

# Entwicklung und Analyse eines Berechnungskonzepts zur Lebensdauerabschätzung gekerbter Bauteile unter nichtproportionaler Beanspruchung

Vom Fachbereich 13 - Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Technischen Universität Darmstadt

zur  
Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs

genehmigte  
DISSERTATION

von  
**Jan Kraft, M. Sc.**  
aus Gelnhausen

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts
Datum der Einreichung:	15.04.2024
Tag der mündlichen Prüfung:	27.06.2024

Darmstadt 2024  
D 17

**Jan Kraft**

Entwicklung und Analyse eines Berechnungskonzepts zur Lebensdauerabschätzung gekerbter Bauteile unter nichtproportionaler Beanspruchung

Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung auf TUprints: 2024

Tag der mündlichen Prüfung: 27.06.2024

**URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-278044**

**URI: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/27804>**

Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als vom Fachbereich 13 - Bau- und Umweltingenieurwissenschaften - der Technischen Universität Darmstadt zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation (D17).



Veröffentlicht unter der Lizenz CC BY-SA 4.0 International  
<https://creativecommons.org/licenses/>

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, Fachgebiet Werkstoffmechanik, der Technischen Universität Darmstadt verfasst. Es ist mir eine große Freude und Ehre, an dieser Stelle all jenen zu danken, die mich auf diesem Weg begleitet und unterstützt haben.

Zuallererst möchte ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald, meinen tiefsten Dank aussprechen. Ihre kontinuierliche Betreuung dieser Dissertation sowie Ihre Unterstützung bei meiner fachlichen und persönlichen Entwicklung haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Herrn Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts und Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller danke ich ebenfalls herzlich für die Übernahme des Korreferats und die damit verbundene Zeitinvestition.

Ein besonderer Dank gebührt auch Herrn Dr.-Ing. H. Thomas Beier. Ihre Unterstützung während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter war von unschätzbarem Wert.

Meinen geschätzten Kollegen und Freunden Carl Fällgren, Patrick Yadegari, Simon Moser, Aris Tsakmakis, Jan Hamacher und Fatemeh Alizadeh möchte ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre am Fachgebiet danken. Eure Hilfsbereitschaft und Geselligkeit haben meinen Aufenthalt am Fachgebiet bereichert.

Herrn Tobias Brehm gebührt mein aufrichtiger Dank für seine tatkräftige Unterstützung bei den experimentellen Untersuchungen im Labor. Ohne deine Hilfe und Einsatz wären die Durchführung der Versuche in kürzester Zeit nicht möglich gewesen.

In diesem Zusammenhang möchte ich auch Herrn Dr.-Ing. Alex Linn meinen herzlichen Dank aussprechen. Die angenehme Zusammenarbeit während des gemeinsamen Forschungsvorhabens war von unschätzbarem Wert. Darüber hinaus möchte ich mich für die inspirierenden Diskussionen bedanken, die weit über den Rahmen des konkreten Projekts hinausgingen.

Besonders möchte ich mich auch bei all meinen Korrekturlesern bedanken, die durch ihre gründliche Durchsicht und wertvolle Rückmeldungen dazu beigetragen haben, dass diese Arbeit ein großes Stück besser geworden ist.

Abschließend möchte ich meinen Eltern, Andrea und Jürgen Kraft, von Herzen danken. Eure Unterstützung hat mich stets begleitet und mir in allen Lebenslagen geholfen. Ohne euch wäre mein Werdegang bis hierhin nicht möglich gewesen.



## Abstract

This thesis focuses on the development and analysis of a calculation concept based on the local strain approach for predicting the fatigue life of metallic structures under multiaxial, non-proportional, local elastic-plastic loads. Concepts for the computational fatigue strength assessment are laid down in standards and guidelines, which can be used to evaluate the fatigue strength of a component in a standardized manner. In particular, the FKM Guideline Nonlinear allows fatigue strength assessment through the utilization of the local strain approach, enabling the computational design of components within the low cycle fatigue domain. However, the application of the guideline has so far been limited to uniaxial and proportional loading. The developed calculation concept is intended to represent a possible extension of the computational fatigue strength assessment for the non-proportional load case. Under non-proportional loading, additional material effects and damage mechanisms occur, which is why the algorithm developed inevitably deviates from the standardized procedure of the guideline.

The calculation concept presented is based on the critical plane approach. The damage assessments are carried out for each possible cutting plane of a material element, whereby a critical plane is defined which determines the component's fatigue life. The critical plane corresponds to the cutting plane that has the lowest calculated fatigue life. Existing methods have been extended to enable fast and reliable computational fatigue strength assessment under non-proportional loads. In particular, methods for the simulation of multiaxial non-proportional local elastic-plastic stresses and strains were further developed. The developed enhancements enable a more precise calculation of the local stresses while simultaneously reducing the calculation time. In addition, damage models of the critical plane approach were integrated in order to precisely predict the fatigue life under consideration of various mechanical loads. The damage models were also adapted, if necessary, in order to enable the application in the context of this work. In addition, the models were parameterized so that they can be applied if only the material group and the tensile strength of the material in question are known. A broad experimental database based on determined experimental results and literature data is used to validate the developed concept. The accuracy of the developed algorithm is assessed on the basis of a statistical evaluation of the comparison between experimental and calculated fatigue life. The validation of the damage models is carried out using experiments on unnotched specimens, while the verification of the entire algorithm is carried out by evaluating the results on notched specimen geometries. It is shown that the developed calculation concept provides reliable results and enables a reliable prediction of the fatigue life under different mechanical loads. The results of the study show that experimental fatigue life under non-proportional loading can be calculated with comparable and sometimes even higher accuracy than under proportional loading cases. Finally, the result of this work is a validated calculation concept that can predict the fatigue life of notched components under any mechanical load with acceptable accuracy.



## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Entwicklung und Analyse eines Berechnungskonzepts auf Basis des Örtlichen Konzepts zur Prognose der Anrisslebensdauer von metallischen Strukturen unter mehrachsig nichtproportionalen örtlich elastisch-plastischen Beanspruchungen. Konzepte für die rechnerische Betriebsfestigkeitsauslegung sind in Normen und Richtlinien festgehalten, anhand derer die Ermüdungsfestigkeit eines Bauteils standardisiert bewertet werden kann. Insbesondere die FKM-Richtlinie Nichtlinear ermöglicht eine Nachweisführung unter Verwendung des Örtlichen Konzepts, was die rechnerische Bauteilauslegung im Kurzzeitfestigkeitsbereich erlaubt. Die Anwendung der Richtlinie ist jedoch bisher auf einachsige und proportionale Beanspruchung beschränkt. Das erarbeitete Berechnungskonzept soll eine mögliche Erweiterung der rechnerischen Betriebsfestigkeitsauslegung für den nichtproportionalen Belastungsfall darstellen. Unter nichtproportionaler Belastung treten zusätzliche Werkstoffeffekte und Schädigungsmechanismen auf, weshalb der entwickelte Algorithmus zwangsläufig vom standardisierten Vorgehen der Richtlinie abweicht. Das vorgestellte Berechnungskonzept basiert auf dem Ansatz der kritischen Schnittebenen. Dabei werden die Schädigungsbewertungen für jede mögliche Schnittebene eines Werkstoffelements durchgeführt, wobei eine kritische Ebene definiert wird, welche die Bauteillebensdauer bestimmt. Die kritische Ebene entspricht der Schnittebene, welche die geringste rechnerische Anrisslebensdauer aufweist. Um eine schnelle und sichere rechnerische Betriebsfestigkeitsauslegung unter nichtproportionalen Belastungen zu ermöglichen, wurden bestehende Methoden erweitert. Insbesondere wurden Verfahren zur Simulation mehrachsig nichtproportionaler örtlich elastisch-plastischer Beanspruchungen weiterentwickelt. Die erarbeiteten Erweiterungen ermöglichen eine genauere Berechnung der lokalen Beanspruchungen bei gleichzeitiger Reduktion der Rechenzeit. Zusätzlich wurden Schädigungsmodelle der kritischen Schnittebene integriert, um die Anrisslebensdauer unter Berücksichtigung verschiedener mechanischer Belastungen präzise zu prognostizieren. Die Schädigungsmodelle wurden, falls nötig, ebenfalls angepasst, um sie im Kontext dieser Arbeit anwenden zu können. Außerdem wurden die Modelle so parametrisiert, dass sie lediglich bei Kenntnis der Werkstoffgruppe und der Zugfestigkeit des vorliegenden Werkstoffs angewendet werden können.

Zur Validierung des entwickelten Konzepts wird eine breite experimentelle Datenbasis aus eigenen Versuchsergebnissen und Literaturdaten herangezogen. Die Treffsicherheit des entwickelten Algorithmus wird auf Grundlage einer statistischen Auswertung des Vergleichs zwischen experimenteller und berechneter Anrisslebensdauer bewertet. Die Validierung der Schädigungsmodelle wird anhand von Experimenten an ungekerbten Werkstoffproben durchgeführt, während die Überprüfung des gesamten Algorithmus durch die Auswertung der Ergebnisse an gekerbten Probengeometrien erfolgt. Dabei wird gezeigt, dass das entwickelte Berechnungskonzept zuverlässige Ergebnisse liefert und eine sichere Prognose der Anrisslebensdauer unter verschiedenen mechanischen Belastungen ermöglicht. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass experimentelle Anrisslebensdauern unter nichtproportionaler Beanspruchung mit vergleichbarer und teilweise sogar höherer Genauigkeit als unter proportionalen Beanspruchungsfällen berechnet werden können.

Das Ergebnis dieser Arbeit ist ein validiertes Berechnungskonzept, welches die Anrisslebensdauer gekerbter Bauteile unter beliebigen mechanischen Beanspruchungen mit akzeptabler Genauigkeit berechnen kann.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>V</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>XI</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Problemstellung und Zielsetzung . . . . .	1
1.2. Lösungsansatz . . . . .	3
<b>2. Kerbnäherungsverfahren</b>	<b>7</b>
2.1. Elastizitätstheoretische Lösung . . . . .	8
2.2. Lokal einachsige Beanspruchungen . . . . .	10
2.2.1. Werkstoffverhalten unter einachsiger, zyklischer Beanspruchung . . . . .	11
2.2.2. Kerbnäherungsverfahren für einachsige Beanspruchung . . . . .	13
2.3. Lokal mehrachsige Beanspruchungen . . . . .	16
2.3.1. Werkstoffeffekte . . . . .	16
2.3.2. Werkstoffmodelle für mehrachsige Beanspruchungen . . . . .	19
2.3.3. Parametrisierung der inkrementellen Plastizitätsmodelle . . . . .	23
2.3.4. Modellierung der nichtproportionalen Verfestigung . . . . .	26
2.3.5. Inkrementelle Kerbnäherungsverfahren . . . . .	29
2.3.6. Strukturfließflächenansätze . . . . .	33
2.3.7. Diskussion inkrementeller Ansätze und Strukturfließflächenansätze . . . . .	36
2.4. Erweiterungen der Strukturfließflächenansätze . . . . .	37
2.4.1. Integrationsalgorithmus für die Strukturfließflächenansätze . . . . .	37
2.4.2. Bauteilfließkurven aus Kerbnäherungsverfahren mit Sternterm . . . . .	53
2.4.3. Berücksichtigung von oberflächennahen Eigenspannungen und -dehnungen . . . . .	56
2.5. Vergleich der Verfahren . . . . .	61
2.5.1. Ermittlung der Kerbformzahlen . . . . .	61
2.5.2. Ermittlung der Bauteilfließkurve . . . . .	63
2.5.3. Parameteridentifikation der Strukturmodelle . . . . .	65
2.5.4. Vergleich der Kerbnäherungsverfahren mit der Finiten-Elemente-Methode . . . . .	69
2.5.5. Vergleich der Kerbnäherungsverfahren mit Kerbdehnungsmessungen . . . . .	79
<b>3. Schädigungsmodelle für mehrachsige Beanspruchungen</b>	<b>83</b>
3.1. Grundlagen der Schädigungsbewertung mit dem „Örtlichen Konzept“ . . . . .	84
3.1.1. Dehnungswöhlerlinie . . . . .	84
3.1.2. Mittelspannungseinfluss . . . . .	85
3.1.3. Zyklenzählung . . . . .	86
3.1.4. Schadensakkumulation und Reihenfolgeeffekte . . . . .	87
3.1.5. Schädigungsparameter . . . . .	88
3.1.6. Stützwirkung . . . . .	89

3.2.	Schädigungshypothesen für mehrachsige Beanspruchungen . . . . .	91
3.2.1.	Erweiterung klassischer Festigkeitshypothesen . . . . .	92
3.2.2.	Integrale Schädigungsparameter . . . . .	93
3.2.3.	Verfahren der kritischen Ebene . . . . .	94
3.2.4.	Smith/Watson/Topper Parameter . . . . .	97
3.2.5.	Fatemi/Socie Parameter . . . . .	100
3.2.6.	Kurzrissmodell . . . . .	111
<b>4.</b>	<b>Prognose der Anrisslebensdauer ungekerbter Werkstoffproben</b>	<b>129</b>
4.1.	Werkstoffcharakterisierung . . . . .	130
4.1.1.	Statische Werkstoffkennwerte . . . . .	130
4.1.2.	Zyklische Werkstoffkennwerte . . . . .	130
4.1.3.	Versuche zur nichtproportionalen Verfestigung . . . . .	134
4.2.	Parametrisierung des Plastizitätsmodells . . . . .	138
4.3.	Parametrisierung der Schädigungsmodelle . . . . .	140
4.3.1.	Smith/Watson/Topper Modell . . . . .	140
4.3.2.	Fatemi/Socie Modell . . . . .	141
4.3.3.	Kurzrissmodell . . . . .	142
4.3.4.	Stützwirkung . . . . .	144
4.4.	Prognose der Anrisslebensdauer . . . . .	145
4.4.1.	Reine Schubbelastung . . . . .	146
4.4.2.	Proportionale Belastung . . . . .	148
4.4.3.	Nichtproportionale Belastung . . . . .	151
4.4.4.	Statistische Auswertung . . . . .	154
4.5.	Zusammenfassung . . . . .	158
<b>5.</b>	<b>Prognose der Anrisslebensdauer gekerbter Proben</b>	<b>161</b>
5.1.	Lastgeregelte Versuche an gekerbten Proben . . . . .	161
5.1.1.	Anrisserkennung . . . . .	162
5.1.2.	Versuche mit betriebsähnlicher Belastung . . . . .	163
5.2.	Übersicht über den Berechnungsalgorithmus . . . . .	165
5.2.1.	Eingabegrößen . . . . .	166
5.2.2.	Ermittlung von Eingabewerten aus der Finiten-Elemente-Methode . . . . .	168
5.2.3.	Kerbsimulation . . . . .	169
5.2.4.	Schädigungsrechnung mit dem kritischen Ebenen Verfahren . . . . .	170
5.3.	Prognose der Anrisslebensdauer ausgewählter Versuchsreihen . . . . .	171
5.3.1.	Einfluss der Bauteilfließkurven . . . . .	171
5.3.2.	Vergleich zwischen proportionaler und nichtproportionaler Beanspruchung . . . . .	173
5.3.3.	Mittellasten . . . . .	175
5.4.	Datenbank für gekerbte Probengeometrien . . . . .	177
5.5.	Prognose der Anrisslebensdauer und Treffsicherheitsbewertung . . . . .	179
5.5.1.	Vergleich mit anderen Berechnungsmethoden . . . . .	187
5.6.	Zusammenfassung . . . . .	191
<b>6.</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>193</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>197</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>213</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>215</b>

---

<b>A. Werkstoff- und Strukturparameter des Ohno/Wang Modells</b>	<b>221</b>
<b>B. Versuche an gekerbten Rundproben</b>	<b>229</b>



# Nomenklatur

## Abkürzungen

BFK	Bauteilfließkurve
CA	konstante Amplituden
DL	Durchlauf (durch eine Last-Zeit-Reihe)
ESED	Equivalent Strain Energy Density
ESZ	ebener Spannungszustand
FE	Finite-Elemente ...
FEM	Finite-Elemente-Methode
FKM	Forschungskuratorium Maschinenbau
GEH	Gestaltänderungsenergiehypothese
HCM	Hysteresis Counting Method
IFSW	Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt
IMAB	Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit, TU Clausthal
KN	Kerbnäherungsmethode
MOI	Moment of Inertia Methode
MWB	modified Wang Brown Methode
NPV	nichtproportionale Verfestigung
UE	Unified Expression
VA	variable Amplituden

## Indizes

$e(\dots)$	elastizitätstheoretische Lösung
$(\dots)'$	Kennwert für zyklisches Werkstoffverhalten
$(\dots)^{i,j,k,n}$	Iterations- oder Summationsindizes
$(\dots)_\gamma$	Kennwert für Schubbeanspruchung
$(\dots)_a$	Amplitude eines Schwingspiels
$(\dots)_{eff}$	Effektivwert
$(\dots)_{I,II,III}$	Rissöffnungsmoden

$(\dots)_{ijkl}$	Tensorkomponenten
$(\dots)_{KR}$	Kurzriss
$(\dots)_m$	Mittelspannung oder Mitteldehnung eines Schwingspiels
$(\dots)_n$	Normalkomponente in einer Schnittebene
$(\dots)_{th}$	Schwellenwert
$(\dots)_v$	Vergleichsgröße

### Symbole

$\alpha$	nichtproportionales Verfestigungsvermögen des Werkstoffs
$\alpha_{ij}, \boldsymbol{\alpha}$	Backstresstensor
$\beta_{ij}, \boldsymbol{\beta}$	effektive Spannungen, im Integrations Algorithmus des Plastizitätsmodells
$\Delta$	Schwingweite, Differenz
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\gamma$	Gleitungen
$\nu$	Querdehnzahl
$\rho$	Variable im Integrationsverfahren des Plastizitätsmodells, Kerbradius der Kerbproben
$\sigma_F$	Fließspannung des Werkstoffs
$\sigma'_f, \varepsilon'_f, b, c$	Parameter der Dehnungswöhlerlinie
$\sigma_{ij}, \boldsymbol{\sigma}$	Normalspannungen, Spannungstensor
$\tau$	Schubspannungen
$\varepsilon_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}$	Normaldehnungen, Dehnungstensor
$\varepsilon_{ij}^{el}, \boldsymbol{\varepsilon}^{el}$	elastische Dehnungen
$\varepsilon_{ij}^{pl}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$	plastische Dehnungen
$\varphi, \psi$	Schnittwinkel der kritischen Ebenen Modelle
$A$	Bruchdehnung
$a$	Risstiefe im Kurzrissmodell
$A_\sigma$	hochbeanspruchte Bauteiloberfläche
$c, r, \chi$	Parameter des Plastizitätsmodells
$C$	Rissfortschrittsparameter
$c$	(halbe) Oberflächenrisslänge im Kurzrissmodell
$C_q$	Werkstoffkonstante der „Unified Expression“
$C_{ijkl}^e$	Elastizitätstensor

$c_{ij}, \mathbf{c}$	Proportionalitätsfaktoren zwischen einer äußeren Last und lokalen Spannungen nach der Elastizitätstheorie
$E$	Elastizitätsmodul
$e$	Nenndehnung
$f_{np}$	Nichtproportionalitätskennzahl
$f_{W,\tau}$	Schubwechselfestigkeitsfaktor
$G$	Schubmodul, bezogener Spannungsgradient
$H$	plastischer Tangentenmodul
$K$	Kompressionsmodul
$k$	Werkstoffparameter des Smith/Watson/Topper Modells
$K', n'$	Parameter der stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Kurve nach dem Ramberg-Osgood Ansatz
$K_p$	plastische Traglastformzahl
$k_{FS}$	Werkstoffparameter des Fatemi/Socie Modells
$K_{ij}, \mathbf{K}$	Proportionalitätsfaktoren zwischen einer Nennspannung und lokalen Spannungen nach der Elastizitätstheorie
$K_t, K_\sigma, K_\epsilon$	Kerbformzahl, Spannungsformzahl, Dehnungsformzahl
$L$	äußere Lasten, Lipschitz Konstante für die Konvergenz des Integrationsverfahrens der Werkstoffmodelle
$m$	Median
$m^*$	Mittelwert
$M_\sigma, M_\tau$	Mittelspannungsempfindlichkeit für Normal- und Schubbeanspruchung
$m_Z$	Rissfortschrittsparameter
$N, N_f$	Schwingspiele bzw. Versagensschwingspiele
$n_{ij}, \mathbf{n}$	Normalentensor an die Fließfläche
$p$	plastische Bogenlänge
$P_{FS}$	Schädigungsparameter des Fatemi/Socie Schädigungsmodells
$P_{RAM}$	Schädigungsparameter des Smith/Watson/Topper Schädigungsmodells mit der Erweiterung nach Bergmann
$P_{SWT}$	Schädigungsparameter des Smith/Watson/Topper Schädigungsmodells
$P_Z$	Schädigungsparameter des Kurzrissmodells
$R$	Lastverhältnis
$R_m$	Zugfestigkeit

---

$R_{p,0.2}$	Proportionalitätsgrenze bei 0.2 % plastischer Dehnung
$S$	Nennspannung
$s_{ij}, \mathbf{s}$	Spannungsdeviator
$T$	Streuung, als Quotient aus 90% und 10% Quantil
$T^*$	Spannweite
$x, y, z$	Koordinaten
$Y$	Radius der Fließfläche im Plastizitätsmodell
$Y_I, Y_{II}, Y_{III}$	Geometriefaktoren im Kurzrissmodell für den jeweiligen Rissöffnungsmodus
$Z$	zyklisches J-Integral

# 1. Einleitung

## 1.1. Problemstellung und Zielsetzung

Bauteile und Komponenten sind während ihres Einsatzes in verschiedenen technischen Anwendungsbereichen schwingenden Belastungen ausgesetzt. Der Widerstand eines Werkstoffs gegenüber einer schwingenden Beanspruchung wird als Ermüdungsfestigkeit bezeichnet. Für viele Konstruktionswerkstoffe ist die Ermüdungsfestigkeit deutlich geringer als die statische Festigkeit, d. h. ihr Widerstand gegen eine einmalige, sehr hohe Beanspruchung. Dies gilt vor allem für metallische Werkstoffe. Während der Konstruktion eines Bauteils ist die strukturmechanische Integrität sicherzustellen. Ein Bauteil muss den während seines Betriebs auftretenden Belastungen standhalten und nicht vorzeitig versagen. Dies ist entscheidend für die Sicherheit von Maschinen und Anlagen sowie für die Vermeidung von Unfällen. Eine adäquate Betriebsfestigkeitsauslegung minimiert das Risiko von Bauteilversagen, was wiederum teure Reparaturen, Stillstandszeiten, potenzielle Schäden an der Maschine oder den umliegenden Anlagen und Gefahr für Leib und Leben reduziert.

Der Betriebsfestigkeitsnachweis kann prinzipiell auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen. Er kann experimentell anhand von Prototypen auf der Ebene einzelner Bauteile oder Komponenten sowie an Gesamtsystemen ganzer Maschinen durchgeführt werden. Ebenso kann ein rechnerischer Nachweis der Ermüdungsfestigkeit erfolgen. Dieser kann bereits in der Konstruktionsphase effizient genutzt werden, um Überdimensionierungen zu vermeiden, was zu einer wirtschaftlicheren Nutzung von Materialien und Ressourcen führt und die Gesamtkosten der Konstruktion senkt. Durch die frühzeitige Identifizierung potenzieller Schadensfälle können Konstruktionsänderungen vorgenommen werden, was zu verkürzten Entwicklungszeiten führt. Von Haibach [Haib 06] wird ein umfassender Überblick über etablierte Konzepte für den rechnerischen Betriebsfestigkeitsnachweis sowie experimentelle Verfahren der Betriebsfestigkeit gegeben. Die gängigsten rechnerischen Konzepte sind

- das Nennspannungskonzept,
- das Kerbspannungskonzept,
- das Örtliche Konzept (Kerbgrundkonzept, Kerbdehnungskonzept) und
- das Rissfortschrittskonzept.

Diese Konzepte sind für die rechnerische Nachweisführung in Normen und Richtlinien festgehalten, anhand derer die Ermüdungsfestigkeit eines Bauteils standardisiert bewertet werden kann. Für Maschinenbauteile aus metallischen Werkstoffen sind vor allem die FKM-Richtlinien zu nennen [Renn 12, Fied 19]. Mit der FKM-Richtlinie „Rechnerischer Festigkeitsnachweis unter expliziter Erfassung nichtlinearen Werkstoffverformungsverhaltens“ (FKM-Richtlinie Nichtlinear) [Fied 19] existiert eine Berechnungsrichtlinie, die es erstmals ermöglicht, einen Festigkeitsnachweis unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens standardisiert durchzuführen. Dadurch kann der Festigkeitsnachweis auch im Bereich der Kurzzeitfestigkeit (Lebensdauern  $N < 10^4$ ) erbracht werden. Im Gegensatz dazu ist der Anwendungsbereich der FKM-Richtlinie „FKM-Richtlinie Rechnerischer Festigkeitsnachweis“ (FKM-Richtlinie Linear) von Rennert et al. [Renn 12] auf den Dauer- und Zeitfestigkeitsbereich beschränkt. Innerhalb der FKM-Richtlinie Nichtlinear wird das Örtliche Konzept zur Nachweisführung verwendet. Dieses Konzept wird auch in der vorliegenden Arbeit angewendet.

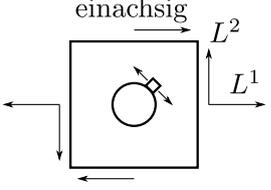
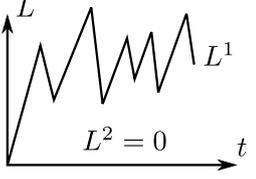
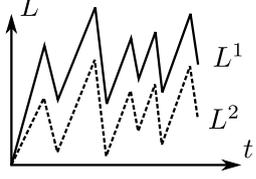
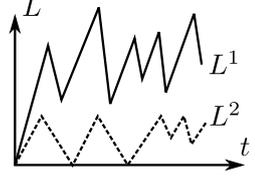
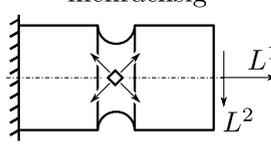
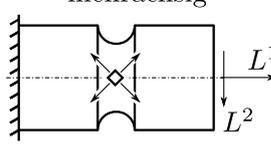
örtlicher elastischer Spannungszustand	äußere Belastung		
	einzeln	zusammengesetzt	
		proportional $L^1/L^2 = \text{konst}$	nichtproportional
			
	EE einzeln + einachsig	PE proportional + einachsig	NE nichtproportional + einachsig
	EM einzeln + mehrachsig	PM proportional + mehrachsig	NM nichtproportional + mehrachsig

Abbildung 1.1: Einordnung des Spannungszustands in der Kerbe nach [Seeg 96], Grafik nach [Rada 07]

Der Aufwand bei der Lösung von Problemen der Betriebsfestigkeit nach dem Örtlichen Konzept hängt in hohem Maße von der vorliegenden Kerbproblematik ab. Seeger [Seeg 96] kategorisiert sämtliche Belastungs- und Beanspruchungssituationen in die in Abbildung 1.1 dargestellten Gruppen, welche im Folgenden erläutert werden. Eine Belastung umfasst sämtliche mechanischen Einwirkungen auf das Bauteil, sei es durch Kräfte, Momente, Flächenlasten oder Verformungen. Die Beanspruchungen wiederum sind die lokal auftretenden Spannungen und Dehnungen an der betrachteten Stelle.

Die äußeren Belastungen werden nach „einzeln“ und „zusammengesetzt“ unterschieden, wobei Letztere weiter in „proportionale“ und „nichtproportionale“ Belastungsfälle aufgeteilt werden. Der örtliche Beanspruchungszustand wird in die Fälle „einachsig“ und „mehrachsig“ unterteilt.

Der Fall EE, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, stellt den klassischen Fall des Örtlichen Konzepts dar. Am Bauteil greift eine Einzellast an, die an der versagenskritischen Stelle zu einer örtlich einachsigen Beanspruchung führt. Die Methodik zur Lebensdauerberechnung in diesem Fall wird in verschiedenen Publikationen ausführlich beschrieben, darunter Arbeiten von Bergmann [Berg 83], Haibach [Haib 06], Radaj und Vormwald [Rada 07] oder Fiedler et al. [Fied 19].

Bei proportionaler Belastung ist das Verhältnis der äußeren Belastungen zu jedem Zeitpunkt gleich. Der Fall PE tritt auf, wenn am Versagensort nur eine örtliche Beanspruchung existiert. Die örtliche Beanspruchung kann dabei aufgrund der Linearität aus dem Zeitsignal einer der äußeren Belastungen bestimmt werden. Anschließend entspricht die Vorgehensweise dem Fall EE.

Liegt örtlich ein mehrachsiger Beanspruchungszustand bei äußerer proportionaler Belastung oder Belastung durch einen Lastkanal (Fälle PM und EM) vor, so muss die Mehrachsigkeit bei der Schädigungsbewertung berücksichtigt werden. Innerhalb der FKM-Richtlinie Nichtlinear werden Festigkeitshypothesen, konkret die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH), verwendet, um lokalen Beanspruchungen in Vergleichsgrößen (Vergleichsspannungen und Vergleichsdehnungen) umzurechnen. Auf Basis der Vergleichsgrößen kann wie im einachsigen Fall EE vorgegangen werden.

In der Praxis sind an Bauteilen häufig zusammengesetzte Belastungen anzutreffen, bei denen die einzelnen Lastkomponenten zeitlich unabhängig voneinander wirken. Diese Belastungsfälle fallen in die Kategorie der nichtproportionalen Belastungen und umfassen zusammengesetzte zyklische Belastungen mit unterschiedlichem Verhältnis von Amplitude und Mittelwert, unterschiedlichen Schwingungsformen, Phasenverschiebungen, unterschiedlichen Frequenzen oder völlig unkorrelierten Belastungssignalen.

Für den Fall, dass dennoch lokal einachsige Belastungen auftreten (NE), beschreibt Zacher [Zach 94] eine geeignete Vorgehensweise. Durch Anpassung der Ermittlung der lokalen Beanspruchung kann die Schädigungsrechnung ebenfalls auf Basis der FKM-Richtlinie Nichtlinear erfolgen.

Der Fall von zusammengesetzter nichtproportionaler Belastung mit einem örtlich mehrachsigen Spannungszustand (Fall NM) stellt eine besondere Herausforderung für die Betriebsfestigkeitsbewertung dar. Dieser Beanspruchungsfall umfasst eine Vielzahl möglicher Belastungssituationen. Die Ermittlung der mehrachsigen nichtproportionalen örtlich elastisch-plastischen Beanspruchungen gestaltet sich besonders komplex. Eine Bewertung der Ermüdungsfestigkeit anhand von Vergleichsgrößen ist nicht mehr möglich, weshalb die Anwendbarkeit der FKM-Richtlinie Nichtlinear nicht gegeben ist. Es existiert kein standardisiertes Verfahren, um im Fall NM eine Betriebsfestigkeitsauslegung unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens durchzuführen. Zur Bauteilauslegung für nichtproportionale Beanspruchung muss während der Konstruktion zurzeit eine der folgenden Möglichkeiten gewählt werden:

- Bauteile unter nichtproportionaler Belastung erfordern eine großzügige Auslegung mit erheblichen Sicherheitsreserven, die häufig übermäßig konservativ sein können.
- Es sind Schritte zu unternehmen, um nichtproportionale Belastungen zu vermeiden. Dies kann zu erheblichen Änderungen oder Einschränkungen in der Konstruktion führen.
- Für die entsprechenden Bauteile muss ein experimenteller Nachweis erbracht werden. Im Gegensatz zum rechnerischen Nachweis ist dieser zeitaufwändig und kostenintensiv.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, ein Berechnungskonzept zu entwickeln, das eine Bewertung der Ermüdungsfestigkeit für nichtproportionale Belastungen mit örtlich mehrachsigen Spannungszuständen ermöglicht. Dieses Konzept soll für alle beschriebenen mechanischen Belastungsfälle anwendbar sein und gleichzeitig eine Erweiterung der bestehenden Richtlinie auf den nichtproportionalen Beanspruchungsfall darstellen. Dazu sind geeignete Modelle zur Ermittlung der lokalen Beanspruchungen sowie der Schädigungsbewertung auszuwählen und gegebenenfalls zu erweitern. Um eine einfache Integration in die FKM-Richtlinie Nichtlinear zu gewährleisten, wird darauf geachtet, dass das erarbeitete Konzept mit denselben Eingabegrößen wie die Richtlinie auskommt. Ebenfalls liegen häufig nur wenige Versuche zur Charakterisierung eines gegebenen Werkstoffs vor. Für die in der FKM-Richtlinie Nichtlinear enthaltenen Werkstoffgruppen müssen deshalb Methoden angegeben werden, um Modellparameter der auszuwählenden Modelle im Vorfeld der Rechnung abzuschätzen. Darüber hinaus muss gezeigt werden, dass der entwickelte Algorithmus eine zuverlässige und sichere Lebensdauerprognose unter verschiedenen mechanischen Belastungen liefern kann.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Arbeit auf dem AiF-geförderten FKM Forschungsvorhaben „Mehrachsigkeit örtlich - Anwendungsgerechte Lebensdauerabschätzung mehrachsiger nichtproportional beanspruchter Bauteile auf Basis des Örtlichen Konzepts“ (IGF-Nr. 20613N) [Linn 22] aufbaut.

## 1.2. Lösungsansatz

Zur Schädigungsbewertung unter nichtproportionaler Belastung wird in dieser Arbeit der Ansatz der kritischen Schnittebene verwendet. Die Ermüdungsschädigung wird für jede denkbare Schnittebene eines Werkstoffelements bewertet. Es wird eine Schnittebene als die kritische Ebene definiert,

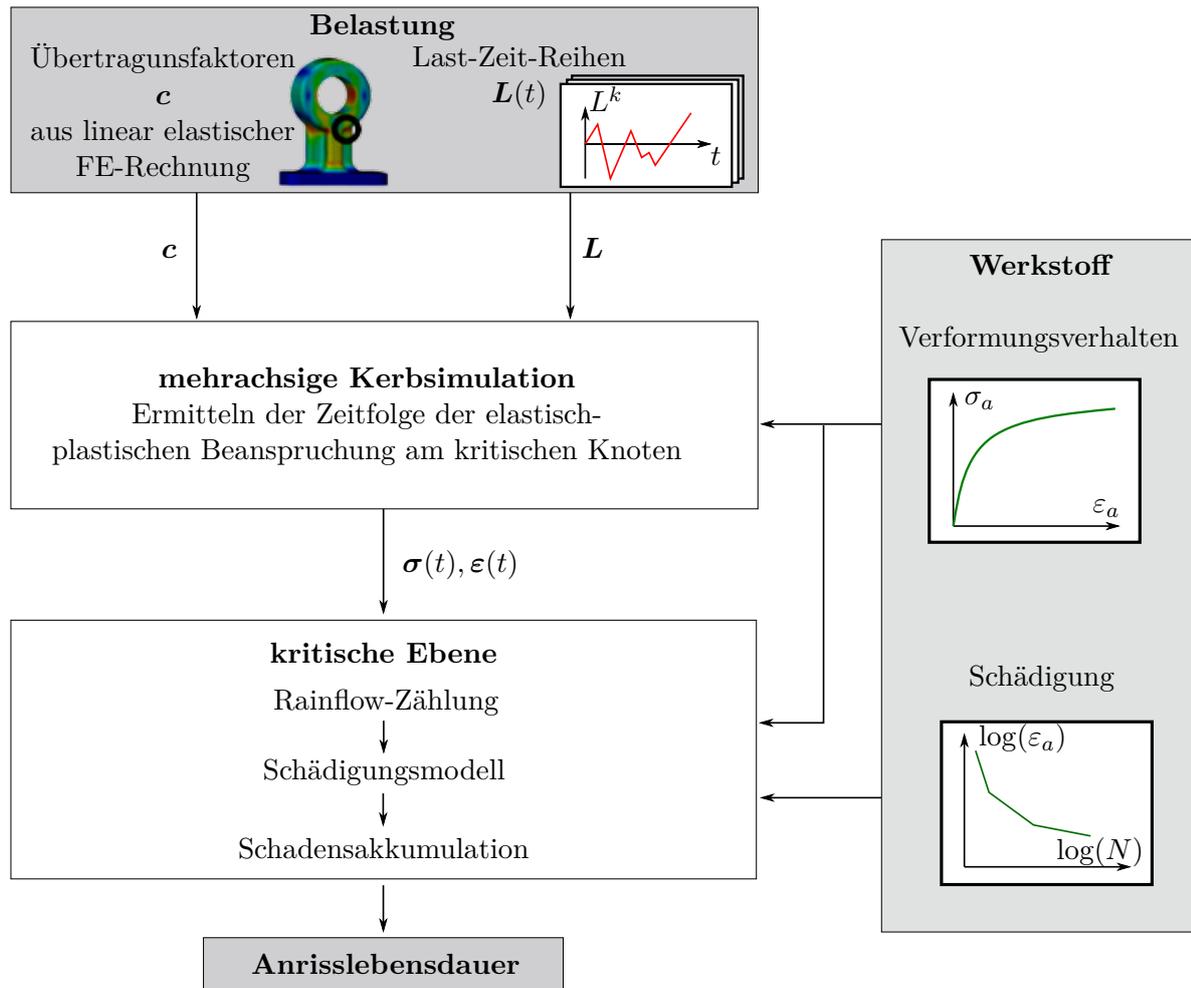


Abbildung 1.2: Ablaufschema des Berechnungsalgorithmus

beispielsweise die Ebene, welche die geringste rechnerische Ermüdungslebensdauer aufweist. Die Lebensdauer des Bauteils entspricht dann der für die kritische Ebene prognostizierten Lebensdauer. Die entwickelte Methodik zur Prognose der Anrisslebensdauer unter mehrachsiger, nichtproportionaler Betriebsbelastung basiert auf dem von Langlais et al. [Lang 97] vorgeschlagenen Konzept. In Abbildung 1.2 ist das grundlegende Ablaufschema des Algorithmus dargestellt. Zur Umsetzung aller in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmen wurde MATLAB verwendet.

Der Berechnungsalgorithmus besteht aus zwei getrennten Elementen:

- Es wird ein mehrachsiges Kerbsimulationsverfahren sowie ein inkrementelles Plastizitätsmodell benötigt, um die mehrachsig nichtproportionalen örtlich elastisch-plastischen Beanspruchungen zu simulieren.
- Zur Schädigungsbewertung der örtlichen Beanspruchungen wird ein Verfahren der kritischen Ebene in Kombination mit einer Methode zur Identifikation von Schädigungsereignissen in Form von geschlossenen Spannungs-Dehnungs-Hysteresen in der jeweils betrachteten Schnittebene benötigt. Zusätzlich ist ein Schädigungsmodell, das den identifizierten Hysteresen einen Schädigungsbeitrag zuordnet, erforderlich.

Die grauen Kästen in Abbildung 1.2 repräsentieren die benötigten Eingaben und die Ausgabe aus dem Algorithmus. Die grundlegend notwendigen Eingaben sind:

- die Last-Zeit-Reihen aller am Bauteil angreifenden Lastkanäle,
- geometrieabhängige Informationen in Form von Übertragungsfaktoren und weiteren Größen zur Ermittlung von Größeneinflüssen und
- das Verformungsverhalten sowie das Schädigungsverhalten des Werkstoffs.

Um die angestrebten Ziele der vorliegenden Arbeit zu erreichen, bedarf es einer Auswahl und gegebenenfalls der Weiterentwicklung geeigneter Methoden zur Simulation der lokalen Belastungen. Parallel dazu bietet die Literatur eine Vielzahl potenzieller Schädigungsmodelle, aus denen eine sinnvolle Auswahl getroffen werden muss. Diese ausgewählten Schädigungsmodelle erfordern anschließend eine detaillierte Parametrisierung und gegebenenfalls eine Erweiterung, um den Anforderungen der Untersuchung gerecht zu werden.

Die Strukturierung der vorliegenden Arbeit erfolgt anhand des skizzierten Algorithmus. Im Kapitel zur mehrachsigen Kerbsimulation (Kapitel 2) werden zunächst alle erforderlichen theoretischen Grundlagen und Verfahren erläutert. Anschließend werden die Ansätze kritisch bewertet, um geeignete Verfahren auszuwählen und weiterzuentwickeln. Dabei wird Wert auf eine Optimierung des Berechnungsalgorithmus gelegt, sodass eine effiziente Berechnung der örtlichen Beanspruchungen bei gleichzeitig minimaler Rechenzeit gewährleistet ist. Die Validierung der Kerbsimulationsverfahren erfolgt durch den Vergleich der Simulationsergebnisse mit Ergebnissen aus Finite-Elemente-Rechnungen sowie experimenteller Kerbdehnungsmessungen. Basierend auf dieser Validierung wird abschließend das für die Zielsetzung der Arbeit am besten geeignete Verfahren ausgewählt.

Kapitel 3 konzentriert sich auf Schädigungsmodelle für mehrachsige Belastungen. Zu Beginn werden sämtliche grundlegenden Konzepte erläutert, die für die Bewertung von Schädigungen mithilfe des Örtlichen Konzepts erforderlich sind. Anschließend erfolgt eine begründete Auswahl von drei Schädigungsmodellen, die im Detail untersucht werden sollen. Jedes dieser Modelle wird umfassend beschrieben und gegebenenfalls an die Anforderungen der vorliegenden Arbeit angepasst. Dies umfasst die Entwicklung neuer Methoden zur Definition von Belastungszyklen sowie die Ableitung von Abschätzmethode für Modellparameter, welche für die Werkstoffgruppen in der FKM-Richtlinie Nichtlinear gelten. Durch diese erweiterten Ansätze wird angestrebt, die Anwendbarkeit der Modelle im Rahmen der Zielsetzung dieser Arbeit zu verbessern und präzisere Ergebnisse zu erzielen.

In den Kapiteln 4 und 5 erfolgt die Validierung des Algorithmus durch eine Reihe von Vergleichen zwischen Prognosen der Berechnungsmethode und experimentellen Ergebnissen, um sicherzustellen, dass er den gestellten Anforderungen entspricht und zuverlässige Ergebnisse liefert.

In einem ersten Schritt wird die Validierung der Schädigungsmodelle unabhängig von den Kerbsimulationsverfahren durchgeführt. Hierfür werden in Kapitel 4 ungekerbte Werkstoffproben untersucht. Im Rahmen des Forschungsprojektes „Mehrachsigkeit örtlich“ wurden Versuchsreihen an zwei Werkstoffen durchgeführt. Die notwendigen Experimente zur Charakterisierung der Werkstoffe werden präsentiert und die ausgewählten Schädigungsmodelle parametrisiert. Nachfolgend wird ein Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen und den Vorhersagen der Schädigungsmodelle vorgenommen. Zusätzlich zur Anrisslebensdauer ist ein Schädigungsmodell der kritischen Schnittebene in der Lage, die Orientierung eines technischen Anrisses zu berechnen. Es wird untersucht, ob die Schädigungsmodelle in der Lage sind, die gemessenen Anrissorientierungen adäquat zu berechnen. Abschließend erfolgt eine statistische Auswertung des Vergleichs zwischen den berechneten und den gemessenen Anrisslebensdauern, um die Qualität der Lebensdauerprognosen mit den Schädigungsmodellen zu quantifizieren.

Im darauf folgenden Kapitel 5 wird eine Evaluierung des gesamten Berechnungsalgorithmus anhand von gekerbten Probengeometrien durchgeführt. Dabei werden zunächst die Versuchsreihen, die im Rahmen des Forschungsprojektes „Mehrachsigkeit örtlich“ an gekerbten Proben durchgeführt wurden, erläutert. Anschließend erfolgt eine detaillierte Darstellung des gesamten Algorithmus sowie der Interaktion der in den Kapiteln 2 und 3 ausgewählten Methoden und Modelle. Es wird

eine Übersicht über sämtliche erforderlichen Eingabegrößen gegeben und erläutert, wie diese zu bestimmen sind. Darüber hinaus erfolgt eine Bewertung der Qualität der Anrisslebensdauerprognose durch den Algorithmus. Diese Bewertung wird durch die Ergänzung der durchgeführten Versuche mit einer Datenbank von Versuchsergebnissen aus der Literatur unterstützt. Dabei wird eine statistische Analyse des Verhältnisses zwischen experimentell ermittelten und berechneten Anrisslebensdauern durchgeführt. Es wird untersucht, ob Modellparameter, ermittelt aus gemessenen Werkstoffkennwerten oder mit den entwickelten Methoden abgeschätzt, zu einer qualitativ unterschiedlichen Prognose der Anrisslebensdauer führen. Des Weiteren wird geprüft, ob die Anrisslebensdauern für Versuche mit nichtproportionaler Belastung mit der gleichen Qualität berechnet werden können wie für Versuche unter proportionaler Belastung. Schließlich wird die Genauigkeit des vorgestellten Algorithmus mit anderen Berechnungsmethoden verglichen, um seine Leistungsfähigkeit zu bewerten.

Im abschließenden Kapitel 6 werden die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsrichtungen gegeben.

## 2. Kerbnäherungsverfahren

Das „Örtliche Konzept“ benötigt die örtlichen Spannungen und Dehnungen als Eingabegrößen, um Schädigung berechnen zu können. Bei einfachen bzw. ungekerbten Werkstoffproben ist es möglich, die Dehnungen an der Oberfläche mittels Extensometer oder Dehnmessstreifen zu messen. Spannungen können durch vereinfachte Annahmen, wie zum Beispiel einer konstanten Spannungsverteilung über den Probenquerschnitt (siehe Kapitel 4), und Gleichgewichtsbedingungen aus gemessenen äußeren Lasten berechnet werden. Sollten Versuche an gekerbten Proben oder Bauteilen durchgeführt werden, ist es aufgrund komplexer Bauteil- oder Probengeometrien oft nicht möglich die erforderlichen Spannungen und Dehnungen durch Messungen oder einfache Rechnungen am Versagensort zu bestimmen. Für lange Beanspruchungs-Zeit-Verläufe sind auch numerische Berechnungen der gesamten Struktur, z. B. mittels FEM, selbst mit heutiger Hardware oft nicht in angemessener Zeit durchführbar. Aus diesem Grund wurden analytische Methoden entwickelt, um die elastisch-plastischen Spannungs- und Dehnungszustände lokal am Versagensort abzuschätzen und somit den Berechnungsaufwand erheblich zu reduzieren. Unter einem Kerbnäherungsverfahren wird hier ein Algorithmus verstanden, der in der Lage ist, die lokalen Beanspruchungen in einer geometrischen Kerbe auf Basis einer Elastizitätstheoretischen Lösung abzuschätzen. Die Spannungen und Dehnungen, die durch die Kerbnäherungsverfahren ermittelt werden, dienen als Grundlage für die Berechnung von Anrisslebensdauern mit Hilfe der Schädigungsmodelle aus Kapitel 3.

Die erste Kerbnäherungsmethode wurde von Neuber [Neub 61, Neub 22] für lokal einachsige, statische Beanspruchungen entwickelt. Topper et al. [Topp 67] erweiterten die Neuber-Regel, um das elastisch-plastische Verformungsverhalten unter zyklischen Belastungen vorherzusagen. Die Neuber-Regel [Neub 61] und die Methode der äquivalenten Verzerrungsenergiegedichte (ESED) von Molski und Glinka [Mols 81, Glin 85] sind die bekanntesten Methoden. Ye et al. [Ye 04] zeigen eine physikalische Verbindung zwischen der Neuber-Methode und der ESED-Methode durch energetische Betrachtungen. Es wurde gezeigt, dass die Neuber-Methode und die ESED-Methode als zwei Grenzfälle betrachtet werden können. Nach Ye et al. [Ye 04] wird innerhalb der Neuber-Methode keine Energiedissipation durch plastische Verformung berücksichtigt. In der ESED-Methode wird hingegen die gesamte plastische Arbeit, die während der Deformation geleistet wird, als Wärme abgegeben. Beide Verfahren nehmen an, dass die auftretenden plastischen Zonen auf einen kleinen Bereich um die Kerbe beschränkt sind. Es wurden verschiedene Erweiterungen und Anpassungen an die ursprüngliche Neubersche Regel und die ESED-Methode vorgeschlagen [Stow 50, Hard 51, Seeg 77, Seeg 80, Kuja 14]. Diese Verfahren verbessern die Genauigkeit der Näherungen vor allem für den Fall, dass größere plastische Deformationen auftreten, welche sich nicht auf einen kleinen Bereich in der Kerbe beschränken. Die zwei Verfahren, die heute in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] eingesetzt werden, sind: das Verfahren nach Seeger und Heuler [Seeg 80] und das Verfahren nach Seeger und Beste [Seeg 77].

Eine Erweiterung zur Anwendung bei proportionalen Belastungen wurde von Hoffmann und Seeger vorgeschlagen [Hoff 85a, Hoff 85b, Hoff 86]. In ihrem Ansatz werden Vergleichsspannungen und -dehnungen im Zusammenhang mit Neubers-Regel verwendet. Es existieren zwei Ansätze von Kerbnäherungsverfahren, die auch bei einer nichtproportionalen Belastung angewendet werden können:

1. die inkrementellen Verfahren als mehrachsige Erweiterungen der einachsigen Neuber-Regel oder der ESED-Methode und
2. die Ansätze auf Basis von Strukturfließflächen.

Die inkrementellen Verfahren stellen eine Erweiterung der Ansätze nach Neuber [Neub 61] oder der ESED-Methode nach Molski und Glinka [Mols 81, Glin 85] dar. Die bekanntesten Methoden sind dabei die von Moftakhar et. al. [Moft 95], Singh et al. [Sing 96, Sing 97] und Buczynski und Glinka [Bucz 97, Bucz 03] vorgestellten „incrementel Neuber“ und „incrementel ESED“ Methoden. Die Grundidee der Verfahren ist, dass die Näherungsformeln aus einachsigen Verfahren auf jede Tensorkomponente unabhängig voneinander zutreffen. Als Werkstoffmodell wird ein inkrementelles Plastizitätsmodell verwendet. Die konstitutiven Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen sind also auf Ebene von Spannungs- und Dehnungsinkrementen formuliert (daher der Name „inkrementelle Methoden“). Ein weiterer Ansatz zur Berechnung von mehrachsigen Spannungs- und Dehnungszuständen in der Kerbe ist der von Barkey vorgeschlagene Strukturfließflächenansatz [Bark 94]. Später entwickelten Köttgen et al. [Kött 95a] zwei verschiedene Methoden auf Basis des Strukturfließflächenansatzes, den sogenannten „Pseudo-Spannungsansatz“ und „Pseudo-Dehnungsansatz“. Beide etablieren zunächst eine Beziehung zwischen elastizitätstheoretischen Beanspruchungen und elastisch-plastischen Beanspruchungen. Es wird eine Strukturfließfläche auf Basis der von Mises Fließfunktion und der lokalen elastischen Beanspruchung formuliert. Das Verformungsverhalten des Bauteils wird dann mit einem inkrementellen Plastizitätsmodell, dem sogenannten Strukturmodell, beschrieben. Das Werkstoffverhalten wird durch das gleiche Plastizitätsmodell dargestellt. Ursprünglich wurde in [Kött 95a] das Modell von Mróz [Mróz 67, Mróz 69] verwendet. Zwischen Struktur- und Werkstoffverhalten wird dabei lediglich durch die Parameter des Plastizitätsmodells unterschieden. Zum Beispiel werden im Pseudo-Dehnungsansatz die elastizitätstheoretischen Dehnungen in eine konstitutive Beziehung zu den tatsächlich vorhandenen Spannungen gesetzt. Sobald die Spannungen aus den elastizitätstheoretischen Dehnungen berechnet sind, werden die elastisch-plastischen Dehnungen mithilfe des Werkstoffmodells berechnet. Daher erfordert die Methode, dass ein Werkstoffmodell zweimal aufgerufen wird. In einer späteren Studie adaptierten Hertel et al. [Hert 05] die Methoden von Köttgen, um das Plastizitätsmodell von Jiang [Jian 96a, Jian 96b] anzuwenden.

In diesem Kapitel werden zunächst wichtige Grundlagen behandelt, die erforderlich sind, um Kerbnäherungsverfahren für mehrachsige nichtproportionale Lasten zu verstehen und anzuwenden. Diese Grundlagen beinhalten sowohl Materialmodelle für einachsige, proportionale und allgemeine mehrachsige Beanspruchungen als auch die Kerbnäherungsverfahren für einachsige und mehrachsige Beanspruchungen. Ein Schwerpunkt wird hierbei auf die Kerbnäherungsverfahren für nichtproportionale Lasten, also die inkrementellen Verfahren und die Strukturfließflächenansätze, gelegt. Anschließend werden Algorithmen zum Lösen der Kerbnäherungsverfahren erarbeitet und die Kerbnäherungsverfahren werden auf die Erfassung von Eigenspannungen und -dehnungen nach dem Modell „dünne Randschicht“ aus [Seeg 84] erweitert. Es folgt eine Bewertung der Verfahren anhand von Vergleichen mit FE-Rechnungen und Kerbdehnungsmessungen.

In dieser Arbeit wird im Folgenden die Tensornotation verwendet ( $\sigma = \sigma_{ij}e_i \otimes e_j$ ). Falls nichts anderes angemerkt wird, gilt ebenfalls die Einsteinsche Summenkonvention.

## 2.1. Elastizitätstheoretische Lösung

An einer gekerbten Struktur greifen, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, mehrere Einzellasten  $L^1 \dots L^n$  an. An der unbelasteten Bauteiloberfläche herrscht ein ebener Spannungszustand (ESZ). Wird eine Koordinatenachse des Kerbkoordinatensystems, hier die lokale  $z$ -Achse, normal zur Oberfläche des Bauteils gewählt, besitzt der Spannungstensor drei von null verschiedene, unabhängige Komponenten. Dadurch lässt sich der Rechenaufwand erheblich reduzieren.

Ist darüber hinaus sowohl das Verformungsverhalten der Struktur linear als auch das Werkstoffverhalten linear elastisch, können die Komponenten der Kerbspannungen und -dehnungen direkt aus der angreifenden Last  $L^k$  und den Proportionalitätsfaktoren  $c_{ij}^k$  mit

$${}^e\sigma_{ij}^k = c_{ij}^k \cdot L^k \quad (2.1)$$

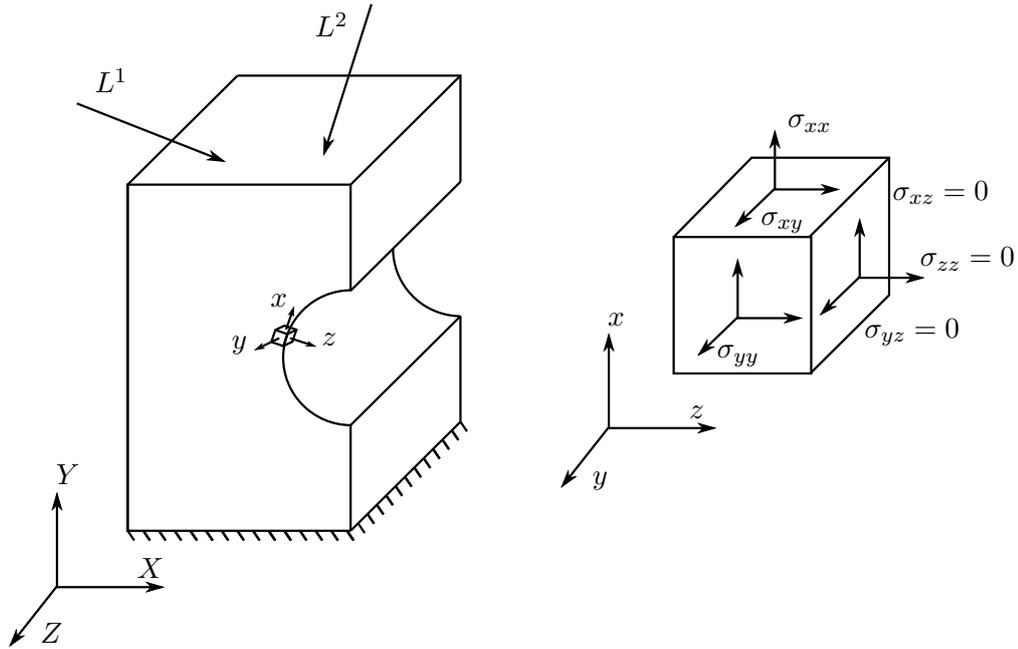


Abbildung 2.1: Spannungszustand in der Kerbe

bestimmt werden. Der linksseitige Index  $^e(\dots)$  bezeichnet hier stets eine Lösung auf Basis der linearen Elastizitätstheorie. Diese Notation wurde von Köttgen et al. [Kött 95a] übernommen. Spannungen oder Dehnungen auf Basis einer elastizitätstheoretischen Lösung werden als pseudo Spannungen und pseudo Dehnungen, als elastizitätstheoretische Spannungen und Dehnungen oder auch als fiktive Spannungen und Dehnungen bezeichnet.

Der hochgestellte Index  $(\dots)^k$  weist darauf hin, dass es sich um eine Spannung handelt, die durch den Lastkanal  $L^k$  hervorgerufen wurde. Die Proportionalitätsfaktoren  $c_{ij}^k$  können aus einer linear elastischen FE-Rechnung nach Gleichung (2.2) gewonnen werden. Dabei werden die lokalen (elastizitätstheoretischen) Spannungskomponenten  $^e\hat{\sigma}_{ij}^k$  an einem Knoten auf eine zugehörige und festgelegte Last  $\hat{L}^k$  bezogen.

$$c_{ij}^k = \frac{^e\hat{\sigma}_{ij}^k}{\hat{L}^k} \quad K_{ij}^k = \frac{^e\hat{\sigma}_{ij}^k}{\hat{S}^k} \quad (2.2)$$

Ebenso können vor allem bei einfachen Bauteilgeometrien Nennspannungen  $S^k$  definiert werden, die sich aus einer angreifenden Last ergeben. Die auf Nennspannungen bezogenen Proportionalitätsfaktoren  $K_{ij}^k$  werden auch als Kerbformzahlen bezeichnet. Da sowohl  $c_{ij}$  als auch  $K_{ij}$  zum Erzeugen des lokalen elastischen Spannungsverlaufs verwendet werden können, werden diese Größen im Weiteren zusammenfassend als Übertragungsfaktoren bezeichnet. Der gesamte Zeitverlauf der elastizitätstheoretischen Kerbspannungen ergibt sich dann aus der Superposition aller an der Struktur angreifenden Lastkanäle aus

$$^e\sigma_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n ^e\sigma_{ij}^k(t) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \cdot L^k(t) = \sum_{k=1}^n K_{ij}^k \cdot S^k(t). \quad (2.3)$$

Die zugehörigen elastizitätstheoretischen Kerbdehnungen können mit dem Hookeschen Gesetz

$$^e\varepsilon_{ij} = (C_{ijkl}^e)^{-1} ^e\sigma_{kl} \quad (2.4)$$

mit Hilfe des Elastizitätstensors  $C_{ijkl}^e$  berechnet werden. Bei isotropem Werkstoffverhalten ist der Elastizitätstensor durch zwei Werkstoffkonstanten vollständig bestimmt. In dieser Arbeit werden der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$  verwendet. Der Elastizitätstensor ist durch

$$C_{ijkl}^e = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.5)$$

definiert, wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta darstellt. Damit lässt sich die elastizitätstheoretische Lösung bei Kenntnis der Last-Zeitfolge  $L^k(t)$  und Proportionalitätsfaktoren  $c_{ij}^k$  (oder Kerbformzahlen  $K_{ij}^k$ ) für jeden angreifenden Lastkanal vollständig beschreiben. Für spannungsbasierte Konzepte (z. B. die FKM-Richtlinie Linear [Renn 12]) erfolgt die Berechnung der Anriss- oder Bruchlebensdauer direkt auf Basis der nach Elastizitätstheorie berechneten Kerbspannungen  ${}^e\sigma_{ij}(t)$ . Für die in dieser Arbeit verwendeten dehnungsbasierten Modelle werden jedoch elastisch-plastische Spannungs-Dehnungspfade benötigt. Die elastizitätstheoretischen Kerbspannungen (und/oder Dehnungen) stellen daher die Eingabegrößen der in diesem Kapitel erläuterten Kerbnäherungsverfahren dar. Sie werden als bekannt vorausgesetzt.

## 2.2. Lokal einachsige Beanspruchungen

Tritt in der Kerbe nur eine Beanspruchungskomponente auf, können Spannungen und elastisch-plastische Dehnungen näherungsweise anhand von analytischen Formeln bestimmt werden. Solche lokal einachsigen Beanspruchungen können zum Beispiel an dünnwandigen Strukturen auftreten, wenn die Dickenrichtung vernachlässigt werden kann. In dicken Bauteilen können durch Querdehnungsbehinderungen auch lokal mehrachsige Dehnungszustände durch eine Einzellast verursacht werden. Diese Dehnungsbehinderungen sind dann im Werkstoffgesetz zu berücksichtigen, z. B. indem mit Vergleichsspannungen und -dehnungen gearbeitet wird. Auch bei proportionaler Last können vereinfachend Vergleichsgrößen verwendet werden. Hier kann dann allerdings die Schädigungsbeurteilung nur auf Basis dieser Vergleichsgrößen getroffen werden, so z. B. in der FKM-Richtlinie Nichtlinear.

Für einfache Bauteil- oder Probengeometrien werden die in Abschnitt 2.1 eingeführten Proportionalitätsfaktoren häufig auf Nennspannungen  $S$ , anstelle der äußeren Lasten  $L$ , bezogen. Diese Nennspannungen sind dann an eine äußere Last und einen geeignet zu definierenden Nennquerschnitt gebunden. Für gekerbte Proben werden Nennspannungen meist auf den Brutto- oder Nettoquerschnitt der Probe bezogen. Der Bruttoquerschnitt bezeichnet dabei den ungeschwächten Querschnitt ohne Kerbe, während der Nettoquerschnitt den geschwächten Restquerschnitt mit Kerbe bezeichnet. Eine schematische Darstellung der Definition von Brutto- und Nettoquerschnitt einer durch Zug belasteten Scheibe mit Außenkerbe ist in Abbildung 2.2 dargestellt. In solchen Fällen wird nach Neuber [Neub 36] anstatt von Proportionalitätsfaktoren  $c$  von Kerbformzahlen  $K_t$  gesprochen. Wie in Gleichung (2.2) stellen die Kerbformzahlen

$$K_t = \frac{{}^e\sigma}{S} \quad (2.6)$$

das Verhältnis zwischen elastizitätstheoretischen Kerbspannungshöchstwert  ${}^e\sigma$  und einer Nennspannung  $S$  dar.

Die Kerbformzahlen hängen dabei von der Definition der Nennspannungen (bezogen auf Brutto- oder Nettoquerschnitt) sowie von den Abmessungsverhältnissen der betrachteten Kerbgeometrie ab, nicht von den Absolutwerten der Geometrie. Außerdem ergeben sich durch unterschiedliche Belastungen unterschiedliche Kerbformzahlen. So ist bei gleicher Probengeometrie eines gekerbten Rundstabes die Kerbformzahl bei Axialbelastung höher als bei Biegung [Rada 07]. Treten lokal mehrachsige Spannungszustände auf, kann für die Definition der Kerbformzahl auch mit Hilfe einer geeigneten Festigkeitshypothese auf Basis von Vergleichsspannungen erfolgen  $K_{t,v} = {}^e\sigma_v/S_v$ .

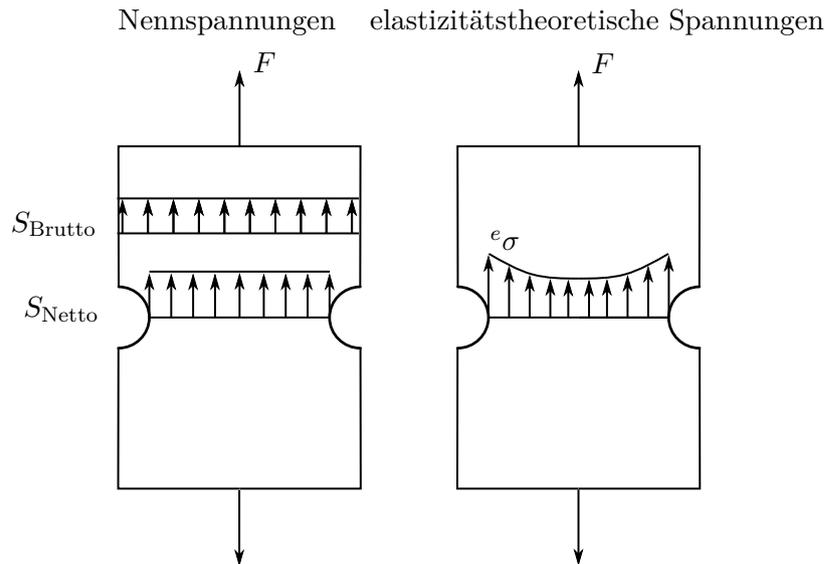


Abbildung 2.2: Schematische Übersicht über Brutto- und Netto-Nennspannungen bei einfacher Zugbelastung

Ebenso kann die Mehrachsigkeit aus Gleichung (2.2) beibehalten werden  $K_{ij} = e\sigma_{ij}/S$ . Kommt es weiterhin zu inelastischem Werkstoffverhalten im Kerbbereich, werden sowohl die inelastische Spannungsformzahl  $K_\sigma$  als auch die inelastische Dehnungsformzahl  $K_\varepsilon$  durch

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{S}, \quad K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{e} \quad (2.7)$$

definiert. Die Dehnung wird dabei auf die Nenndehnung  $e$  bezogen.

Nachdem im Kerbgrund die Fließgrenze überschritten wurde, hängen die Kerbformzahlen zusätzlich von der Belastungshöhe und vom Werkstoffgesetz ab.

Bei einem Kerbnäherungsverfahren sollen, auf Basis der elastischen Lösung, zunächst zwei Unbekannte (die elastisch-plastischen Kerbdehnungen  $\varepsilon$  und die Kerbspannungen  $\sigma$ ) ermittelt werden. Dazu werden zwei Gleichungen benötigt. Eine dieser Gleichungen ist durch das Werkstoffgesetz  $\varepsilon = f(\sigma)$  gegeben. Die zweite Gleichung liefert das jeweilige Näherungsverfahren. Im Folgenden werden das Verfahren nach Neuber [Neub 61, Neub 22] sowie zwei darauf aufbauende Verfahren nach Seeger und Heuler [Seeg 80] und Seeger und Beste [Seeg 77], die später zur Erweiterung der Strukturfließflächenansätze benötigt werden, erläutert.

### 2.2.1. Werkstoffverhalten unter einachsiger, zyklischer Beanspruchung

Die Wahl des Werkstoffgesetzes im Zusammenhang mit Kerbnäherungen ist weitestgehend frei. Die am häufigsten verwendete Gleichung, um den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei zyklischer Plastizität unter einachsiger Beanspruchung zu beschreiben, stammt von Ramberg und Osgood [Ramb 43]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.8)$$

Der Ansatz geht davon aus, dass sich die Dehnung additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten lässt. Gleichung (2.8) wird häufig auch für Vergleichsspannungen und -dehnungen angewandt, wobei dann  $\sigma_v$  und  $\varepsilon_v$  einzusetzen sind. Bei der Anwendung der Ramberg-Osgood Gleichung für zyklische Beanspruchungen im stabilisierten Zustand werden die Amplituden der Spannungen und Dehnungen ( $\sigma_a$  und  $\varepsilon_a$ )

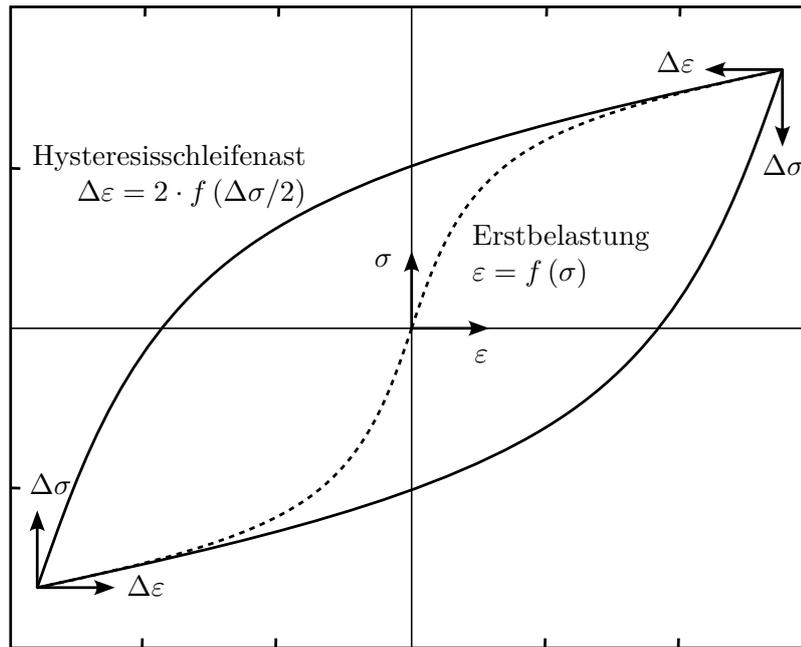


Abbildung 2.3: Masing-Verhalten des Werkstoffs nach [Clor 86]

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.9)$$

in Verbindung gesetzt. Zur Beschreibung des elastischen Anteils gilt weiterhin das Hookesche Gesetz  $\sigma = E\varepsilon$  mit dem Elastizitätsmodul  $E$  als einzigen Werkstoffparameter. Um das Werkstoffverhalten im plastischen Bereich darzustellen, sind zwei Kenngrößen nötig, der zyklische Verfestigungskoeffizient  $K'$  und der zyklische Verfestigungsexponent  $n'$ . In dem Fall, dass keine Versuchsergebnisse zum Anpassen der Werkstoffparameter vorliegen, können sie näherungsweise aus statischen Kennwerten, wie zum Beispiel der Zugfestigkeit, bestimmt werden. Abschätzmethoden sind im „Uniform Material Law“ [Bäum 90], in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] oder in [Wäch 16] zu finden.

Der stabilisierte Werkstoffzustand stellt den Zustand dar, nachdem alle transienten Werkstoffeffekte abgeklungen sind. Auf transiente Werkstoffeffekte wird in Abschnitt 2.3.1 eingegangen. Innerhalb des „Örtlichen Konzepts“ wird ebenfalls die Erstbelastungskurve durch die Ramberg-Osgood Gleichung (2.8) dargestellt. Damit wird bereits zu Beginn der zyklischen Beanspruchung ein stabilisiertes zyklisches Werkstoffverhalten unterstellt. In der Regel stellt der stabile Zustand den größten Anteil der Lebensdauer dar. Aus diesem Grund entsteht durch die getroffenen Vereinfachungen im Allgemeinen keine nennenswerte Fehleinschätzung der Ermüdungslebensdauer [Vorm 23].

Unter zyklischer Beanspruchung wird in metallischen Werkstoffen zusätzlich noch das Masing-Verhalten [Masi 25, Masi 26] beobachtet. Das Masing-Verhalten beschreibt das Werkstoffverhalten bei Lastumkehr, welches zur Abbildung eines zyklischen Werkstoffverhaltens notwendig ist. Wird der Werkstoff zum ersten Mal belastet, folgt der Verlauf im Spannungs-Dehnungs-Diagramm der sogenannten Erstbelastungskurve. Diese kann mit Gleichung (2.9) beschrieben werden. Kommt es zur Lastumkehr, so folgt der Spannungs-Dehnungs-Pfad einer Kurve, bei welcher der plastische Anteil doppelt so groß ist im Vergleich zur Erstbelastungskurve (Verdopplungsregel). Hierfür wird im Umkehrpunkt ein Koordinatensystem definiert, das entgegengesetzt zum vorherigen orientiert und hier mit  $\Delta$  gekennzeichnet ist. Dieser Verlauf kann mit  $\Delta\varepsilon/2 = f(\Delta\sigma/2)$  beschrieben werden. Aufgrund der sich ergebenden Hysterese wird der Verlauf der verdoppelten Kurve auch als Hystereseseast bezeichnet. Auf diese Weise ergibt sich der typische Hysteresenverlauf, der in Abbildung 2.3

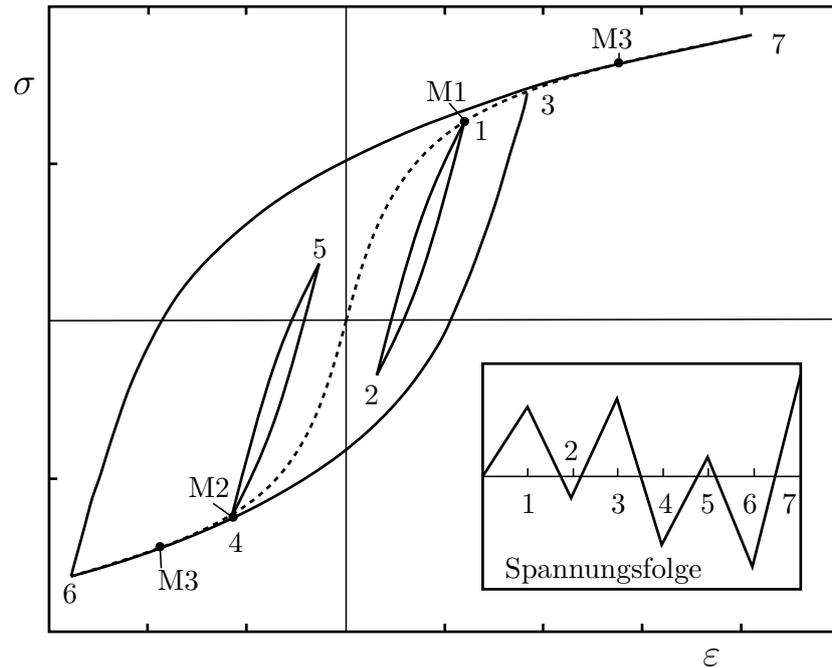


Abbildung 2.4: Spannungsfolge und zugehöriger Spannungs-Dehnungs-Pfad mit Memory Effekten nach [Clor 86]

dargestellt ist. Die Form eines Hystereseastes bei Verwendung des Werkstoffgesetzes nach Ramberg und Osgood ist durch

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.10)$$

gegeben.

Unter einer Betriebslast, d. h. einer Belastung mit variablen Amplituden, verläuft der Spannungs-Dehnungs-Pfad entweder auf der Erstbelastungskurve oder auf einem Hystereseast. Während des Durchlaufens der Last-Zeit-Folge kann der Spannungs-Dehnungs-Pfad zwischen beiden Verläufen wechseln. Welchem Verlauf er folgt, ist abhängig von den vorherigen Beanspruchungen. Es zeigen sich die drei in Abbildung 2.4 dargestellten Memory-Effekte. Nach Clormann und Seeger [Clor 86] sind diese wie folgt definiert:

- M1: Nach Schließen einer Hysterese, die auf der Erstbelastungskurve begonnen wurde, folgt der Spannungs-Dehnungs-Verlauf wieder der Erstbelastungskurve.
- M2: Nach Schließen einer Hysterese, die auf einem Hystereseast begonnen wurde, folgt der Spannungs-Dehnungs-Verlauf wieder dem ursprünglichen Hystereseast.
- M3: Ein auf der Erstbelastungskurve begonnener Hystereseast endet, sobald der Betrag der Spannung und Dehnung seines Startpunktes im gegenüberliegenden Quadranten wieder erreicht wird. Der Spannungs-Dehnungs-Verlauf folgt anschließend der Erstbelastungskurve.

### 2.2.2. Kerbnäherungsverfahren für einachsige Beanspruchung

Neben dem Werkstoffgesetz wird zur Ermittlung von elastisch-plastischen Kerbdehnungen und Kerbspannungen eine weitere Gleichung benötigt. Die wohl bekannteste dieser Gleichungen geht

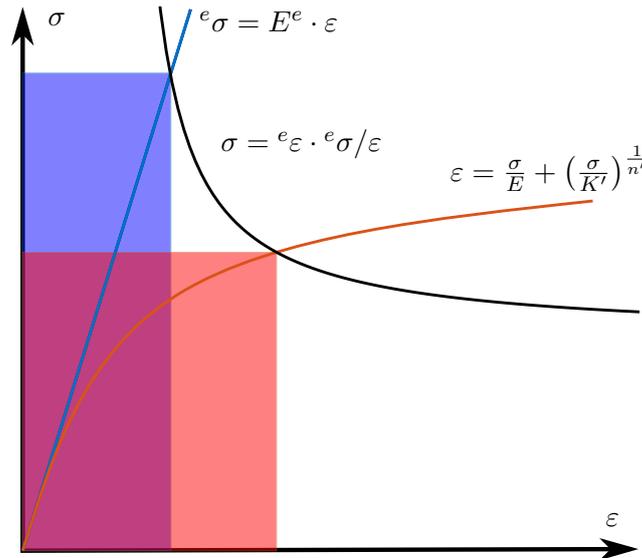


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung der Neuber-Regel

zurück auf Neuber [Neub61]. Die Neuber-Regel stellt eine Beziehung zwischen der elastischen Kerbformzahl und der Spannungs- und Dehnungsformzahl her. Sie besagt, dass auch nachdem lokal die Fließgrenze überschritten wird, das Produkt aus Spannungs- und Dehnungsformzahl mit dem Quadrat der Kerbformzahl übereinstimmt  $K_t^2 = K_\sigma \cdot K_\epsilon$ . Ausgedrückt in lokalen Spannungen und Dehnungen ergibt sich der Zusammenhang aus

$$\sigma \cdot \epsilon = {}^e\sigma \cdot {}^e\epsilon. \quad (2.11)$$

Es wird also davon ausgegangen, dass das Produkt aus Spannungen und Dehnungen (Verzerrungsenergie + komplementäre Energie) unabhängig vom Werkstoffgesetz konstant bleibt. Wird die Neuber-Regel in Abhängigkeit von Nennspannung geschrieben, ergibt sich

$$\sigma \cdot \epsilon = \frac{K_t^2 \cdot S^2}{E}. \quad (2.12)$$

Eine Veranschaulichung der Neuber-Regel ist in Abbildung 2.5 dargestellt.

Die Neuber-Regel [Neub61] geht davon aus, dass die plastische Zone auf den Kerbbereich beschränkt bleibt und damit klein im Vergleich zu den Abmessungen des Bauteils ist. Das bedeutet, dass im Nennquerschnitt keine plastischen Deformationen auftreten und zwischen Nennspannung und Nenndehnung der linear elastische Zusammenhang  $S = E \cdot e$  gilt. Diese Forderung trifft im Allgemeinen für scharfe Kerben mit großer Kerbformzahl in guter Näherung zu. Für Bauteile oder Proben mit milderer Kerbe können jedoch schon kurz nach Überschreiten der Fließgrenze in der Kerbe plastische Deformationen im Nennquerschnitt auftreten.

Von Seeger und Heuler [Seeg80] wird ein Verfahren vorgestellt, welches auch beim Auftreten von großen plastischen Zonen hinreichend gute Ergebnisse liefert. Die Annahme von rein elastischen Verformungen im Nennquerschnitt wird von dieser Methode fallen gelassen. Der Zusammenhang zwischen Nennspannungen  $S$  und Nenndehnungen  $e$  wird durch das Werkstoffgesetz  $e = f(S)$  beschrieben. Außerdem wird in [Seeg80] festgestellt, dass das Ergebnis der Neuber-Regel von der Definition der Nennspannung abhängt. Unterschiedliche Ergebnisse bei unterschiedlicher Nennspannungsdefinition treten jedoch erst auf, nachdem eine Grenzlast  $L > L_p$  überschritten wird. Die Last  $L_p$  stellt dabei die äußere Last dar, bei der sich der Nennquerschnitt vollständig im plastischen Zustand befindet.

Um die vollständige Plastifizierung des Nennquerschnittes zu berücksichtigen, wird eine modifizierte Nennspannungsdefinition  $S^* = S \cdot K_t / K_p$  eingeführt. Dabei ist  $K_p$  die, zuerst von Saal eingeführte [Saal 75], plastische Traglastformzahl. Sie ist durch

$$K_p = \frac{L_p}{L_F} \quad (2.13)$$

als das Verhältnis aus der plastischen Grenzlasterlast  $L_p$  und der Last  $L_F$ , bei der lokal in der Kerbe plastisches Fließen beginnt, definiert. Es wird von elastisch-ideal plastischem Werkstoffverhalten ausgegangen.

Die Last bei Fließbeginn  $L_F$  lässt sich einfach durch die Kerbformzahl  $K_t$ , bzw. den Proportionalitätsfaktor  $c$ , und die Fließspannung  $\sigma_F$  des Werkstoffs ermitteln,  $L_F = \sigma_F / c$ . Die plastische Grenzlasterlast  $L_p$  lässt sich nur bei einfachen Proben- oder Bauteilgeometrien analytisch ermitteln. Um  $L_p$  zu ermitteln, müssen im Normalfall Finite-Elemente-Rechnungen mit linear elastischem - ideal plastischem Werkstoffgesetz durchgeführt werden. Mit der neuen Definition der Nennspannung  $S^*$  und Nenndehnung  $e^*$  wird in [Seeg 80] der Zusammenhang nach Neuber wie folgt modifiziert:

$$\sigma \cdot \varepsilon = K_t^2 \cdot S^2 \frac{e^*}{S^*}. \quad (2.14)$$

Nichtlineares Verhalten des Nennquerschnittes wird über das nichtlineare Werkstoffgesetz  $e^* = f(S^*)$  berücksichtigt. Zu erkennen ist, dass bei linear elastischem Verhalten im Nennquerschnitt  $e^*/S^* = 1/E$  gilt. Es ergibt sich also weiterhin die Neuber-Regel.

In [Seeg 77, Seeg 80] wird angemerkt, dass Kerbnäherungsverfahren generell in der Form  $\varepsilon = F(K_t, S, \sigma, \dots) \cdot E e^*/S^*$  ausgedrückt werden können. Dabei ist  $E e^*/S^*$  ein Faktor, der das Auftreten vollplastischer Zustände berücksichtigt, und  $F(\dots)$  eine Funktion, die für einen speziellen Kerbfall oder eine Reihe von Kerbfällen und Lastsituationen hergeleitet wird. Die Neuber-Regel stellt eine dieser Funktionen dar. Eine Erweiterung mit den vorgestellten Sterntermen ( $S^*$ ,  $e^*$ ) lässt sich also prinzipiell auf jede Näherungsformel anwenden.

Eine weitere sehr verbreitete Näherungsformel wird von Seeger und Beste [Seeg 77, Best 81] angegeben:

$$\varepsilon = \sigma \cdot \left[ 1 - \frac{2 \ln(\cos(u))}{u^2} \cdot \frac{K_t^2 \cdot S^2}{\sigma^2} - \frac{K_t \cdot S}{\sigma} \right] \frac{e^*}{S^*} \quad \text{mit} \quad u = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(K_t \cdot S)/\sigma - 1}{K_p - 1}. \quad (2.15)$$

Sie zeichnet sich durch eine höhere Genauigkeit im Vergleich zur Neuber-Regel aus [Döri 06]. Besitzt ein Bauteil oder eine Probe nicht vernachlässigbare Abmessung in Dickenrichtung, entstehen auch bei Belastung durch einen Lastkanal bereits mehrachsige Beanspruchungszustände durch Dehnungsbehinderung. Dies ist bei der Anwendung der oben genannten Näherungsverfahren bei der Formulierung von Vergleichsgrößen ( $\sigma_v$  und  $\varepsilon_v$ ) zu berücksichtigen.

Im Sonderfall, dass lokal mehrachsige Beanspruchungen proportional zueinander auftreten, wurde von Hoffmann [Hoff 85a, Hoff 85b, Hoff 86] ein Verfahren auf Basis von einachsigen Kerbnäherungen vorgestellt, welches die Mehrachsigkeit in der Kerbe beibehält. Als Werkstoffmodell wird die finite Deformationstheorie nach Hencky [Henc 24] verwendet. Neben der Näherungsformel nach Neuber werden noch weitere Randbedingungen benötigt. Hierzu wird zum Beispiel die Annahme eines konstanten Dehnungsverhältnisses zwischen elastischer und elastisch-plastischer Lösung vorgeschlagen. Die Qualität der Kerbnäherungsverfahren lässt sich durch Vergleiche mit FE-Rechnungen oder durch einen Vergleich mit gemessenen Kerbdehnungen zeigen.

In praktischen Anwendungen ist es erforderlich, den Zusammenhang zwischen den auf das Bauteil wirkenden äußeren Belastungen und den Kerbspannungen und/oder Kerbdehnungen nach dem Überschreiten der Fließgrenze zu verstehen. Diese Beziehung wird häufig als Bauteilfließkurve (BFK) bezeichnet [Rada 07], so auch im Zusammenhang mit den Strukturfließflächenansätzen aus Abschnitt 2.3.6.

## 2.3. Lokal mehrachsige Beanspruchungen

Die oben beschriebenen Näherungsformeln für elastisch-plastische Kerbbeanspruchungen können nur bei einachsigen oder proportionalen Lasten angewendet werden. Für den allgemeinen Fall einer nichtproportionalen zyklischen Betriebslast werden elastisch-plastische Kerbbeanspruchungen mit anderen Verfahren abgeschätzt. Im Rahmen der Schädigungsbewertung mit den in Kapitel 3 beschriebenen Modellen muss eine realitätsnahe Darstellung der Kerbbeanspruchungen erfolgen, ohne dass die mehrachsige Natur der Beanspruchungen verloren geht. Dazu wird ein Werkstoffmodell benötigt, das die vielseitigen Effekte, die metallische Werkstoffe unter allgemeiner zyklischer Belastung zeigen, in guter Näherung beschreiben kann.

### 2.3.1. Werkstoffeffekte

Der Inhalt dieses Abschnitts beschäftigt sich mit Effekten, die metallische Werkstoffe bei Raumtemperatur unter zyklischer einachsiger und proportionaler Beanspruchung, insbesondere aber auch unter nichtproportionaler Beanspruchung zeigen. Diese Effekte sind sowohl vom Werkstoff selbst als auch von der aufgetragenen Belastung abhängig.

#### 2.3.1.1. Bauschinger Effekt

Wird ein Werkstoff in Zug- oder Druckrichtung in den plastischen Bereich hinein belastet, anschließend entlastet und in die entgegengesetzte Richtung belastet, so wird beobachtet, dass Fließen bei einem deutlich niedrigeren Spannungsbetrag einsetzt als bei der ursprünglichen Belastung. Auch wenn der Werkstoff eine ursprünglich isotrope Fließfläche besitzt, geht diese Isotropie im Laufe der Verfestigung verloren. Dieses Verhalten wurde erstmals von Bauschinger [Baus 80, Baus 86] beschrieben. Abbildung 2.6 zeigt eine Skizze des Bauschinger Effekts.

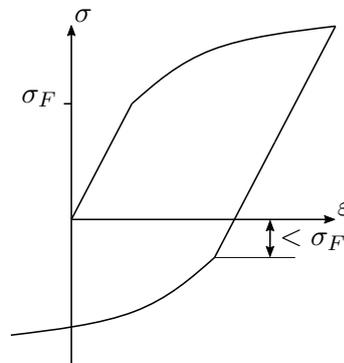


Abbildung 2.6: Bauschinger Effekt

#### 2.3.1.2. Zyklische Ver- und Entfestigung

Unter zyklischer Ver- oder Entfestigung wird ein transienter Vorgang verstanden, durch den sich die Amplituden der Spannungen oder Dehnungen im Verlauf einer zyklischen Belastung ändern.

Wird auf eine Werkstoffprobe beispielsweise eine wechselnde Beanspruchung mit konstanten Spannungsamplituden  $\sigma_a$  aufgebracht, so wird beobachtet, dass mit zunehmender Zyklenzahl die Breite der Hysteresen zunimmt. Es treten immer höhere Dehnungsamplituden auf. Die über die Schwingenzahl aufgetragenen Dehnungsamplituden bilden die sogenannten Wechselverformungskurven. Das Phänomen einer zunehmenden Dehnungsamplitude bei konstanter spannungskontrollierter

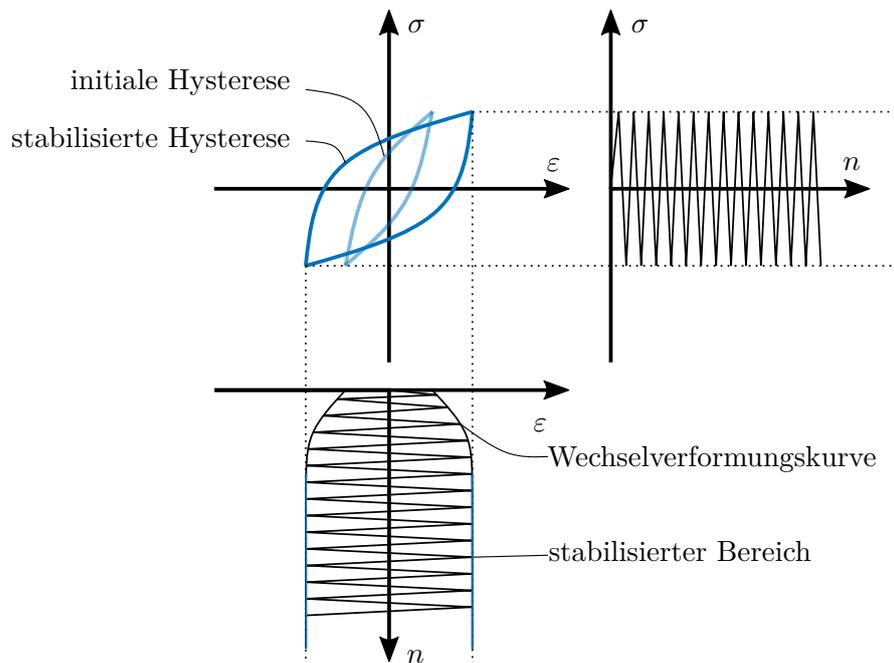


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung der zyklischen Entfestigung bei Lastkontrolle

Beanspruchung wird als zyklische Entfestigung bezeichnet, siehe Abbildung 2.7. Einige Werkstoffe zeigen auch den gegenteiligen Effekt der zyklischen Verfestigung. Hier werden mit steigender Schwingenspielzahl engere Hysteresen, d. h. kleinere Dehnungsamplituden beobachtet. Es sei darauf hingewiesen, dass eine Vorgabe der Spannung während eines Experimentes nur indirekt über die Vorgabe von äußeren Lasten und weitere Annahmen, z. B. eine konstante Spannungsverteilung über den Probenquerschnitt, erreicht werden kann.

Das zyklische Ver- und Entfestigen wird ebenfalls bei Versuchen unter der Vorgabe von Dehnungsamplituden festgestellt. Unter Dehnungskontrolle wird als zyklische Verfestigung eine Zunahme der beobachteten Spannungsamplituden bezeichnet. Eine Abnahme der Spannungsamplituden stellt eine zyklische Entfestigung dar. Auch bei Dehnungskontrolle stellt sich ein stabilisierter Zustand ein.

Ob eine zyklische Ver- oder Entfestigung auftritt, kann ebenfalls vom aufgebrauchten Lastniveau abhängen. So kann ein Werkstoff auf unterschiedlichen Lastniveaus beide Phänomene aufweisen. Sollte nach einer bestimmten Anzahl von Lastwechseln die zyklische Ver- oder Entfestigung zum Stillstand kommen, so wird von einem stabilisierten Werkstoffzustand gesprochen.

Da der stabilisierte Zustand oft den größten Teil der Ermüdungslebensdauer ausmacht, ist er von besonderer Bedeutung für die Anwendung des „Örtlichen Konzepts“. Die Modellierung der transienten Vorgänge wird oft vernachlässigt.

### 2.3.1.3. Mittelspannungsrelaxation und zyklisches Kriechen

Werden bei spannungs- oder dehnungskontrollierten Versuchen Mittelspannungen oder -dehnungen aufgebracht, treten weitere Phänomene auf. Unter Dehnungskontrolle nehmen die Mittelspannungen über die Schwingenspielzahl ab. Es wird von einer Mittelspannungsrelaxation gesprochen. Zyklisches Kriechen oder „Ratchetting“ bezeichnet unter Spannungskontrolle zunehmende Mitteldehnungen. Dieses Phänomen ist schematisch in Abbildung 2.8 dargestellt.

In der Regel wird eine stabilisierte Kombination aus Mittelspannung und Mitteldehnung erreicht (Shake-Down). Im Fall eines spannungsgeregelten Experiments kann jedoch auch instabiles zyklisches Kriechen auftreten. Die Stabilisierung der Mittelspannung und Mitteldehnung unterscheidet sich von der Stabilisierung der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei zyklischer Ver- und Entfestigung.

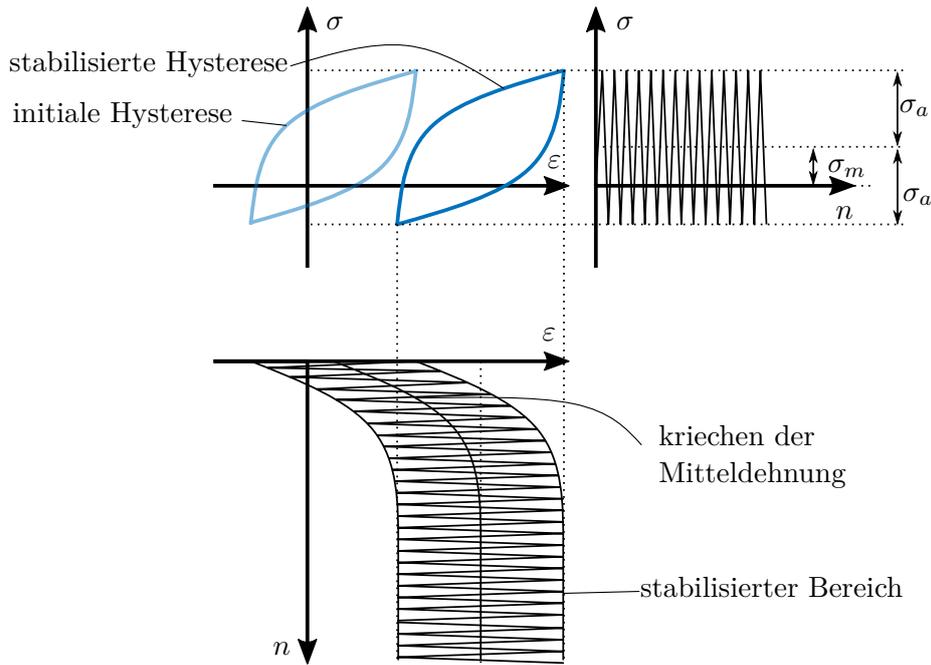


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung des Mitteldehnungskriechens bei Lastkontrolle

Zyklisch stabilisierte Kurven können trotzdem in Bezug auf die Mittelwerte relaxieren oder kriechen, [Rada07]. Im Einflussbereich von geometrischen Kerben können beide Phänomene gleichzeitig auftreten.

Ratchetting und Mittelspannungsrelaxation können die Ermüdungslebensdauer von Bauteilen stark beeinflussen. Vor allem auftretende Mittelspannungen spielen eine wichtige Rolle in der Festigkeitsbewertung. So kann sich ein Abbau von Druckmittelspannungen negativ auf die Ermüdungslebensdauer eines Bauteils auswirken, während ein Abbau von Zugmittelspannungen lebensdauerverlängernd wirkt.

#### 2.3.1.4. Nichtproportionale Verfestigung

Ein Werkstoffeffekt, der sich nur unter nichtproportionaler Beanspruchung zeigt, ist die nichtproportionale Verfestigung. Unter dieser Art von Beanspruchung zeigen metallische Werkstoffe zusätzlich eine zyklische Verfestigung, die bei einachsiger oder proportionaler Beanspruchung nicht auftritt. Dieser Effekt wurde bereits 1978 von Lamba [Lamb 78] an Kupfer festgestellt und wenig später von Kanazawa [Kana 79] auch an CrMoV-Stahl.

Bei dehnungsgeregelten Versuchen an ungekerbten Proben zeigt sich unter nichtproportionaler Beanspruchung, dass zum Erreichen der vordefinierten axialen Dehnung und Gleitung höhere Spannungen im Vergleich zu proportionalen oder einachsigen Beanspruchungen benötigt werden. Zurückzuführen ist der Effekt auf das Ansprechen unterschiedlicher Gleitebenen, die sich gegenseitig behindern. Ein Beispiel für nichtproportionale Verfestigung ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Gezeigt sind die gemessenen Hysteresen für proportionale und nichtproportionale Beanspruchung in einem Diagramm. Beide Versuche wurden unter Vorgabe der axialen Dehnung  $\varepsilon$  und der Gleitung  $\gamma$  durchgeführt. Die nichtproportionale Beanspruchung ist in diesem Fall eine  $90^\circ$  Phasenverschiebung zwischen dem Dehnungs- und Gleitungssignal. Zu erkennen ist, dass sich unter nichtproportionaler Last deutlich höhere Spannungen einstellen als bei proportionaler Beanspruchung.

Die nichtproportionale Verfestigung stellt ein hochgradig transientes Phänomen dar, [Döri06]. Wenn Proben, die einer nichtproportionalen Vorbeanspruchung unterzogen wurden, erneut einer proportionalen Belastung unterzogen werden, zeigt sich, dass die zusätzliche Verfestigung innerhalb

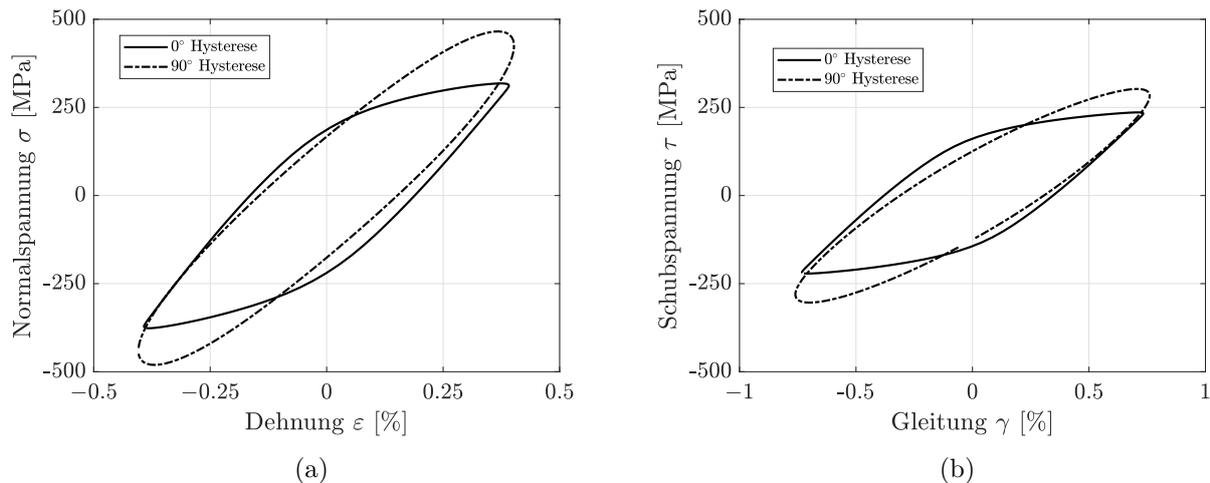


Abbildung 2.9: Normalspannungs-Dehnungs-Hysterese (a) und Schubspannungs-Gleitungs-Hysterese (b) bei proportionaler und 90° phasenverschobener Sinus-Beanspruchung für EN-GJS-500-14 aus dem Projekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22]

eines kurzen Zeitraums von nur wenigen Schwingungszyklen abklingt und schließlich verschwindet. Umgekehrt stellt sich bei einer gleichbleibenden Nichtproportionalität der aufgetragenen Belastung nach nur wenigen Schwingungen ein stabilisierter Zustand ein.

Durch die zusätzliche Verfestigung ist eine Verkürzung der Lebensdauer bei Beanspruchung unter Dehnungskontrolle zu erwarten, da die Spannungsamplituden im Vergleich zur proportionalen Belastung ansteigen. Unter Spannungskontrolle ist dagegen durch die in diesem Fall abnehmenden Dehnungsamplituden eine Lebensdauererlängerung zu erwarten.

### 2.3.2. Werkstoffmodelle für mehrachsige Beanspruchungen

Ein Ansatz zur Beschreibung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens von Metallen sind inkrementelle Plastizitätsmodelle. Diese bilden eine konstitutive Beziehung zwischen inkrementellen Zuwächsen von Spannungen und Dehnungen ab. Unter zyklischer Beanspruchung sind besonders kleine Deformationen von Bedeutung, sodass der Dehnungstensor additiv in einen elastischen Anteil  $\varepsilon_{ij}^{el}$  und einen plastischen Anteil  $\varepsilon_{ij}^{pl}$  zerlegt werden kann:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}. \quad (2.16)$$

Für den Zusammenhang zwischen Spannungen und elastischen Dehnungen gilt das linear elastische Werkstoffgesetz:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^{el} = C_{ijkl}^e (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{pl}). \quad (2.17)$$

Weiterhin muss eine Grenze des elastischen Bereichs festgelegt werden. Außerhalb des elastischen Bereichs folgt der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen einer nichtlinearen Beziehung und ist abhängig von der Belastungsgeschichte. Diese Trennung wird durch die Fließbedingung  $F(\dots)$  erreicht. Für den elastischen Bereich gilt  $F < 0$ , für den plastischen Bereich gilt  $F \geq 0$ . Für nicht viskoses plastisches Werkstoffverhalten, das hier betrachtet wird, ist  $F > 0$  ausgeschlossen. Eine allgemeine Formulierung der Fließbedingung ist

$$F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \sigma_F) = 0. \quad (2.18)$$

Sie ist abhängig von den Spannungen und weiteren inneren Variablen, die zur Modellierung von Verfestigung verwendet werden. Es existiert eine Vielzahl von Fließbedingungen in der Literatur. Für

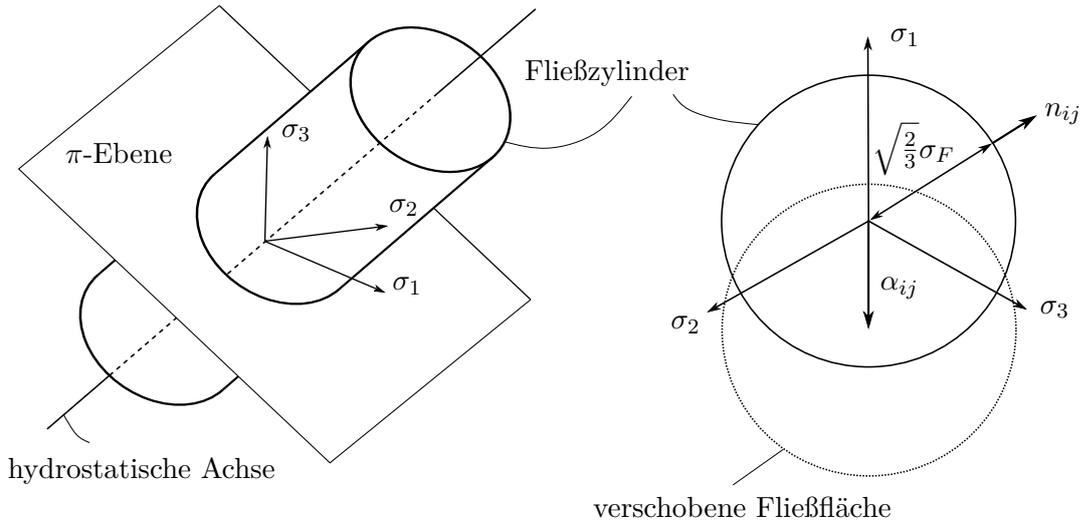


Abbildung 2.10: Geometrie der Fließbedingung nach von Mises (links) im Hauptspannungsraum und (rechts) in der  $\pi$ -Ebene

Metalle haben sich vor allem die Theorien nach Tresca [Tres 64] und von Mises [Mise 13] durchgesetzt. Hier wird die von Mises Bedingung

$$F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \sigma_F) = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij})} - \sigma_F = 0 \quad \text{mit } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad (2.19)$$

genutzt. Sie besagt, dass ein Werkstoff plastisch zu fließen beginnt, sobald die Gestaltänderungsenergiedichte einen für den Werkstoff kritischen Wert erreicht. Die Fließbedingung nach von Mises kann im Hauptspannungsraum als Zylinder dargestellt werden, siehe Abbildung 2.10.

Die Tensorkomponenten  $s_{ij}$  stellen den deviatorischen Anteil des Spannungstensors dar. Die Lage des Mittelpunktes der Fließfläche wird über den Backstresstensor  $\alpha_{ij}$  bestimmt. Die Größe  $\sigma_F$  bezeichnet die Fließspannung des Werkstoffs.

Die Fließregel bestimmt das Inkrement der plastischen Dehnung  $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ . Die Fließregel wird über eine Potenzialbeziehung aufgestellt. Für Metalle hat sich die Fließbedingung  $F = 0$  als Potenzialfläche bewährt. Eine Fließregel der Form

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.20)$$

wird als assoziierte Fließregel bezeichnet. Das Inkrement der plastischen Dehnungen ist also proportional zum Gradienten an die Fließfläche im Spannungsraum. Die Variable  $\lambda$  ist dabei der Proportionalitätsfaktor. Damit steht das Inkrement der plastischen Dehnungen normal zur Fließfläche. Die Normale an die Fließfläche  $n_{ij} = \sqrt{2/3} \cdot \partial F / \partial \sigma_{ij}$  ist ebenfalls in Abbildung 2.10 dargestellt. Während eines Belastungsschrittes muss entschieden werden, ob eine weitere plastische Belastung oder eine Entlastung in den elastischen Bereich stattfindet. Diese Entscheidung wird nach der Bedingung

$$d\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \begin{cases} > 0 & \text{plastische Belastung} \\ = 0 & \text{neutrale Last} \\ < 0 & \text{elastische Entlastung} \end{cases} \quad (2.21)$$

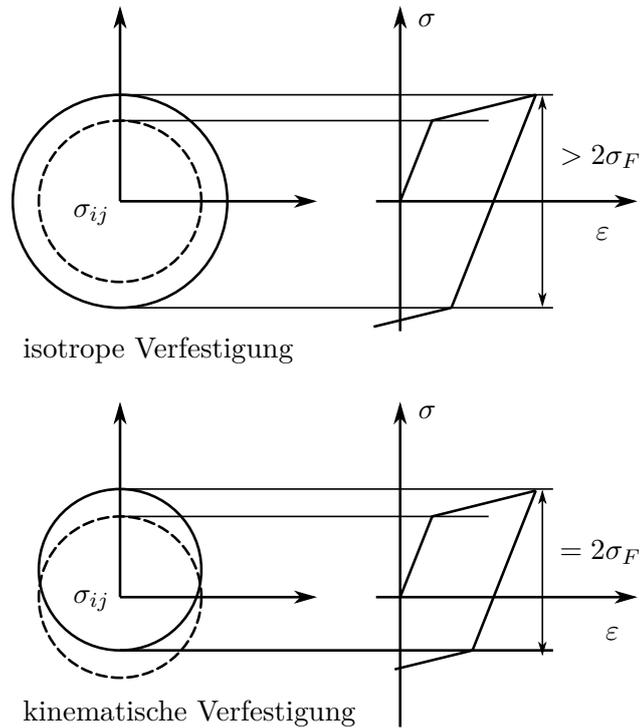


Abbildung 2.11: Schematische Darstellung der isotropen und kinematischen Verfestigung

getroffen. Ist der Winkel zwischen der Fließflächennormalen  $n_{ij}$  und dem Spannungszinkrement  $d\sigma_{ij}$  kleiner als  $90^\circ$ , so findet weiterhin eine plastische Belastung statt. Ist der Winkel größer als  $90^\circ$ , so zeigt das Spannungszinkrement in die Fließfläche und es findet eine elastische Entlastung statt. Da Spannungen außerhalb der Fließfläche ( $F > 0$ ) ausgeschlossen sind, muss während eines Belastungsschritts die Konsistenzbedingung

$$dF = 0 \quad (2.22)$$

erfüllt bleiben. Aus ihr kann der plastische Multiplikator  $\lambda$  aus Gleichung (2.20) berechnet werden. Da sich metallische Werkstoffe verfestigen, müssen auch größere Spannungen als die ursprüngliche Fließspannung  $\sigma_F$  realisiert werden können. Demnach kann die Fließfläche keine statische Fläche sein. Sie muss sich während der Belastung im Spannungsraum verändern. Im Wesentlichen werden zwei Arten von Verfestigung zur Modellierung verwendet. Eine isotrope Expansion der Fließfläche (isotrope Verfestigung, modelliert durch eine Vergrößerung des Radius der Fließfläche) und eine Translation der Fließfläche (kinematische Verfestigung, modelliert durch eine Verschiebung des Mittelpunkts). Die beiden Arten der Verfestigung sind in Abbildung 2.11 schematisch dargestellt. Die isotrope Verfestigung wird insbesondere zur Modellierung von zyklischer Ver- und Entfestigung verwendet. Die kinematische Verfestigung wird genutzt, um den Bauschinger Effekt und zyklisches Kriechen oder Relaxieren zu modellieren. Einzelne Plastizitätsmodelle unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Entwicklungsgleichungen der einzelnen Verfestigungen.

Zur Berücksichtigung der Beanspruchungsgeschichte wird die plastische Bogenlänge  $p$  definiert:

$$p = \int dp. \quad (2.23)$$

Dazu existieren zwei Arten von Modellen. Die Größe  $dp$  kann als plastische Arbeit während eines Belastungszinkrements definiert werden. Diese Modelle werden als „work hardening“ Modelle bezeichnet. Eines der bekanntesten Modelle dieser Art ist das Materialmodell nach Mróz [Mróz 67,

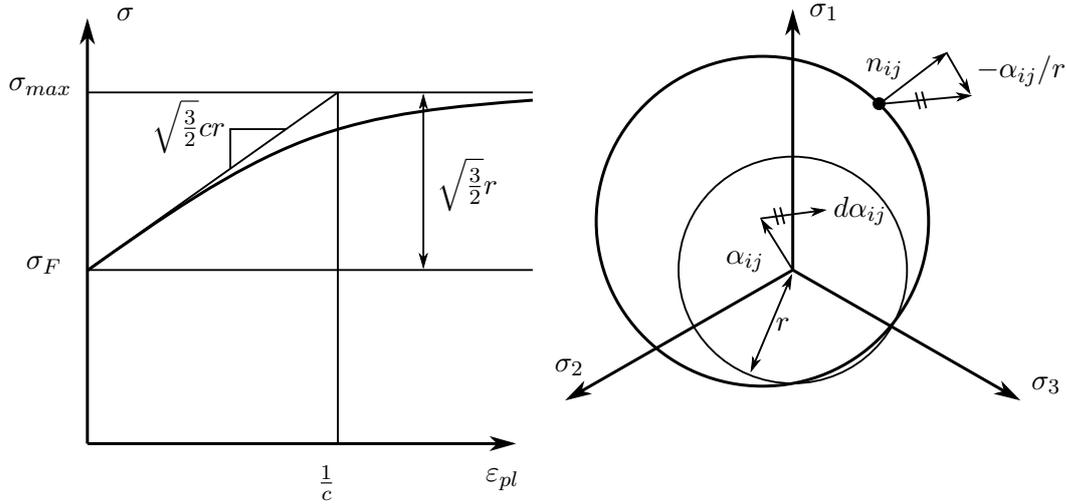


Abbildung 2.12: Nichtlineare Verfestigungskinetik von Armstrong und Frederick nach [Vorm 23]

Mr6z 69]. In den letzten Jahren haben sich jedoch eher „strain hardening“ Modelle durchgesetzt. Hier wird  $dp$  durch

$$dp = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{pl} d\varepsilon_{ij}^{pl}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\varepsilon_{ij}^{pl}\| \quad (2.24)$$

als einachsige plastische Vergleichsdehnung definiert. Da  $dp \geq 0$  gilt, wird  $p$  auch als akkumulierte plastische Vergleichsdehnung bezeichnet. In der Literatur wurden eine Vielzahl solcher Modelle formuliert. Von Prager [Prag 55] wird ein linearer Zusammenhang zwischen der kinematischen Verfestigung und den plastischen Dehnungen vorgeschlagen. Die Entwicklungsrichtung des Backstresstensors folgt wie die Entwicklungsrichtung der plastischen Dehnungen der Fließflächennormalen. Dieser Ansatz wird von Armstrong und Frederick [Arms 66] um einen Term der dynamischen Erholung erweitert:

$$d\alpha_{ij} = c(rn_{ij} - \alpha_{ij}) dp. \quad (2.25)$$

Der Backstresstensor  $\alpha_{ij}$  entwickelt sich zunächst in Richtung der Fließflächennormale  $n_{ij}$ . Die dynamische Erholung wird durch die Berücksichtigung der gegenwärtigen Position des Backstresstensors erreicht.

In Abbildung 2.12 ist eine Darstellung der Verfestigungskinetik nach Armstrong und Frederick [Arms 66] gegeben. Unter einachsiger Belastung ergibt sich die in Abbildung 2.12 links dargestellte Fließkurve im  $\sigma - \varepsilon_{pl}$  Diagramm. Der plastische Tangentenmodul  $H$  ist die Steigung der Fließkurve:

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_{pl}} = \sqrt{\frac{3}{2}} cr. \quad (2.26)$$

Für die lineare Verfestigungsregel nach Prager [Prag 55] (Verfestigungsregel (2.25) ohne den dynamischen Erholungsterm  $-\alpha_{ij}$ ) ergibt sich ein plastischer Tangentenmodul von  $H = \sqrt{3/2} cr$ . Unter monotoner proportionaler Beanspruchung führt der von Armstrong und Frederick eingeführte Erholungsterm zu einer kontinuierlichen Abnahme des plastischen Tangentenmoduls. Bei nicht-proportionaler Beanspruchung ändert sich zudem die Verschiebungsrichtung der Fließfläche, siehe Abbildung 2.12 rechts.

Die Form der Hysterese ist damit durch die Wahl der beiden Parameter  $c$  und  $r$  festgelegt. Der Parameter  $r$  lässt sich dabei als ein Begrenzungsradius für den Backstresstensor in einer Deviatorenebene

interpretieren, siehe Abbildung 2.12 rechts. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Backstresstensor gegen seinen Grenzwert entwickelt, wird über den Parameter  $c$  gesteuert.

Zur besseren Beschreibung der Form von Spannungs-Dehnungs-Hysteresen wird von Chaboche et al. [Chab 79] eine additive Zusammensetzung der Entwicklungsgleichung des Backstresstensors vorgeschlagen. Hier setzt sich der Backstresstensor additiv aus verschiedenen Teilbackstresstensen zusammen:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^M \alpha_{ij}^k. \quad (2.27)$$

Unter zyklischer Wechselbeanspruchung mit Mittelasten zeigen metallische Werkstoffe eine kumulative plastische Verformung (zyklisches Kriechen). Modelle, basierend auf dem Armstrong und Frederick Ansatz, überschätzen diesen Effekt. Damit der Effekt des zyklischen Kriechens besser abgebildet werden kann, führen mehrere Autoren [Chab 91, Ohno 93a, Abde 00, Jian 96a, Döri 03] verschiedene Wichtungsfunktionen  $w^k$  ein, die den dynamischen Erholungsterm der Armstrong und Frederick Gleichung beeinflussen.

In dieser Arbeit wird das Werkstoffverhalten in seinem stabilisierten Zustand betrachtet. Zur Modellierung des zyklischen Deformationsverhaltens des Werkstoffs wird die kinematische Verfestigung nach Ohno und Wang [Ohno 93a, Ohno 93b] angewendet. Die Entwicklungsgleichung der kinematischen Verfestigung dieses Modells ist durch

$$d\alpha_{ij}^k = c^k \left( r^k n_{ij} - w^k \alpha_{ij}^k \right) dp \quad (2.28)$$

mit

$$w^k = \left( \frac{\|\alpha_{mn}^k\|}{r^k} \right)^{\chi^k} \left\langle n_{op} \frac{\alpha_{op}^k}{\|\alpha_{st}^k\|} \right\rangle \quad (2.29)$$

gegeben. Darin sind  $c^k$  und  $r^k$  Modellparameter, die zur Modellierung der Hystereseform verwendet werden. Der Term  $w^k$  bezeichnet die Wichtungsfunktion des Erholungsterms. Der Parameter  $\chi^k$  wird zur Modellierung des zyklischen Kriechens verwendet.

In der Literatur existieren eine Vielzahl komplexerer Modelle als das Ohno/Wang Modell. Zu nennen sind hier vor allem die Modelle nach Jiang [Jian 96a, Jian 96b] und Döring [Döri 03]. Vor allem das Döring Modell besitzt die Möglichkeit, die nichtproportionale Verfestigung als transienten Werkstoffeffekt zu modellieren. Diese Modelle benötigen allerdings meist eine erheblich höhere Anzahl an Parametern, die aus einer Vielzahl an zum Teil sehr speziellen Versuchen ermittelt werden müssen. Ziel dieser Arbeit ist es, einen Algorithmus zu finden, mit dem Ermüdungslebensdauern unter nichtproportionaler Last mit einem Minimum an Eingabedaten zuverlässig berechnet werden können. Die Wahl des Ohno/Wang Modells begründet sich vor allem damit, dass sich das für die rechnerische Lebensdauerabschätzung wichtige zyklische Kriechen und Relaxieren in guter Näherung zu experimentellen Ergebnissen beschreiben lässt. Dazu werden im Vergleich zu ähnlichen Plastizitätsmodellen weniger Modellparameter benötigt.

### 2.3.3. Parametrisierung der inkrementellen Plastizitätsmodelle

Für die Werkstoffmodelle aus Abschnitt 2.3.2 müssen geeignete Parametersätze gefunden werden, um das Verhalten des vorliegenden Werkstoffs zu beschreiben. Zum einen müssen der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$  bekannt sein, dann müssen für jeden Teilbackstresstensor  $\alpha_{ij}^k$  drei Modellparameter ( $r^k, c^k, \chi^k$ ) bestimmt werden. Zusätzlich wird noch die Fließspannung  $\sigma_F$  benötigt. Werden  $M$  Teilbackstresstensen verwendet, sind insgesamt  $3M + 3$  Modellparameter zu bestimmen. Die Elastizitätskonstanten können direkt aus Versuchen oder Abschätzungen bestimmt und verwendet werden. Um die restlichen Parameter zu bestimmen, wird eine Fließkurve genutzt. Dabei kann es

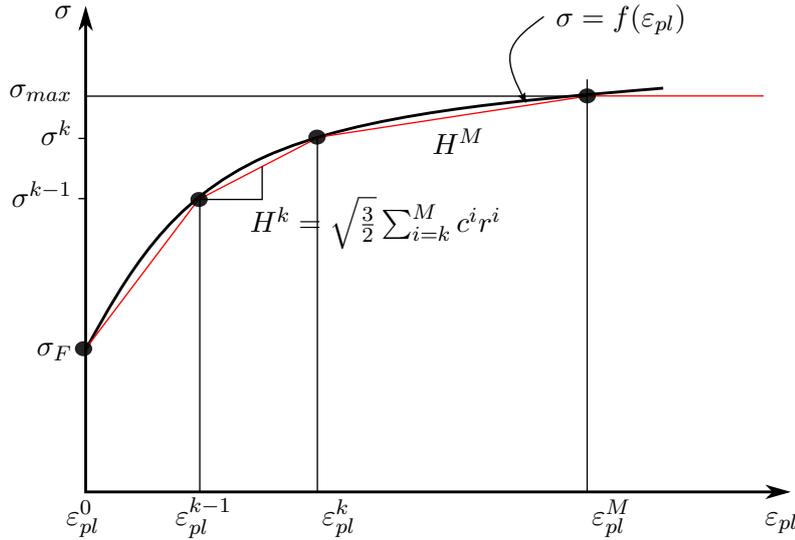


Abbildung 2.13: Schematische Darstellung der abschnittswise Linearisierung einer Fließkurve.

sich sowohl um eine gemessene Fließkurve als auch eine durch die Ramberg-Osgood Gleichung (2.8) beschriebene Kurve handeln.

Um das Plastizitätsmodell an die gegebene Fließkurve anzupassen, können Optimierungsverfahren angewandt werden. Eine andere Möglichkeit wurde von Jiang et al. [Jian 96b] vorgestellt. Jiang beschreibt, wie sich die Fließkurve unter einachsiger Belastung von den Plastizitätsmodellen darstellen lässt. Soll nur das zyklisch stabilisierte Werkstoffverhalten beschrieben werden, reicht es, die kinematische Verfestigung zu betrachten. Dieses Verfahren wird im Folgenden vorgestellt.

Zunächst wird die Fließkurve abschnittsweise linearisiert. Dazu werden Stützstellen  $\varepsilon_{pl}^k$ ,  $k = 0, \dots, M$  in den plastischen Dehnungen gesetzt. Es entstehen  $M + 1$  Wertepaare  $[\varepsilon_{pl}^k, \sigma^k]$ . In Abbildung 2.13 ist eine linearisierte Fließkurve dargestellt.

Zu bestimmen sind zunächst die Parameter  $c^k$  und  $r^k$  für jeden Teilbackstresstensor,  $k = 1, \dots, M$ . Die Parameter  $\chi^k$  zur Beschreibung des Ratchettings werden zunächst so gewählt, dass sich eine lineare Verfestigung einstellt,  $\chi \rightarrow \infty$ . Der plastische Tangentenmodul ergibt sich nach Gleichung (2.26). Der Parameter  $r^k$  kann als Grenzradius für den jeweiligen Teilbackstresstensor interpretiert werden,  $\|\alpha_{ij}^k\| \leq r^k$ . Der Parameter  $c^k$  beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich der Teilbackstresstensor entwickelt. Dadurch lässt sich die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve in einem Abschnitt  $I^k = [\varepsilon_{pl}^{k-1}, \varepsilon_{pl}^k]$  durch die Modellparameter mit

$$H^k = \frac{\sigma^k - \sigma^{k-1}}{\varepsilon_{pl}^k - \varepsilon_{pl}^{k-1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{i=k}^M c^i r^i \quad (2.30)$$

beschreiben. Alle Teilbackstresstensenoren  $\alpha_{ij}^l$  mit  $l \leq k - 1$  haben bereits ihren Grenzwert erreicht und tragen nicht weiter zur Verfestigung im Abschnitt  $I^k$  bei. Die Parameter  $c^k$  werden nun so bestimmt, dass der  $k$ -te Teilbackstresstensor am Stützpunkt  $\varepsilon_{pl}^k$  seinen Grenzwert erreicht. Dies führt auf:

$$c^k = \frac{1}{\varepsilon_{pl}^k}. \quad (2.31)$$

Nun können die Grenzradien  $r^k$  vom letzten Abschnitt der Fließkurve aus rückwärts durch Umstellen von Gleichung (2.30) bestimmt werden:

$$r^k = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{H^k - H^{k+1}}{c^k}. \quad (2.32)$$

Das Ohno/Wang Modell weist einen Grenzwert in Spannungsrichtung auf. Es wird davon ausgegangen, dass nach Erreichen des Grenzwertes für  $\varepsilon_{pl} > \varepsilon_{pl}^M$  die Steigung  $H^{M+1} = 0$  vorliegt. Die Fließspannung  $\sigma_F$  entspricht dem Spannungswert bei  $\varepsilon_{pl}^0$ . Die vom Ohno/Wang Modell maximal erreichbare Spannung ist dann durch

$$\sigma_{max} = \sigma_F + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^M r^k \quad (2.33)$$

gegeben. Für die Genauigkeit der Approximation der Fließkurve ist die Wahl der Stützstellen  $[\varepsilon_{pl}^k, \sigma^k]$  wichtig. Hierzu bestehen viele Möglichkeiten. Es kann eine maximal ertragbare Spannung gewählt werden und Stützpunkte äquidistant in den Spannungen verteilt werden. Döring [Döri 06] schlägt ausgehend von einem Startwert  $\varepsilon_{pl}^0$  vor, die Stützstellen als geometrische Reihe in den plastischen Dehnungen zu setzen. Bei beiden Verfahren lässt sich nur jeweils der Start- oder Endwert der Stützstellen kontrollieren. Moser et al. [Mose 20] schlagen ein Verfahren auf Basis der Ramberg-Osgood Parameter  $K', n'$  vor, bei dem sich sowohl der Anteil der plastischen Dehnung bei Fließbeginn (Startwert) als auch die maximale plastische Dehnung (Endwert, maximale Spannung) kontrollieren lassen. Dieses Verfahren wird im Folgenden beschrieben.

Um die Fließspannung festzulegen, wird der Parameter  $q$  definiert. Dieser stellt den Anteil der plastischen Dehnung an der Gesamtdehnung bei Fließbeginn dar. Dadurch wird eine Fließspannung über eine Dehngrenze (ähnlich einem  $R_{p0,2}$ ) definiert, welche im Werkstoffmodell verwendet wird. Die Fließspannung ist dann eindeutig festgelegt:

$$\log(\sigma_F) = \frac{\log\left(\frac{q}{(1-q)E}\right) + \frac{1}{n'} \log(K')}{\frac{1}{n'} - 1} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon}. \quad (2.34)$$

Das inkrementelle Plastizitätsmodell weist eine Fließgrenze auf. Aus diesem Grund wird das Wertepaar  $[\varepsilon_{pl}^0 = 0, \sigma^0 = \sigma_F]$  bei  $\varepsilon_{pl}^0 = 0$  gesetzt. Im nächsten Schritt werden  $M$  Wertepaare  $[\varepsilon_{pl}^k, \sigma^k]$  gewählt. Die Steigungen der einzelnen Bereiche der Fließkurve müssen mit zunehmender plastischer Dehnung monoton abnehmen. Dies ist durch die Ramberg-Osgood Gleichung automatisch erfüllt. Sie weist jedoch keine Fließgrenze auf, wodurch das gewählte initiale Wertepaar nicht exakt auf der Fließkurve liegt. Es besteht dabei die Möglichkeit, dass die Bedingung monoton fallender Steigungen der einzelnen Bereiche dadurch verletzt wird. Der nächste Stützpunkt wird aus diesem Grund als der Punkt gewählt, dessen Tangente durch den Fließpunkt geht:

$$\sigma^1 = \sigma_F \frac{1}{1 - n'} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{pl}^1 = \left(\frac{\sigma^1}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}. \quad (2.35)$$

Alle weiteren Stützpunkte werden mit der Vorschrift

$$\log(\varepsilon_{pl}^k) = \log(\varepsilon_{pl}^1) + \frac{(k-1) \left[ \log(\varepsilon_{pl}^M) - \log(\varepsilon_{pl}^1) \right]}{M-1}, \quad k = 2, \dots, M \quad (2.36)$$

logarithmisch in den plastischen Dehnungen bis zu einer vorgegebenen maximalen plastischen Dehnung  $\varepsilon_{pl}^M$  verteilt. Das Wertepaar  $[\varepsilon_{pl}^M, \sigma^M]$  stellt den Punkt dar, ab dem das Werkstoffmodell ideal plastisches Verhalten beschreibt. Die logarithmische Verteilung stellt sicher, dass in Bereichen starker Krümmung mehr Stützstellen liegen, sodass die Fließkurve dort genau beschrieben wird. Die Wahl der Parameter  $\chi^k$  muss an vorliegende Messergebnisse angepasst werden. Sollten keine Versuche mit Mittellasten vorliegen, können sie auf Standardwerte gesetzt werden. Damit werden dennoch bessere Approximationen des zyklischen Kriechens und Relaxierens erreicht als ohne die Wichtungsfunktion im Erholungsterm. Für metallische Werkstoffe werden von Döring [Döri 06] die Werte  $\chi^k = 5$  vorgeschlagen.

### 2.3.4. Modellierung der nichtproportionalen Verfestigung

Die zusätzliche Verfestigung, die einige metallische Werkstoffe unter nichtproportionaler Beanspruchung erfahren, hat einen Einfluss auf die Ermüdungslebensdauer. Die kinematische Verfestigungsregel nach Ohno/Wang bildet diese zusätzliche Verfestigung nicht ausreichend ab. Es existieren in der Literatur mehrere Modelle (z. B. [Hart 98, Dori 03]), welche die nichtproportionale Verfestigung als transienten Werkstoffeffekt beruckichtigen. Döring [Dori 06] schlägt die isotrope Verfestigung vor, um nichtproportionale Verfestigung innerhalb des inkrementellen Plastizitätsmodells zu beruckichtigen. Die Beruckichtigung der Zusatzverfestigung im inkrementellen Plastizitätsmodell würde allerdings einige zusätzliche Modellparameter erfordern. Zum Bestimmen dieser Parameter wäre wieder eine Vielzahl an zusätzlichen Versuchen nötig.

Socie und Marquis [Soci 00] haben einen Ansatz entwickelt, um die nichtproportionale Verfestigung in der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Kurve beruckichtigen zu können. Hierzu wird der Verfestigungskoeffizient  $K'$  des Ramberg-Osgood-Ansatzes für nichtproportionale Beanspruchungen angepasst und mit  $K'_{np}$  bezeichnet. Der angepasste Verfestigungskoeffizient kann mit

$$K'_{np} = K' \cdot (1 + f_{np} \cdot \alpha) \quad (2.37)$$

bestimmt werden. Hierbei stellt  $f_{np}$  eine Nichtproportionalitätskennzahl dar, die im Detail in Abschnitt 2.3.4.1 erläutert wird und den Grad der Nichtproportionalität der Last-Zeit-Folge widerspiegelt. Der Kennwert  $\alpha$  ist eine werkstoffspezifische Kennzahl und kann als Verfestigungsvermögen des Werkstoffs unter nichtproportionaler Beanspruchung interpretiert werden. Bei diesem Ansatz wird lediglich der Verfestigungskoeffizient  $K'$  angepasst. Der Verfestigungsexponent  $n'$  entspricht dem Wert bei proportionaler bzw. einachsiger Beanspruchung.

Der Ansatz nach Gleichung (2.37) beruckichtigt dabei nur den stabilisierten Zustand. Die so angepasste Fließkurve kann bei der Parameteridentifikation für einen spezifischen Lastpfad mit dem Vorgehen aus Abschnitt 2.3.3 verwendet werden.

In einem Vergleichsspannungs-Vergleichsdehnungs-Diagramm kann die zusätzliche Verfestigung im stabilisierten Zustand illustriert werden. Ein solches Diagramm ist in Abbildung 2.14 gegeben.

Hier sind die Versuchsergebnisse für den duktilen Baustahl S355 aus [Linn 22] dargestellt. Die beiden gemessenen Kurven für proportionale und nichtproportionale Lasten stellen unabhängige

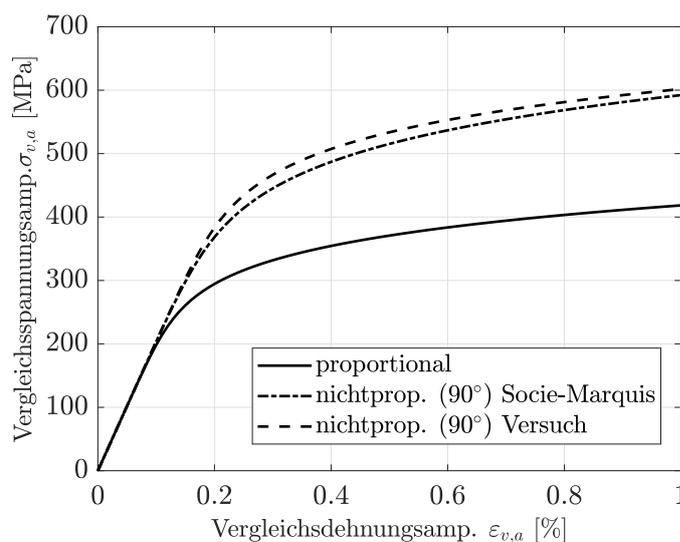


Abbildung 2.14: Näherung der nichtproportionalen Verfestigung im Vergleichsspannungs-Vergleichsdehnungs-Diagramm für den Baustahl S355 aus dem Projekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22]

Anpassungen der Ramberg-Osgood Gleichung an gemessene Amplituden dar. Die Vergleichsgrößen bei nichtproportionaler Beanspruchung wurden mittels der Hencky Gleichung in der Formulierung nach Savaidis [Sava 95] berechnet:

$$\begin{aligned}\sigma_{v,a} &= \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}, \\ \varepsilon_{v,a} &= \left( \frac{\gamma_a}{2} + (0.5 - \nu) \frac{\tau_a}{E} \right) \frac{2\sigma_{v,a}}{3\tau_a}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Zu erkennen ist, dass der Ansatz nach Socie und Marquis, Gleichung (2.37), die zusätzliche Verfestigung durch die Anpassung des Verfestigungskoeffizienten  $K'$  in guter Näherung beschreiben kann. Die Forderung, dass sich  $n'$  nicht ändert, ist annähernd erfüllt.

Außerdem ist in Abbildung 2.15 gezeigt, wie gut sich die nichtproportionale Verfestigung (NPV) mit dem Ansatz von Socie und Marquis darstellen lässt. Gezeigt ist das Phasendiagramm der Spannungen eines Versuchs unter Dehnungsvorgabe mit den Amplituden  $\varepsilon_a = 0.4\%$  und  $\gamma_a = 0.76\%$ . Beide Verzerrungen wurden als Sinusschwingung unter  $90^\circ$  Phasenverschiebung aufgebracht. In [Linn 22] wird ein Verfestigungsvermögen  $\alpha = 0.52$  für den Werkstoff S355 und mit der Kennzahl aus Abschnitt 2.3.4.1 eine Nichtproportionalität von  $f_{np} = 0.84$  angegeben. Ohne die Berücksichtigung von NPV werden vom Ohno/Wang Modell zu geringe Spannungen berechnet. Werden die Werkstoffparameter stattdessen mit den nach Gleichung (2.37) korrigierten Werten bestimmt, liegen die berechneten und gemessenen Spannungen deutlich näher zusammen. Nach Abbildung 2.14 wäre zu erwarten, dass selbst mit einer Anpassung niedrigere Spannungen als im Versuch berechnet werden. Allerdings zeigt das Ohno/Wang Modell von sich aus eine sehr geringe nichtproportionale Verfestigung. Aus diesem Grund liegen hier die berechneten Spannungen etwas über den gemessenen.

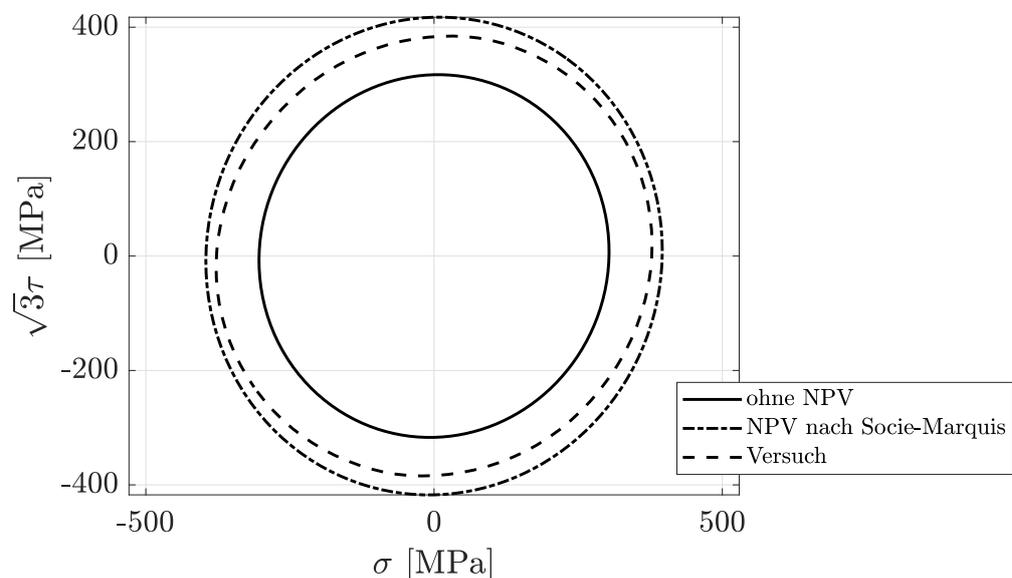


Abbildung 2.15: Phasendiagramm der Spannungen bei  $90^\circ$  phasenverschobener Sinus-Beanspruchung unter Verzerrungsvorgabe für den Baustahl S355 aus [Linn 22]. Dargestellt sind gemessene Spannungen sowie simulierte Spannungen mit und ohne Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung (NPV).

### 2.3.4.1. Kennzahlen zur Beschreibung der Nichtproportionalität

In der Literatur werden mehrere Möglichkeiten diskutiert, den Grad der Nichtproportionalität zu bewerten. Riess [Ries 19] teilt die Bewertungsmöglichkeiten in drei Klassen ein:

1. Transiente Modellierung der Zusatzverfestigung im inkrementellen Plastizitätsmodell,
2. Bewertung der Nichtproportionalität eines Schwingspiels,
3. Bewertung der Nichtproportionalität eines Spannungszeitverlaufs.

Kennzahlen der ersten Gruppe werden innerhalb der Entwicklungsgleichungen eines inkrementellen Plastizitätsmodells verwendet. Sie bewerten den Grad der Nichtproportionalität eines einzelnen Belastungsincrementes. Der wohl bekannteste Vertreter dieser Gruppe ist der Nichtproportionalitätstensor nach Tanaka [Tana 94]. Weitere bekannte Kennzahlen können [Bena 87, Bena 88, Doon 91] entnommen werden.

Ebenso kann die Nichtproportionalität einzelner Schwingspiele mit den Kennzahlen nach [Kana 79, Itoh 95, Itoh 99] bewertet werden. Die Bewertung einzelner Schwingspiele wird als algorithmisch sehr aufwendig angesehen. Hier müsste in jedem Zyklus eine eigene Kennzahl ermittelt werden, was mit dem Ansatz nach Marquis und Socie aus Gleichung (2.37) zu einer Fließkurve und damit zur Bestimmung von neuen Modellparametern für das Plastizitätsmodell führt.

In dieser Arbeit werden Kennzahlen  $f_{np}$  verwendet, die die Nichtproportionalität eines Spannungszeitverlaufs bewerten. Diese Kennzahlen werden in Gleichung (2.37) zum Berücksichtigen der nichtproportionalen Verfestigung verwendet. Mit diesen gelingt eine effiziente Bewertung des gesamten Spannungsverlaufs. Nachteile können entstehen, wenn sich die Nichtproportionalität während einer Beanspruchung stark ändert. Auch die Entscheidung, ob bei der Lebensdauerrechnung der Einfluss der Nichtproportionalität vernachlässigt werden kann, kann mit diesen Kennzahlen bewertet werden.

Im Rahmen einer vom Verfasser betreuten Abschlussarbeit [Kern 19] wurden verschiedene Nichtproportionalitätskennzahlen nach Bishop [Bish 00], Gaier et al. [Gaie 04], Meggiolaro et al. [Megg 12a, Megg 14] und Riess [Ries 16, Ries 18, Ries 19] untersucht. Die Kennzahlen bewerten die Nichtproportionalität in einem Bereich von 0 und 1,  $f_{np} \in [0, 1]$ . Wobei 0 eine proportionale Beanspruchung und 1 eine hochgradig nichtproportionale Beanspruchung charakterisiert. Der Einfluss verschiedener Amplitudenverhältnisse, Frequenzen, Phasenverschiebungen und Signalformen wird in [Kern 19] untersucht. Zur Untersuchung der Kennzahlen wurden Signale der Form

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(t) &= a_{xx} \sin(2\pi t) \\
 \sigma_{yy}(t) &= 0 \\
 \tau_{xy}(t) &= a_{xy} \sin(2\pi t + \phi_{xy})
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

vorgegeben. Die Amplituden der aufgebrauchten Sinussignale sind mit  $a_{xx}$  und  $a_{xy}$  bezeichnet. Die Schubspannung  $\tau_{xy}$  erhält zusätzlich eine Phasenverschiebung  $\phi_{xy}$ .

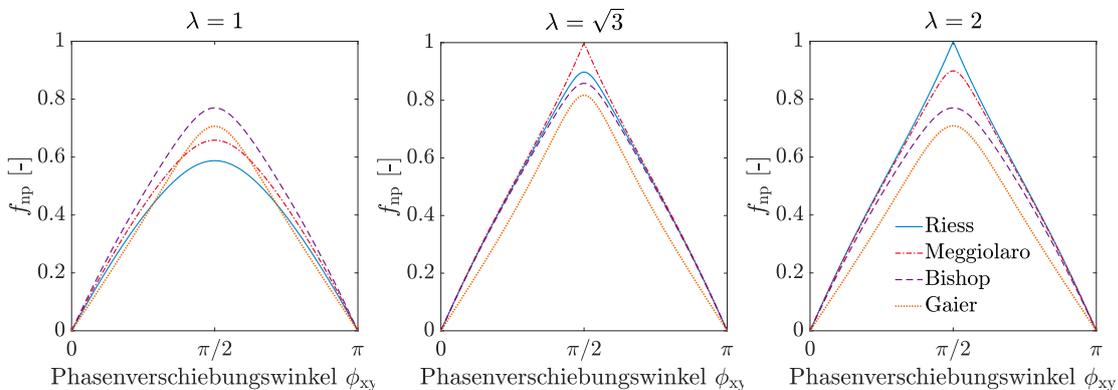


Abbildung 2.16: Nichtproportionalitätskennzahlen über aufgebrauchter Phasenverschiebung für mehrere Amplitudenverhältnisse  $\lambda$  aus [Kern 19]

In Abbildung 2.16 sind die berechneten Nichtproportionalitätskennzahlen bei Variation der Phasenverschiebung  $\phi_{xy}$  für mehrere Spannungsverhältnisse  $\lambda = a_{xx}/a_{xy}$  dargestellt. Alle untersuchten Kennzahlen sagen eine maximale Nichtproportionalität bei  $90^\circ$  Phasenverschiebung voraus. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Kennzahlen ist, dass sich der Maximalwert bei unterschiedlichen Amplitudenverhältnissen ergibt.

Die Kennzahl nach Bishop führt in Fällen mit Mittellasten zu einer Überbewertung der Nichtproportionalität, [Ries 19]. Riess [Ries 19] bemerkt, dass die Nichtproportionalitätskennzahl nach Meggiolaro [Megg 14] nicht invariant gegenüber der Wahl des Koordinatensystems ist. Die Kennzahl nach Riess [Ries 19] ist nur im ebenen Spannungszustand anwendbar. In dieser Arbeit wird der Ansatz nach Gaier et al. [Gaie 04] verwendet. Diese Auswahl wurde innerhalb des Projektes [Linn 22] getroffen. Im Folgenden wird der Ansatz nach [Gaie 04] genauer erläutert.

Gaier greift Ansätze von Chu [Chu 96] und Bishop [Bish 00] auf. Die Nichtproportionalitätskennzahl wird über ein Trägheitsmoment des Spannungspfades bestimmt. Dazu wird ein sechsdimensionaler Spannungsraum definiert. Zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  wird der Spannungszustand durch den Vektor  $\mathbf{S}(t_k)$  charakterisiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t_k) &= (S_1(t_k), S_2(t_k), S_3(t_k), S_4(t_k), S_5(t_k), S_6(t_k))^T \\ &= \left( \sigma_{xx}(t_k), \sqrt{2}\tau_{xy}(t_k), \sigma_{yy}(t_k), \sqrt{2}\tau_{xz}(t_k), \sqrt{2}\tau_{yz}(t_k), \sigma_{zz}(t_k) \right)^T. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Durch Skalieren der Schubspannungen mit  $\sqrt{2}$  wird eine Invarianz vom Koordinatensystem erreicht. Jedem Spannungspunkt wird eine Einheitsmasse zugeordnet. In dem definierten Spannungsraum wird der Trägheitstensor  $I_{ij}$  mit

$$\begin{aligned} I_{ii} &= \sum_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 S_j^2(t_k) \quad i = 1 \dots 6, \quad \text{keine Summe über } ii \\ I_{ij} &= \sum_k S_i(t_k) S_j(t_k) \quad i, j = 1 \dots 6, i \neq j \end{aligned} \quad (2.41)$$

bezüglich der Koordinatenachsen des Spannungsraums berechnet. Durch Lösen des Eigenwertproblems werden die geordneten Hauptträgheitsmomente  $I_1 > I_2 > \dots > I_6$  berechnet. Kehrwerte der Wurzeln der Eigenwerte  $1/\sqrt{I_i}, i = 1, \dots, 6$  können als Hauptachsen eines Ellipsoiden im Spannungsraum betrachtet werden. Die Nichtproportionalitätskennzahl berechnet sich aus dem Verhältnis der größten Hauptachsen:

$$f_{np, Gaier} = \sqrt{\frac{I_6}{I_5}}. \quad (2.42)$$

Dadurch, dass zu jedem Zeitpunkt einem Punkt im Spannungsraum eine Einheitsmasse zugeordnet wird, ist die Kennzahl von der Diskretisierung der Last-Zeit-Reihe abhängig.

### 2.3.5. Inkrementelle Kerbnäherungsverfahren

Inkrementelle Kerbnäherungsverfahren stellen eine Erweiterung der einachsigen Kerbnäherungsverfahren aus Abschnitt 2.2 dar. Chu et al. [Chu 94] und Singh et al. [Sing 96, Sing 97] erweitern die Neuber- und ESED-Methode auf Mehrachsigkeit, indem sie eine inkrementelle Form dieser Methoden einführen. Wenn ein materieller Punkt auf der Bauteiloberfläche betrachtet wird, siehe Abbildung 2.1, lässt sich der Spannungs- und Dehnungstensor wie folgt darstellen:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Es müssen 7 unbekannte Größen ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}$ ) bestimmt werden. Anstelle der Tensorkomponenten  $\varepsilon_{xy}$  werden die Gleitungen  $\gamma_{xy}$  verwendet. Nun tritt das Problem auf, dass die ursprünglich einachsigen Kerbnäherungsformeln nur eine Gleichung liefern, um diese Unbekannten zu berechnen. Daher wurde in [Sing 96] vorgeschlagen, dass der relative Beitrag jeder elastisch-plastischen Spannungs- und Dehnungskomponente zur Energiedichte (die Gesamtdehnungsenergiedichte für die Neuber-Methode und die Dehnungsenergiedichte für die ESED-Methode) der unbekannt elastisch-plastischen Lösung gleich dem Beitrag der entsprechenden Komponenten der elastischen Lösung ist. Daraus ergibt sich, dass die Neuber- oder ESED-Methode für jede Tensor-Komponente einzeln erfüllt werden muss. Somit entstehen 3 Gleichungen.

Ebenfalls wird als Werkstoffmodell ein inkrementelles Plastizitätsmodell nach Abschnitt 2.3.2 verwendet. Hier sind die konstitutiven Beziehungen nicht zwischen Spannungen und Dehnungen, sondern zwischen deren Inkrementen aufgestellt. Ein solches Werkstoffmodell liefert weitere 4 Gleichungen. Die geforderte Äquivalenz einer energetischen Größe zwischen elastischer und elastisch-plastischer Lösung, wie in den einachsigen Kerbnäherungsverfahren, wird aus diesem Grund jetzt für die Inkremente dieser energetischen Größen gefordert (daher der Name „inkrementelle Verfahren“). Somit stehen insgesamt 7 Gleichungen (3 aus dem jeweiligen Kerbnäherungsverfahren und 4 aus dem Werkstoffmodell) zur Verfügung, um die 7 unbekannt Spannungen und Dehnungen zu berechnen. Im Folgenden sind die Gleichungen zusammengefasst, die sich aus dem Plastizitätsmodell ergeben:

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx} &= \left[ \frac{1}{H}n_{xx}n_{xx} + \frac{1}{E} \right] \Delta\sigma_{xx} + \left[ \frac{1}{H}n_{xx}n_{yy} - \frac{\nu}{E} \right] \Delta\sigma_{yy} + \frac{2}{H}n_{xx}n_{xy}\Delta\sigma_{xy} \\
\Delta\varepsilon_{yy} &= \left[ \frac{1}{H}n_{xx}n_{yy} - \frac{\nu}{E} \right] \Delta\sigma_{xx} + \left[ \frac{1}{H}n_{yy}n_{yy} + \frac{1}{E} \right] \Delta\sigma_{yy} + \frac{2}{H}n_{yy}n_{xy}\Delta\sigma_{xy} \\
\Delta\varepsilon_{zz} &= \left[ \frac{1}{H}n_{xx}n_{zz} - \frac{\nu}{E} \right] \Delta\sigma_{xx} + \left[ \frac{1}{H}n_{yy}n_{zz} - \frac{\nu}{E} \right] \Delta\sigma_{yy} + \frac{2}{H}n_{zz}n_{xy}\Delta\sigma_{xy} \\
\Delta\gamma_{xy} &= \frac{2}{H}n_{xx}n_{xy}\Delta\sigma_{xx} + \frac{2}{H}n_{yy}n_{xy}\Delta\sigma_{yy} + \left[ \frac{4}{H}n_{xy}n_{xy} + \frac{2(1+\nu)}{E} \right] \Delta\sigma_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Größen  $n_{ij}$  sind die Komponenten des Normalentensors an die Fließfläche. Der plastische Tangentenmodul  $H$  ist für das verwendete Plastizitätsmodell aufzustellen. Für das hier verwendete Ohno/Wang Modell ist der Tangentenmodul  $H = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial p}$ . Anstelle der Spannungs- und Dehnungsinkremente  $d\sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij}$  werden in Gleichung (2.44) sowie im Folgenden die Differenzen  $\Delta$  zwischen den einzelnen Lastschritten verwendet.

Im Neuber-Verfahren wird die Äquivalenz der totalen Verzerrungsenergie gefordert,  $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \text{konst.}$  Die daraus resultierende inkrementelle Form der Neuber-Regel ist durch

$$\begin{aligned}
{}^e\sigma_{ij}{}^e\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} && \text{keine Summe über } ij \\
\Delta{}^e\varepsilon_{ij}{}^e\sigma_{ij} + \Delta{}^e\sigma_{ij}{}^e\varepsilon_{ij} &= \Delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} && \text{keine Summe über } ij
\end{aligned} \tag{2.45}$$

gegeben. In der ESED-Methode wird die Äquivalenz der Verzerrungsenergiedichte gefordert. Im Vergleich zum Neuber-Verfahren wird hier die Komplementärenergie nicht betrachtet. Die inkrementelle ESED-Methode ist dann durch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}{}^e\sigma_{ij}{}^e\varepsilon_{ij} &= \int_{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} && \text{keine Summe über } ij \\
{}^e\sigma_{ij}\Delta{}^e\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij} && \text{keine Summe über } ij
\end{aligned} \tag{2.46}$$

definiert. Eine grafische Interpretation der inkrementellen ESED- und der inkrementellen Neuber-Methode ist in Abbildung 2.17 angegeben. Hier wird auch grafisch, im Vergleich mit Abbildung 2.5, deutlich, dass nicht mehr Spannungen und Dehnungen, sondern deren Zuwächse pro Lastschritt gesucht werden.

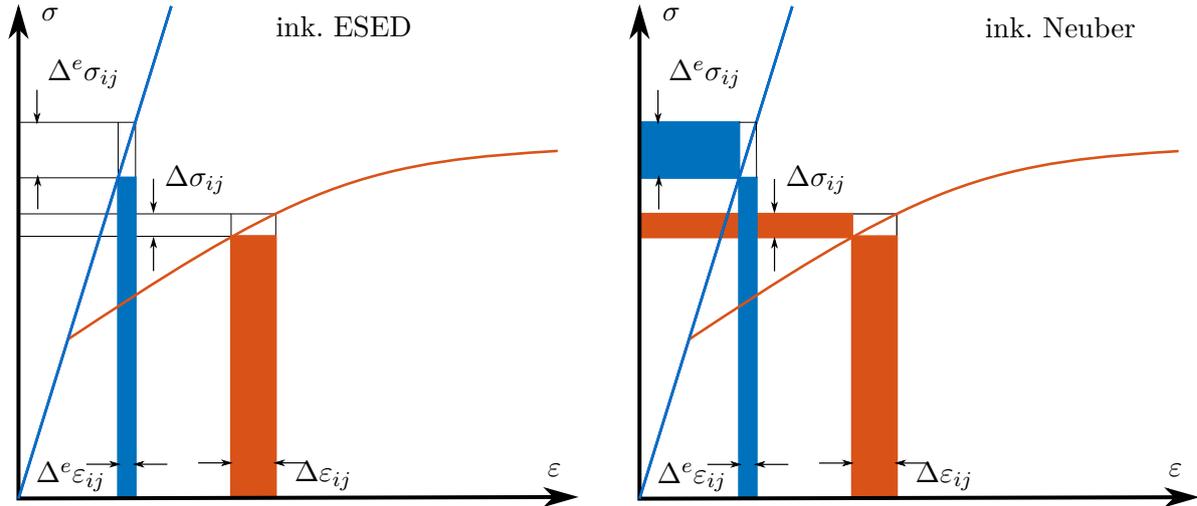


Abbildung 2.17: Schematische Darstellung der inkrementellen ESED- und der inkrementellen Neuber-Methode

Ye et al. [Ye04] zeigen eine physikalische Verbindung zwischen der Neuber- und der ESED-Methode durch energetische Überlegungen auf. Es wurde gezeigt, dass die Neuber- und ESED-Methode als zwei Grenzfälle betrachtet werden können. Nach Ye et al. [Ye04] wird innerhalb der Neuber-Methode keine Energiedissipation durch plastische Verformungen berücksichtigt. Dahingegen wird innerhalb der ESED-Methode die gesamte plastische Arbeit als Wärme abgegeben. Basierend darauf entwickelten Ye et al. [Ye08] die sogenannte Unified Expression (UE), die annimmt, dass nur ein Teil der plastischen Arbeit dissipiert wird. Die Unified Expression ist durch

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + C_q \left[ \int_{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \int_{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right] && \text{keine Summe über } ij \\
 \Delta \varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij} &= (1 + C_q) \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} + (1 - C_q) \varepsilon_{ij} \Delta \sigma_{ij} && \text{keine Summe über } ij
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

gegeben. Hier ist  $C_q \in [0, 1]$  eine werkstoffspezifische Konstante, die angibt, welcher Anteil der plastischen Arbeit dissipiert wird. Für  $C_q = 0$  entsteht die Neuber-Methode und für  $C_q = 1$  die ESED-Methode. In [Ye08] wird ein Zusammenhang zwischen  $C_q$  und dem zyklischen Verfestigungsexponenten der Ramberg-Osgood Gleichung  $n'$  angegeben,  $C_q = (1 - 2n') / (1 - n')$ . Eine formal sehr ähnliche Methode zur Unified Expression wurde von [Li17] vorgestellt. Hier kann sich  $C_q$  während der Belastung ändern.

Eine weitere Variante der multiaxialen inkrementellen Methoden ist die deviatorische Neuber-Regel, die von Burshinsky und Glinka vorgeschlagen wurde [Bucz03]. Diese Methode basiert auf der Idee, dass die ursprüngliche Neuber-Regel [Neub61] für einen Körper unter reiner Scherbeanspruchung abgeleitet wurde. Daher werden nur die deviatorischen Teile der Spannungs- und Dehnungstensoren für die Neuber-Methode verwendet. Zahlreiche numerische Studien zur deviatorischen Neuber-Methode wurden von Ince et al. durchgeführt [Ince14, Ince16a, Ince16b, Ince17].

Die ursprünglichen Formulierungen der oben genannten Methoden sind beschränkt auf monotone Belastungen. Eine Erweiterung der inkrementellen Ansätze auf die Anwendung unter zyklischen Lasten wurde von Chu [Chu95] vorgeschlagen. An jedem Lastumkehrpunkt werden Spannungen und Dehnungen als Referenzpunkte festgelegt. Die aktuellen Spannungen und Dehnungen werden nun als Differenzen zu diesen Referenzpunkten angegeben. Dies verhindert die Berechnung von negativen Energiezuwächsen.

Im Fall proportionaler Beanspruchung treten Umkehrpunkte der äußeren Lasten, der elastischen Lösung und der Kerbspannungen und -dehnungen zeitgleich auf. Hier können Referenzpunkte einfach gesetzt werden. Im Fall von nichtproportionaler Beanspruchung treten Umkehrpunkte der elastischen Lösung und der Kerbspannungen und -dehnungen jedoch nicht zeitgleich auf. Selbst Umkehrpunkte der Kerbspannungen und -dehnungen treten nicht zur gleichen Zeit auf. Derzeit existiert für allgemeine nichtproportionale Belastungen keine Definition, wie Referenzpunkte sinnvoll zu setzen sind. Eine numerisch robuste Umsetzung der inkrementellen Verfahren ist daher für allgemeine nichtproportionale Lasten nur schwer umsetzbar. Diese Kritik wurde ebenfalls von Hertel [Hert 16] geäußert.

Abgesehen von den bereits erwähnten proportionalen Beziehungen zwischen den Anteilen der Zunahme einer energetischen Größe, z. B. der totalen Verzerrungsenergiedichte in Gleichung (2.45), werden in [Chu 95] zwei alternative Ansätze vorgeschlagen, um die erforderlichen zusätzlichen Randbedingungen zu erzeugen. Einer dieser Ansätze bezieht sich auf die proportionale Beziehung zwischen den Zunahmen der Spannungskomponenten:

$$\Delta\sigma_{ij} = \rho_\sigma \Delta^e \sigma_{ij}. \quad (2.48)$$

Der andere Ansatz fordert die Proportionalität der Dehnungskomponenten:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \rho_\varepsilon \Delta^e \varepsilon_{ij}. \quad (2.49)$$

Durch diese Vorgehensweise reduziert sich die Anzahl der unbekanntenen Spannungs- oder Dehnungsinkremente, sodass die oben genannten Verfahren nicht für jede Tensorkomponente einzeln erfüllt werden müssen. Diese Vorgehensweise wird später von McDonald und Socie [McDo 10, McDo 11] weiterentwickelt, um auch gemischte Spannungs- und Dehnungsrandbedingungen zu berücksichtigen. In [Chu 95] wird betont, dass lediglich die Annahme der Proportionalität entweder der Spannungs- oder der Dehnungsinkremente die Invarianz der elastisch-plastischen Lösung gegenüber Koordinatentransformationen gewährleistet. Wenn die einzelnen Komponenten der elastizitätstheoretischen und der elastisch-plastischen Zunahmen der Verzerrungsenergiedichte gleichgesetzt werden, wird die elastisch-plastische Lösung von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Von Buczynski und Glinka [Bucz 97, Bucz 03] wird argumentiert, dass diese Abhängigkeit vom Koordinatensystem sehr gering ist. Die Abweichungen, die aus der Wahl des lokalen Koordinatensystems folgen, können für Ingenieuranwendungen vernachlässigt werden.

Es existieren mehrere Veröffentlichungen, in denen die verschiedenen Verfahren miteinander verglichen werden. Diese kommen zum Teil zu unterschiedlichen Ergebnissen. In [Ye 08] wird gezeigt, dass mittels Unified Expression gemessene Kerbdehnungen besser angenähert werden können als mit der Neuber- oder der ESED-Methode. Im Gegensatz dazu zeigen Gao et al. [Gao 10], dass sich Ergebnisse aus FE-Rechnungen mit der Neuber-Methode besser abbilden lassen als mit der Unified Expression. Ebenfalls werden mit der Neuber-Methode bessere Treffsicherheiten bei der Berechnung von Ermüdungslebensdauern erzielt. Dies gilt allerdings hauptsächlich im Kurzzeitfestigkeitsbereich. In einer eigenen Studie [Kraf 21] wurden die ESED-Methode, die Neuber-Methode und die Unified Expression mit Ergebnissen aus FE-Rechnungen verglichen. Hier wurde mit der Unified Expression die größte Übereinstimmung mit den FE-Ergebnissen erzielt.

In den meisten Fällen [Gao 10, Ince 14, Mara 15, Ince 16a, Ince 16b, Camp 16, Ince 17] werden das Plastizitätsmodell und die Kerbnäherungsmethode als ein lineares Gleichungssystem aufgefasst und in einem Schritt gelöst. Dies vernachlässigt die Nichtlinearität des plastischen Werkstoffverhaltens während des Belastungsschritts. Wie in [Gao 10, Camp 16] beschrieben, sind sehr kleine Schrittweiten erforderlich, um Rechenfehler zu verhindern und eine stabile Lösung zu erreichen. Dieser Umstand steht im Gegensatz zum Ziel der Kerbnäherungsmethoden, eine Reduzierung des Rechenaufwands zu erreichen. Aus diesem Grund wurde ein Lösungsalgorithmus [Kraf 21] erarbeitet, der auch bei großen Schrittweiten eine stabile Lösung der Kerbnäherungsmethode und des Plastizitätsmodells ermöglicht.

### 2.3.6. Strukturfließflächenansätze

Die sogenannten Strukturfließflächenansätze basieren auf der Arbeit von Barkey et al. [Bark 94]. Um das Verformungsverhalten eines gekerbten Bauteils zu beschreiben, wird die Strukturfließfläche auf Basis des anisotropen Fließkriteriums nach Hill [Hill 48] und der Nennspannungen eingeführt. Die Zunahmen der plastischen Verformungen in der Kerbe ergeben sich direkt aus den Zunahmen der Nennspannungen, unter Anwendung einer entsprechenden Fließ- und Verfestigungsregel. Die Verfestigung wird durch die einachsige Bauteilfließkurve gesteuert, die als Eingangparameter bereitgestellt werden muss. Die Verformungseigenschaften eines Bauteils werden ähnlich wie die Verformungseigenschaften eines anisotropen Werkstoffs mithilfe eines Plastizitätsmodells beschrieben. Sowohl Lee et al. [Lee 95] als auch Köttgen et al. [Kött 95b, Kött 95a] haben diesen Ansatz übernommen und ersetzen die Nennspannungen durch die elastizitätstheoretischen Kerbspannungen sowie das anisotrope Fließkriterium von Hill durch das isotrope von Mises-Fließkriterium. Dadurch werden Nachteile des ursprünglichen anisotropen Ansatzes, wie beispielsweise die mangelnde Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Belastungskomponenten wie Biegung und Normalkraft, behoben [Kött 95a].

Insbesondere die zwei Ansätze von Köttgen, Barkey und Socie [Kött 95a] werden hier weiterverfolgt. Dabei handelt es sich um den sogenannten Pseudo-Spannungsansatz („pseudo stress approach“) und den Pseudo-Dehnungsansatz („pseudo strain approach“).

Beide Ansätze etablieren zuerst eine Verbindung zwischen den pseudo elastischen und elastisch-plastischen Größen. Dazu wird die Strukturfließfläche auf der Grundlage der von Mises Fließfunktion und der örtlichen elastischen Belastung formuliert. Die Verformungseigenschaften des Bauteils werden anschließend mithilfe eines inkrementellen Plastizitätsmodells, das als Strukturmodell bezeichnet wird, beschrieben. Das Werkstoffverhalten wird durch dasselbe Plastizitätsmodell dargestellt. Ursprünglich wurde in [Kött 95a] das Modell von Mróz [Mróz 67, Mróz 69] verwendet, wobei lediglich die Parameter des Plastizitätsmodells zwischen dem Struktur- und dem Werkstoffverhalten unterscheiden. Schon in [Kött 95a] wird angemerkt, dass theoretisch beliebige inkrementelle Plastizitätsmodelle verwendet werden können. Später werden die Ansätze von Hertel [Hert 03b, Hert 05] und Lang [Lang 05a, Lang 07, Lang 09] im Zusammenhang mit dem Plastizitätsmodell von Jiang [Jian 96a] angewandt.

Sowohl der Pseudo-Spannungsansatz als auch der Pseudo-Dehnungsansatz erfordern das zweimalige Aufrufen eines Plastizitätsmodells (des Strukturmodells und des Werkstoffmodells). Es ist also nicht nur ein Satz Modellparameter zu bestimmen, der das Werkstoffverhalten beschreibt, sondern es muss auch ein Parametersatz festgelegt werden, der das Strukturverhalten abbildet. In [Lang 05b] wird eine Optimierungsmethode vorgeschlagen, um die notwendigen Parameter für das Jiang Modell zu bestimmen. In dieser Arbeit werden die beiden Strukturfließflächenansätze mit dem Ohno/Wang Modell angewendet. Dadurch reduziert sich der Aufwand bei der Bestimmung der Strukturparameter erheblich.

Im Folgenden werden die beiden Ansätze beschrieben.

#### Pseudo-Spannungsansatz

Als Eingabegrößen für den Pseudo-Spannungsansatz werden die pseudo Spannungen  ${}^e\sigma_{ij}$  aus der elastizitätstheoretischen Lösung nach Gleichung (2.3) verwendet. Diese können direkt verwendet werden, um den Fließbeginn zu berechnen. Unter der Annahme der Gültigkeit des isotropen von-Mises-Fließkriteriums für den Werkstoff kann der Beginn des plastischen Fließens mit

$$[f({}^e\sigma_{ij})]^2 = \frac{1}{2} \left[ ({}^e\sigma_{xx} - {}^e\sigma_{yy})^2 + ({}^e\sigma_{yy} - {}^e\sigma_{zz})^2 + ({}^e\sigma_{zz} - {}^e\sigma_{xx})^2 \right] + 3({}^e\sigma_{xy}^2 + {}^e\sigma_{yz}^2 + {}^e\sigma_{xz}^2) = \sigma_F^2 \quad (2.50)$$

direkt ermittelt werden. Dieser Ansatz wird nun erweitert, um das spezifische Verformungsverhalten von Bauteilen unter allgemeinen mehrachsigen Spannungszuständen in der Kerbe zu berücksichtigen. Zunächst muss ein Modell für das zyklische Verformungsverhalten des Werkstoffs unter mehrachsiger, nichtproportionaler Belastung ausgewählt werden. Wie bereits erklärt, wird das Ohno/Wang Modell in dieser Arbeit verwendet.

Die Parameter des Plastizitätsmodells müssen nun so angepasst werden, dass der Zusammenhang zwischen pseudo Spannungen und den plastischen Kerbdehnungen wiedergegeben wird. Diesen Zusammenhang liefert die Bauteilfließkurve.

Im Pseudo-Spannungsansatz wird die Bauteilfließkurve mit den lokalen pseudo elastischen Vergleichsspannungen  ${}^e\sigma_v$  und den realen plastischen Vergleichsdehnungen  $\varepsilon_v^{pl}$  in der Kerbe wie folgt aufgestellt:

$$\varepsilon_v^{pl} = f({}^e\sigma_v). \quad (2.51)$$

Es wird die Vergleichsspannung nach von Mises verwendet. Das an das Strukturverhalten angepasste Plastizitätsmodell wird im Folgenden auch als Strukturmodell bezeichnet. Unter Vorgabe des Zeitverlaufs der pseudo Spannungen wird das Strukturmodell nun integriert. Die Ergebnisse des Strukturmodells werden anschließend an das Werkstoffmodell übergeben.

Da das Strukturverhalten jedoch nach Gleichung (2.51) zwischen plastischen Dehnungen und pseudo Spannungen definiert ist, folgt nach Fließbeginn die Ungleichheit zwischen Werkstoff- und Strukturmodell

$$\varepsilon_v^{pl} = \varepsilon_v - \frac{\sigma_v}{E} \neq \varepsilon_v - \frac{{}^e\sigma_v}{E} = {}^e\varepsilon_v^{pl}. \quad (2.52)$$

Das bedeutet, die Gesamtdehnung  $\varepsilon_v$  des Struktur- und Werkstoffmodells kann nicht gleich sein. Die beiden Modelle sind stattdessen durch die plastischen Dehnungen gekoppelt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.18 grafisch dargestellt.

Daraus folgt, dass der aus der Integration des Strukturmodells berechnete Zeitverlauf der plastischen Dehnungen  $\varepsilon_{ij}^{pl}$  dem Werkstoffmodell als Input übergeben wird und nicht der Verlauf der

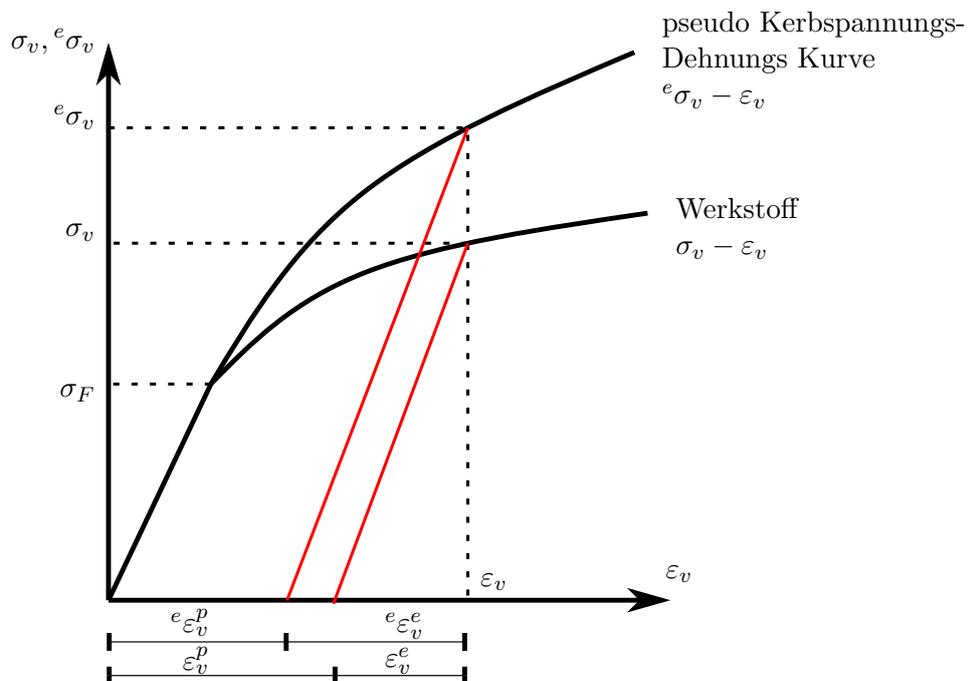


Abbildung 2.18: Aufteilung der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Kurve und der zyklischen Bauteilfließkurve in elastische und plastische Anteile für den Pseudo-Spannungsansatz.

Gesamtdehnungen. Aus der Integration des Werkstoffmodells ergeben sich die Kerbspannungen und der elastische Anteil der Kerbdehnungen.

In [Kött 95a] wird der Pseudo-Spannungsansatz in den folgenden fünf Schritten zusammengefasst:

1. Bestimmen der Übertragungsfaktoren  $c_{ij}^k$  und/oder  $K_{ij}^k$  aus einer linear elastischen FE-Analyse für jede auf das Bauteil wirkende Einheitslast  $L^k$  bzw. definierte Nennspannung  $S^k$ .
2. Bestimmen der Bauteilfließkurve  $({}^e\sigma_v - \varepsilon_v^{pl})$  aus monotoner Belastung mittels elastisch plastischer FE-Rechnungen, Dehnungsmessung oder geeigneter einachsiger Näherungsformeln. Daraus werden die Parameter des Strukturmodells bestimmt.
3. Berechnen der Zeitreihe der pseudo Spannungen  ${}^e\sigma_{ij}(t)$  mit Gleichung (2.3).
4. Berechnen des lokalen plastischen Kerbdehnungsverlaufs durch Integration des Strukturmodells mit dem Zeitverlauf der pseudo Spannung und den in Schritt 2 ermittelten Parametern.
5. Berechnen der Kerbspannungen und des elastischen Anteils der Kerbdehnungen durch Integration des Werkstoffmodells unter Vorgabe der in Schritt 4 ermittelten plastischen Kerbdehnungen.

Schritte 4 und 5 müssen nicht für die gesamte Belastungsgeschichte sequenziell durchlaufen werden. Sie können auch für jeden Zeitschritt nacheinander ausgeführt werden.

Durch die Kopplung des Struktur- und Werkstoffmodells mit plastischen Dehnungen muss eine weitere Spannungsrandbedingung gesetzt werden, um den hydrostatischen Anteil der Spannungen zu berechnen. Dazu muss eine weitere Randbedingung für den vorliegenden Kerbfall angegeben werden. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass das Versagen von der unbelasteten Bauteiloberfläche ausgeht. Nach der Definition des Kerbkoordinatensystems aus Abbildung 2.1 kann die zusätzliche Bedingung

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_H = s_{xx} + s_{yy} \quad (2.53)$$

für den vorliegenden ebenen Spannungszustand verwendet werden. In Gleichung (2.53) ist  $\sigma_H = \sigma_{kk}/3$  die hydrostatische Spannung und  $s_{ij}$  sind die Komponenten des Spannungsdeviators.

### Pseudo-Dehnungsansatz

Eine Alternative zum Pseudo-Spannungsansatz stellt der Pseudo-Dehnungsansatz dar. Der Unterschied der beiden Verfahren liegt in der Definition des Strukturmodells. Das Strukturmodell gibt hier den Zusammenhang zwischen pseudo elastischen Kerbdehnungen  ${}^e\varepsilon_{ij}$  und den realen Kerbspannungen wieder.

Die Bauteilfließkurve ist dann über den Zusammenhang der realen Kerbvergleichsspannung und der pseudo elastischen Kerbvergleichsdehnung

$$\sigma_v = f({}^e\varepsilon_v) \quad (2.54)$$

gegeben. Als Eingabegröße werden im Pseudo-Dehnungsansatz demnach die Beanspruchungsgeschichte der pseudo elastischen Kerbdehnungen  ${}^e\varepsilon_{ij}(t)$  verwendet. Diese können aus dem Elastizitätsgesetz direkt aus den pseudo Spannungen berechnet werden. Die im Strukturmodell berechneten Spannungen werden in das Werkstoffmodell gegeben, um die elastisch-plastischen Kerbdehnungen zu berechnen. Da Struktur- und Werkstoffmodell durch die Spannungen verknüpft sind, wird durch das Werkstoffmodell nur der plastische Kerbdehnungsanteil berechnet. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.19 grafisch dargestellt.

In [Kött 95a] wird der Pseudo-Dehnungsansatz in den folgenden fünf Schritten zusammengefasst:

1. Bestimmen der Übertragungsfaktoren  $c_{ij}^k$  und/oder  $K_{ij}^k$  aus einer linear elastischen FE-Analyse für jede auf das Bauteil wirkende Einheitslast  $L^k$  bzw. definierte Nennspannung  $S^k$  wie im Pseudo-Spannungsansatz.
2. Bestimmen der Bauteilfließkurve  $(\sigma_v - {}^e\varepsilon_v)$  aus monotoner Belastung.
3. Berechnen der Zeitreihe der pseudo Dehnungen  ${}^e\varepsilon_{ij}(t)$  aus Gleichung (2.3) und Gleichung (2.4).
4. Berechnen des lokalen plastischen Kerbspannungsverlaufs durch Integration des Strukturmodells mit dem Zeitverlauf der pseudo Dehnungen und den in Schritt 2 ermittelten Parametern.
5. Berechnen der (plastischen) Kerbdehnungen durch Integration des Werkstoffmodells unter Vorgabe der in Schritt 4 ermittelten Kerbspannungen.

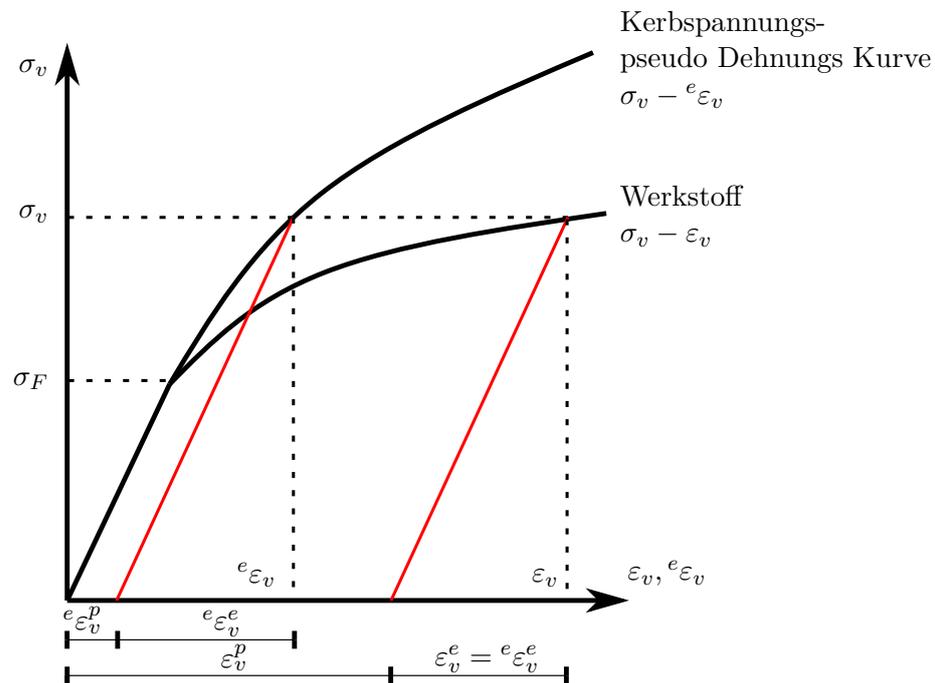


Abbildung 2.19: Aufteilung der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Kurve und der zyklischen Bauteilfließkurve in elastische und plastische Anteile für den Pseudo-Dehnungsansatz.

### 2.3.7. Diskussion inkrementeller Ansätze und Strukturfließflächenansätze

Kerbnäherungsverfahren bieten sowohl Vor- als auch Nachteile gegenüber der Simulation der gesamten Geometrie bei der Untersuchung der lokalen Kerbbeanspruchungen.

Die im Folgenden beschriebenen allgemeinen Nachteile von Kerbnäherungsverfahren werden in [Jian 01] diskutiert.

Ein bedeutender Nachteil ist, dass die für das Ermüdungsversagen kritische Stelle eines Bauteils, insbesondere bei komplexen Geometrien und nichtproportionaler Belastung, im Voraus nicht bekannt ist. Kerbnäherungsverfahren liefern keine Informationen über die genaue Lage der kritischen Stelle und müssen daher möglicherweise auf verschiedene Punkte angewendet werden. In der vorliegenden Arbeit wurden Kerbnäherungsverfahren hauptsächlich zur Bestimmung der lokalen Beanspruchungen an gekerbten Probengeometrien angewendet. Diese einfachen Geometrien weisen im Gegensatz zu realen Bauteilen nicht mehrere Kerben auf. Der kritische Knoten wurde immer als derjenige Knoten definiert, der unter proportionaler Belastung die höchste Vergleichsspannung aufweist. Ein Vorschlag

für die Wahl des Proportionalitätsverhältnisses mehrerer angreifender Lasten wird in Abschnitt 5.2.2 gegeben.

Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass Kerbnäherungsverfahren Verlagerungen der kritischen Stelle nach dem Einsetzen der Plastizität in realen Bauteilen nicht berücksichtigen können. Ebenso wenig werden Umlagerungen von Spannungen und Dehnungen im Nettoquerschnitt, z. B. durch zyklisches Kriechen oder Relaxieren, berücksichtigt.

Auf der positiven Seite bieten Kerbnäherungsverfahren erhebliche Geschwindigkeitsvorteile im Vergleich zur FEM. Dies ermöglicht meist erst die Berücksichtigung von Plastizität auch bei langen Last-Zeit-Reihen, was mit der FEM nicht effizient umsetzbar ist.

Insgesamt sind Kerbnäherungsverfahren eine wertvolle Option zur Analyse von Kerben in Bauteilen. Die beiden oben beschriebenen Kerbnäherungsverfahren (inkrementelle Verfahren und Strukturfließflächenansätze) weisen jeweils spezifische Vor- und Nachteile auf.

Inkrementelle Verfahren haben den Vorteil, dass keine zusätzlichen Parameter für ein Strukturmodell benötigt werden, was den Aufwand reduziert und sie für Situationen mit transientem Werkstoffverhalten leichter anwendbar macht. Nachteilig ist hingegen, dass kein allgemeines Verfahren zur Festlegung von Umkehrpunkten bei nichtproportionaler Beanspruchung vorliegt, was zu numerischen Ungenauigkeiten führt. Des Weiteren bieten sie keine Möglichkeit zur Anpassung an eine gegebene Kerbgeometrie, zum Beispiel durch die Wahl einer Bauteilfließkurve.

Strukturfließflächenansätze sind numerisch stabil, erfordern aber das zweifache Lösen eines Plastizitätsmodells, was zusätzlichen numerischen Aufwand bedeutet. Darüber hinaus muss ein neuer Satz Parameter für das Strukturmodell bestimmt werden, was bei komplexeren Modellen sehr aufwendig sein kann. Ein Vorteil von Strukturfließflächenansätzen ist ihre Anpassungsfähigkeit an gegebene Kerbgeometrien und Belastungsfälle durch die Wahl von Bauteilfließkurven.

Die Wahl zwischen den beiden Ansätzen und die Bewertung ihrer Vor- und Nachteile hängen von den spezifischen Anforderungen, dem verfügbaren Wissen über das Werkstoffverhalten und den numerischen Ressourcen ab. Beide Methoden bieten Lösungen für die Analyse von lokalen Kerbspannungen und -dehnungen. Ein Vergleich von den Strukturfließflächenansätzen und den inkrementellen Verfahren folgt in Abschnitt 2.5.

## 2.4. Erweiterungen der Strukturfließflächenansätze

In diesem Abschnitt werden verschiedene Aspekte der Weiterentwicklung und Optimierung von Strukturfließflächenansätzen behandelt, die einen wesentlichen Beitrag zur verbesserten Bewertung von Bauteilen mit Kerben leisten können.

### 2.4.1. Integrationsalgorithmus für die Strukturfließflächenansätze

Die Anwendung der Strukturfließflächenansätze beruht im Wesentlichen auf der zweimaligen Integration eines Plastizitätsmodells. Es wird ein Integrationsalgorithmus erarbeitet, der die folgenden Anforderungen erfüllt:

- Für den Pseudo-Dehnungsansatz wird ein Algorithmus benötigt, der das inkrementelle Plastizitätsmodell sowohl unter Vorgabe von Dehnungen als auch unter Vorgabe von Spannungen lösen kann.
- Für den Pseudo-Spannungsansatz wird darüber hinaus ein Algorithmus benötigt, der das Plastizitätsmodell unter Vorgabe von plastischen Dehnungen integrieren kann.
- Der Algorithmus muss eine schnelle und stabile Integration des Plastizitätsmodells gewährleisten.

Eine schnelle und stabile Integration kann vor allem durch die sogenannten „radial return“ Verfahren bzw. „Prädiktor-Korrektor“ Verfahren erreicht werden. Diese beruhen auf der Anwendung des impliziten Euler Verfahrens. In der Literatur sind einige Umsetzungen dieser Verfahren zu finden [Orti 85, Orti 86, Simo 86, Simo 91, Hart 93, Dogh 93, Hopp 95, Dogh 95, Chab 96, Hart 98, Koba 02]. In den meisten Fällen werden diese Methoden im Kontext der FEM verwendet und funktionieren somit nur unter der Vorgabe von Dehnungsinkrementen. Im Folgenden wird sich hauptsächlich an dem Algorithmus aus [Koba 02] orientiert. Dieser Algorithmus muss allerdings in den folgenden Punkten erweitert werden:

- Der Algorithmus muss auch unter Vorgabe von Spannungen funktionieren.
- Der Algorithmus muss auch im ebenen Spannungszustand angewendet werden können.
- Der Algorithmus muss auf die Verwendung der kinematischen Verfestigungsregel des Ohno/Wang Modells (Gleichung (2.28), Gleichung (2.29)) erweitert werden. In [Koba 02] wird nur der Sonderfall  $\chi^k = \infty$  gelöst.

Um eine unnötige Anzahl Indizes zu vermeiden, wird im Folgenden auf die Indexnotation verzichtet. Tensoren zweiter Stufe werden durch fettgedruckte, kleine Buchstaben ausgedrückt (z. B. Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j$ ). Tensoren vierter Stufe werden durch fettgedruckte, große lateinische Buchstaben ausgedrückt (z. B. Elastizitätstensor  $\mathbf{C}^e = C_{ijkl}^e e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$ ). Das Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren wird durch einen Doppelpunkt ausgedrückt (z. B.  $\mathbf{s} : \mathbf{s} = s_{ij} s_{ij}$ ). Die Schreibweise  $\mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^{el} e_i \otimes e_j$  wird verwendet, um die Anwendung eines Tensors vierter Stufe auf einen Tensor zweiter Stufe darzustellen. Für die Umsetzung in Programmcode wurde die Voigt Notation verwendet. Diese wurde aus [Simo 98] entnommen. Darüber hinaus wird bei der Herleitung des Algorithmus eine isotrope Verfestigungsregel der Form

$$dY = b[Q_\infty - (Y - Y_0)] dp \quad (2.55)$$

nach [Chab 79] verwendet. Hier ist  $Y$  der Radius der Fließfläche. Zu Beginn startet der Radius bei der Fließspannung  $Y(p = 0) = Y_0 = \sigma_F$ . Die isotrope Verfestigung wurde ursprünglich mit implementiert, stellte sich allerdings später als unwichtig für die Lebensdauerprognose heraus. Alle Parameter der isotropen Verfestigung können für die restliche Arbeit als 0 angesehen werden. Dadurch wird der Integrationsalgorithmus nicht beeinflusst.

### Problemdefinition

Das Plastizitätsmodell besitzt die Zustandsvariablen  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}^i, Y$ . Es werden  $i = 1, \dots, M$  Backstresstensoren  $\boldsymbol{\alpha}^i$  verwendet. Zum Zeitpunkt  $t_n$  sind alle Größen bekannt. Bei einem Lastschritt  $t_n \rightarrow t_{n+1}$  wird entweder ein Spannungsinkrement  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  oder ein Dehnungsinkrement  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  vorgegeben. Die Größe  $\Delta$  kennzeichnet dabei die inkrementelle Änderung einer Zustandsvariable. Für diesen Lastschritt müssen die neuen Werte der Zustandsvariablen für  $t_{n+1}$  berechnet werden. Dazu wird das implizite Euler Verfahren verwendet. Die Gleichungen des Plastizitätsmodells sind in Gleichung (2.56) bis Gleichung (2.63) angegeben.

Entweder Vorgabe der Spannungen oder Dehnungen:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.56)$$

Additive Zerlegung der Dehnungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} \quad (2.57)$$

Elastizitätsgesetz:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{el} \quad (2.58)$$

Fließbedingung und effektive Spannung  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \\ F_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2} (\beta_{n+1} : \beta_{n+1})} - (Y_{n+1}) = 0\end{aligned}\tag{2.59}$$

Normalentensor an die Fließfläche:

$$\mathbf{n}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\beta_{n+1}}{Y_{n+1}}}\tag{2.60}$$

Plastische Dehnung und assoziierte Fließregel:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}\end{aligned}\tag{2.61}$$

Entwicklung der kinematischen Verfestigung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i &= \boldsymbol{\alpha}_n^i + c^i (r^i \mathbf{n}_{n+1} - w_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i) \Delta p_{n+1} \\ w_{n+1}^i &= \left( \frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i\|}{r^i} \right)^{\chi^i} \left\langle \mathbf{n}_{n+1} : \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i}{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i\|} \right\rangle \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i\end{aligned}\tag{2.62}$$

Entwicklung der isotropen Verfestigung:

$$Y_{n+1} = Y_n + b [Q_\infty - (Y_{n+1} - Y_0)] \Delta p_{n+1}\tag{2.63}$$

### Elastischer Prädiktor-Schritt und Korrektor-Schritt

Zunächst wird angenommen, dass während des Inkrements keine plastische Verformung stattfindet. Es wird die Gültigkeit des Elastizitätsgesetzes angenommen (Prädiktor-Schritt). Anschließend wird die Fließbedingung überprüft. Unter Dehnungsvorgabe sieht der Versuchsschritt wie folgt aus:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}).\tag{2.64}$$

Größen, die mit einem  $(\dots)^*$  markiert sind, repräsentieren immer Variablen aus dem Prädiktor-Schritt, die gegebenenfalls angepasst werden müssen. Im Prädiktor-Schritt wird also davon ausgegangen, dass während des Inkrements kein plastisches Fließen stattfindet  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} = 0$ . Bei Spannungssteuerung ist die Versuchsspannung  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$  gleich der tatsächlichen Spannung:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}.\tag{2.65}$$

Mit der Versuchsspannung wird die Fließbedingung

$$F_{n+1}^* = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s}_{n+1}^* - \boldsymbol{\alpha}_n) : (\mathbf{s}_{n+1}^* - \boldsymbol{\alpha}_n)} - Y_n, \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}_{n+1}^* = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*)\tag{2.66}$$

überprüft. Ist  $F_{n+1}^* \leq 0$ , finden nur elastische Deformationen innerhalb des Inkrements statt. Ansonsten kommt der plastische Korrektor-Schritt (radial return).

Wird der Prädiktor-Schritt abgelehnt, müssen bei Dehnungssteuerung die Spannungen korrigiert werden. Dies passiert mit dem Inkrement der plastischen Dehnung am Ende des Zeitschritts:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} \right) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl}. \quad (2.67)$$

Bei isotroper Elastizität und inkompressibler Plastizität gilt:  $\mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} = 2G \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl}$ . Die Werkstoffkonstante  $G$  ist der Schubmodul. Unter der Vorgabe von Spannungen entspricht die Versuchsspannung der realen Spannung am Ende des Zeitschritts. Es müssen dann lediglich die Zustandsvariablen aktualisiert werden. Der Korrektor wird durch

$$korr = \rho 2G \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} \quad \rho = \begin{cases} 0 & \text{Vorgabe der Spannungen} \\ 1 & \text{Vorgabe der Dehnungen} \end{cases}, \quad (2.68)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \rho 2G \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} \quad (2.69)$$

zusammengefasst. Für die spätere erneute Auswertung der Fließbedingung wird der Spannungsdeviator am Ende des Inkrements in Abhängigkeit der Versuchsspannung gebildet:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{s}_{n+1}^* - \rho 2G \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl}. \quad (2.70)$$

Eine grafische Darstellung des Prädiktor-Korrektor Verfahrens unter Vorgabe von Dehnungen ist in Abbildung 2.20 veranschaulicht. Zuerst wird ein elastisches Inkrement angenommen. Falls sich herausstellt, dass diese Annahme nicht zutrifft, werden die Spannungen aus dem Versuchsschritt radial auf die Fließfläche projiziert. Da hier das implizite Euler Verfahren verwendet wird, sind die Projektionsrichtung sowie die Länge des Korrektor-Schritts zunächst unbekannt.

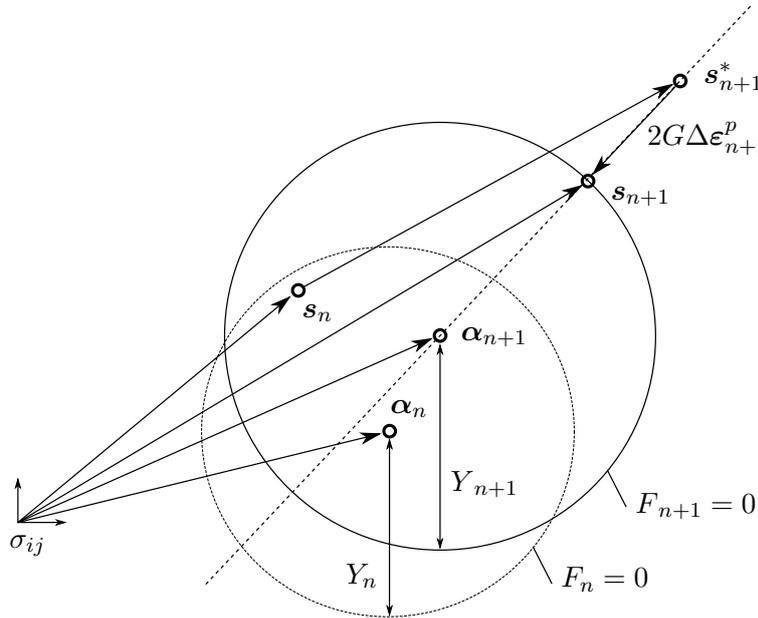


Abbildung 2.20: Schematische Darstellung des Prädiktor-Korrektor Verfahrens unter Vorgabe der Dehnungen

### Elastischer Prädiktor-Schritt im Spezialfall: Dehnungsvorgabe im ESZ

Im ebenen Spannungszustand (ESZ) werden nur 3 Spannungen und 3 Dehnungen bei der algorithmischen Umsetzung gespeichert. Die dritte Normaldehnung (beispielsweise  $\varepsilon_{zz}$ ) muss nicht gespeichert werden. Ihr elastischer Anteil kann aus dem Elastizitätsgesetz und ihr plastischer Anteil aus der Bedingung  $\varepsilon_{kk}^{pl} = 0$  bestimmt werden. Bei Vorgabe des Dehnungsincrements  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$

ist allerdings nicht bekannt, welcher Anteil elastisch und welcher Anteil des Inkrements plastisch ist. Zusätzlich steht allerdings die Nebenbedingung  $\Delta\sigma_{zz} = 0$  zur Verfügung. Dadurch entsteht im ebenen Spannungszustand im elastischen Prädiktor-Schritt unter der Vorgabe von Dehnungen eine Besonderheit. Die folgende Erweiterung des Prädiktor-Schritts wurde in [Dogh 95] eingeführt. Der Korrektor-Schritt wurde an das vorliegende Verfahren angepasst. Es wird ähnlich wie für die Spannung ein Versuchsinkrement  $\Delta\varepsilon_{zz}^*$  für die unbekannte Dehnungskomponente gebildet. Zunächst werden wieder rein elastische Deformationen für das gesamte Inkrement angenommen. Aus der Bedingung des ESZ im Prädiktor-Schritt ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{zz}^* &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu(\Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{yy}) + (1-\nu)\Delta\varepsilon_{zz}^*] = 0, \\ \Delta\varepsilon_{zz}^* &= -\frac{\nu}{1-\nu} [\Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{yy}]\end{aligned}\quad (2.71)$$

für das Versuchsinkrement  $\Delta\varepsilon_{zz}^*$ . Werden die tatsächlichen elastischen Anteile der Dehnungsinkremente in  $\Delta\sigma_{zz} = 0$  eingesetzt und zusätzlich noch Gleichung (2.71) verwendet, lässt sich der Zusammenhang zwischen dem Dehnungsinkrement  $\Delta\varepsilon_{zz}$  und dem Versuchsinkrement  $\Delta\varepsilon_{zz}^*$  herleiten:

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu(\Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{xx}^{pl} + \Delta\varepsilon_{yy} - \Delta\varepsilon_{yy}^{pl}) + (1-\nu)(\Delta\varepsilon_{zz} - \Delta\varepsilon_{zz}^{pl}) \right] = 0, \quad (2.72)$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta\varepsilon_{zz}^{pl} + \Delta\varepsilon_{zz}^*.$$

Gezeigt wurde der Prädiktor-Schritt der Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$ . Um die komplette Versuchsspannung zu erhalten, wird der Prädiktor-Schritt der anderen beiden Normalspannungskomponenten mit dem Versuchsinkrement der Dehnung  $\Delta\varepsilon_{zz}^*$  ausgeführt. Hier wird nur exemplarisch die Rechnung für die  $\sigma_{xx}$  Komponente gezeigt:

$$\Delta\sigma_{xx}^* = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu(\Delta\varepsilon_{zz}^* + \Delta\varepsilon_{yy}) + (1-\nu)\Delta\varepsilon_{xx}] = \frac{E}{1-\nu^2} (\Delta\varepsilon_{xx} + \nu\Delta\varepsilon_{yy}). \quad (2.73)$$

In Gleichung (2.73) wird der Vorteil der Definition von  $\Delta\varepsilon_{33}^*$  deutlich. Das Versuchsinkrement des Spannungstensors entspricht genau  $\Delta\sigma_{n+1}^* = \mathbf{C}^e \Delta\varepsilon_{n+1}$  in Voigt Notation für den ESZ. Das Versuchsinkrement  $\Delta\varepsilon_{33}^*$  muss bei der algorithmischen Umsetzung nicht explizit berechnet werden. Der Korrektor-Schritt aus Gleichung (2.67) muss angepasst werden. Im Gegensatz zu Gleichung (2.67) wurde im Prädiktor-Schritt nicht das gesamte Dehnungsinkrement  $\Delta\varepsilon_{zz}$  aufgebracht, sondern nur der Anteil  $\Delta\varepsilon_{zz}^*$ . Der Rest des Inkrements muss bei der Korrektur berücksichtigt werden. Dadurch entsteht ein zusätzlicher Term im Korrektor:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1,xx} &= \sigma_{n,xx} + \Delta\sigma_{n+1,xx}^* - 2G\Delta\varepsilon_{xx}^{pl} + \underbrace{\frac{E\nu}{1-\nu^2}}_{= \frac{1-2\nu}{1-\nu} (K - \frac{2}{3}G)} \Delta\varepsilon_{zz}^{pl}.\end{aligned}\quad (2.74)$$

In Gleichung (2.74) ist  $K$  der Kompressionsmodul. Wird dieselbe Rechnung für die beiden anderen Normalspannungen durchgeführt, folgt eine Erweiterung des Korrekturterms:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e \Delta\varepsilon - 2G\Delta\varepsilon_{n+1}^{pl} + (K\mathbf{I} + 2G\boldsymbol{\delta}_3) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta\varepsilon_{zz}^{pl} \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \sqrt{\frac{3}{2}} 2G\Delta p_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} + (K\mathbf{I} + 2G\boldsymbol{\delta}_3) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_{n+1} \mathbf{n}_{n+1,zz}.\end{aligned}\quad (2.75)$$

In Gleichung (2.75) ist  $\mathbf{I} = \delta_{ij}e_i \otimes e_j$  der Einheitstensor und  $\boldsymbol{\delta}_3 = (\delta_{i3}\delta_{j3} - \frac{1}{3}\delta_{ij})e_i \otimes e_j$  eine Hilfsgröße. Für die spätere Auswertung der Fließbedingung wird der Spannungsdeviator gebildet:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^* - \sqrt{\frac{3}{2}}2G\Delta p_{n+1}\mathbf{n}_{n+1} + \sqrt{\frac{3}{2}}2G\boldsymbol{\delta}_3 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta p_{n+1}\mathbf{n}_{n+1,zz}. \quad (2.76)$$

Die fehlende Komponente der Normalen folgt aus der Bedingung  $n_{kk} = 0$ . Die zusätzlichen Terme im Korrektor-Schritt sind bei der folgenden Herleitung einer Verfahrensfunktion zum Lösen des Gleichungssystems des impliziten Euler Verfahrens für den ebenen Spannungszustand zu beruckichtigen. Da sie allerdings hauptsächlich bei der Implementierung eine Rolle spielen, wird hier weiterhin mit der Tensornotation fortgefahren.

### Verfahrensvorschrift

Zur Lösung des Gleichungssystems des impliziten Euler Verfahrens wird zuerst die effektive Spannung  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$  in Bezug auf die Versuchsspannung geschrieben. Dazu wird der Spannungsdeviator aus Gleichung (2.70) eingesetzt, es folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} - \sum_i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i \\ &= \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i - 2G\rho\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die Verfestigungsregeln, Gleichung (2.62) und Gleichung (2.63), können nun nach den Werten am Ende des Inkrements aufgelöst werden:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i = \theta_{n+1}^i (\boldsymbol{\alpha}_n^i + c^i r^i \mathbf{n}_{n+1} \Delta p_{n+1}) \quad \text{mit} \quad \theta_{n+1}^i = \frac{1}{1 + c^i w_{n+1}^i \Delta p_{n+1}}, \quad (2.78)$$

$$Y_{n+1} = \Gamma_{n+1} (Y_n + b(Q_\infty + Y_0) \Delta p_{n+1}) \quad \text{mit} \quad \Gamma_{n+1} = \frac{1}{1 + b\Delta p_{n+1}}. \quad (2.79)$$

Dabei ist die Wichtungsfunktion  $w^i$  eine nichtlineare Funktion, die ebenfalls vom Backstresstensor am Ende des Zeitschritts abhängt. In diesem Fall lässt sich die Entwicklungsgleichung der kinematischen Verfestigung Gleichung (2.62) nicht explizit auflösen und muss numerisch gelöst werden. Der Backstresstensor am Ende des Zeitschritts, Gleichung (2.78), wird jetzt in die effektive Spannung eingesetzt. Zusätzlich werden die Fließregel, Gleichung (2.61), und die Fließflächennormale, Gleichung (2.60), eingesetzt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i - \rho \frac{3G}{Y_{n+1}} \Delta p_{n+1} \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \Delta p_{n+1} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}{Y_{n+1}} \sum_i \theta_{n+1}^i c^i r^i, \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \frac{Y_{n+1} (\mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i)}{Y_{n+1} + \Delta p_{n+1} (3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_i \theta_{n+1}^i c^i r^i)}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Die effektive Spannung aus Gleichung (2.80) kann jetzt in die Fließbedingung Gleichung (2.59) eingesetzt werden. Dabei muss am Ende des Zeitschritts die Bedingung  $F_{n+1} = 0$  erfüllt sein:

$$F_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} (\mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i) : (\mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i)}{Y_{n+1} + \Delta p_{n+1} (3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_i \theta_{n+1}^i c^i r^i)} - 1 = 0 \quad (2.81)$$

In Gleichung (2.81) wurde mit  $Y_{n+1}$  gekürzt. Zusätzlich wird die Fließspannung am Ende des Zeitschritts,  $Y_{n+1}$  aus Gleichung (2.79), eingesetzt:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2} \left( \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i \right) : \left( \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i \right)} \\
&\quad - \left[ \Gamma_{n+1} Y_n + \Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) \Delta p_{n+1} + \Delta p_{n+1} \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_i \theta_{n+1}^i c^i r^i \right) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Die Fließbedingung aus Gleichung (2.82) kann jetzt nach  $\Delta p_{n+1}$  umgestellt werden. So wird eine Gleichung zum iterativen Bestimmen von  $\Delta p_{n+1}$  aufgestellt:

$$\Delta p_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \left( \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i \right) : \left( \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i \right)} - \Gamma_{n+1} Y_n}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_i \theta_{n+1}^i c^i r^i \right)}. \tag{2.83}$$

Die Größen  $\Gamma_{n+1}$  und  $\theta_{n+1}^i$  sind dabei selbst noch Funktionen von  $\Delta p_{n+1}$ . Gleichung (2.83) stellt eine skalare, nichtlineare Gleichung dar, mit der das Inkrement der plastischen Bogenlänge berechnet werden kann. Diese muss numerisch gelöst werden. Sobald  $\Delta p_{n+1}$  bestimmt ist, können aus Gleichung (2.78) und Gleichung (2.79) die Entwicklung der isotropen und kinematischen Verfestigung bestimmt werden. Die nichtlineare Entwicklungsgleichung der kinematischen Verfestigung muss dazu numerisch gelöst werden. Anschließend kann aus Gleichung (2.80), Gleichung (2.60) und Gleichung (2.61) das Inkrement der plastischen Dehnungen berechnet werden. Sobald der plastische Anteil des Inkrements bekannt ist, kann aus dem Elastizitätsgesetz entweder die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  oder die Gesamtdehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  bestimmt werden. Die Lösung des inkrementellen Plastizitätsmodells mittels implizitem Euler Verfahren reduziert sich somit auf das Lösen einer einzelnen, skalaren, nichtlinearen Gleichung (2.83).

### Lösungsalgorithmus

Um Gleichung (2.83) zu lösen, wird eine Fixpunktiteration angewendet. Der Ausgangspunkt dieser Iteration ist die Annahme, dass  $\theta_{n+1}^i$  und  $\Gamma_{n+1}$  bekannt sind. Für den elastischen Versuchsschritt, bei dem  $\Delta p_{n+1} = 0$  angenommen wird, gilt  $\theta_{n+1}^i = \Gamma_{n+1} = 1$ . Anschließend wird ein neues Inkrement der plastischen Bogenlänge mithilfe von Gleichung (2.83) bestimmt. Eine neue effektive Spannung wird anschließend aus Gleichung (2.80) berechnet, woraus sich direkt die Fließflächennormale gemäß Gleichung (2.60) sowie das plastische Dehnungsincrement gemäß der Fließregel in Gleichung (2.61) ergeben. Im nächsten Schritt werden die kinematische und isotrope Verfestigung aus Gleichung (2.78) und Gleichung (2.79) bestimmt, wobei die Lösung für die kinematische Verfestigung numerisch gefunden werden muss. Die gesamte Fixpunktiteration kann durch

$$\begin{aligned}
\Delta p_{n+1}^{k+1} &= \phi \left( \Delta p_{n+1}^k \right), \\
\phi \left( \Delta p_{n+1} \right) &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \left( \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i \right) : \left( \mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^i \boldsymbol{\alpha}_n^i \right)} - \Gamma_{n+1} Y_n}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_i \theta_{n+1}^i c^i r^i \right)}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

zusammengefasst werden. Die Verfahrensfunktion der Fixpunktiteration wird als  $\phi$  bezeichnet. Der Laufindex  $k$  steht für die Anzahl der durchgeführten Iterationsschritte. Die Konvergenz der Iteration

wird mit der Bedingung

$$\left| 1 - \frac{\Delta p_{n+1}^{k+1}}{\Delta p_{n+1}^k} \right| < tol \quad (2.85)$$

geprüft.

Der Algorithmus zum Lösen des inkrementellen Plastizitätsmodells für ein gegebenes Inkrement von  $t_n$  nach  $t_{n+1}$  ist in Abbildung 2.21 dargestellt.

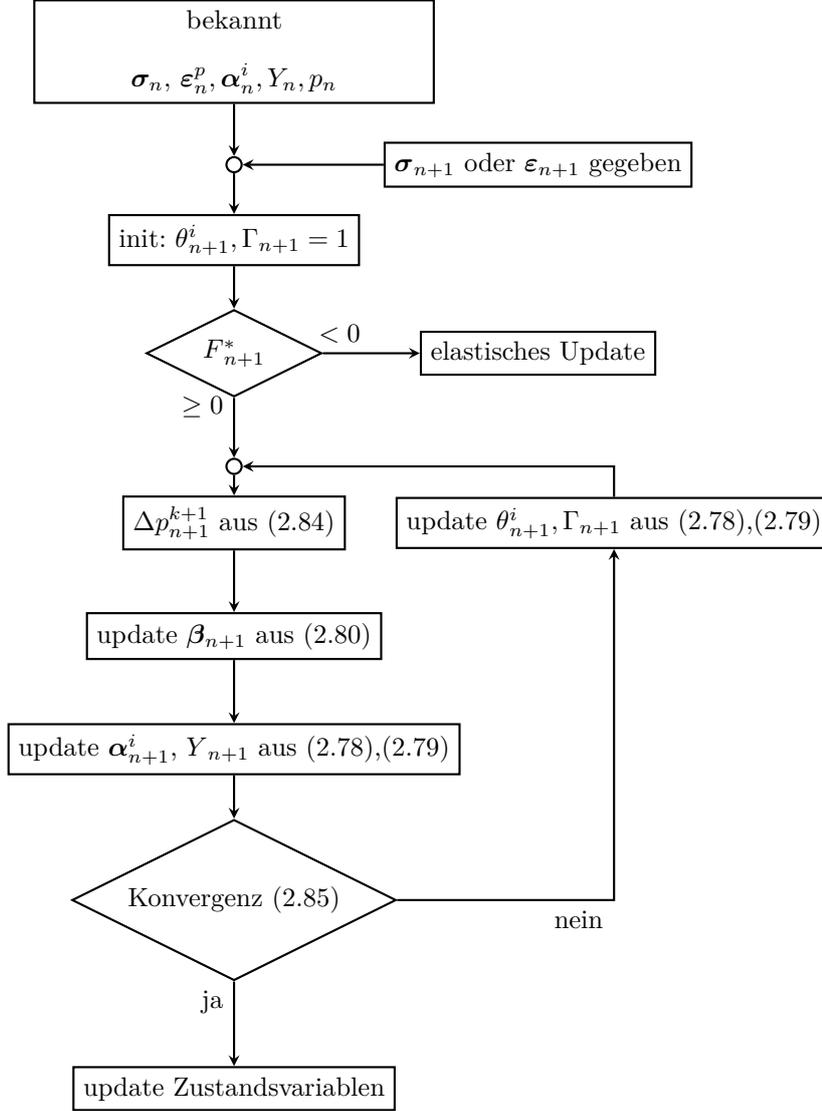


Abbildung 2.21: Flussdiagramm des Algorithmus des radial return Verfahrens

Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, wurde nach dem Vorschlag aus [Koba 02] Aitken's  $\Delta^2$  Methode implementiert. Aitken's  $\Delta^2$  Methode kann allgemein angewendet werden, um die Konvergenzgeschwindigkeit von Fixpunktiterationen zu beschleunigen. Nach jeder dritten Iteration wird  $\Delta \hat{p}_{n+1}$  mit

$$\Delta \hat{p}_{n+1} = \Delta p_{n+1}^{k+1} - \frac{\left( \Delta p_{n+1}^{k+1} - \Delta p_{n+1}^k \right)^2}{\Delta p_{n+1}^{k+1} - 2\Delta p_{n+1}^k + \Delta p_{n+1}^{k-1}} \quad k + 1 = 3, 6, 9, \dots \quad (2.86)$$

berechnet. Sollte  $\Delta\hat{p}_{n+1} > 0$  erfüllt sein, wird  $\Delta\hat{p}_{n+1}$  anstelle  $\Delta p_{n+1}^{k+1}$  für den aktuellen Iterationsschritt verwendet.

### Lösen der nichtlinearen Gleichung der kinematischen Verfestigung

Die Wichtungsfunktion  $w_{n+1}^i$  in der Entwicklungsgleichung (2.78) der kinematischen Verfestigung des Ohno/Wang Modells hängt vom Backstresstensor am Ende des Zeitschrittes ab  $w_{n+1}^{i,k} = w_{n+1}^{i,k}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{i,k})$ . Gleichung (2.78) lässt sich also nicht explizit auflösen und muss für jeden Teilbackstresstensor numerisch gelöst werden. Dazu wird hier das Newtonverfahren verwendet. Zunächst wird Gleichung (2.78) umgestellt und das Residuum  $\mathbf{r}_{\alpha,i}$  gebildet:

$$\mathbf{r}_{\alpha,i} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{i,k} \left( 1 + c^i w_{n+1}^{i,k} \Delta p_{n+1}^k \right) - \boldsymbol{\alpha}_n^i - c^i r^i \mathbf{n}_{n+1}^k \Delta p_{n+1}^k. \quad (2.87)$$

Der Index  $k$  steht weiterhin für den Iterationsschritt der Fixpunktiteration zum Lösen der Fließbedingung. In Gleichung (2.87) sind  $\Delta p_{n+1}^k$  und  $\mathbf{n}_{n+1}^k$  bereits bekannt. Die einzige Unbekannte ist  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{i,k}$ . Der Iterationsindex  $k$  der Fixpunktiteration wird im Folgenden weggelassen. Stattdessen wird  $j$  als der neue Iterationsindex für das Newtonverfahren zum Aktualisieren des Backstresstensors eingeführt. Gleichung (2.87) wird im Newtonverfahren gelöst, bis  $\|\mathbf{r}_{\alpha,i}\| < tol$  gilt.

Ausgehend von einem Startwert wird der Teilbackstresstensor des nächsten Iterationsschrittes aus

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{i,j+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{i,j} - \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha,i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i} \right)^{-1} \mathbf{r}_{\alpha,i}^j \quad (2.88)$$

bestimmt. Als Startwert des Newtonverfahrens wird Gleichung (2.78) mit den Werten des aktuellen Fixpunktiterationsschrittes verwendet. Die Ableitung des Residuums nach dem  $i$ -ten Teilbackstresstensor berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha,i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i} &= (1 + c^i w_{n+1}^i \Delta p_{n+1}) \mathbf{I} + c^i \Delta p_{n+1} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i \otimes \frac{\partial w_{n+1}^i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i} \\ &= k_1 \mathbf{I} + k_2 \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha + k_3 \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_{n+1} \\ \text{mit } \mathbf{n}_\alpha &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i / \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i\|, \\ k_1 &= 1 + c^i w_{n+1}^i \Delta p_{n+1}, \\ k_2 &= c^i \Delta p_{n+1} w_{n+1}^i (\chi^i - 1), \\ k_3 &= c^i \Delta p_{n+1} \left( \frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i\|}{r^i} \right)^{\chi^i}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Durch den Term in der Föppl-Klammer  $\langle \mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_\alpha \rangle$  in der Entwicklungsgleichung (2.62) der kinematischen Verfestigung muss für die Ableitung der Fall  $\langle \mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_\alpha \rangle = 0$  unterschieden werden. Dann gilt  $k_1 = 1$  und  $k_2 = k_3 = 0$ . Die Ableitung des Residuums kann weiterhin analytisch invertiert werden:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha,i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i} \right)^{-1} = \frac{1}{k_1} \mathbf{I} - \frac{k_2}{k_1 (k_1 + k_2 + k_3 \mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_\alpha)} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha - \frac{k_3}{k_1 (k_1 + k_2 + k_3 \mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_\alpha)} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_{n+1}. \quad (2.90)$$

### Beweis der Konvergenz

Hier soll gezeigt werden, dass die Verfahrensvorschrift aus Gleichung (2.84) gegen einen Fixpunkt konvergiert. Gesucht wird der Fixpunkt  $a = \phi(a)$  mit  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(\Delta p_{n+1}^k)$ . Dazu wird gezeigt,

dass der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen stetig abnimmt. Also dass die Verfahrensfunktion die Lipschitz Bedingung

$$\left| \Delta p_{n+1}^{k+1} - \Delta p_{n+1}^k \right| < L \left| \Delta p_{n+1}^k - \Delta p_{n+1}^{k-1} \right| \quad (2.91)$$

erfüllt, wobei  $L$  eine Lipschitz Konstante darstellt. Durch weiteres Einsetzen der Verfahrensvorschrift folgt:

$$\begin{aligned} \left| \phi(\Delta p_{n+1}^k) - \phi(\Delta p_{n+1}^{k-1}) \right| &< L \left| \Delta p_{n+1}^k - \Delta p_{n+1}^{k-1} \right| \\ &\dots < L \left| \phi(\Delta p_{n+1}^{k-1}) - \phi(\Delta p_{n+1}^{k-2}) \right| \\ &\dots < L^k \left| \Delta p_{n+1}^1 - \Delta p_{n+1}^0 \right|. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Die Iteration konvergiert, wenn eine Konstante  $L$  gefunden werden kann, für die  $0 \leq L < 1$  gilt. Gleichung (2.92) wird weiter umgeschrieben:

$$|\delta\phi(\Delta p_{n+1})| < L |\delta\Delta p_{n+1}|. \quad (2.93)$$

Das Symbol  $\delta()$  bezeichnet die Variation (Änderung) einer Größe bei einer Erhöhung der Iterationsvariable  $k$  um 1. Jetzt muss  $L$  gefunden werden. Dazu werden die Variationen berechnet. In der Verfahrensvorschrift aus Gleichung (2.84) verändern sich  $\theta_{n+1}^i$  sowie  $\Gamma_{n+1}$  während der Iteration. Zur Abschätzung des Betrags, wird die Dreiecksungleichung verwendet, es folgt:

$$|\delta\phi(\Delta p_{n+1})| \leq \left| \frac{\partial\phi}{\partial\Gamma_{n+1}} \delta\Gamma_{n+1} \right| + \sum_{i=1}^M \left| \frac{\partial\phi}{\partial\theta_{n+1}^i} \delta\theta_{n+1}^i \right|. \quad (2.94)$$

Nun müssen die einzelnen Anteile bestimmt und abgeschätzt werden. Zunächst wird der Anteil der kinematischen Verfestigung berechnet. Dazu wird die Ableitung nach  $\theta_{n+1}^i$  gebildet. Es wird ausgenutzt, dass aus Gleichung (2.80) folgt, dass der Term  $(\mathbf{s}_{n+1}^* - \sum_i \theta_{n+1}^{i,k} \boldsymbol{\alpha}_n^i)$  geteilt durch die eigene Norm der Normalen  $\mathbf{n}_{n+1}$  am Ende des Zeitschritts entspricht. Die Ableitung ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta_{n+1}^i} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{n}_{n+1} : \boldsymbol{\alpha}_n^i + \Delta p_{n+1} c^i r^i}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_j \theta_{n+1}^j c^j r^j \right)}. \quad (2.95)$$

Die Variation der Variable  $\theta_{n+1}^i$  folgt aus Gleichung (2.78) und lässt sich durch

$$\delta\theta_{n+1}^i = -\theta_{n+1}^{i2} c^i \delta\Delta p_{n+1}^i \quad \text{mit } \Delta p_{n+1}^i = w_{n+1}^i \Delta p_{n+1} \quad (2.96)$$

ausdrücken. Der Anteil der kinematischen Verfestigung kann nun aus Gleichung (2.95) und Gleichung (2.96) berechnet werden. Dabei wird der Zusammenhang  $\sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_{n+1} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbf{n}_{n+1}$  ausgenutzt. Zusammen mit der Evolutionsgleichung (2.78) für den Backstresstensor folgt:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta_{n+1}^i} \delta\theta_{n+1}^i = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} c^i \theta_{n+1}^i \mathbf{n}_{n+1} : \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^M \theta_{n+1}^j c^j r^j \right)} \delta\Delta p_{n+1}^i. \quad (2.97)$$

Nun wird der Anteil der isotropen Verfestigung berechnet. Die Variation der Variable  $\Gamma_{n+1}$  folgt aus Gleichung (2.79) und ergibt:

$$\delta\Gamma_{n+1} = -\Gamma_{n+1}^2 b \delta\Delta p_{n+1}. \quad (2.98)$$

Bei Bildung der Ableitung der Verfahrensvorschrift  $\phi$  nach  $\Gamma_{n+1}$  kann wieder die Evolutionsgleichung für isotrope Verfestigung aus Gleichung (2.79) ausgenutzt werden. Der gesamte Anteil der isotropen Verfestigung berechnet sich mit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{n+1}} \delta \Gamma_{n+1} = \frac{\Gamma_{n+1} b Y_{n+1}}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^M \theta_{n+1}^j c^j r^j \right)} \delta \Delta p_{n+1}. \quad (2.99)$$

Jetzt können die Anteile der kinematischen Verfestigung aus Gleichung (2.97) und der isotropen Verfestigung aus Gleichung (2.99) in die Ausgangsgleichung (2.94) eingesetzt werden. Es folgt:

$$|\delta \phi(\Delta p_{n+1})| \leq \frac{\sum_{i=1}^M \left| \sqrt{\frac{3}{2}} c^i \theta_{n+1}^i \mathbf{n}_{n+1} : \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i \delta \Delta p_{n+1}^i \right| + |\Gamma_{n+1} b Y_{n+1} \delta \Delta p_{n+1}|}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^M \theta_{n+1}^j c^j r^j \right)}. \quad (2.100)$$

Nun müssen die einzelnen Anteile, angefangen mit der Variation von  $\Delta p_{n+1}^i$ , abgeschätzt werden. Zunächst wird betrachtet, wie sich ein Teilbackstresstensor während eines Iterationsschritts verändert. Es wird die Variation von Gleichung (2.78) gebildet:

$$\delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i = \theta_{n+1}^i \left[ c^i r^i \Delta p_{n+1} \delta \mathbf{n}_{n+1} + c^i r^i \mathbf{n}_{n+1} \delta \Delta p_{n+1} - c^i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i \delta \Delta p_{n+1}^i \right]. \quad (2.101)$$

Die Wichtungsfunktion  $w^i$  ist stets kleiner oder gleich 1,  $w^i \leq 1$ . Um Ratchetting realistisch zu berechnen, kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Ungleichung  $0 \leq dp^i \leq dp$  erfüllt ist. Daraus folgt die Forderung, dass der Anteil der dynamischen Erholung (dynamic recovery Term) in der Entwicklungsgleichung (2.62) der kinematischen Verfestigung nicht größer als der Verfestigungsterm (strain hardening Term) werden kann. Wird nun der Anteil der Variation des Backstresstensors in die Normalenrichtung  $\mathbf{n}_{n+1}$  (Richtung in der nach Gleichung (2.62) strain hardening stattfindet) untersucht, so ergibt sich mit den Bedingungen  $\mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_{n+1} = 1$  und  $\delta \mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_{n+1} = 0$ :

$$\delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i : \mathbf{n}_{n+1} = \theta_{n+1}^i \left[ \underbrace{c^i r^i \delta \Delta p_{n+1}}_{\text{strain hardening Anteil}} - \underbrace{c^i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i : \mathbf{n}_{n+1} \delta \Delta p_{n+1}^i}_{\text{dynamic recovery Anteil}} \right]. \quad (2.102)$$

Wenn nun der dynamic recovery Anteil nicht größer sein kann als der strain hardening Anteil, ergibt sich die Ungleichung

$$c^i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i : \mathbf{n}_{n+1} \delta \Delta p_{n+1}^i \leq c^i r^i \delta \Delta p_{n+1}. \quad (2.103)$$

Die isotrope Verfestigung kann über den Grenzwert ihrer Entwicklungsgleichung abgeschätzt werden:

$$Y_{n+1} \leq Y_0 + Q_\infty. \quad (2.104)$$

Die beiden Abschätzungen aus Gleichung (2.103) und Gleichung (2.104) können in Gleichung (2.100) eingesetzt werden. Ebenfalls gilt für die Modellparameter  $c^i, r^i, b, Q_\infty, \theta_{n+1}^i, \Gamma_{n+1}, \geq 0$ . Auf die Betragsbildung kann also verzichtet werden. Es folgt:

$$|\delta \phi(\Delta p_{n+1})| \leq \frac{\sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{3}{2}} c^i r^i \theta_{n+1}^i + \Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0)}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^M \theta_{n+1}^j c^j r^j \right)} |\delta \Delta p_{n+1}|. \quad (2.105)$$

Die gesuchte Konstante  $L$  ergibt sich durch einen Vergleich zwischen Gleichung (2.93) und Gleichung (2.105) zu:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{3}{2}} c^i r^i \theta_{n+1}^i + \Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0)}{\Gamma_{n+1} b (Q_\infty + Y_0) + \left( 3G\rho + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^M \theta_{n+1}^j c^j r^j \right)}. \quad (2.106)$$

$L \geq 0$  ist immer erfüllt. Für die Integration unter Dehnungsvorgabe ( $\rho = 1$ ) ist ersichtlich, dass

$$L < 1 \quad (2.107)$$

gilt. Die Verfahrensvorschrift konvergiert also unbedingt gegen einen Fixpunkt. Im Fall der Integration unter Spannungsvorgabe ( $\rho = 0$ ) gilt

$$L = 1. \quad (2.108)$$

Die Verfahrensvorschrift konvergiert also nur bedingt gegen einen Fixpunkt. Unter Vorgabe der Spannungen war keine unbedingt stabile Integration zu erwarten. Dies hängt mit dem Spannungsgrenzwert des verwendeten Ohno/Wang Modells zusammen. Größere Spannungen als  $\sigma_{max,Modell}$  können vom Modell nicht dargestellt werden. Die vorgegebenen Spannungen können allerdings theoretisch beliebig groß sein. Es muss eine Bedingung gefunden werden, die eine stabile Integration des Plastizitätsmodells unter Spannungsvorgabe garantiert. Die vom Plastizitätsmodell maximal berechenbare (Vergleichs)Spannung ist durch die Modellparameter mit

$$\sigma_{max,Modell} = Y_0 + Q_\infty + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^M r^i \quad (2.109)$$

gegeben. Werden die Abschätzungen aus Gleichung (2.103) und Gleichung (2.104) betrachtet, so gelten die Fälle  $Y_{n+1} = Q_\infty + Y_0$  und  $c^i \alpha_{n+1}^i : \mathbf{n}_{n+1} \delta \Delta p_{n+1}^i = c^i r^i \delta \Delta p_{n+1}$  nur dann, wenn sowohl die isotrope als auch die kinematische Verfestigung ihren Grenzwert erreicht haben. Wird nun gefordert, dass die maximal vorgegebene Vergleichsspannung kleiner ist als die vom Modell maximal ertragbare Spannung, gilt entweder  $Y_{n+1} < Q_\infty + Y_0$  oder  $c^i \alpha_{n+1}^i : \mathbf{n}_{n+1} \delta \Delta p_{n+1}^i < c^i r^i \delta \Delta p_{n+1}$  oder beides. Dadurch kann auch unter Spannungssteuerung  $L < 1$  und somit eine stabile Integration garantiert werden. Die im Grunde logische Forderung, dass nur Spannungen vorgegeben werden, die innerhalb der Modellgrenzen liegen, lässt sich durch

$$\sigma_{max,Vorgabe} < \sigma_{max,Modell} = Y_0 + Q_\infty + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^M r^i \quad (2.110)$$

in Abhängigkeit der Modellparameter darstellen. Ihre Gültigkeit ist vor der Integration zu prüfen. Falls sie nicht erfüllt ist, müssen die Parameter des Plastizitätsmodells angepasst werden. Eine weitere Schlussfolgerung dieses Ergebnisses ist, dass eine Integration unter Dehnungsvorgabe weniger Iterationsschritte benötigt als eine Integration unter Spannungsvorgabe. Außerdem kann gefolgert werden, dass mehr Iterationsschritte benötigt werden, wenn sich isotrope und kinematische Verfestigung ihrem Grenzwert nähern.

Im Folgenden wird das Ohno/Wang Modell einmal unter Vorgabe der Spannungen und einmal unter Vorgabe der Dehnungen integriert. Dazu wurden exemplarisch die in Tabelle 2.1 angegebenen Parameter verwendet. Diese wurden an die aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear abgeschätzte zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve für einen Stahl mit Zugfestigkeit  $R_m = 680$  MPa angepasst.

Abbildung 2.22 zeigt die berechneten Fließkurven in Vergleichsspannungen. Es wurden jeweils drei Fließkurven mit 3, 10 und 100 Inkrementen erzeugt. Auch mit sehr großen Schrittweiten (3 Inkrementen) können die Fließkurven noch in guter Näherung zur feineren Diskretisierung (100 Inkremente) beschrieben werden. Ebenfalls in Abbildung 2.22 dargestellt ist die Anzahl der Iterationsschritte bis zur Konvergenz. Als Konvergenzkriterium wurde hier  $\left| 1 - \Delta p_{n+1}^k / \Delta p_{n+1}^{k-1} \right| \leq 10^{-4}$  verwendet.

elastisch	$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \sigma_F = 145.9 \text{ MPa}$		
$M = 5$	Ohno/Wang		
$i$	$c^i$	$r^i$	$\chi^i$
1	46215	15.8	5.0
2	7574	54.3	5.0
3	1241	76.2	5.0
4	203	106.8	5.0
5	33	194.5	5.0

Tabelle 2.1: Parameter des Ohno/Wang Modells

Dargestellt ist das Konvergenzverhalten der Fließkurven, die durch drei Lastinkremente berechnet wurden. Zusammen mit dem Ursprung wird die Fließkurve also nur durch  $n = 1, \dots, 4$  Spannungs-Dehnungs-Paare angenähert. Wie zu erwarten benötigt die Integration unter Dehnungsvorgabe weniger Iterationsschritte bis zur Konvergenz als die Integration unter Vorgabe der Spannungen. Unter Spannungsvorgabe ist ebenfalls auffällig, dass mit steigender Spannung mehr Iterationen bis zur Konvergenz benötigt werden. Dazu können z. B.  $n = 2$  und  $n = 4$  verglichen werden. Ebenfalls deutlich wird, dass Aitken's  $\Delta^2$  Verfahren die Anzahl der Iterationsschritte vor allem bei Spannungsvorgabe deutlich reduziert.

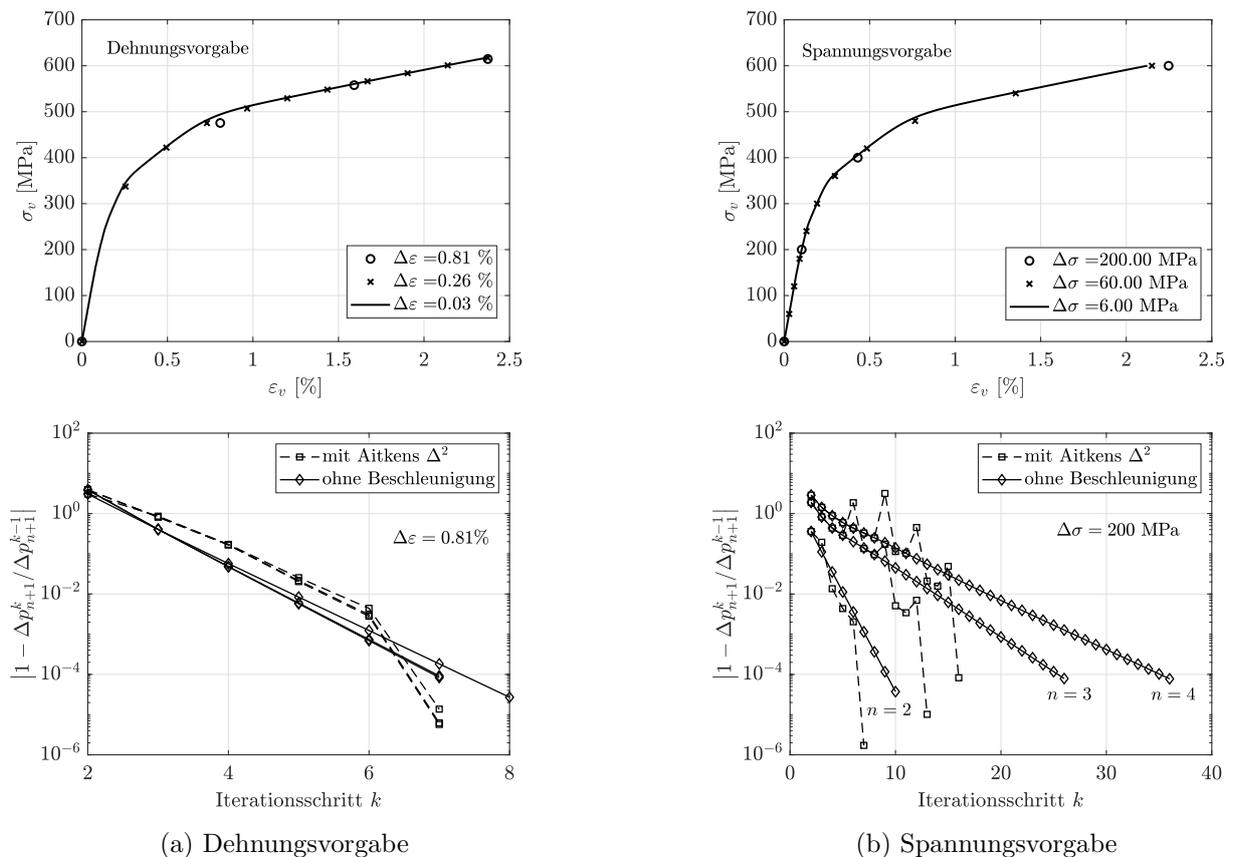


Abbildung 2.22: Fließkurven und Anzahl der Iterationsschritte bis zur Konvergenz der Fixpunktiteration erzeugt mit dem Ohno/Wang Modell für verschiedene Inkrementgrößen (a) bei Dehnungsvorgabe und (b) bei Spannungsvorgabe

### 2.4.1.1. Algorithmus für den Pseudo-Dehnungsansatz

Der Pseudo-Dehnungsansatz benötigt die zweimalige Integration des Ohno/Wang Modells. Die erste Integration erfolgt durch Vorgabe der pseudo Dehnungen  ${}^e\varepsilon(t)$ . Daraus werden die Kerbspannungen  $\sigma(t)$  berechnet. Die Kerbspannungen werden anschließend als Eingabe der zweiten Integration verwendet, um die Kerbdehnungen  $\varepsilon(t)$  zu ermitteln. Der in Abschnitt 2.4.1 beschriebene Algorithmus kann direkt zweimal hintereinander aufgerufen werden. Dabei werden dem Plastizitätsmodell lediglich verschiedene Parameter vorgegeben.

Der Algorithmus, mit dem der Pseudo-Dehnungsansatz unter Vorgabe der Zeitreihe der äußeren Lasten  $L(t)$  und der Proportionalitätsfaktoren  $c$  angewandt wird, ist in Abbildung 2.23 dargestellt. Die Integration des Struktur- und Werkstoffmodells muss dabei nicht für die gesamte Last-Zeit-Reihe sequenziell erfolgen. Es ist auch möglich, in jedem Zeitschritt zuerst das Struktur- und anschließend das Werkstoffmodell zu lösen.

Ein entscheidender Faktor für die Genauigkeit des Pseudo-Dehnungsansatzes ist die Auswahl der Strukturparameter. Die Parameter des Strukturmodells werden mithilfe der Bauteilfließkurve bestimmt. Die Parameter, die das stabile Werkstoffverhalten modellieren ( $c^i$  und  $r^i$ ), können gemäß dem in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. In Abschnitt 2.4.2 wird auf eine Besonderheit hinsichtlich der Bestimmung der Bauteilfließkurven bei Verwendung von Kerbnäherungsverfahren hingewiesen. Sollte nichtproportionale Verfestigung berücksichtigt werden, können die Parameter an eine, mit dem Verfahren von Socie und Marquis aus Gleichung (2.37) modifizierte,

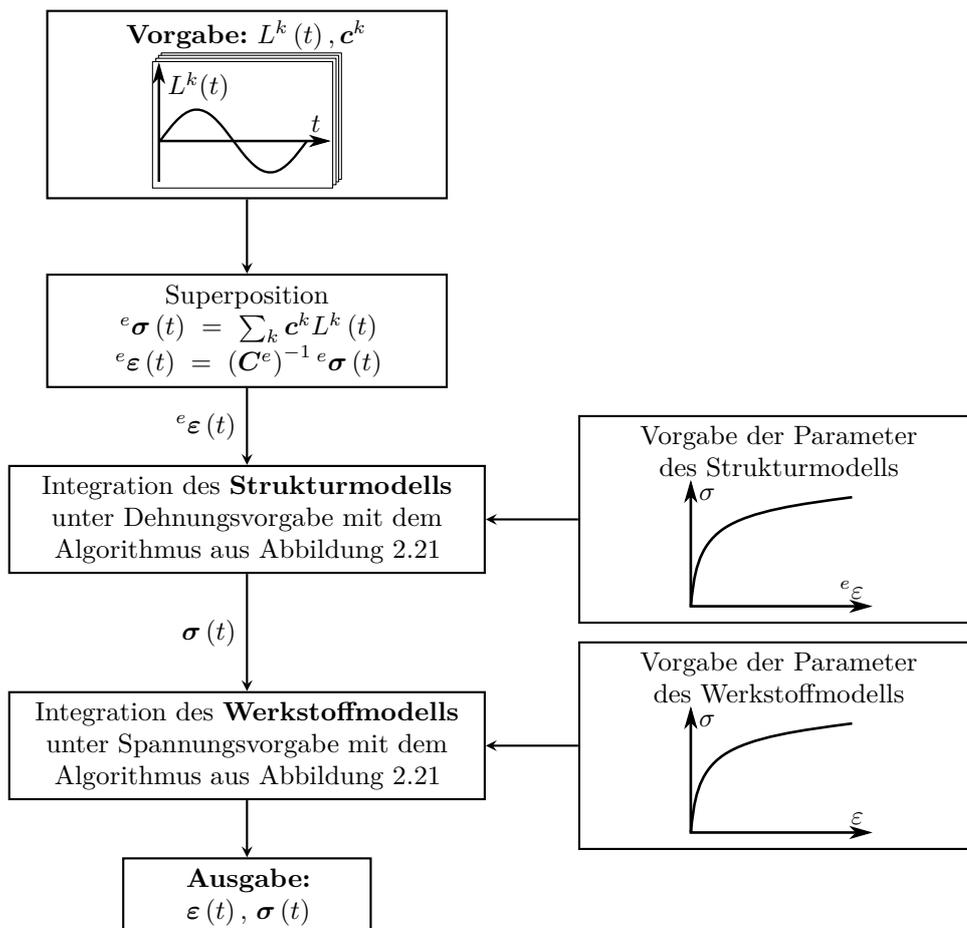


Abbildung 2.23: Flussdiagramm des Pseudo-Dehnungsansatzes

Fließkurve angepasst werden. Ein Vorschlag, wie die Parameter  $\chi^i$  zur Modellierung von transientem Werkstoffverhalten ermittelt werden können, ist in Abschnitt 2.5.3 zu finden.

Darüber hinaus muss für die Kompatibilität zwischen Struktur- und Werkstoffmodell auf zwei Dinge geachtet werden. Zum einen werden die Spannungen aus dem Strukturmodell als Eingabe für das Werkstoffmodell verwendet. Aus diesem Grund sollte darauf geachtet werden, dass die maximal ertragbare Spannung des Strukturmodells  $\sigma_{max,SM}$  niedriger als die maximal ertragbare Spannung des Werkstoffmodells  $\sigma_{max,WM}$  ist:

$$\sigma_{max,SM} < \sigma_{max,WM}. \quad (2.111)$$

Dadurch ist die Bedingung aus Gleichung (2.110) automatisch erfüllt und es entstehen keine Konvergenzprobleme bei der Integration des Werkstoffmodells. Zum anderen sollte Fließen im Struktur- und Werkstoffmodell zum gleichen Zeitpunkt beginnen. Die Größe des elastischen Bereichs ist in beiden Modellen identisch. Das heißt, beide Modelle besitzen die gleiche Fließspannung:

$${}^e Y = Y. \quad (2.112)$$

Die Parameter sowie die Zustandsvariablen des Strukturmodells erhalten hier, in Anlehnung an die Bezeichnung von pseudo Spannungen und pseudo Dehnungen, einen linksseitigen Index  $e$ .

#### 2.4.1.2. Algorithmus für den Pseudo-Spannungsansatz

Der Pseudo-Spannungsansatz benötigt die zweimalige Integration des Ohno/Wang Modells. Die erste Integration erfolgt durch Vorgabe der pseudo Spannungen  ${}^e \boldsymbol{\sigma}(t)$ . Daraus werden die plastischen Kerbdehnungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(t)$  berechnet. Die plastischen Kerbdehnungen werden anschließend als Eingabe der zweiten Integration verwendet, um die Kerbspannungen  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  zu ermitteln. Wie eine Integration unter Vorgabe der plastischen Kerbdehnungen erfolgt, wird im Folgenden erklärt. Alle inneren Variablen und Modellparameter des Strukturmodells werden, wie die pseudo Spannungen, durch einen linksseitigen Index  $e$  gekennzeichnet. Das Struktur- und Werkstoffmodell im Pseudo-Spannungsansatz sind über die plastischen Dehnungen gekoppelt. Es kann der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \Delta {}^e \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta {}^e p {}^e \boldsymbol{n} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \boldsymbol{n} \end{aligned} \quad (2.113)$$

für das Inkrement der plastischen Dehnung im Struktur- und Werkstoffmodell hergestellt werden. Für die hier verwendeten „strain hardening“ Modelle ist aus der Definition der plastischen Bogenlänge ebenfalls direkt ersichtlich, dass  $\Delta {}^e p = \sqrt{2/3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \Delta p$  gilt. Wird die Fließregel aus Gleichung (2.113) betrachtet, wird ebenfalls klar, dass beide Modelle zu jedem Zeitpunkt die gleiche Fließflächennormale  ${}^e \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$  besitzen. Daraus ergibt sich bei Anwendung des „radial return“ Verfahrens der große numerische Vorteil, dass bereits vor dem Korrektor-Schritt die Richtung und Länge des Korrekturterms bekannt sind. Auf eine Integration des Werkstoffmodells durch Iteration kann dadurch effektiv verzichtet werden. Es sind lediglich die Entwicklungsgleichungen der isotropen und kinematischen Verfestigung zu lösen. Dies erfolgt durch Lösen der Gleichung (2.78) und der Gleichung (2.79). Wobei Gleichung (2.78) wieder numerisch gelöst wird. Sind alle inneren Variablen bekannt, muss noch der neue Spannungszustand bestimmt werden. Der deviatorische Anteil der Spannungen kann aus der Bedingung  ${}^e \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$  hergeleitet werden. Durch Einsetzen der Fließflächennormalen aus Gleichung (2.60) folgt der Zusammenhang:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{Y}{eY} ({}^e \boldsymbol{s} - {}^e \boldsymbol{\alpha}). \quad (2.114)$$

Das heißt, der Spannungsdeviator berechnet sich aus der aktuellen Lage der Fließflächen und der mit dem Verhältnis der Fließflächenradien skalierten effektiven Spannung des Strukturmodells. Um den

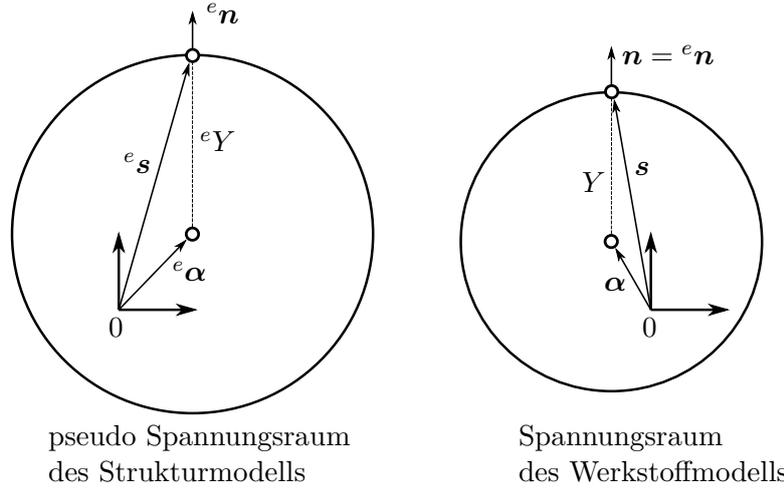


Abbildung 2.24: Kopplung des Struktur- und Werkstoffmodells im Pseudo-Spannungsansatz

hydrostatischen Anteil der Spannungen zu berechnen, wird eine zusätzliche Randbedingung benötigt. Hier wird Gleichung (2.53) verwendet. Die Kopplung zwischen Struktur- und Werkstoffmodell ist schematisch in Abbildung 2.24 dargestellt.

Durch das Wegfallen der Iteration einer Verfahrensvorschrift im Werkstoffmodell, Gleichung (2.84), wird ein erheblicher Geschwindigkeitsvorteil erreicht. Mit Ausnahme der Lösung der Entwicklungsgleichung der kinematischen Verfestigung muss keine Gleichung numerisch gelöst werden. Auch die Gleichung der kinematischen Verfestigung muss nicht in jedem Iterationsschritt, sondern nur ein einziges Mal gelöst werden. Eine ähnliche Kopplung zwischen Werkstoff- und Strukturmodell wird von Lang [Lang 05a], allerdings in Zusammenhang mit einer expliziten Integration des Plastizitätsmodells von Jiang [Jian 96a], vorgeschlagen.

Der Algorithmus, mit dem der Pseudo-Spannungsansatz unter Vorgabe der Zeitreihe der äußeren Lasten  $L(t)$  und der Proportionalitätsfaktoren  $c$  angewandt wird, ist in Abbildung 2.25 dargestellt. Die Integration des Struktur- und Werkstoffmodells muss dabei nicht für die gesamte Last-Zeitreihe sequenziell erfolgen. Es ist auch möglich, in jedem Zeitschritt zuerst das Struktur- und anschließend das Werkstoffmodell zu lösen.

Beim Pseudo-Spannungsansatz ist die Wahl der Parameter des Strukturmodells wichtig für die Genauigkeit des Verfahrens. Die Parameter des Strukturmodells, einschließlich derjenigen zur Modellierung des stabilen Werkstoffverhaltens ( $c^i$  und  $r^i$ ), werden anhand der Bauteilfließkurve bestimmt. Im Falle der Berücksichtigung nichtproportionaler Verfestigung können die Parameter an eine modifizierte Fließkurve angepasst werden, wie es in Gleichung (2.37) mit dem Verfahren von Socie und Marquis beschrieben ist. Darüber hinaus bietet Abschnitt 2.5.3 einen Vorschlag zur Ermittlung der Parameter  ${}^e\chi^i$  zur Modellierung des transienten Werkstoffverhaltens.

Um die Kompatibilität zwischen Struktur- und Werkstoffmodell zu gewährleisten, muss Fließen in beiden Modellen zum gleichen Zeitpunkt auftreten. Dafür muss der Startradius der Fließfläche beider Modelle gleich sein  ${}^eY_0 = Y_0$ .

Da hier das Strukturmodell unter Spannungsvorgabe gelöst wird, muss die maximale Spannung des Strukturmodells  ${}^e\sigma_{max,SM}$  größer sein als die maximale Vergleichsspannung der vorgegebenen Lastfolge. Wird

$${}^e\sigma_{max,Vorgabe} < {}^e\sigma_{max,SM} = {}^eY_0 + {}^eQ_\infty + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^M {}^e r^i \quad (2.115)$$

durch die Parameter des Strukturmodells erfüllt, ist eine stabile Integration gewährleistet.

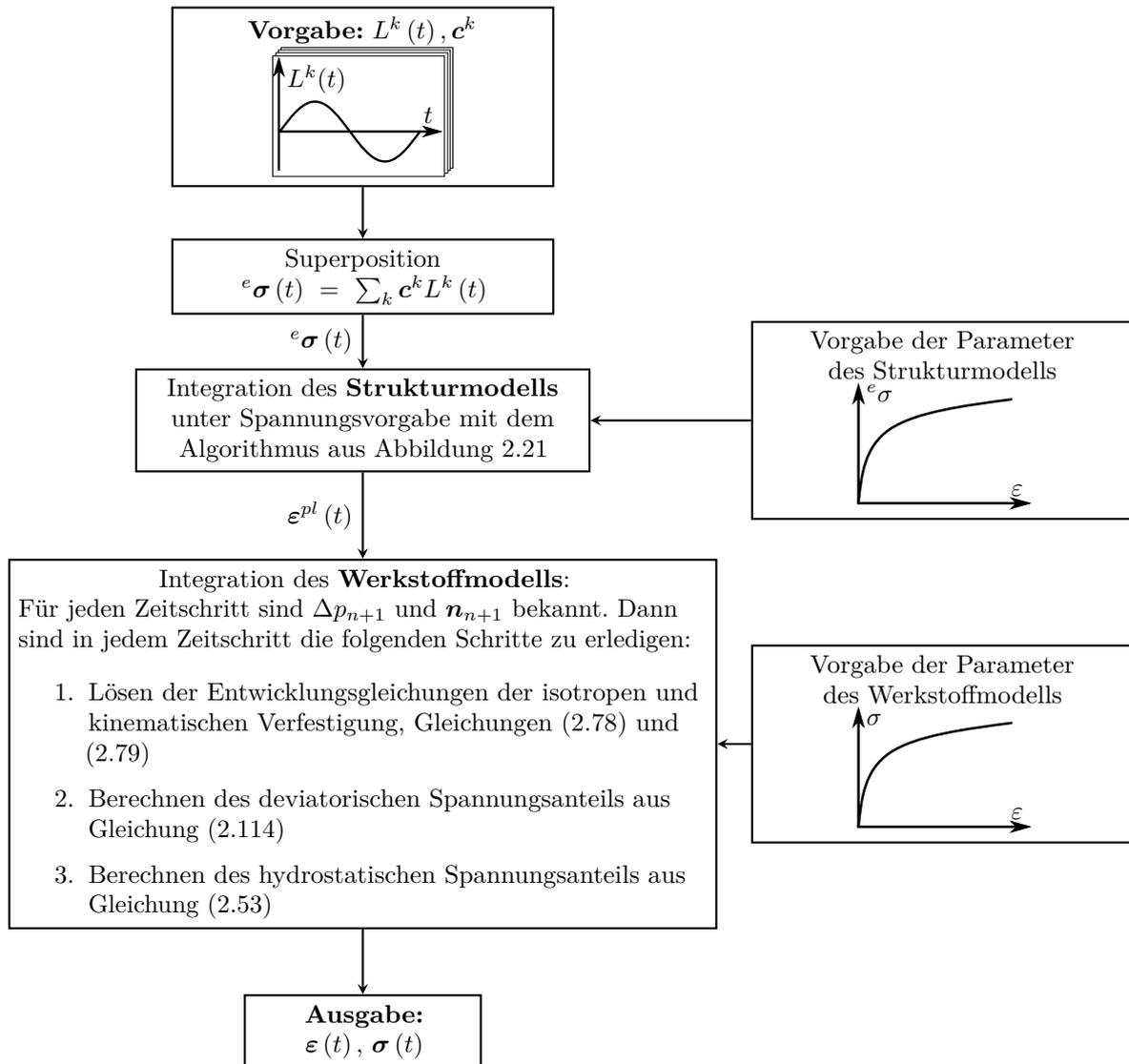


Abbildung 2.25: Flussdiagramm des Pseudo-Spannungsansatzes

### 2.4.2. Bauteilfließkurven aus Kerbnäherungsverfahren mit Sternterm

Die Genauigkeit der Strukturfließflächenansätze hängt zu einem großen Teil von der Bauteilfließkurve (BFK) ab. Diese lässt sich auf drei Arten bestimmen:

1. Kerbdehnungsmessungen
2. monotone, elastisch-plastische FE-Rechnungen
3. einachsige Kerbnäherungsverfahren

Kerbdehnungsmessungen sind in der Praxis selbst für einfache Probengeometrien sehr aufwendig und teuer. Für die praktische Anwendung ist diese Methode wenig rentabel. Auch weil selbst mit gemessenen Kerbdehnungen ein Werkstoffmodell verwendet werden müsste, um numerisch die für den Pseudo-Spannungsansatz benötigten plastischen Kerbdehnungen oder die für den Pseudo-Dehnungsansatz benötigten Kerbspannungen zu berechnen.

Die deutlich einfacheren Möglichkeiten sind die monotone, elastisch-plastische FE-Rechnung oder eines der Kerbnäherungsverfahren aus Abschnitt 2.2. In der Literatur [Hert 03b, Hert 05, Fira 11,

Hert 16] werden meistens die klassische Neuber-Methode [Neub 61] oder FE-Rechnungen verwendet [Kött 95a]. Unter Anwendung einachsiger Kerbnäherungsverfahren ist eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse zu erwarten, wenn anstelle der klassischen Neuber-Regel eine Erweiterung nach Seeger/Heuler [Seeg 80] oder Seeger/Beste [Seeg 77] verwendet wird. Dies gilt vor allem für mild gekerbte Bauteile und hohe Belastungen. Auch im Hinblick auf eine mögliche Anbindung an Bemessungsrichtlinien ist eine Verwendung von Seeger/Heuler [Seeg 80] oder Seeger/Beste [Seeg 77] wünschenswert, da beide Verfahren bereits in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] verwendet werden.

Die Kerbnäherungsverfahren liefern einen Zusammenhang zwischen den pseudo elastischen und elastisch-plastischen Beanspruchungen in der Kerbe. Wie die Parameter des Ohno/Wang Modells an eine gegebene Fließkurve angepasst werden können, wurde in Abschnitt 2.3.3 erläutert. Ob es sich bei der gegebenen Fließkurve um eine Bauteilfließkurve oder um eine Fließkurve des Werkstoffs handelt, spielt dabei keine Rolle. Zum Parametrisieren der Strukturmodelle wird der Verlauf des plastischen Tangentenmoduls der Bauteilfließkurve benötigt.

Im Folgenden sollen Besonderheiten erläutert werden, die sich ergeben, wenn Bauteilfließkurven aus Kerbnäherungsverfahren mit Sternterm berechnet werden. Der Sternterm bezeichnet in den Verfahren nach Seeger/Heuler [Seeg 80] und Seeger/Beste [Seeg 77] einen zusätzlichen Faktor, der das Auftreten von plastischen Zuständen im Nennquerschnitt berücksichtigt. Die Verfahren besitzen die generelle Form  $\varepsilon = F(\sigma, \varepsilon, \dots) \cdot E\varepsilon^*/S^*$ . Die Funktion  $F(\sigma, \varepsilon, \dots)$  beschreibt das Näherungsverfahren. Der Term  $E\varepsilon^*/S^*$  wird als Sternterm bezeichnet.

Im Pseudo-Spannungsansatz ist die Bauteilfließkurve direkt als der Zusammenhang zwischen plastischen Kerbdehnungen und pseudo Spannungen, Gleichung (2.51), definiert. Diese Fließkurve kann direkt verwendet werden, um die Parameter für das Strukturmodell zu bestimmen.

Für den Pseudo-Dehnungsansatz ist es notwendig, zunächst einmal gegen die Intuition plastische Anteile der pseudo elastischen Dehnung zu definieren. Da die Bauteilfließkurve über den Zusammenhang zwischen Spannungen und pseudo Kerbdehnungen definiert ist, können elastische Anteile aus dem Hookeschen Gesetz bestimmt werden  $\varepsilon^{\varepsilon^{el}} = \sigma/E$ . Der plastische Anteil wird dann aus

$$\varepsilon^{\varepsilon^{pl}} = \varepsilon - \varepsilon^{\varepsilon^{el}} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (2.116)$$

berechnet. Die Definition des plastischen Anteils der pseudo Dehnungen kann auch Abbildung 2.19 entnommen werden.

In Abbildung 2.26 sind beispielhaft die Bauteilfließkurven für beide Strukturfließflächenansätze dargestellt, die sich nach der Neuber-Methode und dem Verfahren nach Seeger/Heuler ergeben. Zur besseren Veranschaulichung ist auch die Fließkurve des Werkstoffs in der Abbildung enthalten. Darüber hinaus wird der Verlauf des plastischen Tangentenmoduls für jede der Kerbnäherungsverfahren und für den Werkstoff in der Abbildung gezeigt. Die Fließkurven sind beispielhaft für einen Stahl ( $R_m = 541$  MPa) mit nach FKM-Richtlinie Nichtlinear abgeschätzten Werkstoffkennwerten und einer Traglastformzahl  $K_p = 2$  erzeugt.

Zu erkennen ist, dass für alle Fließkurven, außer für die BFK nach Seeger/Heuler im Pseudo-Dehnungsansatz, die plastischen Tangentenmoduln streng monoton fallen. Werden Bauteilfließkurven für den Pseudo-Dehnungsansatz mit Kerbnäherungsverfahren mit Sternterm berechnet, können solche konvexen Bereiche in der Fließkurve (Bereiche mit steigende plastische Tangentenmoduln) auftreten. Dieses Verhalten führt zu Problemen bei der Parametrisierung der Strukturmodelle im Pseudo-Dehnungsansatz.

Eine Erklärung liefert der Verlauf des Sternterms über die elastische Lösung, dargestellt in Abbildung 2.27a. Im Verfahren nach Seeger/Heuler kann der Sternterm als Verhältnis der totalen Verzerrungsenergiegedichte der Lösungen aus der Neuber- und der Seeger/Heuler-Methode verstanden werden:

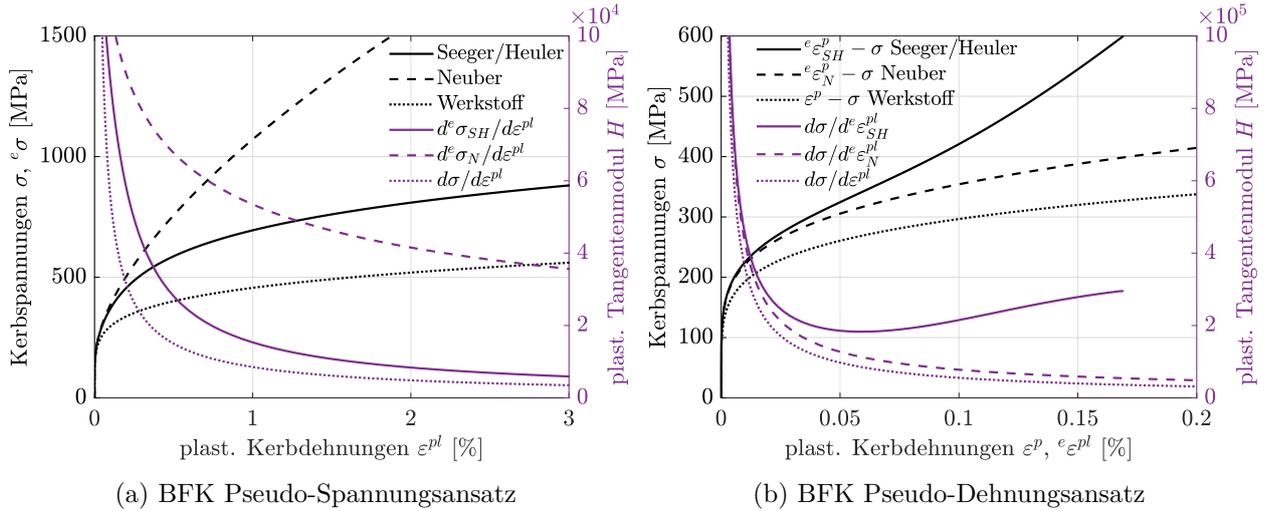


Abbildung 2.26: Bauteilfließkurven der Strukturfließflächenansätze berechnet aus der Neuber-Methode und dem Verfahren nach Seeger/Heuler für (a) den Pseudo-Spannungsansatz und (b) den Pseudo-Dehnungsansatz. Ebenfalls dargestellt ist der Verlauf des plastischen Tangentenmoduls.

$$\frac{Ee^*}{S^*} = \frac{A_{SH}}{A_N}. \tag{2.117}$$

Die totale Verzerrungsenergiegedichte ( $\sigma \cdot \varepsilon$ ) kann im Spannungs-Dehnungs-Diagramm als Rechteck dargestellt werden. Dieser Zusammenhang ist über die Flächeninhalte der Rechtecke in Abbildung 2.27b veranschaulicht. Durch den schnellen Anstieg des Sternterm steigen die ermittelten lokalen elastisch-plastischen Lösungen aus dem Seeger/Heuler-Verfahren ebenfalls schnell an. Im Pseudo-Spannungsansatz ist dies kein Problem, da hier die plastischen Korbdehnungen nur immer schneller wachsen. Im Pseudo-Dehnungsansatz wird allerdings ein Punkt erreicht, an dem der zusätzliche Spannungsanstieg durch den Sternterm zu steigenden Tangentenmoduln führt. Das Plastizitätsmodell von Ohno/Wang kann nur abflachende Fließkurven (d. h. monoton fallende plast. Tangentenmoduln) darstellen. Wird zur Parametrisierung das in Abschnitt 2.3.3 vorgestellte

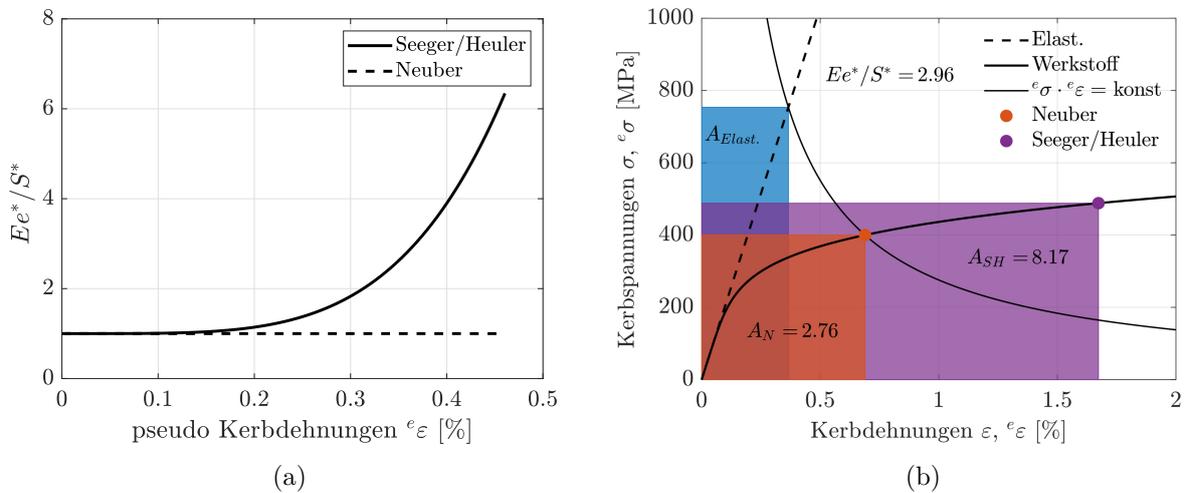


Abbildung 2.27: (a) Verlauf des Sternterm  $Ee^*/S^*$  über die pseudo Korbdehnungen. (b) Vergleich der Neuber-Methode und der Näherungsmethode nach Seeger/Heuler

Verfahren verwendet, so wird aus Gleichung (2.32) deutlich, dass für den Fall  $H^k < H^{k+1}$  ein negativer Grenzradius  $r^k$  für den  $k$ -ten Backstresstensor  $\alpha_{ij}^k$  berechnet werden würde. Um dieses Problem zu umgehen, erfolgt ab dem Zeitpunkt, an dem die plastischen Tangentenmoduln ansteigen, eine lineare Approximation der Kurve. Hierzu gibt es einige Möglichkeiten. Nahe liegend wäre es, den restlichen Kurvenverlauf möglichst genau anzunähern, d. h. Abstände zwischen originaler Kurve und linearisierter Kurve zu minimieren. In der vorliegenden Arbeit wurde sich allerdings dafür entschieden, den Verlauf bis zu einer vorzugebenden maximalen Spannung durch eine Gerade anzunähern. Das hat den Vorteil, dass die maximal ertragbare Spannung des Strukturmodells exakt gesteuert werden kann. Diese maximal ertragbare Spannung wird höher gewählt als die Maximalspannung des Werkstoffmodells. Da die Spannungen, die durch das Strukturmodell berechnet werden, für die Integration des Werkstoffmodells verwendet werden, verhindert dies, dass die Berechnung aufgrund von Schwierigkeiten bei der Konvergenz des Werkstoffmodells abgebrochen wird. Diese Art der Linearisierung ist in Abbildung 2.28 gezeigt. Die Bauteilfließkurve für den Pseudo-Dehnungsansatz, berechnet aus der Neuber-Methode, kann ohne Anpassungen direkt verwendet werden, um die Parameter des Strukturmodells zu bestimmen. Gleiches gilt für die Bauteilfließkurven des Pseudo-Spannungsansatzes, unabhängig von der verwendeten einachsigen Kerbnäherungsmethode.

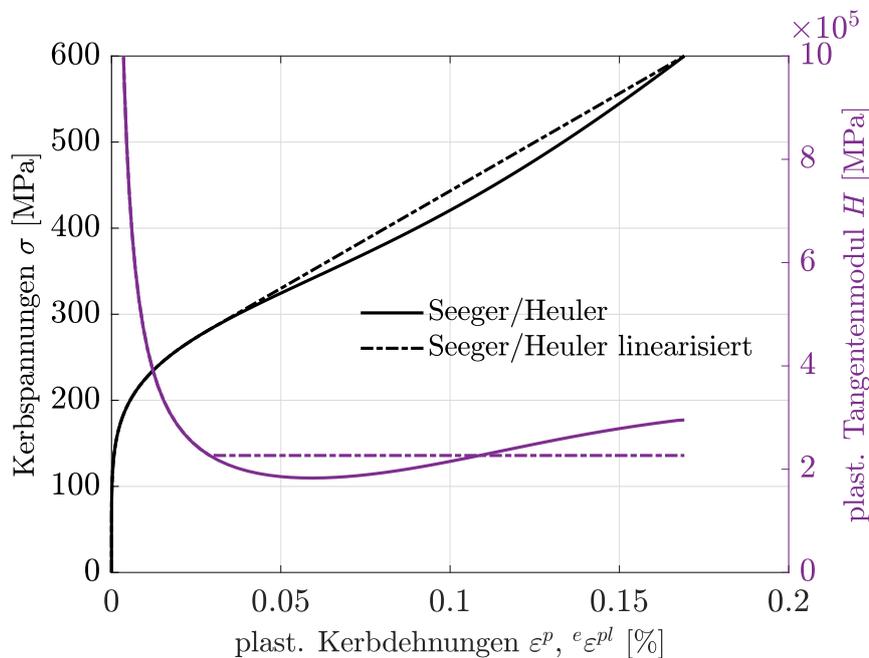


Abbildung 2.28: Linearisierte BFK für den Pseudo-Dehnungsansatz

### 2.4.3. Berücksichtigung von oberflächennahen Eigenspannungen und -dehnungen

Die Berücksichtigung von Eigenspannungen und Eigendehnungen im Ermüdungsfestigkeitsnachweis ist wichtig, da sie die tatsächliche lokale Beanspruchung eines Bauteils beeinflussen. Dadurch können diese internen Spannungen und Dehnungen das Ermüdungsverhalten eines Werkstoffs oder Bauteils verändern.

Eine Möglichkeit, Eigenspannungen und Eigendehnungen innerhalb einer einachsigen Kerbnäherung zu berücksichtigen, wurde von Seeger et al. [Seeg 84] im Modell „dünne Randschicht“ vorgestellt. Zugrunde liegt die Annahme, dass im Bereich der Kerbe eine dünne Randschicht vorliegt. In der Randschicht herrschen Eigenspannungen und Eigendehnungen. Die damit in Gleichgewicht stehenden Eigenspannungen des Kernwerkstoffs sind vernachlässigbar klein. Unter Umständen kann in der Randschicht auch ein anderes Werkstoffverhalten vorliegen.

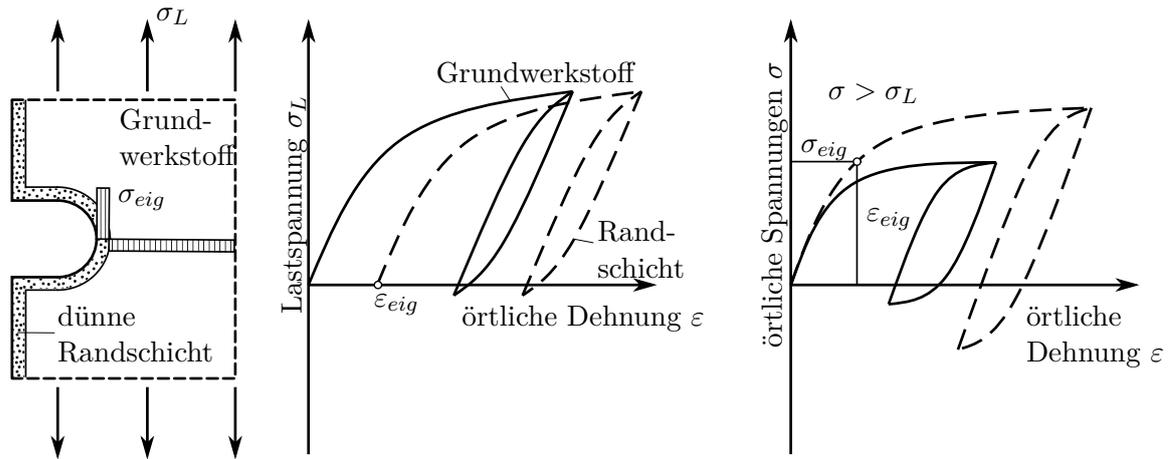


Abbildung 2.29: Modell der Kerbe mit dünner Randschicht und Eigenspannungen  $\sigma_{eig}$  unter Zugbelastung  $\sigma_L$ , Last-Dehungs-Pfade und örtliche Beanspruchungspfade nach [Rada 07]

Es wird nun angenommen, dass bei einer dünnen Randschicht das Verformungsverhalten der Struktur ausschließlich vom Grundwerkstoff bestimmt wird. Das Last-Kerbdehnungsverhältnis des Grundwerkstoffs kann demzufolge unter Vernachlässigung der Randschicht aus einer Näherungsbeziehung bestimmt werden. Aus Kompatibilitätsgründen wird der Randschicht dann der Dehnungsverlauf des Grundwerkstoffs aufgezwungen. Für die Randschicht gilt dann ein um die Eigendehnungen versetztes Last-Kerbdehnungs-Verhältnis. Eine schematische Darstellung des Modells „dünne Randschicht“ ist in Abbildung 2.29 zu sehen.

Das Modell „dünne Randschicht“ lässt sich durch Anwendung des Pseudo-Spannungsansatz auf den allgemeinen Fall von mehrachsig, nichtproportionalen Beanspruchungen erweitern. Das Strukturmodell übernimmt dabei die Modellierung des Grundwerkstoffs. Dieses kontrolliert das Verformungsverhalten der Struktur. Die Bauteilfließkurve stellt das Last-Kerbdehnungs-Verhältnis dar. Sie wird ohne Berücksichtigung der Randschicht bestimmt. Das Werkstoffmodell wird verwendet, um die Randschicht zu modellieren. Die Werkstoffeigenschaften der Randschicht können dabei von den Werkstoffeigenschaften des Grundwerkstoffs abweichen.

Die Eigenspannungen und Eigendehnungen können dann dem Werkstoffmodell als Startwerte übergeben werden. Sollten die Eigenspannungen außerhalb der ursprünglichen Fließfläche liegen, muss ebenfalls eine anfängliche Verfestigung mitberücksichtigt werden. Das heißt auch für die Lage der Fließfläche müssen Startwerte an das Werkstoffmodell übergeben werden. Sollte dies der Fall sein, können z. B. durch eine Anwendung des Plastizitätsmodells mit linearer Laststeigerung bis zum aktuell vorliegenden Eigenspannungszustand die Eigendehnungen und die anfängliche Verfestigung berechnet werden. Das Problem bei dieser Vorgehensweise ist, dass plastische Dehnungen vom Belastungspfad abhängen und die tatsächlich vorliegenden Eigendehnungen sehr wahrscheinlich nicht genau abgebildet werden können. Eine andere und deutlich aufwendigere Möglichkeit bestünde darin, den gesamten Prozess, durch den die Randschicht erzeugt wurde, mittels FEM zu simulieren. Im Pseudo-Spannungsansatz erfolgt die Kopplung zwischen Randschicht und Grundwerkstoff über die plastische Dehnung, nicht wie im Modell „dünne Randschicht“ über die gesamte Dehnung. Der plastische Anteil der Eigendehnung muss dem Strukturmodell ebenfalls als Anfangswert übergeben werden.

Sollte sich der Eigenspannungszustand im plastischen Bereich befinden, wird der Randschicht (dem Werkstoffmodell) eine anfängliche Verfestigung  $\alpha_{ij}, Y$  unterstellt. Jede weitere Belastung kann zu einer weiteren plastischen Verformung führen. Da plastisches Fließen im Struktur- und Werkstoffmodell gleichzeitig erfolgen muss, muss auch der Startwert der pseudo elastischen Spannungen angepasst werden. Dies erfolgt über die Kopplung der Spannungsdeviatoren zwischen Struktur- und Werkstoffmodell, siehe Gleichung (2.114). Es wird ein Punkt auf der Fließfläche des Strukturmodells

gesucht, der die gleiche Normale besitzt wie der aktuelle Punkt im Werkstoffmodell. Für das Strukturmodell wird dabei keine Verfestigung vorausgesetzt  ${}^e\alpha_{ij,0} = 0$ ,  ${}^eY = {}^eY_0$ . Der Anfangszustand des Spannungsdeviators wird dann durch

$${}^e s_{ij,0} = \frac{{}^e Y_0}{Y} (s_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (2.118)$$

bestimmt. Der hydrostatische Anteil wird wieder aus der Nebenbedingung (2.53) berechnet. Zur Veranschaulichung werden Beispielrechnungen durchgeführt. Vorgegeben wird der Eigenspannungszustand

$$\sigma_{ij}^{eig} = \begin{pmatrix} 147 & 100 & 0 \\ 100 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa.} \quad (2.119)$$

Um die Eigendehnungen zu bestimmen, wird dem Werkstoffmodell eine lineare Laststeigerung bis zum Erreichen der Eigenspannungen vorgegeben. Als Probenform wird ein gekerbter Rundstab mit Kerbradius 0.5 mm unter Zug/Druck (Nennspannung  $S_N$ ) und Torsion (Nennspannung  $S_T$ ) verwendet. Dabei wurde in der Randschicht einmal nur ein Eigenspannungszustand berücksichtigt und einmal wurde zusätzlich ein anderes Werkstoffverhalten einer festen Randschicht vorgegeben. Die Fließkurven des Grundwerkstoffs und der Randschicht sind in Abbildung 2.30a angegeben. Die Parameter des Ohno/Wang Modells wurden aus diesen Fließkurven bestimmt.

Die erste Simulation wurde unter Vorgabe einer proportionalen Last mit dem Lastverhältnis  $R = 0$  durchgeführt. Unter proportionaler Belastung lassen sich die Ergebnisse in Vergleichsgrößen darstellen. In Abbildung 2.30b ist der Verlauf der örtlichen Vergleichsspannungen und -dehnungen dargestellt. Wird für die Randschicht nur der Eigenspannungszustand und gleiches Werkstoffverhalten wie im Grundwerkstoff unterstellt, unterscheiden sich die Ergebnisse nur in den berechneten Mittelspannungen und -dehnungen. Wird zusätzlich eine festere Randschicht angenommen, steigern sich zudem die berechneten Amplituden.

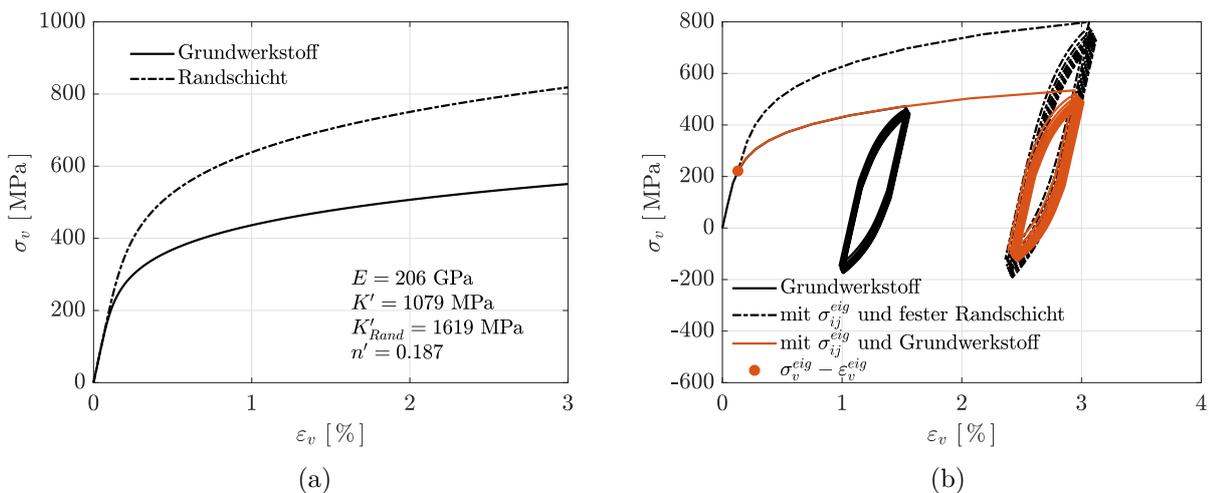


Abbildung 2.30: Ergebnisse des Kerbnäherungsverfahrens „dünne Randschicht“ für eine proportionale Belastung mit einem Lastverhältnis von  $R = 0$  (a) Vorgegebene Fließkurven des Grundwerkstoffs und der Randschicht und (b) Ergebnisse der Kerbnäherungsverfahren in Vergleichsgrößen

Ebenfalls wurden 100 Zyklen einer nichtproportionalen Belastung simuliert. Abbildung 2.31 zeigt die vorgegebenen Nennspannungen sowie die Hysteresen der lokalen Beanspruchungsgrößen. Angesetzt wurde eine frequenzverschobene Belastung mit Mittellasten. Es wurde das gleiche Werkstoffgesetz für Grund- und Randschicht verwendet wie unter proportionaler Last. Auch unter nichtproportionaler Belastung liefert das Kerbnäherungsverfahren plausible Ergebnisse. Die Form der Hysteresen entspricht der bekannten Form bei Frequenzverschiebung. Die Hysteresen sind um die Anfangswerte der Eigenspannungen und -dehnungen versetzt und zeigen für die feste Randschicht größere Amplituden als der Grundwerkstoff.

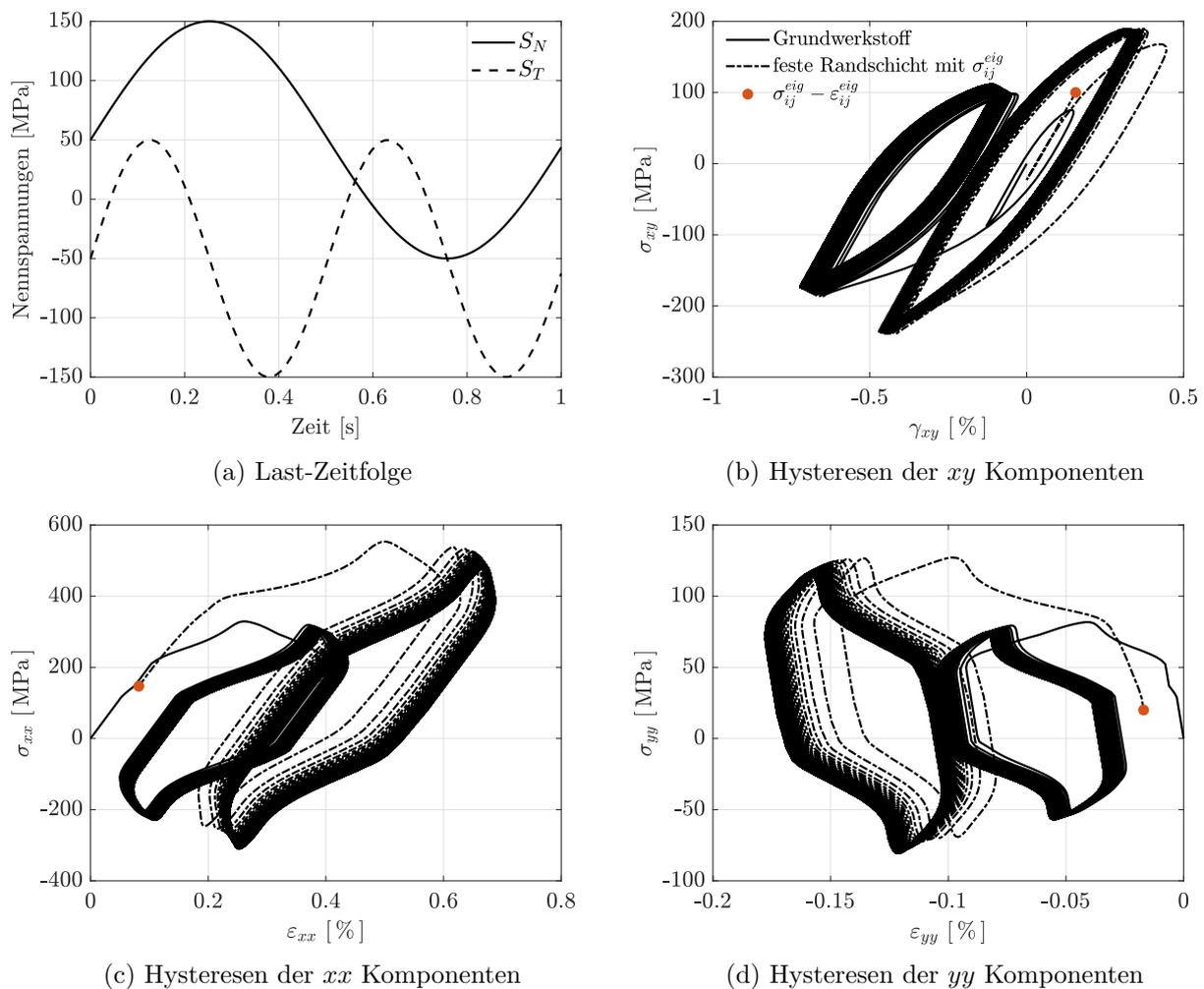


Abbildung 2.31: Ergebnisse des Kerbnäherungsverfahrens „dünne Randschicht“ für eine nichtproportionale Belastung mit Mittellasten. (a) Lastzeitreihen (b)-(d) Hysteresen der lokalen Kerbspannungen und -dehnungen

### Vergleich mit der Methode von Yadegari [Yade 23]

Yadegari [Yade 21, Yade 23] hat eine Methode präsentiert, um lokale Beanspruchungen in gekerbten Bauteilen mit einer festen Randschicht zu berechnen. Dabei werden Vergleichsspannungen verwendet. Die Anwendung dieser Methode ist demnach auf einachsige oder proportional beanspruchte Bauteile beschränkt. Weiterhin wird von einem zyklisch stabilisiertem Werkstoffverhalten ausgegangen. Die

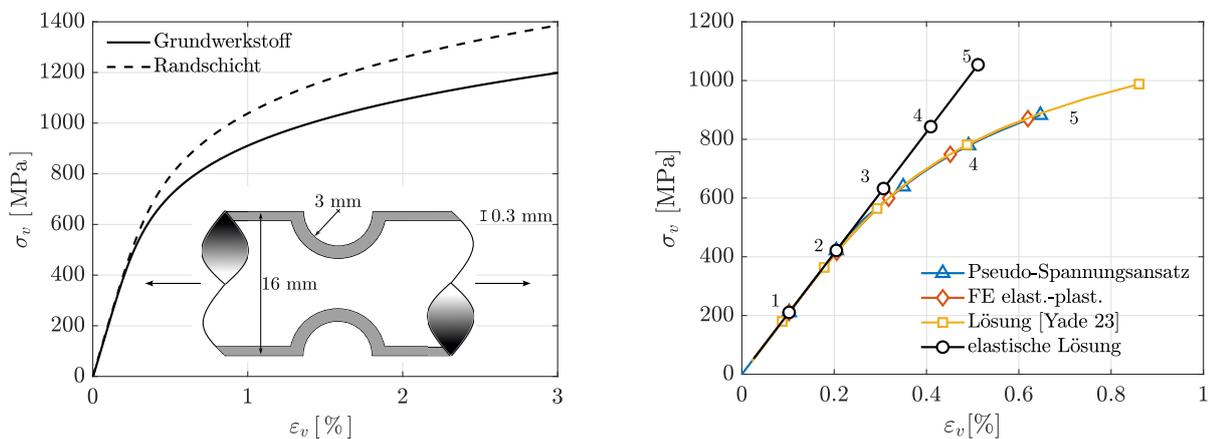
Annahme einer dünnen Randschicht wird aufgegeben, was es ermöglicht, lokale Beanspruchungen auch für dickere Randschichten zu berechnen. Des Weiteren können mit der Methode von Yadegari auch Belastungen an der Grenzfläche zwischen Randschicht und Grundwerkstoff approximiert werden. Für eine detaillierte Darstellung der Methode wird auf die entsprechende Literatur [Yade 21, Yade 23] verwiesen.

In [Yade 23] erfolgten zur Validierung der Kerbnäherungsmethode FE-Rechnungen, wobei auch dünnere Randschichten untersucht wurden. Die Resultate der FE-Rechnungen sowie die Lösungen der Methode nach Yadegari [Yade 23] können in diesen Fällen mit dem zuvor beschriebenen Verfahren verglichen werden.

Ein solcher Vergleich wird in Abbildung 2.32 dargestellt. Auf der linken Seite sind die Fließkurven des Grundwerkstoffs und der festen Randschicht sowie die Abmessungen des untersuchten Bauteils dargestellt. Es wird eine gekerbte Rundprobe mit einem Durchmesser von 16 mm und einem Kerbradius von 3 mm betrachtet. Als Last wird eine rein axiale Zugbelastung vorgegeben. Die Dicke der festen Randschicht beträgt dabei lediglich 0.3 mm.

Auf der rechten Seite der Abbildung sind die Fließkurven der lokalen Beanspruchung im Kerbgrund zu sehen, die sich aus verschiedenen Näherungsverfahren und der FE-Rechnung ergeben. Zusätzlich ist die elastische Lösung abgebildet, die als Ausgangspunkt für die Näherungsverfahren betrachtet werden kann.

Zur Veranschaulichung sind die Lösungen an fünf Punkten (1-5) der Spannungs-Dehnungs-Kurven markiert. Es zeigt sich, dass für geringe plastische Belastungen alle Verfahren nahe beieinander liegen. Für die Punkte 1 und 2 sind kaum Unterschiede in den Lösungen feststellbar. Bei den Punkten 3 und 4, wenn erkennbare plastische Dehnungsanteile auftreten, zeigen sowohl der Pseudo-Spannungsansatz als auch die Methode von Yadegari [Yade 23] eine gute Übereinstimmung mit der FE-Lösung. Erst bei höheren Belastungen (Punkt 5) treten größere Abweichungen der Näherungsverfahren im Vergleich zur FE-Lösung auf. In diesem speziellen Fall mit einer dünnen Randschicht liefert der angepasste Pseudo-Spannungsansatz eine präzisere Approximation der FE-Ergebnisse im Vergleich zur Methode von Yadegari [Yade 23].



(a) zyklisch stabilisiertes Werkstoffverhalten für Grundwerkstoff und Randschicht

(b) mit den verschiedenen Verfahren berechnete lokale Beanspruchungen

Abbildung 2.32: Vergleich der Ergebnisse der verschiedenen Kerbnäherungsverfahren für gekerbte Bauteile mit fester Randschicht

## 2.5. Vergleich der Verfahren

Im Rahmen der Validierung der Kerbnäherungsverfahren wurden elastisch-plastische Finite-Elemente-Rechnungen an gekerbten Rundproben mit zwei verschiedenen Kerbradien ( $\rho = 0.5$  mm und  $\rho = 2$  mm) durchgeführt. Es wurde die Probenform aus dem Forschungsprojekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] verwendet. Detaillierte Informationen zur Probenform sind in Abschnitt 5.1 verfügbar.

Die Werkstoffparameter wurden unter Verwendung einer Zugfestigkeit von  $R_m = 541$  MPa für die Werkstoffgruppe Stahl aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear abgeschätzt, was dem Baustahl S355 entspricht. Die ermittelten Werkstoffparameter des Ohno/Wang Modells sind in Tabelle A.1 aufgeführt.

Zur Validierung der Kerbnäherungsverfahren wurden die Kerbformzahlen und Bauteilfließkurven der Rundstäbe ermittelt. Anschließend wurden Parameter für die Strukturmodelle in den Strukturfließflächenansätzen abgeleitet. Insbesondere wird diskutiert, wie die Parameter  ${}^e\chi$  zur Modellierung des zyklischen Kriechens und Relaxierens bestimmt werden können.

Die Validierung der Kerbnäherungsverfahren erfolgt durch den Vergleich der Ergebnisse der elastisch-plastischen FE-Rechnungen mit den Ergebnissen der Kerbnäherungsverfahren. Zudem wurden gemessene Kerbdehnungen aus der Literatur verwendet und mit den Ergebnissen der hier beschriebenen Kerbnäherungsverfahren verglichen.

### 2.5.1. Ermittlung der Kerbformzahlen

Die Kerbformzahlen müssen für gekerbte Rundstäbe mit zwei verschiedenen Kerbradien ( $\rho = 0.5$  mm und  $\rho = 2$  mm) bestimmt werden. Die gekerbte Rundprobe wird durch ein Torsionsmoment  $M_t$  und eine axiale Zugkraft  $F$  belastet. Der Nennquerschnitt wird auf den ungekerbten Bereich mit Radius  $r = 12.5$  mm bezogen. Zur Berechnung der Nennspannungen werden die Zusammenhänge

$$S_N = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}, \quad S_T = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2M_t}{\pi r^3} \quad (2.120)$$

angewendet. Die Nennspannung  $S_T$ , hervorgerufen durch das Torsionsmoment, ist dabei auf den Rand des Nennquerschnitts bezogen. Die auf die Nennspannungen bezogenen Kerbformzahlen werden aus FE-Rechnungen mit dem axialsymmetrischen Modell aus Abbildung 2.33 bestimmt. Dargestellt ist das Netz der Kerbprobe mit Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm. Zur Simulation wurde die Software „ABAQUS“ benutzt. In der Nähe der Kerbe wurde ausschließlich das CGAX8R-Element zum Vernetzen verwendet, um ein strukturiertes Netz zu erstellen, wie in Abbildung 2.33 zu sehen ist. CGAX8R ist ein Acht-Knoten-Element mit biquadratischen Formfunktionen und reduzierter Integration, [Smit 09]. Für den Übergang von strukturierter zu freier Vernetzung wurde das CGAX6-Element verwendet. Dies ist ein Sechs-Knoten-Dreieckselement mit biquadratischen Formfunktionen, [Smit 09]. Auf der Rotationsachse wurden alle radialen Verschiebungen festgehalten, während am unteren Rand alle Verschiebungen in Umfangs- und axialer Richtung blockiert sind. Im Nennquerschnitt (oberer Rand) werden alle Umfangs- und axialen Verschiebungen gekoppelt.

Die berechneten Kerbformzahlen sind in Tabelle 2.2 angegeben. Sie stellen das Verhältnis aus den lokalen elastizitätstheoretischen Spannungskomponenten und den zugehörigen Nennspannungen dar:

$$K_{t,xx} = \frac{\sigma_{xx}}{S_N}, \quad K_{t,yy} = \frac{\sigma_{yy}}{S_N}, \quad K_{t,xy} = \frac{\tau_{xy}}{S_T}. \quad (2.121)$$

Für die Auswertung der Spannungen wurde an jeden Knoten in der Kerbe ein lokales kartesisches Koordinatensystem gelegt. Die  $z$ -Achse entspricht dabei der nach außen gerichteten Normalen an die Bauteilgeometrie. Dadurch müssen nur drei unabhängige Spannungskomponenten betrachtet werden. Die  $y$ -Achse zeigt in Umfangsrichtung der Kerbprobe, während die  $x$ -Achse entlang der tangentialen Richtung der Kerbkontur verläuft.

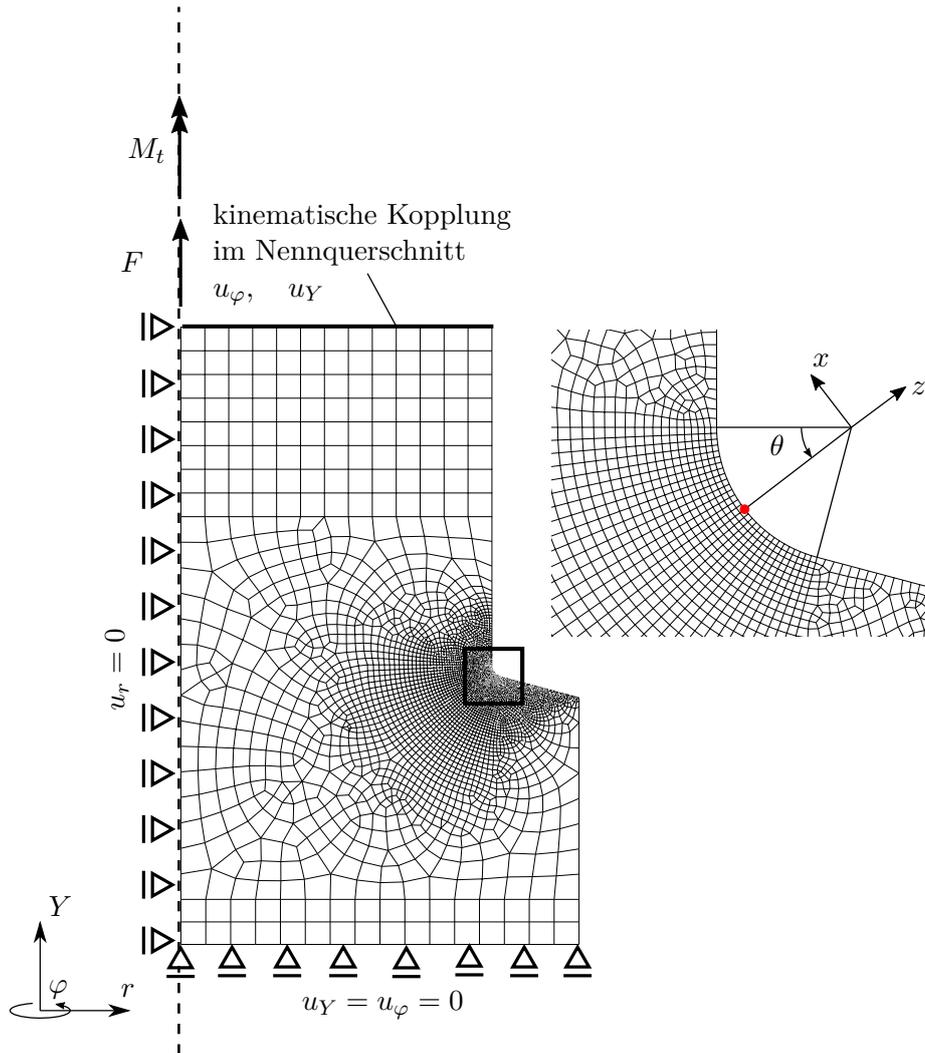


Abbildung 2.33: Axialsymmetrisches FE-Modell der gekerbten Rundprobe (beispielhaft für Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm) mit Randbedingungen

Aufgrund der Querdehnungsbehinderung in der Kerbe stellt sich bei Zugbelastung eine Umfangsspannung  $\sigma_{yy}$  ein. Zur Nennspannung  $S_N$  gehören also zwei Kerbformzahlen.

Die Kerbformzahlen wurden an dem Knoten mit der maximalen von Mises Vergleichsspannung bestimmt. Bei der Kerbprobe mit Kerbradius  $\rho = 2$  mm ergab sich dabei sowohl bei Zug als auch bei Torsion ein Knoten unter dem Winkel  $\theta \approx 15^\circ$ , siehe Abbildung 2.33. Für die schärfer gekerbte Probe mit  $\rho = 0.5$  mm ergeben sich aus Zug ( $\theta_{Zug} \approx 22.5^\circ$ ) und Torsion ( $\theta_{Torsion} \approx 24^\circ$ ) leicht unterschiedliche kritische Knoten. Aufgrund des flachen Verlaufs der lokalen  $\tau_{xy}$ -Spannungen entlang der Kerbkontur wurde der kritische Knoten, welcher sich unter Zugbelastung einstellt, als maßgeblicher Knoten gewählt. Der Unterschied in  $K_{t,xy}$  macht sich dadurch erst in der dritten Dezimalstelle bemerkbar. Ein Einfluss auf die Genauigkeit der Kerbnäherungsverfahren oder anschließender Lebensdauerberechnungen ist nicht zu erwarten.

Um die genauen Werte und den Ort der Kerbformzahlen zu ermitteln, wurde eine Konvergenzstudie durchgeführt, bei der die Anzahl der Elemente entlang der Kerbkontur variiert wurde. Es zeigt sich, dass für die mildgekerbte Probe 20 und für die scharf gerbte Probe 30 Elemente entlang der Kerbe ausreichen.

Kerbradius mm	Zug			Torsion
	$K_{t,xx}$	$K_{t,yy}$	$K_{t,v}$	$K_{t,xy}$
0.5	3.34	0.83	3.01	1.97
2.0	2.09	0.44	1.91	1.41

Tabelle 2.2: Kerbformzahlen der gekerbten Rundstäbe

### 2.5.2. Ermittlung der Bauteilfließkurve

Die Bauteilfließkurve (BFK) ist eine Eingangsgröße für die Strukturfließflächenansätze. Sie stellt den nichtlinearen Zusammenhang zwischen äußeren Belastungsgrößen und lokalen Spannungen oder Dehnungen dar. Für die Strukturfließflächenansätze werden als äußere Belastungen die lokalen pseudo Spannungen oder pseudo Dehnungen verwendet. Die Bauteilfließkurve hat einen wesentlichen Einfluss auf die Qualität der lokalen Spannungs- und Dehnungsapproximation durch die Strukturfließflächenansätze. Sie wird hier für die in Abschnitt 2.5.1 festgelegten Knoten ermittelt. Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 erwähnt, kann die BFK auf drei verschiedene Arten bestimmt werden. Eine Kerbdehnungsmessung wurde nicht durchgeführt. Der für die Praxis wichtigste Weg, die Bauteilfließkurve zu bestimmen, ist mit Hilfe der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Kerbnäherungsverfahren für lokal einachsige Spannungs-Dehnungs-Zustände oder für Vergleichsgrößen.

Von Köttgen et al. [Kött95a] wurde dazu ursprünglich die Neuber-Regel [Neub61] angewandt. Die Neuber-Regel wird auch in der Literatur häufig verwendet. Eine einfache Möglichkeit, die Genauigkeit der Strukturfließflächenansätze zu verbessern, ist, wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben, die Bauteilfließkurve mit den Kerbnäherungsverfahren nach Seeger und Heuler [Seeg80] oder Seeger und Beste [Seeg80] zu bestimmen. Diese Verfahren bieten durch die Traglastformzahl  $K_p$  eine Möglichkeit der Anpassung der Bauteilfließkurve auf die individuelle Kerbgeometrie und Belastungssituation. Die Traglastformzahl wurde für die beiden Kerbproben nach dem in [Wäch21] beschriebenen Vorgehen bestimmt. Es wurde linear elastisches - ideal plastisches Werkstoffverhalten angenommen. Die äußeren Lasten wurden dann solange in kleinen Inkrementen gesteigert, bis die FE-Rechnung abbricht, da die Struktur keine weitere Last mehr aufnehmen kann. Für den Lastfall Zug und Torsion sind die Traglastformzahlen in Tabelle 2.3 angegeben.

Kerbradius [mm]	$K_{p,Zug}$	$K_{p,Torsion}$
0.5	3.1	2.8
2.0	1.9	1.9

Tabelle 2.3: Traglastformzahlen der gekerbten Rundstäbe

Die weitere Möglichkeit, die BFK zu bestimmen, ist, eine elastisch-plastische FE-Rechnung durchzuführen. Dazu wurde das Modell aus Abbildung 2.33 verwendet. Das elastisch-plastische Verformungsverhalten des Baustahls S355 wurde auf Basis der Deformationstheorie („deformation plasticity“ in ABAQUS) unter Vorgabe der Ramberg-Osgood Parameter aus Tabelle A.1 berücksichtigt.

In Abbildung 2.34 und Abbildung 2.35 sind die ermittelten Bauteilfließkurven für den Pseudo-Spannungsansatz und den Pseudo-Dehnungsansatz gegeben. Dargestellt sind sowohl die mit FEM berechneten Fließkurven als auch die mit den Kerbnäherungsverfahren bestimmten Fließkurven. Es wurde jeweils der Lastfall reiner Zug und reine Torsion untersucht. Für die Kerbnäherungsverfahren nach Seeger/Heuler und Seeger/Beste ist nur der Lastfall reiner Zug dargestellt. Durch die Traglastformzahlen der beiden Belastungsfälle ergeben sich nur sehr geringe Unterschiede in den Bauteilfließkurven, die aus den Kerbnäherungsverfahren berechnet wurden.

In Abbildung 2.34 ist zu erkennen, dass die Neuber-Methode für niedrige Vergleichsdehnungen eine gute Approximation der FE-Ergebnisse liefert. Für die schärfer gekerbte Probe werden bis zu einer

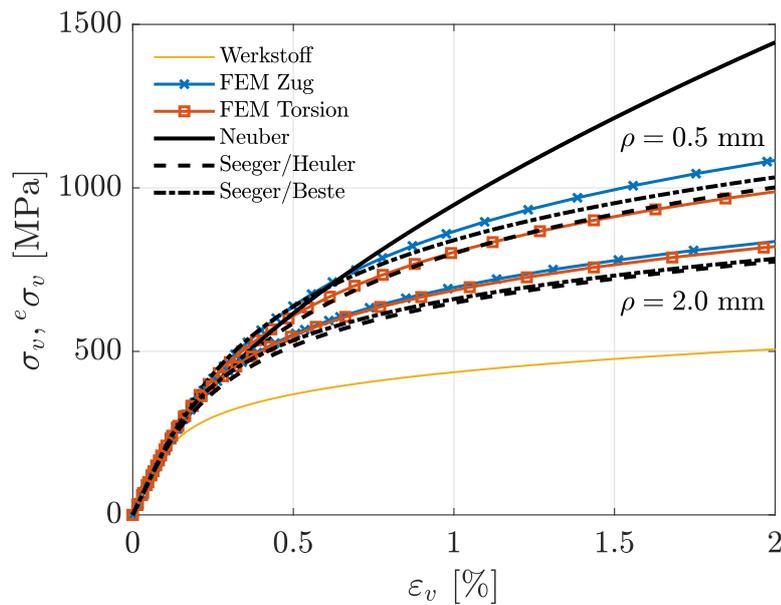


Abbildung 2.34: Bauteilfließkurven für den Pseudo-Spannungsansatz

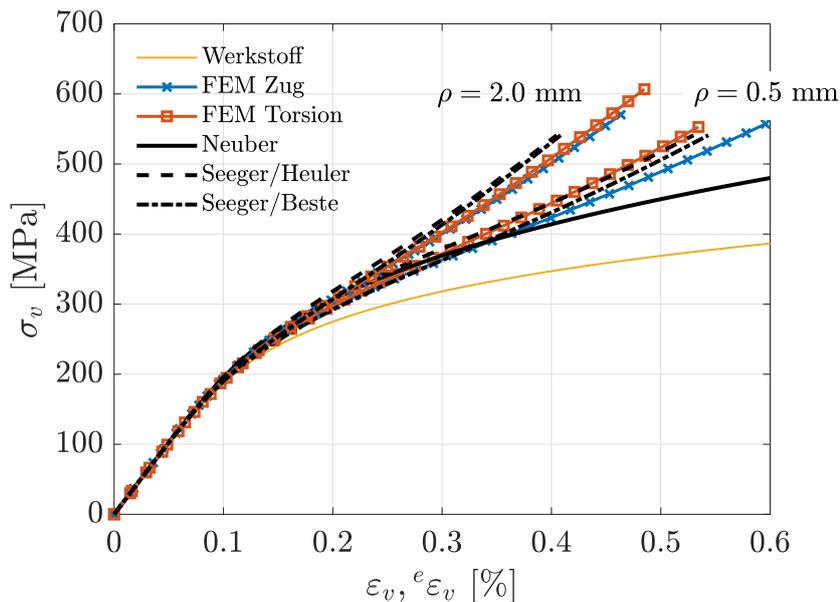


Abbildung 2.35: Bauteilfließkurven für den Pseudo-Dehnungsansatz

Vergleichsdehnung von etwa 0.5% mit der Neuber-Methode noch sehr gute Ergebnisse erzielt. Auf höheren Lastniveaus werden durch die beiden Kerbnäherungsverfahren mit Sternterm allerdings wesentlich höhere Übereinstimmungen mit den FE-Ergebnissen erreicht. Ebenfalls auffällig ist, dass mit steigender Kerbschärfe (d. h. sinkendem Kerbradius) der Unterschied der Fließkurven zwischen Zug- und Torsionsbelastung zunimmt.

In Abbildung 2.35 ist die BFK für den Pseudo-Dehnungsansatz dargestellt. Auch hier wird deutlich, dass sich die Neuber-Methode vor allem dafür eignet, scharfe Kerben auf niedrigen Belastungsniveaus zu beschreiben. Ebenfalls ist zu erkennen, dass der in Abschnitt 2.4.2 beschriebene Verlauf der Bauteilfließkurve mit FE-Rechnungen bestätigt wird. Auch für mittels FEM berechnete Bauteilfließ-

kurven muss eine Linearisierung nach Abschnitt 2.4.2 durchgeführt werden, um daraus Parameter eines Strukturmodells für den Pseudo-Dehnungsansatz abzuleiten.

Des Weiteren stellt sich die Frage, ob für jeden auf die Probe aufgebrachten Lastfall eine eigene BFK bestimmt werden muss. Dies würde die Genauigkeit der Strukturfließflächenansätze sicher verbessern, stellt allerdings einen erheblichen Mehraufwand für den Anwender dar. Vor allem für einen allgemeinen nichtproportionalen Belastungsfall existiert darüber hinaus derzeit keine geschlossene Vorgehensweise, wie eine BFK zu bestimmen ist. Aus diesem Grund wird für alle folgenden Rechnungen die Bauteilfließkurve aus dem Lastfall Zug verwendet. Die Beschränkung, die Bauteilfließkurve aus nur einer Belastungssituation zu verwenden, verringert den Aufwand für den Anwender erheblich. In Abschnitt 2.5.4 werden die verschiedenen Methoden, eine Bauteilfließkurve zu bestimmen, anhand von elastisch-plastischen FE-Rechnungen miteinander verglichen.

### 2.5.3. Parameteridentifikation der Strukturmodelle

Im Rahmen der Strukturfließflächenansätze wird das Verformungsverhalten der Struktur durch die Integration eines Plastizitätsmodells (des Strukturmodells) dargestellt. Dazu müssen die Parameter des Strukturmodells bestimmt werden. Für das hier verwendete Ohno/Wang Modell werden für jeden Teilbackstresstensor drei Parameter ( ${}^e r^i, {}^e c^i, {}^e \chi^i$ ) benötigt.

Die Parameter zur Modellierung der Hysteresenform ( ${}^e r^i, {}^e c^i$ ) werden mit dem Verfahren aus Abschnitt 2.3.3 automatisch anhand der vorgegebenen Bauteilfließkurve bestimmt.

Es sind noch die Parameter  ${}^e \chi$  zum Anpassen der Mittelspannungsrelaxation und des Ratchettings zu bestimmen. Dazu existiert kein geschlossenes Verfahren. Aus diesem Grund werden die Parameter an durchgeführte Finite-Elemente-Rechnungen angepasst.

Ratchetting entsteht durch unsymmetrische Hystereseschleifen. Das Ratchettingverhalten eines Werkstoffs ist im Allgemeinen abhängig von der Art und der Höhe der Belastung. Letztlich sind die Parameter des Strukturmodells auch von der Probenform, d. h. der Bauteilfließkurve, abhängig. Aus diesem Grund wird für jede Bauteilfließkurve ein eigener Satz Ratchetting Parameter bestimmt. Untersucht werden Bauteilfließkurven, welche aus den Kerbnäherungsverfahren nach Neuber, Seeger/Beste und Seeger/Heuler sowie aus elastisch-plastischen FE-Rechnungen ermittelt wurden.

Um weiterhin die Parameter  ${}^e \chi$  abzuleiten, werden FE-Rechnungen auf drei verschiedenen Lastniveaus unter proportionaler Last mit einem R-Verhältnis von  $R = -0.5$  verwendet. In den FE-Rechnungen wurden 100 Lastzyklen simuliert. Die drei gewählten Lastniveaus repräsentieren dabei einen völlig elastischen Zustand im Nennquerschnitt ( $S_N = 100$  MPa), einen zum Teil plastizierten Nennquerschnitt ( $S_N = 150$  MPa) und einen vollständig plastizierten Nennquerschnitt ( $S_N = 200$  MPa). Die Nennspannung aus Torsion  $S_T$  wurde dabei so gewählt, dass sich lokal nach Elastizitätstheorie ein Spannungsverhältnis  ${}^e \sigma / {}^e \tau = \sqrt{3}$  einstellt. Für die Kerbprobe mit Radius  $\rho = 0.5$  mm ergibt sich so ein Nennspannungsverhältnis von  $S_N / S_T = 1.125$ , für die Kerbprobe mit Radius  $\rho = 2$  mm wird ein Nennspannungsverhältnis von  $S_N / S_T = 1.276$  angesetzt.

Zum Anpassen der Parameter  ${}^e \chi$  wird weiterhin zunächst vereinfachend angenommen, dass für jeden Teilbackstresstensor das gleiche  ${}^e \chi$  verwendet werden kann.

Ebenfalls wurde auf eine genaue Abbildung der tatsächlichen Mittelspannungen und -dehnungen verzichtet. Die dabei auftretenden Fehler resultieren hauptsächlich aus den inkorrekten Abbildungen der Erstbelastung und Hystereseformen. Um die fehlenden Strukturparameter zu ermitteln, wurden die Geschwindigkeiten von Ratchetting ( $d\varepsilon_m/dn$ ) und Mittelspannungsrelaxation ( $d\sigma_m/dn$ ) verwendet.

Da im Pseudo-Spannungsansatz die pseudo elastischen Spannungen als Input für das Strukturmodell verwendet werden, wird hier die Ratchettingrate zur Parametrisierung verwendet. Die Ratchettingparameter des Strukturmodells haben auf Mittelspannungsrelaxation nur indirekt über die berechneten plastischen Dehnungen einen Einfluss. Für den Pseudo-Dehnungsansatz werden dementsprechend die Parameter  ${}^e \chi$  stattdessen an die Rate der Mittelspannungsrelaxation angepasst.

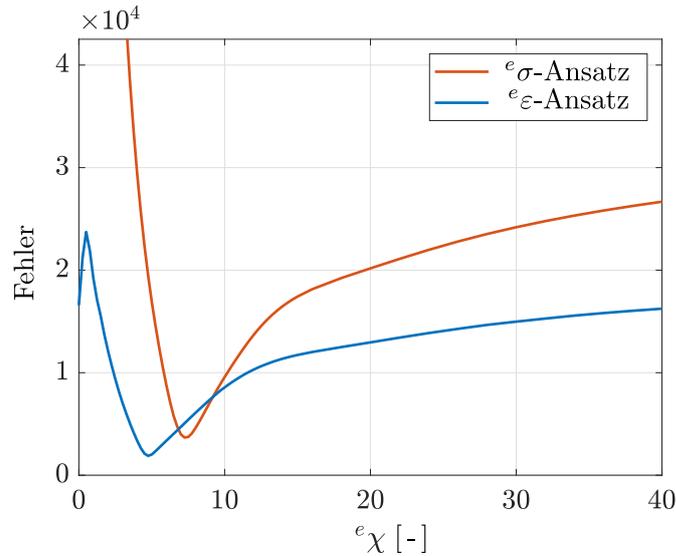


Abbildung 2.36: Fehler der Relaxations- und Ratchettingraten aufgetragen über den Parameter  $e_\chi$  mit einer Bauteilfließkurve nach Neuber für die Kerbprobe mit Radius  $\rho = 2$  mm auf dem Lastniveau  $S_N = 100$  MPa

Aufgrund der Geschwindigkeit der Kerbnäherungsverfahren war es unnötig, zur Anpassung der Modellparameter eine Optimierung durchzuführen. Die FE-Ergebnisse wurden stattdessen unter Variation der Ratchetting Parameter wiederholt nachgerechnet. Anschließend konnte der Parameter mit den geringsten Abweichungen zu den FE-Ergebnissen ausgewählt werden. Der Fehler zwischen FEM und Kerbnäherung (KN) wurde gemäß

$$\text{Fehler} = \sum_{\text{Zyklen}} \frac{()_{FEM} - ()_{KN}}{()_{FEM}} \cdot 100\% \quad (2.122)$$

definiert. Dabei wurden entweder Ratchetting- oder Relaxationsraten eingesetzt, je nachdem, ob Parameter für den Pseudo-Spannungsansatz oder den Pseudo-Dehnungsansatz bestimmt wurden. In Abbildung 2.36 sind die Fehler der Kerbnäherungsverfahren im Vergleich zur FE-Rechnung in Abhängigkeit des Parameters  $e_\chi$  aufgetragen. Es wird der Parameter gewählt, welcher die geringste Abweichung aufweist.

In den FE-Rechnungen zeigt sich, dass mit steigendem Lastniveau die Mittelspannungsrelaxation tendenziell langsamer abläuft, während Ratchettingraten steigen. Um dieses Verhalten in den Strukturfließflächenansätzen zu berücksichtigen, wurden zunächst für jedes Lastniveau eigene Parameter  $e_\chi$  bestimmt.

Abbildung 2.37 zeigt einen Vergleich zwischen FE-Rechnungen und den beiden Strukturfließflächenansätzen. Die dargestellten Ergebnisse der Strukturfließflächenansätze wurden mit einer Bauteilfließkurve aus der klassischen Neuber-Regel berechnet.

Auf den beiden niedrigeren Lastniveaus können beide Verfahren die FE-Ergebnisse in sehr guter Näherung wiedergeben. Bei einem vollplastischen Zustand des Nennquerschnitts ( $S_N = 200$  MPa) kommt es nahezu zu keiner Mittelspannungsrelaxation. Beide Modelle spiegeln dieses Verhalten wider. Der Pseudo-Spannungsansatz zeigt nach etwa 20 Zyklen aufgrund der hohen Ratchettingraten sogar sehr leicht steigende Mittelspannungen.

Abbildung 2.38 zeigt die ermittelten Parameter für alle Ansätze auf allen Lastniveaus für beide Kerbradien  $\rho = 2$  mm und  $\rho = 0.5$  mm.

Beim Pseudo-Dehnungsansatz zeigt sich im Allgemeinen, dass die Parameter mit zunehmender Plastizierung des Nennquerschnitts steigen. Dadurch lassen sich die abnehmenden Raten der

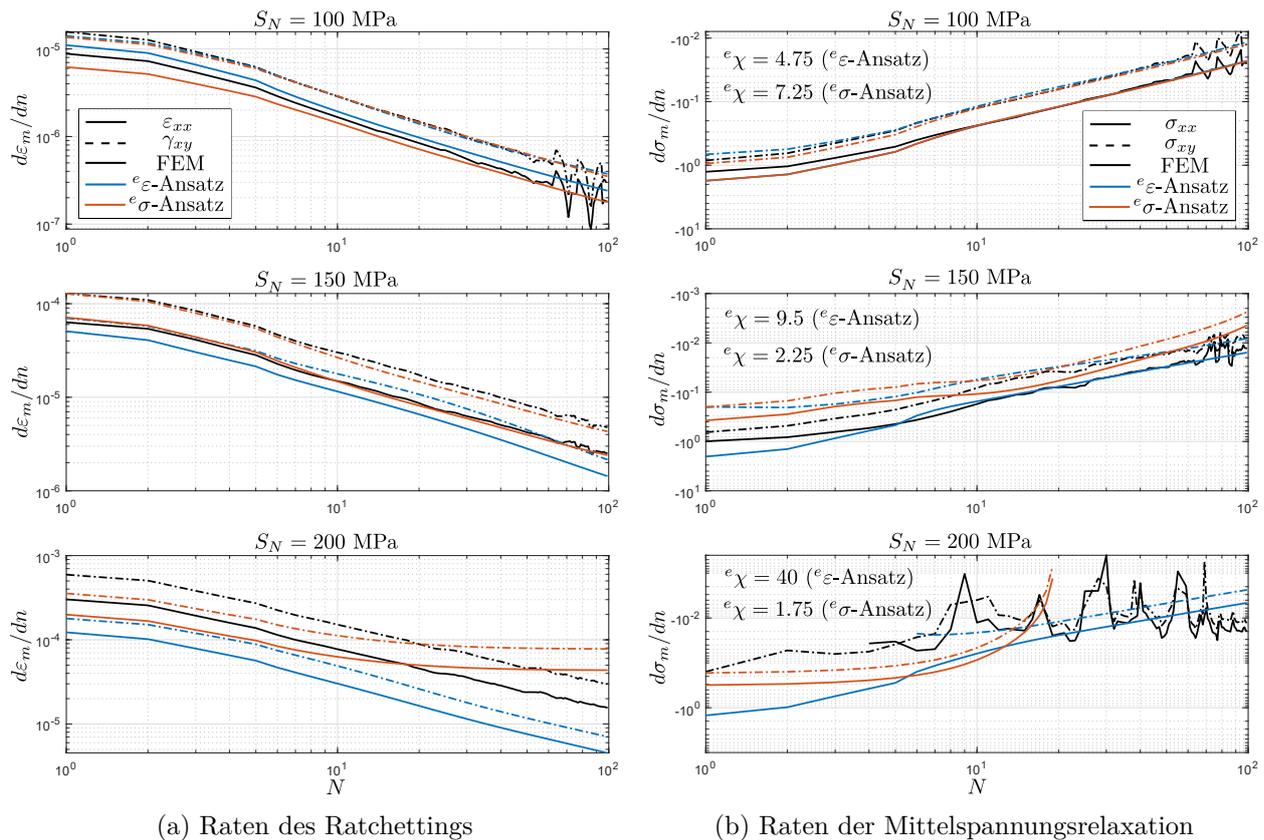


Abbildung 2.37: Ergebnisse der Relaxations- und Ratchettingraten mit einer Bauteilfließkurve nach Neuber für die Kerbprobe mit Radius  $\rho = 2$  mm. Für die hier gezeigten Ergebnisse wurden für jedes Lastniveau eigene Parameter  ${}^e\chi$  bestimmt.

Mittelspannungsrelaxation modellieren. Außerdem zeigt sich kein wesentlicher Unterschied in den ermittelten Ratchetting Parametern für die verschiedenen Bauteilfließkurven.

Beim Pseudo-Spannungsansatz werden durch die steigenden Ratchettingraten auf höheren Lastniveaus niedrigere Ratchetting Parameter benötigt. Die Parameter sind dabei stärker abhängig von der gewählten Bauteilfließkurve als beim Pseudo-Dehnungsansatz.

Es ist nicht vorteilhaft, für jeden Lastpfad auf jedem Lastniveau einen eigenen Satz Parameter zu bestimmen. Wünschenswert ist ein kompletter Satz Strukturparameter für eine Probenform oder ein Bauteil, der für beliebige Belastungen verwendet werden kann. In Abbildung 2.38 zeigt sich jedoch, dass für verschiedene Lastniveaus zum Teil sehr unterschiedliche Parameter notwendig sind, um das Bauteilverhalten zu beschreiben. Um einen einheitlichen Satz Strukturparameter zu bestimmen, kann die Annahme fallen gelassen werden, dass jeder Teilbackstresstensor die gleichen Parameter  ${}^e\chi$  besitzt. Ratchetting entsteht, aus Sicht der Modellierung, durch unsymmetrische Hysteresehalbäste. Dies kann bei der Wahl der Strukturparameter ausgenutzt werden.

Auf niedrigen Lastniveaus sind die meisten Teilbackstresstensoren nur wenig entwickelt und haben nur einen geringen Einfluss auf die Form der Hysterese. Auf höheren Lastniveaus besitzen die Ratchetting Parameter von Teilbackstresstensoren, die früh ihren Grenzwert erreichen, einen geringeren Einfluss. Dies liegt daran, dass der Ausdruck  $\left\| \alpha_{ij}^k \right\| / r^k \approx 1$  in der Wichtungsfunktion des Erholungsterms (Gleichung (2.29)) nahe dem Wert 1 liegt.

Mit den in Abbildung 2.38 dargestellten Parametern werden die Strukturparameter festgelegt. Die gewählten Parametersätze der Strukturmodelle sind in Tabelle A.2 bis Tabelle A.5 angegeben. Dadurch lassen sich die Raten der Mittelspannungsrelaxation und des Ratchettings auf unterschiedlichen Lastniveaus besser beschreiben als mit einem einheitlichen Satz Parameter für jeden

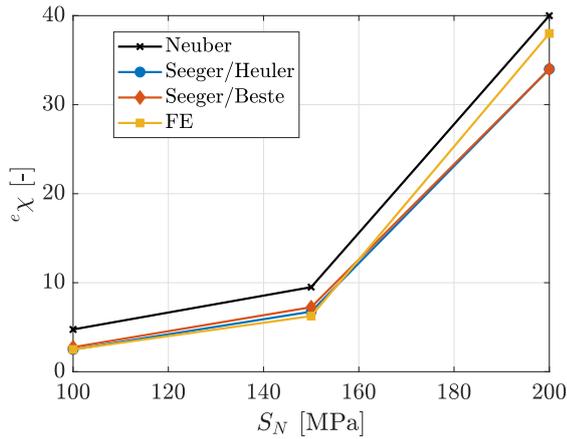
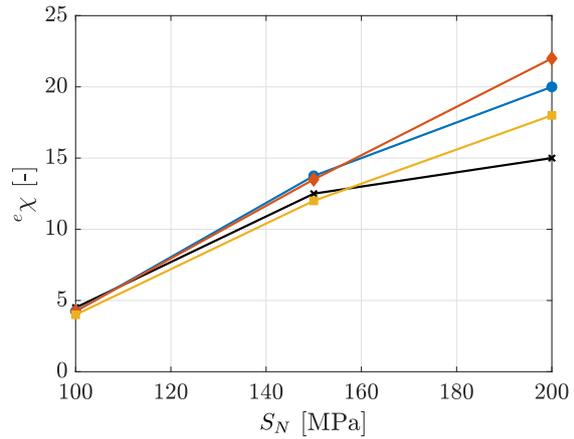
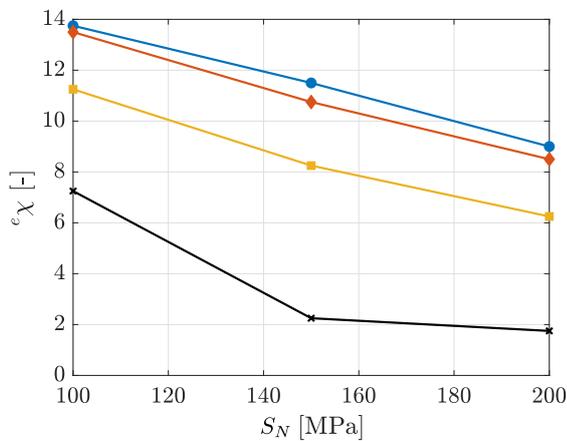
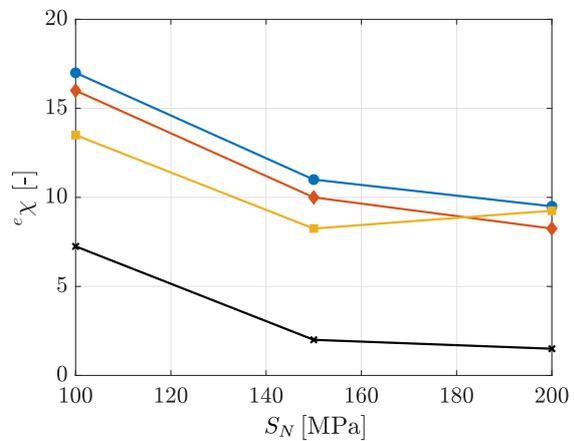
(a) Pseudo-Dehnungsansatz und  $\rho = 2$  mm(b) Pseudo-Dehnungsansatz und  $\rho = 0.5$  mm(c) Pseudo-Spannungsansatz und  $\rho = 2$  mm(d) Pseudo-Spannungsansatz und  $\rho = 0.5$  mm

Abbildung 2.38: Angepasste Ratchetting Parameter für beide Kerbproben und Strukturfließflächenansätze

Teilbackstresstensor. In Abbildung 2.39 sind die Ergebnisse dargestellt, die sich aus den beiden Strukturfließflächenansätzen unter Verwendung einer Bauteilfließkurve aus der Neuber-Regel und einem einheitlichen Satz Ratchetting Parameter ergeben. Im Vergleich zu Abbildung 2.37 wird deutlich, dass die Raten auf allen Lastniveaus etwas schlechter beschrieben werden. Die Approximation wird jedoch auf allen Lastniveaus noch als ausreichend gut eingeschätzt.

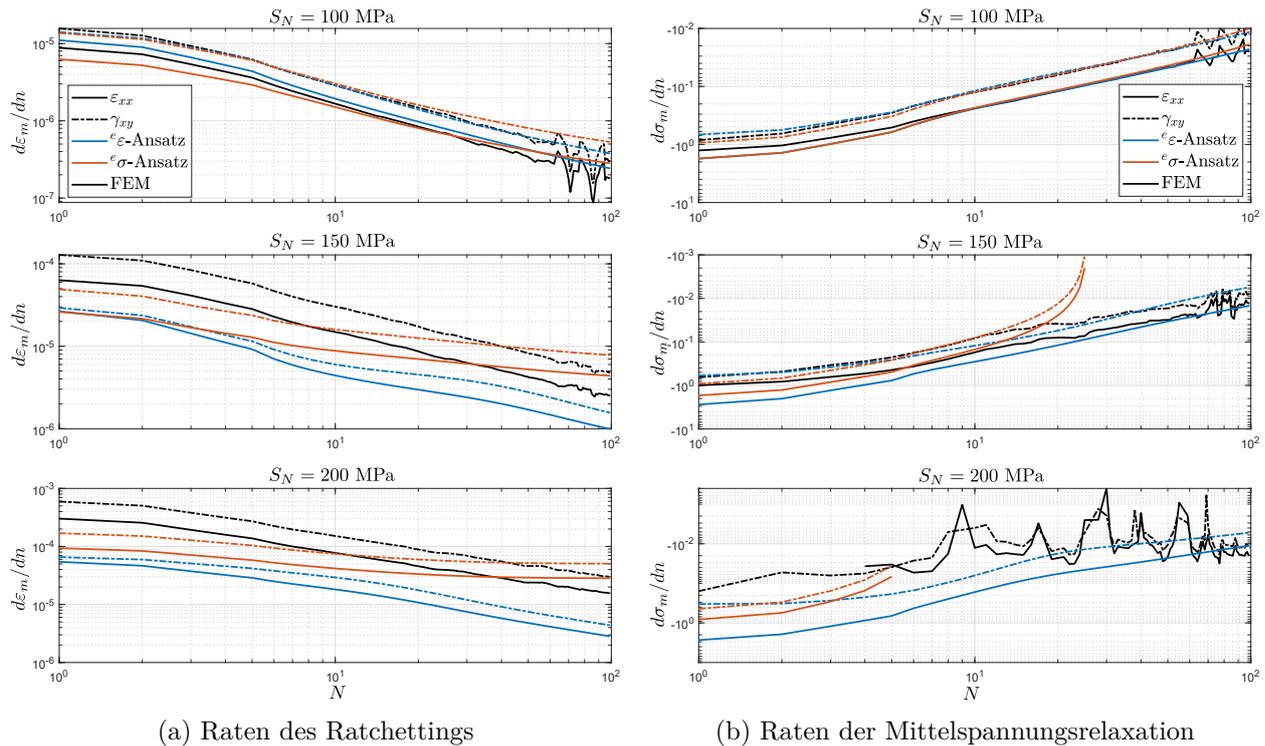


Abbildung 2.39: Ergebnisse der Relaxations- und Ratchettingraten mit einer Bauteilfließkurve nach Neuber für die Kerbprobe mit Radius  $\rho = 2$  mm.

## 2.5.4. Vergleich der Kerbnäherungsverfahren mit der Finiten-Elemente-Methode

Ziel ist es, ein Kerbnäherungsverfahren auszuwählen, das sich für die Berechnung der Ermüdungsfestigkeit von Werkstoffen und Bauteilen eignet.

Dazu werden die Strukturfließflächenverfahren mit einem inkrementellen Verfahren verglichen. Als Repräsentanten der inkrementellen Kerbnäherungsverfahren wird die Unified Expression nach [Ye 08] verwendet. Ebenfalls hervorgehoben werden soll der Einfluss der Wahl der Bauteilfließkurve in den Strukturfließflächenverfahren. Von den Strukturfließflächenansätzen werden sowohl der Pseudo-Spannungsansatz als auch der Pseudo-Dehnungsansatz untersucht. Die Bauteilfließkurven der beiden Strukturfließflächenansätze werden jeweils mit dem Verfahren nach Neuber [Neub 61], Seeger und Heuler [Seeg 80], Seeger und Bester [Seeg 80] und aus einer FE-Rechnung bestimmt. Die Parameter der Strukturmodelle wurden in Abschnitt 2.5.3 festgelegt.

Prinzipiell sind alle hier beschriebenen Verfahren geeignet, um lokale Spannungen und Dehnungen unter einer beliebigen mechanischen Beanspruchung abzuschätzen. Für eine Anwendung innerhalb der Lebensdauerrechnung soll das gewählte Verfahren Spannungen und Dehnungen, unabhängig von der gewählten Beanspruchung oder der Lasthöhe, zuverlässig vorhersagen können. Für den Fall, dass eine Betriebslastfolge nachgerechnet werden soll, entstehen sehr lange Last-Zeitfolgen. Daher muss auch auf die Rechengeschwindigkeit geachtet werden.

Um die Qualität der Kerbnäherungsverfahren zu beurteilen, werden FE-Rechnungen an den beiden Kerbproben aus Abbildung 2.33 mit Kerbradius  $\rho = 0.5$  und  $\rho = 2$  mm durchgeführt. Die FE-Rechnungen erfolgen mit dem kommerziellen Programm ABAQUS. Dabei wurde, wie in den Kerbnäherungsverfahren, das Plastizitätsmodell nach Ohno und Wang [Ohno 93a, Ohno 93b] verwendet. Dieses Modell lag in Form einer UMAT Routine am Institut vor [Döri 06].

Tabelle 2.4 zeigt eine Übersicht über die simulierten Lastfälle. Es wurden proportionale und nichtproportionale Lastfälle mit und ohne Mittellasten berechnet. Für Lastpfade ohne Mittellast wurden 10 Lastzyklen und für Lastpfade mit Mittellast wurden 100 Lastzyklen simuliert. Die

Proben wurden stets durch eine Zugkraft (eine Normalspannung  $S_N$  im Nennquerschnitt) und ein Torsionsmoment (eine Schubspannung  $S_T$  im Nennquerschnitt) beansprucht. Das Verhältnis der Amplituden aus Normal- und Schubspannung im Nennquerschnitt wurde für beide Proben so festgelegt, dass sich unter einer  $90^\circ$  phasenverschobenen Last in der Kerbe eine zeitlich konstante von Mises Vergleichsspannung einstellt. Mit den ermittelten Kerbfaktoren ergeben sich dann die Verhältnisse  $S_N/S_T(\rho = 0.5\text{mm}) = 1.125$  und  $S_N/S_T(\rho = 2.0\text{mm}) = 1.276$  für beide Kerbradien. Für jeden Lastfall wurden Rechnungen auf drei verschiedenen Lastniveaus durchgeführt.

Lastfall	$\rho = 0.5 \text{ mm}$		$\rho = 2 \text{ mm}$	
	$S_N$ [MPa]	$S_T$ [MPa]	$S_N$ [MPa]	$S_T$ [MPa]
Zug/Druck $R = -1$	100	-	100	-
	200	-	200	-
	300	-	300	-
Torsion $R = -1$	-	100	-	100
	-	200	-	200
	-	300	-	300
Proportional $R = -1$	100	88.89	100	78.37
	200	177.78	200	156.74
	250	222.22	300	235.11
$90^\circ$ phasenverschoben $R = -1$	100	88.89	100	78.37
	200	177.78	200	156.74
	300	266.67	300	235.11
Boxpfad $R = -1$ , Trapezsignal	100	88.89	100	78.37
	-	-	200	156.74
Schmetterlingspfad $R = -1$ Frequenzverhältnis $f_N/f_T = 1/2$	100	88.89	100	78.37
	200	177.78	200	156.74
	250	222.22	300	235.11
Proportional $R = -0.5$	100	88.89	100	78.37
	150	133.33	150	117.55
	200	177.78	200	156.74
$90^\circ$ phasenverschoben $R = -0.5$	100	88.89	100	78.37
	150	133.33	150	117.55
	200	177.78	200	156.74
Proportional $R = 0$	75	66.67	75	58.78
	100	88.89	100	78.37
	150	133.33	150	117.55
statischer Zug zyklische Torsion $R = -1$	-	-	100	78.37
	-	-	200	156.74

Tabelle 2.4: Übersicht über die zur Validierung der Kerbnäherungsmethoden mit FEM simulierten Lastfälle

Ein Vergleich zwischen anhand der Finite-Elemente-Methode (FEM) und Kerbnäherungsmethoden (KN) ermittelten Amplituden ist in den Abbildungen 2.40, 2.41 und 2.42 dargestellt. Dabei ist jeweils die mittels FEM berechnete Amplitude über der mit KN bestimmten Amplitude aufgetragen. Eine perfekte Übereinstimmung ergibt einen Punkt genau auf der Mitteldiagonalen der Abbildungen. Ebenfalls durch eine gestrichelte Linie ist eine Spannungsabweichung von 10% dargestellt. Um Abweichungen von Spannungen und Dehnungen besser vergleichen zu können, wurde bei der Gegenüberstellung von Dehnungsamplituden die Spannungsabweichung über die vorgegebene zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve des Werkstoffs in eine äquivalente Dehnungsabweichung umgerechnet. Aufgrund des flachen Verlaufs der Fließkurve weitet sich das Streuband dadurch bei höheren Beanspruchungsniveaus auf.

Zudem enthält Tabelle 2.5 einen quantitativen Vergleich der Methoden. Untersucht wurde, um welchen Faktor die mittels KN berechnete Amplitude von der durch FEM berechneten Amplitude abweicht. Die Größe  $m^*$  in Tabelle 2.5 bezieht sich auf den Mittelwert der Abweichungen aller Lastpfade. Während  $T^* = \max(\varepsilon_{a,KN}/\varepsilon_{a,FEM}) - \min(\varepsilon_{a,KN}/\varepsilon_{a,FEM})$  die Spannweite der Ergebnisse angibt. Ein Wert  $m^* > 1$  besagt also, dass Amplituden im Mittel überschätzt werden, während  $m^* < 1$  bedeutet, dass Amplituden im Mittel unterschätzt werden. Die Spannweite  $T^*$  einer guten Approximation sollte möglichst gering sein.

		$\varepsilon_{xx,a}$		$\gamma_{xy,a}$		$\sigma_{xx,a}$		$\sigma_{xy,a}$	
		$m^*$	$T^*$	$m^*$	$T^*$	$m^*$	$T^*$	$m^*$	$T^*$
$\varepsilon_\sigma$ -Ansatz	BFK Neuber	1.02	0.73	1.02	0.89	0.98	0.22	1.01	0.24
	BFK Seeger/Heuler	1.28	0.65	1.26	0.55	1.02	0.09	1.06	0.12
	BFK Seeger/Beste	1.14	0.62	1.12	0.59	0.98	0.12	1.02	0.14
	BFK FEM	1.05	0.24	1.04	0.46	0.97	0.08	1.01	0.12
$\varepsilon_\varepsilon$ -Ansatz	BFK Neuber	1.01	0.72	0.95	0.78	1.01	0.15	0.98	0.25
	BFK Seeger/Heuler	1.20	0.64	1.12	0.73	1.04	0.11	1.02	0.21
	BFK Seeger/Beste	1.06	0.65	0.97	0.80	1.00	0.13	0.98	0.22
	BFK FEM	0.99	0.58	0.92	0.58	0.99	0.12	0.97	0.22
Uni.Exp.		0.83	0.63	0.80	0.68	0.95	0.21	0.94	0.29

Tabelle 2.5: Qualität der Kerbnäherungsmethoden im Vergleich zu den Ergebnissen aus FE-Simulationen

Abbildung 2.40 zeigt den Vergleich zwischen den Ergebnissen aus dem Pseudo-Spannungsansatz und der FEM. Zunächst kann gesagt werden, dass, unabhängig von der Wahl der Bauteilfließkurve, Spannungsamplituden besser approximiert werden als Dehnungsamplituden. Die Ergebnisse für Spannungsamplituden befinden sich unabhängig vom betrachteten Lastniveau fast ausschließlich innerhalb des 10% Fehlerbandes. Werden Dehnungen betrachtet, wird deutlich, dass vor allem Amplituden auf niedrigen Lastniveaus extrem gut approximiert werden. Auf höheren Lastniveaus werden etwas größere Abweichungen beobachtet. Ob dabei Amplituden über oder unterschätzt werden, hängt von der verwendeten Bauteilfließkurve ab. Dieser Trend wird von dem über die zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve umgerechneten Fehlerband gut abgebildet. Der flache Verlauf der zyklischen Fließkurve sorgt dafür, dass geringe Fehleinschätzungen in der Bauteilfließkurve auf hohen Beanspruchungsniveaus zu immer größeren Fehleinschätzungen der Dehnungen führen. Der Grund dafür wird schematisch in den Bauteilfließkurven aus Abbildung 2.34 deutlich. Beim Pseudo-Spannungsansatz werden als Eingabe für das Strukturmodell die pseudo elastischen Spannungen verwendet. Auf hohen Lastniveaus werden die Dehnungen mit einer BFK aus der Neuber-Methode unterschätzt. Die beiden anderen Kerbnäherungsverfahren liefern Bauteilfließkurven, die tendenziell

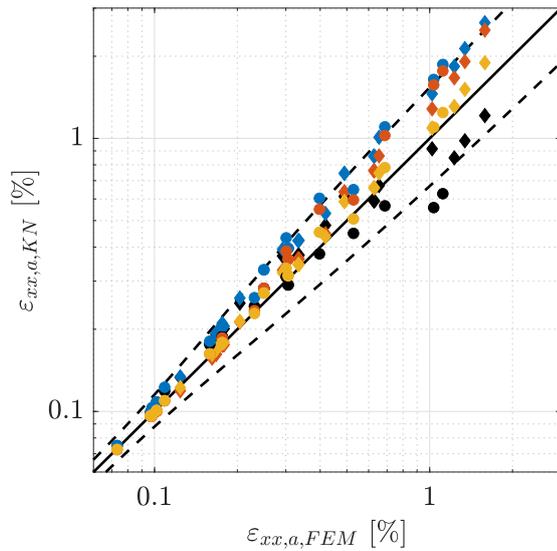
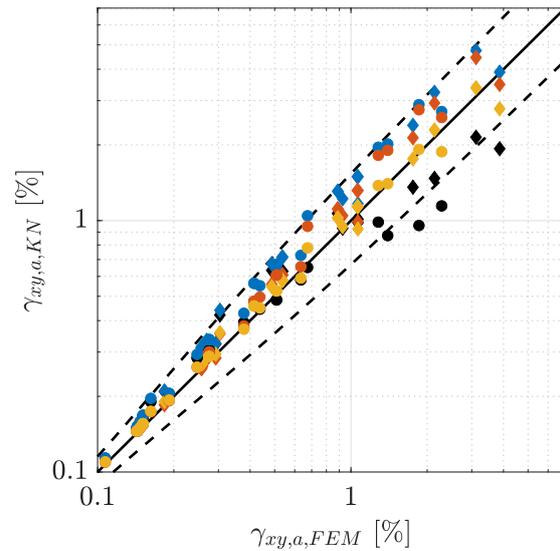
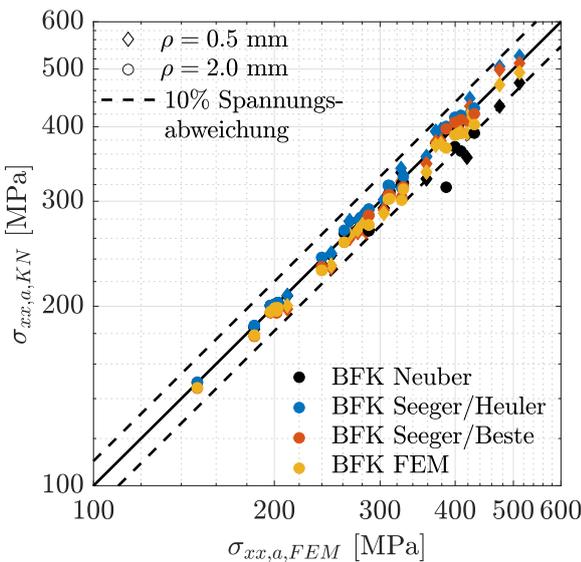
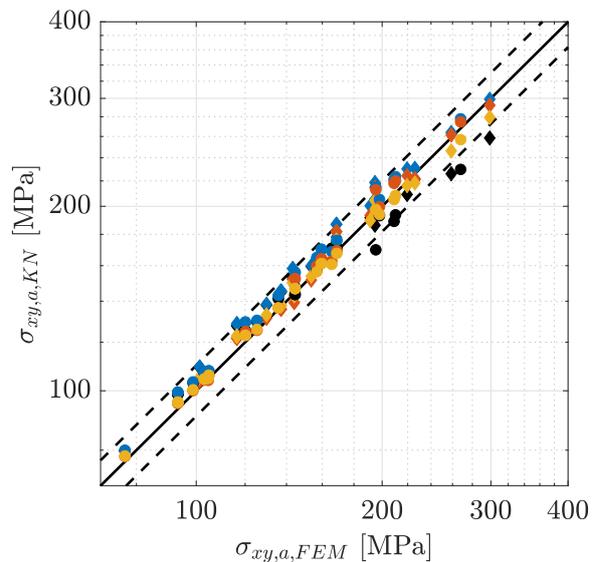
(a) Vergleich der  $\varepsilon_{xx,a}$  Amplituden(b) Vergleich der  $\gamma_{xy,a}$  Amplituden(c) Vergleich der  $\sigma_{xx,a}$  Amplituden(d) Vergleich der  $\sigma_{xy,a}$  Amplituden

Abbildung 2.40: Mit dem Pseudo-Spannungsansatz berechnete Amplituden im Vergleich mit den aus Finiten-Elemente-Rechnungen ermittelten Amplituden

höhere Dehnungen für dieselbe pseudo elastische Spannung prognostizieren. Die besten Ergebnisse werden bei einer Verwendung der Bauteilfließkurve aus einer monotonen FE-Simulation erzielt. Dabei besteht sogar die Möglichkeit, je nach Lastfall eine eigene Bauteilfließkurve zu erzeugen. Hier wurde jedoch für jeden Lastfall die BFK aus reinem Zug verwendet. Die Qualität der Approximation mit einer BFK aus FE-Simulationen wird auch anhand der Werte aus Tabelle 2.5 deutlich. Die Mittelwerte liegen für alle betrachteten Spannungs- und Dehnungsamplituden sehr nahe am Idealwert  $m^* = 1$ . Die Spannweite  $T^*$  liegt bei der Verwendung der BFK aus FEM deutlich unter den Spannweiten der anderen Verfahren. Wird die Bauteilfließkurve nach Neuber verwendet, so liegen die mittleren Abweichungen nahe dem Idealwert 1. Aus Abbildung 2.40 wird jedoch deutlich, dass vor allem bei hohen Lasten Amplituden deutlich unterschätzt werden. Im Hinblick auf eine Lebensdauerbewertung

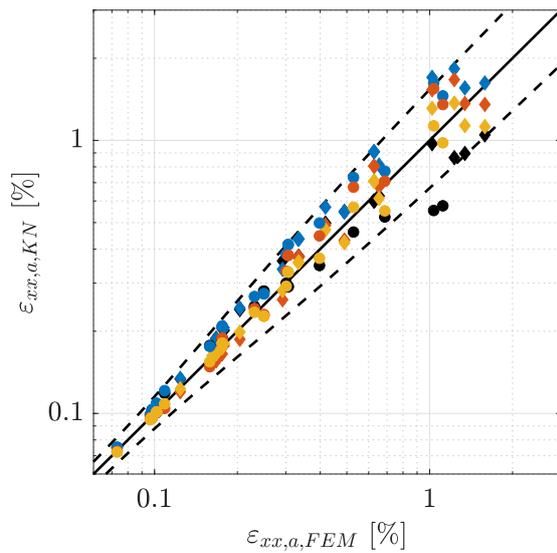
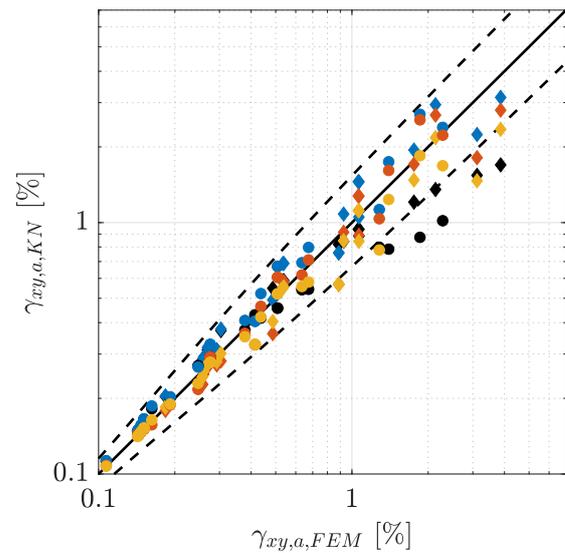
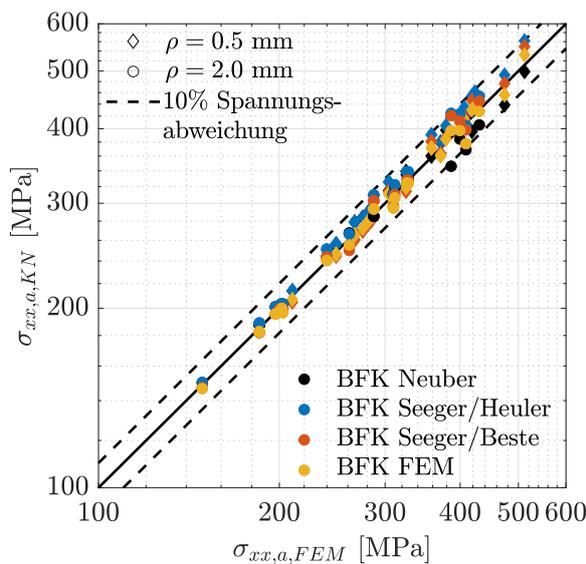
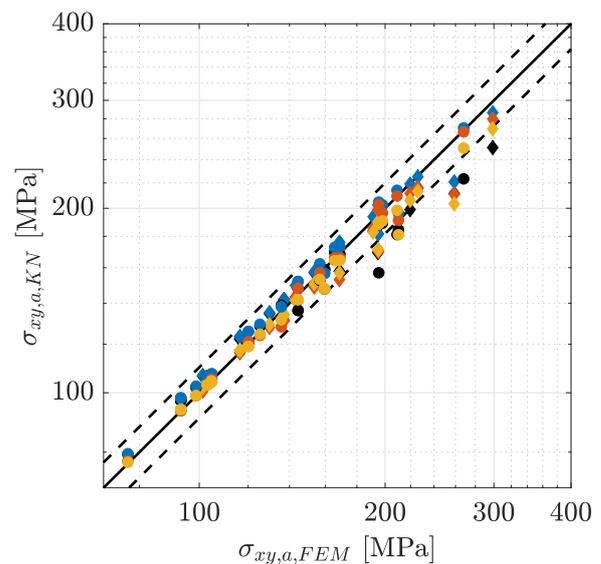
(a) Vergleich der  $\varepsilon_{xx,a}$  Amplituden(b) Vergleich der  $\gamma_{xy,a}$  Amplituden(c) Vergleich der  $\sigma_{xx,a}$  Amplituden(d) Vergleich der  $\sigma_{xy,a}$  Amplituden

Abbildung 2.41: Mit dem Pseudo-Dehnungsansatz berechnete Amplituden im Vergleich mit den aus Finiten-Elemente-Rechnungen ermittelten Amplituden

führt dies zu einer Überschätzung der Ermüdungslbensdauer und damit zu unsicheren Ergebnissen. Die Ergebnisse beim Verwenden von Bauteilfließkurven aus den Verfahren von Seeger/Heuler oder Seeger/Beste überschätzen Dehnungsamplituden im Mittel leicht, weisen aber im Vergleich zur Neuber-Methode eine geringere Streuung der Ergebnisse auf. Mit einer Bauteilfließkurve aus der Seeger/Beste-Methode werden mit einer abgeschätzten Bauteilfließkurve die besten Ergebnisse erzielt.

Abbildung 2.41 zeigt den Vergleich zwischen den Ergebnissen aus dem Pseudo-Dehnungsansatz und der FEM. Im Vergleich zum Pseudo-Spannungsansatz ergeben sich die gleichen Trends in Bezug auf die Wahl der Bauteilfließkurve. Hier werden jedoch auf hohen Lastniveaus in den Gleitungen  $\gamma_{xy,a}$  unabhängig von der Wahl der Bauteilfließkurve zu geringe Amplituden vorhergesagt. Für  $\gamma_{xy,a}$

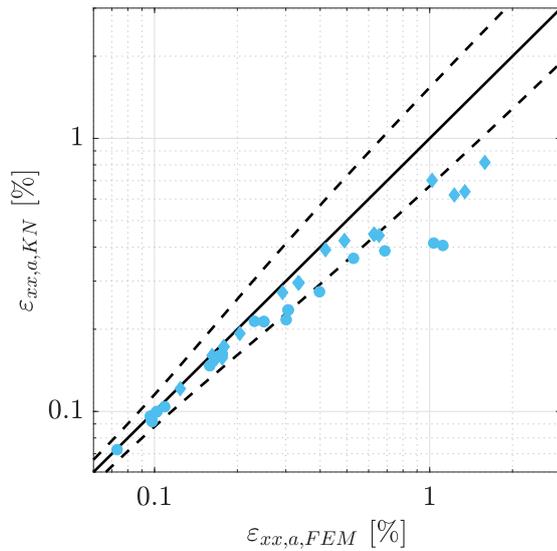
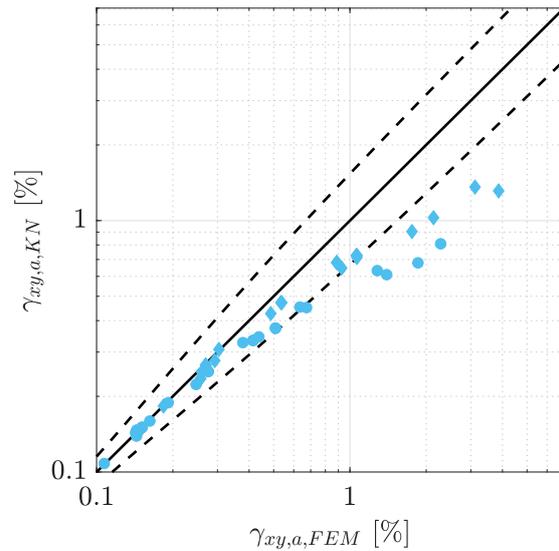
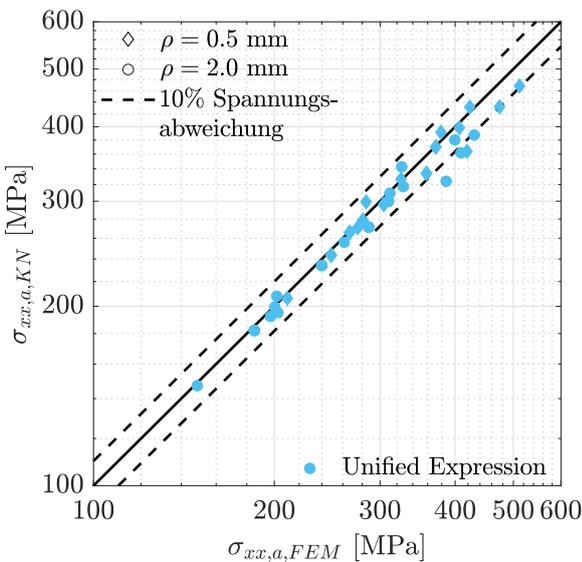
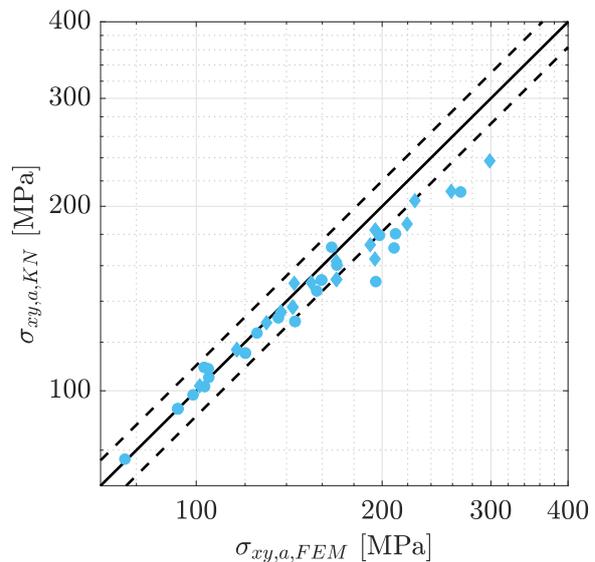
(a) Vergleich der  $\varepsilon_{xx,a}$  Amplituden(b) Vergleich der  $\gamma_{xy,a}$  Amplituden(c) Vergleich der  $\sigma_{xx,a}$  Amplituden(d) Vergleich der  $\sigma_{xy,a}$  Amplituden

Abbildung 2.42: Mit der Unified Expression berechnete Amplituden im Vergleich mit den aus Finiten-Elemente-Rechnungen ermittelten Amplituden

werden höhere Spannweiten in den Ergebnissen beobachtet als beim Pseudo-Spannungsansatz, siehe Tabelle 2.5.

Abbildung 2.42 zeigt den Vergleich zwischen den Ergebnissen der Unified Expression (UE) und den FE-Rechnungen. Auch hier werden die Spannungsamplituden besser approximiert als die Dehnungsamplituden. Schon auf relativ geringen Belastungsniveaus zeigt sich, dass Dehnungsamplituden unterschätzt werden. Zusätzlich ergeben sich größere Abweichungen als bei den Strukturfließflächenansätzen, was sich ebenfalls in den Mittelwerten aus Tabelle 2.5 widerspiegelt. Hier werden zum Beispiel für die Komponente  $\varepsilon_{xx,a}$  mit einer mittleren Abweichung von  $m^* = 0.83$  Dehnungsamplituden deutlich unterschätzt. Dieses Verhalten zeigt sich ganz im Allgemeinen bei den inkrementellen Kerbnäherungsverfahren. Sie sind, ähnlich wie die klassische einachsige Neuber-Methode, beschränkt

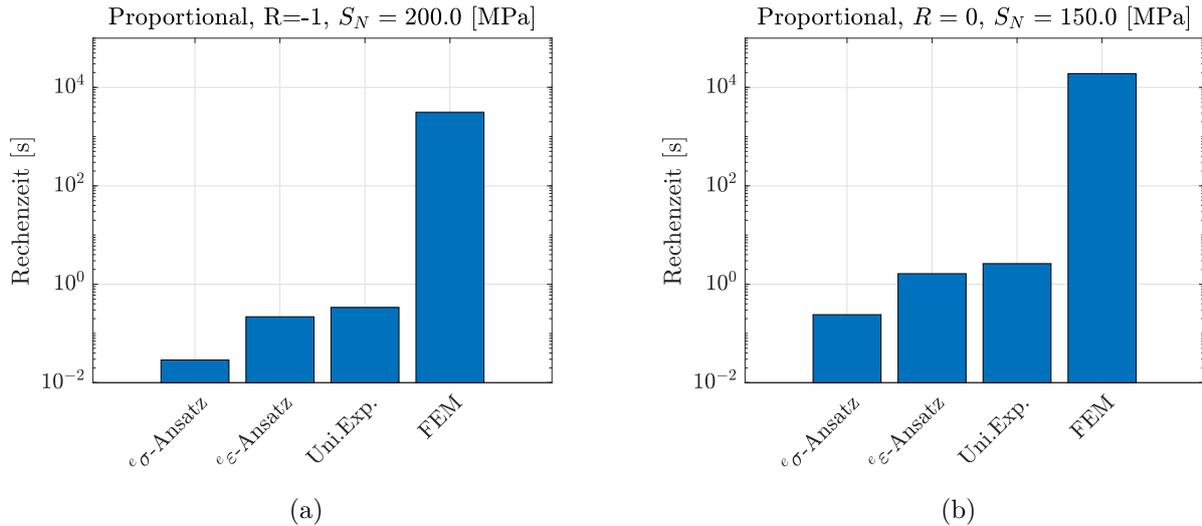


Abbildung 2.43: Vergleich der Rechenzeiten der verschiedenen Kerbnäherungsmethoden für die Kerbprobe  $\rho = 0.5$  mm unter (a) proportionaler Belastung mit  $R = -1$  und 10 simulierten Lastzyklen und (b) proportionaler Belastung mit  $R = 0$  und 100 simulierten Lastzyklen

auf Lastfälle, in denen keine plastische Deformation des Nennquerschnitts stattfindet. In anderen Lastfällen werden die auftretenden Kerbdehnungen deutlich unterschätzt.

Ein Vergleich der Rechenzeiten zwischen den verschiedenen Kerbnäherungsmethoden und den FE-Rechnungen ist für zwei ausgewählte Lastfälle in Abbildung 2.43 dargestellt. Jeder Lastzyklus wurde mit 64 Inkrementen diskretisiert. Bei den Strukturfließflächenansätzen hat die Wahl der Bauteilfließkurve keinen wesentlichen Einfluss auf die Rechenzeiten. Der Pseudo-Spannungsansatz weist in beiden Fällen die deutlich geringste Rechenzeit auf. Im Lastfall ohne Mittellast, siehe Abbildung 2.43a, beträgt die Rechenzeit etwa 0.03 Sekunden. Bei 100 simulierten Zyklen, siehe Abbildung 2.43b, werden 0.24 Sekunden benötigt. Die FEM benötigt mit 3125 und 19059 Sekunden deutlich mehr Zeit. Für den Pseudo-Spannungsansatz ergibt sich eine Verkürzung der Rechenzeit um die Faktoren  $1.08 \cdot 10^5$  und  $0.78 \cdot 10^5$ . Der Pseudo-Dehnungsansatz und die Unified Expression liefern Rechenzeiten in vergleichbaren Größenordnungen. Der Pseudo-Dehnungsansatz beschleunigt die Rechnungen im Vergleich zur FEM um den Faktor  $1.1 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^4$ , während die Unified Expression die Rechnungen um die Faktoren  $7 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^3$  beschleunigt.

Um eine möglichst genaue Lebensdauervorhersage zu treffen, ist nicht nur die Approximation von Amplituden wichtig. Auch eine genaue Vorhersage von Mittelspannungen und -dehnungen oder auch Form der Hysterese können eine Rolle spielen.

Im Folgenden werden die Ergebnisse von ausgewählten Lastpfaden diskutiert, um einige Merkmale der Methoden herauszustellen. Zur strukturierten Darstellung werden für die Strukturfließflächenansätze lediglich die Ergebnisse der BFK aus FE-Simulationen gezeigt.

Abbildung 2.44 zeigt die Ergebnisse des proportionalen Lastfalls für die Kerbprobe mit  $\rho = 2$  mm. Sowohl der Pseudo-Spannungsansatz als auch der Pseudo-Dehnungsansatz bilden Amplituden und Form der Hysterese sehr gut ab. Die größten Abweichungen ergeben sich für Spannungen und Dehnungen in Umfangsrichtung, wie in Abbildung 2.44e dargestellt. Die plastischen Dehnungen werden hier von beiden Ansätzen deutlich überschätzt. Gleichzeitig werden Umfangsspannungen unterschätzt. Wie zu erwarten, zeigt der Pseudo-Dehnungsansatz aufgrund der Dehnungskontrolle bei der Ermittlung der lokalen Kerbspannungen eine geringere Abweichung zur FE-Rechnung als der Pseudo-Spannungsansatz. Dieses Verhalten der beiden Strukturfließflächenansätze wurde bereits von Köttgen et al. [Kött 95a] bei der Verwendung des Mróz Modells beobachtet. Die Abweichungen in den Umfangskomponenten der Spannungen und Dehnungen lassen sich in allen hier berechneten

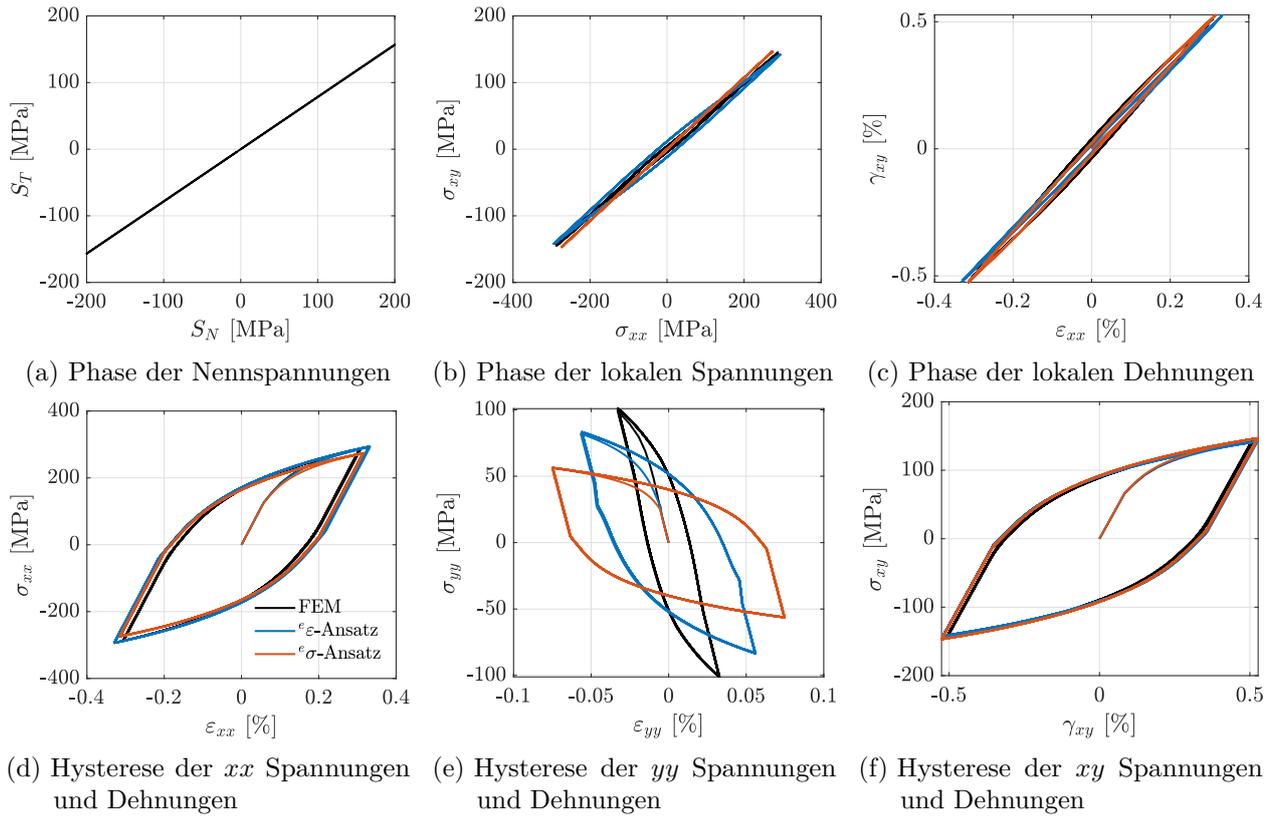


Abbildung 2.44: Vergleich zwischen FE-Rechnung und Kerbnäherungsverfahren für proportionale Belastung und dem Kerbradius  $\rho = 2$  mm.

Lastpfaden beobachten. Grund für diese Fehleinschätzung ist, dass sich die Größen im FE-Modell aus der Gleichgewichtsiteration der Gesamtstruktur ergeben. Es findet eine Dehnungsbehinderung statt, die durch einfache Vorgabe einer fiktiven, pseudo elastischen lokalen Lösung in Form von Kerbfaktoren nicht berücksichtigt wird. Im Hinblick auf eine Lebensdauerberechnung ist jedoch von Vorteil, dass der Betrag der Spannungen und Dehnungen in Umfangsrichtung deutlich kleiner ist als Längs- oder Schubbeanspruchungen. Diese Ungenauigkeit kann in Bezug auf eine spätere Lebensdauer vorhersage unter Verwendung üblicher Modelle in der Regel als unkritisch angesehen werden.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen für Kerbspannungen und -dehnungen aus einer FE-Rechnung und den beiden Strukturfließflächenansätzen für eine nichtproportionale Belastung ist in Abbildung 2.45 dargestellt. Abbildung 2.45 zeigt die Ergebnisse der Kerbprobe mit  $\rho = 2$  mm unter Zug/Druck und Torsion. Beide Lastkanäle sind zueinander  $90^\circ$  phasenverschoben und weisen keine Mittellast auf. In den Phasendiagrammen ergeben sich dadurch Kreise. Die Hysteresenform weicht von der typischen Hysteresenform für einachsige und proportionale Lasten ab. Selbst wenn in einem Lastkanal eine Entlastung stattfindet, steigt die Belastung im anderen Lastkanal. Dadurch findet in der gesamten Last-Zeit-Reihe keine elastische Entlastung statt. Es entstehen ellipsenförmige Hysteresen.

Sowohl die kreisförmigen Phasendiagramme als auch die generelle Form der Hysteresen können von den Kerbnäherungsverfahren nachgebildet werden. Auch hier zeigt sich, dass Spannungen deutlich besser approximiert werden als Dehnungen. Vom Pseudo-Spannungsansatz werden im Vergleich zur FE-Rechnung etwas zu hohe Dehnungen vorhergesagt, während der Pseudo-Dehnungsansatz die Dehnungsamplituden unterschätzt. Im Bezug auf die Spannungen und Dehnungen in Umfangsrichtung ergeben sich die gleichen Beobachtungen wie unter proportionaler Last.

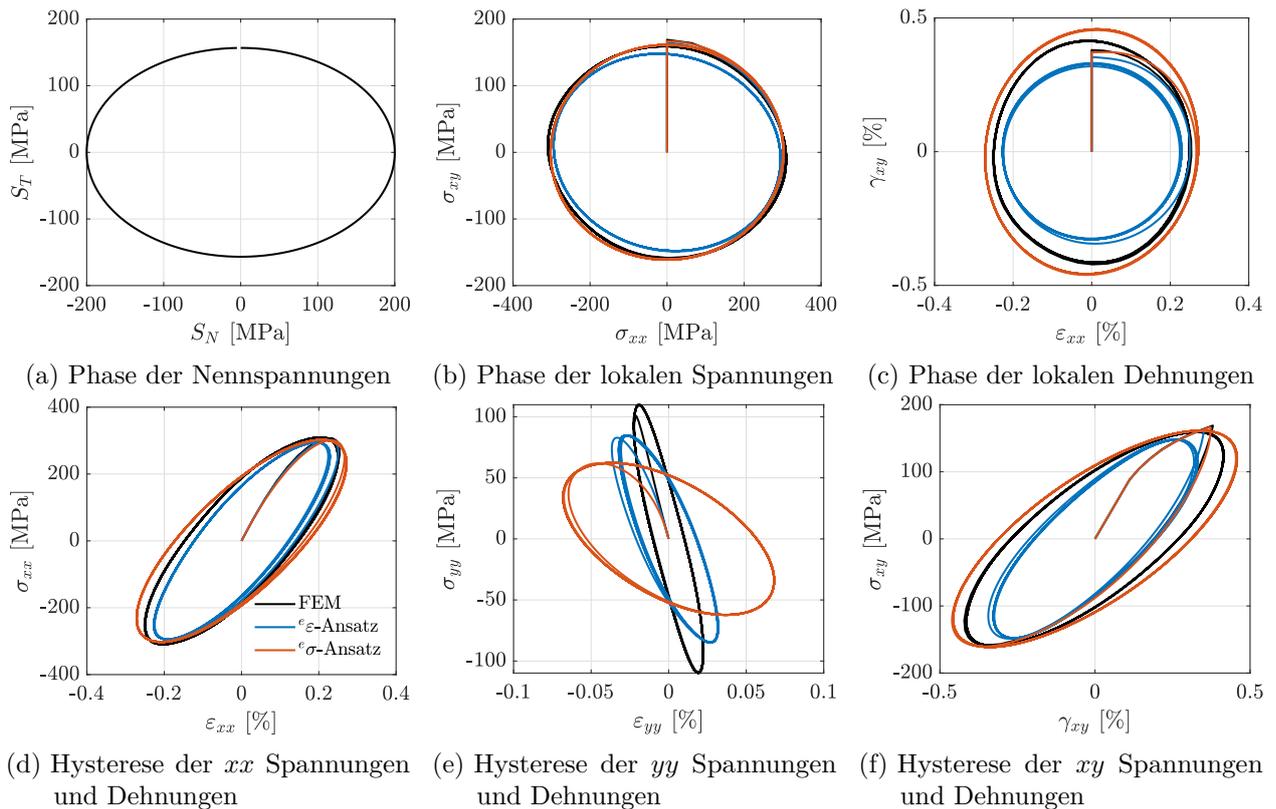


Abbildung 2.45: Vergleich zwischen FE-Rechnung und Kerbnäherungsverfahren für  $90^\circ$  phasenverschobene Belastung und dem Kerbradius  $\rho = 2$  mm.

Für die Strukturfließflächenansätze wurde ein hoher Aufwand betrieben Parameter zu bestimmen, die das transiente Werkstoffverhalten beschreiben. Beim Ohno/Wang Modell wäre das das zyklische Kriechen und Relaxieren. Diese transienten Vorgänge werden von Strukturfließflächenansätzen aufgrund des zweimaligen Aufrufens eines Plastizitätsmodells unterschiedlich gehandhabt.

Im Pseudo-Spannungsansatz werden zunächst fiktive, pseudo elastische Spannungen vorgegeben. Das Strukturmodell ist demnach verantwortlich für das zyklische Kriechen von Mitteldehnungen. Der berechnete Verlauf der (plastischen) Dehnungen wird dann verwendet, um den Verlauf der Spannungen zu ermitteln. Werden Mitteldehnungen deutlich überschätzt, kann dies dazu führen, dass Mittelspannungen sogar steigen.

Im Pseudo-Dehnungsansatz ist dieses Verhalten genau entgegengesetzt. Zunächst werden fiktive, pseudo elastische Dehnungen vorgegeben. Das bedeutet, die Mittelspannungsrelaxation wird vom Strukturmodell simuliert. Fallen hier die Mittelspannungen zu schnell, kann es sein, dass Mitteldehnungen ebenfalls kleiner werden, anstatt weiter anzusteigen.

Ein gängiges Beispiel zur Untersuchung des mehrachsigen Ratchetting Verhaltens eines Werkstoffs besteht darin, eine statische Belastungskomponente mit einer zyklischen Beanspruchung zu kombinieren. In Abbildung 2.46 sind die Ergebnisse einer solchen Last für den Fall einer statischen Zuglast und einer zyklischen Torsion dargestellt.

Sowohl der Verlauf der Schubspannungen als auch der Verlauf der Gleitungen kann von beiden Verfahren im Vergleich zu den FE-Rechnungen in guter Näherung beschrieben werden. Obwohl die Zugkraft konstant gehalten wurde, ist in den Normalspannungen ein Relaxationsverhalten und in den Normaldehnungen ein Kriechverhalten zu erkennen. Beide Ansätze, in Kombination mit dem Ohno/Wang Modell, zeigen das gleiche Verhalten.

Die bestimmten Strukturparameter wurden in Abschnitt 2.5.3 an das transiente Werkstoffverhalten unter proportionaler Belastung mit einem Lastverhältnis  $R = -0.5$  angepasst. Das vorliegende

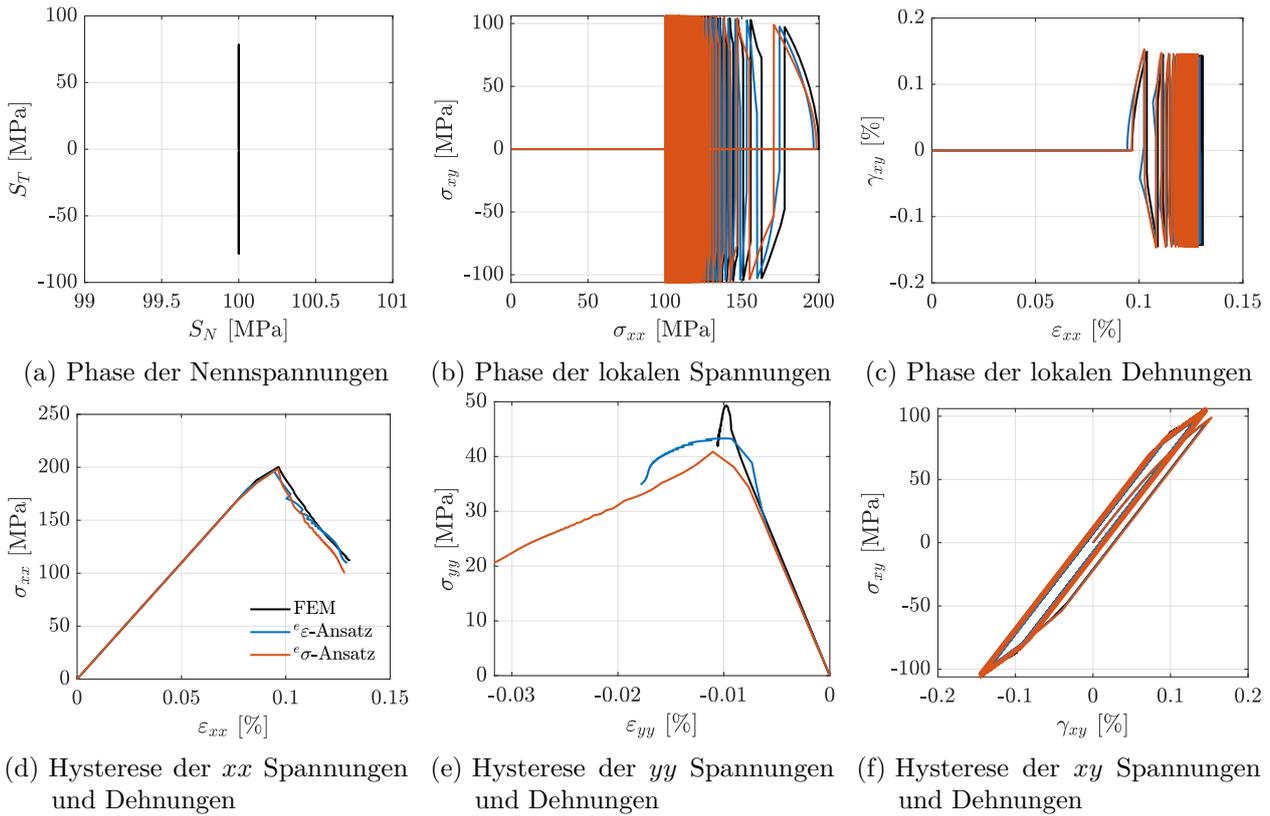


Abbildung 2.46: Vergleich zwischen FE-Rechnung und Kerbnäherungsverfahren für statischen Zug und eine zyklische Torsion und dem Kerbradius  $\rho = 2$  mm.

Beispiel verdeutlicht, dass die Parameter der Strukturmodelle, wie sie in Abschnitt 2.5.3 identifiziert wurden, dazu geeignet sind, das transiente Werkstoffverhalten unter verschiedenen Belastungsbedingungen vorherzusagen.

In [Kött 95a] wurde eine vergleichbare Beanspruchungssituation, nämlich eine zyklische Zug/Druckbelastung bei gleichzeitig wirkendem statischen Torsionsmoment, mithilfe des Mróz Modells nachgerechnet. Es zeigte sich in den FE-Rechnungen ebenfalls ein Relaxations- und Kriechverhalten in den Schubspannungen und Gleitungen. Vom Pseudo-Spannungsansatz konnte nur das Kriechen der Gleitungen vorhergesagt werden, während sich aus dem Pseudo-Dehnungsansatz hauptsächlich die Relaxation ergab. Diese Fehleinschätzung der Strukturfließflächenansätze tritt hier unter Verwendung des Ohno/Wang-Modells nicht mehr auf.

Anhand der nachgerechneten Last- und Kerbfälle sind die beiden Strukturfließflächenansätze für eine Lebensdauerrechnung die geeignetsten Methoden. Darunter weist der Pseudo-Spannungsansatz die etwas bessere Approximation der FE-Ergebnisse auf. Mit dem in Abschnitt 2.4.1.2 erstellten Algorithmus benötigt der Pseudo-Spannungsansatz ebenfalls die geringste Rechenzeit.

Es wurde gezeigt, welchen Einfluss die Wahl der Bauteilfließkurve innerhalb der Strukturfließflächenansätze auf die Ergebnisqualität hat. Grundsätzlich lassen sich mit allen hier untersuchten Methoden zur Bestimmung der BFK gute Näherungen an die FE-Ergebnisse erzielen. Falls die BFK aus einer einachsigen Näherungslösung bestimmt werden soll, zeigt das Verfahren von Seeger/Beste die größte Übereinstimmung mit Ergebnissen aus FE-Rechnungen. Hier entsteht für einen Anwender der Methode der zusätzliche Aufwand, die plastische Traglastformzahl  $K_p$  aus einer elastisch-plastischen FE-Rechnung bestimmen zu müssen.

Sollte vor der Rechnung absehbar sein, dass die auftretenden Belastungen zu keinen plastischen Deformationen im Nennquerschnitt führen, kann die BFK aus der Neuber-Methode bestimmt werden. Dies ist für einen Anwender mit dem geringsten Aufwand verbunden, da hier keine zusätzliche

elastisch-plastische FE-Rechnung durchgeführt werden muss. Die besten Ergebnisse werden erzielt, wenn die Bauteilfließkurve aus einer monotonen FE-Rechnung ermittelt werden.

Weiterhin ist für die Anwendung wichtig, wie eine BFK für einen nichtproportionalen Lastfall zu bestimmen ist. In einem solchen Fall existiert bislang keine eindeutige Definition. Sollte die Bauteilfließkurve mit der Neuber-Methode bestimmt werden, ist diese Definition auch nicht nötig, da sich durch die Neuber-Methode kein Unterschied durch die Belastungsart ergibt. Für alle anderen Methoden kann auch eine BFK aus einem anderen Lastfall verwendet werden. So wurde hier stets eine BFK aus dem Lastfall Zug verwendet. Auch unter nichtproportionaler Beanspruchung konnten damit gute Ergebnisse erzielt werden.

### 2.5.5. Vergleich der Kerbnäherungsverfahren mit Kerbdehnungsmessungen

In Hoffmeyer [Hoff05] wurden verschiedene Kerbdehnungsmessungen durchgeführt. Die dort verwendete Kerbprobe weist eine ähnliche Geometrie zu den hier verwendeten Kerbproben, siehe Abbildung 2.33, auf. Sie besitzt allerdings einen Kerbradius von 1.4 mm und besteht aus dem Baustahl S460N. Um die Genauigkeit der Kerbdehnungssimulation weiter zu untersuchen, wurden die in [Hoff05] durchgeführten Versuche nachgerechnet. In diesem Abschnitt erfolgt die Validierung der Kerbnäherungsmethoden nicht anhand von Ergebnissen aus FE-Berechnungen, sondern durch den Vergleich mit den gemessenen Kerbdehnungen.

Verglichen werden erneut der Pseudo-Spannungsansatz, der Pseudo-Dehnungsansatz und die Unified Expression. Für die Strukturfließflächenansätze wurde eine, mit der Seeger/Beste-Methode abgeschätzte, Bauteilfließkurve verwendet.

Abbildung 2.47 zeigt einen Vergleich zwischen Kerbdehnungsmessungen und Ergebnissen der Kerbdehnungssimulation bei unterschiedlichen proportionalen und einer nichtproportionalen Belastungen. Alle Versuche wurden mit zyklischen Lasten unter konstanten Amplituden ohne Mittellast durchgeführt. Dargestellt sind Messergebnisse auf verschiedenen Lasthorizonten. Auf der Ordinate sind Nennspannungen aufgetragen. Diese berechnen sich aus der angreifenden Zugkraft und dem Torsionsmoment nach Gleichung (2.120). Sollten mehrere Lastkanäle am Bauteil angreifen, ist das Verhältnis der Nennspannungen  $S_N/S_T = 0.873$ . Die dargestellten Berechnungen wurden mit dem Ohno/Wang Modell durchgeführt. Alle Parameter zum Beschreiben der zyklisch stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Kurve wurden an die in [Hoff05] gegebenen Ramberg-Osgood Parameter angepasst.

In Abbildung 2.47 stellen schwarze Punkte gemessene Dehnungsamplituden auf verschiedenen Lasthorizonten dar. Jeder Punkt steht also für einen einzelnen Versuch.

Unter reiner Zug/Druck Beanspruchung (Abbildung 2.47 a) können alle Kerbnäherungsverfahren die gemessenen Amplituden in guter Näherung beschreiben. Erst auf dem höchsten Lasthorizont ergeben sich nennenswerte Unterschiede zwischen gemessenen und simulierten Dehnungsamplituden. Die Unified Expression neigt erneut dazu, die Dehnungsamplituden zu unterschätzen, während die Strukturfließflächenansätze die Amplitude leicht überschätzen.

Bei reiner Torsion und unter proportionaler Last (Abbildung 2.47 b und c) zeigt sich ein ähnliches Bild wie unter Zug/Druck. Hier werden jedoch noch etwas höhere Dehnungsamplituden gemessen. Dadurch zeigt sich deutlicher, dass auf hohen Lastniveaus mit den inkrementellen Verfahren unsichere Ergebnisse erzielt werden.

Unter einer  $90^\circ$  phasenverschobenen Belastung (Abbildung 2.47 d) werden zunächst mit dem Ohno/Wang Modell zu hohe Kerbdehnungen berechnet. Dies liegt auch daran, dass die nichtproportionale Verfestigung (NPV) vom Plastizitätsmodell nicht abgebildet werden kann. Um die NPV auf ihrem stabilisierten Niveau zu berücksichtigen, wurden für den nichtproportionalen Lastfall die Parameter des Ohno/Wang Modells an die mit Gleichung (2.37) korrigierten Ramberg-Osgood Parameter angepasst. Dadurch passen die berechneten Kerbdehnungen besser zu den gemessenen Werten.

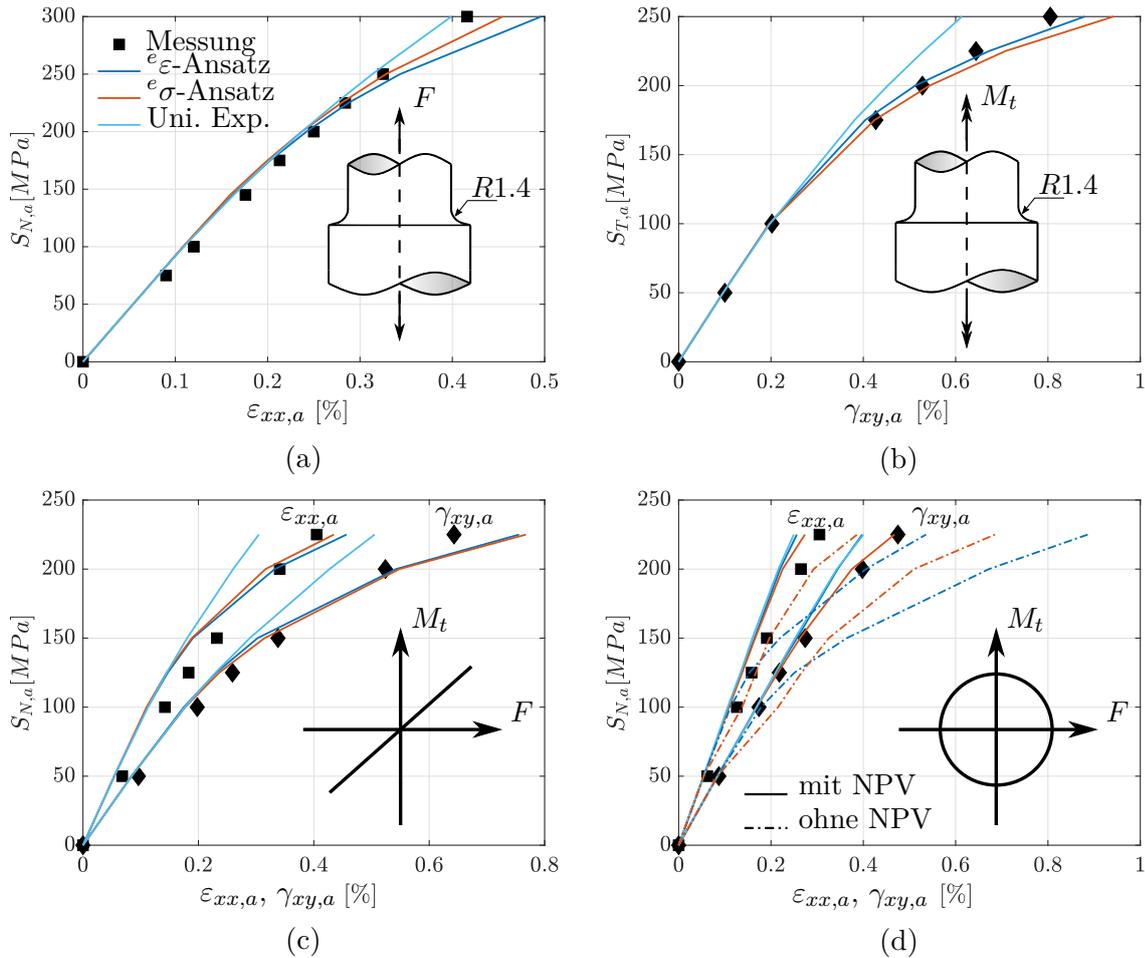


Abbildung 2.47: Vergleich der gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für (a) Zug-Druck Last (b) Torsion (c) proportionale Belastung (d) 90° phasenverschobene Belastung auf mehreren Lasthorizonten. Berechnungen mit dem Ohno/Wang Modell

Abbildung 2.48 zeigt die gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für eine 90°-phasenverschobene Belastung mit Mittellast ( $R = 0$ ). Die Versuche wurden mit der gleichen Kerbgeometrie und dem gleichen Material wie in Abbildung 2.47 durchgeführt. Abbildung 2.48a zeigt den Phasenverlauf der gemessenen Kerbdehnungen. In Abbildung 2.48b sind die Mitteldehnungen über die Belastungszyklen aufgetragen.

Unter Beanspruchungen mit  $R = 0$  stellt sich ein Kriechen der Mitteldehnungen ein. Die Ratchetting Parameter  $\chi^k$  des Ohno/Wang Modells wurden nach der Angabe von Döring [Döri 06] auf  $\chi^k = 30$  für den Stahl S460N gesetzt.

Die Parameter  ${}^e\chi^k$  zur Modellierung von zyklischem Kriechen und Relaxieren im Strukturmodell der Strukturfließflächenansätze wurden nicht an die Versuche angepasst, sondern abgeschätzt. Sie wurden aus den in Abbildung 2.38 dargestellten Parametern für die Kerbprobe mit  $\rho = 2$  mm für das höchste Lastniveau gewählt. Zusätzlich wurden sie um den Faktor 30/5 (Verhältnis der Ratchetting Parameter der Werkstoffe) skaliert. Für das Strukturmodell des Pseudo-Spannungsansatzes werden die Werte  ${}^e\chi^k = 48$  gewählt. Die Ratchetting Parameter des Strukturmodells des Pseudo-Dehnungsansatzes werden auf  ${}^e\chi^k = 198$  gesetzt.

Anhand der in Abbildung 2.49 dargestellten Geschwindigkeit des Ratchettings ist zu erkennen, dass diese grobe Abschätzung schon zu einer realitätsnahen Beschreibung der Versuchsergebnisse führt. Die Ratchettinggeschwindigkeit wird von der Unified Expression deutlich unterschätzt. Es

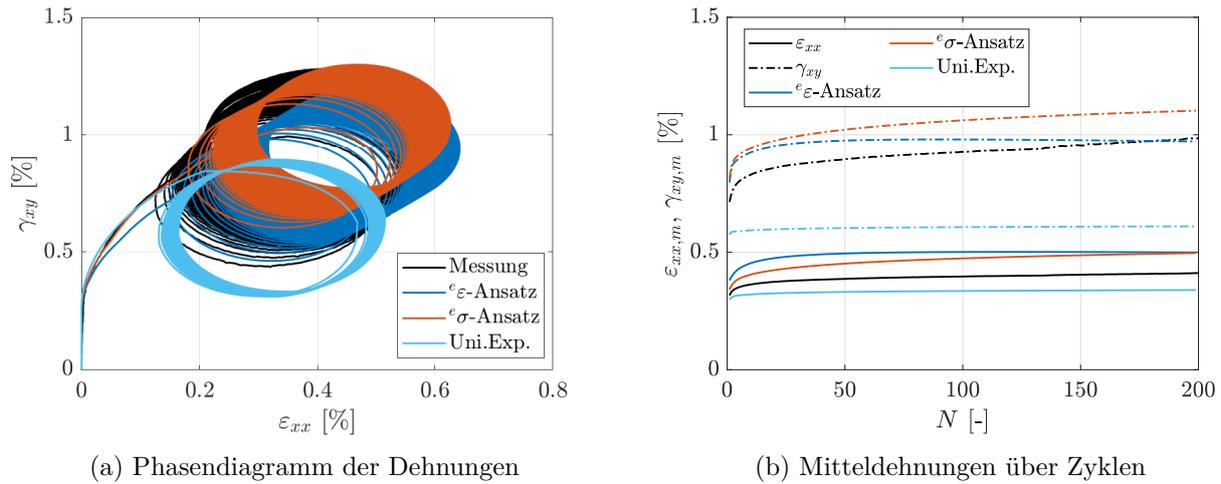


Abbildung 2.48: Vergleich der gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für eine  $90^\circ$  phasenverschobene Belastung mit einem Lastverhältnis von  $R = 0$  für beide Lastkanäle. Die Berechnungen wurden mit dem Ohno/Wang Modell durchgeführt.

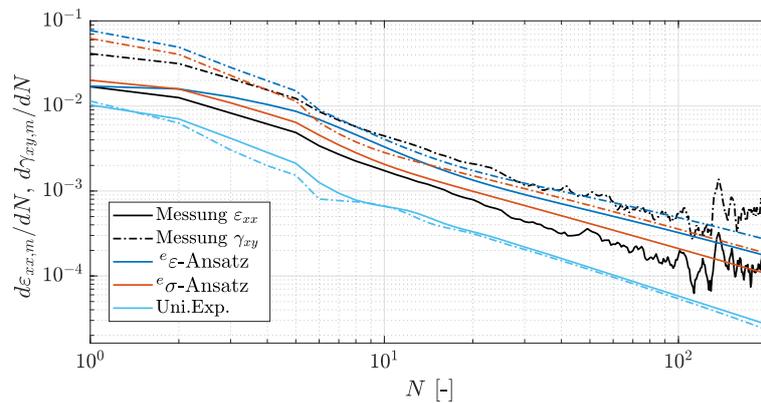


Abbildung 2.49: Ratchettingraten für  $90^\circ$  phasenverschobene Belastung mit Lastverhältnis  $R = 0$

ergibt sich außerdem kein Unterschied zwischen der Geschwindigkeit von Normaldehnungen und Gleitungen.

Die Unified Expression unterschätzt ebenfalls die tatsächlichen Mitteldehnungen deutlich, siehe Abbildung 2.48b. Dies gilt vor allem für die Gleitungen  $\gamma_{xy,m}$ . Die mittleren Normaldehnungen  $\varepsilon_{xx,m}$  werden von beiden Strukturfließflächenansätzen sehr ähnlich eingeschätzt. Beide Ansätze überschätzten die Mitteldehnungen. Dies resultiert vor allem aus einer Überschätzung der Relaxationsgeschwindigkeit in den ersten Lastzyklen. In den Gleitungen  $\gamma_{xy,m}$  wird ein Unterschied der Ansätze deutlich. Sowohl der Verlauf als auch die Absolutwerte der mittleren Gleitungen werden vom Pseudo-Dehnungsansatz sehr gut wiedergegeben. Der Pseudo-Spannungsansatz überschätzt die Absolutwerte der mittleren Gleitung.

Hervorzuheben ist, dass alle Ansätze bei Verwendung des Ohno/Wang Modells einen nahezu stabilen Endzustand erreichen. Dieses Verhalten zeigt sich auch in den Messwerten.

Um zu verdeutlichen, welchen Einfluss die Wahl des Plastizitätsmodells auf die Qualität der Ergebnisse hat, wurde der Lastfall  $90^\circ$  Phasenverschiebung mit Lastverhältnis  $R = 0$  ebenfalls mit dem Chaboche Modell nachgerechnet. Das Chaboche Modell weist keine Parameter zur Steuerung des zyklischen Kriech- oder Relaxationsverhaltens auf und ist dafür bekannt, Ratchetting erheblich zu überschätzen. Sowohl das Phasendiagramm der Dehnungen als auch der Verlauf der Mitteldehnungen

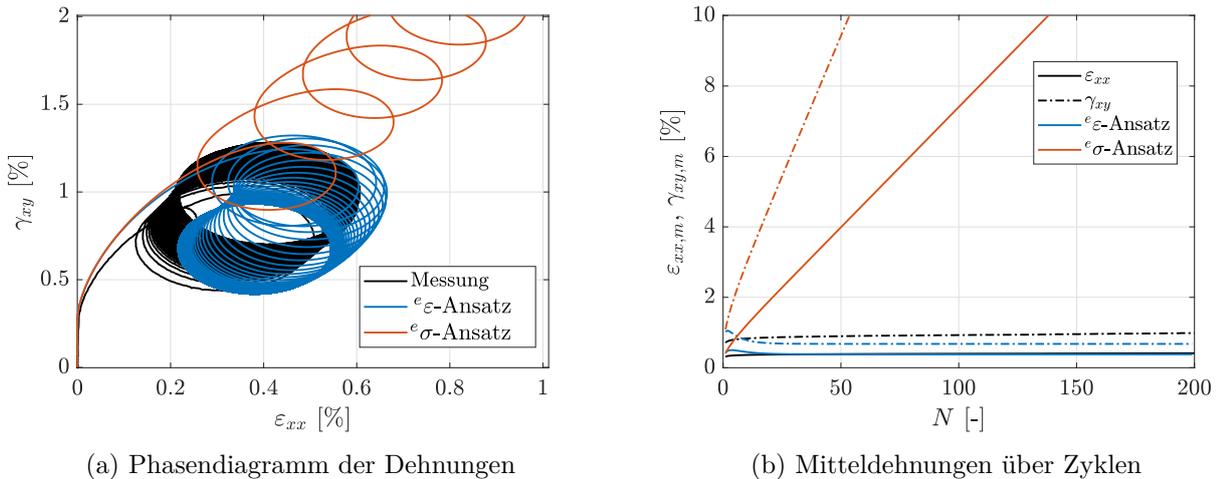


Abbildung 2.50: Vergleich der gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für eine  $90^\circ$  phasenverschobene Belastung mit einem Lastverhältnis von  $R = 0$  für beide Lastkanäle. Die Berechnungen wurden mit dem Chaboche Modell durchgeführt.

über die Belastungszyklen sind in Abbildung 2.50 dargestellt. Die Unified Expression wurde in Verbindung mit dem Chaboche Modell nicht implementiert.

Bei Verwendung des Chaboche Modells zeigen die beiden Strukturfließflächenansätze ein sehr unterschiedliches Verhalten.

Im Pseudo-Spannungsansatz wird das Ratchettingverhalten vom Strukturmodell modelliert. Die Mitteldehnungen werden hier sehr stark überschätzt. Dieses Verhalten ist im Phasendiagramm nur für die ersten Zyklen zusammen mit den Messergebnissen darstellbar. In Abbildung 2.50b ist zu erkennen, dass die Mittelwerte unrealistische Werte im Bereich von weit über 10 % annehmen. Vom Pseudo-Spannungsansatz wird dann unter Vorgabe der plastischen Dehnungen vom Werkstoffmodell quasi keine Mittelspannungsrelaxation berechnet. Die Mittelspannungen steigen sogar leicht.

Im Pseudo-Dehnungsansatz wird zunächst im Strukturmodell eine Relaxation der Mittelspannung modelliert. Diese findet sehr schnell statt. Bereits nach etwa 10 Zyklen ist keine nennenswerte Mittelspannung mehr vorhanden. Dieser Spannungsverlauf führt dann bei der Integration des Werkstoffmodells dazu, dass die Mitteldehnungen ebenfalls fallen. Ein solches Verhalten ist in Versuchen nicht zu beobachten. Dadurch werden allerdings die tatsächlich gemessenen Mitteldehnungen weit besser vorhergesagt als beim Pseudo-Spannungsansatz.

Wie stark eine solche Fehleinschätzung der lokalen Beanspruchung bei einer rechnerischen Lebensdauerprognose ins Gewicht fällt, hängt vom verwendeten Schädigungsmodell ab. Sollte das Schädigungsmodell z. B. Mitteldehnungen bewerten, ist bei Lastpfaden mit Mittellast das Chaboche Modell in Verbindung mit dem Pseudo-Spannungsansatz unbrauchbar.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei der Anwendung des Ohno/Wang-Modells die Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Kerbdehnungen sehr gering sind. Ein Vergleich mit den Messergebnissen bestätigt auch, wie bereits beim Vergleich mit den FE-Ergebnissen festgestellt wurde, die Überlegenheit der Strukturfließflächenansätze, insbesondere auf hohen Belastungsniveaus. Dabei sind die Ergebnisse zwischen Pseudo-Spannungsansatz und Pseudo-Dehnungsansatz sehr ähnlich. Welcher Ansatz in einem spezifischen Lastfall die besseren Ergebnisse liefert, lässt sich nicht a priori sagen. Aufgrund der schnelleren Rechengeschwindigkeit wird weiterhin der Pseudo-Spannungsansatz bevorzugt.

### 3. Schädigungsmodelle für mehrachsige Beanspruchungen

Das Ziel dieser Arbeit ist, einen Algorithmus zur Berechnung der Ermüdungslebensdauer unter beliebiger mechanischer Beanspruchung zu finden. Dazu wird das „Örtliche Konzept“ verwendet. Innerhalb des „Örtlichen Konzepts“ wird die Schädigung eines Werkstoffs auf Grundlagen der örtlichen Spannungen und Dehnungen bewertet. Diese örtlichen Beanspruchungen können entweder aus Messungen vorliegen, wie zum Beispiel häufig bei Versuchsergebnissen von Werkstoffproben der Fall, oder sie können simuliert werden. Zur Simulation von lokalen Beanspruchungszuständen in Kerben können die in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren verwendet werden. Sobald die Beanspruchungen ermittelt wurden, besteht die Schädigungsrechnung innerhalb des „Örtlichen Konzepts“ aus den Schritten:

1. Identifizieren von Schädigungsereignissen
2. Bewerten der Schädigung (Anwendung eines Schädigungsmodells)
3. Schadensakkumulation

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des „Örtlichen Konzepts“ kurz erläutert. Es besteht dann die Aufgabe, geeignete Schädigungsmodelle auszuwählen.

In der Literatur existiert eine sehr große Anzahl an möglichen Schädigungsmodellen [Vorm 23]. Dabei ist darauf zu achten, wo die Anwendungsgrenzen des jeweiligen Modells liegen. Viele Modelle sind nur für eine bestimmte Lastsituation, einen bestimmten Lebensdauerbereich oder einen bestimmten Werkstoff formuliert. Dabei stellen vor allem nichtproportionale Betriebsbelastungen die Schädigungsmodelle vor große Herausforderungen.

Es wird im Folgenden eine begründete Auswahl getroffen, welche Modelle für die Ziele dieser Arbeit geeignet sind. Weiter verfolgt wurden die Modelle nach dem Verfahren der kritischen Schnittebene. Im Speziellen wurden die Modelle

- nach Smith/Watson/Topper [Smit 70],
- nach Fatemi/Socie [Fate 88b] und
- ein Schädigungsmodell auf Basis der Kurzrissbruchmechanik nach Hertel [Hert 16]

untersucht. Der Aufbau sowie die grundlegenden Annahmen der Modelle werden besprochen. Gegebenenfalls werden die Modelle angepasst, um eine Berechnung der Ermüdungslebensdauer für nichtproportionale Betriebsbelastungen zu ermöglichen. In praktischen Anwendungsfällen besteht oft die Herausforderung, dass nicht ausreichend Versuchsdaten für die Parametrisierung der Schädigungsmodelle zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund werden entweder Methoden vorgestellt, um sämtliche Modellparameter anhand bekannter Werkstoffkennwerte abzuschätzen oder es werden standardisierte Werte als Empfehlung gegeben.

## 3.1. Grundlagen der Schädigungsbewertung mit dem „Örtlichen Konzept“

### 3.1.1. Dehnungswöhlerlinie

Die Grundlage der Schädigungsbewertung auf Basis des „Örtlichen Konzepts“ ist eine Werkstoffwöhlerlinie. Sie ordnet einer örtlichen Beanspruchung eine Versagensschwingspielzahl zu. Im „Örtlichen Konzept“ ist das Versagen eines Werkstoffs meist bei einem technischen Anriss, nicht beim vollständigen Bruch der Probe, definiert.

Die örtliche Beanspruchung, die zur Schädigungsbewertung verwendet wird, ist zunächst frei wählbar. Es können lokale Spannungen, Dehnungen, Vergleichsgrößen oder die später eingeführten Schädigungsparameter (Abschnitt 3.1.5) verwendet werden. Zur Beschreibung des einachsigen Schädigungsverhaltens kann im einfachsten Fall die örtliche Dehnungsamplitude verwendet werden. Der bekannteste Ansatz, welcher den Zusammenhang zwischen der lokalen Dehnungsamplitude und der Ermüdungslebensdauer eines Werkstoffs beschreibt, ist durch das Potenzgesetz von Basquin [Basq 10], Manson [Mans 53], Coffin [Coff 54, Coff 62] und Morrow [Morr 65] formuliert:

$$\varepsilon_{a,ges} = \varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c. \quad (3.1)$$

Die gesamte Dehnungsamplitude wird additiv in einen elastischen und einen plastischen Teil aufgeteilt. Für jeden Anteil wird ein Potenzgesetz formuliert. Bei einer doppelt-logarithmischen Auftragung entsprechen die Ansätze der elastischen und plastischen Wöhlerlinien einer Geraden, siehe Abbildung 3.1. Die Materialkennwerte  $b$  und  $c$  sind die Neigungen dieser Geraden. Die Koeffizienten  $\varepsilon'_f$  und  $\sigma'_f/E$  sind die Stützpunkte bei jeweils  $N = 1/2$ . Dabei ist  $E$  der Elastizitätsmodul.

Zusammen mit der zyklischen Fließkurve aus Abschnitt 2.2.1 werden 6 Werkstoffparameter (plus der  $E$  Modul für elastisches Werkstoffverhalten) benötigt, um das einachsige Werkstoffverhalten zu beschreiben.

Tatsächlich ergeben sich allerdings nur 4 unabhängige Werkstoffparameter. Zwischen den Parametern  $K'$  und  $n'$  aus Gleichung (2.8) und den Parametern  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $\sigma'_f$  aus Gleichung (3.1) müssen die

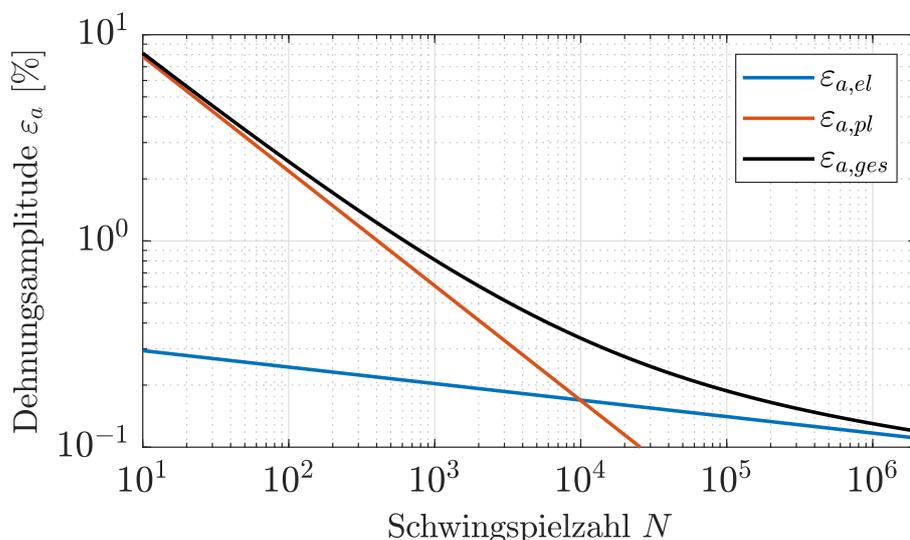


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Dehnungswöhlerlinie

Kompatibilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} b &= cn', \\ \sigma'_f &= K' (\varepsilon_{pl})^{n'} \end{aligned} \quad (3.2)$$

erfüllt sein. Diese werden allerdings häufig vernachlässigt, um eine bessere Beschreibung von Versuchsergebnissen zu erlauben. Sollten keine Messergebnisse vorliegen, um die Parameter der Dehnungswöhlerlinie zu bestimmen, können sie aus statischen Kennwerten abgeschätzt werden. Abschätzmethoden sind in [Wäch16], im „Uniform Material Law“ [Bäum90] oder in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied19] zu finden.

### 3.1.2. Mittelspannungseinfluss

Mittelspannungen unter schwingender axialer Beanspruchung haben einen großen Einfluss auf die Ermüdungslebensdauer von Werkstoffen. Im Vergleich zu Versuchen ohne Mittelspannungen verkürzen Zugmittelspannungen die Lebensdauern, während Druckmittelspannungen diese verlängern.

Dieser Effekt kann in einem Haigh-Diagramm [Haig15] veranschaulicht werden. Eine schematische Darstellung des Haigh-Diagramms für axiale und torsionale Beanspruchung ist in 3.2 gegeben. Auf der Abszisse werden die Mittelspannungen aufgetragen, auf der Ordinate werden die Amplituden aufgetragen. Unterschiedliche Lastverhältnisse  $R$  lassen sich durch Geraden ausgehend vom Ursprung visualisieren. Es werden nun für die verschiedenen Lastverhältnisse Linien gleicher Lebensdauer verbunden. Die Kurven sind durch die statische Zugfestigkeit  $R_m$  begrenzt.

Von Schütz [Schü67] wird die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  eingeführt:

$$M_\sigma = \frac{\sigma_{a,R=0} - \sigma_{a,R=-1}}{\sigma_{m,R=0} - \sigma_{m,R=-1}} = \frac{\sigma_{a,R=-1}}{\sigma_{a,R=0}} - 1. \quad (3.3)$$

Sie kann als Steigung im Haigh-Diagramm zwischen den Lastverhältnissen  $R = 0$  und  $R = -1$  verstanden werden. Nach der FKM Richtlinie [Renn12] verläuft die Mittelspannungsempfindlichkeit wie in Abbildung 3.2 dargestellt. Für negative Spannungsverhältnisse wird der Ansatz von Schütz verwendet. Zwischen den Spannungsverhältnissen  $R = 0$  und  $R = 0.5$  wird die Mittelspannungsempfindlichkeit auf  $M_\sigma/3$  reduziert. Bei Spannungsverhältnissen  $R > 0.5$  wird eine Mittelspannungsempfindlichkeit von  $M_\sigma = 0$  angenommen.

Unter Schubbeanspruchung ist das Vorzeichen der Mittelspannungen irrelevant für die Schädigungswirkung. Es ergibt sich ein symmetrisches Haigh-Diagramm, siehe Abbildung 3.2. Die Mittelspannungsempfindlichkeit für reine Schubbeanspruchungen  $M_\tau$  ist im Allgemeinen wesentlich kleiner als für Normalbeanspruchungen.

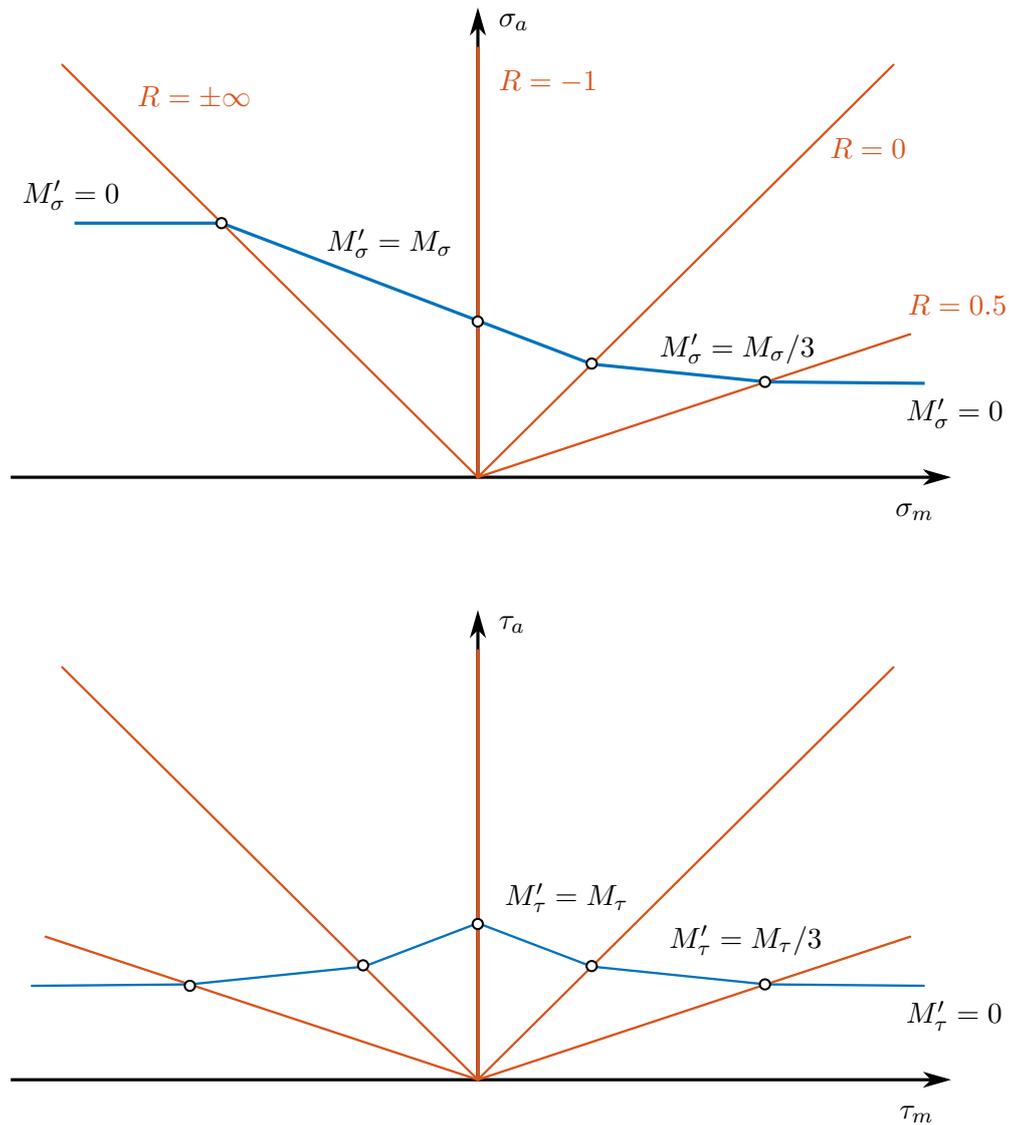


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung des Haigh-Diagramms nach FKM-Richtlinie linear [Renn 12]

### 3.1.3. Zyklenzählung

Tritt in einer schwingenden Beanspruchung während des gesamten Beanspruchungsverlaufs nur eine konstante Amplitude auf, so wird von einer Einstufenbelastung gesprochen. Wenn die Beanspruchung allerdings variable Amplituden enthält, wird diese als Betriebsbelastung bezeichnet. Hierbei ist zunächst unklar, welche Ereignisse einen Betrag zur Schädigung leisten. Somit müssen Schädigungsereignisse zunächst identifiziert werden. Für die identifizierten Schädigungsereignisse müssen dann Amplituden und Mittelwerte bestimmt werden.

Unter einachsiger Belastung hat sich das sogenannte „Rainflow Verfahren“ oder auch „Rainflow-Zählung“ durchgesetzt. Dieses Verfahren basiert auf der Arbeit von Matsuishi und Endo [Mats 68]. Es existieren mehrere, leicht unterschiedliche Umsetzungen des „Rainflow Verfahrens“. Eine Übersicht über die verschiedenen Verfahren und die historische Entwicklung des Rainflow Zählverfahrens ist in [Köhl 10, Köhl 12] zu finden. In dieser Arbeit wird die **H**ysteresis **C**ounting **M**ethod (kurz HCM) nach Clormann und Seeger [Clor 86] angewendet. Der Algorithmus ist in der Lage, unter Berücksichtigung des Masing-Verhaltens und der Memory Regeln aus Abschnitt 2.2.1 geschlossene

Hystereseschleifen des lokalen Spannungs-Dehnungs-Pfades zu identifizieren. Als Schädigungsereignis werden also geschlossene Spannungs-Dehnungs-Hysteresen identifiziert.

Bei einer mehrachsigen proportionalen Beanspruchung kann das „Rainflow Verfahren“ mit Vergleichsgrößen weiter angewendet werden.

Im allgemeinen Fall der mehrachsigen nichtproportionalen Beanspruchung kommen andere oder erweiterte Zählverfahren zum Einsatz. Verfahren zur mehrachsigen Zyklenzählung wurden von Bannantine und Socie [Bann 91], Dressler et al. [Dres 92, Dres 95] oder Wang und Brown [Wang 96a, Wang 96b] vorgestellt.

Besonders häufig wird in der Literatur das Verfahren von Wang und Brown [Wang 96a, Wang 96b] angewandt. Dieses Verfahren wurde später von Meggiolaro [Megg 12a, Megg 12b, Megg 15] modifiziert. Beide Verfahren beruhen auf der Zählung von relativen Vergleichsgrößen (zum Beispiel Vergleichsdehnungen). Alle Beanspruchungen werden dabei auf einen Referenzzeitpunkt in der Belastungshistorie bezogen. Das Vorzeichen der Beanspruchung geht dabei verloren. Aus diesem Grund werden Halbzyklen gezählt. Ein Halbzyklus beinhaltet alle Werte, welche die relative Vergleichsdehnung bis zum Maximalwert ansteigen lassen. Sobald ein Halbzyklus identifiziert wurde, werden neue relative Vergleichsgrößen, bezogen auf einen neuen Referenzpunkt, gebildet.

Von Langlais et al. [Lang 03] wird ein weiteres Verfahren eingeführt. Zunächst wird eine primäre Schädigungsvariable (zum Beispiel eine bestimmte Dehnungskomponente) festgelegt. Zyklen werden dann anhand einer Rainflow-Zählung der definierten primären Schädigungsvariable bestimmt. Alle weiteren zur Schädigungsbewertung nötigen Größen werden als Hilfsvariablen gespeichert und den jeweiligen Zyklen zugeordnet.

In dieser Arbeit werden Schwingspiele mit dem HCM Algorithmus nach Clormann und Seeger [Clor 86] gezählt. Weitere zur Schädigungsbewertung nötige Variablen werden nach dem Vorschlag von Langlais [Lang 03] als Hilfsgrößen mitgeführt. Der Vorteil der klassischen Rainflow-Zählung gegenüber den mehrachsigen Zählverfahren ist die leichtere Umsetzung in Programmcode und die schnellere Rechenzeit. Dies trifft auch auf das Verfahren von Langlais [Lang 03] zu. Ein Vergleich zwischen dem HCM Algorithmus und einer mehrachsigen Zyklenzählung wird später im Zusammenhang mit dem Fatemi/Socie Schädigungsparameter in Abschnitt 3.2.5 gezeigt.

### 3.1.4. Schadensakkumulation und Reihenfolgeeffekte

Zur Bewertung der Schädigung bei einer Beanspruchung unter einer Betriebslastfolge, das heißt mit variablen Amplituden und Mittelspannungen, wird eine Schadenakkumulationsregel benötigt. Am häufigsten wird eine lineare Schadensakkumulation nach Palmgren und Miner [Mine 45, Palm 24], kurz Miner-Regel, verwendet. Einem Schwingspiel mit Amplitude  $\sigma_{a,i}$  und  $\varepsilon_{a,i}$  wird anhand der Wöhlerlinie unter einstufiger Beanspruchung eine Lebensdauer  $N_i$  zugeordnet. Diesem Schwingspiel wird die Schädigung

$$D_i = \frac{1}{N_i} \quad (3.4)$$

zugewiesen. Die Gesamtschädigung ergibt sich dann durch die Summe der Schädigungen aller einzelnen Schwingspiele:

$$D = \sum_{i=1}^N D_i. \quad (3.5)$$

Die Ermüdungslebensdauer  $N$  entspricht der Anzahl aufgebrauchter Schwingspiele beim Erreichen der Gesamtschädigung  $D = 1$ . Der Vorteil der linearen Schadensakkumulation ist ihre einfache Anwendbarkeit.

Nach der originalen Miner-Regel verursachen Schwingspiele unterhalb einer dauerhaft ertragbaren Beanspruchungsamplitude (z. B.  $\sigma_{a,D0}$ ) keine Schädigung. Dies entspricht nicht immer der

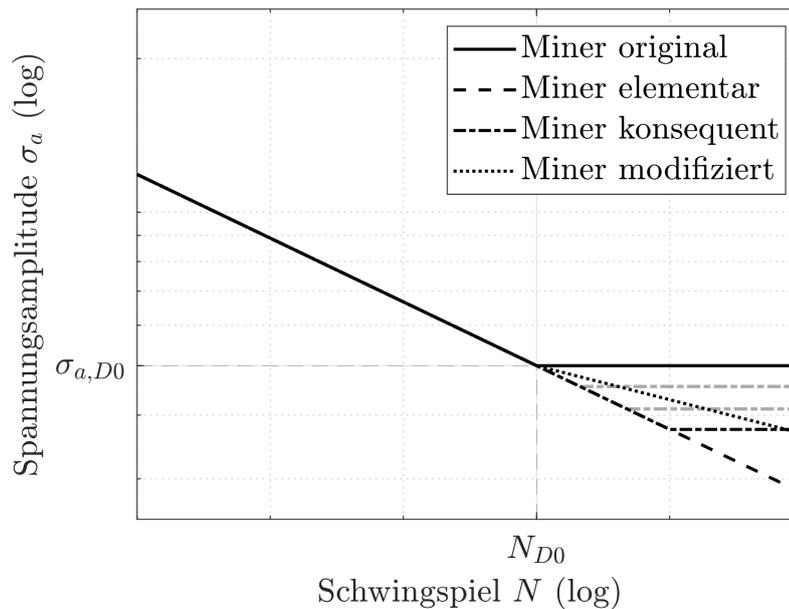


Abbildung 3.3: Modifikationen der Miner-Regel unterhalb der Dauerfestigkeit

Realität. Vorgeschiedigte Bauteile/Proben weisen eine erniedrigte Dauerfestigkeit auf. Beanspruchungsamplituden, welche niedriger als die anfängliche Dauerfestigkeit, jedoch höher als die aktuelle Dauerfestigkeit sind, können zur Schädigung beitragen. Während der Beanspruchung kommt es zu einer Absenkung der Dauerfestigkeit. Es wurden Modifikationen der Miner-Regel eingeführt, um diesen Reihenfolgeeffekt zu berücksichtigen, siehe Abbildung 3.3.

Die konsequente Erweiterung der Miner-Regel berücksichtigt ein kontinuierliches Absinken der Dauerfestigkeit mit steigender Schädigung. Bei der elementaren Verlängerung der Miner-Regel wird die ursprüngliche Dauerfestigkeit ignoriert. Die Wöhlerlinie wird mit gleicher Steigung unterhalb der Dauerfestigkeit verlängert. Sie liefert die konservativsten Lebensdauern, da hier auch Schwingspiele unterhalb der Dauerfestigkeit von Anfang an einen Schädigungsbeitrag leisten. Eine modifizierte Version der Verlängerung der Wöhlerlinie wurde von Haibach [Haib 13] vorgeschlagen. Die Wöhlerlinie mit Neigung  $k$  wird mit der modifizierten Neigung  $k' = 2k - 1$  unter der Dauerfestigkeit verlängert. Das Rissfortschrittskonzept führt zu einer Form der Miner-Regel, die der konsequenten Form ähnelt. Durch steigende Risslängen (steigende Schädigung) wird ein kontinuierliches absinken einer Dauerfestigkeit vorhergesagt.

Unter Betriebsbelastungen wirken noch weitere Reihenfolgeeffekte. Ein Beispiel ist das Riss schließen, das in Modellen für Rissfortschritt berücksichtigt werden kann. Ein weiterer Reihenfolgeeffekt kann auf das zyklische Verhalten des Werkstoffs zurückgeführt werden. Insbesondere das Relaxieren von Mittelspannungen spielt hier eine bedeutende Rolle. Solch transientes Verhalten ist vom Werkstoffmodell zu berücksichtigen. Ebenso sind Spannungsumlagerungen in gekerbten Bauteilen möglich. Diese sind allerdings innerhalb des „Örtlichen Konzepts“ nur schwer zu berücksichtigen.

### 3.1.5. Schädigungsparameter

Schädigungsparameter sind mehr oder weniger komplexe Beanspruchungsgrößen. Sie werden mit unterschiedlichen Zielsetzungen formuliert. Eine Schwingbeanspruchung wird auf eine skalare Vergleichsbeanspruchung, den Schädigungsparameter, abgebildet. Diese Abbildung weist Parallelen zur Vergleichsspannung auf. Durch den Schädigungsparameter können werkstoffspezifische Schädigungsmechanismen berücksichtigt werden. Zum Beispiel kann der Einfluss von Mittelspannungen

erfasst werden. In der Literatur existiert eine Vielzahl verschiedener Formulierungen von Schädigungsparametern. Der wohl bekannteste Vertreter ist der Schädigungsparameter  $P_{SWT}$  nach Smith, Watson und Topper [Smit 70]. Eine Erweiterung des Schädigungsparameters  $P_{SWT}$ , welche in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] verwendet wird, ist in Form von  $P_{RAM}$  durch

$$P_{RAM} = \sqrt{E\varepsilon_a \cdot (\sigma_a + k\sigma_m)} \quad (3.6)$$

angegeben. In der originalen Formulierung [Smit 70] bleibt der Werkstoffparameter  $k$  unberücksichtigt. Es ist dann  $k = 1$  zu setzen. Die Schädigung wird durch das Produkt aus Oberspannung und Dehnungsamplitude bewertet. Gleichung (3.6) stellt die Erweiterung des Parameters  $P_{SWT}$  nach Bergmann [Berg 83] dar. Der Einfluss von Mittelspannungen wird über den Werkstoffparameter  $k$  innerhalb des Terms  $\sigma_a + k\sigma_m$  berücksichtigt. In der FKM-Richtlinie Nichtlinear wird der Parameter  $k$  aus der Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$ , siehe Abschnitt 3.1.2, bestimmt.

Um eine Schädigung mit einem Schädigungsparameter zu berechnen, ist der Zusammenhang zwischen der Ermüdungslebensdauer und dem Schädigungsparameter zu bestimmen. Es müssen also die in Abschnitt 3.1.1 beschriebenen Wöhlerlinien in Abhängigkeit vom Schädigungsparameter ausgedrückt werden. Oft gelingt dies, wenn die Parameter der Dehnungswöhlerlinie aus Gleichung (3.1) bekannt sind. Die Dehnungswöhlerlinie wird anhand von einstufigen Versuchen ohne Mittellast  $\sigma_m = 0$  bestimmt. Für Spannungs- und Dehnungsamplituden können die aus Gleichung (3.1) bekannten Zusammenhänge in Gleichung (3.6) eingesetzt werden. Die Schädigungsparameterwöhlerlinie für den  $P_{RAM}$  Parameter in Abhängigkeit der Werkstoffparameter der Dehnungswöhlerlinie ist dann:

$$P_{RAM} = \sqrt{\sigma_f'^2 (2N)^{2b} + E\sigma_f'\varepsilon_f' (2N)^{b+c}}. \quad (3.7)$$

Darüber hinaus existiert eine große Anzahl an Schädigungsparametern, die speziell für die Verwendung bei mehrachsiger Beanspruchung formuliert sind. Auf einige dieser Parameter wird näher in Abschnitt 3.2 eingegangen.

### 3.1.6. Stützwirkung

In den meisten Fällen weisen Bauteile mit Kerben eine längere Lebensdauer auf als ungekerbte Werkstoffproben, welche der gleichen lokalen Beanspruchung ausgesetzt sind. An einer ungekerbten Probe gewonnene Werkstoffdaten lassen sich nicht ohne Weiteres auf reale Bauteile übertragen. Neben dem Beanspruchungszustand existieren weitere Einflussgrößen, die sogenannten Größeneinflüsse. Größeneinflüsse werden von Kloos [Kloo 76] in vier Gruppen unterteilt:

- den technologischen Größeneinfluss,
- den spannungsmechanischen Größeneinfluss,
- den statistischen Größeneinfluss
- und den oberflächentechnischen Größeneinfluss.

Die vier Größeneinflüsse werden nachfolgend kurz erläutert.

Der technologische Größeneinfluss ergibt sich aus Einflüssen aus Herstellungs- und Fertigungsverfahren. Er beschreibt die Auswirkungen unterschiedlicher Gefügestrukturen in großen Bauteilen gegenüber kleinen Proben, die durch unterschiedliche mechanische und thermische Herstellungsverfahren entstehen. Besonders wichtig sind dabei die Größe, Form und Verteilung nichtmetallischer Einschlüsse, was zu unterschiedlichen Schwingfestigkeiten führt, [Rada 07].

Die Oberflächenbeschaffenheit eines Bauteils hat ebenfalls Einfluss auf die Lebensdauer. Ein Beispiel für den Oberflächeneinfluss ist die Rauheitstiefe. Rauheiten auf der Oberfläche wirken als Mikrokerben und fördern dadurch die Bildung von Anrissen.

Der spannungsmechanische Größeneinfluss wird auf eine inhomogene Spannungsverteilung zurückgeführt. Er tritt demnach nicht nur bei gekerbten Bauteilen, sondern auch bei Biege- oder Torsionsversuchen auf. Der spannungsmechanische Größeneinfluss beschreibt den Einfluss von Spannungsgradienten. Wenn ein Riss ins Bauteilinnere hinein wächst und einem Spannungsgradienten ausgesetzt ist, erfährt der Riss bei zunehmender Risslänge eine geringere Beanspruchung im Vergleich zu einem homogenen Spannungsfeld, wie es in einer Werkstoffprobe vorliegt. Daher wird die homogen beanspruchte Werkstoffprobe stärker geschädigt als das Bauteil mit Kerben.

Der statistische Größeneinfluss geht von einer zufälligen Verteilung von Defekten im Werkstoff aus. Mit zunehmendem hochbeanspruchten Volumen des Werkstoffs steigt die Wahrscheinlichkeit, dass eine kritische Defektstelle im hochbeanspruchten Bereich auftritt, was sich negativ auf die Festigkeit des Bauteils auswirkt. Dabei ist vor allem das Auftreten eines für das Ermüdungsversagen maßgebenden Defekts entscheidend. In homogen beanspruchten Werkstoffproben entspricht das hoch beanspruchte Werkstoffvolumen quasi dem gesamten Probenvolumen. In gekerbten Bauteilen ist der hoch beanspruchte Bereich jedoch meist wesentlich geringer, da die größte Beanspruchung lokal auf den Einflussbereich der Kerbe beschränkt bleibt. Werden Ermüdungsrisse betrachtet, die meist von der Bauteiloberfläche ausgehen, wird anstelle eines hoch beanspruchten Werkstoffvolumens eine hoch beanspruchte Oberfläche verwendet.

Im Rahmen der FKM-Richtlinien [Renn 12, Fied 19] kommen zur Übertragung von Werkstoffwöhlerlinien auf Bauteilwöhlerlinien Stützwirkungskonzepte zum Einsatz, die einige der oben genannten Größeneinflüsse erfassen. Es werden zwei verschiedene Stützwirkungskonzepte verwendet, das Stierler'sche Konzept [Stie 54] und das werkstoffmechanische Stützwirkungskonzept nach [Häne 10]. In der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] wird das werkstoffmechanische Stützwirkungskonzept verwendet. Der in dieser Arbeit erstellte Algorithmus soll eine Erweiterung der FKM-Richtlinie Nichtlinear darstellen. Daher wird im Folgenden das werkstoffmechanische Stützwirkungskonzept erläutert. Das ursprüngliche Stützwirkungskonzept nach [Liu 01] besteht aus drei Stützzahlen, deren Produkt die Stützziffer  $n$  bildet:

$$n = n_{st} \cdot n_{vm} \cdot n_{bm}. \quad (3.8)$$

Die drei Anteile der gesamten Stützwirkung sind:

- die statistische Stützziffer  $n_{st}$ ,
- die verformungsmechanische Stützziffer  $n_{vm}$  und
- die bruchmechanische Stützziffer  $n_{bm}$ .

Die statistische Stützziffer  $n_{st}$  erfasst den statistischen Größeneinfluss. Sie bezieht sich auf das Weibull'sche Fehlstellenmodell, [Weib 39, Weib 59]. Dieses besagt, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils größer wird, wenn das hochbeanspruchte Volumen größer wird. Grund hierfür ist, dass je größer das hochbeanspruchte Volumen ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit der Anrissbildung, ausgehend von statistisch verteilten Fehlern im Werkstoff [Liu 01]. Es besteht eine Abhängigkeit von hochbeanspruchtem Volumen zu hochbeanspruchter Oberfläche, weshalb auch die Oberfläche verwendet werden kann, um die statistische Stützzahl zu bestimmen. Die statistische Stützzahl kann mit

$$n_{st} = \left( \frac{A_{ref,st}}{A_{\sigma,st}} \right)^{1/k_{st}} \quad (3.9)$$

berechnet werden. Die Größe  $A_{ref,st}$  ist die Referenzoberfläche der ungekerbten Probe, die zur Bestimmung der Schädigungsparameterwöhlerlinie verwendet wird. Bei einer Rundprobe mit einem Durchmesser von  $D = 8$  mm und einer Prüfbereichlänge von  $l = 20$  mm beträgt die Referenzoberfläche  $A_{ref,st} = 500$  mm<sup>2</sup>. Die hochbeanspruchte Oberfläche des Bauteils  $A_{\sigma,st}$  kann nach der erweiterten

Methode SPIEL ermittelt werden, die in [Wäch 21] anhand von Beispielen erläutert wird. Eine Erweiterung der Methode SPIEL ist in [Müll 18] beschrieben. Der Weibullexponent  $k_{st}$  ist abhängig von der Werkstoffgruppe und nimmt Werte im Bereich von 10 bis 30 an.

Die bruchmechanische Stützziffer  $n_{bm}$  berücksichtigt den Effekt, dass ein Riss in einem Querschnitt mit einer inhomogenen Spannungsverteilung langsamer wächst als in einem Querschnitt mit homogener Spannungsverteilung (im ungerissenen Zustand). Sie berücksichtigt demnach den spannungsmechanischen Größeneinfluss. Bei inhomogenen Spannungsverteilungen nimmt die Spannung im ungerissenen Zustand ins Bauteilinnere hin ab. Teilweise kann sogar das Risswachstum zum Erliegen kommen. Die bruchmechanische Stützzahl kann durch

$$n_{bm} = \max(\bar{n}_{bm}; 1) \quad (3.10)$$

mit

$$\bar{n}_{bm} = \frac{5 + \sqrt{G \cdot [mm]}}{\bar{k}} \quad (3.11)$$

mit

$$\bar{k} = 5 \cdot n_{st} + \frac{R_m}{R_{m,bm}} \cdot \sqrt{\frac{7,5 + \sqrt{G \cdot [mm]}}{1 + 0,2\sqrt{G \cdot [mm]}}} \quad (3.12)$$

aus dem bezogenen Spannungsgradienten  $G$ , der Zugfestigkeit  $R_m$  und der Referenzzugfestigkeit  $R_{m,bm}$  berechnet werden. Die Referenzzugfestigkeit  $R_{m,bm}$  ist eine werkstoffgruppenabhängige Größe, welche der FKM-Richtlinie Nichtlinear zu entnehmen ist, [Fied 19]. Der bezogene Spannungsgradient  $G$  kann mittels FE-Rechnung bestimmt werden oder für einfache Bauteilgeometrien aus der FKM-Richtlinie, [Renn 12], entnommen werden.

Die verformungsmechanische Stützzahl  $n_{vm}$  berücksichtigt die Makrostützwirkung nach Neuber, [Neub 68]. Es wird eine Stützwirkung beschrieben, die den Unterschied zwischen linear elastischem und elastisch-plastischem Werkstoffverhalten berücksichtigt. Da sowohl in der FKM-Richtlinie Nichtlinear als auch in den hier beschriebenen Kerbnäherungsverfahren aus Kapitel 2 elastisch-plastisches Verhalten der lokalen Beanspruchungen bereits berücksichtigt wird, wird diese Stützziffer nicht verwendet. Nach dem Stützwirkungskonzept der FKM-Richtlinie Nichtlinear werden nur die bruchmechanische und statistische Stützziffer verwendet.

Die so berechnete Stützziffer wird dazu verwendet, die Schädigungsparameterwöhlerlinie des Werkstoffs auf eine Schädigungsparameterwöhlerlinie des Bauteils zu übertragen. Wie diese Übertragung stattfindet, wird in Abschnitt 3.2 anhand der vorgestellten Schädigungsmodelle erläutert. Ebenfalls ist die Anwendung innerhalb der FKM-Richtlinie Nichtlinear auf lokal einachsig oder proportional beanspruchte Bauteile beschränkt. Ein Vorschlag, wie die benötigten Kenngrößen (hochbeanspruchte Oberfläche  $A_{\sigma,st}$ , bezogener Spannungsgradient  $G$  oder auch Traglastformzahl  $K_p$  für die Kerbnäherungsverfahren) bei einer nichtproportionalen Belastung mit variablen Amplituden bestimmt werden können, wird in Abschnitt 5.2.2 vorgestellt.

## 3.2. Schädigungshypothesen für mehrachsige Beanspruchungen

In der Fachliteratur existieren eine Vielzahl an Schädigungshypothesen oder Schädigungsmodellen. Nach Liu [Liu 01] oder Vormwald [Vorm 23] lassen sich diese Modelle grob in drei Gruppen einteilen:

- Erweiterung von statischen Festigkeitshypothesen
- Integrale Schädigungsparameter
- Verfahren der kritischen Schnittebene

Übersichten über einige der bekanntesten Ansätze sind in [Garu 81] und [Vorm 23] zu finden. Häufig gelten bei der Anwendung einer bestimmten Schädigungshypothese Einschränkungen bezüglich der Beanspruchungsart. In der vorliegenden Arbeit soll jedoch ein Algorithmus erarbeitet werden, der unter einer beliebigen mechanischen Beanspruchung zuverlässig die Ermüdungslebensdauer eines Bauteils oder einer Werkstoffprobe vorhersagen kann. Im Folgenden werden einzelne Schädigungshypothesen näher vorgestellt. Besonders wird dabei auf Verfahren der kritischen Schnittebene eingegangen, da diese Modelle für eine Lebensdauervorhersage unter einer allgemeinen, nichtproportionalen Belastung mit variablen Amplituden besonders geeignet sind.

### 3.2.1. Erweiterung klassischer Festigkeitshypothesen

Die bekanntesten Festigkeitshypothesen für statische Beanspruchungen sind die klassischen Vergleichsspannungshypothesen. Vertreter dieser Klasse an Festigkeitshypothesen sind die Normalspannungshypothese nach Rankine [Rank 57], die Schubspannungshypothese nach Tresca [Tres 64] oder die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH, auch bekannt als „von Mises Hypothese“) nach [Mise 13]. Insbesondere für metallische Werkstoffe hat sich die GEH bewährt. Die GEH wird nun als Beispiel diskutiert.

Als versagensmaßgebende Größe wird bei dieser Hypothese die Gestaltänderungsenergie definiert. Die Gestaltänderungsenergie ist proportional zur zweiten Invariante des Spannungsdeviators. Für einen allgemeinen Spannungszustand kann eine Vergleichsspannung nach der GEH als

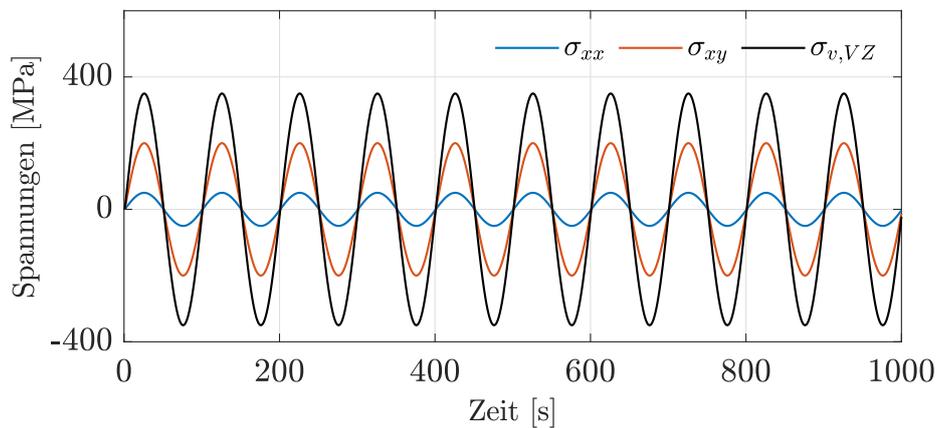
$$\sigma_{v,GEH} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)} \quad (3.13)$$

geschrieben werden. Die GEH und andere statische Festigkeitshypothesen liefern lediglich positive Werte bzw. Vergleichsspannungen. Aus diesem Grund sind sie ungeeignet für einen Ermüdungsfestigkeitsnachweis. Es existieren verschiedene Methoden, einer Vergleichsspannung ein Vorzeichen zuzuordnen. Dies führt auf die sogenannten vorzeichenbehafteten Vergleichsspannungen. Die vorzeichenbehaftete von Mises Vergleichsspannung findet beispielsweise Anwendung in der FKM-Richtlinie Nichtlinear, [Fied 19]. Diese Vergleichsspannung besteht im Grunde aus zwei Teilen. Zum einen aus der von Mises Vergleichsspannung  $\sigma_{v,GEH}$  und einem vorzeichengebenden Teil  $VZ$ :

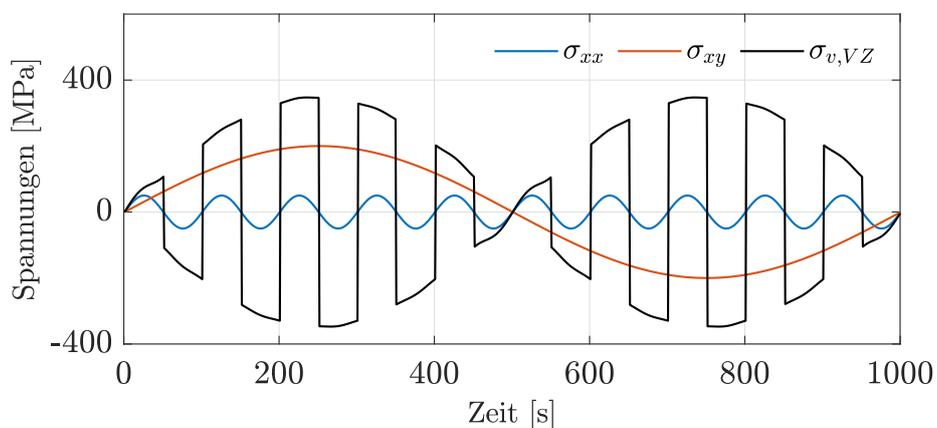
$$\sigma_{v,VZ} = VZ \cdot \sigma_{v,GEH}. \quad (3.14)$$

Für den Teil, der das Vorzeichen bestimmt, kann das Vorzeichen der hydrostatischen Spannung  $\sigma_H$  verwendet werden. Dieses Vorgehen wird in der FKM-Richtlinie Nichtlinear angewendet. Liegt eine reine Torsionsbeanspruchung vor, wird die hydrostatische Spannung  $\sigma_H = 0$ . In diesem Fall muss nach FKM-Richtlinie Nichtlinear die Ermüdungsfestigkeit sowohl mit positivem als auch negativem Vorzeichen untersucht werden. Es gilt dann die niedrigere Lebensdauer für den Ermüdungsfestigkeitsnachweis.

Bei der Verwendung der vorzeichenbehafteten von Mises Vergleichsspannung kommt es bei nichtproportionalen Beanspruchungen zu physikalisch nicht begründbaren Sprüngen im Vergleichsspannungs-Zeit-Verlauf, wie Abbildung 3.4 am Beispiel einer zusammengesetzten Beanspruchung aus Normalspannung und Schubspannung zeigt. Diese Problematik wird ebenfalls in [Gaie 13] und [Wäch 22] thematisiert. Grund für diese Sprünge ist, dass die vorzeichenbehaftete Vergleichsspannung das Vorzeichen von der hydrostatischen Spannung  $\sigma_H$  bezieht. Diese Sprünge haben zur Folge, dass zu viele und zu große Hysteresen gezählt werden, sodass eine zu kurze Lebensdauer vorhergesagt wird. Die Anwendung der vorzeichenbehafteten Vergleichsspannung ist, ebenso wie die aktuelle FKM-Richtlinie Nichtlinear, beschränkt auf den Fall proportionaler Beanspruchungen.



(a) proportionale Beanspruchung



(b) nichtproportionale Beanspruchung

Abbildung 3.4: Beispiel für die vorzeichenbehaftete Vergleichsspannung bei (a) proportionaler Beanspruchung und (b) nichtproportionaler Beanspruchung

### 3.2.2. Integrale Schädigungsparameter

Integrale Festigkeitshypothesen betrachten die räumliche Beanspruchung eines Werkstoffelements. Es wird ein integraler Mittelwert einer Schädigungsvariable über alle möglichen Schnittebenen in einem Werkstoffelement gebildet. Die Beanspruchung kann in numerischen Analysen durch die Annäherung über mehrere Schnittebenen erfasst werden. Der so gebildete Mittelwert der Schädigungsvariable muss invariant gegenüber Koordinatentransformation sein.

Die Grundlage bildet die Feststellung von Novozhilov [Novo 61], dass der integrale Mittelwert der quadrierten Schubspannungen in allen Schnittebenen proportional zur zweiten Invariante des Spannungsdeviators ist:

$$\frac{1}{\Omega} \int \tau_{\varphi\gamma}^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \tau_{\varphi\gamma}^2 \cdot \sin(\gamma) d\gamma d\varphi = 3J_2. \quad (3.15)$$

Die Oberfläche einer Einheitskugel wird mit  $\Omega$  bezeichnet. Ein Flächenelement auf dieser Einheitskugel berechnet sich mit  $d\Omega = \sin(\gamma) d\gamma d\varphi$ . Der Mittelwert der quadrierten Schubspannungen kann also in Zusammenhang mit der von Mises Vergleichsspannung gebracht werden. Eine Erweiterung der in der Schwingfestigkeit relevanten Größen wurde von Simbürger [Simb 75] mit der effektiven Schubspannungshypothese vorgeschlagen. Dieser Ansatz wurde später von Zenner, Heidenreich und

Richter [Zenn 77, Zenn 80] zur sogenannten Schubspannungsintensitätshypothese (SIH) erweitert. Durch

$$\begin{aligned}\sigma_{v,a}^2 &= \frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \tau_{\varphi\gamma,eff,a}^2 \cdot \sin(\gamma) d\gamma d\varphi \\ &= \frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [a\tau_{\varphi\gamma,a}^2 (1 + m\tau_{\varphi\gamma,m}^2) + b\sigma_{\varphi\gamma,a}^2 (1 + n\sigma_{\varphi\gamma,m}^2)] \cdot \sin(\gamma) d\gamma d\varphi\end{aligned}\quad (3.16)$$

wird die Amplitude einer Vergleichsspannung berechnet. Die vier Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $m$  und  $n$  stellen Werkstoffparameter dar. Für die Definition und Bestimmung dieser Werkstoffkonstanten sei auf Liu und Zenner [Liu 93] verwiesen. Eine Erweiterung auf die Anwendung bei Betriebsbelastungen wurde von Esderts [Esde 96] vorgeschlagen.

Die hier vorgestellte SIH hat sich im Bereich der Dauerfestigkeit bewährt und erweist sich als zuverlässig, sowohl für proportionale als auch für nichtproportionale Beanspruchungen. Dagegen erscheint im Zeitfestigkeitsbereich die Verwendung eines richtungsunabhängigen Parameters spätestens dann fraglich, sobald Mikrorisse auftreten und eine eindeutige Richtungsabhängigkeit der Schädigung erkennbar wird, [Vorm 23].

### 3.2.3. Verfahren der kritischen Ebene

Die letzte Gruppe bilden die Modelle nach dem kritischen Ebenen (oder auch kritischen Schnittebenen) Verfahren. Das Verfahren der kritischen Schnittebene hat sich für die Ziele dieser Arbeit am geeignetsten herausgestellt. Aus diesem Grund wird es in diesem Abschnitt ausführlicher besprochen. Ansätze der kritischen Schnittebenen bewerten die Schädigung in allen (bei der numerischen Umsetzung in vielen) Schnittebenen eines Werkstoffelements und definieren eine Schnittebene als kritisch. Vor allem aufgrund der Identifizierung von Schwingspielen bei der Belastung mit variablen Amplituden werden die Ansätze der kritischen Schnittebene für diese Arbeit als geeignet erachtet. Der Ansatz der kritischen Ebenen ist aus experimentellen Beobachtungen hervorgegangen. Durch wiederholte Beanspruchung entstehen Gleitlinien und Mikrorisse in spezifischen Ebenen der Struktur, [Vorm 23]. Abhängig von Werkstoff und Beanspruchungszustand wird die Ermüdungsdauer durch Risswachstum entweder in Ebenen großer Schubbeanspruchung oder in Ebenen großer Zugbeanspruchungen dominiert, [Soci 00]. Bei kritischen Ebenen Modellen wird daher die Ermüdungsdauer anhand von Schnittspannungen und/oder -dehnungen in materiellen Schnittebenen berechnet. Abbildung 3.5 zeigt eine Schnittebene, gekennzeichnet durch die zwei Schnittwinkel  $\varphi$  und  $\psi$ . Die Modelle sind in der Theorie in der Lage, sowohl die Ermüdungsdauer als auch die Orientierung der Versagensebene vorherzusagen.

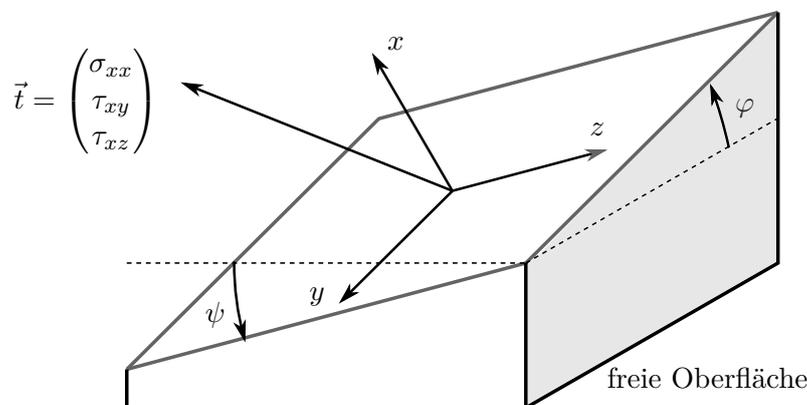


Abbildung 3.5: Definition einer materiellen Schnittebene in Abhängigkeit der Schnittwinkel  $\varphi$  und  $\psi$

Neben der in Abschnitt 3.2 genannten Einteilung von Festigkeitshypothesen existieren weitere Unterteilungen der kritischen Ebenen Modelle in verschiedene Gruppen. Modelle der kritischen Ebene können nach [Jian 07, Fate 11] weiter unterteilt werden in

- spannungsbasierte,
- dehnungsbasierte oder
- spannungs- und dehnungsbasierte

Modelle. Ansätze, die sowohl auf Spannungen als auch auf Dehnungen basieren, werden auch oft als energiebasiert bezeichnet. Damit ist dann allerdings meistens keine Energie im physikalischen Sinne gemeint. Eine solche Größe wäre richtungsunabhängig und damit unabhängig von der Schnittebene. Spannungsbasierte Modelle, wie das von Findley [Find 54] vorgeschlagene Modell, funktionieren bei Ermüdung mit hohen Zyklenzahlen und geringer plastischer Verformung gut, aber in Fällen mit hoher plastischer Verformung liefern spannungsbasierte Modelle eher schlechte Ergebnisse [Fate 11]. Modelle, die nur auf Dehnungen basieren (dehnungsbasiert, wie [Brow 79]), können einige Effekte des Werkstoffverhaltens nicht berücksichtigen, wie die nichtproportionale Verfestigung oder zyklische Ver- oder Entfestigung [Fate 11]. Modelle der kritischen Ebene, die auf Spannungen und Dehnungen basieren, sind für allgemeine Anwendungen am besten geeignet [Fate 11]. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit Ansätze auf der Grundlage von Spannungen und Dehnungen für die kritische Ebene untersucht. Zwei der gebräuchlichsten Modelle, der Smith/Watson/Topper (SWT) Parameter [Smit 70] und der Fatemi/Socie (FS) Parameter [Fate 88b, Fate 88a] sowie ein auf der Kurzriss-Bruchmechanik basierendes Modell werden nachfolgend betrachtet. Mehr zu den einzelnen Schädigungsparametern ist in Abschnitt 3.2.4, Abschnitt 3.2.5 und Abschnitt 3.2.6 zu finden. Mit welchem Kriterium die für das Bauteil- oder Werkstoffversagen kritische Schnittebene festzulegen ist, ist in der Literatur nicht eindeutig definiert. Die kritische Ebene kann zum Beispiel als eine Werkstoffebene definiert werden, welche die maximale Spannungs- oder Dehnungsamplitude erfährt. In dieser Arbeit wird die kritische Ebene als die Ebene definiert, in der die geringste rechnerische Lebensdauer prognostiziert wird. Dies führt zu den konservativsten rechnerischen Lebensdauern und einer eindeutigen Definition der kritischen Ebene bei der Anwendung unter Betriebsbelastung.

### 3.2.3.1. Schnittebenen Projektion

Zur Bewertung der Ermüdungsschädigung mit dem Verfahren der kritischen Schnittebenen müssen Spannungs- und Dehnungszustände in Schnittebenen projiziert werden. Dazu werden Koordinatensysteme eingeführt, welche die aktuelle Schnittebene beschreiben. Zunächst wird, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, ein globales Koordinatensystem  $\{X, Y, Z\}$  und ein lokales Koordinatensystem  $\{x, y, z\}$  definiert. In dieser Arbeit wird die Ermüdungsschädigung ausgehend von einer unbelasteten Bauteiloberfläche betrachtet. Im Allgemeinen treten dadurch im lokalen Koordinatensystem drei unabhängige Spannungskomponenten auf, siehe Abschnitt 2.1. Werden wie in Kapitel 4 Werkstoffproben untersucht, fallen lokales und globales Koordinatensystem zusammen.

Zum Auffinden der kritischen Schnittebene wird ein weiteres Koordinatensystem  $\{x_s, y_s, z_s\}$  eingeführt, welches den aktuellen Schnitt durch das Werkstoffelement beschreibt. Dieses „Schnittkoordinatensystem“ wird durch Rotation aus dem lokalen Koordinatensystem gewonnen. Dazu werden die beiden Rotationswinkel  $\varphi$  und  $\psi$  verwendet. Die beiden Drehwinkel sind in Abbildung 3.6 dargestellt. Sie sind wie folgt definiert:

- Der Drehwinkel  $\varphi$  beschreibt eine Drehung um die lokale  $z$ -Achse. Er definiert die Drehung der Schnittebene, welche von der Bauteiloberfläche aus beobachtet werden kann.
- Der Drehwinkel  $\psi$  beschreibt eine Drehung um die gedrehte  $y_s$ -Achse. Er definiert eine Kippung der Schnittebene in das Bauteil hinein.

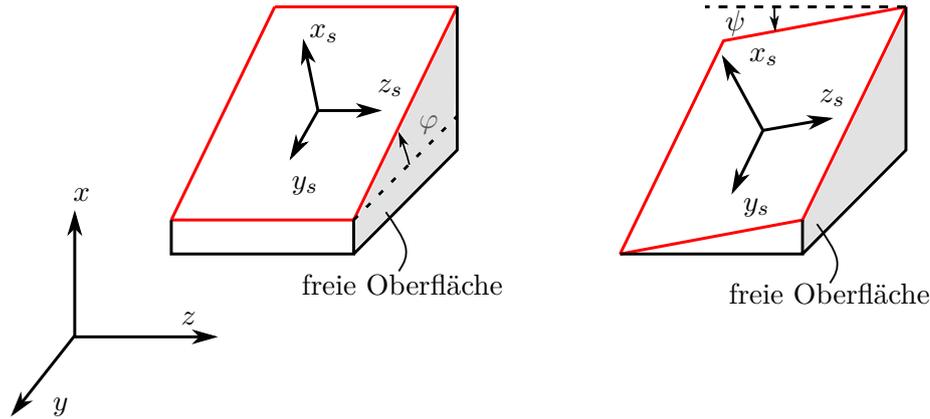


Abbildung 3.6: Definition des Koordinatensystems der aktuellen Schnittebene durch die Drehwinkel  $\varphi$  und  $\psi$

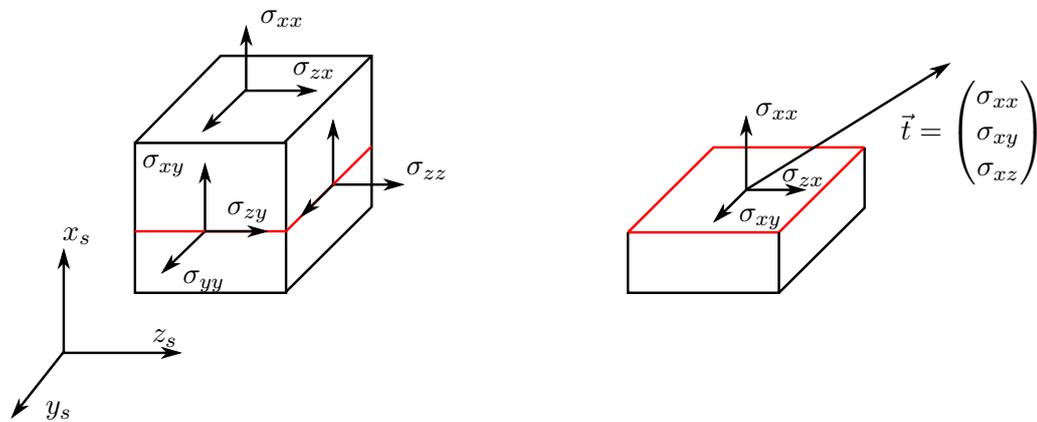


Abbildung 3.7: Lage der Schnittebene im „Schnittkoordinatensystem“  $\{x_s, y_s, z_s\}$

Die  $x_s$ -Achse steht dabei immer senkrecht auf der Schnittebene. In  $\{x_s, y_s, z_s\}$  ist der Spannungstensor dann im Allgemeinen voll besetzt. Der aktuelle Schnitt lässt sich im Koordinatensystem  $\{x_s, y_s, z_s\}$ , wie in Abbildung 3.7 dargestellt, als gerader Schnitt mitten durch den Werkstoffwürfel vorstellen. Die Schnittspannung  $\vec{t}$  kann also direkt den Komponenten des gedrehten Tensors entnommen werden. Der Spannungs- und Dehnungstensor lässt sich durch

$$\sigma_{ij}^s = R_{ik} R_{lj} \sigma_{kl}^l, \quad \varepsilon_{ij}^s = R_{ik} R_{lj} \varepsilon_{kl}^l \quad (3.17)$$

vom lokalen Koordinatensystem ins Schnittkoordinatensystem transformieren. Für die oben definierten Rotationswinkel lässt sich der Rotationstensor wie folgt angeben:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\psi) & \sin(\varphi) \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -\cos(\varphi) \sin(\psi) & -\sin(\varphi) \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Bei der Umsetzung im Programmcode wird die Rotation dann als einfache Matrix Multiplikation ausgeführt. Diese kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^s \\ \sigma_{yy}^s \\ \sigma_{zz}^s \\ \tau_{xy}^s \\ \tau_{yz}^s \\ \tau_{xz}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & 2R_{11}R_{12} \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & 2R_{21}R_{22} \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & 2R_{31}R_{32} \\ R_{11}R_{21} & R_{12}R_{22} & R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} \\ R_{21}R_{31} & R_{22}R_{32} & R_{21}R_{32} + R_{22}R_{31} \\ R_{31}R_{11} & R_{32}R_{12} & R_{31}R_{12} + R_{32}R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^l \\ \sigma_{yy}^l \\ \tau_{xy}^l \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{R}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^l \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^s \\ \varepsilon_{yy}^s \\ \varepsilon_{zz}^s \\ \gamma_{xy}^s \\ \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 & R_{11}R_{12} \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & R_{21}R_{22} \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & R_{31}R_{32} \\ 2R_{11}R_{21} & 2R_{12}R_{22} & 2R_{13}R_{23} & R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} \\ 2R_{21}R_{31} & 2R_{22}R_{32} & 2R_{23}R_{33} & R_{21}R_{32} + R_{22}R_{31} \\ 2R_{31}R_{11} & 2R_{32}R_{12} & 2R_{33}R_{13} & R_{31}R_{12} + R_{32}R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^l \\ \varepsilon_{yy}^l \\ \varepsilon_{zz}^l \\ \gamma_{xy}^l \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^s = \mathbf{R}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^l \quad (3.20)$$

Bei vielen einstufigen, proportionalen und sogar nichtproportionalen Beanspruchungen kann die Lage der kritischen Ebene in der Regel durch den vorab gewählten Schädigungsparameter analytisch bestimmt werden. Bei allgemeiner nichtproportionaler Betriebsbeanspruchung muss jedoch jede mögliche Schnittebene einzeln untersucht werden. Numerisch bedeutet dies, dass über die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  iteriert wird und für jede Schnittebene eine Schädigungsrechnung erfolgen muss.

Für die folgende Beschreibung der Schädigungsparameter wird stets vom Schnittkoordinatensystem ausgegangen. Der Index  $(\dots)^s$  an den Koordinatenachsen und Tensorkomponenten wird weggelassen.

### 3.2.4. Smith/Watson/Topper Parameter

Der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  in der FKM-Richtlinie Nichtlinear basiert auf dem Schädigungsparameter  $P_{SWT}$  nach Smith, Watson und Topper, [Smit 70]. Er wurde ursprünglich zur Korrektur von Mittelspannungen in einachsigen Belastungssituationen entwickelt, [Soci 00]. Die Schädigung wird anhand von wirkenden Normalspannungen und -dehnungen bewertet. Im  $P_{RAM}$  Parameter, nach Bergmann [Berg 83], erfolgt eine zusätzliche Berücksichtigung der Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  und des Unterschieds zwischen Zug- und Druckbeanspruchung.

Das Modell ist für Werkstoffe geeignet, die hauptsächlich durch Risswachstum in Ebenen mit maximaler Zugdehnung oder -spannung versagen. In diesen Werkstoffen entstehen Risse durch Scherbeanspruchung, aber die Ermüdungslebensdauer wird durch das Wachstum von Rissen in Ebenen bestimmt, die senkrecht zur maximalen Hauptspannung und Dehnung stehen, wie in Abbildung 3.8 dargestellt, [Soci 00]. Socie [Soci 87] schlägt eine Erweiterung des Schädigungsparameters auf mehrachsige Beanspruchungen vor, indem die Amplitude und der Maximalwert der ersten Hauptdehnung und Hauptspannung verwendet werden. Da sich jedoch Hauptachsenrichtungen während einer nichtproportionalen Belastung zeitlich ändern, steht die kritische Schnittebene bei einer allgemeinen nichtproportionalen Belastung nicht a priori fest.

Der hier beschriebene Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  wird ebenfalls in der FKM-Richtlinie Nichtlinear verwendet. In der FKM-Richtlinie Nichtlinear werden Vergleichsgrößen zur Bildung des Schädigungsparameters benutzt. Er kann hier in ähnlicher Form angewendet werden. Der Unterschied besteht darin, dass  $P_{RAM}$  hier als Parameter der kritischen Schnittebene verwendet wird. Damit werden zur Bewertung der Schädigung in der Schnittebene auftretende Schnittspannungen und -dehnungen verwendet. Die Rainflow-Zählung wird anhand der Dehnungskomponente normal zur aktuellen Schnittebene  $\varepsilon_{xx}$  durchgeführt. Unter nichtproportionalen Beanspruchungen treten im Allgemeinen Umkehrpunkte der Spannungen und Dehnungen nicht mehr zeitgleich auf. Amplitude und Mittelwert der Schnittspannung  $\sigma_{xx}$ , normal zur Schnittebene, werden daher anhand der maximalen und minimalen Spannung während eines Dehnungszyklus definiert:

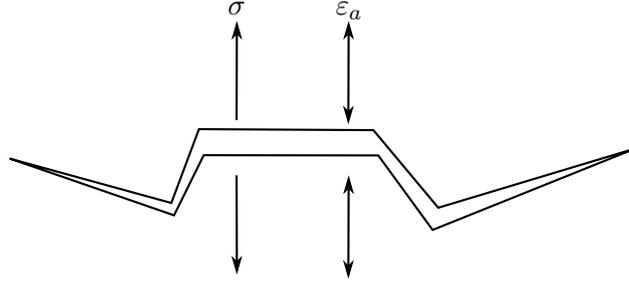


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung von Zugrissen nach [Soci 00]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,a} &= \frac{1}{2} (\sigma_{xx,max} - \sigma_{xx,min}), \\ \sigma_{xx,m} &= \frac{1}{2} (\sigma_{xx,max} + \sigma_{xx,min}).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Der Schädigungsparameter wird durch

$$P_{RAM} = \begin{cases} \sqrt{(\sigma_{xx,a} + k \cdot \sigma_{xx,m}) \cdot \varepsilon_{xx,a} \cdot E} & , \text{ für } (\sigma_{xx,a} + k \cdot \sigma_{xx,m}) \geq 0 \\ 0 & , \text{ für } (\sigma_{xx,a} + k \cdot \sigma_{xx,m}) < 0 \end{cases}\quad (3.22)$$

mit der Spannungsamplitude  $\sigma_{xx,a}$ , der Mittelspannung  $\sigma_{xx,m}$ , der Dehnungsamplitude  $\varepsilon_{xx,a}$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Werkstoffparameter  $k$  zur Berücksichtigung der Mittelspannungsempfindlichkeit gebildet. Um  $P_{RAM}$  in einer Schädigungsrechnung verwenden zu können, müssen die Schädigungsparameterwöhlerlinie und der Modellparameter  $k$  bekannt sein oder abgeschätzt werden können.

### Schädigungsparameterwöhlerlinie

Die Schädigungsparameterwöhlerlinie für den  $P_{RAM}$  Parameter kann aus Experimenten unter einstufiger Zug/Druck Belastung ohne Mittellasten bestimmt werden. In solchen Versuchen sind Spannungs- sowie Dehnungsamplituden bekannt. Es können aus Gleichung (3.22) direkt Werte des Schädigungsparameters berechnet werden. Sollten die Werkstoffparameter der Dehnungswöhlerlinie aus Gleichung (3.1) bekannt sein, können diese verwendet werden, um die Schädigungsparameterwöhlerlinie mit

$$P_{RAM}(N) = \sqrt{\sigma_f'^2 (2N)^{2b} + E \sigma_f' \varepsilon_f' (2N)^{b+c}}\quad (3.23)$$

zu berechnen. Dazu werden die Zusammenhänge der Spannungs- und Dehnungsamplitude aus Gleichung (3.1) in Gleichung (3.22) eingesetzt. Die Schädigungsparameterwöhlerlinie des Werkstoffs in der FKM-Richtlinie Nichtlinear ist in doppelt-logarithmischer Darstellung über einen bilinearen Ansatz definiert. Er wird über die Neigungen  $d_1$  und  $d_2$  sowie über die Stützstellen  $P_{RAM,Z,WS}$  bei  $N = 10^3$  Schwingpsielen und  $P_{RAM,D,WS}$  für die Dauerfestigkeit beschrieben. Daraus ergeben sich folgende Fallunterscheidungen:

$$N_{RAM} = \begin{cases} 10^3 \cdot \left( \frac{P_{RAM}}{P_{RAM,Z,WS}} \right)^{1/d_1} & , \text{ für } P_{RAM} \geq P_{RAM,Z,WS} \\ 10^3 \cdot \left( \frac{P_{RAM}}{P_{RAM,Z,WS}} \right)^{1/d_2} & , \text{ für } P_{RAM,Z,WS} > P_{RAM} > P_{RAM,D,WS} \\ \infty & , \text{ für } P_{RAM,D,WS} \geq P_{RAM} \end{cases}\quad (3.24)$$

Sollten keine Experimente vorliegen, um die Schädigungsparameterwöhlerlinie zu berechnen, stellt die FKM-Richtlinie Nichtlinear Abschätzmethoden bereit. Die Wöhlerlinie kann dann allein aus

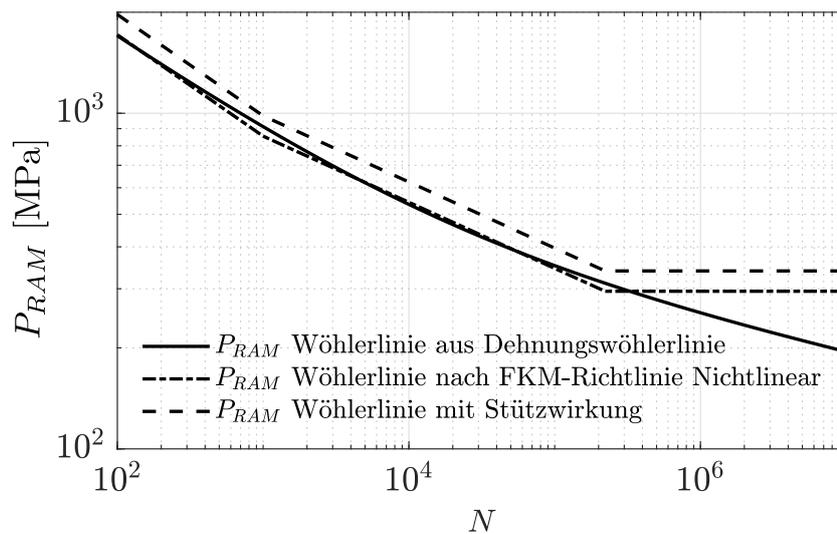


Abbildung 3.9: Vergleich der Schädigungsparameterwöhlerlinien für den Schädigungsparameter  $P_{RAM}$

der Zugfestigkeit  $R_m$  und einer Werkstoffgruppe bestimmt werden. Um von der Wöhlerlinie für einen Werkstoff auf eine Wöhlerlinie für ein Bauteil umzurechnen, wird das in Abschnitt 3.1.6 beschriebene werkstoffmechanische Stützwirkungskonzept verwendet. Die nach Gleichung (3.24) geltenden Stützstellen  $P_{RAM,Z,WS}$  und  $P_{RAM,D,WS}$  werden mit der Stützziffer  $n$  skaliert:

$$\begin{aligned} P_{RAM,Z} &= n \cdot P_{RAM,Z,WS}, \\ P_{RAM,D} &= n \cdot P_{RAM,D,WS}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Neigungen bleiben unverändert. In doppelt logarithmischer Darstellung entspricht das einer Parallelverschiebung. Es sei erwähnt, dass zum Verschieben der Wöhlerlinie innerhalb der FKM-Richtlinie Nichtlinear weitere Einflussfaktoren zum Berücksichtigen von Rauheitseinflüssen und Sicherheitskonzepten verwendet werden, die allerdings in dieser Arbeit unberücksichtigt bleiben. Abbildung 3.9 zeigt beispielhaft einen Vergleich für Schädigungsparameterwöhlerlinien des Schädigungsparameters  $P_{RAM}$ . Die Wöhlerlinien nach FKM-Richtlinie Nichtlinear wurden für die Werkstoffgruppe Stahl unter Vorgabe einer Zugfestigkeit von  $R_m = 600$  MPa erzeugt. Die Parameter der Wöhlerlinie nach Gleichung (3.23) wurden aus den Abschätzmethoden aus [Wäch 16] für den gleichen fiktiven Werkstoff bestimmt.

### Mittelspannungsempfindlichkeit

Zur Berücksichtigung des Einflusses von Mittelspannungen wird der Modellparameter  $k$  verwendet. Nach FKM-Richtlinie Nichtlinear kann dieser aus der Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  über

$$k = \begin{cases} M_\sigma \cdot (M_\sigma + 2) & , \text{ für } \sigma_m \geq 0 \\ \frac{M_\sigma}{3} \cdot \left(\frac{M_\sigma}{3} + 2\right) & , \text{ für } \sigma_m < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

ermittelt werden. Sollten keine Versuchsergebnisse vorliegen, um  $M_\sigma$  experimentell zu bestimmen, stellt die FKM-Richtlinie Nichtlinear Abschätzmethoden bereit. Bei Definition des Werkstoffparameters  $k$  nach Gleichung (3.26) ergibt sich im Haigh-Diagramm, unter reiner Zug/Druck Belastung für alle positiven Mittelspannungen die Steigung  $M_\sigma$  und für alle negativen Mittelspannungen die Steigung  $M_\sigma/3$ .

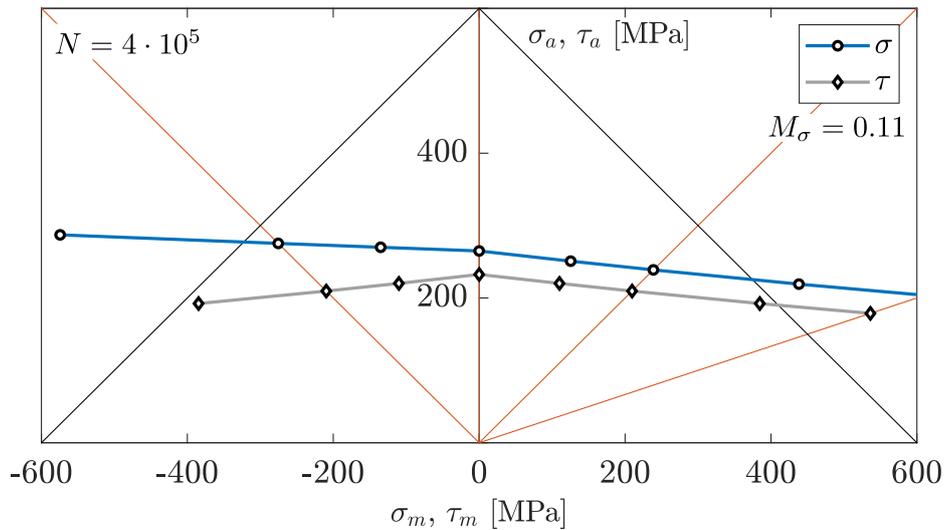


Abbildung 3.10: Haigh-Diagramm erzeugt mit dem Schädigungsparameter  $P_{RAM}$

In Abbildung 3.10 wurde mit dem  $P_{RAM}$  Parameter ein Haigh-Diagramm erzeugt. Dabei wurde rein elastisches Werkstoffverhalten vorgegeben. Das Werkstoffverhalten wurde für die Werkstoffgruppe Stahl unter Vorgabe einer Zugfestigkeit von  $R_m = 600$  MPa aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear abgeschätzt. Abbildung 3.10 zeigt nicht nur das Haigh-Diagramm für Zug/Druck Belastungen, sondern auch für reinen Schub. Hier wird vom Schädigungsparameter korrekt vorhergesagt, dass das Vorzeichen der Schubmittelspannung für die Schädigung keine Rolle spielt. Jedoch besteht kein Unterschied in den Steigungen im Haigh-Diagramm. Von  $P_{RAM}$  wird für Zug/Druck und Schubbelastungen die gleiche Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma = M_\tau$  vorhergesagt.

### 3.2.5. Fatemi/Socie Parameter

Der Schädigungsparameter  $P_{FS}$  wurde ursprünglich von Fatemi und Socie [Fate 88b] und Fatemi und Kurath [Fate 88a] vorgeschlagen. Er basiert auf der Gleitungsamplitude  $\gamma_a$ , die durch die Schubspannungen in der Schnittebene verursacht wird. Der Wert des Schädigungsparameters wird durch

$$P_{FS} = \gamma_a \left( 1 + \frac{k_{FS}}{\sigma_F} \sigma_{xx,max} \right) \quad (3.27)$$

berechnet, wobei zusätzlich zur Gleitungsamplitude  $\gamma_a$  die maximale Normalspannung  $\sigma_{xx,max}$  in der Schnittebene berücksichtigt wird. Bei Scherbelastung entstehen durch unregelmäßig geformte Rissoberflächen Reibungskräfte. Diese reduzieren die Spannungen an der Risspitze und verlangsamen dadurch das Risswachstum. Die Ermüdungslebensdauer wird erhöht. Zugspannungen und -dehnungen trennen die Rissflächen und reduzieren die Reibungskräfte [Soci 00]. Dieser Einfluss wird durch die maximale Normalspannung in der Schnittebene  $\sigma_{xx,max}$  berücksichtigt. Die Modellvorstellung, die dem Fatemi/Socie Schädigungsmodell zugrunde liegt, ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

Als primäre Schädigungsvariable im Schädigungsparameter  $P_{FS}$  sind Zyklen von Gleitungen definiert. Die maximale Normalspannung muss während eines Gleitungszyklus bestimmt werden. Die Empfindlichkeit des Werkstoffs gegenüber Normalspannungen wird durch den Quotienten  $k_{FS}/\sigma_F$  festgelegt, [Soci 00]. Dabei ist  $k_{FS}$  ein Werkstoffparameter und  $\sigma_F$  ist die Fließspannung des Werkstoffs.

Die Schädigungsparameterwöhlerlinie kann anhand der Gleitungswöhlerlinie aus

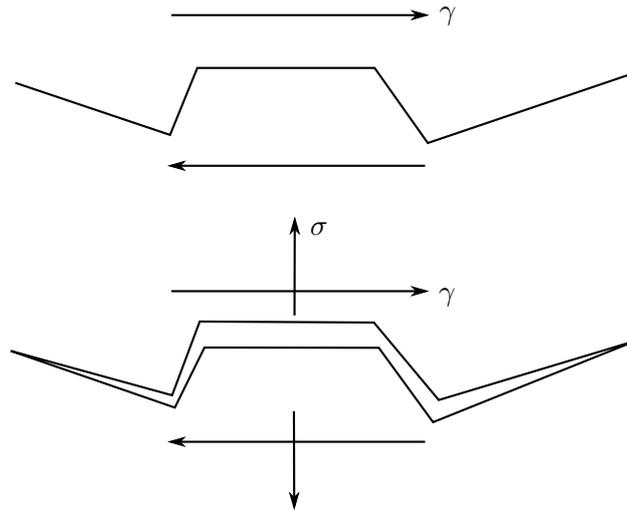


Abbildung 3.11: Physikalische Begründung des Fatemi/Sociés Modells nach [Soci00]

$$P_{FS}(N) = \frac{\tau'_f}{G} (2N)^{b_\gamma} + \gamma'_f (2N)^{c_\gamma} \quad (3.28)$$

bestimmt werden. Für den Fall, dass keine Informationen über die Gleitungswöhlerlinie vorliegen, wurde von Fatemi und Kurath [Fate88a] gezeigt, wie die Schädigungsparameterwöhlerlinie aus der Dehnungswöhlerlinie bestimmt werden kann:

$$P_{FS}(N) = \left[ (1 + \nu) \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + (1 + 0.5) \varepsilon'_f (2N)^c \right] \cdot \left[ 1 + \frac{k_{FS}}{\sigma_F} \frac{\sigma'_f}{2} (2N)^b \right]. \quad (3.29)$$

Hier wurde für die plastische Querdehnzahl der Wert  $\nu_{pl} = 0.5$  verwendet.

Um das Schädigungsmodell nach Fatemi und Socie gemäß den Zielen dieser Arbeit anwenden zu können, sind folgende Anpassungen erforderlich:

- Das Fatemi/Socie Schädigungsmodell enthält Werkstoffparameter  $k_{FS}$  und  $\sigma_F$ , die im Vorfeld einer Rechnung zu bestimmen sind. Sollten nicht genügend Versuchsdaten vorliegen, sollen diese Modellparameter aus der Zugfestigkeit abgeschätzt werden können.
- Für die Definition der Schädigungsparameterwöhlerlinie soll ein bilinearer Ansatz, wie bei  $P_{RAM}$  in Gleichung (3.24), verwendet werden. Dazu müssen Stützstellen und Steigungen der Schädigungsparameterwöhlerlinie festgelegt werden. Auch die Schädigungsparameterwöhlerlinie soll aus der Zugfestigkeit abgeschätzt werden können.
- Der Fatemi/Socie Parameter bewertet die Schädigung primär durch in der Schnittebene auftretende Gleitungsamplituden. Im Rahmen einer kritischen Ebenen Rechnung müssen Lebensdauern in Schnittebenen berechnet werden, in denen mehrere Gleitungscomponenten auftreten. Es muss eine Definition der Gleitungsamplitude gefunden werden, die auch für komplexe nichtproportionale Betriebslasten leicht anzuwenden ist. Idealerweise soll auch in solchen Schnittebenen die aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear bekannte Rainflow-Zählung zur Identifikation von Zyklen verwendet werden können.

Für die oben genannten Punkte wird im Folgenden ein Lösungsvorschlag gegeben. Bei der Anwendung des  $P_{FS}$  Parameters in dieser Arbeit besteht ein weiterer Unterschied zur originalen Formulierung nach Fatemi und Socie [Fate88b] und Fatemi und Kurath [Fate88a]. Ursprünglich wurde die kritische Ebene als die Schnittebene definiert, in der die maximale Gleitungsamplitude auftritt. Da jedoch

bei einer allgemeinen nichtproportionalen Betriebsbelastung die maximale Gleitungsamplitude von Zyklus zu Zyklus in einer anderen Schnittebene auftreten kann, wird die kritische Ebene hier als die Ebene definiert, welche die geringste rechnerische Ermüdungslebensdauer aufweist.

### Bestimmen der werkstoffabhängigen Modellparameter

Für den Fatemi/Socie Parameter werden zwei werkstoffabhängige Parameter benötigt. Zum einen der Modellparameter  $k_{FS}$  und zum anderen die Fließspannung  $\sigma_F$ . Der Quotient  $k_{FS}/\sigma_F$  beschreibt die Empfindlichkeit des Werkstoffs gegenüber Normalbelastungen. Es wird eine Möglichkeit vorgestellt, alle nötigen Werkstoffparameter im Vorfeld einer Schädigungsrechnung abzuschätzen. In der Literatur existieren bereits Abschätzmethode. In [Sham09] wird eine Methode auf Basis von Härtemessungen vorgeschlagen. In Anlehnung an die FKM-Richtlinie Nichtlinear soll allerdings eine von der Werkstoffgruppe abhängige Abschätzung auf Basis der Zugfestigkeit  $R_m$  erfolgen.

Der Parameter  $k_{FS}$  wird üblicherweise verwendet, um Experimente unter reiner Torsion und reiner Zug/Druck Belastung durch eine einheitliche Wöhlerlinie zu beschreiben. Ursprünglich wurde  $k_{FS}$  als Konstante vorgeschlagen [Fate98]. Fatemi und McClaffin [McCl04] schlagen mit

$$\hat{k}_{FS}(N) = \left[ \frac{\frac{\tau'_f}{G} (2N)^{b_\gamma} + \gamma'_f (2N)^{c_\gamma}}{(1 + \nu_e) \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + (1 + 0.5) \varepsilon'_f (2N)^c} - 1 \right] \cdot \frac{2\sigma_F}{\sigma'_f} (2N)^{-b} \quad (3.30)$$

eine von der Lebensdauer abhängige Variante vor. Für Gleichung (3.30) werden allerdings sowohl die Parameter der Dehnungs- als auch der Gleitungswöhlerlinie benötigt. In Kraft et al. [Kraf22] wird untersucht, ob sich die Lebensdauerprognose verbessert, wenn die Lebensdauerabhängigkeit des Parameters  $k_{FS}$  beibehalten wird. Es zeigt sich, dass mit einem konstanten Parameter eine gleichwertige Treffsicherheit erzielt werden kann. Es wird also die einfachere Variante verwendet und  $k_{FS}$  wird als Konstante angenommen.

Auch die Definition der Fließspannung  $\sigma_F$  ist nicht eindeutig. In [Soci00] wird als erste Näherung vorgeschlagen,  $\sigma_F = \sigma'_f$  zu verwenden. Ebenfalls naheliegend wäre  $\sigma_F = R'_{p,0.2}$  zu setzen, da die zyklischen Werkstoffkennwerte abgeschätzt werden können.

Werden sowohl die Seite der Belastung Gleichung (3.27) als auch die Belastbarkeit Gleichung (3.28) oder Gleichung (3.29) betrachtet, so ist zu erkennen, dass immer nur der Quotient  $k_{FS}/\sigma_F$  benötigt wird. Auch Gleichung (3.30) lässt sich leicht nach diesem Quotient umstellen. Anstatt zwei Werkstoffparameter zu definieren, wird eine Abschätzmethode für  $k_{FS}/\sigma_F$  aus bereits bekannten Abschätzmethode abgeleitet. Dazu wird Gleichung (3.30) verwendet. Zunächst wird ein integraler Mittelwert über einen Lebensdauerbereich von  $N_1$  bis  $N_2$  gebildet:

$$\frac{k_{FS}}{\sigma_F} = \frac{1}{N_2 - N_1} \int_{N_1}^{N_2} \frac{\hat{k}_{FS}(N)}{\sigma_F} dN. \quad (3.31)$$

Die Integrationsgrenzen können generell vom Anwender frei gewählt werden. Dies ermöglicht die Anpassung auf einen bestimmten Lebensdauerbereich. Da die Parameter der Gleitungswöhlerlinie meist nicht bekannt sind, werden sie aus den Parametern der Dehnungswöhlerlinie geschätzt. Diese Schätzung basiert auf dem von Mises Kriterium sowie dem Kriterium der maximalen Hauptdehnung:

$$\begin{array}{llllll} \tau'_f = \sigma'_f/\sqrt{3} & \gamma'_f = \sqrt{3}\varepsilon'_f & b_\gamma = b & c_\gamma = c & \text{von Mises,} & \\ \tau'_f = \sigma'_f/(1 + \nu_e) & \gamma'_f = 2\varepsilon'_f & b_\gamma = b & c_\gamma = c & \text{MPS.} & \end{array} \quad (3.32)$$

Zwischen den beiden Hypothesen wird interpoliert:

$$\frac{k_{FS}}{\sigma_F} = q \cdot \frac{k_{FS,MPS}}{\sigma_F} + (1 - q) \cdot \frac{k_{FS,Mises}}{\sigma_F} \quad \text{mit } q = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{f_{W,\tau}}}{\sqrt{3} - 1}. \quad (3.33)$$

Es wird die gleiche Interpolationsmethode in Abhängigkeit von der Schubwechselfestigkeit  $f_{W,\tau}$  verwendet wie in [Wäch 22]. Diese Interpolation berücksichtigt durch die Schubwechselfestigkeit  $f_{W,\tau}$  den Einfluss der Duktilität des Werkstoffs. Vom Kriterium der maximalen Hauptdehnung, welches eher für spröde Werkstoffe zutrifft, werden höhere Werte des Quotienten  $k_{FS}/\sigma_F$  vorhergesagt. Dadurch steigt der Einfluss der Normalspannungen im Schädigungsparameter.

Sollten keine Parameter der Dehnungswöhlerlinie bekannt sein, müssen diese ebenfalls abgeschätzt werden. Für rein duktile Werkstoffe können diese zum Beispiel aus der Zugfestigkeit mit der „FKM Methode“ aus [Wäch 16] bestimmt werden. Für rein duktile Werkstoffe ( $f_{W,\tau} = 1/\sqrt{3}$ ) kommt in Gleichung (3.33) nur das von Mises Kriterium zur Anwendung. In diesem Fall lässt sich das Integral aus Gleichung (3.31) analytisch lösen. Werden ebenfalls die Parameter der Dehnungswöhlerlinie nach [Wäch 16] abgeschätzt, lässt sich für die drei Werkstoffgruppen, die aktuell in der FKM-Richtlinie Nichtlinear enthalten sind, eine Abschätzformel in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit angeben:

$$\begin{aligned} \frac{k_{FS}}{\sigma_F} &= \frac{0.4625}{\text{MPa}} \left( \frac{R_m}{\text{MPa}} \right)^{-0.897} && \text{für Stahl, } R_m = 121 \dots 2296 \\ \frac{k_{FS}}{\sigma_F} &= \frac{0.9006}{\text{MPa}} \left( \frac{R_m}{\text{MPa}} \right)^{-0.982} && \text{für Stahlguss, } R_m = 496 \dots 1144 \\ \frac{k_{FS}}{\sigma_F} &= \frac{0.1823}{\text{MPa}} \left( \frac{R_m}{\text{MPa}} \right)^{-0.742} && \text{für Aluknet, } R_m = 216 \dots 649. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Beim Lösen von Gleichung (3.31) wurde über den Lebensdauerbereich von  $N_1 = 10^3$  bis  $N_2 = 10^7$  integriert, um die Abschätzmethoden aus Gleichung (3.34) zu bestimmen.

Für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 liegen experimentelle Ergebnisse aus reiner Zug/Druck und reiner Torsionsbelastung vor. Der Quotient  $k_{FS}/\sigma_F$  wurde anhand dieser Versuchsergebnisse bestimmt und mit den Abschätzmethoden verglichen. Die Ergebnisse dieses Vergleichs sind in Abbildung 3.12 angegeben. Die gezeigten Kurven wurden mit angepasstem oder abgeschätztem  $k_{FS}/\sigma_F$  und bekannter Dehnungswöhlerlinie aus Gleichung (3.29) erzeugt.

Versuche aus Zug/Druck und Torsionsbelastung lassen sich für beide Werkstoffe in guter Näherung mit einer Wöhlerlinie darstellen. In beiden Fällen liegen die geschätzten Werte unter den an die Versuche angepassten Werten. Für S355 liegen die beiden erzeugten Wöhlerlinien dennoch sehr nahe zusammen. Beim Werkstoff EN-GJS-500-14 zeigt sich eine etwas größere Abweichung in den Wöhlerlinien. Diese ist jedoch bei Anwendung einer Abschätzmethode noch vertretbar.

Es liegen ebenfalls experimentelle Ergebnisse für den Feinkornbaustahl S460N und die Aluminiumknetlegierung AW-5083 vor. Diese wurden der Literatur [Sava 95, Hoff 05] entnommen. Für diese Werkstoffe wurde ebenfalls der Quotient  $k_{FS}/\sigma_F$  bestimmt und mit den Ergebnissen der Abschätzmethode verglichen, wie in Abbildung 3.12 dargestellt. Für die Baustähle S355 und S460N ergibt sich durch Auswertung der experimentellen Ergebnisse nahezu der gleiche Wert für  $k_{FS}/\sigma_F$ . Bei S460N wird jedoch  $k_{FS}/\sigma_F$  etwas stärker unterschätzt als bei S355. Für die Aluminiumknetlegierung AW-5083 wird  $k_{FS}/\sigma_F$  von der Abschätzmethode sehr gut approximiert. Es zeigt sich eine sehr enge Übereinstimmung zwischen beiden Schädigungsparameterwöhlerlinien.

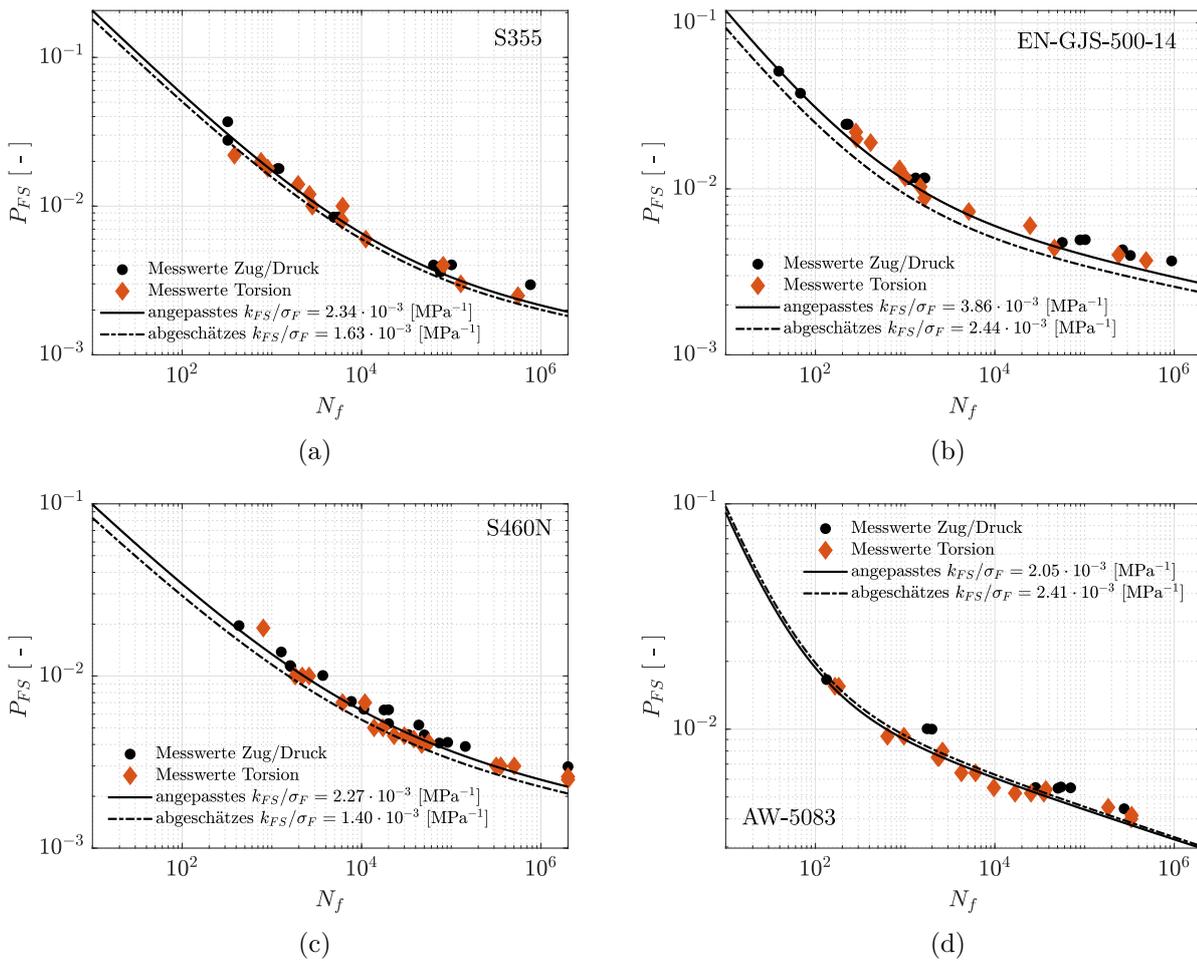


Abbildung 3.12: Vergleich zwischen den Schädigungsparameterwöhlerlinien für ein anhand von Versuchsergebnissen bestimmtes und abgeschätztes  $k_{FS}/\sigma_F$  für die Werkstoffe (a) S355, (b) EN-GJS-500-14, (c) S460N und (d) AW-5083

### Definition der Schädigungsparameterwöhlerlinie

In praktischen Anwendungen sind Werkstoffdaten wie die Parameter der Dehnungswöhlerlinie meistens nicht vorhanden oder sie sind teuer und aufwendig in ihrer Ermittlung. Die Schädigungsparameterwöhlerlinie des  $P_{FS}$  Parameters soll deshalb gemäß der FKM-Richtlinie Nichtlinear aus der Zugfestigkeit und der Werkstoffgruppe abgeschätzt werden können. Wie in der FKM-Richtlinie Nichtlinear wird die Schädigungsparameterwöhlerlinie mit einem bilinearen Ansatz abgebildet. Der bilineare Ansatz ist durch

$$N_{FS} = \begin{cases} N_{FS, \text{stütz}} \cdot \left( \frac{P_{FS}}{P_{FS, Z, WS}} \right)^{1/d_1} & \text{für } P_{FS} \geq P_{FS, Z, WS} \\ N_{FS, \text{stütz}} \cdot \left( \frac{P_{FS}}{P_{FS, Z, WS}} \right)^{1/d_2} & \text{für } P_{FS, D, WS} \leq P_{FS} < P_{FS, Z, WS} \\ \infty & \text{für } P_{FS} \leq P_{FS, D, WS} \end{cases} \quad (3.35)$$

angegeben und in Abbildung 3.13 dargestellt. Abgeschätzt oder festgelegt werden müssen die Stützstelle  $N_{FS, \text{stütz}}$  in Lebensdauern und die Stützstellen  $P_{FS, Z, WS}$  und  $P_{FS, D, WS}$  des Schädigungsparameters sowie die Steigungen  $d_1$  und  $d_2$  der beiden Abschnitte der Wöhlerlinie.

Für die drei Werkstoffgruppen aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear können die Parameter der Dehnungswöhlerlinie aus der Zugfestigkeit mit dem Verfahren nach Wächter [Wäch 16] abgeschätzt

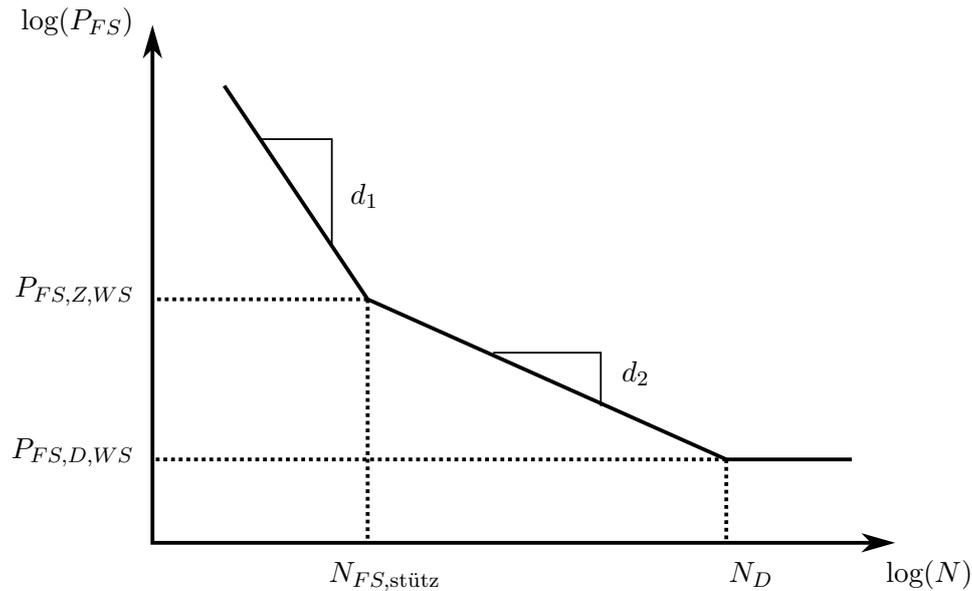


Abbildung 3.13: Darstellung des bilinearen Ansatzes der Schädigungsparameterwöhlerlinie für den Fatemi/Socie Parameter nach Gleichung (3.35)

werden. Aus dieser Abschätzung können mit Gleichung (3.29) Werte des Schädigungsparameters für bestimmte Lebensdauern berechnet werden. Die Abschätzung des Quotienten der Werkstoffparameter  $k_{FS}/\sigma_F$  wurde bereits oben in Gleichung (3.34) vorgestellt. Es muss noch bestimmt werden, welcher Stützpunkt  $N_{FS,stütz}$  verwendet werden soll, um den Knickpunkt der Schädigungsparameterwöhlerlinie zu definieren.

Die Wahl des Stützpunkts wurde anhand der Versuche mit konstanten Amplituden aus der Datenbank aus Kapitel 5 bestimmt. Der Stützpunkt  $P_{FS,Z,WS}$  am Schnittpunkt der beiden linearen Abschnitte wurde bei  $N_{FS,stütz} = 100$  definiert. Die Steigungen  $d_1$  und  $d_2$  werden zwischen den Stützpunkten bei  $N = 1$ ,  $N = 100$  und  $N = 10^5$  bestimmt:

$$\begin{aligned}
 N_{FS,stütz} &= 100, \\
 d_1 &= \frac{\log(P_{FS,100}) - \log(P_{FS,1})}{2}, \\
 d_2 &= \frac{\log(P_{FS,100000}) - \log(P_{FS,100})}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die dauerhaft ertragbaren Schwingspiele müssen aktuell noch nach [Bäum 90] werkstoffgruppenabhängig bestimmt werden. In Abbildung 3.14 wird ein Vergleich zwischen der geschätzten Schädigungsparameterwöhlerlinie und der Wöhlerlinie, ermittelt aus experimentellen Ergebnissen für den Baustahl S355, dargestellt. Für den Werkstoff S355 kann die Schädigungsparameterwöhlerlinie sehr gut mit der Abschätzmethode angenähert werden.

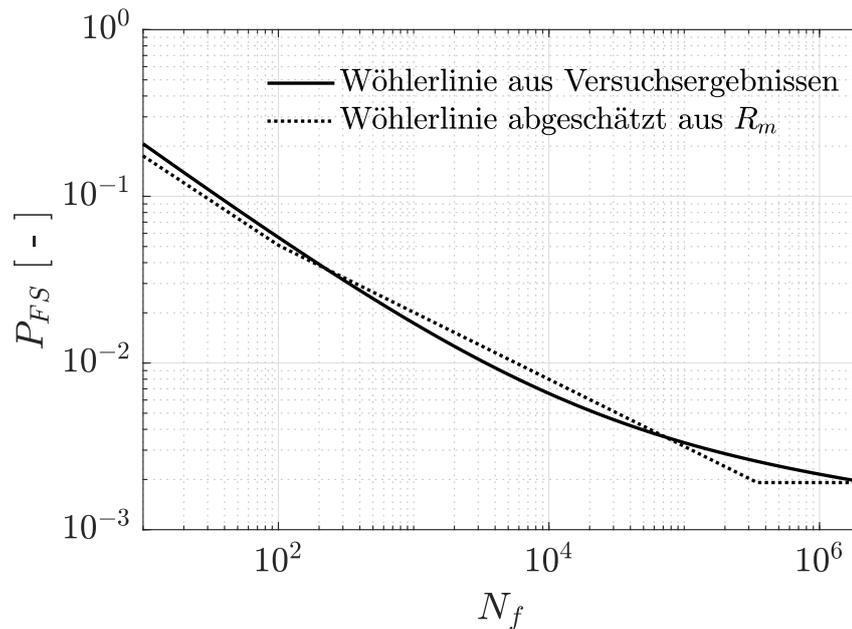


Abbildung 3.14: Vergleich zwischen der an Versuchsergebnisse angepassten und aus Zugfestigkeit abgeschätzten Schädigungsparameterwöhlerlinie für den Werkstoff S355

### Identifikation von Gleitungszyklen und Definition der Gleitungsamplitude

In einer beliebigen Schnittebene unter einer beliebigen Belastung treten im Allgemeinen zwei Gleitungscomponenten auf. Die beiden Componenten der Gleitung bilden einen Vektor, ebenso wie die Schubspannungen. Wenn der Vektor in der Schnittebene gezeichnet wird, bildet die Vektorspitze komplizierte Pfade, aus denen sich die Amplituden zunächst nicht eindeutig bestimmen lassen. Dies ist in Abbildung 3.15 schematisch dargestellt.

Für solche Fälle muss definiert werden, wie die Gleitungsamplituden bestimmt werden können. In der Literatur existieren einige Vorschläge, wie der Radius des kleinsten umschließenden Kreises [Papa 98], die längste Projektionsmethode [Grub 76] oder die Moment of Inertia Methode [Megg 12a]. Bei Vorliegen einer Betriebsbelastung ist es zusätzlich erforderlich, zu definieren, wann ein geschlossener Zyklus vorliegt, für den eine Amplitude bestimmt werden kann. Für die zuvor genannten Methoden

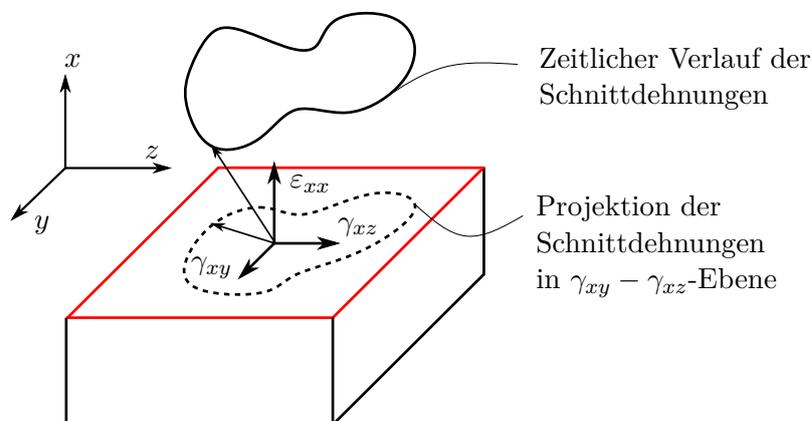


Abbildung 3.15: Verlauf der Schnittdehnungen in einer beliebigen Ebene während eines beliebigen Belastungszyklus

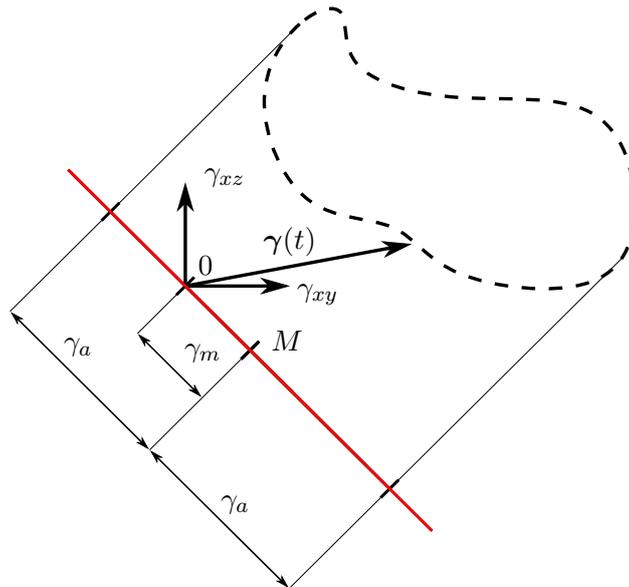


Abbildung 3.16: Verfahren der längsten Projektion zum Berechnen der Gleitungsamplitude

zur Amplitudendefinition erfordert dies die Anwendung einer mehrachsigen Zyklenzählung. Dafür existieren in der Literatur ebenfalls Methoden [Wang 96a, Megg 12b].

In diesem Kontext wird in der vorliegenden Arbeit ein Ansatz unter Verwendung des Verfahrens der längsten Projektion entwickelt. Dieser Ansatz dient dazu, die Historie der beiden auftretenden Komponenten der Gleitung in ein eindimensionales Signal zu transformieren. Diese Transformation ermöglicht wiederum die Anwendung der klassischen Rainflow-Zählung zur Identifikation von Belastungszyklen.

Abbildung 3.16 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Verfahrens der längsten Projektion. Das Verfahren wurde ursprünglich von [Grub 76] zur Identifikation von Schubspannungsamplituden vorgeschlagen, lässt sich aber analog für Gleitungen verwenden. Um die Gleitungsamplitude zu definieren, wird der Gleitungspfad auf alle Linien, die in der Schnittebene liegen und vom Ursprung  $O$  ausgehen, projiziert. Es wird angenommen, dass die Gleitungsamplitude gleich der halben Länge der längsten dieser Projektionen ist. In Abbildung 3.16 ist die maßgebende Projektionslinie in rot dargestellt. Durch die Projektion des Lastsignals auf eine einzelne Linie wird ein einachsiges Signal erzeugt, aus dem mit der Rainflow-Zählung Schädigungszyklen identifiziert werden können. Es muss jedoch neben der Iteration über die Schnittebenen in jeder Ebene eine weitere Iteration über die Richtung dieser Projektionen erfolgen. Dies erfordert einen hohen Rechenaufwand.

Um diesen Nachteil zu umgehen, werden nicht mehr alle möglichen Linien untersucht. Die Richtung der Projektion wird im Vorfeld festgelegt. Zur Festlegung der Projektionsrichtungen wird die Definition von Typ A und Typ B Rissen nach Brown und Miller verwendet [Brow 79, Brow 82]. Typ A Risse werden durch Belastungen entlang der freien Oberfläche in einer Richtung parallel zur Länge des Risses verursacht. Die Belastungsgeschichte wird also auf eine Linie tangential zur Bauteiloberfläche projiziert, siehe Abbildung 3.17.

Es lässt sich zeigen, dass der Fatemi/Socie Parameter dann nur in Ebenen untersucht werden muss, die nicht gegenüber der Bauteiloberfläche geneigt sind  $\psi = 0^\circ$ . Bei der in dieser Arbeit verwendeten Definition des Kerbkoordinatensystems, siehe Abschnitt 2.1, existiert in Ebenen mit  $\psi = 0^\circ$  nur eine Gleitungskomponente. Unter biaxialer Normalspannung führt die Scherspannung in den Schnittebenen dazu, dass Risse in die Tiefe wachsen. Diese Art von Rissen schneiden die Oberfläche in einem Winkel von  $\psi = 45^\circ$  (Typ B) [Soci 00]. Hier wird die Belastungsgeschichte auf eine Linie projiziert, die senkrecht auf der Tangente an die Bauteiloberfläche steht, siehe Abbildung 3.17. Reine Zugbelastung ruft in den jeweiligen Schnittebenen die gleiche Schublast für

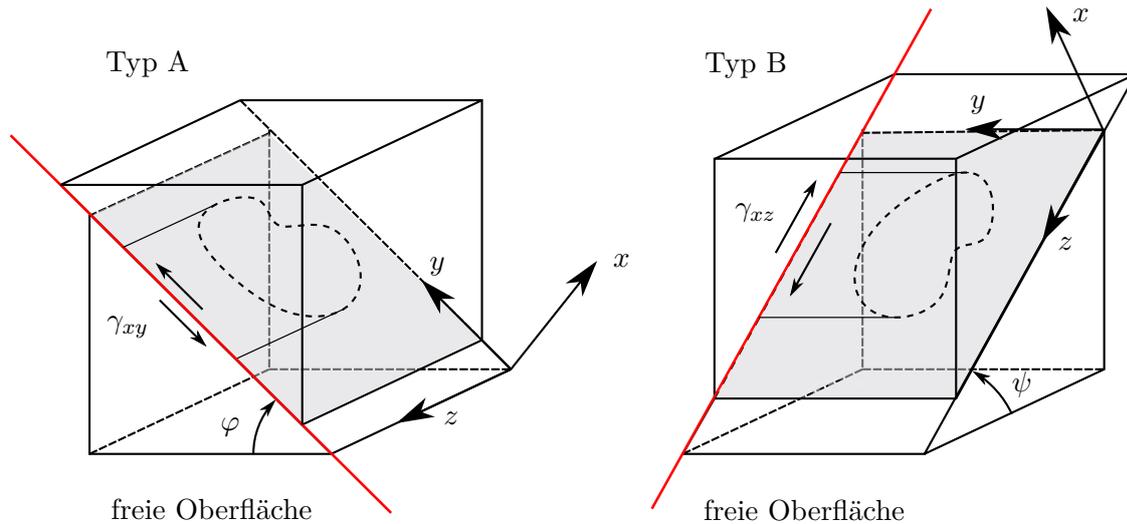


Abbildung 3.17: Schematische Darstellung von Typ A und Typ B Rissen für den Fatemi/Socie Schädigungsparameter

Typ A und Typ B Risse hervor und kann beide Rissarten zeigen. Bei kombinierter Zug-Torsions-Belastung treten immer Risse des Typs A auf. Unter einer beliebigen Belastung werden trotzdem immer beide Risstypen untersucht. Das bedeutet, es wird über den Winkel  $\varphi$  iteriert. Der Winkel  $\psi$  wird nur unter  $0^\circ$  (Typ A) und  $45^\circ$  (Typ B) betrachtet. In Bezug auf das in Abbildung 3.17 dargestellte Koordinatensystem in der Schnittebene entspricht die beschriebene Projektion jeweils einer Komponente der Gleitung. Anhand der Auswertung der Datenbank in Abschnitt 5.5 zeigt sich, dass die Beobachtungen von Brown und Miller von dem vorgestellten Verfahren eingehalten werden. Bei reiner Torsion oder kombinierter Last werden immer Typ A Risse vorhergesagt. Bei reiner Normalbelastung (biaxialer Zug in der Kerbe) werden immer Typ B Risse vorhergesagt. In [Papa 98] wird angemerkt, dass in Spezialfällen die längste Projektion zu keiner sinnvollen Definition von Mittelwerten führt. Da für den Fatemi/Socie Parameter nur die Amplituden der Gleitungen benötigt werden, spielt diese Schwäche hier keine Rolle.

Um das oben beschriebene Verfahren einzuordnen, wurde eine Methode zur mehrachsigen Zyklenzählung, die „modified Wang Brown Methode (MWB)“ [Megg 12b], implementiert. Gleitungsamplituden wurden dann mit Hilfe des kleinsten umschließenden Kreises [Papa 98] oder der „moment of inertia Methode (MOI)“ [Megg 12a] bewertet. Abbildung 3.18 zeigt den Verlauf der Gleitungsamplitude  $\gamma_a$  in Abhängigkeit von den Schnittwinkeln des kritischen Ebenen Verfahrens. Die Ermittlung der Gleitungsamplitude erfolgt für unterschiedliche Lastfälle sowohl durch die Anwendung der mehrachsigen Zyklenzählung (MWB-Methode) und die Amplitudenbestimmung mittels der „moment of inertia Methode“ (MOI) als auch durch die Verwendung des hier präsentierten Projektionsverfahrens in Kombination mit der Rainflow-Zählung (HCM). Die aufgebrachte Belastung umfasste eine Kombination von Zug- und Druckkräften sowie Torsion im  $\sigma - \tau$  Spannungszustand, wie er in dünnwandigen Rohrproben vorkommt. Es wurde das zyklische Werkstoffverhalten für einen Stahlwerkstoff mit einer Zugfestigkeit von  $R_m = 600$  MPa abgeschätzt.

Unabhängig von der vorliegenden Belastung ist festzustellen, dass bei Vorhandensein einer einzelnen Gleitungskomponente in der Schnittebene (z. B.  $\psi = 0^\circ$ ) beide Verfahren zu identischen Ergebnissen führen. In den Belastungsfällen Torsion und proportionale Belastung werden durch beide Verfahren identische kritische Ebenen und Gleitungsamplituden berechnet. Unter reiner Zug/Druck Belastung entstehen geringe Unterschiede in den berechneten Ebenen. Die MWB Methode identifiziert mehrere stark belastete Schnittebenen, die in das Bauteil geneigt sind. Diese werden durch das Projektionsverfahren nicht untersucht. Das vorgestellte Projektionsverfahren identifiziert vier identische

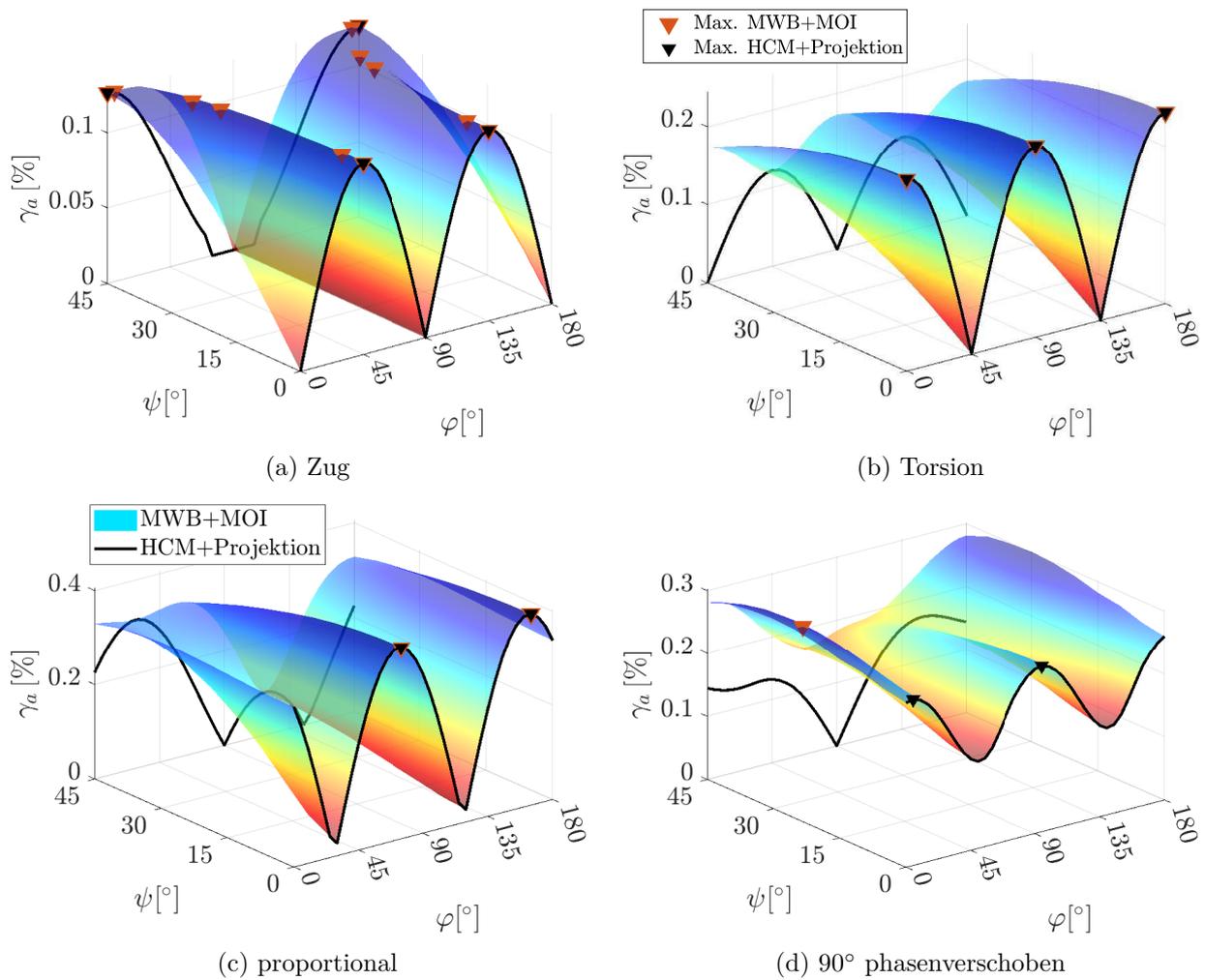


Abbildung 3.18: Gleitungsamplituden in Abhängigkeit der Schnittwinkel des kritischen Ebenen Verfahrens für verschiedene Lastfälle

Maxima der Gleitungsamplitude, jeweils zwei in Ebenen  $\psi = 0^\circ$  und  $\psi = 45^\circ$ . Die von den beiden Verfahren bestimmten Maxima der Gleitungsamplitude sind jedoch identisch.

Eine Abweichung der maximalen Gleitungsamplitude, lässt sich für  $90^\circ$  phasenverschobene Belastung beobachten. Mit einer mehrachsigen Zyklenzählung wird eine Amplitude von  $\gamma_a = 0.3\%$  ermittelt. Von der vorgestellten Projektionsmethode wird eine Amplitude von  $\gamma_a = 0.27\%$  berechnet. Die mehrachsige Zyklenzählung führt also zu konservativeren Ergebnissen. Für den berechneten Lastfall beträgt der daraus resultierende Unterschied in den rechnerischen Ermüdungslebensdauern 19%.

Abbildung 3.19 zeigt die Rechenzeit, die für eine kritische Ebenen Rechnung mit dem Fatemi/Socie Parameter benötigt wird, in Abhängigkeit von der Länge des Lastsignals. Die längste Zeit wird dabei in der Zyklenzählung verbracht. In Abbildung 3.19 wurde eine proportionale Lastfolge mit konstanten Amplituden vorgegeben. Die gleiche Rechnung wurde unter Vorgabe von immer mehr Datenpunkten im Lastsignal wiederholt. Zu erkennen ist, dass die Rechenzeit durch die mehrachsige Zyklenzählung (MWB+MOI) quadratisch mit der Länge des Lastsignals steigt, während bei einer Rainflow-Zählung (Projektion+HCM) lediglich eine lineare Abhängigkeit der Rechenzeit von der Länge des Lastsignals beobachtet wird. Für den Vergleich der Rechenzeiten wurde bei beiden Methoden dieselbe Anzahl an Schnittebenen untersucht. Für lange Last-Zeit-Reihen führt die mehrachsige Zyklenzählung zu nicht vertretbaren Rechenzeiten.

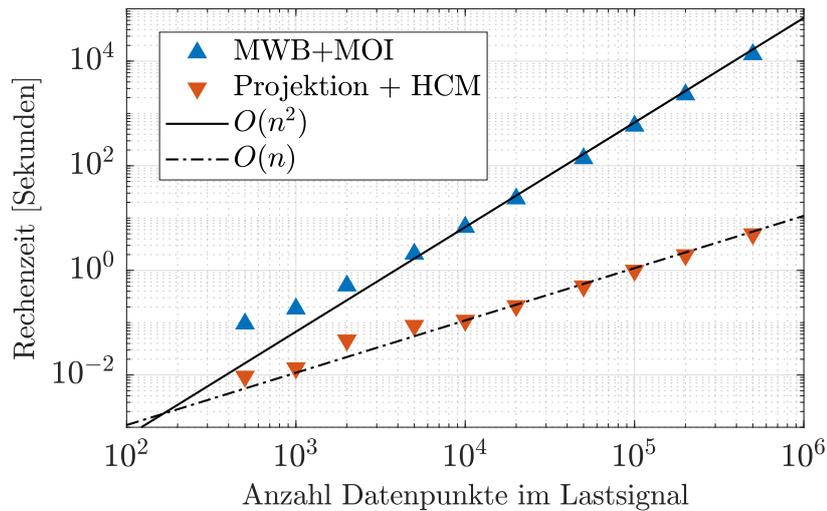


Abbildung 3.19: Vergleich der Rechenzeiten zwischen mehrachsiger Zyklen-Zählung (MWB+MOI) und dem vorgestellten Verfahren (Projektion+HCM) für eine Lebensdauerrechnung mit dem Fatemi/Socie Parameter

Weiterhin wurde im Rahmen einer Abschlussarbeit [Neum 21] die Treffsicherheit der Lebensdauerbewertung mit dem Fatemi/Socie Modell in Kombination mit der MWB Methode anhand der Datenbank aus Riess [Ries 19] untersucht. Die gleiche Datenbank wurde mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode ausgewertet [Kraf22]. Ein direkter Vergleich zeigt, dass beide Varianten nahezu gleiche Treffsicherheiten liefern. Durch eine mehrachsige Zyklenzählung und das Bewerten der Amplituden mittels des kleinsten umschließenden Kreises oder der Moment of Inertia Methode steigt der Rechenaufwand jedoch erheblich.

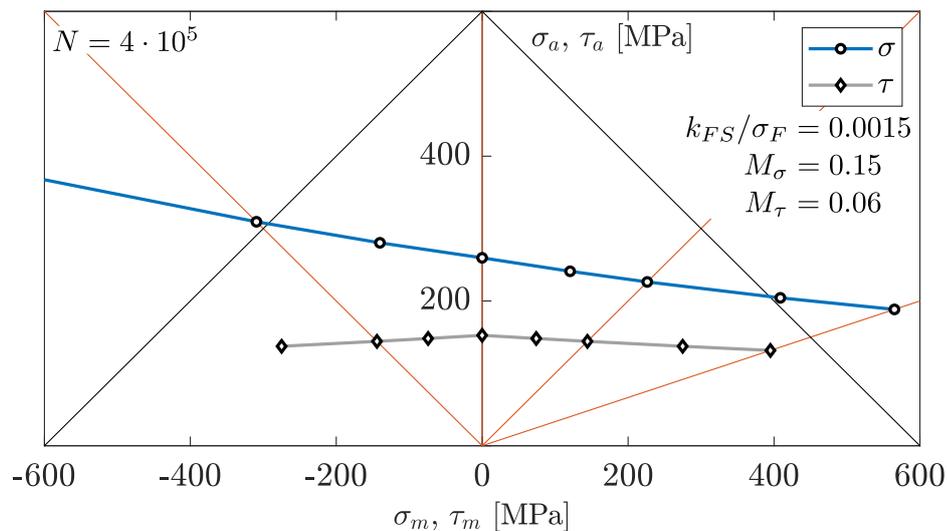
### Mittelspannungseinfluss

Im Fatemi/Socie Schädigungsparameter werden Mittelspannungen durch die während eines Gleitungszyklus auftretende maximale Normalspannung  $\sigma_{xx,max} = \sigma_{xx,a} + \sigma_{xx,m}$  berücksichtigt.

Es gibt keinen eigens dafür vorgesehenen Werkstoffparameter, um eine Mittelspannungsempfindlichkeit abzubilden. Wird die Definition des Schädigungsparameters aus Gleichung (3.27) betrachtet, fällt auf, dass der Einfluss von Mittelspannungen über den Werkstoffparameter  $k_{FS}/\sigma_F$  indirekt eingestellt werden kann. Dieser Parameter wird allerdings eigentlich dazu verwendet, um Versuche aus reiner Zug/Druck und reiner Torsionsbelastung durch eine Wöhlerlinie darstellen zu können.

In Abbildung 3.20 ist das Haigh-Diagramm für den  $P_{FS}$  Schädigungsparameter dargestellt. Alle Werkstoffparameter wurden für die Werkstoffgruppe Stahl mit einer Zugfestigkeit  $R_m = 600$  MPa abgeschätzt. Es wurde rein elastisches Werkstoffverhalten angenommen. Für diesen Werkstoff gilt nach FKM-Richtlinie Nichtlinear eine Mittelspannungsempfindlichkeit von  $M_\sigma = 0.11$ . Von  $P_{FS}$  wird ein  $M_\sigma = 0.15$  berechnet. Zwischen den Mittelspannungsempfindlichkeiten bei Vorgabe von positiver oder negativer Zug- bzw. Druckmittelspannung besteht, im Gegensatz zum  $P_{RAM}$  Parameter, kein Unterschied. Die Lebensdauerlinie im Haigh-Diagramm für Normalbelastungen ist annähernd eine Gerade.

Für die Vorgabe einer reinen Schubbelastung wird korrekt dargestellt, dass das Vorzeichen einer Schubmittelspannung keinen Einfluss auf die Ermüdungslebensdauer besitzt. Ebenfalls korrekt dargestellt wird, dass die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\tau = 0.06$  deutlich kleiner ist als bei Normalbelastung.

Abbildung 3.20: Haigh-Diagramm erzeugt mit dem Schädigungsparameter  $P_{FS}$ 

### 3.2.6. Kurzrisssmodell

Innerhalb der FKM-Richtlinie Nichtlinear wird mit dem Parameter  $P_{RAJ}$  nach [Vorm 89] ein Schädigungsparameter verwendet, der auf der Bruchmechanik für kurze Risse basiert. Dieser lässt sich jedoch nicht ohne weitere Modifikationen bei mehrachsiger nichtproportionaler Lasten anwenden. Im Folgenden wird ein Schädigungsparameter  $P_Z$  vorgestellt, der ebenfalls auf der Bruchmechanik kurzer Risse basiert und bei mehrachsiger nichtproportionaler Betriebsbelastung angewendet werden kann. Das verwendete Kurzrisssmodell basiert auf den Arbeiten von Vormwald [Vorm 89], Savaidis [Sava 95] und Döring [Döri 06]. Es wurde von Hertel [Hert 11, Hert 14, Hert 16] auf die Anwendung bei nichtproportionalen Betriebsbelastungen erweitert. Im Folgenden werden die getroffenen Annahmen des Kurzrisssmodells sowie die Definition des risslängenunabhängigen Schädigungsparameters  $P_Z$  erläutert. Die Anrisslebensdauer eines Bauteils entspricht der Rissfortschrittslebensdauer eines halbelliptischen Oberflächenrisses mit Risttiefe  $a$  und Oberflächenrisslänge  $2c$ . Die Geometrie des Risses ist in Abbildung 3.21 dargestellt.

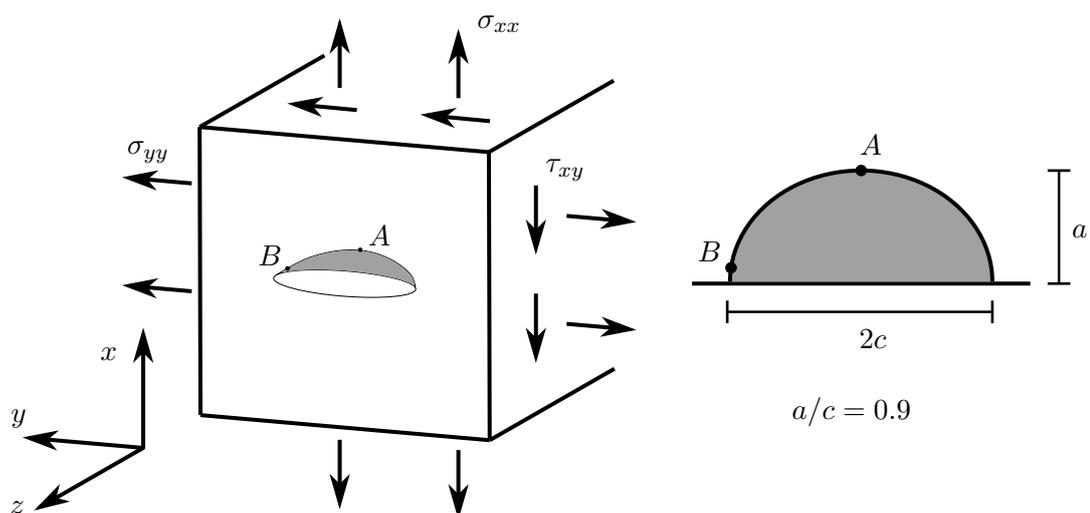


Abbildung 3.21: Geometrie des angenommenen kurzen Risses nach [Hert 16]

Die Rissfortschrittsphase bezeichnet die Phase des Risswachstums zwischen einer mikrostrukturellen Anfangsrisstiefe  $a_0$  und einer festzulegenden Endrisstiefe  $a_e$ . Die Endrislänge wird bei einer Oberflächenrislänge von  $2c_e = 0.5$  mm festgelegt. Die Phase der Rissinitiierung wird in der Anfangsrislänge integral erfasst. Betrachtet wird nur ein einzelner vorhandener Ermüdungsris. Die Interaktion mehrerer Risse wird vernachlässigt. Angenommen wird ebenfalls, dass der Riss während seines Wachstums eben bleibt, also nicht verzweigt oder abknickt. Unter diesen Annahmen wird der Riss unter verschiedenen Orientierungen in das Bauteil eingebracht. Das Kurzrismodell kann dann als ein kritisches Ebenen Modell aufgefasst werden. Die kritische Ebene ist die Ebene mit der kürzesten Rissfortschrittsdauer. Als Rissfortschrittsgleichung wird ein Potenzgesetz vom Paris-Typ verwendet:

$$\begin{aligned}
\text{Modus I: } da/dn &= C_I Z_{I,A,eff}^{m_{Z,I}} && \text{für } Z_{I,A,eff} > Z_{I,eff,th,KR} \\
\text{Modus II: } da/dn &= C_{II} Z_{II,A,eff}^{m_{Z,II}} && \text{für } Z_{II,A,eff} > Z_{II,eff,th,KR} \\
\text{Modus III: } da/dn &= C_{III} Z_{III,A,eff}^{m_{Z,III}} && \text{für } Z_{III,A,eff} > Z_{III,eff,th,KR}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Gleichung (3.37) stellt die Rissfortschrittsgleichung für die Risstiefe  $a$  am Punkt A dar. Der Werkstoff wird durch die Rissfortschrittsparameter  $C_i$  und  $m_{Z,i}$  für jeden Rissöffnungsmodus beschrieben.  $Z_{eff}$  ist ein Maß für die wirksame zyklische Risspitzenbeanspruchung. Die Indizes bezeichnen den jeweiligen Rissöffnungsmodus. Es kommt nur zum Rissfortschritt, wenn die Risspitzenbeanspruchung über einem Kurzrissschwellenwert  $Z_{i,eff,th,KR}$  liegt.

Die Risspitzenbeanspruchung  $Z_{eff}$  basiert auf dem zyklischen J-Integral nach Wüthrich [Wüth 82] und Lamba [Lamb 75]. Sie stellt eine Erweiterung des von Rice [Rice 68] für monotone Belastungen vorgestellten wegunabhängigen J-Integrals dar. Die Bezeichnung  $Z$  wurde von Wüthrich [Wüth 82] übernommen. Unter nichtproportionaler Beanspruchung können alle Rissöffnungsmoden gleichzeitig auftreten. Dadurch besteht eine Mixed-Mode-Belastung. In Fällen einer Mixed-Mode-Beanspruchung wurde von Ishikawa et al. [Ishi 80] und Bui [Bui 83] gezeigt, dass es möglich ist, das J-Integral in drei Anteile aufzuspalten, die dem jeweiligen Rissöffnungsmodus zugeordnet werden können. Von Hertel [Hert 03a, Hert 04] wurde diese Aufspaltung auf Fälle proportionaler und nichtproportionaler zyklischer Beanspruchung angewandt.

Weiterhin werden zur Berechnung des Rissfortschritts Mixed-Mode-Hypothesen benötigt. Vereinfachend wird angenommen, dass jeder Rissöffnungsmodus unabhängig zum Rissfortschritt beiträgt. Von Hertel [Hert 16] wird außerdem angenommen, dass sich jeder Rissöffnungsmodus durch die gleichen Rissfortschrittsparameter und den gleichen Schwellenwert

$$\begin{aligned}
m_Z &= m_{Z,I} = m_{Z,II} = m_{Z,III} \\
C &= C_I = C_{II} = C_{III} \\
Z_{eff,th,KR} &= Z_{I,eff,th,KR} = Z_{II,eff,th,KR} = Z_{III,eff,th,KR}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

beschreiben lässt. Das unterschiedliche Rissfortschrittsverhalten der einzelnen Moden reduziert sich auf die Unterschiede in der Risspitzenbeanspruchung. Dies ist vor allem im Hinblick auf die Identifizierung von Werkstoffparametern eine erhebliche Vereinfachung.

Darüber hinaus können für den Punkt B, siehe Abbildung 3.21, und die Oberflächenrislänge  $c$  gleiche Rissfortschrittsgesetze formuliert werden wie in Gleichung (3.37). In homogenen Spannungsfeldern neigen Risse dazu, selbständig zu wachsen. Das Halbachsenverhältnis  $a/c$  des halb elliptischen Risses bleibt konstant. In inhomogenen Spannungsfeldern, wie sie im Einflussbereich von Kerben vorliegen, kann sich jedoch das  $a/c$  Verhältnis ändern, wodurch der Rissfortschritt von  $a$  und  $c$  nicht mehr unabhängig betrachtet werden kann.

### 3.2.6.1. Risspitzenbeanspruchung

Im Folgenden wird auf die Ermittlung der Risspitzenbeanspruchungen eingegangen. Das zyklische J-Integral wird durch Näherungslösungen bestimmt, da selbst für einfache Beanspruchungen eine

analytische Lösung nicht vorliegt. In der Literatur existieren mehrere Näherungslösungen für bestimmte Risskonfigurationen [Dowl77, Shih76, McCl197, Hosh87].

Es wird die Näherungslösung nach Hoshide und Socie [Hosh87] verwendet. Die Näherung wird in [Döri06] formal auf Modus II und III Belastungen erweitert. Durch

$$\begin{aligned}
 Z_{I,A,eff} &= 2\pi Y_{I,A}^2 \Delta W_{xx,eff} a, & \text{mit } \Delta W_{x,eff} &= \int_{\varepsilon_{x,max}}^{\varepsilon_{x,cl}} (\sigma_{xx} - \sigma_{xx,0}) d\varepsilon_{xx} \\
 Z_{II,A,eff} &= \frac{\pi}{1 + \nu_e} Y_{II,A}^2 \Delta W_{xz} U_{eff} a, & \text{mit } \Delta W_{xz} &= \int_{\gamma_{xz,max}}^{\gamma_{xz,min}} (\sigma_{xz} - \sigma_{xz,0}) d\gamma_{xz} \\
 Z_{III,A,eff} &= \pi Y_{III,A}^2 \Delta W_{xy} U_{eff} a, & \text{mit } \Delta W_{xy} &= \int_{\gamma_{xy,max}}^{\gamma_{xy,min}} (\sigma_{xy} - \sigma_{xy,0}) d\gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

ist diese Näherung des zyklischen J-Integrals für den tiefsten Punkt des Risses (Punkt A, siehe Abbildung 3.21) gegeben. Die Geometriefaktoren  $Y_{i,A} = Y_{i,A}(a/c)$  hängen dabei von der Rissgeometrie ab. Effektive Schwingweiten werden auf Riss schließen zurückgeführt. Für den Rissfortschritt ist nur die Phase eines Schwingenspiels relevant, während der der Riss geöffnet ist. Es wird daher nur der Anteil der Verzerrungsenergiegedichte  $\Delta W_{ij}$  berücksichtigt, der während der Phase des geöffneten Risses auftritt. Dazu wird für Modus I Rissöffnen die effektive Verzerrungsenergiegedichte  $\Delta W_{x,eff}$  durch die Wahl der Integrationsgrenzen von der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{x,max}$  bis zur Riss schließdehnung  $\varepsilon_{x,cl}$  gebildet. Für Modus II und III wird Riss schließen über den Faktor  $U_{eff}$  berücksichtigt. Diese Näherung des zyklischen J-Integrals ist für nichtproportionale Lasten geeignet. Unter nichtproportionaler Belastung hängt die Form der Hysterese von der Beanspruchung ab. Es lässt sich keine allgemeingültige Näherungsformel angeben. Die Verzerrungsenergiegedichte wird dann durch numerische Integration über den absteigenden Hystereseast gebildet. Dazu wird die Trapezregel verwendet.

Als Referenzspannungen  $\sigma_{xx,0}$ ,  $\sigma_{xy,0}$ ,  $\sigma_{xz,0}$  werden die Spannungen definiert, die zeitgleich mit den Umkehrpunkten der Dehnungen auftreten. Die Schwingspielidentifikation erfolgt auf Basis der Dehnungen parallel für alle drei in der Schnittebene auftretenden Dehnungen. Es müssen also drei unabhängige Rainflow-Zählungen durchgeführt werden. Bei rein elastischem Werkstoffverhalten lässt sich aus Gleichung (3.39) der bekannte Zusammenhang zwischen J-Integral und Spannungintensitätsfaktor ableiten. Bei inhomogenen Beanspruchungsfeldern, wie sie im Einflussbereich von Kerben auftreten, kann sich das Halbachsenverhältnis des Risses  $a/c$  ändern. Es muss zusätzlich das Wachstum der Risslänge  $c$  betrachtet werden. Eine analoge Riss spitzenbeanspruchung, wie in Gleichung (3.39), wird auch für einen oberflächennahen Punkt B definiert. Hier ändert sich lediglich die Zuordnung der Verzerrungsenergiegedichten für Modus II und III. Außerdem müssen Geometriefaktoren  $Y_{i,B}$  für den Punkt B verwendet werden. Der Punkt B wurde um  $10^\circ$  versetzt zur Oberfläche gewählt, siehe Abbildung 3.21, da am Schnittpunkt zwischen Riss frontlinie und Oberfläche keine  $1/\sqrt{r}$ -Singularität vorliegt und Geometriefaktoren nicht bestimmt werden können.

### 3.2.6.2. Effektive Schwingweite für Modus I Beanspruchungen

Die Berücksichtigung von Reihenfolgeeffekten erfolgt im Kurzrisssmodell über die effektiven Schwingweiten der einzelnen Rissöffnungsmoden. Für Modus I ist dabei die Ermittlung der Riss schließdehnung  $\varepsilon_{cl}$  als Integrationsgrenze für  $\Delta W_{xx,eff}$  von Bedeutung, siehe Gleichung (3.39). Zum Ermitteln der Rissöffnungs-  $\varepsilon_{op}$  und Riss schließdehnung  $\varepsilon_{cl}$  für Modus I Rissöffnen wird der von Vormwald [Vorm89] für einachsige Beanspruchungen vorgestellte und von Döring [Döri06] auf mehrachsige Beanspruchungen erweiterte Algorithmus verwendet. Auf Grundlage der vereinfachten Annahme, dass sich Risse bei gleichen Dehnungen öffnen und schließen  $\varepsilon_{op} = \varepsilon_{cl}$ , lässt sich der Zeitpunkt des Riss schließens aus der Rissöffnungsspannung bestimmen. Eine empirische Gleichung zur Bestimmung der Rissöffnungsspannung wird von Newman [Newm84] vorgeschlagen. Döring [Döri06] erweitert diese auf mehrachsige Beanspruchungen:

$$\frac{\sigma_{x,op}}{\sigma_{x,max}} = \begin{cases} A_0 + A_1 R_{eff} + A_2 R_{eff}^2 + A_3 R_{eff}^3 & \text{für } R_{eff} \geq 0 \\ A_0 + A_1 R_{eff} & \text{für } R_{eff} < 0 \end{cases}$$

mit

$$A_0 = 0.535 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max,eff}}{\sigma_F}\right) + a_{mitt} + a_{tors} \left(1 - \frac{\sigma_{v,max}}{\sigma_{max,eff}}\right), \quad (3.40)$$

$$A_1 = 0.344 \frac{\sigma_{max,eff}}{\sigma_F} + a_{mitt},$$

$$A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_3,$$

$$A_3 = 2A_0 + A_1 - 1.$$

Der von Vormwald [Vorm 94] eingeführte Werkstoffparameter  $a_{mitt}$  berücksichtigt den Einfluss von Mittelspannungen auf das Rissöffnungsverhalten. Hingegen bezieht der Werkstoffparameter  $a_{tors}$  den Einfluss von Schubspannungen auf das Rissöffnungsverhalten mit ein. Die Fließspannung wird nach Vormwald [Vorm 89] auf den Mittelwert von Zugfestigkeit  $R_m$  und zyklischer Proportionalitätsgrenze  $R'_{p,0.2}$  gesetzt,  $\sigma_F = 1/2 (R_m + R'_{p,0.2})$ . Die Vergleichsspannung  $\sigma_{v,max}$  ist die vorzeichenbehaftete von Mises Vergleichsspannung zum Zeitpunkt, an dem die maximale Normalspannung in der Schnittebene  $\sigma_{xx,max}$  auftritt. Außerdem wird eine in der Schnittebene wirksame Vergleichsspannung  $\sigma_{max,eff}$  aus den Schnittspannungen gebildet:

$$\begin{aligned} \sigma_{v,max} &= \frac{\sigma_{xx,max}}{|\sigma_{xx,max}|} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx,max} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx,max} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 \right] + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}, \\ \sigma_{max,eff} &= \frac{\sigma_{xx,max}}{|\sigma_{xx,max}|} \sqrt{\sigma_{xx,max}^2 + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Das wirksame  $R$ -Verhältnis  $R_{eff}$  entspricht dem wahren  $R$ -Verhältnis für  $R \geq 0$ . Für alle anderen Fälle wird es durch die definierten Vergleichsspannungen skaliert:

$$R_{eff} = \begin{cases} R = \frac{\sigma_{x,min}}{\sigma_{x,max}} & \text{für } R \geq 0 \\ R \frac{\sigma_{v,max}}{\sigma_{max,eff}} & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.42)$$

Mit der gefundenen Rissöffnungsspannung kann die Rissöffnungsdehnung bestimmt werden, welche sich unter einstufiger Belastung einstellt  $\varepsilon_{op,einst}$ . Bei nichtproportionaler Belastung kann der eindeutige Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen im elastisch-plastischen Bereich verloren gehen. Es wird dann stets das kleinste mögliche Dehnungsniveau für Rissöffnen gewählt. Die Bestimmung der Rissöffnungsdehnung erfolgt mit dem zeitlich diskretisierten Spannungs-Dehnungs-Verlauf. Zwischen zwei Zeitpunkten wird linear interpoliert. Die Rissöffnungsdehnung wird am aufsteigenden Hystereseast bestimmt.

Das plastizitätsinduzierte transiente Riss-schließverhalten wird mit dem in Vormwald [Vorm 89] beschriebenen Algorithmus berechnet. Der Algorithmus wird hier auf die in der Schnittebene wirkenden Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  und Normaldehnungen  $\varepsilon_{xx}$  angewendet. Ansonsten besteht kein Unterschied zum in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] beschriebenen Vorgehen zum Berechnen der transienten Riss-schließdehnung beim Parameter  $P_{RAJ}$ .

### 3.2.6.3. Effektive Schwingweite für Modus II & III Beanspruchungen

Hoffmeyer [Hoff 05] beobachtet bei Beanspruchung im Modus II oder Modus III eine Einschränkung des Abgleitens der oberen und unteren Rissufer. Eine senkrecht zum Riss wirkende Drucknormalspannung verstärkte diesen Effekt, während eine Zugnormalspannung ihn abschwächte. Döring

[Döri 06] postulierte, dass je nach Wirkung der Normalspannung auf den Risskanten reibungsbedingte Spannungen  $\tau_{reib}$  entstehen, welche das seitliche Verschieben der Risskanten beeinträchtigen. Die Näherungslösungen für das zyklische J-Integral gemäß Gleichung (3.39) sind nur für unbelastete Rissufer gültig. Um die beobachteten Effekte in den Modi II und III zu berücksichtigen, ist eine Korrektur dieser Gleichungen erforderlich. Döring [Döri 06] schlägt einen spannungsbasierten empirischen Korrekturfaktor  $U_{eff}$  vor. Von Hertel [Hert 16] wird  $U_{eff}$  durch das Verhältnis der Risspitzenverschiebung  $\Delta CTSD$  einer durch Schubspannung belasteten Mittenrisscheibe mit und ohne Reibschubspannungen auf dem Rissufer bestimmt:

$$U_{eff} = \frac{\Delta CTSD_{reib}}{\Delta CTSD}. \quad (3.43)$$

Becker und Gross [Beck 87, Beck 88] geben eine analytische Lösung für die Risspitzenverschiebung der durch Schubspannung belasteten Mittenrisscheibe an. Für die zusätzlich durch Reibung belastete Mittenrisscheibe wird vereinfachend angenommen, dass sich die wirksame Schubspannung um die Reibspannung  $\tau_{reib}$  reduziert. Der Abminderungsfaktor  $U_{eff}$  wird dann aus

$$U_{eff} = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau_a \leq \tau_{reib} \\ 1 & \text{für } \tau_a \geq \tau_F \\ \frac{\ln \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_a - \tau_{reib}}{\tau_F - \tau_{reib}} \right) \right]}{\ln \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_a}{\tau_F} \right) \right]} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.44)$$

berechnet. Außerdem wird der Riss als vollständig geschlossen angesehen, wenn die Reibspannung größer als die Amplitude der Schubspannung ist. Er wird als völlig geöffnet angesehen, wenn die Amplitude der Schubspannung größer als die Schubfließspannung  $\tau_F$  ist. Für die Schwingweite der Schubspannung wird jeweils die mit dem Rissöffnungsmodus assoziierte Schubspannung verwendet. Um den Abminderungsfaktor für  $\Delta W_{xy}$  zu berechnen, wird  $\tau = \sigma_{xy}$  verwendet. Für  $\Delta W_{xz}$  wird dann  $\tau = \sigma_{xz}$  eingesetzt. Die Schubfließspannung wird vereinfachend aus dem von Mises Kriterium bestimmt  $\tau_F = \sigma_F / \sqrt{3}$ . Die Reibspannung  $\tau_{reib}$  ergibt sich aus der mittleren Normalspannung während eines Schubverzerrungsschwingspiels:

$$\tau_{reib} = \langle \tau_{akt} - \mu \sigma_{x,m} \rangle. \quad (3.45)$$

Durch sie wird der Einfluss von Normalspannungen auf das Rissöffnen berücksichtigt. Unter Zugnormalspannungen wird sich der Riss öffnen und es entsteht keine Reibschubspannung. Unter Druck wird sich dieser Effekt umkehren. Die Macaulay-Klammer sorgt dafür, dass nur positive Reibschubspannungen berücksichtigt werden. Die Schubspannung  $\tau_{akt}$  ist ein Werkstoffparameter. Sie stellt einen Schwellenwert dar. Bevor Ableiten der Rissufer stattfindet, muss zunächst dieser Schwellenwert überwunden werden. Der Einfluss der Normalspannung wird über den Werkstoffparameter  $\mu$  skaliert. Er kann als Reibbeiwert der Rissufer interpretiert werden.

#### 3.2.6.4. Schwellenwert für Risswachstum

Liegen die effektiven Risspitzenbeanspruchungen unterhalb eines Schwellenwerts, findet kein Rissfortschritt statt. Der Schwellenwert für kurze Risse  $Z_{eff,th,KR}$  ist abhängig von der Risslänge. Er geht mit steigender Risslänge in den Schwellenwert für lange Risse  $Z_{eff,th}$  über. In Vormwald [Vorm 89] wird

$$Z_{eff,th,KR} = Z_{eff,th} \frac{a}{a + l^*} \quad (3.46)$$

zum Bestimmen des Kurzrisschwellenwerts angegeben. Die Hilfsgröße  $l^*$  kann aus

$$l^* = \frac{Z_{eff,th}}{P_{Z,D,0}} - a_0 \quad (3.47)$$

bestimmt werden [Vorm 89].  $P_{Z,D,0}$  ist die Dauerfestigkeit eines noch zu definierenden Schädigungsparameters auf Basis des J-Integrals. Zum Start der Rissfortschrittsrechnung kann der Schwellenwert dann aus der Dauerfestigkeit bestimmt werden,  $Z_{eff,th,KR}(a_0) = P_{Z,D,0} \cdot a_0$ . Der Schwellenwert für das Stehenbleiben langer Risse lässt sich nach Vormwald [Vorm 89] aus dem Elastizitätsmodul abschätzen:

$$Z_{eff,th} = \frac{E}{5 \cdot 10^6} \text{ mm.} \quad (3.48)$$

### 3.2.6.5. Kurzrisswachstum im Einflussbereich von Kerben

Die bisherigen Gleichungen des Kurzrissmodells gelten für homogene Beanspruchungsfelder. Von Vormwald [Vorm 89] wird für die Beschreibung des Rissfortschrittsverhaltens kurzer Risse in inhomogenen Beanspruchungsfeldern, wie sie im Kerbgrund oder unter einer Biegebelastung vorliegen, vorgeschlagen, die für homogene Beanspruchungen geltenden Näherungen des zyklischen J-Integrals durch einen von der Risslänge abhängigen Geometriefaktor zu modifizieren. Dazu werden von Vormwald [Vorm 89] Näherungslösungen für den Spannungsintensitätsfaktor eines halbelliptischen Oberflächenrisses in einer durch Biegung belasteten Platte von Raju und Newman [Raju 79] verwendet. Die Plattendicke  $t$  wird dabei so eingestellt, dass der Spannungsgradient in der Platte unter Biegung dem Spannungsgradient einer gekerbten Struktur mit Kerbradius  $\rho$  entspricht.

Von Hertel [Hert 16] wird dieser Ansatz aufgegriffen. Zur Übertragung des Kurzrissmodells auf die Anwendung in inhomogenen Beanspruchungsfeldern werden die Geometriefaktoren aus Gleichung (3.39) nicht mehr nur von der Rissform, das heißt vom Halbachsenverhältnis  $a/c$ , sondern zusätzlich auch vom bezogenen Spannungsgradienten abhängig.

Schijve [Schi 82] zeigt, dass der Spannungsintensitätsfaktor in Kerben maßgeblich von der Kerbspannung und dem Kerbradius abhängt. Lukas [Luká 87] gibt empirische Gleichungen für den Spannungsintensitätsfaktor am tiefsten Punkt eines halbelliptischen Oberflächenrisses in einer Kerbe an. Dieser hängt nur von der Risstiefe  $a$ , dem Verhältnis von Risstiefe und Kerbradius  $a/\rho$  und dem Halbachsenverhältnis  $a/c$  ab. Hertel [Hert 16] schlussfolgert, dass der Geometriefaktor für kurze Risse hauptsächlich vom Verhältnis der Risstiefe zum Kerbradius  $a/\rho$  und der Rissform abhängig ist. Gesucht werden die in Gleichung (3.49) angegebenen Geometriefaktoren für die drei Rissöffnungsmoden an den Stellen A und B der Rissfront.

$$Y_{i,A/B} = Y_{i,A/B} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right) \quad (3.49)$$

Die Geometriefaktoren nach Gleichung (3.49) wurden von Hertel [Hert 16] für mehrere  $a/c$  und  $a/\rho$  Verhältnisse und linear elastisches Werkstoffverhalten numerisch mit der Finiten-Elemente-Methode bestimmt. Zwischenwerte werden interpoliert. Alle zur Interpolation von Zwischenwerten nötigen Stützstellen der Geometriefaktoren aus Gleichung (3.49) sind in [Hert 16] angegeben. Die Grenzen des aufgebrauchten bezogenen Spannungsgradienten werden mit  $G_\sigma \leq 33 \text{ mm}^{-1}$  und  $G_\tau \leq 17 \text{ mm}^{-1}$  angegeben, was für die meisten technischen Anwendungen genügen sollte. Bei der Berechnung der Geometriefaktoren wurde sich auf die Definition von Typ A und Typ B Rissen nach Brown und Miller [Brow 79, Brow 82] beschränkt, siehe Abbildung 3.17. Das bedeutet, für die kritische Ebenen Rechnung werden nur Typ A und Typ B Risse unter Winkeln  $\psi = 0^\circ$  und  $\psi = 45^\circ$  untersucht.

Bei der Berechnung der Geometriefaktoren wurden inhomogene Beanspruchungsfelder mithilfe von Spannungsverläufen, welche in schlitzartigen Innenkerben nach Creager und Paris [Crea 67] vorliegen, vorgegeben. Anhand dieser Spannungsverläufe können die Beziehungen

$$G_{\sigma} = \frac{2}{\rho}, \quad G_{\tau} = \frac{1}{\rho} \quad (3.50)$$

zwischen den bezogenen Spannungsgradienten und fiktiven Kerbradien  $\rho$  hergeleitet werden. Die Geometriefaktoren wurden unter Annahme von linear elastischem Werkstoffverhalten bestimmt. Durch plastische Verformung im Kerbgrund sinkt der Spannungsgradient im Vergleich zur elastischen Lösung, während der Dehnungsgradient steigt.

Der Einfluss der Geometriefaktoren auf die Näherung des zyklischen J-Integrals wurde von Hertel [Hert 16] anhand einer hyperbolischen Umlaufkerbe mit halbkreisförmigem Oberflächenriss unter Zug/Druck und Torsionsbeanspruchung mit elastisch-plastischen FE-Rechnungen numerisch untersucht. Die Genauigkeit der Näherung auf Basis der elastisch bestimmten Geometriefaktoren wird, vor allem im Zeit- und Dauerfestigkeitsbereich, als sehr genau eingeschätzt. Erst im Kurzzeitfestigkeitsbereich  $\varepsilon_v > 1\%$  werden größere Abweichungen der J-Integral Näherung (im Bereich von 20% im Vergleich zur FE-Lösung) beobachtet.

Einflüsse von inhomogenen Beanspruchungsfeldern auf das Risssschließen werden im Kurzrisssmodell aktuell nicht betrachtet.

### 3.2.6.6. Risslängenunabhängiger Schädigungsparameter

Wie bei  $P_{RAJ}$  wird die schwingenspielweise Integration der Rissfortschrittsgleichung durch eine lineare Schadensakkumulationsrechnung ersetzt. Das bietet vor allem im Hinblick auf die Rechenzeit große Vorteile. Dazu muss ein von der Risslänge unabhängiger Schädigungsparameter definiert werden. Der Schädigungsparameter wird im Folgenden in Anlehnung an die Risspitzenbeanspruchung als  $P_Z$  bezeichnet. Die Risspitzenbeanspruchung aus Gleichung (3.39) lässt sich in zwei Faktoren aufteilen. Zunächst den Schädigungsparameter  $P_Z$  und dann eine von der Risslänge abhängige Funktion  $F(a)$ :

$$\begin{aligned} Z_{I,A,eff} &= P_{Z,I} \cdot F_I(a) \\ Z_{II,A,eff} &= P_{Z,II} \cdot F_{II}(a) \\ Z_{III,A,eff} &= P_{Z,III} \cdot F_{III}(a). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für jeden Rissöffnungsmodus wird ein eigener Schädigungsparameter definiert:

$$\begin{aligned} P_{Z,I} &= 2\pi\Delta W_{x,eff} Y_{I,A,0}^2 \\ P_{Z,II} &= \frac{\pi}{1+\nu} \Delta W_{xz} U_{eff} Y_{II,A,0}^2 \\ P_{Z,III} &= \pi\Delta W_{xy,eff} Y_{III,A,0}^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die Parameter bestehen aus einem Vorfaktor, der effektiven Verzerrungsenergiedichte für den entsprechenden Rissöffnungsmodus und einem konstanten Geometriefaktor für einen halb elliptischen Oberflächenriss im homogenen Beanspruchungsfeld. Für den Anfangsriss wird ein Halbachsenverhältnis von  $a/c = 0.9$  angenommen. Dieses Verhältnis wird für Werkstoffversuche unter reinem Zug/Druck aus der Bedingung des selbstähnlichen Risswachstums bestimmt. Das bedeutet, das Verhältnis der Rissfortschrittsgeschwindigkeiten an den Punkten A und B muss dem Verhältnis von Risstiefe zu Risslänge entsprechen. Dieser Fall liegt zum Beispiel bei Versuchen zum Bestimmen der Dehnungswöhlerlinie vor. Die Anfangsrisstiefe  $a_0$  ist sehr klein, sodass auch in Kerben in guter Näherung  $a_0/\rho \approx 0$  angenommen wird. Die konstanten Geometriefaktoren am Punkt A sind dann  $Y_{I,A,0} = 0.70$ ,  $Y_{II,A,0} = 0.62$  und  $Y_{III,A,0} = 0.58$ .

Der von der Risstiefe abhängige Anteil  $F_i(a)$  der zyklischen J-Integral Näherung besteht aus den Geometriefaktoren und der Risstiefe selbst. Die Funktionen  $F_i(a)$  beschreiben sowohl den Einfluss der Rissform als auch den Einfluss inhomogener Beanspruchungsfelder wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_I(a) &= a \left( \frac{Y_{I,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right)}{Y_{I,A,0}} \right)^2 \\
F_{II}(a) &= a \left( \frac{Y_{II,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right)}{Y_{II,A,0}} \right)^2 \\
F_{III}(a) &= a \left( \frac{Y_{III,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right)}{Y_{III,A,0}} \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Für  $a/c = 0.9$  im homogenen Beanspruchungsfeld vereinfachen sich die Funktionen auf  $F_i(a) = a$ . Mit dem Schädigungsparameter  $P_Z$  kann nun eine risslängenabhängige Dauerfestigkeit  $P_{Z,D}(a)$  definiert werden. Als Dauerfestigkeit wird ein Schwellenwert verstanden, unterhalb dessen kein Rissfortschritt, also keine weitere Schädigung, mehr stattfindet. Für das Risswachstum ist bereits ein Schwellenwert  $Z_{eff,th,KR}$  in Gleichung (3.46) als zyklisches J-Integral definiert. Es muss für eine Dauerfestigkeit dann die Bedingung  $Z_{eff,th,KR} = P_{Z,D,i} \cdot F_i(a)$  gelten. Hier kann Gleichung (3.51) eingesetzt werden. So ergibt sich die Dauerfestigkeit für jeden Rissöffnungsmodus. Wird von der Anfangsrisstiefe  $a_0$  ausgegangen, ergibt sich die gleiche anfängliche Dauerfestigkeit für jeden Rissöffnungsmodus:

$$P_{Z,D,0} = \frac{Z_{eff,th}}{a_0 + l^*}. \tag{3.54}$$

Die risstiefenabhängige Dauerfestigkeit kann dann aus dem Startwert der Dauerfestigkeit bestimmt werden. Dazu wird der Kurzrissschwellenwert  $Z_{eff,th,KR} = P_{Z,D,i} \cdot F_i(a)$  in Gleichung (3.46) eingesetzt und der Langrissschwellenwert mit Gleichung (3.54) durch die initiale Dauerfestigkeit ersetzt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
P_{Z,D,I}(a) &= P_{Z,D,0} \cdot \frac{a_0 + l^*}{a + l^*} \cdot \left( \frac{Y_{I,A,0}}{Y_{I,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right)} \right)^2 \\
P_{Z,D,II}(a) &= P_{Z,D,0} \cdot \frac{a_0 + l^*}{a + l^*} \cdot \left( \frac{Y_{II,A,0}}{Y_{II,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right)} \right)^2 \\
P_{Z,D,III}(a) &= P_{Z,D,0} \cdot \frac{a_0 + l^*}{a + l^*} \cdot \left( \frac{Y_{III,A,0}}{Y_{III,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho} \right)} \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Gleichung (3.55) berücksichtigt damit sowohl die Risslänge als auch die Rissgeometrie  $a/c$  und inhomogene Beanspruchungsfelder.

### 3.2.6.7. Definition der Schädigungsparameterwöhlerlinie

Die Schädigungsparameterwöhlerlinie wird gewonnen, indem die Näherung des zyklischen J-Integrals Gleichung (3.39) in das Rissfortschrittsgesetz Gleichung (3.37) eingesetzt wird. Die Integration der Rissfortschrittgleichungen erfolgt durch Trennung der Veränderlichen. Aufgrund der Annahme, dass jeder Rissöffnungsmodus unabhängig zum Rissfortschritt beitragen kann, ergeben sich drei Wöhlerlinien, jeweils eine pro Rissöffnungsmodus. Die Integration erfolgt von einer Anfangsrisstiefe  $a_0$  bis zu einer Endrisstiefe  $a_e$ . Daraus folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
N_I &= \frac{1}{C} \cdot \int_{a_0}^{a_e} F_I(a)^{-mz} da \cdot P_{Z,I}^{-mz} \\
N_{II} &= \frac{1}{C} \cdot \int_{a_0}^{a_e} F_{II}(a)^{-mz} da \cdot P_{Z,II}^{-mz} \\
N_{III} &= \frac{1}{C} \cdot \int_{a_0}^{a_e} F_{III}(a)^{-mz} da \cdot P_{Z,III}^{-mz}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Durch Gleichung (3.56) sind die Schädigungsparameterwöhlerlinien für jeden Rissöffnungsmodus definiert. Beim Risswachstum in inhomogenen Beanspruchungsfeldern muss die Annahme des selbstähnlichen Risswachstums aufgegeben werden. Es genügt nicht nur den Rissfortschritt der Risstiefe  $a$  zu betrachten. Zusätzlich muss auch der Rissfortschritt für die Oberflächenrisslänge  $c$  berücksichtigt werden. Das Verhältnis  $a/c$  wird variabel. Dadurch muss auch der Rissfortschritt an Punkt B betrachtet werden und Gleichung (3.37) lässt sich nicht mehr analytisch lösen. Auf eine numerische Integration der gekoppelten Rissfortschrittsgleichungen für Punkt A und Punkt B wird zu Gunsten einer linearen Schadensakkumulation verzichtet. Es wird von Hertel [Hert 16] das im Folgenden beschriebene näherungsweise Vorgehen vorgeschlagen.

Zuerst wird der gesamte Risspfad von  $a_0$  bis  $a_e$  in Abschnitte  $I_{a_i} = [a_i, a_{i+1}]$  eingeteilt. Hier wird eine konstante Intervallbreite  $\Delta a = a_{i+1} - a_i = 0.1 \cdot a_0$  festgelegt. Es wird nun vereinfachend angenommen, dass sich während des kurzen Intervalls die Form des Risses nur wenig ändert und deshalb als konstant angesehen werden kann,  $a/c \approx \text{konst.}$  Die Anzahl an Schwingspielen, die für ein Risswachstum von  $a_i$  auf  $a_{i+1}$  nötig sind, kann jetzt wieder durch Trennen der Veränderlichen aus Gleichung (3.37) bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
N_I &= Q_I \cdot P_{Z,I}^{-mz} & \text{mit } Q_I &= \frac{1}{C} \cdot \int_{a_i}^{a_{i+1}} F_I(a)^{-mz} da \\
N_{II} &= Q_{II} \cdot P_{Z,II}^{-mz} & \text{mit } Q_{II} &= \frac{1}{C} \cdot \int_{a_i}^{a_{i+1}} F_{II}(a)^{-mz} da \\
N_{III} &= Q_{III} \cdot P_{Z,III}^{-mz} & \text{mit } Q_{III} &= \frac{1}{C} \cdot \int_{a_i}^{a_{i+1}} F_{III}(a)^{-mz} da.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Gleichung (3.57) entspricht der Schädigungsparameterwöhlerlinie für den Rissfortschritt von  $a_i$  auf  $a_{i+1}$ . Durch die getroffene Annahme  $a/c \approx \text{konst.}$  sind die Funktionen  $F_i(a)$  nur von der Risstiefe abhängig. Die Integration von Gleichung (3.57) erfolgt numerisch durch die Simpsonregel. Die aktuelle Schädigung berechnet sich dann nach der linearen Schadensakkumulationsregel wie folgt:

$$D_{akt} = \frac{1}{N_i} = \frac{P_{Z,i}^{mz}}{Q_i}. \tag{3.58}$$

Der Rissfortschritt von  $a_i$  auf  $a_{i+1}$  ist erreicht, sobald die Schädigungssumme den Wert  $D = 1$  annimmt. Die Risslänge  $c_{i+1}$  wird nun näherungsweise aus dem Zuwachs der Risstiefe abgeschätzt. Dazu wird das Verhältnis der Risslängenzuwächse aus den Rissfortschrittgleichungen gebildet. Für Modus I ergibt sich beispielsweise  $dc_I/da = (Z_{I,B,eff}/Z_{I,A,eff})^{mz,I}$ . Wird nun die Näherungslösung für das zyklische J-Integral eingesetzt, zeigt sich, dass der Zuwachs der Risslänge  $c$  von dem Verhältnis der Geometriefaktoren abhängt. Außerdem wird angenommen, dass der Zuwachs in Risslänge und Risstiefe klein ist, weshalb anstatt des Differenzialquotienten der Differenzenquotient eingesetzt wird. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta c_I &= \left( \frac{Y_{I,B} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho_\sigma} \right)}{Y_{I,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho_\sigma} \right)} \right)^{2m_Z} \cdot \Delta a \\
\Delta c_{II} &= (1 + \nu)^{m_Z} \cdot \left( \frac{Y_{III,B} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho_\sigma} \right)}{Y_{II,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho_\sigma} \right)} \right)^{2m_Z} \cdot \Delta a \\
\Delta c_{III} &= \left( \frac{1}{1 + \nu} \right)^{m_Z} \cdot \left( \frac{Y_{II,B} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho_\tau} \right)}{Y_{III,A} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{\rho_\tau} \right)} \right)^{2m_Z} \cdot \Delta a.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Die Indizierung richtet sich nach dem Rissöffnungsmodus am Punkt A. Liegt an A ein Modus II vor, so entsteht am Punkt B ein Modus III. Gleichung (3.59) gilt jedoch nur bei einer reinen Modus I,II oder III Belastung. Im Allgemeinen treten in einem Intervall  $I_{a_i}$  jedoch mehrere Rissöffnungsmoden auf. Der endgültige Risslängenzuwachs

$$\Delta c = D_I \Delta c_I + D_{II} \Delta c_{II} + D_{III} \Delta c_{III} \tag{3.60}$$

wird durch die Schädigungsbeiträge der einzelnen Rissöffnungsmoden gewichtet. Die einzelnen Schädigungsbeiträge werden durch lineare Schadensakkumulation der identifizierten Schwingspiele  $j$  und den dazugehörigen Schädigungsparametern  $P_{Z,j}$  berechnet:

$$\begin{aligned}
D_I &= \sum_j \frac{1}{N_{I,j}} \\
D_{II} &= \sum_j \frac{1}{N_{II,j}} \\
D_{III} &= \sum_j \frac{1}{N_{III,j}}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Rissfortschritt findet statt, wenn die Schadenssumme  $D = D_I + D_{II} + D_{III} = 1$  erreicht ist.

### 3.2.6.8. Ablauf der Schädigungsrechnung mit dem Kurzrisssmodell

Im Folgenden wird eine Übersicht über den Ablauf der Schädigungsrechnung in einer Schnittebene mit dem Kurzrisssmodell gegeben. Der Rissfortschritt wird anhand der örtlichen Spannungen und Dehnungen im aktuellen Koordinatensystem berechnet.

Schädigungsereignisse werden mit dem HCM Algorithmus nach Clormann und Seeger [Clor 86] gezählt. Die Rainflow-Zählung erfolgt auf Basis des Zeitverlaufs der Dehnungen. Es werden alle in der Schnittebene auftretenden Dehnungen gleichzeitig gezählt. Wird ein Schwingspiel in einer Schnittdehnungskomponente identifiziert, wird der  $P_Z$  Wert berechnet und dem entsprechenden Rissöffnungsmodus zugeordnet. Anschließend wird die Rissöffnungsdehnung mit dem Algorithmus nach Vormwald [Vorm 89] neu berechnet.

Die Schädigungsrechnung wird mit den für jedes Schwingspiel gespeicherten  $P_Z$  Werten durchgeführt. Dabei bleibt die Reihenfolge der auftretenden Modus I, II und III Schwingspiele erhalten.

Sollte nach der Schädigungsrechnung für den letzten simulierten Durchlauf durch die Lastfolge die Endrisslänge nicht erreicht sein, werden die  $P_Z$  Werte des letzten Durchlaufs solange wiederholt aufgebracht, bis die Endrisslänge erreicht ist.

Der Ablauf der Schädigungsrechnung kann mit den folgenden Punkten zusammengefasst werden:

1. Bestimmen oder Vorgeben aller nötigen Werkstoffparameter und Berechnen der Anfangsrisstiefe  $a_0$ .

2. Die aktuelle Risstiefe wird auf  $a_i = a_0$  gesetzt. Die Risslänge ergibt sich aus der Startbedingung  $a_0/c_0 = 0.9$ . Der gesamte Risspfad wird dann in Intervalle der Länge  $\Delta a = 0.1a_0$  eingeteilt.
3. Die aktuelle Dauerfestigkeit für die Risstiefe  $a_i$  wird in Abhängigkeit von  $a/c$  und  $a/\rho$  bestimmt, Gleichung (3.55).
4. Es wird die  $P_Z$  Wöhlerlinie für das aktuelle Intervall  $I_{a_i} = [a_i, a_i + \Delta a]$  berechnet, Gleichung (3.57).
5. Die  $P_Z$  Werte der identifizierten Schwingspiele werden nacheinander abgearbeitet. Für alle Werte, die größer als die aktuelle Dauerfestigkeit sind  $P_{Z,i} > P_{Z,D,i}$ , wird ein Schädigungsbeitrag bestimmt. Die Schädigung wird getrennt für jeden Rissöffnungsmodus aufsummiert, Gleichung (3.61). Damit wird solange fortgefahren, bis die Gesamtschädigung auf 1 ist.
6. Der gewichtete Zuwachs  $\Delta c$  Gleichung (3.60) der Risslänge wird berechnet.
7. Die aktuelle Risstiefe und die aktuelle Risslänge werden um  $\Delta a$  bzw.  $\Delta c$  erhöht. Die Schadenssummen werden wieder auf 0 gesetzt. Es wird solange wieder mit Punkt 3 fortgefahren, bis die Endrisslänge  $2c_i = 0.5$  mm erreicht ist. Sollten alle  $P_Z$  Werte aufgebracht werden, ohne dass die Endrisslänge erreicht ist, wird der letzte Durchlauf solange aufgebracht, bis die Endrisslänge erreicht ist. Sollte während eines Durchlaufs keine Schädigung aufgebracht werden, so wird die Rechnung abgebrochen. Das Bauteil ist dauerhaft.

Sollte während des Hochrechnens auf Basis des letzten Durchlaufs mehr als ein Durchlauf durch die Lastfolge für einen Rissfortschritt um  $\Delta a$  benötigt werden, können nachfolgende Durchläufe übersprungen werden.

Zu einem beliebigen Zeitpunkt im Durchlauf  $DL_{i-1}$  wird die Schadenssumme  $D = 1$  erreicht und es tritt Rissfortschritt ein. Anschließend werden die Schadenssummen  $D_I = D_{II} = D_{III} = 0$  wieder auf Null gesetzt und die  $P_Z$  Wöhlerlinie für das neue Intervall wird bestimmt. Die restlichen  $P_Z$  Werte des Durchlaufs  $DL_{i-1}$  werden aufgebracht und es entsteht eine neue Schadenssumme  $D_{i-1} = D_{I,i-1} + D_{II,i-1} + D_{III,i-1}$ , ohne dass Rissfortschritt eintritt. Beim nächsten Aufbringen des letzten Durchlaufs  $DL_i$  tritt ebenfalls kein Rissfortschritt ein. Da sich die aufgebrachten  $P_Z$  Werte und die  $P_Z$  Wöhlerlinien nicht ändern, bis Rissfortschritt eintritt, ändern sich auch die Schadenssummen aller folgenden Durchläufe nicht. Die Anzahl der Durchläufe  $x$ , die bis zum nächsten Rissfortschritt übersprungen werden können, berechnet sich aus

$$1 = D_{i-1} + x \cdot D_i \Rightarrow x = \left\lfloor \frac{1 - D_{i-1}}{D_i} \right\rfloor. \quad (3.62)$$

Da nicht exakt bestimmt werden kann, bei welchem  $P_Z$  Wert Rissfortschritt stattfindet, sollten nur ganzzahlige Durchläufe übersprungen werden.

### 3.2.6.9. Parametrisierung des Kurzrissmodells

Das vorgestellte Kurzrissmodell besitzt einige Parameter, die zur Beschreibung eines bestimmten Werkstoffs angepasst werden müssen. Eine Übersicht über alle notwendigen Werkstoffparameter ist in Tabelle 3.1 angegeben. Das Modell besitzt im Vergleich zu den anderen hier besprochenen Schädigungsmodellen viele frei wählbare Parameter. Einige sind dafür bestimmt, sehr spezifische Einflüsse auf das Risswachstum zu modellieren. Um alle Modellparameter bestimmen zu können, ist eine ganze Anzahl an zum Teil relativ spezifischen Versuchen notwendig. Um eine Anwendung innerhalb einer Berechnungsrichtlinie zu ermöglichen, sollen Möglichkeiten gefunden werden, die Werkstoffparameter aus der Zugfestigkeit  $R_m$  und der Angabe einer Werkstoffgruppe abzuschätzen. Sollte dies nicht möglich sein, sollen Abschätzmethode aus anderen bekannten Werkstoffkennwerten angegeben oder Standardwerte empfohlen werden.

Parameter	Beschreibung
$m_Z$	Rissfortschrittsparameter
$Q$	Stützstelle der Wöhlerlinie
$C$	Rissfortschrittsparameter
$a_0$	Anfangsrisstiefe
$P_{Z,D,0}$	initiale Dauerfestigkeit
$\sigma_F$	Fließspannung
$Z_{eff,th}$	Schwellenwert für Rissfortschritt
$a_{mitt}$	Einfluss der Mittelspannung auf Modus I Riss schließen
$a_{tors}$	Einfluss der Schubspannung auf Modus I Riss schließen
$FA$	Abklingkonstante Rissöffnungsdehnungen aus Algorithmus für transientes Modus I Riss schließen nach Vormwald [Vorm 89]
$\tau_{akt}$	Schubspannungsschwellenwert für Modus II & III Riss öffnen
$\mu$	Normalspannungsempfindlichkeit für Modus II & III Riss öffnen

Tabelle 3.1: Werkstoffparameter des Kurzrisssmodells

Die Rissfortschrittskonstante  $C$  und der Schwellenwert für Langrisswachstum  $Z_{eff,th}$  werden nach Vormwald [Vorm 89] mit den Zusammenhängen

$$C = 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{Zyk.}} \left( \frac{5 \cdot 10^5}{E} \frac{1}{\text{mm}} \right)^{m_Z}, \quad Z_{eff,th} = \frac{E}{5 \cdot 10^6} \text{mm} \quad (3.63)$$

aus dem Elastizitätsmodul abgeschätzt. Die Fließspannung wird ebenfalls nach dem Vorschlag von Vormwald [Vorm 89] auf den Mittelwert von Zugfestigkeit  $R_m$  und zyklischer Proportionalitätsgrenze  $R'_{p,0.2}$  gesetzt:

$$\sigma_F = \frac{R_m + R'_{p,0.2}}{2}. \quad (3.64)$$

Der Modellparameter  $FA$  stellt im Algorithmus nach Vormwald [Vorm 89] die Abklinggeschwindigkeit des transienten Modus I Rissöffnens dar. Vormwald [Vorm 89] verwendet  $FA$ , um den sogenannten Prestraineffekt zu beschreiben. Unter Prestrainwöhlerlinien werden Wöhlerlinien verstanden, bei deren Ermittlung vor der Einstufenbelastung eine Überbelastung mit hoher Amplitude aber kleinen Schädigungsbeiträgen aufgebracht wird. Der Parameter  $FA$  wird von Vormwald [Vorm 89] für den Feinkornbaustahl S460N und die Aluminiumknetlegierung AW-5083 zu  $FA = 15$  bestimmt. Dieser Wert kann als Standardwert verwendet werden, sollten keine Versuche mit Effekten zu transientem Riss schließen vorliegen.

### Schädigungsparameterwöhlerlinie

Zum Bestimmen der Rissfortschrittskonstanten und der Anfangsrislänge wird die  $P_Z$ -Wöhlerlinie aus Versuchen benötigt. Wird die  $P_Z$  Wöhlerlinie aus Versuchen zum Ermitteln der Dehnungswöhlerlinie bestimmt, ergeben sich einige Vereinfachungen. Es besteht eine reine Modus I Belastung. Es kann von einem homogenen Beanspruchungsfeld und selbstähnlichem Risswachstum mit einem konstanten  $a/c = 0.9$  ausgegangen werden. Dadurch vereinfacht sich der Anteil des zyklischen J-Integrals aus Gleichung (3.51), der von der Risslänge abhängt,  $F_I(a) = F_{II}(a) = F_{III}(a) = a$ . Auf eine Einteilung des Risspfades in einzelne Intervalle kann, aufgrund des konstanten  $a/c$  Verhältnisses, verzichtet werden. Gleichung (3.56) kann analytisch gelöst werden, wodurch sich die Schädigungsparameterwöhlerlinie ergibt:

$$N = Q \cdot P_Z^{-m_Z} \quad \text{mit } Q = \frac{1}{C} \cdot \frac{a_e^{1-m_Z} - a_0^{1-m_Z}}{1 - m_Z}. \quad (3.65)$$

Wie in Gleichung (3.65) zu erkennen, kann die Schädigungsparameterwöhlerlinie bei doppelt-logarithmischer Auftragung als Geradengleichung angesehen werden. Wird von stabilisiertem Werkstoffverhalten und einem einachsigen Werkstoffgesetz nach der Ramberg-Osgood Gleichung (2.8) ausgegangen, berechnet sich der  $P_Z$  Wert auf einem gegebenen Lastniveau ( $\varepsilon_a, \sigma_a$ ) durch

$$P_Z = 2\pi \cdot 0.49 \cdot \left[ \frac{\Delta\sigma_{eff}^2}{2E} + \frac{1}{1+n'} \Delta\sigma_{eff} \left( \Delta\varepsilon_{eff} - \frac{\Delta\sigma_{eff}}{E} \right) \right] \quad (3.66)$$

$$\text{mit } \Delta\sigma_{eff} = \sigma_a - \sigma_{cl}$$

$$\text{und } \Delta\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a - \varepsilon_{cl}.$$

Das Bestimmen der Risschließspannung  $\sigma_{cl}$  und Risschließdehnung  $\varepsilon_{cl}$  vereinfacht sich ebenfalls. Bei Versuchen zur Bestimmung der Dehnungswöhlerlinie liegt ein mittelspannungsfreier, einachsiger Spannungszustand vor. Gleichung (3.40) vereinfacht sich dann zu

$$\sigma_{op} = \sigma_a \cdot \left[ 0.535 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_a}{\sigma_F}\right) - 0.344 \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_F} \right]. \quad (3.67)$$

Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Bedingung  $-\sigma_a < \sigma_{op} < \sigma_a$  eingehalten wird. Die Rissöffnungs- und Risschließdehnung können dann direkt aus der Ramberg-Osgood Gleichung unter Beachtung der Masing Regel durch

$$\varepsilon_{op} = \varepsilon_{cl} = \frac{\sigma_a + \sigma_{op}}{E} + 2 \left( \frac{\sigma_a + \sigma_{op}}{2K'} \right)^{1/n'} - \varepsilon_a \quad (3.68)$$

berechnet werden. Da sich die Ramberg-Osgood Gleichung nicht analytisch invertieren lässt, muss die Risschließspannung aus

$$\varepsilon_a - \varepsilon_{cl} = \frac{\sigma_a - \sigma_{cl}}{E} + 2 \left( \frac{\sigma_a - \sigma_{cl}}{2K'} \right)^{1/n'} \quad (3.69)$$

iterativ bestimmt werden. Der Rissfortschrittsexponent  $m_Z$  stellt die Steigung der  $P_Z$  Wöhlerlinie dar. Die Größe  $Q$  kann als Lebensdauer bei  $P_Z = 1$  interpretiert werden. Die Bestimmung beider Parameter erfolgt durch eine lineare Regression der logarithmierten Wertepaare  $(P_{Z,i}, N_i)$ , die aus den Ergebnissen der Versuche zur Ermittlung der Dehnungswöhlerlinie stammen.

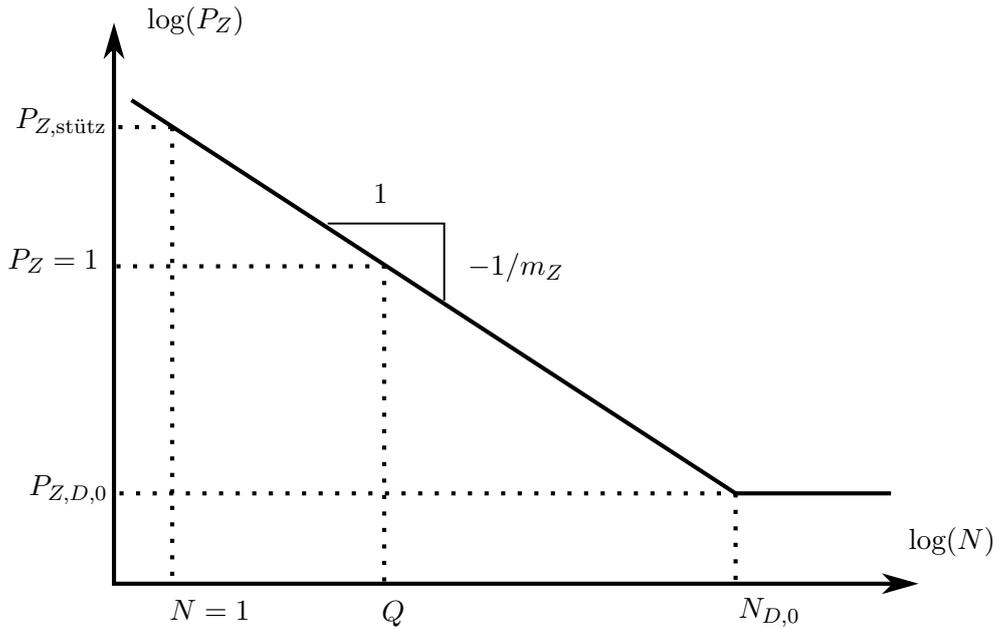
In Anlehnung an die FKM-Richtlinie Nichtlinear kann die  $P_Z$  Wöhlerlinie auch, anstatt durch die Größe  $Q$ , mit einer Stützstelle  $P_{Z,\text{stütz}}$  bei der Lebensdauer  $N = 1$  angegeben werden:

$$N = \left( \frac{P_Z}{P_{Z,\text{stütz}}} \right)^{-m_Z} \quad \text{mit } P_{Z,\text{stütz}} = \left[ \frac{1}{C} \frac{a_e^{1-m_Z} - a_0^{1-m_Z}}{1 - m_Z} \right]^{1/m_Z} = Q^{1/m_Z}. \quad (3.70)$$

Aus der Angabe von  $P_{Z,\text{stütz}}$  oder  $Q$  wird durch

$$a_0 = \left[ a_e^{1-m_Z} - C(1 - m_Z) P_{Z,\text{stütz}}^{m_Z} \right]^{\frac{1}{1-m_Z}} \quad (3.71)$$

die Anfangsrisstiefe  $a_0$  berechnet. Eine Darstellung der  $P_Z$ -Wöhlerlinie ist in Abbildung 3.22 gegeben. Die Schädigungsparameterwöhlerlinie soll ebenfalls aus der Zugfestigkeit abgeschätzt werden können. Dazu müssen, wie aus Gleichung (3.70) zu erkennen, eine Stützstelle  $P_{Z,\text{stütz}}$  bei  $N = 1$  Schwingspielen, eine Dauerfestigkeit  $P_{Z,D,0}$  sowie die Steigung  $m_Z$  der Wöhlerlinie abgeschätzt werden können. Hierzu wurden im Projekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] für die drei Werkstoffgruppen aus

Abbildung 3.22: Darstellung der  $P_Z$  Wöhlerlinie

der FKM-Richtlinie Nichtlinear Abschätzformeln bestimmt. Die Stützstelle bei einem Schwingspiel  $P_{Z,\text{stütz}}$  sowie die initiale Dauerfestigkeit  $P_{Z,D,0}$  können mit

$$\begin{aligned} P_{Z,\text{stütz}} &= a_{P,Z} \cdot R_m^{b_{P,Z}} \\ P_{Z,D,0} &= a_{P,D} \cdot R_m^{b_{P,D}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

und den Beiwerten aus Tabelle 3.2 bestimmt werden. Die Steigung  $m_Z$  der Schädigungsparameterwöhlerlinie kann direkt aus Tabelle 3.2 entnommen werden.

Werkstoffgruppe	Stahl	Stahlguss	Aluknet.
$m_Z$	1.64	1.45	1.59
$a_{P,Z}$	50	208	192
$b_{P,Z}$	0.567	0.355	0.243
$a_{P,D}$	$0.85 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$5.18 \cdot 10^{-7}$
$b_{P,D}$	1.45	1.76	2

Tabelle 3.2: Beiwerte zum Abschätzen der  $P_Z$ -Wöhlerlinie

Abbildung 3.23 zeigt einen Vergleich zwischen einer aus der Zugfestigkeit abgeschätzten und einer aus experimentellen Ergebnissen ermittelten Schädigungsparameterwöhlerlinie für den Baustahl S355. Für den vorliegenden Werkstoff stimmen die beiden Wöhlerlinien sehr gut überein.

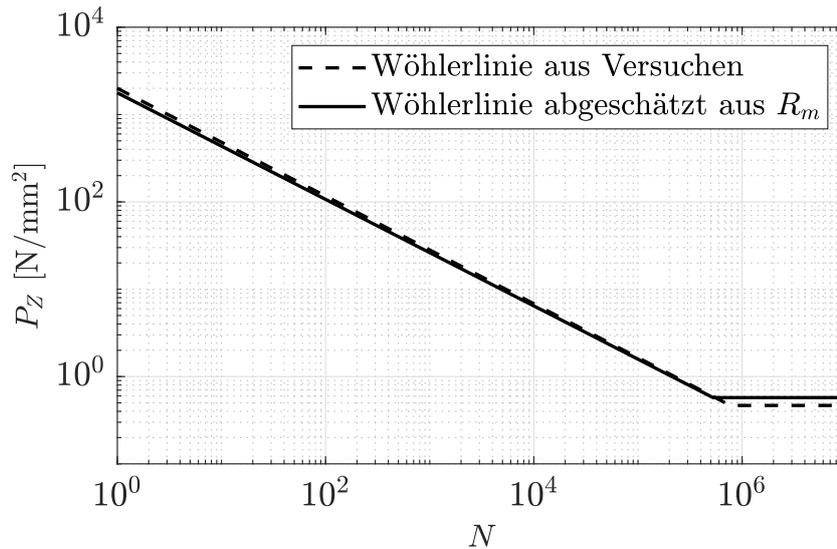


Abbildung 3.23: Ein Vergleich der Schädigungsparameterwöhlerlinien für den  $P_Z$  Parameter und den Baustahl S355 ermittelt aus der gemessenen Dehnungswöhlerlinie und abgeschätzt aus der Zugfestigkeit  $R_m$

### Wachstum von Schubrisen

Das Wachstum von Schubrisen wird durch die zwei Werkstoffparameter  $\tau_{akt}$  und  $\mu$  aus Gleichung (3.45) beeinflusst.

Der Modellparameter  $\mu$  beschreibt den Einfluss von Normalspannungen auf das Modus II bzw. III Risswachstum. Zugspannungen fördern das Risswachstum, während Druckspannungen das Risswachstum behindern. Hertel [Hert 16] schlägt zur Ermittlung des Parameters  $\mu$  Versuche unter zyklischer Torsion und statischer Normalspannung vor. Die Größe der statischen Normalspannung wird dabei variiert.

Von Hertel [Hert 16] wurde  $\mu$  für den Feinkornbaustahl S460N und die Aluminiumknetlegierung AW-5083 bestimmt. Für beide Werkstoffe wurde  $\mu = 0.5$  identifiziert. Sollten keine Versuchsergebnisse unter Torsion mit Variation einer statischen Normallast vorliegen, wird der Standardwert  $\mu = 0.5$  empfohlen.

Der Modellparameter  $\tau_{akt}$  beschreibt dabei eine Art Reibungsschwellenwert. Es wird unterstellt, dass es bereits ohne auf den Riss wirkende Normalspannungen zu einem Verhaken der Rissufer kommen kann. Liegt die Schubbeanspruchung unterhalb des Schwellenwerts  $\tau_{akt}$ , findet kein Risswachstum durch Modus II bzw. III Belastungen statt. Es wird empfohlen, den Parameter  $\tau_{akt}$  an Versuche zur Ermittlung der Gleitungswöhlerlinie, d. h. Versuche unter reiner Torsion ohne überlagerte Normalspannung, anzupassen. In solchen Versuchen können zwei verschiedene Versagensarten vom Kurzrisssmodell berechnet werden. Zum einen ein Versagen unter Modus III in Ebenen  $\varphi = 0^\circ, \pm 90^\circ$  oder ein Modus I Versagen in Ebenen  $\varphi = 45^\circ$ . Der Versagensmechanismus unter Modus I lässt sich über den Einfluss des Parameters  $a_{tors}$  aus Gleichung (3.40) auf das Riss schließen einstellen. Abbildung 3.24 beschreibt den Einfluss der Modellparameter  $a_{tors}$  und  $\tau_{akt}$  auf den Schädigungsparameter  $P_{Z,I}$  für Modus I und  $P_{Z,III}$  für Modus III Rissöffnen unter reiner Torsionsbelastung. Beide Modellparameter haben den größten Einfluss im Langzeit- bis hin zum Zeitfestigkeitsbereich bei kleinen Gleitungsamplituden. Da für jeden Rissöffnungsmodus die gleichen Rissfortschrittskonstanten angenommen werden, kann über die beiden Parameter eingestellt werden, welches Rissöffnungsverhalten sich im Werkstoff einstellt.

Für hohe Gleitungsamplituden  $\gamma_a > 2\%$  verschwindet der Einfluss. Hier werden durch Modus I stets höhere Schädigungsparameter berechnet. Aus diesem Grund wird auf hohen Beanspruchungsniveaus

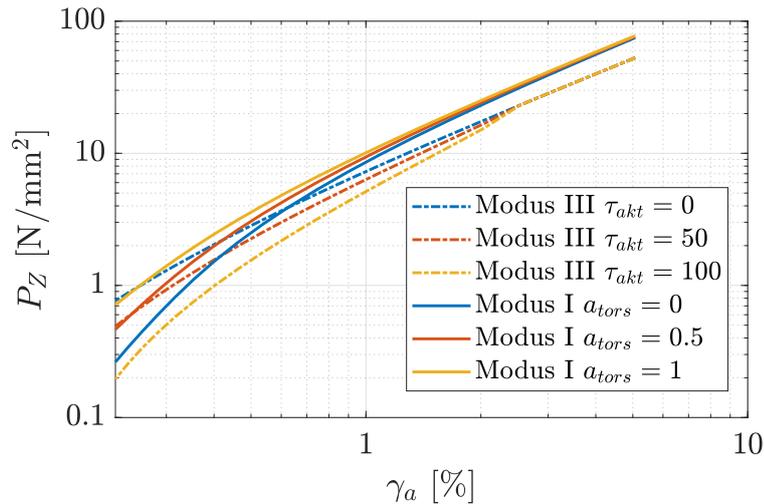


Abbildung 3.24: Einfluss der Parameter  $a_{tors}$  und  $\tau_{akt}$  (in MPa) auf den Schädigungsparameter aufgetragen über Gleitungsamplituden für die unterschiedlichen Rissöffnungsmoden

unter reiner Torsion vom Kurzrisssmodell immer ein Modus I Risswachstum in Schnittebenen  $\varphi = 45^\circ$  vorhergesagt.

Von Hertel [Hert 16] wird vorgeschlagen,  $\tau_{akt}$  an vorhandene Versuchswerte zum Bestimmen der Gleitungswöhlerlinie anzupassen. Sollten diese Versuchsdaten nicht vorliegen, wird ein Standardwert von  $\tau_{akt} = 50$  MPa empfohlen. Der Einfluss von  $\tau_{akt}$  auf die Gleitungswöhlerlinie wird in Abschnitt 4.3.3 besprochen. Der Parameter  $a_{tors}$  wird von Hertel [Hert 16] zunächst nicht berücksichtigt und auf den Standardwert  $a_{tors} = 0$  gesetzt.

### Mittelspannungseinfluss

Unter reiner Zug/Druck Belastung und positiven Zugmittelspannungen wird vom Kurzrisssmodell stets Modus I Risswachstum vorhergesagt. Der Einfluss von Mittelspannungen auf das Modus I Risswachstum wird nach Vormwald [Vorm 94] durch den Parameter  $a_{mitt}$  innerhalb der Ermittlung der Rissöffnungsspannung in Gleichung (3.40) berücksichtigt. Der Parameter  $a_{mitt}$  kann also aus der Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  bestimmt werden. Die Mittelspannungsempfindlichkeit lässt sich auch als Steigung im Haigh-Diagramm zwischen den Werten für  $R = -1$  und  $R = 0$  interpretieren. Bei bekannter Amplitude für  $R = -1$  lässt sich die nötige Spannungsamplitude für  $R = 0$  aus

$$\sigma_{a,R=0} = \frac{\sigma_{a,R=-1}}{1 + M_\sigma} \quad (3.73)$$

bestimmen. Weiter wird davon ausgegangen, dass der Werkstoff in einer Ebene  $\varphi = 0^\circ$  versagt und somit als Schnittspannungen und Dehnungen lediglich ein einachsiger Spannungszustand vorliegt, der sich im stabilen Zustand befindet und durch die Ramberg-Osgood Gleichung (2.8) beschrieben werden kann. Soll vom Kurzrisssmodell in beiden Fällen die gleiche Lebensdauer berechnet werden, muss

$$P_{Z,I}(\sigma_{a,R=-1}, R = -1) = P_{Z,I}(\sigma_{a,R=0}, R = 0) \quad (3.74)$$

gelten. Der Parameter  $P_{Z,I}$  kann bei einachsiger Beanspruchung unter Annahme der Ramberg-Osgood Gleichung aus

$$P_{Z,I} = 2\pi Y_{A,I,0}^2 \cdot \left( \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{cl})^2}{2E} + (\sigma_{max} - \sigma_{cl}) \cdot \left[ \frac{(\varepsilon_{max} - \varepsilon_{cl}) - (\sigma_{max} - \sigma_{cl})/E}{n' + 1} \right] \right) \quad (3.75)$$

berechnet werden. Für  $R = -1$  ist die Lösung von Gleichung (3.75) in Gleichung (3.66) angegeben. Die Rissöffnungsspannung und -dehnung lassen sich für  $R = 0$  aus

$$\begin{aligned}\sigma_{op} &= 2\sigma_a \left( 0,535 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\sigma_a}{\sigma_F} \right) + a_{mitt} \right), \\ \varepsilon_{cl} = \varepsilon_{op} &= \frac{\sigma_{op}}{E} + 2 \left( \frac{\sigma_{op}}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} + \varepsilon_{min}\end{aligned}\quad (3.76)$$

ermitteln. Die Risschließspannung muss aus

$$\varepsilon_{max} - \varepsilon_{cl} = \frac{2\sigma_a - \sigma_{cl}}{E} + 2 \left( \frac{2\sigma_a - \sigma_{cl}}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (3.77)$$

iterativ bestimmt werden. Für  $R = 0$  gelten bei stabilisiertem Werkstoffverhalten nach der Ramberg-Osgood Gleichung und der Masing Regel die Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= 2\sigma_a, \\ \varepsilon_{max} &= \frac{2\sigma_a}{E} + \left( \frac{2\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'}, \\ \varepsilon_{min} &= \varepsilon_{max} - \frac{2\sigma_a}{E} - 2 \cdot \left( \frac{2\sigma_a}{2K'} \right)^{1/n'}.\end{aligned}\quad (3.78)$$

Der Parameter  $a_{mitt}$  kann jetzt numerisch, zum Beispiel durch das Newton-Verfahren, aus Gleichung (3.74) bestimmt werden. Für den Fall, dass alle Werkstoffkennwerte mit den in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] angegebenen Verfahren abgeschätzt werden, wurde der Parameter  $a_{mitt}$  in Abhängigkeit von der Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  für die drei Werkstoffgruppen der FKM-Richtlinie Nichtlinear bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.25 dargestellt. Ebenfalls angegeben sind einfache Abschätzformeln für den Modellparameter  $a_{mitt}$ .

Bei Druckmittelspannungen lassen sich keine einfachen Formeln oder eine nach den Werkstoffparametern zu lösende Gleichung mehr angeben. In Abhängigkeit der Parameter  $\mu$  und  $\tau_{akt}$  wird Modus III Risswachstum stärker oder schwächer berücksichtigt, wodurch die vorhergesagte kritische Ebene variiert. Gleiches gilt für den Lastfall reiner Schub. In Abhängigkeit von den Parametern  $a_{tors}$  und

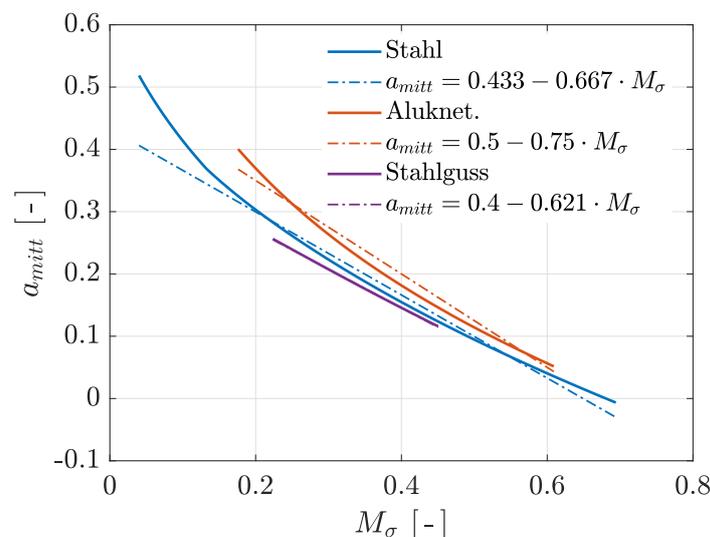


Abbildung 3.25: Modellparameter  $a_{mitt}$  in Abhängigkeit des Werkstoffkennwerts  $M_\sigma$  für die Werkstoffgruppen Stahl, Aluminiumknetlegierung und Stahlguss

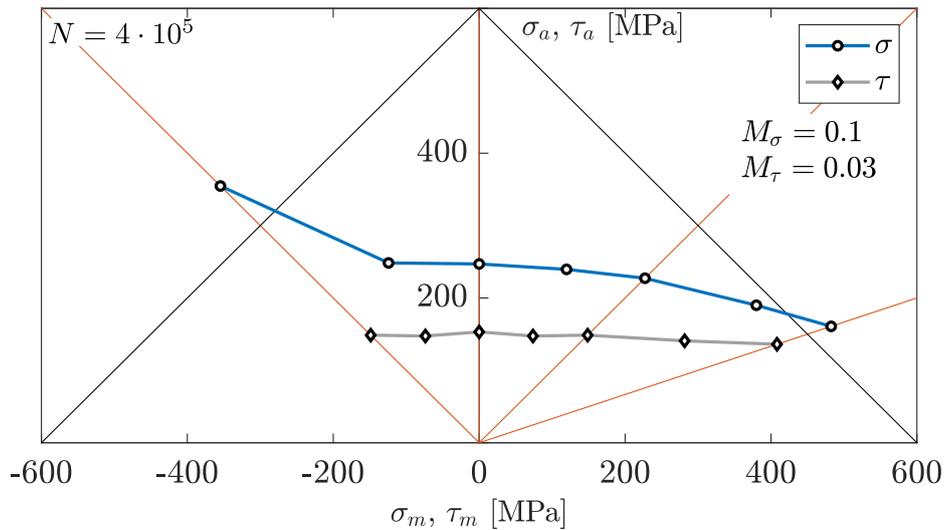


Abbildung 3.26: Haigh-Diagramm erzeugt mit dem Schädigungsparameter  $P_Z$

$\tau_{akt}$  variiert die vorhergesagte kritische Ebene. Eine analytische Lösung für diese Fälle ist nicht anzugeben. Abbildung 3.26 zeigt das Haigh-Diagramm, welches sich aus einer Rechnung mit dem Kurzrissmodell ergibt. Alle Werkstoffparameter wurden für einen Werkstoff der Werkstoffgruppe Stahl mit einer Zugfestigkeit von  $R_m = 600$  MPa erzeugt. Laut FKM-Richtlinie [Renn 12] wird für einen solchen Werkstoff eine Mittelspannungsempfindlichkeit von  $M_\sigma = 0.11$  erwartet. Mit dem oben beschriebenen Verfahren wird ein Werkstoffparameter  $a_{mitt} = 0.4$  berechnet. Daraus ergibt sich im Kurzrissmodell eine Mittelspannungsempfindlichkeit von  $M_\sigma = 0.1$ . Alle anderen Modellparameter wurden auf die oben beschriebenen Standardwerte gesetzt.

Die Mittelspannungsempfindlichkeit unter reiner Schubbelastung ist unabhängig vom Vorzeichen der Mittelspannung. Das Verhältnis der Mittelspannungsempfindlichkeiten für Normal- und Schubbelastungen stimmt mit dem in der FKM-Richtlinie [Renn 12] vorgegebenen Verhältnis  $M_\tau \approx M_\sigma/3$  in etwa überein. Auch für reine Normalbelastung zeigt sich das nach FKM-Richtlinie vorgegebene Verhalten. Lediglich für  $R$ -Verhältnisse  $R > 0$  wird keine weitere Abflachung der Kurve, sondern eher eine höhere Steigung, vorhergesagt.

### Stützwirkung

Um von einer Werkstoffwöhlerlinie auf eine Bauteilwöhlerlinie umzurechnen, wird das werkstoffmechanische Stützwirkungskonzept Abschnitt 3.1.6 aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear wie für den Schädigungsparameter  $P_{RAJ}$  angewandt. Die Stützstelle  $P_{Z,stütz}$  wird mit der quadratischen Stützziffer verschoben:

$$P_{Z,stütz,Bauteil} = n_{st}^2 \cdot P_{Z,stütz} \quad \text{oder} \quad Q_{Bauteil} = Q \cdot n_{st}^{2m_Z}. \quad (3.79)$$

Dabei sollte, im Gegensatz zur FKM-Richtlinie Nichtlinear, nur die statistische Stützziffer  $n_{st}$  verwendet werden. Der Einfluss des bezogenen Spannungsgradienten, der mit der bruchmechanischen Stützziffer  $n_{bm}$  im Stützwirkungskonzept berücksichtigt wird, ist im Kurzrissmodell bereits in den Geometriefaktoren, siehe Gleichung (3.49), vorhanden.

## 4. Prognose der Anrisslebensdauer ungekerbter Werkstoffproben

In diesem Kapitel wird die Genauigkeit der Lebensdauerprognose mit den in Kapitel 3 vorgestellten Schädigungsmodellen durch einen Vergleich mit experimentellen Ergebnissen validiert.

Dazu werden Versuchsergebnisse an ungekerbten Werkstoffproben verwendet. Die Validierung der Kombination von den in Kapitel 2 erarbeiteten Kerbnäherungsmethoden zusammen mit den Schädigungsmodellen erfolgt anhand von experimentellen Ergebnissen mit gekerbten Proben in Kapitel 5.

Die hier verwendeten Versuchsergebnisse stammen aus einem eigenen Forschungsprojekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22]. Sie wurden allerdings nicht selbst, sondern am Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit (IMAB) der Technischen Universität Clausthal durchgeführt [Linn 23]. Trotzdem werden die durchgeführten Versuche beschrieben und ermittelte Werkstoffkennwerte angegeben. Auf eine tabellarische Auflistung der einzelnen Versuchsergebnisse im Anhang wird allerdings verzichtet. Diese sind bereits in [Linn 22, Linn 23] und [Kraf 24] veröffentlicht. Im Rahmen des Forschungsprojektes „Mehrachsigkeit örtlich“ wurden zwei verschiedene Werkstoffe analysiert, einerseits der Baustahl S355 und andererseits ein Eisenguss mit Kugelgraphit EN-GJS-500-14. Diese Werkstoffe unterscheiden sich sowohl in ihrer Werkstoffgruppe als auch in ihrer Duktilität. In diesem Kapitel werden beide Werkstoffe hinsichtlich ihrer spezifischen Werkstoffeigenschaften beschrieben. Diese Beschreibung umfasst Zugversuche sowie dehnungsgeregelte Versuche unter der Vorgabe von axialen Normaldehnungen und/oder Gleitungen. Dadurch wurde das zyklische Verhalten der Werkstoffe und die Dehnungswöhlerlinie bestimmt. Des Weiteren werden Experimente zum Werkstoffverhalten unter nichtproportionaler Belastung durchgeführt. Durch diese Werkstoffcharakterisierung werden Kennwerte ermittelt, welche als Eingangsgrößen für die beschriebenen Schädigungsparameter dienen.

Um für die Bewertung der Schädigungsmodelle eine größere Datenbasis zu erhalten, werden die experimentellen Befunde aus [Linn 22] durch Versuchsergebnisse aus [Sava 95, Hoff 05, Hert 16] an einem Feinkornbaustahl S460N und einer Aluminiumknetlegierung AW-5083 ergänzt. An diesen beiden Werkstoffen wurde ein umfangreiches Versuchsprogramm durchgeführt, welches Tests unter proportionaler und nichtproportionaler Belastung umfasst. Dieses Programm beinhaltet Versuche mit variierenden Phasenverschiebungen und unterschiedlichen Frequenzverhältnissen. Es wurden auch Experimente, sowohl mit als auch ohne Mittellasten, durchgeführt. Zusätzlich sind Tests unter proportionalen und nichtproportionalen Betriebslasten enthalten.

Im Folgenden werden zunächst die im Rahmen des Forschungsprojektes „Mehrachsigkeit örtlich“ durchgeführten Experimente zur Charakterisierung der Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 beschrieben und sämtliche ermittelten Werkstoffparameter aufgeführt. Des Weiteren sind die Werkstoffparameter für S460N und AW-5083 aus der Literatur angegeben.

Anschließend erfolgt die Parametrisierung der in Kapitel 3 vorgestellten Schädigungsmodelle anhand der Versuchsergebnisse. Daraufhin werden die Experimente nachgerechnet und die berechneten Ermüdungslebensdauern den experimentell ermittelten Anrisslebensdauern gegenübergestellt. Die kritischen Ebenen Modelle sind nicht nur in der Lage, die Ermüdungslebensdauer zu berechnen, sondern es kann auch die Orientierung eines technischen Anrisses vorhergesagt werden. Für einige Versuche wurde der Anrisswinkel bestimmt. Der Vergleich der Berechnungen mit den experimentellen Befunden erfolgt sowohl zwischen rechnerischer und experimenteller Lebensdauer als auch zwischen berechneter und beobachteter Anrissorientierung.

## 4.1. Werkstoffcharakterisierung

### 4.1.1. Statische Werkstoffkennwerte

Um die statischen Werkstoffkennwerte zu ermitteln, wurden Zugversuche gemäß DIN EN ISO 6892-1:2019 [DIN EN ISO 6892-1] an EN-GJS-500-14 und S355 durchgeführt. Da für Versuche zur nichtproportionalen Verfestigung und für spannungsgeregelte bauteilähnliche Tests unterschiedlich große Gussrohlinge verwendet werden, wurden Proben aus beiden Größen entnommen, die im Folgenden als „groß“ und „klein“ bezeichnet werden. Die Proben entsprechen dem Probenformat DIN 50125-A8x40 gemäß [DIN 50125]. Eine Zeichnung der Probe ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

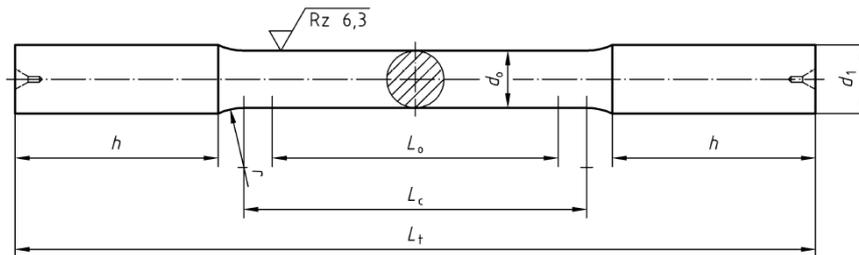


Abbildung 4.1: Zugprobe DIN 50125-A8x40, [DIN 50125].

Es werden jeweils vier Versuche je Werkstoff bzw. Gussrohlinggröße durchgeführt. Die anhand der Zugversuche ermittelten Werkstoffkennwerte sind als arithmetisch gemittelte Werte in Tabelle 4.1 aufgeführt. Zur Ermittlung der Querdehnzahl  $\nu$  wurde zusätzlich der in Abschnitt 4.1.2 ermittelte Schubmodul  $G$  und der Zusammenhang  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  verwendet.

	$E$ GPa	$\nu$ -	$R_{p,0.2}$ MPa	$R_m$ MPa	$A$ %
S355	204	0.26	392	541	32
EN-GJS-500-14 „klein“	165	0.21	444	550	17
EN-GJS-500-14 „groß“	166	0.22	420	532	19
S460N aus [Sava 95]	208.5	0.3	500	643	26.2
AW-5083 aus [Sava 95]	68	0.33	169	340	20.2

Tabelle 4.1: Statische Werkstoffkennwerte

### 4.1.2. Zyklische Werkstoffkennwerte

Die Charakterisierung des einachsigen Verformungs- und Schädigungsverhaltens erfolgte durch dehnungsgesteuerte Einstufenversuche ohne Mitteldehnung. Dabei wurden die zyklischen Kennwerte  $K'$  und  $n'$  zur Beschreibung der zyklisch stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Kurve mit dem Ansatz von Ramberg und Osgood bestimmt. Außerdem wurden die Parameter der Dehnungswöhlerlinie  $\sigma'_f$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$  und  $c$  für den Ansatz nach Basquin, Manson, Coffin und Morrow ermittelt.

Die Versuche werden an ungekerbten Vollproben durchgeführt. Die Probengeometrie ist in Abbildung 4.2a dargestellt. Zur Dehnungsmessung wird ein Dehnungsaufnehmer der Firma Sandner Messtechnik GmbH verwendet. In Abbildung 4.2b ist der aufgesetzte Dehnungsaufnehmer auf der eingespannten Probe zu erkennen.

Bei Versuchen unter Dehnungssteuerung ist die Dehnung die Regelgröße. Unter zyklischer Belastung führt dies je nach Werkstoff zu einer zyklischen Ver- oder Entfestigung. Im niedrigen Dehnungs-

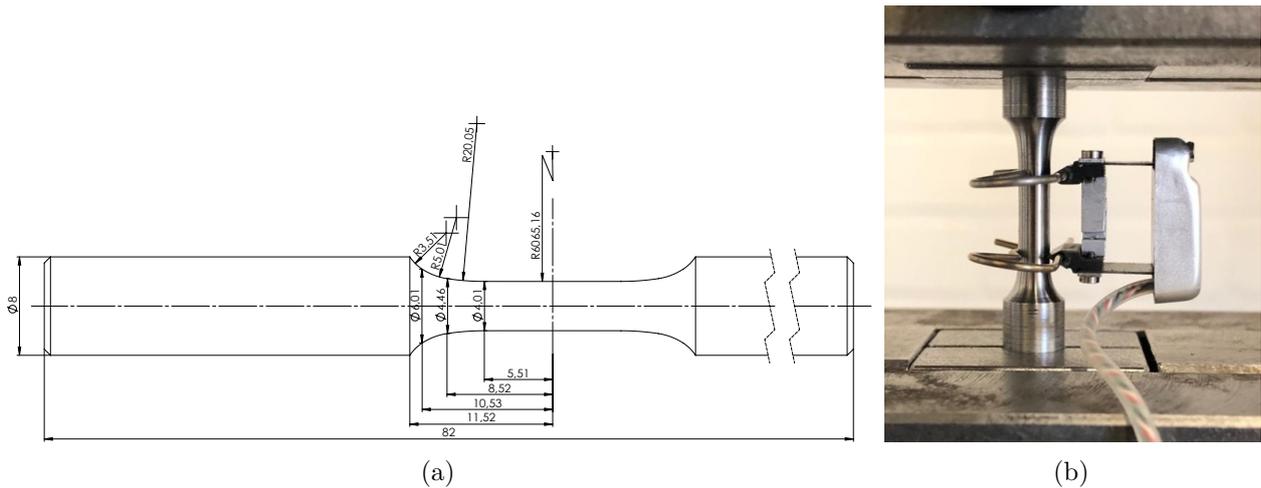


Abbildung 4.2: Vollprobe zum Bestimmen der Dehnungswöhlerlinie (a) Probengeometrie (b) Eingespannte Probe mit aufgesetztem Dehnungsaufnehmer

bereich zeigt Baustahl S355 eine zyklische Entfestigung, während er im höheren Dehnungsbereich eine zyklische Verfestigung aufweist. Im Gegensatz dazu zeigt EN-GJS-500-14 über sämtliche Bereiche hinweg eine zyklische Verfestigung. Das zyklische Spannungs-Dehnungs-Diagramm sowie die Dehnungswöhlerlinie für S355 werden in Abbildung 4.3 gezeigt. Die entsprechenden Diagramme für EN-GJS-500-14 sind in Abbildung 4.4 dargestellt.

In den Wöhlerlinien sind ebenfalls die beobachteten Anrissorientierungen eingezeichnet. Nach den Versuchen wurden die Risse fotografiert und die Orientierung der Anfangsrisse wurde anhand der Bilder gemessen. Um die Orientierung aus den Bildern zu bestimmen, wurden die Probe und die Kamera zunächst so ausgerichtet, dass der gerissene Bereich im Zentrum des Bildes zu sehen ist. Zwei Linien werden dann auf dem Bild entlang der beiden vertikalen Kanten der Probe ausgerichtet. Diese Linien repräsentieren die axiale Richtung ( $\varphi = 90^\circ$ ). Die Linien in axialer Richtung werden dann verwendet, um eine Linie in Umfangsrichtung ( $\varphi = 0^\circ$ ) zu erstellen, indem sie um 90 Grad gedreht werden. Der Riss wird nun ebenfalls durch eine gerade Linie approximiert und der Winkel zwischen der 0-Grad-Linie und dem Riss wird gemessen. Leider konnten nicht alle Proben analysiert werden. Viele Proben waren zu deformiert, um nach dem Test einen klaren Anrissort zu identifizieren.

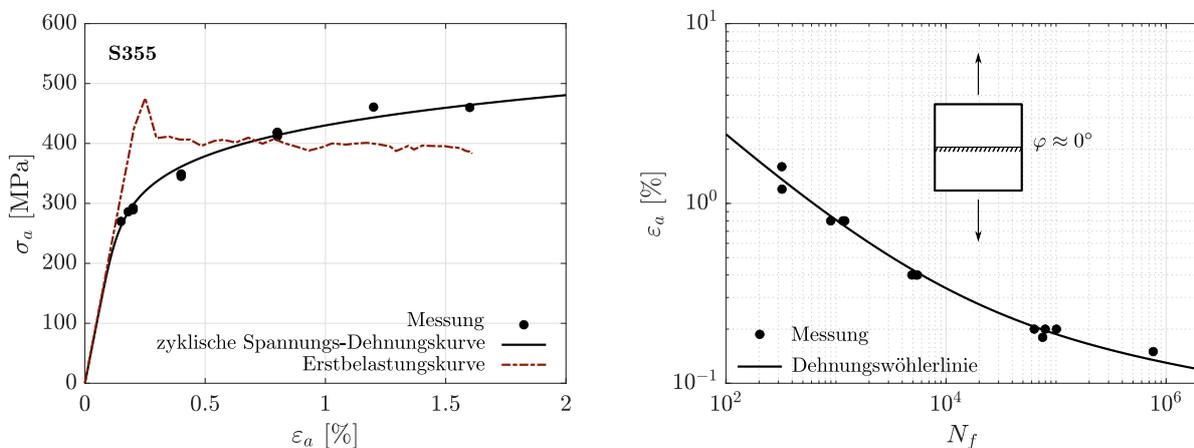


Abbildung 4.3: Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Dehnungswöhlerlinie für den Werkstoff S355

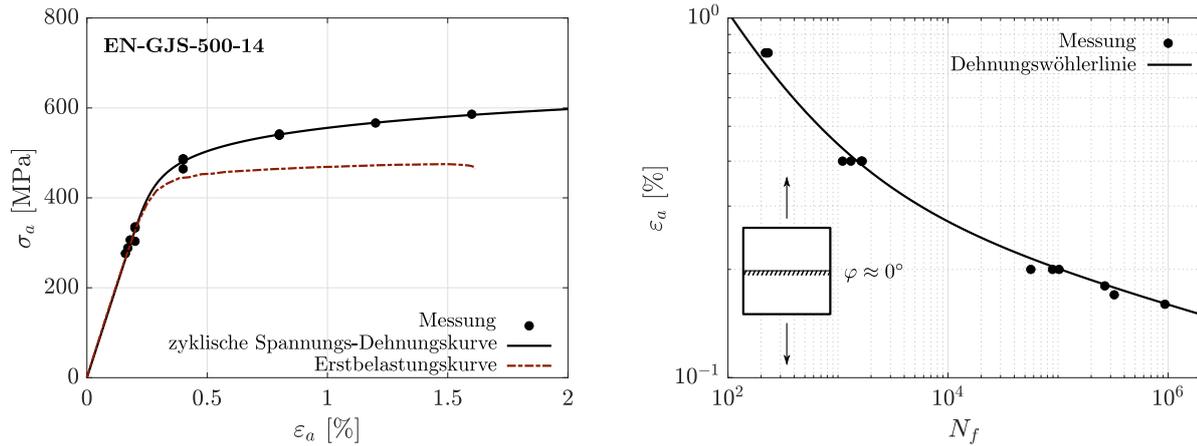


Abbildung 4.4: Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Dehnungswöhlerlinie für den Werkstoff EN-GJS-500-14

Beide Werkstoffe versagen unter reiner Zug/Druck Belastung in Ebenen unter der Orientierung  $\varphi \approx 0^\circ$ , d. h. in Ebenen senkrecht zur größten Hauptspannung und maximaler Normalbelastung. Alle Kennwerte, die aus den dehnungsgeregelten Versuchen ermittelt wurden, sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Da zur Bestimmung der Dauerfestigkeit nicht ausreichend viele Versuche durchgeführt werden konnten, werden feste Grenzwahrscheinlichkeiten am Abknickpunkt der Dehnungswöhlerlinien angenommen. In [Renn 12] sind Dauerfestigkeiten bei  $N_D = 10^6$  Schwingspielen definiert. Diese Definition wird hier übernommen.

	$K'$ MPa	$n'$ -	$\sigma'_f$ MPa	$\varepsilon'_f$ -	$b$ -	$c$ -	$N_D$ -
S355	839	0.138	762	0.415	-0.08	-0.556	$1 \cdot 10^6$
EN-GJS-500-14	830	0.08	904	0.315	-0.084	-0.71	$1 \cdot 10^6$
S460N aus [Sava 95]	1115	0.161	969.6	0.281	-0.086	-0.493	$5 \cdot 10^5$
AW-5083 aus [Sava 95]	544	0.075	780.3	1.153	-0.114	-0.861	$1 \cdot 10^6$

Tabelle 4.2: Zyklische Werkstoffkennwerte

Es wurden ebenfalls Versuche unter der Vorgabe von Gleitungen durchgeführt. Diese dienen zur Kennwertermittlung unter Schubbeanspruchung. Analog zu den Versuchen unter Vorgabe von Normaldehnungen werden die gleichen Kennwerte unter Schubbeanspruchung bestimmt. Um die Kennwerte klar voneinander zu unterscheiden, erhalten sie den Index „ $\gamma$ “. Zur Erzielung einer gleichmäßigen Schubbelastung über den gesamten Querschnitt der Proben, wodurch der Einfluss des Spannungsgradienten vernachlässigbar klein wird, werden zylindrische Hohlproben mit einer dünnen Wandstärke von 1.5 mm verwendet. Eine technische Zeichnung der Hohlprobe ist in Abbildung 4.5a zu finden. Die Versuche werden auf einem mehrachsialen Hydraulikprüfstand vom Typ UO 160-1260 M01 der Firma Inova GmbH durchgeführt. Dieser Prüfstand kann eine maximale axiale Kraft von 100 kN und ein maximales Drehmoment von 1000 Nm aufbringen. Zur Messung der Gleitung wird ein Dehnungs-Gleitungs-Aufnehmer der Firma MTS verwendet, der auf der eingespannten Hohlprobe in Abbildung 4.5b angebracht ist.

Es entstehen Schubspannungs-Gleitungs-Verläufe, deren Amplituden ebenfalls mit dem Ansatz von Ramberg und Osgood beschrieben werden können. Auch in diesem Fall kann der Werkstoff einer zyklischen Verfestigung oder Entfestigung unterliegen. Beide Werkstoffe zeigen ähnliches Verhalten

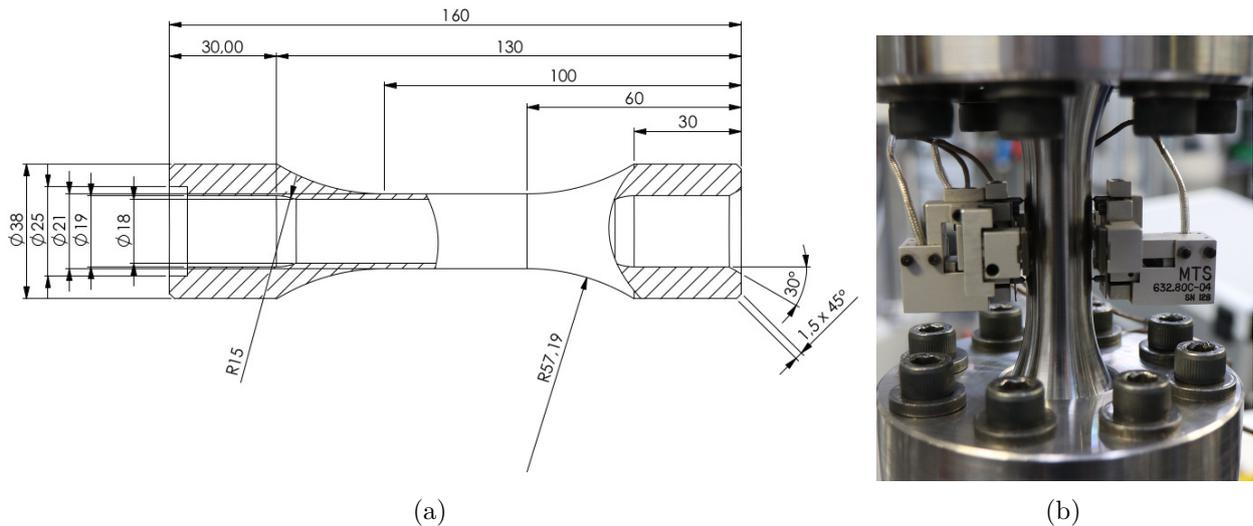


Abbildung 4.5: Hohlprobe zum Bestimmen der Gleitungswöhlerlinie (a) Probengeometrie (b) Eingespannte Probe mit aufgesetztem Dehnungsaufnehmer

wie unter axialer Belastung. Jedoch ist die zyklische Verfestigung beim EN-GJS-500-14 im Vergleich zur zyklischen Verfestigung unter axialer Belastung geringer ausgeprägt. Sowohl die zyklischen Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Schubbelastungen als auch die Gleitungswöhlerlinien beider Werkstoffe sind in Abbildung 4.6 und Abbildung 4.7 dargestellt.

In den Gleitungswöhlerlinien sind die beobachteten Anrissorientierungen der jeweiligen Versuche eingezeichnet. Unter reinem Schub zeigt der S355 nur Versagen aufgrund von Schubrisen, siehe Abbildung 4.6. Wenn ein Werkstoff unter reinem Zug/Druck aufgrund von Zugrisen und unter reinem Schub aufgrund von Schubrisen versagt, wird dies nach [Jian 07] und [Zhao 08] als gemischtes Rissverhalten („mixed cracking behavior“) klassifiziert.

Beim EN-GJS-500-14 scheint das Anrissverhalten unter reinem Schub noch komplizierter zu sein. Abhängig von der aufgebracht Belastung ändert sich der beobachtete Risswinkel, siehe Abbildung 4.7. Bei niedrigeren Schubbeanspruchungen bilden sich hauptsächlich Zugrisse aus, während bei zunehmender Lastamplitude eher Schubrisse beobachtet werden. Dieser Übergang von Zug- zu Schubrisen scheint eine Art Übergangsphase im Bereich von etwa  $N_f = 10^3 - 10^4$  Schwingspielen

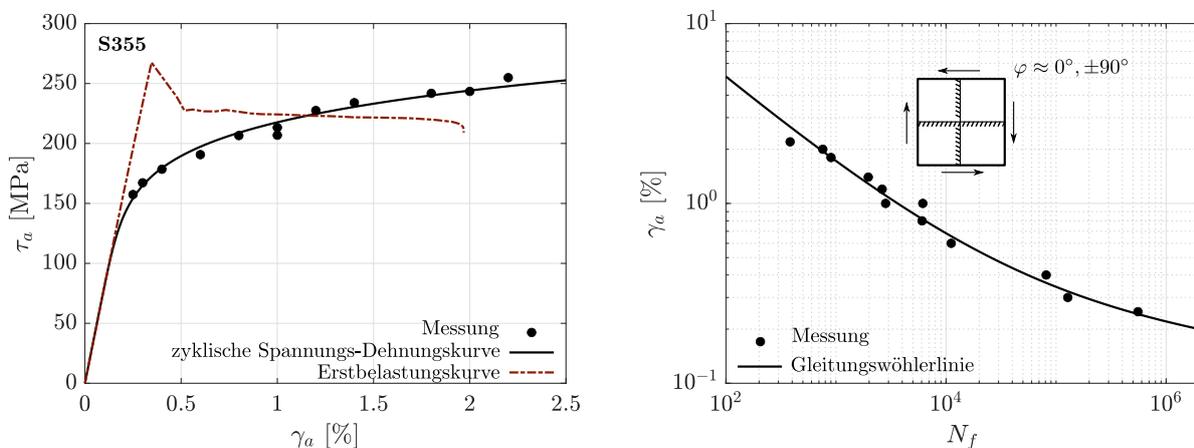


Abbildung 4.6: Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Gleitungswöhlerlinie für den Werkstoff S355

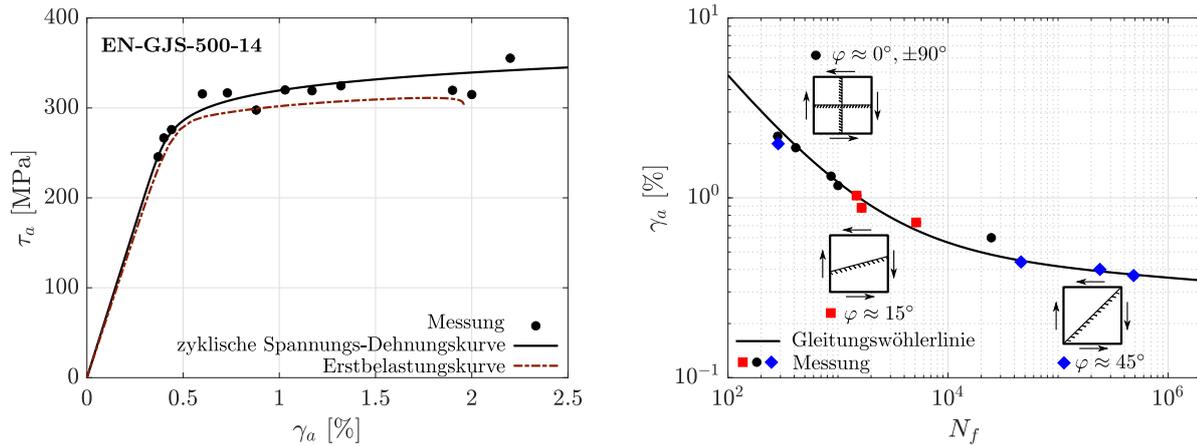


Abbildung 4.7: Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Gleitungswöhlerlinie für den Werkstoff EN-GJS-500-14

aufzuweisen. Alle Kennwerte, die aus den Versuchen mit reiner Torsionsbelastung unter Vorgabe von Gleitungsamplituden ermittelt wurden, sind in Tabelle 4.3 aufgeführt.

	$G$ GPa	$K'_\gamma$ MPa	$n'_\gamma$ -	$\tau'_f$ MPa	$\gamma'_f$ -	$b_\gamma$ -	$c_\gamma$ -
S355	81	425	0.136	408	0.743	-0.071	-0.52
EN-GJS-500-14	68	433	0.058	456	2.423	-0.044	-0.762
S460N aus [Hoff 05]	80	599	0.169	463.2	0.224	-0.07	-0.422
AW-5083 aus [Hoff 05]	25.5	249	0.057	324.5	0.8081	-0.081	-0.793

Tabelle 4.3: Zyklische Werkstoffkennwerte für Schubbelastung

#### 4.1.3. Versuche zur nichtproportionalen Verfestigung

Neben Experimenten, bei denen ausschließlich axiale Normaldehnungen oder ausschließlich Gleitungen vorgegeben wurden, sind zusätzlich Tests unter einer gemischten Belastung durchgeführt worden. In diesen Versuchen waren sowohl die axiale Dehnung als auch die Gleitung Regelgrößen. Es werden dieselbe Probengeometrie und derselbe Prüfstand wie zur Durchführung der Versuche unter Vorgabe der Gleitungen verwendet, siehe Abbildung 4.5.

Ziel ist die Bestimmung des nichtproportionalen Verfestigungsvermögens  $\alpha$  aus dem Ansatz nach Marquis und Socie [Soci 00], siehe Abschnitt 2.3.4. Dieser soll verwendet werden, um die nichtproportionale Verfestigung in ihrem stabilisierten Zustand zu beschreiben.

Im Zuge dieser Untersuchung werden nicht ausschließlich sinusförmige Belastungen mit Phasenverschiebungen von  $0^\circ$  und  $90^\circ$  untersucht, sondern auch verschiedene Signalformen (Sinus-, Rechteck- und Dreiecksignal) sowie Belastungen mit unterschiedlichen Frequenzen auf beiden Lastkanälen. Zusätzlich werden Versuche mit einer wechselnden Nichtproportionalität durchgeführt. Die Phasendiagramme der Dehnungen aller gefahrenen Belastungsformen sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Die resultierenden Hysteresekurven sind in einer schematischen Darstellung in Abbildung 4.9 zu sehen. Besonders relevant sind die Testreihen mit sinusförmiger Belastung und einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$ . Diese dienen dazu, das nichtproportionale Verfestigungsvermögen  $\alpha$  zu ermitteln. Die resultierende nichtproportionale Verfestigung zeigt sich in der erhöhten äußeren Last, die erforderlich ist,

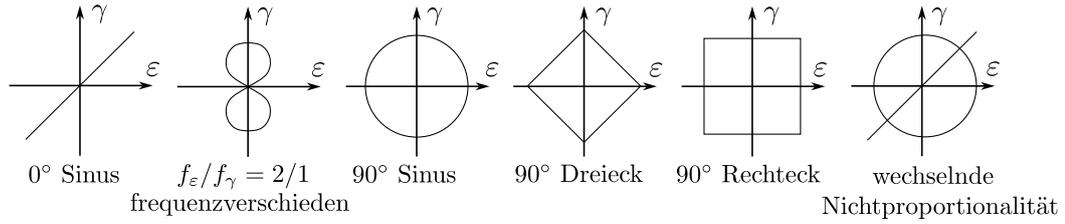


Abbildung 4.8: Schematische Darstellung der Phasendiagramme aller gefahrener Belastungsarten

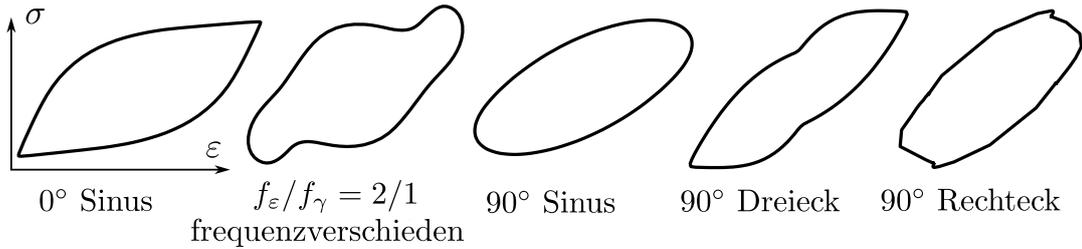


Abbildung 4.9: Schematische Darstellung der  $\sigma - \epsilon$  Hysteresenformen unterschiedlicher Beanspruchungsarten

um die gleiche Dehnung oder Gleitung zu erreichen wie im proportionalen Lastfall. Zur Veranschaulichung werden die Hysteresekurven der proportionalen und nichtproportionalen Belastung jeweils in einem Diagramm dargestellt. Für die beiden Werkstoffe ist ein solcher Vergleich in Abbildung 4.10 und Abbildung 4.11 gezeigt. Es wird deutlich, dass bei einer 90°-phasenverschobenen sinusförmigen Belastung im Vergleich zur proportionalen Belastung eine erheblich höhere Spannung auftritt.

Auswertemethoden zur Berechnung von  $\alpha$  werden von Linn [Linn 23] diskutiert. Gemäß [Soci 00] wird die maximale nichtproportionale Verfestigung bei einer Phasenverschiebung von 90° erreicht. Die resultierenden Spannungs- und Dehnungsamplituden aus den Hysteresen werden in ein Vergleichsspannungs-Vergleichsdehnungs-Diagramm überführt.

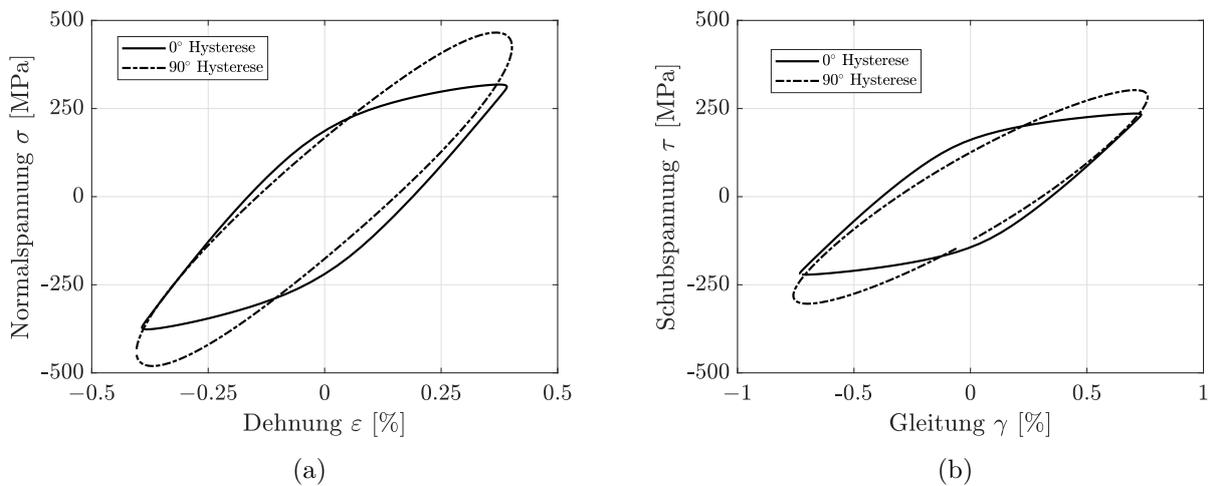


Abbildung 4.10: (a) Normalspannungs-Dehnungs-Hysterese und (b) Schubspannungs-Gleitungs-Hysterese bei proportionaler und 90°-phasenverschobener Sinus-Beanspruchung für EN-GJS-500-14

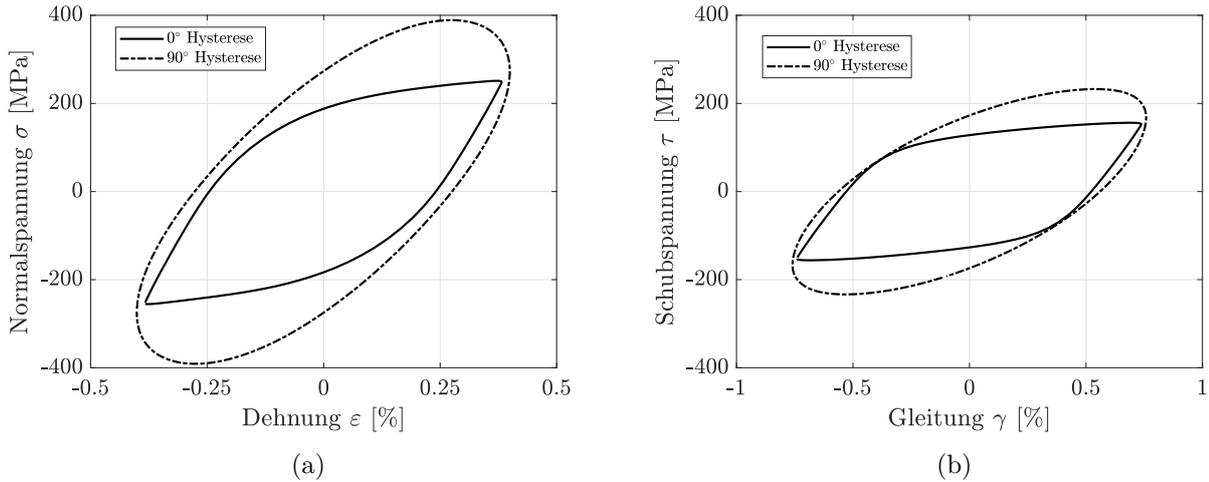


Abbildung 4.11: (a) Normalspannungs-Dehnungs-Hysterese und (b) Schubspannungs-Gleitungs-Hysterese bei proportionaler und 90°-phasenverschobener Sinus-Beanspruchung für S355

Daraufhin wird eine Regression durchgeführt, die dem Ansatz von Ramberg und Osgood ähnelt, wobei lediglich  $K'_{np}$  angepasst wird. Die nichtproportionale Verfestigung wird nach [Soci 00] an einem Punkt hoher Dehnung bestimmt. Auf diese Weise kann der Kennwert  $\hat{\alpha}$  aus

$$\hat{\alpha} = \frac{K'_{np}}{K'} - 1 \quad (4.1)$$

ermittelt werden. Dabei werden von Linn [Linn 23] jedoch die im Folgenden besprochenen Probleme identifiziert.

Es ist nicht klar definiert, welches Amplitudenverhältnis zwischen axialer Beanspruchung und Schubbeanspruchung herrschen soll. Es ist zu erwarten, dass sich für unterschiedliche Amplitudenverhältnisse unterschiedliche Werkstoffkennwerte ergeben.

Weiterhin ist ein berechnetes  $\alpha$  für den Ansatz nach Marquis und Socie immer auch von der Wahl der Nichtproportionalitätskennzahl  $f_{np}$  abhängig. In Gleichung (4.1) wurde ein  $f_{np} = 1$  für 90° Phasenverschiebung angenommen. Dieser Wert stellt sich jedoch nicht für alle Nichtproportionalitätskennzahlen ein. Ein berechnetes  $\hat{\alpha}$  muss korrigiert werden:

$$\alpha = \hat{\alpha} / f_{np}. \quad (4.2)$$

Außerdem existiert kein einheitliches Vorgehen, das vorgibt, wie bei nichtproportionalen Lasten Vergleichsspannungs- und Vergleichsdehnungsamplituden zu berechnen sind. [Linn 23] wendet die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{v,a} &= \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + 3\sigma_{xy,a}^2}, \\ \varepsilon_{v,a} &= \left[ \frac{\gamma_{xy,a}}{2} + \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \cdot \frac{\sigma_{xy,a}}{E} \right] \cdot \frac{2\sigma_{v,a}}{3\sigma_{xy,a}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

an, welche bereits in [Sava 95] verwendet wurde, um Vergleichsgrößen unter proportionaler Beanspruchung zu berechnen.

Unter nichtproportionaler bzw. phasenverschobener Beanspruchung entstehen keine einheitlichen Hysteresenformen. Die Form der Hysterese ist abhängig von der Beanspruchungsart. Für eine 90° phasenverschobene Belastung entstehen abgerundete ellipsenförmige Hysteresen. Die Extrema der Spannungen und Dehnungen treten nicht zeitgleich auf, wie es bei proportionaler Belastung

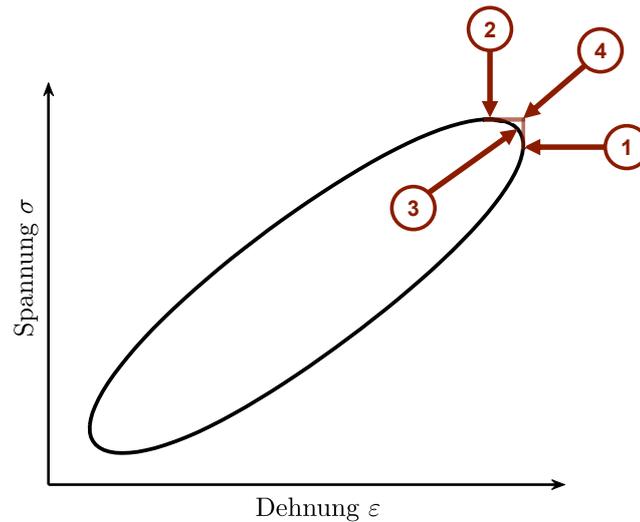


Abbildung 4.12: Varianten zur Auswertung der nichtproportionalen Spannungs-Dehnungs-Hysterese aus [Linn 23]

der Fall ist. Es ist nicht klar, welche Zeitpunkte zu wählen sind, um die für Gleichung (4.3) benötigten Amplituden zu bilden. Von Linn [Linn 23] werden die folgenden vier Auswertemethoden der Amplituden untersucht:

1. Die zur maximalen Dehnung gehörige Spannung (Variante 1)
2. Die maximal auftretende Spannung (Variante 2)
3. Die Spannung des Scheitelpunktes der Hysterese (Variante 3)
4. Die maximal auftretende Spannung und maximal auftretende Dehnung (Variante 4)

Die vier Varianten sind in Abbildung 4.12 schematisch dargestellt. Auf Grundlage von FE-Berechnungen, die im Rahmen einer Bachelorarbeit durchgeführt wurden [Herz 23], wählt Linn [Linn 23] Variante 3 aus.

Zur Bewertung der Nichtproportionalität der Belastung wird die Nichtproportionalitätskennzahl nach Gaier et al. [Gaie04] verwendet. Sie wird anhand der gemessenen Spannungen ermittelt und ergibt für das Verhältnis  $\gamma_a/\varepsilon_a = 1.9$  einen Wert von  $f_{np,Gaier} = 0.94$  für den Werkstoff EN-GJS-500-14. In Zusammenhang mit der Nichtproportionalitätskennzahl nach Gaier et al. [Gaie04] wird ein nichtproportionales Verfestigungsvermögen  $\alpha = 0.42$  für den Werkstoff EN-GJS-500-14 ermittelt [Linn 23]. Für den Baustahl S355 ergibt sich für das Verhältnis  $\gamma_a/\varepsilon_a = 1.9$  eine Nichtproportionalitätskennzahl von  $f_{np,Gaier} = 0.84$ , was zu einem Verfestigungsvermögen von  $\alpha = 0.52$  führt [Linn 23].

Um den zeitabhängigen Effekt der nichtproportionalen Verfestigung zu quantifizieren, werden dehnungsgeregelte und gleitungsgeregelte Versuche unter einer wechselnden Nichtproportionalität durchgeführt. Jeder Versuch beginnt mit 100 Schwingungszyklen unter proportionaler Belastung, um dem Werkstoff zu ermöglichen, sich zyklisch zu verfestigen oder zu entfestigen. Anschließend wechselt die Phasenverschiebung zwischen der Dehnung und der Gleitung alle 50 Schwingspiele von  $0^\circ$  auf  $90^\circ$  und wieder zurück. Die aufgebrachten Amplituden der einzelnen Dehnungskomponenten bleiben dabei gleich. Für jeden Werkstoff wird jeweils auf vier Lasthorizonten geprüft. Für den Baustahl S355 wird ein Dehnungsverhältnis von  $\gamma_a/\varepsilon_a = \sqrt{3}$  und für EN-GJS-500-14 ein Dehnungsverhältnis von  $\gamma_a/\varepsilon_a = 1/0.65$  vorgegeben. Diese Dehnungsverhältnisse wurden analog zu den Kehrwerten der Schubwechselfestigkeitsfaktoren  $f_{W,\tau}$  der FKM-Richtlinie [Renn 12] gewählt.

## 4.2. Parametrisierung des Plastizitätsmodells

Im Rahmen dieser Untersuchung wird das Plastizitätsmodell nach Ohno und Wang [Ohno93a, Ohno93b] mit den Versuchsergebnissen an den Werkstoffen S355 und EN-GJS-500-14 verglichen. Zur Anpassung der Modellparameter wurde das in Abschnitt 2.3.3 erläuterte Vorgehen in Kombination mit den in Tabelle 4.2 angegebenen zyklischen Werkstoffkennwerten verwendet. Zur Anpassung der Fließkurve werden 15 Backstresstensenoren verwendet. Um die Stützstellen auf der Fließkurve zu bestimmen, wurde das beschriebene Verfahren nach Moser et al. [Mose20] verwendet. Dazu wurden die Parameter  $q = 0.01$  und  $\varepsilon_{pl}^M = 0.03$  verwendet. Alle ermittelten Parameter des Ohno/Wang Modells sind in Tabelle A.6 und Tabelle A.7 aufgeführt. Da keine Versuche mit Lastverhältnissen  $R \neq -1$  durchgeführt wurden, konnten die Ratchetting Parameter  $\chi^i$  nicht an Versuchsergebnisse angepasst werden. Nach dem Vorschlag von Döring [Döri06] wurden die Werte  $\chi^i = 5$  verwendet.

Die stabilisierten Hysteresen und der Verlauf der Spannungsamplituden aufgetragen über die Schwingspiele für den Werkstoff S355 sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Die stabilisierte Hysterese entspricht der Hysterese bei halber Anrisschwingenspielzahl. Es ist erkennbar, dass die Form der Hysteresen sowie die auftretenden Schwingweiten für eine Belastung gut vom Ohno/Wang Modell beschrieben werden können. Der Verlauf der Amplituden zeigt ein ausgeprägtes zyklisches Ver- und Entfestigungsverhalten, wobei das Ohno/Wang Modell dieses transiente Werkstoffverhalten nicht berücksichtigt und sich auf einem Belastungshorizont eine stabilisierte Amplitude einstellt. Auffällig ist ein Unterschied für den Belastungshorizont  $\varepsilon_a = 1.2\%$ , wo über den gesamten Schwingpielverlauf zu geringe Amplituden berechnet werden. Dieser Versuch zeigt allerdings auch beim Vergleich der stabilisierten Hysteresen Abweichungen von den anderen Versuchsergebnissen.

Die stabilisierten Hysteresen und der Verlauf der Spannungsamplituden über die Schwingspiele für den Werkstoff EN-GJS-500-14 sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Auch hier kann das Ohno/Wang Modell die Form der Hysteresen in guter Näherung beschreiben. Keiner der beiden Werkstoffe zeigt ein ausgeprägtes Non-Masing-Verhalten. Der Werkstoff EN-GJS-500-14 zeigt auf allen Lasthorizonten eine zyklische Verfestigung. Das stabilisierte Niveau kann vom Ohno/Wang Modell gut beschrieben werden. Auf niedrigen Lasthorizonten ( $\varepsilon_a = 0.16\%$ ) zeigen sich Unterschiede in der Amplitudenhöhe. Während der Versuch bereits eine zyklische Verfestigung aufweist, liegen die auftretenden Spannungen

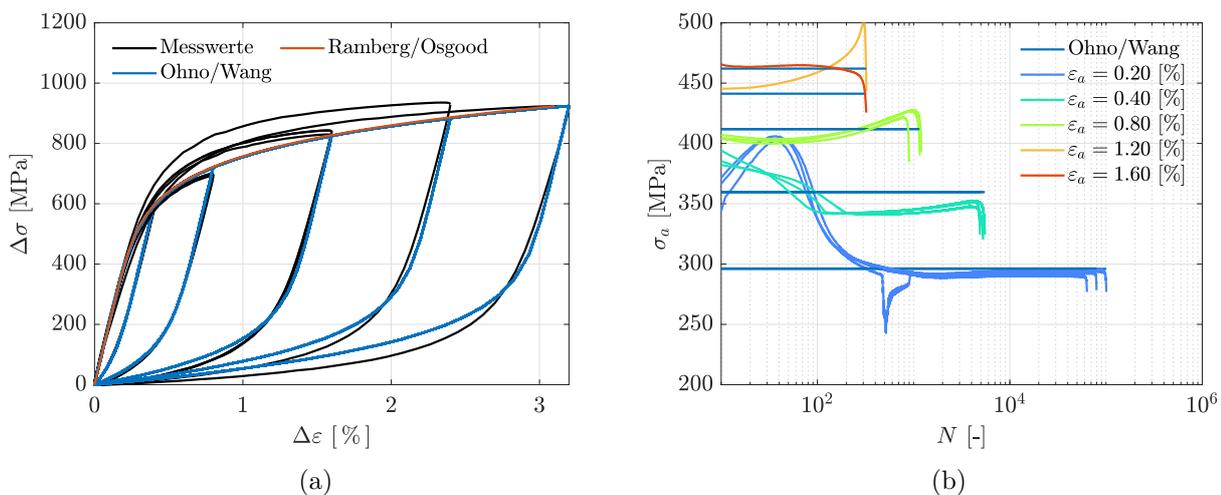


Abbildung 4.13: Ergebnisse der dehnungsgeregelten Einstufen Versuche am Werkstoff S355 im Vergleich mit dem Ohno/Wang Modell für (a) die zyklisch stabilisierten Hysteresen und (b) die zyklische Ver- und Entfestigung

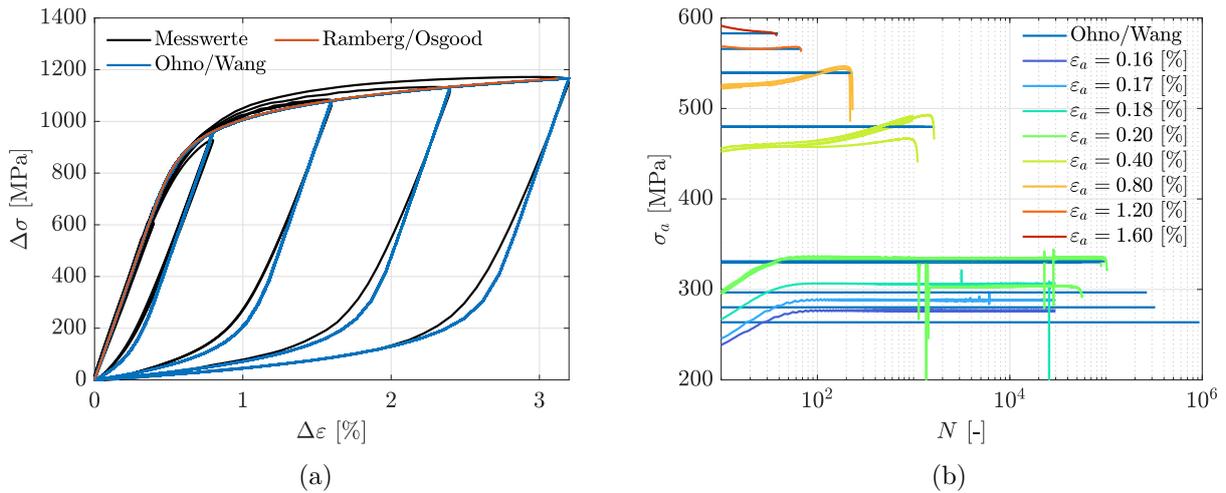


Abbildung 4.14: Ergebnisse der dehnungsgeregelten Einstufen Versuche am Werkstoff EN-GJS-500-14 im Vergleich mit dem Ohno/Wang Modell für (a) die zyklisch stabilisierten Hysteresen und (b) die zyklische Ver- und Entfestigung

für die bestimmten Parameter des Ohno/Wang Modells noch im elastischen Bereich. In diesem Bereich unterschätzt das Ohno/Wang Modell die Spannungsamplituden.

In Abbildung 4.15 werden die gemessenen und berechneten Hysteresen für zwei Versuche mit einer Belastung bei 90° Phasenverschiebung dargestellt. Dabei wurde ein Dreieckssignal als Signalform verwendet. Die dargestellten Hysteresen wurden jeweils bei halber Anrisschwingenspielzahl gemessen. Es ist deutlich zu erkennen, dass ohne Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung (NPV) die berechneten Amplituden vom Ohno/Wang Modell für beide Werkstoffe unterschätzt werden. Wenn jedoch der Ansatz von Marquis und Socie [Soci 00] zur Modellierung der NPV verwendet wird, zeigen die berechneten Ergebnisse eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Ergebnissen. Sowohl die Form als auch die Schwingweiten der Hysteresen werden besser vorhergesagt als ohne Berücksichtigung der NPV. Dies unterstreicht die Bedeutung der Berücksichtigung nichtproportionaler Verfestigungseffekte für eine genauere Vorhersage des Werkstoffverhaltens.

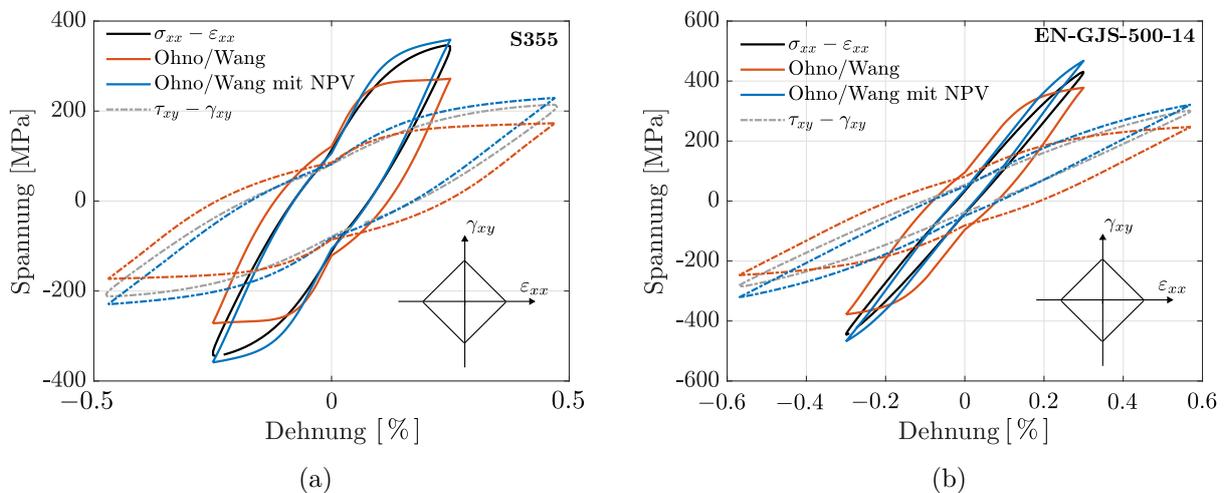


Abbildung 4.15: Hysteresen unter 90° phasenverschobener Belastung mit Dreieckssignal für (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14

### 4.3. Parametrisierung der Schädigungsmodelle

#### 4.3.1. Smith/Watson/Topper Modell

Ein großer Vorteil des Smith/Watson/Topper Modells ist die sehr einfache Parametrisierung. Für das Modell nach FKM-Richtlinie Nichtlinear aus Abschnitt 3.2.4 werden lediglich die Dehnungswöhlerlinie und die Mittelspannungsempfindlichkeit benötigt.

Die Parameter der Dehnungswöhlerlinie sind aus Versuchen, siehe Abschnitt 4.1.2, bekannt. Diese können direkt in Gleichung (3.22) eingesetzt werden, um die Schädigungsparameterwöhlerlinie zu erhalten. Aus den einzelnen Versuchsergebnissen zur Bestimmung der Dehnungswöhlerlinie kann aus der in diesem Fall vorgegebenen Dehnungsamplitude und gemessenen Spannungsamplitude ebenfalls ein  $P_{RAM}$  Wert ermittelt werden. In Abbildung 4.16 ist der Vergleich aus der Schädigungsparameterwöhlerlinie, bestimmt aus Gleichung (3.22), mit den aus Versuchsergebnissen ermittelten Werten des Schädigungsparameters dargestellt. Für beide Werkstoffe stimmen die Schädigungsparameterwöhlerlinien gut mit den Versuchsergebnissen überein.

Zusätzlich sind noch die Mittelspannungsempfindlichkeiten zu bestimmen. Hierzu wurden keine Versuche selbst durchgeführt. Die Mittelspannungsempfindlichkeiten werden in Abhängigkeit der Werkstoffgruppe und der Zugfestigkeit aus der FKM-Richtlinie [Renn 12] abgeschätzt. Die verwendeten Werte sind in Tabelle 4.4 angegeben.

	$M_\sigma$
	-
S355	0.09
EN-GJS-500-14	0.27
S460N	0.13
AW-5083	0.30

Tabelle 4.4: Werkstoffkennwerte für das Smith/Watson/Topper Modell

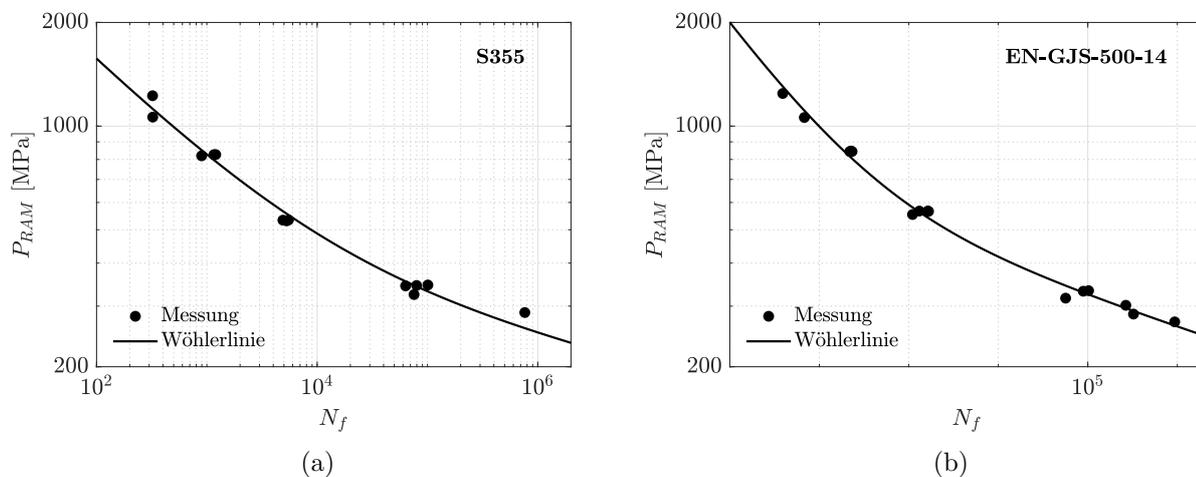


Abbildung 4.16: Schädigungsparameterwöhlerlinie für das Smith/Watson/Topper Modell und die Werkstoffe (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14

### 4.3.2. Fatemi/Socie Modell

Die Schädigungsparameterwöhlerlinie des Fatemi/Socie Modells kann mit Hilfe der Parameter der Dehnungswöhlerlinie gemäß Gleichung (3.29) oder anhand von Gleichung (3.28) und den Parametern der Gleitungswöhlerlinie abgeleitet werden. Es müssen zwei zusätzliche Werkstoffparameter, die Fließspannung  $\sigma_F$  und der Modellparameter  $k_{FS}$ , identifiziert werden. Wie in Abschnitt 3.2.5 diskutiert wurde, existieren mehrere Definitionen, wie die Fließspannung festzulegen ist. Je nach Definition würde sich der Wert des Parameters  $k_{FS}$  für den gleichen Werkstoff ändern. Aus diesem Grund wird der Quotient  $k_{FS}/\sigma_F$  als ein Modellparameter angesehen.

Der Parameter  $k_{FS}/\sigma_F$  wird verwendet, um Versuche unter reinem Zug/Druck und reiner Torsion mit Hilfe einer einzelnen Wöhlerlinie darstellen zu können. Hierfür wird die ursprüngliche Definition des Schädigungsparameters angewendet. Diese besagt, dass die kritische Ebene diejenige ist, in welcher die größten Gleitungsamplituden auftreten. Die Werte des Schädigungsparameters werden dann aus den gemessenen Spannungs- und Dehnungsamplituden der einzelnen Versuchsergebnisse aus Gleichung (3.27) bestimmt. Unter reiner Torsion können die im Versuch vorgegebenen Gleitungsamplituden direkt als Werte des Schädigungsparameters verwendet werden. Bei reiner Zug/Druck Belastung treten die größten Gleitungsamplituden in Ebenen auf, die zur größten Hauptspannung um  $45^\circ$  geneigt sind. Die Spannungen und Dehnungen werden in diese Ebene transformiert und in Gleichung (3.27) eingesetzt. Die Werte des Schädigungsparameters können dann mit

$$P_{FS} = \left[ (1 + \nu) \varepsilon_a^e + \frac{3}{2} \varepsilon_a^p \right] \cdot \left( 1 + \frac{k_{FS}}{\sigma_F} \cdot \frac{\sigma_a}{2} \right) \quad (4.4)$$

direkt aus den in den Versuchen gemessenen oder vorgegebenen Spannungs- und Dehnungsamplituden berechnet werden. In Gleichung (4.4) wurde für die plastische Querdehnzahl der Wert 0.5 verwendet. Der Quotient  $k_{FS}/\sigma_F$  wird also verwendet, um die Ergebnisse der Versuche unter reinem Zug/Druck zu verschieben und mit den Ergebnissen aus reiner Torsion auf eine Wöhlerlinie zu bringen. Die identifizierten Parameter  $k_{FS}/\sigma_F$  für alle Werkstoffe sind in Tabelle 4.5 aufgeführt. Zusätzlich sind die verwendete Fließspannung und der Modellparameter  $k_{FS}$  aufgeführt, wenn die Fließspannung wie im Kurzrissmodell nach Vormwald [Vorm 89] aus Gleichung (3.64) bestimmt wird.

	$k_{FS}/\sigma_F$ MPa <sup>-1</sup>	$k_{FS}$ -	$\sigma_F$ MPa
S355	0.0023	1.05	448
EN-GJS-500-14	0.0039	2	509
S460N [Hert 16]	0.0023	1.2	527
AW-5083 [Hert 16]	0.0021	0.7	341

Tabelle 4.5: Werkstoffkennwerte für das Fatemi/Socie Modell

Abbildung 4.17 zeigt die Schädigungsparameterwöhlerlinien der beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 im Vergleich mit den in Versuchen bestimmten Werten des Schädigungsparameters.

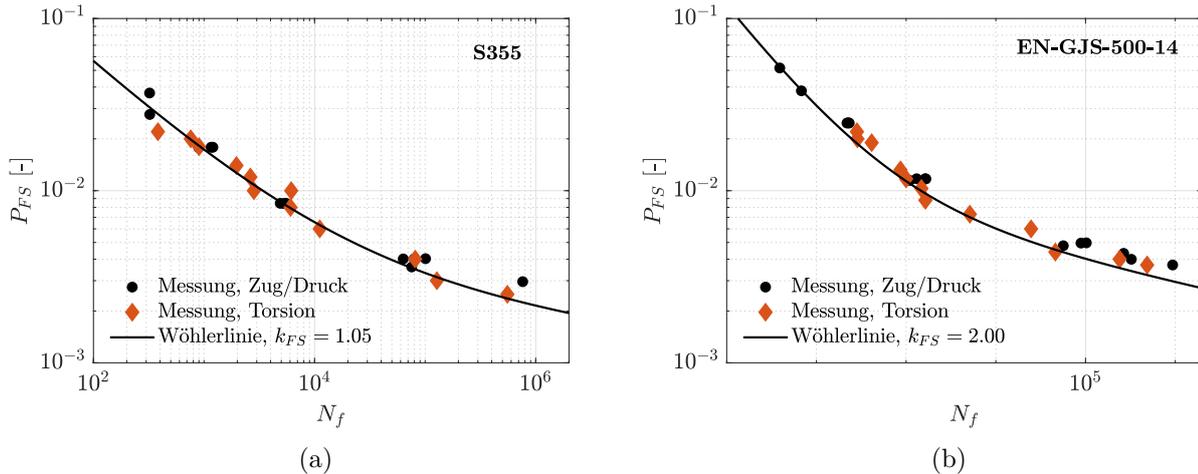


Abbildung 4.17: Schädigungsparameterwöhlerlinie für das Fatemi/Socie Modell und die Werkstoffe (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14

### 4.3.3. Kurzrissmodell

Im Kurzrissmodell stehen einige Parameter zur Verfügung, um das Ermüdungsrisswachstum eines gegebenen Werkstoffs zu beschreiben. Eine Übersicht aller Parameter ist in Tabelle 3.1 angegeben. Anhand der hier durchgeführten Experimente kann nur ein Teil der Parameter bestimmt werden. Ein Großteil wird aus den in Abschnitt 3.2.6.9 angegebenen Verfahren aus bekannten Werkstoffkennwerten, wie dem Elastizitätsmodul oder der Mittelspannungsempfindlichkeit, abgeschätzt. Ein anderer Teil der Modellparameter wird auf Standardwerte gesetzt. Die Stützstelle der Schädigungsparameterwöhlerlinie  $P_{Z,\text{stütz}}$  beziehungsweise  $Q$  sowie die Neigung der Schädigungsparameterwöhlerlinie  $m_Z$  werden aus den Versuchen zur Ermittlung der Dehnungswöhlerlinie bestimmt. Die Methode, um aus einer gegebenen Spannungs- und Dehnungsamplitude den Wert des Schädigungsparameters zu ermitteln, wurde in Abschnitt 3.2.6.9 erläutert. Die Steigung sowie Stützstelle der Wöhlerlinie können durch lineare Regression der logarithmierten Versuchswerte aus Gleichung (3.65) bzw. Gleichung (3.70) erfolgen. Die so ermittelten Schädigungsparameterwöhlerlinien für die Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 sind in Abbildung 4.18 dargestellt.

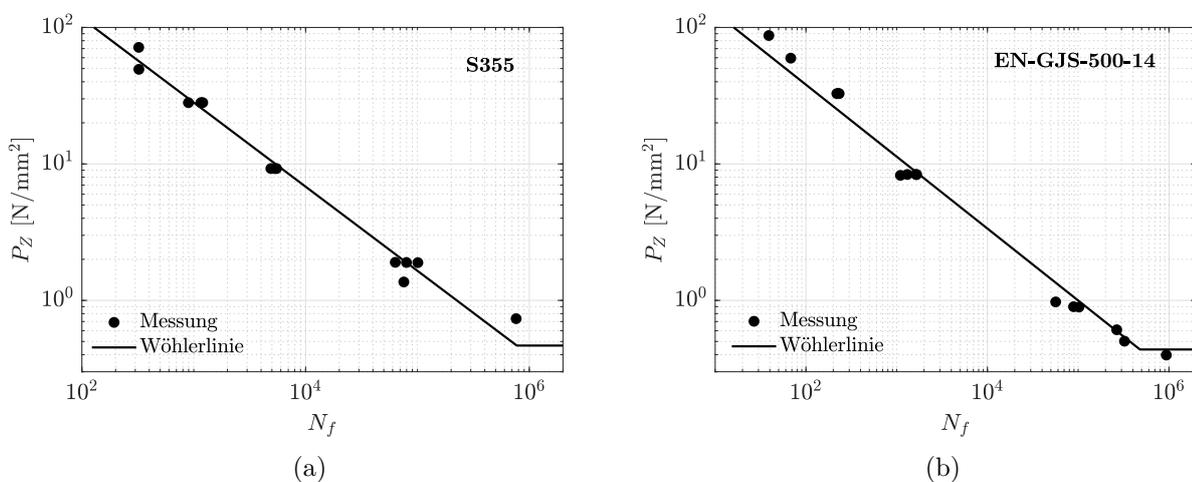


Abbildung 4.18: Schädigungsparameterwöhlerlinie für das Kurzrissmodell und die Werkstoffe (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14

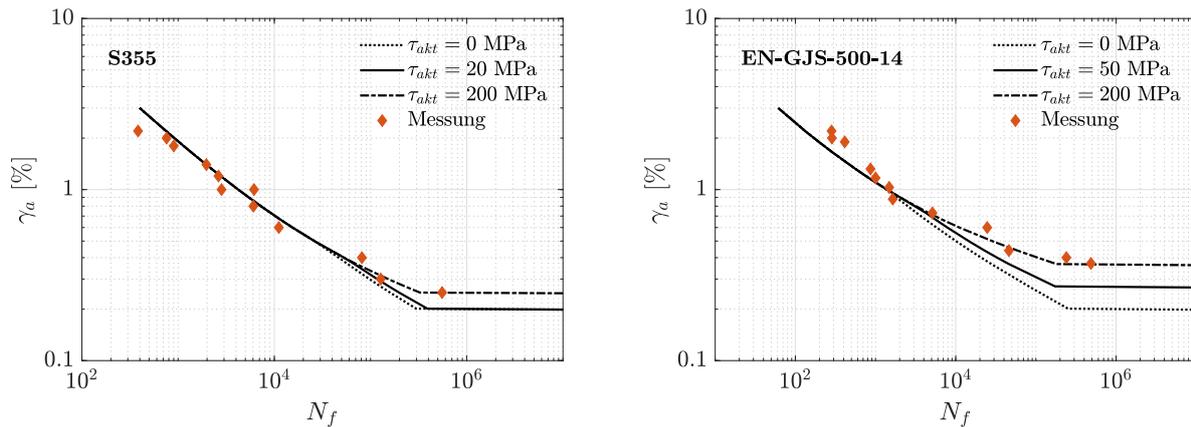


Abbildung 4.19: Gleitungswöhlerlinie berechnet mit dem Kurzrisssmodell unter Variation des Modellparameters  $\tau_{akt}$

Neben Versuchen zur Ermittlung der Dehnungswöhlerlinie liegen Versuche unter reiner Torsion vor. Wie in Abschnitt 3.2.6.9 beschrieben, können diese verwendet werden, um den Parameter  $\tau_{akt}$  anzupassen. Auf niedrigen Beanspruchungsniveaus kann durch  $\tau_{akt}$  sowohl die rechnerische Lebensdauer als auch die Anrissorientierung gesteuert werden, indem zwischen Schubrisen und Zugrisen (Modus I Risse) unterschieden wird. Große Werte von  $\tau_{akt}$  behindern das Schubrisenwachstum und führen tendenziell eher zu Modus I Rissen. Abbildung 4.19 zeigt die gemessenen Gleitungswöhlerlinien der Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 sowie die, mit dem Kurzrisssmodell berechneten, Wöhlerlinien. Dabei wurde im Kurzrisssmodell der Modellparameter  $\tau_{akt}$  variiert. Zu erkennen ist der Einfluss von  $\tau_{akt}$  auf niedrigen Beanspruchungsniveaus. Auffällig ist auch, dass  $\tau_{akt}$  beim EN-GJS-500-14 einen deutlich stärkeren Einfluss hat als beim S355. Für EN-GJS-500-14 wurde der Wert  $\tau_{akt} = 200$  MPa gewählt. Zum einen stimmen mit diesem Wert die gemessenen und berechneten Lebensdauern sehr gut überein. Zum anderen führt der große Schwellenwert  $\tau_{akt} = 200$  MPa auch dazu, dass auf niedrigen Beanspruchungsniveaus Modus I Risse wachsen, was mit den in Versuchen beobachteten Anrisswinkeln auf niedrigen Beanspruchungsniveaus übereinstimmt, siehe Abbildung 4.7.

Der Einfluss des Parameters  $\tau_{akt}$  auf die Ermüdungslebensdauer für reine Torsion ist bei dem Werkstoff S355 nicht sehr stark ausgeprägt. Mit allen hier beschriebenen Parametern lassen sich gute Vorhersagen der Ermüdungslebensdauer treffen. Es wurde der Wert  $\tau_{akt} = 20$  MPa gewählt, da die gemessenen Anrisswinkel eher darauf hindeuten, dass der Werkstoff unter reiner Torsion durch das Wachstum von Schubrisen versagt. Durch einen kleineren Schwellenwert  $\tau_{akt} = 20$  MPa kann dieses Anrissverhalten zumindest auf niedrigen Beanspruchungsniveaus abgebildet werden.

Eine Aufstellung sämtlicher für die Werkstoffe ermittelten Parameter findet sich in Tabelle 4.6. Die Parameter sind entsprechend der Methode ihrer Ermittlung separat aufgeführt. Die angewendeten Verfahren zur Abschätzung von Modellparametern, basierend auf bekannten Werkstoffkennwerten, sind alle in Abschnitt 3.2.6.9 aufgeführt. Die Berechnungsmethoden für die abhängigen Modellparameter werden in Abschnitt 3.2.6 beschrieben.

		S355	EN-GJS-500-14	S460N [Hert 16]	AW-5083 [Hert 16]
aus Versuchen bestimmt:					
$m_Z$	-	1.62	1.90	1.72	1.67
$P_{Z,stütz}$	N/mm <sup>2</sup>	$2.00 \cdot 10^3$	431	$2.04 \cdot 10^3$	676
$Q$	(N/mm <sup>2</sup> ) <sup><math>m_Z</math></sup>	$2.24 \cdot 10^5$	$9.96 \cdot 10^4$	$5.08 \cdot 10^5$	$5.16 \cdot 10^4$
$\tau_{akt}$	MPa	20	200	50	50
aus bekannten Werkstoffkennwerten abgeschätzt:					
$a_{mitt}$	-	0.48	0.35	0.41*	0.26*
$C$	$\frac{mm}{cyc} \cdot \left(\frac{N}{mm}\right)^{m_Z}$	$4.28 \cdot 10^{-5}$	$8.19 \cdot 10^{-5}$	$4.52 \cdot 10^{-5}$	$2.78 \cdot 10^{-4}$
$Z_{eff,th}$	N/mm	0.041	0.033	0.042	0.014
$\sigma_F$	MPa	448	509	526	338
$\tau_F$	MPa	259	351	304	195
auf default Werte gesetzt:					
$a_{tors}$	-	0	0	0	0
$\mu$	-	0.5	0.5	0.5	0.5
$FA$	-	15	15	15	15
abhängige Parameter:					
$P_{Z,D,0}$	N/mm <sup>2</sup>	0.47	0.44	1.04	0.28
$N_{D,0}$	-	$7.73 \cdot 10^5$	$4.79 \cdot 10^5$	$4.75 \cdot 10^5$	$4.38 \cdot 10^5$
$a_0$	$\mu m$	32	68	16	23
$l^*$	$\mu m$	55.5	76	24	26

\* Parameter wurde selbst bestimmt

Tabelle 4.6: Werkstoffkennwerte für das Kurzriissmodell

#### 4.3.4. Stützwirkung

Die Parameter der Schädigungsmodelle wurden anhand von Versuchsergebnissen an Vollproben bestimmt, siehe Abbildung 4.2. Die Versuche unter Torsion und unter kombinierter Last wurden allerdings mit zylindrischen Hohlproben durchgeführt, siehe Abbildung 4.5. Bei der Übertragung der Werkstoffkennwerte von Vollprobe auf Rundprobe ist ein Größeneinfluss zu erwarten, der über die statistische Stützwirkung eingefangen wird. Bei beiden Probenformen ist kein Einfluss des Spannungsgradienten zu erwarten. In Tabelle 4.7 sind die berechneten hochbeanspruchten Oberflächen sowie die daraus resultierenden Stützzahlen angegeben. Für den S460N und den AW-5083 wurden die hochbeanspruchten Oberflächen aus [Hert 16] übernommen. Hertel [Hert 16] gibt für den Baustahl S460N einen Weibull Exponenten  $\kappa = 22$  sowie für AW-5083 den Weibull Exponenten  $\kappa = 16$  an. Für die beiden anderen Werkstoffe wurden die Weibull Exponenten nach der Werkstoffgruppe aus der FKM-Richtlinie [Renn 12] entnommen. Es wurde für den Baustahl  $\kappa = 30$  und für EN-GJS-500-14  $\kappa = 10$  verwendet.

Geometrie	Belastung	S355		EN-GJS-500-14	
		$A_\sigma$ [mm <sup>2</sup> ]	$n_{st}$	$A_\sigma$ [mm <sup>2</sup> ]	$n_{st}$
Vollprobe Abb. 4.2	Zug/Druck	165	-	178	-
Hohlprobe Abb. 4.5	Zug/Druck	2908	0.91	3045	0.75
Hohlprobe Abb. 4.5	Torsion	2906	0.91	3041	0.75
Hohlprobe Abb. 4.5	Proportional	2907	0.91	3042	0.75
		S460N [Hert 16]		AW-5083 [Hert 16]	
		$A_\sigma$ [mm <sup>2</sup> ]	$n_{st}$	$A_\sigma$ [mm <sup>2</sup> ]	$n_{st}$
Hourglass-Probe	Zug/Druck	68	-	60	-
Rohrprobe	Zug/Druck	1495	0.87	1195	0.83
Rohrprobe	Torsion	1226	0.88	1033	0.84
Rohrprobe	Proportional	1448	0.87	1213	0.83

Tabelle 4.7: Hochbeanspruchte Oberflächen in mm<sup>2</sup> und statistische Stützziffer

#### 4.4. Prognose der Anrisslebensdauer

Im Folgenden werden die mit den Schädigungsmodellen berechneten und die tatsächlich gemessenen Anrisslebensdauern an Werkstoffproben verglichen. Zunächst werden einige Lastpfade beispielhaft erläutert, um die Eigenschaften der Modelle zu veranschaulichen. Anschließend erfolgt eine statistische Auswertung aller Versuche der vier untersuchten Werkstoffe. Insgesamt wurden die berechneten und beobachteten Anrisslebensdauern von 289 Einzelversuchen miteinander verglichen. Diese lassen sich aufteilen in 171 Versuche unter proportionaler Belastung sowie 118 Versuche unter nichtproportionaler Belastung.

Die hier nachgerechneten Experimente wurden unter Vorgabe der Dehnungen durchgeführt. Die zur Schädigungsbewertung nötigen Spannungen werden mit dem Plastizitätsmodell nach Ohno und Wang simuliert. Die Parametrisierung des Modells erfolgt anhand der zyklischen Werkstoffparameter mit dem Verfahren aus Abschnitt 2.3.3. Für die im eigenen Projekt [Linn 22] durchgeführten Versuche liegen ebenfalls Zeitverläufe von gemessenen äußeren Belastungen (axiale Zugkraft und Torsionsmoment) vor. Diese können mit bekannter Probengeometrie und der Annahme konstanter Spannungsverläufe über den Probenquerschnitt in Spannungen umgerechnet werden. Anhand der Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 wird untersucht, welchen Einfluss die Simulation der Spannungen auf die Qualität der Prognose der Ermüdungslebensdauer besitzt.

Theoretisch ist ein Schädigungsmodell der kritischen Schnittebene in der Lage, sowohl die Anrisslebensdauer als auch die Anrissorientierung vorherzusagen. Für einige Proben wurde die Orientierung des ersten beobachteten Anrisses gemessen. Neben dem Vergleich zwischen berechneter und gemessener Anrisslebensdauer wird auch die Genauigkeit der Vorhersage des Anrisswinkels untersucht.

Im Fall der hier verwendeten dünnwandigen Rohre als Probengeometrie unter axialer Zug/Druck-Torsions-Belastung wird eine Schnittebene durch einen einzelnen Winkel  $\varphi$  definiert. Eine Kippung der Anrissorientierung in die Werkstoffprobe hinein wird in dieser Untersuchung nicht beachtet. Der Winkel  $\varphi$  repräsentiert eine Rotation um die radiale Richtung des Prüfkörpers. Spezifisch bedeutet ein Winkel von  $\varphi = 0^\circ$  einen Riss, der in Umfangsrichtung ausgerichtet ist, während ein Winkel von  $\varphi = 90^\circ$  auf einen Riss in axialer Richtung des Prüfkörpers hinweist.

Für eine gegebene Belastung wird häufig festgestellt, dass mehrere Schnittebenen identische oder sehr ähnliche Ermüdungsschädigungen erfahren. Für die Modellierung der Anrissorientierung wird nicht nur eine einzige kritische Ebene berücksichtigt, sondern auch alle Ebenen, die mindestens 90%

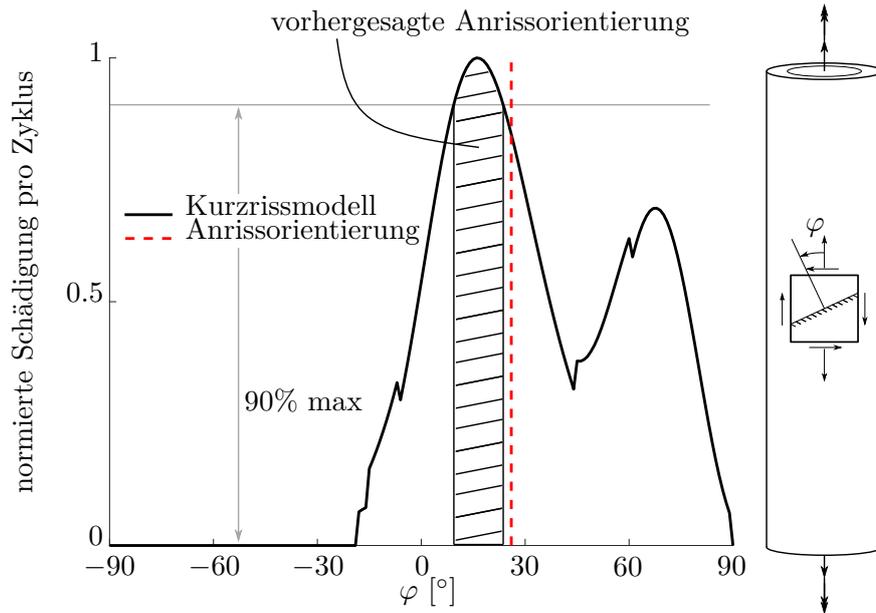


Abbildung 4.20: Schematische Darstellung der normierten Schädigung pro Zyklus über die verschiedenen Schnittebenen, berechnet mit dem Kurzrissmodell

der Schädigung der kritischen Ebene aufweisen werden, als potenzielle Anrissorientierung betrachtet. Diese Definition wird von [Jian 07] übernommen. Es wird vom Schädigungsmodell also nicht mehr eine einzige Schnittebene als kritische Ebene definiert, sondern es entsteht eine Spanne möglicher Anrissorientierungen. Wie in [Jian 07] bereits diskutiert wurde, ist die festgelegte Spanne von 10% eine willkürliche Wahl ohne physikalische Bedeutung. Eine schematische Darstellung dieses Verfahrens ist in Abbildung 4.20 gegeben. Es ist die normierte Schädigung über verschiedene Schnittebenen aufgetragen. Der Schaden wird als der Kehrwert der berechneten Ermüdungslebensdauer für eine Belastung mit konstanten Amplituden betrachtet. Alle Ebenen, die mindestens 90% der maximalen Schädigung erfahren, werden als potentielle Anrissorientierungen definiert.

#### 4.4.1. Reine Schubbelastung

Abbildung 4.21 zeigt die Wöhlerlinien, die sich bei reiner Torsionsbelastung aus den drei Schädigungsparametern für die Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 ergeben, im Vergleich mit den in Experimenten gemessenen Anrisslebensdauern. Zu erkennen ist, dass der  $P_{RAM}$  Parameter die Lebensdauer für beide Werkstoffe überschätzt. Er ist nicht in der Lage, das Ermüdungsverhalten unter reiner Schubbelastung zutreffend zu beschreiben. Mit dem  $P_{FS}$  Parameter wird eine etwas bessere Prognose der Anrisslebensdauer erreicht. Hier werden die Ermüdungslebensdauern allerdings tendenziell unterschätzt. Die beste Prognose der Anrisslebensdauer gelingt mit dem Kurzrissparameter  $P_Z$ . Die Wöhlerlinie des  $P_Z$  Parameters liegt zwischen den Wöhlerlinien der anderen beiden Parameter. Es ist allerdings anzumerken, dass die hier gezeigten experimentellen Lebensdauern verwendet wurden, um den Parameter  $\tau_{akt}$  des Kurzrissmodells anzupassen. Diese Anpassung hat allerdings nur Auswirkungen auf Anrisslebensdauern bei Rechnungen mit einer eher geringeren vorgegebenen Gleitungsamplitude.

In Abbildung 4.22 und Abbildung 4.23 sind die gemessenen Anrissorientierungen der Experimente unter reiner Torsion aufgetragen. Auf der Ordinate ist die jeweilige Belastungshöhe (in diesem Fall die vorgegebene Gleitungsamplitude) aufgetragen. Die Abszisse zeigt die gemessene Anrissorientierung nach der Winkeldefinition aus Abbildung 4.20. Gemessene Winkel werden durch schwarze Punkte symbolisiert. Die mit den Schädigungsmodellen berechneten Bereiche möglicher Anrissorientierungen werden durch horizontal orientierte Balken angezeigt.

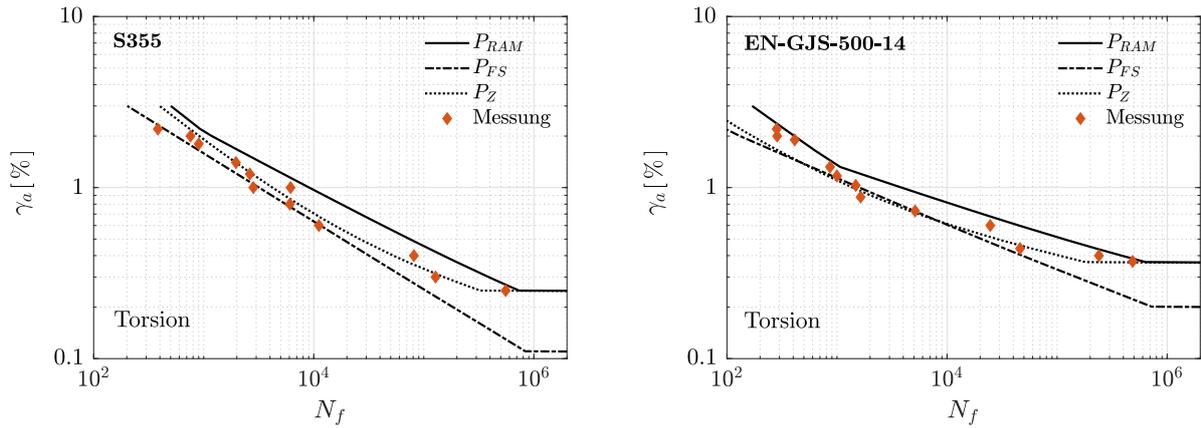


Abbildung 4.21: Anrisslebensdauer der Hohlproben bei reiner Torsion, für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14

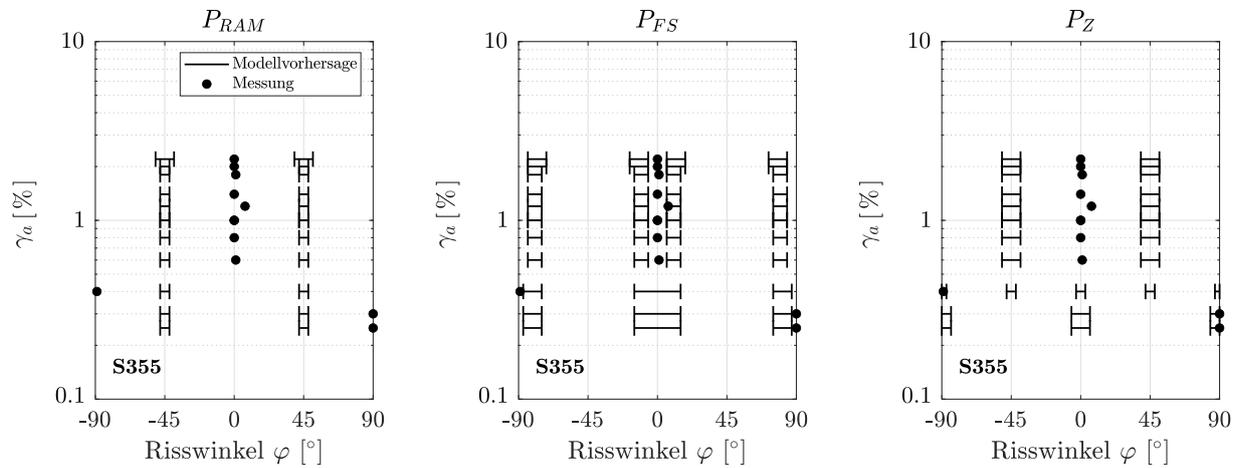


Abbildung 4.22: Anrissorientierungen unter reiner Torsion für den Werkstoff S355 und die verschiedenen Schädigungsparameter

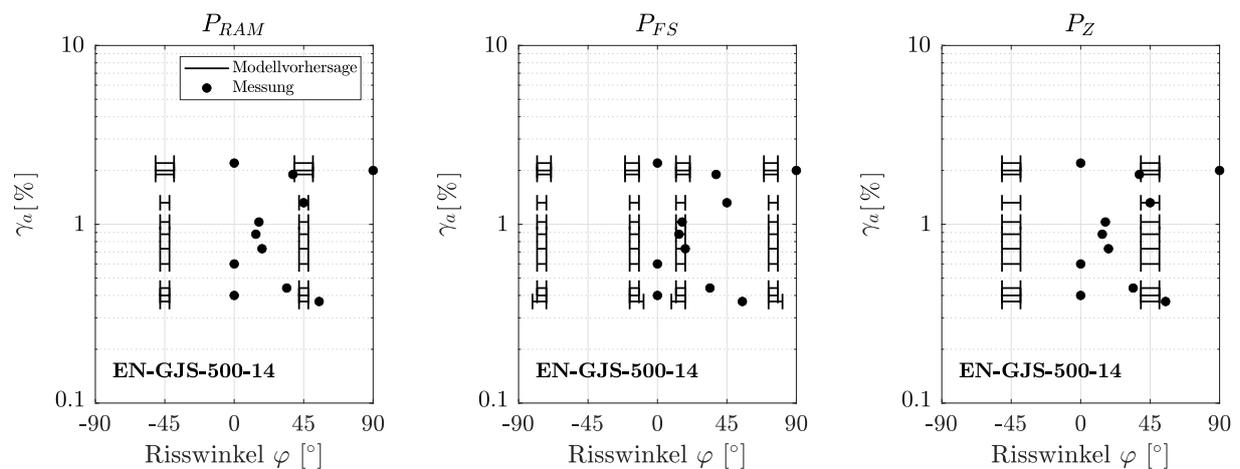


Abbildung 4.23: Anrissorientierungen unter reiner Torsion für den Werkstoff EN-GJS-500-14 und die verschiedenen Schädigungsparameter

Unter reiner Torsion stellen Winkel  $\varphi = 0^\circ, \pm 90^\circ$  Ebenen mit maximaler Schubbelastung dar, während Ebenen mit  $\varphi = \pm 45^\circ$  maximale Normalbelastung erfahren.

Bei dem duktilen Baustahl S355 werden, unabhängig von der Belastungshöhe, Schubrisse beobachtet. Das Anrissverhalten des EN-GJS-500-14 ist komplexer. Bei hohen sowie niedrigen Gleitungsamplituden werden sowohl Schub- als auch Zugrisse beobachtet. Im mittleren Beanspruchungsbereich ( $\gamma_a \approx 0.7\% - 1\%$ ) werden Anrissorientierungen um  $\varphi \approx 15^\circ$  gemessen.

Der Parameter  $P_{RAM}$  sagt gemäß seiner Definition unabhängig vom untersuchten Werkstoff stets Ebenen um  $\varphi = \pm 45^\circ$  voraus. Dies deckt sich nicht mit den experimentellen Beobachtungen des Werkstoffs S355. Beim EN-GJS-500-14 werden dann zumindest alle Zugrisse korrekt vorhergesagt. Der Parameter  $P_{FS}$  berechnet Anrissorientierungen in der Nähe der maximalen Schubbelastung. Aufgrund des Einflusses der Normalspannung in der Schnittebene werden geringfügig andere Anrissorientierungen als die der maximalen Schubbelastung vorhergesagt. Beim Werkstoff EN-GJS-500-14 ist diese Verschiebung stärker ausgeprägt, da hier Normalspannungen durch den Werkstoffparameter  $k_{FS}/\sigma_F$  stärker gewichtet werden, siehe Tabelle 4.5. Für den Werkstoff S355 werden die Anrissorientierungen annähernd getroffen. Beim EN-GJS-500-14 werden die Anrissorientierungen nur im mittleren Beanspruchungsbereich korrekt vorhergesagt.

Das Kurzrissmodell  $P_Z$  sagt für hohe Belastungen stets Modus I Risse voraus. Auf niedrigen Belastungsniveaus lässt sich das Anrissverhalten durch den Parameter  $\tau_{akt}$  steuern. Dieses Verhalten ist in Abbildung 4.22 (rechts) für den Werkstoff S355 zu beobachten. Auf hohen Lasthorizonten werden nur Modus I Risse in Ebenen um  $\varphi \approx \pm 45^\circ$  berechnet. Ab einer Gleitungsamplitude  $\gamma_a = 0.4\%$  kommt es zu einem Übergangsbereich. Modus I und Modus III Risse werden hier vom Modell in etwa gleich bewertet. Unterhalb von  $\gamma_a = 0.4\%$  werden dann nur Schubrisse vorhergesagt. Zumindest auf den unteren Belastungsniveaus werden die Anrissorientierungen des S355 vom Kurzrissmodell getroffen. Für EN-GJS-500-14 wurde  $\tau_{akt}$  so gewählt, dass Schubrisse stark behindert werden. Hier werden vom Kurzrissmodell nur Modus I Risse berechnet.

Von keinem Schädigungsmodell kann die Anrissorientierung auf allen Lastniveaus korrekt vorhergesagt werden. Vor allem beim EN-GJS-500-14 kann das Anrissverhalten des Werkstoffs von den Modellen nicht beschrieben werden, was auch an der starken Streuung der Versuchsergebnisse liegt. Korrekt vorhergesagte Anrisswinkel sind beim EN-GJS-500-14 weniger den Schädigungsmodellen als der Tatsache zuzuschreiben, dass der Werkstoff unter vielen verschiedenen Anrissorientierungen versagt.

#### 4.4.2. Proportionale Belastung

Der klassische Fall einer mehrachsigen Beanspruchung stellt die proportionale Belastung ohne Mittellast dar. Dieser Lastfall wird hier untersucht. Die mit den Schädigungsmodellen berechneten Wöhlerlinien, so wie die in Experimenten beobachteten Anrisslebensdauern der beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14, sind in Abbildung 4.24 angegeben.

Für den S355 wird mit allen Schädigungsmodellen eine gute Prognose der Anrisslebensdauer erreicht. Es ist ebenfalls zu beobachten, dass sich die Modelle sehr wenig unterscheiden. Vor allem die Parameter  $P_{RAM}$  und  $P_Z$  beschreiben nahezu die gleiche Wöhlerlinie. Der Parameter  $P_{FS}$  zeigt erst ab etwa  $N_f = 2 \cdot 10^4$  Schwingspielen eine Abweichung. In diesem Lebensdauerbereich wurden allerdings keine Versuche durchgeführt.

Beim EN-GJS-500-14 ist ein größerer Unterschied der Schädigungsmodelle zu erkennen. Die besten Prognosen der Anrisslebensdauer liefern hier das Kurzrissmodell  $P_Z$  und der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$ . Die berechnete Wöhlerlinie des  $P_{FS}$  liegt etwas unterhalb der beobachteten Versuchsergebnisse.

In Abbildung 4.25 und Abbildung 4.26 sind die experimentell beobachteten Anrissorientierungen im Verhältnis zur Belastungshöhe im Vergleich zu den Anrissorientierungen, die durch die Schädigungsmodelle berechnet wurden, dargestellt.

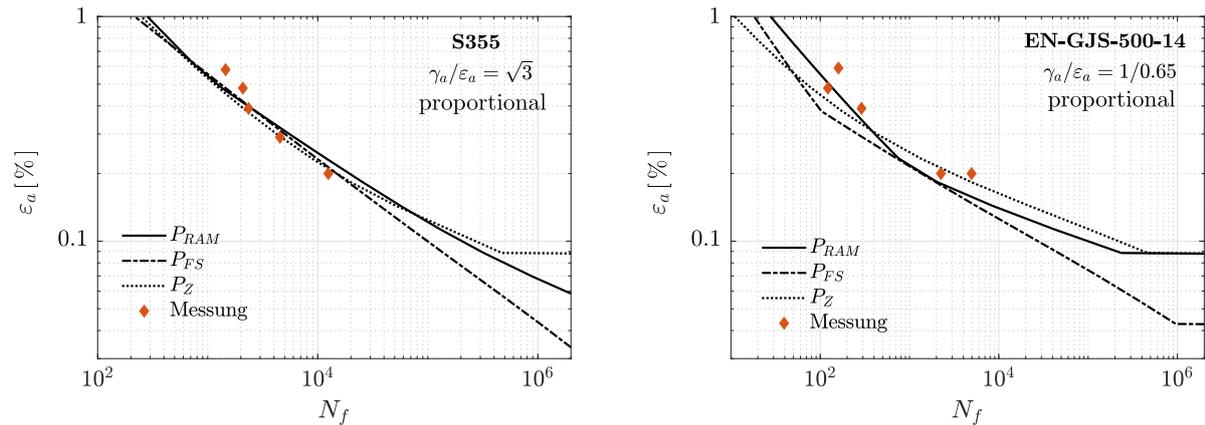


Abbildung 4.24: Anrisslebensdauer der Hohlproben bei proportionaler Belastung, für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14

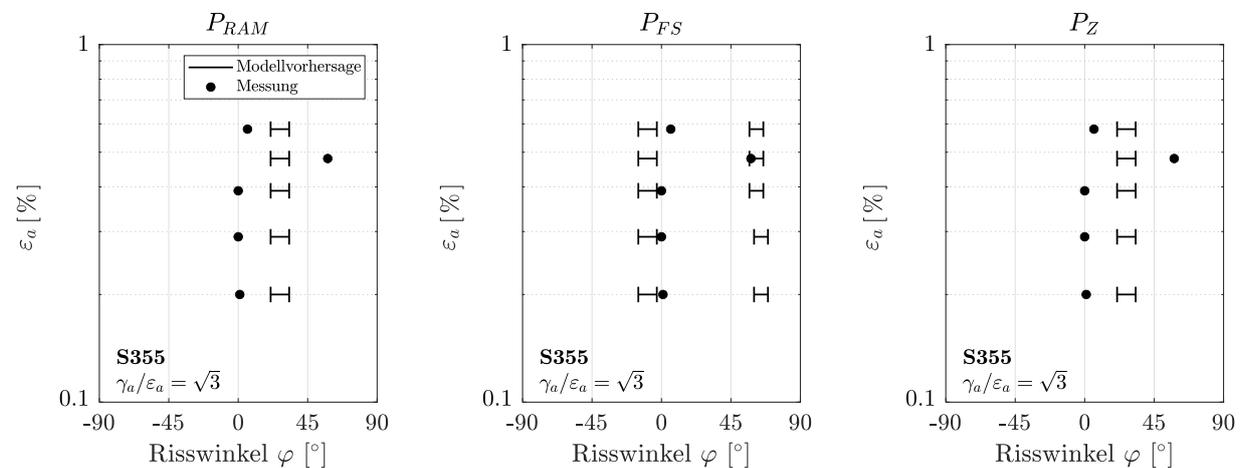


Abbildung 4.25: Anrissorientierungen unter proportionaler Beanspruchung für den Werkstoff S355 und die verschiedenen Schädigungsparameter

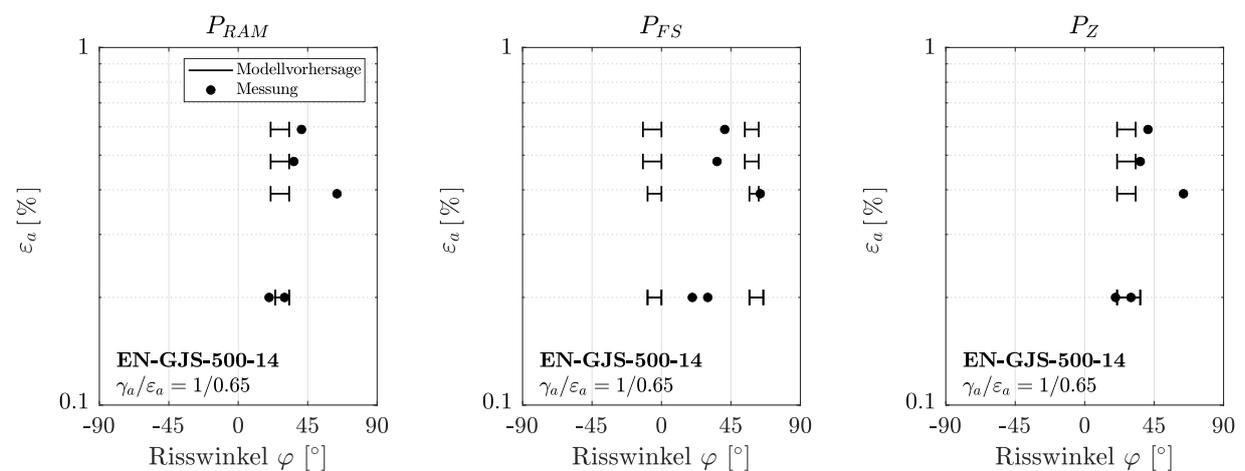


Abbildung 4.26: Anrissorientierungen unter proportionaler Beanspruchung für den Werkstoff EN-GJS-500-14 und die verschiedenen Schädigungsparameter

Vom Parameter  $P_{RAM}$  und dem Kurzrisssmodell  $P_Z$  werden, unabhängig vom betrachteten Werkstoff, Anrissorientierungen in Ebenen um  $\varphi \approx 26^\circ$  berechnet. Diese Ebenen erfahren eine hohe Normalbelastung. Es wird also vor allem Modus I Risswachstum vorausgesagt.

Für den S355 werden im Experiment Anrissorientierungen bei  $\varphi \approx 0^\circ$  (mit einem Ausreißer) beobachtet. Dies wird durch den  $P_{RAM}$  Parameter und das Kurzrisssmodell nicht gut wiedergegeben. Zwei ähnliche Rissinitiiierungsbereiche werden vom  $P_{FS}$  Parameter berechnet, einer knapp unterhalb von  $\varphi \approx 0^\circ$  und ein weiterer bei  $\varphi \approx 65^\circ$ . Obwohl keiner der in den Experimenten beobachteten Winkel innerhalb der vorhergesagten Bereiche liegt, liegen die gemessenen Winkel alle sehr nahe an den Modellvorhersagen. Selbst der eine mögliche Ausreißer steht in guter Übereinstimmung mit der Berechnung des  $P_{FS}$  Parameters. Der EN-GJS-500-14 zeigt Rissorientierungen zwischen  $\varphi = 20^\circ$  und  $41^\circ$  (mit wiederum einem Ausreißer), unabhängig von der Lasthöhe. Dies zeigt erneut die hohe Streuung, die bei Ermüdungsversuchen zu erwarten ist. Für diesen Werkstoff sind die Ergebnisse nun in guter Übereinstimmung mit den berechneten Rissinitiiierungsbereichen aus dem  $P_{RAM}$  Parameter und dem Kurzrisssmodell.

Versuche unter proportionaler Beanspruchung wurden auch für die Werkstoffe S460N und AW-5083 von Savaidis [Sava 95] und Hoffmeyer [Hoff 05] durchgeführt. Neben einer Einstufenbelastung wurden von [Hoff 05] auch Versuche unter der Vorgabe einer betriebsähnlichen Belastung mit variablen Amplituden gefahren. Die Amplitudenverteilung der verwendeten Dehnungs-Zeitfolge entspricht einer Geradlinienverteilung. Daher wird im Folgenden von einem Geradlinienkollektiv gesprochen. Es besitzt einen Kollektivumfang von  $\bar{H} = 20000$  und ein mittleres R-Verhältnis von  $\bar{R} = -1$ . Zur Verkürzung der Versuchsdauer blieben Schwingspiele mit Amplituden kleiner als 20% des Kollektivhöchstwertes unberücksichtigt, wodurch sich der Kollektivumfang auf  $\bar{H} = 4256$  verkürzt. Die gemessenen Anrisslebensdauern und die mit den drei Schädigungsmodellen berechneten Wöhlerlinien für Einstufenbelastung sowie die Lebensdauerlinien der betriebsähnlichen Belastung für die Werkstoffe S460N und AW-5083 sind in Abbildung 4.27 angegeben. Die Wöhlerlinien aller Schädigungsparameter können die experimentellen Ergebnisse für beide Werkstoffe sehr gut beschreiben. Bei den Lebensdauerlinien für das Geradlinienkollektiv weist das Kurzrisssmodell die größte Prognosegenauigkeit auf. Für beide Werkstoffe werden die experimentellen Ergebnisse auf allen untersuchten Belastungshorizonten in sehr guter Näherung berechnet. Von den beiden Schädigungsmodellen werden die Lebensdauern überschätzt. Dies ist vor allem beim Parameter  $P_{RAM}$  auffällig.

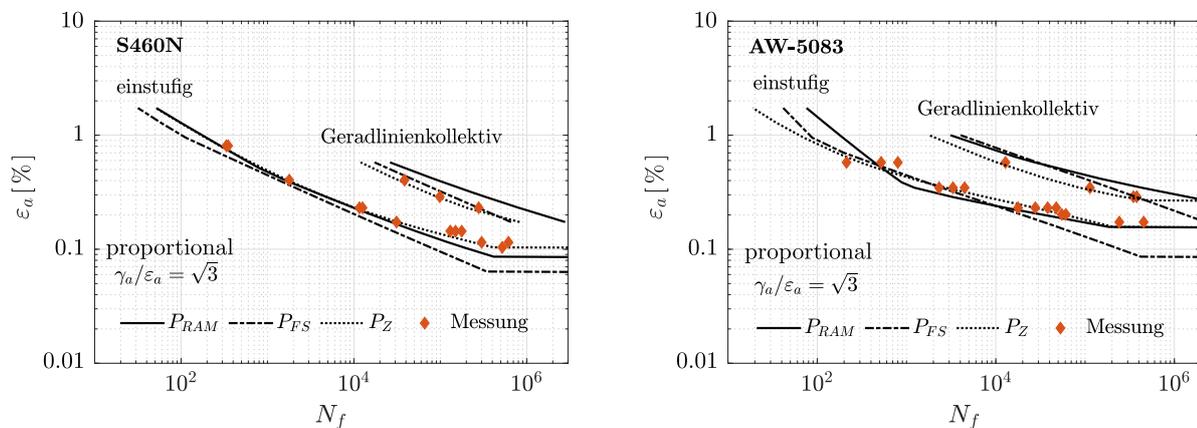


Abbildung 4.27: Anrisslebensdauer der Hohlproben bei proportionaler Einstufen- und Betriebsbelastung, für die beiden Werkstoffe S460N und AW-5083

### 4.4.3. Nichtproportionale Belastung

Im Folgenden werden Ergebnisse im Fall von nichtproportionaler Belastung vorgestellt. Als Lastfall wird eine Belastung unter  $90^\circ$  Phasenverschiebung zwischen Zug/Druck und Torsion gewählt. Das Beanspruchungssignal entspricht einer Sinusschwingung.

Abbildung 4.28 zeigt beispielhaft den Einfluss der nichtproportionalen Verfestigung auf die Wöhlerlinie des Kurzrisssmodells für den Werkstoff S355 für eine Belastung unter Vorgabe der Dehnungen. Ohne nichtproportionale Verfestigung wird die experimentell beobachtete Anrisslebensdauer vom Modell deutlich überschätzt. Durch die zusätzliche Verfestigung ergeben sich höhere Spannungen, was sich in der Wöhlerlinie durch kürzere rechnerische Lebensdauern bemerkbar macht. Die Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung verbessert die Lebensdauerprognose, auch wenn für den S355 die berechneten Lebensdauern immer noch zu hoch sind. Der Einfluss der nichtproportionalen Verfestigung ist nur bei hohen Belastungen feststellbar. Auf niedrigen Belastungshorizonten, ohne nennenswerte plastische Verformungen, verschwindet der Einfluss auf die rechnerische Lebensdauer. In Abbildung 4.29 sind die Wöhlerlinien der drei Schädigungsmodelle sowie die gemessenen Anrisslebensdauern der beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 dargestellt. Für alle Rechnungen wurde die nichtproportionale Verfestigung berücksichtigt. Für den S355 werden die gemessenen Anrisslebensdauern von allen Modellen überschätzt. Die genaueste Prognose liefert der  $P_{FS}$  Parameter. Die Versuchsergebnisse des EN-GJS-500-14 werden von dem  $P_{RAM}$  Parameter und vom Kurzrisssmodell  $P_Z$  sehr genau berechnet. Die Wöhlerlinie des  $P_{FS}$  Parameters liegt deutlich unterhalb der Versuchsergebnisse. Im Vergleich zur proportionalen Belastung können für den Baustahl S355 die experimentellen Lebensdauern unter nichtproportionaler Belastung von keinem Schädigungsmodell mit der gleichen Genauigkeit berechnet werden. Für den EN-GJS-500-14 ist die Genauigkeit der Lebensdauerprognose für den proportionalen und nichtproportionalen Belastungsfall für die Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  und  $P_Z$  vergleichbar.

In Abbildung 4.30 und Abbildung 4.31 sind die experimentell beobachteten Anrissorientierungen im Verhältnis zur Belastungshöhe im Vergleich zu den Anrissorientierungen, die mit den Schädigungsmodellen berechnet wurden, dargestellt. Ein Vergleich der Modellvorhersagen zwischen proportionaler und  $90^\circ$  phasenverschobener Beanspruchung zeigt, dass im Fall der phasenverschobenen Beanspruchungen von den Schädigungsmodellen ein deutlich größerer Bereich möglicher Anrissorientierungen berechnet wird. Dies verdeutlicht, dass unter nichtproportionaler Beanspruchung eine größere Anzahl

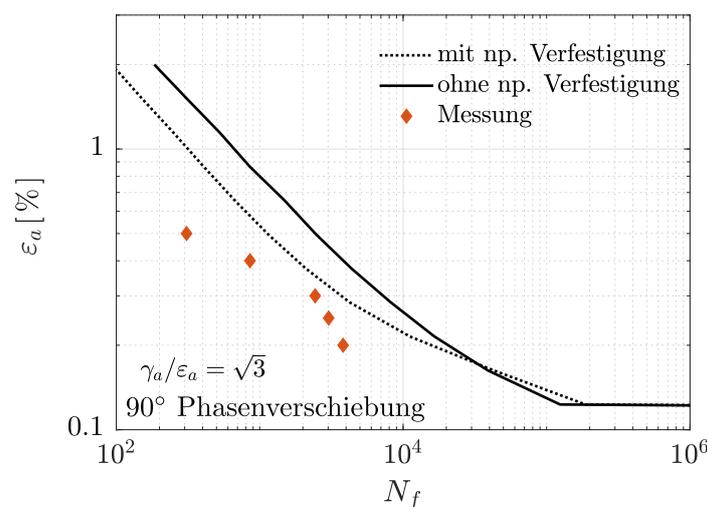


Abbildung 4.28: Anrisslebensdauer der Hohlproben aus S355 bei um  $90^\circ$  phasenverschobener Belastung berechnet mit Kurzrisssmodell, mit und ohne Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung

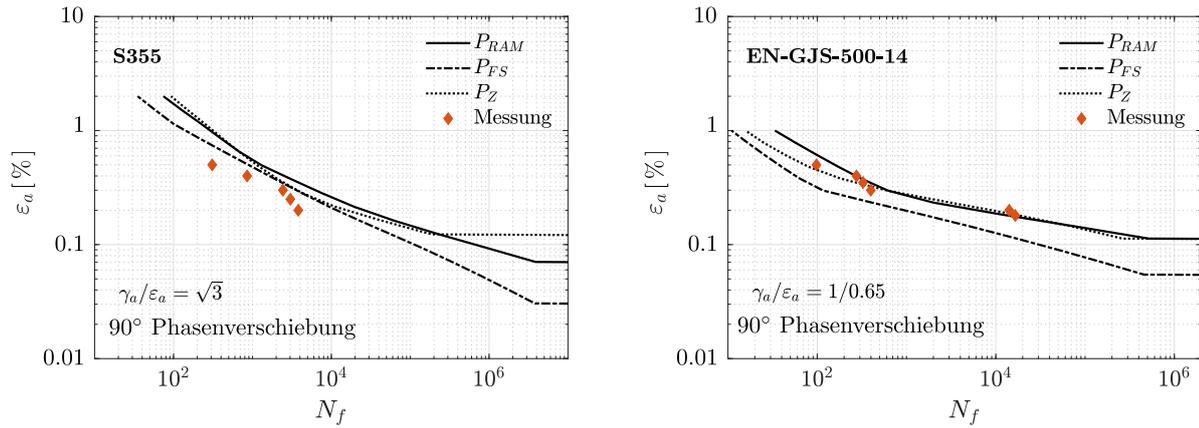


Abbildung 4.29: Anrisslebensdauer der Hohlproben bei um 90° phasenverschobener Belastung, für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14

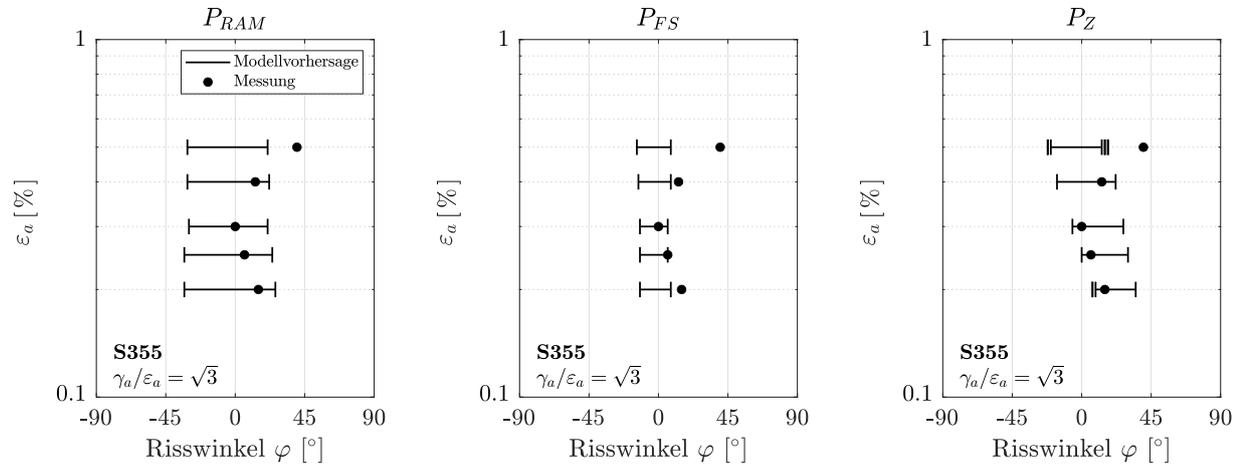


Abbildung 4.30: Anrissorientierungen unter 90° phasenverschobener Beanspruchung für den Werkstoff S355 und die verschiedenen Schädigungsparameter

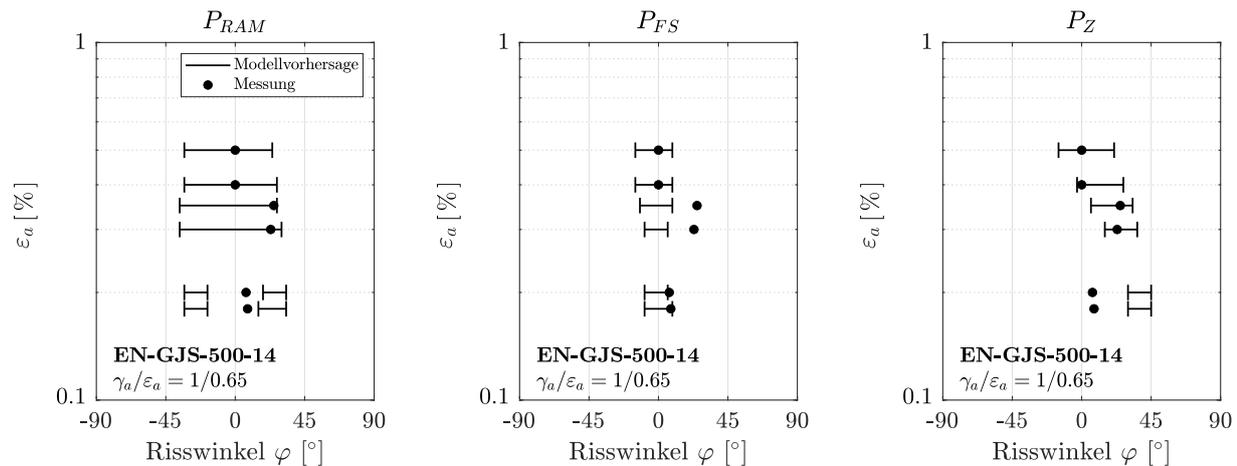


Abbildung 4.31: Anrissorientierungen unter 90° phasenverschobener Beanspruchung für den Werkstoff EN-GJS-500-14 und die verschiedenen Schädigungsparameter

von Schnittebenen einer hohen Belastung ausgesetzt sind. Vor allem für die Parameter  $P_{RAM}$  und  $P_Z$  ist dies auffällig.

Im Fall des Schädigungsparameters  $P_{RAM}$  wird ein sehr großer Bereich möglicher Anrisswinkel um  $\varphi = 0^\circ$  vorhergesagt. Die Modellprognosen stimmen gut mit den Beobachtungen für beide Werkstoffe überein. Für kleinere Belastungsamplituden sagt der  $P_{RAM}$  Parameter beim EN-GJS-500-14 eine oder zwei mögliche Bereiche für Rissinitiierung voraus. Hier stimmen die gemessenen Winkel nicht immer mit den Modellprognosen überein. Dennoch liegen die vorhergesagten Winkel nahe an den Versuchsergebnissen.

Für das Kurzrisssmodell ist auffällig, dass der Bereich möglicher Rissorientierungen von der Belastungsamplitude abhängt. Für den S355 werden dadurch 4 von 5 gemessenen Anrissorientierungen korrekt vorhergesagt. Beim EN-GJS-500-14 stimmt die Prognose des Kurzrisssmodells auf hohen Lastniveaus gut mit den Versuchsergebnissen überein. Auf niedrigeren Lastniveaus werden eher Anrisse bei etwa  $\varphi \approx 0^\circ$  gemessen. Dies entspricht nicht dem vom Kurzrisssmodell berechneten Verhalten.

Der Schädigungsparameter  $P_{FS}$  berechnet, unabhängig von Lastniveau und Werkstoff, Ebenen um  $\varphi \approx 0^\circ$ . Beim S355 und EN-GJS-500-14 liegen dann 6 von insgesamt 11 Versuchsergebnissen im oder sehr nahe am prognostizierten Bereich.

Versuche unter  $90^\circ$  Phasenverschiebung wurden ebenfalls von Savaidis [Sava 95] und Hoffmeyer [Hoff 05] für die Werkstoffe S460N und AW-5083 durchgeführt. Wie im proportionalen Belastungsfall wurden neben Einstufenversuchen auch Versuche unter Vorgabe betriebsähnlicher Belastungen mit dem Geradlinienkollektiv gefahren. Eine Phasenverschiebung wurde dabei durch eine Versetzung des Lastsignals des zweiten Lastkanals (der Gleitungsamplitude) um ein Viertel Schwingenspiel erreicht. Abbildung 4.32 zeigt die Wöhler- und Lebensdauerlinien der drei Schädigungsmodelle sowie die experimentellen Ergebnisse aus [Sava 95] und [Hoff 05].

Unter Einstufenbelastung stimmen die Wöhlerlinien weitestgehend mit den Versuchsergebnissen überein. Für den Baustahl S460N ergibt sich das gleiche Verhalten wie für S355. Durch den  $P_{RAM}$  Parameter und das Kurzrisssmodell werden die Anrisslebensdauern leicht überschätzt. Der  $P_{FS}$  Parameter liefert eine sehr gute Prognose der Anrisslebensdauern für S460N.

Für die Lebensdauerlinien des Geradlinienkollektivs bei  $90^\circ$  phasenverschobener Belastung zeigen sich die gleichen Tendenzen wie unter proportionaler Beanspruchung. Das Kurzrisssmodell  $P_Z$  liefert eine sehr genaue Prognose der experimentellen Ergebnisse. Der  $P_{RAM}$  Parameter überschätzt die Anrisslebensdauer deutlich. Vor allem für S460N zeigt auch die Lebensdauerprognose des  $P_{FS}$  Parameters sehr große Übereinstimmungen mit den experimentellen Ergebnissen.

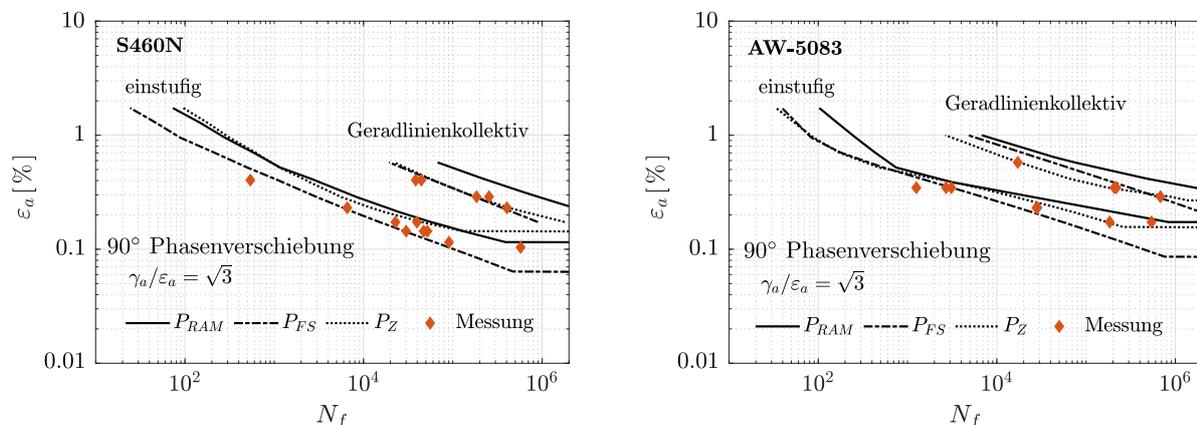


Abbildung 4.32: Anrisslebensdauer der Hohlproben bei um  $90^\circ$  phasenverschobener Einstufen- und Betriebsbelastung für die beiden Werkstoffe S460N und AW-5083

#### 4.4.4. Statistische Auswertung

Um nicht jede ausgewertete Versuchsreihe einzeln zu diskutieren, folgt eine statistische Auswertung aller Berechnungsergebnisse. Zur Auswertung werden N-N-Diagramme verwendet. Hier wird für jeden Einzelversuch in der Datenbank die berechnete Lebensdauer  $N_{calc}$  über der experimentellen Lebensdauer  $N_{exp}$  aufgetragen. Die N-N-Diagramme der drei Schädigungsmodelle sind in Abbildung 4.33 angegeben. Zur statistischen Auswertung wird angenommen, dass das Verhältnis von experimenteller zu berechneter Anrisslebensdauer  $N_{exp}/N_{calc}$  einer logarithmischen Normalverteilung folgt. Die Berechnung Überschreitungs- oder Ausfallwahrscheinlichkeit eines Einzelversuchs erfolgt mit der Formel von Rossow [Ross 64]. Die logarithmischen Ergebnisse der Einzelversuche werden dazu in aufsteigender Reihenfolge sortiert und mit  $i = 1, \dots, n$  durchnummeriert. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Einzelversuchs berechnet sich dann aus

$$P_i = \frac{3i - 1}{3n - 1}. \quad (4.5)$$

Die Treffsicherheit wird nach zwei Kriterien bewertet. Als Maß für die mittlere Treffsicherheit wird der Median  $m$  verwendet. Ein Median  $m < 1$  zeigt an, dass mehr als 50% der rechnerischen Lebensdauern größer sind als die experimentellen Lebensdauern. Der Algorithmus liegt also eher auf der unsicheren Seite. Ein Median  $m > 1$  besagt dagegen, dass mehr als 50% der rechnerischen Lebensdauern auf der sicheren Seite liegen. Als Maß für die Streuung des Quotienten  $N_{exp}/N_{calc}$  wird die Streuspanne  $T = Q_{90}/Q_{10}$  als Quotient aus 90% und 10% Quantil verwendet. Wobei in den Ergebnissen auch die Streuung der Versuchsergebnisse enthalten ist, was die Gesamtstreuung erhöht.

	$n_{data}$	$P_{RAM}$		$P_{FS}$		$P_Z$	
		$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$
Alle Versuche	289	0.70	11.41	1.44	11.46	0.93	5.56
<b>Belastung</b>							
Zug/Druck	54	1.07	4.23	1.07	5.76	0.92	2.52
Torsion	60	0.35	4.82	1.34	11.46	0.84	5.75
proportional	57	1.80	9.25	1.87	6.97	1.30	3.67
nichtproportional	118	0.49	9.69	1.53	14.49	0.72	6.75
nichtproportional (ohne NPV)	118	0.38	12.49	1.40	14.00	0.64	6.89
<b>Werkstoff</b>							
S460N	94	0.75	9.81	1.63	6.63	0.76	4.36
AW-5083	84	0.51	19.08	1.58	10.88	0.99	6.94
S355	52	0.57	4.85	0.86	4.94	0.80	4.35
S355*	52	0.33	8.33	0.67	4.36	0.60	7.02
EN-GJS-500-14	59	0.98	5.21	2.91	13.03	1.51	3.99
EN-GJS-500-14 *	59	0.90	4.35	2.35	6.88	1.13	3.34

\* Die verwendeten Spannungen wurden aus gemessenen äußeren Lasten ermittelt

Tabelle 4.8: Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an ungekerbten Werkstoffproben und Aufteilung in verschiedene Belastungsarten und Werkstoffe

In Tabelle 4.8 sind die Ergebnisse der statischen Auswertung in Form der Streuspannen  $T$  und Mediane  $m$  enthalten. Die statistische Auswertung des Vergleichs zwischen den berechneten und experimentellen Ermüdungslebensdauern wurde ebenfalls separat nach verschiedenen Versuchsmerkmalen durchgeführt. Es wurde der Einfluss der Belastung sowie der Einfluss des Werkstoffs auf die Treffsicherheiten der Schädigungsmodelle untersucht. Eine grafische Darstellung der Treffsicherheiten ist in Abbildung 4.34 durch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen angegeben. Die mittlere Treffsicherheit kann hier direkt bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 50% abgelesen werden. Die Streuung entspricht dem logarithmischen Abstand zwischen den Werten bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 10% und 90%.

Die im Allgemeinen beste Prognose der Anrisslebensdauer liefert das Kurzrissmodell  $P_Z$ . Im Mittel liegen die Ergebnisse mit einem Median  $m = 0.93$  sehr nahe am Idealwert 1. Außerdem weist das

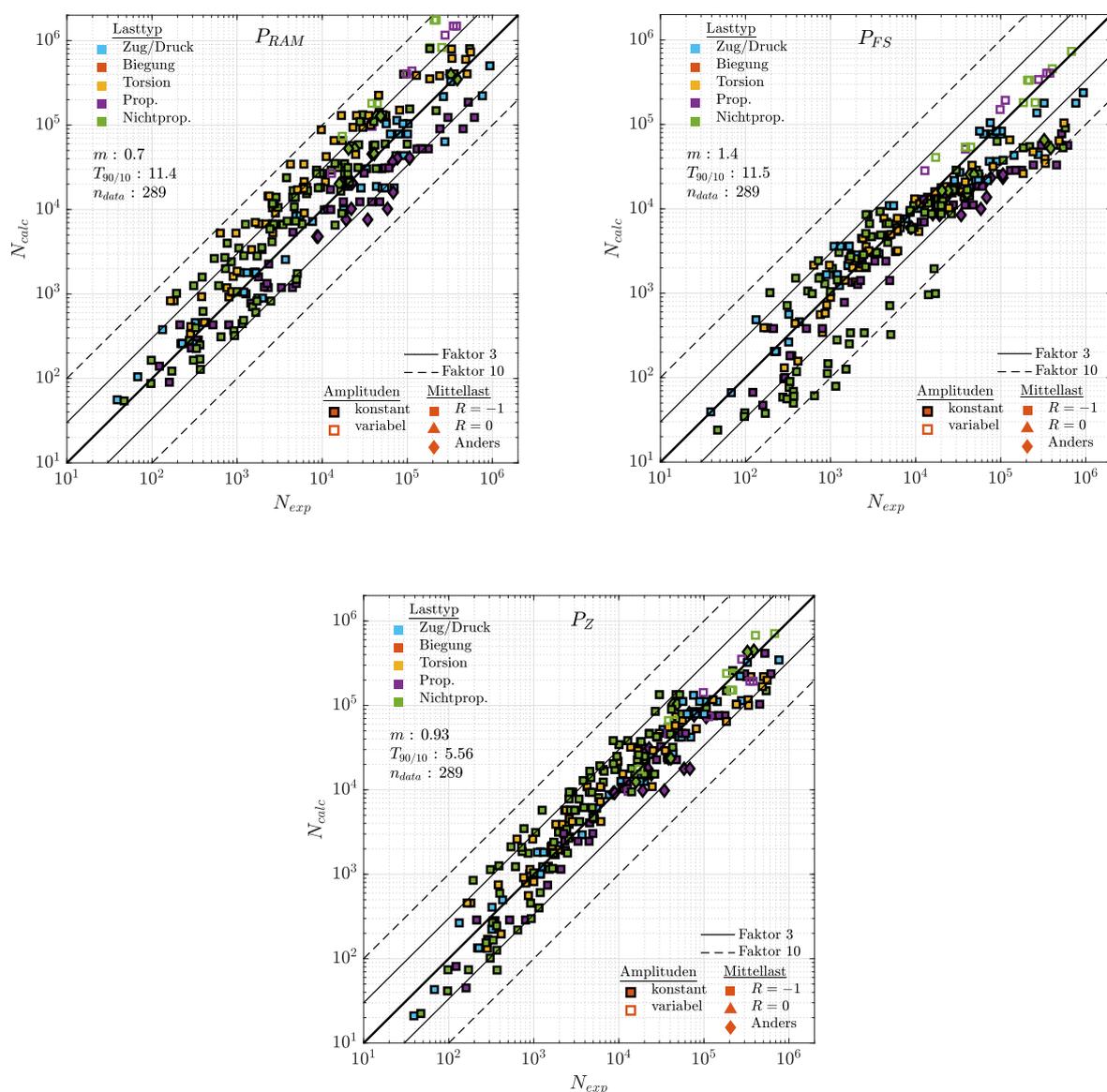


Abbildung 4.33: Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) für alle Werkstoffversuche und alle untersuchten Schädigungsparameter

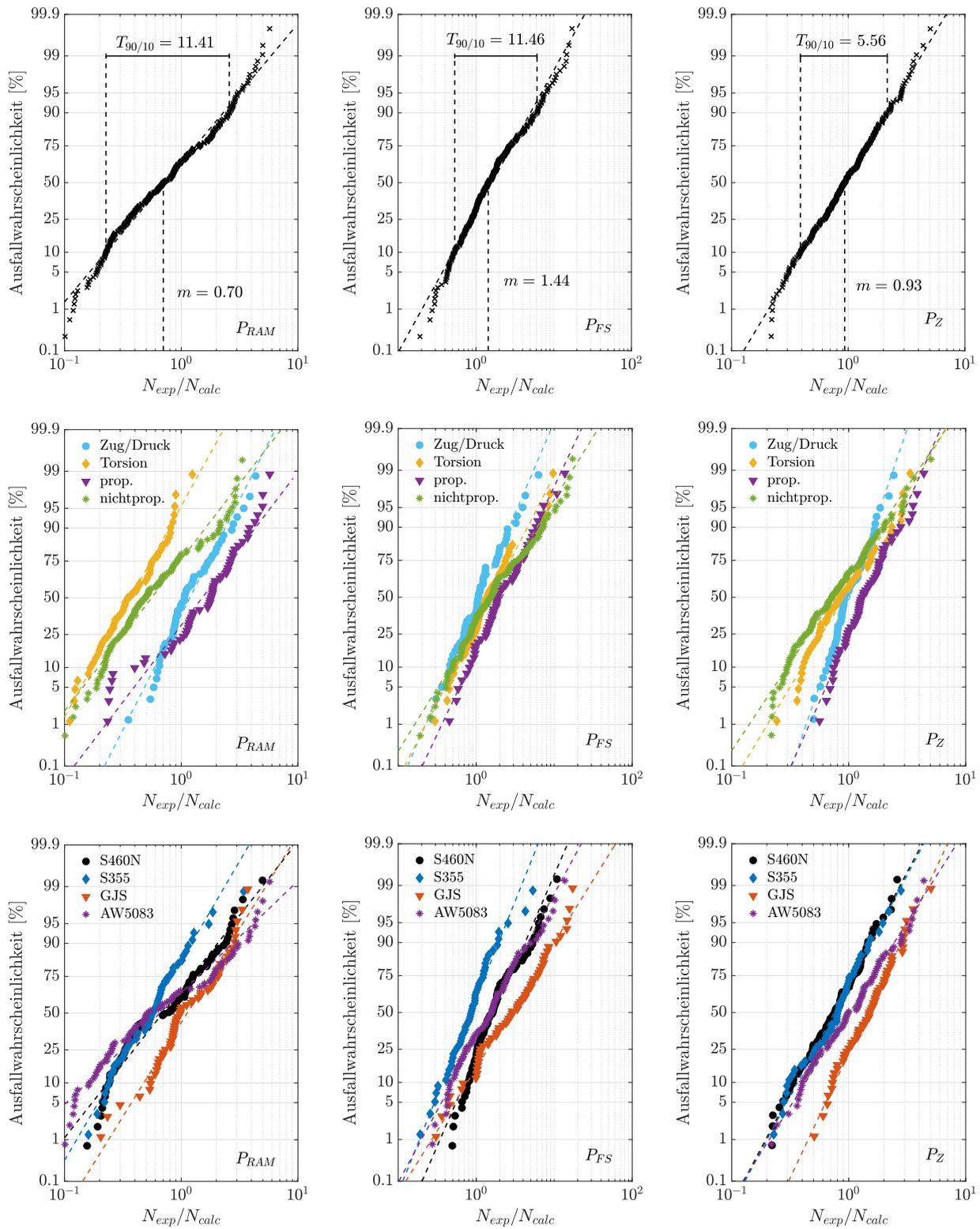


Abbildung 4.34: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anrisslebensdauerprognose der drei Schädigungsmodelle: (obere Reihe) Wahrscheinlichkeitsverteilung aller nachgerechneten Versuche, (mittlere Reihe) Aufteilung der Ergebnisse nach Art der Belastung und (untere Reihe) Aufteilung der Ergebnisse nach Werkstoff

Kurzmodell mit  $T = 5.56$  eine in etwa um den Faktor 2 geringere Streuung auf als die anderen beiden Modelle. Dies lässt sich ebenfalls in den N-N-Diagrammen aus Abbildung 4.33 beobachten. Der größte Teil der Ergebnisse des Kurzrisssmodells liegt innerhalb eines Streubands des Faktors 3. Bei der Aufteilung der Treffsicherheiten nach den einzelnen Belastungsarten fällt auf, dass die Lastfälle Torsion und nichtproportionale Belastung geringfügig höhere Streuungen besitzen als die anderen beiden Lastfälle. Wobei darauf hinzuweisen ist, dass ein Großteil der Versuche unter Zug/Druck zur Anpassung der Schädigungsparameterwöhlerlinie verwendet wurde. Proportionale Belastung ist die einzige Lastart, für die das Kurzrisssmodell im Mittel eine konservative ( $m > 1$ ) Lebensdauerprognose liefert. Durch die getrennte Auswertung der einzelnen Werkstoffe fällt auf, dass die beiden Baustähle S355 und S460N quasi mit der gleichen Treffsicherheit bewertet werden. Sowohl Median als auch Streuspanne sind nahezu gleich. Der AW-5083 wird im Mittel sehr gut bewertet, weist jedoch unter allen Werkstoffen die größte Streuung auf. Die Anrisslebensdauern des EN-GJS-500-14 sind die einzigen, die im Mittel vom Kurzrisssmodell überschätzt werden ( $m = 1.51$ ). Für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 lagen gemessene Zeitverläufe der äußeren Lasten vor. Diese können, unter der Annahme einer konstanten Spannungsverteilung über den Probenquerschnitt, in Spannungen umgerechnet werden. Die Anrisslebensdauer kann ebenfalls anhand von gemessenen Spannungen berechnet werden. In diesem Fall werden alle Werkstoffeffekte wie zyklische Ver- oder Entfestigung, nichtproportionale Verfestigung, Mittelspannungseinflüsse oder Non-Masing-Verhalten berücksichtigt. Die statistische Auswertung dieser Lebensdauerprognosen für die drei Modelle ist ebenfalls in Tabelle 4.8 enthalten.

Die Prognosen des Kurzrisssmodells verschieben sich für beide Werkstoffe hin zu höheren berechneten Anrisslebensdauern. Dies ist an der Verschiebung der Mediane zu erkennen. Für S355 sinkt der Median von  $m = 0.8$  für eine Lebensdauerprognose mit simulierten Spannungen auf  $m = 0.6$ . Die Streuung steigt ebenfalls von  $T = 4.35$  auf  $T = 7.02$ . Die berechnete Anrisslebensdauer weicht sogar etwas weiter von der gemessenen Anrisslebensdauer ab, wenn die korrekten gemessenen Spannungen statt der simulierten Spannungen verwendet werden. Beim EN-GJS-500-14 ist ein anderer Effekt zu beobachten. Mit simulierten Spannungen weisen die Ergebnisse des Kurzrisssmodells einen Median von  $m = 1.51$  auf. Dieser sinkt auf einen Wert  $m = 1.13$ , was hier beim EN-GJS-500-14 eine Verbesserung der Prognosequalität bedeutet. Die Streuspanne der beiden Rechnungen sind mit  $T = 3.99$  (aus simulierten Spannungen) und  $T = 3.34$  (aus quasi gemessenen Spannungen) sehr ähnlich.

Das Schädigungsmodell  $P_{FS}$  nach Fatemi/Socie führt als einziges Modell auf eine Prognose der Anrisslebensdauer, die im Mittel auf der sicheren Seite ( $m = 1.44$ ) liegt. Im N-N-Diagramm in Abbildung 4.33 ist zu erkennen, dass Anrisslebensdauern im Bereich der Dauerfestigkeit eher unterschätzt werden. Ebenfalls auffällig sind Ergebnisse unter nichtproportionaler Last (grüne Punkte) im geringen Lebensdauerbereich, die in etwa um den Faktor 10 von den experimentellen Ergebnissen abweichen. Diese Ergebnisse gehören alle zum Werkstoff EN-GJS-500-14. Beim EN-GJS-500-14 sind die berechneten Anrisslebensdauern im Mittel um den Faktor 3 ( $m = 2.91$ ) zu klein. Die Streuung ist für diesen Werkstoff ebenfalls höher als für die anderen Werkstoffe. Die besten Ergebnisse werden für S355 erzielt. Die Aufteilung in die einzelnen Belastungsarten zeigt, dass der  $P_{FS}$  Parameter die Anrisslebensdauern unter beliebiger Belastung annähernd mit der gleichen Genauigkeit prognostiziert.

Werden beim  $P_{FS}$  Parameter, die aus Versuchen ermittelten Spannungen, anstelle von mit dem Ohno/Wang Plastizitätsmodell simulierten Spannungen verwendet, so zeigen sich annähernd die gleichen Effekte wie beim Kurzrisssmodell. Die prognostizierten Anrisslebensdauern werden im Mittel länger, was sich durch eine Verkleinerung der Mediane bemerkbar macht. Jedoch sinken für beide Werkstoffe die Streuungen. Für den EN-GJS-500-14 wird sogar eine signifikante Verbesserung der Streuspanne von  $T = 6.88$  im Vergleich zu  $T = 13.03$  erreicht.

Der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  liefert im Mittel ( $m = 0.7$ ) zu große Prognosen der Anrisslebensdauer. Die Streuung der mit  $P_{RAM}$  berechneten Prognose der Anrisslebensdauern ist mit  $T = 11.41$

vergleichbar mit der Streuung aus den Berechnungen mit  $P_{FS}$ . Wie in Abbildung 4.33 zu erkennen ist, liegen alle Ergebnisse innerhalb des Streubandes vom Faktor 10. Für die Streuung der Ergebnisse mit dem  $P_{RAM}$  Parameter sind vor allem die verschiedenen Belastungsarten verantwortlich. Wie in Abbildung 4.34 zu erkennen ist, werden die Anrisslebensdauern unter nichtproportionaler Last sowie unter reiner Torsion deutlich überschätzt. Für den Werkstoff EN-GJS-500-14 werden mit einem Median von  $m = 0.98$  und einer Streuung von  $T = 0.98$  sehr genaue Anrisslebensdauern berechnet. Die Ergebnisse für den S355 weisen ebenfalls eine geringe Streuung auf, allerdings werden etwa um den Faktor zwei ( $m = 0.57$ ) zu lange Lebensdauern berechnet. Auffällig ist ebenfalls die hohe Streuung der Ergebnisse beim Werkstoff AW-5083 im Vergleich zu den anderen Werkstoffen.

Eine Verwendung der aus Versuchen ermittelten Spannungen führt, wie bei den anderen Schädigungsparametern, zu einer Verlängerung der rechnerischen Lebensdauer. Für den EN-GJS-500-14 bleiben die Streuungen vergleichbar. Beim S355 verschlechtert sich die Prognose der Anrisslebensdauer sogar.

Im Fall nichtproportionaler Lasten wurde ebenfalls untersucht, welchen Einfluss die nichtproportionale Verfestigung auf die Ergebnisse der gesamten Datenbasis besitzt. Dazu wurden alle Versuchsergebnisse unter einer nichtproportionalen Belastung, ohne Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung (NPV) nachgerechnet. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 4.8 angegeben. Der Einfluss auf die mittlere Treffsicherheit ist für alle Schädigungsmodelle gleich. Die berechneten Lebensdauern sind größer, wenn die nichtproportionale Verfestigung unberücksichtigt bleibt. Für die Parameter  $P_{RAM}$  und  $P_Z$  führt das zu einer Verschlechterung der mittleren Treffsicherheit. Im Fall des Parameters  $P_{FS}$  werden die Ergebnisse dadurch im Mittel sogar leicht besser, da auch ohne eine Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung in der Spannungssimulation schon im Mittel zu kurze Anrisslebensdauern berechnet werden. Der Einfluss auf die Streuung ist für  $P_{FS}$  und  $P_Z$  zu vernachlässigen. Für den  $P_{RAM}$  Parameter verbessert sich durch eine Berücksichtigung der NPV ebenfalls die Streuung der Ergebnisse.

## 4.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden experimentelle Ergebnisse zur Charakterisierung des Baustahls S355 und des Gusseisens mit Kugelgraphit EN-GJS-500-14 präsentiert. Die Experimente wurden mit ungekerbten Werkstoffproben unter Vorgabe der Dehnungen durchgeführt. Sie umfassen Versuche unter rein axialer Beanspruchung, reiner Torsion sowie unter proportional und nichtproportional kombinierter Beanspruchung. Basierend auf den experimentellen Daten wurden die in Kapitel 3 vorgestellten Schädigungsmodelle parametrisiert.

Die experimentellen Daten wurden verwendet, um die Treffsicherheit der beschriebenen Schädigungsmodelle zu überprüfen und zu validieren. Hierfür wurden die Experimente nachgerechnet und die berechneten mit den experimentell gemessenen Anrisslebensdauern verglichen. Die Treffsicherheitsbewertung der Schädigungsmodelle wurde durch experimentelle Ergebnisse aus der Literatur [Sava 95, Hoff 05, Hert 16] für die Werkstoffe S460N und AW-5083 ergänzt. Die Spannungsverläufe, die aus den vorgegebenen Dehnungsverläufen resultieren, wurden mithilfe des Ohno/Wang Plastizitätsmodells [Ohno 93a, Ohno 93b] simuliert.

Ebenfalls wurden die Orientierungen der Anrisse einzelner Versuche gemessen. Es ist zu erwarten, dass ein Modell der kritischen Schnittebene, das die Schädigungsmechanismen eines Werkstoffs beschreibt, in der Lage ist, sowohl die Anrisslebensdauer als auch die Orientierung des Anrisses genau zu beschreiben. Jedoch konnte keine signifikante Korrelation zwischen einer guten Prognose der Anrisslebensdauer und einer genauen Vorhersage der Anrissorientierung für die untersuchten Schädigungsmodelle festgestellt werden. Keins der untersuchten Schädigungsmodelle liefert unabhängig von Belastungsart oder -niveau eine zuverlässige Prognose der Anrissorientierung für einen der betrachteten Werkstoffe.

Unter Betriebsbelastungen lieferte das Kurzrisssmodell die genaueste Lebensdauerprognose, während der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  die experimentellen Anrisslebensdauern überschätzte. Die Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung verbesserte die Lebensdauerprognose aller Modelle für die untersuchten Versuche unter Dehnungsvorgabe. Trotz der nichtproportionalen Verfestigung wurden die Anrisslebensdauern von Versuchen unter nichtproportionaler Belastung vom  $P_{RAM}$  Schädigungsparameter im Mittel um den Faktor 2 überschätzt. Die anderen beiden Schädigungsparameter liefern auch unter nichtproportionaler Belastung im Mittel genaue Prognosen der Anrisslebensdauer.

Die besten Ergebnisse für die Prognose der Anrisslebensdauer lieferte das Kurzrisssmodell  $P_Z$ , unabhängig von der Lastart oder dem betrachteten Werkstoff. Die Genauigkeit der Ergebnisse des Schädigungsparameters  $P_{RAM}$  variierte für unterschiedliche Belastungsarten, wobei für reine Torsion und nichtproportionale Lasten zu hohe Lebensdauern prognostiziert wurden. Der Schädigungsparameter  $P_{FS}$  zeigte eine starke Abhängigkeit vom gewählten Werkstoff. Für die Baustähle S355 und S460N werden geringere Streuungen beobachtet als für die anderen beiden Werkstoffe.

Die Verwendung von im Versuch gemessenen anstatt simulierten Spannungen zur Lebensdauerprognose führte nicht zu einer Verbesserung der Prognose der Anrisslebensdauer und konnte teilweise sogar größere Streuungen zwischen den rechnerischen und experimentellen Anrisslebensdauern verursachen.



## 5. Prognose der Anrisslebensdauer gekerbter Proben

Im vorliegenden Kapitel wird, analog zu Kapitel 4, die Genauigkeit des Berechnungsalgorithmus anhand von Versuchsergebnissen untersucht. Allerdings erfolgt die Analyse nun anhand von gekerbten Probengeometrien. Um die Ermüdungslebensdauer der gekerbten Proben zu bestimmen, werden die Kerbnäherungsverfahren aus Kapitel 2 in Verbindung mit den Schädigungsmodellen aus Kapitel 3 angewendet. Der Algorithmus zur Berechnung der Anrisslebensdauer gekerbter Bauteile wird eingehend erläutert. Hierbei wird besonders auf die erforderlichen Eingaben in den Berechnungsalgorithmus eingegangen.

Für die Validierung werden eigene experimentelle Ergebnisse an gekerbten Rundproben aus den Projekten „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] und „Mehrkanalig“ [Wuth 24] herangezogen. Dazu erfolgt eine Darstellung des Versuchsaufbaus sowie der angewandten Methodik zur Ermittlung des Zeitpunkts des technischen Anrisses. Ergänzend wird eine Datenbasis von Experimenten an gekerbten Proben aus der Literatur zusammengetragen. Die Zusammensetzung dieser Datenbasis wird detailliert erläutert.

Das Kapitel schließt mit einer umfassenden Bewertung der Treffsicherheit des Algorithmus ab. Dabei wird die Qualität der berechneten Anrisslebensdauervorhersagen unter Verwendung der drei untersuchten Schädigungsmodelle hervorgehoben. Zusätzlich wird analysiert, inwiefern eine Abschätzung sämtlicher Eingabegrößen die Qualität der Lebensdauerprognose beeinflusst. Diese umfassende Untersuchung ermöglicht eine präzise Einschätzung der Verlässlichkeit des Algorithmus bei der Vorhersage der Anrisslebensdauer für gekerbte Bauteile unter unterschiedlichen Belastungsbedingungen.

### 5.1. Lastgeregelte Versuche an gekerbten Proben

Die Ergebnisse der in diesem Abschnitt beschriebenen Schwingversuche sollen zur Treffsicherheitsbewertung des entwickelten Berechnungsalgorithmus herangezogen werden. Dazu wurden im Rahmen der Projekte „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] und „Mehrkanalig“ [Wuth 24] Versuche an gekerbten Rundproben aus den in Kapitel 4 beschriebenen Werkstoffen S355 und EN-GJS-500-14 durchgeführt. Am Baustahl S355 werden eigene Versuche unter Zug/Druck- und Torsionsbelastung durchgeführt. Für den Werkstoff EN-GJS-500-14 wurden Versuche am IMAB unter Biege- und Torsionsbelastung durchgeführt. Als Regelgröße in den Versuchen wurden jeweils die äußeren Belastungen (Axialkraft, Torsionsmoment und Biegemoment) vorgegeben.

Die verwendeten Probengeometrien sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Zwei unterschiedlich stark gekerbte Proben werden untersucht ( $\rho = 2 \text{ mm}$  und  $\rho = 0.5 \text{ mm}$  Kerbradius). Diese beiden Probengeometrien wurden für eine kombinierte Belastung aus Zug/Druck und Torsion in Abschnitt 2.5 bereits als Beispiel zur Validierung der Kerbnäherungsverfahren verwendet.

Alle Versuche am EN-GJS-500-14 wurden mit einem Nennspannungsverhältnis  $S_{N,a}/S_{T,a} = 1.12$  durchgeführt. Das Nennspannungsverhältnis beim S355 beträgt für die Proben mit einem Kerbradius von  $\rho = 2 \text{ mm}$   $S_{N,a}/S_{T,a} = 1.28$  und für den Kerbradius von  $\rho = 0.5 \text{ mm}$   $S_{N,a}/S_{T,a} = 1.13$ .

In Anhang B sind die Ergebnisse der am S355 durchgeführten Versuche angegeben. Auf eine Angabe der am IMAB in Clausthal durchgeführten Versuche wird an dieser Stelle verzichtet. Diese Versuchsergebnisse können den Veröffentlichungen [Linn 22] und [Linn 23] entnommen werden.

Um verschiedene Effekte wie den Mittelspannungseinfluss, den Reihenfolgeeffekt und nichtproportionale Verfestigung bei der Treffsicherheitsbewertung berücksichtigen zu können, wurde ein



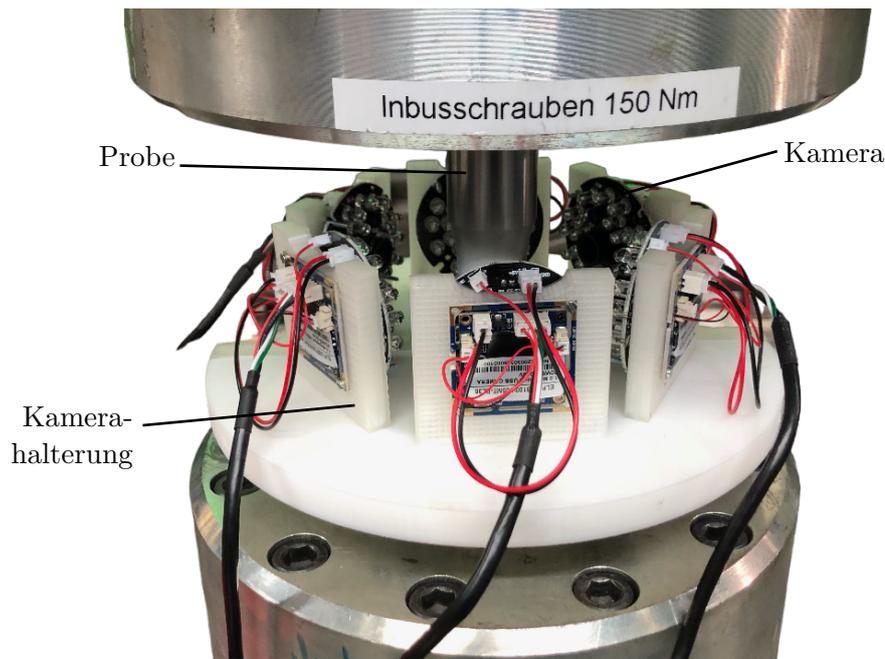


Abbildung 5.2: Eingespannte Rundprobe mit aufgesetzten Kameras

Die Bilder werden für jeden Versuch manuell ausgewertet, um den Anrisszeitpunkt festzulegen. Dazu werden die Risse ausgehend vom gebrochenen Zustand rückwärts bis zur Anrissphase nachverfolgt. Ein Beispiel für das Risswachstum bis hin zum Bruch ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

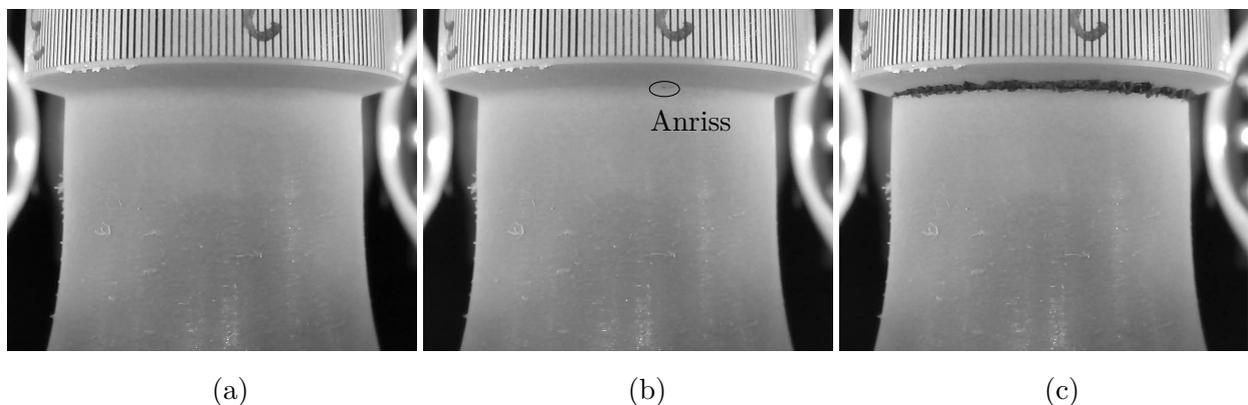


Abbildung 5.3: Risswachstum an einer gekerbten Rundprobe, Kamerabild vor Beanspruchungsbeginn ohne Riss (a), Kamerabild nach 32500 Schwingspielen mit Anriss (b) und Kamerabild nach 80900 Schwingspielen kurz vor Bruch der Probe (c)

### 5.1.2. Versuche mit betriebsähnlicher Belastung

Im Versuchsprogramm (Tabelle B.1) sind zwei verschiedene betriebsähnliche Belastungen mit variablen Amplituden vorgesehen.

Es wird zum einen eine Belastung unter  $90^\circ$  Phasenverschiebung zwischen Zug/Druck und Torsion aufgebracht. Als Belastungskollektiv wird eine standardisierte Gaußlastfolge mit einem Kollektivumfang von  $\bar{H}_0 = 10^4$  und einem mittleren  $R$ -Verhältnis von  $\bar{R} = -1$  vorgegeben. Der Unregelmäßigkeitsfaktor, der durch das Verhältnis der Nulldurchgänge  $H_{Null}$  zu den Umkehrpunkten  $H_U$

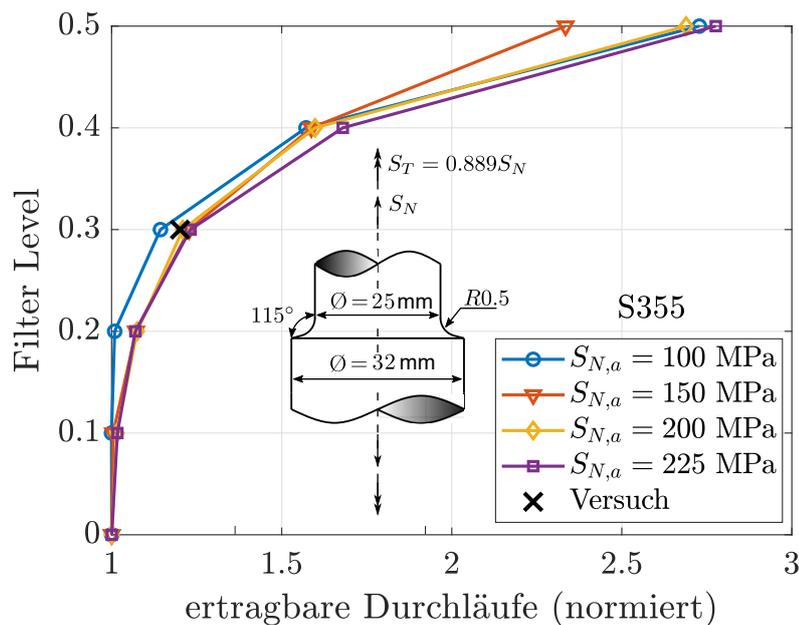


Abbildung 5.4: Testrechnungen zum Festlegen des Filterniveaus mit dem Gaußprofil

definiert ist, beträgt  $I = 0.99$ . Die Phasenverschiebung wird erreicht, indem der zweite Lastkanal (das Torsionsmoment) um ein Viertel Schwingenspiel verschoben wird.

Zur Reduktion der Versuchsdauer werden Lastfolgen für die Versuche am S355 gefiltert. Hierzu wird die Rainflow-Projektion-Filterung angewandt. Die Methode wird in [Joha 13] beschrieben. Durch die Filterung werden Schwingspiele mit kleinen Amplituden, die nicht oder kaum zur Schädigung beitragen, aus der Last-Zeit-Reihe entfernt. Dabei wird der sogenannte Filter Level als Bruchteil an der in der Lastfolge auftretenden maximalen Amplitude festgelegt. Es wurden im Vorfeld Testrechnungen mit dem Kurzrisssmodell aus Abschnitt 3.2.6 durchgeführt, um zu entscheiden, welcher Filterlevel angewandt werden soll. Abbildung 5.4 zeigt das Verhältnis der rechnerisch ertragbaren Durchläufe mit und ohne Filterung des Lastsignals für verschiedene vorgegebene Nennspannungsamplituden. Bei einem Filter Level von 0.3 verkürzt sich das Last-Zeit-Signal für das Gaußkollektiv auf 42% der Originallänge. Die rechnerisch ertragbaren Durchläufe steigern sich allerdings nur maximal um den Faktor 1.25, auch auf hohem Belastungsniveau. Es kann davon ausgegangen werden, dass ein Großteil der Schädigungswirkung der Last-Zeit-Reihe erhalten bleibt. Es wird der Filterlevel 0.3 zur Versuchsdurchführung gewählt. Es wurde ebenfalls ein Versuch zur Validierung der Rechnungen durchgeführt. Dazu wurde unter Vorgabe einer Nennspannungsamplitude  $S_{N,a} = 200$  MPa der Versuch mit und ohne gefilterter Last-Zeit-Reihe durchgeführt. Das Verhältnis der experimentell ertragbaren Durchläufe beträgt 1.2 und passt damit sehr gut zu dem vorhergesagten Verhältnis.

Neben einer betriebsähnlichen Belastung mit Phasenverschiebung werden unkorrelierte Belastungen vorgeben. Zum Erzeugen einer möglichst unkorrelierten Beanspruchung wird je Lastkanal eine unterschiedliche Standard-Gauß>Lastfolge verwendet. Für die axiale Normalkraft (Zug/Druck) wird eine Gaußlastfolge mit  $\bar{H}_0 = 10^5$  und einem Unregelmäßigkeitsfaktor  $I = 0.99$  verwendet. Das Torsionsmoment wird durch eine Gaußlastfolge mit einem Unregelmäßigkeitsfaktor  $I = 0.7$  und  $H_0 = 10^6$  aus [Fisc 77] gesteuert. Zur Verkürzung der Versuchsdauer werden beide Last-Zeit-Reihen durch Rainflow-Filterung mit einem Filter Level von 0.4 verkürzt. Alle verwendeten Kollektive sind in Abbildung B.1 dargestellt.

## 5.2. Übersicht über den Berechnungsalgorithmus

Im Folgenden wird eine Übersicht über den gesamten Berechnungsalgorithmus für gekerbte Bauteile gegeben. Der Algorithmus ist in Abbildung 5.5 als Flussdiagramm dargestellt. Die grauen Kästen stellen den nötigen Input in den Algorithmus sowie dessen Ausgabe dar. Als Ergebnis wird die Anrisslebensdauer des Bauteils ausgegeben.

Sobald alle Inputs bereitgestellt wurden, lässt sich die Berechnung der Anrisslebensdauer in zwei getrennte Bereiche unterteilen. Zunächst werden die lokalen Belastungen (Spannungen und Dehnungen) mit dem in Kapitel 2 erläuterten Kerbnäherungsverfahren berechnet. Diese lokalen Beanspruchungen dienen anschließend als Grundlage zur Schädigungsbewertung mit dem in Kapitel 3 erläuterten

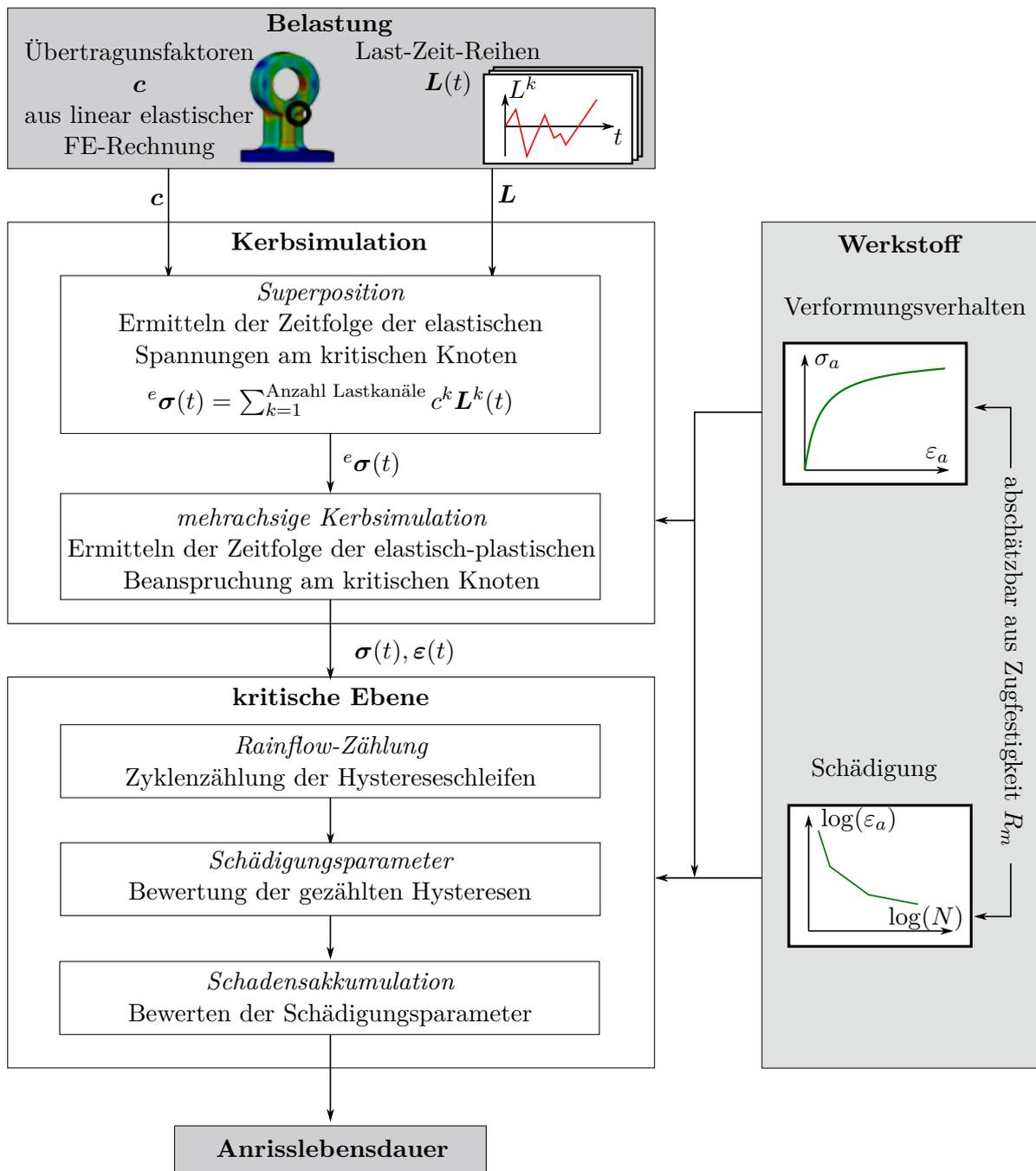


Abbildung 5.5: Übersicht über den Berechnungsalgorithmus

kritischen Ebenen Verfahren. Die Anrisslebensdauer wird dabei für einen einzelnen Knoten im FE-Netz berechnet. Dieser Knoten ist durch die Vorgabe der Übertragungsfaktoren  $c$  definiert. Im Folgenden wird zusammengefasst, welche Eingangsgrößen dem Algorithmus bereitgestellt werden müssen, wie diese bei nichtproportionalen Betriebsbelastungen generiert werden können und wie in den einzelnen Abschnitten des Algorithmus verfahren wird.

### 5.2.1. Eingabegrößen

Der Berechnungsalgorithmus liefert die Anrisslebensdauer für einen materiellen Punkt, beziehungsweise für einen Knoten im FE-Netz. Vom Anwender ist daher vor jeder Rechnung der für das Bauteilversagen kritische Knoten selbst auszuwählen. Die selbst durchgeführten Versuche sowie alle in der Datenbank aus Abschnitt 5.4 enthaltenen Versuche wurden an einfachen Probengeometrien durchgeführt. Der kritische Knoten wurde immer als der Knoten festgelegt, an dem unter proportionaler Belastung bei einer FE-Rechnung mit elastischem Werkstoffverhalten die größte von Mises Vergleichsspannung auftritt. Bei einem realen Bauteil mit unter Umständen mehreren Kerben kann der Fall auftreten, dass die Ermüdungslebensdauer an mehreren Knoten zu berechnen ist. Die für eine einzelne Rechnung nötigen Eingabegrößen lassen sich in zwei Kategorien einteilen.

Eingabegröße	Symbol	Beschreibung	Art der Eingabe
Zugfestigkeit	$R_m$	Zugfestigkeit des Werkstoffs	vorgegeben
statische Kennwerte	$E, \nu$	Elastizitätsmodul und Querdehnzahl des Werkstoffs	vorgegeben <b>oder</b> aus Werkstoffgruppe abgeschätzt
zyklische Kennwerte	$K', n'$	Parameter der Ramberg-Osgood Gleichung	vorgegeben <b>oder</b> aus Werkstoffgruppe und Zugfestigkeit abgeschätzt
Schädigungsparameterwöhlerlinie		Parameter der Wöhlerlinie des verwendeten Schädigungsparameters	vorgegeben <b>oder</b> aus Werkstoffgruppe und Zugfestigkeit abgeschätzt
nichtproportionale Verfestigung	$\alpha$	Nichtproportionales Verfestigungsvermögen des Werkstoffs nach dem Ansatz von Socie und Marquis [Soci 00]	vorgegeben <b>oder</b> aus Werkstoffgruppe und Zugfestigkeit abgeschätzt

Tabelle 5.1: Übersicht über alle werkstoffabhängigen Eingabegrößen des Berechnungsalgorithmus

Eine Gruppe der Eingabegrößen beschreibt das Werkstoffverhalten. In der Kerbsimulation wird die lokale Belastung simuliert. Dazu wird die Kenntnis des Deformationsverhaltens des Werkstoffs benötigt. Im Wesentlichen muss ein inkrementelles Plastizitätsmodell parametrisiert werden. Für die Strukturfließflächenansätze muss ebenfalls das Strukturmodell parametrisiert werden. Die Parameter dieser Plastizitätsmodelle werden mit dem in Abschnitt 2.3.3 vorgestellten Verfahren an eine vorgegebene Fließkurve angepasst. Es werden als minimaler Input demnach nur die Parameter der Ramberg-Osgood Gleichung (2.8) sowie die Elastizitätskonstanten benötigt. Zusätzlich wird die nichtproportionale Verfestigung mit dem Ansatz von Socie und Marquis [Soci 00] berücksichtigt. Dazu ist als Werkstoffkennwert das nichtproportionale Verfestigungsvermögen  $\alpha$  erforderlich. Sollte  $\alpha$  nicht vorliegen, wird in [Itoh 11] ein Ansatz vorgestellt, wie  $\alpha$  aus der Zugfestigkeit abgeschätzt werden kann. Zur Schädigungsbewertung müssen die Parameter der vorgestellten Schädigungsmodelle

angegeben werden. Dazu muss vor allem die Schädigungsparameterwöhlerlinie bekannt sein. Für die einzelnen Schädigungsmodelle können noch weitere individuelle Modellparameter vorgegeben werden. In Tabelle 5.1 sind alle mindestens nötigen werkstoffabhängigen Eingabegrößen zusammengefasst. Die Parametrisierung der Schädigungs- und Plastizitätsmodelle geschieht automatisch. Sollten keine Werkstoffdaten vorliegen, können für die drei in der FKM-Richtlinie Nichtlinear enthaltenen Werkstoffgruppen alle in Tabelle 5.1 benötigten Kennwerte aus der Zugfestigkeit abgeschätzt werden. Der Berechnungsalgorithmus kann demnach auch angewendet werden, wenn lediglich die Zugfestigkeit und die Werkstoffgruppe bekannt sind. Statische und zyklische Kennwerte können aus den bekannten Verfahren aus den FKM-Richtlinien [Fied 19, Renn 12] abgeschätzt werden. Methoden zur Abschätzung aller Parameter der Schädigungsmodelle wurden in Kapitel 3 erarbeitet.

Eingabegröße	Symbol	Beschreibung	ermittelt aus:
Lastfolge	$L$	Lastfolge für jeden angreifenden Lastkanal	vorgegeben
Übertragungsfaktoren	$c$	Übertragungsfaktoren von äußeren Lasten oder Nennlasten auf lokale Kerbspannungen nach der Elastizitätstheorie	elastische FE-Rechnung
Spannungsgradient	$G$	Bezogener Spannungsgradient nach FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] zur Berechnung der Stützwirkung	elastische FE-Rechnung
hochbeanspruchte Oberfläche	$A_\sigma$	Hochbeanspruchte Oberfläche nach FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] zur Berechnung der Stützwirkung	elastische FE-Rechnung
plastische Traglastformzahl	$K_p$	Plastische Traglastformzahl nach FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] zur Berechnung der Bauteilfließkurven in der Kerbsimulation	elastisch-plastische FE-Rechnung

Tabelle 5.2: Übersicht über alle geometrieabhängigen Eingabegrößen des Berechnungsalgorithmus

Die zweite Kategorie an Eingabegrößen ist abhängig von der Bauteilgeometrie. Es werden die Last-Zeit-Reihen sowie die Übertragungsfaktoren benötigt, um die lokalen Kerbspannungen nach der Elastizitätstheorie berechnen zu können. Diese dienen als Eingabegröße für die Kerbsimulation. Um das Strukturverhalten innerhalb der Kerbsimulation zu berücksichtigen, werden Bauteilfließkurven bestimmt. Dazu werden die in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] verwendeten Kerbnäherungsverfahren für lokal einachsige Belastungen verwendet. Diese Verfahren benötigen als Eingabe die plastische Traglastformzahl  $K_p$ . Um von den Werkstoffwöhlerlinien auf eine Bauteilwöhlerlinie umzurechnen, wird das werkstoffmechanische Stützwirkungskonzept verwendet. Als Eingaben werden die hochbeanspruchte Oberfläche  $A_\sigma$  sowie der bezogene Spannungsgradient  $G$  benötigt. In Tabelle 5.2 sind alle geometrieabhängigen Eingabegrößen zusammengefasst. Alle Eingaben, außer der plastischen Traglastformzahl, können aus einer elastischen FE-Rechnung ermittelt werden. Zur Ermittlung der Traglastformzahl ist eine FE-Rechnung mit elastisch - ideal plastischem Werkstoffverhalten nötig. Im Vergleich zur aktuellen FKM-Richtlinie Nichtlinear werden keine zusätzlichen FE-Rechnungen benötigt. Der einzige Unterschied in den geometrieabhängigen Eingabegrößen sind die Übertragungsfaktoren. In der FKM-Richtlinie Nichtlinear wird der Übertragungsfaktor einer Vergleichsspannung benötigt, während hier die Mehrachsigkeit erhalten bleibt und die Übertragungsfaktoren für jede Tensorkomponente und jeden angreifenden Lastkanal benötigt werden. Das Werkstoffverhalten kann vollständig aus der Zugfestigkeit abgeschätzt werden. In diesem Sinne wird im Vergleich zur FKM-Richtlinie Nichtlinear kein zusätzlicher Werkstoffkennwert benötigt. Zur Beschreibung

des Verformungsverhaltens des Werkstoffs müssen zusätzlich die Querdehnzahl und das nichtproportionale Verfestigungsvermögen (siehe Tabelle 5.1) angegeben werden. In der FKM-Richtlinie Nichtlinear wird beim Übergang von Werkstoff- auf Bauteilwöhlerlinie zusätzlich noch der Einfluss der Oberflächenrauheit berücksichtigt. Aufgrund von begrenzten verfügbaren Daten wurde dieser Aspekt in der vorliegenden Arbeit nicht in die Stützwirkung mit einbezogen. Er kann aber identisch nach dem Vorgehen aus der FKM-Richtlinie Nichtlinear verwendet werden.

### 5.2.2. Ermittlung von Eingabewerten aus der Finiten-Elemente-Methode

Für das Stützwirkungskonzept und die Kerbnäherungsverfahren werden geometrieabhängige Eingabegrößen, die durch FE-Simulation ermittelt werden müssen, benötigt. Diese Größen umfassen den bezogenen Spannungsgradienten  $G$  und die hochbeanspruchte Oberfläche  $A_\sigma$  für das Stützwirkungskonzept sowie die plastische Traglastformzahl  $K_p$  für die Kerbnäherung. Unter einachsigen und proportionalen Belastungen können die Eingabegrößen gemäß der Beschreibung in [Wäch 21] bestimmt werden. Es ist jedoch unklar, wie bei mehrachsig nichtproportionalen Belastungen vorgegangen werden soll. Unter nichtproportionaler Belastung können im Verlauf einer Lastfolge zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedliche Werte für den bezogenen Spannungsgradienten, die hochbeanspruchte Oberfläche und die plastische Traglastformzahl auftreten.

Eine Handlungsempfehlung, die im Projekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] vorgeschlagen wird, ermöglicht es dem Anwender, Stützwirkungseffekte und die plastische Traglastformzahl für nichtproportionale Belastungen zu berechnen. Es wird vorgeschlagen, die Eingabegrößen auf die gleiche Weise zu bestimmen wie unter proportionaler Belastung. Diese Methode ist vergleichsweise einfach anzuwenden, erhebt jedoch keinen Anspruch darauf, ein physikalisches Modell für die Stützwirkung zu sein. Dieses vorgeschlagene Konzept bietet den Vorteil, dass die erzielten Ergebnisse mit den Größen bei proportionaler Belastung kompatibel sind. Ungenau formuliert ist dieser Vorschlag bei Betriebslasten mit variablen Amplituden. Hier kann sich das Amplitudenverhältnis der einzelnen Lastkanäle während der Belastung ändern. Es ist nicht klar, welches Amplitudenverhältnis zur Bestimmung der Eingabegrößen in der FE-Simulation aufgebracht werden muss. Es wird daher vorgeschlagen, die meistschädigende Laststufe der einzelnen Lastkanäle als Eingabewert für die FE-Rechnung zu verwenden. Das Vorgehen zur Ermittlung der meistschädigenden Laststufe ist in Abbildung 5.6 schematisch dargestellt und wird im Folgenden erläutert.

Der zugrundeliegende Gedanke dieses Ansatzes besteht darin, dass nur die Lastamplituden der einzelnen angreifenden Lastkanäle, die jeweils den größten Beitrag zur Schädigung leisten, für die Berechnung der Stützzahlen und der plastischen Traglastformzahl herangezogen werden. Die meistschädigenden Amplituden für jeden angreifenden Lastkanal werden proportional in der FE-Simulation aufgebracht. Zunächst werden demnach die am meisten schädigenden Lastamplituden für alle Lastkanäle bestimmt. Hierzu wird für jeden Lastkanal eine Rainflow-Zählung durchgeführt, beispielsweise gemäß [Clor 86], wobei 15 Klassen verwendet werden. Die resultierenden Daten werden in ein Amplitudenkollektiv (Amplitude gegen Stufenhäufigkeit) umgewandelt, wobei keine Mittelspannungsbewertung erfolgt. Für jede Laststufe wird dann eine Schädigungsberechnung unter Verwendung der elementaren Modifikation der Miner-Regel mit einer fiktiven Wöhlerlinie mit einer Neigung von  $k = 5$  durchgeführt. Die Lastamplitude mit dem größten Schädigungsanteil wird als die am meisten schädigende Lastamplitude identifiziert. Dieses Vorgehen wird für jeden einzelnen am Bauteil angreifenden Lastkanal separat durchgeführt. Sobald die am meisten schädigenden Lastamplituden für alle Lastkanäle bekannt sind, können diese als statische Lasten gemeinsam in der FE-Simulation aufgebracht werden. Die erforderlichen Größen wie Spannungsgradient, hochbeanspruchte Oberfläche und plastische Traglastformzahl werden dann wie bei proportionaler Belastung bestimmt. Es ist wichtig zu beachten, welches Vorzeichen bei der Definition der Einzellasten in der FE-Simulation verwendet wird. Hierfür wird empfohlen, die Richtung anhand der Mittellast  $\bar{L}_m$  festzulegen. Diese ergibt sich aus dem absoluten Minimum  $\bar{L}_{min}$  und dem absoluten Maximum  $\bar{L}_{max}$

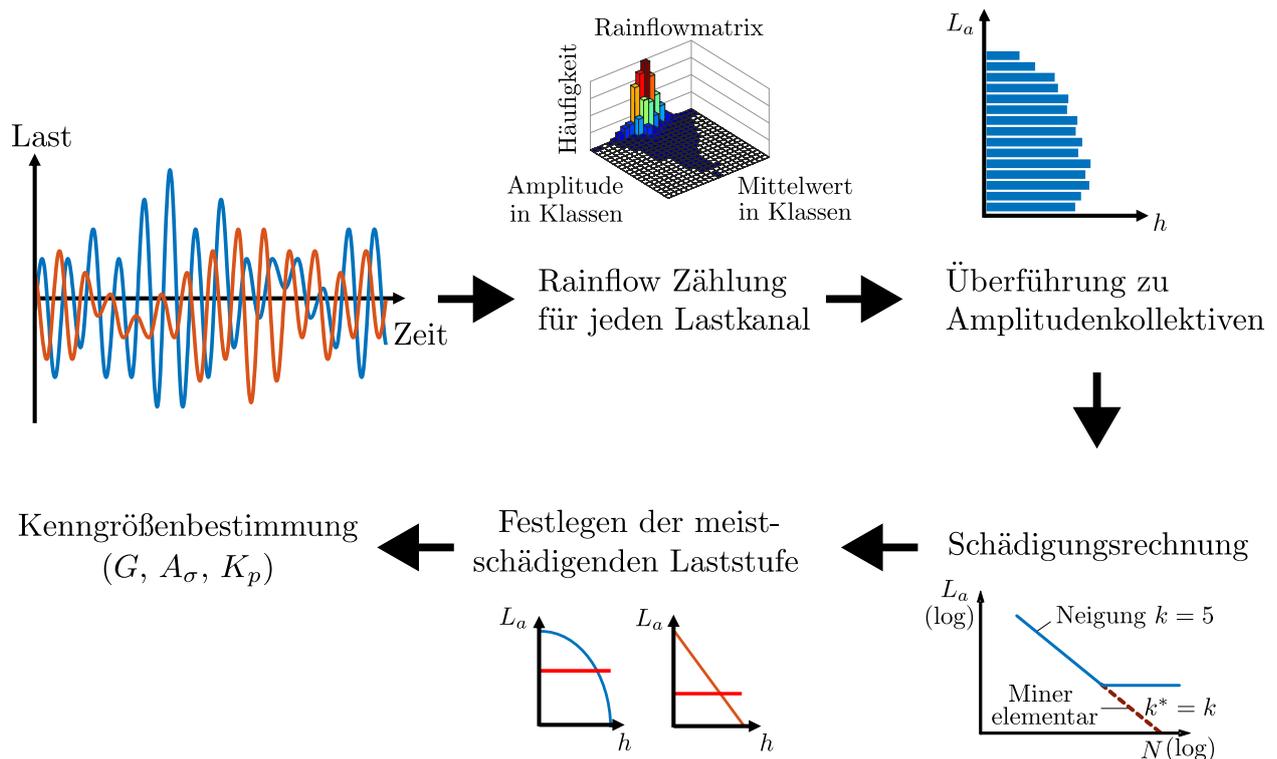


Abbildung 5.6: Ermittlung des bezogenen Spannungsgradienten, der hochbeanspruchten Oberfläche und der plastischen Traglastform bei nichtproportionalen Beanspruchungen (hier auf Grund von zwei Lastkanälen) mit Hilfe der meistschädigenden Laststufe, nach [Linn 23]

der jeweiligen Lastfolge  $L$ . Für den Fall, dass die Mittellast  $\bar{L}_m = 0$  ergibt, sollte die Kombination der Lastrichtungen gewählt werden, die zu den geringsten Stützzahlen führt.

### 5.2.3. Kerbsimulation

Die Kerbsimulation dient zur Ermittlung der örtlichen Beanspruchung in einer geometrischen Kerbe. Auf Grundlage der Untersuchungen in Abschnitt 2.5.4 und Abschnitt 2.5.5 wird als Kerbnäherungsverfahren der Pseudo-Spannungsansatz gewählt. Die Wahl wird vor allem durch die Genauigkeit der ermittelten Spannungs- und Dehnungsamplituden sowie durch den erheblichen Vorteil in der Rechengeschwindigkeit der Methode begründet. Der für den Pseudo-Spannungsansatz erstellte Algorithmus ist in Abschnitt 2.4.1 und Abschnitt 2.4.1.2 beschrieben. Zur Ermittlung der Bauteilfließkurve wird das Kerbnäherungsverfahren nach Seeger und Beste [Seeg 77] verwendet. Dies erfordert, gegenüber den Verfahren nach Neuber [Neub 61], eine zusätzliche elastisch-plastische FE-Simulation, da die plastische Traglastformzahl  $K_p$  benötigt wird. Die Genauigkeit der ermittelten lokalen Beanspruchung steigert sich allerdings, vor allem für hohe Belastungen mit größeren plastischen Zonen, erheblich.

Innerhalb des Pseudo-Spannungsansatzes sind dann die Plastizitätsmodelle zur Beschreibung des Deformationsverhaltens des Werkstoffs und der Struktur zu parametrisieren. Die Parametrisierung erfolgt automatisch anhand des zyklisch stabilisierten Werkstoffverhaltens und der Bauteilfließkurve. In dieser Arbeit wurde das Plastizitätsmodell von Ohno und Wang [Ohno 93a, Ohno 93b] gewählt. Für dieses Modell sind neben den Parametern für zyklisch stabilisiertes Werkstoffverhalten zusätzlich Parameter  $\chi$ ,  ${}^e\chi$  zu bestimmen, die das transiente Werkstoffverhalten beschreiben. Sollten keine Daten vorliegen, um diese Parameter zu bestimmen, was für einen Großteil der hier untersuchten Werkstoffe der Fall ist, werden diese Parameter auf Standardwerte gesetzt. Nach dem Vorschlag

von [Döri 06] wird  $\chi = 5$  für das Werkstoffmodell gewählt. Für das Strukturmodell wird  ${}^e\chi = 50$  empfohlen. Eine Methode zur Bestimmung von  ${}^e\chi$  für ein gegebenes Bauteil wird in 2.5.3 vorgeschlagen. Dieser Vorschlag erfordert allerdings mehrere FE-Simulationen und wird für alle untersuchten Probengeometrien aus Abschnitt 5.4 als zu aufwendig erachtet. In der Kerbsimulation wird ebenfalls die nichtproportionale Verfestigung nach dem Ansatz von Socie und Marquis [Soci 00], beschrieben in Abschnitt 2.3.4, berücksichtigt. Dazu muss eine Kennzahl  $f_{np}$  zur Bewertung der Nichtproportionalität der Belastung erfolgen. In dieser Arbeit wird die Kennzahl nach [Gaie 04] verwendet. Diese bewertet die Nichtproportionalität auf Grundlage der Spannungen. Vor der Kerbsimulation liegt der Spannungsverlauf nicht vor. Die Nichtproportionalitätskennzahl  $f_{np}$  wird daher auf Grundlage der elastischen Lösung vor der Kerbsimulation bestimmt. Bei der Auswertung der Versuchsergebnisse an ungekerbten Werkstoffproben in Abschnitt 4.4.4 zeigt sich, dass Anrisslebensdauern unter nichtproportionaler Belastung im Mittel unterschätzt wurden. Um eine zusätzliche Sicherheit der Lebensdauerprognose bei Versuchen unter nichtproportionaler Belastung zu erreichen, wird die nichtproportionale Verfestigung im Pseudo-Spannungsansatz nur im Werkstoffmodell, nicht aber im Strukturmodell, berücksichtigt. Dadurch werden gegenüber einer proportionalen Belastung höhere Spannungsamplituden, aber gleiche Dehnungsamplituden vorhergesagt.

Die simulierten örtlichen Beanspruchungen dienen als Grundlage der Schädigungsrechnung. Eine weitere Fragestellung ist, wie viele Durchläufe durch eine gegebene Last-Zeit-Reihe simuliert werden müssen. Sollte kein Bauteilversagen aufgetreten sein, nachdem die Schädigung aller simulierten Durchläufe berechnet wurde, erfolgt die Lebensdauerrechnung durch Hochrechnen des letzten simulierten Durchlaufs unter der Annahme, dass stabilisiertes Werkstoffverhalten vorliegt und alle transienten Vorgänge abgeklungen sind. Nachdem sich das Werkstoffverhalten stabilisiert hat, stellen sich keine Änderungen in den berechneten Spannungs-Dehnungs-Hysteresen ein. Eine Simulation weiterer Durchläufe führt nur zu längeren Rechenzeiten bei gleich bleibender Lebensdauerprognose. Zum Schließen aller Hysteresen innerhalb der Rainflow-Zählung sollten mindestens zwei Durchläufe durch eine Last-Zeit-Reihe simuliert werden, selbst bei langen Last-Zeit-Reihen. Bei stabilem Werkstoffverhalten reichen wenige Durchläufe, ohne dass sich eine Änderung der Lebensdauer ergibt. Bei stark transientem Werkstoffverhalten (zyklisches Kriechen der Mitteldehnung und Mittelspannungsrelaxation) können mehrere Durchläufe durch die Lastfolge notwendig sein, bis sich eine konvergierte rechnerische Lebensdauer einstellt. Dieses transiente Verhalten ist jedoch stark abhängig vom Werkstoffverhalten und durch die Bauteilfließkurve auch vom Bauteilverhalten. Vor einer Rechnung ist nicht abzusehen, wann sich das Werkstoffverhalten stabilisiert. Bei stark transientem Werkstoffverhalten und einstufiger Belastung wird hier vorgeschlagen,  $10^3$  Durchläufe durch die Last-Zeit-Reihe zu simulieren.

#### 5.2.4. Schädigungsrechnung mit dem kritischen Ebenen Verfahren

Die Schädigungsrechnung wird mit dem Verfahren der kritischen Schnittebene durchgeführt. Dabei wird in jeder betrachteten Schnittebene eine Rainflow-Zählung durchgeführt. Die identifizierten Schädigungsereignisse werden mit einem Schädigungsmodell bewertet und anschließend wird die Schädigung akkumuliert. Die Anzahl der nachgerechneten Schnittebenen muss groß genug sein, um das Minimum der Anrisslebensdauer möglichst genau zu treffen. Um Rechenzeit zu sparen, sollen aber gleichzeitig nicht zu viele Ebenen berechnet werden müssen. Eine Schnittebene ist durch die beiden in Abschnitt 3.2.3.1 angegebenen Schnittwinkel  $\varphi$  und  $\psi$  eindeutig festgelegt. Für die Kippung der kritischen Ebene in das Bauteil hinein wird sich auf Typ A ( $\psi = 0^\circ$ ) und Typ B ( $\psi = 45^\circ$ ) Risse beschränkt. Bei der Drehung des Risses auf der Bauteiloberfläche, die durch  $\varphi$  beschrieben wird, kann sich aus Gründen der Symmetrie auf  $\varphi \in [-90^\circ, 90^\circ]$  beschränkt werden. In Testrechnungen zeigte sich, dass mit einer Diskretisierung von  $\Delta\varphi = 9^\circ$  eine ausreichend genaue Prognose der rechnerischen Lebensdauer erzielt werden kann. Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur [Webe 99, Went 18, Sund 20, Linn 23] andere Diskretisierungsstrategien existieren. Diese sind zum

Teil in der Lage, eine adaptive Verfeinerung der Schnittebenendiskretisierung durchzuführen. Durch solche Strategien könnte die Rechengeschwindigkeit weiter verbessert werden.

Unter proportionaler Belastung treten die Umkehrpunkte aller angreifenden äußeren Lasten zeitgleich mit den Umkehrpunkten der Schnittspannungen und -dehnungen in der betrachteten Ebene auf. Eine berechnete Versagensschwingspielzahl in einer Schnittebene kann eindeutig einem Zeitpunkt im Last-Zeit-Signal zugeordnet werden. Die in der kritischen Ebene berechneten Schwingspiele bis zum technischen Anriss können mit einer aus den äußeren Lasten ermittelten Schwingspielanzahl gleichgesetzt werden. Bei mehrachsig nichtproportionaler Belastung ist dies nicht der Fall. Weder die Umkehrpunkte der äußeren Lasten noch die Umkehrpunkte der Spannungs- und Dehnungskomponenten treten zeitgleich auf. Eine in der Schnittebene identifizierte Versagensschwingspielzahl lässt sich nicht eindeutig einer bestimmten Lastkomponente zuordnen. Es ist daher nur schwer möglich, eine eindeutige Versagensschwingspielzahl anzugeben, die bis zum Beginn eines technischen Anrisses abgelaufen ist. Als Anrisslebensdauer wird aus dem Berechnungsalgorithmus aus diesem Grund immer eine Anzahl an ertragbaren Durchläufen und Teildurchläufen durch die Last-Zeit-Folge ausgegeben. Es wird anstatt einer Schwingspielzahl also eher ein Versagenszeitpunkt ausgegeben. Eine eindeutige Versagensschwingspielzahl kann dann durch Rainflow-Zählung einer der angreifenden Lasten für alle ertragbaren Durchläufe angegeben werden.

### 5.3. Prognose der Anrisslebensdauer ausgewählter Versuchsreihen

In diesem Abschnitt erfolgt ein Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen ausgewählter Versuchsreihen und den prognostizierten Anrisslebensdauern der Schädigungsmodelle. Es wird der Einfluss der gewählten Bauteilfließkurve in der Kerbsimulation auf die berechnete Ermüdungslebensdauer gezeigt. In Abschnitt 2.5.4 wurde bereits aufgezeigt, wie die Auswahl der Bauteilfließkurve die berechneten örtlichen Belastungen beeinflusst. Es werden auch Ergebnisse unter proportionaler und nichtproportionaler Belastung miteinander verglichen. Darüber hinaus soll für Versuche mit Mittellasten dargestellt werden, welchen Einfluss das transiente Werkstoffverhalten auf die prognostizierten Anrisslebensdauern hat.

#### 5.3.1. Einfluss der Bauteilfließkurven

Es wird der Einfluss der gewählten Bauteilfließkurve in der Kerbsimulation auf die berechnete Lebensdauer bis zum technischen Anriss untersucht. Hierbei werden Bauteilfließkurven betrachtet, die mit Hilfe des klassischen Neuber-Verfahrens [Neub 61], des Verfahrens von Seeger und Beste [Seeg 77] sowie einer elastisch-plastischen Finite-Elemente-Berechnung ermittelt wurden. Als Anwendungsbeispiel werden die unter proportionaler Belastung durchgeführten Versuche gewählt. Die verwendeten Bauteilfließkurven sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Der Einfluss auf die berechneten örtlichen Belastungen wurde bereits in Abschnitt 2.5.4 für den Pseudo-Spannungsansatz dargestellt und diskutiert. Die berechneten Anrisslebensdauern, ermittelt durch das Kurzrissmodell  $P_Z$ , werden in Abbildung 5.8 im Vergleich zu den Versuchsergebnissen für beide Kerbgeometrien präsentiert. Dabei wurden lediglich die in der Kerbsimulation verwendeten Bauteilfließkurven variiert.

Es zeigt sich, dass der Einfluss der Bauteilfließkurve tendenziell auf den Zeitfestigkeitsbereich beschränkt ist. Es ist bereits bekannt, dass die Neuber-Methode örtliche Dehnungen unterschätzt, sobald nennenswerte plastische Deformationen im Nennquerschnitt auftreten. Dieses Verhalten spiegelt sich in längeren prognostizierten Anrisslebensdauern auf hohen Lastniveaus wider. Die Ausprägung dieses Verhaltens variiert jedoch für die beiden unterschiedlich großen Kerbradien. Bei der schärferen Kerbe ( $\rho = 0.5 \text{ mm}$ ) zeigen die beiden Bauteilfließkurven erst ab etwa  $S_N = 200 \text{ MPa}$  erkennbare Unterschiede, was einer örtlichen Beanspruchung von etwa  $\varepsilon_v \approx 1\%$  entspricht. Erst für rechnerische Lebensdauern  $N_f < 2 \cdot 10^3$  werden diese Unterschiede in der prognostizierten Lebensdauer deutlich.

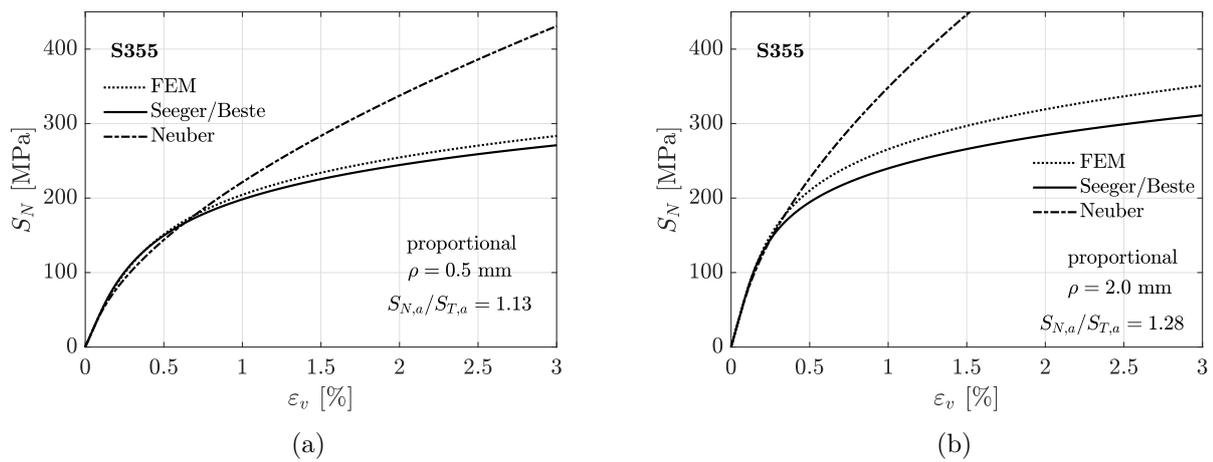


Abbildung 5.7: Bauteilfließkurven in Nennspannungen für proportionale Belastung (a) für den Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm und (b) für den Kerbradius  $\rho = 2.0$  mm

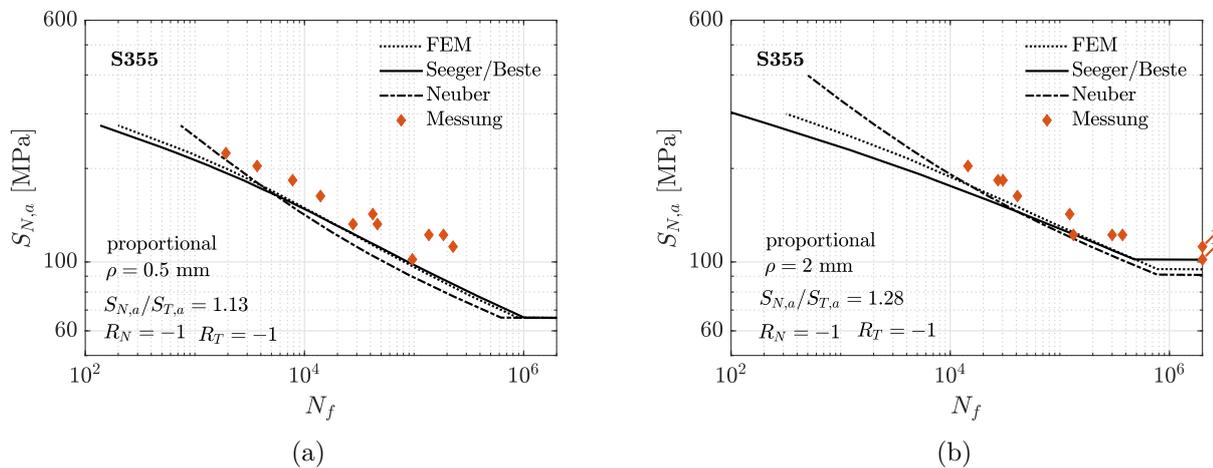


Abbildung 5.8: Einfluss der Bauteilfließkurve auf die rechnerische Anrisslebensdauer mit dem Kurzrisssmodell  $P_Z$  (a) für den Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm und (b) für den Kerbradius  $\rho = 2.0$  mm

Auf niedrigeren Lastniveaus überschätzt das Neuber-Verfahren im Vergleich zur FE-Berechnung sogar leicht die örtliche Beanspruchung, was zu konservativen Lebensdauerprognosen führt.

Für die weniger scharf gekerbte Probengeometrie ( $\rho = 2.0$  mm) sind Unterschiede in der Bauteilfließkurve ebenfalls ab einem Lastniveau von  $S_N = 200$  MPa erkennbar. Allerdings entspricht dieses Lastniveau mit  $\varepsilon_v < 0.5\%$  einer deutlich geringeren örtlichen Belastung. Dies spiegelt sich auch in der Lebensdauerprognose wider, was sich in nennenswerten Unterschieden bis etwa  $N_f = 2 \cdot 10^4$  Schwingspielen äußert. Leider reichen die durchgeführten Versuche nicht bis in die relevanten Lastniveaus hinein, weshalb zukünftige Projekte Versuche mit höheren Belastungen anstreben sollten.

Die Ermittlung der Bauteilfließkurve mittels FE-Berechnungen oder dem Verfahren von Seeger und Beste erfordert im Vergleich zum klassischen Neuber-Verfahren jeweils eine elastisch-plastische FE-Berechnung. Insbesondere für milder gekerbte Bauteile und hohe Belastungen wird dieser Aufwand jedoch als lohnenswert erachtet. Hierdurch sind verbesserte und vor allem konservativere Lebensdauerprognosen zu erwarten. Der Einfluss der Bauteilfließkurve auf die berechnete Anrisslebensdauer der beiden anderen Schädigungsmodelle ist qualitativ identisch. In den folgenden Abschnitten wird stets mit einer Bauteilfließkurve aus dem Verfahren von Seeger und Beste gerechnet.

### 5.3.2. Vergleich zwischen proportionaler und nichtproportionaler Beanspruchung

#### Vergleich der Versuchsergebnisse

Abbildung 5.9 zeigt die in der vorliegenden Arbeit ermittelten Anrisslebensdauern für beide Kerbradien unter proportionaler und 90° phasenverschobener Belastung bei einstufiger Belastung ohne Mittellast. Zudem sind Kurvenanpassungen an die gemessenen Werte dargestellt. In der schärfer gekerbten Probe mit einem Kerbradius von  $\rho = 0.5$  mm zeigt sich ein eindeutiger Rückgang der Lebensdauer bis zum technischen Anriss, wenn eine Phasenverschiebung von 90° im Vergleich zur proportionalen Belastung angewendet wird. Dieses Verhalten zeigt sich in den Messwerten auf allen Lashorizonten. Die beiden angepassten Kurven weisen darüber hinaus sehr ähnliche Neigungen auf. Unter phasenverschobener Beanspruchung besitzt die angepasste Kurve eine Neigung von  $k = 5.96$ , während sich die an die Messwerte unter proportionaler Belastung angepasste Kurve mit  $k = 6.67$  neigt. Die angepasste Kurve für die Versuche unter 90° phasenverschobener Belastung weist einen leicht steileren Verlauf im Vergleich zur angepassten Kurve für die Versuche unter proportionaler Belastung auf. Der Unterschied zwischen den beiden Kurven nimmt mit kleineren Lebensdauern ab und wird bei höheren Lebensdauern größer.

Der Unterschied zwischen proportionaler und phasenverschobener Beanspruchung ist für die milder gekerbte Probe mit einem Kerbradius von  $\rho = 2.0$  mm weniger ausgeprägt. Die Messwerte deuten darauf hin, dass für  $N_f < 3 \cdot 10^4$  Schwingspiele nach wie vor eine Verkürzung der Anrisslebensdauer bei phasenverschobenen Belastungen im Vergleich zur proportionalen Belastung auftritt. Diese Verkürzung ist jedoch weniger deutlich als für den Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm. Für  $N_f > 3 \cdot 10^4$  liegen die gemessenen Anrisslebensdauern beider Versuchsreihen sehr nahe zusammen. Es scheint, als würde sich der Effekt umkehren, und Versuche unter phasenverschobener Belastung zeigen jetzt eine Lebensdauererlängerung im Vergleich zu Versuchen unter proportionaler Belastung. Dieses Verhalten wird besonders deutlich, wenn die angepassten Kurven anstelle der Messwerte betrachtet werden. Die angepasste Kurve der Messreihe unter phasenverschobener Belastung weist mit  $k = 10.04$  eine deutlich größere Neigung, also einen flacheren Verlauf, auf als die angepasste Kurve für Versuche unter proportionaler Belastung mit  $k = 5.90$ . Für den Kerbradius  $\rho = 2.0$  mm liegen keine Versuchsergebnisse unter  $N_f = 10^4$  Schwingspielen vor, und weitere Veränderungen in den angepassten Kurven durch Versuche auf höheren Lashorizonten sind zu erwarten.

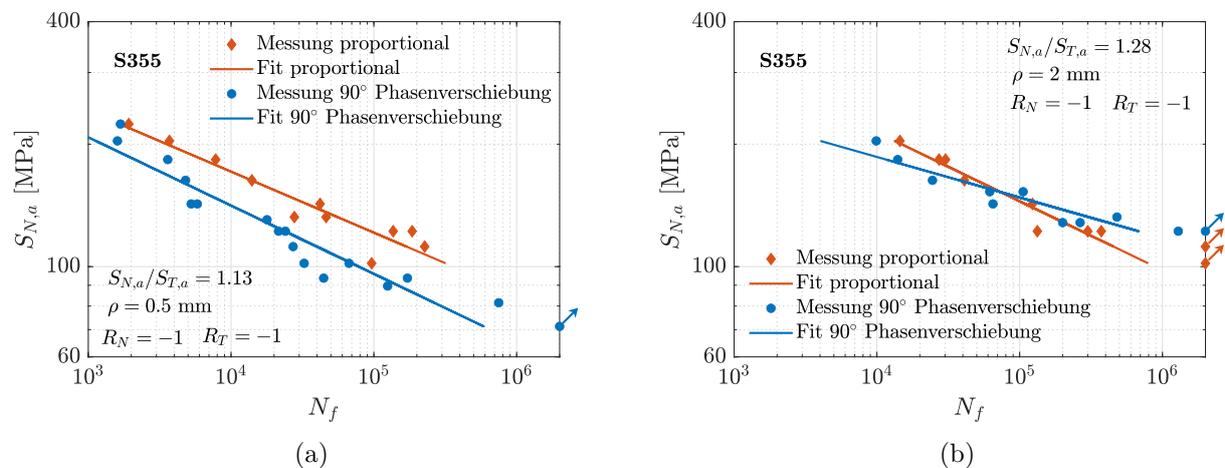


Abbildung 5.9: Vergleich der Anrisslebensdauer bei proportionaler Belastung und bei 90° Phasenverschiebung für (a) für den Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm und (b) für den Kerbradius  $\rho = 2.0$  mm

### Vergleich der Schädigungsmodelle

In Abbildung 5.10 werden die Bauteilwöhlerlinien, die mit verschiedenen Schädigungsmodellen berechnet wurden, mit den experimentellen Ergebnissen für eine proportionale Belastung verglichen. Die Ergebnisse sind für beide Kerbradien dargestellt. Für die schärfer gekerbte Probengeometrie mit einem Radius von  $\rho = 0.5$  mm zeigen alle Modelle eine Unterschätzung der Anrisslebensdauern. Das Kurzrisssmodell  $P_Z$  liefert dabei die beste Prognose, jedoch werden die Anrisslebensdauern im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen um den Faktor 3-5 unterschätzt. Für die weniger scharf gekerbte Probengeometrie mit einem Kerbradius von  $\rho = 2.0$  mm liefern alle Schädigungsmodelle auf hohen Lasthorizonten ähnliche Lebensdauerprognosen. Bis zu einer Schwingspielzahl von  $N_f < 10^5$  werden die Anrisslebensdauern um den Faktor 2-3 unterschätzt. Wesentliche Unterschiede in den rechnerischen Anrisslebensdauern treten erst ab einer Schwingspielzahl  $N_f > 10^5$  auf. In diesem Bereich spiegelt das Kurzrisssmodell  $P_Z$  am besten den Trend der experimentellen Ergebnisse wider. Der Vergleich zwischen rechnerischer Anrisslebensdauer und experimentellen Ergebnissen für eine Belastung unter  $90^\circ$  Phasenverschiebung ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Die Ergebnisse umfassen sowohl einstufige Belastungen als auch Belastungen mit variablen Amplituden, wobei die Lebensdauerlinien für eine Belastung mit dem Gaußkollektiv und einem Kollektivumfang von  $\bar{H} = 10^4$  gezeigt werden. Für die Probengeometrie mit einem Kerbradius von  $\rho = 0.5$  mm ergeben sich auf allen Lasthorizonten stets die geringsten rechnerischen Lebensdauern durch den Fatemi/Socie Parameter  $P_{FS}$ , während das Kurzrisssmodell  $P_Z$  die größten Lebensdauern prognostiziert. Insgesamt kann die Prognose der Anrisslebensdauer für einstufige Belastungen aller Schädigungsmodelle als zufriedenstellend eingestuft werden. Größere Unterschiede zwischen rechnerischer und experimenteller Anrisslebensdauer zeigen sich für beide Kerbradien insbesondere auf niedrigen Lasthorizonten im Bereich der Dauerfestigkeit. Hier stimmt der Trend des Kurzrisssmodells am besten mit den experimentellen Ergebnissen überein. Dennoch werden von jedem der Schädigungsmodelle sichere Anrisslebensdauern prognostiziert.

Für Versuche unter einer Belastung mit variablen Amplituden zeigen ebenfalls alle Modelle für beide Kerbradien zufriedenstellende Prognosen der Anrisslebensdauer. In Bezug auf ungekerbte Werkstoffproben unter variabler Amplitudenbelastung, wie in Abbildung 4.32 dargestellt, zeigte sich, dass das Kurzrisssmodell tendenziell kürzere Lebensdauern liefert als der Fatemi/Socie ( $P_{FS}$ ) oder der Smith/Watson/Topper ( $P_{RAM}$ ) Parameter. Dieses Verhalten zeigt sich in der vorliegenden Untersuchung nicht so ausgeprägt.

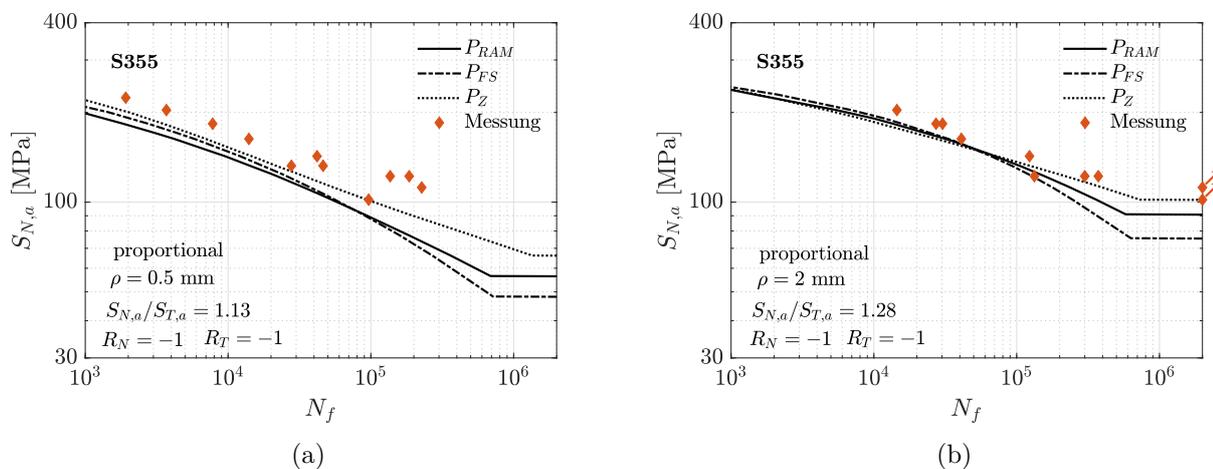


Abbildung 5.10: Rechnerische Bauteilwöhlerlinie für proportionale, einstufige Belastung (a) für den Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm und (b) für den Kerbradius  $\rho = 2.0$  mm

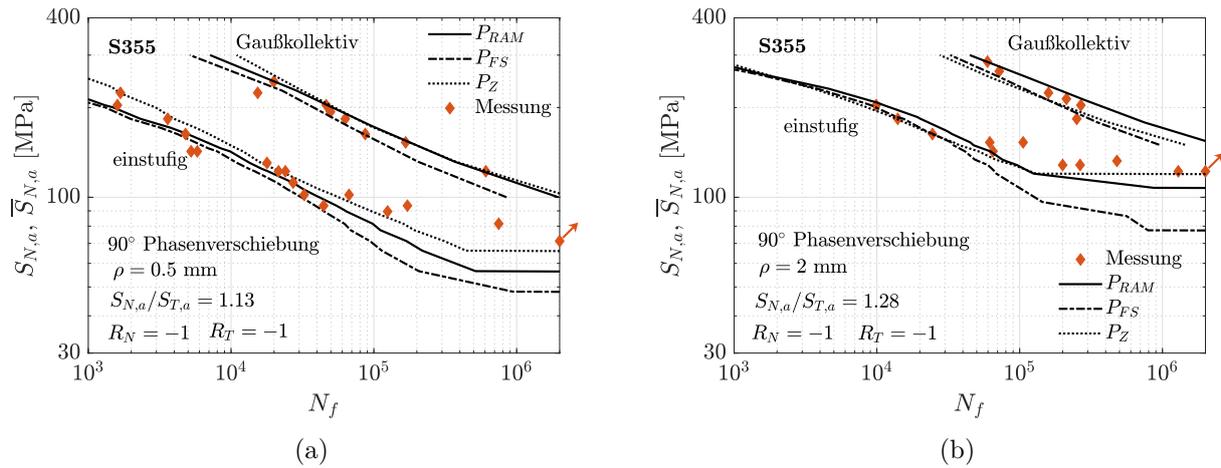


Abbildung 5.11: Rechnerische Bauteilwöhlerlinie für 90° phasenverschobene Einstufenbelastung und betriebsähnliche Belastung (a) für den Kerbradius  $\rho = 0.5$  mm und (b) für den Kerbradius  $\rho = 2.0$  mm

Die prognostizierte Anrisslebensdauer der Versuchsreihen unter nichtproportionaler Belastung zeigt sogar eine höhere Genauigkeit im Vergleich zu den Versuchsreihen unter proportionaler Belastung. Diese Beobachtung gilt für beide betrachteten Kerbradien.

### 5.3.3. Mittellasten

Abbildung 5.12 zeigt die experimentellen Ergebnisse im Vergleich zu den berechneten Anrisslebensdauern der drei untersuchten Schädigungsmodelle für die Messreihe mit einer Einstufenbelastung unter 90° Phasenverschiebung und einem Lastverhältnis  $R_N = 0$  der Normallast und  $R_T = -1$  des Torsionsmoments.

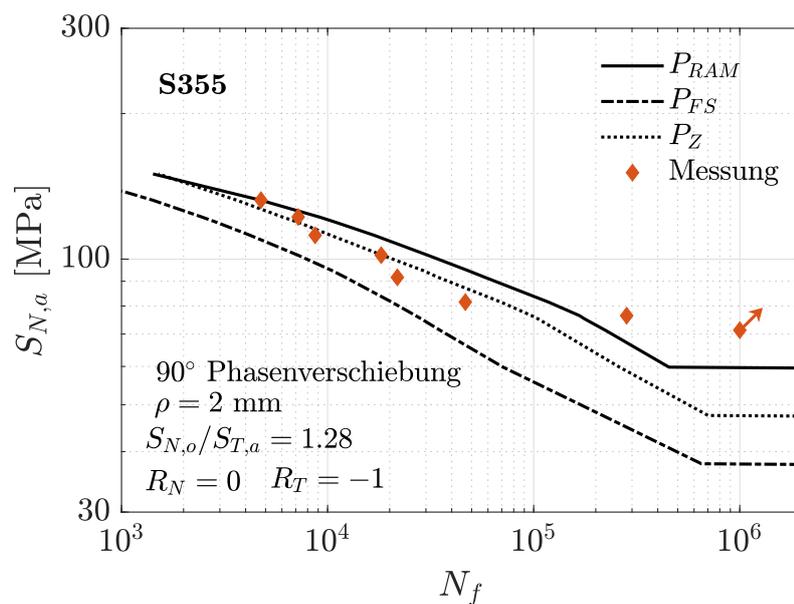


Abbildung 5.12: Rechnerische Bauteilwöhlerlinie für 90° phasenverschobene Belastung mit Mittellast

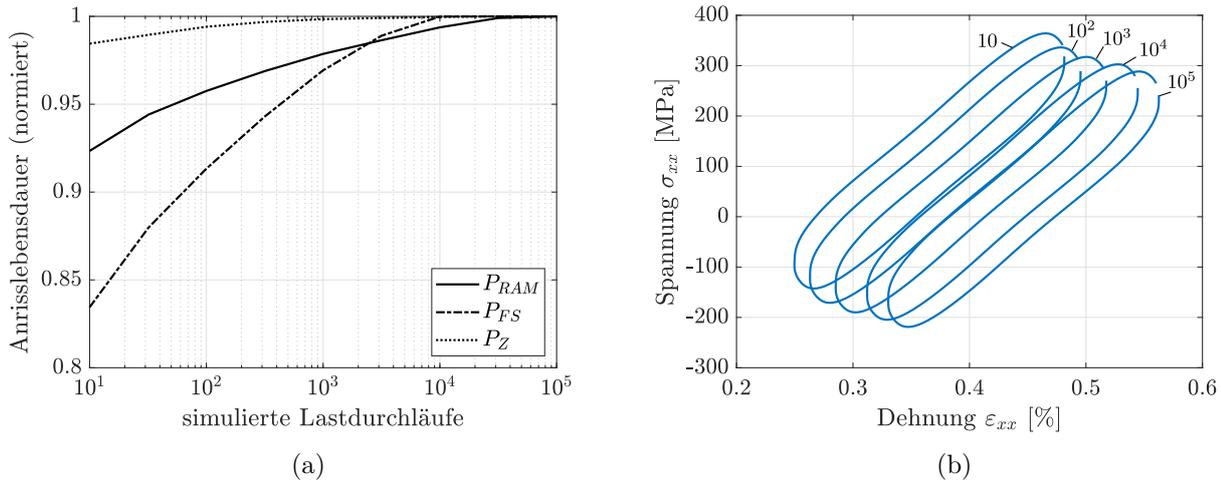


Abbildung 5.13: Einfluss der simulierten Lastdurchläufe auf die rechnerische Anrisslebensdauer (a) rechnerische Lebensdauer normiert auf den konvergierten Wert und (b) berechnete Hysteresen nach verschiedenen Lastdurchläufen

Es zeigen sich deutliche Unterschiede in den Lebensdauerprognosen der drei Schädigungsmodelle. Der Parameter  $P_{FS}$  liefert eine konservative Prognose der experimentellen Ergebnisse, die um den Faktor 3-10 zu niedrig ausfällt. Diese Abweichungen nehmen mit zunehmenden Lebensdauern zu. Im Gegensatz dazu liefert der Parameter  $P_{RAM}$ , mit einer Ausnahme, Prognosen der Anrisslebensdauern, die tendenziell zu hoch sind. Diese Abweichungen liegen jedoch nicht mehr als um den Faktor 2,5 von den experimentellen Ergebnissen entfernt. Die Resultate des Kurzrissmodells  $P_Z$  liegen zwischen den beiden anderen Parametern. Es liefert somit für diese Versuchsreihe die beste Prognose der Anrisslebensdauer.

Abbildung 5.13 zeigt den Einfluss der simulierten Lastdurchläufe auf die rechnerische Lebensdauer der drei untersuchten Schädigungsmodelle. Die Ergebnisse beziehen sich auf eine Nennspannungsamplitude von  $S_{N,a} = 100$  MPa.

Dargestellt werden die auf den konvergierten Wert normierten Anrisslebensdauern der drei Schädigungsmodelle in Abhängigkeit von den in der Kerbsimulation simulierten Lastdurchläufen. Ebenfalls gezeigt werden die  $\sigma_{xx} - \varepsilon_{xx}$  Hysteresen in verschiedenen Schwingspielen. Auf Basis dieser Hysteresen wird die Schädigung in den Modellen bewertet. Es ist zu beobachten, dass die Mittelspannung während der Zyklen abnimmt (Mittelspannungsrelaxation), während die Mitteldehnung gleichzeitig ansteigt (zyklisches Kriechen). Diese transienten Vorgänge setzen sich auch nach  $10^3$  Schwingspielen fort. Die Hysteresen erscheinen nahezu parallel verschoben, doch ist zu berücksichtigen, dass zwischen den dargestellten Hysteresen zahlreiche nicht dargestellte Zyklen liegen. Das transiente Werkstoffverhalten verlangsamt sich erheblich.

Nach Bewertung der Schädigung aller simulierten Zyklen erfolgt die Hochrechnung der Lebensdauer durch wiederholtes Anwenden des letzten simulierten Zyklus. Es zeigt sich deutlich, dass die Lebensdauerprognose jedes Schädigungsmodells mit zunehmender Anzahl der simulierten Durchläufe gegen einen festen Wert konvergiert. Dies geschieht für jedes der Modelle aus unterschiedlichen Gründen. Der  $P_{RAM}$  Parameter berücksichtigt den Einfluss der Mittelspannungen, wobei die Mittelspannungen pro Zyklus abnehmen. Im  $P_{FS}$  Parameter erfolgt eine ähnliche Anpassung, wobei der Einfluss von Normalspannungen auf das Risswachstum durch die während eines Zyklus maximal auftretende Normalspannung  $\sigma_{xx,max}$  erfasst wird. Diese nimmt durch die Mittelspannungsrelaxation kontinuierlich ab. Im Kurzrissmodell werden durch die sich ändernden Lastverhältnisse der lokalen Spannungen in jedem Zyklus unterschiedliche Rissöffnungsspannungen berechnet. Durch die Wanderung der Hysteresen immer weiter in den Druckbereich verringert sich der Teil der Belastung, bei dem der

Riss als geöffnet betrachtet wird, was zu einer Reduzierung der effektiven Risspitzenbeanspruchung führt.

Für ein beliebiges Bauteil mit beliebigem Werkstoffverhalten ist vor der Berechnung nicht absehbar, wann transiente Werkstoffeffekte zum Stillstand kommen. Dennoch muss entschieden werden, wie viele Durchläufe durch eine gegebene Lastfolge simuliert werden müssen, wobei ein Kompromiss zwischen genauer Lebensdauerprognose und Einsparung von Rechenzeit gefunden werden muss.

Nach den pauschal empfohlenen  $10^3$  Zyklen gemäß Abschnitt 5.2.3 ist für jedes der drei Modelle bereits mindestens 97% der konvergierten Lebensdauer erreicht.

## 5.4. Datenbank für gekerbte Probengeometrien

Im Rahmen des Forschungsprojektes „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] wurde eine Datenbank aufgebaut, die herangezogen wird, um eine Treffsicherheitsbewertung der entwickelten Berechnungsalgorithmen durchzuführen. Der Fokus der Datenbank liegt auf mehrachsiger nichtproportional beanspruchter gekerbter Proben. Ein großer Anteil der Datensätze entsprechen den Datensätzen aus der Datenbank von [Ries 19], die zur Verfügung gestellt wurde. Diese wurde hinsichtlich der Güte der enthaltenen Daten untersucht, überarbeitet und erweitert sowie um die Ergebnisse der selbst durchgeführten Versuche ergänzt. Nachfolgend soll der Aufbau und die enthaltenen Daten genauer thematisiert werden.

Insgesamt sind 1221 einzelne Versuchsergebnisse enthalten. Die Aufteilung der Datenbank in die unterschiedlichen Beanspruchungsarten, in den Anteil von konstanten (CA) und variablen Amplituden (VA) sowie in die verschiedenen enthaltenen Werkstoffgruppen ist in Abbildung 5.14 dargestellt.

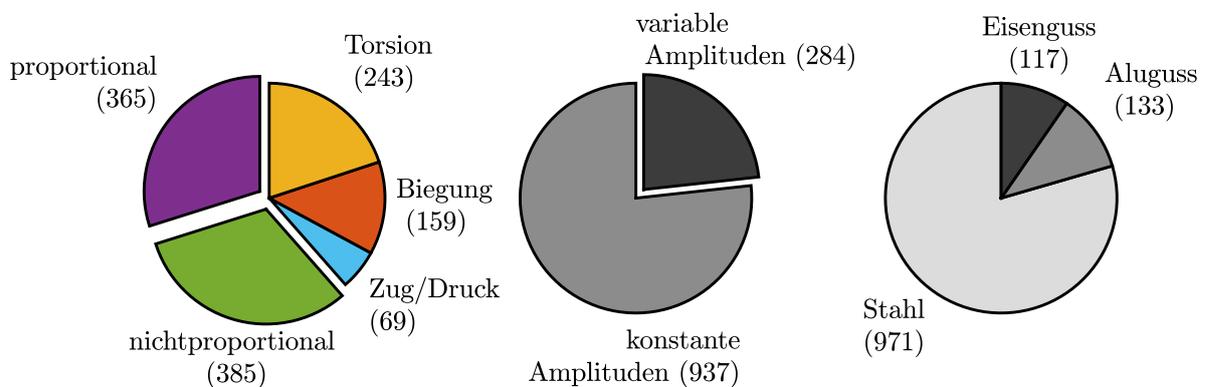


Abbildung 5.14: Aufteilung der Datenbank in Belastungsart, konstante und variable Amplituden und Werkstoffgruppen

Die in diesem Projekt erstellte Datenbank wird zur Treffsicherheitsbewertung der in Kapitel 2 und Kapitel 3 entwickelten Berechnungsalgorithmen herangezogen. Hierzu erfolgt eine Aufteilung der Datenbank in zwei Untergruppen:

- **Mess:** Die Gruppe „Mess“ enthält alle Versuchsreihen, für die experimentell ermittelte Daten für Schädigungsparameterwöhlerlinie sowie Ramberg-Osgood Parameter vorliegen. Zur vollen Parametrisierung aller Schädigungsmodelle lagen nur selten genügend Versuchsdaten vor. Alle nötigen Modellparameter werden mit den in Kapitel 3 vorgestellten Methoden abgeschätzt oder für das Kurzrisssmodell auf Standardwerte gesetzt. Die Bezeichnung „Mess“ bezieht sich demnach nur auf die Schädigungsparameterwöhlerlinie sowie das zyklisch stabilisierte Werkstoffverhalten. Insgesamt sind 810 einzelne Versuchsergebnisse in dieser Gruppe enthalten.

- **Schätz:** Die Gruppe „Schätz“ enthält alle Versuchsreihen, für die das zyklische Werkstoffverhalten und die Schädigungsparameterwöhlerlinie abgeschätzt werden können. Dabei werden die in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] verwendeten Werkstoffgruppen „Stahl“, „Stahlguss“ und „Aluminiumknetlegierungen“ untersucht. Bei der vorliegenden Datenbank verbleibt die Werkstoffgruppe Stahl. Insgesamt sind in dieser Gruppe 971 einzelne Versuchsergebnisse enthalten.

Die beiden Gruppen weisen eine große Schnittmenge auf. Insgesamt sind 560 Versuche in beiden Gruppen enthalten. Ein Vergleich der Treffsicherheiten zwischen diesen beiden Gruppen ist demnach möglich.

Alle von der Bauteilgeometrie abhängigen Eingabedaten für die Berechnungsalgorithmen wurden nach dem Verfahren vorgeschlagen in Abschnitt 5.2.2 mittels Finite-Elemente-Rechnungen bestimmt. Dazu zählen die plastische Traglastformzahl  $K_p$ , die hochbeanspruchte Oberfläche  $A_\sigma$  und der bezogene Spannungsgradient  $G$ .

In Tabelle 5.3 sind die in der Datenbank enthaltenen Quellen sowie die Werkstoffe und Belastungsarten aufgeführt.

Quelle	Werkstoff	Werkstoffgruppe	Belastung	VA
[Hans 13, Xin 16]	G-AlSi7Mg0.3 T6	Aluguss	Biegung,Torsion	x
[Hans 13, Xin 16]	50CrMo4 V	Stahl	Biegung,Torsion	x
[Hoff 05, Hert 16]	S460N	Stahl	Zug/Druck,Torsion	x
[Kura 89]	SAE 1045	Stahl	Biegung,Torsion	x
[Atzo 06]	C40	Stahl	Zug/Druck,Torsion	
[Fesi 12]	20MnMoNi5-5	Stahl	Zug/Druck,Torsion	
[Fesi 12]	X6CrNiNb18-10	Stahl	Zug/Druck,Torsion	
[Simb 75]	CK45	Stahl	Biegung,Torsion	
[Pött 01]	42CrMoS4V	Stahl	Biegung,Torsion	x
[Bert 14]	42CrMoV13.9	Stahl	Zug/Druck,Torsion	
[Linn 22]	EN-GJS-500-14	Eisenguss	Biegung,Torsion	x
eigene Versuche	S355	Stahl	Zug/Druck,Torsion	x

Tabelle 5.3: Datenbankquellen

Die Datenbank enthält experimentelle Lebensdauern für das Versagenskriterium des technischen Anrisses. Dies ist in der Literatur nicht eindeutig definiert. Eine Übersicht über alle in der Datenbank verwendeten Anrissdefinitionen ist in Tabelle 5.4 angegeben.

Anrisslänge	Anrisserkennung	Quelle
0.5 mm	optisch	[Hert 16],[Hoff 05],eigene Versuche
1.0 mm	optisch	[Hans 13]
1.5 mm	Potentialsondenmessung	[Pött 01]
3.0 mm	Lastabfall	[Fesi 12]
keine Angabe	keine Angabe	[Atzo 06, Bert 14, Kura 89]
variabel	Ultraschallmessung	[Simb 75]

Tabelle 5.4: Anrissdefinitionen in der Datenbank

## 5.5. Prognose der Anrisslebensdauer und Treffsicherheitsbewertung

In diesem Abschnitt erfolgt die Beurteilung der Treffsicherheit des entwickelten Algorithmus zur Berechnung von Anrisslebensdauern gekerbter Bauteile unter mehrachsiger Beanspruchung. Zur Evaluierung wird die zuvor vorgestellte Datenbasis aus Abschnitt 5.4 herangezogen. Dabei werden für sämtliche Versuche in der Datenbasis die Anrisslebensdauern mit dem entwickelten und vorgestellten Algorithmus berechnet. Anhand des Verhältnisses zwischen berechneter und gemessener Anrisslebensdauer  $N_{exp}/N_{calc}$  erfolgt eine statistische Analyse. Dazu wird angenommen, dass der Quotient aus experimenteller und rechnerischer Anrisslebensdauer  $N_{exp}/N_{calc}$  durch eine logarithmische Normalverteilung beschrieben werden kann. Für die Beurteilung der Treffsicherheit werden, wie in Abschnitt 4.4.4 erläutert, der Median  $m$  und die Streuspanne  $T = Q_{90}/Q_{10}$  verwendet. Der Median gibt Aufschluss über die mittlere Genauigkeit der Lebensdauerprognosen des Algorithmus. Ein Median  $m > 1$  deutet darauf hin, dass für mehr als 50% der analysierten Versuche die experimentelle Lebensdauer unterschätzt wird, was bedeutet, dass die Lebensdauerprognose im Durchschnitt auf der sichereren Seite liegt. Für einen Median  $m < 1$  gilt das Gegenteil, die Lebensdauern werden überschätzt und die Ergebnisse liegen im Mittel auf der unsicheren Seite. Im Hinblick auf die Bauteilauslegung ist eine sichere Lebensdauerprognose von Bedeutung, um während des Betriebs eines Bauteils ein unerwartetes Bauteilversagen zu verhindern. Eine sichere Lebensdauerprognose ist daher zu bevorzugen. Die Streuspanne  $T$  gibt an, in welchem Maße die Ergebnisse um den Median schwanken. In der Auswertung der Datenbasis werden zwei sich überschneidende Teilmengen getrennt betrachtet: Zum einen die Gruppe „Mess“, die alle Versuchsreihen mit gemessenen Werkstoffkennwerten umfasst, und zum anderen die Gruppe „Schätz“, die alle Versuchsreihen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten einschließt. Die Abschätzung des zyklisch stabilisierten Werkstoffverhaltens sowie der Modellparameter für den Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  erfolgt durch die Methoden der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19]. Für die anderen beiden Schädigungsmodelle  $P_{FS}$  und  $P_Z$  werden die in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren angewandt. Anrisslebensdauern von Versuchsreihen, die beiden Gruppen angehören, werden zweimal berechnet, einmal mit gemessenen und einmal mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten. Eine ausführlichere Beschreibung der beiden Gruppen ist in Abschnitt 5.4 zu finden.

	$n_{data}$	$P_{RAM}$		$P_{FS}$		$P_Z$	
		$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$
Alle Versuche	810	0.74	18.76	1.44	11.60	1.57	12.60
<b>Amplituden</b>							
Einstufen	526	0.89	14.56	1.38	11.13	1.52	10.32
variable Amplituden	284	0.58	25.78	1.52	12.98	1.76	19.64
<b>Belastung</b>							
Prop.	574	0.78	22.64	1.48	11.60	1.74	13.34
Nichtprop.	236	0.71	10.46	1.35	11.45	1.27	9.34

Tabelle 5.5: Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit gemessenen Werkstoffdaten

Die Ergebnisse der statistischen Auswertung in Form des Medians und der Streuspanne für alle drei Schädigungsmodelle sind in Tabelle 5.5 für die Gruppe „Mess“ und in Tabelle 5.6 für die Gruppe „Schätz“ zusammengefasst und werden im Folgenden besprochen. Bei der Auswertung werden verschiedene Merkmale berücksichtigt, darunter die Unterscheidung zwischen Einstufenbelastungen und Betriebsbelastungen mit variablen Amplituden. Ebenso erfolgte eine Aufteilung nach der Art der

	$n_{data}$	$P_{RAM}$		$P_{FS}$		$P_Z$	
		$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$
Alle Versuche	971	1.23	22.94	1.41	14.82	1.64	13.61
<b>Amplituden</b>							
Einstufen	769	1.30	29.75	1.33	18.83	1.62	16.14
variable Amplituden	202	1.11	11.57	1.55	5.40	1.68	7.89
<b>Belastung</b>							
Prop.	676	1.38	22.71	1.58	13.32	1.78	12.30
Nichtprop.	295	0.96	21.46	1.13	19.47	1.35	14.31

Tabelle 5.6: Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit abgeschätzten Werkstoffdaten

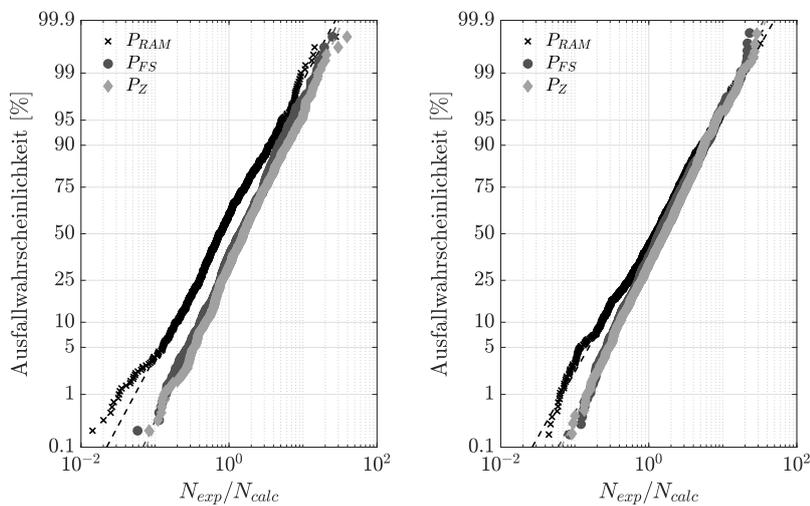


Abbildung 5.15: Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der drei Schädigungsmodelle für die beiden Gruppen (links) „Mess“ und (rechts) „Schätz“

Belastung. Die Gruppe der proportionalen Lasten umfasst dabei alle Versuche, bei denen die Probe nur mit einem Lastkanal (reiner Zug/Druck, reine Biegung oder reine Torsion) belastet wurde, und alle Versuche unter einer kombinierten, aber proportionalen Belastung. Diese Gruppe repräsentiert den Teil der Datenbasis, der gemäß den aktuellen FKM-Richtlinien (FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19]) unter Berücksichtigung von nichtlinearem Werkstoffverhalten bewertet werden kann.

Die in Abbildung 5.15 dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ermöglichen einen direkten grafischen Vergleich der Schädigungsparameter. Eine präzise Lebensdauerprognose zeichnet sich durch einen Median  $m$  aus, der nahe am Idealwert 1 liegt. Die Streuung der Ergebnisse wird durch den Abstand zwischen dem 10% und 90% Quantil deutlich, und eine intuitive Einschätzung der Streuung kann über die Steigung der Kurve erfolgen. Je steiler die Gerade verläuft, desto niedriger ist die Streuung.

Es ist positiv zu vermerken, dass alle Mediane sehr nahe am Idealwert  $m = 1$  liegen. Außer für  $P_{RAM}$  in der Gruppe „Mess“ wird stets ein Median  $m > 1$  erreicht, was auf eine im Mittel sichere Lebensdauerprognose für die gesamte Datenbank hindeutet.

Unter allen untersuchten Schädigungsparametern weist  $P_{RAM}$ , sowohl für die Gruppe „Mess“ als auch für die Gruppe „Schätz“, die größte Streuung auf. Die beiden anderen Schädigungsparameter,

$P_{FS}$  und  $P_Z$ , liefern etwas geringere Streuungen. Die Streuungen der Parameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  liegen für beide Gruppen auf vergleichbaren Niveaus und sind etwa um den Faktor 1.5-1.7 geringer als die Streuung von  $P_{RAM}$ . Im Durchschnitt wird von allen Parametern in beiden Gruppen eine sehr gute Prognose der Anrisslebensdauer geliefert. Die im Mittel konservativste Prognose liefert  $P_Z$  mit  $m = 1.57$  für die Gruppe „Mess“ und  $m = 1.64$  für die Gruppe „Schätz“. Diese Werte unterscheiden sich jedoch nur geringfügig von den anderen beiden Parametern. Die qualitativ nahezu gleichwertige Lebensdauerprognose der Parameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  lässt sich ebenfalls direkt an den sehr ähnlichen Verläufen der Ergebnisse der beiden Parameter in Abbildung 5.15 erkennen.

In Abbildung 5.16 erfolgt eine direkte Gegenüberstellung der Ergebnisse aller drei Schädigungsparameter für beide Gruppen der Datenbank. Dabei wird die rechnerische Lebensdauer über der experimentellen Lebensdauer aufgetragen.

Es zeigt sich, dass die überwiegende Mehrheit aller Versuche innerhalb eines Faktor-10-Fehlerbandes liegt, wobei nur vereinzelte Versuche dieses Band verlassen. Die Schädigungsparameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  überschätzen nahezu keine experimentellen Anrisslebensdauern um mehr als den Faktor 10. Im Gegensatz dazu prognostiziert der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$ , insbesondere bei Verwendung gemessener Werkstoffkennwerte, für einige Messreihen unter reiner Torsion und nichtproportionaler Belastung mit variablen Amplituden, eine deutlich zu hohe Anrisslebensdauer.

Innerhalb der Gruppe „Schätz“ fällt auf, dass die extremsten Abweichungen zwischen experimenteller und rechnerischer Anrisslebensdauer für jeden der drei Schädigungsparameter immer bei Versuchsreihen aus den gleichen Quellen auftreten. Beispielsweise werden Versuche aus [Simb 75] von jedem der Schädigungsparameter überschätzt, während die Quotienten rechnerischer und experimenteller Anrisslebensdauer für Versuchsreihen aus [Bert 14] für alle Schädigungsparameter außerhalb des Faktor-10-Fehlerbandes auf der sicheren Seite liegen. Leider liegen für keine der beiden Quellen gemessene zyklische Werkstoffkennwerte vor, sodass nicht abschließend geklärt werden kann, ob die fehlerhaften Lebensdauerprognosen aus falsch abgeschätzten Werkstoffkennwerten resultieren. Die Ausreißer aus den beiden Quellen sind in Abbildung 5.16 (rechts oben) für die Ergebnisse mit  $P_{RAM}$  gekennzeichnet.

Obwohl einzelne Fehleinschätzungen existieren, fällt in Abbildung 5.16 auf, dass mit allen drei Schädigungsparametern eine gute Prognose der Anrisslebensdauer für die Versuche in dieser breit aufgestellten Datenbasis erreicht werden kann.

Nachfolgend werden die Ergebnisse anhand unterschiedlicher experimenteller Merkmale differenziert betrachtet, und die Treffsicherheit des Berechnungsalgorithmus wird einzeln anhand dieser Merkmale bewertet.

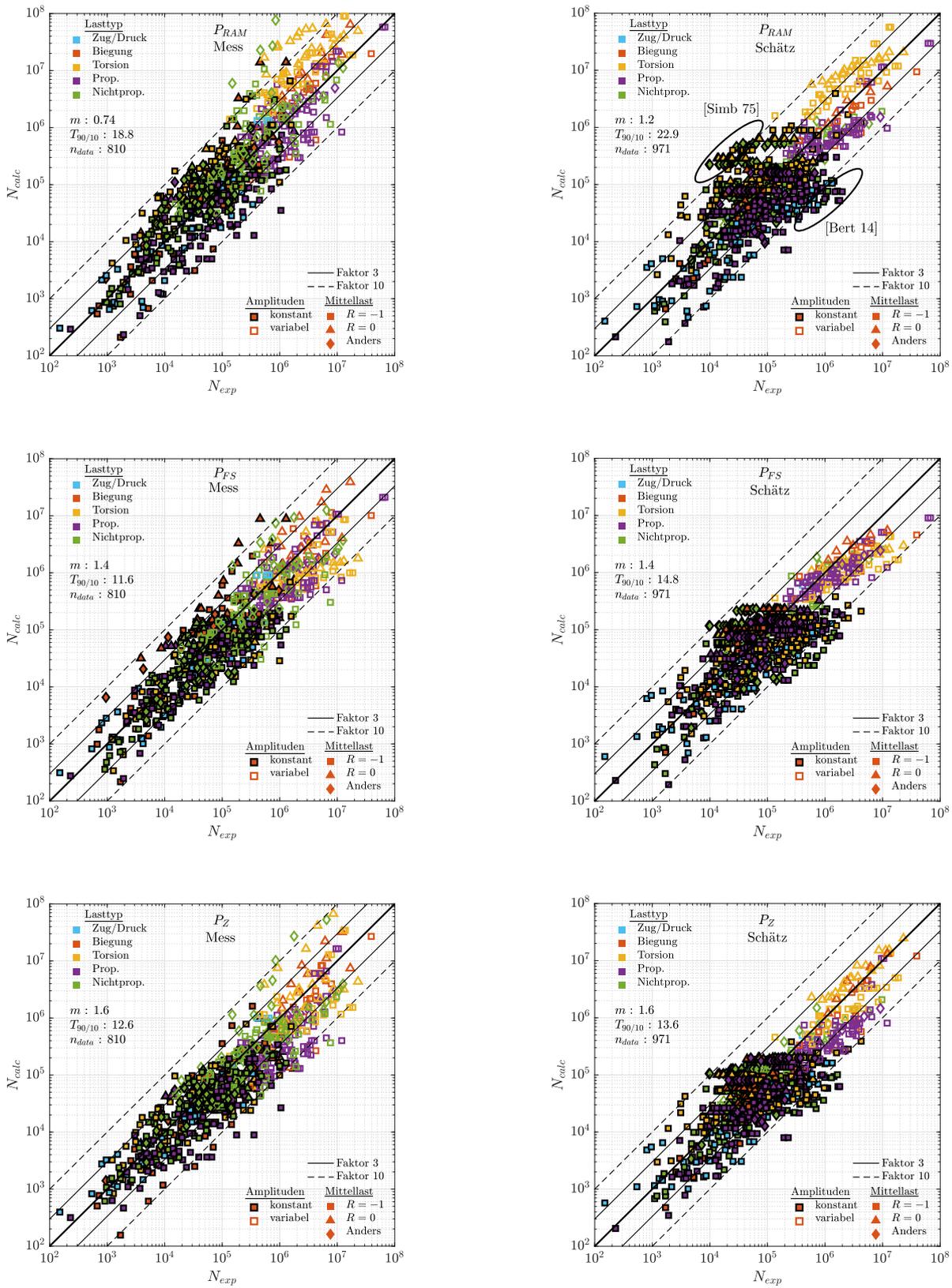


Abbildung 5.16: Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aus allen Schädigungsmodellen aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) für (links) die Teilgruppe „Mess“ und (rechts) die Teilgruppe „Schätz“

### Vergleich der Treffsicherheit zwischen Rechnungen mit abgeschätzten und gemessenen Werkstoffdaten

Bei der praktischen Bauteilauslegung besteht oft die Herausforderung, dass nur begrenzte Werkstoffdaten zur Verfügung stehen. Daher wurden für jedes der in dieser Arbeit untersuchten Schädigungsmodelle Abschätzmethoden für die Modellparameter entwickelt, sollten diese Methoden nicht bereits vorliegen. Eine zentrale Fragestellung besteht darin, wie gut die Ergebnisse des Berechnungsalgorithmus unter Verwendung der abgeschätzten Werkstoffkennwerte im Vergleich zu den Ergebnissen mit gemessenen Werkstoffdaten abschneiden. Um diese Frage zu beantworten, erfolgt ein Vergleich der Berechnungsergebnisse unter Verwendung von abgeschätzten und gemessenen Werkstoffdaten. Für einen direkten visuellen Vergleich sind in Abbildung 5.17 die Wahrscheinlichkeitsverteilungen aller drei Schädigungsmodelle jeweils für die Gruppe „Mess“ und „Schätz“ dargestellt.

Abbildung 5.17 zeigt, dass für alle drei Schädigungsparameter sowohl mit abgeschätzten als auch mit gemessenen Werkstoffkennwerten vergleichbare Treffsicherheiten erzielt werden. Die Ergebnisse, zusammengefasst in Median und Streuung, sind für jeden der drei Schädigungsparameter mit abgeschätzten und gemessenen Werkstoffkennwerten ähnlich.

Hervorzuheben ist die größte Abweichung in den Streuungen der beiden Gruppen für den Parameter  $P_{RAM}$ . In der Gruppe „Schätz“ ergibt sich eine Streuung von  $T = 22.94$ , während in der Gruppe „Mess“ eine Streuung von  $T = 18.76$  erreicht wird. Dies deutet auf eine leichte Verschlechterung der Ergebnisse hin. Innerhalb der Gruppe „Mess“ weist der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  einen Median von  $m = 0.74$  auf, was zwar nahe am Idealwert 1 liegt, jedoch darauf hinweist, dass  $P_{RAM}$  im Mittel die experimentellen Ergebnisse überschätzt. Positiv ist zu vermerken, dass durch die abgeschätzten Werkstoffkennwerte der Median auf die sichere Seite ( $m = 1.23$ ) wandert, was auf eine insgesamt verbesserte Lebensdauerprognose hinweist.

Für die Ergebnisse, berechnet mit dem Schädigungsparameter  $P_{FS}$ , zeigt sich eine sehr geringe Streuung von  $T = 11.6$  und ein Median von  $m = 1.44$  in der Gruppe „Mess“. In der Gruppe „Schätz“ ergibt sich eine Streuung von  $T = 14.82$  und ein Median von  $m = 1.41$ . Die experimentellen Anrisslebensdauern beider Gruppen können von  $P_{FS}$  mit hoher Genauigkeit und im Mittel sicheren Ergebnissen berechnet werden. Die hohe Genauigkeit sowie die gute Übereinstimmung der beiden Gruppen unterstreichen die Brauchbarkeit der erarbeiteten Abschätzmethoden für  $k_{FS}$  und die Schädigungsparameterwählerlinie.

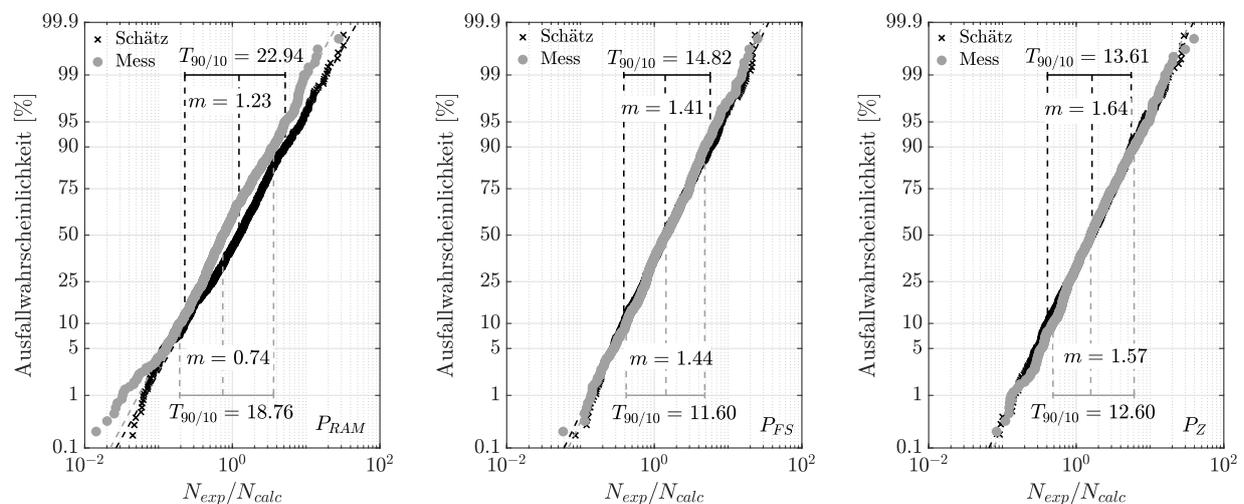


Abbildung 5.17: Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gruppen „Schätz“ und „Mess“ für die drei Schädigungsparameter

Die Ergebnisse, die mit dem Kurzrissmodell  $P_Z$  berechnet wurden, zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Ergebnisse des Schädigungsparameters  $P_{FS}$ . Auch hier zeigt sich eine geringe Streuung sowie eine im Mittel sichere, aber dennoch genaue Prognose der Anrisslebensdauern beider Gruppen. Für die Gruppe „Mess“ wird eine Streuung von  $T = 12.6$  und ein Median von  $m = 1.57$  erzielt, während die Gruppe „Schätz“ mit einer Streuung von  $T = 13.61$  und einem Median von  $m = 1.64$  berechnet wird. Beide Gruppen weisen eine hohe Übereinstimmung in Streuung und Median auf, was für die Anwendbarkeit der erarbeiteten Abschätzmethoden spricht. Aufgrund der Vielzahl der abgeschätzten Modellparameter des Kurzrissmodells weist dieses noch erhebliches Verbesserungspotenzial auf. Insbesondere wenn ausreichend Daten vorhanden sind, um alle Modellparameter anzupassen.

### Vergleich der Treffsicherheiten bei einstufiger Belastung und Betriebsbelastung

Eine besondere Herausforderung bei der rechnerischen Prognose einer Anrisslebensdauer stellen Betriebsbelastungen mit variablen Amplituden dar. Aus diesem Grund wurden die beiden Gruppen „Mess“ und „Schätz“ getrennt für Versuche unter einer Einstufenbelastung und Versuche unter einer Betriebsbelastung ausgewertet. Bei der Interpretation der folgenden Ergebnisse sei allerdings darauf hingewiesen, dass die Datenbank deutlich mehr Versuche unter Einstufenbelastung enthält. Eine weitere wichtige Anmerkung betrifft die Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  und  $P_{FS}$ , für die eine elementare Erweiterung der Miner-Regel ohne Dauerfestigkeit in den Berechnungen berücksichtigt wurde. Im Fall des Kurzrissmodells wird die Dauerfestigkeit während der Berechnung in Abhängigkeit von der Risslänge herabgesetzt. Eine Gegenüberstellung der Treffsicherheiten der prognostizierten Anrisslebensdauern in der Gruppe „Schätz“ ist in Abbildung 5.18 für die drei Schädigungsmodelle zu sehen.

Beim Vergleich der Ergebnisse für mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten berechneten Anrisslebensdauern in Abbildung 5.18 werden von allen drei Schädigungsparametern Lebensdauern von Versuchen unter Belastung mit variablen Amplituden (VA) mit einer größeren Treffsicherheit, heißt geringeren Streuung, vorhergesagt als Lebensdauern von Versuchen unter einer einstufigen Belastung (CA). Der Parameter  $P_{RAM}$  liefert mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten sowohl für Experimente unter Einstufenbelastung als auch unter Betriebsbelastung im Mittel sichere Prognosen der Anrisslebensdauer. Für Betriebsbelastungen mit variablen Amplituden werden sogar ausgezeichnete Ergebnisse mit einem nahezu idealen Median von  $m = 1.11$  und einer geringen Streuung von  $T = 11.57$  erzielt. Ähnliches gilt für die beiden anderen Schädigungsparameter. Beide liefern äußerst

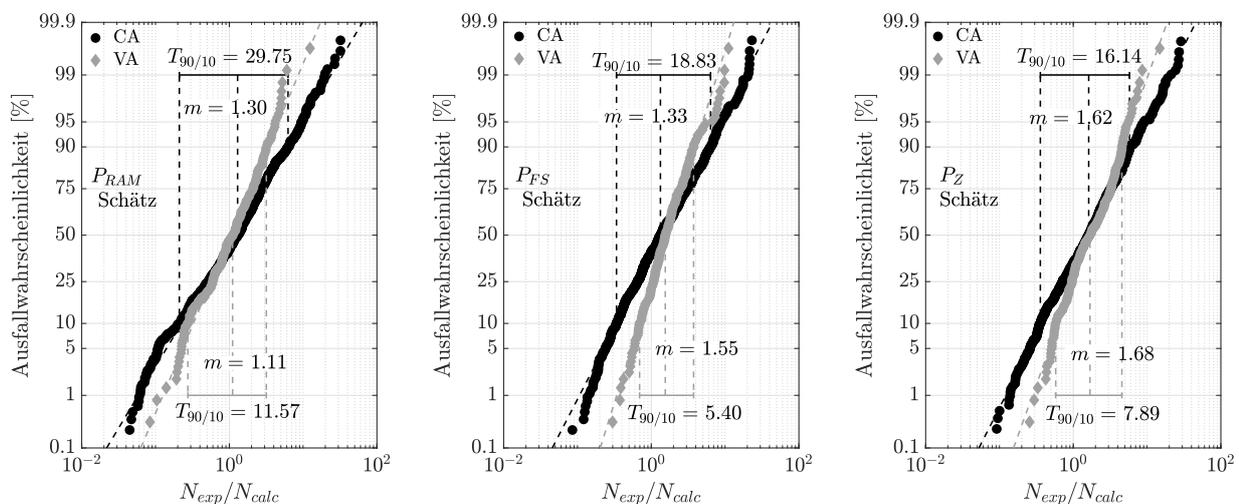


Abbildung 5.18: Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einstufige Belastung und Betriebsbelastung für die Gruppe „Schätz“

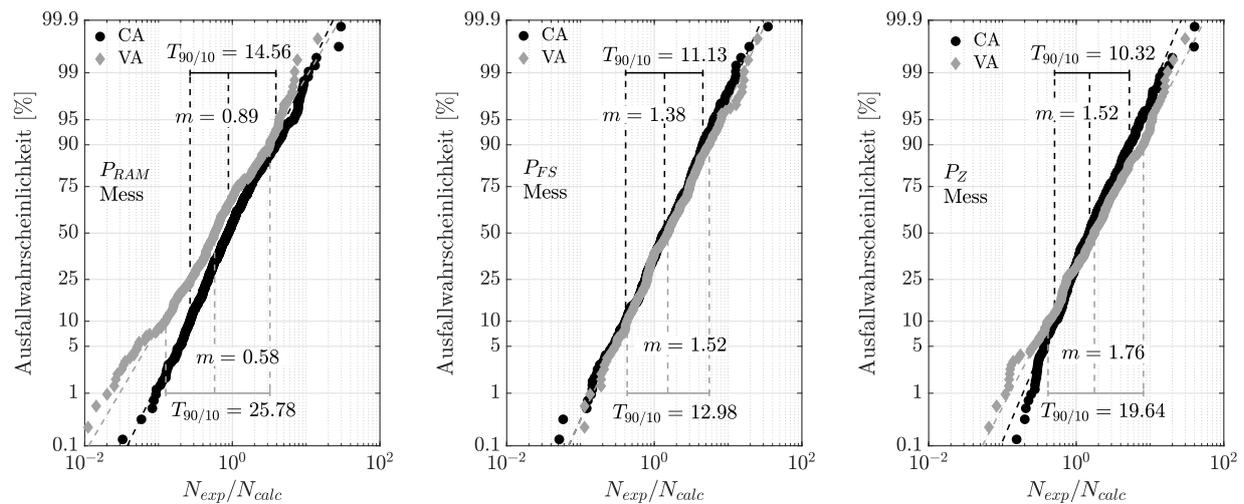


Abbildung 5.19: Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einstufige Belastung und Betriebsbelastung für die Gruppe „Mess“

geringe Streuungen und im Mittel sichere Lebensdauerprognosen für Versuche unter Betriebsbelastung. Besonders hervorzuheben ist die herausragende Prognose von  $P_{FS}$  mit einer minimalen Streuung von  $T = 5.4$  für alle Versuche unter Betriebsbelastung. Für Belastungen mit konstanten Amplituden liefert  $P_Z$  die geringste Streuung der Anrisslebensdauer ( $T = 16.14$ ). Zudem fällt auf, dass der Unterschied zwischen beiden Teilgruppen bei  $P_Z$  am geringsten ist. Der Parameter  $P_Z$  sagt die Lebensdauern im Mittel mit annähernd dem gleichen Median voraus. Ebenso unterscheiden sich die Streuungen der Ergebnisse bei  $P_Z$  nur etwa um den Faktor 2, während die Streuungen der anderen beiden Parameter etwa um den Faktor 3 differieren.

In Abbildung 5.19 werden die Treffsicherheiten der prognostizierten Anrisslebensdauer der Gruppe „Mess“ für die drei Schädigungsmodelle gegenübergestellt.

Im Gegensatz zur Gruppe „Schätz“ werden nun Versuche unter variabler Amplitudenbelastung nicht mehr mit geringerer Streuung vorhergesagt. Der Parameter  $P_{FS}$  liefert für beide Teilgruppen annähernd die gleiche, sehr gute Lebensdauerprognose. Die Ergebnisse liegen im Mittel auf der sicheren Seite und sehr nahe am Idealwert  $m = 1$ . Ebenso weisen beide Teilgruppen eine sehr geringe Streuung auf. Für die Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  und  $P_Z$  sind die Streuungen der Ergebnisse für Versuche unter Betriebsbelastung etwa um den Faktor 2 höher. Beim  $P_{RAM}$  fällt ebenfalls auf, dass die Lebensdauern der Versuche unter Betriebsbelastung im Mittel fast um den Faktor 2 ( $m = 0.58$ ) überschätzt werden. Trotzdem sind die Ergebnisse der Modelle für die anspruchsvollen Berechnungen für Betriebsbelastungen als ausreichend gut einzustufen. Vor allem der Vergleich für variable Amplituden zwischen den Gruppen „Mess“ und „Schätz“ zeigt, welchen Einfluss die untersuchte Datenbank auf die Ergebnisse haben kann.

### Vergleich der Treffsicherheiten bei proportionaler und nichtproportionaler Belastung

Eine weitere Unterscheidung wurde bei der Auswertung zwischen Versuchen unter proportionaler und nichtproportionaler Belastung vorgenommen. Wie bereits erwähnt wurden unter proportionaler Belastung alle Versuche unter kombinierter proportionaler Belastung sowie alle Versuche, die nur durch einen Lastkanal belastet wurden, zusammengefasst. Diese Zusammenfassung umfasst alle Versuche, die nach aktuellem Stand der FKM-Richtlinien (FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19]) bewertet werden können.

Eine Gegenüberstellung der Treffsicherheiten der prognostizierten Anrisslebensdauer der Gruppe „Schätz“ ist für die drei Schädigungsmodelle in Abbildung 5.20 dargestellt.

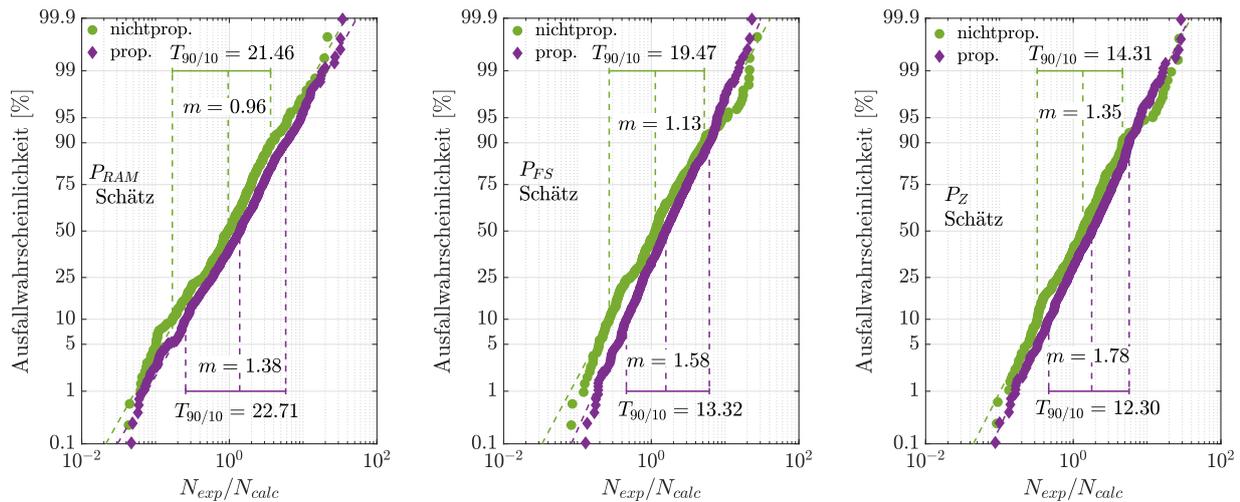


Abbildung 5.20: Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für proportionale und nicht-proportionale Belastungen für die Gruppe „Schätz“

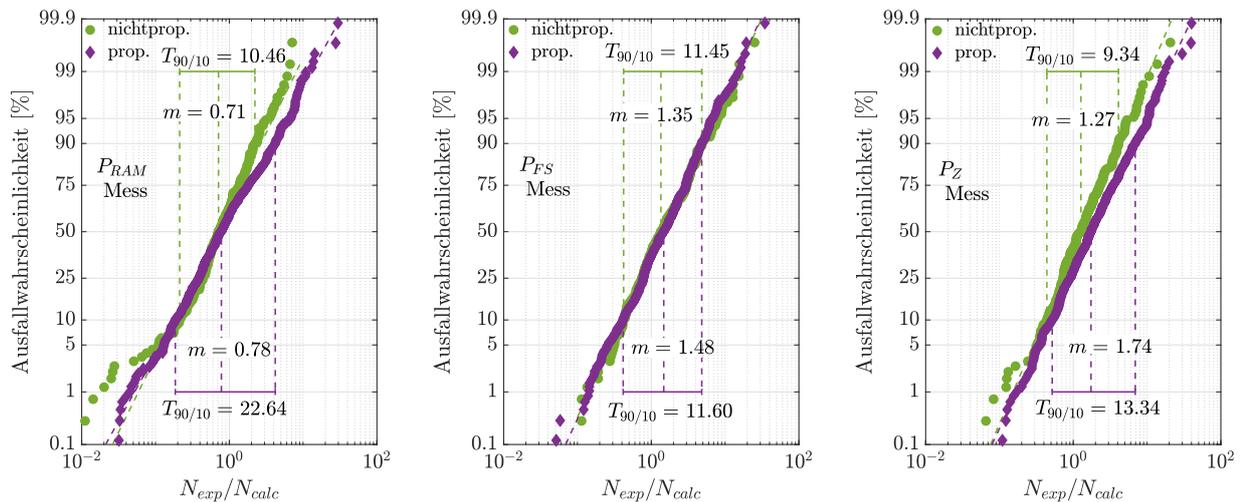


Abbildung 5.21: Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für proportionale und nicht-proportionale Belastungen für die Gruppe „Mess“

Für die Teilgruppe aus Versuchen unter nichtproportionaler Belastung verschiebt sich der Median für alle drei Schädigungsmodelle in Richtung unsichere Seite im Vergleich zu den Ergebnissen für Versuche unter proportionaler Beanspruchung. Für  $P_{FS}$  ( $m = 1.13$ ) und  $P_Z$  ( $m = 1.35$ ) werden im Mittel Lebensdauerprognosen auf der sicheren Seite erzielt. Der Median für die Ergebnisse aus  $P_{RAM}$  liegt mit  $m = 0.96$  fast ideal bei 1 und nur sehr leicht auf der unsicheren Seite.

Die Parameter  $P_{RAM}$  und  $P_Z$  liefern für beide Teilgruppen in etwa die gleichen Streuungen. Die mit dem Schädigungsparameter  $P_{FS}$  berechneten Ergebnisse zeigen für Versuche unter nichtproportionaler Last ( $T = 19.47$ ) eine etwas höhere Streuung als für Versuche unter proportionaler Belastung ( $T = 13.32$ ). Die gemessenen Anrisslebensdauern der Versuche unter nichtproportionaler Last werden von allen drei Schädigungsmodellen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten in etwa mit der gleichen Treffsicherheit vorausgesagt wie experimentelle Ergebnisse von Versuchen unter proportionaler Belastung.

In Abbildung 5.20 werden die Treffsicherheiten der prognostizierten Anrisslebensdauern der Gruppe „Mess“ für die drei Schädigungsmodelle gegenübergestellt. Wie in der Gruppe „Schätz“ zeigt sich

auch für die Ergebnisse aller drei Schädigungsmodelle eine Verschiebung des Medians hin zur unsicheren Seite. Die Ergebnisse aus  $P_{RAM}$  liegen für beide Teilgruppen im Mittel auf der unsicheren Seite. Allerdings halbiert sich die Streuung der Ergebnisse für Versuche unter nichtproportionaler Last im Vergleich zur Streuung der Ergebnisse für Versuche unter proportionaler Belastung, wenn der Parameter  $P_{RAM}$  verwendet wird. Der Parameter  $P_{FS}$  liefert für gemessene Werkstoffkennwerte für beide Teilgruppen quasi die gleiche Treffsicherheit. Dies gilt sowohl für den Median als auch für die Streuung. Der Parameter  $P_Z$  prognostiziert die Anrisslebensdauer für Versuche unter nichtproportionaler Last sogar mit größerer Treffsicherheit als für Versuche unter proportionaler Beanspruchung.

Für die Prognose der Anrisslebensdauer von experimentellen Ergebnissen unter nichtproportionaler Belastung ist die gleiche Treffsicherheit zu erwarten wie für gemessene Anrisslebensdauern bei Versuchen unter proportionaler Belastung. Teilweise werden sogar bessere Vorhersagen der Anrisslebensdauer erzielt. Sowohl mit gemessenen als auch mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten liefert  $P_Z$  die beste Prognose der Anrisslebensdauer unter nichtproportionaler Belastung.

### 5.5.1. Vergleich mit anderen Berechnungsmethoden

Von Linn [Linn 23] wurde ebenfalls ein Berechnungskonzept entwickelt, das die Prognose von Anrisslebensdauern für Bauteile unter beliebiger mechanischer Belastung ermöglicht. Beide Berechnungskonzepte wurden während des Projekts „Mehrachsigkeit örtlich“ entwickelt. Sowohl der Algorithmus von Linn [Linn 23] als auch der in der vorliegenden Arbeit entwickelte Ansatz verwenden identische Eingabegrößen und basieren auf dem gleichen Stützwirkungskonzept. Daher können die Ergebnisse gut miteinander verglichen werden.

Die nachfolgenden Abschnitte erläutern den grundlegenden Aufbau der Methode von Linn [Linn 23] und heben die Unterschiede zum in dieser Arbeit erstellten Berechnungsalgorithmus hervor.

Weiterhin wird eine vergleichende Analyse der Treffsicherheiten beider Verfahren durchgeführt. Zur Bewertung der Treffsicherheit nutzt Linn [Linn 23] ebenfalls eine Datenbasis mit experimentell ermittelten Anrisslebensdauern gekerbter Proben. Sämtliche in [Linn 23] ausgewerteten Versuche sind auch in der vorliegenden Datenbank enthalten. Dies ermöglicht einen genauen Vergleich der beiden Verfahren.

#### Beschreibung der Berechnungsmethode von Linn [Linn 23]

Sowohl in dieser Arbeit als auch in der von Linn [Linn 23] verwendeten Methode wird das Verfahren der kritischen Schnittebene angewendet. Ein wesentlicher Unterschied der beiden Algorithmen besteht darin, dass Linn [Linn 23] vor der Projektion in die Schnittebene keine Kerbsimulation oder plastische Korrektur der lokalen Belastungen durchführt. Die Schnittspannungen und -dehnungen werden auf Grundlage der Elastizitätstheoretischen Lösung gebildet.

Als Schädigungsmodell wird der Schädigungsparameter  $P_{RAM}$ , der auch in dieser Arbeit untersucht wurde, verwendet. Im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit wird in Linn [Linn 23] die in einer Schnittebene auftretende Normalspannung vor der Schädigungsbewertung skaliert. Diese Skalierung der Normalspannung wurde ursprünglich von Gaier und Dannbauer [Gaie 06] eingeführt. Die Skalierung der in einer Schnittebene auftretenden Normalspannung erfolgt durch zwei Faktoren. Zum einen wird der gesamte Spannungszustand des betrachteten Werkstoffvolumens berücksichtigt. Es erfolgt eine Skalierung der Normalspannung in Abhängigkeit vom Mehrachsigsigkeitsgrad der lokalen Belastung. Der zweite Skalierungsfaktor berücksichtigt die Duktilität des Werkstoffs. Linn [Linn 23] modifizierte den ursprünglichen Ansatz von [Gaie 06]. Der modifizierte Ansatz ist durch

$$\sigma_{v,\text{skaliert,FKM}}(t) = \frac{q \cdot \sigma_{v,NH}(t) + (1 - q)\sigma_{v,GEH}(t)}{\sigma_{v,NH}(t)} \sigma_n(t) \quad \text{mit } q = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{f_{W,\tau}}}{\sqrt{3} - 1} \quad (5.1)$$

gegeben. Der Einfluss des Spannungszustandes im Werkstoffvolumen wird über das Verhältnis zweier Festigkeitshypothesen berücksichtigt. Um eine Richtlinienkompatibilität zu den FKM-Richtlinien zu erreichen, wird eine Überlagerung der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) und der Normalspannungshypothese (NH) verwendet. Es erfolgt ebenfalls eine werkstoffabhängige Interpolation zwischen den beiden Festigkeitshypothesen. Dabei wird die Interpolationsvorschrift aus [Renn 12] angewendet. Die Duktilität des Werkstoffs wird über die Schubwechselfestigkeit  $f_{W,\tau}$  in der Interpolationsvariable  $q$  berücksichtigt. Wenn es sich um einen duktilen Werkstoff handelt ( $f_{W,\tau} = 1/\sqrt{3}$ ), wird die Festigkeitsgrenze gemäß der Gestaltänderungsenergiehypothese bestimmt. Bei einem spröden Werkstoff ( $f_{W,\tau} = 1$ ) ergibt sich analog zu den zuvor beschriebenen Ansätzen die Normalspannungshypothese. Für alle in der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] betrachteten Werkstoffgruppen gilt  $f_{W,\tau} = 1/\sqrt{3}$ . Vom Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  wird außerdem immer die Ebene der größten Normalbelastung als kritische Ebene bestimmt. Unter einer proportionalen Beanspruchung entspricht die Normalspannung in der kritischen Schnittebene dann der größten Hauptspannung. Nach Gleichung (5.1) ist die skalierte Normalspannung dann identisch mit der Vergleichsspannung nach der GEH. Eine Schädigungsbewertung auf Basis der Vergleichsspannung nach der GEH entspricht dem Vorgehen der FKM-Richtlinie Nichtlinear. Für den Algorithmus von Linn [Linn 23] werden für proportional beanspruchte Bauteile die gleichen Anrisslebensdauern berechnet, wie sie nach dem aktuellen Stand der Technik (FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19]) berechnet werden. Nachdem die skalierte Normalspannung gebildet wurde, erfolgt eine plastische Korrektur mit dem Kerbnäherungsverfahren von Seeger und Heuler [Seeg 80]. Dabei wird bei einer nichtproportionalen Belastung eine Korrektur des zyklischen Verfestigungskoeffizienten  $K'$  mit dem Ansatz von Marquis und Socie, siehe Abschnitt 2.3.4, berücksichtigt.

Ein weiterer Unterschied zum in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus besteht darin, dass Linn [Linn 23] zusätzlich die Belastbarkeit des Bauteils (dargestellt durch die Schädigungsparameterwöhlerlinie) bei einer nichtproportionalen Belastung herabsetzt. Im Gegensatz dazu hat die Art der Belastung bei dem in dieser Arbeit entwickelten Berechnungskonzept keinen Einfluss auf die Belastbarkeit des Bauteils. Von Linn [Linn 23] werden die Stützstellen der Schädigungsparameterwöhlerlinie für  $P_{RAM}$ , siehe Gleichung (3.25), um einen weiteren Faktor herabgesetzt, der von der Nichtproportionalität und dem Werkstoff abhängt. Dabei bleiben die Neigungen der Wöhlerlinie unverändert. Die Modifikation der Stützstellen nach [Linn 23] entspricht:

$$\begin{aligned} P_{RAM,Z,mod} &= P_{RAM,Z} \cdot (1 - S_{np} \cdot f_{np}), \\ P_{RAM,D,mod} &= P_{RAM,D} \cdot (1 - S_{np} \cdot f_{np}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Der Parameter  $S_{np}$  stellt einen werkstoffabhängigen Sensitivitätsfaktor dar. Der Grad der Nichtproportionalität wird über die Kennzahl  $f_{np}$  berücksichtigt. Linn [Linn 23] verwendet ebenfalls die Nichtproportionalitätskennzahl nach Gaier [Gaie 04].

Für die anschließende Treffsicherheitsbewertung ist zu beachten, dass der Sensitivitätsfaktor  $S_{np}$  anhand einer Teilmenge der genutzten Datenbasis bestimmt wurde, wobei auftretende Streuungen der Ergebnisse minimiert wurden.

### Ergebnisse aus [Linn 23] und Vergleich mit den vorgestellten Ergebnissen

Die mit der skalierten Normalspannung aus [Linn 23] berechnete Anrisslebensdauer im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen ist in Abbildung 5.22 aufgetragen. Abbildung 5.22 wurde aus [Linn 23] entnommen. Die Ergebnisse werden nach den gleichen Kriterien wie in der vorliegenden Arbeit aufgeteilt in Ergebnisse, die aus Rechnungen mit gemessenen Werkstoffkennwerten und abgeschätzten Werkstoffkennwerten stammen.

Die Rechnungen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten zeigen eine auffällig höhere Streuung im Vergleich zu den Rechnungen mit gemessenen Werkstoffkennwerten. Gleichzeitig verschiebt sich der Median bei Verwendung abgeschätzter Werkstoffkennwerte deutlich in Richtung der sicheren Seite

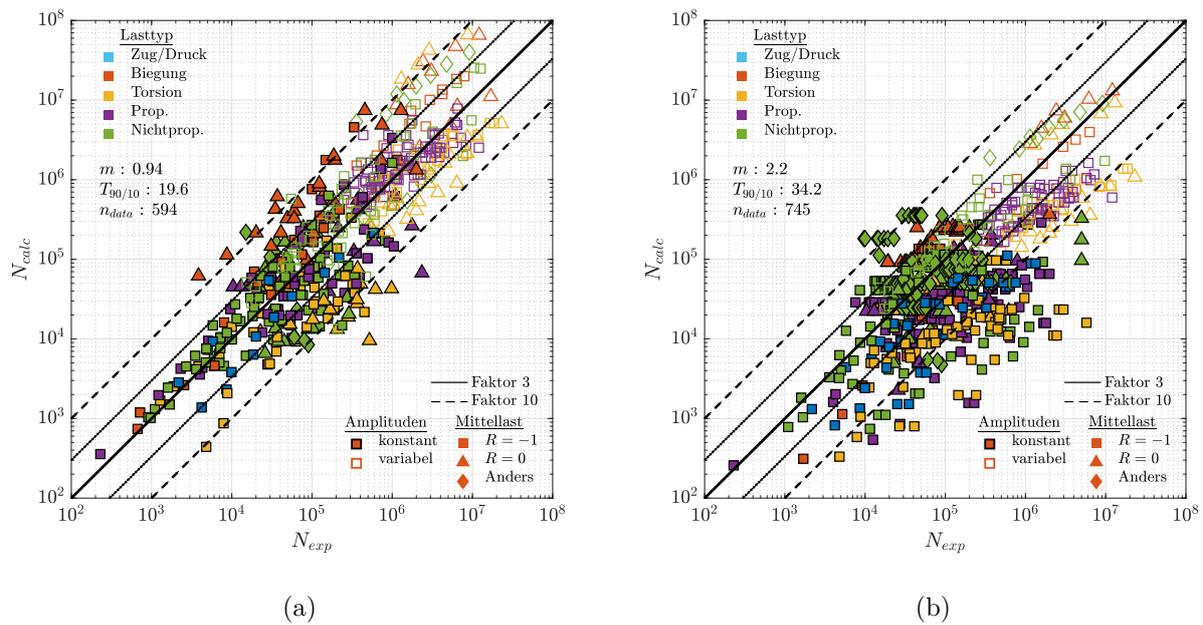


Abbildung 5.22: Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) für (a) Rechnungen mit gemessenen Werkstoffkennwerten (Teilgruppe „Mess“) und (b) Rechnungen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten (Teilgruppe „Schätz“), Grafik entnommen aus [Linn 23]

im Vergleich zu den Ergebnissen mit gemessenen Werkstoffkennwerten. Diese Effekte sind auch für den entwickelten Algorithmus mit dem Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  zu beobachten, wenn auch in geringerem Maß.

Die Ergebnisse der Berechnungen mit gemessenen Werkstoffdaten wurden in der Arbeit von [Linn 23] ebenfalls in proportionale und nichtproportionale Belastungen aufgeteilt, siehe Abbildung 5.23 dargestellt. Die Resultate unter proportionaler Beanspruchung repräsentieren die Treffsicherheit, die nach der aktuellen FKM-Richtlinie Nichtlinear zu erwarten ist. Interessanterweise werden Versuche unter nichtproportionaler Last mithilfe der skalierten Normalspannung aus [Linn 23] sogar mit einer geringeren Streuung vorhergesagt als Versuche unter proportionaler Beanspruchung. Der Median der Ergebnisse für proportionale Versuche liegt im Mittel beim Idealwert  $m = 1$ . Die Anrisslebensdauer von Versuchen unter nichtproportionaler Last wird im Mittel etwas überschätzt. Der Median  $m = 0.77$  weist dennoch auf eine im Mittel sehr genaue Lebensdauerprognose hin. Die Streuungen und Mediane der statistischen Auswertung sind für den Algorithmus aus [Linn 23] für Rechnungen mit gemessenen Werkstoffkennwerten in Tabelle 5.7 angegeben. Die Ergebnisse der statistischen Auswertung werden ebenfalls für die in dieser Arbeit vorgestellte Berechnungsmethode präsentiert. Dabei wurden dieselben Versuchsreihen analysiert, die auch von Linn [Linn 23] untersucht wurden.

Herauszustellen ist die Übereinstimmung der Ergebnisse für den Parameter  $P_{RAM}$  mit den Resultaten aus [Linn 23]. Diese Übereinstimmung begründet sich darin, dass [Linn 23] ebenfalls den Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  verwendet. Auch wenn  $P_{RAM}$  auf unterschiedliche Weisen angewendet wird.

Bei der Variante des  $P_{RAM}$  mit skalierten Normalspannungen aus [Linn 23] liegt der Median im Mittel näher am Idealwert 1. Der in der vorliegenden Arbeit verwendete Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  prognostiziert die Anrisslebensdauer im Mittel mit einer Treffsicherheit von  $m = 0.71$ . Abbildung 5.22 (a) legt nahe, dass der Unterschied im Median zwischen beiden Varianten des Schädigungsparameters  $P_{RAM}$  hauptsächlich an Versuchen unter reiner Torsion liegt. Diese Versuche sind durch gelbe Marker

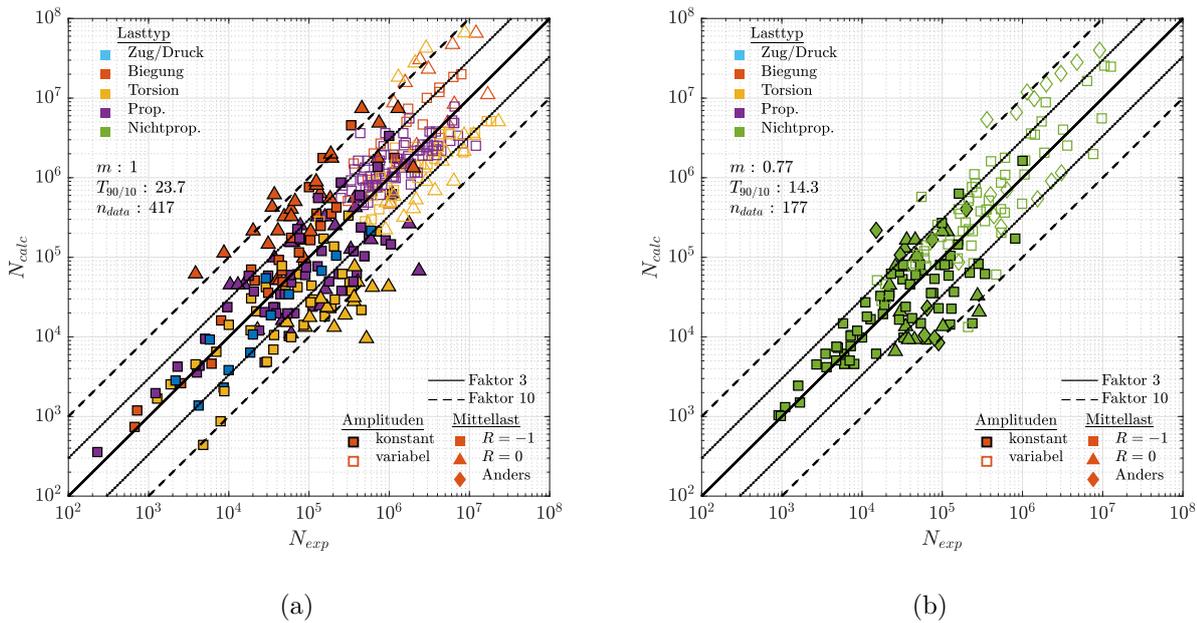


Abbildung 5.23: Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) getrennt angegeben für (a) alle Versuche unter proportionaler Beanspruchung und (b) alle Versuche unter nichtproportionaler Beanspruchung, Grafik entnommen aus [Linn 23]

	$n_{data}$	[Linn 23]		$P_{RAM}$		$P_{FS}$		$P_Z$	
		$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$
Alle Versuche	594	0.94	19.57	0.71	18.84	1.50	13.13	1.87	11.69
<b>Belastung</b>									
Prop.	417	1.00	23.17	0.73	22.72	1.70	15.27	2.27	12.41
Nichtprop.	177	0.77	14.26	0.67	11.54	1.22	11.17	1.22	9.65

Tabelle 5.7: Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit gemessenen Werkstoffdaten im Vergleich zu den Ergebnissen aus [Linn 23]

in der Abbildung gekennzeichnet und liegen größtenteils unter der Winkelhalbierenden auf der sicheren Seite. In Abschnitt 4.4.4 wurde gezeigt, dass Anrisslebensdauern bei reiner Torsionsbelastung systematisch von  $P_{RAM}$  überschätzt werden, wenn keine Skalierung der Normalspannung erfolgt.

Die anderen beiden Schädigungsmodelle,  $P_{FS}$  und  $P_Z$ , weisen eine deutlich höhere Treffsicherheit auf als die beiden Varianten des Schädigungsparameters  $P_{RAM}$ .

Ein Vergleich der Ergebnisse der Schädigungsparameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  für Versuche unter proportionaler Belastung zeigt ebenfalls geringere Streuungen im Vergleich zu den Ergebnissen der aktuellen FKM-Richtlinie Nichtlinear. Allerdings werden im Mittel konservativere Lebensdauern prognostiziert.

Die Ergebnisse der statistischen Auswertung für den Algorithmus aus [Linn 23] bei Rechnungen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten findet sich in Tabelle 5.8. Zusätzlich sind die Ergebnisse für dieselben nachgerechneten Versuche unter Verwendung des in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsalgorithmus aufgeführt.

	$n_{data}$	[Linn 23]		$P_{RAM}$		$P_{FS}$		$P_Z$	
		$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$	$m$	$T$
Alle Versuche	745	2.20	34.20	1.17	24.41	1.27	15.03	1.56	15.14

Tabelle 5.8: Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit abgeschätzten Werkstoffdaten im Vergleich zu den Ergebnissen aus [Linn 23]

Für Rechnungen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten zeigt der hier erarbeitete Algorithmus mit allen Schädigungsparametern eine erheblich höhere Treffsicherheit. Dies spiegelt sich sowohl in den Medianen als auch in der Streuung der Ergebnisse wider. Insbesondere für die Schädigungsparameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  wird die Streuung der Ergebnisse im Vergleich zur Methode aus [Linn 23] mehr als halbiert, bei gleichzeitig besserer mittlerer Treffsicherheit des Berechnungsalgorithmus.

Insgesamt kann von dem vorliegenden Berechnungsalgorithmus mit den Schädigungsparametern  $P_{FS}$  und  $P_Z$  eine genauere Prognose der Anrisslebensdauer erwartet werden als mit dem von Linn [Linn 23] vorgestellten Algorithmus. Für den Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  sind etwa gleichwertige Ergebnisse zu erwarten. Die Verbesserung der Ergebnisse wird allerdings durch eine erhöhte Komplexität des Berechnungsalgorithmus erreicht. Dies gilt vor allem für die Kerbsimulation und das Kurzrisssmodell  $P_Z$ .

## 5.6. Zusammenfassung

Der vorgestellte Berechnungsalgorithmus kombiniert die in Kapitel 2 erarbeiteten Verfahren zur Simulation der lokalen Beanspruchungen mit den in Kapitel 3 vorgestellten Schädigungsmodellen zur Prognose der Anrisslebensdauer von gekerbten Bauteilen. In diesem Kapitel wurde die Genauigkeit der Vorhersage von Anrisslebensdauern anhand von Versuchsergebnissen an gekerbten Proben mithilfe des entwickelten Berechnungsalgorithmus untersucht.

Die für die Berechnung der Anrisslebensdauer notwendigen Eingangsgrößen lassen sich in die Kategorien geometrieabhängig und werkstoffabhängig unterteilen. Als geometrieabhängige Eingangsgrößen zählen die Last-Zeit-Reihen aller auf das untersuchte Bauteil einwirkenden Lastkanäle sowie die Übertragungsfaktoren für jeden Lastkanal. Diese müssen zwingend vorgegeben werden. Zur Berücksichtigung der Stützwirkung sind der bezogene Spannungsgradient und die hochbeanspruchte Oberfläche erforderlich. Diese Eingaben können aus einer FE-Rechnung mit linear elastischem Werkstoffverhalten abgeleitet werden. Für die Kerbsimulation wird zusätzlich die plastische Traglastformzahl benötigt, welche aus einer elastisch-plastischen FE-Rechnung ermittelt wird. Informationen über den Werkstoff sind als Eingaben ebenfalls erforderlich. Dies beinhaltet Informationen über das statische und zyklisch stabilisierte Werkstoffverhalten sowie die Beanspruchbarkeit des Werkstoffs in Form der Schädigungsparameterwöhlerlinie. Der entwickelte Algorithmus beinhaltet Methoden zur Abschätzung von Werkstoffeigenschaften und Modellparametern, sodass lediglich die Eingabe der Zugfestigkeit und der Werkstoffgruppe zur Berechnung der Anrisslebensdauer ausreicht. Alle weiteren nötigen werkstoffabhängigen Eingaben können abgeschätzt werden.

Die Genauigkeit der Anrisslebensdauerprognose wurde durch den Vergleich zwischen experimentellen und rechnerischen Ergebnissen untersucht. Zur Validierung des Berechnungsalgorithmus wurden experimentelle Ergebnisse aus eigenen Versuchen und der Literatur in einer Datenbank zusammengeführt.

Diese Datenbank enthält 1221 Versuchsergebnisse unter Zug/Druck, Torsion und Biegebelastung. Die enthaltenen experimentellen Ergebnisse umfassen sowohl proportionale als auch nichtproportionale Beanspruchungen unter Einstufen- und Betriebsbelastung.

Der Vergleich rechnerischer und experimenteller Ergebnisse zeigt, dass die entwickelten Verfahren und Modelle in der Lage sind, Anrisslebensdauern gekerbter Probengeometrien unter beliebiger

mechanischer Beanspruchung zuverlässig zu prognostizieren. Auch wenn lediglich die Zugfestigkeit als Werkstoffkennwert bekannt ist, kann eine qualitativ vergleichbare Genauigkeit der Lebensdauerprognose erreicht werden. Alle Schädigungsparameter liefern eine hinreichend gute Vorhersage der Anrisslebensdauern. Durch die Schädigungsparameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  werden dabei genauere Prognosen erreicht werden als mit  $P_{RAM}$ . Der entwickelte Algorithmus ermöglicht auch die Berechnung von Anrisslebensdauern unter Betriebsbelastung mit variablen Amplituden und kann dabei die experimentellen Ergebnisse gut beschreiben.

Vor allem im Hinblick auf die Lebensdauerbewertung von Bauteilen unter nichtproportionaler Belastung stellt der vorgestellte Algorithmus eine Erweiterung des aktuellen Stands der Technik (FKM-Richtlinie Nichtlinear) dar. Es wurde gezeigt, dass Anrisslebensdauern von Versuchen unter nichtproportionaler Last mit der gleichen oder sogar besserer Genauigkeit prognostiziert werden als Anrisslebensdauern von Versuchen unter proportionaler Last.

Eine Vergleichsstudie mit einem existierenden Berechnungskonzept nach Linn [Linn 23] zeigt, dass der vorgestellte Berechnungsalgorithmus genauere Vorhersagen der Anrisslebensdauer ermöglicht. Dies ist insbesondere bei Verwendung der Schädigungsparameter  $P_{FS}$  und  $P_Z$  der Fall. Zur Verbesserung der Ergebnisse muss jedoch eine erhöhte Komplexität des Berechnungsalgorithmus in Kauf genommen werden. Der größte Unterschied in der Komplexität besteht in der Kerbsimulation und dem Kurzrissmodell  $P_Z$ .

## 6. Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Berechnungsalgorithmus auf Grundlage des Örtlichen Konzepts erarbeitet. Dieser ermöglicht eine rechnerische Bewertung der Ermüdungsfestigkeit bei beliebiger mechanischer Beanspruchung unter Berücksichtigung von nichtlinearem Werkstoffverhalten. Der beschriebene Algorithmus stellt dabei speziell eine Erweiterung der FKM-Richtlinie Nichtlinear [Fied 19] für den Fall von nichtproportionalen Beanspruchungen dar. Die Richtlinie beschreibt ein standardisiertes Vorgehen für die rechnerische Bewertung der Ermüdungsfestigkeit unter einachsiger und mehrachsiger proportionaler Beanspruchung. Um eine mögliche Anbindung des in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsverfahrens an die Richtlinie zu erleichtern, wurde sichergestellt, dass die Schädigung anhand der gleichen Eingangsgrößen bewertet wird, die auch in der Richtlinie verwendet werden.

Der vorgestellte Algorithmus besteht aus den zwei Teilen Kerbsimulation und Schädigungsrechnung. Beide können getrennt betrachtet werden. Den ersten Teil des Algorithmus stellt die Kerbsimulation dar, mit der die örtliche Beanspruchung ermittelt wird. Um eine präzise Vorhersage der Anrisslebensdauer gekerbter Bauteile zu erzielen, ist zunächst ein Verfahren erforderlich, welches in der Lage ist, die mehrachsigen nichtproportionalen örtlich elastisch-plastischen Beanspruchungen in geometrischen Kerben präzise zu simulieren. In Kapitel 2 wurden verschiedene Methoden zur Simulation solcher örtlichen Beanspruchungen untersucht. Durch einen Vergleich der Ergebnisse der Kerbdehnungssimulation mit Resultaten aus FE-Rechnungen und Kerbdehnungsmessungen wurde der Pseudo-Spannungsansatz nach Köttgen et al. [Kött 95a] als das am besten geeignete Verfahren für die Zielsetzung dieser Arbeit identifiziert. Ursprünglich erfordert der Pseudo-Spannungsansatz die zweifache Lösung eines inkrementellen Plastizitätsmodells. In diesem Kontext wird das Plastizitätsmodell nach Ohno und Wang [Ohno 93a, Ohno 93b] verwendet. Diese Auswahl basiert auf seiner Fähigkeit, die erforderlichen transienten Werkstoffeffekte (zyklisches Kriechen und Relaxieren) für eine exakte Lebensdauerprognose präzise zu erfassen, ohne dabei eine zu große Anzahl an Modellparametern zu benötigen. Um den Anforderungen und Zielen dieser Arbeit gerecht zu werden, wurden die Strukturfließflächenansätze in verschiedenen Aspekten erweitert und optimiert. Dies ermöglichte eine genauere Erfassung und Bewertung der lokalen Beanspruchungen sowie eine erhebliche Steigerung der Rechengeschwindigkeit:

- Es wurde ein Lösungsalgorithmus auf der Basis des impliziten Euler-Verfahrens entwickelt und implementiert. Dieser ermöglicht es, das Plastizitätsmodell von Ohno und Wang effizient und stabil zu lösen. Dieser Algorithmus wurde speziell im Rahmen der Strukturfließflächenansätze angewendet. Dabei wurde gezeigt, wie das Werkstoff- und das Strukturmodell im Pseudo-Spannungsansatz über die plastischen Dehnungen gekoppelt sind und gemeinsam integriert werden können. Eine Iteration zur Lösung des Werkstoffmodells ist bei diesem vorgestellten Algorithmus nicht erforderlich, was zu einer erheblichen Reduzierung der Rechenzeit führt und somit die Effizienz des Gesamtverfahrens verbessert.
- Durch die Berechnung der Bauteilfließkurve mittels der Ansätze von Seeger/Beste [Seeg 77] anstelle des klassischen Neuber-Verfahrens [Neub 61] wurde die Vorhersagegenauigkeit der Strukturfließflächenansätze signifikant gesteigert. Besonders unter hohen lokalen Beanspruchungen konnte durch einen direkten Vergleich mit FE-Rechnungen nachgewiesen werden, dass die Strukturfließflächenansätze verbesserte Ergebnisse erzielen.

- Des Weiteren wird eine Methode präsentiert, um im Pseudo-Spannungsansatz Eigenspannungen und Eigendehnungen gemäß den Konzepten des Modells „dünne Randschicht“ von Seeger et al. [Seeg 84] zu integrieren.

Neben den erwähnten Vorteilen zeigen die durchgeführten Untersuchungen auch Potenziale für Verbesserungen auf. Diese Erkenntnisse bieten die Möglichkeit, den entwickelten Ansatz weiter zu optimieren und seine Leistungsfähigkeit zu steigern.

Derzeit werden Modellparameter im Strukturmodell, welche das Ratchetting beschreiben, auf vorgegebene Standardwerte festgelegt. Es ist empfehlenswert, eine Methode zu entwickeln, um diese Parameter genauer zu bestimmen. Dies wird die Prognosegüte der realen örtlichen Beanspruchung der Strukturfließflächen verbessern. Sollte ein analytischer Ansatz nicht möglich sein, kann eine numerische Untersuchung durchgeführt werden, bei der Probengeometrien (insbesondere die Kerbschärfe) und das Werkstoffverhalten variiert werden. Dadurch lassen sich Abschätzmethode für die Modellparameter ableiten. In Abschnitt 2.5.3 wurde bereits ein Ansatz zur Bestimmung der Ratchetting-Parameter im Strukturmodell für ein gegebenes Bauteil entwickelt.

Ebenfalls könnten anstelle des Ohno/Wang Modells andere Plastizitätsmodelle in die Strukturfließflächenansätze integriert werden. Dadurch lassen sich weitere Werkstoffeffekte berücksichtigen. Insbesondere wären Modelle von Interesse, welche die nichtproportionale Verfestigung adäquat erfassen können. Dies erfordert allerdings die Ableitung von Methoden zur Bestimmung der Modellparameter des Strukturmodells. Es ist problemlos möglich, ein geeignetes Plastizitätsmodell in den dargelegten Lösungsalgorithmus zu integrieren, da dieser für alle Plastizitätsmodelle vom „strain hardening“ Typ geeignet ist.

Nach der Ermittlung der örtlichen Beanspruchungen werden diese im zweiten Teil des Berechnungsalgorithmus zur Bewertung der Schädigung verwendet. In Kapitel 3 wurden drei verschiedene Ansätze zur Lebensdauerprognose unter nichtproportionaler Beanspruchung untersucht. Diese umfassen die Modelle des Verfahrens der kritischen Schnittebene von Smith, Watson und Topper [Smit 70], das Fatemi/Socie Modell [Fate 88b] sowie ein Kurzrissmodell nach Hertel [Hert 16]. Jedes dieser Modelle wurde detailliert beschrieben.

Für das Fatemi/Socie Modell tritt das Problem auf, dass Gleitungsamplituden in Schnittebenen zu berechnen sind, in denen die Schnittdehnung zwei Gleitungscomponenten aufweist. Es wurde eine simple Methode vorgeschlagen, um in diesen Ebenen eine Amplitude der Gleitung eindeutig bestimmen zu können. Dies ermöglicht die Anwendung des Modells auch unter Betriebsbelastung mit sehr langen Last-Zeit-Reihen, was eine Erweiterung des Anwendungsbereichs darstellt.

Des Weiteren wurden Verfahren erarbeitet, um die Modellparameter der Schädigungsmodelle für die verschiedenen Werkstoffgruppen, wie sie in der FKM-Richtlinie Nichtlinear enthalten sind, ausschließlich unter Angabe der Zugfestigkeit und der Werkstoffgruppe abzuschätzen.

In den Kapiteln 4 und 5 erfolgt eine ausführliche Analyse der Treffsicherheit des erarbeiteten Berechnungsalgorithmus. Die Genauigkeit der Lebensdauerprognose wird anhand von Versuchsergebnissen aus dem Forschungsprojekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] sowie relevanten Literaturquellen bewertet. Es erfolgt ein Vergleich zwischen den experimentell ermittelten Anrisslebensdauern und den Vorhersagen des Algorithmus. Dabei wird eine eingehende statistische Analyse durchgeführt, um die Verlässlichkeit der Lebensdauerprognosen zu bewerten und zu validieren. Anhand der statistischen Auswertung können die Ergebnisse der drei untersuchten Schädigungsmodelle quantitativ miteinander verglichen werden.

In einem ersten Schritt werden dazu in Kapitel 4 die Schädigungsmodelle getrennt von der Kerbsimulation untersucht, indem Versuche an ungekerbten Werkstoffproben ausgewertet werden. Es werden Experimente zur Bestimmung der Kennwerte für die Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 vorgestellt. Diese Experimente dienen dazu, die Schädigungsmodelle anhand der Versuchsergebnisse zu parametrisieren. Es erfolgte ein Vergleich zwischen den experimentell ermittelten Anrisslebensdauern und den Prognosen des Berechnungsalgorithmus sowie zwischen prognostizierten und gemessenen Anrissorientierungen. Untersucht wurde, ob eine hohe Treffsicherheit der Anrisslebensdauer auch eine

genaue Prognose der Wachstumsrichtung von technischen Anrissen ermöglicht. Dabei zeigten alle Schädigungsmodelle eine zufriedenstellende Treffsicherheit bei der Prognose der Anrisslebensdauer. Das Kurzrissmodell wies dabei die präziseste Lebensdauerprognose auf. Für keines der Schädigungsmodelle wurde jedoch eine signifikante Korrelation zwischen einer präzisen Lebensdauerprognose und einer genauen Vorhersage der Anrissorientierung festgestellt.

In Kapitel 5 wird die Genauigkeit der Anrisslebensdauerprognose für gekerbte Probengeometrien bewertet. Zunächst werden Versuchsergebnisse aus Experimenten an gekerbten Rundproben vorgestellt. Diese werden anschließend mit Literaturdaten ergänzt. Die so entstandene Datenbank enthält Versuche unter den verschiedensten Belastungen. Es sind experimentelle Ergebnisse für Versuche unter proportionaler und nichtproportionaler Belastung, mit und ohne Mittellasten sowie unter einstufiger Belastung und Betriebsbelastung enthalten. Die Vergleiche zwischen den experimentellen und berechneten Anrisslebensdauern zeigen, dass der entwickelte Berechnungsalgorithmus verlässliche Prognosen für die Anrisslebensdauer bei gekerbten Probengeometrien unter verschiedenen mechanischen Belastungen liefert.

Zur genauen Vorhersage der Anrisslebensdauer reicht die Angabe der Zugfestigkeit sowie der Werkstoffgruppe aus. Der Vergleich zwischen experimenteller und rechnerischer Anrisslebensdauer wurde ebenfalls für Rechnungen durchgeführt, in denen alle Modellparameter abgeschätzt wurden. Hierbei kommen die entwickelten Abschätzmethoden zum Einsatz, die eine Parametrisierung der Schädigungsmodelle ermöglichen und somit eine Berechnung der Ermüdungslebensdauer auch mit begrenzten Werkstoffdaten erlauben.

Es wurde ebenfalls gezeigt, dass unter nichtproportionaler Belastung experimentelle Ergebnisse mit ähnlicher oder sogar besserer Genauigkeit prognostiziert werden als unter proportionaler Belastung. Ein Vergleich mit einem vorhandenen Berechnungskonzept zeigt, dass der entwickelte Algorithmus genauere Vorhersagen der Anrisslebensdauer ermöglicht. Dies gilt insbesondere unter Verwendung des Fatemi/Socie Schädigungsparameters und des Kurzrissmodells. Es sollte berücksichtigt werden, dass eine Steigerung der Vorhersagegenauigkeit mit einer Zunahme der Komplexität des Algorithmus einhergeht. Vor allem die Kerbsimulation und das Kurzrissmodell tragen maßgeblich zur erhöhten Komplexität bei.

Trotz der beschriebenen Genauigkeit des vorgestellten Berechnungsalgorithmus bestehen noch Möglichkeiten, die Prognosegenauigkeit der Anrisslebensdauern mit den Schädigungsmodellen oder die Anwendbarkeit des Algorithmus zu verbessern.

Die Verbesserung des Kurzrissmodells kann mit zwei unterschiedlichen Zielsetzungen durchgeführt werden. Einerseits kann das Modell vereinfacht werden, um eine leichtere Anwendung und Implementierung sowie eine schnellere Berechnungsgeschwindigkeit zu ermöglichen. Hierfür können folgende Aspekte in Betracht gezogen werden:

- Es wird angenommen, dass das Halbachsenverhältnis des Risses konstant ist. Außerdem wird der Einfluss des Spannungsgradienten nicht mehr direkt in den Geometriefaktoren, sondern über die bruchmechanische Stützziffer berücksichtigt. Durch diese beiden Vereinfachungen bleiben die Geometriefaktoren in der Rissspitzenbeanspruchung während des Rissfortschritts konstant. Dies ermöglicht, auf die Unterteilung des Risspfades in Intervalle und die damit verbundene Neubestimmung von Wöhlerlinien zu verzichten, was zu einer erheblichen Steigerung der Rechengeschwindigkeit führt.
- Derzeit werden viele Modellparameter auf Standardwerte gesetzt. Diese Standardwerte sind nicht dazu geeignet, jeden Werkstoff optimal zu beschreiben. Um eine genauere Bestimmung dieser Parameter zu ermöglichen, sind derzeit spezielle Versuche erforderlich. Ziel sollte sein, Methoden zur Abschätzung der Modellparameter  $\tau_{akt}$ ,  $\mu$  und  $a_{tors}$  zu entwickeln.

Es ist dann erforderlich, zu überprüfen, welchen Effekt diese Anpassungen auf die Genauigkeit des Kurzrissmodells haben.

Andererseits kann das Modell weiter angepasst werden, um genauere Anrisslebensdauerprognosen zu erhalten. Dafür kann der folgende Ansatz in Betracht gezogen werden:

- Das Kurzrisssfortschrittsmodell identifiziert hauptsächlich Ebenen mit hoher Normaldehnung als kritische Ebenen und deutet darauf hin, dass das Risswachstum im Modus I im Vergleich zum Modus II/III dominiert. Eine verbesserte Abstimmung zwischen den Modus I und den Modus II/III Rissmechanismen ist erforderlich. Ein möglicher Ansatz wäre, die Annahme fallen zu lassen, dass jeder Rissöffnungsmodus durch die gleichen Rissfortschrittsparameter beschrieben werden kann. Dadurch entsteht allerdings ein erhöhter Aufwand bei der Parameteridentifikation und der Zusammenhang des Verhältnisses aus Risslängenzuwachs zu Risstiefenzuwachs  $\Delta c/\Delta a$  aus Gleichung (3.59) ist neu zu bestimmen.

Ebenfalls können am Smith/Watson/Topper Modell Anpassungen vorgenommen werden, um die Genauigkeit der Lebensdauerprognose zu verbessern. Es kann untersucht werden, ob eine Kombination des hier vorgestellten Kerbsimulationsverfahrens mit der Anwendung des  $P_{RAM}$  Schädigungsparameters nach Linn [Linn 23] zu einer genaueren Lebensdauerprognose führt. Das in dieser Arbeit verwendete mehrachsige Kerbsimulationsverfahren liefert eine genauere Vorhersage der örtlich mehrachsigen Beanspruchung als die von Linn [Linn 23] verwendeten einachsigen Methoden. Trotzdem liefern beide Varianten des  $P_{RAM}$  Schädigungsparameters ähnlich genaue Prognosen für die Anrisslebensdauer für die untersuchte Datenbank. Dies legt nahe, dass eine Schädigungsbewertung durch Skalierung der Normalspannungen in der Schnittebene vorteilhaft für den  $P_{RAM}$  Schädigungsparameter ist. Es ist zu erwarten, dass für bestimmte Lastfälle (insbesondere reine Torsion) durch eine Kombination der beiden Methoden eine verbesserte Lebensdauerprognose mit  $P_{RAM}$  erreicht werden kann. Bisher basiert die Skalierung der Normalspannung jedoch auf elastischen Spannungsverläufen. Es muss überprüft werden, wie mit elastisch-plastischen Spannungen umgegangen werden kann. Gegebenenfalls ist die Skalierungsmethode anzupassen.

Es besteht ebenfalls die Möglichkeit, einen völlig anderen Ansatz als die kritischen Ebenen Modelle zu verfolgen, die in dieser Arbeit untersucht wurden. Von Schmidt [Schm 20, Schm 21] wurde ein Ansatz entwickelt, der es ermöglicht, auch unter örtlich nichtproportionaler Beanspruchung vorzeichenbehaftete Vergleichspannungsverläufe zu bestimmen. Diese Vorgehensweise reduziert den Fall nichtproportionaler Belastung auf örtlich einachsige (Vergleichs-)Belastungen. Dadurch kann das klassische Örtliche Konzept, wie es beispielsweise in der FKM-Richtlinie Nichtlinear beschrieben ist, angewendet werden. Erste Anrisslebensdauerprognosen, die auf diesem Ansatz basieren [Schm 23], zeigen vielversprechende Ergebnisse und legen nahe, dass dieser alternative Ansatz weiter untersucht werden sollte.

## Literaturverzeichnis

- [Abde 00] Abdel-Karim, M.; Ohno, N.: „Kinematic hardening model suitable for ratchetting with steady-state“. In: *International Journal of Plasticity* 16.3-4 (Jan. 2000), S. 225–240.
- [Arms 66] Armstrong, P. J.; Frederick, C.: „A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect“. Bd. 731. Berkeley Nuclear Laboratories Berkeley, CA, 1966.
- [Atzo 06] Atzori, B.; Berto, F.; Lazzarin, P.; Quaresimin, M.: „Multi-axial fatigue behaviour of a severely notched carbon steel“. In: *International Journal of Fatigue* 28.5-6 (Mai 2006), S. 485–493.
- [Bann 91] Bannantine, J.; Socie, D.: „A Variable Amplitude Multiaxial Fatigue Life Prediction Method“. In: *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading*, European Structural Integrity Society (1991).
- [Bark 94] Barkey, M. E.; Socie, D. F.; Hsia, K. J.: „A Yield Surface Approach to the Estimation of Notch Strains for Proportional and Nonproportional Cyclic Loading“. In: *J. Eng. Mater. Technol.* 116.2 (Apr. 1994), S. 173–180.
- [Basq 10] Basquin, O.: „The exponential law of endurance tests“. In: „*Proc Am Soc Test Mater*“. Bd. 10. 1910, S. 625–630.
- [Bäum 90] Bäumel, A. J.; Seeger, T.: „Materials data for cyclic loading“. In: *Materials science monographs* 61 (1990).
- [Baus 80] Bauschinger, J.: „Über das Kristallinischwerden und die Festigkeitsverminderung des Eisens durch den Gebrauch“. In: *Dinglers Journal* (1880).
- [Baus 86] Bauschinger, J.: „Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit des Eisens und des Stahls durch Strecken und Quetschen, durch Erwärmen und Abkühlen und durch oftmals wiederholte Beanspruchung“. In: *Mitteilung des mech.-technischen Laboratoriums München* (1886).
- [Beck 87] Becker, W.; Gross, D.: „About the mode II Dugdale crack solution“. In: *International Journal of Fracture* 34.1 (1987), S. 65–70.
- [Beck 88] Becker, W.; Gross, D.: „About the Dugdale crack under mixed mode loading“. In: *International Journal of Fracture* 37.3 (1988), S. 163–170.
- [Bena 87] Benallal, A.; Marquis, D.: „Constitutive equations for nonproportional cyclic elasto-viscoplasticity“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 109.4 (Okt. 1987), S. 326–336.
- [Bena 88] Benallal, A.; Marquis, D.: „Effects of non-proportional loadings in cyclic elasto-viscoplasticity: experimental, theoretical and numerical aspects“. In: *Engineering Computations* 5.3 (März 1988), S. 241–247.
- [Berg 83] Bergmann, J. W.: „Zur Betriebsfestigkeitsbemessung gekerbter Bauteile auf der Grundlage der örtlichen Beanspruchungen“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 37, 1983.

- [Bert 14] Berto, F.; Lazzarin, P.; Marangon, C.: „Fatigue strength of notched specimens made of 40CrMoV13.9 under multiaxial loading“. In: *Materials & Design* 54 (Feb. 2014), S. 57–66.
- [Best 81] Beste, A.: „Elastisch plastisches Spannungs-Dehnungs- und Anrißverhalten in statisch und zyklisch belasteten Kerbscheiben: Ein Vergleich zwischen experimentellen Ergebnissen und Näherungsrechnungen“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 34, 1981.
- [Bish 00] Bishop, J. E.: „Characterizing the non-proportional and out-of-phase extent of tensor paths“. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 23.12 (Dez. 2000), S. 1019–1032.
- [Brow 79] Brown, M. W.; Miller, K. J.: „High temperature low cycle biaxial fatigue of two steels“. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 1.2 (März 1979), S. 217–229.
- [Brow 82] Brown, M.; Miller, K.: „Two Decades of Progress in the Assessment of Multiaxial Low-Cycle Fatigue Life“. In: *Low-Cycle Fatigue and Life Prediction* (1982), S. 482–482–18.
- [Bucz 03] Buczynski, A.; Glinka, G.: „An analysis of elasto-plastic strains and stresses in notched bodies subjected to cyclic non-proportional loading paths“. In: *European Structural Integrity Society* (2003), S. 265–283.
- [Bucz 97] Buczynski, A.; Glinka, G.: „Elastic-plastic stress-strain analysis of notches under non-proportional loading“. In: „5 th International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue & Fracture. I“. 1997, S. 461–479.
- [Bui 83] Bui, H.: „Associated path independent J-integrals for separating mixed modes“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31.6 (Jan. 1983), S. 439–448.
- [Camp 16] Campagnolo, A.; Berto, F.; Marangon, C.: „Cyclic plasticity in three-dimensional notched components under in-phase multiaxial loading at  $R = -1$ “. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 81 (2016), S. 76–88.
- [Chab 79] Chaboche, J.; Van, K. D.; Cordier, G.: „Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel“. In: *Structural mechanics in reactor technology. Transactions. Vol. L* (1979).
- [Chab 91] Chaboche, J.: „On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects“. In: *International Journal of Plasticity* 7.7 (Jan. 1991), S. 661–678.
- [Chab 96] Chaboche, J.; Cailletaud, G.: „Integration methods for complex plastic constitutive equations“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 133.1-2 (Juni 1996), S. 125–155.
- [Chu 94] Chu, C.; Conle, F.: „Multiaxial Neuber-type of elastic to elastic-plastic stress-strain correction“. In: „Proceedings of the 4th Int. Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue, Paris, France“. 1994.
- [Chu 95] Chu, C. C.: „Incremental Multiaxial Neuber Correction for Fatigue Analysis“. In: *SAE Transactions* 104 (1995), S. 595–602.
- [Chu 96] Chu, C.; Conle, F.; Hübner, A.: „An integrated uniaxial and multiaxial fatigue life prediction method“. In: *VDI Berichte* 1283 (1996), S. 337–348.

- [Clor 86] Clormann, U.; Seeger, T.: „Rainflow-HCM. Ein Zählverfahren für Betriebsfestigkeitsnachweise auf werkstoffmechanischer Grundlage“. In: STAHLBAU 55.3 (1986).
- [Coff 54] Coffin Jr, L. F.: „A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal“. In: Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, New York 76 (1954), S. 931–950.
- [Coff 62] Coffin Jr, L. F.: „Low cycle fatigue -a review“. Techn. Ber. General Electric Co. Research Lab., Schenectady, N.Y., 1962.
- [Crea 67] Creager, M.; Paris, P. C.: „Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking“. In: International Journal of Fracture Mechanics 3.4 (Dez. 1967), S. 247–252.
- [DIN 50125] DIN 50125: „Prüfung metallischer Werkstoffe - Zugproben“. Berlin: DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 2016.
- [DIN EN ISO 6892-1] DIN EN ISO 6892-1: „Metallische Werkstoffe - Zugversuch - Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur (ISO 6892-1:2019)“. Berlin: DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 2019.
- [Dogh 93] Doghri, I.: „Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elasto-plasticity“. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 36.22 (Nov. 1993), S. 3915–3932.
- [Dogh 95] Doghri, I.: „Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage“. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 38.20 (Okt. 1995), S. 3403–3431.
- [Doon 91] Doong, S. H.; Socie, D. F.: „Constitutive modeling of metals under nonproportional cyclic loading“. In: Journal of Engineering Materials and Technology 113.1 (Jan. 1991), S. 23–30.
- [Döri 03] Döring, R.; Hoffmeyer, J.; Seeger, T.; Vormwald, M.: „A plasticity model for calculating stress–strain sequences under multiaxial nonproportional cyclic loading“. In: Computational Materials Science 28.3-4 (Nov. 2003), S. 587–596.
- [Döri 06] Döring, R.: „Zum Deformations- und Schädigungsverhalten metallischer Werkstoffe unter mehrachsig nichtproportionalen zyklischen Beanspruchungen“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 78, 2006.
- [Dowl 77] Dowling, N.: „Crack growth during low-cycle fatigue of smooth axial specimens“. Cyclic Stress-Strain und Plastic Deformation Aspects of Fatigue Crack Growth, ASTM International, S. 97-121, 1977.
- [Dres 92] Dressier, K.; Carmine, R.; Krüger, W.: „The Multiaxial Rainflow Method“. In: „Low Cycle Fatigue and Elasto-Plastic Behaviour of Materials 3“. Springer Netherlands, 1992, S. 325–330.
- [Dres 95] Dressler, K.; Köttgen, V.; Kotzle, H.: „Tools for fatigue evaluation of non-proportional loading“. In: Fatigue Design. 1 (1995), S. 261–277.
- [Esde 96] Esderts, A.; Zenner, H.: „Multiaxial fatigue under random loading: experiments and lifetime prediction“. In: „Fatigue’96: Sixth International Fatigue Congress.“ Bd. 2. 1996, S. 1019–1024.

- [Fate 11] Fatemi, A.; Shamsaei, N.: „Multiaxial fatigue: An overview and some approximation models for life estimation“. In: *International Journal of Fatigue* 33.8 (Aug. 2011), S. 948–958.
- [Fate 88a] Fatemi, A.; Kurath, P.: „Multiaxial Fatigue Life Predictions Under the Influence of Mean-Stresses“. In: *J. Eng. Mater. Technol.* 110.4 (Okt. 1988), S. 380–388.
- [Fate 88b] Fatemi, A.; Socie, D. F.: „A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out - of - phase loading“. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 11.3 (März 1988), S. 149–165.
- [Fate 98] Fatemi, A.; Yang, L.: „Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials“. In: *International Journal of Fatigue* 20.1 (Jan. 1998), S. 9–34.
- [Fesi 12] Fesich, T. M.: „Festigkeitsnachweis und Lebensdauerberechnung bei komplex mehrachsiger Schwingbeanspruchung“. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Materialprüfung, Werkstoffkunde und Festigkeitslehre (IMWF), 2012.
- [Fied 19] Fiedler, M.; Wächter, M.; Varfolomeev, I.; Vormwald, M.; Esderts, A.: „Richtlinie Nichtlinear - Rechnerischer Festigkeitsnachweis unter expliziter Erfassung nichtlinearen Werkstoffverformungsverhaltens“. Frankfurt am Main: VDMA Verlag GmbH, 2019.
- [Find 54] Findley, W. N.; Mathur, P. N.: „Modified theories of fatigue failure under combined stress“. 5. 1954.
- [Fira 11] Firat, M.: „A notch strain calculation of a notched specimen under axial-torsion loadings“. In: *Materials & Design* 32.7 (2011), S. 3876–3882.
- [Fisc 77] Fischer, R.; Hück, M.; Köbler, H.; Schütz, W.: „Eine dem stationären Gaußprozess verwandte Beanspruchungs-Zeit-Funktion für Betriebsfestigkeitsversuche“. In: *Fortschrittsberichte der VDI-Zeitschriften* 5-30 (1977).
- [Gaie 04] Gaier, C.; Lukacs, A.; Hofwimmer, K.: „Investigations on a statistical measure of the non-proportionality of stresses“. In: *International Journal of Fatigue* 26.4 (Apr. 2004), S. 331–337.
- [Gaie 06] Gaier, C.; Dannbauer, H.: „An efficient critical plane method for ductile, semi-ductile and brittle materials“. In: „*Proceedings of the Ninth International Fatigue Congress*“. Atlanta, GA, USA. 14–19 May 2006.
- [Gaie 13] Gaier, C.; Hofwimmer, K.; Dannbauer, H.: „Accurate and efficient methods for multiaxial fatigue analysis“. *Proceedings NAFEMS World Congress*, 9th-12th June, 2013.
- [Gao 10] Gao, Z.; Qiu, B.; Wang, X.; Jiang, Y.: „An investigation of fatigue of a notched member“. In: *International Journal of Fatigue* 32.12 (2010), S. 1960–1969.
- [Garu 81] Garud, Y. S.: „A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 103.2 (Apr. 1981), S. 118–125.
- [Glin 85] Glinka, G.: „Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 22.3 (1985), S. 485–508.

- [Grub 76] Grubisic, V.; Simbürger, A.: „Fatigue under combined out-of-phase multiaxial stresses“. In: „Fatigue Testing and Design 2, Proceedings of SEE International Conference“. Bd. 5. 1976, S. 27–1.
- [Haib 06] Haibach, E.: „Betriebsfestigkeit - Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung“. Springer-Verlag, 2006.
- [Haib 13] Haibach, E.: „Betriebsfeste Bauteile: Ermittlung und Nachweis der Betriebsfestigkeit, konstruktive und unternehmerische Gesichtspunkte“. Bd. 38. Springer-Verlag, 2013.
- [Haig 15] Haigh, B.: „Report on alternating stress tests of a sample of mild steel“. In: BASC Report 85 (1915), S. 163–170.
- [Häne 10] Hänel, B.; Kullig, E.; Vormwald, M.; Versch, C.; Hertel, O.; Esderts, A.; Hinkelmann, K.; Siegele, D.; Hohe, J.: „Verbessertes Berechnungskonzept FKM-Richtlinie: Vorhaben Nr. 282: Ein verbessertes Berechnungskonzept des statischen Festigkeitsnachweises und des Ermüdungsfestigkeitsnachweises für nichtgeschweisste und geschweisste Maschinenbauteile nach der FKM-Richtlinie "Festigkeitsnachweis": Abschlussbericht“. Techn. Ber. Forschungskuratorium Maschinenbau, 2010.
- [Hans 13] Hanselka, H.; Franz, R.; Xin, P.; Esderts, A.: „Verbesserung der Lebensdauerabschätzung für mehrachsige belastete Sicherheitsbauteile aus Schmiedestahl und Aluminiumguss durch Auswahl zutreffender Berechnungsalgorithmen“. Frankfurt am Main: VDMA Verlag GmbH, FKM-Vorhaben Nr. 291, FKM-Abschlussbericht, Heft 319, 2013, 2013.
- [Hard 51] Hardrath, H.; Ohman, L.: „A study of elastic and plastic stress concentration factors due to notches and fillets in flat plates“. Techn. Ber. NACA, 1951.
- [Hart 93] Hartmann, S.; Haupt, P.: „Stress computation and consistent tangent operator using non-linear kinematic hardening models“. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 36.22 (Nov. 1993), S. 3801–3814.
- [Hart 98] Hartmann, S.; Kamlah, M.; Koch, A.: „Numerical aspects of a non-proportional cyclic plasticity model under plane stress conditions“. In: International journal for numerical methods in engineering 42.8 (1998), S. 1477–1498.
- [Henc 24] Hencky, H.: „Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen“. In: ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 4.4 (1924), S. 323–334.
- [Hert 03a] Hertel, O.: „Numerische Ermittlung des J-Integrals für nichtproportionale Schwingbeanspruchung und plastisches Materialverhalten am Beispiel einer Mittenrisscheibe“. Techn. Ber. Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Strukturmechanik. Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Strukturmechanik, 2003.
- [Hert 03b] Hertel, O.: „Weiterentwicklung und Verifizierung eines Näherungsverfahrens zur Berechnung von Kerbbeanspruchungen bei mehrachsiger nichtproportionaler Schwingbelastung“. Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Strukturmechanik, Diplomarbeit, 2003.
- [Hert 04] Hertel, O.; Döring, R.; Vormwald, M.: „Cyclic J-integral under nonproportional loading“. In: „Proceedings of the 7th International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture (ICBMFF7)“. 2004, S. 513–518.

- [Hert 05] Hertel, O.; Vormwald, M.; Seeger, T.; Döring, R.; Hoffmeyer, J.: „Notch stress and strain approximation procedures for application with multiaxial nonproportional loading“. In: *Materials Testing* 47.5 (2005), S. 268–277.
- [Hert 11] Hertel, O.; Vormwald, M.: „Short-crack-growth-based fatigue assessment of notched components under multiaxial variable amplitude loading“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 78.8 (Mai 2011), S. 1614–1627.
- [Hert 14] Hertel, O.; Vormwald, M.: „Multiaxial fatigue assessment based on a short crack growth concept“. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73 (Okt. 2014), S. 17–26.
- [Hert 16] Hertel, O.: „Prognose der Anrisslebensdauer gekerbter Bauteile bei mehrachsiger nichtproportionaler Betriebsbelastung“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 110, 2016.
- [Herz 23] Herzel, T.: „Untersuchung des Werkstoffverhaltens unter nichtproportionaler Beanspruchung an EN-GJS-500-14 und S355“. Bachelorarbeit, Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit (IMAB), TU Clausthal, 2023.
- [Hill 48] Hill, R.: „A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 193.1033 (Mai 1948), S. 281–297.
- [Hoff 05] Hoffmeyer, J.: „Anrisslebensdauervorhersage bei mehrachsiger Beanspruchung auf Basis des Kurzrissskonzepts“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 72, 2005.
- [Hoff 85a] Hoffmann, M.; Seeger, T.: „A Generalized Method for Estimating Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains, Part 1: Theory“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 107.4 (1985), S. 250–254.
- [Hoff 85b] Hoffmann, M.; Seeger, T.: „A Generalized Method for Estimating Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains, Part 2: Application and General Discussion“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 107.4 (1985), S. 255–260.
- [Hoff 86] Hoffmann, M.; Seeger, T.: „Mehrachsiges kerbbeanspruchungen bei proportionaler Belastung“. In: *Konstruktion* 38.2 (1986), S. 63–70.
- [Hopp 95] Hopperstad, O. S.; Remseth, S.: „A return mapping algorithm for a class of cyclic plasticity models“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38.4 (Feb. 1995), S. 549–564.
- [Hosh 87] Hoshida, T.; Socie, D.: „Mechanics of mixed mode small fatigue crack growth“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 26.6 (Jan. 1987), S. 841–850.
- [Ince 14] Ince, A.; Glinka, G.; Buczynski, A.: „Computational modeling of multiaxial elasto-plastic stress-strain response for notched components under non-proportional loading“. In: *International Journal of Fatigue* 62 (2014), S. 42–52.
- [Ince 16a] Ince, A.; Glinka, G.: „Innovative computational modeling of multiaxial fatigue analysis for notched components“. In: *International Journal of Fatigue* 82 (2016), S. 134–145.
- [Ince 16b] Ince, A.: „Numerical validation of computational stress and strain analysis model for notched components subject to non-proportional loadings“. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 84 (2016), S. 26–37.

- [Ince 17] Ince, A.; Bang, D.: „Deviatoric Neuber method for stress and strain analysis at notches under multiaxial loadings“. In: *International Journal of Fatigue* 102 (2017), S. 229–240.
- [Ishi 80] Ishikawa, H.; Kitagawa, H.; Okamura, H.: „J integral of a mixed mode crack and its application.“ In: *Mechanical Behavior of Materials, ICM3 Bd. 3*, S. 447455 3 (1980), S. 447–455.
- [Itoh 11] Itoh, T.; Yang, T.: „Material dependence of multiaxial low cycle fatigue lives under non-proportional loading“. In: *International Journal of Fatigue* 33.8 (2011), S. 1025–1031.
- [Itoh 95] Itoh, T.; Sakane, M.; Ohnami, M.; Socie, D. F.: „Nonproportional low cycle fatigue criterion for type 304 stainless steel“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 117.3 (Juli 1995), S. 285–292.
- [Itoh 99] Itoh, T.; Nakata, T.; Sakane, M.; Ohnami, M.: „Nonproportional low cycle fatigue of 6061 aluminum alloy under 14 strain paths“. In: *European Structural Integrity Society, Volume 25, Pages 41-54* (1999), S. 41–54.
- [Jian 01] Jiang, Y.; Xu, B.: „Deformation analysis of notched components and assessment of approximate methods“. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 24.11 (2001), S. 729–740.
- [Jian 07] Jiang, Y.; Hertel, O.; Vormwald, M.: „An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria“. In: *International Journal of Fatigue* 29.8 (Aug. 2007), S. 1490–1502.
- [Jian 96a] Jiang, Y.; Sehitoglu, H.: „Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations“. In: *Journal of Applied Mechanics* 63.3 (Sep. 1996), S. 720–725.
- [Jian 96b] Jiang, Y.; Sehitoglu, H.: „Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations With Experiments“. In: *J. Appl. Mech.* 63.3 (Sep. 1996), S. 726–733.
- [Joha 13] Johannesson, P.; Speckert, M.: „Guide to Load Analysis for Durability in Vehicle Engineering“. John Wiley & Sons, Nov. 2013. 458 S.
- [Kana 79] Kanazawa, K.; Miller, K. J.; Brown, M. W.: „Cyclic deformation of 1% Cr-Mo-V steel under out-of-phase loads“. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 2.2 (Sep. 1979), S. 217–228.
- [Kern 19] Kern, A.: „Betriebsfestigkeitsnachweise bei nicht-proportionalen Lasten“. Masterthesis am Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, 2019.
- [Kloo 76] Kloos, K. H.: „Einfluß des Oberflächenzustandes und der Probengröße auf die Schwingfestigkeitseigenschaften“. *Techn. Ber. VDI-Verlag (VDI-Bericht 268)-S.63-76*, 1976.
- [Koba 02] Kobayashi, M.; Ohno, N.: „Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53.9 (2002), S. 2217–2238.
- [Köhl 10] Köhler, M.; Jenne, S.; Pötter, K.; Zenner, H.: „Zählverfahren zur Bildung von Kollektiven und Matrizen aus Zeitfunktionen“. *Techn. Ber. FVA-Richtlinie*, 2010.
- [Köhl 12] Köhler, M.; Jenne, S.; Pötter, K.; Zenner, H.: „Zählverfahren und Lastannahme in der Betriebsfestigkeit“. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

- [Kött 95a] Köttgen, V. B.; Barkey, M. E.; Socie, D. F.: „Pseudo stress and pseudo strain based approaches to multiaxial notch analysis“. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 18.9 (Apr. 1995), S. 981–1006.
- [Kött 95b] Köttgen, V.; Barkey, M.: „Structural stress-strain analysis of non-proportional loading suitable for FEM postprocessing“. In: *Fatigue Design* 1995. 1 (1995), S. 231–244.
- [Kraf 21] Kraft, J.; Vormwald, M.: „Energy driven integration of incremental notch stress-strain approximation for multiaxial cyclic loading“. In: *International Journal of Fatigue* 145 (Apr. 2021), S. 106043.
- [Kraf 22] Kraft, J.; Linn, A.; Wächter, M.; Esderts, A.; Vormwald, M.: „Accuracy analyses of fatigue life predictions for multiaxially non-proportionally stressed notched components - a database evaluation“. In: *International Journal of Fatigue* 163 (Okt. 2022), S. 107088.
- [Kraf 24] Kraft, J.; Linn, A.; Wächter, M.; Esderts, A.; Vormwald, M.: „Multiaxial fatigue behavior and crack orientation prediction for steel and cast iron“. In: *International Journal of Fatigue* (März 2024), S. 108259.
- [Kuja 14] Kujawski, D.; Sree, P. C.: „On deviatoric interpretation of Neuber’s rule and the SWT parameter“. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 71 (2014), S. 44–50.
- [Kura 89] Kurath, P.; Downing, S.; Galliard, D.: „Summary of non-hardened notched shaft round robin program“. In: *Society of Automotive Engineers, Inc., Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*, (1989), S. 13–31.
- [Lamb 75] Lamba, H.: „The J integral applied to cyclic loading“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 7.4 (Jan. 1975), S. 693–703.
- [Lamb 78] Lamba, H. S.; Sidebottom, O. M.: „Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part 1: Cyclic Hardening, Erasure of Memory, and Subsequent Strain Hardening Experiments“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 100.1 (Jan. 1978), S. 96–103.
- [Lang 03] Langlais, T.; Vogel, J.; Chase, T.: „Multiaxial cycle counting for critical plane methods“. In: *International Journal of Fatigue* 25.7 (Juli 2003), S. 641–647.
- [Lang 05a] Lang, H.; Pinnau, R.; Dreßler, K.: „A multiaxial stress-strain correction scheme“. *Techn. Ber. Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik (AGTM Report)* (263), Technische Universität Kaiserslautern, 2005.
- [Lang 05b] Lang, H.; Pinnau, R.; Dreßler, K.: „Parameter optimization for a stress-strain correction scheme“. *Techn. Ber. TU Kaiserslautern, (AGTM reportNo. 264)*, 2005.
- [Lang 07] Lang, H.: „The difference of the solutions of the elastic and elastoplastic boundary value problem and an approach to multiaxial stress-strain correction“. *Diss., Technische Universität Kaiserslautern*, 2007.
- [Lang 09] Lang, H.; Dreßler, K.: „An improved multiaxial stress-strain correction model for elastic FE postprocessing“. In: (2009).
- [Lang 97] Langlais, T. E.; Vogel, J.; Socie, D.; Cordes, T.: „A Multiaxial Fatigue Life Prediction Program“. In: *European Structural Integrity Society* (1997), S. 85–95.

- [Lee 95] Lee, Y.-L.; Chiang, Y. J.; Wong, H.-H.: „A constitutive model for estimating multiaxial notch strains“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 117.1 (Jan. 1995), S. 33–40.
- [Li 17] Li, J.; Zhang, Z.-p.; Li, C.-w.: „Elastic-plastic stress-strain calculation at notch root under monotonic, uniaxial and multiaxial loadings“. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 92 (2017), S. 33–46.
- [Linn 22] Linn, A.; Kraft, J.; Wächter, M.; Beier, H. T.; Esderts, A.; Vormwald, M.: „Mehrachsigkeit örtlich - Anwendungsgerechte Lebensdauerabschätzung für mehrachsig nichtproportional beanspruchte Bauteile auf Basis des Örtlichen Konzepts“. *Techn. Ber. Abschlussbericht, FKM-Vorhaben Nr. 615, Heft 346, VDMA-Verlag, Frankfurt a.M., 2022.*
- [Linn 23] Linn, A.: „Konzept zur Lebensdauerabschätzung metallischer Bauteile unter nichtproportionaler Beanspruchung“. *Diss. TU Clausthal (IMAB), 2023.*
- [Liu 01] Liu, J.: „Dauerfestigkeitsberechnung metallischer Bauteile“. *Habilitation, TU Clausthal, 2001.*
- [Liu 93] Liu, J.; Zenner, H.: „Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 24.7 (Juli 1993), S. 240–249.
- [Lukáš 87] Lukáš, P.: „Stress intensity factor for small notch-emanated cracks“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 26.3 (Jan. 1987), S. 471–473.
- [Mans 53] Manson, S. S.: „Behavior of materials under conditions of thermal stress“. *Bd. 2933. National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.*
- [Mara 15] Marangon, C.; Campagnolo, A.; Berto, F.: „Three-dimensional effects at the tip of rounded notches subjected to mode-I loading under cyclic plasticity“. In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 50.5 (2015), S. 299–313.
- [Masi 25] Masing, G.; Mauksch, W.: „Eigenspannungen und Verfestigung des plastisch gedehnten und gestauchten Messings“. In: „*Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*“. Springer Berlin Heidelberg, 1925, S. 244–256.
- [Masi 26] Masing, G.: „Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing“. In: „*Proceedings, second international congress of applied mechanics*“. 1926, S. 332–335.
- [Mats 68] Matsuishi, M.; Endo, T.: „Fatigue of metals subjected to varying stress (in Japanisch)“. In: *Japan Society of Mechanical Engineers, Fukuoka, Japan* 68.2 (1968), S. 37–40.
- [McCl 04] McClaffin, D.; Fatemi, A.: „Torsional deformation and fatigue of hardened steel including mean stress and stress gradient effects“. In: *International Journal of Fatigue* 26.7 (Juli 2004), S. 773–784.
- [McCl 97] McClung, R. C.; Chell, G. G.; Russell, D. A.; Orient, G. E.: „A practical methodology for elastic-plastic fatigue crack growth“. In: „*Fatigue and Fracture Mechanics Bd. 27*“. Bd. 1296. *ASTM International, 1997*, S. 317–337.
- [McDo 10] McDonald, R. J.; Socie, D. F.: „An improved multiaxial method to estimate the elastic-plastic behavior from a purely elastic solution“. In: *Procedia Engineering* 2.1 (2010), S. 315–322.

- [McDo 11] McDonald, R. J.; Socie, D. F.: „A technique to estimate the local multiaxial elastic–plastic behavior from a purely elastic solution“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 78.8 (2011), S. 1696–1704.
- [Megg 12a] Meggiolaro, M. A.; de-Castro, J. T. P.: „An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories – Part I: Enclosing surface methods“. In: *International Journal of Fatigue* 42 (Sep. 2012), S. 217–226.
- [Megg 12b] Meggiolaro, M. A.; de-Castro, J. T. P.: „An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories – Part II: The Modified Wang–Brown method“. In: *International Journal of Fatigue* 42 (Sep. 2012), S. 194–206.
- [Megg 14] Meggiolaro, M. A.; de-Castro, J. T. P.: „Prediction of non-proportionality factors of multiaxial histories using the Moment Of Inertia method“. In: *International Journal of Fatigue* 61 (Apr. 2014), S. 151–159.
- [Megg 15] Meggiolaro, M. A.; Castro, J. T. P. de; Wu, H.: „Invariant-based and Critical-plane Rainflow Approaches for Fatigue Life Prediction Under Multiaxial Variable Amplitude Loading“. In: *Procedia Engineering* 101 (2015), S. 69–76.
- [Mine 45] Miner, M. A.: „Cumulative Damage in Fatigue“. In: *Journal of Applied Mechanics* 12.3 (Sep. 1945), A159–A164.
- [Mise 13] Mises, R. v.: „Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand“. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1913 (1913), S. 582–592.
- [Moft 95] Moftakhar, A.; Buczynski, A.; Glinka, G.: „Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notches under multiaxial loading“. In: *International Journal of Fracture* 70.4 (1995), S. 357–373.
- [Mols 81] Molski, K.; Glinka, G.: „A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root“. In: *Materials Science and Engineering* 50.1 (1981), S. 93–100.
- [Morr 65] Morrow, J.: „Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals“. In: *Internal friction, damping, and cyclic plasticity*, American Society for Testing and Materials STP-378 (1965).
- [Mose 20] Moser, S.; Vormwald, M.: „Structural strain approach to assess thermo-mechanical fatigue of thin-walled welded joints“. In: *International Journal of Fatigue* 139 (Okt. 2020), S. 105722.
- [Mróz 67] Mróz, Z.: „On the description of anisotropic workhardening“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15.3 (Mai 1967), S. 163–175.
- [Mróz 69] Mróz, Z.: „An attempt to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general workhardening model“. In: *Acta Mechanica* 7.2-3 (Juni 1969), S. 199–212.
- [Müll 18] Müller, C.; Wächter, M.; Thumser, R.; Dörnhöfer, A.; Heuler, P.; Esderts, A.: „Bestimmung der statistischen Stützzahl mithilfe von FE-Simulationen für die Praxis“. In: *Neue Entwicklungen für die Bauteilfestigkeitsnachweise DVM-Bericht* (2018), S. 49–58.
- [Neub 22] Neuber, H.: „Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration Genaue Berechnung der Festigkeit“. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2022.

- [Neub 36] Neuber, H.: „Theorie der technischen Formzahl“. In: *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens* 7 (1936), S. 271–274.
- [Neub 61] Neuber, H.: „Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law“. In: *J. Appl. Mech.* 28.4 (Dez. 1961), S. 544–550.
- [Neub 68] Neuber, H.: „Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen“. In: *Konstruktion* 20.7 (1968), S. 245–251.
- [Neum 21] Neumann, O.: „Zählung und Bewertung von mehrachsigen lokalen Beanspruchungszuständen infolge von nichtproportionalen Betriebslasten“. Masterthesis am Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, 2021.
- [Newm 84] Newman Jr, J.: „A crack opening stress equation for fatigue crack growth“. In: *International Journal of Fracture* (1984).
- [Novo 61] Novozhilov, V.: „Theory of Elasticity (JJ Sherrkon trans.)“ In: Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation (1961).
- [Ohno 93a] Ohno, N.; Wang, J.-D.: „Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratchetting behavior“. In: *International Journal of Plasticity* 9.3 (Jan. 1993), S. 375–390.
- [Ohno 93b] Ohno, N.; Wang, J.-D.: „Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part II: Application to experiments of ratchetting behavior“. In: *International Journal of Plasticity* 9.3 (Jan. 1993), S. 391–403.
- [Orti 85] Ortiz, M.; Popov, E. P.: „Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21.9 (Sep. 1985), S. 1561–1576.
- [Orti 86] Ortiz, M.; Simo, J. C.: „An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23.3 (März 1986), S. 353–366.
- [Palm 24] Palmgren, A.: „Die Lebensdauer von Kugellagern“. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 68.4 (1924), S. 339.
- [Papa 98] Papadopoulos, I.: „Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane“. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures* 21.3 (März 1998), S. 269–285.
- [Pött 01] Pötter, K. J.: „Lebensdauerabschätzung ein- und mehrachsig schwingend beanspruchter Bauteile“. Diss. TU-Clausthal, 2001.
- [Prag 55] Prager, W.: „The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 169.1 (Juni 1955), S. 41–57.
- [Rada 07] Radaaj, D.; Vormwald, M.: „Ermüdungsfestigkeit (3. Auflage)“. Springer, 2007.
- [Raju 79] Raju, I.; Newman, J.: „Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 11.4 (Jan. 1979), S. 817–829.
- [Ramb 43] Ramberg, W.; Osgood, W. R.: „Description of stress-strain curves by three parameters“. *Techn. Ber. National Advisory Committee for Aeronautics*, 1943.

- [Rank 57] Rankine, W. J. M.: „On the stability of loose earth“. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London 147 (Dez. 1857), S. 9–27.
- [Renn 12] Rennert, R.; Kullig, E.; Vormwald, M.; Esderts, A.; Luke, M.: „Analytical Strength Assessment of Components: FKM Guideline 6th Edition“. VDMA Verlag GmbH, Jan. 2012. 232 S.
- [Rice 68] Rice, J. R.: „A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks“. In: Journal of Applied Mechanics 35.2 (Juni 1968), S. 379–386.
- [Ries 16] Riess, C.; Obermayr, M.; Vormwald, M.: „The non-proportionality of local stress paths in engineering applications“. In: Frattura ed Integrità Strutturale 10.37 (Juni 2016), S. 52–59.
- [Ries 18] Riess, C.; Hiese, W.; Obermayr, M.; Vormwald, M.: „Engineering approaches to multiaxial and non-proportional fatigue of notched components“. In: Materialwissenschaft und Werkstofftechnik 49.3 (März 2018), S. 381–391.
- [Ries 19] Riess, C.: „Vereinfachte Ansätze zur Lebensdaueranalyse gekerbter Bauteile unter mehrachsiger und nichtproportionaler Beanspruchung“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 128, 2019.
- [Ross 64] Rossow, E.: „Eine einfache Rechenschiebernäherung an die den normal scores entsprechenden Prozentpunkte“. In: Qualitätskontrolle 9.12 (1964), S. 146–147.
- [Saal 75] Saal, H.: „Näherungsformeln für die Dehnungsformzahl / Approximate formulae for the calculation of strain concentration factors“. In: Materials Testing 17.11 (Nov. 1975), S. 395–398.
- [Sava 95] Savaidis, G.: „Berechnung der Bauteilanrisslebensdauer bei mehrachsiger proportionalen Beanspruchungen“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 54, 1995.
- [Schi 82] Schijve, J.: „The stress intensity factor of small cracks at notches“. In: Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures 5.1 (Jan. 1982), S. 77–90.
- [Schm 20] Schmidt, A.: „Betriebsfestigkeit unter stochastischen Belastungen“. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 130, 2020.
- [Schm 21] Schmidt, A. T.; Pandiya, N.: „Extension of the static equivalent stress hypotheses to linearly vibrating systems using wave interference - The LiWi approach“. In: International Journal of Fatigue 147 (Juni 2021), S. 106103.
- [Schm 23] Schmidt, A. T.; Kraft, J.: „A new equivalent stress approach based on complex invariants: The COIN LiWi method“. In: International Journal of Fatigue 168 (März 2023), S. 107474.
- [Schü 67] Schütz, W.: „Über eine Beziehung bei konstanter und bei veränderlicher Beanspruchungsamplitude und ihre Anwendbarkeit bei der Bemessung von Flugzeugbauteilen“. In: Zeitschrift für Flugwissenschaften 15 S. 407-419 (1967).
- [Seeg 77] Seeger, T.; Beste, A.: „Zur Weiterentwicklung von Näherungsformeln für die Berechnung von Kerbbeanspruchungen im elastisch-plastischen Bereich“. VDI-Verlag, 1977.

- [Seeg 80] Seeger, T.; Heuler, P.: „Generalized application of Neuber’s rule“. In: Journal of Testing and Evaluation 8.4 (1980), S. 199–204.
- [Seeg 84] Seeger, T.; Heuler, P.: „Ermittlung und Bewertung örtlicher Beanspruchungen zur Lebensdauerabschätzung schwingbelastender Bauteile“. Bericht FF-20/1984, Fachgebiet Werkstoffmechanik, 1984.
- [Seeg 96] Seeger, T.: „Grundlagen für Betriebsfestigkeitsnachweise“. Stahlbau - Verlagsgesellschaft Köln, Bd.1 Teil B, S.5-123, 1996.
- [Sham 09] Shamsaei, N.; Fatemi, A.: „Effect of hardness on multiaxial fatigue behaviour and some simple approximations for steels“. In: Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures 32.8 (Juli 2009), S. 631–646.
- [Shih 76] Shih, C. F.; Hutchinson, J. W.: „Fully plastic solutions and large scale yielding estimates for plane stress crack problems“. In: Journal of Engineering Materials and Technology 98.4 (Okt. 1976), S. 289–295.
- [Simb 75] Simbürger, A.: „Festigkeitsverhalten zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen, phasenverschobenen Schwingbeanspruchung mit körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen“. Bericht. Fraunhofer-Ges. zur Förderung d. Angewandten Forschung e.V. Band 121, 1975.
- [Simo 86] Simo, J. C.; Taylor, R. L.: „A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity“. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 22.3 (März 1986), S. 649–670.
- [Simo 91] Simo, J. C.; Govindjee, S.: „Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity“. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 31.1 (Jan. 1991), S. 151–176.
- [Simo 98] Simo, J. C.; Hughes, T. J.: „Computational inelasticity“. Bd. 7. Springer Science & Business Media, 1998.
- [Sing 96] Singh, M.; Glinka, G.; Dubey, R.: „Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading“. In: International Journal of Fracture 76.1 (1996), S. 39–60.
- [Sing 97] Singh, M. N.; Buczynski, A.; Glinka, G.: „Notch stress-strain analysis in multiaxial fatigue“. In: European Structural Integrity Society 22 (1997), S. 113–124.
- [Smit 09] Smith, M.: „ABAQUS/Standard User’s Manual, Version 6.9“. English. United States: Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009.
- [Smit 70] Smith, R.; Watson, P.; Topper, T.: „A stress-strain parameter for the fatigue of metals“. In: Journal of Materials 5.4 (1970), S. 767–778.
- [Soci 00] Socie, D.; Marquis, G. B.: „Multiaxial fatigue“. Society of Automotive Engineers Warrendale, PA, 2000.
- [Soci 87] Socie, D.: „Multiaxial Fatigue Damage Models“. In: Journal of Engineering Materials and Technology 109.4 (Okt. 1987), S. 293–298.
- [Stie 54] Stieler, M.: „Untersuchungen über die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile bei Raumtemperatur“. Diss. Technische Hochschule, Stuttgart, 1954.
- [Stow 50] Stowell, E. Z.: „Stress and strain concentration at a circular hole in an infinite plate“. Techn. Ber. NACA, 1950.

- [Sund 20] Sunde, S. L.; Berto, F.; Haugen, B.: „Efficient implementation of critical plane for 3D stress histories using triangular elements“. In: *International Journal of Fatigue* 134 (2020), S. 105448.
- [Tana 94] Tanaka, E.: „A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening“. In: *European journal of mechanics. A. Solids* 13.2 (1994), S. 155–173.
- [Topp 67] Topper, T. H.; Wetzell, R. M.; Morrow, J.: „Neubers rule applied to fatigue of notched specimens“. In: *Illinois Univ. at Urbana dept. of theoretical and applied mechanics* (1967).
- [Tres 64] Tresca, H.: „Memoir on the flow of solid bodies under strong pressure“. In: *Comptesrendus de l'académie des sciences, Paris, France* 59 (1864), S. 754.
- [Vorm 23] Vormwald, M.: „Betriebsfestigkeit auf der Grundlage örtlicher Beanspruchungen“. *Unterlagen zur universitären Weiterbildung, Fachgebiet Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, 2023.*
- [Vorm 89] Vormwald, M.: „Anrißlebensdauervorhersage auf der Basis der Schwingbruchmechanik für kurze Risse“. *Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 47, 1989.*
- [Vorm 94] Vormwald, M.; Heuler, P.; Krae, C.: „Spectrum fatigue life assessment of notched specimens using a fracture mechanics based approach“. In: *ASTM special technical publication 1231* (1994), S. 221–221.
- [Wäch 16] Wächter, M.: „Zur Ermittlung von zyklischen Werkstoffkennwerten und Schädigungsparameterwöhlerlinien“. *Diss. Technische Universität Clausthal Clausthal-Zellerfeld, Germany, 2016.*
- [Wäch 21] Wächter, M.; Müller, C.; Esderts, A.: „Angewandter Festigkeitsnachweis nach FKM-Richtlinie“. *Springer Fachmedien Wiesbaden, 2021.*
- [Wäch 22] Wächter, M.; Linn, A.; Burghardt, R.; Esderts, A.; Gaier, C.; Kraft, J.; Fällgren, C.; Vormwald, M.: „On scaled normal stresses in multiaxial fatigue and their exemplary application to ductile cast iron“. In: *Applied Mechanics* (2022).
- [Wang 96a] Wang, C. H.; Brown, M. W.: „Life Prediction Techniques for Variable Amplitude Multiaxial Fatigue - Part 1: Theories“. In: *J. Eng. Mater. Technol.* 118.3 (Juli 1996), S. 367–370.
- [Wang 96b] Wang, C. H.; Brown, M. W.: „Life Prediction Techniques for Variable Amplitude Multiaxial Fatigue - Part 2: Comparison with experimental results“. In: *J. Eng. Mater. Technol.* (1996).
- [Webe 99] Weber, B.; Kenmeugne, B.; Clement, J.; Robert, J.: „Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration“. In: *Computational materials science* 15.4 (1999), S. 381–399.
- [Weib 39] Weibull, W.: „A statistical theory of strength of materials“. In: *Proc. Roy. Swed. Inst. f. Eng. Res. No. 151, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm* (1939).
- [Weib 59] Weibull, W.: „Zur Abhängigkeit der Festigkeit von der Probengröße“. In: *Ingenieur-Archiv* 28.1 (1959), S. 360–362.

- [Went 18] Wentingmann, M.; Noever-Castelos, P.; Balzani, C.: „An adaptive algorithm to accelerate the critical plane identification for multiaxial fatigue criteria“. In: „Proceedings of 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6)/7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7)“. 2018, S. 11–15.
- [Wuth 24] Wuthenow, R.; Wächter, M.; Esderts, A.; Fällgren, C.; Beier, H. T.; Vormwald, M.: „Erweiterung des Ermüdungsfestigkeitsnachweises der FKM-Richtlinie Rechnerischer Festigkeitsnachweis zur Anwendung auf mehrkanalig nichtproportionale Lasten - FKM Mehrkanalig (noch nicht veröffentlicht)“. Techn. Ber. Abschlussbericht, FKM-Vorhaben Nr. 618, AiF Vorhaben Nr. 20613, Heft , VDMA-Verlag, Frankfurt a.M., 2024.
- [Wüth 82] Wüthrich, C.: „The extension of the J-integral concept to fatigue cracks“. In: *International Journal of Fracture* 20.2 (Okt. 1982), R35–R37.
- [Xin 16] Xin, P.: „Zur Betriebsfestigkeit von 50CrMo4 V und G-AlSi7Mg0,3 T6 bei mehrachsiger Beanspruchung“. Clausthal-Zellerfeld: Disstertation, IMAB, TU-Clausthal, 2016.
- [Yade 21] Yadegari, P.; Schlitzer, T.; Vormwald, M.: „Approximation of elastic-plastic local strains in surface-hardened notched components“. In: *MATEC Web of Conferences* 349 (2021). Hrsg. von Pantelakis, S.; Lampeas, G.; Tserpes, K., S. 04008.
- [Yade 23] Yadegari, P.: „Schwingfestigkeit randschichtverfestigter Bauteile und höchstfester Stähle.“ Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt, Heft 135, 2023.
- [Ye 04] Ye, D.: „Further investigation of Neuber’s rule and the equivalent strain energy density (ESED) method“. In: *International Journal of Fatigue* 26.5 (2004), S. 447–455.
- [Ye 08] Ye, D.; Hertel, O.; Vormwald, M.: „A unified expression of elastic–plastic notch stress–strain calculation in bodies subjected to multiaxial cyclic loading“. In: *International Journal of Solids and Structures* 45.24 (2008), S. 6177–6189.
- [Zach 94] Zacher, P.: „Verfahren zur Lebensdauerabschätzung äußerlich mehrkomponentig, örtlich einachsig beanspruchter Bauteile“. Fachgebiet Werkstomechanik, TH Darmstadt, 1994.
- [Zenn 77] Zenner, H.; Richter, I.: „Eine Festigkeitshypothese für die Dauerfestigkeit bei beliebigen Beanspruchungskombinationen“. In: *Konstruktion* 32 Heft 1 S. 11-18 (1977).
- [Zenn 80] Zenner, H.; Heidenreich, R.; Richter, I.: „Schubspannungsintensitätshypothese - Erweiterung und experimentelle Abstützung einer neuen Festigkeitshypothese für schwingende Beanspruchung“. In: *Konstruktion* 32, Heft 4, S. 143–152 (1980).
- [Zhao 08] Zhao, T.; Jiang, Y.: „Fatigue of 7075-T651 aluminum alloy“. In: *International Journal of Fatigue* 30.5 (Mai 2008), S. 834–849.



# Tabellenverzeichnis

2.1. Parameter des Ohno/Wang Modells . . . . .	49
2.2. Kerbformzahlen der gekerbten Rundstäbe . . . . .	63
2.3. Traglastformzahlen der gekerbten Rundstäbe . . . . .	63
2.4. Übersicht über die zur Validierung der Kerbnäherungsmethoden mit FEM simulierten Lastfälle . . . . .	70
2.5. Qualität der Kerbnäherungsmethoden im Vergleich zu den Ergebnissen aus FE-Simulationen . . . . .	71
3.1. Werkstoffparameter des Kurzrissmodells . . . . .	122
3.2. Beiwerte zum Abschätzen der $P_z$ -Wöhlerlinie . . . . .	124
4.1. Statische Werkstoffkennwerte . . . . .	130
4.2. Zyklische Werkstoffkennwerte . . . . .	132
4.3. Zyklische Werkstoffkennwerte für Schubbelastung . . . . .	134
4.4. Werkstoffkennwerte für das Smith/Watson/Topper Modell . . . . .	140
4.5. Werkstoffkennwerte für das Fatemi/Socie Modell . . . . .	141
4.6. Werkstoffkennwerte für das Kurzrissmodell . . . . .	144
4.7. Hochbeanspruchte Oberflächen in $\text{mm}^2$ und statistische Stützziffer . . . . .	145
4.8. Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an ungekerbten Werkstoffproben und Aufteilung in verschiedene Belastungsarten und Werkstoffe . . . . .	154
5.1. Übersicht über alle werkstoffabhängigen Eingabegrößen des Berechnungsalgorithmus	166
5.2. Übersicht über alle geometrieabhängigen Eingabegrößen des Berechnungsalgorithmus	167
5.3. Datenbankquellen . . . . .	178
5.4. Anrissdefinitionen in der Datenbank . . . . .	178
5.5. Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit gemessenen Werkstoffdaten . . . . .	179
5.6. Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit abgeschätzten Werkstoffdaten . . . . .	180
5.7. Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit gemessenen Werkstoffdaten im Vergleich zu den Ergebnissen aus [Linn 23] . . . . .	190
5.8. Statistische Auswertung der nachgerechneten Versuche an gekerbten Proben mit abgeschätzten Werkstoffdaten im Vergleich zu den Ergebnissen aus [Linn 23] . . . . .	191
A.1. Parameter des Ohno/Wang Modells für die Vergleichsrechnungen zwischen Kerbnäherungsverfahren und FEM . . . . .	221
A.2. Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Spannungsansatz für Bauteilfließkuren aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius $\rho = 2 \text{ mm}$ . . . . .	222
A.3. Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Dehnungsansatz für Bauteilfließkuren aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius $\rho = 2 \text{ mm}$ . . . . .	223

A.4. Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Spannungsansatz für Bauteilfließkuren aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius $\rho = 0.5$ mm . . . . .	224
A.5. Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Dehnungsansatz für Bauteilfließkuren aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius $\rho = 0.5$ mm . . . . .	225
A.6. Parameter des Ohno/Wang Modells für den Werkstoff S355 . . . . .	226
A.7. Parameter des Ohno/Wang Modells für den Werkstoff EN-GJS-500-14 . . . . .	227
B.1. Versuchsprogramm der Schwingversuche an gekerbten Rundproben aus S355 . . . . .	230
B.2. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_N . . . . .	231
B.3. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_T . . . . .	232
B.4. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_P . . . . .	233
B.5. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_NP . . . . .	234
B.6. Ergebnisse der Versuchsreihe K2_NP_0_1 . . . . .	235
B.7. Ergebnisse der Versuchsreihe K20_P . . . . .	236
B.8. Ergebnisse der Versuchsreihe K2_NP . . . . .	237
B.9. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_SZZT . . . . .	238
B.10. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_NP_GAUSS . . . . .	239
B.11. Ergebnisse der Versuchsreihe K2_NP_GAUSS . . . . .	240
B.12. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_NP_UK . . . . .	241
B.13. Ergebnisse der Versuchsreihe K2_NP_UK . . . . .	242

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Einordnung des Spannungszustands in der Kerbe nach [Seeg 96], Grafik nach [Rada 07]	2
1.2. Ablaufschema des Berechnungsalgorithmus . . . . .	4
2.1. Spannungszustand in der Kerbe . . . . .	9
2.2. Schematische Übersicht über Brutto- und Netto- Nennspannungen bei einfacher Zugbelastung . . . . .	11
2.3. Masing-Verhalten des Werkstoffs nach [Clor 86] . . . . .	12
2.4. Spannungsfolge und zugehöriger Spannungs-Dehnungs-Pfad mit Memory Effekten nach [Clor 86] . . . . .	13
2.5. Schematische Darstellung der Neuber-Regel . . . . .	14
2.6. Bauschinger Effekt . . . . .	16
2.7. Schematische Darstellung der zyklischen Entfestigung bei Lastkontrolle . . . . .	17
2.8. Schematische Darstellung des Mitteldehnungskriechens bei Lastkontrolle . . . . .	18
2.9. Normalspannungs-Dehnungs-Hysterese (a) und Schubspannungs-Gleitungs-Hysterese (b) bei proportionaler und 90° phasenverschobener Sinus-Beanspruchung für EN-GJS-500-14 aus dem Projekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] . . . . .	19
2.10. Geometrie der Fließbedingung nach von Mises (links) im Hauptspannungsraum und (rechts) in der $\pi$ -Ebene . . . . .	20
2.11. Schematische Darstellung der isotropen und kinematischen Verfestigung . . . . .	21
2.12. Nichtlineare Verfestigungskinetik von Armstrong und Frederick nach [Vorm 23] . . . . .	22
2.13. Schematische Darstellung der abschnittswisen Linearisierung einer Fließkurve. . . . .	24
2.14. Näherung der nichtproportionalen Verfestigung im Vergleichsspannungs-Vergleichsdehnungs-Diagramm für den Baustahl S355 aus dem Projekt „Mehrachsigkeit örtlich“ [Linn 22] . . . . .	26
2.15. Phasendiagramm der Spannungen bei 90° phasenverschobener Sinus-Beanspruchung unter Verzerrungsvorgabe für den Baustahl S355 aus [Linn 22]. Dargestellt sind gemessene Spannungen sowie simulierte Spannungen mit und ohne Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung (NPV). . . . .	27
2.16. Nichtproportionalitätskennzahlen über aufgebrachtter Phasenverschiebung für mehrere Amplitudenverhältnisse $\lambda$ aus [Kern 19] . . . . .	28
2.17. Schematische Darstellung der inkrementellen ESED- und der inkrementellen Neuber-Methode . . . . .	31
2.18. Aufteilung der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Kurve und der zyklischen Bauteilfließkurve in elastische und plastische Anteile für den Pseudo-Spannungsansatz. . . . .	34
2.19. Aufteilung der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Kurve und der zyklischen Bauteilfließkurve in elastische und plastische Anteile für den Pseudo-Dehnungsansatz. . . . .	36
2.20. Schematische Darstellung des Prädiktor-Korrektor Verfahrens unter Vorgabe der Dehnungen . . . . .	40
2.21. Flussdiagramm des Algorithmus des radial return Verfahrens . . . . .	44
2.22. Fließkurven und Anzahl der Iterationsschritte bis zur Konvergenz der Fixpunktiteration erzeugt mit dem Ohno/Wang Modell für verschiedene Inkrementgrößen (a) bei Dehnungsvorgabe und (b) bei Spannungsvorgabe . . . . .	49
2.23. Flussdiagramm des Pseudo-Dehnungsansatzes . . . . .	50

2.24. Kopplung des Struktur- und Werkstoffmodells im Pseudo-Spannungsansatz . . . . .	52
2.25. Flussdiagramm des Pseudo-Spannungsansatzes . . . . .	53
2.26. Bauteilfließkurven der Strukturfließflächenansätze berechnet aus der Neuber-Methode und dem Verfahren nach Seeger/Heuler für (a) den Pseudo-Spannungsansatz und (b) den Pseudo-Dehnungsansatz. Ebenfalls dargestellt ist der Verlauf des plastischen Tangentenmoduls. . . . .	55
2.27. (a) Verlauf des Sternterm $Ee^*/S^*$ über die pseudo Kerbdehnungen. (b) Vergleich der Neuber-Methode und der Näherungsmethode nach Seeger/Heuler . . . . .	55
2.28. Linearisierte BFK für den Pseudo-Dehnungsansatz . . . . .	56
2.29. Modell der Kerbe mit dünner Randschicht und Eigenspannungen $\sigma_{eig}$ unter Zugbelastung $\sigma_L$ , Last-Dehnungs-Pfade und örtliche Beanspruchungspfade nach [Rada 07] .	57
2.30. Ergebnisse des Kerbnäherungsverfahrens „dünne Randschicht“ für eine proportionale Belastung mit einem Lastverhältnis von $R = 0$ (a) Vorgegebene Fließkurven des Grundwerkstoffs und der Randschicht und (b) Ergebnisse der Kerbnäherungsverfahren in Vergleichsgrößen . . . . .	58
2.31. Ergebnisse des Kerbnäherungsverfahrens „dünne Randschicht“ für eine nichtproportionale Belastung mit Mittellasten. (a) Lastzeitreihen (b)-(d) Hysteresen der lokalen Kerbspannungen und -dehnungen . . . . .	59
2.32. Vergleich der Ergebnisse der verschiedenen Kerbnäherungsverfahren für gekerbte Bauteile mit fester Randschicht . . . . .	60
2.33. Axialsymmetrisches FE-Modell der gekerbten Rundprobe (beispielhaft für Kerbradius $\rho = 0.5$ mm) mit Randbedingungen . . . . .	62
2.34. Bauteilfließkurven für den Pseudo-Spannungsansatz . . . . .	64
2.35. Bauteilfließkurven für den Pseudo-Dehnungsansatz . . . . .	64
2.36. Fehler der Relaxations- und Ratchettingraten aufgetragen über den Parameter ${}^e\chi$ mit einer Bauteilfließkurve nach Neuber für die Kerbprobe mit Radius $\rho = 2$ mm auf dem Lastniveau $S_N = 100$ MPa . . . . .	66
2.37. Ergebnisse der Relaxations- und Ratchettingraten mit einer Bauteilfließkurve nach Neuber für die Kerbprobe mit Radius $\rho = 2$ mm. Für die hier gezeigten Ergebnisse wurden für jedes Lastniveau eigene Parameter ${}^e\chi$ bestimmt. . . . .	67
2.38. Angepasste Ratchetting Parameter für beide Kerbproben und Strukturfließflächenansätze . . . . .	68
2.39. Ergebnisse der Relaxations- und Ratchettingraten mit einer Bauteilfließkurve nach Neuber für die Kerbprobe mit Radius $\rho = 2$ mm. . . . .	69
2.40. Mit dem Pseudo-Spannungsansatz berechnete Amplituden im Vergleich mit den aus Finiten-Elemente-Rechnungen ermittelten Amplituden . . . . .	72
2.41. Mit dem Pseudo-Dehnungsansatz berechnete Amplituden im Vergleich mit den aus Finiten-Elemente-Rechnungen ermittelten Amplituden . . . . .	73
2.42. Mit der Unified Expression berechnete Amplituden im Vergleich mit den aus Finiten-Elemente-Rechnungen ermittelten Amplituden . . . . .	74
2.43. Vergleich der Rechenzeiten der verschiedenen Kerbnäherungsmethoden für die Kerbprobe $\rho = 0.5$ mm unter (a) proportionaler Belastung mit $R = -1$ und 10 simulierten Lastzyklen und (b) proportionaler Belastung mit $R = 0$ und 100 simulierten Lastzyklen	75
2.44. Vergleich zwischen FE-Rechnung und Kerbnäherungsverfahren für proportionale Belastung und dem Kerbradius $\rho = 2$ mm. . . . .	76
2.45. Vergleich zwischen FE-Rechnung und Kerbnäherungsverfahren für 90° phasenverschobene Belastung und dem Kerbradius $\rho = 2$ mm. . . . .	77
2.46. Vergleich zwischen FE-Rechnung und Kerbnäherungsverfahren für statischen Zug und eine zyklische Torsion und dem Kerbradius $\rho = 2$ mm. . . . .	78

2.47. Vergleich der gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für (a) Zug-Druck Last (b) Torsion (c) proportionale Belastung (d) 90° phasenverschobene Belastung auf mehreren Lasthorizonten. Berechnungen mit dem Ohno/Wang Modell . . . . .	80
2.48. Vergleich der gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für eine 90° phasenverschobene Belastung mit einem Lastverhältnis von $R = 0$ für beide Lastkanäle. Die Berechnungen wurden mit dem Ohno/Wang Modell durchgeführt. . . . .	81
2.49. Ratchettingraten für 90° phasenverschobene Belastung mit Lastverhältnis $R = 0$ . . .	81
2.50. Vergleich der gemessenen und berechneten Kerbdehnungen für eine 90° phasenverschobene Belastung mit einem Lastverhältnis von $R = 0$ für beide Lastkanäle. Die Berechnungen wurden mit dem Chaboche Modell durchgeführt. . . . .	82
3.1. Schematische Darstellung der Dehnungswöhlerlinie . . . . .	84
3.2. Schematische Darstellung des Haigh-Diagramms nach FKM-Richtlinie linear [Renn 12] . . . . .	86
3.3. Modifikationen der Miner-Regel unterhalb der Dauerfestigkeit . . . . .	88
3.4. Beispiel für die vorzeichenbehaftete Vergleichsspannung bei (a) proportionaler Beanspruchung und (b) nichtproportionaler Beanspruchung . . . . .	93
3.5. Definition einer materiellen Schnittebene in Abhängigkeit der Schnittwinkel $\varphi$ und $\psi$ . . . . .	94
3.6. Definition des Koordinatensystems der aktuellen Schnittebene durch die Drehwinkel $\varphi$ und $\psi$ . . . . .	96
3.7. Lage der Schnittebene im „Schnittkoordinatensystem“ $\{x_s, y_s, z_s\}$ . . . . .	96
3.8. Schematische Darstellung von Zugrissen nach [Soci 00] . . . . .	98
3.9. Vergleich der Schädigungsparameterwöhlerlinien für den Schädigungsparameter $P_{RAM}$ . . . . .	99
3.10. Haigh-Diagramm erzeugt mit dem Schädigungsparameter $P_{RAM}$ . . . . .	100
3.11. Physikalische Begründung des Fatemi/Sociers Modells nach [Soci 00] . . . . .	101
3.12. Vergleich zwischen den Schädigungsparameterwöhlerlinien für ein anhand von Versuchsergebnissen bestimmtes und abgeschätztes $k_{FS}/\sigma_F$ für die Werkstoffe (a) S355, (b) EN-GJS-500-14, (c) S460N und (d) AW-5083 . . . . .	104
3.13. Darstellung des bilinearen Ansatzes der Schädigungsparameterwöhlerlinie für den Fatemi/Socie Parameter nach Gleichung (3.35) . . . . .	105
3.14. Vergleich zwischen der an Versuchsergebnisse angepassten und aus Zugfestigkeit abgeschätzten Schädigungsparameterwöhlerlinie für den Werkstoff S355 . . . . .	106
3.15. Verlauf der Schnittdehnungen in einer beliebigen Ebene während eines beliebigen Belastungszyklus . . . . .	106
3.16. Verfahren der längsten Projektion zum Berechnen der Gleitungsamplitude . . . . .	107
3.17. Schematische Darstellung von Typ A und Typ B Rissen für den Fatemi/Socie Schädigungsparameter . . . . .	108
3.18. Gleitungsamplituden in Abhängigkeit der Schnittwinkel des kritischen Ebenen Verfahrens für verschiedene Lastfälle . . . . .	109
3.19. Vergleich der Rechenzeiten zwischen mehrachsiger Zyklen-Zählung (MWB+MOI) und dem vorgestellten Verfahren (Projektion+HCM) für eine Lebensdauerrechnung mit dem Fatemi/Socie Parameter . . . . .	110
3.20. Haigh-Diagramm erzeugt mit dem Schädigungsparameter $P_{FS}$ . . . . .	111
3.21. Geometrie des angenommenen kurzen Risses nach [Hert 16] . . . . .	111
3.22. Darstellung der $P_Z$ Wöhlerlinie . . . . .	124
3.23. Ein Vergleich der Schädigungsparameterwöhlerlinien für den $P_Z$ Parameter und den Baustahl S355 ermittelt aus der gemessenen Dehnungswöhlerlinie und abgeschätzt aus der Zugfestigkeit $R_m$ . . . . .	125
3.24. Einfluss der Parameter $a_{tors}$ und $\tau_{akt}$ (in MPa) auf den Schädigungsparameter aufgetragen über Gleitungsamplituden für die unterschiedlichen Rissöffnungsmoden . . . . .	126
3.25. Modellparameter $a_{mitt}$ in Abhängigkeit des Werkstoffkennwerts $M_\sigma$ für die Werkstoffgruppen Stahl, Aluminiumknetlegierung und Stahlguss . . . . .	127

3.26. Haigh-Diagramm erzeugt mit dem Schädigungsparameter $P_z$ . . . . .	128
4.1. Zugprobe DIN 50125-A8x40, [DIN 50125]. . . . .	130
4.2. Vollprobe zum Bestimmen der Dehnungswöhlerlinie (a) Probengeometrie (b) Einge- spannte Probe mit aufgesetztem Dehnungsaufnehmer . . . . .	131
4.3. Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Dehnungswöhlerlinie für den Werkstoff S355	131
4.4. Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Dehnungswöhlerlinie für den Werkstoff EN-GJS-500-14 . . . . .	132
4.5. Hohlprobe zum Bestimmen der Gleitungswöhlerlinie (a) Probengeometrie (b) Einge- spannte Probe mit aufgesetztem Dehnungsaufnehmer . . . . .	133
4.6. Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Gleitungswöhlerlinie für den Werkstoff S355	133
4.7. Zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve und Gleitungswöhlerlinie für den Werkstoff EN-GJS-500-14 . . . . .	134
4.8. Schematische Darstellung der Phasendiagramme aller gefahrener Belastungsarten . .	135
4.9. Schematische Darstellung der $\sigma - \varepsilon$ Hysteresenformen unterschiedlicher Beanspru- chungsarten . . . . .	135
4.10. (a) Normalspannungs-Dehnungs-Hysterese und (b) Schubspannungs-Gleitungs-Hysterese bei proportionaler und 90°-phasenverschobener Sinus-Beanspruchung für EN-GJS- 500-14 . . . . .	135
4.11. (a) Normalspannungs-Dehnungs-Hysterese und (b) Schubspannungs-Gleitungs-Hysterese bei proportionaler und 90°-phasenverschobener Sinus-Beanspruchung für S355 . . .	136
4.12. Varianten zur Auswertung der nichtproportionalen Spannungs-Dehnungs-Hysterese aus [Linn 23] . . . . .	137
4.13. Ergebnisse der dehnungsgeregelten Einstufen Versuche am Werkstoff S355 im Vergleich mit dem Ohno/Wang Modell für (a) die zyklisch stabilisierten Hysteresen und (b) die zyklische Ver- und Entfestigung . . . . .	138
4.14. Ergebnisse der dehnungsgeregelten Einstufen Versuche am Werkstoff EN-GJS-500-14 im Vergleich mit dem Ohno/Wang Modell für (a) die zyklisch stabilisierten Hysteresen und (b) die zyklische Ver- und Entfestigung . . . . .	139
4.15. Hysteresen unter 90° phasenverschobener Belastung mit Dreieckssignal für (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14 . . . . .	139
4.16. Schädigungsparameterwöhlerlinie für das Smith/Watson/Topper Modell und die Werkstoffe (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14 . . . . .	140
4.17. Schädigungsparameterwöhlerlinie für das Fatemi/Socie Modell und die Werkstoffe (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14 . . . . .	142
4.18. Schädigungsparameterwöhlerlinie für das Kurzrisssmodell und die Werkstoffe (a) S355 und (b) EN-GJS-500-14 . . . . .	142
4.19. Gleitungswöhlerlinie berechnet mit dem Kurzrisssmodell unter Variation des Modell- parameters $\tau_{akt}$ . . . . .	143
4.20. Schematische Darstellung der normierten Schädigung pro Zyklus über die verschiede- nen Schnittebenen, berechnet mit dem Kurzrisssmodell . . . . .	146
4.21. Anrisslebensdauer der Hohlproben bei reiner Torsion, für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 . . . . .	147
4.22. Anrissorientierungen unter reiner Torsion für den Werkstoff S355 und die verschiede- nen Schädigungsparameter . . . . .	147
4.23. Anrissorientierungen unter reiner Torsion für den Werkstoff EN-GJS-500-14 und die verschiedenen Schädigungsparameter . . . . .	147
4.24. Anrisslebensdauer der Hohlproben bei proportionaler Belastung, für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 . . . . .	149
4.25. Anrissorientierungen unter proportionaler Beanspruchung für den Werkstoff S355 und die verschiedenen Schädigungsparameter . . . . .	149

4.26. Anrissorientierungen unter proportionaler Beanspruchung für den Werkstoff EN-GJS-500-14 und die verschiedenen Schädigungsparameter . . . . .	149
4.27. Anrisslebensdauer der Hohlproben bei proportionaler Einstufen- und Betriebsbelastung, für die beiden Werkstoffe S460N und AW-5083 . . . . .	150
4.28. Anrisslebensdauer der Hohlproben aus S355 bei um 90° phasenverschobener Belastung berechnet mit Kurzrißmodell, mit und ohne Berücksichtigung der nichtproportionalen Verfestigung . . . . .	151
4.29. Anrisslebensdauer der Hohlproben bei um 90° phasenverschobener Belastung, für die beiden Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 . . . . .	152
4.30. Anrissorientierungen unter 90° phasenverschobener Beanspruchung für den Werkstoff S355 und die verschiedenen Schädigungsparameter . . . . .	152
4.31. Anrissorientierungen unter 90° phasenverschobener Beanspruchung für den Werkstoff EN-GJS-500-14 und die verschiedenen Schädigungsparameter . . . . .	152
4.32. Anrisslebensdauer der Hohlproben bei um 90° phasenverschobener Einstufen- und Betriebsbelastung für die beiden Werkstoffe S460N und AW-5083 . . . . .	153
4.33. Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) für alle Werkstoffversuche und alle untersuchten Schädigungsparameter	155
4.34. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anrisslebensdauerprognose der drei Schädigungsmodelle: (obere Reihe) Wahrscheinlichkeitsverteilung aller nachgerechneten Versuche, (mittlere Reihe) Aufteilung der Ergebnisse nach Art der Belastung und (untere Reihe) Aufteilung der Ergebnisse nach Werkstoff . . . . .	156
5.1. Geometrie der gekerbten Rundprobe . . . . .	162
5.2. Eingespannte Rundprobe mit aufgesetzten Kameras . . . . .	163
5.3. Risswachstum an einer gekerbten Rundprobe, Kamerabild vor Beanspruchungsbeginn ohne Riss (a), Kamerabild nach 32500 Schwingspielen mit Anriss (b) und Kamerabild nach 80900 Schwingspielen kurz vor Bruch der Probe (c) . . . . .	163
5.4. Testrechnungen zum Festlegen des Filterniveaus mit dem Gaußprofil . . . . .	164
5.5. Übersicht über den Berechnungsalgorithmus . . . . .	165
5.6. Ermittlung des bezogenen Spannungsgradienten, der hochbeanspruchten Oberfläche und der plastischen Traglastform bei nichtproportionalen Beanspruchungen (hier auf Grund von zwei Lastkanälen) mit Hilfe der meistschädigenden Laststufe, nach [Linn 23]	169
5.7. Bauteilfließkurven in Nennspannungen für proportionale Belastung (a) für den Kerbradius $\rho = 0.5$ mm und (b) für den Kerbradius $\rho = 2.0$ mm . . . . .	172
5.8. Einfluss der Bauteilfließkurve auf die rechnerische Anrisslebensdauer mit dem Kurzrißmodell $P_Z$ (a) für den Kerbradius $\rho = 0.5$ mm und (b) für den Kerbradius $\rho = 2.0$ mm . . . . .	172
5.9. Vergleich der Anrisslebensdauer bei proportionaler Belastung und bei 90° Phasenverschiebung für (a) für den Kerbradius $\rho = 0.5$ mm und (b) für den Kerbradius $\rho = 2.0$ mm . . . . .	173
5.10. Rechnerische Bauteilwöhlerlinie für proportionale, einstufige Belastung (a) für den Kerbradius $\rho = 0.5$ mm und (b) für den Kerbradius $\rho = 2.0$ mm . . . . .	174
5.11. Rechnerische Bauteilwöhlerlinie für 90° phasenverschobene Einstufenbelastung und betriebsähnliche Belastung (a) für den Kerbradius $\rho = 0.5$ mm und (b) für den Kerbradius $\rho = 2.0$ mm . . . . .	175
5.12. Rechnerische Bauteilwöhlerlinie für 90° phasenverschobene Belastung mit Mittellast	175
5.13. Einfluss der simulierten Lastdurchläufe auf die rechnerische Anrisslebensdauer (a) rechnerische Lebensdauer normiert auf den konvergierten Wert und (b) berechnete Hysteresen nach verschiedenen Lastdurchläufen . . . . .	176
5.14. Aufteilung der Datenbank in Belastungsart, konstante und variable Amplituden und Werkstoffgruppen . . . . .	177

5.15. Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der drei Schädigungsmodelle für die beiden Gruppen (links) „Mess“ und (rechts) „Schätz“ . . . . .	180
5.16. Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aus allen Schädigungsmodellen aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) für (links) die Teilgruppe „Mess“ und (rechts) die Teilgruppe „Schätz“ . . . . .	182
5.17. Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gruppen „Schätz“ und „Mess“ für die drei Schädigungsparameter . . . . .	183
5.18. Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einstufige Belastung und Betriebsbelastung für die Gruppe „Schätz“ . . . . .	184
5.19. Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einstufige Belastung und Betriebsbelastung für die Gruppe „Mess“ . . . . .	185
5.20. Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für proportionale und nichtproportionale Belastungen für die Gruppe „Schätz“ . . . . .	186
5.21. Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für proportionale und nichtproportionale Belastungen für die Gruppe „Mess“ . . . . .	186
5.22. Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) für (a) Rechnungen mit gemessenen Werkstoffkennwerten (Teilgruppe „Mess“) und (b) Rechnungen mit abgeschätzten Werkstoffkennwerten (Teilgruppe „Schätz“), Grafik entnommen aus [Linn 23] . . . . .	189
5.23. Berechnete Anrisslebensdauer ( $N_{calc}$ ) aufgetragen über experimenteller Anrisslebensdauer ( $N_{exp}$ ) getrennt angegeben für (a) alle Versuche unter proportionaler Beanspruchung und (b) alle Versuche unter nichtproportionaler Beanspruchung, Grafik entnommen aus [Linn 23] . . . . .	190
B.1. Amplitudenkollektive für die gefahrenen Lastfolgen unter variablen Amplituden . . . . .	229
B.2. Regression der Versuchsreihe K05_N . . . . .	231
B.3. Regression der Versuchsreihe K05_T . . . . .	232
B.4. Regression der Versuchsreihe K05_P . . . . .	233
B.5. Regression der Versuchsreihe K05_NP . . . . .	234
B.6. Regression der Versuchsreihe K2_NP_0_-1 . . . . .	235
B.7. Regression der Versuchsreihe K20_P . . . . .	236
B.8. Regression der Versuchsreihe K2_NP . . . . .	237
B.9. Ergebnisse der Versuchsreihe K05_SZZT . . . . .	238
B.10. Regression der Versuchsreihe K05_NP_GAUSS . . . . .	239
B.11. Regression der Versuchsreihe K2_NP_GUASS . . . . .	240
B.12. Regression der Versuchsreihe K05_NP_UK . . . . .	241
B.13. Regression der Versuchsreihe K2_NP_UK . . . . .	242

## A. Werkstoff- und Strukturparameter des Ohno/Wang Modells

Nachfolgend sind die Parameter des Ohno/Wang Plastizitätsmodells sowie die ermittelten Parameter der Strukturmodelle aufgeführt, die für die Validierungsrechnungen der Kerbnäherungsverfahren aus Abschnitt 2.5.4 verwendet wurden. Zusätzlich sind die Parameter für die Werkstoffe S355 und EN-GJS-500-14 angegeben, die anhand von dehnungsgeregelten Einstufungsversuchen ermittelt wurden.

elastisch	$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \sigma_F = 163.9 \text{ MPa}$		
Ramberg-Osgood	$K' = 1079 \text{ MPa}, n' = 0.19$		
M = 15	<b>Ohno/Wang</b>		
i	$c^i$	$r^i$	$\chi^i$
1	7895	4.7	5.0
2	5342	10.5	5.0
3	3615	11.3	5.0
4	2446	12.1	5.0
5	1655	13.1	5.0
6	1120	14.1	5.0
7	758	15.1	5.0
8	513	16.3	5.0
9	347	17.5	5.0
10	235	18.8	5.0
11	159	20.2	5.0
12	108	21.8	5.0
13	73	23.4	5.0
14	49	25.2	5.0
15	33	99.7	5.0

Tabelle A.1: Parameter des Ohno/Wang Modells für die Vergleichsrechnungen zwischen Kerbnäherungsverfahren und FEM

elastisch	$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \sigma_F = 163.9 \text{ MPa}$											
M = 15	Neuber			Seeger/Heuler			Seeger/Beste			FEM		
i	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$
1	7895	5.0	7.2	7895	5.4	13.8	7895	7.6	13.5	7815	7.8	11.2
2	5342	10.8	7.2	5342	11.1	13.8	5342	12.7	13.5	5292	12.0	11.2
3	3615	11.9	7.2	3615	12.4	13.8	3615	14.9	13.5	3584	13.3	11.2
4	2446	13.2	7.2	2446	14.4	13.8	2446	17.9	13.5	2427	16.3	11.2
5	1655	15.0	7.2	1655	17.3	13.8	1655	21.6	13.5	1644	20.3	11.2
6	1120	17.4	7.2	1120	21.6	13.8	1120	25.9	13.5	1113	25.8	11.2
7	758	20.7	7.2	758	27.3	13.8	758	30.4	13.5	754	32.2	8.2
8	513	25.3	7.2	513	33.6	13.8	513	34.5	13.5	510	38.9	8.2
9	347	31.5	7.2	347	39.1	13.8	347	37.8	13.5	346	44.6	8.2
10	235	39.9	2.2	235	42.8	13.8	235	40.2	13.5	234	47.6	8.2
11	159	50.9	2.2	159	44.9	11.5	159	42.0	13.5	159	49.7	8.2
12	108	65.2	2.2	108	46.1	11.5	108	43.4	10.8	107	51.3	8.2
13	73	83.6	2.2	73	47.1	11.5	73	44.9	10.8	73	52.6	8.2
14	49	107.0	2.2	49	48.3	11.5	49	46.6	10.8	49	54.3	6.2
15	33	955.3	1.8	33	173.8	9.0	33	171.4	8.5	33	195.7	6.2

Tabelle A.2: Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Spannungsansatz für Bauteilfließkurven aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius  $\rho = 2$  mm

elastisch	$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \sigma_F = 163.9 \text{ MPa}$											
M = 15	Neuber			Seeger/Heuler			Seeger/Beste			FEM		
i	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$
1	16285	3.8	4.8	17482	3.0	6.8	9950	0.0	2.8	44902	3.7	2.5
2	11140	10.1	4.8	12064	9.6	6.8	7134	7.3	2.8	20477	19.4	2.5
3	7648	10.7	4.8	8389	9.9	6.8	5196	7.9	2.8	10205	17.8	2.5
4	5274	11.4	4.8	5896	9.9	6.8	3856	7.2	2.8	5598	16.1	2.5
5	3656	12.0	4.8	4207	9.4	6.8	2925	0.8	2.8	3372	13.6	2.5
6	2552	12.7	4.8	3064	4.2	6.8	0	0.0	2.8	2218	3.6	2.5
7	1795	13.4	4.8	0	0.0	34.0	0	0.0	2.8	0	0.0	6.2
8	1273	14.1	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	2.8	0	0.0	6.2
9	911	14.9	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	2.8	0	0.0	6.2
10	659	15.7	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	2.8	0	0.0	6.2
11	481	16.6	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	2.8	0	0.0	6.2
12	354	17.7	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	7.2	0	0.0	6.2
13	263	18.9	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	7.2	0	0.0	38.0
14	197	34.3	9.5	0	0.0	34.0	0	0.0	7.2	0	0.0	38.0
15	149	112.8	400.0	643	273.1	34.0	627	296.0	34.0	521	269.5	38.0

Tabelle A.3: Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Dehnungsansatz für Bauteilfließkuren aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius  $\rho = 2 \text{ mm}$

elastisch	$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \sigma_F = 163.9 \text{ MPa}$											
M = 15	Neuber			Seeger/Heuler			Seeger/Beste			FEM		
i	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$
1	7895	5.6	7.2	7895	5.7	17.0	7895	7.6	16.0	5769	22.1	13.5
2	5084	12.3	7.2	5084	12.4	17.0	5084	14.0	16.0	2258	31.9	13.5
3	3274	13.7	7.2	3274	13.9	17.0	3274	16.7	16.0	1197	31.6	13.5
4	2109	15.6	7.2	2109	16.0	17.0	2109	20.5	16.0	739	34.5	13.5
5	1358	18.2	7.2	1358	19.3	17.0	1358	26.0	16.0	498	39.7	13.5
6	875	21.9	7.2	875	24.8	17.0	875	34.0	16.0	352	45.8	13.5
7	563	27.1	7.2	563	34.3	17.0	563	44.7	16.0	256	51.7	13.5
8	363	34.6	7.2	363	49.0	17.0	363	57.1	16.0	190	56.0	13.5
9	234	45.1	7.2	234	66.4	11.0	234	68.3	10.0	141	58.1	8.2
10	150	59.3	7.2	150	79.8	11.0	150	75.6	10.0	106	58.8	8.2
11	97	78.5	7.2	97	85.7	11.0	97	79.1	10.0	80	58.6	8.2
12	62	103.8	7.2	62	86.6	11.0	62	80.4	10.0	60	58.1	8.2
13	40	136.9	2.0	40	86.2	11.0	40	81.5	10.0	46	57.3	8.2
14	26	180.1	2.0	26	86.5	9.5	26	83.2	8.2	35	56.3	9.2
15	17	1464.5	1.5	17	273.2	9.5	17	270.5	8.2	27	267.2	9.2

Tabelle A.4: Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Spannungsansatz für Bauteilfließkurven aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius  $\rho = 0.5 \text{ mm}$

elastisch	$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \sigma_F = 163.9 \text{ MPa}$											
M = 15	Neuber			Seeger/Heuler			Seeger/Beste			FEM		
i	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$	$e_C^i$	$e_r^i$	$e_\chi^i$
1	16285	3.8	4.5	16482	3.6	4.2	9038	1.1	4.2	39991	5.1	4.0
2	11140	10.1	4.5	11293	10.0	4.2	6364	9.1	4.2	17405	18.0	4.0
3	7648	10.7	4.5	7771	10.6	4.2	4527	9.4	4.2	8557	17.2	4.0
4	5274	11.4	4.5	5378	11.1	4.2	3260	9.5	4.2	4669	16.1	4.0
5	3656	12.0	4.5	3750	11.5	4.2	2380	9.4	4.2	2789	15.4	4.0
6	2552	12.7	4.5	2642	11.6	4.2	1767	8.9	4.2	1792	13.4	4.0
7	1795	13.4	4.5	1888	11.1	4.2	1337	4.8	4.2	1232	8.7	4.0
8	1273	14.1	4.5	1375	7.4	4.2	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
9	911	14.9	4.5	0	0.0	4.2	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
10	659	15.7	4.5	0	0.0	4.2	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
11	481	16.6	12.5	0	0.0	4.2	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
12	354	17.7	12.5	0	0.0	13.8	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
13	263	18.9	12.5	0	0.0	13.8	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
14	197	34.3	12.5	0	0.0	13.8	0	0.0	4.2	0	0.0	4.0
15	149	112.8	15.0	362	242.3	20.0	346	266.9	22.0	320	242.6	18.0

Tabelle A.5: Strukturparameter des Ohno/Wang Modells für den Pseudo-Dehnungsansatz für Bauteilfließkurven aus verschiedenen Verfahren und die Kerbprobe mit Kerbradius  $\rho = 0.5 \text{ mm}$

elastisch	$E = 204 \text{ GPa}, \nu = 0.27, \sigma_F = 166.8 \text{ MPa}$		
Ramberg-Osgood	$K' = 839 \text{ MPa}, n' = 0.14$		
M = 15	<b>Ohno/Wang</b>		
i	$c^i$	$r^i$	$\chi^i$
1	41268	4.5	5.0
2	24814	10.2	5.0
3	14921	11.0	5.0
4	8972	11.8	5.0
5	5395	12.6	5.0
6	3244	13.5	5.0
7	1951	14.5	5.0
8	1173	15.6	5.0
9	705	16.7	5.0
10	424	17.9	5.0
11	255	19.2	5.0
12	153	20.6	5.0
13	92	22.1	5.0
14	55	23.8	5.0
15	33	71.8	5.0

Tabelle A.6: Parameter des Ohno/Wang Modells für den Werkstoff S355

elastisch	$E = 165 \text{ GPa}, \nu = 0.22, \sigma_F = 351.3 \text{ MPa}$		
Ramberg-Osgood	$K' = 830 \text{ MPa}, n' = 0.08$		
M = 15	<b>Ohno/Wang</b>		
i	$c^i$	$r^i$	$\chi^i$
1	16398	4.8	5.0
2	10532	10.5	5.0
3	6764	10.9	5.0
4	4345	11.3	5.0
5	2790	11.7	5.0
6	1792	12.1	5.0
7	1151	12.6	5.0
8	739	13.0	5.0
9	475	13.5	5.0
10	305	14.0	5.0
11	196	14.5	5.0
12	126	15.0	5.0
13	81	15.5	5.0
14	52	16.1	5.0
15	33	49.8	5.0

Tabelle A.7: Parameter des Ohno/Wang Modells für den Werkstoff EN-GJS-500-14

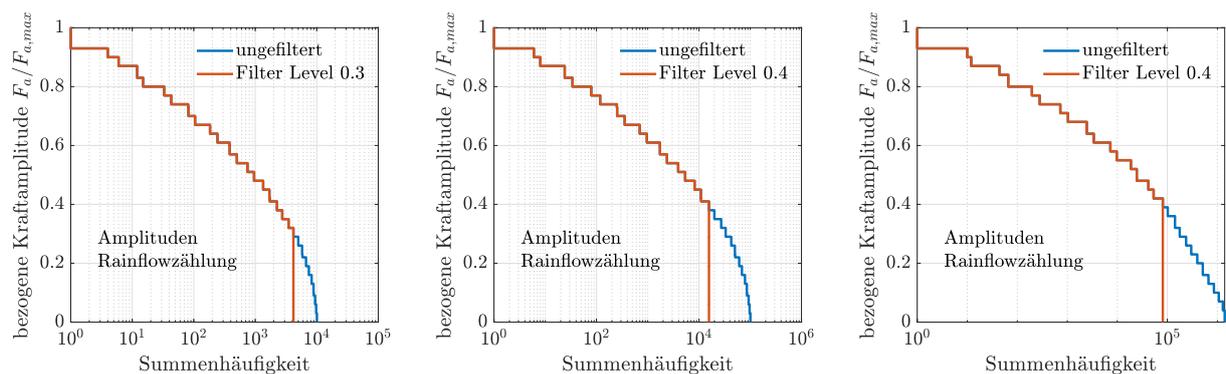


## B. Versuche an gekerbten Rundproben

Im Folgenden werden die Versuchsergebnisse an gekerbten Rundproben angegeben. Die Versuchsbeschreibungen sind in Abschnitt 5.1 zu finden. In Abbildung B.1 sind die Summenhäufigkeiten der gefahrenen Betriebslastfolgen gegeben. Die im Folgenden angegebenen Schwingspiele beziehen sich auf eine Schwingspielzählung des ersten Lastkanals bis zum Versagenszeitpunkt. Außer bei reiner Torsionsbelastung entspricht der erste Lastkanal immer der axialen Normalkraft. Als Anriss wurde eine Oberflächenrisslänge von 0.5 mm festgelegt. Die Anrisserkennung erfolgte mit dem in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Verfahren. Ebenfalls angegeben sind an die Messwerte angepasste Kurven. Zum Anpassen wurde die Beziehung

$$S = S_a \cdot \left( \frac{N}{1000} \right)^{-1/k}$$

verwendet.



- (a) Summenhäufigkeit Gauß4 (gefiltert)  $\bar{H}_0 = 10^4, I = 0.99$
- (b) Summenhäufigkeit Gauß5 (gefiltert)  $\bar{H}_0 = 10^5, I = 0.99$
- (c) Summenhäufigkeit Gauß6 (gefiltert)  $\bar{H}_0 = 10^6, I = 0.7$

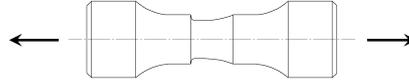
Abbildung B.1: Amplitudenkollektive für die gefahrenen Lastfolgen unter variablen Amplituden

Kollektiv	Beanspruchung	Radius	R-Verhältnis		Anzahl
			$R_N$	$R_T$	
Einstufig	Normalkraft	0.5 mm	-1	-	10
	Torsion	0.5 mm	-	-1	8
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 0^\circ$	0.5 mm	-1	-1	16
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	0.5 mm	-1	-1	18
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	2.0 mm	0	-1	10
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 0^\circ$	2.0 mm	-1	-1	10
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	2.0 mm	-1	-1	11
	Normalkraft & Torsion (Normalkraft statisch)	0.5 mm	1	-1	12
Gauß	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	0.5 mm	-1	-1	9
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	2.0 mm	-1	-1	9
unkorreliert	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	0.5 mm	-1	-1	8
	Normalkraft & Torsion $\varphi = 90^\circ$	2.0 mm	-1	-1	8

Tabelle B.1: Versuchsprogramm der Schwingversuche an gekerbten Rundproben aus S355

**Versuchsreihe:** K05\_N  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0.5 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, Zug/Druck,  $R = -1$

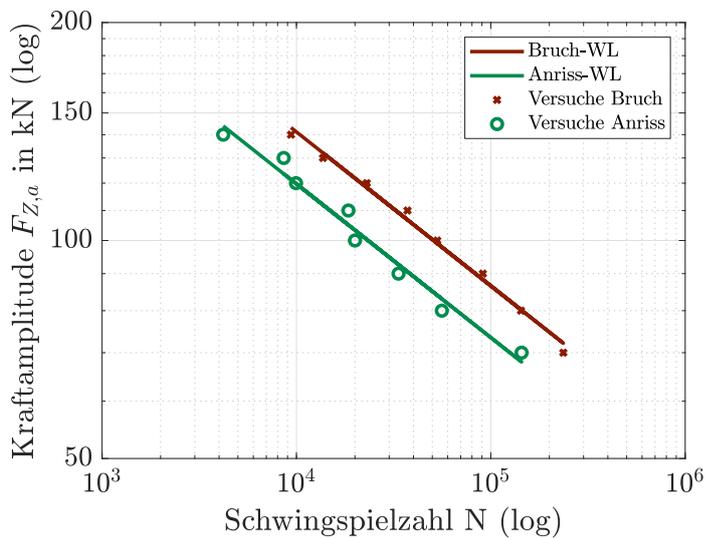
**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
-	100.00	203.72	-	-	-	56000	(*)
-	100.00	203.72	-	-	-	58000	(*)
1	100.00	203.72	-	-	20000	53000	
2	80.00	162.97	-	-	56000	143000	
3	120.00	244.46	-	-	9945	23000	
4	90.00	183.35	-	-	33500	91000	
5	70.00	142.60	-	-	144000	236000	
6	130.00	264.83	-	-	8600	13700	
7	110.00	224.09	-	-	18500	37250	
8	140.00	285.21	-	-	4200	9377	

(\*) Testproben zum kalibrieren der Kameras

Tabelle B.2: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_N



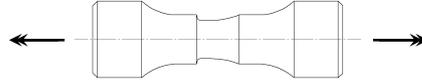
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	4.7	4.7
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	195.1	230.3
Streuung $T_N$	1.6	1.3

Abbildung B.2: Regression der Versuchsreihe K05\_N

**Versuchsreihe:** K05\_T  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0.5 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, Torsion,  
 $R = -1$

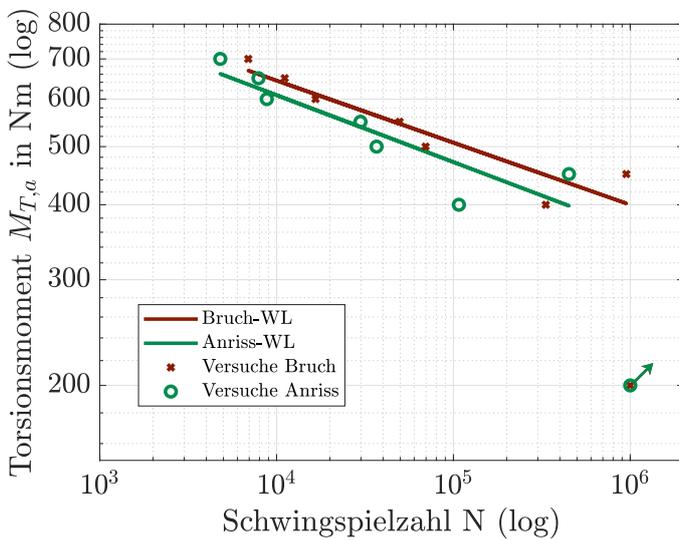
**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	-	-	200.00	65.19	1000000	1000000	(*)
2	-	-	400.00	130.38	107400	333000	
3	-	-	700.00	228.16	4800	6915	
4	-	-	500.00	162.97	36750	69582	
5	-	-	450.00	146.68	450000	950000	
6	-	-	650.00	211.87	7900	11111	
7	-	-	550.00	179.27	29800	49600	
8	-	-	600.00	195.57	8800	16600	

(\*) Druchläufer

Tabelle B.3: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_T



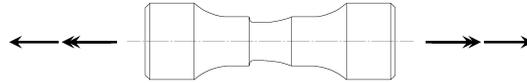
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	9.0	9.7
$S_{T,a}(N = 10^3)$ [MPa]	256.67	817.5
Streuung $T_N$	8.3	6.8

Abbildung B.3: Regression der Versuchsreihe K05\_T

**Versuchsreihe:** K05\_P  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0.5 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, proportionale Beanspruchung,  $R = -1$

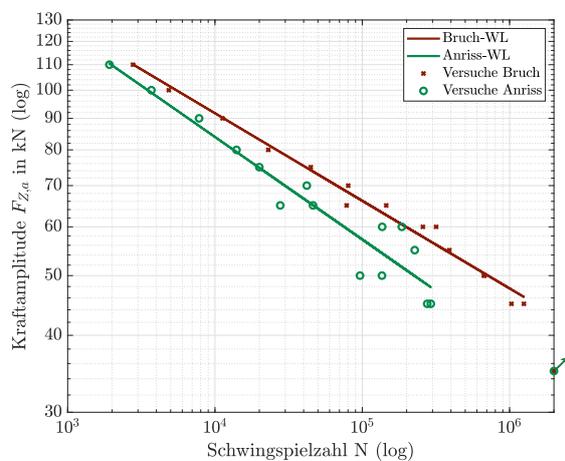
**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_{a}$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	35.00	71.30	194.44	63.38	2000000	2000000	(*)
2	45.00	91.67	250.00	81.49	276000	1029330	
3	75.00	152.79	416.67	135.81	20000	44700	
4	50.00	101.86	277.78	90.54	136000	675880	
5	45.00	91.67	250.00	81.49	292000	1250473	
6	50.00	101.86	277.78	90.54	96500	668115	
7	60.00	122.23	333.33	108.65	136500	317300	
8	55.00	112.05	305.56	99.60	227000	390116	
9	70.00	142.60	388.89	126.76	42000	80268	
10	65.00	132.42	361.11	117.70	27750	78266	
11	80.00	162.97	444.44	144.87	14000	23010	
12	90.00	183.35	500.00	162.97	7800	11263	
13	110.00	224.09	611.11	199.19	1920	2774	
14	100.00	203.72	555.56	181.08	3700	4860	
15	65.00	132.42	361.11	117.70	46300	145400	
16	60.00	122.23	333.33	108.65	185500	258000	

(\*) Druchläufer

Tabelle B.4: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_P



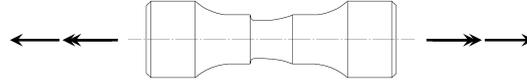
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	6.0	7.0
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	250.9	259.3
Streuung $T_N$	3.5	1.9

Abbildung B.4: Regression der Versuchsreihe K05\_P

**Versuchsreihe:** K05\_NP  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0.5 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, Zug/Druck & Torsion, 90° phasenverschoben,  $R = -1$  für beide Lastkanäle

**Probenskizze:**

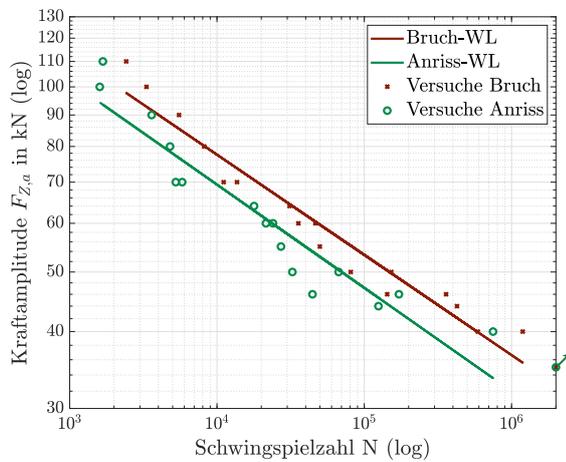


Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	555.56	181.08	1600	3321	
2	70.00	142.60	388.89	126.76	5800	11101	
3	40.00	81.49	222.22	72.43	-	590000	(*)
4	50.00	101.86	277.78	90.54	32500	80918	
5	60.00	122.23	333.33	108.65	21500	35710	
6	80.00	162.97	444.44	144.87	4800	8181	
7	110.00	224.09	611.11	199.19	1680	2420	
8	90.00	183.35	500.00	162.97	3600	5523	
9	50.00	101.86	277.78	90.54	67000	152578	
10	60.00	122.23	333.33	108.65	24000	46553	
11	35.00	71.30	194.44	63.38	2000000	2000000	(**)
12	44.00	89.64	244.44	79.68	124800	426041	
13	64.00	130.38	355.56	115.89	17850	31087	
14	40.00	81.49	222.22	72.43	748500	1190130	
15	46.00	93.71	255.56	83.30	171800	359331	
16	46.00	93.71	255.56	83.30	44500	143036	
17	55.00	112.05	305.56	99.60	27200	49917	
18	70.00	142.60	388.89	126.76	5250	13680	

(\*) Kameraausfall während des Versuchs, Anriss konnte nicht erkannt werden.

(\*\*) Durchläufer

Tabelle B.5: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_NP



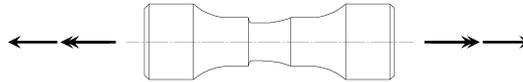
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	6.0	6.1
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	207.9	230.0
Streuung $T_N$	4.3	3.1

Abbildung B.5: Regression der Versuchsreihe K05\_NP

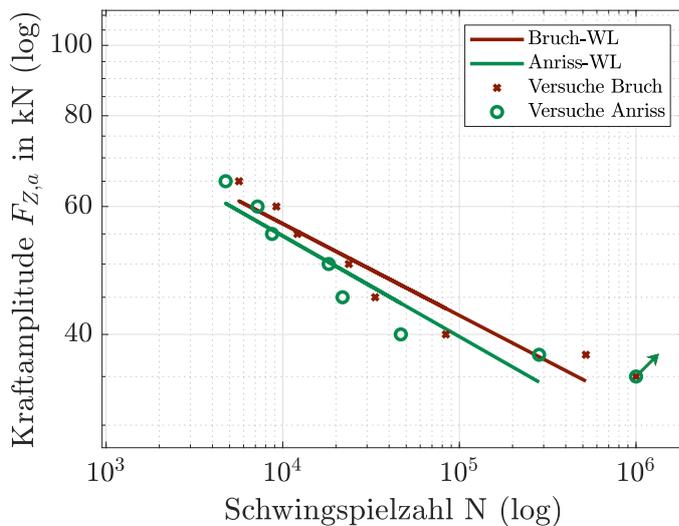
**Versuchsreihe:** K2\_NP\_0\_-1  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 2.0 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, Zug/Druck & Torsion, 90° phasenverschoben,  $R = 0$  für Normalbelastung und  $R = -1$  für Torsion

**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	50.00	159.65	18200	23665	
2	90.00	183.35	45.00	143.69	21800	33341	
3	80.00	162.97	40.00	127.72	46600	83838	
4	110.00	224.09	55.00	175.62	8700	12109	
5	120.00	244.46	60.00	191.58	7200	9203	
6	130.00	264.83	65.00	207.55	4750	5654	
7	75.00	152.79	37.50	119.74	282500	519962	
8	70.00	142.60	35.00	111.76	1000000	1000000	(*)
9	90.00	183.35	45.00	143.67	-	-	(**)
10	60.00	122.23	30.00	95.79	-	-	(***)
(*) Durchläufer							
(**) Störung in Prüfmaschine, Versuch abgebrochen							
(***) Pumpenausfall, Versuch abgebrochen							

Tabelle B.6: Ergebnisse der Versuchsreihe K2\_NP\_0\_-1

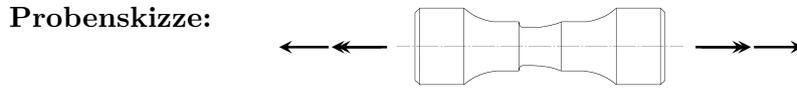


**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	7.2	7.9
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	150.4	151.9
Streuung $T_N$	4.3	4.3

Abbildung B.6: Regression der Versuchsreihe K2\_NP\_0\_-1

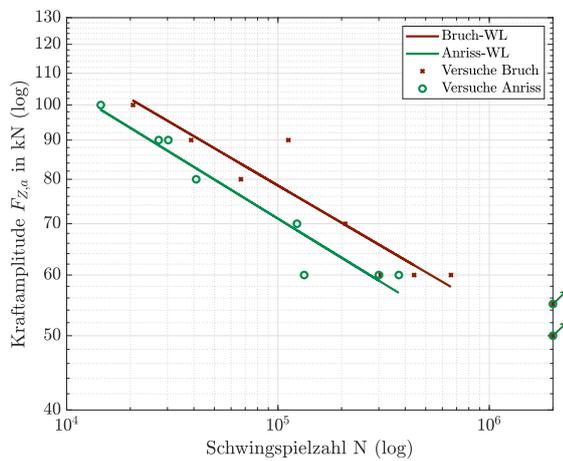
**Versuchsreihe:** K20\_P  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 2.0 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, proportionale Beanspruchung,  $R = -1$



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	50.00	101.86	244.91	79.83	2000000	2000000	(*)
2	70.00	142.60	342.87	111.76	123000	208152	
3	60.00	122.23	293.89	95.79	133000	306080	
4	60.00	122.23	293.89	95.79	300000	440702	
5	80.00	162.97	391.85	127.72	41000	66737	
6	90.00	183.35	440.83	143.69	30250	111953	
7	100.00	203.72	489.81	159.65	14500	20612	
8	55.00	112.05	269.40	87.81	2000000	2000000	(*)
9	90.00	183.35	440.83	143.69	27250	38811	
10	60.00	122.23	293.89	95.79	373000	658417	

(\*) Druchläufer

Tabelle B.7: Ergebnisse der Versuchsreihe K20\_P



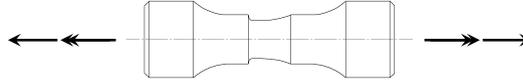
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	5.9	6.2
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	316.0	336.5
Streuung $T_N$	2.46	3.36

Abbildung B.7: Regression der Versuchsreihe K20\_P

**Versuchsreihe:** K2\_NP  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 2.0 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, Zug/Druck & Torsion, 90° phasenverschoben,  $R = -1$

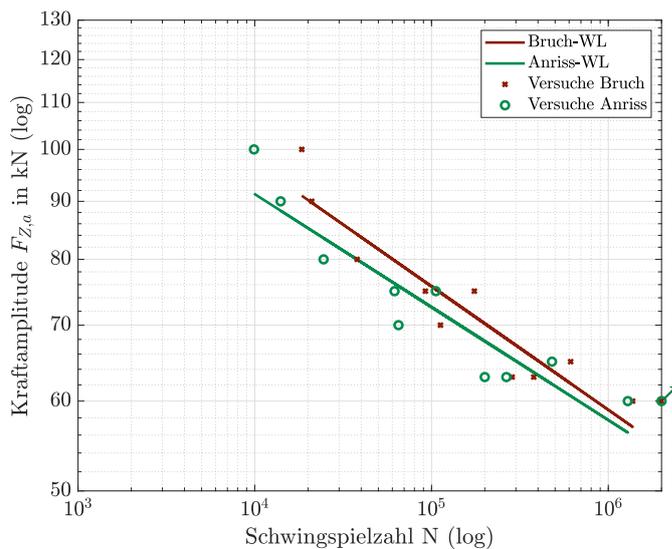
**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	90.00	183.35	440.83	143.69	14000	21000	
2	60.00	122.23	293.89	95.79	2000000	2000000	(*)
3	65.00	132.42	318.38	103.78	480000	611827	
4	70.00	142.60	342.87	111.76	65000	112320	
5	80.00	162.97	391.85	127.72	24500	37927	
6	63.00	128.34	308.58	100.58	265000	378593	
7	75.00	152.79	367.36	119.74	105750	174596	
8	63.00	128.34	308.58	100.58	200000	285641	
9	75.00	152.79	367.36	119.74	61750	92308	
10	60.00	122.23	293.89	95.79	1290000	1373311	
11	100.00	203.72	489.81	159.65	9900	18446	

(\*) Durchläufer

Tabelle B.8: Ergebnisse der Versuchsreihe K2\_NP



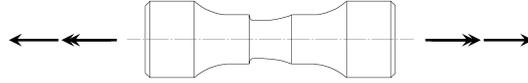
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	10.0	9.2
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	233.9	254.7
Streuung $T_N$	4.8	4.0

Abbildung B.8: Regression der Versuchsreihe K2\_NP

**Versuchsreihe:** K05\_SZZT  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0.5 mm  
**Beanspruchung:** konstante Amplituden, Sinusbelastung, statische Normalkraft, zyklische Torsion  $R = -1$

**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F$ [kN]	$S_N$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	500.00	162.97	34000	47735	
2	50.00	101.86	500.00	162.97	62500	115152	
3	50.00	101.86	500.00	162.97	38500	68693	
4	-50.00	-101.86	500.00	162.97	142500	2000000	(*)
5	25.00	50.93	500.00	162.97	63500	254808	
6	-10.00	-20.37	500.00	162.97	39000	1437665	
7	0.00	0.00	500.00	162.97	47500	105541	
8	-25.00	-50.93	500.00	162.97	127500	2000000	(*)
9	25.00	50.93	500.00	162.97	67000	91620	
10	75.00	152.79	500.00	162.97	39000	61400	
11	12.50	25.46	500.00	162.97	53000	124573	
12	12.50	25.46	500.00	162.97	165000	625380	

(\*) Durchläufer, aber Anriss vorhanden

Tabelle B.9: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_SZZT

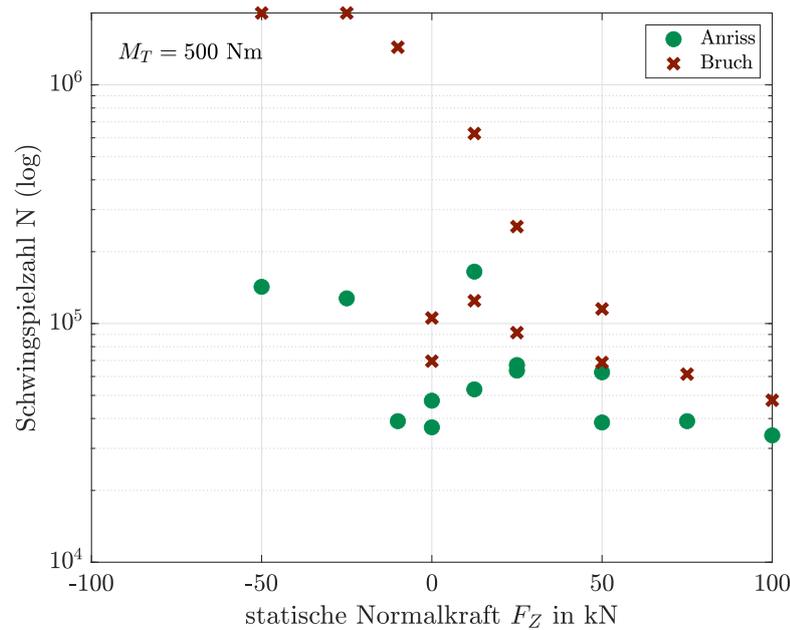
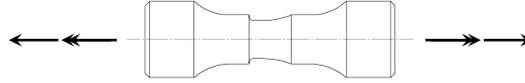


Abbildung B.9: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_SZZT

**Versuchsreihe:** K05\_NP\_GAUSS  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0,5 mm  
**Beanspruchung:** variable Amplituden, gefiltertes Gaußprofil (Gauß4), Zug/Druck & Torsion 90° phasenverschoben,  $R = -1$  für beide Lastkanäle

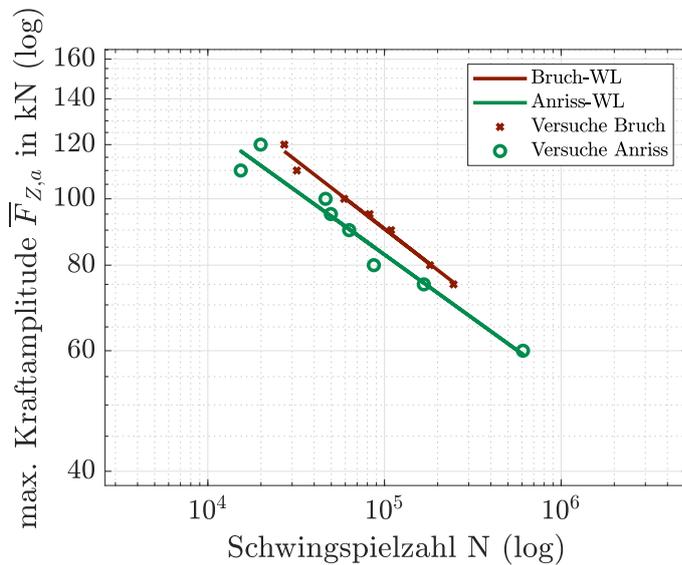
**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	555.56	181.08	46392	59153	
2	90.00	183.35	500.00	162.97	63101	109000	
3	80.00	162.97	444.44	144.87	87058	180975	
4	110.00	224.09	611.11	199.19	15369	31908	
5	120.00	244.46	666.67	217.30	19917	27095	
6	60.00	122.23	333.33	108.65	608250	-	(*)
7	75.00	152.79	416.67	135.81	167007	245986	
8	95.00	193.53	527.78	172.03	49699	82299	
9	95.00	193.53	527.78	172.03	99406	162002	(**)

(\*) Ausgebaut bevor die Probe gebrochen ist  
(\*\*) Versuch mit ungefilterter Lastfolge, nicht in Regression enthalten

Tabelle B.10: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_NP\_GAUSS

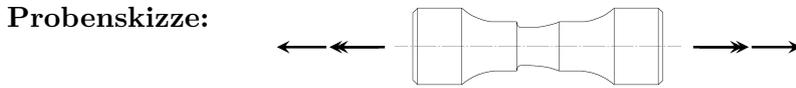


**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	5.4	5.0
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	195.1	226.9
Streuung $T_N$	2.0	1.3

Abbildung B.10: Regression der Versuchsreihe K05\_NP\_GAUSS

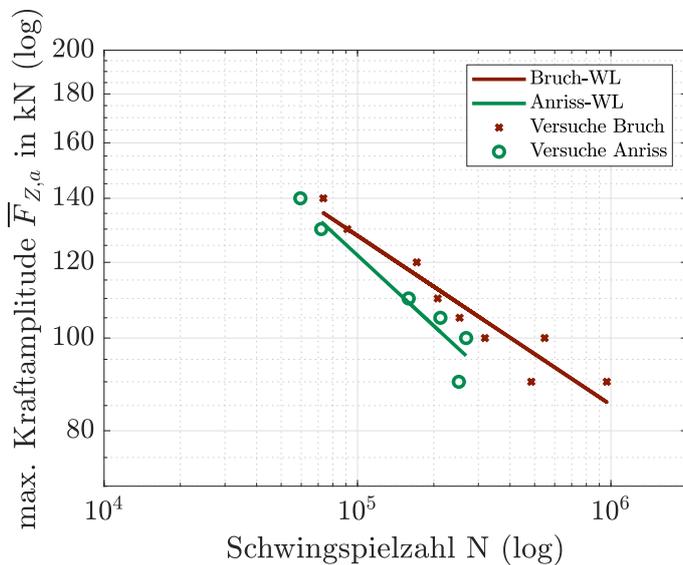
**Versuchsreihe:** K2\_NP\_GAUSS  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 2.0 mm  
**Beanspruchung:** variable Amplituden, gefiltertes Gaußprofil (Gauß4), Zug/Druck & Torsion 90° phasenverschoben,  $R = -1$  für beide Lastkanäle



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	489.81	159.65	268364	547646	
2	110.00	224.09	538.79	175.62	159169	207257	
3	120.00	244.46	587.77	191.58	-	171335	(*)
4	105.00	213.90	514.30	167.64	212368	252870	
5	130.00	264.83	636.76	207.55	71940	91170	
6	100.00	203.72	489.81	159.65	-	318353	(*)
7	140.00	285.21	685.74	223.52	59514	73325	
8	90.00	183.35	440.83	143.69	-	963336	(*)
9	90.00	183.35	440.83	143.69	251100	485064	

(\*) Kameraausfall

Tabelle B.11: Ergebnisse der Versuchsreihe K2\_NP\_GAUSS



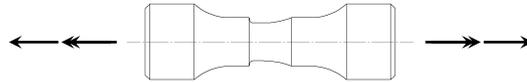
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	4.1	5.7
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	377.1	289.0
Streuung $T_N$	1.7	2.0

Abbildung B.11: Regression der Versuchsreihe K2\_NP\_GUASS

**Versuchsreihe:** K05\_NP\_UK  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 0.5 mm  
**Beanspruchung:** variable Amplituden, unkorreliert, Lastkanal 1: Zug/Druck mit gefiltertem Gaußprofil (Gauß5) & Lastkanal 2: Torsion mit gefiltertem Profil Fischer 77 (Gauß6), 90° phasenverschoben

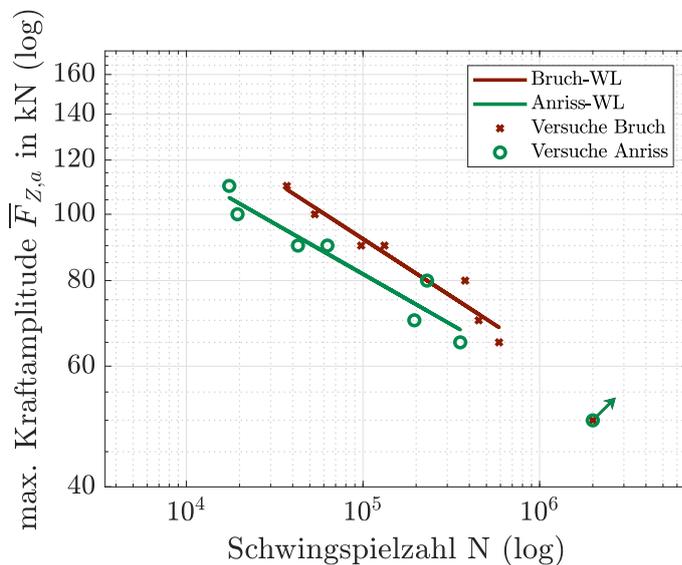
**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	555.56	181.08	19491	53384	
2	80.00	162.97	444.44	144.87	230470	378585	
3	70.00	142.60	388.89	126.76	195285	452019	
4	90.00	183.35	500.00	162.97	62879	132287	
5	110.00	224.09	611.11	199.19	17496	37071	
6	65.00	132.42	361.11	117.70	355440	589144	
7	90.00	183.35	500.00	162.97	42848	97656	
8	50.00	101.86	277.78	90.54	2000000	2000000	(*)

(\*) Durchläufer

Tabelle B.12: Ergebnisse der Versuchsreihe K05\_NP\_UK



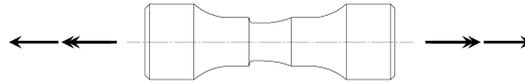
**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	6.8	6.0
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	161.2	199.3
Streuung $T_N$	3.0	2.1

Abbildung B.12: Regression der Versuchsreihe K05\_NP\_UK

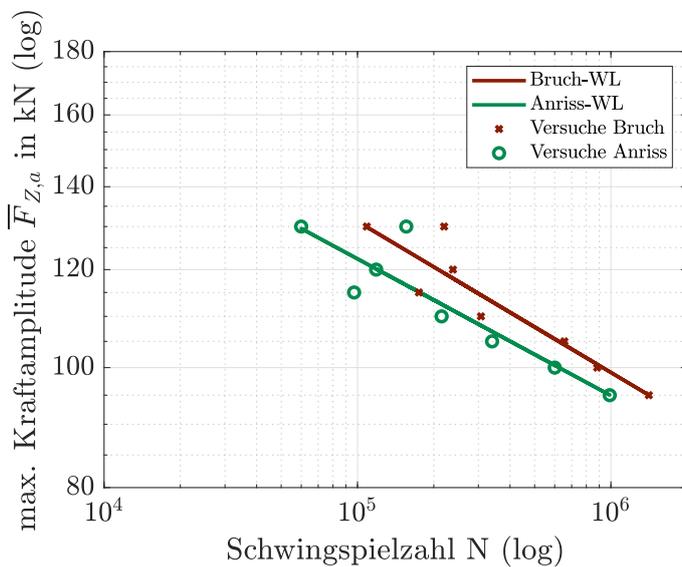
**Versuchsreihe:** K2\_NP\_UK  
**Werkstoff:** S355  
**Kerbradius:** 2.0 mm  
**Beanspruchung:** variable Amplituden, unkorreliert, Lastkanal 1: Zug/Druck mit gefiltertem Gaußprofil (Gauß5) & Lastkanal 2: Torsion mit gefiltertem Profil Fischer 77 (Gauß6), 90° phasenverschoben

**Probenskizze:**



Nr.	Zug		Torsion		Ssp. bis Anriss $N_A$	Ssp. bis Bruch $N_B$	Anmerkungen
	$F_a$ [kN]	$S_{N,a}$ [MPa]	$M_{t,a}$ [Nm]	$S_{T,a}$ [MPa]			
1	100.00	203.72	489.81	159.65	600356	882793	
2	120.00	244.46	587.77	191.58	118459	238000	
3	110.00	224.09	538.79	175.62	214727	307079	
4	130.00	264.83	636.76	207.55	155733	219739	
5	95.00	193.53	465.32	151.67	988962	1411259	
6	115.00	234.28	563.28	183.60	96962	174704	
7	130.00	264.83	636.76	207.55	59958	108797	
8	105.00	213.90	514.30	167.64	339772	655131	

Tabelle B.13: Ergebnisse der Versuchsreihe K2\_NP\_UK



**Regression:**

	Anriss	Bruch
Neigung $k$ [-]	9.0	8.2
$S_{N,a}(N = 10^3)$ [MPa]	203.6	230.1
Streuung $T_N$	3.2	2.6

Abbildung B.13: Regression der Versuchsreihe K2\_NP\_UK