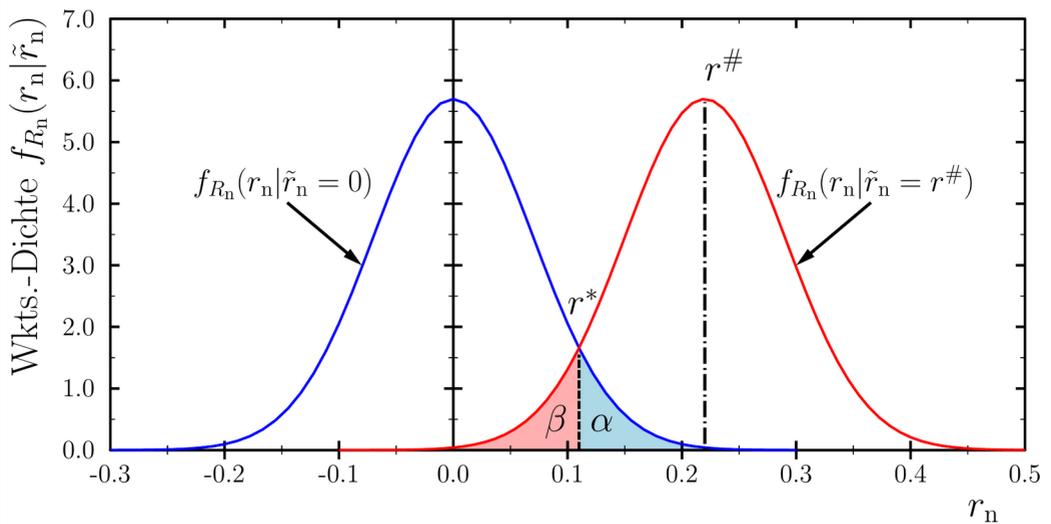
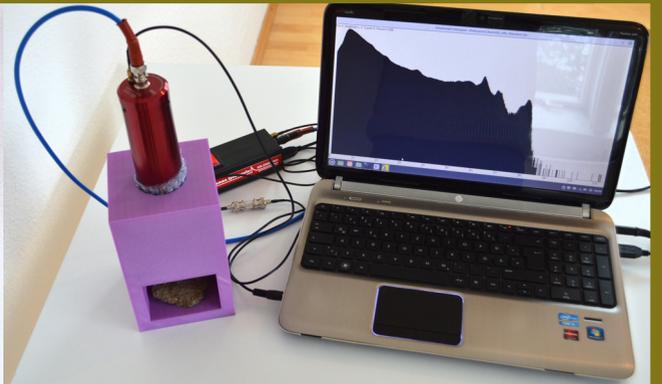


Radioaktiv oder nicht, das ist hier die Frage!

Eine unterhaltsame Kurzgeschichte
aus dem
praktischen Strahlenschutz



Jonny Birkhan

<https://orcid.org/0000-0002-4366-7492>

Technische Universität Darmstadt

Fachbereich 5

Institut für Kernphysik

Abteilung Strahlenschutz

Veröffentlicht unter CC BY 4.0 International



Radioaktiv oder nicht, das ist hier die Frage!

Eine unterhaltsame Kurzgeschichte
aus dem
praktischen Strahlenschutz

am Beispiel der
„Zählenden Messung ionisierender Strahlung“

von

Jonny Birkhan

27.11.24

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	4
Radioaktive Gesteine.....	6
Strahlung messen.....	7
Zählraten, Netto, Brutto und Nulleffekt.....	10
Alles Messen ist unsicher.....	13
Entscheidungskriterium „Erkennungsgrenze“ – Wann liegt ein Probeneffekt vor?.....	20
Bewertungskriterium „Nachweisgrenze“ – Ist das Messverfahren geeignet?.....	24
Konformitätsprüfung - Ist der wahre Wert kleiner als der Grenzwert?.....	28
Glossar.....	38
Literaturempfehlungen.....	40
Bildnachweise.....	42
Danksagung.....	43
Über den Autor.....	44

Vorwort

Diese Kurzgeschichte aus dem praktischen Strahlenschutz behandelt folgende für Kernstrahlungsmessungen wichtige Fragen:

- Frage 1:** Wann kann durch Messung entschieden werden, eine Probe als radioaktiv anzusehen?
- Frage 2:** Kann das angewendete Messverfahren als geeignet angesehen werden, wahre Werte im Bereich eines Grenz- oder Richtwertes zu messen?
- Frage 3:** Unterschreitet der beste Schätzwert für den wahren Wert einen vorgegebenen Grenzwert?

Die Normenreihe ISO 11929 stellt den Formalismus bereit, mit dessen Hilfe diese Fragen beantwortet werden können. In der Norm werden dazu die sogenannten „charakteristischen Grenzen“ definiert. Die charakteristischen Grenzen sind

1. die **Erkennungsgrenze**
(Entscheidungsparameter zu Frage 1),
2. die **Nachweisgrenze**
(Bewertungsparameter zu Frage 2) und
3. die **Grenzen eines Überdeckungsintervalls**
(Vergleichsparameter zu Frage 3).

Der vorliegende Text soll dem Anwender der ISO 11929 helfen, das Konzept der charakteristischen Grenzen kennenzulernen. Die charakteristischen Grenzen werden anhand des Beispiels einer Netto-Zählrate im Kontext von zählenden Kernstrahlungsmessungen vorgestellt. Sollen die charakteristischen Grenzen für eine andere Netto-Größe berechnet werden, sind die Formeln für den neuen Anwendungsfall zu erweitern oder zu ändern.

Die im vorliegenden Text beschriebene Messung ist so ausgelegt worden, dass die Messwerte als normal-verteilt angesehen werden können. Dies ist insbesondere dann nicht mehr der Fall, wenn nur wenige Strahlungsereignisse während einer Messung gezählt worden sind.

Um tiefer in die Mathematik zu diesem Thema einzusteigen, wird auf weiterführende Literatur verwiesen [1-10].

Wem es leichter fällt, Mathematisches in einem eher heiteren Kontext zu lernen, der sollte mit diesem unkonventionellen Text seinen Spaß haben.

Viel Spaß beim Lesen!

Jonny Birkhan

Radioaktive Gesteine

Hubertus ist ein begeisterter Gesteins- und Mineraliensammler. Bei seinem letzten Spaziergang hat er mehrere Gesteinsproben in einem alten Steinbruch gesammelt:



Der Steinbruch liegt in einer Region, von der bekannt ist, dass die Böden größere Mengen als üblich an radioaktiven Elementen enthalten.

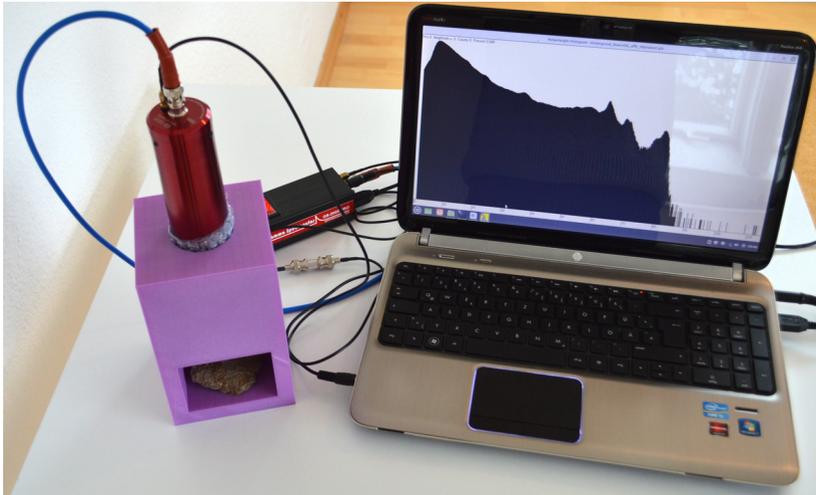
Da schon so manches Mineral zu Dekorationszwecken seinen Weg auf den Nachttisch von Hubertus gefunden hat, will er deshalb wissen, ob seine Fundstücke radioaktiv sind.

Hubertus hat einen guten Freund, Johann, der Strahlenschutzphysiker ist und sich mit Radioökologie auskennt. Diesen bittet er um Hilfe und ruft ihn deshalb an: „*Hallo Johann, könntest Du meine Gesteinsfunde einmal mit Deinem mobilen Messaufbau messen, um festzustellen, ob sie radioaktiv sind?*“

„*Klar, kein Problem. Am Wochenende habe ich Zeit.*“, entgegnet Johann.

Strahlung messen

Johann bringt am darauffolgenden Samstag seinen mobilen Messaufbau mit:



Hubertus ist begeistert, dass die Messungen bei ihm zu Hause stattfinden können und das Equipment so einfach und schnell in Betrieb genommen werden kann. *„Wie ist es eigentlich möglich, dass Du mit Deinem Detektor Radioaktivität messen kannst?“*, will er von Johann wissen.

Johann erklärt: *„Viele radioaktive Elemente senden Gamma-Strahlung aus. Wenn ich eine radioaktive Probe unter den Detektor lege, dann wechselwirken die Strahlungsquanten der Gamma-Strahlung mit dem Kristall meines Detektors. Der Kristall besteht in meinem Fall aus Natrium-Jodid mit einem Zusatz von Thallium.“*

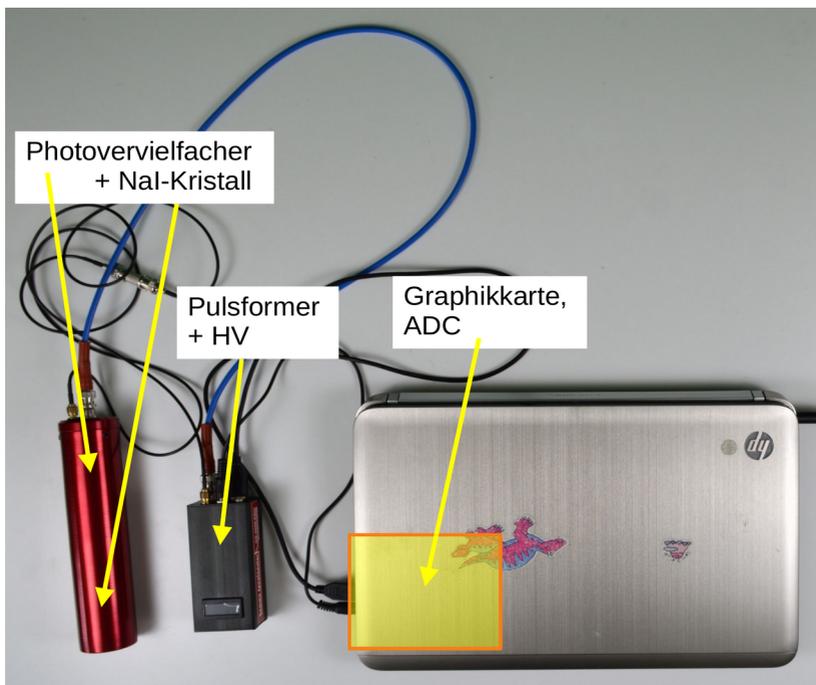
„Aha.“, meint Hubertus, *„Und wofür ist das Thallium nötig?“*.

Johann erklärt weiter: *„Das Thallium im Kristall bewirkt, dass die sehr kurzwellige Gamma-Strahlung in sichtbares, sogenanntes Fluoreszenz-Licht mit deutlich größerer Wellenlänge umgewandelt wird.“*

Deshalb gehört dieser Detektor zur Klasse der Szintillationsdetektoren.“

„Also ein Wellenlängenschieber!“, ruft Hubertus.

„Richtig.“, stimmt ihm Johann zu und erläutert kurz den Messaufbau:



HV = Hochspannungsversorgung

ADC = Analog-Digital-Wandler

Johann fährt fort: „Das erzeugte Licht trifft auf eine Photokathode im sogenannten Photovervielfacher und löst dort Elektronen aus der Oberfläche heraus. Eine nachgeschaltete Elektronik vervielfacht die erzeugten Elektronen und wandelt sie in ein messbares elektrisches Signal um. Dieses Signal kann benutzt werden, um die Energie der Strahlung zu messen. Für unsere Fragestellung genügt es jedoch, die Signale über die Zeit zu zählen.“

Diese Signale werden auch Impulse oder Zählimpulse genannt. Dabei wird jeder Impuls von genau einem Strahlungsquant verursacht.“

„Ok, das ist wirklich spannend. Aber wenn ich mich an den Vortrag meines Physiklehrers in der 10. Klasse erinnere, dann gibt es ja auch noch die Alpha- und Beta-Strahlung. Weshalb kannst Du diese nicht messen?“, fragt Hubertus.

Johann erklärt weiter: „Dieser Natrium-Jodid-Detektor misst nur Gamma-Strahlung zuverlässig, weil das Aluminiumgehäuse Alpha-Strahlung vollständig und Beta-Strahlung zu einem großen Teil zurückhält. Ist die Energie der Beta-Strahlung entsprechend klein, dann durchdringt auch diese das Gehäuse nicht. Nur die Gamma-Strahlung wechselwirkt mit dem Aluminium so wenig, dass das meiste von ihr hindurch gelangt und den Kristall erreicht.“

Darüber hinaus merkt Johann an: „Enthielte eine Deiner Gesteinsproben keine Gamma-strahlenden Elemente, also nur reine Alpha- oder Beta-Strahler, dann wäre sicher, dass wir bestenfalls nur einen kleinen Teil der Beta-Strahlung messen. Daher könnte die Gesteinsprobe dennoch radioaktiv sein, auch wenn sich keine Radioaktivität mit diesem Messaufbau messen ließe. Anders gesagt, - wenn wir mit diesem Messaufbau etwas an der Probe messen, dann ist sie in jedem Fall radioaktiv.“

„Verstehe, das ist natürlich eine wichtige Information. Wenn wir also keine Radioaktivität mit den folgenden Messungen nachweisen, dann müssten wir streng genommen noch klären, dass keine Alpha- und Beta-Strahler enthalten sind.“, fügt Hubertus hinzu.

„Genau so ist es.“, bestätigt Johann.

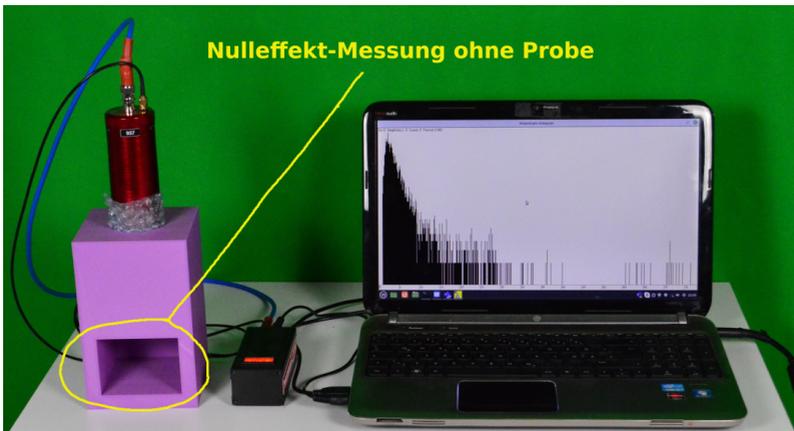
Zählraten, Netto, Brutto und Nulleffekt

Während Johann die letzten Handgriffe erledigt, um den Messaufbau in Betrieb zu nehmen, fragt sich Hubertus, wie sich erkennen lässt, welches Strahlungsquant von dem jeweils zu messenden Stein stammt und welches nicht.

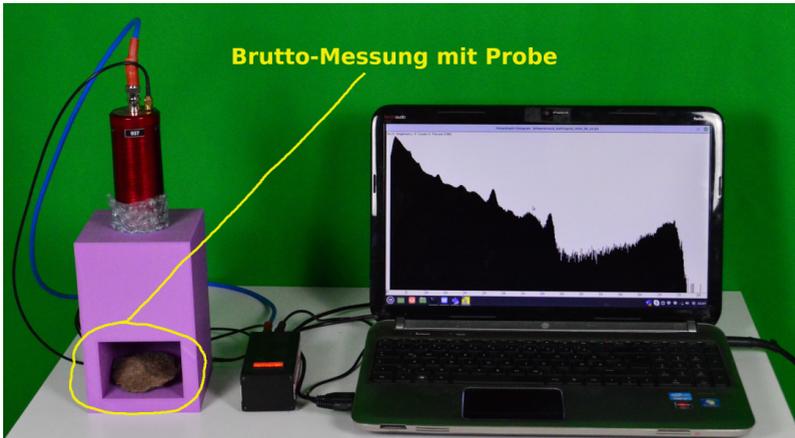
Daher fragt Hubertus: „*Mein Physiklehrer hat uns damals auch erklärt, dass im Grunde überall in der Umgebung radioaktive Stoffe zu finden sind. Dann müsste Dein Messgerät auch ohne eine Gesteinsprobe schon Strahlung messen, richtig?*“

„*Ja, Du hast recht.*“, erwidert Johann. „*Die radioaktiven Stoffe in der Umgebung des Detektors verursachen den Strahlungshintergrund, der als Nulleffekt ohne eine Probe gemessen wird. Bei der Bruttomessung mit der Probe zählt der Detektor dann Impulse, die sowohl vom Strahlungshintergrund als auch von der Probe herrühren.*“

Der Messaufbau sieht für die Nulleffekt-Messung folgendermaßen aus:



Bei den Brutto-Messungen befindet sich die jeweilige Gesteinsprobe in der violetten Kunststoffhalterung unterhalb des Detektors:



„Du hast vorhin erklärt, dass Du mit dem Detektor die Anzahl an einzelnen Impulsen und damit Strahlungsquanten innerhalb einer bestimmten Messzeit erfassst.“, meint Hubertus.

„Richtig, ich stelle die Messzeit vorher ein und warte dann auf das Zählergebnis.“, ergänzt Johann. „Daraus berechne ich die sogenannte Zählrate:

$$r = \frac{n}{t},$$

wobei n die Anzahl an gemessenen Impulsen, t die Messzeit und r die Zählrate meint.“

„Das heißt, Du bestimmst zuerst die Nulleffekt-Zählrate und danach die Brutto-Zählrate.“, stellt Hubertus fest.

„Genauso ist es.“, bestätigt ihm Johann und fügt hinzu: „Dabei wähle ich eine möglichst lange Messzeit, damit sich die statistische Auswertung der Messergebnisse vereinfacht und sich der Einfluss des Hintergrundes auf die Auswertung minimiert.“

„Oha, - Statistik -, das Schreckgespenst von fast allen!“, stöhnt Hubertus.

„Nur keine Sorge, ich führe Dich durch die Auswertung, und Du wirst sehen, dass diese gar nicht so schlimm ist.“, beruhigt ihn Johann.

Nach einer (zugegebenermaßen sehr) langen Zeit sind die Nulleffekt-Messung und die Brutto-Messung am ersten Gestein beendet und Johann konstatiert: „Die Nulleffekt-Messung hat 6442163 Impulse in 49096 Sekunden ergeben. Das entspricht einer Nulleffekt-Zählrate von

$$r_0 = 6442163 / (49096 \text{ s}) \approx 131,21 \text{ s}^{-1}.$$

Die Brutto-Messung hat 8389083 Impulse in 63587 Sekunden ergeben. Das entspricht einer Brutto-Zählrate von

$$r_b = 8389083 / (63587 \text{ s}) \approx 131,93 \text{ s}^{-1}.$$

„Ok, der Stein ist also radioaktiv, denn die Brutto-Zählrate ist größer als die Nulleffekt-Zählrate!“, seufzt Hubertus enttäuscht.

Er hatte gehofft, sich den Stein dekorativ auf seinen Nachttisch legen zu können.

„Moment, Moment!“, ruft Johann. „Das müssen wir erst einmal fertig auswerten. Vielleicht hast Du Recht, vielleicht auch nicht.“

„Zuerst müssen wir das Modell der Auswertung aufschreiben.“, sagt Johann. „Unsere eigentliche Messgröße ist nämlich die Netto-Zählrate:

$$\text{Netto-Zählrate} = \text{Brutto-Zählrate} - \text{Nulleffekt-Zählrate}$$

In Formelschreibweise sieht das so aus:

$$r_n = r_b - r_0.$$

Der Index „n“ kennzeichnet die Netto-Werte, der Index „b“ die Brutto-Werte und der Index „0“ die Nulleffekt-Werte, die der Hintergrundstrahlung zuzuschreiben sind.

Das ergibt in unserem Fall eine Netto-Zählrate von

$$r_n = 131,93 \text{ s}^{-1} - 131,21 \text{ s}^{-1} = 0,72 \text{ s}^{-1}.$$
 „ergänzt er.

„Wenn der Stein nicht radioaktiv wäre, dann sollte die Nettozählrate idealerweise Null sein.“, fügt Johann hinzu.

„Ok, das verstehe ich.“, entgegnet Hubertus. „Dann habe ich aber recht mit meiner Behauptung, dass der Stein radioaktiv ist.“

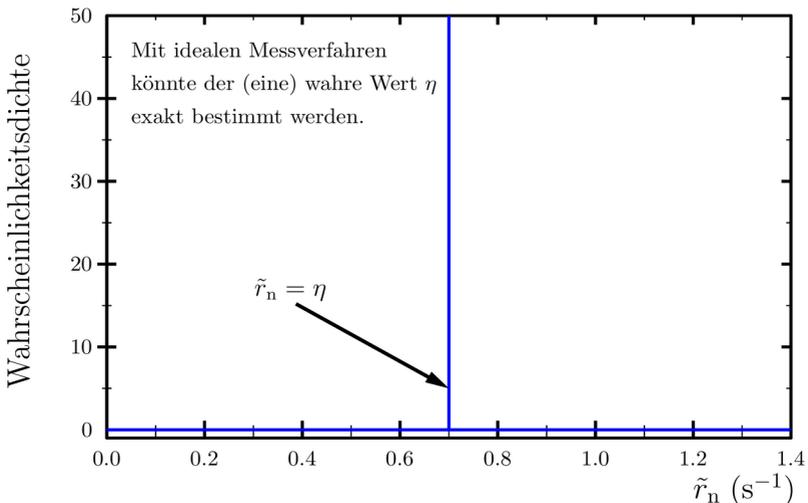
Alles Messen ist unsicher

„Nicht so schnell.“, sagt Johann. „Die Messergebnisse haben sogenannte Unsicherheiten, die dazu führen, dass wir unter Umständen doch entscheiden dürfen, den Stein als nicht radioaktiv zu betrachten.“

„Wie soll das gehen? Und was ist die Unsicherheit eines Messwertes?“, fragt Hubertus.

„Naja,“, sagt Johann, „jedem Messwert wird eine Messunsicherheit zugeordnet. Diese stellt eine Art Gütekennzahl des Messwerts dar.“

„Ein ideales Messverfahren wäre dazu imstande, den sogenannten wahren Wert η (eta) einer Messgröße aus den unendlich vielen Zahlen \tilde{r}_n der reellen Zahlengeraden herauszufischen.“, führt Johann weiter aus und zeichnet das folgende Diagramm:



Hubertus fragt: „Das heißt, dass der vertikale blaue Strich in Deinem Diagramm exakt an der Stelle dieses wahren Wertes gezeichnet ist, richtig?“

„Ja, genau.“, erwidert Johann.

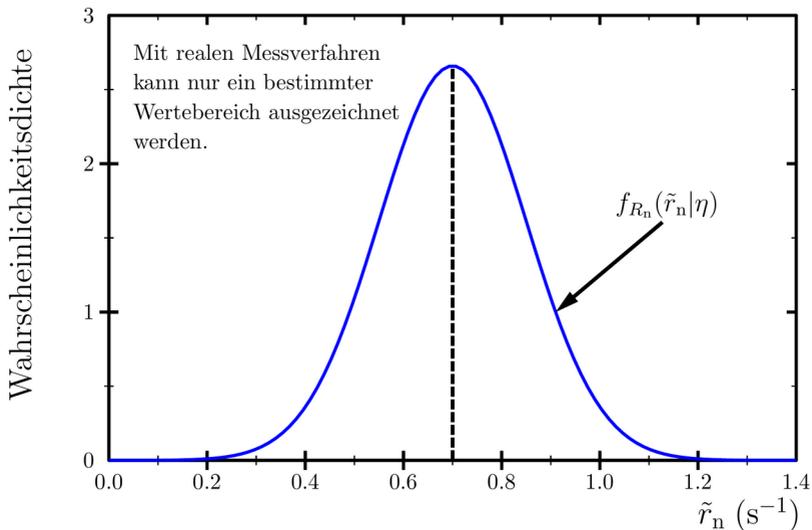
„Dieser wahre Wert η bezeichnet den tatsächlichen Wert der Messgröße. Er wird im Allgemeinen als einzigartig für die Probe und das angewendete Messverfahren angesehen.“, fügt Johann hinzu.

„Aber woher weiß ich denn, wann ich diesen wahren Wert gemessen habe?“, fragt Hubertus.

„Das weißt Du nie, denn es gibt kein Messgerät bzw. Messverfahren, bei dem sich nach der Messung ein Pop-Up-Fenster auf der Anzeige öffnet, auf dem steht: Habe den wahren Wert $\eta = \dots$ gefunden!“, meint Johann mit einem breiten Grinsen.

„Der bleibt also unbekannt.“, brummt Hubertus.

„Ja, das liegt daran, dass reale Messverfahren immer nur einen bestimmten Intervall der Zahlengeraden auszeichnen können. Auszeichnen meint, dass die Werte dieses Intervalls eine besonders hohe Wahrscheinlichkeit haben, mögliche Werte der Messgröße zu sein, und die übrigen eben nicht.“, erklärt Johann und zeichnet ein zweites Diagramm:



„Gut, das habe ich verstanden. Das heißt:

1. ein ideales Messverfahren selektiert genau einen Wert,
2. ein reales Messverfahren zeichnet ein Intervall von Werten aus.“

fasst Hubertus zusammen.

„Ja, richtig. Die Kurve in meiner zweiten Zeichnung stellt eine Gauß-Glocke dar, die alle Werte zwischen $0,2 \text{ s}^{-1}$ und $1,2 \text{ s}^{-1}$ als besonders wahrscheinlich auszeichnet. In der Mathematik wird eine solche Kurve auch als Graph einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{R_n}(\tilde{r}_n | \eta)$ bezeichnet.“, erklärt Johann. „Der Ausdruck $f_{R_n}(\tilde{r}_n | \eta)$ wird gelesen als „f zur Größe R_n von Tilde r_n gegeben eta“.“

„Die Standardabweichung einer solchen Wahrscheinlichkeitsdichte wird als Messunsicherheit interpretiert und verwendet.“, fügt er hinzu.

„Mmh, wie war das nochmal mit der Standardabweichung?“, will Hubertus wissen.

„Die Standardabweichung ist ein charakteristischer Parameter einer Wahrscheinlichkeitsdichte und stellt ein Maß für deren Breite dar.“, antwortet Johann.

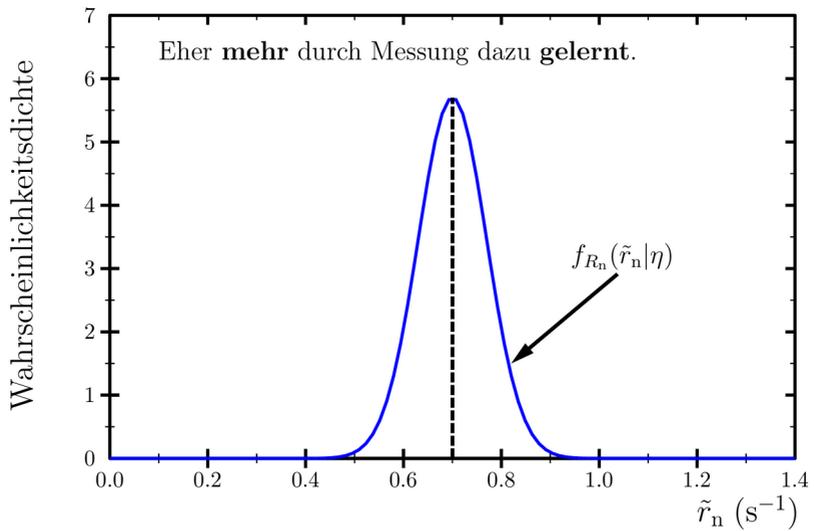
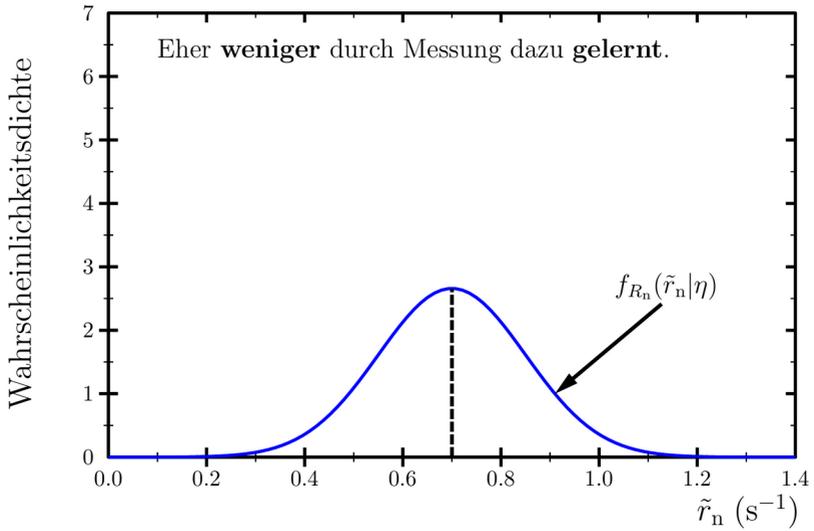
„Stimmt, da war so etwas.“, erinnert sich Hubertus. „Dann beschreibt die Messunsicherheit die Streuung von Messwerten. Sag' das doch gleich!“

„Nun ja, es ist wichtig, dass Du verstehst, was eine solche Wahrscheinlichkeitsdichte eigentlich darstellt, auch wenn es erst etwas abstrakt klingt.“, fügt Johann hinzu. „Oft ist nicht klar, dass solch eine Wahrscheinlichkeitsdichte den Werten der Zahlengeraden unterschiedliches Gewicht gibt. Sie macht also eine Aussage über die Bedeutsamkeit der Werte auf der Zahlengeraden für das Messergebnis.“

„Da hast Du Recht!“, stimmt Hubertus besänftigend zu.

„Und weil es so wichtig ist, will ich noch auf Folgendes hinweisen: Je mehr wir über die Werte einer Messgröße durch Messung erfahren, umso schmaler ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte und umso kleiner ist die Messunsicherheit.“

Johann zeichnet zwei weitere Diagramme, um den Sachverhalt zu illustrieren:



„Gut, gut, das muss ich erst einmal verdauen.“, bremst ihn Hubertus. „Nur eine Sache brennt mir noch unter den Nägeln. Was bedeutet eigentlich die Schlangenlinie über der Nettozählrate, \tilde{r}_n ? Reicht es nicht einfach, r_n zu schreiben?“

„Das ist eine sehr gute Frage.“, erwidert Johann.

„Die Schlangenlinie zeigt an, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der Netto-Zählrate sowohl Vorwissen wie auch das Wissen aus der Messung beinhaltet. Das mathematische Theorem dahinter heißt „Bayes' Theorem. Das Vorwissen wird mit dem Wissen aus der Messung sozusagen aktualisiert. Um die Unterscheidung zwischen gemessenen und aktualisierten Werten hervorzuheben, wird die Schlangenlinie über dem Formelsymbol verwendet. Letztlich sind es aber alle Werte der Messgröße.“

„Das klingt logisch.“, erwidert Hubertus. „Wie wird denn jetzt die Unsicherheit in unserem Fall bestimmt?“, will er weiter wissen.

„Zunächst berechnen wir diese für die noch nicht mit Vorwissen verknüpfte Netto-Zählrate. Die Unsicherheit $u(r_n)$ für die Netto-Zählrate r_n kannst Du aus einer Formel abschätzen, die im Leitfaden für die Angabe von Messunsicherheiten (GUM) [3] steht.“, sagt Johann. „In unserem Fall ergibt sich folgender Rechenausdruck:

$$u(r_n) = \sqrt{\frac{r_b}{t_b} + \frac{r_0}{t_0}}.$$

Die Messzeit für die Brutto-Messung ist dabei mit t_b gekennzeichnet und für die Nulleffekt-Messung mit t_0 . Die Unsicherheit entspricht damit der Standardabweichung einer Gauß-Glocke, die um die Nettozählrate r_n zentriert ist.“

„Ok, dann lass' mich mal rechnen.“, meint Hubertus.

$$\begin{aligned}
u(r_n) &= \sqrt{\frac{r_b}{t_b} + \frac{r_0}{t_0}} \\
&= \sqrt{\frac{131,93 \text{ s}^{-1}}{63587 \text{ s}} + \frac{131,22 \text{ s}^{-1}}{49096 \text{ s}}} \\
&\approx 0,07 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}$$

„Super!“, findet Johann. „Jetzt können wir das sogenannte primäre Messergebnis in folgender Form kompakt angeben:

$$r_n = (0,72 \pm 0,07) \text{ s}^{-1} .“$$

„Fein.“, meint Hubertus. „Fassen wir noch die wichtigsten Begriffe zusammen.“

Zählrate	Anzahl an gemessenen Impulsen dividiert durch die Messzeit
Brutto-Zählrate	Zählrate, verursacht durch die Strahlung der Umgebung <u>und</u> der Probe
Nulleffekt-Zählrate	Zählrate, verursacht nur durch die Umgebung
Netto-Zählrate	Zählrate, verursacht nur durch die Probe
Messunsicherheit	Nicht-negative Gütekennzahl, die einem Messwert zugeordnet wird, und ein Maß für die Menge an Information über die Werte der Messgröße
Wahrscheinlichkeitsdichte	<p>Mathematische Funktion, die ein bestimmtes Intervall der Werte auf der x-Achse auszeichnet bzw. hervorhebt und deren Fläche unter ihrem Graphen auf Eins normiert ist</p> <p><i>Wie sind die Formelsymbole zu lesen?</i> $f_{R_n}(\tilde{r}_n \eta)$ = „Wkts.-Dichte f zur Größe R_n an der Stelle des Wertes \tilde{r}_n gegeben ein Wert η“ oder alternativ $f_{R_n}(\tilde{r}_n \eta)$ = „Wkts.-Dichte f zur Größe R_n an der Stelle des Wertes \tilde{r}_n unter der Bedingung eines Werts η“ (siehe auch das Glossar)</p>

Primäres Messergebnis	Messwert mit zugeordneter Messunsicherheit nur auf der Basis der Messung, also ohne Integration von Vorwissen (siehe auch die Definition im Glossar im Vergleich mit dem vollständigen Messergebnis)
--------------------------	---

Entscheidungskriterium „Erkennungsgrenze“ – Wann liegt ein Probeneffekt vor?

„Aber inwiefern kann ich aus diesem Messergebnis folgern, dass der Stein vielleicht radioaktiv ist?“, fragt Hubertus weiter.

„Im Prinzip könntest Du die Unsicherheit heranziehen, um einen Vergleich Deines Messwertes mit dem Wert $r_n = 0 \text{ s}^{-1}$ durchzuführen. Du könntest also fragen: Ist mein Messwert im Rahmen seiner Unsicherheit hinreichend weit von der Null entfernt, um davon auszugehen, dass das Messergebnis höchstwahrscheinlich tatsächlich größer Null ist.“, erklärt Johann.

„Das bessere Vorgehen, um diese Frage zu beantworten, nutzt die sogenannte Erkennungsgrenze r_n^* , mit deren Hilfe Du entscheiden kannst, den Stein als radioaktiv anzusehen.“, antwortet Johann.

„Wenn Dein primäres Messergebnis größer ist als die Erkennungsgrenze, wenn also gilt:

$$r_n > r_n^*,$$

dann darfst Du entscheiden, Deinen Stein als radioaktiv anzusehen.“, fährt Johann fort.

„Warum sagst Du – als radioaktiv anzusehen – und nicht – dass der Stein radioaktiv ist?“, will Hubertus wissen.

„Das liegt daran, dass jede Entscheidung auch falsch sein kann.“, sagt Johann. „Wie Du gleich siehst, musst Du für die Bestimmung der Erkennungsgrenze eine Wahrscheinlichkeit α festlegen. Diese ist die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung im Hinblick auf die Radioaktivität des Steins.“

„Naja, eine falsche Entscheidung will ich natürlich möglichst nicht treffen, also sollte die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung doch eher klein gewählt werden, richtig?, fragt Hubertus.

„Korrekt, die Wahrscheinlichkeit α wird meist auf 5 % gesetzt.“, antwortet Johann.

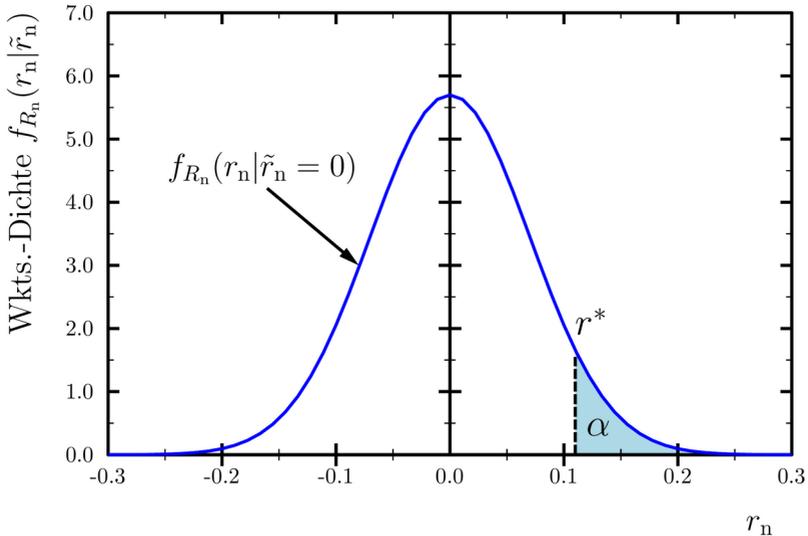
„In der ISO 11929 findest Du Berechnungsvorschriften für die Erkennungsgrenze.“, führt Johann weiter aus. „Sie lautet in unserem Fall:

$$r_n^* = k_{1-\alpha} \cdot \sqrt{r_0 \cdot \left(\frac{1}{t_b} + \frac{1}{t_0} \right)}$$

mit dem sogenannten Quantil der Standardnormalverteilung $k_{1-\alpha} = 1,645$ und der Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5 \%$ für eine falsche Entscheidung.“

„Ui, das sieht kompliziert aus.“, meint Hubertus.

„Warte, ich zeichne ein Diagramm dazu.“, erwidert Johann.



„Du siehst hier eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Netto-Zählrate r_n , die um den Wert Null zentriert ist. Sie spiegelt die Dichte $f_{R_n}(r_n | \tilde{r}_n = 0)$ der Messwerte r_n wider, wenn der Stein in Wahrheit nicht radioaktiv ist, also wenn der aktualisierte Wert Null ist: $\tilde{r}_n = 0$.“, erklärt Johann.

„Ah, ok. Dann hat es Sinn, wenn die Dichte der gemessenen Werte r_n um Null zentriert ist.“, kommentiert Hubertus.

„Die Erkennungsgrenze r_n^* wird anhand dieser Wahrscheinlichkeitsdichte festgelegt, indem rechts von ihr eine Fläche α von 5 % unter dem entsprechenden Teil des Graphen liegen muss. Das ist die blaue Fläche im Diagramm.“, sagt Johann.

„Aber was sagt mir das nun?“, will Hubertus wissen.

„Das bedeutet, dass nur 5 % der Messwerte oberhalb der Erkennungsgrenze liegen, wenn die Probe in Wahrheit nicht radioaktiv ist.“, erläutert Johann. „Wenn dann ein einzelner Messwert größer ist als die Erkennungsgrenze und wenn Du deshalb entscheidest, die Probe als radioaktiv anzusehen, dann liegst Du in nur 5 % der Fälle mit Deiner Entscheidung falsch.“

„Jetzt wird es klarer.“, bestätigt Hubertus. „Das heißt, es kann passieren, dass ich aufgrund des Messwertes schließe, der Stein sei radioaktiv, aber in Wahrheit ist er es doch nicht. Diesen Fehler will ich natürlich minimieren. Jetzt verstehe ich, warum α eher klein gewählt werden sollte.“

Mittlerweile ist Johann in seinem Element und erklärt voller Eifer: „Wenn wir uns die Formeln für die Messunsicherheit und die Erkennungsgrenze untereinander hinschreiben, dann erkennst Du, dass es einen Zusammenhang gibt.“ Johann schreibt die beiden Formeln nochmal untereinander auf:

$$u(r_n) = \sqrt{\frac{r_b}{t_b} + \frac{r_0}{t_0}}$$
$$r_n^* = k_{1-\alpha} \cdot \sqrt{r_0 \cdot \left(\frac{1}{t_b} + \frac{1}{t_0} \right)}$$

„Die Erkennungsgrenze umfasst nämlich alle Größen, die auch in der Messunsicherheit auftreten, und sogar in ähnlicher mathematischer Struktur.“, ergänzt Johann.

„Die Erkennungsgrenze hängt demnach von den Messzeiten und von der Nulleffekt-Zählrate ab.“, erklärt Johann weiter. „Sie kann durch die Verlängerung der Messzeiten oder durch bessere Abschirmung der Hintergrundstrahlung verkleinert werden.“

„Rechnen wir das doch mal aus.“ Johann führt die Rechnung vor:

$$\begin{aligned} r_n^* &= k_{1-\alpha} \cdot \sqrt{r_0 \cdot \left(\frac{1}{t_b} + \frac{1}{t_0} \right)} \\ &= 1,645 \cdot \sqrt{131,22 \text{ s}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{63587 \text{ s}} + \frac{1}{49096 \text{ s}} \right)} \\ &\approx 0,11 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

„Ok, das bedeutet aber, dass mein Stein als radioaktiv angesehen werden sollte, denn es ist $0,72 \text{ s}^{-1} > 0,11 \text{ s}^{-1}$ “, stellt Hubertus fest. „Ich hatte also recht mit meiner ersten Einschätzung.“

„Richtig, Dein primäres Messergebnis überschreitet die Erkennungsgrenze.“, führt Johann aus. „Deine Einschätzung beruht aber jetzt auf einem allgemein anerkannten objektiven Kriterium, das speziell für diesen Zweck definiert ist und nicht einfach ignoriert werden kann.“

„Mmh.“, meint Hubertus skeptisch. „Das Ganze scheint mir doch recht unsicher.“

Bewertungskriterium „Nachweisgrenze“ – Ist das Messverfahren geeignet?

„Genau das ist der springende Punkt in diesem sogenannten Konzept der Messunsicherheit nach dem GUM.“, lacht Johann. „Die darauf aufbauende Norm ISO 11929 geht sogar noch ein paar Schritte weiter.“, ergänzt Johann, der jetzt nicht mehr zu bremsen ist. „Denn was noch fehlt, ist eine Bewertung des Messverfahrens. Wir sollten nämlich wissen, welches der kleinste wahre Wert ist, von dem wir ausgehen, dass er mit unserem Messverfahren zuverlässig nachgewiesen werden kann.“

„Moment.“, erwidert Hubertus. „Du hast doch vorhin gesagt, dass es nur genau einen wahren Wert gibt. Wieso kann es jetzt einen kleinsten und damit mehrere geben?“

„Da hast Du gut aufgepasst!“, meint Johann. „Ich hatte Dir erklärt, dass die Messwerte, die durch das Wissen aus der Messung und durch ein bestimmtes Vorwissen ausgezeichnet sind, als aktualisierte Werte verstanden werden können. Diese Werte sollten näher an der Wahrheit liegen, weil ihre Auszeichnung in Form einer Wahrscheinlichkeitsdichte alle verfügbaren Informationen nutzt. Deshalb bezeichnet man sie auch als „mögliche wahre Werte“ oder kurz „wahre Werte“. Leider führt das zu einer Doppeldeutigkeit, ist aber praktischer.“

„Ja, das verstehe ich. Das heißt aber, dass der Kontext wichtig ist, in dem von den wahren Werten gesprochen wird.“, bestätigt Hubertus etwas gequält. „Allerdings leuchtet es mir noch nicht ein, warum wir den kleinsten wahren Wert bestimmen sollten?“

„Naja, wenn Du auf die Idee kommen solltest, Dein neues Fundstück beim Stammtisch als radioaktiv anzupreisen, dann könnte Timo, der, wie Du weißt, Sachbearbeiter bei der Aufsichtsbehörde für den Umgang mit radioaktiven Stoffen ist, nachhaken.“, erklärt Johann.

„Timo wird unsere Entscheidung auf der Basis der Erkennungsgrenze interessiert zur Kenntnis nehmen, aber er wird Dich fragen, ob unser Messverfahren überhaupt empfindlich genug ist, um mögliche wahre Werte im Bereich eines Grenzwerts, sagen wir von $r_g = 1,0 \text{ s}^{-1}$ nachzuweisen. Nur wenn Dein Messverfahren dies leisten kann, bist Du in der Lage, hinreichend plausibel zu machen, dass Dein Messergebnis diesen Grenzwert im besten Fall unterschreitet. Und das wird Timo, zu dessen Tagesgeschäft solche Grenzwerte gehören, sicherstellen wollen.“

Jetzt will es Hubertus wissen: „Gut, wie berechnen wir also diesen kleinsten möglichen wahren Wert?“

„Dieser kleinste wahre Wert ist durch die Nachweisgrenze $r_n^\#$ gegeben.“, sagt Johann. „Die ISO 11929 liefert Dir wieder die geeignete Formel, die für unseren Fall lautet:

$$\begin{aligned} r_n^\# &= 2k \cdot \sqrt{r_0 \cdot \left(\frac{1}{t_b} + \frac{1}{t_0} \right) + \frac{k^2}{t_b}} \\ &= 2 \cdot r_n^* + \frac{k^2}{t_b} \end{aligned}$$

mit dem Quantil der Standardnormalverteilung $k = 1,645$. Wir setzen hier Gauß-verteilte Messwerte voraus, da wir hinreichend viele Zählimpulse gemessen haben.“

„Wie Du siehst, ist die Nachweisgrenze etwas größer als das Doppelte der Erkennungsgrenze. Auch sie hängt damit von den Messzeiten und dem Nulleffekt ab.“, erklärt Johann. „In unserem Fall ergibt sich folgender Wert für die Nachweisgrenze:

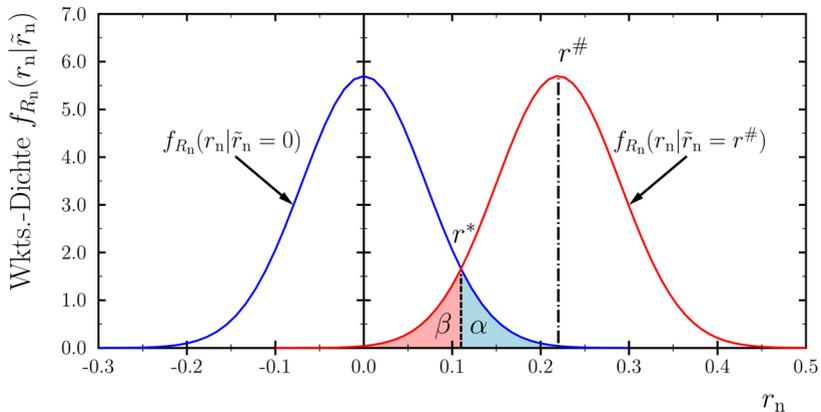
$$\begin{aligned} r_n^\# &= 2 \cdot r_n^* + \frac{k^2}{t_b} \\ &= 2 \cdot 0,11 \text{ s}^{-1} + \frac{2,71}{63587 \text{ s}} \\ &\approx 0,22 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

„Das ist der kleinste wahre Wert, von dem wir ausgehen, dass er mit unserem Messverfahren zuverlässig nachweisbar ist.“, erklärt Johann.

„Da dieser kleiner ist als Timo's Grenzwert $r_g = 1,0 \text{ s}^{-1}$,“ führt Johann weiter fort, „kannst Du ihn beruhigen. Wir können davon ausgehen, dass unser Messverfahren zuverlässig Netto-Zählraten im Bereich und unterhalb des Grenzwertes messen kann.“

„Was ist eigentlich mit dem Adjektiv – zuverlässig – gemeint?“, fragt Hubertus.

„Zuverlässig meint hier, dass die Wahrscheinlichkeit β dafür, einen Messwert kleiner als die Erkennungsgrenze zu erhalten, hinreichend klein ist. Das heißt umgekehrt, dass die meisten primären Messwerte oberhalb der Erkennungsgrenze liegen, wenn der wahre Wert der Netto-Zählrate dem kleinsten nachweisbaren entspricht. Das ist der Bereich oberhalb der Erkennungsgrenze unter der roten Gauß-Glocke in folgendem Diagramm.“



Dass die meisten Werte oberhalb der Erkennungsgrenze liegen, ist aber nur dann möglich, wenn der wahre Wert \tilde{r}_n eine bestimmte untere Grenze, nämlich die Nachweisgrenze $r_n^\#$, nicht unterschreitet. Diese untere Grenze wird von der Wahrscheinlichkeit β (rote Fläche) festgelegt, die ebenfalls meist auf 5 % festgesetzt wird. Die Nachweisgrenze entspricht mathematisch dem sogenannten Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{R_n}(r_n | \tilde{r}_n = r_n^\#)$, die ich Dir oben in Rot eingezeichnet habe.“, fügt Johann hinzu.

„Ok.“, meint Hubertus, „Lass' uns das wieder zusammenfassen. Das wird nämlich langsam recht viel:

Primäres Messergebnis: $r_n = (0,72 \pm 0,07) \text{ s}^{-1}$

Erkennungsgrenze: $r_n^* = 0,11 \text{ s}^{-1} \rightarrow r_n > r_n^*$

Nachweisgrenze: $r_n^\# = 0,22 \text{ s}^{-1} \quad r_g = 1,0 \text{ s}^{-1} \rightarrow r_n^\# < r_g$

Wir haben das primäre Messergebnis mit Unsicherheit, wir behandeln den Stein so, als wäre er radioaktiv, und das Messverfahren sehen wir als geeignet an.“

Hubertus notiert auch noch die folgende Übersicht:

Erkennungsgrenze	Entscheidungsparameter für oder gegen einen Probenbeitrag bei der Messung
Nachweisgrenze	Bewertungsparameter für das Messverfahren und kleinster wahrer Wert, der mit dem Messverfahren als zuverlässig nachweisbar angesehen werden kann

„Perfekt!“, stimmt Johann zu. „Jetzt brauchen wir nur noch zu zeigen, dass Timo's Grenzwert mit hoher Wahrscheinlichkeit unterschritten wird.“

Konformitätsprüfung - Ist der wahre Wert kleiner als der Grenzwert?

„Irgendwie verwirrt mich das.“, stellt Hubertus fest. „Wir haben doch gerade gezeigt, dass die Nachweisgrenze kleiner ist als der Grenzwert. Was meinst Du damit?“

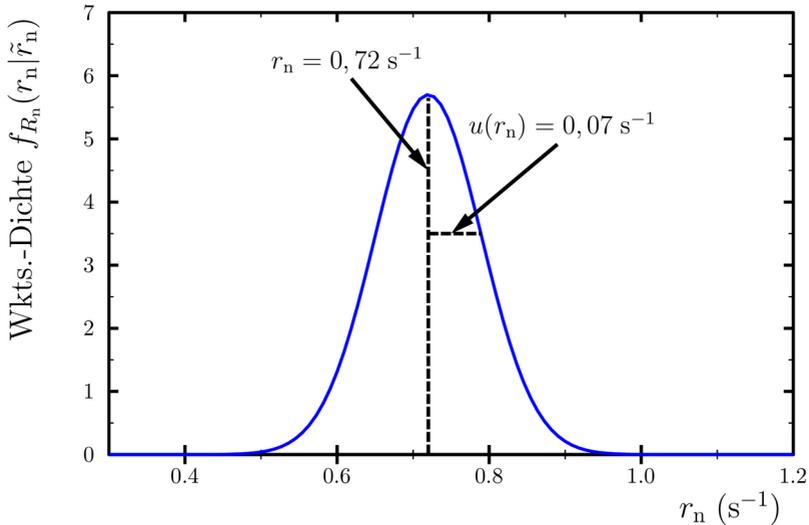
„Naja, der kleinste wahre Wert, der mit dem Messverfahren nachgewiesen werden kann, ist eben nicht der mögliche wahre Wert Deiner Netto-Zählrate, die von der Radioaktivität des Steins herrührt“, erklärt Johann. „Mit der Nachweisgrenze bewertest Du das Messverfahren, der wahre Wert für die Netto-Zählrate des Steins kann aber größer sein als der Grenzwert.“

„Ah, ich glaube, es dämmert mir.“, meint Hubertus, „Dann prüfen wir doch einfach, ob der primäre Messwert im Rahmen seiner Unsicherheit kleiner ist als der Grenzwert. So wie ich die Unsicherheit nun verstanden habe, müsste dafür der Messwert mindestens so weit unter dem Grenzwert liegen, dass sein Wert plus seine Unsicherheit ebenfalls kleiner als der Grenzwert ist.“

„Super, Du bist auf dem richtigen Weg.“, entgegnet Johann, „Aber der Vergleich zwischen Mess- und Grenzwert wird standardmäßig anhand der oberen Grenze des sogenannten probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls durchgeführt.“

„Ok, und das ist?“, fragt Hubertus mittlerweile schon etwas angepannt von den vielen Erklärungen.

Dessen ungeachtet führt Johann voller Elan aus: *„Das Überdeckungsintervall ist ein Wertebereich unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichte. Du erinnerst Dich an die Graphen, die ich Dir im Zusammenhang mit der Unsicherheit gezeichnet hatte? Dein primärer Messwert und seine Unsicherheit spannen eine solche Wahrscheinlichkeitsdichte auf. Hier siehst Du, was ich meine:*



„Diese Wahrscheinlichkeitsdichte wird Likelihood genannt. Sie spiegelt die Verteilung Deiner primären Messwerte wider.“, fügt Johann hinzu. „Was wir aber für das Überdeckungsintervall brauchen, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, die Posteriori-Dichte genannt wird. Sie vereint das Vorwissen, das Du über die Werte Deiner Messgröße hast, bevor Du die Messung durchführst, und das Wissen aus der Messung.“

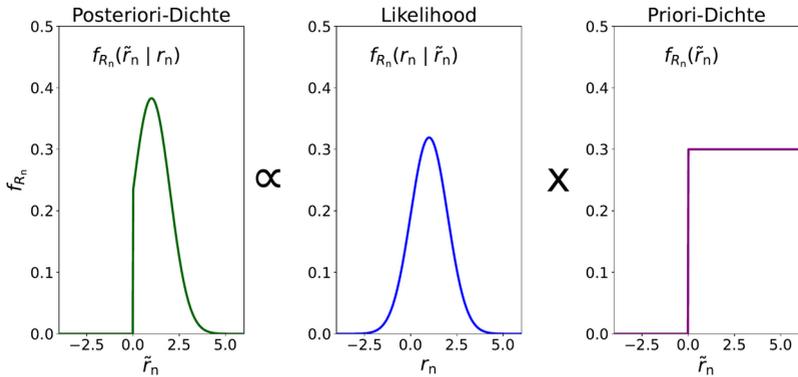
„Welches wissen habe ich denn vor der Messung über die Messwerte?“, will Hubertus wissen.

„Du weißt zum Beispiel, dass Deine Netto-Zählrate nicht negativ sein sollte. Eine negative Zählrate würde keinen Sinn haben. Wenn du Dir aber Dein Modell der Auswertung anschaust:

$$r_n = r_b - r_0,$$

dann kann es vorkommen, dass die Hintergrundzählrate zufällig größer ist als die Brutto-Zählrate.“, erklärt Johann weiter. „Dann wäre Deine Netto-Zählrate negativ.“

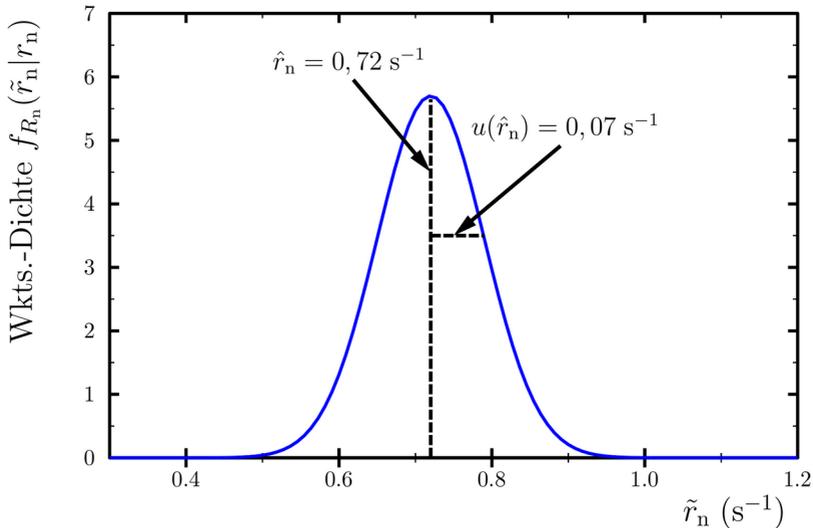
„Dieses Problem wird beseitigt, wenn Du die Likelihood mit einer Stufenfunktion als sogenannte Priori-Dichte kombinierst, die nur bei Netto-Zählraten größer Null einen von Null verschiedenen Dichtewert zulässt. Das sieht dann so aus.“ (Johann zeichnet eine neues Diagramm.)



„Das ergibt in dem von mir gezeichneten Fall eine Posteriori-Dichte (in Grün), die keine negativen Werte besitzt und deren Fläche unter ihrem Graphen Eins ergibt. Die Likelihood (in Blau) ist recht breit und ragt deshalb in negative Werte hinein. Das Vorwissen ist in der Priori-Dichte (in Lila) enthalten und schneidet die Likelihood bei Null nach links ab. Dadurch bleiben die Werte der Posteriori-Dichte alle positiv. Sie enthält damit alles Wissen über Deine Messgröße.“

„Ah, verstehe.“, meint Hubertus, „Das klingt sinnvoll.“

„Richtig.“, erwidert Johann. „Die Posteriori-Dichte wird anschließend genutzt, um den besten Schätzwert stellvertretend für den unbekanntem wahren Wert und dessen Unsicherheit zu berechnen. Beide Parameter zusammen werden üblicherweise als „vollständiges Messergebnis“ bezeichnet. Das vollständige Messergebnis kann im Prinzip auch als Wahrscheinlichkeitsdichte dargestellt werden. Das sieht dann für Deine Steinmessung so aus:“



„Aber das ist doch das gleiche Diagramm wie von gerade eben bei der Likelihood.“, glaubt Hubertus.

„Nicht ganz.“, entgegnet Johann, „Wie Du siehst, steht an der x-Achse eine Schlangenlinie über der Netto-Zählrate. Und auch bei der Bezeichnung der Wahrscheinlichkeitsdichte an der y-Achse ist das so. Damit wird ausgedrückt, dass es sich nicht um die primären Messwerte, sondern um die aktualisierten Werte handelt, die das Vorwissen und das Wissen aus der Messung enthalten.“

„Stimmt. Und was bedeuten die Hüte auf der Netto-Zählrate?“, fragt Hubertus.

„Diese signalisieren, dass es sich jetzt um den besten Schätzwert und seine Unsicherheit handelt, die mit Hilfe der Posteriori-Dichte berechnet worden sind.“, ergänzt Johann.

„Die Werte sind aber die gleichen wie beim primären Messergebnis, und abgeschnitten ist die Dichte auch nicht.“, stellt Hubertus fest. „Also ist es doch so, wie ich anfangs vermutet habe.“

„Ja und Nein.“, erwidert Johann. „Die Werte sind gleich, weil Deine Likelihood recht schmal ist und sie deshalb keinen bedeutenden Anteil bei negativen Werten hat. In diesem Fall ist die Posteriori-Dichte fast gleich der Likelihood, weshalb der beste Schätzwert und der primäre Messwert sowie deren Unsicherheiten im Rahmen der Rundungen gleich sind. Aber von der Bedeutung her gibt es einen Unterschied.“

„Das ist dann wohl auch der Grund, warum Du die Posteriori-Dichte gleich zeichnen konntest. Denn ich vermute, dass die Formeln für die genaue Berechnung etwas komplizierter sind.“, meint Hubertus.

„Ja, genau. Du findest die Formeln in der ISO 11929, und wir brauchen diese nun auch, um die obere Grenze des Überdeckungsintervalls zu berechnen.“, erklärt Johann. „Ich schreibe Sie erstmal alle auf.“

Bester Schätzwert

$$\hat{r}_n = r_n + \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} \cdot u(r_n) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r_n}{u(r_n)}\right)^2\right)$$

Unsicherheit des besten Schätzwertes

$$u(\hat{r}_n) = \sqrt{u^2(r_n) - (\hat{r}_n - r_n)\hat{r}_n}$$

Skalierungsfaktor

$$\omega = \Phi\left(\frac{r_n}{u(r_n)}\right) \quad (\Phi = \text{Standardnormalverteilung})$$

„Uff, wie ich vermutet hatte.“, stöhnt Hubertus.

„Naja, warte. Wenn Du Dir die Gleichung für den besten Schätzwert anschaust, dann stellst Du fest, dass er aus dem primären Messwert plus einer Korrektur berechnet wird. Diese Korrektur ist für Deinen Fall der Steinmessung aber verschwindend klein.“

Das Verhältnis $r_n/u(r_n)$ ist ungefähr 10, das eingesetzt in die Exponentialfunktion ergibt einen Wert in der Größenordnung von $1 \cdot 10^{-23}$.

Die weiteren Faktoren in der Korrektur sind von der Größenordnung 1, so dass die Korrektur keine Rolle für das Gesamtergebnis spielt. Es darf also geschrieben werden:

$$\hat{r}_n = r_n.$$

„Setzen wir das in die Formel für die Unsicherheit des besten Schätzwertes ein, so folgt sofort:“

$$u(\hat{r}_n) = u(r_n).$$

„Du hast Recht, ist ja doch nicht so schlimm.“, bemerkt Hubertus. „Wie berechnet man nun die obere Grenze des Überdeckungsintervalls?“

„Die Formeln dafür sehen zwar auch zunächst abschreckend aus, aber letztlich sind sie doch nachvollziehbar. Ich schreibe zunächst die Formeln für die untere und obere Intervallgrenze auf:“, meint Johann.

Untere Grenze des Überdeckungsintervalls
 $r_n^{\triangleleft} = r_n - k_p \cdot u(r_n)$ mit $p = \omega \cdot (1 - \gamma/2)$

Obere Grenze des Überdeckungsintervalls
 $r_n^{\triangleright} = r_n + k_q \cdot u(r_n)$ mit $q = 1 - \omega \cdot \gamma/2$

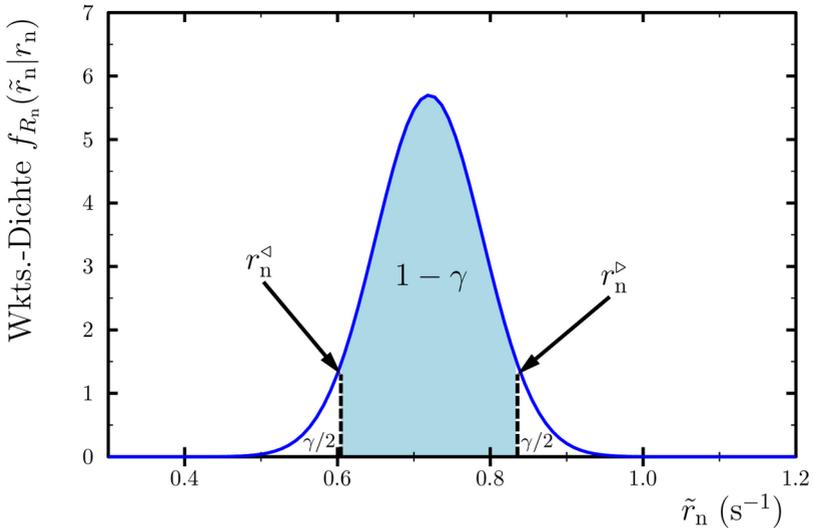
„Sind der primäre Messwert und dessen Unsicherheit bekannt, lassen sich die Intervallgrenzen leicht berechnen. Die Skalierungsfaktoren der Unsicherheit, k_p und k_q , sind die Quantile einer Standardnormalverteilungsdichte mit den Wahrscheinlichkeiten p und q . Der Faktor ω kann in Tabellenwerken nachgeschlagen werden, ebenso wie die Quantile zu den Wahrscheinlichkeiten p und q . Du kannst diese Werte aber auch mit einer Tabellenkalkulationssoftware selbst berechnen. Lediglich die Wahrscheinlichkeit γ braucht von Dir festgelegt zu werden.“, erklärt Johann weiter. „Wenn ich das für unsere Messung einmal ausrechne und $\gamma = 10\%$ setze, erhalte ich:“

$$r_n^{\triangleleft} = 0,72 \text{ s}^{-1} - 1,645 \cdot 0,07 \text{ s}^{-1} = 0,60 \text{ s}^{-1}$$

$$r_n^{\triangleright} = 0,72 \text{ s}^{-1} + 1,645 \cdot 0,07 \text{ s}^{-1} = 0,84 \text{ s}^{-1}$$

„Was bedeutet denn die Wahrscheinlichkeit γ ?“, fragt Hubertus.

„Sie gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Werte außerhalb des Überdeckungsintervalls liegen. Ihr Gegenstück, nämlich $1 - \gamma$, ist dagegen viel interessanter. Dieses entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass Werte, die als wahre Werte in Frage kommen, im Überdeckungsintervall liegen.“, antwortet Johann. „Das kannst Du an folgenden Diagramm nachvollziehen. Ich zeichne es schon für Deinen Fall.“

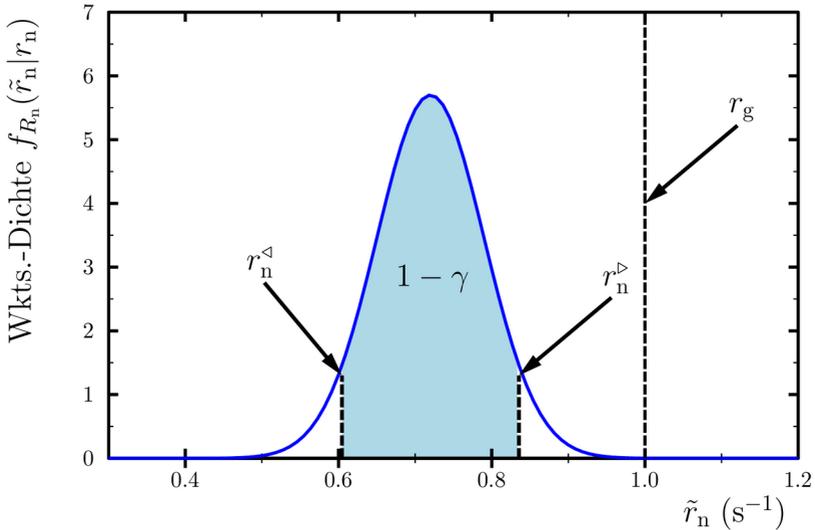


„Die blaue Fläche unter dem Graphen der Posteriori-Dichte Deiner Steinmessung symbolisiert das Intervall, in dem mögliche wahre Werte der Netto-Zählrate mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \gamma$ liegen. Setzt Du γ auf 10 %, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mögliche wahre Werte im Überdeckungsintervall liegen, 90 %. Links und rechts von der unteren und oberen Intervallgrenze befinden sich dann jeweils $\gamma/2 = 5 \%$ der Fläche unter dem Graphen. Daher kommt auch die Bezeichnung „probabilistisch symmetrisch“.“

„Das heißt doch dann soviel wie, Werte außerhalb der Intervallgrenzen sind eher unwahrscheinlich?“, will Hubertus wissen.

„So ist es.“, erwidert Johann.

„Gut.“, drängt Hubertus jetzt etwas, „Nun fehlt doch nur noch der eigentliche Vergleich der oberen Grenze des Überdeckungsintervalls mit dem Grenzwert. Und die obere Grenze hast Du ja schon ausge-rechnet: $r_n^{\triangleright} = 0,84 \text{ s}^{-1}$. Lass' mich mal den Grenzwert der Zeichnung hinzufügen:“



„Ganz offensichtlich ist die obere Grenze des Überdeckungsinter-valls kleiner als der Grenzwert:“

$$r_n^{\triangleright} < r_g$$

„Das bedeutet, dass Dein bester Schätzwert signifikant kleiner ist als der Grenzwert. Denn letzterer liegt im Bereich von recht unwahr-scheinlichen Werten der Posteriori-Dichte.“, führt Johann aus. „Damit können wir ruhigen Gewissens von einer Grenzwertunterschreitung bei Deinem Stein ausgehen.“

„Dann sollte Timo ja beruhigt sein. Ich werde ihm von dieser Lehr-stunde berichten.“, sagt Hubertus, der nun endlich fertig werden will.

„Trag's mir nun nicht nach, aber es fehlt noch die abschließende Zu-sammenfassung unserer Auswertung.“, findet Johann.

Lachend erwidert Hubertus: „Na klar, das stelle ich Dir nun zusammen.“

Vollständiges

Messergebnis: $\hat{r}_n = (0,72 \pm 0,07) \text{ s}^{-1}$

Erkennungsgrenze: $r_n^* = 0,11 \text{ s}^{-1} \rightarrow r_n > r_n^*$

Nachweisgrenze: $r_n^\# = 0,22 \text{ s}^{-1} \quad r_g = 1,0 \text{ s}^{-1} \rightarrow r_n^\# < r_g$

Untere Grenze des Überdeckungsintervalls

$$r_n^{\triangleright} = 0,60 \text{ s}^{-1}$$

Obere Grenze des Überdeckungsintervalls

$$r_n^{\triangleright} = 0,84 \text{ s}^{-1} \rightarrow r_n^{\triangleright} < r_g$$

Wir haben einen besten Schätzwert mit Unsicherheit, wir behandeln den Stein so, als wäre er radioaktiv, das Messverfahren betrachten wir als geeignet und der beste Schätzwert unterschreitet den Grenzwert signifikant.“

Auch hier macht sich Hubertus nochmal Notizen:

Likelihood	Wahrscheinlichkeitsdichte der gemessenen Werte
Priori-Dichte	Wahrscheinlichkeitsdichte, die das Vorwissen über die Werte der Messgröße beschreibt
Posteriori-Dichte	Wahrscheinlichkeitsdichte, die das Vorwissen über die Werte der Messgröße und das Wissen aus den gemessenen Werten in sich vereint
Vollständiges Messergebnis	Bester Schätzwert mit zugeordneter Messunsicherheit auf der Basis der Posteriori-Dichte
Überdeckungsintervall	Intervall der Posteriori-Dichte, das aktualisierte Werte als mögliche wahre Werte der Messgröße mit einer hohen Wahrscheinlichkeit enthält

„Vielen Dank an Dich, Johann, für Deine Zeit und die vielen wirklich interessanten Erklärungen, aber es war am Ende doch schon recht viel. Es hat sich aber gelohnt, denn ich habe jetzt einen guten Überblick aus der Praxis.“, läutet Hubertus das Ende der Geschichte ein.

„Gerne geschehen, hat mir Spaß gemacht!“

Glossar

Zählrate	Anzahl an gemessenen Impulsen dividiert durch die Messzeit
Brutto-Zählrate	Zählrate, verursacht durch die Strahlung der Umgebung <u>und</u> der Probe
Nulleffekt-Zählrate	Zählrate, verursacht nur durch die Umgebung
Netto-Zählrate	Zählrate, verursacht nur durch die Probe
Messunsicherheit	Nicht-negative Gütekennzahl, die einem Messwert zugeordnet wird, und ein Maß für die Menge an Information über die Werte der Messgröße
Wahrscheinlichkeitsdichte	<p>Mathematische Funktion, die ein bestimmtes Intervall der Werte auf der x-Achse auszeichnet bzw. hervorhebt und deren Fläche unter ihrem Graphen auf Eins normiert ist</p> <p><i>Wie sind die Formelsymbole zu lesen?</i> $f_{R_n}(r_n \tilde{r}_n)$ = „Wkts.-Dichte f zur Größe R_n an der Stelle des Wertes r_n gegeben ein wahrer Wert \tilde{r}_n“ oder alternativ $\tilde{f}_{R_n}(r_n \tilde{r}_n)$ = „Wkts.-Dichte f zur Größe R_n an der Stelle des Wertes r_n unter der Bedingung eines wahren Werts \tilde{r}_n“</p>
Erkennungsgrenze	Entscheidungsparameter für oder gegen einen Probenbeitrag bei der Messung
Nachweisgrenze	Bewertungsparameter für das Messverfahren und kleinster wahrer Wert, der mit dem Messverfahren als zuverlässig nachweisbar angesehen werden kann
Likelihood	Wahrscheinlichkeitsdichte der gemessenen Werte
Priori-Dichte	Wahrscheinlichkeitsdichte, die das Vorwissen über die Werte der Messgröße beschreibt

Posteriori-Dichte	Wahrscheinlichkeitsdichte, die das Vorwissen über die Werte der Messgröße und das Wissen aus den gemessenen Werten in sich vereint
Primäres Messergebnis	Messwert mit zugeordneter Messunsicherheit (hier auf der Basis der Likelihood)
Vollständiges Messergebnis	Beste Schätzwert mit zugeordneter Messunsicherheit auf der Basis der Posteriori-Dichte
Überdeckungsintervall	Intervall der Posteriori-Dichte, das aktualisierte Werte als mögliche wahre Werte der Messgröße mit einer hohen Wahrscheinlichkeit enthält

Literaturempfehlungen

Text mit unmittelbarem Bezug zur **ISO 11929**:

- [1] Michel, Rolf; Birkhan, Jonny: *A Primer in Metrology and Statistics*. Fachverband für Strahlenschutz e.V., Publikationsreihe FORTSCHRITTE IM STRAHLEN- SCHUTZ, ISSN 1013-4506, FS-2022-183-AKSIGMA, 2022

Text allgemein über das **Messunsicherheitskonzept**:

- [2] Adunka, Franz: *Messunsicherheiten – Theorie und Praxis*. 3. Auflage, Vulkan-Verlag, Essen, 2007
- [3] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML: *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 100:2008

Vertiefende Texte zur **Bayes-Statistik auf dem Niveau zwischen Anfänger und Fortgeschrittenem**:

- [4] Tschirk, Wolfgang: *Statistik: Klassisch oder Bayes – Zwei Wege im Vergleich*. Springer Spektrum Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014
- [5] Schmitt, Samuel A.: *Measuring Uncertainty – an Elementary Introduction to Bayesian Statistics*. Addison Wesley Publishing Company, Reading, 1969

Vertiefende Texte zur **Bayes-Statistik auf Fortgeschrittenem-Niveau**:

- [6] Sivia, D. S.; Skilling, J.: *Data Analysis – A Bayesian Tutorial*. 2. Auflage, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2008

- [7] Kleiter, Gernot D.: *Bayes-Statistik – Grundlagen und Anwendungen*. De Gruyter-Verlag, Berlin, 1981

Vertiefende Texte zur **Bayes-Statistik und Datenanalyse auf Expertenniveau**:

- [8] Gregory, Phil: *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010
- [9] D'Agostini, Giulio: *Bayesian Reasoning in Data Analysis – A Critical Introduction*. World Scientific Publishing, Singapore, 2013
- [10] Weise, K.; Wöger, W.: *Messunsicherheiten und Messdatenauswertung*. Wiley-VCH, Weinheim, 1999

Bildnachweise

Sämtliche Photographien und Abbildungen stammen vom Autor.

Für die Abbildungen wurde sowohl die Umgebung „Graphics Layout Engine“ (<https://glx.sourceforge.io/>) als auch unabhängig davon das Python-Paket „matplotlib“ (<https://matplotlib.org/>) verwendet.

Danksagung

Ein besonderer Dank gebührt den Kolleginnen und Kollegen aus dem Arbeitskreis Nachweisgrenzen des Fachverbandes Strahlenschutz e.V. sowie M.Sc. Maximilian Rech und Leonie J. Birkhan, die sich die Zeit genommen haben, dieses Manuskript zu kommentieren und dadurch zu helfen, es zu verbessern.

Über den Autor

Jonny Birkhan ist promovierter Strahlenschutz- und Kernphysiker am Institut für Kernphysik der Technischen Universität Darmstadt. Er leitet die Abteilung Strahlenschutz des Instituts und ist für den technischen Betrieb des Magnetspektrometers QCLAM an der Beschleunigeranlage S-DALINAC verantwortlich.

Seit 2013 ist er Mitglied im Arbeitskreis Nachweisgrenzen des Fachverbandes Strahlenschutz e.V. Anfang 2023 übernahm er den Vorsitz des Arbeitskreises.

Anschrift des Autors

Technische Universität Darmstadt

Fachbereich 5

Institut für Kernphysik

Schlossgartenstr. 9

64289 Darmstadt

E-Mail: jbirkhan@ikp.tu-darmstadt.de

<https://orcid.org/0000-0002-4366-7492>