

BELLSCHE UNGLEICHUNGEN UND VERSCHRÄNKUNG IN DER
QUANTENINFORMATIONSTHEORIE



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

**vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt**

zur Erlangung des Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

**Dissertation
von Alexander Sauer**

Erstgutachter: Prof. Dr. Gernot Alber
Zweitgutachter: Prof. Dr. Reinhold Walser

Darmstadt 2024

Alexander Sauer: *Bellsche Ungleichungen und Verschränkung in der Quanteninformationstheorie*

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUPrints: 2024

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-288022](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:tuda-tuprints-288022)

URI: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/28802>

Tag der mündlichen Prüfung: 22.05.2024



Diese Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung

(CC BY 4.0 International)

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

ABSTRACT

In the 1960s J.S. Bell developed inequalities, which have to be fulfilled by all local realistic theories but can be violated in quantum theory by entangled states. Recently, these Bell inequalities and their implications have received a lot of attention, especially after the Nobel prize in physics 2022 has been awarded to Clauser, Aspect and Zeilinger for their advancements in quantum theory. Thereby, the fundamental difference of quantum theory and all classical theories has been demonstrated experimentally.

This dissertation investigates Bell inequalities under the presence of imperfect detectors and also evaluates other criteria of entanglement for different families of quantum states.

First, the theoretical basis and construction of Bell inequalities is described in detail and the implications of imperfect detection on these inequalities are discussed. Based on this, for bi- and tripartite systems the necessary efficiency and dark count probabilities of the involved detectors, which still allow for the violation of a Bell inequality is analyzed. To achieve this, the measurement correlations which are possible in quantum theory are obtained by a semidefinite program and do not rely on special states or measurements.

In contrast to this, the second part revolves around individual states and their partition into separable and entangled states. For several families of quantum states, different criteria used in quantum information theory are tested for their ability to distinguish separable from entangled states. For some families it is also investigated which states can violate some Bell inequalities.

Therefore, this dissertation expands our knowledge regarding the use of Bell inequalities under the presence of imperfect detectors as well as relations between different criteria for entanglement and their significance.

ZUSAMMENFASSUNG

Spätestens seit der Physik-Nobelpreis 2022 an Clauser, Aspect und Zeilinger für ihre Leistungen in der Quantenforschung verliehen wurde, sind die in den 1960er Jahren von J.S. Bell entwickelten Bellschen Ungleichungen und ihre Vorteile einer breiten Öffentlichkeit bekannt. Ihre Forschungsarbeiten führten zu experimentellen Nachweisen der Verletzung Bellscher Ungleichungen, was lokal realistische Theorien ausschließt und damit einen fundamentalen Unterschied zwischen der Quantentheorie und allen klassischen Theorien offenbart.

In dieser Arbeit wird zunächst die Bedeutung und Konstruktion Bellscher Ungleichungen behandelt und betrachtet, welche Auswirkungen nicht-perfekte Detektoren auf die so hergeleiteten Bedingungen haben. Darauf aufbauend wird für bi- und tripartite Systeme untersucht, bis zu welcher Effizienz und Dunkelzählrate der verwendeten Detektoren es bei optimaler Auswahl der Quantenzustände und Observablen möglich ist, eine Bellsche Ungleichung zu verletzen. Dazu werden die in der Quantentheorie möglichen Korrelationen unabhängig von konkreten Zuständen und Observablen durch semidefinite Optimierung bestimmt.

Im zweiten Teil wird die Situation von der anderen Seite betrachtet. Nun sind Quantenzustände vorgegeben und die Frage lautet, welche dieser Zustände verschränkt sind und ob sie sogar eine Bellsche Ungleichung verletzen können. Für die Beantwortung des ersten Teils der Frage werden verschiedene aus der Quanteninformationstheorie bekannte Bedingungen für separable Zustände diskutiert und ihre Effizienz bei der Unterscheidung von verschränkten und separablen Zuständen verglichen. Der zweite Teil wird beantwortet, indem Messungen am Zustand simuliert werden und die erhaltenen Korrelationen der Messergebnisse mit Bellschen Ungleichungen getestet werden.

Damit leistet diese Dissertation einen Beitrag für das Verständnis von Separabilität, Verschränkung und Bellschen Ungleichungen sowie deren Zusammenhang.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG UND ÜBERBLICK	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	WAHRSCHEINLICHKEITSPOLYTOPE UND BELLSCHES UNGLEICHUNGEN	5
2.1	Versteckte Variablen	5
2.2	Polytope	7
2.3	Klassische Messungen in multipartiten Systemen	8
2.4	Darstellung von Bellschen Ungleichungen	10
2.4.1	Beispiele für Bellsche Ungleichungen	11
2.5	Bestimmen von Quantenkorrelationen	12
2.6	Auswirkungen fehlerbehafteter Detektoren	13
2.6.1	Verletzung Bellscher Ungleichungen bei fehlerbehafteten Detektoren	14
2.6.2	Exakte Bestimmung der benötigten Detektorparameter	16
2.6.3	Erweiterung zu tripartiten Systemen	18
2.7	Zusammenfassung	19
3	ANTEIL DER SEPARABLEN ZUSTÄNDE IM RAUM ALLER ZUSTÄNDE	21
3.1	Notwendige Bedingungen für separable Zustände	21
3.1.1	Peres-Horodecki Kriterium	23
3.1.2	Reduktionsbedingung	23
3.1.3	Majorisierungsbedingung	24
3.1.4	Bedingungen mit Rényientropien als Grundlage	24
3.1.5	Zusammenhänge der Bedingungen	25
3.2	Betrachtete Quantenzustände	27
3.2.1	Qubit-Qubit-Zustände (2×2)	27
3.2.2	Qubit-Qutrit-Zustände (2×3)	29
3.2.3	Zustände aus einem Qubit und einem 4-dimensionalen Qudit (2×4)	29
3.2.4	Qutrit-Qutrit-Zustände (3×3)	30
3.2.5	Zustände aus einem Qutrit und einem 4-dimensionalen Qudit (3×4)	30
3.3	Auswahl der Quantenzustände	31
3.3.1	Eingrenzung der Quantenzustände in einem euklidischen Raum	31
3.3.2	Auswahl zufällig verteilter Quantenzustände	33
3.3.3	Hit-and-Run-Algorithmus	35
3.3.4	Fehlerbestimmung	36
3.4	Ergebnisse	39

3.4.1	Dauer der Berechnungen	45
3.4.2	Entropiebasierte Bedingungen	46
3.4.3	Anteil der PPT-Zustände	49
3.5	Anwendung Bellscher Ungleichungen	50
3.5.1	Die CHSH-Ungleichung	50
3.5.2	Collins-Gisin-Ungleichung	54
3.6	Zusammenfassung	57
4	FAZIT UND AUSBLICK	59
	LITERATUR	61

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- Abbildung 2.1 Ablauf des Messvorgangs für zwei Parteien in einem Minkowski-Diagramm. Die horizontale Achse gibt dabei den Ort an, die vertikale Achse steht für die Zeit. Bei P wird ein Zustand erzeugt und teilweise zu A und teilweise zu B geschickt. Beide Parteien wählen eine Messeinstellung aus (W_A, W_B) , bevor die Information über den erzeugten Zustand bei Ihnen ankommt, um auszuschließen, dass diese Information Einfluss auf die Auswahl der Messeinstellung hat. Danach stellen sie ihr Messgerät entsprechend ein (M_A, M_B) und erhalten im Zeitraum (E_A, E_B) ein Messergebnis. Der Vorgang ist vollständig abgeschlossen, bevor die Information über die gewählte Messeinstellung bei der jeweils anderen Partei ankommen konnte. 6
- Abbildung 2.2 Zwei Parteien A und B führen die Messungen x, y durch und erhalten jeweils das Ergebnis a bzw. b . 8
- Abbildung 2.3 Notwendige Detektionswahrscheinlichkeit η in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit, dass ein Detektor spontan auslöst δ für zwei Parteien mit ja zwei Messeinstellungen. Unterhalb der dargestellten Kurve sind die Detektoreffizienzen zu gering, sodass kein Quantenzustand eine Bellsche Ungleichung verletzen kann. Über der Kurve ist dies dagegen möglich, wenn geeignete Quantenzustände und Messungen verwendet werden. Die untere Schranke, die mit dem semidefiniten Programm und der CH-Ungleichung bestimmt wurde, ist in rot dargestellt. Die obere Schranke für die Parameter, die aus den Quantenzuständen und Messungen von Eberhard [23] berechnet wurde, ist in blau dargestellt. Da die beiden Schranken bis auf die numerische Genauigkeit der Methode übereinstimmen, sind dadurch die kritischen Parameterkombinationen gegeben. Ergebnis aus [68]. 17

- Abbildung 2.4 Notwendige Detektionswahrscheinlichkeit η in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit, dass ein Detektor spontan auslöst δ für zwei und drei Parteien mit je zwei Messeinstellungen. Unterhalb der dargestellten Kurve sind die Detektoreffizienzen zu gering, sodass kein Quantenzustand eine Bellsche Ungleichung verletzen kann. Über der Kurve ist dies dagegen möglich, wenn geeignete Quantenzustände und Messungen verwendet werden. Für $\delta = 0$ werden mit $2/3$ bzw. $3/5$ die aus [46] bekannten Werte reproduziert. Damit sind die Bedingungen an die Detektoreparameter bei mehr involvierten Parteien etwas schwächer. Die Kurve für die Larsson-Zustände kann dabei nicht durch einen einzelnen Zustand erreicht werden, sondern es wurde jeweils der minimale Wert für die Detektorparameter aus allen Larsson-Zuständen gewählt. 19
- Abbildung 3.1 Beziehungen zwischen den betrachteten Bedingungen. Solide Pfeile zeigen an, dass bei Erfüllung einer Bedingung auch die Bedingung, auf die der Pfeil zeigt, erfüllt sein muss. Gestrichelte Pfeile gelten nur im angegebenen Spezialfall. Bei Pfeilen in beide Richtungen sind die Bedingungen äquivalent. 26
- Abbildung 3.2 Darstellung eines Schritts des Hit-and-Run-Algorithmus. Ausgehend vom Zustand \vec{a}_j wurde mit einem zufälligen Richtungsvektor \vec{d} eine Strecke durch diesen Punkt erzeugt. Nachdem einige Kandidaten für neue Zustände gleichmäßig zufällig aus dieser Strecke ausgewählt wurden, die jedoch außerhalb von G lagen, ist die rot markierte Strecke für die Auswahl neuer Kandidaten übrig geblieben. Nach der Feststellung, dass der zufällig gewählte Vektor \vec{a}_{j+1} in G liegt, wird dieser übernommen und das Verfahren wird an diesem Punkt mit einem neuen zufälligen Richtungsvektor fortgesetzt. 37

- Abbildung 3.3 Schematische Darstellung der konvexen Menge separabler belldiagonaler Zwei-Qubit-Zustände (roter Oktaeder) in der konvexen Menge aller belldiagonaler zwei-Qubit-Zustände (blauer Tetraeder). Der dreidimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^3 (3.16). Die vier Eckpunkte entsprechen dabei den vier maximal verschränkten Bellzuständen. 40
- Abbildung 3.4 Anteil R der Qubit-Qubit-Zustände, welche die auf der Rényientropie basierende Bedingung erfüllen, an allen Quantenzuständen für die verschiedenen betrachteten Teilmengen. Für $\alpha \rightarrow \infty$ ist R minimal und es werden mehr Zustände korrekt als verschränkte Zustände erkannt. Nur den markierten Punkten liegen Messwerte zugrunde und die Fehler sind kleiner als die Breite der Linien. 47
- Abbildung 3.5 Anteil R der $n \times m$ -Zustände, welche die auf der Rényientropie basierende Bedingung erfüllen, an allen Quantenzuständen für die verschiedenen betrachteten Systeme. Für $\alpha \rightarrow \infty$ ist R minimal und es werden mehr Zustände korrekt als verschränkte Zustände erkannt. Nur den markierten Punkten liegen Messwerte zugrunde und abgesehen vom 2×4 -System sind die Fehler kleiner als die Breite der Linien. Für noch höherdimensionale Systeme ist nur der Wert für $\alpha \rightarrow \infty$ angegeben, da dieser optimal ist und die Darstellung durch die zusätzlichen Kurven nahe 1 nur unübersichtlicher wird. 48
- Abbildung 3.6 Anteil R der PPT-Zustände an allen Quantenzuständen für die unterschiedlichen allgemeinen Systeme der Dimension d . Die statistischen Fehler sind in schwarz dargestellt und nur für das 3×4 -System mit $d = 143$ größer als die zur Markierung verwendeten Punkte. Da die ersten beiden Werte mit $d = 15$ und $d = 35$ den Qubit-Qubit- und Qubit-Qutrit-Zuständen entsprechen, ist in diesem Fall R auch der Anteil der separablen Zustände an allen Quantenzuständen, in höheren Dimensionen ist der Anteil der separablen Zustände kleiner als der hier ermittelte Wert. 49

- Abbildung 3.7 Darstellung des Steinmetzkörpers aus (3.40) in Kombination mit den konvexen Mengen aller separablen Zustände (innerer Oktaeder) sowie aller Quantenzustände (Tetrader) jeweils für die Belldiagonalen Zwei-Qubit-Zustände. Bei Erfüllung der Ungleichungen (3.40) kann die CHSH-Ungleichung nicht verletzt werden. Es sind deutlich Bereiche zu erkennen, die verschränkte Zustände enthalten aber innerhalb des Steinmetzkörpers liegen. Außerdem gibt es Bereiche außerhalb des Tetraeders, also kann man aus der Erfüllung der Ungleichungen alleine nicht darauf schließen, dass ein Belldiagonaler Quantenzustand vorliegt. 51
- Abbildung 3.8 Darstellung des konvexen Körpers, der sich aus den Ungleichungen (3.52) ergibt in Kombination mit den konvexen Mengen aller separablen Zustände (innerer Oktaeder) sowie aller Quantenzustände (Tetrader) jeweils für die Belldiagonalen Zwei-Qubit-Zustände. Für Zustände innerhalb des Körpers kann die CG-Ungleichung nicht verletzt werden. 56
- Abbildung 3.9 Anteil der Zwei-Qubit-Quantenzustände, welche die CG-Ungleichung (R_{CG}), die CHSH-Ungleichung (R_{CHSH}) oder mindestens eine der beiden Ungleichungen ($R_{CG+CHSH}$) verletzen können. Für jeden Punkt wurden m zufällige Messeinstellungen ausgewählt und 10^6 Zustände auf Verletzungen von Ungleichungen getestet. 57

TABELLENVERZEICHNIS

- Tabelle 3.1 Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Belldiagonalen Quantenzuständen. 39
- Tabelle 3.2 Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Zwei-Qubit X-Zuständen. 41
- Tabelle 3.3 Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Rebit-Rebit-Zuständen. 41

Tabelle 3.4	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Zwei-Qubit-Zuständen. 42
Tabelle 3.5	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und den speziellen Qubit-Quitrit-Zuständen (I) mit $d = 12$. 42
Tabelle 3.6	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und den speziellen Qubit-Quitrit-Zuständen (II) mit $d = 24$ 43
Tabelle 3.7	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allgemeinen Qubit-Quitrit-Zuständen mit $d = 35$. 43
Tabelle 3.8	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen 2×4 -Quantenzuständen. 44
Tabelle 3.9	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Quitrit-Quitrit-Zuständen. 44
Tabelle 3.10	Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen 3×4 -Quantenzuständen. 45
Tabelle 3.11	Durchschnittlich benötigte Zeit für die Erzeugung eines Zustands mit anschließendem Test des Zustands auf Erfüllung der Bedingungen aus 3.1. 46
Tabelle 3.12	Numerisch berechnete Verhältnisse R_{CHSH} zwischen Quantenzuständen, die Gl. (3.39) verletzen und allen Quantenzuständen für die Zwei-Qubit-Zustände aus Abschnitt 3.2. N ist die Anzahl der generierten Zustände. 52
Tabelle 3.13	Numerisch berechnete Verhältnisse R_{12m} zwischen Quantenzuständen, die mindestens eine der Gln. (3.41) verletzen und allen Quantenzuständen für die Zwei-Qubit-Zustände aus Abschnitt 3.2. $R_{12m/\text{CHSH}} = R_{12m}/R_{\text{CHSH}}$ gibt an, welcher Anteil aller Zustände, die die CHSH-Ungleichung bei beliebigen Messeinstellungen verletzen können, auch eine Verletzung bei einem der 12 gewählten Belltests zeigen. N ist die Anzahl der generierten Zustände. 53

EINLEITUNG UND ÜBERBLICK

1.1 EINLEITUNG

In den letzten Jahrzehnten hat sich das Gebiet der Quanteninformati-onstheorie enorm weiterentwickelt und die Verschränkung von Quan-tensystemen wurde für viele Anwendungen als eine der wichtigsten physikalischen Ressourcen identifiziert [7, 12, 55, 60]. Deshalb wurden verschiedene Kriterien entwickelt, die separable von verschränkten Zuständen unterscheiden können. Dabei können einige Kriterien wie z.B. solche basierend auf positiven Abbildungen [36, 39] oder der Kreuznorm [4, 66] die Mengen der separablen und verschränkten Zu-stände exakt unterscheiden, sind aber nicht einfach mathematisch zu bestimmen. Gleichzeitig wurden algebraische Bedingungen hergeleitet [40, 81], wie z.B. die Peres-Horodecki-Bedingung, welche prüft, ob eine partielle Transposition der Dichtematrix eines Zustands auch wieder ein Zustand ist [39, 59]. Diese Bedingungen sind leicht zu berechnen und teilweise auch experimentell implementierbar [41, 73], aber in vielen Fällen nur notwendige Bedingungen für separable Zustände, sodass es auch verschränkte Zustände gibt, die diese Bedingungen erfüllen.

Über die Jahre wurden dabei einige qualitative Zusammenhänge, welche Bedingungen für die Erfüllung anderer Bedingungen implizie-ren, hergeleitet. In dieser Dissertation werden verschiedene Zusam-menhänge quantitativ untersucht. Dazu wird jedem Quantenzustand über seine Dichtematrix ρ und das Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt ein Punkt im euklidischen Vektorraum zugeordnet. Damit wird aus der konvexen Menge der Dichtematrizen ein konvexer Körper im euklidi-schen Vektorraum, dem ein Volumen zugeordnet werden kann. Jede Bedingung definiert eine Untermenge in diesem Körper, für deren Punkte sie erfüllt ist und der Volumenanteil, den diese Untermenge an der Menge aller möglichen Quantenzustände hat, zeigt an, wie gut die Bedingung die separablen Zustände eingrenzt.

Um diese Volumenanteile zu bestimmen, wird eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Dabei werden N zufällig verteilte Quanten-zustände generiert und jeweils getestet, ob sie eine gegebene Bedin-gung erfüllen. Bei k Zuständen, die die Bedingung erfüllen, wird das Volumenverhältnis als $R = k/N$ abgeschätzt.

Für die Erzeugung der zufällig verteilten Quantenzustände wird dabei ein Hit-and-Run-Algorithmus [49, 50, 79] verwendet. Es stellt sich heraus, dass dieser im Gegensatz zu anderen Methoden der Erzeugung von gleichmäßig verteilten Punkten [9, 30, 43, 75] deut-

lich effizienter ist [71]. Bei der Ausführung des Algorithmus muss für zufällig generierte Punkte im euklidischen Vektorraum entschieden werden, ob diese einem Quantenzustand zuzuordnen sind, also die Dichtematrix ρ nur positive Eigenwerte hat. Dafür werden Newtonidentitäten [33] und die Vorzeichenregel von Descartes [14] auf charakteristische Polynome der Matrizen angewendet, die durch diese Punkte definiert werden [13, 27, 42, 44, 45]. Dadurch werden in der Berechnung weniger Operationen benötigt, als bei der vollständigen Bestimmung der Eigenwerte von ρ .

Mit dieser Methode können die Volumenanteile der akzeptierten Quantenzustände für verschiedene Bedingungen bestimmt werden und damit sowohl einige bekannte Werte [48, 52, 74, 77] reproduziert als auch viele bislang unbekannte Werte ermittelt werden. Untersucht werden hier die Peres-Horodecki-Bedingung [37, 59], die Reduktionsbedingung [16, 34], die Majorisierungsbedingung [32] und Bedingungen, die auf der Rényientropie [67] basieren. Dabei werden verschiedene bipartite Systeme betrachtet, bis hin zum Quantensystem aus einem Qutrit und einem vierdimensionalen Qudit.

Eine Herangehensweise an die Unterscheidung von verschränkten und separablen Zuständen aus experimenteller Sicht bieten die Bellschen Ungleichungen [6]. Diese schränken die klassisch möglichen Korrelationen von gemeinsamen Messungen bei verschiedenen Parteien ein, können aber im Rahmen der Quantentheorie verletzt werden [5, 20, 29, 31, 84]. Neben diesem Test eines fundamentalen Unterschieds zwischen klassischen Theorien und der Quantentheorie hat die Verletzung von Bellschen Ungleichungen auch konkrete Anwendungen, z.B. für Sicherheitsgarantien in Quantenschlüsselaustauschprotokollen [3, 25].

Nur wenn die Verluste und Fehler in den Detektoren hinreichend gering sind, ist eine solche Verletzung möglich, was die Frage aufwirft, wie gut die Detektoren mindestens sein müssen. Dazu wird ein Detektormodell vorgestellt, das für alle Detektoren eine Effizienz η und eine Wahrscheinlichkeit spontan auszulösen δ annimmt. Abgesehen von der Anzahl der möglichen Messeinstellungen und Messergebnisse werden keine weiteren speziellen Annahmen über den Messaufbau gemacht, was einer abstrakten Betrachtung des Messvorgangs wie in [10, 23, 46] entspricht.

Um herauszufinden, ob bei bestimmten Detektorparametern eine Bellsche Ungleichung verletzt werden kann, müssen alle möglichen Quantenkorrelationen gegen alle Ungleichungen getestet werden. Dies führt zu dem Problem, dass das Bellpolytop, welches alle klassisch möglichen Korrelationen enthält, nur in seiner Vertexdarstellung einfach zu bestimmen ist. Um die Bellschen Ungleichungen zu erhalten, müsste es in seine Halbraumdarstellung überführt werden, was ein sehr rechenintensives Problem ist [62]. Für einzelne Punkte kann man diese Umwandlung umgehen, indem mit einem linearen Programm

geprüft wird, ob der Punkt im Bellpolytop liegt [87]. Für die Menge der Quantenkorrelationen gibt es jedoch bislang keine klare und einfach zu beschreibende Abgrenzung wie für das Bellpolytop [26, 57], sodass extreme Punkte dieser Menge nicht ohne weiteres ermittelt werden können. Aus den Zusammenhängen zwischen den Messoperatoren lassen sich jedoch mathematische Einschränkungen der Quantenkorrelationen konstruieren, was zu einer Hierarchie semi-definiter Programme führt, die diese Quantenkorrelationen eingrenzen [54]. Bei Vorgabe einer Richtung im Raum der Korrelationen kann damit der in diese Richtung extreme Punkt in der Menge der Quantenkorrelationen bestimmt werden. Das heißt, dass für eine Bellsche Ungleichung der im Rahmen der Quantentheorie maximal erreichbare Wert bestimmt werden kann. Damit werden für Systeme mit zwei und drei Parteien mit je zwei Messeinstellungen die Detektorparameter bestimmt, die für die Beobachtung der Verletzung einer Bellschen Ungleichung mindestens benötigt werden.

Für Clauser-Horne-Shimony-Holt- (CHSH) [20] und die Collins-Gisin-Ungleichung [19] wird per Monte-Carlo-Simulation für Zwei-Qubit-Zustände untersucht, wie groß der Anteil der Zustände ist, die diese Ungleichungen verletzen können. Dabei ist bekannt, dass die Bellschen Ungleichungen die separablen Zustände nicht exakt von den verschränkten Zuständen abgrenzen [85]. D.h. es gibt verschränkte Zustände, die ausschließlich Korrelationen erzeugen, welche auch in einer klassischen Theorie beobachtet werden können. Es zeigt sich, dass ein großer Anteil der verschränkten Zustände in diese Kategorie fällt.

1.2 AUFBAU DER ARBEIT

In Kapitel 2 werden die Bellpolytope und Bellschen Ungleichungen eingeführt und gezeigt, wie sich die Menge der möglichen Quantenkorrelationen bestimmen lässt. Ein Modell für nicht-perfekte Detektoren wird aufgestellt und die benötigten Detektorparameter für die Verletzung einer Bellschen Ungleichung für bi- und tripartite Systeme ermittelt. Dazu wird zum einen beschrieben, wie für einen vorgegebenen Punkt getestet werden kann, ob dieser im Bellpolytop liegt, zum anderen wie für eine gegebene Bellsche Ungleichung ihre maximale Verletzung durch ein Quantensystem bestimmt werden kann.

In Kapitel 3 wird dann die Perspektive gewechselt und betrachtet, welche Zustände ρ verschränkt sind. Dafür werden die verschiedenen betrachteten Arten von Zuständen definiert und mehrere Bedingungen erläutert, die von allen separablen Zuständen erfüllt werden. Ein Algorithmus zum effizienten Generieren von zufällig verteilten Quantenzuständen wird verwendet, um in Monte-Carlo-Simulationen für alle Kombinationen aus Zustandsarten und Bedingungen jeweils den Anteil der Zustände, die die Bedingung erfüllen, an allen Zuständen

zu bestimmen. Für Zwei-Qubit-Systeme wird zusätzlich bestimmt, welcher Anteil der Zustände die CHSH- oder Collins-Gisin-Ungleichung verletzen kann.

Die Erkenntnisse und ein Ausblick auf noch offene weitergehende Fragestellungen werden in Kapitel [4](#) diskutiert.

WAHRSCHEINLICHKEITSPOLYTOPE UND BELLSCHES UNGLEICHUNGEN

Dieses Kapitel behandelt Konstruktion und Einsatzmöglichkeiten von Bellschen Ungleichungen für bi- und multipartite Systeme. Diese schränken die möglichen Korrelationen von Messergebnissen bei gleichzeitiger Durchführung der Messungen bei mehreren Parteien ein. Nach einer kurzen Einführung in die benötigten Grundlagen wird erläutert, wie man Bellsche Ungleichungen für beliebige physikalische Systeme prinzipiell aus klassischen lokal realistischen Theorien herleiten kann. Dabei wird sich zeigen, dass diese Ungleichungen auch für Szenarien, die über die ursprünglich von J.S. Bell [6] betrachtete Situation hinausgehen, ein Polytop beschreiben, das sogenannte Bellpolytop. Zu diesen Polytopen wurden in der Vergangenheit immer wieder Untersuchungen durchgeführt, siehe unter anderem [11, 58, 62, 86]. Aufbauend auf den Methoden und Ergebnissen meiner Master-Thesis [68] werden danach nicht-perfekte Messvorgänge und ihr Einfluss auf die Möglichkeit der Verletzung Bellscher Ungleichungen durch Quantenzustände betrachtet. Wesentliche Ergebnisse und einige Abbildungen in diesem Kapitel wurden bereits in [69] veröffentlicht.

2.1 VERSTECKTE VARIABLEN

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der Bellschen Ungleichungen ist die Frage, ob Messergebnisse durch eine lokal realistische Theorie beschrieben werden können [24]. Der Begriff *realistisch* bezieht sich dabei auf die Annahme, dass alle physikalischen Objekte durch ihre Eigenschaften beschrieben werden und Messungen an den Objekten Teile dieser Eigenschaften aufdecken bzw. das Messergebnis durch die Eigenschaften festgelegt wird.

Lokal ist die Theorie, wenn sich Änderungen an den Eigenschaften der Objekte nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Diesen Ansatz kann man sich so veranschaulichen, dass es *versteckte Variablen* gibt, die alle Eigenschaften eines Objekts und damit das Ergebnis jeder am Objekt möglichen Messung festlegen. Mit diesem Ansatz können Ungleichungen für Korrelationen konstruiert werden, die sich bei der gleichzeitigen Durchführung von Messung von Objekten an verschiedenen Orten ergeben [6]. Gleichzeitigkeit bezieht sich dabei darauf, dass die Messungen raumartig getrennt stattfinden müssen, wie in Abb. 2.1 dargestellt. Ist diese Bedingung nicht gegeben und eine Messung wird nach der anderen Messung durchgeführt, kann die Information, welche Messeinstellung im ersten

Messvorgang gewählt wurde, die versteckten Variablen vor der zweiten Messung beeinflussen und die Bellschen Ungleichungen verlieren ihre Gültigkeit.

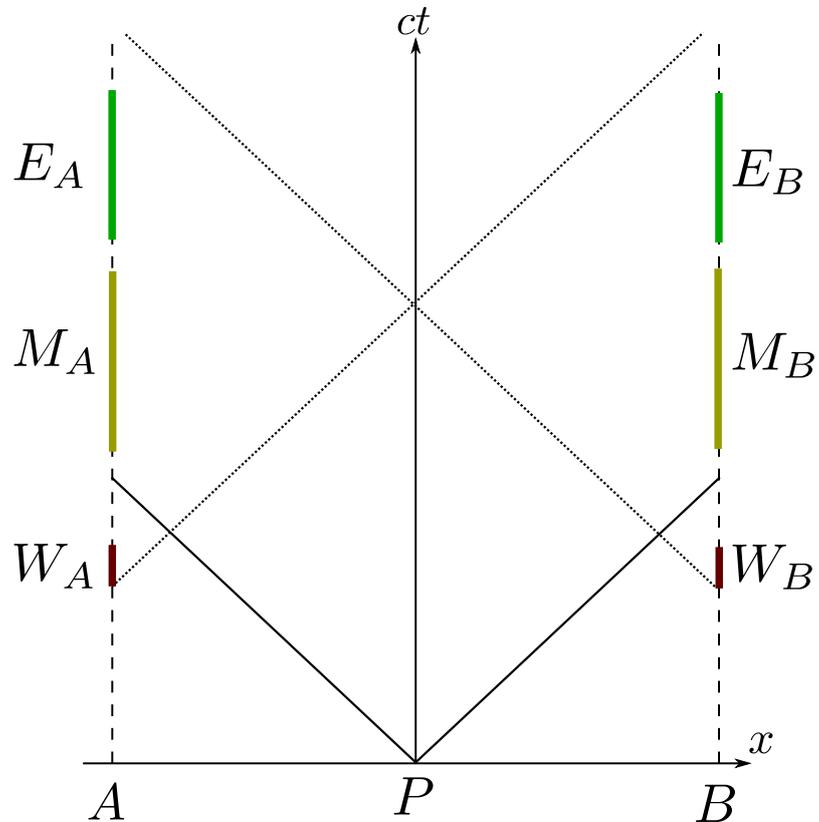


Abbildung 2.1: Ablauf des Messvorgangs für zwei Parteien in einem Minkowski-Diagramm. Die horizontale Achse gibt dabei den Ort an, die vertikale Achse steht für die Zeit. Bei P wird ein Zustand erzeugt und teilweise zu A und teilweise zu B geschickt. Beide Parteien wählen eine Messeinstellung aus (W_A, W_B) , bevor die Information über den erzeugten Zustand bei Ihnen ankommt, um auszuschließen, dass diese Information Einfluss auf die Auswahl der Messeinstellung hat. Danach stellen sie ihr Messgerät entsprechend ein (M_A, M_B) und erhalten im Zeitraum (E_A, E_B) ein Messergebnis. Der Vorgang ist vollständig abgeschlossen, bevor die Information über die gewählte Messeinstellung bei der jeweils anderen Partei ankommen konnte.

2.2 POLYTOPE

Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, können die möglichen Korrelationen von Messungen im Rahmen einer lokal realistischen Theorie als konvexe Polytope dargestellt werden. Ein konvexes Polytop \mathcal{P} im n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^n ist durch seine Vertices $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ vollständig bestimmt und durch die konvexe Hülle dieser Vertices gegeben. D.h. ein beliebiger Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ist Teil von \mathcal{P} , wenn eine Darstellung

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^k w_i \vec{v}_i, \quad \text{mit } w_i \geq 0 \text{ und } \sum_i w_i = 1 \quad (2.1)$$

existiert.

Alternativ kann ein konvexes Polytop auch über seine Halbraumdarstellung definiert werden. Dabei werden Ungleichungen gegeben, die jeweils den Raum in einen Halbraum, der die Ungleichung erfüllt und einen, der sie verletzt, aufteilen. Die Seitenflächen eines Polytops, für deren Punkte bei diesen Ungleichungen Gleichheit gilt, werden auch Facetten genannt. Die Frage, ob ein Punkt \vec{a} im Polytop enthalten ist, wird dadurch beantwortet, ob alle Ungleichungen erfüllt sind. Im einfachsten Fall genügen $n + 1$ Ungleichungen, um ein endliches Gebiet einzugrenzen. Es können aber auch wesentlich mehr Ungleichungen nötig sein, um ein bestimmtes konvexes Polytop zu beschreiben.

Ein Beispiel für ein Polytop ist ein 3-dimensionaler Würfel. Dieser kann mit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ in der Vertexdarstellung durch seine 8 Eckpunkte

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{v}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder in der Halbraumdarstellung durch die 6 Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\leq 1, & y &\leq 1, & z &\leq 1, \\ -x &\leq 0, & -y &\leq 0, & -z &\leq 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden.

2.3 KLASSISCHE MESSUNGEN IN MULTIPARTITEN SYSTEMEN

Hier und im Rest der Arbeit werden stets diskrete Messungen mit einer endlichen Anzahl an Resultaten betrachtet. D.h. jede der N Parteien hat Zugriff auf ein System S , das sie mit einer Messung $x \in M_S$ testen kann. Das Ergebnis $a \in A_x$ dieser Messung tritt mit einer Wahrscheinlichkeit $P(a|x)$ auf. Hierbei bezeichnet M_S die Menge der möglichen Messeinstellungen für das gegebene System und A_x die Menge der möglichen Resultate einer Messung x . So könnte z.B. das System aus einem einzelnen Photon bestehen, das auf einen Aufbau aus Polarisationsfilter und Einzelphotonendetektor trifft. Die Messung x bezeichnet dann den Winkel der Ausrichtung des Filters bezüglich einer vorher festgelegten Achse. Die möglichen Ergebnisse $A_x \in \{0, 1\}$, entsprechen den Beobachtungen „der Detektor löst nicht aus“ und „der Detektor löst aus“.

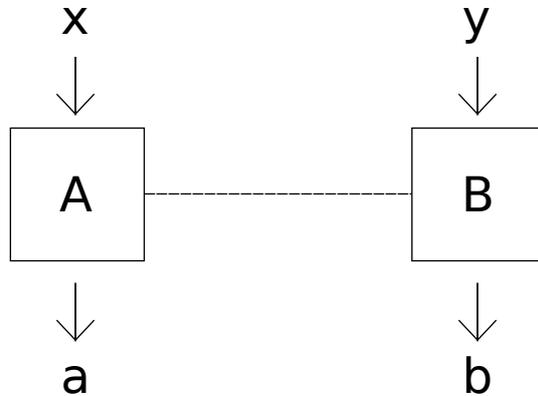


Abbildung 2.2: Zwei Parteien A und B führen die Messungen x, y durch und erhalten jeweils das Ergebnis a bzw. b .

Ohne weitere Einschränkungen können bei N Parteien die erhaltenen Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse a_i , unter der Bedingung dass jeweils Einstellung x_i vorgenommen wurde,

$$P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

grundsätzlich abhängig von allen Einstellungen x_i sein und diese Korrelationen $P(\mathbf{a}|\mathbf{x})$ müssen nur die trivialen Bedingungen für Wahrscheinlichkeiten erfüllen:

$$P(\mathbf{a}|\mathbf{x}) \geq 0, \quad \sum_{a_1 \in A_{x_1}, \dots} P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n) = 1. \quad (2.3)$$

Um die Darstellung übersichtlich zu halten, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass allen Parteien die gleichen Messeinstellungen \mathcal{M} mit jeweils gleichen Ergebnissen \mathcal{A} zur Verfügung stehen. Da die Betrachtung abstrakt bleibt, ist dies bereits erfüllt, wenn die Anzahl der Messeinstellungen und Ergebnisse für alle gleich ist. Unterschiedlich große Mengen an Messungen und Ergebnissen können

aber nach derselben Methode behandelt werden. Bei der Beschreibung des N -partiten Experiments im Rahmen einer klassischen realistischen Theorie, kann zwischen zwei Arten von theoretischen Beschreibungen unterschieden werden. Zum einen kann diese deterministisch sein, zum anderen probabilistisch. In einer deterministischen Beschreibung gibt es eine Transferfunktion F , den Zustand des gemessenen Systems, die jeden Eingabewert in einen eindeutigen Ausgabewert überführt, d.h.

$$a = F(x), \quad x \in \mathcal{M}^N, \quad a \in \mathcal{A}^N. \quad (2.4)$$

Bei einer statistischen Beschreibung wird der Zustand F durch eine Zufallsvariable beschrieben, die durch eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(F) \geq 0$ mit $\sum_F P(F) = 1$ gegeben ist. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(F)$ erzeugt über die Relation

$$P(a|x) = \sum_F P(F)\delta(a, F(x)) \quad (2.5)$$

bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(a|x)$.

Hierbei ist $\delta(a, F(x)) = 1$ für $a = F(x)$ und sonst 0. Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten beschreiben die Wahrscheinlichkeit, das die N Parteien ein Ergebnis $a \in \mathcal{A}^N$ erhalten, wenn die Messeinstellung $x \in \mathcal{M}^N$ gewählt wird. Sie liegen dabei in einem Wahrscheinlichkeitspolytop, dessen Vertices durch F gegeben sind [87].

Wenn die Parteien nun ihre Messungen raumartig voneinander getrennt durchführen, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, darf das Ergebnis jeder Partei nur noch von der eigenen Messung abhängen, da sonst die für eine Änderung des Resultats nötige Veränderung des lokal vorliegenden Zustands mit Überlichtgeschwindigkeit kommuniziert werden müsste. Diese Einschränkung auf raumartig getrennte Messungen kann berücksichtigt werden, indem jede Partei eine eigene Transferfunktion

$$a = (F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)) \quad (2.6)$$

bekommt. Mit dieser Lokalitätsbedingung ergeben sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten der statistischen Theorie zu

$$P(a|x) = \sum_{F_1, \dots, F_N} P(F_1, \dots, F_N)\delta(a_1, F_1(x_1)) \cdots \delta(a_N, F_N(x_N)). \quad (2.7)$$

Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten entsprechen einem Polytop mit den lokalen Transferfunktionen als Einträge der Vertices (F_1, \dots, F_N) , das damit die möglichen Korrelationen in einer lokal realistischen statistischen Theorie beschreibt [87].

Dieses Polytop ist das Bellpolytop und für jeden experimentellen Aufbau kann mit der beschriebenen Methode dessen Vertexdarstellung gefunden werden [58, 62, 87]. Durch Umwandlung in die Halbraumdarstellung erhält man die definierenden Ungleichungen des Bellpolytops, die verallgemeinerten Bellschen Ungleichungen. Im Gegensatz

zur systematisch möglichen Konstruktion der Vertexdarstellung, ist die Umwandlung in die Halbraumdarstellung ein schweres mathematisches Problem, das nur in niedrigen Dimensionen, d.h. für wenige Parteien, Messeinstellungen und Ergebnisse vollständig gelöst werden kann. Zusätzlich ergeben sich die Bellschen Ungleichungen aus einer rein klassischen Betrachtung und werden dadurch interessant, dass sie durch Quantenzustände verletzt werden können. Dies ist aber nur für einen Teil der Ungleichungen, die das Bellpolytop definieren, der Fall. Daher sind bei der Suche nach Bellschen Ungleichungen weite Gebiete noch kaum erforscht. Im Folgenden werden nicht nur die Ungleichungen, die zwingend benötigt werden, um das Bellpolytop zu definieren, als Bellsche Ungleichungen bezeichnet, sondern alle Ungleichungen, die den Raum so aufteilen, dass das Bellpolytop vollständig im von der Ungleichung definierten Bereich liegt.

2.4 DARSTELLUNG VON BELLSCHEN UNGLEICHUNGEN

Da die Bellschen Ungleichungen den Raum der bedingten Wahrscheinlichkeiten in zwei Halbräume aufteilen, ergibt sich als allgemeine Form

$$\sum_{a_1, \dots, a_N, x_1, \dots, x_N} c_{a_1 \dots a_N}^{x_1 \dots x_N} P(a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N) \leq C \quad (2.8)$$

bzw. für zwei Parteien

$$\sum_{a, b, x, y} c_{ab}^{xy} P(a, b | x, y) \leq C. \quad (2.9)$$

Wegen $\sum_{a_1, \dots, a_N} P(a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N) = 1$ kann in dieser Darstellung sogar immer $C = 0$ gewählt werden, was aber eine weniger übersichtliche Darstellung zur Folge haben kann.

Bei zwei möglichen Messergebnissen werden vor dem Hintergrund von Spin- $\frac{1}{2}$ -Messungen und der Definition $a_i \in \{-1, 1\}$ die Bellschen Ungleichungen oft mit Hilfe der Erwartungswerte

$$E(x_1, \dots, x_N) = \sum_{a_1, \dots, a_N} a_1 a_2 \dots a_N P(a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N) \quad (2.10)$$

ausgedrückt.

Außerdem gibt es die Möglichkeit, für die Zusammenfassung von Wahrscheinlichkeiten die Lokalitätsbedingung zu nutzen. Da das Messergebnis einer Partei nicht von der gewählten Messeinstellung der anderen Parteien abhängen darf, können lokale bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(a_i, x_i) = \sum_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N} P(a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N) \quad (2.11)$$

definiert werden.

2.4.1 Beispiele für Bellsche Ungleichungen

2.4.1.1 Die CHSH-Ungleichung

Die vermutlich bekannteste Bellsche Ungleichung wurde 1969 von Clauser, Horne, Shimony und Holt aufgestellt [20]. Sie beschreibt die klassischen Korrelationen für ein bipartites System mit je zwei Einstellungen und Ergebnissen und ist für $x_1 \in \{m_1, m'_1\}$ und $x_2 \in \{m_2, m'_2\}$ durch

$$E(m_1, m_2) + E(m_1, m'_2) + E(m'_1, m_2) - E(m'_1, m'_2) \leq 2 \quad (2.12)$$

gegeben.

2.4.1.2 Die Clauser-Horne-Ungleichung (CH)

Diese Ungleichung für zwei Parteien nutzt lokale Wahrscheinlichkeiten und ist durch

$$\begin{aligned} P(a_1, a_2 | m_1, m_2) + P(a_1, a_2 | m_1, m'_2) + P(a_1, a_2 | m'_1, m_2) \\ - P(a_1, a_2 | m'_1, m'_2) - P(a_1 | m_1) - P(a_2 | m_2) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

für eine beliebige aber innerhalb der Ungleichung feste Wahl von a_1 und a_2 gegeben. Sie lässt sich mit den oben angegebenen Zusammenhängen sowie durch Umbenennen der Einstellungen und Ergebnisse in die CHSH-Ungleichung überführen [19].

2.4.1.3 Die Collins-Gisin-Ungleichung (CG)

Wenn jede der beiden Parteien aus drei Messungen $x_1 \in \{m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, m_1^{(3)}\}$, $x_2 \in \{m_2^{(1)}, m_2^{(2)}, m_2^{(3)}\}$ wählen kann, die jeweils zwei mögliche Ergebnisse haben, ergeben sich neue Ungleichungen. Neben Variationen der CHSH-Ungleichung haben Collins und Gisin [22], aufbauend auf [63], für diesen Fall die Ungleichung

$$\begin{aligned} E(m_1^{(1)}, m_2^{(3)}) + E(m_1^{(3)}, m_2^{(1)}) - E(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}) - E(m_1^{(1)}, m_2^{(2)}) \\ - E(m_1^{(2)}, m_2^{(1)}) - E(m_1^{(2)}, m_2^{(2)}) - E(m_1^{(2)}, m_2^{(3)}) - E(m_1^{(3)}, m_2^{(2)}) \\ - E(m_1^{(1)}) - E(m_1^{(2)}) - E(m_2^{(1)}) - E(m_2^{(2)}) - 4 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

hergeleitet.

2.5 BESTIMMEN VON QUANTENKORRELATIONEN

So wie das Bellpolytop angibt, welche Korrelationen mit lokal realistischen Theorien erreicht werden können, kann man auch die Frage stellen, welche Korrelationen in der Quantentheorie möglich sind [18]. Eine Antwort darauf haben Navascues et al. mit ihrer Hierarchie semidefiniter Programme (SDP) gegeben [54], die hier kurz vorgestellt wird. Für jede Stufe der Hierarchie muss eine positiv semidefinite Matrix $\Gamma \succeq 0$ gefunden werden, deren Einträge mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(a, b|x, y)$ (bei zwei Parteien) verknüpft sind. Für die Konstruktion dieser Verknüpfungen werden projektive Messungen mit den Projektionsoperatoren $\hat{E}_{a,x}$ für alle Messergebnisse betrachtet. Zum Beispiel erhält man für einen beliebigen bipartiten Zustand $|\psi\rangle$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(a, b|x, y) = \langle \psi | \hat{E}_{a,x} \hat{E}_{b,y} | \psi \rangle$.

Diese Wahl der Messoperatoren ist immer möglich, da bei diesem Ansatz die Dimension des betrachteten Quantensystems nicht eingeschränkt ist. Für die Projektionsoperatoren gelten dabei die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sum_a \hat{E}_{a,x} &= \mathbf{1}, \\ \hat{E}_{a,x} \hat{E}_{a',x} &= \delta_{a,a'} \hat{E}_{a,x}, \\ \hat{E}_{a,x}^\dagger &= \hat{E}_{a,x}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Für die n -te Stufe der Hierarchie werden alle Produkte aus n Projektionsoperatoren, z.B. $\hat{E}_{a,x} \hat{E}_{b,y} \hat{E}_{b',y'}$ für $n = 3$ in der Menge \mathcal{S} zusammengefasst. Für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ wird eine Matrix Γ über ihre Einträge $\Gamma_{i,j} = \langle \psi | \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_j | \psi \rangle$ mit $\hat{S}_i \in \mathcal{S}$ definiert. Aus den Beziehungen für die Projektionsoperatoren ergeben sich dann K algebraische Relationen der Form

$$\sum_{i,j} F_{i,j}^{(k)} \Gamma_{i,j} = \sum_{a,b,x,y} g_{abxy}^{(k)} P(a, b|x, y) =: g^{(k)}(P), \quad k \in \{1, \dots, K\}. \tag{2.16}$$

für die Einträge von Γ und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(a, b|x, y)$.

Für $n \rightarrow \infty$ sind Korrelationen $P(a, b|x, y)$, die von keinem Quantensystem erzeugt werden können, nicht in der Lage, all diese Relationen zu erfüllen bei gleichzeitig positiv semidefinitem Γ [54]. Daher kann die Suche nach extremalen Quantenkorrelationen $P(a, b|x, y)$ über die aus den algebraischen Relationen der Projektionsoperatoren erhaltenen F und g in ein Optimierungsproblem umgewandelt werden. Um beispielsweise die maximal mögliche Verletzung einer Bellschen

Ungleichung $\sum_{a,b,x,y} c_{ab}^{xy} P(a,b|x,y) \leq C$ zu finden, wird für jede Stufe der Hierarchie das semidefinite Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_{P(a,b|x,y)} \quad & \sum_{a,b,x,y} c_{ab}^{xy} P(a,b|x,y) \\ & \text{tr}((F^{(k)})^T \Gamma) = g^{(k)}(P(a,b|x,y)) \\ & \Gamma \succeq 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

mit Hilfe der MATLAB-Toolbox SeDuMi [80] gelöst.

2.6 AUSWIRKUNGEN FEHLERBEHAFTETER DETEKTOREN

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich Fehler in den Messungen auf die Korrelationen der lokal realistischen Theorien auswirken. Insbesondere wird hierbei der Fall betrachtet, dass nach Auswahl der Messvariablen x einer von zwei Detektoren auslöst und damit das Messergebnis produziert. Damit gibt es die Fehlermöglichkeiten, dass bei der Messung kein Detektor auslöst, d.h. die Effizienz $\eta \leq 1$ und dass ein Detektor unabhängig vom gemessenen Zustand auslöst.

Im einfachsten Fall mit zwei Parteien und zwei Eingabemöglichkeiten, d.h. $|\mathcal{X}| = 2$ werden mit diesen Fehlern aus ursprünglich zwei möglichen Messergebnissen $\mathcal{A}_{\text{ideal}} = \{1, 2\}$ die vier Ergebnisse $\mathcal{A} = \{\emptyset, 1, 2, DC\}$, wobei \emptyset für den Fall, dass kein Detektor auslöst und DC für den Fall, dass beide Detektoren auslösen, steht.

In einem Bellexperiment, bei dem der Polarisationszustand von Photonen gemessen wird, kann dieses Szenario dadurch realisiert werden, dass ein polarisationsabhängiger Strahlteiler verwendet wird und an jedem der beiden Ausgänge ein Photodetektor zum Einsatz kommt.

Jeder der beiden nicht-perfekten Detektoren bei beiden Parteien wird durch zwei Parameter η und δ charakterisiert die für alle Detektoren gleich sind. Dabei ist η die Effizienz, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen detektiert wird. δ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Detektor spontan auslöst, obwohl kein Teilchen ankommt. Dementsprechend werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse für jede Partei lokal transformiert. Der Zusammenhang der fehlerbehafteten Ergebnisse $a \in \mathcal{A}$ von den Ergebnissen bei perfekten Detektoren $a^{(id)} \in \mathcal{A}_{\text{ideal}}$ ist dabei über

$$P_{\eta,\delta}(a|a^{(id)}) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-\eta)(1-\delta)^2 & a = \emptyset, \quad \text{Ereignis A} \\ (1-\eta)(1-\delta)\delta & a \neq a^{(id)}, \quad \text{Ereignis B} \\ \delta(1-(1-\eta)(1-\delta)) & a = DC, \quad \text{Ereignis C} \\ (1-\delta)(1-(1-\eta)(1-\delta)) & a = a^{(id)}, \quad \text{Ereignis D} \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

gegeben.

$P_{\eta,\delta}(a|a^{(id)})$ ist hierbei die Wahrscheinlichkeit, das Ergebnis s a im System mit fehlerbehafteten Detektoren zu messen, wenn eine Messung im perfekten System das Ergebnis $a^{(id)}$ geliefert hätte. Dabei haben die Ereignisse A, B, C, D folgende physikalische Bedeutung:

- A : das Teilchen wird nicht registriert und es löst kein Detektor spontan aus,
- B : das Teilchen wird nicht registriert, aber der andere Detektor löst spontan aus,
- C : das Teilchen wird registriert und der andere Detektor löst spontan aus oder das Teilchen wird nicht registriert und beide Detektoren lösen spontan aus,
- D : das Teilchen wird registriert und der andere Detektor löst nicht spontan aus oder das Teilchen wird nicht registriert aber derselbe Detektor löst spontan aus.

Damit sind für dieses Modell die idealen bipartiten bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(a^{(id)}, b^{(id)}|x, y)$ mit den gemessenen bipartiten bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(a, b|x, y)$ über

$$P(a, b|x, y) = \sum_{a^{(id)}, b^{(id)}} P_{\eta,\delta}(a|a^{(id)})P_{\eta,\delta}(b|b^{(id)})P(a^{(id)}, b^{(id)}|x, y). \quad (2.19)$$

mit $a, b \in \mathcal{A}$ und $a^{(id)}, b^{(id)} \in \mathcal{A}^{(id)}$ verknüpft. Dieses Fehlermodell kann auch so betrachtet werden, dass es einen Detektionsapparat gibt, in dessen Inneren die Messung perfekt abläuft. Ein Experimentator hat aber nur Zugang zum Äußeren des Apparats und beim Übergang vom Inneren zum beobachtbaren Äußeren wird die von den Fehlern vorgegebene Transformation angewendet.

Die gemessenen Zustände haben dabei nur Einfluss auf die Ergebnisse der inneren Box. Deshalb gibt es eine Grenze für die Fehler der Detektoren, ab der kein Quantenzustand mehr eine Bellsche Ungleichung verletzen kann. Wird zum Beispiel $\eta = 0$ gesetzt, erhält man trivialerweise nur Korrelationen, die auch bei einer Beschreibung des Vorgangs mit versteckten Variablen erzielt werden können.

2.6.1 Verletzung Bellscher Ungleichungen bei fehlerhaften Detektoren

2.6.1.1 Betrachtung für konkrete bedingte Wahrscheinlichkeiten

Um einen erfolgreichen Belltest durchzuführen, also Verschränkung nachzuweisen, muss eine Bellsche Ungleichung im Rahmen eines quantenphysikalischen Experiments verletzt werden. Das heißt, es muss eine Menge von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(a, b|x, y)$ gefunden werden, die einerseits Quantenkorrelationen beschreibt und andererseits außerhalb des Bellpolytops liegt. Der aus allen bedingten

Wahrscheinlichkeiten $P(a, b|x, y)$ für einen experimentellen Aufbau zusammengesetzte Vektor wird im Folgenden P genannt.

Für die Überprüfung, ob P außerhalb des Bellpolytop liegt, wird das lineare Programm aus [87] verwendet. Dabei werden zunächst die Vertices V_i des Bellpolytops, wie in 2.3 beschrieben, aus den Transferfunktionen der involvierten Parteien bestimmt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten P_B , welche durch eine konvexe Summe dieser Vertices gegeben sind, d.h. $P_B = \sum_i w_i P_V^{(i)}$, mit $w_i \geq 0$ und $\sum_i w_i = 1$, sind dann im Bellpolytop enthalten. Für beliebige Wahrscheinlichkeiten P sucht das lineare Programm den Punkt im Bellpolytop, der am nächsten an P liegt und gibt den Abstand zwischen diesem Punkt und P in der 1-Norm an.

Bei der Betrachtung von nicht-perfekten Detektoren wird dabei das in 2.6 vorgestellte Detektormodell angewendet, um P aus P_{id} zu erhalten. Für Korrelationen P_{id} , die für perfekte Detektoren, d.h. $\eta = 1$ and $\delta = 0$, außerhalb des Bellpolytops liegen, kann nun bestimmt werden, wann die transformierten Wahrscheinlichkeiten P ins Bellpolytop eintauchen und damit keine Bellsche Ungleichung verletzen können. Dazu wird δ fixiert und η verkleinert oder alternativ η fixiert und δ vergrößert, bis der Abstand zwischen P und dem Bellpolytop auf 0 abgefallen ist. Allerdings kann es für die so bestimmten Parameter andere P_{id} geben, deren P nach Berücksichtigung der Fehler weiterhin außerhalb des Bellpolytops liegt.

2.6.1.2 Eingrenzen der möglichen Quantenkorrelationen

Deshalb wird die Hierarchie semidefiniter Programme (SDP) aus 2.5 genutzt, um für vorgegebene Parameter η und δ Quantenkorrelationen P_{id} zu finden, die eine Bellsche Ungleichung verletzen. Dazu wird Gl. (2.17) um die Transformation aus Gl. (2.18) ergänzt, sodass sich das semidefinite Programm

$$\begin{aligned}
& \max_{P_{(id)}} \sum_{a,b,x,y} c_{ab}^{xy} P(a, b|x, y) \\
& \text{s. t. } P(a, b|x, y) = \sum_{a^{(id)}, b^{(id)}} P_{\eta,\delta}(a|a^{(id)}) P_{\eta,\delta}(b|b^{(id)}) P(a^{(id)} b^{(id)}|x, y) \\
& \quad \text{tr}((F^{(k)})^T \Gamma) = g^{(k)}(P_{(id)}) \\
& \quad \Gamma \succeq 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ergibt. Für jede Hierarchiestufe erhält man mit dem semidefiniten Programm eine obere Schranke für den durch Quantenzustände maximal erreichbaren Wert der linken Seite der Bellschen Ungleichung, die sich mit höheren Stufen immer weiter dem exakten Wert annähert. Dies liegt daran, dass sich das semidefinite Programm mit höheren Stufen von außen den tatsächlichen Quantenkorrelationen nähert.

Besonders für niedrige Stufen der Hierarchie gibt es damit Korrelationen, die alle Bedingungen des Programms erfüllen, aber nicht durch Quantenzustände erreicht werden können [54].

Im Gegensatz zum Testen eines einzelnen Punkts bekommt man mit SDP demnach zwar die beste in der Quantentheorie mögliche Verletzung einer Bellschen Ungleichung, aber es findet kein Abgleich mit allen Punkten des Bellpolytops statt.

2.6.1.3 Erzeugen neuer Bellungleichungen

Dadurch kann es passieren, dass es für dieselben Detektorparameter, bei denen eine Bellsche Ungleichung nicht mehr verletzt wird, eine andere Bellsche Ungleichung gibt, die noch verletzt werden kann. Um dies zu prüfen, werden die Wahrscheinlichkeiten P , welche maximale Verletzung für eine Ungleichung zeigen, genutzt, um neue Bellsche Ungleichungen zu generieren. Dazu wird mit dem linearen Programm

$$\begin{aligned} \max_c \quad & \sum_{a,b,x,y} c_{ab}^{xy} P(a,b|x,y) \\ \text{s. t.} \quad & |c_{ab}^{xy}| \leq 1 \\ & V^T c \leq 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

, $V = (v_1; \dots; v_n)$
, v_i : Vertex i des Bellpolytops.

die Bellsche Ungleichung erzeugt, welche beim Einsetzen von P den maximalen Wert generiert.

Die erste Nebenbedingung begrenzt dabei den Betrag der Koeffizienten c_{ab}^{xy} , da der optimale Wert sonst gegen unendlich gehen würde. Die zweite Nebenbedingung sorgt dafür, dass die Koeffizienten eine Bellsche Ungleichung darstellen und das gesamte Bellpolytop im erlaubten Halbraum liegt. Die Wahl von $b = 0$ schließt dabei keine Ungleichungen aus, wie in Abschnitt 2.4 erläutert wurde. Diese Methode liefert typischerweise keine Elemente der Halbraumdarstellung des Polytops. Um eine solche Facette mit dem linearen Programm (2.21) zu bekommen, muss P sehr nah am Polytop liegen, was durch Anpassen der Detektorparameter erreicht werden kann.

Eine umfangreiche Suche nach optimalen Bellschen Ungleichungen mit dieser Methode hat gezeigt, dass alle erhaltenen Ungleichungen äquivalent zur Clauser-Horne (CH) Ungleichung sind [19], siehe Gl. (2.13) und die Erläuterungen im Abschnitt 2.4 zur Äquivalenz von Bellschen Ungleichungen.

2.6.2 Exakte Bestimmung der benötigten Detektorparameter

Wie bereits erwähnt, liefert das semidefinite Programm obere Abschätzungen für den Raum der Quantenkorrelationen. Damit können

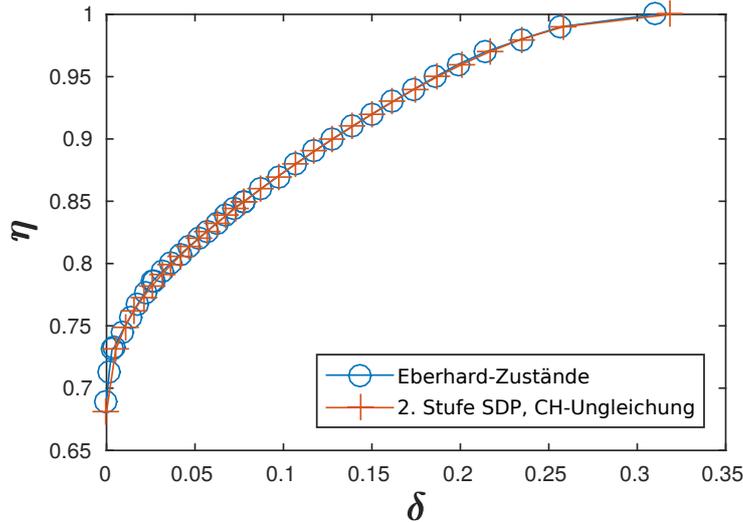


Abbildung 2.3: Notwendige Detektionswahrscheinlichkeit η in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit, dass ein Detektor spontan auslöst δ für zwei Parteien mit je zwei Messeinstellungen. Unterhalb der dargestellten Kurve sind die Detektoreffizienzen zu gering, sodass kein Quantenzustand eine Bellsche Ungleichung verletzen kann. Über der Kurve ist dies dagegen möglich, wenn geeignete Quantenzustände und Messungen verwendet werden. Die untere Schranke, die mit dem semidefiniten Programm und der CH-Ungleichung bestimmt wurde, ist in rot dargestellt. Die obere Schranke für die Parameter, die aus den Quantenzuständen und Messungen von Eberhard [23] berechnet wurde, ist in blau dargestellt. Da die beiden Schranken bis auf die numerische Genauigkeit der Methode übereinstimmen, sind dadurch die kritischen Parameterkombinationen gegeben. Ergebnis aus [68].

Bellsche Ungleichungen auch für schlechtere Detektoren noch verletzt werden und die Methode liefert nur eine untere Schranke für die benötigte Effizienz η bzw. eine obere Schranke für die erlaubte Dunkelzählwahrscheinlichkeit δ der Detektoren. Allerdings zeigte sich mit der CH-Ungleichung für das bipartite System mit zwei Messungen beim Übergang von der 2. zur 3. Stufe der Hierarchie bereits keine Veränderung der Ergebnisse mehr. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die in der 2. Stufe erhaltenen Grenzen für die Detektorparameter bereits identisch zu denen für Quantenzustände sind. Diese Grenzen sind in Abb. 2.3 durch rote Kreuze dargestellt.

An den Ergebnissen kann allerdings nicht abgelesen werden, ob es Quantenzustände gibt, die die gegebenen Korrelationen erreichen und wie diese experimentell umgesetzt werden können. Deshalb werden die minimal benötigten Detektorparameter aus der anderen Richtung eingeschränkt, indem man sich dem Rand der möglichen Quantenkorrelationen von Innen nähert. Dazu werden aus den von Eberhard

[23] definierten Quantenzuständen und Messungen die Wahrscheinlichkeiten P_E berechnet, die offensichtlich von einem Quantensystem erreicht werden können, welches aber potentiell nicht optimal ist. Für diese Wahrscheinlichkeiten kann wieder das lineare Programm (2.21) verwendet werden, um die relevanten Detektorparameter zu bestimmen. Die so erhaltenen Grenzwerte für Detektorparameter, die die Verletzung einer Bellschen Ungleichung zulassen, sind als blaue Kreise in Abb. 2.3 dargestellt. Die oberen und unteren Schranken für die Detektorparameter sind also im Rahmen der numerischen Genauigkeit identisch und geben damit die kritischen Detektorparameter an, welche den Parameterbereich, in dem Verletzungen von Bellschen Ungleichungen durch Quantenzustände möglich sind, vom Bereich, in dem dies nicht möglich ist, trennen.

2.6.3 Erweiterung zu tripartiten Systemen

Um die kritischen Detektorparameter für ein Bellexperiment mit drei involvierten Parteien per SDP zu bestimmen, muss zunächst eine geeignete Bellsche Ungleichung gefunden werden. Dabei wird eine Beobachtung aus dem vorherigen Abschnitt verwendet, in dem die CH-Ungleichung optimal war. Diese ist äquivalent zur CHSH-Ungleichung, wenn die beiden fehlerbedingten Messergebnisse mit einem der ursprünglichen Ergebnisse zusammengeführt werden, sodass es wieder nur zwei mögliche Messergebnisse gibt. Dies wird nun verwendet, um die Anzahl der zu betrachtenden Messergebnisse zu reduzieren und die Bellschen Ungleichungen für das System aus drei Parteien mit je zwei Messeinstellungen und Ergebnisse nutzen zu können. Dies entspricht einer Überführung der Ungleichung in einen höherdimensionalen Raum, der sich durch die zusätzlichen Messergebnisse ergibt [61]. Alle nicht ineinander überführbaren Bellschen Ungleichungen dieser Art sind in [78] aufgelistet und von dort entnommen. Wie zuvor wurde auch versucht, bessere Ungleichungen zu generieren, jedoch war keine der so erzeugten Ungleichungen besser als die bekannten. Für das tripartite System sind die Ergebnisse des semidefiniten Programms ab der 3. Hierarchiestufe konstant und in Übereinstimmung mit [46] ist für $\delta = 0$ die benötigte Detektoreffizienz $\eta = 0.6$ etwas kleiner als für zwei Parteien, bei denen die Grenze bei $\eta = 2/3$ liegt.

Die benötigten Detektorparameter für bi- und tripartite Systeme und Larsson-Zustände sind in Abb. 2.4 dargestellt. Im Gegensatz zu den bipartiten Zuständen und Messungen von Eberhard liefern die von Larsson verwendeten Zustände nur für $\delta = 0$ oder $\eta = 1$ die optimalen Parameter. Für andere Werte ist dagegen eine deutliche Abweichung zu erkennen, was bedeutet, dass bei der Verwendung dieser Zustände die Detektoren etwas besser sein müssen, als für eine optimale Wahl von Quantenzuständen nötig wäre.

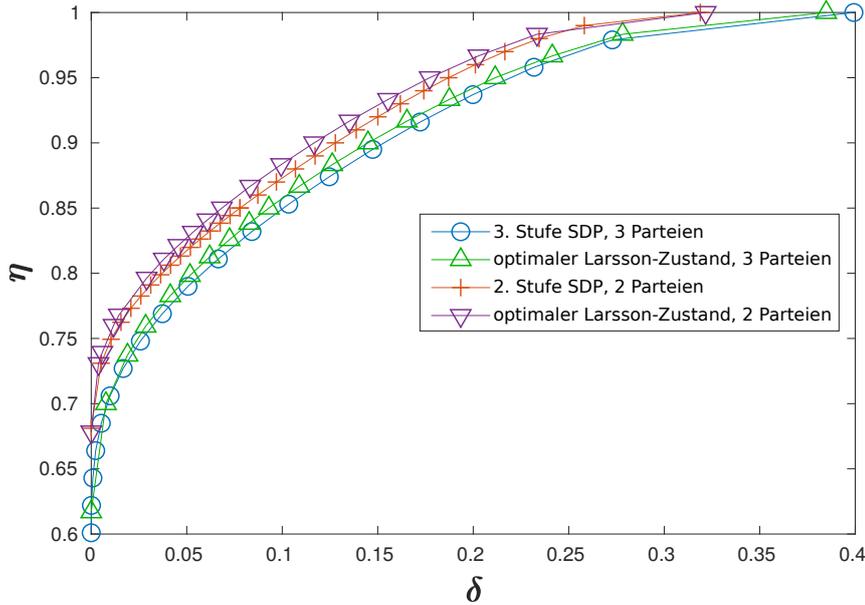


Abbildung 2.4: Notwendige Detektionswahrscheinlichkeit η in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit, dass ein Detektor spontan auslöst δ für zwei und drei Parteien mit je zwei Messeinstellungen. Unterhalb der dargestellten Kurve sind die Detektoreffizienzen zu gering, sodass kein Quantenzustand eine Bellsche Ungleichung verletzen kann. Über der Kurve ist dies dagegen möglich, wenn geeignete Quantenzustände und Messungen verwendet werden. Für $\delta = 0$ werden mit $2/3$ bzw. $3/5$ die aus [46] bekannten Werte reproduziert. Damit sind die Bedingungen an die Detektorparameter bei mehr involvierten Parteien etwas schwächer. Die Kurve für die Larsson-Zustände kann dabei nicht durch einen einzelnen Zustand erreicht werden, sondern es wurde jeweils der minimale Wert für die Detektorparameter aus allen Larsson-Zuständen gewählt.

2.7 ZUSAMMENFASSUNG

Ausgehend von den Ergebnissen meiner Master-Thesis [68] konnten für das tripartite System obere und untere Schranken für die Detektorparameter, die benötigt werden um eine Bellsche Ungleichung zu verletzen, angegeben werden.

Während das Bellpolytop direkt aus den Parametern des betrachteten Messvorgangs, d.h. der Anzahl der Parteien, Anzahl der Messeinstellungen und Anzahl der Messergebnisse, bestimmt werden kann, ist die Konstruktion der zugehörigen Bellschen Ungleichungen ein mathematisch schweres Problem. Für einzelne Punkte kann deren Bestimmung umgangen werden, indem mit einem linearen Programm direkt getestet wird, ob der Punkt im Inneren des Bellpolytops liegt. Um das semidefinite Programm nutzen zu können, das alle aus Quan-

tensystemen resultierenden Punkte abdeckt, werden jedoch konkrete Ungleichungen benötigt. Die numerische Suche nach optimalen Ungleichungen hat dabei gezeigt, dass im hier vorliegenden Fall von Fehlern, die ausschließlich von den potentiellen Ergebnissen eines perfekten Systems und nicht von den gewählten Messeinstellungen abhängen, spezielle Ungleichungen ausreichen, um die untere Schranke der Detektorparameter mit dem semidefiniten Programm zu bestimmen. Diese Ungleichungen für vier Messergebnisse zeichnen sich dadurch aus, dass sie äquivalent zu Ungleichungen für zwei Messergebnisse sind, wenn man drei der Messergebnisse, darunter die beiden aus den Fehlern resultierenden, zu einem zusammenfasst.

Für n Parteien liefert das semidefinite Programm ab der n -ten Hierarchiestufe keine weiteren Einschränkungen der möglichen Korrelationen. Dies kann daran liegen, dass ausschließlich Systeme mit zwei möglichen Messeinstellungen betrachtet werden und für die Quantenkorrelationen nur zwei Messergebnisse relevant sind. Deshalb ist es naheliegend, dass bereits ein niedrigdimensionales Quantensystem ausreicht, um alle Quantenkorrelationen zu erreichen. Für diesen Fall niedrigdimensionaler Quantensysteme genügen wenige Stufen der Hierarchie für eine vollständige Charakterisierung der möglichen Quantenkorrelationen [54].

Zur Berechnung der oberen Schranke wurden Zustände und Messungen betrachtet, die Larsson [46] für die Herleitung der benötigten Detektoreffizienz η bei $\delta = 0$ eingeführt hat. Es zeigt sich, dass diese für abweichende Wahrscheinlichkeiten, dass ein Detektor spontan auslöst, $\delta > 0$, nicht optimal sind. Damit bleibt die Frage offen, welche Quantenzustände in multipartiten Systemen am resistentesten gegenüber solchen Fehlern sind.

Dies ist relevant, da die Verletzung Bellscher Ungleichungen bei bestimmten Quantenschlüsselaustauschprotokollen für die Garantie der Sicherheit relevant ist [1, 72] und damit Zustände, die eine Verletzung zeigen können, besonders interessant sind.

ANTEIL DER SEPARABLEN ZUSTÄNDE IM RAUM ALLER ZUSTÄNDE

Im vorherigen Kapitel wurden Bellungleichungen betrachtet, die für Korrelationen von Messergebnissen definiert sind. Damit kann anhand der Verletzung einer Ungleichung direkt durch Messungen verifiziert werden, dass verschränkte Zustände vorgelegen haben. Wenn nun statt den Messergebnissen ein bestimmter Zustand, definiert durch seine Dichtematrix ρ , vorliegt und man wissen möchte, ob dieser Zustand verschränkt ist, können die Bellungleichungen nur indirekt angewendet werden. Denn erst durch die Kombination mit Messungen ergeben sich die benötigten Korrelationen und es ist für jeden beliebigen Zustand ρ möglich, diese so zu wählen, dass die Ergebnisse keine Bellungleichung mehr verletzen. Daher ist auf diesem Weg eine Optimierung über alle möglichen Messkombinationen nötig, um herauszufinden, ob ein vorgegebener Zustand eine Bellungleichung verletzen kann und damit nachweislich verschränkt ist.

Allerdings ist Separabilität eine mathematische Eigenschaft des Zustands ρ , wodurch über die Jahre viele notwendige Bedingungen gefunden werden konnten, die von separablen Zuständen erfüllt werden und vergleichsweise einfach zu berechnen sind. In diesem Kapitel werden einige dieser Bedingungen näher betrachtet. Insbesondere wird ein effizientes Verfahren weiterentwickelt, zufällige Zustände aus dem Raum aller möglichen Quantenzustände auszuwählen, die dann auf Erfüllung verschiedener Bedingungen überprüft werden. Dadurch ist es möglich, die verschiedenen Bedingungen auf ihre Qualität zu testen, d.h. wie gut sie den Raum der möglichen Zustände einschränken und welcher Anteil der Zustände zwar die notwendige Bedingung erfüllt, aber nicht separabel ist.

Einige wesentliche Ergebnisse und Abbildungen dieses Kapitels sind in den Veröffentlichungen [70, 71] enthalten.

3.1 NOTWENDIGE BEDINGUNGEN FÜR SEPARABLE ZUSTÄNDE

Um einen Überblick über die in diesem Kapitel verwendeten Bedingungen und ihre Beziehungen zueinander zu bekommen, müssen zunächst einige Grundlagen definiert werden. Ausgehend vom endlichdimensionalen Vektorraum C^n , dessen Elemente in der kanoni-

schen Basis durch alle n -Tupel komplexer Zahlen dargestellt werden, erhält man mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad (3.1)$$

welches antilinear im ersten und linear im zweiten Argument ist, einen Hilbertraum. Hierbei ist \bar{z} die komplex konjugierte zur komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$. $\|x\|$ bezeichnet die Norm $\langle x, x \rangle^{1/2}$ eines Elements $x \in \mathbb{C}^n$. Durch Festlegen einer kanonischen Basis kann der Raum der $n \times n$ Matrizen mit komplexen Einträgen $M_n(\mathbb{C})$ mit den linearen Operatoren des n -dimensionalen Hilbertraums identifiziert werden. Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden nicht zwischen linearen Operatoren und ihrer Darstellung als Matrizen $M_n(\mathbb{C})$ unterschieden. Die Adjungierte einer Matrix A , d.h. die komplex konjugierte Transponierte von A , ist die eindeutige Matrix A^\dagger , welche für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Relation $\langle A^\dagger x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ erfüllt. Die Spur $\text{Tr}\{A\}$ von $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist durch die Summe ihrer Diagonalelemente gegeben und unabhängig von der Wahl einer Orthonormalbasis.

Ein Quantenzustand bzw. Dichtematrix ρ ist eine selbstadjungierte positiv semidefinite Matrix mit Spur 1, die auf \mathbb{C}^n wirkt, d.h.

$$\rho = \rho^\dagger, \quad \rho \geq 0, \quad \text{Tr}\{\rho\} = 1. \quad (3.2)$$

Die Dichtematrix ρ_{AB} eines bipartiten Systems ist auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}^{n_A} \otimes \mathbb{C}^{n_B}$ definiert, wobei n_A und n_B die Dimensionen der jeweiligen Untersysteme A und B sind. Für Dichtematrizen $\rho^{(A)}$ auf \mathbb{C}^{n_A} und $\rho^{(B)}$ auf \mathbb{C}^{n_B} ist $\rho^{(A)} \otimes \rho^{(B)}$ ein Tensorproduktzustand. Separabel ist ein Zustand ρ_{AB} genau dann, wenn man ihn als konvexe Summe aus solchen Produktzuständen schreiben kann:

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_k^{(A)} \otimes \rho_k^{(B)}, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1. \quad (3.3)$$

Aus diesen Definitionen ergibt sich direkt, dass sowohl die allgemeinen Quantenzustände als auch die separablen Zustände eine konvexe Menge bilden. In 3.4.0.1 wird sich zeigen, dass für eine bestimmte niedrigdimensionale Teilmenge der bipartiten Zustände diese beiden Mengen als Polytope dargestellt werden können. Für allgemeine Zustände höherer Dimension bleibt die genaue Form der beiden Mengen jedoch unklar.

Dichtematrizen, die sich nicht in der Form (3.3) schreiben lassen, werden verschränkte Zustände genannt. Ein direkter Test auf das Vorliegen von Verschränkung aus der Definition müsste alle Zerlegungen

des Zustands in die beiden Unterräume berücksichtigen bzw. ausschließen und ist daher sehr anspruchsvoll. Deshalb wurden in den letzten Jahrzehnten verschiedene einfacher zu berechnende Bedingungen hergeleitet, die im Folgenden vorgestellt werden.

3.1.1 Peres-Horodecki Kriterium

Diese Bedingung, die aufgrund der verwendeten mathematischen Operation auch *positive partial transpose criterion* genannt wird (im Folgenden "PPT"), ist relativ einfach zu überprüfen. Zunächst wird eine partielle Transposition durchgeführt, was dem Tausch einiger Einträge der Dichtematrix entspricht. Danach wird geprüft, ob die so erhaltene Matrix weiterhin positiv semidefinit ist, was für alle separablen Zustände der Fall ist [59]. Die partielle Transposition von Teilsystem A für ein endlichdimensionales bipartites Quantensystem im Hilbertraum $\mathbb{C}^{n_A} \otimes \mathbb{C}^{n_B}$ ist über

$$\langle ij | (\tau_A \otimes \mathbb{I}_B) \rho_{AB} | kl \rangle = \langle kj | \rho | il \rangle. \quad (3.4)$$

definiert. Dabei ist τ_A die Transposition von Teilsystem A und \mathbb{I}_B die Identität über System B . $|i\rangle, |k\rangle$ und $|j\rangle, |l\rangle$ sind Basisvektoren von System A bzw. B . Equivalent könnte man auch nur System B transponieren. Man beachte, dass im Allgemeinen zwar $\rho^T \neq \rho$, die Erfüllung der Bedingungen aus Gl. (3.2) aber nicht durch die Transposition beeinflusst wird. Da ein separabler Zustand als konvexe Kombination aus Produktzuständen geschrieben werden kann, ist somit auch

$$(\tau_A \otimes \mathbb{I}_B) \rho_{AB} = \sum_k p_k \left(\rho_k^{(A)} \right)^T \otimes \rho_k^{(B)}, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1 \quad (3.5)$$

ein separabler Zustand und erfüllt daher PPT.

Für die bipartiten Systeme 2×2 und 2×3 (siehe 3.2 für eine Übersicht der betrachteten Systeme) ist PPT auch eine hinreichende Bedingung [39]. Für höherdimensionale Systeme geht diese Eigenschaft verloren und es treten verschränkte PPT Zustände auf, auch als gebundene Verschränkung bekannt [35].

3.1.2 Reduktionsbedingung

Bei dieser Bedingung wird anstelle der Transposition eines Teilsystems dieses komplett ausgespart. D.h. durch Anwenden der partiellen Spuren werden die Teilsysteme $\rho_A = \text{Tr}_B\{\rho_{AB}\}$ und $\rho_B = \text{Tr}_A\{\rho_{AB}\}$ betrachtet. Mit den Einheitsmatrizen I_{n_A} und I_{n_B} auf \mathbb{C}^{n_A} bzw. \mathbb{C}^{n_B} lautet die Reduktionsbedingung, die von allen PPT-Zuständen und damit auch allen separablen Zuständen erfüllt wird [34]

$$\rho_A \otimes I_{n_B} - \rho_{AB} \geq 0 \quad \text{und} \quad I_{n_A} \otimes \rho_B - \rho_{AB} \geq 0. \quad (3.6)$$

Für bipartite $2 \times N$ -Systeme ist diese Bedingung äquivalent zu PPT [16].

3.1.3 Majorisierungsbedingung

Anstatt wie beim vorherigen Ansatz die Eigenwerte der Differenz aus lokalen Zuständen ρ_A, ρ_B und dem gemeinsamen Zustand ρ_{AB} auf Positivität zu testen, werden bei der Majorisierungsbedingung die Eigenwerte von ρ_A, ρ_B und ρ_{AB} direkt verglichen. Alle Zustände, die die Reduktionsbedingung erfüllen, erfüllen auch die Majorisierungsbedingung [32].

Dabei wird ein Konzept aus der Mathematik verwendet, wonach ein Vektor $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ von einem Vektor $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ majorisiert wird, dargestellt durch $\vec{\lambda} \prec \vec{\mu}$, wenn

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k \mu_i^\downarrow, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.7)$$

erfüllt ist und gleichzeitig

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^\downarrow = \sum_{i=1}^n \mu_i^\downarrow \quad (3.8)$$

gilt. λ_i^\downarrow sind dabei die Einträge von $\vec{\lambda}$, wobei die Koordinaten so angeordnet sind, dass alle λ_i^\downarrow nach ihrer Größe absteigend sortiert sind.

Für alle separablen Zustände gilt [56]

$$\vec{\lambda}(\rho_{AB}) \prec \vec{\lambda}(\rho_A) \quad \text{und} \quad \vec{\lambda}(\rho_{AB}) \prec \vec{\lambda}(\rho_B), \quad (3.9)$$

wobei $\vec{\lambda}(\rho)$ die Eigenwerte von ρ enthält. Das Problem der ungleichen Dimensionen kann durch Hinzufügen von Nullen zum kürzeren Vektor gelöst werden. In der Praxis genügt es jedoch, die ersten $n_A - 1$ ($n_B - 1$) Einträge zu prüfen, da die Eigenwerte alle positiv sein müssen und in Summe 1 ergeben. Per Definition ist außerdem $n_A \leq n_{AB}$ ($n_B \leq n_{AB}$). Ab $k = n_A$ ($k = n_B$) ist also die jeweils rechte Seite in Gl. 3.7 für (3.9) gleich 1 und die Bedingung damit für alle weiteren Summen erfüllt.

3.1.4 Bedingungen mit Rényientropien als Grundlage

Die Rényientropie einer Dichtematrix ρ ist für positive reelle Zahlen α , $\alpha \neq 1$ definiert über [67]

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}\{\rho^\alpha\}. \quad (3.10)$$

Dabei gibt es die Sonderfälle der von-Neumann-Entropie für

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \ln \rho\}, \quad (3.11)$$

und

$$S_\infty(\rho) = -\ln \|\rho\|, \quad (3.12)$$

wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm bezeichnet, die für Dichtematrizen immer dem größten Eigenwert entspricht, da diese diagonalisierbar sind. Ähnlich zu den beiden vorherigen Bedingungen gilt für alle verschränkten Zustände

$$S_\alpha(\rho_A) \leq S_\alpha(\rho_{AB}) \quad \text{und} \quad S_\alpha(\rho_B) \leq S_\alpha(\rho_{AB}) \quad (3.13)$$

und alle entropiebasierten Bedingungen werden erfüllt, wenn ein Zustand die Reduktionsbedingung einhält [82].

Zusätzlich ist die Bedingung für $S_\infty(\rho_{AB})$ erfüllt, wenn der Zustand ρ_{AB} die Majorisierungsbedingung einhält. Denn das bedeutet, dass die größten Eigenwerte von ρ_A und ρ_B jeweils größer sind als der größte Eigenwert von ρ_{AB} , womit die Bedingung für $\alpha = \infty$ direkt eingehalten ist. Gleichzeitig kann man daran erkennen, dass die Majorisierungsbedingung restriktiver ist, da dort auch alle weiteren Eigenwerte berücksichtigt werden müssen.

Für weitere Betrachtungen besonders interessant ist der Spezialfall der von-Neumann-Entropie ($\alpha = 1$), da vermutlich nur Zustände für dichte Kodierung verwendet werden können, die die zugehörige entropiebasierte Bedingung (3.13) verletzen [12].

3.1.5 Zusammenhänge der Bedingungen

In den vorherigen Abschnitten wurden die verschiedenen betrachteten Bedingungen vorgestellt und aufgezeigt, wie diese zusammenhängen. Diese Zusammenhänge sind in Abb. 3.1 zur Übersicht dargestellt.

Es gibt weitere Bedingungen, die von separablen Zuständen erfüllt werden, z.B. basierend auf einer Neuordnung der Matrixelemente von ρ nach einem anderen Verfahren als bei PPT [17]. Dies wird hier nicht näher betrachtet, um die Ergebnisse übersichtlich und vergleichbar zu halten. Für das erwähnte Verfahren mit der Neuordnung der Matrixelemente gibt es beispielsweise Zustände, die diese Bedingung erfüllen, aber PPT verletzen [66] und umgekehrt [17]. Anders als bei allen hier betrachteten Bedingungen gibt also keinen direkten Zusammenhang über eine Hierarchie, welche Bedingung restriktiver ist.

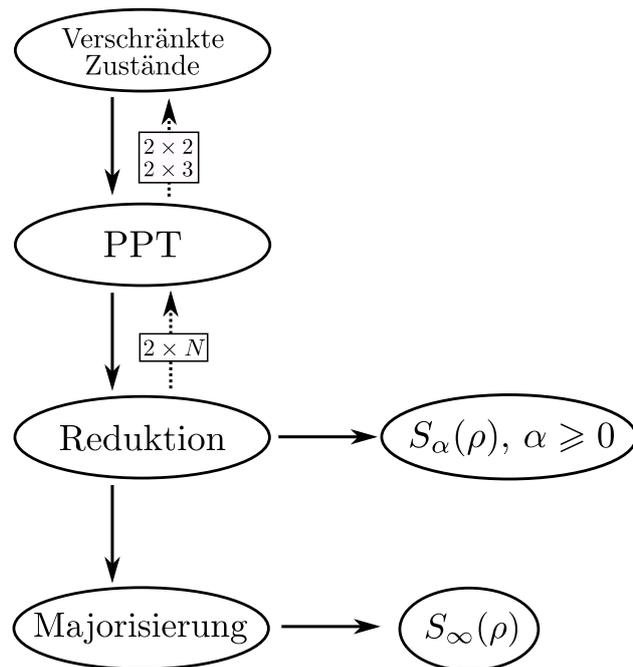


Abbildung 3.1: Beziehungen zwischen den betrachteten Bedingungen. Solide Pfeile zeigen an, dass bei Erfüllung einer Bedingung auch die Bedingung, auf die der Pfeil zeigt, erfüllt sein muss. Gestrichelte Pfeile gelten nur im angegebenen Spezialfall. Bei Pfeilen in beide Richtungen sind die Bedingungen äquivalent.

3.2 BETRACHTETE QUANTENZUSTÄNDE

Wie gut die im vorherigen Abschnitt eingeführten Bedingungen geeignet sind, separable von verschränkten Zuständen zu unterscheiden, kann auch maßgeblich von den betrachteten Zuständen abhängen. Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über alle im weiteren Verlauf verwendeten Klassen von bipartiten Quantenzuständen, angeordnet nach der Dimension der zugrunde liegenden Qudits sowie der Anzahl der freien Variablen bei der Beschreibung des Zustands. Durch diese kann der Zustand alternativ auch als Vektor in \mathbb{R}^d dargestellt werden. Für die allgemeinsten Zustände, die sich aus einem n_A -dimensionalen Qudit und einem n_B -dimensionalen Qudit zusammensetzen und nicht weiter eingeschränkt werden, wird die Bezeichnung $n_A \times n_B$ verwendet, also beispielsweise 2×3 für Zustände mit einem Qubit und einem Qutrit. Die Dichtematrix dieser Zustände kann in der Form

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = & \frac{I_{n_A \times n_B}}{n_A n_B} + \frac{1}{\sqrt{n_B}} \sum_{i=1}^{n_A^2-1} \tau_i^{(A)} T_i^{(A)} \otimes I_{n_B} \\ & + \frac{1}{\sqrt{n_A}} \sum_{j=1}^{n_B^2-1} \tau_j^{(B)} I_{n_A} \otimes T_j^{(B)} + \sum_{i=1}^{n_A^2-1} \sum_{j=1}^{n_B^2-1} v_{i,j} T_i^{(A)} \otimes T_j^{(B)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

geschrieben werden, wobei $T_i^{(A)}$ und $T_j^{(B)}$ normierte Generatoren der Liegruppe $SU(n_A)$ bzw. $SU(n_B)$ sind.

3.2.1 Qubit-Qubit-Zustände (2×2)

In diesem Fall ist $n_A = n_B = 2$ und als T_i werden die Paulimatrizen $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ verwendet.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2.1.1 Belldiagonale Zustände

Belldiagonale Zustände sind die einfachsten hier betrachteten Zustände und können durch drei reellwertige Parameter vollständig beschrieben werden. Sie bilden eine $d = 3$ dimensionale konvexe Menge im linearen Unterraum der selbstadjungierten Matrizen mit Spur 1, der durch

$$\rho = \frac{I_4}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} a_i \sigma_i^{(A)} \otimes \sigma_i^{(B)} \quad (3.16)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

3.2.1.2 X-Zustände

Die sogenannten X-Zustände sind insbesondere für die Quanteninformationsverarbeitung interessant [64]. Sie zeichnen sich dadurch aus dass ihre Einträge in der Dichtematrix wie ein X geformt sind:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Dadurch ist $d = 7$ und sie sind von der gewählten Basis abhängig. Im hier betrachteten Fall ergibt sich als Darstellung

$$\rho_X = \frac{I_4}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 a_i M_i \quad (3.18)$$

mit

$$\begin{aligned} M_1 &= \sigma_z^{(A)} \otimes I_2^{(B)}, M_2 = I_2^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)}, M_3 = \sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, \\ M_4 &= \sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}, M_5 = \sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, M_6 = \sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}, \\ M_7 &= \sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2.1.3 Rebit-Rebit-Zustände

Eine weitere interessante Untermenge sind Dichtematrizen, die ausschließlich reellwertige Einträge haben aber trotzdem Verschränkung ermöglichen[15]. Für diese ist $d = 9$ und sie können durch

$$\rho = \frac{I_4}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 a_i M_i \quad (3.20)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Um die Bedingung zu erfüllen, dass die Matrix nur reelle Einträge hat, ist die Basis dabei durch

$$\begin{aligned} M_1 &= I_2^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, M_2 = I_2^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)}, M_3 = \sigma_x^{(A)} \otimes I_2^{(B)}, \\ M_4 &= \sigma_z^{(A)} \otimes I_2^{(B)}, M_5 = \sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, M_6 = \sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)}, \\ M_7 &= \sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}, M_8 = \sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, M_9 = \sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

gegeben. Die Verschränkung wird dabei durch den Beitrag von $M_7 = \sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}$ ermöglicht, wie sich später zeigen wird.

3.2.2 Qubit-Quqrit-Zustände (2×3)

In diesem Fall ist $n_B = 3$, daher werden in Gl.(3.14) für $T_j^{(B)}$ die Gell-Mann-Matrizen γ_i verwendet:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.2.2.1 Teilmengen mit $d=12$ und 24

Es werden zwei verschiedene konvexe Teilmengen der Qubit-Quqrit-Zustände mit unterschiedlichen Dimensionen betrachtet. Im Gegensatz zu den verschiedenen besonderen Teilmengen für Qubits haben diese keine bekannten speziellen Anwendungsgebiete. Trotzdem eignen sie sich gut, um das Verhalten der verschiedenen Bedingungen aus 3.1 sowie die numerischen Berechnungen zu überprüfen. Denn während für das vollständige Qubit-Qubit-System noch $d = 15$ gilt, ist für allgemeine Qubit-Quqrit-Zustände bereits $d = 35$, was einen erheblichen Mehraufwand beim zufälligen Auswählen der Quantenzustände bedeuten kann.

Die hier betrachteten konvexen Teilmengen (I),(II) der Dimension $d = 12$ und $d = 24$ sind

$$\begin{aligned} (I) \quad \rho &= \frac{I_6}{6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 v_{x,i} \sigma_x^{(A)} \otimes \gamma_i^{(B)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 v_{y,i} \sigma_y^{(A)} \otimes \gamma_i^{(B)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 v_{z,i} \sigma_z^{(A)} \otimes \gamma_i^{(B)}, \\ (II) \quad \rho &= \frac{I_6}{6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 v_{x,i} \sigma_x^{(A)} \otimes \gamma_i^{(B)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 v_{y,i} \sigma_y^{(A)} \otimes \gamma_i^{(B)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 v_{z,i} \sigma_z^{(A)} \otimes \gamma_i^{(B)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2.3 Zustände aus einem Qubit und einem 4-dimensionalen Qudit (2×4)

Für das 4-dimensionale Qudit entsprechen die $T_j^{(B)}$ für Gl. (3.14) wegen $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ der Basis für Zwei-Qubit-Systeme, d.h. sie

können aus den 15 möglichen Kombinationen von $\{I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\} \otimes \{I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ abzüglich I_4 konstruiert werden und das System lässt sich dann durch

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{I_8}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=x,y,z} \tau_i^{(A)} \sigma_i^{(A)} \otimes I_4^{(B)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{15} \tau_j^{(B)} I_2^{(A)} \otimes T_j^{(B)} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=1}^{15} v_{i,j} \sigma_i^{(A)} \otimes T_j^{(B)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

mit $\tau_i^{(A)}, \tau_j^{(B)}, v_{i,j} \in \mathbb{R}$ darstellen. Damit bilden diese Zustände eine $d = 63$ -dimensionale konvexe Menge im 63-dimensionalen Unterraum der selbstadjungierten Matrizen mit Spur 1.

3.2.4 Qutrit-Qutrit-Zustände (3×3)

Bei der Konstruktion dieser Zustände werden auch für die $T_i^{(A)}$ in Gl. (3.14) die Gell-Mann-Matrizen γ_i verwendet und es ist $d = 80$.

3.2.5 Zustände aus einem Qutrit und einem 4-dimensionalen Qudit (3×4)

Dies sind die Zustände mit der höchsten hier betrachteten Dimension $d = 143$. Das Auswerten von noch höherdimensionalen Zuständen erscheint nicht sinnvoll, da der Zeitaufwand für die numerischen Berechnungen hier bereits hoch ist und die Skalierung der Bedingungen aus 3.1 mit der Dimension aus den bis zu diesem Punkt erzielten Ergebnissen bereits gut erkannt werden kann.

3.3 AUSWAHL DER QUANTENZUSTÄNDE

Um bestimmen zu können, wie groß der Anteil der Zustände ist, welche die verschiedenen Bedingungen aus 3.1 erfüllen, muss zunächst geklärt werden, wie ein solcher Anteil definiert werden kann. Dazu wird im Folgenden der generelle mathematische Rahmen für die Beschreibung von Quantenzuständen im n -dimensionalen Hilbertraum durch Elemente einer konvexen Menge im reellwertigen $n^2 - 1$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum beleuchtet. Dieser $n^2 - 1$ -dimensionale Vektorraum ist analog zur im vorherigen Abschnitt verwendeten Beschreibung der Quantenzustände. Die Bedingung, dass Quantenzustände positiv semidefinit sind, wird dabei in Ungleichungen überführt, die sich aus der Anwendung von Newtonidentitäten [33] und der Vorzeichenregel von Descartes [14] auf das charakteristische Polynom von selbstadjungierten Matrizen mit Spur 1 ergeben. Der in diesem Abschnitt erläuterte Ansatz findet sich auch bei [13, 27, 44, 45].

3.3.1 Eingrenzung der Quantenzustände in einem euklidischen Raum

Der n^2 -dimensionale Vektorraum $M_n(\mathbb{C})$ bildet zusammen mit dem Hilbert-Schmidt Skalarprodukt $\langle A, B \rangle_{\text{HS}} = \text{Tr}\{A^\dagger B\}$ mit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ einen n^2 -dimensionalen Hilbertraum. Eine Orthonormalbasis von $M_n(\mathbb{C})$ mit dem Hilbert-Schmidt Skalarprodukt ist durch die $n \times n$ Matrizen $\{(E_{i,j})_{a,b}\}_{1 \leq i,j,a,b \leq n}$ mit $(E_{i,j})_{a,b} = \delta_{ia}\delta_{jb}$ gegeben, wobei δ_{ia}, δ_{jb} Kroneckerdeltafunktionen sind.

Wie im vorherigen Abschnitt zu sehen, kann aus den $n^2 - 1$ spurlosen orthonormalen [44] Generatoren $T_i = T_i^\dagger$, $2 \leq i \leq n^2$ der Liegruppe $SU(n)$ in Kombination mit der entsprechend normierten Einheitsmatrix $T_1 := I_n/\sqrt{n}$ eine geeignete Basis für den Unterraum der selbstadjungierten Matrizen $A \in M_n(\mathbb{C})$ konstruiert werden. Mit dieser Basis kann eine selbstadjungierte Matrix A über die Relation [65]

$$A = \sum_{i=1}^{n^2} \langle T_i, A \rangle_{\text{HS}} T_i = \sum_{i=1}^{n^2} \text{Tr}\{T_i A\} T_i \equiv \sum_{i=1}^{n^2} a_i T_i \quad (3.25)$$

mit n^2 unabhängigen reellen Parametern $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n^2$ identifiziert werden. In dieser Basis ist die Norm $\|A\|_{\text{HS}}$ von A durch

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 = \langle A, A \rangle_{\text{HS}} = \sum_{i=1}^{n^2} \langle T_i, A \rangle^2 \quad (3.26)$$

gegeben.

Diese Wahl ist nicht eindeutig und es könnten auch andere orthonormale Basen gewählt werden [8], allerdings ist die hier vorgestellte

Basiswahl sehr vorteilhaft für das weitere Vorgehen, das die Auswahl zufälliger Zustände und die Bestimmung von Volumenverhältnissen vorsieht.

Im Unterraum der selbstadjungierten Matrizen sind die Quantenzustände durch die Teilmenge der positiv semidefiniten Matrizen mit Spur 1 gegeben. Demnach muss $a_1 = 1/\sqrt{n}$ gelten, um die Bedingung der Spur zu erfüllen. Um effizient zu prüfen, ob A positiv semidefinit ist, wird zunächst das charakteristische Polynom $p_A(\xi)$ betrachtet, d.h.

$$p_A(\xi) = \det(\xi I_n - A) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k^{(n)} \xi^{n-k} \quad (3.27)$$

mit

$$\begin{aligned} c_0^{(n)} &= 1, \quad c_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad c_2^{(n)} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \dots \\ c_n^{(n)} &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \end{aligned} \quad (3.28)$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) die Eigenwerte von A bezeichnet. Die Koeffizienten $c_i^{(n)}$ sind symmetrische Funktionen dieser Eigenwerte und können über die Newtonidentitäten mit Spuren von Potenzen des linearen Operators A , d.h. $p_k = \text{Tr}\{A^k\}$, verknüpft werden [33]:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1^{(n)}, \\ p_k &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} c_i^{(n)} p_{k-i} + (-1)^{k+1} k c_k^{(n)}, \quad 1 < k \leq n, \\ p_k &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} c_i^{(n)} p_{k-i}, \quad k > n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Für eine selbstadjungierte Matrix A mit $\text{Tr}(A) = 1$ können die Koeffizienten $c_i^{(n)}$ rekursiv aus diesen Newtonidentitäten konstruiert werden und man erhält

$$\begin{aligned} c_1^{(n)} &= 1, \\ c_2^{(n)} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_2, \\ c_3^{(n)} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{3} p_3, \\ c_4^{(n)} &= \frac{1}{24} - \frac{1}{4} p_2 + \frac{1}{3} p_3 + \frac{1}{8} p_2^2 - \frac{1}{4} p_4, \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Das charakteristische Polynom $p_A(\xi)$ einer selbstadjungierten Matrix hat nur reelle Nullstellen [65]. Damit ist $p_A(\xi)$ gemäß Gl. (3.30) ein Polynom mit reellwertigen Koeffizienten, sodass die Vorzeichenregel von Descartes [14] angewendet werden kann, um A auf positive Semidefinitheit zu prüfen. Diese Regel besagt, dass die Anzahl der reellen

Nullstellen des Polynoms $p_A(\xi)$ der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenabfolge entspricht. Deshalb muss wegen Gl. (3.27) gelten, dass

$$A \geq 0 \Leftrightarrow c_k^{(n)} \geq 0, \quad \forall k \in 0, 1, \dots, n. \quad (3.31)$$

Aus Gl. (3.30) folgt, dass eine selbstadjungierte Matrix A mit Spur 1 genau dann ein Quantenzustand, also zusätzlich positiv semidefinit ist, wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_2 &\geq 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_3 &\geq 0, \\ \frac{1}{24} - \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{8}p_2^2 - \frac{1}{4}p_4 &\geq 0, \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

gilt. Diese Bedingungen können in Ungleichungen umgewandelt werden, die nur von den reellen Parametern a_i abhängen und bieten damit eine Alternative zur Berechnung aller Eigenwerte der zugehörigen Matrix. Vor allem für niedrigdimensionale Räume ergibt sich dadurch eine erhebliche Beschleunigung der Bestimmung, ob ein neu generierter Vektor \vec{a} die Dichtematrix eines Quantenzustands beschreibt oder nicht.

Für höherdimensionale Systeme ab 2×3 ist dieses Umschreiben in Ungleichungen der a_i nicht mehr möglich bzw. mit einem großen rechnerischen Aufwand verbunden, sodass sich kein Vorteil mehr ergibt. In diesen Fällen müssen trotzdem nicht alle auftretenden Potenzen von ρ explizit berechnet werden. Stattdessen kann ausgenutzt werden, dass

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} \quad (3.33)$$

gilt und damit numerisch sehr effizient berechnet werden kann. Für die Ermittlung aller benötigten Spuren müssen also nur die ersten $n/2$ Potenzen von ρ bestimmt werden.

3.3.2 Auswahl zufällig verteilter Quantenzustände

Der nächste Schritt auf dem Weg zur Bestimmung der Volumenanteile, welche Zustände, die die Bedingungen 3.1 erfüllen, im Raum aller Quantenzustände einnehmen, ist die Erzeugung von zufälligen Quantenzuständen. Dazu werden im Folgenden die Quantenzustände ρ mit ihrer eindeutigen Beschreibung $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2-1})^T \in \mathbb{R}^d$ mit $d = n^2 - 1$ entsprechend dem vorherigen Abschnitt identifiziert, d.h.

$$\rho = \frac{I_n}{n} + \sum_{i=1}^{n^2-1} a_i T_i. \quad (3.34)$$

Dieser Zusammenhang wird genutzt, um die Hilbert-Schmidt-Norm der Differenz zweier selbstadjungierter Matrizen mit Spur 1 A und B mit dem euklidischen Abstand in \mathbb{R}^{n^2-1} zu verknüpfen

$$\|A - B\|_{\text{HS}} = \left\| \sum_{i=1}^{n^2-1} (a_i - b_i) T_i \right\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2-1} (a_i - b_i)^2}, \quad (3.35)$$

wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und T_i ($1 \leq i \leq n^2 - 1$) eine orthonormale Basis selbstadjungierter $n \times n$ Matrizen wie in Eq. (3.25) ohne die Einheitsmatrix ist. Das Auffinden von zufällig verteilten Quantenzuständen für die Bestimmung der Volumenanteile per Monte-Carlo-Simulation vereinfacht sich dadurch zum Auswählen zufälliger Punkte im \mathbb{R}^{n^2-1} , die einen Quantenzustand repräsentieren.

Ein erster Ansatz dafür basiert auf der Beobachtung, dass $\vec{a} = 0$ dem maximal gemischten Zustand $\rho = I_n/n$ entspricht und aus Symmetriegründen in gewisser Weise mittig in der konvexen Menge der Quantenzustände K liegt.

Durch die Erzeugung von zufällig verteilten Punkten auf Kugelschalen [9, 30, 53] mit ansteigendem Radius $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2-1} a_i^2}$ bis zum maximalen Radius $r_{\max} = \sqrt{n-1}/\sqrt{n}$ erhält man gleichmäßig verteilte Punkte in einem Raum, der alle Quantenzustände einschließt, wenn die Anzahl der erzeugten Punkte in jeder Kugelschale abhängig vom Radius und der Dimension des Raums angepasst wird [43, 75]. Dieser maximale Radius für Quantenzustände ergibt sich nach Einsetzen des Beitrags $a_0 = 1/\sqrt{n}$ der Identität in die erste Bedingung aus Gl. (3.32), wonach

$$1 \geq \text{Tr}\{A^2\} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \geq \sum_{i=1}^{n^2-1} a_i^2 = r^2 \quad (3.36)$$

gilt.

Aus Mehtas Lemma [51] folgt außerdem ein Radius r_{\min} unterhalb dem alle Zustände separabel sind und dementsprechend nicht weiter überprüft werden müssen. Das Lemma besagt, dass eine selbstadjungierte Matrix A mit

$$\text{Tr}\{A^2\} \leq \frac{1}{n-1} \quad (3.37)$$

positiv ist. In Verbindung mit der Invarianz der Hilbert-Schmidt-Norm unter der für die Peres-Horodecki-Bedingung notwendigen partiellen Transposition und unter Berücksichtigung des Vorfaktors der Identität erhält man daraus den minimalen Radius $r_{\min} = 1/\sqrt{n(n-1)}$. Zustände mit $r = \|\vec{a}\| \leq r_{\min}$ sind daher eine Teilmenge der verschränkten Zustände [7, 51].

Dieser Ansatz stößt jedoch bei höherdimensionalen Systemen schnell an Grenzen. Da mit ansteigender Dimension immer mehr Punkte in

den äußeren Kugelschalen generiert werden müssen, um eine gute Abdeckung des Raums zu erreichen, wächst die dafür nötige Rechenzeit exponentiell an und es werden nur sehr vereinzelt Quantenzustände gefunden, sodass eine Abschätzung der Volumina über Monte-Carlo-Methoden ungenau wird (*Fluch der Dimensionalität*) [71, 89]. Außerdem ist r_{\min} eine Grenze für PPT Zustände, also nur für 2×2 und 2×3 Systeme auch für separable Zustände gültig. Dies fällt jedoch kaum ins Gewicht, da der Anteil der Zustände mit $r \leq r_{\min}$ mit steigender Dimension exponentiell gegen 0 geht und damit kaum Einfluss auf die Gesamtzeit der Berechnung hat.

Aus diesen Gründen wird hier ein anderer, effizienterer Algorithmus verwendet und weiterentwickelt, der schnell neue Punkte in der konvexen Menge der Quantenzustände K generiert. Diese Punkte sind dafür nicht vollständig unabhängig und eine gleichmäßige Verteilung ergibt sich erst nach ausreichend vielen Schritten.

3.3.3 Hit-and-Run-Algorithmus

Dieses Verfahren wurde zur Erzeugung von gleichmäßig verteilten Punkten in beliebig begrenzten Gebieten entwickelt [79]. Die grundlegende Funktionsweise ist, dass man mit einem Punkt a_i in der betrachteten Menge G startet, eine zufällig orientierte Gerade durch diesen Punkt zieht und aus allen Punkten auf der Geraden, die in G liegen, zufällig den nächsten Punkt a_{i+1} auswählt. Dazu wird ein zufälliger Punkt auf der Geraden als Kandidat ausgewählt, getestet ob dieser in G liegt und dementsprechend akzeptiert oder ein neuer Kandidat aus derselben Geraden ausgewählt. Dies wird wiederholt, bis die gewünschte Gleichmäßigkeit der Verteilung erreicht ist. Dass K eine konvexe Menge ist und der Abstand zwischen zwei Punkten in K nie $2\sqrt{(n-1)/n}$ überschreiten kann (3.36), vereinfacht die Suche nach dem nächsten Zustand erheblich. Nur Punkte auf der Geraden, deren Abstand $2\sqrt{(n-1)/n}$ nicht überschreitet kommen dadurch als Kandidaten für den nächsten Punkt in Frage. Zusätzlich ist nach dem Testen eines Punkts, der nicht in K liegt, sicher, dass auch alle in diese Richtung noch weiter entfernten Punkte nicht Teil von K sein können. Damit wird die Strecke, aus der Kandidaten für den nächsten Punkt ausgewählt werden können, mit jedem Fehlversuch verkleinert, bis ein Punkt in K gefunden wird. Auch konvergiert die Verteilung durch die Konvexität von K wesentlich schneller gegen eine gleichmäßige Verteilung als im allgemeinen Fall, der z.B. disjunkte Gebiete enthalten kann, wodurch für viele aufeinanderfolgende Schritte ausschließlich Punkte aus einem Gebiet erzeugt werden und nur selten ein Sprung in ein anderes Gebiet stattfindet.

Die Wahl des Startpunkts $a_0 \in K$ ist für den Erfolg des Algorithmus nicht entscheidend [49], in allen Berechnungen wird dafür der vollständig gemischte Zustand $\vec{a} = \vec{0}$ genommen und die Auswertung

erst ab dem zweiten erhaltenen Block von Ergebnissen gestartet. Je nachdem, wie häufig die Zwischenergebnisse der Berechnung gespeichert wurden, werden damit die ersten 2000 – 100000 generierten Zustände nicht in der Auswertung berücksichtigt, wodurch der Start im Inneren des Raums der separablen Zustände keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

Für die Erzeugung der Geraden wird die Mullermethode [53] verwendet, um einen zufälligen d -dimensionalen Vektor zu erzeugen, der dann als Richtungsvektor der Geraden dient. Bei dieser Methode wird ein Vektor mit d normalverteilten Zufallsvariablen erzeugt und dann normiert. Wichtig ist dabei, dass beide Richtungen der Geraden berücksichtigt werden und nicht nur der Strahl, der sich aus Startpunkt und zufälligem Richtungsvektor ergibt. An Abb. 3.2 kann man erkennen, dass die Verteilung sonst nicht gleichmäßig wird, sondern mehr Punkte in den äußeren Bereichen generiert werden. Bei Betrachtung nur einer Richtung ist es für einen Punkt nahe am Rand der Menge genauso wahrscheinlich, noch weiter an den Rand zu rücken, wie die Auswahl eines neuen Punkts im restlichen Polytop. Dieses Problem tritt nicht auf, wenn die vollständige Gerade betrachtet wird, da die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dann vom Verhältnis der jeweiligen Streckenlängen abhängen.

Die Entscheidung, ob ein generierter Punkt in K liegt, d.h. ein Quantenzustand ist, wird dabei mit Hilfe der zuvor hergeleiteten Bedingungen getroffen. Für das Auffinden von zufälligen Zuständen aus der Menge der Quantenzustände K wird also folgender Hit-and-Run-Algorithmus verwendet:

- 1. Initialisiere $\vec{a}_1 = \vec{0}$ und setze $j = 1$.
- 2. Generiere $n^2 - 1$ normalverteilte Zufallsvariablen x_i und konstruiere daraus den Vektor $\vec{d} = x_i \vec{e}_i / \sqrt{\sum_i x_i^2}$ auf der $n^2 - 1$ -dimensionalen Einheitskugel. \vec{e}_i sind hierbei die kanonischen Basisvektoren.
- 3. Setze $r = 2\sqrt{n-1}/\sqrt{n}$ und das Intervall $I = [-r, r]$.
- 4. Erzeuge ein zufälliges λ aus der gleichförmigen Verteilung über I .
- 5. Falls $\vec{a}_j + \lambda \vec{d} \in K$, setze $\vec{a}_{j+1} = \vec{a}_j + \lambda \vec{d}$, $j \rightarrow j + 1$ und gehe zurück zu Schritt 2. Andernfalls setze $I = [\lambda, r]$ bzw. $I = [-r, \lambda]$, sodass die 0 im Intervall vorhanden ist und gehe zurück zu Schritt 4.

3.3.4 Fehlerbestimmung

Die im vorherigen Abschnitt erläuterte Methode liefert zwar langfristig gleichmäßig verteilte Zustände im Raum aller Quantenzustände,

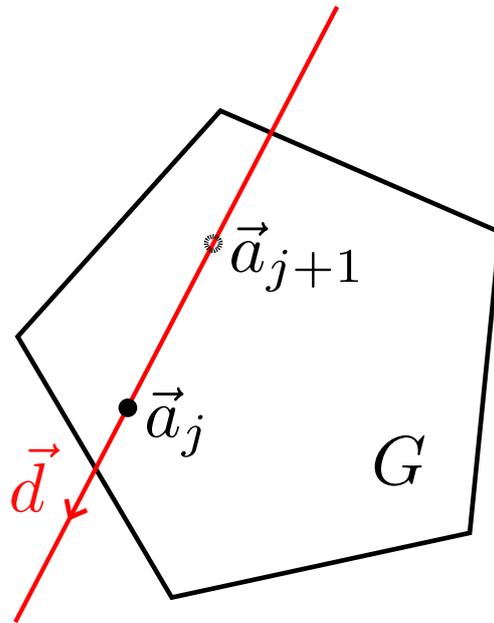


Abbildung 3.2: Darstellung eines Schritts des Hit-and-Run-Algorithmus. Ausgehend vom Zustand \vec{a}_j wurde mit einem zufälligen Richtungsvektor \vec{d} eine Strecke durch diesen Punkt erzeugt. Nachdem einige Kandidaten für neue Zustände gleichmäßig zufällig aus dieser Strecke ausgewählt wurden, die jedoch außerhalb von G lagen, ist die rot markierte Strecke für die Auswahl neuer Kandidaten übrig geblieben. Nach der Feststellung, dass der zufällig gewählte Vektor \vec{a}_{j+1} in G liegt, wird dieser übernommen und das Verfahren wird an diesem Punkt mit einem neuen zufälligen Richtungsvektor fortgesetzt.

die einzelnen gewählten Punkte sind jedoch durch die Konstruktion nicht unabhängig voneinander. Da in jedem Schritt ein gleichförmig verteilter Wert entlang einer zufälligen Richtung erzeugt wird, wird der nächste Punkt tendenziell eher in der Nähe des Ausgangspunkts generiert. Wenn also nach der Erzeugung von N Quantenzuständen k davon eine bestimmte Bedingung erfüllen, kann die Standardabweichung σ_R des Verhältnisses $R = \frac{k}{N}$ nicht einfach über \sqrt{k}/N abgeschätzt werden.

Stattdessen werden die erzeugten Punkte in Blöcken der Größe N_B zusammengefasst. Damit wird das Generieren von k_B Zuständen in einem solchen Block, die die gewählte Bedingung erfüllen, zu einem Bernoulliexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von R . Für viele ausreichend große Blöcke geht die so erzeugte Verteilung in eine Gaußverteilung über, deren Mittelwert durch $\bar{k}_B = R \cdot N_B$ gegeben ist. Die Standardabweichung der Verteilung ist σ_B und hängt von der Größe der gewählten Blöcke sowie dem Grad der Abhängigkeit der einzelnen in den Blöcken enthaltenen Zustände ab. Im Folgenden wurde eine Blockgröße von $N_B = 10^6$ verwendet. Da für die Ergebnisse nur die Standardabweichung des Mittelwerts σ_R relevant

ist, fließt die Anzahl der generierten Blöcke N_I in die Berechnung der Standardabweichung $\sigma_R^2 = \sigma_B^2 / N_I$ ein.

3.4 ERGEBNISSE

Die in diesem Kapitel bisher vorgestellten Bausteine werden nun zusammengeführt, um zu analysieren, welcher Anteil der Quantenzustände für die verschiedenen Systeme aus 3.2 die unterschiedlichen in 3.1 vorgestellten Bedingungen erfüllt.

Die Auswahl der Quantenzustände wird mit dem Hit-and-Run-Algorithmus wie in 3.3.3 beschrieben durchgeführt. Zu Beginn gibt es jeweils eine Übersichtstabelle mit den Verhältnissen R und der zugehörigen Standardabweichung σ_R , sowie je nach System eine Diskussion weiterer Untersuchungen.

Für die entropiebasierte Bedingung sind die Sonderfälle $\alpha \rightarrow 1$ und $\alpha \rightarrow \infty$ betrachtet. Berechnet wurden jedoch bis zum 2×4 -System zusätzlich die Volumenverhältnisse für die Bedingungen mit $\alpha \in \{1.05, 1.15, 1.5, 1.7, 2, 2.5, 3, 4, 5, 8, 10, 15, 20\}$. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse sind nach den Vorstellungen der einzelnen Systeme zusammengefasst. Für diese Berechnungen wird jedoch viel Zeit benötigt, weshalb eine geringere Anzahl Zustände generiert und getestet werden konnte. Dadurch wurde es auch notwendig, in diesen Fällen kleinere Blockgrößen N_B zu verwenden, dabei ist für 2×2 -Systeme $N_B = 20000$ und für 2×3 -Systeme $N_B = 50000$. Es hat sich gezeigt, dass dies auch ausreichend ist, damit die Effekte der nicht unabhängigen Generation von neuen Zuständen in den Blöcken nicht mehr relevant sind, bzw. nur auf die Breite der so erzeugten Verteilung Einfluss nehmen. Im Rahmen der Untersuchungen hat sich schnell gezeigt, dass PPT entweder äquivalent zu anderen Bedingungen ist, oder aber den Raum der Quantenzustände deutlich stärker einschränkt. Deshalb wurde für alle Systeme ein Durchlauf durchgeführt, bei dem nur PPT getestet wurde und dadurch wesentlich mehr Zustände generiert werden konnten. Die Anzahl der für die Bestimmung des Volumenverhältnisses R betrachteten Quantenzustände ist jeweils in der Tabelle angegeben.

3.4.0.1 Belldiagonale Zustände

	R	σ_R	N
PPT	0.499998	0.000014	$5.5 \cdot 10^9$
Reduktion	0.49957	0.00032	$1.1 \cdot 10^7$
Majorisierung	0.49957	0.00032	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.49957	0.00032	— " —
$S_1(\rho)$	0.95874	0.00016	— " —

Tabelle 3.1: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Belldiagonalen Quantenzuständen.

Die Belldiagonalen Zustände haben den Vorteil, dass sie sich im dreidimensionalen euklidischen Raum darstellen lassen, wodurch es möglich ist, die verschiedenen Bereiche grafisch darzustellen. Es ist bekannt, dass die Belldiagonalen Quantenzustände in diesem Raum einen Tetraeder bilden und die separablen Zustände ein Oktaeder in dessen Inneren formen [47, 88]. Die Form der Menge der separablen Zustände kann man nachvollziehen, indem man die PPT Bedingung anwendet, die für Zwei-Qubit-Zustände äquivalent zur Separabilität ist. Die partielle Transposition spiegelt dabei den Tetraeder entlang $y \rightarrow -y$ und die Positivität bedeutet, dass nur der Schnitt des gespiegelten mit dem ursprünglichen Tetraeder die Menge der PPT-Zustände darstellt. Die beiden Mengen sind in Abb. 3.3 dargestellt. Durch diesen Zusammenhang kann der Anteil der separablen an allen Quantenzuständen für Belldiagonale Zustände analytisch zu $R = 0.5$ bestimmt werden.

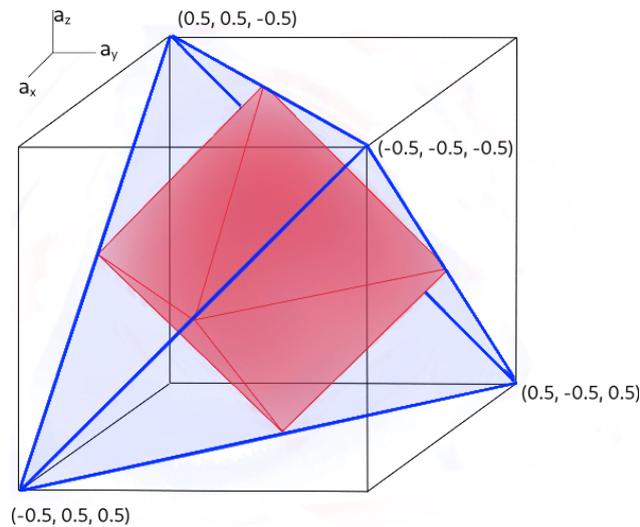


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der konvexen Menge separabler belldiagonaler Zwei-Qubit-Zustände (roter Oktaeder) in der konvexen Menge aller belldiagonaler zwei-Qubit-Zustände (blauer Tetraeder). Der dreidimensionale euklidische Raum (3.16). Die vier Eckpunkte entsprechen dabei den vier maximal verschränkten Bellzuständen.

Neben den bekannten Abhängigkeiten der Bedingungen sind hier auch die Majorisierungs- und Reduktionsbedingung identisch. Dies kann man wie folgt erkennen. Durch die Konstruktion der Belldiagonalen Zustände (siehe Gl. 3.16) ist $\rho_A = I_2/2$ und wegen $\rho_{\text{Red}} = \rho_A \otimes I_{n_B} - \rho$ unterscheiden sich ρ und ρ_{Red} dadurch, dass alle a_i das Vorzeichen wechseln. Außerdem kann man die Eigenwerte von ρ durch $\lambda = 1/4 + f(\{a_i\})$ und die Eigenwerte von ρ_{Red} durch $\lambda_{\text{Red}} = 1/4 - f(\{a_i\})$ darstellen. Daraus ergibt sich, dass die Reduktionsbedingung $\lambda_{\text{Red}} \geq 0$ und die Majorisierungsbedingung $\lambda \leq \frac{1}{2}$ identisch sind.

3.4.0.2 *X-Zustände*

	R	σ_R	N
PPT	0.4000003	0.000022	$4.1 \cdot 10^9$
Reduktion	0.40012	0.00022	$4 \cdot 10^7$
Majorisierung	0.64698	0.00026	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.64698	0.00026	— " —
$S_1(\rho)$	0.977216	0.000089	— " —

Tabelle 3.2: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Zwei-Qubit X-Zuständen.

Auch für die X-Zustände ist das Verhältnis von separablen zu allen Zuständen analytisch bekannt und durch $R = 0.4$ gegeben [52]. Dieser Wert konnte durch die Monte-Carlo-Simulation gut reproduziert werden. Im Gegensatz zu den Belldiagonalen Zuständen wird hier aber deutlich, dass die Majorisierungsbedingung schwächer als die beiden vorherigen Bedingungen ist und ein erheblicher Anteil der verschränkten Zustände durch diese Bedingung nicht von separablen Zuständen unterschieden werden kann.

3.4.0.3 *Rebit-Rebit-Zustände*

	R	σ_R	N
PPT	0.453111	0.000027	$4.1 \cdot 10^9$
Reduktion	0.45375	0.00082	$5 \cdot 10^6$
Majorisierung	0.80868	0.00077	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.80868	0.00077	— " —
$S_1(\rho)$	0.99267	0.00016	— " —

Tabelle 3.3: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Rebit-Rebit-Zuständen.

Wie für die beiden vorherigen Arten von Zuständen ist auch für die Rebit-Rebit-Zustände das Verhältnis von separablen zu allen Zuständen analytisch bekannt und ist hier durch $R = 0.453125 = 29/64$ gegeben [48]. Die Majorisierungsbedingung schneidet hier noch etwas schlechter ab und wird von weniger als der Hälfte der vorhandenen Quantenzustände verletzt.

3.4.0.4 *Allgemeine Zwei-Qubit-Zustände*

Das ermittelte Verhältnis von separablen zu allen Zwei-Qubit-Zuständen passt gut zum analytischen bestimmten Wert $R = 8/33 \approx 0,24242$ [77] und anderen numerischen Resultaten, z.B. $R = 0.242 \pm 0.002$ von

	R	σ_R	N
PPT	0.242444	0.000028	$4.1 \cdot 10^9$
Reduktion	0.24244	0.00017	$1 \cdot 10^8$
Majorisierung	0.78464	0.00024	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.78464	0.00024	— " —
$S_1(\rho)$	0.995278	0.000036	— " —

Tabelle 3.4: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Zwei-Qubit-Zuständen.

Shang et al. [74] und $R = 0.24262 \pm 0.0134$ von Milz et al. [52]. Es zeichnet sich bereits ab, dass für höhere Dimensionen die Majorisierungs- und entropiebasierten Bedingungen immer weniger Zustände als garantiert verschränkt klassifizieren, obwohl ein kleiner werdender Anteil an Zuständen separabel ist.

Für alle 2×2 -Systeme sind die Volumenanteile R für die Majorisierungsbedingung und $S_\infty(\rho)$ identisch, da ρ_A und ρ_B je zwei Eigenwerte haben, deren Summe jeweils eins ergibt. Damit ist für die Majorisierungsbedingung nur der größte Eigenwert relevant, was genau der Bedingung für $S_\infty(\rho)$ entspricht.

3.4.0.5 Qubit-Quitrit-Zustände

	R	σ_R	N
PPT	0.19368	0.00029	$2 \cdot 10^7$
Reduktion	0.19384	0.00029	— " —
Majorisierung	0.19384	0.00029	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.19384	0.00029	— " —
$S_1(\rho)$	0.9999625	0.0000055	— " —

Tabelle 3.5: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und den speziellen Qubit-Quitrit-Zuständen (I) mit $d = 12$.

Für die allgemeinen Qubit-Quitrit-Zustände ist PPT äquivalent zur Separabilität und der Anteil der verschränkten Zustände an allen Zuständen liegt bereits bei über 97%. Dieser Wert ist mit dem ermittelten Fehler nicht vereinbar mit einer von Slater aufgestellten Vermutung, dass $R = 32/1199 \approx 0.026688$ ist [76], passt aber sehr gut zu einem anderen numerischen Ergebnis von Milz et al., die einen Wert von $R = 0.02700 \pm 0.00016$ festgestellt haben [52].

Die Majorisierungsbedingung und insbesondere die Bedingung, die auf den von-Neumann-Entropien beruht, wird im Kontrast dazu von

	R	σ_R	N
PPT	0.022292	0.000062	$7 \cdot 10^7$
Reduktion	0.02226	0.00016	$1.1 \cdot 10^7$
Majorisierung	0.02226	0.00016	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.02226	0.00016	— " —
$S_1(\rho)$	0.999933	0.000012	— " —

Tabelle 3.6: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und den speziellen Qubit-Qutrit-Zuständen (II) mit $d = 24$

	R	σ_R	N
PPT	0.026972	0.000041	$3.3 \cdot 10^8$
Reduktion	0.02673	0.00013	$1.1 \cdot 10^7$
Majorisierung	0.86168	0.00067	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.86746	0.00066	— " —
$S_1(\rho)$	0.999909	0.000018	— " —

Tabelle 3.7: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allgemeinen Qubit-Qutrit-Zuständen mit $d = 35$.

den meisten Quantenzuständen erfüllt, sodass mit diesen Bedingungen nur einen Bruchteil der Zustände als verschränkt klassifiziert werden kann.

Interessant sind in dieser Hinsicht die betrachteten Teilmengen der Zustände in linearen Unterräumen der Dimension $d = 12$ und $d = 24$. Für diese sind alle Bedingungen bis $S_\infty(\rho)$ äquivalent und sind damit alle geeignet, die separablen und verschränkten Zustände exakt voneinander abzugrenzen. Das System (II) in einem 24-dimensionalen Unterraum der allgemeinen Zustände enthält dabei sogar einen kleineren Anteil an separablen Zuständen, trotz der deutlich niedrigeren Dimensionalität. Dies zeigt, dass die Definition der Zustände einen wesentlichen Einfluss auf die Struktur der verschiedenen Mengen hat.

3.4.0.6 Qubit-vierdimensionales-Qudit-Zustände

Diese Zustände mit $d = 63$ sind die ersten in dieser Auflistung, bei denen das Phänomen der gebundenen Verschränkung auftritt. Obwohl der Anteil der Zustände, die PPT erfüllen, bereits sehr klein ist, sind darin noch zusätzliche verschränkte Zustände enthalten. Mit den hier vorgestellten Methoden ist es jedoch nicht möglich, den Anteil dieser verschränkten PPT-Zustände zu bestimmen.

Die Reduktionsbedingung liefert wie erwartet das gleiche Ergebnis

	R	σ_R	N
PPT	0.0012936	0.0000043	$1.2 \cdot 10^9$
Reduktion	0.001229	0.000060	$2.5 \cdot 10^7$
Majorisierung	0.8824	0.0023	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.8877	0.0022	— " —
$S_1(\rho)$	1	-	— " —

Tabelle 3.8: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen 2×4 -Quantenzuständen.

wie PPT, da es sich um ein System der Art $2 \times N$ handelt.

Für die auf der von-Neumann-Entropie basierende Bedingung wurde trotz der Erzeugung von über 10^9 zufälligen Zuständen kein einziger gefunden, der diese verletzt. Da die Bedingung der Gaußschen Verteilung der Teilergebnisse damit nicht wie in 3.3.4 gefordert erfüllt werden kann, ist hier keine Fehlerabschätzung angegeben. In den folgenden Systemen wurde dasselbe beobachtet, weshalb diese Bedingung dort nicht mehr aufgeführt wird.

Daran kann man erkennen, dass die Zustände, die mit dieser Bedingung als verschränkt klassifiziert werden können, einen verschwindend kleinen Anteil am Raum aller Zustände haben. Die Ursache dafür ist vermutlich, dass diese Zustände in der Nähe von verschränkten reinen Zuständen liegen, also in den Randbereichen der konvexen Menge (vgl. Abb. 3.3) und diese mit zunehmender Dimension einen kleiner werdenden Anteil der Gesamtmenge ausmachen.

3.4.0.7 Allgemeine Qutrit-Qutrit-Zustände

	R	σ_R	N
PPT	0.0001041	0.0000011	$1.2 \cdot 10^9$
Reduktion	0.64852	0.00033	— " —
Majorisierung	0.995733	0.000035	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.995733	0.000035	— " —

Tabelle 3.9: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen Qutrit-Qutrit-Zuständen.

Wie zuvor kann hier gebundene Verschränkung auftreten, sodass der Anteil der separablen Zustände kleiner als der mit PPT bestimmte Wert ist. Zusätzlich sind hier PPT und die Reduktionsbedingung nicht äquivalent, was sofort einen erheblichen Einfluss auf den Nutzen der Reduktionsbedingung für die Unterscheidung von separablen und verschränkten Zuständen hat.

3.4.0.8 Allgemeine Zustände aus einem Qutrit und einem vierdimensionalen Qudit

	R	σ_R	N
PPT	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-8}$	$3.5 \cdot 10^8$
Reduktion	0.5743	0.0011	— " —
Majorisierung	0.99861	0.00058	— " —
$S_\infty(\rho)$	0.99861	0.00058	— " —

Tabelle 3.10: Volumenverhältnisse zwischen Zuständen, die die jeweilige Bedingung erfüllen und allen 3×4 -Quantenzuständen.

Für diese Zustände mit $d = 143$ stößt diese Methode bei der Analyse der Volumenanteile an ihre Grenzen. Zum einen wird das Finden von neuen Zuständen mit steigender Dimension immer aufwendiger, zum anderen müssen immer mehr Zustände gefunden werden, um eine gleichmäßige Verteilung der Punkte zu erreichen. Gleichzeitig steigt die Dimension der zugehörigen Dichtematrix, mit der verschiedene Berechnungen durchgeführt werden müssen, um die Bedingungen aus 3.1 zu überprüfen. Wie man an der Tabelle ablesen kann, wurden bei der Erzeugung von $3.5 \cdot 10^8$ zufälligen Quantenzuständen nur 21 Zustände gefunden, welche die PPT Bedingung erfüllen. Der Anteil der Zustände, die die Reduktionsbedingung erfüllen ist im Vergleich zum 3×3 -System kleiner, aber anhand der Ergebnisse lässt sich nicht abschätzen, ob dieser Wert für hohe Dimensionen gegen 0 geht wie bei PPT, oder ob es einen festen Grenzwert gibt.

3.4.1 Dauer der Berechnungen

Um einen Überblick über die Auswirkung der Dimension auf die zur Berechnung benötigten Zeiten zu bekommen, ist in Tab. (3.11) aufgeführt, wie viel Zeit die Auswahl eines neuen Quantenzustands mit anschließender Auswertung der fünf in den obigen Tabellen aufgeführten Bedingungen in Anspruch nimmt. Dazu wurden jeweils 10^5 Zustände generiert und überprüft.

Aus der Tabelle wird deutlich, dass die Dimension n der zugrunde liegenden Dichtematrix ρ einen wesentlich größeren Einfluss auf die Laufzeiten hat, als die Dimension d des euklidischen Raums. Für höhere Dimensionen steigt die benötigte Rechenzeit pro Zustand stark an, was neben den größeren zu verarbeitenden Matrizen auch daran liegt, dass es länger dauert, einen neuen gültigen Quantenzustand zu finden. Während Schritt 4 des Hit-and-Run-Algorithmus aus 3.3.3 für die Belldiagonalen Qubit-Qubit-Zustände im Schnitt 0.77 Punkte außerhalb der Menge der Quantenzustände generiert, bevor ein gültiger Zustand gefunden wird, liegt dieser Wert für das 3×4 -System bei ca.

System	Dimension d	t in ms
2×2 , Belldiagonal	3	0.050
2×2 , X-Zustände	7	0.055
2×2 , Rebit-Rebit	9	0.061
2×2 , allgemein	15	0.069
2×3 , (I)	12	0.29
2×3 , (II)	24	0.40
2×3 , allgemein	35	0.43
2×4	63	1.02
3×3	80	1.75
3×4	143	6.51

Tabelle 3.11: Durchschnittlich benötigte Zeit für die Erzeugung eines Zustands mit anschließendem Test des Zustands auf Erfüllung der Bedingungen aus 3.1.

160. Für eine zufällige Richtung ist der Abstand bis zum Rand der Menge der Quantenzustände also wesentlich kürzer als der maximale Abstand zu den am weitesten entfernten Quantenzuständen.

3.4.2 Entropiebasierte Bedingungen

Für Systeme bis zur Dimension $d = 63$ wurde für die auf der Rényi-entropie basierende Bedingung für verschiedene Werte $\alpha \geq 1$ untersucht, welcher Anteil der Zustände diese Bedingungen erfüllen. In Abb. 3.4 und 3.5 sind die Ergebnisse dargestellt. Wie bereits aus den zuvor gezeigten Ergebnissen vermutet werden konnte, zeigt sich hierbei, dass die Bedingung für $S_\alpha(\rho)$ mit $\alpha \rightarrow \infty$ das kleinste Verhältnis R der Volumina liefert und damit die separablen Zustände am besten eingrenzt. Die in den obigen Tabellen gegebenen Werte für $S_\alpha(\rho)$ entsprechen damit der unteren und oberen Grenze für alle Verhältnisse R , die aus entropiebasierten Bedingung mit $\alpha \geq 1$ folgen.

In der Übersicht nicht zu sehen ist, dass dies nicht nur für den dargestellten Durchschnitt über alle Zustände gilt, sondern sogar für jeden einzelnen Zustand individuell. D.h. für jeden Zustand, der die Bedingung für $S_\alpha(\rho)$ erfüllt, ist auch die Bedingung für $S_\beta(\rho)$ erfüllt, wenn $\alpha \geq \beta$. Die Allgemeingültigkeit dieser Vermutung ist naheliegend, jedoch gilt sie zunächst nur für die hier beobachteten Zustände und erlaubt keine direkten Rückschlüsse auf die Beziehung dieser Bedingungen. Es könnte auch Zustände geben, für die die Beobachtung nicht gilt, die aber im betrachteten Raum kein Volumen einnehmen und damit beim Auswahlprozess nicht vorkommen. So nehmen beispielsweise die reinen Zustände kein Volumen im Raum ein, da sie immer auf dem Rand der konvexen Menge liegen.

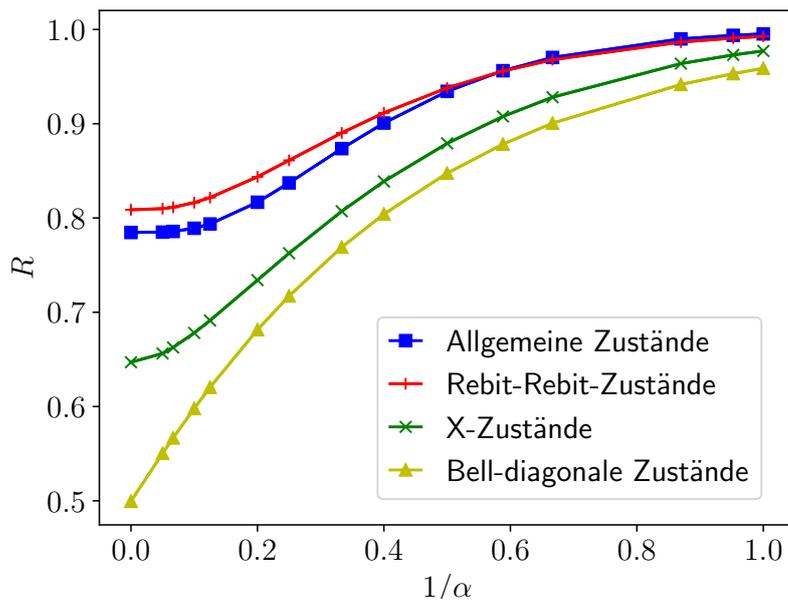


Abbildung 3.4: Anteil R der Qubit-Qubit-Zustände, welche die auf der Rényientropie basierende Bedingung erfüllen, an allen Quantenzuständen für die verschiedenen betrachteten Teilmengen. Für $\alpha \rightarrow \infty$ ist R minimal und es werden mehr Zustände korrekt als verschränkte Zustände erkannt. Nur den markierten Punkten liegen Messwerte zugrunde und die Fehler sind kleiner als die Breite der Linien.

In Abb. 3.4 folgen die Verhältnisse für die Rebit-Rebit-Zustände als Funktion von $1/\alpha$ einem etwas anderen Verlauf als die restlichen Systeme. Dies deutet auf eine besondere Stellung dieser Zustände hin, die mit $R = 29/64$ auch einen für ihre Dimension $d = 9$ hohen Anteil an separablen Zuständen enthalten.

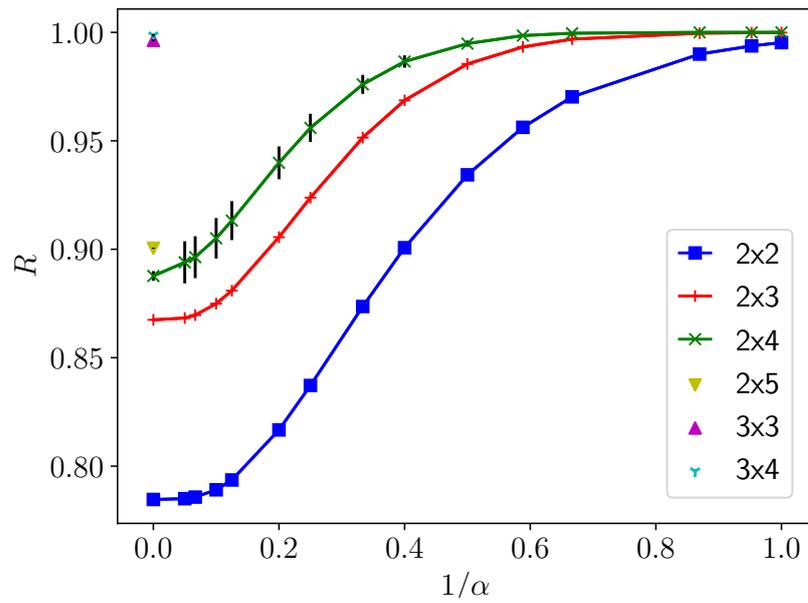


Abbildung 3.5: Anteil R der $n \times m$ -Zustände, welche die auf der Rényientropie basierende Bedingung erfüllen, an allen Quantenzuständen für die verschiedenen betrachteten Systeme. Für $\alpha \rightarrow \infty$ ist R minimal und es werden mehr Zustände korrekt als verschränkte Zustände erkannt. Nur den markierten Punkten liegen Messwerte zugrunde und abgesehen vom 2×4 -System sind die Fehler kleiner als die Breite der Linien. Für noch höherdimensionale Systeme ist nur der Wert für $\alpha \rightarrow \infty$ angegeben, da dieser optimal ist und die Darstellung durch die zusätzlichen Kurven nahe 1 nur unübersichtlicher wird.

3.4.3 Anteil der PPT-Zustände

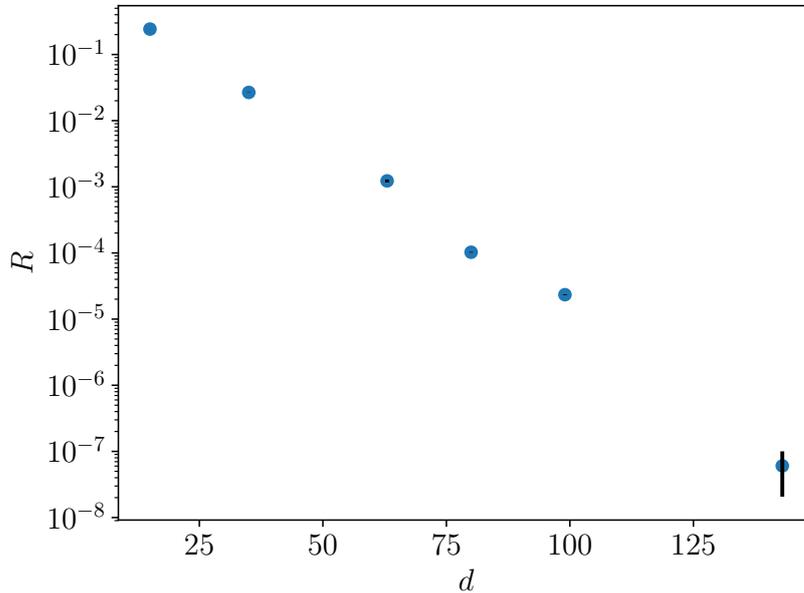


Abbildung 3.6: Anteil R der PPT-Zustände an allen Quantenzuständen für die unterschiedlichen allgemeinen Systeme der Dimension d . Die statistischen Fehler sind in schwarz dargestellt und nur für das 3×4 -System mit $d = 143$ größer als die zur Markierung verwendeten Punkte. Da die ersten beiden Werte mit $d = 15$ und $d = 35$ den Qubit-Qubit- und Qubit-Qutrit-Zuständen entsprechen, ist in diesem Fall R auch der Anteil der separablen Zustände an allen Quantenzuständen, in höheren Dimensionen ist der Anteil der separablen Zustände kleiner als der hier ermittelte Wert.

Der Anteil der PPT-Zustände an allen Quantenzuständen fällt exponentiell mit der Dimension des betrachteten Systems ab, was auch schon in [90] für separable Zustände beobachtet wurde. Da die PPT-Zustände für höhere Dimensionen, d.h. ab dem 2×4 -System mit $d = 63$, auch verschränkte Zustände enthalten, hat die Menge der separablen Zustände sogar einen noch kleineren Anteil an allen Zuständen als hier angegeben.

Im Gegensatz dazu werden die Majorisierungs- und Entropiebasiereten Bedingungen für hohe Dimensionen von einem immer größer werdenden Anteil der Zustände erfüllt. Während also in hohen Dimensionen nahezu alle gemischten Quantenzustände verschränkt sind, wird nur ein verschwindend kleiner Anteil von diesen Bedingungen als verschränkt erkannt.

3.5 ANWENDUNG BELLSCHER UNGLEICHUNGEN

Bisher wurden in diesem Kapitel verschiedene Bedingungen, die direkt mit den Dichtematrizen ρ der Quantenzustände überprüft werden können, betrachtet. Wenn experimentell überprüft werden soll, ob ein verschränkter Zustand vorliegt, ist ρ allerdings typischerweise nicht direkt verfügbar. Stattdessen kommen dann die Bellschen Ungleichungen aus Kap. 2 zum Einsatz. Für diese ist bekannt, dass es verschränkte Zustände gibt, die nur Korrelationen erzeugen, welche auch in einem lokal realistischen Modell möglich sind [85]. In diesem Abschnitt wird untersucht, welche verschränkten bipartiten Qubit-Qubit-Zustände bestimmte Bellsche Ungleichungen verletzen können. Dazu werden die CHSH-Ungleichung (2.12) und die Collins-Gisin-Ungleichung (2.14) betrachtet.

Die Messungen, die für den Übergang von der Dichtematrix zur Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeiten notwendig sind, werden hier durch $A_i = v_i \cdot \sigma$ und $B_i = w_i \cdot \sigma$ beschrieben. Dabei sind v_i, w_i Einheitsvektoren und σ der Paulivektor $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$, da nur Qubit-Qubit-Zustände untersucht werden.

3.5.1 Die CHSH-Ungleichung

Wenn die Dichtematrix des allgemeinen Zwei-Qubit-Zustands in der Darstellung (3.14) gegeben ist und man eine Matrix C_ρ mit den Koeffizienten $v_{i,j}$ ($i, j \in \{x, y, z\}$) definiert, kann die CHSH-Ungleichung (2.12) auch wie folgt geschrieben werden:

$$-2 \leq 2 \langle v_1, C_\rho (w_1 + w_2) \rangle + 2 \langle v_2, C_\rho (w_1 - w_2) \rangle \leq 2. \quad (3.38)$$

Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Vektoren $w_1 + w_2$ und $w_1 - w_2$ kann hergeleitet werden [38], dass die CHSH-Ungleichung genau dann vom Quantenzustand ρ eingehalten wird, wenn

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{1}{4} \quad (3.39)$$

gilt, wobei λ_1 und λ_2 die beiden größten Eigenwerte der Matrix $C_\rho^\dagger C_\rho$ sind. Für solche Zustände gibt es also keine Messeinstellungen, die in einer Verletzung der CHSH-Ungleichung resultieren.

Wieder bieten sich die Belldiagonalen Zustände (siehe (3.16)) für eine grafisch anschauliche Darstellung an. Für diese Zustände wird Gl. (3.39) zu

$$a_x^2 + a_y^2 \leq \frac{1}{4}, \quad a_x^2 + a_z^2 \leq \frac{1}{4}, \quad a_y^2 + a_z^2 \leq \frac{1}{4}. \quad (3.40)$$

Diese drei Ungleichungen definieren den Schnitt von drei zueinander senkrechten Zylindern, einen sogenannten Steinmetzkörper [2]. Wie in Abb. 3.7 zu sehen, enthält der Steinmetzkörper nicht nur alle

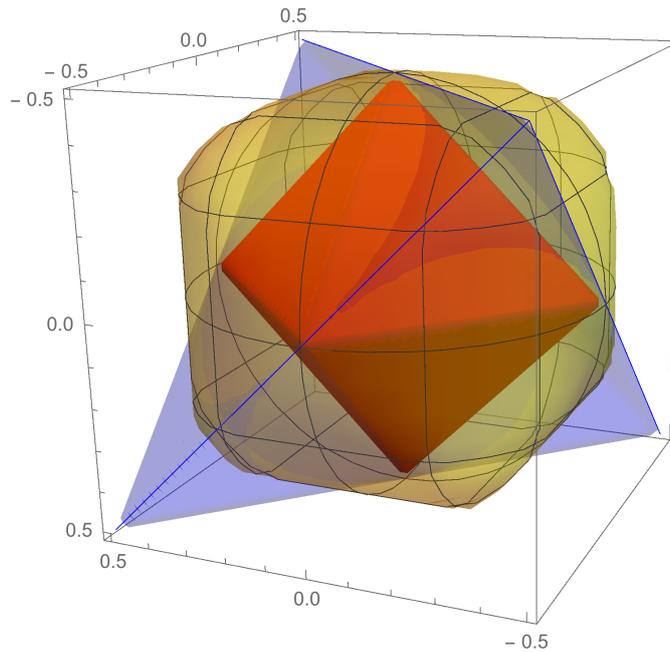


Abbildung 3.7: Darstellung des Steinmetzkörpers aus (3.40) in Kombination mit den konvexen Mengen aller separablen Zustände (innerer Oktaeder) sowie aller Quantenzustände (Tetraeder) jeweils für die Belldiagonalen Zwei-Qubit-Zustände. Bei Erfüllung der Ungleichungen (3.40) kann die CHSH-Ungleichung nicht verletzt werden. Es sind deutlich Bereiche zu erkennen, die verschränkte Zustände enthalten aber innerhalb des Steinmetzkörpers liegen. Außerdem gibt es Bereiche außerhalb des Tetraeders, also kann man aus der Erfüllung der Ungleichungen alleine nicht darauf schließen, dass ein Belldiagonaler Quantenzustand vorliegt.

separablen Zustände, sondern auch einen Anteil der verschränkten Zustände.

Mit Hilfe des Hit-and-Run-Algorithmus kann wie in den Abschnitten zuvor das Volumenverhältnis R_{CHSH} von Quantenzuständen, für die es Messeinstellungen gibt, mit denen sie die CHSH-Ungleichung verletzen können und allen Quantenzuständen bestimmt werden. Die auf diese Weise numerisch berechneten Verhältnisse sind in Tabelle 3.12 für die Zwei-Qubit-Zustände aus Abschnitt 3.2 aufgelistet.

	N	R_{CHSH}	σ_{CHSH}
Belldiagonale Zustände	$5.4 \cdot 10^9$	0.087021	0.000010
X-Zustände	$4 \cdot 10^9$	0.057276	0.000015
Rebit-Rebit-Zustände	$4 \cdot 10^9$	0.011082	0.000008
Allgemeine Zwei-Qubit-Zustände	$4 \cdot 10^9$	0.008221	0.000008

Tabelle 3.12: Numerisch berechnete Verhältnisse R_{CHSH} zwischen Quantenzuständen, die Gl. (3.39) verletzen und allen Quantenzuständen für die Zwei-Qubit-Zustände aus Abschnitt 3.2. N ist die Anzahl der generierten Zustände.

Wenn man die Ergebnisse in Tabelle 3.12 mit den in Abschnitt 3.4 erhaltenen Verhältnissen vergleicht, fällt auf, dass nur ein kleiner Teil der verschränkten Zustände durch das Testen der CHSH-Ungleichung als verschränkt erkannt werden kann. So ist zum Beispiel für Belldiagonale Zustände genau die Hälfte aller Zustände verschränkt. Damit können bei einem idealen Belltest etwa 17,4% der verschränkten Zustände die CHSH-Ungleichung verletzen. Für die anderen Arten von Zuständen ergeben sich für dieses Verhältnis Werte von 0.0955 für X-Zustände, 0.0203 für Rebit-Rebit-Zustände, und 0.0108 für Allgemeine Zwei-Qubit-Zustände. Damit können die meisten verschränkten Zwei-Qubit-Zustände selbst bei idealen Messungen die CHSH-Ungleichung nicht verletzen.

In der Praxis können Belltest aber nicht für alle möglichen Messeinstellungen durchgeführt werden. Stattdessen muss die Menge der in Frage kommenden Einstellungen begrenzt werden, was die Menge der messbar verschränkten Zustände weiter einschränkt. Damit ergibt sich die Frage, ob es eine kleine Menge von bestimmten Messungen gibt, mit denen zumindest ein großer Teil der verschränkten Zwei-Qubit-Zustände, die prinzipiell die CHSH-Ungleichung verletzen könnten, detektiert werden kann. Bei genauerer Betrachtung des Steinmetzkörpers aus Abb. 3.7 fällt auf, dass jede Tangentialebene des Körpers eine CHSH-Ungleichung für eine bestimmte Wahl von Messeinstellungen ist. Außerdem befinden sich alle Zustände, welche die CHSH-Ungleichung verletzen können, in der Nähe der Vertices des Tetraeders mit allen Belldiagonalen Quantenzuständen. Dort schneiden sich auch die drei Zylinder, die den Steinmetzkörper bilden, in einem Punkt, wodurch die Tangentialebenen dort nicht eindeutig definiert sind. Für jeden dieser 4 Schnittpunkte können drei verschiedene Tangentialebenen konstruiert werden und es erscheint plausibel, dass mit diesen Ebenen ein Großteil der Zustände, welche die CHSH-Ungleichung verletzen können, detektiert werden kann. Aus den Ebenen werden Ungleichungen ähnlich zu Gl. 3.40 konstruiert und man erhält

$$|a_i| + |a_j| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{for } i \neq j \quad \text{and} \quad i, j \in \{x, y, z\}, \quad i \neq j. \quad (3.41)$$

als Bedingung, dass keiner der 12 Belltests zu einer Verletzung von CHSH führt. Auch hierfür wurden mit dem Hit-and-Run-Algorithmus die Volumenverhältnisse R_{12m} zwischen Zuständen, die eine der Ungleichungen 3.41 verletzen und allen Zwei-Qubit-Zuständen bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tab. 3.13 aufgeführt, wobei zusätzlich berechnet wurde, welcher Anteil aller CHSH-verschränkter Zustände mit dieser Strategie aufgedeckt werden kann.

	N	R_{12m}	σ_{12m}	R_{12m}/CHSH
Belldiagonale Zustände	$5.4 \cdot 10^9$	0.075387	0.000013	0.8663
X-Zustände	$4 \cdot 10^9$	0.006104	0.000006	0.1066
Rebit-Rebit-Zustände	$4 \cdot 10^9$	0.001766	0.000004	0.1594
Allgemeine Zwei-Qubit-Zustände	$4 \cdot 10^9$	0.000044	0.000001	0.0054

Tabelle 3.13: Numerisch berechnete Verhältnisse R_{12m} zwischen Quantenzuständen, die mindestens eine der Gln. (3.41) verletzen und allen Quantenzuständen für die Zwei-Qubit-Zustände aus Abschnitt 3.2. $R_{12m}/\text{CHSH} = R_{12m}/R_{\text{CHSH}}$ gibt an, welcher Anteil aller Zustände, die die CHSH-Ungleichung bei beliebigen Messeinstellungen verletzen können, auch eine Verletzung bei einem der 12 gewählten Belltests zeigen. N ist die Anzahl der generierten Zustände.

Die 12 gewählten Ungleichungen decken für Belldiagonale Zustände noch einen guten Anteil von 86,63% der Zustände auf, die CHSH verletzen können. Für die anderen Zwei-Qubit-Systeme fällt der Nutzen der Ungleichungen allerdings schnell ab und für allgemeine Zwei-Qubit-Zustände liegt dieser Wert nur noch bei 0,54%. Das bedeutet, dass die Auswahl der Messeinstellungen gut auf den Zustand abgestimmt werden muss, da sonst keine Verletzung der CHSH-Ungleichung beobachtet werden kann.

Außerdem stellt sich insgesamt die Frage, ob es andere Ungleichungen gibt, mit denen eine bessere Eingrenzung der separablen Zustände möglich ist, sodass ein größerer Teil der verschränkten Zustände diese Ungleichung verletzt. Im nächsten Abschnitt wird deshalb die Collins-Gisin-Ungleichung [22] als möglicher Kandidat für eine solche Verbesserung untersucht. Für diese Ungleichung wurde gezeigt, dass es verschränkte Zustände gibt, die sie verletzen, nicht aber CHSH und umgekehrt [22]. Mit dem hier vorgestellten Ansatz kann getestet werden, welche der beiden Ungleichungen einen größeren Teil der verschränkten Zustände aufdeckt.

3.5.2 Collins-Gisin-Ungleichung

Mit der allgemeinen Darstellung des Zwei-Qubit-Zustands (3.14) kann die CG-Ungleichung (2.14) folgendermaßen geschrieben werden:

$$0 \leq 2 + \langle v_1 + v_2, \tau_\rho^{(A)} \rangle + \langle w_1 + w_2, \tau_\rho^{(B)} \rangle + \langle v_1, C_\rho(w_1 + w_2 + w_3) \rangle \\ + \langle v_2, C_\rho(w_1 + w_2 - w_3) \rangle + \langle v_3, C_\rho(w_1 - w_2) \rangle. \quad (3.42)$$

Zusätzlich zur Matrix C_ρ aus dem vorherigen Abschnitt enthält diese Ungleichung die 6 Parameter $\tau_\rho^{(A)} = (\tau_x^{(A)}, \tau_y^{(A)}, \tau_z^{(A)})^T$ und $\tau_\rho^{(B)} = (\tau_x^{(B)}, \tau_y^{(B)}, \tau_z^{(B)})^T$ aus der Darstellung von ρ .

Genau wie bei der CHSH-Ungleichung ist nun das Minimum der rechten Seite der Ungleichung über alle möglichen Messeinstellungen gesucht. Dieses Minimum definiert die Oberfläche einer konvexen Menge und alle Zustände in dieser Menge können die CG-Ungleichung nicht verletzen. Durch Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{C}^n \quad (3.43)$$

kann über die Einheitsvektoren v_1 , v_2 und v_3 minimiert werden, was zur Ungleichung

$$2 + \langle w_1 + w_2, \tau_\rho^{(B)} \rangle + \langle v_1, C_\rho(w_1 + w_2 + w_3) + \tau_\rho^{(A)} \rangle \\ + \langle v_2, C_\rho(w_1 + w_2 - w_3) + \tau_\rho^{(A)} \rangle + \langle v_3, C_\rho(w_1 - w_2) \rangle \geq \quad (3.44) \\ \geq 2 + \langle w_1 + w_2, \tau_\rho^{(B)} \rangle - \|C_\rho(w_1 + w_2 + w_3) + \tau_\rho^{(A)}\| \\ - \|C_\rho(w_1 + w_2 - w_3) + \tau_\rho^{(A)}\| - \|C_\rho(w_1 - w_2)\|$$

führt, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn die Skalarprodukte auf der linken Seite den kleinstmöglichen Wert annehmen.

Für Belldiagonale Zustände kann wegen $\tau_\rho^{(A)} = \mathbf{0}$ und $\tau_\rho^{(B)} = \mathbf{0}$ die Ungleichung (3.44) weiter minimiert werden, indem der Wert

$$\|C_\rho(w_1 + w_2 + w_3)\| + \|C_\rho(w_1 + w_2 - w_3)\| + \|C_\rho(w_1 - w_2)\| \quad (3.45)$$

über alle Einheitsvektoren w_1 , w_2 und w_3 maximiert wird.

Aus der Definition der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ erhält man

$$\|C_\rho(w_1 + w_2 + w_3)\| = \sqrt{\|C_\rho(w_1 + w_2)\|^2 + \|C_\rho w_3\|^2 + 2\langle C_\rho(w_1 + w_2), C_\rho w_3 \rangle}, \\ \|C_\rho(w_1 + w_2 - w_3)\| = \sqrt{\|C_\rho(w_1 + w_2)\|^2 + \|C_\rho w_3\|^2 - 2\langle C_\rho(w_1 + w_2), C_\rho w_3 \rangle}. \quad (3.46)$$

Damit wird das Maximum von

$$\|C_\rho(w_1 + w_2 + w_3)\| + \|C_\rho(w_1 + w_2 - w_3)\| \quad (3.47)$$

genau dann erreicht, wenn $C_\rho(w_1 + w_2) \perp C_\rho w_3$ ist. Wegen $w_1 + w_2 \perp w_1 - w_2$ können in diesem Fall die Einheitsvektoren durch einen Winkel $\alpha \in [0, \pi/2]$ und zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren c und c' zu

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2c \cos \alpha, \\ w_1 - w_2 &= 2c' \sin \alpha, \\ w_1 + w_2 &\perp w_3. \end{aligned} \quad (3.48)$$

parametrisiert werden. Damit reduziert sich Gl. (3.45) zu

$$2\sqrt{4\|C_\rho c\|^2 \cos^2 \alpha + \|C_\rho w_3\|^2} + 2\sin \alpha \|C_\rho c'\|, \quad (3.49)$$

und das Maximum im Bezug auf den Winkel α ist durch

$$\frac{\sqrt{(4\|C_\rho c\|^2 + \|C_\rho c'\|^2)(4\|C_\rho c\|^2 + \|C_\rho w_3\|^2)}}{\|C_\rho c\|} \quad (3.50)$$

gegeben.

Für Bell diagonale Zustände ist $C_\rho^T C_\rho = \text{diag}(a_x^2, a_y^2, a_z^2)$ und das Maximum wird erreicht, wenn $w_3 \parallel c'$ und beide Vektoren die Eigenvektoren des zweitgrößten Eigenwerts von $C_\rho^T C_\rho$ sind. Damit vereinfacht sich (3.45) zu

$$\frac{4\|C_\rho c\|^2 + \|C_\rho c'\|^2}{\|C_\rho c\|}, \quad (3.51)$$

was zu den 6 Ungleichungen

$$0 \leq 2 - \frac{4a_i^2 + a_j^2}{|a_i|}, \quad a_i^2 \geq a_j^2 \geq a_k^2 \quad (3.52)$$

mit $i, j, k \in \{x, y, z\}$ führt.

Diese Ungleichungen definieren einen konvexen Körper, der größer als der aus den CHSH-Ungleichungen erhaltene Steinmetzkörper ist und diesen vollständig enthält. Der Körper für die CG-Ungleichung ist in Abb. 3.8 dargestellt.

Für die Bestimmung des Verhältnisses R_{CG} zwischen Zuständen, die potentiell die CG-Ungleichung verletzen können und allen Bell diagonalen Zuständen wird wieder der Hit-and-Run-Algorithmus verwendet. Der dabei erhaltene Wert $R_{CG} = 0.03677 \pm 0.00001$ ist deutlich kleiner als R_{CHSH} . Damit wird deutlich, dass die CHSH-Ungleichung für Bell diagonale Zustände besser darin ist, Verschränkung zu messen, als die CG-Ungleichung. Es zeigt sich allerdings, dass dies für allgemeine Zwei-Qubit-Zustände im 15-dimensionalen Raum nicht mehr

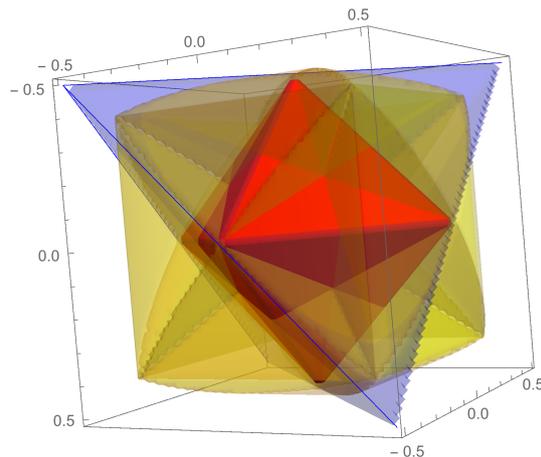


Abbildung 3.8: Darstellung des konvexen Körpers, der sich aus den Ungleichungen (3.52) ergibt in Kombination mit den konvexen Mengen aller separablen Zustände (innerer Oktaeder) sowie aller Quantenzustände (Tetradere) jeweils für die Belldiagonalen Zwei-Qubit-Zustände. Für Zustände innerhalb des Körpers kann die CG-Ungleichung nicht verletzt werden.

der Fall ist. Dies könnte daran liegen, dass die CG-Ungleichungen auch auf die Information zugreifen kann, die in $\tau_\rho^{(A)}$ und $\tau_\rho^{(B)}$ enthalten ist. Die CHSH-Ungleichung nutzt diese Information nicht und für Belldiagonale Zustände sind diese beiden Vektoren 0.

Im Fall der allgemeinen Zwei-Qubit-Zustände können die zuvor berechneten Vereinfachungen nicht angewendet werden. Deshalb wird für jeden durch den Hit-and-Run-Algorithmus generierten Quantenzustand für zufällige Messungen getestet, ob damit eine Verletzung der CG-Ungleichung möglich ist. Da dies sehr zeitaufwändig ist, wurden nur 10^6 Zustände pro Durchlauf erzeugt. In Abb. 3.9 sind die Anteile der Zwei-Qubit-Quantenzustände, die die CG-Ungleichung verletzen R_{CG} , die CHSH-Ungleichung verletzen R_{CHSH} und mindestens eine der beiden Ungleichungen verletzen, für unterschiedlich viele zufällige Messeinstellungen m aufgetragen. Die einzelnen Punkte stehen dabei für unterschiedliche Durchläufe mit jeweils 10^6 getesteten Zuständen.

Wie erwartet liefert die Kombination aus beiden Ungleichungen den höchsten Wert, da es Zustände gibt, die eine der beiden Ungleichungen verletzen aber nicht die andere [22]. Im Gegensatz zur Situation bei den Belldiagonalen Zuständen kann hier die CG-Ungleichung für einen größeren Anteil aller Zustände Verschränkung nachweisen.

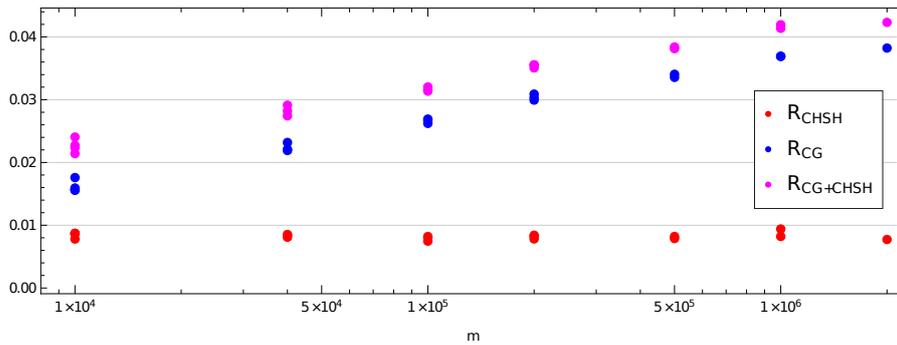


Abbildung 3.9: Anteil der Zwei-Qubit-Quantenzustände, welche die CG-Ungleichung (R_{CG}), die CHSH-Ungleichung (R_{CHSH}) oder mindestens eine der beiden Ungleichungen ($R_{CG+CHSH}$) verletzen können. Für jeden Punkt wurden m zufällige Messeinstellungen ausgewählt und 10^6 Zustände auf Verletzungen von Ungleichungen getestet.

3.6 ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel wurde eine Methode zur effizienten Erzeugung zufällig verteilter Quantenzustände entwickelt. Diese Methode basiert auf einem Hit-and-Run-Algorithmus für die Auffindung zufällig verteilter Punkte in Teilmengen des \mathbb{R}^n sowie auf der Nutzung von Newtonidentitäten und der Vorzeichenregel von Descartes, um zu entscheiden, ob ein neuer Punkt einem Quantenzustand entspricht. Aus den so erhaltenen Zuständen können verschiedene Volumenverhältnisse berechnet werden, mit denen angegeben wird, welcher Anteil aller Zustände eine bestimmte Bedingung erfüllt. Das Ziel ist hierbei vor allem die Bestimmung des Anteils der separablen, bzw. verschränkten Zustände an allen Quantenzuständen. Da diese Klassifizierung jedoch ein mathematisch schwer umzusetzendes Problem ist, werden verschiedene aus der Quanteninformatik bekannte Bedingungen, die von allen separablen Zuständen erfüllt werden, für einige Klassen von bipartiten Zuständen untersucht.

Dabei stellt sich heraus, dass der Anteil der separablen Zustände mindestens exponentiell mit der Dimension des Quantenzustands abfällt und die PPT-Bedingung, welche für 2×2 - und 2×3 -Systeme die separablen Zustände exakt beschreibt, als einzige der betrachteten Bedingungen diesem Verhalten folgt. Für Qubit-Qubit-Systeme konnten dabei die analytisch bekannten Werte der Volumenverhältnisse $R = 0,5$ für Bell diagonale Zustände, $R = 0,4$ für X-Zustände [52], $R = \frac{29}{64}$ für Rebit-Rebit-Zustände [48] und $R = \frac{8}{33}$ [77] für allgemeine Zustände reproduziert werden. Im Fall der 2×3 - und 2×4 -Zustände konnten mit $R = 0.026969 \pm 0.000042$ bzw. $R = 0.001294 \pm 0.000004$ vorherige numerische Abschätzungen verfeinert werden [52]. Neu sind die hier gefundenen Volumenanteile der PPT-Zustände von $R = 0.0001025 \pm 0.0000012$ für Qutrit-Qutrit-Zustände und $R = 6.0 \pm 4.0 \cdot 10^{-8}$ für

3×4 -Zustände, wobei der gewählte Ansatz insbesondere für das 143-dimensionale 3×4 -System langsam an seine Grenzen stößt.

Außerdem waren bisher die in Abschnitt 3.4 gegebenen Volumenanteile der Zustände für die Reduktions-, Majorisierungs-, und entropiebasierten Bedingungen nicht bekannt. Für diese zeigt sich, dass sie insbesondere in den höherdimensionalen Systemen nur von einem kleinen Teil aller verschränkten Zustände verletzt werden. Bei den Bedingungen, die auf der Rényientropie basieren, kann außerdem festgestellt werden, dass ein höherer Parameter α die separablen Zustände besser eingrenzt.

Für Qubit-Qubit-Zustände kann angegeben werden, welcher Anteil der Zustände die CHSH-Ungleichung bei jeweils optimalem Messaufbau verletzen kann. Im 15-dimensionalen allgemeinen Fall ist dies nur für etwa 1% der verschränkten Zustände der Fall. Die CG-Ungleichung kann dagegen von einem deutlich größeren Anteil an Zuständen verletzt werden, bleibt aber auch im einstelligen Prozentbereich. Unklar bleibt, ob Ungleichungen mit mehr Messeinstellungen und -ergebnissen, die mit den Methoden aus Kap. 2 erstellt werden können, bessere Werte liefern. Denn für den Übergang vom Raum der Zustände in den Raum der bedingten Wahrscheinlichkeiten, für den die Bellschen Ungleichungen gelten, sind konkrete Messanweisungen notwendig. Für die CG-Ungleichung konnten diese für den Spezialfall der Belldiagonalen Zustände analytisch verallgemeinert werden, für höherdimensionale Systeme oder weitere Ungleichungen bleibt dieses Problem jedoch offen.

In Kapitel 2 wurden für bi- und tripartite Systeme mit zwei Messeinstellungen pro Partei die Detektorparameter bestimmt, die für die Verletzung einer Bellschen Ungleichung nötig sind. Dabei hat sich gezeigt, dass die Hierarchie semidefiniter Programme [54] in diesem Fall bereits in niedrigen Stufen konvergiert und damit sehr gut für die Eingrenzung der Quantenkorrelationen geeignet ist.

Die Ergebnisse decken sich mit [46] und erweitern diese um die Betrachtung von spontanen Auslösungen der Detektoren.

Dabei hat sich zwar gezeigt, dass Ungleichungen, bei denen die von den Fehlern verursachten zusätzlichen Messergebnisse mit einem der ursprünglichen Messergebnisse zusammengefasst werden, optimal sind, dies beruht jedoch nur auf Beobachtungen und ein analytischer Beweis oder ein Gegenbeispiel stehen noch aus. Aber auch mit dieser Annahme ist für eine Erweiterung auf vier Parteien eine umfassende Suche nach Bellschen Ungleichungen nötig, da diese auch für den einfachsten Fall von zwei Messeinstellungen und -ergebnissen nicht vollständig charakterisiert sind.

In Kapitel 3 werden die Peres-Horodecki-Bedingung [37, 59], die Reduktionsbedingung [16, 34], die Majorisierungsbedingung [32] und Bedingungen, die auf der Rényientropie [67] basieren, für eine Vielzahl von Quantensystemen quantitativ charakterisiert.

Dabei hat sich gezeigt, dass für zufällige gemischte Zustände nur die Peres-Horodecki-Bedingung ein guter Indikator für Verschränkung ist. Die anderen Bedingungen werden in hochdimensionalen Systemen von nahezu allen Zuständen erfüllt, obwohl der Anteil der separablen Zustände exponentiell abfällt und gegen 0 tendiert [21]. Eine Ausnahme bildet die Reduktionsbedingung, für die offen bleibt, ob der Anteil der Zustände, die diese Bedingung erfüllen, für hohe Dimensionen gegen einen bestimmten Wert strebt.

Für die auf der Rényientropie basierenden Bedingungen konnte der Zusammenhang gefunden werden, dass sie mit dem Parameter α geordnet sind, wobei die Bedingung mit $S_\alpha(\rho)$ alle Bedingungen mit kleinerem α einschließt.

Neu ist außerdem die Betrachtung von 3×3 - und 3×4 -Systemen, die durch die effizientere Erzeugung von zufälligen Quantenzuständen ermöglicht wird. Für das 3×4 -System kommt die verwendete Methode jedoch langsam an ihre Grenze, da die Erzeugung neuer Zustände mit steigender Dimension immer länger dauert und für eine gleichmäßige Verteilung auch immer mehr Zustände gefunden werden müssen.

Bei der Untersuchung, welcher Anteil der Zwei-Qubit-Systeme die CHSH- und CG-Ungleichungen verletzen kann, hat sich gezeigt, dass dies nur für einen kleinen Teil der verschränkten gemischten Quantenzustände möglich ist. Für allgemeine Qubit-Qubit-Zustände konnte dabei die CG-Ungleichung, die drei Messeinstellungen vorsieht, von deutlich mehr Zuständen verletzt werden als die CHSH-Ungleichung. Daraus ergibt sich die spannende Frage, ob bei der Verwendung von Bellschen Ungleichungen mit noch mehr möglichen Messeinstellungen weitere Zustände diese Ungleichungen verletzen können und wo die Grenze liegt, wenn alle theoretisch möglichen Ungleichungen betrachtet würden. Außerdem könnten verallgemeinerte Messungen (POVMs) betrachtet werden, was zusätzliche Freiheiten beim immer nötigen Übergang vom Raum der Quantenzustände in den Raum der bedingten Wahrscheinlichkeiten bietet. Dieser Übergang ist ein essentieller Punkt aller Untersuchungen von verschränkten Zuständen und ihrer Möglichkeit, eine Bellsche Ungleichung zu verletzen.

LITERATUR

- [1] Antonio Acin, Nicolas Gisin und Lluís Masanes. „From Bell’s theorem to secure quantum key distribution“. In: *Physical review letters* 97.12 (2006), S. 120405.
- [2] Carolina Moura Alves. „Detection of quantum entanglement in physical systems“. Diss. University of Oxford, 2005.
- [3] Rotem Arnon-Friedman, Renato Renner und Thomas Vidick. „Simple and tight device-independent security proofs“. In: *SIAM Journal on Computing* 48.1 (2019), S. 181–225.
- [4] William Arveson. „Maximal vectors in Hilbert space and quantum entanglement“. In: *Journal of Functional Analysis* 256.5 (2009), S. 1476–1510.
- [5] Alain Aspect, Philippe Grangier und Gérard Roger. „Experimental tests of realistic local theories via Bell’s theorem“. In: *Physical review letters* 47.7 (1981), S. 460.
- [6] John S Bell. „On the einstein podolsky rosen paradox“. In: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), S. 195.
- [7] Ingemar Bengtsson und Karol Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge university press, 2017.
- [8] Reinhold A Bertlmann und Philipp Krammer. „Bloch vectors for qudits“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41.23 (2008), S. 235303.
- [9] George EP Box und Mervin E Muller. „A note on the generation of random normal deviates“. In: *The annals of mathematical statistics* 29.2 (1958), S. 610–611.
- [10] Nicolas Brunner, Nicolas Gisin, Valerio Scarani und Christoph Simon. „Detection loophole in asymmetric Bell experiments“. In: *Physical review letters* 98.22 (2007), S. 220403.
- [11] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani und Stephanie Wehner. „Bell nonlocality“. In: *Reviews of Modern Physics* 86.2 (2014), S. 419.
- [12] Dagmar Bruss und Gerd Leuchs. *Quantum information: from foundations to quantum technology applications*. John Wiley & Sons, 2019.
- [13] Mark S Byrd und Navin Khaneja. „Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation“. In: *Physical Review A* 68.6 (2003), S. 062322.

- [14] Thomas R Cameron und Panayiotis J Psarrakos. „ON DESCAR-
TES’RULE OF SIGNS FOR MATRIX POLYNOMIALS“. In: *Ope-
rators and matrices* 13.3 (2019), S. 643–652.
- [15] Carlton M Caves, Christopher A Fuchs und Pranaw Rungta.
„Entanglement of formation of an arbitrary state of two rebits“.
In: *Foundations of Physics Letters* 14 (2001), S. 199–212.
- [16] Nicolas J Cerf, Chris Adami und Robert M Gingrich. „Reducti-
on criterion for separability“. In: *Physical Review A* 60.2 (1999),
S. 898.
- [17] Kai Chen und Ling-An Wu. „A matrix realignment method for
recognizing entanglement“. In: *Quantum Inf. Comput.* 3.3 (2003),
S. 193–202. DOI: [10.26421/QIC3.3-1](https://doi.org/10.26421/QIC3.3-1). URL: <https://doi.org/10.26421/QIC3.3-1>.
- [18] Boris S Cirel’son. „Quantum generalizations of Bell’s inequality“.
In: *Letters in Mathematical Physics* 4 (1980), S. 93–100.
- [19] John F Clauser und Michael A Horne. „Experimental conse-
quences of objective local theories“. In: *Physical review D* 10.2
(1974), S. 526.
- [20] John F Clauser, Michael A Horne, Abner Shimony und Richard
A Holt. „Proposed experiment to test local hidden-variable theo-
ries“. In: *Physical review letters* 23.15 (1969), S. 880.
- [21] Rob Clifton und Hans Halvorson. „Bipartite-mixed-states of
infinite-dimensional systems are generically nonseparable“. In:
Physical Review A 61.1 (1999), S. 012108.
- [22] Daniel Collins und Nicolas Gisin. „A relevant two qubit Bell
inequality inequivalent to the CHSH inequality“. In: *Journal of
Physics A: Mathematical and General* 37.5 (2004), S. 1775.
- [23] Philippe H Eberhard. „Background level and counter efficiencies
required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experi-
ment“. In: *Physical Review A* 47.2 (1993), R747.
- [24] Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen. „Can quantum-
mechanical description of physical reality be considered com-
plete?“ In: *Physical review* 47.10 (1935), S. 777.
- [25] Artur K Ekert. „Quantum cryptography based on Bell’s theo-
rem“. In: *Physical review letters* 67.6 (1991), S. 661.
- [26] Tobias Fritz, Ana Belén Sainz, Remigiusz Augusiak, J Bohr Brask,
Rafael Chaves, Anthony Leverrier und Antonio Acín. „Local or-
thogonality as a multipartite principle for quantum correlations“.
In: *Nature communications* 4.1 (2013), S. 1–7.
- [27] Omar Gamel. „Entangled Bloch spheres: Bloch matrix and two-
qubit state space“. In: *Physical Review A* 93.6 (2016), S. 062320.

- [28] Matthias Geihs, Oleg Nikiforov, Denise Demirel, Alexander Sauer, Denis Butin, Felix Günther, Gernot Alber, Thomas Walther und Johannes Buchmann. „The status of quantum-key-distribution-based long-term secure internet communication“. In: *IEEE Transactions on Sustainable Computing* 6.1 (2019), S. 19–29.
- [29] Marissa Giustina, Marijn AM Versteegh, Sören Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, Johannes Kofler, Jan-Åke Larsson, Carlos Abellán u. a. „Significant-loophole-free test of Bell’s theorem with entangled photons“. In: *Physical review letters* 115.25 (2015), S. 250401.
- [30] Radoslav Harman und Vladimír Lacko. „On decompositional algorithms for uniform sampling from n-spheres and n-balls“. In: *Journal of Multivariate Analysis* 101.10 (2010), S. 2297–2304.
- [31] Bas Hensen, Hannes Bernien, Anaïs E Dréau, Andreas Reiserer, Norbert Kalb, Machiel S Blok, Just Ruitenberg, Raymond FL Vermeulen, Raymond N Schouten, Carlos Abellán u. a. „Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres“. In: *Nature* 526.7575 (2015), S. 682–686.
- [32] Tohya Hiroshima. „Majorization criterion for distillability of a bipartite quantum state“. In: *Physical review letters* 91.5 (2003), S. 057902.
- [33] Roger A Horn und Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [34] Michał Horodecki und Paweł Horodecki. „Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols“. In: *Physical Review A* 59.6 (1999), S. 4206.
- [35] Michał Horodecki, Paweł Horodecki und Ryszard Horodecki. „Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature?“ In: *Physical Review Letters* 80.24 (1998), S. 5239.
- [36] Michał Horodecki, Paweł Horodecki und Ryszard Horodecki. „Separability of n-particle mixed states: necessary and sufficient conditions in terms of linear maps“. In: *Physics Letters A* 283.1-2 (2001), S. 1–7.
- [37] Paweł Horodecki. „Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition“. In: *Physics Letters A* 232.5 (1997), S. 333–339.
- [38] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki und Michal Horodecki. „Violating Bell inequality by mixed spin-12 states: necessary and sufficient condition“. In: *Physics Letters A* 200.5 (1995), S. 340–344.

- [39] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki und Michał Horodecki. „Quantum α -entropy inequalities: independent condition for local realism?“ In: *Physics Letters A* 210.6 (1996), S. 377–381.
- [40] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki und Karol Horodecki. „Quantum entanglement“. In: *Reviews of modern physics* 81.2 (2009), S. 865.
- [41] Rajibul Islam, Ruichao Ma, Philipp M Preiss, M Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli und Markus Greiner. „Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system“. In: *Nature* 528.7580 (2015), S. 77–83.
- [42] Lech Jakóbczyk und Marcin Siennicki. „Geometry of Bloch vectors in two-qubit system“. In: *Physics Letters A* 286.6 (2001), S. 383–390.
- [43] Ravi Kannan, László Lovász und Miklós Simonovits. „Random walks and an $O^*(n^5)$ volume algorithm for convex bodies“. In: *Random Structures & Algorithms* 11.1 (1997), S. 1–50.
- [44] Gen Kimura. „The Bloch vector for N-level systems“. In: *Physics Letters A* 314.5-6 (2003), S. 339–349.
- [45] S Kryszewski und M Zachciał. „Positivity of the $N \times N$ density matrix expressed in terms of polarization operators“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39.20 (2006), S. 5921.
- [46] Jan-Åke Larsson und Jason Semitecolos. „Strict detector-efficiency bounds for n-site Clauser-Horne inequalities“. In: *Physical Review A* 63.2 (2001), S. 022117.
- [47] Jon Magne Leinaas, Jan Myrheim und Eirik Ovrum. „Geometrical aspects of entanglement“. In: *Physical Review A* 74.1 (2006), S. 012313.
- [48] Attila Lovas und Attila Andai. „Invariance of separability probability over reduced states in 4×4 bipartite systems“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50.29 (2017), S. 295303.
- [49] László Lovász und Santosh Vempala. „Hit-and-run from a corner“. In: *Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing*. 2004, S. 310–314.
- [50] László Lovász und Santosh Vempala. „Simulated annealing in convex bodies and an $O^*(n^4)$ volume algorithm“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 72.2 (2006), S. 392–417.
- [51] Madan Lal Mehta. *Matrix Theory*. Hindustan Publishing, Delhi, 1989.
- [52] Simon Milz und Walter T Strunz. „Volumes of conditioned bipartite state spaces“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48.3 (2014), S. 035306.

- [53] Mervin E Muller. „A note on a method for generating points uniformly on n-dimensional spheres“. In: *Communications of the ACM* 2.4 (1959), S. 19–20.
- [54] Miguel Navascués, Stefano Pironio und Antonio Acín. „A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations“. In: *New Journal of Physics* 10.7 (2008), S. 073013.
- [55] Michael A Nielsen und Isaac L Chuang. „Quantum computation and quantum information“. In: *Phys. Today* 54.2 (2001), S. 60.
- [56] Michael A Nielsen und Julia Kempe. „Separable states are more disordered globally than locally“. In: *Physical Review Letters* 86.22 (2001), S. 5184.
- [57] Marcin Pawłowski, Tomasz Paterek, Dagomir Kaszlikowski, Valerio Scarani, Andreas Winter und Marek Żukowski. „Information causality as a physical principle“. In: *Nature* 461.7267 (2009), S. 1101–1104.
- [58] Ian C Percival. „Quantum transfer functions, weak nonlocality and relativity“. In: *Physics Letters A* 244.6 (1998), S. 495–501.
- [59] Asher Peres. „Separability criterion for density matrices“. In: *Physical Review Letters* 77.8 (1996), S. 1413.
- [60] Asher Peres. *Quantum theory: concepts and methods*. Bd. 72. Springer, 1997.
- [61] Stefano Pironio. „Lifting bell inequalities“. In: *Journal of mathematical physics* 46.6 (2005), S. 062112.
- [62] Itamar Pitowsky. „Correlation polytopes: their geometry and complexity“. In: *Mathematical Programming* 50.1 (1991), S. 395–414.
- [63] Itamar Pitowsky und Karl Svozil. „Optimal tests of quantum nonlocality“. In: *Physical Review A* 64.1 (2001), S. 014102.
- [64] ARP Rau. „Algebraic characterization of X-states in quantum information“. In: *Journal of physics a: Mathematical and theoretical* 42.41 (2009), S. 412002.
- [65] W Rudin. „Functional analysis mcgraw-hill inc“. In: *London, New York* (1991).
- [66] Oliver Rudolph. „A separability criterion for density operators“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 33.21 (2000), S. 3951.
- [67] Alfréd Rényi. „On measures of information and entropy“. In: *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability* 1960 (1961), S. 547–561.
- [68] Alexander Sauer. „Quantenkorrelationen für seitenkanalresistente Quantenkryptographie“. Master-Thesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2016.

- [69] Alexander Sauer und Gernot Alber. „Quantum Bounds on Detector Efficiencies for Violating Bell Inequalities Using Semidefinite Programming“. In: *Cryptography* 4.1 (2020), S. 2.
- [70] Alexander Sauer und Jozsef Z Bernád. „Quantitative characterization of several entanglement detection criteria“. In: *Physical Review A* 106.3 (2022), S. 032423.
- [71] Alexander Sauer, Jozsef Z Bernád, Hector J Moreno und Gernot Alber. „Entanglement in bipartite quantum systems: Euclidean volume ratios and detectability by Bell inequalities“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 54.49 (2021), S. 495302.
- [72] Valerio Scarani und Nicolas Gisin. „Quantum key distribution between N partners: Optimal eavesdropping and Bell’s inequalities“. In: *Physical Review A* 65.1 (2001), S. 012311.
- [73] Christian Schmid, Nikolai Kiesel, Witlef Wieczorek, Harald Weinfurter, Florian Mintert und Andreas Buchleitner. „Experimental direct observation of mixed state entanglement“. In: *Physical Review Letters* 101.26 (2008), S. 260505.
- [74] Jiangwei Shang, Yi-Lin Seah, Hui Khoon Ng, David John Nott und Berthold-Georg Englert. „Monte Carlo sampling from the quantum state space. I“. In: *New Journal of Physics* 17.4 (2015), S. 043017.
- [75] Miklós Simonovits. „How to compute the volume in high dimension?“ In: *Mathematical programming* 97 (2003), S. 337–374.
- [76] Paul B Slater. „Dyson indices and Hilbert–Schmidt separability functions and probabilities“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40.47 (2007), S. 14279.
- [77] Paul B Slater und Charles F Dunkl. „Moment-based evidence for simple rational-valued Hilbert–Schmidt generic 2×2 separability probabilities“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.9 (2012), S. 095305.
- [78] Cezary Śliwa. „Symmetries of the Bell correlation inequalities“. In: *Physics Letters A* 317.3-4 (2003), S. 165–168.
- [79] Robert L Smith. „Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions“. In: *Operations Research* 32.6 (1984), S. 1296–1308.
- [80] Jos F Sturm. „Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones“. In: *Optimization methods and software* 11.1-4 (1999), S. 625–653.
- [81] Barbara M Terhal. „Detecting quantum entanglement“. In: *Theoretical Computer Science* 287.1 (2002), S. 313–335.
- [82] Karl Gerd H Vollbrecht und Michael M Wolf. „Conditional entropies and their relation to entanglement criteria“. In: *Journal of Mathematical Physics* 43.9 (2002), S. 4299–4306.

- [83] Alexandra Weber, Oleg Nikiforov, Alexander Sauer, Johannes Schickel, Gernot Alber, Heiko Mantel und Thomas Walther. „Cache-Side-Channel Quantification and Mitigation for Quantum Cryptography“. In: *European Symposium on Research in Computer Security*. Springer. 2021, S. 235–256.
- [84] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter und Anton Zeilinger. „Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions“. In: *Physical Review Letters* 81.23 (1998), S. 5039.
- [85] Reinhard F Werner. „Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model“. In: *Physical Review A* 40.8 (1989), S. 4277.
- [86] Eugene P Wigner. „On hidden variables and quantum mechanical probabilities“. In: *American Journal of Physics* 38.8 (1970), S. 1005–1009.
- [87] J Wilms, Y Disser, G Alber und IC Percival. „Local realism, detection efficiencies, and probability polytopes“. In: *Physical Review A* 78.3 (2008), S. 032116.
- [88] Mario Ziman und Vladimír Bužek. „Concurrence versus purity: Influence of local channels on Bell states of two qubits“. In: *Physical Review A* 72.5 (2005), S. 052325.
- [89] Arthur Zimek, Erich Schubert und Hans-Peter Kriegel. „A survey on unsupervised outlier detection in high-dimensional numerical data“. In: *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal* 5.5 (2012), S. 363–387.
- [90] Karol Życzkowski, Paweł Horodecki, Anna Sanpera und Maciej Lewenstein. „Volume of the set of separable states“. In: *Physical Review A* 58.2 (1998), S. 883.

VERÖFFENTLICHUNGEN

Während meiner Zeit als Doktorand an der TU Darmstadt habe ich folgende Publikationen erstellt oder an ihrer Erstellung mitgewirkt.

- Geihs, M., Nikiforov, O., Demirel, D., Sauer, A., Butin, D., Günther, F., Alber, G., Walther, T., & Buchmann, J., *The status of quantum-key-distribution-based long-term secure internet communication*, IEEE Transactions on Sustainable Computing **6**(1), 19–29. doi:[10.1109/TSUSC.2019.2913948](https://doi.org/10.1109/TSUSC.2019.2913948) (2019) [28]
- Sauer, A. & Alber, G., *Quantum Bounds on Detector Efficiencies for Violating Bell Inequalities Using Semidefinite Programming*, Cryptography **4**(1), 2. doi:[10.3390/cryptography4010002](https://doi.org/10.3390/cryptography4010002) (2020) [69]
- Weber, A., Nikiforov, O., Sauer, A., Schickel, J., Alber, G., Mantel, H. & Walther, T., *Cache-Side-Channel Quantification and Mitigation for Quantum Cryptography*, European Symposium on Research in Computer Security, 235–256. (2021) [83]
- Sauer, A., Bernád, J.Z., Moreno, H.J. & Alber, G., *Entanglement in bipartite quantum systems: Euclidean volume ratios and detectability by Bell inequalities*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **54**, 495302. doi:[10.1088/1751-8121/ac3469](https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac3469) (2021) [71]
- Sauer, A. & Bernád, Z., *Quantitative characterization of several entanglement detection criteria*, Physical Review A **106**, 032423. doi:[10.1103/PhysRevA.106.032423](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.032423) (2022) [70]

Die folgende Liste enthält Abschlussarbeiten, die ich während der Zeit als Doktorand aktiv mitbetreut habe. Abschlussarbeiten, welche ich ausschließlich als Zweitgutachter bewertet habe, sind nicht aufgeführt.

- Buhr, F. H., *Ermittlung von Zuständen und Detektorparametern, die eine schlupflochfreie Verletzung einer Bellschen Ungleichung für drei Teilchen zulassen*, Bachelorarbeit (TU Darmstadt, 2017)
- Nauth, J., *Charakterisierung von Bellschen Ungleichungen bei nicht-perfekter Detektion*, Bachelorarbeit (TU Darmstadt, 2017)
- Deller, Y., *Zweidimensionale Surface-Kodes und ihre Anwendungen*, Bachelorarbeit (TU Darmstadt, 2017)

- Zucker, R., *Erstellung eines Python-Interfaces für die Erforschung von Polytopen in der Quanteninformati­onstheorie*, Bachelorarbeit (TU Darmstadt, 2019)
- Gollerthan, T., *Vergleich der Performance des D-Wave 2000Q Annealers mit der eines klassischen Computers beim Lösen des Vier-Farben-Problems*, Bachelorarbeit (TU Darmstadt, 2020)
- Seip, D., *Volume ratios in the detection of entanglement of X states in bipartite quantum systems*, Bachelorarbeit (TU Darmstadt, 2022)

WISSENSCHAFTLICHER WERDEGANG

PERSÖNLICHE DATEN

Nicht in der Onlinefassung enthalten

ANSTELLUNGEN

- | | |
|-----------|---|
| 2023- | Wissenschaftlicher Mitarbeiter
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
Institut für Quantentechnologien, Ulm |
| 2016-2022 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter mit dem Ziel der Promotion
Technische Universität Darmstadt
Institut für Angewandte Physik (unter Anleitung von
Prof. Dr. Gernot Alber) |

STUDIUM

- | | |
|-----------|---|
| 2014-2016 | M.Sc. Physik
Masterarbeit an der Technischen Universität Darmstadt:
<i>"Quantenkorrelationen für seitenkanalresistente Quantenkryptographie"</i> |
| 2010-2014 | B.Sc. Physik
Bachelorarbeit an der Technischen Universität Darmstadt:
<i>"Molekulardynamische Simulationen einer Ethylenglykol-Wasser
Mischung in Confinements"</i> |
| 2009-2010 | Zivildienst im Klinikum Fulda, Bereich Bestrahlungsplanung |

SCHULBILDUNG

- | | |
|-----------|---|
| 2000-2009 | Freiherr-vom-Stein-Schule
Gymnasium, Fulda |
| 1996-2000 | Bonifatiuschule
Grundschule, Dipperz |

DEKLARATIONEN

Für die Erstellung dieser Dissertation und der darin enthaltenen Ergebnisse wurden folgende Programme und Hilfsmittel verwendet.

- Für analytische Umformungen und einige Grafiken in Kapitel 3 wurde Wolfram Mathematica 12 verwendet. Die Lizenzen wurden durch den Fachbereich Physik der Technischen Universität Darmstadt zur Verfügung gestellt.
- Die numerischen Berechnungen in Kapitel 2 wurden in MATLAB durchgeführt. Hierbei wurde insbesondere die Toolbox SeDuMi [80] zum Lösen der dort auftretenden semidefiniten Optimierungsprobleme genutzt. Die Lizenzen wurden durch die AG Alber am Fachbereich Physik der Technischen Universität Darmstadt zur Verfügung gestellt.
- Für die numerischen Simulationen in Kapitel 3 wurde Julia 1.5 (siehe julialang.org) verwendet.
- Die meisten Grafiken wurden mit Hilfe von Inkscape (siehe inkscape.org) oder der Pythonbibliothek Matplotlib (siehe matplotlib.org) erstellt.

Bei der Erstellung dieses Dokuments wurde die typografische Vorlage classicthesis von André Miede und Ivo Pletikosić verwendet. classicthesis ist unter <https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/> für L^AT_EX verfügbar.

Diese Arbeit wurde finanziell unterstützt durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) - SFB 1119 - 236615297 im Projekt P4.



ERKLÄRUNG LAUT PROMOTIONSORDNUNG

§8 Abs. 1 lit. c PromO

Ich versichere hiermit, dass die elektronische Version meiner Dissertation (mit Ausnahme der persönlichen Daten auf Seite 71)¹ mit der schriftlichen Version übereinstimmt.

§8 Abs. 1 lit. d PromO

Ich versichere hiermit, dass zu einem vorherigen Zeitpunkt noch keine Promotion versucht wurde. In diesem Fall sind nähere Angaben über Zeitpunkt, Hochschule, Dissertationsthema und Ergebnis dieses Versuchs mitzuteilen.

§9 Abs. 1 PromO

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen verfasst wurde.

§9 Abs. 2 PromO

Die Arbeit hat bisher noch nicht zu Prüfungszwecken gedient.

§19 Abs. 1 PromO

Ich versichere hiermit, dass die elektronische Version meiner Dissertation (mit Ausnahme der persönlichen Daten auf Seite 71)¹ mit der zur Veröffentlichung freigegebenen Fassung identisch ist.

Darmstadt, den _____

Alexander Sauer

¹ Aus Datenschutzgründen sind die persönlichen Daten auf Seite 71 nicht in der elektronisch veröffentlichten Version enthalten.