

# **Modellierung und Simulation der stationären und instationären Strömung in Diffusoren**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur  
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

## **Dissertation**

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Mauricio Córdova**

aus Vitacura, Santiago, Chile

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. B. Stoffel
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. rer. nat. M. Schäfer
Tag der Einreichung:	28.11.2006
Tag der Mündlichen Prüfung:	31.01.2007

zum Ayrton  
(mein Hund)

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbständig und ausschließlich unter Verwendung der genannten Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Mauricio Córdova

Darmstadt, 28.11.2006

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der Technischen Universität Darmstadt.

An erster Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn PROF. DR.-ING. BERND STOFFEL, Leiter des Fachgebiets Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der Technischen Universität Darmstadt, für sein Engagement gegenüber den chilenischen Studenten und Mitarbeitern sowie für die Möglichkeit, meine Promotion in Deutschland durchzuführen, bedanken.

Herrn PROF. DR. RER. NAT. MICHAEL SCHÄFER, Leiter des Fachgebiets Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt, danke ich für die Übernahme des Korreferats und die kritische Durchsicht der Arbeit.

Mein Dank geht auch an alle Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen des Fachgebiets Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik für die gute Zusammenarbeit während meiner Zeit am Fachgebiet. Besonderen Dank möchte ich auch an Herrn DIPL.-ING. BERTHOLD MATYSCHOK für die permanente Unterstützung und an die Herren DR.-ING. BERND BECKER und DR.-ING. MARC GUGAU für die zahlreichen fachlichen Diskussionen sowie an die Herren DIPL.-WIRTSCH.-ING. PABLO RODRÍGUEZ P., DIPL.-ING. CHRISTIAN MÜLLER, DIPL.-ING. CHRISTIAN SCHAAD und DIPL.-ING. JÜRGEN RAMBO für die sprachliche Durchsicht dieser Arbeit richten.

Neben meinem Freundeskreis hier in Deutschland möchte ich vor allem auch dem „CLUB DE TOBI“ und meiner Familie in Chile danken, die mir trotz der Ferne immer den nötigen Rückhalt gegeben haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen und Abkürzungen</b>	<b>iv</b>
<b>Tabellen</b>	<b>ix</b>
<b>Abbildungen</b>	<b>xii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1 Erhaltungsgleichungen . . . . .	4
2.2 Geschwindigkeitsprofile . . . . .	6
2.3 Turbulentes Geschwindigkeitsprofil, innerer Bereich des Grenzschicht- profils . . . . .	7
2.4 Diffusorströmung . . . . .	9
2.4.1 Bauformen . . . . .	11
2.4.2 Einlaufbedingungen . . . . .	14
<b>3 Numerik</b>	<b>16</b>
3.1 Turbulenzmodellierung . . . . .	16
3.2 Statistische Turbulenzmodellierung . . . . .	19
3.2.1 Mittelung der Grundgleichungen . . . . .	19
3.2.2 Wirbelviskositätsmodelle . . . . .	21

3.3	Wandbehandlung . . . . .	27
3.3.1	Wandfunktion . . . . .	28
3.3.2	„LOW-RE“ Erweiterung . . . . .	29
3.4	Produktionsterm und seine Korrekturen . . . . .	31
3.5	Diskretisierungsverfahren . . . . .	32
3.5.1	Instationäre Terme . . . . .	35
3.5.2	Diffusive Terme . . . . .	36
3.5.3	Konvektive Terme . . . . .	36
3.5.4	Interpolationsverfahren . . . . .	37
3.6	Druckkorrekturverfahren . . . . .	40
3.7	Randbedingungen . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Validierung der Turbulenzmodelle</b>	<b>43</b>
4.1	Beidseitig erweiternder Diffusor ohne Ablösung . . . . .	44
4.1.1	Beschreibung der Geometrie . . . . .	44
4.1.2	Untersuchung der Gitterunabhängigkeit . . . . .	45
4.1.3	Einfluss der Randbedingungen . . . . .	46
4.1.4	Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	52
4.1.5	Grenzschichtdicke . . . . .	56
4.1.6	Druckbeiwert . . . . .	61
4.1.7	Fazit für den beidseitig erweiternden Diffusor ohne Ablösung . . . . .	62
4.2	Einseitig erweiternde Kanaldiffusoren mit Ablösung . . . . .	64
4.2.1	Beschreibung der Geometrien . . . . .	64
4.2.2	Untersuchung der Gitterunabhängigkeit . . . . .	65
4.2.3	Kontur der Ablöseblase . . . . .	67
4.2.4	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile . . . . .	69

4.2.5	Vergleich der Turbulenz . . . . .	72
4.2.6	Variation der Turbulenzintensität am Eintritt . . . . .	72
4.2.7	Fazit für 2-dimensionale Diffusoren . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Numerische Untersuchung von Ringdiffusoren</b>	<b>76</b>
5.1	Untersuchung der Zelldichte in Umfangsrichtung . . . . .	76
5.1.1	Beschreibung der Versuchsanlage . . . . .	76
5.1.2	Berechnung des Diffusorgebietes . . . . .	78
5.1.3	Verläufe des Drucks und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit an den Diffusorwänden . . . . .	79
5.1.4	Schwankungsgeschwindigkeit . . . . .	81
5.2	Brennkammerdiffusor . . . . .	83
5.2.1	Beschreibung der Versuchsanlage . . . . .	83
5.2.2	Größe des Berechnungsgebietes (Umfang) . . . . .	85
5.2.3	Randbedingungen am Eintritt . . . . .	86
5.2.4	Instationäre Simulationen . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>102</b>
	<b>Literatur</b>	<b>105</b>

# Formel- und Abkürzungsverzeichnis

## Lateinische Großbuchstaben

	Einheit	
$AR$	$[-]$	Flächenverhältnis
$C_f$	$[-]$	Schubspannungbeiwert
$C_p$	$[-]$	Druckbeiwert
$C_\mu$	$[-]$	Proportionalitätskonstante
$ER$	$[-]$	Expansionsrate
$H$	$[m]$	Kanalhöhe
$H_{12}$	$[-]$	Formparameter
$L$	$[m]$	Diffusorlänge
$L_T$	$[m]$	Integrales turbulentes Längemaß
$P_k$	$\left[\frac{m^2}{s^3}\right]$	Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie
$Ma$	$[-]$	Machzahl
$ME$	$[-]$	Messebene
$R$	$[m]$	Außenwandradius
$Re$	$[-]$	Reynoldszahl
$St$	$[-]$	Strouhalzahl
$\vec{S}$	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Dehnungstensor
$Tu$	$[\%]$	Turbulente Intensität
$T$	$[s]$	Periode
$U$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Turbulentes Geschwindigkeitmaß
$U_T$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Geschwindigkeitmagnitude



## Lateinische Kleinbuchstaben

	Einheit	
$ar$	$[-]$	Seitenverhältnis
$c_{fl}$	$[\%]$	Wölbung
$f$	$[Hz]$	Frequenz
$f_{\mu}$	$[-]$	Dämpfungsfunktion
$f_1$	$[-]$	Dämpfungsfunktion
$f_2$	$[-]$	Dämpfungsfunktion
$k$	$\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	Turbulente kinetische Energie
$p$	$[Pa]$	Statischer Druck
$t$	$[s]$	Zeit
$\vec{u}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Vektorielle Geschwindigkeit
$u'$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Schwankungsgeschwindigkeit
$u^+$	$[-]$	Dimensionslose Geschwindigkeit
$u_{\tau}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$x_R$	$[m]$	Wiederanlegelänge
$y_P$	$[m]$	Wandabstand
$y^+$	$[-]$	Dimensionsloser Wandabstand

## Griechische Buchstaben

	Einheit	
$\alpha$	$[rad]$	Öffnungswinkel
$\delta$	$[m]$	Grenzschichtdicke
$\delta_1$	$[m]$	Verdrängungsdicke
$\delta_2$	$[m]$	Impulsverlustdicke
$\delta_3$	$[m]$	Energieverlustdicke
$\delta_{ij}$	$[-]$	Kronecker-Delta
$\epsilon$	$\left[\frac{m^2}{s^3}\right]$	Dissipationsrate
$\epsilon_0$	$[-]$	Dämpfungsfunktion
$\mu$	$\left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right]$	Molekulare Viskosität

$\nu$	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$	Kinematische Viskosität
$\nu_t$	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$	Wirbelviskosität
$\rho$	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Dichte
$\rho_\theta$	$\left[\frac{zellen}{rad}\right]$	Zellendichte im Umfangsrichtung
$\tau_w$	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	Newtonsche Wandschubspannung
$\theta$	$[rad]$	Kreisbogenstück, Winkelposition
$\omega$	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Spezifische Dissipation
$\vec{\Omega}$	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Rotationstensor

## Indizes

$A$	Austritt
$E$	Eintritt
$max$	Maximaler Wert
$min$	Minimaler Wert
$w$	An der Wand
$x, y, z$	Koordinaten des kartesischen Systems
$z, r, \theta$	Koordinaten des zylindrischem Systems
$\infty$	in der freien Strömung

## Abkürzungen

AB	low-Reynolds $k - \epsilon$ Abid
BSL	„BASELINE“-Modell
CFD	„COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS“
CH	low-Reynolds $k - \epsilon$ Chien

FLB	low-Reynolds $k - \epsilon$ Fan-Lakshmirayana-Barnett
LB	low-Reynolds $k - \epsilon$ Lam-Bremhorst
LSH	low-Reynolds $k - \epsilon$ Launder-Sharma
RANS	„REYNOLDS AVERAGED NAVIER-STOKES“
WF	Wand-Funktion
WS	Wang-Stoffel Modifikation
W88	Standard $k - \omega$
W88LR	low-Reynolds $k - \omega$ '88
W98	Standard $k - \omega$ '98
W98LR	low-Reynolds $k - \omega$ '98

# Tabellenverzeichnis

3.1	Konstanten des $k - \omega$ -Modells . . . . .	25
3.2	Konstanten des BSL- und SST-Modells . . . . .	26
3.3	Zusatzterme und Modellkonstanten der verwendeten linearen low-Re $k - \epsilon$ Modelle . . . . .	30
3.4	Erweiterungsfunktionen der verwendeten linearen low-Re $k - \epsilon$ Modelle .	30
4.1	Dimensionen der untersuchten Gitter für den beidseitig erweiternder Diffusor . . . . .	46
4.2	Abweichungen berechneter Variablen für verschieden feine Gitter bei dem beidseitig erweiternden Diffusor . . . . .	47
4.3	Dimensionen des Stromaufblockes . . . . .	49
4.4	Quadratisches Mittel [%] des Geschwindigkeitsprofilabstandes . . . . .	52
4.5	Verdrängungs- ( $\delta_1$ ) und Impulsverlustdicke ( $\delta_2$ ) . . . . .	57
4.6	Formparameterabweichung ( $H_{12}$ ) [%] . . . . .	61
4.7	Druckbeiwertverlauf ( $C_p$ ) . . . . .	62
4.8	Dimensionen der untersuchten Gitter für den einseitig erweiternder Dif- fusor . . . . .	65
4.9	Abweichungen berechneter Variablen für verschieden feine Gitter bei dem einseitig erweiternden Diffusor . . . . .	66
4.10	Wiederanlegelänge ( $\frac{x_B}{H}$ ) für die verschiedenen Konfigurationen und Tur- bulenzmodelle . . . . .	67
4.11	Abweichung [ $\frac{m}{s}$ ] der Numerik zum Experiment . . . . .	69
4.12	Abweichung der maximalen negativen Rückströmgeschwindigkeit . . . . .	71
5.1	Abweichung [%] der verschiedenen Umfangszellendichten gegen $\rho_\theta = \frac{180}{\pi}$	79
5.2	NACA65 Profilschnitte . . . . .	84
5.3	Varianten für ein 40-Speichenrad bei einer Frequenz von 20 [Hz] . . . . .	85

5.4	Blockdimensionen der untersuchten ME0-Gewinnungsmodelle . . . . .	87
5.5	Abweichungen [%] der Numerik zum Experiment bei der turbulenten In- tensität und Geschwindigkeit . . . . .	92
5.6	Blockdimensionen der untersuchten Modelle . . . . .	95
5.7	Abweichungen zwischen Numerik und Experiment in Messebene 1 . . . .	99

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Grenzschicht-, Verdrängungs- und Impulsverlustdicken . . . . .	6
2.2	Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht . . . . .	8
2.3	Technische Diffusoranwendungen . . . . .	10
2.4	Schematische Darstellung einer Störung durch eine ebene schräge Stufe	11
2.5	Charakteristische Diffusorgrößen . . . . .	12
2.6	Optimale Geometrien zum Druckrückgewinnung . . . . .	13
2.7	Verlauf des Umsetzungsgrades in Strömungsrichtung . . . . .	13
3.1	Energiespektrum und Arbeitsbereich der Modelle . . . . .	16
3.2	Diskretisierung des geometrischen Rechengebietes . . . . .	32
3.3	Kontrollvolumen in zweidimensionaler Darstellung . . . . .	33
3.4	Eindimensionale Betrachtung der Kontrollvolumina . . . . .	38
3.5	Verschiedene Interpolationsverfahren im NV-Diagramm . . . . .	39
3.6	Zweidimensionale periodische Interfaces . . . . .	42
4.1	Untersuchte zweidimensionale Gitter . . . . .	44
4.2	Beidseitige erweiternde Diffusorgeometrie . . . . .	45
4.3	Turbulenzverteilung der untersuchten Nachdiffusorgebiete . . . . .	48
4.4	Relativwerte der Geschwindigkeit . . . . .	49
4.5	Relativwerte der Turbulenz . . . . .	50
4.6	Verlauf des Druckbeiwertes für verschiedene Umgebungsblöcke . . . . .	51
4.7	Einfluss der Geschwindigkeitsprofile am Eintritt . . . . .	51
4.8	Geschwindigkeitsprofile an Messebenen für die Wand-Funktion Modelle .	53

4.9	Geschwindigkeitsprofile an Messebenen für die $k - \epsilon$ low-Re Modelle . . .	54
4.10	Geschwindigkeitsprofile an Messebenen für die $k - \omega$ low-Re Modelle . . .	55
4.11	Gitterbehandlung am Diffusoranfang (Wand Funktion) . . . . .	55
4.12	Verlauf der Verdrängungsdicke in Strömungsrichtung . . . . .	58
4.13	Verlauf der Impulsverlustdicke in Strömungsrichtung . . . . .	59
4.14	Verlauf des Formparameters in Strömungsrichtung . . . . .	60
4.15	Verlauf des Druckbeiwertes ( $C_p$ ) . . . . .	63
4.16	Einseitig erweiternde Diffusorgeometrie . . . . .	64
4.17	Normiertes Felde der Axialgeschwindigkeit . . . . .	65
4.18	Ablöseblasenkontur für $Re = 15 \cdot 10^3$ . . . . .	68
4.19	Profilverläufe der normierten Geschwindigkeit ( $\frac{u}{U}$ ) für verschiedene Stufenwinkel an Kanalposition $\frac{x}{H} = 5$ bei $Re = 47 \cdot 10^3$ . . . . .	70
4.20	Profilverläufe der maximalen negativen Rückströmgeschwindigkeit . . .	71
4.21	Verlauf des Turbulenzgrades für $Re = 47 \cdot 10^3$ . . . . .	73
4.22	Verlauf der maximalen Turbulenzgrade ( $Tu$ ) über $\frac{x}{H}$ bei $Re = 15 \cdot 10^3$ und $\alpha = 25^\circ$ . . . . .	74
4.23	Variation der Turbulenzintensität am Eintritt . . . . .	74
5.1	Modellierter Axialverdichter . . . . .	77
5.2	Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Leitrad . . . . .	78
5.3	Vergleich verschiedener Diffusoren . . . . .	79
5.4	Verlauf des statischen Druckes über der Länge $\frac{z}{H}$ des Diffusors . . . . .	80
5.5	Ermittelte Wandschubspannungsgeschwindigkeit über dem Strömungsweg . . . . .	80
5.6	Radialer Verlauf des axialen Schwankungsterms der Geschwindigkeit . .	81
5.7	Radialer Verlauf des radialen Schwankungsterms der Geschwindigkeit .	81
5.8	Modellierte Axialverdichter . . . . .	83
5.9	Modellierte Geometrie mit dargestellten Messebenen . . . . .	86

5.10 Darstellung der vorhergesagten turbulenten Intensität mit Druckkonturen . . . . .	87
5.11 Verlauf des Druckbeiwertes ( $C_P$ ) . . . . .	88
5.12 Erhaltenes Druckfeld und Stromlinien in Totwassergebiet . . . . .	89
5.13 Verlauf der Geschwindigkeitsprofile in Umfangsrichtung für verschiedene Radialpositionen in ME1 . . . . .	89
5.14 Radialer Verlauf der Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Umfangspositionen in ME1 . . . . .	90
5.15 Radialer Verlauf der Profile der turbulenten Intensität für verschiedene Umfangspositionen in ME1 . . . . .	91
5.16 Verlauf der Profile der turbulenten Intensität in Umfangsrichtung für verschiedene Radialpositionen in ME1 . . . . .	92
5.17 Bildung der Blöcke des untersuchten Modells . . . . .	94
5.18 Behandlung der Schaufeln . . . . .	96
5.19 Behandlung des Beginns des Brennkammer-Vorraums . . . . .	96
5.20 Behandlung der Brennkammer und des Flammrohrs . . . . .	97
5.21 Darstellung der vorhergesagten turbulenten Intensität für das Wandfunktion Modells . . . . .	97
5.22 Geschwindigkeitsfelder der drei Komponenten sowie Stromlinien . . . . .	98
5.23 Axialkomponente der Geschwindigkeit . . . . .	98
5.24 Zeitgemittelte Geschwindigkeitsprofile in Messebene 2 . . . . .	99
5.25 Verlauf der Geschwindigkeitsprofile bei verschiedenen Zeitschritten . . . . .	100
5.26 Verlauf der turbulenten Intensität bei verschiedenen Zeitschritten . . . . .	101



# Kapitel 1

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Untersuchung von Diffusoren. Diffusoren sind wichtige Teile von Verdichtern und Turbinen. In Gasturbinen von Kraftwerken sowie Flugantrieben ist der Diffusor zwischen der letzten Verdichterstufe und der Brennkammer in Hinsicht auf die Druckrückgewinnung sehr wichtig für den ganzen Prozess.

Mit der Entwicklung der Methoden des „COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS“ (*CFD*) ergibt sich die Möglichkeit der Betrachtung von inneren Strömungen in Verdichtern und Gasturbinen im Vergleich zu realen Experimenten, die mit der fortschreitenden Entwicklung der Rechner-technik in der Zukunft möglicherweise seltener erforderlich sein werden. [22].

In Bezug auf die erforderliche Rechnerleistung lassen sich die turbulenten Anwendungen mittels direkter numerischer Simulation (DNS) der Navier-Stokes Gleichungen, einer Grobstruktursimulation (LES), wobei die kleinen Strukturen gefiltert werden oder mit der Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) berechnen. Wegen der erforderlichen Rechnerleistung bei komplexen Strömungen werden die DNS- und die LES-Verfahren auf einfache Geometrien mit einer Reynoldszahl in der Größenordnung von  $Re = 10^5$  beschränkt. Diese Einschränkung kann durch die Modellierung der Turbulenz gelöst werden.

Leider zeigt die bisherige Literatur, dass es kein universelles Turbulenzmodell für technische Strömungen gibt. Eigenschaften instationärer Strukturen können jedoch je nach Frequenz mit Hilfe eines statistisch gemittelten Ansatzes nur eingeschränkt wiedergegeben werden. Deswegen besteht eine wachsende Notwendigkeit der geeigneten numerischen Modellierung und Berechnungen von Strömungen in entsprechenden Diffusoren. Dabei gibt es viele Variationen innerhalb der statistischen Modelle. Diese haben verschiedene Vor- und Nachteile, wie z.B. in Bezug auf die erforderliche Rech-

nerleistung oder das Vorhersagepotential.

Die Arbeit befasst sich im Besonderen mit der Genauigkeit von verschiedenen linearen Turbulenzmodellen für Luftströmungen durch Diffusoren und der Validierung von Turbulenzmodellen für die Strömung mit und ohne Ablösung in Diffusoren. Dies wird durch die Anwendung des  $\mathcal{NS2D}$ - und  $\mathcal{NS3D}$ -Codes erreicht, der durch **Schilling und Skoda** [54] an der Technischen Universität München entwickelt wurde. Die grundsätzlichen numerischen Eigenschaften des entsprechenden  $CFD$ -Codes basieren auf dem vereinfachten Code von **Ferziger und Perić** [12], der im Zusammenhang der Blockstrukturierung mit Hilfe von MPI-Bibliotheken parallelisiert wurde.

In Rahmen der Untersuchungen von **Thurso** [61] und **Breitbach** [5] wurde die Verfügbarkeit der Turbulenzmodelle sowie die Wandbehandlung im  $CFD$ -Code implementiert. In Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die Untersuchungen auf Wirbelviskositätsmodelle begrenzt, die ohne Intermittenzansätze auf transitionale Strömungen angewendet werden können.

Entsprechend der Dissertation von **Unger** [62] werden die zu der Zwei-Gleichungs-Familie gehörigen Turbulenzmodelle beschrieben, im Besonderen die  $k - \epsilon$ - und die  $k - \omega$ -Modelle sowie zusätzlich die hybridischen Modell von **Menter** [37] [36] und die low-Reynoldszahl-Erweiterungen von Abid, Chien, Fan et al., Lam und Bremhorst, und Launder und Sharma. Weiter wurde der Einfluss der Modifizierung des Produktionsterms der turbulenten kinetischen Energie von **Kato und Launder** [24] nach **Wang und Stoffel** [65] an dieser Strömungsart überprüft.

Die vorliegende Arbeit besteht somit aus einer numerischen Analyse der instationären und inkompressiblen Strömung in Diffusoren von Turbomaschinen, sowie darin, eine Methode zu finden, diese komplexen Strömungen zu simulieren. Dieser Zweck wird durch zwei Hauptaspekte erreicht: durch die Validierung oder Studie von Turbulenzmodellen für Strömungen durch Diffusoren und durch die Untersuchung des Einflusses der Wang-Stoffel Modifikation. Da die Möglichkeiten verschiedener Turbulenzmodelle untersucht wurden, steigt der Komplexitätsgrad der untersuchten Luftströmungen durch die Diffusoren innerhalb der Arbeit.

Die untersuchten Fälle bestehen aus Kanaldiffusoren und aus Ringdiffusoren. Deren Strömungen konnten als zwei- bzw. dreidimensional charakterisiert werden, weshalb die Simulationen mit angepasstem Code durchgeführt wurden.

Nach einer grundsätzlichen Betrachtung turbulenter Strömungen in Kapitel 2 werden numerische Simulationsarten in Kapitel 3 beschrieben. Dann wird auf die verwen-

deten Verfahren zur Modellierung der Strömung bzw. der Kopplung von Strömung und Struktur eingegangen.

Die Ergebnisse der numerischen Simulationen sind in vier Teile gegliedert: Zunächst werden in Kapitel 4 die untersuchten Strömungen durch Kanaldiffusoren diskutiert. Dieses Strömungsverhalten kann als ein stationärphänomen behandelt werden, weswegen im diesem Teil der Arbeit stationäre Berechnungen durchgeführt wurden. Die Simulationsbeispiele bestehen aus einem beidseitig erweiternden Diffusor [50] ohne Ablöseblase als erstem Teil, und einem einseitig erweiternden Diffusor [31] mit vorhandener Ablöseblase als zweitem Teil.

Es folgt in Kapitel 5 als Ergebniss die dreidimensionale Untersuchung der Ringdiffusoren. Hierfür wurden in stationäre [17] und instationäre Berechnungen für den ersten und den zweiten untersuchten Fall durchgeführt. Die instationäre Simulation besteht in der Nachrechnung der Strömung im Diffusor der Versuchsanlage von **Becker** [3].

Schließlich werden in Kapitel 6 die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Erhaltungsgleichungen

Das Verhalten einer Strömung wird in der Kontinuumsmechanik durch die mathematische Beschreibung der Masse- (2.1), Impuls- (2.2) und Energieerhaltungsgleichung (2.3) für beliebige Koordinatensysteme vollständig definiert.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{k} + \nabla \cdot \vec{T} \quad (2.2)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho h_0) = \nabla p + \rho \vec{k} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot T) - \nabla \cdot \vec{q} \quad (2.3)$$

Darin sind  $t$  die Zeit,  $\vec{u}$  die Geschwindigkeit,  $p$  der statische Druck,  $\vec{q}$  der Wärmestromvektor und  $\vec{T}$  der Reibungsspannungstensor.

Der Wärmestromvektor  $\vec{q}$  kann aus dem Produkt von Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und dem Gradienten der Temperatur  $\vartheta$  unter der Verwendung des Fourierschen Gesetzes der Energiebilanz (2.3) bestimmt werden:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla \vartheta \quad (2.4)$$

Hierbei wird die Gültigkeit der Stokesschen Hypothese vorausgesetzt. Der Reibungsspannungstensor  $\vec{T}$  wird durch die Beziehung (2.5) für Newtonsche Fluide definiert.

$$\vec{T} = 2\mu \vec{E} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{u}) \cdot \vec{I} \quad (2.5)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

wobei  $\mu$  die molekulare Viskosität,  $\vec{E}$  der Deformationsgeschwindigkeitstensor und  $\vec{I}$  der Einheitstensor ist. Den Tensor  $\vec{T}$  bezeichnet **Spurk** [57] als Reibungsspannungs-

tensor, da er nicht den Druck, sondern nur Anteile aus den viskosen Reibungsspannungen enthält. Trotzdem soll dieser in der vorliegenden Arbeit weiterhin nach Gleichung (2.5) als Spannungstensor bezeichnet werden.

Die Erhaltungsgleichungen (2.1) bis (2.3) sind für alle Strömungsbedingungen gültig, d.h. sowohl für laminare, als auch für turbulente Strömungen. Der Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung wird durch die Reynoldszahl bestimmt, deren Definition Gleichung (2.7) angibt. Die Reynoldszahl wird definiert als das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften, d.h. sie zeigt den Viskositätseinfluss in der Strömung.

$$Re_x = \frac{\rho \cdot |\vec{u}| \cdot x}{\mu} \quad (2.7)$$

wobei  $\vec{u}$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $x$  eine charakteristische Länge ist.  $\rho$  und  $\mu$  sind die Dichte und Viskosität der Flüssigkeit. Der Übergang zwischen laminarer und turbulenter Strömungsform wird durch eine kritische Reynoldszahl  $Re_{krit}$  gekennzeichnet, die z.B. für eine Rohrströmung bei  $Re = 2.300$  liegt [57]. Dominieren die viskosen Kräfte, so wird die Strömung als laminar bezeichnet, gibt es einen stärkeren Einfluss der Trägheitskräfte, so bezeichnet man eine Strömung als turbulent.

Außer unter sehr eingeschränkten Bedingungen (z.B. für einige laminare Schichtenströmungen [57]), ist das nichtlineare- und gekoppelte Gleichungssystem der Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) analytisch unlösbar. Das Gleichungssystem kann jedoch durch numerische Verfahren gelöst werden, z.B. mittels einer statistischen Beschreibung der Turbulenz (RANS) oder einer dreidimensionalen- und instationären Lösung der Gleichungen (DNS oder LES).

Masse- (2.1), Impuls- (2.2) und Energieerhaltungsgleichung (2.3) lassen sich für inkompressible Fluide vereinfachen. Die Annahme der Inkompressibilität ist bei Gasen gerechtfertigt, solange die Machzahl ( $Ma = \frac{U}{c}$ ) der Strömung den Wert von  $Ma = 0,3$  [14] nicht übersteigt. Unter dieser Bedingung wird das Gleichungssystem unter der Annahme konstanter Dichte ( $\rho$ ) und Viskosität ( $\mu$ ) wie folgt geschrieben:

$$\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \nabla p + \rho \vec{k} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{T}) - \nabla \cdot \vec{q} \quad (2.10)$$

Weiterhin verläuft die Zustandsänderung der Strömung auf einer Isothermen, wenn die Machzahl sehr klein ist ( $Ma \ll 1$ ). Für diesen Fall kann man noch die folgende Vereinfachung für die Erhaltungsgleichungen treffen: Die Energiebilanz (2.3) wird von der Massen- und Impulsbilanz entkoppelt, und es werden nur die Erhaltungsgleichungen für Masse (2.1) und Impuls (2.2) betrachtet.

## 2.2 Geschwindigkeitsprofile

Ein theoretisches Geschwindigkeitsprofil wird nach **Zierep** [72] für laminare sowie turbulente Strömungen untersucht. Diese Profile werden durch die Gleichungen (2.11a) und (2.11b) beschrieben,

$$u(y) = \begin{cases} U_\infty \cdot \frac{4y}{H} \left(1 - \frac{y}{H}\right) & , \text{ laminar} & (2.11a) \\ U_\infty \cdot \left(\frac{2y}{H}\right)^{\frac{1}{n}} & , \text{ turbulent} & (2.11b) \end{cases}$$

wobei  $H$  die Kanalhöhe [m] und  $U_\infty$  die Referenzgeschwindigkeit [ $\frac{m}{s}$ ] sind.  $n$  ist abhängig von der Reynoldszahl der Strömung (s. **Nikuradse** [40], [41]), für eine Reynoldszahl von  $Re \approx \mathcal{O}^4$  beträgt der Wert  $n = 7$ .

Viskose Strömungen wurden nach **Prandtl** [45] in zwei unterschiedliche Bereichen aufgeteilt. Der erste Bereich ist als das Gebiet in der Nähe einer festen Oberfläche definiert, der Rest der Strömung stellt den zweiten Bereich dar. Der Bereich an der Wand wird als „Grenzschicht“ bezeichnet, wobei die Viskosität hier von großer Bedeutung ist. Außerhalb des Grenzschichtbereiches können viskose Effekte als vernachlässigbar angenommen werden. Die Grenzschichtdicke  $\delta$  wird definiert als Abstand von der Wand bis zu dem Punkt, an dem die Strömung 99% der Geschwindigkeit der sogenannten freien Strömung (d.h. frei von Wandeinflüssen) erreicht. Die Verdrängungsdicke  $\delta_1$  ist

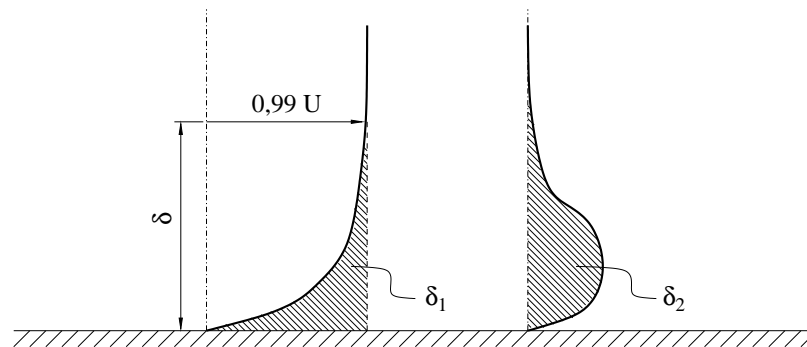


Abbildung 2.1: Grenzschicht-, Verdrängungs- und Impulsverlustdicken

die hypothetische Wandhöhe, die für eine Strömung ohne Reibung die selbe Verdrängungswirkung wie jene der Grenzschicht produziert:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (2.12)$$

Weiterhin wird die Impulsverlustdicke  $\delta_2$  definiert als die notwendige Schichtdicke einer freien Strömung, deren Impulsverlust der gleiche ist wie in der Grenzschicht:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy \quad (2.13)$$

Im Abbildung 2.1 werden diese drei Größen skizziert. Die Grenzschicht wird gewöhnlich durch den Formparameter ( $H_{12}$ ) charakterisiert, der als Verhältnis von Verdrängungsdicke und Impulsverlustdicke definiert ist.

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.14)$$

Nach **Doenhoff** [9] liegt der Wert des Formparameters bei turbulenten Strömungen in dem Bereich  $H_{12} \in [1, 8; 2, 4]$  ein, bei laminaren in dem Bereich  $H_{12} \in [2, 25; 3, 5]$ .

### 2.3 Turbulentes Geschwindigkeitsprofil, innerer Bereich des Grenzschichtprofils

Die Gleichung (2.2) ist in unmittelbarer Wandnähe ungültig, weil sich dort ein unendlicher Geschwindigkeitsgradient einstellt. Deswegen wurde durch eine dimensionslose Analyse des Strömungsverhaltens in diesem Bereich ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil gefunden, das den Grenzschichtzustand ohne Zuhilfenahme der Navier-Stokes Gleichungen beschreibt. Die Entdimensionalisierung wird durch die sogenannte Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  (Gl. 2.17) erreicht. Damit lauten die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+$  (Gl. 2.15) und der dimensionslose Wandabstand  $y^+$  (Gl. 2.16), folgendermaßen

$$u^+ = \frac{|\vec{u}|}{u_\tau} \quad (2.15)$$

$$y^+ = \frac{\rho \cdot u_\tau \cdot y_P}{\mu} \quad (2.16)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.17)$$

Hierbei sind  $\vec{u}$  der Geschwindigkeitsbetrag  $\left[\frac{m}{s}\right]$ ,  $y_P$  der Wandabstand [m],  $\mu$  die Viskosität  $\left[N \frac{s}{m^2}\right]$ ,  $\tau_w$  die Wandschubspannung  $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ , und  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit  $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ .

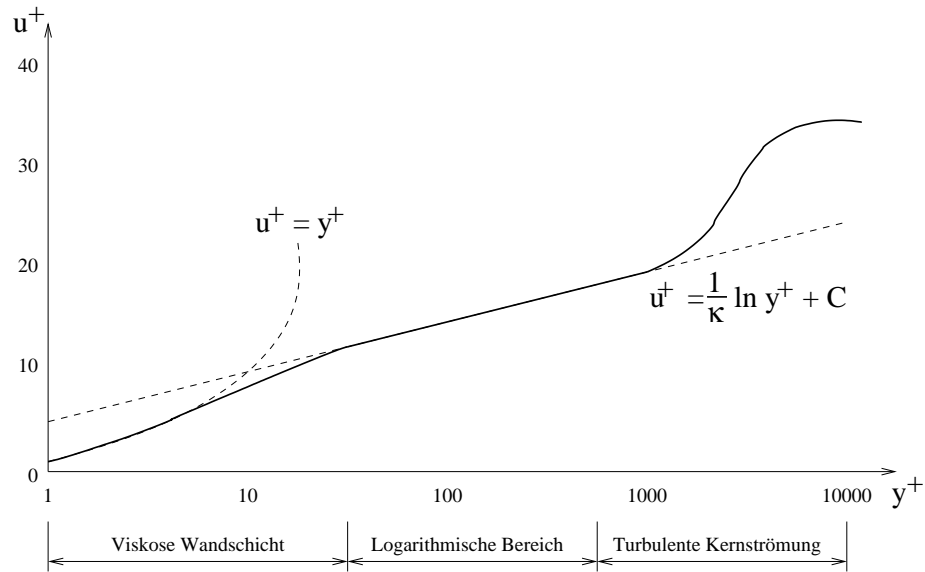


Abbildung 2.2: Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht

Mit Hilfe der universellen halblogarithmischen Skizze in Abbildung 2.2 nach **Rotta** [49] wird das Wandgesetz in turbulenter Strömung erklärt. Darin kann man bestimmte Bereiche erkennen:

1. In der linearen oder viskosen Unterschicht, wo Newtonsche Spannung herrscht gilt die Beziehung (2.18a).
2. Der Übergangsbereich, in dem die viskose und die Reynoldssche Spannung etwa von gleicher Größenordnung sind. In diesem Gebiet wachsen die Reynolds'schen Spannungen mit  $y^+$  an, während die Newtons'sche Spannung abfällt. Nach **Göing** [17] gilt die Gleichung (2.18b).
3. Die vollturbulente Schicht, in der die Reynolds'schen Spannung deutlich dominiert. Nach **Prandtl** [45] gilt die Gleichung (2.18c)

$$y^+ = \begin{cases} u^+ & , \quad 0 < y^+ < 5 & (2.18a) \\ u^+ + e^{-\kappa C} \left( e^{\kappa u^+} - 1 - u^+ \kappa - \frac{(u^+ \kappa)^2}{2!} - \frac{(u^+ \kappa)^3}{3!} \right) & , \quad 5 < y^+ < 30 & (2.18b) \\ e^{(u^+ - C)\kappa} & , \quad 30 < y^+ & (2.18c) \end{cases}$$



Die Gleichung (2.18c) wurde von **v. Kármán** [63] umgeformt und die Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Wandabstandes wie folgt dargestellt:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C. \quad (2.19)$$

wobei  $\kappa$  und  $C$  die Konstanten von *v. Kármán* und *Coles* sind. Obwohl sie keinen universellen Wert besitzen, wurden für diese Konstanten durch experimentelle Untersuchungen die Werte  $\kappa = 0,4$  und  $C = 5,1$  [7] [57] ermittelt.

## 2.4 Diffusorströmung

Neben Schaufeln und Düsen sind Diffusoren wesentliche Bauteile zur Strömungsführung in der Aerodynamik. Ein Diffusor definiert sich als Kanal mit zunehmender Querschnittsfläche, dessen Funktion in der Umwandlung von Strömungsenergie in Druck besteht. Die Energiewandlung einer Diffusorströmung zeichnet sich durch einen Anstieg des statischen Drucks bei gleichzeitiger Verringerung der Geschwindigkeit entlang der Flächenvergrößerung aus. Die Nutzbarkeit dieses aerodynamischen Prinzips findet in vielen technischen Bereichen Verwendung, so z.B. im Motorsport, bei Abgasturboladern oder in Gasturbinen. (Abbildung 2.3)

In Abgasturboladern befindet sich verdichterseitig ein Radialdiffusor, dessen stabiler Arbeitsbereich sich mit Nachleitschaufeln sogar vergrößern lässt. Eine Anwendung im Motorsport lässt sich beispielsweise wie folgt beschreiben: *„die unter dem Wagen durchströmende Luft möglichst reibungslos wieder auf den Umgebungsdruck zu bringen. Der Diffusor zwingt also die Luft, die sich vor ihm und unter der ebenen Unterbodenverkleidung befindet, zu beschleunigen, so dass Unterdruck und damit Abtrieb entsteht“* [32]. In ähnlicher Art und Weise werden Diffusoren am Austritt stationärer Gasturbinen eingesetzt, um letztendlich die Wellenleistung zu erhöhen.

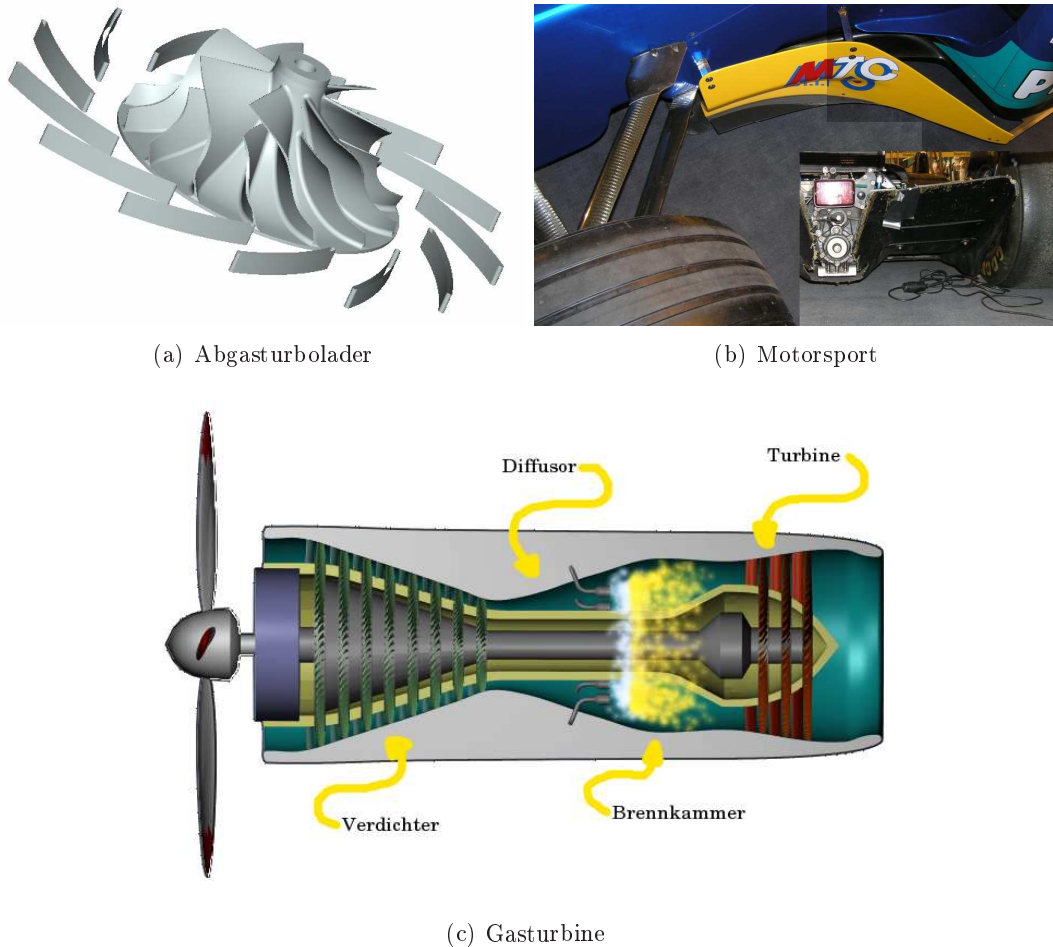


Abbildung 2.3: Technische Diffusoranwendungen

Ein Austrittsdiffusor ist nur bei stationären Gasturbinen sinnvoll, weil bei Fluggas-turbinen der austretende Impuls einen Beitrag zum Gesamtschub des Triebwerkes leistet. Bei allen Gasturbinenarten werden Ringdiffusoren zwischen dem Verdichter und der Brennkammer eingesetzt (Abbildung 2.3(c)), damit der Machzahlbereich der Strömung bei  $Ma \leq 0,25$  liegt, wodurch eine stabile Verbrennung gewährleistet ist.

In einer Diffusorströmung findet in der Grenzschicht eine ausgeprägte Strömungsverzögerung statt. Der ansteigende Druck in der freien Strömung kann im ungünstigen Fall die impulsarme Grenzschichtströmung stark abbremsen und sogar umkehren. Die Grenzschichtwirbel erscheinen wie eine chaotische Mischung aus Geschwindigkeits- und Turbulenzprofilen.

In Abbildung 2.4 wurde die Strömung durch einen Kanal mit Diffusorbereich oder schräge Stufe dargestellt. Darin werden durch die aufgeprägte Strömungsänderung

fünf verschiedene Bereiche erkennbar:

- I Einlaufkanal und freier Strömung, wobei  $U$  als die maximale Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht definiert wurde.
- II Grenzschicht ( $\Psi = 0$ ) und Ablösenblaselänge ( $x_R$ ), die als der nötige Abstand für das Wiederanlegen der Strömung definiert wurde.
- III Nulllinie ( $U = 0$ ), die Geschwindigkeit ist hier null.
- IV Wiederanlegegebiet, hierin herrschen starke Druckgradienten sowie hohe lokale Turbulenzgrade.
- V Gebiet, worin sich die Strömung wieder vergleichmäßigt.

Das Verhalten einer Diffusorströmung lässt sich durch die Änderung der Bauform und die Einlaufbedingungen beeinflussen. Jeder dieser manipulierbaren Parameter wird anschließend diskutiert.

#### 2.4.1 Bauformen

Die genannte Vergrößerung der Querschnittfläche führt zu zwei Bauklassen: ebene oder Rechteckdiffusoren und rotationssymmetrie bzw. konische Diffusoren, welche man wiederum in die zwei Unterklassen Kegel- und Ringdiffusoren unterteilt. Ringdiffusoren besitzen im Gegensatz zu Kegeldiffusoren eine Nabe in der Mitte. Die Parameter zur Bezeichnung von Diffusorgeometrien sind in Abbildung 2.5 nach **Japikse und Beines** [21] skizziert.

Die Drucksteigerung oder auch der Druckrückgewinn eines Diffusors lässt sich mit dem Druckbeiwert  $C_p$  angeben. Dieser ist definiert als der Quotient der Differenz der

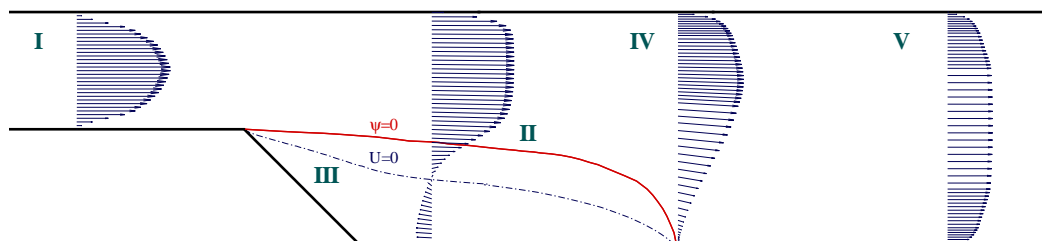


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung einer Störung durch eine ebene schräge Stufe

statischen Drücke an Aus- ( $p_A$ ) und Eintritt ( $p_E$ ) und dem dynamischen Druck am Eintritt ( $\frac{\rho}{2} \cdot U^2$ ), d.h.

$$C_p = \frac{p_A - p_E}{\frac{\rho}{2} \cdot U^2} \quad (2.20)$$

Bei der Benutzung der Massenerhaltungsgleichung in Kombination mit der Bernoulligleichung unter der Annahme einer reibungsfreien inkompressiblen Strömung, ergibt sich der ideale Druckrückgewinn zu:

$$c_{p_i} = 1 - \frac{U_E^2}{U_A^2} = 1 - \frac{1}{AR^2}, \quad (2.21)$$

darin ist  $AR$  das sogenannte Flächenverhältnis, das mit den Parametern in Abbildung 2.5 definiert ist als:

$$AR = \frac{A_A}{A_E} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{D_2 - h}{D_1 - h} \quad (2.22)$$

Der maximale Druckrückgewinn wurde u.a., von **Reid** [47], **Ishikawa und Nakamura** [19] und **McDonald und Fox** [33] für verschiedene Diffusorbauformen untersucht. Diese Untersuchungen liefern Diagramme, wie sie die Abbildung 2.6 beispielhaft zeigt.

Neben dem Flächenverhältnis wird ein Diffusor mit dem Längenverhältnis ( $\frac{L}{W_1}$ ,  $\frac{L}{h}$ ) vollständig charakterisiert. Das Längenverhältnis wirkt sich auf die Stabilität der Strömung aus: je länger der Diffusor, desto stabiler die Strömung. Diese Parameter bestimmen im Zusammenspiel den Totalöffnungswinkel, um einen optimalen Betriebspunkt zu finden, z.B. um die Bildung einer Ablöseblase zu vermeiden. Die Ablöseblase vermindert den effektiven Diffusorquerschnitt und wirkt sich damit auf die Strömungsverluste aus. Eine Untersuchung der Ablöseblase wurde von **Ashjaee** [2] und **Weiser** [67] durchgeführt. Deren Ergebnisse zeigen die Bildung einer Ablöseblase ab

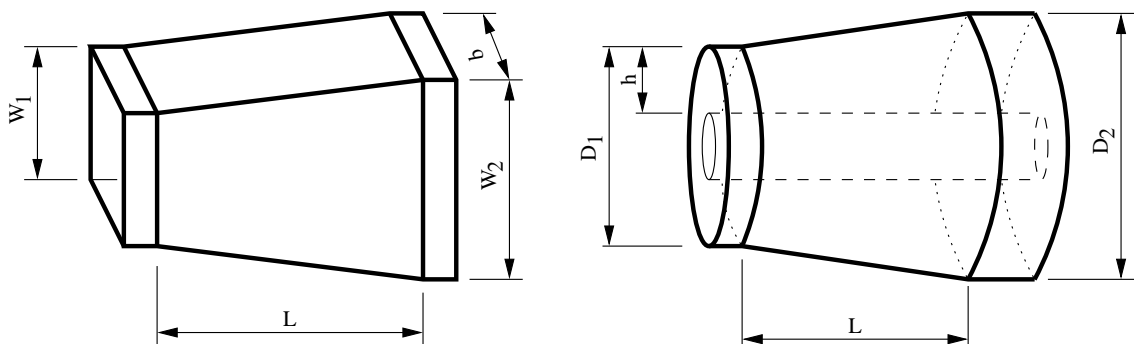


Abbildung 2.5: Charakteristische Diffusorgrößen

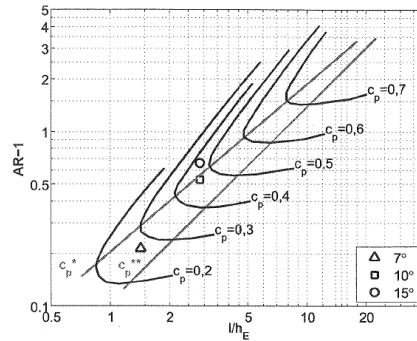


Abbildung 2.6: Optimale Geometrien zum Druckrückgewinnung

einem Öffnungswinkel von  $\alpha = 10^\circ$ . Andererseits wurden am Institut Experimente mit verschiedenen Öffnungswinkeln von Schobeiri durchgeführt [50]. Abbildung 2.7 fasst die Druckbeiwerte ( $C_p$ ) in Abhängigkeit der dimensionslosen Koordinate ( $\frac{x}{w}$ ) der untersuchten Konfigurationen zusammen. Bei den Untersuchungen wurde ein mit dem Öffnungswinkel zunehmende Druckrückgewinn bis  $\alpha = 10^\circ$  festgestellt. Bei einem Winkel von  $\alpha = 14^\circ$  trat eine Ablöseblase auf weswegen keine größeren Öffnungswinkel untersucht wurden. **Nikuradse** [39] entwickelte einen Grenzwinkel ( $\alpha_{D,Gr}$ ), bei dem die Strömung ablöste. Für einen axialsymmetrischen Diffusor hängt der Grenzwinkel in Gleichung (2.23) von der auf der Halbkannahöhe basierenden Reynoldszahl ab.

$$2\alpha_{D,Gr} = \frac{150}{Re^{\frac{1}{4}}} \quad (2.23)$$

Nicht nur die geometrischen Verhältnisse ermöglichen die Optimierung des Diffusors, weil die Kanalkrümmung einen wichtigen geometrischen Parameter darstellt. Ungerade Diffusorwände wurden u.a. von **Kline** [13] sowie **Thum und Schilling** [60]

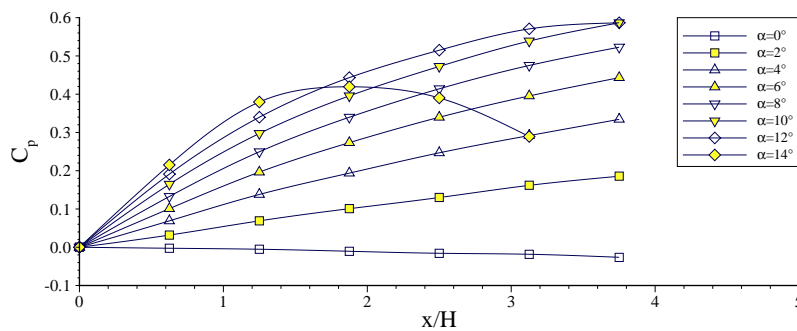


Abbildung 2.7: Verlauf des Umsetzungsgrades in Strömungsrichtung

untersucht. Dieser Untersuchungen bestehen u.a. aus konvexen, konkaven sowie spiralförmigen Kanalkonturen, wobei sich der Druckrückgewinn in Bezug zu geraden Diffusorwänden verbessert.

#### 2.4.2 Einlaufbedingungen

Nach **Moore und Kline** [38] und **Sprenger** [56] übt die Zuström Reynoldszahl einen sehr geringen bzw. keinen Einfluss auf die Strömung aus. Die Verbesserung des Druckrückgewinns kann man durch die Anströmbedingung bewirken. Bei einer Erhöhung der Strömungsentwicklung bzw. des Turbulenzgrades kann man den kritischen Öffnungswinkel von  $12^\circ$  auf  $16^\circ$  erweitern [50]. Dies man kann sich folgendermaßen erklären:

1. bei dicken Grenzschichten kommt es zum laminar-turbulenten Übergang.
2. die kinetische Energie in Wandnähe überträgt sich senkrecht zur Strömungsrichtung.

Dies führt zu einer stärkeren und stabileren Grenzschicht. **Bradshaw und Wong** [4] charakterisieren den Einfluss der Grenzschicht auf die Strömung. Das Kriterium wurde in dem Quotienten zwischen der Grenzschicht ( $\delta$ ) und der Stufenhöhe ( $H$ ) gefunden. Nach dieser Annahme wird der Störungsgrad schwach bei  $\frac{\delta}{H} \gg 1$ , stark bei  $\frac{\delta}{H} \approx 1$ , und extrem bei  $\frac{\delta}{H} < 1$  dargestellt.

Eine Strömung wird beispielweise durch das Einsetzen einer Stolperkante am Diffusoreintritt gestört. In der gestörten Strömung wurde eine Grenzschicht erzeugt, die wegen der abgelösten Wirbel hoch turbulent wird. Ähnliche Erhöhungen des Druckrückgewinns wurden mittels Turbulenzgeneratoren von **Becker** [3] in einem modellierten Axialverdichter beobachtet.

Bei Kegel- sowie Ringdiffusoren spielt der Drall eine wichtige Rolle bezüglich des Druckrückgewinns. In diesem Fall wirkt die Umfangskomponente vergleichmäßigend. Abgelöste Strömungen von **McDonald** [34], **Kitoh und Kamiya** [25] und **Lohmann et al.** [30] legten bei einem Strömungswinkel von  $10^\circ$  wieder an.

Bedeutend sind für Turbomaschinen die unsymmetrischen Profile der Eintrittsgeschwindigkeit. Untersuchungen von **Wolf et al.** [69] sowie **Kaiser et al.** [23] zeigen eine abgelöstete Diffusorströmung, wobei sich am Diffusor ein unsymmetrisches Profil der Geschwindigkeit einstellte. Das nachteilige Verhalten der Strömung beruht auf der

Tatsache, dass sich die Scherströmung am Eintritt entlang des Diffusors verschlechtert. Interessant für diese Arbeit sind die instationären Strömungen, die in Turbomaschinen auftreten. In Gasturbinen sind die instationären Strömungen mit einer Reynolds-Zahl im Bereich von etwa  $\mathcal{O}^5$  bis  $\mathcal{O}^6$  charakterisiert. Stromabwärts der Verdichterstufen werden sich die Profilhrenzschichten vom laminaren in den turbulenten Zustand entwickelt haben. Folglich liegt am Diffusoreingang ein sehr komplexes sowie turbulentes Geschwindigkeitsprofil vor.

# Kapitel 3

## Numerik

### 3.1 Turbulenzmodellierung

**Längenskalen** Man kann turbulente Strömungen durch eine stochastische Verteilung in Raum und Zeit charakterisieren, deren Längenskalen in einem breiten Bereich liegen. Deswegen ist es für die vollständige Modellierung notwendig, dass die Größe der räumlichen Diskretisierung kleiner als die charakteristische Länge wird, d.h. die räumliche Größe muss kleiner als der kleinste turbulente Wirbel und die Zeitschrittweite kleiner als die kleinste zeitliche Schwankung sein.

Die Energie der Turbulenz ist über einen breiten Frequenzbereich verteilt, wobei die niedrigen Frequenzen am wichtigsten sind. Die turbulente kinetische Energie ergibt sich aus der Integration der spektralen Wirbelenergiedichte ( $E$ ) über den gesamten Wellenzahlbereich ( $\kappa$ ):

$$k = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa \quad (3.1)$$

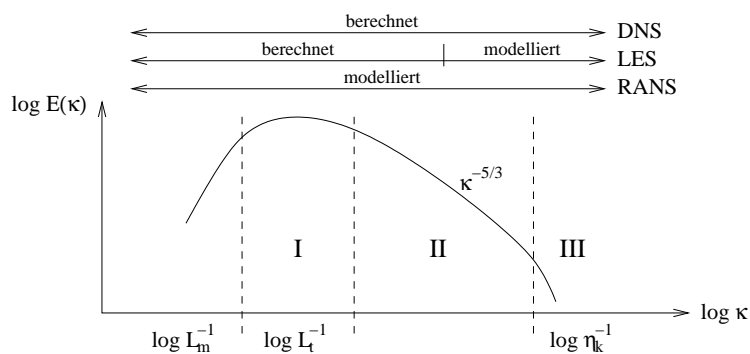


Abbildung 3.1: Energiespektrum und Arbeitsbereich der Modelle



Das Energiespektrum im Wellenzahlbereich bei doppelt-logarithmischer Auftragung einer isotropen und homogenen Strömung ist in Abbildung 3.1 skizziert, in dem drei Bereiche erkennbar sind:

- I Energietragende Wirbel: die großen Wirbelstrukturen (eddy) entziehen der Hauptströmung Energie, die über Wirbelstreckungsmechanismen zu kleineren Skalen transferiert wird [44]. Sie sind charakterisiert durch die integralen Zeit- ( $T_t$ ) und Längenskalen ( $L_t$ ).
- II Trägheitsbereich: er nimmt für hohe Reynolds-Zahlen  $Re_t$  den größten Teil des Energiespektrums ein, obwohl hier weder viskose Effekte noch Wirkungen der großen Skalen eine dominierende Rolle einnehmen. Die Ausdehnung des Trägheitsbereichs kann über das Verhältnis von  $L_t$  zu  $\eta_k$  (3.3) abgeschätzt werden. Die Tatsache, dass in vollturbulenten Strömungen das Energiespektrum in diesem Bereich einen Abfall mit dem Exponenten  $-\frac{5}{3}$  aufweist, kann zur Verifizierung von DNS- und LES-Berechnungen herangezogen werden.
- III Dissipationsbereich: im diesem wird die turbulente kinetische Energie dissipiert.

Die kleinsten Einheiten turbulenter Bewegungen sind die Kolmogorov-Skalen:  $\eta_\kappa = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{0,25}$  für den Raum und  $\tau_\kappa = (\frac{\nu}{\epsilon})^{0,25}$  für die Zeit. Eine turbulente Reynolds-Zahl wird gebildet mittels dem turbulenten Geschwindigkeitsmaß  $U_T$  und dem integralen turbulenten Längenmaß  $L_T$  und stellt sich in Gleichung (3.2) dar.

$$Re_t = \frac{U_t \cdot L_t}{\nu} \quad (3.2)$$

wo  $U_t$  das turbulente Geschwindigkeitsmaß und  $L_t$  das integrale Längenmaß sind, welche die größten turbulenten Skalen charakterisieren.

Die zur Berechnung aller turbulenten Bewegungen notwendige Anzahl der Knoten ( $N$ ) des Rechengitters wurde von **Tennekes und Lumley** [59] durch das Verhältnis des integralen turbulenten Längenmaßes  $L_T$  zur Kolmogorov-Länge  $\eta_T$  abgeschätzt.

$$\frac{L_t}{\eta_k} \sim Re_t^{\frac{3}{4}} \Rightarrow N \sim \left(\frac{L_t}{\eta_k}\right)^3 \sim Re_t^{\frac{9}{4}} \quad (3.3)$$

Mithilfe des Kolmogorovschen Mikrozeitmaß ( $t_k$ ) und der turbulenten Reynoldszahl, kann man das charakteristische integrale Zeitmaß  $t$  herleiten [15] als:

$$\frac{t}{t_k} = 0,3 \cdot \sqrt{Re_t} \quad (3.4)$$

Die heute verwendeten Modelle, mit denen sich turbulente Strömungen berechnen lassen, werden nachfolgend in der Reihenfolge geringer werden der notwendiger Rechnerleistung erklärt:

- DNS: „DIRECT NUMERICAL SIMULATION“ oder Direkte Numerische Simulation,
- LES: „LARGE EDDY SIMULATION“ oder Grobstruktursimulation,
- RANS: „REYNOLDS AVERAGED NAVIER-STOKES-EQUATIONS“ oder Statistische Beschreibung der Turbulenz mittels der Reynoldsmittelung.

**DNS** Mit der Direkten Numerische Simulation kann man qualitativ hochwertige Ergebnisse erhalten, vergleichbar dem Experiment, weil die instationären Navier-Stokes-Gleichungen ohne Modellierung gelöst werden. Ein solches „numerisches Experiment“ liefert einen detaillierten Einblick in die Physik des analysierten Problems. Dem gegenüber steht der Aufwand, die kleinsten turbulenten Wirbel mittels Diskretisierung in Raum und Zeit aufzulösen, um die Kolmogorov-Skalen zu erfassen.

Technisch interessante Strömungsprobleme finden sich beginnend im Bereich von Reynolds-Zahlen der Ordnung  $\mathcal{O}(10^4)$ . Die Abschätzungsgleichung für die notwendige Diskretisierung in Ort und Zeit führt auf einen riesigen Bedarf an Arbeitsspeicher und Rechenzeit. Daher ist es mit der heute wirtschaftlich verfügbaren Rechnerleistung nicht möglich, komplexe Anwendungen bzw. technisch interessante Strömungen mittels DNS zu lösen,

Hervorragende DNS-Arbeiten sind die Simulation der Bypass-Transition an einer ebene Platte ohne Druckgradient von **Jacobs und Durbin** [20], deren Knotenanzahl von  $71 \cdot 10^6$  eine der bis dato rechenintensivsten Anwendungen darstellt; oder die Simulation der nachlaufinduzierten Transition an einer ebene Platte von **Wu und Durbin** [70].

**LES** Wie bei DNS werden mit dem numerischen Verfahren LES die Navier-Stokes-Gleichungen gelöst, mit dem Unterschied, dass die kleineren dissipativen Wirbel tiefpaßgefiltert werden. Somit wird bei einer Large-Eddy Simulation die instationäre Entwicklung der makroskopisch relevanten und energietragenden Wirbelstrukturen aufgelöst. Die kleinen Skalen können aufgrund ihrer Isotropie günstig modelliert werden, nachdem die Feinstrukturen über Tiefpassfilter-Operationen separiert wurden, welche z.B. in **Friedrich** [15] beschrieben werden.

Die Problematik der LES liegt in Wandnähe, weil dort eine spezielle Schicht vorliegt, deren Auflösung vergleichbar zu DNS sein muss und deren Dicke sich mit  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$  abschätzen lässt. Trotz dieser Schwierigkeit spart LES viel Rechenzeit im Vergleich zu DNS, weil die kleinsten räumlichen Strukturen nicht berechnet werden. Da die LES eine sehr gute Beschreibung der Physik liefert, sind schon viele technische Anwendungen mit dieser Modellierung erfolgreich berechnet worden, z.B. **Piomelli** [43], wandnormale Fluktuationen von **Diurno et al.** [8], nachlaufinduzierte Transition an einer ebenen Plate von **Ham et al.** [18], transitionale Turbinengitter von **Meinke et al.** [35], u.a.

**RANS** Die statistischen Turbulenzmodelle sind zur Zeit die populärsten, weil sie vergleichsweise niedrige Hardwareleistung benötigen und numerisch sehr stabil sind. Hauptsächlich wird bei RANS der Reibungsspannungstensor im Gl.(2.5) modelliert, wobei die Art der Modellierung die Turbulenzmodelle in Wirbelviskositäts- oder Reynoldsspannungsmodelle klassifiziert. Bei den Wirbelviskositätsmodelle wird eine Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen (2.1) bis (2.3) durch eine zeitliche Mittelung der Transportgleichungen durchgeführt, die weitere Modellierung wird im Kapitel 3.2.2 vertieft. Bei Reynoldsspannungsmodellen werden die sechs unbekanntenen Komponenten des Reynoldsspannungstensor entweder durch differentielle Transportgleichungen oder algebraische Ausdrücke modelliert.

## 3.2 Statistische Turbulenzmodellierung

### 3.2.1 Mittelung der Grundgleichungen

Reynolds schlug im Jahr 1895 vor, dass eine beliebige Größe  $\phi$  in einen Mittelwert  $\bar{\phi}$  und in einen Schwankungswert  $\phi'$  aufgespalten wird. Dies ist die sogenannte Reynoldssche Mittelung, die in Gleichung (3.5) dargestellt wird und unter Annahme des stochastischen Charakters einer turbulenten Strömung deren statistische Mittelwerte begründet.

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i, t) + \phi'(x_i, t) \quad (3.5)$$

Der Mittelwert  $\bar{\phi}$  wird unabhängig von einem Zeitpunkt  $t_0$  als das Mittel einer stationären Strömung  $\bar{\phi}$  definiert. Bei zeitlicher Beobachtung der Größe  $\phi$  wird der Mittelwert über einen ausreichend langen Zeitraum  $T$  am festen Ort  $x_i$  in Gleichung (3.6)

definiert.

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \phi(x_i, t) dt \quad (3.6)$$

Die Zerlegung nach Gleichung (3.5) wird in die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen (2.1) und (2.2) eingesetzt. Das resultierende System der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen) wird in den Gleichungen (3.7) und (3.8) zusammengefasst.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (3.8)$$

Der durch die Reynoldsmittelung neu entstandene Term  $\overline{u'_i u'_j}$  in den RANS-Gleichungen (3.7) und (3.8) ist unbekannt und muss nun modelliert werden.

Die Transportgleichungen der fluktuierenden Variablen werden bei der Subtraktion der Reynolds-gemittelten Gleichungen (3.7) und (3.8) in den Transportgleichungen für Masse (2.1) und Impuls (2.2) erhalten, und in den Gleichungen (3.9) und (3.10) beschrieben.

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

In den Gleichungen (3.8) und (3.10) wird der sogenannte Reynolds-Spannungstensor ( $\overline{u'_i u'_j}$ ) eingeführt, der über Korrelationen für die fluktuierenden Geschwindigkeiten die Turbulenzinformationen enthält, die im Mittelungsprozess verloren worden sind. Bei der Multiplikation der Gleichung (3.10) mit  $u'_j$  und anschließender Mittelung wird die Transportgleichung für den Reynoldsschen Spannungstensor (3.11) gewonnen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{(u'_i u'_j u'_k)} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j) - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] \\ &- \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \\ &- 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nach Einführung der turbulenten kinetischen Energie pro Einheitsmasse als

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.12)$$

geht die Reynolds-Transportgleichung (3.11) in die Tensorgleichung (3.13) über.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k}}_{P_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k}}_{\epsilon} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}'_i p'}{\partial x_i}}_{PD_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_k}}{\partial x_k}}_{TD_{ij}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2}}_{VD_{ij}} \quad (3.13)$$

wobei  $P_k$  das Verhältnis des Energieentzugs der Hauptströmung zur Zuführung turbulenter Fluktuationen ist,  $\epsilon$  die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie in Wärme ist,  $PD_{ij}$  die Druckdiffusion ist,  $TD_{ij}$  die Tripelkorrelation des turbulente Transports ist und  $VD_{ij}$  die Viskose Diffusion ist.

Bei instationären Simulationen mit RANS-Modellen (abgekürzt URANS, aus „UNSTEADY“ RANS) wurde eine Trennung der Zeitskalen, welche die kohärenten und die diesen überlagerten Geschwindigkeitsfluktuationen charakterisieren, vorgenommen [55]. Das Ensemble der Strömungsvariablen  $\phi$  wird mit den deterministischen bzw. periodischen Fluktuation ( $\tilde{\phi}$ ) von der Zweikomponentengleichung (3.5) zur Dreikomponentengleichung (3.14) erweitert.

$$\phi = \bar{\phi} + \tilde{\phi} + \phi' \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Wirbelviskositätsmodelle

Die Wirbelviskositätsmodelle beschreiben mit einer annehmbaren Genauigkeit komplexe Anwendungen. Sie zeichnen sich durch eine sehr robuste numerische Implementierung aus. Ausnahmen sind Strömungen mit Staupunkt sowie mit positiven Druckgradienten, wo durch Modifikationen korrigierend eingegriffen wird zur Erzielung besser Ergebnisse. Die Grundlage der Wirbelviskositätsmodelle ist der Ansatz von Boussinesq (3.15), der im Jahr 1877 die Analogie zwischen molekularer und turbulenter Diffusion postuliert, d.h. die Reynoldsspannungen lassen sich analog zu den viskosen Spannungen proportional zu der Scherrate bestimmen. Durch die Einführung der isotropen turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$ , welche von den Scherraten der mittleren Geschwindigkeit abhängig ist, kann der kinematische Reynolds-Spannungstensor gleichartig zum Reibungsspannungstensor (Gl. 2.5) wie folgt definiert werden:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.15)$$

Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  oder „EDDY-VISCOSITY“ in Gleichung 3.16 kann durch eine Dimensionanalyse bestimmt werden. Diese führt zu dem Produkt eines turbulenten

Geschwindigkeitmaes  $U_T$  und eines turbulenten Längenmaßes  $L_T$  [64]. Eine andere Beschreibung der Wirbelviskosität ist das Verhältnis des Quadrats eines turbulenten Längenmaßes  $L_T$  zu einem Zeitmaß  $T_T$ .

$$\nu_T \propto L_T \cdot U_T \sim \frac{L_T^2}{T_T} \quad (3.16)$$

Schließlich erhält man die Modellierung des unbekanntes Reynolds-Spannungstensors durch die Bestimmung der Wirbelviskosität bzw. seiner verbundenen Längen- und Zeitmaß. Anstelle dieser Maße werden in der Praxis zusätzliche Transportgleichungen gelöst, deren Anzahl die Wirbelviskositätsmodelle klassifiziert:

- Algebraische- oder Nullgleichungsmodelle
- Ein- sowie Zweigleichungsmodelle

Ein Nullgleichungsmodell bestimmt den Wert von  $\nu_t$  mittels bekannter Größen der Impulsgleichungen. Der Prandtl'sche Mischungswegansatz ist das bekannteste Nullgleichungsmodell, wobei  $\nu_t$  in direkter Verbindung zum Hauptstrmungsfeld steht:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (3.17)$$

wo  $l_m$  der empirische Mischungsweg ist.

Im Jahr 1945 postulierte Prandtl ein Eingleichungsmodell mit einer Abhängigkeit zwischen der turbulenten Viskosität  $\nu_t$  und der turbulenten kinetischen Energie  $k$ . Diese Abhängigkeit findet sich in einer partiellen Differentialgleichung der turbulenten kinetischen Energie wieder, deren Lösung die Bestimmung des turbulenten Zeitmaßes  $T_T$  nach Gleichung (3.18) erfordert, dafür wird jedoch die empirische Mischungslänge  $l$  benötigt.

$$T_T = \frac{l}{\sqrt{k}} \quad (3.18)$$

Mehrgleichungsmodelle bestimmen die charakteristischen Skalen durch zusätzliche Transportgleichungen, z.B. für die turbulente kinetische Energie  $k$  nach Gleichung (3.12) und ihre spezifische Dissipation  $\omega$ .

Bei Zweigleichungsmodelle werden beide charakteristischen Maße gelöst, d.h. im gesamten Strömungsfeld werden sowohl das turbulente Zeit- als auch das charakteristische Längenmaß in Abhängigkeit der Strömungsgrößen berechnet. Das turbulente Zeit- und Längenmaß wird mittels einer zusätzlichen partiellen Differentialgleichung

bestimmt, während das Geschwindigkeitsmaß aus der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie als  $\sqrt{k}$  folgt, deren exakte Transportgleichung bereits oben als Gleichung (3.13) angegeben wurde.

Die notwendige zusätzliche Transportgleichung kann entweder für die Dissipationsrate der kinetischen turbulenten Energie  $\epsilon$  oder für die charakteristische Frequenz  $\omega$  der energietragenden Wirbel definiert werden. Mit der entsprechenden Differentialgleichung erhält man in erstem Fall das berühmte  $k - \epsilon$ -Modell nach **Lauder und Spalding** [28] oder für den zweiten Fall das  $k - \omega$ -Modell nach **Wilcox** [68]. Für den Fall des  $k - \epsilon$ -Modells werden das turbulente Zeit- und Längenmaß wie folgt berechnet:

$$L_T = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \quad (3.19)$$

$$T_T = \frac{k}{\epsilon} \quad (3.20)$$

### $k - \epsilon$ -Modell

Das  $k - \epsilon$  Modell welches von **Lauder und Spalding** [28] vorgeschlagen wurde, ist das bekannteste Zweigleichungsmodell. Das Turbulenzmodell löst zwei Gleichungen: eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$ , und eine für deren Dissipation  $\epsilon$ .

Das Modell hat wesentliche Vorteile, welche es zu einem der populärsten Turbulenzmodelle in der industriellen Anwendungen macht. Diese Vorteile sind im Einzelnen gute numerische Stabilität (aufgrund seiner dissipativen Eigenschaften), ein guter Kosten-Nutzen-Effekt und gute Anwendbarkeit auf unterschiedlichste technische Strömungen. Aus diesen Gründen wird es trotz seiner bekannten Mängel noch immer sehr häufig eingesetzt.

Die entsprechende Wirbelviskosität der Gleichung (3.16) kann für das  $k - \epsilon$ -Modell in den nachfolgenden Ausdruck der turbulenten Viskosität umformuliert werden:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (3.21)$$

wo  $C_\mu = 0,09$  eine Proportionalitätskonstante ist. Die Gleichung (3.21) wird mit Hilfe der Transportgleichungen der turbulenten kinetischen Energie (3.22) und deren Dissipationsrate (3.23) berechnet:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.23)$$

wo  $C_{1\epsilon} = 1,44$ ,  $C_{2\epsilon} = 1,92$ ,  $\sigma_k = 1,0$ , und  $\sigma_\epsilon = 1,3$  die experimentell bestimmten Modellkonstanten sind.  $P_k$  wird als die Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie bezeichnet, deren Modellierung nach der „EDDY-VISCOSITY“ Hypothese lautet:

$$P_k = - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

Eine vollständige Beschreibung dieses Terms findet sich in Kapitel 3.4.

Der halbempirische Charakter des Modells vernachlässigt den Einfluss der molekularen Viskosität. Die Gültigkeit des Modells endet dort, wo viskose Effekte gegenüber turbulenten Spannungen vorherrschen, d.h. im wandnahen Bereich. Die dann notwendigen Modifikationen zur Lösung des Modells in Wandnähe werden im Kapitel 3.3 erläutert.

Die nachfolgenden Turbulenzmodelle stellen eine Verfeinerung des Standard  $k - \epsilon$  Modells dar, eine Verbesserung erfolgte unter anderem durch Implementierung einer Wand-Funktion.

- Das „**REALIZABLE**“  $k - \epsilon$ -**Modell** nach **Shih et al.** [52] ist eine Weiterentwicklung des Standard Modells. Modifiziert wird u.a. die Transportgleichung für die Dissipation  $\epsilon$ , weiterhin wird  $C_\mu$  nicht mehr konstant, sondern in Abhängigkeit des Deformations- und Rotationsgeschwindigkeitstensors berechnet. Hierdurch soll sichergestellt werden, dass die turbulenten Normalspannungen nicht negativ werden können.
- Das „**RENORMALIZATION GROUP**“ (**RNG**)  $k - \epsilon$ -**Modell** nach **Yakhot und Orszag** [71] berechnet Momentan- statt gemittelte Werte: dieser Begriff resultiert aus der Vorgehensweise, von den Bewegungsgleichungen der Momentanwerte iterativ enge Frequenzbänder abzuspalten, um neue Gleichungen zu bekommen.

### $k - \omega$ -Modell

Eine gute Alternative zum  $k - \epsilon$ -Modell stellt das  $k - \omega$ -Modell nach **Wilcox** [68] dar. Anstelle der Dissipationsrate  $\epsilon$  wird eine spezifische Dissipation  $\omega$  definiert und berechnet. Die Beziehung zwischen spezifischer Dissipation und der Dissipationsrate ist in Gleichung (3.25) definiert.

$$\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k} \quad (3.25)$$

wobei  $\beta^* = C_\mu$  gilt.



Model	$\alpha$	$C_\mu$	$\beta$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
W88	$\frac{5}{9}$	0.09	0.075	0.5	0.5
W98	$\frac{13}{25}$	0.09	0.072	0.5	0.5

Tabelle 3.1: Konstanten des  $k - \omega$ -Modells

Die entsprechende Wirbelviskosität der Gleichung (3.16) wird unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.20) und (3.25) wie folgt ausgedrückt:

$$\nu_T = \frac{k}{\omega} = C_\mu \cdot k \cdot T_T \tag{3.26}$$

wobei das turbulente Zeitmaß  $T_T$  durch die Gleichungen (3.20) und (3.25) als  $T_T = \frac{1}{\beta^* \cdot \omega}$  definiert wird.

Nach dieser Modifizierung folgen die Transportgleichungen des  $k - \omega$ -Modells als Gleichungen (3.27) und (3.28). Die Modellkonstanten sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst, und der Produktionsterm  $P_k$  wird nach Gleichung (3.24) berechnet.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - C_\mu k \omega \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 \tag{3.28}$$

Durch Einführung der spezifischen Dissipation  $\omega$  werden keine speziellen Modifikationen notwendig, um das asymptotische Wandverhalten berechnen zu können.

„BASELINE“ (BSL) und „SHEAR STRESS TRANSPORT“ (SST) Modelle

**Menter** [36] verbindet die Vorteile des  $k - \omega$ -Modells in Wandnähe mit dem Eigenschaften des  $k - \epsilon$ -Modells in der freien Strömung. Menters Vorschlag besteht aus dem originären  $k - \omega$ -Modell und einem modifizierten  $k - \epsilon$ -Modell. Die Kopplung zwischen beiden Zweigleichungsmodellen liefert das sogenannte „BASELINE“ Modell (BSL), dessen Gleichungen unter Einführung des Multiplikators  $F_1$  wie folgt lauten:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta^* k \omega \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 \\ & + \underbrace{(1 - F_1) \frac{2 \rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}}_{CD_{k\omega}} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Modell	i	$\sigma_{ki}$	$\sigma_{\omega i}$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\beta^*$
BSL	1	0,50	0,500	0,553	0,0750	0,09
SST	1	0,85	0,500	0,553	0,0750	0,09
BSL sowie SST	2	1,00	0,856	0,440	0,0828	0,09

Tabelle 3.2: Konstanten des BSL- und SST-Modells

Der Term  $CD_{k\omega}$  ist der sogenannte „CROSS-DIFFUSION TERM“, der aus der mathematischer Überführung der  $k - \epsilon$  Gleichungen in die  $k - \omega$  Nomenklatur entsteht. Die diversen Konstanten ( $\phi$ ) des Modells werden aus den Koeffizienten des  $k - \epsilon$ - bzw.  $k - \omega$ -Modells durch die Gleichung (3.31) berechnet.

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (3.31)$$

Die Funktion  $F_1$  muss eins an der Wand und null in der freien Strömung sein und ist:

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4) \quad (3.32)$$

wo

$$\Phi_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}; \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right); \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right) \quad (3.33)$$

Der Wert der Funktion  $F_1$  ist eins bis ca. 50% der Grenzschichtdicke und wird danach langsam kleiner, bis er Null erreicht.

Bei sehr starkem Druckgradienten wird ein ungünstiger Einfluss der Eddy-Viskosität (Gl. 3.26) im BSL-Modell sichtbar. **Menter** [37] modifiziert daher die Eddy-Viskosität durch die Hypothese von Bradshaw als:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)} \quad (3.34)$$

wo  $a_1 = 0,31$  die Konstante von Bradshaw ist, und

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2) \quad (3.35)$$

deren Variable  $\Phi_2$  definiert ist als

$$\Phi_2 = \max \left( \frac{2 \sqrt{k}}{0,09 \omega y}; \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right) \quad (3.36)$$

Die Konstanten für jeden Bereich sowie beide Turbulenzmodelle von Menter sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

### 3.3 Wandbehandlung

Die Einflüsse im Übergangsbereich in Strömung in Wandnähe ist als die sogenannte Grenzschicht in Kapitel 2.3 diskutiert worden. Dieser Bereich mit großen Geschwindigkeitsgradienten spielt eine wichtige Rolle in der Turbulenzmodellierung.

Die turbulente Reynoldszahl wird an einer festen Wand zu Null und steigt proportional zum Verhältnis der turbulenten zur molekularen Viskosität an. Im Bereich vollturbulenter Strömung steigt der Wert auf über 100 an.

Eine turbulente voll entwickelte Grenzschicht läßt sich in 3 Bereiche unterteilen, die viskose Wandschicht und Übergangsschicht, die logarithmische Schicht und die äußere Schicht oder turbulente Kernströmung. In der numerischen Behandlung der Wandbereiche unterscheiden sich die verschiedenen Turbulenzmodelle in ihrer Genauigkeit sowie ihrer sinnvoller Anwendbarkeit für spezielle Strömungsformen wie Ablösung, Transition oder Relaminarisierung. Die numerische Wandbehandlung zeigt sich in der Auflösung des Rechengitters in der Nähe der Wand, hierbei gibt es folgende Möglichkeiten:

- Wandfunktion: wobei die turbulente Strömung mit Hilfe des universelles logarithmisches Wandgesetz (Gl. 2.19) abgebildet wird.
- Zwei-Schichten Modell: Der wandnahbereich wird in zwei Zonen aufgeteilt, einen äußeren für größere Reynolds-Zahlen und einen Inneren, wo low-Reynolds Effekte berücksichtigt werden.
- „LOW REYNOLDS“ (low-Re) Erweiterung: Der diffusionskontrollierte Grenzschichtumschlag wird berechnet [1]. Dafür müssen die turbulenten Viskositäts- sowie Transportgleichungen —bzw. Gln. (3.21) bis (3.23)— mit Dämpfungsfunktionen erweitert werden. Deren Verwendung bewirkt eine asymptotische Turbulenzdämpfung in Wandnähe.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Wandbehandlungen mittels Wandfunktionen und „LOW-REYNOLDS“ untersucht. Eine ausführliche Besprechung beider Möglichkeiten nachfolgend.

### 3.3.1 Wandfunktion

Das Rechengebiet beginnt bei der Verwendung einer Wandfunktion ab der logarithmischen Wandschicht (Gl. 2.19), d.h. der Abstand der wandnächsten Zelle sollte im Bereich des dimensionslosen Wandabstandes  $y^+ \approx 30$  liegen. Die Definition der dimensionslosen Geschwindigkeit ( $u^+$ ) erfolgt in Gleichung (2.15) sowie des dimensionslosen Wandabstandes ( $y^+$ ) in Gleichung (2.16).

Unter der Annahme gleichwertiger Produktion  $P_k$  und Dissipation  $\epsilon$  innerhalb der logarithmischen Schicht kann nach **Durbin und Pettersson Reif** [10] die Schubspannungsgeschwindigkeit wie folgt formuliert werden:

$$u_\tau = C_\mu^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{k} \quad (3.37)$$

Das Längenmaß in Gleichung (3.19) wird nach **Durbin und Pettersson Reif** [10] mit  $L_T \approx \kappa \frac{y_P}{C_\mu^{\frac{3}{4}}}$  approximiert, danach die Dissipation ( $\epsilon$ ) in Gleichung (3.38) umformuliert.

$$\epsilon \approx \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} \cdot k^{\frac{3}{2}}}{\kappa \cdot y_P} \quad (3.38)$$

wobei  $y_P$  der Abstand zur Wand ist.

Bei der numerischen Implementierung der Wandfunktion wird eine künstliche Viskosität  $\mu_{(wf)}$  in Gleichung (3.39) eingeführt.

$$\mu_{(wf)} = \tau_{w,(wf)} \frac{y_P}{t_j(u_{j,P} - u_{j,w})} \quad (3.39)$$

Die Wandschubspannung der Wandfunktion ( $\tau_{w,(wf)}$ ) wird mit den Gleichungen (2.17) und (2.19) ausgedrückt, damit ergibt sich  $\mu_{(wf)}$  in Gleichung (3.40).

$$\mu_{(wf)} = y^+ \frac{\mu \cdot \kappa}{\ln(y^+ \cdot e^{\kappa C_r})} \quad (3.40)$$

Der Faktor  $C_r$  ist eine Korrelation für Wandrauigkeiten, der über eine äquivalente Sandrauigkeit ( $k_r$ ) für das logarithmische Gesetz empirisch ermittelt wurde, und lautet:

$$C_r = C - \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + 0.3 \cdot \frac{y^+ k_r}{y_P} \right) \quad (3.41)$$

### 3.3.2 „LOW-RE“ Erweiterung

Das Standard  $k - \epsilon$ -Modell gilt, wie bereits oben erläutert, nur für hohe Reynolds-Zahlen. Um ein korrektes, asymptotisches Wandverhalten zu garantieren, müssen Dämpfungsfunktionen eingeführt werden. Für verschiedene „LOW-RE“ Turbulenzmodellvarianten werden die Dämpfungsfunktionen ( $f_\mu, f_1, f_2, \epsilon_0, E$ ) individuell definiert, die weit entfernt von Wänden den Wert Eins annehmen müssen. Wegen eines falschen Geschwindigkeitsmaßes  $\sqrt{k}$  in Gleichung (3.42) wurde mittels der Funktion  $f_\mu$  die Beschreibung der Abnahme des turbulenten Längenmaßes in Wandnähe korrigiert und somit das korrekte asymptotische Verhalten der Wirbelviskosität erzeugt.

Der Produktionsterm wird mit der Verwendung der Funktion  $f_1$  korrigiert. Mit dieser Korrektur wird das lokale Maximum der Dissipation im Übergangsbereich der viskosen Wandschicht erzeugt. Alternativ zur  $f_1$  kann man die Dämpfungsfunktion  $E$  für diesen Zwecke annehmen.

Anschließend wird der Wert von  $C_{\epsilon_2}$  in unmittelbarer Wandnähe mit der Funktion  $f_2$  korrigiert, um eine Singularität der Turbulenzabfallbeschreibung ( $C_{\epsilon_2}$ ) zu verhindern, da  $C_{\epsilon_2}$  bei homogener Turbulenz und bei hohen Reynolds-Zahl bestimmt wurde.

Die Wirbelviskositäts-Gleichung (3.16) sowie die Transportgleichung der Dissipationsrate (3.23) ergeben sich nach der Modifizierung mithilfe der Dämpfungsfunktionen in Form der Gleichungen (3.42) und (3.43).

$$\nu_t = C_\mu \cdot f_\mu \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon_1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P_k - C_{\epsilon_2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \quad (3.43)$$

In Gleichung (3.43) wurde die Variable  $\tilde{\epsilon}$  zur vereinfachten Formulierung der Wandrandbedingungen eingeführt, die folgendermaßen definiert ist:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \tilde{\epsilon} \quad (3.44)$$

wobei  $\epsilon_0$  für jede Modellvariante der Wert von  $\epsilon$  an der Wand ist. Dies führt zu einer numerischen Stabilisierung, da ein flacherer Gradient von  $\epsilon$  in Wandnähe entsteht.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die linearen low-Re  $k - \epsilon$ -Modelle von **Abid** [1], **Chien** [6], **Fan et al.** [11], **Lam-Bremhorst** [26], und **Lauder-Sharma** [27] ausgewählt. Die Modellkonstanten werden in den Tabelle 3.3 angegeben, sowie die Dämpfungsfunktionen in der Tabelle 3.4. Zusätzlich werden die Konstanten des Standard- $k - \epsilon$ -Modells von **Lauder und Spalding** [28] angegeben.

Model	$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	E	$\epsilon_0$
Standard	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	0	—
Abid (AB)	0,09	1,45	1,83	1,0	1,4	0	0
Chien (CH)	0,09	1,35	1,80	1,0	1,3	$-2\nu \frac{\epsilon - 2\nu \frac{k}{y^2}}{y^2} e^{-0.5y^+}$	—
Fan et al. (FLB)	0,09	1,39	1,80	1,0	1,3	0	0
Lam-Bremhorst (LB)	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	0	—
Launder-Sharma (LSH)	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	$2\nu\nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)^2$	—

Tabelle 3.3: Zusatzterme und Modellkonstanten der verwendeten linearen low-Re  $k-\epsilon$  Modelle

Im Tabelle 3.4 werden die Dämpfungsfunktionen in Abhängigkeit von dem dimensionslosen Wandabstand ( $y^+$ ) sowie von den lokalen- ( $Re_T$ ) und nichtlokalen-Reynoldszahl ( $Re_y$ ) beschrieben. Der dimensionslose Wandabstand wurde im Gleichung (2.16) definiert, für die örtlichen Reynoldszahlen gelten die Gleichungen (3.45) und (3.46).

$$Re_T = \frac{k^2}{\tilde{\epsilon} \cdot \nu} \tag{3.45}$$

$$Re_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu} \tag{3.46}$$

Model	$f_1$	$f_2$	$f_\mu$
Standard	1	1	1
AB	1	$\left(1 - \frac{2}{9}e^{-\frac{Re_T^2}{36}}\right)\left(1 - e^{-\frac{Re_y}{12}}\right)$	$\tanh(0.008Re_y) \cdot \left(1 + \frac{4}{Re_T^4}\right)$
CH	1	$1 - 0.22e^{-\frac{Re_T^2}{36}}$	$1 - e^{-0.0115y^+}$
FLB	1	$\left(1 - \frac{2}{9}e^{-\left(\frac{Re_T}{6}\right)^2}\right)f_w^2$	$f_v + (1 - f_v)\left(1 - e^{-\frac{Re_y}{42.63}}\right)^3$
		$f_v = 0.4 \frac{f_w}{\sqrt{Re_T}}, f_w = 1 - e^{-\frac{\sqrt{Re_y}}{2.3} + \left(\frac{\sqrt{Re_y}}{2.3} - \frac{Re_y}{8.89}\right)\left(1 - e^{-\frac{Re_y}{20}}\right)^3}$	
LB	$1 + \left(\frac{0.055}{f_\mu}\right)^3$	$1 - e^{-Re_T^2}$	$\left(1 - e^{-0.0153Re_y}\right)^2 \left(1 + \frac{20}{Re_T}\right)$
LSH	1	$1 - 0.3e^{-Re_T^2}$	$e^{-\frac{3.4}{\left(1 + \frac{Re_T}{50}\right)^2}}$

Tabelle 3.4: Erweiterungsfunktionen der verwendeten linearen low-Re  $k - \epsilon$  Modelle

### 3.4 Produktionsterm und seine Korrekturen

Der Produktionsterm in Gleichung (3.24) stellt die Produktionsrate turbulenter kinetischer Energie in der Hauptströmung dar, und er ist verantwortlich für den kinetischen Energieübergang von der Hauptströmung zur Turbulenz. Die Wirbelviskositätsannahme (Gl. 3.15) bewirkt Anomalien bei Staupunktströmungen, die sich durch eine unphysikalisch große Produktion turbulenter kinetischer Energie ( $P_k$ ) zeigen. Die nachfolgenden Auswirkungen auf den stromab liegenden Grenzschichtzustand verhindern eventuell die Berechnung einer tatsächlich auftretenden Ablösung, weil die Grenzschicht durch Einbringung großer turbulenter kinetische Energie stabilisiert wird.

Um dieses ungünstige Modell-Verhalten zu vermeiden, wurde von **Kato und Launder** [24] eine Korrektur mittels des linearen Ansatzes (Gl. 3.47) in Staupunktnähe eingeführt. Diese Änderung besteht in der Berücksichtigung des Rotationstensors bei der Berechnung von  $P_k$ , welche dann in Staupunktnähe annähernd verschwindet.

$$P_{k,KL} = 2\nu_t \cdot f_\mu \cdot \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad (3.47)$$

wobei die Komponenten des Dehnungstensors ( $\overleftrightarrow{S}$ ) und des Rotationstensors ( $\overleftrightarrow{\Omega}$ ) bzw. in den Gleichungen (3.48) und (3.49) eingeführt werden.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.48)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.49)$$

Diese Korrektur wird als die geeignete Methode zur Unterdrückung der Staupunktanomalie angesehen, dennoch kennt man die Nachteile der Methode bei ungünstigem Druckgradienten. Folgerichtig wird auch die Vorhersage des laminar-turbulenten Überganges sowie die Grenzschichtentwicklung nicht korrekt berechnet.

In einem anderen Ansatz wird der Produktionsterm von **Wang und Stoffel** [65] durch einen dimensionslosen Parameter für den örtlichen Druckgradienten ( $f_p$ ) erweitert, dessen Verifizierung von **Wang** [66] durchgeführt wurde. Die Gleichung (3.47) wird durch die Modifizierung nach Wang-Stoffel in die Gleichung (3.50) geändert.

$$P_k = 2 \cdot \nu_T f_\mu f_p S_{ij} \Omega_{ij} , \quad (3.50)$$

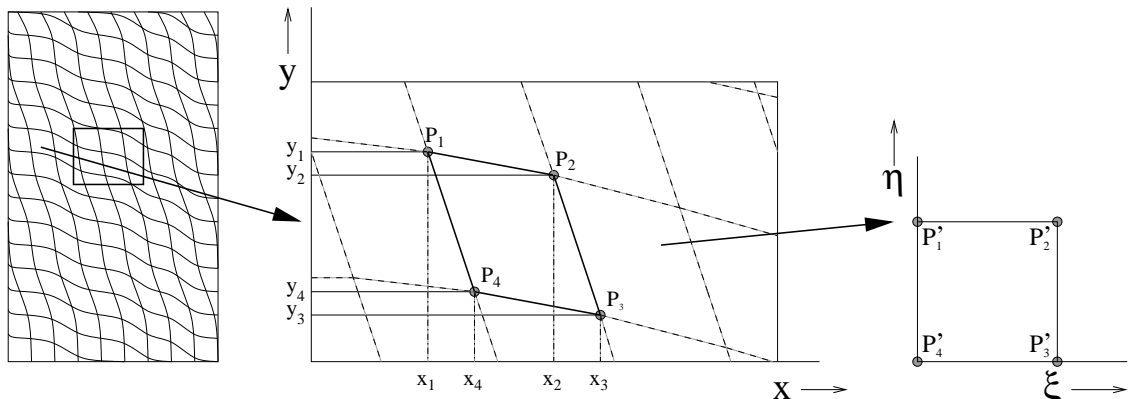


Abbildung 3.2: Diskretisierung des geometrischen Rechengebietes

Die mathematische Beschreibung von  $f_p$  ist

$$f_p = \min\left(1, \frac{1}{P_\theta}\right) \tag{3.51}$$

d.h. nach der Definition des Druckgradientterms in Gleichung (3.52) wird der Produktionsterm nur bei großen Druckgradienten korrigiert.

$$P_\theta = \delta_{ii} \frac{\sqrt{k}}{\rho \epsilon} \left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right| \tag{3.52}$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta ist.

### 3.5 Diskretisierungsverfahren

Als Diskretisierung bezeichnet man das Überführen von Differentialgleichungen auf ein algebraisches Gleichungssystem für die unbekannt Variablen in diskreten Punkten in Raum und Zeit. Abbildung 3.2 zeigt beispielweise die Diskretisierung einer realen Strömungsgeometrie durch ein numerisches Gitter. Es gibt diverse Diskretisierungs-Methoden, z.B. die Spektral- sowie Randelement-Methoden, das Finite-Differenzen-Verfahren, das Finite-Elemente-Verfahren, und das Finite-Volumen-Verfahren. Die Terme einer Transportgleichung können in Volumen- und Oberflächenintegrale umgeschrieben werden.

Das Ziel eines Diskretisierungsverfahrens ist es nun, geeigneten Approximationen für die Volumenintegrale der zeitlichen Ableitung und der Quelle sowie für die Oberflächenintegrale der konvektiven und diffusiven Flüsse einzuführen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Code benutzt, der auf Finite-Volumen-Verfahren ba-



siert. Die Eigenschaften und Besonderheiten dieses Verfahrens werden anschließend diskutiert.

Bei einem Finite-Volumen-Verfahren wird das Rechengebiet in ein Rechengitter übersetzt, d.h. in kleine Teilvolumina aufgeteilt. In jedem Teilvolumen oder Kontrollvolumen werden die Erhaltungsgleichungen in integraler Form gelöst. Bei der Lösung der Integralform der Navier-Stokes-Gleichungen steht eine Bilanzgleichung für die jeweilige Zelle.

Die Teilvolumina können dabei in einer gerichteten Indexstruktur oder unstrukturiert im Raum angeordnet sein. Bei strukturierten Verfahren beschränkt sich die Geometrie der Teilvolumina auf zweidimensionale Vierecke oder dreidimensionale Hexaeder, während bei unstrukturierten Verfahren die Kontrollvolumina eine beliebige geometrische Form erhalten können. Die Vorteile eines unstrukturierten Verfahrens sind in erster Linie eine völlige Flexibilität und leichte Automatisierbarkeit der Netzgenerierung. Bei Strömungen mit dominierendem Wandeinfluss liefert ein strukturiertes Gitter eine deutlich bessere Strömungsauflösung in Wandnähe.

Im angewendeten  $CFD$ -Code wurden strukturierte Verfahren programmiert. Die Oberfläche eines Kontrollvolumens eines strukturierten, nicht-orthogonalen zweidimensionalen numerischen Gitters ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Notation in der Abbildung orientiert sich an den Himmelsrichtungen (N, S, W, O). Im dreidimensionalen Fall werden die noch fehlenden Nachbarzellen mit „BOTTOM“ und „TOP“ bezeichnet. Der Zellmittelpunkt wird als P bezeichnet, und bestimmt sich als arithmetisches Mittel der Koordinaten der Eckpunkte. Jede Zellfläche wurde mittels des Einheits-Normalenvektors  $\vec{n}$  charakterisiert.

Die in Kapitel 2 vorgestellten Gleichungen, nämlich die Impuls und turbulenten

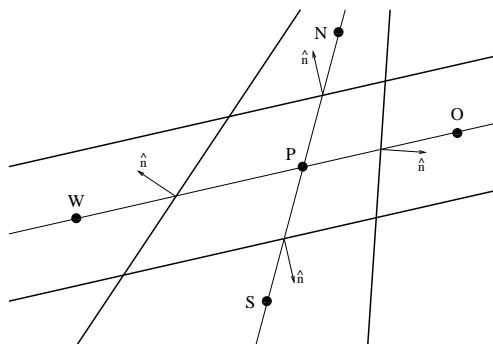


Abbildung 3.3: Kontrollvolumen in zweidimensionaler Darstellung

Transportgleichungen beschreiben turbulente Strömungen. Dieser Gleichungen enthalten einen konvektiven und diffusiven Transportterm sowie einen zeitabhängigen Term und einen Quellterm. Eine solche Gleichung kann als allgemeine Transportgleichung (3.53) einer beliebigen Variablen  $\phi$  geschrieben werden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + q_\phi \quad (3.53)$$

Die einzelnen Terme dieser Gleichung für den transienten, konvektiven, und diffusiven Anteil werden in den Kapiteln 3.5.1, 3.5.2, und 3.5.3 separat diskutiert. Die Gleichung (3.53) gilt für ein dichtebeständiges Fluid in differentieller Form, wobei  $\Gamma$  für den Diffusionskoeffizienten steht. Die entsprechende integrale Transportgleichung (3.54) erhält man unter Anwendung des Gauß'schen Integrales:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV + \int_S \phi u_j n_j dS = \int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dS + \int_V q_\phi dV \quad (3.54)$$

In Gleichung (3.54) beziehen sich die Volumenintegrale auf die gesamte Zelle P und die Oberflächenintegrale auf die gesamte Fläche S des Teilvolumens. Bei den Oberflächenintegralen werden konvektive Flüsse als  $f^c$  und diffusive Flüsse als  $f^d$  bezeichnet, wie in den Gleichungen (3.55) und (3.56) dargestellt.

$$f^c = \phi u_j n_j \quad (3.55)$$

$$f^d = \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j \quad (3.56)$$

Bei der Berechnung der Oberflächeintegrale wird der Fluß  $f$  auf die bekannten Flächen verteilt, d.h. die Gesamtzellfläche in vier (2D) oder sechs (3D) Gebiete aufgeteilt. Sei  $f_l$  ein repräsentativer Wert des Integranden im Zellflächenmittelpunkt der Fläche  $l$ , und  $S_l$  die Zellfläche dann kann man den integralen Fluss als  $F_l \approx f_l S_l$  definieren. Damit wird das Oberflächenintegral über ein Teilvolumen in Gleichung (3.57) überführt.

$$\int_S f dS = \sum_l F_l = \sum_l \int_{S_l} f dS \approx \sum_l f_l S_l ; l = \{w, e, s, n, b, t\} \quad (3.57)$$

Wenn es einen repräsentativen Mittelwertes  $q_P$  des Quellterms im Zellmittelpunkt P gibt, dann ergibt sich der Quellterm  $Q_P$  als Volumenintegral über das Teilvolumen. Mit dieser Überlegung lässt sich das Volumenintegral eines Kontrollvolumens  $\Delta V$  nach Gleichung (3.58) berechnen.

$$Q_P = \int_V q dV \approx q_P \Delta V \quad (3.58)$$

Die Genauigkeit dieser Annahmen ist von zweiter Ordnung. Die Lösung der Oberflächenintegrale wird auf die Bestimmung des Flusses  $f_l$  beschränkt, die in den Kapiteln 3.5.2 und 3.5.3 diskutiert wird.

### 3.5.1 Instationäre Terme

Die Zeitableitung in der allgemeinen Transportgleichung (3.54) wird über die zeitliche Größe  $\phi_P(t_n)$  definiert, und als Volumenintegral behandelt. Die Größe  $\phi_P(t_n)$  kann man mittels eines expliziten oder impliziten Verfahren bestimmen.

Beim expliziten Verfahrens werden die Variablenwerte beim Zeitschritt  $t_{n+1}$  aus den vergangenen Zeitschritten bestimmt ( $\phi(t_{n+1}) = f(\phi(t_n), \phi(t_{n-1}), \phi(t_{n-2}), \dots)$ ). Ein wesentlicher Nachteil des expliziten Verfahrens liegt in der Größe der Zeitschrittweite ( $\Delta t$ ), weil aus Stabilitätsgründen dieser Wert nicht beliebig gewählt werden kann. Die geeignete Zeitschrittweite bestimmt man aus der Definition der Courantzahl  $C$ , deren Definition sich in Gleichung (3.59) findet. Die Bedingung  $C \leq 1$  besagt, dass pro Zeitschritt ( $\Delta t$ ) die Verteilung einer Variablen  $\phi$  mit der Geschwindigkeit  $U$  nur maximal eine Gitterzelle ( $\Delta x$ ) weiter transportiert werden darf.

$$C = U \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.59)$$

Ein implizites Verfahren ( $\phi(t_{n+1}) = f(\phi(t_{n+1}), \phi(t_n), \phi(t_{n-1}), \dots)$ ) besitzt keine Zeitschritteinschränkung, aber die Größe der gewählten Zeitschrittweite beeinflusst die Genauigkeit der Berechnung. Ein weiterer Nachteil des impliziten Verfahrens ist der im Vergleich zum expliziten Verfahren erhöhte Speicherplatzbedarf. Dennoch wurde in Rahmen dieser Dissertation das implizite Verfahren zur instationären Simulation gewählt, da keine allgemeine Courantzahl kleiner eins für das komplexe und projizierte Gitter garantiert werden konnte.

Innerhalb der impliziten Verfahren gibt es solche von erster und von zweiter Ordnung. Als wichtiges Verfahren 1. Ordnung sei die sogenannte Euler'sche Einschrittmethode genannt, deren Definition aus Gleichung (3.60) folgt. Ein typisches Verfahren 2. Ordnung ist das Drei-Zeitebenen-Verfahren, Gleichung (3.61), welches zur Diskretisierung den aktuellen, den letzten und den vorletzten Zeitschritt verwendet.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \approx \frac{\delta V_P}{\Delta t} \rho_P (\phi_P(t_n) - \phi_P(t_{n-1})) \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \approx \frac{\delta V_P}{\Delta t} \rho_P \frac{3\phi_P(t_n) - 4\phi_P(t_{n-1}) + \phi_P(t_{n-2})}{2} \quad (3.61)$$

### 3.5.2 Diffusive Terme

Das Oberflächenintegral in Gleichung (3.54) entspricht der Summe aller Integrale auf den Kontrollvolumenränden, d.h.

$$\int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dS = \sum_f \int_{S_f} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dS_f, \quad f = n, e, s, w \quad (3.62)$$

Der diffusive Fluss wird mit Hilfe der Mittelpunktsregel approximiert. Die Integration auf dem Kontrollvolumenrand wird mittels der Multiplikation des Seitenmittelflusses und der entsprechenden Kantenlänge ( $\delta S_f$ ) durchgeführt:

$$F_f^D = \int_{S_f} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dS_f \approx \Gamma_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j \delta S_f \quad (3.63)$$

Die Approximierung der Variablenwerte erfolgt über den Gradienten in Beziehung zu den Zellflächenmittelpunkten. Die dafür verwendete Methode wird in Kapitel 3.5.4 diskutiert.

### 3.5.3 Konvektive Terme

Mit analogem Gedankengang entsprechend der diffusiven Terme werden die Kontrollvolumenkanten in Gleichung (3.64) addiert.

$$\int_S \rho \cdot \phi \cdot u_j \cdot n_j dS = \sum_f F_f^C, \quad f = n, e, s, w \quad (3.64)$$

Nach einer Approximierung über die Mittelpunktsregel wird der konvektive Fluss der Zellfläche wie folgt definiert:

$$F_f^C \approx \rho \cdot u_j \cdot n_j \cdot \delta S_f \cdot \phi_f \approx \dot{m}_f \cdot \phi_f \quad (3.65)$$

wobei  $\dot{m}_f$  der bekannte Massenstrom durch die Fläche  $f$  ist. Die Problem beschränkt sich auf die Lösung des Wertes  $\phi_f$ .

### 3.5.4 Interpolationsverfahren

Die Interpolation nach dem Zentraldifferenzenverfahren oder „CENTRAL DIFFERENCING SCHEME“ (CDS) ist als lineare Interpolation definiert. Für eine Zellfläche  $l$  wird der Wert der Variablen  $\phi_l$  gemäß Gleichung (3.66) berechnet wird.

$$\phi_l = \lambda_l \phi_L + (1 - \lambda_l) \phi_P \quad (3.66)$$

wobei  $\lambda_l$  ein Interpolationsfaktor ist, der mit dem Ortsvektor  $\vec{n}$  nach Gleichung (3.67) berechnet.

$$\lambda_l = \frac{|\vec{n}_l - \vec{n}_P|}{|\vec{n}_L - \vec{n}_P|} \quad (3.67)$$

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in seiner Genauigkeit von  $\mathcal{O}^2$ , ein wesentlicher Nachteil ergibt sich allerdings in möglichen Oszillationen in der Lösung. Ein unbedingt stabiles Verfahren ist das sogenannte Stromauf-Interpolationsverfahren oder „UPWIND DIFFERENCING SCHEME“ (UDS), dessen Genauigkeit von  $\mathcal{O}^1$  ist. Bei einem Stromauf-Interpolationsverfahren wird der gesuchte Wert  $\phi_l$  an der Zellfläche in Abhängigkeit der vorherrschenden Massenstromrichtung ( $\dot{m}_l$ ) approximiert.

$$\phi_l = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } \dot{m}_l > 0 \\ \phi_L & \text{falls } \dot{m}_l < 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

Weiterhin liegt ein inhärenter Nachteil des UDS an der parallel zur Indexrichtung definierten Stromaufrichtung, welche sich auf die Konvektionsrichtung auswirkt. Zur Verbesserung schlägt **Raithby** [46] ein stromlinienbasiertes Verfahren oder „SKEW UPWIND DIFFERENCING SCHEME“ (SUDS) vor, welches mittels Querinterpolation zur Strömungsrichtung den konvektiven Stromaufluss korrigiert.

Die Genauigkeit des Verfahrens wird verbessert durch die Mischung zwischen CDS- und UDS-Verfahren. Eine logische Kombination ist das sogenannte „FLUX-BLENDING“-Verfahren. Wie die Gleichung (3.69) zeigt, wird die Linearkombination von CDS und UDS mittels der Verwendung eines konstanten Blendingfaktors ( $\beta$ ) durchgeführt [48],

$$\phi_e = \beta \phi^{CDS} + (1 - \beta) \phi^{UDS} \quad (3.69)$$

wobei  $\phi^{CDS}$  und  $\phi^{UDS}$ , die jeweils ermittelten Zellflächenwerte von CDS und UDS sind. Der Wert des Blendingfaktors  $\beta$  soll der kleinstmögliche sein, der noch eine stabile Lösung liefert. Ein großer Nachteil dieses Verfahrens ist, dass *a priori* keine Spezifizierung des unbekanntes Blendingfaktors existiert. In der Praxis wird man den kleinsten Wert wählen, der eine Lösung garantiert.

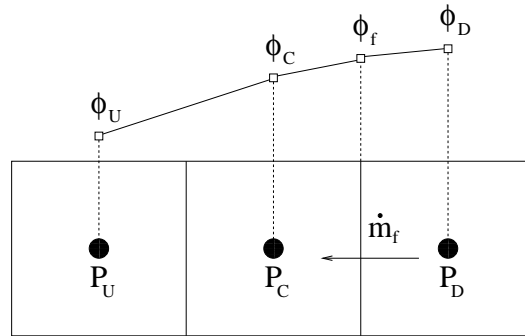


Abbildung 3.4: Eindimensionale Betrachtung der Kontrollvolumina

Ein Verfahren der Ordnung  $\mathcal{O}^3$  wurde von **Leonard** [29] entwickelt. Dies ist das sogenannte **QUICK**-Verfahren („**QUADRATIC UPWIND INTERPOLATION FOR CONVECTIVE KINEMATICS**“), und beschreibt eine Parabel durch einen Stromab- und zwei Stromaufpunkte. Nachfolgend sind alle diskutierten Interpolationsverfahren in einer kurzen Beschreibung zusammengefasst.

$$UDS : \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_C \quad (3.70)$$

$$CDS : \tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_C + 1) \quad (3.71)$$

$$QUICK : \tilde{\phi}_f = \frac{3}{8}(2\tilde{\phi}_C + 1) \quad (3.72)$$

wobei die Nomenklatur anschließend erklärt wird. In Abbildung 3.4 sind drei benachbarte Zellen skizziert. Dargestellt sind die Zellfläche „f“ sowie die Variablenwerte  $\phi$  in den Zellen stromauf ( $\phi_U$ ), stromab ( $\phi_D$ ), und in der zentralen Zelle ( $\phi_C$ ). Mit diesen Annahmen wird die Notation der normierten Variablen (NV) für den Knotenwert  $\tilde{\phi}_C$  sowie für den Flächenwert  $\tilde{\phi}_f$  in der folgenden Form angegeben:

$$\tilde{\phi}_C = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (3.73)$$

$$\tilde{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (3.74)$$

Unphysikalische Oszillationen im Lösungsverfahren werden verhindert, solange der Wert von  $\tilde{\phi}_C$  und der Wert von  $\tilde{\phi}_f$  zwischen  $\tilde{\phi}_U$  und  $\tilde{\phi}_D$  beschränkt bleiben, d.h.

$$\tilde{\phi}_U \leq \tilde{\phi}_C \leq \tilde{\phi}_D \quad (3.75)$$

Das „**NORMALIZED VARIABLE DIAGRAMM**“ (NVD) in Abbildung 3.5 beschreibt das Verhalten der bislang diskutierten Interpolationsverfahren. Der stabile Bereich wird

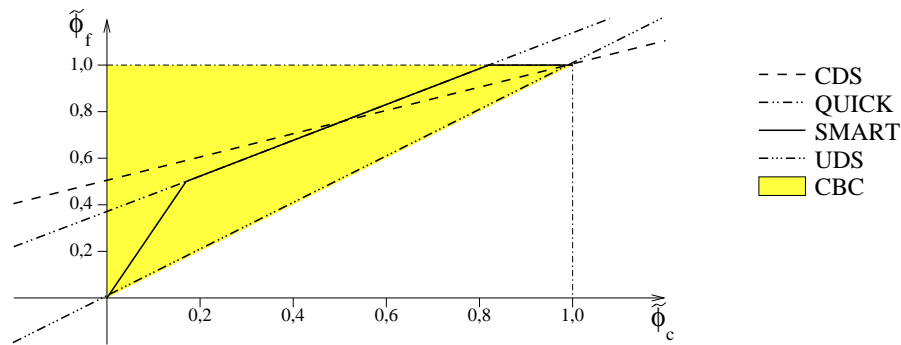


Abbildung 3.5: Verschiedene Interpolationsverfahren im NV-Diagramm

mit dem „CONVECTION BOUNDEDNESS CRITERION“ (CBC) grafisch dargestellt. Dieses Kriterium ist von **Gaskell und Lau** [16] formuliert worden, das wenn  $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_f(\tilde{\phi}_C)$  lautet:

- die Funktion  $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_f(\tilde{\phi}_C)$  durchläuft die Punkte (0;0) und (1;1),
- für  $0 \leq \tilde{\phi}_C \leq 1$  liegt das stabile Gebiet oberhalb der Funktion  $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_C$  und unterhalb  $\tilde{\phi}_f = 1$ ,
- für  $\tilde{\phi}_C < 0$  und  $\tilde{\phi}_C > 1$  ist  $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_C$ .

Die Darstellung der Abbildung 3.5 zeigt zum einen die Stabilität des UDS-Verfahrens, zum anderen das verbreitete Spektrum der Lösung mit dem CDS- und QUICK-Verfahren. Aus dieser Betrachtung wurde der SMART-Algorithmus („SHARP AND MONOTONIC ALGORITHM FOR REALISTIC TRANSPORT“) von **Gaskell und Lau** [16] entwickelt. Das SMART-Verfahren, das ebenfalls in Abbildung 3.5 grafisch dargestellt ist, besitzt eine Genauigkeit der Ordnung  $\mathcal{O}^2$ . Die stückweise Definition dieses Verfahrens lautet:

$$\tilde{\phi}_f^{SMART} = \begin{cases} \tilde{\phi}_C & \text{falls } \tilde{\phi}_C < 0 \\ 3\tilde{\phi}_C & \text{falls } 0 \leq \tilde{\phi}_C < \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8}(\tilde{\phi}_C + 1) & \text{falls } \frac{1}{6} < \tilde{\phi}_C < \frac{5}{6} \\ 1 & \text{falls } \frac{5}{6} < \tilde{\phi}_C < 1 \\ \tilde{\phi}_C & \text{falls } \tilde{\phi}_C \geq 1 \end{cases} \quad (3.76)$$

### 3.6 Druckkorrekturverfahren

Der Druck in kompressiblen Strömungen kann über die Dichteverteilung aus der Kontinuitätsgleichung bestimmt werden. Dies ist nicht der Fall in inkompressiblen Strömungen, weil wegen konstanter Dichte eine unabhängige Gleichung fehlt. Die Druckbestimmung erfolgt entweder mittels einer künstlichen Kompressibilität oder den sogenannten Druckkorrektur-Verfahren: Bei den Pseudokompressibilitätsverfahren wird die Lösung mit dem Gleichungssystem gekoppelt, während bei den Druckkorrekturverfahren die Erhaltungsgleichungen sukzessiv gelöst werden. Beim Druckkorrekturverfahren wird der Druck  $p$  als Parameter behandelt und mittels eines iterativen Prozesses bestimmt, bei dem sowohl die Impuls als auch die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein müssen.

Das bekannteste Druckkorrektur-Verfahren ist der sogenannte SIMPLE-Algorithmus („SEMI IMPLICIT PROCEDURE FOR PRESSURE-LINKED EQUATIONS“) von **Patankar** [42]. Über den nachfolgend beschriebenen Algorithmus wird die Bestimmung des Geschwindigkeits- ( $u_i^{k+1}$ ) und des Druckfeldes ( $p^{k+1}$ ) durchgeführt.

- 1 Lösen der Impulsgleichungen mit einem geschätzten Druckfeld  $p^*$  oder dem des Iterationsschritts  $k \rightarrow$  Geschwindigkeit  $u_i^*$
- 2 Einsetzen des berechneten Geschwindigkeitsfeldes  $u_i^*$  in die Kontinuitätsgleichung  $\rightarrow$  Massenquelle in der Kontinuitätsgleichung
- 3 Definition von Korrekturen  $u_i' = u_i^{k+1} - u_i^*$ ,  $p' = p^{k+1} - p^*$  wobei  $k + 1$  der aktuelle Iterationsschritt ist.
- 4 Aus den Impulsgleichungen mit dem geschätzten Druckfeld, der Gleichung für die Massenquelle und den Impulsgleichungen zur Berechnung der Größen zum Iterationsschritt  $k$  kann eine Beziehung der Geschwindigkeitskorrekturen  $u_i'$  und  $p'$  hergestellt werden. Hierbei werden Geschwindigkeitskorrekturen in den Nachbarpunkten von  $P$  vernachlässigt.
- 5 Dieser Zusammenhang wird in die Gleichung für die Massenquelle eingesetzt  $\rightarrow p'$
- 6 Mit der bekannten Druckkorrektur kann  $u_i'$  bestimmt werden.
- 7 Im letzten Schritt werden nun die angenäherten Größen  $u_i^{k+1}$  und  $p^{k+1}$  berechnet.



Diese oben genannten Schritte müssen solange durchgeführt werden, bis die Korrekturgrößen für Druck und Geschwindigkeit näherungsweise Null sind.

Dieses Druckkorrekturverfahren ist in dem benutzten Code implementiert, daher nutzen alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen diesen Algorithmus. In der Literatur sind Modifikationen des SIMPLE-Verfahrens zu finden, z.B. die sogenannten SIMPLER, SIMPLEC und PISO-Verfahren. Der PISO-Algorithmus („PRESSURE-IMPLICIT WITH SPLITTING OF OPERATORS“) ist eine Weiterentwicklung des SIMPLE-Verfahrens. Er korrigiert eine Schwäche von SIMPLE, d.h. die Impulsbilanz wird mit PISO vollständig erfüllt.

### 3.7 Randbedingungen

Obwohl das für die Berechnungen benutzte Programm eine Vielzahl möglicher Randbedingungen besitzt, werden nachfolgend nur jene im Rahmen dieser Dissertation angewendeten Varianten diskutiert.

**Einströmrand** Am Eintrittsrand wird die Strömung durch konkrete Profile der Geschwindigkeitskomponenten und der turbulenten Größen definiert. Die Geschwindigkeiten sowie die Turbulenzgrößen werden durch eine Dirichlet-Randbedingung festgelegt. Die turbulente kinetische Energie ( $k$ ) am Eintritt wird entsprechend der angegebenen Gleichung (3.77) abgeschätzt, während die Dissipationsrate ( $\epsilon$ ) nach der Kolmogorov-Beziehung in Gleichung (3.78) bestimmt wird,

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 \cdot U_\infty^2 \quad (3.77)$$

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{0,09} \cdot k^{\frac{3}{2}}}{L_\epsilon} \quad (3.78)$$

wobei  $Tu$  der Turbulenzgrad [%] und  $L_\epsilon$  das Längenmaß sind.

**Ausströmrand** Der statische Austrittsdruck ( $p_a$ ) wird als ein vorgeschriebener Wert  $p_{const}$  festgelegt, d.h. der Druck wird mit einer Dirichlet-Randbedingung  $p' = 0$  belegt. Für Turbulenzgrößen wird die Dirichlet-Randbedingung  $k = 0$ , und die Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$  implementiert.

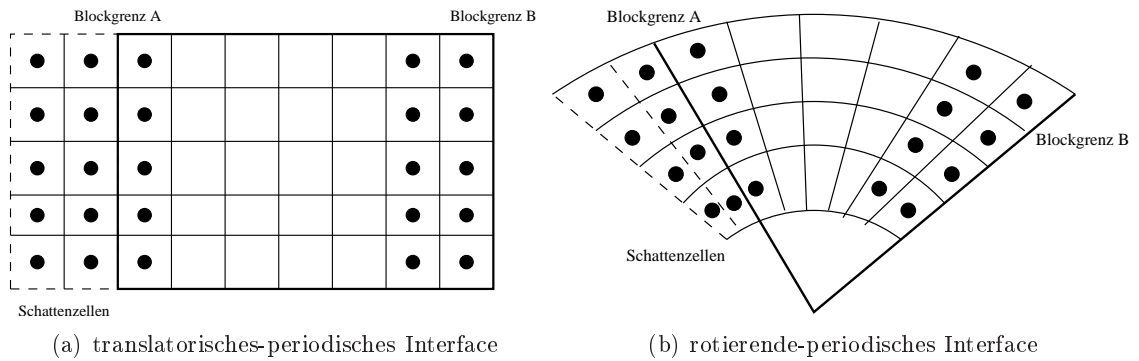


Abbildung 3.6: Skizze zum Datenaustausch an zweidimensionalen periodischen Interfaces

**Wand** An fluiddichten Wänden wird sowohl der Massenfluss als auch der konvektive Fluss zu Null gesetzt. Bei der Behandlung der viskosen Flüsse wird in eine Normal- und eine Tangentialkomponente der Wandspannung aufgeteilt. Verschiedene Wandbehandlungen wurden bereits im Kapitel 3.3 diskutiert.

**Periodische Randbedingungen** Periodische Ränder lassen sich über die Einführung einer Topologie von „Schattenzellen“ definieren. Auf die einer periodischen Randzelle entsprechende Schattenzelle wird die Kontinuität der Geometrie projiziert. In Abbildung 3.6 werden die zwei möglichen Periodizitätsbedingungen dargestellt, nämlich translatorischer und rotationsperiodischer Rand. Es ist zu erkennen, dass die Zellmittelpunkte der Nachbarzellschicht bei translatorisch-periodischen Interfaces verschoben werden, während bei rotations-periodischen Grenzflächen die betreffenden Zellen um eine Rotationsachse gedreht werden.