



Berechnung der k_f -Werte geschichteter Aquifere aus geologischem Profil und Transmissivität

Randolf Rausch¹ · Werner Geiger²

Eingegangen: 13. Dezember 2021 / Überarbeitet: 3. Februar 2022 / Angenommen: 3. Februar 2022 / Online publiziert: 12. April 2022
© Der/die Autor(en) 2022

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein einfaches Verfahren zur Abschätzung der k_f -Werte (Durchlässigkeitsbeiwerte) geschichteter Grundwasserleiter aus geologischem Profil und Transmissivität von Grundwassermessstellen vorgestellt. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Mächtigkeiten der einzelnen Schichten sowie die Transmissivitäten, bestimmt aus Pumpversuchen, bekannt sind und die Anzahl der Pumpversuche größer oder gleich der Anzahl der Schichten ist. Die Berechnung der k_f -Werte erfolgt durch die numerische Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems, das mit Excel berechnet werden kann.

Schlüsselwörter Durchlässigkeitsbeiwert · Pumpversuchsauswertung · Least Squares · Excel

Calculation of the K-values of layered aquifers from geologic profiles and transmissivities

Abstract

In this paper, a simple method for estimating the K-values (hydraulic conductivities) of layered aquifers from the geological profile and transmissivity of groundwater monitoring wells is presented. It is assumed that the thicknesses of the individual layers and the transmissivities from pumping tests are known and that the number of pumping tests is greater than or equal to the number of layers. The K-values are calculated from the numerical solution of an over-determined system of equations, which can be solved using Excel.

Keywords Hydraulic conductivity · Pumping test evaluation · Least squares · Excel

Einleitung

Bei der hydrogeologischen Erkundung geschichteter Aquifere ist es in der Praxis aus finanziellen und zeitlichen Gründen oft nicht möglich, für die einzelnen Schichten eine gesonderte Bestimmung der hydraulischen Durchlässigkeitsbeiwerte (k_f -Werte) durchzuführen. Stattdessen werden die Grundwassermessstellen über die gesamte Aquifermächtigkeit verfiltert und aus Pumpversuchen die Transmissivität des Aquifers bestimmt und daraus ein mittlerer k_f -Wert des Aquifers berechnet.

Nachfolgend wird ein einfaches Verfahren beschrieben, mit dem die k_f -Werte der einzelnen Schichten bestimmt werden können. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Mächtigkeiten der einzelnen Schichten sowie die Transmissivitäten aus den Pumpversuchen bekannt sind und die Anzahl der Pumpversuche größer oder gleich der Anzahl der Schichten ist.

✉ Randolph Rausch
rausch@geo.tu-darmstadt.de

Werner Geiger
wernergg@t-online.de

¹ Institut für Angewandte Geowissenschaften, Fachbereich Hydrogeologie, Technische Universität Darmstadt, Schnittspahnstr. 9, 64297 Darmstadt, Deutschland

² Friederica-Kocher-Str. 1, 70825 Korntal-Münchingen, Deutschland

Theoretische Grundlagen

Die Transmissivität T eines Aquifers berechnet sich aus dem k_f -Wert und der Aquifermächtigkeit M^1 (Kinzelbach und Rausch 1995). Es gilt:

$$T = k_f \times M \quad (1)$$

Bei mehreren, m Schichten ergibt sich die Transmissivität zu:

$$T = \sum_{j=1}^m k_{fj} \times M_j \quad (2)$$

Bei n Pumpversuchen mit den gemessenen T -Werten T_i und bekannten Schichtmächtigkeiten M_{ij} an den Grundwassermessstellen lassen sich die k_{fj} wie folgt berechnen. Voraussetzung hierfür ist, dass die Anzahl der Grundwassermessstellen mit Pumpversuchen (n) größer oder gleich der Anzahl m der Schichten ist.

Für jeden Pumpversuch i bekommt man eine Gleichung:

$$\sum_{j=1}^m k_{fj} \times M_{ij} = T_i, i = 1, \dots, n \quad (3)$$

wobei die M_{ij} die Schichtmächtigkeiten an der Stelle des i -ten Pumpversuchs und die T_i die aus dem i -ten Pumpversuch berechneten Transmissivitäten sind.

Insgesamt hat man mit Gl. 3 also ein für $n > m$ überbestimmtes lineares Gleichungssystem mit der bekannten $n \times m$ -Koeffizienten-Matrix $M = (M_{ij})$, dem bekannten Vektor $t = (T_i)$ der n rechten Seiten und den m Unbekannten $k = (k_{fj})$. In Matrix/Vektor-Schreibweise:

$$M \times k = t \quad (4)$$

Dieses Gleichungssystem kann wegen seiner Überbestimmtheit für $n > m$ nicht exakt gelöst werden. Man kann aber eine Least-Squares-Lösung finden, welche die Summe der Fehlerquadrate minimiert (Wikipedia contributors 2021 „Least Squares“). Man löst also das Minimierungsproblem:

$$\min_{k | k_{fj} \geq 0} (M \times k - t)^2 \quad (5)$$

wobei mit x^2 das Skalarprodukt des Vektors x mit sich selbst gemeint ist, also $x^2 = \sum_i x_i^2$.

Für solche Minimierungsprobleme gibt es eine Reihe mathematischer numerischer Verfahren, deren Konvergenz im Allgemeinen von einer ausreichenden Qualität der Startwerte abhängig ist. Zu solchen Startwerten kann man kommen, indem man aus den n Gleichungen 3 m „typische“ auswählt und dieses nunmehr nicht mehr überbestimmte lineare Gleichungssystem exakt löst.

Lösung mit Excel

Es ist möglich, das Problem (Gl. 5) mit Microsoft Excel zu lösen. Excel beinhaltet einen Solver, der eine beliebige Zielfunktion, die von m Variablen abhängt, minimieren kann. Damit der Solver zur Verfügung steht, muss man einmal in den Excel-Optionen Add-Ins die Analyse-Funktionen aktivieren.

Die hier dargestellte Excel-Arbeitsmappe kann auch von ResearchGate heruntergeladen werden. Der entsprechende Link lautet: https://www.researchgate.net/publication/356192901_Excel_Berechnung_der_kf-Werte_geschichtete_r_Aquifere_aus_geologischem_Profil_und_Transmissivitat.

In einem Excel-Arbeitsblatt trägt man die Matrix $M = (M_{ij})$ der Mächtigkeiten in einen rechteckigen $n \times m$ -Bereich und die gemessenen Transmissivitäten $t = (T_i)$ in einen vertikalen Bereich der Länge n ein. In einen vertikalen Bereich der Länge m trägt man die Startwerte $k = (k_{fj})$ für die unbekanntes k_f -Werte ein. Sinnvollerweise gibt man den Bereichen Namen, z. B.: „ M “, „ t “, „ k “, usw.

In einer weiteren Spalte der Länge n mit Namen „ Mks “ berechnet man die Auswertungen der linken Seiten der Gleichungen²:

- $M * k \{= MMULT(M; k_)\}$

und in einer weiteren Spalte mit Namen „ $errs$ “ die quadrierten Abweichungen von t :

- $(M * k - t)^2 \{= (Mks_ - t)^2\}$

Schließlich in einer Zelle mit Namen „ $ziel$ “ die Summe dieser quadrierten Abweichungen.

- $(M * k - t)^2 = SUMME(errs_)$

Das Arbeitsblatt sieht dann wie in Abb. 1 aus.

Nach Aufruf des Solvers im Analyse-Bereich des Menüs „Daten“ stellt man dort als „Solver-Parameter“ Ziel, Min, Variablenzellen, nicht-negativ und die Lösungsmethode

¹ Nur an dieser Stelle bezeichnet M eine einzelne Mächtigkeit. Im Folgenden wird eine einzelne Mächtigkeit immer mit einem Index, z. B. M_j oder M_{ij} bezeichnet, und M bezeichnet die Matrix aller Mächtigkeiten, also (M_{ij}) .

² Nach den mathematischen Ausdrücken stehen die Excel-Formeln. Hier wird die traditionelle Schreibweise mit Array-Formeln verwendet. Stattdessen kann man natürlich auch die neue Office 365 Schreibweise, die ohne geschweifte Klammern für Array-Formeln auskommt, verwenden.

Gegeben:				Gesucht:	Gegeben:	Linke Seite	Fehlerquadrate
Matrix M				Unbekannte k	Rechte Seite t	M*k	(M*k-t) ²
4,2	2,5	1,2	3,7	1,00E-04	9,30E-03	0,004157	2,65E-05
5,1	3,0	3,2	1,7	1,00E-03	2,02E-02	0,006727	0,000182
3,0	6,7	2,8	2,5	1,00E-03	2,13E-02	0,009825	0,000132
2,8	4,5	3,0	2,0	1,00E-05	2,00E-02	0,0078	0,000149
4,0	3,0	3,0	2,2		1,88E-02	0,006422	0,000153
3,5	3,5	3,1	2,0		1,97E-02	0,00697	0,000162
5,5	4,0	0,0	1,5		5,10E-03	0,004565	2,86E-07
Ziel:							0,000804

Abb. 1 Excel-Daten mit Startwerten

Fig. 1 Excel data with starting values

Solver-Parameter	
Ziel:	= ziel_ Min
Variablenzellen:	= k_
Nicht-Negativ nicht eingeschränkt:	Ja
Lösungsmethode:	GRG-Nichtlinear
Optionen, Alle Methoden	
Nebenbedingungsgenauigkeit:	= 1E-6
Automatische Skalierung:	Ja
Optionen, GRG-Optionen	
Konvergenz:	= 1E-9
Ableitungen:	Zentral

Abb. 2 Solver-Parameter

Fig. 2 Solver parameters

„GRG-Nichtlinear“ ein, sowie eventuell die allgemeinen und die GRG-Optionen (Abb. 2, bzw. Abb. 3).

Nach erfolgreicher Lösung erscheint ein Dialog „Solver-Ergebnisse“, auf dem man die Solver-Lösung akzeptiert und mit OK schließt.

Das Arbeitsblatt hat jetzt die gefundenen besten k_f -Werte in k (Abb. 4).

Fallbeispiel

Im Rahmen eines Grundwasserschadensfalls wurde ein Talgrundwasserleiter hydrogeologisch erkundet. Der Grundwasserleiter besteht aus pleistozänen Kiesen, Sanden und tonigen Schluffen, die genetisch als fluviatile Ablagerungen eines mäandrierenden Flusssystemes zu deuten sind. Die Aquifermächtigkeit der Talsedimente variiert von $M_j = 11$ bis 15 m.

Zur Erkundung der Grundwasserverhältnisse insbesondere der hydraulischen Durchlässigkeit des Aquifers und der Schadstoffverteilung im Grundwasser wurden sieben Bohrungen abgeteuft und als Grundwassermessstellen ausgebaut. Alle Bohrungen reichen bis zur Aquifersohle, die durch gering durchlässige Tonsteine gebildet wird. Die Grundwassermessstellen sind über die gesamte Aquifermächtigkeit verfiltert.

Bei der geologischen Profilaufnahme konnten in den Bohrungen vier verschiedene lithologische Einheiten unterschieden werden. Im Einzelnen sind dies toniger Schluff,

Tab. 1 Profile der Grundwassermessstellen 1 bis 7 mit Angaben zur Lithologie und Mächtigkeit der einzelnen Schichtglieder sowie der aus Pumpversuchen ermittelten Transmissivitäten

Table 1 Profiles of the groundwater observation points 1 to 7 with information on lithology and thickness of the individual layers as well as the transmissivities determined from pumping tests

	GWM 1	GWM 2	GWM 3	GWM 4	GWM 5	GWM 6	GWM 7
fS [m]	4,2	5,1	3,0	2,8	4,0	3,5	5,5
mS [m]	2,5	3,0	6,7	4,5	3,0	3,5	4,0
sG [m]	1,2	3,2	2,8	3,0	3,0	3,1	0
tU [m]	3,7	1,7	2,5	2,0	2,2	2,0	1,5
T (m ² /s)	0,0093	0,0202	0,0213	0,0200	0,0188	0,0197	0,0051

Lithologie (Abkürzungen nach DIN 4023): fS Feinsand, mS Mittelsand, sG sandiger Kies, tU toniger Schluff
T Transmissivität

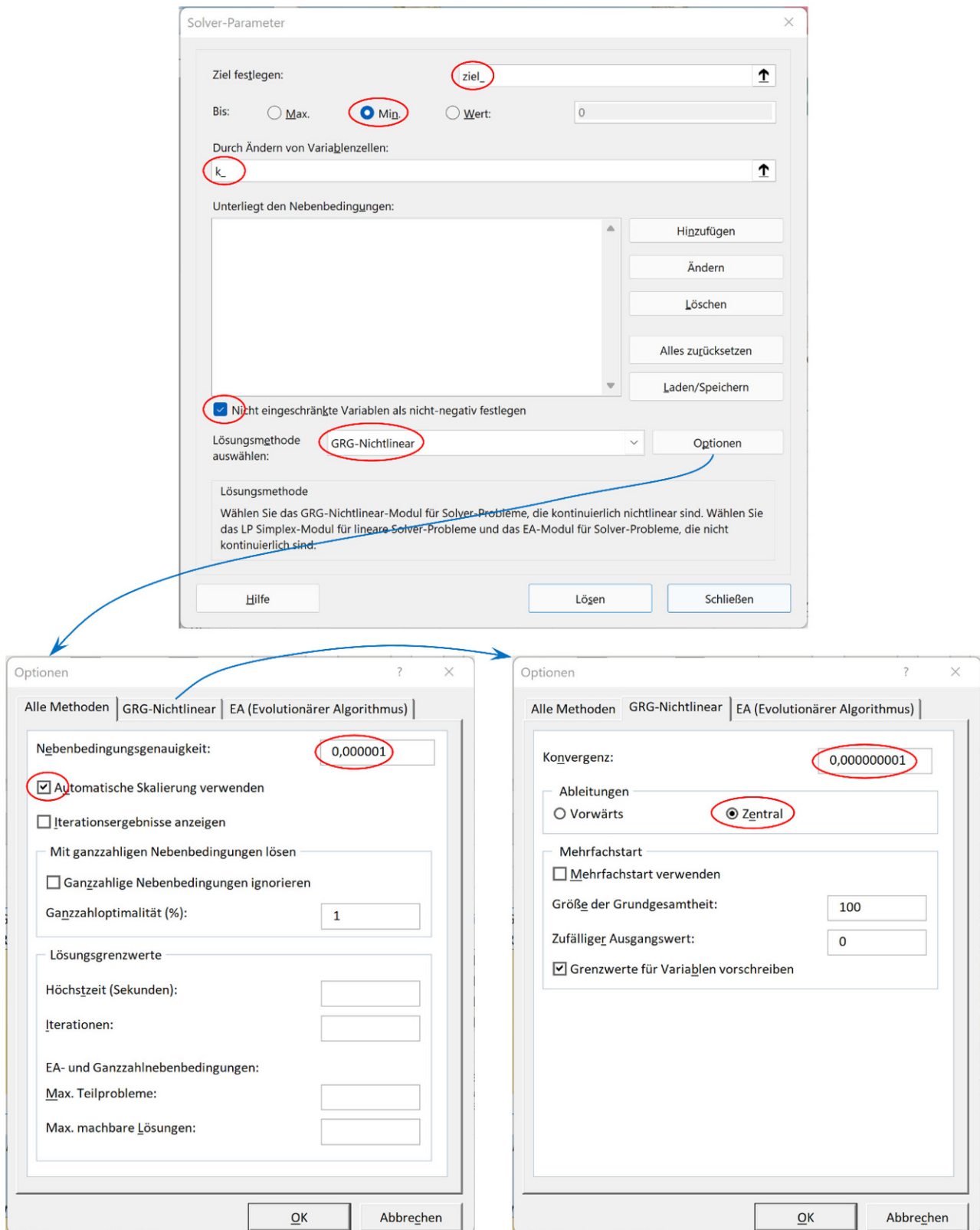


Abb. 3 Solver-Einstellungen

Fig. 3 Solver settings

Gegeben:				Gesucht:	Gegeben:	Linke Seite	Fehlerquadrate
Matrix M				Unbekannte k	Rechte Seite t	M*k	(M*k-t)^2
4,2	2,5	1,2	3,7	2,14E-04	9,30E-03	0,009369	4,75E-09
5,1	3,0	3,2	1,7	9,79E-04	2,02E-02	0,020087	1,28E-08
3,0	6,7	2,8	2,5	5,02E-03	2,13E-02	0,021251	2,38E-09
2,8	4,5	3,0	2,0	0,00E+00	2,00E-02	0,020058	3,42E-09
4,0	3,0	3,0	2,2		1,88E-02	0,018848	2,26E-09
3,5	3,5	3,1	2,0		1,97E-02	0,019732	9,94E-10
5,5	4,0	0,0	1,5		5,10E-03	0,005094	3,09E-11
Ziel:							2,66E-08

Abb. 4 Excel-Lösung

Fig. 4 Excel solution

Feinsand, Mittelsand und sandiger Kies. Die zugehörigen lithologischen Einheiten und ihre Mächtigkeiten sind in Tab. 1 dargestellt. Daneben sind für die Grundwassermessstellen die Transmissivitäten aus der Auswertung von Pumpversuchen, die in den Grundwassermessstellen durchgeführt wurden, aufgeführt.

Aus Gln. 3 und 4 ergeben sich sieben Gleichungen für vier unbekannte k_f . Die Excel-Lösung ist in Abb. 4 unter Excel-Lösung dargestellt. Im Einzelnen wurden für die Schichten die folgenden k_f -Werte ermittelt: k_f -Feinsand=2,14 E-04 m/s, k_f -Mittelsand=9,97 E-04 m/s, k_f -sandiger Kies=5,02 E-03 m/s und k_f -toniger Schluff=0,00 m/s.

Diese k_f -Werte stimmen gut mit Messwerten aus Labortests zur Durchlässigkeit der einzelnen Schichten überein, wo die folgenden Durchlässigkeitsbeiwerte ermittelt wurden: k_f -Feinsand=2,0 E-04 m/s, k_f -Mittelsand=1,0 E-03 m/s, k_f -sandiger Kies=5,0 E-03 m/s und k_f -toniger Schluff=1,0 E-07 m/s.

Die gefundene Excel-Lösung ist also sehr gut. Allerdings wird der sehr kleine Wert für k_f -toniger Schluff zu 0 statt 1,0 E-07 m/s gefunden.

Funding Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

Kinzelbach, W., Rausch, R.: Grundwassermodellierung – Eine Einführung mit Übungen. Gebrüder Borntraeger, Berlin Stuttgart (1995) Wikipedia contributors: Least squares (2021). https://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares, Zugegriffen: 13. Dez. 2021

Hinweis des Verlags Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.