e'$$

tauschen. Die Beweisschritte setzen sich in genau derselben Art und Weise zusammen. $\square$

Konstruktion der Matrix $\bar{B}$

In diesem Teilabschnitt betrachten wir die Konstruktion der Matrix $\bar{B}$ aus Algorithmus 15, also konkret die Zeilen 25–31. Die Bezeichnungen dieses Teilabschnitts beziehen sich dabei explizit auf die des Algorithmus 15. Wir beginnen wieder mit dem Index j . Dieser läuft in der for-Schleife aus Zeile 25 über alle Punkte aus $\tilde{P}$. Für jeden Kontrollpunkt wollen wir im Folgenden eine Zeile aus $\bar{B}$ erstellen.

Die Matrix $\bar{M}$ bildet die Kontrollpunkte $\tilde{P}$ zunächst auf die jeweiligen Punkte $\frac{1}{2}p$ ab, die in den zugehörigen

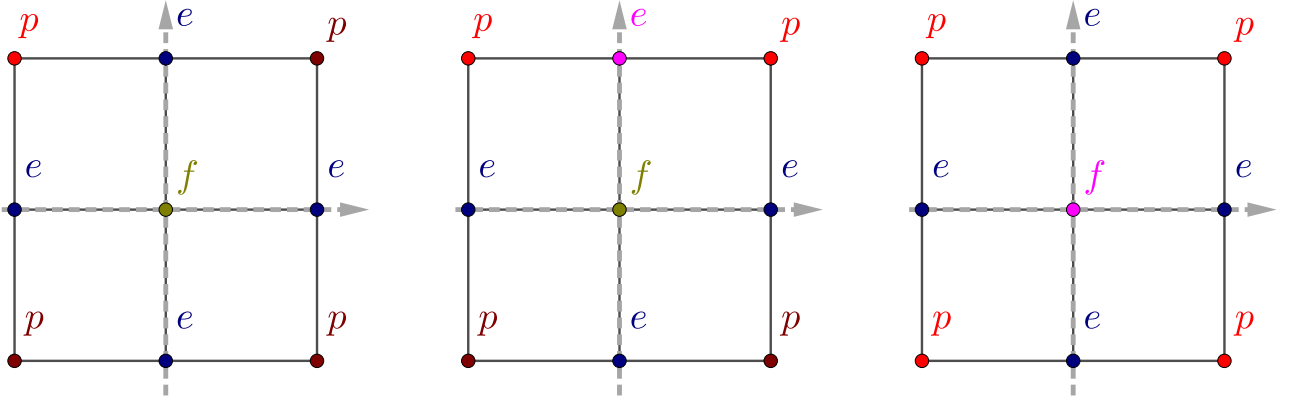


Abbildung 6.25: Kontrollpunkt (pink) und zugehörige Kontrollpunkte in $\hat{P}$ (rot) für einen Eckpunkt (links), einen Kantenpunkt (Mitte) und den zentralen Punkt (rechts) für $t = 2$. Im linken Bild sind der pinkfarbene und der rote Punkt identisch, weshalb dieser nur in rot dargestellt ist.

Objekten liegen. An der Struktur von $\overline{M}$ lässt sich erkennen, dass das Produkt $\overline{M}\tilde{P}$ mehr Zeilen und damit mehr Kontrollpunkte hat als $\tilde{P}$. Wie bereits erwähnt liegt das daran, dass wir mit der Matrix $\overline{M}$ zum Teil mehrere Kopien eines Kontrollpunkts aus $\tilde{P}$ anlegen. Die Zeilennummern der Kopien des Punkts mit Index j sind für diesen Teil des Algorithmus in der Matrix K aus Zeile 26 kodiert. Dafür wird gefiltert, welche Zeilen sich in $\tilde{I}$ auf den Punkt mit Index j beziehen. Anschließend wird in der Matrix K' aus Zeile 27 kodiert, durch welche Objekte diese Kopien erzeugt wurden.

Die Punkte $\hat{P}$ sind komplizierter zu beschreiben. Im Grunde sind diese zunächst die Punkte, auf die der Punkt mit Index j durch die Matrix $\overline{M}$ abgebildet wird. Da die Matrix $\overline{M}$ die Punkte $\tilde{P}$ (inklusive Dopplungen) auf die Punkte $P/2$, also auf Skalierungen der Eckpunkte abbildet, wählen wir für $\hat{P}$ die unskalierten Punkte aus. Diese lassen sich über die Indizes in K' identifizieren, denn dies sind die Indizes der Objekte, die den jeweiligen Eckpunkt beinhalten. Eine beispielhafte Illustration für den Fall $t = 2$ findet sich in Abbildung 6.25 und für den Fall $t = 3$ in Abbildung 6.26.

Die Punkte $\hat{P}$ werden anschließend so verschoben, skaliert und gedreht, dass sich aus diesen in Zeile 29 eine Colin-de-Verdière-Matrix B entsprechender Dimension erstellen lässt. Anschließend werden in Zeile 30 des Algorithmus 15 die Zeilen von B summiert, sodass sich der Zeilenvektor B' ergibt. Dieser wird in Zeile 31 des Algorithmus 15 normiert und daraus ergibt sich die entsprechende Zeile der Matrix $\overline{B}$.

Damit werden insgesamt mit der Matrix $\overline{B}$ die durch die Matrix $\overline{M}$ erstellten Kopien gemittelt. Die Matrix

$$\tilde{C} = \overline{B} \cdot \overline{M},$$

beschrieben in Zeile 32, ergibt sich dann aus der Kombination der Matrix $\overline{M}$, die die Kopien erstellt, und der Matrix $\overline{B}$, die die Kopien mittelt. Damit ist die erste Eigenschaft E1 von $\tilde{C}$ bereits gezeigt. Die Matrix $\tilde{C}$ ist eine $n \times n$ Matrix und jede Zeile korrespondiert mit einem Kontrollpunkt aus $\tilde{P}$.

Nach diesem Überblick betrachten wir im Folgenden die Konstruktion der Zeilen von $\overline{B}$ und $\tilde{C}$ für die verschiedenen Kontrollpunkttypen p , e , f und o noch einmal separat und ausführlich und verweisen dabei direkt auf die Eigenschaften E2–E4 der entsprechenden Zeilen von $\tilde{C}$.

Eckpunkte p Den einfachsten Fall stellen die Kontrollpunkte aus P dar. Jeder dieser Kontrollpunkte kommt nur in einem Objekt vor. Wir nutzen daher zur Konstruktion der Colin-de-Verdière-Matrix B für diese Struktur, die wir als Graph mit einem Knoten und keiner Kante interpretieren können, das Lemma 4.5 und erhalten

$$B = [-1] = B'.$$

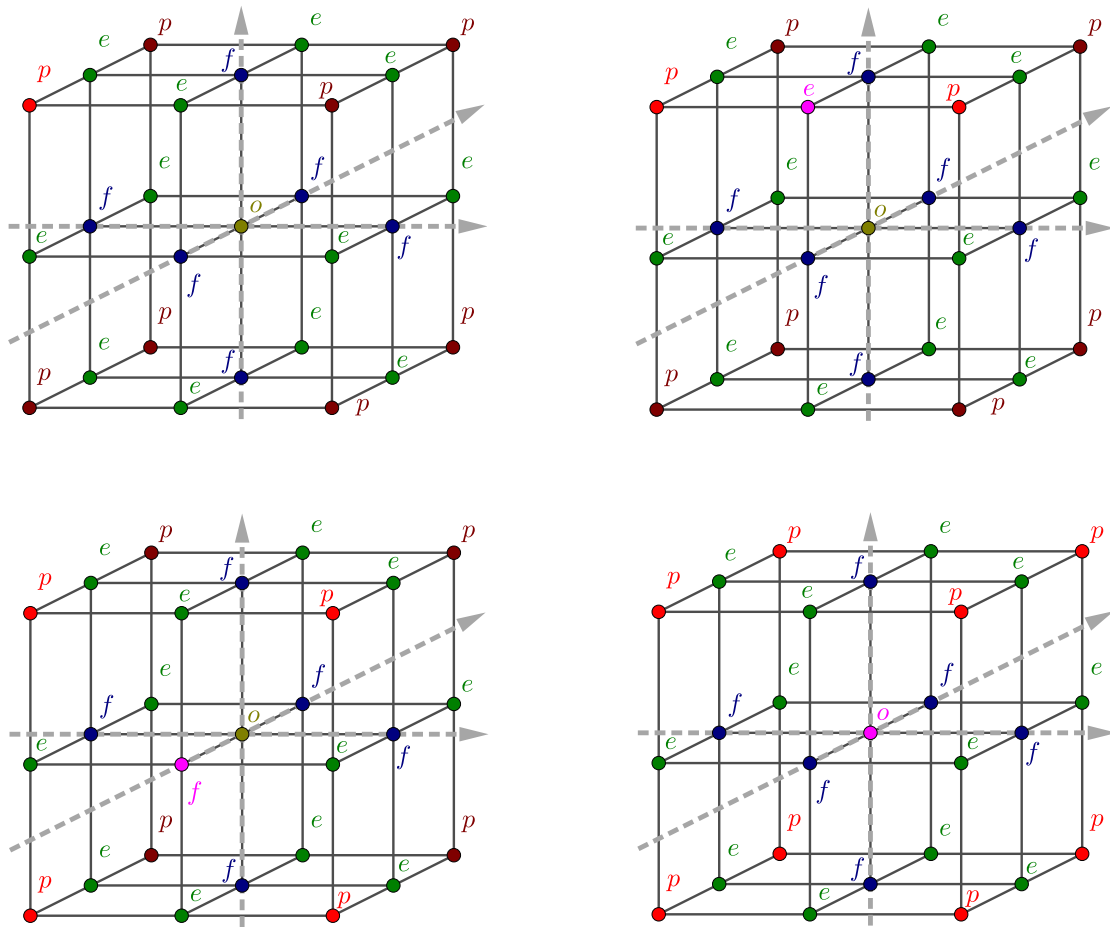


Abbildung 6.26: Kontrollpunkt (pink) und zugehörige Kontrollpunkte in $\hat{P}$ (rot) für einen Eckpunkt (links oben), einen Kantenpunkt (rechts oben), einen Facettenpunkt (links unten) und den zentralen Punkt (rechts unten) für $t = 3$. Im linken oberen Bild sind der pinkfarbene und der rote Punkt identisch, weshalb dieser nur in rot dargestellt ist.

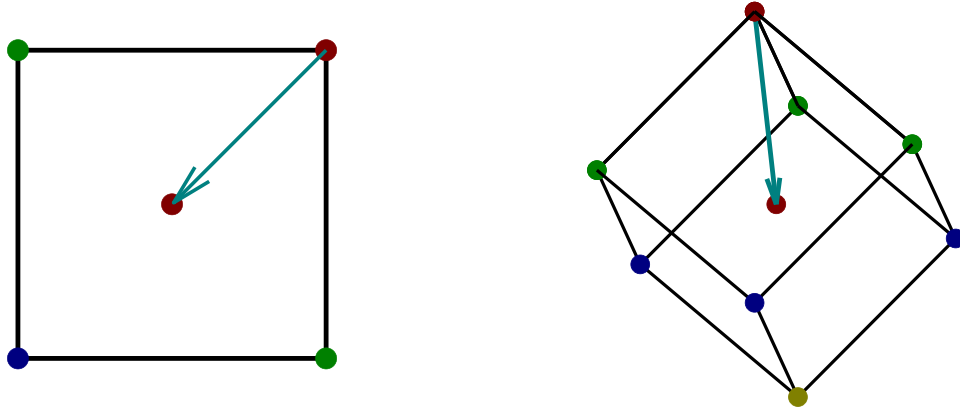


Abbildung 6.27: Schematische Illustration des Effekts der Matrizen $\bar{M}$ (türkis) und $\bar{B}$ (magenta) auf einen Eckpunkt p für $t = 2$ (links) und für $t = 3$ (rechts). Die Matrix $\bar{M}$ erstellt eine Kopie von p und bildet diese auf $p/2$ ab. Die Matrix $\bar{B}$ bildet diesen Punkt auf sich selbst ab, sodass insgesamt p auf $p/2$ abgebildet wird. Daher ist der Effekt von $\bar{B}$ in dieser Abbildung nicht erkennbar und entsprechend fehlt die magentafarbene Illustration.

Die „Matrix“ besteht für diesen Fall also nur aus einem Eintrag. Durch die Normierung erhalten wir

$$\frac{1}{\sum B'} B' \frac{1}{-1} B' = [1].$$

Damit besteht die entsprechende Zeile in $\bar{B}$ nur aus einem Eintrag 1 und sonst aus Nulleinträgen. Mit dieser Beschreibung und dem Produkt aus $\bar{B}$ und $\bar{M}$ erhalten wir die entsprechende Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$.

Sei j die Zeilennummer der so konstruierten Zeile aus $\bar{B}$. Wir prüfen im Folgenden die Eigenschaften der entsprechenden Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$. Zunächst betrachten wir, welche Einträge aus $\tilde{C}_{(j,:)}$ ungleich 0 sind. Mit

$$\tilde{C}_{(j,:)} = \bar{B}_{(j,:)} \bar{M} = 1 \cdot \bar{M}_{(K,:)}$$

ist die j -te Zeile von $\tilde{C}_{(j,:)}$ mit der K -ten Zeile von $\bar{M}$ identisch. Da $\bar{M}_{(K,:)}$ die normierte Zeile einer Colin-de-Verdière-Matrix ist, sind die Nicht-Nulleinträge der Nebendiagonalen von $\tilde{C}_{(j,:)}$ die Einträge zu den Nachbarn von $\tilde{P}_{(j,:)}$.

Die Nebendiagonaleinträge der Matrizen M sind nach Definition 4.1 einer Colin-de-Verdière-Matrix negativ. Da die Zeilensummen von M mit Satz 4.9 und Theorem 4.14 negativ sind, sind die Nebendiagonaleinträge nach der Normierung positiv. Da diese für $\tilde{C}$ mit 1 multipliziert werden, überträgt sich die Eigenschaft auf $\tilde{C}_{(j,:)}$. Die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ erfüllt damit die Eigenschaft E4.

Multiplizieren wir die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ mit dem Einsvektor $\vec{1}$ erhalten wir

$$\tilde{C}_{(j,:)} \vec{1} = \bar{B}_{(j,:)} \bar{M} \vec{1} = 1 \cdot \bar{M}_{(K,:)} \vec{1}.$$

Da die Zeilen von $\bar{M}$ normiert sind, ergibt sich

$$\tilde{C}_{(j,:)} \vec{1} = 1,$$

die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ summiert sich also zu 1 auf und daher ist für diese die Eigenschaft E2 erfüllt.

Für das Produkt von $\tilde{C}$ und $\tilde{P}$ erhalten wir

$$\tilde{C}_{(j,:)} \tilde{P} = \bar{B}_{(j,:)} \bar{M} \tilde{P} = 1 \cdot \bar{M}_{(K,:)} \tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{P}_{(j,:)}$$

und damit erfüllt die $\tilde{C}_{(j,:)}$ auch die Eigenschaft E3. Der entsprechende Eckpunkt p wird also auf $p/2$ abgebildet. Eine schematische Darstellung der Abbildung von p auf $p/2$ durch die Matrizen $\bar{M}$ und $\bar{B}$ findet sich in Abbildung 6.27.

Kantenpunkte e Etwas komplexer ist die Konstruktion der Matrixeinträge für die Kantenpunkte aus E . Wir bezeichnen e als den entsprechenden Kantenpunkt zur Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$. Dieser Kantenpunkt liegt an zwei Objekten. Wir benennen die Eckpunkte dieser beiden Objekte mit p_1 und p_2 . Es gibt also entsprechend zwei Einträge in $\bar{I}_{(:,1)}$, die gleich j sind, und der Vektor K besteht aus zwei Einträgen, die wir als K_1 und K_2 bezeichnen.

Damit werden durch die Matrix $\bar{M}$ zwei Kopien des Punkts e erzeugt. Eine wurde durch die Matrix $\bar{M}$ auf $p_1/2$ und die andere auf $p_2/2$ abgebildet. Die Strecke zwischen $p_1/2$ und $p_2/2$ enthält nach Konstruktion den Punkt $\frac{1}{2}e$. Wir definieren daher die Punkte

$$p'_1 = \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}e \quad \text{und} \quad p'_2 = \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}e.$$

Die Strecke zwischen diesen beiden Punkten enthält damit den Ursprung. Im Strukturgraphen G_K haben die beiden Punkte p_1 und p_2 eine gemeinsame Kante. Wir können daher mit Lemma 4.6 und den Punkten p'_1 und p'_2 eine Colin-de-Verdière-Matrix $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für einen Graphen, bestehend aus zwei Knoten und einer Kante, erstellen, für die zunächst

$$B \begin{bmatrix} p'_1{}^T \\ p'_2{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{|p'_2|}{|p'_1|}p'_1{}^T - p'_2{}^T \\ -p'_1{}^T - \frac{|p'_1|}{|p'_2|}p'_2{}^T \end{bmatrix}$$

gilt. Da beide Punkte p'_1 und p'_2 auf einer Geraden liegen, und die Strecke zwischen beiden Punkten den Ursprung enthält, gilt

$$p'_1 = -\frac{|p'_1|}{|p'_2|}p'_2 \quad \Leftrightarrow \quad p'_2 = -\frac{|p'_2|}{|p'_1|}p'_1.$$

Damit erhalten wir

$$B \begin{bmatrix} p'_1{}^T \\ p'_2{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_2{}^T - p'_2{}^T \\ -p'_1{}^T + p'_1{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \vec{0}^T \end{bmatrix}.$$

Zudem ist die Zeilensumme und damit auch die Spaltensumme von B nach Konstruktion, wie in Lemma 4.6 zu sehen, negativ. Die Matrix B' besteht damit aus zwei negativen Einträgen und die Matrix $\sum_{B'} \frac{1}{B'}$ besteht aus zwei positiven Einträgen, die sich zu 1 aufsummieren. Mit diesen Beschreibungen gilt für die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$

$$\tilde{C}_{(j,:)} = \bar{B}_{(j,:)}\bar{M} = \bar{B}_{(j,K_1)}\bar{M}_{(K_1,:)} + \bar{B}_{(j,K_2)}\bar{M}_{(K_2,:)}$$

Betrachten wir die Einträge aus $\tilde{C}_{(j,:)}$. Diese bestehen aus einer Linearkombination der Zeile $\bar{M}_{(K_1,:)}$ und $\bar{M}_{(K_2,:)}$. Diese beiden Zeilen beinhalten wiederum nur Einträge, die ausschließlich für e und für die Nachbarn von e ungleich 0 sein können. Die beiden Zeilen decken zwar jeweils nur einen Teil der Nachbarn mit Nicht-Nulleinträgen ab, beide zusammen beinhalten aber alle Nachbarn von e . Außerdem sind die Einträge, die zu den Nachbarn von e gehören, nicht-negativ.

Da die Einträge von $\sum_{B'} \frac{1}{B'}$ positiv sind, sind die beiden Einträge $\bar{B}_{(j,K_1)}$ und $\bar{B}_{(j,K_2)}$ positiv. Zusammen mit der Struktur von $\bar{M}_{(K_1,:)}$ und $\bar{M}_{(K_2,:)}$ ergibt sich, dass die Einträge der Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ für die Nachbarn von e positiv sind, und, dass die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ bis auf den Diagonaleintrag sonst nur Nulleinträge enthält. Damit ist Eigenschaft E4 erfüllt.

Multiplizieren wir die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ mit dem Einsvektor $\vec{1}$, so erhalten wir durch die Normierung der Zeilen von $\bar{M}$ und $\bar{B}$

$$\tilde{C}_{(j,:)}\vec{1} = \bar{B}_{(j,:)}\bar{M}\vec{1} = \bar{B}_{(j,K_1)}\bar{M}_{(K_1,:)}\vec{1} + \bar{B}_{(j,K_2)}\bar{M}_{(K_2,:)}\vec{1} = \bar{B}_{(j,K_1)} + \bar{B}_{(j,K_2)} = 1,$$

die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ summiert sich also zu 1 auf und damit gilt die Eigenschaft E2.

Für die Multiplikation der Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ mit den Kontrollpunkten erhalten wir

$$\tilde{C}_{(j,:)}\tilde{P} = \bar{B}_{(j,:)}\bar{M}\tilde{P} = \bar{B}_{(j,K_1)}\bar{M}_{(K_1,:)}\tilde{P} + \bar{B}_{(j,K_2)}\bar{M}_{(K_2,:)}\tilde{P} = \bar{B}_{(j,K_1)}\frac{1}{2}p_1 + \bar{B}_{(j,K_2)}\frac{1}{2}p_2.$$

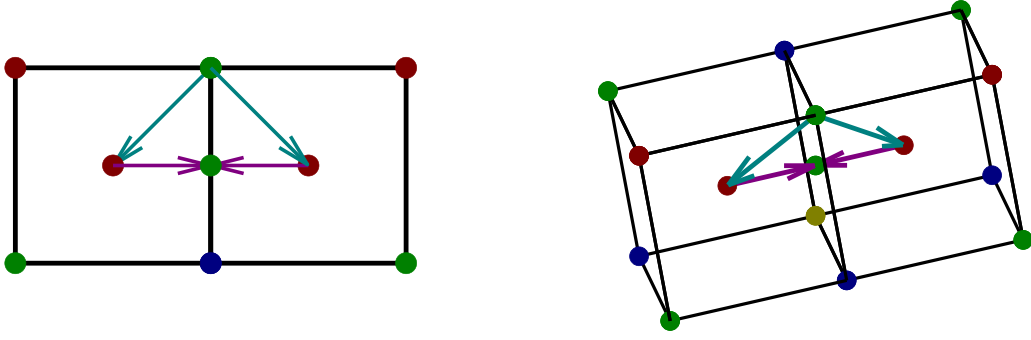


Abbildung 6.28: Schematische Illustration des Effekts der Matrizen $\bar{M}$ (türkis) und $\bar{B}$ (magenta) auf einen Kantenpunkt e für $t = 2$ (links) und für $t = 3$ (rechts). Die Matrix $\bar{M}$ erstellt zwei Kopien von e und bildet diese auf $p_1/2$ und $p_2/2$ ab. Die Matrix $\bar{B}$ bildet diese beiden Punkte auf $e/2$ ab, sodass insgesamt e auf $e/2$ abgebildet wird.

Die Einträge $\bar{B}_{(j,K_1)}$ und $\bar{B}_{(j,K_2)}$ ergeben sich durch

$$\begin{aligned}\bar{B}_{(j,K_1)} &= \frac{B_{(1,1)} + B_{(2,1)}}{B_{(1,1)} + B_{(1,2)} + B_{(2,1)} + B_{(2,2)}} =: \frac{B_{(1,1)} + B_{(2,1)}}{b} \quad \text{und} \\ \bar{B}_{(j,K_2)} &= \frac{B_{(1,2)} + B_{(2,2)}}{B_{(1,1)} + B_{(1,2)} + B_{(2,1)} + B_{(2,2)}} =: \frac{B_{(1,2)} + B_{(2,2)}}{b}\end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{(j,:)}\tilde{P} &= \frac{B_{(1,1)} + B_{(2,1)}}{b} \frac{1}{2}p_1 + \frac{B_{(1,2)} + B_{(2,2)}}{b} \frac{1}{2}p_2 \\ &= \left(\frac{B_{(1,1)}}{b} \frac{1}{2}p_1 + \frac{B_{(1,2)}}{b} \frac{1}{2}p_2 \right) + \left(\frac{B_{(2,1)}}{b} \frac{1}{2}p_1 + \frac{B_{(2,2)}}{b} \frac{1}{2}p_2 \right) \\ &= \left(\frac{B_{(1,1)}}{b} \left(p'_1 + \frac{1}{2}e \right) + \frac{B_{(1,2)}}{b} \left(p'_2 + \frac{1}{2}e \right) \right) + \left(\frac{B_{(2,1)}}{b} \left(p'_1 + \frac{1}{2}e \right) + \frac{B_{(2,2)}}{b} \left(p'_2 + \frac{1}{2}e \right) \right) \\ &= \left(\frac{B_{(1,1)}}{b} \frac{1}{2}e + \frac{B_{(1,2)}}{b} \frac{1}{2}e \right) + \left(\frac{B_{(2,1)}}{b} \frac{1}{2}e + \frac{B_{(2,2)}}{b} \frac{1}{2}e \right) \\ &= \frac{1}{2}e.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Folglich erfüllt die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ die Eigenschaft E3. Eine schematische Darstellung der Abbildung von e auf $e/2$ durch die Matrizen $\bar{M}$ und $\bar{B}$ findet sich in Abbildung 6.28. Für die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$, die zu einem Kantenpunkt e gehört, beweisen wir noch die folgenden Lemmata:

Lemma 6.11. Sei $\tilde{C}_{(j,:)}$ die Zeile von $\tilde{C}$ zum Kantenpunkt e . Dann gilt

$$\tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e \quad \text{für } t = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e \quad \text{für } t = 3.$$

Beweis. Der Kantenpunkt e ist in der Eigenstruktur zu zwei Eckpunkten benachbart, die wir als p_1 und p_2 bezeichnen. Wir definieren zudem die beiden Punkte

$$p'_1 = \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}e \quad \text{und} \quad p'_2 = \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}e.$$

Die Zeile $\bar{B}_{(j,:)}$ hat zwei Nicht-Nulleinträge, die wir mit b_1 und b_2 bezeichnen. Nach Konstruktion der Matrix $\bar{B}$ gilt

$$b_1 p'_1 + b_2 p'_2 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 = 1.$$

Wir wissen zudem, dass die Einträge der Matrix $\bar{M}$, die zu den beiden Punkten p_1 und p_2 im Bezug auf die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ gehören, mit Lemma 6.9 für ein Viereck und mit Lemma 6.10 für ein Hexaeder gerade $1/2$ sind. Damit erhalten wir insgesamt für $t = 3$

$$\tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{B}_{(j,:)} \bar{M} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = b_1 \frac{1}{2} p_1 + b_2 \frac{1}{2} p_2 = \frac{1}{2} (b_1 (2p'_1 + e) + b_2 (2p'_2 + e)) = \frac{1}{2} (b_1 e + b_2 e) = \frac{1}{2} e.$$

Die obige Zeile lässt sich für den Fall $t = 2$ analog formulieren. □

Daraus resultiert direkt das folgende Lemma:

Lemma 6.12. *Sei $\tilde{C}_{(j,:)}$ die Zeile von $\tilde{C}$ zum Kantenpunkt e . Dann gilt*

$$\tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ E \\ f \end{bmatrix} = [0, 0] = 0 \cdot e \quad \text{für } t = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix} = [0, 0, 0] = 0 \cdot e \quad \text{für } t = 3.$$

Beweis. Mit Gleichung (6.5) erhalten wir für $t = 2$

$$\tilde{C}_{(j,:)} \tilde{P} = \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ E \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e.$$

Aus Lemma 6.11 folgt direkt

$$\tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ E \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e \Leftrightarrow \frac{1}{2} e + \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ E \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e \Leftrightarrow \tilde{C}_{(j,:)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ E \\ f \end{bmatrix} = [0, 0] = 0 \cdot e.$$

Der Fall $t = 3$ folgt analog. □

Die Aussage $[0, 0] = 0 \cdot e$ ist zwar trivial, sie dient allerdings als Vorbereitung für die Lemmata 6.14 und 6.15.

Facettenpunkte f Hier betrachten wir den Fall der Facettenpunkte f beziehungsweise F . Wir bezeichnen f als den entsprechenden Facettenpunkt zur Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$. Dieser liegt an m Objekten, wobei m die Anzahl der Eckpunkte der entsprechenden Facette im kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ ist. Die Eckpunkte der entsprechenden Objekte benennen wir mit $p_1, \dots, p_m$. Die Einträge der Matrix K , die die Information der Zeilen von $\bar{M}$ zu den Kopien von f enthält, bezeichnen wir mit $K_1, \dots, K_m$.

Die Kopien von f werden durch die Matrix $\bar{M}$ auf die Punkte $p_1/2, \dots, p_m/2$ abgebildet. Die Punkte $p_1, \dots, p_m$ liegen im kombinatorischen Graphen alle an einer Facette und damit liegen die Punkte $p_1/2, \dots, p_m/2$ in einer Ebene,

die zudem den Punkt $\frac{1}{2}f$ enthält. Diese Facette besitzt, da sie durch eine Kreispäckung konstruiert wurde, einen Inkreis mit Mittelpunkt $f/2$. Mit diesen Informationen definieren wir die Punkte

$$p'_l = \frac{1}{2}p_l - \frac{1}{2}f \quad \text{mit } l \in \{1, \dots, m\}.$$

Diese liegen ebenfalls in einer Ebene, die durch die Verschiebung den Ursprung enthält. Der Ursprung ist zudem der Mittelpunkt des Inkreises für die verschobenen Punkte.

Wir wollen für die Erstellung der Colin-de-Verdière-Matrix B die verschobenen Punkte p'_l nutzen. Dafür müssen wir diese zunächst mit einem Faktor a so skalieren, dass der Radius des Inkreises 1 ist. Um für den Fall $t = 3$ die Theoreme aus Abschnitt 4.3 nutzen zu können, müssen wir zudem die Punkte ap'_l noch so verändern, dass sie im $\mathbb{R}^2$ liegen. Wir verwenden dafür eine entsprechende Drehmatrix $G \in \mathbb{R}^{(3 \times 3)}$. Für den Fall $t = 2$ liegen die Punkte schon in $\mathbb{R}^2$, wir setzen also $G = E_2$. Aus den gedrehten und skalierten Punkten

$$a \begin{bmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_m \end{bmatrix} G$$

konstruieren wir eine Colin-de-Verdière-Matrix B nach Theorem 4.8. Für diese Matrix gilt

$$B \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_m^T \end{bmatrix} = \frac{1}{a} B a \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_m^T \end{bmatrix} G G^{-1} = \frac{1}{a} \vec{0} G^{-1} = \vec{0},$$

die Vektoren aus den Punkten p' liegen also im Kern der Matrix B . Zudem ist, wie bei allen in dieser Arbeit konstruierten Colin-de-Verdière-Matrizen, die Zeilen- und Spaltensumme von B nach Satz 4.9 negativ. Die Matrix B' besteht damit analog zu den vorigen Fällen aus m negativen Einträgen und die Matrix $\frac{1}{\sum B'} B'$ besteht aus m positiven Einträgen, die sich zu 1 aufsummieren. Mit diesen Beschreibungen lässt sich die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ als

$$\tilde{C}_{(j,:)} = \sum_{l=1}^m \bar{B}_{(j,K_l)} \bar{M}_{(K_l,:)}$$

darstellen.

Wir betrachten im Folgenden wieder die Eigenschaften der Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$. Mit derselben Argumentation wie im Fall der Kantenpunkte, enthält die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ neben dem Diagonaleintrag nur für die Nachbarn von f Nicht-Nulleinträge, die zudem positiv sind. Die Eigenschaft E4 gilt damit auch für den Facettenfall.

Wir erhalten zudem

$$\tilde{C}_{(j,:)} \vec{1} = \sum_{l=1}^m \bar{B}_{(j,K_l)} \bar{M}_{(K_l,:)} \vec{1} = \sum_{l=1}^m \bar{B}_{(j,K_l)} 1 = 1,$$

die Kanten von $\tilde{C}_{(j,:)}$ summieren sich also zu 1 auf und die Eigenschaft E2 ist erfüllt. Für die Multiplikation mit $\tilde{P}$ ergibt sich

$$\tilde{C}_{(j,:)} \tilde{P} = \sum_{l=1}^m \bar{B}_{(j,K_l)} \bar{M}_{(K_l,:)} \tilde{P} = \sum_{l=1}^m \bar{B}_{(j,K_l)} \frac{1}{2} p_l.$$

Die Einträge $\bar{B}_{(j,K_l)}$ lassen sich durch

$$\bar{B}_{(j,K_l)} = \frac{\sum_{c=1}^m B_{(c,l)}}{\sum_{l=1}^m \sum_{c=1}^m B_{(c,l)}} =: \frac{\sum_{c=1}^m B_{(c,l)}}{b}$$

darstellen. Wir erhalten damit

$$\tilde{C}_{(j,:)} \tilde{P} = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{c=1}^m B_{(c,l)}}{b} \frac{1}{2} p_l = \frac{1}{b} \sum_{c=1}^m \sum_{l=1}^m B_{(c,l)} \left(p'_l + \frac{1}{2} f \right) = \frac{\sum_{c=1}^m \sum_{l=1}^m B_{(c,l)}}{b} \frac{1}{2} f = \frac{1}{2} f$$

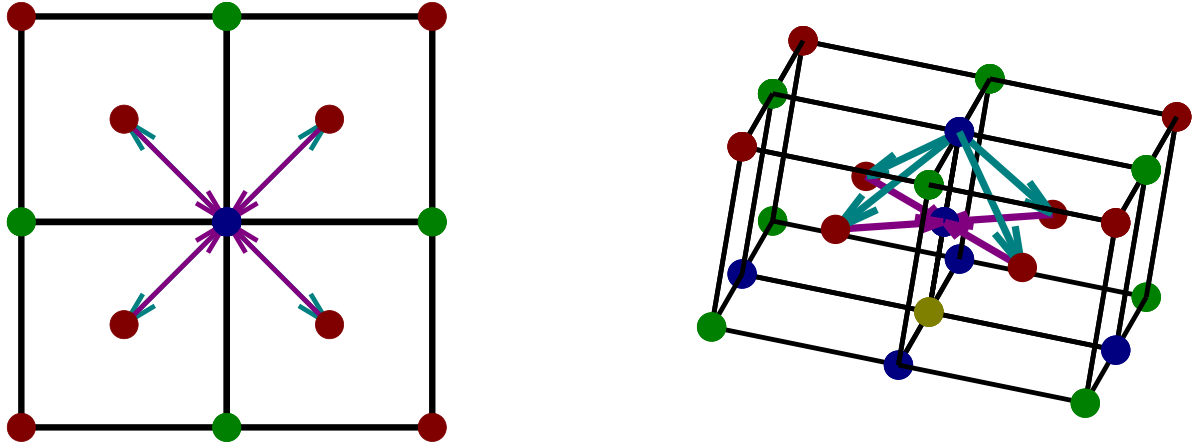


Abbildung 6.29: Schematische Illustration des Effekts der Matrizen $\bar{M}$ (türkis) und $\bar{B}$ (magenta) auf einen Facettenpunkt f für $t = 2$ (links) und für $t = 3$ (rechts). Die Matrix $\bar{M}$ erstellt m Kopien von f und bildet diese auf $p_1/2, \dots, p_m/2$ ab. Die Matrix $\bar{B}$ bildet diese m Punkte auf $f/2$ ab, sodass insgesamt f auf $f/2$ abgebildet wird.

und damit wird der Facettenpunkt f auf $f/2$ abgebildet. Die Eigenschaft E3 ist damit ebenfalls erfüllt. Eine schematische Darstellung der Abbildung von f auf $f/2$ durch die Matrizen $\bar{M}$ und $\bar{B}$ findet sich in Abbildung 6.29.

Volumenpunkt o Dieser Fall kommt nur für $t = 3$ vor. Der Volumenpunkt o ist Teil aller Hexaeder. Daher wird er mit der Matrix $\bar{M}$ genau k -mal kopiert und auf alle Eckpunkte $p_1/2, \dots, p_k/2$ abgebildet. Die entsprechenden Indizes von $\bar{M}$ sind in der Matrix K dargestellt. Die Einträge bezeichnen wir als $K_1, \dots, K_k$. Die Matrix B ist damit die Colin-de-Verdière-Matrix des um den Faktor $1/2$ skalierten 3-Polytops mit Ecken P , konstruiert nach Theorem 4.13, und es gilt

$$BP = 2B\frac{1}{2}P = 2\vec{0} = \vec{0}.$$

Da die Zeilen- und Spaltensummen von B mit Theorem 4.14 negativ sind, sind die Einträge von B' negativ. Damit sind die Einträge von $\frac{1}{\sum \bar{B}'} B'$ positiv und summieren sich zu 1 auf. Mit diesen Beschreibungen lässt sich die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ als

$$\tilde{C}_{(j,:)} = \sum_{l=1}^k \bar{B}_{(j,K_l)} \bar{M}_{(K_l,:)}$$

darstellen.

Wir überprüfen wieder die Eigenschaften der Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$. Die Eigenschaft E4 verhält sich wieder analog zum Fall der Kantenpunkte und ist erfüllt. Multiplizieren wir die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ mit dem Vektor $\vec{1}$ ergibt sich wieder

$$\tilde{C}_{(j,:)} \vec{1} = \sum_{l=1}^k \bar{B}_{(j,K_l)} \bar{M}_{(K_l,:)} \vec{1} = \sum_{l=1}^m \bar{B}_{(j,K_l)} 1 = 1,$$

und damit ist die Eigenschaft E2 erfüllt. Multiplizieren wir die Zeile $\tilde{C}_{(j,:)}$ mit den Kontrollpunkten $\tilde{P}$, so erhalten wir

$$\tilde{C}_{(j,:)} \tilde{P} = \sum_{l=1}^k \bar{B}_{(j,K_l)} \bar{M}_{(K_l,:)} \tilde{P} = \sum_{l=1}^k \bar{B}_{(j,K_l)} \frac{1}{2} p_l.$$

Mit

$$\bar{B}_{(j,K_l)} = \frac{\sum_{c=1}^k B_{(c,l)}}{\sum_{l=1}^k \sum_{c=1}^k B_{(c,l)}} =: \frac{\sum_{c=1}^k B_{(c,l)}}{b}$$

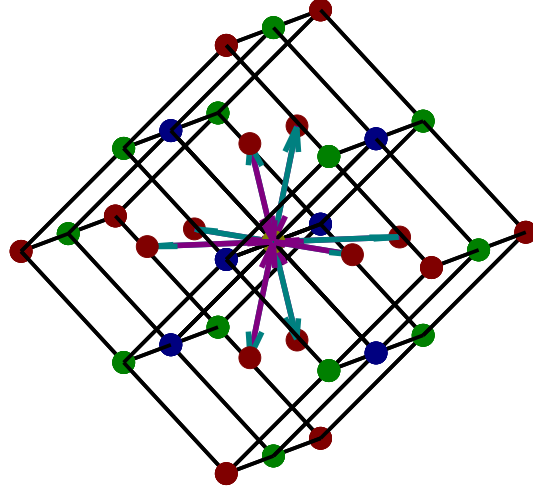


Abbildung 6.30: Schematische Illustration des Effekts der Matrizen $\bar{M}$ (türkis) und $\bar{B}$ (magenta) auf den Volumenpunkt o für $t = 3$. Die Matrix $\bar{M}$ erstellt k Kopien von o und bildet diese auf $p_1/2, \dots, p_k/2$ ab. Die Matrix $\bar{B}$ bildet diese k Punkte wieder auf $o/2 = o$ ab, sodass insgesamt o auf $o/2$ abgebildet wird.

erhalten wir analog zum Facettenfall

$$\tilde{C}_{(j,:)} \tilde{P} = \sum_{l=1}^k \frac{\sum_{c=1}^k B_{(c,l)} \frac{1}{2} p_l}{b} = \frac{1}{b} \sum_{c=1}^k \sum_{l=1}^k B_{(c,l)} \frac{1}{2} p_l = [0, 0, 0]^T = \frac{1}{2} o.$$

Damit erfüllt diese Zeile ebenfalls die Eigenschaft E3. Eine schematische Darstellung der Abbildung von o auf $o/2$ durch die Matrizen $\bar{M}$ und $\bar{B}$ findet sich in Abbildung 6.30.

Wir können damit als Zusammenfassung dieses Unterabschnitts das folgende Theorem formulieren:

Theorem 6.13. Die durch Algorithmus 15 konstruierte Matrix $\tilde{C}$ hat die Eigenschaften E1–E4, sie ist also eine Colin-de-Verdière-artige Matrix zum Graphen G .

Im nächsten Unterabschnitt verwenden wir die Matrix $\tilde{C}$, um die finale Subdivisionsmatrix S zu erzeugen.

6.2.3 Aufteilung von $\tilde{C}$ und das Matrixexponential

In diesem Schritt nutzen wir das Matrixexponential, angelehnt an Variante 2 aus Abschnitt 5.2.2, um die Matrix $\tilde{C}$ in eine Subdivisionsmatrix zu transformieren. Bevor wir die konkrete Transformation beschreiben, werfen wir in einem Szenario für $t = 3$ einen Blick auf die Rückwärtskonstruktion des einzig bekannten Falls, nämlich des regulären Falls. Dies ist die einzige kombinatorische Anordnung, für die die Verfeinerungsregeln bekannt sind, alle anderen müssen erst konstruiert werden und hängen damit von der Konstruktion ab. Dieses Szenario wird zwar in eine Sackgasse führen, es zeigt aber gut, warum wir für dieses Kapitel eine zu Kapitel 5 alternative Konstruktion benötigen und kann gegebenenfalls als Anknüpfungspunkt für weitere Forschung dienen.

Wir permutieren zunächst die Matrix $S^{(3)}$ aus Gleichung (6.1), sodass für diese

$$HS^{(3)}H^{-1} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix}$$

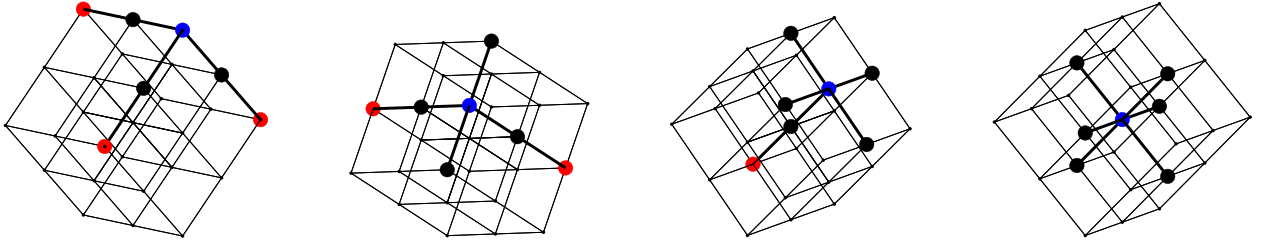


Abbildung 6.31: Illustration der Nicht-Nulleinträge der Matrix $\tilde{M}'$, aufgeteilt nach den Punkttypen: Eckpunkt (links), Kantenpunkt (Mitte links), Facettenpunkt (Mitte rechts) und Volumenpunkt (rechts). Die Farben korrespondieren mit den eingefärbten Einträgen aus Gleichung (6.6).

Volumenpunkt mit dem Faktor 64 multipliziert werden. Dies führt zu

$$\tilde{M}' := \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc} -15 & -1 & & \\ -1 & -15 & -1 & \\ & -1 & -15 & -1 \\ -1 & & -1 & -15 \end{array} & \begin{array}{ccccccc} 8 & 8 & 8 & & & & \\ 8 & & 8 & 8 & & & \\ & 8 & & 8 & 8 & & \\ 8 & & & 8 & & 8 & 8 \\ & 8 & & & 8 & 8 & 8 \\ & & 8 & & & 8 & 8 \\ & & & 8 & & & 8 \\ & & & & 8 & 8 & 8 \end{array} & \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 8 & 8 & & \\ 8 & & 8 & \\ 8 & & & 8 \\ & 8 & 8 & \\ & 8 & & 8 \\ & & 8 & 8 \\ & & 8 & \\ & & & 8 \end{array} & \begin{array}{ccccccc} -48 & & & & & & \\ & -48 & -4 & & & & \\ & & -48 & -4 & & & \\ & -4 & & -48 & -4 & & \\ & & -4 & & -48 & -4 & \\ -4 & & & & & -48 & -4 \\ & -4 & & & & & -48 \\ & & -4 & & & & \\ & & & -4 & & & \\ & -4 & & & & -48 & -4 \\ & & -4 & & & & \\ & & & -4 & & & \\ & & & & -4 & & \\ & & & & & -48 & -4 \end{array} & \begin{array}{cccc} 32 & 32 & & \\ 32 & & 32 & \\ & 32 & 32 & \\ 32 & & & 32 \\ & 32 & & 32 \\ & & 32 & 32 \\ & & & 32 \\ & & & & 32 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} & \begin{array}{ccccccc} 32 & 32 & 32 & 32 & & & \\ 32 & & 32 & 32 & & 32 & \\ & 32 & 32 & & 32 & & 32 \\ & & 32 & 32 & & 32 & \\ & & & 32 & 32 & 32 & \\ & & & & 32 & 32 & 32 \\ & & & & & 32 & 32 \end{array} & \begin{array}{cccc} -144 & & & \\ & -144 & -16 & \\ & & -144 & -16 \\ & -16 & & -144 \\ -16 & & & -144 \end{array} \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & -384 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Diese Matrix hat eine überaus interessante Struktur. Zunächst sind alle Einträge der Matrix $\tilde{M}'$, für die die zugehörigen Einträge der Adjazenzmatrix gleich 1 sind, positiv. Dies ist so wie erwartet, denn multipliziert man die Matrix $\tilde{M}'$ mit -1 , so sind alle Einträge entsprechend der Voraussetzung C1 der Colin-de-Verdière-Matrizen aus Definition 4.1 negativ.

Allerdings sind weitere Nebendiagonaleinträge ungleich 0. Diese haben wir in der Matrix $\tilde{M}'$ rot gekennzeichnet. Eine Übersicht der geometrischen Zuordnung findet sich in Abbildung 6.31. Hier ist völlig unklar, was das Kriterium der roten Einträge ist. Es könnte so etwas sein wie „Ein Eintrag ist ungleich 0, wenn er auf der Gerade zwischen einem benachbarten Punkt und dem ursprünglichen Punkt liegt“. Es könnte auch so etwas sein wie „Ein Eintrag (i, j) ist 0, wenn ein kürzester Pfad vom Knoten zu i zum Knoten zu j einen rechten Winkel enthält“. Das Problem hier ist jedoch, dass wir nur ein Beispiel haben, aus dem wir die Regeln extrapolieren müssten. Daher führt dieses Szenario für den Moment ins Leere, weitere Forschung zu diesem Ansatz wäre jedoch interessant.

Die Konsequenz hieraus ist, dass wir das Matrixexponential auf die Matrix $\tilde{C}$ aus Algorithmus 15 nicht einfach analog zu Abschnitt 5.2.2 anwenden können. Daher benötigen wir eine andere Strategie, die wir in Algorithmus 16 beschreiben. Die einzelnen Schritte führen wir im Folgenden aus. Dabei beziehen sich alle Begriffe im weiteren Verlauf des Abschnitts auf die des Algorithmus 16.

Algorithmus 16: KonstruktionVon S **Data:** Colin-de-Verdière-artige Matrix $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, konstruiert nach Algorithmus 15**Result:** Subdivisionsmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für $g = 3$

```

1 begin
2    $\tilde{L} :=$  Nullmatrix der Dimension  $n \times n$ ;
3    $\tilde{R} :=$  Nullmatrix der Dimension  $n \times n$ ;
4   for  $i = 1 : n$  do
5     for  $j = 1 : n$  do
6       if  $i > j$  then
7          $\tilde{L}_{(i,j)} := 2\tilde{C}_{(i,j)}$ ;
8       else if  $i < j$  then
9          $\tilde{R}_{(i,j)} := 2\tilde{C}_{(i,j)}$ ;
10  for  $i = 1 : n$  do
11     $\tilde{L}_{(i,i)} := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{L}_{(i,j)}$ ;
12     $\tilde{R}_{(i,i)} := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_{(i,j)}$ ;
13   $L' := \ln(2) (\tilde{L} - E_n)$ ;
14   $R' := \ln(2) (\tilde{R} - E_n)$ ;
15   $L := \exp(L')$ ;
16   $R := \exp(R')$ ;
17   $S := L \cdot R$ ;
18 return  $S$ ;

```

Konstruktion von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ Die Zeilen der Matrix $\tilde{C}$ summieren sich alle zu 1 auf, wie wir im vorigen Abschnitt mit Theorem 6.13 gesehen haben. In einem ersten Schritt multiplizieren wir die Matrix $\tilde{C}$ mit dem Faktor 2. Dies kommt im obigen Algorithmus 16 nur implizit vor.

Die Matrix $2\tilde{C}$ teilen wir anschließend in eine linke untere Dreiecksmatrix $\tilde{L}$ und in eine rechte obere Dreiecksmatrix $\tilde{R}$ auf. Die Nebendiagonaleinträge werden dabei eins zu eins übernommen. Die Diagonaleinträge von $2\tilde{C}$ werden mit Zeile 11 und Zeile 12 des Algorithmus 16 aufgeteilt. Da sich die Zeilen von $2\tilde{C}$ zu 2 aufsummieren, erhalten wir

$$\text{diag}(\tilde{L}) + \text{diag}(\tilde{R}) = \begin{bmatrix} 1 - \sum_{j=1, j \neq 1}^n \tilde{L}_{(1,j)} + 1 - \sum_{j=1, j \neq 1}^n \tilde{R}_{(1,j)} & & \\ & \ddots & \\ 1 - \sum_{j=1, j \neq n}^n \tilde{L}_{(n,j)} + 1 - \sum_{j=1, j \neq n}^n \tilde{R}_{(n,j)} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \sum_{j=1, j \neq 1}^n \tilde{C}_{(1,j)} & & \\ & \ddots & \\ 2 - \sum_{j=1, j \neq n}^n \tilde{C}_{(n,j)} & & \end{bmatrix} = \text{diag}(2\tilde{C}) \quad (6.7)$$

und

$$\tilde{L} + \tilde{R} = 2\tilde{C}.$$

Über die Einträge von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ lassen sich einige Aussagen treffen, die wir im Folgenden formulieren und beweisen:

Lemma 6.14. Sei $t = 3$ und seien die Zeilen von $\tilde{C}$, konstruiert nach Algorithmus 15, so angeordnet, dass E3 gilt. Sei zudem $|P|$ die Anzahl der Eckpunkte, $|E|$ die Anzahl der Kantenpunkte, $|F|$ die Anzahl der Facettenpunkte und $|o| = 1$ die Anzahl der Volumenpunkte der Kontrollpunkte $\tilde{P} = [P^T, E^T, F^T, o^T]^T$. Dann definieren wir

$$I_P = [1, \dots, |P|], \quad I_E = [|P|+1, \dots, |P|+|E|], \quad I_F = [|P|+|E|+1, \dots, |P|+|E|+|F|] \quad \text{und} \quad I_o = |P|+|E|+|F|+1$$

als die Indizes der jeweiligen Zeilen und Spalten der Matrix $\tilde{C}$ zu den Punkten $\tilde{P}$. Seien $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit der Eingabe $\tilde{C}$ nach

Algorithmus 16 konstruiert, die Anordnung der Zeilen und Spalten von $\tilde{C}$, $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ stimmt also überein. Dann ist

$$\tilde{L} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & 2\tilde{C}_{(I_E, I_P)} & & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & 0 & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & & & & 2\tilde{C}_{((I_F)_1, (I_F)_1)} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & & 0 & & 2\tilde{C}_{((I_F)_{|F|}, (I_F)_{|F|})} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & 2\tilde{C}_{(I_O, I_F)} & 2\tilde{C}_{(I_O, I_O)} - 1 \end{array} \right]$$

und

$$\tilde{R} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 2\tilde{C}_{(1,1)} - 1 & & 0 & & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 2\tilde{C}_{(|P|, |P|)} - 1 & & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 2\tilde{C}_{((I_E)_1, (I_E)_1)} & & 0 & & & 2\tilde{C}_{(I_E, I_F)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 2\tilde{C}_{((I_E)_{|E|}, (I_E)_{|E|})} & & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Insbesondere ist $\tilde{L}$ eine untere und $\tilde{R}$ eine obere Dreiecksmatrix. Außerdem summieren sich die Zeilen von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ jeweils zu 1 auf. Zusätzlich gilt

$$\tilde{L}\tilde{P} = \tilde{P} \quad \text{und} \quad \tilde{R}\tilde{P} = 0 \cdot \tilde{P},$$

die drei Spalten von $\tilde{P}$ sind also sowohl Eigenvektoren zum Eigenwert 1 der Matrix $\tilde{L}$ als auch zum Eigenwert 0 der Matrix $\tilde{R}$.

Beweis. Die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ lassen sich, wie oben dargestellt, in 16 Blöcke aufteilen, die wir im Folgenden betrachten:

- $I_P \times I_P$ und $I_O \times I_O$: Der entsprechende Block in $\tilde{C}$ für $I_P \times I_P$ enthält nur Einträge auf der Diagonalen, da es im Graphen $\mathbf{G}$ keine Kanten zwischen Eckpunkten gibt. Damit sind für die Zeilen $\tilde{L}_{(I_P, :)}$ alle Einträge bis auf die Diagonaleinträge gleich 0. Folglich sind die Diagonaleinträge in diesem Block nach Algorithmus 16 gerade

$$\vec{1} - \sum_{j=1}^n \tilde{L}_{(I_P, j)} = \vec{1}.$$

Mit Gleichung (6.7) ist die Diagonale von $2\tilde{C}$ gleich der Summe der Diagonalen von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ und damit ergibt sich für die Diagonale von $\tilde{R}$

$$\tilde{R}_{(i, i)} = 2\tilde{C}_{(i, i)} - 1 \quad \text{für } i \in I_P.$$

Dasselbe gilt analog für $I_O \times I_O$, sofern man $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ in der obigen Argumentation tauscht.

- $I_P \times I_E, I_E \times I_P, I_E \times I_F, I_F \times I_E$ und $I_o \times I_F$: Durch die Aufteilung in obere und untere Dreiecksmatrix ist jeweils der Block der einen Matrix gleich 0 und der Block der anderen Matrix gleich dem entsprechenden Block aus $2\tilde{C}$.
- $I_P \times I_F, I_F \times I_P, I_P \times I_o, I_o \times I_P, I_E \times I_o$ und $I_o \times I_E$: Da es im Graphen $\mathbf{G}$ keine Verbindung zwischen diesen Kategorien von Punkten gibt, ist $\tilde{C}$ in diesen Blöcken gleich 0 und damit sind die entsprechenden Blöcke von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ gleich 0.
- $I_E \times I_E$: Zunächst kann der Block $I_E \times I_E$ der Matrix $\tilde{C}$ nur auf der Diagonalen ungleich 0 sein, da es im Graphen $\mathbf{G}$ keine Kanten zwischen zwei Kantenpunkten gibt.

Der Block $I_P \times I_E$ der Matrix $\tilde{C}$ hat eine besondere Struktur. Zunächst sind die Einträge von $\overline{M}$, die mit der Matrix $\overline{B}$ zu den Einträgen des Blocks $\tilde{C}$ multipliziert werden, mit Lemma 6.10 gleich $1/2$. Da jeder Kantenpunkt mit zwei Eckpunkten verbunden ist, gibt es pro Kantenpunkt zwei Zeilen von $\overline{M}$, die zu den entsprechenden Zeilen von $\tilde{C}$ kombiniert werden. Jede dieser Zeilen beinhaltet für den jeweiligen Eckpunkt einen Wert $1/2$. Die entsprechende Zeile von $\overline{B}$ hat folglich nur zwei Nicht-Nulleinträge, und da sich die Zeilen von $\overline{B}$ zu 1 aufsummieren, erhalten wir

$$\sum_{j \in I_P} \tilde{C}_{(i,j)} = \frac{1}{2} \overline{B}_{(i,k)} + \frac{1}{2} \overline{B}_{(i,l)} = \frac{1}{2} (\overline{B}_{(i,k)} + \overline{B}_{(i,l)}) = \frac{1}{2} \quad \text{für } i \in I_E. \quad (6.8)$$

Damit ist

$$\sum_{j \in I_P} 2\tilde{C}_{(i,j)} = \sum_{j \in I_P} \tilde{L}_{(i,j)} = 1 \quad \text{für } i \in I_E$$

und folglich gilt

$$\tilde{L}_{(i,i)} = 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{L}_{(i,j)} = 1 - 1 = 0.$$

Somit ist der Block $I_E \times I_E$ für $\tilde{L}$ überall 0 und damit entspricht der Block $I_E \times I_E$ für $\tilde{R}$ dem Block aus $2\tilde{C}$.

- $I_F \times I_o$: Der Volumenpunkt o ist in allen Hexaedern vorhanden. Mit Lemma 6.10 sind die zugehörigen Einträge in $\overline{M}$ gerade $1/2$ und mit der Matrix $\overline{B}$ werden diese analog zur Gleichung (6.8) zu $1/2$ aufsummiert. Damit ist

$$\tilde{C}_{(I_F, I_o)} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \tilde{R}_{(I_F, I_o)} = 2\tilde{C}_{(I_F, I_o)} = \vec{1}.$$

Aufgrund der Aufteilung in obere und untere Dreiecksmatrix ist $\tilde{L}_{(I_F, I_o)} = \vec{0}$.

- $I_F \times I_F$: Zunächst kann der Block $I_F \times I_F$ der Matrix $\tilde{C}$ nur auf der Diagonalen ungleich 0 sein, da es im Graphen $\mathbf{G}$ keine Kanten zwischen zwei Facettenpunkten gibt. Da $\tilde{R}_{(I_F, I_o)} = \vec{1}$ ist, ist

$$\tilde{R}_{(i,i)} = 1 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{L}_{(i,i)} = 2\tilde{C}_{(i,i)} \quad \text{für } i \in I_F.$$

Die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ sind per Definition Dreiecksmatrizen, deren Zeilen sich zu 1 aufsummieren. Wir betrachten in einem nächsten Schritt die Multiplikation der Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit den Punkten $\tilde{P}$ und erhalten dafür die folgenden Aussagen. Zunächst ergibt sich mit Theorem 6.13, dass

$$\tilde{C}\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{P} \quad \Leftrightarrow \quad 2\tilde{C}\tilde{P} = \tilde{P}$$

gilt. Betrachten wir die Matrix $\tilde{L}$, so erhalten wir für die Eckpunkte

$$\tilde{L}_{(I_P, :)} \tilde{P} = E_{|P|} P = P,$$

wobei $E_{|P|}$ die Einheitsmatrix der Größe $|P| \times |P|$ ist. Für die Kantenpunkte ergibt sich mit Lemma 6.11

$$\tilde{L}_{(I_E, :)} \tilde{P} = 2\tilde{C}_{(I_E, :)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E,$$

wobei E die Koordinatenmatrix der Kantenpunkte ist. Für die Facettenpunkte erhalten wir

$$\tilde{L}_{(I_F, :)} \tilde{P} = 2\tilde{C}_{(I_F, :)} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\tilde{C}_{(I_F, :)} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix} - 2\tilde{C}_{(I_F, :)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ o \end{bmatrix} = F - \begin{bmatrix} o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} = F$$

und für den Volumenpunkt ergibt sich

$$\tilde{L}_{(I_o, :)} \tilde{P} = 2\tilde{C}_{(I_o, :)} \begin{bmatrix} P \\ E \\ F \\ o \end{bmatrix} - o = o - o = [0, 0, 0] = o.$$

Für die Matrix $\tilde{R}$ erhalten wir entsprechend für die Eckpunkte

$$\tilde{R}_{(I_P, :)} \tilde{P} = 2\tilde{C}_{(I_P, :)} \tilde{P} - P = P - P = 0P.$$

Für die Kantenpunkte ergibt sich mit Lemma 6.11 und Lemma 6.12

$$\tilde{R}_{(I_E, :)} \tilde{P} = 2\tilde{C}_{(I_E, :)} \tilde{P} - 2\tilde{C}_{(I_E, :)} \begin{bmatrix} P \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E - E = 0E.$$

Für die Facettenpunkte und den Volumenpunkt erhalten wir

$$\tilde{R}_{(I_F, :)} \tilde{P} = \begin{bmatrix} o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0F \quad \text{und} \quad \tilde{R}_{(I_o, :)} \tilde{P} = o = [0, 0, 0] = 0 \cdot o.$$

Insgesamt erhalten wir also die obige Aussage

$$\tilde{L}\tilde{P} = \tilde{P} \quad \text{und} \quad \tilde{R}\tilde{P} = 0 \cdot \tilde{P}.$$

□

Für $t = 2$ erhalten wir analog das folgende Lemma:

Lemma 6.15. Sei $t = 2$ und seien die Zeilen von $\tilde{C}$, konstruiert nach Algorithmus 15, so angeordnet, dass E3 gilt. Sei zudem $|P|$ die Anzahl der Eckpunkte, $|E|$ die Anzahl der Kantenpunkte, $|f| = 1$ die Anzahl der Facettenpunkte der Kontrollpunkte $\tilde{P} = [P^T, E^T, f^T]^T$. Dann definieren wir

$$I_P = [1, \dots, |P|], \quad I_E = [|P| + 1, \dots, |P| + |E|] \quad \text{und} \quad I_F = |P| + |E| + 1$$

als die Indizes der jeweiligen Zeilen und Spalten der Matrix $\tilde{C}$ zu den Punkten $\tilde{P}$. Seien $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit der Eingabe $\tilde{C}$ nach

Algorithmus 16 konstruiert, die Anordnung der Zeilen und Spalten von $\tilde{C}$, $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ stimmt also überein. Dann ist

$$\tilde{L} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & & 0 & 0 \\ & 2\tilde{C}_{(I_E, I_P)} & & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 2\tilde{C}_{(I_f, I_E)} & & 2\tilde{C}_{(I_f, I_f)} - 1 \end{array} \right] \quad \text{und} \quad \tilde{R} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 2\tilde{C}_{(1,1)} - 1 & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 2\tilde{C}_{(|P|, |P|)} - 1 & & & 2\tilde{C}_{(I_P, I_E)} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Insbesondere ist $\tilde{L}$ eine untere und $\tilde{R}$ eine obere Dreiecksmatrix. Außerdem summieren sich die Zeilen von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ zu 1 auf. Zusätzlich gilt

$$\tilde{L}\tilde{P} = \tilde{P} \quad \text{und} \quad \tilde{R}\tilde{P} = 0 \cdot \tilde{P},$$

die beiden Spalten von $\tilde{P}$ sind also sowohl Eigenvektoren zum Eigenwert 1 der Matrix $\tilde{L}$ als auch zum Eigenwert 0 der Matrix $\tilde{R}$.

Beweis. Der Beweis verläuft komplett analog zum Beweis von Lemma 6.14. Es muss lediglich Lemma 6.10 durch Lemma 6.9 ersetzt werden. $\square$

Konstruktion der Matrix S Abschließend beschreiben wir die Konstruktion der Matrix S aus Algorithmus 16. Dazu shiften wir das Spektrum der Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$, indem wir in den Zeilen 13–16 des Algorithmus 16 von ihnen zunächst die Einheitsmatrix abziehen und diese mit dem Faktor $\ln(2)$ multiplizieren. Anschließend bilden wir das Matrixexponential der geshifteten Matrizen L' und R' und erstellen abschließend in Zeile 17 des Algorithmus 16 die Matrix S als Produkt dieser beiden Matrixexponentiale L und R .

Damit ist die Konstruktion der Subdivisionsmatrix S abgeschlossen. Wir wollen an dieser Stelle noch Folgendes bemerken:

Bemerkung 6.16. Zur Konstruktion der Matrix S haben wir zwei wesentliche Kernpunkte genutzt, welche die bisher getroffenen Aussagen ermöglichen. Der erste Kernpunkt ist die speziell konstruierte Struktur der Punkte $\tilde{P}$ mit den rechten Winkeln der Kanten $\{p, e\}$ und $\{e, f\}$ sowie zusätzlich für $t = 3$ der Kanten $\{e, f\}$ und $\{f, o\}$. Durch diese Orthogonalität haben sich viele Terme vereinfacht und wir konnten einige Einträge der Matrix $\overline{M}$ explizit bestimmen.

Der zweite Kernpunkt ist die Aufteilung der Matrix $\tilde{C}$ in die beiden Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$. Dabei ist die Anordnung der Punkte $\tilde{P} = [P^T, E^T, f^T]^T$ beziehungsweise $\tilde{P} = [P^T, E^T, F^T, o^T]^T$ unwesentlich, vereinfacht jedoch die Notation deutlich. Beim Aufteilen ist lediglich relevant, dass die Einträge zu den jeweiligen Punktypen sich auf die beiden Matrizen aufteilen. Ist dies erfüllt, können die so aufgeteilten Matrizen beliebig (aber in gleicher Art und Weise) permutiert werden.

Bemerkung 6.17. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass der subsubdominante Eigenwert der konstruierten Subdivisionsmatrix S nicht $1/4$ ist. Darüber hinaus liegt dieser für Beispiele mit einer hohen Anzahl an Knoten tendenziell nah am Wert $1/2$, was einem Teil des Ziels dieser Arbeit

Construct a trivariate generalization of Catmull-Clark [Doo-Sabin] with triple subdominant eigenvalue $\lambda = \frac{1}{2}$ and smallest possible μ

entgegensteht. Ob für $g = 3$ eine Subdivisionsmatrix mit einem geeigneten Träger der Verfeinerungsregeln nach Qualitätskriterium Q11 und einem „besseren“ subsubdominanten Eigenwert konstruiert werden kann, ist vollkommen offen und bedarf weiterer Forschung.

Alternativ zu der hier vorgestellten Konstruktion von S ließe sich auch die Eigenstruktur aus Abschnitt 6.2.1 verwenden, um mit dieser eine Konstruktion der Subdivisionsmatrix S , angelehnt an Variante 1 aus Abschnitt 5.2.1, zu erstellen. Ebenso wäre möglich, die hier konstruierte Matrix S in ihre Eigenwerte und Eigenvektoren zu zerlegen, das Spektrum wie gewünscht anzupassen, und daraus eine alternative Subdivisionsmatrix zu erzeugen. Dies kann für einige Anwendungen sinnvoll sein. Da wir damit jedoch sicher das Qualitätskriterium Q11 verlieren, führen wir diesen Ansatz hier nicht weiter aus.

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt den Qualitätskriterien widmen, betrachten wir ein Beispiel für die Konstruktion einer Subdivisionsmatrix S .

Beispiel 6.18. Zunächst merken wir an, dass alle Matrizen in diesem Beispiel auf zwei Nachkommastellen gerundet wurden. Die Matrizen L , R und S sind zudem aufgerundet, damit kleine Einträge nicht zu 0 gerundet werden.

Wir wählen als Eingabe für $t = 3$ die Adjazenzmatrix

$$A := \begin{bmatrix} & 1 & & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & & & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 & \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

des kombinatorischen Graphen G_K . Für diese erstellen wir zunächst das primale und das duale Polytop und konstruieren anschließend die Kontrollpunkte $\tilde{P}$ durch die Projektion der dualen Punkte auf die Facetten des primalen Polytops und durch das Einfügen des Volumenpunkts o in $[0, 0, 0]$. Beiden Schritte sind in Abbildung 6.32 zu sehen. Mit dieser Eigenstruktur erhalten wir für die beiden Matrizen $\overline{M}$ und $\overline{B}$

$$\overline{M} = \frac{1}{100}$$

-53 50 50 50	71 41 41 -11 -71 40 40 -71 40 40 143 143	68 31 31 68 53 53 -30 -30 -236 -30 38 107 107	-152
-53 50 50 50	71 41 41 -11 -71 40 40 -71 40 40 143 143	68 31 31 68 53 53 -30 -30 -236 -30 38 107 107	-152
-150 50 50 50	90 113 48 -71 -155 86 86 33 33 38 38	68 53 127 77 42 33 33 -122 -15 31 -26 64	50 50 50 -38
-5 50 50 50	40 40 25 -25 -55 73 73 53 73 73	33 42 52 52 33 42 -96 -56 70 70 123	50 50 50 -163
-150 50 50 50	90 113 48 -71 -155 86 86 33 33 38 38	68 53 127 77 42 33 33 -122 -15 31 -26 64	50 50 50 -38
-150 50 50 50	90 113 48 -71 -155 86 86 33 33 38 38	68 53 127 77 42 33 33 -122 -15 31 -26 64	50 50 50 -38
-150 50 50 50	90 113 48 -71 -155 86 86 33 33 38 38	68 53 127 77 42 33 33 -122 -15 31 -26 64	50 50 50 -38
-150 50 50 50	90 113 48 -71 -155 86 86 33 33 38 38	68 53 127 77 42 33 33 -122 -15 31 -26 64	50 50 50 -38
-5 50 50 50	25 40 40 -55 -25 73 73 73 53 53	52 52 42 33 33 42 -96 -96 70 70 123	50 50 50 -163

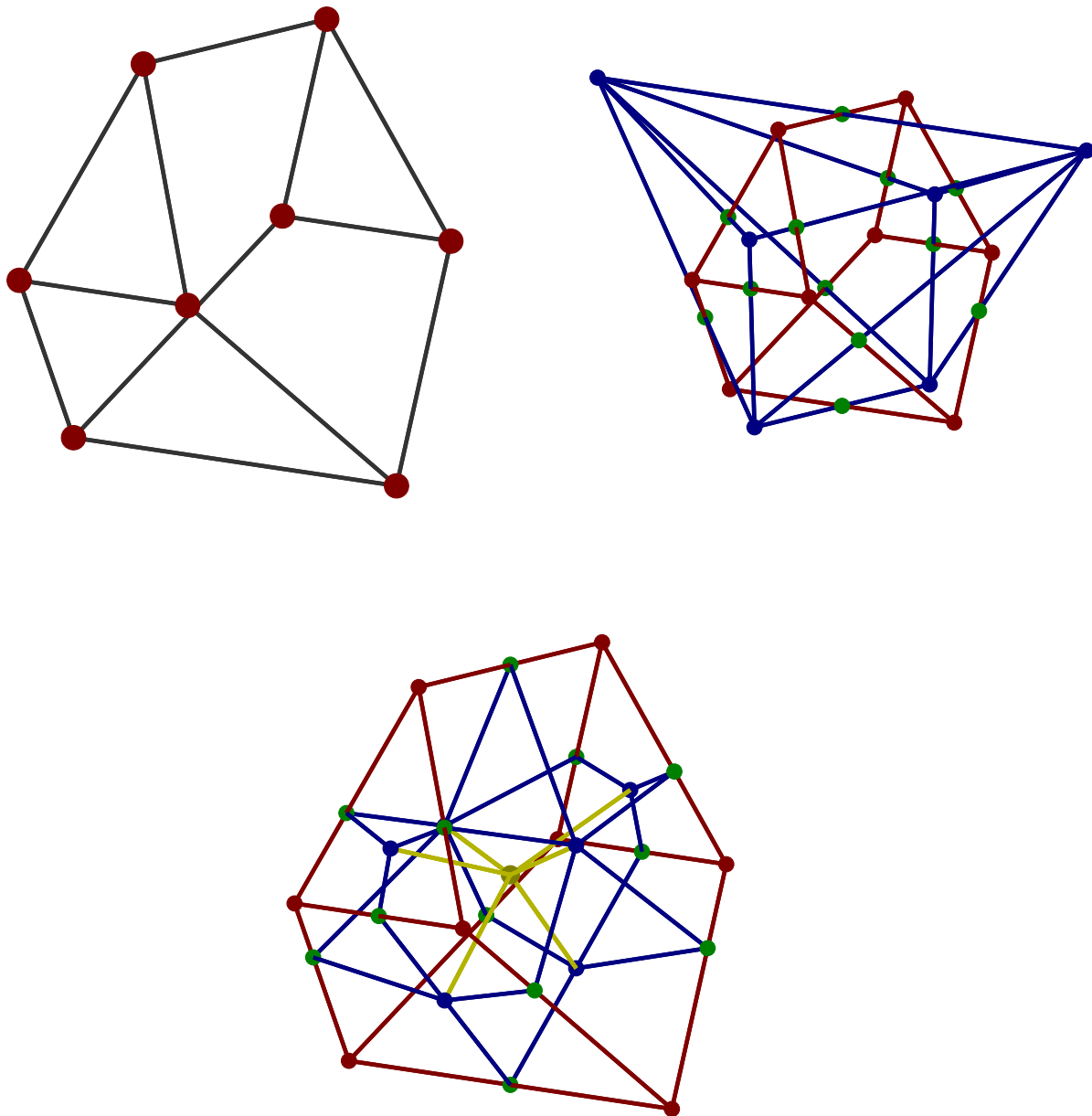


Abbildung 6.32: Das primale Polytop zur Adjazenzmatrix A aus Beispiel 6.18 (links), das primale und das zugehörige duale Polytop (Mitte) sowie die zugehörige Eigenstruktur, konstruiert nach Abschnitt 6.2.1 (rechts).

Bei der Matrix $\overline{M}$ lassen sich hier gut die Einträge $1/2$ erkennen, die wir in Lemma 6.10 bewiesen haben. Multiplizieren wir die beiden Matrizen, so erhalten wir

Diese Matrix multiplizieren wir mit 2 und teilen sie anschließend in die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ auf. Wir erhalten

239

$$\tilde{R} = \frac{1}{100}$$

[illegible]

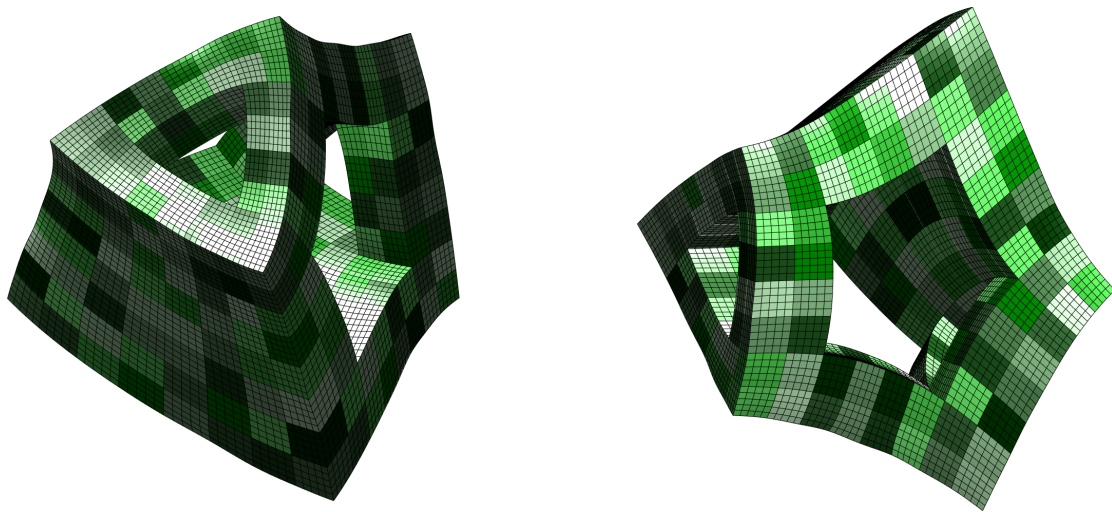


Abbildung 6.33: Auswertung der Doppelschale der Eigenstruktur der Matrix $\overline{S}$, die aus der Adjazenzmatrix von Beispiel 6.18 erzeugt wurde, hier zu sehen aus zwei verschiedenen Perspektiven.

Multiplizieren wir die beiden Matrizen L und R miteinander, so erhalten wir die Subdivisionsmatrix

$$S = \frac{1}{100}$$

bei der sich die sparse Struktur, die für das Qualitätskriterium Q11 benötigt wird, gut erkennen lässt. Eine Illustration der Doppeleigenschaft der zugehörigen Matrix $\bar{S}$ findet sich in Abbildung 6.33.

Wir haben damit alle Aspekte der Konstruktion beleuchtet und besprechen im nächsten Abschnitt die Qualitätskriterien im Bezug auf die so konstruierte Matrix S .

6.3 Beweise und Qualitätskriterien der Subdivisionsmatrizen

Wie bereits der Titel des Kapitels verrät, sind die hier konstruierten verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivisionsmatrizen experimenteller Natur, da sich für diese Konstruktion über einige Qualitätskriterien nur bedingt Aussagen treffen lassen. Einige Aussagen sind in Reichweite, müssten aber noch im Detail ausgearbeitet werden. Wir werden daher im Laufe des Abschnitts beschreiben, welche Aussagen wir bewiesen haben, welche Aussagen im Prinzip bewiesen werden können und welche Aussagen noch vollkommen offen sind. Wir lassen hier also noch einigen Raum für weitere Forschungsprojekte.

		$S^{(2)}$	$\bar{S}^{(2)}$	$S^{(3)}$	$\bar{S}^{(3)}$
Q1	Affine Invarianz				
Q2	Konvexe Hülle				
Q3	Dominanter Eigenwert 1				
Q4	t subdominante Eigenwerte				
Q5	t subdominante Eigenwerte 0,5				
Q6	Subsubdominanter Eigenwert 0,25				
Q7	Regulärer Fall				
Q8	Semi-regulärer Fall				
Q9	Subdivisionsmatrix für jede Eingabe				
Q10	Symmetrie				
Q11	Geeigneter Träger				
Q12	Selbstdurchdringungsfreie Struktur				
Q13	Injektive und reguläre char. Abbildung				
	stochastisch				
	irreduzibel				

Tabelle 6.1: Übersicht über die Qualitätskriterien sowie weitere Eigenschaften der einzelnen Subdivisionsmatrizen aus Definition 6.19.

Zunächst teilen wir, analog zu Kapitel 5, die Varianten der Subdivisionsmatrizen in die folgenden vier Kategorien auf:

Definition 6.19. Wir benennen die vier Kategorien der Subdivisionsmatrizen für $g = 3$ mithilfe von zwei verschiedenen Notationen:

- Matrizen S stellen Subdivisionsmatrizen für Initialelemente dar, wohingegen Matrizen $\bar{S}$ Matrizen für Doppelringe und Doppelschalen darstellen.
- Matrizen $S^{(2)}$ sind Subdivisionsmatrizen vom Typ 2, wohingegen Matrizen $S^{(3)}$ Subdivisionsmatrizen vom Typ 3 sind.

Insgesamt erhalten wir damit vier verschiedene Kategorien von Subdivisionsmatrizen, welche auch in Tabelle 6.1 dargestellt sind.

In Tabelle 6.1 geben wir den aktuellen Status der Qualitätskriterien an. Wir verwenden die in Abschnitt 5.3 definierten Farben erneut und erhalten die folgende Farbcodierung:

dunkelgrün	bewiesen und empirisch geprüft	grün	bewiesen
gelb	nicht bewiesen, aber empirisch geprüft	orange	unklar
rot	widerlegt oder Gegenbeispiel konstruiert	grau	nicht anwendbar

Wir begleiten außerdem die Resultate mit empirischen Tests. Da wir in der Konstruktion in Abschnitt 6.2 für $t = 3$ explizit von kombinatorischen Graphen, die aus einer Struktur von Hexaedern hervorgehen, ausgegangen sind, verwenden wir für die empirische Analyse nur Strukturen, die aus Hexaedern bestehen. Nach Abschnitt 3.1.1 sind dies gerade 186.506 Beispiele, von denen 158.527 einzigartige Beispiele und 27.979 Isomorphien von bereits vorhandenen Strukturen sind. Für $t = 2$ betrachten wir empirisch wieder die Subdivisionsmatrizen für (Ir)Regularitäten mit einer Valenz kleiner gleich 100.

Wir verwenden für die Beweise zudem die Bezeichnungen für Variablen und Matrizen aus Abschnitt 6.2, ohne sie erneut einzuführen. Diese lassen sich gut erkennbar in den jeweiligen Algorithmen finden.

Q1 Affine Invarianz

Wir beginnen mit der Untersuchung der Partition der Eins mit dem folgenden Theorem:

Theorem 6.20. *Die Zeilen der Subdivisionsmatrizen aller vier Kategorien summieren sich zu 1 auf, sie erfüllen also Qualitätskriterium Q1.*

Beweis. Mit Lemma 6.15 für $t = 2$ und Lemma 6.14 für $t = 3$ summieren sich die Zeilen der beiden Dreiecksmatrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ zu 1 auf. Damit haben beide Matrizen mit Lemma 2.36 einen Eigenvektor $\vec{1}$ zum Eigenwert 1.

Die beiden Matrizen

$$\ln(2) (\tilde{L} - E_n) \quad \text{und} \quad \ln(2) (\tilde{R} - E_n)$$

sind ebenfalls Dreiecksmatrizen. Sei J mit $\tilde{L} = VJV^{-1}$ die Jordanzerlegung von $\tilde{L}$. Dann ist

$$\tilde{L} - E_n = VJV^{-1} - VE_nV^{-1} = V(J - E_n)V^{-1}.$$

Damit ist $J - E_n$ die Jordanzerlegung der Matrix $\tilde{L} - E_n$, diese hat also einen Eigenwert 0 zum Eigenvektor $\vec{1}$. Zudem gilt

$$\ln(2) (\tilde{L} - E_n) \vec{1} = \ln(2) \cdot 0 \cdot \vec{1} = 0 \cdot \vec{1},$$

die Matrix $\ln(2) (\tilde{L} - E_n)$ hat also ebenfalls einen Eigenwert 0 zum Eigenvektor $\vec{1}$. Mit Lemma B.59 und Lemma B.60, die die Eigenwerte und Eigenvektoren von Exponentialen von Dreiecksmatrizen beschreiben, erhalten wir

$$L \cdot \vec{1} = \exp(\ln(2) (\tilde{L} - E_n)) \vec{1} = \exp(0) \cdot \vec{1} = 1 \cdot \vec{1}.$$

Die Matrix L besitzt also einen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$. Dasselbe gilt analog für R .

Wir erhalten damit für $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$

$$S^{(t)} \cdot \vec{1} = (LR) \cdot \vec{1} = L \cdot \vec{1} = \vec{1} \quad \text{mit} \quad t \in \{2, 3\},$$

die beiden Matrizen $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ besitzen daher einen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$. Mit Lemma 2.36 summieren sich damit die Zeilen von $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ zu 1 auf und Qualitätskriterium Q1 ist erfüllt.

Da die Zeilen aus $\bar{S}$ nur aus Einträgen der Subdivisionsmatrizen S der Initialelemente, aufgefüllt mit Nulleinträgen, bestehen, überträgt sich die gezeigte affine Invarianz der Subdivisionsmatrizen S auf die Subdivisionsmatrizen $\bar{S}$, für diese ist also ebenfalls Qualitätskriterium Q1 erfüllt. $\square$

Dieses Resultat bestätigt sich auch empirisch. Die maximalen und minimalen Zeilensummen der 186.506 Beispiele für die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente finden sich in Abbildung 6.34. Die jeweiligen Maximalwerte aller vier Kategorien finden sich in der folgenden Tabelle:

	$S^{(2)}$	$\bar{S}^{(2)}$	$S^{(3)}$	$\bar{S}^{(3)}$
$\max \sum -1$	1,7986e-14	1,7986e-14	1,5321e-14	1,5321e-14
$\min \sum -1$	-8,8818e-16	-8,8818e-16	-1,1102e-15	-1,1102e-15

Insgesamt lässt sich erkennen, dass die numerischen Ergebnisse Werte nahe der Maschinengenauigkeit ergeben, womit Qualitätskriterium Q1 auch empirisch erfüllt ist.

Q2 Konvexe Hülle

Für die konvexe Hülle erhalten wir mit dem nächsten Theorem ein ähnliches Resultat:

Theorem 6.21. *Alle Einträge der Subdivisionsmatrizen S aller vier Kategorien sind nicht-negativ, sie erfüllen also zusammen mit Qualitätskriterium Q1 das Qualitätskriterium Q2 der konvexen Hülle.*

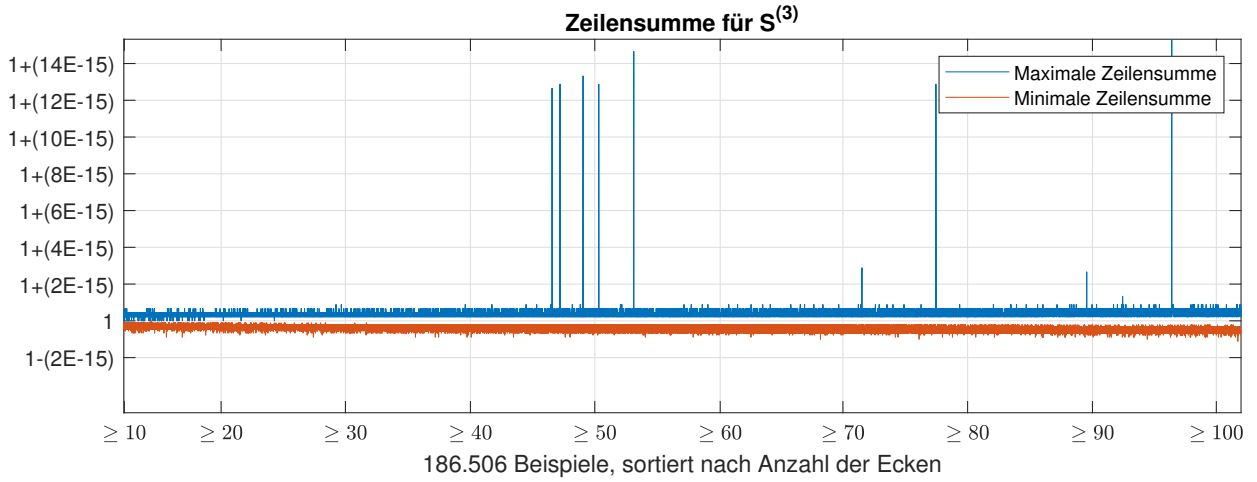


Abbildung 6.34: Maximale und minimale Zeilensumme der Subdivisionsmatrizen der dreidimensionalen Initialelemente.

Beweis. Mit Theorem 6.20 erfüllen alle vier Kategorien von S das Qualitätskriterium Q1. Mit Theorem 6.13 erfüllt die Matrix $\tilde{C}$ die Eigenschaft E4, alle Nebendiagonaleinträge von $\tilde{C}$ sind also nicht-negativ. Da die Nebendiagonaleinträge von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ entweder Einträge aus $\tilde{C}$ oder Nulleinträge sind, sind alle Nebendiagonaleinträge von $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ ebenfalls nicht-negativ. Dasselbe gilt für die beiden Matrizen

$$\ln(2) (\tilde{L} - E_n) \quad \text{und} \quad \ln(2) (\tilde{R} - E_n).$$

Mit Lemma B.63, das die Nicht-Negativität der Exponentialen von Matrizen mit nicht-negativen Nebendiagonaleinträgen beschreibt, erhalten wir, dass alle Einträge der Matrizen

$$L = \exp(\ln(2) (\tilde{L} - E_n)) \quad \text{und} \quad R = (\ln(2) (\tilde{R} - E_n))$$

nicht negativ sind. Da

$$S^{(t)} = LR \quad \text{mit} \quad t \in \{2, 3\}$$

ist, sind alle Einträge von $S^{(t)}$ nicht negativ, denn das Produkt zweier nicht-negativer Matrizen ist wiederum nicht negativ. Damit erfüllen die Matrizen $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ Qualitätskriterium Q2.

Analog zu Theorem 6.20 überträgt sich diese Eigenschaft der Nicht-Negativität von den Matrizen der Initialelemente S auf die Matrizen $\bar{S}$, da die Zeilen aus $\bar{S}$ aus Zeilen von Subdivisionsmatrizen der Initialelemente, aufgefüllt mit Nulleinträgen, bestehen. Damit ist Qualitätskriterium Q2 für die beiden Matrizen $\bar{S}^{(2)}$ und $\bar{S}^{(3)}$ ebenfalls erfüllt. $\square$

Aus der affinen Invarianz des vorherigen Abschnitts und der Nicht-Negativität dieses Abschnitts ergibt sich direkt das folgende Korollar:

Korollar 6.22. *Alle vier Kategorien der Subdivisionsmatrizen sind stochastisch.*

Die Nicht-Negativität lässt sich ebenfalls empirisch überprüfen. Die maximalen und minimalen Einträge der Beispielmatrizen für den Fall $S^{(3)}$ finden sich in Abbildung 6.35. Die maximalen Einträge scheinen für diese Kategorie tendenziell mit steigender Eckenzahl größer zu werden. Dieser Trend wird allerdings von Ausreißern durchbrochen, die zu den semi-irregulären Fällen gehören. Damit scheint der Trend an der (zufälligen) Auswahl von Beispielen zu liegen und lässt sich nicht grundsätzlich verallgemeinern.

Die maximalen und minimalen Elemente aller getesteten Beispiele der vier Kategorien lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

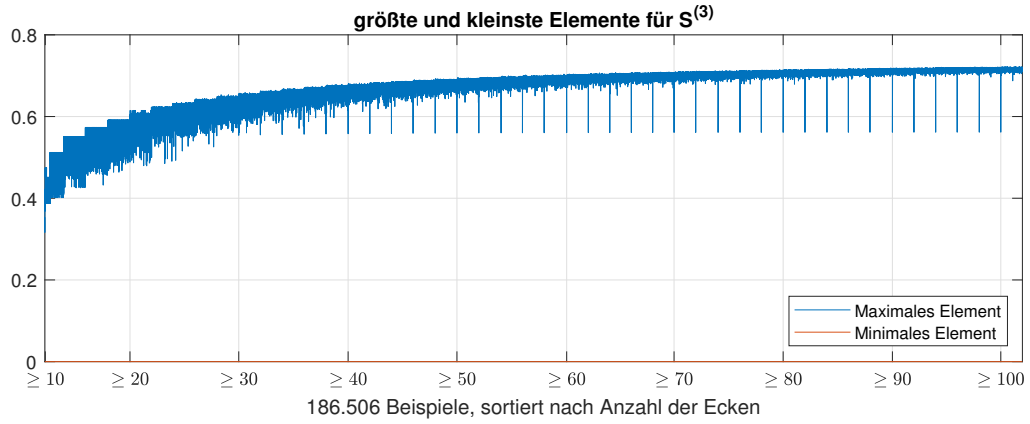


Abbildung 6.35: Maximale und minimale Elemente der Subdivisionsmatrizen der dreidimensionalen Initialelemente.

	$S^{(2)}$	$\bar{S}^{(2)}$	$S^{(3)}$	$\bar{S}^{(3)}$
$\max(\max(S))$	0,749 75	0,749 75	0,722 31	0,722 31
$\min(\min(S))$	0	0	0	0

Das Qualitätskriterium Q2 lässt sich also auch empirisch belegen.

Q11 Geeigneter Träger der Verfeinerungsregeln

Im Gegensatz zur verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision ist dieses Qualitätskriterium nicht per Konstruktion erfüllt und muss daher bewiesen werden. Wir beginnen mit dem zweidimensionalen Fall, welchen wir im nächsten Theorem betrachten:

Theorem 6.23. Die Subdivisionsmatrix $S^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt Qualitätskriterium Q11, die Verfeinerungsregeln haben also einen geeigneten Träger.

Beweis. Wir definieren zunächst $\tilde{P} := [P^T, E^T, f^T]^T$ als die Kontrollpunkte, aus denen $S^{(2)}$ erzeugt wurde. Die Zeilen von $S^{(2)}$ sind also so angeordnet, dass $S^{(2)}\tilde{P}$ die Verfeinerung von $\tilde{P}$ ist. Im Graphen $\mathbf{G}$ ist zudem die Struktur der Kontrollpunkte $\tilde{P}$ codiert, $\tilde{P}$ ist also die Realisierung von $\mathbf{G}$ und beschreibt, wie die Kontrollpunkte benachbart sind. Wir verwenden in diesem Beweis die Knoten des Graphen $\mathbf{G}$ und die Realisierung des Graphen durch die Kontrollpunkte $\tilde{P}$ synonym. Jeder Knoten in $\mathbf{G}$ ist also mit einem Kontrollpunkt aus $\tilde{P}$ assoziiert.

Die Subdivisionsmatrix erfüllt das Qualitätskriterium genau dann, wenn ausschließlich die Matrixeinträge von $S^{(2)}$ ungleich 0 sind, für die die beiden zugehörigen Kontrollpunkte an einem gemeinsamen Viereck liegen. Damit haben wir für $S^{(2)}$ drei verschiedene Kategorien von Punkten:

- **Verfeinerung von Eckpunkten:** Die Verfeinerung von Eckpunkten überlappt sich mit anderen Initialelementen derart, dass ausschließlich die Matrixeinträge der Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ ungleich 0 sein dürfen, die am Viereck des entsprechenden Eckpunkts liegen. Dies sind der Eckpunkt selbst, die beiden benachbarten Kantenpunkte sowie der zentrale Facettenpunkt. Eine Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.27 zu finden.
- **Verfeinerung von Kantenpunkten:** Die Verfeinerung von Kantenpunkten überlappt sich mit anderen Initialelementen derart, dass ausschließlich die Matrixeinträge der Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ ungleich 0 sein dürfen, die an den beiden Vierecken liegen, an denen der entsprechenden Kantenpunkt liegt. Dies sind zwei Eckpunkte, der Kantenpunkt selbst, zwei weitere Kantenpunkte und der zentrale Facettenpunkt. Eine Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.28 zu finden.

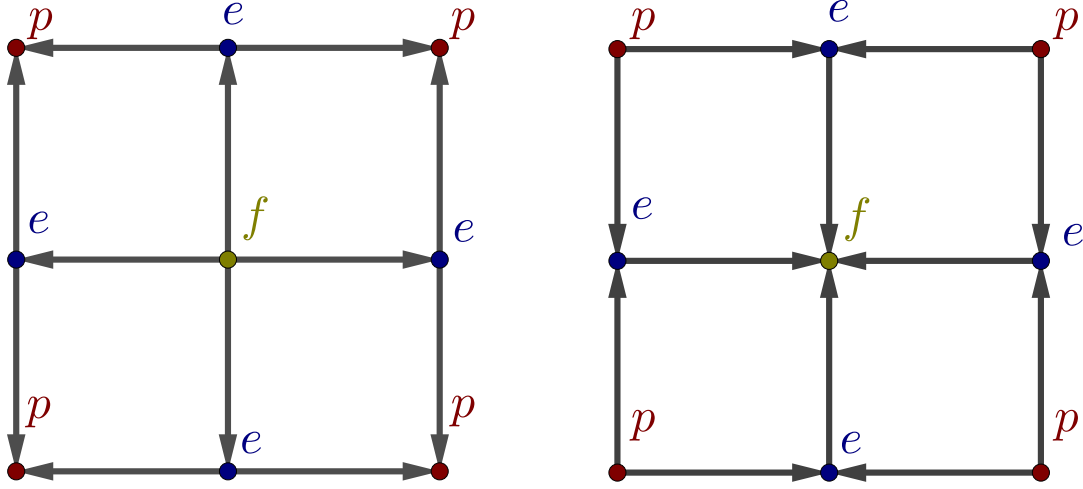


Abbildung 6.36: Beispielhafte Illustration der Realisierungen der gerichteten Graphen $G_{\tilde{L}}$ (links) und $G_{\tilde{R}}$ (rechts) für $t = 2$.

- Verfeinerung des Facettenpunkts: Da der Facettenpunkt an allen Vierecken liegt, können alle Einträge der entsprechenden Zeile in $S^{(2)}$ ungleich 0 sein. Eine beispielhafte Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.29 zu finden.

Für den Beweis dieser Aussage betrachten wir zunächst die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$. Da die Nebendiagonaleinträge der Matrix $\tilde{C}$ mit Theorem 6.13 alle nicht-negativ sind, gilt dies auch für die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$. Diese Eigenschaft überträgt sich ebenfalls auf die Matrizen

$$L' := \ln(2) (\tilde{L} - E_n) \quad \text{und} \quad R' := \ln(2) (\tilde{R} - E_n).$$

Betrachten wir die Einträge der Matrizen L' und R' etwas genauer. Die Matrix $\tilde{C}$ ist durch die Eigenschaft E4 auf der Nebendiagonalen genau dann positiv, wenn es eine entsprechende Kante zwischen den beiden Kontrollpunkten gibt.

Die Aufteilung in die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ überträgt diese Eigenschaft zwar, allerdings nur für den linken unteren beziehungsweise den rechten oberen Teil der Matrix. Damit lässt sich zur Matrix $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ der Graph G in zwei gerichtete Graphen aufteilen.

Im Graphen $G_{\tilde{L}}$ zur Matrix $\tilde{L}$ sind die Kanten gerichtet vom Punkt f zu Punkten aus E und von Punkten aus E zu Punkten aus P . Im Graphen $G_{\tilde{R}}$ zur Matrix $\tilde{R}$ sind die Kanten gerichtet von Punkten aus P zu Punkten aus E und von Punkten aus E zum Punkt f . Eine beispielhafte Illustration findet sich in Abbildung 6.36. Diese Eigenschaft überträgt sich in gleicher Art und Weise auf die beiden Matrizen L' und R' .

Wir wollen in einem nächsten Schritt Theorem B.61 und Korollar B.62 verwenden, die die (Nicht-)Nulleinträge von Potenzen und Exponentialen solcher Matrizen beschreiben. Diese beiden Aussagen benötigen jedoch nicht-negative Matrizen. Wir definieren daher

$$a := \min(\text{diag}(L')) \quad \text{und} \quad b := \min(\text{diag}(R')).$$

Damit können wir L' und R' als

$$L' = L' + aE_n - aE_n \quad \text{und} \quad R' = L' + bE_n - bE_n$$

darstellen. Mit demselben Vorgehen, das wir auch in Lemma B.63 verwendet haben und das aus [Ang14] stammt, erhalten wir

$$L = \exp(L') = \exp(L' + aE_n - aE_n) = \exp(L' + aE_n) \exp(-aE_n) = \exp(L' + aE_n) \exp(-a)$$

und

$$R = \exp(R') = \exp(R' + bE_n - bE_n) = \exp(R' + bE_n) \exp(-bE_n) = \exp(R' + bE_n) \exp(-b).$$

Hier wurde jeweils ausgenutzt, dass die Matrix $L' + aE_n$ mit der Matrix $-aE_n$ und die Matrix $R' + bE_n$ mit der Matrix $-bE_n$ kommutiert. Damit konnte Satz B.53 verwendet und die Exponentiale auseinandergezogen werden.

Da die Matrizen $L' + aE_n$ und $R' + aE_n$ nicht-negativ sind, lässt sich für deren Exponential Korollar B.62 verwenden und da die Matrizen L und R bis auf einen positiven Faktor dieselben Einträge wie die Matrizen $\exp(L' + aE_n)$ und $\exp(R' + aE_n)$ haben, gilt mit Korollar B.62

$$L_{(i,j)} = \begin{cases} > 0 & \text{es existiert ein Pfad zwischen } \tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)} \text{ in } \mathbf{G}_{\tilde{L}} \\ = 0 & \text{es existiert kein Pfad zwischen } \tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)} \text{ in } \mathbf{G}_{\tilde{L}} \end{cases}$$

und

$$R_{(i,j)} = \begin{cases} > 0 & \text{es existiert ein Pfad zwischen } \tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)} \text{ in } \mathbf{G}_{\tilde{R}} \\ = 0 & \text{es existiert kein Pfad zwischen } \tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)} \text{ in } \mathbf{G}_{\tilde{R}} \end{cases}.$$

Um die Notation und die sprachliche Beschreibung für diese beiden Aussagen im Folgenden zu vereinfachen, definieren wir, dass es im Graphen $\mathbf{G}_{\tilde{L}}$ und $\mathbf{G}_{\tilde{R}}$ einen Pfad der Länge 0 zwischen $\tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)}$ gibt. Die Diagonaleinträge der beiden obigen Matrizen sind also positiv. Dies ergibt sich daraus, dass für die Matrixexponentiale $L^0 = R^0 = E_n$ ein Summand des Exponentials ist. Die Diagonaleinträge sind damit positiv. Zudem sind L und R mit der obigen Beschreibung nicht-negative Matrizen.

Für die Matrixeinträge von $S^{(2)}$ erhalten wir

$$S_{(i,j)}^{(2)} = \sum_{l=1}^n L_{(i,l)} R_{(l,j)} \quad \text{für } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Da L und R nicht-negativ sind, genügt es für die Positivität von $S_{(i,j)}^{(2)}$, wenn einer der Summanden größer als 0 ist.

Wir erhalten damit, dass ein Matrixeintrag $S_{(i,j)}^{(2)}$ genau dann größer als 0 ist, wenn es einen Kontrollpunkt $\tilde{P}_{(l,:)}$ gibt, für den es in $\mathbf{G}_{\tilde{L}}$ einen Pfad von $\tilde{P}_{(i,:)}$ nach $\tilde{P}_{(l,:)}$ und in $\mathbf{G}_{\tilde{R}}$ einen Pfad von $\tilde{P}_{(l,:)}$ nach $\tilde{P}_{(j,:)}$ gibt.

Es genügt an dieser Stelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit Pfade nach und von Eckpunkten aus P zu betrachten. Pfade in $\mathbf{G}_{\tilde{L}}$, die in einem Facetten- oder Kantenpunkt enden, können zu einem Pfad zu einem Eckpunkt fortgesetzt werden. Von diesem Eckpunkt kann in $\mathbf{G}_{\tilde{R}}$ dann ein Rückwärtspfad zum entsprechenden Facetten- oder Kantenpunkt erstellt und von dort aus beliebig fortgesetzt werden.

Da es in $\mathbf{G}_{\tilde{L}}$ ausschließlich Kanten vom Punkt f zu Punkten aus E und von Punkten aus E zu Punkten aus P gibt, gibt es in $\mathbf{G}_{\tilde{L}}$ genau dann Pfade von Punkten zu Eckpunkten aus P , wenn beide an einem gemeinsamen Viereck liegen. Umgekehrt gibt es in $\mathbf{G}_{\tilde{R}}$ genau dann Pfade von einem Eckpunkt aus P zu einem Kontrollpunkt, wenn der Zielkontrollpunkt am Viereck des Eckpunkts aus P liegt.

Damit erhalten wir

$$S_{(i,j)}^{(2)} > 0 \quad \text{mit } i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)} \text{ liegen an einem gemeinsamen Viereck}$$

und folglich ist Qualitätskriterium Q11 für $S^{(2)}$ erfüllt. □

Wir erhalten mit dem nächsten Theorem das analoge Resultat für den Volumenfall:

Theorem 6.24. Die Subdivisionsmatrix $S^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt Qualitätskriterium Q11, die Verfeinerungsregeln haben also einen geeigneten Träger.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 6.23, daher gehen wir hier nur auf die sprachlichen Unterschiede ein.

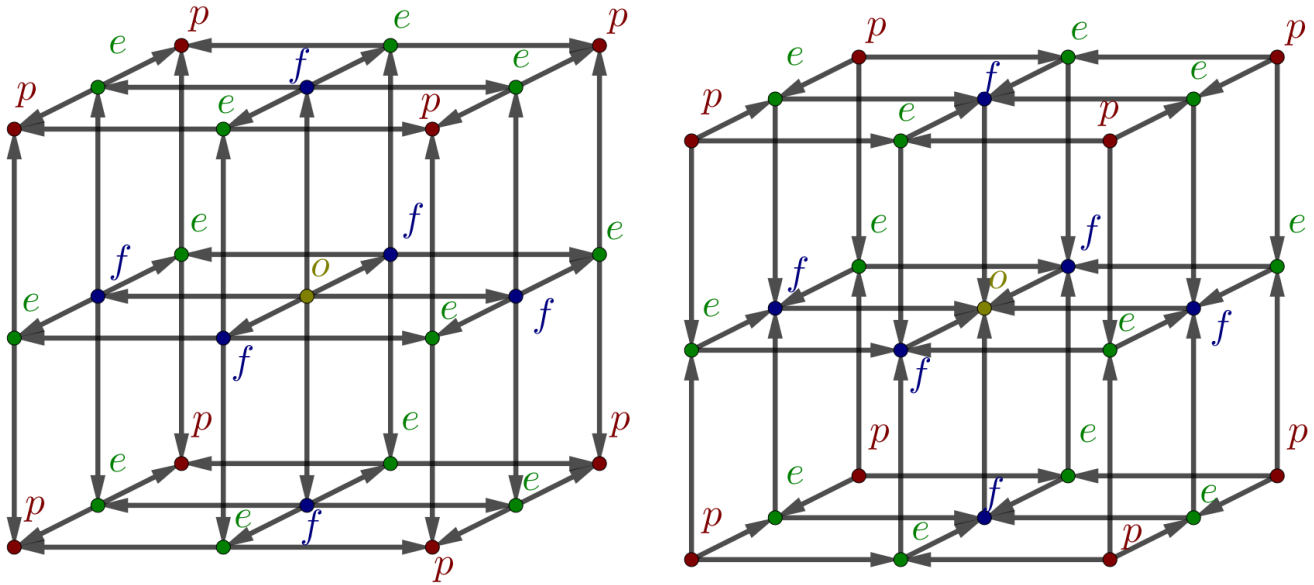


Abbildung 6.37: Beispielhafte Illustration der Realisierungen der gerichteten Graphen G_L (links) und G_R (rechts) für $t = 3$.

Wir definieren zunächst $\tilde{P} := [P^T, E^T, F^T, o^T]^T$ als die Kontrollpunkte, aus denen $S^{(3)}$ erzeugt wurde. Die Zuordnung der Zeilen und die Assoziation mit dem Graphen G erfolgt analog zu Theorem 6.23.

Die Subdivisionsmatrix erfüllt Qualitätskriterium Q11 genau dann, wenn ausschließlich die Matrixeinträge von $S^{(3)}$ ungleich 0 sind, für die die beiden zugehörigen Kontrollpunkte an einem gemeinsamen Hexaeder liegen. Damit haben wir für $S^{(3)}$ vier verschiedene Kategorien von Punkten:

- Verfeinerung von Eckpunkten: Die Verfeinerung von Eckpunkten überlappt sich mit anderen Initialelementen derart, dass ausschließlich die Matrixeinträge der Subdivisionsmatrix $S^{(3)}$ ungleich 0 sein dürfen, die am Hexaeder des entsprechenden Eckpunkts liegen. Eine Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.27 zu finden.
- Verfeinerung von Kantenpunkten: Die Verfeinerung von Kantenpunkten überlappt sich mit anderen Initialelementen derart, dass ausschließlich die Matrixeinträge der Subdivisionsmatrix $S^{(3)}$ ungleich 0 sein dürfen, die an den beiden Hexaedern liegen, an denen der entsprechenden Kantenpunkt liegt. Eine Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.28 zu finden.
- Verfeinerung der Facettenpunkte: Die Verfeinerung von Facettenpunkten überlappt sich mit anderen Initialelementen derart, dass ausschließlich die Matrixeinträge der Subdivisionsmatrix $S^{(3)}$ ungleich 0 sein dürfen, die an den Hexaedern liegen, an denen der entsprechenden Facettenpunkt liegt. Eine beispielhafte Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.29 zu finden.
- Verfeinerung des Volumenpunkts: Da der Volumenpunkt an allen Hexaedern liegt, können alle Einträge der entsprechenden Zeile in $S^{(3)}$ ungleich 0 sein. Eine beispielhafte Illustration dieser Punkte ist in Abbildung 6.30 zu finden.

Für den gerichteten Graphen G_L erhalten wir ausschließlich Kanten vom Punkt o zu Punkten aus F , von Punkten aus F zu Punkten aus E und von Punkten aus E zu Punkten aus P .

Für den gerichteten Graphen G_R erhalten wir entsprechend umgekehrt ausschließlich Kanten von Punkten aus P zu Punkten aus E , von Punkten aus E zu Punkten aus F und von Punkten aus F zum Punkt o . Eine beispielhafte Illustration ist in Abbildung 6.37 zu finden.

Für die Matrixeinträge von $S^{(3)}$ erhalten wir

$$S_{(i,j)}^{(3)} = \sum_{l=1}^n L_{(i,l)} R_{(l,j)} \quad \text{für } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Da L und R nicht-negativ sind, genügt es für die Positivität von $S_{(i,j)}^{(3)}$, wenn einer der Summanden größer als 0 ist.

Wir erhalten damit, dass ein Matrixeintrag $S_{(i,j)}^{(3)}$ genau dann größer als 0 ist, wenn es einen Kontrollpunkt $\tilde{P}_{(l,:)}$ gibt, für den es in $\mathbf{G}_{\bar{L}}$ einen Pfad von $\tilde{P}_{(i,:)}$ nach $\tilde{P}_{(l,:)}$ und in $\mathbf{G}_{\bar{R}}$ einen Pfad von $\tilde{P}_{(l,:)}$ nach $\tilde{P}_{(j,:)}$ gibt.

Es genügt an dieser Stelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit, Pfade nach und von Eckpunkten aus P zu betrachten. Pfade in $\mathbf{G}_{\bar{L}}$, die in einem Volumen-, Facetten- oder Kantenpunkt enden, können zu einem Pfad zu einem Eckpunkt fortgesetzt werden. Von diesem Eckpunkt kann in $\mathbf{G}_{\bar{R}}$ dann ein Rückwärtspfad zum entsprechenden Volumen-, Facetten- oder Kantenpunkt erstellt und von dort aus beliebig fortgesetzt werden.

Da es in $\mathbf{G}_{\bar{L}}$ ausschließlich Kanten vom Punkt o zu Punkten aus F , von Punkten aus F zu Punkten aus E und von Punkten aus E zu Punkten aus P gibt, gibt es in $\mathbf{G}_{\bar{L}}$ genau dann Pfade von Punkten zu Eckpunkten aus P , wenn beide an einem gemeinsamen Hexaeder liegen. Umgekehrt gibt es in $\mathbf{G}_{\bar{R}}$ genau dann Pfade von einem Eckpunkt aus P zu einem Kontrollpunkt, wenn der Zielkontrollpunkt am Hexaeder des Eckpunkts aus P liegt.

Damit erhalten wir

$$S_{(i,j)}^{(3)} > 0 \quad \text{mit } i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{P}_{(i,:)} \text{ und } \tilde{P}_{(j,:)} \text{ liegen an einem gemeinsamen Hexaeder}$$

und folglich ist Qualitätskriterium Q11 für $S^{(3)}$ erfüllt. □

Aus diesen beiden Theoremen erhalten wir das folgende Korollar:

Korollar 6.25. Die Matrizen $S^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind irreduzibel.

Beweis. Wir definieren zunächst für $t \in \{2, 3\}$ den gerichteten Graphen $\mathbf{G}_S$ zur Adjazenzmatrix

$$A_{(i,j)} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } S_{(i,j)}^{(t)} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hier ist wichtig zu bemerken, dass dieser Graph $\mathbf{G}_S$ nicht mit dem Graphen $\mathbf{G}$ übereinstimmt. Da der zentrale Punkt f für $t = 2$ und der zentrale Punkt o für $t = 3$ an allen Vierecken beziehungsweise Hexaedern liegt, ist folglich

$$S_{(i,n)}^{(t)} \neq 0 \quad \text{und} \quad S_{(n,i)}^{(t)} \neq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Damit existiert im gerichteten Graphen $\mathbf{G}_S$ eine Kante und damit ein Pfad von jedem Kontrollpunkt zum Punkt f beziehungsweise zum Punkt o und umgekehrt vom Punkt f beziehungsweise vom Punkt o zu jedem anderen Kontrollpunkt. Damit lässt sich ein Pfad von einem beliebigen Punkt $\tilde{P}_{(i,:)}$ zu einem beliebigen anderen Punkt $\tilde{P}_{(j,:)}$ durch die beiden Kanten $(\tilde{P}_{(i,:)}, \tilde{P}_{(n,:)})$ und $(\tilde{P}_{(n,:)}, \tilde{P}_{(j,:)})$ konstruieren. Der Graph $\mathbf{G}_S$ ist nach Definition A.16 also stark zusammenhängend. Mit Charakterisierung B.36, nach der Matrizen, deren Nullstruktur stark zusammenhängende Graphen induzieren, irreduzibel sind, ist $S^{(t)}$ irreduzibel. □

Das Qualitätskriterium Q11 überträgt sich von den Subdivisionsmatrizen der Initialelemente auf die Matrizen der Doppelringe und Doppelschalen, was wir mit dem nächsten Korollar erläutern:

Korollar 6.26. Die Matrizen $\bar{S}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\bar{S}^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen Qualitätskriterium Q11.

Beweis. Analog zu Theorem 6.20 überträgt sich diese Eigenschaft von den Matrizen der Initialelemente S auf die Matrizen $\bar{S}$, da die Zeilen aus $\bar{S}$ aus Zeilen von Subdivisionsmatrizen der Initialelemente, aufgefüllt mit Null-einträgen, bestehen. Da jedes Initialelement Qualitätskriterium Q11 erfüllt, ist es auch in den Doppelring- und Doppelschalenmatrizen $\bar{S}$ für alle Überlappungsbereiche erfüllt. □

Die Eigenschaft der Irreduzibilität überträgt sich hingegen nicht, was im nächsten Satz diskutiert wird:

Satz 6.27. Die Matrizen $\bar{S}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\bar{S}^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind reduzibel.

Beweis. Das zentrale Initialelement wird in den Doppelring- und Doppelschalenmatrizen unverändert verwendet und die übrigen Einträge dieser Zeilen werden mit Nulleinträgen aufgefüllt. Ordnen wir die Zeilen und Spalten mit einer Permutation so an, dass die Zeilen und Spalten des zentralen Initialelements ganz rechts beziehungsweise ganz unten stehen, so lässt sich $\bar{S}$ als

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

anordnen. Die Matrizen S und M_1 sind dabei quadratisch. Damit ist $\bar{S}$ nach Definition B.35 reduzibel. $\square$

Q3 Dominanter Eigenwert 1

Um dieses Kriterium für die Matrizen der Initialelemente zu überprüfen, benötigen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 6.28. Die Diagonaleinträge von $S^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S^{(3)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind positiv.

Beweis. Wie bereits beschrieben sind die beiden Matrizen

$$\ln(2) (\tilde{L} - E_n) \quad \text{und} \quad \ln(2) (\tilde{R} - E_n)$$

Dreiecksmatrizen bestehend aus reellen Einträgen. Mit Lemma B.58, welches die Exponentiale von Dreiecksmatrizen betrachtet, gilt für die Diagonaleinträge der Matrixexponentiale

$$L_{(i,i)} = \exp(\ln(2) (\tilde{L}_{(i,i)} - 1)) \quad \text{und} \quad R_{(i,i)} = \exp(\ln(2) (\tilde{R}_{(i,i)} - 1)) \quad \text{für} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Da das Exponential einer reellen Zahl immer positiv ist, sind die Diagonaleinträge von L und R positiv.

Die Diagonaleinträge von S ergeben sich aus der Multiplikation der i -ten Zeile von L mit der i -ten Spalte von R . Durch die Dreiecksstruktur ergibt sich

$$S_{(i,i)}^{(t)} = L_{(i,i)} R_{(i,i)} > 0 \quad \text{für} \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad t \in \{2, 3\}.$$

Damit sind die Diagonaleinträge von $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ positiv. $\square$

Mit diesem Lemma lässt sich im nächsten Schritt das Qualitätskriterium Q3 für die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente beweisen:

Theorem 6.29. Die Subdivisionsmatrizen $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ haben einen einfachen Eigenwert 1 zum Eigenvektor $\vec{1}$ und für alle anderen Eigenwerte λ_i gilt $|\lambda_i| < 1$. Der Eigenwert 1 ist also der dominante Eigenwert der beiden Matrizen, die Subdivisionsmatrizen $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ erfüllen folglich Qualitätskriterium Q3.

Beweis. Die Matrizen $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ sind mit Korollar 6.22 stochastisch und zudem sind mit Lemma 6.28 alle Diagonaleinträge positive reelle Zahlen.

Mit Theorem B.40, das eine spezielle Variante des Gerschgorin-Kreis-Theorems B.38 ist, sind damit alle Eigenwerte der beiden Matrizen betragsmäßig kleiner gleich 1 und zudem ist 1 der einzige Eigenwert der Subdivisionsmatrix vom Betrag 1.

Da $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ mit Korollar 6.25 irreduzibel sind, erhalten wir mit dem Perron-Frobenius-Theorem B.37, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gerade 1 ist. Die einzelnen Schritte lassen sich auch mit der Verwendung von Korollar B.41 zusammenfassen. Der Wert 1 ist also der dominante Eigenwert von $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$.

Da sich mit Theorem 6.20 alle Zeilen von $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ zu 1 aufsummieren ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1 mit Lemma 2.36 gerade $\vec{1}$. $\square$

Diesen Beweis können wir nicht auf die Matrizen $\bar{S}$ übertragen, denn diese sind weder irreduzibel noch sind alle Diagonaleinträge positiv. Da jedoch die Matrizen $\bar{S}$ stochastisch sind, gilt für alle Eigenwerte λ_i von $\bar{S}$ zumindest

$$|\lambda_i| \leq 1.$$

Da sich alle Zeilen von $\bar{S}$ zu 1 aufsummieren ist zudem mit Lemma 2.36 der Wert 1 ein Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{1}$ der Matrix $\bar{S}$. Über weitere Eigenwerte mit $|\lambda_i| = 1$ oder über die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 konnten wir keine Aussage treffen.

Umso entscheidender ist damit die empirische Analyse für die Matrizen $\bar{S}$. Diese wird zusammen mit den anderen Eigenwerten im nächsten Abschnitt betrachtet.

Q4, Q5, Q6 und Q12 Eigenspektrum

Im Bezug auf das Eigenspektrum ließ sich für die Subdivisionsmatrizen dieses Kapitels leider nur wenig beweisen, da sich die Subdivisionsmatrizen im letzte Schritt der Konstruktion aus dem Produkt zweier Matrizen ergeben. Im Bezug auf die Eigenwerte des Produkts zweier Matrizen gibt es nur wenig Theorie. Viele Aussagen produzieren Abschätzungen für die Eigenwerte, welche für unsere Zwecke allerdings zu unscharf waren.

Aus diesem Grund ist die in diesem Kapitel beschriebene Konstruktion experimenteller Natur. Im Vergleich zu den anderen Subdivisionsalgorithmen für kubische B-Spline-Volumen ist dies allerdings kein Nachteil, denn für die bisher in der Literatur etablierten Subdivisionsalgorithmen existieren keine Aussagen über das Spektrum. Zu beweisen, dass die hier konstruierten Matrizen das gewünschte Spektrum haben, kann aber Gegenstand weiterer Forschung sein.

Über die Existenz eines t -fachen Eigenwerts $1/2$ können wir allerdings Aussagen treffen und beginnen mit dem zweidimensionalen Fall der Initialelemente:

Theorem 6.30. Sei $\tilde{P} := [P^T, E^T, f^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ die Eigenstruktur, aus der die Matrix $S^{(2)}$ erzeugt wurde. Dann gilt

$$S^{(2)} \tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{P},$$

die Matrix $S^{(2)}$ hat also einen doppelten Eigenwert $1/2$ mit zugehörigen Eigenvektoren der Spalten von $\tilde{P}$.

Beweis. Mit Lemma 6.15 ist

$$\tilde{L}\tilde{P} = \tilde{P} \quad \text{und} \quad \tilde{R}\tilde{P} = 0 \cdot \tilde{P}.$$

Damit gilt für die Matrizen L' und R'

$$L' \tilde{P} = \ln(2) (\tilde{L} - E_n) \tilde{P} = \ln(2) (\tilde{L}\tilde{P} - E_n \tilde{P}) = \ln(2) (\tilde{P} - \tilde{P}) = 0 \cdot \tilde{P}$$

und

$$R' \tilde{P} = \ln(2) (\tilde{R} - E_n) \tilde{P} = \ln(2) (\tilde{R}\tilde{P} - E_n \tilde{P}) = \ln(2) (-\tilde{P}) = -\ln(2) \cdot \tilde{P}.$$

Mit Lemma B.60, das die Eigenwerte und Eigenvektoren der Exponentiale von Dreiecksmatrizen betrachtet, erhalten wir für die Exponentiale L und R

$$L\tilde{P} = \exp(L') \tilde{P} = \exp(0) \tilde{P} = \tilde{P}$$

und

$$R\tilde{P} = \exp(R') \tilde{P} = \exp(-\ln(2)) \tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{P}.$$

Dementsprechend folgt für $S^{(2)}$

$$S^{(2)} \tilde{P} = LR\tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{P}$$

und damit sind die Spalten von $\tilde{P}$ Eigenvektoren zum Eigenwert $1/2$ der Matrix $S^{(2)}$. □

Analog dazu erhalten wir das folgende Theorem für die Matrix $S^{(3)}$:

Theorem 6.31. Sei $\tilde{P} := [P^T, E^T, F^T o^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ die Eigenstruktur, aus der die Matrix $S^{(3)}$ erzeugt wurde. Dann gilt

$$S^{(3)} \tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{P},$$

die Matrix $S^{(3)}$ hat also einen dreifachen Eigenwert $1/2$ mit zugehörigen Eigenvektoren der Spalten von $\tilde{P}$.

Beweis. Tauschen wir im Beweis von Theorem 6.30 Lemma 6.15 mit Lemma 6.14, so verläuft der Beweis komplett analog zum Beweis des obigen Theorems. $\square$

Einen Beweis dafür, dass $1/2$ der subdominante Eigenwert mit algebraische Vielfachheit 2 beziehungsweise 3 ist, müssen wir schuldig bleiben. Dies liegt, wie bereits erwähnt, daran, dass über die Eigenwerte des Produkts von zwei Matrizen nicht viel bekannt ist. Hier ist weitere Forschung vonnöten. Ist $1/2$ jedoch ein t -facher subdominanter Eigenwert, so ist die zugehörige Eigenstruktur selbstdurchdringungsfrei aufgrund der Konstruktion von $\tilde{P}$ als Verfeinerung eines 2- beziehungsweise 3-Polytops, dessen Vierecke beziehungsweise Hexaeder alle konvex sind. In diesem Fall wäre also Qualitätskriterium Q12 für $S^{(t)}$ erfüllt.

Die Übertragung der Existenz auf die Doppelring- und Doppelschalenmatrizen betrachten wir im nächsten Theorem:

Theorem 6.32. Die Matrizen $\bar{S}^{(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ haben einen t -fachen Eigenwert $1/2$ für $t \in \{2, 3\}$.

Beweis. Da die Zeilen von $S^{(t)}$ in $\bar{S}^{(t)}$ nur mit Nulleinträgen aufgefüllt werden, lässt sich die Matrix mithilfe einer Permutationsmatrix $H \in \{0, 1\}^{n \times n}$ in die Form

$$H \bar{S}^{(t)} H^T = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & S^{(t)} \end{bmatrix}$$

bringen. Da die Permutation der Zeilen und Spalten eine Matrix auf eine ähnliche Matrix abbildet, haben beide Darstellungsformen mit Korollar B.31 die gleichen Eigenwerte. Mit Satz B.34, der die Eigenwerte einer Matrix in der obigen Darstellung betrachtet, übertragen sich die Eigenwerte von $S^{(t)}$ auf die Matrix $\bar{S}^{(t)}$. $\square$

Die Problematik des Spektrums der Matrizen S überträgt sich selbstverständlich auf die Matrizen $\bar{S}$. Zusätzlich kann für $\bar{S}$, unabhängig von dem Problem des Spektrums, keine Aussage über eine selbstdurchdringungsfreie Struktur getroffen werden, da wir, analog zu Kapitel 5, keinen Zugriff auf die Eigenvektoren von $\bar{S}$ und keine theoretischen Ansätze zur Überprüfung des Qualitätskriteriums haben.

Mit den obigen Aussagen konnten wir zwar die Existenz des gewünschten Teils des Spektrums zeigen, dass es aber keine Eigenwerte gibt, die betragsmäßig im Intervall $(1/2, 1)$ liegen, ließ sich nicht beweisen.

Die Eigenwerte der Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$, und mit Lemma B.59 auch die Eigenwerte der Matrizen L und R , lassen sich zwar bestimmen und haben eine günstige Struktur, diese ließ sich aber für das Produkt der Matrizen $L \cdot R$ nicht nutzen.

Umso entscheidender ist für diese Qualitätskriterien die empirische Analyse. Die sechs betragsmäßig größten Eigenwerte der Matrizen der vier Kategorien finden sich in Abbildung 6.38, die konkreten Maximalwerte finden sich in der folgenden Tabelle:

	$S^{(2)}$	$\bar{S}^{(2)}$	$S^{(3)}$	$\bar{S}^{(3)}$
$\max \lambda_0 - 1 $	3,7748e-15	3,5527e-15	6,4393e-15	8,4377e-15
$\max \lambda_1 - 0.5 $	2,7756e-15	5,7732e-15	2,7318e-12	2,7194e-12
$\max \lambda_2 - 0.5 $	3,1086e-15	5,3291e-15	8,9928e-14	8,2268e-14
$\max \lambda_3 - 0.5 $			1,7625e-12	1,7608e-12
$\max \mu $	0,499 26	0,499 26	0,497 05	0,497 05
$\max S\tilde{P} - 0.5\tilde{P} $	1,3878e-14		8,9589e-10	

Hier gibt es mehrere Auffälligkeiten. Zunächst zeigt sich empirisch für alle vier Kategorien, dass 1 der (einfache) dominante Eigenwert der Subdivisionsmatrizen ist und, dass $1/2$ der t -fache subdominante Eigenwert ist. Damit sind

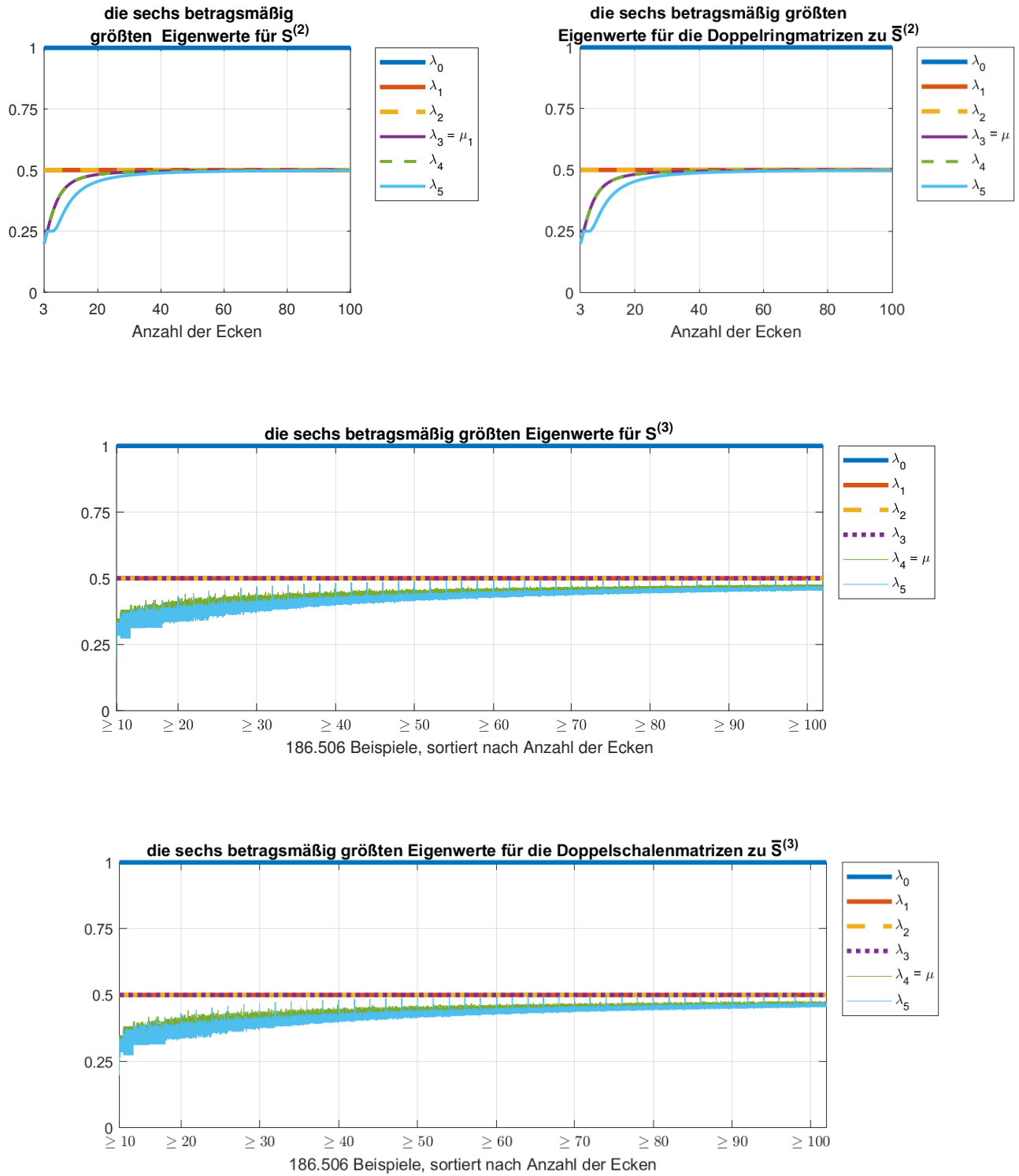


Abbildung 6.38: Eigenwerte der Matrizen der Initialelemente und der Doppelring- und Doppelschalenmatrizen für $t = 2$ (unten) und für $t = 3$ (oben). Die Beispiele sind jeweils nach der Anzahl der Ecken des primalen Polytops sortiert.

die Qualitätskriterien Q3, Q4 und Q5 empirisch erfüllt. Der subsubdominante Eigenwert ist hingegen größer als $1/4$, Qualitätskriterium Q6 ist also für alle vier Kategorien nicht erfüllt.

Im Gegensatz zur verallgemeinerten quadratischen B-Spline-Subdivision aus Kapitel 5 nähert sich der subsubdominante Eigenwert für eine steigende Anzahl an Ecken des primalen Polytops empirisch in allen vier Kategorien dem Wert $1/2$ an. Dieses Verhalten ist eher ungünstig, deckt sich aber mit dem des Catmull-Clark-Algorithmus, wie in [PR08, Abschn. 6.1, S. 109–116] beschrieben.

Unsere unbewiesene Vermutung ist hier, dass dies mit der Null-Struktur des Qualitätskriteriums Q11 zusammenhängt. Die Lokalität der äußeren Verfeinerungsregeln könnte, zumindest für den Fall $t = 2$, dazu führen, dass Ringe mit einer höheren Frequenz, also Ringe, die sich mehrmals um den zentralen Punkt legen, bei der Verfeinerung nicht zum zentralen Punkt hingezogen werden. Ob es Ansätze gibt, die das Verhältnis von λ^2/μ bei gleichzeitiger Erfüllung der Qualitätskriterien Q4, Q5 und Q11 verbessern, kann Gegenstand weiterer Forschung sein.

Eine weitere Auffälligkeit ist, dass in den Grafiken von Abbildung 6.38 die Fälle von S und $\bar{S}$ gleich zu sein scheinen. Dies bestätigt sich auch numerisch. Die Abweichungen finden sich in der folgenden Tabelle:

	$\max S^{(2)} - \bar{S}^{(2)} $	$\max S^{(3)} - \bar{S}^{(3)} $
λ_0	3,5527e–15	9,5479e–15
λ_1	5,7732e–15	8,582e–14
λ_2	6,2172e–15	3,7192e–14
λ_3		5,9397e–14
μ	3,6637e–15	1,0214e–14

Damit kommt empirisch der relevante Teil des Spektrums der Doppelring- und Doppelschalenmatrizen vom Initial-elementteil der Matrix.

Zudem fällt auf, dass die empirischen Resultate der subsubdominanten Eigenwerte für $t = 3$ Ausreißer nach oben aufweisen. Diese Ausreißer gehören zu den semi-irregulären Fällen, was direkt aus den Grafiken des Flächenfalls hervorgeht. Die Eigenwerte des Tensorproduktfalls ergeben sich mit Korollar 6.36 und Theorem B.32 aus den Eigenwerten des zweidimensionalen Falls, kombiniert mit den Werten $[1, 1/2, \dots]$. Damit übertragen sich die Eigenwerte von $S^{(2)}$ auf die semi-irregulären Matrizen von $S^{(3)}$ und sind daher besonders groß.

Abschließend lässt sich noch bemerken, dass die Eigenstruktur für den Fall der Initialelemente selbstdurchdringungsfrei ist, sofern die Matrizen S einen t -fachen Eigenwert $1/2$ besitzen. Dies geht aus der Struktur von $\tilde{P}$ hervor, die für $t = 2$ eine Ansammlung von konvexen Vierecken und für $t = 3$ von konvexen Hexaedern ist, die sich durch die Konstruktion nicht selbst durchdringen. Die Bedingung an die Eigenwerte ist zumindest empirisch erfüllt und die Bedingung an die Eigenvektoren konnte empirisch überprüft werden. Die Abweichung von $S\tilde{P}$ zu $\tilde{P}/2$ ist nämlich empirisch für $t = 2$ im Bereich 10^{-14} und für $t = 3$ im Bereich 10^{-10} und damit ist Qualitätskriterium Q12 zumindest empirisch erfüllt. Über die Struktur der Doppelring- und Doppelschalenmatrizen lässt sich hingegen empirisch keine Aussage treffen.

Grundsätzlich liegen Beweise im Bezug auf das Spektrum des Flächenfalls in Reichweite. Mithilfe der diskreten Fourier-Transformation ließe sich das Spektrum analog zu [PR08, Abschn. 6.1, S. 109–116] explizit bestimmen. Da wir die zugehörige Theorie und die zugehörigen Begriffe nicht eingeführt haben, überlassen wir die Ausarbeitung dieser Skizze weiterer Forschung.

Q10 Symmetrie

Für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision müssen wir für die Aussage der Symmetrie die Automorphismen des Graphen G auf die von G_K induzierten Automorphismen einschränken. Damit betrachten wir für die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente S nur Automorphismen, die Vierecke auf Vierecke beziehungsweise Hexaeder auf Hexaeder abbilden.

Diese Automorphismen sind folglich so gestaltet, dass die jeweiligen Kategorien von Punkten auf die entsprechenden Kategorien abgebildet werden. Wir erhalten damit für S das folgende Theorem:

Theorem 6.33. Sei $\mathbf{G}$ der Graph zur Subdivisionsmatrix $S^{(t)}$ mit $t \in \{2, 3\}$ und sei $\tilde{P} := [P^T, E^T, f]$ für $t = 2$ beziehungsweise $\tilde{P} := [P^T, E^T, F^T, o^T]$ für $t = 3$ die Eigenstruktur, aus der die Subdivisionsmatrix $S^{(t)}$ konstruiert wurde. Dann gilt

$$HS^{(t)}H^{-1} = S^{(t)}$$

für einen Automorphismus von $\mathbf{G}$, der die Knoten zu P auf Knoten zu P , die Knoten zu E auf Knoten zu E und für $t = 3$ die Knoten zu F auf Knoten zu F abbildet. Die Subdivisionsmatrizen $S^{(t)}$ erfüllen also Qualitätskriterium Q10.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Symmetrien der Realisierung von $\mathbf{G}_K$, also die Punkte P als konvexe t -Polytope in $\mathbb{R}^t$. Da für $t = 2$ die Realisierung von $\mathbf{G}_K$ ein regelmäßiges n -Eck ist, erfüllt es alle Symmetrien von $\mathbf{G}_K$. Für $t = 3$ erfüllt das primale und das duale Polytop mit Theorem 3.25 alle Symmetrien des Graphen $\mathbf{G}_K$. Da mit einem Automorphismus von P auch alle Kanten auf Kanten und für $t = 3$ alle Facetten auf Facetten abgebildet werden, überträgt sich die Symmetrie auf alle Punkte der Realisierung $\tilde{P}$ von $\mathbf{G}$. Damit gilt insbesondere, dass symmetrische Vierecke und Hexaeder bis auf Drehung und Spiegelung dieselbe Gestalt haben.

Mit derselben Gestalt erzeugen sie identische Matrizen M und M' in Algorithmus 15. Die Matrizen B operieren auf dem primalen Polytop zu P , das alle Symmetrien von $\mathbf{G}_K$ enthält. Damit sind die Gewichte der Zeilen von $\bar{B}$ für symmetrische Punkte identisch. Da diese Gewichte identisch erzeugte Zeilen in $\bar{M}$ identisch gewichtet, erfüllt die Matrix $\tilde{C}$ alle Symmetrien der zugrundeliegenden Struktur, es gilt also

$$H\tilde{C}H^{-1} = \tilde{C}.$$

Die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ teilen die Zeilen von $\tilde{C}$ in die jeweiligen Kategorien auf. Da die Automorphismen, wie in diesem Theorem angegeben, die Matrizen lediglich innerhalb der Kategorien permutieren, überträgt sich die Eigenschaft von $\tilde{C}$ auf die beiden Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$, es gilt also

$$H\tilde{L}H^{-1} = \tilde{L} \quad \text{und} \quad H\tilde{R}H^{-1} = \tilde{R}.$$

Mit Theorem B.53, welches es uns ermöglicht, invertierbare Matrizenpaare aus dem und in das Exponential zu nehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} HS^{(t)}H^{-1} &= HLRH^{-1} \\ &= HLH^{-1}HRH^{-1} \\ &= H \exp(\ln(2)(\tilde{L} - E_n)) H^{-1} H \exp(\ln(2)(\tilde{R} - E_n)) H^{-1} \\ &= \exp(H \ln(2)(\tilde{L} - E_n) H^{-1}) \exp(H \ln(2)(\tilde{R} - E_n) H^{-1}) \\ &= \exp(\ln(2)(H\tilde{L}H^{-1} - E_n)) \exp(\ln(2)(H\tilde{R}H^{-1} - E_n)) \\ &= \exp(\ln(2)(\tilde{L} - E_n)) \exp(\ln(2)(\tilde{R} - E_n)) \\ &= LR \\ &= S^{(t)}. \end{aligned}$$

Die Matrizen $S^{(t)}$ erfüllen also alle von $\mathbf{G}_K$ induzierten Automorphismen des zugrundeliegenden Graphen $\mathbf{G}$ und folglich Qualitätskriterium Q10. $\square$

Die Eigenschaft überträgt sich, analog zu Kapitel 5, in sinnvoller Art und Weise auf die Doppelring- und Doppelschalenmatrizen, was wir im folgenden Theorem erläutern:

Theorem 6.34. Die Matrizen $\bar{S}$ erfüllen Qualitätskriterium Q10.

Beweisskizze. Hier muss zunächst diskutiert werden, welche Automorphismen der Matrizen $\bar{S}$ durch den Graphen $\mathbf{G}_K$ induziert werden. Jeder Knoten des Graphen $\mathbf{G}_K$ wird in $\bar{S}^{(t)}$ durch eine Kombination aus 5×5 Kontrollpunkten für $t = 2$ und aus einer Kombination von $5 \times 5 \times 5$ Kontrollpunkten für $t = 3$ repräsentiert. Wir müssen hier also lediglich Automorphismen berücksichtigen, die diese Fünfer-Strukturen aufeinander abbilden.

Die Initialelemente im äußeren Bereich sind entweder semi-irregulär oder regulär. Semi-irreguläre Initialelemente erhalten wir nur entlang der Facetten. Da diese vom Grad der Facetten abhängen und durch die Automorphismen von $\mathbf{G}_K$ nur Facetten gleichen Grades aufeinander abgebildet werden, werden nur gleiche Verfeinerungsregeln semi-irregulärer Initialelemente aufeinander abgebildet. Dasselbe gilt für die übrigen regulären Initialelemente, die alle gleiche Regeln haben.

Damit überträgt sich die Eigenschaft der Symmetrie von den Matrizen der Initialelemente auf die Doppelring- und Doppelschalenmatrizen und Qualitätskriterium Q10 ist für $\bar{S}$ erfüllt. $\square$

Für die empirische Analyse verfahren wir analog zu Kapitel 5. Für die 27.979 Isomorphismen der empirischen Auswertung der Initialelemente erhalten wir die folgenden Werte:

	$S^{(3)}$
$\max S - HSH^T $	4,1134e-12

Damit kann für den Fall der Initialelemente ebenfalls eine qualitative Aussage über die Symmetrie getroffen werden. Für die Doppelschalenmatrizen wurde diese Differenz hingegen nicht überprüft, da das Finden des Isomorphismus zweier großer Adjazenzmatrizen im technischen Sinne zu rechenaufwendig war.

Q7 und Q8 Tensorproduktstruktur

Analog zu Kapitel 5 betrachten wir hier zunächst den Flächenfall. Für diesen ist nur Qualitätskriterium Q7 relevant. Für $S^{(2)}$ ergibt sich dieses durch einfaches Einsetzen der entsprechenden Adjazenzmatrix. Das Resultat muss anschließend noch mit einer entsprechenden Permutationsmatrix permutiert werden. Damit ist Qualitätskriterium Q7 für $S^{(2)}$ erfüllt.

Dieses überträgt sich auch auf die Doppelringmatrix $\bar{S}^{(2)}$, denn diese besteht für den regulären Fall ausschließlich aus den Subdivisionsmatrizen regulärer Initialelemente.

Für die Tensorproduktstruktur ist, analog zu Kapitel 5, der Fall $t = 3$ der interessante Fall. Diesen betrachten wir im weiteren Verlauf und beginnen mit dem folgenden Theorem:

Theorem 6.35. Sei $A^{(2)} \in \{0, 1\}^{m \times m}$ die Adjazenzmatrix eines zweidimensionalen Initialelements mit n Eckpunkten und mit $m := 2n + 1$ sei

$$A := \begin{bmatrix} A^{(2)} & E_m & 0 \\ E_m & A^{(2)} & E_m \\ 0 & E_m & A^{(2)} \end{bmatrix}$$

die permutierte Adjazenzmatrix des Graphen $\mathbf{G}$, entstanden aus dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ eines Prismas. Dann lässt sich die Subdivisionsmatrix $S_2^{(3)}$ in der permutierten Form zur Adjazenzmatrix A als Kroneckerprodukt der Matrix

$$S^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

und einer weiteren Matrix darstellen.

Beweis. Abweichend von der Konstruktion des Algorithmus 15, ordnen wir die Zeilen und Spalten der Adjazenzmatrix A und später auch die der Matrix $\tilde{C}$ anders an, um am Ende des Beweises die Tensorproduktstruktur zeigen zu können. Dies hat, bis auf die Permutation, keinen Einfluss auf die Matrizen $\tilde{L}$, $\tilde{R}$ und $S^{(3)}$, solange wir die Werte nach Punktkategorien aufteilen.

Wir teilen zunächst die Punkte $\tilde{P}$ in drei Mengen auf. Menge 1 beinhaltet die Punkte der oberen Facette, Menge 3 beinhaltet die der unteren Facette und Menge 2 beinhaltet alle anderen Punkte. Innerhalb der Mengen sortieren

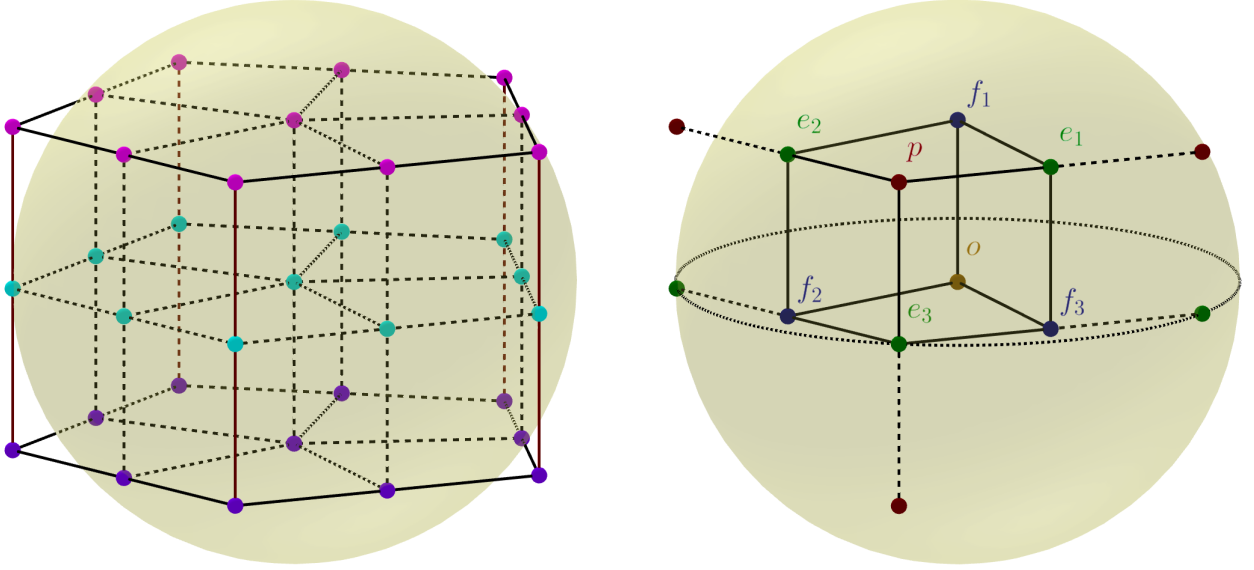


Abbildung 6.39: Links sieht man die Aufteilung der Punkte $\tilde{P}$ in die Mengen M_1 (pink), M_2 (cyan) und M_3 (lila). Rechts sieht man ein Hexaeder der Verfeinerung eines Prismas mit der in diesem Beweis verwendeten Notation der Punkte.

wir die Punkte so, dass sie mit der Sortierung des zweidimensionalen Falls übereinstimmen. Wir erhalten damit die sortierten Mengen beziehungsweise Vektoren

$$M_1 = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ p \\ e \\ \vdots \\ e \\ f \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e \\ f \\ \vdots \\ f \\ o \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M_3 = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ p \\ e \\ \vdots \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

mit den jeweiligen Punkten, die (nicht) zu den jeweiligen Facetten gehören. Wir ordnen die Punkte $\tilde{P}$ und damit die Zeilen und Spalten der folgenden Matrizen in der Form

$$\tilde{P} := \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

an. Eine Übersicht der drei Mengen findet sich in Abbildung 6.39.

Für den Beweis beginnen wir mit der Matrix M' des Algorithmus 15. Aufgrund der Symmetrie, die wir in Theorem 6.33 gezeigt haben, hat jedes Hexaeder im Prismenfall dieselbe Form bis auf Drehungen und Spiegelungen. Da für die Konstruktion der Colin-de-Verdière-Matrix in Theorem 4.13 nur relative Informationen des Polytops genutzt werden, sind die Colin-de-Verdière-Matrizen M und damit auch die normierten Matrizen M' alle identisch.

Wir konstruieren also die Einträge der Matrix M' , wie in Gleichung (6.2) beschrieben, für den Prismenfall in

Abhängigkeit von n explizit.

Dazu verwenden wir die Konstruktion der Kontrollpunkte aus Theorem 5.22 und wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein konkretes Hexaeder auf der oberen Hemisphäre. Die Punkte des Hexaeders bezeichnen wir mit

$$p, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3 \text{ und } o.$$

Eine beispielhafte Illustration inklusive der Notation ist in Abbildung 6.39 zu finden.

Wir bezeichnen zudem

$$a := \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad b := \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

zur Vereinfachung der Notation. Mithilfe der bereits berechneten Koordinaten aus dem Beweis von Theorem 5.22, erhalten wir für ein konkretes Hexaeder

$$\begin{aligned} p &= (1, 0, b), & f_1 &= (0, 0, b), \\ e_1 &= (a^2, -ab, b), & f_2 &= (a^2, ab, 0), \\ e_2 &= (a^2, ab, b), & f_3 &= (a^2, -ab, 0), \\ e_3 &= (1, 0, 0), & o &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Verschieben wir die Punkte um $-p/2$, so erhalten wir mit Theorem 4.13 für die normierte Colin-de-Verdière-Matrix M' mithilfe eines CAS

$$M' = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} & \frac{1}{4b^2} & \frac{1}{4b^2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} & 0 & \frac{1}{4b^2} & \frac{1}{4b^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4a^2} & \frac{1}{4a^2} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4a^2} & \frac{1}{4a^2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \end{array} \right].$$

Betrachten wir in einem nächsten Schritt die Einträge der Matrix $\bar{B}$. Hier erhalten wir für Punkte aus P , dass die entsprechende Zeile der Matrix $\bar{B}$ einen Eintrag 1 und sonst nur Nulleinträge enthält.

Für Punkte aus E gilt aufgrund der Symmetrie, dass der Tangentenpunkt genau in der Mitte der beiden zugehörigen Eckpunkte liegt. Damit hat die entsprechende Zeile der Matrix $\bar{B}$ für Punkte aus E zwei Einträge $1/2$ und sonst nur Nulleinträge.

Die obere und untere Facette der Realisierung ist aufgrund der Symmetrie ein regelmäßiges n -Eck. Damit beinhaltet die zugehörige Zeile der Matrix $\bar{B}$ gerade n Einträge der Form $1/n$ und sonst ausschließlich Nulleinträge.

Dasselbe gilt für die Seitenfacetten, welche aus vier Punkten mit rechten Winkeln bestehen. Die Seitenlängen sind jeweils $2 \sin(\pi/n)$, wie in Abbildung 5.11 zu sehen ist. Damit bestehen die zugehörigen Zeilen der Matrix $\bar{B}$ aus vier Nicht-Nulleinträgen mit dem Wert $1/4$.

Der zentrale Punkt o liegt an $2n$ Hexaedern. Aufgrund der Symmetrie ergibt sich, dass die entsprechende Zeile der Matrix $\bar{B}$ aus $2n$ Einträgen mit den Werten $1/(2n)$ besteht.

Damit können wir in einem nächsten Schritt die Matrix $\tilde{C}$ als Produkt der Matrizen $\bar{M}$ und $\bar{B}$ explizit bestimmen.

Sei dazu

$$\tilde{C}_2 := \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} & & & & & \frac{1}{4b^2} & \frac{1}{4b^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{4b^2} & \vdots \\ & & & & \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} & \frac{1}{4b^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4b^2} & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & & & & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2na^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2na^2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \end{array} \right].$$

Kombinieren wir die entsprechenden Zeilen aus M' beziehungsweise $\overline{M}$ mit den beschriebenen Werten der Matrix $\overline{B}$, so erhalten wir

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \frac{1}{2}E_m & 0 \\ \frac{1}{4}E_m & \tilde{C}_2 & \frac{1}{4}E_m \\ 0 & \frac{1}{2}E_m & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$$

und

$$2\tilde{C} = \begin{bmatrix} 2\tilde{C}_2 & E_m & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & 2\tilde{C}_2 & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & E_m & 2\tilde{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\tilde{C}_2 + E_m) - E_m & E_m & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & (2\tilde{C}_2 + E_m) - E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & E_m & (2\tilde{C}_2 + E_m) - E_m \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

In einem nächsten Schritt wollen wir $2\tilde{C}$ in die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ wie in Algorithmus 16 zerlegen. Dafür teilen wir zunächst die Matrix $2\tilde{C}_2 + E_m$, deren Zeilen sich zu 2 aufsummieren, mit dem in Algorithmus 16 verwendeten Ansatz auf. Wir können dabei die Matrix $2\tilde{C}_2 + E_m$ als eine Matrix mit der Struktur einer Facette interpretieren. Die Punkte sind in Gleichung (6.9) so angeordnet, dass sich die Matrix $2\tilde{C}$ in die beiden Dreiecksmatrizen

$$\tilde{L}_2 = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 & & & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & & 0 \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{na^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{na^2} & 1 - \frac{1}{a^2} \end{array} \right]$$

und

$$\tilde{R}_2 = \left[\begin{array}{cccccc|cccc|c} 1 - \frac{1}{b^2} & & & & & & \frac{1}{2b^2} & \frac{1}{2b^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{2b^2} & \vdots \\ & & & & 1 - \frac{1}{b^2} & & \frac{1}{2b^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2b^2} & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & & 0 & & & & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

zerlegen lässt.

Betrachten wir jetzt die Aufteilung von $2\tilde{C}$. Durch die alternative Anordnung produziert die Aufteilung in $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ keine zwei Dreiecksmatrizen und muss daher komponentenweise beschrieben werden.

Die Blöcke $2\tilde{C}_2 + E_m$ teilen sich dabei in die Matrizen $\tilde{L}_2$ und $\tilde{R}_2$ auf. Eine Illustration der zugehörigen gerichteten Kanten finden sich in Abbildung 6.37. Die Kanten zu $\tilde{L}_2$ sind die horizontalen Kanten der linken Abbildung und die Kanten zu $\tilde{R}_2$ sind die horizontalen Kanten der rechten Abbildung.

Die Matrizen E_m der Blöcke $(1, 2)$ und $(3, 2)$ der Matrix $2\tilde{C}$ aus Gleichung (6.10) gehören zu gerichteten Kanten, die von Punkten der Kategorie p nach e , e nach f und f nach o zeigen. Eine Illustration findet sich in der rechten Grafik von Abbildung 6.37. Dort sind die Kanten zu den Blöcken jeweils die vertikalen Kanten, die zur mittleren Ebene hinzeigen. Diese beiden Blöcke gehören also in der Aufteilung zur Matrix $\tilde{R}$.

Umgekehrt gehören die Matrizen $E_m/2$ der Blöcke $(2, 1)$ und $(2, 3)$ zu Kanten, die von Punkten der Kategorie o nach f , f nach e und e nach p zeigen. Eine Illustration findet sich in der linken Grafik von Abbildung 6.37. Dort sind die Kanten zu den Blöcken ebenfalls jeweils die vertikalen Kanten. Diese beiden Blöcke gehören also in der Aufteilung zur Matrix $\tilde{L}$.

Mit dieser Aufteilung und dem Wissen, dass die Diagonale der beiden Matrizen gerade 1 minus die Summe der anderen Einträge ist, erhalten wir

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & \tilde{L}_2 - E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m & E_m & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 & 0 \\ 0 & E_m & \tilde{R}_2 - E_m \end{bmatrix}.$$

Die beiden Matrizen L' und R' sind entsprechend

$$L' = \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 - E_m & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & \tilde{L}_2 - E_m - E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 - E_m \end{bmatrix}$$

und

$$R' = \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m - E_m & E_m & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 - E_m & 0 \\ 0 & E_m & \tilde{R}_2 - E_m - E_m \end{bmatrix}.$$

Wir teilen diese beiden Matrizen in zwei Summen auf. Dadurch ergibt sich

$$L' = \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 - E_m \end{bmatrix} + \ln(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & -E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$R' = \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R}_2 - E_m \end{bmatrix} + \ln(2) \begin{bmatrix} -E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -E_m \end{bmatrix}.$$

Die Summanden kommutieren jeweils, denn es gilt

$$\begin{aligned} & \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 - E_m \end{bmatrix} \cdot \ln(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & -E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \ln(2)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(\tilde{L}_2 - E_m) & -(\tilde{L}_2 - E_m) & \frac{1}{2}(\tilde{L}_2 - E_m) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \ln(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & -E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 - E_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R}_2 - E_m \end{bmatrix} \cdot \ln(2) \begin{bmatrix} -E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -E_m \end{bmatrix} \\ &= \ln(2)^2 \begin{bmatrix} -(\tilde{R}_2 - E_m) & (\tilde{R}_2 - E_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\tilde{R}_2 - E_m) & -(\tilde{R}_2 - E_m) \end{bmatrix} \\ &= \ln(2) \begin{bmatrix} -E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -E_m \end{bmatrix} \cdot \ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R}_2 - E_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit haben wir alle Voraussetzungen besprochen, um die Subdivisionsmatrix $S := S^{(3)}$ darstellen zu können. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S &= \exp(L') \cdot \exp(R') \\ &= \exp \left(\ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 - E_m \end{bmatrix} + \ln(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & -E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(\ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R}_2 - E_m \end{bmatrix} + \ln(2) \begin{bmatrix} -E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -E_m \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Da die Summanden kommutieren, können wir mit Theorem B.53 die Summe in ein Produkt der Form

$$S = \exp \left(\ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_2 - E_m \end{bmatrix} \right) \exp \left(\ln(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_m & -E_m & \frac{1}{2}E_m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ \cdot \exp \left(\ln(2) \begin{bmatrix} -E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -E_m \end{bmatrix} \right) \exp \left(\ln(2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 - E_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_2 - E_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R}_2 - E_m \end{bmatrix} \right)$$

umwandeln. Für die Berechnung der Exponentiale der Blockdiagonalmatrizen können wir Lemma B.66 nutzen. Die Exponentiale der anderen beiden Matrizen haben wir in den Korollaren B.73 und B.76 explizit berechnet. Damit erhalten wir

$$S = \begin{bmatrix} \exp(\ln(2)(\tilde{L}_2 - E_m)) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\ln(2)(\tilde{L}_2 - E_m)) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\ln(2)(\tilde{L}_2 - E_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}E_m & \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{4}E_m \\ 0 & 0 & E_m \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\ln(2)(\tilde{R}_2 - E_m)) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\ln(2)(\tilde{R}_2 - E_m)) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\ln(2)(\tilde{R}_2 - E_m)) \end{bmatrix}.$$

Das Produkt der beiden inneren Matrizen ist

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}E_m & \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{4}E_m \\ 0 & 0 & E_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m & 0 \\ \frac{1}{8}E_m & \frac{3}{4}E_m & \frac{1}{8}E_m \\ 0 & \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m \end{bmatrix}$$

und da diese Matrix mit der Matrix, die aus den Blöcken $\exp(\ln(2)(\tilde{L}_2 - E_m))$ besteht, kommutiert, erhalten wir mit

$$S_2 := \exp(\ln(2)(\tilde{L}_2 - E_m)) \exp(\ln(2)(\tilde{R}_2 - E_m)) \quad (6.11)$$

für die Matrix S

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m & 0 \\ \frac{1}{8}E_m & \frac{3}{4}E_m & \frac{1}{8}E_m \\ 0 & \frac{1}{2}E_m & \frac{1}{2}E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_2 & \frac{1}{2}S_2 & 0 \\ \frac{1}{8}S_2 & \frac{3}{4}S_2 & \frac{1}{8}S_2 \\ 0 & \frac{1}{2}S_2 & \frac{1}{2}S_2 \end{bmatrix} = \text{kron} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, S_2 \right).$$

Damit lässt sich die Matrix S als Kroneckerprodukt der Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

und der Matrix S_2 darstellen. □

Der Zusammenhang zwischen Matrix S_2 und der Matrix $S^{(2)}$ wird im folgenden Korollar besprochen:

Korollar 6.36. Die Matrix $S_2 \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 2n+1}$ aus Gleichung (6.11) stimmt mit der Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ für n Vierecke überein. Die Subdivisionsmatrizen des volumetrischen semi-irregulären Falls ergeben sich also aus dem Kroneckerprodukt des zweidimensionalen Falls und der regulären eindimensionalen Regel.

Beweis. Wir bestimmen für die zweidimensionale Subdivisionsmatrix $S^{(2)}$ zunächst explizit die Matrix $\tilde{C}$ aus Algorithmus 15. Analog zum obigen Beweis haben alle Vierecke dieselbe Gestalt. Wählen wir in Abhängigkeit von n ein Viereck aus, so erhalten wir aus Gleichung (3.16) für p mit $j = 0$, und aus Gleichung (3.14) für e_1 mit $j = 0$ und für e_2 mit $j = 1$ die Punkte

$$\begin{aligned} p &= \left[1, \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \right], & e_2 &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right], \\ e_1 &= [1, 0], & f &= [0, 0]. \end{aligned}$$

Dieses Viereck wird um $-p/2$ verschoben und anschließend wird die zugehörige Colin-de-Verdière-Matrix konstruiert. Wir definieren zunächst

$$a := \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad b := \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Mithilfe eines CAS erhalten wir für die Matrix M' aus Zeile 10 des Algorithmus 15

$$M' = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2b^2} & \frac{1}{4b^2} & \frac{1}{4b^2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4a^2} & \frac{1}{4a^2} & 1 - \frac{1}{2a^2} \end{bmatrix}.$$

Für die Einträge der Zeilen von $\bar{B}$ ergibt sich, analog zum obigen Beweis, für Eckpunkte ein Eintrag 1, für Kantenpunkte ergeben sich zwei Einträge $1/2$ und für den zentralen Facettenpunkt ergeben sich n Einträge $1/n$. Wir erhalten damit

$$\tilde{C} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 - \frac{1}{2b^2} & & & & & \frac{1}{4b^2} & \frac{1}{4b^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{4b^2} & \vdots \\ & & & & 1 - \frac{1}{2b^2} & \frac{1}{4b^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4b^2} & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & 0 & & & & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & 0 & & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2na^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2na^2} & 1 - \frac{1}{2a^2} \end{array} \right].$$

Teilen wir die Matrix $2\tilde{C}$ in die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ auf, so ergeben sich

$$\tilde{L} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 & & & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & & 0 \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{na^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{na^2} & 1 - \frac{1}{a^2} \end{array} \right]$$

und

$$\tilde{R} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 - \frac{1}{b^2} & & & & & \frac{1}{2b^2} & \frac{1}{2b^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{2b^2} & \vdots \\ & & & & 1 - \frac{1}{b^2} & \frac{1}{2b^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2b^2} & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & & & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & & 0 & & 1 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ stimmen mit den beiden Matrizen $\tilde{L}_2$ und $\tilde{R}_2$ überein. Wir erhalten damit für S_2 aus Gleichung (6.11)

$$S_2 = \exp(\ln(2)(\tilde{L}_2 - E_n)) \exp(\ln(2)(\tilde{R}_2 - E_n)) = \exp(\ln(2)(\tilde{L} - E_n)) \exp(\ln(2)(\tilde{R} - E_n)) = S^{(2)}$$

und folglich stimmen S_2 und $S^{(2)}$ überein. □

Aus diesen beiden Aussagen lässt sich analog zu Kapitel 5 das folgende Korollar ableiten:

Korollar 6.37. Die Matrizen $S^{(3)}$ erfüllen die Qualitätskriterien Q7 und Q8.

Beweis. Der reguläre Fall und damit Qualitätskriterium Q7 ergibt sich durch einfaches Einsetzen der entsprechenden Adjazenzmatrix in den Algorithmus. Hier muss anschließend noch das Ergebnis mit einer entsprechenden Permutationsmatrix permutiert werden, um die Kroneckerprodukt-Matrix zu erhalten.

Da mit Theorem 6.35 und Korollar 6.36 die Subdivisionsmatrix $S^{(3)}$ das Kroneckerprodukt aus der eindimensionalen und der zugehörigen zweidimensionalen Regel ist, gilt zudem Qualitätskriterium Q8. □

Abschließend besprechen wir die Tensorproduktstruktur der Doppelschalenmatrizen mit dem folgenden Theorem:

Theorem 6.38. Die Matrizen $\bar{S}^{(3)}$ erfüllen die Qualitätskriterien Q7 und Q8.

Beweisskizze. Da sich für den regulären Fall die Subdivisionsmatrix ausschließlich aus regulären Initialelementen zusammensetzt, ist Qualitätskriterium Q7 erfüllt.

Für den semi-irregulären Fall bestehen die Subdivisionsmatrizen aus dem zentralen semi-irregulären Initialelement, zwei mal vier gegenüberliegenden semi-irregulären Initialelementen und sonst ausschließlich aus regulären Initialelementen. Damit überträgt sich die Tensorprodukteigenschaft entsprechend und Qualitätskriterium Q8 ist ebenfalls erfüllt. $\square$

Q9 und Q13 Eingabe und Injektivität

Da die Eingabe in Algorithmus 12 ein valider kombinatorischer Graph G_K ist, der für $t = 2$ ein Kreis und für $t = 3$ ein 3-zusammenhängender und planarer Graph sein muss, entspricht die Eingabe der Konstruktion dem Validitätsbegriff aus Definition 2.51. Die Doppelring- und Doppelschalenmatrizen setzen sich entsprechend aus den Informationen der Initialelemente zusammen und da diese alle aus validen kombinatorischen Graphen hervorgehen, lässt sich jede Doppelring- und Doppelschalenmatrix mit einem zentralen validen Initialelement erzeugen. Damit ist für alle Varianten Qualitätskriterium Q9 erfüllt.

Hier ist allerdings wichtig anzumerken, dass wir als Grundvoraussetzung im Fall $t = 3$ die hexaedrische Struktur der Zellen gesetzt und in der Konstruktion ausgenutzt haben. Es ist also insbesondere nicht ohne Weiteres möglich, die Konstruktion auf planare 3-zusammenhängende Graphen mit Knoten, in denen mehr als drei Kanten zusammenkommen, zu erweitern. Die Hintergründe dafür werden in Kapitel 7 besprochen.

Die Injektivität ist für die verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivision offen. Für $t = 2$ ist diese prinzipiell beweisbar. Dafür müssten wir zunächst die Matrixeinträge explizit bestimmen. Da mit Theorem 6.33 und Theorem 6.34 alle Symmetrien erfüllt sind, ließe sich die diskrete Fourier-Transformation anwenden. Mit dieser müsste dann zunächst bewiesen werden, dass $1/2$ der subdominante Eigenwert der Subdivisionsmatrix ist. Anschließend könnte die Injektivität mit derselben Strategie wie in [PR08, Abschn. 6.1, S. 109–116] nachgerechnet werden. Da dies allerdings viele in dieser Arbeit nicht verwendete Begriffe und Theorien benötigt, überlassen wir die Ausarbeitung dieser Skizze weiterer Forschung.

Für $t = 3$ ist, analog zu Kapitel 5, die Injektivität und die Regularität vollkommen offen und es ist auch keine Idee vorhanden, wie diese zu beweisen wäre. Empirisch liegt hier dieselbe Situation wie in Kapitel 5 vor. Um eine qualitative Aussage über die Injektivität treffen zu können, wäre ebenfalls mindestens eine Sichtkontrolle der charakteristischen Schale notwendig.

Für die beiden Gegenbeispiele aus Abschnitt 2.5 erhalten wir die in Abbildung 6.40 dargestellten charakteristischen Schalen. Für diese Beispiele liefert also der in diesem Kapitel vorgestellte Subdivisionsalgorithmus zufriedenstellende Ergebnisse.

Blicken wir auf die Gesamtheit der Qualitätskriterien, so ist es gelungen, Subdivisionsmatrizen zu konstruieren, die Qualitätskriterium Q11 respektieren. Für diese Subdivisionsmatrizen ließ sich zwar die gewünschte Eigenstruktur nicht beweisen, empirische Ergebnisse legen aber nahe, dass jene konstruiert wird. Außerdem produziert der vorgestellte Ansatz für die Gegenbeispiele zu den Algorithmen von [Baj+02] und [JM99] aus Abschnitt 2.5 akzeptable injektive Eigenstrukturen. Damit wurde auch hier eine echte Verbesserung im Vergleich zu den bisher in der Literatur etablierten Methoden erreicht.

Kritikpunkte an der vorgestellten Konstruktion sind, dass sich bisher die gewünschte Eigenstruktur nicht beweisen ließ und dass der subsubdominante Eigenwert nahe an den Wert $1/2$ herankommt. Gegenbeispiele oder Beweisideen für den ersten Kritikpunkt und alternative Konstruktionen für den zweiten Kritikpunkt können also Gegenstand weiterer Forschung sein.

Insgesamt lässt sich dennoch festhalten, dass die Verwendung der hier vorgestellten Subdivisionsmatrizen, gerade im Vergleich zu den etablierten Methoden, vorzuziehen ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit Abbildung 6.41, in der eine Galerie, bestehend aus Bildern der charakteristischen Abbildung verschiedener mit Algorithmus 12 erzeugter Subdivisionsmatrizen, zu finden ist.

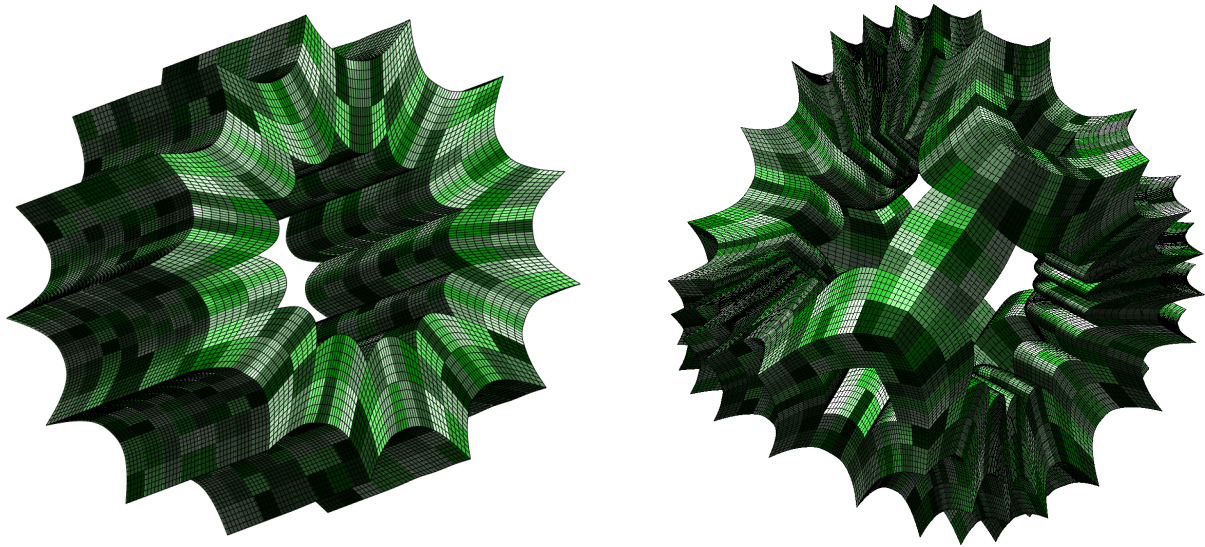


Abbildung 6.40: Die Beispiele aus Abbildung 2.36 (links) und Abbildung 2.37 (rechts), erstellt mit dem Algorithmus dieses Kapitels. Man erkennt, dass beide Schalen injektiv sind.

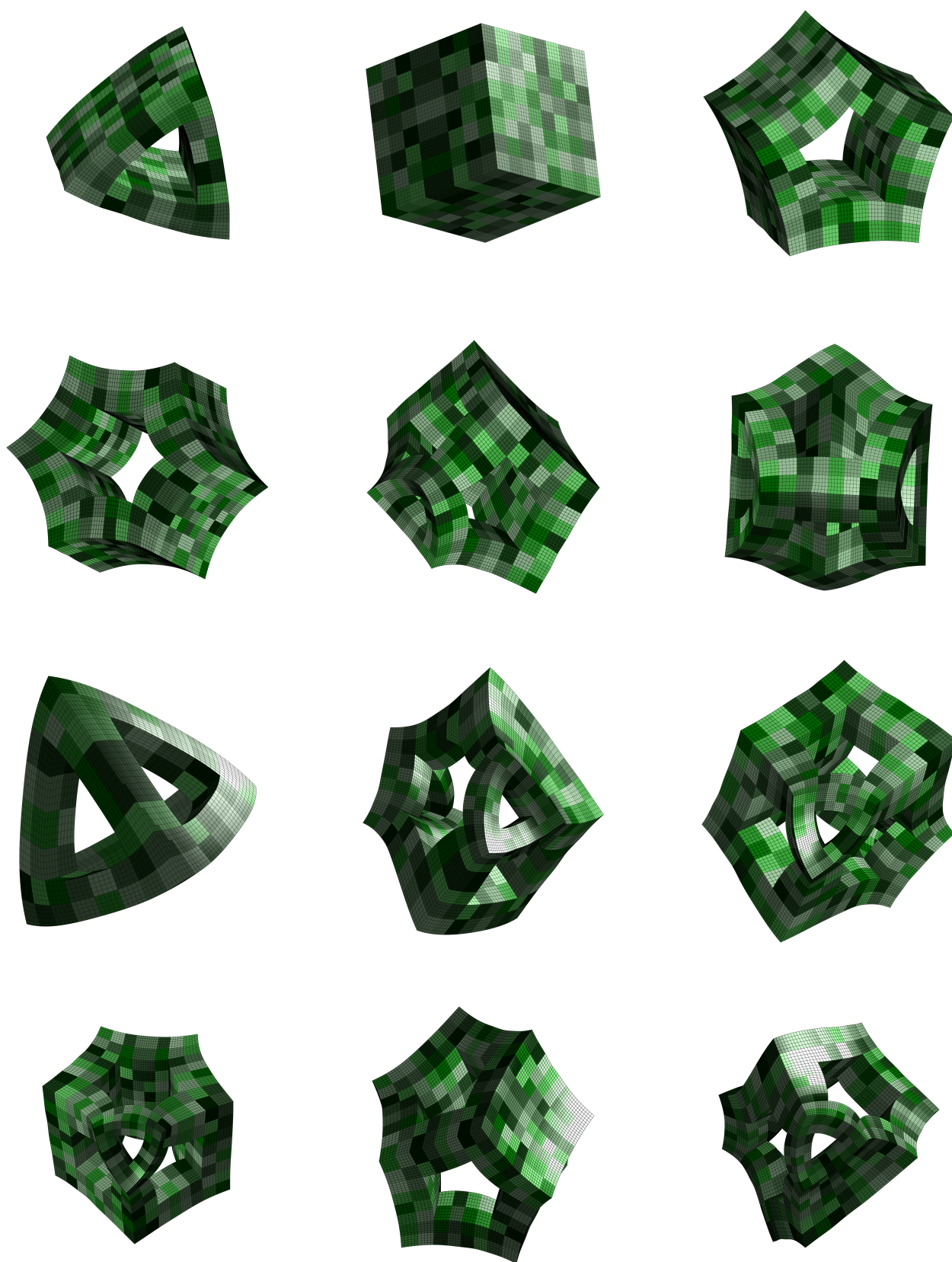


Abbildung 6.41: Galerie beispielhafter Bilder der charakteristischen Abbildung von Subdivisionsmatrizen zu den 3-Polytopen aus Abbildung 3.1, generiert mit Algorithmus 12.

7 Forschungsansätze für beliebige volumetrische Netze

Beim ersten Blick in die Arbeit von Catmull und Clark wird schon im ersten Satz des Abstracts das Ziel der Arbeit ersichtlich [CC78, S. 350]:

This paper describes a method for recursively generating surfaces that approximate points lying on a mesh of arbitrary topology.

Das entscheidende Wort dieses Satzes ist „arbitrary“. Catmull und Clark generieren Verfeinerungen von beliebigen zweidimensionalen Netzen. Dafür wandeln sie in einem ersten Schritt ein beliebiges Netz in ein Vierecksnetz um, indem jede Fläche des Netzes in eine Menge von Vierecken zerlegt wird (vgl. [CC78, S. 351 f.]). Eine beispielhafte Zerlegung ist in Abbildung 7.1 zu finden. Damit lassen sich die Grundbegriffe des zweidimensionalen Falls, beginnend mit den Zellen, über eine viereckige Grundstruktur definieren.

Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, inwieweit sich diese Allgemeinheit der Netze auf den volumetrischen Fall übertragen lässt und betrachten daher ausschließlich den Fall $t = 3$. Beispiele werden zudem nur für den Fall $g = 2$ gezeigt, da für den Fall $g = 3$ noch wesentliche Aspekte in der hier beschriebenen Skizze fehlen. Wir weisen an entsprechender Stelle auf die Hintergründe hin.

Dabei versteht sich dieses Kapitel lediglich als eine Skizze von Gedanken und nicht als schon fertig ausgearbeitete Theorie. Insbesondere wird in diesem Kapitel eher beschreibend und beispielhaft gearbeitet. Die vorgestellte Skizze darf und soll allerdings Ausgangspunkt für weitere Forschung sein.

Bevor wir mit dem eigentlichen Inhalt beginnen, benötigen wir einige Begriffe. Wir beginnen mit der Struktur eines n -Ecks:

Definition 7.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, dessen Knoten so angeordnet werden können, dass die Adjazenzmatrix die Form

$$T_n := A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \{0, 1\}^{n \times n}$$

besitzt, heißt Graph eines n -Ecks.

Mit dieser Struktur können wir eine spezielle Familie aus 3-Polytopen beschreiben: die Trapezoeder. Die geometrische Beschreibung findet sich beispielsweise in [CR61, S. 117]. Wir beschreiben die Struktur mithilfe von Graphen wie folgt:

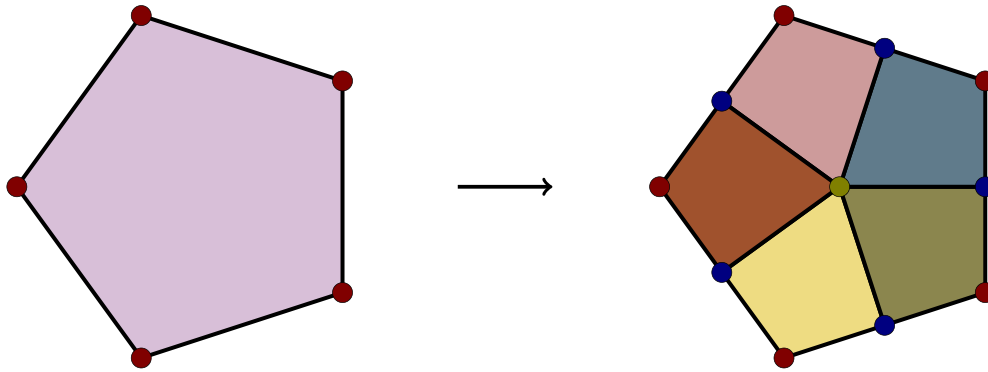
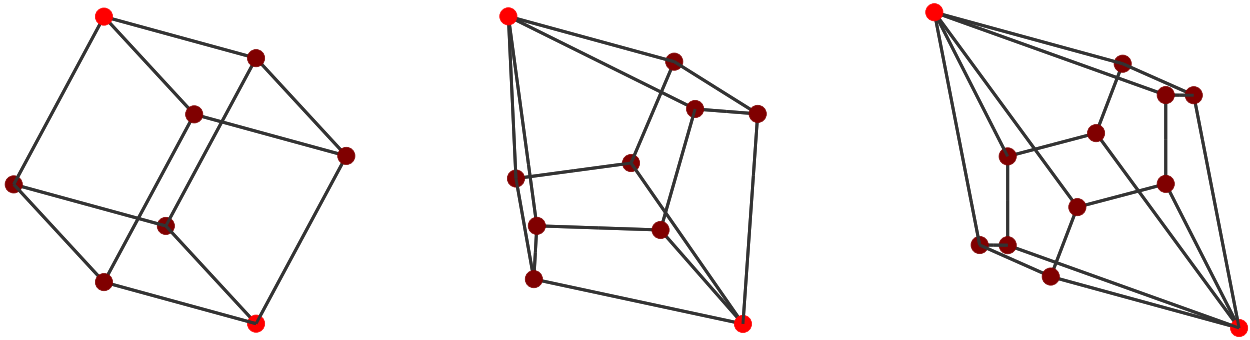


Abbildung 7.1: Beispielhafte Zerlegung eines Fünfecks in fünf Vierecke.


 Abbildung 7.2: Von links nach rechts: Illustrationen eines 3-gonalen, 4-gonalen und 5-gonalen Trapezoeders mit ausgezeichneten n -fachen Knoten (hellrot).

Definition 7.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = 2n + 2$ und $V = \{v_1, \dots, v_{2n+2}\}$ dessen Knoten so angeordnet werden können, dass die Adjazenzmatrix die Form

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

besitzt, heißt Graph eines n -gonalen Trapezoeders. Die Knoten v_1 und v_{2n+2} heißen n -fache Knoten. Die Realisierung des Graphen als konvexes 3-Polytop heißt Trapezoeder.

Ein Trapezoeder lässt sich also durch drei Komponenten beschreiben. Zunächst bilden die Knoten $v_2, \dots, v_{2n+1}$ einen Kreis im graphentheoretischen Sinne. Die Knoten dieses Kreises sind dabei abwechselnd mit den beiden n -fachen Knoten verbunden. Es ist direkt ersichtlich, dass das 3-gonale Trapezoeder das Hexaeder ist. Beispiele für verschiedene Trapezoeder finden sich zudem in Abbildung 7.2. Trapezoeder sind außerdem 3-Polytope, was indirekt aus [CR61, S. 117] hervorgeht. Mit der Beschreibung von Trapezoedern lässt sich die erste Behauptung formulieren:

Behauptung 7.3. Jeder 3-zusammenhängende planare Graph $G' = (V', E')$ lässt sich durch das Einfügen von Knoten und Kanten in einen Graphen G zerlegen, der die Vereinigung von $|V'|$ Graphen von Trapezoedern ist.

Beweisskizze. Die Konstruktion des Graphen G verläuft analog zur Konstruktion des Graphen G aus Algorithmus 14. Für jeden Knoten, jede Kante, jede Facette und für das Volumen, das G' beinhaltet, wird ein Knoten in G erzeugt. Diese nennen wir Eckknoten, Kantenknoten, Facettenknoten und Volumenknoten.

Die Knoten werden entsprechend der Struktur von G' mit Kanten verbunden. Die Eckknoten aus G , deren Pendants in G' eine gemeinsame Kante haben, werden mit dem entsprechenden Kantenknoten aus G verbunden. Ein Facettenknoten aus G wird mit allen Kantenknoten aus G verbunden, deren Pendants Kanten der zugehörigen Facette in G' sind und alle Facettenknoten aus G werden mit dem Volumenknoten aus G verbunden.

Damit entsteht für jeden Knoten aus G' ein Trapezoeder. Dieses besteht aus dem zugehörigen Eckknoten aus G , den mit diesem Eckknoten verbundenen Kantenknoten aus G , den mit diesen Kantenpunkten verbundenen Facettenknoten aus G und dem Volumenknoten. $\square$

Mit dieser Behauptung betrachten wir den Begriff einer Zelle aus Definition 2.2. Für ein „mesh of arbitrary topology“ muss dieser Begriff verallgemeinert werden. Nehmen wir an, dass eine Zelle ein beliebiges konvexes 3-Polytop in $\mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften aus Theorem 3.25 ist. Es erfüllt also alle Symmetrien und der Schwerpunkt der Tangentialpunkte liegt im Ursprung. Dann erhalten wir dafür die nächste Behauptung:

Behauptung 7.4. *Jedes 3-Polytop mit n Ecken und mit den Eigenschaften aus Theorem 3.25 lässt sich in n Trapezoeder zerlegen.*

Beweisskizze. Wir verfahren hier analog zu Lemma 6.7. Wir bilden das zugehörige duale Polytop und projizieren dessen Eckpunkte auf die Facetten des primalen Polytops. Dass die so entstehenden Trapezoeder konvex sind, muss analog zu Lemma 6.7 gezeigt werden. $\square$

Damit zerlegt sich eine Zelle der Form eines 3-Polytops in einem ersten Verfeinerungsschritt in Trapezoeder. Eine beispielhafte Illustration der beiden Behauptungen findet sich in Abbildung 7.3. Verallgemeinern wir also den ersten Begriff aus Kapitel 2, die Zelle, zunächst von einem Hexaeder zu einem allgemeinen 3-Polytop, so können wir durch die gerade beschriebene Zerlegung diese 3-Polytope in einem initialen Verfeinerungsschritt in Trapezoeder zerlegen. Wir erhalten also die geforderte Allgemeinheit für ein „mesh of arbitrary topology“ für den Fall $t = 3$, indem wir die benötigten Objekte, in einem ersten Schritt die Zellen, auf der Grundlage von Trapezoedern definieren. Hier ist zu bemerken, dass in [CC78] für den Fall $t = 2$ analoge Überlegungen angestellt werden und sich dort jedes n -Eck in n Vierecke zerlegt, wie bereits in Abbildung 7.1 illustriert.

Die nach diesem ersten Schritt entstandenen Trapezoeder können je nach Form des Ausgangspolytops für dieselbe kombinatorische Anordnung anders geformt sein. An dieser Stelle wird also ein „Einheitstrapezoeder“ benötigt. Für dieses wählen wir das Trapezoeder mit den Eigenschaften aus Theorem 3.25. Dieses wird zusätzlich so gedreht, dass die beiden n -fachen Knoten auf der z -Achse liegen. Die aus den 3-Polytopen entstandenen Trapezoeder müssen für den Begriff der Zelle in diesem ersten Schritt noch bijektiv auf die „Einheitstrapezoeder“ abgebildet werden.

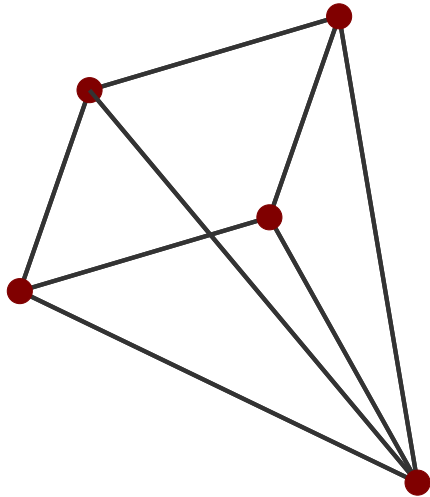
Mit diesen aus Trapezoedern bestehenden Zellen lassen sich die anderen in Kapitel 2 beschriebenen Begriffe analog definieren beziehungsweise erweitern. Die Begriffe verallgemeinern sich wie folgt: Am Spline-Definitionsgebiet ändert sich zunächst bis auf die Veränderung der Zellen nichts. Auch die Kontrollpunkte können analog zu Kapitel 2 für $g = 2$ mit den Zellen und für $g = 3$ mit den Ecken der Zellen assoziiert werden. Die Initialelemente lassen sich ebenfalls analog definieren. Die zu den Initialelementen gehörenden Graphen können jetzt allerdings vielfältiger sein.

Auch der Begriff der Regularität bleibt unverändert. Allerdings können Zellen, die für $n > 3$ n -gonale Trapezoeder sind, nicht regulär sein. Dies folgt daraus, dass die Zellen an den Ecken zu den n -fachen Knoten keine $2 \times 2 \times 2$ Struktur darstellen können. Reguläre Zellen müssen im Umkehrschluss immer Hexaeder sein, es können also nach wie vor nur hexaedrische Zellen zu Tensorprodukt-B-Splines ausgewertet werden. Dies ist nur konsequent, denn ein n -gonales Trapezoeder für $n \neq 3$ weist keine Tensorproduktstruktur auf.

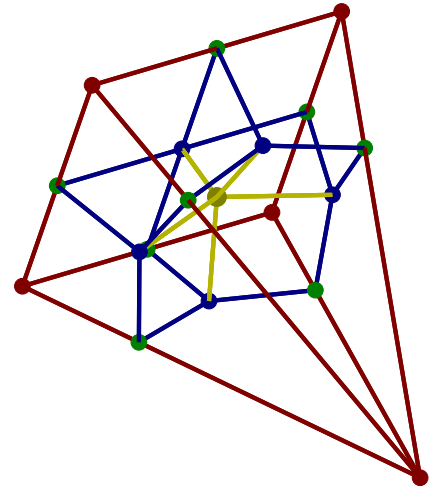
Ebenso kann die Verfeinerung analog erfolgen. Mit der in Behauptung 7.4 beschriebenen Zerlegung wird damit ein n -gonales Trapezoeder in n Hexaeder und zwei n -gonale Trapezoeder zerlegt. Folglich erhalten wir das in Abbildung 7.4 gezeigte Verhalten für die Auswertbarkeit für $g = 2$. Für die Abbildung 7.4 ist dabei anzumerken, dass hier der maximale auswertbare Bereich geplottet wurde. Es wurde also davon ausgegangen, dass die trapezoedrische Zelle so eingebettet ist, dass ein möglichst großer Bereich von ihr auswertbar ist. In diesem Punkt weicht die Darstellung von der vergleichbaren Abbildung 2.9 ab.

Auch für die trapezoedrische Zelle sehen wir, dass sich der auswertbare Bereich durch die Verfeinerung vergrößert. Wir erhalten hier allerdings eine neue Form von Irregularität, denn der nicht auswertbare Bereich zieht sich durch das

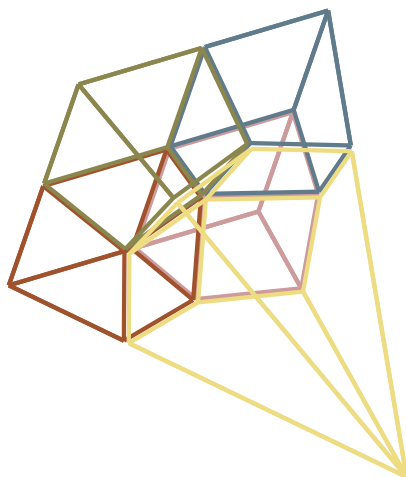
kombinatorische Struktur des Graphen und
Realisierung des Graphen als 3-Polytop



kombinatorische Verfeinerung
des Graphen



Zerlegung des 3-Polytops in vier Hexaeder
und ein 4-gonales Trapezoeder



die Zerlegung,
mit etwas Abstand geplottet

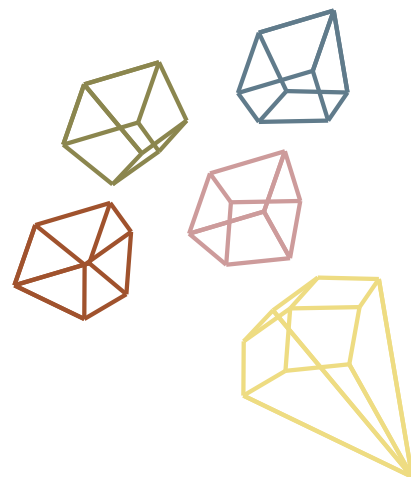


Abbildung 7.3: Beispielhafte Illustration der Behauptungen 7.3 und 7.4 anhand des Beispiels einer vierseitigen Pyramide. Die Pyramide als kombinatorischer Graph in der linken oberen Abbildung wird in der rechten oberen Abbildung zu einer kombinatorischen Vereinigung der Graphen von fünf Trapezoedern (von denen vier Hexaeder sind) verfeinert. Die Eckknoten sind rot, die Kantenknoten grün, die Facettenknoten blau eingefärbt und der Volumenknoten ist gelb dargestellt. Im linken unteren Bild wird die Pyramide als 3-Polytop in fünf Trapezoeder (von denen vier Hexaeder sind) verfeinert. Diese sind zur besseren Visualisierung im rechten unteren Bild mit etwas Abstand dargestellt.

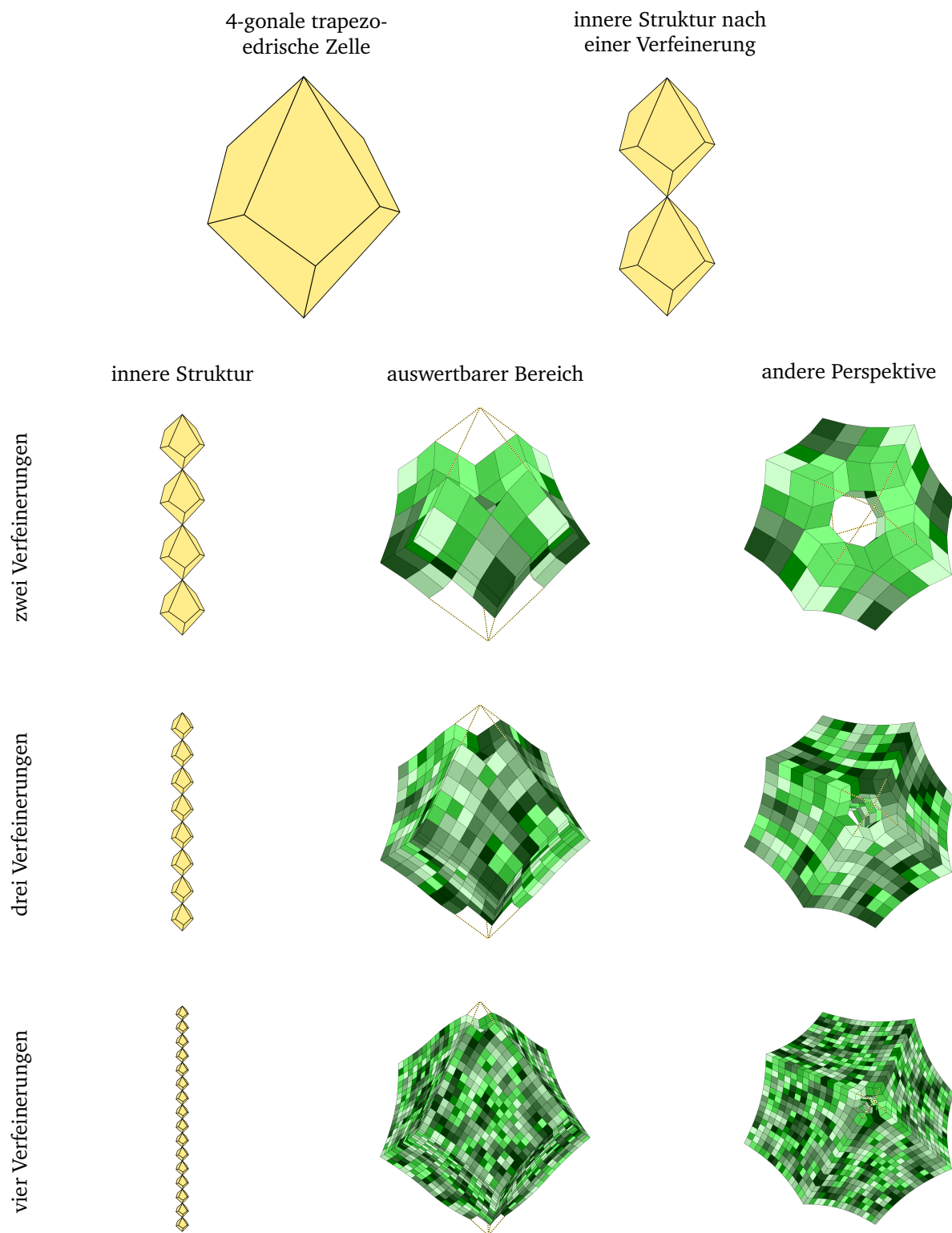


Abbildung 7.4: Eine 4-gonale trapezoedrische Zelle, deren innere Struktur und deren auswertbarer Bereich (unter der Voraussetzung einer Einbettung, in der möglichst viele Bereiche auswertbar sind). Oben rechts und in der linken Spalte sieht man die innere Struktur, die aus einer Kette von Trapezoedern besteht. In den rechten beiden Spalten sieht man die auswertbaren Bereiche zur jeweiligen Verfeinerung. Die auswertbaren Bereiche sind dabei als konkreten B-Spline-Auswertungen geplottet und können daher auch als „proof of concept“ der Auswertbarkeit dienen. Im rechten oberen Bild ist zudem der Eckpunkt, den sich beide Trapezoeder teilen, ein semi-Volumen-irregulärer Eckpunkt nach Definition 7.6.

immer weiter verfeinerte Trapezoeder (das kein Hexaeder ist) durch. Damit bildet sich eine Kette von Trapezoedern, die durch Verfeinerung an Länge im Sinne der Anzahl der Trapezoeder zunimmt, gleichzeitig aber immer dünner im Bezug auf das Volumen wird. Wir erhalten also durch diese Verallgemeinerung neben den in Definition 2.29 beschriebenen irregulären Ecken und Kanten zusätzlich irreguläre Volumen:

Definition 7.5. *Sei s eine Zelle, die kein Hexaeder ist. Dann nennen wir s irreguläres Volumen.*

Ein solches irreguläres Volumen ist der Gegenstand weiterer Forschung für die hier beschriebene Verallgemeinerung. Die Betrachtung eines solchen irregulären Volumens ist für sich genommen schon interessant, da die bereits gezeigte Irregularität viele Fragen aufwirft. So ist beispielsweise der Grenzwert der Verfeinerung von Interesse, genauso wie die Analyse der so entstehenden generierenden Funktionen.

Bemerkenswert sind aber vor allem die sich ergebenden invarianten Strukturen. Diese ergeben sich zunächst analog zu Abschnitt 2.3. Wir erhalten also erneut (Doppel)Schalen. Diese haben in der Visualisierung zusätzlich Löcher, die durch die Volumen selbst gehen. Damit ergibt sich auch die folgende und Definition 2.29 erweiternde Kategorisierung von Ecken:

Definition 7.6. *Sei $t = 3$ und D ein Spline-Definitionsgebiet mit trapezoedrischen Zellen. Eine Ecke einer Zelle heißt*

1. *regulär, wenn sie an $2 \times 2 \times 2$ Hexaedern liegt,*
2. *semi-Kanten-irregulär, wenn sie an $2 \times n$, mit $n \in \{3, 5, 6, \dots\}$ Hexaedern liegt,*
3. *Kanten-irregulär, wenn sie ausschließlich an Hexaedern liegt, aber nicht der Fall 1 oder 2 vorliegt,*
4. *semi-Volumen-irregulär, wenn sie an zwei gegenüberliegenden n -gonalen Trapezoedern und $2n$ Hexaedern liegt, aber nicht Fall 1 vorliegt,*
5. *Volumen-irregulär, wenn alle mit dem Eckpunkt verbundenen Kanten an exakt vier Zellen liegen, aber nicht Fall 1 oder Fall 4 vorliegt,*
6. *super-irregulär, wenn keiner der oben beschriebenen Fälle vorliegt.*

Die Fälle 1–3 wurden bereits ausführlich in der vorliegenden Arbeit behandelt. Wir benennen diese hier als (semi-) Kanten-irregulär, weil der Bereich entlang irregulärer Kanten der Zellen nur durch Verfeinerung auswertbar ist. Dem gegenüber stehen die Volumen-irregulären Ecken. Der Fall 4 ist hier das Analogon zum Prismenfall (Fall 2) für die Kanten-irregulären Punkte. Dieser Fall beschreibt das Objekt, das entsteht, wenn ein n -gonales Trapezoeder zu zwei n -gonalen Trapezoedern und n Hexaedern verfeinert wird. Diese Struktur setzt sich dabei immer weiter fort, ähnlich wie der Prismenfall. Dieses Verhalten ist in Abbildung 7.4 zu erkennen. Fall 5 beschreibt die Struktur, für die alle Kanten regulär sind, für die aber Volumen irregulär sein können. Dies ist das Analogon zu Fall 3. Fall 6 beschreibt abschließend die Struktur, die beide Arten von Irregularität beinhaltet. Beispiele für Strukturen der Fälle 4, 5 und 6 finden sich in Abbildung 7.5.

Spannend ist, wie sich diese invarianten Strukturen der (Doppel)Schalen beschreiben lassen. Dazu betrachten wir erneut den kombinatorischen Graphen aus Definition 2.50. Dieser lässt sich analog definieren. Auch der Begriff der Validität aus Definition 2.51 lässt sich übertragen. Hier tritt allerdings die in Beispiel 2.52 angerissene Erweiterung auf. War im hexaedrischen Fall der kombinatorische Graph ein 3-zusammenhängender planarer Graph, dessen Knoten exakt drei Nachbarn haben, so verallgemeinert sich dieser Begriff zu einem 3-zusammenhängenden planaren Graphen, dessen Knoten mindestens drei Nachbarn haben. Hier tritt also eine entscheidende Erweiterung auf, die wir für die Fälle $g = 2$ und $g = 3$ separat betrachten.

Die in Kapitel 5 beschriebenen Subdivisionsalgorithmen können problemlos mit dieser Erweiterung umgehen, denn in deren Konstruktion wurde nirgends genutzt, dass die Knoten des Graphen exakt drei Nachbarn haben müssen. Die 3-Polytope können konstruiert, für die Variante 2 kann die Colin-de-Verdière-Matrix generiert und die daraus resultierenden Matrizen können gebildet werden. Damit kann mit den in Kapitel 5 konstruierten Algorithmen die in diesem Kapitel beschriebene Erweiterung durchgeführt werden. Die so entstehenden B-Spline-Volumen können zudem generiert und ausgewertet werden. Damit ist diese Erweiterung auch praktisch möglich und kann in zukünftiger Forschung eingehend analysiert und untersucht werden. Hier gelten insbesondere auch die in Abschnitt 5.3 gezeigten Qualitätskriterien. Zudem enthielt die empirische Analyse bereits 118.589 Beispiele der Fälle 4, 5 und 6. Mit Qualitätskriterium Q3 erhalten wir damit insbesondere die Konsistenz für diese Erweiterung, der Grenzwert

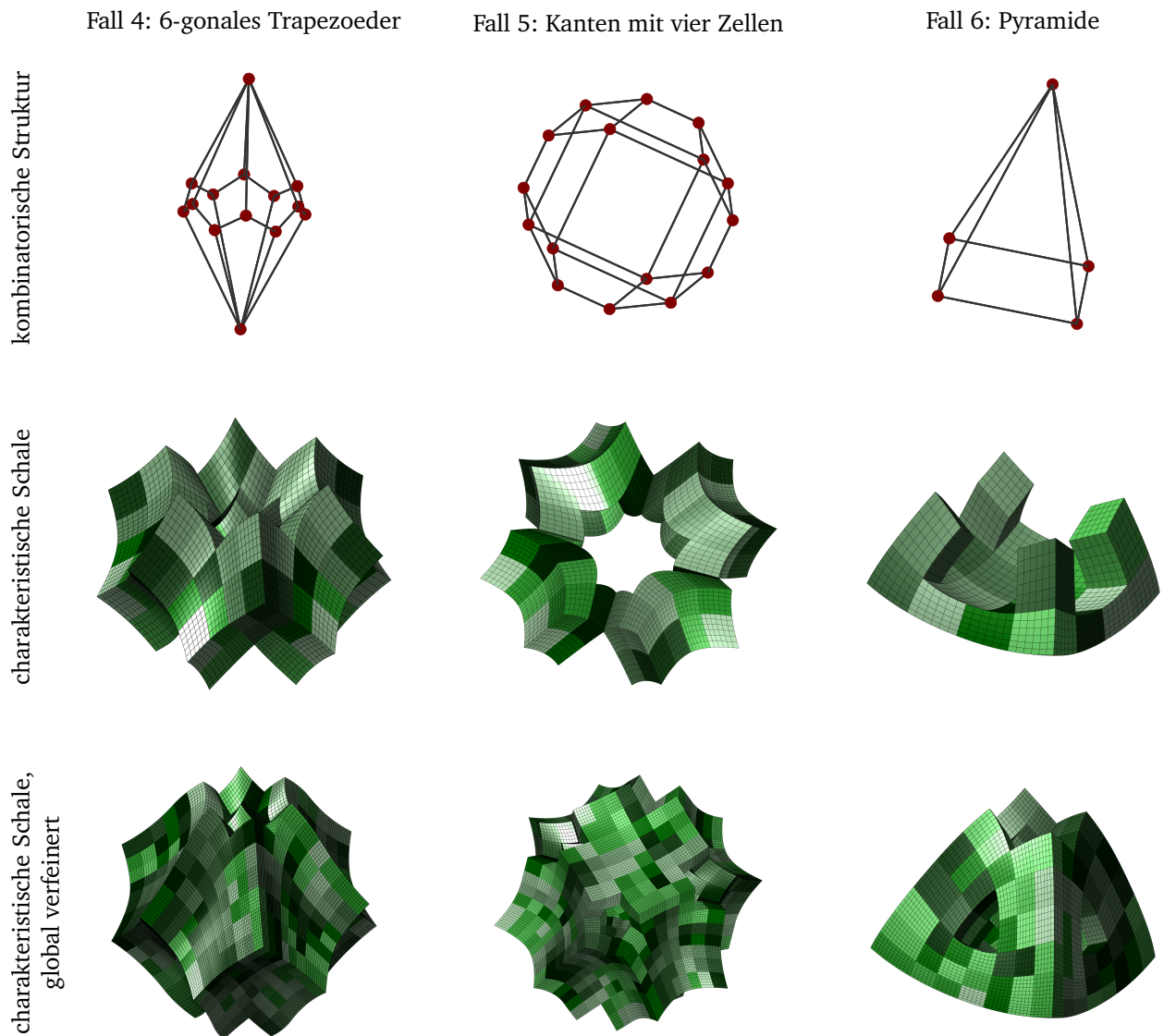


Abbildung 7.5: Illustration der Fälle 4, 5 und 6 aus Definition 7.6. In der ersten Zeile sind jeweils die kombinatorischen Strukturen dargestellt. In der zweiten Zeile ist der auswertbare Bereich der charakteristischen Schale für $t = 2$ geplottet und in der dritten Zeile ist der auswertbare Bereich derselben charakteristischen Schale nach einer globalen Verfeinerung dargestellt.

der Kontrollpunkte für $\lim_{m \rightarrow \infty} S^m P$ existiert also. Beispiele für die ausgewerteten Schalen für $t = 2$ der Fälle 4, 5 und 6 finden sich zudem in Abbildung 7.5. Da irreguläre Volumen zu einem großen Bereich führen, der erst nach Verfeinerung ausgewertet werden kann, wurden zur besseren Illustration die globalen Verfeinerungen der charakteristischen Schalen geplottet, um die charakteristische Schale besser darstellen zu können.

Der in Kapitel 6 beschriebene Subdivisionsalgorithmus kann diese Erweiterung bisher jedoch nicht leisten. Der entscheidende Punkt ist, dass die in Kapitel 6 vorgestellte Konstruktion nicht für alle Initialelemente eine Subdivisionsmatrix erzeugen kann. Dies liegt am kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$, der die duale Struktur der Zellen beschreibt.

Um dies zu erläutern, betrachten wir zwei verschiedene Fälle. Wir nehmen an, der Graph $\mathbf{G}$ eines Initialelements für $g = 3$ beinhaltet für $n > 3$ ein n -gonales Trapezoeder. Ist einer der n -fachen Punkte des Trapezoeders ein Eckpunkt, so ist der andere n -fache Punkt der zentrale Punkt. Für diesen ersten Fall kann eine Subdivisionsmatrix erstellt werden. Dies gilt beispielsweise für die in Abbildung 7.3 gezeigte Pyramide. Dieser Fall kommt in den 305.095 Beispielen aus Abschnitt 3.1.1 für die Adjazenzmatrizen vor, bei denen Knoten der zugehörigen Graphen mehr als 3 Nachbarn haben. Dies sind gerade 118.589 der 305.095 Beispiele. Die Subdivisionsmatrizen der Initialelemente dieser Beispiele lassen sich problemlos erzeugen und diese haben wir ebenfalls numerisch überprüft. Die Resultate für die Eigenwerte finden sich in Abbildung 7.6. Dort lässt sich erkennen, dass die Eigenwerte das gewünschte Spektrum aufweisen.

Nehmen wir für den zweiten Fall an, dass der Graph $\mathbf{G}$ eines Initialelements mit $g = 3$ für $n > 3$ wieder ein n -gonales Trapezoeder beinhaltet. Liegt einer der beiden n -fachen Punkte des Trapezoeders in einem Kantenpunkt, so liegt der andere n -fache Punkt des Trapezoeders in einem Facettenpunkt. Dieser Fall tritt etwa für Initialelemente auf, die in der Nähe eines in Fall 1 beschriebenen Initialelements liegen. Für diesen zweiten Fall bildet der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ zwar die Struktur ab, die die Zellen vorgeben, wird aber aus diesem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ in Algorithmus 14 der Graph $\mathbf{G}$ erzeugt, so passt der erzeugte Graph $\mathbf{G}$ nicht zu der von den Zellen vorgegebenen Struktur. Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.7 zu sehen. Die dort beschriebene Struktur beinhaltet ein 4-gonales Trapezoeder. Der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$, der gestrichelt angedeutet ist, ist allerdings der des regulären Falls. Der Algorithmus 14 erzeugt entsprechend den Graphen $\mathbf{G}$ des regulären Falls, der weniger Knoten beinhaltet als die dargestellte Struktur. Hier funktioniert also die in Kapitel 6 beschriebene Konstruktion nicht, denn aus dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ lässt sich nicht die Struktur des Graphen $\mathbf{G}$ erzeugen. Damit wird ebenfalls deutlich, warum wir in Kapitel 6 die hexaedrische Struktur voraussetzen mussten. Liegt diese vor, so lässt sich aus dem kombinatorischen Graphen $\mathbf{G}_K$ der Graph $\mathbf{G}$ erzeugen. Liegt diese nicht vor, so gibt es (wie durch den Fall 2 beschrieben) kombinatorische Strukturen, für die der kombinatorische Graph $\mathbf{G}_K$ nicht zur Beschreibung genügt.

Da Initialelemente des zweiten Falls nah an denen des ersten liegen, lässt sich für die trapezoedrischen Beispiele für $g = 3$ keine Subdivisionsmatrix für Doppelschalen erzeugen. Ließen sich aber für den beschriebenen zweiten Fall Subdivisionsmatrizen erzeugen, so ließe sich auch die in diesem Kapitel beschriebene Erweiterung für $g = 3$ durchführen. Dies sollte Gegenstand weiterer Forschung sein.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Verallgemeinerung auf beliebige kombinatorische Strukturen theoretisch möglich ist. Dabei entsteht jedoch eine neue Kategorie von Irregularität, die es noch eingehender zu untersuchen gilt. Für den Fall $g = 2$ konnten wir einen „proof of concept“ dieser Verallgemeinerung erstellen. Da sich sowohl die theoretische Struktur beschreiben als auch die praktische Anwendung durchführen ließ, zeigt, dass es sich lohnen könnte, sich mit dieser Verallgemeinerung eingehender zu beschäftigen.

Für den Fall $g = 3$ war dies jedoch nicht möglich. Hier besteht ein erster Schritt darin, für jede Struktur eine Subdivisionsmatrix erstellen zu können.

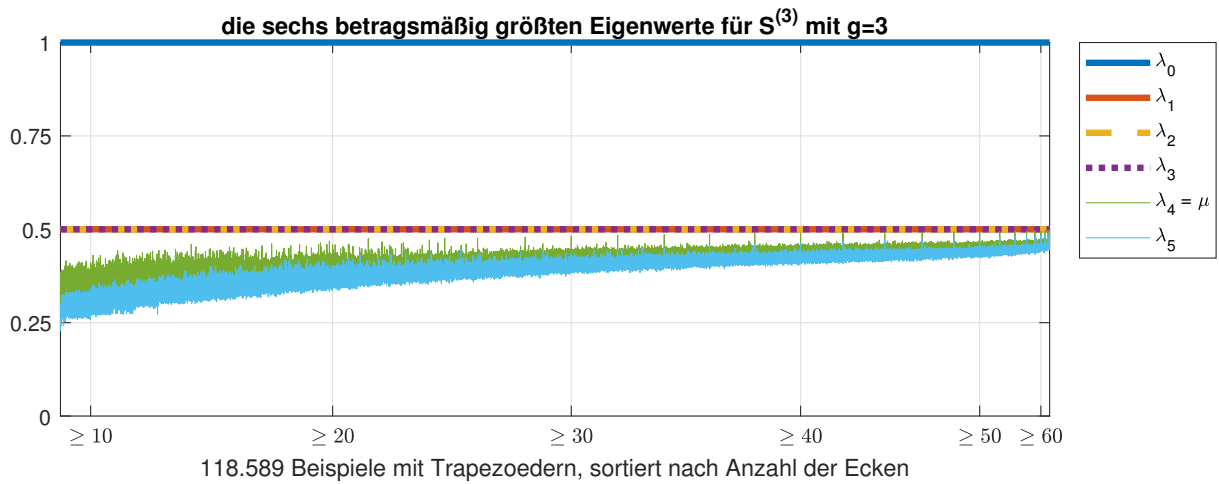


Abbildung 7.6: Die sechs betragsmäßig größten Eigenwerte der 118.589 Beispiele aus Abschnitt 3.1.1, deren Struktur für $g = 3$ Trapezoeder enthalten. Man sieht, dass sowohl die Erstellung der Subdivisionsmatrizen möglich war als auch dass die erstellten Subdivisionsmatrizen das gewünschte Spektrum aufweisen.

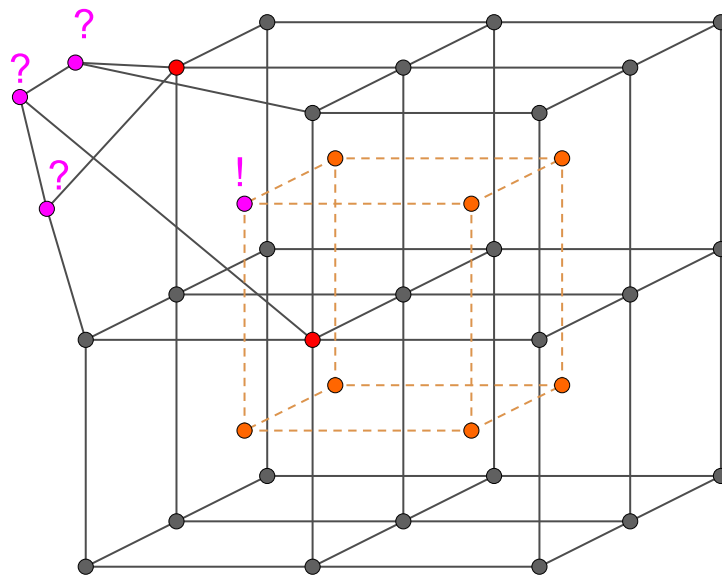


Abbildung 7.7: Eine beispielhafte Visualisierung eines Graphen G , bestehend aus sieben Hexaedern und einem 4-gonalen Trapezoeder. Die 4-fachen Knoten (dargestellt in rot) liegen an einem Kanten- und einem Facettenpunkt. Der zugehörige kombinatorische Graph G_K ist in orange dargestellt. Man erkennt, dass der pinke Knoten des kombinatorischen Graphen die Struktur der pinken Knoten von G nicht darstellen kann.

8 Fazit und Ausblick

Das Forschungsziel der vorliegenden Arbeit war es, für die verallgemeinerte quadratische ($g = 2$) und kubische ($g = 3$) B-Spline-Subdivision sowohl für Subdivisionsflächen ($t = 2$) als auch für Subdivisionsvolumen ($t = 3$) Qualitätskriterien zu erarbeiten. Anschließend sollten für die vier Kombinationen aus t und g Subdivisionsalgorithmen entwickelt werden, die nach Möglichkeit diesen Kriterien entsprechen. Insbesondere sollten diese einen t -fachen subdominanten Eigenwert $1/2$, also ein Spektrum der Form

$$1, \underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{t\text{-mal}}, > |\lambda_{t+1}| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$$

für eine $n \times n$ Subdivisionsmatrix aufweisen. Die eingangs gestellte Frage wurde umfassend beantwortet und die Ergebnisse werden im Folgenden beschrieben und zusammengefasst.

Eine erste zentrale Erkenntnis stellt die Entwicklung und Beschreibung der Qualitätskriterien selbst dar, die auf verschiedene Aspekte der Subdivisionsalgorithmen und -matrizen eingehen. Insbesondere wurde die Notwendigkeit eines t -fachen subdominanten Eigenwerts $1/2$ beschrieben.

Eine weitere Erkenntnis ist, dass sich der Catmull-Clark-Algorithmus [CC78] nicht für eine Verallgemeinerung von bivariaten auf trivariate Subdivisionsalgorithmen eignet und dass die bereits etablierten Subdivisionsalgorithmen von [JM99] und [Baj+02] im Allgemeinen kein geeignetes Spektrum anbieten. Dies war bisher in der Literatur nicht bekannt.

Auf Basis dieser Erkenntnisse wurde ein neuer Ansatz zur Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen entwickelt. Für $g = 2$ beruht dieser auf der Konstruktion von 3-Polytopen, der anschließenden Konstruktion einer Colin-de-Verdière-Matrix und dem abschließenden Shiften des Spektrums. Mit diesem neuen Verfahren konnten Subdivisionsmatrizen erzeugt werden, die unter anderem das erforderliche Spektrum aufweisen, keine nicht-negativen Einträge haben und die Tensorproduktstruktur (falls vorhanden) respektieren. Es wurde zudem eine Variante vorgestellt, die einen subsubdominanten Eigenwert $1/4$ garantiert, dafür aber die Eigenschaft der nicht-negativen Einträge verliert. Die detaillierten Ergebnisse für $g = 2$ sind übersichtlich in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Der vorgestellte Ansatz für $g = 3$ begann ebenfalls mit der Konstruktion von 3-Polytopen. Diese wurden in einem zweiten Schritt verfeinert und aus dieser verfeinerten Struktur wurde eine Colin-de-Verdière-artige Matrix erzeugt. Diese Matrix wurde anschließend in die Summe zweier Matrizen aufgeteilt und deren Exponentiale wurden abschließend multipliziert. Hier ist es gelungen, das gewünschte Spektrum empirisch nachzuweisen. Unter anderem weisen die Subdivisionsmatrizen ausschließlich nicht-negative Einträge auf, respektieren die Tensorproduktstruktur (falls vorhanden) und besitzen die gewünschte Struktur im Bezug auf die Nulleinträge. Die Subdivisionsmatrizen sind also insbesondere nicht voll besetzt. Die detaillierten Ergebnisse für $g = 3$ sind übersichtlich in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Für $t = 2$ und $g = 2$ konnte dabei im Vergleich zu den in der Literatur bekannten Subdivisionsalgorithmen keine wesentliche Verbesserung erzielt werden. Die erste Variante reproduziert die Verfeinerungsregeln des Doo-Sabin-Algorithmus [DS78], während die zweite Variante keine zusätzlichen Qualitätskriterien bietet. Allerdings bietet die erste Variante einen alternativen Zugang zu den Regeln aus [DS78] und die zweite Variante lässt sich im Sinne einer Tensorproduktstruktur auf den Fall $t = 3$ verallgemeinern. Für beide Varianten konnte der doppelte subdominante Eigenwert $1/2$ bewiesen werden.

Für $t = 3$ und $g = 2$ wurde erstmals ein Subdivisionsalgorithmus konstruiert, der verallgemeinerte quadratische B-Spline-Volumen erzeugen kann. Dabei wurden sowohl die Konstruktion als auch die konkreten Beweise der Qualitätskriterien detailliert erläutert. Insbesondere konnte der dreifach subdominante Eigenwert $1/2$ für die

Subdivisionsmatrizen der Initialelemente bewiesen und für Subdivisionsmatrizen der Schalen empirisch überprüft werden.

Für $t = 2$ und $g = 3$ wurde eine Alternative zum Catmull-Clark-Subdivisionsalgorithmus [CC78] geschaffen. Der doppelte subdominante Eigenwert $1/2$ konnte zudem empirisch nachgewiesen werden. Damit weist die in der vorliegenden Arbeit konstruierte Alternative im Bezug auf das asymptotische Verhalten eine gleichmäßige Skalierung um irreguläre Ecken auf.

Für $t = 3$ und $g = 3$ konnte eine Alternative zu den bereits beschriebenen Subdivisionsalgorithmen geschaffen werden. Zwar wurde der dreifach subdominante Eigenwert $1/2$ nur empirisch nachgewiesen, jedoch deutet diese Analyse darauf hin, dass die Konstruktion im Bezug auf das Spektrum funktionell ist. Liegt zudem ein dreifacher subdominanter Eigenwert $1/2$ vor, so bilden die zugehörigen Eigenvektoren eine geeignete Struktur, um das asymptotische Verhalten zu beschreiben. Somit wurden also sowohl im Bezug auf die Eigenwerte als auch im Bezug auf die zugehörigen Eigenvektoren im Vergleich zu den Subdivisionsalgorithmen aus [JM99] und [Baj+02] konkrete Verbesserungen erzielt.

In der vorliegenden Arbeit wurde nicht nur die Konstruktion der Subdivisionsmatrizen vorgestellt, sondern diese auch systematisch auf die entwickelten Qualitätskriterien hin überprüft. Wo es möglich war, konnten diese bewiesen oder widerlegt werden. Um eine fundierte qualitative Aussage treffen zu können, wurden die Kriterien zusätzlich an 305.095 zufällig generierten Beispielen getestet.

Ein Nachteil der in diese Arbeit vorgestellten Subdivisionsalgorithmen liegt in der verhältnismäßig aufwendigen Konstruktion. Während in [JM99] und [Baj+02] die Einträge der Subdivisionsmatrizen durch konkrete Formeln direkt angegeben werden können, erfolgt der Ansatz dieser Arbeit auf indirektem Weg. Um die Subdivisionsmatrizen algorithmisch zu erzeugen, ist ein tiefergehendes Verständnis der aufeinander aufbauenden Konstruktionsschritte erforderlich. Um diesem Problem zu begegnen, wurde der algorithmisch anspruchsvollste Teil, die Konstruktion der 3-Polytope, sowohl theoretisch als auch in der praktischen Umsetzung detailliert erläutert. Darüber hinaus wurden alle algorithmisch relevanten Schritte der Konstruktion mit Pseudocode beschrieben. Die zugehörige algorithmische Umsetzung mit Matlab wurde außerdem in [Die25] veröffentlicht.

Abschließend konnte der vorgestellte Ansatz für $t = 3$ und $g = 2$ skizzenhaft auf beliebige volumetrische Netze verallgemeinert werden. Dazu wurden hexaedrische Zellen auf trapezoedrische verallgemeinert. Diese Verallgemeinerung eröffnet ein neues Forschungsfeld, da sie zu einer bisher unbekannten Form der Irregularität führt: den sogenannten irregulären Volumen.

Im Verlauf der Arbeit wurden verschiedene Ansätze für weitere Forschung aufgeworfen. Diese zeigen sich bereits in den Qualitätskriterien selbst. Insbesondere für den Fall $t = 3$ bildet die Liste der beschriebenen Qualitätskriterien eine sinnvolle und breit aufgestellte Ausarbeitung der einzelnen Aspekte von Subdivisionsalgorithmen, da jedoch die Theorie für den Fall $t = 3$ bislang nicht entwickelt wurde, bleibt offen, welche Kriterien, zum Beispiel im Bezug auf die Glattheit der Volumen an Irregularitäten, entscheidend sind. Sowohl die Theorie des volumetrischen Falls als auch die Weiterentwicklung der Qualitätskriterien bieten somit ein großes Feld für künftige Forschung.

Gleiches gilt für die Qualitätskriterien im Bezug auf die in dieser Arbeit vorgestellten Subdivisionsalgorithmen. Hier bedürfen die bisher nur empirisch nachgewiesenen Ergebnisse einer theoretischen Betrachtung. Dies betrifft insbesondere das Qualitätskriterium Q5 für $g = 3$. Die Herausforderung hierbei liegt darin, dass sich die Subdivisionsmatrix in diesem Fall aus dem Produkt zweier Matrizen zusammensetzt. Da über die Eigenwerte solcher Matrixprodukte in der Literatur bislang wenig bekannt ist, wäre es naheliegend eine alternative Konstruktion zu entwickeln, die das abschließende Matrixprodukt vermeidet. Eine solche Konstruktion könnte auf den Erkenntnissen aus Abschnitt 6.2.3 aufbauen.

Für $g = 3$ wurde zudem beobachtet, dass sich mit steigender Anzahl der Zellen an einer irregulären Ecke der subsubdominante Eigenwert μ der Subdivisionsmatrix dem subdominanten Eigenwert λ annähert. Hier stellt sich die Frage, ob alternative Subdivisionsmatrizen konstruiert werden können, die unter Beibehaltung der bereits gewonnenen Qualitätskriterien einen größeren Abstand von λ zu μ erreichen.

Ein weiteres bedeutendes Forschungsthema ist der Nachweis injektiver und regulärer charakteristischer Abbildungen für $t = 3$, was das langfristige Ziel verallgemeinerter trivariater B-Spline-Subdivisionsalgorithmen darstellt.

Zudem bildet für $t = 3$ die in dieser Arbeit skizzenhaft beschriebene Verallgemeinerung auf trapezoedrische Strukturen ein erhebliches Potenzial für künftige Forschung. Hier müssen die beschriebenen Skizzen zunächst detailliert ausgearbeitet, präzisiert und weiterentwickelt werden, insbesondere im Bezug auf die Definition der verschiedenen Begriffe. Zusätzlich muss der vorgestellte Subdivisionsalgorithmus für $t = 3$ und $g = 3$ auf diese Strukturen verallgemeinert werden. Dabei bleibt eine zentrale Herausforderung, wie die noch fehlenden Verfeinerungsregeln gebildet werden können.

Dabei eröffnen die beschriebenen irregulären Volumen mit den sich durch sie ziehenden irregulären Bereichen ein vielversprechende Möglichkeiten für weitere Forschung. Eine Ausarbeitung dessen könnte die Möglichkeiten zur Beschreibung volumetrischer Strukturen durch verallgemeinerte B-Spline-Subdivision erheblich erweitern und zu einer vielfältigeren Beschreibung von Volumen und volumetrischen Strukturen führen.

Darüber hinaus ist die eingangs beschriebene Anwendung der Subdivisionsalgorithmen im Kontext der isogeometrischen Analysis von großem Interesse. Dabei muss untersucht werden, ob sich die in dieser Arbeit vorgestellten Subdivisionsalgorithmen zur Simulation eignen und wie sich die Approximationen im Vergleich zu anderen Subdivisionsalgorithmen verhalten. Während dieser Vergleich für $t = 2$ mit relativ geringem Aufwand durchgeführt werden kann, müssen für $t = 3$ zunächst grundlegende Fragen geklärt werden, insbesondere im Hinblick auf die Integration der irregulären Bereiche.

Der in dieser Arbeit vorgestellte neue Ansatz zur Konstruktion von Subdivisionsalgorithmen bietet damit ein erhebliches Potenzial für die Verbesserung bereits bestehender Subdivisionsalgorithmen sowie für die Anwendung in verschiedenen Bereichen wie beispielsweise in der Simulation. Außerdem kann er die Grundlage für zahlreiche Anknüpfungspunkte weiterer Forschung sein.

Anhang

A Graphen

In diesem Abschnitt beschreiben wir kurz die Grundlagen der Graphentheorie, die für diese Arbeit relevant sind. Dabei halten wir uns größtenteils an die Beschreibungen von Diestel [Die17] und beginnen mit der Definition eines Graphen nach [Die17, S. 1–2]:

Definition A.1. Sei V eine Menge und sei $[V]^2$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V .

1. Ein Graph ist ein Tupel $G = (V, E)$, bestehend aus zwei Mengen, sodass $E \subseteq [V]^2$. Die Elemente von E sind also zweielementige Teilmengen von V .
2. Die Elemente von V heißen Knoten des Graphen G .
3. Die Elemente von E heißen Kanten des Graphen G .

Zu dieser Definition bemerken wir Folgendes:

Bemerkung/Definition A.2. Im Kontext der Graphentheorie gibt es etliche Begriffe und Definitionen, um bestimmte Typen oder Eigenschaften von Graphen zu beschreiben. Die obige Definition vermeidet durch ihre Struktur implizit die folgenden drei Konzepte:

- **Schleifen:** Eine Schleife eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante aus E mit zwei identischen Knoten. Da in der obigen Definition eine Kante ein Element aus $[V]^2$, also eine zweielementige Teilmenge aus V ist, kann es nach der obigen Definition keine Schleifen geben.
- **Mehrfachkanten:** Ein Graph hat Mehrfachkanten, wenn er in E ein Paar von Kanten mit gleichen Knoten besitzt. Da E in der obigen Definition als Menge definiert ist, können Graphen der obigen Definition keine Mehrfachkanten haben.
- **Gerichtete Kanten:** Eine gerichtete Kante ist eine Kante, für die ein Start- und Zielknoten definiert ist. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $v_i, v_j \in V$. Für Graphen mit gerichteten Kanten sind (v_i, v_j) und (v_j, v_i) unterschiedliche Elemente in E . Da die Elemente in E allerdings Mengen sind, schließt die obige Definition gerichtete Kanten aus.

Nach der obigen Definition von Diestel können Graphen demnach keine Schleifen, keine Mehrfachkanten und keine gerichteten Kanten enthalten. Solche Graphen heißen in der Terminologie der Graphentheorie einfache Graphen. Sofern nicht explizit anders erwähnt (wie beispielsweise in Definition A.34) sind alle Graphen dieser Arbeit einfache Graphen. In einigen Definitionen verweisen wir zudem auf die Eigenschaft der Einfachheit, um diese hervorzuheben.

In der nächsten Definition beschreiben wir einige grundlegende Begriffe der Graphentheorie nach [Die17, S. 2, 6–10]:

Definition A.3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. Wir bezeichnen die Anzahl der Knoten von G mit $|V| \in \mathbb{N}_0$ und die Anzahl der Kanten von G mit $|E| \in \mathbb{N}_0$.
2. Die beiden Graphen mit $|V| < 2$, also den leeren Graphen und den Graphen mit einem Knoten, bezeichnen wir als triviale Graphen.
3. Ein Pfad ist ein nichtleerer Graph $G = (V, E)$ der Form

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}, \quad E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N},$$

für den alle v_i mit $i \in \{0, \dots, n\}$ verschieden sind. Wenn G ein Teilgraph eines Graphen G' ist, dann ist G ein Pfad von G' .

4. Sei G ein Pfad mit $n \geq 2$. Dann nennen wir den Graphen $G' = (V', E')$ mit

$$V' = V \quad \text{und} \quad E' = E \cup \{\{v_n, v_0\}\}$$

einen Kreis. Wenn G' ein Teilgraph eines Graphen G'' ist, dann ist G' ein Kreis von G'' .

5. Ein Kantenzug der Länge $k \in \mathbb{N}$ eines nichtleeren Graphen $G = (V, E)$ ist eine nichtleere alternierende Sequenz von Knoten und Kanten der Form

$$v_0, e_0, v_1, \dots, e_{k-1}, v_k \quad \text{mit} \quad v_i \in V, \quad e_i \in E, \quad e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \quad \text{und} \quad i \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Die Knoten in einem Kantenzug müssen nicht notwendigerweise verschieden sein.

Als nächstes definieren wir die Adjazenzmatrix eines Graphen nach [Die17, S. 27]:

Definition A.4. Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ein Graph. Die Matrix $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ mit

$$A_{(i,j)} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Adjazenzmatrix von G .

Wir erweitern das Konzept der Graphen, indem wir gerichtete Graphen einführen. Diese spielen in dieser Arbeit nur eine untergeordnete Rolle, sind aber für einige Begriffe notwendig. Die Definition erfolgt nach [Die17, S. 27–28]:

Definition A.5. Ein gerichteter Graph ist ein Tupel (V, E) zweier Mengen von Knoten V und Kanten E zusammen mit zwei Abbildungen

$$\text{start} : E \rightarrow V \quad \text{und} \quad \text{ziel} : E \rightarrow V,$$

die jeder Kante $e \in E$ einen Startknoten $\text{start}(e) \in V$ und einen Zielknoten $\text{ziel}(e) \in V$ zuordnet. Insbesondere kann es zwischen zwei Knoten mehrere Kanten geben, ebenso sind Schleifen zulässig und möglich. Für gerichtete Graphen stellen wir jedes Element e der Menge E als $(\text{start}(e), \text{ziel}(e))$ dar und nennen dieses gerichtete Kante. Für zwei Knoten $v_i, v_j \in V$ können also sowohl (v_i, v_j) als auch (v_j, v_i) in E enthalten sein. Für die Adjazenzmatrix A eines gerichteten Graphen gilt entsprechend

$$A_{(i,j)} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit haben wir alle grundlegenden Begriffe beschrieben und betrachten in den nächsten Abschnitten verschiedene Konzepte der Graphentheorie.

A.1 Automorphismen von Graphen

Automorphismen von Graphen sind in dieser Arbeit von besonderem Interesse. Wir beginnen mit der Definition nach [Die17, S. 3] und erläutern im Anschluss, wie und für was wir den Begriff nutzen.

Definition A.6. Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. Eine Abbildung $h : V \rightarrow V'$ ist ein Homomorphismus von G nach G' , wenn er die Nachbarschaftsrelation der Knoten erhält. Dies bedeutet konkret:

$$\{v_i, v_j\} \in E \Rightarrow \{h(v_i), h(v_j)\} \in E' \quad \text{für alle} \quad v_i, v_j \in V.$$

Ist h bijektiv und ihre Inverse h^{-1} ist ebenfalls ein Homomorphismus, gilt also

$$\{h(v_i), h(v_j)\} \in E' \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E \quad \text{für alle} \quad v_i, v_j \in V,$$

dann nennen wir h Isomorphismus, G und G' isomorph, und schreiben $G \cong G'$. Einen Isomorphismus von G auf sich selbst nennen wir Automorphismus von G .

Wir verknüpfen im nächsten Schritt den Begriff des Isomorphismus mit der Adjazenzmatrix der entsprechenden Graphen, um eine Charakterisierung zu erhalten. Diese ist aus [GR01, Lem. 8.1.1, S. 164] entnommen, allerdings ist dort die Charakterisierung für gerichtete Graphen beschrieben. Da sich jedoch jeder ungerichtete Graph als gerichteter Graph ausdrücken lässt, können wir die Charakterisierung entsprechend übertragen.

Charakterisierung A.7. Seien G und G' zwei ungerichtete Graphen mit derselben Knotenmenge und A und A' die zugehörigen Adjazenzmatrizen. Die Graphen G und G' sind genau dann isomorph, wenn eine Permutationsmatrix (vgl. Definition B.15) H existiert, sodass

$$H^T A H = A' \quad \Leftrightarrow \quad A = H A' H^T.$$

Die Charakterisierung für Automorphismen nach [LS16, Lem. 2.8, S. 30] ergibt sich für den Spezialfall $G' := G$:

Charakterisierung A.8. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Adjazenzmatrix A und h eine Permutation auf V (vgl. Definition B.14) mit orthogonaler (siehe Theorem B.16) Permutationsmatrix H . Die Permutation h ist genau dann ein Automorphismus auf G , wenn

$$H^T A H = A.$$

Wir verdeutlichen den Unterschied an folgendem Beispiel:

Beispiel A.9. Sei G ein Graph bestehend aus den vier Knoten $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seien außerdem die Permutationen

$$h_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 & v_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_4 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

mit Permutationsmatrizen

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$H_1^T A H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =: A' \quad \text{und} \quad H_2^T A H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Ist G' der Graph zu A' auf der Knotenmenge V , so sind G' und G isomorph und h_1 ist ein Isomorphismus. Im Gegensatz dazu ist h_2 ein Automorphismus auf G . Beide Permutationen sind in Abbildung A.1 illustriert.

Isomorphismen auf derselben Knotenmenge lassen sich damit als Umsortierung der Knoten verstehen. Automorphismen bilden zusätzlich, wie in Abbildung A.1 zu sehen, den Graphen auf sich selbst ab. Sie stellen damit die Symmetrien des Graphen dar (vgl. dazu auch [BM08, S. 15] und [LS16, S. 18]). Zudem lässt sich auf der Menge der Automorphismen nach [GR01, S. 4] folgende Struktur feststellen:

Definition/Lemma A.10. Sei G ein Graph. Die Menge aller Automorphismen von G bezeichnen wir als

$$\text{Aut}(G).$$

Diese Menge ist eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung zweier Automorphismen.

Nach diesen Grundlagen zu den verschiedenen Abbildungsformen zwischen Graphen betrachten wir im nächsten Abschnitt das Konzept der Konnektivität.

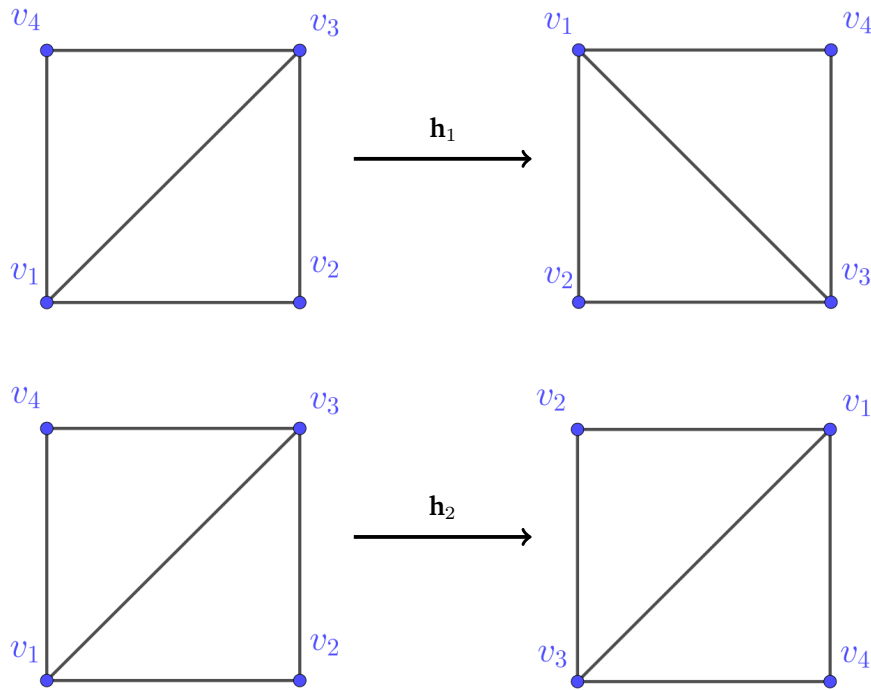


Abbildung A.1: Illustration des Graphen G und der zwei Permutationen h_1 und h_2 aus Beispiel A.9.

A.2 Konnektivität

Das Konzept der Konnektivität ist für diese Arbeit zentral, denn viele wichtige Theoreme, wie beispielsweise der Satz von Steinitz 3.8, haben eine bestimmte Konnektivität als Voraussetzung. Wir beginnen mit der Definition des Begriffs zusammenhängend nach [Die17, S. 10]:

Definition A.11. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zusammenhängend, wenn $|V| > 0$ ist und jedes Paar von Knoten durch einen Pfad in G verbunden ist.

Diese Definition können wir nutzen, um den Begriff der (Knoten)Konnektivität nach [Die17, S. 11–12] zu erklären:

Definition A.12. Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k -zusammenhängend (oder in der Literatur auch k -knotenzusammenhängend), wenn jeder Teilgraph $G' = (V', E') \subset G$ mit

$$V' \subset V, \quad |V'| > |V| - k \quad \text{und} \quad E' = \{\{v_i, v_j\} \in E \mid v_i, v_j \in V'\}$$

zusammenhängend ist. Die größte natürliche Zahl k , für die ein Graph k -zusammenhängend ist, heißt Konnektivität des Graphen G .

Dies bedeutet, dass aus dem Graphen $k - 1$ Knoten entfernt werden können, ohne den Zusammenhang zu verlieren. An den Begriff der Konnektivität schließt sich die Kantenkonnektivität der folgenden Definition nach [Die17, S. 12] an:

Definition A.13. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der Graph G heißt k -kantenzusammenhängend, wenn $|V| > 1$ und jeder Teilgraph $G' = (V', E') \subset G$ von G mit

$$V' = V, \quad E' \subset E \quad \text{und} \quad |E'| > |E| - k$$

zusammenhängend ist. Dies bedeutet analog zur vorigen Definition, dass aus dem Graphen $k - 1$ Kanten entfernt werden können, ohne den Zusammenhang zu verlieren.

Die größte natürliche Zahl k für die G k -kantenzusammenhängend ist, heißt Kantenkonnektivität von G .

Für diese beiden Begriffe erhalten wir den folgenden Satz nach [Die17, Satz 1.4.2, S. 12]:

Satz A.14. *Sei G ein nicht-trivialer Graph. Dann ist die (Knoten)Konnektivität von G kleiner gleich der Kantenkonnektivität von G .*

In anderen Worten ist damit jeder k -zusammenhängende Graph auch k -kantenzusammenhängend. Eine Charakterisierung des Zusammenhangs eines Graphen wurde von Menger in [Men27] entwickelt. Wir geben hier die Version von [Die17, Thm. 3.3.6, S. 72] an:

Theorem A.15 (Globale Version des Satzes von Menger). *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Der Graph G ist genau dann k -zusammenhängend, wenn er k bis auf Start- und Zielknoten disjunkte Pfade zwischen je zwei beliebigen Knoten enthält.*
2. *Der Graph G ist genau dann k -kantenzusammenhängend, wenn er k Pfade zwischen je zwei beliebigen Knoten enthält, deren Kanten disjunkt sind.*

Die nächste Definition erfolgt nach [Mey00, S. 671] und verallgemeinert den Begriff zusammenhängend auf gerichtete Graphen. Da sich jeder ungerichtete Graph auch als gerichteter Graph darstellen lässt, definieren wir den folgenden Begriff für beide Typen von Graphen. Für ungerichtete Graphen fällt dabei die folgende Definition mit der Definition A.11 zusammen.

Definition A.16. *Ein (gerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt stark zusammenhängend, falls es für jede Kombination zweier Knoten v_i und $v_j \in V$ einen Pfad (gerichteter) Kanten von v_i nach v_j gibt.*

A.3 Planarität

Das nächste Konzept ist das der Planarität. Dazu beschreiben wir zunächst den Begriff des Bogens nach [Die17, S. 90]:

Definition A.17. *Ein Bogen ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$, die eine Vereinigung endlich vieler Strecken ist und die zudem homeomorph zum Intervall $[0, 1]$ ist.*

Damit können wir planar-ebene Graphen nach [Die17, S. 92, 102] definieren:

Definition A.18. *Ein planar-ebener Graph ist ein Tupel (V, E) aus Knoten und Kanten, für das die folgenden Eigenschaften gelten:*

1. $V \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. *Jede Kante ist ein Bogen zwischen zwei Knoten.*
3. *Verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Knoten.*
4. *Das Innere einer Kante enthält keine Knoten und keinen Punkt einer anderen Kante.*

Jeder Graph $G = (V, E)$, der in $\mathbb{R}^2$ als planar-ebener Graph gezeichnet werden kann (der also isomorph zu einem planar-ebenen Graphen ist) heißt planarer Graph.

Wir ordnen diese Definition mit der folgenden Bemerkung ein:

Bemerkung A.19. *Graphen der Definition A.1 sind zunächst abstrakt beschrieben und können abstrakt interpretiert werden. Behandelt man die Menge der Knoten als abstrakte Menge aus $|V|$ Elementen, so kann ein Graph durch die Informationen der Adjazenzmatrix erzeugt werden. Abstrakt interpretierte Graphen kodieren also zunächst durch die Kanten nur eine Struktur zwischen Objekten, in der Definition konkret zwischen Knoten. Einen solchen Graphen bezeichnen wir sprachlich auch als abstrakten Graphen.*

Den Knoten können wir eine Bedeutung verleihen, indem wir diese mit konkreten Elementen identifizieren, oder besser noch, indem wir die Menge V der Knoten als diese konkreten Elemente definieren. So ist es durch die Definition des

Graphen ohne Weiteres möglich, die Menge der Knoten als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ oder des $\mathbb{R}^3$ zu definieren. Einen solchen Graphen bezeichnen wir auch als eingebetteten Graphen oder realisierten Graphen.

Diese Arbeit beschäftigt sich insbesondere in Kapitel 3 damit, aus einer Adjazenzmatrix zunächst einen abstrakten Graphen zu erzeugen und diesen dann mit Knoten aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ zu realisieren. Da diese Realisierung lediglich ein Isomorphismus zwischen abstrakten und konkreten Knoten ist, verwenden wir den abstrakten Graphen und seine Realisierung(en) synonym. Dies ermöglicht eine erhebliche Vereinfachung der Notation und gestaltet die damit verbundenen Begriffe übersichtlicher.

Die Kanten eines Graphen mit Knoten in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind zunächst nach Definition A.1 nur zweielementige Mengen und keine Linien oder Bögen. Daher definiert Diestel in der obigen Definition planar-ebene Graphen auch als Tupel und nicht als Graph, um die Bögen als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ setzen zu können. In unseren Realisierungen sind Kanten die kürzesten Strecken zwischen den Kontrollpunkten bezüglich der euklidischen Norm.

An die Definition von Planarität schließt sich der Begriff der Außenplanarität an, den wir nach [Col93, Def. 5.5, S. 146] und [Die17, Aufg. 23, S. 115] wie folgt definieren:

Definition A.20. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt außenplanar, wenn er planar ist und ein planar-ebener isomorpher Graph in $\mathbb{R}^2$ existiert, für den alle Knoten am äußeren Bereich des $\mathbb{R}^2$ liegen.

Mit dem Konzept der Planarität und der Konnektivität können wir im nächsten Abschnitt das Konzept der Facetten betrachten.

A.4 Facetten

Dem Begriff der Facette können wir uns zunächst intuitiv nähern. In dreidimensionalen Polytopen sollen Facetten die zweidimensionalen Randflächen der Polytope darstellen. Ein Spielwürfel mit sechs Seiten soll beispielsweise sechs Facetten haben, die die Zahlen eins bis sechs beinhalten. Auf der graphentheoretischen Ebene ist dies allerdings nicht so einfach, denn Graphen sind zunächst abstrakte Strukturen. Wir benötigen daher eine abstrakte Definition von Facetten, die wir im Folgenden einführen und motivieren wollen.

In der Graphentheorie gibt es für 3-zusammenhängende planare Graphen zwei Konzepte, mithilfe derer Facetten beschrieben werden können. Das erste Konzept geht unter anderem auf die Arbeiten [Tut60] und [Tut63] von Tutte zurück. In diesem Konzept sind Facetten Kreise mit maximal einer Brücke. Da wir dieses Konzept nicht ausführen werden, gehen wir hier auf den Begriff der Brücke nicht weiter ein.

Das zweite Konzept ist unter anderem in [Die17] zu finden und beschreibt Facetten als induzierte nicht-separierende Kreise.

Beide Konzepte werden in der Literatur äquivalent genutzt, eine explizite Formulierung, in der die Äquivalenz bewiesen wird, ist allerdings schwer zu finden. Eine verhältnismäßig nahe Referenz für die Äquivalenz von 3-zusammenhängenden Graphen findet sich allerdings in [Bru04, Lem. 10, S. 242].

Bevor wir den Begriff der Facette definieren, betrachten wir die folgende Definition spezieller Kreise nach [Die17, S. 8]:

Definition A.21. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $G' \subset G$ ein Kreis in G .

1. Eine Kante aus G , die an zwei Knoten des Kreises G' liegt, aber nicht Teil von G' ist, heißt Sehne von G' .
2. Der Kreis G' von G heißt induzierter Kreis, wenn er keine Sehnen in G besitzt.
3. Der Kreis G' von G heißt nicht-separierender Kreis, wenn G ohne G' zusammenhängend ist.

Diese Definition nutzen wir, um Facetten beschreiben zu können. Vorher definieren wir den Begriff der Facette nach [Die17, S. 90, 92] wie folgt:

Definition A.22. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ heißt Gebiet, falls zwei Elemente aus M durch einen Bogen in M verbunden werden können. Sei $G = (V, E)$ ein planar-ebener Graph mit $V \subset \mathbb{R}^2$. Die maximalen Gebiete von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ heißen Facetten von G und sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

Hier ist zu beachten, dass es mit dieser Definition auch immer einen äußeren Bereich gibt, den wir *äußere Facette* nennen (vgl. dazu [Die17, S. 92]).

Wir sehen hier also, dass der Begriff der Facette zunächst für planar-ebene Graphen definiert ist. Wir wollen im Folgenden allerdings eine allgemeinere Definition konstruieren, die sich von Graphen mit Knoten in $\mathbb{R}^2$ löst und Facetten in einem kombinatorischen Sinne definiert.

Um eine solche Definition erstellen zu können, müssen wir zunächst diskutieren, ob eine abstrakte Definition von Facetten wohldefiniert wäre, denn es gibt unter Umständen verschiedene planar-ebene Realisierungen eines abstrakten Graphen. Dafür benötigen wir die folgende Definition nach [Die17, S. 98–102]:

Definition A.23. Sei G ein Graph und seien $G' = (V', E')$ und $G'' = (V'', E'')$ zwei planar-ebene Graphen mit Facetten F' und F'' , die eine Realisierung von G sind. Sei zudem h' der Isomorphismus zwischen G und G' und sei h'' der Isomorphismus zwischen G und G'' . Die beiden Graphen G' und G'' heißen äquivalent, wenn $h'' \circ h'^{-1}$ eine Bijektion ist, die $V' \cup E' \cup F'$ auf $V'' \cup E'' \cup F''$ abbildet, also eine Bijektion der Knoten, Kanten und Facetten ist.

Mit dieser Definition können wir das Theorem von Whitney aus [Whi33] formulieren. Wir verwenden hier die Version aus [Die17, Thm. 4.3.2, S. 102]:

Theorem A.24. Zwei beliebige planar-ebene Einbettungen eines 3-zusammenhängenden [planaren] Graphen sind äquivalent.

Die Wohldefiniertheit erhalten wir damit durch Theorem A.24. Da jede Einbettung eines planaren Graphen in den $\mathbb{R}^2$ äquivalent ist, erhalten wir entsprechend dieselbe Menge von Facetten bis auf Deformierung und Anordnung der Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

Damit ist es prinzipiell möglich, den Begriff der Facette von der konkreten Realisierung zu lösen. Die abstrakte Beschreibung von Facetten für 3-zusammenhängende planare Graphen erhalten wir mit dem nächsten Theorem nach [Die17, Satz 4.2.7, S. 95]:

Theorem A.25. Die Ränder der Facetten eines 3-zusammenhängenden planar-ebenen Graphen sind seine nicht-separierenden induzierten Kreise.

Mit diesem Theorem erhalten wir eine Charakterisierung des Begriffs der Facette, die wir auf planare Graphen mit der nächsten Definition übertragen können:

Definition A.26. Sei $G = (V, E)$ ein 3-zusammenhängender planarer Graph. Ein induzierter nicht-separierender Kreis $G' \subset G$ von G heißt abstrakte Facette von G . Die Menge aller abstrakten Facetten von G bezeichnen wir mit F .

Wie bereits in Bemerkung A.19 beschrieben, verwenden wir abstrakte und realisierte Graphen synonym. Daher verwenden wir im Folgenden die Begriffe der abstrakten Facetten und der Facetten von Realisierungen synonym.

Mit dieser Definition ist es möglich, die abstrakten Facetten eines Graphen zu berechnen. Dafür benötigen wir einige weitere Resultate, die wir im Folgenden erklären. Wir beginnen mit der Eulerformel für Graphen nach [Die17, Thm. 4.2.9, S. 97]:

Theorem A.27 (Eulerformel für Graphen). Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planar-ebener Graph mit $|F|$ Facetten, dann ist

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Mit diesem Theorem erhalten wir eine konkrete Formel für die Anzahl der Facetten. Ein Algorithmus zur Konstruktion der Facetten eines planaren 3-zusammenhängenden Graphen, umgesetzt in Algorithmus 3, kann also terminieren, wenn $2 - |V| + |E|$ Facetten gefunden wurden.

Ein triviales Korollar aus der Eulerformel und auch aus Theorem A.24 ergibt sich damit nach [BM08, Kor. 10.20, S. 259]:

Korollar A.28. Alle planar-ebenen Einbettungen eines zusammenhängenden planaren Graphen haben dieselbe Anzahl an Facetten.

Die Eulerformel für Graphen stimmt außerdem mit der Eulerformel für 3-Polytope überein. Diese ist eine alternative speziellere Formulierung von Theorem A.27 für 3-zusammenhängende planare Graphen.

Einen gut ausgearbeiteten Überblick inklusive des historischen Hintergrunds über die Eulerformel für 3-Polytope bietet beispielsweise [Ric08]. Euler selbst formulierte die Formel in [Eul58]. Der erste Beweis von Legendre in [Leg94] ist in der Fassung [LB86] zu finden. Wir verwenden hier die Formulierung aus [Ric08, S. 66]:

Theorem A.29 (Eulerformel für 3-Polytope). Für ein 3-Polytop mit $|V|$ Ecken, $|E|$ Kanten und $|F|$ Facetten gilt

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Wir betrachten in einem nächsten Schritt zwei Aussagen über Facetten in Graphen. Die erste stammt von Kelmans aus [Kel81, Thm. 6.7, S. 354] und [Kel81, Thm. 10.6, S. 373]. Wir verwenden hier die Formulierung aus [Die17, Thm. 4.5.2, S. 109]:

Theorem A.30. Ein 3-zusammenhängender Graph ist genau dann planar, wenn jede Kante in genau zwei nicht-separierenden induzierten Kreisen liegt.

Wir können zudem den folgenden Satz formulieren:

Satz A.31. Zwei (abstrakte) Facetten eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen haben maximal eine gemeinsame Kante.

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir die Theorie der planar-ebenen zweidimensionalen Dualität von Graphen aus dem nächsten Abschnitt.

Wir nehmen an, dass ein Graph zwei Facetten hat, die mehr als eine gemeinsame Kante besitzen. Dann besitzen die zu den beiden Facetten gehörenden Knoten des dualen Graphen mehr als eine Kante, die diese beiden Knoten verbindet. Daraus folgt, dass der duale Graph nicht einfach ist. Dies ist ein Widerspruch zu Theorem A.43 und damit haben zwei Facetten maximal eine gemeinsame Kante. $\square$

Im Bezug auf die Planarität betrachten wir abschließend eine weitere Aussage. Dabei handelt es sich um ein Korollar der Eulerformel A.27 und ist aus [Die17, Kor. 4.2.10, S. 97] entnommen:

Korollar A.32. Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten hat maximal $3n - 6$ Kanten.

Dieses Korollar verwenden wir in Algorithmus 2 zum Testen von Planarität, um für einige Fälle Planarität schnell ausschließen zu können.

Das Konzept der Facetten ermöglicht es uns, im nächsten Abschnitt das Konzept der zweidimensionalen Dualität einzuführen.

A.5 Zweidimensionale Dualität

Das Konzept der Dualität wird in der Mathematik in vielen verschiedenen Kontexten genutzt. In dieser Arbeit nutzen wir zwei verschiedene Formen der Dualität, und müssen damit zwischen dreidimensionaler Dualität und zweidimensionaler Dualität unterscheiden. Letztere beschreiben wir in diesem Abschnitt und führen dafür zunächst den Begriff des Multigraphen nach [Die17, S. 28] ein:

Definition A.33. Ein Multigraph ist ein Tupel (V, E) zweier disjunkter Mengen zusammen mit einer Abbildung $E \rightarrow V \cup [V]^2$, die jeder Kante ein Element aus V oder $[V]^2$ zuweist, die ihre Endknoten sind.

Diese Definition beschreibt lediglich, dass ein Multigraph sowohl Schleifen als auch Mehrfachkanten enthalten kann. Anschließend an diese Definition können wir planar-ebene Multigraphen nach [Die17, S. 110] definieren:

Definition A.34. Ein planar-ebener Multigraph ist ein Tupel $G = (V, E)$, bestehend aus einer Menge von Knoten und einer Menge von Kanten, für die die folgenden Bedingungen gelten:

1. $V \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. Jede Kante ist entweder ein Bogen zwischen zwei Knoten oder ein Bogen von einem Knoten zu sich selbst, der nur den Knoten enthält. Dieser Bogen ist eine Schleife im graphentheoretischen Sinne.
3. Mit Ausnahme der beiden Endpunkte enthält eine Kante keinen Punkt einer anderen Kante.

Für einen solchen planar-ebenen Multigraphen ist es möglich, einen planar-ebenen zweidimensional dualen Graphen nach [Die17, S. 110 f.] wie folgt zu definieren:

Definition A.35. Seien $G = (V, E)$ und $G^* = (V^*, E^*)$ zwei planar-ebene Multigraphen und seien F und F^* die Menge der Facetten der jeweiligen Multigraphen. Sei zudem $\dot{e}$ das Innere einer Kante e . Wir nennen $G^* = (V^*, E^*)$ planar-ebener zweidimensional dualer Graph von G , wenn eine Bijektion

$$\begin{array}{lll} F \rightarrow V^* & E \rightarrow E^* & V \rightarrow F^* \\ f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v) \end{array}$$

mit den folgenden Bedingungen existiert:

1. $v^*(f) \in f$ für alle $f \in F$.
2. $|e^* \cap G| = |\dot{e}^* \cap \dot{e}| = |e \cap G^*| = 1$ für alle $e \in E$. Außerdem ist dieser Schnittpunkt in allen e und e^* Teil einer Strecke.
3. $v \in f^*(v)$ für alle $v \in V$.

Diese etwas sperrige Definition hat die folgende intuitive Anschauung: Das duale Objekt zu einem planar-ebenen Multigraphen ist wieder ein planar-ebener Multigraph. Jeder Knoten in G wird mit einer Facette in G^* , jede Kante in G mit einer Kante in G^* , und jede Facette in G mit einem Knoten in G^* assoziiert. Zudem müssen die jeweils mit den Facetten assoziierten Knoten in den Facetten liegen. Zwei assoziierte Kanten müssen sich in genau einem Punkt schneiden. Dieser Schnitt muss zudem ein echter Schnitt sein, eine bloße Berührung ist ausgeschlossen.

Ähnlich zu den Facetten wollen wir für den Begriff der Dualität ebenfalls eine abstrakte Version definieren. Dazu führen wir die nächsten Begriffe nach [Die17, S. 1, 24] ein:

Definition A.36. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. Seien $V_1, V_2 \subset V$. Die Menge $\{V_1, V_2\}$ heißt Partition von V , wenn $V_1 \cup V_2 = V$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
2. Sei $\{V_1, V_2\}$ eine Partition von V . Wir bezeichnen $E(V_1, V_2)$ als die Menge aller Kanten mit einem Knoten in V_1 und dem anderen in V_2 .
3. Eine Menge $E' \subset E$ heißt Schnitt von G , wenn eine Partition $\{V_1, V_2\}$ von V existiert, mit $E' = E(V_1, V_2)$.
4. Ein minimaler nichtleerer Schnitt eines Graphen G heißt Verbindung von G .

Mit dem Begriff der Verbindung können wir den folgenden Satz nach [Die17, Satz 4.6.1, S. 111] formulieren:

Satz A.37. Sei G ein zusammenhängender planar-ebener Multigraph und G^* der planar-ebene zweidimensionale duale Multigraph zu G . Die Teilmenge $E' \subset E$ ist genau dann die Kantenmenge eines Kreises von G , wenn $E'^* := \{e^* | e \in E'\}$ eine Verbindung von G^* ist.

Mit diesem Satz ist es möglich, den Begriff der planar-ebenen zweidimensionalen Dualität wie folgt nach [Die17, S. 112] zu abstrahieren:

Definition A.38. Wir nennen einen Multigraphen $G^* = (V^*, E^*)$ den zweidimensionalen abstrakt dualen Graphen eines Multigraphen $G = (V, E)$, wenn $E = E^*$ und die Verbindungen in G^* exakt die Kantenmengen der Kreise von G sind. Im Folgenden nennen wir den zweidimensionalen abstrakt dualen Graphen von G nur noch dualer Graph von G .

Die Notation $E = E^*$ ist hier irreführend, wenn man an die Kanten eines Graphen denkt. Nach Diestel ist die Menge der Kanten eines Multigraphen zunächst nur eine Menge, der mit der entsprechenden Abbildung die beiden Endknoten zugewiesen wird. Gemeint mit dieser Definition ist, dass die Menge E zwar gleich der Menge E^* ist, diesen Kanten aber andere Knoten zugewiesen werden können.

Abstrakt dual bedeutet damit: Finde für die Kanten eines Multigraphen G zunächst eine neue Menge an Knoten V^* . Weise den Kanten $E^* = E$ Knotenpaare aus $V^* \cup [V^*]^2$ zu. Sind dann die Verbindungen von $G^* = (V^*, E^*)$ die Kreise von G , mit jeweils assoziierten oder in der Notation von Diestel gleichen Kanten, so ist G^* der abstrakt duale Graph von G .

Ähnlich wie für die Planarität und die Facetten ist es also für die Dualität ebenfalls möglich, von der konkreten Einbettung in $\mathbb{R}^2$ zu abstrahieren.

Hier ist noch anzumerken, dass (einfache) Graphen nur spezielle Multigraphen sind. Daher lässt sich das Konzept der Dualität auf diese übertragen.

Nach dieser Definition stellen sich mehrere Fragen im Bezug auf die Dualität: Zunächst muss geklärt werden, für welche Graphen ein dualer Graph existiert. Wenn dieser duale Graph existiert, müssen wir betrachten, wann dieser eindeutig ist und, in einem letzten Schritt, wann er einfach ist. Wir beginnen mit der Existenz und betrachten das nächste Theorem aus [Whi32, Thm. 29, S. 357], welches unter Whitneys Planaritätskriterium bekannt ist. Wir verwenden hier die Version aus [Die17, Thm. 4.6.3, S. 113]:

Theorem A.39 (Whitneys Planaritätskriterium). *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er einen abstrakt dualen Graphen besitzt.*

Damit ist die Frage der Existenz geklärt. Für die Eindeutigkeit fügen wir der Planarität die Eigenschaft des 3-Zusammenhangs hinzu. Da mit Theorem A.24 alle planaren Einbettungen eines planaren 3-zusammenhängenden Graphen äquivalent sind, folgt direkt und nach [BM08, Kor. 10.29, S. 267]:

Korollar A.40. *Jeder (einfache) 3-zusammenhängende planare Graph hat einen eindeutigen dualen (Multi)Graphen.*

In der Formulierung von [BM08] ist von Graphen die Rede. Um sicherzugehen, dass hier dieselbe Definition von Graph gemeint ist, wie in dieser Arbeit, betrachten wir den folgenden Satz nach [Bal97, Satz 8.64, S. 229] (in unsere Notation umformuliert):

Satz A.41. *Der planar-ebene duale Graph eines planar-ebenen 3-kantenzusammenhängenden Graphen ist einfach.*

Da alle 3-zusammenhängenden Graphen mit Satz A.14 auch 3-kantenzusammenhängend sind, gilt:

Korollar A.42. *Der planar-ebene duale Graph eines planar-ebenen 3-zusammenhängenden Graphen ist einfach.*

Kombinieren wir diese Aussagen, so erhalten wir:

Theorem A.43. *Der duale Graph eines (einfachen) 3-zusammenhängenden planaren Graphen existiert, ist eindeutig und wieder einfach.*

Damit wurden alle benötigten Grundlagen der Graphentheorie beschrieben. Im nächsten Abschnitt beschreiben wir die für diese Arbeit benötigten Grundlagen für Matrizen.

B Matrizen

In diesem Abschnitt fassen wir die für diese Arbeit benötigten Grundlagen im Bezug auf Matrizen auf möglichst kurze Weise zusammen. Wir benötigen zwar fast ausschließlich reelle Matrizen, die Definitionen und Aussagen in diesem Abschnitt richten sich allerdings nach der Literatur und daher formulieren wir einige Begriffe und Aussagen für reelle und andere für komplexe Matrizen.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Definitionen und Aussagen. Anschließend erarbeiten wir die Grundlagen im Bezug auf Eigenwerte, Eigenvektoren und das Matrixexponential. Abschließend berechnen wir einige konkrete für uns relevante Exponentiale. Wir beginnen mit dem Begriff der quadratischen Matrix:

Definition B.1. Eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt quadratische Matrix. Die Einträge $M_{(i,i)}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ heißen Diagonaleinträge, alle anderen Einträge heißen Nebendiagonaleinträge.

Wir betonen im Folgenden nicht, dass eine Matrix quadratisch ist. Dies kann aus der Schreibweise $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beziehungsweise $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ direkt abgeleitet werden. An diese Definition schließt sich der Begriff der Einheitsmatrix an:

Definition B.2. Die Matrix $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit

$$E_{(i,j)} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

bezeichnen wir als Einheitsmatrix. Wollen wir die Anzahl der Zeilen beziehungsweise Spalten der Matrix hervorheben, so schreiben wir E_n . Wir definieren zudem 0_n als die $n \times n$ Matrix, deren Einträge alle gleich 0 sind, und bezeichnen diese als Nullmatrix.

Wir schließen noch den Begriff der Diagonalmatrix an:

Definition B.3. Eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, deren Nebendiagonaleinträge alle gleich 0 sind, heißt Diagonalmatrix.

Wir betrachten zudem in der nächsten Definition den Begriff der nicht-negativen Matrix:

Definition B.4. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt nicht-negativ, wenn alle Matrixeinträge größer gleich 0 sind.

Matrizen können eine inverse Matrix haben. Diese beschreiben wir nach [LM15, S. 45]:

Definition B.5. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Existiert eine Matrix M^{-1} mit

$$MM^{-1} = M^{-1}M = E,$$

dann ist M eine invertierbare Matrix und M^{-1} ist die Inverse von M .

Die Menge der invertierbaren Matrizen bildet eine Gruppe, wie wir im nächsten Theorem nach [LM15, Thm. 4.11, S. 46] sehen:

Theorem/Definition B.6. Die Menge aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Diese ist die allgemeine lineare Gruppe und wird mit $GL_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

Wir beschreiben im nächsten Schritt die Transponierte einer Matrix nach [LM15, S. 42]:

Definition B.7. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ eine Matrix oder ein Vektor. Dann ist

$$M^T \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad \text{mit} \quad M_{(i,j)}^T := M_{(j,i)} \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad \text{und} \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

die transponierte Matrix zu M .

Insbesondere ist M' nicht die Transponierte zu M . Bezüglich zweier Matrizen definiert sich das Kroneckerprodukt dieser nach [HJ91, Def. 4.2.1, S. 243] wie folgt:

Definition B.8. Seien $M^{(1)} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $M^{(2)} \in \mathbb{C}^{i \times j}$ zwei Matrizen. Dann ist das Kroneckerprodukt von $M^{(1)}$ und $M^{(2)}$ als

$$\text{kron} \left(M^{(1)}, M^{(2)} \right) := \begin{bmatrix} M_{(1,1)}^{(1)} M^{(2)} & \dots & M_{(1,n)}^{(1)} M^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{(m,1)}^{(1)} M^{(2)} & \dots & M_{(m,n)}^{(1)} M^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m \cdot i) \times (n \cdot j)}$$

definiert.

Für das Kroneckerprodukt gilt nach [HJ91, Lem. 4.2.10, S. 244]:

Lemma B.9. Seien $M_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $M_2 \in \mathbb{C}^{i \times j}$, $M_3 \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $M_4 \in \mathbb{C}^{j \times l}$. Dann ist

$$\text{kron} (M_1, M_2) \cdot \text{kron} (M_3, M_4) = \text{kron} (M_1 \cdot M_3, M_2 \cdot M_4).$$

Außerdem gilt nach [HJ91, Kor. 4.2.11, S. 244 f.):

Lemma B.10. Sind $M_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $M_2 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ invertierbare Matrizen, so ist $\text{kron} (M_1, M_2)$ invertierbar und es gilt

$$(\text{kron} (M_1, M_2))^{-1} = \text{kron} (M_1^{-1}, M_2^{-1}).$$

Im Folgenden betrachten wir einige Aussagen im Bezug auf den Begriff der Basis eines Vektorraums. Wir beginnen mit der folgenden Definition nach [FS20, Def. in Abschn. 2.5.1, S. 105 und Def. in Abschn. 6.5.4, S. 340 f.):

Definition B.11. Eine Familie $\mathbf{M} = \{a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m\}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \geq n$ heißt Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$, wenn

$$\mathbb{R}^n = \text{span}(a_i)_{i \in \{1, \dots, m\}},$$

das heißt, wenn jedes $a \in \mathbb{R}^n$ Linearkombination von endlich vielen a_i ist. Die Familie $\mathbf{M}$ heißt Basis des $\mathbb{R}^n$, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist. Eine Basis $\mathbf{M}$ heißt Orthonormalbasis, falls alle Vektoren in $\mathbf{M}$ die Länge 1 haben und orthogonal zueinander sind.

Für die Konstruktion einer Basis gilt der folgende Satz nach [FS20, Abschn. 2.5.5, S. 110]:

Satz B.12 (Basisergänzungssatz). Im $\mathbb{R}^n$ seien die linear unabhängigen Vektoren $a_1, \dots, a_m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ gegeben. Dann kann man Vektoren $b_{m+1}, \dots, b_n$ in $\mathbb{R}^n$ finden, sodass

$$\mathbf{M} = \{a_1, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Zur konkreten Konstruktion einer Orthonormalbasis lässt sich der folgende Satz nach [KB17, Konstr. S. 120–122 und Thm. 1.112, S. 122] nutzen. Das Verfahren ist als Schmidtsche Orthonormalisierung bekannt:

Satz B.13 (Schmidtsche Orthonormalisierung). Sei $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis der $\mathbb{R}^n$. Sei

$$b'_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_j, a_i \rangle b_j$$

und

$$b_i = \frac{b'_i}{|b'_i|}.$$

Dann ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Sind $a_1, \dots, a_m$ mit $m \leq n$ bereits orthonormal zueinander, so gilt

$$b_i = a_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Beweis. Wir zeigen hier nur die Reproduktion der orthonormalen Vektoren per Induktion:

Induktionsanfang:

$$b_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = a_1.$$

Induktionsannahme: Seien $b_i = a_i$ für $i \leq k < m$.

Induktionsschritt: Setzen wir die Formel für b'_{k+1} ein, so erhalten wir

$$b'_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle b_j, a_{k+1} \rangle b_j.$$

Da $b_j = a_j$ im obigen Ausdruck ist und $\langle a_j, a_{k+1} \rangle = 0$ durch die Orthogonalität der a_j gilt, erhalten wir

$$b'_{k+1} = a_{k+1} \quad \text{und damit} \quad b_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{|a_{k+1}|} = a_{k+1}.$$

□

Nach diesen allgemeinen Aussagen betrachten wir im nächsten Abschnitt Begriffe im Themenbereich der Eigenwerte und Eigenvektoren.

B.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Abschnitt erarbeiten wir die Grundlagen im Bezug auf Eigenwerte und Eigenvektoren. Dazu beschreiben wir zunächst die dazu notwendigen Begriffe. Anschließend betrachten wir Aussagen über Eigenwerte spezieller Matrizen, die wir im Laufe dieses Abschnitts einführen. Wir beginnen mit der Definition der Permutation nach [LM15, Def. 7.1, S. 81]:

Definition B.14. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine bijektive Abbildung

$$h : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto h(i)$$

heißt Permutation der Zahlen $\{1, \dots, n\}$. Die Menge aller Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit H_n .

Für Permutationen lassen sich Matrizen generieren, die diese Permutationen ausdrücken, und welche wir nach [LM15, Def. 4.15, S. 49] wie folgt beschreiben:

Definition B.15. Eine Matrix $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt Permutationsmatrix, wenn für jede Zeile und jede Spalte von H exakt ein Eintrag 1 und alle anderen Einträge 0 sind.

Für eine Permutationsmatrix erhalten wir das folgende Theorem nach [LM15, Thm. 4.16, S. 50]:

Theorem B.16. Die Menge aller $n \times n$ Permutationsmatrizen bilden eine Untergruppe des $GL_n(\mathbb{C})$. Insbesondere gilt: Ist $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Permutationsmatrix, dann ist H invertierbar mit $H^{-1} = H^T$.

Wir wollen Permutationen nutzen, um den Begriff der Determinante einzuführen. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des Vorzeichens einer Permutation nach [LM15, Def. 7.2, S. 82]:

Definition B.17. Sei $n \geq 2$ und $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_n$ eine Permutation. Ein Paar $(\mathbf{h}(i), \mathbf{h}(j))$ mit $1 \leq i < j \leq n$ und mit $\mathbf{h}(i) > \mathbf{h}(j)$ heißt Inversion von $\mathbf{h}$. Sei k die Anzahl aller Inversionen von $\mathbf{h}$. Dann nennen wir

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{h}) := (-1)^k$$

das Vorzeichen der Permutation $\mathbf{h}$.

Mithilfe dieses Vorzeichenbegriffs definieren wir die Determinante einer Matrix nach [LM15, Def. 7.4, S. 82]:

Definition B.18. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Den Wert der Abbildung

$$\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}, \quad M \mapsto \det(M) := \sum_{\mathbf{h} \in \mathbf{H}_n} \left(\operatorname{sgn}(\mathbf{h}) \prod_{i=1}^n M_{(i, \mathbf{h}(i))} \right)$$

bezeichnen wir als die Determinante der Matrix M .

Mit der Determinante können wir das charakteristische Polynom nach [LM15, Def. 8.1, S. 102] wie folgt definieren:

Definition B.19. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix und $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\det(M - \lambda_i E)$$

das charakteristische Polynom der Matrix M .

Damit haben wir alle Begriffe für die Charakterisierung der Eigenwerte definiert. Diese beschreiben wir nach [LM15, Def. 8.7, S. 106] in der folgenden Definition:

Definition B.20. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Ist $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}^n \setminus \vec{0}$, sodass

$$Ma = \lambda_i a,$$

dann nennen wir λ_i einen Eigenwert und a einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_i der Matrix M .

Die Eigenwerte einer Matrix lassen sich nach [LM15, Thm. 8.8, S. 107] wie folgt charakterisieren:

Charakterisierung B.21. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Der Wert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert von M , wenn λ_i eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, wenn also

$$\det(M - \lambda_i E) = 0$$

gilt.

Den Eigenwerten einer Matrix lassen sich die beiden Begriffe der algebraischen und geometrischen Vielfachheit zuordnen, die wir im Folgenden beschreiben. Die algebraische Vielfachheit erfolgt dabei nach [Bär18, Def. 6.62, S. 298]:

Definition B.22. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix und $\det(M - \lambda_i E)$ das charakteristische Polynom von M . Mit $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ und $m_0, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ lässt sich das charakteristische Polynom als

$$\det(M - \lambda_i E) = \prod_{j=0}^k (\lambda_i - \lambda_j)^{m_j}$$

ausdrücken. Wir nennen

$$\operatorname{alg}(\lambda_j) = m_j$$

die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_j .

Für die geometrische Vielfachheit benötigen wir zunächst den Begriff des Kerns nach [Ser10, S. 23]:

Definition B.23. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Wir nennen

$$\ker(M) := \{a \in \mathbb{C}^n : Ma = \vec{0}\}$$

den Kern der Matrix M .

Mit diesem Begriff definieren wir die geometrische Vielfachheit nach [Mey00, S. 510]:

Definition B.24. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix und λ_i ein Eigenwert von M . Wir nennen

$$\text{geo}(\lambda_i) := \dim(\ker(M - \lambda_i E))$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_i .

An den Begriff des Eigenwerts schließen sich die beiden folgenden Begriffe an. Der erste erfolgt nach [Ser10, S. 43]:

Definition B.25. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Das Spektrum von M ist die Menge seiner Eigenwerte und wird mit $\text{sp}(M)$ bezeichnet.

Den zweiten Begriff definieren wir nach [Ser10, Def. 7.1, S. 127]:

Definition B.26. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Der Spektralradius von M ist

$$\rho(M) := \max \{|\lambda_i| : \lambda_i \in \text{sp}(M)\},$$

also der größte Betrag der Eigenwerte.

Mit den Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix ist es möglich, die Jordanzerlegung einer Matrix zu beschreiben. Diesem Begriff nähern wir uns an und beginnen mit der Definition der Ähnlichkeit nach [LM15, Def. 8.11, S. 108]:

Definition B.27. Seien $M, M' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zwei Matrizen. Die Matrizen M und M' heißen ähnlich, falls eine Matrix $V \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert, sodass

$$M = VM'V^{-1}.$$

Für die Jordanzerlegung beschreiben wir zunächst die Jordanblöcke nach [Bos21, S. 300]:

Definition B.28. Sei $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Eine Matrix $J(\lambda_i, n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit

$$J(\lambda_i, n) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

heißt Jordanblock.

Aus diesen Jordanblöcken lässt sich eine Jordanmatrix nach [Bos21, Thm. 15, S. 303] wie folgt definieren:

Theorem/Definition B.29. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann existiert eine zu M ähnliche Matrix

$$J := \begin{bmatrix} J(\lambda_0, n_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_k, n_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

es gilt also

$$M = VJV^{-1} \Leftrightarrow J = V^{-1}MV$$

mit $V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Die Matrix J heißt Jordanmatrix der Matrix M . Die Blockmatrizen $J(\lambda_0, n_0), \dots, J(\lambda_k, n_k)$ heißen Jordankästchen. Die Elemente (λ_i, n_i) sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt, wobei λ_i (unter eventueller Mehrfachzählung) gerade die Eigenwerte der Matrix M sind.

Diagonalmatrizen können damit spezielle Jordanmatrizen sein. Für diesen Spezialfall definieren wir den nächsten Begriff nach [Bos21, S. 249]:

Definition B.30. Eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Damit erhalten wir direkt, dass eine Matrix diagonalisierbar ist, wenn ihre Jordanform eine Diagonalmatrix ist.

Im Folgenden betrachten wir Aussagen zu den Eigenwerten und Eigenvektoren spezieller Matrizen. Wir beginnen mit den Eigenwerten zweier ähnlicher Matrizen nach [HJ12, Kor. 1.3.4, S. 58]:

Korollar B.31. Zwei ähnliche Matrizen $M_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $M_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ haben dieselben Eigenwerte.

Im Bezug auf die Eigenwerte und Eigenvektoren des Kroneckerprodukts zweier Matrizen erhalten wir nach [HJ91, Thm. 4.2.12, S. 245]:

Theorem B.32. Sei $M^{(1)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $M^{(2)} \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Seien zudem die Eigenwerte von M_1 definiert als $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}$ und die Eigenwerte von M_2 definiert als $\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}$. Dann sind die Eigenwerte von $\text{kron}(M^{(1)}, M^{(2)})$ gerade

$$\left\{ \lambda_j^{(1)} \cdot \lambda_k^{(2)} \mid j = 1, \dots, n \text{ und } k = 1, \dots, m \right\}.$$

Ist $V_{(:,j)}^{(1)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j^{(1)}$ und $V_{(:,k)}^{(2)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_k^{(2)}$, dann ist $\text{kron}(V_{(:,j)}^{(1)}, V_{(:,k)}^{(2)})$ ein Eigenvektor von $\text{kron}(M^{(1)}, M^{(2)})$ zum Eigenwert $\lambda_j^{(1)} \cdot \lambda_k^{(2)}$.

Im nächsten Schritt wollen wir eine Aussage über die Eigenwerte von Blockmatrizen treffen. Dazu führen wir zunächst den folgenden Satz über die Determinante von Blockmatrizen nach [HK71, For. 5–19, S. 157] ein:

Satz B.33. Sei $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $M_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \det(M_1) \det(M_3).$$

Damit folgt direkt, wie auch in [Ser10, S. 59] und [HJ12, Üb. S. 52] bemerkt:

Satz B.34. Sei $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $M_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann sind die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte von M_1 und M_3 mit entsprechenden Vielfachheiten.

Das nächste Theorem ist bekannt als das Perron-Frobenius-Theorem und geht auf die Arbeit von Perron und Frobenius zurück. Perron betrachtete den Fall der positive Matrizen in [Per07] (vgl. [Per07, Satz S. 261]). Frobenius betrachtete den Fall der positive Matrizen in [Fro08] und [Fro09] und den Fall der nicht-negativen Matrizen in [Fro12]. Wir verwenden hier die Formulierung von [Mey00] und betrachten nur den Teil des Theorems, den wir für diese Arbeit benötigen. Dazu führen wir zunächst den Begriff der irreduziblen Matrix nach [Mey00, S. 671] ein:

Definition B.35. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Die Matrix M heißt reduzibel, wenn eine Permutationsmatrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, sodass

$$H^T M H = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

ist, wobei M_1 und M_3 quadratische Matrizen sind. Andernfalls heißt M irreduzibel.

Für den Begriff der irreduziblen Matrix lässt sich folgende Charakterisierung nach [Mey00, S. 209, 671, Solutions S. 36 f.] herleiten:

Charakterisierung B.36. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Die Matrix M ist genau dann irreduzibel, wenn der gerichtete Graph zur Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A_{(i,j)} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } M_{(i,j)} \neq 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

streng zusammenhängend ist.

Mit diesen Voraussetzungen können wir den für uns relevanten Teil des Satzes von Perron-Frobenius für nicht-negative Matrizen nach [Mey00, S. 673] formulieren:

Theorem B.37 (Perron-Frobenius-Theorem). Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine nicht-negative irreduzible Matrix. Dann ist der Spektralradius $\rho(M)$ ein Eigenwert von M mit algebraischer Vielfachheit 1.

Ein weiteres zentrales Theorem für die Eigenwerte einer Matrix ist das Gerschgorin-Kreis-Theorem, welches wir nach [Ger31, Satz 2, S. 751] im Folgenden beschreiben:

Theorem B.38 (Gerschgorin-Kreis-Theorem). Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Wir definieren

$$\mathbf{M}_i := \left\{ a \in \mathbb{C} : |a - M_{(i,i)}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |M_{(i,j)}| \right\} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Mengen $\mathbf{M}_i$ sind damit Kreise in der Menge der komplexen Zahlen mit Mittelpunkt $M_{(i,i)}$ und Radius $\sum_{j=1, j \neq i}^n |M_{(i,j)}|$. Alle Eigenwerte der Matrix M liegen in

$$\bigcup_{i=1}^n \mathbf{M}_i.$$

Dieses Theorem nutzen wir, um die Eigenwerte von stochastischen Matrizen zu beschreiben, die wir nach [Ser10, Def. 8.3, S. 156] wie folgt definieren:

Definition B.39. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Die Matrix M heißt stochastisch, falls M nicht-negativ ist und zusätzlich

$$\sum_{j=1}^n M_{(i,j)} = 1$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Mit dem Gerschgorin-Kreis-Theorem B.38 folgt direkt nach [FHW79, Hs. 2.6, S. 15 f.]:

Theorem B.40. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stochastische Matrix. Dann gilt:

1. Ist λ_i ein Eigenwert von M , so gilt $|\lambda_i| \leq 1$.
2. Ist $\min_i M_{(i,i)} > 0$, so ist 1 der einzige Eigenwert von M vom Betrag 1.

Aus Theorem B.40 und dem Perron-Frobenius-Theorem B.37 ergibt sich direkt folgendes Korollar:

Korollar B.41. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stochastische irreduzible Matrix mit Eigenwerten

$$\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad |\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|.$$

Ist $\min_i M_{(i,i)} > 0$, so ist 1 ein Eigenwert von M mit algebraischer Vielfachheit 1 und es gilt

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_i| \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Im nächsten Schritt betrachten wir die Eigenwerte symmetrischer und hermitescher Matrizen, die wir in der nächsten Definition einführen:

Definition B.42. Wir nennen eine Matrix

- $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, wenn $M = M^T$ (nach [Ser10, Def. 5.2, S. 84]).
- $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, wenn M gleich ihrer komplex konjugierten transponierten Matrix ist (nach [Ser10, Satz 5.1, S. 84]).
- $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ orthogonal, wenn $M^T M = M M^T = E$, beziehungsweise $M^T = M^{-1}$ ist (nach [Ser10, S. 23]).

Damit ergibt sich direkt das folgende Lemma nach [Ser10, S. 84]:

Lemma B.43. Jede symmetrische Matrix ist hermitesch.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns fast ausschließlich mit reellen Matrizen. Allerdings sind viele Theoreme in der Literatur für hermitesche Matrizen formuliert, weshalb wir diese Formulierungen übernehmen. Da alle symmetrischen Matrizen auch hermitesch sind, lassen sich die Aussagen direkt auf symmetrische Matrizen übertragen.

Im Folgenden formulieren wir einige Theoreme für hermitesche Matrizen und beginnen mit dem folgenden Satz nach [Ser10, Satz 5.4, S. 87]:

Satz B.44. Die Eigenwerte hermitescher und symmetrischer Matrizen sind reell.

Außerdem erhalten wir die folgende Aussage nach [Ser10, Kor. 5.3, S. 93]:

Satz B.45. Symmetrische Matrizen sind durch orthogonale Matrizen diagonalisierbar über $\mathbb{R}$. Sei also $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, dann existiert eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass BMB^{-1} diagonal ist.

Wir schließen hier das Konzept der Definitheit nach [HJ12, S. 429] an:

Definition B.46. Eine hermitesche Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist positiv definit, wenn

$$\text{kon}(a)^T M a > 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Für positiv definite Matrizen erhalten wir die folgende Charakterisierung nach [HJ12, Thm. 7.2.1, S. 438] und [HJ12, Thm. 4.1.8, S. 230]:

Charakterisierung B.47. Eine hermitesche Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

Abschließend können wir damit das für diese Arbeit wichtige Theorem nach [Ser10, Satz 6.1, S. 109] formulieren:

Theorem B.48. Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche positiv definite Matrix und $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix. Das Produkt BM und das Produkt MB ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte von BM ist gleich der Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte von M .

Wir betrachten abschließend die Eigenwerte von Dreiecksmatrizen, die wir in der nächsten Definition nach [HJ12, Abschn. 0.9.3, S. 31] einführen:

Definition B.49. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Ist

$$M_{(i,j)} = 0 \quad \text{für } i < j \quad \text{und } i, j \in \{1, \dots, n\},$$

dann nennen wir M untere Dreiecksmatrix. Ist

$$M_{(i,j)} = 0 \quad \text{für } i > j \quad \text{und } i, j \in \{1, \dots, n\},$$

dann nennen wir M obere Dreiecksmatrix.

Für diese können wir das folgende Lemma nach [Lan86, Aufg. VIII, §2, 2, S. 249 und Lsg. VIII, §2, 2, S. 284] formulieren:

Lemma B.50. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix. Dann sind die Eigenwerte von M seine Diagonaleinträge.

Damit haben wir die im Kontext der Eigenwerte benötigten Begriffe und Aussagen beschrieben und betrachten im nächsten Abschnitt das Matrixexponential.

B.2 Matrixexponential

In diesem Abschnitt betrachten wir das Matrixexponential und die damit zusammenhängenden Aussagen, die für diese Arbeit benötigt werden. Wir beginnen mit der Definition nach [Hal15, Abschn. 2.1, S. 31]:

Definition B.51. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Das Matrixexponential $\exp(M) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ von M ist definiert als

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!} = E + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots.$$

Für die Wohldefiniertheit des Begriffs verwenden wir den folgenden Satz nach [Hal15, Satz 2.1, S. 31]:

Satz B.52. Die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$$

konvergiert für alle $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Für das Matrixexponential können wir verschiedene Aussagen definieren. Wir beginnen mit dem folgenden Satz nach [Hal15, Satz 2.3, S. 32]:

Satz B.53. Seien $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $M' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zwei Matrizen und sei $0_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrix, die nur aus Nulleinträgen besteht. Dann gilt:

1. Für das Exponential der Nullmatrix erhalten wir

$$\exp(0_n) = E_n.$$

2. Die Matrix $\exp(M)$ ist invertierbar und es gilt

$$(\exp(M))^{-1} = \exp(-M).$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\exp((a+b)M) = \exp(aM) \exp(bM).$$

4. Ist $MM' = M'M$, dann gilt

$$\exp(M + M') = \exp(M) \exp(M') = \exp(M') \exp(M).$$

5. Ist V in $GL_n(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\exp(VMV^{-1}) = V \exp(M) V^{-1}.$$

Die nächste Aussage betrachtet das Matrixexponential von Diagonalmatrizen und lautet nach [Hal15, Abschn. 2.2, S. 34] wie folgt:

Satz B.54. Sei $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Dann gilt

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} \exp(D_{(1,1)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(D_{(n,n)}) \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir erhalten zunächst

$$\exp(D) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{D_{(1,1)}^i}{i!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{D_{(n,n)}^i}{i!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_{(1,1)}^i}{i!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_{(n,n)}^i}{i!} \end{bmatrix}.$$

Da jeder Diagonaleintrag eine Exponentialreihe ist, ergibt sich

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} \exp(D_{(1,1)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(D_{(n,n)}) \end{bmatrix}.$$

□

In einem nächsten Schritt wollen wir den Logarithmus einer Matrix definieren. Dieser spielt in dieser Arbeit nur eine untergeordnete Rolle und wird hier nur oberflächlich betrachtet. Wir beginnen mit der Definition nach [Hal15, Def. 2.7, S. 37]:

Definition B.55. : Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Wir definieren den Logarithmus einer Matrix als

$$\ln(M) := \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(M - E)^i}{i},$$

sofern die angegebene Reihe konvergiert.

Ein Kriterium für die Konvergenz ist in [Hig08, Thm. 1.31, S. 20] zu finden:

Theorem B.56. Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, die keine Eigenwerte in $\mathbb{R}_{<0}$ besitzt. Dann existiert ein eindeutiger Logarithmus $\ln(M)$ von M , für den alle Eigenwerte im Bereich $\{a \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{im}(a) < \pi\}$ liegen. Ist M eine reelle Matrix, dann ist der Logarithmus von M mit Eigenwerten im angegebenen Bereich reell.

Nach diesen Grundlagen können wir Aussagen über das Matrixexponential spezieller Matrizen formulieren. Wir beginnen mit Dreiecksmatrizen nach [HJ12, S. 31]:

Lemma B.57. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix. Dann ist M^k mit $k \in \mathbb{N}$ wieder eine obere beziehungsweise untere Dreiecksmatrix. Außerdem ist

$$(M^k)_{(i,i)} = (M_{(i,i)})^k$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wir erhalten daraus direkt das folgende Lemma:

Lemma B.58. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix. Dann ist

$$\exp(M)$$

wieder eine obere beziehungsweise untere Dreiecksmatrix. Außerdem gilt für die Diagonaleinträge

$$(\exp(M))_{(i,i)} = \exp(M_{(i,i)})$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Das Matrixexponential ist eine Reihe von Matrixpotenzen. Jede Matrixpotenz einer Dreiecksmatrix ist mit Lemma B.57 wieder eine Dreiecksmatrix und die Summe von Dreiecksmatrizen ist wieder eine Dreiecksmatrix. Damit ist $\exp(M)$ wieder eine Dreiecksmatrix.

Für die Diagonaleinträge gilt

$$(\exp(M))_{(i,i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(M^j)_{(i,i)}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(M_{(i,i)})^j}{j} = \exp(M_{(i,i)}).$$

□

Dieses Lemma können wir nutzen, um die folgende Aussage über die Eigenwerte des Matrixexponentials von Dreiecksmatrizen zu formulieren:

Lemma B.59. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von M . Dann sind die Eigenwerte von $\exp(M)$ gerade

$$\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n).$$

Beweis. Mit Lemma B.50 sind die Eigenwerte einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix deren Diagonaleinträge. Mit Lemma B.58 ist das Exponential einer Dreiecksmatrix wieder eine Dreiecksmatrix und deren Diagonaleinträge, die gleichzeitig deren Eigenwerte sind, ergibt sich

$$\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n).$$

□

Für die Eigenvektoren des Exponentials von Dreiecksmatrizen erhalten wir:

Lemma B.60. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix und sei λ_i ein Eigenwert zum Eigenvektor $V_{(:,i)}$. Dann ist $V_{(:,i)}$ ein Eigenvektor von $\exp(M)$ zum Eigenwert $\exp(\lambda_i)$.

Beweis. Mit der Definition des Matrixexponentials B.51 erhalten wir

$$\exp(M)V_{(:,i)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \right) V_{(:,i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^j}{j!} V_{(:,i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^j}{j!} V_{(:,i)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^j}{j!} \right) V_{(:,i)} = \exp(\lambda_i) V_{(:,i)}.$$

□

Das nächste Theorem bezieht sich auf Matrizen mit einer für Nulleinträge speziellen Struktur. Dieses Theorem lehnt sich an das der Potenzen der Adjazenzmatrix an, welches unter anderem in [Die17, Aufg. 49, S. 33] zu finden ist:

Theorem B.61. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit gerichteten Kanten und möglichen Schleifen und sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $|V| = n$ die Anzahl der Knoten. Sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine nicht-negative Matrix mit

$$M_{(i,j)} = \begin{cases} > 0 & (v_i, v_j) \in E \\ = 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases},$$

dann gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$(M^k)_{(i,j)} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt in } G \text{ einen Kantenzug der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_j.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass sprachlich ein Knoten auch zu sich selbst benachbart sein kann, wenn es eine Schleife an dem entsprechenden Knoten gibt. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion:

Induktionsanfang: Für $k = 1$ ist ein Eintrag von M genau dann ungleich 0, wenn es eine Kante zwischen den entsprechenden Knoten gibt. Da eine Kante ein Kantenzug der Länge 1 ist, gilt die Aussage.

Induktionsannahme:

$$(M^k)_{(i,j)} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt in } G \text{ einen Kantenzug der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_j.$$

Induktionsschritt: Wir beweisen die Äquivalenz, indem wir die beiden Implikationen beweisen:

„ $\Rightarrow$ “: Wir nehmen an, dass $(M^{k+1})_{(i,j)} \neq 0$ ist. Für diesen Eintrag erhalten wir

$$(M^{k+1})_{(i,j)} = (M^k)_{(i,:)} M_{(:,j)} = \sum_{l=1}^n (M^k)_{(i,l)} M_{(l,j)}.$$

Da alle Einträge von M nicht-negativ sind, sind folglich auch alle Einträge von M^k nicht-negativ. Die obige Summe besteht also ausschließlich aus nicht-negativen Summanden. Ist also $(M^{k+1})_{(i,j)} \neq 0$, so gibt es mindestens einen Summanden $(M^k)_{(i,m)} M_{(m,j)}$ mit zwei positiven Faktoren. Mit der Induktionsannahme erhalten wir damit

$$(M^k)_{(i,m)} \neq 0 \Rightarrow \text{Es gibt in } \mathbf{G} \text{ einen Kantenzug der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_m.$$

und

$$M_{(m,j)} \neq 0 \Rightarrow \text{Es gibt in } \mathbf{G} \text{ einen Kantenzug der Länge } 1 \text{ von } v_m \text{ nach } v_j.$$

Damit existiert ein Kantenzug

$$\underbrace{v_i, \dots, v_m, v_j}_{k \text{ Knoten}}$$

der Länge $k + 1$ von v_i nach v_j .

„ $\Leftarrow$ “: Wir nehmen an, es gibt einen Kantenzug der Länge $k + 1$ von v_i nach v_j . Dann gibt es von v_i einen Kantenzug der Länge k zu einem Nachbarn v_m von v_j . Daraus folgt mit der Induktionsannahme

$$(M^k)_{(i,m)} \neq 0 \Leftarrow \text{Es gibt in } \mathbf{G} \text{ einen Kantenzug der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_m.$$

und

$$M_{(m,j)} \neq 0 \Leftarrow \text{Es gibt in } \mathbf{G} \text{ einen Kantenzug der Länge } 1 \text{ von } v_m \text{ nach } v_j.$$

Für $(M^{k+1})_{(i,j)}$ erhalten wir

$$(M^{k+1})_{(i,j)} = (M^k)_{(i,:)} M_{(:,j)} = \sum_{l=1}^n (M^k)_{(i,l)} M_{(l,j)}.$$

Da $(M^k)_{(i,m)} \cdot M_{(m,j)} \neq 0$ ein Summand der obigen Summe ist und durch die Nicht-Negativität von M und M^k die obige Summe keine negativen Summanden haben kann, ist $(M^{k+1})_{(i,j)} \neq 0$. $\square$

Daraus ergibt sich das folgende Korollar:

Korollar B.62. Sei $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ ein Graph mit gerichteten Kanten und möglichen Schleifen und sei $\mathbf{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $|\mathbf{V}| = n$ die Anzahl der Knoten. Sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine nicht-negative Matrix mit

$$M_{(i,j)} \begin{cases} > 0 & (v_i, v_j) \in \mathbf{E} \\ = 0 & (v_i, v_j) \notin \mathbf{E} \end{cases}$$

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$\exp(M)_{(i,j)} \begin{cases} > 0 & i=j \\ > 0 & i \neq j \text{ und es existiert ein Kantenzug zwischen } v_i \text{ und } v_j \\ = 0 & i \neq j \text{ und es existiert kein Kantenzug zwischen } v_i \text{ und } v_j \end{cases}.$$

Beweis. Mit Definition B.51 ist

$$\exp(M)_{(i,j)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k)_{(i,j)}}{k!}.$$

Da M nur aus nicht-negativen Einträgen besteht, bestehen alle Potenzen von M ebenfalls ausschließlich aus nicht-negativen Einträgen.

Da $M^0 = E_n$, ist für $i = j$ mindestens ein Summand der Reihe positiv und damit ist $\exp(M)_{(i,i)}$ positiv.

Existiert für $i \neq j$ kein Kantenzug zwischen zwei Knoten v_i und v_j , so existiert insbesondere kein Kantenzug der Länge k zwischen v_i und v_j . Damit sind mit Theorem B.61 alle Summanden der obigen Reihe gleich 0 und $\exp(M)_{(i,j)} = 0$.

Existiert hingegen für $i \neq j$ ein Kantenzug zwischen zwei Knoten v_i und v_j , so ist mit Theorem B.61 mindestens ein Summand der obigen Reihe positiv. Da keine Potenz von M negative Einträge hat, ist damit $\exp(M)_{(i,j)}$ positiv. $\square$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Aussage über das Matrixexponential für Matrizen, deren Nebendiagonaleinträge alle nicht-negativ sind. Das Lemma erfolgt nach [Ang14]¹:

Lemma B.63. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, deren Nebendiagonaleinträge alle nicht-negativ sind. Dann ist jeder Eintrag von $\exp(M)$ nicht-negativ.

Beweis. Sei a der kleinste Diagonaleintrag der Matrix M und sei $M' := M + aE_n$. Dann sind alle Einträge von M' alle ≥ 0 und $M = M' - aE_n$. Da die Matrizen M' und aE_n kommutieren, erhalten wir mit Satz B.53

$$\exp(M) = \exp(M' - aE_n) = \exp(M') \exp(-aE_n) = \exp(M') \exp(-a).$$

Da die Definition des Matrixexponential eine Reihe aus Potenzen der entsprechenden Matrix ist, ist das Matrixexponential einer nicht-negativen Matrix wieder nicht-negativ. Damit ist $\exp(M')$ eine nicht-negative Matrix, die mit einer positiven Zahl $\exp(-a)$ multipliziert wird. Somit ist das Produkt und damit $\exp(M)$ nicht-negativ. $\square$

Damit haben wir alle benötigten Aussagen zum Matrixexponential beschrieben. Im nächsten Abschnitt betrachten wir konkrete Matrixexponentiale, die wir für diese Arbeit benötigen.

B.3 Konkrete Matrixexponentiale

Für einige Aussagen in den Kapiteln 5 und 6 benötigen wir die Exponentiale konkreter Matrizen, die wir im folgenden berechnen. Wir beginnen mit der Folgenden Blockmatrix:

Lemma B.64. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{N}_0$ und sei

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\overline{M}^i = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} M^i & 0 \\ 0 & M^i \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma per Induktion.

Induktionsanfang:

$$\overline{M}^0 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^0 & 0 \\ 0 & M^0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{M}^1 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} M^1 & 0 \\ 0 & M^1 \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} M^i & 0 \\ 0 & M^i \end{bmatrix}.$$

¹Das Lemma und der zugehörige Beweis stammen aus einem Forenbeitrag der Website „math.stackexchange.com“. Ein entsprechendes Pendant in der Literatur war leider nicht zu finden und der Autor selbst kannte auch keine entsprechende Referenz. Vermutlich ist das Lemma zu speziell. Der Autor war auf Nachfrage damit einverstanden, dass die Quelle wie angegeben zitiert werden kann.

Induktionsschritt:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^i & 0 \\ 0 & M^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{i+1} & 0 \\ 0 & M^{i+1} \end{bmatrix}$$

□

Hieraus ergibt sich direkt das folgende Korollar:

Korollar B.65. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\exp(\overline{M}) = \begin{bmatrix} \exp(M) & 0 \\ 0 & \exp(M) \end{bmatrix}.$$

Beweis. Mit dem obigen Lemma gilt

$$\exp(\overline{M}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overline{M}^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} M^i & 0 \\ 0 & M^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} M^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} M^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(M) & 0 \\ 0 & \exp(M) \end{bmatrix}.$$

□

Dieselbe Aussage erhalten wir für Matrizen mit drei Blöcken:

Lemma B.66. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{N}_0$ und sei

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\overline{M}^i = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} M^i & 0 & 0 \\ 0 & M^i & 0 \\ 0 & 0 & M^i \end{bmatrix}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu Lemma B.64. □

Damit ergibt sich wieder direkt das folgende Korollar:

Korollar B.67. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\exp(\overline{M}) = \begin{bmatrix} \exp(M) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(M) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(M) \end{bmatrix}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu Korollar B.65. □

Für Matrizen mit zwei Blöcken auf der Nebendiagonalen ergibt sich ein differenzierteres Bild. Wir erhalten zunächst das folgende Lemma:

Lemma B.68. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{N}_0$ und sei

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\overline{M}^{2i} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i} = \begin{bmatrix} M^{2i} & 0 \\ 0 & M^{2i} \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma per Induktion.

Induktionsanfang:

$$\overline{M}^0 = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^0 & 0 \\ 0 & M^0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\overline{M}^{2i} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i} = \begin{bmatrix} M^{2i} & 0 \\ 0 & M^{2i} \end{bmatrix}.$$

Induktionsschritt:

$$\overline{M}^{2i+2} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i+2} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i} \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} M^{2i} & 0 \\ 0 & M^{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{2i+2} & 0 \\ 0 & M^{2i+2} \end{bmatrix}$$

□

Die anderen Potenzen erhalten wir durch das nächste Lemma:

Lemma B.69. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{N}_0$ und sei

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\overline{M}^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{2i+1} \\ M^{2i+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma per Induktion.

Induktionsanfang:

$$\overline{M}^{2 \cdot 0 + 1} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2 \cdot 0 + 1} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\overline{M}^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{2i-1} \\ M^{2i-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Induktionsschritt:

$$\overline{M}^{2i+3} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i+3} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{2i+1} \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & M^{2i+1} \\ M^{2i+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{2i+3} \\ M^{2i+3} & 0 \end{bmatrix}$$

□

Aus den Lemmata B.68 und B.69 leiten wir das folgende Korollar her:

Korollar B.70. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\exp \left(\begin{bmatrix} 0 & a \cdot E_n \\ a \cdot E_n & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cosh(a)E_n & \sinh(a)E_n \\ \sinh(a)E_n & \cosh(a)E_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Mit der Definition des Matrixexponentials erhalten wir

$$\exp \left(\begin{bmatrix} 0 & a \cdot E_n \\ a \cdot E_n & 0 \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} 0 & a \cdot E_n \\ a \cdot E_n & 0 \end{bmatrix}^i.$$

Mit den Lemmata B.68 und B.69 ergibt sich

$$\exp \left(\begin{bmatrix} 0 & a \cdot E_n \\ a \cdot E_n & 0 \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(a \cdot E_n)^{2i}}{2i!} & \frac{(a \cdot E_n)^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ \frac{(a \cdot E_n)^{2i+1}}{(2i+1)!} & \frac{(a \cdot E_n)^{2i}}{2i!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i}}{(2i)!} E_n & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} E_n \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} E_n & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i}}{(2i)!} E_n \end{bmatrix}.$$

Mit

$$\sinh(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i}}{(2i)!}$$

ergibt sich

$$\exp \left(\begin{bmatrix} 0 & a \cdot E_n \\ a \cdot E_n & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cosh(a) E_n & \sinh(a) E_n \\ \sinh(a) E_n & \cosh(a) E_n \end{bmatrix}.$$

□

Eine ähnliche Aussage benötigen wir für spezielle Matrizen mit einer Blockstruktur aus 3×3 Blöcken. Wir beginnen mit dem folgenden Lemma:

Lemma B.71. Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix, 0_n die $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, und $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2 \cdot 0 + 1} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2(i+1)+1} &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i+1} \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2} E_n & E_n & -\frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2} E_n & -E_n & \frac{1}{2} E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Für die anderen Potenzen erhalten wir das folgende Lemma:

Lemma B.72. Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix, 0_n die $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, und $i \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2 \cdot 1} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i+2} &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Führen wir diese beiden Lemmata zusammen, erhalten wir das folgende Korollar:

Korollar B.73. Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und 0_n die $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht. Dann ist

$$\exp \left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} E_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{4}E_n & \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{4}E_n \\ 0_n & 0_n & E_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir nutzen zunächst die Definition des Matrixexponentials B.51 und erhalten

$$\begin{aligned} \exp \left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} E_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & E_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right)^i}{i!} \\ &=: \begin{bmatrix} E_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & E_n \end{bmatrix} + M. \end{aligned}$$

Betrachten wir den hinteren Summanden M , so gilt

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^{2i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i+1}}{(2i+1)!} + \frac{\ln(2)^{2i+2} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}^{2i+2}}{(2i+2)!}.$$

Mit den Lemmata B.71 und B.72 erhalten wir

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^{2i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}}{(2i+1)!} + \frac{\ln(2)^{2i+2} \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{2}E_n & +E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}}{(2i+2)!}.$$

Da die Matrizen nicht mehr vom Index der Reihe abhängen, erhalten wir

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^{2i+1}}{(2i+1)!} - \frac{\ln(2)^{2i+2}}{(2i+2)!}.$$

Mithilfe eines CAS ergibt sich für die Reihe und damit für den Gesamtausdruck

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{4}E_n & -\frac{1}{2}E_n & \frac{1}{4}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Addieren wir diesen Ausdruck mit der Einheitsmatrix, so ergibt sich

$$\exp \left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{2}E_n & -E_n & \frac{1}{2}E_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} E_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{4}E_n & \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{4}E_n \\ 0_n & 0_n & E_n \end{bmatrix}.$$

□

Dieselben Aussagen betrachten wir für eine weitere spezielle Matrix und beginnen mit dem folgenden Lemma:

Lemma B.74. Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix, 0_n die $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, und $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i+1} = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2 \cdot 0 + 1} = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i+1} = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2(i+1)+1} &= \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i+1} \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Die anderen Potenzen ergeben sich aus dem folgenden Lemma:

Lemma B.75. Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix, 0_n die $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, und $i \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i} = \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2 \cdot 1} = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix}$$

Induktionsannahme: Es gilt

$$\begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i} = \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i+2} &= \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i} \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Diese beiden Lemmata nutzen wir für das folgende Korollar:

Korollar B.76. Sei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und 0_n die $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht. Dann ist

$$\exp \left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{2}E_n & 0_n \\ 0_n & E_n & 0_n \\ 0_n & \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{2}E_n \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir nutzen zunächst die Definition des Matrixexponentials B.51 und erhalten

$$\begin{aligned} \exp \left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} E_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & E_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \right)^i}{i!} \\ &=: \begin{bmatrix} E_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & E_n \end{bmatrix} + M. \end{aligned}$$

Betrachten wir den hinteren Summanden M , so gilt

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^{2i+1} \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i+1}}{(2i+1)!} + \frac{\ln(2)^{2i+2} \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}^{2i+2}}{(2i+2)!}.$$

Mit den Lemmata B.74 und B.75 erhalten wir

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^{2i+1} \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix}}{(2i+1)!} + \frac{\ln(2)^{2i+2} \cdot \begin{bmatrix} E_n & -E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & -E_n & E_n \end{bmatrix}}{(2i+2)!}.$$

Da die Matrizen nicht mehr vom Index der Reihe abhängen, ergibt sich

$$M = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^{2i+1}}{(2i+1)!} - \frac{\ln(2)^{2i+2}}{(2i+2)!}.$$

Mithilfe eines CAS erhalten wir für die Reihe und damit für den Gesamtausdruck

$$M = \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}E_n & \frac{1}{2}E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & \frac{1}{2}E_n & -\frac{1}{2}E_n \end{bmatrix}.$$

Addieren wir diesen Ausdruck mit der Einheitsmatrix, so ergibt sich

$$\exp \left(\ln(2) \cdot \begin{bmatrix} -E_n & E_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & E_n & -E_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{2}E_n & 0_n \\ 0_n & E_n & 0_n \\ 0_n & \frac{1}{2}E_n & \frac{1}{2}E_n \end{bmatrix}.$$

□

Index

- 2-Polytop, 121
 - Realisierung, 121
- 3-Polytop, 86
- Algorithmus
 - 3-zusammenhängend, 81
 - Eigenstruktur verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivisionsmatrix 2D, 200
 - Eigenstruktur verallgemeinerte kubische B-Spline-Subdivisionsmatrix 3D, 203
 - Intervallschachtelungsverfahren, 115
 - Inverse stereographische Projektion, 112
 - Konstruktion der Facetten, 83
 - Konstruktion der Matrix $\tilde{C}$, 210
 - Konstruktion der verallgemeinerten kubischen B-Spline-Subdivisionsmatrix aus der Matrix $\tilde{C}$, 232
 - Konstruktion des 3-Polytops, 92
 - Konstruktion von Zufallsgraphen, 84
 - kubische B-Spline-Subdivisionsmatrix Übersicht, 198
 - Planarität, 82
 - quadratische B-Spline-Subdivisionsmatrix Variante 1, 146
 - quadratische B-Spline-Subdivisionsmatrix Variante 2, 152
 - Radienberechnung, 102
 - Vierecksgraph, 103
- Arnold, 126
- ausgewertetes Element, 14
 - Grad, 14
 - Typ, 14
- Basis, 296
 - Orthonormalbasis, 296
- Bogen, 289
- breadth-first search, 105
- Breitensuche, 105
- Catmull-Clark-Algorithmus, 189
 - tuning, 187
- charakteristische Abbildung, 50
- charakteristische Schale, 50
- charakteristischer Graph, 50
- charakteristischer Ring, 50
- charakteristisches Netz, 50
- charakteristisches Polynom, 298
- circle packing, 86
- Colin de Verdière-artige Matrix, 208
- Colin de Verdière-Matrix, 125
 - geeignet skaliert, 138
 - optimal, 126
- Colin de Verdière-Nummer, 126
- D-Äquivalenzrelation, 15
- depth first search, 82
- Determinante, 298
- Drachen, 96
- Dreibein, 39
 - Doppeldreibein, 39
- Ecke
 - irregulär, 27, 30
 - Kanten-irregulär, 274
 - regulär, 27, 30, 274
 - semi-irregulär, 30
 - semi-Kanten-irregulär, 274
 - semi-Volumen-irregulär, 274
 - super-irregulär, 274
 - Volumen-irregulär, 274
- Eckpunkt, 200, 203
- Eigenkoeffizienten, 46
- Eigenring, 49
- Eigenschale, 50
- Eigenvektor, 298
- Eigenwert, 298
 - algebraische Vielfachheit, 298
 - dominant, 41
 - geometrische Vielfachheit, 299
 - subdominant, 41
 - subsubdominant, 41
- Einheitskreis, 9
- Einheitssphäre, 9
- Erzeugendensystem, 296
- Facettenliste, 80
- Facettenpunkt, 200, 203
- flacher Punkt, 187
- Fläche, 14
- Funktion der Subdivisionsauswertung, 23
- Gebiet, 290
- Graph, 285
 - k -kantenzusammenhängend, 288

- 2-Polytop, 121
 - 3-Polytop, 79
 - zusammenhängend, 288
 - abstrakt, 289
 - Adjazenzmatrix, 286
 - Automorphismus, 286
 - außenplanar, 290
 - dual, 293
 - einfach, 285
 - eingebettet, 290
 - eingeschränkter Vierecksgraph, 96
 - Facette, 290
 - abstrakt, 291
 - äußere, 291
 - gerichtet, 286
 - gerichtete Kante, 285, 286
 - Homomorphismus, 286
 - Isomorphismus, 286
 - k-zusammenhängend, 288
 - Kante, 285
 - Kantenkonnektivität, 288
 - Kantenzug, 286
 - kantenzusammenhängend, 288
 - Knoten, 285
 - knotenzusammenhängend, 288
 - kombinatorischer Graph, 55
 - Konnenktivität, 288
 - Kreis, 286
 - induziert, 290
 - nicht-separierend, 290
 - Mehrfachkanten, 285
 - Multigraph, 292
 - Pfad, 285
 - planar, 289
 - planar-eben, 289
 - planar-ebener Multigraph, 292
 - planar-ebener zweidimensional dualer Graph, 293
 - Realisierung, 290
 - Schleifen, 285
 - Schnitt, 293
 - Sehne, 290
 - Skelett, 80
 - stark zusammenhängend, 289
 - Strukturgraph, 80
 - trivial, 285
 - Verbindung, 293
 - Vierecksgraph, 93
 - zweidimensional abstrakt dual, 293
 - äquivalent, 291
- Initialelement, 16, 17
- regulär, 22
 - reguläre Umgebung, 22
 - valide, 55
- Inversion, 298
- irreguläres Volumen, 274
- Kante, 285
- irregulär, 30
 - regulär, 30
 - T-alike, 83
 - T-opposite, 83
- Kantenpunkt, 200, 203
- Knoten, 285
- komplexe Zahlen, 9
- Kontrollpunkt, 16
- verfeinert, 25
- konvex, 78
- konvexe Hülle, 78
- Kreispackung, 86, 94
- Kronecker-Delta, 144
- Kroneckerprodukt, 296
- Kurve, 14
- Matrix
- allgemeine lineare Gruppe, 295
 - Diagonaleintrag, 295
 - diagonalisierbar, 300
 - Diagonalmatrix, 295
 - Einheitsmatrix, 295
 - hermitesch, 302
 - Inverse, 295
 - invertierbar, 295
 - irreduzibel, 300
 - Jordanblock, 299
 - Jordankästchen, 300
 - Jordanmatrix, 300
 - Kern, 299
 - konsistent, 43
 - Matrixexponential, 303
 - Matrixlogarithmus, 304
 - Nebendiagonaleintrag, 295
 - nicht-negativ, 295
 - Nullmatrix, 295
 - obere Dreiecksmatrix, 302
 - orthogonal, 302
 - positiv definit, 302
 - quadratisch, 295
 - reduzibel, 300
 - Spektralradius, 299
 - Spektrum, 299
 - stochastisch, 301
 - symmetrisch, 302
 - Transponierte, 10, 296
 - untere Dreiecksmatrix, 302
 - ähnlich, 299
- n-Eck, 269
- natürliche Zahlen, 9

- Partition, 293
- Permutation, 297
 - Vorzeichen, 298
- Permutationsmatrix, 297
- Polytop, 78
 - d -Polytop, 78
 - dual, 79
 - Eingabe, 80
 - H-Polytop, 78
 - polar dual, 79
 - V-Polytop, 78
- punktweise Division, 153
- rechtwinkliger Drachen, 96
- reelle Zahlen, 9
- reguläres Initialelement, 20
- Ring, 33
 - Doppelring, 33
- Schale, 39
 - Doppelschale, 39
- Spline-Definitionsgebiet, 15
- starke Arnold Eigenschaft, 126
- stereographische Projektion, 94
 - inverse, 94
- Subdivision
 - Subdivisionsalgorithmus, 40
 - Zerlegung des Spline-Definitionsgebiets, 24
- System von generierenden Funktionen, 23
- Theorem
 - Eulerformel für Graphen, 291
 - Koebe-Andreiev-Thurston, 87
 - finale Version, 90
 - Satz von Menger, 289
 - Satz von Steinitz, 79
 - Whitney's Planaritätskriterium, 294
- Tiefensuche, 82
- Trapezoeder, 270
 - n -fache Knoten, 270
- Vierecksgraph, 93
 - eingeschränkt, 96
- Volumen, 14
- Volumenpunkt, 203
- Zelle, 14
 - reguläre Struktur, 22
 - reguläre Zelle, 23

Symbolverzeichnis

Zahlenräume

$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0)
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen (inklusive 0)
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^d$	d -dimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
$\mathbb{S}^1$	Einheitskreis
$\mathbb{S}^2$	Einheitssphäre

Variablen

a	Universalvariable; wird je nach Kontext anders genutzt
b	Universalvariable; Wird je nach Kontext anders genutzt
c	Universalvariable; Wird je nach Kontext anders genutzt
d	Dimension eines Raums oder einer Abbildung; in dieser Arbeit typischerweise 1,2 oder 3
e	Kante eines Graphen $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ mit $e \in \mathbf{E}$; wird auch als Bezeichnung der Tangentenknoten in einem Vierecksgraphen oder als Kantenpunkt in Unterteilungen von Polytopen verwendet
f	Facette eines planaren 3-zusammenhängenden Graphen $\mathbf{G}$; wird auch als Bezeichnung der dualen Knoten in einem Vierecksgraphen, als Eckpunkt dualer Polytope und als Facettenpunkt verwendet
g	Grad eines B-Spline- oder Subdivisionselements; in dieser Arbeit 2 für quadratische und 3 für kubische Elemente
h	Höhe
i	Allgemeine Zählvariable aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
j	Allgemeine Zählvariable aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
k	Allgemeine Zählvariable aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
l	Allgemeine Zählvariable aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
m	Allgemeine Zählvariable aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
n	Allgemeine Zählvariable aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
o	Volumenpunkt oder -knoten eines Graphen eines Initialelements für $t = 3$ und $g = 3$
p	Eckpunkt eines primalen Polytops in $\mathbb{R}^d$; wird auch als Bezeichnung (primaler) Knoten in Graphen verwendet

q	Koordinatenpunkt in $\mathbb{R}^d$
r	Radius oder Länge; wird je nach Kontext anders verwendet
s	Zelle
t	Typ beziehungsweise geometrische Dimension eines B-Spline- oder Subdivisionselements; in dieser Arbeit 1 für Kurven, 2 für Flächen und 3 für Volumen
v	Knoten eines Graphen $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ mit $v \in \mathbf{V}$
x	Koordinatenvariable
y	Koordinatenvariable
z	Koordinatenvariable
α	Universalwinkel; wird je nach Kontext anders genutzt
β	Universalwinkel; wird je nach Kontext anders genutzt
$\delta_{i,j}$	Kroneckerdelta mit $\delta_{i,j} = 1$, wenn $i = j$ und $\delta_{i,j} = 0$ sonst
φ	Universalparameter; wird je nach Kontext anders genutzt
$\vec{n}$	Normalenvektor

Matrizen

0_n	Nullmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
A	Adjazenzmatrix in $\{0, 1\}^{n \times n}$
B	Allgemeine Matrix
C	Colin-de-Verdière-Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
D	Diagonalmatrix
E	Liste der Kanten oder Matrix der Kantenpunkte
E_n	Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
F	Liste von Facetten eines einfachen planaren 3-zusammenhängenden Graphen; wird auch als Matrix der Facettenpunkte verwendet
G	Drehmatrix
H	Permutationsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
I	Indexmatrix
J	Matrix der Jordanblöcke einer Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$
K	Indexmatrix
L	Linke untere Dreiecksmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
M	Allgemeine Matrix
M^T	Transponierte einer Matrix
$M_{(:,j)}$	j -te Spalte einer Matrix, mit $j \in \mathbb{N}$

$M_{(i,:)}$	i -te Zeile einer Matrix, mit $i \in \mathbb{N}$
$M_{(i,j)}$	(i, j) -ter Eintrag einer Matrix, mit $i, j \in \mathbb{N}$
N	Normierungsmatrix
P	Matrix der Kontrollpunkte in $\mathbb{R}^{n \times d}$; dabei stellt jede Zeile einen Punkt in $\mathbb{R}^d$ dar und damit besteht P aus n Kontrollpunkten; wird auch als Matrix der Eckpunkte eines (primalen) Polytops verwendet
R	Rechte obere Dreiecksmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
S	Subdivisionsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
T	Spezielle Adjazenzmatrix eines n -Ecks
V	Matrix der Eigenvektoren

Abbildungen

$\mathbf{c}(\mathbf{G})$	Colin-de-Verdière-Nummer des Graphen $\mathbf{G}$
$\mathbf{d}$	$\mathbf{D}$ -Äquivalenzrelation
f	Allgemeine Abbildung; wird je nach Kontext anders verwendet
$\mathbf{g}$	System generierender Funktionen
$\mathbf{h}$	Permutation
$\mathbf{i}$	Indexabbildung
$\mathbf{q}$	Linke Seite eines Gleichungssystems
$\mathbf{r}$	Reparametrisierungsabbildung
$\mathbf{s}$	Funktion der Subdivisionsauswertung

Spezielle Vektoren

$\vec{1}$	Spaltenvektor $[1, \dots, 1]^T$ mit n Einträgen, jeweils passend zum Kontext
$\vec{0}$	Spaltenvektor $[0, \dots, 0]^T$ mit n Einträgen, jeweils passend zum Kontext

Eigenwerte

λ	Subdominanter Eigenwert einer Matrix
λ_i	Unspezifizierter Eigenwert einer Matrix
μ	Subsubdominanter Eigenwert einer Matrix

Graphen und Mengen

$\text{Aut}(\mathbf{G})$	Automorphismengruppe des Graphen $\mathbf{G}$
$\mathbf{C}(\mathbf{G})$	Menge aller Colin-de-Verdière-Matrizen des Graphen $\mathbf{G}$
$\mathbf{D}$	Spline-Definitionsgebiet
$\mathbf{E}$	Menge der Kanten eines Graphen

F	Menge der Facetten eines planaren 3-zusammenhängenden Graphen G
G	Allgemeiner Graph
G*	Zu G dualer Graph
GL_n(C)	Menge aller invertierbaren Matrizen aus $\mathbb{C}^{n \times n}$
H_n	Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$
I	Indexmenge mit $\mathbf{I} = \{1, \dots, k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$
K	Menge der primalen und dualen Knotenpaare, die in einem eingeschränkten Vierecksgraphen an einem gemeinsamen Viereck liegen
K(f)	Menge primalen Punkte p , die in einem eingeschränkten Vierecksgraphen an einem gemeinsamen Viereck mit f liegen
K(p)	Menge dualen Punkte f , die in einem eingeschränkten Vierecksgraphen an einem gemeinsamen Viereck mit p liegen
L	Allgemeine Menge
M	Allgemeine Menge
P	Polytop in $\mathbb{R}^3$ als Realisierung eines planaren 3-zusammenhängenden Graphen G
P*	Zu P duales Polytop
Q'(G)	Eingeschränkter Vierecksgraph des planaren 3-zusammenhängenden Graphen G
Q(G)	Vierecksgraph des planaren 3-zusammenhängenden Graphen G
R	Allgemeine Menge
V	Menge der Knoten eines Graphen

Spezielle Funktionen

alg(λ)	Algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts
bs	Bobenko und Springborn Funktional
conv(M)	Konvexe Hülle der Menge $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^d$
det(M)	Determinante der Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
exp	Exponentialfunktion beziehungsweise Exponentialabbildung mit $\exp(a) = e^a$ oder $\exp(M) = e^M$
exp₂	Exponentialfunktion beziehungsweise Exponentialabbildung zur Basis 2 mit $\exp_2(a) = 2^a$ oder $\exp_2(M) = 2^M$
geo(λ)	Geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts
ker(M)	Kern der Matrix M
kron(M₁, M₂)	Kroneckerprodukt zweier Matrizen M_1 und M_2
max	Größter Wert einer Menge oder eines Vektors
min	Kleinster Wert einer Menge oder eines Vektors
φ	Stereographische Projektion von $\mathbb{S}^2 \setminus \{[0, 0, 1]\}$ nach $\mathbb{R}^2$
φ⁻¹	Inverse stereographische Projektion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{S}^2 \setminus \{[0, 0, 1]\}$

$\rho(M)$ Spektralradius der quadratischen Matrix M

$\text{sgn}(\mathbf{h})$ Vorzeichen der Permutation $\mathbf{h}$

$\text{sp}(M)$ Spektrum der quadratischen Matrix M

Literatur

- [98] *The 70th Academy Awards*. 1998. URL: <https://www.oscars.org/oscars/ceremonies/1998/?qt-honorees=1#block-quicktabs-honorees> (besucht am 16.05.2024).
- [ADS06] Ursula Augsdörfer, Neil Dodgson und Malcom Sabin. „Tuning Subdivision by Minimising Gaussian Curvature Variation Near Extraordinary Vertices“. *Computer Graphics Forum* 25.3 (2006), S. 263–272. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2006.00945.x>.
- [AF15] Ilka Agricola und Thomas Friedrich. *Elementargeometrie. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. 4. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-06731-1>.
- [Alt21] Christian Altenhofen. „Volumetric Subdivision for Efficient Integrated Modeling and Simulation“. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2021. doi: <https://doi.org/10.26083/tuprints-00014617>.
- [And70] E. M. Andreev. „On Convex Polyhedra in Lobačevskiĭ Spaces“. *Mathematics of the USSR-Sbornik* 10.3 (1970), S. 413–440. doi: <https://doi.org/10.1070/SM1970v010n03ABEH001677>.
- [Ang14] David Angell. *Exponential of Matrix with Negative Entries only on the Diagonal*. Mathematics Stack Exchange. 2014. URL: <https://math.stackexchange.com/q/776751> (besucht am 03.05.2023).
- [Arn72] Wladimir Igorewitsch Arnold. „Modes and Quasimodes“. *Functional Analysis and Its Applications* 6 (1972), S. 94–101. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01077511>.
- [Baj+02] Chandrajit Bajaj u. a. „A Subdivision Scheme for Hexahedral Meshes“. *The Visual Computer* 18 (2002), S. 343–356. doi: <https://doi.org/10.1007/s003710100150>.
- [Bal97] V. K. Balakrishnan. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory*. Schaum's outline series. New York: McGraw-Hill, 1997.
- [Bär18] Christian Bär. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2018. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22620-6>.
- [BE01] Marshall Bern und David Eppstein. „Optimal Möbius Transformations for Information Visualization and Meshing“. In: *Algorithms and Data Structures. 7th International Workshop, WADS 2001 Providence, RI, USA, August 8–10, 2001 Proceedings*. Hrsg. von Frank Dehne, Jörg-Rüdiger Sack und Roberto Tamassia. 1. Aufl. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin, Heidelberg, 2001, S. 14–25. doi: <https://doi.org/10.1007/3-540-44634-6>.
- [BHU10] Daniel Burkhart, Bernd Hamann und Georg Umlauf. „Iso-geometric Finite Element Analysis Based on Catmull-Clark Subdivision Solids“. *Computer Graphics forum* 29.5 (2010), S. 1575–1584.
- [BK04] Loïc Barthe und Leif Kobbelt. „Subdivision Scheme Tuning Around Extraordinary Vertices“. *Computer Aided Geometric Design* 21.6 (2004), S. 561–583. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.04.003>.
- [BM08] Adrian Bondy und Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph Theory*. 1. Aufl. Graduate Texts in Mathematics. London: Springer-Verlag, 2008. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>. URL: <https://link.springer.com/book/9781846289699>.
- [Bos21] Siegfried Bosch. *Lineare Algebra. Ein Grundkurs mit Aufgabentrainer*. 6. Aufl. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2021. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62616-0>.
- [Bra09] Ulrik Brandes. „The Left-Right Planarity Test“. 2009. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=7963e9feffe1c9362eb1a69010a5139d1da3661e> (besucht am 09.01.2025).
- [Bro06] Ronald Brown. *Topology and Groupoids. A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid*. Updated Version 2020. 2006.

- [Bru04] Henning Bruhn. „The Cycle Space of a 3-connected Locally Finite Graph is Generated by its Finite and Infinite Peripheral Circuits“. *Journal of Combinatorial Theory. Series B* 92 (2 2004), S. 235–256. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2004.03.005>.
- [BS04] Alexander I. Bobenko und Boris A. Springborn. „Variational Principles for Circlepatterns and Koebe’s Theorem“. *Transactions of the American Mathematical Society* 356 (2004), S. 659–689. URL: <https://www.ams.org/journals/tran/2004-356-02/S0002-9947-03-03239-2/>.
- [BS93] Graham R. Brightwell und Edward R. Scheinerman. „Representation of Planar Graphs“. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 6 (2 1993), S. 214–229. doi: <https://doi.org/10.1137/0406017>.
- [Cas89] John Casey. *A Treatise on Spherical Trigonometry, and its Application to Geodesy and Astronomy with Numerous Examples*. Dublin: Hodges Figgis, & Co. London: Longmans, Green, & Co., 1889.
- [CC78] Edwin Catmull und James Clark. „Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes“. *Computer-Aided Design* 10 (6 1978), S. 350–355. doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0).
- [CG67] Harold S. M. Coxeter und Samuel L. Greitzer. *Geometry Revisited*. Bd. 19. New York: Mathematical Association of America, 1967.
- [Cha74] George Merrill Chaikin. „An Algorithm for High-Speed Curve Generation“. *Computer Graphics and Image Processing* 3.4 (1974), S. 346–349. doi: [https://doi.org/10.1016/0146-664X\(74\)90028-8](https://doi.org/10.1016/0146-664X(74)90028-8).
- [CMQ03] Yu-Sung Chang, Kevin T. McDonnell und Hong Qin. „An Interpolatory Subdivision for Volumetric Models over Simplicial Complexes“. In: *2003 Shape Modeling International*. 2003, S. 143–152. doi: <https://doi.org/10.1109/SMI.2003.1199610>.
- [Col90] Yves Colin de Verdière. „Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité“. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* (1990), S. 11–21. doi: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(90\)90093-F](https://doi.org/10.1016/0095-8956(90)90093-F).
- [Col93] Yves Colin de Verdière. „On a New Graph Invariant and a Criterion for Planarity“. In: *Graph Structure Theory. Proceedings of a Joint Summer Research Conference on Graph Minors held June 22 to July 5, 1991, at the University of Washington, Seattle*. Hrsg. von Neil Robertson und Paul Seymour. Bd. 147. Contemporary Mathematics. 1993, S. 137–147. ISBN: 978-0-8218-5160-9. doi: <https://doi.org/10.1090/conm/147>.
- [COS00] Femi Cirak, Michael Ortiz und Peter Schröder. „Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis“. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.12 (2000), S. 2039–2072.
- [CR61] Henry M. Cundy und Arthur P. Rollett. *Mathematical Models*. 2. Aufl. Oxford und New York: Oxford University Press, 1961.
- [DeR90] Tony D. DeRose. „Necessary and Sufficient Conditions for Tangent Plane Continuity of Bézier Surfaces“. *Computer Aided Geometric Design* 7.1 (1990), S. 165–179. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(90\)90028-P](https://doi.org/10.1016/0167-8396(90)90028-P).
- [DF57] George Bernard Dantzig und Delbert Ray Fulkerson. *Linear Inequalities and Related Systems*. Bd. 38. Princeton: Princeton University Press, 1957. Kap. On the Max-Flow Min-Cut Theorem of Networks, S. 215–222. doi: <https://doi.org/10.1515/9781400881987-013>.
- [DF81] A. J. W. Duijvestijn und P. J. Federico. „The Number of Polyhedral (3-Connected Planar) Graphs“. *Mathematics of Computation* 37.156 (1981), S. 523–532. doi: <https://doi.org/10.2307/2007444>.
- [Die+23] Alexander Dietz u. a. „Subdivision Isogeometric Analysis: A Todo List“. *Dolomites Research Notes on Approximation* 15 (5 2023), S. 145–157. doi: <https://doi.org/10.14658/PUPJ-DRNA-2022-5-12>.
- [Die17] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. 5. Aufl. Graduate Texts in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3>.
- [Die18] Alexander Dietz. „Integration singulärer Splineflächen“. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, 2018.

-
- [Die25] Alexander Dietz. *A New Approach to the Construction of Subdivision Algorithms: The MATLAB Software Package*. Darmstadt: TUDatalib, 2025. doi: <https://doi.org/10.48328/tudatalib-1841>.
- [DKT98] Tony DeRose, Michael Kass und Tien Truong. „Subdivision Surfaces in Character Animation“. *SIGGRAPH '98: Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1998). doi: <https://doi.org/10.1145/280814.280826>.
- [DLG90] Nira Dyn, David Levin und John A. Gregory. „A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control“. *ACM Transactions on Graphics* 9.2 (1990), S. 160–169. doi: <https://doi.org/10.1145/78956.78958>.
- [DS78] Daniel Doo und Malcom Sabin. „Behaviour of Recursive Division Surfaces near Extraordinary Points“. *Computer Aided Design* 10(6) (1978), S. 356–360.
- [Dyn02] Nira Dyn. „Interpolatory Subdivision Schemes“. In: *Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling: Summer School Lecture Notes*. Hrsg. von Arminand Iske, Ewald Quak und Michael S. Floater. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002, S. 25–50. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04388-2_2.
- [Epp03] David Eppstein. *Hyperbolic Geometry, Möbius Transformations and Geometric Optimization*. Lecture given at the „Introductory Workshop in Discrete and Computational Geometry“ of the Mathematical Sciences Research Institute. 2003. URL: https://www.slmath.org/workshops/248#videos_workshop.
- [Euc86] Euclid. *Euclid's Elements: The Whole Fifteen Books Compendiously Demonstrated by Mr. Isaac Barrow, Fellow of Trinity Colledge in Cambridge. And translated out of the Latin*. The second edition, very carefully corrected. Early English Books Online / EEBO. London, 1686. URL: <https://search.proquest.com/eebo/docview/2240913069>.
- [Eul58] Leonhard Euler. „Elementa doctrinae solidorum“. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4 (1758), S. 109–140. URL: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/230>. Euler Archive – All Works 230.
- [Eve11] Shimon Even. *Graph Algorithms*. Hrsg. von Guy Even. 2. Aufl. Cambridge University Press, 2011. doi: <https://doi.org/10.1017/CB09781139015165>.
- [Ewa20] Tobias Ewald. „Analyse geometrischer univariater Subdivisionsalgorithmen“. Diss. Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt, 2020. doi: <https://doi.org/10.25534/tuprints-00011815>.
- [FHW79] Franz-Josef Fritz, Bertram Huppert und Wolfgang Willems. *Stochastische Matrizen*. Hochschultext. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1979. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-67131-9>.
- [FR85] H. de Fraysseix und P. Rosenstiehl. „A Characterization of Planar Graphs by Trémaux Orders“. *Combinatorica* 5 (1985), S. 127–135. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02579375>.
- [Fro08] Ferdinand Georg Frobenius. „Über Matrizen aus positiven Elementen“. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* Januar–Juni (1908), S. 471–476.
- [Fro09] Ferdinand Georg Frobenius. „Über Matrizen aus positiven Elementen II“. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* Januar–Juni (1909), S. 514–518.
- [Fro12] Ferdinand Georg Frobenius. „Über Matrizen aus nicht negativen Elementen“. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* Januar–Juni (1912), S. 456–477.
- [FS20] Gerd Fischer und Boris Springborn. *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger*. 19. Aufl. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2020. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61645-1>.
- [Ger31] Semjon Aronowitsch Gerschgorin. „Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix“. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes* (6 1931), S. 749–754.
- [GR01] Chris Godsil und Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory*. 1. Aufl. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 2001. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9>.
- [Grü07] Branko Grünbaum. „Graphs of Polyhedra; Polyhedra as Graphs“. *Discrete Mathematics* 307 (3–5 2007), S. 445–463. issn: 0012-365X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.09.037>.
- [Hal15] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*. 2. Aufl. 222 Bde. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2015. ISBN: 978-3-319-13467-3. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-13467-3>.
-

- [HCB05] Thomas Joseph Robert Hughes, John Austin Cottrell und Yuri Bazilevs. „Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement“. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.39 (2005), S. 4135–4195. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008>.
- [Hig08] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices. Theory and Computation*. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2008. doi: <https://doi.org/10.1137/1.9780898717778>.
- [HJ12] Rogar A. Horn und Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2. Aufl. Cambridge University Press, 2012. doi: <https://doi.org/10.1017/CB09781139020411>.
- [HJ91] Roger A. Horn und Charles R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. doi: <https://doi.org/10.1017/CB09780511840371>.
- [HK71] Kenneth Hoffman und Ray Kunze. *Linear Algebra*. 2. Aufl. Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [HK80] Frank Harary und Jerald A. Kabell. „A Simple Algorithm to Detect Balance in Signed Graphs“. *Mathematical Social Sciences* 1.1 (1980), S. 131–136. doi: [https://doi.org/10.1016/0165-4896\(80\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0165-4896(80)90010-4).
- [HL01] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty und Claude Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis*. Grundlehren Text Editions. Springer Berlin, Heidelberg, 2001. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56468-0>.
- [HLS99] Hein van der Holst, László Lovász und Alexander Schrijver. „The Colin de Verdière Graph Parameter“. In: *Graph Theory and Combinatorial Biology Balatonlelle (Hungary)*, 1996. Bd. 7. Budapest: Bolyai Society Mathematical Studies, 1999, S. 29–85.
- [HR16] Jan Hakenberg und Ulrich Reif. „On the Volume of Sets Bounded by Refinable Functions“. *Applied Mathematics and Computation* 272 (2016), S. 2–19. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.050>.
- [HW99] Ayman Habib und Joe Warren. „Edge and Vertex Insertion for a Class of C1 Subdivision Surfaces“. *Computer Aided Geometric Design* 16.4 (1999), S. 223–247. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(98\)00045-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(98)00045-4).
- [Izm10] Ivan Izmestiev. „The Colin de Verdière Number and Graphs of Polytopes“. *Israel Journal of Mathematics* 178 (2010), S. 427–444. doi: <https://doi.org/10.1007/s11856-010-0070-5>.
- [JM99] Ken Joy und Ron MacCracken. „The Refinement Rules for Catmull-Clark Solids“. *Technical Report CSE-96-1* (1999).
- [KB17] Peter Knabner und Wolf Barth. *Lineare Algebra. Aufgaben und Lösungen*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54991-9>.
- [Kel03] C. T. Kelley. *Solving Nonlinear Equations with Newton’s Method*. Fundamentals of Algorithms. 2003. doi: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718898>.
- [Kel81] A. K. Kelmans. „The Concept of a Vertex in a Matroid, the Non-Separating Cycles in a Graph and a New Criterion for Graph Planarity“. *Algebraic Methods in Graph Theory*. Conf. Szeged 1978, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 25 1 (1981), S. 345–388.
- [KK07] Max Koecher und Aloys Krieg. *Ebene Geometrie*. 3. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49328-0>.
- [Kna09] Michael P. Knapp. „Sines and Cosines of Angles in Arithmetic Progression“. *Mathematics Magazine* 82.5 (2009), S. 371–372. doi: <https://doi.org/10.4169/002557009X478436>.
- [Kob96] Leif Kobbelt. „Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology“. *Computer Graphics Forum* 15.3 (1996), S. 409–420. doi: <https://doi.org/10.1111/1467-8659.1530409>.
- [Koe36] Paul Koebe. „Kontaktprobleme der konformen Abbildung“. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften. Mathematische-Physische Klasse* 88 (1936), S. 141–164.
- [Kön04] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. 6. Aufl. Springer Berlin, Heidelberg, 2004. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18490-1>.

-
- [KP05] Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „Polynomial C^2 Spline Surfaces Guided by Rational Multisided Patches“. In: *Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces*. Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 119–134. doi: https://doi.org/10.1007/3-540-27157-0_9.
- [KP07] Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „Concentric tessellation maps and curvature continuous guided surfaces“. *Computer Aided Geometric Design* 24.2 (2007), S. 99–111. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2006.10.006>.
- [KP17] Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „A New Class of Guided C_2 Subdivision Surfaces Combining Good Shape with Nested Refinement“. *Computer Graphics Forum* 37.6 (2017), S. 84–95. doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.13313>.
- [KP18] Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „Refinable bi-quartics for design and analysis“. *Computer-Aided Design* 102 (2018), S. 204–214. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2018.05.001>.
- [KP19] Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „Curvature-bounded guided subdivision: Biquartics vs bicubics“. *Computer-Aided Design* 114 (2019), S. 122–132. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2019.05.011>.
- [KP24] Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „Quadratic-attraction subdivision with contraction-ratio $\lambda = 1/2$ “. *Computers & Graphics* 123 (2024). doi: <https://doi.org/10.1016/j.cag.2024.104001>.
- [KPR04] Kęstutis Karčiauskas, Jörg Peters und Ulrich Reif. „Shape Characterization of Subdivision Surfaces—Case Studies“. *Computer Aided Geometric Design* 21.6 (2004), S. 601–614. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.04.005>.
- [Lan86] Serge Lang. *Introduction to Linear Algebra*. 2. Aufl. Springer New York, NY, 1986. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1070-2>.
- [LB86] Adrien Marie Legendre und Marie Alphonse Blanchet. *Éléments de géométrie*. Paris: Firmin-Didot, 1886. URL: <https://eudml.org/doc/203254>.
- [Lee13] John M. Lee. *Axiomatic Geometry*. Bd. 21. Pure and Applied Undergraduate Texts. American Mathematical Society, 2013.
- [Lee20] Nam-Hoon Lee. *Geometry: from Isometries to Special Relativity*. 1. Aufl. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2020. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-42101-4>.
- [Leg94] Adrien Marie Legendre. *Eléments de géométrie*. Paris: Firmin Didot, 1794.
- [LM15] Jörg Liesen und Volker Mehrmann. *Linear Algebra*. 1. Aufl. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer Cham, 2015. doi: <https://aproxy.ulb.tu-darmstadt.de:2060/10.1007/978-3-319-24346-7>.
- [Loo87] Charles Teorell Loop. „Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles“. Masterarbeit. University of Utah, 1987. URL: <https://people.eecs.berkeley.edu/~sequin/CS284/TEXT/loop87.pdf> (besucht am 18. 11. 2024).
- [Lov01] László Lovász. „Steinitz Representations of Polyhedra and the Colin de Verdière Number“. *Journal of Combinatorial Theory. B* 82 (2001), S. 223–236. doi: <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2027>.
- [LS16] Josef Lauri und Raffaele Scapellato. *Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction*. 2. Aufl. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. doi: <https://doi.org/10.1017/CB09781316669846>.
- [Mata] MathWorksHelpCenter. *Documentation to the command conncomp*. URL: <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/graph.conncomp.html> (besucht am 17. 01. 2024).
- [Matb] MathWorksHelpCenter. *Documentation to the command diag*. URL: <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/diag.html> (besucht am 07. 09. 2024).
- [Matc] MathWorksHelpCenter. *Documentation to the command fsolve*. URL: <https://de.mathworks.com/help/optim/ug/fsolve.html> (besucht am 21. 08. 2024).
- [Matd] MathWorksHelpCenter. *Documentation to the command mldivide*. URL: <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/mldivide.html> (besucht am 21. 08. 2024).
-

- [Mate] MathWorksHelpCenter. *Documentation to the command orth*. URL: <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/orth.html> (besucht am 04. 09. 2024).
- [Men27] Karl Menger. „Zur allgemeinen Kurventheorie“. *Fundamenta Mathematicae* 10 (1 1927), S. 96–115.
- [Mey00] Carl D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial und Applied Mathematics (SIAM), 2000.
- [MM18] Yue Ma und Weiyin Ma. „Subdivision Schemes With Optimal Bounded Curvature Near Extraordinary Vertices“. *Computer Graphics Forum* 37.7 (2018), S. 455–467. doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.13582>.
- [MR22] Benjamin Marussig und Ulrich Reif. „Surface Patches with Rounded Corners“. *Computer Aided Geometric Design* 97 (2022), S. 102–134. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102134>.
- [NKP14] Thien Nguyen, Kęstutis Karčiauskas und Jörg Peters. „A Comparative Study of Several Classical, Discrete Differential and Isogeometric Methods for Solving Poisson’s Equation on the Disk“. *Axioms* 3.2 (2014), S. 280–299. doi: <https://doi.org/10.3390/axioms3020280>.
- [Per07] Oskar Perron. „Zur Theorie der Matrices“. *Mathematische Annalen* 64 (1907), S. 248–263. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01449896>.
- [Pet02] Jörg Peters. „Geometric Continuity“. In: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Hrsg. von Gerald Farin, Josef Hoschek und Myung-Soo Kim. North-Holland, 2002, S. 193–227. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-044451104-1/50009-5>.
- [Pet19] Jörg Peters. „Splines for Meshes with Irregularities“. *The SMAI Journal of Computational Mathematics* S5 (2019). 10.5802/smai-jcm.57, S. 161–183. doi: <https://doi.org/10.5802/smai-jcm.57>.
- [Pet20] Jörg Peters. „Refinable tri-variate C1 splines for box-complexes including irregular points and irregular edges“. *Computer Aided Geometric Design* 80 (2020). doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101877>.
- [Pet91] Jörg Peters. „Parametrizing Singularly to Enclose Data Points by a Smooth Parametric Surface“. In: *Proceedings of Graphics Interface ’91*. GI ’91. Calgary, Alberta, Canada, 1991, S. 1–7.
- [Pin+97] Jan Pinkava (Director und Author) u. a. *Geri’s Game*. Pixar Animation Studios, 1997.
- [PR04] Jörg Peters und Ulrich Reif. „Shape Characterization of Subdivision Surfaces—Basic Principles“. *Computer Aided Geometric Design* 21.6 (2004), S. 585–559. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.04.006>.
- [PR08] Jörg Peters und Ulrich Reif. *Subdivision Surfaces*. 3 Bde. Geometry and Computing. Springer Berlin, Heidelberg, 2008. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-76406-9>.
- [PR97] Jörg Peters und Ulrich Reif. „The Simplest Subdivision Scheme for Smoothing Polyhedra“. *ACM Trans. Graph.* 16.4 (1997), S. 420–431. doi: <https://doi.org/10.1145/263834.263851>.
- [PR98] Jörg Peters und Ulrich Reif. „Analysis of Algorithms Generalizing B-Spline Subdivision“. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 35.2 (1998), S. 728–748. URL: <http://www.jstor.org/stable/2587153> (besucht am 19. 11. 2024).
- [PU98] Hartmut Prautzsch und Georg Umlauf. „A G2-Subdivision Algorithm“. In: *Geometric Modelling*. Hrsg. von Gerald Farin u. a. Vienna: Springer Vienna, 1998, S. 217–224. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6444-0_17.
- [Rei93] Ulrich Reif. „Neue Aspekte in der Theorie der Freiformflächen beliebiger Topologie“. Diss. Universität Stuttgart, 1993.
- [Rei95] Ulrich Reif. „A Unified Approach to Subdivision Algorithms near Extraordinary Vertices“. *Computer Aided Geometric Design* 12.2 (1995), S. 153–174. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(94\)00007-F](https://doi.org/10.1016/0167-8396(94)00007-F).
- [Rei97] Ulrich Reif. „A Refineable Space of Smooth Spline Surfaces of Arbitrary Topological Genus“. *Journal of Approximation Theory* 90.2 (1997), S. 174–199. doi: <https://doi.org/10.1006/jath.1996.3079>.

-
- [Rha47] Georges de Rham. „Un peu de mathématiques à propos d’une courbe plane“. *Elemente der Mathematik* 2 (1947), S. 73–76.
- [Rha56] Georges de Rham. „Sur une courbe plane“. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 35 (1956), S. 25–42.
- [Ric08] David S. Richeson. *Euler’s Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. New Princeton Science Library edition, with a new preface by the author, 2019. Princeton University Press, 2008.
- [Rie75] Richard F. Riesenfeld. „On Chaikin’s Algorithm“. *Computer Graphics and Image Processing* 4.3 (1975), S. 304–310. doi: [https://doi.org/10.1016/0146-664X\(75\)90017-9](https://doi.org/10.1016/0146-664X(75)90017-9).
- [RS19] Ulrich Reif und Malcolm A. Sabin. „Old Problems and New Challenges in Subdivision“. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 349 (2019), S. 523–531. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.06.012>.
- [SB03] Malcolm A. Sabin und Loïc Barthe. „Artifacts in Recursive Subdivision Surfaces“. In: *Curve and Surface Fitting: St Malo 2002*. Hrsg. von Albert Cohen, Jean-Louis Merrien und Larry Schumaker. Nashboro Press, 2003, S. 353–362.
- [Sch92] Oded Schramm. „How to Cage an Egg“. *Inventiones mathematicae* 107 (1992), S. 543–560. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01231901>.
- [Ser10] Denis Serre. *Matrices. Theory and Applications*. 2. Aufl. 216 Bde. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 2010. ISBN: 978-1-4419-7682-6. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7683-3>.
- [SHW04] Scott Schaeffer, Jan Hakenberg und Joe Warren. „Smooth Subdivision of Tetrahedral Meshes“. In: *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*. SGP ’04. Association for Computing Machinery, 2004, S. 147–154. doi: <https://doi.org/10.1145/1057432.1057452>.
- [Spr03] Boris A. Springborn. „Variational Principles for Circle Patterns“. Diss. Technical University Berlin, 2003. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0312363>.
- [Spr05] Boris A. Springborn. „A Unique Representation of Polyhedral Types. Centering via Möbius Transformations“. *Mathematische Zeitschrift* 249 (2005), S. 513–517. doi: <https://doi.org/10.1007/s00209-004-0713-5>.
- [SR76] Ernst Steinitz und Hans Rademacher. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie*. 1. Aufl. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 1976. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65609-5>. Reprint of [Ste34].
- [Sta98] Jos Stam. „Exact Evaluation of Catmull-Clark Subdivision Surfaces at Arbitrary Parameter Values“. In: *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. SIGGRAPH ’98. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1998, S. 395–404. doi: <https://doi.org/10.1145/280814.280945>.
- [Ste22] Ernst Steinitz. „Polyeder und Raumteilungen“. In: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Hrsg. von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Geometrie 3.AB12. Leipzig: B.G. Teubner, 1922.
- [Ste34] Ernst Steinitz. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie*. Hrsg. von Hans Rademacher. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1934.
- [SW05] Scott Schaefer und Joe Warren. „On C2 Triangle/Quad Subdivision“. *Association for Computing Machinery* 24.1 (2005). doi: <https://doi.org/10.1145/1037957.1037959>.
- [Thu22] William P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds. With a Preface by Steven P. Kerckhoff*. Hrsg. von Jane Gilman, Joseph Silverman und Andras Vasy. Bd. 4. American Mathematical Society, 2022. ISBN: 978-1-4704-7474-4.
- [Thu77] William P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds. The text was typed in TEX by Sheila Newbery who also scanned the figures*. Electronic version 1.1 – March 2002. Lecture Notes, Princeton University, 1977–1980.
- [Tut60] William Thomas Tutte. „Convex Representations of Graphs“. *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-10.1 (1960), S. 304–320. doi: <https://doi.org/10.1112/plms/s3-10.1.304>.
-

- [Tut63] William Thomas Tutte. „How to Draw a Graph“. *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-13.1 (1963), S. 743–767. doi: <https://doi.org/10.1112/plms/s3-13.1.743>.
- [Whi32] Hassler Whitney. „Non-Separable and Planar Graphs“. *Transactions of the American Mathematical Society* 337.2 (1932), S. 339–362. doi: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1932-1501641-2>.
- [Whi33] Hassler Whitney. „2-Isomorphic Graphs“. *American Journal of Mathematics* 55.1 (1933), S. 245–254. doi: <https://doi.org/10.2307/2371127>.
- [Xie+20] Jin Xie u. a. „Interpolatory Catmull-Clark Volumetric Subdivision Over Unstructured Hexahedral Meshes for Modeling and Simulation Applications“. *Computer Aided Geometric Design* 80 (2020). doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101867>.
- [YP22] Jeremy Youngquist und Jörg Peters. „Solving Biharmonic Equations with Tri-Cubic C1 Splines on Unstructured Hex Meshes“. *Axioms* 11.11 (2022). doi: <https://doi.org/10.3390/axioms11110633>.
- [Zie04] Günter M. Ziegler. „Convex Polytopes: Extremal Constructions and f-Vector Shapes“. *Geometric Combinatorics, Proc. Park City Mathematical Institute (PCMI)*. Amer. Math. Society (2004), S. 617–691.
- [Zie94] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Updated Seventh Printing of the First Edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1994. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8431-1>.
- [ZS01] Denis Zorin und Peter Schröder. „A Unified Framework for Primal/Dual Quadrilateral Subdivision Schemes“. *Computer Aided Geometric Design* 18.5 (2001), S. 429–454. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(01\)00040-1](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(01)00040-1).