

# Untersuchung eines Stoffgesetzes der impliziten Gradientenelastizität

## Investigation of a material law of implicit gradient elasticity

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

Genehmigte Dissertation von Özer Üngör aus Frankfurt am Main

Tag der Einreichung: 15. April 2024, Tag der Prüfung: 16. Juli 2024

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis

2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Bau- und  
Umweltingenieurwissen-  
schaften

Institut für Mechanik

Fachgebiet

Kontinuumsmechanik

Untersuchung eines Stoffgesetzes der impliziten Gradientenelastizität  
Investigation of a material law of implicit gradient elasticity

Genehmigte Dissertation von Özer Üngör

Tag der Einreichung: 15. April 2024

Tag der Prüfung: 16. Juli 2024

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-277880

URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/27788>

Jahr der Veröffentlichung auf TUprints: 2024

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)

Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

---

# Vorwort

---

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Kontinuumsmechanik sowie am Institut für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Entstehung begleitet und unterstützt haben.

Insbesondere möchte ich meinen wissenschaftlichen Betreuern Herrn Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis und Herrn Prof. Dr.-Ing Ralf Müller, für die Möglichkeit der Promotion, die vielfältige Unterstützung, das Vertrauen, die fruchtbaren Anregungen und die gewährten Freiräume danken, die diese Arbeit erst in dieser Form ermöglicht haben. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross, Herrn Prof. Dr.-Ing. Friedrich Gruttmann, Herrn Prof. Dr.-Ing. Dominik Schillinger, Frau Prof. Dr. rer. nat. Angelika Humbert, Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald und Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Thomas Beier für die Unterstützungen danken.

Danken möchte ich auch allen Kolleginnen und Kollegen für den fachlichen Austausch sowie die gute Atmosphäre auf der Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Carsten Bröse, der mir von Anfang bis zu letzten Tag immer für Fragen, Hilfestellungen persönlicher und fachlicher Natur zur Verfügung stand. Aber auch Daniel Johannsen, Jan Frischmann, Stergios Sideris, Simon Klarmann, Max Müller, Jan Zoller, Gregor Knust, Désiré Tchoffo Ngoula, Ehsan Shams, Yigiter Hos, Melanie Fiedler, Alexander Bosch, Darko Panic, Aris Tsakmakis, Simon Moser, Jan Kraft, Jan Hamacher, Carl Fällgren, Partick Yadegari, Tobias Brehm, Oliver John, Marco ten Eikelder, Matthias Bohnen, Adnan Ebrahim, Jannes Hohl, Lena Koch, Michal Mika, Henning Müller, Timm Schultz, Rabea Sondershaus, Jonathan Stollberg, Hari Kisan Thammineni, Sikang Yan, Sascha Eisenträger, Tarun Gangwar und Hoa Nguyen möchte ich für die vielen guten fachlichen, außerfachlichen Gespräche und für eine unvergessliche Zeit danken.

Ein großes Dankeschön geht auch an Frau Angelika Prießnigg, Frau Heike Herbst, Frau Kerstin Breidenbach und Frau Eleni Tsakmaki, die mir bei allen größeren und kleineren organisatorischen und bürokratischen Hürden eine große Hilfe waren.

Abschließend gilt meiner Familie größte Dankbarkeit für die vielfältige Unterstützung jeglicher Art während des gesamten Studiums bis zum Abschluss dieser Arbeit, wo und wie auch immer sie notwendig war.

Darmstadt, 2024

Özer Üngör



---

# Zusammenfassung

---

Die Euler-Bernoulli-Theorie der Balkenbiegung in der Technischen Mechanik geht davon aus, dass das Materialverhalten isotrop elastisch ist und dass ebene Querschnitte auch unter Belastung eben, starr und senkrecht auf der deformierten Balkenachse bleiben. Es ist bekannt, dass diese Theorie unter Inkonsistenzen leidet. Zum Beispiel ergibt sich aus der angenommenen Kinematik, dass die Scherdehnung in der Ebene der Biegung und damit auch die zugehörige Schubspannung identisch verschwinden. Dies hat aber zur Folge, dass die Gleichgewichtsbedingungen i. A. nicht erfüllt werden können. Jahrzehnte lang wird die Euler-Bernoulli-Balkentheorie mit Erfolg zur Lösung praktischer Probleme eingesetzt. Als formale Rechtfertigung für die Inkonsistenz wird das Argument gebracht, dass der dabei gemachte Fehler für schlanke Balken vernachlässigbar klein ist.

Eine konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für klassische Elastizität wurde in der jüngsten Literatur unter der Annahme transversaler Isotropie mit geometrischen Zwangsbedingungen vorgeschlagen. Die Begründung für die transversale Isotropie liegt in der angenommenen Geometrie, infolge deren das Materialverhalten entlang der Balkenachse elastisch und senkrecht dazu starr ist. Außerdem stellt die Undeformierbarkeit in der Ebene senkrecht zu der Balkenachse eine geometrische Zwangsbedingung dar. Die konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie wurde auch auf Stoffgesetze der expliziten Gradientenelastizität erweitert.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Ansätze der konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorie weiter verallgemeinert um Stoffgesetze der impliziten Gradientenelastizität zu erfassen. Insbesondere wird ein Materialgesetz betrachtet, das sowohl Laplace-Ableitungen der Dehnung als auch Laplace-Ableitungen der Spannung enthält. Solche Modelle können als Gegenstücke von Stoffgesetzen für viskoelastische Festkörper interpretiert werden. Von spezieller Bedeutung in der Gradienten Elastizität ist das Problem der korrekten Randbedingungen. An dieses Problem wird in der Arbeit mithilfe geeignet formulierter variationeller Methoden herangegangen. Zur Demonstration der aufgestellten Balkentheorie in der impliziten Gradientenelastizität wird ein eingespannter Balken unter Streckenlast diskutiert und die Ergebnisse mit entsprechenden Ergebnissen infolge klassischer Elastizität und explizierter Gradientenelastizität verglichen. Darüber hinaus wird ein Vergleich mit Ergebnissen infolge Finite Elemente Berechnungen gezogen.



---

# Abstract

---

The Euler-Bernoulli theory of beam bending in engineering mechanics assumes that the material behavior is isotropically elastic and that plane cross-sections are rigid and remain plane and perpendicular to the deformed beam axis even under load. It is well known that this theory suffers from inconsistencies. For example, it follows from the assumed kinematics that the shear strain in the plane of the bending and thus also the associated shear stress vanishes identically. This implies that the equilibrium equations can not be satisfied generally. For decades, the Euler-Bernoulli beam theory has been used successfully to solve practical problems. As a formal justification, the argument is made that the inconsistencies for slender beams are negligibly small. A consistent Euler-Bernoulli beam theory for classical elasticity has been proposed in the latest literature by assuming transverse isotropy with geometric constraints. Transverse isotropy is justified by the assumed geometry, which implies elastic material behavior along the beam axis and rigid body material properties in the planes perpendicular to the beam axis. In addition, identically vanishing deformation in the plane perpendicular to the beam axis represents a geometric constraint. The consistent Euler-Bernoulli beam theory was also developed for constitutive laws of explicit gradient elasticity.

In the present work the consistent Euler-Bernoulli approach is further generalized to capture constitutive laws of implicit gradient elasticity. In particular, a material law is considered that involves both Laplace derivatives of the strain and Laplace derivatives of the stress. Such models can be interpreted as counterparts of material laws for viscoelastic solids. Of special importance in gradient elasticity is the problem of the correct formulation of the boundary conditions. This problem is tackled in the thesis by employing appropriately formulated variational methods. To demonstrate the established beam theory in implicit gradient elasticity, a beam clamped in one side under line load is discussed and the results are compared with corresponding results due to classical elasticity and explicit gradient elasticity. Moreover, a comparison is made with results obtained from finite element calculations.





---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notation und Grundannahmen</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Nicht konventionelle Thermodynamik</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Das mikromorphe Kontinuum</b>	<b>11</b>
4.1	Grundlagen des mikromorphen Kontinuums . . . . .	11
4.2	Elastisch mikromorphes Kontinuum . . . . .	13
4.2.1	Lineare Elastizitätsgesetze . . . . .	13
4.2.2	Mikromorphe Elastizität mit rotationsfreien Mikro-Deformationen . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Das Kelvin-Modell der Gradientenelastizität (KG-Modell)</b>	<b>17</b>
5.1	Das KG-Modell als Grenzfall mikromorpher Elastizität . . . . .	17
5.1.1	Explizite Gradientenelastizität als Grenzfall mikromorpher Elastizität mit rotationsfreier Mikro-Deformation . . . . .	17
5.1.2	Die zugehörigen Randbedingungen . . . . .	19
5.1.3	Das KG-Modell als Sonderfall der expliziten Gradientenelastizität . . . . .	20
5.2	Das KG-Modell im Rahmen der nicht konventionellen Thermodynamik . . . . .	21
5.2.1	Grundlegende Annahmen . . . . .	21
5.2.2	Die konstitutive Struktur . . . . .	22
5.2.3	Das KG-Modell . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Das Drei-Parameter-Modell der Gradientenelastizität (3-PG-Modell)</b>	<b>27</b>
6.1	Das 3-PG-Modell als Sonderfall mikromorpher Elastizität mit rotationsfreier Mikrodeformation . . . . .	27
6.2	Das 3-PG-Modell als Gegenstück des 3-Parameter-Festkörpers der Viskoelastizität . . . . .	29
6.2.1	Die Grundidee der Vorgehensweise . . . . .	29
6.2.2	Thermodynamische Konsistenz . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Euler-Bernoulli-Balkentheorien</b>	<b>35</b>
7.1	Balken mit rechteckigem Querschnitt . . . . .	35
7.2	Euler-Bernoulli-Balkentheorien für klassische Elastizität . . . . .	36
7.2.1	Das Problem der inkonsistenten Formulierung . . . . .	36
7.2.2	Konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für klassische Elastizität . . . . .	38
7.3	Konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das KG-Modell . . . . .	40
7.3.1	Anisotropes KG-Modell mit geometrischen Zwangsbedingungen . . . . .	41
7.3.2	Prinzipien virtueller Arbeit – Einführung von Schnittkräften . . . . .	42
7.3.3	Einseitig eingespannter Balken unter Querlast . . . . .	54
7.4	Konsistente Euler-Bernoulli-Theorie für das 3-PG-Modell . . . . .	62
7.4.1	Anisotropes 3-PG-Modell mit geometrischen Zwangsbedingungen . . . . .	63



7.4.2	Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	64
7.4.3	Alternative und äquivalente Vorgehensweise . . . . .	71
7.4.4	Diskussion über Prinzipien der virtuellen Arbeit . . . . .	76
7.4.5	Beispiele, spezielle Randbedingungen . . . . .	77
7.5	Vergleich mit FE-Rechnungen . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>91</b>

# 1 Einleitung

---

Die Balkenbiegung ist von grundlegender Bedeutung, z.B. in der Technischen Mechanik, der Strukturanalyse, der experimentellen und der numerischen Mechanik. In den letzten Jahrzehnten wird ein besonderes Augenmerk auf Anwendungen in Mikro- und Makrosystemtechniken gelegt (siehe z.B. Thai et al. [52]). Es ist allgemein bekannt, dass Größeneffekte für das Werkstoffverhalten von kleinskaligen Strukturkomponenten, wie z.B. Balken und Platten in der Mikrosystemtechnik, eine wesentliche Rolle spielen. Die klassische Elastizitätstheorie ist nicht in der Lage, solche Größeneffekte wiederzugeben. Gängige Elastizitätstheorien, welche die Erfassung von Größeneffekten im Materialverhalten ermöglichen, sind die mikropolare, die mikromorphe, die Gradienten- und die nicht lokale Elastizitätstheorie. Es gibt eine beträchtliche Anzahl von Arbeiten, die sich im Rahmen dieser nicht klassischen Elastizitätstheorien mit der Biegung von Balken befassen. Von Bedeutung für die hier vorliegende Arbeit sind unter anderem die Arbeiten von Papargyri-Beskou et al. [41], Lam et al. [31], Park und Bao [42], Ma et al. [37], Li et al. [34], Kong et al. [29], Lazopoulos und Lazopoulos [32], Reddy [45], Akgöz und Civalek [1], Xu und Shen [55], Li und Batra [33], Liang et al. [35], Ansari et al. [4], Sherafatnia et al. [48], Yaghoubi et al. [57], Dehrouyeh-Semnani et al. [16], Ebrahimi et al. [19], Niiranen et al. [40], Shaat et al. [47].

Einfache Modelle der Gradientenelastizität sind besonders attraktiv, da sie mit symmetrischen Cauchy-Spannungen formuliert werden und im Vergleich zur klassischen Elastizität meist nur wenige zusätzliche Materialparameter benötigen. Seien zunächst  $\Sigma$  die Cauchy-Spannung,  $\varepsilon$  die infinitesimale Dehnung,  $\mathbf{C}$  der Elastizitätstensor und  $\Delta$  der Laplace-Operator. Eine Ausführliche Erläuterung der Notation folgt im Abschnitt 2. Hier werden Modelle betrachtet, die mit Hilfe der Spannung, der Dehnung und deren Ableitungen ausgedrückt werden und die als Verallgemeinerungen des klassischen Elastizitätsgesetzes

$$\Sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (1.1)$$

angesehen werden können. Als Modelle der expliziten Gradientenelastizität werden Stoffgesetze der Form

$$\Sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}, \text{Ableitungen von } \varepsilon_{kl}) \quad (1.2)$$

bezeichnet, während Stoffgesetze der impliziten Gradientenelastizität der allgemeinen Gleichung

$$f_{ij}(\Sigma_{kl}, \varepsilon_{kl}, \text{Ableitungen von } \Sigma_{kl}, \varepsilon_{kl}) = 0 \quad (1.3)$$

genügen. Unter Ableitungen sollen in den Formeln (1.2) und (1.3) Ableitungen bezüglich des Ortes verstanden werden. Besonders einfache Modelle der expliziten und der impliziten Gradientenelastizität sind jeweils die Gesetze

$$\Sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} - c_2 C_{ijmn} (\Delta \varepsilon)_{mn} \quad (\text{KG-Modell}) \quad (1.4)$$

und

$$\Sigma_{ij} - c_1 (\Delta \Sigma)_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} - c_2 C_{ijmn} (\Delta \varepsilon)_{mn} \quad (\text{3-PG-Modell}) \quad , \quad (1.5)$$

wobei  $c_1, c_2$  Materialparameter sind. Die beiden Gradientenelastizitätsgesetze (1.4), (1.5) sind durch die Arbeiten von Altan und Aifantis [3] und Gutkin und Aifantis [27] eingeführt bzw. allgemein bekannt geworden.

---

Das explizite Gradientenelastizitätsmodell (1.4) ist der Ausgangspunkt vieler Balkentheorien und kann als Spezialfall der Gradientenelastizität vom Toupin/ Mindlin-Typ (siehe Mindlin [39]) angesehen werden. Zusätzlich haben Bröse et al. [10, 11, 9], unter Verwendung nicht klassischer Thermodynamik, eine Analogie zwischen Modellen der Gradientenelastizität und linear viskoelastischen Festkörpern hergestellt. Gemäß dieser Analogie ist Gleichung (1.4) innerhalb der Gradientenelastizität das Gegenstück des Kelvin-viskoelastischen Festkörpers. Die Kurzschreibweise KG-Modell in Gleichung (1.4) steht daher für Kelvin-Gradientenelastizitäts-Modell.

Stoffgesetze der impliziten Gradientenelastizität der Form (1.5) werden zunehmend als Sonderfälle der nicht lokalen Elastizität von Eringen interpretiert (siehe z.B. Yan et al. [58], Xu et al. [56], Ceballes et al. [13], Lim et al. [36]).

Im Allgemeinen wird die nicht lokale Elastizitätstheorie von Eringen häufig verwendet, um die Biegung von Balken zu modellieren (siehe z.B. Eltaher et al. [20], Fernández-Sáez et al. [23], Koutsoumaris et al. [30], Pisano et al. [43], Shaat et al. [46], Thai et al. [52] und die dort zitierten Referenzen). Eine andere Art der Annäherung an das Modell (1.5) wurde von den Autoren Bröse et al. [9] vorgeschlagen. Einerseits interpretierten sie (1.5) als Sonderfall der mikrostrukturierten Elastizität von Mindlin (äquivalent dazu die mikromorphe Elastizität von Eringen). Andererseits stellten sie unter Verwendung nicht klassischer Thermodynamik eine Analogie zwischen Gleichung (1.5) und dem 3-Parameter-Festkörper der linearen Viskoelastizität her. Die Abkürzung 3-PG-Modell in Gleichung (1.5) steht für 3-Parameter-Gradientenelastizitäts-Modell.

Die Euler-Bernoulli-Balkentheorie in der klassischen Mechanik nimmt an, dass das Materialverhalten isotrop elastisch ist. Weiterhin wird angenommen, dass ebene Querschnitte des Balkens eben und senkrecht zur verformten Balkenachse bleiben und dass sich die Form der Querschnitte nicht ändert (siehe z.B. Bauchau und Craig [5] Abschnitt 5.1 und 5.4.2). Das bedeutet, dass die Querschnitte eine Starrkörperbewegung ausführen. Diese Theorie weist die bekannte Inkonsistenz auf, dass der Dehnungszustand nach diesen Annahmen z.B. immer eine verschwindende Schubspannung impliziert, was für allgemeine Biegebeanspruchung nicht korrekt ist. Dies wird in der Technischen Mechanik ignoriert, und eine nicht verschwindende Schubspannung wird durch die Gleichgewichtsgleichungen eingebracht. Solche Inkonsistenzen werden in Kauf genommen, mit der Begründung, dass die Schubspannungen für schlanke Balken vernachlässigbar klein sind (siehe z.B. Bauchau und Craig [5] Kapitel 5.4.2 und Janečka et al. [28]). Nahezu alle Euler-Bernoulli-Biegetheorien in klassischer und Gradientenelastizität sind inkonsistent oder werden auf Basis von eindimensionalen Variationsprinzipien formuliert, sodass solche Theorien nur Schnittkräfte ohne Bezug zu Spannungen behandeln.

Eine konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie, für das klassische Elastizitätsgesetz (1.1) und das KG-Modell (1.4), wurde zum ersten Mal in Sideris und Tsakmaki [50] vorgeschlagen. Die Inkonsistenz wird beseitigt, indem das Materialverhalten als transversal isotrop angenommen wird, unterworfen an (interne) geometrische Zwangsbedingungen. Es wird gezeigt, dass alle Ergebnisse der klassischen Vorgehensweise auch im Rahmen der konsistenten Formulierung gültig bleiben. Darüber hinaus bietet die konsistente Formulierung im Fall des Gradientenelastizitätsmodells (1.4) die Möglichkeit, Verteilungen von Spannungskomponenten zu bestimmen. Ein typisches Merkmal der Theorie von Sideris und Tsakmaki [50] ist, dass das Potential der inneren Kräfte die Querschnittsfläche des Balkens enthält. Neuere Überlegungen zeigen jedoch, dass auch äquivalente Formulierungen ohne Querschnittsflächen im Potential für die inneren Kräfte möglich sind. Dieser Aspekt wird im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das 3-PG-Modell der Gradientenelastizität (1.5) herauszuarbeiten. Die resultierende Theorie soll eingesetzt werden, um das Biegen von Kragträgern zu diskutieren. Die berechneten Ergebnisse sollen mit Ergebnissen verglichen werden, die mit Hilfe des KG-Modells und der klassischen Elastizität berechnet werden. Die Ergebnisse des KG-Modells sollen

---

mit einer konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorie berechnet werden, welche die Querschnittsfläche des Balkens im Potential für die inneren Kräfte nicht enthält. Darüber hinaus soll ein Vergleich mit Ergebnissen durchgeführt werden, die mittels 3D Finite-Elemente Berechnungen für das 3-PG-Modell durchgeführt werden. Inhaltlich ist die Arbeit folgenderweise aufgebaut. In Kapitel 2 werden die Notation und wichtige Grundannahmen der Arbeit erläutert. Modelle der Gradientenelastizität können einerseits als Sonderfälle der mikromorphen Elastizität betrachtet werden. Der dafür nötige thermodynamische Rahmen ist die klassische Thermodynamik. Andererseits können Modelle der Gradientenelastizität im Rahmen einer Theorie mit inneren Variablen behandelt werden. Der dafür geeignete thermodynamische Rahmen ist eine nicht konventionelle thermodynamische Theorie. Die verwendete nicht konventionelle Thermodynamik wurde von der Literatur übernommen und wird kurz in Kapitel 3 skizziert. Fundamental für die gesamte Arbeit ist die mikromorphe Elastizität. Die Grundgleichungen dieser nicht klassischen Theorie inklusive Randbedingungen werden in Kapitel 4 umrissen. In Kapiteln 5 und 6 werden jeweils zwei alternative Herleitungen des KG-Modells (Kapitel 5) und des 3-PG-Modells (Kapitel 6) vorgestellt. Die Entwicklung und Diskussion einer konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das 3-PG-Modell ist der Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 7. Außerdem werden in diesem Kapitel vergleichende Diskussionen mit Balkentheorien für die angrenzenden Fälle der klassischen Elastizität und des KG-Modells durchgeführt. Ein Vergleich der Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das 3-PG-Modell mit Finite-Elemente Berechnungen ist im Kapitel ebenfalls enthalten. Die Arbeit schließt in Kapitel 8 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick über mögliche Forschungsarbeiten zur Klärung noch offener Fragestellungen ab.



## 2 Notation und Grundannahmen

Es werden nur statische Probleme betrachtet und die Deformationen werden als klein angenommen, sodass zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration nicht unterschieden wird. Sofern nicht explizit etwas anderes erwähnt wird, nehmen alle Indizes die Werte 1, 2, 3 an und es gilt die Summationskonvention für doppelt vorkommende Indizes.

Alle tensoriellen Komponenten beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem  $\{x_i\}$ , das die ortho-normale Koordinatenbasis  $\{e_i\}$  induziert. Jeder Tensor  $\mathbf{A}$  wird durch seine Komponenten  $A_{i\dots j} \equiv (\mathbf{A})_{i\dots j}$  identifiziert und es wird  $A_{i\dots(jk)\dots p}$  für den symmetrischen und  $A_{i\dots[jk]\dots p}$  für den schiefsymmetrischen Teil von  $\mathbf{A}$  bezüglich der Indizes  $j$  und  $k$  geschrieben. Insbesondere stellen  $v_i$  und  $\delta_{ij}$  jeweils die Komponenten eines Vektors  $\mathbf{v}$  und des Kronecker Delta Symbols dar. Für Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{A}$ , vierter Stufe  $\mathbf{K}$ , fünfter Stufe  $\mathbf{A}$  und sechster Stufe  $\mathbf{a}$  sind Transpositionen jeweils durch  $(\mathbf{A}^T)_{ij} := A_{ji}$ ,  $(\mathbf{K}^T)_{ijkl} := K_{klij}$ ,  $(\mathbf{A}^T)_{ijklm} := A_{klmij}$  und  $(\mathbf{a}^T)_{ijklmn} := a_{lmnijk}$  definiert.

Sei  $\mathcal{B}$  ein materieller Körper, der den Raum  $V$  im dreidimensionalen euklidischen Punktraum einnimmt. Die materiellen Punkte des Körpers  $\mathcal{B}$  werden durch die Ortsvektoren  $\mathbf{x} = x_i e_i$  identifiziert. Die Zeit wird mit  $t$  und der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor zur Fläche  $\partial V$ , die den Raum  $V$  einschließt, wird mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet. In der Regel werden für eine Funktion  $y$  von  $x_1, x_2, \dots$  dasselbe Symbol für die Funktion und für die abhängige Variable benutzt, d.h.  $y = y(x_1, x_2, \dots)$ . Wenn jedoch  $y$  als Funktion von unterschiedlichen Sätzen von unabhängigen Variablen darstellbar ist, dann werden jeweils unterschiedliche Funktionssymbole verwendet. Ist z.B.  $y$  eine Funktion von  $x_1, x_2, \dots$  und gilt  $x_1 = x_1(z_1, z_2, \dots)$ ,  $x_2 = x_2(z_1, z_2, \dots)$ , so werden die Notation  $y = f(x_1, x_2, \dots) = g(z_1, z_2, \dots)$  benutzt.

Für eine Funktion  $f(\mathbf{x}, t)$ , mit  $\mathbf{x} \in V \cup \partial V$ , wird die Notation

$$\dot{f} := \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad \partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f_{,x_i} \quad (2.1)$$

verwendet. Die Gradient- und Divergenzoperatoren werden mit  $\text{grad}$  bzw.  $\text{div}$  bezeichnet, sodass für Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{S}$  und Tensoren dritter Stufe  $\boldsymbol{\mu}$  gilt

$$(\text{grad } \mathbf{S})_{ijk} = \partial_i S_{jk} \quad , \quad (\text{div } \boldsymbol{\mu})_{jk} = \partial_i \mu_{ijk} \quad . \quad (2.2)$$

Für die Laplace-Ableitung  $\Delta f$  gilt

$$\Delta f = \text{div grad } f \equiv \partial_i \partial_i f \quad . \quad (2.3)$$

Für jedes  $\mathbf{x} \in \partial V$  sind die Normalableitung  $Df(\mathbf{x})$  und die Flächenableitung  $D_i f(\mathbf{x})$  definiert durch

$$Df := n_i \partial_i f, \quad (2.4)$$

$$D_i f := \partial_i f - n_i Df. \quad (2.5)$$

Weitere Angaben zur Notation werden an geeigneten Stellen im Text gemacht.





### 3 Nicht konventionelle Thermodynamik

---

Dieser Teil der Arbeit fasst die wesentlichen Erkenntnisse von Alber et al. [2] und Bröse et al. [11] zusammen und bildet die Grundlage für den Beweis der thermodynamischen Konsistenz der KG- und 3-PG-Modelle in den Kapiteln 5 und 6.

Es wird angenommen, dass Strahlung, chemische Reaktionen und elektromagnetische Effekte nicht vorhanden sind. Dann lautet die lokale Form der Energiebilanz für einen materiellen Körper  $\mathcal{B}$  (erster Hauptsatz der Thermodynamik)

$$\dot{e} = w_{st} - \partial_i q_i \quad , \quad (3.1)$$

wobei  $e$  die innere Energie pro Volumeneinheit,  $w_{st}$  die Spannungsleistung pro Volumeneinheit (stresspower) und  $\mathbf{q}$  der Wärmeflussvektor ist. Toupin [53] schlug die Möglichkeit vor, dass  $\mathbf{q}$  mehr als nur den Wärmefluss beinhaltet. Dies wurde von Dunn und Serrin [18] und Dunn [17] weiter ausgeführt.

Grundlegend in der konventionellen irreversiblen Thermodynamik ist die Hypothese des lokalen Gleichgewichtszustands. Diese Hypothese geht davon aus, dass sich jeder materielle Punkt des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  wie ein einfaches homogenes System im Gleichgewicht verhält. Dies impliziert eine absolute Temperatur  $\theta > 0$  und eine Entropie pro Volumeneinheit  $\eta$ , die jedem Punkt zugeordnet werden kann. Die freie Energie pro Volumeneinheit ist definiert durch

$$\psi := e - \theta \eta \quad , \quad (3.2)$$

so, dass das Energiegesetz (3.1) äquivalent durch

$$w_{st} - \dot{\psi} - \theta \dot{\eta} - \eta \dot{\theta} - \partial_i q_i = 0 \quad (3.3)$$

ausgedrückt werden kann. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wird in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung angenommen, die besagt, dass die Entropieproduktion  $\gamma$  nicht negativ ist,

$$\gamma := \dot{\eta} + \partial_i \left( \frac{q_i}{\theta} \right) \geq 0 \quad . \quad (3.4)$$

Eine äquivalente Umformulierung dieser Ungleichung ergibt sich durch Berücksichtigung von (3.3):

$$-\left( \eta \dot{\theta} + \dot{\psi} \right) + w_{st} - \frac{1}{\theta} q_i \partial_i \theta \geq 0. \quad (3.5)$$

Mit Hilfe der Coleman-Noll-Vorgehensweise [14, 15] lässt sich daraus für bestimmte Klassen von Materialien die Potentialbeziehung

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

gewinnen.

Betrachtet wird nun eine Klasse von Materialien, die räumlich nicht lokale Materialeigenschaften besitzt. Nun soll zum Beispiel angenommen werden, dass die Funktion der freien Energie  $\psi$  nicht nur von den in der klassischen irreversiblen Thermodynamik zulässigen Zustandsgrößen abhängt, sondern auch von den räumlichen Gradienten dieser Größen. Da Gradiententerme auf Nachbarschaftseffekte hinweisen, ist die Hypothese eines klassischen lokalen Gleichgewichtszustandes im Allgemeinen dann nicht mehr gerechtfertigt. Nach der klassischen irreversiblen Thermodynamik kann die Existenz der absoluten Temperatur  $\theta$  und der Entropie  $\eta$  jedoch nur für Gleichgewichtszustände bewiesen werden. In Anlehnung an die klassische irreversible Thermodynamik kann dieses Problem konzeptionell wie folgt gelöst werden.

Es wird angenommen, dass der Zustand jedes materiellen Punktes von  $\mathcal{B}$  zu jedem Zeitpunkt mit einem homogenen materiellen System im Gleichgewicht assoziiert werden kann, welches als verallgemeinerter assoziierter lokaler Gleichgewichtszustand oder -system bezeichnet wird. Die klassische Thermostatik gewährleistet für das verallgemeinerte assoziierte Gleichgewichtssystem die Existenz der absoluten Temperatur  $\theta(x, t)$  und der Entropie  $\eta(x, t)$ . Diese sollen für jeden Punkt  $x$  und zu jeder Zeit  $t$  mit denen des realen Materials übereinstimmen. Mit  $v_I$ , wobei  $I = 1, \dots, N_I$  ist, sollen die Komponenten der Zustandsvariablen und mit  $\xi_J$ , wobei  $J = 1, \dots, N_J$  ist, die Komponenten der zeitlichen und räumlichen Ableitungen von  $v_I$  bezeichnet werden und für die freie Energie des realen Materials soll

$$\psi = \psi(v_I, \xi_J, \theta) \quad (3.7)$$

angenommen werden. Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit genügt es anzunehmen, dass Zeit- und Raumableitungen von  $\theta$  nicht in  $\xi_J$  enthalten sind.

Es wird angenommen, dass die Massendichte  $\rho$  und die Materialgleichung für die freie Energie Gleichung (3.7) des fiktiven lokalen Gleichgewichtssystems mit denen des realen Materials übereinstimmen. Sowohl für das reale Material als auch für den zugehörigen fiktiven Gleichgewichtszustand wird postuliert, dass die freie Energie  $\psi$  und die innere Energie  $e$  die Gleichung (3.2) erfüllen. Mit anderen Worten: Nicht nur die freie Energie, sondern auch die innere Energie ist in beiden Systemen identisch. Sei  $\mathbf{q}$  ein allgemeiner Energie- bzw. Wärmeflussvektor und  $w_{st}$  die Spannungsleistung jeweils für das reale System, sodass die Energiebilanzen (3.1) und (3.3) für das reale Material gelten. Jetzt wird eine Energiebilanz für das fiktive zugehörige Gleichgewichtssystem eingeführt, indem  $\xi_J$  für dieses (homogene) System als neue Zustandsvariablen betrachtet werden, die unabhängig von  $v_I, \theta$  sind. Es wird zum Beispiel angenommen, dass  $\varepsilon_{ij}$  und  $\partial_k \varepsilon_{ij}$  als Zustandsvariablen in die Materialfunktion von  $\psi$  eingehen. Dann wird  $\partial_k \varepsilon_{ij}$  für den verallgemeinerten zugehörigen lokalen Gleichgewichtszustand als neue, unabhängige kinematische Variable betrachtet. Diese zusätzliche Zustandsvariable wiederum erzeugt zusätzliche Spannungen höherer Ordnung, sodass die in die Energiebilanz für den fiktiven assoziierten lokalen Gleichgewichtszustand eingehende Spannungsleistung  $\bar{w}_{st}$  im Allgemeinen von  $w_{st}$  verschieden sein wird. Der Energie- bzw. Wärmefluss für das fiktive Gleichgewichtssystem wird mit  $\partial_i \bar{q}_i$  bezeichnet und damit wird für dieses System die Energiebilanz

$$\dot{e} = \bar{w}_{st} - \partial_i \bar{q}_i \quad \Leftrightarrow \quad \bar{w}_{st} - \dot{\psi} - \theta \dot{\eta} - \eta \dot{\theta} - \partial_i \bar{q}_i = 0 \quad (3.8)$$

postuliert. Werden die Spannungsleistung  $w'_{st}$  und der Energie- bzw. Wärmeflussvektor  $\mathbf{q}'$  durch

$$w'_{st} := w_{st} - \bar{w}_{st} \quad , \quad (3.9)$$

$$\mathbf{q}' := \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}} \quad (3.10)$$

definiert, dann wird aus den Gleichungen (3.1) und (3.8) die Gleichung

$$w'_{st} = \partial_i q'_i \quad . \quad (3.11)$$

Weiter wird angenommen, dass  $w'_{st}$  und  $\mathbf{q}'$  in  $N$  Teile  $w'_{st(i)}$  und  $\mathbf{q}'_{(i)}$  additiv zerlegt werden können:

$$w'_{st} = w'_{st(1)} + w'_{st(2)} + \dots + w'_{st(N)} \quad , \quad (3.12)$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}'_{(1)} + \mathbf{q}'_{(2)} + \dots + \mathbf{q}'_{(N)} \quad (3.13)$$

und es werden die Gesetze

$$\begin{aligned} w'_{st(1)} &= \partial_i q'_{(1)i} \quad , \\ w'_{st(2)} &= \partial_i q'_{(2)i} \quad , \\ &\vdots \\ w'_{st(N)} &= \partial_i q'_{(N)i} \end{aligned} \quad (3.14)$$

postuliert. Um die Theorie zu vervollständigen, müssen noch einige konstitutive Gleichungen für  $w'_{st(i)}$  und  $\mathbf{q}'$  angegeben werden. Dabei kann es sein, dass neue Variablen einbezogen werden.

Die physikalische Idee hinter diesen Gleichungen ist, dass die Energie- bzw. Wärmeflussvektordifferenz  $\mathbf{q}'$  zwischen dem aktuellen und dem verallgemeinerten lokalen Gleichgewichtszustand aus  $N$  verschiedenen Teilen zusammengesetzt sein kann, die mit entsprechenden Energieträgern in Beziehung gesetzt werden können. Diese Träger bieten die Möglichkeit, einen gewissen Energie- bzw. Wärmetransfer in mechanische Leistung zu erzeugen, ohne die innere Energie zu beeinträchtigen, wie aus den Gleichungen (3.9) - (3.14) hervorgeht. Die angenommene Übertragung muss bei der Entropieproduktion berücksichtigt werden, und daher wird postuliert, dass für das fiktive lokale Gleichgewichtssystem

$$\bar{\gamma} := \dot{\eta} + \partial_i \left( \frac{\bar{q}_i}{\theta} \right) \geq 0 \quad (3.15)$$

gilt. Daraus ergibt sich mit den Gleichungen (3.8)

$$- \left( \eta \dot{\theta} + \dot{\psi} \right) + \bar{w}_{st} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad . \quad (3.16)$$

Die Ungleichung (3.15) (bzw. (3.16)) ist die Anpassung der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.4) für den verallgemeinerten assoziierten fiktiven lokalen Gleichgewichtszustand, die auch für das reale Material gelten soll. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass das Konzept des verallgemeinerten assoziierten lokalen Gleichgewichtszustands die Existenz der absoluten Temperatur und der Entropie induziert und die Einführung der Ungleichung (3.15) oder (3.16) motiviert. Diese Ungleichungen können mit den bekannten Methoden der Kontinuumsthermodynamik ausgewertet werden. Wie bereits erwähnt, wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass alle Materialfunktionen nicht von zeitlichen und räumlichen Ableitungen von  $\theta$  abhängen. Mit Anwendung der Coleman-Noll-Vorgehensweise [14, 15] folgt, dass für die Entropie

$$\eta = - \frac{\partial \psi(v_I, \xi_J, \theta)}{\partial \theta} \quad (3.17)$$

gilt. Diese Potentialbeziehung wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit verwendet. Abschließend sei angemerkt, dass der Hauptunterschied dieses thermodynamischen Ansatzes zu anderen Ansätzen zum gleichen Thema in den Energieübertragungsgleichungen (3.9)–(3.14) besteht, die in anderen Theorien nicht postuliert werden.



## 4 Das mikromorphe Kontinuum

Das Mikrokontinuum von Mindlin [39] und das mikromorphe Kontinuum von Eringen [22] sind im Wesentlichen gleich zueinander. Daher werden im Folgenden beide als mikromorph bezeichnet. Für ein umfassendes Studium der expliziten als auch der impliziten Gradientenelastizität ist die Einbeziehung des mikromorphen Kontinuums von zentraler Bedeutung. Dieses Kapitel stellt wesentliche Grundzüge des elastischen mikromorphen Kontinuums in einer Form bereit, die zweckmäßig für die nachfolgenden Kapitel ist.

### 4.1 Grundlagen des mikromorphen Kontinuums

Ein mikromorphes Kontinuum ist ein makroskopischer Körper, der das Volumen  $V$  im dreidimensionalen Euklidischen Raum einnimmt und dessen Punkte mit Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  identifiziert werden. An jeden Punkt  $\mathbf{x}$  wird ein Mikrokontinuum angeheftet, das nur homogene Deformationen erfahren kann (siehe Mindlin [39]). Der Mikro-Verschiebungsgradient wird mit  $\Psi$  bezeichnet und seine Komponenten  $\Psi_{ij}$  hängen nur vom betrachteten makroskopischen Punkt  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  ab,  $\Psi_{ij} = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, t)$ . Der Makro-Verschiebungsvektor ist  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_i \mathbf{e}_i$  und die Komponenten des Makro-Dehnungstensors  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t)$  sind

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \partial_{(i} u_{j)} \quad . \quad (4.1)$$

Zusätzlich werden ein relativer Verschiebungsgradient  $\gamma = \gamma(\mathbf{x}, t)$

$$\gamma_{ij} := \partial_i u_j - \Psi_{ij} \quad (4.2)$$

und der Gradient  $\kappa := \text{grad}\Psi$

$$\kappa_{ijk} := \partial_i \Psi_{jk} \quad (4.3)$$

eingeführt. Es wird postuliert, dass neben den Komponenten  $u_i$  auch die Komponenten  $\Psi_{ij}$  unabhängige kinematische Freiheitsgrade darstellen. Dies impliziert auf der einen Seite, dass die Cauchy'sche Spannung  $\Sigma$  i.A. nicht symmetrisch ist und auf der anderen Seite, dass höhere Kräfte (sog. Doppelspannungstraktionen  $\mathbf{T}$ ) und höhere Spannungen (sog. Doppelspannungen  $\mu$ ) existieren. Die Traktion  $\mathbf{T}$  ist ein Tensor zweiter Stufe mit Komponenten  $T_{ij}$ , während die Doppelspannung ein Tensor dritter Stufe mit Komponenten  $\mu_{ijk}$  ist. Die Spannung  $\Sigma$  wird in Anteile  $\tau$  und  $\sigma$  gemäß der Gleichung

$$\Sigma_{ij} := \tau_{ij} + \sigma_{ij} \quad (4.4)$$

zerlegt. Für statische Probleme und vernachlässigbare Volumenkräfte gelten die Bilanzgleichungen

$$\partial_i \Sigma_{ij} = 0 \quad , \quad (4.5)$$

$$\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} = 0 \quad . \quad (4.6)$$

Ist  $\Psi$  eine Rotation, so reduziert sich das mikromorphe Kontinuum auf das sogenannte mikropolare Kontinuum. Für das mikropolare Kontinuum stellt (4.6) eine Gleichgewichtsbedingung für Drehmomente dar. Die

Spannung  $\tau$  kommt in der Bilanzgleichung (4.6) nicht vor und sie ergibt sich für das mikromorphe Kontinuum als symmetrisch,

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad . \quad (4.7)$$

Die Randbedingungen zu den partiellen Differentialgleichungen (4.5), (4.6) können mit Hilfe der Bilanz der mechanischen Leistung ermittelt werden. Im Falle der Statik ist diese Bilanz äquivalent zu den Gleichgewichtsbedingungen und besagt, dass die Leistung der inneren Kräfte gleich zur Leistung der äußeren Kräfte ist. Äquivalent dazu ist, dass die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte gleich zur virtuellen Arbeit der inneren Kräfte ist. Die letztere Aussage ist bekannt als Prinzip der virtuellen Arbeit.

Um dieses Prinzip aus den Gleichgewichtsbedingungen herzuleiten, wird die Gleichung (4.5) mit der virtuellen Verschiebung  $\delta u_j$  und die Gleichung (4.6) mit dem virtuellen Mikro-Verschiebungsgradient  $\delta \Psi_{jk}$  multipliziert. Anschließend wird über das Volumen  $V$  integriert und die Ergebnisse zueinander addiert:

$$\int_V (\partial_i \Sigma_{ij}) \delta u_j dV + \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk}) \delta \Psi_{jk} dV = 0 \quad . \quad (4.8)$$

Mit Hilfe partieller Integration wird daraus

$$\int_V \partial_i (\Sigma_{ij} \delta u_j) dV + \int_V \partial_i (\mu_{ijk} \delta \Psi_{jk}) dV = \int_V [\Sigma_{ij} \delta (\partial_i u_j) - \sigma_{jk} \delta \Psi_{jk} + \mu_{ijk} \delta (\partial_i \Psi_{jk})] dV \quad (4.9)$$

erhalten. Die Anwendung des Gauß'schen Satzes und die Berücksichtigung der Gleichungen (4.4), (4.8), (4.1), (4.2) und (4.3) führen dann zu

$$\int_{\partial V} (n_i \Sigma_{ij} \delta u_j + n_i \mu_{ijk} \delta \Psi_{jk}) dS = \int_V (\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk}) dV \quad . \quad (4.10)$$

Schließlich werden der Spannungsvektor  $t$  und die Doppelspannungstraktion  $T$  definiert durch

$$t_j := n_i \Sigma_{ij} \quad , \quad (4.11)$$

$$T_{jk} := n_i \mu_{ijk} \quad (4.12)$$

und aus (4.10) wird das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_{\partial V} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dS = \int_V (\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk}) dV \quad (4.13)$$

erhalten.

Das Oberflächenintegral auf der linken Seite ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte, während das Volumenintegral auf der rechten Seite die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte angibt. Demzufolge stellt

$$w_{st} := \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ijk} \dot{\kappa}_{ijk} \quad (4.14)$$

die Spannungsleistung dar.

Die virtuelle Verschiebung  $\delta u_i$  verschwindet auf dem Teil  $\partial V_{\mathbf{u}}$  des Randes  $\partial V$ , auf dem Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben werden. Ähnlicherweise verschwindet  $\delta \Psi_{ij}$  auf dem Teil  $\partial V_{\Psi}$  von  $\partial V$ , auf dem Randbedingungen für  $\Psi_{ij}$  gelten. Die linke Seite von (4.13) legt dann nahe, die Randbedingung insgesamt wie folgt zu setzen:

$$\text{Entweder } t_i \text{ oder } u_i \quad \text{und} \quad (4.15)$$

$$\text{entweder } T_{ij} \text{ oder } \Psi_{ij} \quad (4.16)$$

müssen auf  $\partial V$  vorgeschrieben werden. Kennzeichnet  $\partial V_t$  den Teil von  $\partial V$  wo  $t$  vorgegeben wird und  $\partial V_T$  den Teil von  $\partial V$  wo  $T$  vorgegeben wird, so gilt  $\partial V_u \cap \partial V_t = \emptyset$ ,  $\partial V_u \cup \partial V_t = \partial V$ ,  $\partial V_\Psi \cap \partial V_T = \emptyset$  und  $\partial V_\Psi \cup \partial V_T = \partial V$ . Diese Aufteilungen des Randes  $\partial V$  gelten sinngemäß für alle weiteren in dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen.

## 4.2 Elastisch mikromorphes Kontinuum

### 4.2.1 Lineare Elastizitätsgesetze

Ein elastisches mikromorphes Kontinuum ist charakterisiert durch die Existenz einer freien Energie pro Volumeneinheit

$$\psi = \tilde{\psi}(\varepsilon, \gamma, \kappa) \quad . \quad (4.17)$$

Ferner wird angenommen, dass die Materialfunktionen für  $\tau$ ,  $\sigma$  und  $\mu$  auch nur von  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  und  $\kappa$  abhängen und dass die konventionelle Thermodynamik der geeignete Rahmen zur Behandlung des elastischen mikromorphen Kontinuums ist. Nun werden isotherme Deformationsprozesse mit gleichförmig verteilter Temperatur betrachtet. Damit reduziert sich der zweite Hauptsatz (3.5) auf

$$w_{st} - \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (4.18)$$

Im Hinblick auf die Gleichungen (4.14) und (4.17) ergibt sich daraus

$$\left( \tau_{ij} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_{ij}} \right) \dot{\gamma}_{ij} + \left( \mu_{ijk} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \kappa_{ijk}} \right) \dot{\kappa}_{ijk} \geq 0 \quad . \quad (4.19)$$

Gemäß der Argumentation von Coleman und Noll [15] können  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\psi}$  (bzw.  $\dot{\gamma}$ ) und  $\dot{\kappa}$  im betrachteten Punkt beliebig vorgegeben werden. Da  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$  nicht von  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\gamma}$  und  $\dot{\kappa}$  abhängen, müssen die Klammerausdrücke in (4.19) verschwinden, um die Ungleichung für jeden beliebigen, zulässigen Prozess zu erfüllen. Dies führt zu den Potentialbeziehungen (Elastizitätsgesetze)

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad , \quad (4.20)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_{ij}} \quad , \quad (4.21)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \kappa_{ijk}} \quad (4.22)$$

und zur Gleichung

$$w_{st} = \dot{\psi} \quad . \quad (4.23)$$

Damit trägt die gesamte Spannungsleistung zur zeitlichen Änderung von  $\psi$  bei (nichts wird dissipiert).

Seien  $\mathbb{C}_{ijkl}$ ,  $\mathbb{B}_{ijkl}$ ,  $\mathbb{Q}_{ijklmn}$ ,  $\mathbb{D}_{ijklm}$ ,  $\mathbb{F}_{ijklm}$  und  $\mathbb{G}_{ijkl}$  jeweils Komponenten von Elastizitätstensoren mit folgenden Symmetrieeigenschaften:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} = \mathbb{C}_{ij(kl)} \quad , \quad (4.24)$$

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \mathbb{B}_{klij} \quad , \quad (4.25)$$

$$\mathbb{Q}_{ijklmn} = \mathbb{Q}_{lmnij k} \quad , \quad (4.26)$$

$$\mathbb{D}_{ijklm} = \mathbb{D}_{(ij)klm} \quad , \quad (4.27)$$

$$\mathbb{F}_{ijklm} = \mathbb{F}_{(ij)klm} \quad , \quad (4.28)$$

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{G}_{ij(kl)} \quad . \quad (4.29)$$

Die Annahme (vergleich Mindlin [39])

$$\psi = \tilde{\psi}(\varepsilon, \gamma, \kappa) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \gamma_{ij} \mathbb{B}_{ijkl} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} \kappa_{ijk} \mathbb{Q}_{ijklmn} \kappa_{lmn} + \gamma_{ij} \mathcal{D}_{ijklm} \kappa_{klm} + \varepsilon_{ij} \mathcal{F}_{ijklm} \kappa_{klm} + \gamma_{ij} \mathbb{G}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.30)$$

ist der einfachste Ansatz, der zu linearen Elastizitätsgesetzen führt (der Elastizitätstensor  $\mathcal{D}$  besitzt keine Symmetrieeigenschaften):

$$\begin{aligned} \tau_{pq} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varepsilon_{pq}} = \mathbb{C}_{pqij} \varepsilon_{ij} + \gamma_{ij} \mathbb{G}_{ijpq} + \mathcal{F}_{pqklm} \kappa_{klm} \\ &= \mathbb{C}_{pqij} \varepsilon_{ij} + (\mathbf{G}^T)_{pqij} \gamma_{ij} + \mathcal{F}_{pqklm} \kappa_{klm} \quad , \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\sigma_{pq} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_{pq}} = \mathbb{G}_{pqkl} \varepsilon_{kl} + \mathbb{B}_{pqkl} \gamma_{kl} + \mathcal{D}_{pqklm} \kappa_{klm} \quad , \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \mu_{pqr} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \kappa_{pqr}} = \varepsilon_{ij} \mathcal{F}_{ijpqr} + \gamma_{ij} \mathcal{D}_{ijpqr} + \mathbb{Q}_{pqrlmn} \kappa_{lmn} \\ &= (\mathcal{F}^T)_{pqrij} \varepsilon_{ij} + (\mathcal{D}^T)_{pqrij} \gamma_{ij} + \mathbb{Q}_{pqrlmn} \kappa_{lmn} \quad . \end{aligned} \quad (4.33)$$

#### 4.2.2 Mikromorphe Elastizität mit rotationsfreien Mikro-Deformationen

Für das weitere Vorgehen ist der spezielle Fall wichtig, bei dem nur die symmetrischen Anteile von  $\Psi$  und  $\gamma$  die Materialfunktionen beeinflussen. Um dies zu erreichen, wird festgelegt, dass die Elastizitätstensoren in (4.30) neben den Eigenschaften (4.24) - (4.29) zusätzlich die folgenden Symmetrien aufweisen:

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \mathbb{B}_{ij(kl)} \quad , \quad (4.34)$$

$$\mathbb{Q}_{ijklmn} = \mathbb{Q}_{ijkl(mn)} \quad , \quad (4.35)$$

$$\mathcal{D}_{ijklm} = \mathcal{D}_{(ij)k(lm)} \quad , \quad (4.36)$$

$$\mathcal{F}_{ijklm} = \mathcal{F}_{ijk(lm)} \quad , \quad (4.37)$$

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{G}_{(ij)kl} \quad . \quad (4.38)$$

Insgesamt besitzen dann die Elastizitätstensoren die Eigenschaften:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} = \mathbb{C}_{(ij)(kl)} \quad , \quad (4.39)$$

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \mathbb{B}_{klij} = \mathbb{B}_{(ij)(kl)} \quad , \quad (4.40)$$

$$\mathbb{Q}_{ijklmn} = \mathbb{Q}_{lmnijk} = \mathbb{Q}_{i(jk)l(mn)} \quad , \quad (4.41)$$

$$\mathcal{D}_{ijklm} = \mathcal{D}_{(ij)k(lm)} \quad , \quad (4.42)$$

$$\mathcal{F}_{ijklm} = \mathcal{F}_{(ij)k(lm)} \quad , \quad (4.43)$$

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{G}_{(ij)(kl)} \quad . \quad (4.44)$$

**Bemerkung** Die postulierten Eigenschaften der Elastizitätstensoren in Gleichungen (4.34) - (4.38) sollten wie Grenzprozesse verstanden werden. Beispielsweise entspricht die Gleichung (4.34) dem Grenzprozess  $\mathbb{B}_{ij[kl]} \rightarrow 0$ . Beim Durchführen der Grenzprozesse, die von den Gleichungen (4.34) - (4.38) festgesetzt werden, entsteht ein "Grenzsystem" von Gleichungen, dessen Kompatibilität überprüft werden muss. Beispielsweise ist zu prüfen, ob das Grenzmodell mit dem zweiten Hauptsatz vereinbar bleibt und ob die Grenzspannungen



auch Potentialbeziehungen erfüllen. Es ist auch zu überprüfen, ob die Grenzwerte der Randbedingungen mit dem Grenzsystem kompatibel sind. Diese Bemerkung gilt für jegliche Art von Grenzprozessen von Materialparametern.

Bei den Grenzübergängen gemäß Gleichungen (4.34) - (4.38) gehen die Materialfunktion von  $\psi$  in Gleichung (4.30) und die Formeln für die Spannungen in Gleichungen (4.31) - (4.38), in

$$\psi = \tilde{\psi}(\varepsilon_{ij}, \gamma_{(ij)}, \kappa_{i(jk)}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \gamma_{(ij)} \mathbb{B}_{ijkl} \gamma_{(kl)} + \frac{1}{2} \kappa_{i(jk)} \mathbb{Q}_{ijklmn} \kappa_{l(mn)} + \gamma_{(ij)} \mathcal{D}_{ijklm} \kappa_{k(lm)} + \varepsilon_{ij} \mathcal{F}_{ijklm} \kappa_{k(lm)} + \gamma_{(ij)} \mathbb{G}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad , \quad (4.45)$$

$$\tau_{pq} = \mathbb{C}_{pqij} \varepsilon_{ij} + (\mathbb{G}^T)_{pqij} \gamma_{(ij)} + \mathcal{F}_{pqklm} \kappa_{k(lm)} \quad , \quad (4.46)$$

$$\sigma_{pq} = \sigma_{(pq)} = \mathbb{G}_{pqkl} \varepsilon_{kl} + \mathbb{B}_{pqkl} \gamma_{(kl)} + \mathcal{D}_{pqklm} \kappa_{k(lm)} \quad , \quad (4.47)$$

$$\mu_{pqr} = \mu_{p(qr)} = (\mathcal{F}^T)_{pqr ij} \varepsilon_{ij} + (\mathcal{D}^T)_{pqr ij} \gamma_{(ij)} + \mathbb{Q}_{pqrlmn} \kappa_{l(mn)} \quad (4.48)$$

über. Für die Spannungen bestehen weiterhin Potentialbeziehungen, allerdings in Verbindung mit der Funktion  $\tilde{\psi}$ :

$$\tau_{pq} \equiv \tau_{(pq)} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varepsilon_{pq}} \quad , \quad (4.49)$$

$$\sigma_{pq} \equiv \sigma_{(pq)} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_{(pq)}} \quad , \quad (4.50)$$

$$\mu_{pqr} \equiv \mu_{p(qr)} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \kappa_{p(qr)}} \quad (4.51)$$

und der Cauchy'sche Spannungstensor  $\Sigma$  wird symmetrisch:

$$\Sigma_{ij} = \tau_{ij} + \sigma_{ij} \equiv \Sigma_{(ij)} \quad . \quad (4.52)$$

Ferner geht die Spannungsleistung  $w_{st}$  in Gleichung (4.14) in

$$w_{st} := \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{(ij)} + \mu_{ijk} \dot{\kappa}_{i(jk)} \quad (4.53)$$

über und es gilt weiterhin

$$w_{st} = \frac{d}{dt} \tilde{\psi} \quad . \quad (4.54)$$

Infolge der letzten Gleichung bleibt auch der zweite Hauptsatz (siehe Gleichung (4.18)) stets erfüllt. Schließlich ist aufgrund der Symmetrieeigenschaft  $\mu_{ijk} \equiv \mu_{i(jk)}$  sofort ersichtlich, dass die Gleichung (4.10) in

$$\int_{\partial V} (n_i \Sigma_{ij} \delta u_j + n_i \mu_{ijk} \delta \Psi_{(jk)}) dS = \int_V \delta \tilde{\psi} dV \quad (4.55)$$

übergeht. Da  $\Psi_{[jk]}$  nirgendwo auftritt, besagt die letzte Gleichung, dass die unabhängigen kinematischen Freiheitsgrade des Systems jetzt  $u_i$  und  $\Psi_{(ij)}$  sind. Damit fordert die Gleichung (4.55) die Randbedingungen:

$$\text{Entweder } t_j = n_i \Sigma_{ij} \text{ oder } u_i \quad \text{und} \quad (4.56)$$

$$\text{entweder } T_{jk} = n_i \mu_{ijk} \text{ oder } \Psi_{(jk)} \quad , \quad (4.57)$$

welche auf  $\partial V$  vorgegeben werden, müssen.

---

**Bemerkung** In der obigen Vorgehensweise bleibt  $\Psi_{[ij]}$  unbestimmt; es hat aber keinerlei Einfluss. Dies legt nahe, die Deformationen des Mikrokontinuums von Beginn an überall als rotationsfrei, d.h.  $\Psi_{ij} \equiv \Psi_{(ij)}$ , zu postulieren. Es ist einfach zu prüfen, dass alle Gleichungen dieses Abschnittes genauso für diesen Fall gelten, wenn zusätzlich  $\gamma$  durch  $\gamma_{ij} := \varepsilon_{ij} - \Psi_{ij}$  definiert wird. Aber jetzt bleibt kein Anteil von  $\Psi$  unbestimmt. In der Tat wurde eine solche Theorie in Forest und Sievert [24] unter dem Namen “micro-strain continuum” vorgeschlagen. In dieser Arbeit wird das 3-PG-Modell in Kapitel 6.1 als Sonderfall der mikromorphen Elastizität mit rotationsfreien Mikro-Deformationen hergeleitet.

# 5 Das Kelvin-Modell der Gradientenelastizität (KG-Modell)

Es gibt zwei Interpretationen des KG-Modells (siehe Bröse et al. [10, 11] und Sideris [49]). Die eine betrachtet dieses Modell als Grenzfall der mikromorphen Elastizität mit rotationsfreiem  $\Psi$ . Demzufolge ist der Rahmen dieser Betrachtungsweise die klassische Thermodynamik. Die andere interpretiert das KG-Modell als klassisches Kontinuum, formuliert im Rahmen der nicht konventionellen Thermodynamik. Beide Vorgehensweisen werden in diesem Kapitel erläutert.

## 5.1 Das KG-Modell als Grenzfall mikromorpher Elastizität

### 5.1.1 Explizite Gradientenelastizität als Grenzfall mikromorpher Elastizität mit rotationsfreier Mikro-Deformation

Ein elastisches mikromorphes Kontinuum mit rotationsfreier Mikro-Deformation erfüllt die kinematischen Gleichungen

$$\Psi_{ij} \equiv \Psi_{(ij)} \quad , \quad \gamma_{ij} \equiv \gamma_{(ij)} := \varepsilon_{ij} - \Psi_{ij} \quad , \quad \kappa_{ijk} \equiv \kappa_{i(jk)} := \partial_i \Psi_{jk} \quad , \quad (5.1)$$

alle Gleichungen von Abschnitt 4.2.2, sowie die Bilanzgleichungen (4.5) und (4.6). Der Fokus wird jetzt auf den Grenzfall

$$\mathbb{B}_{ijkl} \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

gelegt. Dieser Grenzübergang erfordert die geometrische Zwangsbedingung

$$\lim_{\mathbb{B}_{ijkl} \rightarrow \infty} \gamma_{kl} = 0 \quad , \quad (5.3)$$

ansonsten würde die freie Energie  $\psi$  in Gleichung (4.45) über alle Grenzen wachsen. Dies wiederum bedeutet, dass der Spannungsanteil  $\mathbb{B}_{pqkl}\gamma_{kl}$  in Gleichung (4.47) durch Materialgleichungen nicht bestimmt werden kann. Diese Situation ist im Grunde ähnlich zum Fall isotroper klassischer Elastizität, wo ein unendlich großes Kompressionsmodul zu Inkompessibilität führt. Dieser Sachverhalt wird durch die geometrische Zwangsbedingung  $\varepsilon_{ii} = 0$  und die Existenz einer skalaren Spannung, des Druckes, reflektiert. Der Druck ist durch Materialgleichungen nicht bestimmbar sondern wird aus Bilanzgleichungen und Randbedingungen berechnet. Grundsätzlich gilt (siehe Truesdell und Noll [54]), dass für die Erfüllung geometrischer Zwangsbedingungen im Materialverhalten spezielle, sog. konjugierte, Spannungen benötigt werden, die keine Arbeit leisten. Für die Erfüllung von  $\gamma_{kl} = 0$  ist in diesem Fall die konjugierte Spannung  $\mathbb{B}_{pqkl}\gamma_{kl}$  erforderlich, die keine Arbeit leistet, d.h.  $(\mathbb{B}_{pqkl}\gamma_{kl})d\gamma_{pq} = 0$ . Dies bedeutet, dass  $\lim_{\mathbb{B}_{ijkl} \rightarrow \infty} \mathbb{B}_{pqkl}\gamma_{kl}$  beschränkt ist und deswegen

$\lim_{\mathbb{B}_{ijkl} \rightarrow \infty} \gamma_{ij}\mathbb{B}_{ijkl}\gamma_{kl} = 0$  in Gleichung (4.45) gilt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass Gleichung (5.3) äquivalent zu

$$\partial_{(i}u_{j)} = \varepsilon_{ij} = \Psi_{ij} \quad \text{und} \quad \kappa_{ijk} \rightarrow \hat{\kappa}_{ijk} \equiv \hat{\kappa}_{i(jk)} := \partial_i \varepsilon_{jk} \quad (5.4)$$

ist und dass nur drei Terme in Gleichung (4.45) übrig bleiben:

$$\lim_{\mathbb{B}_{ijkl} \rightarrow \infty} \tilde{\psi} \rightarrow \psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \hat{\kappa}_{ijk} \mathbb{Q}_{ijklmn} \hat{\kappa}_{lmn} + \varepsilon_{ij} \mathcal{F}_{ijklm} \hat{\kappa}_{klm} \quad . \quad (5.5)$$

Für die Grenzwerte der Spannungen in (4.46) - (4.48) gilt

$$\tau_{pq} \rightarrow \hat{\tau}_{pq} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_{pq}} = \mathbb{C}_{pqij} \varepsilon_{ij} + \mathcal{F}_{pqklm} \hat{\kappa}_{klm} \quad , \quad (5.6)$$

$$\sigma_{pq} \rightarrow \hat{\sigma}_{pq}: \text{ nicht bestimmbar durch Materialgleichungen,} \quad (5.7)$$

$$\mu_{pqr} \rightarrow \hat{\mu}_{pqr} \equiv \hat{\mu}_{p(qr)} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{pqr}} = (\mathcal{F}^T)_{pqrnm} \varepsilon_{mn} + \mathbb{Q}_{pqrlmn} \hat{\kappa}_{lmn} \quad . \quad (5.8)$$

Allerdings lässt sich  $\hat{\sigma}_{pq}$  aus der Gleichgewichtsbedingung (4.6) und der Gleichung (5.8) berechnen zu

$$\hat{\sigma}_{jk} \equiv \hat{\sigma}_{(jk)} = -\partial_i \hat{\mu}_{ijk} = -(\mathcal{F}^T)_{ijkmn} (\partial_i \varepsilon_{mn}) - \mathbb{Q}_{ijklmn} (\partial_i \partial_l \varepsilon_{mn}) \quad . \quad (5.9)$$

Für die Cauchy-Spannung ergibt sich damit

$$\Sigma_{ij} \equiv \Sigma_{(jk)} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} \quad . \quad (5.10)$$

Für die Spannungsleistung in (4.53) folgt, dass

$$w_{st} \rightarrow \hat{w}_{st} = \hat{\tau}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \dot{\hat{\kappa}}_{i(jk)} \quad , \quad (5.11)$$

womit auch

$$\hat{w}_{st} = \frac{d}{dt} \hat{\psi} \quad (5.12)$$

gilt. Dies wiederum zieht nach sich, dass der zweite Hauptsatz (4.18) stets erfüllt bleibt.

Durch das Einarbeiten der Gleichgewichtsbedingung (4.6) in Gleichung (5.9), um die Spannung  $\sigma$  und im Endeffekt die Cauchy'sche Spannung  $\Sigma$  zu ermitteln, bleibt nur noch die Gleichgewichtsbedingung (4.5) als Feldgleichung übrig. Damit ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\partial_i \Sigma_{ij} = 0 \quad , \quad (5.13)$$

$$\Sigma_{jk} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} = \mathbb{C}_{jkmn} \varepsilon_{mn} + [\mathcal{F}_{jklmn} - (\mathcal{F})_{ljkmn}^T] (\partial_l \varepsilon_{mn}) - \mathbb{Q}_{ijklmn} (\partial_i \partial_l \varepsilon_{mn}) \quad . \quad (5.14)$$

Es fehlt noch die dazugehörigen Randbedingungen festzulegen. Diese können nicht mehr die Form (4.56), (4.57) haben, weil  $\partial_i u_j$  und deswegen auch  $\Psi_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}$  nicht völlig unabhängig von  $u_i$  auf  $\partial V$  sind. Aus diesem Grund wird  $\partial_i u_j$  in Tangential- und Normalteile gemäß Gleichung (1.3) zerlegt,

$$\partial_i u_j = D_i u_j + n_i D u_j \quad . \quad (5.15)$$

Nun soll angenommen werden, dass  $u_j$  auf  $V \cup \partial V_{\mathbf{u}}$  bekannt ist. Anders als bei der Flächenableitung an einem Punkt  $\mathbf{x} \in \partial V_{\mathbf{u}}$ , kann die Normalableitung an dem Punkt nicht aus  $u_i$  ermittelt werden, weil Werte von  $u_i$  in Richtung der Außennormale  $\mathbf{n}$  nicht vorliegen. Deswegen kann die Normalableitung  $D u_i$  unabhängig von  $u_i$  auf dem Rand  $\partial V$  vorgeschrieben werden (z.B. Mindlin [39]). Das ist die Grundlage, auf der die Randbedingungen im nächsten Abschnitt aufgestellt werden. Es sei noch erwähnt, dass die Gleichungen (5.13), (5.14), zusammen mit den noch aufzustellenden Randbedingungen, die explizite Gradientenelastizität vom Toupin/ Mindlin-Typ mit linearen Elastizitätsgesetzen darstellen. Der hier verwendete Grenzübergang von der mikromorphen zur Gradientenelastizität ist neu und führt schneller und einfacher zum Ziel als die von Mindlin [39] verwendete Methode.

## 5.1.2 Die zugehörigen Randbedingungen

Sei  $V$  ein Bereich in  $\mathbb{R}^3$ , der von einer glatten Fläche  $\partial V$  eingeschlossen wird. Seien ferner  $A_{ij}$  und  $u_i$  hinreichend stetig differenzierbare Felder auf  $V \cup \partial V$ . In Brand [6] (S.222) wird gezeigt, dass die Identität

$$\int_{\partial V} D_i(A_{ij}u_j)dS = \int_{\partial V} (D_k n_k)n_i A_{ij}u_j dS \quad (5.16)$$

umgeschrieben werden kann. Dazu wird Gleichung (5.15) mit  $A_{ij}$  multipliziert:

$$A_{ij}\partial_i u_j = A_{ij}(D_i u_j) + A_{ij}n_i(Du_j) = D_i(A_{ij}u_j) = D_i(A_{ij}u_j) - (D_i A_{ij})u_j + A_{ij}n_i(Du_j) \quad (5.17)$$

Anwendung dieser Identität in Gleichung (5.16) liefert

$$\int_{\partial V} [A_{ij}(\partial_i u_j) + (D_i A_{ij})u_j - A_{ij}n_i(Du_j)] dS = \int_{\partial V} (D_k n_k)n_i A_{ij}u_j dS \quad (5.18)$$

bzw.

$$\int_{\partial V} A_{jk}(\partial_j u_k)dS = \int_{\partial V} [(D_l n_l)n_j A_{jk} - (D_j A_{jk})]u_k + n_j A_{jk}(Du_k)] dS \quad (5.19)$$

Jetzt soll die Gleichung (4.10) betrachtet werden und dort soll  $\hat{\mu}_{ijk}$  für  $\mu_{ijk}$ ,  $\delta\varepsilon_{jk}$  für  $\delta\Psi_{jk}$  und  $\hat{\tau}_{ij}$  für  $\tau_{ij}$  eingesetzt werden. Außerdem muss im Hinterkopf gehalten werden, dass  $\delta\gamma_{ij} \equiv 0$  und  $\hat{\mu}_{ijk}\delta\varepsilon_{jk} \equiv \hat{\mu}_{i(jk)}\delta\varepsilon_{jk} = \hat{\mu}_{ijk}\delta(\partial_j u_k)$  ist und daraus wird

$$\int_{\partial V} [n_i \Sigma_{ij} \delta u_j + n_i \hat{\mu}_{ijk} \delta(\partial_j u_k)] dS = \int_V (\hat{\tau}_{ij} \delta\varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta\hat{\kappa}_{ijk}) dV \quad (5.20)$$

erhalten. Mit Hilfe der Identität (5.19) lässt sich (5.20) weiter umschreiben als

$$\int_{\partial V} [n_i \Sigma_{ik} - D_j(n_i \hat{\mu}_{ijk}) + (D_l n_l)n_i n_j \hat{\mu}_{ijk}] \delta u_k dS + \int_{\partial V} n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} \delta(Du_k) dS = \int_V \delta\hat{\psi} dV \quad (5.21)$$

Die Unabhängigkeit der Variationen  $\delta u_k$  und  $\delta(Du_k)$  und die Form der linken Seite legen die Randbedingungen fest:

$$\text{Entweder } \hat{P}_k \text{ oder } u_k \text{ und} \quad (5.22)$$

$$\text{entweder } \hat{R}_k \text{ oder } Du_k \quad (5.23)$$

müssen auf  $\partial V$  vorgeschrieben werden, wobei

$$\hat{P}_k := n_i \Sigma_{ij} - D_j(n_i \hat{\mu}_{ijk}) + (D_l n_l)n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} \quad (5.24)$$

$$\hat{R}_k := n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} \quad (5.25)$$

**Bemerkung** Die verwendete Methode zur Festlegung der Randbedingungen geht im Wesentlichen auf Toupin [53] und Mindlin [39] zurück. Sie basiert auf der Idee, dass die aufgebrachte Leistung der äußeren Kräfte für ein elastisches Material nur eine Änderung der im Material gespeicherten Arbeit, d. h. der freien Energie, bewirken kann. Die Änderung der freien Energie wiederum legt die Form der Spannungsleistung fest. Ist die Materialfunktion der freien Energie bekannt, so kann sowohl die dazugehörige Spannungsleistung als auch die dazugehörigen Randbedingungen ermittelt werden. Die Spannungsleistung ist wichtig für die Auswertung des zweiten Hauptsatzes. Das bemerkenswerte in dieser Vorgehensweise ist, dass die Cauchy'sche Spannung

symmetrisch und damit klassisch ist. Für klassische Materialien hat die Spannungsleistung die Form  $\Sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ , während die Form der Spannungsleistung in der Gradientenelastizität  $\widehat{\tau}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \widehat{\mu}_{ijk}(\partial_i\dot{\varepsilon}_{jk}) \neq \Sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$  ist. Die nicht klassische Form der Spannungsleistung lässt sich durch die Existenz nicht klassischer Randbedingungen begründen und umgekehrt. Damit kann auch der angenommene thermodynamische Rahmen des Ansatzes verifiziert werden: Es handelt sich um die konventionelle irreversible Thermodynamik mit nicht klassischer Spannungsleistung bzw. mit nicht klassischen äußeren Kräften.

### 5.1.3 Das KG-Modell als Sonderfall der expliziten Gradientenelastizität

Sei  $\sqrt{c_2}$  ein Materialparameter, der eine innere materielle Länge repräsentiert. Die spezielle Wahl für die Elastizitätstensoren

$$\mathcal{F}_{ijklm} \equiv 0 \quad , \quad (5.26)$$

$$\mathcal{G}_{ijklmn} := c_2 \delta_{il} \mathbb{C}_{jkmn} \quad (5.27)$$

hat keine substantielle Auswirkung auf die Kompatibilität des materiellen Systems und reduziert die Funktion  $\widehat{\psi}$  in Gleichung (5.5) auf die quadratische Form

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \widehat{\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} c_2 (\partial_i \varepsilon_{jk}) \mathbb{C}_{jklm} (\partial_i \varepsilon_{lm}) \quad . \quad (5.28)$$

Gewöhnlich wird postuliert, dass  $\widehat{\psi}$  positiv definit sein soll. Dies wird sichergestellt, wenn angenommen wird, dass  $\mathbb{C}$  und  $c_2$  den Bedingungen

$$\mathbb{C} : \text{positiv definit} \quad , \quad c_2 \geq 0 \quad (5.29)$$

unterworfen sind.

Das Wesentliche ist nun, dass die Spannung in Gleichung (5.14) die Gestalt

$$\Sigma_{jk} = \mathbb{C}_{jkmn} \varepsilon_{mn} - c_2 \mathbb{C}_{jkmn} (\partial_i \partial_i \varepsilon_{mn}) \quad (5.30)$$

bzw.

$$\Sigma_{jk} = \mathbb{C}_{jkmn} \varepsilon_{mn} - c_2 \mathbb{C}_{jkmn} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon})_{mn} \quad (5.31)$$

annimmt. Die letzte Gleichung ist genau das KG-Modell in Gleichung (1.4) und ist hier als Kombination von Material- und Feldgleichungen (Gleichgewichtsbedingungen) hergeleitet worden.

## 5.2 Das KG-Modell im Rahmen der nicht konventionellen Thermodynamik

Die Ausführungen dieses Abschnittes entsprechen den Vorstellungen, die in Bröse et al. [10, 11] entwickelt wurden. Die Grundidee ist Gleichung (5.31) jetzt als konstitutives Gesetz aufzufassen.

### 5.2.1 Grundlegende Annahmen

Die Grundlage der Vorgehensweise ist es, den materiellen Körper als ein Kontinuum zu betrachten, das klassischen Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls gehorcht. Für statische Probleme und vernachlässigte Volumenkräfte reduzieren sich diese Bilanzgleichungen auf die Gleichgewichtsbedingung und die Symmetrie der Cauchy'schen Spannung  $\Sigma$ ,

$$\partial_j \Sigma_{jk} = 0 \quad , \quad (5.32)$$

$$\Sigma_{jk} \equiv \Sigma_{(jk)} \quad . \quad (5.33)$$

Durch Multiplikation der Gleichung (5.32) mit  $\dot{u}_k$  und Anwendung einfacher Umrechnungen lässt sich die Leistungsbilanz

$$\int_{\partial V} n_j \Sigma_{jk} \dot{u}_k dS = \int_V \Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} dV \quad (5.34)$$

gewinnen. Wie im klassischen Fall wird der Integrand auf der rechten Seite von (5.34) als Spannungsleistung definiert,

$$w_{st} := \Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} \quad . \quad (5.35)$$

Mit der Annahme, dass die Materialfunktion der freien Energie pro Volumeneinheit von

$$\varepsilon_{jk} \quad , \quad \hat{\kappa}_{ijk} \equiv \hat{\kappa}_{i(jk)} = \partial_i \varepsilon_{jk} \quad \text{und} \quad \theta \quad (5.36)$$

abhängt, folgt

$$\psi = \bar{\psi}(\varepsilon, \hat{\kappa}, \theta) \quad . \quad (5.37)$$

Die Form von  $\psi$  in (5.5) ist ein isothermer Sonderfall von (5.37).

Es ist bekannt (siehe Eringen [21]), dass klassische Thermodynamik mit klassischen äußeren Kräften die Abhängigkeit der freien Energie von  $\hat{\kappa}$  verbietet. Deswegen wird die nicht konventionelle Thermodynamik in Kapitel 3 als der geeignete thermodynamische Rahmen für Materialien mit Freier Energie der Form (5.37) verwendet. Mit  $N = 1$  folgt aus Gleichungen (3.8) - (3.13), dass

$$w_{st} = \bar{w}_{st} + w'_{st} \quad , \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}' \quad , \quad (5.38)$$

$$w_{st} - w'_{st} - \dot{\psi} - \theta \dot{\eta} - \dot{\theta} \eta - \partial_i \bar{q}_i = 0 \quad , \quad (5.39)$$

$$w'_{st} = \partial_i q'_i \quad , \quad (5.40)$$

aus Gleichung (3.16), dass

$$w_{st} - w'_{st} - \dot{\psi} - \eta \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad (5.41)$$

und aus Gleichung (3.17), dass

$$\eta = -\frac{\partial \bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta)}{\partial \theta} . \quad (5.42)$$

Jetzt werden in der Ungleichung (5.41) zuerst die Ansätze (5.35) und (5.37) eingesetzt

$$\Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} - w'_{st} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{jk}} \dot{\varepsilon}_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\hat{\kappa}}_{ijk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \dot{\theta} - \eta \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad (5.43)$$

und dann folgt mit der Gleichung (5.42), dass

$$\left( \Sigma_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{jk}} \right) \dot{\varepsilon}_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\hat{\kappa}}_{ijk} - w'_{st} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 . \quad (5.44)$$

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\hat{\kappa}}_{ijk} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} (\partial_i \dot{\varepsilon}_{jk}) = \partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\varepsilon}_{jk} \right) - \left[ \partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \right) \right] \dot{\varepsilon}_{jk} \quad (5.45)$$

folgt daraus

$$\left[ \Sigma_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{jk}} + \partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \right) \right] \dot{\varepsilon}_{jk} - \partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\varepsilon}_{jk} \right) - w'_{st} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 . \quad (5.46)$$

Zur Auswertung dieser Ungleichung sind neben Gleichung (5.37) weitere konstitutive Annahmen nötig. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

## 5.2.2 Die konstitutive Struktur

Eine einfache konstitutive Annahme, um bei der Ungleichung (5.46) weiterzukommen, die im Wesentlichen auf Maugin [38] zurückgeht, lautet

$$w'_{st} := -\partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\varepsilon}_{jk} \right) . \quad (5.47)$$

Dieser Ansatz erlaubt die Ungleichung (5.46) folgendermaßen zu vereinfachen:

$$\left[ \Sigma_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{jk}} + \partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \right) \right] \dot{\varepsilon}_{jk} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 . \quad (5.48)$$

Des Weiteren werden für  $\Sigma$  und  $\bar{q}$  die konstitutiven Annahmen

$$\Sigma_{jk} = \Sigma_{jk}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta) , \quad (5.49)$$

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta, \text{grad } \theta) \quad (5.50)$$

getroffen. Dann sind, gemäß der Coleman und Noll Argumentation [15], die Bedingungen

$$\Sigma_{jk} = \frac{\partial \bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta)}{\partial \varepsilon_{jk}} - \partial_i \left( \frac{\partial \bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta)}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \right) , \quad (5.51)$$

$$\bar{q}_i \partial_i \theta \leq 0 \quad (5.52)$$



notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Ungleichung (5.48). Schließlich wird noch die konstitutive Annahme

$$q'_i = - \frac{\partial \bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta)}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \dot{\varepsilon}_{jk} + c_i \quad , \quad (5.53)$$

$$\partial_i c_i = 0 \quad (5.54)$$

gemacht. Es wird angenommen, dass der divergenzfreie Vektor  $c$  ebenfalls von den Zustandsvariablen, aber nicht von  $\theta$  abhängt. Dieser braucht jedoch hier nicht näher spezifiziert zu werden. Mit anderen Worten: Das Energietransformationsgesetz (5.40) ist für die Annahmen (5.53), (5.54) und (5.47) trivialerweise (identisch) erfüllt. Bis auf den Vektor  $c$  stellt  $q'$ , gemäß Gleichung (5.53), einen Flussvektor dar, der freie Energie transportiert. Eine physikalische Interpretation für Materialien mit Defekten ist, dass die Existenz von Defekten, neben der Speicherung von Energie infolge der übergeordneten elastischen Deformationen, die mit der Dehnung  $\varepsilon$  erfasst wird, noch die Speicherung von Energie bewirkt, die mit lokalen Deformationen infolge von Defekten zusammenhängt. Diese lokalen Deformationen werden mit  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$  erfasst. Deformiert sich der Körper elastisch, so bewegen sich die Defekte und somit wird Verzerrungsenergie durch  $q'$  transportiert.

Nun wird auf den Energiesatz (5.39) zurückgegriffen, um isotherme Deformationen zu definieren, bei denen eine vollständig zurückgewinnbare, nicht thermische Energie vorliegt, was durch die Gleichung

$$\theta = \theta_0 = \text{konst.} \quad , \quad (5.55)$$

$$\theta_0 \dot{\eta} + \partial_i \bar{q}_i = 0 \quad , \quad (5.56)$$

$$\psi = \bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \theta_0) = \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) \quad (5.57)$$

ausgedrückt wird. Dann folgt aus Gleichung (5.39)

$$w_{st} - w'_{st} - \dot{\psi} = 0 \quad (5.58)$$

bzw. (mit Hilfe von (5.35), (5.38) und (5.40))

$$\Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} - \partial_i q'_i = \dot{\psi} = \bar{w}_{st} \quad , \quad (5.59)$$

während das Elastizitätsgesetz (5.51) in

$$\Sigma_{jk} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} \quad , \quad (5.60)$$

$$\hat{\tau}_{jk} := \frac{\partial \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}})}{\partial \varepsilon_{jk}} \quad , \quad (5.61)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} := \frac{\partial \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}})}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} \quad (5.62)$$

übergeht.

### 5.2.3 Das KG-Modell

Die Gleichungen (5.60) - (5.62) stellen ein Materialgesetz dar, das das Modell (5.30) bzw. (5.31) als Sonderfall für

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} c_2 (\partial_i \varepsilon_{jk}) \mathbb{C}_{jkmn} (\partial_i \varepsilon_{mn}) \quad (5.63)$$

enthält:

$$\Sigma_{jk} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} = \mathbb{C}_{jkmn} \varepsilon_{mn} - c_2 \mathbb{C}_{jkmn} (\Delta \varepsilon_{mn}) \quad (\text{KG-Modell}), \quad (5.64)$$

$$\hat{\tau}_{jk} := \mathbb{C}_{jkmn} \varepsilon_{mn} \quad , \quad (5.65)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} := c_2 \mathbb{C}_{jkmn} \partial_i \varepsilon_{mn} \quad . \quad (5.66)$$

Das mechanische Analogon dazu ist in Abbildung 5.1 zu sehen und besteht aus zwei parallel geschalteten Federn. Die eine Feder ist konventionell und entspricht der Spannung  $\hat{\tau}_{jk}$ , während die andere nicht konventionell ist, der Spannung  $-\partial_i \hat{\mu}_{ijk}$  entspricht und nur bei inhomogenen Deformationen agiert. Das System in Abbildung 5.1 ist das Gegenstück in Gradientenelastizität des Kelvin-Modells in der Viskoelastizität. Dementsprechend wurde das Materialgesetz (5.64) als Kelvin-Modell der Gradientenelastizität (KG-Modell) in Bröse et al. [9, 8] bezeichnet. Im Unterschied zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.1, stellt jetzt (5.64) ein echtes Materialgesetz dar.

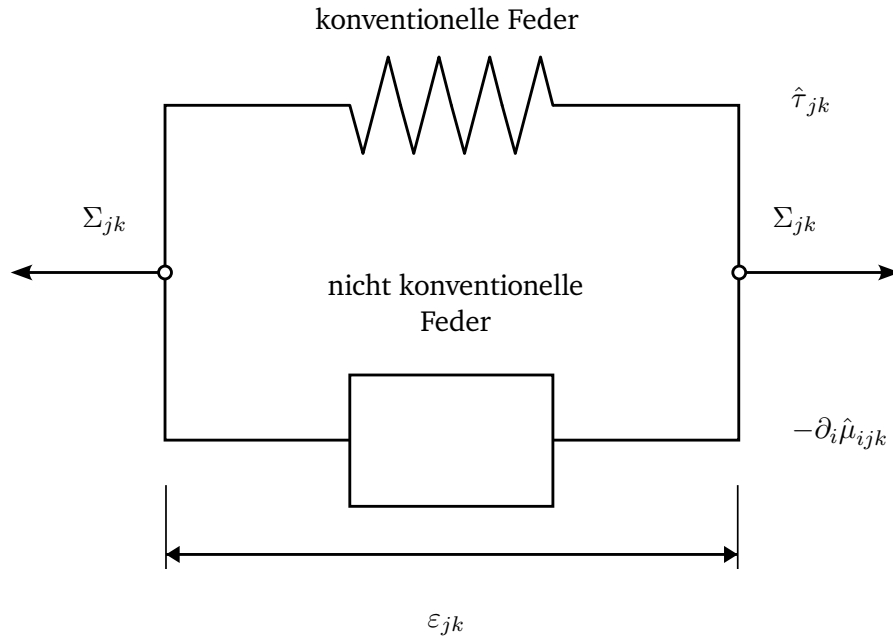


Abbildung 5.1: Das mechanische Analogon: Zwei Federn sind parallel geschaltet.

Das KG-Modell zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung (5.32) bildet ein System aus partiellen Differentialgleichungen, das es zu lösen gilt. Die zugehörigen Randbedingungen müssen auch im Rahmen der nicht konventionellen Thermodynamik aufgestellt werden. Dazu wird Gleichung (5.59) über das Volumen  $V$  integriert:

$$\int_V \Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} dV - \int_V \partial_i q'_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\psi} dV \Leftrightarrow \quad (5.67)$$

$$\int_V \Sigma_{jk} (\partial_j \dot{u}_k) dV - \int_V \partial_i q'_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\psi} dV \Leftrightarrow \quad (5.68)$$

$$\int_V \partial_j (\Sigma_{jk} \dot{u}_k) dV - \int_V (\partial_j \Sigma_{jk}) \dot{u}_k dV - \int_V \partial_i q'_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\psi} dV \quad . \quad (5.69)$$

Das zweite Integral auf der linken Seite verschwindet wegen Gleichung (5.32). Die anderen zwei Integrale

auf der linken Seite lassen sich mit Hilfe des Gauß'schen Satzes umformen zu:

$$\int_{\partial V} n_j \Sigma_{jk} \dot{u}_k dS - \int_{\partial V} n_i q'_i dS = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\psi} dV \quad . \quad (5.70)$$

Des Weiteren werden die Formeln (5.53) und (5.62) mit  $\theta = \theta_0 = \text{konst.}$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  eingesetzt:

$$\int_{\partial V} n_j \Sigma_{jk} \dot{u}_k dS - \int_{\partial V} n_i \hat{\mu}_{ijk} \dot{\varepsilon}_{jk} dS = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\psi} dV \quad . \quad (5.71)$$

Wenn die Zeitableitungen  $\dot{}$  durch virtuelle Änderungen  $\delta()$  ersetzt werden und die Symmetrie  $\hat{\mu}_{ijk} = \hat{\mu}_{i(jk)}$  berücksichtigt wird, folgt aus (5.71) das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_{\partial V} [n_j \Sigma_{jk} \delta u_k - n_i \hat{\mu}_{ijk} \delta(\partial_j u_k)] dS = \delta \int_V \hat{\psi} dV \quad . \quad (5.72)$$

Das Oberflächenintegral ist genau dasselbe wie in Gleichung (5.20). Dementsprechend lässt es sich wie in Gleichung (5.21) schreiben und führt auf dieselben Randbedingungen wie in Gleichungen (5.22) und (5.23).



---

## 6 Das Drei-Parameter-Modell der Gradientenelastizität (3-PG-Modell)

---

Ähnlich wie im Fall des KG-Modells gibt es auch für das 3-PG-Modell zwei Interpretationsmöglichkeiten (siehe Bröse et al. [9]). Die eine betrachtet dieses Modell als Sonderfall der mikromorphen Elastizität mit rotationsfreiem  $\Psi$ . Der thermodynamische Rahmen dieser Vorgehensweise ist klassisch. Die andere Betrachtungsweise interpretiert das 3-PG-Modell als klassisches Kontinuum und verwendet die nicht konventionelle Thermodynamik. Auch für dieses Modell werden beide Vorgehensweisen erläutert. Die Ausführungen basieren auf den Ideen, die in Bröse et al. [9] entwickelt wurden.

### 6.1 Das 3-PG-Modell als Sonderfall mikromorpher Elastizität mit rotationsfreier Mikrodeformation

Es wird angenommen, dass die Gleichgewichtsbedingungen (4.5), (4.6) und alle Gleichungen des Abschnitts 4.2.2 mit

$$\Psi_{ij} \equiv \Psi_{(ij)} \quad , \quad \gamma_{ij} \equiv \gamma_{(ij)} := \varepsilon_{ii} - \Psi_{ij} \quad , \quad \kappa_{ijk} \equiv \kappa_{i(jk)} := \partial_i \Psi_{jk} \quad (6.1)$$

gelten. In Bröse et al. [9] wurden zwei unterschiedliche Ansätze für die freie Energie (Form A und Form B) diskutiert, die dem 3-PG-Modell zugeordnet werden können. Hier wird exemplarisch nur die eine Form (Form A) erläutert.

Sei  $c_3$  ein dimensionsloser Parameter und sei  $\sqrt{c_1}$  ein Materialparameter mit der physikalischen Bedeutung einer inneren materiellen Länge. Beide Parameter werden als positiv angenommen,

$$c_1, c_3 > 0 \quad . \quad (6.2)$$

In Gleichung (4.45) wird  $\mathbb{C}$  als positiv definit angenommen und

$$\mathbb{B}_{ijkl} = c_3 \mathbb{C}_{ijkl} \quad , \quad (6.3)$$

$$\mathbb{D}_{ijklmn} = c_1 c_3 \delta_{il} \mathbb{C}_{jkmn} \quad , \quad (6.4)$$

$$\mathcal{D}_{ijklm} = \mathcal{F}_{ijklm} = 0 \quad , \quad (6.5)$$

$$\mathbb{G}_{ijkl} = 0 \quad (6.6)$$

gesetzt. Dann folgt aus (4.45) - (4.52)

$$\psi = \psi^A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\mathbb{C}_{ijmn}\varepsilon_{mn} + \frac{1}{2}c_3\gamma_{ij}\mathbb{C}_{ijmn}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}c_1c_3\kappa_{ijk}\mathbb{C}_{jkmn}\kappa_{imn} \quad , \quad (6.7)$$

$$\tau_{ij} \equiv \tau_{(ij)} = \frac{\partial\psi^A}{\partial\varepsilon_{ij}} = \mathbb{C}_{ijmn}\varepsilon_{mn} \quad , \quad (6.8)$$

$$\sigma_{ij} \equiv \sigma_{(ij)} = \frac{\partial\psi^A}{\partial\gamma_{ij}} = c_3\mathbb{C}_{ijmn}\gamma_{mn} = c_3\mathbb{C}_{ijmn}\varepsilon_{mn} - c_3\mathbb{C}_{ijmn}\Psi_{mn} \quad , \quad (6.9)$$

$$\Sigma_{ij} \equiv \Sigma_{(ij)} = \tau_{ij} + \sigma_{ij} = (1 + c_3)\mathbb{C}_{ijmn}\varepsilon_{mn} - c_3\mathbb{C}_{ijmn}\Psi_{mn} \quad , \quad (6.10)$$

$$\mu_{ijk} \equiv \mu_{i(jk)} = \frac{\partial\psi^A}{\partial\kappa_{ijk}} = c_1c_3\mathbb{C}_{jkmn}\partial_i\Psi_{mn} \quad \Rightarrow \quad (6.11)$$

$$\partial_i\mu_{ijk} = c_1c_3\mathbb{C}_{jkmn}\Delta\Psi_{mn} \quad . \quad (6.12)$$

Es sei angemerkt, dass die positive Definitheit von  $\mathbf{C}$  und die Ungleichungen (6.2) auf der einen Seite die Invertierbarkeit von  $\mathbf{C}$  und auf der anderen Seite die positive Definitheit der quadratischen Form  $\psi^A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$  garantieren.

Im Folgenden wird bewiesen, dass die Gleichungen (6.8) - (6.12) zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung (4.6),

$$\partial_i\mu_{ijk} = -\sigma_{ij} \quad , \quad (6.13)$$

das 3-PG-Modell in Gleichung (1.5) implizieren.

Als erstes wird die Laplace Ableitung der Spannung  $\Sigma_{ij}$  in Gleichung (6.10) gebildet:

$$\Delta\Sigma_{pq} = (1 + c_3)\mathbb{C}_{pqmn}\Delta\varepsilon_{mn} - c_3\mathbb{C}_{pqmn}\Delta\Psi_{mn} \quad . \quad (6.14)$$

Dann wird die Gleichgewichtsbedingung (6.13) in Gleichung (6.12) eingesetzt:

$$c_1c_3\mathbb{C}_{jkmn}\Delta\Psi_{mn} = -\sigma_{jk} \quad , \quad (6.15)$$

bzw. (mit Hilfe von (6.10) und (6.8))

$$c_1c_3\mathbb{C}_{jkmn}\Delta\Psi_{mn} = -\Sigma_{jk} + \mathbb{C}_{jkmn}\varepsilon_{mn} \quad \Rightarrow \quad (6.16)$$

$$\Delta\Psi_{mn} = -\frac{1}{c_1c_3}(\mathbf{C}^{-1})_{mnjk}\Sigma_{jk} + \frac{1}{c_1c_3}\varepsilon_{mn} \quad . \quad (6.17)$$

Substitution des letzten Ergebnisses in Gleichung (6.14) liefert

$$c_1\Delta\Sigma_{pq} - \Sigma_{pq} = c_1(1 + c_3)\mathbb{C}_{pqmn}\Delta\varepsilon_{mn} - \mathbb{C}_{pqmn}\varepsilon_{mn} \quad . \quad (6.18)$$

Schließlich wird ein neuer Materialparameter  $c_2$  eingeführt, mit der physikalischen Bedeutung von  $\sqrt{c_2}$  als eine innere materielle Länge:

$$c_2 := c_1(1 + c_3) \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \quad . \quad (6.19)$$

Damit geht Gleichung (6.18) in die Gleichung des 3-PG-Modells

$$c_1\Delta\Sigma_{pq} - \Sigma_{pq} = c_2\mathbb{C}_{pqmn}\Delta\varepsilon_{mn} - \mathbb{C}_{pqmn}\varepsilon_{mn} \quad (3\text{-PG-Modell}) \quad (6.20)$$

über.

Es sei hier noch einmal darauf aufmerksam gemacht, dass das 3-PG-Modell als Sonderfall der mikromorphen Elastizität (siehe Abschnitt 4.2.2), die konsistent mit klassischer Thermodynamik ist, hergeleitet wurde. Ferner wurden sowohl Materialgleichungen als auch die Gleichgewichtsbedingung (4.6) verwendet. Insgesamt ist also das 3-PG-Modell als Kombination von Material- und Bilanzgleichungen im Rahmen der klassischen Thermodynamik zustande gekommen. Aus den Gleichungen (6.2) und (6.19) ergibt sich, dass die Parameter  $c_1$  und  $c_2$  der Bedingung

$$c_2 > c_1 > 0 \quad (6.21)$$

unterworfen sind.

Zum Schluss sind die Gleichgewichtsgleichung (4.5) und die Gleichung (6.20) bzw. äquivalent dazu (6.9) - (6.11) und (6.13) übrig geblieben. Die dazugehörigen Randbedingungen sind dieselben wie in den Gleichungen (4.56) und (4.57).

## 6.2 Das 3-PG-Modell als Gegenstück des 3-Parameter-Festkörpers der Viskoelastizität

Es fällt auf, dass das 3-PG-Modell (siehe z.B. Gleichung (6.20)) nur die Cauchy'sche Spannung  $\Sigma$ , die Dehnung  $\epsilon$  und deren räumliche Ableitungen enthält. Dies mag so interpretiert werden, dass die Verschiebungskomponenten  $u_i$  die einzigen unabhängigen kinematischen Freiheitsgrade in  $V$  sind. Damit liegt die Vermutung nahe, das 3-PG-Modell als ein konstitutives Gesetz für ein klassisches Kontinuum anzusehen, d.h. ein Kontinuum mit symmetrischem Cauchy'schen Spannungstensor, der die gewöhnliche Gleichgewichtsbedingung (4.5) erfüllt. Diese Vorstellung wurde in der Tat in Bröse et al. [9] entwickelt, allerdings im Rahmen der nicht konventionellen Thermodynamik. Die folgenden Ausführungen sind sehr eng an dieser Interpretation von Bröse et al. [9] angelegt.

### 6.2.1 Die Grundidee der Vorgehensweise

Das Ziel ist es, ein Modell der Gradientenelastizität als Gegenstück zum 3-Parameter-Festkörper der Viskoelastizität zu entwickeln. Dabei werden die Zeitableitungen des 3-Parameter-Festkörpers der Viskoelastizität durch Laplace Ableitungen ersetzt. Es wird ein materieller Körper betrachtet, der die klassischen Gleichgewichtsbedingungen (5.32) und (5.33) erfüllt,

$$\partial_j \Sigma_{jk} = 0 \quad , \quad (6.22)$$

$$\Sigma_{jk} \equiv \Sigma_{(jk)} \quad , \quad (6.23)$$

wobei  $\Sigma_{jk}$  die Komponenten der Cauchy'schen Spannung sind. Die unabhängigen kinematischen Freiheitsgrade des Kontinuums in  $V$  (nicht auf dem Rand  $\partial V$ ) sind die Verschiebungskomponenten  $u_i$ . Wie in der klassischen Elastizität sei die Spannungsleistung durch

$$w_{st} := \Sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{jk} \quad (6.24)$$

definiert, wobei  $\varepsilon_{jk}$  wie bisher die Komponenten des Dehnungstensors sind (vergleiche Gleichung (4.1)). Wir nehmen an, dass  $w_{st}$  und  $q_i$  den Gleichungen (3.1) - (3.14) mit  $N = 1$  genügen,

$$w_{st} = \bar{w}_{st} + w'_{st} \quad , \quad q_i = \bar{q}_i + q'_i \quad , \quad (6.25)$$

$$w_{st} - w'_{st} - \dot{\psi} - \theta \dot{\eta} - \eta \dot{\theta} - \partial_i \bar{q}_i = 0 \quad , \quad (6.26)$$

$$w'_{st} = \partial_i q'_i \quad , \quad (6.27)$$

und dass Gleichung (3.16) mit  $w_{st}$  wie in Gleichung (6.24) gilt,

$$\Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} - w'_{st} - \eta \dot{\theta} - \dot{\psi} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad . \quad (6.28)$$

Die Grundidee lautet, sich innerhalb dieser Vorgehensweise jetzt  $\Psi_{ij} \equiv \Psi_{(ij)}$  und  $\gamma_{ij} \equiv \gamma_{(ij)}$  als innere Variablen vorzustellen, sodass die additive Zerlegung der Dehnung

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} + \Psi_{ij} \quad (6.29)$$

gilt. Solche Zerlegungen sind üblich in der Plastizität und in der Viskoelastizität. Im vorliegenden Fall beschreibt die Zerlegung (6.29) die Kinematik des Federsystems in Abbildung 6.1.

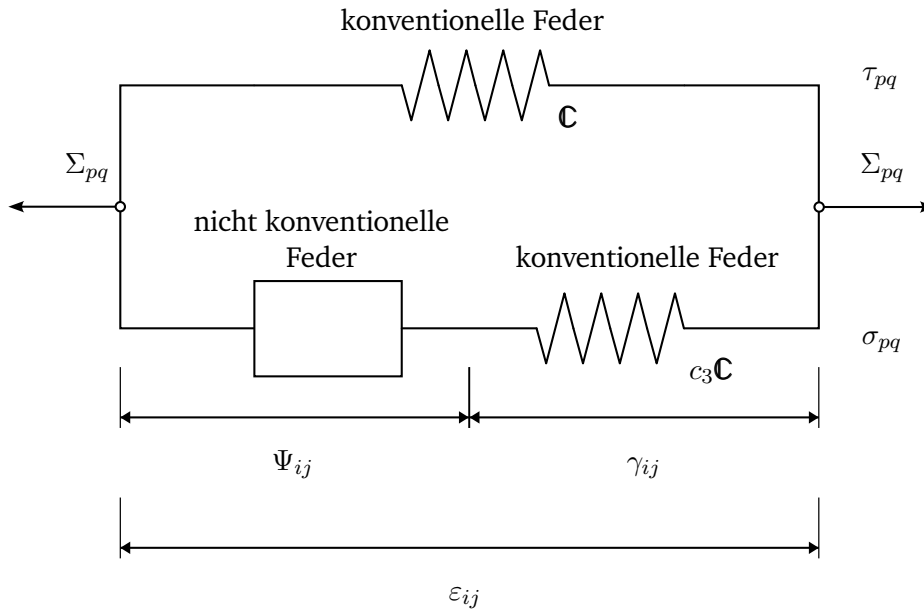


Abbildung 6.1: Ein mechanisches Federsystem der Gradientenelastizität, das einem 3-Parameter-Festkörper der Viskoelastizität entspricht.

Das System ist in der Gradientenelastizität das Gegenstück des 3-Parameter-Festkörpers der linearen Viskoelastizität. Es besteht aus einer konventionellen Feder (Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$ , Dehnung  $\varepsilon_{ij}$ ), auf welche die Spannung  $\tau_{pq} = \tau_{(pq)}$  wirkt und die jeweils parallel geschaltet zu einer zweiten konventionellen Feder (Elastizitätstensor  $c_3\mathbf{C}$ , Dehnung  $\gamma_{ij}$ ) und einer nicht konventionellen Feder (Dehnung  $\Psi_{ij}$ ) ist. Die nicht konventionelle Feder und die Dehnungen  $\Psi_{ij}$  und  $\gamma_{ij}$  entsprechen jeweils dem Dämpfer, der plastischen und der elastischen Dehnung des entsprechenden viskoelastischen Systems. Das System ist so gestaltet, dass nur wenn  $\partial_k \Psi_{ij} \neq 0$  ist, die nicht konventionelle Feder nicht verschwindende Spannungen übertragen kann. Die beiden in Reihe geschalteten Federn übertragen dieselbe Spannung  $\sigma_{pq} = \sigma_{(pq)}$  und es gilt

$$\Sigma_{pq} = \tau_{pq} + \sigma_{pq} \quad . \quad (6.30)$$



Die weiteren Schritte sind vollkommen analog zu denjenigen in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 und werden im nächsten Abschnitt zusammengefasst.

## 6.2.2 Thermodynamische Konsistenz

Durch (vergleiche Gleichung (5.37))

$$\psi = \bar{\psi}(\varepsilon, \gamma, \kappa, \theta) \quad , \quad (6.31)$$

$$\kappa_{ijk} \equiv \kappa_{i(jk)} := \partial_i \Psi_{jk} \quad (6.32)$$

sei eine allgemeine Form der Materialfunktion der freien Energie festgelegt. Dies wiederum legt die allgemeine Form der Materialfunktion für die Entropie fest (vergleiche Gleichung (3.17))

$$\eta = -\frac{\partial \bar{\psi}(\varepsilon, \gamma, \hat{\kappa}, \theta)}{\partial \theta} \quad . \quad (6.33)$$

Damit reduziert sich (6.28) auf

$$\tau_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} + \sigma_{jk} \dot{\gamma}_{jk} - w'_{st} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{jk}} \dot{\varepsilon}_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \gamma_{jk}} \dot{\gamma}_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \kappa_{ijk}} \dot{\kappa}_{ijk} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad . \quad (6.34)$$

Gemäß Abbildung 6.1 wird

$$\tau_{jk} := \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{jk}} \quad (6.35)$$

gesetzt und aus (6.34) ergibt sich

$$\left( \sigma_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \gamma_{jk}} \right) \dot{\gamma}_{jk} + \sigma_{jk} \dot{\Psi}_{jk} - w'_{st} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \kappa_{ijk}} \dot{\kappa}_{ijk} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad . \quad (6.36)$$

Mit der Identität

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \kappa_{ijk}} \dot{\kappa}_{ijk} = \mu_{ijk} (\partial_i \dot{\Psi}_{jk}) = \partial_i (\mu_{ijk} \dot{\Psi}_{jk}) - (\partial_i \mu_{ijk}) \dot{\Psi}_{jk} \quad , \quad (6.37)$$

$$\mu_{ijk} \equiv \mu_{i(jk)} := \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \kappa_{ijk}} \quad (6.38)$$

lässt sich (6.36) umformen zu:

$$\left( \sigma_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \gamma_{jk}} \right) \dot{\gamma}_{jk} + (\sigma_{jk} + \partial_i \mu_{ijk}) \dot{\Psi}_{jk} - w'_{st} - \partial_i (\mu_{ijk} \dot{\Psi}_{jk}) - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad . \quad (6.39)$$

Die Ansätze

$$w'_{st} := -\partial_i (\mu_{ijk} \dot{\Psi}_{jk}) \quad , \quad (6.40)$$

$$q'_i := -\mu_{ijk} \dot{\Psi}_{jk} \quad (6.41)$$

erfüllen trivialerweise die Gleichung (6.27) und Ungleichung (6.39) vereinfacht sich zu

$$\left( \sigma_{jk} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \gamma_{jk}} \right) \dot{\gamma}_{jk} + (\sigma_{jk} + \partial_i \mu_{ijk}) \dot{\Psi}_{jk} - \frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad . \quad (6.42)$$

Da diese Ungleichung lokal ist, können  $\dot{\gamma}_{jk}$  und  $\dot{\Psi}_{jk}$  beliebig gewählt werden. Zusätzlich wird angenommen, dass  $\sigma_{jk}$  nur von Zustandsvariablen (nicht von deren Geschwindigkeiten) abhängt. Wegen dieser Annahme und der Definition (6.38) sind die Klammerausdrücke in (6.42) unabhängig von den Geschwindigkeiten der Zustandsvariablen. Demzufolge (Coleman und Noll Argumentation [15]) sind die Bedingungen

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \gamma_{jk}} \quad , \quad (6.43)$$

$$\sigma_{jk} = -\partial_i \mu_{ijk} \quad , \quad (6.44)$$

$$-\frac{1}{\theta} \bar{q}_i \partial_i \theta \geq 0 \quad (6.45)$$

notwendig und hinreichend zur Erfüllung von (6.42).

Wie in Abschnitt 5.2.2, werden isotherme Deformationen mit vollständig zurückgewinnbarer, nicht thermischer Energie durch

$$\theta = \theta_0 = \text{konst.} \quad , \quad (6.46)$$

$$\theta_0 \dot{\eta} + \partial_i \bar{q}_i = 0 \quad , \quad (6.47)$$

$$\psi = \bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}, \theta_0) = \psi^A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (6.48)$$

definiert und aus Gleichung (6.26) wird, unter Berücksichtigung von (6.24) und (6.27) ,

$$\Sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} - \partial_i \dot{q}_i = \dot{\psi} = \bar{w}_{st} \quad (6.49)$$

erhalten. Es ist leicht zu verifizieren, dass die oben erzielten Ergebnisse diesen Energiesatz erfüllen.

Um die konstitutive Struktur zu vervollständigen muss noch die Funktion  $\psi^A$  festgelegt werden. Das 3-Parameter-Modell in Abbildung 6.1 kann Energie in allen drei Federn speichern. Entsprechend werden die quadratischen Potentiale (vergleiche Gleichung (6.7))

$$\psi = \psi^A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} + \frac{1}{2} c_3 \gamma_{ij} \mathbb{C}_{ijmn} \gamma_{mn} + \frac{1}{2} c_1 c_3 \kappa_{ijk} \mathbb{C}_{jkmn} \kappa_{imn} \quad (6.50)$$

angenommen, mit  $c_3$ ,  $c_1$  und  $\mathbb{C}_{ijmn}$  wie in Abschnitt (6.2). Damit nehmen die Elastizitätsgesetze (6.35), (6.38) und (6.43) die Gestalt (vergleiche Gleichungen (6.8) - (6.11))

$$\tau_{ij} \equiv \tau_{(ij)} = \frac{\partial \psi^A}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad , \quad (6.51)$$

$$\sigma_{ij} \equiv \sigma_{(ij)} = \frac{\partial \psi^A}{\partial \gamma_{ij}} = c_3 \mathbb{C}_{ijmn} \gamma_{mn} = c_3 \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} - c_3 \mathbb{C}_{ijmn} \Psi_{mn} \quad , \quad (6.52)$$

$$\Sigma_{ij} \equiv \Sigma_{(ij)} = \tau_{ij} + \sigma_{ij} = (1 + c_3) \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} - c_3 \mathbb{C}_{ijmn} \Psi_{mn} \quad , \quad (6.53)$$

$$\mu_{ijk} \equiv \mu_{i(jk)} = \frac{\partial \psi^A}{\partial \kappa_{ijk}} = c_1 c_3 \mathbb{C}_{jkmn} \partial_i \Psi_{mn} \quad (6.54)$$

an. Identische Schritte wie in Abschnitt 6.1 führen nun zum Modell (6.20). Aber im Unterschied zu den Annahmen im Abschnitt 6.1 wurde jetzt das Modell (6.20) als reine Materialgleichung in Anlehnung an das mechanische System in Abbildung 6.1 aufgestellt. Diese Vorgehensweise veranlasst auch die Bezeichnung 3-Parameter-Modell der Gradientenelastizität (3-PG-Modell). In der Tat: Werden die Laplace Ableitungen in

(6.20) durch Zeitableitungen ersetzt, ergibt sich daraus der 3-Parameter-Festkörper der linearen Viskoelastizität.

Abschließend folgen noch zwei Bemerkungen: Wird  $q'_i$  in (6.49) durch den Ansatz (6.41) ersetzt und das Ergebnis über  $V$  integriert, so wird die Gleichung

$$\int_V \left[ \Sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{jk} + \partial_i (\mu_{ijk} \dot{\Psi}_{jk}) \right] dV = \frac{d}{dt} \int_V \psi dV \quad (6.55)$$

bzw.

$$\int_V \left[ \Sigma_{jk} \delta(\partial_j u_k) + \partial_i (\mu_{ijk} \delta \Psi_{jk}) \right] dV = \delta \int_V \psi dV \quad (6.56)$$

gewonnen. Nach partieller Integration des ersten Terms auf der linken Seite, Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung (6.22) und Anwendung des Gauß'schen Satzes, wird

$$\int_{\partial V} \left[ n_j \Sigma_{jk} \delta u_k + n_i \mu_{ijk} \delta \Psi_{jk} \right] dV = \delta \int_V \psi dV \quad (6.57)$$

erhalten.

Diese Gleichung ist exakt dieselbe wie in Gleichung (4.55). Infolgedessen sind auch die zugehörigen Randbedingungen hier exakt dieselben wie in den Gleichungen (4.56) und (4.57). Da hier  $\Psi_{ij}$  als innere Variable betrachtet wird, stellt (4.57) eine konstitutive Randbedingung für das Vorgehen in diesem Abschnitt dar. Im Gegensatz dazu stellt (4.57) für die Vorgehensweise des Abschnittes 6.1 eine physikalische Randbedingung dar.

Die zweite Anmerkung bezieht sich auf die Ausführungen in den Kapiteln 4, 5 und 6. Viele davon, insbesondere die Ausführungen in den Kapiteln 5 und 6, lehnen sich eng an die zitierte Literatur [3, 27, 10, 11, 9] an. Allerdings beziehen sich die Arbeiten in der zitierten Literatur auf isotrope Elastizität, während der Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  in der vorliegenden Arbeit i.A. anisotrop sein kann. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist die Annahme elastischer Anisotropie wichtig für konsistente Formulierungen von Euler-Bernoulli-Theorien für Balken.



---

## 7 Euler-Bernoulli-Balkentheorien

---

In diesem Kapitel werden konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorien für gradientelastische Materialien entwickelt. Zuerst wird das Problem der inkonsistenten Formulierung anhand der klassischen Elastizität verdeutlicht. Danach werden konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorien für die klassische Elastizität, das KG- und das 3-PG-Modell präsentiert. Um nicht allzu abstrakt zu werden, sind alle Überlegungen auf eine einfache Balkengeometrie bezogen.

### 7.1 Balken mit rechteckigem Querschnitt

Alle Ausführungen in Kapitel 7 beziehen sich auf den geraden Balken mit Rechteckquerschnitt in Abbildung 7.1. Er hat die Länge  $L$  und einen konstanten Querschnitt  $A$  mit der Breite  $2b$  und der Höhe  $2c$ . Benutzt wird ein kartesisches Koordinatensystem  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dessen Ursprung sich auf dem Flächenschwerpunkt der linken Randebene befindet. Die  $x_1$ - $x_3$ -Ebene ist eine Symmetrieebene und die  $x_1$ -Achse fällt mit der Balkenachse zusammen. Das Trägheitsmoment ist

$$I = \int_A x_3^2 dS = \frac{4}{3}bc^3 \quad (7.1)$$

und es gilt

$$\int_A x_3 dS = 0 \quad . \quad (7.2)$$

Es werden keine Belastungen in  $x_2$ -Richtung und keine Einzelkräfte im Bereich  $x_1 \in (0, L)$  betrachtet. Der Balken kann durch eine Streckenlast  $q = q(x_1)$  (Kraft pro Länge in  $x_3$ -Richtung), die an  $x_3 = -c$  in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene wirkt, belastet sein. Weitere Angaben zur Belastung werden im Laufe des Kapitels gemacht.

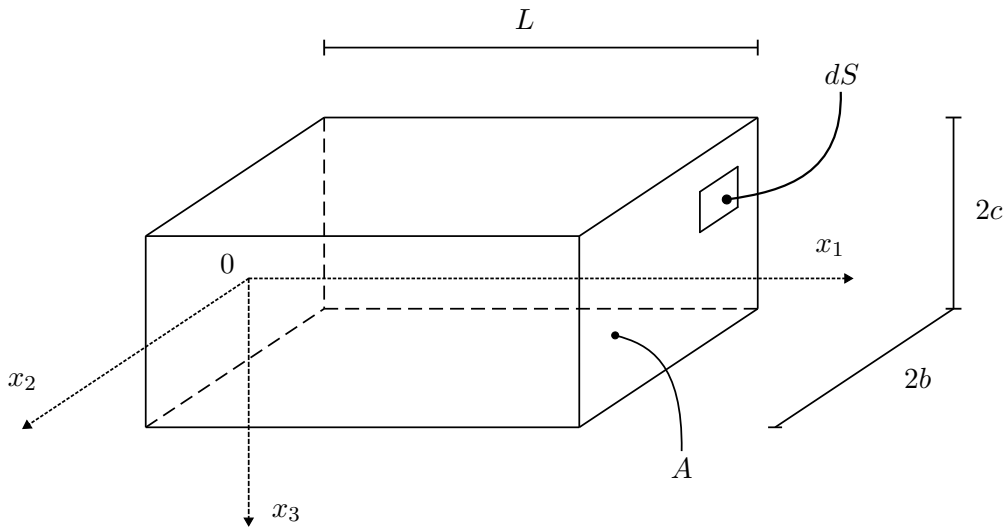


Abbildung 7.1: Rechteckiger Balken mit Länge  $L$ , Breite  $2b$  und Höhe  $2c$ .

## 7.2 Euler-Bernoulli-Balkentheorien für klassische Elastizität

### 7.2.1 Das Problem der inkonsistenten Formulierung

Um das Problem der Inkonsistenz in der traditionellen Euler-Bernoulli-Balkentheorie sichtbar zu machen, reicht es aus den Zugang zu übernehmen, der in den Büchern von Bauchau und Craig [5] (2009, Kapitel 5.1 und 5.42) und Reddy [44] (2017, Seite 90) eingeschlagen wird. Danach basiert die traditionelle Euler-Bernoulli-Balkentheorie auf zwei fundamentalen Annahmen: 1) Das Materialverhalten ist isotrop und elastisch. 2) Ebene Querschnitte des Balkens bleiben eben, stehen senkrecht auf der deformierten Balkenachse und ändern nicht ihre Form. Die letzte Annahme bedeutet, dass die Querschnittsebenen lediglich Starrkörperbewegungen (keine Deformation) erfahren.

Wie bisher sei  $\Sigma$  die Cauchy'sche Spannung,  $\varepsilon$  die Dehnung (vergleiche Gleichung (4.1)),  $\mathbf{u}$  die Verschiebung und es sollen die Gleichgewichtsbedingungen (4.5) und (4.6) gelten. Keine Belastung in  $x_2$ -Richtung und keine Deformation der Querschnitte bedeutet, dass die Bedingungen des ebenen Spannungszustand erfüllt sind. Das heißt:

$$u_2 = \varepsilon_{2i} = \Sigma_{2i} = 0 \quad (7.3)$$

und dass alle weiteren Komponenten von  $\mathbf{u}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Sigma$  Funktionen nur von  $x_1$  und  $x_3$  sind. In klassischer Elastizität (und Technische Mechanik) wird gezeigt (siehe z.B. Bauchau und Craig [5] (Kapitel 5)), dass die zweite Annahme der Euler-Bernoulli-Theorie zu den Verschiebungs- und Dehnungskomponenten

$$u_1(x_1, x_3) = U(x_1) - x_3 w'(x_1) \quad , \quad u_2 \equiv 0 \quad , \quad u_3 = w(x_1) \quad , \quad (7.4)$$

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_3) \hat{=} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U' - x_3 w'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

führt. Ferner reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen (6.22) auf

$$\partial_1 \Sigma_{11} + \partial_3 \Sigma_{31} = 0 \quad , \quad (7.6)$$

$$\partial_1 \Sigma_{13} + \partial_3 \Sigma_{33} = 0 \quad , \quad (7.7)$$

$$\Sigma_{13} = \Sigma_{31} \quad . \quad (7.8)$$

In den Gleichungen (7.4) und (7.5) ist  $U(x_1)$  die axiale Verschiebung,  $w(x_1)$  die Balkenabsenkung und  $()'$  die Ableitung von  $()$  nach  $x_1$ .

Für die Gleichungen (7.6) und (7.7) ist es nicht möglich exakte Lösungen für allgemeine Lastfälle in geschlossener Form anzugeben. Deswegen wird versucht, diese Gleichungen mittels Schnittkräften zu vereinfachen. Diese Schnittkräfte sind die Normalkraft  $N$  (in  $x_1$ -Richtung), die Querkraft  $V$  (in  $x_3$ -Richtung) und das Biegemoment  $M$  (um die  $x_2$ -Achse). Wenn keine äußeren Scherkräfte in  $x_1$  Richtung wirken, dann werden die Schnittkräfte zu:

$$N = N(x_1) := \int_A \Sigma_{11} dS \quad , \quad (7.9)$$

$$V = V(x_1) := \int_A \Sigma_{13} dS \quad , \quad (7.10)$$

$$M = M(x_1) := \int_A \Sigma_{11} x_3 dS \quad . \quad (7.11)$$

In dieser Form geben die Schnittkräfte Mittelwerte (Resultierende) über die Querschnittsfläche  $A$  an. Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte und die Momente werden durch Betrachtung eines kleinen Teiles des Balkens (siehe die zahlreichen Lehrbücher zur Technischen Mechanik) gebildet. Für die gemachten Annahmen lauten diese

$$N' = 0 \quad , \quad V' + q = 0 \quad , \quad M' - V = 0 \quad . \quad (7.12)$$

Außerdem gilt ein isotropes Elastizitätsgesetz

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad , \quad (7.13)$$

das aus dem quadratischen Potential

$$\psi = \mu \varepsilon_{mn} \varepsilon_{mn} + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk})^2 \delta_{ij} \quad (7.14)$$

abgeleitet wird. Für verschwindende axiale Belastungen werden daraus die Beziehungen  $\Sigma_{11}$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $V$  und  $\psi$  die Beziehungen

$$\Sigma_{11} = \Sigma_{11}(x_1, x_3) = -E w'' x_3 = \frac{M}{I} x_3 \quad , \quad (7.15)$$

$$N = N(x_1) = 0 \quad , \quad (7.16)$$

$$V = V(x_1) = -EI w''' \quad , \quad (7.17)$$

$$M = M(x_1) = -EI w'' \quad , \quad (7.18)$$

$$\psi = \psi(x_1) = \frac{1}{2} E (\varepsilon_{11})^2 = \frac{1}{2} E (w')^2 x_3^2 \quad (7.19)$$

erhalten. In diesen Gleichungen sind  $\lambda$ ,  $\mu$  Elastizitätskonstanten,

$$E := \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad (7.20)$$

ist das Elastizitätsmodul,  $EA$  die Dehnsteifigkeit und  $EI$  die Biegesteifigkeit. Außerdem wird aus den zwei letzten Gleichungen in (7.12) und Gleichung (7.17) die Differentialgleichung

$$EIw'''' = q \quad (7.21)$$

gewonnen. Die dazugehörigen Randbedingungen sind:

$$\text{Entweder } Q \text{ oder } w \text{ und} \quad (7.22)$$

$$\text{entweder } M \text{ oder } w' \quad (7.23)$$

müssen an den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  vorgegeben werden.

Bei der Diskussion von praktischen Problemen wird zuerst die Lösung  $w = w(x_1)$  von (7.21) ermittelt und dann wird aus (7.15) die Spannung  $\Sigma_{11}(x_1, x_3)$  berechnet. Es ist klar, dass der Verlauf von  $\Sigma_{11}$  kompatibel mit dem Elastizitätsgesetz ist. Die Verläufe der anderen Spannungskomponenten ergeben sich dann aus Integration über  $x_3$  aus den Gleichgewichtsbedingungen (7.6) und (7.7). So wird z.B. aus Integration über  $x_3$  von Gleichung (7.6), unter Berücksichtigung von (7.15) und (7.12)<sub>3</sub> und den Randbedingungen  $[\Sigma_{13}]_{x_3} = \pm c = 0$ , der Verlauf

$$\Sigma_{13}(x_1, x_3) = \frac{V(x_1)}{2I}(c^2 - x_3^2) \quad (7.24)$$

für die Schubspannung  $\Sigma_{13}$  berechnet.

Jetzt ist das Problem der Inkonsistenz erkennbar: Aus dem Elastizitätsgesetz (7.13) und der Verzerrungsmatrix (7.5) folgt, dass

$$\Sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} = 0 \quad , \quad (7.25)$$

im Widerspruch zum Ergebnis (7.24), das aus Integration der Gleichgewichtsbedingung zustande kam (vergleiche auch Bauchau und Craig [5] (Kapitel 5.4.2.) oder Janečka et al. [28]). Nahezu alle Euler-Bernoulli-Balkentheorien sind entweder inkonsistent oder von Anfang an eindimensional mittels Variationsprinzipien formuliert. Im Fall der variationellen Vorgehensweise können zwar Schnittkräfte berechnet werden, jedoch gibt es keine fundierte Beziehung zu Spannungen. Eine Ausnahme bildet die Arbeit von Sideris und Tsakmakis [50], in der eine konsistente Formulierung durch Korrekturen in der Annahme 1) gelungen ist. Das Vorgehen von Sideris und Tsakmakis wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

## 7.2.2 Konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für klassische Elastizität

Es gibt einen prinzipiellen Widerspruch zwischen den Annahmen 1) und 2) der Euler-Bernoulli-Balkentheorie im letzten Abschnitt. Auf der einen Seite wird isotropes Materialverhalten postuliert (Annahme 1) und auf der anderen Seite wird unterschiedliches Materialverhalten in den Querschnittsebenen (keine Deformation) im Vergleich zum Materialverhalten entlang der  $x_1$ -Achse (Elastizität) angenommen (Annahme 2). Um dieses Problem zu lösen muss eine der beiden Annahmen modifiziert werden. Der große Vorteil der Euler-Bernoulli-Vorgehensweise ist die einfache Beschreibung der Deformationsgeometrie, die es erlaubt nach Mittelung über den Querschnitt Lösungen in geschlossener Form zu ermitteln. Deswegen wurde in Sideris und Tsakmakis [50] die Annahme 2) beibehalten und die Annahme 1) folgenderweise modifiziert.



Dass die Materialeigenschaften in den Querschnittsebenen, infolge Annahme 2), unterschiedlich zu den Materialeigenschaften entlang der  $x_1$ -Achse sind, ist ein klares Signal für Anisotropie. In Sideris und Tsakmakis [50] wurde der Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  im Elastizitätsgesetz

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (7.26)$$

als transversal isotrop in Bezug auf das gewählte Koordinatensystem angenommen. Für die Elastizitätskonstanten wurde  $\nu_{13} = \nu_{31} = 0$ ,  $\mathbb{C}_{1111} = E$ ,  $\mathbb{C}_{3333} = E^*$ ,  $\mathbb{C}_{1133} = 0$ ,  $\mathbb{C}_{1313} = \mu^*$  und  $\mathbb{C}_{1113} = 0$  gesetzt. Es stehen  $\nu_{13}$  und  $\nu_{31}$  für Querkontraktionszahlen in den jeweiligen Ebenen,  $E$  und  $E^*$  für Elastizitätsmoduli und  $\mu^*$  für das Schubmodul. Mit Hilfe der Voigt-Matrizennotation wird das Stoffgesetz (7.26) für den betrachteten ebenen Fall in das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11} \\ E^*\varepsilon_{33} \\ 2\mu^*\varepsilon_{13} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

überführt. Die dazugehörige freie Energie ist

$$\psi = \frac{1}{2} (E\varepsilon_{11}^2 + E^*\varepsilon_{33}^2 + 4\mu^*\varepsilon_{13}^2) \quad (7.28)$$

und es gelten weiterhin die Gleichgewichtsbedingungen (7.6) - (7.8). Die Euler-Bernoulli-Annahme, dass die Querschnitte sich nicht deformieren, wurde in Sideris und Tsakmakis [50] durch unendlich große Werte  $E^*$  umgesetzt. In der Tat muss  $\lim_{E^* \rightarrow \infty} \varepsilon_{33} = 0$  sein, damit  $\psi$  in (7.28) beschränkt bleibt (beschränkte Energie). Das Verschwinden von  $\varepsilon_{33}$  kann durch  $u_3 = w(x_1)$  stets erreicht werden. Wegen  $\Sigma_{33} = E^*\varepsilon_{33}$  (siehe Gleichung (7.27)) ist  $\Sigma_{33}$  nicht mehr durch eine konstitutive Gleichung berechenbar.

Andererseits setzt die Erfüllung der geometrischen Zwangsbedingung  $\varepsilon_{33} \equiv 0$  die Existenz einer Spannung  $\Sigma_{33}$  voraus, die keine Arbeit leistet, d.h.  $\Sigma_{33} d\varepsilon_{33} = 0$ . Daraus folgt, dass  $\Sigma_{33} = \lim_{E^* \rightarrow \infty} E^*\varepsilon_{33}$  beschränkt ist und deswegen gilt in Gleichung (7.28)  $\lim_{E^* \rightarrow \infty} E^*\varepsilon_{33}^2 = 0$ .

Die Annahme 2) der Euler-Bernoulli-Balkentheorie verlangt auch, dass ebene Querschnittsflächen eben bleiben. Das ist realisierbar durch die Existenz einer axialen Verschiebung  $U(x_1)$  und einer Rotation  $\phi(x_1)$ , sodass  $u_1 = U(x_1) - x_3\phi(x_1)$ ,  $u_2 \equiv 0$  und  $u_3 = w(x_1)$  (vergleiche Sideris und Tsakmakis [50], Abschnitt 5.2). Die Konsequenz davon ist  $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(-\phi + w')$ . Ein letzter Aspekt der Annahme 2) besteht darin, dass die Balkenquerschnitte immer senkrecht zur deformierten Balkenachse stehen. Geometrisch bedeutet diese Annahme, dass keine Scherung in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene stattfindet. Mit anderen Worten der Wert des Schermoduls  $\mu^*$  ist unendlich groß und es muss die geometrische Zwangsbedingung  $\lim_{\mu^* \rightarrow \infty} \varepsilon_{13} = 0$  gelten, damit die freie Energiefunktion  $\psi$  beschränkt bleibt. Das wiederum hat zur Folge, dass  $w' = \phi$  ist. Die Erfüllung der Bedingung  $\varepsilon_{13} = 0$  setzt die Existenz einer Spannungskomponente  $\Sigma_{13}$  voraus, die keine Arbeit leistet, d.h.  $\Sigma_{13} d\varepsilon_{13} = 0$ . Damit ist  $\Sigma_{13} = \lim_{\mu^* \rightarrow \infty} 2\mu^*\varepsilon_{13}$  beschränkt und durch eine konstitutive Gleichung nicht bestimmbar. Hieraus folgt  $\lim_{\mu^* \rightarrow \infty} 4\mu^*\varepsilon_{13}^2 = 0$  in Gleichung (7.28). Insgesamt gilt (vergleiche (7.4) und (7.5))

$$u_1 = U(x_1) - x_3 w'(x_1) \quad , \quad u_2 \equiv 0 \quad , \quad u_3 = w(x_1) \quad , \quad (7.29)$$

$$\varepsilon_{11} = U' - x_3 w'' \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = 0 \quad , \quad (7.30)$$

$$\Sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = E(U' - x_3 w'') \quad , \quad (7.31)$$

$\Sigma_{33}, \Sigma_{13}$ : nicht bestimmbar durch konstitutive Gleichungen,

$$\psi = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 \quad . \quad (7.32)$$

Wie bei geometrischen Zwangsbedingungen bekannt ist, werden die Spannungen  $\Sigma_{33}$  und  $\Sigma_{13}$  aus den Gleichgewichts- und den Randbedingungen berechnet. Die weiteren Schritte sollten klar sein und führen zu denselben Ergebnissen wie in der Technischen Mechanik. Auf diese Weise gibt es keine Inkonsistenzen mehr und alle Resultate der Technischen Mechanik sind weiterhin gültig. Dadurch haben Sideris und Tsakmakis den Weg zu konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorien eröffnet, die eine fundierte Beziehung zu den Spannungskomponenten ermöglicht. Diese Vorgehensweise wird in den Abschnitten 7.3 und 7.4 benutzt, um konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorien für das KG- und das 3-PG-Modell zu formulieren. Ohne den in Sideris und Tsakmakis [50] eingeschlagenen Weg wären diese Formulierungen nicht widerspruchsfrei möglich.

### 7.3 Konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das KG-Modell

Euler-Bernoulli-Balkentheorien werden oft in Form von eindimensionalen Prinzipien der virtuellen Arbeit formuliert. Es gibt zwei dieser eindimensionalen Formulierungen, die in enger Beziehung zum KG-Modell stehen. Die eine geht auf Papargyri-Beskou et al. [41] zurück und basiert auf dem Potential von inneren Kräften (Volumenintegral der freien Energie)

$$\Pi_{PB}^{(i)} := \int_V \frac{1}{2} E [\varepsilon_{11}^2 + c_2 (\partial_1 \varepsilon_{11})^2] dV \quad . \quad (7.33)$$

(Die Buchstaben  $PB$  in  $\Pi_{PB}^{(i)}$  weisen auf Papargyri-Beskou hin.) Weiterhin gilt die Notation von Kapitel 6. Die Formel (7.33) ist ein Sonderfall eines Ansatzes, der von Sulem und Vardoulakis [51] vorgeschlagen wurde, wenn die dortige innere Länge für Oberflächeneffekte zu Null gesetzt wird. Lazopoulos und Lazopoulos [32] betrachteten die Formulierung (7.33) als unvollständig und schlugen den Ansatz

$$\Pi_{LL}^{(i)} = \int_V \frac{1}{2} E [\varepsilon_{11}^2 + c_2 (\partial_1 \varepsilon_{11})^2 + c_2 (\partial_3 \varepsilon_{11})^2] dV \quad (7.34)$$

vor. (Die Buchstaben  $LL$  in  $\Pi_{LL}^{(i)}$  weisen auf Lazopoulos und Lazopoulos hin.) Wenn nur Biegung vorliegt, dann gilt  $\varepsilon_{11} = -x_3 w''$  (siehe Gleichung (7.5)) und die Gleichungen (7.33) und (7.34) gehen jeweils zu den Formeln

$$\Pi_{PB}^{(i)} = \int_0^L \frac{1}{2} [EI (w'')^2 + c_2 EI (w''')^2] dx_1 \quad , \quad (7.35)$$

$$\Pi_{LL}^{(i)} = \int_0^L \frac{1}{2} [EI (w'')^2 + c_2 EI (w''')^2 + c_2 EA (w'')^2] dx_1 \quad (7.36)$$

über. Es fällt auf, dass die Querschnittsfläche  $A$  in  $\Pi_{LL}^{(i)}$  vorkommt, während  $\Pi_{PB}^{(i)}$  unabhängig von  $A$  ist. Der Integrand in (7.36) ist nichts anderes als die eindimensionale Version des Volumenintegrals über (5.28). Auf den ersten Blick erscheint es, als ob Lazopoulos und Lazopoulos [32] mit ihrer Behauptung, dass der Ansatz (7.33) (bzw. (7.35)) unvollständig sei, Recht hätten. Es wird im Folgenden gezeigt, dass diese Behauptung nicht korrekt ist, oder präziser ausgedrückt, dass (7.33) und (7.34) zur Formulierung von Prinzipien virtueller Arbeit führen, die zueinander äquivalent sind. Die Ausführungen bis zum Ende von Kapitel 7.3 entsprechen im Wesentlichen dem Inhalt der Publikation [12], die gemeinsam von den Autoren Bröse, Sideris, Tsakmakis und Üngör angefertigt wurde.

### 7.3.1 Anisotropes KG-Modell mit geometrischen Zwangsbedingungen

Betrachtet wird das KG-Modell als Stoffgesetz, sodass die Gleichungen (5.64) – (5.66) gelten. Zusätzlich gelten die Gleichgewichtsbedingungen (5.32) und die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors (5.33). Es sollen genau dieselben Annahmen wie im Kapitel 7.2.2 gelten und insbesondere wird dieselbe Form von ebenen Spannungs- und Dehnungszuständen und transversaler Isotropie für den Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  angenommen. In den folgenden Resultaten werden die Elastizitätsgesetze sowohl in tensorieller als auch in Voigt-Notation angegeben. Insgesamt gelten die Beziehungen

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_3) \hat{=} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{13} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

$$\Sigma_{jk} = \Sigma_{jk}(x_1, x_3) \hat{=} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \Sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{13} & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (7.38)$$

$$\hat{\tau}_{jk} = \mathbb{C}_{jkmn} \varepsilon_{mn} \Rightarrow \quad (7.39)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{11} \\ \hat{\tau}_{33} \\ \hat{\tau}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11} \\ E^*\varepsilon_{33} \\ 2\mu^*\varepsilon_{13} \end{pmatrix}, \quad (7.40)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = c_2 \mathbb{C}_{jkmn} \partial_i \varepsilon_{mn} \Rightarrow \quad (7.41)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu}_{111} \\ \hat{\mu}_{133} \\ \hat{\mu}_{113} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \varepsilon_{11} \\ \partial_1 \varepsilon_{33} \\ 2\partial_1 \varepsilon_{13} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} E\partial_1 \varepsilon_{11} \\ E^*\partial_1 \varepsilon_{33} \\ 2\mu^*\partial_1 \varepsilon_{13} \end{pmatrix}, \quad (7.42)$$

$$\hat{\mu}_{2jk} = 0, \quad (7.43)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu}_{311} \\ \hat{\mu}_{333} \\ \hat{\mu}_{313} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_3 \varepsilon_{11} \\ \partial_3 \varepsilon_{33} \\ 2\partial_3 \varepsilon_{13} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} E\partial_3 \varepsilon_{11} \\ E^*\partial_3 \varepsilon_{33} \\ 2\mu^*\partial_3 \varepsilon_{13} \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

$$\Sigma_{jk} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} = \hat{\tau}_{jk} - c_2 \mathbb{C}_{jkmn} (\Delta \varepsilon_{mn}) \Rightarrow \quad (7.45)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{11} \\ \hat{\tau}_{33} \\ \hat{\tau}_{13} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_1 \hat{\mu}_{111} + \partial_3 \hat{\mu}_{311} \\ \partial_1 \hat{\mu}_{133} + \partial_3 \hat{\mu}_{333} \\ \partial_1 \hat{\mu}_{113} + \partial_3 \hat{\mu}_{313} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11} - c_2 E (\partial_1 \partial_1 \varepsilon_{11} + \partial_3 \partial_3 \varepsilon_{11}) \\ \hat{\tau}_{33} - \partial_1 \hat{\mu}_{133} - \partial_3 \hat{\mu}_{333} \\ \hat{\tau}_{13} - \partial_1 \hat{\mu}_{113} - \partial_3 \hat{\mu}_{313} \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

$$= \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11} - c_2 E \Delta \varepsilon_{11} \\ \hat{\tau}_{33} - \partial_1 \hat{\mu}_{133} - \partial_3 \hat{\mu}_{333} \\ \hat{\tau}_{13} - \partial_1 \hat{\mu}_{113} - \partial_3 \hat{\mu}_{313} \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

Die freie Energie in (5.63) reduziert sich auf

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2} [E\varepsilon_{11}^2 + E^*\varepsilon_{33}^2 + 4\mu^*\varepsilon_{13}^2] + \frac{c_2}{2} [E(\partial_1\varepsilon_{11})^2 + E^*(\partial_1\varepsilon_{33})^2 + 4\mu^*(\partial_1\varepsilon_{13})^2] \\ & + \frac{c_2}{2} [E(\partial_3\varepsilon_{11})^2 + E^*(\partial_3\varepsilon_{33})^2 + 4\mu^*(\partial_3\varepsilon_{13})^2] \end{aligned} \quad (7.48)$$

und von den Gleichgewichtsbedingungen (5.32) bleiben nur die zwei Gleichungen

$$\partial_1\Sigma_{11} + \partial_3\Sigma_{13} = 0 \quad , \quad (7.49)$$

$$\partial_1\Sigma_{13} + \partial_3\Sigma_{33} = 0 \quad (7.50)$$

übrig. Es ist nun nicht schwierig, mit Hilfe von Überlegungen, die völlig analog zu denen im Abschnitt 7.2.2 sind, zu sehen, dass die Euler-Bernoulli-Deformationsgeometrie unendlich große Werte von  $E^*$  und  $\mu^*$  erfordert. Damit dann die freie Energie in (7.48) beschränkt bleibt, muss

$$\varepsilon_{33} , \varepsilon_{13} , \partial_i\varepsilon_{33} , \partial_i\varepsilon_{13} \rightarrow 0 \quad (7.51)$$

gelten. Das Verschiebungsfeld in (7.29) stellt eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung der kinematischen Zwangsbedingungen (7.51) dar. Außerdem sind Spannungen  $\hat{\tau}_{33}$ ,  $\hat{\tau}_{13}$ ,  $\hat{\mu}_{i33}$  und  $\hat{\mu}_{i13}$  erforderlich, die keine Arbeit leisten. Das bedeutet, dass diese Spannungen beschränkt, aber nicht durch konstitutive Gesetze bestimmbar sind. Damit sind die Spannungen  $\Sigma_{33}$  und  $\Sigma_{13}$  auch beschränkt und durch konstitutive Gesetze nicht bestimmbar.

Somit gelten die folgenden Beziehungen:

$$\partial_1\Sigma_{11} + \partial_3\Sigma_{13} = 0 \quad , \quad (7.52)$$

$$\partial_1\Sigma_{13} + \partial_3\Sigma_{33} = 0 \quad , \quad (7.53)$$

$$u_1 = U(x_1) - x_3w'(x_1) \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = w(x_1) \quad , \quad (7.54)$$

$$\varepsilon_{11} = U' - x_3w'' \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = 0 \quad , \quad (7.55)$$

$$\Sigma_{11} = E(\varepsilon_{11} - c_2\Delta\varepsilon_{11}) = E(U' - c_2U''') - E(w'' - c_2w'''' )x_3 \quad , \quad (7.56)$$

$$\hat{\mu}_{i11} = c_2E(\partial_i\varepsilon_{11}) = c_2E\partial_i(U' - x_3w'') \quad , \quad i = 1, 3 \quad , \quad (7.57)$$

$\hat{\tau}_{33}$ ,  $\hat{\tau}_{13}$ ,  $\hat{\mu}_{133}$ ,  $\hat{\mu}_{333}$ ,  $\hat{\mu}_{113}$ ,  $\hat{\mu}_{313}$ ,  $\Sigma_{33}$ ,  $\Sigma_{13}$ : nicht bestimmbar durch konstitutive Gleichungen, alle anderen Komponenten verschwinden,

$$\psi = \frac{1}{2}E\varepsilon_{11}^2 + \frac{c_2}{2}E(\partial_1\varepsilon_{11})^2 + \frac{c_2}{2}E(\partial_3\varepsilon_{11})^2 \quad . \quad (7.58)$$

Diese Gleichungen bilden eine konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das KG-Modell, da sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch das Elastizitätsgesetz lokal erfüllt werden.

Die Randbedingungen für das KG-Modell sind in den Gleichungen (5.22) – (5.25) anhand von  $\mathbf{u}$ ,  $D\mathbf{u}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}$  und  $\hat{\mathbf{R}}$  formuliert. Das Ziel lautet jetzt unter anderem, diese Randbedingungen anhand von  $U$ ,  $w$  und Schnittkräften mit Hilfe von Prinzipien von virtueller Arbeit umzuschreiben.

### 7.3.2 Prinzipien virtueller Arbeit – Einführung von Schnittkräften

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, exakte Lösungen in geschlossener Form für das System von partiellen Differentialgleichungen (7.52) - (7.58) zu finden. Um den mathematischen Aufwand zur Lösung des Systems zu reduzieren, wird in der Euler-Bernoulli-Balkentheorie häufig ein einfacheres Ersatzproblem, ausgedrückt

durch Schnittkräfte, gelöst. Somit reduzieren sich die Gleichungen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie für den dreidimensionalen Körper auf Gleichungen eines eindimensionalen Kontinuums. Die Punkte  $x_1 = 0$  und  $x_1 = L$  sind die Randpunkte des eindimensionalen Kontinuums, während Punkte  $x_1 \in (0, L)$  innere Punkte sind. Randbedingungen auf den Ebenen  $x_3 = \pm c$  werden für jeden Punkt  $x_1$  als resultierende Kräfte am Punkt  $x_1$  erfasst. Diese Resultierenden können als Kräfte im Inneren des eindimensionalen Kontinuums (Massenkräfte) aufgefasst werden. Insgesamt wirken auf das eindimensionale Kontinuum (und auf jeden Teilkörper davon) Schnittkräfte auf den Rändern  $x_1 = 0$  und  $x_1 = L$  und resultierende Kräfte, die entlang des Bereiches  $x_1 \in (0, L)$  verteilt sind. Ein eleganter Weg zur Einführung dieser Kräfte ist es Gebrauch vom Prinzip der virtuellen Arbeit zu machen. Die Definitionen

$$f_1(x_1) := EA(U' - c_2 U''') \quad , \quad (7.59)$$

$$f_2(x_1) := c_2 EA U'' \quad , \quad (7.60)$$

$$f_3(x_1) := -EI(w'' - c_2 w''') - c_2 EA w'' \quad , \quad (7.61)$$

$$f_4(x_1) := -c_2 EI w''' \quad (7.62)$$

werden helfen, um eine kompakte Darstellung der Ergebnisse zu erreichen.

### A) Die übliche Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

**Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte** Vom Abschnitt 5.2.1 ist bekannt (siehe Gleichungen (5.21) - (5.25)), dass die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte für den dreidimensionalen Körper durch

$$\delta W^{(e)} = \int_{\partial V} \left[ \hat{P}_k \delta u_k + \hat{R}_k \delta (Du_k) \right] dS, \quad (7.63)$$

gegeben ist, wobei (siehe Gleichungen (5.24) und (5.25))

$$\hat{P}_k = n_i \Sigma_{ik} - D_j (n_i \hat{\mu}_{ijk}) + (D_l n_l) n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} \quad , \quad (7.64)$$

$$\hat{R}_k = n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} \quad (7.65)$$

und (siehe Gleichungen (2.4) und (2.5))

$$Du_k = n_l \partial_l u_k \quad , \quad (7.66)$$

$$D_j (n_i \hat{\mu}_{ijk}) = \partial_j (n_i \hat{\mu}_{ijk}) - n_j n_l \partial_l (n_i \hat{\mu}_{ijk}) \quad , \quad (7.67)$$

$$D_l n_l = \partial_l n_l - n_l n_j \partial_j n_l \quad . \quad (7.68)$$

Seien  $A_l$ ,  $A_r$ ,  $A_o$  und  $A_u$  jeweils die linke, die rechte, die obere und die untere Randebene des Balkens in Abbildung 7.1. Wie in Sideris und Tsakmakis [50] wird  $\delta W^{(e)}$  gemäß

$$\delta W^{(e)} = \int_{A_l \cup A_r} \left[ \hat{P}_k \delta u_k + \hat{R}_k \delta (Du_k) \right] dS + \int_{A_o \cup A_u} \left[ \hat{P}_k \delta u_k + \hat{R}_k \delta (Du_k) \right] dS \quad (7.69)$$

aufgeteilt. Diese Integrale werden in Sideris und Tsakmakis [50] durch Schnitt- und resultierende Kräfte ausgedrückt. Der Vollständigkeit halber wird hier die Abwicklung dieses Vorgehens erläutert, um den Unterschied zu anderen Vorgehen zu verdeutlichen.

Randebenen  $A_r, A_l$  :

$$x_1 = L \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_1 \quad , \quad n_1 = \pm 1 \quad , \quad n_2 = n_3 = 0 \quad . \quad (7.70)$$

$$\widehat{P}_1 = n_1 (\Sigma_{11} - \partial_3 \widehat{\mu}_{113}) \quad , \quad \widehat{P}_3 = n_1 (\Sigma_{13} - \partial_3 \widehat{\mu}_{133}) \quad , \quad (7.71)$$

$$\widehat{R}_1 = \widehat{\mu}_{111} \quad , \quad \widehat{R}_3 = \widehat{\mu}_{113} \quad , \quad (7.72)$$

$$\delta u_1 = \delta U + x_3 \delta(-w') \quad , \quad \delta u_3 = \delta w \quad , \quad (7.73)$$

$$\delta(Du_1) = n_1 (\delta U' + x_3 \delta(-w'')) \quad , \quad \delta(Du_3) = n_1 \delta w' \quad . \quad (7.74)$$

Alle anderen Komponenten von  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\delta(D\mathbf{u})$ ,  $\widehat{\mathbf{P}}$  und  $\widehat{\mathbf{R}}$  verschwinden. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_l \cup A_r} \left[ \widehat{P}_k \delta u_k + \widehat{R}_k \delta(Du_k) \right] dS &= \int_{A_l \cup A_r} \widehat{P}_1 \delta U dS + \int_{A_l \cup A_r} n_1 \widehat{R}_1 \delta U' dS + \int_{A_l \cup A_r} \widehat{P}_3 \delta w dS \\ &+ \int_{A_l \cup A_r} (\widehat{P}_1 x_3 - n_1 \widehat{R}_3) \delta(-w') dS + \int_{A_l \cup A_r} n_1 \widehat{R}_1 x_3 \delta(-w'') dS \\ &= [N \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [H \delta U']_{x_1=0}^{x_1=L} + [\widetilde{V} \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ &+ [M \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} + [m \delta(-w'')]_{x_1=0}^{x_1=L} \quad , \end{aligned} \quad (7.75)$$

wobei

$$N = N(x_1) := n_1 \int_A \widehat{P}_1 dS = \int_A (\Sigma_{11} - \partial_3 \widehat{\mu}_{113}) dS \quad , \quad (7.76)$$

$$H = H(x_1) := \int_A \widehat{R}_1 dS = \int_A \widehat{\mu}_{111} dS \quad , \quad (7.77)$$

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}(x_1) := n_1 \int_A \widehat{P}_3 dS = \int_A (\Sigma_{13} - \partial_3 \widehat{\mu}_{133}) dS \quad , \quad (7.78)$$

$$M = M(x_1) := \int_A [(\Sigma_{11} - \partial_3 \widehat{\mu}_{113}) x_3 - \widehat{\mu}_{113}] dS \quad , \quad (7.79)$$

$$m = m(x_1) := \int_A \widehat{R}_1 x_3 dS = \int_A \widehat{\mu}_{111} x_3 dS \quad . \quad (7.80)$$

Zur Berechnung der Integrale über  $A_o \cup A_u$  reicht es aus, nur resultierende Belastungen zu betrachten, die sich durch Addition von Werten an den Ebenen  $x_3 = c$  und  $x_3 = -c$  ergeben.

Randebenen  $A_o, A_u$  :

$$x_3 = \pm c \quad , \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3 \quad , \quad n_3 = \pm 1 \quad , \quad n_1 = n_2 = 0 \quad , \quad (7.81)$$

$$\widehat{P}_1 = n_3 (\Sigma_{13} - \partial_1 \widehat{\mu}_{311}) \quad , \quad \widehat{P}_3 = n_3 (\Sigma_{33} - \partial_1 \widehat{\mu}_{313}) \quad , \quad (7.82)$$

$$\widehat{R}_1 = \widehat{\mu}_{313} \quad , \quad \widehat{R}_3 = \widehat{\mu}_{333} \quad , \quad (7.83)$$

$$\delta u_1 = \delta U + x_3 \delta(-w') \quad , \quad \delta u_3 = \delta w \quad , \quad \delta(Du_1) = n_3 \delta(-w') \quad , \quad \delta(Du_3) = 0 \quad . \quad (7.84)$$

Alle anderen Komponenten von  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\delta(D\mathbf{u})$ ,  $\hat{\mathbf{P}}$  und  $\hat{\mathbf{R}}$  verschwinden. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{A_o \cup A_u} \left[ \hat{P}_k \delta u_k + \hat{R}_k \delta(Du_k) \right] dS &= \int_{A_o \cup A_u} \hat{P}_1 \delta U dS + \int_{A_o \cup A_u} \hat{P}_3 \delta w dS - \int_{A_o \cup A_u} \left( \hat{P}_1 x_3 + n_3 \hat{R}_1 \right) \delta w' dS \\
&= \int_0^L p \delta U dx_1 + \int_0^L \tilde{q} \delta w dx_1 + \int_0^L \tilde{V} \delta w' dx_1 \\
&= \int_0^L p \delta U dx_1 + \int_0^L q \delta w dx_1 + \left[ \tilde{V} \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L}, \tag{7.85}
\end{aligned}$$

wobei  $p$ ,  $\tilde{q}$ ,  $q$  und  $\tilde{V}$  resultierende Kräfte an den Punkten  $x_1 \in (0, L)$  sind:

$$p = p(x_1) := 2b \left( [\hat{P}_1]_{x_3=c} + [\hat{P}_1]_{x_3=-c} \right) = 2b \left[ \Sigma_{13} - \partial_1 \hat{\mu}_{311} \right]_{x_3=-c}^{x_3=c} = 2b \left[ \Sigma_{13} \right]_{x_3=-c}^{x_3=c}, \tag{7.86}$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(x_1) := 2b \left( [\hat{P}_3]_{x_3=c} + [\hat{P}_3]_{x_3=-c} \right) = 2b \left[ \Sigma_{33} - \partial_1 \hat{\mu}_{313} \right]_{x_3=-c}^{x_3=c}, \tag{7.87}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V} = \tilde{V}(x_1) &:= -2b \left( [\hat{P}_1 x_3 + n_3 \hat{R}_1]_{x_3=c} + [\hat{P}_1 x_3 + n_3 \hat{R}_1]_{x_3=-c} \right) \\
&= -2b \left( (\Sigma_{13} - \partial_1 \hat{\mu}_{311}) x_3 + \hat{\mu}_{313} \right)_{x_3=-c}^{x_3=c}, \tag{7.88}
\end{aligned}$$

$$q = q(x_1) := \tilde{q} - \tilde{V}' = 2b \left[ \Sigma_{33} + \partial_1 (\Sigma_{13} - \partial_1 \hat{\mu}_{311}) x_3 \right]_{x_3=-c}^{x_3=c}. \tag{7.89}$$

Bei der Berechnung von  $p$  in Gleichung (7.86) wurde die Beziehung (siehe Gleichung (7.57))

$$\partial_1 \hat{\mu}_{311} = -c_2 E w''' \tag{7.90}$$

benutzt. Der Term

$$-2b \left[ (\partial_1 \partial_1 \hat{\mu}_{311}) x_3 \right]_{x_3=-c}^{x_3=c} = c_2 E A w'''' \tag{7.91}$$

in Gleichung (7.89) muss wie eine deformationsabhängige Kraft interpretiert werden. Ähnliche Kräfte werden z.B. von elastischen Bettungen erzeugt.

Einsetzen der beiden Ergebnisse (7.75) und (7.85) in (7.69) liefert

$$\begin{aligned}
\delta W^{(e)} &= [N \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [H \delta U']_{x_1=0}^{x_1=L} + [V \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
&\quad + [m \delta(-w'')]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_0^L p \delta U dx_1 + \int_0^L q \delta w dx_1, \tag{7.92}
\end{aligned}$$

wobei

$$V = V(x_1) := \tilde{V} + \tilde{V}' \tag{7.93}$$

gesetzt wurde. Die Gleichung (7.92) gilt für beliebige Teile des Balkens und deswegen stellen  $N$ ,  $H$ ,  $V$ ,  $M$  und  $m$  die gesuchten Schnittkräfte dar. In den Gleichungen (7.76) - (7.80) für die Schnittkräfte können noch die

Elastizitätsgesetze (7.56) und (7.57) eingearbeitet werden. Insgesamt ergeben sich folgende Beziehungen für die Schnitt- und resultierenden Kräfte:

$$N = f_1 - 2b [\widehat{\mu}_{113}]_{x_3=-c}^{x_3=c} , \quad (7.94)$$

$$H = f_2 , \quad (7.95)$$

$$V = - \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS - 2b [\widehat{\mu}_{133} + \widehat{\mu}_{313}]_{x_3=-c}^{x_3=c} - c_2 E A w''' , \quad (7.96)$$

$$M = f_3 - 2b [\widehat{\mu}_{113} x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} + c_2 E A w'' , \quad (7.97)$$

$$m = f_4 , \quad (7.98)$$

$$p = 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} , \quad (7.99)$$

$$q = 2b [\Sigma_{33} + (\partial_1 \Sigma_{13}) x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} + c_2 E A w'''' . \quad (7.100)$$

**Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte** Bei elastischen Systemen besitzen die inneren Kräfte ein Potential, das durch das Funktional der freien Energie  $\psi$  gegeben ist. Mit  $\psi$  aus Gleichung (7.58) ist das Potential der inneren Kräfte nichts anderes als dasjenige in Gleichung (7.34) von Lazopoulos und Lazopoulos [32]:

$$\Pi_{LL}^{(i)} = \int_V \psi dV = \int_V \frac{1}{2} E [\varepsilon_{11}^2 + c_2 (\partial_1 \varepsilon_{11})^2 + c_2 (\partial_3 \varepsilon_{11})^2] dV . \quad (7.101)$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte,  $\delta W^{(i)}$ , ist dann gleich der Variation von  $\Pi_{LL}^{(i)}$ ,

$$\delta W^{(i)} = \delta \Pi_{LL}^{(i)} . \quad (7.102)$$

Während  $\delta W^{(i)}$  eine Bezeichnung ist, stellt  $\delta \Pi_{LL}^{(i)}$  die Variation des Funktionals  $\Pi_{LL}^{(i)}$  dar. Um  $\delta \Pi_{LL}^{(i)}$  auszurechnen, wird zuerst die Dehnung  $\varepsilon_{11}$  in (7.101) durch die Verschiebung  $U$  und die Absenkung  $w$  ausgedrückt,

$$\Pi_{LL}^{(i)} = \int_V \frac{1}{2} E [(U' - x_3 w'')^2 + c_2 (U'' - x_3 w''')^2 + c_2 (w'')^2] dV . \quad (7.103)$$

Dann wird  $\delta \Pi_{LL}^{(i)}$  gebildet, mehrfach partielle Integration angewendet und die Formeln (7.1), (7.2) und (7.59) - (7.62) berücksichtigt. Nach längeren Umrechnungen ergibt sich schließlich das Ergebnis

$$\begin{aligned} \delta W^{(i)} = & [f_1 \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [f_2 \delta U']_{x_1=0}^{x_1=L} + [f_3' \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [f_3 \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ & + [f_4 \delta(-w'')]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_0^L f_1' \delta U dx_1 - \int_0^L f_3'' \delta w dx_1 . \end{aligned} \quad (7.104)$$

**Das Prinzip der virtuellen Arbeit - Randbedingungen für Schnittgrößen** Die gewöhnliche Form des Prinzips der virtuellen Arbeit wird durch die Gleichung

$$\delta W^{(e)} = \delta W^{(i)} \equiv \delta \Pi_{LL}^{(i)} , \quad (7.105)$$



formuliert. Diese Gleichung gilt für den ganzen Körper, sowie für jeden beliebigen Teilkörper. Als nächstes werden  $\delta W^{(e)}$  und  $\delta W^{(i)}$  in Gleichung (7.105) durch (7.92) und (7.104) ersetzt und das Fundamentallemma der Variationsrechnung angewendet. Es ergeben sich die Gleichungen

$$f'_1 + p = 0 \quad , \quad f''_3 + q = 0 \quad , \quad (7.106)$$

die Beziehungen

$$N = f_1 \quad , \quad H = f_2 \quad , \quad V = f'_3 \quad , \quad M = f_3 \quad , \quad m = f_4 \quad (7.107)$$

und die Randbedingungen für Schnittgrößen:

$$\text{Entweder } N \text{ oder } U \quad , \quad \text{entweder } H \text{ oder } U' \quad , \quad (7.108)$$

$$\text{entweder } V \text{ oder } w \quad , \quad \text{entweder } M \text{ oder } w' \quad \text{und} \quad (7.109)$$

$$\text{entweder } m \text{ oder } w'' \quad , \quad (7.110)$$

welche an  $x_1 = 0$  und  $x_1 = L$  vorgeschrieben werden müssen. Aus den Gleichungen (7.106) und (7.107) ist leicht ersichtlich, dass die klassischen Gleichungen

$$N' + p = 0 \quad , \quad M'' + q = 0 \quad , \quad M' - V = 0 \quad (7.111)$$

gelten. Andererseits können aus den zwei Gleichungen in (7.106), mit Hilfe der Definitionen (7.59) und (7.61), die Differentialgleichungen für  $U$  und  $w$

$$-c_2 EAU'''' + EAU'' + p = 0 \quad , \quad (7.112)$$

$$c_2 EIw'''' - (EI + c_2 EA)w'''' + q = 0 \quad , \quad (7.113)$$

hergeleitet werden.

Weitere wichtige Beziehungen ergeben sich aus (7.107) und (7.94)

$$[\hat{\mu}_{113}]_{x_3=-c}^{x_3=c} = 0 \Leftrightarrow [\hat{\mu}_{113}]_{x_3=c} = [\hat{\mu}_{113}]_{x_3=-c} \quad , \quad (7.114)$$

womit, durch Vergleich von (7.107)<sub>4</sub> mit (7.97)

$$[\hat{\mu}_{113}]_{x_3=\pm c} = c_2 Ew'' \quad (7.115)$$

folgt. Auch die Werte von  $\hat{\mu}_{113}$  an  $x_3 = \pm c$  können berechnet werden. Dazu wird die Gleichgewichtsbedingung (7.52) mit  $x_3$  multipliziert und dann über  $A$  integriert

$$\partial_1 \int_A \Sigma_{11} x_3 dS + \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS = 0 \quad . \quad (7.116)$$

Der erste Term kann mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes (7.56), der Definition (7.61) und der Gleichungen (7.1) und (7.2) berechnet werden,

$$\int_A \Sigma_{11} x_3 dS = -EI(w'' - c_2 w'''' ) = f_3 + c_2 EA w'' \quad . \quad (7.117)$$

Damit folgt aus (7.116)

$$\int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS = -f'_3 - c_2 E A w''' \quad (7.118)$$

und aus Gleichungen (7.96) und (7.107)<sub>3</sub>

$$[\hat{\mu}_{133}]_{x_3=-c}^{x_3=c} + [\hat{\mu}_{313}]_{x_3=-c}^{x_3=c} = 0 \quad (7.119)$$

Zusammengefasst wird daraus

$$N = \int_A \Sigma_{11} dS = f_1 \quad (7.120)$$

$$H = \int_A \hat{\mu}_{111} dS = f_2 \quad (7.121)$$

$$V = - \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS - c_2 E A w''' = M' = f'_3 \quad (7.122)$$

$$M = \int_A \Sigma_{11} x_3 dS - c_2 E A w'' = f_3 \quad (7.123)$$

$$m = \int_A \hat{\mu}_{111} x_3 dS = f_4 \quad (7.124)$$

$$p = 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \quad (7.125)$$

$$q = 2b [\Sigma_{33} + (\partial_1 \Sigma_{13}) x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} + c_2 E A w'''' \quad (7.126)$$

Die Beziehungen (7.114), (7.115) und (7.119) wurden auch in Sideris und Tsakmakis [50] aufgestellt, allerdings unter der Bedingung  $N = 0$ .

Die Ergebnisse können folgenderweise interpretiert werden. In (7.119), (7.121), (7.122) und (7.123) kommen Spannungen vor, die aus den Elastizitätsgesetzen (7.56) und (7.57) berechenbar sind. Damit stellen die Gleichungen (7.120), (7.121), (7.123) und (7.124) Stoffgesetze für Schnittkräfte dar. In Gleichung (7.122) kommt die Spannung  $\Sigma_{13}$  vor, die nicht aus einem Elastizitätsgesetz bestimmt werden kann. Deswegen wird  $V$  aus der Gleichgewichtsbedingung für Schnittkräfte (7.111)<sub>3</sub> bestimmt. Weitere Gleichgewichtsbedingungen für Schnittkräfte sind die Gleichungen (7.111)<sub>1,2</sub>.

Bevor dieser Abschnitt abgeschlossen wird, soll auf folgendes aufmerksam gemacht werden. Die Kräfte  $V$  und  $q$  hängen neben den Spannungen  $\Sigma_{13}$  und  $\Sigma_{33}$ , die aus Materialgesetzen nicht bestimmbar sind, auch von deformationsabhängigen Anteilen ab. Diese Abhängigkeit der Randbedingungen für  $V$  und der äußeren Belastung  $q$  von deformationsabhängigen Termen ist ungewöhnlich und kommt in dieser Form in der klassischen Elastizität nicht vor. Daher stellt sich die Frage, ob eine alternative Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit existiert, die zu Ergebnissen ohne derartige Deformationsabhängigkeiten für  $V$  und  $q$  führen. Eine solche Formulierung gibt es in der Tat und wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

## B) Alternative Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

Offenbar muss das Prinzip der virtuellen Arbeit in (7.105) äquivalent zu einem Prinzip der virtuellen Arbeit sein, das aus den Gleichgewichtsbedingungen (7.49), (7.50) und den Elastizitätsgesetzen (7.56) und (7.57)

zustande kommt. Dieses Prinzip wird in diesem Abschnitt hergeleitet und die Äquivalenz zum Prinzip (7.105) im nächsten Abschnitt bewiesen.

**Herleitung des alternativen Prinzips aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Balken** Die Gleichgewichtsbedingungen für den Balken (7.49) und (7.50) werden jeweils mit  $\delta u_1 = \delta U + x_3 \delta(-w')$  und  $\delta u_3 = \delta w$  multipliziert, die Ergebnisse werden addiert und das Integral über das Volumen  $V$  gebildet:

$$\int_V (\partial_1 \Sigma_{11} + \partial_3 \Sigma_{13}) \delta U dV + \int_V (\partial_1 \Sigma_{11} + \partial_3 \Sigma_{13}) x_3 \delta(-w') dV + \int_V (\partial_1 \Sigma_{13} + \partial_3 \Sigma_{33}) \delta w dV = 0 \quad (7.127)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \int_V (\partial_1 \Sigma_{11}) \delta U dV + \int_V \partial_3 (\Sigma_{13} \delta U) dV + \int_V \partial_1 (\Sigma_{11} x_3) \delta(-w') dV + \int_V (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 \delta(-w') dV \\ & + \int_V (\partial_1 \Sigma_{13}) \delta w dV + \int_V (\partial_3 \Sigma_{33}) \delta w dV = 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.128)$$

Die Auswertung der Integrale erfolgt über die Definitionen für Schnittkräfte

$$\hat{N} := \int_A \Sigma_{11} dS \quad , \quad (7.129)$$

$$\hat{H} := \int_A \hat{\mu}_{111} dS \quad , \quad (7.130)$$

$$\hat{V} := - \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS \quad , \quad (7.131)$$

$$\hat{M} := \int_A \Sigma_{11} x_3 dS \quad , \quad (7.132)$$

$$\hat{m} := \int_A \mu_{111} x_3 dS \quad (7.133)$$

und die Definitionen für äußere Belastungen des eindimensionalen Balkenkontinuums

$$\hat{p} := 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \quad , \quad (7.134)$$

$$\hat{q} := 2b [\Sigma_{33} + (\partial_1 \Sigma_{13}) x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} \quad . \quad (7.135)$$

Ein Vergleich mit den Kräften in (7.120) - (7.126) macht deutlich, dass die Kräfte in (7.129) - (7.135) keine deformationsabhängigen Anteile enthalten.

Der erste Term in (7.128) kann umgeformt werden mit Hilfe der Definitionen (7.129) und (7.130), der Elastizitätsgesetze (7.56) und (7.57) sowie mehrfacher Anwendung partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_V (\partial_1 \Sigma_{11}) \delta U dV &= \int_V \partial_1 (\Sigma_{11} \delta U) dV - \int_V \Sigma_{11} \delta U' dV \\ &= \int_{x_1=0}^{x_1=L} \partial_1 \left[ \int_A \Sigma_{11} dS \delta U \right] dx_1 - \int_V E(U' - x_3 w'') \delta U' dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_V c_2 E(U''' - x_3 w''') \delta U' dV \\
& = \left[ \widehat{N} \delta U \right]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_V E(U' - x_3 w'') \delta U' dV + \int_V \partial_1 [c_2 E(U'' - x_3 w''') \delta U'] dV \\
& \quad - \int_V c_2 E(U'' - x_3 w''') \delta U'' dV \\
& = \left[ \widehat{N} \delta U \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \partial_1 \left[ \int_A c_2 E(U'' - x_3 w''') dS \right] \delta U' dx_1 \\
& \quad - \int_V E(U' - x_3 w'') \delta U' dV - \int_V c_2 E(U'' - x_3 w''') \delta U'' dV \\
& = \left[ \widehat{N} \delta U \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \widehat{H} \delta U' \right]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_V E(U' - x_3 w'') \delta U' dV \\
& \quad - \int_V c_2 E(U'' - x_3 w''') \delta U'' dV \quad . \tag{7.136}
\end{aligned}$$

Durch die Anwendung ähnlicher mathematischer Operationen werden auch die restlichen Integrale in (7.128) umgeformt:

$$\begin{aligned}
\int_V \partial_3 (\Sigma_{13} \delta U) dV & = \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta U dx_1 = \int_{x_1=0}^{x_1=L} \widehat{p} \delta U dx_1 \quad , \tag{7.137} \\
\int_V \partial_1 (\Sigma_{11} x_3) \delta(-w) dV & = \left[ \widehat{M} \delta(-w') \right]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_V E(U' - x_3 w'') \delta(-w'') dV \\
& \quad + \int_V c_2 E(U''' - x_3 w''') \delta(-w'') dV \quad , \tag{7.138}
\end{aligned}$$

$$\int_V (\partial_3 \Sigma_{33}) \delta w dV + \int_V (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 \delta(-w') dV + \int_V (\partial_1 \Sigma_{13}) \delta w dV = \left[ \widehat{V} \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \widehat{q} \delta w dx_1 \quad . \tag{7.139}$$

Substitution von (7.136) - (7.139) in (7.128) und Berücksichtigung der Gleichung  $\varepsilon_{11} = U' - x_3 w''$  ergibt

$$\begin{aligned}
& \left[ \widehat{N} \delta U \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \widehat{H} \delta U' \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \widehat{V} \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \widehat{M} \delta(-w') \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \widehat{p} \delta U dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \widehat{q} \delta w dx_1 \\
& = \int_V E(U' - x_3 w'') (\delta U' - x_3 \delta w'') dV + \int_V c_2 E(U'' - x_3 w''') \delta U'' dV \\
& \quad - \int_V c_2 E(U''' - x_3 w''') x_3 \delta(-w'') dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V E \varepsilon'_{11} \delta \varepsilon'_{11} dV + \int_V c_2 E \varepsilon'_{11} \delta U'' dV - \int_V c_2 E \partial_1 [(U'' - x_3 w''') x_3 \delta(-w'')] dV \\
&\quad + \int_V c_2 E (U'' - x_3 w''') x_3 \delta(-w''') dV \\
&= \int_V E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon'_{11} dV + \int_V c_2 E \varepsilon'_{11} \delta \varepsilon'_{11} dV - \int_A [c_2 E (U'' - x_3 w''') x_3 \delta(-w'')]_{x_1=0}^{x_1=L} dS \\
&= \delta \int_V \frac{1}{2} (E \varepsilon_{11}^2 + c_2 E (\varepsilon'_{11})^2) dV + [c_2 E I w''']_{x_1=0}^{x_1=L} \delta(-w'') \quad . \tag{7.140}
\end{aligned}$$

Der letzte Term auf der rechten Seite kann mit Hilfe der Schnittkraft  $\hat{m}$  ersetzt werden. Hierzu wird das Elastizitätsgesetz für  $\hat{\mu}_{111}$  aus Gleichung (7.57) in die Definition (7.133) eingearbeitet:

$$\hat{m} = \int_A \hat{\mu}_{111} x_3 dS = \int_A c_2 E (U'' - x_3 w''') x_3 dS = -c_2 E I w'''' \quad . \tag{7.141}$$

Im Hinblick auf dieses Ergebnis nimmt Gleichung (7.140) die Form

$$\delta \mathcal{W}^{(e)} = \delta \int_V \frac{1}{2} E [\varepsilon_{11}^2 + c_2 (\varepsilon'_{11})^2] dV = \delta \Pi_{PB}^{(i)} \tag{7.142}$$

an, wobei Gleichung (7.33) und die Definition

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{W}^{(e)} := & \left[ \hat{N} \delta U \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \hat{H} \delta U' \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \hat{V} \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \hat{M} \delta(-w') \right]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
& + \left[ \hat{m} \delta(-w'') \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \hat{p} \delta U dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \hat{q} \delta w dx_1 \tag{7.143}
\end{aligned}$$

benutzt wurden.

Werden die mathematischen Schritte, die von (7.127) zu (7.142) geführt haben, umgekehrt, ist zu sehen, dass (7.142) die Gleichung (7.127) impliziert. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung werden dann aus (7.127) die Gleichgewichtsbedingungen erhalten. Somit ist (7.142) äquivalent zu den Gleichgewichtsbedingungen.

Gemäß Gleichung (7.142) ist  $\delta \mathcal{W}^{(e)}$  die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte, die in Verbindung zur virtuellen Änderung von  $\Pi_{PB}^{(i)}$  steht. Folglich sind  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{M}$ ,  $\hat{m}$  und  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$  jeweils die zugehörigen Schnittkräfte und Resultierenden der äußeren Belastung. Gleichung (7.142) ist die gesuchte alternative Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit für das KG-Modell. Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird bewiesen, dass das Prinzip (7.142) äquivalent zum Prinzip (7.102) ist. Vorher werden aber die Elastizitätsgesetze und die Gleichgewichts- und Randbedingungen für die Schnittkräfte aufgestellt.

**Gleichgewichts- und Randbedingungen für Schnittkräfte** Nach längeren Umrechnungen kann aus (7.35) die Variation von  $\Pi_{PB}^{(e)}$  in Abhängigkeit von den Verschiebungskomponenten berechnet werden

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{PB}^{(e)} = & [f_1\delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [f_2\delta U']_{x_1=0}^{x_1=L} + [(f_3' + c_2EAw''')\delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [(f_3 + c_2EAw'')\delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ & + [f_4\delta(-w'')]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_{x_1=0}^{x_1=L} f_1'\delta U dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} (f_3'' + c_2EAw''''')\delta w dx_1 \quad , \end{aligned} \quad (7.144)$$

wobei die Funktionen  $f_1, \dots, f_4$  in (7.59) - (7.62) definiert wurden. Aus (7.142) - (7.144) folgen die bekannten Elastizitätsgesetze für die Schnittkräfte

$$\widehat{N} = \int_A \Sigma_{11} dS = f_1 = EA(U' - c_2U''') \quad , \quad (7.145)$$

$$\widehat{H} = \int_A \mu_{111} dS = f_2 = c_2EAU'' \quad , \quad (7.146)$$

$$\widehat{M} = \int_A \Sigma_{11} x_3 dS = f_3 + c_2EAw'' = -EI(w'' - c_2w''''') \quad , \quad (7.147)$$

$$\widehat{m} = \int_A \mu_{111} x_3 dS = f_4 = -c_2EIw'''' \quad , \quad (7.148)$$

die Gleichgewichtsbedingung zur Bestimmung von  $\widehat{V}$

$$\widehat{V} = f_3' + c_2EAw'''' \Leftrightarrow \widehat{V} = \widehat{M}' \quad , \quad (7.149)$$

die Gleichgewichtsbedingungen für Schnittkräfte

$$f_1' + \widehat{p} = 0 \Leftrightarrow \widehat{N}' + \widehat{p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad EA(U'' - c_2U''''') + \widehat{p} = 0 \quad , \quad (7.150)$$

$$f_3'' + c_2EAw'''' + \widehat{q} = 0 \Leftrightarrow \widehat{M}'' + \widehat{q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -EI(w'''' - c_2w''''''') + \widehat{q} = 0 \quad (7.151)$$

und die Randbedingungen für Schnittgrößen:

$$\text{Entweder } \widehat{N} \text{ oder } U \quad , \quad \text{entweder } \widehat{H} \text{ oder } U' \quad , \quad (7.152)$$

$$\text{entweder } \widehat{V} \text{ oder } w \quad , \quad \text{entweder } \widehat{M} \text{ oder } w' \quad \text{und} \quad (7.153)$$

$$\text{entweder } \widehat{m} \text{ oder } w'' \quad (7.154)$$

müssen an  $x_1 = 0$  und  $x_1 = L$  vorgeschrieben werden.

### C) Äquivalenz der zwei Prinzipien

Es wird gezeigt, dass die Differentialgleichungen für  $U$  und  $w$  in (7.150)<sub>3</sub> und (7.151)<sub>3</sub> jeweils die Differentialgleichungen (7.112) und (7.113) implizieren. Analoges wird auch für die zugehörigen Randbedingungen und Prinzipien der virtuellen Arbeit geprüft. Der Beweis für die umgekehrte Richtung ist ähnlich und wird hier nicht näher erläutert.

Sei  $p$  eine bekannte äußere Belastung und  $\hat{p} = p$ , in Übereinstimmung mit Gleichungen (7.134) und (7.99). Es wird angenommen, dass  $\hat{q}$  aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist. Der eine Anteil,  $q = q(x_1)$ , ist eine vorgegebene Funktion, während der zweite Anteil die deformationsabhängige Kraft  $-c_2EAw''''$  ist, sodass  $\hat{q} = q - c_2EAw''''$  ist. Unter diesen Umständen implizieren die Gleichungen (7.150)<sub>3</sub> und (7.151)<sub>3</sub> jeweils die Gleichungen (7.112) und (7.113). Hinsichtlich der Randbedingungen ist es ausreichend, nur die Randbedingungen vom Neumann-Typ zu diskutieren, da die Randbedingungen vom Dirichlet-Typ für beide Vorgehensweisen gleich sind. Es ist leicht zu verifizieren, dass Randbedingungen für  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$  und  $\hat{m}$  mit denjenigen für  $N$ ,  $H$ ,  $m$  übereinstimmen. Für  $\hat{V}$  und  $\hat{M}$  an den Stellen  $x_1 = 0, L$  wird angenommen, dass diese aus vorgeschriebenen Anteilen jeweils  $V$  und  $M$  und deformationsabhängigen Anteilen  $c_2EAw''''$  und  $c_2EAw''$  zusammengesetzt sind, d.h.  $\hat{V} = V + c_2EAw''''$  und  $\hat{M} = M + c_2EAw''$ . Unter diesen Umständen implizieren die Randbedingungen (7.152) - (7.154) die Randbedingungen (7.108) - (7.110).

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass das Prinzip der virtuellen Arbeit (7.142),  $\delta\mathcal{W}^{(e)} = \delta\Pi_{PB}^{(i)}$ , das Prinzip der virtuellen Arbeit (7.105),  $\delta W^{(e)} = \delta\Pi_{LL}^{(i)}$ , impliziert. Als Motivation für die Beweisidee sei angemerkt, dass das Prinzip  $\delta\mathcal{W}^{(e)} = \delta\Pi_{PB}^{(i)}$  aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Biegung (7.52) und (7.53) hergeleitet wurde. Die Spannungskomponente  $\hat{\mu}_{311}$  ist in  $\delta W^{(e)}$  enthalten, weil  $V$  in (7.122) vom Term  $-c_2EAw''''$  abhängt. Dieser Term lässt sich mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes (7.57) als Integral  $\int_A \partial_1 \hat{\mu}_{311} dS$  ausdrücken. Die Spannung  $\hat{\mu}_{311}$  kommt jedoch in den Komponenten  $\Sigma_{ij}$  (siehe Gleichung (7.45)) nicht vor, weil  $\partial_3 \hat{\mu}_{311} = 0$  ist. Deswegen trägt die Spannungskomponente  $\hat{\mu}_{311}$  zu den Gleichgewichtsbedingungen nicht bei und demzufolge trägt sie zum Prinzip  $\delta\mathcal{W}^{(e)} = \delta\Pi_{PB}^{(i)}$  auch nicht bei. Sie leistet die virtuelle Arbeit (vergleiche Gleichung (7.57))

$$\hat{\mu}_{311} \delta(\partial_3 \varepsilon_{11}) = \delta \left[ \frac{c_2}{2} E (\partial_3 \varepsilon_{11})^2 \right] \quad . \quad (7.155)$$

Nun kann das Volumenintegral dieser Gleichung gebildet werden, für  $\hat{\mu}_{311}$  das Elastizitätsgesetz  $\hat{\mu}_{311} = -c_2Ew''$  und für  $\delta(\partial_3 \varepsilon_{11})$  die Gleichung  $\delta(\partial_3 \varepsilon_{11}) = -\delta w''$  eingesetzt und zweimal partielle Integration angewendet werden:

$$\int_V \hat{\mu}_{311} \delta(\partial_3 \varepsilon_{11}) dV = \delta \int_V \frac{c_2}{2} E (\partial_3 \varepsilon_{11})^2 dV \Leftrightarrow \quad (7.156)$$

$$- [c_2EAw'''' \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} - [c_2EAw'' \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} c_2EAw'''' \delta w dx_1 = \delta \int_V \frac{c_2}{2} E (\partial_3 \varepsilon_{11})^2 dV \quad . \quad (7.157)$$

Durch Addition von  $\delta\mathcal{W}^{(e)} = \delta\Pi_{PB}^{(i)}$  mit (7.157) wird

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}^{(e)} - [c_2EAw'''' \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} - [c_2EAw'' \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} c_2EAw'''' \delta w dx_1 &= \delta W^{(e)} \\ &= \delta\Pi_{PB}^{(i)} + \delta \int_V \frac{c_2}{2} E (\partial_3 \varepsilon_{11})^2 dV = \delta\Pi_{LL}^{(i)} \end{aligned} \quad (7.158)$$

$$\Leftrightarrow \delta W^{(e)} = \delta\Pi_{LL}^{(i)} \quad , \quad (7.159)$$

was zu beweisen war.

### 7.3.3 Einseitig eingespannter Balken unter Querlast

In diesem Abschnitt werden die zwei Vorgehensweisen infolge der unterschiedlichen Prinzipien der virtuellen Arbeit anhand des einseitig eingespannten Balkens in Abbildung 7.2 miteinander verglichen. Für dieses Beispiel ist  $U \equiv 0$ .

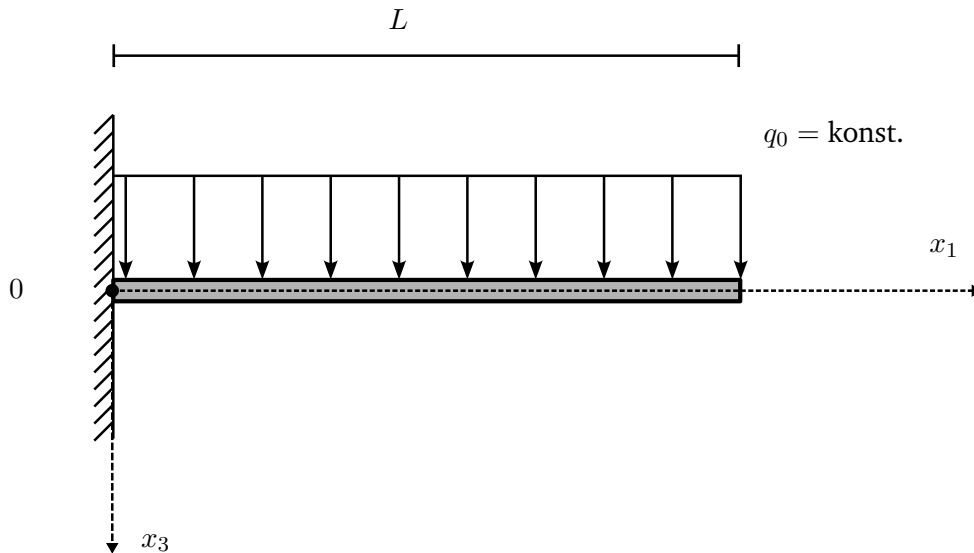


Abbildung 7.2: Einseitig eingespannter Balken unter konstanter Querlast

#### Die Balkengleichungen

Es werden die zwei folgenden Fälle für den einseitig eingespannten Balken diskutiert.

Im ersten Fall wird das Problem mit den Gleichungen infolge des Prinzips der virtuellen Arbeit  $\delta W^{(e)} = \delta \Pi_{LL}^{(i)}$  beschrieben. Diese sind die Differentialgleichung der Biegelinie (7.113), die Randbedingungen (7.109) und (7.110), die Formeln für die Schnittkräfte (7.107)<sub>3,4,5</sub> und die Definitionen (7.61) und (7.62). Weil die Querschnittsfläche  $A$  in diesen Gleichungen vorkommt, wird dieser Fall als KG-Modell-A bezeichnet. Danach gilt für den Fall KG-Modell-A:

$$(EI + c_2EA)w'''' - c_2EIw'''''' - q_0 = 0 \quad . \quad (7.160)$$

Die Randbedingungen werden folgendermaßen angenommen:

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad (7.161)$$

$$V(L) = [-EI(w''' - c_2w''''') - c_2EAw''']_{x_1=L} = 0 \quad , \quad (7.162)$$

$$M(L) = [-EI(w'' - c_2w''''') - c_2EAw'']_{x_1=L} = 0 \quad , \quad (7.163)$$

$$m(0) = [-c_2EIw''']_{x_1=0} = 0 \quad , \quad m(L) = [-c_2EIw''']_{x_1=L} = 0 \quad . \quad (7.164)$$

Im zweiten Fall wird das Problem mit den Gleichungen infolge des Prinzips  $\delta \mathcal{W}^{(e)} = \delta \Pi_{PB}^{(i)}$  beschrieben. Diese sind die Differentialgleichung der Biegelinie (7.151), die Randbedingungen (7.152) - (7.154) und die Formeln für die Schnittkräfte (7.147) - (7.149). In diesen Gleichungen kommt die Querschnittsfläche  $A$  nicht vor.



Dementsprechend wird dieser Fall als KG-Modell-NA bezeichnet. Danach gilt für den Fall KG-Modell-NA:

$$EIw'''' - c_2EIw'''''' - q_0 = 0 \quad . \quad (7.165)$$

In Analogie zu den Gleichungen (7.161) - (7.164) werden die Randbedingungen folgendermaßen angenommen:

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad (7.166)$$

$$\widehat{V}(L) = [-EI(w'''' - c_2w''''')]_{x_1=L} = 0 \quad , \quad (7.167)$$

$$\widehat{M}(L) = [-EI(w'' - c_2w''')]_{x_1=L} = 0 \quad , \quad (7.168)$$

$$\widehat{m}(0) = [-c_2EIw''']_{x_1=0} = 0 \quad , \quad \widehat{m}(L) = [-c_2EIw''']_{x_1=L} = 0 \quad . \quad (7.169)$$

Es ist hervorzuheben, dass sowohl das KG-Modell-A als auch das KG-Modell-NA den Balken im Rahmen des KG-Modells beschreiben, jedoch unterschiedliche Randbedingungen und Lastfälle widerspiegeln. Dementsprechend ist der Einfluss der Parameters  $c_2$  für beide Modelle der selbe.

Es ist nun interessant, die Vorhersagen für den Fall KG-Modell-A mit den entsprechenden Vorhersagen für den Fall KG-Modell-NA sowie für den Fall der klassischen Elastizität zu vergleichen. Es ist offensichtlich, dass die Vorhersagen unterschiedlich sein werden, da die Randbedingungen und die Lastbedingungen unterschiedlich sind. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Unterschiede nur quantitativer Natur sind oder ob es bedeutende qualitative Unterschiede gibt. Der Vergleich lässt sich am besten mit dimensionslosen Größen durchführen. Die folgenden Definitionen werden eingeführt:

$$\bar{x}_1 := \frac{x_1}{L} \quad , \quad \bar{x}_3 := \frac{x_3}{L} \quad , \quad \bar{w} := \frac{w}{L} \quad , \quad \bar{b} := \frac{b}{L} \quad , \quad \bar{c} := \frac{c}{L} \quad , \quad \bar{c}_2 := \frac{c_2}{L^2} \quad , \quad (7.170)$$

$$\bar{q}_0 := \frac{q_0}{EL} \quad , \quad \bar{q}_0^* := \frac{3\bar{q}_0}{4\bar{b}\bar{c}^3} \quad , \quad \bar{\Sigma}_{ij} := \frac{\Sigma_{ij}}{E} \quad . \quad (7.171)$$

Bis zum Ende dieses Abschnittes wird die Notation so geändert, dass mit  $()'$  Ableitungen von  $()$  nach  $\bar{x}_1$  bezeichnet werden,

$$()': = \frac{d()}{d\bar{x}_1} \quad . \quad (7.172)$$

Dimensionslose Lösungen  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  für den Fall KG-Modell-A wurden in [49] und [50] bereitgestellt. Hier werden dimensionslose Lösungen nur für den Fall KG-Modell-NA hergeleitet.

Nach einfachen Umrechnungen kann für die Differentialgleichung (7.165) die dimensionslose Form

$$-\bar{c}_2\bar{w}'''''' + \bar{w}'''' - \bar{q}_0^* = 0 \quad (7.173)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\bar{w}(\bar{x}_1) = \bar{K}_1 + \bar{K}_2\bar{x}_1 + \bar{K}_3\bar{x}_1^2 + \bar{K}_4\bar{x}_1^3 + \frac{\bar{q}_0^*}{24}\bar{x}_1^4 + \bar{K}_5e^{\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} + \bar{K}_6e^{-\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} \quad (7.174)$$

gefunden werden. Da sich die zwei Differentialgleichungen (7.160) und (7.165) sich nur um die Konstante vor  $w''''$  unterscheiden, wird Ihre allgemeine Lösung vom gleichen Typ sein. Die Integrationskonstanten

$\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_6$  werden aus den Randbedingungen (7.166) - (7.169) bestimmt. Die dimensionslose Form dieser Randbedingungen lautet

$$\bar{w}(0) = 0 \quad , \quad \bar{w}'(0) = 0 \quad , \quad (7.175)$$

$$[\bar{w}''' - c_2 \bar{w}''''']_{\bar{x}=1} = 0 \quad , \quad (7.176)$$

$$[\bar{w}'' - c_2 \bar{w}''''']_{\bar{x}=1} = 0 \quad , \quad (7.177)$$

$$[\bar{w}''']_{\bar{x}=0} = [\bar{w}''']_{\bar{x}=1} = 0 \quad . \quad (7.178)$$

Daraus lassen sich die Integrationskonstanten berechnen zu

$$\bar{K}_1 = \frac{\left(1 + e^{\frac{2}{\sqrt{c_2}}}\right) \bar{c}_2^{-\frac{3}{2}} \bar{q}_0^*}{e^{\frac{2}{\sqrt{c_2}}} - 1} \quad , \quad \bar{K}_4 = -\frac{\bar{q}_0^*}{6} \quad , \quad (7.179)$$

$$\bar{K}_2 = -\bar{c}_2 \bar{q}_0^* \quad , \quad \bar{K}_5 = -\frac{\bar{c}_2^{\frac{3}{2}} \bar{q}_0^*}{e^{\frac{2}{\sqrt{c_2}}} - 1} \quad , \quad (7.180)$$

$$\bar{K}_3 = \frac{\bar{q}_0^*}{4} (1 + 2\bar{c}_2) \quad , \quad \bar{K}_6 = \frac{\bar{c}_2^{\frac{3}{2}} \bar{q}_0^* e^{\frac{2}{\sqrt{c_2}}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{c_2}}} - 1} \quad . \quad (7.181)$$

Die entsprechende Lösung für den Fall KG-Modell-A hat eine ähnliche Form und kann der Arbeit Sideris [49] entnommen werden.

### Biegelinien und Spannungsverteilungen

Die Abbildung 7.3 stellt die Verläufe von  $\bar{w}$ ,  $\bar{w}'$ ,  $\bar{w}''$  und  $\bar{w}'''$  dar, die mit dem KG-Modell-A (linke Spalte) und dem KG-Modell-NA (rechte Spalte) berechnet wurden. Die Verläufe infolge des KG-Modell-A wurden für die Werte  $\sqrt{\bar{c}_2} = 0,008, \dots, 0,017$  berechnet. Für die selben  $\bar{c}_2$  Werte fallen die entsprechenden Verläufe infolge des KG-Modells-NA praktisch fast überall mit der klassischen Lösung zusammen. Das bedeutet, dass große quantitative Unterschiede zwischen den Verläufen infolge der beiden Modellen vorliegen. Um eventuelle qualitative Unterschiede sichtbar zu machen, wurden die Verläufe infolge des KG-Modells für größere  $c_2$  Werte berechnet, wie in Abbildung 7.3. In dieser Abbildung ist erkennbar, dass die Verläufe von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'''$  für beide Fälle qualitativ ähnlich sind. Bedeutsame qualitative Unterschiede treten bei den Verläufen von  $\bar{w}'$  und  $\bar{w}''$  auf.

Dies wiederum hat merklichen Einfluss auf die Verläufe der Spannungskomponenten, wie in Abbildung 7.4 zu sehen ist. Die linke Spalte in dieser Abbildung ist mit dem KG-Modell-A berechnet und reproduziert die Ergebnisse von [50]. Die rechte Spalte ist mit dem KG-Modell-NA berechnet. Dazu werden die Gleichungen (7.56), (7.174) und (7.179) - (7.181) betrachtet:

$$\bar{w}'' = 2\bar{K}_3 + 6\bar{K}_4 \bar{x}_1 + \frac{\bar{q}_0^*}{2} \bar{x}_1^2 + \frac{\bar{K}_5}{\bar{c}_2} e^{\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{c_2}}} + \frac{\bar{K}_6}{\bar{c}_2} e^{-\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{c_2}}} \quad , \quad (7.182)$$

$$\bar{w}'''' = \bar{q}_0^* + \frac{\bar{K}_5}{\bar{c}_2^2} e^{\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{c_2}}} + \frac{\bar{K}_6}{\bar{c}_2^2} e^{-\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{c_2}}} \quad (7.183)$$

$$\Rightarrow \bar{\Sigma}_{11} = -(\bar{w}'' - \bar{c}_2 \bar{w}''''') \bar{x}_3 = -\bar{q}_0^* \left[ \frac{1}{2} - \bar{x}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 \right] \bar{x}_3 \quad . \quad (7.184)$$

Für die klassische Lösung gilt (vergleiche Gross et al. [26] (Seite 133))

$$\bar{w}_{kl} = \frac{\bar{q}_0^*}{24} (6\bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^4) \Rightarrow \quad (7.185)$$

$$\bar{w}''_{kl} = \bar{q}_0^* \left( \frac{1}{2} - \bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_1^2 \right) \Rightarrow \quad (7.186)$$

$$\Rightarrow (\bar{\Sigma}_{11})_{kl} = \varepsilon = -\bar{w}''\bar{x}_3 = -\bar{q}_0^* \left( \frac{1}{2} - \bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_1^2 \right) \bar{x}_3 = \bar{\Sigma}_{11} \quad . \quad (7.187)$$

In Worten: Die Verläufe  $\bar{\Sigma}_{11}(\bar{x}_1, \bar{x}_3)$  für das KG-Modell-NA und für die klassische Elastizität fallen zusammen (siehe Abbildung 7.4a). Insbesondere sind die Kurven  $\bar{\Sigma}_{11}(\bar{x}_1, \bar{x}_3)$  für den Fall KG-Modell-NA unabhängig von  $\bar{c}_2$ , im Gegensatz zu dem Fall KG-Modell-A. Verläufe  $\bar{\Sigma}_{13}(\bar{x}_1, \bar{x}_3)$  können durch Integration der Gleichgewichtsbedingung (7.49), unter Berücksichtigung des Elastizitätsgesetzes (7.55), berechnet werden:

$$\int_{x_3}^c \partial_3 \Sigma_{13} dx_3 = E \left( \frac{d^3 w}{dx_1^3} - c_2 \frac{d^5 w}{dx_1^5} \right) \int_{x_3}^c x_3 dx_3 \Rightarrow \quad (7.188)$$

$$\Sigma_{13}(x_1, x_3) = \Sigma_{13}(x_1, c) - \frac{1}{2} E \left( \frac{d^3 w}{dx_1^3} - c_2 \frac{d^5 w}{dx_1^5} \right) (c^2 - x_3^2) \quad . \quad (7.189)$$

Für die endgültige Berechnung von  $\Sigma_{13}(x_1, x_3)$  wird noch eine Randbedingung an der Stelle  $x_3 = c$  benötigt. Aus den Gleichungen (7.82)<sub>1</sub> und (7.57) ergibt sich, dass

$$\left[ \hat{P}_1 \right]_{x_3=c} = [\Sigma_{13} - \partial_1 \mu_{311}]_{x_3=c} = [\Sigma_{13}]_{x_3=c} + c_2 E \frac{d^3 w}{dx_1^3} \quad (7.190)$$

und mit  $\left[ \hat{P}_1 \right]_{x_3=c} = 0$  folgt daraus, dass

$$\Sigma_{13}(x_1, c) = -c_2 E \frac{d^3 w}{dx_1^3} \quad . \quad (7.191)$$

Nach Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (7.189) ergibt sich

$$\Sigma_{13} = -c_2 E \frac{d^3 w}{dx_1^3} - \frac{1}{2} E \left( \frac{d^3 w}{dx_1^3} - c_2 \frac{d^5 w}{dx_1^5} \right) (c^2 - x_3^2) \quad (7.192)$$

bzw.

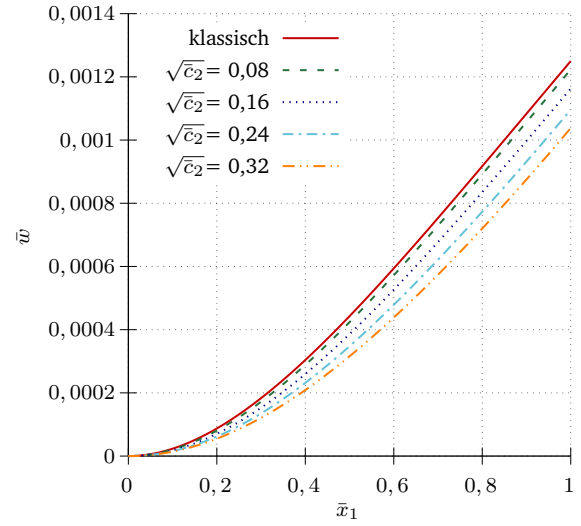
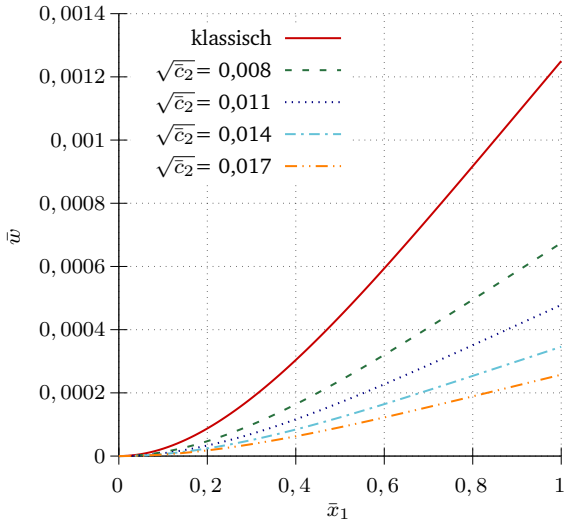
$$\bar{\Sigma}_{13}(\bar{x}_1, \bar{x}_3) = -\bar{c}_2 \bar{w}''' - \frac{1}{2} (\bar{w}''' - \bar{c}_2 \bar{w}''''') (\bar{c}^2 - \bar{x}_3^2) \quad . \quad (7.193)$$

Die mit  $\bar{c}_2$  parametrisierten Verläufe  $\bar{\Sigma}_{13}(\bar{x}_1, -\bar{c})$  sind in Abbildung 7.4 b) rechts dargestellt. Verglichen mit den entsprechenden Verläufen nach KG-Modell-A (Abbildung 7.4 b) links) ist zu erkennen, dass die Formen der beiden Verläufe genau umgekehrt sind. Insbesondere liegen alle Verläufe des KG-Modells-A unterhalb der klassischen Lösung, während alle Verläufe des KG-Modells-NA oberhalb der klassischen Lösung liegen. Es bestehen also erhebliche qualitative Unterschiede in den Modellvorhersagen bezüglich der Spannungskomponenten  $\bar{\Sigma}_{13}$ .

Schließlich wird der Verlauf der Spannungskomponente  $\bar{\Sigma}_{13}$  in der Gleichgewichtsbedingung (7.50) benutzt, um daraus den Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{33}$  zu ermitteln:

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}_{33}}{\partial \bar{x}_3} = -\frac{\partial \bar{\Sigma}_{13}}{\partial \bar{x}_1} = \bar{c}_2 \bar{w}'''' + \frac{1}{2} (\bar{w}'''' - \bar{c}_2 \bar{w}''''') (\bar{c}^2 - \bar{x}_3^2) \quad . \quad (7.194)$$

(a)



(b)

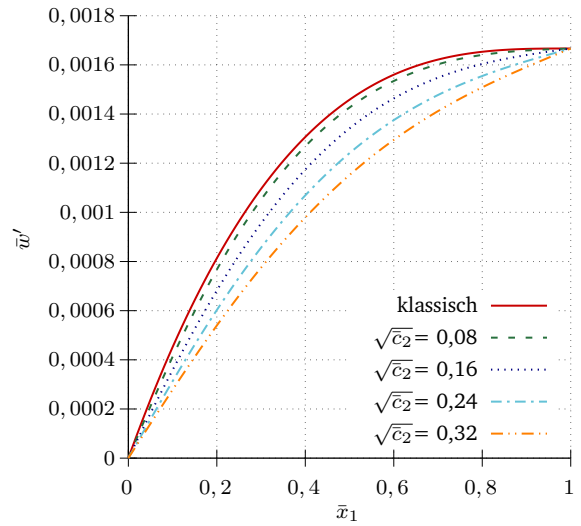
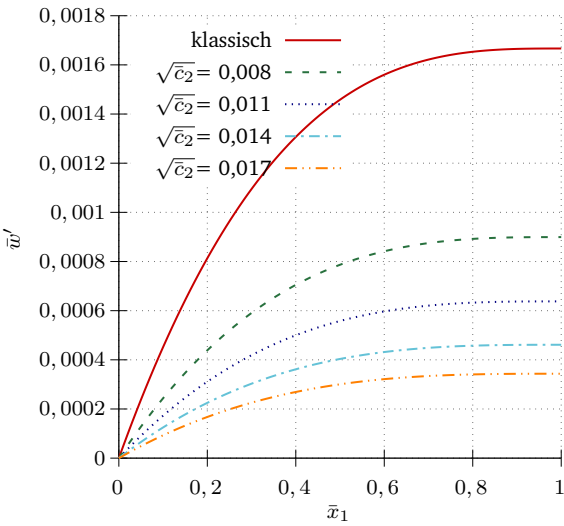
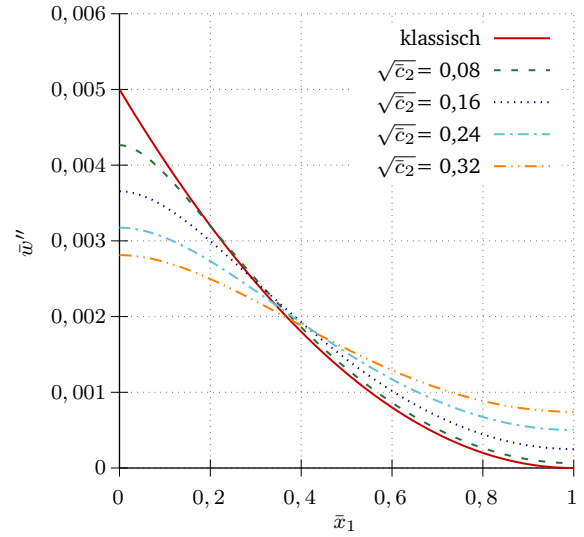
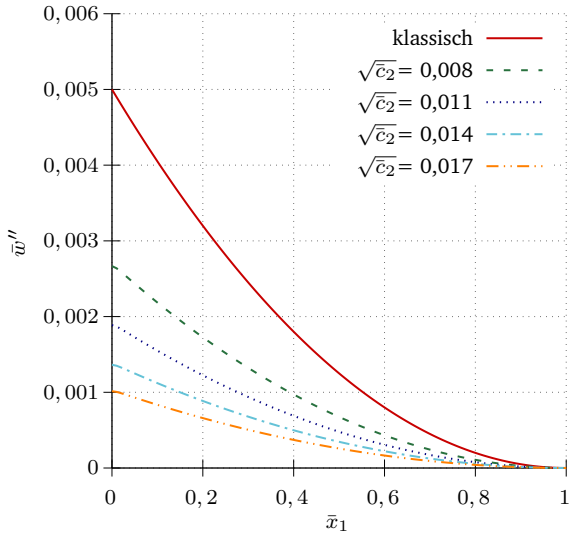


Abbildung 7.3: Verläufe von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  gerechnet jeweils mit dem KG-Modell-A (linke Spalte) und dem KG-Modell-NA (rechte Spalte) und  $\bar{q}_0 = 4,5 \cdot 10^{-10}$ ,  $\bar{b} = 0,01$ ,  $\bar{c} = 0,015$ .

(c)



(d)

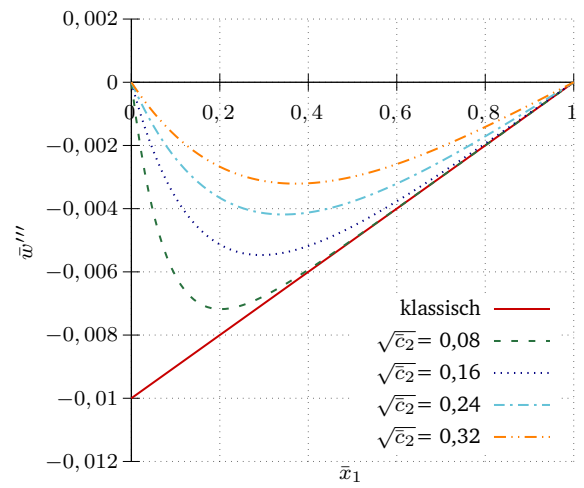
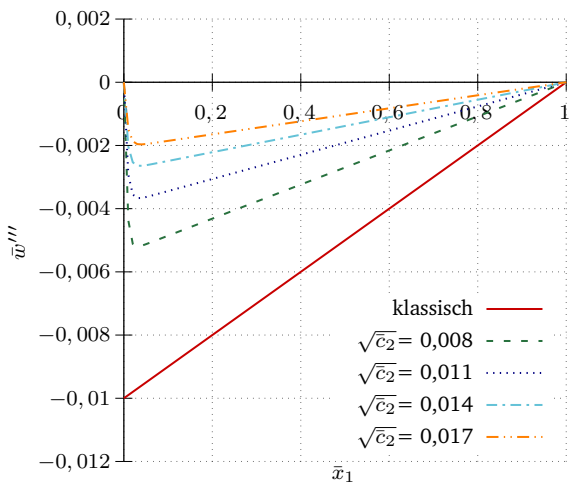
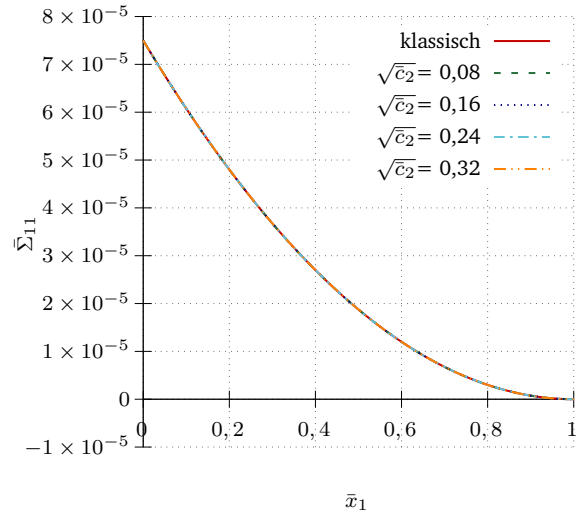
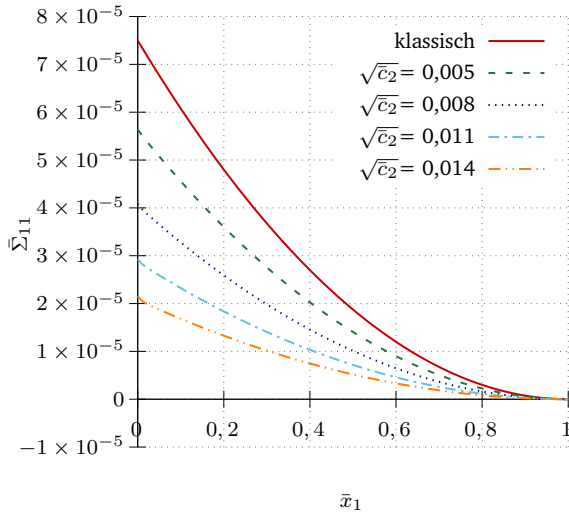


Abbildung 7.3: Verläufe von  $\bar{w}''$  und  $\bar{w}'''$  gerechnet jeweils mit dem KG-Modell-A (linke Spalte) und dem KG-Modell-NA (rechte Spalte) und  $\bar{q}_0 = 4,5 \cdot 10^{-10}$ ,  $\bar{b} = 0,01$ ,  $\bar{c} = 0,015$ .

(a)



(b)

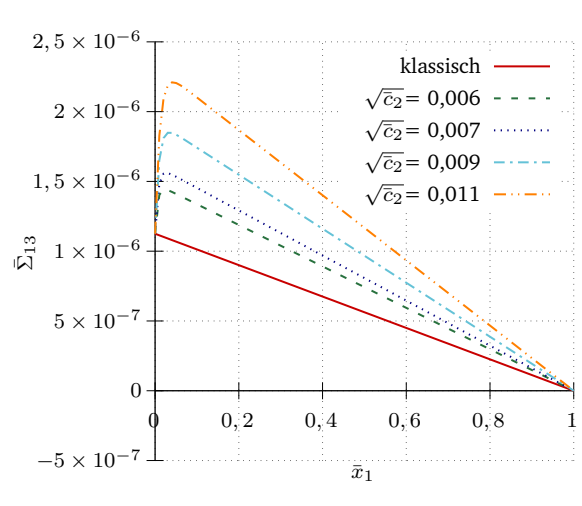
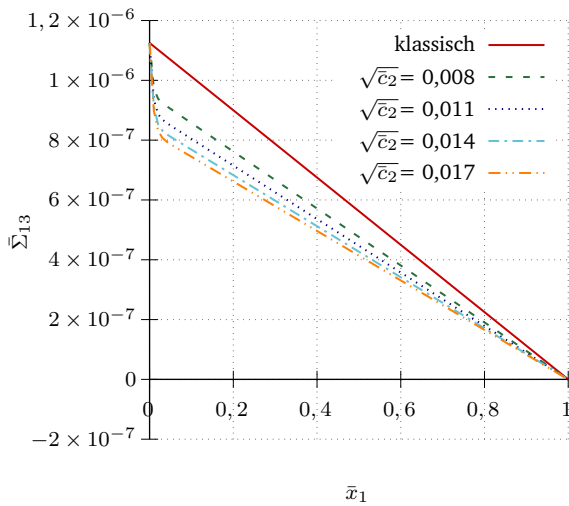


Abbildung 7.4: Verläufe von Spannungskomponenten, gerechnet jeweils mit dem KG-Modell-A (linke Spalte) und dem KG-Modell-NA (rechte Spalte) und  $\bar{q}_0 = 4,5 \cdot 10^{-10}$ ,  $\bar{b} = 0,01$ ,  $\bar{c} = 0,015$ . a) Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{11}(\bar{x}_1)$  für  $\bar{x}_3 = -\bar{c}$ . b) Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{13}(\bar{x}_1)$  für  $\bar{x}_3 = 0$ . c) Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{33}(\bar{x}_3)$  für  $\bar{x}_1 = 0$ .

(c)

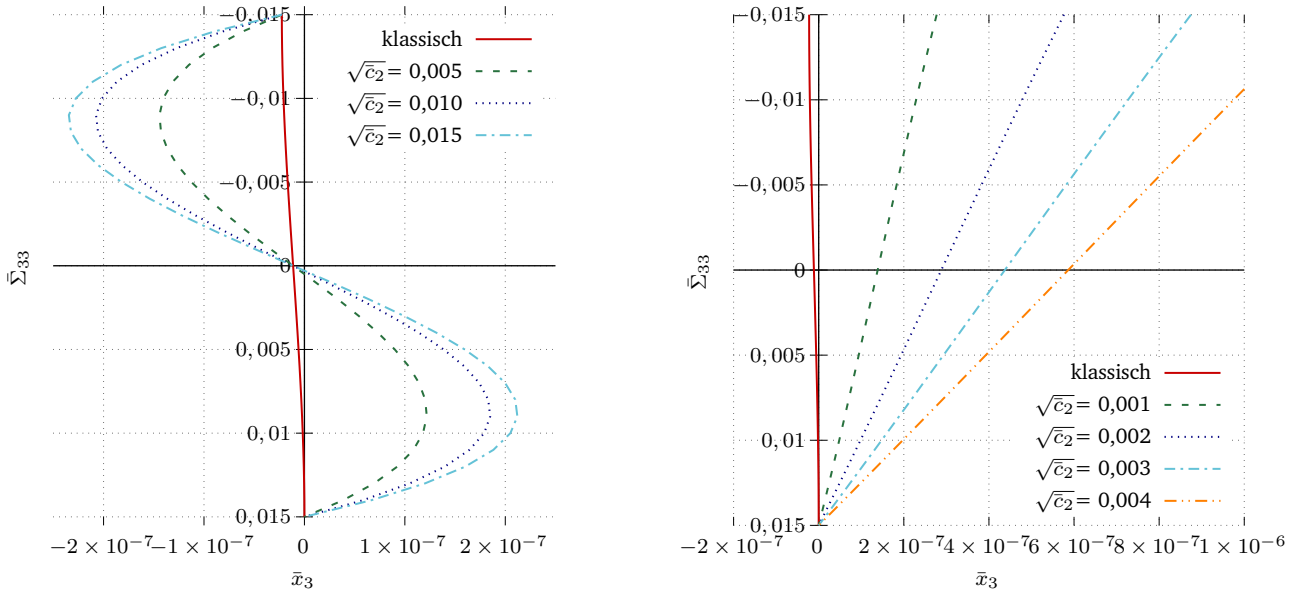


Abbildung 7.4: Verläufe von Spannungskomponenten, gerechnet jeweils mit dem KG-Modell-A (linke Spalte) und dem KG-Modell-NA (rechte Spalte) und  $\bar{q}_0 = 4,5 \cdot 10^{-10}$ ,  $\bar{b} = 0,01$ ,  $\bar{c} = 0,015$ . a) Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{11}(\bar{x}_1)$  für  $\bar{x}_3 = -\bar{c}$ . b) Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{13}(\bar{x}_1)$  für  $\bar{x}_3 = 0$ . c) Verlauf von  $\bar{\Sigma}_{33}(\bar{x}_3)$  für  $\bar{x}_1 = 0$ .

Integration über  $\bar{x}_3$  zwischen  $\bar{x}_3$  und  $\bar{c}$  liefert

$$\bar{\Sigma}_{33}(\bar{x}_1, \bar{x}_3) = \bar{\Sigma}_{33}(\bar{x}_1, \bar{c}) - \bar{c}_2 \bar{w}'''' (\bar{c} - \bar{x}_3) - \frac{1}{2} (\bar{w}'''' - \bar{c}_2 \bar{w}''''') \left( \frac{2}{3} \bar{c}^3 + \frac{1}{3} \bar{x}_3^3 - \bar{c}^2 \bar{x}_3 \right) . \quad (7.195)$$

Für die Berechnung von  $\bar{\Sigma}_{33}(\bar{x}_1, \bar{c})$  sind weitere Randbedingungen erforderlich. Es wird postuliert, dass

$$\left[ \hat{P}_3 \right]_{x_3=c} = \left[ \hat{R}_1 \right]_{x_3=c} = 0 \quad (7.196)$$

ist. Aus Gleichung (7.65) ergibt sich  $\left[ \hat{R}_1 \right]_{x_3=c} = \hat{\mu}_{331} = 0$  und damit

$$\left[ \partial_1 \hat{\mu}_{331} \right]_{x_3=c} = 0 . \quad (7.197)$$

Auf der anderen Seite ist aus (7.64) und (7.196) zu sehen, dass

$$\left[ \hat{P}_3 \right]_{x_3=c} = \left[ \Sigma_{33} - \partial_1 \hat{\mu}_{331} \right]_{x_3=c} = 0 \quad (7.198)$$

und im Endeffekt, dass

$$\left[ \bar{\Sigma}_{33} \right]_{\bar{x}_3=\bar{c}} = 0 . \quad (7.199)$$

Diese Bedingung ermöglicht die vollständige Berechnung von  $\bar{\Sigma}_{33}$  in Gleichung (7.195),

$$\bar{\Sigma}_{33}(\bar{x}_1, \bar{x}_3) = \frac{1}{2} (\bar{w}'''' - \bar{c}_2 \bar{w}''''') \left( \bar{c}^2 \bar{x}_3 - \frac{1}{3} \bar{x}_3^3 - \frac{2}{3} \bar{c}^3 \right) + \bar{c}_2 \bar{w}'''' (\bar{x}_3 - \bar{c}) . \quad (7.200)$$

Die graphische Darstellung von  $\bar{\Sigma}_{33}(0, \bar{x}_3)$  für das KG-Modell-NA und unterschiedliche Werte von  $\bar{c}_2$  ist in Abbildung 7.4 c) rechts aufgetragen. Der Vergleich mit der entsprechenden Darstellung für den Fall KG-Modell-A in Abbildung 7.4 c) links macht deutlich, dass erhebliche qualitative Unterschiede auch für diese Spannungskomponenten vorhanden sind.

## 7.4 Konsistente Euler-Bernoulli-Theorie für das 3-PG-Modell

Wie im Abschnitt 6.2 beschrieben wurde, wird die Interpretation des 3-PG-Modells als Gegenstück zum 3-Parameter-Festkörper der Viskoelastizität übernommen. Die Grundgleichungen sind die Gleichgewichtsbedingungen (6.22), (6.23), die kinematischen Beziehungen (6.29), (6.32), die Elastizitätsgesetze (6.50) - (6.54) und die Randbedingungen.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\partial_j \Sigma_{jk} = 0 \quad , \quad \Sigma_{jk} = \Sigma_{(jk)} \quad . \quad (7.201)$$

Kinematik:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} + \Psi_{ij} \quad , \quad \gamma_{ij} = \gamma_{(ij)} \quad , \quad \Psi_{ij} = \Psi_{(ij)} \quad , \quad \kappa_{ijk} = \kappa_{i(jk)} = \partial_i \Psi_{jk} \quad . \quad (7.202)$$

Elastizitätsgesetze:

$$\psi = \psi^A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} + \frac{c_2 - c_1}{2c_1} \gamma_{ij} \mathbb{C}_{ijmn} \gamma_{mn} + \frac{c_2 - c_1}{2} \kappa_{ijk} \mathbb{C}_{jkmn} \kappa_{imn} \quad , \quad (7.203)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{(ij)} = \frac{\partial \psi^A}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad , \quad (7.204)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} = \frac{\partial \psi^A}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \mathbb{C}_{ijmn} \gamma_{mn} \quad , \quad (7.205)$$

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{(ij)} = \tau_{ij} + \sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijmn} \varepsilon_{mn} + \frac{c_2 - c_1}{c_1} \mathbb{C}_{ijmn} \gamma_{mn} \quad , \quad (7.206)$$

$$\mu_{ijk} = \mu_{i(jk)} = \frac{\partial \psi^A}{\partial \kappa_{ijk}} = (c_2 - c_1) \mathbb{C}_{jkmn} \partial_i \Psi_{mn} \quad , \quad (7.207)$$

$$\sigma_{jk} = -\partial_i \mu_{ijk} \quad . \quad (7.208)$$

Randbedingungen:

$$\text{Entweder } t_j = n_i \Sigma_{ij} \quad \text{oder } u_j \quad \text{und} \quad (7.209)$$

$$\text{entweder } T_{jk} = n_i \mu_{ijk} \quad \text{oder } \Psi_{jk} \quad (7.210)$$

müssen auf  $\partial V$  vorgegeben werden.

Die Hoffnung ist jetzt, den gleichen Weg wie in den Abschnitten 7.2 und 7.3 zu gehen und so zu einer konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das 3-PG-Modell zu gelangen. Diese Hoffnung wird sich als berechtigt erweisen, allerdings sind weiterführende Überlegungen erforderlich. Dies betrifft insbesondere die Aufteilung der virtuellen Arbeit in effektive und nicht effektive Anteile, wie weiter unten gezeigt wird.



### 7.4.1 Anisotropes 3-PG-Modell mit geometrischen Zwangsbedingungen

Nun wird wieder der Balken in Abbildung 7.1 betrachtet. Wie zuvor wird ein ebener Dehnungs- und ebener Spannungszustand mit  $u_2 = \varepsilon_{2k} = \Sigma_{2k} = 0$  angenommen und zusätzlich wird  $\Psi_{2k} = \tau_{2k} = \sigma_{2k} = \mu_{i2k} = 0$  gesetzt. Ferner sollen alle nicht verschwindenden Komponenten nur von  $x_1$  und  $x_3$  abhängen. Der Elastizitätstensor wird als transversal isotrop wie in den Abschnitten 7.2 und 7.3 angenommen, mit  $\nu_{13} = \nu_{31} = 0$ ,  $\mathbb{C}_{1111} = E$ ,  $\mathbb{C}_{3333} = E^*$ ,  $\mathbb{C}_{1133} = 0$ ,  $\mathbb{C}_{1313} = \mu^*$  und  $\mathbb{C}_{1113} = 0$ . Wie bisher sind  $E$  und  $E^*$  Elastizitätsmoduli und  $\mu^*$  der Schubmodul. Im Bezug auf der Voigt'schen Matrizennotation haben die Elastizitätsgesetze (7.204), (7.205), (7.206) und die freie Energie (7.203) die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{33} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\varepsilon_{11} \\ E^*\varepsilon_{33} \\ 2\mu^*\varepsilon_{13} \end{pmatrix}, \quad (7.211)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{13} \end{pmatrix} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \begin{pmatrix} E\gamma_{11} \\ E^*\gamma_{33} \\ 2\mu^*\gamma_{13} \end{pmatrix}, \quad (7.212)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{i11} \\ \mu_{i33} \\ \mu_{i13} \end{pmatrix} = (c_2 - c_1) \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_i \Psi_{11} \\ \partial_i \Psi_{33} \\ 2\partial_i \Psi_{13} \end{pmatrix} = (c_2 - c_1) \begin{pmatrix} E\partial_i \Psi_{11} \\ E^*\partial_i \Psi_{33} \\ 2\mu^*\partial_i \Psi_{13} \end{pmatrix}, \quad (7.213)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2} [E\varepsilon_{11}^2 + E^*\varepsilon_{33}^2 + 4\mu^*\varepsilon_{13}^2] + \frac{c_2 - c_1}{2c_1} [E\gamma_{11}^2 + E^*\gamma_{33}^2 + 4\mu^*\gamma_{13}^2] \\ & + \frac{c_2 - c_1}{2} \sum_{i=1}^3 [E(\partial_i \Psi_{11})^2 + E^*(\partial_i \Psi_{33})^2 + 4\mu^*(\partial_i \Psi_{13})^2]. \end{aligned} \quad (7.214)$$

Die Euler-Bernoulli-Annahme, dass die Balkenquerschnitte keine Verzerrung (starrer Körper) erfahren, legt unendlich große Werte für  $E^*$  nahe. Dies wiederum zieht nach sich, dass

$$\lim_{E^* \rightarrow \infty} (\varepsilon_{33}, \gamma_{33}, \partial_1 \Psi_{33}, \partial_3 \Psi_{33}) = (0, 0, 0, 0), \quad (7.215)$$

ansonsten wäre die freie Energie in (7.214) nicht beschränkt. Die Folgerung von (7.215) ist, dass die Spannungen  $\tau_{33}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\Sigma_{33}$  und  $\mu_{i33}$  (siehe Gleichungen (7.211) - (7.213) und (7.206)) nicht bestimmbar aus Materialgleichungen sind. Darüber hinaus: Um die geometrische Zwangsbedingung (7.215) stets zu erfüllen, sind Spannungen  $\tau_{33}$ ,  $\sigma_{33}$  und  $\mu_{i33}$  notwendig, die keine Arbeit leisten:  $\tau_{33}d\varepsilon_{33} = \sigma_{33}d\gamma_{33} = \mu_{133}d(\partial_1 \Psi_{33}) = \mu_{333}d(\partial_3 \Psi_{33}) = 0$ . Das bedeutet, dass die Spannungen  $\tau_{33}$ ,  $\sigma_{33}$  und  $\mu_{i33}$  beschränkt sind und deswegen gilt  $\lim_{E^* \rightarrow \infty} E^* (\varepsilon_{33}^2, \gamma_{33}^2, (\partial_1 \Psi_{33})^2, (\partial_3 \Psi_{33})^2) = \lim_{E^* \rightarrow \infty} (\tau_{33}\varepsilon_{33}, \sigma_{33}\gamma_{33}, \mu_{133}\partial_1 \Psi_{33}, \mu_{333}\partial_3 \Psi_{33}) = (0, 0, 0, 0)$ . In Übereinstimmung mit der Technischen Mechanik kann die Anforderung  $\lim_{E^* \rightarrow \infty} \varepsilon_{33} = 0$  durch  $\lim_{E^* \rightarrow \infty} u_3 = w(x_1)$  erfüllt werden.

Eine weitere Annahme des Euler-Bernoulli-Vorgehens ist, dass ebene Querschnitte eben bleiben. Das bedeutet die Existenz einer axialen Verschiebung  $U(x_1)$  und eines Rotationswinkels  $\theta(x_1)$ , sodass  $u_1 = U(x_1) - x_3\theta(x_1)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = w(x_1)$  für  $E^* \rightarrow \infty$ .

Eine letzte Annahme der Euler-Bernoulli-Geometrie ist, dass die Querschnitte senkrecht auf der deformierten Balkenachse stehen. Mit anderen Worten, es findet keine Scherung in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene statt, was gleichbedeutend mit  $\mu^* \rightarrow \infty$  ist. Also muss  $\lim_{\mu^* \rightarrow \infty} (\varepsilon_{13}, \gamma_{13}, \partial_i \Psi_{13}) = (0, 0, 0)$  sein, damit  $\psi$  endlich bleibt. Gleichbedeutend dazu muss  $\theta \rightarrow w'$ ,  $u_1 = U(x_1) - x_3w'(x_1)$  und  $\varepsilon_{11} = U'(x_1) - x_3w''(x_1)$  im Grenzfall  $\mu^* \rightarrow \infty$  sein. Wie vorher kennzeichnet ist  $()'$  die Ableitung von  $()$  relativ zu  $x_1$ . Analoger Weise wird  $\Psi_{11} = B(x_1) - x_3\beta'(x_1)$

angesetzt, wobei  $B$  und  $\beta'$  jeweils  $U'$  und  $w''$  entsprechen. Schließlich müssen Spannungen  $\tau_{13}$ ,  $\sigma_{13}$  und  $\mu_{i13}$  existieren, die keine Arbeit leisten ( $\tau_{13}d\varepsilon_{13} = \sigma_{13}d\gamma_{13} = \mu_{113}d(\partial_1\Psi_{13}) = \mu_{313}d(\partial_3\Psi_{13}) = 0$ ), beschränkt und aus Materialgleichungen nicht bestimmbar sind, sodass  $\lim_{\mu^* \rightarrow \infty} 4\mu^* (\varepsilon_{13}^2, \gamma_{13}^2, (\partial_1\Psi_{13})^2, (\partial_3\Psi_{13})^2) = (0, 0, 0, 0)$ .

Zusammengefasst ergeben sich für die Kinematik und die Elastizitätsgesetze die Gleichungen:

$$u_1 = U(x_1) - x_3 w'(x_1) \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = w(x_1) \quad , \quad (7.216)$$

$$\varepsilon_{11} = U'(x_1) - x_3 w''(x_1) \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = 0 \quad , \quad (7.217)$$

$$\Psi_{11} = B(x_1) - x_3 \beta'(x_1) \quad , \quad \Psi_{33} = \Psi_{13} = 0 \quad , \quad (7.218)$$

$$\gamma_{11} = U'(x_1) - B(x_1) - x_3 (w''(x_1) - \beta'(x_1)) \quad , \quad \gamma_{33} = \gamma_{13} = 0 \quad , \quad (7.219)$$

$$\tau_{11} = E\varepsilon_{11} = E(U'(x_1) - x_3 w''(x_1)) \quad , \quad (7.220)$$

$$\sigma_{11} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} E\gamma_{11} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} E [U' - B - x_3 (w'' - \beta')] \quad , \quad (7.221)$$

$$\Sigma_{11} = \tau_{11} + \sigma_{11} = \frac{c_2}{c_1} E(U' - x_3 w'') - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E(B - x_3 \beta') \quad , \quad (7.222)$$

$$\mu_{111} = (c_2 - c_1) E \partial_1 \Psi_{11} = (c_2 - c_1) E (B' - x_3 \beta'') \quad , \quad (7.223)$$

$$\mu_{311} = -(c_2 - c_1) E \beta' \quad , \quad (7.224)$$

$\tau_{33}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\Sigma_{33}$ ,  $\Sigma_{13}$ ,  $\mu_{133}$ ,  $\mu_{113}$ ,  $\mu_{333}$ ,  $\mu_{313}$ : nicht bestimmbar durch konstitutive Gleichungen,

$$\psi = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 + \frac{c_2 - c_1}{2c_1} E \gamma_{11}^2 + \frac{c_2 - c_1}{2} E (\partial_1 \Psi_{11})^2 + \frac{c_2 - c_1}{2} E (\partial_3 \Psi_{11})^2 \quad , \quad (7.225)$$

$$\partial_1 \mu_{111} + \sigma_{11} = 0 \quad , \quad (7.226)$$

$$\partial_1 \mu_{113} + \partial_3 \mu_{313} + \sigma_{13} = 0 \quad , \quad (7.227)$$

$$\partial_1 \mu_{133} + \partial_3 \mu_{333} + \sigma_{33} = 0 \quad . \quad (7.228)$$

Zusätzlich gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\partial_1 \Sigma_{11} + \partial_3 \Sigma_{13} = 0 \quad , \quad (7.229)$$

$$\partial_1 \Sigma_{13} + \partial_3 \Sigma_{33} = 0 \quad . \quad (7.230)$$

Im Folgenden werden die partiellen Differentialgleichungen (7.226) - (7.230) als Feldgleichungen bezeichnet. Der nächste Schritt ist Schnittgrößen mit Hilfe von Prinzipien der virtuellen Arbeit einzuführen. Dabei ist es wichtig, folgendes zu berücksichtigen: Im Kontext des eindimensionalen Balkenkontinuums existieren ausschließlich Schnitt- und resultierende Belastungskräfte. Spannungskomponenten hingegen existieren lediglich für den dreidimensionalen materiellen Körper.

## 7.4.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

### Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

Im vorliegenden 3-PG-Modell werden die äußeren Kräfte durch den Traktionsvektor  $\mathbf{t}$  und den nicht klassischen Traktionstensor  $\mathbf{T}$  repräsentiert, wie in den Gleichungen (7.209) und (7.210) dargestellt. Unter Verwendung dieser Kräfte wird die virtuelle Arbeit  $\delta W^{(e)}$  für den Balken in Abbildung 7.1 wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= \int_{\partial V} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dV \\ &= \int_{A_l \cup A_r} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dS + \int_{A_o \cup A_u} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dS \quad . \end{aligned} \quad (7.231)$$

Das Ziel besteht nun darin,  $\delta W^{(e)}$  mit Hilfe der folgenden Schnitt- und resultierenden Belastungskräfte auszudrücken:

$$N = N(x_1) := \int_A \Sigma_{11} dS = EA \left( \frac{c_2}{c_1} U' - \frac{c_2 - c_1}{c_1} B \right) =: g_1(x_1) = G_1(U', B) \quad , \quad (7.232)$$

$$M = M(x_1) := \int_A \Sigma_{11} x_3 dS = -EI \left( \frac{c_2}{c_1} w'' - \frac{c_2 - c_1}{c_1} \beta' \right) =: g_2(x_1) = G_2(w'', \beta') \quad , \quad (7.233)$$

$$V = V(x_1) := \tilde{V} + \tilde{V}' \quad , \quad (7.234)$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}(x_1) := \int_A \Sigma_{13} dA \quad , \quad (7.235)$$

$$\tilde{V}' = \tilde{V}'(x_1) := -2b [\Sigma_{13} x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} \quad , \quad (7.236)$$

$$H = H(x_1) := \int_A \mu_{111} dS = (c_2 - c_1) E A B' =: g_3(x_1) = G_3(B') \quad , \quad (7.237)$$

$$m = m(x_1) := \int_A \mu_{111} x_3 dS = -(c_2 - c_1) E I \beta'' =: g_4(x_1) = G_4(\beta'') \quad , \quad (7.238)$$

$$\chi = \chi(x_1) := \int_A \sigma_{11} dS = \frac{c_2 - c_1}{c_1} E A (U' - B) =: g_5(x_1) = G_5(U', B) \quad , \quad (7.239)$$

$$\Upsilon = \Upsilon(x_1) := \int_A \sigma_{11} x_3 dS = -\frac{c_2 - c_1}{c_1} E I (w'' - \beta') =: g_6(x_1) = G_6(w'', \beta') \quad , \quad (7.240)$$

$$p = p(x_1) := 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \quad , \quad (7.241)$$

$$q = q(x_1) := \tilde{q} - \tilde{V}' \quad , \quad (7.242)$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(x_1) := 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \quad . \quad (7.243)$$

In diesen Beziehungen wurden die Gleichungen (7.216) - (7.223) verwendet. Es sei darauf hingewiesen, dass die Gleichungen (7.232), (7.233) und (7.237) - (7.240) Elastizitätsgesetze für Schnittkräfte repräsentieren. Die Querkraft  $V$  wird durch Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen bestimmt. Schließlich werden  $p$  und  $q$  als äußere Belastungen im Inneren des eindimensionalen Kontinuums vorgegeben.

Zur Berechnung von  $\delta W^{(e)}$  in Gleichung (7.231) wird zunächst das Integral über  $A_l \cup A_r$  gebildet.

Randebenen  $A_l, A_r$ :

$$x_1 = 0, L \quad , \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_1 \quad , \quad n_1 = \pm 1 \quad , \quad (7.244)$$

$$t_1 = n_1 \Sigma_{11} \quad , \quad t_3 = n_1 \Sigma_{13} \quad , \quad (7.245)$$

$$T_{11} = n_1 \mu_{111} \quad , \quad T_{33} = n_1 \mu_{133} \quad , \quad T_{13} = n_1 \mu_{113} \quad , \quad (7.246)$$

$$\delta u_1 = \delta U + x_3 \delta(-w') \quad , \quad \delta u_3 = \delta w \quad , \quad (7.247)$$

$$\delta \Psi_{11} = \delta B + x_3 \delta(-\beta') \quad , \quad \delta \Psi_{33} = \delta \Psi_{13} = 0 \quad . \quad (7.248)$$

Alle anderen Komponenten von  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{T}$  verschwinden. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_l \cup A_r} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dS &= \int_{A_l \cup A_r} t_1 \delta U dS + \int_{A_l \cup A_r} t_1 x_3 \delta(-w') dS + \int_{A_l \cup A_r} t_3 \delta w dS \\ &+ \int_{A_l \cup A_r} T_{11} \delta B dS + \int_{A_l \cup A_r} T_{11} x_3 \delta(-\beta') dS \\ &= [N \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} + [\tilde{V} \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [H \delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [m \delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} . \end{aligned} \quad (7.249)$$

Randebenen  $A_o$ ,  $A_u$ :

$$x_3 = \pm c \quad , \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3 \quad , \quad n_3 = \pm 1 \quad , \quad (7.250)$$

$$t_1 = n_3 \Sigma_{31} \quad , \quad t_3 = n_3 \Sigma_{33} \quad , \quad (7.251)$$

$$T_{11} = n_3 \mu_{311} \quad , \quad T_{33} = n_3 \mu_{333} \quad , \quad T_{13} = n_3 \mu_{313} \quad , \quad (7.252)$$

$$\delta u_1 = \delta U + x_3 \delta(-w') \quad , \quad \delta u_3 = \delta w \quad , \quad (7.253)$$

$$\delta \Psi_{11} = \delta B + x_3 \delta(-\beta') \quad , \quad \delta \Psi_{33} = \delta \Psi_{13} = 0 \quad . \quad (7.254)$$

Alle anderen Komponenten von  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{T}$  verschwinden. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_o \cup A_u} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dS &= \int_{A_o \cup A_u} t_1 \delta U dS + \int_{A_o \cup A_u} t_1 x_3 \delta(-w') dS + \int_{A_o \cup A_u} t_3 \delta w dS \\ &+ \int_{A_o \cup A_u} T_{11} \delta B dS + \int_{A_o \cup A_u} T_{11} x_3 \delta(-\beta') dS \quad . \end{aligned} \quad (7.255)$$

Durch Anwendung partieller Integration ergibt sich für die ersten drei Integrale auf der rechten Seite

$$\int_{A_o \cup A_u} t_1 \delta U dS = \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta U dx_1 = \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 \quad , \quad (7.256)$$

$$\begin{aligned} \int_{A_o \cup A_u} t_1 x_3 \delta(-w') dS &= - \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{13} x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w' dx_1 \\ &= \left[ \tilde{V} \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_{x_1=0}^{x_1=L} \tilde{V}' \delta w dx_1 \quad , \end{aligned} \quad (7.257)$$

$$\int_{A_o \cup A_u} t_3 \delta w dS = \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w dx_1 = \int_{x_1=0}^{x_1=L} \tilde{q} \delta w dx_1 \quad . \quad (7.258)$$

Die letzten zwei Integrale auf der rechten Seite von (7.255) enthalten die Komponente  $T_{11}$ , die mit Hilfe von Gleichungen (7.252) und (7.224) zu

$$[T_{11}]_{x_3=\pm c} = [\pm \mu_{311}]_{x_3=\pm c} = \pm (c_2 - c_1) E \beta'(x_1) \quad (7.259)$$

umgeschrieben werden kann.

Es ist jetzt wichtig folgendes zu bemerken: Die Kräfte  $p, \tilde{q}$  und  $\tilde{V}'$  wirken auf Punkte  $x_1$  im Inneren des eindimensionalen Kontinuums. Diese Kräfte enthalten Spannungskomponenten, die nicht durch konstitutive Gleichungen bestimmt werden können, und können daher an jedem  $x_1 \in (0, L)$  vorgeschrieben werden. Im Unterschied zu diesen Kräften können resultierende Kräfte infolge  $T_{11}$  in  $(0, L)$  nicht vorgeschrieben werden. Der Grund dafür ist, dass  $T_{11}$  durch  $\mu_{311}$  dargestellt wird, das aus dem Elastizitätsgesetz (7.224) bestimmbar ist. Mit anderen Worten, Vorgabe von  $T_{11}$  auf  $A_o \cup A_u$  ist dasselbe, als ob die gesuchte Lösung  $\beta(x_1)$  vorgegeben wird. Das Prinzip der virtuellen Arbeit wird nur dann wohl formuliert sein, wenn solche Terme eliminiert werden können. Das ist genau der Fall, wie bald zu sehen sein wird. Die Interpretation davon ist, dass resultierende Kräfte infolge  $T_{11}$  nicht relevant für das eindimensionale Kontinuum sind. Sie sind von Bedeutung nur für den dreidimensionalen materiellen Körper. Diese Betrachtungsweise beruht auf der Tatsache, dass die Komponente  $\mu_{311}$  in den Gleichungen (7.226) - (7.230) nicht vorkommt. Damit hat  $\mu_{311}$  keinen Einfluss auf die grundlegenden Gleichungen. Aus diesen Gründen werden die zwei letzten Integrale auf der rechten Seite von (7.255) durch  $\delta W_{\text{noneff}}^{(e)}$  abgekürzt:

$$\delta W_{\text{noneff}}^{(e)} := \int_{A_o \cup A_u} T_{11} \delta B dS + \int_{A_o \cup A_u} T_{11} x_3 \delta(-\beta') dS \quad . \quad (7.260)$$

Dass  $\mu_{311}$  nicht zu den Gleichgewichtsbedingungen beiträgt, wird auch durch die Tatsache reflektiert, dass sich  $T_{11}$  auf  $A_o \cup A_u$  im eigenen Gleichgewicht (self-equilibrated) befindet, wie aus Gleichung (7.259) zu sehen ist:

$$\int_{A_o \cup A_u} T_{11} dS = 0 \quad . \quad (7.261)$$

Eine direkte Konsequenz dieser Gleichung ist, dass das erste Integral auf der rechten Seite von (7.260) verschwindet,

$$\int_{A_o \cup A_u} T_{11} \delta B dS = 0 \quad , \quad (7.262)$$

womit sich Gleichung (7.260) auf

$$\delta W_{\text{noneff}}^{(e)} := \int_{A_o \cup A_u} T_{11} x_3 \delta(-\beta') dS \quad (7.263)$$

reduziert. Nach Einsetzen von (7.259) in die letzte Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{noneff}}^{(e)} &= 2b \int_{x_1=0}^{x_1=L} [\mu_{311} x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta(-\beta') dx_1 \\ &= 4bc \int_{x_1=0}^{x_1=L} (c_2 - c_1) E (-\beta') \delta(-\beta') dx_1 = \delta \int_{x_1=0}^{x_1=L} \frac{c_2 - c_1}{2} EA (\beta')^2 dx_1 \\ &= \delta \int_V \frac{c_2 - c_1}{2} E (\partial_3 \Psi_{11})^2 dV = \delta \int_V \frac{1}{2} \mu_{311} (\partial_3 \Psi_{11}) dV \quad . \end{aligned} \quad (7.264)$$

Aus den Gleichungen (7.255) - (7.258), (7.242), (7.243) und (7.260) wird

$$\int_{A_o \cup A_u} (t_j \delta u_j + T_{jk} \delta \Psi_{jk}) dS = \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 + \left[ \tilde{V} \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} q \delta w dx_1 + \delta W_{\text{noneff}}^{(e)} \quad (7.265)$$

erhalten. Substitution von (7.265) und (7.249) in (7.231) ergibt

$$\delta W^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(e)} + \delta W_{\text{noneff}}^{(e)} \quad , \quad (7.266)$$

wobei

$$\delta W_{\text{eff}}^{(e)} := [N \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [H \delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [V \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} + [m \delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} q \delta w dx_1 \quad , \quad (7.267)$$

als effektive virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet wird.

### Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

Mit der freien Energie in Gleichung (7.225) berechnet sich die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte zu

$$\delta W^{(i)} := \delta \int_V \psi dV = \delta \int_V \frac{1}{2} E \left[ \varepsilon_{11}^2 + \frac{c_2 - c_1}{c_1} \gamma_{11}^2 + (c_2 - c_1) (\partial_1 \Psi_{11})^2 + (c_2 - c_1) (\partial_3 \Psi_{11})^2 \right] dV \quad . \quad (7.268)$$

In Analogie zu (7.266) wird  $\delta W^{(i)}$  auch in effektive und nicht effektive Anteile gemäß

$$\delta W^{(i)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)} + \delta W_{\text{noneff}}^{(i)} \quad , \quad (7.269)$$

mit

$$\delta W_{\text{eff}}^{(i)} := \int_V \left[ E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} + \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \gamma_{11} \delta \gamma_{11} + (c_2 - c_1) E \Psi'_{11} \delta \Psi'_{11} \right] dV \quad , \quad (7.270)$$

und

$$\delta W_{\text{noneff}}^{(i)} := \delta \int_V \frac{1}{2} (c_2 - c_1) (\partial_3 \Psi_{11})^2 dV = \delta \int_V \frac{1}{2} \mu_{311} (\partial_3 \Psi_{11}) dV \quad (7.271)$$

zerlegt. In der letzten Gleichung wurde von der Bezeichnung  $\mu_{311} = (c_2 - c_1) E (\partial_3 \Psi_{11})$  Gebrauch gemacht, die sich aus (7.224) und (7.218) ergibt. Für spätere Zwecke soll hier noch die Beziehung

$$\delta W_{\text{eff}}^{(i)} := \int_V (\tau_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{11} \delta \gamma_{11} + \mu_{111} \delta \Psi'_{11}) dV \quad (7.272)$$

erwähnt werden, die aus (7.270) mit Hilfe von (7.220), (7.221) und (7.223) gewonnen werden kann. Auf der anderen Seite kann die kinematische Beziehung  $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} - \Psi_{ij}$  in Gleichung (7.270) verwendet werden, um auf die Gleichung

$$\delta W_{\text{eff}}^{(i)} := \int_V \left[ \frac{c_2}{c_1} E \varepsilon_{11} - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \Psi_{11} \right] \delta \varepsilon_{11} dV - \int_V \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \gamma_{11} \delta \Psi_{11} dV + \int_V (c_2 - c_1) E \Psi'_{11} \delta \Psi'_{11} dV \quad , \quad (7.273)$$

zu kommen. Dies kann weiter mit Hilfe von (7.217) und (7.218) verarbeitet werden,

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{eff}}^{(i)} &= \int_V \left( \frac{c_2}{c_1} E \varepsilon_{11} - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \Psi_{11} \right) (\delta U' - x_3 \delta w'') dV \\ &\quad - \int_V \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \gamma_{11} (\delta B - x_3 \delta \beta') dV + \int_V (c_2 - c_1) E \Psi'_{11} (\delta B' - x_3 \delta \beta'') dV \\ &= \int_V \left( \frac{c_2}{c_1} E \varepsilon_{11} - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \Psi_{11} \right) \delta U' dV - \int_V \left( \frac{c_2}{c_1} E \varepsilon_{11} - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \Psi_{11} \right) x_3 \delta w'' dV \\ &\quad - \int_V \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \gamma_{11} \delta B dV + \int_V \frac{c_2 - c_1}{c_1} E \gamma_{11} x_3 \delta \beta' dV \\ &\quad + \int_V (c_2 - c_1) E \Psi'_{11} \delta B' dV - \int_V (c_2 - c_1) E \Psi'_{11} x_3 \delta \beta'' dV \\ &= \int_V \left[ \frac{c_2}{c_1} E (U' - x_3 w'') - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E (B - x_3 \beta') \right] \delta U' dV \\ &\quad - \int_V \left[ \frac{c_2}{c_1} E (U' x_3 - x_3^2 w'') - \frac{c_2 - c_1}{c_1} E (B x_3 - x_3^2 \beta') \right] \delta w'' dV \\ &\quad - \int_V \frac{c_2 - c_1}{c_1} E [U' - x_3 w'' - (B - x_3 \beta')] \delta B dV \\ &\quad + \int_V \frac{c_2 - c_1}{c_1} E [U' x_3 - x_3^2 w'' - (B x_3 - x_3^2 \beta')] \delta \beta' dV \\ &\quad + \int_V (c_2 - c_1) E (B' - x_3 \beta'') \delta B' dV \\ &\quad - \int_V (c_2 - c_1) E (B' x_3 - x_3^2 \beta'') \delta \beta'' dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left[ \frac{c_2}{c_1} EAU' - \frac{c_2 - c_1}{c_1} EAB \right] \delta U' dx_1 \\
&\quad - \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left[ -\frac{c_2}{c_1} EIw'' + \frac{c_2 - c_1}{c_1} EI\beta' \right] \delta w'' dx_1 \\
&\quad - \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left[ \frac{c_2 - c_1}{c_1} EAU' - \frac{c_2 - c_1}{c_1} EAB \right] \delta B dx_1 \\
&\quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left[ -\frac{c_2 - c_1}{c_1} EIw'' + \frac{c_2 - c_1}{c_1} EI\beta' \right] \delta \beta' dx_1 \\
&\quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} [(c_2 - c_1) EAB'] \delta B' dx_1 \\
&\quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} [(c_2 - c_1) EI\beta''] \delta \beta'' dx_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_1 \delta U' dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_2 \delta w'' dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_5 \delta B dx_1 \\
&\quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_6 \delta \beta' dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_3 \delta B' dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_4 \delta \beta'' dx_1 \quad . \quad (7.274)
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Funktionen  $g_1, \dots, g_6$  sind in (7.232), (7.233) und (7.237) - (7.240) definiert. Mehrfache Anwendung partieller Integration und das Sortieren von Termen führt schließlich zu

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{eff}}^{(i)} &= [g_1 \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_3 \delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_2' \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_2 \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
&\quad + [(g_6 + g_4') \delta \beta]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_4 \delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
&\quad - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_1' \delta U dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_2'' \delta w dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} (g_5 + g_3') \delta B dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} (g_6' + g_4'') \delta \beta dx_1 \quad . \quad (7.275)
\end{aligned}$$

### Prinzip der virtuellen Arbeit, Grundgleichungen und Randbedingungen für Schnittkräfte

Unter den gemachten Annahmen verlangt das Prinzip der virtuellen Arbeit die Erfüllung der Gleichung

$$\delta W^{(e)} = \delta W^{(i)} \quad . \quad (7.276)$$

Mit den Gleichungen (7.266), (7.264), (7.269) und (7.271) ist es leicht zu sehen, dass (7.276) äquivalent zu

$$\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)} \quad (7.277)$$



ist. Diese Gleichung, zusammen mit den Gleichungen (7.267) und (7.275), impliziert die Gleichungen

$$g'_1 + p = 0 \quad , \quad g'_3 + g_5 = 0 \quad , \quad (7.278)$$

$$g''_2 + q = 0 \quad , \quad g'_4 + g_6 = 0 \quad , \quad (7.279)$$

die Beziehungen

$$N = g_1 \quad , \quad H = g_3 \quad , \quad V = g'_2 \quad , \quad M = g_2 \quad , \quad m = g_4 \quad (7.280)$$

und die Randbedingungen für Schnittkräfte:

$$\text{Entweder } N \text{ oder } U \quad , \quad \text{entweder } H \text{ oder } B \quad , \quad (7.281)$$

$$\text{entweder } V \text{ oder } w \quad , \quad \text{entweder } M \text{ oder } w' \quad \text{und} \quad (7.282)$$

$$\text{entweder } m \text{ oder } \beta' \quad (7.283)$$

müssen an  $x_1 = 0$  und  $x_1 = L$  vorgeschrieben werden.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass aus Gleichungen (7.278) - (7.280), (7.239) und (7.240) die Beziehungen

$$N' + p = 0 \quad , \quad V' + q = 0 \quad , \quad M' - V = 0 \quad , \quad (7.284)$$

$$H' + \chi = 0 \quad , \quad m' + \Upsilon = 0 \quad , \quad (7.285)$$

folgen, die nur Schnitt- und resultierende Kräfte enthalten. So werden die fünf Gleichungen (7.284) und (7.285) im Folgenden als die Differentialgleichungen für die Schnittkräfte bezeichnet.

Jetzt können die wichtigsten konzeptionellen Schritte dieser Vorgehensweise zusammengefasst werden. Für das eindimensionale Kontinuum sind  $U$  und  $w$  die unabhängigen kinematischen Freiheitsgrade, während  $B$  und  $\beta$  innere Variablen sind. Auf der Ebene von Schnittgrößen sind die Gleichung (7.284) Gleichgewichtsbedingungen,  $H$ ,  $m$ ,  $\chi$ ,  $\Upsilon$  sind innere Schnittkräfte (Innere Variablen auf der Ebene einer Schnittkräfteformulierung) und Gleichungen (7.280)<sub>1,2,4,5</sub>, (7.285)<sub>1,2</sub> sind Elastizitätsgesetze für Schnittkräfte. Insbesondere repräsentieren (7.280)<sub>1,2,4,5</sub> die Elastizitätsgesetze für die Schnittkräfte  $N$ ,  $M$ ,  $H$ ,  $m$  in (7.232), (7.233), (7.237) und (7.238), während die Elastizitätsgesetze (7.285)<sub>1,2</sub> und (7.237) - (7.240) im nächsten Abschnitt erläutert werden. In diesem Sinn sind die Beziehungen (7.281)<sub>1</sub> und (7.282)<sub>1,2</sub> physikalische Randbedingungen, während die Gleichungen (7.281)<sub>2</sub> und (7.283) konstitutive Randbedingungen sind.

### 7.4.3 Alternative und äquivalente Vorgehensweise

In den nächsten beiden Abschnitten wird gezeigt, dass sowohl die Differentialgleichungen der Biegung als auch das Prinzip  $\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)}$  aus den zweidimensionalen Feldgleichungen für die Biegung hergeleitet werden können.

#### Alternative Herleitung der Differentialgleichungen der Biegung

Im Abschnitt 7.4.1 wurden die partiellen Differentialgleichungen (7.226) - (7.230) als Feldgleichungen der Biegung und im Abschnitt 7.4.2 die gewöhnlichen Differentialgleichungen (7.284) und (7.285) als Differentialgleichungen der Biegung bezeichnet. Die Differentialgleichungen der Biegung werden hier aus den Feldgleichungen (7.226) - (7.230) hergeleitet.

Zunächst wird das Integral der Gleichung (7.229) über  $A$  gebildet,

$$\int_A (\partial_1 \Sigma_{11}) dS + \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) dS = \partial_1 \int_A \Sigma_{11} dS + 2b [\Sigma_{13}]_{x_1=-c}^{x_1=c} = 0 \quad . \quad (7.286)$$

Aus den Definitionen (7.232) und (7.241) ergibt sich die Differentialgleichung (7.284)<sub>1</sub>

$$N' + p = 0 \quad . \quad (7.287)$$

Als nächstes wird das Integral von (7.230) über  $A$  bestimmt,

$$\int_A (\partial_1 \Sigma_{13}) dS + \int_A (\partial_3 \Sigma_{33}) dS = \partial_1 \int_A \Sigma_{13} dS + 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} = 0 \quad , \quad (7.288)$$

und die Definitionen (7.235) und (7.243) verwendet,

$$\tilde{V}' + \tilde{q} = 0 \quad . \quad (7.289)$$

Ersetzen von  $\tilde{V}$  durch  $V - \tilde{\tilde{V}}$  (siehe Gleichung (7.234)) führt zu

$$V' - \tilde{\tilde{V}}' + \tilde{q} = 0 \quad (7.290)$$

und dann wird (7.242) verwendet um aus (7.289) die Differentialgleichung (7.284)<sub>2</sub> zu erhalten,

$$V' + q = 0 \quad . \quad (7.291)$$

Um auch die Differentialgleichung (7.284)<sub>3</sub> aus den Feldgleichungen abzuleiten, wird die Gleichgewichtsbedingung (7.229) mit  $x_3$  multipliziert und das Ergebnis über  $A$  integriert,

$$\int_A (\partial_1 \Sigma_{11}) x_3 dS + \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS = 0 \quad (7.292)$$

bzw.

$$\partial_1 \int_A \Sigma_{11} x_3 dS + 2b \int_{x_3=-c}^{x_3=c} (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dx_3 = 0 \quad . \quad (7.293)$$

Nach partieller Integration ergibt sich

$$\partial_1 \int_A \Sigma_{11} x_3 dS + 2b [\Sigma_{13} x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} - \int_A \Sigma_{13} dS = 0 \quad . \quad (7.294)$$

Der erste Term wird durch  $M'$  (siehe Gleichung (7.233)) ersetzt, der zweite durch  $-\tilde{\tilde{V}}$  (siehe Gleichung (7.236)) und der dritte durch  $-\tilde{V}$  (siehe Gleichung (7.236)),

$$M' - \tilde{\tilde{V}}' - \tilde{V} = 0 \quad . \quad (7.295)$$

Daraus und mit der Definition (7.234) folgt Gleichung (7.284)<sub>3</sub>,

$$M' - V = 0 \quad . \quad (7.296)$$

Es muss erwähnt werden, dass die zwei Feldgleichungen (7.227) und (7.228) nur Spannungen enthalten, die aus Materialgleichungen nicht bestimmbar sind und keinen Einfluss auf die Differentialgleichungen der Biegung haben. Da alle Spannungen in den Gleichungen (7.227) und (7.228) interne Variablen sind, werden diese zwei Feldgleichungen nicht weiter betrachtet. Demzufolge bleibt noch die Feldgleichung (7.226) übrig. Deren Integration über  $A$  ergibt

$$\partial_1 \int_A \mu_{111} dS + \int_A \sigma_{11} dS = 0 \quad . \quad (7.297)$$

Mit Hilfe der Definitionen (7.237) und (7.239) wird daraus die Differentialgleichung (7.285)<sub>1</sub>,

$$H' + \chi = 0 \quad , \quad (7.298)$$

die eine Materialgleichung für innere Schnittkräfte darstellt. Schließlich wird die Feldgleichung (7.226) mit  $x_3$  multipliziert und das Ergebnis über  $A$  integriert,

$$\partial_1 \int_A \mu_{111} x_3 dS + \int_A \sigma_{11} x_3 dS = 0 \quad . \quad (7.299)$$

Mit den Definitionen (7.238) und (7.240) im Hintergrund, wird daraus die Differentialgleichung (7.285)<sub>2</sub>,

$$m' + \Upsilon = 0 \quad , \quad (7.300)$$

die auch eine Materialgleichung für innere Schnittkräfte darstellt.

### Alternative Herleitung des Prinzips $\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)}$

Es ist im letzten Abschnitt klar geworden, dass die relevanten Feldgleichungen die Gleichungen (7.226), (7.229) und (7.230) sind. Diese Gleichungen werden jetzt zum Prinzip  $\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)}$  führen.

Beginnend mit den Gleichgewichtsgleichungen (7.229) und (7.230), die jeweils mit  $\delta u_1$  und  $\delta u_3$  multipliziert und die Ergebnisse über  $V$  integriert und miteinander addiert werden, folgt:

$$\int_V [(\partial_1 \Sigma_{11}) \delta u_1 + (\partial_3 \Sigma_{13}) \delta u_1 + (\partial_1 \Sigma_{13}) \delta u_3 + (\partial_3 \Sigma_{33}) \delta u_3] dV = 0 \quad . \quad (7.301)$$

Zur Umformung dieser Gleichung werden die Gleichungen (7.216), (7.217), (7.222) und (7.232) - (7.243) sowie partielle Integration verwendet:

$$\begin{aligned} \int_V (\partial_1 \Sigma_{11}) \delta u_1 dV &= \int_V \partial_1 (\Sigma_{11} \delta u_1) dV - \int_V \Sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dV \\ &= \left[ \int_A \Sigma_{11} (\delta U - x_3 \delta w') dS \right]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_V (\tau_{11} + \sigma_{11}) \delta \varepsilon_{11} dV \end{aligned}$$

$$= [N\delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M\delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} - \int_V \tau_{11}\delta\varepsilon_{11}dV - \int_V \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}dV \quad , \quad (7.302)$$

$$\begin{aligned} & \int_V (\partial_3 \Sigma_{13}) \delta u_1 dV + \int_V (\partial_1 \Sigma_{13}) \delta u_3 dV + \int_V (\partial_3 \Sigma_{33}) \delta u_3 dV \\ &= \int_V \partial_3 (\Sigma_{13} \delta U) dV + \int_V (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 \delta(-w') dV + \int_V (\partial_1 \Sigma_{13}) \delta w dV + \int_V (\partial_3 \Sigma_{33}) \delta w dV \\ &= \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta U dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS \delta(-w') dx_1 \\ & \quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left( \partial_1 \int_A \Sigma_{13} dS \right) \delta w dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 + \left[ - \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS \delta w \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left( \partial_1 \int_A (\partial_3 \Sigma_{13}) x_3 dS \right) \delta w dx_1 \\ & \quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left( \partial_1 \int_A \Sigma_{13} dS \right) \delta w dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 + [V \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} \left( \partial_1 \int_A \partial_3 (\Sigma_{13} x_3) dS \right) \delta w dx_1 \\ & \quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 + [V \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [(\partial_1 \Sigma_{13}) x_3]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w dx_1 \\ & \quad + \int_{x_1=0}^{x_1=L} 2b [\Sigma_{33}]_{x_3=-c}^{x_3=c} \delta w dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^{x_1=L} p \delta U dx_1 + [V \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} q \delta w dx_1 \quad . \quad (7.303) \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen von (7.303) und (7.302) in (7.301) wird Folgendes erhalten

$$\begin{aligned}
 & [N\delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [V\delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M\delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} p\delta U dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} q\delta w dx_1 \\
 & = \int_V (\tau_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}) dV \quad . \quad (7.304)
 \end{aligned}$$

Als letztes wird die Gleichung (7.226) mit  $\delta\Psi_{11}$  multipliziert, dann über  $V$  integriert und im Anschluss partielle Integration angewandt:

$$\int_V (\partial_1\mu_{111}) \delta\Psi_{11} dV + \int_V \sigma_{11}\delta\Psi_{11} dV = 0 \quad (7.305)$$

bzw.

$$\int_V \partial_1 (\mu_{111}\delta\Psi_{11}) dV - \int_V \mu_{111}\delta\Psi'_{11} dV + \int_V \sigma_{11}\delta\Psi_{11} dV = 0 \quad . \quad (7.306)$$

Die kinematische Beziehung (7.218)<sub>1</sub> und die Definitionen (7.237) und (7.238) ermöglichen, das erste Integral auf der linken Seite von (7.306) wie folgt umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
 \int_V \partial_1 (\mu_{111}\delta\Psi_{11}) dV & = \left[ \int_A \mu_{111} (\delta B - x_3\delta\beta') dS \right]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
 & = \left[ \left( \int_A \mu_{111} dS \right) \delta B \right]_{x_1=0}^{x_1=L} + \left[ \left( \int_A \mu_{111} x_3 dS \right) \delta(-\beta') \right]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
 & = [H\delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [m\delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} \quad . \quad (7.307)
 \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis wird (7.306) umgewandelt zu

$$[H\delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [m\delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} = \int_V \mu_{111}\delta\Psi'_{11} dV - \int_V \sigma_{11}\delta\Psi_{11} dV \quad (7.308)$$

und nach Addition der letzten Gleichung mit der Gleichung (7.304) wird

$$\begin{aligned}
 & [N\delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [H\delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [V\delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M\delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\
 & + [m\delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} + \int_{x_1=0}^{x_1=L} p\delta U dx_1 + \int_{x_1=0}^{x_1=L} q\delta w dx_1 \\
 & = \int_V [\tau_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{11}\delta(\varepsilon_{11} - \Psi_{11}) + \mu_{111}\delta\Psi'_{11}] dV \quad (7.309)
 \end{aligned}$$

erhalten, was nichts anderes als das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)} \quad (7.310)$$

ist.

#### 7.4.4 Diskussion über Prinzipien der virtuellen Arbeit

Sehr oft wird eine eindimensionale Form für das Potential der inneren Kräfte zu Grunde gelegt und daraus mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Form der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte festgelegt. Solche Vorgehensweisen geben keine Auskunft über die grundlegenden physikalischen Prinzipien, geschweige denn über mögliche Spannungskomponenten und Stoffgesetze. Als Beispiel wird ein hypothetisches Potential von inneren Kräften etwa der Form

$$\Pi_h^{(i)} = \int_V \frac{1}{2} \left[ E\varepsilon_{11}^2 + \frac{c_2 - c_1}{2c_1} E\gamma_{11}^2 + \frac{c_2 - c_1}{2} E(\partial_1 \Psi_{11})^2 \right] dV \quad (7.311)$$

betrachtet, woraus (mit Hilfe von Gleichungen (7.217), (7.218) und (7.219))

$$\begin{aligned} \Pi_h^{(i)} = \int_{x_1=0}^{x_1=L} \int_A \frac{1}{2} \left[ E(U' - x_3 w'')^2 + \frac{c_2 - c_1}{c_1} E(U' - B - x_3(w'' - \beta'))^2 \right. \\ \left. + (c_2 - c_1) E(B' - x_3 \beta'')^2 \right] dS dx_1 \quad , \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \Pi_h^{(i)} = \int_{x_1=0}^{x_1=L} \frac{1}{2} \left[ EA U'^2 + EI(w'')^2 + \frac{c_2 - c_1}{c_1} EA(U' - B)^2 + \frac{c_2 - c_1}{c_1} EI(w'' - \beta')^2 \right. \\ \left. + (c_2 - c_1) EA(B')^2 + (c_2 - c_1) EI(\beta'')^2 \right] dx_1 \quad (7.312) \end{aligned}$$

folgt. Angenommen (7.312) gibt das Potential eines eindimensionalen hypothetischen Kontinuums an. Die Variation dieses Potentials ist gleich  $\delta W_{\text{eff}}^{(i)}$  und wurde in Gleichung (7.275) berechnet:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_h^{(i)} = [g_1 \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_3 \delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_2' \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_2 \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ + [(g_6 + g_4') \delta \beta]_{x_1=0}^{x_1=L} + [g_4 \delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_1' \delta U dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} g_2' \delta w dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} (g_5 + g_3') \delta B dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} (g_6' + g_4'') \delta \beta dx_1 \quad . \quad (7.313) \end{aligned}$$

Ohne weiteres Wissen würde diese Form von  $\delta \Pi_h^{(i)}$  die Existenz von äußeren Kräften  $N_h, H_h, V_h, M_h, l_h, m_h, p_h, q_h, r_h, s_h$  nahelegen, welche die folgende virtuelle Arbeit verrichten

$$\begin{aligned} \delta W_h^{(e)} = [N_h \delta U]_{x_1=0}^{x_1=L} + [H_h \delta B]_{x_1=0}^{x_1=L} + [V_h \delta w]_{x_1=0}^{x_1=L} + [M_h \delta(-w')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ + [l_h \delta \beta]_{x_1=0}^{x_1=L} + [m_h \delta(-\beta')]_{x_1=0}^{x_1=L} \\ - \int_{x_1=0}^{x_1=L} p_h \delta U dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} q_h \delta w dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} r_h \delta B dx_1 - \int_{x_1=0}^{x_1=L} s_h \delta \beta dx_1 \quad . \quad (7.314) \end{aligned}$$

Diese virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte enthält 3 Kräfte mehr als die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte in Gleichung (7.267), nämlich die Kräfte  $l_h$ ,  $r_h$  und  $s_h$ . Nur wenn  $l_h = r_h = s_h = 0$  ist, liefert das Prinzip  $\delta W_h^{(e)} = \delta \Pi_h^{(i)}$  das Prinzip  $\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)}$ . Mit anderen Worten das Prinzip  $\delta W_{\text{eff}}^{(e)} = \delta W_{\text{eff}}^{(i)}$  ist notwendig aber nicht hinreichend für  $\delta W_h^{(e)} = \delta \Pi_h^{(i)}$ . Wenn jedoch die Kräfte  $l_h$ ,  $r_h$  und  $s_h$  nicht verschwinden, sondern beliebig vorgeschrieben werden, dann kann das Prinzip  $\delta W_h^{(e)} = \delta \Pi_h^{(i)}$  nicht dem 3-PG-Modell zugeordnet werden. Es entstehen zum Beispiel folgende Fragen wie: Welches dreidimensionale Kontinuum könnte dahinter stecken? Welche sind die grundlegenden physikalischen Gleichungen? Und welche sind die dazugehörigen Spannungen? Diese Bemerkungen machen deutlich, wie wichtig konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorien sind.

## 7.4.5 Beispiele, spezielle Randbedingungen

### Biegung ohne axiale Dehnung

Für den Balken in Abbildung 7.1 wird (vergleiche Gleichung (7.241))

$$p = 0 \Rightarrow [\Sigma_{13}]_{x_3=-c}^{x_3=c} = 0 \quad (7.315)$$

und dann folgt aus (7.284)<sub>1</sub> und (7.280)<sub>1</sub>, dass

$$N' = g_1' = 0 \quad . \quad (7.316)$$

Außerdem gelten die Randbedingungen

$$U(0) = 0 \quad , \quad N(L) = 0 \quad (7.317)$$

und aus (7.316) wird

$$N = g_1 = 0 \quad (7.318)$$

überall auf  $[0, 1]$  erhalten. Wegen (7.232) ist die Lösung (7.318) äquivalent zu

$$c_2 U' - (c_2 - c_1) B = 0 \quad . \quad (7.319)$$

Eine weitere Beziehung zwischen  $U$  und  $B$  ergibt sich aus den Gleichungen (7.278)<sub>2</sub>, (7.237) und (7.239),

$$U' - B + c_1 B'' = 0 \quad . \quad (7.320)$$

$U'$  kann zwischen den letzten zwei Gleichungen eliminiert werden:

$$c_2 B'' - B = 0 \quad . \quad (7.321)$$

Zusätzlich werden noch die Randbedingungen (vergleiche Gleichungen (7.281)<sub>2</sub>, (7.237))

$$H(0) = H(L) = 0 \Rightarrow B'(0) = B'(L) = 0 \quad (7.322)$$

angenommen und aus (7.321) und (7.320) wird gefolgert, dass

$$B = U = 0 \quad . \quad (7.323)$$

Für das betrachtete Bieungsproblem bleiben somit nur die Gleichungen (7.279) zu lösen (siehe auch (7.233), (7.238) und (7.240))

$$g_2'' + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{c_2}{c_1}EIw'''' + \frac{c_2 - c_1}{c_1}EI\beta'''' + q = 0 \quad , \quad (7.324)$$

$$g_4' + g_6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{c_2 - c_1}{c_1}w'' + \frac{c_2 - c_1}{c_1}\beta' - (c_2 - c_1)\beta'' = 0 \quad . \quad (7.325)$$

Die dazugehörigen Randbedingungen sind Gleichungen (7.282) und (7.283) zu entnehmen:

$$\text{Entweder } V = g_2' = -\frac{c_2}{c_1}EIw''' + \frac{c_2 - c_1}{c_1}EI\beta'' \quad \text{oder } w \quad , \quad (7.326)$$

$$\text{entweder } M = g_2 = -\frac{c_2}{c_1}EIw'' + \frac{c_2 - c_1}{c_1}EI\beta' \quad \text{oder } w' \quad \text{und} \quad (7.327)$$

$$\text{entweder } m = g_6 = -(c_2 - c_1)EI\beta'' \quad \text{oder } \beta' \quad (7.328)$$

müssen an  $x_1 = 0$  und  $x_1 = L$  vorgeschrieben werden.

### Der einseitig eingespannte Balken

Es werden Lösungen für den links eingespannten Balken in Abbildung 7.2 unter den bisher gemachten Annahmen und für eine konstante Querlast  $q(x_1) = q_0 = \text{konst.}$  gesucht. Für die klassischen Randbedingungen (7.324) und (7.325) gilt

$$w(0) = w'(0) = V(L) = M(L) = 0 \quad (7.329)$$

und für die nicht klassischen Randbedingungen (7.326) wird

$$m(0) = m(L) = 0 \quad (7.330)$$

gesetzt. Die Randbedingungen für  $V$ ,  $M$  und  $m$  können mittels der Formeln (7.326) bis (7.328) umformuliert werden. Insgesamt ergibt sich

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad \beta''(0) = 0 \quad , \quad \beta''(L) = 0 \quad , \quad (7.331)$$

$$-c_2w'''(L) + (c_2 - c_1)\beta''(L) = 0 \quad , \quad -c_2w''(L) + (c_2 - c_1)\beta'(L) = 0 \quad . \quad (7.332)$$

Um die nachfolgenden Ausführungen auf dimensionslose Variablen zu beziehen, werden in Übereinstimmung mit (7.170) und (7.171) folgende Definitionen eingeführt:

$$\bar{x}_1 := \frac{x_1}{L} \quad , \quad \bar{w} := \frac{w}{L} \quad , \quad \bar{b} := \frac{b}{L} \quad , \quad \bar{c} := \frac{c}{L} \quad , \quad \bar{q}_0 := \frac{q_0}{EL} \quad , \quad (7.333)$$

$$\bar{\beta} := \beta \quad , \quad \bar{q}_0^* := \frac{3\bar{q}_0}{4\bar{b}\bar{c}^3} \quad , \quad \bar{c}_1 := \frac{c_1}{L^2} \quad , \quad \bar{c}_2 := \frac{c_2}{L^2} \quad , \quad \bar{\Sigma}_{ij} := \frac{\Sigma_{ij}}{E} \quad . \quad (7.334)$$

Mit Verwendung der Notation  $()' = \frac{d()}{d\bar{x}}$  werden die dimensionslosen Formen für die Differentialgleichungen (7.324) und (7.325)

$$-\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1}\bar{w}'''' + \frac{\bar{c}_2 - \bar{c}_1}{\bar{c}_1}\bar{\beta}'''' + \bar{q}_0^* = 0 \quad , \quad (7.335)$$

$$-\bar{w}'' + \bar{\beta}' - \bar{c}_1\bar{\beta}''' = 0 \quad (7.336)$$



und die dimensionslosen Formen für die Randbedingungen (7.331) und (7.332)

$$\bar{w}(0) = 0 \quad , \quad \bar{w}'(0) = 0 \quad , \quad \bar{\beta}''(0) = 0 \quad , \quad \bar{\beta}''(1) = 0 \quad , \quad (7.337)$$

$$-\bar{c}_2 \bar{w}'''(1) + (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \bar{\beta}''(1) = 0 \quad , \quad -\bar{c}_2 \bar{w}''(1) + (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \bar{\beta}'(1) = 0 \quad (7.338)$$

gewonnen. Seien nun  $w(x_1)$  und  $\beta(x_1)$  Lösungen des betrachteten Biegeproblems, dann kann die Spannungskomponente  $\Sigma_{11}$  aus der Gleichung (7.222) berechnet werden,

$$\Sigma_{11} = E \left( -\frac{c_2}{c_1} w'' + \frac{c_2 - c_1}{c_1} \beta' \right) x_3 \quad . \quad (7.339)$$

Ein Vergleich mit der Gleichung (7.327) für  $M$  lässt erkennen, dass  $\Sigma_{11}$  auch die Formel der klassischen Mechanik

$$\Sigma_{11} = \frac{M}{I} x_3 \quad (7.340)$$

erfüllt. Demzufolge entsprechen die Spannungskomponenten  $\Sigma_{13}$  und  $\Sigma_{33}$  denjenigen der klassischen Mechanik. Das kann sofort durch Einsetzen von (7.340) in die Gleichgewichtsbedingung (7.229) verifiziert werden. Daraus kann  $\Sigma_{13}$  berechnet werden und die Lösung kann in (7.230) verwendet werden um daraus  $\Sigma_{33}$  zu erhalten. Da die Spannungen  $\mu_{ijk}$  hier als innere Variablen angesehen werden, brauchen diese nicht weiter betrachtet zu werden.

## Biegelinien

Ein Blick auf das KG-Modell in Gleichung (1.4) und das 3-PG-Modell in Gleichung (1.5) legt die Idee nahe, das KG-Modell als Spezialfall des 3-PG-Modells für  $c_1 \rightarrow 0$  zu interpretieren. In Bröse et al. [8] wurde gezeigt, dass eine solche Auffassung im Allgemeinen falsch ist. Der Grund liegt darin, dass beide Modelle durch partielle Differentialgleichungen definiert sind. Die zugehörigen Randbedingungen sind auch Teil der konstitutiven Gesetze und diese sind im Allgemeinen für die beiden Modelle unterschiedlich. Ähnliches gilt zwischen dem 3-PG-Modell und der klassischen Elastizität im Grenzfall  $c_1 \rightarrow c_2$ . Dennoch ist es interessant für den betrachteten eingespannten Balken die Lösungen des Biegeproblems nach dem 3-PG-Modell, dem KG-Modell und der klassischen Elastizität miteinander zu vergleichen. Insbesondere stellen sich die Fragen, ob z.B. die Biegelinien des 3-PG-Modells für  $c_1 \rightarrow 0$  konvergieren und wenn ja, ob die Grenzkurven mit den Kurven infolge des KG-Modells-A oder des KG-Modells-NA zusammenfallen. Konvergieren die Grenzkurven für  $c_1 \rightarrow c_2$  und wenn ja, stimmen die Grenzkurven mit den Kurven der klassischen Elastizität überein? Der beste Weg zur Beantwortung dieser Fragen ist es, analytische Lösungen des Systems (7.335) - (7.338) auszuarbeiten. Dazu wird die Gleichung (7.335) nach  $\bar{\beta}'''$  aufgelöst

$$\bar{\beta}''' = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \bar{w}'''' - \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \bar{q}^* \quad (7.341)$$

und das Ergebnis in Gleichung (7.336) eingesetzt um

$$\bar{\beta}' = \bar{w}'' + \bar{c}_1 \bar{\beta}''' = \bar{w}'' + \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_2}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \bar{w}'''' - \frac{\bar{c}_2^2}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \bar{q}^* \quad \Rightarrow \quad (7.342)$$

$$\bar{\beta}'' = \bar{w}''' + \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_2}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \bar{w}'''' \quad \Rightarrow \quad (7.343)$$

$$\bar{\beta}''' = \bar{w}'''' + \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_2}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \bar{w}'''' \quad (7.344)$$

zu erhalten. Durch Substitution der letzten Gleichung in Gleichung (7.341) folgt:

$$\bar{c}_2 \bar{w}'''' - \bar{w}'''' + \bar{q}^* = 0 \quad . \quad (7.345)$$

Die zugehörigen Randbedingungen ergeben sich aus den Randbedingungen (7.337), (7.338) mit Unterstützung der Ergebnisse (7.343) und (7.344):

$$\bar{w}(0) = 0 \quad , \quad \bar{w}'(0) = 0 \quad , \quad (7.346)$$

$$[\bar{c}_2 \bar{c}_1 \bar{w}'''' + (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \bar{w}''']_{\bar{x}_1=0} = 0 \quad , \quad [\bar{c}_2 \bar{c}_1 \bar{w}'''' + (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \bar{w}''']_{\bar{x}_1=1} = 0 \quad (7.347)$$

$$[-\bar{w}'''' + \bar{c}_2 \bar{w}''''']_{\bar{x}_1=1} = 0 \quad , \quad [-\bar{w}'' + \bar{c}_2 \bar{w}'''' - \bar{c}_1 \bar{q}^*]_{\bar{x}_1=1} = 0 \quad . \quad (7.348)$$

Um eine Differentialgleichung auch für  $\bar{\beta}$  zu gewinnen, wird Gleichung (7.336) zweimal nach  $\bar{x}_1$  abgeleitet:

$$-\bar{w}'''' + \bar{\beta}'''' - \bar{c}_1 \bar{\beta}'''' = 0 \quad . \quad (7.349)$$

Durch Elimination von  $\bar{w}''''$  mit Hilfe von Gleichung (7.335) entsteht die Differentialgleichung für  $\bar{\beta}$

$$\bar{c}_2 \bar{\beta}'''' - \bar{\beta}'''' + \bar{q}^* = 0 \quad . \quad (7.350)$$

Neben den zwei Randbedingungen für  $\bar{\beta}$  in den Gleichungen (7.337)<sub>3,4</sub> können zwei weitere aus (7.338) gewonnen werden, in dem  $\bar{w}''$  und  $\bar{w}'''$  in diesen Gleichungen mit Hilfe von Gleichung (7.336) eliminiert werden. Insgesamt werden für  $\bar{\beta}$  die Randbedingungen

$$\bar{\beta}''(0) = 0 \quad , \quad \bar{\beta}''(1) = 0 \quad , \quad [\bar{c}_2 \bar{\beta}'''' - \bar{\beta}''']_{\bar{x}_1=1} = 0 \quad , \quad [\bar{c}_2 \bar{\beta}'''' - \bar{\beta}']_{\bar{x}_1=1} = 0 \quad (7.351)$$

erhalten. Die Randbedingungen  $w(0) = w'(0) = 0$  enthalten zu niedrige Ableitungsordnungen um aus den existierenden Beziehungen weitere Randbedingungen für  $\bar{\beta}$  zu kreieren. Da die Differentialgleichung (7.350) linear fünfter Ordnung ist, kann die Lösung von  $\bar{\beta}$  nur bis auf eine unbekannte Konstante bestimmt werden. Diese Konstante ist jedoch unerheblich, weil nur  $\beta'$  in den Gleichungen des 3-PG-Modells benutzt wird (vergleiche Gleichung (7.218)).

Die Lösungen  $\bar{w}$  und  $\bar{\beta}$  zu den obigen Gleichungen lauten

$$\bar{w}(\bar{x}_1) = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \bar{x}_1 + \bar{A}_3 \bar{x}_1^2 + \bar{A}_4 \bar{x}_1^3 + \frac{\bar{q}^*}{24} \bar{x}_1^4 + \bar{A}_5 e^{\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} + \bar{A}_6 e^{-\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} \quad , \quad (7.352)$$

$$\bar{\beta}(\bar{x}_1) = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 \bar{x}_1 + \bar{D}_3 \bar{x}_1^2 + \frac{\bar{q}^*}{6} \bar{x}_1^3 + \bar{D}_4 e^{\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} + \bar{D}_5 e^{-\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} \quad , \quad (7.353)$$

mit den Integrationskonstanten für die Funktion  $\bar{w}(x_1)$

$$\bar{A}_1 = \frac{(\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \sqrt{\bar{c}_2} \bar{q}^*}{e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 1} \left( 1 + e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} \right) \quad , \quad \bar{A}_4 = -\frac{\bar{q}^*}{6} \quad , \quad (7.354)$$

$$\bar{A}_2 = -(\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \bar{q}^* \quad , \quad \bar{A}_5 = -\frac{(\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \sqrt{\bar{c}_2} \bar{q}^*}{e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 1} \quad , \quad (7.355)$$

$$\bar{A}_3 = \frac{[1 + 2(\bar{c}_2 - \bar{c}_1)] \bar{q}^*}{4} \quad , \quad \bar{A}_6 = \frac{(\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \sqrt{\bar{c}_2} \bar{q}^*}{e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 1} e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} \quad . \quad (7.356)$$

und den Integrationskonstanten für die Funktion  $\bar{\beta}(\bar{x}_1)$

$\bar{D}_1$  : nicht bestimmbar aus den Randbedingungen,

$$\bar{D}_2 = \frac{\bar{q}^*}{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}} \left( e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 1 \right)} \left[ \bar{c}_2 \left( \frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}} e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 4e^{\frac{1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - \frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{c}_2}} e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} + 4e^{\frac{1}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{c}_2}} \right] , \quad (7.357)$$

$$\bar{D}_3 = -\frac{\bar{q}^*}{2} , \quad \bar{D}_4 = -\frac{\bar{q}^*}{\frac{1}{\bar{c}_2} \left( e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 1 \right)} , \quad \bar{D}_5 = \frac{\bar{q}^* e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}}}{\frac{1}{\bar{c}_2} \left( e^{\frac{2}{\sqrt{\bar{c}_2}}} - 1 \right)} . \quad (7.358)$$

Im restlichen Teil der Arbeit wurde  $\bar{D}_1 = 0$  gesetzt.

Es ist jetzt nicht schwer zu bestätigen, dass

$$\lim_{\bar{c}_1 \rightarrow 0} \bar{A}_i = \bar{K}_i , \quad (7.359)$$

wobei  $\bar{K}_i$  in den Gleichungen (7.179) - (7.181) gegeben sind. Damit konvergiert die Biegelinie  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  des 3-PG-Modells in Gleichung (7.352) für  $\bar{c}_1 \rightarrow 0$  zur Biegelinie von KG-Modell-NA in Gleichung (7.174). Ferner folgt sofort aus den Gleichungen (7.354) - (7.356), dass

$$\lim_{\bar{c}_1 \rightarrow \bar{c}_2} (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_5, \bar{A}_6) = (0, 0, 0, 0) , \quad \lim_{\bar{c}_1 \rightarrow \bar{c}_2} (\bar{A}_3, \bar{A}_4) = \left( \frac{\bar{q}^*}{4}, -\frac{\bar{q}^*}{6} \right) . \quad (7.360)$$

Damit konvergiert die Biegelinie  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  des 3-PG-Modells in Gleichung (7.352) für  $\bar{c}_1 \rightarrow \bar{c}_2$  tatsächlich zur Biegelinie  $\bar{w}_{kl.}(\bar{x}_1)$  der klassischen Elastizität (siehe Gross et al. [26], Tabelle 4.3)

$$\bar{w}_{kl.}(\bar{x}_1) = \frac{\bar{q}^*}{24} (6\bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^4) . \quad (7.361)$$

Diese Verhältnisse sind in Abbildung 7.5 graphisch dargestellt. Die Abbildung zeigt Biegelinien  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  des 3-PG-Modells, parametrisiert mit  $\bar{c}_1$  und für  $\bar{c}_2 = \text{konst.}$ ,  $\bar{q}^* = \text{konst.}$ . Wie zu sehen ist, werden alle Kurven des 3-PG-Modells von oben durch die Lösung der klassischen Elastizität und von unten durch die Lösung infolge KG-Modell-NA begrenzt. Bemerkenswert ist, dass die zugehörigen Kurven  $\bar{\beta}(\bar{x}_1)$  unabhängig von  $\bar{c}_1$  sind. Analytisch kann dies anhand der Lösung  $\bar{\beta}(\bar{x}_1)$  in Gleichung (7.353) und den Gleichungen (7.357), (7.358) für die Konstanten  $\bar{D}_i$ , die unabhängig von  $\bar{c}_1$  sind, gesehen werden. Graphisch sind diese Verhältnisse in Abbildung 7.6 veranschaulicht, wo alle  $\beta$  Verläufe für die Biegelinien in Abbildung 7.5 zusammenfallen. Es sei angemerkt, dass die Biegelinien des 3-PG-Modells mit zunehmenden Werten von  $\bar{c}_1$  und  $\bar{c}_2 = \text{konst.}$  streng monoton zur klassischen Lösung konvergieren, wie in Abbildung 7.5 zu sehen ist. Im Falle  $\bar{c}_1 = \text{konst.}$  und zunehmenden Werten von  $\bar{c}_2$  ist der Trend umgekehrt (siehe Abbildung 7.7). Darüber hinaus variieren die Kurven  $\bar{\beta}(\bar{x}_1)$  mit  $\bar{c}_2$  (siehe Abbildung 7.8), im Unterschied zu  $\bar{c}_2 = \text{konst.}$  in Abbildung 7.6.

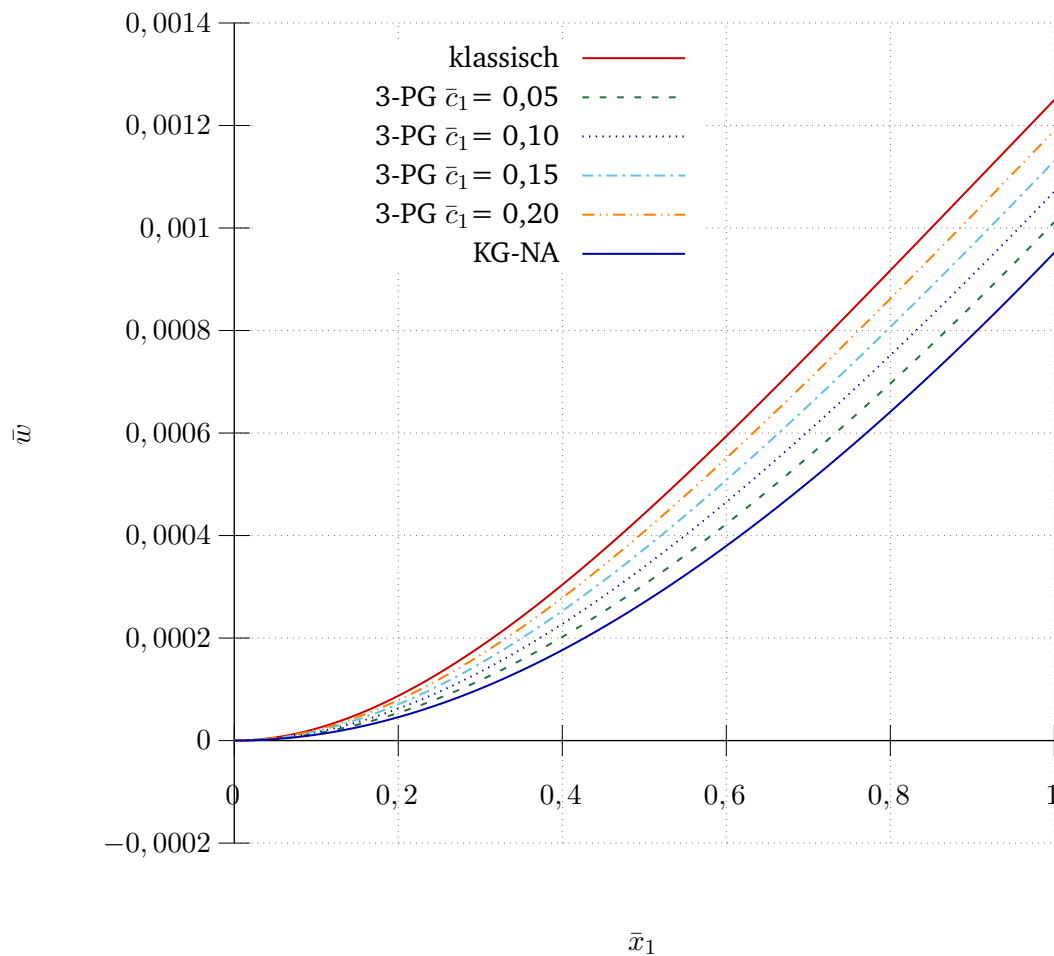


Abbildung 7.5: Biegelinien  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  des 3-PG-Modells für verschiedene Werte von  $\bar{c}_1$  und  $\bar{q}^* = \text{konst.} = 0,01$ ,  $\bar{c}_2 = \text{konst.} = 0,25$ .

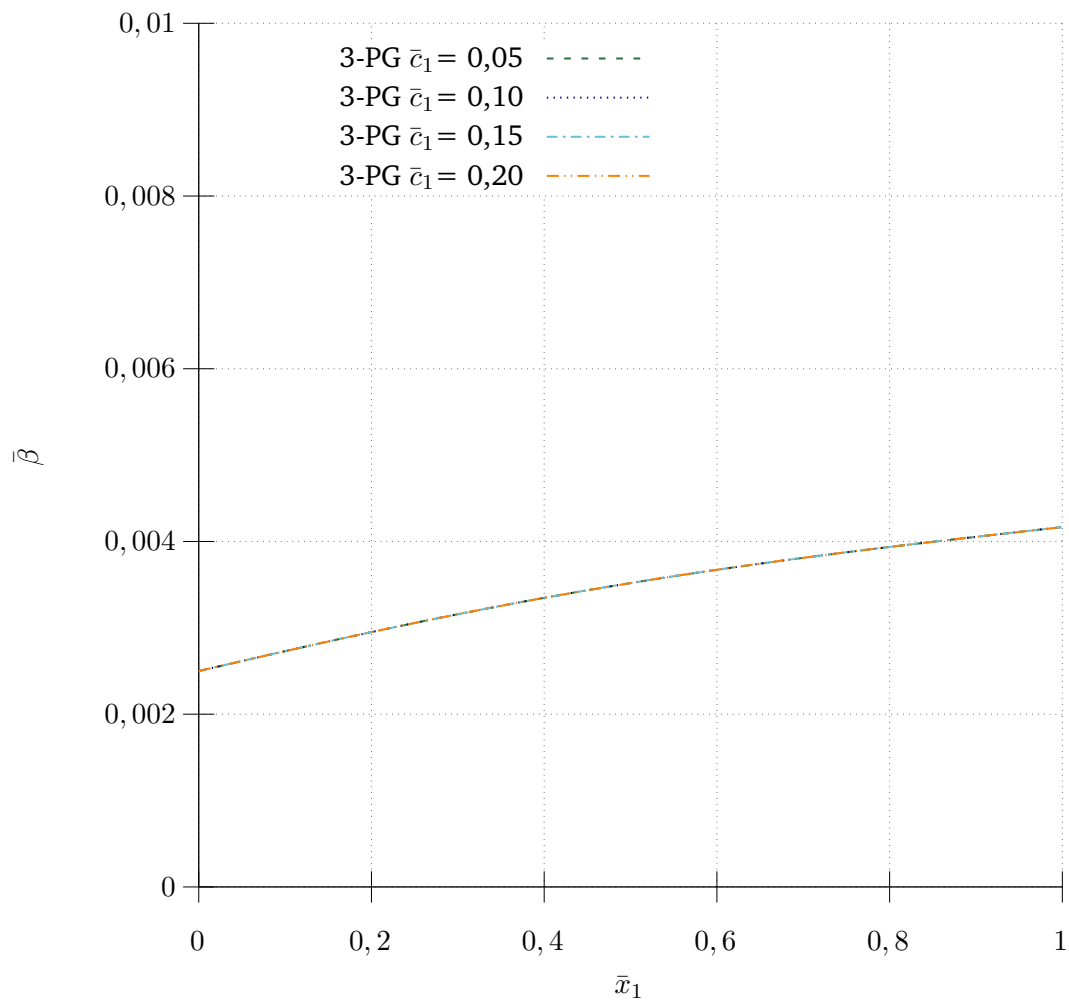


Abbildung 7.6: Alle Kurven  $\bar{\beta}(\bar{x}_1)$ , die zu den Kurven  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  in Abbildung 7.5 gehören, fallen zusammen.

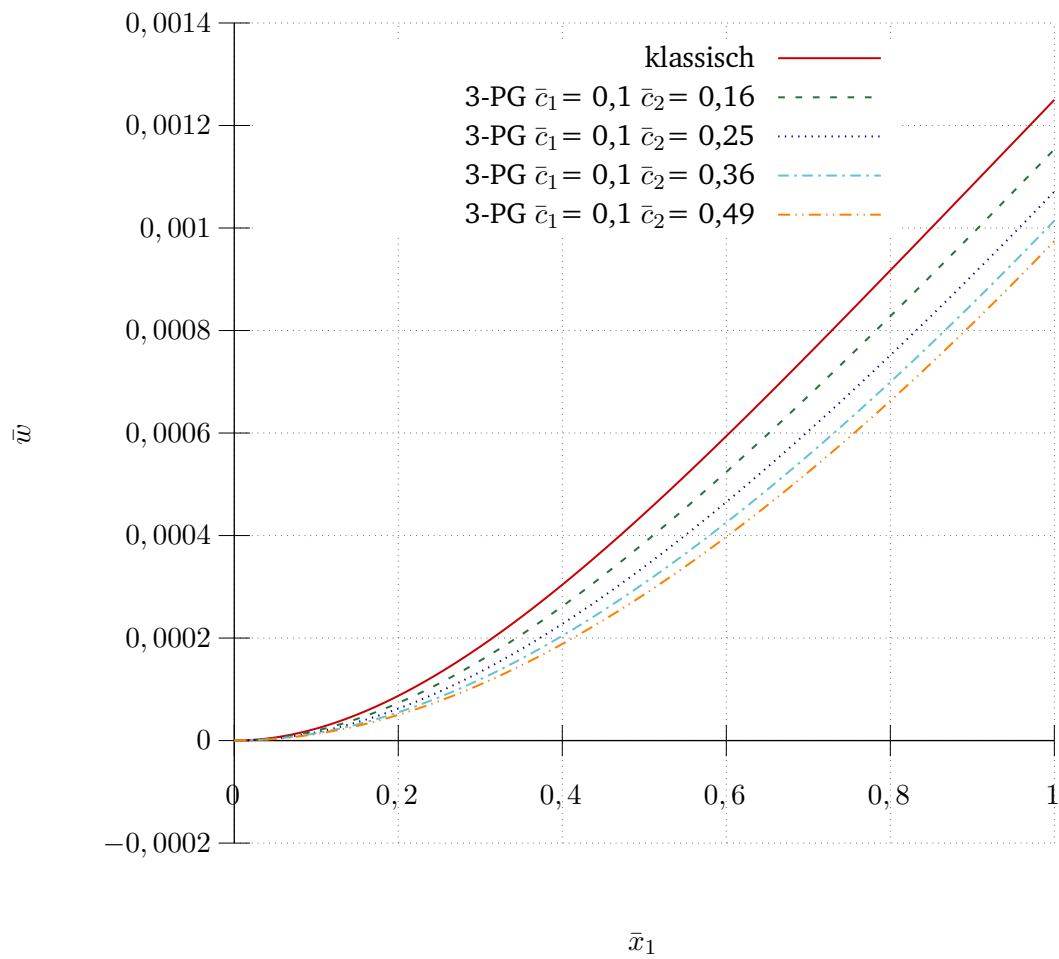


Abbildung 7.7: Biegelinien  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  des 3-PG-Modells für verschiedene Werte von  $\bar{c}_2$  und  $\bar{q}^* = \text{konst.} = 0,01$ ,  $\bar{c}_1 = \text{konst.} = 0,01$ .

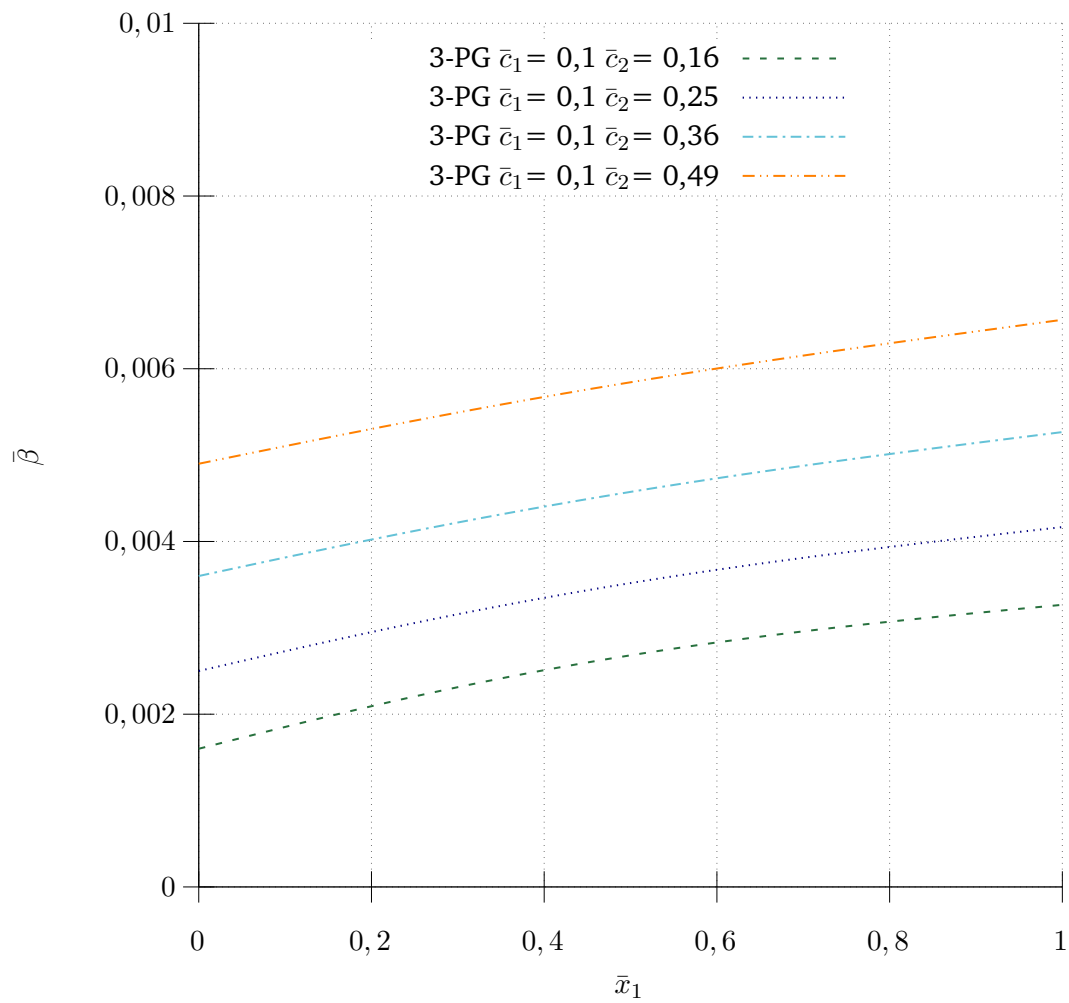


Abbildung 7.8: Kurven  $\bar{\beta}(\bar{x}_1)$ , die zu den Biegelinien  $\bar{w}(\bar{x}_1)$  in Abbildung 7.7 gehören.

## 7.5 Vergleich mit FE-Rechnungen

Die Euler-Bernoulli-Balkentheorie wurde ursprünglich für klassische isotrope Elastizität entwickelt, um das Verhalten schlanker Balkenstrukturen mit verträglichem mathematischen Aufwand zu berechnen. Wie zu sehen war, sind die kinematischen Annahmen der Euler-Bernoulli-Vorstellung des Balkens gleichbedeutend mit dem Verhalten einer anisotrop elastischen Approximation des isotrop elastischen Kontinuums. Die Euler-Bernoulli-Idealisierung wurde im Rahmen der Promotionsarbeit auf die Materialgleichung des 3-PG-Modells verallgemeinert. Es ist sicherlich hochinteressant zu ermitteln, wie gut diese Idealisierung im Vergleich zu Kontinuumselastizität ist.

Da im letzteren Fall keine analytischen Lösungen möglich sind, wird ein Vergleich anhand von FE-Rechnungen durchgeführt. Um die erforderliche schwache Form für die FE-Modellierung des 3-PG-Modells herzuleiten, werden die Gleichgewichtsbedingungen (6.22) mit  $\delta u_k$  und die Feldgleichungen (6.44) mit  $\delta \Psi_{ij}$  multipliziert und anschließend jeweils über das Volumen  $V$  integriert:

$$\int_V \partial_j \Sigma_{jk} \delta u_k dV = 0 \quad , \quad (7.362)$$

$$\int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk}) \delta \Psi_{jk} dV = 0 \quad . \quad (7.363)$$

Nach Addition dieser Gleichungen, Anwendung partieller Integration und des Gauß'schen Satzes, sowie Berücksichtigung der Randbedingungen (4.56) und (4.57) ergibt sich

$$\int_V \Sigma_{jk} (\partial_j \delta u_k) dV - \int_V \sigma_{jk} \delta \Psi_{jk} dV + \int_V \mu_{ijk} (\partial_i \delta \Psi_{jk}) dV - \int_{\partial V^t} t_k^o (\delta u_k) dS - \int_{\partial V^T} T_{jk}^o \delta \Psi_{jk} dS = 0 \quad . \quad (7.364)$$

Mit  $t^o$  und  $T^o$  werden die gegebenen Traktionen auf  $\partial V^t$  und  $\partial V^T$  bezeichnet. Gleichung (7.364) ist die schwache Form der FE-Formulierung. Für das weitere Vorgehen, müssen in (7.364) Elastizitätsgesetze für  $\Sigma$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$  eingesetzt werden,  $V$  durch Finite-Elemente und alle kinematischen Variablen durch Ansatzfunktionen approximiert werden. Für die FE-Modellierung wird  $\mathbb{C}$  in den Elastizitätsgesetzen (6.8) - (6.13) als isotroper Tensor vierter Stufe angenommen, der durch die Querkontraktionszahl  $\nu$  und den Elastizitätsmodul  $E$  bestimmt wird. Bei diesem Ansatz werden  $u_k$  und  $\Psi_{jk}$  als unabhängige Freiheitsgrade betrachtet und da die konstitutive Theorie linear ist, ergibt sich insgesamt ein lineares Zweifeldproblem. Weitere Details zur FE-Diskretisierung und zum resultierenden Gleichungssystem finden sich in Bröse et al. [7]. Zwei- und dreidimensionale FE-Codes der skizzierten FE-Modellierung wurden jeweils in Frischmann [25] und Bröse et al. [7] erstellt.

Alle analytischen und FE-Berechnungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf den Balken in Abbildung 7.2. Die Berechnungen mit dem dreidimensionalen FE-Code haben gezeigt, dass die Querkontraktionszahl  $\nu$  für das betrachtete Problem keinen Einfluss hat. Dagegen hat  $\nu$  bei den entsprechenden zweidimensionalen FE-Berechnungen einen merklichen Einfluss. Für den Fall  $\nu = 0$  stimmen die Ergebnisse der drei- und der zweidimensionalen Formulierung praktisch überein. Um einen ersten Eindruck über mögliche Abweichungen zwischen analytischen und FE-Berechnungen zu erhalten, werden im Folgenden alle FE-Berechnungen mit dem zweidimensionalen Code und  $\nu = 0$  durchgeführt. Das verwendete FE-Netz besteht aus insgesamt 1280 Elementen (8 Elemente in Höhenrichtung und 160 Elemente in Längsrichtung). Die Elemente sind 9 knotig (Quadrangles) mit quadratischen Ansatzfunktionen (volle Integration). Mit zunehmender Anzahl der Elemente ändert sich das Ergebnis kaum (keine Netzabhängigkeit). Die Länge  $L$ , die Höhe  $2c$  und die Breite  $2b$  des Balkens betragen jeweils  $L = 20\text{mm}$ ,  $2c = 0,6\text{mm}$  und  $2b = 0,4\text{mm}$ . Für die Materialparameter



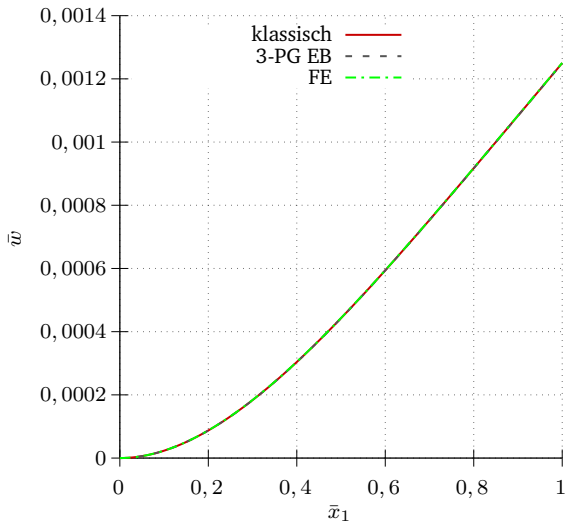
---

$E$  und  $\nu$  wurden die Werte  $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$  und  $\nu = 0$  gewählt, während für die äußere Belastung  $q_0 = 1,8 \cdot 10^{-3} N/mm$  angenommen wurde. Die Abbildungen 7.9 und 7.10 zeigen für  $c_2 = 0,4096 mm^2$  bzw.  $c_2 = 4,096 mm^2$  und für verschiedene  $c_1$ -Werte Biegelinien, die jeweils mit FE und Euler-Bernoulli-Theorie berechnet wurden.

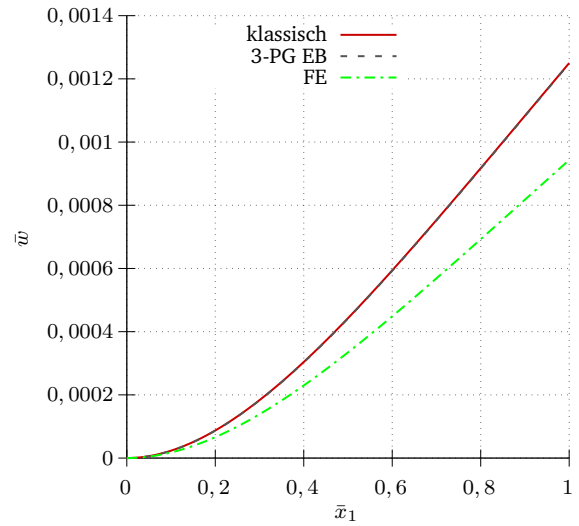
Die roten Linien stellen die klassische Euler-Bernoulli-Lösung dar, die gestrichelten schwarzen Linien die gradientelastische Euler-Bernoulli-Lösung und die grünen Linien die gradientelastische FE-Lösung. Es ist zu erkennen, dass für  $c_1 \rightarrow c_2$  alle Lösungen praktisch zusammenfallen. Die wichtigste Beobachtung ist jedoch, dass im Allgemeinen große Diskrepanzen zwischen den analytischen (Euler-Bernoulli) und den FE-Lösungen bestehen. Genauer gesagt sind die FE-Lösungen viel steifer als die analytischen Lösungen. Diese Diskrepanzen nehmen mit abnehmenden  $c_1$ -Werten zu, während  $c_2$  nur einen geringen Einfluss hat. Unter der Annahme, dass alle Berechnungen fehlerfrei sind, gibt es zwei mögliche Ursachen für diese Abweichungen: Entweder ist die angenommene Euler-Bernoulli-Kinematik für den gradientelastischen Balken keine gute Idealisierung oder die verwendete FE-Modellierung (Art der Elemente und/oder Integration) ist für die betrachtete Gradientenelastizität nicht geeignet.

Im Fall klassischer Elastizität und biegeartiger Belastungen sind numerisch bedingte Versteifungen in Modellvorhersagen als "shear locking" bekannt. Es wäre denkbar, dass ein gradientenelastizitätsspezifisches "shear locking" die Ursache für die Versteifungen ist. Die Tatsache jedoch, dass das verwendete Variationsprinzip aus effektiven und nicht effektiven Anteilen besteht und dass nur die effektiven Anteile für die Herleitung der Lösungen benutzt werden, legt nahe anzunehmen, dass die Euler-Bernoulli-Kinematik der Grund für die großen Diskrepanzen zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen sein könnte. Sollte sich dies bewahrheiten, dann könnte die Kinematik des Timoschenko-Balkens zu besseren analytischen Ergebnissen führen. Die Beantwortung dieser Fragen erfordert jedoch weiterführende Untersuchungen, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

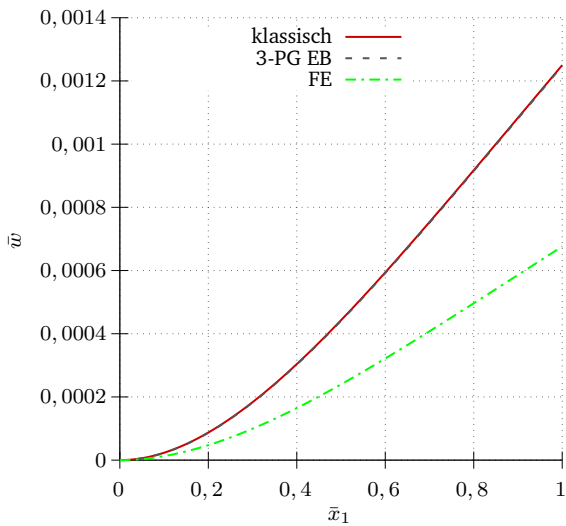
(a)  $\bar{c}_1 = 0,001023$



(b)  $\bar{c}_1 = 0,00075$



(c)  $\bar{c}_1 = 0,000512$



(d)  $\bar{c}_1 = 0,000256$

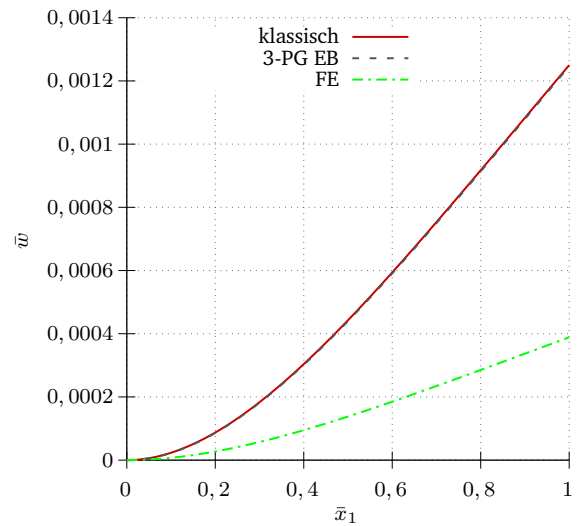
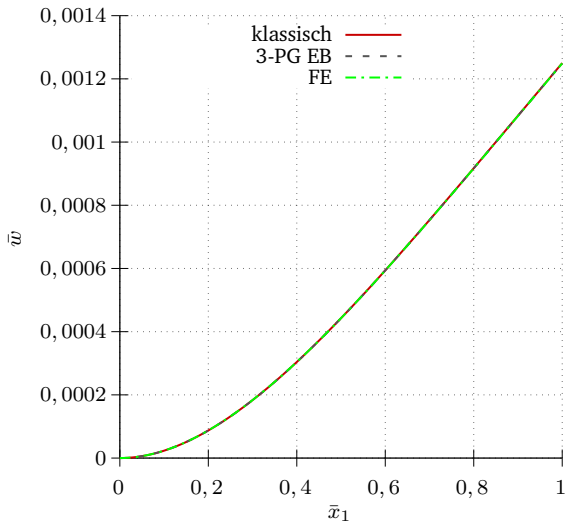
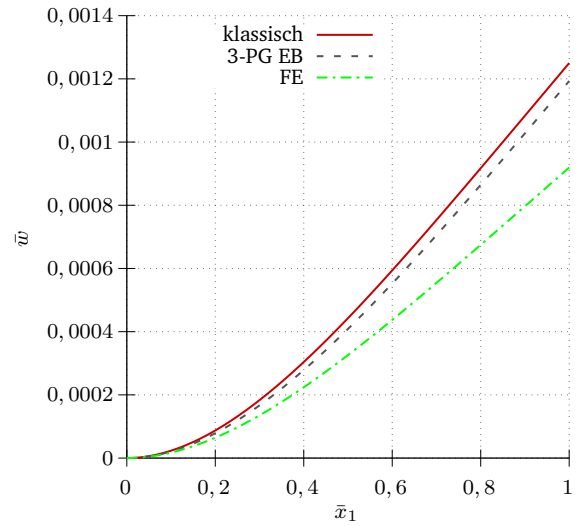


Abbildung 7.9: Graphische Darstellung der Euler-Bernoulli und FE-Lösungen für  $\bar{c}_2 = 0,001024$  und unterschiedliche  $\bar{c}_1$ -Werte.

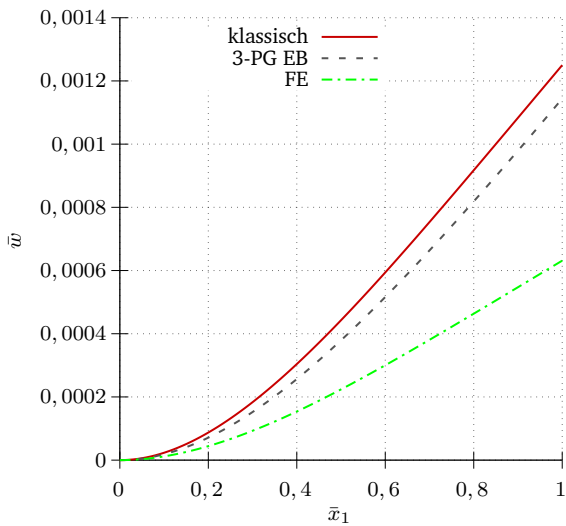
(a)  $\bar{c}_1 = 0,01023$



(b)  $\bar{c}_1 = 0,0075$



(c)  $\bar{c}_1 = 0,00512$



(d)  $\bar{c}_1 = 0,00256$

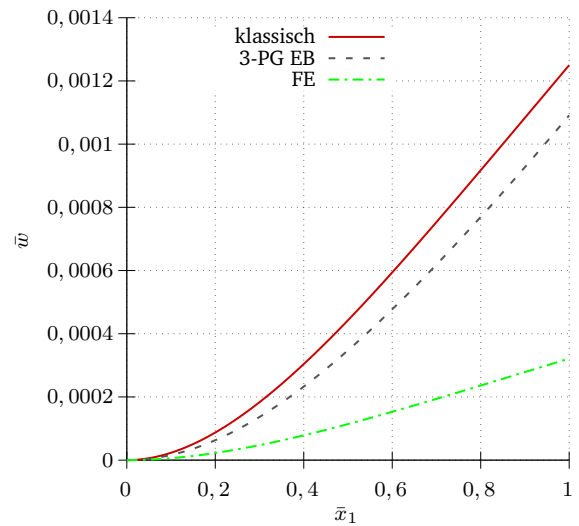


Abbildung 7.10: Graphische Darstellung der Euler-Bernoulli und FE-Lösungen für  $\bar{c}_2 = 0,01024$  und unterschiedliche  $\bar{c}_1$ -Werte.



---

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

---

Die Modelle (1.4) (KG-Modell) und (1.5) (3-PG-Modell) sind Prototypen der expliziten und der impliziten Gradientenelastizität auf Basis der Laplace-Ableitungen der Dehnung und der Spannung. Sie sind in der Gradientenelastizität die Gegenstücke des Kelvin- und des 3-Parameter-Festkörpers der linearen Viskoelastizität. Die beiden Gradientenelastizitätsmodelle wurden in der vorliegenden Arbeit auf zwei verschiedene Arten hergeleitet. Zum einen wurde das KG-Modell als Grenzfall einer mikromorphen, rotationsfreien Elastizität aufgestellt. Dieser Weg ist neu in der Literatur und wurde erstmals im Rahmen der Dissertation entwickelt. Er ist wesentlich einfacher als der entsprechende Weg, den Mindlin zur Ableitung seiner Gradientenelastizität aus der mikromorphen Elastizität beschritt. Andererseits wurde das KG-Modell als rheologisches Modell im Rahmen einer nicht konventionellen Thermodynamik aufgestellt. Diese Methode ist von Vorarbeiten im Fachgebiet Kontinuumsmechanik übernommen. Das 3-PG-Modell wurde einerseits als Sonderfall rotationsfreier mikromorpher Elastizität und andererseits als rheologisches Modell im Rahmen der nicht konventionellen Thermodynamik hergeleitet. Auch diese Vorgehensweisen wurden aus entsprechenden Vorarbeiten im Fachgebiet Kontinuumsmechanik übernommen.

Aufbauend auf den bereitgestellten Modellformulierungen wurden schließlich konsistente Euler-Bernoulli-Balkentheorien entwickelt. Ausgehend von den Prinzipien der virtuellen Arbeit wurde die Definition der Schnittkräfte motiviert und die Grundgleichungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte hergeleitet.

Für das KG-Modell wurden zwei alternative Variationsformulierungen verwendet und bewertet. Die eine ist die übliche Form des Prinzips der virtuellen Arbeit und wurde aus Vorarbeiten des Fachgebiets Kontinuumsmechanik übernommen. Die andere wurde aus den Gleichgewichtsbedingungen für das gradientelastische Kontinuum abgeleitet. Darüber hinaus wurde in der Arbeit bewiesen, dass die zwei Vorgehensweisen äquivalent zueinander sind. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind neu in der Literatur und wurden zum ersten Mal im Rahmen der Dissertation erworben.

In ähnlicher Weise wurden für das 3-PG-Modell zwei alternative und äquivalente variationelle Formulierungen einer konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorie untersucht und bewertet. Auch diese Arbeiten zu einer konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorie für das 3-PG-Modell sind neue Formulierungen und wurden im Rahmen der Dissertation erstmals durchgeführt.

Am Beispiel eines eingespannten Balkens unter Streckenlast wurden die konsistenten Euler-Bernoulli-Balkentheorien für das 3-PG-, das KG-Modell und die klassische Elastizität miteinander verglichen. Die ermittelten Biegelinien belegen, dass der sogenannte Gradienteneffekt auftritt, d.h. die Gradientenelastizität führt zu einem steiferen Verhalten als die klassische Elastizität. Insbesondere liegen alle Biegelinien infolge des 3-PG-Modells unterhalb der Biegelinie infolge der klassischen Elastizität und oberhalb der Biegelinie infolge des KG-Modells. Mit anderen Worten ist der Gradienteneffekt beim KG-Modell stärker ausgeprägt als beim 3-PG-Modell. Schließlich zeigen die für das 3-PG-Modell nach der Euler-Bernoulli-Theorie berechneten Biegelinien Abweichungen von den entsprechenden Biegelinien aus FE-Berechnungen. Diese Abweichungen können in Abhängigkeit von den Materialparametern signifikant werden. Für die Abweichungen gibt es zwei mögliche Erklärungen. Entweder ist der Euler-Bernoulli-Ansatz keine gute Annahme für gradientelastische Balken oder die verwendete FE-Formulierung sollte verbessert werden. Da die Anwendung der Gradientenelastizität bei praktischen Balkenproblemen derzeit von großem Interesse ist, sollten die genauen Ursachen und mögliche Lösungen in zukünftigen Arbeiten untersucht werden. Unabhängig von den genannten Abweichungen ist

---

eine sorgfältige Untersuchung der Euler-Bernoulli-Balkentheorie sehr wichtig, um die genauen Auswirkungen dieser idealisierten kinematischen Annahmen zu abzuschätzen.

---

## Literatur

---

- [1] B. Akgöz und Ö. Civalek. „Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on strain gradient elasticity theory“. In: *Archive of Applied Mechanics* 82(3) (2012), S. 423–443.
- [2] H.-D. Alber u. a. „Non-Conventional Thermodynamics and Models of Gradient Elasticity“. In: *Entropy* 20.3 (2018), S. 179.
- [3] B. S. Altan und E. C. Aifantis. „On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity“. In: *Scripta Metall. Mater.* 26 (1992), S. 319–324.
- [4] R. Ansari u. a. „Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory“. In: *Composite Structures* 100 (2013), S. 385–397.
- [5] O. A. Bauchau und J. I. Craig. „Structural analysis: with applications to aerospace structures“. In: *Springer Science & Business Media* 163 (2009).
- [6] L. Brand. *Vector and tensor analysis*. Wiley, 1947.
- [7] C. Broese, J. Frischmann und Ch. Tsakmakis. „Mode-I and Mode-II Crack Tip Fields in Implicit Gradient Elasticity Based on Laplacians of Stress and Strain. Part III: Numerical Simulations“. In: *Nanomechanics – Theory and Application*. Hrsg. von Alexander V. Vakhrushev. London, UK: InTechOpen, 2020.
- [8] C. Broese, S. Papargyri-Beskou und Ch. Tsakmakis. „Comparison of Laplacian based explicit and implicit gradient elasticity with reference to one-dimensional problems in statics and dynamics“. In: *European Journal of Mechanics/A Solids* 88 (2021), S. 104270.
- [9] C. Broese, Ch. Tsakmakis und D. Beskos. „Gradient elasticity based on Laplacians of stress and strain“. In: *Journal of Elasticity* 131 (2018), S. 39–74.
- [10] C. Broese, Ch. Tsakmakis und D. Beskos. „Mindlin’s micro-structural and gradient elasticities and their thermodynamics“. In: *Journal of Elasticity* (2016).
- [11] C. Broese, Ch. Tsakmakis und D. Beskos. „Mindlin’s micro-structural and gradient elasticities and their thermodynamics (Erratum)“. In: *Journal of Elasticity* (2016).
- [12] C. Broese u. a. „Equivalent Formulations of Euler–Bernoulli Beam Theory for a Simple Gradient Elasticity Law“. In: *Journal of Engineering Mechanics* 149.1 (2023), S. 04022081.
- [13] S. Ceballes u. a. „Nonlocal elasticity and boundary condition paradoxes: a review“. In: *Journal of Nanoparticle Research* 23(3) (2021), S. 1–27.
- [14] B. D. Coleman. „Thermodynamics of materials with memory“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 17.1 (1964), S. 1–46.
- [15] B. D. Coleman und W. Noll. „The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity“. In: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer, 1974, S. 145–156.
- [16] A. M. Dehrouyeh-Semnani und M. Nikkhah-Bahrami. „A discussion on incorporating the Poisson effect in microbeam models based on modified couple stress theory“. In: *International Journal of Engineering Science* 86 (2015), S. 20–25.

- 
- [17] J. E. Dunn. „Interstitial working and a nonclassical continuum thermodynamics“. In: *New perspectives in thermodynamics*. Springer, 1986, S. 187–222.
- [18] J. E. Dunn und J. Serrin. „On the thermomechanics of interstitial working“. In: *The Breadth and Depth of Continuum Mechanics*. Springer, 1986, S. 705–743.
- [19] F. Ebrahimi, M. R. Barati und A. Dabbagh. „A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates“. In: *International Journal of Engineering Science* 107 (2016), S. 169–182.
- [20] M. Eltaher, M. Khater und S. A. Emam. „A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations and wave propagation of nanoscale beams“. In: *Applied Mathematical Modelling* 40(5-6) (2016), S. 4100–4128.
- [21] A. C. Eringen. „A unified theory of thermomechanical materials“. In: *International Journal of Engineering Science* 4.2 (1966), S. 179–202.
- [22] A. C. Eringen. *Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] J. Fernández-Sáez u. a. „Bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: a paradox resolved“. In: *International Journal of Engineering Science* 99 (2016), S. 107–116.
- [24] S. Forest und R. Sievert. „Nonlinear microstrain theories“. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), S. 7224–7245.
- [25] J. Frischmann. „Bruchmechanische Untersuchungen für ein elastisches, homogenes und symmetrisches mikromorphes Kontinuum“. Diss. TU Darmstadt, 2019.
- [26] D. Gross u. a. *Technische Mechanik: Band 2: Elastostatik*. Springer, 2007.
- [27] M. Gutkin und E. Aifantis. „Dislocations in the theory of gradient elasticity“. In: *Scripta Materialia* 40 (1999), S. 559–566.
- [28] A. Janečka, V. Průša und K. R. Rajagopal. „Euler-Bernoulli type beam theory for elastic bodies with nonlinear response in the small strain range“. In: *Archives of Mechanics* 68(1) (2016), S. 3–25.
- [29] S. Kong u. a. „Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory“. In: *International Journal of Engineering Science* 47.4 (2009), S. 487–498.
- [30] C. C. Koutsoumaris, K. Eptainmeros und G. Tsamasphyros. „A different approach to Eringen’s nonlocal integral stress model with applications for beams“. In: *International Journal of Solids and Structures* 112 (2017), S. 222–238.
- [31] D. C. C. Lam u. a. „Experiments and theory in strain gradient elasticity“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51.8 (2003), S. 1477–1508.
- [32] K. A. Lazopoulos und A. K. Lazopoulos. „Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams“. In: *European Journal of Mechanics-A / Solids* 29(5) (2010), S. 837–843.
- [33] S. R. Li und R. C. Batra. „Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler-Bernoulli beams“. In: *Composite Structures* 95 (2013), S. 5–9.
- [34] X.-F. Li, B.-L. Wang und K. Y. Lee. „Size effects of the bending stiffness of nanowires“. In: *Journal of applied physics* 105.7 (2009).
- [35] X. Liang, S. Hu und S. Shen. „A new Bernoulli-Euler beam model based on a simplified strain gradient elasticity theory and its application“. In: *Composite structures* 111 (2014), S. 317–323.



- [36] C. Lim, G. Zhang und J. N. Reddy. „A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 78 (2015), S. 298–313.
- [37] H. M. Ma, X. L. Gao und J. N. Reddy. „A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56(12) (2008), S. 3379–3391.
- [38] G. A. Maugin. „Internal variables and dissipative structures“. In: *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 15.2 (1990), S. 173–192.
- [39] R. D. Mindlin. „Micro-structure in linear elasticity“. Englisch. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 16 (1964), S. 51–78.
- [40] J. Niiranen u. a. „Variational formulations, model comparisons and numerical methods for Euler-Bernoulli micro and nano-beam models“. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 24(1) (2019), S. 312–335.
- [41] S. Papargyri-Beskou u. a. „Bending and stability analysis of gradient elastic beams“. In: *International Journal of Solids and Structures* 40.2 (2003), S. 385–400.
- [42] S. K. Park und X. L. Gao. „Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory“. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 16.11 (2006), S. 2355.
- [43] A. A. Pisano, P. Fuschi und C. Polizotto. „Integral and differential approach to Eringen’s nonlocal elasticity models accounting for boundary effects with applications to beams in bending“. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics* (2021), e202000152.
- [44] J. N. Reddy. „Energy principles and variational methods in applied mechanics“. In: *John Wiley & Sons* (2017).
- [45] J. N. Reddy. „Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams“. In: *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 59(11) (2011), S. 2382–2399.
- [46] M. Shaat, S. Faroughi und L. Abasiniyan. „Paradoxes of differential nonlocal cantilever beams: Reasons and a novel solution“. In: *arXiv preprint arXiv* (2017), S. 1802.01494.
- [47] M. Shaat, E. Ghavanloo und S. Emam. „A Micromorphic Beam theory for Beams with elongated Microstructures“. In: *Scientific reports* 10(1) (2020), S. 1–18.
- [48] K. Sherafatnia, G. H. Farrahi und S. A. Faghidian. „Analytic approach to free vibration and buckling analysis of functionally graded beams with edge cracks using four engineering beam theories“. In: *International journal of engineering* 27.6 (2014), S. 979–990.
- [49] S.-A. Sideris. „Static and Dynamic Analysis of a Simple Model of Explicit Gradient Elasticity“. Englisch. Diss. TU Darmstadt, 2021.
- [50] S.-A. Sideris und Ch. Tsakmakis. „Consistent Euler-Bernoulli beam theories in statics for classical and explicit gradient elasticities“. In: *Composite Structures* (2021).
- [51] J. Sulem und I. G. Vardoulakis. *Bifurcation analysis in geomechanics*. CRC Press, 1995.
- [52] H.-T. Thai u. a. „A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates“. In: *Composite Structures* 177 (2017), S. 196–219.
- [53] R. A. Toupin. „Elastic materials with couple-stresses“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11.1 (1962), S. 385–414.
- [54] C. Truesdell und W. Noll. „The Non-Linear Field Theories Of Mechanics“. Englisch. In: *Handbuch der Physik*. Hrsg. von Flügge S. Bd. III/3. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1965.

- 
- [55] L. Xu und S. Shen. „Size-dependent piezoelectricity and elasticity due to the electric field-strain gradient coupling and strain gradient elasticity“. In: *International Journal of Applied Mechanics* 5.02 (2013), S. 1350015.
- [56] X.-J. Xu u. a. „Bending and buckling of nonlocal strain gradient elastic beams“. In: *Composite Structures* 160 (2017), S. 366–377.
- [57] S. T. Yaghoubi, S. M. Mousavi und J. Paavola. „Strain and velocity gradient theory for higher-order shear deformable beams“. In: *Archive of Applied Mechanics* 85 (2015), S. 877–892.
- [58] J. Yan u. a. „Exact solutions of bending deflections for nano-beams and nano-plates based on nonlocal elasticity theory“. In: *Composite structures* 125 (2015), S. 304–313.