Eignet sich ‘unbestimmt’ als Wahrheitswert?

von Peter Zahn

Wir führen praktisch motivierte Beispiele an, in denen Aussagen einer gegebenen Klasse je genau einer von drei ‘Wahrheitswerten’ $1, 0, u$ zuzuordnen ist, wobei die Aussagen mit dem Wert u gewissermaßen ‘unbestimmt’ sind; dabei wird jedoch ein allgemeines Prinzip der dreiwertigen Logik verletzt. (In §4 verhält es sich etwas anders.) In verschiedenen dieser Beispiele ist das Wort “unbestimmt” auf verschiedene Weisen zu verstehen: als “noch nicht als wahr oder als falsch klassifiziert” bzw. “nicht eindeutig als wahr oder als falsch klassifizierbar” bzw. “(mit bestimmten Mitteln) weder beweisbar noch widerlegbar” bzw. “weder wahr noch falsch”.

In den üblichen mehrwertigen Logiken ist der Wahrheitswert jeder zusammengesetzten Aussage eindeutig bestimmt ist durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen (sog. ‘Extensionalitätsprinzip’). Die Wertetafeln dieser Logiken sind i.Allg. Fortsetzungen folgender Tafeln der zweiwertigen Logik (für Aussagen A, B mit 1 für “wahr” und 0 für “falsch”):

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \to B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

§1. Zu: “unbestimmt” im Sinne von “noch nicht als wahr oder falsch klassifiziert”

Aussagen sind nicht von selbst wahr oder falsch, sonders sie werden es erst aufgrund entsprechender Bewertungen. In vielen Fällen sind solche Bewertungen wenigstens vorläufig noch nicht gelungen. Beispiele: Wettervorhersagen, Goldbachsche Vermutung. Wir denken uns nun ein geeignetes Verfahren zugrundegelegt, nach dem manche Aussagen $A, B, C, \ldots$ (einer gegebenen Klasse) entweder als wahr oder als falsch klassifiziert werden dürfen. $1, 0, u$ seien die Wahrheitswerte für diejenigen Aussagen, die bereits als wahr klassifiziert, als falsch klassifiziert bzw. bisher unbestimmt (d.h. weder als wahr noch als falsch klassifiziert) sind. h sei die entsprechende Wahrheitwertbelegung, d.h. wir fordern:

$$h(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ bereits als wahr klassifiziert ist,} \\ 0, & \text{falls } A \text{ bereis als falsch klassifiziert ist,} \\ u & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Zeichen h steht hier genau genommen für ein Glied h_t einer zeitliche Folge von Funktionen, welche den Wert 1 ‘vererbt’, d.h. für die gilt:

$$\text{Wenn } \; h_s(A) = 1 \; \text{ und } \; t > s, \; \text{ dann } \; h_t(A) = 1. \tag{1}$$

Dementsprechend setzen wir für die hier betrachteten Aussagen voraus, dass jede von ihnen, die einmal zu Recht als wahr klassifiziert worden ist, auch danach stets als wahr gilt. Hierdurch soll eine *langfristige* Brauchbarkeit vor allem schriftlicher Informationen, z.B. in wissenschaftlichen Büchern, gewährleistet werden.

Für praktische Zwecke ist es oft erforderlich, mitzuteilen, dass man fortan von A auf B schließen darf, d.h. B dann behaupten (bzw. als wahr klassifizieren) darf, wenn man schon A zu Recht behauptet hat. Hierzu diene die Subjunktion $A \to B$. Somit sollte $h_t(A \to B) = 1$ genau dann gelten, wenn man von t an von A auf B schließen darf. Dagegen fordern wir:

$$\text{Wenn } h_t(C) = 1 \text{ und } h_t(D) = 0, \text{ dann } h_t(C \to D) = 0. \tag{2}$$

Damit man Argumentationen mit Aussagen durch Rechnungen mit den Elementen von $\mathcal{W} \rightleftharpoons \{1, 0, u\}$ vereinfachen kann, hat man - unter anderem - dem Subjunktor $\to$ eine Funktion $\varphi_\to : \mathcal{W}^2 \to \mathcal{W}$ derart zuzuordnen, dass h_t die folgende Homomophiebedingung erfüllt:

$$\varphi_\to(h_t(A), h_t(B)) = h_t(A \to B). \tag{3}$$

(Aus (2) und (3) folgt $\varphi_\to(1, 0) = 0$.)

Für beliebige A sollte $h_t(A \to A) = 1$ sein, da man jedenfalls von A auf A schließen darf. Da diese Tatsache aber praktisch belanglos ist, betrachten wir ein anderes Beispiel:

Beispiel: Der Satz: "Alle Spitzmäuse sind Insektenfresser" gibt eine Regel zur Verwendung der Prädikatoren "Spitzmaus" und "Insektenfresser" wieder und lässt sich auf die Form $\forall x\,(Ax \to Bx)$ bringen. Für jede Bezeichnung c (auch wie "dies da") für einen Gegenstand folgt daraus $Ac \to Bc$. Somit lohnt es sich, schon zu einer 'frühen' Zeit s die Aussage $\forall x\,(Ax \to Bx)$ - und damit vorab auch $Ac \to Bc$ - als wahr zu klassifizieren, und zwar auch für solche c, für die Ac und Bc noch unbestimmt sind. Wir erhalten dann $h_s(Ac \to Bc) = 1$ auch für $h_s(Ac) = h_s(Bc) = u$, und damit

$$\varphi_\to(u, u) = \varphi_\to(h_s(Ac), h_s(Bc)) =_{(3)} h_s(Ac \to Bc) = 1, \tag{4}$$

Nun betrachten wir zwei Aussagen C, D, die zu einer Zeit s noch unbestimmt sind, $h_s(C) = h_s(D) = u$, für die man zu einer späteren Zeit t aber $h_t(C) = 1$ und $h_t(D) = 0$ erhält. Dann ergibt sich insgesamt

$$1 =_{(4)} \varphi_\to(u, u) = \varphi_\to(h_s(C), h_s(D)) =_{(3)} h_s(C \to D) =_{(1)} h_t(C \to D) =_{(2)} 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Bedingungen (1) - (3) zusammen mit $h_s(A \to B) = 1$ für spezielle unbestimmte A, B durch keine Wahl der beteiligten Funktionen erfüllt werden können. (1) ist aber für eine langfristige Verfügbarkeit 'wahrer' Informationen erforderlich.

Dies führt zu der Frage, ob man auf die Homomorphieforderung (3) und damit auf die Verwendung von $\varphi_\to$ verzichten könnte, da sie nur zur Vereinfachung der Schlusstechnik mit Hilfe einfacher Rechnungen in $\mathcal{W}$ dienen. Zu ihrer Beantwortung beachten wir, dass die Gleichung $h_s(A) = h_s(C)$ eine Äquivalenzrelation zwischen Aussagen A, C darstellt. Mit dieser Relation sollte die Subjunktion ($\rightarrow$) verträglich sein, d.h. für beliebige A, B, C, D sollte das 'Extensionalitätsprinzip' gelten:

$$\text{Wenn } h_s(A) = h_s(C) \text{ und } h_s(B) = h_s(D), \text{ dann } h_s(A \rightarrow B) = h_s(C \rightarrow D). \qquad (5)$$

(5) folgt einerseits aus (3). Umgekehrt gilt auch: Ist (5) erfüllt, dann kann man $\varphi_{\rightarrow}$ so definieren, dass (3) gilt. Einen Widerspruch können wir aber auch ohne Verwendung dieser Definition mit Hilfe von (5) an Stelle von (3) wie folgt herleiten: Wegen $h_s(Ac) = u = h_s(C)$, $h_s(Bc) = u = h_s(D)$, $h_t(C) = 1$, $h_t(D) = 0$ und $s < t$ erhalten wir

$$1 =_{(s.o.)} h_s(Ac \rightarrow Bc) =_{(5)} h_s(C \rightarrow D) =_{(1)} h_t(C \rightarrow D) =_{(2)} 0.$$

Will man (1), (2) und die Forderung $h_s(A \rightarrow B) = 1$ für spezielle unbestimmte A, B beibehalten, so müsste man zur Vermeidung dieses Widerspruchs zulassen, dass für manche zu einer Zeit s noch unbestimmte Aussagen A, B, C, D gilt $h_s(A \rightarrow B) \neq h_s(C \rightarrow D)$ - und damit den üblichen Rahmen mehrwertiger Logiken sprengen.

§2. Zu "unbestimmt" im Sinne von "zwei- oder mehrdeutig"

Beispiel: Wir betrachten die Aussage "Ich sah den Mann auf dem Berg mit dem Fernrohr." Sie lässt bekanntlich mehrere Interpretationen (Erläuterungen durch andere Aussagen, in diesem Falle aber auch durch Klammersetzungen) zu. Wird sie in einer bestimmten Situation geäußert, so sei sie bei mindestens einer dieser Interpretationen als wahr zu klassifizieren, bei mindestens einer anderen als falsch, bei allen aber als wahr oder als falsch.

Gegeben sei nun eine Aussagenmenge $\mathcal{A}$, die abgeschlossen ist gegen die Zusammensetzung mit den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. (Quantoren ziehen wir hier nicht in Betracht, schließen deren Vorkommen aber nicht aus.) Beliebige Elemente von $\mathcal{A}$ teilen wir durch A, B, C, D mit. Gegeben sei ferner $\mathcal{W} = \{1, 0, u\}$ (wie oben). Wir setzen noch voraus, dass einigen Aussagen von $\mathcal{A}$ je genau einer der Werte 1 (wahr), 0 (falsch) derart zugeordnet werden kann, dass dabei die anfangs erwähnten Regeln der zweiwertigen Logik erfüllt werden. Derartige Aussagen mögen 'eindeutig' heißen; wir fassen sie auch als Interpretationen von sich selbst auf. Die übrigen Aussagen von $\mathcal{A}$ seien (etwa wie im obigen Beispiel) durch eindeutige Aussagen von $\mathcal{A}$ interpretierbar.

Nun definieren wir $h \colon \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{W}$ wie folgt: Für Aussagen A, die evtl. mehrere Interpretationen durch eindeutige Aussagen von $\mathcal{A}$ zulassen, gelte: Ist jede dieser Interpretationen wahr (1) bzw. falsch (0), so sei $h(A) = 1$ bzw. $h(A) = 0$; anderenfalls sei $h(A) = u$.

Die letzte Gleichung kann etwa als "A ist zweideutig" gelesen werden. Für zweideutige A gilt:

$$\begin{aligned} h(A) &= u, & h(\neg A) &= u, \\ h(A \rightarrow A) &= 1, & h(A \rightarrow \neg A) &= u, \\ h(A \wedge A) &= u, & h(A \wedge \neg A) &= 0, \\ h(A \vee A) &= u, & h(A \vee \neg A) &= 1. \end{aligned}$$

Damit wird das 'Extensionalitätsprinzip'

$$\text{Wenn } h(A) = h(C) \text{ und } h(B) = h(D), \text{ dann } h(A * B) = h(C * D)$$

für $* \in \{\to, \wedge, \vee\}$ verletzt. Für diese $*$ gibt es also keine Funktionen $\varphi_*\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ derart, dass $h(A * B) = \varphi_*(h(A), h(B))$ für alle A, B gilt. Auch in diesem Beispiel passt h nicht in den üblichen Rahmen dreiwertiger Logiken.

Für manche mehrdeutigen Aussagen liegt es nahe, sie durch die Auswahl einer ihrer Interpretationen 'eindeutig' zu machen.

BEISPIEL: Gegeben sei eine Funktion f und ein Wert c, der nicht im Definitionsbereich von f liegt. Dann könnte man Aussagen, in denen der Term $f(c)$ vorkommt, "zweideutig", "undefiniert", "sinnlos" oder eben "unbestimmt" nennen. Für elementare (nicht zusammengesetzte) Formeln $A(y)$, in denen nur eine Variable y frei vorkommt, kann man jedoch $A(f(c))$ als Abkürzung für $\exists y\,((c, y) \in f \ \wedge\ A(y))$ definieren ('interpretieren'). Da c nicht im Definitionsbereich von f liegt, ist dann $A(f(c))$ falsch, also 'eindeutig'. Ferner ist dann z.B. $\neg\, A(f(c))$ wahr, also ebenfalls 'eindeutig'. Der Nutzen der erwähnten 'Interpretation' ist jedoch umstritten.

§3. Zu: "Unbestimmt" im Sinne von "weder beweisbar noch widerlegbar"

Gegeben seien bestimmte Beweismittel für die Aussagen aus $\mathcal{A}$ (s. §2), z.B. logische und axiomatische. Die Beweismittel seien derart, dass u.a. die (logisch gültigen) Aussagen der Formen

$$A \to A, \quad \text{und} \quad \neg\,(A \wedge \neg\, A)$$

beweisbar sind und alle Anwendungen folgender Schlussregeln auf beweisbare Prämissen zu einer beweisbaren Konklusion führen:

$$\frac{A}{\neg\neg\, A} \qquad \frac{A \wedge A}{A} \qquad \frac{\neg\,(A \wedge A)}{\neg\, A} \qquad \frac{A \to \neg\, A}{\neg\, A} \qquad \frac{\neg\,(A \to \neg\, A)}{\neg\neg\, A.}$$

$\vdash A$ bedeute, dass A mit Hilfe der erwähnten Mittel beweisbar ist. Für beliebige A gelte nicht sowohl $\vdash A$ als auch $\vdash \neg\, A$ (Widerspruchsfreiheit). - $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{W}$ sei definiert durch

$$h(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \vdash A \\ 0 & \text{falls } \vdash \neg\, A \\ u & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für Aussagen A, für die weder $\vdash \neg\, A$ noch $\vdash \neg\neg\, A$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} h(A) &= u & \qquad h(\neg\, A) &= u \\ h(A \wedge A) &= u & h(A \wedge \neg\, A) &= 0 \\ h(A \to A) &= 1 & h(A \to \neg\, A) &= u. \end{aligned}$$

(Beweise s.u.) Das Ergebnis entspricht demjenigen aus §2. Somit ist die 3-wertige Logik nicht in üblicher Weise auf die hier erwähnte Beweisbarkeit, Widerlegbarkeit (mit gegebenen Mitteln) und die zugehörige 'Unbestimmtheit' anwendbar.

Beweise: $h(\neg A) = u$ folgt aus den Voraussetzungen $\nvdash \neg A$ und $\nvdash \neg\neg A$.

Zu $h(A) = u$: Aus $\nvdash \neg\neg A$ folgt $\nvdash A$. Da außerdem $\nvdash \neg A$ gilt, erhalten wir $h(A) = u$.

Zu $h(A \wedge A) = u$: Wäre $\vdash A \wedge A$, so auch $\vdash A$: Widerspruch.
Wäre $\vdash \neg(A \wedge A)$, so auch $\vdash \neg A$: Widerspruch.

Zu $h(A \wedge \neg A) = 0$: Dies folgt aus der Voraussetzung $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$.

Zu $h(A \to A) = 1$: Dies folgt aus $\vdash A \to A$.

Zu $h(A \to \neg A) = u$: Wäre $\vdash A \to \neg A$, so auch $\vdash \neg A$: Widerspruch.
Wäre $\vdash \neg(A \to \neg A)$, so auch $\vdash \neg\neg A$: Widerspruch.

§4. Zu: "unbestimmt" im Sinne von "weder wahr noch falsch"

Versteht man unter 'falsch" dasselbe wie "nicht wahr", so kann offenbar keine Aussage weder wahr noch falsch sein. Dennoch wollen wir auf zwei Weisen etwas ins Detail gehen:

1. Ich unterstelle hier, dass $\neg B$ ("Nicht B") zur Mitteilung dafür dienen soll, dass die Behauptung der Aussage B eine Konvention des zugrundeliegenden 'Behauptungsspiels' verletzen würde (s. [Zahn], §1). Zu diesem Zweck sollte man $\neg B$ nicht behaupten, wenn B behauptet werden darf. Nun sei $B \equiv \neg A$. Man sollte also nicht sowohl $\neg A$ als auch $\neg\neg A$ behaupten. Anders formuliert: Man sollte nicht sagen, A sei weder wahr noch falsch.

2. In der Umgangssprache dient das Wort "wahr" vor allem zur Bestätigung, Zustimmung oder Bekräftigung früher behaupteter Aussagen, und das Wort "falsch" (i.S.v. "nicht wahr") zu deren Bestreitung oder Verneinung. Üblicherweise darf man die Aussage „A ist wahr" bzw. "A ist falsch" (in der A *angeführt* wird) dann und nur dann behaupten, wenn man A bzw. $\neg A$ behaupten darf. Beispiel nach A. Tarski: Dass es regnet, ist genau dann wahr, wenn es regnet. Nach P. F. Strawson macht man keine neue Aussage, wenn man sagt, eine Aussage sei wahr. Dementsprechend unterstellen wir hier, dass folgende Schlussregeln angewandt werden dürfen (mit $A{:}1$ für "A ist wahr" und $A{:}0$ für "A ist falsch"):

$$\frac{A}{A{:}1} \qquad \frac{A{:}1}{A} \qquad \frac{\neg A}{A{:}0} \qquad \frac{A{:}0}{\neg A.}$$

Ferner sei es erlaubt, $\neg A$ zu behaupten, wenn A widerlegt worden ist.

Manche Aussagen können faktisch weder begründet noch widerlegt werden; sie sollten also weder behauptet noch verneint werden. Ihnen sollte man also keinen der Werte 1, 0 geben. Es liegt nahe, sie durch einen anderen Wert $u \neq 1, 0$ zu bewerten. Jeder Aussage soll höchstens einer der Werte $1, 0, u$ zugeordnet werden. Daher fordern wir noch: Für jede Aussage A darf höchstens eine der Aussagen $A : 1$, $A : 0$, $A : u$ behauptet werden.

Wir zeigen jedoch, dass (bei der Interpretation von 1 als "wahr" und von 0 als "nicht wahr") keine Aussage einen dritten Wert $u \neq 1, 0$ erhalten sollte:

Annahme: $A\!:\!u$ sei zu Recht behauptet worden. Also darf weder $A\!:\!1$ noch $A\!:\!0$ behauptet werden. Aus der weiteren Annahme A folgt $A\!:\!1$: Widerspruch. Damit haben wir A widerlegt, dürfen also $\neg A$ behaupten, also auch $A : 0$, Widerspruch. Insgesamt haben wir $A : u$ widerlegt. - Das *tertium non datur* $A \vee \neg A$ haben wir dabei nicht benutzt.

Literatur

Blau, Ulrich: Die Logik der Unbestimmten und Paradoxien, Heidelberg 2008, 191-290.
Haak, Susan: Philosophy of Logics, Cambridge 1978, 204-220.
Lukasiewicz, Jan: Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic, in: Storrs Mac Call (Hg.), Polish Logic 1920 - 1939, Oxford 1967.
Priest, Graham: An Introduction to Non-Classical Logic, From If to Is, Cambridge 2008, 120-141.
Zahn, Peter: Assertion Games to Justify Classical Reasoning, tuprint 7545, 2018.