Interpretation unscharfer Aussagen bzw. Relationen als Einermengen bzw. Funktionen

von Peter Zahn

Abstract, Einleitung:
Als (metasprachliche) Definitionszeichen werden wir ':⇔' (zwischen Formeln) und ':=' (sonst) verwenden. Einermengen seien Mengen, die je genau ein Element enthalten.

Ein Beispiel einer Aussage, die gewissermaßen nur graduell zutrifft, ist "Ida ist jung". Man kann ihr wie folgt einen Grad k aus $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ zuordnen:

$$[\text{Ida ist jung}] := \begin{cases} 1, & \text{falls Ida höchstens 20 Jahre alt ist;} \\ k, & \text{falls } 0 < k < 1 \text{ und Ida } 20 + 30(1-k) \text{ Jahre alt ist;} \\ 0, & \text{falls Ida mindestens 50 Jahre alt ist.} \end{cases}$$

(Wir vernachlässigen hier die Abhängigkeit von der Zeit der Äußerung.) Hierbei stellt das Wort "jung" eine 'unscharfe Menge' (1-stellige Relation) dar, und die Aussage "Ida ist jung" wird in einer Metasprache durch einen 'variablen' Grad k des Zutreffens bewertet. Definiert man

$$\begin{aligned} j(c,k) \quad :\Leftrightarrow \quad & (k = 1 \ \wedge \ c \text{ ist höchstens 20 Jahre alt}) \\ & \vee \ (0 < k < 1 \ \wedge \ c \text{ ist } 20 + 30(1-k) \text{ Jahre alt}) \\ & \vee \ (k = 0 \ \wedge \ c \text{ ist mindestens 50 Jahre alt}) \end{aligned}$$

(mit c für beliebige Namen), und behandelt man $j(c)$ analog zu "Ida ist jung", dann gilt:

$$[j(c)] = k \ \Leftrightarrow \ j(c,k).$$

Dabei ist $j(c,k)$ ohne Zuhilfenahme einer Bewertung definiert und kann zu Recht oder zu Unrecht behauptet werden. In der metasprachlichen Gleichung $[j(c)] = k$ wird das Symbol $j(c)$ jedoch nicht als Aussage verwendet. Es lässt sich daher auch anders interpretieren, etwa als die Einermenge $\{u \colon j(c,u)\}$. In diesem Falle erhält man

$$k \in j(c) \ \Leftrightarrow \ j(c,k) \ \Leftrightarrow \ [j(c)] = k.$$

Da man in $j(c,k)$ für c verschiedene Namen und für k verschiedene 'Werte' aus [0,1] einsetzen kann, stellt j eine 2-stellige rechtseindeutige Relation, d.h. eine Funktion, dar. Andererseits sagt man etwa, j stelle eine 'unscharfe Menge' dar, die im Falle $j(c,k)$ das Element c mit dem Grade k des Zutreffens enthält. Auf analoge Weise lassen sich allgemeiner n-stellige 'unscharfe Relationen' als n-stellige Funktionen mit Werten aus $[0,1]$ interpretieren. (Sie entsprechen den 'charakteristischen Funktionen', die nur die beiden Werte 0, 1 annehmen, von Mengen oder Relationen.)

Einzelne Anwendungen der im Folgenden skizzierten Theorie beziehen sich nicht auf ('abstrakte') Einermengen bzw. Funktionen, sondern auf sprachliche Darstellungen (Beschreibungen) von ihnen. Die in behaupteten Aussagen der im Folgenden eingeführten Sprache $\mathcal{S}$ stehenden Darstellungen von Relationen (einschließlich Mengen und Funktionen) dürfen wir jedoch auch kurz Relationen nennen, da derartige Darstellungen von einander umfangsgleichen Relationen miteinander austauschbar sind.

§1: Interpretation unscharfer Aussagen als Einermengen

Sowohl in der mehrwertigen Logik als auch in der fuzzy logic werden Bewertungen objektsprachlicher 'Aussagen' untersucht oder zu Hilfe genommen. Dabei treten Gleichungen der Form $[A] = k$ mit je einer 'Aussage' A und einem 'Wert' k aus einem Bewertungsbereich $\mathcal{D}$ auf. Dabei ist '$[A]$' eine Kennzeichnung (definite description im Sinne von Bertrand Russell [4]) des der 'Aussage' A zugeordneten Wertes. Diese Kennzeichung lautet umgangssprachlich etwa "dasjenige u aus $\mathcal{D}$ mit $\Phi_A(u)$". Dabei sei $\Phi_A(u)$ eine Formel derart, dass es genau ein $k \in \mathcal{D}$ gibt, für das $\Phi_A(k)$ gilt, d.h. behauptet werden darf, und zwar auf Grund gegebener sprachlicher Konventionen. Demnach gilt $[A] = k \Leftrightarrow \Phi_A(k)$. $\Phi_A(k)$ ist also die ausführliche 'Bedeutung' (das Definiens) der metasprachlichen Bewertungsgleichung $[A] = k$.

In der Einleitung hatten wir dazu ein Beispiel angegeben; in ihm ist A die 'unscharfe Aussage' $j(c)$, und $\Phi_A(k)$ ist die dort durch $j(c,k)$ abgekürzte komplexe Aussage. In ihr kommt $j(c)$, d.i. A, nicht vor.

Wegen der eventuellen 'Unschärfe' der 'Aussage' A interpretieren wir sie als die Einermenge $\{u\colon \Phi_A(u)\}$ und definieren demgemäß $[\{u\colon \Phi_A(u)\}] := [A]$. Somit gilt (s.o.)

$$[\{u\colon \Phi_A(u)\}] = k \;\Leftrightarrow\; k \in \{u\colon \Phi_A(u)\}.$$

Indem wir $[A]$ durch $[\{u\colon \Phi_A(u)\}]$ ersetzen, verzichten wir auf die Anführung und Bewertung von A. Auf diese Weise überführen wir die bisherige Metasprache in eine gewöhnliche Sprache, die wir nun als Objektsprache untersuchen wollen.

Hierzu betrachten wir allgemeiner eine 'assertorische' ('materiale' oder 'kognitive') Sprache $\mathcal{S}$, d.h. eine Sprache mit Konventionen darüber, welche ihrer Aussagen (d.h. Behauptungssätze) gelten, d.h. behauptet werden dürfen. Vorschläge zur kritischen Rekonstruktion solcher Konventionen findet man z.B. in [3], I. 2. und in [6], §1 - §3. Zu diesen Konventionen gehören (meist unausgesprochene) Regeln und Gepflogenheiten, nach denen man bestimmte Elementaraussagen erst dann behaupten sollte, nachdem man eine zugehörige Wahrnehmung oder Beobachtung gemacht oder z.B. ein zugehöriges Mess- oder Rechenergebnis erhalten hat, sowie Schlussregeln für Elementaraussagen, in denen Prädikatoren (z.B. 'Käfer', 'Insekt', 'Spinne') vorkommen (s. z.B. [3], p. 182f.). Wir nehmen an, dass man diejenigen komplexen Aussagen von $\mathcal{S}$ behaupten darf, die in einem geeigneten klassischen Dialogspiel gegen jeden Opponenten verteidigt werden können. Danach führen alle Schlussregeln der klassischen Logik, wenn sie auf gültige Prämissen angewandt werden, zu einer ebenfalls gültigen Konklusion. (In empirischen Wissenschaften benötigt man außerdem allgemeine Hypothesen.)

Zunächst skizzieren wir den Aufbau von $\mathcal{S}$: Deren Formeln seien aus bestimmten Elementarformeln wie üblich mit Hilfe der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, Quantoren $\forall x, \exists y$ und Klammern (,) aufgebaut. In Elementarformeln mögen weder Junktoren noch Quantoren noch mengentheoretische Symbole vorkommen. In ihnen dürfen aber Variable vorkommen. Aussagen von $\mathcal{S}$ seien diejenigen Formeln von $\mathcal{S}$, in denen keine Variablen frei vorkommen. Als Konstante von $\mathcal{S}$ bezeichnen wir spezielle Bestandteile (wie Namen oder

Zahlzeichen) von Elementaraussagen von $\mathcal{S}$. Im Folgenden verstehen wir unter Aussagen, Konstanten, Variablen und Formeln nur solche, die der Sprache $\mathcal{S}$ angehören (oder als Formeln von $\mathcal{S}$ definiert sind).

$\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ seien nicht leere Mengen von Konstanten. (Wir werden Einermengen von Elementen von $\mathcal{D}$ betrachten, lassen aber offen, ob einige Elemente von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{D}$ gehören.)

Als Variable für Elemente von $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{D}$ eignen sich z.B. die Schreibfiguren $!'.!'', !''', \ldots$ bzw. $\S^\circ, \S^{\circ\circ}, \S^{\circ\circ\circ}, \ldots$. Diese und nur diese Variablen mögen zu $\mathcal{S}$ gehören. Wir werden sie im Folgenden jedoch nicht selbst verwenden.

Über Bestandteile der Sprache $\mathcal{S}$ reden wir in einer Metasprache. In ihr verwenden wir Metavariable (metasprachliche Variable), und zwar $c, c_1, c_2, \ldots$ für Elemente von $\mathcal{C}$; $k, l, m, k_1, k_2, \ldots$ für Elemente von $\mathcal{D}$; $x, y, x_1, x_2, \ldots$ für (objektsprachliche) Variable für Elemente von $\mathcal{C}$; und $u, v, w, u_1, u_2 \ldots$ für Variable für Elemente von $\mathcal{D}$. Durch verschiedene Metavariable mitgeteilte Variable seien stets voneinander verschieden.

Für Formeln $F(x), G(u)$ identifizieren wir dementsprechend $\forall x\, F(x)$ mit $\forall x \in \mathcal{C}.\, F(x)$, $\exists x\, F(x)$ mit $\exists x \in \mathcal{C}.\, F(x)$ sowie $\forall u\, G(u)$ mit $\forall u \in \mathcal{D}.\, G(u)$ und $\exists u\, G(u)$ mit $\exists u \in \mathcal{D}.\, G(u)$. Ersetzt man in einer Formel $F(x)$ alle freien Vorkommnisse von x durch ein Element c von $\mathcal{C}$ so möge aus $F(x)$ wieder eine Formel $F(c)$ entstehen. Desgleichen: Ersetzt man in einer Formel $G(u)$ alle freien Vorkommnisse von u durch ein Element k von $\mathcal{D}$ so möge aus $G(u)$ wieder eine Formel $G(k)$ entstehen.

Eine Relation heiße in $\mathcal{S}$ darstellbar, wenn sie gegeben ist durch ein Schreibfigur der Gestalt $\{(\underline{x}, \underline{u})\colon A(\underline{x}, \underline{u})\}$ mit $\underline{x} := x_1, \ldots, x_n$; $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_p$ $(n + p \geq 1)$ und einer Formel $A(\underline{x}, \underline{u})$ von $\mathcal{S}$, in der höchstens die Variablen $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p$ frei vorkommen. Dementsprechend definieren wir für Formeln $F(\underline{x}, \underline{u})$, in denen noch weitere Variable frei vorkommen dürfen, und $\underline{c} := c_1, \ldots, c_n$, $\underline{k} := k_1, \ldots, k_p$:

$$(\underline{c}, \underline{k}) \in \{(\underline{x}, \underline{u})\colon F(\underline{x}, \underline{u})\} \;:\Leftrightarrow\; F(\underline{c}, \underline{k}).$$

An Stelle der Konstanten c_i, k_j dürfen hier auch Variable y_i, v_j oder geeignete Terme stehen.

Die in $\mathcal{S}$ darstellbaren Relationen (und Mengen), sind von 1. Stufe. n-stellige Funktionen fassen wir als rechtseindeutige $(n+1)$-stellige Relationen auf.

$(=)$ sei eine in $\mathcal{S}$ darstellbare Äquivalenzrelation auf $\mathcal{D}$ mit der alle Formeln $A(u)$ verträglich (invariant) sind. Für sie gilt also $\forall u, v\, (A(u) \wedge u = v \Rightarrow A(v))$.

Als **Funktoren** bezeichnen wir Symbole für 1-stellige Funktionen von $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$ oder 2-stellige Funktionen von $\mathcal{D}^2$ in $\mathcal{D}$, die in $\mathcal{S}$ darstellbar sind. Für 1- bzw. 2-stellige Funktoren f bzw. $\triangleright$ sind die Gleichungen $f(u) = v$ bzw. $u \triangleright v = w$ also Formeln von $\mathcal{S}$ oder durch Formeln von $\mathcal{S}$ definiert. (Wir werden Funktoren auch als 'Pseudojunktoren' auf Einermengen anwenden).

$\mathcal{E}$ sei die Menge (2. Stufe) aller in $\mathcal{S}$ darstellbaren Einermengen P mit $P \subseteq \mathcal{D}$.
Als Metavariable verwenden wir: f für 1-stellige, $\triangleright$ für 2-stellige Funktoren sowie

- nur hier in §1 - P, Q für Elemente von $\mathcal{E}$. Somit gilt $\exists v\, \forall u\, (u \in P \Leftrightarrow u = v)$.
Um f und $\triangleright$ als 'Pseudojunktoren' anwenden zu können, definien wir

$$\begin{array}{rcl} fP & := & \{w\colon \exists u\, (u \in P \ \wedge\ f(u) = w)\} \\ P \triangleright Q & := & \{w\colon \exists u, v\, (u \in P \ \wedge\ v \in Q \ \wedge\ u \triangleright v = w)\}. \end{array}$$

Hiernach gehören auch fP und $P \triangleright Q$ zu $\mathcal{E}$, und es gilt

$$\begin{array}{rcl} m \in fP & \Leftrightarrow & \exists u\, (u \in P \ \wedge\ f(u) = m) \\ m \in (P \triangleright Q) & \Leftrightarrow & \exists u, v\, (u \in P \ \wedge\ v \in Q \ \wedge\ u \triangleright v = m). \end{array}$$

(Für manche Paare $(\mathcal{D}, \mathcal{S})$ gibt es jedoch kein effektives Verfahren, nach dem man für jedes Element von $\mathcal{E}$ dessen Element bestimmen kann. Dies folgt z.B. für $\mathcal{D} = \{1, 0\}$ und der Sprache $\mathcal{S}$ der Arithmetik aus der Unentscheidbarkeit der Arithmetik.)

Mit $[P]$ bezeichnen wir nun dasjenige $k \in \mathcal{D}$, für das $k \in P$ gilt. Somit erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} [P] = k & \Leftrightarrow & k \in P \\ [fP] & = & f([P]) \\ [P \triangleright Q] & = & [P] \triangleright [Q] \end{array}$$

'$[P]$' ist eine Kennzeichnung (definite description) eines Elements von $\mathcal{D}$. Nach [3], pp. 169 -172 gilt für beliebige Formeln $A(u)$:

$$A([P]) \ \Leftrightarrow\ \exists u\, (u \in P \wedge A(u)) \ \Leftrightarrow\ \forall u\, (u \in P \Rightarrow A(u)).$$

Hierdurch sind Kennzeichnungen aus Formeln eliminierbar.

Nun setzen wir noch voraus, dass $(\leq)$ eine Ordnungsrelation von $\mathcal{D}$ und in $\mathcal{S}$ darstellbar ist. Somit ist $(\mathcal{D}, \leq)$ eine geordnete Menge, und Formeln der Gestalt $u \leq v$ sind als Formeln von $\mathcal{S}$ definiert. Es gelte $0 \in \mathcal{D}$, $1 \in \mathcal{D}$ und $\forall u\ (0 \leq u \leq 1)$. Für jede Menge $M \subseteq \mathcal{D}$, die bez. $(\leq)$ ein Infimum (größte untere Schranke) bzw. ein Supremum (kleinste obere Schranke) hat, sei $\inf M$ dieses Infimum bzw. $\sup M$ dieses Supremum. (In diesem Falle ist das Symbol '$\inf M$' bzw. '$\sup M$' eine Kennzeichnung (s.o.).) Wir setzen $k \sqcap l := \inf\{k, l\}$ bzw. $k \sqcup l := \sup\{k, m\}$, falls dieses Infimum bzw. Supremum existiert.

Ist die Ordnung $(\leq)$ linear (d.h. gilt $\forall u, v\, (u \leq v \vee v \leq u)$), so ist die Existenz von $\inf M$ und $\sup M$ für endliche $M \subseteq \mathcal{D}$ trivial. Nun sei $\mathcal{D} \subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Aus Sicht der konstruktiven Analysis existieren dann $\inf M$ und $\sup M$ nur für spezielle unendliche $M \subseteq \mathcal{D}$; s. z.B. [2], p. 66, oder [5], Satz 2.7 p. 51.

Sei $R_y := \{u\colon (y, u) \in R\}$. Gilt $\forall y\, R_y \in \mathcal{E}$ und existiert $\inf\{u\colon \exists y\ u \in R_y\}$ bzw. $\sup\{u\colon \exists y\ u \in R_y\}$, dann sei

$$\begin{array}{rrcl} & \inf_y R_y & := & \{v\colon \inf\{u\colon \exists y\ u \in R_y\} = v\} \\ \text{bzw.} & \sup_y R_y & := & \{v\colon \sup\{u\colon \exists y\ u \in R_y\} = v\} \end{array}$$

Satz 1: Dann gehört auch $\inf_y R_y$ bzw. $\sup_y R_y$ zu $\mathcal{E}$, und es gilt

$$\begin{array}{rl} & \inf_y R_y = \{v\colon \forall y\ v \leq [R_y] \wedge \forall u\, (\forall y\ u \leq [R_y] \ \Rightarrow\ u \leq v)\} = \{\inf\{[R_y]\colon y \in \mathcal{C}\}\} \\ \text{bzw.} & \sup_y R_y = \{v\colon \forall y\ [R_y] \leq v \wedge \forall w\, (\forall y\, [R_y] \leq w \ \Rightarrow\ v \leq w)\} = \{\sup\{[R_y]\colon y \in \mathcal{C}\}\}. \end{array}$$

Beweis für 'sup' (bekannt): Man erhält nacheinander

$$\forall u\,(\exists y\, u \in R_y \Rightarrow u \leq v) \;\Leftrightarrow\; \forall y\,\forall u\,([R_y] = u \;\Rightarrow\; u \leq v) \;\Leftrightarrow\; \forall y\; [R_y] \leq v,$$

$$\begin{aligned} v \in \sup_y R_y \;&\Leftrightarrow\; v = \sup\{u\colon \exists y\; u \in R_y\} \\ &\Leftrightarrow\; \forall u\,(\exists y\, u \in R_y \;\Rightarrow\; u \leq v) \\ &\qquad \wedge\; \forall w\,(\forall u\,(\exists y\, u \in R_y \Rightarrow u \leq w) \;\Rightarrow\; v \leq w) \\ &\Leftrightarrow\; \forall y\,[R_y] \leq v \wedge \forall w\,(\forall y\,[R_y] \leq w \;\Rightarrow\; v \leq w). \quad \square \end{aligned}$$

Bezüglich der durch $P \leq Q :\Leftrightarrow [P] \leq [Q]$ definierten Ordnungsrelation zwischen Einermengen ist also $\inf_y R_y$ bzw. $\sup_y R_y$ das Infimum bzw. Supremum von $\{R_y : y \in \mathcal{C}\}$, falls $\inf\{u\colon \exists y\; u \in R_y\}$ bzw. $\sup\{u\colon \exists y\; u \in R_y\}$ existiert. Desgleichen gilt:
Ist $(\mathcal{D}, \leq, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband, so ist dies auch $(\mathcal{E}, \leq \sqcap, \sqcup)$.

Zur Subjunktion (Implikation): In der mehrwertigen Logik gibt es mehrere Vorschläge, einen 'Pseudosubjunktor' zur Imitation von '$\Rightarrow$' zu wählen. Wir gehen statt dessen von der Frage aus, für welche $\triangleright\colon \mathcal{D}^2 \to \mathcal{D}$ es Werte $k, l, m \in \mathcal{D}$ derart gibt, dass für beliebige $P, Q \in \mathcal{E}$ gilt

$$k \in P \;\wedge\; m \in (P \triangleright Q) \;\Rightarrow\; l \in Q,$$

sodass man - analog zum *modus ponens* - von $k \in P$ und $m \in (P \triangleright Q)$ auf $l \in Q$ schließen darf. Nach folgendem Satz 2 sind dies diejenigen $\triangleright$, für die es Werte k, l, m gibt sodass gilt

$$\forall v\; (k \triangleright v = m \;\Rightarrow\; v = l),$$

d.h. in deren quadratischer 'Wertetafel' jedes in der 'Zeile' k stehende Vorkommnis von m nur in der 'Spalte' l steht.

Damit der erwähnte Schluss angewandt werden kann, muss es $P, Q \in \mathcal{E}$ mit $k \in P$ und $m \in (P \triangleright Q)$ geben. Also muss es $u, v \in \mathcal{D}$ geben mit $u \in P, v \in Q$ und $u \triangleright v = m$. Wegen $k \in P$, also $l \in Q$, muss dann $u = k$, $v = l$, also $k \triangleright l = m$ gelten.

'Trivial' ist dabei der Fall, dass für alle P, Q gilt $m \in (P \triangleright Q) \Rightarrow l \in Q$. Nach dem folgenden Satz 3 ist dies genau dann der Fall, wenn $\forall u, v\; (u \triangleright v = m \;\Rightarrow\; v = l)$ gilt (d.h. wenn m in der gesamten Wertetafel von $\triangleright$ nur in Spalte l steht).

Ergebnis: Zum nichttrivialen Schließen eignen sich diejenigen Funktoren $\triangleright$, für die es Werte k, l, m gibt, sodass gilt

$$\forall v\; (k \triangleright v = m \;\Leftrightarrow\; v = l) \;\wedge\; \exists u, v\; (u \triangleright v = m \;\wedge\; v \neq l).$$

(Man vergleiche dies mit der üblichen Wertetafel für '$\Rightarrow$' mit $\mathcal{D} = \{0, 1\}$.)
Wir haben einige Sätze nachzutragen. Sie sind in einer Sprache 2. Stufe, die eine Erweiterung von $\mathcal{S}$ ist, formuliert:

Satz 2: $\forall P, Q \in \mathcal{E}.\, (k \in P \;\wedge\; m \in (P \triangleright Q) \Rightarrow l \in Q) \;\Leftrightarrow\; \forall v\, (k \triangleright v = m \Rightarrow v = l).$

Beweis: Zu ($\Rightarrow$): Vorausgesetzt sei $\forall P, Q\,(k\in P \ \wedge\ m\in(P\triangleright Q) \Rightarrow l\in Q)$ und $k\triangleright v = m$. Für $P := \{k\}$ und $Q := \{v\}$ gilt $k\in P$ und $v\in Q$, also $m\in(P\triangleright Q)$, also $l\in Q$, also $v = l$. Zu ($\Leftarrow$): Gilt $\forall v\,(k\triangleright v = m \Rightarrow v = l)$ sowie $k\in P$ und $m\in(P\triangleright Q)$, so gibt es u, v mit $u\in P$, $v\in Q$ und $u\triangleright v = m$. Dann gilt $u = k$, also $k\triangleright v = m$, also $v = l$, also $l\in Q$. $\square$

Satz 3: $\forall P, Q\in\mathcal{E}.\,(m\in(P\triangleright Q) \Rightarrow l\in Q) \ \Leftrightarrow\ \forall u, v\,(u\triangleright v = m \Rightarrow v = l)$.

Beweis: Zu ($\Rightarrow$): Vorausgesetzt sei $\forall P, Q\in\mathcal{E}.\,(m\in(P\triangleright Q) \Rightarrow l\in Q)$ und $u\triangleright v = m$. Für $P := \{u\}$ und $Q := \{v\}$ gilt $u\in P$, $v\in Q$, also $m\in(P\triangleright Q)$, also $l\in Q$, also $v = l$. Zu ($\Leftarrow$): Dies folgt aus Satz 1($\Leftarrow$), da es ein k mit $k\in P$ gibt. $\square$

Das Folgende ist (in anderer Form) aus der mehrwertigen Logik bekannt:

Satz 4: $1\in\inf_y R_y \ \Leftrightarrow\ \forall y\, 1\in R_y$.

Beweis: Zu ($\Rightarrow$): Es gelte $1\in\inf_y R_y$, d.h. $\inf\{u\colon \exists x\ u\in R_y\} = 1$.
(**Forderung**: Diese Gleichung impliziere die Existenz von $\inf\{u\colon \exists x\ uR_y\}$.)
Dann ist 1 eine untere Schranke von $\{u : \exists y\, u\in R_y\}$. Somit erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned}
&\forall u\,(\exists y\, u\in R_y \Rightarrow 1\le u \Rightarrow u = 1),\\
&\forall u\,\forall y\,(u\in R_y \Rightarrow 1\in R_y),\\
&\forall y\,(\exists u\, u\in R_y \Rightarrow 1\in R_y),\\
&\forall y\, 1\in R_y \quad (\text{da } \forall y\,\exists u\, u\in R_y).
\end{aligned}$$

Zu ($\Leftarrow$): Es gelte $\forall y\, 1\in R_y$, also wieder $\forall u\,(\exists y\, u\in R_y \Rightarrow u = 1 \Rightarrow 1\le u)$. Somit ist 1 eine untere Schranke von $\{u\colon \exists y\, u\in R_y\}$, und zwar die größte. Also gilt $1\in\inf_y R_y$. $\square$

Anmerkung: Die im Folgenden stehende Bedingung $\exists w < 1.\,\forall u < 1.\ u\le w$ ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\mathcal{D}$ endlich und ($\le$) linear ist.

Satz 5: $1\in\sup_y R_y \ \Leftrightarrow\ \exists y\, 1\in R_y$, falls $\exists w < 1.\,\forall u < 1.\ u\le w$.

Zum Beweis werden wir folgendes Lemma verwenden:

Lemma: $\exists w < 1.\,\forall u < 1.\ u\le w \ \Rightarrow\ \forall M\subseteq\mathcal{D}.\,(\sup M = 1 \ \Rightarrow\ 1\in M)$.

Beweis: Aus $m < 1$, $\forall u < 1.\, u\le m$, $M\subseteq\mathcal{D}$, $\sup M = 1$ folgt nacheinander:
$\forall v\,(\forall u\in M.\, u\le v \ \Rightarrow\ v = 1)$, $\forall v < 1.\,\exists u\in M.\ u\not\le v$, $\exists u\in M.\ u\not\le m$,
$\exists u\in M.\ u = 1$, $1\in M$. $\square$

Beweis von Satz 5: Aus $\exists w < 1.\,\forall u < 1.\ u\le w$ folgt nach dem letzten Lemma

$$1\in\sup_y R_y \ \Leftrightarrow\ \sup\{u\colon \exists y\ u\in R_y\} = 1 \ \Leftrightarrow\ 1\in\{u\colon \exists y\ u\in R_y\} \ \Leftrightarrow\ \exists y\ 1\in R_y. \quad \square$$

Ist die Ordnung ($\le$) linear, also $k\sqcap l = \min\{k, l\}$ und $k\sqcup l = \max\{k, l\}$, dann gilt analog zu Satz 4 und Satz 5:

$$\begin{aligned}
1\in(P\sqcap Q) \ &\Leftrightarrow\ 1\in P\wedge 1\in Q.\\
1\in(P\sqcup Q) \ &\Leftrightarrow\ 1\in P\vee 1\in Q.
\end{aligned}$$

Beweis zu ($\sqcup$) ($\Rightarrow$): Es gelte $1 \in (P \sqcup Q)$. Dann gibt es u, v mit $u \in P,\ v \in Q,\ u \sqcup v = 1$, also $u = 1 \vee v = 1$. Daraus folgt $1 \in P \vee 1 \in Q$. □

§2: Interpretation unscharfer Relationen als Funktionen

Nun wollen wir frühere Definitionen übertragen auf auf Funktionen von $\mathcal{C}^n$ in $\mathcal{D}$, die als $(n+1)$-stellige rechtseindeutige Relationen in $\mathcal{S}$ darstellbar sind. Wir halten $n \geq 1$ fest. Als Metavariable verwenden wir nun: P, Q für derartige Funktionen, $(\underline{c})$ für Elemente von $\mathcal{C}^n$, und wieder k, l, m für Elemente von $\mathcal{D}$. Zu jedem $\underline{c}$ gibt es also genau ein k, für das $(\underline{c}, k) \in P$ gilt. Dieses k kennzeichnen wir (wie üblich) mit $P(\underline{c})$. Somit gilt

$$P(\underline{c}) = k \;\Leftrightarrow\; (\underline{c}, k) \in P.$$

Für die Einermenge $\{u\colon (\underline{c}, u) \in P\}$ gilt nach §1: $[\{u\colon (\underline{c}, u) \in P\}] = k \Leftrightarrow (\underline{c}, k) \in P$, also $P(\underline{c}) = [\{u\colon (\underline{c}, u) \in P\}]$. - Ferner setzen wir (wie üblich)

$$\begin{array}{rcll} P = Q & :\Leftrightarrow & \forall \underline{x}\ P(\underline{x}) = Q(\underline{x}) & \\ P \leq Q & :\Leftrightarrow & \forall \underline{x}\ P(\underline{x}) \leq Q(\underline{x}) & \\ f \circ P & := & ((\underline{x}) \mapsto f(P(\underline{x}))) & \text{für } f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}\ \ (\circ\colon \text{Verkettung}) \\ P \triangleright Q & := & ((\underline{x}) \mapsto P(\underline{x}) \triangleright Q(\underline{x})) & \text{für } \triangleright\colon \mathcal{D}^2 \to \mathcal{D}. \end{array}$$

Dabei haben die Symbole $=, \leq, \triangleright$ auf der linken Seite andere Bedeutungen als auf der rechten Seite. $P \triangleright Q$ ist die Verkettung $\triangleright \circ (P, Q)$.

In der '**fuzzy logic**' entsprechen den durch P, Q mitgeteilten Funktionen sogenannte '**unscharfe Relationen**' und im Falle $n = 1$ '**unscharfe Mengen**'. Demgemäß schreibt man etwa $P \subseteq Q$, $P \cap Q$ und $P \cup Q$ statt $P \leq Q$, $P \sqcap Q$ und $P \sqcup Q$. Im Falle $P(\underline{c}) = k$ entspricht k dem '**Grad des Zutreffens**' der durch $\{u\colon P(\underline{c}, u)\}$ interpretierten Aussage. Das Wort "fuzzy" deutet an, dass dieser in [0,1] gelegene Grad als 'variabel' aufgefasst wird. (Vgl. [1].)

Ferner sei $R_y := \{(\underline{x}, u) : (\underline{x}, y, u) \in R\}$ mit einer $(n+2)$-stelligen rechtseindeutigen Relation R, die in $\mathcal{S}$ darstellbar ist und für die $\sup\{u : \exists y\, R_y(\underline{x}) = u\}$ für alle Werte von $\underline{x}$ existiert. Dann setzen wir

$$\begin{array}{rcl} \sup_y R_y(\underline{x}) & := & \sup\{R_y(\underline{x}) :\ y \in \mathcal{C}\} := \sup\{u : \exists y\, R_y(\underline{x}) = u\}, \\ \sup_y R_y & := & ((\underline{x}) \mapsto \sup_y R_y(\underline{x})). \end{array}$$

Die definierten Funktionen $f \circ P$, $P \triangleright Q$, $\sup_y R_y$ lassen sich wie folgt als Teilrelationen von $\mathcal{C}^n \times \mathcal{D}$ durch Formeln von $\mathcal{S}$ darstellen:

$$\begin{array}{rcl} f \circ P & = & \{(\underline{x}, w) : \exists u\, ((\underline{x}, u) \in P\ \wedge\ f(u) = w)\} \\ P \triangleright Q & = & \{(\underline{x}, w) : \exists u, v\, ((\underline{x}, u) \in P\ \wedge\ (\underline{x}, v) \in Q\ \wedge\ u \triangleright v = w)\} \\ \sup_y R_y & = & \{(\underline{x}, w) : \forall y\, R_y(\underline{x}) \leq w\ \wedge\ \forall v\, \big(\forall y\, R_y(\underline{x}) \leq v\ \Rightarrow\ w \leq v\big)\}. \end{array}$$

Beweis für $\sup_y R_y$: Nach §1, Satz 1 gilt:

$$\begin{array}{rcl} (\underline{x}, w) \in \sup_y R_y & \Leftrightarrow & (\sup_y R_y)(\underline{x}) = w\ \Leftrightarrow\ \sup_y R_y(\underline{x}) = w \\ & \Leftrightarrow & \forall y\, R_y(\underline{x}) \leq w\ \wedge\ \forall v\, \big(\forall y\, R_y(\underline{x}) \leq v \Rightarrow w \leq v\big).\ \square \end{array}$$

Im Bereich der Funktionen von $\mathcal{C}^n$ in $\mathcal{D}$ ist $\sup_y R_y$ tatsächlich ein Suprem. Dies ergibt sich bekanntlich wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
\text{Für } S := ((\underline{x}) \mapsto \sup_y R_y(\underline{x})) \text{ gilt } \forall \underline{x}\ \ S(\underline{x}) = \sup_y R_y(\underline{x}), & \text{also} \\
\forall \underline{x} \Big(\forall y\, R_y(\underline{x}) \leq S(\underline{x}) \ \wedge\ \forall Q \left(\forall y\, R_y(\underline{x}) \leq Q(\underline{x}) \Rightarrow S(\underline{x}) \leq Q(\underline{x})\right)\Big), & \text{also} \\
\forall y\, R_y \leq S \ \wedge\ \forall Q \left(\forall \underline{x}\, \forall y\, R_y(\underline{x}) \leq Q(\underline{x}) \Rightarrow \forall \underline{x}\, S(\underline{x}) \leq Q(\underline{x})\right), & \text{also} \\
\forall y\, R_y \leq S \ \wedge\ \forall Q\, (\forall y\, R_y \leq Q \Rightarrow S \leq Q). &
\end{array}$$

Entsprechende Ergebnisse mit 'inf' statt 'sup' erhält man unter der Voraussetzung, dass $\inf\{u : \exists y\, R_y(\underline{x}) = u\}$ für alle Werte von $\underline{x}$ existiert.

Setzt man zur Interpretation der Element-Beziehung noch $(\underline{c})\ \varepsilon\ P := \{u : (\underline{c}, u) \in P\}$, so erhält man $[(\underline{c})\ \varepsilon\ P] = P(\underline{c})$ ("$(\underline{c})\ \varepsilon\ P$ trifft mit dem Grad $P(\underline{c})$ zu"), also

$$\begin{array}{rcl}
P \leq_n Q & \Leftrightarrow & \forall \underline{x}\ [(\underline{x})\ \varepsilon\ P] \leq_{\mathcal{D}} [(\underline{x})\ \varepsilon\ Q] \\
 & \Leftrightarrow & \forall \underline{x}\ ((\underline{x})\ \varepsilon\ P) \leq_0 ((\underline{x})\ \varepsilon\ Q),
\end{array}$$

wobei $(\leq_D)$ bzw. $(\leq_n)$ die bisher mit $(\leq)$ bezeichnete Relation zwischen Elementen von $\mathcal{D}$ bzw. n-stelligen Funktionen (Einermengen für $n = 0$) sei.

Die vorstehenden Ausführungen wurden angeregt von einem Vortrag, den Christoph Lübbert am 16. 04. 2015 im Ernst Schröder Zentrum der TU-Darmstadt gehalten hat. Er hat dort auch instruktive Beispiele von Bewertungsverbänden für mehrwertige Logiken angegeben.
(Siehe: " 'Unscharfe Mengen' in einer Mehrwertigen Logik" in www.cl-diesunddas.de.)

Literatur

[1] Goos, G.: Unscharfe Mengen, SS 2002: Einführung.
[2] Lorenzen, P.: Differential und Integral, Akad. Verlagsges. Frankfurt a.M, 1965
[3] Lorenzen, P.: Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie, B.I. Mannheim 1986.
[4] Russell, B.: On Denoting. Mind 14, 1905, 497-493.
[5] Zahn, P.: Ein konstruktiver Weg zur Maßtheorie und Funktionalanalysis, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt 1978.
[6] Zahn, P.: Assertion Games to Justify Classical Reasoning, tuprint 2018.