Automorphe Formen auf orthogonalen und unitären Gruppen

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr.rer.nat.)
genehmigte Dissertation

von

M.Sc. Tobias Holger Hufler

aus Weinheim

Referent: Prof. Dr. Jan H. Bruinier

Koreferent: Prof. Dr. Nils Scheithauer

Tag der Einreichung: 20.05.2016

Tag der mündlichen Prüfung: 13.07.2016

Darmstadt 2016

D17

„Der Einfall ersetzt nicht die Arbeit"

Max Weber, *Wissenschaft als Beruf*, 1922.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Grundlage dieser Dissertation bildet die Arbeit [5] von Bruinier. In dieser wird die singuläre Theta-Korrespondenz verwendet, um einen Theta-Lift zu definieren, der automorphe Formen zu orthogonalen Gruppen der Signatur $(2, b^-)$ aus gegebenen Maaß-Poincaré-Reihen zur elliptischen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ konstruiert. Eine ähnliche Liftung wurde bereits von Borcherds in [3] angegeben, diese verwendet jedoch schwach holomorphe Modulformen an Stelle der Maaß-Poincaré-Reihen, so dass in diesem Sinne die Konstruktion in [5] als Verallgemeinerung angesehen werden kann.

Die so erhaltenen Funktionen verfügen über eine Darstellung als unendliches Produkt und werden nach ihrem Entdecker Borcherds-Produkte genannt. Wie werden diese automorphen Produkte konstruiert? Borcherds Antwort darauf besteht aus einem konzeptionellen Verfahren, das sich in einfachen Worten folgendermaßen zusammenfassen lässt: Die Exponenten der im Borchersprodukt Ψ_f zu f auftretenden Faktoren sind durch die Fourierkoeffizienten von f gegeben. Wir verdeutlichen diesen Konstruktionsprozess am Beispiel der Δ- und j-Funktion. Die bekannte Produktentwicklung

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \; q = e^{2\pi i \tau}$$

entsteht als Borcherds-Produkt der Modulform $f(\tau) = 12 \cdot \Theta(\tau)$ vom Gewicht $1/2$ zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(4) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \mod 4\}$, wobei

$$\Theta(\tau) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

die klassische Jacobische Thetafunktion ist. Ferner ist das Gewicht von Δ durch den Koeffizienten $a(0) = 12$ gegeben. Ein weiteres Beispiel betrifft die Produktentwicklung der j-Funktion

$$j(\tau) = q^{-1}(1 - q)^{-744}(1 - q^2)^{80256}(1 - q^3)^{-12288744} \cdot \dots \; .$$

Diese entsteht als Borcherds-Produkt der Modulform

$$g(\tau) = 3q^{-3} - 744q + 80256q^4 - \dots$$

vom Gewicht $1/2$ zur Gruppe $\Gamma_0(4)$. Auch hier ist das Gewicht von j wieder durch $a(0) = 0$ gegeben.

Das letzte Beispiel ist ein Hinweis auf die Bedeutung der von Borcherds entwickelten Theorie in anderen Zweigen der Mathematik. Genauer gesagt besteht hier eine Verbindung zur Moonshine Theorie. Dort lautet eine der zentralen Aussagen, dass die Fourierkoeffizienten von j zu positiven Exponenten von q durch die Dimensionen des graduierten Teils einer speziellen unendlich-dimensionalen graduierten Darstellung der Monstergruppe gegeben sind, dem sogenannten Moonshine Module.

Weitere Anwendungen finden sich zum Beispiel auch in der mathematischen Physik, der verallgemeinerten Kac-Moody-Algebren und der allgebraischen Geometrie.

Um in vereinfachter Form an die Konstruktion in [5] zu erinnern, sei L ein gerades unimodulares $\mathbb{Z}$-Gitter der Signatur $(2, b^-)$ und $O(L)$ die orthogonale Gruppe von L. Weiter sei $\Gamma(L)$ die arithmetische Untergruppe von $O(L)$, die als Durchschnitt von $O(L)$ mit der Zusammenhangskomponente der Identität der reellen orthogonalen Gruppe $O(2, b^-)$ von $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ gegeben ist.

Setze $k = (2-b^-)/2$. Sei m eine negative ganze Zahl, $M_{\nu,\mu}(y)$ die M-Whittaker Funktion aus [1] und $\mathcal{M}_s(y) = y^{-k/2} M_{-k/2, s-1/2}(y)$ mit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Die Maaß-Poincaré-Reihe vom Gewicht k und Index m ist gegeben durch

$$F_m(\tau, s) = \frac{1}{\Gamma(2s)} \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\mathcal{M}_s(4\pi|m|y) e(mx)\right) |_k M,$$

dabei ist $e(z) = e^{2\pi i z}$, $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ ein Element der komplexen oberen Halbebene, $\Gamma(z)$ die Eulersche Gammafunktion, $\Gamma_\infty = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\}$ die Translationsgruppe und $|_k$ der Petersson-Operator vom Gewicht k. Für eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und eine komplexwertige Funktion f auf $\mathbb{H}$ ist $|_k$ wie üblich definiert durch

$$(f|_k M)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

Die obige Reihe konvergiert normal für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\sigma > 1$, und ist eine Eigenfunktion des hyperbolischen Laplace-Operators Δ_k vom Gewicht k. Aus dem asymptotischen Verhalten der M-Whittaker Funktion folgt ferner, dass $F_m(\tau, s)$ für $y \to \infty$ exponentiell wächst. Aufgrund dieser drei Eigenschaften sind Maaß-Poincaré-Reihen Beispiele für schwache Maaß-Formen vom Gewicht k, wie sie in [10] definiert werden. Die Bedeutung dieser Reihen liegt aber in der Tatsache begründet, dass sie den Raum der schwachen Maaß-Formen vom Gewicht $k < 0$ und festem Eigenwert erzeugen.

Wir schreiben $\mathrm{Gr}(L)$ für die Grassmann-Mannigfaltigkeit von L, also die reelle Mannigfaltigkeit bestehend aus allen 2-dimensionalen und positiv definiten $\mathbb{R}$-linearen Teilräumen aus $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Mit $\Theta_L(\tau, Z)$ bezeichnen wir die Siegelsche Thetafunktion von L, die sich in der Variable $\tau \in \mathbb{H}$ wie eine elliptische Modulform transformiert und in der Variable $Z \in \mathrm{Gr}(L)$ invariant unter der Gruppe $\Gamma(L)$ ist.

Sei $\mathcal{F}_a = \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| > 1,\ |x| \leq 1/2,\ y \leq a\}$ der in y-Richtung auf Höhe von a abgeschnittene Standard-Fundamentalbereich der Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$. Für die Maaß-Poincaré-Reihe $F_m(\tau, s)$ mit $k < 0$ ist das regularisierte Theta-Integral durch

$$\Phi_m(Z, s) = \lim_{a \to \infty} \int\limits_{\mathcal{F}_a} F_m(\tau, s) \overline{\Theta_L(\tau, Z)} y \ \frac{dxdy}{y^2}$$

definiert. Dabei erzwingt die vorgegebene Integrationsreihenfolge die Konvergenz des

Integrals. Im Wesentlichen geht diese Methode auf ein aus der theoretischen Physik stammendes Verfahren zurück, das schließlich von Harvey und Moore in [22] auf Integrale mit Theta-Kernen übertragen wurde. Unter anderem zeigt Bruinier in seiner Arbeit [5] die folgenden interessanten Eigenschaften dieses $\Gamma(L)$-invarianten Theta-Integrals:

1. $\Phi_m(Z, s)$ lässt sich zu einer holomorphen Funktion auf $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1, s \neq 1 - k/2\}$ fortsetzen und besitzt in $s = 1 - k/2$ eine einfache Polstelle.

In der Stelle $s = 1 - k/2$ ist das Theta-Integral als konstanter Term der Laurentreihenentwicklung um diesen Punkt definiert. Wir schreiben in diesem Fall $\Phi_m(Z)$.

2. $\Phi_m(Z)$ besitzt Singularitäten in einer speziellen Vereinigung von Grassmann-Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 2. Dabei wird der Singularitätstyp explizit angegeben.

3. $\Phi_m(Z, s)$ besitzt eine Darstellung als Summe von Poincaré-Reihen zur Gruppe $\Gamma(L)$.

4. $\Phi_m(Z, s)$ ist eine Eigenfunktion des $O(2, b^-)$-invarianten Laplace-Operators auf $\mathrm{Gr}(L)$. Diese Aussage stellt eine Verallgemeinerung des von Borcherds in [3] gestellten Problems Nr. 16.6 dar.

Ziel dieser Arbeit ist es für unitäre Gruppen einen Theta-Lift von Maaß-Poincaré-Reihen zu konstruieren. Anschließend möchten wir die den Aussagen 1 - 4 zu Grunde liegenden Problemstellungen im unitären Kontext neu formulieren und untersuchen. Insbesondere soll bei Aussage 4 auf eine Idee zurückgegriffen werden, die schon in [26] erfolgreich verwendet wurde. Genauer gesagt konstruieren wir eine spezielle Einbettung von unitären zu orthogonalen Gruppen und übertragen mit dieser Einbettung die bekannte Aussage 4 in die unitäre Theorie. Wie diese Einbettung letztendlich gewinnbringend zur Lösung beiträgt, erläutern wir an der entsprechenden Stelle der Kapitelzusammenfassung, mit der wir jetzt fortfahren.

Der Startpunkt aller zukünftigen Betrachtungen ist der Begriff des hermiteschen Gitters. Kapitel 2 befasst sich mit dessen Definition, daraus abgeleiteten Konstruktionen und dem Vergleich mit $\mathbb{Z}$-Gittern.

Sei hierfür d eine negative ganze quadratfreie Zahl, F der imaginär-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\mathcal{O}_F$ der Ring der ganzen Zahlen von F. Sei weiter $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler und nicht-ausgearteter hermitescher Vektorraum über F, so dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linear in der ersten und antilinear in der zweiten Variablen ist. Ein hermitesches Gitter ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_F$-Modul $L \subset V$ mit der Eigenschaft $L \otimes_{\mathcal{O}_F} F = V$. Als Vektorraum über F trägt V gleichzeitig die Struktur eines rationalen Vektorraums und wird zusammen mit der Bilinearform $(\cdot,\cdot) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ zu einem quadratischen Raum über $\mathbb{Q}$. Dabei ist für $x \in F$ die Spur $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x)$ als Summe aller $\sigma(x)$ definiert, wobei σ alle Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ durchläuft. Wegen $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V$ können hermitesche Gitter auch als $\mathbb{Z}$-Gitter aufgefasst werden, eine einfache Beobachtung, die später eine zentrale Rolle spielen wird. In Analogie zu $\mathbb{Z}$-Gittern bezeichne L' das zu L duale $\mathcal{O}_F$-Gitter und $U(L)$ die unitäre Gruppe von L. Ist L gerade, das heißt, die Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf L nimmt nur ganzzahlige Werte an, so schreiben wir $\Gamma(L)$ für diejenige Untergruppe von endlichem index in $U(L)$, deren Elemente auf der Diskriminantengruppe L'/L trivial operieren.

Wir beschließen das zweite Kapitel mit der Definition der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_U(L)$ von L. Ist (b^+, b^-) die Signatur von L, dann besteht $\mathrm{Gr}_U(L)$ aus allen b^+-dimensionalen und positiv definiten $\mathbb{C}$-linearen Teilräumen von $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_F \mathbb{C} \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Weiter zeigen wir, dass sich $\mathrm{Gr}_U(L)$ als komplexe Mannigfaltigkeit mit dem hermitesch symmetrischen Raum der unitären Gruppe $U(V_{\mathbb{R}})$ identifizieren lässt.

In Kapitel 3 betrachten wir ein hermitesches Gitter L der Signatur (b^+, b^-) und fassen es als $\mathbb{Z}$-Gitter der Signatur $(2b^+, 2b^-)$ auf. Mit dieser Sichtweise ist wie in [26] eine Einbettung von $U(V_{\mathbb{R}})$ in die Zusammenhangskomponente der Identität der reellen orthogonalen Gruppe $O(V_{\mathbb{R}})_0$ von $V_{\mathbb{R}}$ verbunden. Diese Einbettung induziert wiederum eine Einbettung zwischen den symmetrischen Räumen der Gruppen $U(V_{\mathbb{R}})$ und $O(V_{\mathbb{R}})_0$. Bezeichnet $\mathrm{Gr}_O(L)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit von L als $\mathbb{Z}$-Gitter, so kann die Einbettung zwischen den symmetrischen Räumen auch als Einbettung zwischen $\mathrm{Gr}_U(L)$ und $\mathrm{Gr}_O(L)$ aufgefasst werden. Hier ist die Situation besonders einfach zu beschreiben. Ist nämlich Z ein Element aus $\mathrm{Gr}_U(L)$, dann ist Z gleichzeitig ein $2b^+$-dimensionaler $\mathbb{R}$-linearer Teilraum von $V_{\mathbb{R}}$ und positiv definit bezüglich der Bilinearform $(\cdot,\cdot)$, also ein Element in $\mathrm{Gr}_O(L)$. Wir werden in Kapitel 6 sehen, wie mit Hilfe dieser Einbettungen Aussage 4 in die unitäre Theorie übersetzt und gelöst werden kann.

Wir betrachten in Kapitel 4 ein gerades hermitesches Gitter L der Signatur (b^+, b^-) mit $b^+ < b^-$ und definieren ausgehend davon vektorwertige nicht-holomorphe Maaß-Poincaré-Reihen und Eisenstein-Reihen von negativem Gewicht.

Sei dazu $\mathbb{C}[L'/L]$ die Gruppenalgebra der Diskriminantengruppe von L und $(\mathfrak{e}_\gamma)_{\gamma \in L'/L}$ die zugehörige Standardbasis. Setze $k = b^+ - b^-$. Sei weiter $\beta \in L'/L$ und $m \in \mathbb{Z} + \langle \beta, \beta \rangle$ mit $m < 0$. Bezeichnet wieder $M_{\nu,\mu}(y)$ die M-Whittaker Funktion aus [1] und ist $\mathcal{M}_s(y) = y^{-k/2} M_{-k/2, s-1/2}(y)$ mit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, dann ist die Maaß-Poincaré-Reihe vom Gewicht k und Index (β, m) definiert durch

$$F^L_{\beta,m}(\tau, s) = \frac{1}{\Gamma(2s)} \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (\mathcal{M}_s(4\pi|m|y) e(mx) \mathfrak{e}_\beta) \,|_{k,L} M.$$

Dabei ist $|_{k,L}$ der übliche Petersson-Operator vom Gewicht k zu L auf dem Raum der $\mathbb{C}[L'/L]$-wertigen Funktionen (Abschnitt 4.2). Die Reihe konvergiert normal für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\sigma > 1$, und ist eine Eigenfunktion des hyperbolischen Laplace-Operators Δ_k zum Eigenwert $s(1-s) + k(k-2)/4$. Auch in der vektorwertigen Version erzeugen die Maaß-Poincaré-Reihen den Raum der schwachen Maaß-Formen vom Gewicht $k < 0$ und festem Eigenwert.

Im nächsten Kapitel möchten wir nicht nur ausschließlich einen Theta-Lift von Maaß-Poincaré-Reihen betrachten, sondern auch von Eisenstein-Reihen. Dabei verstehen wir wie üblich unter der Eisenstein-Reihe vom Gewicht k und Index β, die für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\sigma > 1 - k$ normal konvergente Reihe

$$E^L_\beta(\tau, s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (\mathfrak{e}_\beta y^s) \,|_{k,L} M.$$

Wie zuvor bei Maaß-Poincaré-Reihen ist $E^L_\beta(\tau, s)$ eine Eigenfunktion von Δ_k. Der zugehörige Eigenwert ist dabei durch $s(1-s-k)$ gegeben.

In Kapitel 5 konstruieren wir den bereits angesprochenen Theta-Lift von Maaß-Poincaré-Reihen zu automorphen Formen der unitären Gruppe $\Gamma(L)$. Wir realisieren diese Liftung, indem wir Maaß-Poincaré-Reihen gegen eine geeignete Kernfunktion, die sogenannte Siegelsche Thetafunktion, integrieren.

Zu einem geraden hermiteschen Gitter L der Signatur (b^+, b^-) ist die (unitäre) Siegelsche Thetafunktion durch den Ausdruck

$$\Theta_L^U(\tau, Z) = \sum_{\gamma \in L'/L} \sum_{\lambda \in \gamma + L} e(\tau\langle\lambda_Z, \lambda_Z\rangle + \overline{\tau}\langle\lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp}\rangle)$$

gegeben, wobei $\tau \in \mathbb{H}$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ ist. Ferner bezeichnet λ_Z bzw. $\lambda_{Z^\perp}$ die orthogonale Projektion von λ auf den linearen Teilraum Z bzw. auf sein orthogonales Komplement $Z^\perp$. Die so definierte Funktion ist reell analytisch auf $\mathbb{H} \times \mathrm{Gr}_U(L)$, transformiert sich in der Variablen τ wie eine elliptische Modulform und ist invariant unter dem Diskriminantenkern $\Gamma(L)$. Fassen wir L als $\mathbb{Z}$-Gitter auf und bezeichnen mit $\Theta_L^O(\tau, Z)$ die (orthogonale) Siegelsche Thetafunktion wie sie in [5] definiert wird, so besteht zwischen diesen beiden Funktionen die Beziehung $\Theta_L^U(\tau, Z) = \Theta_L^O(\tau, Z)$.

Sei $\mathcal{F}_a$ wie zu Beginn und setzte $\sigma_0 = \max\{1, b^+ - k/2\}$. Für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > \sigma_0$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta, m)$ ist das regularisierte Theta-Integral durch

$$\Phi_{\beta,m}^L(Z, s) = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathcal{F}_a} \left\langle F_{\beta,m}^L(\tau, s), \Theta_L^U(\tau, s)\right\rangle y^{b^+} \frac{dxdy}{y^2}$$

defniert. Bei dieser Definition bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das komplexe Standard-Skalarprodukt auf der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$ und $H_U(\beta, m)$ eine spezielle lokal endliche Vereinigung von Grassmann-Untermannigfaltigkeiten der Kodimension b^+. Genauer gesagt ist $H_U(\beta, m)$ gegeben durch

$$H_U(\beta, m) = \bigcup_{\substack{\lambda \in \beta + L \\ \langle\lambda,\lambda\rangle = m}} \lambda^\perp,$$

wobei $\lambda^\perp$ das orthogonale Komplement von λ in $\mathrm{Gr}_U(L)$ ist. Die vorgegebene Integrationsreihenfolge erzwingt die Konvergenz des Integrals, was im Allgemeinen wegen des Exponentiellen Wachstums von $F_{\beta,m}^L(\tau, s)$ für $y \to \infty$ nicht zu erwarten wäre. Aus der Invarianz der Siegelschen Thetafunktion unter dem Diskriminantenkern folgt, dass $\Phi_{\beta,m}^L(Z, s)$ invariant unter $\Gamma(L)$ ist. Wir untersuchen $\Phi_{\beta,m}^L(Z, s)$ auf Holomorphie in der Variablen s.

Satz (5.4). *a) Für festes $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta, m)$ konvergiert das regularisierte Theta-Integral $\Phi_{\beta,m}^L(Z, s)$ lokal gleichmäßig auf $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$ und stellt auf dieser Menge eine holomorphe Funktion dar.*

b) Das regularisierte Theta-Integral $\Phi_{\beta,m}^L(Z,s)$ kann zu einer auf $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1, \sigma \neq b^+ - k/2\}$ holomorphen Funktion mit einem Pol erster Ordnung in $b^+ - k/2$ fortgesetzt werden.

Der Beweis verwendet die bekannten Fourierentwicklungen von $F_{\beta,m}^L(\tau, s)$ und $\Theta_L^U(\tau, Z)$ und das asymptotische Verhalten der M- und W-Whitakker Funktionen.

In der speziellen Stelle $s = 1 - k/2$ ist die Maaß-Poincaré-Reihe eine harmonische schwache Maaß-Form. Das regularisierte Theta-Integral ist in diesem Fall als der konstante Term der Laurentreihenentwicklung um $1 - k/2$ definiert und wir schreiben hierfür kurz $\Phi^L_{\beta,m}(Z)$. In Satz 5.5 bestimmen wir den Singularitätstyp von $\Phi^L_{\beta,m}(Z)$. Dabei heißen zwei reell analytische Funktionen auf einer offenen und dichten Teilmenge U von $\mathrm{Gr}_U(L)$ vom gleichen Singularitätstyp, wenn sich ihre Differenz reell analytisch auf U fortsetzen lässt.

Satz (5.5). *Sei U eine offene Teilmenge von $Gr_U(L)$ mit kompaktem Abschluss. Das regularisierte Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z)$ hat auf U Singularitäten vom Typ*

$$-2 \sum_{\lambda \in S(\beta,m,U)} \log\left(\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle\right),$$

wenn $b^+ = 1$ ist und vom Typ

$$2 \sum_{\lambda \in S(\beta,m,U)} \frac{(b^+ - 1)!}{\left(4\pi \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle\right)^{b^+ - 1}},$$

wenn $b^+ > 1$.

Hier bezeichnet $S(\beta, m, U)$ eine endliche Menge, auf die wir an dieser Stelle nicht genauer eingehen möchten.

In Abschnitt 5.3 werten wir das regularisierte Theta-Integral mit Hilfe der Rankin-Selberg Methode aus und finden unter Verwendung der Gaußschen hypergeometrischen Funktion $F(a, b, c; z)$ aus [14] eine Darstellung von $\Phi^L_{\beta,m}(Z, s)$ als Summe von Poincaré-Reihen zur unitären Gruppe $\Gamma(L)$.

Satz (5.8). *Sei $\beta \in L'/L$ und $m \in \mathbb{Z} + \langle \beta, \beta \rangle$ mit $m < 0$. Dann gilt für das regularisierte Theta-Integral die Gleichheit*

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z, s) = \frac{2\Gamma\left(b^+/2 + b^-/2 + s - 1\right)}{\Gamma(2s)\left(4\pi |m|\right)^{k/2-s}} &\sum_{\substack{\lambda \in \beta + L \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = m}} \left(4\pi \left|\langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle\right|\right)^{1-b^+/2-b^-/2-s} \\ &\times F\left(b^+/2 + b^-/2 + s - 1, s + b^+/2 - b^-/2, 2s; m/\langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle\right),\end{aligned}$$

wobei die in dieser Darstellung auftauchende Reihe für $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta, m)$ und $\sigma > b^+ - k/2 = b^+/2 + b^-/2$ normal konvergiert. Ist speziell $b^+ = 0$, so gilt

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z, s) = \frac{8\pi |m|}{(s + b^-/2 - 1)\,\Gamma\left(s - b^-/2 + 1\right)} \left|\{\lambda \in \beta + L : \langle \lambda, \lambda \rangle = m\}\right|.$$

In Abschnitt 5.4 betrachten wir das Theta-Integral mit Eisenstein-Reihen anstelle der Maaß-Poincaré-Reihen. Auch hier verwenden wir die Rankin-Selberg Methode zum Auswerten des Integrals und finden eine Darstellung von $\Phi^L_{\beta,0}(Z, s)$ als Summe von Eisenstein-Reihen zur Gruppe $\Gamma(L)$.

Satz (5.9). *Sei $0 \neq \beta \in L'/L$ und $b^+ \neq 0$. Dann gilt für das regularisierte Theta-Integral die Identität*

$$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) = 2\Gamma(s+b^+-1) \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L \\ \langle\lambda,\lambda\rangle=0}} \left(4\pi\left\langle \lambda_Z,\lambda_Z\right\rangle\right)^{-s-b^++1},$$

wobei die angegebene Reihe für $\sigma > b^+ - k$ und $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta,0)$ normal konvergiert.

Abschließend geben wir in Satz 5.10 eine von diesem Satz abweichende Darstellung an, die besser erkennen lässt, dass $\Phi^L_{\beta,0}(Z,s)$ eine (endliche) Summe von Eisenstein-Reihen ist.

Der Aufbau des sechsten und damit letzten Kapitels dieser Arbeit ist darauf ausgerichtet Satz 6.20 zu beweisen. Er gibt eine Antwort auf das von Borcherds in [3] formulierte Problem Nr. 16.6 im Kontext der unitären Gruppen.

Satz (6.20). *Sei $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta,m)$ und $\sigma > b^+ - k/2$, dann ist das regularisierte Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ eine Eigenfunktion des $U(b^+,b^-)$-invarianten Laplace-Operators Ω auf $Gr_U(L)$. Für den Eigenwert gilt insbesondere*

$$\Omega\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) = 2\left(\left(b^+b^- - b^-\right) + \left(s(1-s) + \frac{k(k-2)}{4}\right)\right)\Phi^L_{\beta,m}(Z,s).$$

Entscheidend für den Beweis ist zum einen, dass die unitäre Siegelsche Thetafunktion der Differentialgleichung

$$-2\Delta_k\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-} = 2\left(b^+b^- - b^-\right)\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-} - \Omega\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}$$

genügt (Satz 6.18) und zum anderen, dass die Maaß-Poincaré-Reihe eine Eigenfunktion von Δ_k ist. Richten wir an dieser Stelle den Blick auf die orthogonale Theorie, das heißt, wir fassen L als $\mathbb{Z}$-Gitter auf, so gilt nach Satz 4.5 in [5] eine ähnliche Differentialgleichung für die orthogonale Siegelsche Thetafunktion $\Theta^O_L(\tau,Z)$.

Wir möchten jetzt skizzieren, wie mit Hilfe der in Kapitel 3 kennengelernten Einbettungen diese Differentialgleichung aus [5] genutzt und in die unitäre Theorie übertragen werden kann. Dabei sei erwähnt, dass durch die Einbettungen im Allgemeinen ein Informationsverlust auftritt, der sich in unserem speziellen Vorhaben aber nicht negativ auswirkt.

Zunächt führen wir geeignete komplexe und reelle Koordinaten in $V_\mathbb{R}$ ein, bezeichnen den dadurch gegebenen Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ mit ι und identifizieren $U(V_\mathbb{R})$ mit der indefiniten unitären Gruppe $U(b^+,b^-)$ und entsprechend $O(V_\mathbb{R})_0$ mit der indefiniten orthogonalen Gruppe $O(2b^+,2b^-)_0$. Die Einbettung von $U(V_\mathbb{R})$ nach $O(V_\mathbb{R})_0$ übersetzt sich in diesen Koordinaten zu $U(b^+,b^-) \subset O(2b^+,2b^-)_0$ und nimmt dadurch eine besonders einfache Form an (Abschnitt 6.5). Weiter bezeichnen wir mit C_U und C_O die Casimir-Elemente von $U(b^+,b^-)$ bzw. $O(2b^+,2b^-)_0$ (Abschnitt 6.3). Wir betrachten jetzt die komplexwertigen Funktionen

$$F^U_{\tau,Z}(\lambda) = e\left(\tau\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle + \overline{\tau}\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle\right) \text{ und } F^O_{\tau,Z}(\lambda) = e\left(\tau\frac{(\lambda_Z,\lambda_Z)}{2} + \overline{\tau}\frac{(\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp})}{2}\right)$$

auf $V_{\mathbb{R}}$, also die Funktionen, die $\Theta_L^U(\tau, Z)$ und $\Theta_L^O(\tau, Z)$ durch geeignete Summation definieren. Mit Hilfe der Weil-Darstellung des dualen reduktiven Paares $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(2b^+, 2b^-)$ beweisen wir in Lemma 6.14 die Differentialgleichung

$$-2\Delta_k y^{b^-} F_{\tau,Z}^O = 2\left(b^+b^- - b^-\right) y^{b^-} F_{\tau,Z}^O + C_O y^{b^-} F_{\tau,Z}^O,$$

wobei C_O der Differentialoperator auf dem Raum der Schwartz-Funktionen von $V_{\mathbb{R}}$ ist, der durch das Casimir-Element und die linksreguläre Darstellung von $O(2b^+, 2b^-)_0$ induziert wird. In gleicher Weise möchten wir auch C_U als Differentialoperator ansehen. Jetzt liefern die Einbettungen $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$ und $U(b^+, b^-) \subset O(2b^+, 2b^-)_0$ ihren entscheidenden Beitrag zur Lösung des Problems. Wir finden nämlich einerseits

$$F_{\tau,Z}^O = F_{\tau,Z}^U \circ \iota^{-1}$$

und nach Satz 6.10 andererseits

$$C_U F_{\tau,Z}^U = \left(C_O F_{\tau,Z}^O\right) \circ \iota + D F_{\tau,Z}^U.$$

Dabei ist D ein spezieller Differentialoperator mit der Eigenschaft $DF_{\tau,Z}^U = 0$. Aus diesen beiden Zusammenhängen folgt

$$-2\Delta_k y^{b^-} F_{\tau,Z}^U = 2\left(b^+b^- - b^-\right) y^{b^-} F_{\tau,Z}^U + C_U y^{b^-} F_{\tau,Z}^U.$$

Abschließend stellen wir in Satz 6.17 den Zusammenhang zwischen C_U und dem $U(b^+, b^-)$-invarianten Laplace-Operator Ω auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ her. Damit ergibt sich die oben angegebene Differentialgleichung für die unitäre Siegelsche Thetafunktion.

Die vorliegende Arbeit entstand parallel zu meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt in den Jahren von 2012 bis 2016. In diesem Zeitraum geht mein Dank in erster Linie an meinen Betreuer Herrn Prof. Dr. Bruinier, ohne dessen Rat und Anregungen diese Dissertation nicht zustande gekommen wäre. Weiter möchte ich Herrn Prof. Dr. Scheithauer dafür danken, dass er sich bereit erklärt hat das Zweitgutachten zu erstellen. Ich danke aber auch meinem Kollegen Markus Schwagenscheidt für die vielen anregenden Gespräche und Disskussionen der letzten Jahre. Neben dieser fachlichen Unterstützung möchte ich meinen Eltern dafür danken in jeder Situation für mich da gewesen zu sein und dadurch die guten Rahmenbedingungen für diese Arbeit abgerundet zu haben. Abschließend möchte ich mich bei meinen Korrekturlesern für das erfolgreiche Aufspüren von Rechtschreibfehlern bedanken, unter ihnen insbesondere bei einer Leserin, die mir sehr viel bedeutet.

1 Notation

Wir bezeichnen mit $\mathbb{Z}$ den Ring der ganzen Zahlen und mit $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ den Körper der rationalen, der reellen beziehungsweise der komplexen Zahlen. Des Weiteren bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, wobei wir vereinbaren, dass 0 nicht in $\mathbb{N}$ enthalten ist.

Ist z ein Element aus $\mathbb{C}$, so schreiben wir $\mathrm{Re}(z)$ für den Realteil, $\mathrm{Im}(z)$ für den Imaginärteil und $|z|$ für den Absolutbetrag von z. Mit $\sqrt{z}$ bezeichnen wir denjenigen Zweig der Quadratwurzel für den $\arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2]$ gilt. Für jede ganze Zahl l setzen wir ferner $z^{l/2} := \sqrt{z}^l$. Weiter vereinbaren wir die später oft verwendete Abkürzung $e(z) := e^{2\pi i z}$.

Für das Vorzeichen einer von Null verschiedenen reellen Zahl x setzen wir $\mathrm{sgn}(x) := x/|x|$. Weiter ergänzen wir $\mathrm{sgn}(0) := 0$.

Sind f und g zwei komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so schreiben wir $f = \mathcal{O}(g)$ für $z \to z_0$, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass die Abschätzung

$$|f(z)| \leq c\,|g(z)|$$

in einer geeigneten Umgebung von z_0 gilt. Weiter heißen f und g asymptotisch gleich für $z \to z_0$, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

gilt. Wir schreiben in diesem Fall auch kurz $f \sim_{z_0} g$.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Mit $\mathrm{Mat}_{n,m}(R)$ bezeichnen wir die Menge aller $n \times m$-Matrizen $M = (a_{ij})$ mit $a_{ij} \in R$ und $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Ist speziell $n = m$, so schreiben wir $\mathrm{Mat}_n(R)$ an Stelle von $\mathrm{Mat}_{n,n}(R)$. Weiter definieren wir die allgemeine lineare Gruppe

$$\mathrm{GL}_n(R) := \{M \in \mathrm{Mat}_n(R) : \det(M) \neq 0\}$$

und die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(R) := \{M \in \mathrm{GL}_n(R) : \det(M) = 1\}\,.$$

Das neutrale Element der Multiplikation, die Einheitsmatrix, möchten wir von jetzt an immer mit E_n bezeichnen.

Sei $R = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Elemente aus dem Vektorraum R^n fassen wir stets als Spaltenvektoren auf. Des Weiteren bezeichnen wir die i-te Komponente von $r \in R^n$ mit r_i. Für eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_{n,m}(R)$ schreiben wir abkürzend M^* für die $m \times n$-Matrix $\overline{M}^t$.

Sind V und W zwei Moduln über dem Ring R, so schreiben wir $V \oplus W$ für deren direkte Summe. Weiter bezeichnen wir mit $V \otimes_R W$ das Tensorprodukt dieser beiden Moduln. Für den R-Modul, bestehend aus allen R-Endomorphismen von V nach W, schreiben wir $\mathrm{End}_R(V, W)$. Weiter verstehen wir unter $\mathrm{GL}_R(V)$ die Gruppe der invertierbaren Endomorphismen von V in sich und unter $\mathrm{SL}_R(V)$ diejenige Untergruppe von $\mathrm{GL}_R(V)$, deren Elemente allesamt Determinante gleich 1 haben. Geht bereits aus dem Kontext hervor, welcher Ring gemeint ist, so schreiben wir auch $V \otimes W$, $\mathrm{End}(V, W)$, $\mathrm{GL}(V)$ und $\mathrm{SL}(V)$.

Die komplexe obere Halbebene $\mathbb{H}$ besteht wie üblich aus allen komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil. Im Folgenden möchten wir $\tau = x + iy$ immer als ein Element von $\mathbb{H}$ ansehen. Dabei sei x der Realteil und y der Imaginärteil von τ. Auf $\mathbb{H}$ operiert die Gruppe der reellen speziellen linearen 2×2-Matrizen durch Möbiustransformationen

$$M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Sei Γ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Unter einem Fundamentalbereich von Γ in $\mathbb{H}$ verstehen wir eine in $\mathbb{H}$ relativ abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{D}$, so dass gilt:

1. Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M\tau \in \mathcal{D}$.
2. Sind τ und $M\tau$ mit $M \in \Gamma$ in der Menge der inneren Punkte von $\mathcal{D}$ enthalten, so folgt stets $M = \pm E_2$.

Siehe zu dieser Definition auch [35], Kapitel 2, Abschnitt 3. Bekanntlich ist die Menge

$$\mathcal{F} := \{\tau \in \mathbb{H} : -1/2 \leq x \leq 1/2 \text{ und } |\tau| \geq 1\}$$

ein Fundamentalbereich von $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{H}$ im obigen Sinne.

2 Gitter

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels erinnern wir zunächst an die Definition von Gittern als $\mathbb{Z}$-Moduln in quadratischen Räumen. Deren Verallgemeinerung, die sogenannten hermiteschen Gitter, führen wir anschließend in einem weiteren Abschnitt ein.

2.1 Gitter in quadratischen Räumen

Wir beginnen mit der Definition von Gittern als $\mathbb{Z}$-Moduln in quadratischen Räumen und mit Begriffen, die zusammen mit dieser Definition einhergehen. Im Einzelnen sind dies ganzzahlige, gerade und unimodulare Gitter. Des Weiteren erklären wir, was unter der orthogonalen Gruppe und der Grassmann-Mannigfaltigkeit eines Gitters zu verstehen ist.

2.1.1 Gitter als Moduln über $\mathbb{Z}$

Zu Beginn erinnern wir an den Begriff der quadratischen Form und ihrer assoziierten symmetrischen Bilinearform. Wir legen als Grundkörper $\mathbb{Q}$ zugrunde und bemerken, dass die folgende Definition auch für Körper gültig ist, deren Charakteristik sich von 2 unterscheidet.

Definition 2.1. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Eine Abbildung $q\colon V \to \mathbb{Q}$ heißt quadratische Form (über $\mathbb{Q}$), wenn*

$$q(\alpha v) = \alpha^2 q(v)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $v \in V$ gilt, und wenn die Abbildung $b\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ mit

$$b(v,w) := q(v+w) - q(v) - q(w)$$

eine symmetrische Bilinearform definiert. Das Paar (V, q) heißt quadratischer Raum.

Die Abbildung b aus der obigen Definition heißt die zu q assoziierte Bilinearform. Da für alle $v \in V$ die Gleichung $b(v,v) = 2q(v)$ gilt, ist q durch die zu q assoziierte Bilinearform b eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt eine symmetrische Bilinearform b auf V gegeben, so wird für alle $v \in V$ durch

$$q(v) := \frac{1}{2} b(v,v)$$

eine quadratische Form auf V definiert. Über $\mathbb{Q}$ besteht daher kein Unterschied zwischen der Theorie der quadratischen Formen und der Theorie der symmetrischen Bilinearformen. Wir werden deshalb in Zukunft je nach Bedarf entweder von einem quadratischen Raum (V, q) oder von einem bilinearen Raum (V, b) sprechen.

Definition 2.2. *Sei (V, q) ein quadratischer Raum und b die zu q assoziierte Bilinearform.*

a) Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen orthogonal, wenn $b(v, w) = 0$ gilt. Entsprechend heißen zwei lineare Teilräume $W, W' \subset V$ orthogonal, wenn $b(w, w') = 0$ für alle $w \in W$ und $w' \in W'$ gilt.

b) Sei W eine Teilmenge von V. Dann heißt die Menge

$$W^{\perp} := \{v \in V : b(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

das orthogonale Komplement zu W. Ist W ein linearer Teilraum, so auch $W^{\perp}$.

c) Eine Teilmenge (oder linearer Teilraum) W von V heißt isotrop, wenn $q(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt. Ein Vektor $v \in V$ mit $q(v) = 0$ wird isotroper Vektor genannt.

d) Die quadratische Form q heißt nicht-ausgeartet, wenn aus $b(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ stets $v = 0$ folgt.

e) Die quadratische Form q heißt positiv bzw. negativ definit, wenn $q(v) > 0$ bzw. $q(v) < 0$ für alle $0 \neq v \in V$ gilt.

f) Ein linearer Teilraum W von V heißt positiv bzw. negativ definit, wenn die Einschränkung von q auf W positiv bzw. negativ definit ist.

Die folgende Bemerkung gibt eine von mehreren äquivalenten Möglichkeiten an, die Signatur eines nicht-ausgearteten quadratischen Raumes zu definieren.

Bemerkung 2.3. *Sei (V, q) ein nicht-ausgearteter quadratischer Raum. Dann besitzt V eine Zerlegung in eine direkte und orthogonale Summe*

$$V = P \oplus N$$

mit maximal definiten linearen Teilräumen, so dass q auf P positiv und auf N negativ definit ist. Das Paar $(\dim(P), \dim(N))$ ist unabhängig von jeder solchen Zerlegung und heißt die Signatur von V. In diesem Fall setzen wir $\operatorname{sign}(V) := \dim(P) - \dim(N)$.

Definition 2.4. *Sei (V, q) ein quadratischer Raum und b die zu q assoziierte Bilinearform.*

a) Ein Gitter (oder $\mathbb{Z}$-Gitter) L in V ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul mit $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V$. In anderen Worten: L ist genau dann ein Gitter in V, wenn es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt mit

$$L = \mathbb{Z}v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}v_n.$$

Eine solche Basis heißt Gitterbasis von L.

b) Ein Gitter L besitzt die Signatur (b^+, b^-), wenn der Vektorraum V die entsprechende Eigenschaft besitzt. Wir setzen dann $\operatorname{sign}(L) := b^+ - b^-$.

c) *Ein Gitter L heißt ganz, wenn $b(v,w) \in \mathbb{Z}$ für alle $v,w \in L$ gilt.*

d) *Ein Gitter L heißt gerade, wenn $q(v) \in \mathbb{Z}$ für alle $v \in L$ gilt.*

e) *Ein Vektor $v \in L$ heißt primitiv, wenn aus jeder Darstellung der Form $v = nv'$ mit $v' \in L$ und $n \in \mathbb{Z}$ stets $n \in \mathbb{Z}^\times = \{-1,1\}$ folgt.*

Jedem Gitter ist auf natürliche Weise sein sogenanntes duales Gitter zugeordnet.

Definition 2.5. *Sei L ein Gitter in V. Die Menge*

$$L' := \{v \in V : b(v,w) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } w \in L\}$$

heißt duales Gitter von L.

Offensichtlich ist das zu L duale Gitter wirklich ein Gitter in V, denn zu einer gegebenen Gitterbasis von L ist deren duale Basis (bzgl. b) eine Gitterbasis von L'. Ein Gitter L ist genau dann ein ganzes Gitter, wenn $L \subset L'$ gilt. Ferner gilt die Gleichheit $(L')' = L$.

Definition 2.6. *Ein ganzes Gitter L heißt unimodular, wenn $L = L'$ gilt.*

Die folgende wohlbekannte Bemerkung gibt ein notwendiges Kriterium für die Existenz von unimodularen Gittern an. Einen Beweis hierfür findet man zum Beispiel in [34], Kapitel 8, Abschnitt 26, Satz 7.

Bemerkung 2.7. *Die Signatur eines unimodularen Gitters ist stets durch 8 teilbar.*

Sei L ein ganzes Gitter und L' das zugehörige duale Gitter. Nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen ist der Quotient L'/L eine endliche abelsche Gruppe. Einen Beweis dieser Aussage geben wir im Anhang.

Definition 2.8. *Ist L ein ganzes Gitter, so heißt der Quotient L'/L die Diskriminantengruppe von L.*

2.1.2 Orthogonale Gruppen

Sei (V,q) ein quadratischer Raum. Sei $\mathrm{GL}(V)$ die allgemeine lineare Gruppe von V über dem Körper $\mathbb{Q}$. Als Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ betrachten wir jetzt die sogenannte orthogonale Gruppe $O(V)$ von V (über $\mathbb{Q}$). Sie besteht aus allen Elementen, die q invariant lassen

$$\mathrm{O(V)} := \{f \in \mathrm{GL}(V) : q(f(v)) = q(v) \text{ für alle } v \in V\}\,.$$

Sei L ein ganzes Gitter. Die orthogonale Gruppe von L besteht aus allen Elementen von $O(V)$, die L invariant lassen, das heißt

$$O(L) := \{f \in O(V) : f(L) \subset L\}\,.$$

Der Diskriminantenkern $O_d(L)$ von L ist definiert als Kern von

$$O(L) \to \mathrm{Aut}(L'/L),\ f \mapsto (v + L \mapsto f(v) + L)\,,$$

wobei $\mathrm{Aut}(L'/L)$ die Automorphismengruppe von L'/L ist. Die Gruppe $O_d(L)$ ist also diejenige Untergruppe von $O(L)$, die aus genau den Elementen besteht, die auf dem Quotienten L'/L trivial operieren. Offensichtlich ist $O_d(L)$ von endlichem Index in $O(L)$.

2.1.3 Reelle Grassmann-Mannigfaltigkeit

Sei L ein Gitter der Signatur (b^+, b^-). Wir betrachten den reellen Vektorraum

$$V_{\mathbb{R}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

Die quadratische Form q setzt sich eindeutig zu einer reellen quadratischen Form der Signatur (b^+, b^-) auf $V_{\mathbb{R}}$ fort. Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, bezeichnen wir diese Form auch mit dem Symbol q. Ferner ist klar, was unter der orthogonalen Gruppe $O(V_{\mathbb{R}})$ von $V_{\mathbb{R}}$ (über $\mathbb{R}$) zu verstehen ist.

Unter der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_O(L)$ von L verstehen wir die reelle Mannigfaltigkeit, bestehend aus allen b^+-dimensionalen linearen Teilräumen von $V_{\mathbb{R}}$, die zusätzlich positiv definit sind. Genauer gesagt gilt

$$\mathrm{Gr}_O(L) := \left\{ Z \subset V_{\mathbb{R}} : \dim_{\mathbb{R}}(Z) = b^+ \text{ und } q(\cdot)_{|Z} > 0 \right\}.$$

Wir zeigen jetzt, wie $\mathrm{Gr}_O(L)$ als (riemannscher) symmetrischer Raum aufgefasst werden kann. Sei dazu $O(V_{\mathbb{R}})_0$ die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Identität in $O(V_{\mathbb{R}})$. Die natürliche Operation von $O(V_{\mathbb{R}})_0$ auf $\mathrm{Gr}_O(L)$ ist transitiv (siehe Anhang) und der Stabilisator eines beliebigen Punktes aus $\mathrm{Gr}_O(L)$ ist eine maximal kompakte Untergruppe (siehe [23], Kapitel 10, Abschnitt 2). Dadurch erhält man für jeden fest gewählten Punkt aus $\mathrm{Gr}_O(L)$ eine Identifizierung des Quotienten von $O(V_{\mathbb{R}})_0$ nach dem Stabilisator mit der reellen Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_O(L)$.

Bemerkung 2.9. *Sei $n := b^+ + b^-$, dann kann der (riemannsche) symmetrische Raum $Gr_O(L)$ auch als unbeschränktes Gebiet in $Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{R})$ realisiert werden. Nach [48], Kapitel 15, Abschnitt 2 gilt genauer gesagt*

$$Gr_O(L) \simeq \left\{ X \in Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{R}) : E_{b^+} - XX^t \text{ positiv definit} \right\}.$$

Eine mit der natürlichen Operation von $O(V_{\mathbb{R}})_0$ auf $Gr_O(L)$ verträgliche Operation auf der rechten Menge ist gegeben durch

$$gX := (AX + B)(CX + D)^{-1} \text{ mit } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(b^+, b^-)_0,$$

wobei $A \in Mat_{b^+}(\mathbb{R}), D \in Mat_{b^-}(\mathbb{R}), B \in Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{R})$ und $C \in Mat_{b^-,b^+}(\mathbb{R})$ gilt. Dabei ist $O(b^+, b^-)_0$ die (Weg-) Zusammenhangskomponente von E_n in der indefiniten orthogonalen Gruppe $O(b^+, b^-)$, die in Abschnitt 6.3 genauer definiert wird.

2.2 Gitter in hermiteschen Räumen

Dieser Abschnitt soll dazu dienen den Begriff des hermiteschen Gitters einzuführen. Im Einzelnen betrachten wir imaginär-quadratische Zahlkörper, hermitesche Vektorräume über imaginär-quadratischen Zahlkörpern, hermitesche Gitter, unitäre Gruppen und Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

Um später in der unitären Theorie Aussagen zu erhalten, die in ähnlicher Form bereits in der orthogonalen Theorie vorkommen, möchten wir bekannte Ergebnisse aus der orthogonalen Theorie verwenden. In den folgenden Abschnitten geben wir daher bei jedem neu eingeführten Begriff einen Vergleich zu seinem Pendant im orthogonalen Kontext. Es wird sich herausstellen, dass jeder hermitesche Vektorraum V über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper auch als geeigneter bilinearer Raum über $\mathbb{Q}$ aufgefasst werden kann. Des Weiteren lässt sich jedes hermitesche Gitter auch als gewöhnliches $\mathbb{Z}$-Gitter interpretieren.

2.2.1 Imaginär-quadratische Zahlkörper

Sei $d < 0$ eine ganze und quadratfreie Zahl. Für jedes solche d betrachten wir den imaginär-quadratischen Zahlkörper $F := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ derart, dass der Galois-Automorphismus $\sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$ durch die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$ gegeben ist.

Mit $\mathcal{O}_F$ bezeichnen wir den zu F gehörenden Ganzheitsring und mit d_F die Diskriminante von F. In Abhängigkeit von d lassen sich Ganzheitsring und Diskriminante genau bestimmen. Genauer gesagt gilt für den Ganzheitsring

$$\mathcal{O}_F = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} & \text{für } d \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{für } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

und für die Diskriminante

$$d_F = \begin{cases} d & \text{für } d \equiv 1 \pmod 4 \\ 4d & \text{für } d \equiv 2, 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Weiter bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_F^\times$ die Einheitengruppe von $\mathcal{O}_F$. Diese ist nach dem Dirichletschen Einheitensatz endlich. Genauer gesagt gilt $|\mathcal{O}_F^\times| = 4$ für $d = -1$, $|\mathcal{O}_F^\times| = 6$ für $d = -3$ und $|\mathcal{O}_F^\times| = 2$ für $d \neq -1, -3$.

Des Weiteren erinnern wir an die Begriffe Norm und Spur für Elemente $x = \alpha + \beta\sqrt{d}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ aus F. Die Norm bzw. die Spur von x ist gegeben als Produkt bzw. als Summe aller Galoistranslate von x. In unserem Fall ist die Situation besonders übersichtlich, das heißt

$$\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\alpha + \beta\sqrt{d}) := (\alpha + \beta\sqrt{d})(\alpha - \beta\sqrt{d}) = \alpha^2 + |d|\beta^2$$

und

$$\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\alpha + \beta\sqrt{d}) := (\alpha + \beta\sqrt{d}) + (\alpha - \beta\sqrt{d}) = 2\alpha.$$

Ferner sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass $\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}$ multiplikativ und $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$ additiv ist.

Als weitere wichtige Invariante von F können wir jetzt die Differente $\mathcal{D}_F$ von F definieren. Dazu betrachten wir das zu $\mathcal{O}_F$ gehörende duale gebrochene Ideal

$$\mathcal{O}_F' := \left\{ x \in F : \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x\, \mathcal{O}_F) \subset \mathbb{Z} \right\}$$

bezüglich der Spurform

$$F \times F \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(xy).$$

Dabei sei erinnert, dass ein gebrochenes Ideal in F nichts anderes ist, als ein von $\{0\}$ verschiedener endlich erzeugter $\mathcal{O}_F$-Untermodul von F. Die Differente wird jetzt einfach erklärt durch

$$\mathcal{D}_F := \mathcal{O}_F'^{-1} = \{x \in F : x\mathcal{O}_F' \subset \mathcal{O}_F\}.$$

Abschließend halten wir noch den einfachen Zusammenhang zwischen Differente und Diskriminante fest

$$\mathcal{D}_F = \sqrt{d_F}\ \mathcal{O}_F.$$

Dabei ist $\sqrt{d_F}$ eine der beiden komplexen Wurzeln von d_F.

2.2.2 Hermitesche Vektorräume über imaginär-quadratischen Zahlkörpern

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper F. Eine hermitesche Form auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \to F,\ (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle,$$

die F-linear in der ersten Variablen, F-antilinear in der zweiten Variablen und hermitesch-symmetrisch ist. Dabei bedeutet F-antilinear, dass

$$\langle v, xw + yu\rangle = \overline{x}\langle v, w\rangle + \overline{y}\langle v, u\rangle$$

für alle $u, v, w \in V$ und $x, y \in F$ gilt. Hingegen bedeutet hermitesch-symmetrisch, dass für alle $v, w \in V$ die Gleichheit

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$$

gilt. Der Vektorraum V zusammen mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt hermitescher Raum über F. Wir schreiben hierfür kurz $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. An dieser Stelle sei noch bemerkt, dass aus der hermiteschen Symmetrie für alle $v \in V$ stets $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R} \cap F = \mathbb{Q}$ folgt. Daher ist es sinnvoll $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit bzw. negativ definit zu nennen, wenn $\langle v, v\rangle > 0$ bzw. $\langle v, v\rangle < 0$ für alle $0 \neq v \in V$ gilt.

Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen orthogonal, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ gilt. Sind $W, W' \subset V$ lineare Teilräume, so heißen diese orthogonal, wenn $\langle w, w'\rangle = 0$ für alle $w \in W$ und $w' \in W$ gilt. Ist W eine Teilmenge von V, so heißt auch hier die Menge

$$W^\perp := \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

das orthogonale Komplement zu W. Ist W ein linearer Teilraum von V, so auch $W^\perp$. Eine Teilmenge (oder linearer Teilraum) W von V heißt isotrop, wenn $\langle w, w\rangle = 0$ für alle $w \in W$ gilt. Ein Vektor $v \in V$ wird isotrop genannt, wenn $\langle v, v\rangle = 0$ gilt. Die hermitesche Form (bzw. der hermitesche Raum) heißt nicht-ausgeartet, wenn aus $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $w \in V$ stets $v = 0$ folgt.

Bemerkung 2.10. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Raum über F. Dann gilt für alle $v, w \in$*

V die Polarisationsformel

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle =&\frac{1}{2}\left(\langle v+w,v+w\rangle-\langle v,v\rangle-\langle w,w\rangle\right)\\&-\frac{\sqrt{d}}{2d}\left(\langle v+\sqrt{d}w,v+\sqrt{d}w\rangle-\langle v,v\rangle+d\langle w,w\rangle\right).\end{aligned}$$

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Raum über F. Dann kann V auf natürliche Weise als rationaler Vektorraum aufgefasst werden und wird durch Festsetzen von

$$(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{Q},\ (v,w)\mapsto \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}\left(\langle v,w\rangle\right)$$

zu einem bilinearen Raum über $\mathbb{Q}$. Man beachte, dass $(\cdot,\cdot)$ symmetrisch ist. Des Weiteren ist $(\cdot,\cdot)$ nicht-ausgeartet, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht-ausgeartet ist. Die zu $(\cdot,\cdot)$ gehörende quadratische Form bezeichnen wir mit q, das heißt, für alle $v\in V$ gilt

$$q(v)=\frac{1}{2}(v,v)=\langle v,v\rangle.$$

Wir nehmen jetzt noch zusätzlich an, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht-ausgeartet ist. Dann besitzt V eine Zerlegung in eine direkte und orthogonale Summe maximal definiter linearer Teilräume $V=P\oplus N$, so dass die hermitesche Form auf P positiv definit und auf N negativ definit ist. Die Dimension von P und N ist bei jeder solchen Zerlegung gleich. Das Paar $(\dim(P),\dim(N))$ heißt Signatur von V. Auch hier setzen wir $\mathrm{sign}(V):=\dim(P)-\dim(N)$.

Das wohl einfachste Beispiel eines hermiteschen Raums über F mit vorgegebener Signatur (b^+,b^-) ist der Vektorraum $V:=F^n$ mit $n:=b^++b^-$, zusammen mit der Form

$$\langle v,w\rangle:=v_1\overline{w}_1+\ldots+v_{b^+}\overline{w}_{b^+}-v_{b^++1}\overline{w}_{b^++1}-\ldots-v_n\overline{w}_n.$$

Ist $b^+=b^-=1$, so heißt V hyperbolische Ebene über F.

Sei (b^+,b^-) die Signatur von V als hermitescher Raum. Fassen wir V als rationalen Vektorraum mit der Bilinearform $(\cdot,\cdot)=\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ auf, so besitzt V offensichtlich die Signatur $(2b^+,2b^-)$.

2.2.3 Gitter als Moduln über $\mathcal{O}_F$

Hermitesche Gitter können als Verallgemeinerung von $\mathbb{Z}$-Gittern angesehen werden. Dies wird schon bei der ersten Definition deutlich.

Da wir in diesem Abschnitt hermitesche Gitter mit $\mathbb{Z}$-Gittern vergleichen, ist es hilfreich sich an die wichtigsten Definitionen aus der Theorie der $\mathbb{Z}$-Gitter aus Abschnitt 2.1 zu erinnern.

Definition 2.11. *Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Raum über F.*

a) Ein hermitesches Gitter (oder $\mathcal{O}_F$-Gitter) L in V ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_F$-Modul mit $L\otimes_{\mathcal{O}_F}F=V$.

b) Ein hermitesches Gitter L besitzt die Signatur (b^+,b^-), wenn der Vektorraum V die entsprechende Eigenschaft besitzt. Wir setzen in diesem Fall $\mathrm{sign}(L):=b^+-b^-$.

c) Ein hermitesches Gitter L heißt ganz, wenn $\langle u, v\rangle \in \mathcal{D}_F^{-1}$ für alle $u, v \in L$ gilt.

d) Ein Gitter L heißt gerade, wenn $\langle v, v\rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $v \in L$ gilt.

e) Ein Gittervektor v heißt primitiv, wenn aus jeder Darstellung der Form $v = xv'$ mit $v' \in L$ und $x \in \mathcal{O}_F$ stets $x \in \mathcal{O}_F^\times$ folgt.

Jedes gerade hermitesche Gitter ist stets ganz. Denn mit der Polarisationsformel aus Bemerkung 2.10 sieht man, dass für ein gerades Gitter L für alle $v, w \in L$ und $x \in \mathcal{O}_F$ die Aussage

$$\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x\langle v, w\rangle) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle xv, w\rangle) = \langle xv + w, xv + w\rangle - \langle xv, xv\rangle - \langle w, w\rangle \in \mathbb{Z}$$

folgt. Damit ist L ein ganzes hermitesches Gitter.

Fassen wir $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ als rationalen Vektorraum mit der Bilinearform $(\cdot,\cdot) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ auf, so ist ein hermitesches Gitter L ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul und es gilt $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V$, das heißt, L ist auch ein $\mathbb{Z}$-Gitter. Für die Begriffe ganzes Gitter und gerades Gitter hat man folgende Bemerkung.

Bemerkung 2.12. *Sei L ein hermitesches Gitter. Dann ist L genau dann ganz bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$, wenn L ein ganzes $\mathbb{Z}$-Gitter bzgl. $(\cdot,\cdot)$ ist. Weiter ist L genau dann gerade bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$, wenn es als $\mathbb{Z}$-Gitter bzgl. $(\cdot,\cdot)$ gerade ist.*

Sei L ein hermitesches Gitter. Auch die Definition des zu L dualen Gitters L' hat Ähnlichkeit mit der bekannten Definition bei $\mathbb{Z}$-Gittern.

Definition 2.13. *Sei L ein hermitesches Gitter in V. Dann heißt die Menge*

$$L' := \left\{v \in V : \langle v, w\rangle \in \mathcal{D}_F^{-1} \text{ für alle } w \in L\right\}$$

das zu L duale hermitesche Gitter.

Wie in Abschnitt 2.1 zeigt man, dass L' ein hermitesches Gitter ist. Weiter ist L genau dann ein ganzes Gitter, wenn L in L' enthalten ist. Ferner gilt für ein ganzes Gitter $(L')' = L$.

Definition 2.14. *Ein ganzes hermitesches Gitter L heißt unimodular, wenn $L' = L$ gilt.*

Fassen wir das hermitesche Gitter L als $\mathbb{Z}$-Gitter auf, so bestätigt man sofort die Bemerkung.

Bemerkung 2.15. *Sei L ein hermitesches Gitter. Dann ist das zu L duale Gitter L' auch das $\mathbb{Z}$-duale Gitter bzgl. $(\cdot,\cdot)$, denn es gilt*

$$L' = \{v \in V : (v, w) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } w \in L\}.$$

Sei L ein ganzes hermitesches Gitter und L' das zugehörige duale Gitter. Da L und L' auch $\mathbb{Z}$-Gitter sind, ist der Quotient L'/L eine endliche abelsche Gruppe. Mit der natürliche $\mathcal{O}_F$-Skalarmultiplikation wird der Quotient L'/L zu einem endlichen $\mathcal{O}_F$-Modul.

Definition 2.16. *Sei L ein ganzes Gitter. Dann heißt der endliche $\mathcal{O}_F$-Modul L'/L die Diskriminantengruppe von L.*

2.2.4 Unitäre Gruppen

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Vektorraum über F. Die unitäre Gruppe $U(V)$ von V (über F) ist diejenige Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ von V über F, deren Elemente die hermitesche Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariant lassen. Genauer gesagt definiert man

$$U(V) := \{f \in \mathrm{GL}(V) : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \text{ für alle } v, w \in V\}\,.$$

Sei L ein ganzes hermitesches Gitter, dann ist die unitäre Gruppe von L definiert durch

$$U(L) := \{f \in U(V) : f(L) \subset L\}\,.$$

Mit $U_d(L)$ bezeichnen wir den Diskriminantenkern von L. Diese Untergruppe von endlichem Index in $U(L)$ besteht aus allen Elementen, die auf dem Quotienten L'/L trivial operieren.

2.2.5 Komplexe Grassmann-Mannigfaltigkeit

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein nicht-ausgearteter hermitescher Raum über F und L ein hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-) in V. Weiter sei

$$V_{\mathbb{R}} := V \otimes_F \mathbb{C} \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

der komplexe Vektorraum, der durch Skalarkörpererweiterung mit $\mathbb{C}$ aus V entsteht. Die hermitesche Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ lässt sich eindeutig zu einer komplexen hermiteschen Form der Signatur (b^+, b^-) auf $V_{\mathbb{R}}$ fortsetzen. Diese Fortsetzung möchten wir, da keinerlei Verwechslungen zu befürchten sind, auch mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnen. Die unitäre Gruppe von $V_{\mathbb{R}}$ (über $\mathbb{C}$) bezeichnen wir ferner mit $U(V_{\mathbb{R}})$.

Unter der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_U(L)$ von L verstehen wir die komplexe Mannigfaltigkeit, die aus allen b^+-dimensionalen und positiv definiten $\mathbb{C}$-linearen Teilräumen von $V_{\mathbb{R}}$ besteht

$$\mathrm{Gr}_U(L) := \left\{Z \subset V_{\mathbb{R}} : \dim_{\mathbb{C}}(Z) = b^+ \text{ und } \langle\cdot,\cdot\rangle_{|Z} > 0\right\}.$$

Auch hier ist die natürliche Operation von $U(V_{\mathbb{R}})$ auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ transitiv (siehe Anhang) und der Stabilisator eines beliebigen Punktes ist eine maximal kompakte Untergruppe (siehe [23], Kapitel 10, Abschnitt 2). Dadurch erhält man für jeden festen Punkt aus $\mathrm{Gr}_U(L)$ eine Identifizierung des Quotienten von $U(V_{\mathbb{R}})$ nach dem Stabilisator mit der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_U(L)$. Damit besitzt $\mathrm{Gr}_U(L)$ die Struktur eines (hermiteschen) symmetrischen Raumes.

Man beachte außerdem, dass $\mathrm{Gr}_U(L)$ alleine durch seine Definition eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Hingegen besitzt $\mathrm{Gr}_O(L)$ bekanntlich genau dann eine komplexe Struktur, wenn L von Signatur $(2, b^-)$ ist (siehe [23], Kapitel 10, Abschnitt 2).

Bemerkung 2.17. *Sei $n := b^+ + b^-$, dann kann der (hermitesche) symmetrische Raum $Gr_U(L)$ auch als unbeschränktes Gebiet in $Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{C})$ realisiert werden. Nach [48], Kapitel 15, Abschnitt 2 gilt genauer gesagt*

$$Gr_U(L) \simeq \left\{Z \in Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{C}) : E_{b^+} - ZZ^* \textit{ positiv definit}\right\}.$$

Diese Identifikation ist mit der natürlichen Operation von $U(V_{\mathbb{R}})$ auf $Gr_U(L)$ verträglich, wenn wir auf der rechten Menge eine Operation durch

$$gZ := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \text{ mit } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(b^+, b^-)$$

definieren, wobei $A \in Mat_{b^+}(\mathbb{C}), D \in Mat_{b^-}(\mathbb{C}), B \in Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{C})$ und $C \in Mat_{b^-,b^+}(\mathbb{C})$ gilt. Ferner ist $U(b^+, b^-)$ die indefinite unitäre Gruppe, die in Abschnitt 6.3 genauer definiert wird.

3

Einbettung der unitären Gruppe in die orthogonale Gruppe

Wir haben gesehen, dass sich jedes hermitesche Gitter L in V auch als $\mathbb{Z}$-Gitter interpretieren lässt. Damit ist eine Einbettung der unitären Gruppe $U(V)$ in die orthogonale Gruppe $O(V)$ verbunden, die wiederum eine Einbettung zwischen Grassmann-Mannigfaltigkeiten induziert. Unsere Hauptaufmerksamkeit wird auf diesen beiden Einbettungen liegen, denn diese ermöglichen es uns später Teile der unitären Theorie aus der orthogonalen Theorie zu entwickeln.

Sei L ein hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-). Mit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bezeichnen wir den L umgebenden hermiteschen Raum. Fassen wir L als $\mathbb{Z}$-Gitter der Signatur $(2b^+, 2b^-)$ und V als bilinearen Raum über $\mathbb{Q}$ auf, so ist es sinnvoll von der orthogonalen Gruppe $O(V)$ zu sprechen. Sie besteht aus allen rationalen Automorphismen von V, die $(\cdot, \cdot) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ invariant lassen. Sei f ein Element aus $U(V)$, dann ist f offensichtlich auch ein $\mathbb{Q}$-linearer Automorphismus von V und für alle $v \in V$ gilt

$$(f(v), f(v)) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle f(v), f(v) \rangle) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle v, v \rangle) = (v, v).$$

Damit definiert f ein Element der orthogonalen Gruppe von V. Wir erhalten demnach eine wichtige Einbettung $U(V) \subset O(V)$.

Gehen wir jetzt von V zu $V_\mathbb{R}$ über und setzen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie $(\cdot, \cdot)$ eindeutig zu einer komplexen hermiteschen Form bzw. zu einer reellen Bilinearform fort, so gilt für diese Fortsetzungen

$$(v, w) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\langle v, w \rangle) = \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} \quad \text{mit } v, w \in V_\mathbb{R}.$$

Man beachte an dieser Stelle außerdem, dass $V_\mathbb{R}$ aus Abschnitt 2.1.3 und $V_\mathbb{R}$ aus Abschnitt 2.2.5, aufgefasst als reelle Vektorräume, kanonisch isomorph sind. Die obige Einbettung zwischen den Gruppen $U(V)$ und $O(V)$ setzt sich daher eindeutig zu einer Einbettung $U(V_\mathbb{R}) \subset O(V_\mathbb{R})$ fort. Beachtet man an dieser Stelle, dass die unitäre Gruppe $U(V_\mathbb{R})$ (weg-) zusammenhängend ist und bezeichnet man mit $O(V_\mathbb{R})_0$ die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Identität von $O(V_\mathbb{R})$, so gilt sogar

$$U(V_\mathbb{R}) \subset O(V_\mathbb{R})_0 \subset O(V_\mathbb{R}).$$

Genau diese Einbettung wird es uns später erlauben, bekannte Resultate aus der orthogonalen Theorie auf die unitäre Theorie zu übertragen. Wir werden sie in Kapitel 6 genauer untersuchen, indem wir in $V_{\mathbb{R}}$ geeignete komplexe und reelle Koordinaten einführen.

Die oben eingeführte Einbettung der unitären Gruppe $U(V_{\mathbb{R}})$ in die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Eins $O(V_{\mathbb{R}})_0$ besitzt zusätzlich die Eigenschaft, dass maximal kompakte Untergruppen von $U(V_{\mathbb{R}})$ auf ebensolche in $O(V_{\mathbb{R}})_0$ abgebildet werden. Sei M_U eine maximal kompakte Untergruppe in $U(V_{\mathbb{R}})$ und M_O das Bild von M_U unter der obigen Einbettung, also eine maximal kompakte Untergruppe in $O(V_{\mathbb{R}})_0$. Wir sehen daher, dass die Einbettung $U(V_{\mathbb{R}}) \subset O(V_{\mathbb{R}})_0$ eine Einbettung zwischen symmetrischen Räumen induziert

$$U(V_{\mathbb{R}})/M_U \subset O(V_{\mathbb{R}})_0/M_O.$$

Beide symmetrischen Räume können jetzt mit den entsprechenden Grassmann-Mannigfaltig keiten identifiziert werden. Genauer gesagt identifizieren wir den Quotienten $U(V_{\mathbb{R}})/M_U$ mit $\mathrm{Gr}_U(L)$ und $O(V_{\mathbb{R}})_0/M_O$ mit $\mathrm{Gr}_O(L)$. Die Einbettung zwischen den symmetrischen Räumen kann daher auch als Einbettung zwischen den entsprechenden Grassmann-Mannigfaltigkeiten beschrieben werden.

Ist nämlich Z ein Element aus $\mathrm{Gr}_U(L)$, also ein komplexer b^+-dimensionaler und positiv definiter linearer Teilraum von $V_{\mathbb{R}}$, dann ist Z gleichzeitig auch ein reeller $2b^+$-dimensionaler linearer Teilraum von $V_{\mathbb{R}}$. Da für alle $v \in Z$ die Aussage

$$(v, v) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}\left(\langle v, v\rangle\right) = 2\langle v, v\rangle > 0$$

gilt, ist Z insbesondere ein positiv definiter linearer Teilraum bezüglich der reellen Bilinearform. Diese Überlegungen führen zu $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$. Wir möchten noch vereinbaren, dass wir das Bild eines Elementes Z aus $\mathrm{Gr}_U(L)$ unter der Einbettung mit Z' bezeichnen.

4

Vektorwertige Modulformen

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Definition der Weil-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der Gruppenalgebra der Diskriminantengruppe eines hermiteschen Gitters. Danach klären wir in Abschnitt 4.2, was unter vektorwertigen Modulformen und schwachen Maaß-Formen zu verstehen ist. Die Abschnitte 4.2.1 und 4.2.2 beschäftigen sich abschließend mit den konkreten Beispielen der Maaß-Poincaré-Reihen und der Eisenstein-Reihen.

4.1 Weil-Darstellung von $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$

Sei L ein ganzes hermitesches Gitter. Wir definieren die Gruppenalgebra von L'/L als die Menge der formalen komplexen Linearkombinationen von Basisvektoren $(\mathfrak{e}_\gamma)_{\gamma\in L'/L}$, die durch die Gruppenelemente von L'/L indiziert sind. Genauer gesagt setzen wir

$$\mathbb{C}[L'/L] := \left\{ \sum_{\gamma\in L'/L} a_\gamma \mathfrak{e}_\gamma : \; a_\gamma \in \mathbb{C} \text{ für alle } \gamma \in L'/L \right\}.$$

Die Addition sei gegeben durch die Vorschrift

$$\sum_{\gamma\in L'/L} a_\gamma \mathfrak{e}_\gamma + \sum_{\gamma\in L'/L} b_\gamma \mathfrak{e}_\gamma := \sum_{\gamma\in L'/L} (a_\gamma + b_\gamma)\mathfrak{e}_\gamma,$$

wobei die Summe $0 := \sum_\gamma 0 \cdot \mathfrak{e}_\gamma$ das neutrale Element darstellt. Die Multiplikation wird erklärt, indem wir

$$\mathfrak{e}_\gamma \mathfrak{e}_{\gamma'} := \mathfrak{e}_{\gamma\gamma'}$$

linear fortsetzen. Offensichtlich ist dann das neutrale Element durch $1 := \mathfrak{e}_0$ gegeben, wobei 0 das neutrale Element in L'/L ist.

Bemerkung 4.1. *Mit der oben eingeführten Addition und Multiplikation, wird $\mathbb{C}[L'/L]$ zu einer Algebra über $\mathbb{C}$. Insbesondere ist $\mathbb{C}[L'/L]$ ein (endlich-dimensionaler) komplexer Vektorraum.*

Ferner wird durch Festsetzen von

$$\left\langle \sum_{\gamma\in L'/L} a_\gamma \mathfrak{e}_\gamma, \sum_{\gamma\in L'/L} b_\gamma \mathfrak{e}_\gamma \right\rangle := \sum_{\gamma\in L'/L} a_\gamma \bar{b}_\gamma$$

eine komplexe hermitesche Form auf $\mathbb{C}[L'/L]$ definiert.

Es ist wohlbekannt, dass die elliptische Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den Matrizen

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Weiter gilt die Relation $S^2 = -E_2 =: Z$. Das Zentrum von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird von der Matrix Z erzeugt und besitzt die Ordnung 2. Für später führen wir noch die beiden oft verwendeten Abkürzungen ein:

$$\Gamma_1 := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } \Gamma_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Jetzt sind wir in der Lage die Weil-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu definieren. Sei dazu L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-). Wie in [3], Abschnitt 4 wird durch Festsetzen von

$$\rho_L(T)\mathfrak{e}_\gamma := e\left(\langle\gamma,\gamma\rangle\right)\mathfrak{e}_\gamma$$

und

$$\rho_L(S)\mathfrak{e}_\gamma := \frac{e(-\operatorname{sign}(L)/4)}{\sqrt{|L'/L|}} \sum_{\delta\in L'/L} e\left(-\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle\gamma,\delta\rangle)\right)\mathfrak{e}_\delta$$

eine unitäre Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$ definiert, die sogenannte Weil-Darstellung zum Gitter L. Abschließend bemerken wir noch, dass die Operation des Zentrums von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch

$$\rho_L(Z)\mathfrak{e}_\gamma = (-1)^{\operatorname{sign}(L)}\mathfrak{e}_{-\gamma}$$

gegeben ist.

4.2 Vektorwertige Modulformen und schwache Maaß-Formen

In diesem Abschnitt sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-). Wir betrachten jetzt Funktionen von der komplexen oberen Halbebene $\mathbb{H}$ in die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$. Jedes solche f besitzt bezüglich der Standardbasis $(\mathfrak{e}_\gamma)_{\gamma\in L'/L}$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$f(\tau) = \sum_{\gamma\in L'/L} f_\gamma(\tau)\mathfrak{e}_\gamma,$$

wobei $\tau = x+iy \in \mathbb{H}$ gelte. Die Funktion f heißt holomorph auf $\mathbb{H}$, wenn alle auftauchenden Komponentenfunktionen f_γ auf $\mathbb{H}$ holomorph sind.

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$. Für Elemente aus der elliptischen Modulgruppe definieren wir den Petersson-Operator (auch Strich-Operator) durch

$$(f|_{k,L}M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k}\rho_L(M)^{-1}f(M\tau) \text{ mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Durch $f \mapsto f|_{k,L}M$ erhalten wir somit eine Operation der metaplektischen Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf Funktionen $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ soll $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariant heißen, wenn $f|_{k,L}M = f$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt.

Wie schon bei skalarwertigen Modulformen, besitzt ein holomorphes f eine Fourierentwicklung, wenn $f|_{k,L}T = f$ gilt. Wir vereinbaren noch für $z \in \mathbb{C}$ die oft verwendete Schreibweise $\mathfrak{e}_\gamma(z) := e(z)\mathfrak{e}_\gamma$.

Satz 4.2. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ eine holomorphe Funktion mit $f|_{k,L}T = f$. Schreibe $f = \sum_{\gamma \in L'/L} f_\gamma \mathfrak{e}_\gamma$, dann lässt sich f in eine Fourierreihe entwickeln:*

$$f(\tau) = \sum_{\gamma \in L'/L} \sum_{n \in \mathbb{Z}+q(\gamma)} c(n,\gamma)\mathfrak{e}_\gamma(n\tau).$$

Beweis. Wegen $f|_{k,L}T = f$ sind die auf $\mathbb{H}$ holomorphen Funktionen

$$\tau \mapsto e(q(\gamma)\tau)f_\gamma(\tau)$$

mit $\gamma \in L'/L$ alle 1-periodisch. Entwickelt man diese jeweils in Fourierreihen, so folgt die Behauptung. □

Definition 4.3. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ heißt (vektorwertige) meromorphe Modulform vom Gewicht k (zu ρ_L), wenn gilt:*

a) $f|_{k,L}M = f$ für alle $M \in SL_2(\mathbb{Z})$.

b) f ist holomorph auf $\mathbb{H}$.

c) f besitzt in der Spitze $i\infty$ höchstens einen Pol, das heißt, f besitzt eine Fourierreihenentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{\gamma \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(\gamma) \\ n \geq -m}} c(\gamma,n)\mathfrak{e}_\gamma(n\tau),$$

wobei m eine geeignete nicht negative ganze Zahl ist.

Der Vektorraum bestehend aus allen meromorphen Modulformen vom Gewicht k zu ρ_L wird mit $\mathcal{M}^!_k(\rho_L)$ bezeichnet. Ist f holomorph in der Spitze $i\infty$, das heißt, in der Fourierentwicklung ist $m = 0$, so heißt f holomorphe Modulform. Mit $\mathcal{M}_k(\rho_L)$ bezeichnen wir den Raum aller holomorphen Modulformen vom Gewicht k zu ρ_L. Eine Spitzenform ist eine holomorphe Modulform, die in der Spitze $i\infty$ verschwindet, das heißt, in der Fourierreihe gilt $m = -1$. Wir schreiben $\mathcal{S}_k(\rho_L)$ für den Raum aller Spitzenformen vom Gewicht k zur ρ_L. Offensichtlich gilt die Inklusionskette $\mathcal{S}_k(\rho_L) \subset \mathcal{M}_k(\rho_L) \subset \mathcal{M}^!_k(\rho_L)$.

Ist L unimodular, so kann jede meromorphe Modulform $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ vom Gewicht k auch als skalarwertige meromorphe Modulform vom Gewicht k aufgefasst werden.

Für die Definition der nächsten wichtigen Funktionenklasse benötigen wir den sogenannten Laplace-Operator vom Gewicht k. Sei $k \in \mathbb{Z}$, dann ist dieser Operator zunächst für glatte Funktionen $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\Delta_k := -y^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Für glatte Funktionen von $\mathbb{H}$ in die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$ sei die Operation von Δ_k komponentenweise definiert.

Definition 4.4. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Eine schwache Maaß-Form vom Gewicht k und Eigenwert λ zur Weil-Darstellung ρ_L, ist ein glatte Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

a) $f|_{k,L}M = f$ *für alle* $M \in SL_2(\mathbb{Z})$.

b) $\Delta_k f = \lambda f$.

c) Es existiert ein $C > 0$, *so dass* $f(\tau) = \mathcal{O}(e^{Cy})$ *für* $y \to \infty$ *gilt.*

Ist der Eigenwert $\lambda = 0$, so heißt f harmonische schwache Maaß-Form (vom Gewicht k zu ρ_L). Der zugehörige Raum soll in diesem Fall mit $\mathcal{H}_k(\rho_L)$ bezeichnet werden.

Vergleicht man die Definition einer harmonischen schwachen Maaß-Form mit der Definition einer meromorphen Modulform, so fällt auf, dass die Bedingung, f ist holomorph auf $\mathbb{H}$, durch die schwächere Bedingung $\Delta_k f = 0$ ersetzt wurde. Des Weiteren ist die Bedingung, dass f in der Spitze $i\infty$ höchstens einen Pol besitzt, äquivalent dazu, dass f die Wachstumsbedingung $f(\tau) = \mathcal{O}(e^{Cy})$ für $y \to \infty$ erfüllt. Da jede holomorphe Funktion auch harmonisch ist, gilt daher $\mathcal{M}_k^!(\rho_L) \subset \mathcal{H}_k(\rho_L)$.

Es kann gezeigt werden, dass der Raum der schwachen Maaß-Formen zu einem festen Gewicht $k < 0$ und festem Eigenwert von geeigneten nicht-holomorphen Poincaré-Reihen negativen Gewichts erzeugt werden. Wir definieren diese im nächsten Abschnitt.

4.2.1 Poincaré-Reihen

Wie bereits im letzten Abschnitt angekündigt, erinnern wir jetzt an spezielle, nicht-holomorphe Poincaré-Reihen negativen Gewichts. Sei dazu L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-) mit $b^+ < b^-$ und setze $k := b^+ - b^-$. Diese erzeugen den Raum der schwachen Maaß-Formen vom Gewicht $k < 0$.

Seien $M_{\nu,\mu}(z)$ und $W_{\nu,\mu}(z)$ die Whittaker Funktionen wie sie in [1], Kapitel 13 definiert werden. Diese Funktionen sind linear unabhängige Lösungen der Whittaker Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z} - \frac{\mu^2 - 1/4}{z^2}\right) = 0.$$

Zwischen den Funktionen $M_{\nu,\mu}(z)$ und $W_{\nu,\mu}(z)$ besteht nach [1], Kapitel 13, Gleichung 13.1.34 der Zusammenhang

$$W_{\nu,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\mu-\nu)} M_{\nu,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\nu)} M_{\nu,-\mu}(z),$$

wobei

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

für $\mathrm{Re}(z) > 0$ die übliche Eulersche Gammafunktion bezeichne. Wir erinnern außerdem daran, dass $\Gamma(z)$ auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von $z = 0, -1, -2, \ldots$ holomorph fortgesetzt werden kann. In den ausgeschlossenen Punkten liegen Pole erster Ordnung vor.

Aus dem obigen Zusammenhang zwischen $W_{\nu,\mu}(z)$ und $M_{\nu,\mu}(z)$ folgt sofort $W_{\nu,\mu}(z) = W_{\nu,-\mu}(z)$. Für später ist das asymptotische Verhalten der beiden Whittaker Funktionen wichtig. Die folgenden Gleichungen findet man in [1], Kapitel 13, Abschnitt 5. Für $z \to 0$ gilt

$$M_{\nu,\mu}(z) \sim z^{\mu+1/2},$$

wenn $\mu \notin -1/2\mathbb{N}$ und

$$W_{\nu,\mu}(z) \sim \frac{2\mu}{\mu-\nu+1/2} z^{-\mu+1/2},$$

wenn $\mu \geq 1/2$. Für $y \in \mathbb{R}$ und $y \to \infty$ haben wir

$$M_{\nu,\mu}(y) = \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\mu-\nu+1/2)} e^{y/2} y^{-\nu}(1 + O(y^{-1}))$$

und

$$W_{\nu,\mu}(y) = e^{-y/2} y^{\nu}(1 + O(y^{-1})).$$

Für $s \in \mathbb{C}$ und $y > 0$ setzen wir ferner

$$\mathcal{M}_s(y) := y^{-k/2} M_{-k/2,s-1/2}(y).$$

Genauso setzen wir für $s \in \mathbb{C}$ und $y \neq 0$

$$\mathcal{W}_s(y) := |y|^{-k/2} W_{k/2\,\mathrm{sgn}(y),s-1/2}(|y|).$$

Die beiden Funktionen $\mathcal{M}_s(y)$ und $\mathcal{W}_s(y)$ sind holomorph in s (siehe [38], Kapitel 9, Abschnitt 4). Später benötigen wir noch die Identitäten

$$\mathcal{M}_{k/2}(y) = y^{-k/2} M_{-k/2,k/2-1/2}(y) = e^{y/2}$$

und

$$\mathcal{W}_{1-k/2}(y) = y^{-k/2} W_{k/2,1/2-k/2}(y) = e^{-y/2}.$$

Sei $\beta \in L'/L$ und $m \in \mathbb{Z} + \langle \beta,\beta \rangle$ mit $m < 0$. Dann ist die auf $\mathbb{H}$ definierte Funktion

$$\tau \mapsto \mathcal{M}_s(4\pi|m|y)\mathfrak{e}_\beta(mx)$$

invariant unter T und eine Eigenfunktion von Δ_k mit dem Eigenwert

$$s(1-s)+\frac{k(k-2)}{4}.$$

Mit $M \in \Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bezeichnen wir ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen modulo der Translationsgruppe Γ_∞.

Definition 4.5. *Die Maaß-Poincaré-Reihe vom Index (β, m) ist definiert durch*

$$F^L_{\beta,m}(\tau,s) := \frac{1}{\Gamma(2s)} \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash SL_2(\mathbb{Z})} \left(\mathcal{M}_s(4\pi|m|y)\mathfrak{e}_\beta(mx)\right)|_{k,L}M,$$

wobei $\tau = x+iy \in \mathbb{H}$ und $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$.

Die in der Definition auftauchende Reihe konvergiert normal für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\sigma > 1$, und ist nach Definition eine $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariante Funktion auf $\mathbb{H}$. Da die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit dem Laplace-Operator vom Gewicht k kommutiert, gilt

$$\Delta_k(F^L_{\beta,m}|_{k,L}M) = (\Delta_k F^L_{\beta,m})|_{k,L}M.$$

Ferner ist $F^L_{\beta,m}$ eine Eigenfunktion von Δ_k, genauer gesagt gilt

$$\Delta_k F^L_{\beta,m} = \left(s(1-s)+\frac{k(k-2)}{4}\right) F^L_{\beta,m}.$$

Da $F^L_{\beta,m}$ insbesondere auch unter der Translation T invariant ist, lässt sich $F^L_{\beta,m}$ in eine Fourierreihe entwickeln. Es gilt daher nach [5], Satz 1.9 der folgende Satz.

Satz 4.6. *Die Maaß-Poincaré-Reihe $F^L_{\beta,m}$ besitzt eine Fourierentwicklung der Form*

$$\begin{aligned} F^L_{\beta,m}(\tau,s) = &\frac{\Gamma(1+k/2-s)}{\Gamma(2-2s)\Gamma(s+k/2)}\mathcal{M}_{1-s}(4\pi|m|y)(\mathfrak{e}_\beta(mx)+\mathfrak{e}_{-\beta}(mx)) \\ &+ \sum_{\substack{\gamma\in L'/L \\ \langle\gamma,\gamma\rangle\in\mathbb{Z}}} b(\gamma,0,s)y^{1-s-k/2}\mathfrak{e}_\gamma \\ &+ \sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\langle\gamma,\gamma\rangle \\ n>0}} b(\gamma,n,s)\mathcal{W}_s(4\pi ny)\mathfrak{e}_\gamma(nx) \\ &+ \sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\langle\gamma,\gamma\rangle \\ n<0}} b(\gamma,n,s)\mathcal{W}_s(4\pi ny)\mathfrak{e}_\gamma(nx). \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten $b(\gamma,n,s)$ sind explizit gegeben durch

$$\frac{2\pi|n/m|^{(k-1)/2}}{\Gamma(s+k/2)} \sum_{c\in\mathbb{Z}-\{0\}} H_c(\beta,m,\gamma,n) I_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{|c|}\sqrt{|mn|}\right),$$

wenn $n > 0$ ist.

$$\frac{4^{1-k/2}\pi^{1+s-k/2}|m|^{s-k/2}}{(2s-1)\Gamma(s+k/2)\Gamma(s-k/2)}\sum_{c\in\mathbb{Z}-\{0\}}|c|^{1-2s}H_c(\beta,m,\gamma,0),$$

wenn $n = 0$ ist.

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(1+k/2-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(1-2s)}\delta_{m,n}(\delta_{\beta,\gamma}+\delta_{-\beta,\gamma})\\&\quad+\frac{2\pi|n/m|^{(k-1)/2}}{\Gamma(s-k/2)}\sum_{c\in\mathbb{Z}-\{0\}}H_c(\beta,m,\gamma,n)J_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{|c|}\sqrt{|mn|}\right),\end{aligned}$$

wenn $n < 0$ ist.

Dabei ist $H_c(\beta,m,\gamma,n)$ die sogenannte verallgemeinerte Klostermann-Summe, die durch den Ausdruck

$$\frac{\exp(-\pi i\,\mathrm{sgn}(c)k/2)}{|c|}\sum_{\substack{d\ (mod\ c)^{\times},\\ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_1/\Gamma_\infty}}\rho^{-1}_{\gamma\beta}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}e\left(\frac{ma+nd}{c}\right),$$

zusammen mit der komplexen Zahl

$$\rho^{-1}_{\gamma,\beta}(M) := \left\langle\rho_L^{-1}(M)\mathfrak{e}_\beta,\mathfrak{e}_\gamma\right\rangle$$

gegeben ist. In der Summe bedeutet $d\ (mod\ c)^{\times}$, dass d ein Repräsentantensystem der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ durchläuft. Weiter sei $\delta_{m,n}$ (bzw. $\delta_{\beta,\gamma}$) das übliche Kronecker-Symbol und J_ν, I_ν die Besselfunktionen aus [1], Kapitel 9, Abschnitt 1.

Abschließend bemerken wir noch, dass alle in 4.6 auftretenden Reihen für $\sigma > 1$ lokal gleichmäßig konvergieren. Damit folgt insbesondere, dass die Fourierkoeffizienten $b(\gamma,n,s)$, mit Ausnahme von $b(\pm\beta,m,s)$, für $\sigma > 1$ holomorph sind. Im Hinblick auf Kapitel 5, Abschnitt 2 geben wir noch eine zu 4.6 abweichende Darstellung von $F^L_{\beta,m}$ an, so dass alle darin auftauchenden Fourierkoeffizienten für $\sigma > 1$ holomorph sind. Wir setzen dazu

$$\widetilde{b}(\gamma,n,s) := b(\gamma,n,s) - \frac{\Gamma(1+k/2-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(1-2s)}\delta_{m,n}(\delta_{\beta,\gamma}+\delta_{-\beta,\gamma}).$$

Dann sind alle Koeffizienten $\widetilde{b}(\gamma,n,s)$ offensichtlich für $\sigma > 1$ holomorph und es gilt die folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.7. *Für die Maaß-Poincaré-Reihe $F^L_{\beta,m}$ gilt die Identität*

$$\begin{aligned} F^L_{\beta,m}(\tau,s) =& \frac{1}{\Gamma(2s)}\mathcal{M}_s(4\pi|m|y)(\mathfrak{e}_\beta(mx)+\mathfrak{e}_{-\beta}(mx)) \\ &+ \sum_{\substack{\gamma\in L'/L \\ \langle\gamma,\gamma\rangle\in\mathbb{Z}}} \widetilde{b}(\gamma,0,s)y^{1-s-k/2}\mathfrak{e}_\gamma \\ &+ \sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\langle\gamma,\gamma\rangle \\ n>0}} \widetilde{b}(\gamma,n,s)\mathcal{W}_s(4\pi ny)\mathfrak{e}_\gamma(nx) \\ &+ \sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\langle\gamma,\gamma\rangle \\ n<0}} \widetilde{b}(\gamma,n,s)\mathcal{W}_s(4\pi ny)\mathfrak{e}_\gamma(nx) \end{aligned}$$

mit den oben definierten und für $\sigma > 1$ holomorphen Koeffizienten $\widetilde{b}(\gamma,n,s)$.

4.2.2 Eisenstein-Reihen

Sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+,b^-) mit $b^+ < b^-$. Wie schon in der vorangegangenen Abschnitten setzen wir $k := b^+ - b^-$. Wir klären in diesem Abschnitt, was unter einer nicht-holomorphen vektorwertigen Eisenstein-Reihe von negativem Gewicht k zu verstehen ist.

Sei $\beta \in L'/L$ mit $\langle\beta,\beta\rangle \in \mathbb{Z}$ und $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $\mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ gegeben durch $\mathfrak{e}_\beta y^s$ invariant unter der Operation von T aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ferner gilt für das Zentrumselement Z die Gleichung

$$\mathfrak{e}_\beta y^s|_{k,L}Z = \mathfrak{e}_{-\beta}y^s.$$

Definition 4.8. *Die Eisenstein-Reihe vom Gewicht k zu $\beta \in L'/L$ wird definiert durch die Reihe*

$$E^L_\beta(\tau,s) := \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (\mathfrak{e}_\beta y^s)|_{k,L}M.$$

Diese Reihe konvergiert normal für $\sigma > 1-k$ und ist nach Definition invariant unter der Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Weiter ist E^L_β eine Eigenfunktion des Laplace-Operators vom Gewicht k. Genauer gesagt gilt für den Eigenwert

$$\Delta_k E^L_\beta(\tau,s) = s(1-s-k)E^L_\beta(\tau,s).$$

Abschließend bemerken wir noch, dass E^L_β wie schon zuvor $F^L_{\beta,m}$ eine Fourierentwicklung besitzt. Genaueres dazu findet man zum Beispiel in [4], Abschnitt 4.

5

Regularisierter Theta-Lift

Wir konstruieren in diesem Kapitel einen Theta-Lift von den in Abschnitt 4.2.1 eingeführten Maaß-Poincaré-Reihen zu automorphen Formen der unitären Gruppe $U_d(L)$.

5.1 Unitäre Siegelsche Thetafunktion

Wir haben im letzten Kapitel den Begriff des hermiteschen Gitters kennengelernt. Jetzt möchten wir zu einem gegebenen geraden hermiteschen Gitter L die sogenannte Siegelsche Thetafunktion definieren. Anschließend fassen wir L als $\mathbb{Z}$-Gitter auf und vergleichen diese neu eingeführte Siegelsche Thetafunktion mit der bekannten Siegelschen Thetafunktion für $\mathbb{Z}$-Gitter, wie sie in [5], Kapitel 2, Abschnitt 1 definiert wird. Um beide Funktionen auch sprachlich voneinander unterscheiden zu können, sprechen wir im ersten Fall von der unitären und im zweiten Fall von der orthogonalen Siegelschen Thetafunktion. Es wird sich herausstellen, dass die unitäre Siegelsche Thetafunktion als Einschränkung der orthogonalen Siegelschen Thetafunktion aufgefasst werden kann. Eine Eigenschaft, die wir im Hinblick auf Kapitel 6 benötigen.

Sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-). Durch Erweiterung der Skalare kann die hermitesche Form auf den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V_\mathbb{R} = V \otimes_F \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Damit wird $V_\mathbb{R}$ zu einem hermiteschen Raum der Signatur (b^+, b^-). Weiter bezeichne $\mathrm{Gr}_U(L)$ die unitäre Grassmann-Mannigfaltigkeit von L, das heißt, die komplexe Mannigfaltigkeit bestehend aus allen b^+-dimensionalen komplexen und positiv definiten linearen Teilräumen von $V_\mathbb{R}$. Ist $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$, so besitzt $V_\mathbb{R}$ die orthogonale Zerlegung

$$V_\mathbb{R} = Z \oplus Z^\perp$$

und jeder Vektor $\lambda \in V_\mathbb{R}$ hat eine eindeutige Darstellung als Summe

$$\lambda = \lambda_Z + \lambda_{Z^\perp}$$

mit der orthogonalen Projektion λ_Z von λ auf den linearen Teilraum Z, bzw. der orthogonalen Projektion $\lambda_{Z^\perp}$ von λ auf $Z^\perp$. Ferner gilt für jedes $\lambda \in V_\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle + \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle.$$

Sei $(\mathfrak{e}_\gamma)_{\gamma\in L'/L}$ die Standardbasis der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$, $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$, $\tau = x+iy \in \mathbb{H}$ und ρ_L die Weil-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu L. Die unitäre Siegelsche Thetafunktion zu L ist definiert durch

$$\Theta_L^U(\tau, Z) := \sum_{\gamma\in L'/L} \mathfrak{e}_\gamma \theta_\gamma^U(\tau, Z)$$

mit

$$\theta_\gamma^U(\tau, Z) := \sum_{\lambda\in\gamma+L} e\left(\tau\langle\lambda_Z, \lambda_Z\rangle + \overline{\tau}\langle\lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp}\rangle\right).$$

Dabei durchläuft γ in der ersten Summe ein Repräsentantensystem der Diskriminantengruppe L'/L. Wie in der orthogonalen Theorie zeigt man, dass $\Theta_L^U(\tau, Z)$ eine reell analytische Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathrm{Gr}_U(L)$ darstellt.

Als Funktion in der Variable $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ ist die unitäre Siegelsche Thetafunktion $\Theta_L^U(\tau, Z)$ offensichtlich invariant unter der Operation der unitären Gruppe $U(V_\mathbb{R})$ und damit insbesondere auch invariant unter der Operation des Diskriminantenkerns $U_d(L)$. Fassen wir $\Theta_L^U(\tau, Z)$ als Funktion in $\tau \in \mathbb{H}$ auf, so transformiert sich $\Theta_L^U(\tau, Z)$ wie eine Modulform zur Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Genauer gesagt gilt für

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$$

die Transformationsformel

$$\Theta_L^U(M\tau, Z) = (c\tau + d)^{b^+} (c\overline{\tau} + d)^{b^-} \rho_L(M)\Theta_L^U(\tau, Z).$$

Bemerkung 5.1. *Die unitäre Siegelsche Thetafunktion besitzt eine Fourierentwicklung der Form*

$$\Theta_L^U(\tau, Z) = \sum_{\lambda\in L'} e(iy\langle\lambda_Z, \lambda_Z\rangle - iy\langle\lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp}\rangle)\mathfrak{e}_\lambda(\langle\lambda, \lambda\rangle x).$$

Beweis. Man muss lediglich die für alle λ und τ gültige Identität

$$e(\tau\langle\lambda_Z, \lambda_Z\rangle + \overline{\tau}\langle\lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp}\rangle) = e(iy\langle\lambda_Z, \lambda_Z\rangle - iy\langle\lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp}\rangle)e(\langle\lambda, \lambda\rangle x)$$

benutzen. Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Bemerkung 5.2. *Manchmal ist auch bei konkreten Rechnungen die Schreibweise*

$$\Theta_L^U(\tau, Z) = \sum_{\gamma\in L'/L} \sum_{\lambda\in\gamma+L} e(iy\langle\lambda_Z, \lambda_Z\rangle - iy\langle\lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp}\rangle)\mathfrak{e}_\gamma(\langle\lambda, \lambda\rangle x)$$

besonders nützlich.

Wir kommen jetzt zum Vergleich der unitären Siegelschen Thetafunktion mit der orthogonalen Siegelschen Thetafunktion. Betrachten wir V als rationalen Vektorraum mit der rationalen symmetrischen Bilinearform $(\cdot,\cdot) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$, so wird wie bereits schon erwähnt, L zu einem $\mathbb{Z}$-Gitter der Signatur $(2b^+, 2b^-)$. Sei $\mathrm{Gr}_O(L)$ die orthogonale Grassmann-Mannigfaltigkeit, bestehend aus allen $2b^+$-dimensionalen reellen und bzgl. $(\cdot,\cdot)$

positiv definiten linearen Teilräumen von $V_\mathbb{R}$. Wir erinnern, dass in [5], Kapitel 2, Abschnitt 1 die orthogonale Siegelsche Thetafunktion zu L wie $\Theta_L^U(\tau, Z)$ definiert wird, nur ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ durch $q(\cdot) = \frac{1}{2}(\cdot,\cdot)$ zu ersetzen, das heißt

$$\Theta_L^O(\tau, Z) := \sum_{\gamma\in L'/L} \mathfrak{e}_\gamma \theta_\gamma^O(\tau, Z)$$

mit

$$\theta_\gamma^O(\tau, Z) := \sum_{\lambda\in\gamma+L} e(\tau q(\lambda_Z) + \overline{\tau} q(\lambda_{Z^\perp})).$$

Hier ist $Z \in \mathrm{Gr}_O(L)$ und γ durchläuft ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von L' nach L.

Zwischen beiden Siegelschen Thetafunktionen besteht ein einfacher Zusammenhang. Zunächst sieht man, dass die Einbettung $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$ aus Kapitel 3 mit der komplexen aber auch mit der reellen orthogonalen Projektion in $V_\mathbb{R}$ verträglich ist. Für alle $\lambda \in V_\mathbb{R}$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ gelten nämlich die Gleichungen

$$\lambda_Z = \lambda_{Z'} \text{ und } \lambda_{Z^\perp} = \lambda_{Z^{\perp\prime}} = \lambda_{Z'^\perp},$$

wobei Z' das Bild von Z unter der Einbettung $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$ ist. Diese beiden Gleichungen ermöglichen es, die unitäre Siegelsche Thetafunktion als Einschränkung der orthogonalen Siegelschen Thetafunktion aufzufassen, das heißt, es gilt

$$\Theta_L^U(\tau, Z) = \Theta_L^O(\tau, Z')$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$.

5.2 Theta-Integral

Sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-) mit $b^+ < b^-$. Setze $k := b^+ - b^-$ und

$$\sigma_0 := \max\{1, b^+ - k/2\}.$$

Sei β ein beliebiges Element der Diskriminantengruppe L'/L und $m \in \mathbb{Z} + \langle\beta, \beta\rangle$ mit $m < 0$.

Sei $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ und $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Für die Maaß-Poincaré-Reihe $F_{\beta,m}^L(\tau, s)$ vom Index (β, m) betrachten wir das Theta-Integral

$$\int_{\mathcal{F}} \left\langle F_{\beta,m}^L(\tau, s), \Theta_L^U(\tau, Z)\right\rangle y^{b^+} \frac{dxdy}{y^2}$$

als Funktion in $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ und $s \in \mathbb{C}$. Dabei ist $\Theta_L^U(\tau, Z)$ die unitäre Siegelsche Thetafunktion aus Abschnitt 5.1 und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das hermitesche Skalarprodukt auf der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$. Der Integrand

$$\left\langle F_{\beta,m}^L(\tau, s), \Theta_L^U(\tau, Z)\right\rangle y^{b^+}$$

ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariant. Lassen wir zunächst mögliche Konvergenzprobleme außer Acht, so folgt aus der $U_d(L)$-Invarianz von $\Theta_L^U(\tau, Z)$ auch die $U_d(L)$-Invarianz des Theta-Integrals.

Wirft man an dieser Stelle einen Blick auf das asymptotische Verhalten der M-Whittaker Funktion für $y \to \infty$, so stellt man fest, dass die Maaß-Poincaré-Reihe $F_{\beta,m}(\tau, s)$ für $y \to \infty$ exponentiell ansteigt und daher im Allgemeinen keine Konvergenz des Theta-Integrals zu erwarten ist.

Indem wir eine spezielle Integrationsreihenfolge über den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ festlegen, können wir das Theta-Integral regularisieren, das heißt, zur Konvergenz zwingen. Dazu schneiden wir den Fundamentalbereich in positive y-Richtung parallel zu x-Achse ab und nennen ihn

$$\mathcal{F}_a := \{\tau = x + iy \in \mathcal{F} : y \leq a\} \text{ mit } a > 0.$$

Für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > \sigma_0$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta, m)$ definieren wir das regularisierte Theta-Integral durch

$$\Phi_{\beta,m}^L(Z, s) := \lim_{a \to \infty} \int_{\mathcal{F}_a} \left\langle F_{\beta,m}^L(\tau, s), \Theta_L^U(\tau, Z) \right\rangle y^{b^+} \frac{dxdy}{y^2},$$

wobei $H_U(\beta, m)$ eine spezielle noch zu definierende Vereinigung von Grassmann-Untermannigfaltigkeiten der Kodimension b^+ ist.

Der gleich folgende Satz zeigt, dass für festes $Z \in \mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta, m)$ die Funktion $\Phi_{\beta,m}^L(Z, s)$ für $\sigma > \sigma_0$ eine holomorphe Funktion darstellt und analytisch auf

$$\left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1, s \neq b^+ - k/2\right\}$$

fortgesetzt werden kann und in $s = b^+ - k/2$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Wir zeigen weiter, dass für festes $s \in \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1, s \neq b^+ - k/2\}$ die Funktion $\Phi_{\beta,m}^L(Z, s)$ auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ eine reell analytische Funktion mit Singularitäten in $H_U(\beta, m)$ ist.

5.2.1 Analytische Fortsetzung

Wie im orthogonalen Fall in [5], Kapitel 2, Abschnitt 2 definiert man $H_U(\beta, m)$ für $\beta \in L'/L$ und $m \in \mathbb{Z}$ durch die Vereinigung

$$H_U(\beta, m) := \bigcup_{\substack{\lambda \in \beta + L, \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = m}} \lambda^\perp.$$

Dabei ist $\lambda^\perp$ das orthogonale Komplement von λ in $\mathrm{Gr}_U(L)$, also die Menge

$$\lambda^\perp := \{Z \in \mathrm{Gr}_U(L) : \lambda \perp Z\}.$$

Im Fall $b^+ = 0$ setzen wir $H_U(\beta, m) = \emptyset$. Auch im unitären Fall ist $H_U(\beta, m)$ eine lokal endliche Vereinigung, das heißt, jede kompakte Menge $K \subset \mathrm{Gr}_U(L)$ hat nur mit endlich vielen $\lambda^\perp$ einen nicht trivialen Schnitt. Insbesondere besteht für eine offene Menge

$U \subset \mathrm{Gr}_U(L)$ mit kompaktem Abschluss die Menge

$$S(\beta, m, U) := \{\lambda \in \beta + L : \langle \lambda, \lambda \rangle = m,\ \exists Z \in U \text{ mit } \lambda \perp Z\}$$

nur aus endlich vielen Punkten. Für das nächste Lemma benutzen wir, wie auch in [5], Gleichung 2.18 die Tatsache, dass für jede kompakte Menge $K \subset \mathrm{Gr}_U(L)$ und für jede reelle Zahl $c \geq 0$ die Menge

$$\{\lambda \in \beta + L : \langle \lambda, \lambda \rangle = m,\ \exists Z \in K \text{ mit } \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle \leq c\}$$

aus höchstens endlich vielen Punkten besteht.

Lemma 5.3. *a) Sei $Z \in Gr_U(L)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle > \varepsilon$ für alle Gitterpunkte $\lambda \in L' - \{0\}$.*

b) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $|\langle \lambda, \lambda \rangle| > \varepsilon$ für alle $\lambda \in L' - \{0\}$ gilt.

c) Sei $Z \notin H_U(\beta, m)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle > \varepsilon$ für alle $\lambda \in \beta + L$ mit $\langle \lambda, \lambda \rangle = m$ gilt.

Beweis. a) Sei $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$, dann stellt $q_Z(\lambda) := \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle$ eine reelle und positiv definite quadratische Form auf $V_{\mathbb{R}}$ dar. Daher sind die Mengen

$$\{\lambda \in V_{\mathbb{R}} : q_Z(\lambda) \leq r\} \quad \text{mit } r \geq 0$$

kompakt und können nur endlich viele Gitterpunkte aus $L' - \{0\}$ enthalten (Beachte, dass L' diskret in $V_{\mathbb{R}}$ ist). Sei $\lambda_0 \neq 0$ der kleinste Gitterpunkt aus L' mit $q_Z(\lambda_0) \leq r$. Die Behauptung folgt, wenn wir $\varepsilon := q_Z(\lambda_0) > 0$ setzten.

b) Sei N die Stufe von L, das heißt, N ist die kleinste positive ganze Zahl, so dass $N\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\lambda \in L'$ gilt. Die Existenz eines solchen N zeigen wir im Anhang. Setzten wir $\varepsilon := 1/N > 0$, so folgt die Behauptung.

c) Sei $Z \notin H_U(\beta, m)$. Als erstes überlegen wir uns, dass $\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle > 0$ für alle $\lambda \in \beta + L$ mit $\langle \lambda, \lambda \rangle = m$ gelten muss. Angenommen dies ist nicht der Fall, dann existiert ein $\lambda \in \beta + L$ mit $\langle \lambda, \lambda \rangle = m$, so dass $\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle \leq 0$ gilt. Da die hermitesche Form positiv definit ist, muss $\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle = 0$ gelten. Insbesondere folgt $\lambda_Z = 0$. Wir erhalten somit den Widerspruch $Z \in H_U(\beta, m)$.

Wir wissen, dass es nur endlich viele Punkte $\lambda \in \beta + L$, $\langle \lambda, \lambda \rangle = m$ mit $\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle \leq 1$ gibt. Existiert kein Punkt mit dieser Eigenschaft, so setzen wir einfach $\varepsilon := 1$ und erhalten die Behauptung. Sind hingegen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ endlich viele Punkte mit der obigen Eigenschaft, so setzen wir

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle, \ldots, \langle \lambda_n, \lambda_n \rangle\} > 0. \qquad \square$$

Nun kommen wir zum ersten der bereits angekündigten Sätze.

Satz 5.4. *a) Für festes $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta, m)$ konvergiert das regularisierte Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ lokal gleichmäßig auf $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$ und stellt auf dieser Menge eine holomorphe Funktion dar.*

b) Das regularisierte Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ kann zu einer auf $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1, \sigma \neq b^+ - k/2\}$ holomorphen Funktion mit einem Pol erster Ordnung in $b^+ - k/2$ fortgesetzt werden.

Beweis. In der unitären Theorie gehen wir genauso vor wie in [5], Satz 2.8. Dazu zerlegen wir das Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ in eine Summe von fünf weiteren Integralen und untersuchen diese anschließend einzeln auf Holomorphie in der Variable s.

Die Maaß-Poincaré-Reihe $F^L_{\beta,m}(\tau,s)$ stellt in s für $\sigma > 1$ eine holomorphe Funktion dar (Siehe dazu auch den Kommentar nach Definition 4.5). Folglich ist das Integral

$$\int\limits_{\mathcal{F}_1} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z) \right\rangle y^{b^+} \frac{dxdy}{y^2},$$

integriert über die kompakte Menge $\mathcal{F}_1$, holomorph in s für $\sigma > 1$. Wir müssen daher das Integral integriert über den „fehlenden Teil" des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$ untersuchen, das heißt

$$\int\limits_{y=1}^{\infty} \int\limits_{x=0}^{1} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z) \right\rangle y^{b^+-2}\, dxdy.$$

Man beachte an dieser Stelle, dass es wegen der T-Invarianz des Integranden egal ist, ob wir von $x = -1/2$ bis $x = 1/2$ oder von $x = 0$ bis $x = 1$ integrieren. Wir setzen jetzt die Fourierentwicklungen der Maaß-Poincaré-Reihe

$$F^L_{\beta,m}(\tau,s) = \sum_{\gamma \in L'/L} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \langle \gamma,\gamma \rangle} c(\gamma, n; y, s) \mathfrak{e}_\gamma(nx)$$

und die der Thetafunktion (Bemerkung 5.2)

$$\Theta^U_L(\tau,Z) = \sum_{\gamma \in L'/L} \sum_{\lambda \in \gamma + L} e(iy\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle - iy\langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle) \mathfrak{e}_\gamma(\langle \lambda, \lambda \rangle x)$$

in die obige Gleichung ein. Führt man die Integration nach der Variable x durch, so erhält man

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) = \int\limits_1^\infty \sum_{\lambda \in L'} c(\lambda, \langle \lambda, \lambda \rangle; y, s) e^{-2\pi y \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle + 2\pi y \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle} y^{b^+-2}\, dy.$$

Einfaches Aufteilen der Summe ergibt

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) &= \int\limits_1^\infty c(0,0;y,s) y^{b^+-2}\, dy \\ &+ \int\limits_1^\infty \sum_{\lambda\in L'-\{0\}} c(\lambda,\langle\lambda,\lambda\rangle;y,s) e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi y\langle\lambda,\lambda\rangle} y^{b^+-2}\, dy.\end{aligned}$$

Wir haben im Anschluss an Satz 4.6 bemerkt, dass nicht alle Fourierkoeffizienten $b(\lambda,n,s)$ von $F^L_{\beta,m}(\tau,s)$ in s für $\sigma>1$ holomorph sind. Wir betrachten daher die in Bemerkung 4.7 gefundene Darstellung

$$\begin{aligned}F^L_{\beta,m}(\tau,s) =& \frac{1}{\Gamma(2s)}\mathcal{M}_s(4\pi|m|y)(\mathfrak{e}_\beta(mx)+\mathfrak{e}_{-\beta}(mx)) \\ &+ \sum_{\substack{\gamma\in L'/L\\ \langle\gamma,\gamma\rangle\in\mathbb{Z}}} \tilde{b}(\gamma,0,s) y^{1-s-k/2}\mathfrak{e}_\gamma \\ &+ \sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\langle\gamma,\gamma\rangle\\ n\neq 0}} \tilde{b}(\gamma,n,s)\mathcal{W}_s(4\pi n y)\mathfrak{e}_\gamma(nx)\end{aligned}$$

mit den für $\sigma>1$ holomorphen Koeffizienten $\tilde{b}(\gamma,n,s)$. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) =& b(0,0,s)\int\limits_1^\infty y^{b^+-k/2-s-1}\, dy \\ &+ \int\limits_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in L'-\{0\}\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=0}} b(\lambda,0,s) e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle} y^{b^+-k/2-s-1}\, dy \\ &+ \int\limits_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in L'\\ \langle\lambda,\lambda\rangle\neq 0}} \tilde{b}(\lambda,\langle\lambda,\lambda\rangle,s)\mathcal{W}_s(4\pi\langle\lambda,\lambda\rangle y) \\ &\times e^{-2\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi y\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle} y^{b^+-2}\, dy \\ &+ \frac{2}{\Gamma(2s)}\int\limits_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=m}} \mathcal{M}_s(4\pi|m|y) e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi y m} y^{b^+-2}\, dy.\end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert für $\sigma > b^+ - k/2$ und ist gleich dem Ausdruck

$$\frac{1}{b^+-k/2-s}$$

und lässt sich analytisch auf $\{s\in\mathbb{C} : \sigma>1, s\neq b^+-k/2\}$ fortsetzen. In $s=b^+-k/2$ liegt offensichtlich ein Pol erster Ordnung vor (Mit dem Residuum $b(0,0,s)$).

Folglich genügt es zu zeigen, dass die restlichen Integrale in s für $\sigma>1$ holomorphe

Funktionen darstellen. Wir zeigen dies, indem wir die lokal gleichmäßige Konvergenz der Integrale in diesem speziellen Bereich zeigen. Bevor wir damit beginnen, erinnern wir, dass die Integrale der Form

$$\int_1^\infty e^{-ay} y^b \, dy$$

mit $a \in (0, \infty)$ und $b \in \mathbb{R}$ existieren.

Für zwei reellwertige Funktionen f und g schreiben wir $f \ll g$, wenn eine geeignete reelle Konstante c mit $f \leq c \cdot g$ existiert. Mit Teil a) aus Lemma 5.3 folgt für das zweite Integral

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\lambda \in L' - \{0\} \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = 0}} \left| b(\lambda, 0, s) e^{-4\pi y \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle} y^{b^+ - k/2 - s - 1} \right| \\
&\ll e^{-2\pi y \varepsilon} y^{b^+ - k/2 - 1} \sum_{\substack{\lambda \in L' - \{0\} \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = 0}} e^{-2\pi \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle},
\end{aligned}$$

jeweils gleichmäßig in $y \in [1, \infty)$ und lokal gleichmäßig in s für $\sigma > 1$. Die am Schluss auftauchende Reihe ist als Teilreihe einer Thetafunktion zu einem positiv definiten Gitter konvergent und somit ist das zweite Integral in s für $\sigma > 1$ eine holomorphe Funktion.

Für den Beweis der Holomorphie des dritten Integrals nutzen wir die Tatsache, dass $q_Z(\lambda) := \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle - \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle$ eine reelle und positiv definite quadratische Form auf $V_\mathbb{R}$ darstellt, das asymptotische Verhalten der W-Whittaker Funktion für $y \to \infty$, Teil b) von Lemma 5.3 und das asymptotische Verhalten der Fourierkoeffizienten

$$b(\gamma, n, s) = \mathcal{O}\left(e^{4\pi \sqrt{n|m|}}\right) \quad \text{für } n \to \infty$$

und

$$b(\gamma, n, s) = \mathcal{O}\left(|n|^{\sigma + k/2 - 1}\right) \quad \text{für } n \to -\infty,$$

jeweils lokal gleichmäßig in s für $\sigma > 1$.

Das vierte und letzte Integral ist ebenfalls in s für $\sigma > 1$ holomorph, denn es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\lambda \in \beta + L, \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = m}} \left| \mathcal{M}_s(4\pi |m| y) e^{-4\pi y \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle + 2\pi y m} y^{b^+ - 2} \right| \\
&\ll \sum_{\substack{\lambda \in \beta + L, \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = m}} e^{-4\pi y m} y^{b^+ - 2} \\
&\ll e^{-2\pi \varepsilon y} y^{b^+ - 2} \sum_{\substack{\lambda \in L' \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = m}} e^{-\pi (m + \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle - \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle)},
\end{aligned}$$

jeweils gleichmäßig in $y \in [1, \infty)$ und lokal gleichmäßig in s für $\sigma > 1$. Auch hier ist die zum Schluss auftauchende Reihe als Teilreihe einer Thetafunktion zu einem positiv definiten Gitter konvergent. □

5.2.2 Singularitäten

Wir sind jetzt an $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ als Funktion in Z im speziellen Wert $s = 1 - k/2 > 1$ interessiert. In diesem Fall ist $F^L_{\beta,m}(\tau, 1-k/2)$ eine harmonische schwache Maaß-Form. Dabei können wir $s = 1 - k/2$ nur dann in $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ einsetzen, wenn $b^+ = 0$ ist. Für alle anderen Fälle definieren wir für $Z \in \mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta, m)$ das regularisierte Theta-Integral durch den konstanten Term der Laurentreihenentwicklung von $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ in $s = 1-k/2$. Wir schreiben hierfür einfach $\Phi^L_{\beta,m}(Z)$. Im Fall $b^+ = 0$ bedeutet dies natürlich $\Phi^L_{\beta,m}(Z) = \Phi^L_{\beta,m}(Z, 1-k/2)$.

Wir möchten als nächstes den Singularitätstyp von $\Phi^L_{\beta,m}(Z)$ bestimmen. Sei $U \subset \mathrm{Gr}_U(L)$ eine offene Menge. Zwei reell analytische Funktionen f und g, definiert auf einer offenen und dichten Teilmenge von U, heißen vom gleichen Singularitätstyp, wenn sich ihre Differenz $f - g$ reell analytisch auf die Umgebung U fortsetzen lässt. Wir schreiben hierfür auch kurz $f \equiv g$.

Satz 5.5. *Sei U eine offene Teilmenge von $Gr_U(L)$ mit kompaktem Abschluss. Das regularisierte Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z)$ hat auf U Singularitäten vom Typ*

$$-2 \sum_{\lambda \in S(\beta,m,U)} \log\left(\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle\right),$$

wenn $b^+ = 1$ ist und vom Typ

$$2 \sum_{\lambda \in S(\beta,m,U)} \frac{(b^+ - 1)!}{\left(4\pi \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle\right)^{b^+ - 1}},$$

wenn $b^+ > 1$.

Auch dieser Beweis verläuft ähnlich wie in [5], Satz 2.12. Bevor wir jedoch beginnen stellen wir noch ein wichtiges Lemma aus [3], Abschnitt 6 bereit.

Lemma 5.6. *Als Funktion auf den reellen Zahlen hat*

$$r \mapsto \int_1^\infty e^{-r^2 y} y^{s-1}\, dy$$

in $r = 0$ eine Singularität vom Typ $|r|^{-2s}\Gamma(s)$, wenn $s > 0$ und eine Singularität vom Typ $(-1)^{s+1} r^{-2s} \log(r^2)/(-s)!$, wenn $s \leq 0$ gilt.

Beweis. Wir erinnern daran, dass

$$\mathcal{M}_s(y) = \frac{\Gamma(1 + k/2 - s)}{\Gamma(1-2s)} \mathcal{W}_s(y) - \frac{\Gamma(1+k/2-s)\Gamma(2s-1)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(s+k/2)} \mathcal{M}_{1-s}(y)$$

für alle $y > 0$ gilt. Zusammen mit der im Beweis von Satz 5.4 gefundenen Darstellung des Theta-Integrals $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) = &\int\limits_{\mathcal{F}_1} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z)\right\rangle y^{b^+}\, \frac{dxdy}{y^2} + \frac{b(0,0,s)}{b^+ - k/2 - s} \\
&+ \int\limits_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in L'-\{0\}\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=0}} b(\lambda,0,s) e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle} y^{b^+-k/2-s-1}\, dy \\
&+ \int\limits_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in L'\\ \langle\lambda,\lambda\rangle\neq 0}} b(\lambda,\langle\lambda,\lambda\rangle,s)\mathcal{W}_s(4\pi\langle\lambda,\lambda\rangle y) \\
&\quad\times e^{-2\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle + 2\pi y\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle} y^{b^+-2}\, dy \\
&+ \frac{2\Gamma(1+k/2-s)}{\Gamma(2-2s)\Gamma(s+k/2)} \int\limits_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=m}} \mathcal{M}_{1-s}(4\pi|m|y) \\
&\quad\times e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle + 2\pi y m} y^{b^+-2}\, dy.
\end{aligned}$$

Das Integral über den abgeschnittenen Fundamentalbereich ist holomorph in $s = 1 - k/2$ und reell analytisch in Z und hat daher keinen Einfluss auf mögliche Singularitäten. Der den Pol erster Ordnung erzeugende Term hängt nicht von Z ab und trägt deshalb auch nicht zu Singularitäten bei. Das dritte und das vierte Integral sind wieder holomorph in $s = 1 - k/2$ und reell analytisch in Z. Damit tragen beide Terme nicht zu möglichen Singularitäten bei. Der letzte Integralterm ist holomorph in $s = 1 - k/2$ und reell analytisch in $\mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta,m)$. Folglich bekommen wir für den Singularitätstyp

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z) \equiv 2 \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=m}} \int\limits_1^\infty \mathcal{M}_{k/2}(4\pi|m|y) e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle + 2\pi y m} y^{b^+-2}\, dy.$$

Wegen $\mathcal{M}_{k/2}(y) = e^{y/2}$ erhalten wir

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z) \equiv 2 \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=m}} \int\limits_1^\infty e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle} y^{b^+-2}\, dy.$$

Dieses Integral existiert nicht für $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ mit $\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle = 0$. Der Singularitätstyp auf der offenen Menge U ist daher gegeben durch

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z) \equiv 2 \sum_{\lambda\in S(\beta,m,U)} \int\limits_1^\infty e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle} y^{b^+-2}\, dy.$$

Wenden wir jetzt Lemma 5.6 mit $r^2 = 4\pi\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle$ und $s = b^+ - 1$ an, so folgt die

Behauptung aus dem Satz. □

5.3 Rankin-Selberg bezüglich Poincaré-Reihen

Sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-) mit $b^+ < b^-$. Setze $k := b^+ - b^-$. In diesem Abschnitt geben wir unter Verwendung der Gaußschen hypergeometrischen Funktion eine Darstellung des regularisierten Theta-Integrals $\Phi^L_{\beta,m}(Z, s)$ als Summe von Poincaré-Reihen zur unitären Gruppe $U_d(L)$ an. Um auf diese Darstellung zu kommen, werten wir das Integral mit der Rankin-Selberg Methode aus.

Wir beginnen mit einem Lemma über das asymptotische Verhalten der Komponentenfunktionen $\theta^U_\beta(\tau, Z)$ der Siegelschen Thetafunktion für $y \to 0$.

Lemma 5.7. *Sei $\beta \in L'/L$ und $Z \in Gr_U(L)$. Für die β-Komponente der unitären Siegelschen Thetafunktion gilt für $y \to 0$ die Asymptotik*

$$\theta^U_\beta(\tau, Z) = \mathcal{O}\left(y^{-b^- - b^+}\right)$$

gleichmäßig in x.

Beweis. Die Transformationsformel der Siegelschen Thetafunktion $\Theta^U_L(\tau, Z)$ aus Abschnitt 5.1 liefert für die Matrix S zunächst die Gleichung

$$\Theta^U_L(\tau, Z) = \tau^{-b^+} \overline{\tau}^{-b^-} \rho_L(S)^{-1} \Theta^U_L(-1/\tau, Z).$$

Das führt wiederum sofort auf die Identität

$$\sum_{\gamma \in L'/L} \mathfrak{e}_\gamma \theta^U_\gamma(\tau, Z) = \tau^{-b^+} \overline{\tau}^{-b^-} \sum_{\gamma \in L'/L} \rho_L(S)^{-1} \mathfrak{e}_\gamma \theta^U_\gamma(-1/\tau, Z).$$

Schreiben wir jetzt

$$\rho_L(S)^{-1} \mathfrak{e}_\gamma = \sum_{\delta \in L'/L} a_{\gamma,\delta} \mathfrak{e}_\delta \quad \text{mit } a_{\gamma,\delta} \in \mathbb{C}$$

als Linearkombination der Standardbasis der Gruppenalgebra von L, so folgt für die β-Komponente

$$\theta^U_\beta(\tau, Z) = \tau^{-b^+} \overline{\tau}^{-b^-} \sum_{\gamma \in L'/L} a_{\gamma,\beta} \theta_\gamma(-1/\tau, Z).$$

Die Behauptung folgt, wenn wir für alle $\gamma \in L'/L$ zeigen können, dass für $y \to \infty$ die Asymptotik

$$\theta^U_\gamma(\tau, Z) = \mathcal{O}(1)$$

gleichmäßig in x gilt. Um dies zu sehen, betrachten wir die für alle $y \in [0, \infty)$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\theta^U_\gamma(\tau, Z)\right| &\leq \sum_{\lambda \in \gamma + L} \left|e(\tau \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle + \overline{\tau} \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle)\right| \\ &\leq \sum_{\lambda \in \gamma + L} e^{-2\pi(\langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle - \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle)}. \end{aligned}$$

Die letzte Reihe ist als Teilreihe einer Thetafunktion zu einem positiv definiten Gitter konvergent. □

Seien $a, b, c, z \in \mathbb{C}$. Mit $F(a, b, c; z)$ bezeichnen wir die Gaußsche hypergeometrische Funktion wie in [14], Kapitel 2, das heißt, die Potenzreihe

$$F(a, b, c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Dabei ist

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

das sogenannte Pochhammer-Symbol. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $F(a, b, c; z)$ ist gleich 1. Ferner kann man zeigen, dass $F(a, b, c; z)$ für Punkte auf dem Konvergenzkreis $|z| = 1$ absolut konvergiert, wenn die Konstanten $\mathrm{Re}(c - a - b) > 0$ erfüllen. Seien a, b, c komplexe Zahlen, die $\mathrm{Re}(c - a - b) > 0$ genügen, dann gilt speziell im Punkt $z = 1$ die Gleichheit

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)},$$

sofern zusätzlich $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ erfüllt ist (siehe [14], Seite 104).

Satz 5.8. *Sei $\beta \in L'/L$ und $m \in \mathbb{Z} + \langle \beta, \beta \rangle$ mit $m < 0$. Dann gilt für das regularisierte Theta-Integral die Gleichheit*

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z, s) = \frac{2\Gamma(b^+/2 + b^-/2 + s - 1)}{\Gamma(2s)(4\pi|m|)^{k/2-s}} &\sum_{\substack{\lambda \in \beta + L \\ \langle \lambda, \lambda \rangle = m}} (4\pi\, |\langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle|)^{1-b^+/2-b^-/2-s} \\ &\times F\left(b^+/2 + b^-/2 + s - 1, s + b^+/2 - b^-/2, 2s; m/\langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle\right),\end{aligned}$$

wobei die in dieser Darstellung auftauchende Reihe für $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta, m)$ und $\sigma > b^+ - k/2 = b^+/2 + b^-/2$ normal konvergiert. Ist speziell $b^+ = 0$, so gilt

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z, s) = \frac{8\pi\, |m|}{(s + b^-/2 - 1)\Gamma(s - b^-/2 + 1)} \left|\{\lambda \in \beta + L : \langle \lambda, \lambda \rangle = m\}\right|.$$

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, erinnern wir kurz an die Rankin-Selberg Methode. Sei Γ eine Untergruppe von $\Gamma_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $Z \notin \Gamma$. Dann bildet nach [35], Kapitel 2, Satz 1 die Menge

$$\mathcal{G} := \bigcup_{M \in \Gamma \backslash \Gamma_1} M\mathcal{F}$$

ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ auf $\mathbb{H}$. Mit $M \in \Gamma\backslash\Gamma_1$ ist natürlich gemeint, dass M ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von Γ_1 modulo Γ durchläuft. Sei weiter f eine Γ-invariante Funktion auf $\mathbb{H}$ mit Werten in $\mathbb{C}$. Der Wert des Integrals

$$\int_{\mathcal{G}} f(z) y^{-2}\, dx dy,$$

sofern es existiert, hängt nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs $\mathcal{G}$ ab und es gilt die Identität

$$2\int_{\mathcal{G}} f(z)y^{-2}\,dxdy = \int_{\mathcal{F}} \sum_{M\in\Gamma\backslash\Gamma_1} f(Mz)y^{-2}\,dxdy.$$

Damit sind wir jetzt in der Lage Satz 5.8 beweisen.

Beweis. Sei $Z \in \mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta, m)$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > b^+ - k/2$. Wir setzen in die Definition von $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ die Reihendarstellung

$$F^L_{\beta,m}(\tau,s) = \frac{1}{\Gamma(2s)} \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_1} (\mathcal{M}_s(4\pi|m|y)\mathfrak{e}_\beta(mx))\,|_{k,L}M$$

der Maaß-Poincaré-Reihe ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) =& \int_{\mathcal{F}} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z)\right\rangle y^{b^+}\,\frac{dxdy}{y^2}\\ =& \frac{1}{\Gamma(2s)}\int_{\mathcal{F}} \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_1} \left\langle(\mathcal{M}_s(4\pi|m|y)\mathfrak{e}_\beta(mx))\,|_{k,L}M, \Theta^U_L(\tau,Z)\right\rangle y^{b^+}\,\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

Verwenden wir die Transformationsformel der Thetafunktion aus Abschnitt 5.1, so erhalten wir für das Theta-Integral die Identität

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) =& \frac{1}{\Gamma(2s)}\int_{\mathcal{F}} \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_1} \mathcal{M}_s(4\pi|m|\operatorname{Im}(M\tau))\operatorname{Im}(M\tau)^{b^+}\\ &\times\left\langle \mathfrak{e}_\beta(m\operatorname{Re}(M\tau)), \Theta^U_L(M\tau,Z)\right\rangle\,\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir in die vorherige Gleichung die Reihendarstellung

$$\Theta^U_L(\tau,Z) = \sum_{\gamma\in L'/L} \mathfrak{e}_\gamma\theta^U_\gamma(\tau,Z)$$

der Thetafunktion ein, so erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) =& \frac{2}{\Gamma(2s)}\int_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_s(4\pi|m|y)y^{b^+}e(mx)\overline{\theta^U_\beta(\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2}\\ &+\frac{1}{\Gamma(2s)}\int_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_1\\ M\notin\Gamma_\infty,\Gamma_\infty Z}} \mathcal{M}_s(4\pi|m|\operatorname{Im}(M\tau))(\operatorname{Im}(M\tau))^{b^+}\\ &\times e(m\operatorname{Re}(M\tau))\overline{\theta^U_\beta(M\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

Jetzt können wir das zweite Integral mit Hilfe der Rankin-Selberg Methode auswerten, das heißt, es gilt

$$\frac{2}{\Gamma(2s)}\int_{\mathcal{G}} \mathcal{M}_s(4\pi|m|y)y^{b^+}e(mx)\overline{\theta^U_\beta(\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2},$$

wenn dieses Integral über einen Fundamentalbereich $\mathcal{G}$ der Operation von Γ_∞ auf $\mathbb{H} - \bigcup_{M\in\Gamma_\infty} M\mathcal{F}$ existiert. Für den Fundamentalbereich $\mathcal{G}$ wählen wir

$$\mathcal{G} := \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \leq 1,\ |x| \leq 1/2\}.$$

Für die Konvergenz des Integrals ist der Grenzübergang $\tau \to 0$ problematisch. Der Betrag des Integranden wächst für $\tau \to 0$ wegen Lemma 5.7 und der Asymptotik

$$M_{\nu,\mu}(z) \sim z^{1/2+\mu} \quad \text{für } z \to 0$$

aus Abschnitt 4.2.1 höchstens wie $y^{\sigma-(b^+/2+b^-/2)}$. Wegen $\sigma > b^+ - k/2$ existiert daher das Integral und wir bekommen damit die Identität

$$\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) = \frac{2}{\Gamma(2s)} \int\limits_{y=0}^{\infty} \int\limits_{x=0}^{1} \mathcal{M}_s(4\pi|m|y) y^{b^+-2} e(mx) \overline{\theta^U_\beta(\tau,Z)}\ dxdy.$$

Einsetzen der Fourierreihe

$$\theta^U_\beta(\tau,Z) = \sum_{\lambda\in\beta+L} e^{-2\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi y\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle} e^{2\pi i\langle\lambda,\lambda\rangle x}$$

und Ausführen der Integration nach der Variablen x liefert

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,m}(Z,s) =& \frac{2}{\Gamma(2s)} \int\limits_0^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=m}} \mathcal{M}_s(4\pi|m|y) y^{b^+-2} e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi ym}\ dy \\ =& \frac{2}{(4\pi|m|)^{k/2}\Gamma(2s)} \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=m}} \int\limits_0^\infty M_{-k/2,s-1/2}(4\pi|m|y) y^{b^+/2+b^-/2-2} \\ & \times e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi ym}\ dy.\end{aligned}$$

Das Integral hinter der Summe ist eine Laplace-Transformation. Ist die Projektion λ_Z von λ auf den linearen Teilraum Z nicht 0 (Wegen $Z \notin \mathrm{Gr}_U(L)$ ist das für $b^+ \neq 0$ immer der Fall), so hat dieses Integral nach [15], Seite 215 den Wert

$$\begin{aligned}&\frac{(4\pi|m|)^s \Gamma(b^+/2+b^-/2+s-1)}{(4\pi\,|\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle|)^{b^++b^-+2-1}} \\ &\quad \times F(b^+/2+b^-/2+s-1, s-b^-/2+b^+/2, 2s, m/\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle).\end{aligned}$$

Damit folgt für $b^+ \neq 0$ die Behauptung. Der Fall $b^+ = 0$ muss gesondert behandelt werden, denn hier gilt immer $\lambda_Z = 0$. Wir haben demnach das Integral

$$\int\limits_0^\infty M_{-k/2,s-1/2}(4\pi|m|y) y^{b^-/2-2} e^{2\pi ym}\ dy$$

zu untersuchen. Wegen der Asymptotik der M-Whittaker Funktion konvergiert dieses

Integral absolut für $\sigma > 1 - b^-/2$. Es kann auch geschrieben werden als

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{1/n}^{\infty} M_{-k/2,s-1/2}(4\pi|m|y) y^{b^-/2-2} e^{2\pi y m - \epsilon y}\, dy,$$

was wieder nach [15], Seite 215 den Wert

$$(4\pi|m|)^{1-b^-/2}\Gamma(s+b^-/2-1)F(s+b^-/2-1, s-b^-/2+1/2, 2s, 1)$$

besitzt. Verwenden wir die Gleichung der hypergeometrischen Funktion für $z = 1$, so folgt auch in diesem Fall die Behauptung. □

5.4 Rankin-Selberg bezüglich Eisenstein-Reihen

Sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-) mit $b^+ < b^-$. Setze $k := b^+ - b^-$. Wir betrachten in diesem Abschnitt das regularisierte Theta-Integral mit nicht-holomorphen Eisenstein-Reihen und geben mit Hilfe der Gammafunktion eine Darstellung von $\Phi^L_{\beta,0}(Z,s)$ als Summe von Eisenstein-Reihen zur Gruppe $U_d(L)$ an. Auch hier finden wir diese Darstellung mit Hilfe der in Abschnitt 5.3 vorgestellten Rankin-Selberg Methode.

Satz 5.9. *Sei $0 \neq \beta \in L'/L$ und $b^+ \neq 0$. Dann gilt für das regularisierte Theta-Integral die Identität*

$$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) = 2\Gamma(s+b^+-1) \sum_{\substack{\lambda\in\beta+L \\ \langle\lambda,\lambda\rangle=0}} (4\pi\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle)^{-s-b^++1},$$

wobei die angegebene Reihe für $\sigma > b^+ - k$ und $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta,0)$ normal konvergiert.

Beweis. Sei $Z \in \mathrm{Gr}_U(L) - H_U(\beta,0)$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > b^+ - k$. Wir setzen die Reihendarstellung (Definition 4.8) von $E^L_\beta(\tau,s)$ in die Definition von $\Phi^L_{\beta,0}(Z,s)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) &= \int\limits_{\mathcal{F}} \left\langle E^L_\beta(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z)\right\rangle y^{b^+} \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}} \sum_{M\in\Gamma_\infty/\Gamma_1} \left\langle (\mathfrak{e}_\beta y^s)|_{k,L} M, \Theta^U_L(\tau,Z)\right\rangle y^{b^+} \frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel der Siegelschen Thetafunktion aus Abschnitt 5.1 erhält man für das Theta-Integral die Gleichheit

$$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) = \int\limits_{\mathcal{F}} \sum_{M\in\Gamma_\infty/\Gamma_1} \mathrm{Im}(M\tau)^{s+b^+} \left\langle \mathfrak{e}_\beta, \Theta^U_L(M\tau,Z)\right\rangle \frac{dxdy}{y^2}.$$

Einsetzen der Definition von $\Theta_L^U(\tau, Z)$ liefert weiter

$$\Phi_{\beta,0}^L(Z,s) = \int\limits_{\mathcal{F}} \sum_{M\in\Gamma_\infty/\Gamma_1} \mathrm{Im}(M\tau)^{s+b^+}\overline{\theta_\beta^U(M\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2}.$$

Für $b^+ = 0$ existiert dieses (regularisierte) Integral nicht. Im Fall $b^+ \neq 0$ ergibt ein Aufteilen der Summe

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta,m}^L(Z,s) =& 2\int\limits_{\mathcal{F}} y^{s+b^+}\overline{\theta_\beta^U(\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2}\\ &+\int\limits_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{M\in\Gamma_\infty/\Gamma_1\\ M\notin\Gamma_\infty,\Gamma_\infty Z}} \mathrm{Im}(M\tau)^{s+b^+}\overline{\theta_\beta^U(M\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite lässt sich jetzt wieder mit der Rankin-Selberg Methode auswerten und ist gleich den Ausdruck

$$2\int\limits_{\mathcal{G}} y^{s+b^+}\overline{\theta_\beta^U(\tau,Z)}\,\frac{dxdy}{y^2},$$

sofern dieses Integral über einen Fundamentalbereich der Operation von Γ_∞ auf $\mathbb{H} - \bigcup_{M\in\Gamma_\infty} M\mathcal{F}$ existiert. Als Fundamentalbereich wählen wir

$$\mathcal{G} := \{\tau \in \mathbb{H} : |x| \leq 1/2, |\tau| < 1\}.$$

Der Betrag des Integranden wächst wegen Lemma 5.7 für $\tau \to 0$ höchstens wie $y^{\sigma-(b^+-k)}$. Daher konvergiert das Integral für $\sigma > b^+ - k$ und es gilt die Identität

$$\Phi_{\beta,0}^L(Z,s) = 2\int\limits_{y=0}^{\infty}\int\limits_{x=0}^{1} y^{s+b^+-2}\overline{\theta_\beta^U(\tau,Z)}\,dxdy.$$

Einsetzen der Fourierreihe

$$\theta_\beta^U(\tau,Z) = \sum_{\lambda\in\beta+L} e^{-2\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi y\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle}e^{2\pi i\langle\lambda,\lambda\rangle x}$$

und Ausführen der Integration nach der Variablen x liefert

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta,0}^L(\tau,Z) &= 2\int\limits_0^\infty y^{s+b^+-2}\sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=0}} e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle}\,dy\\ &= 2\sum_{\substack{\lambda\in\beta+L\\ \langle\lambda,\lambda\rangle=0}}\int\limits_0^\infty y^{s+b^+-2}e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle}\,dy.\end{aligned}$$

Da wir $b^+ \neq 0$ und $\beta \neq 0$ voraussetzen, folgt wegen $Z \notin H_U(\beta, 0)$ stets $\lambda_Z \neq 0$ und daher ist das Integral hinter der Summe ein spezieller Wert der Gammafunktion. Beachtet man an dieser Stelle, dass für reelle $a > 0$ die Gleichheit

$$\int_0^\infty y^{z-1} e^{-ay}\, dy = a^{-z}\Gamma(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt, so folgt

$$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) = 2 \sum_{\substack{\lambda \in \beta + L \\ \langle \lambda,\lambda\rangle = 0}} (4\pi\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle)^{-s-b^+ +1}\, \Gamma(s+b^+ -1),$$

was die Behauptung zeigt. □

Als abschließende Bemerkung geben wir eine zu Satz 5.9 abweichende Darstellung von $\Phi^L_{\beta,0}(Z,s)$ an, die besser erkennen lässt, dass $\Phi^L_{\beta,0}(Z,s)$ eine Summe von Eisenstein-Reihen zur Gruppe $U_d(L)$ ist. Um zu dieser Darstellung zu gelangen nehmen wir an, dass L einen von 0 verschiedenen isotropen Vektor enthält.

Sei $\Gamma(L) := U_d(L)$, dann operiert $\Gamma(L)$ auf der nicht leeren Menge

$$P(L') := \left\{\lambda \in L' : \langle\lambda,\lambda\rangle = 0, \lambda \text{ primitiv}\right\},$$

bestehend aus allen primitiven und isotropen Vektoren in L'. Mit $\Gamma(L)_\lambda$ möchten wir den Stabilisator von λ in $\Gamma(L)$ bezeichnen. Weiter betrachten wir für $\lambda \in L'$ und β die partielle Dedekindsche Zetafunktion

$$\zeta_{\beta,\lambda}(s) := \sum_{\substack{x \in \mathcal{O}_F \\ x\lambda \in \beta + L}} N_{F/\mathbb{Q}}(x)^{-s},$$

welche für s mit $\sigma > 1$ normal konvergiert.

Bemerkung 5.10. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 5.9 und unter der zusätzlichen Annahme, dass L einen von 0 verschiedenen isotropen Vektor enthält, gilt die Identität*

$$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) = \frac{2\Gamma(s+b^+-1)}{|\mathcal{O}_F^\times|(4\pi)^{s+b^+-1}} \sum_{\lambda \in \Gamma(L)\backslash P(L')} \sum_{\gamma \in \Gamma(L)_\lambda\backslash\Gamma(L)} \zeta_{\beta,\gamma^{-1}\lambda}(s+b^+-1)\langle\lambda_{(\gamma Z)},\lambda\rangle^{-s-b^++1},$$

wobei die erste Summe endlich ist und $\gamma \in \Gamma(L)_\lambda\backslash\Gamma(L)$ bedeutet, dass γ eine Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen modulo $\Gamma(L)_\lambda$ durchläuft.

Beweis. Zunächst schreiben wir die in Satz 5.9 gefundene Identität um zu

$$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) = \frac{2\Gamma(s+b^+-1)}{(4\pi)^{s+b^+-1}} \sum_{\substack{\lambda \in \beta + L \\ \langle \lambda,\lambda\rangle = 0}} \langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle^{-s-b^++1}.$$

Da es in $\mathcal{O}_F$ nur endlich viele Einheiten gibt, folgt weiter

$$\begin{aligned}\Phi^L_{\beta,0}(Z,s) &= \frac{2\Gamma(s+b^+-1)}{|\mathcal{O}_F^\times|(4\pi)^{s+b^+-1}} \sum_{\lambda\in P(L')} \sum_{\substack{x\in\mathcal{O}_F \\ x\lambda\in\beta+L}} \langle (x\lambda)_Z, (x\lambda)_Z\rangle^{-s-b^++1} \\ &= \frac{2\Gamma(s+b^+-1)}{|\mathcal{O}_F^\times|(4\pi)^{s+b^+-1}} \sum_{\lambda\in P(L')} \zeta_{\beta,\lambda}(s+p-1)\langle \lambda_Z, \lambda_Z\rangle^{-s-b^++1}.\end{aligned}$$

Als nächstes schreiben wir die Menge $P(L')$ als disjunkte Vereinigung von Bahnen $\Gamma(L)\lambda$ und identifizieren anschließend jede Bahn mit dem Quotienten $\Gamma(L)_\lambda\backslash\Gamma(L)$. Für den Beweis, dass es nur endlich viele Bahnen modulo $\Gamma(L)$ gibt, verweisen wir auf den Anhang. Das ergibt

$$\frac{2\Gamma(s+b^+-1)}{|\mathcal{O}_F^\times|(4\pi)^{s+b^+-1}} \sum_{\lambda\in\Gamma(L)\backslash P(L')} \sum_{\gamma\in\Gamma(L)_\lambda\backslash\Gamma(L)} \zeta_{\beta,\gamma^{-1}\lambda}(s+b^+-1)\langle(\gamma^{-1}\lambda)_Z, (\gamma^{-1}\lambda)_Z\rangle^{-s-b^++1},$$

wobei mit $\gamma\in\Gamma(L)_\lambda\backslash\Gamma(L)$ gemeint ist, dass γ ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen durchläuft. Die behauptete Identität folgt letztendlich aus der für alle $\lambda\in L'$ und $Z\in \mathrm{Gr}_U(L)$ gültigen Beziehung $\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle = \langle\lambda_Z,\lambda\rangle$. $\square$

6

Theta-Integral als Eigenfunktion

In diesem Kapitel zeigen wir, dass das Theta-Integral aus Kapitel 5 eine Eigenfunktion des $U(b^+, b^-)$-invarianten Laplace-Operators Ω auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ ist. Insbesondere geben wir den zugehörigen Eigenwert explizit an.

6.1 Grundlagen der Lie-Theorie

Für die folgende Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe über Lie-Gruppen, Lie-Algebren, deren Darstellungstheorie und Casimir-Operatoren stellen die Bücher von [13] oder [12] eine gute Referenz dar.

6.1.1 Lie-Algebren

Sei K ein Körper. Wir verstehen unter einer K-Algebra einen K-Vektorraum A zusammen mit einer K-bilinearen Abbildung (Multiplikation)

$$A \times A \to A,\ (x, y) \mapsto xy.$$

Eine K-Algebra A heißt assoziativ, wenn

$$(xy)z = x(yz)$$

für alle $x, y, z \in A$ gilt. Eine K-Algebra A heißt kommutativ, wenn

$$xy = yx$$

für alle $x, y \in A$ gilt. Wir nennen eine K-Algebra A unital, wenn es bezüglich der Multiplikation ein neutrales Element $1 \in A$ gibt, das heißt, für alle $x \in A$ gilt

$$1x = x = x1.$$

Eine K-Algebra A wird als Lie-Algebra bezeichnet, wenn die Multiplikation $[x, y] := xy$ (Lie-Klammer) antisymmetrisch ist

$$[x, y] = -[y, x]$$

und für alle $x, y, z \in A$ die sogenannte Jacobi-Identität erfüllt, das heißt

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Ist $K = \mathbb{R}$, so sprechen wir von einer reellen Lie-Algebra. Im Fall $K = \mathbb{C}$ hat man eine analoge Sprechweise.

Eine Lie-Algebra A heißt abelsch, wenn die Lie-Klammer, angewendet auf zwei beliebige Elemente aus A, immer Null ergibt.

Unter einer Lie-Unteralgebra B von A versteht man einen linearen Teilraum von A, der zusätzlich unter der Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ abgeschlossen ist, das heißt

$$[B, B] \subset B.$$

Damit wird B natürlich selbst zu einer Lie-Algebra. Ein linearer Teilraum I von A heißt Ideal, wenn

$$[I, A] \subset I$$

gilt. Der Idealbegriff ist stärker als der Begriff der Unteralgebra, das heißt, jedes Ideal von A ist eine Lie-Unteralgebra. Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig.

Der Idealbegriff ermöglicht nun zwei weitere wichtige Definitionen. Zum einen heißt eine Lie-Algebra A einfach, wenn A nicht abelsch ist und neben den trivialen Idealen 0 und A keine weiteren Ideale mehr besitzt. Zum anderen nennen wir A halbeinfach, wenn A eine direkte Summe einfacher Ideale ist.

In enger Beziehung zur zweiten Definition steht die sogenannte Killing-Form auf A. Darunter versteht man die durch

$$\kappa \colon A \times A \to K, \ \kappa(X, Y) := \operatorname{tr}(Z \mapsto [[X, Y], Z])$$

definierte symmetrische Bilinearform auf A. Es kann gezeigt werden, dass κ genau dann eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf A darstellt, wenn die zugrundeliegende Lie-Algebra halbeinfach ist.

Seien A und B zwei K-Algebren. Eine Abbildung $\phi \colon A \to B$ heißt K-Algebren-Homomorphismus, wenn ϕ eine K-lineare Abbildung ist und zusätzlich die Multiplikation auf A und B respektiert, das heißt, es gilt

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

für alle $x, y \in A$. Sind A und B unitale K-Algebren, so heißt der K-Algebren-Homomorphismus ϕ unital, wenn zusätzlich $\phi(1) = 1$ gilt.

Sind A und B zwei Lie-Algebren, so heißt jede Abbildung ϕ mit diesen Eigenschaften ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Die Verträglichkeit von ϕ mit der Lie-Klammer ist in diesem Fall für alle $x, y \in A$ durch

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

gegeben. Die Begriffe K-Algebren-Isomorphismus und Lie-Gruppen-Isomorphismus sind selbsterklärend.

Eine assoziative K-Algebra A wird zu einer Lie-Algebra, wenn wir die Lie-Klammer als Kommutator definieren, das heißt

$$[x, y] := xy - yx$$

für alle $x, y \in A$. Umgekehrt ist es möglich jede Lie-Algebra A als Unteralgebra in einer geeigneten (unitalen) assoziativen Algebra $U(A)$ aufzufassen. Insbesondere kann dann die Lie-Klammer als Kommutator interpretiert werden. Konstruiert wird diese angesprochene Algebra folgendermaßen.

Zu einer gegebenen Lie-Algebra A betrachten wir die Tensoralgebra

$$T(A) := K \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k} \quad \text{mit } A^{\otimes k} := \bigotimes_{l=1}^{k} A.$$

Die Multiplikation auf $T(A)$ ist als eindeutige lineare Fortsetzung der Multiplikation auf den homogenen Summanden definiert:

$$A^{\otimes k} \times A^{\otimes l} \to A^{\otimes(k+l)}, \ (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k, y_1 \otimes \ldots \otimes y_l) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_l.$$

In der Tensoralgebra $T(A)$ findet man offensichtlich die Lie-Algebra A wieder. Die sogenannte universelle einhüllende Algebra $U(A)$ zu A ist als Quotient von $T(A)$ nach dem durch alle Ausdrücke der Form

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \quad \text{mit } x, y \in A$$

erzeugten zweiseitigen Ideal erklärt. Das Paar $(U(A), \iota)$ bestehend aus $U(A)$ und dem kanonischen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\iota\colon A \xrightarrow{\text{Inkl.}} T(A) \xrightarrow{\text{Proj.}} U(A)$$

besitzt die universelle Eigenschaft, dass jeder Lie-Algebren-Homomorphismus $A \to B$ von A in eine beliebige (unitale) assoziative Algebra B eindeutig über $U(A)$ faktorisiert, das heißt, es existiert genau ein (unitaler) Algebren-Homomorphismus $U(A) \to B$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & U(A) \arrow[dl] \\ B & \end{tikzcd}$$

An dieser Stelle ist noch zu bemerken, dass die Abbildung ι injektiv ist. In der Literatur ist diese Aussage als Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt bekannt.

Wichtige Beispiele von Lie-Algebren folgen, sobald wir an die Definition der Lie-Gruppe erinnert haben.

6.1.2 Lie-Gruppen

Als nächstes wiederholen wir die Definition einer Lie-Gruppe und die mit dieser Definition einhergehenden Begrifflichkeiten. Besonders wichtig wird in diesem Zusammenhang die Tatsache sein, dass man jeder Lie-Gruppe auf kanonische Weise eine Lie-Algebra zuordnen kann.

Eine reelle Lie-Gruppe G ist eine glatte reelle endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit, die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt, so dass die Gruppenverknüpfung

$$G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$$

und die Inversion

$$G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

beliebig oft differenzierbar sind. Äquivalent hierzu ist, dass die Abbildung

$$G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh^{-1}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

Die Dimension einer reellen Lie-Gruppe ist die Dimension der unterliegenden reellen Mannigfaltigkeit. Wenn wir in Zukunft nur von einer Lie-Gruppe sprechen, so meinen wir damit stets eine reelle Lie-Gruppe.

Wir benötigen die obige Definition nicht in ihrer vollen Allgemeinheit, sondern richten vielmehr unsere Aufmerksamkeit auf die sogenannten linearen Lie-Gruppen. Diese Einschränkung hat den Vorteil, dass sie mit einem Minimum an differentialgeometrischen Begriffen auskommt.

Indem wir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$) auffassen, erhalten wir eine natürliche Topologie, so dass beide Gruppen zu Lie-Gruppen werden. Eine Gruppe G heißt lineare Lie-Gruppe, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist. Eine abgeschlossene Untergruppe H von G heißt Lie-Untergruppe.

Ein weiteres für uns wichtiges Beispiel einer Lie-Gruppe ist die (Weg-) Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G. Wir bezeichnen diese im Folgenden immer mit G_0.

Wie schon bei dem Begriff der Lie-Algebren, betrachten wir jetzt geeignete Abbildungen zwischen Lie-Gruppen. Seien G und H zwei Lie-Gruppen. Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ ist ein Gruppen-Homomorphismus, der zugleich als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten beliebig oft differenzierbar ist. Ein bijektiver Lie-Gruppen-Homomorphismus mit glatter Umkehrabbildung heißt auch Lie-Gruppen-Isomorphismus.

An dieser Stelle ist noch erwähnenswert, dass die Glattheit eines Lie-Gruppen-Homomorphismus $G \to H$ schon aus der Stetigkeit dieser Abbildung gefolgert werden kann. Diese Aussage ist in der Literatur auch als 5. Hilbertsches Problem bekannt.

Die Definition der Lie-Gruppen liefert uns jetzt wichtige Beispiele von Lie-Algebren. Sei G eine Lie-Gruppe. Dann trägt der Tangentialraum $T_e(G)$ von G am neutralen Element e die Struktur einer reellen Lie-Algebra. Diese Lie-Algebra heißt die zu G gehörende Lie-Algebra. Wir schreiben dafür meistens abkürzend $\mathfrak{g} := T_e(G)$. Ist das Matrixexponential

$$\exp\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$$

wie üblich gegeben durch die absolut konvergente Reihe

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \text{ mit } X^0 := E_n,$$

so besteht die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_e(G)$ genau aus allen Matrizen $X \in \mathrm{Mat}_n(K)$, die für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Bedingung $\exp(tX) \in G$ erfüllen. Genauer gesagt haben wir

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{Mat}_n(K) : \exp(tX) \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Man beachte, dass hier die Lie-Klammer auf $\mathfrak{g}$ durch den üblichen Kommutator

$$[X, Y] = XY - YX$$

gegeben ist. Wir bemerken außerdem an dieser Stelle, dass die Lie-Algebren von G und G_0 offensichtlich übereinstimmen.

Wir haben in Verbindung mit der Definition der Lie-Algebra die Begriffe einfach und halbeinfach eingefürt. Da wir jetzt wissen, was unter der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer Lie-Gruppe G zu verstehen ist, nennen wir eine Lie-Gruppe einfach (bzw. halbeinfach), wenn sie wegzusammenhängend ist und wenn ihre zugehörige Lie-Algebra die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Viele Operationen auf oder zwischen Lie-Gruppen besitzen eine entsprechende Operation auf oder zwischen den entsprechenden Lie-Algebren. Das gilt insbesondere für Lie-Gruppen-Homomorphismen, was auf den Begriff des Differentials führt.

Seien G und H zwei Lie-Gruppen und $\phi\colon G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die zugehörigen Lie-Algebren von G bzw. von H, dann existiert genau ein Lie-Algebren-Homomorphismus $d\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Der Lie-Algebren-Homomorphismus $d\phi$ heißt Differential oder auch Tangentialabbildung von ϕ. Ist ϕ ein Lie-Gruppen-Isomorphismus, so besitzt er ein bijektives Differential, das heißt, $d\phi$ ist ein Lie-Algebren-Isomorphismus.

6.2 Darstellungstheorie von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Als Referenz der nun folgenden Zusammenfassung über Darstellungen verwenden wir die Bücher von [31], [2] und [44].

Sei G eine lokal-kompakte Gruppe und V ein Banachraum. Eine Darstellung von G auf V ist ein stetiger Homomorphismus

$$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

von G in die Gruppe der linearen stetigen Automorphismen von V. Dabei heißt ρ stetig, wenn für jeden Vektor $v \in V$ die Abbildung

$$g \mapsto \rho(g)v$$

von G nach V stetig ist. Die Stetigkeitsbedingung an ρ kann auch durch die äquivalente Bedingung ersetzt werden, dass

$$(g, v) \mapsto \rho(g)v$$

eine in beiden Variablen stetige Abbildung nach V beschreibt. Diese angegebene Äquivalenzaussage über die Stetigkeit von ρ kann am einfachsten mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus bewiesen werden.

An dieser Stelle erinnern wir an die adjungierte Darstellung einer Lie-Gruppe. Sei dazu G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die zugehörige Lie-Algebra. Für jedes feste $g \in G$ beschreibt die Konjugation

$$\kappa_g\colon G \to G,\ \kappa_g(h) := ghg^{-1}$$

ein Lie-Gruppen-Isomorphismus. Folglich kann das zugehörige bijektive Differential $d\kappa_g$ betrachtet werden. Die sogenannte adjungierte Darstellung von G wird definiert durch

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ \mathrm{Ad}(g) := d\kappa_g.$$

Für den Fall, dass G eine lineare Lie-Gruppe ist, lässt sich die adjungierte Darstellung von G besonders einfach angeben. In diesem Fall gilt nämlich

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$$

für alle $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$.

Für eine K-Algebra bzw. Lie-Algebra gibt es ebenfalls den Begriff der Darstellung. Sei A eine (unitale) K-Algebra. Unter einer Darstellung von A auf einem K-Vektorraum V verstehen wir einen (unitalen) Algebren-Homomorphismus

$$\pi\colon A \to \mathrm{End}(V)$$

von A in die Algebra der Endomorphismen von V. Ist A hingegen eine Lie-Algebra, so wird gefordert, dass π ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist.

Ist eine Darstellung einer Lie-Algebra gegeben, so existiert eine eindeutige Fortsetzung dieser Darstellung zu einer Darstellung der universellen einhüllenden Algebra. Sei dazu A eine Lie-Algebra, $U(A)$ die universelle einhüllende Algebra von A und $\pi\colon A \to \mathrm{End}(V)$ eine Darstellung von A. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $U(A)$ setzt sich die Darstellung π eindeutig zu einer Darstellung

$$U(A) \to \mathrm{End}(V).$$

fort. Diese Fortsetzung bezeichnen wir ebenfalls mit π.

Auf der Seite der Lie-Algebren bezeichnet man das Pendant zur adjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe mit dem gleichen Namen und definiert

$$\mathrm{ad}\colon A \to \mathrm{End}(A),\ X \mapsto \mathrm{ad}(X),$$

mit

$$\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y]$$

für alle $Y \in A$. Zwischen der adjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe G und der adjungierten Darstellung auf der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besteht der folgende einfache Zusammenhang: Die Gruppe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ der invertierbaren Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ ist eine Lie-Gruppe, denn $\mathfrak{g}$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Folglich ist die adjungierte Darstellung von G ein Lie-Gruppen-Homomorphismus

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}).$$

Man kann nun zeigen, dass die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra durch

$$(d\mathrm{Ad})X = (\mathrm{ad})X$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ gegeben ist. Man spricht daher bei ad auch von einer abgeleiteten Darstellung.

Diese einfache Beobachtung kann verallgemeinert werden. Genauer gesagt ist es möglich, jeder Darstellung einer Lie-Gruppe eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra zuzuordnen. Wir erläutern kurz die Konstruktion dieser Darstellung, widmen uns aber vorab noch dem Begriff der C^∞-Vektoren.

Sei G eine Lie-Gruppe und ρ eine Darstellung von G auf einem Banachraum V. Wir definieren $V^\infty := V_\rho^\infty$ als linearer Teilraum von V, bestehend aus allen Vektoren $v \in V$, so dass die Abbildung

$$g \mapsto \rho(g)v$$

von G nach V beliebig oft differenzierbar ist. Der lineare Teilraum V^∞ heißt Raum der C^∞-Vektoren von V (bzgl. ρ) und es kann gezeigt werden, dass V^∞ dicht in V liegt. Ist zum Beispiel V ein endlich-dimensionaler Banachraum, so stimmt der Raum der C^∞-Vektoren mit V überein.

Sei G eine Lie-Gruppe und

$$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

eine Darstellung von G auf einem Banachraum V. Die abgeleitete Darstellung auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G auf dem Raum der C^∞-Vektoren V^∞ ist die Abbildung

$$d\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_\rho^\infty),$$

die jedem $X \in \mathfrak{g}$ den stetigen Endomorphismus $d\rho(X)$ auf V^∞ zuordnet. Dieser Endomorphismus ist wiederum für $v \in V^\infty$ definiert durch die Vorschrift

$$d\rho(X)v := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho(\exp(tX))v.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $d\rho(X)$ für jedes $X \in \mathfrak{g}$ ein Endomorphismus von V^∞ ist. Des Weiteren ist $d\rho$ offensichtlich linear in X. Deutlich schwieriger ist die Aussage zu beweisen, dass es sich bei $d\rho$ um einen Lie-Algebren-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in sich handelt, das heißt, es gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ die Gleichung

$$[d\rho(X), d\rho(Y)] = d\rho(X) \circ d\rho(Y) - d\rho(X) \circ d\rho(Y).$$

Einen Beweis hierfür findet man zum Beispiel in [12], Satz 2.2.2.

Wir vereinbaren noch eine nützliche abkürzende Schreibweise. Ist von Beginn an klar, welche Darstellung ρ einer Lie-Gruppe G gemeint ist, so schreiben wir für die Operation von $X \in \mathfrak{g}$ auf den Vektor $v \in V^\infty$ abkürzend Xv anstelle von $d\rho(X)v$.

6.2.1 Casimir-Operatoren

Sei G eine Gruppe, V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n und

$$G \times V \to V,\ (g, v) \mapsto gv$$

eine lineare Operation von G auf V. Sei weiter V^* der Dualraum von V.

Für jede $\mathbb{R}$-Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^*. Diese ist für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ eindeutig festgelegt durch $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta). Insbesondere kann man wegen dieser Eigenschaft jedes $v \in V$ eindeutig schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) v_i.$$

Die Operation von G auf V definiert durch die Vorschrift

$$G \times V^* \to V^*,\ (g, \phi) \mapsto (v \mapsto \phi(g^{-1}v))$$

eine lineare Operation von G auf dem Dualraum V^* (sog. adjungierte Operation).

Für jedes $g \in G$ wird durch Festsetzen von

$$g(v \otimes \phi) := gv \otimes g\phi$$

eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt $V \otimes V^*$ definiert. Neben den linearen Operationen von G auf den Vektorräumen V und V^* erhält man auf diese Weise eine lineare Operation von G auf dem Tensorprodukt $V \otimes V^*$.

Als nächstes definieren wir ein spezielles Element im Tensorprodukt $V \otimes V^*$, von dem wir zeigen, dass es unabhängig von der gewählten Basis und invariant unter der Operation von G ist. Wir betrachten

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* \in V \otimes V^*.$$

Um die Unabhängikeit von der gewählten Basis zu zeigen, ist es sinnvoll sich daran zu erinnern, dass $V \otimes V^*$ auf kanonische Weise mit $\mathrm{End}(V)$ identifiziert werden kann. Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V),\ v \otimes \phi \mapsto \big(v' \mapsto \phi(v')v\big)\,.$$

Unter diesem Isomorphismus wird das Element

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* \in V \otimes V^*$$

unabhängig von der anfangs gewählten Basis auf die Identität in $\mathrm{End}(V)$ abgebildet. Für alle $v' \in V$ gilt nämlich

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* \mapsto \left(v' \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v')v_i = v'\right).$$

Damit ist das Element $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* \in V \otimes V^*$ unabhängig von der anfangs gewählten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

Als nächstes zeigen wir, dass das Element $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* \in V \otimes V^*$ invariant unter der Operation von G ist, das heißt, für alle $g \in G$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} gv_1 \otimes gv_i^* = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^*.$$

Für jedes $g \in G$ wird das Element

$$\sum_{i=1}^{n} gv_1 \otimes gv_i^* \in V \otimes V^*$$

unter dem kanonischen Isomorphismus $V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$ auf die Identität in $\mathrm{End}(V)$ abgebildet

$$\sum_{i=1}^{n} gv_i \otimes gv_i^* \mapsto \left(v' \mapsto \sum_{i=1}^{n} (gv_i^*)(v')gv_i = g\sum_{i=1}^{n} v_i^*(g^{-1}v')v_i = g(g^{-1}v') = v'\right).$$

Da die beiden Elemente $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^*$ und $\sum_{i=1}^{n} gv_i \otimes gv_i^*$ auf die Identität id_V abgebildet werden, müssen sie miteinander übereinstimmen. Das zeigt die behauptete Invarianz unter der Operation von G.

Ab sofort nehmen wir noch zusätzlich an, dass auf dem Vektorraum V eine nicht-ausgeartete und unter der Operation von G invariante symmetrische Bilinearform $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Dabei ist mit der Invarianz unter G gemeint, dass

$$b(gv, gv') = b(v, v')$$

für alle $g \in G$ und $v, v' \in V$ gilt. Damit kann der Dualraum V^* auf kanonische Weise mit V identifiziert werden, nämlich durch

$$V \to V^*,\; v \mapsto \left(v' \mapsto b(v', v)\right).$$

Beachte außerdem, dass dieser Isomorphismus mit der Operation von G verträglich ist.

Die Urbilder $(v_1', \ldots, v_n')$ der Basisvektoren $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ bilden eine Basis in V. Diese wird die zu $(v_1, \ldots, v_n)$ duale Basis (bzgl. der Form b) genannt und es gilt $b(v_i, v_j') = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach dem oben gezeigten ist das Element

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i' \in V \otimes V$$

unabhängig von der in V gewählten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und invariant unter der Operation von G, das heißt, für alle $g \in G$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} gv_i \otimes gv_i' = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i'.$$

Wir möchten jetzt die Voraussetzungen zu unseren bisherigen Betrachtungen etwas konkretisieren. Die als beliebig vorausgesetzte Gruppe G soll dabei durch eine reelle Lie-Gruppe ersetzt werden. Den Vektorraum V ersetzen wir durch die reelle Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Als lineare Operation der Lie-Gruppe G auf $\mathfrak{g}$ betrachten wir ihre adjungierte Darstellung

$$G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\; g \mapsto \mathrm{Ad}(g).$$

Wir schreiben abkürzend $gX := \mathrm{Ad}(g)(X)$ für die Wirkung von $g \in G$ auf einem Element $X \in \mathfrak{g}$.

Die nicht-ausgeartete und unter der adjungierten Operation von G invariante Bilinearform b auf $\mathfrak{g}$ soll hingegen nicht weiter spezifiziert werden. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass wir bei halbeinfachen Lie-Gruppen sehr schnell eine geeignete Bilinearform angeben können. In diesem Fall leistet nämlich die Killing-Form das gewünschte.

Zur Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ betrachten wir wieder die Tensoralgebra, gegeben durch

$$T(\mathfrak{g}) = \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes k} \quad \text{mit } \mathfrak{g}^{\otimes k} = \bigotimes_{l=1}^{k} \mathfrak{g}.$$

Das Tensorprodukt $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ sowie die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ selbst findet man in der Tensoralgebra $T(\mathfrak{g})$ wieder. Für alle $g \in G$ wird auf jedem homogenen Faktor $\mathfrak{g}^{\otimes k}$ durch Festsetzen von

$$g(X_1 \otimes \ldots \otimes X_k) := gX_1 \otimes \ldots \otimes gX_k$$

eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auf $T(\mathfrak{g})$ definiert. Dadurch erhält man eine lineare Operation von G auf $T(\mathfrak{g})$, die wir adjungierte Operation nennen.

Man beachte außerdem, dass die adjungierte Operation von G auf $T(\mathfrak{g})$, die Multiplikation respektiert, das heißt

$$g(ab) = (ga)(gb)$$

für alle $g \in G$ und $a, b \in T(\mathfrak{g})$. Die adjungierte Operation von G auf $T(\mathfrak{g})$ steigt zu einer linearen Operation auf der universellen einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ ab (adjungierte Operation), denn für jedes $g \in G$ gilt für die Erzeuger des aus $T(\mathfrak{g})$ herausgeteilten Ideals

$$\begin{aligned} g(X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]) &= gX \otimes gY - gY \otimes gX - g[X,Y] \\ &= gX \otimes gY - gY \otimes gX - [gX, gY]. \end{aligned}$$

Auch hier beachte man, dass die adjungierte Operation von G auf $U(\mathfrak{g})$ mit der Multiplikation verträglich ist.

Unter der kanonischen Quotientenabbildung von $T(\mathfrak{g})$ auf $U(\mathfrak{g})$ wird das Element

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i' \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \subset T(\mathfrak{g})$$

auf ein von der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ unabhängiges und unter der adjungierten Operation von G invariantes Element abgebildet

$$C := C_G := \sum_{i=1}^{n} v_i v_i' \in U(\mathfrak{g}).$$

Dieses Element heißt Casimir-Element von G bezüglich der G-invarianten Bilinearform b. Das Besondere an diesem Element ist, dass es im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$ liegt, nicht trivial und G-invariant ist. Aus dem Theorem von Poincaré-Birkhoff-Witt folgt, dass C nicht trivial ist. Wir zeigen jetzt noch, dass C im Zentrum der universellen einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ liegt.

Es kann gezeigt werden (siehe [41], Kapitel 11, Lemma 3), dass aus der G-Invarianz der Bilinearform b auch die Invarianz unter der Lie-Klammer folgt, das heißt, für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ gilt

$$b([X,Y], Z) = b(X, [Y,Z]).$$

Sei $X \in \mathfrak{g}$. Da $U(\mathfrak{g})$ als Algebra von $\mathfrak{g}$ erzeugt wird, genügt es $CX - XC = 0$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ zu zeigen. Zunächst existieren reelle Konstanten $a_{i,j}$ und $\beta_{i,j}$ mit

$$[X, v_i] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} v_j \text{ und } [X, v_i'] = \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} v_j'.$$

Da die Bilinearform b unter der Lie-Klammer invariant ist folgt

$$0 = b([X, v_i], v'_j) + b(v_i, [v'_j, X]) = \alpha_{i,j} + \beta_{j,i}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} XC = X \sum_{i=1}^{n} v_i v'_i = \sum_{i=1}^{n} ([X, v_i]v'_i + v_i X v'_i) &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} v_i v'_i + \sum_{i=1}^{n} v_i X v'_i \\ &= - \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{i,j} v_i v'_i + \sum_{i=1}^{n} v_i X v'_i = \sum_{i=1}^{n} (-v_i [X, v'_i] + v_i X v'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i v'_i X = CX. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das Casimir-Element C im Zentrum der universellen einhüllenden Algebra von $\mathfrak{g}$ liegt.

Sei π eine beliebige Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum V. Dann ist der zu π korrespondierende (quadratische) Casimir-Operator der durch

$$\pi(C) := \sum_{i=1}^{n} \pi(v_i) \circ \pi(v'_i)$$

gegebene lineare Operator auf V. Besteht keine Verwechslungsgefahr und ist außerdem klar, welche Darstellung π auf V gemeint ist, so lässt man der Übersicht wegen das Symbol π sowie das Verknüpfungssymbol einfach weg.

6.2.2 Invariante Differentialoperatoren

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und (U, ϕ) ein Koordinatensystem in einer Umgebung eines Punktes $x \in M$. Wir betrachten die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ definiert auf U. Es ist hilfreich für höhere Ableitungen die übliche Multiindex-Notation zu verwenden. Für ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ bestehend aus nicht negativen ganzen Zahlen α_i schreiben wir dann abkürzend

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}}.$$

Bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ die Menge aller glatten Funktionen von M nach $\mathbb{C}$, so verstehen wir unter einem Differentialoperator auf M eine lineare Abbildung D von $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ in sich, so dass D in jedem lokalen Koordinatensystem (U, ϕ) die folgende Darstellung besitzt

$$Df = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f \quad \text{mit } a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}).$$

Die höchste in der Summe auftauchende partielle Ableitung heißt Ordnung von D. Die $\mathbb{C}$-Algebra aller Differentialoperatoren auf M wird abkürzend mit $\mathcal{D}(M)$ bezeichnet.

Sei G eine beliebige Gruppe, die auf der Menge $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ operiert. Ein Differentialoperator D auf M heißt G-invariant, wenn

$$D(gf) = g(Df)$$

für alle $g \in G$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ gilt. Die $\mathbb{C}$-Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren auf M möchten wir abkürzend mit $\mathcal{D}_G(M)$ bezeichnen.

Sei jetzt G eine zusammenhängende und halbeinfache Lie-Gruppe, die glatt auf einer glatten Mannigfaltigkeit M operiert. Dabei heißt eine Gruppenoperation von G auf M glatt, wenn

$$G \times M \to M,\ (g,x) \mapsto gx$$

eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist. Sei weiter

$$\Lambda\colon G \times \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}),\ (\Lambda(g)f)(x) := f(g^{-1}x)$$

die zugehörige Darstellung von G auf dem Raum der glatten Funktionen von M. In diesem Fall ist bekannt, dass die Elemente $X \in \mathfrak{g}$ aus der Lie-Algebra von G durch Differentialoperatoren erster Ordnung auf M beschrieben werden:

$$Xf(x) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\exp(-tX)x).$$

Weiter ist bekannt, dass der durch das Casimir-Element von G induzierte Differentialoperator zweiter Ordnung G-invariant ist. Er heißt Laplace-Operator auf M. Wir schreiben dafür meistens abkürzend

$$\Omega := d\Lambda(C),$$

wobei mit $C = C_G$ das Casimir-Element von G gemeint ist. Weiterführende Details zu diesem Themenkomplex findet man zum Beispiel in [23] oder auch in [28].

6.3 Indefinite unitäre und orthogonale Gruppen

Die in den letzten Abschnitten recht allgemein gehaltenen Betrachtungen sollen jetzt für die indefiniten orthogonalen Gruppen $O(p,q)$ und die indefiniten unitären Gruppen $U(p,q)$ konkretisiert werden. Insbesondere möchten wir an deren Lie-Algebren erinnern und die zugehörigen Casimir-Elemente bezüglich der Spurform explizit angeben.

Wir beginnen mit der Definition der orthogonalen indefiniten Gruppe. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$. Für nicht negative ganze Zahlen p und q mit $p + q = n$ ist diese definiert durch

$$O(p,q) := \left\{ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : M^t J_{p,q} M = J_{p,q} \right\},$$

wobei $J_{p,q}$ eine $n \times n$-Diagonalmatrix ist, so dass die ersten p Einträge gleich 1 und die restlichen q Einträge gleich -1 sind

$$J_{p,q} := \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}.$$

Das Paar (p, q) heißt Signatur von $O(p, q)$. Als Lie-Gruppe ist die Dimension von $O(p, q)$ gleich $n(n-1)/2$. Ist entweder p oder q gleich Null, so reduziert sich $O(p,q)$ auf die bekannte orthogonale Gruppe

$$O(n) := \left\{ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : M^t M = E_n \right\}.$$

Wir schreiben daher auch $O(n)$ anstelle von $O(0, q)$ oder $O(p, 0)$.

Berechnet man auf beiden Seiten der $O(p, q)$ definierenden Relation die Determinante, so folgt $\det(M) = \pm 1$ für alle $M \in O(p, q)$. Alle Elemente mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe vom Index 2 in $O(p, q)$. Diese Untergruppe heißt spezielle indefinite orthogonale Gruppe

$$SO(p, q) := \{ M \in O(p, q) : \det(M) = 1 \}.$$

Auch hier stimmt $SO(p, q)$ mit der bekannten speziellen orthogonalen Gruppe überein, wenn entweder p oder q gleich Null ist. Wir schreiben daher auch $SO(n)$ anstelle von $SO(0, q)$ oder $SO(p, 0)$.

In manchen Situationen ist es hilfreich sich daran zu erinnern, dass $O(p, q)$ als Invarianzgruppe einer reellen nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform interpretiert werden kann. Für zwei nicht negative ganze Zahlen p und q mit $p + q = n$ definiert

$$b \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto b(x, y),$$

mit

$$b(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \ldots - x_n y_n$$

eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform. Wegen

$$b(x, y) = y^t J_{p,q} x$$

sieht man sofort, dass die Menge aller Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ die b invariant lassen mit $O(p, q)$ übereinstimmt.

Wir definieren jetzt die sogenannte indefinite unitäre Gruppe. Deren Definition ähnelt der von $O(p, q)$. Sei wieder $n \in \mathbb{N}$. Für zwei nicht negative ganze Zahlen p und q mit $p + q = n$ definiert man

$$U(p, q) := \{ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : M^* J_{p,q} M = J_{p,q} \}.$$

Als reelle Lie-Gruppe besitzt $U(p, q)$ die Dimension n^2. Das Paar (p, q) heißt Signatur von $U(p, q)$. Ist eine der Zahlen p oder q gleich Null, so reduziert sich die Definition von $U(p, q)$ auf die bekannte unitäre Gruppe

$$U(n) := \{ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : M^* M = E_n \}.$$

Auch hier schreiben wir abkürzend $U(n)$ anstelle von $U(0, q)$ oder $U(p, 0)$.

Berechnet man wie im orthogonalen Fall die Determinante der $U(p,q)$ definierenden Relation, so folgt $|\det(M)| = 1$ für alle $M \in U(p,q)$. Die Elemente aus $U(p,q)$ mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe in $U(p,q)$, die sogenannte spezielle indefinite unitäre Gruppe

$$SU(p,q) := \{M \in U(p,q) : \det(M) = 1\}\,.$$

Wieder schreibt man $SU(n)$ anstelle von $SU(0,q)$ oder $SU(p,0)$.

Die indefinite unitäre Gruppe $U(p,q)$ kann natürlich auch als Invarianzgruppe einer geeigneten hermiteschen Form aufgefasst werden. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für zwei nicht negative ganze Zahlen p und q mit $p+q=n$ definiert die Vorschrift

$$h\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ (z,w) \mapsto h(z,w),$$

mit

$$h(z,w) = z_1\overline{w_1} + \ldots + z_p\overline{w_p} - z_{p+1}\overline{w_{p+1}} - \ldots - z_n\overline{w_n}$$

eine nicht-ausgeartete hermitesche Form auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Wegen der Beziehung

$$h(z,w) := w^* J_{p,q} z$$

folgt, dass $U(p,q)$ genau aus den Endomorphismen von $\mathbb{C}^n$ besteht, die h invariant lassen.

Während sich die algebraischen Definitionen von $O(p,q)$ und $U(p,q)$ sehr ähnlich sind, unterscheiden sich beide Gruppen in ihren topologischen Eigenschaften, wenn p und q positiv sind. Das betrifft zum Beispiel unter anderem die (Weg-) Zusammenhangskomponenten. Die indefinite orthogonale Gruppe $O(p,q)$ besteht nämlich aus genau vier (Weg-) Zusammenhangskomponenten, während $U(p,q)$ (weg-) zusammenhängend ist. Genauer gesagt kann gezeigt werden, dass die beiden Abbildungen

$$O(p) \times O(q) \times \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R}) \to O(p,q),\ (A,D,X) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^t & 0 \end{pmatrix}\right)$$

und

$$U(p) \times U(q) \times \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{C}) \to U(p,q),\ (A,D,Z) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^* & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Homöomorphismen sind. Dabei ist mit exp das in Abschnitt 6.1 definierte Matrixexponential gemeint. Einen Beweis hierfür, der im wesentlichen auf der Polarzerlegung von regulären Matrizen beruht, findet man zum Beispiel in [43], Satz 7.4.1 und 7.5.1.

Sind p und q positiv, so verdeutlicht der erste Homöomorphismus sehr schön, dass $O(p,q)$ aus genau vier (Weg-) Zusammenhangskomponenten besteht, denn die orthogonalen Gruppen $O(p)$ und $O(q)$ zerfallen jeweils in genau zwei (Weg-) Zusammenhangskomponenten. Diese beiden (Weg-) Zusammenhangskomponenten können ganz einfach durch das Vorzeichen der Determinante unterschieden werden. Die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix wollen wir fortan mit $O(p,q)_0$ bezeichnen.

Beachtet man, dass die unitären Gruppen $U(p)$ und $U(q)$ (Weg-) zusammenhängend sind, so folgt aus dem zweiten Homöomorphismus, dass $U(p,q)$ (weg-) zusammenhängend ist.

Als nächstes erinnern wir an die Lie-Algebren von $O(p,q)_0$ und $U(p,q)$. Diese sind gegeben durch
$$\mathfrak{o}(p,q) := \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : J_{p,q}X = -X^t J_{p,q}\right\}$$
und
$$\mathfrak{u}(p,q) := \{Z \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) : J_{p,q}X = -X^* J_{p,q}\}.$$
Dabei ist die Lie-Klammer bei beiden Algebren durch den üblichen Matrixkommutator gegeben ist.

In vielen Situationen ist es von Vorteil ein Element aus der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(p,q)$ bzw. $\mathfrak{u}(p,q)$ als Blockmatrix darzustellen. Die Elemente aus $\mathfrak{o}(p,q)$ haben alle die Form
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \quad \text{mit } A^t = -A,\ C^* = -C,\ B \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{R}).$$
Umgekehrt liegt jedes Element dieser Form in $\mathfrak{o}(p,q)$. Für die Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(p,q)$ hat man eine ähnliche Darstellung
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \quad \text{mit } A^* = -A,\ C^* = -C,\ B \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{C}).$$
Auch hier ist jedes dieser Elemente in $\mathfrak{u}(p,q)$ enthalten.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $E_{i,j}$ die $n \times n$-Matrix, deren Eintrag an der Stelle (i,j) eins ist und sonst immer null. Mit Hilfe der obigen Darstellung von Elementen aus $\mathfrak{o}(p,q)$ bzw. von $\mathfrak{u}(p,q)$ lässt sich jetzt ganz einfach eine Basis von beiden Lie-Algebren angeben. Für $\mathfrak{o}(p,q)$ finden wir:
$$\begin{aligned} X_{\kappa,\lambda} &:= E_{\kappa,\lambda} - E_{\lambda,\kappa}, && 1 \leq \kappa < \lambda \leq p \ \text{ oder } \ p < \kappa < \lambda \leq n \\ Y_{\mu,\nu} &:= E_{\mu,\nu} + E_{\nu,\mu}, && 1 \leq \mu \leq p < \nu \leq n \end{aligned}$$
Kombinatorisches Zählen liefert insbesondere
$$\dim\left(\mathfrak{o}(p,q)\right) = \frac{p^2-p}{2} + \frac{q^2-q}{2} + pq = \frac{n(n-1)}{2}.$$
Für $\mathfrak{u}(p,q)$ erhalten wir hingegen:
$$\begin{aligned} Z_{\alpha,\beta} &:= E_{\alpha,\beta} - E_{\beta,\alpha}, && 1 \leq \alpha < \beta \leq p \ \text{ oder } \ p < \alpha < \beta \leq n \\ V_{\alpha,\beta} &:= i\left(E_{\alpha,\beta} + E_{\beta,\alpha}\right), && 1 \leq \alpha < \beta \leq p \ \text{ oder } \ p < \alpha < \beta \leq n \\ W_{\gamma,\delta} &:= E_{\gamma,\delta} + E_{\delta,\gamma}, && 1 \leq \gamma \leq p < \delta \leq n \\ U_{\gamma,\delta} &:= i\left(E_{\gamma,\delta} - E_{\delta,\gamma}\right), && 1 \leq \gamma \leq p < \delta \leq n \\ D_\eta &:= iE_{\eta,\eta}, && 1 \leq \eta \leq n \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Dimension der Lie-Algebra

$$\dim(\mathfrak{u}(p,q)) = 2 \cdot \frac{p^2 - p}{2} + 2 \cdot \frac{q^2 - q}{2} + 2pq + n = n^2.$$

Auf beiden Lie-Algebren betrachten wir jetzt jeweils die sogenannte Spurfom

$$\mathrm{Tr}\colon (X,Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY).$$

Wir möchten zeigen, dass die Spurform in beiden Fällen eine reelle nicht ausgeartete und unter der adjungierten Operation invariante Bilinearform ist. Im Fall der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(p,q)$ kann man ganz abstrakt auf diese Behauptungen schließen.

Zuerst stellt man fest, dass die Spurform proportional zur Killing-Form auf $\mathfrak{o}(p,q)$ ist. Des Weiteren ist die Killing-Form eine nicht-ausgeartete Bilinearform, denn $\mathfrak{o}(p,q)$ ist eine halbeinfache Lie-Algebra. Damit ist insbesondere die Spurform eine eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathfrak{o}(p,q)$. Die Invarianz von Tr unter der adjungierten Operation folgt natürlich aus der Invarianz der Killing-Form.

Bezüglich der Spurform ist die zur oben angegebenen Basis von $\mathfrak{o}(p,q)$ duale Basis gegeben durch:

$$\begin{aligned} X'_{\kappa,\lambda} &:= -\frac{1}{2}X_{\kappa,\lambda}, && 1 \le \kappa < \lambda \le p \ \text{ oder } \ p < \kappa < \lambda \le n \\ Y'_{\mu,\nu} &:= \frac{1}{2}Y_{\mu,\nu}, && 1 \le \mu \le p < \nu \le n \end{aligned}$$

Diese Überlegung zeigt unter anderem auch auf elementare Weise, dass es sich bei Tr um eine nicht-ausgeartete und invariante Bilinearform handelt.

Im Fall der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(p,q)$ können wir nicht auf diese Weise schließen, dass es sich bei der Spurform um eine reelle nicht-ausgeartete und invariante Bilinearform handelt, denn die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(p,q)$ ist nicht halbeinfach. Die Invarianz unter der adjungierten Operation folgt ganz einfach aus der Konjugationsinvarianz der Spur.

Als erstes müssen wir klären, dass es sich bei Tr auch tatsächlich um eine reelle Bilinearform handelt.

Seien X und Y zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{u}(p,q)$. Wir schreiben diese Elemente als Blockmatrizen der Form

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \ \text{ mit } A^* = -A,\ C^* = -C,\ B \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{C})$$

und

$$Y = \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & F \end{pmatrix} \ \text{ mit } D^* = -D,\ F^* = -F,\ F \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{C}).$$

Für die Spur vom Produkt der beiden Matrizen erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(XY) &= \operatorname{tr}(AD + BE^*) + \operatorname{tr}(B^*E + CF) \\ &= \operatorname{tr}(AD) + \operatorname{tr}(CF) + \operatorname{tr}(BE^*) + \operatorname{tr}(B^*E) \\ &= \operatorname{tr}(AD) + \operatorname{tr}(CF) + \operatorname{tr}(BE^*) + \overline{\operatorname{tr}(BE^*)}.\end{aligned}$$

Wegen der Beziehung

$$\overline{\operatorname{tr}(AD)} = \operatorname{tr}(\overline{AD}) = \operatorname{tr}((\overline{AD})^t) = \operatorname{tr}(D^*A^*) = \operatorname{tr}(DA) = \operatorname{tr}(AD)$$

und analog für

$$\overline{\operatorname{tr}(CF)} = \operatorname{tr}(CF)$$

folgt, dass die Spurform reellwertig ist.

Berechnet man die Gram-Matrix von Tr bezüglich der oben angegebenen Basis von $\mathfrak{u}(p,q)$, so stellt sich einerseits heraus, dass Tr eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist und andererseits, dass die bezüglich dieser Form gegebene duale Basis gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}
Z'_{\alpha,\beta} &:= -\frac{1}{2} Z_{\alpha,\beta}, && 1 \le \alpha < \beta \le p \ \text{ oder } \ p < \alpha < \beta \le n \\
V'_{\alpha,\beta} &:= -\frac{1}{2} V_{\alpha,\beta}, && 1 \le \alpha < \beta \le p \ \text{ oder } \ p < \alpha < \beta \le n \\
W'_{\gamma,\delta} &:= \frac{1}{2} W_{\gamma,\delta}, && 1 \le \gamma \le p < \delta \le n \\
U'_{\gamma,\delta} &:= \frac{1}{2} U_{\gamma,\delta}, && 1 \le \gamma \le p < \delta \le n \\
D'_{\eta} &:= -D_{\eta,\eta}, && 1 \le \eta \le n
\end{aligned}$$

Abschließend können wir jetzt die Casimir-Elemente von $\mathfrak{o}(p,q)$ und $\mathfrak{u}(p,q)$ angeben. Diese im Zentrum der jeweiligen universellen einhüllenden Algebra liegenden nicht trivialen Elemente sind für $O(p,q)_0$ gegeben durch

$$C_O := C_{O(p,q)_0} := -\frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le \kappa < \lambda \le p \\ p < \kappa < \lambda \le n}} X^2_{\kappa,\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{1 \le \mu \le p < \nu \le n} Y^2_{\mu,\nu}$$

und für die indefinite unitäre Gruppe $U(p,q)$ durch

$$\begin{aligned}C_U := C_{U(p,q)} := &- \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le \alpha < \beta \le p \\ p < \alpha < \beta \le n}} Z^2_{\alpha,\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le \alpha < \beta \le p \\ p < \alpha < \beta \le n}} V^2_{\alpha,\beta} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \le \gamma \le p < \delta \le n} W^2_{\gamma,\delta} + \frac{1}{2} \sum_{1 \le \gamma \le p < \delta \le n} U^2_{\gamma,\delta} - \sum_{1 \le \eta \le n} D^2_{\eta}.\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die in beiden Summen auftretende Multiplikation von der üblichen Matrixmultiplikation verschieden ist.

Es ist bekannt, dass die Gruppe $SO(p) \times SO(q)$ eine maximal kompakte Untergruppe von $O(p,q)_0$ ist. Ein entsprechendes Resultat gilt im unitären Fall für die Untergruppe $U(p) \times U(p)$ von $U(p,q)$. Wir haben in Abschnitt 2.1.3 bzw. 2.2.5 gesehen, dass die Grassmann-Mannigfaltigkeit eines $\mathbb{Z}$-Gitters der Signatur (b^+, b^-) bzw. eines hermiteschen Gitters auch als symmetrischer Raum

$$\mathrm{Gr}_O(L) \simeq O(b^+, b^-)_0/SO(b^+) \times SO(b^-) \text{ bzw. } \mathrm{Gr}_U(L) \simeq U(b^+, b^-)/U(b^+) \times U(b^-)$$

interpretiert werden kann. Man beachte, dass diese Identifikation die Gruppenoperation von $O(b^+, b^-)_0$ bzw. $U(b^+, b^-)$ respektiert. Daher entsprechen die G-invarianten Differentialoperatoren auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ bzw. auf $\mathrm{Gr}_O(L)$ eindeutig den G-invarianten Differentialoperatoren auf den jeweiligen Quotienten.

Bemerkung 6.1. *Die Bemerkungen 2.9 und 2.17 haben gezeigt, dass die Grassmann-Mannigfaltigkeiten $Gr_O(L)$ und $Gr_U(L)$ mit geeigneten unbeschränkten Gebieten in $Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{R})$ bzw. in $Mat_{b^+,b^-}(\mathbb{C})$ identifiziert werden können. Deshalb induzieren die Casimir-Elemente C_O und C_U auch invariante Differentialoperatoren auf eben diesen Gebieten. Man findet durch eine einfache aber etwas längliche Rechnung im orthogonalen Fall die Beziehung*

$$C_O = \sum_{\substack{1\le i,j\le b^+\\ 1\le k,l\le b^-}} (E_{b^+} - XX^t)_{i,j}(E_{b^-} - X^tX)_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_{i,k}} \frac{\partial}{\partial x_{j,l}} - 2 \sum_{\substack{1\le j\le b^+\\ 1\le k,l\le b^-}} x_{j,k}(E_{b^-} - X^tX)_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_{j,l}}$$

und entsprechend

$$C_U = 4 \sum_{\substack{1\le i,j\le b^+\\ 1\le k,l\le b^-}} (E_{b^+} - ZZ^*)_{i,j}(E_{b^-} - Z^*Z)_{k,l} \frac{\partial}{\partial z_{i,k}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{j,l}}$$

im unitären Fall. Dabei ist für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wie üblich

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

6.4 Duale reduktive Paare und ihre Weil-Darstellung

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, an die Definition der dualen reduktiven Paare im Sinne von [27] zu erinnern.

6.4.1 Weil-Darstellung

Wir möchten hier kurz an die Weil-Darstellung der metaplektischen Gruppe erinnern und ihre Realisierung im Schrödinger-Modell angeben. Genaueres zu diesem Thema findet man beispielsweise in [36] oder [37].

Sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ ein additiver unitärer Charakter. Des Weiteren sei V ein reeller symplektischer Vektorraum mit zugehöriger symplektischer Form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}.$$

Die Isometriegruppe der symplektischen Form

$$\mathrm{Sp}(V) := \{f \in \mathrm{GL}(V) : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \text{ für allle } v, w \in V\}$$

heißt symplektische Gruppe von V.

Die Weil-Darstellung ω_ψ bezüglich des Charakters ψ ist eine spezielle projektive Darstellung der Gruppe $\mathrm{Sp}(V)$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Darstellung zu realisieren. Wir richten hier unsere Aufmerksamkeit speziell auf das sogenannte Schrödinger-Modell. Sei dazu

$$V = X \oplus Y$$

eine Zerlegung von V in maximal isotrope lineare Teilräume X und Y. Elemente aus V identifizieren wir bezüglich dieser Zerlegung mit dem Paar (x, y), wobei $x \in X$ und $y \in Y$ gilt. Weiter möchten wir die Elemente der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(V)$ mit 2×2-Matrizen identifizieren, genauer gesagt mit

$$f := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathrm{End}(X)$, $b \in \mathrm{End}(X, Y)$, $c \in \mathrm{End}(Y, X)$ und $d \in \mathrm{End}(Y)$ gilt. Die natürliche Operation von $\mathrm{Sp}(V)$ auf V übersetzt sich bezüglich dieser beiden Identifizierungen zu

$$(x, y)f = (xa + yc, xb + yd).$$

Bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(X, \mathbb{C})$ den Raum der Schwartz-Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{C}$, so ist das Schrödinger-Modell der (projektiven) Weil-Darstellung ω_ψ von $\mathrm{Sp}(V)$ bzgl. ψ und Y eine spezielle Realisierung von ω_ψ auf dem Raum $\mathcal{S}(X, \mathbb{C})$. Für jedes $f \in \mathrm{Sp}(V)$ existiert ein eindeutiges Haarsches Maß $d_f y$ auf $\mathrm{Ker}(c)\backslash Y$, so dass der Operator $\omega_\psi(f)$ unitär wird und angewandt auf eine Schwartz-Funktion $F \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C})$ gegeben ist durch

$$\omega_\psi(f)F(x) = \int\limits_{\ker(c)\backslash Y} \psi\left(\frac{\langle xa, xb\rangle}{2} - \langle xb, yc\rangle + \frac{\langle yc, yd\rangle}{2}\right) F(xa + yc)\; d_f y.$$

Als nächstes möchten wir an die metaplektische Gruppe $\mathrm{Mp}(V)$ von V erinnern. Dabei wird sich herausstellen, dass ω_ψ eine Darstellung auf $\mathrm{Mp}(V)$ definiert.

Da ω_ψ (betrachtet im Schrödinger-Modell bzgl. Y) eine projektive Darstellung der Gruppe $\mathrm{Sp}(V)$ definiert, ist für alle $f_1, f_2 \in \mathrm{Sp}(V)$ durch die Gleichung

$$\omega_\psi(f_1)\omega_\psi(f_2) = c_Y(f_1, f_2)\omega_\psi(f_1 f_2)$$

ein Kozykel $c_Y(f_1, f_2)$ definiert. Dieser ist explizit gegeben durch

$$c_Y(f_1, f_2) = \gamma(\psi \circ L(Y f_1 f_2, Y f_2, Y)),$$

wobei $L(Y f_1 f_2, Y f_2, Y)$ die Leray-Invariante des Tripels $(Y f_1 f_2, Y f_2, Y)$ von maximal isotropen linearen Teilräumen ist und γ der Weil-Index. Genaueres dazu findet man wieder in [36].

Mit Hilfe dieses Kozykels wird eine zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{Mp}(V) \longrightarrow \mathrm{Sp}(V) \longrightarrow 1$$

definiert und die Operatoren ω_ψ definieren eine Darstellung von $\mathrm{Mp}(V)$, der metaplektischen Gruppe von V. Diese Darstellung heißt Weil-Darstellung von $\mathrm{Mp}(V)$ bzgl. ψ, realisiert im Schrödinger-Modell bzgl. Y.

6.4.2 Duale reduktive Paare

In diesem Abschnitt erinnern wir an den Begriff des dualen reduktiven Paares im Sinne von [27], betrachten die für uns wichtigen Beispiele solcher Paare $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), O(p,q))$, $(U(1,1), U(p,q))$ und geben deren Weil-Darstellung an.

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Der Zentralisator von H in G ist bekanntlich definiert durch

$$C_G(H) := \{g \in G : gh = hg \text{ für alle } h \in H\}$$

und ist eine Untergruppe von G.

Wir beginnen mit der allgemeinen Definition des dualen reduktiven Paares und widmen uns anschließend konkreten Beispielen.

Definition 6.2. *Sei V ein reeller symplektischer Vektorraum und $Sp(V)$ die zugehörige symplektische Gruppe. Ein Paar (G, G') von Untergruppen von $Sp(V)$ heißt duales reduktives Paar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

a) Die Gruppen G und G' sind reduktiv, das heißt, jeder G-invariante (bzw. G'-invariante) lineare Teilraum von V besitzt ein G-invariantes (bzw. G'-invariantes) Komplement.

b) Die Gruppe G' ist der Zentralisator von G in $Sp(V)$ und umgekehrt. Genauer gesagt, soll gelten
$$C_{Sp(V)}(G) = G' \quad \text{und} \quad C_{Sp(V)}(G') = G.$$

Neben dem trivialen Beispiel $(G := \mathrm{Sp}(V), G' := C_G(G) \simeq \{\pm 1\})$ betrachten wir als nächstes das Paar $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), O(p,q))$ in einer noch zu definierenden symplektischen Gruppe. Sei dazu $W := \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der symplektischen Form

$$\langle x, y \rangle := x^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Die zugehörige Isometriegruppe ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathrm{Sp}(W) = \left\{ M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : M^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und man überzeugt sich leicht, dass $\mathrm{Sp}(W) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gelten muss. Weiter betrachten wir für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und nicht negativer ganzer Zahlen p und q mit $p+q=n$ den Vektorraum $V := \mathbb{R}^n$ zusammen mit der nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform

$$(x,y) := y^t J_{p,q} x = x_1y_1 + \ldots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \ldots - x_ny_n.$$

In diesem Fall ist die Isometriegruppe durch die indefinite orthogonale Gruppe aus Abschnitt 6.3 gegeben

$$O(p,q) = \left\{ M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : M^t J_{p,q} M = J_{p,q} \right\}.$$

Wir betrachten jetzt den reellen Vektorraum

$$\mathbb{W} : = W \otimes_{\mathbb{R}} V,$$

definiert durch das Tensorprodukt von V und W. Durch die Vorschrift

$$\langle\langle w \otimes v, w' \otimes v' \rangle\rangle := \langle w, w' \rangle \cdot (v, v')$$

wird eine reelle symplektische Form auf $\mathbb{W}$ definiert. Die zugehörige Isometriegruppe bezeichnen wir mit $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$. Die Gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $O(p,q)$ finden wir in $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ wieder, genauer gesagt, definieren die Abbildungen

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W}),\ M \mapsto (w \otimes v \mapsto Mw \otimes v)$$

und

$$O(p,q) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W}),\ M \mapsto (w \otimes v \mapsto w \otimes Mv)$$

injektive Gruppen-Homomorphismen.

Bezüglich dieser beiden Identifikationen definieren die Gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $O(p,q)$ ein duales reduktives Paar in $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$.

Bedingung $a)$ aus Definition 6.2 ist erfüllt, denn die linearen Gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $O(p,q)$ sind reduktiv [18]. Um zu sehen, dass die beiden Zentralisatorgleichungen $C_{\mathrm{Sp}(\mathbb{W})}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = O(p,q)$ und $C_{\mathrm{Sp}(\mathbb{W})}(O(p,q)) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gelten, wählen wir geeignete Koordinaten in $\mathbb{W}$. Dazu identifizieren wir den Vektorraum $\mathbb{W}$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes v \mapsto x \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix},$$

wobei hier $x, y, v \in \mathbb{R}^n$ gelten soll. Diese Abbildung wird zu einer Isometrie, wenn wir $\mathbb{R}^n$ mit der symplektischen Form

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y') - (y, x')$$

ausstatten. Die Isometriegruppe von β ist daher gegeben durch

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^n) = \left\{ M \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R}) : M^t \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Einbettungen der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und der orthogonalen Gruppe $O(p,q)$ sind bezüglich dieser Identifikation gegeben durch

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} aE_n & bE_n \\ cE_n & dE_n \end{pmatrix}$$

und

$$O(p,q) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}),\ X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen jetzt, dass der Zentralisator von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ durch die Gruppe $O(p,q)$ gegeben ist. Sei dazu

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{mit } A,B,C,D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

eine Matrix aus $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, die mit allen Matrizen aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ kommutiert. Es gilt also für alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_n & bE_n \\ cE_n & dE_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_n & bE_n \\ cE_n & dE_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu den drei Gleichungen

$$1)\ cB = bC \qquad 2)\ aC + cD = cA + dC \qquad 3)\ bA + dB = aB + bD.$$

Aus Gleichung 1) folgt für $a = 0, b = -1, c = 1$ und $d = 0$ sofort $C = -B$. Weiter folgt aus Gleichung 2) die Beziehung, wenn wir $a = 0, b = -1, c = 1$ und $d = 0$ setzen. Setzen wir schließlich $a = 2, b = 0, c = 0$ und $d = 1/2$, so folgt aus Gleichung 3), dass $B = 0$ gilt. Folglich gilt

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{mit } A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}).$$

Als symplektische Matrix erfüllt M auch die Gleichung

$$M^t \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sofort die Beziehung $A^t E_{p,q} A = E_{p,q}$ folgt. Damit ist $A \in O(p,q)$, was zu zeigen war.

Um zu zeigen, dass der Zentralisator von $O(p,q)$ in $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ mit der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ übereinstimmt, sei

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{mit } A,B,C,D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

eine Matrix aus $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, die mit allen Elementen aus $O(p,q)$ kommutiert. Genauer gesagt soll für alle $X \in O(p,q)$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

gelten. Diese Bedingung ist offensichtlich äquivalent zu den vier Gleichungen

$$1)\ AX = XA \quad 2)\ BX = XB \quad 3)\ CX = XC \quad 4)\ DX = XD.$$

Wir zeigen jetzt, dass $A = aE_n$ für ein reelles a gilt. Gleiches gilt auch für die verbleibenden Matrizen B, C und D. Dazu schreiben wir die Matrix A als Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix},$$

wobei $A' \in \mathrm{Mat}_{p,p}(\mathbb{R})$, $B' \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C' \in \mathrm{Mat}_{q,p}(\mathbb{R})$ und $D' \in \mathrm{Mat}_{q,q}(\mathbb{R})$ gelte. Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

folgt sofort $-B'E_q = E_pB'$ und $C'E_p = -E_qC'$. Folglich ist $B' = C' = 0$. Permutiert man in der Matrix

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

die ersten p Spalten, so entsteht daraus eine Matrix, die immer noch in der Gruppe $O(p,q)$ liegt. Betrachtet man jetzt die Kommutatorgleichung mit dieser Matrix und A, so folgt $A' = aE_p$ für eine reelle Zahl a. Analog zeigt man, dass $D' = dE_q$ für eine reelle Zahl d gilt. Die Matrix A ist daher von der Form

$$A = \begin{pmatrix} aE_p & 0 \\ 0 & dE_q \end{pmatrix}.$$

Als nächstes zeigen wir, dass a mit d übereinstimmt. Angenommen die Signatur $\mathrm{sign}(V) = p - q$ ist gerade. In diesem Fall folgt die Behauptung, wenn wir die Kommutatorgleichung mit A und der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \sqrt{2} & 1 & & \\ & & 1 & \sqrt{2} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

aufstellen. Ist hingegen die Signatur $\mathrm{sign}(V) = p - q$ ungerade, so muss man in diesem

Fall lediglich die Kommutatorgleichung mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & \sqrt{2} & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

aufstellen, woraus ebenfalls $a = d$ folgt. Damit ist die Matrix M von der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} aE_n & bE_n \\ cE_n & dE_n \end{pmatrix}.$$

Benutzt man jetzt, dass M auch eine symplektische Matrix ist, das heißt, es gilt

$$M^t \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & E_{p,q} \\ -E_{p,q} & 0 \end{pmatrix},$$

so folgt aus dieser Gleichung die Relation $ad - bc = 1$. Damit ist M ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und wir sind fertig.

Als nächstes möchten wir an die Weil-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(p,q)$ erinnern. Dazu treffen wir die Annahme, die für unser späteres Vorhaben ausreicht, dass die Signatur $\mathrm{sign}(V) = p - q$ des Vektorraums V gerade ist.

Sei ψ ein fester additiver Charakter auf $\mathbb{R}^\times$. Zur Zerlegung

$$\mathbb{W} = \mathbb{X} \oplus \mathbb{Y}$$

als direkte Summe in die beiden maximal isotropen linearen Teilräume

$$\mathbb{X} := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{R}} V \text{ und } \mathbb{Y} := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{R}} V,$$

betrachten wir die Weil-Darstellung ω_ψ der metaplektischen Gruppe $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ im oben definierten Schrödinger-Modell bzgl. $\mathbb{X} \simeq V$. Durch die Annahme, dass die Signatur $\mathrm{sign}(V) = p - q$ gerade ist, existiert nach [36] ein Homomorphismus $\iota\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(p,q) \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \arrow[r] & \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(p,q) \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Mit Hilfe des Homomorphismus ι können wir jetzt die Weil-Darstellung $\omega := \omega_\psi$ auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(p,q)$ zurückziehen. Beachtet man, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ von den Untergruppen

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$$

und von der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, so gilt:

$$\omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) F(v) = \chi_V(a)|a|^{n/2} F(av),$$

$$\omega\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) F(v) = \psi\left(\frac{b}{2}(v,v)\right) F(v),$$

$$\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) F(v) = \gamma \int\limits_V F(w)\psi((v,w))\, dw,$$

$$\omega(M)F(v) = F(M^{-1}v),$$

wobei $F \in \mathcal{S}(V, \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$ und $M \in O(p,q)$ gilt. Hier ist ferner χ_V der Charakter des quadratischen Raums V und γ eine geeignete 8-te Einheitswurzel, der sogenannte Weil-Index [36]. Wählen wir speziell $\psi(x) := e(x)$, so gilt $\chi_V(x) = \operatorname{sgn}(x)^{(q-p)/2}$ und $\gamma = i^{(p-q)/2}$.

Abschließend erklären wir, wie das Paar $(U(1,1), U(p,q))$ zu einem dualen reduktiven Paar wird. Dazu gehen wir ähnlich wie im vorangegangenen Beispiel vor.

Wir betrachten den komplexen Vektorraum $W := \mathbb{C}^2$ zusammen mit der schief-hermiteschen Form

$$\langle z, w\rangle := w^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z = z_2\overline{w_1} - z_1\overline{w_2}.$$

Dabei bedeutet schief-hermitesch, dass $\langle z, w\rangle = -\overline{\langle w, z\rangle}$ für alle $z, w \in W$ gilt. Für die zugehörige Isometriegruppe gilt somit

$$U(W) := \left\{M \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C}) : M^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Diese Gruppe lässt sich mit der indefiniten unitären Gruppe $U(1,1)$ identifizieren. Genauer gesagt ist die durch die unitäre Matrix

$$Z := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

induzierte Abbildung

$$U(1,1) \to U(W),\ M \mapsto ZMZ^*$$

ein Gruppen-Isomorphismus. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für nicht negative ganze Zahlen p und q mit $p + q = n$ betrachten wir $V := \mathbb{C}^n$, ausgestattet mit der nicht-ausgearteten hermiteschen

Form
$$(z,w) := w^* J_{p,q} z = z_1\overline{w_1} + \ldots + z_p\overline{w_p} - z_{p+1}\overline{w_{p+1}} - \ldots - z_n\overline{w_n}.$$
Die zugehörige Isometriegruppe ist gegeben durch die Gruppe $U(p,q)$. Der komplexe Vektorraum
$$\mathbb{W} := W \otimes_{\mathbb{C}} V,$$
der durch das Tensorprodukt von V und W gegeben ist, wird zusammen mit der Form
$$\langle\langle w\otimes v, w'\otimes v'\rangle\rangle := \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\left(\overline{\langle w,w'\rangle}\cdot(v,v')\right)$$
zu einem reellen symplektischen Raum. In der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ von $\mathbb{W}$ finden wir die Gruppen $U(1,1)$ und $U(p,q)$ wieder, denn die Abbildungen
$$U(1,1) \simeq U(W) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W}),\ M \mapsto (v\otimes w \mapsto Mv\otimes w)$$
und
$$U(p,q) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W}),\ M \mapsto (v\otimes w \mapsto v\otimes Mw)$$
sind injektive Gruppen-Homomorphismen.

Bezüglich dieser Einbettungen wird $(U(1,1), U(p,q))$ zu einem dualen reduktiven Paar in $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$. Man beweist dies ähnlich wie zuvor im Beispiel $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), O(p,q))$.

Auch hier möchten wir an die Operation der Weil-Darstellung von $U(1,1)\times U(p,q)$ erinnern. Genaueres findet man wieder in [36] oder auch in [29].

Sei ψ ein fester additiver Charakter von $\mathbb{R}$ und ω_ψ die Weil-Darstellung von $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ realisiert im Schrödinger-Modell bezüglich der Zerlegung
$$\mathbb{W} = \mathbb{X}\otimes\mathbb{Y}$$
in die maximal isotropen linearen Teilräume
$$\mathbb{X} := \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes_{\mathbb{C}} V \text{ und } \mathbb{X} := \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes_{\mathbb{C}} V.$$
Wir identifizieren wieder den Vektorraum $\mathbb{X}$ mit V. Zur quadratischen Erweiterung $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ betrachten wir den zugehörigen quadratischen Charakter $\varepsilon := \varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}^\times$, das heißt
$$\varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times,\ x\mapsto \mathrm{sgn}(x).$$
Für jeden Charakter χ von $\mathbb{C}^\times$ mit der Eigenschaft
$$\chi_{|\mathbb{R}^\times} = \varepsilon^n$$
existiert nach [36] ein Homomorphismus $\iota := \iota_\chi\colon U(W)\times U(p,q)\to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})$, so dass das

folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \arrow[r] & \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \\
U(W) \times U(p,q) \arrow[u, "\iota_\chi"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ziehen wir die Weil-Darstellung ω_ψ mit Hilfe des Homomorphismus ι_χ zurück, so erhalten wir die Weil-Darstellung $\omega := \omega_{\psi,\chi}$ der Gruppe $U(W) \times U(p,q)$. Beachtet man, dass die Isometriegruppe $U(W)$ der schief hermiteschen Form auf W von den Untergruppen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}^\times \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{C} \text{ mit } b^* = b \right\}$$

und von der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, so erhalten wir für die Operation von ω auf $U(W) \times U(p,q) \simeq U(1,1) \times U(p,q)$ nach [36] oder [29] die expliziten Gleichungen:

$$\omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix}\right) F(v) = \chi(a)|a|^{n/2} F(av),$$

$$\omega\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) F(v) = \psi(b(v,v)) F(v),$$

$$\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) F(v) = \int\limits_V F(w) \psi\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}((v,w))\right) \, dw,$$

$$\omega(M) F(v) = F(M^{-1} v),$$

wobei $F \in \mathcal{S}(V, \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$ mit $b^* = b$ und $M \in U(p,q)$ gilt.

6.5 Operation der Casimir-Elemente

Sei L ein gerades hermitesches Gitter der Signatur (b^+, b^-). Wir betrachten wieder den Vektorraum $V_\mathbb{R}$ zusammen mit der komplexen hermiteschen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der reellen symmetrischen Bilinearform $(\cdot, \cdot) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. Im Hinblick auf die im letzten Abschnitt eingeführten Weil-Darstellungen, möchten wir jetzt mit Hilfe der in Kapitel 3 kennengelernten Einbettung

$$U(V_\mathbb{R}) \subset O(V_\mathbb{R})_0 \subset O(V_\mathbb{R}),$$

die durch die Casimir-Elemente $C_{U(V_\mathbb{R})}$ und $C_{O(V_\mathbb{R})_0}$ induzierten Operatoren auf dem Raum der Schwartz-Funktionen $\mathcal{S}(V_\mathbb{R}, \mathbb{C})$ untersuchen. Dieses Vorhaben vereinfacht sich, wenn wir auf $V_\mathbb{R}$ geeignete komplexe und reelle Koordinaten einführen. Wir wählen dazu eine komplexe Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $V_\mathbb{R}$, so dass die zugehörige Koordinatenabbildung einen isometrischen Isomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$ nach $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + \ldots + z_{b^+}\overline{w_{b^+}} - z_{b^++1}\overline{w_{b^++1}} - \ldots - z_n\overline{w_n}$$

induziert. Dann bilden die Vektoren $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ eine reelle Basis von $V_{\mathbb{R}}$ und die zugehörige Koordinatenabbildung von $V_{\mathbb{R}}$ nach $(\mathbb{R}^{2n}, (\cdot,\cdot))$ mit

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_{2b^+}y_{2b^+} - x_{2b^++1}y_{2b^++1} - \ldots - x_{2n}y_{2n}$$

liefert einen isometrischen Isomorphismus.

6.5.1 Einbettung von $U(b^+, b^-)$ nach $O(2b^+, 2b^-)_0$

Wir betrachten zuerst etwas allgemeiner die Einbettung

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}}),$$

die dadurch entsteht, dass wir $\mathbb{C}$-lineare Endomorphismen von $V_{\mathbb{R}}$ einfach als $\mathbb{R}$-lineare Endomorphismen von $V_{\mathbb{R}}$ auffassen. Die Einbettung zwischen der orthogonalen und der unitären Gruppe erhält man schließlich durch Einschränken. Bezüglich der oben eingeführten Basen lässt sich die Einbettung $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}})$ auch als Einbettung $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ interpretieren.

Sei n die komplexe Dimension von $V_{\mathbb{R}}$. Dann ist die Einbettung zwischen den Räumen der Matrizen gegeben durch die Abbildung $\beta := \beta_n\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$, indem wir bei jeder komplexen Matrix die Einträge $z = x + iy$ durch die reellen 2×2-Matrizen $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ ersetzen:

$$\beta\left(\begin{pmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n,1} & \cdots & z_{n,n} \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_{1,1} & -y_{1,1} & \cdots & x_{1,n} & -y_{1,n} \\ y_{1,1} & x_{1,1} & & y_{1,n} & x_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{n,1} & -y_{n,1} & \cdots & x_{n,n} & -y_{n,n} \\ y_{n,1} & x_{n,1} & & y_{n,n} & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

Die Wichtigsten Eigenschaften von β fassen wir in der nächsten Bemerkung zusammen.

Bemerkung 6.3. *Die Abbildung $\beta\colon Mat_n(\mathbb{C}) \to Mat_{2n}(\mathbb{R})$ ist injektiv, $\mathbb{R}$-linear, multiplikativ und beliebig oft reell differenzierbar.*

Beweis. Wir rechnen nur nach, dass β multiplikativ ist. Die restlichen Aussagen über β sind offensichtlich erfüllt. Wir beginnen mit dem Spezialfall $n = 1$ und erhalten für $z, w \in \mathrm{Mat}_1(\mathbb{C})$, geschrieben in der Form $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$

die geforderte Gleichheit

$$\begin{aligned}
\beta_1(zw) &= \beta_1((x+iy)(u+iv)) \\
&= \beta_1((xu-yv)+i(xv+yu)) \\
&= \begin{pmatrix} xu-yv & -(xv+yu) \\ xv+yu & xu-yv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \\
&= \beta_1(z)\beta_1(w).
\end{aligned}$$

Für allgemeines n benutzt man jetzt die soeben bewiesene Tatsache, dass β_1 multiplikativ ist. Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ rechnet man daher sofort nach

$$\begin{aligned}
\beta(AB) &= \beta\left(\begin{pmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n,1} & \cdots & z_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & \cdots & w_{n,n} \end{pmatrix}\right) \\
&= \beta\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n z_{1,k}w_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n z_{1,k}w_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n z_{n,k}w_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n z_{n,k}w_{k,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \beta_1(z_{1,k})\beta_1(w_{k,1}) & \cdots & \sum_{k=1}^n \beta_1(z_{1,k})\beta_1(w_{k,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n \beta_1(z_{n,k})\beta_1(w_{k,1}) & \cdots & \sum_{k=1}^n \beta_1(z_{n,k})\beta_1(w_{k,n}) \end{pmatrix} \\
&= \beta(A)\beta(B).
\end{aligned}$$

□

Als nächstes möchten wir die Abbildung β auf die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren komplexen Matrizen einschränken. Aus der Multiplikativität von β folgt sofort, dass dadurch sogar eine Abbildung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ definiert wird. Genauer gesagt gilt die folgende

Bemerkung 6.4. *Die Einschränkung von β auf die Gruppe der invertierbaren komplexen Matrizen ist ein reeller Lie-Gruppen-Homomorphismus*
$\beta_{GL}\colon GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{2n}(\mathbb{R})$. Sein Differential $d\beta_{GL}\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$ ist durch die Einbettung β gegeben.

Beweis. Lediglich die Aussage über das Differential muss noch gezeigt werden. Wir wissen, dass β genau dann das Differential von β_{GL} ist, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \arrow[r, "\beta_{\mathrm{GL}}"] & \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \\
\mathfrak{g}_n(\mathbb{C}) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\beta"] & \mathfrak{g}_{2n}(\mathbb{R}) \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Sei also $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit, $\mathbb{R}$-Linearität und Multiplikativität von β die Gleichheit

$$\beta_{\mathrm{GL}}(\exp(A)) = \beta\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(A)^k}{k!} = \exp(\beta(A)). \qquad \square$$

Indem wir bei $z = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathbb{C}^n$ jeden Eintrag $z = x + iy$ durch $(x, y)^t$ ersetzen, erhalten wir einen reellen Vektorraum-Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$. Diesen bezeichnen wir im Folgenden mit $\iota := \iota_n$.

Als nächstes zeigen wir, dass die natürlichen linearen Gruppenoperationen, das heißt, die Multiplikation einer Matrix von links mit einen Vektor mit dem Isomorphismus ι und der Inklusion β verträglich sind.

Bemerkung 6.5. *Für alle $A \in GL_n(\mathbb{C})$ und für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt die Gleichung*

$$\iota(Az) = \beta_{GL}(A)\iota(z),$$

das heißt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d, "(\beta_{GL},\iota)"'] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "\iota"] \\
GL_{2n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2n} \arrow[r] & \mathbb{R}^{2n}
\end{tikzcd}$$

Beweis. Der Beweis ist nichts anderes als eine einfache Rechnung, in der wir lediglich den Fall $n = 1$ separat betrachten. Man erhält sofort die Behauptung für $n = 1$ durch

$$\begin{aligned}
\iota_1(Az) &= \iota((c + id)(x + iy)) \\
&= \iota(cx - dy + i(cy + dx)) \\
&= \begin{pmatrix} cx - dy \\ cy + dx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \beta_{\mathrm{GL}}(A)\iota_1(z).
\end{aligned}$$

Für beliebiges n erhält man mit obiger Identität für den Fall $n = 1$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\iota(Az) &= \iota\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^n \iota_1(a_{1,k}z_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \iota_1(a_{n,k}z_k)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^n \beta_{\mathrm{GL}}(a_{1,k})\iota_1(z_1) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \beta_{\mathrm{GL}}(a_{n,k})\iota_1(z_n)\end{pmatrix} \\ &= \beta_{\mathrm{GL}}(A)\iota(z).\end{aligned}$$

□

Wir schränken nun die Abbildung β ein letztes mal ein, um eine Einbettung der indefiniten unitären Gruppe $U(b^+, b^-)$ mit $b^+ + b^- = n$ in die indefinite orthogonale Gruppe $O(2b^+, 2b^-)_0$ zu erhalten. Genauer gesagt gilt die folgende

Bemerkung 6.6. *Die Einschränkung von β_{GL} auf die indefinite unitäre Gruppe der Signatur (b^+, b^-) liefert einen injektiven Lie-Gruppen-Homomorphismus $\beta_U \colon U(b^+, b^-) \to O(2b^+, 2b^-)_0$. Sein Differential*

$$d\beta_U \colon \mathfrak{u}(b^+, b^-) \to \mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$$

ist durch die Einschränkung von β auf $\mathfrak{u}(b^+, b^-)$ gegeben.

Beweis. Zunächst gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung $\beta_1(\bar{z}) = \beta_1(z)^t$. Daraus folgt wiederum unmittelbar, dass für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Gleichung $\beta(A^*) = \beta(A)^t$ gilt. Folglich gilt für alle Matrizen $A \in U(b^+, b^-)$:

$$\begin{aligned}\beta_U(A)^t J_{2b^+,2b^-}\beta_U(A) &= \beta_U(A^*)J_{2b^+,2b^-}\beta_U(A) \\ &= \beta_U(A^*)\beta_U(J_{b^+,b^-})\beta_U(A) \\ &= \beta_U(A^* J_{b^+,b^-} A) \\ &= J_{2b^+,2b^-}\end{aligned}$$

Damit bekommt man einen injektiven Lie-Gruppen-Homomorphismus $\beta_U : U(b^+, b^-) \to O(2b^+, 2b^-)$. Da die Lie-Gruppe $U(b^+, b^-)$ (weg-) zusammenhängend ist und β_U die Einheitsmatrix E_n auf E_{2n} abbildet, hat man sogar einen injektiven Lie-Gruppen-Homomorphismus nach $O(2b^+, 2b^-)_0$. Die Aussage über das Differential ist offensichtlich. □

6.5.2 Linksreguläre Operation der Casimir-Elemente

Betrachtet man bei der orthogonalen und der unitären Weil-Darstellung die Operation der Gruppe $U(b^+, b^-)$ (bzw. $O(2b^+, 2b^-)_0$) auf dem Raum der Schwartz-Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$

(bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$), so scheint es natürlich, nach einem einfachen Zusammenhang zwischen diesen Darstellungen zu suchen, um letztendlich zu klären, wie die zugehörigen Casimir-Operatoren auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ und $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ miteinander in Beziehung stehen.

Durch Festsetzen von

$$(Af)(z) := f(A^{-1}z) \quad \text{mit } A \in U(b^+, b^-), f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}), z \in \mathbb{C}^n$$

wird auf dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ der 2-fach integrierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ eine Darstellung der unitären Gruppe $U(b^+, b^-)$ definiert. Genauso definiert man

$$(MF)(x) := F(M^{-1}x) \quad \text{mit } M \in O(2b^+, 2b^-)_0, F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}), x \in \mathbb{R}^{2n}$$

und erhält eine Darstellung von $O(2b^+, 2b^-)_0$ auf dem Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$. Wir werden jetzt sehen, dass beide Darstellungen auf sehr einfache Weise durch die Abbildungen β_U und ι miteinander verbunden sind.

Der Vektorraum-Isomorphismus $\iota\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ gibt Anlass zu einem reellen Vektorraum-Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ und $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, indem wir $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ mit $F := f \circ \iota^{-1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ identifizieren. Umgekehrt ist natürlich $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ mit $f := F \circ \iota \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ zu identifizieren.

Bemerkung 6.7. *Für alle $A \in U(b^+, b^-)$ und für alle $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ gilt die Gleichung*

$$(Af) \circ \iota^{-1} = \beta_U(A)(f \circ \iota^{-1}),$$

das heißt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
U(b^+, b^-) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "(\beta_U, \iota)"'] & \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \arrow[d, "\iota"] \\
O(2b^+, 2b^-)_0 \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}) \arrow[r] & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $A \in U(b^+, b^-)$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ und $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Wegen Bemerkung 6.5 sieht man, dass gilt

$$\begin{aligned}((Af) \circ \iota^{-1})(x) &= f(A^{-1}\iota^{-1}(x)) = f(\iota^{-1}(\beta_U(A)^{-1}x)) \\ &= (f \circ \iota^{-1})(\beta_U(A)^{-1}x) = \beta_U(A)(f \circ \iota^{-1})(x).\end{aligned}$$

□

Zu jeder Darstellung einer Lie-Gruppe kann man die sogenannte abgeleitete Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra betrachten. Zur Erinnerung, das ist in unserem Fall die Darstellung

$$(Zf)(z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(tZ)f)\,(z)$$

mit $Z \in \mathfrak{u}(b^+, b^-)$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})^\infty$, $z \in \mathbb{C}^n$, sowie die Darstellung

$$(XF)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp(tX)F)(x)$$

mit $X \in \mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$, $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})^\infty$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Ferner sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, dass beide Darstellungen mit der entsprechenden Lie-Klammer verträglich sind, das heißt, für beliebige $Z, W \in \mathfrak{u}(b^+, b^-)$ und $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})^\infty$ gilt

$$[Z, W]f = Zf \circ Wf - Wf \circ Zf.$$

Entsprechendes gilt für die Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$.

Wie schon zuvor bei den linearen Darstellungen von $U(b^+, b^-)$ auf $\mathbb{C}^n$ bzw. $O(2b^+, 2b^-)_0$ auf $\mathbb{R}^{2n}$, gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen den beiden abgeleiteten Darstellungen. Dieser wird dieses mal durch ι und $d\beta_U$ hergestellt.

Bemerkung 6.8. *Für alle $Z \in \mathfrak{u}(b^+, b^-)$ und alle $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})^\infty$ gilt die Gleichung*

$$(Zf) \circ \iota^{-1} = d\beta_U(Z)(f \circ \iota^{-1}),$$

das heißt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{u}(b^+, b^-) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})^\infty \arrow[r] \arrow[d, "{(d\beta_U, \iota)}"'] & \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})^\infty \arrow[d, "\iota"] \\
\mathfrak{o}(2b^+, 2b^-) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})^\infty \arrow[r] & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})^\infty
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $Z \in \mathfrak{u}(b^+, b^-)$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})^\infty$ und $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Direktes Nachrechnen zusammen mit Bemerkung 6.7 ergibt sofort

$$\begin{aligned}
((Zf) \circ \iota^{-1})(x) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} ((\exp(tZ)f) \circ \iota^{-1})(x) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \beta_U(\exp(tZ))(f \circ \iota^{-1})(x) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(d\beta_U(tZ))(f \circ \iota^{-1})(x) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(t \cdot d\beta_U(Z))(f \circ \iota^{-1})(x) \\
&= d\beta_U(Z)(f \circ \iota^{-1})(x).
\end{aligned}$$

Ferner haben wir für das dritte Gleichheitszeichen benutzt, dass das Differential $d\beta_U$ der Gleichung $\exp \circ\, d\beta_U = d\beta_U \circ \exp$ genügt. $\square$

Die beiden abgeleiteten Darstellungen der Lie-Algebren $\mathfrak{u}(b^+, b^-)$ und $\mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$ können nun eindeutig zu Darstellungen der entsprechenden universellen einhüllenden Algebren

$U(\mathfrak{u}(b^+, b^-))$ und $U(\mathfrak{o}(2b^+, 2b^-))$ fortgesetzt werden. In beiden Fällen hat man die gleiche Vertäglichkeitsrelation wie in Bemerkung 6.8.

Bei beiden Darstellungen können wir jetzt die Operation der Casimir-Elemente betrachten. In erster Linie interessiert uns, wie $C_{U(b^+,b^-)}f$ und $C_{O(2b^+,2b^-)}F$, $F = f \circ \iota^{-1}$ miteinander zusammenhängen. Wir finden diesen Zusammenhang mit einer etwas aufwendigen aber im Prinzip einfachen Rechnung.

Wir erinnern zunächst an die Casimir-Elemente von $U(b^+, b^-)$ und $O(2b^+, 2b^-)_0$. Eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(b^+, b^-)$ ist gegeben durch folgende Elemente:

$$\begin{aligned}
Z_{\alpha,\beta} &= E_{\alpha,\beta} - E_{\beta,\alpha}, & 1 \leq \alpha < \beta \leq b^+ \quad \text{oder} \quad b^+ < \alpha < \beta \leq n\\
V_{\alpha,\beta} &= i\left(E_{\alpha,\beta} + E_{\beta,\alpha}\right), & 1 \leq \alpha < \beta \leq b^+ \quad \text{oder} \quad b^+ < \alpha < \beta \leq n\\
W_{\gamma,\delta} &= E_{\gamma,\delta} + E_{\delta,\gamma}, & 1 \leq \gamma \leq b^+ < \delta \leq n\\
U_{\gamma,\delta} &= i\left(E_{\gamma,\delta} - E_{\delta,\gamma}\right), & 1 \leq \gamma \leq b^+ < \delta \leq n\\
D_\eta &= iE_{\eta,\eta}, & 1 \leq \eta \leq n
\end{aligned}$$

Das Casimir-Element bezüglich der Spurform ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
C_U = C_{U(b^+,b^-)} = &-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leq\alpha<\beta\leq b^+\\ b^+<\alpha<\beta\leq n}} Z_{\alpha,\beta}^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leq\alpha<\beta\leq b^+\\ b^+<\alpha<\beta\leq n}} V_{\alpha,\beta}^2\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\leq\gamma\leq b^+<\delta\leq n} W_{\gamma,\delta}^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq\gamma\leq b^+<\delta\leq n} U_{\gamma,\delta}^2 - \sum_{1\leq\eta\leq n} D_\eta^2.
\end{aligned}$$

Ganz ähnlich sieht es für die Gruppe $O(2b^+, 2b^-)_0$ aus. Eine Basis der Lie-Algebra von $\mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
X_{\kappa,\lambda} &= E_{\kappa,\lambda} - E_{\lambda,\kappa}, & 1 \leq \kappa < \lambda \leq 2b^+ \quad \text{oder} \quad 2b^+ < \kappa < \lambda \leq 2n\\
Y_{\mu,\nu} &= E_{\mu,\nu} + E_{\nu,\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2b^+ < \nu \leq 2n
\end{aligned}$$

Im Zentrum der universellen einhüllenden Algebra von $\mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$ finden wir somit das Casimir-Element

$$C_O = C_{O(2b^+,2b^-)_0} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leq\kappa<\lambda\leq 2b^+\\ 2b^+<\kappa<\lambda\leq 2n}} X_{\kappa,\lambda}^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq\mu\leq 2b^+<\nu\leq 2n} Y_{\mu,\nu}^2.$$

Um den Zusammenhang von $C_U f$ und $C_O F$, $F = f \circ \iota^{-1}$ zu finden, benötigen wir als erstes die Bilder der Basisvektoren $Z_{\alpha,\beta}, V_{\alpha,\beta}, W_{\gamma,\delta}, U_{\gamma,\delta}, D_\nu$ unter der Abbildung $d\beta_U$. Es gilt

$$\begin{aligned} Z_{\alpha,\beta} &\mapsto X_{2\alpha-1,2\beta-1} + X_{2\alpha,2\beta} \\ V_{\alpha,\beta} &\mapsto X_{2\alpha,2\beta-1} - X_{2\alpha-1,2\beta} \\ W_{\gamma,\delta} &\mapsto Y_{2\gamma-1,2\delta-1} - Y_{2\gamma,2\delta} \\ U_{\gamma,\delta} &\mapsto Y_{2\gamma,2\delta-1} - Y_{2\gamma-1,2\delta} \\ D_\eta &\mapsto -X_{2\eta-1,2\eta}. \end{aligned}$$

Dabei gilt für die Indizes $1 \leq \alpha < \beta \leq b^+$ oder $b^+ < \alpha < \beta \leq n$, $1 \leq \gamma \leq b^+ < \delta \leq n$ und $1 \leq \eta \leq n$.

Als zweites überlegt man sich leicht, dass die Operation von $X_{\kappa,\lambda}$ und $Y_{\mu,\nu}$ auf Funktionen $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})^\infty$ gegeben ist durch

$$X_{\kappa,\lambda} = x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\kappa} - x_\kappa \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \quad \text{und} \quad Y_{\mu,\nu} = x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Für unser späteres Vorhaben genügt es, den Zusammenhang zwischen $C_U f$ und $C_O F$, $F = f \circ \iota^{-1}$ für Schwartz-Funktionen f auf $\mathbb{C}^n$ zu finden. Dann gilt nach Bemerkung 6.8

$$\begin{aligned} (C_U f) \circ \iota^{-1} = d\beta_U(C_U)F& \\ = -\frac{1}{2} &\sum_{\substack{1 \leq \alpha < \delta \leq b^+ \\ b^+ < \alpha < \beta \leq n}} d\beta_U(Z_{\alpha,\beta})^2 F - \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq \alpha < \beta \leq b^+ \\ b^+ < \alpha < \beta \leq n}} d\beta_U(V_{\alpha,\beta})^2 F \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \gamma \leq b^+ < \delta \leq n} d\beta_U(W_{\gamma,\delta})^2 F + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \gamma \leq b^+ < \delta \leq n} d\beta_U(U_{\gamma,\delta})^2 F \\ &- \sum_{1 \leq \eta \leq n} d\beta_U(D_\eta)^2 F. \end{aligned}$$

Einsetzen der Bilder der Basisvektoren unter der Abbildung $d\beta_U$ liefert die Gleichung

$$\begin{aligned}
(C_U f)\circ\iota^{-1} = &-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}(X_{2\alpha-1,2\beta-1}+X_{2\alpha,2\beta})^2F\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}(X_{2\alpha,2\beta-1}-X_{2\alpha-1,2\beta})^2F\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}(Y_{2\gamma-1,2\delta-1}+Y_{2\gamma,2\delta})^2F\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}(Y_{2\gamma,2\delta-1}-Y_{2\gamma-1,2\delta})^2F\\
&-\sum_{1\le\eta\le n}\left(-X_{2\eta-1,2\eta}\right)^2F.
\end{aligned}$$

Quadriert man alle Klammern aus und beachtet die Reihenfolge bei der Multiplikation, so ist $(C_U f)\circ\iota^{-1}$ gleich dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}\left(X^2_{2\alpha-1,2\beta-1}+X^2_{2\alpha,2\beta}+X_{2\beta-1,2\beta-1}X_{2\alpha,2\beta}+X_{2\alpha,2\beta}X_{2\alpha-1,2\beta-1}\right)F\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}\left(X^2_{2\alpha,2\beta-1}+X^2_{2\alpha-1,2\beta}-X_{2\alpha,2\beta-1}X_{2\alpha-1,2\beta}-X_{2\alpha-1,2\beta}X_{2\alpha,2\beta-1}\right)F\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}\left(Y^2_{2\gamma-1,2\delta-1}+Y^2_{2\gamma,2\delta}+Y_{2\gamma-1,2\delta-1}Y_{2\gamma,2\delta}+Y_{2\gamma,2\delta}Y_{2\gamma-1,2\delta-1}\right)F\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}\left(Y^2_{2\gamma,2\delta-1}+Y^2_{2\gamma-1,2\delta}-Y_{2\gamma,2\delta-1}Y_{2\gamma-1,2\delta}-Y_{2\gamma-1,2\delta}Y_{2\gamma,2\delta-1}\right)F\\
&-\sum_{1\le\eta\le n}\left(-X_{2\eta-1,2\eta}\right)^2F.
\end{aligned}$$

Als nächstes bestätigt man durch eine kurze Rechnung, dass in der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(2b^+,2b^+)$ die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$[X_{2\alpha-1,2\beta-1},X_{2\alpha,2\beta}]=0,\ [X_{2\alpha,2\beta-1},X_{2\alpha-1,2\beta}]=0,$$

$$[Y_{2\gamma-1,2\delta-1},Y_{2\gamma,2\delta}]=0 \text{ und } [Y_{2\gamma,2\delta-1},Y_{2\gamma-1,2\delta}]=0.$$

Für deren Nachweis ist es unter anderem von Vorteil, wenn man beachtet, dass $E_{i,j}E_{r,s}=E_{i,s}$ gilt, wenn $j=r$ ist. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist null, wenn j und r

verschieden sind. Für die entsprechenden Differentialoperatoren gilt daher

$$\begin{aligned}(C_U f)\circ\iota^{-1} = &-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}\left(X^2_{2\alpha-1,2\beta-1}+X^2_{2\alpha,2\beta}+2X_{2\alpha-1,2\beta-1}X_{2\alpha,2\beta}\right)F\\ &-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}\left(X^2_{2\alpha,2\beta-1}+X^2_{2\alpha-1,2\beta}-2X_{2\alpha,2\beta-1}X_{2\alpha-1,2\beta}\right)F\\ &+\frac{1}{2}\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}\left(Y^2_{2\gamma-1,2\delta-1}+Y^2_{2\gamma,2\delta}+2Y_{2\gamma-1,2\delta-1}Y_{2\gamma,2\delta}\right)F\\ &+\frac{1}{2}\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}\left(Y^2_{2\gamma,2\delta-1}+Y^2_{2\gamma-1,2\delta}-2Y_{2\gamma,2\delta-1}Y_{2\gamma-1,2\delta}\right)F\\ &-\sum_{1\le\eta\le n}\left(-X_{2\eta-1,2\eta}\right)^2 F.\end{aligned}$$

Jetzt erkennen wir, dass ein Teil der Summen zu $C_O F$ zusammengefasst werden kann:

$$\begin{aligned}(C_U f)\circ\iota^{-1} = C_O F &- \frac{1}{2}\sum_{1\le\eta\le n}\left(-X_{2\eta-1,2\eta}\right)^2\\ &-\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}}\left(X_{2\alpha-1,2\beta-1}X_{2\alpha,2\beta}-X_{2\alpha,2\beta-1}X_{2\alpha-1,2\beta}\right)F\\ &+\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n}\left(Y_{2\gamma-1,2\delta-1}Y_{2\gamma,2\delta}-Y_{2\gamma,2\delta-1}Y_{2\gamma-1,2\delta}\right)F.\end{aligned}$$

Als nächstes rechnet man mit den oben explizit angegebenen Gleichungen für $X_{\kappa,\lambda}$ und $Y_{\mu,\nu}$ nach, dass für jede Schwartz-Funktion F auf $\mathbb{R}^{2n}$ die Gleichungen $X_{2\alpha-1,2\beta-1}X_{2\alpha,2\beta}F - X_{2\alpha,2\beta-1}X_{2\alpha-1,2\beta}F = X_{2\alpha-1,2\alpha}X_{2\beta-1,2\beta}F$ und $Y_{2\gamma-1,2\delta-1}Y_{2\gamma,2\delta}F - Y_{2\gamma,2\delta-1}Y_{2\gamma-1,2\delta}F = X_{2\gamma-1,2\gamma}X_{2\delta-1,2\delta}F$ erfüllt sind. Setzen wir dies in obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(C_U f)\circ\iota^{-1} &= C_O F - \frac{1}{2}\sum_{1\le\eta\le n}\left(X_{2\eta-1,2\eta}\right)^2 F\\ &\quad-\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le b^+\\ b^+<\alpha<\beta\le n}} X_{2\alpha-1,2\alpha}X_{2\beta-1,2\beta}F\\ &\quad-\sum_{1\le\gamma\le b^+<\delta\le n} X_{2\gamma-1,2\gamma}X_{2\delta-1,2\delta}F\\ &= C_O F - \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le\eta\le n} X_{2\eta-1,2\eta}\right)^2 F.\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir damit folgenden Satz gezeigt.

Satz 6.9. *Sei f eine Schwartz-Funktion auf $\mathbb{C}^n$ und $F = f \circ \iota^{-1}$. Dann gilt*

$$(C_U f) \circ \iota^{-1} = C_O F - \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le j\le n} X_{2j-1,2j}\right)^2 F.$$

Weiter bemerken wir, dass für jedes $j = 1, \dots, n$ gilt

$$X_{2j-1,2j}F = \left(x_{2j}\,\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - x_{2j-1}\,\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right)F = 2\,\mathrm{Im}\left(z_j\,\frac{\partial}{\partial z_j}\right)f,$$

wobei wir die komplexe Ableitung nach $z = x + iy \in \mathbb{C}$ wie üblich schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Damit kann Satz 6.9 auch folgendermaßen in komplexen Koordinaten geschrieben werden.

Satz 6.10. *Sei f eine Schwartz-Funktion auf $\mathbb{C}^n$ und $F = f \circ \iota^{-1}$. Dann gilt*

$$C_U f = (C_O F) \circ \iota - 2\left(\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^n z_j\,\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\right)^2 f.$$

Wir bezeichnen jetzt mit $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ bzw. $C_{O(p,q)_0}$ das Casimir-Element der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ bzw. $\mathfrak{o}(p,q)$. Wir erinnern daran, dass die Lie-Algebra von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ aus allen reellen 2×2-Matrizen besteht, deren Spur gleich 0 ist. Das Casimir-Element ist dann gegeben durch

$$C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} := H^2 + 2(XY + YX),$$

wobei

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\; X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Shintani beweist in [47], Lemma 1.5, dass unter der Weil-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times O(p,q)$ mit $n := p + q$ die Casimir-Operatoren $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ und $C_{O(p,q)_0}$ auf dem Raum der Schwartz-Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ der folgenden Gleichung genügen:

$$C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}F = \left(2C_{O(p,q)_0} + \frac{n(n-4)}{4}\right)F.$$

Wir zeigen jetzt, dass die durch die Weil-Darstellung von $U(1,1) \times U(b^+, b^-)$ gegebenen Casimir-Operatoren $C_{U(1,1)}$ und $C_{U(b^+,b^-)}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ in ähnlicher Weise miteinander in Beziehung stehen. Dabei werden wir die in Satz 6.10 gefundene Gleichung verwenden.

Satz 6.11. *Sei f eine Schwartz-Funktion auf $\mathbb{C}^n$. Dann erfüllen die Casimir-Operatoren $C_{U(1,1)}$ und $C_{U(b^+,b^-)}$ die Gleichung*

$$C_{U(1,1)}f = \left(C_{U(b^+,b^-)} + \frac{n(n-2) - c^2}{2} + 2c\,\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\right)f,$$

wobei die Konstante c durch $c := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\chi(e^{it})$ gegeben ist.

Beweis. Wir stellen das Casimir-Element $C_{U(1,1)}$ in einer zu Abschnitt 6.3 abweichenden Form dar. Die Matrizen

$$X_0 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } X_3 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\mathfrak{u}(b^+, b^-)$. Bezüglich der Spurform gilt für die duale Basis

$$X_0' := -\frac{1}{2}X_0,\ X_1' := \frac{1}{2}X_1,\ X_2' := \frac{1}{2}X_2 \text{ und } X_3' := -\frac{1}{2}X_3.$$

Folglich ist das Casimir-Element gegeben durch

$$C_{U(1,1)} = -\frac{1}{2}X_0^2 + \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{1}{2}X_3^2.$$

Identifizieren wir wieder $U(1,1)$ mit der Gruppe $U(W)$, so ist die Operation von $C_{U(1,1)}$ auf Schwartz-Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$C_{U(1,1)}f = \frac{1}{2}C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}f - \frac{1}{2}X_3^2 f.$$

Als nächstes verwenden wir, dass $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ unter der Weil-Darstellung von $U(W) \times U(b^+, b^-)$ und unter der Weil-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(2b^+, 2b^-)$ in gleicher Weise operiert, das heißt, ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ und $F = f \circ \iota^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, so gilt

$$(C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}F) \circ \iota = C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}f.$$

Folglich gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ die Gleichheit

$$C_{U(1,1)}f = \frac{1}{2}(C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}F) \circ \iota - \frac{1}{2}X_3^2 f.$$

Einsetzen der von Shintani im orthogonalen Kontext gefundenen Gleichung liefert

$$C_{U(1,1)}f = \left(C_{O(2b^+,2b^-)_0}F\right) \circ \iota + \frac{n(n-2)}{2}f - \frac{1}{2}X_3^2 f.$$

Verwenden wir jetzt die in Satz 6.10 gefundene Beziehung zwischen den Casimir-Operatoren $C_{U(b^+,b^-)}$ und $C_{O(2b^+,2b^-)_0}$, so folgt

$$C_{U(1,1)}f = C_{U(b^+,b^-)}f + \frac{n(n-2)}{2}f + 2\left(\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right)\right)^2 f - \frac{1}{2}X_3^2 f.$$

Weiter finden wir, dass die Operation von X_3 gegeben ist durch

$$(X_3)f(z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\chi(e^{it})f(e^{it}z) = cf(z) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(e^{it}z),$$

wobei wir $c := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \chi(e^{it})$ setzen. Beachtet man jetzt noch, dass

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(e^{it}z) = -2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) f$$

gilt, so folgt die Behauptung. □

6.6 Differentialgleichung für $\Theta_L^U(\tau, Z)$

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass die Siegelsche Thetafunktion zu einem geraden hermiteschen Gitter der Signatur (b^+, b^-), aufgefasst als Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathrm{Gr}_U(L)$, der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$-2\Delta_k \Theta_L^U(\tau, Z) y^{b^-} = 2(b^+b^- - b^-)\Theta_L^U(\tau, Z) y^{b^-} - \Omega \Theta_L^U(\tau, Z) y^{b^-}.$$

Dabei ist Δ_k der Laplace-Operator vom Gewicht k auf $\mathbb{H}$ und Ω der $U(b^+, b^-)$-invariante Laplace-Operator auf $\mathrm{Gr}_U(L)$. Diese Gleichung wird, wie wir später sehen werden, entscheidend dazu beitragen, dass das regularisierte Theta-Integral aus Kapitel 5 eine Eigenfunktion von Ω ist.

Betrachtet man die Definitionen der beiden Siegelschen Thetafunktionen $\Theta_L^U(\tau, Z)$ und $\Theta_L^O(\tau, Z)$ zum Gitter L, so scheint es sinnvoll die beiden weiter unten folgenden Funktionen $F_{\tau,Z}^U$ und $F_{\tau,Z}^O$ zu untersuchen und zu klären, in welcher Weise die Differentialoperatoren Δ_k und Ω miteinander zusammenhängen. Der orthogonale Fall wurde in [5], Satz 4.5 für die spezielle Signatur $(2, b^-)$ mit $b^- > 2$ behandelt. Der gegebene Beweis lässt sich, wie wir gleich sehen werden, durch leichte Modifikationen auf beliebige Signaturen erweitern. Anschließend nutzen wir dieses Resultat, zusammen mit der Einbettung $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$ und dem Ergebnis aus Abschnitt 6.5, um die eingangs erwähnte Differentialgleichung für die unitäre Siegelsche Thetafunktion zu beweisen.

Für festes $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ definieren wir auf $V_\mathbb{R}$ die sogenannte unitäre Siegel-Schwartz-Funktion durch

$$F_{\tau,Z}^U \colon V_\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto F_{\tau,Z}^U(\lambda) := e\left(\tau \langle \lambda_Z, \lambda_Z \rangle + \bar{\tau} \langle \lambda_{Z^\perp}, \lambda_{Z^\perp} \rangle\right).$$

Für festes $\lambda \in V_\mathbb{R}$ können wir $F_{\tau,Z}^U(\lambda)$ auch als Funktion in den beiden Variablen τ und Z auffassen.

Ganz ähnlich definieren wir für festes $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ und $Z \in \mathrm{Gr}_O(L)$ durch die Vorschrift

$$F_{\tau,Z}^O \colon V_\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto F_{\tau,Z}^O(\lambda) := e\left(\tau q(\lambda_Z) + \bar{\tau} q(\lambda_{Z^\perp})\right)$$

die orthogonale Siegel-Schwartz-Funktion. Auch hier lässt sich $F_{\tau,Z}^O(\lambda)$ für festes $\lambda \in V_\mathbb{R}$ wieder als Funktion in τ und Z auffassen.

Wegen $q(\lambda) = \langle \lambda, \lambda \rangle$ für alle $\lambda \in V_\mathbb{R}$, bestätigt man sofort die Gültigkeit von

$$F_{\tau,Z'}^O = F_{\tau,Z}^U \quad \text{für alle } Z \in \mathrm{Gr}_U(L) \text{ und alle } \tau \in \mathbb{H},$$

wobei hier Z' das Bild von $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ unter der in Kapitel 3 eingführten Einbettung $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$ ist.

Fassen wir jetzt die Funktionen $F^U_{\tau,Z}$ und $F^O_{\tau,Z}$, bezüglich der in Abschnitt 6.5 eingeführten Basen von $V_\mathbb{R}$, als Funktionen auf $V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$ bzw. $V_\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$ auf, so bestätigt man sofort

$$F^O_{\tau,Z'} = F^U_{\tau,Z} \circ \iota^{-1} \quad \text{für alle } Z \in \mathrm{Gr}_U(L) \text{ und alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist mit ι der in Abschnitt 6.5 eingeführte Vektorraum-Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ gemeint.

Mit ω_O bezeichnen wir die Weil-Darstellung der Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(2b^+, 2b^-),$$

realisiert im Schrödinger-Modell, das heißt, auf dem Raum der Schwartz-Funktionen von $V_\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$. Die Weil-Darstellung, realisiert im Schrödinger-Modell, der Gruppe

$$U(1,1) \times U(b^+, b^-)$$

auf dem Raum der Schwartz-Funktionen von $V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit ω_U.

Wenden wir Lemma 1.2 in [47] an, so operiert die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

durch die Weil-Darstellung in der Form

$$\omega_O(M) F^O_{\tau,Z}(\lambda) = (c\tau + d)^{-b^+} (c\bar{\tau} + d)^{-b^-} F^O_{M\tau,Z}(\lambda).$$

Weiter finden wir in [47], Abschnitt 4, dass die Operation einer Matrix A aus $O(2b^+, 2b^-)$ gegeben ist durch

$$\omega_O(A) F^O_{\tau,Z}(\lambda) = F^O_{\tau,Z}(A^{-1}\lambda) = F^O_{\tau,AZ}(\lambda).$$

Sei $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ das Casimir-Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Den durch die Weil-Darstellung ω_O induzierten Differentialoperator auf $V_\mathbb{R}$ bezeichnen wir ebenfalls mit $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.

Für $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ betrachten wir die Matrix

$$M_\tau := \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Die Funktion $F^O_{\tau,Z}$ erhalten wir aus $F^O_{i,Z}$ zurück, indem wir diese Matrix durch die Weil-Darstellung auf $F^O_{i,Z}$ operieren lassen, das heißt

$$\omega_O(M_\tau) F^O_{i,Z} = y^{(b^+ + b^-)/2} F^O_{\tau,Z}.$$

Folgen wir jetzt dem Beweis von Satz 4.5 in [5], so finden wir das folgende Lemma.

Lemma 6.12. *Sei $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, $k = b^+ - b^-$, $\lambda \in V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2n}$ und $Z \in Gr_O(L)$. Dann gilt für die Schwartz-Funktion $F_{i,Z}^O$ auf $V_{\mathbb{R}}$ die Gleichung*

$$-4\Delta_k y^{b^-} F_{\tau,Z}^O = \left(b^+ - b^-\right)\left(b^- - b^+ + 2\right) y^{b^-} F_{\tau,Z}^O + y^{-k/2}\left(\omega_O(M_\tau) C_{SL_2(\mathbb{R})} F_{i,Z}^O\right).$$

Beweis. Zunächst sehen wir, dass die Schwartz-Funktion $F_{i,Z}^O$ für $m = 2b^+ - 2b^-$ die Bedingung (1.19) in [47] erfüllt. Dadurch wird Lemma 1.4 in [47] anwendbar und wegen

$$4y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 2imy\frac{\partial}{\partial x} = -4\Delta_k - 2my\frac{\partial}{\partial y}$$

folgt die Gleichung

$$\omega_O(M_\tau) C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} F_{i,Z}^O = \left(-4\Delta_k - 2my\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega_O(M_\tau) F_{i,Z}^O.$$

Mit $\omega_O(M_\tau) F_{i,Z}^O = y^{(b^+ + b^-)/2} F_{\tau,Z}^O = y^{m/4} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\omega_O(M_\tau) C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} F_{i,Z}^O =& \left(-4\Delta_k - 2my\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y^{m/4} \cdot y^q F_{\tau,Z}^O\right) \\
=& -4\Delta_k\left(y^{m/4} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right) \\
& - 2my\left(\frac{m}{4} y^{m/4-1} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O + y^{m/4} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right)\right).
\end{aligned}$$

Wendet man den Laplace-Operator vom Gewicht k auf ein Produkt von zwei Funktionen an, so bekommt man die Gleichung

$$\Delta_k(fg) = g\Delta_k(f) + f\Delta_k(g) - 2y^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\Delta_k(y^{m/4} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O) =& y^{b^-} F_{\tau,Z}^O \frac{m(4-3m)}{16} y^{m/4} + y^{m/4}\Delta_k\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right) \\
& - \frac{m}{2} y^{m/4+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
\omega_O(M_\tau) C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} F_{i,Z}^O =& \frac{m(3m-4)}{4} y^{m/4} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O - 4y^{m/4}\Delta_k\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right) \\
& + 2my^{m/4+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right) - \frac{m^2}{2} y^{m/4} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O \\
& - 2my^{m/4+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right) \\
=& \frac{m(m-4)}{4} y^{m/4} \cdot y^{b^-} F_{\tau,Z}^O - 4y^{m/4}\Delta_k\left(y^{b^-} F_{\tau,Z}^O\right).
\end{aligned}$$

Teilen dieser Gleichung durch den Term $y^{m/4}$ ergibt die Behauptung. □

Wegen Lemma 1.5 aus [47] wissen wir, dass zwischen $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ und $C_{O(2b^+,2b^-)_0}$ für alle Schwartz-Funktionen F auf $V_\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$ der Zusammenhang

$$C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}F = \left(2C_{O(2b^+,2b^-)_0} + \left(b^+ + b^-\right)\left(b^+ + b^- - 2\right)\right)F$$

besteht. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 6.12 bekommt man daher die Gleichung

$$-2\Delta_k y^{b^-} F^O_{\tau,Z} = 2\left(b^+b^- - b^-\right)y^{b^-}F^O_{\tau,Z} + y^{-k/2}\omega_O(M_\tau)C_{O(2b^+,2b^-)_0}F^O_{i,Z}.$$

Als nächstes würden wir gerne die Operatoren $\omega_O(M_\tau)$ und $C_{O(2b^+,2b^-)_0}$ miteinander vertauschen. Die nächste Bemerkung zeigt, dass dies möglich ist.

Bemerkung 6.13. *Sei F eine Schwartz-Funktion auf $V_\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$. Dann gilt für alle $X \in \mathfrak{o}(2b^+, 2b^-)$ die Gleichung*

$$\omega_O(M_\tau)XF = X\omega_O(M_\tau)F.$$

Insbesondere gilt für den Casimir-Operator $C_{O(2b^+,2b^-)_0}$ auf $V_\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\omega_O(M_\tau)C_{O(2b^+,2b^-)_0}F = C_{O(2b^+,2b^-)_0}\omega_O(M_\tau)F.$$

Beweis. Das rechnet man direkt mit Hilfe der Gleichungen aus [47] Abschnitt 4 nach. □

Lemma 6.14. *Sei $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, $k = b^+ - b^-$, $\lambda \in V_\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$ und $Z \in Gr_O(L)$. Dann erfüllt die Funktion $F^O_{\tau,Z}$ die Gleichung*

$$-2\Delta_k y^{b^-} F^O_{\tau,Z} = 2\left(b^+b^- - b^-\right)y^{b^-}F^O_{\tau,Z} + C_{O(2b^+,2b^-)_0}y^{b^-}F^O_{\tau,Z}.$$

Wir zeigen jetzt, dass die Funktion $F^U_{\tau,Z}$ eine ähnliche Gleichung wie in Lemma 6.14 erfüllt. Verwendet man die Beziehung $F^O_{\tau,Z'} = F^U_{\tau,Z} \circ \iota^{-1}$, so folgt wegen Lemma 6.14 für $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ und $Z \in \mathrm{Gr}_U(L)$ die Gleichung

$$-2\Delta_k y^{b^-} F^U_{\tau,Z} = 2\left(b^+b^- - b^-\right)y^{b^-}F^U_{\tau,Z} + \left(C_{O(2b^+,2b^-)_0}y^{b^-}F^U_{\tau,Z} \circ \iota^{-1}\right) \circ \iota.$$

Einsetzen der Gleichung aus Satz 6.10 liefert

$$\begin{aligned}-2\Delta_k y^{b^-} F^U_{\tau,Z} =& 2\left(b^+b^- - b^-\right)y^{b^-}F^U_{\tau,Z} + C_{U(b^+,b^-)}y^{b^-}F^U_{\tau,Z}\\ &+ 2\left(\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^n z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right)^2 y^{b^-}F^U_{\tau,Z}.\end{aligned}$$

Beachtet man jetzt, dass der zusätzliche Term wegen

$$-2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^n z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\right)y^{b^-}F^U_{\tau,Z}(\lambda) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} y^{b^-}F^U_{\tau,Z}(e^{it}\lambda) = 0$$

verschwindet, so bekommen wir das folgende Lemma.

Lemma 6.15. *Sei $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, $k = b^+ - b^-$, $\lambda \in V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$ und $Z \in Gr_U(L)$. Dann gilt*

$$-2\Delta_k y^{b^-} F^U_{\tau,Z} = 2\left(b^+ b^- - b^-\right) y^{b^-} F^U_{\tau,Z} + C_{U(b^+,b^-)} y^{b^-} F^U_{\tau,Z}.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Casimir-Operator $C_{U(b^+,b^-)}$ auf $V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$ und dem $U(b^+, b^-)$-invarianten Laplace-Operator Ω auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ wird nun folgendermaßen hergestellt. Dabei sind wir in erster Linie an der Wirkung dieser beiden Operatoren auf der Funktion $F^U_{\tau,Z}$ interessiert.

Sei Λ die in Abschnitt 6.2.2 definierte Darstellung von $U(b^+, b^-)$ auf dem Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{Gr}_U(L), \mathbb{C})$. Das heißt, Λ ist gegeben durch die Vorschrift

$$(\Lambda(A)f)(Z) = f(A^{-1}Z) \quad \text{mit } A \in U(b^+, b^-),\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{Gr}_U(L), \mathbb{C}).$$

Für die nächsten beiden Bemerkungen erinnern wir daran, dass die Operation einer Matrix A aus $U(b^+, b^-)$ durch die Weil-Darstellung ω_U gegeben ist durch

$$\omega_U(A)f(\lambda) = f(A^{-1}\lambda),$$

wobei f eine Schwartz-Funktion auf $V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$ ist.

Bemerkung 6.16. *Sei $\tau \in \mathbb{H}$. Dann gilt für alle $\lambda \in V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$ und für alle $A \in U(b^+, b^-)$ die Gleichung*

$$\Lambda(A)(F^U_{\tau,Z}(\lambda)) = F^U_{\tau,A^{-1}Z}(\lambda) = (\omega_U(A^{-1})F^U_{\tau,Z})(\lambda).$$

Beweis. Das erste Gleichheitszeichen ist nichts anderes als die Definition der Darstellung ρ. Bei der zweiten Gleichung müssen wir uns davon überzeugen, dass $F^U_{\tau,A^{-1}Z}(\lambda) = F^U_{\tau,Z}(A\lambda)$ gilt. Im Hinblick auf die Definition von $F^U_{\tau,Z}$ folgt diese Behauptung wiederum, wenn wir zeigen können

$$A^{-1}((A\lambda)_Z) = \lambda_{A^{-1}Z} \quad \text{und} \quad A^{-1}((A\lambda)_{Z^\perp}) = \lambda_{(A^{-1}Z)^\perp}.$$

Um dies einzusehen, schreiben wir $A\lambda$ eindeutig als Summe seiner Projektionen auf Z und $Z^\perp$, das heißt

$$A\lambda = (A\lambda)_Z + (A\lambda)_{Z^\perp}.$$

Das Element λ zerlegen wir hingegen eindeutig als Summe seiner Projektionen auf $A^{-1}Z$ und $(A^{-1}Z)^\perp$, das heißt

$$\lambda = \lambda_{A^{-1}Z} + \lambda_{(A^{-1}Z)^\perp}.$$

Anwenden von A^{-1} auf $A\lambda$ liefert mit

$$\lambda = A^{-1}((A\lambda)_Z) + A^{-1}((A\lambda)_{Z^\perp})$$

eine weitere Zerlegung von λ. Wegen $A^{-1}Z^\perp = (A^{-1}Z)^\perp$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung folgen die beiden angegebenen Gleichungen. □

Für die abgeleiteten Darstellungen auf der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(b^+, b^-)$ bekommt man mit einer kleinen Rechnung in Kombination mit Bemerkung 6.16 die folgende Identität.

Bemerkung 6.17. *Sei $\tau \in \mathbb{H}$, dann gilt für alle $X \in \mathfrak{u}(b^+, b^-)$ die Gleichung*

$$d\Lambda(X)(F^U_{\tau,Z}(\lambda)) = (-d\omega_U(X)F^U_{\tau,Z})(\lambda).$$

Bezeichnet $C_{U(b^+,b^-)}$ das Casimir-Element in der universellen einhüllenden Algebra von $\mathfrak{u}(b^+, b^-)$, so gilt für den $U(b^+, b^-)$-invarianten Laplace-Operator $\Omega = d\Lambda(C_{U(b^+,b^-)})$ auf $Gr_U(L)$ die Gleichung

$$\Omega(F^U_{\tau,Z}(\lambda)) = -C_{U(b^+,b^-)}F^U_{\tau,Z}(\lambda).$$

Wir haben also folgende wichtige Gleichung gefunden:

$$-2\Delta_k y^{b^-} F^U_{\tau,Z} = 2\left(b^+b^- - b^-\right) y^{b^-} F^U_{\tau,Z} - \Omega y^{b^-} F^U_{\tau,Z}.$$

Für die unitäre Siegelsche Thetafunktion gilt daher der nächste Satz.

Satz 6.18. *Die unitäre Siegelsche Thetafunktion $\Theta^U_L(\tau, Z)$, aufgefasst als eine Funktion auf $\mathbb{H} \times Gr_U(L)$, erfüllt die Differentialgleichung*

$$-2\Delta_k \Theta^U_L(\tau, Z)y^{b^-} = 2\left(b^+b^- - b^-\right)\Theta^U_L(\tau, Z)y^{b^-} - \Omega\Theta^U_L(\tau, Z)y^{b^-}.$$

Diese Gleichung ist der eigentliche Grund dafür, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, dass das Theta-Integral aus Kapitel 5 eine Eigenfunktion des $U(b^+, b^-)$-invarianten Laplace-Operators Ω auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ ist.

6.7 Die Eigenwertgleichung

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass das Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z, s)$ eine Eigenfunktion des Laplace-Operators Ω auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ ist. Damit geben wir insbesondere eine Teilantwort auf die von Borcherds in [3] als Problem 16.6 gestellte Frage im Kontext der unitären Gruppe $U(b^+, b^-)$.

Die Hauptarbeit für diesen Beweis wurde bereits in den vorherigen Abschnitten geleistet, wozu insbesondere die letzten beiden Abschnitte zu nennen sind.

Zunächst bemerken wir, dass sich Lemma 4.4 aus [5] ohne großen Aufwand in die unitäre Theorie übersetzen lässt.

Lemma 6.19. *Sei $Z \in Gr_U(L) - H_U(\beta, m)$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > b^+ - k/2$. Dann gilt die Gleichheit*

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} \int\limits_{\mathcal{F}_a} &\left\langle F^L_{\beta,m}(\tau, s), \Delta_k\Theta^U_L(\tau, Z)y^{b^-}\right\rangle y^k \,\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \left(s(1-s) + \frac{k(k-2)}{4}\right)\Phi^L_{\beta,m}(Z, s).\end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen wie in [5] vor. Die $\mathbb{C}[L'/L]$-wertigen Funktionen

$$f(\tau) := F^L_{\beta,m}(\tau, s) \quad \text{und} \quad g(\tau) := \Theta^U_L(\tau, Z)y^{b^-}$$

auf der komplexen oberen Halbebene sind $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ invariant. Wendet man auf diese Funktionen Lemma 4.3 aus [5] an und beachtet außerdem, dass $F^L_{\beta,m}(\tau,s)$ eine Eigenfunktion von Δ_k mit Eigenwert $s(1-s)+k(k-2)/4$ ist, so gilt für $a>0$ die Identität

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{F}_a} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Delta_k \Theta^U_L(\tau,Z) y^{b^-} \right\rangle y^k \,\frac{dxdy}{y^2} \\
&\quad - \left(s(1-s) + \frac{k(k-2)}{4} \right) \int\limits_{\mathcal{F}_a} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z) y^{b^-} \right\rangle y^k \,\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left\langle L_k F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z) y^{b^-} \right\rangle y^{k-2} \Big|_{y=a} \, dx \\
&\quad - \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s), L_k \Theta^U_L(\tau,Z) y^{b^-} \right\rangle y^{k-2} \Big|_{y=a} \, dx.
\end{aligned}$$

Dabei sind R_k und L_k die sogenannten „Maaß-raising“ und „Maaß-lowering“ Operatoren

$$R_k := 2i\frac{\partial}{\partial\tau} + ky^{-1} \quad \text{und} \quad L_k := 2iy^2\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}},$$

die das Gewicht k einer schwachen Maaß-Form auf $k+2$ anheben bzw. auf $k-2$ absenken. Es muss gezeigt werden, dass beide Integrale auf der rechten Seite für $a\to\infty$ verschwinden. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left\langle L_k F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z) y^{b^-} \right\rangle y^{k-2} \, dx \\
&\quad = i \int\limits_{-1/2}^{1/2} y^{b^-} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right) F^L_{\beta,m}(\tau,s), \Theta^U_L(\tau,Z) \right\rangle \, dx.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Fourierentwicklungen

$$F^L_{\beta,m}(\tau,s) = \sum_{\gamma\in L'/L} \sum_{n\in\mathbb{Z}+\langle\gamma,\gamma\rangle} c(\gamma,n;y,s)\mathfrak{e}_\gamma(nx)$$

und

$$\Theta^U_L(\tau,Z) = \sum_{\gamma\in L'/L} \sum_{\lambda\in\gamma} e(iy\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle - iy\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle)\mathfrak{e}_\gamma(\langle\lambda,\lambda\rangle x)$$

der Maaß-Poincaré-Reihe und der Siegelschen Thetafunktion in die obige Gleichung ein und führen die Integration nach der Variablen x aus, so folgt

$$-\sum_{\lambda\in L'} y^{b^-} e^{-4\pi y\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+2\pi y\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle} \times \Big(2\pi\langle\lambda,\lambda\rangle c(\lambda,\langle\lambda,\lambda\rangle;y,s)+\frac{\partial}{\partial y}c(\lambda,\langle\lambda,\lambda\rangle;y,s)\Big).$$

Einsetztten der Forierkoeffizienten von $F^L_{\beta,m}(\tau,s)$ liefert unter Beachtung der Asymptotik der Whittaker Funktionen

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-1/2}^{1/2}\left\langle L_k F^L_{\beta,m}(\tau,s),\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}\right\rangle y^{k-2}\,dx$$
$$=-\lim_{y\to\infty} y^{b^-}\frac{\partial}{\partial y}c(0,0;y,s)=-b(0,0;s)\lim_{y\to\infty} y^{b^-}\frac{\partial}{\partial y}y^{1-s-k/2}.$$

Da nach Voraussetzung $\sigma > b^+ - k/2$ gilt, ist dieser Grenzwert gleich 0, was zu zeigen war. Das andere Integral behandelt man ähnlich. □

Satz 6.20. *Sei $Z\in Gr_U(L)-H_U(\beta,m)$ und $\sigma > b^+ - k/2$. Das regularisierte Theta-Integral $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ ist eine Eigenfunktion des $U(b^+,b^-)$-invarianten Laplace-Operators Ω auf $Gr_U(L)$. Für den Eigenwert gilt genauer*

$$\Omega\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)=2\left(\left(b^+b^- - b^-\right)+\left(s(1-s)+\frac{k(k-2)}{4}\right)\right)\Phi^L_{\beta,m}(Z,s).$$

Beweis. Mit der gleichen Begründung wie in [5], Theorem 4.6, können wir den Grenzübergang $a\to\infty$ mit dem Laplace-Operator Ω vertauschen, das heißt

$$\Omega\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)=\lim_{a\to\infty}\int_{\mathcal{F}_a}\left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s),\Omega\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}\right\rangle y^k\,\frac{dxdy}{y^2}.$$

Als nächstes wenden wir Satz 6.18 an, das heißt, wir setzen den Ausdruck

$$-2\Delta_k\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}=2\left(b^+b^- - b^-\right)\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}-\Omega\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}$$

ein und erhalten daraufhin die Identität

$$\Omega\Phi^L_{\beta,m}(\tau,Z)=2\left(b^+b^- - b^-\right)\lim_{a\to\infty}\int_{\mathcal{F}_a}\left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s),\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}\right\rangle y^k\,\frac{dxdy}{y^2}$$
$$+2\lim_{a\to\infty}\int_{\mathcal{F}_a}\left\langle F^L_{\beta,m}(\tau,s),\Delta_k\Theta^U_L(\tau,Z)y^{b^-}\right\rangle y^k\,\frac{dxdy}{y^2}.$$

Mit Lemma 6.19 folgt damit sofort die Behauptung. □

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass $\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$ als Eigenfunktion eines elliptischen Differentialoperators eine reell analytische Funktion auf $\mathrm{Gr}_U(L)-H_U(\beta,m)$ ist.

Anhang

Ordnung der Diskriminantengruppe

Wir zeigen, dass die Diskriminantengruppe eines ganzen $\mathbb{Z}$-Gitters eine endliche abelsche Gruppe ist. Insbesondere geben wir deren Ordnung explizit an.

Bemerkung. *Sei L ein ganzes $\mathbb{Z}$-Gitter. Dann ist die Ordnung der Diskriminantengruppe L'/L durch den Absolutbetrag der Determinante einer Basiswechselmatrix S von einer Gitterbasis von L' zu einer Gitterbasis von L gegeben, das heißt, durch*

$$|L'/L| = |\det(S)|.$$

Beweis. Zunächst ist klar, dass die Größe $|\det(S)|$ nicht von der gewählten Basiswechselmatrix S abhängt. Ein Basiswechsel innerhalb von L oder L' besitzt nämlich immer eine Determinante von 1 oder -1. Nach dem Elementarteilersatz existiert eine Gitterbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von L' und positive ganze Zahlen $d_1, \ldots, d_n$, so dass $(d_1v_1, \ldots, d_nv_n)$ eine Gitterbasis von L ist. Bezüglich dieser beiden speziellen Basen ist die Basiswechselmatrix diagonal mit Einträgen $d_1, \ldots, d_n$. Die zugehörign Koordinatenabbildung $\phi\colon V \to \mathbb{Q}^n$ erfüllt $\phi(L') = \mathbb{Z}^n$ und $\phi(L) = d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times d_n\mathbb{Z}$, so dass gilt

$$L'/L \simeq \mathbb{Z}^n/(d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times d_n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}.$$

Folglich gilt $|L'/L| = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n = |\det(S)|$, was zu zeigen war. □

Stufe eines hermiteschen Gitters

Wir hatten im Beweis von Lemma 5.3, Teil b) behauptet, dass zu jedem hermiteschen Gitter eine sogenannte Stufe existiert. In der folgenden Bemerkung möchten wir deren Existenz beweisen.

Bemerkung. *Sei L ein hermitesches Gitter und L' das zugehörige duale Gitter. Es existiert eine positive ganze Zahl N, so dass*

$$N\langle v, v\rangle \in \mathbb{Z}$$

für alle $v \in L'$ gilt. Das Minimum aller dieser positiven ganzen Zahlen heißt Stufe von L.

Beweis. Wir interpretieren L als gewöhnliches $\mathbb{Z}$-Gitter. In diesem Fall ist bekannt, dass es eine positive ganze Zahl N mit $N(v,v) \in \mathbb{Z}$ für alle $v \in L'$ gibt. Wegen der Gleichung $\langle v, v\rangle = (v,v)$ folgt damit sofort die Behauptung. $\square$

Transitive Operation auf $\mathrm{Gr}_O(L)$ und $\mathrm{Gr}_U(L)$

Wir haben in Abschnitt 2.1.3 bzw. in Abschnitt 2.2.5 die Grassmann-Mannigfaltigkeit eines $\mathbb{Z}$-Gitters bzw. eines $\mathcal{O}_F$-Gitters mit einem geeigneten symmetrischen Raum identifiziert. Dabei haben wir behauptet, dass die Gruppe $O(V_\mathbb{R})_0$ auf $\mathrm{Gr}_O(L)$ transitiv operiert. In Abschnitt 2.2.5 behaupteten wir weiter, dass für die Operation von $U(V_\mathbb{R})$ auf $\mathrm{Gr}_U(L)$ gleiches gilt. Wir zeigen jetzt diese beiden Behauptungen.

Bemerkung. *Sei L ein $\mathbb{Z}$-Gitter der Signatur (b^+, b^-) und $n := b^+ + b^-$, dann ist die natürliche Operation*

$$O(V_\mathbb{R})_0 \times Gr_O(L) \to Gr_O(L),\ (f, Z) \mapsto f(Z)$$

der (Weg-) Zusammenhangskomponente der Identität auf der reellen Grassmann-Mannigfaltigkeit $Gr_O(L)$ transitiv.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $b^+, b^- > 0$. Als Vektorraum der Signatur (b^+, b^-) besitzt $V_\mathbb{R}$ eine Zerlegung in eine direkte und orthogonale Summe

$$V_\mathbb{R} = P \oplus N$$

mit maximal definiten linearen Teilräumen, so dass q auf P positiv und auf N negativ definit ist. Wir wählen Basen $(v_1, \ldots, v_{b^+})$ von P und $(v_{b^++1}, \ldots, v_n)$ von N mit der Eigenschaft, dass

$$b(v_i, v_j) = \delta_{i,j} \ \text{ für alle } i, j \in \{1, \ldots, b^+\}$$

und

$$b(v_i, v_j) = -\delta_{i,j} \ \text{ für alle } i, j \in \{b^+ + 1, \ldots, n\}$$

gilt. Dabei ist mit $\delta_{i,j}$ das übliche Kronecker-Symbol gemeint.

Jetzt lassen sich einfach vier Elemente angeben, die jeweils in genau einer der vier (Weg-) Zusammenhangskomponente von $O(V_\mathbb{R})$ liegen. Dass $O(V_\mathbb{R})$ genau vier (Weg-) Zusammenhangskomponenten besitzt, haben wir in Abschnitt 6.3 gesehen. Wir betrachten genauer gesagt die Elemente $\mathrm{id}_{V_\mathbb{R}}, s_P, s_N$ und $s_P \circ s_N$ von $O(V_\mathbb{R})$, wobei s_P die Spieglung entlang v_1 und s_N die Spieglung entlang v_n sei. Um zu sehen, dass diese vier Elemente in unterschiedlichen (Weg-) Zusammenhangskomponenten liegen, betrachten wir die stetige Abbildung

$$O(V_\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times,\ f \mapsto (\det(f_{|P}), \det(f_{|N})).$$

Da jedes der vier Elemente $\mathrm{id}_{V_\mathbb{R}}, s_P, s_N, s_P \circ s_N$ unter der obigen Abbildung ein unterschiedliches Vorzeichenpaar besitzt, müssen sie in unterschiedlichen (Weg-) Zusammenhangskomponenten von $O(V_\mathbb{R})$ liegen.

Jetzt können wir die Transitivität der oben angegebenen Operation beweisen. Zunächst folgt aus dem Fortsetzungssatz von Witt, dass $O(V_\mathbb{R})$ transitiv auf der Grassmann-

Mannigfaltigkeit operiert, das heißt

$$O(V_{\mathbb{R}}) \to \mathrm{Gr}_O(L),\ f \mapsto f(P)$$

ist eine surjektive Abbildung.

Als nächstes zeigen wir, dass es genügt Elemente aus $SO(V_{\mathbb{R}})$ zu betrachten. Das Element s_N besitzt als Spiegelung die Determinante -1 und lässt den linearen Teilraum P invariant. Sei jetzt $Z \in \mathrm{Gr}_O(L)$ beliebig und wähle ein $f \in O(V_{\mathbb{R}})$ mit $f(P) = Z$. Ist $\det(f) = 1$, so sind wir fertig. Ist andererseits $\det(f) = -1$, so betrachtet man das Element $g := f \circ s_N$. Dieses Element hat Determinante 1 und es gilt

$$g(P) = f(s_N(P)) = f(P) = Z.$$

An dieser Stelle haben wir insbesondere die Behauptung für $b^+ = 0$ oder $b^- = 0$ bewiesen, denn in diesem Fall ist die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Identität gleich der Gruppe $SO(V_{\mathbb{R}})$.

Wir zeigen jetzt, dass f sogar aus $O(V_{\mathbb{R}})_0$ gewählt werden kann. Dazu überlegt man sich zuerst, dass $s_P \circ s_N \in O(V_{\mathbb{R}})_0$ den positiv definiten linearen Teilraum P invariant lässt. Sei wieder $Z \in \mathrm{Gr}_O(L)$ beliebig und wähle ein $f \in SO(V_{\mathbb{R}})$ mit $f(P) = Z$. Ist $f \in O(V_{\mathbb{R}})_0$, so sind wir fertig. Ist hingegen $f \notin O(V_{\mathbb{R}})_0$, dann existiert wegen

$$SO(V_{\mathbb{R}})/O(V_{\mathbb{R}})_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ein $g \in O(V_{\mathbb{R}})_0$ mit $f = (s_P \circ s_N) \circ g$. Folglich gilt

$$g(P) = f((s_P \circ s_N)^{-1}(P)) = f(P) = Z,$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Bemerkung. *Sei L ein $\mathcal{O}_F$-Gitter der Signatur (b^+, b^-) und $n := b^+ + b^-$, dann ist die natürliche Operation*

$$U(V_{\mathbb{R}}) \times Gr_U(L) \to Gr_U(L),\ (f, Z) \mapsto f(Z)$$

der indefiniten unitären Gruppe auf der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit $Gr_U(L)$ transitiv.

Für den Beweis dieser Aussage verwenden wir eine unitäre Version des bekannten Fortsetzungssatz von Witt. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [49].

Satz (Witt). *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler hermitescher Raum über $\mathbb{C}$ (oder F) und $U, W \subset V$ zwei lineare Teilräume gleicher Dimension. Ist $g\colon U \to W$ ein Isomorphismus mit*

$$\langle g(u), g(u')\rangle = \langle u, u'\rangle$$

für alle $u, u' \in U$, dann existiert ein Isomorphismus $f\colon V \to V$ mit

$$\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$$

für alle $v, v' \in V$, der g fortsetzt, das heißt, es gilt $f(u) = g(u)$ für alle $u \in U$.

Beweis. Seien $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Gr}_U(L)$. Wir können in beiden linearen Teilräumen eine orthonormal Basis wählen, denn die Einschränkung der hermiteschen Form auf Z_1 bzw. Z_2 ist positiv definit. Sei daher $(v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)})$ eine orthonormal Basis von Z_1 und $(v_1^{(2)}, \dots, v_n^{(2)})$ eine orthonormal Basis von Z_2. Durch Festsetzen von

$$g \colon V \to V,\ v_i^{(1)} \mapsto v_i^{(2)}$$

wird ein Isomorphismus definiert, der die hermitesche Form invariant lässt. Nach dem unitären Fortsetzungssatz von Witt existiert daher ein $f \in U(V_{\mathbb{R}})$ mit $f_{|Z_1} = f$, also $f(Z_1) = g(Z_1) = Z_2$. □

Klassen primitiv isotroper Vektoren

Wir haben in Abschnitt 5.4 für ein gerades hermitesches Gitter L die Menge

$$P(L') = \{\lambda \in L' : \langle \lambda, \lambda \rangle = 0, \lambda \text{ primitiv}\}$$

eingeführt und behauptet, dass es nur endlich viele Bahnen modulo $\Gamma(L) = U_d(L)$ gibt. Wir möchten hier diese Aussage im Detail beweisen.

Bemerkung. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiere und H eine Untergruppe von endlichem Index. Ist $G\backslash X$ endlich, so auch $H\backslash X$.*

Beweis. Sei n der Index von H in G und m die Anzahl der Bahnen modulo G. Wir schreiben

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} Hg_i$$

mit geeigneten $g_i \in G$ und

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} Gx_j$$

mit geeigneten $x_j \in X$. Dann gilt

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} Gx_j = \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{n} Hg_i \right) x_j = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} H(g_i x_j),$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Mit Hilfe dieser Bemerkung bekommen wir nun den folgenden Satz.

Satz. *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Vektorraum über F und Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $U(V)$. Ist X die Menge der isotropen Geraden in V, dann gibt es nur endlich viele Bahnen modulo Γ, das heißt, die Menge $\Gamma\backslash X$ ist endlich.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der obigen Bemerkung, denn nach dem Fortsetzungssatz von Witt in der unitären Version gilt $|U(V)\backslash X| = 1$. □

Satz. *Die Menge $\Gamma(L)\backslash P(L')$ mit $\Gamma(L) = U_d(L)$ ist endlich.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$P(L') \to X, \quad \lambda \mapsto F\lambda.$$

Da aus $F\lambda = F\lambda'$ stets $\lambda = x\lambda'$ mit $x \in \mathcal{O}_F^\times$ folgt, gilt

$$|\Gamma(L)\backslash P(L')| \leq |\mathcal{O}_F^\times||\Gamma(L)\backslash X|. \qquad \square$$

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Pocketbook of Mathematical Functions.* Verlag Harri Deutsch, 1984.

[2] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of Group Representations and Applications.* World Scientific Publishing Company, second revised edition, 1986.

[3] R. E. Borcherds. Automorphic forms with singularities on Grassmannians. *Invent. Math.*, 132:491–562, 1998.

[4] J. Bruinier and M. Kuss. Eisenstein series attached to lattices and modular forms on orthogonal groups. *Manuscr. Math.*, 106:443–459, 2001.

[5] J. H. Bruinier. *Borcherds Products on O(2,l) and Chern Classes of Heegner Divisors.* Springer-Verlag, 2002.

[6] J. H. Bruinier. Regularized theta lifts for orthogonal groups over totally real fields. *J. reine angew. Math.*, 672:177–222, 2012.

[7] J. H. Bruinier. Harmonic Maass forms and periods. *Math. Ann.*, 357:1363–1387, 2013.

[8] J. H. Bruinier and J. Funke. On two geometric theta lifts. *Duke Math. Journal*, 125: 45–90, 2004.

[9] J. H. Bruinier and U. Kühn. Integrals of automorphic Green's functions associated to Heegner divisors. *Int. Math. Res. Not.*, 31(3):1687–1729, 2003.

[10] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, and D. Zagier. *The 1-2-3 of Modular Forms.* Springer-Verlag, 2008.

[11] J. H. Bruinier, B. Howard, and T. Yang. Heights of Kudla-Rapoport divisors and derivatives of l-functions. *Invent. Math.*, 201:1–95, 2015.

[12] D. Bump. *Automorphic Forms and Representations.* Cambridge University Press, 1997.

[13] D. Bump. *Lie Groups.* Springer-Verlag, 2004.

[14] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions.* McGraw-Hill, 1953.

[15] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Tables of Integral Transforms*. McGraw-Hill, 1953.

[16] G. B. Folland. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1989.

[17] E. Freitag. Modular forms on the orthogonal group. Lecture notes.

[18] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory, A First Course*. Springer-Verlag, 1991.

[19] P. Garrett. Universality of holomorphic discrete series. Lecture notes, 2005.

[20] P. Garrett. Intrinsic differential operators. Lecture notes, 2011.

[21] L. J. Gerstein. *Basic Quadratic Forms*, volume 90 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2008.

[22] J. A. Harvey and G. Moore. Algebras, bps states, and strings. *Nuclear Phys. B*, 463 (2-3):315–368, 1996.

[23] S. Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1962.

[24] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978.

[25] S. Helgason. *Geometric Analysis on Symmetric Spaces*, volume 39 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, second edition, 2008.

[26] E. F. W. Hofmann. *Automorphic Products on Unitary Groups*. PhD thesis, TU-Darmstadt, 2010.

[27] R. Howe. Theta series and invariant theory. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 33:275–285, 1979.

[28] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, 1972.

[29] A. Ichino. A regularized Siegel-Weil formular for unitary groups. *Math. Z.*, 247(2): 241–277, 2004.

[30] H. Iwaniec. *Topics in Classical Automorphic Forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1997.

[31] A. A. Kirillov. *Elements of the Theory of Representations*. Springer-Verlag, 1976.

[32] Y. Kitaoka. *Arithmetic of Quadratic Forms*. Cambridge Tracts in Mathematics, 1999.

[33] A. W. Knapp. *Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples*. Princeton University Press, 1986.

[34] M. Kneser. *Quadratische Formen*. Springer-Verlag, 2002.

[35] M. Koecher and A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen.* Springer-Verlag, 2007.

[36] S. S. Kudla. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel Journal of Mathematics*, 87:361–401, 1994.

[37] S. S. Kudla. On some extensions of the Siegel-Weil formula. *preprint*, 2008.

[38] N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications.* Courier Corporation, 1972.

[39] J. Milnor and D. Husemoller. *Symmetric Bilinear Forms.* Springer-Verlag, 1973.

[40] S. Nakajima. On invariant differential operators on bounded symmetric domains of typ iv. *Proc. Japan Acad.*, 58(6):235–238, 1982.

[41] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry.* Academic Press, 1983.

[42] D. Prasad. Weil representation, Howe duality and theta correspondence. *Centre de Recherches Mathématiques*, 1:105–126, 1993.

[43] D. Serre. *Marices, Theory and Applications.* Springer-Verlag, 2001.

[44] J.-P. Serre. *SL(2,R).* Springer-Verlag, 1985.

[45] G. Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math.*, 97(2):440–481, 1973.

[46] G. Shimura. The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group. *Ann. of Math.*, 107(3):569–605, 1978.

[47] T. Shintani. On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. *Nagoya Math. J.*, 58:83–126, 1975.

[48] N. J. Vilenkin and A. U. Klimyk. *Representations of Lie Groups and Special Functions*, volume 3. Springer-Science+Bussines Media. B. V., 1992.

[49] G. Wall. On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups. *Australian Mathematical Society*, 3:1–62, 1962.

Symbolverzeichnis

$\sqrt{\cdot}$	Hauptzweig der komplexen Quadratwurzel
$\lvert z\rvert$	Absolutbetrag der komplexen Zahl z
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Eine hermitesche Form über F (Absch. 2.2.2)
$(\cdot,\cdot)$	$= \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ (Kap. 3)
$q(\cdot)$	$= \frac{1}{2}(\cdot,\cdot)$
$f = \mathcal{O}(g)$	Landaunotation für f wächst nicht wesentlich schneller als g
$f \sim g$	Die Funktionen f und g wachsen asymptotisch gleich schnell
$f \ll g$	Es existiert eine Konstante $c \geq 0$ mit $f \leq cg$
$f \equiv g$	Die Funktionen f und g besitzen den gleichen Singularitätstyp
$f\lvert_{k,L}M$	Der Petersson-Operator vom Gewicht k zu L (Absch. 4.1)
$\frac{\partial}{\partial x}$	Die partielle Ableitung nach der reellen Variablen x
Δ_k	Der hyperbolische Laplace-Operator vom Gewicht k (Absch. 4.2)
$(a)_n$	Das Pochhammer-Symbol (Absch. 5.3)
$A^{\otimes K}$	Die Tensoralgebra $A \otimes \ldots \otimes A$ mit n Faktoren
$\mathrm{Aut}(G)$	Die Automorphismengruppe von G
arg(z)	Das Argument der komplexen Zahl z in $(-\pi/2, \pi/2]$
(b^+, b^-)	Die Signatur eines $\mathbb{Z}$- oder $\mathcal{O}_F$-Gitters (Absch. 2.2.1 und 2.2.2)
$b(\gamma, n, s)$	Die Fourierkoeffizienten von $F^L_{\beta,m}(\tau, s)$ (Satz 4.6)
$\tilde{b}(\gamma, n, s)$	Siehe Bemerkung 4.7
β_U	Die Einbettung $U(b^+, b^-) \subset O(2b^+, 2b^-)$ (Absch. 6.5)
$\mathbb{C}$	Die komplexen Zahlen
$\mathbb{C}[L'/L]$	Die Gruppenalgebra von L'/L (Absch. 4.1)
C_O	Das Casimir-Element der Gruppe $O(2b^+, 2b^-)_0$
C_U	Das Casimir-Element der Gruppe $U(b^+, b^-)$
C_{SL}	Das Casimir-Element der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$
$C^\infty(X, \mathbb{K})$	Der Raum der reellen C^∞-Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
d_F	Die Diskriminante des Zahlkörpers F (Absch. 2.2.1)
$\mathcal{D}_F$	Die Differente von F (Absch. 2.2.1)
$\det(M)$	Die Determinante einer Matrix M
$(d\rho)(X)$	Die abgeleitete Darstellung von ρ (Absch. 6.2)
$d \pmod{c}^\times$	Ein Repräsentantensystem der Klassen $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$
$(d\phi)(X)$	Differential eines Lie-Gruppen-Homomorphismus ϕ
e	Die Eulersche Zahl

$e(z)$	$= e^{2\pi iz}$
$\exp(X)$	Das Matrixexponential (Absch. 6.1.2)
$(e_\gamma)_{\gamma\in L'/L}$	Die Standardbasis der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[L'/L]$ (Absch. 4.1)
E_n	Die Einheitsmatrix der Länge n
$E_{i,j}$	Die Matrix mit genau einer Eins an der Stelle (i,j) und sonst Null
$E_\beta^L(\tau,s)$	Die nicht-holomorphe Eisenstein-Reihe vom Gewicht $k<0$
F	$=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper (Absch. 2.2.1)
$\mathcal{F}$	Der Standard Fundamentalbereich von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{H}$ (Kap. 1)
$\mathcal{F}_a$	$=\{\tau\in\mathcal{F} : y\leq a\}$ für $a>0$
$F(a,b,c;z)$	Die Gaußsche hypergeometrische Funktion aus [14], Kapitel 2
$F_{\beta,m}^L(\tau,s)$	Die nicht-holomorphe Maaß-Poincare-Reihé vom Gewicht $k<0$)
$F_{\tau,Z}^O(\lambda)$	$=e(\tau q(\lambda_Z)+\bar\tau q(\lambda_{Z^\perp}))$ auf $V_\mathbb{R}$ (Absch 6.6)
$F_{\tau,Z}^U(\lambda)$	$=e(\tau\langle\lambda_Z,\lambda_Z\rangle+\bar\tau\langle\lambda_{Z^\perp},\lambda_{Z^\perp}\rangle)$ auf $V_\mathbb{R}$ (Absch. 6.6)
G	Üblicherweise eine (reelle) Lie-Gruppe
$\mathfrak{g}$	Die (reelle) Lie-Algebra zu G
$\mathfrak{gl}(n)$	Die Lie-Algebra $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{GL}_R(V)$	Die lineare Gruppe von V über R
$\mathrm{GL}_n(R)$	Die Gruppe der invertierbaren $n\times n$-Matrizen über R
$\mathrm{Gr}_O(L)$	Die reelle Grassmann-Mannigfaltigkeit von L (Absch. 2.1.3)
$\mathrm{Gr}_U(L)$	Die komplexe Grassmann-Mannigfaltigkeit von L (Absch. 2.2.5)
$\Gamma(z)$	Die Eulersche Gammafunktion
Γ_1	$=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
Γ_∞	$=\{\left(\begin{smallmatrix}1&n\\0&1\end{smallmatrix}\right) : n\in\mathbb{Z}\}$
$\mathbb{H}$	Die komplexe obere Halbebene (Kap. 1)
$H_c(\beta,m,\gamma,n)$	Eine verallgemeinerte Kloosterman-Summe (siehe Satz 4.6)
$H_U(\beta,m)$	Siehe Beginn von Abschnitt 5.2.1
i	Die imaginäre Einheit
$\mathrm{Im}(z)$	Der Imaginärteil von z
$I_\nu(y)$	Die I-Besselfunktion aus [1] oder [14]
$J_{p,q}$	Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}E_p&0\\0&-E_q\end{smallmatrix}\right)$
$J_\nu(y)$	Die J-Besselfunktion aus [1] oder [14]
k	Üblicherweise $(b^+-b^-)/2$
L	Ein $\mathbb{Z}$- oder $\mathcal{O}_F$-Gitter (Absch. 2.1.1 oder 2.1.2)
L'	Das zu L duale Gitter
L'/L	Die Diskriminantengruppe von L
$\log(z)$	Der natürliche Logarithmus
λ_Z	Die orthogonale Projektion von λ auf den linearen Teilraum Z
Λ	Die linksreguläre Darstellung (Absch. 6.2.2)
$M\tau$	Die gebrochen lineare Transformation (Kap. 1)
$\mathrm{Mat}_{n,m}(R)$	Die $n\times m$-Matrizen mit Einträgen aus R
$\mathrm{Mat}_n(R)$	$=\mathrm{Mat}_{n,n}(R)$
$\mathrm{Mp}(V)$	Die metaplektische Gruppe von V (Absch. 6.4.1)
$M_{\nu,\mu}(y)$	Die M-Whittaker Funktion aus [1], Kapitel 13
$\mathcal{M}_s(y)$	$=y^{-k/2}M_{-k/2,s-1/2}(y)$
$\mathbb{N}$	Die natürlichen Zahlen ohne die Null

$N_{F/\mathbb{Q}}(x)$	Die Norm der Körpererweiterung $F/\mathbb{Q}$
$O(V)$	Die orthogonale Gruppe von V (Absch. 2.1.2)
$O(V)_0$	Die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Identität in $O(V)$
$O(L)$	Die orthogonale Gruppe des Gitters L (Absch. 2.1.2)
$O(L)_d$	Der Diskriminantenkern von $O(L)$ (Absch. 2.1.2)
$O(p,q)$	Die indefinite orthogonale Gruppe der Signatur (p,q) (Absch. 6.3)
$O(p,q)_0$	Die (Weg-) Zusammenhangskomponente der Identität in $O(p,q)$
$\mathcal{O}_F$	Der Ring der ganzen Zahlen von F (Absch. 2.2.1)
$\mathcal{O}_F^\times$	Die Einheitengruppe von $\mathcal{O}_F$ (Absch. 2.2.1)
Ω	Der Laplace-Operator auf $\mathrm{Gr}_U(L)$
π	Die Kreiszahl Pi
$\Phi^L_{\beta,m}(Z,s)$	Der regularisierte Theta-Lift von $F^L_{\beta,m}(\tau,s)$ (Absch. 5.2)
$\Phi^L_{\beta,m}(Z)$	Der regularisierte Theta-Lift in der Stelle $s = 1 - k/2$ (Absch. 5.2.2)
$\Phi^L_{\beta,0}(Z,s)$	Der regularisierte Theta-Lift von $E^L_\beta(\tau,s)$ (Absch. 5.4)
$\mathbb{Q}$	Die rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Die reellen Zahlen
$\mathrm{Re}(z)$	Der Realteil von z
ρ_L	Die Weildarstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bzgl. L (Absch. 4.1)
$\rho_{\gamma,\beta}$	Siehe Satz 4.6
S	Üblicherweise die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
s	Ein Element aus $\mathbb{C}$
$\mathrm{sgn}(x)$	Das Vorzeichen der reellen Zahl x
$\mathrm{sign}(V)$	Die Signatur des Vektorraums V (Absch. 2.1.1 und Absch. (2.1.2))
$\mathrm{sign}(L)$	Die Signatur des Gitters L (Absch. 2.1.1 und Absch. (2.1.2))
$\mathrm{SL}_R(V)$	Die spezielle lineare Gruppe von V über R
$\mathrm{SL}_n(R)$	Die Gruppe der speziellen $n \times n$-Matrizen über R
$\mathcal{S}(X,\mathbb{K})$	Die Schwartz-Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\mathrm{Sp}(V)$	Die symplektische Gruppe von V (Absch. 6.4.1)
$\mathcal{S}(\beta,m,U)$	Siehe Abschnitt 5.2.1
σ_0	$= \max\{1, b^+ - k/2\}$
T	Üblicherweise die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
$T(A)$	Die Tensoralgebra von A (Absch. 6.1.1)
$\mathrm{tr}(M)$	Die Spur einer quadratischen Matrix M
$\mathrm{Tr}(X,Y)$	Die Spurform $\mathrm{Tr}(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$ (Absch. 6.3)
$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z)$	Die Spur der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$
$\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x)$	Die Spur der Körpererweiterung $F/\mathbb{Q}$
τ	Ein Element der komplexen oberen Halbebene (H)
$\Theta^O_L(\tau,Z)$	Die orthogonale Siegelsche Thetafunktion bzgl. L (Absch 5.1)
$\Theta^U_L(\tau,Z)$	Die unitäre Siegelsche Thetafunktion bzgl. L (Absch 5.1)
$\theta^O_L(\tau,Z)$	Eine Komponente von $\Theta^O_L(\tau,Z)$ (Absch 5.1)
$\theta^U_L(\tau,Z)$	Eine Komponente von $\Theta^U_L(\tau,Z)$ (Absch 5.1)
$U(V)$	Die unitäre Gruppe von V (Absch. 2.2.4)
$U(L)$	Die unitäre Gruppe des Gitters L (Absch. 2.2.4)
$U_d(L)$	Der Diskriminantenkern von $U(L)$ (Absch. 2.2.4)
$U(p,q)$	Die indefinite unitäre Gruppe der Signatur (p,q) (Absch. 6.3)

$V \oplus W$	Die direkte Summe zweier R-Moduln
$V \otimes_R W$	Das Tensorprodukt zweier R-Moduln
$V_{\mathbb{R}}$	Der reelle Vektorraum $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ oder $V \otimes_F \mathbb{C}$
V_ρ^∞	Der Raum der C^∞-Vektoren aus V bzgl. der Darstellung ρ
$W^\perp$	Das orthogonale Komplement zu W
$W_{\nu,\mu}(y)$	Die W-Whittaker Funktion aus [1], Kapitel 13
$\mathcal{W}_s(y)$	$= \lvert y\rvert^{-k/2} W_{k/2,\mathrm{sgn}(y),s-1/2}(\lvert y\rvert)$
ω_O	Die Weil-Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times O(2b^+, 2b^-)$
ω_U	Die Weil-Darstellung der Gruppe $U(1,1) \times U(b^+, b^-)$
$\mathbb{Z}$	Die ganzen Zahlen
Z	Ein Element aus $\mathrm{Gr}_U(L)$ oder $\mathrm{Gr}_O(L)$
Z'	Das Bild von Z unter der Einbettung $\mathrm{Gr}_U(L) \subset \mathrm{Gr}_O(L)$ (Kap. 3)

Curriculum Vitae

27. Dezember 1987	geboren in Weinheim
Juli 2004	Mittlere Reife
Juni 2007	Allgemeine Hochschulreife
Oktober 2007 - September 2012	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Technischen Universität Darmstadt
Oktober 2010	Bachelor in Mathematik Titel der Bachelorarbeit: „Rationale Adele“
September 2012	Master in Mathematik Titel der Masterarbeit: „L-Funktionen zu Hecke-Charakteren“
seit Oktober 2012	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt
20. Mai 2016	Einreichung der Dissertation
12. Juli 2016	Mündliche Doktorprüfung