
Analyse und Modellierung der Strömung in profilierten Dichtspalten

Robin Matthias Robrecht

Band 34



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



FLUID
SYSTEM
TECHNIK

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz

Analyse und Modellierung der Strömung in profilierten Dichtspalten

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte

D I S S E R T A T I O N

vorgelegt von

Robin Matthias Robrecht, M. Sc.

geboren in Hofgeismar

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer
Tag der Einreichung:	05.12.2023
Tag der mündlichen Prüfung:	21.02.2024

Darmstadt 2024

D 17

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Band 34

Robin Matthias Robrecht

**Analyse und Modellierung
der Strömung in profilierten Dichtspalten**

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Düren 2024

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2024

Copyright Shaker Verlag 2024

Elektronische Zweitveröffentlichung

Licence: CC BY-NC 4.0 /

Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-9594-4

ISSN 2194-9565

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren

Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort des Herausgebers

Kontext

Das Laufrad von Turbomaschinen wird durch enge Radialspalte zwischen Rotor und Stator abgedichtet und auch gelagert. Die durch den Spalt gebildeten Maschinenelemente sind entweder Spaltdichtung oder Gleitlager. In beiden kommt es aufgrund der durch die Maschine verursachten Druckdifferenz zu einem axialen Durchfluss bei gleichzeitiger Tragwirkung. Die Tragfunktion des Flüssigkeitsfilms in Dichtung oder Lager ist durch die 2×2 - oder 4×4 -Matrizen für Steifigkeit¹, Dämpfung und (virtueller) Masse gegeben. Diese bestimmen die Dynamik und Stabilität des Rotors.

Es ist also notwendig die Leckage, Steifigkeit, Dämpfung und Masse der dünnen Flüssigkeitsfilme zu kennen, um Maschinen sicher und nachhaltig zu gestalten. Dafür sind Modelle mit geringer Modellunsicherheit notwendig.

Ohne ausreichende Kenntnis und Reflektion könnte man meinen, dass doch zwei Berechnungswerkzeuge zur Verfügung stehen, nämlich zum einen 3D-Löser der (nach Reynolds gemittelten) Navier-Stokes-Gleichungen (NSGL) oder 2D-Löser der parabolischen Reynoldsschen Differentialgleichung (RDGL). Letztere kommen bei Gleitlagern zum Einsatz. Arnold Sommerfeld hat in den Jahren 1904, 1921 und 1944 über seine analytische Lösung dieser Gleichung für Gleitlager berichtet und das Paradox zwischen Coulombscher und viskoser Reibung gelöst. In der Tat sind beide Reibungsarten als asymptotische Grenzfälle in der Sommerfeldschen Lösung enthalten.

In der Tat, wie Herr Robrecht in seiner Arbeit zeigt, können mit den heute verfügbaren CFD-Lösern (Herr Robrecht nutzt die Open-Source-Software OpenFOAM) valide Ergebnisse erzielt werden. Der Effekt ist also modelliert, allerdings nicht mit der notwendigen Effizienz: es ist praktisch unmöglich die komplexe Steifigkeitsmatrix von engen Spalten in einem, für die Entwicklung von Turbomaschinen akzeptablen Zeitrahmen, mittels CFD zu bestimmen. Dies gilt umso mehr, wenn die Komplexität der Geometrie steigt, d.h. der Stator mit Nuten, Waben oder Bohrlochmustern versehen wird, wie es beispielsweise bei Labyrinth-Dichtungen üblich ist.

Auf der anderen Seite hat Herr Robrecht gezeigt, dass die 2D-Lösung der

¹ Die 2×2 -Matrizen berücksichtigen die Lateralbewegungen des Rotors. Die 4×4 -Matrizen berücksichtigen auch das Kippen des Rotors (Kardanik) insbesondere im Lager. Schaut man sich die 2×2 -Matrizen an, dann ist insbesondere die Nebensteifigkeit ursächlich für eine Rotorinstabilität.

RDGL für Tragkraft, Verlagerungswinkel und Durchflusszahl bei vorgegebener Druckdifferenz über Spalt oder Lager in keiner Weise konsistent mit der 3D-Lösung der NSGL ist, Abbildung 3.6.

„Alle Modelle sind falsch, manche sind nützlich“, so der Britische Mathematiker George Box. Die übliche Gleitlagertheorie ist für durchströmte Lager und Dichtungen falsch und damit auch nicht nützlich. Sie ist sogar gefährlich, da sie den normal gebildeten Anwender im Glauben lässt, die Physik ausreichend beachtet zu haben. Das Problem ist, dass selbst bei laminarer Strömung i. d. R. die Trägheitsterme auf der linken Seite der Bewegungsgleichung nicht immer vernachlässigt werden dürfen. Genau dies geschieht aber bei der Herleitung der RDGL.

Daher wurde am Fachgebiet Fluidsystemtechnik der TU Darmstadt in den vergangenen Jahren das Softwarepaket CAPM (Akronym aus dem Englischen Clearance-Averaged Pressure Model) entwickelt. Innerhalb des CAPM wird angenommen, dass der Druck homogen über die Spalthöhe ist und das Strömungsprofil in der axialen Richtung und Umfangsrichtung über Ansatzfunktionen beschrieben werden kann. Je nach Ansatzfunktion kann damit die laminare oder auch die turbulente Spaltströmung berechnet werden. Die linke Seite der Bewegungsgleichung, die Trägheit, wird dabei immer beachtet. Damit ist das CAPM generell geeignet, um die Leckage, Steifigkeit, Dämpfung und Trägheit von beliebigen Dichtungen und Lagern vorherzusagen.

Derzeit wird daran gearbeitet, dem Softwarepaket eine rotordynamische Berechnungssoftware hinzuzufügen. Die Strukturmechanik des Rotors ist im Vergleich zur Strömungsmechanik der Spaltströmung vergleichsweise einfach und über ein Finite-Element-Modell des Rotors abzubilden. Damit entsteht derzeit eine Berechnungssoftware, die Unternehmen wie KSB, Sulzer, Voith und anderen hilft, die Verfügbarkeit ihrer Produkte vorherzusagen – auch für eine Stückzahl von Eins.

CAPM hat sich so valide und effizient gezeigt, dass Herr Robrecht in seiner Dissertation sogar die Modellunsicherheit von CAPM über Monte-Carlo-Simulationen über dem Parameterraum untersuchen kann. Es sind mit vertretbarem Aufwand mehrere Tausend Rechnungen durchführbar. Dies wäre mit CFD-Solvern undenkbar.

Einlaufmodellierung bei laminarer Strömung ohne Orbitbewegung der Welle

Der Kern von CAPM geht von einer ausgeglichenen Strömung im Spalt aus. In der Stromfadentheorie z. B. der Gasdynamik wird die Änderung des Zustands über nulldimensionale Ergänzungen vorgenommen. Eine analoge Ergänzung ist auch bei CAPM notwendig, um den Spalteinlauf zu modellieren. Dort

kommt es infolge der Trägheit der Flüssigkeitsteilchen zu einer Strömungsablösung und im Nachgang zu einem Carnotschen Stoßverlust, der durch die Einschnürung des Flüssigkeitsfilms bestimmt ist. Für ebene Strömungen kann dieser Vorgang mittels Potentialtheorie bestimmt werden. Für den hier vorliegenden Fall der Strömung in einem exzentrischen Spalt gelingt dies nicht. Herr Robrecht hat daher eine zur Stromfadentheorie konsistente Einlauftrandbedingung formuliert und die Verlustziffer am Einströmrand mittels eines Extrapolationsverfahrens aus den 3D-CFD-Berechnungen bestimmt. Dieses intelligente und sinnvolle Nutzen von fein-granularen 3D-CFD-Berechnungen für die Bestimmung von Einlauftrandbedingungen eines grob-granularen 2D-Modells, d.h. für CAPM, ist Herrn Robrecht sehr gut gelungen.

Die meisten Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen schwimmen in die Richtung immer feiner granularer Modelle. Dies führt dazu, dass die Berechnungszeit für ein Problem sich in den vergangenen drei Dekaden praktisch nicht verändert hat. Das gleiche Problem wird heute nur feiner aufgelöst. Der Zeitaufwand bleibt konstant, die CPU-Kosten steigen. Dieses Vorgehen ist im Sinne von William von Ockham, des Philosophen und Vordenkers unserer modernen Welt, im eigentlichen Sinne unwissenschaftlich. Gute Modelle im Sinne von Ockham, Heinrich Hertz oder auch Albert Einstein sind a) klar, b) konsistent und c) knapp. Die Tendenz zu immer feineren Modellen bei gleichzeitigem Steigern der Rechenleistung ist auch im Konflikt mit dem Nachhaltigkeitsparadigma von Dieter Rams „weniger aber besser“. Daher ist es aus meiner Sicht wohltuend, die Beiträge von Herrn Robrecht zu lesen.

Mit der Modellerweiterung von CAPM durch Herrn Robrecht ist CAPM nun in der Lage physikalisch konsistent den Lomakin-Effekt abzubilden. Dies ist ein hydrodynamischer Effekt, der zu einer Zentrierung der Welle führt und zwar allein aufgrund der Axialströmung und nicht aufgrund der Strömung in Umfangsrichtung wie bei Gleitlagern bekannt. Durch den Lomakin-Effekt allein hat die Dichtung oder das Lager bereits eine Radialsteifigkeit.

Einlaufmodellierung für eine „rührende“ Welle in turbulenter Strömung

An Abschnitt 3.4 behandelt Herr Robrecht die Einlauftrandbedingung für eine Welle, die eine Orbitbewegung in turbulenter Spaltströmung ausführt. Dieser Fall ist für CAPM höchst relevant, da der Rotor um seinen quasi-stationären Ruhezustand Schwingungen ausführt. Diese Schwingungen ist eine „rührende“ Bewegung der Welle in der Bohrung und tatsächlich ist das im Englischen übliche Wort „whirl“ sehr passend. Aus Sicht des Stators ist die Strömung instationär. In einem „mitrührenden“ Relativsystem ist die Strömung stationär. Richtigerweise wechselt Herr Robrecht für seine feingra-

IV

nularen CFD-Berechnungen in OpenFOAM das System vom Inertialsystem in das bewegte System.

Für die „rührende“ Welle konnte Herr Robrecht sowohl seine CFD-Rechnungen als auch die CAPM-Berechnungen mit Messdaten, aufgenommen am Gleitlagerprüfstand des Fachgebiets für Fluidsystemtechnik, vergleichen. Es zeigt sich, dass die CFD-Rechnungen die Messdaten genauso wie CAPM sehr gut wiedergeben. Allerdings ist ein detaillierteres Modell des Einlaufdruckverlusts gar nicht notwendig. In der Tat ergab sich bei der Verteilung des Einlaufdruckverlustes über den Umfang eine Verteilung, die zumindest überraschend war.

Mesoskalenmodell für strukturierte Statorflächen

Bei Dichtungen werden die Statoren häufig mit Nuten oder Bohrlochmuster versehen. Betrachtet man die Strömung in oder entlang einer Nut für den Fall, dass die zweite Nutflanke im Unendlichen ist, handelt es sich bei der Strömung um einen turbulenten Wandstrahl. Diese generische Strömung ist wohl untersucht. In der Tat existiert eine Ähnlichkeitslösung der nach Reynolds gemittelten Navier-Stokes-Gleichung für den turbulenten Strahl und annäherungsweise auch für den turbulenten Wandstrahl. Es ist sehr wohltuend, dass eine Dissertation auf diesem soliden Fundament der Strömungsmechanik aufbaut. Herr Robrecht verbindet sehr überzeugend analytische Strömungsmechanik mit CFD-Simulationen und leitet daraus ein Wandreibungsmodell ab. Dieses ist das in der Überschrift benannte Mesoskalenmodell. Später macht er den gleichen Ansatz auch für Bohrlochmuster.

Beachtung von Mess- und Modellunsicherheit

Es ist in den Ingenieurwissenschaften immer noch selten, dass die Modellunsicherheit quantifiziert wird. Nun geschieht bei künstlicher Intelligenz ja nichts anderes, als Modellunsicherheit zu minimieren. Ist wie bei Herrn Robrecht das Modell physikalisch, dann ist die Prognoseunsicherheit erwartungsgemäß auch außerhalb des Kalibrationsbereichs klein. Hat das Modell alle relevanten Terme enthalten (vgl. oben die Diskussion zu RDGL), dann können nur noch die Modellparameter unsicherheitsbehaftet sein. Die Unsicherheitsfortpflanzung dieser Parameter durch das Modell gelingt Herrn Robrecht über Monte-Carlo-Simulationen. Wiederum zeigt sich dabei die Stärke des CAPM, da dies mit einer CFD-Simulation praktisch unmöglich ist.

Darmstadt, im Februar 2024

Peter Pelz

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fluidsystemtechnik an der Technischen Universität Darmstadt. Beim Inhalt handelt es sich im Wesentlichen um eine systematische Zusammenfassung und Erweiterung meiner zwei Journal- und drei Konferenzbeiträge zum Thema. Hinzugekommen ist darüber hinaus noch die Unsicherheitsanalyse mittels Monte-Carlo-Methode, die eine weitere Stärke der hier betrachteten schnellen Berechnungsmethoden hervorhebt.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz für die Ermöglichung der Promotion und das mir stets entgegengebrachte Vertrauen. Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer danke ich für das Interesse am Thema während der Fortschritts-treffen eines gemeinsamen Verbundprojektes, die freundlichen Gespräche und schließlich für die Übernahme des Korreferats.

Das Institut für Fluidsystemtechnik zeichnete sich in meiner Zeit dort durch ein hervorragendes Kollegium aus. Dieses Umfeld aus besonders engagierten und kompetenten Menschen inspirierte und motivierte mich sehr. Viele Kollegen sorgten auch über das Fachliche hinaus dafür, dass die Promotionszeit für mich immer denkwürdig bleiben wird. Dafür danke ich ihnen. Erwähnen möchte ich hier Herrn Maximilian Kuhr für die vielen gemeinsamen Diskussionen und die interessanten Einblicke in die experimentelle Erforschung von Spaltströmungen.

Meinen besonderen Dank muss ich Herrn Sebastian Lang aussprechen, denn nur durch ihn habe ich den Weg einer Promotion eingeschlagen. In unzähligen Gesprächen während meiner Bachelorthesis bei ihm, meiner Tätigkeit als Studentischer Hilfswissenschaftler für ihn, und schließlich als Wissenschaftlicher Mitarbeiter während des gemeinsamen Forschungsprojektes, welches er dann von Seiten der Industrie betreute, hat er meinen wissenschaftlichen Werdegang durch seine freundliche Art und analytische Herangehensweise sehr positiv geprägt.

Zudem bedanke ich mich bei allen meinen Studenten, die mich im Rahmen von Abschlussarbeiten oder als Studentische Hilfswissenschaftler unterstützt haben. Namentlich möchte ich hier Katharina Jakob, Alexander Wagner, Pia Lenhardt und Frederic Prothmann in chronologischer Reihenfolge erwähnen, deren Arbeit zur Entstehung der vorliegenden Dissertation beigetragen hat. Schließlich bedanke ich mich noch bei meinen lieben Eltern, die mich während des Studiums, der Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und zu guter Letzt auch während des Verfassens dieser Dissertation stets unterstützt haben. Ihnen widme ich diese Arbeit.

VI

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den in ihr ausdrücklich genannten Hilfen, selbständig verfasst habe.

Darmstadt, im Dezember 2023
Robin M. Robrecht

Der Gelehrte studiert die Natur nicht, weil das etwas Nützliches ist; er studiert sie, weil er daran Freude hat, und er hat Freude daran, weil sie so schön ist. Wenn die Natur nicht so schön wäre, so wäre es nicht der Mühe wert, sie kennen zu lernen, und das Leben wäre nicht wert, gelebt zu werden.

Henri Poincaré, der letzte Polymath: „Wissenschaft und Methode“, 1908.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
1.1	Wissenschaftliche Fragestellung	5
2	Grundlagen	7
2.1	Clearance-Averaged Pressure Model	7
2.1.1	Grundgleichungen	8
2.1.2	Hirs' Reibungsfaktormodell für Schmierfilme	18
2.1.3	Abschätzung bezüglich des Rauheitsregimes	20
2.2	Stand der Forschung zur Modellierung profilierter Dichtspalte	24
2.2.1	Labyrinthdichtungen	26
2.2.2	Dämpferdichtungen	31
2.3	Wandstrahlströmung	35
2.4	Unsicherheitsfortpflanzung	41
2.4.1	Grundbegriffe	42
2.4.2	Verteilungsfunktionen	47
2.4.3	Monte-Carlo-Methode	50
3	Verallgemeinerte Einlassrandbedingungen unter Berücksichtigung des Lomakin-Effektes	55
3.1	Modellbildung	59
3.2	Methodik zur Ermittlung der Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten	63
3.3	Ergebnisse für stationäre laminare Strömung im exzentrischen Spalt	66
3.4	Ergebnisse bei turbulenter Spaltströmung mit Orbitalbewegung des Rotors	77
4	Modellierung profilierter Spalte	87
4.1	Generische Labyrinthdichtung	87
4.2	Vorstudie zum ebenen Wandstrahl	91
4.3	Wandstrahltheorie bei der ebenen Einzelnut	96
4.4	Reibungsfaktormodell für Labyrinthdichtungen	101
4.4.1	Skalierung mit der Exzentrizität und Nutgeometrie . .	101

4.4.2	Eintrittsdruckverlust nach der Nut	103
4.4.3	Modellkalibrierung	104
4.5	Industrielles Bohrlochprofil	115
4.6	Reibungsfaktormodell für Dämpferdichtungen	117
4.6.1	Modellkalibrierung	119
5	Experimentelle Validierung und Unsicherheitsfortpflanzung	125
5.1	Glatter Spalt	126
5.1.1	Stationäre Eigenschaften	127
5.1.2	Rotordynamische Koeffizienten	129
5.2	Labyrinthdichtung	134
5.2.1	Stationäre Eigenschaften	136
5.2.2	Rotordynamische Koeffizienten	140
5.3	Bohrlochprofil	144
5.3.1	Stationäre Eigenschaften	145
5.3.2	Rotordynamische Koeffizienten	147
6	Zusammenfassung und Ausblick	149
	Literatur	164
A	Modellerweiterungen des CAPM	165
A.1	Modell für laminare Strömung	165
	Herleitung der Reynolds'schen Differentialgleichung	168
A.2	Herleitung typischer Bulk-Flow-Modelle	170
A.3	Verfahren bei fehlender Druckdifferenz bzw. Leckage	172
A.4	Unterscheidung von Strömungsregimes der Spaltströmung	174
B	Numerische Grundlagen der CFD-Simulationen	179
B.1	Vollständige Ringspalte	179
B.2	Einzelnut und Bohrlochprofilelement	183
C	Spaltströmungsprüfstand	187
D	Rotordynamische Koeffizienten der Labyrinthdichtungen	189
	Eigene Publikationen	193

Symbolverzeichnis

Die Symbole der ersten Spalte werden in der zweiten Spalte beschrieben. Die dritte Spalte, wenn vorhanden, gibt die Dimension als Monom mit den Basisgrößen Länge (L), Masse (M), Zeit (T), Temperatur (Θ) und elektrischer Strom (I).

Dimensionsbehaftete Größen:

Symbol	Beschreibung	Dimension
\tilde{b}	Profilteilung	L
\tilde{c}	Absolutgeschwindigkeit	L T ⁻¹
$\{\tilde{C}; \tilde{c}\}$	Dämpfungskoeffizient	M T ⁻¹
$\tilde{C}_{\varphi,0}$	mittlere Umfangsgeschwindigkeit am Spalteinlass	L T ⁻¹
$\tilde{C}_{\varphi,\text{Plenum}}$	mittlere Umfangsgeschwindigkeit im Plenum vor dem Spalt	L T ⁻¹
\tilde{C}_z	mittlere axiale Strömungsgeschwindigkeit durch Leckage	L T ⁻¹
\tilde{d}	Nutweite, Bohrungsdurchmesser	L
\tilde{F}	Kraft	M L T ⁻²
\tilde{h}	lokale Spaltweite	L
$\tilde{\bar{h}}$	mittlere Spaltweite	L
$\{\tilde{K}; \tilde{k}\}$	Steifigkeitskoeffizient	M T ⁻²
\tilde{L}	Spaltlänge	L
$\{\tilde{M}; \tilde{m}\}$	Trägheitskoeffizient	M
\tilde{M}	Moment	M L ² T ⁻²
\tilde{p}	Druck	M L ⁻¹ T ⁻²
\tilde{r}	radiale Koordinate	L
\tilde{R}	Radius der Welle bzw. des Lagerzapfens	L
\tilde{s}	Spaltkoordinate	L
\tilde{t}	Nuttiefe, Bohrungstiefe	L
\tilde{t}	Zeit	T
\tilde{w}	Relativgeschwindigkeit	L T ⁻¹
\tilde{x}	laterale Koordinate	L

\tilde{y}	laterale Koordinate	L
\tilde{z}	axiale Koordinate	L
$\tilde{\delta}$	Grenzschichtdicke, Halbstrahlbreite	L
$\tilde{\varepsilon}$	Exzentrizität	L
$\tilde{\mu}$	dynamische Viskosität	$\text{ML}^{-1} \text{T}^{-1}$
$\tilde{\nu}$	kinematische Viskosität	$\text{L}^2 \text{T}^{-1}$
$\tilde{\rho}$	Dichte	ML^{-3}
$\tilde{\tau}_{ij}$	Spannungstensor	$\text{ML}^{-1} \text{T}^{-2}$
$\tilde{\omega}$	Orbitfrequenz	T^{-1}
$\tilde{\Omega}$	Kreisfrequenz der Welle bzw. des Lagerzapfens	T^{-1}

Dimensionslose Größen:

Die drei Punkte ... in der dritten Spalte bedeuten, dass mehrere unterschiedliche Definitionen verwendet werden. Die entsprechenden Definitionen sind dem jeweiligen Kontext zu entnehmen.

Symbol	Beschreibung	Definition
b	dimensionslose Profiltteilung	\tilde{b}/\tilde{h}
c	dimensionslose Absolutgeschwindigkeit	...
$\{C; c\}$	dimensionslose Dämpfungskoeffizienten	$2 \frac{\psi}{L} \frac{\{C; c\}}{\tilde{\rho} \tilde{R}^3 \tilde{\Omega}}$
d	dimensionslose Nutbreite/Bohrungsdurchmesser	\tilde{d}/\tilde{h}
f	Reibungsfaktor	...
\vec{F}	dimensionslose Kraft	$\frac{2 \vec{F}}{\tilde{\rho} \tilde{\Omega}^2 \tilde{R}^4 L}$
g	dimensionslose Reynoldsspannung	$\frac{2 \tau_t}{\tilde{\rho} \tilde{c}_m^2}$
h	dimensionslose (lokale) Spaltweite	\tilde{h}/\tilde{h}
$\{K; k\}$	dimensionslose Steifigkeitskoeffizienten	$2 \frac{\psi}{L} \frac{\{K; k\}}{\tilde{\rho} \tilde{R}^3 \tilde{\Omega}^2}$
L	relative Spaltlänge	\tilde{L}/\tilde{R}
m	Faktor in der Blasius-Korrelation	-
$\{M; m\}$	dimensionslose Trägheitskoeffizienten	$2 \frac{\psi}{L} \frac{\{M; m\}}{\tilde{\rho} \tilde{R}^3}$
\vec{M}	dimensionsloses Moment	$\frac{2 \vec{M}}{\tilde{\rho} \tilde{\Omega}^2 \tilde{R}^5 L}$
n	Exponent in der Blasius-Korrelation	-
N	Nutanzahl, Bohrungsanzahl	-

p	dimensionsloser Druck	$2\tilde{p}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$
Re	Reynoldszahl	$\tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{h}/\tilde{\nu}$
s	dimensionslose Spaltkoordinate	\tilde{s}/\tilde{h}
So	Sommerfeldzahl	$\psi^2\frac{\tilde{F}}{2\tilde{\mu}\tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{L}}$
t	dimensionslose Nut-/Bohrungstiefe	\tilde{t}/\tilde{h}
t	dimensionslose Zeit	$\tilde{t}\tilde{\Omega}$
w	dimensionslose Relativgeschwindigkeit	$\tilde{w}/\tilde{\Omega}\tilde{R}$
z	dimensionslose Axialkoordinate	\tilde{z}/\tilde{L}
z_*	alternative dimensionslose Axialkoordinate	\tilde{z}/\tilde{h}
α	Faktor im Potenzgesetz	-
β	Verlagerungswinkel, Exponent im Potenzgesetz	-
γ	Kippwinkel des Rotors, Steigung der linearen Regression	-
δ	Achsenabschnitt der linearen Regression	-
δ	dimensionslose Halbstrahlbreite	$\tilde{\delta}/\tilde{h}$
ε	relative Exzentrizität	$\tilde{\varepsilon}/\tilde{h}$
ζ	Druckverlustkoeffizient	...
η	Ähnlichkeitskoordinate	$\tilde{y}/\tilde{\delta}$
θ	Winkel zwischen Vektorkomponenten	-
Λ	Winkelkorrekturfaktor	θ_τ/θ_w
τ_{ij}	Komponenten des dimensionslosen Spannungstensors	$2\tilde{\tau}_{ij}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$
φ	Koordinatenwinkel	-
ϕ	Durchflusszahl	$\tilde{C}_z/(\tilde{\Omega}\tilde{R})$
χ	Oberflächenverhältnis	...
ψ	relative (mittlere) Spaltweite	\tilde{h}/\tilde{R}
ω	dimensionslose Kreisfrequenz der Orbitbewegung	$\tilde{\omega}/\tilde{\Omega}$

Sonstige:**Symbol Beschreibung**

\tilde{x}	dimensionsbehaftete Größe mit dimensionslosem Pendant x
\bar{x}	gemittelter Wert von x
δx	Unsicherheit von x
Δx	Differenz zwischen zwei Werten x_1 und x_2

Indices**Index Beschreibung**

0	unmittelbar am Spalteinlass
eff	effektiv
E	Eintritt
ges	gesamt
krit	kritisch
l	lokal
m	maximal
S	Schub (-spannung)
t	turbulent
v	versetzt

Abkürzungen

Kürzel	Bedeutung
AMI	arbitrary mesh interface
AML	aktives Magnetlager
BF	Bulk-Flow
CAPM	Clearance-Averaged Pressure Model
CDF	cumulative distribution function
CFD	computational fluid dynamics
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (ISO/IEC Guide 98-3)
MC	Monte-Carlo
PDF	probability density function
RDGL	Reynolds'sche Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie
SIMPLEC	Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations – Con- sistent
WFR	whirl frequency ratio

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

Die technische Entwicklung von Kreiselpumpen zeichnet sich aus durch stetig steigende Ansprüche an Energieeffizienz, höhere Leistungsdichte, der Entwicklung von spezifischen Maschinen in geringen Stückzahlen bis hin zur Einzelanfertigung sowie durch regelmäßige Betriebszustände außerhalb des Auslegungspunktes. Diese Entwicklungen wirken sich konsequenterweise auf die Gestaltung und Auslegung vieler Maschinenkomponenten aus, so auch auf durchströmte Spalte zwischen Rotor und Gehäuse: hydrodynamische Gleitlager und berührungslose Dichtspalte.

Moderne Kreiselpumpen sind oft mehrstufig gestaltet und weisen einen schlanken Rotor auf. Innerhalb einer solchen Maschine sind eine Vielzahl von durchströmten Spalten zu finden, die geometrisch unterschiedlich sein und gleichzeitig sehr verschiedenen Betriebsbedingungen unterliegen können. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Radialspalte betrachtet. Als Radialspalt wird hier ein Spalt definiert, dessen finite Spaltweite sich in radiale Richtung über den Umfang des Rotors erstreckt¹. Diese Spalte lassen sich in klassische oder mediengeschmierte Gleitlager sowie glatte oder profilierte Dichtspalte gliedern.

Klassische hydrodynamische Gleitlager werden mit einem separaten Schmierölkreislauf betrieben. Die Spaltströmung ist häufig laminar, kann aber auch turbulent sein. Bei mediengeschmierten Gleitlagern wird das häufig niederviskose Prozessmedium wie bspw. Wasser zur Schmierung verwendet. Dies führt in der Regel zu vollständig turbulenter Strömung. Dichtspalte und häufig auch mediengeschmierte Gleitlager sind zusätzlich mit einer axialen Druckdifferenz beaufschlagt, welche zu einem axialen Leckagevolumenstrom führt. Dieser ist der Strömung in Umfangsrichtung aufgrund der Rotation

¹ Der Begriff wird aufgrund der Tragwirkung analog zum Radiallager gewählt. In der Literatur wird teils eine gegensätzliche Definition hinsichtlich der Durchströmungsrichtung verwendet.

der Welle überlagert. Bei typischerweise vorliegender Exzentrizität der Welle bildet sich in Umfangsrichtung eine Druck-Schleppströmung aus.

Die durchströmten Spalte haben in der Hauptsache also zwei Funktionen: Last auf den Rotor zu tragen und Leckage innerhalb der Maschine abzudichten. Diese zwei Funktionen lassen sich bei einem Spalt häufig nicht strikt voneinander trennen. Gleitlager, insbesondere mediengeschmierte, nutzen häufig den Lomakin-Effekt: eine zusätzliche Tragkraft aufgrund einer axialen Durchströmung – einer Leckage. Ebenso entwickeln Dichtspalte auch immer eine tragende Wirkung auf den Rotor. Diese tragende Wirkung von durchströmten Spalten kann weiter in stationäre Eigenschaften¹ – Tragkraft und Verlagerungswinkel bei gegebener exzentrischer Auslenkung – und dynamische Eigenschaften als rotordynamische Koeffizienten um eine gegebene Ruhelage – Trägheit, Dämpfung und Steifigkeit – aufgeteilt werden.

Der Leckagevolumenstrom von durchströmten Spalten kann direkt den volumetrischen Wirkungsgrad der Maschine und damit die Effizienz beeinflussen. Außerdem kann er auch für das interne hydraulische System (bspw. für Axialschubausgleichsvorrichtungen oder Druckausgleichsleitungen) relevant sein. Die Tragwirkung hat signifikanten Einfluss auf die Rotordynamik der Maschine. Durch (virtuelle) Trägheit, Dämpfung und Steifigkeit werden Durchhang, Eigenfrequenzen und -formen sowie Hoch- und Auslaufverhalten beeinflusst und damit zulässige Betriebsbereiche eingeschränkt.

Aufgrund der o. g. hohen Anforderungen an moderne Maschinen ist eine immer feinere Auslegung erforderlich. Somit sind auch genaue Kenntnisse über stationäre und dynamische Tragwirkung sowie über die Leckage in den vielen durchströmten Spalten einer Maschine erforderlich, insbesondere auch, um eine hohe Zuverlässigkeit bzw. Verfügbarkeit im flexiblen Betrieb gewährleisten zu können. Hierfür ist die präzise Berechnung der Strömung im Spalt notwendig.

Im Allgemeinen können hierfür CFD-Simulationen im Sinne von stationären oder transienten dreidimensionalen RANS-Methoden genutzt werden. Für CFD besteht bei Spaltströmungen allerdings häufig ein sehr ungünstiges Verhältnis der verbesserten Vorhersagesicherheit zu erhöhtem Berechnungsaufwand im Vergleich mit etablierten, schnelleren Modellen. Dieser Nachteil wird bei profilierten Spalten auf die Spitze getrieben, bei denen die notwendige Zellenanzahl leicht die Größenordnung von $\sim 10^7$ bis $\sim 10^8$ bei langen Spalten mit Bohrlochprofil erreichen kann.

Im Kontrast zur CFD-Simulation besteht demnach in Wissenschaft und

¹ häufig auch ungenau als statisch bezeichnet

Industrie weiterhin Bedarf an recheneffizienten, schnellen Modellen¹. Dies lässt sich anhand folgender Punkte leicht verdeutlichen:

- Simulation von vollständigen Rotorsystemen gekoppelt mit Gleitlager- und Dichtspaltmodellen, insbesondere bei transienten Prozessen wie bspw. Hochlaufvorgängen oder mathematischer Optimierung
- elasto-hydrodynamische Probleme, bei denen die Verformung der Bohrung aufgrund der hydrodynamischen Druckverteilung im Spalt als Fluid-Struktur-Interaktion gekoppelt berücksichtigt werden muss
- häufige Design-Iterationen bei der Maschinenauslegung in der Praxis
- Unsicherheitsanalyse mittels Monte-Carlo-Methode, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt

Zur Berechnung der Strömung im endlichen Spalt werden meist integro-differentielle Schmierfilmmodelle herangezogen. Diese Modelle können in drei Typen eingeordnet werden: (i.) zweidimensionale Modelle basierend auf der Reynolds'schen Schmierfilmtheorie; (ii.) eindimensionale Bulk-Flow-Modelle basierend auf der Theorie von Childs; und (iii.) zweidimensionale Bulk-Flow-Modelle. Alle drei etablierten Modelltypen beinhalten wesentliche Einschränkungen der Betriebsparameter.

Die Reynolds'sche Schmierfilmtheorie (i.) ist nur gültig für Werte des Produkts $\alpha Re \ll 1$ unter Vernachlässigung der konvektiven Trägheitsterme im Impulssatz². Es werden jedoch auch erweiterte Varianten zur Berücksichtigung der Trägheit und turbulenter Strömung verwendet. Die Anwendung auf Lager mit zusätzlicher axialer Druckdifferenz bleibt dennoch grundsätzlich problematisch³. Eindimensionale Bulk-Flow-Modelle (ii.) sind aufgrund der Verwendung eines linearen Perturbationsansatzes auf kleine Exzentrizität beschränkt. Zweidimensionale Bulk-Flow-Modelle (iii.) beheben diese Einschränkung, aber die Nutzung von mittleren Bulk-Geschwindigkeiten kann zu erhöhter Unsicherheit in den konvektiven Trägheitstermen bei mäßigen Reynoldszahlen führen und sind grundsätzlich auf empirische Wandschubspannungsmodelle angewiesen.

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017, ([60], 2018)*

² SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

³ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

Aus diesem Grund wurde an der Technischen Universität Darmstadt das Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM) entwickelt¹, das eine übergeordnete Theorie für integro-differentielle Spaltströmungsmodelle darstellt. Hierfür ist es allgemein und inklusive der nichtlinearen Trägheitsterme formuliert. Mithilfe von verschiedenen Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeitsprofile über der Spalthöhe und Verwendung von passenden Wandschubspannungsmodellen kann im Gegensatz zu den etablierten Modellen der vollständige Parameterbereich abgedeckt werden. Die Modellergebnisse des CAPM für glatte Spalte können als weitgehend zuverlässig bezeichnet werden².

Die somit bereits existierende, grundlegende Software-Implementierung des CAPM von Lang¹ wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit aufgegriffen, vollständig überarbeitet und wesentlich erweitert:

- Alle numerischen Diskretisierungsschemata und Interpolationsverfahren wurden auf gängige Verfahren zweiter Ordnung umgestellt, falls nötig.
- Alle Berechnungen wurden soweit möglich vektorisiert und die Programmstruktur wurde geändert, um Geschwindigkeitsengpässe zu beseitigen. Damit wurde die Dauer einer einzelnen Rechnung auf einem gewöhnlichen Business-Notebook um ungefähr 90 % auf ca. 20 Sekunden reduziert.
- Das Programm wurde weitgehend objektorientiert gestaltet und stellt nun mehr ein Framework zur Berechnung von Spaltströmungen dar. Insgesamt wurden fünf unterschiedliche Solver, ein Paket für Monte-Carlo-Rechnungen und verschiedene weitere Tools hinzugefügt.
- Es wurde ein flexibles Testsystem entwickelt, dass bei Änderungen des Codes eine interne Verifizierung seit 2018 gewährleistet.

Die aktuelle Software unter dem Namen CAPM FRAMEWORK v4.0.0 umfasst derzeit ca. 8800 Zeilen ausführbaren Codes und wird in einem Git-Repository gepflegt. Das Framework bildet die Grundlage der Untersuchungen und CAPM-Berechnungen der vorliegenden Arbeit.

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017*, ([60], 2018)

² KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps - Experimental and simulation results“, ([53], 2022)

1.1 Wissenschaftliche Fragestellung

Hinsichtlich der Modellierung der Strömung in Radialspalten ergeben sich aus der Literatur unter den o. g. Rahmenbedingungen zwei wesentliche Forschungslücken. Erstens wird der mit dem Lomakin-Effekt verbundene Eintrittsdruckverlust nur im Sinne von Richtwerten berücksichtigt. Es sind keine genauen Mittelwerte, ganz zu Schweigen von der tatsächlich vorliegenden Umfangsverteilung bekannt. Abhängigkeiten von weiteren Betriebsparametern bleiben gänzlich unberücksichtigt. Da es kein konsistentes Modell und keine konsistenten Definitionen gibt, sind in der Literatur auch keinerlei systematische Untersuchungen zum Eintrittsdruckverlust zu finden.

Zweitens wird in der industriellen Praxis eine Vielzahl an profilierten Dichtungen verwendet. Diese können in über den Umfang symmetrische Profile (bspw. Labyrinthdichtungen) und nichtsymmetrische Profile (bspw. Bohrlochprofile) unterteilt werden. Eine gezielte Auslegung der Profilparameter hinsichtlich gewünschter Leckage oder dynamischen Eigenschaften kann in beiden Fällen i. d. R. jedoch nicht erfolgen, da keine zuverlässigen und validierten Modelle zur Verfügung stehen.

Es wird sich zeigen, dass sowohl bei der Modellierung der Eintrittsströmung in den Ringspalt, als auch bei den physikalischen Effekten aufgrund der komplexen Geometrie einer profilierten Spaltberandung einige zusätzliche empirische Modellparameter in das Problem eintreten. Diese Größen sind keineswegs konstant und oft nur aufwändig zu ermitteln. Es wird in vielen Fällen unvermeidbar sein, dass zusätzlich zur Mess- eine Parameter- und Modellunsicherheit kommt, insgesamt also Datenunsicherheit vorliegt (vgl. Pelz u. a.¹).

Diese kurze Bestandsaufnahme führt auf die drei Forschungsfragen, die als Leitgedanken durch die vorliegende Arbeit führen:

- (i) Wie lassen sich möglichst allgemeine Eintrittsrandbedingungen zur Berücksichtigung des Lomakin-Effektes formulieren, die konsistent mit den typischen Berechnungsmethoden für das stationäre sowie für das dynamische Problem sind?
- (ii) Welche wesentlichen Strömungseffekte liegen in profilierten Spalten vor und wie lassen diese sich im Zusammenhang mit integro-differentiellen Spaltströmungsmodellen berechenbar machen?
- (iii) Welche Auswirkungen haben die fortgepflanzte Mess- und Parameterunsicherheit auf die Berechnung der stationären sowie der dynamischen Eigenschaften von durchströmten Spalten?

¹ PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([78], 2021)

Ausgehend von diesen drei Fragen werden im folgenden Kapitel 2 die Grundlagen der vorliegenden Arbeit dargelegt. In Kapitel 3 wird anschließend ein Modell der Eintrittsströmung vorgestellt. In Kapitel 4 werden danach profilierte Spalte untersucht. Abschließend werden die Modelle ins CAPM integriert und in Kapitel 5 anhand experimenteller Daten validiert. Außerdem wird die fortgepflanzte Unsicherheit betrachtet.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen und methodischen Grundlagen erläutert, die zum Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig sind. Zunächst wird in Abschnitt 2.1 das Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM) erläutert, was gleichzeitig als allgemeine Einführung in die Modellierung von Spaltströmungen dient. Im danach folgenden Abschnitt 2.2 wird der Stand der Forschung zur Modellierung von profilierten Dichtungen – dem thematischen Schwerpunkt der Arbeit – aufgearbeitet. Anschließend werden kurz die Grundlagen freier Scherschichten und insbesondere der Wandstrahlströmung in Abschnitt 2.3 dargelegt, da diese Form der Strömung oft in profilierten Dichtungen anzutreffen ist. Schließlich werden die Grundlagen und die verwendete Methodik zur Unsicherheitsfortpflanzung in Abschnitt 2.4 erläutert.

2.1 Clearance-Averaged Pressure Model

Das Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM) ist ein übergeordnetes integro-differentielles Schmierfilmmodell bzw. Spaltströmungsmodell. Im folgenden Abschnitt 2.1.1 werden zunächst die Grundgleichungen des Modells beschrieben. In Abschnitt 2.1.2 wird das Wandschubspannungsmodell nach Hirs beschrieben, das die Grundlage der Reibungsfaktormodelle für glatte sowie auch profilierte Dichtungen darstellt.

In Anhang A werden zudem zusätzliche Erweiterungen und Herleitungen bzgl. des CAPM vorgestellt, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entstanden sind. In Abschnitt A.1 werden die Gleichungen des CAPM für laminare Strömung vorgestellt und es wird gezeigt, dass die bekannte Reynolds'sche Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie einen im CAPM enthaltenen Grenzfall darstellt. In Abschnitt A.2 dagegen wird gezeigt, dass auch das

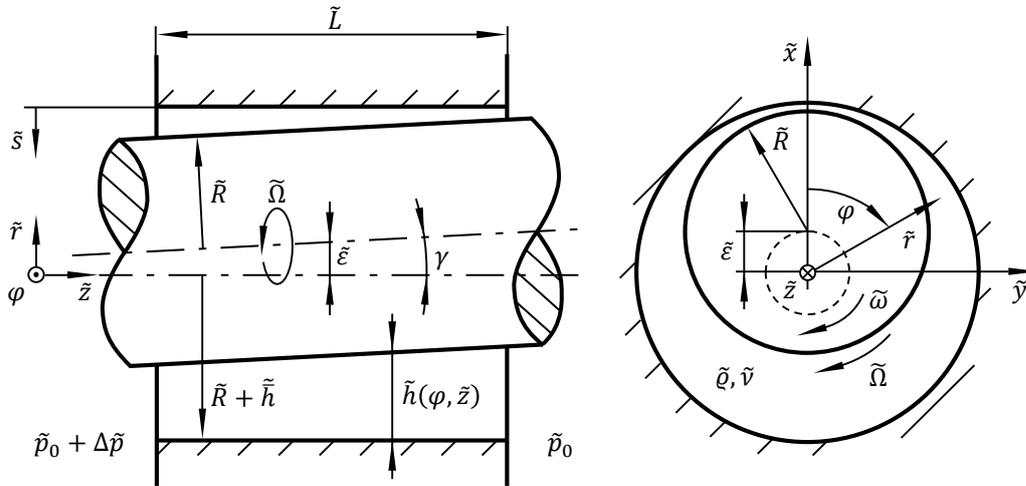


Abbildung 2.1 – Generische Modellgeometrie des CAPM für durchströmte Radialspalte.

bekannte Bulk-Flow Modell nach Childs als Sonderfall aus den Grundgleichungen des CAPM hergeleitet werden kann. In Abschnitt A.4 wird ein Konzept zur Unterscheidung der verschiedenen Strömungsregimes in Schmierfilmen (laminar, turbulent, Taylor-Wirbel) dargelegt. In Abschnitt A.3 wird schließlich noch das Vorgehen für das CAPM erläutert, sofern keine Druckdifferenz über einem Spalt anliegt und kein Leakagevolumenstrom durch den Spalt strömt.

2.1.1 Grundgleichungen

Das CAPM nach Lang^{1,2,3} ist ein formales und übergeordnetes integro-differentielles Modell für inkompressible Strömung in engen Ringspalten. Die Herleitung ist dem Konzept nach beeinflusst vom bekannten Bulk-Flow-Modell nach Childs⁴. Lang führte zudem eine Dimensionsanalyse sowie eine ausführliche Größenordnungsabschätzung durch und kalibrierte das Reibungsmodell mittels CFD. Die Nomenklatur, Definitionen und Schreibweise der dimensionslosen Größen werden in dieser Arbeit weitestgehend von Lang

¹ LANG UND PELZ, „Unified Prediction of Hydrodynamic Forces in Plain Annular Seals and Journal Bearings by means of an Analytically Derived Design Tool“, ([61], 2016)

² LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017*, ([60], 2018)

³ KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps - Experimental and simulation results“, ([53], 2022)

⁴ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

übernommen: eine Variable mit Tilde stellt eine dimensionsbehaftete Größe dar, das dimensionslose Gegenstück wird ohne Tilde geschrieben.

Die entsprechende Modellgeometrie eines glatten, zylindrischen Ringspalts ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Der Rotor bzw. der Lagerzapfen hat den Radius \tilde{R} , Kreisfrequenz $\tilde{\Omega}$ und kann mit der Exzentrizität $\tilde{\varepsilon}$ ausgelenkt sein sowie einen zusätzlichen Kippwinkel γ aufgrund von Wellenfehlstellung oder -biegung aufweisen. Zudem bewegt sich der Rotormittelpunkt mit Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$ auf einer Kreisbahn um die Statormittellinie. Diese Orbitbewegung stellt eine Schwingung des Rotors dar und wird später für die Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten verwendet.

Der Stator bzw. die Bohrung hat die Länge \tilde{L} und den Radius $\tilde{R} + \tilde{h}$, wobei \tilde{h} die mittlere Spaltweite oder das mittlere Spaltspiel darstellt. Der Spalt mit der variablen Spaltweite $\tilde{h}(\varphi, \tilde{z})$ ist vollständig mit Flüssigkeit der kinematischen Viskosität $\tilde{\nu}$ und Dichte $\tilde{\rho}$ gefüllt. Der gesamte Volumenstrom \tilde{V} , der aufgrund der Druckdifferenz $\Delta\tilde{p}$ durch den Spalt strömt, definiert die mittlere axiale Geschwindigkeit \tilde{C}_z . Das in den Spalt einströmende Fluid kann zudem eine variable Umfangsgeschwindigkeit \tilde{C}_φ aufgrund von Vordrall (engl. *preswirl*) aufweisen.

Die einzige Modellannahme, auf der die Grundgleichungen des CAPM beruhen, ist, dass die Ungleichung $\tilde{h} \ll \tilde{R}$ bzw. $\psi := \tilde{h}/\tilde{R} \ll 1$ erfüllt ist. Dies ist die generelle Hauptannahme der Schmierfilmtheorie und ist für hydrodynamische Gleitlager und Dichtspalte leicht erfüllt, für die so gut wie immer $\psi \sim 10^{-3}$ gilt. Diese Annahme führt direkt dazu, dass der Druckgradient über die Spaltweite vernachlässigbar ist, was zum Namen „Clearance-Averaged Pressure Model“ geführt hat.

Weiterhin wird in dieser Arbeit das Auftreten von Kavitation, das insbesondere bei klassischen Gleitlagern von Interesse ist, ausgeschlossen und nicht weiter behandelt. Es sei jedoch erwähnt, dass etablierte Ansätze zur Berücksichtigung von Kavitation in der Schmierfilmtheorie lediglich auf der Manipulation des berechneten Druckfeldes beruhen. Eine Übersicht über die entsprechenden Ansätze wird bspw. von Szeri¹ gegeben. Möglicherweise ließe sich eine derartige Lösung auch ins CAPM integrieren.

Die typischen dimensionsbehafteten Referenzgrößen sind in Tabelle 2.1 aufgeführt. Alle dimensionslosen Größen sind in Tabelle 2.2 aufgeführt. Es ist ersichtlich, dass das Problem die beiden charakteristischen Längen \tilde{h} und \tilde{R} liefert. Diese Größen liegen in sehr unterschiedlichen Skalen und sind über das dimensionslose Produkt der relativen Spaltweite ψ gekoppelt, das in der

¹ SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 2005)

Tabelle 2.1 – Dimensionsbehaftete Referenzgrößen.

Variable	Beschreibung
\tilde{R}	Radius der Welle bzw. des Lagerzapfens
\tilde{h}	mittlere Spaltweite
$\tilde{\Omega}$	Kreisfrequenz der Welle bzw. des Lagerzapfens
\tilde{C}_z	mittlere axiale Strömungsgeschwindigkeit durch Leckage
$\tilde{\rho}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$	Dichte, dynamische und kinematische Viskosität des Fluids

Größenordnung $\sim 10^{-3}$ liegt. Die von Lang¹ gewählte Entdimensionierung gewährleistet, dass die weiteren dimensionslosen Variablen ansonsten i. d. R. in der Größenordnung ~ 1 liegen. Die Spaltlänge wird deshalb bspw. mit \tilde{R} dimensionslos gemacht, während etwa für die lokale Spaltweite oder die Exzentrizität \tilde{h} genutzt wird.

Die Strömungsgeschwindigkeit im Spalt besteht aus einer axialen und einer Umfangskomponente, die jeweils mit eigenen Referenzgeschwindigkeiten dimensionslos gemacht werden. Für die Umfangskomponente wird die Geschwindigkeit der Rotoroberfläche $\tilde{\Omega}\tilde{R}$ und für die Axialkomponente wird die mittlere Geschwindigkeit \tilde{C}_z verwendet. Zur Umrechnung dient die Durchflusszahl ϕ , die stellvertretend für den Leckagevolumenstrom steht. Die Durchflusszahl kann außerdem als Verhältnis der axialen und der Umfangs-Reynoldszahl oder als Verhältnis der zwei charakteristischen Zeiten \tilde{R}/\tilde{C}_z und $1/\tilde{\Omega}$ interpretiert werden. Der Druck und der Spannungstensor werden in dieser Arbeit stets mit dem dynamischen Referenzdruck $\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2/2$ dimensionslos gemacht.

Die Reynoldszahl wird mit der mittleren Spaltweite \tilde{h} im Sinne einer Kanalströmung und der Umfangsgeschwindigkeit der Wand $\tilde{\Omega}\tilde{R}$ gebildet und ist bei Parameterstudien im wesentlichen ein Maß für die Rotordrehzahl. Zur weiteren Klassifizierung und Unterscheidung von Strömungsregimes ist es zudem oft nützlich, eine zusätzliche axiale Reynoldszahl als Produkt

$$\phi Re = \frac{\tilde{C}_z \tilde{h}}{\tilde{\nu}} \quad (2.1)$$

und eine effektive Reynoldszahl

$$Re_{\text{eff}} := Re \sqrt{1 + \phi^2} \quad (2.2)$$

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017, ([60], 2018)*

Tabelle 2.2 – Definitionen der dimensionslosen Produkte des CAPM.

Variable	Beschreibung
$\psi := \tilde{h}/\tilde{R}$	relative (mittlere) Spaltweite
$L := \tilde{L}/\tilde{R}$	relative Spaltlänge
$\varepsilon := \tilde{\varepsilon}/\tilde{h}$	relative Exzentrizität
γ	Kippwinkel des Rotors
$Re := \tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{h}/\tilde{\nu}$	Reynoldszahl
$\phi := \tilde{C}_z/(\tilde{\Omega}\tilde{R})$	Durchflusszahl
$\omega := \tilde{\omega}/\tilde{\Omega}$	dimensionslose Kreisfrequenz der Orbitbewegung
$h := \tilde{h}/\tilde{h}$	dimensionslose (lokale) Spaltweite
$s := \tilde{s}/\tilde{h}$	dimensionslose Spaltkoordinate
$z := \tilde{z}/\tilde{L}$	dimensionslose Axialkoordinate
$t := \tilde{t}\tilde{\Omega}$	dimensionslose Zeit
$c_\varphi := \tilde{c}_\varphi/(\tilde{\Omega}\tilde{R})$	dimensionslose Umfangsgeschwindigkeit
$c_z := \tilde{c}_z/\tilde{C}_z$	dimensionslose Axialgeschwindigkeit
$p := 2\tilde{p}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$	dimensionsloser Druck
$\tau_{ij} := 2\tilde{\tau}_{ij}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$	dimensionslose Komponenten des Spannungstensors

anzugeben¹. Das Produkt ψRe wird in der Literatur manchmal als Trägheitsparameter bezeichnet (vgl. Gl. (2.22)). Im Folgenden sollen nun weitgehend nur noch dimensionslose Variablen verwendet werden.

Die beschreibenden Gleichungen des CAPM basieren auf einem zylindrischen Koordinatensystem $(\tilde{r}, \varphi, \tilde{z})$ im rotierenden Bezugssystem, das die gleiche Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$ wie die Orbitbewegung aufweist. Die Absolutgeschwindigkeit des Fluids \vec{c} kann somit über die Relativgeschwindigkeit \vec{w} und die Rotationsgeschwindigkeit des Koordinatensystems und aufgrund von $\tilde{h} \ll \tilde{R}$ ausgedrückt werden als

$$\vec{c} \approx \vec{w} + \tilde{\omega}\tilde{R}\vec{e}_\varphi. \quad (2.3)$$

Dies führt zum Verschwinden der Zeitabhängigkeit aufgrund der Orbitbewegung und vereinfacht das Problem auf einen quasi-stationären Zustand. Zusätzlich werden inkompressible Strömung sowie konstante Materialeigenschaften des Fluids vorausgesetzt.

Für die weitere Herleitung wird außerdem die zusätzliche Spaltkoordinate $\tilde{s} := \tilde{R} + \tilde{h} - \tilde{r}$ definiert, für die entsprechend $\vec{e}_s = -\vec{e}_r$ gilt. Die dimensionslose

¹ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

Spaltkoordinate s nimmt ausschließlich Werte im Intervall $[0, 1]$ an, was für die spätere Auswertung der Integrale über die Spaltweite \tilde{h} nützlich ist. Die Funktion der Spaltweite kann angegeben werden als

$$h(\varphi, z) = 1 - (\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \cos \varphi \quad (2.4)$$

mit der zusätzlichen Exzentrizität ε_γ aufgrund des Kippwinkels γ , die durch

$$\varepsilon_\gamma(z) = \frac{L}{\psi} \left(z - \frac{1}{2} \right) \tan \gamma \quad (2.5)$$

gegeben ist.

Das betrachtete Kontrollvolumen des Modells erstreckt sich über die gesamte Spaltweite und über infinitesimale Segmente in axialer und Umfangsrichtung. Aufgrund der Annahme $\psi \ll 1$ verschwindet der radiale Druckgradient^{1,2}, $\partial p / \partial s \approx 0$. Auf dieser Basis sind die beschreibenden Gleichungen von Lang³ gegeben. Die dimensionslose Kontinuitätsgleichung sowie die axiale und Umfangskomponente des Impulssatzes für das o. g. Kontrollvolumen lauten

$$T_c + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 w_\varphi \, ds \right) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c_z \, ds \right) = 0, \quad (2.6)$$

$$T_\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 w_\varphi^2 \, ds \right) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 w_\varphi c_z \, ds \right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\psi} \tau_{s\varphi}|_0^1 + \mathcal{O}(\psi) \text{ und} \quad (2.7)$$

$$T_z + \phi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 w_\varphi c_z \, ds \right) + \frac{\phi^2}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c_z^2 \, ds \right) = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2\psi} \tau_{sz}|_0^1 + \mathcal{O}(\psi). \quad (2.8)$$

Die Terme $\mathcal{O}(\psi) \sim \psi$ (Schubspannung im Fluid und Coriolis-Kraft) sind vernachlässigbar gegenüber den anderen Termen, die mindestens in der Größenordnung ~ 1 sind³. Wenn darüber hinaus ein stationärer Zustand im rotierenden Bezugssystem herrscht, können die transienten Trägheitsterme

¹ SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

² SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 2005)

³ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017*, ([60], 2018)

(lokale Änderung) zu Null gesetzt werden:

$$T_c := \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad (2.9)$$

$$T_\varphi := h \int_0^1 \frac{\partial w_\varphi}{\partial t} ds + h \frac{\partial \omega}{\partial t} + (1 - \omega) \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad (2.10)$$

$$T_z := \phi h \int_0^1 \frac{\partial c_z}{\partial t} ds + \frac{\partial \phi}{\partial t} h \int_0^1 c_z ds = 0. \quad (2.11)$$

Die Gleichungen sind in dieser Form sowohl für die laminare, als auch für die mittlere turbulente Strömung (im Sinne der Reynolds-Mittelung) gültig.

Um das Gleichungssystem (2.6) bis (2.8) zu schließen, müssen zunächst Ansatzfunktion für die Geschwindigkeitsprofile $w_\varphi(s, \varphi, z)$ und $c_z(s, \varphi, z)$ herangezogen werden, sodass die Integrale über s ausgewertet werden können. Diese Ansatzfunktionen sind von der Form $c(s, \varphi, z) = \text{fn}(s, c^*)$ bzw. $w(s, \varphi, z) = \text{fn}(s, w^*)$, wobei $c^*(\varphi, z)$ bzw. $w^*(\varphi, z)$ eine charakteristische Flussvariable ist. Hierfür eignen sich die über die Spaltweite gemittelten Geschwindigkeiten \bar{w}_φ und \bar{c}_z , die Geschwindigkeit in der Spaltmitte $w_{\varphi, \text{CL}}$ und $c_{z, \text{CL}}$ oder spezifische Volumenströme \dot{V}_φ und \dot{V}_z . Für den weiteren Lösungsprozess ist es zwar nicht zwingend erforderlich, jedoch sind analytisch integrierbare Ansatzfunktionen zu bevorzugen.

Lang¹ war der erste, der Potenzgesetze als Ansatzfunktionen für symmetrische turbulente Geschwindigkeitsprofile zusammen mit der Geschwindigkeit in der Spaltmitte als charakteristische Flussvariable nutzte. Die bekannten Bulk-Flow-Modelle nutzen die konstante Ansatzfunktion 1 und die mittleren Geschwindigkeiten als charakteristische Flussvariable. Dieser im Vergleich mit den o. g. Potenzgesetzen einfache Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit ebenfalls bei allen Lösungen mittels CAPM im Falle turbulenter Strömung genutzt. Für die Herleitung der Reynoldsgleichung wird außerdem eine über der Spaltweite quadratische Ansatzfunktion² verwendet und als Flussvariablen dienen häufig die spezifischen Volumenströme. Selbstverständlich sind die drei genannten charakteristischen Flussgrößen ineinander umrechenbar.

Bei den o. g. Ansatzfunktionen wird an den Wänden die Haftbedingung vorausgesetzt, was i. d. R. eine gute Näherung darstellt. Tatsächlich tritt jedoch Wandgleiten auf, vgl. Pelz u. a.³. Bei sehr engen Spalten kann die Haftbedingung nicht mehr als allgemeine Randbedingung vorausgesetzt werden

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017, ([60], 2018)*

² Dies ergibt sich automatisch aus der Navier-Stokes-Gleichung bei Vernachlässigung der Trägheitsterme.

³ PELZ U. A., „Temperature-dependent wall slip of Newtonian lubricants“, ([77], 2022)

und es muss eine Gleitbedingung, meist in Form einer Gleitlänge, eingeführt werden. Dies wurde von Kuhr, Corneli und Pelz¹ für ein Gleitlager gezeigt, bei dem Wandgleiten unter bestimmten Bedingungen zu einer Reduktion der Tragkraft und Erhöhung von Leckage führen kann. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch stets davon ausgegangen, dass Wandgleiten bei den betrachteten Betriebsbedingungen keinen signifikanten Einfluss hat.

Weiterhin müssen die beiden Terme der Wandschubspannungen

$$\tau_{s\varphi}|_0^1(\varphi, z) = \tau_{s\varphi, \text{Rotor}} - \tau_{s\varphi, \text{Stator}} \quad \text{und} \quad (2.12)$$

$$\tau_{sz}|_0^1(\varphi, z) = \tau_{sz, \text{Rotor}} - \tau_{sz, \text{Stator}} \quad (2.13)$$

ebenfalls als Funktion der jeweilig verwendeten charakteristischen Flussgrößen gegeben werden. Für den turbulenten Fall kann das bekannte empirische Reibungsfaktormodell nach Hirs² verwendet werden, das auch häufig bei Bulk-Flow-Modellen zum Einsatz kommt. Hierdurch entfällt die Notwendigkeit eines Turbulenzmodells. Das Reibungsfaktormodell nach Hirs wird ausführlich im folgenden Abschnitt 2.1.2 besprochen.

Das Randwertproblem erfordert aufgrund der Periodizität lediglich passende Randbedingungen am Spalteinlass bei $z = 0$ und am -Auslass bei $z = 1$ für alle drei abhängigen Variablen. Lang verwendete am Einlass sowohl eine konstante Umfangs-, als auch eine konstante Axialgeschwindigkeit und am Auslass einen konstanten Druck. Diese Konfiguration ist zur Kalibrierung des Reibungsfaktormodells geeignet und ebenso zur Verifizierung des Gesamtmodells mittels CFD. Sie kann jedoch zu signifikanten Abweichungen im Vergleich mit dem Experiment führen. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein neues verallgemeinertes Modell für die Einlassrandbedingungen unter Berücksichtigung des Lomakin-Effektes in Kapitel 3 vorgestellt.

Das CAPM als nichtlineares System partieller Differentialgleichungen (2.6) bis (2.8) kann nur numerisch gelöst werden. Hierzu werden die Gleichungen mithilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens auf den unabhängigen Variablen φ und z diskretisiert. Zur Lösung wird ein SIMPLEC-Algorithmus³ eingesetzt, der bspw. auch von San Andres⁴ verwendet wurde. Die Lösung liefert schließlich das Druckfeld p sowie die beiden charakteristischen Flussvariablen c^*

¹ KUHR, CORNELI UND PELZ, „Reduction of Bearing Load Capacity and Increase in Volume Flow Due to Wall Slip“, ([52], 2018)

² HIRS, „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“, ([41], 1973)

³ VAN DOORMAAL UND RAITBY, „Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows“, ([100], 1984)

⁴ SAN ANDRES, „Analysis of Variable Fluid Properties, Turbulent Annular Seals“, ([86], 1991)

bzw. w^* als Felder über φ und z . Als Ergebnis erhält man zudem die Durchflusszahl ϕ bei gegebener Druckdifferenz Δp oder andersherum. Hierfür muss die integrale Gleichung für den axialen Volumenstrom

$$2\pi = \int_0^{2\pi} h \int_0^1 c_z \, ds \, d\varphi \quad (2.14)$$

an Ein- und Auslass als zusätzliche globale Kontinuitätsbedingung erfüllt sein.

Zur Bestimmung der resultierenden Kräfte vom Fluidfilm auf den Rotor wird von einem zusätzlichen kartesischen Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ Gebrauch gemacht, das ebenfalls mit $\tilde{\omega}$ rotiert, siehe Abbildung 2.1 rechts. Hierbei zeigt die \tilde{x} -Koordinate immer in Richtung der Exzentrizität. Die Kraft wird durch Integration des Spannungsvektors \vec{t} über die Rotoroberfläche berechnet zu

$$\vec{F} := \frac{2\vec{F}}{\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^4L} = \iint_S \vec{t} \, dS, \quad (2.15)$$

das Moment ist gegeben durch

$$\vec{M} := \frac{2\vec{M}}{\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^5L} = \iint_S \vec{x} \times \vec{t} \, dS. \quad (2.16)$$

Eine Größenordnungsanalyse zeigt, dass der Anteil des Spannungsvektors aus den Schubspannungen gegenüber dem Anteil des Drucks vernachlässigbar ist¹.

Von hauptsächlichem Interesse sind hierbei die beiden lateralen Kraftkomponenten, die mit

$$F_x = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -p \cos \varphi \cos \gamma \, d\varphi \, dz \quad \text{und} \quad (2.17)$$

$$F_y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -p \sin \varphi \cos \gamma \, d\varphi \, dz \quad (2.18)$$

gegeben sind. Aufgrund des sehr kleinen Kippwinkels kann i. d. R. die Vereinfachung $\cos \gamma \approx 1$ getroffen werden. Außerdem definieren wir den Betrag des ebenen Kraftvektors auf den Rotor zu

$$F := \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (2.19)$$

der gleich dem Betrag der Lagerlast ist und der Tragfähigkeit des Films bei gegebener Exzentrizität entspricht. Die Richtung des ebenen Kraftvektors $F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ ist entgegengesetzt zur Richtung der Lagerlast. Ein dazugehöriger Verlagerungswinkel β (vgl. Gümbel-Kurve) kann zwischen dem ebenen Kraftvektor und dem Exzentrizitätsvektor (\vec{e}_x) bestimmt werden zu

$$\beta = \arctan F_y / F_x. \quad (2.20)$$

¹ SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([94], 1992)

Wenn außerdem die Sommerfeldzahl mit der dynamischen Viskosität $\tilde{\mu}$ als

$$So := \psi^2 \frac{\tilde{F}}{2\tilde{\mu}\tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{L}} \quad (2.21)$$

definiert wird, kann die Beziehung

$$F = \frac{4}{\psi Re} So \quad (2.22)$$

zur resultierenden Kraft (2.19) hergestellt werden. Die Reynoldszahl taucht hier auf, da die Lagerlast in der Sommerfeldzahl mit einer viskosen Kraft dimensionslos gemacht wird, während bei F eine Trägheitskraft genutzt wird. Offenbar sind F und So von der gleichen Größenordnung, solange $\psi Re \sim 1$ ist. Dies bedeutet wiederum, dass $Re \sim 10^3$ sein muss, was für viele mediengeschmierte und auch einige klassische Gleitlager durchaus der Fall sein kann. Der Allgemeinheit und Systematik wegen wird in dieser Arbeit grundsätzlich die resultierende Kraft F statt der Sommerfeldzahl verwendet.

Abschließend sind rotordynamische Koeffizienten im Inertialsystem $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ der Form

$$- \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & m \\ -m & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

von Interesse¹. Bleibt die Bewegung auf eine kleine Amplitude um die konzentrische Ruhelage beschränkt, handelt es sich um eine lineare Gleichung, d. h. die Parameter Trägheit, Dämpfung und Steifigkeit sind konstant. Dies ist bei Dichtspalten meistens gegeben, bei Gleitlagern sind dagegen eher exzentrische Ruhelagen, auch bei großer Auslenkung, interessant. Dieser Sachverhalt erschwert die Berechnung deutlich und soll in der vorliegenden Arbeit nicht weiter behandelt werden. Eine ausführliche Analyse und die Erweiterung des CAPM mittels Störansatz für diesen Fall sind in der Arbeit von Kuhr, Nordmann und Pelz² zu finden. Die Berechnung der Koeffizienten für Schwingungen um die konzentrische Ruhelage dagegen kann ohne Weiteres mithilfe der o. g. Orbitbewegung erfolgen¹.

Die Transformation von (2.23) in das rotierende System $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ ergibt für die Orbitbewegung des Rotors nach geschickter Umformung unter Nutzung der Additionstheoreme die beiden einfachen Gleichungen

$$F_x/\varepsilon = M\omega^2 - c\omega - K \quad \text{und} \quad (2.24)$$

$$F_y/\varepsilon = -m\omega^2 - C\omega + k, \quad (2.25)$$

¹ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

² KUHR, NORDMANN UND PELZ, „Dynamic force and moment characteristics of annular gaps - Simulation results and evaluation of the relevance of the tilt and moment coefficients“, ([57], 2022)

die für die Parameteridentifikation mithilfe der Methode kleinster Fehlerquadrate genutzt werden können. Hierzu werden die Kräfte F_x und F_y bei verschiedenen Orbitfrequenzen ω und konstanter (kleiner) Exzentrizität ε berechnet. Die entsprechenden dimensionslosen Definitionen der Koeffizienten lauten

$$\{M; m\} := 2 \frac{\psi \{\tilde{M}; \tilde{m}\}}{L \tilde{\varrho} \tilde{R}^3}, \quad (2.26)$$

$$\{C; c\} := 2 \frac{\psi \{\tilde{C}; \tilde{c}\}}{L \tilde{\varrho} \tilde{R}^3 \tilde{\Omega}} \text{ und} \quad (2.27)$$

$$\{K; k\} := 2 \frac{\psi \{\tilde{K}; \tilde{k}\}}{L \tilde{\varrho} \tilde{R}^3 \tilde{\Omega}^2}. \quad (2.28)$$

Es ist bekannt^{1,2}, dass für die Nebenträgheit i. d. R. $m = 0$ gilt, alle anderen Koeffizienten sind im Allgemeinen von Null verschieden. Daraus folgt, dass die Bewegungsgleichungen (2.23) offensichtlich nicht konservativ sind. Der dissipativen Wirkung der Hauptdämpfung C steht die anfachende Wirkung der Nebensteifigkeit k gegenüber. Das Verhältnis der beiden Koeffizienten kann als Stabilitätsmaß aufgefasst werden und wird oft als sogenannte „Whirl-Frequency-Ratio“ WFR dimensionslos zu

$$WFR := \frac{\tilde{k}}{\tilde{\Omega} \tilde{C}} = k/C \quad (2.29)$$

angegeben². Gleichung (2.25) kann damit entsprechend zu

$$F_y/\varepsilon = C (WFR - \omega) \quad (2.30)$$

umgeformt werden. Für den in der Praxis erwünschten Fall $WFR < \omega$ wird $F_y < 0$ und wirkt daher der Orbitbewegung entgegen, also stabilisierend.

Diese einfachen Überlegungen geben allerdings nur einen Anhaltspunkt, ob ein einzelner Spalt einen eher stabilisierenden oder destabilisierenden Einfluss auf ein Rotorsystem hat. Häufig sind dafür jedoch auch aufwändigere Stabilitätsbetrachtungen erforderlich³. In der realen Anwendung ist das gesamte Rotorsystem mit allen Spalten und anderen Einflüssen zu betrachten.

¹ GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([29], 2002)

² CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

³ KUHR, NORDMANN UND PELZ, „Dynamic force and moment characteristics of annular gaps - Simulation results and evaluation of the relevance of the tilt and moment coefficients“, ([57], 2022)

2.1.2 Hirs' Reibungsfaktormodell für Schmierfilme

Die Erkenntnisse von Hirs¹ zur Wandreibung in turbulenten Schmierfilmen bilden das Fundament der bis heute verwendeten Bulk-Flow-Modelle. Hirs zeigte für glatte Spalte,

- dass ein Ansatz nach Blasius² für Wandreibungsfaktoren unter Nutzung von effektiven Bulk-Größen für beide begrenzenden Wände eines Schmierfilms genutzt werden kann, selbst wenn Relativbewegung zwischen den Wänden auftritt;
- dass die empirischen Modellparameter nur schwach davon abhängen, ob eine druckgetriebene Strömung, eine Schleppströmung oder eine Überlagerung von beidem vorliegt;
- dass die Richtung des Spannungsvektors an der Wand entgegengesetzt zur Richtung des Vektors der Bulk-Geschwindigkeit zeigt.

Aufgrund dieser Erkenntnisse fand der empirische Modellansatz allgemein weite Verbreitung in der Modellierung turbulenter Spaltströmungen, da er die Verwendung von Turbulenzmodellen obsolet macht. Im Folgenden wird nun das Reibungsfaktormodell nach Hirs zur Verwendung im CAPM hergeleitet.

Der Betrag der dimensionslosen Wandschubspannung ist definiert als

$$\tau_{\text{Wand}} := \frac{2 \tilde{\tau}_{\text{Wand}}}{\tilde{\rho} \tilde{\Omega}^2 \tilde{R}^2} = \sqrt{\tau_{s\varphi, \text{Wand}}^2 + \tau_{sz, \text{Wand}}^2}. \quad (2.31)$$

Die Schubspannungen werden je Wand benötigt und für einen Dichtspalt oder ein Gleitlager kann das Subskript „Wand“ durch „Rotor“ oder „Stator“ ersetzt werden. Die Bulk-Geschwindigkeit \bar{w}_{Wand} relativ zur jeweiligen möglicherweise bewegten Wand (hier also nicht relativ zum rotierenden Bezugssystem wie in Gleichung (2.3)) ist

$$\bar{w}_{\text{Wand}} := \frac{\tilde{w}_{\text{Wand}}}{\tilde{\Omega} \tilde{R}} = \sqrt{\bar{w}_{\varphi, \text{Wand}}^2 + \phi^2 \bar{w}_{z, \text{Wand}}^2}. \quad (2.32)$$

Normalerweise bewegt sich nur die Rotorwand in Umfangsrichtung, sodass die relative Axialgeschwindigkeit gleich der Absolutgeschwindigkeit ist $\bar{w}_{z, \text{Rotor}} = \bar{w}_{z, \text{Stator}} = \bar{c}_z$ und die Umfangsgeschwindigkeit $\bar{w}_{\varphi, \text{Stator}} = \bar{c}_\varphi$. Die Relativgeschwindigkeit in Umfangskomponente am Rotor ist $\bar{w}_{\varphi, \text{Rotor}} = \bar{c}_\varphi - 1$.

¹ HIRS, „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“, ([41], 1973)

² BLASIUS, „Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten“, ([7], 1913)

Der entsprechende Reibungsfaktor ist mit diesen lokalen Relativgeschwindigkeiten definiert als

$$f_{\text{Wand}} := \frac{2 \tilde{\tau}_{\text{Wand}}}{\tilde{\rho} \tilde{w}_{\text{Wand}}^2} = \frac{\tau_{\text{Wand}}}{\bar{w}_{\text{Wand}}^2} \quad (2.33)$$

und mit der lokalen effektiven Wand-Reynoldszahl

$$Re_{\text{Wand}} := \frac{\tilde{h} \tilde{w}_{\text{Wand}}}{\tilde{\nu}} = h \bar{w}_{\text{Wand}} Re \quad (2.34)$$

kann das Blasius-Gesetz für den Reibungsfaktor

$$f_{\text{Wand}} = m_{\text{Wand}} (Re_{\text{Wand}})^{n_{\text{Wand}}} = m_{\text{Wand}} (h \bar{w}_{\text{Wand}} Re)^{n_{\text{Wand}}} \quad (2.35)$$

mit den empirischen Modellparametern m_{Wand} und n_{Wand} aufgestellt werden. Für glatte Spalte gibt Childs¹ Richtwerte² von $m = 0.066$ und $n = -0.25$, die für beide Wände gleich sind; Lang³ ermittelte Werte von $m = 0.076$ und $n = -0.24$ mittels CFD für hydraulisch glatte Wände. Die Parameter können darüber hinaus von der Reynoldszahl oder der Wandrauheit abhängen.

Hirs ging davon aus, dass die Schubspannungskomponenten entgegen der Komponenten der relativen Wandgeschwindigkeit wirken. Dies bedeutet, dass der eingeschlossene Winkel θ zwischen den Umfangskomponenten und den Beträgen für Spannungsvektor und Geschwindigkeitsvektor identisch sind:

$$\theta_{\tau, \text{Wand}} \stackrel{!}{=} \theta_{w, \text{Wand}} \quad (2.36)$$

oder

$$\left| \frac{\tau_{sz, \text{Wand}}}{\tau_{s\varphi, \text{Wand}}} \right| \stackrel{!}{=} \left| \frac{\phi \bar{w}_{z, \text{Wand}}}{\bar{w}_{\varphi, \text{Wand}}} \right|. \quad (2.37)$$

Die Schubspannungskomponenten berechnen sich somit aus dem Reibungsfaktor zu

$$\tau_{s\varphi, \text{Wand}} = \pm \tau_{\text{Wand}} \cos \theta_{\tau, \text{Wand}} = \pm f_{\text{Wand}} \bar{w}_{\text{Wand}}^2 \cos \theta_{\tau, \text{Wand}} \quad \text{und} \quad (2.38)$$

$$\tau_{sz, \text{Wand}} = \pm \tau_{\text{Wand}} \sin \theta_{\tau, \text{Wand}} = \pm f_{\text{Wand}} \bar{w}_{\text{Wand}}^2 \sin \theta_{\tau, \text{Wand}}, \quad (2.39)$$

wobei das Vorzeichen von der spezifischen Wand und der Strömungsrichtung abhängt. Falls die Bedingung (2.36) zutrifft, werden die Gleichungen (2.38) und (2.39) zu

$$\tau_{s\varphi, \text{Wand}} = \pm f_{\text{Wand}} \bar{w}_{\text{Wand}} \bar{w}_{\varphi, \text{Wand}} \quad \text{und} \quad (2.40)$$

$$\tau_{sz, \text{Wand}} = \pm f_{\text{Wand}} \bar{w}_{\text{Wand}} \phi \bar{w}_{z, \text{Wand}}, \quad (2.41)$$

¹ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

² angepasst an die Definitionen dieser Arbeit

³ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017*, ([60], 2018)

welche in dieser Form in bekannten Modellen wie bspw. von Childs¹ und auch im CAPM für glatte Spalte verwendet werden.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden später zeigen, dass die Bedingung (2.36) nur bei glatten Spalten, nicht jedoch bei profilierten Wänden gültig ist. Aus diesem Grund wird ein zusätzlicher empirischen Korrekturfaktor zur Berücksichtigung der Anisotropie

$$\Lambda_{\text{Wand}} := \frac{\theta_{\tau, \text{Wand}}}{\theta_{w, \text{Wand}}} \quad (2.42)$$

für den Winkel eingeführt, der von den Betriebsbedingungen und der Profilstadt abhängen kann. Damit ergeben sich die Schubspannungskomponenten in verallgemeinerter Form zu

$$\tau_{s\varphi, \text{Wand}} = \pm f_{\text{Wand}} \bar{w}_{\text{Wand}}^2 \cos(\Lambda_{\text{Wand}} \theta_{w, \text{Wand}}) \quad \text{und} \quad (2.43)$$

$$\tau_{sz, \text{Wand}} = \pm f_{\text{Wand}} \bar{w}_{\text{Wand}}^2 \sin(\Lambda_{\text{Wand}} \theta_{w, \text{Wand}}). \quad (2.44)$$

2.1.3 Abschätzung bezüglich des Rauheitsregimes

Es ist zu erwähnen, dass zur Berücksichtigung von hydraulisch rauen Wänden statt der Blasius-Korrelation (2.35) manchmal eine Gleichung nach Moody¹ der Form

$$f_{\text{Wand}} = a_1 \left[1 + \left(a_2 e_{\text{Wand}} + \frac{a_3}{Re_{\text{Wand}}} \right)^{1/3} \right] \quad (2.45)$$

für den Reibungsfaktor verwendet wird². Hierbei sind a_1 bis a_3 zu kalibrierende empirische Modellparameter und $e_{\text{Wand}} := \tilde{e}_{\text{Wand}}/\tilde{h}$ ist die (lokale) relative Rauheit der jeweiligen Wand. Die Koeffizienten der Blasius-Korrelation dagegen müssten für das hydraulisch raue Reibungsregime an spezifische Rauheiten und Reynoldszahlbereiche angepasst werden. Die Abweichung zwischen hydraulisch glatter und rauer Wand ist besonders stark bei großen Rauheiten und großen Reynoldszahlen ausgeprägt.

Im folgenden soll eine Abschätzung des Einflusses der Wandrauheit erfolgen. Die beste Analogie zum engen Ringspalt ist ein ebener Kanal. Hierfür wird auf empirische Korrelationen nach Idelchik³ zurückgegriffen. Der effektive Reibungsfaktor für einen Rechteckkanal ist als Korrektur des Reibungsfaktors für ein Kreisrohr gegeben:

$$f_{\text{Kanal}} = K_{\text{Kanal}} f_{\text{Rohr}}. \quad (2.46)$$

¹ MOODY, „An Approximate Formula for Pipe Friction Factors“, ([73], 1947)

² CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

³ IDELCHIK, *Handbook of Hydraulic Resistance: 4th Revised and Augmented Edition*, ([42], 2008)

Tabelle 2.3 – Werte des Reibungsfaktors f_{Rohr} .

e	Re_{Kanal} in 10^3					
	2	3	5	10	20	50
0	0.040	0.036	0.032	0.026	0.022	0.017
0.006	0.040	0.038	0.033	0.028	0.028	0.030
0.020	0.040	0.041	0.042	0.044	0.048	0.049

Zunächst muss der Korrekturfaktor K_{Kanal} bestimmt werden. Der hydraulische Durchmesser eines Rechteckkanals mit Höhe \tilde{h} und Breite \tilde{b} lautet

$$\tilde{D}_h = \frac{2\tilde{b}\tilde{h}}{\tilde{b} + \tilde{h}} = \frac{2\tilde{h}}{1 + \tilde{h}/\tilde{b}}. \quad (2.47)$$

Ein ebener Kanal ergibt sich als Grenzwert für $\tilde{b} \rightarrow \infty$ und der hydraulische Durchmesser wird wegen $\tilde{h}/\tilde{b} \rightarrow 0$ zu

$$\lim_{\tilde{b} \rightarrow \infty} \tilde{D}_h = 2\tilde{h}. \quad (2.48)$$

Die Reynoldszahl wird damit definiert als

$$Re'_{\text{Kanal}} := \frac{\tilde{c} \tilde{D}_h}{\tilde{\nu}} = 2 \frac{\tilde{c} \tilde{h}}{\tilde{\nu}}. \quad (2.49)$$

Um für weitere Überlegungen eine bessere Vergleichbarkeit mit der Reynoldszahl des CAPM, siehe Tabelle 2.2, und der effektiven Reynoldszahl (2.2) gewährleisten zu können, definieren wir die Reynoldszahl hier als

$$Re_{\text{Kanal}} := \frac{Re'_{\text{Kanal}}}{2} \quad (2.50)$$

und rechnen im folgenden alle Werte entsprechend um. Damit kann der konstante Wert für den Korrekturfaktor für turbulente Strömung

$$K_{\text{Kanal}} = 1.1 \text{ bei } Re_{\text{Kanal}} > 1000 \quad (2.51)$$

im entsprechenden Diagramm bei Idelchik¹ abgelesen werden. Der Faktor K_{Kanal} ist unabhängig vom Reibungsregime. Dieses wird in Gleichung (2.46) also allein durch den den Rohrreibungsfaktor f_{Rohr} berücksichtigt.

¹ IDELCHIK, *Handbook of Hydraulic Resistance: 4th Revised and Augmented Edition*, ([42], 2008)

Für raue Rohre wird die relative Rauheit mit dem hydraulischen Durchmesser mit

$$e := \frac{\tilde{e}}{\tilde{D}_h} = \frac{\tilde{e}}{2\tilde{h}} \quad (2.52)$$

gegeben. Als Maß für \tilde{e} kann die gemittelte Rautiefe \tilde{R}_z der Fläche eines Bauteils dienen. Diese liegt bei genauen Dreh- und Fräsprozessen typischerweise im Bereich von 1 bis $10 \mu\text{m}^1$. Die Rautiefe \tilde{R}_z wurde zusätzlich an sieben verwendeten Dichtungen an verschiedenen Stellen gemessen und beträgt im neuen Zustand 4 bis $5 \mu\text{m}$. Die mittlere Spaltweite beträgt am verwendeten Prüfstand außerdem typischerweise 0.15 bis 0.35 mm. Damit können typische Werte für die relative Rauheit e für den vorliegenden Fall abgeschätzt werden, die im Bereich von 0.006 bis $0.017 \approx 0.02$ liegen.

Werte für den Reibungsfaktor f_{Rohr} von Idelchik² sind in Tabelle 2.3 für den hydraulisch glatten Fall $e = 0$ und die beiden erwähnten relativen Rauheitswerte für verschiedene Reynoldszahlen gegeben. Es zeigt sich, dass der Reibungsfaktor für den glatten Fall und die geringe relative Rauheit mit steigender Reynoldszahl abnehmen. Die Werte bei der höheren relativen Rauheit dagegen steigen mit der Reynoldszahl an. Bei $Re_{\text{Kanal}} = 2 \times 10^3$ stimmen die drei Werte noch überein. Mit steigender Reynoldszahl werden die Unterschiede jedoch bedeutend größer.

Hier von Interesse sind statt der eigentlichen Werte viel mehr der Fehler, der gemacht wird, wenn im hydraulisch rauen Reibungsregime ein hydraulisch glattes Modell verwendet wird. Dafür wird der Fehler

$$E := 1 - \frac{f_{\text{Rohr}}(e = 0)}{f_{\text{Rohr}}(e > 0)} \quad (2.53)$$

definiert. Die Werte für die beiden o. g. relativen Rauheiten sind in Tabelle 2.4 in Prozent aufgeführt. Bei $Re_{\text{Kanal}} = 2 \times 10^3$ ist der mögliche Fehler in jedem Fall vernachlässigbar klein. Aber bereits bei $Re_{\text{Kanal}} = 5 \times 10^3$ und der höheren relativen Rauheit wird ein großer Fehler gemacht. Bei $Re_{\text{Kanal}} = 10^4$ entsteht dann schon bei der geringeren relativen Rauheit ein substantieller Fehler, der mit steigender Reynoldszahl immer weiter anwächst.

Zusammenfassend zeigt sich also, dass die Einsatzgrenze eines Reibungsmodells für hydraulisch glatte Wände durch Reynoldszahl und relative Rauheit stark eingeschränkt wird. Wenn ein tolerierbarer Fehler von ungefähr $E \approx 5\%$ angesetzt wird, reicht die Gültigkeit des hydraulisch glatten Modells bei geringer relativer Rauheit ungefähr in den Bereich von $Re_{\text{Kanal}} \approx 7.5 \times 10^3$.

¹ GOMERINGER, *Tabellenbuch Metall*, ([35], 2014)

² IDELCHIK, *Handbook of Hydraulic Resistance: 4th Revised and Augmented Edition*, ([42], 2008)

Tabelle 2.4 – Fehler des Reibungsfaktors E bei Vernachlässigung des Rauheitseinflusses in Prozent.

e	Re_{Kanal} in 10^3					
	2	3	5	10	20	50
0.006	< 1.3	5.3	3.0	7.1	21.4	43.3
0.020	< 1.3	12.2	23.8	40.9	54.2	65.3

Bei höheren (aber dennoch typischen) Werten der relativen Rauheit liegt die Grenze bereits bei $Re_{\text{Kanal}} \approx 2.5 \times 10^3$.

Es kann angenommen werden, dass diese für den ebenen Kanal bestimmten Werte näherungsweise auch auf die Strömung in engen Ringspalten im konzentrischen Fall übertragen werden können. Dafür muss das mittlere Spaltspiel der Kanalhöhe gleichgesetzt werden. Außerdem muss die Geschwindigkeit in der Reynoldszahl als effektive Geschwindigkeit betrachtet werden, d. h. es handelt sich dann um eine effektive Reynoldszahl.

2.2 Stand der Forschung zur Modellierung profilierter Dichtspalte

Profilierte Dichtungen werden regelmäßig ebenso in hydraulischen, wie auch in thermischen Turbomaschinen verwendet^{1,2,3,4}. In der vorliegenden Art liegt der Schwerpunkt auf Flüssigkeitsdichtungen, es sollen hier jedoch zunächst kurz die wesentlichen Unterschiede angesprochen werden. Bei Gasdichtungen ist i. d. R. mit Kompressibilitätseffekten und dadurch einer zusätzlichen Abhängigkeit von der Machzahl zu rechnen. Weiterhin treten im Kontrast zu Flüssigkeitsdichtungen wesentlich geringere Reaktionskräfte auf. Daher ist die zusätzliche Trägheit des Fluids bei Gasdichtungen oft vernachlässigbar, keineswegs jedoch bei Flüssigkeitsdichtungen. Zudem können rotordynamische Koeffizienten bei Gasen frequenzabhängig werden.

Das strömungsmechanische Verhalten von glatten Flüssigkeitsdichtungen und der sich daraus ergebende Einfluss auf die Rotordynamik einer Maschine kann inzwischen mit integro-differentiellen Modellen weitgehend zuverlässig berechnet werden, bspw. mit dem oben vorgestellten CAPM^{5,6,7}. Dies trifft auf profilierte Spalte bisher jedoch grundsätzlich nicht zu. Das veränderte Reibungsverhalten eines profilierten Spalts beeinflusst sowohl die Leckage, als auch die Kräfte auf den Rotor. Dieser Umstand muss von entsprechenden Modellen erfasst werden. Der im Folgenden ausgeführte Stand der Forschung offenbart jedoch einen Mangel an allgemeingültigen, zuverlässigen und validierten Modellen. Aufgrund der Komplexität der Strömung und der Vielzahl an Einflussfaktoren zeigt der Trend hin zu aufwändigen CFD-Analysen oder zumindest zu Hybrid-Methoden.

Während in der Literatur keine einheitlichen Bezeichnungen bzgl. profilierter Dichtungen vorzufinden sind, sollen hier kurz die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Begrifflichkeiten erläutert werden. Profilierte Dichtungen lassen sich grundsätzlich in zwei Kategorien einteilen: erstens solche, bei denen der

¹ BRENNEN, *Hydrodynamics of pumps*, ([8], 1994)

² GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([37], 2010)

³ GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([29], 2002)

⁴ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

⁵ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

⁶ KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps - Experimental and simulation results“, ([53], 2022)

⁷ KUHR, NORDMANN UND PELZ, „Dynamic force and moment characteristics of annular gaps - Simulation results and evaluation of the relevance of the tilt and moment coefficients“, ([57], 2022)

Längsschnitt des Profils umfangssymmetrisch ist; und zweitens solche, die keine Umfangssymmetrie aufweisen. Zur erstgenannten Gruppe gehören die meisten Labyrinthdichtungen und bspw. Dichtungen mit Sägezahnprofil. Zu den nichtsymmetrischen Profilen gehören alle, die einzelne getrennte Kavitäten aufweisen, bspw. Dichtungen mit Waben- oder Bohrlochprofil.

Labyrinthdichtungen bestehen aus verschiedenen Kammern, die durch sogenannte Dichtspitzen (engl. *tooth* bzw. *teeth*) voneinander getrennt werden. Über der Dichtspitze bleibt ein enger durchströmter Spalt zwischen Rotor und Stator. Während die Kammern bei Gasdichtungen i. d. R. vergleichsweise breit und die Dichtspitzen schmal sind, sind bei Flüssigkeitsdichtungen oft auch ähnliche Breiten anzutreffen. Auch die Höhe kann in Relation mit der engen Spaltweite stark variieren. Manchmal sind deswegen auch Bezeichnungen wie gerillte oder genutete Dichtungen zu finden. In dieser Arbeit werden zur Verallgemeinerung immer die Begriffe Labyrinthdichtung, Steg (engl. *land*) und Nut (engl. *groove*) verwendet. Labyrinthdichtungen werden im Englischen ohne besondere Systematik ähnlich als *labyrinth seal*, *grooved seal* oder auch *serrated seal* bezeichnet.

Bei sogenannten Vollabyrinthen sind die Stege abwechselnd an Rotor und Stator angebracht, bei Durchblicklabyrinthen befinden sie sich ausschließlich am gleichen Teil. Selbstverständlich haben sich auch spezielle davon abgewandelte Bauformen entwickelt, bspw. Stufendichtungen oder Kamm-Nut-Dichtungen. Stufendichtungen können als eine spezielle Form eines Volllabyrinths bezeichnet werden. Mit einer Stufendichtung ist i. d. R. eine einzelne Nut mit zwei breiten Stegen gemeint, wovon sich einer am Stator und einer am Rotor befindet. Der Steg am Rotor wird dabei oft durch einen Wellenabsatz ersetzt.

Wie später in Abschnitt 2.2.2 erläutert wird, wirken Dichtungen mit profilierten Statoren und glatten Rotoren stabilisierend auf die Rotordynamik, sodass häufig eine solche Bauform gegenüber den anderen Varianten zu bevorzugen ist. Wenn in der vorliegenden Arbeit von Labyrinth- oder noch allgemeiner von profilierten Dichtungen die Rede ist, wird daher davon ausgegangen, dass sich das Profil ausschließlich am Stator befindet.

Bei nichtsymmetrischen Profilen sind viele Arten und Anordnungen von Geometrien vorzufinden. Am weitesten verbreitet sind die o. g. sechseckigen Waben- und Bohrlochprofile, jedoch gibt es bspw. auch Profile mit dreieckigem oder viereckigem Querschnitt der einzelnen Kavitäten. Das Ziel der fast immer am Stator befindlichen Profile ist nicht nur die Reduktion der Leckage, die bei Labyrinthdichtungen im Vordergrund steht, sondern zudem die Erhöhung der Dämpfung von Rotorschwingungen, was zu einer erhöhten rotordynamischen Stabilität und einer Erweiterung des möglichen Betriebsbereichs der Maschine führt. Aus diesem Grund werden diese profilierten Dichtungen auch

als Dämpferdichtungen (engl. *dampfer seal* oder *damping seal*) bezeichnet.

In den folgenden beiden Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 wird jeweils der Stand der Forschung zu Labyrinth- und Dämpferdichtungen vorgestellt. Aufgrund der kaum zu überblickenden Vielzahl an Publikationen wird kein Anspruch auf die Vollständigkeit gelegt, es werden viel mehr wichtige Schlüsselarbeiten hervorgehoben. Der Fokus wird dabei auf die Modellierung im Sinne von integro-differentiellen Modellen wie dem CAPM oder Bulk-Flow-Modellen sowie auf Flüssigkeitsdichtungen mit inkompressibler Strömung gelegt.

2.2.1 Labyrinthdichtungen

Nordmann u. a.¹ präsentierten einen der ersten Modellansätze für Labyrinthdichtungen. Hierbei handelte es sich um einen gewöhnlichen Bulk-Flow-Ansatz nach Childs für glatte Spalte, bei dem lediglich eine mittlere Spaltweite unter Berücksichtigung der Nuten verwendet wurde. Nach diesen anfänglichen Überlegungen wurden die ersten substantiellen Schmierfilmmodelle von Iwatsubo und Sheng² sowie von Florjancic³ entwickelt. Diese Modelle beruhten auf einem Bulk-Flow-Ansatz mit mehreren getrennten Kontrollvolumen, die die Labyrinthgeometrie abdeckten. Das Modell von Florjancic nutzte drei Kontrollvolumen und wurde im Verlauf der Zeit von verschiedenen anderen Wissenschaftlern aufgegriffen^{4,5,6,7}. Hierbei blieben die grundlegenden Annahmen und Modellbestandteile jedoch bestehen, sodass die jeweiligen Modifizierungen als unwesentlich angesehen werden können. Stellvertretend für alle genannten Modelle wird daher im Folgenden das ursprüngliche Modell von Florjancic vorgestellt.

¹ NORDMANN U. A., „Coefficients and leakage of parallel grooved and smooth seals“, ([76], 1987)

² IWATSUBO UND SHENG, „Evaluation of Dynamic Characteristics Parallel Grooved Annular Seals by Theory and Experiment“, ([46], 1990)

³ FLORJANCIC, „Annular seals of high energy centrifugal pumps: a new theory and full scale measurement of rotordynamic coefficients and hydraulic friction factors“, ([28], 1990)

⁴ MARQUETTE UND CHILDS, „An Extended Three-Control-Volume Theory for Circumferentially-Grooved Liquid Seals“, ([68], 1996)

⁵ HA UND LEE, „A rotordynamic analysis of circumferentially-grooved pump seals based on a three-control-volume theory“, ([40], 2000)

⁶ ARGHIR UND FRÉNE, „A Bulk-Flow Analysis of Static and Dynamic Characteristics of Eccentric Circumferentially-Grooved Liquid Annular Seals“, ([3], 2004)

⁷ ZHANG, YIN UND SUN, „Establishment and solution of governing equation for planar-grooved liquid seals based on three-control-volume theory“, ([109], 2019)

Der Ansatz von Florjancic¹ wurde von Erkenntnissen zu Gasdichtungen in Radialverdichtern inspiriert, bspw. von Wyssmann, Pham und Jenny² sowie von Scharrer³. Die wesentlichen Aspekte des Modells sind die Folgenden: die Dichtungsgeometrie eines Stegs und einer Nut wird in drei Kontrollvolumen aufgrund unterschiedlicher physikalischer Effekte eingeteilt. Erstens wird im engen Kanal über dem Steg ein typischer Bulk-Flow-Ansatz verwendet. Zweitens wird die freie Scherschicht über der Nut berücksichtigt und in ein Kontrollvolumen gefasst. Drittens wird die Existenz eines einzelnen Wirbels in der Nut angenommen, wodurch das dritte Kontrollvolumen zustande kommt.

Für die Umfangsrichtung wird von Florjancic das sogenannte Strahlschubspannungsmodell (*jet shear stress model*) nach Wyssmann, Pham und Jenny² verwendet. Dieses Strahlmodell basiert auf einer Lösung für eine ebene turbulente Mischungsschicht für das mittlere Geschwindigkeitsprofil und einem Prandtl'schen Mischungswegmodell zusammen mit einer empirischen Korrelation für den Mischungsweg zur Berücksichtigung der Turbulenz. Wyssmann, Pham und Jenny² berücksichtigten ursprünglich lediglich die Schubspannung in Umfangsrichtung mit dieser Methode und vernachlässigten die axiale Komponente. Im Gegensatz dazu berücksichtigte Florjancic beide Komponenten. Er sah das Ergebnis des Strahlschubspannungsmodells als effektiven Betrag eines Spannungsvektors an, der in die beiden Komponenten zerlegt werden kann. Hierfür verwendete er die Bulk-Geschwindigkeitskomponenten in der gleichen Weise, wie es zuvor von Hirs⁴ für die Wandschubspannungen dargestellt wurde. Diese Methodik erlaubte die Koppelung der drei Kontrollvolumen und wurde anschließend in der gleichen Form von den anderen o. g. Forschern verwendet.

Florjancic führte zur Validierung Experimente zur Bestimmung von rotordynamischen Koeffizienten durch, zu denen sein Modell akzeptable bis gute Übereinstimmung lieferte. Die Nuten der betrachteten Dichtungen können allerdings nur als sehr klein bezeichnet werden, die Nuttiefe ist vergleichbar mit der Spaltweite über den Stegen.

¹ FLORJANCIC, „Annular seals of high energy centrifugal pumps: a new theory and full scale measurement of rotordynamic coefficients and hydraulic friction factors“, ([28], 1990)

² WYSSMANN, PHAM UND JENNY, „Prediction of Stiffness and Damping Coefficients for Centrifugal Compressor Labyrinth Seals“, ([104], 1984)

³ SCHARRER, „A Comparison Of Experimental And Theoretical Results For Labyrinth Gas Seals“, ([89], 1987)

⁴ HIRS, „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“, ([41], 1973)

Spirig¹ untersuchte später die Stufendichtung einer Francis-Turbine experimentell und analysierte die komplexe Strömung in der Kammer. Er teilte den Kammerquerschnitt in verschiedene Gebiete auf, denen er generische Grundströmungen zuwies. Diese versuchte er mit (semi-) analytischen oder empirischen Modellen zu beschreiben. Er stellte dar, dass abhängig von der Kammergeometrie in axialer Richtung entweder ein Freistrahle oder ein Wandstrahl vorliegt. Er zeigte zudem, dass es in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen auch möglich ist, dass sich ein Freistrahle an die Wand anlegt und so zum Wandstrahl wird. Für diesen Fall stellte Spirig einen komplexen Modellansatz vor. Für die Strömung im Spalt wurde ein selbst hergeleiteter Bulk-Flow-Ansatz verwendet. Hierbei wurden die beiden Stege als einzelne glatte Spalte berücksichtigt. Um die Einlassrandbedingungen des zweiten Spalts annähernd korrekt vorgeben zu können, ermittelte er empirisch einen sogenannten Ausmischungsfaktor. Er führte zwar selbst räumlich und zeitlich aufgelöste Druckmessungen durch, die Modellergebnisse verglich er jedoch mit Literaturwerten und stellte mäßige Übereinstimmung fest.

Storteig² führte dagegen zweidimensionale CFD-Simulationen für glatte und Labyrinthdichtungen durch. Er definierte unterschiedliche mittlere Reibungsfaktoren für die axiale und Umfangsrichtung. Für die Axialkomponente nutzte er eine allgemeine Definition des Reibungsfaktors, die er mithilfe des Gesamtdruckverlustes über der Dichtung kalibrierte. Den Lomakin-Effekt, einen zusätzlichen Eintrittsdruckverlust, schloss er aus den Simulationen aus, indem er direkt am Spalteintritt eine konstante Axialgeschwindigkeit vorschrieb. Für die Umfangskomponente nutzte er einen Moody-Ansatz für den Reibungsfaktor und kalibrierte einen virtuellen Rauheitswert für den Einfluss der Nuten. Zur Kalibrierung diente der axiale Verlauf der Umfangskomponente der Bulk-Geschwindigkeit aus den CFD-Simulationen. Außerdem wurden die Reibungsfaktoren zusammen mit einem Bulk-Flow-Modell nach Childs³ zur Bestimmung von rotordynamischen Koeffizienten genutzt und mit Literaturwerten verglichen. Die Vorhersagegenauigkeit seines Modells entsprach den seinerzeit existierenden anderen Modellen, bspw. Florjancic⁴.

¹ SPIRIG, „Einfluss der Kammerströmung auf die strömungsbedingten Kräfte im endlich langen Spalt einer hydraulischen Labyrinthdichtung und Ein Beitrag zur Identifikation von auslenkungsabhängigen, rotordynamischen Spaltkoeffizienten mittels Druck- und Positionsmessung“, ([92], 1999)

² STORTEIG, „Dynamic characteristics and leakage performance of liquid annular seals in centrifugal pumps“, ([96], 1999)

³ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

⁴ FLORJANCIC, „Annular seals of high energy centrifugal pumps: a new theory and full scale measurement of rotordynamic coefficients and hydraulic friction factors“, ([28], 1990)

Für Öllabyrinthdichtungen unter laminaren Strömungsbedingungen wurde von San Andrés und Delgado¹ ein Bulk-Flow-Modell vorgestellt, das sich ähnlich zu den ersten Überlegungen von Nordmann u. a.² einer effektiven Spaltweite bedient. Die Formulierung des Modells unter Nutzung der Trägheitsterme erlaubte es im Gegensatz zur Reynolds'schen Differentialgleichung zudem, den Trägheitskoeffizienten zu bestimmen. Für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Labyrinthdichtungen spielt laminare Strömung jedoch keine Rolle.

Ungefähr zeitgleich mit der vorliegenden Arbeit befasste sich eine andere Forschergruppe ebenfalls mit der Analyse der Strömung in Flüssigkeits-Labyrinthdichtungen. Diese aktuellen Arbeiten unterstreichen nochmals, dass heute weiterhin Bedarf an zuverlässigen Modellen besteht. So griffen Gibbons u. a.³ die Idee einer trennenden Stromlinie zwischen dem Wirbel in der Nut und der darüber verlaufenden Kanalströmung auf, die zuerst von Florjancic⁴ präsentiert und danach bspw. bereits von Marquette und Childs⁵ genutzt wurde. Hierfür wurden zweidimensionale CFD-Simulationen zur Analyse der Strömung einer einzelnen Nut durchgeführt. Das Hauptaugenmerk lag auf der Bestimmung der trennenden Stromlinie und einer daraus berechneten „effektiven Filmdicke“, die den Abstand der Stromlinie zur Rotorwand darstellt. Die physikalische Ursache der Ausweitung der Stromröhre wird von den Autoren nicht besprochen. Zudem wurde eine mittlere axiale Schubspannung aus der gesamten Druckdifferenz über der Nut berechnet. Gibbons u. a. stellten eine wesentliche Abhängigkeit von der effektiven Reynoldszahl und dem Verhältnis von axialer zu Umfangsreynoldszahl fest. Eine Umfangskomponente für die Schubspannung wurde nicht angegeben. Der vorgestellte Ansatz sollte die Modellierung der Strömung in der Nut laut Gibbons u. a. auf eine physikalische Grundlage stellen. Wie die trennende Stromlinie bzw. die effektive Filmdicke und die mittlere Schubspannung zur tatsächlichen Berechnung einer Labyrinthdichtung im Rahmen von Schmierfilmmodellen genutzt werden soll, wurde nicht erläutert.

¹ SAN ANDRÉS UND DELGADO, „A Novel Bulk-Flow Model for Improved Predictions of Force Coefficients in Grooved Oil Seals Operating Eccentrically“, ([87], 2012)

² NORDMANN U. A., „Coefficients and leakage of parallel grooved and smooth seals“, ([76], 1987)

³ GIBBONS U. A., „Circumferentially Grooved Seal Flow Field Analysis Based on Effective Film Thickness to Improve Bulk Flow Models“, ([33], 2022)

⁴ FLORJANCIC, „Annular seals of high energy centrifugal pumps: a new theory and full scale measurement of rotordynamic coefficients and hydraulic friction factors“, ([28], 1990)

⁵ MARQUETTE UND CHILDS, „An Extended Three-Control-Volume Theory for Circumferentially-Grooved Liquid Seals“, ([68], 1996)

In einer folgenden Arbeit griffen Gibbons und Goynes¹ die o. g. Methode auf und entwickelten sie weiter. Zunächst wurde ein Bulk-Flow-Modell vorgestellt, das lokal in der Stromröhre über einer Einzelnut im Vergleich mit CFD-Daten genutzt wird, um den Einfluss der Nut im Vergleich zu einer glatten Wand zu bewerten. Es wurde nun zusätzlich die Umfangskomponente der Schubspannung untersucht und als mittlerer Wert angegeben. Die Autoren kritisierten abermals die Abhängigkeit existierender Ansätze von empirischen Modellparametern und gaben erneut an, die Berechnung auf eine physikalische Grundlage stellen zu wollen. Schlussendlich reduzierten sie ihre Erkenntnisse jedoch auf zwei vollständig empirische Korrekturfaktorkennfelder, die insgesamt zwölf empirische Modellparameter benötigen. Die Skalierung mit unterschiedlichen Nutgeometrien wurde dabei noch nicht berücksichtigt. Die Kennfelder dienten der Korrektur von Schubspannungswerten für glatte Spalte, die mittels eines typischen Hirs-Modells berechnet wurden. Das Korrekturfaktormodell wurde anschließend mit CFD- und Literaturdaten verifiziert. Die Autoren betonten einen Zusammenhang zwischen der sogenannten effektiven Filmdicke und der Schubspannung. Tatsächlich spielt die aufwändig bestimmte effektive Filmdicke im Modell der Autoren offenbar jedoch nur eine unwesentliche Rolle.

Arghir und Frêne² entwickelten eine aufwändige Methode für Labyrinthdichtungen, bei der die vollständige Navier-Stokes-Gleichung unter Nutzung eines k - ϵ -Turbulenzmodells mit einem linearen Störansatz für die Exzentrizität kombiniert wird. Die Gleichungen nullter Ordnung stellen dabei den konzentrischen, umfangssymmetrischen Zustand dar und die Gleichungen erster Ordnung die Störung bei kleiner Exzentrizität. Die Gleichungen müssen mit einer Finite-Volumen-Methode gelöst werden und erfordern einen hohen Berechnungsaufwand. Die Ergebnisse für rotordynamische Koeffizienten stimmten jedoch gut mit dem Experiment überein.

Zudem existieren weitere Hybridmethoden, die CFD und Bulk-Flow-Modelle kombinieren, bspw. von San Andrés u. a.³ sowie Wu und San Andrés⁴. Außerdem sind einige Veröffentlichungen zu finden, die sich dem Thema rein

¹ GIBBONS UND GOYNE, „Form Shear Stress (FSS) Correction in Bulk Flow Analysis of Grooved Seals Based on Effective Film Thickness“, ([32], 2023)

² ARGHIR UND FRËNE, „Rotordynamic Coefficients of Circumferentially-Grooved Liquid Seals Using the Averaged Navier-Stokes Equations“, ([4], 1997)

³ SAN ANDRÉS U. A., „A Computational Fluid Dynamics Modified Bulk Flow Analysis for Circumferentially Shallow Grooved Liquid Seals“, ([88], 2018)

⁴ WU UND SAN ANDRÉS, „Pump Grooved Seals: A Computational Fluid Dynamics Approach to Improve Bulk-Flow Model Predictions“, ([103], 2019)

simulativ annähern, bspw. von Zhang u. a.¹. Die Ergebnisse werden von den Autoren als vielversprechend bewertet.

Erwähnenswert sind abschließend die folgenden interessanten Arbeiten, die aber wenig Information zur Modellierung liefern: Kündig² untersuchte experimentell Reibungsbeiwerte, Druckverlustkoeffizienten sowie Steifigkeiten von glatten, Stufen- und Labyrinthdichtungen. Amoser³ stellte eine stark vereinfachte Berechnung für dynamische Spaltkräfte und Stabilität auf und verglich diese mit numerischen Berechnungen und dem Experiment. Kwanka⁴ stellte ein neues experimentelles Identifikationsverfahren für rotordynamische Koeffizienten vor, das sowohl für Flüssigkeitsdichtungen, als auch für Gasdichtungen (die sich durch kleine Kräfte auszeichnen) anwendbar ist.

2.2.2 Dämpferdichtungen

Der Entwurf von nichtsymmetrisch profilierten Dichtungen bzw. sogenannten Dämpferdichtungen geht auf Pragenau⁵ zurück. Er zeigte anhand eines Bulk-Flow-Ansatzes unter Verwendung der Moody-Gleichung, dass sich eine erhöhte Rauheit am Stator einer Dichtung sowohl positiv auf die Leckage, als auch auf die rotordynamische Stabilität auswirkt. Dieser stabilisierende Effekt entsteht dadurch, dass der raue Stator die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Fluids im Vergleich zum Fall gleicher Rauheit reduziert, vgl. Gleichungen (2.7) und (2.12) für einen konzentrischen Fall.

Von hier an entstanden viele Arbeiten, die Art und Auswirkungen von unterschiedlichen Statorprofilen wie sechseckigen Wabenprofilen, Dreieckprofilen oder Bohrlochprofilen bei Gas- und Flüssigkeitsdichtungen untersuchten, wovon hier einige beispielhaft genannt werden sollen. Der Einfluss der Bohrlochtiefe wurde beispielsweise von Childs und Kim⁶, Childs, Shin und Seifert⁷,

¹ ZHANG U. A., „Numerical Simulation of the Flow Field in Circumferential Grooved Liquid Seals“, ([108], 2013)

² KÜNDIG, „Gestufte Labyrinthdichtungen hydraulischer Maschinen: Experimentelle Untersuchung der Leckage, der Reibung und der stationären Kräfte“, ([58], 1994)

³ AMOSER, „Strömungsfelder und Radialkräfte in Labyrinthdichtungen hydraulischer Strömungsmaschinen“, ([1], 1995)

⁴ KWANKA, *Der Einfluss von Labyrinthdichtungen auf die Dynamik von Turbomaschinen: Habilitation*, ([59], 2001)

⁵ PRAGENAU, *Damping Seals for Turbomachinery*, ([80], 1982)

⁶ CHILDS UND KIM, „Test Results For Round-Hole-Pattern Damper Seals: Optimum Configurations and Dimensions for Maximum Net Damping“, ([14], 1986)

⁷ CHILDS, SHIN UND SEIFERT, „A Design to Improve the Effective Damping Characteristics of Hole-Pattern-Stator Annular Gas Seals“, ([19], 2008)

Childs, Arthur und Mehta¹ sowie Migliorini, Untaroiu und Wood² untersucht. Der Einfluss des Bohrungsdurchmessers wurde von Vannarsdall und Childs³ sowie Yan u. a.⁴ berücksichtigt. Gegenüberstellungen von Bohrlochprofil- und Wabenprofil dichtungen wurden von Nielsen, Jønck und Underbakke⁵ mithilfe von CFD-Simulationen durchgeführt. Der Unterschied zwischen Bohrlochprofilen und Dichtungen mit einzelnen größeren Taschen war Gegenstand der Arbeit von Ertas, Delgado und Vannini⁶. Ein Vergleich zwischen Labyrinthdichtungen und Bohrlochprofilen wurde zudem von Picardo und Childs⁷ sowie von Li, Li und Yan⁸ durchgeführt.

Die Modellierung des profilierten Stators erfolgte seitdem meist durch angepasste Reibungsfaktoren nach Hirs, entweder unter Verwendung einer Blasius- oder Moody-Gleichung. Die Kalibrierung erfolgte zunächst durch Experimente und anschließend vermehrt mittels CFD. Im Folgenden werden die wichtigsten ausgewählten Arbeiten beschrieben.

Childs und Kim⁹ zeigten im Rahmen ihrer Bulk-Flow-Theorie für endlich lange Spalte, dass die Erkenntnisse von Pragenaus auch mit einem angepassten Hirs-Modell abbildbar sind. Im Experiment an tatsächlichen, flüssigkeitsdurchströmten Dichtungen zeigten sie für verschiedene spezifische Profilgeometrien, dass ein Bohrlochprofil die besten Ergebnisse im Sinne zusätzlicher Dämpfung und reduzierter Leckage bot.

Zur Kalibration von Reibungsfaktoren wurden vereinfachte Versuche an

¹ CHILDS, ARTHUR UND MEHTA, „The Impact of Hole Depth on the Rotordynamic and Leakage Characteristics of Hole-Pattern-Stator Gas Annular Seals“, ([16], 2014)

² MIGLIORINI, UNTAROIU UND WOOD, „A Numerical Study on the Influence of Hole Depth on the Static and Dynamic Performance of Hole-Pattern Seals“, ([70], 2015)

³ VANNARSDALL UND CHILDS, „Static and Rotordynamic Characteristics for a New Hole-Pattern Annular Gas Seal Design Incorporating Larger Diameter Holes“, ([101], 2014)

⁴ YAN U. A., „Numerical Investigations on Rotordynamic Characteristic of Hole-Pattern Seals With Two Different Hole-Diameters“, ([106], 2015)

⁵ NIELSEN, JØNCK UND UNDERBAKKE, „Hole-Pattern and Honeycomb Seal Rotordynamic Forces: Validation of CFD-Based Prediction Techniques“, ([75], 2012)

⁶ ERTAS, DELGADO UND VANNINI, „Rotordynamic Force Coefficients for Three Types of Annular Gas Seals With Inlet Preswirl and High Differential Pressure Ratio“, ([27], 2012)

⁷ PICARDO UND CHILDS, „Rotordynamic Coefficients for a Tooth-on-Stator Labyrinth Seal at 70 Bar Supply Pressures: Measurements Versus Theory and Comparisons to a Hole-Pattern Stator Seal“, ([79], 2005)

⁸ LI, LI UND YAN, „Multiple Frequencies Elliptical Whirling Orbit Model and Transient RANS Solution Approach to Rotordynamic Coefficients of Annular Gas Seals Prediction“, ([63], 2013)

⁹ CHILDS UND KIM, „Analysis and Testing for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals With Different, Directionally-Homogeneous Surface-Roughness Treatment for Rotor and Stator Elements“, ([13], 1985)

profilierten Platten durchgeführt. Ha, Morrison und Childs¹ etwa bestimmten Reibungsfaktoren für gasdurchströmte ebene Kanäle mit glatten Wänden sowie solche mit Wabenprofil. Die so bestimmten Reibungsfaktoren konnten jedoch keine Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit von Bulk-Flow-Modellen erreichen. Childs, Kheireddin und Phillips² bestimmten mit einer ähnlichen Vorgehensweise Reibungsfaktoren für glatte und Bohrlochprofile.

Childs und Fayolle³ führten Messungen an Bohrlochdichtungen durch und identifizierten rotordynamische Koeffizienten. Zudem versuchten sie, empirische Reibungsfaktoren zu bestimmen. Diese sind nicht nur von den spezifischen verwendeten Dichtungen abhängig, sondern aufgrund der speziellen Definition und der Verwendung von dimensionsbehafteten Größen nicht auf andere Betriebspunkte übertragbar.

Storteig⁴ schlug in seiner o. g. Arbeit vor, Bohrlochprofile mit aus Labyrinthdichtungen bestimmten Reibungsfaktoren über einer Mittelung anhand des Flächenanteils der Profilierung zu übertragen. Für den Anteil der nicht profilierten Fläche sollte ein Modell nach Moody verwendet werden, für den profilierten Anteil ein kalibriertes Modell nach Hirs. Er sah Bohrungen als analog zu Nuten einer Labyrinthdichtung an, wenn Nutbreite und -tiefe dem Bohrungsdurchmesser und der -tiefe glichen. Eine Kalibrierung für spezifische Bohrlochprofile erfolgte so nicht. Im Vergleich mit veröffentlichten Messdaten zu rotordynamischen Koeffizienten wurden jedoch substantielle Abweichungen festgestellt.

Arghir u. a.⁵ untersuchten einen ebenen Spalt mit Bohrlochprofil mithilfe von CFD-Simulationen. Die Analyse wurde auf ein einzelnes periodisches Profilstück reduziert, um Reibungsfaktoren für ein Bulk-Flow-Modell zu kalibrieren. So wurden erstmals unterschiedliche gemittelte Reibungsfaktoren für Rotor und Stator bestimmt. Der Einfluss der Schlepplströmung und eines druckgetriebenen Strömungsanteils in einer einzelnen Raumrichtung (d. h. Umfangsrichtung) wird getrennt betrachtet. Eine zusätzliche Überlagerung einer druckgetriebenen Querströmung (d. h. in axialer Richtung) wird nicht untersucht. Dennoch zeigte der Vergleich mit experimentell ermittel-

¹ HA, MORRISON UND CHILDS, „Friction-Factor Characteristics for Narrow Channels With Honeycomb Surfaces“, ([39], 1992)

² CHILDS, KHEIREDDIN UND PHILLIPS, „Friction Factor Behavior From Flat-Plate Tests of Smooth and Hole-Pattern Roughened Surfaces With Supply Pressures up to 84 Bars“, ([18], 2010)

³ CHILDS UND FAYOLLE, „Test Results for Liquid “Damper” Seals Using a Round-Hole Roughness Pattern for the Stators“, ([17], 1999)

⁴ STORTEIG, „Dynamic characteristics and leakage performance of liquid annular seals in centrifugal pumps“, ([96], 1999)

⁵ ARGHIR U. A., „Theoretical Analysis of Textured “Damper” Annular Seals“, ([2], 2007)

ten rotordynamischen Koeffizienten zwar verbesserungswürdige, aber doch vielversprechende Ergebnisse.

Migliorini u. a.^{1,2} entwickelten eine weitere Hybridmethode für Gasdichtungen mit Bohrlochprofil. Dabei wurde eine CFD-Simulation für ein kleines periodisches Winkelement für den konzentrischen Fall gelöst. Mit den Ergebnissen wurde anschließend ein Bulk-Flow-Modell inklusive Reibungsfaktoren eines Hirs-Modells kalibriert. Mithilfe eines linearen Störansatzes wurden aus dem Bulk-Flow-Modell schließlich rotordynamische Koeffizienten ermittelt. Der Vergleich mit verschiedenen Literaturwerten zeigte eine akzeptable Übereinstimmung. Diese Hybrid-Methode kann prinzipiell für alle Profilarten verwendet werden.

Jolly u. a.³ untersuchten zwei Bohrlochdichtungen experimentell und ermittelten rotordynamische Koeffizienten. Diese Daten verglichen sie mit einem Bulk-Flow-Modell, bei dem angepasste Reibungsfaktoren für Rotor und Stator verwendet wurden. Für die Ermittlung der Reibungsfaktoren wurden CFD-Simulationen unter Variation von Geometrie- und Betriebsparametern durchgeführt. Die experimentellen und Modellergebnisse für die Koeffizienten bestätigten die bisher in der Literatur veröffentlichten Erkenntnisse. Die Bulk-Flow-Ergebnisse waren jedoch weiterhin verbesserungswürdig.

¹ MIGLIORINI U. A., „A Computational Fluid Dynamics/Bulk-Flow Hybrid Method for Determining Rotordynamic Coefficients of Annular Gas Seals“, ([71], 2012)

² MIGLIORINI, UNTAROIU UND WOOD, „A Numerical Study on the Influence of Hole Aspect Ratio on the Performance Characteristics of a Hole-Pattern Seal“, ([69], 2014)

³ JOLLY U. A., „Experimental and Theoretical Rotordynamic Coefficients of Smooth and Round-Hole Pattern Water-Fed Annular Seals“, ([47], 2018)

2.3 Wandstrahlströmung

Wie der vorherige Abschnitt offenbart, ist eine wesentliche Eigenschaft der profilierten Wände von Labyrinth- oder Dämpferdichtungen, dass sich in der Strömung über den Nuten oder Kavitäten eine freie Scherschicht ausbildet. Es zeigt sich, dass diese Strömung in axialer Richtung in guter Näherung eine generische Wandstrahlströmung darstellt, siehe Abbildung 2.2. Hierbei repräsentiert die feste Wand unten den Rotor, wobei die Wandgeschwindigkeit nicht berücksichtigt wird. Zur weiteren Analyse der Strömung wird im Folgenden deshalb kurz die Theorie freier Scherschichten und die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Modellansätze beschrieben. Dabei wird darauf geachtet, dass die Nomenklatur und die verwendeten Symbole analog zur bisher betrachteten Spaltströmung sind.

Freie Scherschichten haben große Ähnlichkeit mit Wandgrenzschichten und können daher mit den dimensionsbehafteten, Reynolds-gemittelten Grenzschichtgleichungen beschrieben werden¹ (inkompressibel, stationär):

$$\frac{\partial \tilde{c}_z}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{c}_y}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (2.54)$$

$$\tilde{c}_z \frac{\partial \tilde{c}_z}{\partial \tilde{z}} + \tilde{c}_y \frac{\partial \tilde{c}_y}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{c}_z}{\partial \tilde{y}} - \overline{\tilde{c}'_z \tilde{c}'_y} \right). \quad (2.55)$$

Diese Vereinfachung des Problems entsteht aus der Navier-Stokes-Gleichung

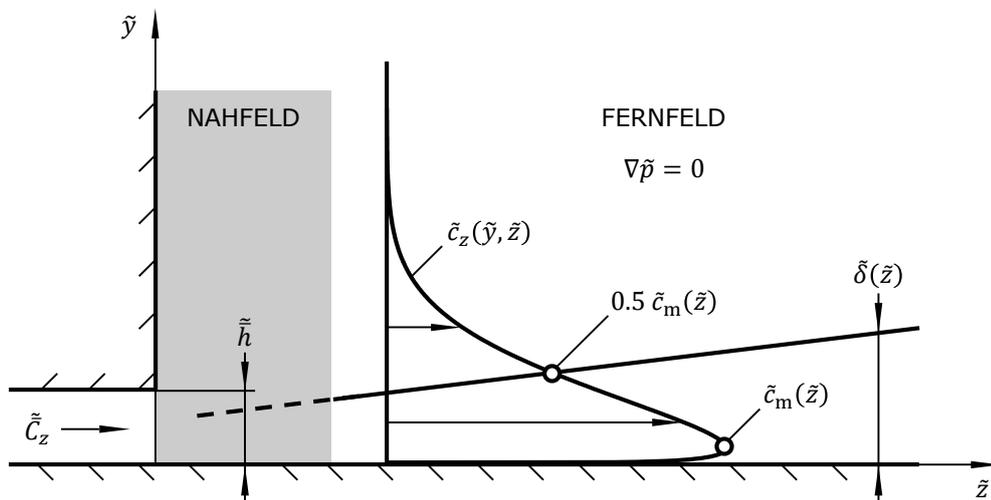


Abbildung 2.2 – Geschwindigkeitsprofil des ebenen turbulenten Wandstrahls.

¹ SCHLICHTING UND GERSTEN, *Grenzschicht-Theorie*, ([90], 2006)

durch eine dimensionslose Darstellung mittels der sogenannten Grenzschichttransformation, der anschließenden Vernachlässigung von Termen kleiner Größenordnung und letztlich der Rückeinsetzung der dimensionsbehafteten Größen. Der Druckgradient kann zudem entweder bei Wandgrenzschichten über die Außengeschwindigkeit am Rand der Grenzschicht ausgedrückt werden, oder im Fall von Gleichgewichtsgrenzschichten und den hier betrachteten freien Scherschichten zu Null gesetzt werden. Die viskosen Spannungen werden bei großen Reynoldszahlen im turbulenten Fall i. d. R. vernachlässigt. Mit $\tilde{\tau}_t := \tilde{\rho} \tilde{c}'_z \tilde{c}'_y$ wird Gleichung (2.55) dementsprechend weiter vereinfacht zu

$$\tilde{c}_z \frac{\partial \tilde{c}_z}{\partial \tilde{z}} + \tilde{c}_y \frac{\partial \tilde{c}_y}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\tau}_t}{\partial \tilde{y}}. \quad (2.56)$$

Mit $\tilde{\tau}_t = 0$ gelten die Grenzschichtgleichungen (2.54) und (2.55) ebenfalls für laminare Strömung. Dieser Fall spielt für die vorliegende Arbeit keine direkte Rolle, soll hier aber das Prinzip der selbstähnlichen Strömung verdeutlichen. Dafür werden zunächst eine dimensionslose axiale Koordinate $z := \tilde{z}/\tilde{l}$, eine dimensionslose Ähnlichkeitskoordinate $\eta := \tilde{y}/\tilde{\delta}(\tilde{z})$ und eine geeignete dimensionslose Stromfunktion $\Psi(\eta, z)$ eingeführt. Dabei sind \tilde{l} eine charakteristische Länge und $\tilde{\delta}(\tilde{z})$ die Grenzschichtdicke. Nun kann unter Nutzung der genannten Größen die Kontinuitätsgleichung (2.54) integriert und eine neue partielle Differentialgleichung für die dimensionslose Stromfunktion $\Psi(\eta, z)$ aus der Impulsgleichung gewonnen werden.

Eine selbstähnliche Strömung liegt nun vor, wenn die Stromfunktion ausschließlich von η und nicht von z abhängt. Für diesen Fall lassen sich die Geschwindigkeitsprofile an allen Stellen z unter Nutzung einer geeigneten Skalierung zur Deckung bringen. Unter dieser Bedingung lässt sich die partielle Differentialgleichung für die Stromfunktion generell in eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\Psi''' + \alpha_1 \Psi \Psi' + \alpha_2 - \alpha_3 \Psi'^2 = 0 \quad (2.57)$$

überführen¹, wobei der Strich die Ableitung nach der Ähnlichkeitskoordinate $d/d\eta$ bedeutet und α_1 bis α_3 Konstanten sein müssen, die sich aus den Geschwindigkeitsrandbedingungen und den übrigen Termen der Impulsgleichung ergeben. Eine so gewonnene Gleichung wie (2.57) wird auch als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung bezeichnet.

Die Lösung dieser einzelnen gewöhnlichen Differentialgleichung stellt eine bedeutende Erleichterung gegenüber der Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen dar. Eine Lösung kann aber nur für bestimmte Werte

¹ SCHLICHTING UND GERSTEN, *Grenzschicht-Theorie*, ([90], 2006)

von α_1 bis α_3 gefunden werden. Ist eine bestimmte Lösung gefunden, lassen sich damit die zugehörigen Geschwindigkeitsrandbedingungen sozusagen rückwärts bestimmen und mit der Lösung der dimensionslosen Stromfunktion ist dann auch das Geschwindigkeitsfeld gegeben.

Bekannte Beispiele sind die ebene Plattengrenzschicht (Blasius-Gleichung) oder die Keil- und Eckenströmung¹. Das Prinzip lässt sich unter Nutzung von (einfachen) Turbulenzmodellen auch auf turbulente Strömungen übertragen, stellt sich dann aber oft komplizierter dar. Weiterhin können analog auch Ähnlichkeitslösungen für freie Scherschichten wie die Mischungsschicht sowie den laminaren und turbulenten Freistrahlfeld gefunden werden¹. Für den Wandstrahl, der in der vorliegenden Arbeit von besonderem Interesse ist, gestaltet sich die Lösung jedoch als wesentlich schwieriger.

Michael B. Glauert, Sohn des bekannten britischen Aerodynamikers Hermann Glauert, leitete die erste Ähnlichkeitslösung für den laminaren Wandstrahl her². Er leitete in der genannten Arbeit ebenso eine Lösung für den turbulenten Wandstrahl her und stellte fest, dass keine vollständige Ähnlichkeit vorliegt, sondern eine leichte Abhängigkeit der Reynoldszahl bestehen bleibt. Der turbulente Wandstrahl stellt tatsächlich aufgrund des Einflusses der freien Scherschicht auf der einen Seite, sowie auch des Einflusses der Wandgrenzschicht auf der anderen Seite eine komplexe Strömung dar und ist bis heute Gegenstand der Forschung^{3,4}. Man geht davon aus, dass wohl nicht das gesamte Profil selbstähnlich ist, sondern zwei gekoppelte Schichten (Wand- und Außenschicht) oder drei Schichten (zusätzliche Übergangsschicht), die jeweils für sich selbstähnlich sind^{3,4,5}. Für das vollständige Geschwindigkeitsprofil des turbulenten Wandstrahls kann grundsätzlich also nur näherungsweise von Selbstähnlichkeit ausgegangen werden. Unter dieser Einschränkung lässt sich das Prinzip jedoch auch auf selbstähnliche Profile für die Reynoldsspannung übertragen, vgl. Spurk⁶.

Freistrahlen und demzufolge auch Wandstrahlen werden bereits bei sehr kleinen Reynoldszahlen in der Größenordnung von $\sim 10^1$ turbulent, sodass der laminare Fall generell nur selten und für die vorliegende Anwendung keine Rolle spielt. Eine weitere sich ergebende Schwierigkeit ist, dass Ähnlichkeit

¹ SCHLICHTING UND GERSTEN, *Grenzschicht-Theorie*, ([90], 2006)

² GLAUERT, „The wall jet“, ([34], 1956)

³ GERSTEN, „The asymptotic downstream flow of plane turbulent wall jets without external stream“, ([30], 2015)

⁴ GUPTA U. A., „Scaling mean velocity in two-dimensional turbulent wall jets“, ([38], 2020)

⁵ BARENBLATT, CHORIN UND PROSTOKISHIN, „The turbulent wall jet: a triple-layered structure and incomplete similarity“, ([6], 2005)

⁶ SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([94], 1992)

erst im sogenannten Fernfeld vorliegt, d. h. wenn der Einfluss des Spalts, aus dem der Strahl austritt, abgeklungen ist. In der Praxis liegt Ähnlichkeit des Wandstrahlprofils nach ca. 15 bis 25 Spaltweiten stromab vor.

Analytische Modelle zur Beschreibung des mittleren Geschwindigkeitsprofils wie etwa das von Glauert¹ sind aufgrund der verschiedenen Schichten vergleichsweise komplex. Dennoch ist die näherungsweise Selbstähnlichkeit für eine Modellierung hilfreich. Aus den Überlegungen zur Selbstähnlichkeit sind Skalierungsansätze entstanden, die bspw. nützlich für (semi-) analytische Integralverfahren oder empirische Analysen sind. Passende Ansätze werden im Folgenden vorgestellt.

Zur näherungsweisen Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils des turbulenten Wandstrahls eignet sich die relativ einfache empirische Gleichung

$$c_z(\eta) = a \eta^{1/7} [1 - \operatorname{erf}(b \eta)] \quad (2.58)$$

von Verhoff² sehr gut, wobei erf die Fehlerfunktion ist. Dabei ist $c_z := \tilde{c}_z / \tilde{c}_m$ die dimensionslose Geschwindigkeit bezogen auf die Maximalgeschwindigkeit des Profils

$$\tilde{c}_m(\tilde{z}) := \max[\tilde{c}_z(\tilde{z}, \tilde{y})] \quad (2.59)$$

an einer Stelle $\tilde{z} = \text{konst.}$ und

$$\eta(\tilde{z}) := \frac{\tilde{y}}{\tilde{\delta}(\tilde{z})} \quad (2.60)$$

die dimensionslose Ähnlichkeitskoordinate. Als Maß für die Grenzschichtdicke $\tilde{\delta}(\tilde{z})$ hat sich die sogenannte Halbstrahlbreite etabliert. Sie ist die vertikale Stelle $\tilde{y}(c_z = 0.5)$ in der Außenschicht, an der die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit erreicht wird, vgl. Abbildung 2.2. Die experimentell bestimmten empirischen Konstanten werden von Verhoff² mit $a = 1.4794$ und $b = 0.67753$ angegeben. Die Maximalgeschwindigkeit $c_z = 1$ liegt bei $\eta \approx 0.16539$. Zudem kann die Ableitung zu

$$\frac{dc_z}{d\eta} = a \left\{ \frac{1}{7} \eta^{-6/7} [1 - \operatorname{erf}(b \eta)] - \frac{2b}{\sqrt{\pi}} \eta^{1/7} e^{-(b\eta)^2} \right\} \quad (2.61)$$

bestimmt werden.

Der Reibungsfaktor f für die Wandschubspannung wird von Schwarz und Cosart³ mittels Integralverfahren der Grenzschichttheorie unter Nutzung der

¹ GLAUERT, „The wall jet“, ([34], 1956)

² VERHOFF, *The Two-Dimensional, Turbulent Wall Jet With And Without An External Free Stream*, ([102], 1963)

³ SCHWARZ UND COSART, „The two-dimensional turbulent wall-jet“, ([91], 1961)

beiden Ansatzfunktionen

$$\tilde{c}_m(\tilde{z}) = \tilde{K}_1 \tilde{z}^a \quad \text{und} \quad (2.62)$$

$$\tilde{\delta}(\tilde{z}) = K_2 \tilde{z} \quad (2.63)$$

mit den empirischen Konstanten \tilde{K}_1 , K_2 und a zu

$$f = -2K_2(2a + 1) \int_0^\infty c_z^2(\eta) d\eta \quad (2.64)$$

hergeleitet, wobei der Reibungsfaktor mit der lokalen Maximalgeschwindigkeit \tilde{c}_m als

$$f := \frac{2 \tilde{\tau}_{\text{Wand}}(\tilde{z})}{\tilde{\rho} \tilde{c}_m^2(\tilde{z})} \quad (2.65)$$

definiert ist. Aus Gleichung (2.64) lässt sich schließen, dass $a < -1/2$ gelten muss. Als ungefähr konstanten Mittelwert aus ihren Experimenten geben Schwarz und Cosart¹ einen Wert von

$$f \approx 1.109 \times 10^{-2} \quad (2.66)$$

an. Es ist anzumerken, dass für \tilde{K}_1 aufgrund der dimensionsbehafteten Darstellung bei Schwarz und Cosart¹ die ungewöhnliche Dimension $L^{1-a} T^{-1}$ in Abhängigkeit des Parameters a gelten muss.

Ganz ähnlich kann auch eine Funktion für die dimensionslose Reynoldsspannung im Fluid

$$g(\eta) := \frac{2 \tilde{\tau}_t(\eta, \tilde{z})}{\tilde{\rho} \tilde{c}_m^2(\tilde{z})} \quad (2.67)$$

definiert werden. Hierbei handelt es sich aber um ein Profil über η ähnlich der Geschwindigkeit. Aus der Impulsgleichung leiten Schwarz und Cosart unter Nutzung der o. g. und weiteren Ansatzfunktionen unter Vernachlässigung der viskosen Spannungen eine solche universelle Verteilungsfunktion zu

$$g(\eta) = K_2(2a + 1) \int_\eta^\infty c_z^2(\eta') d\eta' + K_2(a + 1) c_z(\eta) \int_0^\eta c_z(\eta') d\eta' \quad (2.68)$$

her. Die Bestimmungsgleichungen (2.68) für g und (2.64) für f können unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.58) bei Voraussetzung der näherungsweise Selbstähnlichkeit numerisch gelöst werden, wodurch alle für die vorliegende Arbeit benötigten Größen vorliegen.

Myers, Schauer und Eustis² lieferten zudem ein empirisches Modell für einen Wandreibungsfaktor, der mit global konstanten Größen des Spaltes, aus dem

¹ SCHWARZ UND COSART, „The two-dimensional turbulent wall-jet“, ([91], 1961)

² MYERS, SCHAUER UND EUSTIS, „Plane Turbulent Wall Jet Flow Development and Friction Factor“, ([74], 1963)

der Wandstrahl austritt, definiert wird. Mit der mittleren Spaltaustrittsgeschwindigkeit $\tilde{\tilde{C}}_z$ und der Spaltweite $\tilde{\tilde{h}}$ wird eine axiale Reynoldszahl gebildet, welche Gleichung (2.1) des CAPM entspricht, siehe Abschnitt 2.1. Diese wird hier der Übersichtlichkeit halber nochmals aufgeführt und lautet

$$\phi Re = \tilde{\tilde{C}}_z \tilde{\tilde{h}} / \tilde{\nu}.$$

Der Reibungsfaktor wird als

$$f^* := \frac{2 \tilde{\tau}_{\text{Wand}}}{\tilde{\rho} \tilde{\tilde{C}}_z^2} \quad (2.69)$$

definiert. Myers, Schauer und Eustis¹ ermittelten aus ihren Experimenten empirisch die Funktion

$$f^* = 0.1976 (\phi Re)^{-1/12} \left(\frac{\tilde{\tilde{z}}}{\tilde{\tilde{h}}} \right)^{-1} \quad (2.70)$$

und gaben dafür einen Gültigkeitsbereich an:

$$4.5 < \frac{\tilde{\tilde{z}}}{\tilde{\tilde{h}}} (\phi Re)^{-1/6} < 37.0. \quad (2.71)$$

Unter Nutzung der Definition (2.65) für f und der Ansätze (2.62) sowie (2.63) von Schwarz und Cosart² mit $a \approx -1/2$ kann aus Gleichung (2.70) zusätzlich die von lokalen Größen unabhängige Näherungsgleichung

$$f = 0.1976 (\phi Re)^{-1/12} \frac{\tilde{\tilde{h}}}{\tilde{\tilde{z}}^{2a+1}} \left(\frac{\tilde{\tilde{C}}_z}{\tilde{\tilde{K}}_1} \right)^2 \approx 0.1976 (\phi Re)^{-1/12} \tilde{\tilde{h}} \left(\frac{\tilde{\tilde{C}}_z}{\tilde{\tilde{K}}_1} \right)^2 \quad (2.72)$$

hergeleitet werden.

Während Verhoff³ etwa den Wandstrahl unter weiteren Bedingungen wie einer zusätzlich überlagerten Längsströmung betrachtete, sind dem Autor der vorliegenden Arbeit keine Publikationen bekannt, bei dem ein ebener turbulenter Freistrahler mit zusätzlich überlagerter Querströmung modelliert wird. Dieser Fall wäre für das Problem der Strömung in profilierten Dichtungen relevant und könnte einen verbesserten Modellansatz liefern.

¹ MYERS, SCHAUER UND EUSTIS, „Plane Turbulent Wall Jet Flow Development and Friction Factor“, ([74], 1963)

² SCHWARZ UND COSART, „The two-dimensional turbulent wall-jet“, ([91], 1961)

³ VERHOFF, *The Two-Dimensional, Turbulent Wall Jet With And Without An External Free Stream*, ([102], 1963)

2.4 Unsicherheitsfortpflanzung

Ganz grundsätzlich ist Unsicherheit bezüglich Daten, Modellen und Strukturen Bestandteil des Maschinenbaus, siehe Pelz u. a.¹. Dennoch ist die Arbeit mit probabilistischen Methoden nicht immer intuitiv und auch im Ingenieurwesen leider nur stellenweise fest verankert. Daher sollen in diesem Abschnitt die relevanten Grundlagen der Quantifizierung und Fortpflanzung von Unsicherheit besprochen werden. Dafür werden zunächst die Grundbegriffe der zugrundeliegenden Stochastik und der Unsicherheit in Abschnitt 2.4.1 erläutert. Anschließend wird auf die in dieser Arbeit verwendeten Verteilungsfunktionen in Abschnitt 2.4.2 und schließlich auf die Monte-Carlo-Methode in Abschnitt 2.4.3 eingegangen.

Weiterführende Information zur Stochastik und vertiefende Methoden können der entsprechenden Fachliteratur entnommen werden, bspw. Kamke² oder Ghanem, Higdon und Owhadi³. Erwähnt werden muss als weltweit anerkanntes Standardwerk zudem auch der „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ (GUM), der vom „Joint Committee for Guides in Metrology“ (JCGM) verfasst wurde und später in einen ISO/IEC Guide mündete^{4,5}. Der GUM liefert für die Anwendung ein vollständiges und standardisiertes Rahmenwerk zur Bezeichnung, Ermittlung und Fortpflanzung von (Mess-) Unsicherheit. Weite Teile der Erläuterungen und des Vorgehens dieser Arbeit bzgl. der Unsicherheit richten sich entsprechend nach dem GUM.

In den Abschnitten 2.4.1 bis 2.4.3 wird auf die sonst in der Arbeit verwendete Nomenklatur zur Unterscheidung von dimensionslosen und -behafteten Größen mittels Tilde verzichtet. Die Erläuterungen in diesem Abschnitt sind wichtig zum Verständnis der probabilistischen Konzepte, stehen aber für sich und die hier gemacht Unterscheidungen sind im Rest der Arbeit nicht notwendig. Ob es sich später um eine Zufallsvariable handelt oder nicht und die daraus folgenden Implikationen ergeben sich immer ohne Beeinträchtigung der Verständlichkeit aus dem Kontext.

¹ PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([78], 2021)

² KAMKE, *Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse: Eine elementare Einführung*, ([48], 2014)

³ GHANEM, HIGDON UND OWHADI, *Handbook of Uncertainty Quantification*, ([31], 2017)

⁴ ISO/IEC GUIDE 98-1:2009, *Uncertainty of measurement. Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement*, ([43], 2009)

⁵ ISO/IEC GUIDE 98-3:2008, *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)*, ([44], 2008)

2.4.1 Grundbegriffe

Die Ermittlung einer gesuchten Messgröße wird über eine Messkette bestehend aus Messumformern sowie notwendigen Hilfskomponenten abgebildet und technisch in einem Messgerät realisiert. Als Messeinrichtung werden alle zur Ermittlung einer gesuchten Messgröße erforderlichen Messgeräte bezeichnet¹. Alle Messungen erfolgen grundsätzlich immer nur mit endlicher Genauigkeit^{1,2}. Dies liegt an technisch und physikalisch immanenten Fehlern des Messprinzips (bspw. Digitalisierungsfehler) sowie Messabweichungen aufgrund von nicht ausschließbaren Störeinflüssen oder unbekanntem Randbedingungen. Die Einflüsse können systematisch (deterministisch) sein oder vom Zufall abhängen (stochastisch). Aufgrund des grundsätzlich immer vorhandenen stochastischen Anteils kann ein Messergebnis nie als exakter Wert, sondern immer nur als endliche Stichprobe einer stochastischen Zufallsvariablen aufgefasst werden, der eine (meist unbekannte) Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt. Somit unterliegt grundsätzlich jedes Messergebnis einer Messunsicherheit bzw. im weiteren Sinne hinsichtlich der aufgenommenen Messdaten einer Datenunsicherheit.

Im Rahmen des GUM wird eine sogenannte systematische Unsicherheit nicht weiter betrachtet, denn aufgrund ihrer deterministischen Natur kann sie durch ein Kalibrierverfahren theoretisch immer eliminiert und sauber auf eine stochastische Unsicherheit reduziert werden. Im GUM wird die Unsicherheit in die beiden Typen A und B kategorisiert, was auch für die vorliegende Arbeit übernommen wird. Typ A bezeichnet Unsicherheiten, die explizit aufgrund der Ermittlung einer Stichprobe als Mittelwert und Standardunsicherheit einer Zufallsvariablen vorliegen. Dies ist bei einer geeigneten Messung oder Fortpflanzung der Fall. Nicht selten liegen solche konkreten Daten bei einer Unsicherheitsanalyse nicht vollständig vor. Bei Typ B handelt es sich daher um alle anderen Unsicherheitsangaben. Beispiele sind Richt- oder Literaturwerte, Expertenwissen oder andere Schätzungen. Nichtsdestotrotz wird eine Unsicherheit von Typ B genau wie bei Typ A als Mittelwert und Standardunsicherheit einer stochastischen Verteilungsfunktion angegeben, was im Folgenden erläutert wird.

Einer kontinuierlichen Zufallsvariable X liegt eine kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde. Diese Funktion gibt in Abhängigkeit der gegebenen Stelle bzw. des gegebenen Wertes x die Wahrscheinlichkeit P an, dass ein

¹ DIN 1319:1995, *Grundlagen der Messtechnik*, ([22], 1995)

² ISO/IEC GUIDE 98-1:2009, *Uncertainty of measurement. Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement*, ([43], 2009)

realisierter Wert¹ der Verteilungsfunktion in dem halbbunendlichen Intervall möglicher Werte $X \in [-\infty, x]$ liegt:

$$P(x) := P(X \in [-\infty, x]), \quad (2.73)$$

wobei die Wahrscheinlichkeit natürlich immer nur im Intervall $P \in [0, 1]$ liegen kann und $P(x)$ monoton steigt. Wird die Wahrscheinlichkeit für eine Realisierung im finiten Intervall $X \in [x_1, x_2]$ gesucht, kann diese als Differenz einer bekannten Verteilungsfunktion an den beiden Stellen mit

$$P(X \in [x_1, x_2]) = P(x_2) - P(x_1) \quad (2.74)$$

berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit kann immer nur für ein Intervall und nicht für einen exakten Wert angegeben werden. Dies rührt aus der Herleitung über diskrete Häufigkeitsverteilungen her², welche in der Realität ausschließlich anzutreffen sind.

Einzelne Stellen wie x_1 oder x_2 werden auch Quantile genannt. Allgemein bekannt ist etwa der Median als Kennwert einer Verteilung. Im Sinne der Stochastik ist der Median auch das 50 %-Quantil $x_{0.5}$ der Verteilung: die Hälfte der möglichen Werte liegt darüber, die andere Hälfte darunter. Tatsächlich ist es so, dass oft das Quantil bei gegebener Wahrscheinlichkeit gesucht wird. Beliebige spezifische Quantile x_P für gegebene Wahrscheinlichkeiten P lassen sich explizit mithilfe der inversen kumulativen Verteilungsfunktion

$$x_P = x(P) \quad (2.75)$$

berechnen (manchmal auch Quantilsfunktion genannt). Diese kann jedoch selten als analytische Funktion angegeben werden. Quantile müssen deshalb oft implizit aus der Verteilungsfunktion Gleichung (2.73) numerisch approximiert und tabelliert werden.

Mithilfe der Quantile lassen sich dann die o. g. Intervalle angeben, innerhalb derer sich ein bestimmter Prozentsatz der möglichen Werte befindet. Häufig ist bspw. das 95 %-Intervall gesucht. Wird allgemein das P -Intervall gesucht, kann dies mit dem oberen $(1 + P)/2$ -Quantil x_o und dem unteren $(1 - P)/2$ -Quantil x_u zu $[x_u, x_o]$ angegeben werden.

Anschaulicher und praktischer ist es häufig, die Wahrscheinlichkeit durch Integration einer sogenannten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion Ψ über dem

¹ Eine Realisierung ist bspw. im diskreten Fall der einzelne Wurf eines Würfels und im kontinuierlichen Fall eine einzelne, augenblickliche Messung eines verrauschten Analogsignals.

² KAMKE, *Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse: Eine elementare Einführung*, ([48], 2014)

Bereich möglicher realisierbarer Werte x anzugeben:

$$P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \, dx. \quad (2.76)$$

Der gesamte Flächeninhalt unter der Dichtefunktion muss genau gleich 1 sein. Die Verteilungsfunktion kann dann mittels

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \Psi(x') \, dx' \quad (2.77)$$

aus der Dichtefunktion berechnet werden. Die Verteilungsfunktion ist dimensionslos während die Dichtefunktion die Dimension von $1/x$ hat.

Wichtige integrale Kennwerte zur Charakterisierung einer Verteilungsfunktion sind die sogenannten stochastischen Momente M_k der Ordnung k . Mithilfe der Dichteverteilung können diese allgemein als

$$M_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k \Psi(x) \, dx \quad (2.78)$$

definiert werden. Das erste Moment mit $k = 1$ ist der sogenannte Erwartungswert und wird oft als $M_1 = \mu$ bezeichnet. Der Erwartungswert ist der Schwerpunkt der Dichteverteilung; das empirische Analogon ist der arithmetische Mittelwert einer Häufigkeitsverteilung, der bei Vergrößerung des Stichprobenumfangs gegen den Erwartungswert strebt.

Von besonderer Wichtigkeit sind zudem die sogenannten zentralen Momente, bei denen die Verteilungsfunktion um den Erwartungswert zentriert betrachtet wird. Das zweite zentrale Moment ist die Varianz, die ein Maß für die Streuung der Verteilung um den Erwartungswert, d. h. die Breite der Dichteverteilung, darstellt. Das dritte ist die Schiefe, die eine Asymmetrie der Verteilung angibt. Das vierte ist die Wölbung (Kurtosis), welche angibt, wie spitz oder flach die Verteilung ausfällt. In dieser Arbeit wird neben dem Erwartungswert lediglich die besonders wichtige Varianz

$$V := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \Psi(x) \, dx \quad (2.79)$$

quantitativ betrachtet. Äquivalent genutzt wird häufig die praktischere Größe der Standardabweichung σ , die einfach durch

$$\sigma := \sqrt{V} \quad (2.80)$$

definiert ist und im Gegensatz zur Varianz wieder die gleiche Dimension hat wie die ursprüngliche Zufallsvariable.

In der Praxis können lediglich eine endliche Anzahl n an diskreten Realisierungen der Zufallsvariablen ermittelt werden. Da im Folgenden nicht mehr zwischen der Zufallsvariablen X und der dazugehörigen Skala der möglichen Werte x unterschieden werden muss, wird nun die kleine Schreibweise für die Realisierungen der Zufallsvariablen verwendet. Die einzelnen Werte der Stichprobe sind also durch x_i mit $i = 1, 2, \dots, n$ gegeben.

Der Stichprobenmittelwert (auch empirischer Mittelwert, analog zum Erwartungswert μ) wird über das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i \quad (2.81)$$

ermittelt. Die Standardabweichung der Stichprobe (auch empirische Standardabweichung, analog zur Standardabweichung σ) ist gegeben mit

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.82)$$

und der sogenannte Standardfehler wird daraus mittels

$$\epsilon = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.83)$$

berechnet.

Der Erwartungswert, die Standardabweichung und schlussendlich auch die tatsächliche Verteilungsfunktion selbst können aus einer Stichprobe nur geschätzt bzw. angenähert werden. Es zeigt sich, dass die Schätzungen von Erwartungswert und Standardabweichung mittels den Gleichungen (2.81) und (2.82) aus Stichproben mit Umfang n selbst Zufallsvariablen sind (vgl. zentraler Grenzwertsatz).

Wäre die wahre Standardabweichung σ bekannt, würde die Schätzung des Mittelwerts einer Normalverteilung unterliegen. Die Standardabweichung dieser Normalverteilung wäre dann direkt durch den Standardfehler (2.83) mit σ statt s gegeben. Aufgrund der tatsächlich jedoch ebenfalls geschätzten Standardabweichung s unterliegt die Schätzung des Mittelwerts stattdessen einer Studentschen t -Verteilung. Während der Unterschied besonders deutlich für kleine Stichproben mit ungefähr $n < 30$ ist, nähert sich die t -Verteilung für $n \rightarrow \infty$ an die Normalverteilung an (Abweichung $< 2\%$ für $n > 100$). Die Standardabweichung der Verteilung des geschätzten Mittelwerts bei ebenfalls geschätzter Standardabweichung der Stichprobe ist dann gegeben mit

$$\epsilon^* = t(n-1, P) \frac{s}{\sqrt{n}} = t(n-1, P) \epsilon, \quad (2.84)$$

wobei $t \geq 1$ der sogenannte Studentsche Faktor ist, der sich aus Quantilen der t -Verteilung für gegebene Wahrscheinlichkeit P ergibt. Für hinreichend großes n und den Fall $P = 68.3\%$ ist wie oben angedeutet $t \approx 1$ und $\epsilon^* \approx \epsilon$.

Das symmetrische Intervall $\bar{x} \pm \epsilon^* = [\bar{x} - \epsilon^*, \bar{x} + \epsilon^*]$ wird im Zusammenhang mit der Mittelwertschätzung als Konfidenzintervall bezeichnet und bewertet deren Qualität. Es gibt den Bereich um den geschätzten Mittelwert \bar{x} einer Stichprobe an, der den wahren Erwartungswert μ mit gegebener Wahrscheinlichkeit P einschließt. Die Wahrscheinlichkeit wird hier als Konfidenzniveau bezeichnet.

Im Rahmen des GUM wird der Standardfehler (2.83) unter Voraussetzung eines hinreichend großen Stichprobenumfangs n als Standardunsicherheit (vom Typ A) einer Messgröße x definiert. Der mit einem Konfidenzintervall unter kleinem n oder gegebener Wahrscheinlichkeit $P > 68.3\%$ verbundene modifizierte Standardfehler (2.84) wird als erweiterte Unsicherheit bezeichnet. Die erweiterte Unsicherheit δx einer Messgröße x kann als

$$\delta x := \epsilon^* = K s \quad (2.85)$$

mit dem Faktor $K(n, P) := t(n - 1, P)/\sqrt{n}$ geschrieben werden. In der vorliegenden Arbeit wird in Anlehnung an Kuhr, Nordmann und Pelz¹ die Konvention verwendet, nicht zwischen Standard- und erweiterter Unsicherheit zu unterscheiden und generell das Symbol δx zu verwenden. Zur Wiederherstellung der Eindeutigkeit wird zudem immer die Wahrscheinlichkeit P angegeben, die die mögliche Vergrößerung des Vertrauensintervalls indiziert. Ein unsicherheitsbehafteter Wert wird also schlussendlich durch das Konfidenzintervall der Mittelwertschätzung angegeben und in dieser Arbeit in der oft gebräuchlichen, kompakten Form

$$x = \bar{x} \pm \delta x (P) \quad (2.86)$$

geschrieben.

An dieser Stelle soll abschließend betont werden, dass die Standardabweichung der Stichprobe s offensichtlich eine völlig andere Information enthält als die Unsicherheit δx . Insbesondere bei Messungen (quasi-) stationärer Prozesse können eine sehr große Anzahl n einzelner Messwerte x_i als Stichprobe aufgenommen werden. Die Unsicherheit strebt bei $n \rightarrow \infty$ gegen Null, die Standardabweichung s strebt jedoch gegen eine konstante Asymptote. Im Vergleich zum Mittelwert kann so also gleichzeitig eine sehr geringe Unsicherheit und eine sehr große Standardabweichung vorliegen. Verdeutlichen

¹ KUHR, NORDMANN UND PELZ, „Dynamic force and moment characteristics of annular gaps - Simulation results and evaluation of the relevance of the tilt and moment coefficients“, ([57], 2022)

lässt sich dies leicht am Faktor K in Gleichung (2.85). Für typische Werte von $t \approx 2$ und $n = 1000$ ergibt sich $K \approx 0.06$, d. h. häufig kann von $s/\delta x \sim 10^2$ ausgegangen werden.

Eine große Streuung ist generell unerwünscht und kann auf ein ungeeignetes oder mangelhaftes Messverfahren hindeuten. Die häufig anzutreffende Angabe (2.86) liefert jedoch nur Informationen zum Mittelwert, nicht jedoch zur Streuung. Wünschenswert zur Bewertung eines Messergebnisses ist daher zusätzlich zur Angabe (2.86) immer auch die Nennung der Standardabweichung s und des Stichprobenumfangs n .

2.4.2 Verteilungsfunktionen

Es existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Verteilungen für unterschiedliche Anwendungen, siehe GUM¹. In diesem Abschnitt werden die beiden in dieser Arbeit genutzten Verteilungen, die Normal- und die Gleichverteilung, vorgestellt.

Normalverteilung

Die Normalverteilung ist zum einen häufig empirisch zu beobachten, bspw. immer bei Messungen verrauschter Signale. Zum anderen ist sie eine der wichtigsten Verteilungen, da sie das Ergebnis des zentralen Grenzwertsatzes der Stochastik ist². Dieser besagt in etwa, dass die Überlagerung von vielen unabhängigen und unterschiedlichen Verteilungsfunktionen in Summe immer gegen eine Normalverteilung strebt, unabhängig davon, welche einzelnen Verteilungsfunktionen ursprünglich vorlagen³.

Wenn eine Zufallsvariable X normalverteilt ist, wird dies mit dem Symbol $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit den beiden oben beschriebenen Parametern des Erwartungswertes μ und der Standardabweichung σ ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung ist gegeben durch

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right). \quad (2.87)$$

Eine Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ wird als Standardnormalverteilung bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass aus einer normalverteilten

¹ ISO/IEC GUIDE 98-3/SUPPL. 1:2008, *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995). Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, ([45], 2008)

² Es ist anzunehmen, dass dies wohl auch der Grund für ihr häufiges Erscheinen ist.

³ ISO/IEC GUIDE 98-3:2008, *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)*, ([44], 2008)

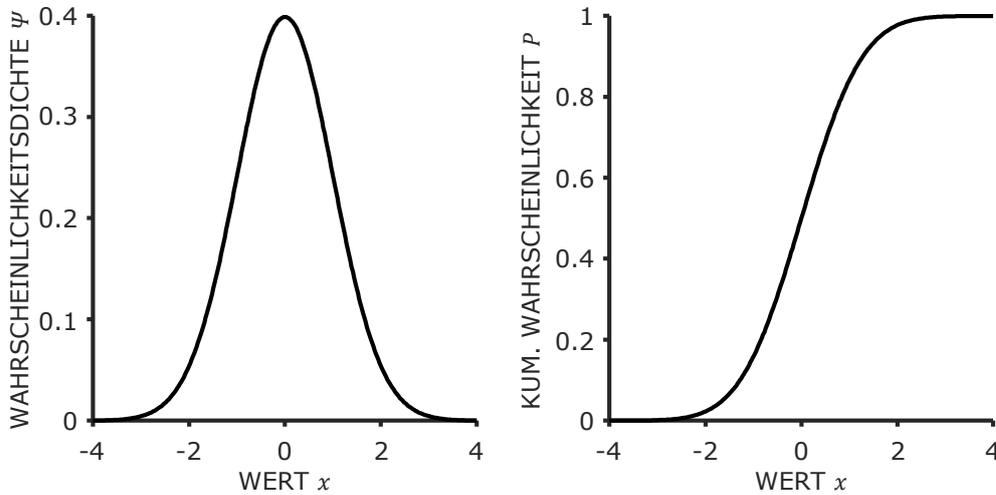


Abbildung 2.3 – Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Standardnormalverteilung.

Zufallsvariablen $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable der Form $X' = (X - \mu)/\sigma = \mathcal{N}(0, 1)$ gefunden werden kann, was als Standardisierung von X bezeichnet wird.

Für das Integral der Dichtefunktion kann keine Stammfunktion gefunden werden, sodass die kumulative Verteilungsfunktion nur mit der Fehlerfunktion erf als

$$P(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \quad (2.88)$$

angegeben werden kann. Die Fehlerfunktion ist eine der speziellen Funktionen und ist durch das Integral der Dichtefunktion Ψ definiert und kann entsprechend nur numerisch angenähert werden. Somit gibt es auch keinen geschlossenen Ausdruck für die inverse Verteilungsfunktion $x(P)$.

Die Dichte- und die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind in Abbildung 2.3 dargestellt. Die folgenden häufig anzutreffenden Intervalle sollen der Übersicht dienen und können sich mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ anhand der Abbildung verdeutlicht werden. Sie geben zudem typische Werte für den Faktor K der erweiterten Unsicherheit (2.85) an:

- Im Intervall $\mu \pm \sigma = [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ liegen 68.3% der möglichen Werte.
- Im Intervall $\mu \pm 1.96\sigma$ liegen 95.0% der möglichen Werte.
- Im Intervall $\mu \pm 2.58\sigma$ liegen 99.0% der möglichen Werte.
- Im Intervall $\mu \pm 3.29\sigma$ liegen 99.9% der möglichen Werte.

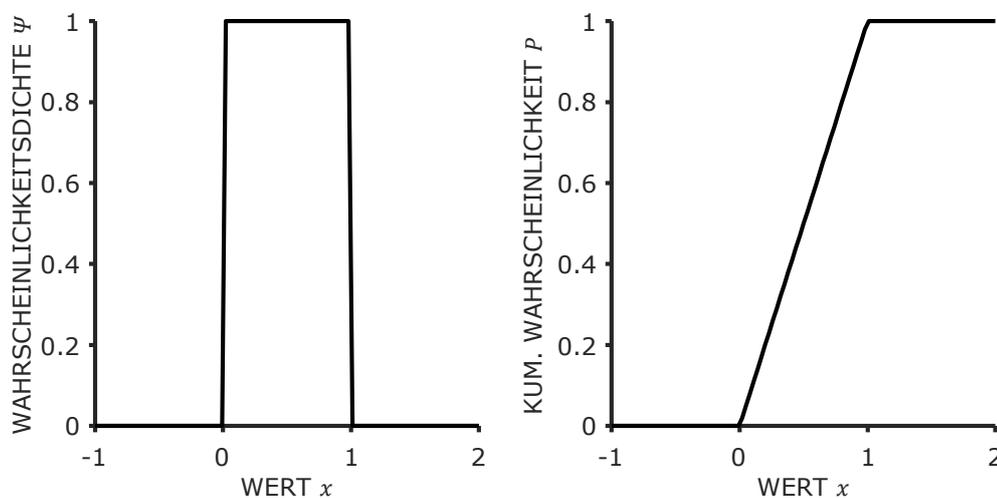


Abbildung 2.4 – Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Standardgleichverteilung.

Gleichverteilung

Eine einfache aber dennoch wichtige Verteilung ist die Rechteck- oder Gleichverteilung, die häufig zur Anwendung kommt. Bei bestimmten Messgeräten werden bspw. Genauigkeitsklassen angegeben. Dabei handelt es sich um festgelegte Grenzabweichungen, die den möglichen Maximalwert im Sinn einer beidseitigen Abweichung angeben. Wie die Messwerte tatsächlich verteilt sind, ist zumindest für den Anwender unbekannt und man wird als Rückfalllösung eine Gleichverteilung im entsprechenden Intervall der Grenzabweichung annehmen. Ähnlich verhält es sich bei Toleranzangaben für Bauteilabmaße. Wie die Abmaße in einem Los tatsächlich verteilt sind, ist meist unbekannt und man wird wieder auf die Gleichverteilung im durch die Toleranzangabe festgelegten Intervall zurückgreifen.

Wenn eine Zufallsvariable X gleichverteilt ist, wird dies mit dem Symbol $X = \mathcal{U}(\mu, d)$ ausgedrückt. Der Parameter μ ist wieder der bekannte Erwartungswert und d ist das beidseitige Maximum der möglichen Werte. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist dann gegeben durch

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1/(2d) & \text{für } x \in [\mu - d, \mu + d], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.89)$$

Die Verteilungsfunktion kann zu

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \mu - d, \\ (x - \mu + d)/(2d) & \text{für } \mu - d \leq x \leq \mu + d, \\ 1 & \text{für } x > \mu + d. \end{cases} \quad (2.90)$$

bestimmt werden. Damit lässt sich auch leicht die inverse Verteilungsfunktion angeben:

$$x(P) = d(2P - 1) + \mu. \quad (2.91)$$

Die Standardabweichung lässt sich zu $\sigma = d/\sqrt{3}$ bestimmen. Eine Gleichverteilung mit $\mu = 0.5$ und $d = 0.5$ liefert mögliche Werte im Intervall $[0, 1]$ und wird als Standardgleichverteilung bezeichnet. Zufallszahlengeneratoren in Computer-Software liefern typischerweise Werte der Standardgleichverteilung. Manchmal wird die Gleichverteilung auch über die Grenzstellen der möglichen Werte $a = \mu - d$ und $b = \mu + d$ definiert. Die Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardgleichverteilung sind in Abbildung 2.4 dargestellt.

2.4.3 Monte-Carlo-Methode

Bei nicht direkt messbaren Größen oder komplexen Messeinrichtungen wird die gesuchte Messgröße über einen physikalischen Zusammenhang aus den Messwerten von mehreren Messgeräten berechnet. Hierbei pflanzt sich die jeweilige Unsicherheit der einzelnen Messwerte und ggf. hinzukommender Störeinflüsse in eine kombinierte Unsicherheit der berechneten Größe fort. Auch die Eingangsgrößen, Randbedingungen oder Modellparameter sowohl für datengetriebene, als auch physikalische Modelle sind unsicherheitsbehaftet. Auch hier pflanzt sich die Unsicherheit der entsprechenden Größen in das Modellergebnis fort. Zudem kann es aufgrund von Vereinfachungen sowie Annahmen und der Modellstruktur zu Abweichungen von Modellergebnis und Messergebnis kommen¹. Dies wird als Modellunsicherheit bezeichnet, vgl. Pelz u. a.².

In einfachen Fällen (lineare Zusammenhänge, einfache algebraische Gleichungen, kleine Unsicherheit gegenüber dem Mittelwert) kann das bekannte Verfahren der Gauß'schen Unsicherheitsfortpflanzung verwendet werden, bei der es sich letztlich um eine Taylor-Reihe bis zum linearen Glied handelt. Gegeben sei eine Funktion

$$Y = f(X_j) \quad (2.92)$$

¹ Im Sinn der beiden Mittelwerte von Modell und Messung.

² PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([78], 2021)

mit den unsicherheitsbehafteten und stochastisch unabhängigen Eingangsgrößen X_j mit $j = 1, 2, \dots, m$ und der Ausgangsgröße Y . Die lineare Gauß'sche Unsicherheitsfortpflanzung dieser Funktion ist dann gegeben mit

$$\delta Y = \sqrt{\sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \delta X_j \right)^2}, \quad (2.93)$$

siehe auch Pelz u. a.¹. Die partiellen Ableitungen von f werden auch als Sensitivitätskoeffizienten $c_j := \partial f / \partial X_j$ bezeichnet. Die Gleichung zeigt, dass die fortgepflanzte Unsicherheit immer nur positiv sein kann und sich immer nur vergrößern kann. Durch die Quadrierung wird δY durch die größten Werte aus den Produkten $c_j \delta X_j$ dominiert. Die Berechnung der kombinierten Unsicherheit kann für korrelierte Größen X_j und bei Nichtlinearität um weitere Glieder der Taylor-Entwicklung erweitert werden. Dies gestaltet sich in der Praxis jedoch oft schwierig. Zudem können die Ableitungen $\partial f / \partial X_j$ prinzipiell auch numerisch um einen Punkt approximiert werden, sollte kein analytischer Zusammenhang vorliegen². Gleichung (2.93) wird im Sinne des GUM unabhängig von den einzelnen Verteilungen der X_j verwendet und es wird in Anlehnung an den zentralen Grenzwertsatz vereinfachend angenommen, dass Y normalverteilt ist.

Wenn jedoch (i.) keine linearen Zusammenhänge vorliegen, (ii.) keine analytischen Ausdrücke für die Ableitungen $\partial f / \partial X_j$ gefunden werden können oder der Aufwand dafür zu hoch ist, und (iii.) wenn keine Normalverteilung für Y erwartet wird, kann Gleichung (2.93) nicht verwendet werden. Alle drei Punkte treffen auf das in der vorliegenden Arbeit betrachtete CAPM zu, welches ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen darstellt. Stattdessen muss auf eine Monte-Carlo-Methode (MC-Methode) zur Unsicherheitsfortpflanzung zurückgegriffen werden. Hierbei handelt es sich um ein numerisches Verfahren, bei dem aufbauend auf dem Gesetz der großen Zahlen eine diskrete Näherung der Verteilungsfunktion von Y berechnet wird. Aus dieser können dann die entsprechenden Kennwerte wie Mittelwert und Unsicherheit abgeleitet werden.

Die geeignete Durchführung und theoretischen Grundlagen der MC-Methode sind ebenfalls im GUM zu finden³. Im Folgenden wird das in dieser Arbeit verwendete Verfahren vorgestellt. Dafür wird beispielhaft wieder auf

¹ PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([78], 2021)

² ISO/IEC GUIDE 98-3:2008, *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)*, ([44], 2008)

³ ISO/IEC GUIDE 98-3/SUPPL. 1:2008, *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995). Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, ([45], 2008)

Gleichung (2.92) als allgemeinen Modellzusammenhang zurückgegriffen. Der Ablauf besteht aus den folgenden Punkten:

1. Allen Eingangsgrößen X_j mit $j = 1, 2, \dots, m$ wird jeweils eine konkrete Verteilungsfunktion zugewiesen.
2. Für jedes X_j wird eine große Anzahl n an zufälligen Realisierungen $x_{j,i}$ mit $i = 1, 2, \dots, n$ aus der Verteilungsfunktion als Stichprobe gezogen.
3. Mit den so erhaltenen n zufälligen Sätzen der $x_{j,i}$ werden n diskrete Werte der Ergebnisgröße y_i berechnet.
4. Aus der so erhaltenen Stichprobe für y_i werden die gewünschten Größen wie Mittelwert \bar{y} und Unsicherheit δy wie unten beschrieben geschätzt.
5. Das Verfahren wird auf Konvergenz geprüft. Wenn Konvergenz festgestellt wird, ist das Verfahren beendet. Wenn nicht, muss die Stichprobengröße n erweitert werden und das Verfahren wird an Punkt 2 fortgesetzt.

Die Konvergenz ist erreicht, wenn die Näherung von Y ausreichend vorliegt und sich die geschätzten Parameter der Verteilung wie Mittelwert und Konfidenzintervall nicht mehr mit Erhöhung von n ändern. Der Schlüssel zum Erfolg des Verfahrens ist somit ein ausreichend großer Stichprobenumfang n . Bei der gewöhnlichen MC-Methode kann im Allgemeinen von $n \approx 10^6$ ausgegangen werden. Diese Zahl kann sich verringern, wenn ein gutmütiges Modell f und einfache Verteilungen von X_j vorliegen oder wenn lediglich Mittelwert und Unsicherheit benötigt werden und kein weiteres Interesse an der Verteilungsfunktion von Y besteht.

Zudem können Quasi-MC-Verfahren genutzt werden. Hierbei werden die Stichproben mittels quasi-zufälligen Methoden wie einem Latin-Hypercube-Verfahren oder einer Sobol-Sequenz gezogen. Diese Methoden füllen den Raum möglicher Werte besser und vermeiden eine Häufung von Realisierungen in einem kleinen Intervall. Hierdurch kann n oft um eine oder zwei Größenordnungen reduziert werden.

Die Auswertung der Stichprobe y_i gestaltet sich vergleichsweise einfach und ist analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.4.1. Der Mittelwert \bar{y} berechnet sich mit Gleichung (2.81) und die Standardabweichung $s(y_i)$ mit Gleichung (2.82). Anhand eines einfachen Beispiels lässt sich mittels der Gauß'schen Unsicherheitsfortpflanzung (2.93) verdeutlichen, dass der Faktor K in Gleichung (2.85) für die δX_j mit fortgepflanzt wird. Entsprechend ist die fortgepflanzte bzw. kombinierte Unsicherheit δy nicht im Sinne eines Standardfehlers (2.83)

oder (2.84) zu bestimmen, sondern ergibt sich einfach durch die eben schon genannte empirische Standardabweichung der Stichprobe

$$\delta y = s(y_i). \quad (2.94)$$

Für die Bestimmung von Quantilen muss die Stichprobe y_i zunächst geordnet werden, sodass gilt $y_i < y_{i+1}$ für $i \leq n - 1$. Die so geordnete Stichprobe wird als y'_i bezeichnet. Aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen werden bspw. die Hälfte der Werte über dem zum Index $i = n/2$ gehörenden Wert $y'_{n/2}$ liegen und die andere Hälfte darunter. Der Wert $y'_{n/2}$ stellt also die numerische Näherung des Medians dar. Quantile lassen sich demnach sehr einfach mittels des ganzzahligen Index i bestimmen. Wird ein P -Intervall gesucht, müssen ein unterer Index i_u und oberer Index i_o analog zu den Erläuterungen im Zusammenhang mit Gleichung (2.75) gefunden werden, sodass sich eine Anzahl von nP Werten dazwischen befindet.

Ein beispielhaftes Histogramm, also eine Darstellung einer diskreten Häufigkeitsdichteverteilung, ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Bei den Daten handelt es sich um eine Stichprobe von $n = 5 \times 10^4$ mittels MC-Verfahren berechneten Werten. Es ist ersichtlich, dass es sich näherungsweise wohl um die Dichteverteilung einer Normalverteilung handelt. In Abbildung 2.6 sind die relativen Indizes i/n über den Werten y'_i aufgetragen. Diese Darstellung ergibt eine Näherung der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Aufgrund der Vielzahl der Werte ist die diskrete Näherung im Diagramm augenscheinlich nicht von einer kontinuierlichen Funktion zu unterscheiden.

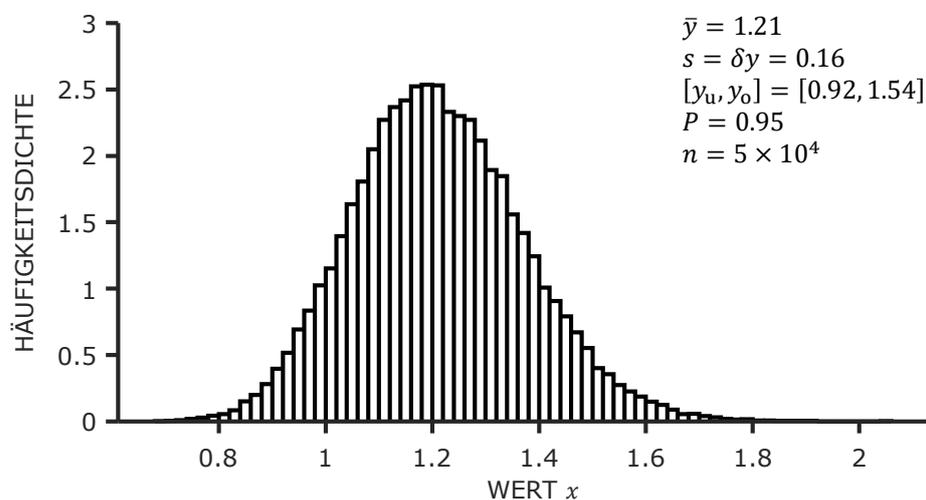


Abbildung 2.5 – Mittels MC-Methode berechnete diskrete Häufigkeitsdichteverteilung als Histogramm.

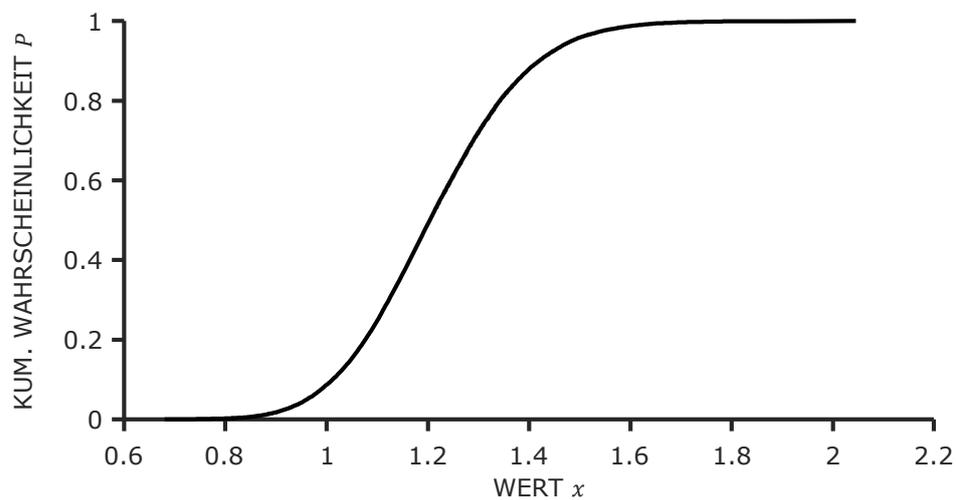


Abbildung 2.6 – Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung bestehend aus 50 000 mittels MC-Methode berechneten Einzelwerten.

Kapitel 3

Verallgemeinerte Einlassrandbedingungen unter Berücksichtigung des Lomakin- Effektes

Der Lomakin-Effekt ist nach seinem Entdecker benannt, der ihn erstmals 1958 beschrieb¹. Es handelt sich um einen Trägheitseffekt, der in der Theorie von Dichtspalten, d. h. Bulk-Flow-Modellen, wohlbekannt ist^{2,3}. Dieser Effekt kann grundsätzlich beobachtet werden, wenn enge Ringspalte axial durchströmt werden. Von einem Vorraum oder Plenum kommend strömt das Fluid in den Spalt, der eine plötzliche Querschnittsverengung darstellt. Aufgrund seiner Trägheit löst das Fluid an der Einlasskante statorseitig ab, wonach sich die Grenzschicht wieder an die Wand anlegt und die effektive Stromröhre sich auf den vollen Spaltquerschnitt ausdehnt. Dieser Vorgang resultiert in einem Carnot-Druckverlust.

Entsprechend wird der Lomakin-Effekt typischerweise durch eine Bernoulli'sche Gleichung mit Druckverlustterm beschrieben. Für Bulk-Flow-Modelle dient diese Bernoulli'sche Gleichung dann entsprechend als Einlassrandbedingung für den Druck und die Axialgeschwindigkeit². Die wichtigste Eigenschaft des Lomakin-Effektes tritt bei exzentrischen Fällen zum Vorschein. Aufgrund der größeren Strömungsgeschwindigkeit wird an der weitesten Stelle des

¹ LOMAKIN, „Calculation of the critical speed and the conditions to ensure dynamic stability of the rotors in high pressure hydraulic machines, taking account of the forces in the seals (in Russian)“, ([64], 1958)

² CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

³ BRENNEN, *Hydrodynamics of pumps*, ([8], 1994)

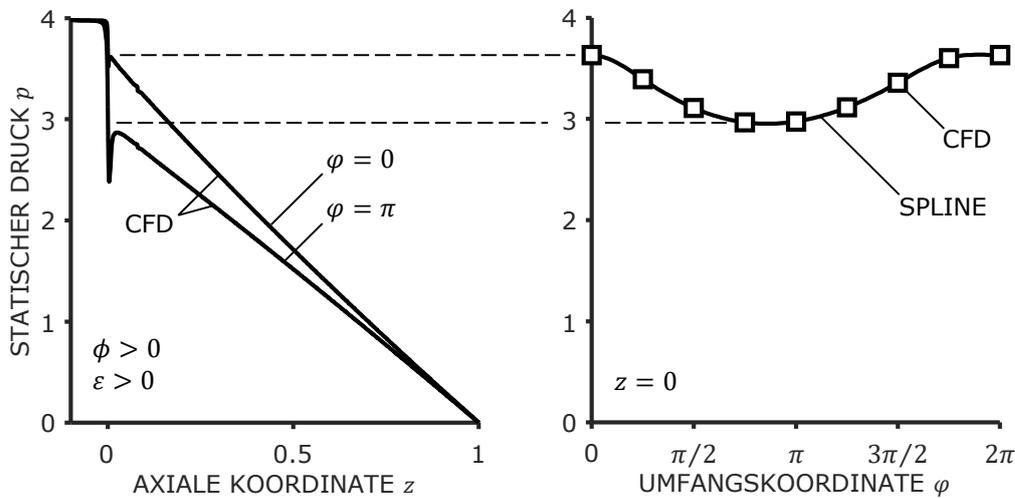


Abbildung 3.1 – Axialer Verlauf und Umfangsverteilung des Druckes aufgrund des Lomakin-Effektes.

Spaltes ein größerer Druckverlust verursacht, als an der engsten Stelle. Das resultierende Druckfeld im Spalt bewirkt entsprechend eine zentrierende Rückstellkraft auf den Rotor, sodass bei axial durchströmten Spalten auch um die konzentrische Ruhelage eine substantielle Steifigkeit erreicht wird. Dieser Zusammenhang wird im beispielhaften axialen Druckverlauf von Abbildung 3.1 links verdeutlicht (die engste Stelle befindet sich bei $\varphi = 0$). Rechts ist ein entsprechender Druckverlauf über den Umfang am Spalteinlass dargestellt.

In der Literatur im Zusammenhang mit Gleitlagern und der Reynolds'schen Schmierfilmtheorie ist der Lomakin-Effekt kaum bekannt. Dennoch erkannte Constantinescu¹ 1970, dass die Randbedingungen am Spalteinlass Trägheitseffekte berücksichtigen müssten². Später betonten Constantinescu und Galetuse³ nochmals die Wichtigkeit korrekter Einlassrandbedingungen. Andere Wissenschaftler sprachen ungenau von einem Staudruckeffekt (engl. „ram

¹ CONSTANTINESCU, „On the Influence of Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self-Acting Films“, ([20], 1970)

² In der klassischen Reynolds'schen Schmierfilmtheorie wird die Trägheit vollständig vernachlässigt.

³ CONSTANTINESCU UND GALETUSE, „Operating Characteristics of Journal Bearings in Turbulent Inertial Flow“, ([21], 1982)

pressure“) am Spalteinlass von ebenen (translatorischen) Gleitschuhlagern^{1,2}. Tichy und Chen³ machten schließlich von einer Bernoulli’schen Gleichung mit Druckverlust als Randbedingung für ein ebenes Gleitschuhlager bei laminarer Strömung Gebrauch. Keiner der genannten Autoren bezog sich etwa auf den Lomakin-Effekt.

Mit der Berücksichtigung des Lomakin-Effektes wird der Einlassdruckverlustkoeffizient ζ in ein Modell eingeführt. Der spezifische verwendete Wert für ζ hat großen Einfluss auf die Modellvorhersagen für Tragkraft oder rotordynamischen Koeffizienten, weswegen eine genaue Kenntnis wichtig ist. Für ebene Potentialströmung ($Re \rightarrow \infty$) von einem Plenum in einen engen Spalt kann mittels Hodographenmethode ein Wert von $\zeta = 0.41$ analytisch bestimmt werden^{4,5}. In der Ingenieurpraxis wird häufig ein sinnvoller Richtwert von $\zeta = 0.5$ angesetzt⁶. Im Werk von Childs⁷ werden zum Stand von 1993 verschiedene veröffentlichte Werte im Bereich von $\zeta \approx 0$ bis 0.5 angegeben.

Aufgrund der sehr schwierigen experimentellen Ermittlung von Werten für ζ sind weitere Veröffentlichungen diesbezüglich rar. Elrod, Childs und Nelson⁸ versuchten fragwürdigerweise etwa, den Einlassdruckverlust von Gasdichtungen über einen Wandreibungsfaktor anstatt eines Druckverlustterms zu modellieren. Sie ermittelten entsprechende Reibungsfaktoren experimentell und nutzten sie anschließend mit einem Bulk-Flow-Modell.

Später finden sich vereinzelte Publikationen, die CFD statt Experiment nutzten. Grigoriev u. a.⁹ etwa untersuchten den Einlassdruckverlustkoeffizienten in Abhängigkeit des relativen Spaltspiels für Gasdichtungen. Sie nutzten dafür zweidimensionale umfangssymmetrische CFD-Simulationen unter Verwendung eines k - ω -Turbulenzmodells. Eine Rotation der Welle wurde dabei

¹ KING UND TAYLOR, „An Estimation of the Effect of Fluid Inertia on the Performance of the Plane Inclined Slider Thrust Bearing With Particular Regard to Turbulent Lubrication“, ([50], 1977)

² LAUNDER UND LESCHZINER, „Flow in Finite-Width, Thrust Bearings Including Inertial Effects: I—Laminar Flow“, ([62], 1978)

³ TICHY UND CHEN, „Plane Slider Bearing Load Due to Fluid Inertia—Experiment and Theory“, ([98], 1985)

⁴ SPURK, *Aufgaben zur Strömungslehre*, ([93], 1996)

⁵ SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

⁶ KÜNDIG, „Gestufte Labyrinthdichtungen hydraulischer Maschinen: Experimentelle Untersuchung der Leckage, der Reibung und der stationären Kräfte“, ([58], 1994)

⁷ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

⁸ ELROD, CHILDS UND NELSON, „An Annular Gas Seal Analysis Using Empirical Entrance and Exit Region Friction Factors“, ([26], 1990)

⁹ GRIGORIEV U. A., „Consideration of the Pressure Entrance Loss for the Analysis of Rotordynamic Gas Seals Forces“, ([36], 2006)

nicht berücksichtigt. Die Ergebnisse unter ihren Definitionen ergaben Werte von $\zeta = 1.19$ bis 1.30 .

Yang und San Andrés¹ nutzten eine ähnliche Methode aufbauend auf zweidimensionalen umfangssymmetrischen CFD-Simulationen, hier unter Nutzung eines k - ϵ -Turbulenzmodells. Sie untersuchten den Einfluss des Kantenradius bei einer mit Wasser durchströmten Dichtung. Hierbei wurde in den Simulationen auch die Rotation der Welle berücksichtigt, nicht jedoch in der Bernoulli'schen Gleichung und der Definition des Einlassdruckverlustkoeffizienten. Die Ergebnisse zeigen wie zu erwarten eine Reduzierung des Verlustkoeffizienten mit steigendem Kantenradius und die ermittelten Werte ergaben sich zu $\zeta = 0.17$ bis 0.54 .

Kündig² war vermutlich der erste, der Überlegungen zu einer möglichen Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten bei exzentrischen Spalten aufbauend auf seinen Experimenten beschrieb. Er vermutete, dass die Ursache in einem näherungsweise konstanten Kantenradius bei variierender Spaltweite lag. Weiterhin vermutete er, dass eine Umfangsverteilung von ζ dennoch auch bei scharfer Kante möglich wäre.

Später wurden in einer studentischen Arbeit am Institut für Fluidsystemtechnik an der TU Darmstadt von Marant³ unter Betreuung von S. R. Lang CFD-Simulationen für turbulente Strömung bei exzentrischen Dichtspalten durchgeführt, die darauf hindeuteten, dass tatsächlich eine Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten $\zeta = \zeta(\varphi)$ vorliegt. Aufbauend auf diesen Vorüberlegungen war der Autor der vorliegenden Arbeit der erste, der einen umfangsverteilten Druckverlustkoeffizienten im Zusammenhang mit einem integro-differentiellen Spaltströmungsmodell, dem CAPM, nutzte (siehe Robrecht, Kuhr und Pelz⁴). Es wurde beschrieben, dass die Verteilung des Verlustkoeffizienten im Allgemeinen von der Reynoldszahl, der Durchflusszahl, der relativen Spaltweite, der relativen Exzentrizität und ggf. der Orbitfrequenz abhängen kann. Als erste Vermutung der Umfangsverteilung wurde entsprechend der Funktion der Spaltweite eine Sinus-Verteilung mit dem Maximum an der weitesten Stelle des Spalts angesetzt.

Darauf aufbauend wird im Folgenden ein verallgemeinertes Modell für die

¹ YANG UND SAN ANDRÉS, „On the Influence of the Entrance Section on the Rotordynamic Performance of a Pump Seal With Uniform Clearance: A Sharp Edge Versus A Round Inlet“, ([107], 2019)

² KÜNDIG, „Gestufte Labyrinthdichtungen hydraulischer Maschinen: Experimentelle Untersuchung der Leckage, der Reibung und der stationären Kräfte“, ([58], 1994)

³ MARANT, „Numerische Untersuchung der rotierenden Spaltströmung durch plötzliche Querschnittsübergänge: Masterthesis, Technische Universität Darmstadt“, ([67], 2015)

⁴ ROBRECHT, KUHR UND PELZ, „CAPM vs. Bulk Flow - reliable and efficient prediction of forces and leakage for annular gaps in pumps“, ([85], 2019)

Einlassrandbedingungen unter Berücksichtigung der Umfangsverteilung des Verlustkoeffizienten hergeleitet, das teilweise bereits veröffentlicht ist. Später werden entsprechende Ergebnisse unter Nutzung von CFD-Simulationen für laminare und turbulente Strömung präsentiert.^{1,2}

3.1 Modellbildung

Für die Lösung der Grundgleichungen des CAPM (2.6) bis (2.8) werden Randbedingungen für die drei abhängigen Variablen benötigt. Die beiden Ränder $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ werden mit einer Periodizitätsbedingung behandelt. Für den Auslassrand bei $z = 1$ kann meist näherungsweise ein Plenum angenommen werden. Die beiden Flussgrößen bzw. Geschwindigkeiten ergeben sich aus dem inneren des Spaltes mittels Extrapolation. Die Strömung mündet dann quasi als Strahl in das Plenum, in dem näherungsweise ein konstanter Druck herrscht. Dieser Druck prägt sich auf den Strahl auf, da an dessen Oberfläche für den Spannungsvektor $\vec{t}(\vec{n}) = -\vec{t}(-\vec{n})$ gilt. Bei inkompressibler Strömung reicht es daher i. d. R. aus, einen konstanten Druck vorzuschreiben, d. h. $p = 0$, sofern das Auslassplenum entsprechend groß ist.

Am Einlass bei $z = 0$ wird wie oben beschrieben eine Bernoulli'sche Gleichung mit Druckverlustterm verwendet. Diese nichtlineare Bedingung koppelt die Druck- und Geschwindigkeitswerte und berücksichtigt zudem den Lomakin-Effekt. Die Bernoulli'sche Gleichung wird allgemein hergeleitet, indem die Eulergleichung entlang einer Stromlinie integriert wird. Die Gleichung sagt aus, dass der Totaldruck entlang dieser Stromlinie bei Inkompressibilität und Reibungsfreiheit konstant bleiben muss. In einem rotierenden Bezugssystem ist die Bernoulli'sche Gleichung in allgemeiner dimensionsloser Form gegeben mit

$$2 \int \frac{\partial}{\partial t} |\vec{w}| \, d\xi + |\vec{w}|^2 + p - \omega^2 r^2 = \text{konst.}, \quad (3.1)$$

wobei $d\xi$ ein infinitesimales Element der Stromlinie und \vec{w} den Vektor der Relativgeschwindigkeit darstellen³. Im theoretischen Rahmenwerk der Stromfadentheorie wird die Gleichung oft „künstlich“ mit einem empirischen Druckverlustterm $\Delta\tilde{p}_{\text{Verlust}}$ erweitert. Unter der Annahme, dass die Strömung im rotierenden Bezugssystem quasi-stationär ist, verschwindet der transiente

¹ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

² ROBRECHT UND PELZ, „Lubrication Film Friction Model for Grooved Annular Seals“, ([83], 2023)

³ SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

Term in Gleichung (3.1) und es wird der oben beschriebene Einlassdruckverlustkoeffizient ζ definiert als

$$\zeta := \frac{2 \Delta \tilde{p}_{\text{Verlust}}}{\tilde{\rho} |\tilde{w}|^2}. \quad (3.2)$$

Dabei wird der mittlere Geschwindigkeitsvektor \tilde{w} am Spalteinlass $z = 0$ genommen. Der Verlustkoeffizient kann eine Funktion der Umfangskoordinate φ und im Allgemeinen aller globalen Modellparameter sein¹:

$$\zeta = \zeta(\varphi, \varepsilon, \gamma, \omega, Re, \phi, \psi, L). \quad (3.3)$$

Bei bekannter Verteilung $\zeta(\varphi)$ für einen gegebenen Satz an Betriebsparametern kann auch ein umfangsgemittelter Wert mit

$$\bar{\zeta} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi) \, d\varphi \quad (3.4)$$

bestimmt werden. Alle bisher veröffentlichten Werte für den Verlustkoeffizienten müssen im Sinne einer solchen Mittelung verstanden werden.

Für die weitere Herleitung kann angenommen werden, dass sich auch vor dem Spalt oft ein größerer Raum befindet. Obwohl die Abmessungen dieses Vorraums i. d. R. deutlich größer als die mittlere Spaltweite \tilde{h} sind, sind sie dennoch klein im Vergleich mit dem Rotorradius \tilde{R} . Entsprechend ist die Strömung auch im Vorraum vollständig von den Wandgrenzschichten in Umfangsrichtung dominiert. Nichtsdestotrotz kann angenommen werden, dass der Totaldruck dort näherungsweise konstant ist und im Folgenden wird daher der Begriff „Plenum“ für den Vorraum verwendet.

Wenn der Vorraum ebenfalls einen Kreisquerschnitt hat und seine radiale Erstreckung durch die Länge \tilde{H} analog zur mittleren Spaltweite \tilde{h} gegeben ist, ergibt die integrale Kontinuitätsgleichung mit den entsprechenden mittleren Axialgeschwindigkeiten

$$\frac{\tilde{C}_{z,\text{Plenum}}}{\tilde{C}_z} = \frac{\phi_{\text{Plenum}}}{\phi} = \frac{\tilde{h}}{\tilde{H}} \frac{2\tilde{R} + \tilde{h}}{2\tilde{R} + \tilde{H}}. \quad (3.5)$$

Typischerweise kann angenommen werden, dass der erste Bruch auf der rechten Seite von der Größenordnung $\sim 10^{-2}$ und der zweite $\sim 10^{-1}$ ist. Es gilt also

$$\frac{\phi_{\text{Plenum}}}{\phi} \sim 10^{-3} \quad (3.6)$$

¹ ROBRECHT, KUHR UND PELZ, „CAPM vs. Bulk Flow - reliable and efficient prediction of forces and leakage for annular gaps in pumps“, ([85], 2019)

und da $\phi \sim 10^{-1}$ bis $\sim 10^0$ ist, ist $\phi_{\text{Plenum}} \sim 10^{-4}$ bis $\sim 10^{-3}$. Die Axialgeschwindigkeit im Plenum kann in der Bernoulli'schen Gleichung also i. d. R. ohne Weiteres vernachlässigt werden.

Aufgrund des rotierenden Bezugssystem muss die Zentrifugalbeschleunigung berücksichtigt werden. In der Bernoulli'schen Gleichung geschieht dies über die Differenz vom Ursprungs- zum Endpunkt auf der rechten Seite als Term der Form

$$\omega^2 \left(r_{\text{Plenum}}^2 - r_{\text{Spalt}}^2 \right). \quad (3.7)$$

Grundsätzlich gilt immer in sehr guter Näherung $r_{\text{Spalt}} \approx 1$ wegen $\psi \ll 1$. Für die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit gilt zudem als Näherung $r_{\text{Plenum}} \approx 1$ in Anlehnung an die Geometrie des zur Validierung verwendeten Prüfstandes, sodass der Differenzterm der Zentrifugalbeschleunigung ebenfalls vernachlässigt wird. Unter anderen Umständen kann $r_{\text{Plenum}} > r_{\text{Spalt}}$ gelten, sodass die Vernachlässigung nicht zulässig ist.

Weiterhin muss die Umfangskomponente der mittleren Relativgeschwindigkeit im Plenum $\bar{W}_{\varphi, \text{Plenum}} = \bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} - \omega r_{\text{Plenum}}$ berücksichtigt werden. Dies gestaltet sich in der Praxis jedoch oft als schwierig, da $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ nur selten bekannt ist. Im besten Fall wird der Wert an einer passenden Stelle gemessen, anderenfalls kann er im Sinne eines ungefähren, volumengemittelten Wertes angenommen werden.

Unter diesen Bedingungen lautet die Bernoulli'sche Gleichung (3.1) mit dem Verlustkoeffizienten (3.2) entlang einer Stromlinie vom Plenum an einen Punkt direkt am Spalteinlass

$$\left(\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} - \omega r_{\text{Plenum}} \right)^2 + \Delta p = p(\varphi) + [1 + \zeta(\varphi)] \left[\bar{w}_{\varphi}^2(\varphi) + \phi^2 \bar{c}_z^2(\varphi) \right]. \quad (3.8)$$

Im stationären Fall ohne Orbitbewegung wird Gleichung (3.8) mit $\omega = 0$ zu

$$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}^2 + \Delta p = p(\varphi) + [1 + \zeta(\varphi)] \left[\bar{c}_{\varphi}^2(\varphi) + \phi^2 \bar{c}_z^2(\varphi) \right] \quad (3.9)$$

und der Verlustkoeffizient (3.2) wird zu

$$\zeta := \frac{2 \Delta \tilde{p}_{\text{Verlust}}}{\tilde{\rho} |\bar{\vec{c}}|^2}. \quad (3.10)$$

Diese Gleichung zieht in Betracht, dass das Fluid entlang jeder einzelnen Stromlinie, die im Plenum bei konstantem Totaldruck beginnt, im Verlauf zum Spalteinlass einen individuellen Druckverlust erfahren kann. Es müssen $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$, Δp oder ϕ , $\zeta(\varphi)$ und eine weitere Randbedingung für $\bar{c}_{\varphi}(\varphi)$ gegeben sein, damit im Rahmen der iterativen Lösung $p(\varphi)$ und $\bar{c}_z(\varphi)$ bestimmt werden können.

Für die Umfangsgeschwindigkeit am Spalteinlass kann oft die Annahme $\bar{c}_\varphi(\varphi) = 0.5$ getroffen werden. Dies stellt sicherlich eine grobe Näherung dar, die sich aber in vielen Fällen als ausreichend erweist, insbesondere wenn die Welle sich ohne Absatz in den Vorraum erstreckt.

Das Modell nach Childs¹ wird bis heute häufig genutzt, bspw. auch bei Yang und San Andrés². Hier wird unter vollständiger Vernachlässigung der Strömung in Umfangsrichtung eine Art Bernoulli'sche Gleichung der Form

$$\Delta p = p(\varphi) + (1 + \bar{\zeta}^*) \phi^2 \bar{c}_z^2(\varphi) \quad (3.11)$$

mit einem Verlustkoeffizienten

$$\bar{\zeta}^* := \frac{2 \Delta \tilde{p}_{\text{Verlust}}}{\tilde{\rho} \tilde{c}_z^2} = \text{konst.} \quad (3.12)$$

genutzt. Im Vergleich zu diesem üblichen Ansatz (3.11) und (3.12) ergeben sich zum neuen, oben hergeleiteten Modell (3.8) und (3.2) folgende Unterschiede:

- Das rotierende Bezugssystem wird beim üblichen Modell nach Childs stets stillschweigend vernachlässigt. Dies ist im Rahmen des häufig verwendeten linearen Störansatzes mit $\varepsilon \ll 1$ (vgl. Anhang A.2) eine zulässige Vereinfachung. Bei Werten von bspw. $\varepsilon > 0.1$ ist dies allerdings nicht mehr gegeben. Die oben beschriebene Herleitung berücksichtigt entsprechend erstmals formal korrekt und vollständig das rotierende Bezugssystem. In diesem Rahmen muss die Relativgeschwindigkeit im Plenum $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} - \omega r_{\text{Plenum}}$ und unter Umständen die Zentrifugalbeschleunigung berücksichtigt werden.
- Im üblichen Modell wird die Umfangsgeschwindigkeit am Spalteinlass vernachlässigt, wodurch eine unphysikalische Form der Bernoulli'schen Gleichung vorliegt. Dies wird im neuen Modell korrigiert.
- Im üblichen Modell wird zudem die Umfangsgeschwindigkeit bei der Definition des Verlustkoeffizienten nicht berücksichtigt. Dies ist zwar prinzipiell zulässig, ist aber inkonsistent mit der Stromfadentheorie.
- Im üblichen Modell nach Childs wurde der Verlustkoeffizient häufig als willkürlicher, konstanter Richtwert angesetzt. Mit dem neuen Modell wird erstmals die Umfangsverteilung und die Abhängigkeit von

¹ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

² YANG UND SAN ANDRÉS, „On the Influence of the Entrance Section on the Rotordynamic Performance of a Pump Seal With Uniform Clearance: A Sharp Edge Versus A Round Inlet“, ([107], 2019)

den Betriebsparametern berücksichtigt. Mit dem neuen Modell ist nun überhaupt erstmals die Möglichkeit gegeben, den Verlustkoeffizienten systematisch und sinnvoll unter Berücksichtigung aller Betriebsparameter mittels CFD oder Experiment zu ermitteln. Dies wird in den folgenden Abschnitten beschrieben.

- Für die Umfangsgeschwindigkeit am Spalteinlass $\bar{c}_\varphi(\varphi)$ wird im üblichen Modell grundsätzlich von einem konstanten Wert über den Umfang ausgegangen. Im Rahmen des CAPM und des neuen Modells kann eine Umfangsverteilung vollständig und konsistent berücksichtigt werden.

Aufgrund unterschiedlicher Definitionen und Ermittlungsmethoden sind veröffentlichte Werte des Verlustkoeffizienten nicht allgemeingültig verwendbar. Da die Definition des dimensionslosen Verlustkoeffizienten willkürlich ist, erscheint es bei Anbetracht der langen Abhängigkeitsliste (3.3) sinnvoll, eine für die Ingenieurpraxis allgemeingültige Definition zu verwenden, die ausschließlich von globalen, i. d. R. bekannten Betriebsparametern abhängt und nicht von lokalen Lösungsgrößen. Eine solche alternative Form ist der im Sinne der vorliegenden Arbeit gewöhnliche, dimensionslose Druck

$$\Delta p_{\text{Verlust}}(\varphi) := \frac{2 \Delta \tilde{p}_{\text{Verlust}}(\varphi)}{\tilde{\rho} \Omega^2 \tilde{R}^2}. \quad (3.13)$$

Damit ergibt sich eine entsprechend alternative Form der Bernoulli'schen Gleichung (3.9) bei $\omega = 0$ mit

$$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}^2 + \Delta p = p(\varphi) + \bar{c}_\varphi^2(\varphi) + \phi^2 \bar{c}_z^2(\varphi) + \Delta p_{\text{Verlust}}(\varphi). \quad (3.14)$$

3.2 Methodik zur Ermittlung der Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten

Das im vorigen Abschnitt erarbeitete Modell für die Einlassrandbedingungen ermöglicht erstmals die systematische Bestimmung des Verlustkoeffizienten unter Berücksichtigung aller Abhängigkeiten. Hierfür ist eine neue Methodik notwendig, die im Folgenden beschrieben wird. Die Methodik ist prinzipiell sowohl für Daten aus CFD-Simulationen, als auch aus Experimenten praktikabel. Zunächst wird sie mit Fokus auf die in dieser Arbeit erfolgten Simulationen beschrieben. Zum Schluss wird nochmals kurz das Experiment ins Auge gefasst.

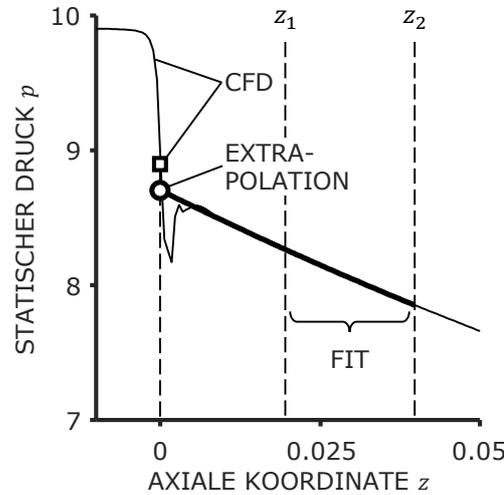


Abbildung 3.2 – Axialer Druckverlauf am Spalteinlass und Extrapolation.

Grundsätzlich ist es das Ziel, $\zeta(\varphi)$ mittels Gleichung (3.8) bei sonst gegebenen Betriebsparametern zu bestimmen. Dafür werden $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ sowie die Verteilungen für $p(\varphi)$, $\bar{c}_{\varphi}(\varphi)$ und $\bar{c}_z(\varphi)$ direkt am Spalteinlass benötigt. Die Ablösung stört jedoch die Strömung am Einlass des Ringspaltes, weswegen in diesem Gebiet große Gradienten in den Geschwindigkeitsfeldern und auch im Druckfeld auftreten können. Aufgrund der hohen Sensitivität bezüglich z können die benötigten Größen aus den Simulationen direkt am Spalteinlass bei $z = 0$ stark schwanken – bspw. von einer Iteration zur nächsten, von einem Zeitschritt zum nächsten oder von einem Gitter zum nächsten – und sind deshalb für eine direkte Auswertung ungeeignet. Um dieses Problem zu umgehen, wird eine angepasste Bagley-Methode angewandt¹, die sich als deutlich robuster erweist. Die Bagley-Methode ist im Fachgebiet der Rheologie wohlbekannt und dient zur Bestimmung bzw. Bereinigung von Einlass- und Einlaufeffekten, siehe bspw. Mitsoulis und Hatzikiriakos².

Die angewandte Methodik soll im Folgenden anhand von Abbildung 3.2 erläutert werden. Das beispielhafte Diagramm zeigt den statischen Druck über der axialen Koordinate im Bereich des Spalteinlasses. Bei $z < 0$ befindet sich das Plenum. Die dünne durchgezogene Linie stellt den axialen Druckverlauf aus einer CFD-Simulation bei $s = 1/2$, d. h. radial in der Mitte des Spaltes, an einer Stelle $\varphi = \text{konst.}$ dar. Der Verlauf zeigt die Druckverteilung aufgrund des Ablösegebietes. In allen betrachteten Fällen erstreckt sich die Ablösung

¹ Auf Vorschlag von P. F. PELZ, persönliche Kommunikation.

² MITSOULIS UND HATZIKIRIAKOS, „Bagley correction: the effect of contraction angle and its prediction“, ([72], 2003)

lediglich bis zu einer axialen Stelle $< 15 \tilde{h}$, nach der die Druckschwankungen abgeklungen sind und der Druckgradient durch die Wandreibung bedingt wird. Aus diesem Grund wurde eine erste Referenzstelle bei $z_1 = 20 \tilde{h}/\tilde{L} = 20 \psi/L$ festgelegt und eine zweite bei $z_2 = 40 \psi/L$. Die Stellen sind entsprechend in Abbildung 3.2 markiert.

Der CFD-Druckverlauf zwischen z_1 und z_2 wurde zur Bestimmung eines Ausgleichspolynoms verwendet. Das Polynom wird durch die dicke Linie in Abbildung 3.2 dargestellt. Bei einigen Fällen wurde eine leichte Krümmung festgestellt, sodass ein Polynom zweiten Grades verwendet wurde. In den meisten Fällen war der Verlauf linear, weswegen ein Polynom ersten Grades ausreichend war. Die Abweichung in den erstgenannten Fällen dürfte aber wohl auch äußerst gering sein, sodass wahrscheinlich allgemein eine Ausgleichsgerade ausreichen wird. Anschließend wurde mit dem Polynom ein Wert an der Stelle $z = 0$ extrapoliert, der im Diagramm mit einem kreisförmigen Marker gekennzeichnet ist. Der extrapolierte Wert unterscheidet sich deutlich von dem direkt aus der Simulation bestimmten Wert, der durch den quadratischen Marker gekennzeichnet ist.

Der extrapolierte Druckwert sowie die Werte der über die Spaltweite gemittelten Geschwindigkeiten bei z_1 können dann in Verbindung mit der Bernoulli'schen Gleichung (3.8) bei $\omega > 0$ oder (3.9) bei $\omega = 0$ genutzt werden, um einen diskreten Wert von ζ an der entsprechenden Stelle φ zu berechnen. Dieser Vorgang wird an (mindestens) acht gleichmäßig um den Umfang verteilten Stellen durchgeführt. Diese grobe diskrete Approximierung wird als ausreichend angesehen, um als Stützstellen für einen periodischen kubischen Spline zu dienen, der den kontinuierlichen Verlauf von $\zeta(\varphi)$ annähert. Ergebnisse für die Verteilung des Verlustkoeffizienten werden in den folgenden beiden Abschnitten vorgestellt.

CFD-Simulationen eignen sich auf der einen Seite offensichtlich hervorragend für die oben beschriebene Methode, da alle lokalen Größen ausgewertet und Betriebsparameter beliebig verändert werden können. Auf der anderen Seite ist bekannt, dass Zweigleichungsmodelle für die Turbulenz bei Ablösungen zu signifikanten Abweichungen führen können. Entsprechend ist wie immer eine Validierung mittels Experiment wünschenswert. Die Bestimmung der Druckwerte für die Bagley-Methode kann einfach über 16 Druckbohrungen bei linearer Extrapolation gelöst werden. Die Bestimmung der lokalen, über die Spaltweite gemittelten Geschwindigkeiten gestaltet sich schwieriger und kann wohl nur mittels aufwändiger Lasermesstechnik gelöst werden. Für den konzentrischen Fall kann die mittlere Axialgeschwindigkeit jedoch leicht über den Volumenstrom bestimmt und die Umfangskomponente zu 0.5 angenommen werden.

3.3 Ergebnisse für stationäre laminare Strömung im exzentrischen Spalt

Der umfangsverteilte Einlassdruckverlustkoeffizient wurde für den stationären Fall bei laminarer Strömung mittels CFD untersucht. Dies birgt den Vorteil, dass sich keine zusätzliche Modellunsicherheit durch ein etwaiges Turbulenzmodell in die Ergebnisse fortpflanzt. Zudem existieren keinerlei Untersuchungen bezüglich des Lomakin-Effektes bei laminarer Strömung, weshalb die Analyse als besonders lohnenswert bewertet werden. Wie sich zeigt, spielt der Lomakin-Effekt auch in diesem Fall eine wichtige Rolle.

Eine detaillierte Beschreibung der numerischen Methodik ist in Anhang B zu finden, während hier der Fokus auf den Ergebnissen liegen soll. Beim Lösungsgebiet handelt es sich um einen vergleichsweise großen Ringraum mit rechteckigem Querschnitt als Plenum, das in einen glatten Ringspalt bei exzentrischem Rotor mündet. Eine schematische Darstellung der Geometrie einschließlich der verwendeten Zellenanzahl ist in Abbildung B.1 im Anhang zu finden. Die festgelegten und variierten Parameter sind in Tabelle 3.1 aufgeführt und stellen einen möglichen Betriebspunkt eines mediengeschmierten Gleitlagers mit axialer Durchströmung in einer Maschine bei Teillast dar. Die vorgegebene Druckdifferenz Δp wurde über die Randbedingungen der Simulationen aufgeprägt. Dafür wurde am Auslass des Spaltes ein konstanter statischer Druck und am Einlass des Plenums ein konstanter Totaldruck vorgeschrieben. Die Durchflusszahl ϕ , also der Volumenstrom, ergibt sich als Lösung. Dies ist passend zur Situation in einer Pumpe.

In Abbildung 3.3 ist der Druckverlust $\Delta p_{\text{Verlust}}$ nach Definition (3.13) über den Umfang am Spalteinlass für die zwölf Simulationsfälle aufgetragen. Die Bestimmung erfolgte entsprechend der Beschreibung im vorigen Abschnitt 3.2. Die Marker stellen die aus den Simulationen ermittelten Stützstellen und die Linien periodische kubische Interpolationssplines dar.

Für alle Fälle ist wie zu erwarten eine Umfangsverteilung zu erkennen, deren Maxima ungefähr bei $\varphi \approx 3\pi/4$ liegen. In Diagramm (b) ist zusätzlich zum globalen Maximum noch ein zusätzliches lokales Maximum bei ungefähr $\varphi \approx 5\pi/4$ zu erkennen. Die entsprechenden Fälle für den kürzeren Spalt $L = 1$

Tabelle 3.1 – Feste und variierte Parameter der CFD-Studie bei laminarer Strömung.

L	ψ	Re	Δp	ε	γ	ω	$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$
1; 2	0.002	1000	10; 20	0.3; 0.6; 0.9	0	0	≈ 0

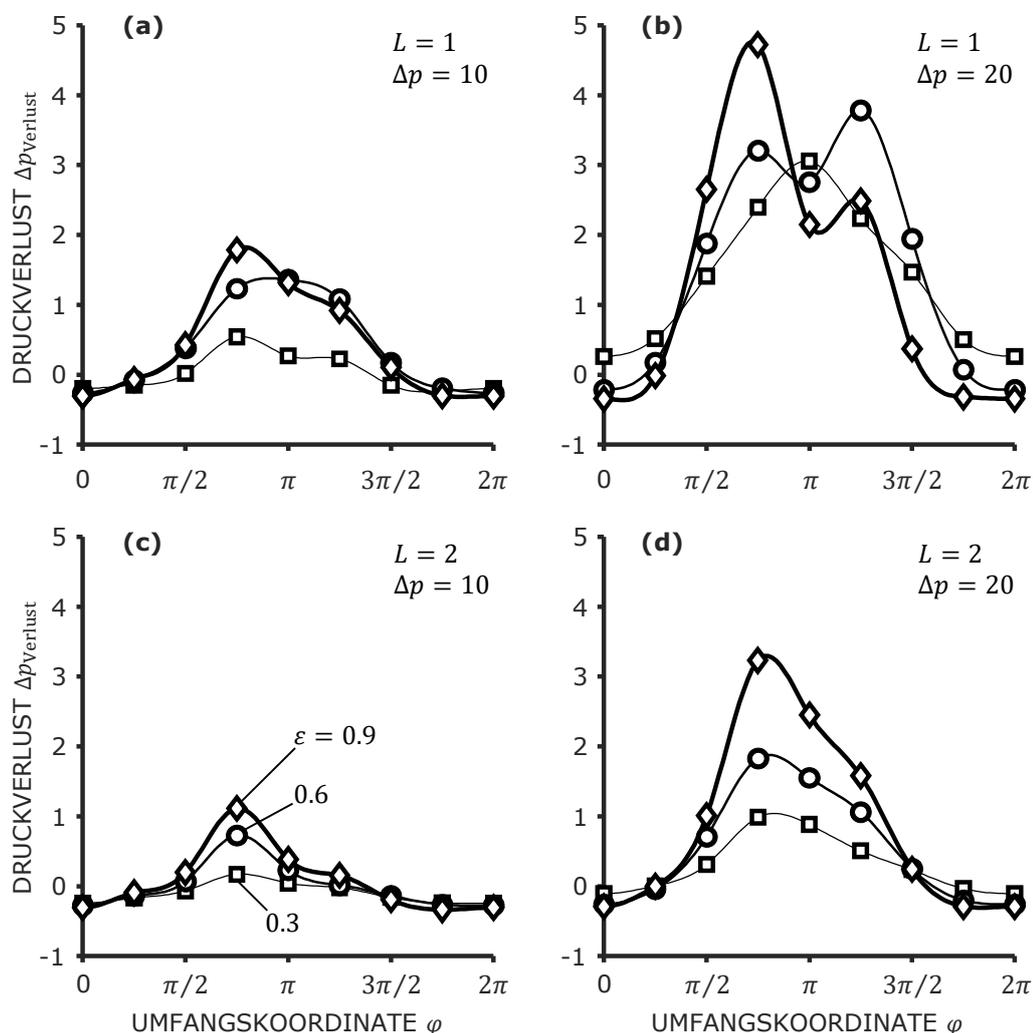


Abbildung 3.3 – Umfangsverteilung des Druckverlustes am Spalteinlass für verschiedene Spaltlängen, Druckdifferenzen und Exzentrizitäten.

bei der höheren Druckdifferenz $\Delta p = 20$ ergeben zusammen die höchsten Durchflusszahlen aller Fälle und somit die größten Druckverluste. Zudem ist bei allen Fällen eine grundsätzliche Abhängigkeit der Exzentrizität zu erkennen, wobei der Druckverlust bei steigender Exzentrizität ebenfalls steigt.

An der engsten Stelle des Spaltes bei $\varphi = 0$ ist der Druckverlust ungefähr Null. Bei den meisten Fällen sind hier sogar kleine negative Werte vorzufinden, was eine Druckerhöhung gegenüber dem Totaldruck im Plenum bedeuten würde. In einigen Fällen liegt dies sicherlich an kleinen Ungenauigkeiten der Methode und an der Extrapolation. Stellenweise zeigen die Simulationser-

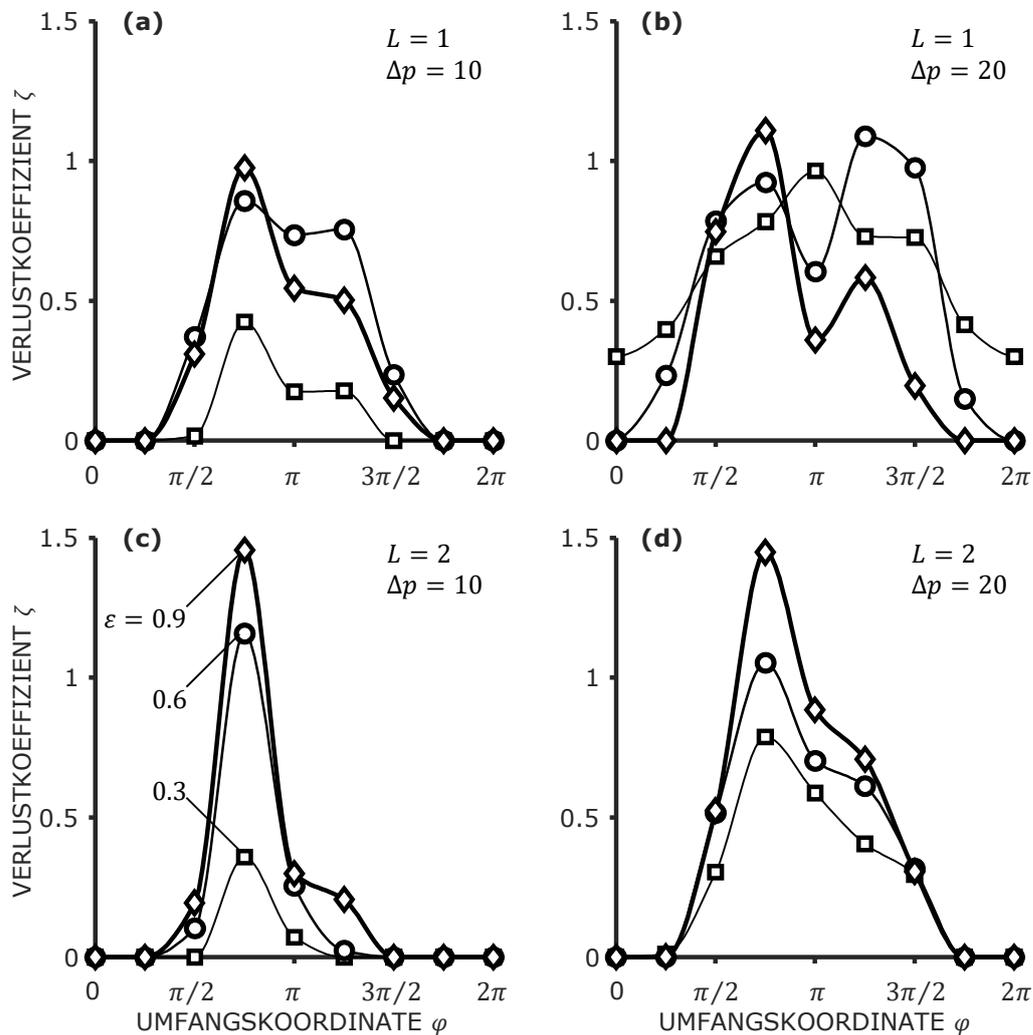


Abbildung 3.4 – Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten für verschiedene Spaltlängen, Druckdifferenzen und Exzentrizitäten.

gebnisse aber auch tatsächlich eine Art Staueffekt vor dem Spalt und somit einen leichten Druckanstieg. Hierfür müsste jedoch eine Verzögerung der Strömung entstehen, die nicht als physikalisch sinnvoll erscheint. Es ist daher möglich, dass dieser Staueffekt lediglich ein numerisches Artefakt darstellt. Aufgrund der sehr kleinen Beträge wird dem jedoch keine weitere Bedeutung beigemessen.

In Abbildung 3.4 ist nun analog der Verlustkoeffizient ζ nach Definition (3.2) bzw. (3.10) wegen $\omega = 0$ abgebildet. Es ist sofort die ausgeprägte Umfangsverteilung in allen Fällen zu erkennen, was die Forschungshypothese

grundsätzlich bestätigt. Das Maximum befindet sich abermals bei $\varphi \approx 3\pi/4$ und erreicht bei $L = 2$ recht hohe Werte bis ca. 1.5. Bemerkenswert ist, dass der Verlustkoeffizient offenbar auch von der Spaltlänge L abhängt. Dies ist möglicherweise auf eine Abhängigkeit des lokalen Ablösegebiets am Spalteinlass vom lokalen Druckgradienten $\partial p/\partial z$ zurückzuführen, der sich ja bei gleichbleibender Druckdifferenz Δp mit variierender Spaltlänge L ändert.

Es zeigt sich weitestgehend wie zuvor, dass der Verlustkoeffizient bei steigender Exzentrizität ebenfalls steigt. In Diagramm (a) ist hiervon jedoch eine Abweichung bei den Fällen $\varepsilon = 0.6$ und 0.9 zu erkennen. Die Abweichungen sind in Diagramm (b) bei den Fällen mit den höchsten Durchflusszahlen deutlich stärker ausgeprägt. An der Stelle des zweiten Maximums bei $\varphi \approx 5\pi/4$ zeigt der Verlauf für $\varepsilon = 0.9$ den niedrigsten Wert für ζ und $\varepsilon = 0.6$ den höchsten Wert. Der Fall $\varepsilon = 0.3$ ist der einzige der zwölf Fälle, für den $\zeta > 0$ bei $\varphi = 0$ gilt.

Es ist zu erwähnen, dass aufgrund der negativen Werte für $\Delta p_{\text{Verlust}}$ im Bereich um $\varphi = 0$ auch negative Werte für ζ entstehen würden. Aufgrund sehr kleiner Geschwindigkeiten in diesem Bereich führt dies zu vergleichsweise großen negativen Beträgen von ζ , obwohl die negativen Beträge des Druckverlustes selbst klein sind. Daher wurden negative Werte von ζ zu Null gesetzt. In der weiteren Verwendung der ermittelten Verläufe ist dies unerheblich (vgl. Robrecht und Pelz¹). Um ein Überschwingen der Interpolation zu verhindern, wurden für diese Fälle spezielle Splines genutzt, die die Extremstellen und die stückweise Monotonie der Stützstellen bewahren.

Zudem wurde aus den Verteilungen $\zeta(\varphi)$ die über den Umfang gemittelten Werte $\bar{\zeta}$ bestimmt. Diese sind in Tabelle 3.2 zusammen mit der Durchflusszahl ϕ und den weiteren integralen Ergebnissen aufgeführt. Die Werte von $\bar{\zeta}$ variieren im Bereich von 0.05 bis 0.62. Bei $L = 2$ steigt $\bar{\zeta}$ mit der Exzentrizität, während dies bei $L = 1$ nicht der Fall ist. Es zeigt sich bei allen Fällen, dass ϕ wie zu erwarten mit ε ansteigt. Insgesamt folgt aus dieser begrenzten Studie, dass zwar wesentliche Tendenzen, aber keine völlig eindeutigen Proportionalitäten für $\bar{\zeta}$ zu Tage treten. Es ist also immer eine spezifische Kombination der hier betrachteten Parameter L , Δp bzw. ϕ sowie ε zu untersuchen.

Wie in Anhang A.4 dargestellt, können die in Tabelle 3.2 aufgeführten Größen zur Bewertung der vorliegenden Strömungsregimes genutzt werden. Die kritische Reynoldszahl zur Bewertung einer möglichen Taylor-Couette-Strömung unter Berücksichtigung der Exzentrizität (jedoch ohne Berücksichtigung der axialen Durchströmung) beträgt nach Gleichungen (A.62)

¹ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

Tabelle 3.2 – Variierte Parameter und integrale Ergebniswerte der zwölf CFD-Simulationen.

#	L	Δp	ε	ϕ	Re_{eff}	$\bar{\zeta}$	F	β
1	1	10	0.3	0.77	1261	0.10	1.57	34.4°
2	1	10	0.6	0.91	1349	0.37	2.90	32.4°
3	1	10	0.9	1.09	1478	0.31	9.05	69.9°
4	1	20	0.3	1.39	1710	0.62	3.96	5.0°
5	1	20	0.6	1.51	1814	0.60	6.67	12.7°
6	1	20	0.9	1.75	2018	0.37	13.17	55.2°
7	2	10	0.3	0.45	1095	0.05	1.61	78.6°
8	2	10	0.6	0.56	1147	0.19	4.25	80.6°
9	2	10	0.9	0.73	1239	0.27	15.21	85.5°
10	2	20	0.3	0.85	1311	0.30	2.04	50.0°
11	2	20	0.6	1.02	1432	0.40	4.79	61.1°
12	2	20	0.9	1.28	1622	0.48	15.48	78.9°

und (A.60)

$$Re_{\text{krit}} = 1025; 1285; 1629 \quad (3.15)$$

für $\varepsilon = 0.3; 0.6; 0.9$. Die drei Werte sind alle größer als die tatsächliche Reynoldszahl, sodass keine Taylor-Wirbel erwartet werden. Zudem ist die axiale Reynoldszahl $\phi Re = 450$ bis 1750, sodass generell sehr wahrscheinlich ein direkter Umschlag von vollständig laminarer zu vollständig turbulenter Strömung ganz ohne Taylor-Wirbel stattfinden wird.

Die Werte der effektiven Reynoldszahl Re_{eff} , siehe Gleichung (2.2), reichen von 1095 bis 2018. Entsprechend der Aufstellung A.58 zum Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung können sich die Fälle 4, 5, 6 und 12 in Realität schon im Übergangsbereich befinden. Während für die Fälle 4 und 12 ggf. noch ein vollständig laminares Strömungsmodell angemessen sein kann, trifft dies auf die Fälle 5 und 6 eher nicht mehr zu. Alle anderen Fälle sind als vollständig laminar zu bewerten. Dennoch werden alle Fälle im Rahmen dieser Untersuchung als vollständig laminar betrachtet, was im Sinne der grundsätzlichen Erkenntnisse keinen Unterschied macht.

Obwohl die Betriebspunkte als vollständig laminar konzipiert wurden, können die etwas zu hohen effektiven Reynoldszahlen durch die Druck-Druck-Randbedingungen erklärt werden. Aufgrund dessen war die Durchflusszahl und damit die effektive Reynoldszahl vor Abschluss der Rechnungen unbekannt. Die Randbedingungen wurden so gewählt, da die später verwendete Reynolds'sche Differentialgleichung ohne Weiteres nur die Verwendung von

Druckrandbedingungen erlaubt.

Der Einfluss der Umfangsverteilung $\zeta(\varphi)$ gegenüber einem Mittelwert $\bar{\zeta}$ wurde nun im Zusammenhang mit dem CAPM im Vergleich mit den CFD-Ergebnissen untersucht. Dafür wurde zunächst ein neues Modell für laminare Spaltströmung aus dem CAPM mit quadratischen Ansatzfunktionen hergeleitet, was ausführlich in Anhang A.1 beschrieben wird. Die neuen Grundgleichungen (A.12) bis (A.14) des CAPM für laminare Strömung wurden zudem mit Gleichung (3.8) als Einlassrandbedingung gekoppelt. Weiterhin wurden die aus der CFD bestimmten kontinuierlichen Verläufe $\zeta(\varphi)$ der Splines aus Abbildung 3.4 genutzt.

Die Splines liegen nur für die diskreten Stellen $\varepsilon = 0.3, 0.6$ und 0.9 vor. Mit dem CAPM sollen jedoch durchgehende Kurven über ε abgebildet werden, weswegen die Splines in den folgenden Bereichen genutzt werden:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{CFD} & & \text{CAPM} \\
 \varepsilon = 0.3 & \rightarrow & 0.15 \leq \varepsilon < 0.45 \\
 \varepsilon = 0.6 & \rightarrow & 0.45 \leq \varepsilon < 0.75 \\
 \varepsilon = 0.9 & \rightarrow & 0.75 \leq \varepsilon \leq 0.95
 \end{array} \tag{3.16}$$

Dies stellt wohl eine wesentliche Vereinfachung dar, die in den folgenden Kurven des CAPM leichte Sprünge verursacht. Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit ist diese einfache Methode jedoch sicherlich geeignet und behindert den Erkenntnisgewinn nicht.

In Abbildung 3.5 sind die Ergebnisse von CFD und CAPM über der Exzentrizität in den Diagrammen (a) und (b) für die Tragkraft F , in (c) und (d) für den Verlagerungswinkel β sowie in (e) und (f) für die Durchflusszahl ϕ dargestellt. Die Diagramme der linken Spalte gelten für den kürzeren Spalt mit $L = 1$ und die der rechten Spalte für $L = 2$. Die Marker stellen die CFD-Ergebnisse aus Tabelle 3.2 dar, wobei die Quadrate immer für $\Delta p = 10$ und die Kreise immer für $\Delta p = 20$ stehen. Die dicken Linien stellen das CAPM mit den Splines für $\zeta(\varphi)$ und die dünnen Linien das CAPM mit konstantem Mittelwert $\bar{\zeta}$ dar.

Im Allgemeinen steigt die Tragkraft F zunächst näherungsweise linear und ab ungefähr $\varepsilon = 0.6$ zunehmend nichtlinear mit der Exzentrizität an. Außerdem steigt F bei steigender Druckdifferenz in allen Fällen. Dagegen steigt die Tragkraft mit erhöhter Spaltlänge L nicht signifikant an, was an der dimensionslosen Definition liegt. Für den Fall $L = 2$ wird der Verlauf etwas stärker nichtlinear und die Erhöhung der Druckdifferenz wirkt sich nicht so stark aus wie bei $L = 1$.

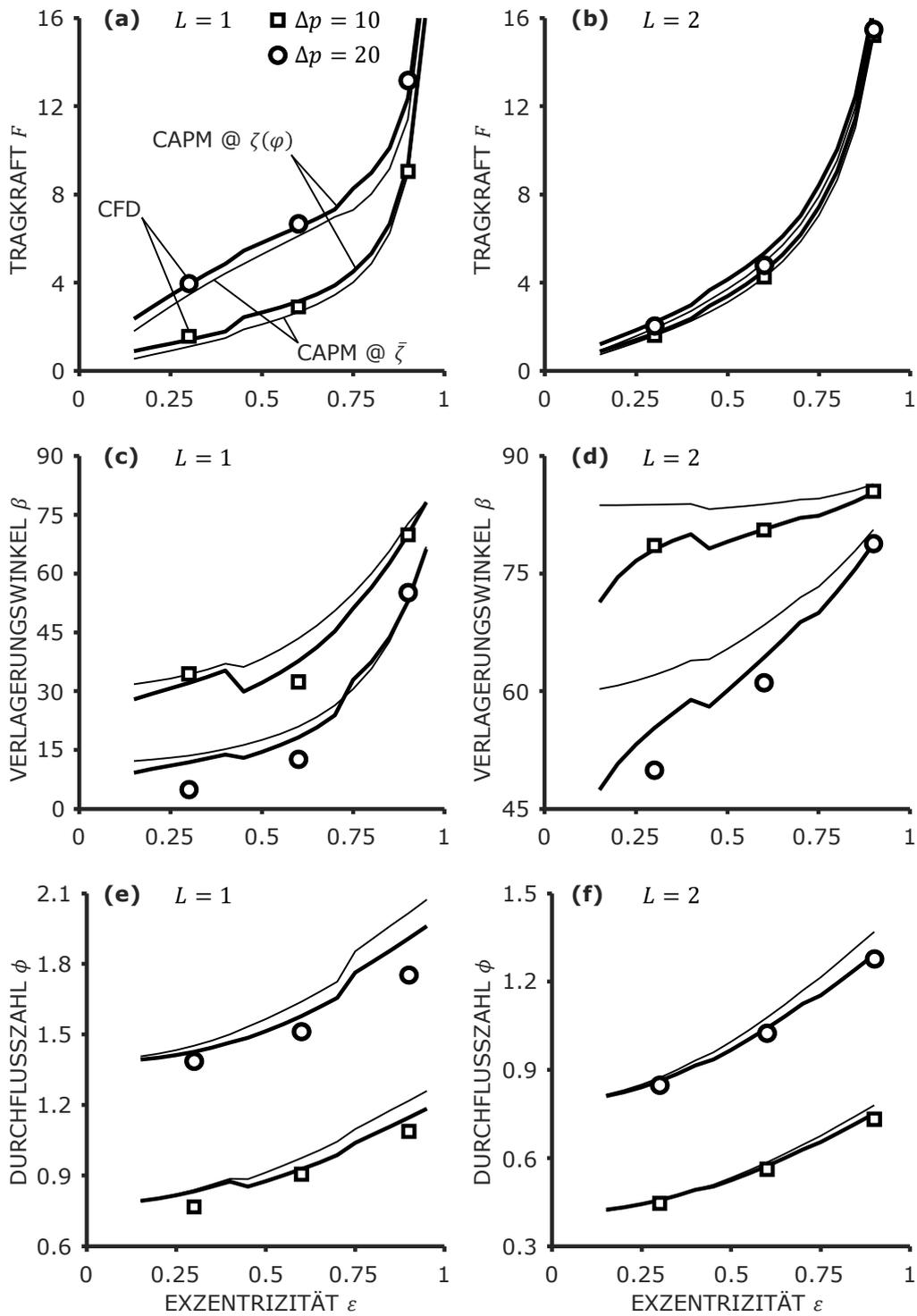


Abbildung 3.5 – Vergleich der Ergebnisse von CFD und CAPM mit Umfangsverteilung sowie gemitteltem Wert des Verlustkoeffizienten.

Das CAPM in Kombination mit der Umfangsverteilung $\zeta(\varphi)$ liefert im Vergleich mit der CFD insgesamt sehr genaue Ergebnisse für die Tragkraft. Die Kurve des CAPM und die CFD-Werte fallen beinahe aufeinander. Die Ergebnisse des CAPM mit $\bar{\zeta}$ liegen in allen Fällen etwas niedriger. Für $L = 1$ liefert die Verwendung von $\zeta(\varphi)$ eindeutig bessere Ergebnisse. Für $L = 2$ liegen die Kurven und die CFD-Werte näher beieinander, sodass keine so eindeutige Aussage getroffen werden kann.

Für den Verlagerungswinkel β in den Diagrammen (c) und (d) unterscheiden sich die Kurven für $L = 1$ und 2 deutlich. Für den kürzeren Spalt zeigt sich ein nichtlinearer Anstieg von niedrigen zu hohen Werten über der Exzentrizität. Beim längeren Spalt ist ein ungefähr linearer Verlauf bei generell eher hohen Werten zu beobachten. Die niedrigere Druckdifferenz zeigt größere Verlagerungswinkel. In den Kurven des CAPM zeigen sich hier deutlicher die Übergangsstellen der verschiedenen Splines. Trotz leichter Abweichungen von wenigen Grad stimmt das CAPM mit $\zeta(\varphi)$ immer gut mit den CFD-Werten überein. Bei $L = 1$ liefert die Variante mit $\bar{\zeta}$ leicht höhere Werte, es kann aber dennoch ebenfalls von einer guten Übereinstimmung gesprochen werden. Für $L = 2$ sind die Abweichungen jedoch deutlich größer, insbesondere bei kleinen und mittleren Exzentrizitäten.

Die Diagramme (e) und (f) zeigen schließlich die Durchflusszahl ϕ über der Exzentrizität. Die Verläufe steigen in allen Fällen leicht nichtlinear mit ε an. Die Erhöhung der Druckdifferenz führt wie zu erwarten zu einer deutlichen Zunahme der Durchflusszahl, während die Erhöhung der Spalllänge zu einer deutlichen Reduktion führt. Das CAPM mit $\zeta(\varphi)$ scheint tendenziell leicht höhere Werte zu liefern, die Übereinstimmung kann aber in fast allen Fällen als sehr gut bezeichnet werden. Lediglich im Fall $L = 1$ und $\Delta p = 20$ bei $\varepsilon = 0.9$ kommt es zu einer gewissen Abweichung. Das Modell mit $\bar{\zeta}$ liefert in allen Fällen sehr ähnliche Werte bei kleinerer Exzentrizität, mit zunehmenden Werten von ε steigt der Verlauf aber stärker und es kommt zu etwas größeren Abweichungen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das CAPM zusammen mit der Umfangsverteilung $\zeta(\varphi)$ Ergebnisse liefert, die bei den untersuchten Betriebsbedingungen der vorliegenden Arbeit fast so genau wie die CFD-Simulationen sind. Dies ist eine grundsätzliche Validierung

- für die in dieser Arbeit hergeleitete Variante des CAPM für laminare Strömung (siehe Anhang A.1),
- für das neue Modell der Einlassrandbedingung (3.8) inklusive der Annahme einer Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten $\zeta(\varphi)$ sowie
- der neu vorgestellten Methode zur Bestimmung der genannten Umfangsverteilung.

Das CAPM mit dem gemittelten Wert $\bar{\zeta}$ zeigt im Vergleich allgemein leicht reduzierte Tragkraft, erhöhten Verlagerungswinkel, insbesondere beim langen Spalt und niedriger Exzentrizität sowie erhöhte Durchflusszahl, insbesondere bei höherer Exzentrizität. Obwohl die Verwendung der Verteilung $\zeta(\varphi)$ durchweg bessere Ergebnisse liefert, sind die Unterschiede gering bis moderat. Es ist jedoch anzumerken, dass bisher auch generell keine veröffentlichten Erkenntnisse bezüglich den Werten oder der Ermittlung von $\bar{\zeta}(L, \Delta p, \varepsilon)$ existierten.

Schließlich soll ein Vergleich des CAPM mit der Reynolds'schen Differentialgleichung (RDGL) erfolgen. Analog zu oben sind in den sechs Diagrammen (a) bis (f) von Abbildung 3.6 wieder die Ergebnisse für die Tragkraft F , den Verlagerungswinkel β , und die Durchflusszahl ϕ über der Exzentrizität ε dargestellt. Bei den Markern handelt es sich um die gleichen Werte und bei den dicken Linien die gleichen Kurven des CAPM unter Nutzung von $\zeta(\varphi)$ wie in der vorigen Abbildung. Die dünnen gestrichelten Linien stellen nun allerdings mittels RDGL ermittelte Kurven dar. Über einen iterativen Lösungsalgorithmus wurde die RDGL ähnlich wie das CAPM mit Gleichung (3.9) gekoppelt, um den Lomakin-Effekt berücksichtigen zu können (siehe Gleichung (A.32) in Anhang A.1). Es werden natürlich die gleichen Splines für $\zeta(\varphi)$ verwendet wie beim CAPM.

Der Tragkraftverlauf wird von der RDGL für den Fall $L = 1$ und $\Delta p = 10$ mit geringer Abweichung zum CAPM und in guter Übereinstimmung zur CFD vorhergesagt. In den anderen drei Fällen treten starke Abweichungen auf. Die Tragkraft ist in diesen Fällen immer wesentlich zu klein. Ein ähnliches Bild zeigt sich beim Verlagerungswinkel β . Für den Fall $L = 2$ und $\Delta p = 20$ zeigt die RDGL leichte Abweichungen zu den Referenzwerten, in allen anderen Fällen zeigen sich sehr starke Abweichungen. Für $L = 1$ wird der Winkel stark überschätzt und für $L = 2$ unterschätzt. Die Durchflusszahl wird in allen Fällen bei der kleinsten Exzentrizität ähnlich gut vorhergesagt wie durch das CAPM. Außer für $L = 2$ bei $\Delta p = 10$ treten bei steigender Exzentrizität massive Abweichungen auf.

Es zeigt sich also zusammenfassend, dass die Reynolds'sche Differentialgleichung bei axialer Durchströmung selbst bei Berücksichtigung von $\zeta(\varphi)$ so stark von den CFD-Ergebnissen abweicht, dass man in diesem Fall von Unbrauchbarkeit sprechen muss. Die Ursache wird in der Vernachlässigung der nichtlinearen konvektiven Trägheitsterme vermutet. Erst hierdurch entsteht eine lineare partielle Differentialgleichung für den Druck, die keine spezifischen Randbedingungen für die Geschwindigkeiten zulässt. Das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich nämlich direkt aus dem Druckgradienten, siehe Gleichungen (A.30) und (A.31) im Anhang. Die Bernoulli'sche Gleichung

stellt jedoch eine nichtlineare Randbedingung dar. Scheinbar führt in diesem Zusammenhang die fehlende Möglichkeit, unabhängige Randbedingungen für Druck und Geschwindigkeit vorgeben zu können, zu falschen Lösungen am Einlassrand.

Ohne Darstellung im Diagramm sei abschließend dennoch erwähnt, dass die RDGL bei konstantem Druck am Einlass, also ohne Berücksichtigung des Lomakin-Effektes, in allen Fällen katastrophal versagt. Die dargestellten Ergebnisse der RDGL unter Berücksichtigung des Lomakin-Effektes stellen im Vergleich eine deutliche, aber dennoch nicht ausreichende Verbesserung dar.

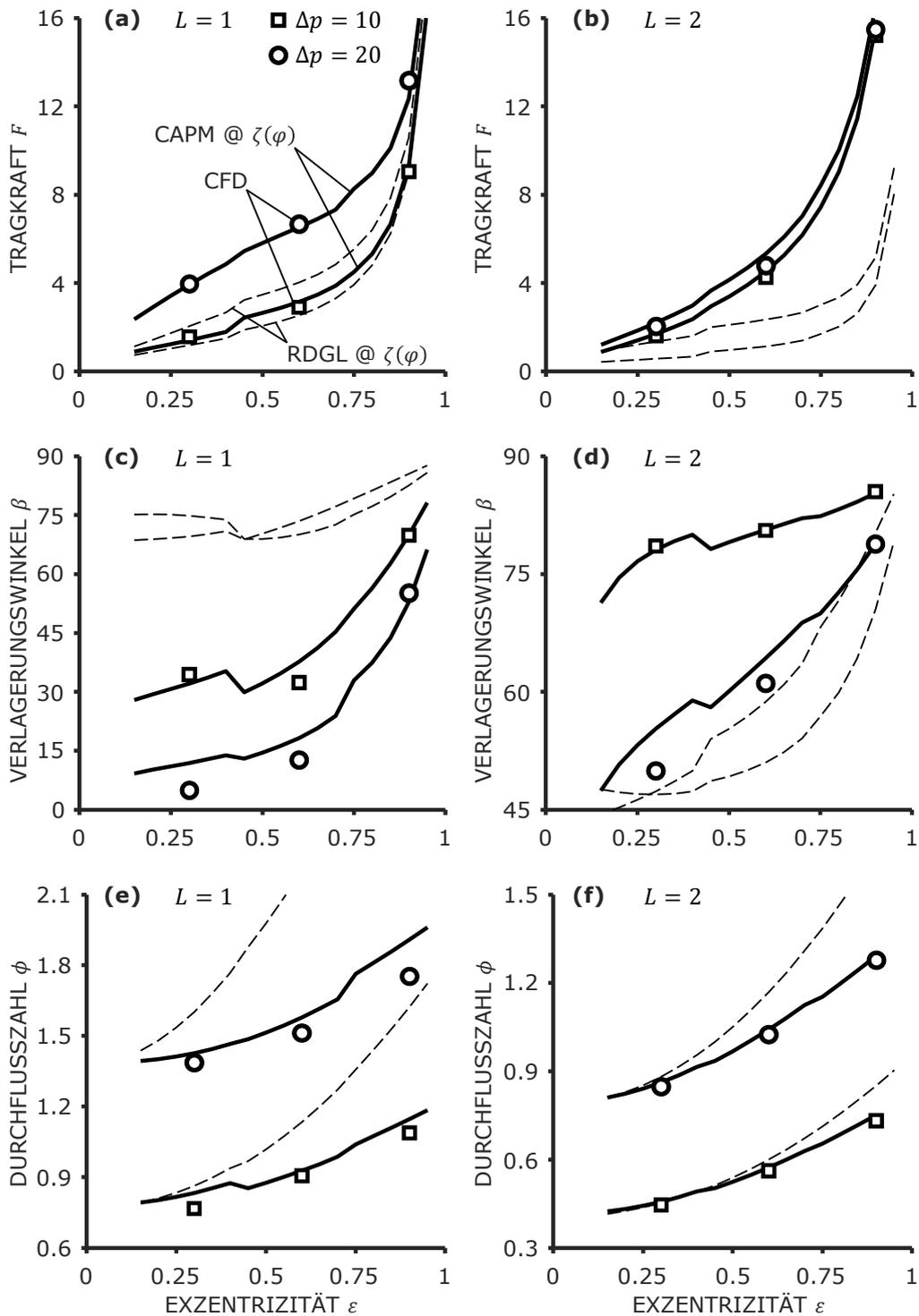


Abbildung 3.6 – Vergleich der Ergebnisse von CFD, CAPM und Reynolds'scher Differentialgleichung (RDGL) unter Nutzung der Umfangsverteilung des Verlustkoeffizienten.

3.4 Ergebnisse bei turbulenter Spaltströmung mit Orbitalbewegung des Rotors

Nachdem im vorigen Abschnitt das verallgemeinerte Modell und der Einfluss des umfangsverteilten Einlassdruckverlustkoeffizienten für einen stationären Fall bei laminarer Strömung untersucht wurde, soll nun exemplarisch der dynamische Fall bei turbulenter Strömung betrachtet werden. Dynamisch bedeutet genauer, dass der Rotor eine Orbitbewegung bei Exzentrizität ε und Orbitkreisfrequenz ω vollführt. Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, kann das dynamische Problem auf ein quasi-stationäres Problem reduziert werden, sofern $\varepsilon = \text{konst.}$ und $\omega = \text{konst.}$ gilt. Liegen so Ergebnisse bei sonst gleichen Betriebsbedingungen für mindestens drei unterschiedliche Frequenzen ω vor, können mit den Gleichungen (2.24) und (2.25) rotordynamische Koeffizienten für Schwingungen um die konzentrische Ruhelage per Regression bestimmt werden.

Dasselbe Prinzip wie für das CAPM kann für die CFD-Simulationen genutzt werden. Hier werden die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen einschließlich aller Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem gelöst. Dafür wird der OPENFOAM-Solver SRFSIMPLEFOAM genutzt. Als Turbulenzmodell für die RANS-Rechnungen wird das k - ω -SST-Modell verwendet. Weitere Details zur Numerik der Simulationen sind ausführlich in Anhang B beschrieben.

In Tabelle 3.3 sind die festen und variierten Parameter der folgenden CFD-Untersuchungen aufgeführt. Hierbei handelt es sich um typische Betriebsparameter eines mediengeschmierten Gleitlagers bei vollständig turbulenter Strömung im niedrigen Reynoldszahlbereich. Diesmal wird eine konstante Durchflusszahl vorgeschrieben und die Druckdifferenz ergibt sich als Lösung.

Für ω werden fünf statt der notwendigen drei Werte vorgegeben, um die Robustheit der Parameteridentifikation mittels Methode kleinster Fehlerquadrate zu verbessern. Insgesamt zeigen aber sowohl die CFD-, als auch die CAPM-Ergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung mit dem angesetzten parabolischen bzw. linearen Verlauf für F_x und F_y über ω .

Zudem werden verschiedene Umfangsgeschwindigkeiten im Plenum untersucht. Die beiden Fälle unterscheiden sich hier etwas. Für den Fall $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$

Tabelle 3.3 – Feste und variierte Parameter der CFD-Studie bei turbulenter Strömung.

L	ψ	Re	ϕ	ε	γ	ω	$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$
1.3	0.0042	4000	0.7	0.4	0	0; 0.5; 1; 1.5; 2	0; 0.5

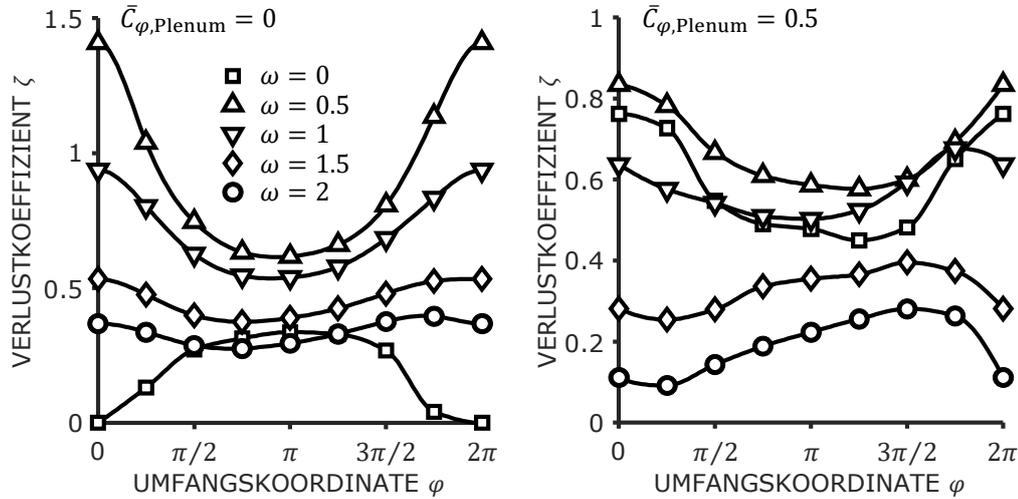
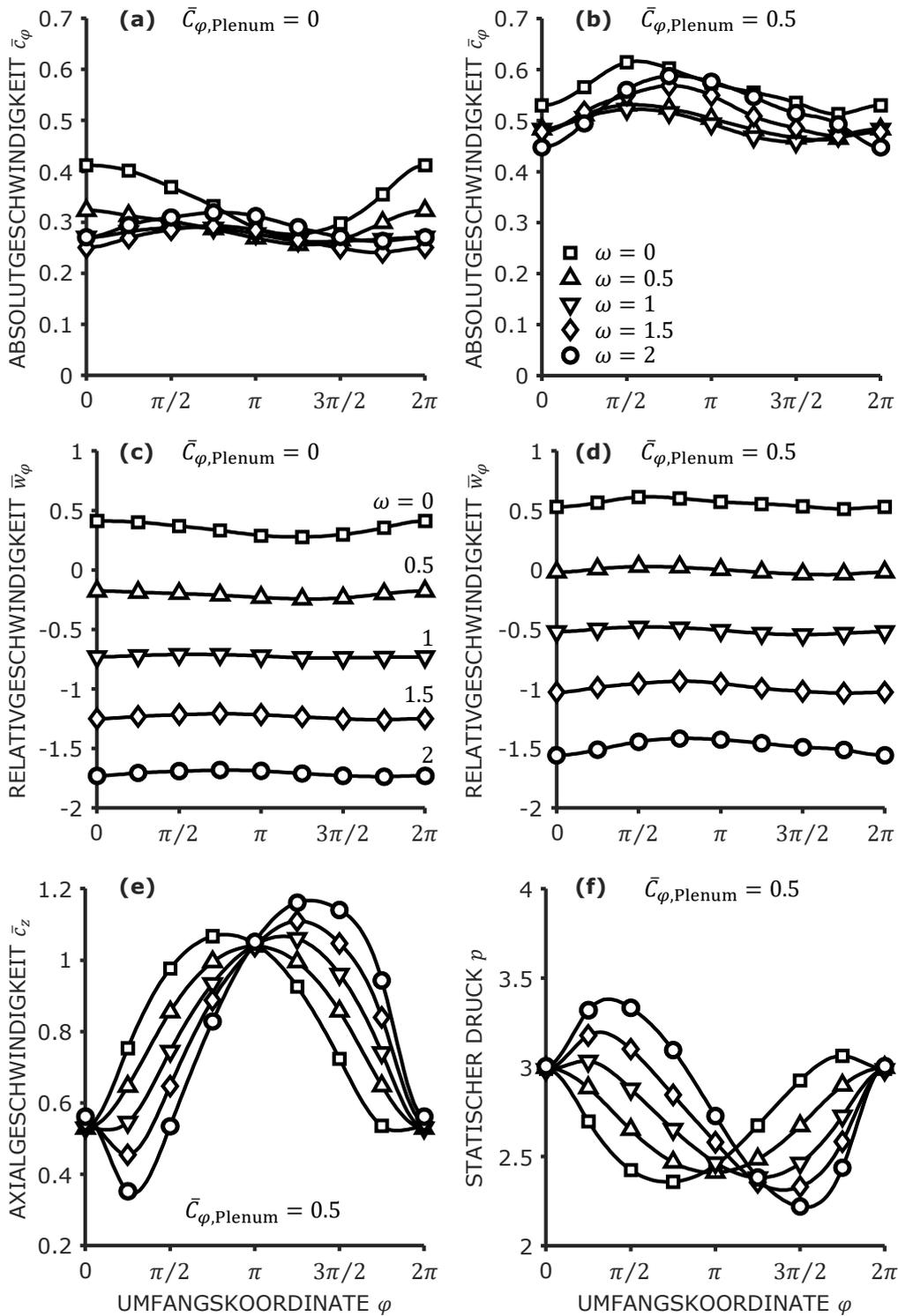


Abbildung 3.8 – Umfangsverteilungen des Einlassdruckverlustkoeffizienten im dynamischen Fall für unterschiedliche Werte von ω und $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$.

sind in Abbildung 3.8 für die fünf verschiedenen Orbitfrequenzen dargestellt. Im linken Diagramm ist der Fall $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$ abgebildet. Der stationäre Fall $\omega = 0$ zeigt einen ähnlichen Verlauf, wie in der laminaren Studie. Das Maximum befindet sich wieder im Bereich des weitesten Spaltes und der Verlauf fällt bis zur engsten Stelle auf Null ab. Die Kurve ist jedoch generell flacher und das Maximum erreicht einen deutlich niedrigeren Wert von ca. 0.34. Der Fall $\omega = 0.5$ zeigt qualitativ einen umgekehrten Verlauf und die allgemein höchsten Werte. Dies liegt daran, dass \bar{w}_φ überall sehr geringe Werte aufweist und das Minimum von \bar{c}_z ungefähr bei $\varphi = 0$ liegt. Die Verläufe für die anderen Orbitfrequenzen verlaufen sukzessive flacher und weisen geringere Werte auf.

Im rechten Diagramm ist der Fall $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$ abgebildet. Der Verlauf für den stationären Fall zeigt hier bereits einen umgekehrten Verlauf (Maximum an der engsten Stelle) und nimmt mitunter die höchsten Werte an. Dies bedeutet, dass über den gesamten Umfang eine Ablösung stattfindet und sich die Strömung im engsten Bereich des Spaltes nicht wieder anlegt. Außer bei $\omega = 0.5$ fallen die Werte bei den anderen Frequenzen niedriger aus. Für $\omega = 1.5$ und 2 ändert sich der Verlauf auch wieder qualitativ und das Maximum rückt ungefähr an die Stelle $\varphi = 3\pi/2$ und das Minimum wieder zur engsten Stelle bei $\varphi = 0$.

Es ist interessant, dass offenbar also auch die Umfangsgeschwindigkeit einen substantiellen Einfluss auf den Einlassdruckverlust haben kann. In Abbildung 3.9 ist in den Diagrammen (a) und (b) die Umfangsverteilung der

Abbildung 3.9 – Umfangsverteilungen von \bar{c}_φ , \bar{w}_φ , \bar{c}_z und p am Spalteinlass.

absoluten Umfangsgeschwindigkeit \bar{c}_φ am Spalteinlass aufgetragen. Wie zu erwarten variiert auch die Umfangsgeschwindigkeit etwas über den Umfang. In Diagramm (a) liegen die Werte ungefähr zwischen 0.2 und 0.4 und in (b) zwischen 0.4 und 0.6. Der stationäre Fall $\omega = 0$ zeigt die höchsten Werte. Die Verläufe der anderen Frequenzen liegen weitgehend übereinander, insbesondere in Diagramm (a).

In den Diagrammen (c) und (d) sind zur Veranschaulichung nochmals die gleichen Verläufe in Form der Relativgeschwindigkeit \bar{w}_φ aufgetragen. Entsprechend Gleichung (2.3) werden die Verläufe der Relativgeschwindigkeit mit ω gestaffelt. Aufgrund der deutlich größeren Skala wirken die Verläufe flacher. Dies soll nicht darüber hinwegtäuschen, dass die gleiche Verteilung wie in den Diagrammen (a) und (b) besteht. Das Diagramm verdeutlicht auch, dass \bar{w}_φ bei $\omega = 0.5$ sehr kleine Werte annimmt. Dies liegt daran, dass \bar{c}_φ im Spalt i. d. R. immer gegen ungefähr 0.5 strebt.

In den Diagrammen (e) und (f) von Abbildung 3.9 ist zusätzlich auch beispielhaft die Umfangsverteilung der Axialgeschwindigkeit und des Drucks für den Fall $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$ dargestellt. In beiden Fällen liegt eine eindeutige Staffelung der Verläufe mit ω vor. Sowohl die Stelle, als auch der Wert von Maximum und Minimum ändern sich entsprechend. In beiden Fällen nimmt der Betrag des Maximums zu und dessen Stelle verschiebt sich in φ -Richtung, wenn ω zunimmt. Analog gilt dies auch beim nicht abgebildeten Fall mit $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$.

Die wichtigsten integralen Ergebnisse der CFD-Rechnungen bei Variation von ω sind außerdem in Tabelle 3.4 aufgeführt. Dabei stellen die angegebenen Werte für $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}^*$ einen volumengemittelten Wert im Plenum dar, $\bar{C}_{\varphi, 0}$ und $\bar{W}_{\varphi, 0}$ stellen analog zu $\bar{\zeta}$ umfangsgemittelte Werte der Verläufe aus den Abbildungen 3.8 und 3.9 dar. Zudem ist auch die jeweilige Druckdifferenz Δp aufgeführt. Diese nimmt bei steigendem ω schwach zu und ist bei $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$ etwas niedriger als bei $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$.

Abschließend wurde für den stationären Fall $\omega = 0$ und den spezifischen dynamischen Fall $\omega = 0.5$ der Einfluss von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ separat analysiert. In Abbildung 3.10 sind in den Diagrammen (a) und (b) die Verteilungen der absoluten Umfangsgeschwindigkeit und in den Diagrammen (c) und (d) die des Verlustkoeffizienten dargestellt. Der Verlauf der Umfangsgeschwindigkeiten bleibt für die unterschiedlichen Orbitfrequenzen jeweils qualitativ gleich. Mit steigender Vorgabe von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ steigen auch die Verläufe von \bar{c}_φ leicht an. Aufgrund des starken Einflusses der Wandgrenzschichten am Spalteinlass variieren die Werte von \bar{c}_φ nur in einem vergleichsweise schmalen Band bei Änderung von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$.

Die Verläufe des Verlustkoeffizienten, siehe Diagramme (c) und (d), bleiben

in allen Fällen qualitativ gleich. Es kann jedoch ein leichter quantitativer Einfluss festgestellt werden. Für $\omega = 0$ werden mitunter die niedrigsten Werte für ζ bei der höchsten Umfangsgeschwindigkeit $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ erreicht. Bei $\omega = 0.5$ ist es andersherum. Die höchste Umfangsgeschwindigkeit verursacht den höchsten Verlustkoeffizienten und die niedrigste Umfangsgeschwindigkeit im Wesentlichen den niedrigsten Verlustkoeffizienten. Insgesamt können die Änderungen des Verlustkoeffizienten mit $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ als leicht bis mäßig bewertet werden. Alle integralen Ergebniswerte sind in Tabelle 3.5 aufgeführt.

Aus den CFD-Ergebnissen werden die Verläufe von $\zeta(\varphi)$ wieder in Form der Splines zusammen mit den Parametern aus den Tabellen 3.3 und 3.4 genutzt, um als Betriebsparameter und Randbedingungen für das CAPM zu fungieren. Prinzipiell könnten auch Splines als Randbedingung für die Umfangsgeschwindigkeit verwendet werden, es werden hier jedoch lediglich die umfangsgemittelten Werte herangezogen, was sich bei den laminaren Fällen auch als ausreichend erwiesen hat. Aus den Modellergebnissen für die unterschiedlichen Frequenzen ω werden anschließend rotodynamische Koeffizienten berechnet. Die Ergebnisse des CAPM unter Verwendung von $\zeta(\varphi)$ werden im Folgenden mit Modell (i) bezeichnet. Zum Vergleich werden ebenso CAPM-Ergebnisse unter Nutzung von $\bar{\zeta}$, Modell (ii) genannt, und der alten Formulierung mit $\bar{\zeta}^* = 0.5$, Modell (iii) genannt, berechnet. Die verschiedenen Modellergebnisse werden mit den CFD-Simulationen und im Fall von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$ zudem mit Messdaten aus der Arbeit von Kuhr, Nordmann und Pelz¹ verglichen².

Tabelle 3.4 – Integrale Ergebniswerte der zehn CFD-Fälle bei Variation von ω für $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$ und 0.5 .

ω $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$:	$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}^*$		$\bar{C}_{\varphi, 0}$		$\bar{W}_{\varphi, 0}$		$\bar{\zeta}$		Δp	
	0	0.5	0	0.5	0	0.5	0	0.5	0	0.5
0	0.18	0.66	0.34	0.56	0.34	0.56	0.21	0.57	3.99	3.29
0.5	0.13	0.57	0.29	0.50	-0.21	0.03	0.88	0.67	3.97	3.25
1.0	0.13	0.38	0.28	0.49	-0.72	-0.45	0.69	0.57	3.99	3.26
1.5	0.13	0.41	0.27	0.52	-1.23	-0.89	0.45	0.33	4.06	3.33
2.0	0.14	0.44	0.29	0.53	-1.71	-1.35	0.33	0.19	4.16	3.43

¹ KUHR, NORDMANN UND PELZ, „Dynamic force and moment characteristics of annular gaps - Simulation results and evaluation of the relevance of the tilt and moment coefficients“, ([57], 2022)

² Die Mess- sowie Unsicherheitsdaten wurden freundlicherweise von Herrn M. M. G. Kuhr zur Verfügung gestellt, wofür an dieser Stelle gedankt wird.

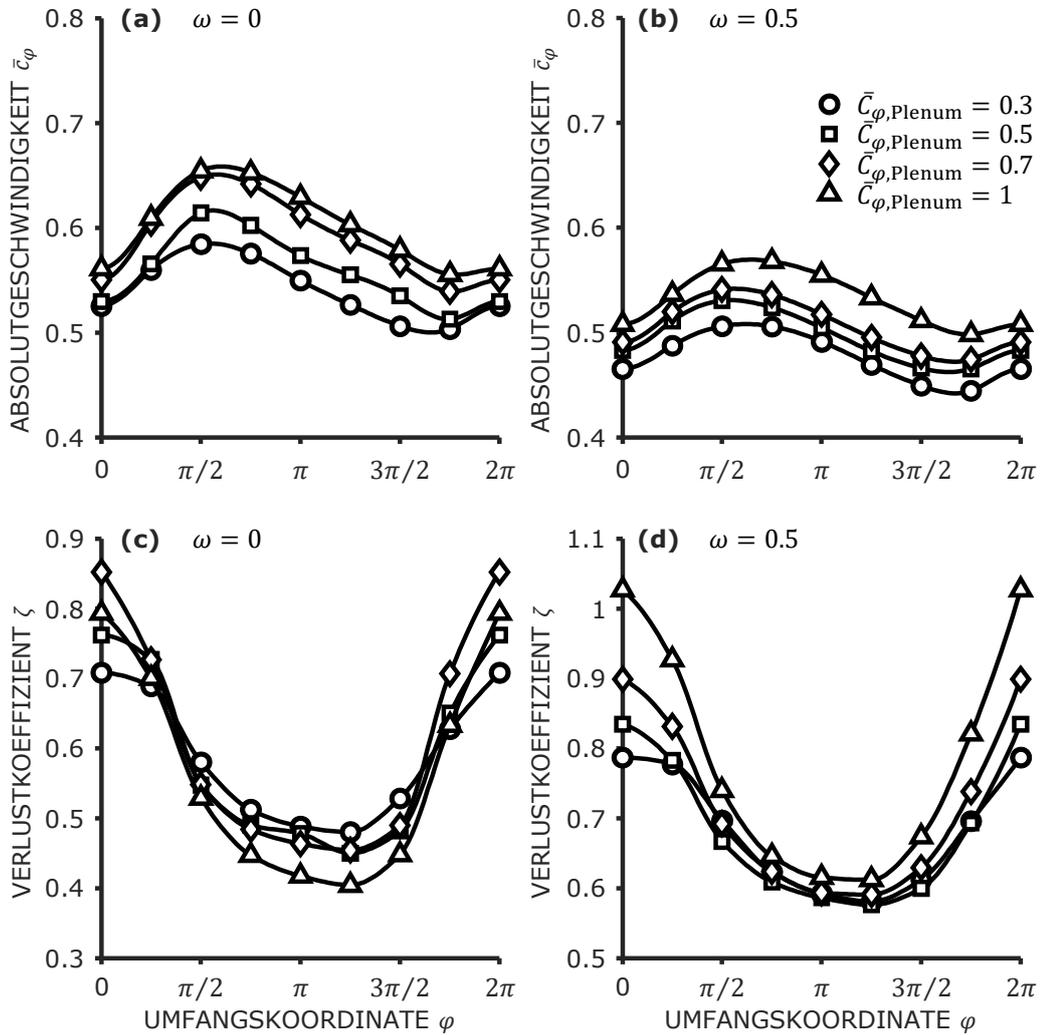


Abbildung 3.10 – Einfluss von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ auf die Umfangsverteilungen von \bar{c}_φ am Spalteinlass, (a) und (b), sowie von ζ , (c) und (d), bei $\omega = 0$ und 0.5.

In Abbildung 3.11 sind die rotordynamischen Koeffizienten als Balkendiagramm für die Simulation und die verschiedenen CAPM-Randbedingungen bei $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$ dargestellt. Die Nebenträgheit m wird nicht dargestellt, da sie wie erwähnt vernachlässigbar ist, was durch die CFD-Simulationen auch bestätigt wird. Insgesamt zeigt sich in diesem Fall ansonsten jedoch leider, dass die Verwendung von $\zeta(\varphi)$, d. h. Modell (i), nicht unbedingt verbesserte Ergebnisse im Vergleich mit der CFD liefert. Bei der Hauptträgheit M liefert Modell (i) den niedrigsten und relativ zur CFD den schlechtesten Wert. Der Wert kann jedoch trotzdem noch als akzeptabel bewertet werden. Modell (ii)

liegt fast genau auf dem CFD-Wert, während Modell (iii) ebenfalls einen etwas zu niedrigen Wert liefert. Die Hauptdämpfung C wird von allen Modellen gut vorhergesagt. Modell (ii) liegt wieder am besten auf dem Niveau der CFD, während (i) und (iii) beide etwas zu hoch liegen. Bei der Nebendämpfung c weicht Modell (i) stark ab und liefert einen deutlich zu niedrigen Ergebnis. Modell (ii) überschätzt den Wert leicht und Modell (iii) unterschätzt ihn, jedoch bei weitem nicht so stark wie Modell (i). Die Hauptsteifigkeit K wird von Modell (i) am besten vorhergesagt, Modell (iii) liefert fast denselben Wert. Modell (ii) unterschätzt die Hauptsteifigkeit dagegen leicht. Die Nebensteifigkeit k wird von den Modellen (i) und (ii) leicht überschätzt. Modell (iii) unterschätzt die Nebensteifigkeit deutlich und liefert hier das schlechteste Modellergebnis.

Für $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$ liegen wie erwähnt zusätzlich Messdaten als Referenz vor, die in Abbildung 3.12 dargestellt sind. Die CFD-Ergebnisse stimmen insgesamt sehr gut mit den Messwerten überein, was die numerische Methode validiert. Lediglich die Hauptdämpfung C wird mittels CFD etwas unterschätzt. Bei den Modellergebnissen kommt es nur zu geringen Unterschieden untereinander, insbesondere die zuvor beobachteten größeren Abweichungen bei Nebendämpfung und -steifigkeit sind hier so nicht vorzufinden. Insgesamt stimmen auch die Modellergebnisse gut mit dem Experiment überein: alle Ergebnisse für die Koeffizienten M , c , K und k liegen in den jeweiligen Unsicherheitsintervallen (95 %) der experimentell ermittelten Mittelwerte. Bei der Hauptträgheit M liefern die drei Modelle qualitativ das gleiche Bild wie zuvor. Modell (i) und (iii) liefern leicht geringere Werte als Modell (ii).

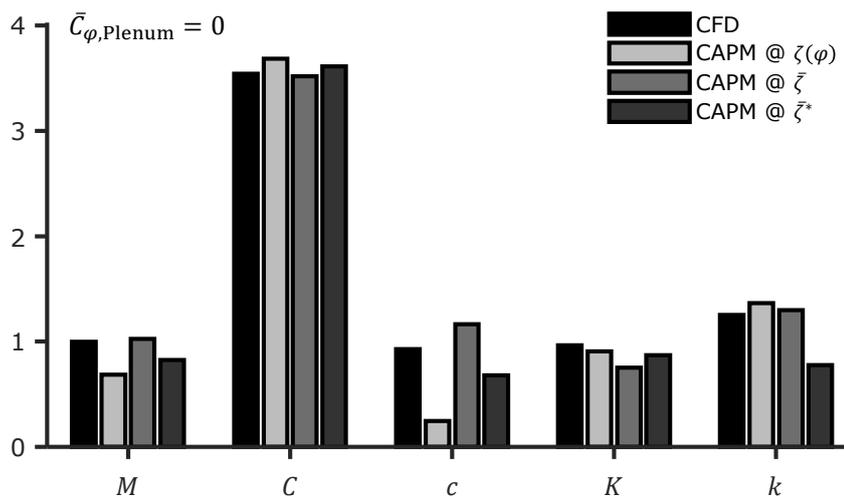


Abbildung 3.11 – Rotordynamische Koeffizienten bei $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0$.

Die Übereinstimmung mit CFD und Experiment ist jedoch insgesamt gut. Bei der Hauptdämpfung C liegt Modell (i) wieder am höchsten. Modell (ii) liefert wieder den niedrigsten Wert. Modell (ii) und (iii) liegen im Gegensatz zu (i) im Unsicherheitsintervall der Messung. Bei der Nebendämpfung c liefert Modell (i) nun fast den gleichen Wert wie die CFD, die Werte von den Modellen (ii) und (iii) fallen etwas ab. Modell (i) liefert bei der Hauptsteifigkeit K diesmal den geringsten Wert. Die Modelle (ii) und (iii) liegen etwas über der CFD und dem Messwert. Bei der Nebensteifigkeit k liegt Modell (i) wieder am höchsten. Modell (iii) liefert diesmal ungefähr den gleichen Wert wie (ii) und die CFD. Insbesondere bei Haupt- und Nebensteifigkeit muss man in Anbetracht der Unsicherheitsintervalle jedoch bei allen Modellen von sehr guter Übereinstimmung mit dem Mittelwert der Messwerte sprechen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich bei den beiden exemplarisch betrachteten dynamischen Fällen noch kein klares Bild ergibt. Bei den laminaren Fällen im vorigen Kapitel konnte bei Verwendung von $\zeta(\varphi)$ gegenüber einem konstanten Wert $\bar{\zeta}$ durchweg eine leichte bis punktuell moderate Verbesserung der Vorhersageergebnisse der stationären Eigenschaften – Tragkraft F , Verlagerungswinkel β und Durchflusszahl ϕ – festgestellt werden. Für die in diesem Abschnitt untersuchten dynamischen Fälle im Sinne von rotordynamischen Koeffizienten trifft dies leider nicht zu. Es muss zunächst jedoch festgehalten werden, dass das neue Modell und die neue Ermittlungsmethode auch bei turbulenter Strömung und für dynamische Fälle gut geeignet ist und zumindest gleichwertige Ergebnisse liefert. Mit der in dieser Arbeit

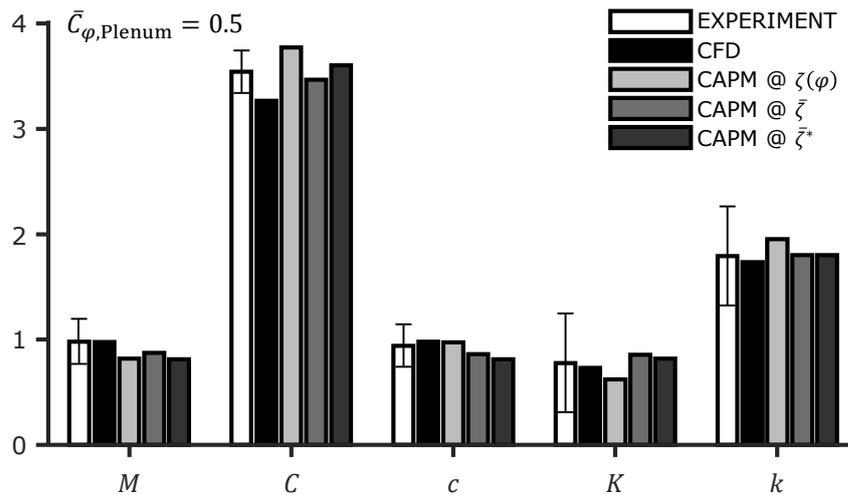


Abbildung 3.12 – Rotordynamische Koeffizienten bei $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$.

Tabelle 3.5 – Integrale Ergebniswerte der acht CFD-Fälle bei Variation von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ für $\omega = 0$ und 0.5 .

$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ $\omega :$	$\bar{C}_{\varphi, 0}$		$\bar{\zeta}$		Δp	
	0	0.5	0	0.5	0	0.5
0.3	0.54	0.48	0.58	0.67	3.29	3.25
0.5	0.56	0.50	0.57	0.67	3.29	3.24
0.7	0.59	0.51	0.59	0.70	3.30	3.25
1.0	0.61	0.53	0.55	0.76	3.30	3.26

vorgestellten Methodik lassen sich so Modell, Simulation und Experiment vollständig quantitativ koppeln und gegenseitig validieren.

Bezüglich der Verteilung des Verlustkoeffizienten $\zeta(\varphi)$ bzw. der Ablösung konnte ein leichter bis signifikanter Einfluss von $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$ festgestellt werden (vgl. Abbildung 3.10 und 3.8 bei $\omega = 0$). Hinsichtlich der Modellergebnisse zur Vorhersage der rotodynamischen Koeffizienten zeigt sich weder eine eindeutige Tendenz, noch ergibt sich eine Verbesserung der Vorhersagequalität bei Nutzung der Umfangsverteilung $\zeta(\varphi)$. Prinzipiell ließen sich die Randbedingungen zusätzlich verbessern, indem für \bar{c}_{φ} ebenfalls eine Verteilung mittels Spline statt des gemittelten Werts vorgeschrieben würde. Da bereits alle Modellergebnisse in den Unsicherheitsintervallen der Messung liegen, erscheint dies aber nicht weiter zielführend. Die ermittelten Umfangsverteilungen und deren Mittelwerte liefern nichtsdestotrotz bereits so wertvolle Anhaltswerte für weitere Überlegungen.

Kapitel 4

Modellierung profilierter Spalte

In diesem Kapitel werden die Modelle aus Kapitel 2 zunächst für generische Labyrinthdichtungen und später für ein Bohrlochprofil erweitert und angewendet. Im Zusammenhang mit der Strömung über der Nut einer Labyrinthdichtung wird die Scherschichttheorie erprobt. Hierfür wird zunächst ein ebener Wandstrahl in Abschnitt 4.2 betrachtet. Die Ergebnisse der Simulationen werden mit Literaturwerten verglichen, was zur generellen Validierung der numerischen Methodik dient. Anschließend in Abschnitt 4.3 wird die Wandstrahltheorie auf eine Einzelnut angewendet, um eine etwaige Übertragbarkeit auf Labyrinthdichtungen zu prüfen. Aufgrund von unzureichenden Ergebnissen der Wandstrahltheorie wird in Abschnitt 4.4 ein Reibungsfaktormodell an die Strömung der Einzelnut angepasst und unter Berücksichtigung sämtlicher Geometrie- und Betriebsparameter kalibriert. In den Abschnitten 4.5 und 4.6 wird das Reibungsfaktormodell und die Methodik zur Kalibrierung schließlich an ein Bohrlochprofil angepasst und angewendet. Die folgenden Beschreibungen der Theorie und der Ergebnisse dieses Kapitels sind teilweise bereits veröffentlicht^{1,2}.

4.1 Generische Labyrinthdichtung

In diesem Abschnitt werden Labyrinthdichtungen mit Rechtecknuten als repräsentative generische Geometrie untersucht, siehe Abbildung 4.1. Die periodische Nutgeometrie wird durch die Nutbreite \tilde{d} , die Nuttiefe \tilde{t} und die Profilbreite \tilde{b} für eine Nut und einen Steg als ein Profilelement beschrieben.

¹ ROBRECHT UND PELZ, „Lubrication Film Friction Model for Grooved Annular Seals“, ([83], 2023)

² ROBRECHT UND PELZ, „Friction Model for Grooved Annular Seals for Use in Fast and Reliable Design Tools“, ([82], 2023)

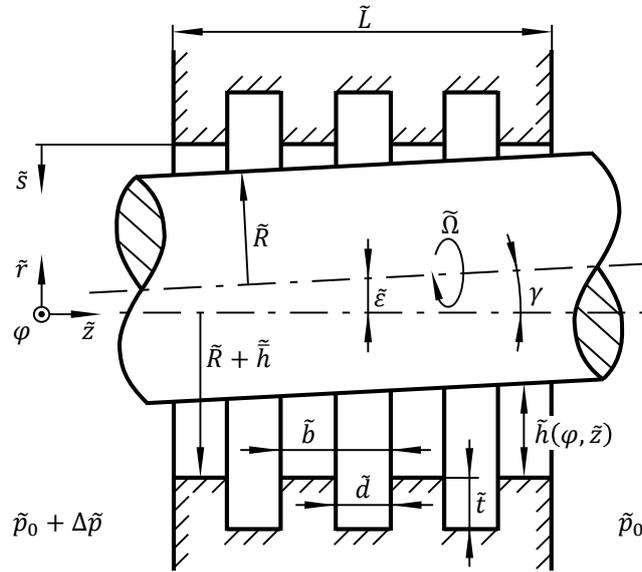


Abbildung 4.1 – Modellgeometrie einer generischen Labyrinthdichtung mit rechteckigem Querschnitt der Nuten.

Die mittlere Spaltweite \tilde{h} wird als Abstand zwischen konzentrischem Rotor und Steg des profilierten Stators definiert. Die dimensionslosen Parameter der Nutgeometrie werden alle mit \tilde{h} entdimensioniert und lauten

$$d := \tilde{d}/\tilde{h}, \quad (4.1)$$

$$t := \tilde{t}/\tilde{h} \text{ und} \quad (4.2)$$

$$b := \tilde{b}/\tilde{h}. \quad (4.3)$$

Darüber hinaus bleibt die grundsätzliche Nomenklatur des CAPM gültig, siehe Abbildung 2.1 und Tabelle 2.2. Die Gesamtlänge \tilde{L} der Dichtung kann somit aus der Nutanzahl N berechnet werden mit

$$\tilde{L} = (N + 1) \tilde{b} - \tilde{d} \quad (4.4)$$

bzw. in dimensionsloser Form mit

$$L = \psi [(N + 1) b - d]. \quad (4.5)$$

Das Verhältnis der mit Profil versehenen Fläche zur gesamten Dichtungsmanntelfläche kann zu

$$\chi := N \frac{\tilde{d}}{\tilde{L}} = N \frac{d\psi}{L} \quad (4.6)$$

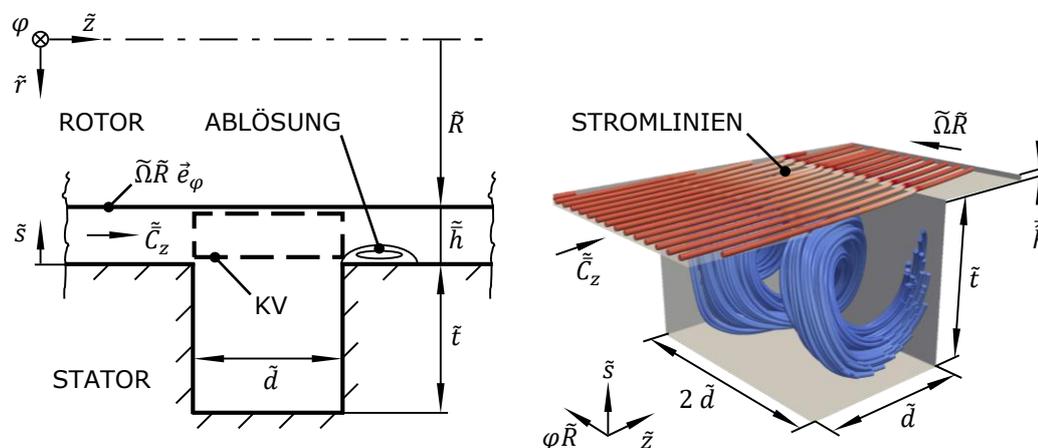


Abbildung 4.2 – Links: schematische Modellgeometrie der ebenen Einzelnut mit Kontrollvolumen KV. Rechts: Stromlinien.

bestimmt werden.

Im Folgenden werden die Untersuchungen auf eine Einzelnut beschränkt. Dies ist bei eingelaufener Strömung, die in der Dichtung nach einer Länge von wenigen Spaltweiten vorliegt, gut möglich, da sich die Strömungsvorgänge von Profilelement zu Profilelement weitestgehend periodisch wiederholen. Zusätzlich wird statt einer kreisförmig umlaufenden eine ebene Nut betrachtet. Durch die allgemein vorliegenden Größenordnungen $\psi \sim 10^{-3}$ und $\psi t \sim 10^{-2}$ kann die Krümmung ohne Weiteres vernachlässigt werden. Unter Berücksichtigung der Periodizität in Umfangsrichtung ist die ebene Nut daher ein gut geeignetes Modell für den konzentrischen Fall ($\varepsilon = \gamma = 0$) eines Ringspaltes. Die Auswirkung der Exzentrizität werden später durch das zu kalibrierende Reibungsmodell abgebildet, wie weiter unten beschrieben wird.

Die ebene Nut ist in Abbildung 4.2 links schematisch im Schnitt und rechts mit Stromlinien dargestellt. In der Nut entwickelt sich eine schraubenförmige Strömung durch die Schleppwirkung des Rotors in Umfangsrichtung, die vom Betrag her jedoch deutlich geringer ausfällt als die Geschwindigkeit im Spalt und der Stromröhre über der Nut (KV). In axialer Richtung entsteht nach dem Übergang der Strömung vom Spalt in die Nut eine freie Scherschicht auf Höhe des Steges. Auf die Strömung wirken hier zwei Effekte: erstens die turbulente Wandgrenzschicht am Rotor und zweitens die turbulente Mischung (Entrainment, vgl. Spur¹) in der Scherschicht. Die turbulente Mischung

¹ SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([94], 1992)

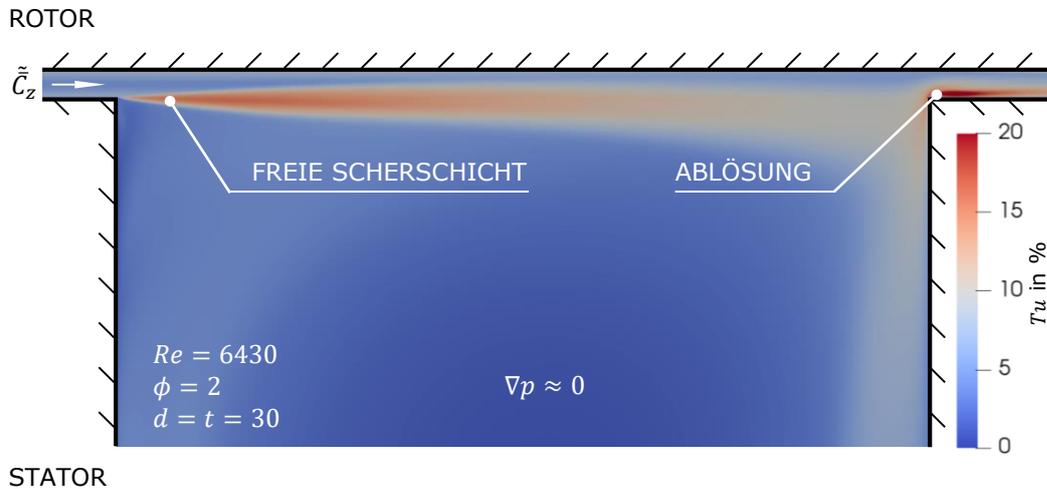


Abbildung 4.3 – Turbulenzgrad in der Nut. Die freie Scherschicht und die Eintrittsablösung ist deutlich zu erkennen.

kann als Diffusionsprozess betrachtet werden und bewirkt eine Verbreiterung des Strahls bzw. des Geschwindigkeitsprofils im axialen Verlauf sowie eine Reduktion des Geschwindigkeitsbetrages. Insgesamt wird diese Strömung als Wandstrahl bezeichnet. Aufgrund der Kontinuität muss die Strömung am Ausgang der Nut in den Spalt wieder beschleunigt werden, was zu einer Ablösung am Steg führt, welche zusätzliche Druckverluste erzeugt. Zudem ist der Druck in der Nut ungefähr konstant. Die freie Scherschicht und die Ablösung lässt sich gut durch ein Konturdiagramm des Turbulenzgrades Tu veranschaulichen, welches exemplarisch in Abbildung 4.3 im Nutquerschnitt dargestellt ist.

Um den Einfluss des Statorprofils im Sinne eines integro-differentiellen Modells wie dem CAPM berechenbar zu machen, sind insgesamt die im Kontrollvolumen KV von Abbildung 4.2 vorliegenden Geschwindigkeitsprofile, die Schubspannungen auf Rotor- und Statorseite sowie der zusätzliche Druckverlust aufgrund der Ablösung gesucht. Im Folgenden wird dafür zunächst die Strömung eines ebenen Wandstrahls als Vorstudie und anschließend die Strömung in der o. g. Nut im Sinne der Theorie des ebenen Wandstrahls analysiert. Weiterhin wird ein empirisches Reibungsfaktormodell erarbeitet und angewendet, welches später in das Spaltströmungsmodell CAPM integriert und mit dem Experiment verglichen wird. Zur Analyse der Strömung und Kalibrierung der Modelle werden zuvor CFD-Simulationen genutzt.

4.2 Vorstudie zum ebenen Wandstrahl

Eine Vorstudie über einen Wandstrahl, der in ein großes Plenum mündet, dient zur Validierung der Simulationemethode mit der etablierten Wandstrahltheorie aus Abschnitt 2.3. Die grundsätzliche Geometrie ist schematisch in Abbildung 2.2 dargestellt. Sie besteht aus einem Spalt mit Höhe \tilde{h} , der in ein halbumendliches Plenum mündet, in dem sich der Wandstrahl ausbildet. Das finite Plenum des numerischen Modells besitzt eine Höhe von $300\tilde{h}$ und eine Länge von $500\tilde{h}$. Der Spalt hat die Länge $50\tilde{h}$, damit sich ein voll ausgebildetes Profil entwickeln kann. Die globale axiale Reynoldszahl ϕRe wurde für die Vorstudie variiert mit den Werten 4000, 8000 und 12000. In allen Simulationen wurde ein k - ω -SST-Turbulenzmodell unter Nutzung eines Low-Reynolds-Ansatzes für $y_+ \approx 1$ verwendet. Die dimensionsbehafteten Referenzgrößen wurden für alle Simulationen entsprechend dem Prüfstand der Forschungsstelle ausgewählt.

Zunächst müssen noch einige zusätzliche dimensionslose Größen definiert werden. Für die dimensionslose axiale Koordinate wird statt z im Folgenden die alternative Definition

$$z_* := \tilde{z}/\tilde{h} \quad (4.7)$$

verwendet. Im Sinne der Definitionen des Ringspaltes mit Länge \tilde{L} sind die beiden axialen Koordinaten über

$$z = \frac{\psi}{L} z_* \quad (4.8)$$

miteinander verknüpft. Die dimensionslose Halbstrahlbreite und das dimensionslose Geschwindigkeitsmaximum werden definiert als

$$\delta := \tilde{\delta}/\tilde{h} \quad \text{und} \quad (4.9)$$

$$c_m := \tilde{c}_m/\tilde{C}_z. \quad (4.10)$$

Damit lassen sich statt den dimensionsbehafteten Gleichungen (2.62) und (2.63) direkt Ansatzfunktionen für die dimensionslosen Größen vorschreiben:

$$c_m = K_1 z_*^a \quad \text{und} \quad (4.11)$$

$$\delta = K_2 z_* + \delta_0. \quad (4.12)$$

Hierdurch verschwindet das Problem der Dimension von \tilde{K}_1 in Gleichung (2.62) von selbst. Eine Umrechnung kann dennoch mit der Gleichung

$$K_1 := \tilde{K}_1 \frac{\tilde{h}^a}{\tilde{C}_z} \quad (4.13)$$

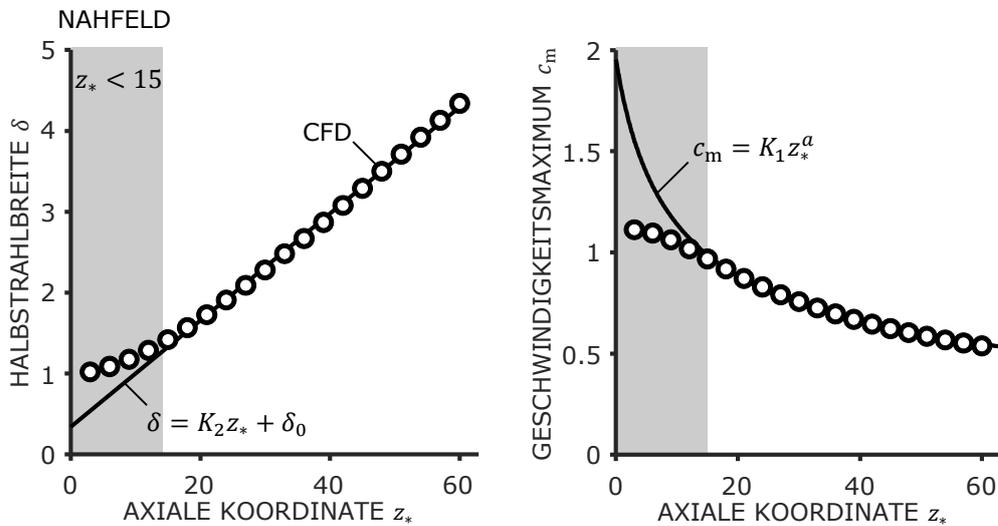


Abbildung 4.4 – Axiale Verläufe der Halbstrahlbreite und des Geschwindigkeitsmaximums.

erfolgen. Die Konstante δ_0 in Gleichung (4.12) verschwindet außerdem noch, wenn die axiale Koordinate z_* auf den sogenannten virtuellen Ursprung des Strahls $z_{*,0}$ zentriert wird, was hier aber als unnötig betrachtet wird. Es ist anzunehmen, dass diese Form der Entdimensionierung mit den Spaltparametern oft nicht verwendet wird, da der Spalt im Fernfeld im Sinne der Selbstähnlichkeit theoretisch ja nicht mehr existiert. Weitere Referenzgrößen zur Entdimensionierung stehen dann nicht mehr zur Verfügung. Für die Praxis sind die o. g. Definitionen dennoch nützlich, weswegen sie hier aufgeführt und verwendet werden.

Im Folgenden werden nun exemplarisch die Ergebnisse für die höchste Reynoldszahl vorgestellt, sie gelten aber bei allen Ergebnissen auch analog für die anderen beiden Fälle. Die beiden axialen Verläufe der lokalen charakteristischen Größen des Wandstrahls, die Halbstrahlbreite δ und die Maximalgeschwindigkeit c_m , sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Größen wurden an einzelnen axialen Stellen aus der CFD-Simulation ausgewertet (durch Marker dargestellt). Ab Beginn des Fernfeldes bei $z_* = 15$ wurden die beiden entsprechenden Ansatzfunktionen (4.11) und (4.12) an diese Stützstellen angepasst. Wie zu sehen, passen die qualitativen Verläufe im Fernfeld sehr gut auf die Ansatzfunktionen.

In Tabelle 4.1 sind die beiden universellen Ansatzparameter K_2 (Steigung der Halbstrahlbreite) und a (Exponent der Maximalgeschwindigkeit) für die drei Simulationsfälle, deren Mittelwerte sowie Literaturwerte von Schwarz

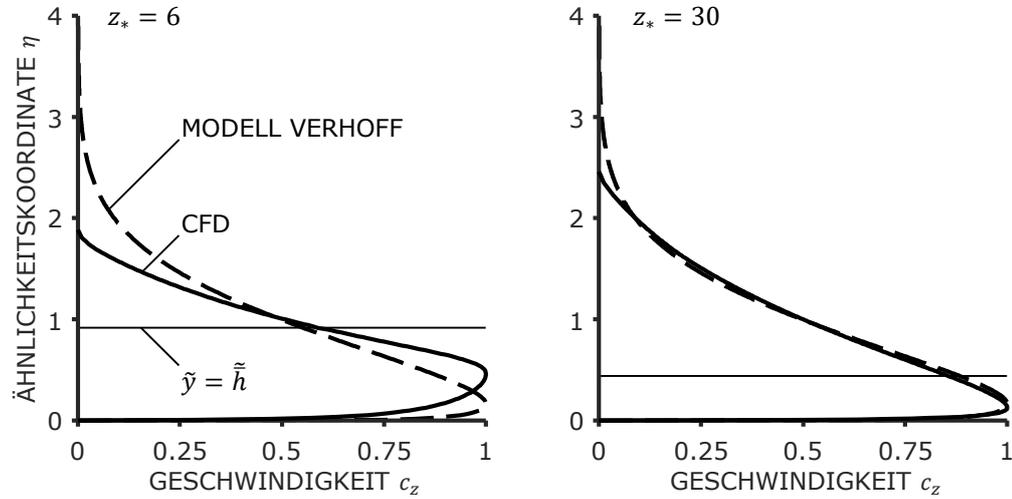


Abbildung 4.5 – Geschwindigkeitsprofile an verschiedenen axialen Stellen.

und Cosart¹ angegeben. Die beiden anderen Parameter δ_0 (bzw. der sich daraus ergebende Abstand zum virtuellen Ursprung des Wandstrahls) und \tilde{K}_1 bzw. K_1 sind problemspezifisch und eignen sich nicht zum quantitativen Vergleich. Anhand der beiden identifizierten Parameter K_2 und a ist jedoch zu erkennen, dass die Ansätze auch quantitativ gut mit den experimentell ermittelten Literaturwerten übereinstimmen.

Die beiden dimensionslosen Geschwindigkeitsprofile an den zwei beispielhaften axialen Stellen $z_* = 6$ im Nahfeld und $z_* = 30$ im Fernfeld sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Die durchgezogene Linie im Diagramm zeigt den mittels CFD bestimmten Verlauf, die gestrichelte Linie zeigt den mittels der empirischen Gleichung (2.58) nach Verhoff bestimmten Verlauf. Die zusätzliche horizontale Linie zeigt die Stelle, an dem die Verlängerung der

Tabelle 4.1 – Ermittelte Parameter der Ansatzfunktionen des Wandstrahls.

ϕRe	K_2	a
4000	0.07052	-0.523
8000	0.06740	-0.509
12000	0.06583	-0.504
Mittelwert	0.06792	-0.512
Schwarz und Cosart, 1961	0.06782	-0.555

¹ SCHWARZ UND COSART, „The two-dimensional turbulent wall-jet“, ([91], 1961)

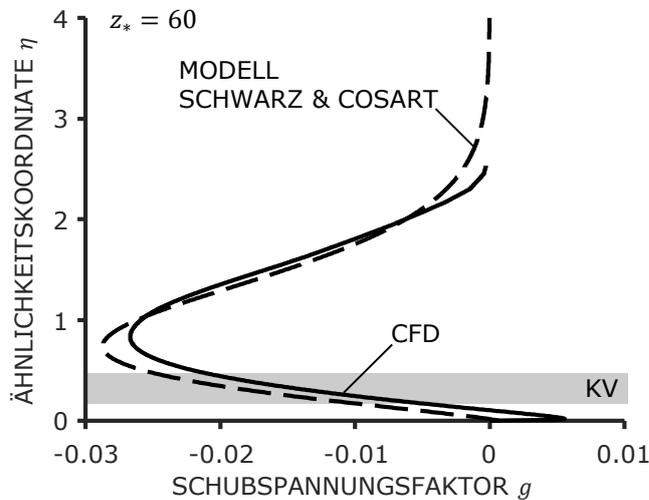


Abbildung 4.6 – Profil der dimensionslosen Reynoldsspannung.

oberen Spaltwand liegt. Diese variiert an verschiedenen Stellen z_* , da ja die Halbstrahlbreite ebenso über z_* variiert, mit welcher die dimensionslose Ähnlichkeitskoordinate η gebildet wird. Es ist zu erkennen, dass das Profil bei $z_* = 6$ im Nahfeld aufgrund des Spalteinflusses noch deutlich vom Wandstrahlprofil abweicht. Im Fernfeld bei $z_* = 30$ dagegen ist bis auf den äußersten Bereich eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen, die so bereits ab $z_* \approx 15$ vorliegt.

In Abbildung 4.6 ist das Profil des Schubspannungsfaktors g für die Reynoldsspannung an der beispielhaften Stelle $z_* = 60$ aufgetragen. Die durchgezogene Linie stellt wieder das Simulationsergebnis dar und die gestrichelte Linie wurde mittels Gleichung (2.68) nach Schwarz und Cosart bestimmt. Zudem wurde der Bereich grau markiert, in dem sich die verlängerte Linie der oberen Spaltwand mit $\tilde{y} = \tilde{h}$ bei Variation von z_* befindet, also in dem sich die statorseitige Fläche des Kontrollvolumens KV in Analogie zur Nut befinden würde.

Es ist zu erkennen, dass die Verläufe qualitativ gut übereinstimmen, sich aber quantitativ etwas unterscheiden. Die CFD-Rechnung zeigt an der Wand einen deutlich größeren positiven Wert als das Modell. Im wandnahen Bereich $\eta < 0.5$ folgen die beiden Verläufe etwa einem linearen Verlauf, haben jedoch einen näherungsweise konstanten Versatz. Beim Maximum unterscheiden sich die beiden Kurven am deutlichsten, bei der CFD ist der Betrag geringer und leicht nach außen verschoben.

In Abbildung 4.7 sind schließlich die axialen Verläufe des Wandreibungsfaktors f bei $\tilde{y} = 0$ und des Schubspannungsfaktors g auf Höhe der oberen

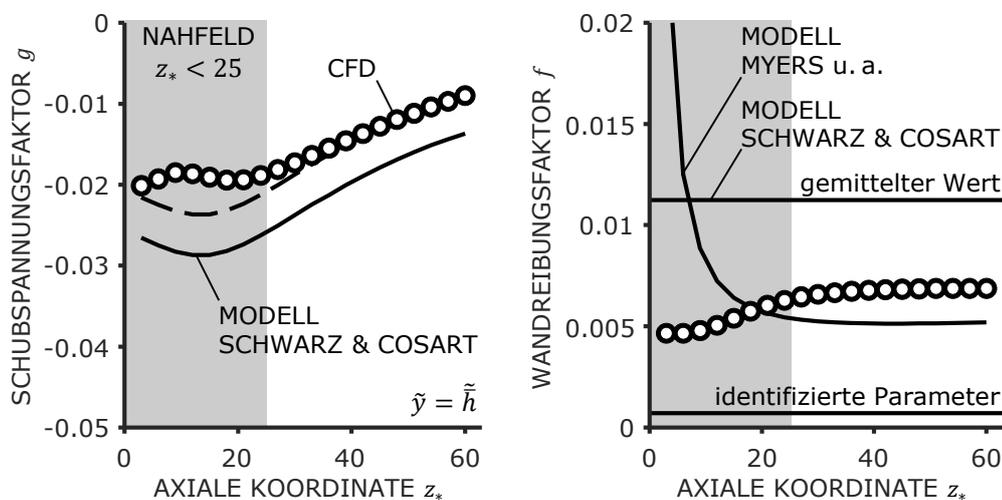


Abbildung 4.7 – Verlauf der Reibungskoeffizienten aufgrund der Reynoldszahl und der Wandschubspannung.

Spaltwand bei $\tilde{y} = \tilde{h}$ dargestellt. Die Marker stellen die mittels CFD ermittelten Größen dar, die Linien die verschiedenen Modelle. Das Modell (2.68) für den Schubspannungsfaktor g nach Schwarz und Cosart zeigt im Nahfeld qualitativ einen anderen Verlauf als die Simulation. Das Nahfeld macht sich hier bis ca. $z_* = 25$ bemerkbar und ist damit weiter ausgedehnt als bei den Verläufen von δ und c_m in Abbildung 4.4. Im Fernfeld stimmt der Verlauf dann qualitativ gut überein, ist jedoch um einen konstanten Versatz von ca. 0,005 verschoben (auch bei den anderen beiden Reynoldszahlen). Dies lässt sich über den oben bereits beschriebenen Versatz im linearen Bereich in Abbildung 4.6 erklären. Das Modell inkl. Versatz ist durch die gestrichelte Linie dargestellt.

In Abbildung 4.7 rechts ist der Reibungsfaktor f für die Wandschubspannung dargestellt, dessen CFD-Werte im Nahfeld leicht ansteigen und im Fernfeld konstant bleiben. Die beiden konstanten Geraden stellen die Werte nach Schwarz und Cosart dar. Mit dem von Schwarz und Cosart angegebenen gemittelten Wert (2.66) wird der Koeffizient überschätzt und mit Gleichung (2.64) unter Verwendung der mittels CFD identifizierten Werte für K_2 und a unterschätzt. Das empirische Modell (2.70) bzw. (2.72) nach Myers, Schauer und Eustis liegt im Fernfeld deutlich näher am Verlauf der Simulation, es verbleibt jedoch eine in etwa konstante Abweichung. Im Nahfeld wird der Gültigkeitsbereich (2.71) der empirischen Gleichung verletzt, was zu großen Abweichungen führt. Der Versatz im Fernfeld kann über einen multiplikativen Faktor von ca. 1,4, der für alle drei Reynoldszahlen gilt, ausgeglichen

werden. Dies könnte bspw. an einem Einfluss der Rauheit im empirischen Faktor in Gleichung (2.70) liegen.

Insgesamt kann aufgrund der obigen Ergebnisse davon ausgegangen werden, dass die Konfiguration der CFD-Rechnungen grundsätzlich geeignet ist, um Wandstrahlen im gegebenen Reynoldszahlenbereich zu untersuchen. Die Geschwindigkeitsprofile und die axiale Entwicklung der Halbstrahlbreite und der Maximalgeschwindigkeit stimmen im Fernfeld qualitativ und quantitativ sehr gut mit der Theorie bzw. dem Experiment überein. Bei den verwendeten Modellen für Wandreibung und Reynoldsspannung ergeben sich qualitativ eine sehr gute Übereinstimmung und quantitativ leichte Abweichungen, die beim Vergleich zwischen CFD-Ergebnissen, Theorie und Experiment zu erwarten sind und als akzeptabel bewertet werden.

4.3 Wandstrahltheorie bei der ebenen Einzelnut

In diesem Abschnitt wird die Wandstrahltheorie aus Abschnitt 2.3 auf die tatsächliche Nut einer Labyrinthdichtung wie in Abbildung 4.2 angewendet und mit CFD-Daten verglichen. Details zur numerischen Methodik der Simulationen für die ebene Nut sind in Anhang B.2 zu finden.

Im Gegensatz zum halbunendlichen Plenum der Wandstrahlmodelle liegt im Fall der Nut ein Einfluss der finiten, abgeschlossenen Nutgeometrie vor. Zusätzlich erzeugt die bewegte Rotorwand eine überlagerte Schlepplagerung

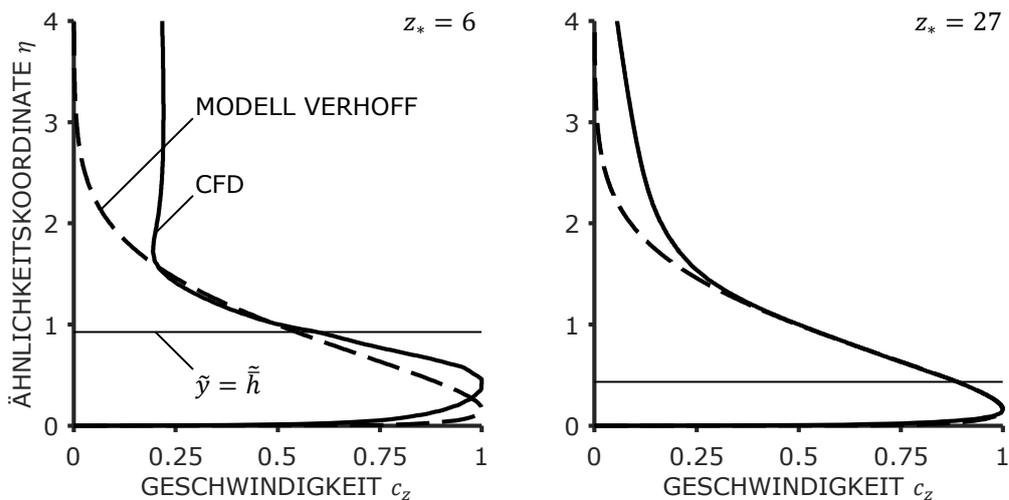


Abbildung 4.8 – Geschwindigkeitsprofile an Beginn und Ende der Nut.

in Umfangs- bzw. Querrichtung, die von den Modellen des ebenen Wandstrahls nicht berücksichtigt wird. Die variierten Parameter sind die Reynoldszahl mit

$$Re \in \{3215; 6430; 9645\}, \quad (4.14)$$

welche die Umfangsgeschwindigkeit der Rotorwand steuert und die Durchflusszahl

$$\phi \in \{0.25; 0.5; 0.75; 1; 1.25; 1.5; 1.75; 2\}, \quad (4.15)$$

die den axialen Volumenstrom steuert. Die in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnisse sind lediglich für die beiden Fälle $\phi = 0.25$ und 2 bei $Re = 9645$ und einer Nutgeometrie von $d = t = 30$. Qualitativ sind diese exemplarischen Ergebnisse aber in allen 24 untersuchten Fällen sehr ähnlich und gelten sogar auch für Fälle reiner Axialströmung ganz ohne bewegte Wand.

In Abbildung 4.8 sind die Profile der Axialgeschwindigkeit aus CFD und der empirischen Gleichung (2.58) an der Stelle $z_* = 6$ am Nuteintritt und $z_* = 27$ am Nutaustritt bei $\phi = 2$ dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, dass die vertikale Wandstrahl-Koordinate \tilde{y} bzw. in Form der Ähnlichkeitskoordinate η auf der Rotorwand beginnt und in radiale Richtung zeigt. Es ist in der Abbildung wieder zu erkennen, dass sich das Wandstrahlprofil am Anfang erst ausbilden muss. Am Ende der Nut zeigt die axiale Geschwindigkeitskomponente jedoch wieder eine sehr gute Übereinstimmung mit dem typischen Wandstrahlprofil – trotz der vergleichsweise kleinen Kammer und der überlagerten Schleppströmung. Es ist anzumerken, dass für die Betrachtung am oben erwähnten Kontrollvolumen KV lediglich der Teil des Profils

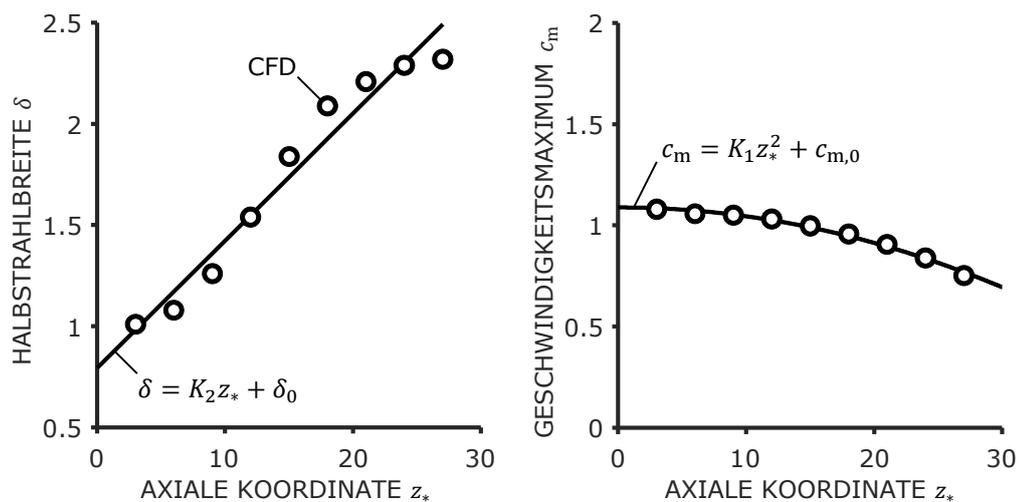


Abbildung 4.9 – Verlauf der Halbstrahlbreite und Maximalgeschwindigkeit.

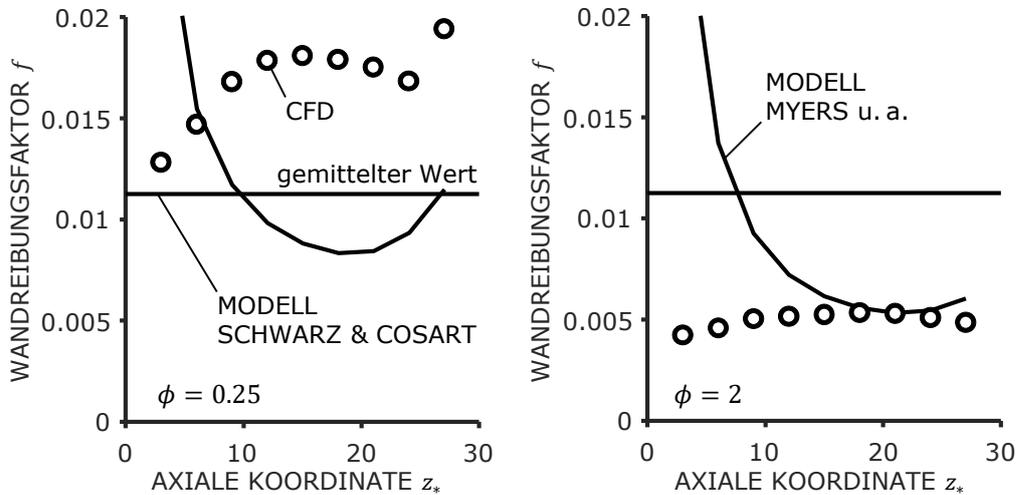


Abbildung 4.10 – Axialer Verlauf des Wandschubspannungskoeffizienten.

bis zur oberen Kante des Spaltes von Interesse ist, welcher durch die dünne waagerechte Linie dargestellt wird.

In Abbildung 4.9 sind die axialen Verläufe der Halbstrahlbreite und der Maximalgeschwindigkeit bei $\phi = 2$ aufgetragen. Obwohl der Verlauf der Halbstrahlbreite leicht davon abweicht, kann er dennoch gut durch eine Gerade entsprechend Gleichung (4.12) angenähert werden. Der Verlauf der Maximalgeschwindigkeit zeigt jedoch einen qualitativ anderen Verlauf als das für den Wandstrahl typische Potenzgesetz (4.11). Stattdessen kann der Verlauf gut über ein Polynom zweiten Grades der Form $c_m = K_1 z_*^2 + c_{m,0}$ mit $K_1 < 0$ und $c_{m,0} \approx 1.1$ angenähert werden. Dieser quadratische Verlauf ist bei anderen Reynolds- und Durchflusszahlen noch stärker ausgeprägt. Streng genommen sind die Modellgleichungen (2.64) und (2.68) von Schwarz und Cosart für einen solchen Ansatz aufgrund des zusätzlichen konstanten Terms $c_{m,0}$ nicht mehr gültig.

In Abbildung 4.10 sind die axialen Verläufe des Wandschubspannungskoeffizienten f für die beiden Durchflusszahlen $\phi = 0.25$ und 2 dargestellt. Für kleine Durchflusszahlen zeigt sich eine vergleichsweise große Abweichung der CFD-Ergebnisse zu den Modellen. Für größere Durchflusszahlen weicht das Modell nach Schwarz und Cosart ebenfalls ab. Das Modell nach Myers, Schauer und Eustis trifft hier im hinteren Nutbereich bei $z_* > 15$ die Simulationsdaten oft gut. Die großen Abweichungen am Beginn der Nut sind wieder auf den verletzten Gültigkeitsbereich im Nahfeld zurückzuführen.

In Abbildung 4.11 sind zwei axiale Verläufe des Schubspannungsfaktors g für die Reynoldsspannung bei $\phi = 0.25$ und 2 dargestellt. Die Größen wurden

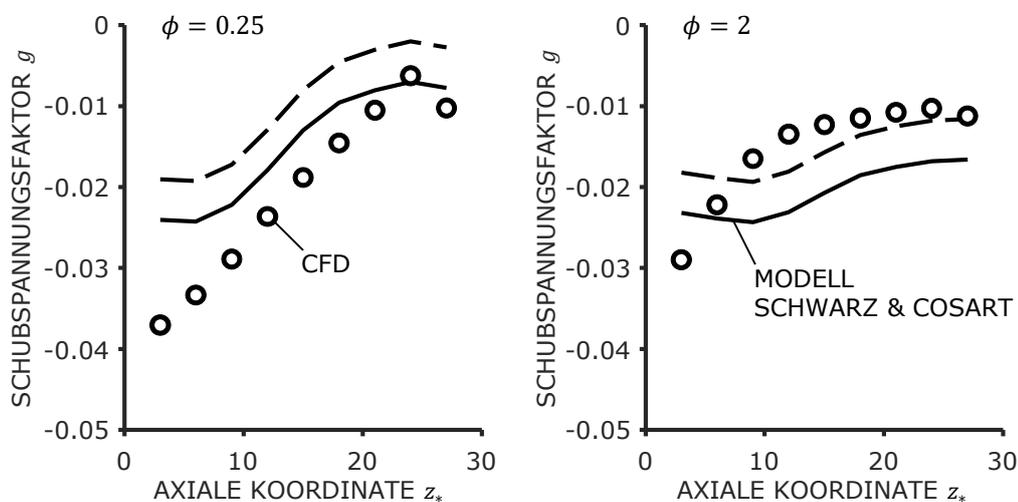


Abbildung 4.11 – Axialer Verlauf des Schubspannungskoeffizienten aufgrund der Reynoldsspannung auf Höhe der oberen Spaltwand.

auf Höhe der verlängerten Spaltwand über der Nut bei $\tilde{y} = \tilde{h}$ ermittelt. Die durchgezogene Linie stellt wieder den Modellverlauf nach Gleichung (2.68) dar, während die gestrichelte Linie wie beim Wandstrahl den um den Betrag 0.005 additiv korrigierten Verlauf zeigt. Die Verläufe aus der Simulation werden in den verschiedenen Fällen qualitativ mehr oder weniger gut vom Modell getroffen. Häufig trifft die um den Versatz korrigierte Modellkurve die CFD-Daten bei höheren Durchflusszahlen, besonders bei größeren Werten von z_* . Bei kleinen Durchflusszahlen dagegen liefert das unkorrigierte Modell häufig bessere Werte. Zusätzlich treten wie zu erwarten häufig größere Abweichungen im Nahfeld auf, diese sind aber in einigen Fällen nicht so stark ausgeprägt wie beim Wandstrahl.

Zusammenfassend kann damit gesagt werden, dass die Übertragung der Wandstrahltheorie auf finite, abgeschlossene Nutgeometrien mit und ohne Überlagerung einer Schlepplströmung in Querrichtung prinzipiell teilweise möglich erscheint. In axialer Richtung handelt es sich offensichtlich auch hier im Wesentlichen um eine Wandstrahlströmung. Die Profile der Axialgeschwindigkeit stimmen mit den typischen Wandstrahlprofilen in allen Fällen gut überein. Der axiale Verlauf des Geschwindigkeitsmaximums weicht jedoch deutlich von der typischen Ansatzfunktion ab, weswegen die Reibungsmodelle außerhalb ihres Definitionsbereichs genutzt werden. Außerdem wird die zusätzliche Schlepplströmung in Umfangsrichtung von den Modellen nicht berücksichtigt. Dies äußert sich in nur mäßiger bis schlechter qualitativer und quantitativer Übereinstimmung der Modelle mit den CFD-Daten. Während

die Reynoldsspannung in Form des Schubspannungsfaktors g davon interessanterweise weniger beeinflusst wird und teilweise noch brauchbare Ergebnisse liefert, zeigen die Ergebnisse für den Wandreibungsfaktor f in den meisten Fällen inakzeptable Abweichungen.

Um die Modelle schließlich nutzen zu können, müsste der Einfluss der Betriebsparameter Re und ϕ sowie der Geometrieparameter d und t auf die empirischen Modellparameter der Ansatzfunktionen K_1 , $c_{m,0}$, K_2 und δ_0 charakterisiert werden. Die oben gezeigten lokalen Verläufe könnten anschließend direkt oder im Sinne von durch Integration bestimmten, mittleren Werten je Nut im Zusammenhang mit dem CAPM verwendet werden. Somit wären die Schubspannungen an Rotor- und Statorwand in axialer Richtung ermittelt. Die Spannungskomponenten in Umfangsrichtung müssten anderweitig ermittelt werden, sofern das Wandstrahlmodell nicht entsprechend erweitert wird, wie bereits in Abschnitt 2.3 angedeutet. Bei der Umfangs- bzw. Quergeschwindigkeit über der Nut handelt es sich im Übrigen um ein typisches turbulentes Couette-Profil, das aufgrund der Nut jedoch asymmetrisch ist. Auch dieses müsste anderweitig ermittelt werden, wodurch weitere empirische Modellparameter dazukämen. Zuletzt muss noch erwähnt werden, dass im Nahfeld dennoch immer eine gewisse Modellunsicherheit verbleiben wird, deren Einfluss zu bewerten bliebe.

Obwohl die Betrachtung der Wandstrahlströmung wertvolle Einblicke in die Strömungsvorgänge in der Scherschicht geliefert haben, lassen sich die erwähnten Probleme nicht ohne Weiteres beheben. Es scheint darüber hinaus fraglich, ob die Anzahl empirischer Modellparameter und die Abhängigkeit von Betriebsparametern gegenüber einem im folgenden Abschnitt vorgestellten Reibungsfaktormodell signifikant verringern ließe. Die Untersuchung des ebenen turbulenten Wandstrahls unter Einfluss einer Querströmung und eines finiten Plenums wird daher als Aufgabe einer eigenen Forschungsarbeit angesehen.

4.4 Reibungsfaktormodell für Labyrinthdichtungen

Das Hauptmerkmal der Strömung in der Nut einer Labyrinthdichtung ist die turbulente freie Scherschicht, die sich im Übergangsbereich des Spaltes zur Nut ausbildet. Oben wurde die theoretische Analogie zwischen freien Scherschichten und Wandgrenzschichten angesprochen. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, die Anwendbarkeit von Reibungsfaktormodellen für profilierte Dichtungen weiter zu erproben.

Der Stand der Literatur in Abschnitt 2.2 zeigt zwar, dass es einige fehlgeschlagene Versuche zur vorwiegend experimentellen Bestimmung von verschiedenen Reibungsfaktoren mit eher einfachen Methoden gab. Diese Versuche weisen insgesamt aber keine hinreichende Systematik oder konsistente, geschlossene Theorie auf. Die neuere Literatur zeigt nämlich auch, dass Hybrid-Modelle oder solche, bei denen Reibungsfaktoren mittels ausgeklügelten, auf CFD basierten Methoden kalibriert werden, vielversprechende Ergebnisse liefern können^{1,2,3}.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden zeigen, dass das Reibungsfaktormodell nach Hirs, das in Abschnitt 2.1.2 ausführlich vorgestellt wurde, auch sehr gut auf profilierte Dichtungen angewendet werden kann. Hierfür sind jedoch zum einen einige kleinere Erweiterungen, und zum anderen eine detaillierte Methode zur Kalibrierung der Modellparameter erforderlich, die alle Abhängigkeiten von den globalen Betriebsparametern berücksichtigt. Außerdem wird eine Methodik zur Skalierung des Modells mit der Exzentrizität und der Profilgeometrie benötigt, die im Folgenden vorgestellt wird. Anschließend wird eine Methode zur Bestimmung und Modellierung des Eintrittsdruckverlustes durch die Ablösung nach der Nut gezeigt.

4.4.1 Skalierung mit der Exzentrizität und Nutgeometrie

Aufgrund der Exzentrizität ε und des Kippwinkels des Rotors γ werden die Spaltweite h und die Geschwindigkeiten \bar{w}_φ und \bar{c}_z zu Feldern über den beiden Koordinaten φ und z . Das Reibungsmodell muss sowohl die Skalierung mit der Exzentrizität bzw. den veränderlichen Feldern, als auch die Skalierung

¹ ARGHIR U. A., „Theoretical Analysis of Textured “Damper” Annular Seals“, ([2], 2007)

² MIGLIORINI U. A., „A Computational Fluid Dynamics/Bulk-Flow Hybrid Method for Determining Rotordynamic Coefficients of Annular Gas Seals“, ([71], 2012)

³ MIGLIORINI, UNTAROIU UND WOOD, „A Numerical Study on the Influence of Hole Aspect Ratio on the Performance Characteristics of a Hole-Pattern Seal“, ([69], 2014)

der Reibungsfaktoren mit der Nutgeometrie bewerkstelligen. Normalerweise, wie das Hirs-Modell in Abschnitt 2.1.2 und auch das Wandstrahl-Modell in Abschnitt 2.3 zeigen, skaliert Flüssigkeitsreibung besser mit lokalen Strömungsgrößen.

Im Modell nach Hirs werden daher die lokale Wandrelativgeschwindigkeit \bar{w}_{Wand} , Gleichung (2.32), und eine lokale Wand-Reynoldszahl Re_{Wand} , Gleichung (2.34), genutzt. Entsprechend ist anzunehmen, dass die hier betrachteten Wandschubspannungen am Rotor und die Reynoldsspannungen auf der Statorseite in der Scherschicht ebenso mit der Exzentrizität und Nutgeometrie skalieren. Daher wird eine zusätzliche lokale Durchflusszahl

$$\phi_1(\varphi, z) := \frac{\tilde{c}_z}{2\tilde{c}_\varphi} = \frac{\phi \bar{c}_z}{2\bar{c}_\varphi} \quad (4.16)$$

als Verhältnis der beiden lokalen, über die Spaltweite gemittelten Geschwindigkeitskomponenten definiert. Der Faktor $1/2$ wird hinzugefügt, damit $\phi_1 = \phi$ im konzentrischen Fall gilt, da hier per definitionem $\bar{c}_z = 1$ und $\bar{c}_\varphi = 0.5$ ist. Analog werden zwei zusätzliche lokale Parameter für die Nutgeometrie definiert:

$$d_1(\varphi, z) := \frac{\tilde{d}}{\tilde{h}} = \frac{d}{h} \quad \text{und} \quad (4.17)$$

$$t_1(\varphi, z) := \frac{\tilde{t}}{\tilde{h}} = \frac{t}{h}. \quad (4.18)$$

Insgesamt werden für das Reibungsfaktormodell nach Hirs also die beiden Reibungsfaktoren f_{Rotor} und f_{Stator} sowie die beiden Winkelkorrekturfaktoren Λ_{Rotor} und Λ_{Stator} benötigt. Unter Berücksichtigung der später vorgestellten Ergebnisse zeigen sich die folgenden Abhängigkeiten dieser empirischen Modellparameter von den Betriebsbedingungen in Form von Potenzgesetzen:

$$f_{\text{Rotor}} = m_{\text{Rotor}} (Re_{\text{Rotor}})^{n_{\text{Rotor}}}, \quad (4.19)$$

$$f_{\text{Stator}} = m_{\text{Stator}} (Re_{\text{Stator}})^{n_{\text{Stator}}} \quad \text{mit} \quad (4.20)$$

$$m_{\text{Stator}} = \alpha_1 \phi_1^{\beta_1}, \quad (4.21)$$

$$\Lambda_{\text{Rotor}} = \alpha_2 \phi_1^{\beta_2}, \quad (4.22)$$

$$\Lambda_{\text{Stator}} = \alpha_3 \phi_1^{\beta_3} \quad \text{und} \quad (4.23)$$

$$f_{z,E} = \alpha_4 \phi_1^{\beta_4}. \quad (4.24)$$

Der zusätzliche Reibungsfaktor $f_{z,E}$ aufgrund der Ablösung wird erst im nächsten Abschnitt vorgestellt, ist hier aber schon der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Der Einfluss der Nutgeometrie macht sich in den empirischen Parametern der Potenzgesetze deutlich bemerkbar. Abschließend wird deshalb zusätzlich angenommen, dass die Koeffizienten und Exponenten der Potenzgesetze (4.19) bis (4.24) näherungsweise lineare Abhängigkeit von der Geometrie der quadratischen Nut ($d = t$) aufweisen:

$$m_{\text{Rotor}} = \gamma_1 d_1 + \delta_1 \quad (4.25)$$

$$n_{\text{Rotor}} = \gamma_2 d_1 + \delta_2 \quad (4.26)$$

$$n_{\text{Stator}} = \gamma_3 d_1 + \delta_3 \quad (4.27)$$

$$\alpha_1 = \gamma_4 d_1 + \delta_4 \quad (4.28)$$

$$\beta_1 = \gamma_5 d_1 + \delta_5 \quad (4.29)$$

$$\alpha_2 = \gamma_6 d_1 + \delta_6 \quad (4.30)$$

$$\beta_2 = \gamma_7 d_1 + \delta_7 \quad (4.31)$$

$$\alpha_3 = \gamma_8 d_1 + \delta_8 \quad (4.32)$$

$$\beta_3 = \gamma_9 d_1 + \delta_9 \quad (4.33)$$

$$\alpha_4 = \gamma_{10} d_1 + \delta_{10} \quad (4.34)$$

$$\beta_4 = \gamma_{11} d_1 + \delta_{11} \quad (4.35)$$

Damit ist die Theorie geschlossen und das Reibungsmodell berücksichtigt somit sämtliche Betriebs- und Geometrieparameter. Die 22 Koeffizienten γ_i und δ_i mit $i = 1$ bis 11 werden als allgemein in guter Näherung konstante empirische Modellparameter angesehen, welche im interessierenden Betriebsbereich zu kalibrieren sind. Sind diese bekannt, kann prinzipiell jede Labyrinthdichtung mit quadratischen Nuten berechnet werden.

4.4.2 Eintrittsdruckverlust nach der Nut

Die axiale turbulente Scherschicht über der Nut verursacht Entrainment, d. h. das Fluid außerhalb des Strahls wird aufgrund von turbulenter Mischung in die gleiche Richtung beschleunigt. Dieser diffusive Impulstransport führt zu einer Verbreiterung und gleichzeitig zu einer allgemeinen Verringerung der Geschwindigkeit des Strahls, siehe Abschnitte 4.2 und 4.3.

Da die Kontinuitätsgleichung über den Nuteingang bis zum Nuteingang erfüllt werden muss, wird die Strömung aus der Nut heraus in den Spalt hinein beschleunigt. Aus diesem Grund entsteht aufgrund der Fluidträgheit eine Strömungsablösung am Steg ganz analog zu den Ausführungen in Kapitel 3. Die Ablösung stellt wieder eine vena contracta dar, nach der sich die Grenzschicht wieder anlegt. Dies resultiert abermals in einem Carnot-Eintrittsdruckverlust. Dieser Druckverlust Δp_E tritt nach jeder Nut einer Labyrinthdichtung auf.

Die Integration der Schubspannungen an der Rotorwand und in der Scherschicht in axialer Richtung an den entsprechenden Flächen des Kontrollvolumens von Abbildung 4.2 resultiert in einem axialen Druckverlust Δp_s (unter Annahme, dass die Differenz der konvektiven Terme in der Impulsgleichung vernachlässigbar ist). Somit setzt sich der gesamte Druckverlust über der Nut Δp_{ges} vom Nuteingang bei $z_* = 0$ zum Ausgang bei $z_* = d$ einer einzelnen Nut aus beiden Teilen zusammen zu

$$\Delta p_{\text{ges}} := \frac{2 \Delta \tilde{p}_{\text{ges}}}{\tilde{\rho} \tilde{\Omega}^2 R^2} = p(0) - p(d) = \Delta p_s + \Delta p_E. \quad (4.36)$$

Für die Betrachtung der Einzelnut wird für den Eintrittsdruckverlust der Verlustkoeffizient

$$\zeta_E := \frac{2 \Delta \tilde{p}_E}{\tilde{\rho} \tilde{c}_z^2} = \frac{\Delta p_E}{\phi^2 \bar{c}_z^2} \quad (4.37)$$

definiert. Hier sind wieder andere Definitionen möglich, jedoch zeigt diese Variante den gutmütigsten funktionellen Zusammenhang mit den Betriebsbedingungen. Der resultierende Druckverlust kann zudem über die Nutbreite „verschmiert“ werden, sodass eine zusätzliche, virtuelle axiale Schubspannung

$$\tau_{z,E} := \frac{\Delta p_E}{d} = \frac{\zeta_E}{d} \phi^2 \bar{c}_z^2 = f_{z,E} \phi^2 \bar{c}_z^2 \quad (4.38)$$

mit dem Reibungsfaktor $f_{z,E} := \zeta_E/d$ gewonnen werden kann. Diese Formulierung ist nützlich, da keine Übergangsbedingung für einen Drucksprung mithilfe einer Bernoulli'schen Gleichung zwischen verschiedenen Profilelementen benötigt wird. Dies kann zu numerischen Schwierigkeiten führen, vgl. Arghir und Frêne¹. Die Unstetigkeit im Druck wird so stattdessen in einen kontinuierlichen Abfall gleicher Steigung umgedeutet, was integro-differentiellen Modellen wie dem CAPM zugute kommen sollte.

4.4.3 Modellkalibrierung

Insgesamt wurden 96 dreidimensionale, stationäre RANS-Simulationen inkompressibler Strömung Newton'schen Fluids und konstanter Materialeigenschaften durchgeführt. Für die Details zur numerischen Methodik für die ebene Nut wird wieder auf Anhang B.2 verwiesen. Das Lösungsgebiet ist in Abbildung 4.2 rechts dargestellt und repräsentiert eine einzelne rechteckige Nut einer konzentrischen Labyrinthdichtung unter Vernachlässigung der Krümmung. Die Nut wird wie erwähnt als mit quadratischem Querschnitt $d = t$ angenommen.

¹ ARGHIR UND FRÈNE, „A Bulk-Flow Analysis of Static and Dynamic Characteristics of Eccentric Circumferentially-Grooved Liquid Annular Seals“, ([3], 2004)

Aus numerischen Gründen wird eine willkürliche Tiefe von $2d$ in φ -Richtung angenommen, um dreidimensionale Strömungseffekte mit einschließen zu können. Der Spalt vor und nach der Nut hat eine Länge von $l = 60$, wodurch voll eingelaufene Strömung zu Beginn der Nut vorliegt.

Aufgrund der konzentrischen bzw. ebenen Geometrie und voll eingelaufener Strömung gilt nach Definition $\bar{c}_z = 1$ und $\bar{c}_\varphi = 0.5$. Die Simulationen geben somit keine Einblicke in Effekte, die aufgrund von Exzentrizität entstehen könnten. Dennoch sind sie geeignet, um das Reibungsmodell vollständig zu kalibrieren, welches eine Skalierung für die Exzentrizität und Nutgeometrie umfasst. Dies ist möglich, da im konzentrischen Fall die lokalen Variablen gleich den globalen Variablen sind, also $\phi_1 = \phi$, $d_1 = d$ und $t_1 = t$.

Die variierten Parameter sind gleich zum vorherigen Abschnitt, Gleichungen (4.14) und (4.15). Sie werden hier aber nochmals aufgeführt. Die Reynoldszahl wird mit den Werten

$$Re \in \{3215; 6430; 9645\}$$

variiert und steuert die Umfangsgeschwindigkeit der Rotorwand; die Durchflusszahl variiert mit den Werten

$$\phi \in \{0.25; 0.5; 0.75; 1; 1.25; 1.5; 1.75; 2\}$$

und steuert den axialen Volumenstrom. Dazu kommt nun zusätzlich die Breite der quadratischen Nut

$$d \in \{10; 15; 20; 30\} \quad (4.39)$$

mit jeweils $d = t$. Somit ergeben sich insgesamt 96 Berechnungsfälle.

Die Simulationen werden genutzt, um die flächengemittelten Wandschubspannungskomponenten am Rotor $\tau_{s\varphi, \text{Rotor}}$ und $\tau_{sz, \text{Rotor}}$ (siehe Kontrollvolumen KV in Abbildung 4.2), die flächengemittelten Reynoldsspannungen über der Nut $\tau_{s\varphi, \text{Stator}}$ und $\tau_{sz, \text{Stator}}$ sowie die axiale Druckdifferenz über die Nut Δp_{ges} zu bestimmen. Hieraus können alle Modellparameter bestimmt werden.

Um die Druckdifferenz Δp_{ges} zu ermitteln, wurde zunächst der statische Druck am Einlass der Nut $p(0)$ aus Gleichung (4.36) als flächengemittelter Wert bestimmt. Am Nutausgang wurde wieder von der Bagley-Methode Gebrauch gemacht und der Druck wurde linear aus dem Auslassspalt zur Nut hin stromauf extrapoliert, um einen zuverlässigen Wert für $p(d)$ zu erhalten (siehe Abschnitt 3.2). Der Druckverlust Δp_s aus den Schubspannungen wurde wie oben beschrieben durch Integration über das Kontrollvolumen erhalten. Nun kann Δp_E einfach als Differenz über Gleichung (4.36) bestimmt werden.

Im Folgenden wird der Fall $d = t = 30$ unter Variation der Betriebsbedingungen exemplarisch betrachtet. Die Ergebnisse treffen so qualitativ allerdings ebenfalls auf die anderen drei Nutgeometrien zu.

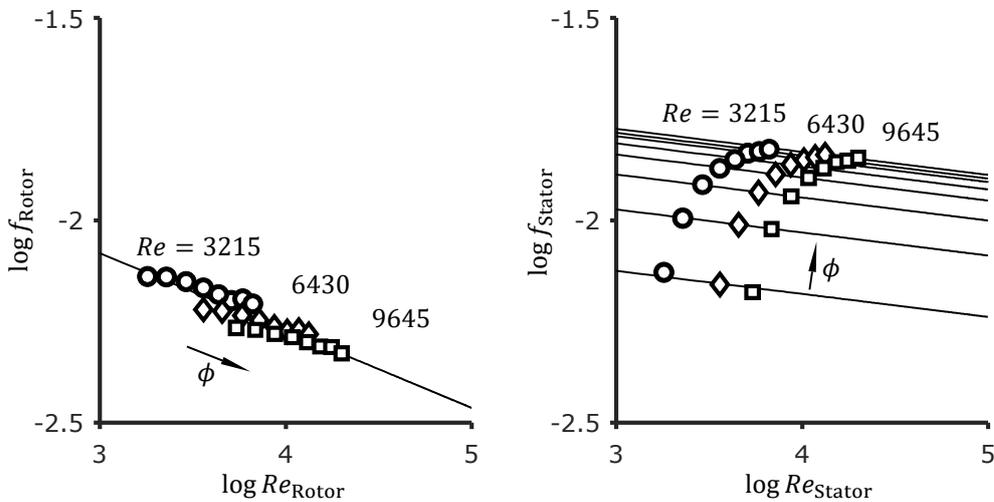


Abbildung 4.12 – Reibungsfaktoren an Rotor und Stator über der jeweiligen effektiven Wand-Reynoldszahl, doppelt logarithmisch.

Die Reibungsfaktoren und die angepassten Blasius-Korrelationen (2.35) über den effektiven Wand-Reynoldszahlen sind im doppelt logarithmischen Diagramm von Abbildung 4.12 dargestellt (\log ist der dekadische Logarithmus). Auf der Rotorseite sind in den Datenpunkten drei Gruppen für die drei globalen Reynoldszahlen zu sehen, aber ein einzelner Fit gestaltet sich noch als ausreichend. Auf der Statorseite ist eine deutliche Abhängigkeit von der Durchflusszahl für $m_{\text{Stator}}(\phi)$ zu erkennen. Daher wurde ein einzelner Fit für jede der acht Durchflusszahlen durchgeführt. Der Exponent variiert nur äußerst geringfügig, sodass der Mittelwert für alle Geraden verwendet werden kann.

Der Statorkoeffizient m_{Stator} ist in Abbildung 4.13 links über der Durchflusszahl ϕ dargestellt. Die Kurve deutet auf ein asymptotisches Verhalten für höhere Werte von ϕ hin. Dies scheint physikalisch korrekt zu sein, da sowohl der Reibungsfaktor und die Wand-Reynoldszahl schließlich nur noch von der axialen Komponente dominiert werden. Die Funktion kann gut durch ein Potenzgesetz approximiert werden. Diese Regressionskurve versagt jedoch für $\phi \rightarrow 0$, was aber eine unrealistische Betriebsbedingung für Spaltdichtungen darstellen würde.

Wie bereits beschrieben, muss bei profilierten Dichtungen zusätzlich die Winkelkorrektur (2.42) berücksichtigt werden. Die Ergebnisse für Rotor und Stator sind in Abbildung 4.13 rechts dargestellt. Es ist wieder eine Abhängigkeit von der Durchflusszahl zu erkennen. Ab $\phi \geq 0.5$ kann diese Abhängigkeit ebenfalls gut durch ein Potenzgesetz beschrieben werden, während die Werte

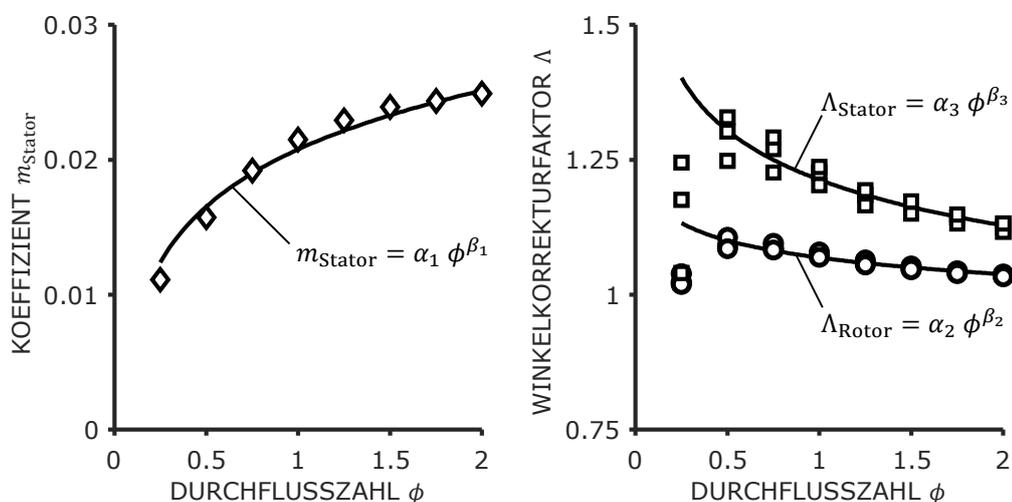


Abbildung 4.13 – Koeffizient des Statorreibungsfaktors und Winkelkorrekturfaktoren über der Durchflusszahl.

für $\phi = 0.25$ ein abweichendes Verhalten zeigen. Daher wurden diese Werte aus den in der Abbildung gezeigten Anpassungskurven ausgeschlossen. Außerdem zeigt sich, dass die Abhängigkeit von der Reynoldszahl vernachlässigt werden kann.

Die Schubspannungskomponenten in Umfangs- und Axialrichtung an Rotor und Stator sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Die kreisförmigen Marker stehen für die CFD-Ergebnisse und die quadratischen Marker für die Ergebnisse des erweiterten Hirs-Modells unter Nutzung aller oben dargestellter Regressionen. Es ist zu erkennen, dass das empirische Modell die tatsächlichen Schubspannungen in fast allen Fällen sehr gut wiedergeben kann. Für die Rotorseite ist eine leichte Abweichung aufgrund der Regressionen für die axiale Komponente zu erkennen. Die Fälle bei niedriger Reynoldszahl und hoher Durchflusszahl verursachen die höchsten Beträge der Schubspannungen. In diesen Fällen ist bei $\tau_{sz, \text{Rotor}}$ eine gewisse Differenz zu sehen. Außerdem ist zu erwähnen, dass der Ausschluss der abweichenden Werte bei $\phi = 0.25$ in der Winkelkorrektur nicht zu einem signifikanten Modellfehler führt, da die absoluten Werte der Spannungen gering sind. Im Gegensatz dazu kann die relative, über alle Fälle gemittelte Modellabweichung durch die Verwendung der Geschwindigkeitskorrektur deutlich reduziert werden.

Schließlich ist der Eintrittsdruckverlust nach der Nut zu berücksichtigen. Der dazugehörige virtuelle Reibungsfaktor $f_{z,E}$ ist links in Abbildung 4.15 über der Durchflusszahl dargestellt. Ähnlich wie bei den anderen Kurven zeigt sich auch hier eine Abhängigkeit von der Durchflusszahl und keine signifikante

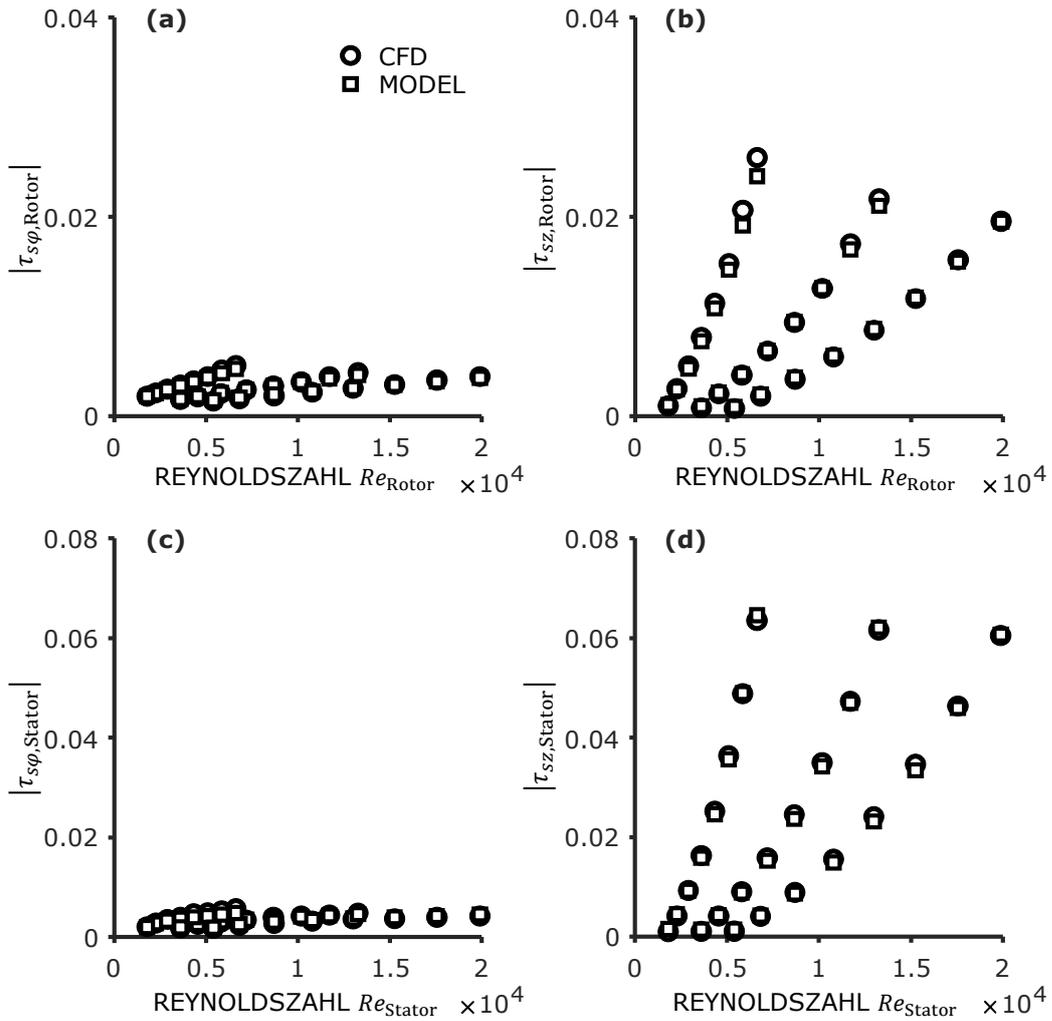


Abbildung 4.14 – Schubspannungskomponenten an Rotor und Stator über der jeweiligen Wand-Reynoldszahl.

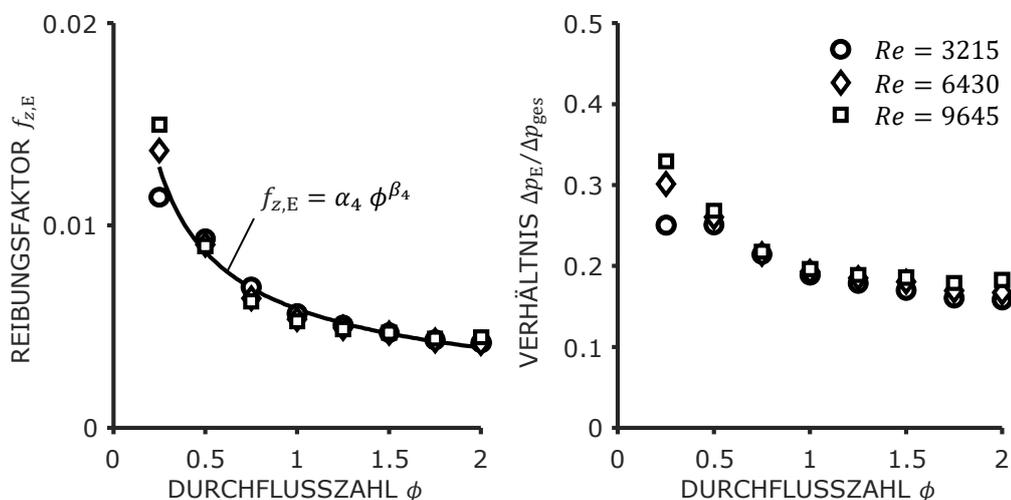


Abbildung 4.15 – Reibungsfaktor für den Eintrittsdruckverlust und Anteil des Eintrittsdruckverlustes am Gesamtdruckverlust über der Durchflusszahl.

te Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Die Werte lassen sich ebenfalls gut mit einem Potenzgesetz approximieren. Im rechten Teil von Abbildung 4.15 ist zudem das Verhältnis von Eintrittsdruckverlust Δp_E zu Gesamtdruckverlust Δp_{ges} dargestellt. Das Verhältnis ist weitestgehend ebenfalls von der Reynoldszahl unabhängig. Die Werte fallen mit der Durchflusszahl von ca. 0.3 auf etwas mehr als 0.15 ab. Es zeigt sich also, dass der Eintrittsdruckverlust aufgrund der Ablösung einen substantiellen Anteil am Gesamtdruckverlust hat und nicht vernachlässigt werden darf.

In Abbildung 4.16 ist der gesamte axiale Druckverlust Δp_{ges} über der effektiven Reynoldszahl dargestellt. Auch hier zeigen die kreisförmigen Marker die Daten aus den CFD-Simulationen, während die quadratischen Marker die mit den Regressionen und Gleichung (4.36) berechneten Modellergebnisse zeigen. Es zeigt sich, dass mit dem oben dargestellten empirischen Modell in allen Fällen im Vergleich zur CFD genaue Vorhersagen der Schubspannungen und des Druckverlustes gemacht werden können. Es ist zu erwähnen, dass der axiale Druckverlust Δp_{ges} nur eine Verifizierung für den Eintrittsdruckverlust und die axialen Schubspannungskomponenten ist. Die gleiche Vorhersagegenauigkeit kann jedoch auch für die Schubspannungskomponenten in Umfangsrichtung aufgrund von Abbildung 4.14 erwartet werden.

Zuletzt soll ein Vergleich des oben bestimmten Reibungsfaktors für die Einzelnut einer Labyrinthdichtung mit dem eines glatten Spaltes angestellt werden. Die entsprechenden Statorreibungsfaktoren sind über der effektiven Wand-Reynoldszahl Re_{Stator} in Abbildung 4.17 dargestellt. Der Verlauf des

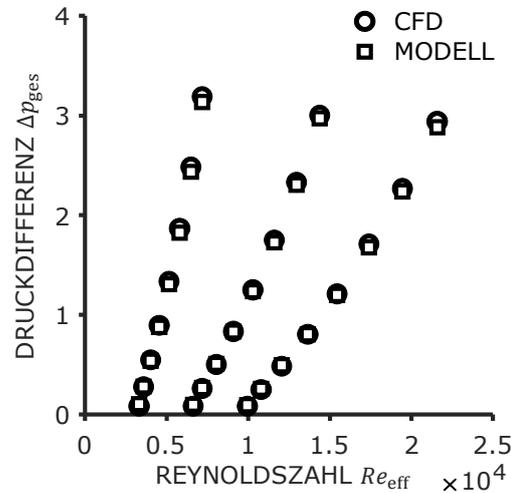


Abbildung 4.16 – Gesamtdruckverlust über der effektiven Reynoldszahl.

glatten Spaltes ist unabhängig von der Durchflusszahl und fällt stärker mit der Reynoldszahl ab als die Verläufe der Nut, die wegen $m_{\text{Stator}}(\phi)$ von der Durchflusszahl abhängen. Nur in einem kleinen Bereich niedriger Reynoldszahlen ist der Verlauf des glatten Spaltes höher als der der Nut bei der kleinsten Durchflusszahl von $\phi = 0.5$. Ansonsten ist der Reibungsfaktor der Nut in allen Fällen größer. Bei größter Reynolds- und Durchflusszahl ist der Reibungsfaktor der Nut bis zu 2.4 Mal größer, als der des glatten Spaltes. Es zeigt sich also im Allgemeinen, dass sich das Reibungsverhalten von profilierten Dichtungen im Vergleich zu glatten Spalten umso stärker unterscheidet, je höher Wand-Reynoldszahl und Durchflusszahl sind.

Diese Untersuchungen wurden genauso auch für die drei weiteren Nutgeometrien durchgeführt, sodass insgesamt Daten für die vier quadratischen Nutquerschnitte $d = t = 10; 15; 20; 30$ vorliegen. Diese Daten wurden genutzt, um die lineare Abhängigkeit der Parameter des Reibungsfaktormodells, Gleichungen (4.25) bis (4.35), zu bestimmen. Die 22 dazugehörigen Parameter γ_i und δ_i der Regressionsgeraden sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Sämtliche Verläufe mit den CFD-Stützstellen sind außerdem in den Diagrammen von den Abbildungen 4.18 und 4.19 dargestellt. Die Marker kennzeichnen dabei die aus den Simulationen wie oben beschrieben bestimmten Größen und die Kurven stellen die Ausgleichsgeraden dar.

Zur Bewertung der Qualität der Regressionen wurde der Root-Mean-Square-Error (RMSE) bestimmt und mit dem Mittelwert der Stützstellen gewichtet, um eine bessere Vergleichbarkeit herzustellen. Die Werte sind ebenfalls in der

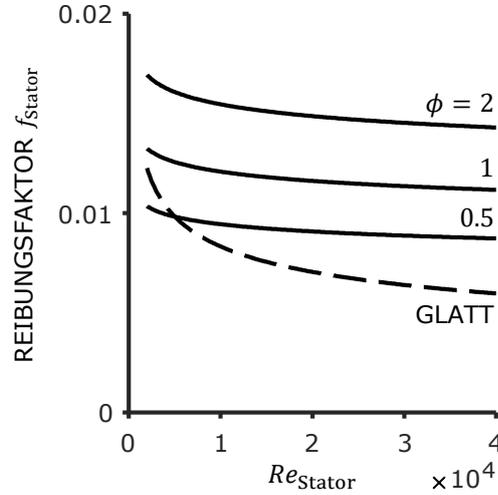


Abbildung 4.17 – Vergleich der Statorreibungsfaktoren eines glatten Spaltes und der Nut.

Tabelle 4.2 aufgeführt. Die beiden höchsten Werte des RMSE mit 8.67×10^{-2} und 4.22×10^{-2} gehören zu den Parametern m_{Rotor} und n_{Rotor} . In Abbildung 4.18 a) und b) ist zu sehen, dass in diesen beiden Fällen eine gewisse Abweichung der Stützstellen von der Geraden vorliegt. Aber bereits ab dem dritthöchsten RMSE-Wert von 3.46×10^{-2} für n_{Stator} liegt eine gute Übereinstimmung vor, wie in Diagramm 4.18 (e) zu erkennen ist.

Die Größenordnungen der elf Modellparameter variieren recht stark. Es stellt sich die Frage, welcher Modellparameter substantiell mit der Nutbreite d variiert und welcher vereinfachend als konstant angenommen werden kann. Um dies abschätzen zu können, wird zunächst ein Mittelwert des gegebenen Intervalls für d definiert:

$$\bar{d} := \frac{\max(d) + \min(d)}{2}. \quad (4.40)$$

Außerdem wird die Spanne des Intervalls mit

$$\Delta d := \max(d) - \min(d) \quad (4.41)$$

bestimmt. Im hier vorliegenden Fall mit den Werten (4.39) ergibt sich $\bar{d} = \Delta d = 20$. Damit wird nun der Mittelwert \bar{q}_i eines beliebigen Modellparameters q_i über

$$\bar{q}_i = \gamma_i \bar{d} + \delta_i \quad (4.42)$$

im vorgegebenen Intervall von d bestimmt. Die maximale Änderung von q_i über das gesamte Intervall ergibt sich mit der Spanne zu

$$\Delta q_i = \gamma_i \Delta d \quad (4.43)$$

Tabelle 4.2 – Parameter der linearen Regressionen für die Geometrieabhängigkeit. Zusätzlich sind die Werte von $\text{RMSE}_i \times 10^2$ und die Sensitivitätsbeiwerte S_i in Prozent aufgeführt.

Parameter	i	γ_i	δ_i	RMSE_i	S_i
m_{Rotor}	1	-5.50169e-04	4.55039e-02	8.67	31.9
n_{Rotor}	2	8.29452e-04	-2.10281e-01	4.22	8.6
n_{Stator}	3	1.56513e-03	-1.05801e-01	3.46	42.0
α_1	4	-6.71908e-04	4.10284e-02	2.35	48.7
β_1	5	1.77676e-03	3.05624e-01	1.23	10.4
α_2	6	-2.54227e-03	1.14587e+00	0.12	4.6
β_2	7	3.17150e-03	-1.38088e-01	1.47	85.0
α_3	8	-2.51494e-03	1.28976e+00	2.55	4.1
β_3	9	3.73518e-03	-2.13077e-01	3.05	54.0
α_4	10	-1.22346e-05	6.35627e-03	2.20	4.0
β_4	11	2.28375e-02	-1.24824e+00	1.01	57.7

Das Verhältnis der maximalen Änderung zum Mittelwert dient als Definition eines Sensitivitätsbeiwertes der Form

$$S_i := \frac{\Delta q_i}{\bar{q}_i} = \frac{\Delta d}{\bar{d} + \delta_i / \gamma_i}. \quad (4.44)$$

Die Sensitivitätsbeiwerte S_i der elf Modellparameter sind ebenfalls in Tabelle 4.2 in Prozent angegeben. Es zeigt sich, dass die Geometrieabhängigkeit von α_4 , α_3 und α_2 möglicherweise vernachlässigbar wäre, da diese drei Koeffizienten die angenommene Grenze von $S < 5\%$ unterschreiten. In der vorliegenden Arbeit werden im Weiteren jedoch stets alle Abhängigkeiten berücksichtigt.

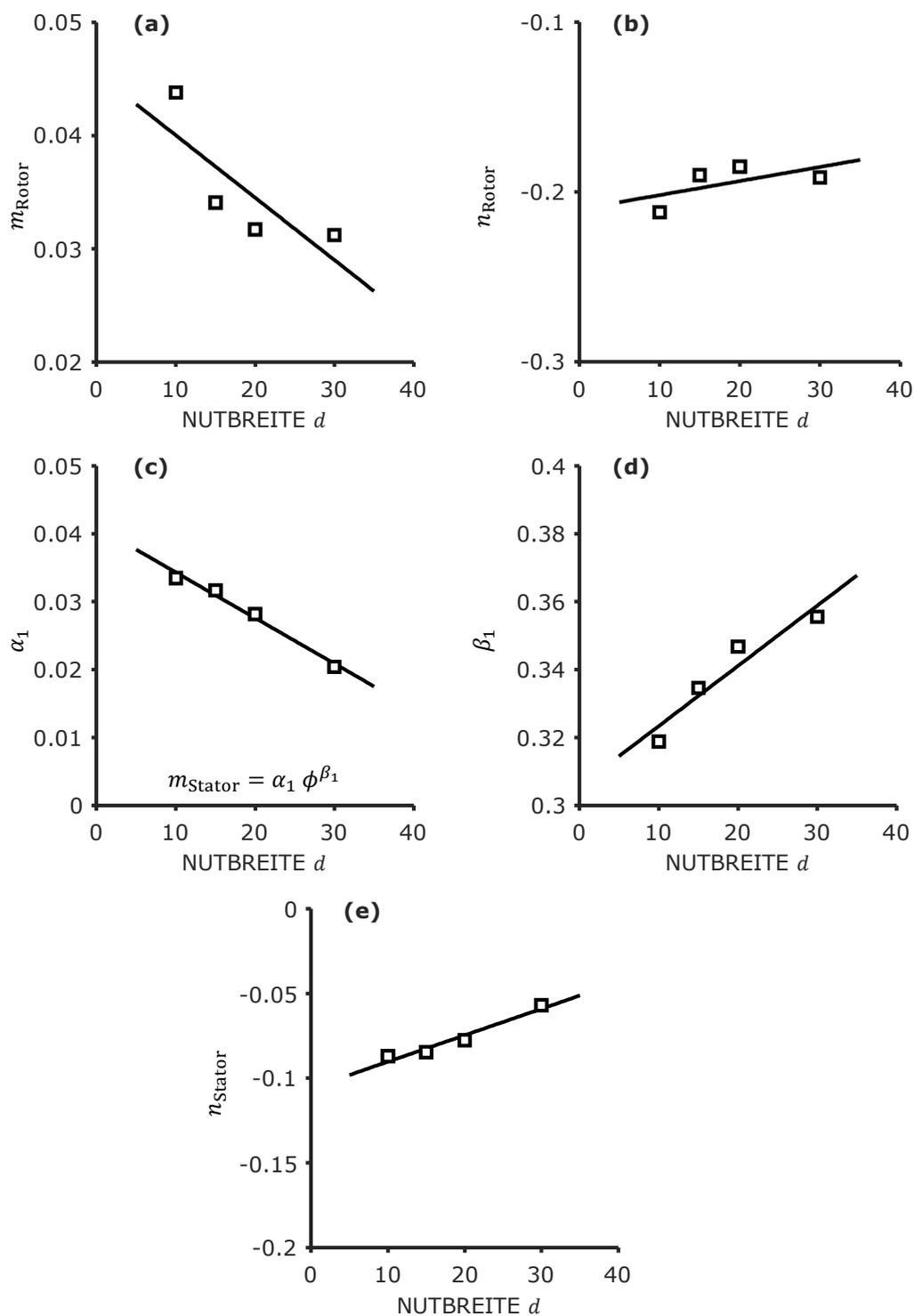


Abbildung 4.18 – Lineare Regressionen über der Nutbreite für die Modellparameter $i = 1$ bis 5.

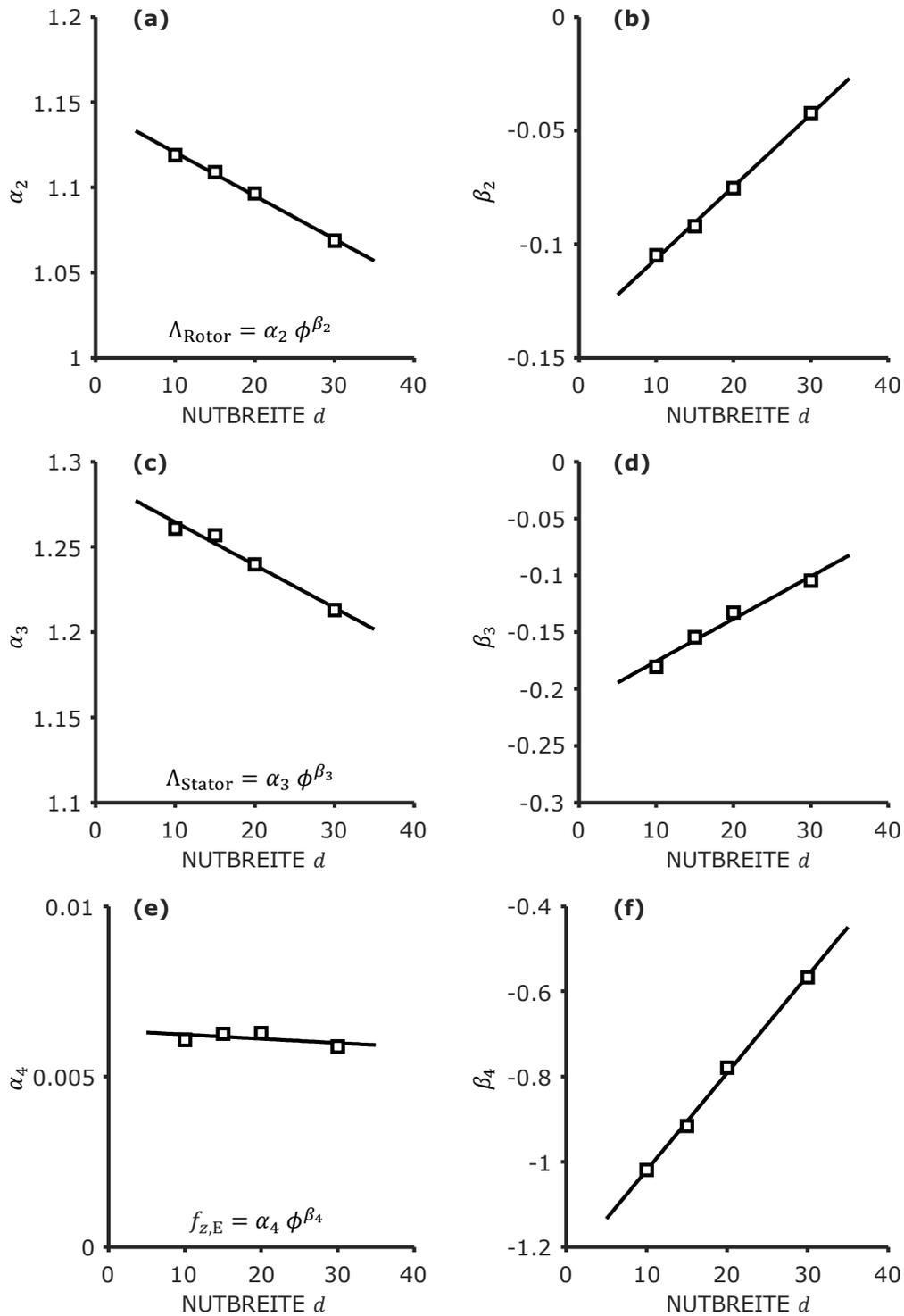


Abbildung 4.19 – Lineare Regressionen über der Nutbreite für die Modellparameter $i = 6$ bis 11.

Tabelle 4.3 – Dimensionslose Geometrieparameter des Bohrlochprofils.

d	t	b_φ	b_z	b_v
16.1	19.4	18.1	20.7	$0.5 b_z$

Bohrungsanzahl von $N = 3886$. Die dimensionslosen Geometrieparameter des Profils sind in Tabelle 4.3 aufgeführt.

Obwohl das Bohrlochprofil nicht achsensymmetrisch ist, lässt sich die gesamte Dichtung aus periodisch angeordneten Profilelementen zusammensetzen. Bei der realen Dichtung liegt streng genommen keine vollständige Periodizität vor, da es wie oben erwähnt am Einlass sowie am Auslass einen schmalen Randstreifen geben muss. Dieser kann in den Untersuchungen der recht langen Dichtung vernachlässigt werden. Daher wird hier ebenso wie bei der Rechtecknut lediglich ein einzelnes Profilelement untersucht. Dieses wird wieder je mit einem Einlauf- und einem Auslaufspalt von 60 Spaltweiten versehen, um eingelaufene Strömungsbedingungen am Profil zu erzeugen. Eine Draufsicht der ebenen Anordnung ist in Abbildung 4.21 links dargestellt. Zusätzlich gekennzeichnet ist das unten verwendete Kontrollvolumen KV sowie das periodische Profilelement, das grau markiert ist. Details zur Numerik und Vernetzung des Bohrlochprofils sind in Anhang B.2 zu finden.

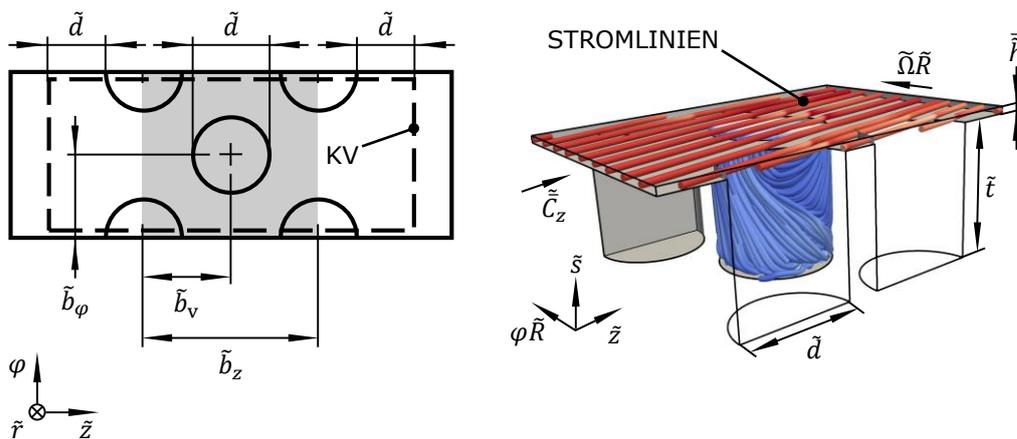


Abbildung 4.21 – Links: schematische Darstellung des Bohrlochprofils mit Kontrollvolumen KV. Rechts: Stromlinien.

4.6 Reibungsfaktormodell für Dämpferdichtungen

Beim Bohrlochprofil als Beispiel einer Dämpferdichtung kann das gleiche Reibungsfaktormodell nach Hirs mit den entsprechenden Erweiterungen zum Einsatz kommen, wie zuvor bei der Labyrinthdichtung. Für die Schubspannungen auf der Statorseite ergibt sich beim Bohrlochprofil jedoch ein wesentlicher Unterschied zur Labyrinthdichtung. Während bei der einzelnen Nut ein spezifischer Wert für die reine Reynoldsspannung in der Scherschicht über der Nut ermittelt wurde, muss beim Bohrlochprofil ein effektiver, „verschmierter“ Wert für das gesamte Profilelement bestimmt werden¹. Dabei wird eine Flächenmittlung über die Reynoldsspannungskomponenten über den Bohrungen (an den Stegen gleich Null) und über die Wandschubspannungskomponenten an den Stegen (über den Bohrungen gleich Null) durchgeführt:

$$\tau_{sj, \text{Stator}} = \frac{1}{2b_\varphi b_z} \int_{-b_\varphi}^{b_\varphi} \int_0^{b_z} \tau_{sj, \text{Wand}} + \tau_{sj, \text{Reynolds}} dz_* d\varphi \quad (4.46)$$

mit $j = \varphi$ oder z und Definition (4.7). Eine ähnliche Herangehensweise war auch von Storteig² angedacht, jedoch mangelte es an einer geeigneten Methodik zur Modellkalibrierung.

Beim Bohrlochprofil ist zudem auch wieder ein zusätzlicher Druckverlust aufgrund von Ablösungen zu berücksichtigen. Diese entstehen an der stromabwärts liegenden Kante der einzelnen Bohrungen durch die gleichen Effekte wie bei der Nut und führen hier ebenfalls zu Carnotverlusten. Aufgrund der runden Geometrie und den getrennten Bohrungen, zwischen denen sich die Strömung wieder anlegt, sind die Ablösungen allerdings nicht so stark ausgeprägt wie bei den Nuten. Wie in Abbildung 4.22 an den Isolinien des Drucks zu erahnen, bilden sich die Ablösungen insbesondere bei kleineren Durchflussszahlen asymmetrisch an den einzelnen Bohrungen aus. Dies liegt daran, dass die Bohrungen aufgrund der überlagerten Schlepplströmung in Umfangsrichtung und der Druckströmung in axialer Richtung schräg überströmt werden. Obwohl also auch ein Teil der Ablösung „in Umfangsrichtung zeigt“, kann aufgrund der Periodizität dennoch nur ein zusätzlicher axialer Druckverlust entstehen.

Die Bestimmung des Druckverlustkoeffizienten muss beim Bohrlochprofil daher ebenfalls etwas anders erfolgen als bei der Einzelnut. Zunächst werden zwei axiale Referenzstellen definiert, über die die Druckdifferenz Δp_{ges} gebildet

¹ Auf Vorschlag von P. F. PELZ, persönliche Kommunikation.

² STORTEIG, „Dynamic characteristics and leakage performance of liquid annular seals in centrifugal pumps“, ([96], 1999)

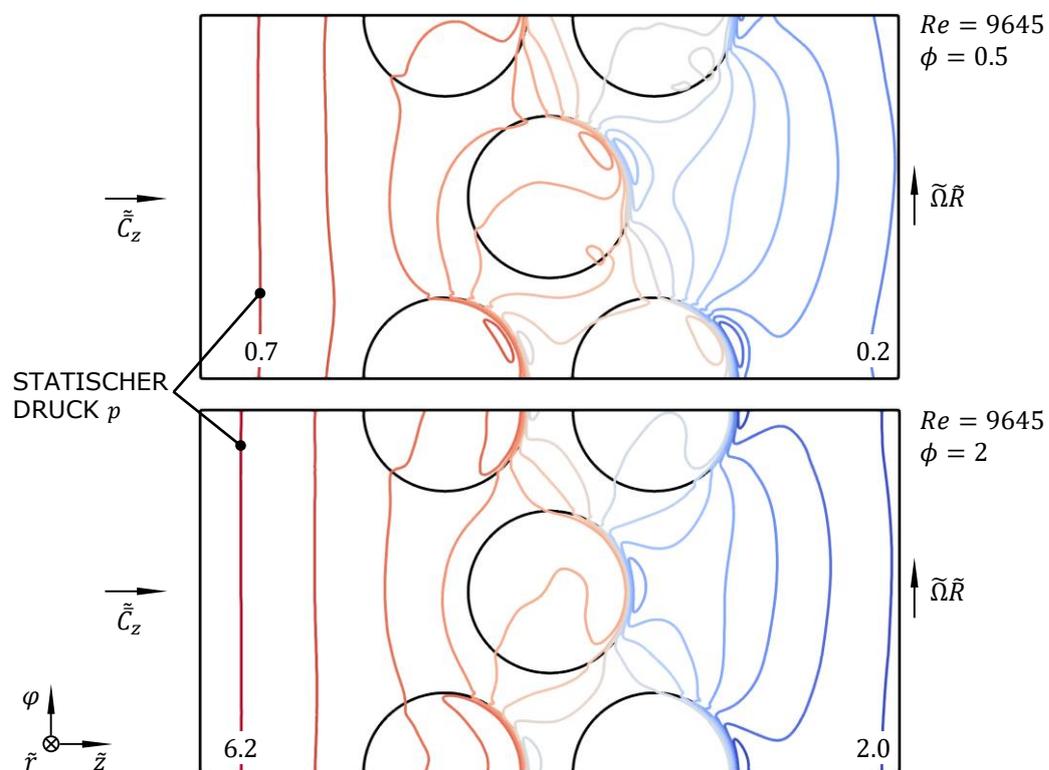


Abbildung 4.22 – Isolinien des Drucks in der Spaltmitte für zwei exemplarische Fälle.

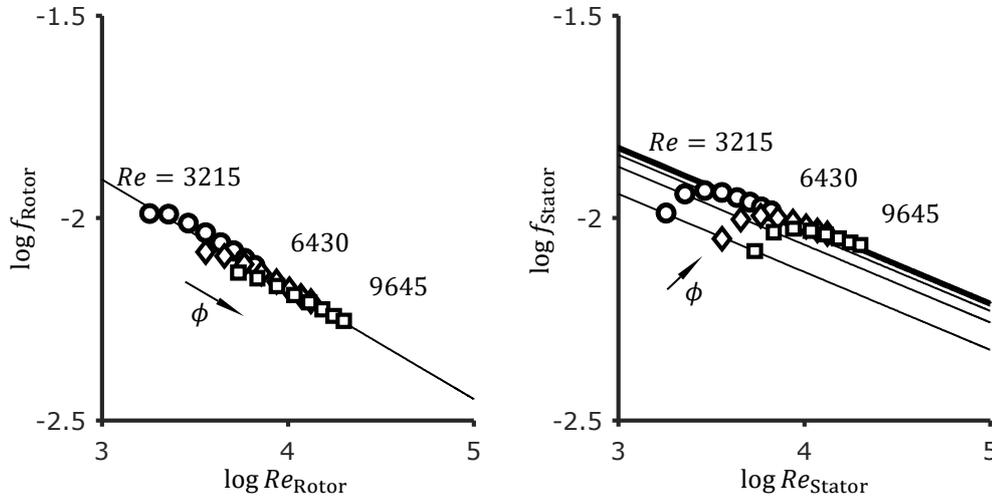


Abbildung 4.23 – Reibungsfaktoren an Rotor und Stator über der jeweiligen effektiven Wand-Reynoldszahl, doppelt logarithmisch.

wird. Anhand der Isolinien des Drucks in Abbildung 4.22 ist für die zwei repräsentativen Fälle zu erkennen, dass der Druck über dem eigentlichen Profilelement stark schwankt. Im Abstand von etwa d vor und nach dem Profil sind diese Schwankungen im Mittel über den Querschnitt in akzeptablem Maß ausgeglichen, sodass diese Stellen als Referenz gewählt werden. Diese Stellen definieren auch das Kontrollvolumen in Abbildung 4.21. Über die Eintritts- und Austrittsfläche wird jeweils ein mittlerer Druck gebildet und damit die Gesamtdruckdifferenz Δp_{ges} bestimmt.

Anschließend werden über dieses Kontrollvolumen die axialen Schubspannungen am Rotor (Wandschubspannungen) und am Stator (Wandschub- und Reynoldsspannungen) bestimmt und im Sinne der Impulsgleichung integriert, um die Druckdifferenz Δp_s zu erhalten. Der virtuelle Reibungsfaktor $f_{z,E}$ aufgrund der Carnotverluste kann dann wieder mittels den Gleichungen (4.36) und (4.38) bestimmt werden.

4.6.1 Modellkalibrierung

Für die Simulationsstudie wurde gleich wie bei der Einzelnut die Reynoldszahl wieder mit den drei Werten

$$Re \in \{3215; 6430; 9645\}$$

variiert, die den möglichen Parameterbereich des Prüfstandes abdecken. Die Durchflusszahl wurde ebenfalls wieder mit den acht Werten

$$\phi \in \{0.25; 0.5; 0.75; 1; 1.25; 1.5; 1.75; 2\}$$

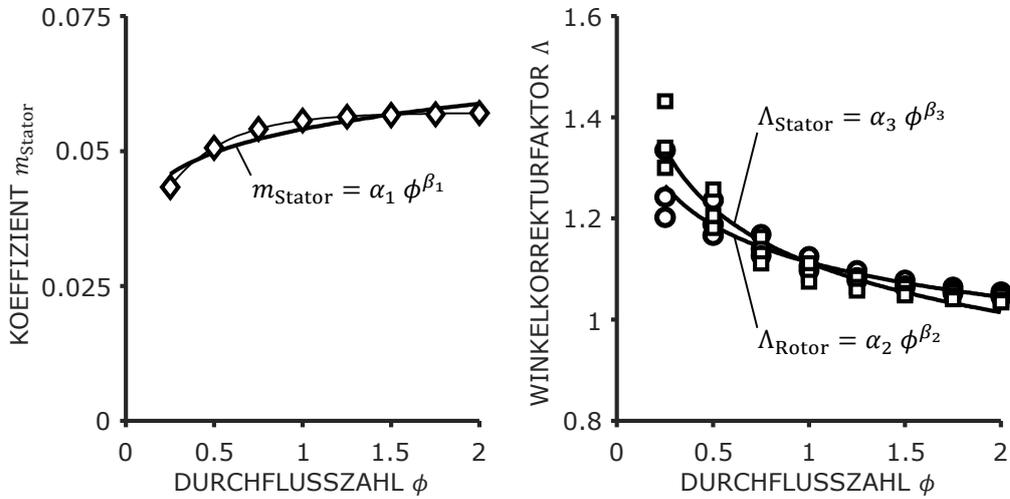


Abbildung 4.24 – Koeffizient des Statorreibungsfaktors und Winkelkorrekturfaktoren über der Durchflusszahl.

variiert, woraus sich 24 Simulationsfälle ergeben. Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt analog zur Rechtecknut.

Die Ergebnisse der Simulationen für die Reibungsfaktoren an Rotor- und Statorseite sind in Abbildung 4.23 dargestellt. Qualitativ ist ein ähnliches Verhalten wie bei der Nut zu erkennen. Am Rotor fallen die Werte wieder alle gut auf eine Linie im doppelt logarithmischen Diagramm. Am Stator ist ebenfalls wieder die zusätzliche Abhängigkeit von der Durchflusszahl zu erkennen, aber bereits ab $\phi \approx 1$ fallen die Datenpunkte asymptotisch auf eine Linie.

Der Statorkoeffizient m_{Stator} über der Durchflusszahl ϕ ist in Abbildung 4.24 links dargestellt, wo das asymptotische Verhalten gut erkennbar ist. Ein Potenzgesetz (dicke Linie) nähert den Verlauf an, eine Sättigungskurve der Form

$$m_{\text{Stator}} = \alpha_s - (\alpha_s - \beta_s) \exp(-\gamma_s \phi) \quad (4.47)$$

ist in diesem Fall jedoch etwas besser geeignet (dünne Linie).

Die Winkelkorrektur ist in Abbildung 4.24 dargestellt. Die Daten lassen sich gut durch Potenzgesetze annähern und es liegen auch keine expliziten Ausreißer bei niedrigen Durchflusszahlen wie bei der Einzelnut vor, obwohl die Werte mit der Reynoldszahl auch hier etwas auffächern. Es ist anzumerken, dass beim Bohrlochprofil die Rotor- und Statorseite im Gegensatz zur Labyrinthdichtung einem sehr ähnlichen Verlauf folgen.

Die Schubspannungskomponenten in Umfangs- und Axialrichtung an Rotor- und Statorseite sind in Abbildung 4.25 dargestellt. Die kreisförmigen Marker

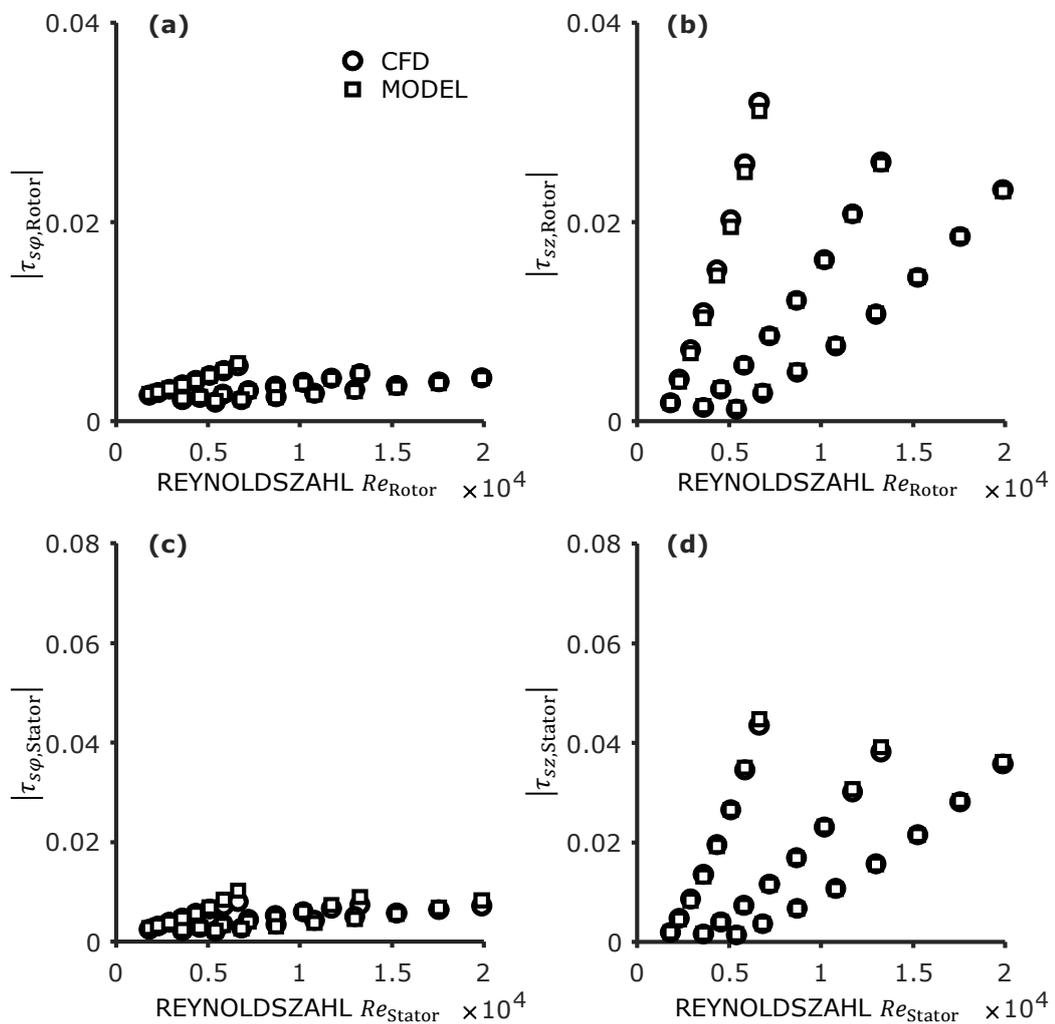


Abbildung 4.25 – Schubspannungskomponenten an Rotor und Stator über der jeweiligen Wand-Reynoldszahl.

stehen wieder für die CFD-Ergebnisse und die quadratischen Marker für die Ergebnisse des Modells. Die Übereinstimmung ist auch für das Bohrlochprofil in allen Fällen sehr gut.

Der virtuelle axiale Reibungsfaktor $f_{z,E}$ aufgrund der Carnotverluste ist links in Abbildung 4.26 über der Durchflusszahl dargestellt. Es ist wieder ein Verlauf nach Potenzgesetz zu erkennen. Bei kleineren Durchflusszahlen streuen die Daten etwas stärker mit der Reynoldszahl. Rechts in Abbildung 4.26 ist das Verhältnis von Eintrittsdruckverlust Δp_E zu Gesamtdruckverlust Δp_{ges} dargestellt. Der Anteil liegt hier durchweg bei nur ca. 10 % und fällt damit

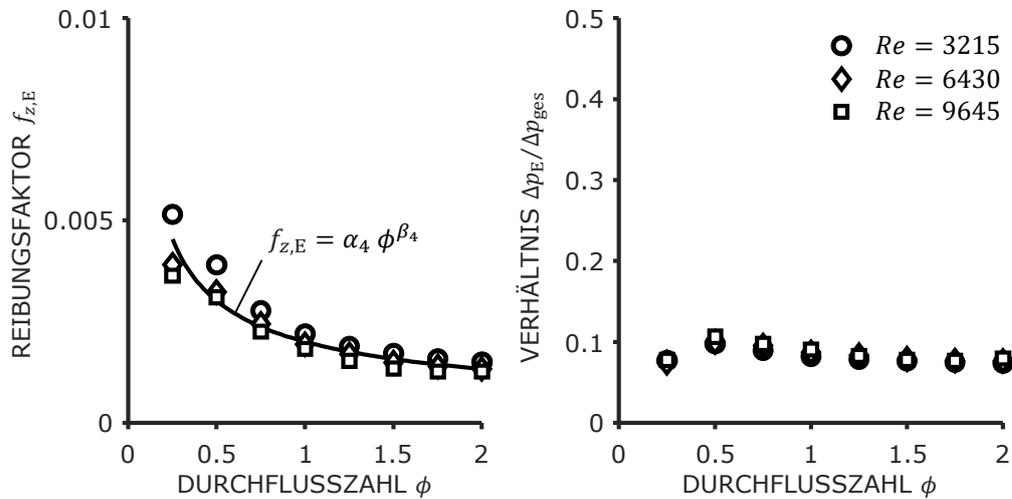


Abbildung 4.26 – Reibungsfaktor für den Eintrittsdruckverlust und Anteil des Eintrittsdruckverlustes am Gesamtdruckverlust über der Durchflusszahl.

geringer aus als bei der Nut. Dies ist zu erwarten, da bei der Nut eine deutlich ausgeprägtere und größere Ablösung entsteht. Außerdem ist das erweiterte Kontrollvolumen mit einem etwas stärkeren Einfluss der Wandschubspannung zu berücksichtigen. Es ist außerdem wieder gut zu erkennen, dass es sich um einen sogenannten Trägheitsverlust handelt, der nicht von der Reynoldszahl abhängig ist.

In Abbildung 4.27 ist schließlich der gesamte axiale Druckverlust Δp_{ges} über der effektiven Reynoldszahl dargestellt. Es ist wieder zu erkennen, dass das kalibrierte Modell die CFD-Werte in allen Fällen sehr gut wiedergibt. Im Vergleich zur oben vorgestellten Nut mit $d = t = 30$ weist das Bohrlochprofil einen größeren Druckverlust auf, ein direkter Vergleich ist aufgrund der unterschiedlichen Kontrollvolumina jedoch nur bedingt möglich.

Die Werte aller ermittelten Kurvenparameter sind in Tabelle 4.4 aufgeführt. Die Parameter der Sättigungskurve (4.47) sind zudem gesondert in Tabelle 4.5 eingetragen. Im Rahmen dieser Studie wurden keine weiteren Untersuchungen der Geometrieabhängigkeit durchgeführt. Für Dichtungen mit diesem spezifischen Bohrlochprofil können mit den ermittelten Werten so aber bereits brauchbare Vorhersagen für Druckdifferenz, stationäre Reaktionskraft und rotodynamische Koeffizienten bei kleinen Exzentrizitäten auch unter Vernachlässigung der Geometrieskalierung bestimmt werden.

Die Studie des Bohrlochprofils zeigt zudem,

- dass grundsätzlich die gleichen physikalischen Effekte wie bei der generischen Rechtecknut wirken;

- dass die Methodik, die für die Nut entwickelt wurde, analog auf nicht-symmetrische Profile angewendet werden kann;
- dass ebenso eine effektive mittlere Schubspannung am Stator anteilig aus Reynoldsspannungen über den einzelnen Kavitäten und Wandschubspannung auf der Stegfläche bestimmt und verwendet werden kann;
- und dass die generelle Methodik somit möglicherweise auf alle Profilarten von Dämpferdichtungen übertragbar ist.

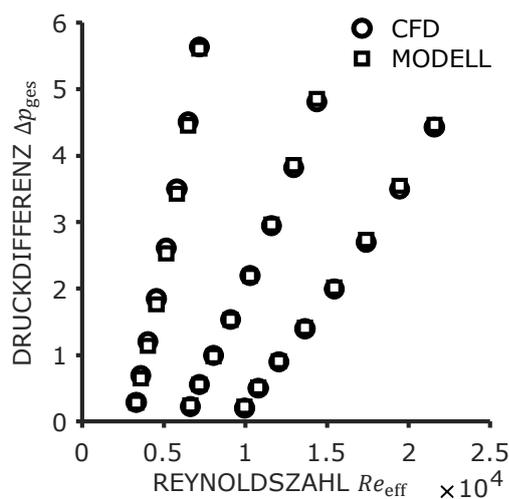


Abbildung 4.27 – Gesamtdruckverlust über der effektiven Reynoldszahl.

Tabelle 4.4 – Werte der ermittelten empirischen Parameter.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
m_{Rotor}	8.14725e-02	n_{Rotor}	-2.71694e-01
		n_{Stator}	-1.92549e-01
α_1	5.40775e-02	β_1	1.20492e-01
α_2	1.11358e+00	β_2	-9.18787e-02
α_3	1.11271e+00	β_3	-1.33215e-01
α_4	1.38562e-01	β_4	-5.89529e-01

Tabelle 4.5 – Parameter der Sättigungskurve für m_{Stator} .

α_s	β_s	γ_s
5.70456e-02	2.77108e-02	3.04867e+00

Kapitel 5

Experimentelle Validierung und Unsicherheitsfortpflanzung

In diesem Kapitel wird das CAPM in Verbindung mit den erweiterten Reibungsmodellen anhand von experimentellen Daten validiert¹. Der dafür verwendete Prüfstand wird in Anhang C vorgestellt. Im Folgenden wird zunächst in Abschnitt 5.1 ein glatter Spalt untersucht, in Abschnitt 5.2 folgen dann Untersuchungen mit sechs verschiedenen Labyrinthdichtungen und schließlich in Abschnitt 5.3 eine Dämpferdichtung mit Bohrlochprofil.

Für den glatten Spalt und die Bohrlochdichtung wurde zudem eine Unsicherheitsfortpflanzung mittels CAPM und Monte-Carlo-Methode (MC) bei ausgewählten Betriebspunkten durchgeführt. Für das Sampling wurde stets eine Sobol-Sequenz verwendet, was die notwendige Sample-Anzahl deutlich reduziert. Ein gute, d. h. weitestgehend konvergierte, Näherung des Mittelwertes und der Unsicherheit kann oft schon bei 2000 bis 3000 Samples erreicht werden. Eine erste Näherung der Verteilung und Konvergenz des Konfidenzintervalls wird ab 5000 bis 10000 Samples erreicht. Bei den im folgenden abgebildeten MC-Ergebnissen wurden stets 10000 Samples verwendet. Bei der Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten wurden zusätzlich immer die fünf konstanten Werte der Orbitfrequenz

$$\omega \in \{0; 0.3; 0.6; 0.9; 1.2\} \quad (5.1)$$

verwendet. Dies ergibt 50000 CAPM-Rechnungen, um einen Satz Koeffizienten mit 10000 Samples zu bestimmen.

¹ Sämtliche Experimente wurden am Spaltströmungsprüfstand des Instituts für Fluidsystemtechnik der TU Darmstadt von meinem geschätzten Kollegen M. M. G. KUHR durchgeführt, der freundlicherweise auch die fertig ausgewerteten Mess- sowie Unsicherheitsdaten zur Verwendung in der vorliegenden Arbeit zur Verfügung stellte. Dafür möchte ich mich hier nochmals herzlich bedanken.

5.1 Glatter Spalt

Der glatte Spalt wurde untersucht, um die unbekanntens Unsicherheitsverteilungen der Modellparameter, die für die MC-Methode notwendig sind, zu erproben. Die am Prüfstand bestimmten Mittelwerte und deren Unsicherheit für die Geometrie- und Betriebsparameter sind im oberen Teil der Tabelle 5.1 aufgeführt (Typ A). Im unteren Teil sind die geschätzten Verteilungsparameter der weiteren Modellparameter (Typ B) aufgeführt. Die Unsicherheiten von Typ A wurden am Prüfstand stets als 95 %-Intervalle ermittelt. Entsprechend sind auch alle mittels CAPM und MC-Methode fortgepflanzten Unsicherheiten als 95 %-Intervalle gegeben.

Für die Werte des gemittelten Eintrittsdruckverlustkoeffizienten $\bar{\zeta}$ und der mittleren Umfangsgeschwindigkeit am Spalteinlass $\bar{C}_{\varphi,0}$ wurde sich an den Erkenntnissen von Kapitel 3 orientiert. Bei den Parametern des Reibungsmodells m und n wurde aufgrund der Abwesenheit von experimentellen Referenzwerten eine pauschale prozentuale Abweichung gewählt, die sich an anderen Literaturwerten orientiert. Die zusätzliche Exzentrizität ε_γ aufgrund des Kippwinkels γ lag in den Messdaten nicht direkt vor und wurde daher aufgrund der vorhandenen Messdaten der Labyrinth- und Bohrlochdichtungen geschätzt.

Obwohl die tatsächlichen Verteilungsfunktionen alle nicht direkt bekannt sind, wurde in den meisten Fällen eine Normalverteilung angenommen. Bei den aus den Messdaten stammenden Parametern ist dies sinnvoll, da die

Tabelle 5.1 – Verteilungsfunktionen für die Unsicherheitsfortpflanzung beim glatten Spalt.

Parameter	Verteilung	\bar{x}	δx	Typ
ψ	\mathcal{N}	0.004	1.0×10^{-4}	A
L	\mathcal{N}	1.60	1.0×10^{-4}	A
Re	\mathcal{N}	4038	97	A
ϕ	\mathcal{N}	0.70	0.02	A
ε	\mathcal{N}	0.19; 0.48; 0.76	0.02	A
$\bar{C}_{\varphi,Plenum}$	\mathcal{N}	0.50	0.06	A
ε_γ	\mathcal{U}	0	0.019	B
$\bar{C}_{\varphi,0}$	\mathcal{N}	0.4	0.067	B
$\bar{\zeta}$	\mathcal{N}	0.25	0.08	B
m	\mathcal{N}	0.07617	10 %	B
n	\mathcal{N}	-0.24	5 %	B

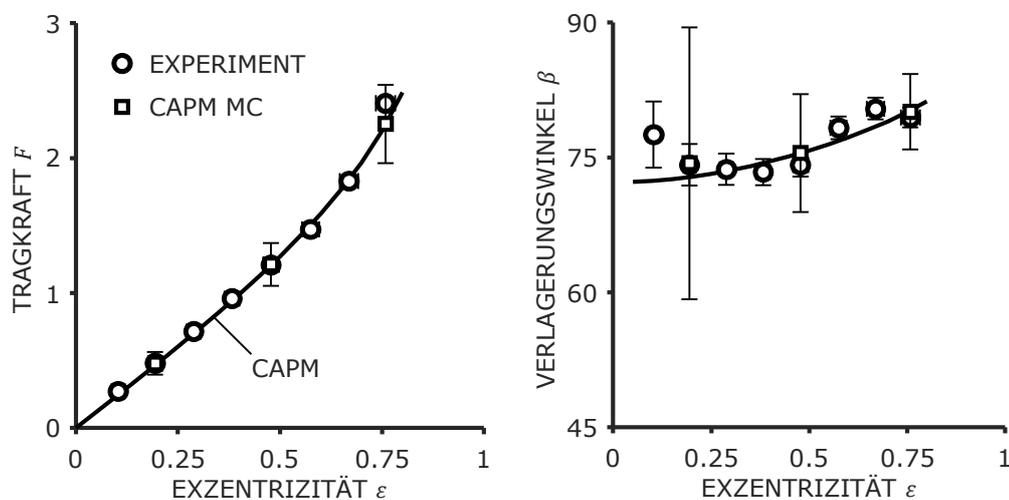


Abbildung 5.1 – Tragkraft und Verlagerungswinkel über der Exzentrizität beim glatten Spalt.

Werte mittels Gauß'scher Unsicherheitsfortpflanzung nach GUM bestimmt worden sind. Bei den anderen Modellparametern handelt es sich um physikalische Größen, zu denen Vorwissen bekannt ist. Daher erscheint auch hier eine Normalverteilung am sinnvollsten. Für eine bessere Vorstellung des jeweiligen Wertebereichs sei auf die Ausführungen zur Normalverteilung in Abschnitt 2.4.2 verwiesen: im Intervall von ca. $\pm 2 \delta x$ werden sich 95 % und im Intervall von ca. $\pm 3 \delta x$ werden sich 99 % der möglichen Werte, d. h. Samples, befinden. Zur konservativeren Schätzung wurde bei ε_γ eine Gleichverteilung gewählt.

Die Ergebnisse von Kapitel 3 haben bspw. gezeigt, dass Abhängigkeiten des Druckverlustkoeffizienten $\zeta(\varepsilon, \dots)$ vorliegen. Diese Abhängigkeiten der Parameter untereinander führt natürlich auch zu einer Abhängigkeit der Unsicherheiten, die korrekterweise über entsprechende Kovarianzen ausgedrückt werden müssten. Die Ermittlung der Kovarianzen ist in der Praxis jedoch äußerst schwierig und sie werden hier der Einfachheit halber vernachlässigt. Dies sollte den gemachten Beobachtungen jedoch nicht abträglich sein.

5.1.1 Stationäre Eigenschaften

Für den stationären Fall wurden die drei Größen F , β und Δp über der Exzentrizität ausgewertet. Die Verläufe sind in Abbildung 5.1 und Abbildung 5.2 dargestellt. Die kreisförmigen Marker stellen die Messdaten dar. Es ist anzumerken, dass bei allen Messdaten sowohl Fehlerbalken für Ordinate, als auch

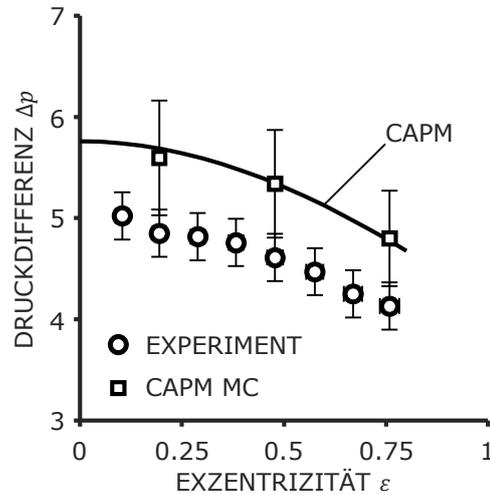


Abbildung 5.2 – Druckdifferenz über der Exzentrizität beim glatten Spalt.

für die Abszisse dargestellt sind. In einigen Fällen verschwinden sie jedoch hinter den Markern. Die Linien dagegen stellen die mittels CAPM bestimmten Verläufe dar. Der Verlustkoeffizient $\zeta = 0.25$ wurde dabei so gewählt, dass die Kurve der Tragkraft F gut mit den Messwerten übereinstimmt. Das CAPM bildet so den Verlauf im gesamten Exzentrizitätsbereich sehr gut ab. Es ergibt sich so auch eine gute Übereinstimmung für den Verlagerungswinkel β , wobei die Messwerte hier einen qualitativ etwas anderen Verlauf zeigen. Für die Druckdifferenz Δp stimmt der Verlauf der Modellkurve qualitativ sehr gut mit dem der Messwerte überein, es kommt jedoch zu einem Versatz mit einem Betrag von ca. 1. Dieses Verhalten ist typisch für das CAPM und zeigt sich auch bei anderen Betriebspunkten¹, es stellt also eine systematische Modellunsicherheit dar.

Mit dem quadratischen Marker sind zudem Mittelwert und mit den Fehlerbalken mittels MC-Methode fortgepflanzte Unsicherheit des CAPM dargestellt. Die Fortpflanzung wurde an den Stellen $\varepsilon = 0.2; 0.5; 0.8$ durchgeführt. Es zeigt sich, dass die Unsicherheit mit steigender Exzentrizität bei der Tragkraft zunimmt, beim Verlagerungswinkel abnimmt und bei der Druckdifferenz in etwa gleich bleibt. Bei Tragkraft und Winkel schließen die fortgepflanzten Unsicherheiten die Messwerte gut ein, bei der Druckdifferenz überlappen sich zumindest die Intervalle von Modell und Experiment. Unter der Annahme, dass es keine sogenannte unbekannte Unsicherheit – etwa durch nicht beachtete physikalische Effekte im Modell oder unerkannte Störeinflüsse im

¹ KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps - Experimental and simulation results“, ([53], 2022)

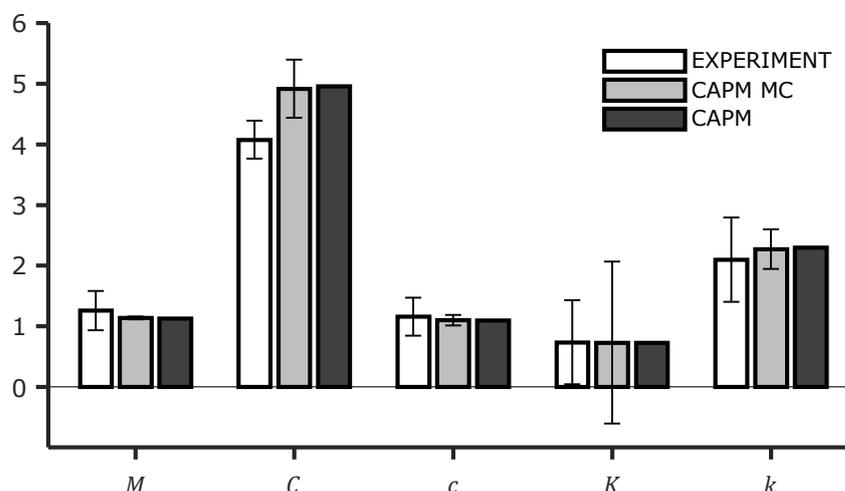


Abbildung 5.3 – Rotordynamische Koeffizienten des glatten Spaltes.

Experiment – gibt, zeigt dies, dass die abgeschätzten Verteilungsfunktionen in Tabelle 5.1 durchaus realistisch sind.

Die Verteilungsfunktionen der fortgepflanzten Unsicherheiten sollen hier nicht weiter im Fokus stehen, dennoch sollen sie kurz beschrieben werden. Die Kraftkomponente F_x stellt eine flachgipfelige Verteilung dar und könnte durch eine Trapezverteilung angenähert werden. Die Komponente F_y ist dagegen normalverteilt, ebenso wie die Tragkraft F . Der Verlagerungswinkel β ist dagegen schief und weicht stark von einer Normalverteilung ab. Bei größeren Kippwinkeln kann hier sogar eine bimodale Verteilung entstehen. Die Druckdifferenz wird wieder gut durch eine Normalverteilung dargestellt.

5.1.2 Rotordynamische Koeffizienten

Um die Auswirkungen der Unsicherheitsfortpflanzung im dynamischen Fall zu überprüfen, wurden lineare rotordynamische Koeffizienten um die konzentrische Ruhelage berechnet, was den typischen Anwendungsfall für Dichtspalte darstellt. Die Koeffizienten aus Experiment, einer regulären CAPM-Rechnung sowie einer Unsicherheitsfortpflanzung mittels CAPM und MC-Methode sind in Abbildung 5.3 als Balkendiagramm dargestellt. Zur Berechnung mittels CAPM wurde eine konstante Exzentrizität von $\varepsilon = 0.2$ vorgeschrieben.

Es zeigt sich, dass die reguläre CAPM-Rechnung mit den Mittelwerten der MC-Rechnung hier überall gut übereinstimmt. Dies muss jedoch nicht immer der Fall sein, denn aufgrund von schiefen Verteilungen können sich durchaus auch gewisse Unterschiede ergeben. Insgesamt stimmen die CAPM-

Rechnungen zudem auch sehr gut mit dem Experiment überein. Lediglich die Hauptdämpfung C wird vom Modell überschätzt und es liegt auch gerade keine Überlappung der Unsicherheitsintervalle von Messung und Modell mehr vor. Die Intervalle der fortgepflanzten Unsicherheit von der Hauptträgheit M und der Nebendämpfung c sind sehr klein. Die der Hauptsteifigkeit K ist dagegen sehr groß und reicht sogar in den negativen Bereich.

Die Koeffizienten C , c und k werden gut durch eine Normalverteilung abgebildet. Bei M handelt es sich um eine Verteilung ähnlich der Normalverteilung, jedoch mit deutlich kleinerer Wölbung (negativer Exzess). Für K liegt eine sehr flache Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung vor, die mit einer Rechteck- oder Trapezverteilung dargestellt werden kann.

Aufgrund der besonderen Wichtigkeit der Hauptsteifigkeit K wurden weitere Untersuchungen bzgl. der großen fortgepflanzten Unsicherheit angestellt. Bei der Berechnung der Koeffizienten und entsprechend auch bei der MC-Methode wird eine willkürliche Exzentrizität $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben. Da die Koeffizienten als linear angenommen werden, spielt der Betrag normalerweise keine Rolle, solange der lineare Bereich nicht verlassen wird (ungefähr $\varepsilon < 0.5$). Es zeigt sich jedoch, dass der Betrag der Exzentrizität für die Unsicherheitsfortpflanzung dennoch von Bedeutung ist.

Zur Untersuchung wurde die MC-Methode für den gleichen Betriebspunkt unter Verwendung unterschiedlicher Exzentrizitäten von $\varepsilon = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4$ durchgeführt. Die Änderungen der Koeffizienten und ihrer Unsicherheiten wurden untersucht, indem sie auf die Werte bei $\varepsilon = 0.1$ als Referenz bezogen wurden. Die Ergebnisse für die Mittelwerte sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Mittelwerte der Koeffizienten nicht konstant bleiben, sondern sich im Bereich von $\pm 5\%$ ändern. Die Hauptsteifigkeit zeigt eine etwas größere Änderung und fällt um knapp 10% ab.

In Abbildung 5.5 sind die relativen Änderungen der Unsicherheiten der rotordynamischen Koeffizienten aufgetragen. Für die Unsicherheiten von M , C und k fällt der Betrag zwischen $\varepsilon = 0.1$ und 0.2 etwas ab und bleibt danach in etwa konstant. Der Wert von c fällt leicht linear mit steigender Exzentrizität. Die relative Unsicherheit der Hauptsteifigkeit K fällt jedoch stark ab und erreicht bei $\varepsilon = 0.4$ einen Wert von lediglich ca. 25% .

Dies lässt sich am linearen Tragkraftverlauf verdeutlichen, denn die Hauptsteifigkeit stellt prinzipiell dessen Steigung dar, siehe Abbildung 5.1. Die größere Kraftamplitude bei größerer Exzentrizität steigt offenbar stärker als die nur leicht steigende Unsicherheit, sodass diese mehr als ausgeglichen wird. Daher kann die Steigung $\Delta F/\Delta \varepsilon$ mit größerer Sicherheit bestimmt werden. Es liegt sozusagen ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis vor.

Dies ist auch eine interessante Erkenntnis für das Experiment. Hier sollte dementsprechend die vorgegebene Schwingungsamplitude so groß wie möglich

eingestellt werden. Auch hier ist zu erwarten, dass sich dies positiv in einer deutlichen Reduzierung der Unsicherheit der Hauptsteifigkeit bei nur geringer Änderung des Mittelwertes äußern wird.

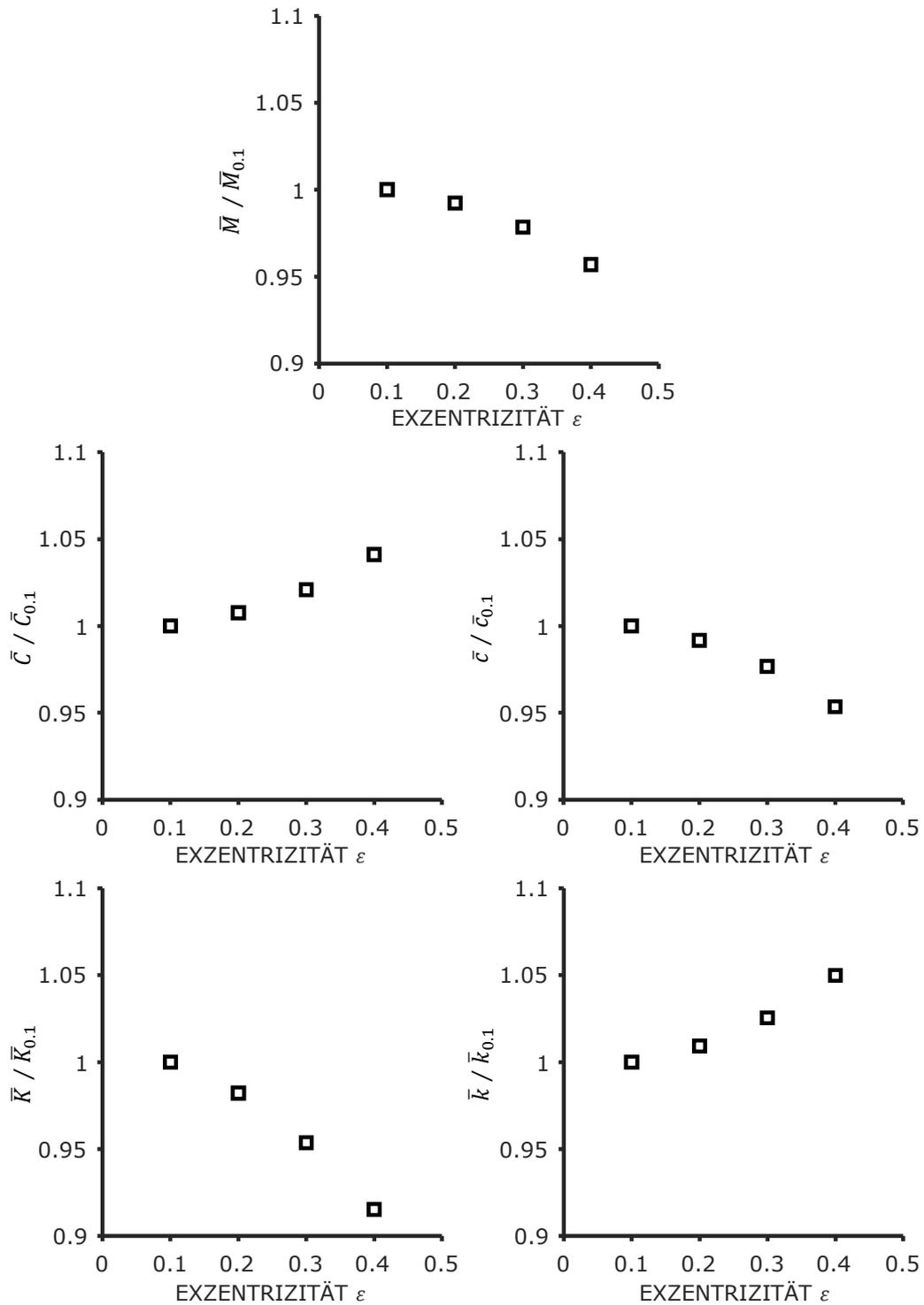


Abbildung 5.4 – Verläufe der relativen Mittelwerte der Koeffizienten über der Exzentrizität.

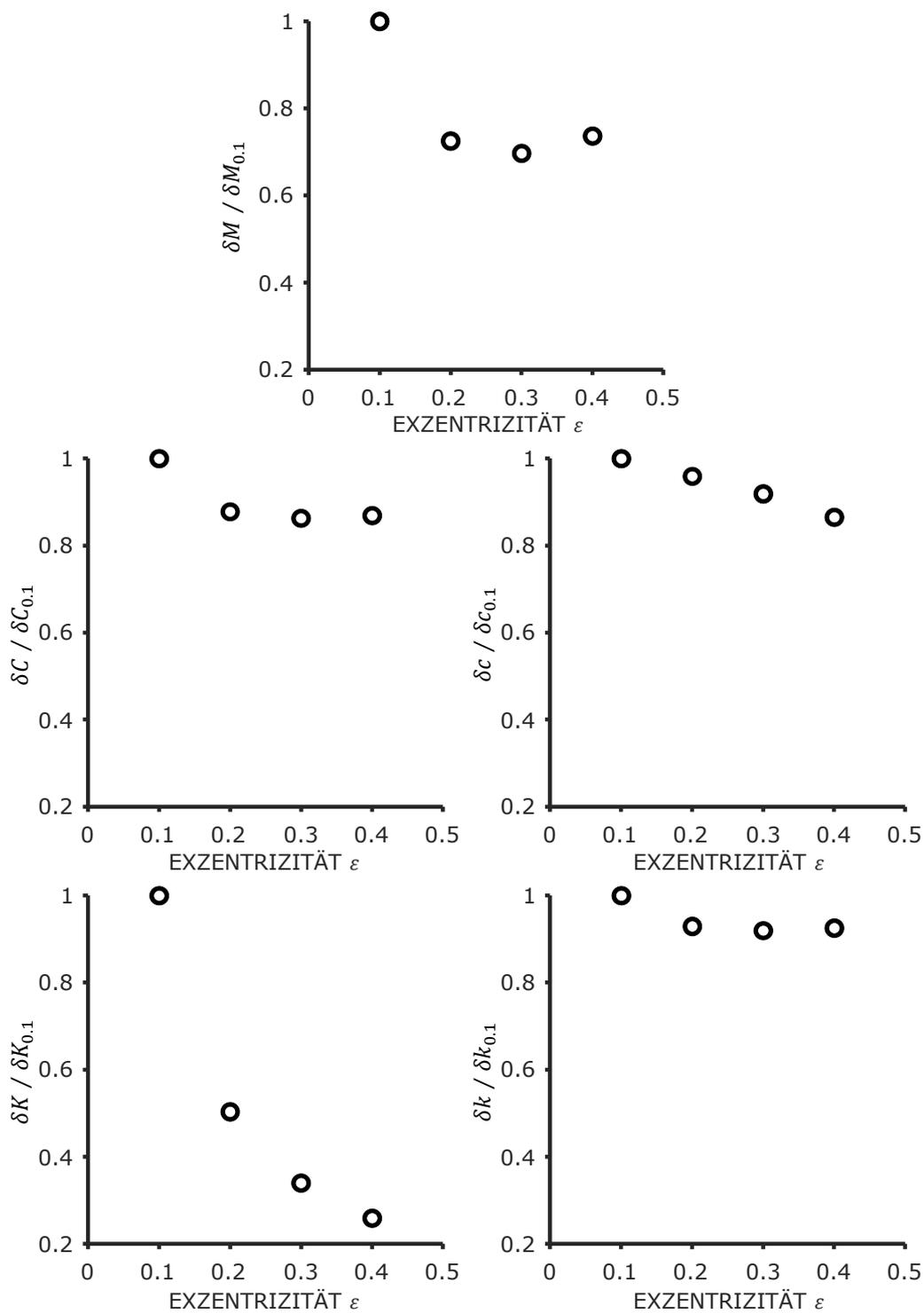


Abbildung 5.5 – Verläufe der relativen Unsicherheiten der Koeffizienten über der Exzentrizität.

5.2 Labyrinthdichtung

Zur Validierung wurden insgesamt sechs Labyrinthdichtungen nach dem Modell in Abbildung 4.1 entworfen, die sich sowohl in der Nutgeometrie, als auch in der Nutanzahl deutlich unterscheiden. Die dimensionslosen Geometrieparameter sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Es sollte bei allen Dichtungen die gleiche Länge von $L = 1.6$ erreicht werden, die tatsächlichen Längen weichen aufgrund der streng periodischen Geometrie aber zwangsweise etwas ab. Die mittlere Spaltweite beträgt in allen Fällen $\psi = 0.0026$.

Die globale Reynoldszahl wurde bei den folgenden Untersuchungen konstant gehalten mit $Re = 4000$. Die mittlere Umfangsgeschwindigkeit vor dem Spalt wurde in allen Fällen auf $\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}} = 0.5$ eingestellt. Die Durchflusszahl ϕ und die Exzentrizität ε wurden variiert. Die am Prüfstand vorliegenden Mittelwerte und deren Unsicherheit entsprechen ungefähr denen beim glatten Spalt und werden hier nicht separat aufgeführt, da bei den Labyrinthdichtungen keine Unsicherheitsfortpflanzung durchgeführt wird¹.

Das oben entwickelte und kalibrierte Reibungsfaktormodell wurde in eine Implementierung des Spaltströmungsmodells CAPM (siehe Kapitel 2.1) integriert. Grundsätzlich hat sich gezeigt, dass die Abwicklung des Spaltes als Ganzes diskretisiert werden kann und in den verschiedenen Regionen von Stegen und Nuten die entsprechenden jeweiligen Reibungsmodelle getrennt angewendet werden können. Auf den Stegen wird das klassische Hirs-Modell für glatte Spalte und über den Nuten das in Abschnitt 4.4 erweiterte und kalibrierte Reibungsfaktormodell verwendet. Grundsätzlich besteht eine weitere Möglichkeit darin, eine flächengemittelte Schubspannung über ein einzelnes

Tabelle 5.2 – Dimensionslose Geometrieparameter der sechs gefertigten und untersuchten Labyrinthdichtungen.

Dichtung	d	t	b	N	L	χ
#1	30	30	60	10	1.63	0.48
#2	30	30	45	13	1.55	0.65
#3	30	30	90	6	1.55	0.30
#4	15	15	30	20	1.59	0.49
#5	15	15	22.5	27	1.59	0.66
#6	15	15	45	13	1.59	0.32

¹ Dies liegt zum einen an der komplexeren Berechnungsmethode und zum anderen an der geringeren Wichtigkeit aufgrund der kleinen Kräfte und Koeffizienten sowie der hohen Vorhersagequalität für die Druckdifferenz.

Profilelement zu berechnen und dann als effektives Reibungsmodell im ganzen Spalt ohne Unterteilung in die verschiedenen Regionen zu verwenden.

Während sich die eigentliche Berechnung der Schubspannungen mittels der beiden o. g. Methoden als unproblematisch und robust erwiesen hat, hat sich gezeigt, dass für die relativ großen Nuten eine weitere Randbedingung eingeführt werden muss. In den Nuten ist der Druck offenbar nicht nur über den Längsschnitt konstant, sondern ebenfalls über den Umfang und damit in der ganzen Nut – auch bei exzentrischer Welle. Diese Randbedingung $\partial p / \partial \varphi = 0$ am Nutein- und -auslass kann im Solver an sich leicht aufgeprägt werden. Sie führt jedoch zu einer Unstetigkeit im axialen Druckverlauf an den genannten Stellen an jeder Nut. Diese Unstetigkeiten sind problematisch bei der numerischen Lösung mittels Finite-Differenzen-Verfahren bzw. SIMPLEX-Algorithmus in der aktuell implementierten Form, was in allen exzentrischen Fällen zum Divergieren der Lösung führt.

Aufgrund dieser Schwierigkeit wurde ein drittes Verfahren implementiert, welches schließlich zu einer erfolgreichen Lösung führt. Bei dem Verfahren wird jeder einzelne Steg und jede einzelne Nut als separater Teilspalt diskretisiert und einzeln gelöst. Diese nicht besonders elegante Methodik ist entfernt ähnlich zu den in Kapitel 2.2.1 angesprochenen Zwei-Kontrollvolumen-Methoden. Am ersten Steg wird die typische Druckverlust-Eintrittsrandbedingung nach Gleichung (3.8) verwendet. Darauf folgend wird für jeden weiteren Teilspalt als Austritts- sowie Eintrittsrandbedingung ein konstanter Druck vorgeschrieben. Die sich entwickelnden Geschwindigkeitsfelder werden von Austritt zum nächsten Eintritt weiter propagiert. Dies wird bis zum Ende der Dichtung so durchgeführt. Die einzelnen Ergebnisse für die Druckdifferenzen der einzelnen Spaltstücke können zum Schluss einfach zur gesuchten Gesamtdruckdifferenz summiert werden. Genauso kann mit den resultierenden Kräften auf den Rotor verfahren werden.

Während die Methode offenbar grundsätzlich funktioniert, bestehen jedoch zwei Nachteile. Erstens erhöht sich der Berechnungsaufwand, denn statt einer Lösung für die gesamte Dichtung müssen $2N + 1$ Lösungen für die einzelnen Teilstücke berechnet werden. Die Diskretisierung in axialer Richtung kann für die Teilstücke zwar gegenüber einem vollständigen Spalt reduziert werden, dies führt aber nur zur einer insignifikanten Reduktion der Berechnungszeit.

Der zweite Nachteil dieser Methodik besteht darin, dass ohne weiteres nur Lösungen für vorgegebene Durchflusszahl ϕ (vorgegebener Volumenstrom) bestimmt werden können. Die Vorgabe einer Gesamtdruckdifferenz Δp würde einen weiteren äußeren iterativen Lösungsalgorithmus erfordern, der die Berechnung weiter erheblich verkomplizieren würde.

5.2.1 Stationäre Eigenschaften

In Abbildung 5.6 ist die Tragkraft F über der Exzentrizität ε bei verschiedenen Durchflusszahlen ϕ für die sechs verschiedenen Dichtungen dargestellt. Die Marker stellen Messwerte mit Unsicherheit als Fehlerbalken dar, die Linien wurden mittels CAPM berechnet. Die Tragkraft ist in allen Fällen mit $F < 0.5$ äußerst gering. Hierfür sind zwei Effekte verantwortlich: erstens bieten die Nuten mit dem über den Umfang konstanten Druck keinerlei lagernde Wirkung; zweitens muss sich in den kurzen Stegen ausgehend vom konstanten Druck in der Nut davor immer erst erneut ein tragendes Druckfeld ausbilden, was zusätzlich die lagernde Eigenschaft der Stege deutlich reduziert. Dies führt dazu, dass zum Beispiel eine Labyrinthdichtung mit einem Flächenverhältnis von $\chi = 0.5$ eine Tragkraft von deutlich weniger als 50 % im Vergleich mit einem entsprechenden glatten Spalt entwickelt.

Im Intervall $0 \leq \varepsilon \leq 0.6$ zeigt die Tragkraft in allen Fällen weitestgehend eine lineare Abhängigkeit von der Exzentrizität, was auch für glatte Spalte typisch ist. Es ist jedoch zu erkennen, dass die Messwerte nicht auf den theoretisch korrekten Wert $F = 0$ bei $\varepsilon = 0$ extrapolieren. Dies kann auf die Unsicherheit der weiteren Betriebsparameter zurückgeführt werden. Es scheint also, dass ein Wert von $\delta F = \pm 0.1$ quasi die Auflösungsgrenze der Tragkraftmessung des Prüfstandes darstellt.

Die Vorhersageergebnisse des CAPM können unter Berücksichtigung der sehr kleinen Amplitude bei den kleineren Durchflusszahlen als akzeptabel bezeichnet werden. Bei größeren Werten von ϕ und ε sind die Modellprognosen jedoch in den meisten Fällen zu hoch. Die Steigung der Modellkurven scheint bei den Dichtungen 1, 2, 3 und 6 etwas zu hoch zu sein.

Beim Verlagerungswinkel β zeigen sich in allen Fällen moderate bis signifikante Abweichungen zwischen CAPM und Experiment. Bei beiden ist jedoch auch keine besondere Systematik in den Verläufen zu erkennen. Dies kann auf die kleinen Kraftamplituden zurückgeführt werden. Aufgrund der sehr kleinen Kräfte ist der Verlagerungswinkel jedoch auch als weitgehend bedeutungslos und daher als wenig von Interesse einzuschätzen, sodass hier auf eine explizite Abbildung der Diagramme verzichtet wird.

Die Druckdifferenz Δp über der Exzentrizität ε bei den verschiedenen Durchflusszahlen ϕ ist in Abbildung 5.7 für alle Dichtungen wie zuvor dargestellt. Für die Auslegung von Labyrinthdichtungen stellt die Druckdifferenz die wichtigste Kenngröße dar. Es ist zu erkennen, dass die Druckdifferenz generell leicht nichtlinear mit steigender Exzentrizität abfällt, was zu erwarten ist. Außerdem steigen die Werte mit steigender Durchflusszahl deutlich an.

Die Ergebnisse des CAPM liegen in fast allen Fällen leicht über den Messwerten. Lediglich bei Dichtung 4 und 5 liegt das Modell bei der höchsten Durchflusszahl leicht zu niedrig. Grundsätzlich kann jedoch gesagt werden, dass das Modell in allen Fällen sehr gut mit den Messwerten für die Druckdifferenz übereinstimmt. Die Skalierung mit der Durchflusszahl und der Exzentrizität wird qualitativ und quantitativ in allen Fällen bei den sechs sehr unterschiedlichen Dichtungen zuverlässig vom Modell abgebildet.

Die Validierung der stationären Fälle zeigt, dass (i.) das Modell und die dafür entwickelte Methodik zur Kalibrierung von einer ebenen Einzelnut auf ganze Dichtungen übertragbar ist, dass (ii.) die entwickelte Skalierung mit der Durchflusszahl zuverlässig funktioniert und dass (iii.) ebenso die entwickelte Skalierung mit der Exzentrizität vom Modell korrekt abgebildet wird, ohne eine spezifische Kalibrierung dafür zu benötigen.

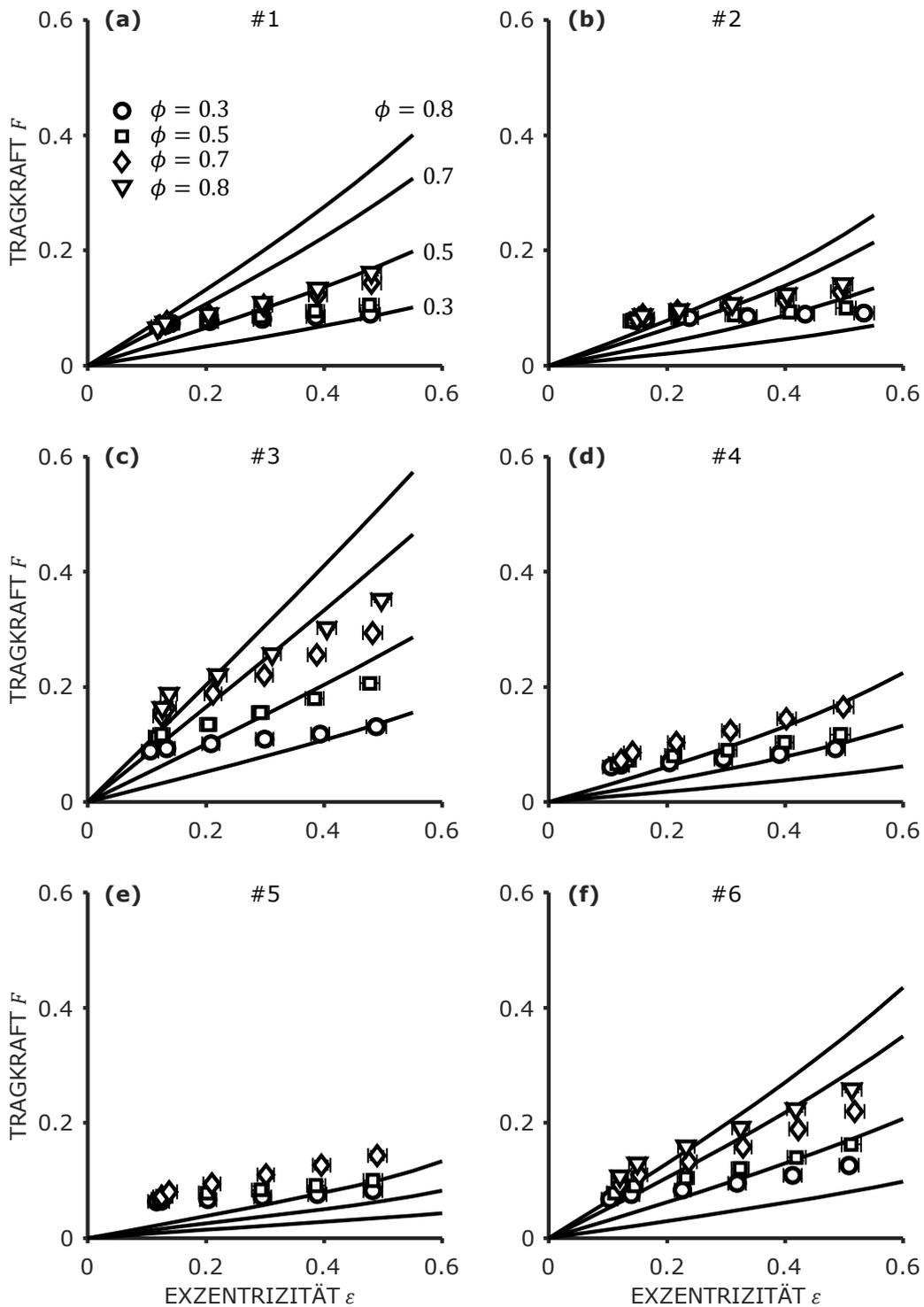


Abbildung 5.6 – Verläufe der Tragkraft über der Exzentrizität von Experiment (Marker) und CAPM (Linien) für die sechs Labyrinthdichtungen.

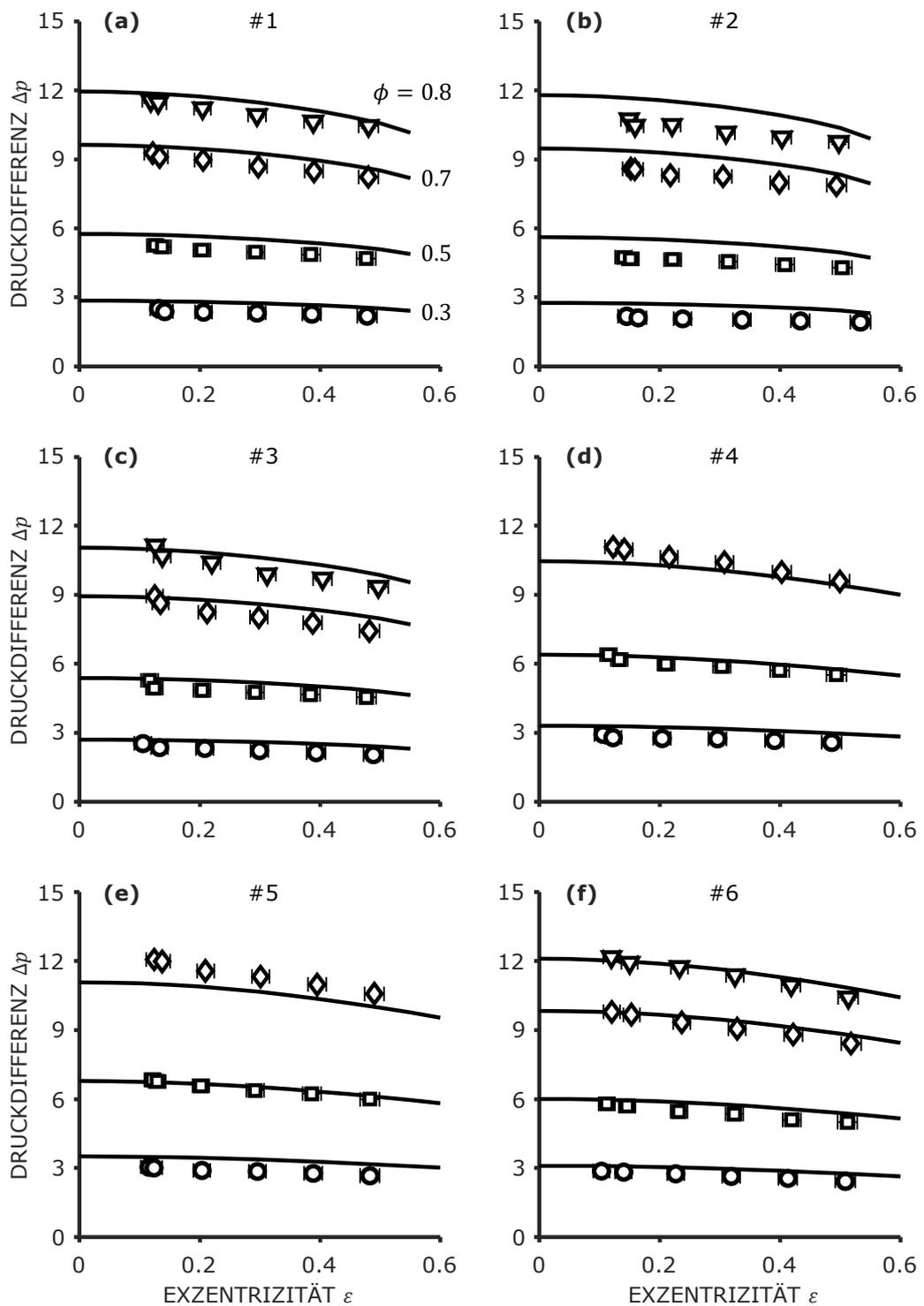


Abbildung 5.7 – Verläufe der Druckdifferenz über der Exzentrizität von Experiment (Marker) und CAPM (Linien) für die sechs Labyrinthdichtungen.

5.2.2 Rotordynamische Koeffizienten

Auch wenn sie in der Praxis bei Labyrinthdichtungen eine eher untergeordnete Rolle spielen, wurden die rotordynamischen Koeffizienten der sechs Labyrinthdichtungen mittels CAPM berechnet und mit dem Experiment validiert. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.8 bis 5.10 für die drei Durchflusszahlen $\phi = 0.3; 0.5; 0.7$ als Balkendiagramme dargestellt. Dabei gehört zu jeder Spalte eine Dichtung bei den unterschiedlichen Durchflusszahlen, d. h. in Abbildung 5.8 gehören die Diagramme a), b) sowie c) zu Dichtung #1 und die Diagramme d), e) sowie f) zu Dichtung #2 usw. In Anhang D sind die experimentellen Ergebnisse nochmals als Verläufe der einzelnen Koeffizienten über der Durchflusszahl für alle Dichtungen abgebildet, damit die entsprechenden Abhängigkeiten deutlicher werden.

Die mittels CAPM berechnete Hauptträgheit M und die Nebendämpfung c sind in allen Fällen sehr klein und werden im Vergleich zum Experiment stark unterschätzt. Die Hauptsteifigkeit K wird entsprechend der Tragkraftverläufe, siehe Abbildung 5.6, überall deutlich zu hoch berechnet. Die Koeffizienten M , c und K entsprechen im Übrigen allein der Kraftkomponente F_x , siehe Gleichung (2.24). Interessant ist zudem, dass die Dichtungen #4, #5 und #6, also die mit den kleineren Nuten $d = t = 15$, im Experiment negative Hauptsteifigkeiten zeigen, was durchaus möglich ist.

Die Hauptdämpfung C und die Nebensteifigkeit k wird bei Dichtungen #1, #2 und #3 mit leichten Abweichungen in beide Richtungen relativ gut vom Modell vorhergesagt, bei den Dichtungen #4, #5 und #6 sind die beiden Koeffizienten jedoch immer deutlich zu gering. Die Koeffizienten C und k entsprechen der Kraftkomponente F_y , siehe Gleichung (2.25).

Insgesamt zeigt sich für die Labyrinthdichtungen leider, dass die Koeffizienten, sofern sie genau benötigt werden sollten, für die hier untersuchten Geometrie- und Betriebsparameter eher nicht ausreichend vom Modell berechnet werden können. Die berechneten Koeffizienten können eher als grobe Schätzung betrachtet werden. Bei dieser Bewertung müssen hier jedoch wieder die geringen absoluten Beträge aller Koeffizienten berücksichtigt werden. Möglicherweise könnte das Modell und die Methode zur Kalibrierung bei kleineren Nuten sowie höheren Reynolds- und Durchflusszahlen, d. h. bei größeren Kraftamplituden, bessere Ergebnisse liefern.

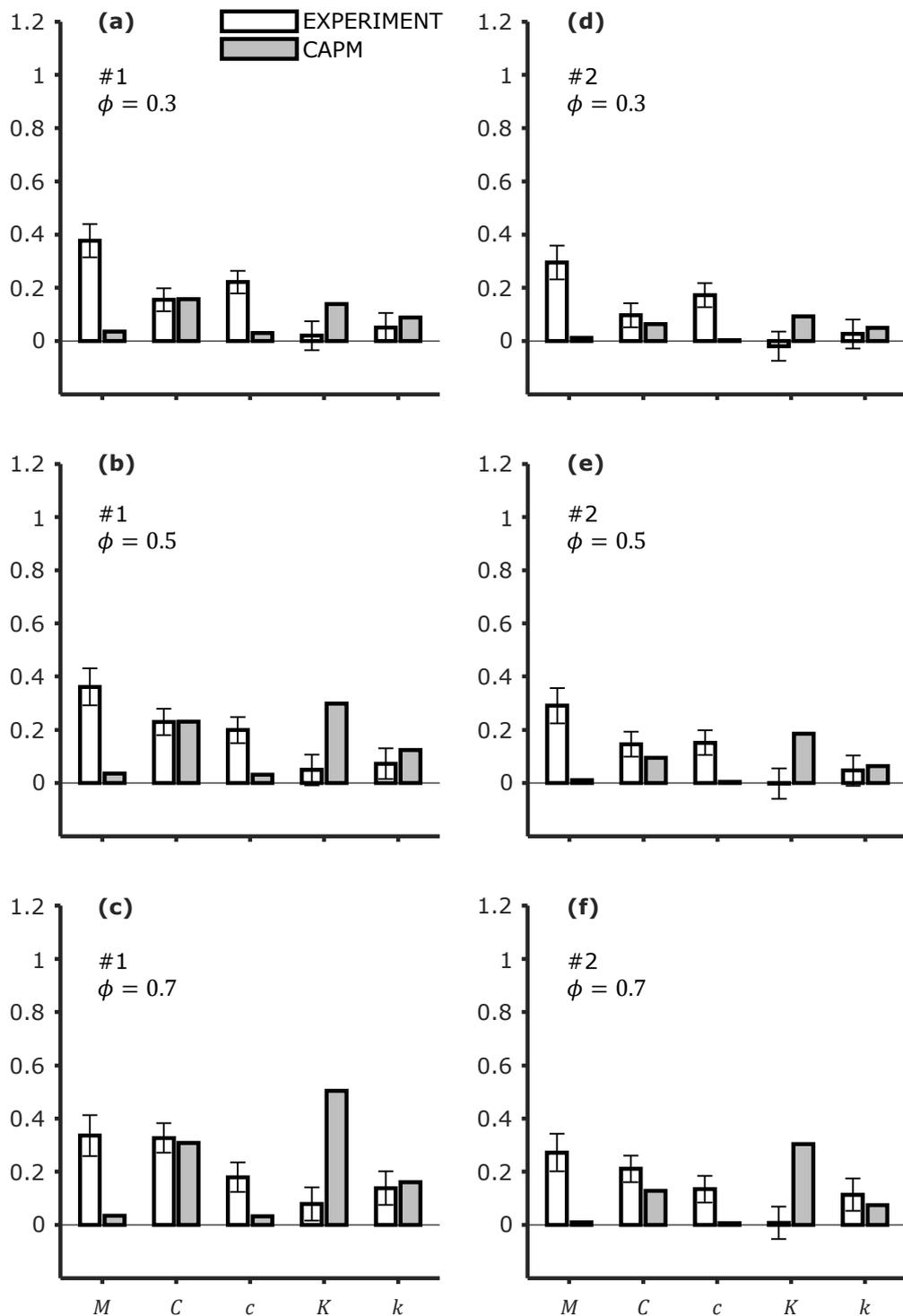


Abbildung 5.8 – Rotordynamische Koeffizienten von Experiment und CAPM für die Dichtungen 1 und 2.

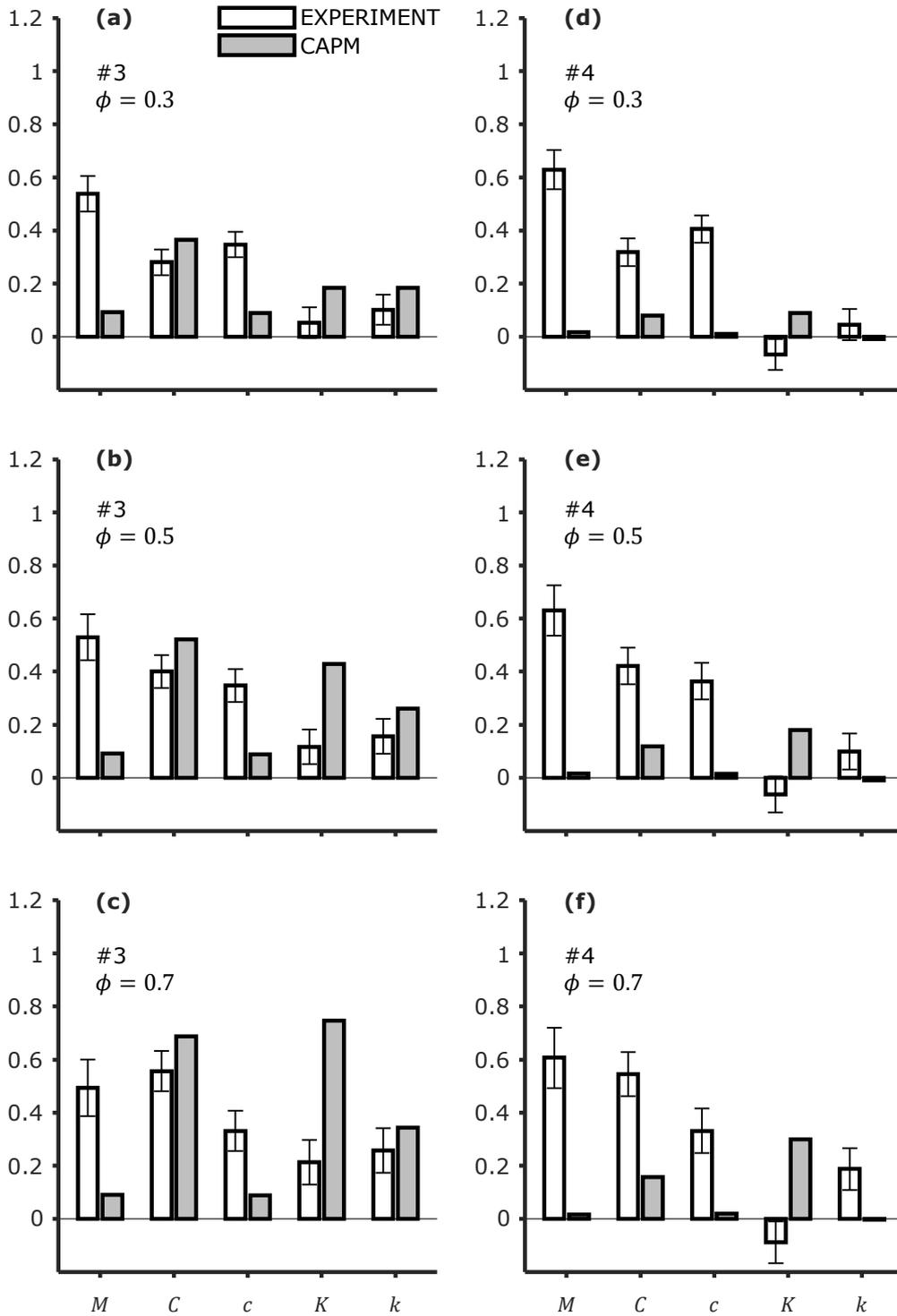


Abbildung 5.9 – Rotordynamische Koeffizienten von Experiment und CAPM für die Dichtungen 3 und 4.

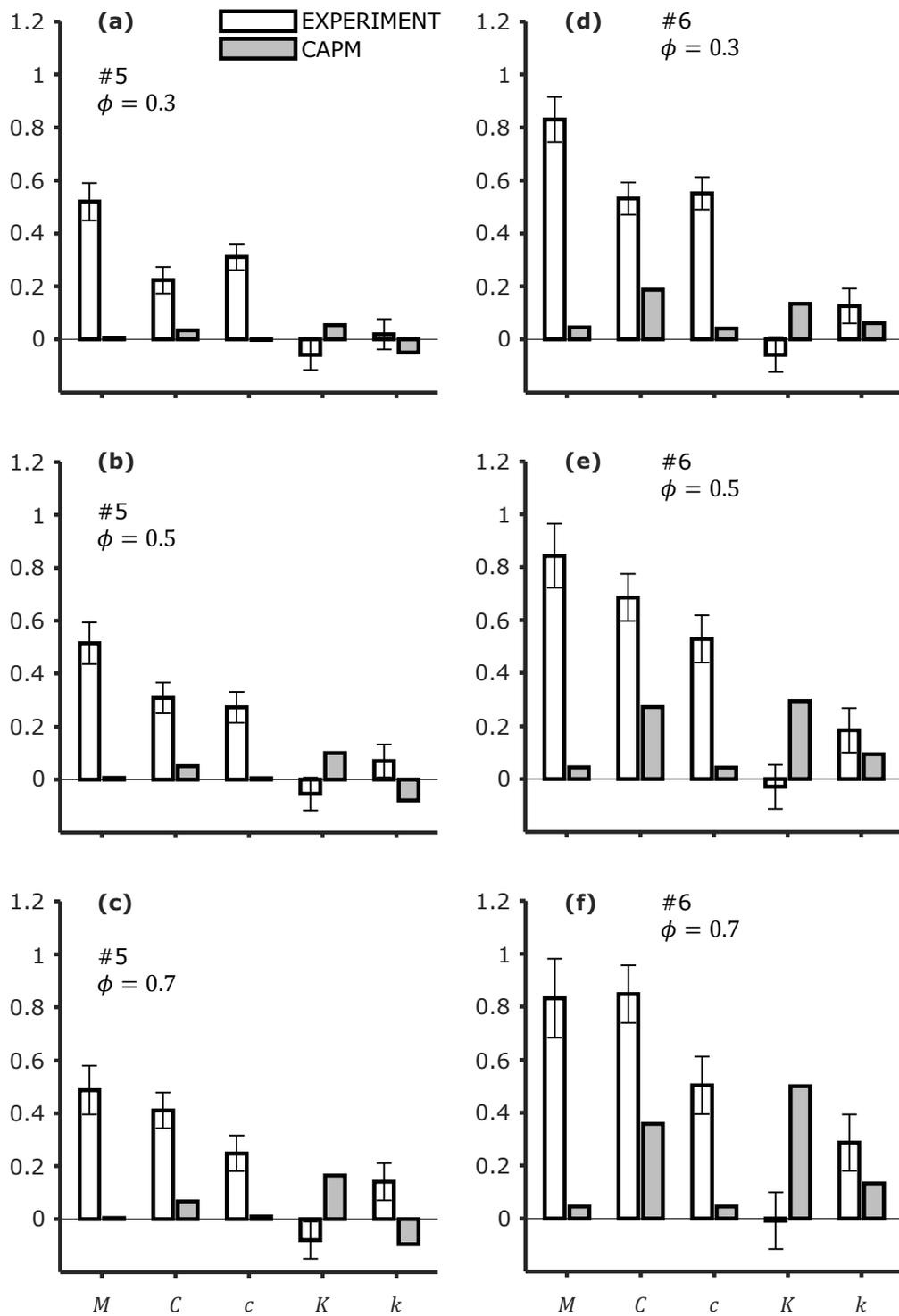


Abbildung 5.10 – Rotordynamische Koeffizienten von Experiment und CAPM für die Dichtungen 5 und 6.

5.3 Bohrlochprofil

In diesem Abschnitt wird eine Dämpferdichtung (Länge $L = 1.60$, Flächenverhältnis $\chi = 0.52$, Bohrungsanzahl $N = 3886$) mit Bohrlochprofil (siehe Tabelle 4.3) untersucht. Da beim Bohrlochprofil wie in Abschnitt 4.6 beschrieben ohnehin eine effektive Schubspannung für den profilierten Stator verwendet wird, kann die ganze Dichtung ohne weiteres diskretisiert und mittels CAPM berechnet werden.

In Tabelle 5.3 sind wie beim glatten Spalt wieder oben die Verteilungsfunktionen von Typ A des Experiments und unten die von Typ B für die Modellparameter aufgeführt. Bei den vergleichbaren Größen wurde sich an den Verteilungen und Werten des glatten Spaltes orientiert. Bei den elf Parametern des erweiterten Reibungsfaktormodells für das Bohrlochprofil wurden pauschale prozentuale Werte herangezogen. Da bei der Kalibrierung für das

Tabelle 5.3 – Verteilungsfunktionen für die Unsicherheitsfortpflanzung beim Bohrlochprofil.

Parameter	Verteilung	\bar{x}	δx	Typ
ψ	\mathcal{N}	0.0026	5×10^{-5}	A
L	\mathcal{N}	1.60	1×10^{-4}	A
Re	\mathcal{N}	4001	72	A
ϕ	\mathcal{N}	0.30; 0.50; 0.70	0.01	A
ε	\mathcal{N}	0.30	0.02	A
$\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}$	\mathcal{N}	0.50	0.03	A
ε_{γ}	\mathcal{U}	0	0.029	B
$\bar{C}_{\varphi, 0}$	\mathcal{N}	0.4	0.067	B
ζ	\mathcal{N}	0.25	0.08	B
m_{Rotor}	\mathcal{N}	0.0815	10 %	B
n_{Rotor}	\mathcal{N}	-0.272	5 %	B
n_{Stator}	\mathcal{N}	-0.193	5 %	B
α_1	\mathcal{N}	0.054	10 %	B
β_1	\mathcal{N}	0.120	10 %	B
α_2	\mathcal{N}	1.114	10 %	B
β_2	\mathcal{N}	-0.0919	10 %	B
α_3	\mathcal{N}	1.113	10 %	B
β_3	\mathcal{N}	-0.133	10 %	B
α_4	\mathcal{N}	0.002	10 %	B
β_4	\mathcal{N}	-0.590	10 %	B

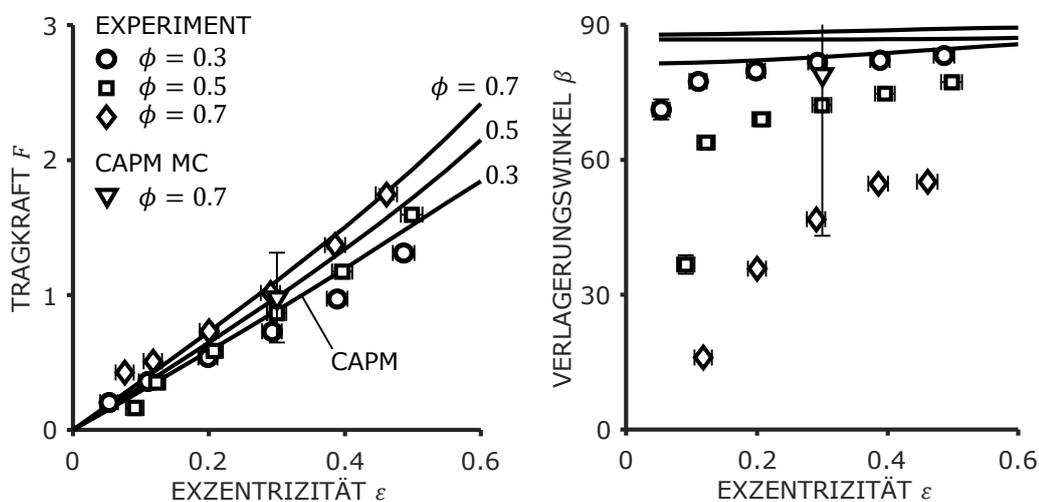


Abbildung 5.11 – Kraft und Verlagerungswinkel von Experiment und CAPM für die Bohrlochdichtung.

Bohrlochprofil keine Geometrieabhängigkeit berücksichtigt wurde, im CAPM also keine vollständige Skalierung mit der lokal veränderlichen Spaltweite erfolgen kann, wurde hier ein geschätzter Wert von 10 % als Unsicherheit angesetzt.

5.3.1 Stationäre Eigenschaften

Die Ergebnisgrößen des stationären Falls von Tragkraft F , Verlagerungswinkel β sowie Druckdifferenz Δp sind in den Diagrammen der beiden Abbildungen 5.11 und 5.12 über der Exzentrizität ε dargestellt. Die Marker stellen wieder die Messdaten und die Linien die Modellergebnisse des CAPM dar. Der zusätzliche dreieckige Marker stellt eine Unsicherheitsfortpflanzung mittels CAPM in Verbindung mit der MC-Methode dar, die für den einzelnen Betriebspunkt bei $\varepsilon = 0.3$ und $\phi = 0.7$ exemplarisch durchgeführt wurde.

Bei der Tragkraft zeigt sich insgesamt eine relativ schwache Abhängigkeit von der Durchflusszahl. Die Modellergebnisse sind hier qualitativ und quantitativ als sehr gut einzuschätzen: sowohl die Steigung mit ε , als auch die Abhängigkeit von ϕ werden vom Modell zuverlässig berücksichtigt. Es ist jedoch zu erwähnen, dass die gesamte Kurvenschar und die Messwerte im Intervall der fortgepflanzten Unsicherheit liegen. Es kann scheinbar davon ausgegangen werden, dass hier sowohl die Grenze der Mess-, als auch der Modellauflösung erreicht wird.

Beim Verlagerungswinkel dagegen zeigen sich wesentliche Abweichungen

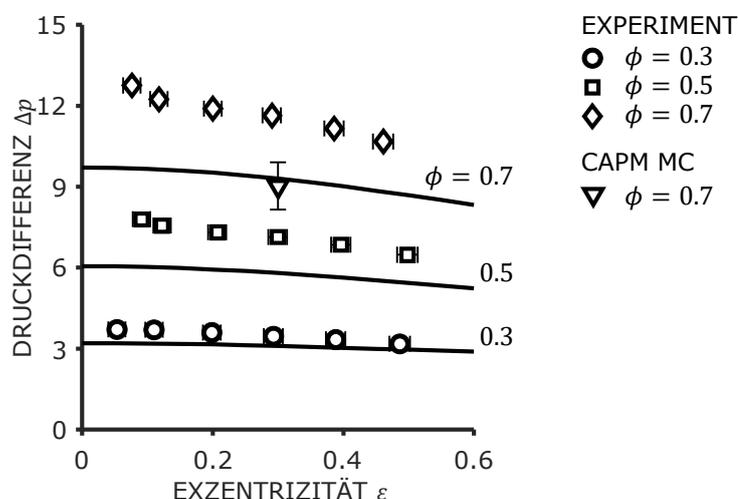


Abbildung 5.12 – Druckdifferenz von Experiment und CAPM für die Bohrlochdichtung.

zwischen Modell und Experiment. Die drei Modellkurven liegen ungefähr zwischen 80° und 90° und bleiben über der Exzentrizität fast konstant. Die Messwerte dagegen liegen deutlich niedriger und zeigen einen degressiven Verlauf mit steigender Exzentrizität. Die MC-Berechnung zeigt jedoch auch ein sehr großes Unsicherheitsintervall, welches alle Messwerte mit einschließt, was prinzipiell ein wünschenswertes Ergebnis ist.

Die Verläufe der Druckdifferenz über der Exzentrizität werden wieder qualitativ gut vorhergesagt. Für die kleinste Durchflusszahl liegt zudem eine gute quantitative Übereinstimmung vor. Mit steigender Durchflusszahl kommt es jedoch zu einer steigenden Abweichung. Die mittels CAPM vorhergesagte Druckdifferenz ist im Vergleich zum Experiment deutlich zu niedrig. Diese Abweichung wird auch nicht vom Unsicherheitsintervall des Modells eingeschlossen, sodass hier von einer zusätzlichen unbekanntem Modellunsicherheit ausgegangen werden muss.

Die Verteilungsfunktionen der stationären Ergebnisgrößen des Modells fallen beim Bohrlochprofil ähnlich aus wie beim glatten Spalt, siehe Abschnitt 5.1. Lediglich bei der Tragkraft F und der Kraftkomponente F_y weisen die Dichtefunktionen beim Bohrloch eine gewisse Schiefe auf, die so beim glatten Spalt nicht zu beobachten war.

5.3.2 Rotordynamische Koeffizienten

Die rotordynamischen Koeffizienten der Bohrlochdichtung von Experiment und CAPM einschließlich fortgeplanter Unsicherheit sind für die drei Durchflusszahlen $\phi = 0.3; 0.5; 0.7$ in Abbildung 5.13 dargestellt. Zur Berechnung der Koeffizienten mittels CAPM wurde eine konstante Exzentrizität von $\varepsilon = 0.2$ verwendet, um die Unsicherheiten etwas zu reduzieren, aber weiterhin eine allgemeine Vergleichbarkeit mit gängigen Verfahren zu gewährleisten.

Diagramm a) zeigt, dass Modell und Experiment für die Durchflusszahl von $\phi = 0.3$ bei allen Koeffizienten sehr gut übereinstimmen. Selbst die Unsicherheit gleicht sich bei C , K und k . Die berechnete Unsicherheit bei M ist wie immer verschwindend gering. Zudem ist auch die Unsicherheit von c äußerst klein. In Diagramm b) ist der Fall $\phi = 0.5$ dargestellt. Die Messunsicherheit der Koeffizienten M , c , K und k fällt sehr groß aus. Im Vergleich dazu liefert das Modell sehr gute Vorhersagen für diese vier Koeffizienten. Die Hauptdämpfung C wird vom CAPM etwas unterschätzt. Die Unsicherheitsintervalle von Messung und Modell kommen gerade noch in Berührung. Dennoch kann auch hier von einem akzeptablen Modellergebnis gesprochen werden. Der Fall $\phi = 0.7$ In Diagramm c) bestärkt den Trend, dass die Unsicherheit von Experiment und Modell mit steigender Durchflusszahl ebenfalls ansteigen. Die Differenz der Mittelwerte bei der Hauptdämpfung wird ebenfalls größer.

Die Verteilungsfunktionen der Koeffizienten des Bohrlochprofils stellen sich wieder ähnlich dar, wie beim glatten Spalt. Beim Bohrlochprofil zeigt die Hauptträgheit M jedoch eher den Verlauf der Dichtefunktion einer gewöhnlichen Normalverteilung anstatt einer Verteilung mit geringer Wölbung.

Es ergeben sich zwar Abweichungen bei der Hauptdämpfung mit steigender Durchflusszahl, dennoch kann insgesamt von guten bis sehr guten Ergebnissen für die rotordynamischen Koeffizienten bei der Bohrlochdichtung gesprochen werden, wenn berücksichtigt wird, dass eine Berechnung vorher im Prinzip gar nicht möglich war. Die fortgeplanten Unsicherheiten sind alle plausibel. Es ist jedoch auch anzumerken, dass die Unsicherheiten der Messwerte bei der mittleren und hohen Durchflusszahl sehr groß werden, sodass die Ergebnisse aller Koeffizienten außer C mit Vorsicht betrachtet werden müssen.

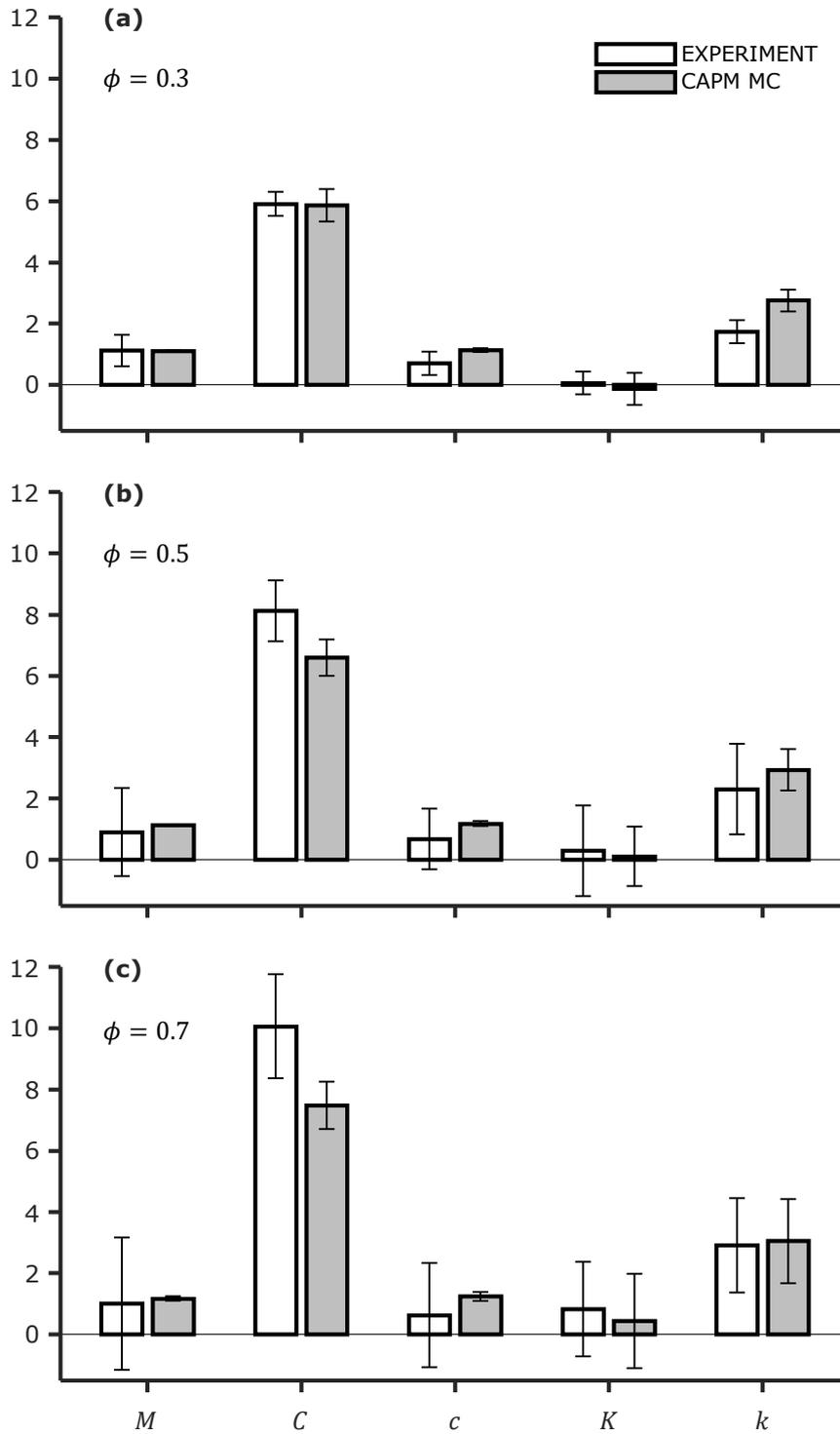


Abbildung 5.13 – Rotordynamische Koeffizienten von Experiment und CAPM für die Bohrlochdichtung.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Innerhalb moderner, häufig mehrstufiger Kreiselpumpen befinden sich eine Vielzahl von durchströmten Spalten in Form von Gleitlagern und Dichtungen. Diese können sich in ihrer Geometrie einschließlich einer möglichen Profilierung der Spaltwände sowie in den Betriebsbedingungen wesentlich unterscheiden. Alle durchströmten Spalte zeichnen sich jedoch sowohl durch eine Trag-, als auch durch eine Dichtwirkung aus. Diese beiden Effekte können häufig nicht strikt voneinander getrennt werden.

Die Dichtwirkung beeinflusst u. a. den volumetrischen Wirkungsgrad einer Maschine oder die interne Pumpenhydraulik. Die Tragwirkung beeinflusst die Rotordynamik wesentlich und bestimmt damit zulässige bzw. unzulässige Betriebsbereiche. Aufgrund der stetig steigenden Anforderungen an moderne Turbomaschinen, bspw. durch flexiblen Betrieb, sind auch immer genauere Kenntnisse über stationäre und dynamische Tragwirkung sowie über die Leckage in den vielen durchströmten Spalten einer Maschine notwendig.

Für CFD im Sinne von dreidimensionalen RANS-Rechnungen als Auslegungsmethode besteht bei derartigen Spaltströmungen generell ein ungünstiges Verhältnis von Vorhersagesicherheit zu Berechnungsaufwand, sodass diese Methodik für die Praxis oft untauglich ist und sich insbesondere bei profilierten Spalten i. d. R. verbietet. Die bisher etablierten Modelltypen wie Reynolds'sche Differentialgleichung oder Bulk-Flow-Modell dagegen beinhalten wiederum wesentliche Einschränkungen hinsichtlich der Betriebsparameter. Aus diesem Grund wurde am Institut für Fluidsystemtechnik an der TU Darmstadt das Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM) entwickelt, was als übergeordnete Theorie den gesamten Parameterraum abdeckt und sich für die Berechnung von glatten Spalten bereits bewährt hat.

Die zuvor bestehende Software-Implementierung des CAPM wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit grundlegend überarbeitet, als Berechnungs-Framework umstrukturiert und wesentlich erweitert. Unter diesen Rahmenbedingungen hatte die vorliegende Arbeit das Ziel, die folgenden wissenschaftlichen Fragestellungen zu beantworten:

- (i) Wie lassen sich möglichst allgemeine Eintrittsrandbedingungen zur Berücksichtigung des Lomakin-Effektes formulieren, die konsistent mit den typischen Berechnungsmethoden für das stationäre sowie für das dynamische Problem sind?
- (ii) Welche wesentlichen Strömungseffekte liegen in profilierten Spalten vor und wie lassen diese sich im Zusammenhang mit integro-differentiellen Spaltströmungsmodellen berechenbar machen?
- (iii) Welche Auswirkungen haben die fortgepflanzte Mess- und Parameterunsicherheit auf die Berechnung der stationären sowie der dynamischen Eigenschaften von durchströmten Spalten?

Frage (i) wurde in Kapitel 3 behandelt, in welchem ein neues, verallgemeinertes Modell für die Eintrittsrandbedingungen unter Berücksichtigung der Umfangsverteilung des Eintrittsdruckverlustkoeffizienten aufgrund des Lomakin-Effektes hergeleitet wurde. Das Modell berücksichtigt zudem erstmals formal korrekt und vollständig das rotierende Bezugssystem im dynamischen Fall, die Verteilung der Umfangsgeschwindigkeit am Spalteinlass sowie die mittlere Umfangsgeschwindigkeit im Plenum vor dem Spalt. Zusätzlich wurde eine neu entwickelte Methodik zur Parameteridentifizierung vorgestellt, mit der erstmals die Möglichkeit gegeben ist, die empirischen Modellparameter und ggf. ihre Umfangsverteilungen unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten von allen Betriebsparametern mittels CFD oder Experiment zu ermitteln.

Das neue Modell und die Methode zur Parameteridentifikation wurde unter Nutzung von CFD-Simulationen für den stationären Fall bei laminarer Strömung sowie für den dynamischen Fall bei turbulenter Strömung erprobt. Im laminaren Fall zeigt sich, dass das CAPM in Verbindung mit dem neuen Modell für die Eintrittsrandbedingungen Ergebnisse liefert, die fast so genau wie die CFD-Simulationen selbst sind. Zusätzlich haben die Untersuchungen gezeigt, dass die Anwesenheit einer zusätzlichen axialen Durchströmung generell ein Ausschlusskriterium für die Verwendung der Reynolds'schen Differentialgleichung darstellt.

Es wurde weiterhin für den dynamischen Fall bei turbulenter Strömung gezeigt, dass das verallgemeinerte Modell und die neue Ermittlungsmethode für die Parameter auch in diesem Fall anwendbar ist und sinnvolle Ergebnisse liefert. Eine substantielle Verbesserung der Berechnungsergebnisse für die rotordynamischen Koeffizienten gegenüber üblichen Ansätzen konnte in den untersuchten Fällen jedoch nicht festgestellt werden. Die Simulations- und Modellergebnisse zeigten dennoch gute Übereinstimmung mit Messdaten. Mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methodik lassen sich so Modell, Simulation und Experiment vollständig quantitativ koppeln und gegenseitig validieren.

In Kapitel 4 wurde die Strömung in Labyrinth- und Bohrlochdichtungen untersucht, um Frage (ii) nachzugehen. Zunächst wurde eine generische Labyrinthdichtung auf die Untersuchung einer ebenen Einzelnut heruntergebrochen. Die Anwendung existierender Modelle der Theorie freier Scherschichten zeigte, dass über der Nut in axialer Richtung eine Wandstrahlströmung vorherrscht. Da in den existierenden Modellen jedoch weder die vorhandene Querströmung, noch der Einfluss der finiten Nutgeometrie berücksichtigt wird, zeigten die Ergebnisse große Abweichungen.

Aus diesem Grund wurde ein Reibungsfaktormodell nach Hirs erweitert und aufwändig mittels einer Anzahl von 96 CFD-Simulationen kalibriert. Dabei zeigte sich, dass bei profilierten Dichtungen der Winkel zwischen den beiden Wandschubspannungskomponenten und den beiden Komponenten der mittleren Geschwindigkeit im Gegensatz zu glatten Spalten sehr unterschiedlich sein kann, was durch Korrekturfaktoren ausgeglichen werden muss. Zudem zeigten sich bei den Modellparametern Abhängigkeiten von den Betriebsbedingung in Form von Potenzgesetzen und lineare Abhängigkeiten von der Nutgeometrie. Anschließend wurde das Reibungsfaktormodell mit leichten Abwandlungen ebenfalls für ein Bohrlochprofil kalibriert.

Obwohl die Verwendung von Reibungsfaktormodellen zur Beschreibung von profilierten Dichtungen keine Neuheit darstellt, wurde in der vorliegenden Arbeit dennoch zum ersten Mal ein mit dem CAPM als übergeordnetes Spaltströmungsmodell und mit der ursprünglichen Theorie von Hirs konsistentes Modell entwickelt. Dieses berücksichtigt zudem auch erstmals sowohl die Skalierung mit der Exzentrizität, als auch mit sämtlichen weiteren Betriebs- und Geometrieparametern.

Die kalibrierten Reibungsfaktormodelle wurden anschließend in das CAPM integriert. Eine Validierung mit Messdaten für sechs unterschiedliche Labyrinth- und eine Bohrlochdichtung sowie für einen glatten Spalt wurde in Kapitel 5 vorgestellt. Bei den Labyrinthdichtungen zeigte sich in allen Fällen eine sehr gute Übereinstimmung der Modellergebnisse für die Druckdifferenz (Hauptauslegungsgröße von Labyrinthdichtungen) bei gegebenem Volumenstrom, was das Modell und die Methodik zur Kalibrierung grundsätzlich validiert. Die Absolutwerte der Kräfte und rotordynamischen Koeffizienten sind aufgrund der großen Nuten jedoch in allen Fällen sehr klein. Daher kommt es zu relativ großen Abweichungen zwischen Modell und Experiment.

Für Bohrlochprofile liegt mit den Ergebnissen dieser Arbeit erstmals ein substantielles Modell vor, welches alle Abhängigkeiten berücksichtigen kann und alle benötigten Größen liefert. Die stationäre Tragkraft wird vom Modell im Allgemeinen sehr gut und die rotordynamischen Koeffizienten gut vorhergesagt. Es kommt bei größeren Durchflusszahlen jedoch zu Abweichungen bei der Berechnung der Druckdifferenz.

Gleichzeitig wurden fortgepflanzte Unsicherheiten mittels CAPM in Verbindung mit einer Monte-Carlo-Methode (MC) für den glatten Spalt und die Bohrlochdichtung berechnet, um Frage (iii) zu beantworten. Somit liegen erstmals Ergebnisse zur Unsicherheitsfortpflanzung mit Spaltströmungsmodellen vor. Die fortgepflanzte Unsicherheit des Modells ist in allen Fällen plausibel und umfasst oft die entsprechenden Messwerte. Da die Unsicherheit der berechneten Werte häufig groß im Vergleich zu Änderungen bei der Parametervariation ist, kann davon ausgegangen werden, dass bei der gegebenen Mess- bzw. Parameterunsicherheit in manchen Fällen die Grenze der Auflösung des Modells erreicht ist.

Zusätzliche Untersuchungen haben gezeigt, dass die Bestimmung von linearen rotodynamischen Koeffizienten bei größerer Exzentrizität die Mittelwerte nur leicht ändert, aber die Unsicherheit deutlich reduzieren kann, was insbesondere bei der Hauptsteifigkeit zum Tragen kommt. Die stationären Ergebnisgrößen wie Tragkraft und auch die berechneten Koeffizienten im dynamischen Fall unterliegen meist einer Normalverteilung. In manchen Fällen entstehen jedoch auch schiefe Verteilungen oder solche mit kleiner Wölbung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich im Wesentlichen mit der Methodentwicklung zu den drei o. g. Punkten, weswegen viele Untersuchungen und die Validierung meist an ausgewählten exemplarischen Betriebspunkten stattfand. Im Ausblick wären für die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Modelle und Methoden systematische Parameterstudien wünschenswert, welche die Anwendbarkeit und Validität weiter prüfen.

Hier wären insbesondere größere Reynolds- und Durchflusszahlen relevant, welche bei vielen Dichtungen vorliegen. In diesem Zusammenhang ist auch von Interesse, wie sich die Variation der Profilparameter bei Labyrinth- und Bohrlochprofil auf die stationären und dynamischen Eigenschaften einer Dichtung auswirken. Das erweiterte Reibungsfaktormodell kann möglicherweise wie vorgestellt oder zumindest sehr ähnlich auch auf alle anderen symmetrischen sowie nichtsymmetrischen Profile angewendet werden. Ein weiteres gängiges Profil für Dichtungen ist bspw. das Sägezahnprofil. Die Anwendbarkeit hier ist zu prüfen.

Die Ergebnisse machen allgemein jedoch den Eindruck, dass das Entwicklungspotential von Reibungsfaktormodellen damit weitgehend ausgeschöpft ist. Prinzipiell sind zur weiteren Verbesserung jedoch noch zwei Ansatzpunkte vorstellbar: Erstens können vollständige dreidimensionale Simulationen eines exzentrischen glatten und profilierten Ringspaltes zur expliziten Untersuchung der Exzentrizitätseffekte dienen.

Zweitens wird in den Reibungsfaktormodellen aufgrund der Erkenntnisse von Hirs generell kein Unterschied zwischen Druck- und Schlepplströmung bzw. ihrer Überlagerung in Umfangsrichtung gemacht. Geeignete dreidimensionale

Simulationen, ggf. auch auf ein ebenes Kanalstück vereinfacht, könnten zur Kalibrierung eines Reibungsfaktormodells für unterschiedliche Druckgradienten bei gegebener Schlepplströmung dienen.

Literatur

- [1] M. Amoser. „Strömungsfelder und Radikalkräfte in Labyrinthdichtungen hydraulischer Strömungsmaschinen“. Dissertation. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1995.
- [2] M. Arghir, F. Billy, G. Pineau, J. Frêne und A. Texier. „Theoretical Analysis of Textured “Damper” Annular Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 129.3 (2007), S. 669.
- [3] M. Arghir und J. Frêne. „A Bulk-Flow Analysis of Static and Dynamic Characteristics of Eccentric Circumferentially-Grooved Liquid Annular Seals“. In: *Journal of Tribology* 126.2 (2004), S. 316–325.
- [4] M. Arghir und J. Frêne. „Rotordynamic Coefficients of Circumferentially-Grooved Liquid Seals Using the Averaged Navier-Stokes Equations“. In: *Journal of Tribology* 119.3 (1997), S. 556–567.
- [5] M. B. Banerjee, R. Shandil, S. Katyal, G. Dube, T. Pal und K. Banerjee. „A nonlinear theory of hydrodynamic lubrication“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 117.1 (1986), S. 48–56.
- [6] G. I. Barenblatt, A. J. Chorin und V. M. Prostokishin. „The turbulent wall jet: a triple-layered structure and incomplete similarity“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 102.25 (2005), S. 8850–8853.
- [7] H. Blasius. „Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten“. In: *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1913, S. 1–41.
- [8] C. E. Brennen. *Hydrodynamics of pumps*. Oxford science publications. Norwich, Vt.: Concepts ETI, 1994.
- [9] N. Brunetière. „A Modified Turbulence Model for Low Reynolds Numbers: Application to Hydrostatic Seals“. In: *Journal of Tribology* 127.1 (2005), S. 130–140.

- [10] N. Brunetière und B. Tournerie. „Finite Element Solution of Inertia Influenced Flow in Thin Fluid Films“. In: *Journal of Tribology* 129.4 (2007), S. 876–886.
- [11] D. R. Carlson, S. E. Widnall und M. F. Peeters. „A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 121.-1 (1982), S. 487.
- [12] C.-H. Chen und C.-K. Chen. „The influence of fluid inertia on the operating characteristics of finite journal bearings“. In: *Wear* 131.2 (1989), S. 229–240.
- [13] D. W. Childs und C.-H. Kim. „Analysis and Testing for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals With Different, Directionally-Homogeneous Surface-Roughness Treatment for Rotor and Stator Elements“. In: *Journal of Tribology* 107.3 (1985), S. 296.
- [14] D. W. Childs und C.-H. Kim. „Test Results For Round-Hole-Pattern Damper Seals: Optimum Configurations and Dimensions for Maximum Net Damping“. In: *Journal of Tribology* 108.4 (1986), S. 605.
- [15] D. W. Childs. *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*. New York: Wiley, 1993.
- [16] D. W. Childs, S. Arthur und N. J. Mehta. „The Impact of Hole Depth on the Rotordynamic and Leakage Characteristics of Hole-Pattern-Stator Gas Annular Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 136.4 (2014).
- [17] D. W. Childs und P. Fayolle. „Test Results for Liquid “Damper” Seals Using a Round-Hole Roughness Pattern for the Stators“. In: *Journal of Tribology* 121.1 (1999), S. 42–49.
- [18] D. W. Childs, B. Kheireddin und S. Phillips. „Friction Factor Behavior From Flat-Plate Tests of Smooth and Hole-Pattern Roughened Surfaces With Supply Pressures up to 84 Bars“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2010*. New York, NY: ASME, 2010, S. 69–79.
- [19] D. W. Childs, Y.-S. Shin und B. Seifert. „A Design to Improve the Effective Damping Characteristics of Hole-Pattern-Stator Annular Gas Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 130.1 (2008), S. 012505.
- [20] V. N. Constantinescu. „On the Influence of Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self-Acting Films“. In: *Journal of Lubrication Technology* 92.3 (1970), S. 473–480.

- [21] V. N. Constantinescu und S. Galetuse. „Operating Characteristics of Journal Bearings in Turbulent Inertial Flow“. In: *Journal of Lubrication Technology* 104.2 (1982), S. 173–179.
- [22] DIN 1319:1995. *Grundlagen der Messtechnik*. 1995.
- [23] R. C. DiPrima und J. T. Stuart. „Non-local effects in the stability of flow between eccentric rotating cylinders“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 54.3 (1972), S. 393–415.
- [24] S. Dousti, P. Allaire, T. Dimond und J. Cao. „An extended Reynold equation applicable to high reduced Reynolds number operation of journal bearings“. In: *Tribology International* 102 (2016), S. 182–197.
- [25] P. G. Drazin und W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Repr. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [26] D. A. Elrod, D. W. Childs und C. C. Nelson. „An Annular Gas Seal Analysis Using Empirical Entrance and Exit Region Friction Factors“. In: *Journal of Tribology* 112.2 (1990), S. 196–204.
- [27] B. H. Ertas, A. Delgado und G. Vannini. „Rotordynamic Force Coefficients for Three Types of Annular Gas Seals With Inlet Preswirl and High Differential Pressure Ratio“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.4 (2012), S. 042503.
- [28] S. Florjancic. „Annular seals of high energy centrifugal pumps: a new theory and full scale measurement of rotordynamic coefficients and hydraulic friction factors“. Diss. ETH Zurich, 1990.
- [29] R. Gasch, R. Nordmann und H. Pfützner. *Rotordynamik*. 2., vollst. neubearb. und erw. Aufl. Berlin u.a.: Springer, 2002.
- [30] K. Gersten. „The asymptotic downstream flow of plane turbulent wall jets without external stream“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 779 (2015), S. 351–370.
- [31] R. Ghanem, D. Higdon und H. Owhadi. *Handbook of Uncertainty Quantification*. Cham: Springer International Publishing, 2017.
- [32] N. Gibbons und C. Goyne. „Form Shear Stress (FSS) Correction in Bulk Flow Analysis of Grooved Seals Based on Effective Film Thickness“. In: *Journal of Tribology* (2023), S. 1–39.
- [33] N. Gibbons, C. Watson-Kassa, C. Goyne und M. He. „Circumferentially Grooved Seal Flow Field Analysis Based on Effective Film Thickness to Improve Bulk Flow Models“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 144.11 (2022).

- [34] M. B. Glauert. „The wall jet“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 1.06 (1956), S. 625.
- [35] R. Gomeringer. *Tabellenbuch Metall*. 46., neu bearb. und erw. Aufl. Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel, 2014.
- [36] B. Grigoriev, J. Schmied, A. Fedorov und S. Lupuleac. „Consideration of the Pressure Entrance Loss for the Analysis of Rotordynamic Gas Seals Forces“. In: *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria* (2006).
- [37] J. F. Gülich. *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [38] A. Gupta, H. Choudhary, A. K. Singh, T. Prabhakaran und S. A. Dixit. „Scaling mean velocity in two-dimensional turbulent wall jets“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 891 (2020).
- [39] T. W. Ha, G. L. Morrison und D. W. Childs. „Friction-Factor Characteristics for Narrow Channels With Honeycomb Surfaces“. In: *Journal of Tribology* 114.4 (1992), S. 714.
- [40] T. W. Ha und A. S. Lee. „A rotordynamic analysis of circumferentially-grooved pump seals based on a three-control-volume theory“. In: *KSME International Journal* 14.3 (2000), S. 261–271.
- [41] G. G. Hirs. „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“. In: *Journal of Lubrication Technology* 95.2 (1973), S. 137.
- [42] I. E. Idelchik. *Handbook of Hydraulic Resistance: 4th Revised and Augmented Edition*. New York, Connecticut und Wallingford (UK): Begell House Inc, 2008.
- [43] ISO/IEC Guide 98-1:2009. *Uncertainty of measurement. Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement*. 2009.
- [44] ISO/IEC Guide 98-3:2008. *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)*. 2008.
- [45] ISO/IEC Guide 98-3/Suppl. 1:2008. *Uncertainty of measurement. Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995). Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. 2008.
- [46] T. Iwatsubo und B. Sheng. „Evaluation of Dynamic Characteristics Parallel Grooved Annular Seals by Theory and Experiment“. In: *Proceedings of 3rd International Conference on Rotordynamics, September 10-12, 1990, Lyon, France*. Paris: Ed. du Centre National de la Recherche Scientifique, 1990, S. 313–318.

- [47] P. Jolly, M. Arghir, O. Bonneau und M.-A. Hassini. „Experimental and Theoretical Rotordynamic Coefficients of Smooth and Round-Hole Pattern Water-Fed Annular Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 140.11 (2018), S. 112501.
- [48] W. Kamke. *Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse: Eine elementare Einführung*. 10., erw. Aufl. Aachen: Shaker, 2014.
- [49] J. Kaye und E. C. Elgar. „Modes of Adiabatic and Diabatic Fluid Flow in an Annulus With an Inner Rotating Cylinder“. In: *Journal of Fluids Engineering* 80.3 (1958), S. 753–763.
- [50] K. F. King und C. M. Taylor. „An Estimation of the Effect of Fluid Inertia on the Performance of the Plane Inclined Slider Thrust Bearing With Particular Regard to Turbulent Lubrication“. In: *Journal of Lubrication Technology* 99.1 (1977), S. 129–135.
- [51] E. L. Koschmieder. „Turbulent Taylor vortex flow“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 93.3 (1979), S. 515–527.
- [52] M. M. G. Kuhr, T. Corneli und P. F. Pelz. „Reduction of Bearing Load Capacity and Increase in Volume Flow Due to Wall Slip“. In: *Proceedings of the 20th International Sealing Conference*. Hrsg. von Universität Stuttgart und Fachverband Fluidtechnik. Frankfurt am Main, Germany: Fachverband Fluidtechnik im VDMA e.V, 2018, S. 569–579.
- [53] M. M. G. Kuhr, S. R. Lang und P. F. Pelz. „Static force characteristic of annular gaps - Experimental and simulation results“. In: *Journal of Tribology* (2022).
- [54] M. Kuhr. „Identification of the dynamic force and moment characteristics of annular gaps using linear independent rotor whirling motions“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 187 (2023), S. 109936.
- [55] M. M. G. Kuhr. *Dynamische Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2022*. Darmstadt: Shaker Verlag, 2022.
- [56] M. M. G. Kuhr, R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Measuring and simulation of fluid forces in annular gaps - Generic experiments covering the relevant parameter range for turbulent and laminar flow in pumps“. In: *Proceedings of the 4th International Rotating Equipment Conference*. Hrsg. von VDMA Pumps + Systems. 2019.

- [57] M. M. G. Kuhr, R. Nordmann und P. F. Pelz. „Dynamic force and moment characteristics of annular gaps - Simulation results and evaluation of the relevance of the tilt and moment coefficients“. In: *Journal of Tribology* (2022), S. 1–42.
- [58] P. Kündig. „Gestufte Labyrinthdichtungen hydraulischer Maschinen: Experimentelle Untersuchung der Leckage, der Reibung und der stationären Kräfte“. Dissertation. Zürich: ETH Zürich, 1994.
- [59] K. Kwanka. *Der Einfluss von Labyrinthdichtungen auf die Dynamik von Turbomaschinen: Habilitation*. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2001.
- [60] S. R. Lang. *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017*. Aachen: Shaker Verlag, 2018.
- [61] S. R. Lang und P. F. Pelz. „Unified Prediction of Hydrodynamic Forces in Plain Annular Seals and Journal Bearings by means of an Analytically Derived Design Tool“. In: *Pump Users International Forum 2016*. Frankfurt am Main: Pumps + Systems Association within VDMA e.V, 2016.
- [62] B. E. Launder und M. Leschziner. „Flow in Finite-Width, Thrust Bearings Including Inertial Effects: I—Laminar Flow“. In: *Journal of Lubrication Technology* 100.3 (1978), S. 330–338.
- [63] Z. Li, J. Li und X. Yan. „Multiple Frequencies Elliptical Whirling Orbit Model and Transient RANS Solution Approach to Rotordynamic Coefficients of Annual Gas Seals Prediction“. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 135.3 (2013), S. 031005.
- [64] A. A. Lomakin. „Calculation of the critical speed and the conditions to ensure dynamic stability of the rotors in high pressure hydraulic machines, taking account of the forces in the seals (in Russian)“. In: *Energomashinostroenie* 14.4 (1958).
- [65] R. M. Lueptow, A. Docter und K. Min. „Stability of axial flow in an annulus with a rotating inner cylinder“. In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 4.11 (1992), S. 2446–2455.
- [66] M. Manna und A. Vacca. „Torque reduction in Taylor–Couette flows subject to an axial pressure gradient“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 639 (2009), S. 373–401.
- [67] M. Marant. „Numerische Untersuchung der rotierenden Spaltströmung durch plötzliche Querschnittsübergänge: Masterthesis, Technische Universität Darmstadt“. Masterthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2015.

- [68] O. R. Marquette und D. W. Childs. „An Extended Three-Control-Volume Theory for Circumferentially-Grooved Liquid Seals“. In: *Journal of Tribology* 118.2 (1996), S. 276–285.
- [69] P. J. Migliorini, A. Untaroiu und H. G. Wood. „A Numerical Study on the Influence of Hole Aspect Ratio on the Performance Characteristics of a Hole-Pattern Seal“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition (GT2014)*. Hrsg. von ASME. ASME, 2014.
- [70] P. J. Migliorini, A. Untaroiu und H. G. Wood. „A Numerical Study on the Influence of Hole Depth on the Static and Dynamic Performance of Hole-Pattern Seals“. In: *Journal of Tribology* 137.1 (2015), S. 011702.
- [71] P. J. Migliorini, A. Untaroiu, H. G. Wood und P. E. Allaire. „A Computational Fluid Dynamics/Bulk-Flow Hybrid Method for Determining Rotordynamic Coefficients of Annular Gas Seals“. In: *Journal of Tribology* 134.2 (2012), S. 022202.
- [72] E. Mitsoulis und S. G. Hatzikiriakos. „Bagley correction: the effect of contraction angle and its prediction“. In: *Rheologica Acta* 42.4 (2003), S. 309–320.
- [73] L. F. Moody. „An Approximate Formula for Pipe Friction Factors“. In: *Transactions of the ASME* 69 (1947), S. 1005–1011.
- [74] G. E. Myers, J. J. Schauer und R. H. Eustis. „Plane Turbulent Wall Jet Flow Development and Friction Factor“. In: *Journal of Basic Engineering* 85.1 (1963), S. 47–53.
- [75] K. K. Nielsen, K. Jønck und H. Underbakke. „Hole-Pattern and Honeycomb Seal Rotordynamic Forces: Validation of CFD-Based Prediction Techniques“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.12 (2012), S. 122505.
- [76] R. Nordmann, F.-J. Dietzen, W. Janson, A. Frei und S. Florjancic. „Coefficients and leakage of parallel grooved and smooth seals“. In: *NASA, Lewis Research Center, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery* (1987), S. 129–153.
- [77] P. F. Pelz, T. Corneli, S. Mehrnia und M. M. Kuhr. „Temperature-dependent wall slip of Newtonian lubricants“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 948 (2022).
- [78] P. F. Pelz, P. Groche, M. E. Pfetsch und M. Schaeffner, Hrsg. *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*. 1st ed. 2021. Springer Tracts in Mechanical Engineering. Springer International Publishing und Springer International Publishing AG, 2021.

- [79] A. Picardo und D. W. Childs. „Rotordynamic Coefficients for a Tooth-on-Stator Labyrinth Seal at 70 Bar Supply Pressures: Measurements Versus Theory and Comparisons to a Hole-Pattern Stator Seal“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 127.4 (2005), S. 843.
- [80] G. L. v. Pragenau. *Damping Seals for Turbomachinery*. 1982.
- [81] E. Reinhardt und J. W. Lund. „The Influence of Fluid Inertia on the Dynamic Properties of Journal Bearings“. In: *Journal of Lubrication Technology* 97.2 (1975), S. 159–165.
- [82] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Friction Model for Grooved Annular Seals for Use in Fast and Reliable Design Tools“. In: *Proceedings of the 15th European Turbomachinery Conference, Budapest, Hungary, 24-28 April 2023*. Hrsg. von European Turbomachinery Society. 2023.
- [83] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Lubrication Film Friction Model for Grooved Annular Seals“. In: *Int. J. Turbomach. Propuls. Power* 8 (2023).
- [84] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“. In: *Tribology International* 175 (2022).
- [85] R. M. Robrecht, M. M. G. Kuhr und P. F. Pelz. „CAPM vs. Bulk Flow - reliable and efficient prediction of forces and leakage for annular gaps in pumps“. In: *Proceedings of the 4th International Rotating Equipment Conference*. Hrsg. von VDMA Pumps + Systems. 2019.
- [86] L. A. San Andres. „Analysis of Variable Fluid Properties, Turbulent Annular Seals“. In: *Journal of Tribology* 113.4 (1991), S. 694–702.
- [87] L. San Andrés und A. Delgado. „A Novel Bulk-Flow Model for Improved Predictions of Force Coefficients in Grooved Oil Seals Operating Eccentrically“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.5 (2012), S. 052509-052509–10.
- [88] L. San Andrés, T. Wu, H. Maeda und O. Tomoki. „A Computational Fluid Dynamics Modified Bulk Flow Analysis for Circumferentially Shallow Grooved Liquid Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 140.1 (2018).
- [89] J. K. Scharrer. „A Comparison Of Experimental And Theoretical Results For Labyrinth Gas Seals“. Diss. Texas A&M University, 1987.
- [90] H. Schlichting und K. Gersten. *Grenzschicht-Theorie*. 10., überarbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

- [91] W. H. Schwarz und W. P. Cosart. „The two-dimensional turbulent wall-jet“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 10.04 (1961), S. 481.
- [92] M. Spirig. „Einfluss der Kammerströmung auf die strömungsbedingten Kräfte im endlich langen Spalt einer hydraulischen Labyrinthdichtung und Ein Beitrag zur Identifikation von auslenkungsabhängigen, rotordynamischen Spaltkoeffizienten mittels Druck- und Positionsmessung“. Diss. ETH Zurich, 1999.
- [93] J. H. Spurk. *Aufgaben zur Strömungslehre*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg und s.l.: Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [94] J. H. Spurk. *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*. Berlin und Heidelberg: Springer, 1992.
- [95] J. H. Spurk und N. Aksel. *Fluid Mechanics*. 2nd ed. 2008. Berlin, Heidelberg und Cham: Springer Berlin Heidelberg und Springer International Publishing AG, 2008.
- [96] E. Storteig. „Dynamic characteristics and leakage performance of liquid annular seals in centrifugal pumps“. Dissertation. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, NTNU, 1999.
- [97] A. Z. Szeri. *Fluid film lubrication: Theory and design*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [98] J. A. Tichy und S.-H. Chen. „Plane Slider Bearing Load Due to Fluid Inertia—Experiment and Theory“. In: *Journal of Tribology* 107.1 (1985), S. 32–38.
- [99] Tsameret und Steinberg. „Competing states in a Couette-Taylor system with an axial flow“. In: *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics* 49.5 (1994), S. 4077–4086.
- [100] J. P. van Doormaal und G. D. Raithby. „Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows“. In: *Numerical Heat Transfer* 7.2 (1984), S. 147–163.
- [101] M. Vannarsdall und D. W. Childs. „Static and Rotordynamic Characteristics for a New Hole-Pattern Annular Gas Seal Design Incorporating Larger Diameter Holes“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 136.2 (2014), S. 022507.
- [102] A. Verhoff. *The Two-Dimensional, Turbulent Wall Jet With And Without An External Free Stream*. 1963.
- [103] T. Wu und L. San Andrés. „Pump Grooved Seals: A Computational Fluid Dynamics Approach to Improve Bulk-Flow Model Predictions“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.10 (2019).

- [104] H. R. Wyssmann, T. C. Pham und R. J. Jenny. „Prediction of Stiffness and Damping Coefficients for Centrifugal Compressor Labyrinth Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 106.4 (1984), S. 920–926.
- [105] Y. Yamada, K. Nakabayashi und K. Maeda. „Pressure Drop Measurements of the Flow through Eccentric Cylinders with Rotating Inner Cylinders“. In: *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers* 35.270 (1969), S. 331–338.
- [106] X. Yan, K. He, J. Li und Z. Feng. „Numerical Investigations on Rotordynamic Characteristic of Hole-Pattern Seals With Two Different Hole-Diameters“. In: *Journal of Turbomachinery* 137.7 (2015), S. 071011.
- [107] J. Yang und L. San Andrés. „On the Influence of the Entrance Section on the Rotordynamic Performance of a Pump Seal With Uniform Clearance: A Sharp Edge Versus A Round Inlet“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.3 (2019).
- [108] M. Zhang, X.-f. Wang, S.-l. Xu und W. Wang. „Numerical Simulation of the Flow Field in Circumferential Grooved Liquid Seals“. In: *Advances in Mechanical Engineering* 5 (2013), S. 797201.
- [109] X. Zhang, M. Yin und H. Sun. „Establishment and solution of governing equation for plana-grooved liquid seals based on three-control-volume theory“. In: *Industrial Lubrication and Tribology* 72.3 (2019), S. 257–266.
- [110] N. Zirkelback und L. San Andres. „Bulk-Flow Model for the Transition to Turbulence Regime in Annular Pressure Seals“. In: *Tribology Transactions* 39.4 (1996), S. 835–842.

Anhang A

Modellerweiterungen des CAPM

A.1 Modell für laminare Strömung

Ein Modell im Rahmen des CAPM mit quadratischen Ansatzfunktionen der Geschwindigkeitsprofile für laminare Strömung wurde vom Autor der vorliegenden Arbeit bereits veröffentlicht¹, und wird hier der Vollständigkeit halber nochmals wiedergegeben. Zur Herleitung aufbauend auf den Grundgleichungen des CAPM (2.6) bis (2.8) werden zunächst die spezifischen Volumenströme bezogen auf die jeweilige Einheitslänge

$$\dot{V}_\varphi(\varphi, z) := h \int_0^1 w_\varphi \, ds \quad \text{und} \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{V}_z(\varphi, z) := \phi h \int_0^1 c_z \, ds \quad (\text{A.2})$$

als charakteristische Flussgrößen definiert. Diese Form ist auch bei der Herleitung der Reynolds'schen Differentialgleichung anzutreffen, vgl. Spurk und Aksel². Die spezifischen Volumenströme können in die mittleren Geschwindigkeiten, also Bulk-Geschwindigkeiten, mittels

$$\bar{w}_\varphi(\varphi, z) = \frac{\dot{V}_\varphi}{h} \quad \text{und} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{c}_z(\varphi, z) = \frac{1}{\phi} \frac{\dot{V}_z}{h} \quad (\text{A.4})$$

¹ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

² SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

umgerechnet werden.

In axialer Richtung wird von einer druckgetriebenen Poiseuille-Strömung ausgegangen. In der Umfangsrichtung liegt eine überlagerte Couette-Poiseuille-Strömung aufgrund der Wandgeschwindigkeit und des Druckgradienten durch die Exzentrizität vor. Unter Vernachlässigung der axialen Grenzschichtentwicklung werden im gesamten Spalt quadratische Ansatzfunktion über der Spalthöhe abhängig von der Spaltkoordinate s der Form

$$\begin{aligned} w_\varphi &= a_{\varphi,2} s^2 + a_{\varphi,1} s + a_{\varphi,0} \quad \text{und} \\ c_z &= a_{z,2} s^2 + a_{z,1} s + a_{z,0} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

verwendet, was als allgemeine Praxis bei der Herleitung von integro-differentiellen Modellen für laminare Strömung bezeichnet werden kann. Die Randbedingungen an den begrenzenden Spaltwänden lauten

$$\text{Stator :} \quad s = 0 \quad w_\varphi = -\omega \quad c_z = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Rotor :} \quad s = 1 \quad w_\varphi = 1 - \omega \quad c_z = 0 \quad (\text{A.7})$$

und damit können die Geschwindigkeitsprofile zu

$$\begin{aligned} w_\varphi(s, \varphi, z) &= \left(-6 \frac{\dot{V}_\varphi}{h} - 6\omega + 3 \right) s^2 \\ &+ \left(6 \frac{\dot{V}_\varphi}{h} + 6\omega - 2 \right) s - \omega \quad \text{und} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$c_z(s, \varphi, z) = \frac{6 \dot{V}_z}{\phi h} (-s^2 + s) . \quad (\text{A.9})$$

bestimmt werden. Die Wandschubspannungsterme für ein Newton'sches Fluid können analytisch aus den Ableitungen der Geschwindigkeitsprofile an den Wänden ermittelt werden und lauten

$$\tau_{s\varphi}|_0^1 = -\frac{24}{Re} \frac{1}{h} \left(\frac{\dot{V}_\varphi}{h} + \omega - \frac{1}{2} \right) \quad \text{und} \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_{sz}|_0^1 = -\frac{24}{Re} \frac{\dot{V}_z}{h^2} . \quad (\text{A.11})$$

Mit den Geschwindigkeitsprofilen (A.8) und (A.9) können die Integrale in den Grundgleichungen des CAPM (2.6) bis (2.8) gelöst werden. Zusammen mit den Schubspannungstermen (A.10) und (A.11) erhalten wir so die neuen

Grundgleichungen des laminaren Modells zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{L} \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} \\ = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (I_{\varphi\varphi 1} \dot{V}_\varphi + I_{\varphi\varphi 2}) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} (I_{\varphi z 1} \dot{V}_\varphi + I_{\varphi z 2}) \\ = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{12}{\psi Re} \frac{1}{h} \left(\frac{\dot{V}_\varphi}{h} + \omega - \frac{1}{2} \right) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial \varphi} (I_{z\varphi} \dot{V}_z) + \frac{\phi^2}{L} \frac{\partial}{\partial z} (I_{zz 1} \dot{V}_z) \\ = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{12}{\psi Re} \frac{\dot{V}_z}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

mit den Integralkoeffizienten

$$I_{\varphi\varphi 1} = \frac{1}{5} \left(6 \frac{\dot{V}_\varphi}{h} + 2\omega - 1 \right), \quad (\text{A.15})$$

$$I_{\varphi\varphi 2} = \frac{h}{5} \left(\omega^2 - \omega + \frac{2}{3} \right), \quad (\text{A.16})$$

$$I_{\varphi z 1} = \frac{6}{5} \frac{\dot{V}_z}{\phi h}, \quad (\text{A.17})$$

$$I_{\varphi z 2} = \frac{1}{5} \frac{\dot{V}_z}{\phi} \left(\omega - \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.18})$$

$$I_{z\varphi} = \frac{1}{5} \phi \left(6 \frac{\dot{V}_\varphi}{h} + \omega - \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.19})$$

$$I_{zz} = \frac{6}{5} \frac{1}{\phi^2} \frac{\dot{V}_z}{h}. \quad (\text{A.20})$$

In jeder Iteration des Lösungsalgorithmus werden zunächst die Integralkoeffizienten (A.15) bis (A.20) und die Terme auf der rechten Seite berechnet, wofür die Felder \dot{V}_φ und \dot{V}_z der vorherigen Iteration genutzt werden. Unter diesem Vorgehen können die eigentlich nichtlinearen Gleichungen (A.13) und (A.14) als linear aufgefasst werden und sind damit von der notwendigen Form zur Lösung mittels SIMPLEC- bzw. Finite-Differenzen-Verfahren.

Herleitung der Reynolds'schen Differentialgleichung

Die Reynolds'sche Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie (RDGL) ist allseits bekannt, vgl. Spurk und Aksel¹ oder Szeri². Hier soll die Gleichung jedoch nochmals formell aus dem laminaren CAPM hergeleitet werden, wobei wir den bekannten Schritten folgen. Dafür muss zunächst eine andere dimensionslose Definition des Drucks gewählt werden, die auf einer viskosen Spannung statt einer Trägheitsspannung beruht³:

$$p' := \psi^2 \frac{\tilde{p}}{\tilde{\mu}\tilde{\Omega}}. \quad (\text{A.21})$$

Wir erhalten mit dieser neuen Definition für die beiden Druckterme in den Gleichungen (A.13) und (A.14)

$$-\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{h}{\psi Re} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad (\text{A.22})$$

$$-\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{h}{\psi Re L} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (\text{A.23})$$

während alle anderen Terme gleich bleiben. Anschließend werden die Impulsgleichungen mit dem Trägheitsparameter ψRe multipliziert und es wird der Grenzübergang $\psi Re \rightarrow 0$ durchgeführt, wobei alle konvektiven Trägheitsterme verschwinden. Hätten wir nicht p' aus der Definition (A.21) verwendet, wären auch die Druckterme verschwunden. Nun tauschen wir den dimensionslosen Druck wieder zur ursprünglichen Variante p und erhalten

$$0 = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{12}{\psi Re} \frac{1}{h} \left(\dot{V}_\varphi + \omega - \frac{1}{2} \right) \quad \text{und} \quad (\text{A.24})$$

$$0 = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{12}{\psi Re} \frac{\dot{V}_z}{h^2}, \quad (\text{A.25})$$

was quasi die gleichen Impulsgleichungen wie zuvor sind, jedoch sind alle Integralkoeffizienten I (A.15) bis (A.20) formal zu Null gesetzt. Nun bilden wir die Ableitungen in den beiden entsprechenden Raumrichtungen und erhalten

$$\frac{\partial \dot{V}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\psi Re}{24} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{1}{2} - \omega \right) \frac{\partial h}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} = -\frac{\psi Re}{24} \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (\text{A.27})$$

¹ SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

² SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 2005)

³ vgl. Sommerfeldzahl (2.21)

Diese beiden Gleichungen können in die Kontinuitätsgleichung (A.12) eingesetzt werden, was zu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{24}{\psi Re} \frac{1}{h^3} \left(\frac{1}{2} - \omega \right) \frac{\partial h}{\partial \varphi} \quad (\text{A.28})$$

führt. Mit $\omega = 0$ und $\gamma = 0$ kann die Gleichung weiter vereinfacht werden zu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{h} \frac{dh}{d\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{12}{\psi Re} \frac{1}{h^3} \frac{dh}{d\varphi}, \quad (\text{A.29})$$

was die klassische Reynolds'sche Differentialgleichung für Gleitlager darstellt. Diese formale Herleitung der RDGL ist zunächst eine Verifizierung der oben dargestellten laminaren Form des CAPM, zeigt außerdem aber auch, dass das CAPM tatsächlich als übergeordnetes Modell angesehen werden kann, das die RDGL als Grenzfall für vernachlässigbare Fluidträchtigkeit mit einschließt.

Die lineare partielle Differentialgleichung (A.29) kann leicht diskretisiert und numerisch mittels Finite-Differenzen-Verfahren gelöst werden. Einlass- und Auslassrandbedingungen werden lediglich für den Druck p benötigt. Für klassische Gleitlager kann hier an beiden Rändern $p = 0$ gesetzt werden. Weitere Randbedingungen an \dot{V}_φ und \dot{V}_z bzw. \bar{c}_φ und \bar{c}_z können nicht gestellt werden.

Ist das Druckfeld im Spalt aus der RDGL berechnet, können die Druckgradienten nachträglich ebenfalls numerisch bestimmt werden. Damit dienen die Gleichungen (A.24) und (A.25) als Bestimmungsgleichungen für die Geschwindigkeitsfelder. Für diese gilt die unbedingte Proportionalität

$$\bar{c}_\varphi - \frac{1}{2} \propto \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad (\text{A.30})$$

$$\bar{c}_z \propto \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{A.31})$$

Für klassische Gleitlager wird an den beiden Rändern bei $z = 0$ und $z = 1$ üblicherweise der gleiche konstante Umgebungsdruck angenommen, d. h. $\Delta p = 0$ und somit $\phi = 0$. Bei mediengeschmierten Gleitlagern liegt jedoch oft auch eine axiale Durchströmung vor, d. h. $\Delta p > 0$ und $\phi > 0$. In diesem Fall muss der Lomakin-Effekt mittels Bernoulli'scher Gleichung und Druckverlustkoeffizient am Einlass berücksichtigt werden wie in Kapitel 3 beschrieben. Für den stationären Fall mit $\omega = 0$ dienen dann die Bernoulli'sche Gleichung 3.9 und der Verlustkoeffizient 3.10 als Randbedingung am Einlass. Die gekoppelte Lösung muss iterativ erfolgen und kann als nichtlineares

Minimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \text{abs} \left[\bar{C}_{\varphi, \text{Plenum}}^2 + \Delta p - p - (1 + \zeta) (\bar{c}_\varphi^2 + \phi^2 \bar{c}_z^2) \right] \\ \text{s. t.} \quad & \text{Reynolds'sche Differentialgleichung (A.29)} \\ & \text{und Gleichungen (A.24), (A.25), (A.3), (A.4)} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

geschrieben werden, das mit einem geeigneten numerischen Verfahren, bspw. einem Trust-Region-Algorithmus, gelöst werden kann.

A.2 Herleitung typischer Bulk-Flow-Modelle

Wie von Lang¹ bereits teilweise gezeigt, beinhaltet das CAPM auch typische Bulk-Flow-Modelle. Dies soll hier nochmals aufgearbeitet und erweitert werden. Bulk-Flow-Modelle basieren auf Nutzung der über der Spalthöhe gemittelten Geschwindigkeiten

$$\bar{w}_\varphi := \int_0^1 w_\varphi \, ds \quad \text{und} \quad (\text{A.33})$$

$$\bar{c}_z := \int_0^1 c_z \, ds \quad (\text{A.34})$$

sowie der einfachsten Ansatzfunktion im Sinne des CAPM von konstant 1. Damit gilt

$$w_\varphi(s, \varphi, z) = \bar{w}_\varphi(\varphi, z) \quad \text{und} \quad (\text{A.35})$$

$$c_z(s, \varphi, z) = \bar{c}_z(\varphi, z). \quad (\text{A.36})$$

und aus den Grundgleichungen des CAPM (2.6) bis (2.8) entstehen damit direkt die Bulk-Flow-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (h \bar{w}_\varphi) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} (h \bar{c}_z) = 0, \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (h \bar{w}_\varphi^2) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} (h \bar{w}_\varphi \bar{c}_z) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\psi} \tau_{s\varphi}|_0^1 \quad \text{und} \quad (\text{A.38})$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial \varphi} (h \bar{w}_\varphi \bar{c}_z) + \frac{\phi^2}{L} \frac{\partial}{\partial z} (h \bar{c}_z^2) = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2\psi} \tau_{sz}|_0^1. \quad (\text{A.39})$$

Anzumerken ist, dass die Kontinuitätsgleichung (A.37) unter Nutzung der mittleren Geschwindigkeiten äquivalent zur Ausgangsgleichung (2.6) ist. In

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017, ([60], 2018)*

den konvektiven Termen der Impulsgleichungen entstehen jedoch Abweichungen der Integralwerte, die sich insbesondere bei niedrigeren Reynoldszahlen aufgrund der eher bauchigen Geschwindigkeitsprofile bemerkbar machen können.

Das Gleichungssystem (A.37) bis (A.39) entspricht einer allgemein typischen Form eines zweidimensionalen Bulk-Flow-Modells, das so bspw. auch von San Andres¹ genutzt wurde. Werden die Ableitungen aufgelöst, kann unter Einsetzen der Kontinuitätsgleichung in die Impulsgleichungen das System

$$\frac{\partial \bar{w}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\phi}{L} \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial z} = -\frac{\bar{w}_\varphi}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\phi}{L} \frac{\bar{c}_z}{h} \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (\text{A.40})$$

$$h \left(\bar{w}_\varphi \frac{\partial \bar{w}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\phi}{L} \bar{c}_z \frac{\partial \bar{w}_\varphi}{\partial z} \right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\psi} \tau_{s\varphi}|_0^1 \quad \text{und} \quad (\text{A.41})$$

$$\phi h \left(\bar{w}_\varphi \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial \varphi} + \frac{\phi}{L} \bar{c}_z \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial z} \right) = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2\psi} \tau_{sz}|_0^1. \quad (\text{A.42})$$

gewonnen werden, das analog auch in der Herleitung von Childs² (dort Gl. 4.19) angegeben wird. Das eindimensionale Bulk-Flow-Modell von Childs² basiert auf einem linearen Störansatz mit der relativen Exzentrizität ε als kleinen Störparameter. Damit lauten die beeinflussten Größen

$$h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad (\text{A.43})$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1, \quad (\text{A.44})$$

$$\bar{w}_\varphi = \bar{w}_{\varphi,0} + \varepsilon \bar{w}_{\varphi,1} \quad \text{und} \quad (\text{A.45})$$

$$\bar{c}_z = \bar{c}_{z,0} + \varepsilon \bar{c}_{z,1}. \quad (\text{A.46})$$

Wird der Störansatz in das Gleichungssystem (A.40) bis (A.42) eingesetzt, können unabhängige Gleichungen nullter Ordnung $\propto \varepsilon^0 = 1$ für das ungestörte, konzentrische System ($\partial/\partial\varphi = 0$), und Gleichungen erster Ordnung $\propto \varepsilon^1$ für das linearisierte, gestörte System hergeleitet werden. Die Gleichungen nullter Ordnung lauten dann

$$h_0 \bar{c}_{z,0} = 1, \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{d\bar{w}_{\varphi,0}}{dz} = \frac{L}{2\psi\phi} \tau_{s\varphi,0}|_0^1 \quad \text{und} \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{dp_0}{dz} = 2\phi^2 \frac{1}{h_0^3} \frac{dh_0}{dz} + \frac{L}{\psi h_0} \tau_{sz,0}|_0^1. \quad (\text{A.49})$$

¹ SAN ANDRES, „Analysis of Variable Fluid Properties, Turbulent Annular Seals“, ([86], 1991)

² CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([15], 1993)

Es handelt sich um zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die über die Umfangsgeschwindigkeit in den Schubspannungstermen gekoppelt sind. Sie beschreiben im konzentrischen Fall den axialen Druckabfall und die axiale Entwicklung der mittleren Umfangsgeschwindigkeit. Unter Berücksichtigung der unterschiedlichen dimensionslosen Schreibweise ist die Übereinstimmung mit den bekannten Gleichungen von Childs (dort Gl. 4.28) offensichtlich. Das System der Gleichungen erster Ordnung ist von den Größen nullter Ordnung abhängig und ist schließlich gegeben mit

$$h_0 \frac{\partial \bar{w}_{\varphi,1}}{\partial \varphi} + \bar{w}_{\varphi,0} \frac{\partial h_1}{\partial \varphi} + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_1}{h_0} + h_0 \bar{c}_{z,1} \right) = 0, \quad (\text{A.50})$$

$$\bar{w}_{\varphi,0} \frac{\partial \bar{w}_{\varphi,1}}{\partial \varphi} + \frac{\phi}{L} \left[\left(\frac{h_1}{h_0^2} + \bar{c}_{z,1} \right) \frac{d\bar{w}_{\varphi,0}}{dz} + \frac{1}{h_0} \frac{\partial \bar{w}_{\varphi,1}}{\partial z} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\psi h_0} \tau_{s\varphi,1} \Big|_0^1 \text{ und} \quad (\text{A.51})$$

$$\phi \bar{w}_{\varphi,0} \frac{\partial \bar{c}_{z,1}}{\partial \varphi} + \frac{\phi^2}{L} \frac{1}{h_0} \left[\frac{\partial \bar{c}_{z,1}}{\partial z} - \left(\frac{h_1}{h_0^3} + \frac{\bar{c}_{z,1}}{h_0} \right) \frac{dh_0}{dz} \right] = -\frac{1}{2L} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{h_1}{h_0} \frac{dp_0}{dz} \right) + \frac{1}{2\psi h_0} \tau_{sz,1} \Big|_0^1. \quad (\text{A.52})$$

Die beiden Gleichungssysteme (A.47) bis (A.49) und (A.50) bis (A.52) sind allgemein für beliebige Ausdrücke für die Schubspannungsterme gültig. Im Zusammenhang mit dem Störansatz müssen für das spezifische Schubspannungsmodell analog noch linearisierte Ausdrücke nullter und erster Ordnung hergeleitet werden.

Zusammenfassend ist damit jedoch gezeigt, dass das CAPM als übergeordnetes Modell auch gebräuchliche ein- und zweidimensionale Bulk-Flow-Modelle umfasst.

A.3 Verfahren bei fehlender Druckdifferenz bzw. Leckage

Das CAPM basiert auf der Annahme, dass eine axiale Druckdifferenz $\Delta p > 0$ über einem Spalt anliegt, die einen Leckagevolumenstrom und somit eine Durchflusszahl $\phi > 0$ verursacht. Dies ist für Dichtspalte immer und medien-geschmierte Gleitlager häufig der Fall. Klassische Gleitlager dagegen werden jedoch auch oft ohne Druckdifferenz betrieben, d. h. $\Delta p = 0$ und somit $\phi = 0$. Zusammen mit den Grundgleichungen des CAPM (2.6) bis (2.8) würde dies

generell zu $c_z = 0$ im ganzen Spalt führen, was für den konzentrischen Fall aus den Gleichungen direkt ersichtlich ist.

Anhand der Reynolds'schen Differentialgleichung (A.29) lässt sich jedoch zeigen, dass dies falsch sein muss. Bei Gleichdruck über einen endlichen Spalt entsteht in axialer Richtung ein nach unten offenes, in grober Näherung parabelförmiges Druckprofil, bei dem zwar bei $z = 0$ und $z = 1$ der gleiche Umgebungsdruck ($p = 0$) herrscht, aber ein ausgeprägtes Druckmaximum bei ca. $z = 0.5$ vorliegt. Außer am Extrempunkt gilt also $\partial p / \partial z \neq 0$ und aufgrund von Gleichung (A.31), $c_z \propto \partial p / \partial z$, muss im Allgemeinen auch $c_z \neq 0$ gelten.

Es zeigt sich also, dass für den Fall bei Gleichdruck die Definition der dimensionslosen Axialgeschwindigkeit $c_z := \tilde{c}_z / (\phi \tilde{\Omega} \tilde{R})$ offensichtlich ungeeignet ist. Das Problem wird gelöst, wenn stattdessen die Definition

$$c'_z := \frac{\tilde{c}_z}{\tilde{\Omega} \tilde{R}} \quad (\text{A.53})$$

verwendet wird. Damit ergeben sich die dimensionslosen beschreibenden Gleichungen zu

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 w_\varphi \, ds \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c'_z \, ds \right) = 0, \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 w_\varphi^2 \, ds \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 w_\varphi c'_z \, ds \right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\psi} \tau_{s\varphi}|_0^1, \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 w_\varphi c'_z \, ds \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c'^2_z \, ds \right) = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2\psi} \tau_{sz}|_0^1. \quad (\text{A.56})$$

Mit allen zusätzlich benötigten Gleichungen ist gleich zu verfahren. Die neuen Formen können ganz einfach aus den sonstigen in dieser Arbeit angegebenen Gleichungen erzeugt werden, indem statt c_z oder \bar{c}_z nun c'_z oder \bar{c}'_z geschrieben wird und $\phi = 1$ gesetzt wird¹.

Spezielle Randbedingungen für \bar{c}'_z sind nicht weiter notwendig, da sich die Werte bei der numerischen Lösung aus dem inneren des Feldes ergeben. Im laminaren Fall unter Vernachlässigung der Trägheitsterme ergibt sich aus Gleichung (A.13) wegen $p = \text{konst.}$ an den Rändern

$$\bar{c}'_\varphi = \frac{1}{2} - \omega. \quad (\text{A.57})$$

Diese Gleichung sollte jedoch ebenso eine gute Näherung bei Berücksichtigung der Trägheit und auch für den turbulenten Fall sein.

In Abbildung A.1 ist zur Verifizierung der Tragkraftverlauf F über der relativen Exzentrizität ε für die beiden Reynoldszahlen $Re = \{335; 670\}$

¹ Dies kann auch genauso in einer Software-Implementierung des CAPM erfolgen.

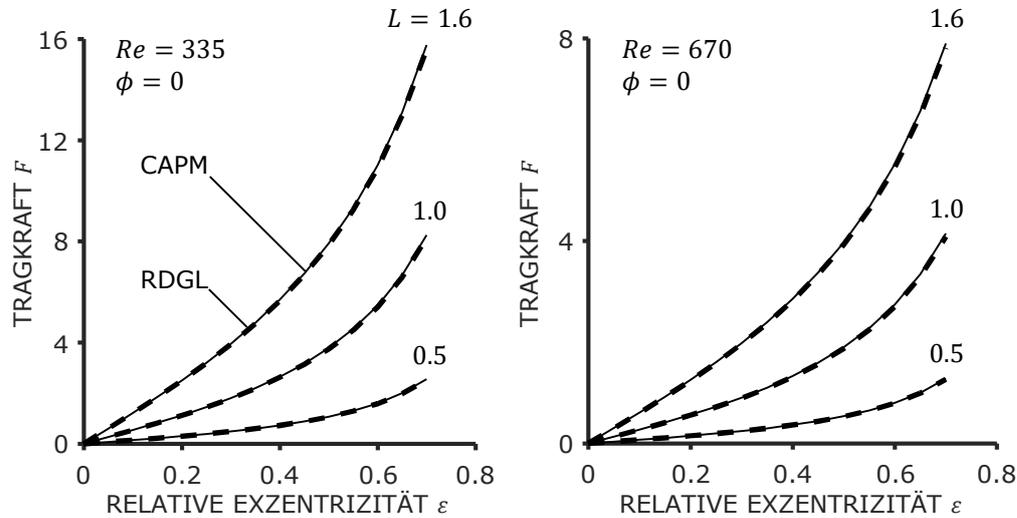


Abbildung A.1 – Tragkraftverlauf über relativer Exzentrizität von CAPM und RDGL bei Gleichdruck $\Delta p = \phi = 0$.

und die drei Längen $L = \{0.5; 1.0; 1.6\}$ aufgetragen. Das relative Spaltspiel beträgt bei allen Fällen $\psi = 1.6 \times 10^{-3}$. Die dicke gestrichelte Linie stellt den Lösungsverlauf der Reynolds'schen Differentialgleichung (RDGL) dar und die dünne durchgezogene Linie das CAPM mit den o. g. Modifikationen. Es ist zu erkennen, dass die beiden Kurven für alle Fälle genau aufeinander liegen. Dies beweist zum einen, dass das CAPM mit minimalen Modifikationen auch für $\Delta p = \phi = 0$ geeignet ist. Zum anderen zeigt es, dass der Einfluss der Trägheit für diese Fälle vernachlässigbar ist. Dies ist jedoch für $\phi > 0$ selbst im laminaren Fall keinesfalls so¹.

A.4 Unterscheidung von Strömungsregimes der Spaltströmung

Wie immer schlägt die Strömung vom laminaren ins turbulente Regime um. Es können jedoch zusätzlich auch Taylor-Wirbel auftreten, die die Unterteilung weiter verkomplizieren. Von Robrecht und Pelz¹ wurde detailliert beschrieben, wie die verschiedenen Strömungsregimes in Gleitlagern und Dichtspalten unterschieden werden können. Der Vollständigkeit halber werden die Ausführungen hier nochmals wiedergegeben.

¹ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

Die Änderung der o. g. Regimes verursacht Änderungen in den Geschwindigkeitsprofilen und im Reibungsverhalten der Strömung. Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung wird durch eine bestimmte kritische Reynoldszahl Re_{krit} markiert. Abhängig von anderen Bedingungen können Taylor-Couette-Wirbelsysteme entstehen, was durch eine kritische Taylorzahl Ta_{krit} ausgedrückt wird. Diese Wirbel können sowohl bei laminarer als auch turbulenter Strömung auftreten^{1,2}. Die Literatur ergibt leider keine allgemein akzeptierten und gut begründeten Grenzwerte. Aus diesem Grund ist für das CAPM eine eigene Systematik entwickelt worden³, die im Folgenden dargelegt werden soll.

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung erfolgt nicht schlagartig, sondern kontinuierlich und stellt einen komplexen Prozess dar. Für Rohrströmung ist die kritische Reynoldszahl wie allseits bekannt $Re_{\text{krit}} \approx 2300$ und die Strömung bleibt weitestgehend laminar für $Re_{\text{krit}} < 2000$ auch bei stärkeren Störungen⁴. Für ebene druckgetriebene Kanalströmung ist die kritische Reynoldszahl für vollständig turbulente Strömung mit $Re_{\text{krit}} \approx 2000$ gegeben⁵. Für eine ebene Couette-Strömung kann ein ähnlicher Wert von $Re_{\text{krit}} \approx 2300$ angenommen werden⁶.

Bei der Spaltströmung von Gleitlagern und Dichtspalten muss im Allgemeinen jedoch von druckgetriebener Strömung in axialer Richtung und gleichzeitig einer überlagerten Druck-Schleppströmung in Umfangsrichtung ausgegangen werden. Szeri⁷ gibt für diesen Fall einen Richtwert von $Re_{\text{krit}} \approx 2000$ für das Auftreten von Turbulenz in Gleitlagern. Reinhardt und Lund⁸ sowie Banerjee u. a.⁹ sowie außerdem Chen und Chen¹⁰ nannten in ihren Arbeiten einen ungefähren Grenzbereich für den Übergang zur Turbulenz von

¹ KAYE UND ELGAR, „Modes of Adiabatic and Diabatic Fluid Flow in an Annulus With an Inner Rotating Cylinder“, ([49], 1958)

² KOSCHMIEDER, „Turbulent Taylor vortex flow“, ([51], 1979)

³ ROBRECHT UND PELZ, „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“, ([84], 2022)

⁴ SPURK UND AKSEL, *Fluid Mechanics*, ([95], 2008)

⁵ CARLSON, WIDNALL UND PEETERS, „A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow“, ([11], 1982)

⁶ BRUNETIÈRE, „A Modified Turbulence Model for Low Reynolds Numbers: Application to Hydrostatic Seals“, ([9], 2005)

⁷ SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 2005)

⁸ REINHARDT UND LUND, „The Influence of Fluid Inertia on the Dynamic Properties of Journal Bearings“, ([81], 1975)

⁹ BANERJEE U. A., „A nonlinear theory of hydrodynamic lubrication“, ([5], 1986)

¹⁰ CHEN UND CHEN, „The influence of fluid inertia on the operating characteristics of finite journal bearings“, ([12], 1989)

$Re_{\text{krit}} \approx 1000$ bis 1500. Von Dousti u. a.¹ wurde ein noch niedrigerer Bereich von $Re_{\text{krit}} \approx 500$ bis 1000 angegeben. Brunetière und Tournerie² nannten einen Wert von $Re_{\text{krit}} \approx 1000$.

Keiner der bisher erwähnten Autoren gab eine Begründung oder eine Referenz für die genannten Werte an. Es kann aufgrund der unterschiedlichen und teilweise recht niedrigen Werte auch vermutet werden, dass hier möglicherweise auch der Übergang zur Turbulenz mit dem Auftreten von Taylor-Wirbeln vermischt wurde. Zirkelback und San Andres³ bezogen sich dagegen auf Moody-Diagramme für Rohrströmung und nannten einen ungefähren Bereich für das Übergangsgebiet mit $Re \approx 1000$ bis 3000. Brunetière⁴ argumentierte ähnlich auf der Basis von empirischen Reibungsfaktordaten, jedoch für ebene Kanalströmung.

Es ist zudem anzumerken, dass offenbar unbekannt ist, ob eine Exzentrizität einen stabilisierenden oder destabilisierenden Einfluss auf die Spaltströmung und in Konsequenz auf die kritischen Grenzwerte hat. Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass genaue und allgemein akzeptierte Grenzwerte nicht bekannt sind.

Es ist außerdem wichtig, die überlagerte Axialströmung bei medien geschmierten Gleitlagern oder Dichtspalten auch bei diesen Überlegungen angemessen zu berücksichtigen. Die axiale Strömung wird durch die Durchflusszahl ϕ charakterisiert. Wir greifen dafür zurück auf die axiale Reynoldszahl ϕRe und die effektive Reynoldszahl (2.2), die hier nochmal aufgeführt wird⁵:

$$Re_{\text{eff}} := Re \sqrt{1 + \phi^2}.$$

Tatsächlich müssen zudem zwei kritische Grenzwerte definiert werden. Zum einen ein unterer, unter dem die Strömung vollständig laminar ist und zum anderen ein oberer, ab dem sie vollständig turbulent ist. Zwischen beiden Grenzwerten befindet sich das Übergangsgebiet. Aus pragmatischer Sicht und im Sinne der integro-differentiellen Modelle ist der Übergangsprozess an sich und auch der Anteil oder Ort von eher laminaren oder eher turbulenten Strömungsgebieten im Spalt wenig von Interesse. Wichtig ist viel eher, wie groß die Abweichungen zum angenommenen Reibungsmodell sind.

¹ DOUSTI U. A., „An extended Reynold equation applicable to high reduced Reynolds number operation of journal bearings“, ([24], 2016)

² BRUNETIÈRE UND TOURNERIE, „Finite Element Solution of Inertia Influenced Flow in Thin Fluid Films“, ([10], 2007)

³ ZIRKELBACK UND SAN ANDRES, „Bulk-Flow Model for the Transition to Turbulence Regime in Annular Pressure Seals“, ([110], 1996)

⁴ BRUNETIÈRE, „A Modified Turbulence Model for Low Reynolds Numbers: Application to Hydrostatic Seals“, ([9], 2005)

⁵ Siehe in diesem Zusammenhang auch Zirkelback und San Andres ([110], 1996).

Entsprechend dieser Ausführungen und basierend auf Reibungsfaktorverläufen von ebener Kanalströmung teilen wir die Strömungsregimes im Sinne von pragmatischen Richtwerten folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned}
 Re_{\text{eff}} < 1500 &: \text{ vollständig laminar;} \\
 1500 \leq Re_{\text{eff}} < 1800 &: \text{ Übergang, laminares Reibungsmodell} \\
 &\quad \text{aber ggf. akzeptabel;} \\
 1800 \leq Re_{\text{eff}} < 2300 &: \text{ Übergang, turbulentes Reibungsmodell} \\
 &\quad \text{aber ggf. akzeptabel;} \\
 2300 \leq Re_{\text{eff}} &: \text{ vollständig turbulent.}
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

Dabei besteht natürlich zusätzlich die Möglichkeit, ein speziell für das Übergangsbereich ausgelegtes Reibungsmodell zu verwenden.

Ganz unabhängig von diesen Überlegung zum Übergang zur Turbulenz ist zusätzlich die Möglichkeit des Auftretens von Taylor-Wirbeln zu berücksichtigen. In seinem Werk bezieht sich Szeri¹ auf die Arbeit von Drazin und Reid² und gibt die kritische Taylorzahl

$$Ta_{\text{krit}} = 1695 \tag{A.59}$$

an, ab der die Couette-Strömung in einem engen Ringspalt bei Überschreiten in eine Taylor-Wirbelströmung umschlägt. Die Taylorzahl kann in der Nomenklatur der vorliegenden Arbeit als Reynoldszahl ausgedrückt werden mit

$$Re = \sqrt{\frac{\psi + 2}{2\psi}} Ta \approx \sqrt{\frac{Ta}{\psi}} \tag{A.60}$$

für $\psi \ll 1$. Damit kann die kritische Taylorzahl (A.59) äquivalent als kritische Reynoldszahl in Abhängigkeit des relativen Spaltspiels für einen konzentrischen Spalt ausgedrückt werden:

$$Re_{\text{krit}} \approx 41.2 \psi^{-1/2}. \tag{A.61}$$

Für den exzentrischen Spalt bezieht sich Szeri¹ auf die Arbeit von DiPrima und Stuart³ und gibt die Gleichung

$$Ta_{\text{krit}} = 1695 (1 + 1.162 \psi) (1 + 2.624 \varepsilon^2) \tag{A.62}$$

¹ SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 2005)

² DRAZIN UND REID, *Hydrodynamic stability*, ([25], 1984)

³ DIPRIMA UND STUART, „Non-local effects in the stability of flow between eccentric rotating cylinders“, ([23], 1972)

an, die natürlich ebenso als kritische Reynoldszahl mittels Gleichung (A.60) ausgedrückt werden kann. Für $\varepsilon = 0$ liefert Gleichung (A.62) den gleichen Wert wie Gleichung (A.61). Es zeigt sich also, dass ein engerer Spalt und eine höhere Exzentrizität die Spaltströmung stabilisieren.

Zudem ist bekannt, dass eine Couette-Strömung in einem Ringspalt im Allgemeinen deutlich stabilisiert wird, wenn eine überlagerte Axialströmung vorliegt, sodass Taylor-Wirbel erst bei höheren Reynoldszahlen auftreten¹. Kaye und Elgar¹ konnten aufgrund ihrer Experimente die Grenzen der Übergänge von vollständig laminar, zu laminaren Taylor-Wirbeln, zu turbulenten Taylor-Wirbeln, zu vollständiger Turbulenz ermitteln. Ab einem Wert der axialen Reynoldszahl von ungefähr $\phi Re > 500$ treten gar keine Taylor-Wirbel auf und die Strömung schlägt direkt von laminar zu turbulent um. Die Ergebnisse von Kaye und Elgar und anderen Arbeiten deuten auf eine Abhängigkeit der Übergangsgrenzen vom relativen Spaltspiel ψ hin und sind nur für den konzentrischen Fall gültig.

Taylor-Couette-Systeme mit zusätzlich überlagelter axialer Strömung wurden auch von weiteren Autoren untersucht^{2,3,4,5}. Eine ausführliche Literaturübersicht kann bspw. bei Manna und Vacca⁵ gefunden werden. Im Detail zeigt sich jedoch, dass sich alle genannten Arbeiten in irgendeiner Hinsicht als unzureichend herausstellen, um weiteres Verständnis im Sinne der vorliegenden Anwendung zu liefern. Dies sind bspw. unpassende Reynolds- und meist deutlich zu geringe Durchflusszahlen, eine zu große relative mittlere Spaltweite oder die Vernachlässigung der Exzentrizität.

¹ KAYE UND ELGAR, „Modes of Adiabatic and Diabatic Fluid Flow in an Annulus With an Inner Rotating Cylinder“, ([49], 1958)

² YAMADA, NAKABAYASHI UND MAEDA, „Pressure Drop Measurements of the Flow through Eccentric Cylinders with Rotating Inner Cylinders“, ([105], 1969)

³ LUEPTOW, DOCTER UND MIN, „Stability of axial flow in an annulus with a rotating inner cylinder“, ([65], 1992)

⁴ TSAMERET UND STEINBERG, „Competing states in a Couette-Taylor system with an axial flow“, ([99], 1994)

⁵ MANNA UND VACCA, „Torque reduction in Taylor–Couette flows subject to an axial pressure gradient“, ([66], 2009)

Anhang B

Numerische Grundlagen der CFD-Simulationen

Für alle CFD-Simulationen der vorliegenden Arbeit wurde die Software ESI-OPENCFD OPENFOAM v2006 verwendet. Für vollständige Ringspalte sind sowohl Simulationen laminarer Strömung, als auch turbulenter Strömung durchgeführt worden. Zudem sind Simulationen turbulenter Strömung in einer Einzelnut und in einem periodischen Element eines Bohrlochprofils durchgeführt worden. Bei den turbulenten Fällen handelt es sich um RANS-Rechnungen, bei denen stets ein Low-Reynolds-Ansatz mit $y_+ \approx 1$ und dem $k-\omega$ -SST-Turbulenzmodell zum Einsatz kam. Für die Lösung der Simulationen wurden gebräuchliche Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung und der Solver SIMPLEFOAM verwendet, sofern nicht anders angegeben. Zur Erstellung der Gitter für vollständige Ringspalte und für Einzelnuten wurden das zu OPENFOAM gehörende Tool BLOCKMESH verwendet, für das Gitter des Bohrungsprofils wurde SALOME 9.10.0 verwendet. Im Folgenden sollen die numerischen Grundlagen und insbesondere die Erkenntnisse zur Gitterunabhängigkeit vorgestellt werden.

B.1 Vollständige Ringspalte

Für vollständige Ringspalte wurden sowohl laminare, als auch turbulente Fälle gerechnet. Zunächst werden die Methoden für laminare Strömung beschrieben. Aufbauend darauf folgen später die turbulenten Fälle. Eine schematische Skizze des Lösungsgebietes für einen vollständigen Ringspalt ist in Abbildung B.1 dargestellt. Das Gebiet kann weiter in den eigentlich Spalt und den Vorraum eingeteilt werden. Die Zahlen mit Raute in der Abbildung stellen

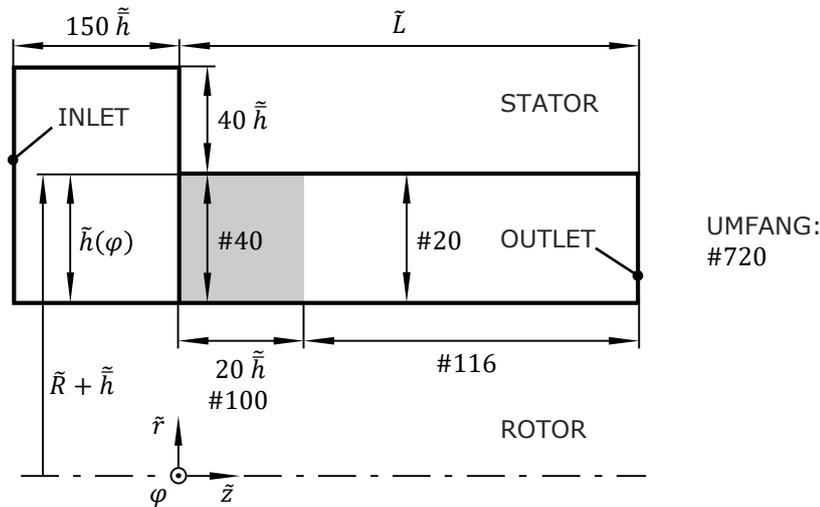


Abbildung B.1 – Schematische Querschnittsdarstellung des Berechnungsgebietes für den vollständigen Ringspalt.

die Zellenanzahl an der entsprechenden Stelle und Richtung dar, die für die laminaren Fälle zur Anwendung kamen.

Es hat sich gezeigt, dass die Simulationsergebnisse von den Einlassrandbedingungen ab einer Höhe des Vorraums von ungefähr $40 \tilde{h}$ in radialer Richtung und einer Breite von $150 \tilde{h}$ in axialer Richtung unabhängig werden. Am linken Rand des Vorraums wird konstanter Totaldruck vorgeschrieben, was sich als numerisch stabiler herausgestellt hat als ein konstanter statischer Druck. Am oberen Rand wurde ein reibungsfreie Wand vorgeschrieben, während überall sonst reibungsbehaftete Wände unter Haftbedingung vorgeschrieben wurden. Am Rotor wurde eine rotierende Wand als Randbedingung angesetzt. Am Spaltauslass wurde schließlich ein konstanter statischer Druck $p = 0$ gesetzt.

Die grundsätzlich einfache Geometrie ist prädestiniert für die Verwendung eines strukturierten Gitters. Automatisch generierte Tetraeder-Gitter würden die Zellenanzahl massiv in die Höhe treiben, da sich die Längenskalen über Spalthöhe und Länge sowie Umfang um mehrere Größenordnungen unterscheiden. Im Bereich des Spalteinlasses wurde eine feinere Gitterauflösung in radialer Richtung gewählt, um eine hohe Auflösung des Ablösungsgebietes an der Statorwand zu gewährleisten (grauer Bereich in Abbildung B.1). Nach einer axialen Länge von $20 \tilde{h}$ wurde ein Interpolationsinterface genutzt, um die radiale Zellenanzahl zu reduzieren, damit die Gesamtanzahl und die Lösungsdauer verringert wird. Allgemein wurden Wachstumsfaktoren in radialer und axialer Richtung von ca. 1.1 bis 1.3 für das Gitter verwendet.

Es wurde eine Gitterstudie durchgeführt, um die Unabhängigkeit der Er-

Tabelle B.1 – Ergebnisse der Gitterstudie für ganze Spalte bei laminarer Strömung.

Gitter	# Zellen	relative Änderung in %			Zeit in s für 10 ³ Iterationen
		F	β	ϕ	
1	2.31×10^6	2.3	0.2	3.3	7 659
2	3.55×10^6	2.0	0.1	3.1	13 037
3	5.31×10^6	1.8	0.5	1.7	14 657
4*	7.59×10^6	0.8	0.6	0.5	21 159
5	11.17×10^6	0.1	0.1	0.3	26 758
6	13.46×10^6	–	–	–	38 385

gebnisse vom Gitter sicherstellen zu können. Dafür wurden insgesamt sechs verschiedene Gitter mit variierender Anzahl von 2.3 bis 13.5 Millionen Zellen untersucht. Es wurde dafür die Parameterkombination ausgewählt, bei der die höchste Geschwindigkeit vorliegt ($L = 1$, $\Delta p = 20$, $\varepsilon = 0.9$). Die entsprechenden Ergebnisse für Tragkraft F , Verlagerungswinkel β und Durchflusszahl ϕ sind in Tabelle B.1 aufgeführt. Die Werte stellen die Differenz zum feinsten Gitter bezogen auf den Wert des feinsten Gitters in Prozent dar. Für die Parameterstudie wurde schließlich Gitter 4 (mit Stern markiert) genutzt, da die relative Änderung aller Größen $< 1\%$ im Vergleich mit dem deutlich feineren Gitter 6 waren.

Wie in Abbildung B.1 dargestellt, hat das Gitter 4 im Spalt 40 Zellen in der feineren Einlaufregion und ansonsten 20 Zellen in radialer Richtung. In axialer Richtung befinden sich 100 Zellen im feinen und 116 Zellen im hinteren Bereich. In Umfangsrichtung werden 720 Zellen verwendet. Für Spalte der Länge $L = 2$ wurden die Zellen in axialer Richtung im hinteren Bereich verdoppelt. Mit dieser Konfiguration haben die Gitter eine Gesamtzellenanzahl von 7.6×10^6 für $L = 1$ und 9.2×10^6 für $L = 2$.

In Tabelle B.1 ist zusätzlich auch die Berechnungszeit (wall clock) für 10³ Iterationen für die unterschiedlichen Gitter dargestellt. Abgesehen vom Gitter war die numerische Konfiguration der Simulationen gleich. Bis zur konvergierten Lösung wurden ungefähr 5×10^3 bis 10^4 Iterationen benötigt. Dementsprechend benötigte eine volle Simulation grob 2 Tage Rechenzeit. Die Simulationen wurden auf einer aktuellen Workstation mit 32 Kernen bei 3.3 GHz und mit 256 GB DDR-4-3200 RAM durchgeführt.

Die umfangreichen Untersuchungen für die Simulationen der laminaren Strömung stellen bereits eine gute Grundlage dar, die auch auf turbulente Strömung übertragen werden kann. Dennoch wurde die Gitterunabhängigkeit für diese Fälle nochmals genauer untersucht. Die konstanten Parameter für

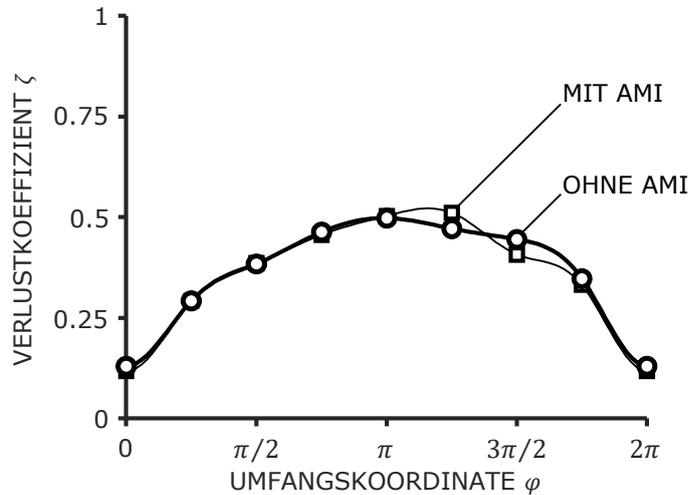


Abbildung B.2 – Umfangsverteilung des Einlassdruckverlustkoeffizienten für eine Lösung mit und eine ohne Verwendung des Interpolationsinterface (AMI).

die numerischen Untersuchungen sind ein relatives Spaltspiel von $\psi = 0.0042$, eine Länge von $L = 1.3$, eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.5$, eine Reynoldszahl von $Re = 5000$, eine Durchflusszahl von $\phi = 1$ und keine speziellen Randbedingungen für die Umfangsgeschwindigkeit, d. h. $C_{\varphi, \text{Plenum}} \approx 0$. Damit wurden wieder Betriebsbedingungen gewählt, die die höchsten zu erwartenden Geschwindigkeiten der Parameterstudie darstellen und damit die höchsten Anforderungen an das Gitter stellen.

Es wurde zunächst vermutet, dass das Interpolationsinterface am Spalteinlass für leichte numerische Ungenauigkeiten und Instabilität sorgen würde. Aus diesem Grund wurde das Interface entfernt und für viele Fälle wurde im gesamten Spalt eine Anzahl von 20 Zellen in radialer Richtung verwendet. Bei weiteren Untersuchungen zeigte sich im direkten Vergleich jedoch, dass sich zwischen einem Fall mit und einem ohne Interface nur minimale Abweichungen im Verlauf des Druckverlustkoeffizienten ergeben, siehe Abbildung B.2.

Das Diagramm zeigt die Umfangsverteilung des Verlustkoeffizienten für ein Gitter mit und eins ohne Interpolationsinterface (AMI). Die Verläufe sind bis auf minimale Abweichungen identisch und der gemittelte Wert ist in beiden Fällen $\bar{\zeta} = 0.38$. Außerdem zeigte sich, dass eine Zellenanzahl von 720 über den Umfang notwendig ist, um Gitterunabhängigkeit zu erreichen. In axialer Richtung wurden 439 Zellen verwendet. Das verwendete Gitter umfasst damit insgesamt ca. 9.0×10^6 Zellen. Im Vergleich mit einem Gitter mit 12.4×10^6 Zellen beträgt die Änderung der Druckdifferenz Δp weniger als 2% und die Änderungen der Kraft F sowie des gemittelten Einlassdruckverlustkoeffizien-

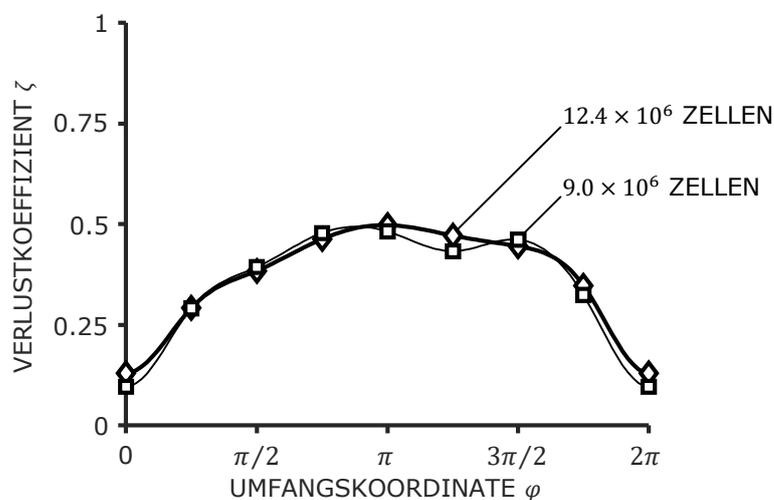


Abbildung B.3 – Verlauf des Einlassdruckverlustkoeffizienten über dem Umfang für zwei Gitter mit unterschiedlichen Zellenanzahl.

ten $\bar{\zeta}$ weniger als 1 %. Die Verläufe des Druckverlustkoeffizienten für beide Gitter sind in Abbildung B.3 dargestellt. Die Verfeinerung des Einlaufgebietes scheint demnach keinen substantiellen Vorteil für die betrachteten Fälle zu bringen.

B.2 Einzelnut und Bohrlochprofilelement

Die o. g. Erkenntnisse können auch auf die Simulation der Einzelnut, siehe Abbildung B.4, übertragen werden. Die Geometrie teilt sich in den oben verlaufenden, ebenen Spalt bzw. Kanal und in die mittig darunter liegende Nut auf. Der Kanal teilt sich wiederum in den Einlauf- und Auslaufkanal sowie den Teil des Kanals über der Nut (mit Kontrollvolumen KV gekennzeichnet). An den Flächen in der Bildebene wurde eine periodische Randbedingung (quasi in Umfangsrichtung) vorgeschrieben. Am Einlass wurde eine mittlere axiale Geschwindigkeit entsprechend der Durchflusszahl ϕ und eine mittlere Umfangsgeschwindigkeit von $\bar{c}_\varphi = 0.5$ vorgegeben. Die Rotorwand bewegt sich in die Bildebene mit der Geschwindigkeit $c_\varphi = 1$. Die Absolutwerte ergeben sich über die variierende Reynoldszahl Re .

Zur Betrachtung der Numerik wurde eine Nut mit quadratischen Querschnitt mit Breite $d = t = 30$ ausgewählt. Wie zuvor wurde auch hier der Fall herangezogen, der die höchsten Geschwindigkeiten aufweist. Die Reynoldszahl beträgt entsprechend $Re = 9645$ und die Durchflusszahl $\phi = 2$. Das verwen-

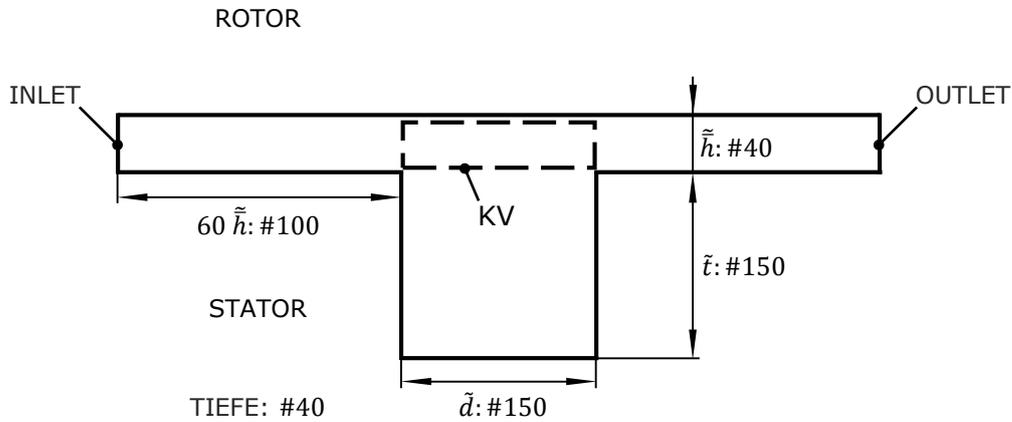


Abbildung B.4 – Schematische Querschnittsdarstellung des Berechnungsgebietes für die Einzelnut.

deten Gitter hat eine Anzahl von 40 Zellen über der Kanalhöhe und ebenso 40 in der Tiefe. Für Nutbreite und -Tiefe werden je 150 Zellen verwendet. In axialer Richtung werden je 100 Zellen für den Einlauf- und Auslaufkanal verwendet. Es hat sich gezeigt, dass ab einer Einlauflänge von $60 \tilde{h}$ vollständig eingelaufene Geschwindigkeitsprofile am Beginn der Nut vorliegen. Insgesamt ergeben sich somit 1.46×10^6 Zellen. Für die anderen Nutgeometrien wird die Zellenanzahl je für die Nutbreite und -Tiefe leicht angepasst.

Abbildung B.5 zeigt ausgewertete Ergebnisse für das oben beschriebene Gitter mit 1.46×10^6 Zellen sowie für ein etwas gröberes Gitter mit 0.86×10^6 Zellen. Ausgewertet werden am Kontrollvolumen KV flächengemittelte Werte an der Rotor- und der Statorseite. Am Rotor wird der Spannungsvektor aus den berechneten Wandschubspannungen \vec{t}_{Rotor} ermittelt. Auf der Statorseite wird der Spannungsvektor aus den Reynoldsspannungen \vec{t}_{Stator} ermittelt.

Die Beträge der beiden Spannungsvektoren über der Zellenanzahl für die beiden genannten Gitter sind in Abbildung B.5 dargestellt. Fast unter Verdoppelung der Zellenanzahl ist keine Änderung der beiden Beträge sichtbar. Die Mittelwert aus allen Vektorkomponenten ändert sich weniger als 1%. Hieraus kann geschlossen werden, dass beide Gitter eine gitterunabhängige Lösung bieten. Um eine bessere lokale Auflösung für Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofile gewährleisten zu können, wurde dennoch das feinere Gitter mit 1.46×10^6 Zellen verwendet.

Wie in Abschnitt 4.5 beschrieben, besteht eine Dichtung mit Bohrlochprofil

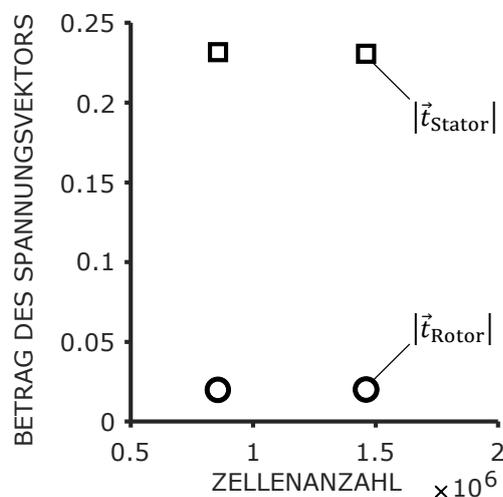


Abbildung B.5 – Beträge der flächengemittelten Spannungsvektoren an Rotor- und Statorseite des Kontrollvolumens für zwei Gitter mit unterschiedlicher Zellenanzahl.

aus einem sich in Umfangs- und Axialrichtung periodisch wiederholenden Profilelement. Eine Dichtung mit quasi beliebiger Länge lässt sich erzeugen, indem das periodische Profilelement entsprechend aneinandergereiht wird (sofern die Krümmung mit berücksichtigt wird). Zusätzlich ist ein weiteres Element für die Ränder notwendig.

Die einzelnen Elemente des Bohrlochprofils und daraus zusammengesetzte ebene Simulationsgebiete sind in Abbildung B.6 dargestellt. Für das Vorgehen werden zunächst das periodische Profilelement und der Einlaufspalt als einzelne Geometrien erzeugt und jeweils strukturiert vernetzt. Der Auslaufspalt wird durch Rotation des Einlaufes erzeugt. Die Elemente können nun verschoben und zusammengesetzt werden, wodurch sich ein beliebig großes Profil herstellen lässt. Die klar definierte, strukturierte Vernetzung ist zwingend erforderlich, damit sich erstens die einzelnen Profilelemente zusammensetzen lassen; und zweitens, damit der Spalt und das Ablösegebiet ausreichend fein diskretisiert werden kann, ohne dass die Zellenanzahl unzulässig groß wird. In φ -Richtung werden für den ebenen Fall wieder periodische Randbedingungen verwendet, was eine Analogie zum konzentrischen Ringspalt darstellt.

Für die Vernetzung der Bohrungen wurde ein sogenanntes O-Grid verwendet. Dabei handelt es sich um eine gängige Methode, bei der die Kreisfläche des Bohrungsquerschnittes in einen quadratischen Block in der Mitte und vier trapezförmige Blöcke darum aufgeteilt wird. Über den Bohrungsdurchmesser und die Höhe wurden je insgesamt 120 Zellen verwendet und über

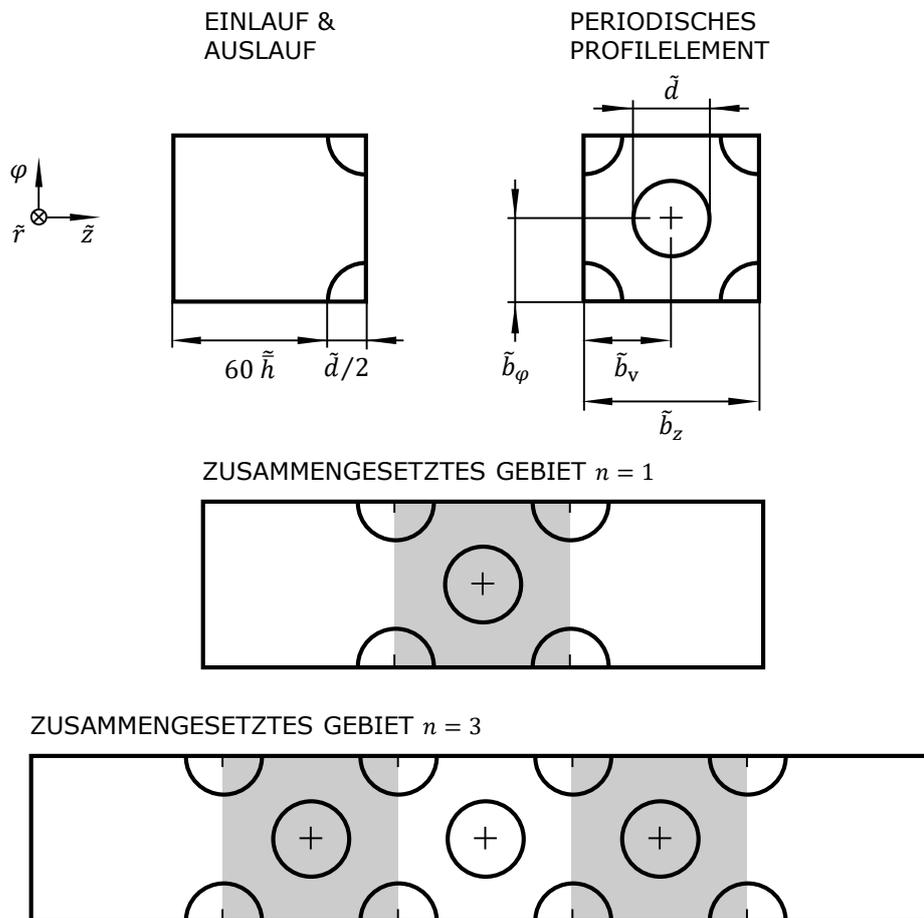


Abbildung B.6 – Geometrielemente und Kombinationen zur Erstellung des Simulationsgebietes des Bohrlochprofils.

der Kanalhöhe 30. In Umfangsrichtung werden 160 Zellen vorgegeben, was sich aus der Blockstruktur der O-Grids automatisch ergibt. Die Ein- und Auslaufkanäle entsprechen denen der Einzelnut. Insgesamt erreicht das Gitter für gitterunabhängige Ergebnisse somit eine Zellenanzahl von 4.7×10^6 Zellen für eine Anordnung mit einer zentralen Bohrung in axialer Richtung ($n = 1$) und 10.0×10^6 für eine Anordnung mit drei Bohrungen in axialer Richtung ($n = 3$). Für die Studie in Abschnitt 4.5 wurde ein einzelnes Profilelement (mit Ein- und Auslaufkanal) untersucht.

Anhang C

Spaltströmungsprüfstand

Zur experimentellen Validierung wurde der existierende Spaltströmungsprüfstand des Instituts für Fluidsystemtechnik an der TU Darmstadt verwendet, der im Wesentlichen zur Vermessung von mediengeschmierten Gleitlagern konzipiert wurde. Der bewährte Prüfstand und die angewandten Messmethoden sind ausführlich in der Arbeit von Kuhr¹ und in anderen Veröffentlichungen^{2,3,4} beschrieben, sodass hier nur eine kurze Übersicht gegeben werden soll.

Eine einfache Prinzipskizze der Messstrecke des Prüfstandes ist in Abbildung C.1 dargestellt. In der Mitte der Abbildung befindet sich der durchströmte Ringspalt, der zur Verdeutlichung sehr groß dargestellt wurde. Die grundlegende Spaltgeometrie kann über verschiedene Rotorhülsen und Statorringe variiert werden. Der Rotor wird von einem Motor mit variabler Drehzahl angetrieben und wird durch zwei aktive Magnetlager (AML) getragen. Die Magnetlager erlauben zudem eine präzise Positionierung und die Vorgabe willkürlicher lateraler Bewegungen des Rotors. Somit können die relative Exzentrizität ε , die Orbitfrequenz ω und der Kippwinkel γ eingestellt werden.

Außerdem sind die Magnetlager mit Hall-Sensoren zur Messung der magnetischen Flussdichte an einigen Stellen über den Umfang ausgestattet, sodass die Lagerkräfte und damit die resultierenden hydrodynamischen Kräfte vom Schmierfilm auf den Rotor F_x und F_y berechnet werden können. Die

¹ KUHR, *Dynamische Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte: Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2022*, ([55], 2022)

² KUHR, „Identification of the dynamic force and moment characteristics of annular gaps using linear independent rotor whirling motions“, ([54], 2023)

³ KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps - Experimental and simulation results“, ([53], 2022)

⁴ KUHR, ROBRECHT UND PELZ, „Measuring and simulation of fluid forces in annular gaps - Generic experiments covering the relevant parameter range for turbulent and laminar flow in pumps“, ([56], 2019)

Anhang D

Rotordynamische Koeffizienten der Labyrinthdichtungen

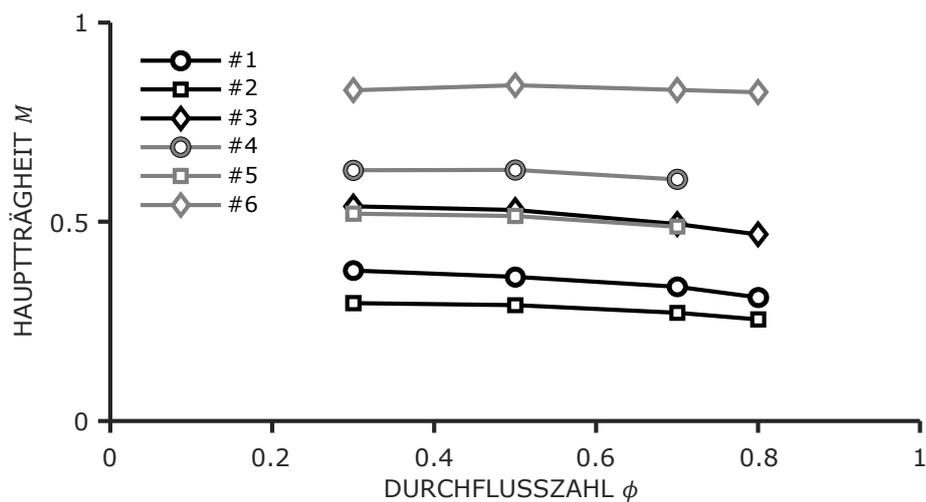


Abbildung D.1 – Experimentell bestimmter Hauptträgheitskoeffizient über der Durchflusszahl.

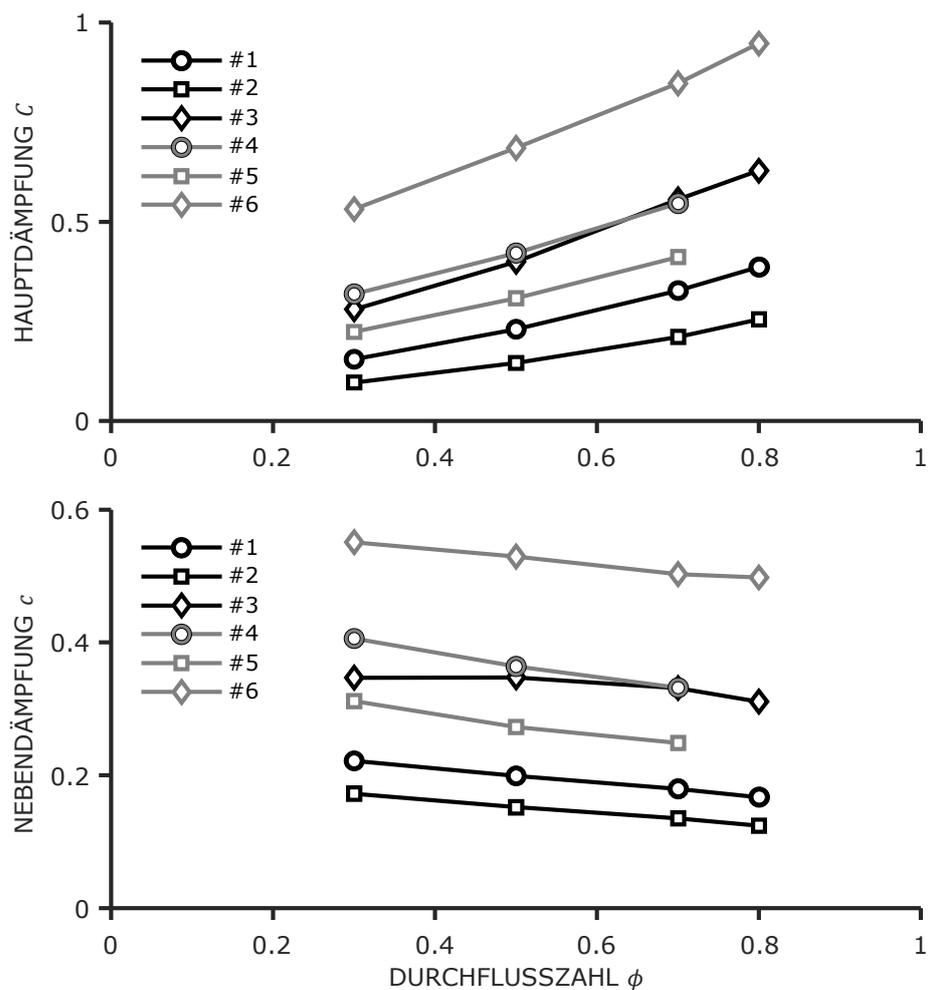


Abbildung D.2 – Experimentell bestimmte Dämpfungskoeffizienten über der Durchflusszahl.

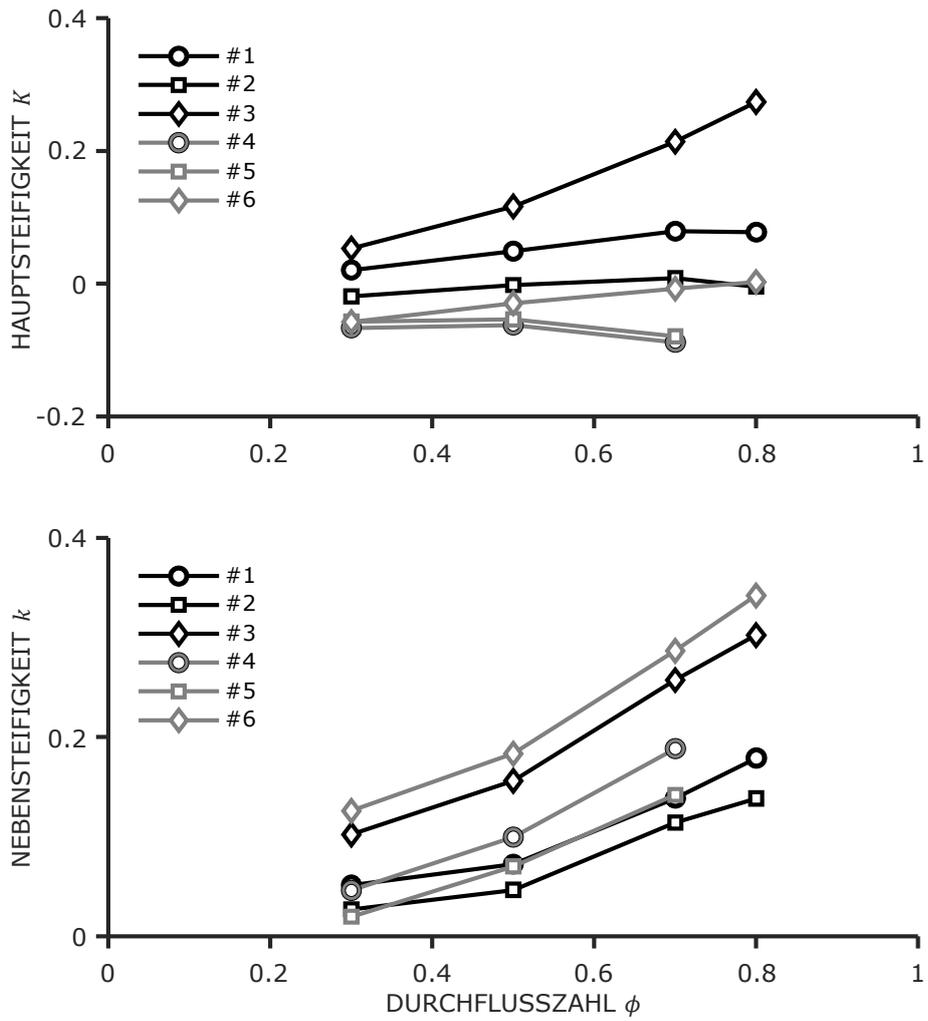


Abbildung D.3 – Experimentell bestimmte Steifigkeitskoeffizienten über der Durchflusszahl.

Eigene Publikationen

- [1] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Friction Model for Grooved Annular Seals for Use in Fast and Reliable Design Tools“. In: *Proceedings of the 15th European Turbomachinery Conference, Budapest, Hungary, 24-28 April 2023*. Hrsg. von European Turbomachinery Society. 2023.
- [2] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Influence of the Lomakin effect on the performance of journal bearings and annular seals for steady-state and dynamic operation conditions“. In: *Proceedings of SIRM 2023 - The 15th European Conference on Rotordynamics*. Hrsg. von S. Rinderknecht, B. Schüßler und S. Schwarz. 2023.
- [3] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Lubrication Film Friction Model for Grooved Annular Seals“. In: *Int. J. Turbomach. Propuls. Power* 8 (2023).
- [4] R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „The Lomakin effect at laminar flow in journal bearings – Modeling and simulation“. In: *Tribology International* 175 (2022).
- [5] R. M. Robrecht, M. M. G. Kuhr und P. F. Pelz. „CAPM vs. Bulk Flow - reliable and efficient prediction of forces and leakage for annular gaps in pumps“. In: *Proceedings of the 4th International Rotating Equipment Conference*. Hrsg. von VDMA Pumps + Systems. 2019.
- [6] M. M. G. Kuhr, R. M. Robrecht und P. F. Pelz. „Measuring and simulation of fluid forces in annular gaps - Generic experiments covering the relevant parameter range for turbulent and laminar flow in pumps“. In: *Proceedings of the 4th International Rotating Equipment Conference*. Hrsg. von VDMA Pumps + Systems. 2019.