

Thermodynamisch konsistente FE-Simulation des Ermüdungsrissfortschritts unter Berücksichtigung zyklischer Plastizitätseffekte und der Mechanik materieller Kräfte

Vom Fachbereich 13 – Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Technischen Universität Darmstadt

zur
Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs

genehmigte
DISSERTATION

vorgelegt von

M.Sc. Darko Panic

aus München, Deutschland

Referent:

Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller

Tag der Einreichung:

21. Juni 2023

Tag der mündlichen Prüfung:

21. September 2023

Darmstadt 2023

D 17

Darko Panic

Thermodynamisch konsistente FE-Simulation des Ermüdungsrisssfortschritts unter Berücksichtigung zyklischer Plastizitätseffekte und der Mechanik materieller Kräfte

Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUpriints: 2024

Tag der mündlichen Prüfung: 21.09.2023

Veröffentlicht unter der Lizenz CC BY-SA 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/>

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-273820

URI: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/27382>

Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als vom Fachbereich 13 – Bau- und Umweltingenieurwissenschaften – der Technischen Universität Darmstadt zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs eingereichte Dissertation (D 17).

Vorwort

Der bedeutsame Teil dieser Arbeit sowie die Entwicklung der zugrunde liegenden Konzepte wurden während meiner Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Werkstoffmechanik der Technischen Universität Darmstadt entwickelt. Der Hauptteil der schriftlichen Ausarbeitung entstand in den darauffolgenden Jahren zeitgleich zu meinen Tätigkeiten in der Industrie.

An dieser Stelle erscheint das Zitat von Goethe als angemessen: „So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig, man muss sie für fertig erklären, wenn man nach Zeit und Umständen das Mögliche getan hat.“

Ein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald nicht nur für seine fachkundige Betreuung und Unterstützung während meiner wissenschaftlichen Arbeit, sondern auch für seine Geduld während des Abschlusses der Dissertation.

Ebenfalls möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller meinen Dank aussprechen für seine freundliche Bereitschaft das Korreferat zu übernehmen sowie für das damit verbundene Interesse an meiner Arbeit.

Allen ehemaligen und aktuellen Mitarbeitern des Fachgebietes sei für die kollegiale Zusammenarbeit gedankt. Meine Zimmerkollegen Alexander Bosch und Ehsan Shams standen stets für fachliche Diskussionen zur Verfügung und trugen maßgeblich zu einem angenehmen Umfeld sowie interessanten außeruniversitären Aktivitäten bei.

Zum Abschluss möchte ich meiner Familie meinen herzlichsten Dank aussprechen für ihren Rückhalt und ihre fortwährende Unterstützung, nicht nur während meiner Promotion, sondern auch darüber hinaus.

Leonberg, April 2024

Darko Panic

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Weiterentwicklung von numerischen Methoden zur Lebensdauerbewertung von zyklisch belasteten Strukturen durch die Anwendung der Mechanik der konfiguellen oder materiellen Kräfte. Im Rahmen der Arbeit wird ein Konzept zur Durchführung einer thermodynamisch-konsistenten Finite Elemente Simulation des Ermüdungsrissfortschritts erarbeitet und vorgestellt. Im Fokus steht die Verwendung von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen zur Erfassung der relevanten Feldgrößen in der elastisch-plastischen Bruchmechanik. Durch die Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie wird das transiente Werkstoffverhalten von metallischen Strukturen unter zyklischer Belastung berücksichtigt. Eine zentrale Rolle nimmt hierbei die Bestimmung und Erweiterung des zyklischen J -Integrals, unter Einbeziehung der physikalischen Bilanzgleichungen und der Mechanik materieller Kräfte, ein. Besonderes Augenmerk liegt auf der Einbeziehung des Phänomens des Riss-schließens in Verbindung mit der numerischen Berechnung des Riss-spitzenparameters. Der effektive Anteil des zyklischen Riss-spitzenparameters wird mit Hilfe eines programmierten Riss-schließalgorithmus bestimmt. Des Weiteren befähigt das FE-Berechnungskonzept zur präziseren Bewertung des Riss-stopp- bzw. Riss-arresteffektes bei druckeigen-spannungs-behafteten Strukturen. Ein hybrides Optimierungsverfahren wird zur Parameteridentifikation von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen vorgestellt und angewendet. Das Optimierungsprogramm vereint die Stärken eines globalen Verfahrens in Form des implementierten Differential-Evolution-Algorithmus und des lokalen Verfahrens basierend auf dem Nelder-Mead-Algorithmus. Resultierend aus den Ergebnissen der Parameteridentifikation und der anschließenden Definition des elastisch-plastischen Werkstoffmodells können die bruchmechanischen Feldgrößen realistischer bestimmt werden. Abschließend werden Ergebnisse des numerischen Bruchmechanikverfahrens mit einer konventionellen FE-Rissfortschritt-methode anhand von Berechnungsbeispielen verglichen und diskutiert. Die Ergebnisse der numerischen Lebensdauerbewertung von Bauteilproben zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten.

Abstract

This thesis deals with the further development of numerical methods for the fatigue life assessment of cyclically loaded structures by applying the mechanics of configurational or material forces. Within the scope of this work, a concept for performing a thermodynamically consistent Finite Element Simulation of fatigue crack propagation is developed and presented. The focus is on the use of elastic-plastic material models to capture the relevant field variables in elastic-plastic fracture mechanics. By applying incremental plasticity theory, the transient behavior of metallic structures under cyclic loading is considered. Particular attention is given to the inclusion of the phenomenon of crack closure in combination with the numerical calculation of the crack tip parameter. The effective magnitude of the cyclic crack tip parameter is determined using a programmed crack closure algorithm. Furthermore, the finite element calculation concept enables a more accurate assessment of the crack stop or crack arrest effect in structures subjected to compressive residual stresses. A hybrid optimization method is presented and applied for parameter identification of elastic-plastic material models. The optimization program combines the strengths of a global method in the form of the implemented Differential Evolution algorithm and a local method based on the Nelder-Mead algorithm. As a result of the parameter identification and the subsequent definition of the elastic-plastic material model, the fracture mechanics field variables can be determined more realistically. Finally, results of the numerical fracture mechanics approach are compared and discussed with a conventional finite element crack propagation method using calculation examples. The results of the numerical life assessment of components show a good agreement with the experimental results.

Inhaltsverzeichnis

Thermodynamisch konsistente FE-Simulation des Ermüdungsrissfortschritts unter Berücksichtigung zyklischer Plastizitätseffekte und der Mechanik materieller Kräfte	1
--	----------

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung, Ziel und Inhalt der Arbeit	1
2. Stand des Wissens	5
2.1. Mechanik großer Deformationen und die Linearisierung für kleine Deformationen	5
2.1.1. Konfiguration und Kinematik	5
2.1.2. Deformation und Verzerrungen	7
2.1.3. Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten	8
2.1.4. Linearisierung für kleine Deformationen	9
2.1.5. Spannungstensoren	10
2.1.6. Physikalische Bilanzsätze der Kontinuumsmechanik	12
2.1.7. Hauptsätze der Thermodynamik	15
2.2. Elastisch-plastische Materialgesetze für metallische Werkstoffe	19
2.2.1. Prinzipien der Materialtheorie - Konstitutive Materialgleichungen	19
2.2.2. Das elastische und das elastisch-plastische Materialverhalten	22
2.2.3. Wichtige Aspekte der Mikroplastizität	24
2.2.4. Grundaufbau der verwendeten Plastizitätsmodelle	24
2.2.5. Besondere Phänomene der zyklischen Plastizität	31
2.2.6. Bekannte Materialmodelle zur Beschreibung der zyklischen Plastizität	35
2.3. Elastisch-plastische Bruchmechanik	40
2.3.1. Klassifizierung der Risslänge - Risslängenbezeichnung	40
2.3.2. Das J -Integral in der linear-elastischen Bruchmechanik	42
2.3.3. Das J -Integral in der elastisch-plastischen Bruchmechanik	46
2.3.4. Zur experimentellen und numerischen Bestimmung des zyklischen J -Integrals	51
3. Experimentelle Datenbasis	63
3.1. Experimentelle Datenbasis für die Parameteridentifikation von Werkstoffmodellen	63
3.1.1. Verwendete Werkstoffe: Vergütungsstahl 42CrMo4	63
3.1.2. Probengeometrie und Probenfertigung	64
3.1.3. Versuchsbeschreibung: Werkstoffversuche	65
3.1.4. Ergebnisse: Statische Materialkennwerte aus dem Erstbelastungs- und dem Erstentlastungsversuch	67
3.1.5. Ergebnisse: Einachsige und einstufig geführte Versuche - Zyklisch dehnungs-geregelte Versuche	69
3.1.6. Ergebnisse: Einachsige und einstufig geführte Versuche - Zyklisch kraft-geregelte Versuche	73
3.2. Experimentelle Datenbasis für die Validierung des bruchmechanischen Konzeptes	74
3.2.1. Probengeometrie und Probenfertigung	74
3.2.2. Versuchsbeschreibung und Ergebnisse: Ermüdungsversuche Kreuzbohrungsproben	75

4. Hybrides Optimierungsverfahren zur Parameteridentifikation von zyklischen Plastizitätsmodellen	78
4.1. Formulierung der Zielfunktion und Klassifizierung mehrdimensionaler Optimierungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme	78
4.2. Umsetzung des hybriden Verfahrens und verwendete Lösungsalgorithmen	81
4.2.1. Der Differential-Evolution-Algorithmus als Basis globaler Optimierung	81
4.2.2. Das Verfahren nach <i>Nelder und Mead</i> als Basis lokaler Optimierung	84
4.2.3. Numerische Umsetzung des hybriden Verfahrens	88
4.3. Werkstoffparameteridentifikation von zyklischen Plastizitätsmodellen	90
4.3.1. Verwendete Materialmodelle	90
4.3.2. Notwendige Eingangsgrößen und Startwerte	91
4.3.3. Validierung der Werkstoffparameter auf Basis experimenteller Daten (<i>Chaboche</i> -Modell: Werkstoff 42CrMo4)	93
5. Entwicklung des Konzeptes und die Konzeptübersicht	95
5.1. Stand des Wissens und notwendige Herleitungen zur Umsetzung der Konzeptidee	95
5.1.1. Thermodynamisch konsistentes Plastizitätsmodell	95
5.1.2. Konfigurationskräfte: Mechanik der materiellen Kräfte	96
5.2. Numerische Lebensdauerberechnung auf Basis materieller Kräfte als thermodynamisches Gesamtkonzept	99
5.2.1. Numerische Umsetzung des transienten Riss-schließverhaltens	101
5.2.2. FE-Approximation der materiellen Kräfte	111
6. Berechnungsbeispiele: Anwendung des entwickelten Konzeptes	117
6.1. Stationärer Riss: Validierung der neuen Methode (CT-Probe)	117
6.1.1. Einführung: Probenform (CT-Probe) und Modellbeschreibung	117
6.1.2. Ergebnisse	119
6.2. Einfluss der Überlast und der induzierten Druckeigenstressungen auf die Rissfortschrittsberechnung	126
6.2.1. Einführung: Probenform (Kreuzbohrungsprobe) und Modellbeschreibung	126
6.2.2. Ergebnisse: Praktische Anwendung des thermodynamisch konsistenten Gesamtkonzeptes	129
6.2.3. Ergebnisse basierend auf $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -Integral: Vergleich Chaboche- und Döring-Modell	137
7. Zusammenfassung und Ausblick	140
Literaturverzeichnis	143
Abbildungsverzeichnis	157
Tabellenverzeichnis	160
A. Anhang: Mathematische Notation und Darstellung	161
A.1. Tensor- und Matrixnotationen	161
B. Anhang: Zusätzliche Betrachtungen unter Verwendung des Werkstoffmodells nach Döring	162
B.1. Elastisch-plastisches Werkstoffmodell nach Döring	162
B.2. Parameteridentifikation: Döring-Modell	164
C. Anhang: Zyklisch effektive J-Integral nach Dowling und Begley	166

Symbolverzeichnis

Lateinische Formelzeichen (Großbuchstaben)

A	Flächenelement in der Referenzkonfiguration
A	Querschnittsfläche
A_G	Fläche unter der Kraft-Verschiebungskurve
B	Volumenkraftdichte in der Referenzkonfiguration
\mathcal{B}	materieller Körper
B	Probendicke
P	materieller Punkt
C	rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
\mathcal{E}	Green-Langrangescher Verzerrungstensor
E, E_{ijkl}	Elastizitätstensor
\mathcal{E}	innere Energie
E	Elastizitätsmodul des Werkstoffes
\mathcal{F}	Kraftflussvektor, Kraftvektor
F	Deformationsgradient
$\Delta F_{\text{tip}}^{\text{eff}}$	zyklisch effektive Risspitzenparameter auf Basis materieller Kräfte
F	Fließfunktion
F	Kraft
F^*	Zustandsfunktion der Gedächtnisfläche $R_{M\varepsilon}$
F_a	Kraft bei Risslänge a
$F_{a+\Delta a}$	Kraft bei Rissverlängerung $a + \Delta a$
G	Schubmodul
\mathcal{H}	Verfestigungstensor
H'	Einachsiger plastischer Tangentenmodul
\mathcal{I}	Impulsvektor

\mathbf{I}	Einheitstensor
J	Funktionaldeterminante
$J_{\text{exp}}^{\text{Rice}}$	experimentelle Bestimmung des J -Integrals nach Rice
$\Delta J_{\text{eff,th}}$	Schwellenwert (Threshold) des zyklisch effektiven J -Integrals
\tilde{J}	J -Integral nach Kishimoto
$\Delta J_{\text{eff,exp}}^{\text{LB}}$	experimentelles zyklisch effektives J -Integral nach Landes und Begley
$\Delta J_{\text{exp}}^{\text{LB}}$	experimentelles zyklisches J -Integral nach Landes und Begley
\mathcal{K}	kinetische Energie
K	Kompressionsmodul
K	Spannungsintensitätsfaktor
K'	Zyklischer Verfestigungskoeffizient des Ramberg-Osgood-Gesetzes
$K_{ij}^{(k)}$	normierter Teilbackstresstensor
\mathcal{L}	Drehimpulsvektor
L	Linielement in der Referenzkonfiguration
M	Anzahl von Teilbackstresstensenoren in den Plastizitätsmodellen
\mathbf{N}	Normalenvektor in der Referenzkonfiguration
N	Versagensschwingspielzahl
\mathcal{P}_{ext}	externe Leistung
\mathbf{P}	erste Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{P}}$	zweite Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
Q	Wärmezufuhrleistung
Q	Verfestigungsparameter nach Chaboche (isotrope Verfestigung)
Q^i	Materialkonstante im Plastizitätsmodell nach Döring
\mathbf{R}	Drehtensor
R	Spannungsverhältnis
R_m	Zugfestigkeit
$R_{M\varepsilon}$	Dehnungsbasierte Gedächtnisfläche
R_z	Oberflächenrauigkeit

S	Entropie
S_m	Nennmittelspannung
\mathbf{T}	Spannungsvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{T}, T	mathematische Abbildung im Tangentialraum
ΔT_k^*	zyklisches ΔT_k^* -Integral nach Atluri et al.
T	Temperatur
\mathbf{U}	Rechtsstrecktensor
U	Formänderungsenergiedichte
\mathbf{V}	Linksstrecktensor
V	Volumenelement in der Referenzkonfiguration
W	Breite der Bruchmechanikprobe
W^i	Wichtungsfunktion im Plastizitätsmodell nach Döring
\mathbf{X}	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
Griechische Formelzeichen	
α_{NP}	Nichtproportionaler Verfestigungskoeffizient
$\boldsymbol{\alpha}, \alpha_{ij}$	Rückspannungstensor, Backstresstensor
$\boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \alpha_{ij}^{(k)}$	Teilbackstresstensor
β	Backstraintensor, Mittelpunkt der Gedächtnisfläche $R_{M\varepsilon}$
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Dehnungstensor
ε	Dehnung
η	Materialkonstanten der Gedächtnisfläche $R_{M\varepsilon}$
η	dimensionloser Bruchmechanikparameter
Γ	Integralpfad
γ	Schubdehnung, Schubverzerrung
γ	spezifische Entropieproduktion
γ_i	Materialkonstanten in FE-Programmen für das Chaboche-Modell
Θ	Temperatur

$\boldsymbol{\kappa}, \kappa_\beta$	innerer Variablen Tensor, innere Variable
λ	Lamésche Konstante
$\dot{\lambda}, d\lambda$	Lagrangescher Multiplikator bzw. plastischer Multiplikator
μ	Lamésche Konstante
ν	Querkontraktionszahl
Ω_t	Volumenbereich in der Momentankonfiguration
Ω_R	Volumenbereich in der Referenzkonfiguration
ψ	spezifische freie Helmholtzenergie
ρ	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Cauchyscher Spannungstensor
σ'_f	Schwingfestigkeitskoeffizient der Manson-Coffin-Gleichung
σ_m	Mittelspannung
σ_o	Oberspannung
σ_u	Unterspannung
σ_F, σ_{F0}	Fließspannung, Fließspannung bei der Erstbelastung
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Hauptspannungen
$\boldsymbol{\Sigma}, \Sigma_{ij}$	Eshelby-Tensor
σ_V	Vergleichsspannung
φ_t	mathematische Abbildung in der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{\chi}_R$	mathematische Abbildung in der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\chi}_t$	mathematische Abbildung in der Momentankonfiguration
$\chi^{(i)}, \chi_0^{(i)}$	Materialkonstante (Exponent) in dem Plastizitätsmodell nach Döring
ω	Materialkonstanten der Gedächtnisfläche $R_{M\varepsilon}$

Indizes

$(\cdot)_{\text{close}}$	Wert beim Rissschließzustand
$(\cdot)^D$	deviatorischer Anteil eines Ausdruckes
$(\cdot)^{\text{Diss}}$	dissipativer Anteil eines Ausdruckes
$(\cdot)^{\text{el}}, (\cdot)^e$	elastischer Anteile eines Ausdruckes

$(\cdot)_{\text{eff}}, (\cdot)^{\text{eff}}$	effektiver Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)^{\text{ep}}$	elastisch-plastischer Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)^{\text{H}}$	hydrostatischer Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)^{\text{Hard}}$	auf die Verfestigungsregel bezogener Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)^{\text{Inh}}$	auf die Inhomogenität bezogener Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)_{\text{mat}}$	auf die Definition der materiellen Kraft bezogener Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)_{\text{open}}$	Wert beim Rissöffnungszustand
$(\cdot)^{\text{pl}}, (\cdot)^{\text{P}}$	plastischer Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)^{-1}$	Inverse eines Ausdrucks
$(\cdot)_{\text{R}}$	Ausdruck bezogen auf die Referenzkonfiguration
$(\cdot)^{\text{T}}$	Transponierte eines Ausdrucks
$(\cdot)_t$	Ausdruck bezogen auf die Momentankonfiguration
$(\cdot)^{\ominus}$	temperaturbezogener Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)_{\text{tip}}$	risspitzenbezogener Anteil eines Ausdrucks
$(\cdot)^{\text{V}}$	auf die Volumeneinheit bezogener Anteil eines Ausdrucks
$\dot{(\cdot)}$	Zeitableitung

Lateinische Formelzeichen (Kleinbuchstaben)

a	Risslänge
$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, a_P^{(i)}, a_k^{(i)}$	Materialkonstanten des Plastizitätsmodells nach Döring
a_χ, b_χ	Materialkonstanten des Plastizitätsmodells nach Döring
$a_N, b_N, q_N, q_{N,0}$	Materialkonstanten des Plastizitätsmodells nach Döring
$a_{R,\sigma}$	Konstante nach FKM - Tabelle 4.3.4
\mathbf{b}	linker Cauchy-Green-Deformationstensor
b	Verfestigungsparameter nach Chaboche (isotrope Verfestigung)
$b, b_1, b_2, b_3, b_P, b_K$	Materialkonstanten des Plastizitätsmodells nach Döring
b, c	Schwingfestigkeits- bzw. Duktilitätskoeffizient
\mathbf{b}	Volumenkraftdichte in der Momentankonfiguration
\mathbf{b}^{V}	Volumenkraft

$c^{(i)}$	Materialkonstanten des Plastizitätsmodells nach Chaboche bzw. Döring
$c_X^{(i)}, c_A, c_T$	Materialkonstanten des Plastizitätsmodells nach Döring
$c_{M,\varepsilon}$	Materialkonstante für dynamische Erholung der Gedächtnisfläche
\mathbf{d}	Deformationsgeschwindigkeitstensor
\mathbf{e}	Almansi-Eulerscher Verzerrungstensor
e	spezifische innere Energie
\mathbf{f}	Kraftvektor in der Momentankonfiguration
\mathbf{h}	Verschiebungsgradient
h	Deviatorischer plastischer Tangentenmodul
\mathbf{l}	Geschwindigkeitsgradient in der Momentankonfiguration
l	Linielement in der Momentankonfiguration
m	Masse
\mathbf{n}^*	Normalentensor der Gedächtnisfläche $R_{M\varepsilon}$
\mathbf{n}	Normalenvektor in der Momentankonfiguration
n'	Zyklischer Verfestigungsexponent (Ramberg-Osgood-Gesetz)
p	Akkumulierte plastische Dehnung
\mathbf{q}	Wärmestromdichte
q_N, q_P	Parameterfunktionen des Plastizitätsmodells nach Döring
$\check{\mathbf{q}}, \check{q}_\beta$	Verfestigungsvariablenstensor, Verfestigungsvariable
\mathbf{r}	Positionsvektor
r	skalare Wärmequelle
$r^{(i)}$	Materialkonstanten in den Plastizitätsmodellen nach Chaboche und Döring
r^0	Radius der Fließfläche, deviatorische Fließspannung $r^{(0)} = \sqrt{2/3}\sigma_F$
\mathbf{s}, s_{ij}	Deviator des Spannungstensors
s	spezifische Entropie
\mathbf{t}	Spannungsvektor in der Momentankonfiguration
t	Zeit
\mathbf{u}, u_i	Verschiebungsvektor

u	Verschiebung
v	Geschwindigkeitsvektor in der Momentankonfiguration
v	Volumenelement in der Momentankonfiguration
w	Drehgeschwindigkeitstensor
w_i	Wichtungsfaktor im Plastizitätsmodell nach Besseling
x	Ortsvektor in der Momentankonfiguration

Abkürzungen

af	autofrettiert
naf	nicht-autofrettiert
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Algorithmus
CT	Compact Tension
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
DCT	Disk-Shaped Compact Tension
DE	Differential Evolution
DGL	Differenzialgleichung
DMS	Dehnungsmessstreifen
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
i.d.R.	in der Regel
KB	Kreuzbohrungsprobe
MFGPA	Materialforschungs- und -prüfanstalt an der Bauhaus-Univ. Weimar
NRT	Node Release Technique
OES	Optische Emissionsspektroskopie
PICC	Plasticity Induced Crack Closure
PID	Proportional-Integral-Differential
RT	Raumtemperatur
RWA	Randwertaufgabe
SEB	Single Edged Notched Bending

SQP	Sequential Quadratic Programming
Ssp.	Schwingspiele
TMF	Thermo-Mechanical Fatigue
UMAT	User Material

1. Einleitung, Ziel und Inhalt der Arbeit

Die Bewertung und rechnerische Vorhersage von Bruch- und Schädigungsprozessen eines Bauteils oder einer Komponente spielen bereits in der Vorentwicklung einer technischen Konstruktion im Maschinen- und Anlagenbau eine wesentliche Rolle. Eine erfolgreiche Lebensdauerprognose ist fundamental für eine sichere Auslegung der Bauteile bei gleichzeitiger Erfüllung der ökonomischen und ökologischen Anforderungen. Fehlerhafte Annahmen und Resultate auf diesem Gebiet können im Schadensfall gravierende Folgen für Menschen, Umwelt und die Wirtschaftlichkeit der Unternehmen haben. Die Ursachen für das Versagen einer Komponente können jedoch vielfältig sein. Erfahrungsgemäß beruhen Schädigungen einer Struktur auf nicht entdeckten Werkstoff- und Bauteilfehlern, unerwarteten Änderungen der Lastdatencharakteristika und Umwelteinflüssen oder dem Einsatz von Materialien mit ungeeigneten Werkstoffeigenschaften, die der Beanspruchungssituation nicht standhalten. Diverse ingenieurtechnische Fachdisziplinen befassen sich mit der Bewertung von Versagensmechanismen von Strukturen auf bestimmten Größenskalen, die von der nanoskopischen Analyse über die mikroskopischen und darüberliegenden mesoskopischen Untersuchungen bis zur Makroskala reichen. Derzeit können komplexe Modelle auf verschiedenen Betrachtungsebenen und über verschiedene Skalen hinweg mit Hilfe von numerischen Multiskalensimulationen umgesetzt werden. Diese Simulationen nutzen Methoden der Molekulardynamik, Mikromechanik, Schädigungsmechanik und Bruchmechanik, um das Verhalten von Materialien detaillierter zu untersuchen. Durch die Kombination dieser Ansätze können detaillierte Einblicke in das Verhalten von Materialien auf atomarer, mikroskopischer und makroskopischer Ebene gewonnen werden. Dies ermöglicht eine umfassende Untersuchung von Materialeigenschaften und -verhalten unter unterschiedlichen Bedingungen. Aufgrund schnell voranschreitender Technologie im Bereich der Hochleistungsrechner und zugehöriger Software ist die Umsetzung dieser Trends nicht nur an wissenschaftlichen Institutionen, sondern bereits in Industrieunternehmen zu erkennen. Für den praktisch häufig auftretenden Fall zyklisch oder stochastisch wirkender mechanischer sowie thermischer Belastung hat sich die Betriebsfestigkeit als makroskopische Teildisziplin herausgebildet. Die Kernaufgabe des Betriebsfestigkeitsnachweises besteht in der Gegenüberstellung der auftretenden Beanspruchungen zu den Beanspruchbarkeiten im Rahmen einer Schadensakkumulationsrechnung und der anschließenden Ableitung resultierender Sicherheit in dem untersuchten Bauteil. Grundsätzlich weisen die berechneten Lebensdauern unter Verwendung spezifischer Betriebsfestigkeitskonzepte eine erkennbare Abweichung zur tatsächlichen Lebensdauer auf. Die aus experimentellen Untersuchungen abgeleiteten mathematischen Gleichungen haben aber im Allgemeinen nur eine eingeschränkte Gültigkeit und scheitern bei der Übertragbarkeit des Konzeptes auf komplexe Bauteile. Die Einschätzung, ob die Abweichung als relativ groß oder klein anzusehen ist, liegt bei den meisten Berechnungsergebnissen im Ermessen des Betrachters und seiner physikalischen Argumentation. Es ist naheliegend, dass die Suche nach den Ursachen für diese Abweichungen insbesondere bei den einzelnen Konzepten beginnt, um allmähliche Verbesserungen im Rahmen des Gesamtkonzepts zu erzielen. Der Betriebslastenachfahrversuch am konkreten Bauteil, bei dem die im realen Betrieb auftretenden Belastungen direkt auf das Bauteil aufgebracht und gleichzeitig Beanspruchungen messtechnisch aufgenommen werden, stellt eine solche experimentelle Lebensdaueranalyse dar. Trotzdem ist es wichtig, dass der Anwender über grundlegendes Wissen zur Betriebsfestigkeit verfügt, um die experimentellen Randbedingungen korrekt umzusetzen. Dadurch kann er die relevanten Belastungen mit dem Versuchsstand realitätsgetreu nachbilden und die Ergebnisse sowie Abweichungen richtig einschätzen oder bewerten. Die Versuchsergebnisse obliegen gewissen Streuungen, die sowohl die

Beanspruchbarkeits- und Beanspruchungsdaten betreffen. Mit der Anwendung von Methoden der Statistik werden Versuchsergebnisse zu aussagefähigen Resultaten verarbeitet. Im Grunde ist ein einziger Versuch im Sinne der Ausfallwahrscheinlichkeiten und des Stichprobenrisikos nicht ausreichend, um eine endgültige Lebensdaueraussage zu vollziehen. Bei manchen Komponenten ist die Anbringung der Messtechnik im versagenskritischen Bereich nicht praktikabel. Daher wird der Nachweis in vielen Fällen aus Gründen der Zeit, Praktikabilität und Kosten rechnerisch erbracht. Die rechnerische Betriebsfestigkeit kann nach Eulitz [73] in drei verschiedene Kategorien unterteilt werden:

- Elastische, spannungsbasierte Berechnungsverfahren,
- elastisch-plastische Kerbgrundkonzepte
- und Bruchmechanikkonzepte.

Die bruchmechanischen Methoden werden hauptsächlich zur Charakterisierung des Rissfortschrittsverhaltens nach erfolgtem Anriss und zur Berechnung der Restlebensdauer verwendet. Die Existenz oder konservative Annahme von vorhandenen Fehlern, die explizit als Risse der Länge a definiert werden, wird zu Beginn der bruchmechanischen Berechnung vorausgesetzt. Die defektfreie Umgebung um einen solchen diskreten Riss wird mit den bekannten Werkstoffgesetzen der Kontinuumsmechanik beschrieben. Vor diesem Hintergrund besteht der Bedarf an einer Formulierung plausibler Annahmen für Konstitutivgleichungen, das Überprüfen der Widerspruchsfreiheit der Annahmen mit den materialunabhängigen Aussagen der Thermodynamik und experimentellen Identifikation der konstitutiven Parameter eines zyklisch elastisch-plastischen Werkstoffmodells mit Hilfe eines Optimierungsprogramms. Es werden ausschließlich Materialmodelle eingesetzt, die speziell für metallische Werkstoffe entwickelt wurden und unterschiedliche Leistungsfähigkeiten besitzen, um das transiente Verhalten des Werkstoffs abzubilden. Die aus experimentellen Untersuchungen abgeleiteten mathematischen Gleichungen haben aber im Allgemeinen nur eine eingeschränkte Gültigkeit. Ein allgemeines theoretisches Konzept zur Begründung einer universellen Materialgleichung existiert derzeit nicht. Im unmittelbaren Bereich der Rissspitze sind die auftretenden stark inhomogenen Spannungs- und Verformungszustände nicht mit den herkömmlichen Methoden der Festigkeitslehre erfassbar. Um den Beanspruchungszustand am Riss zu beschreiben, etablierten sich bruchmechanische Größen, die als Rissspitzenparameter bekannt sind. Die Bestimmung der Risswachstumsraten im Bereich der Kurzzeitfestigkeit oder für kurze Ermüdungsrisse ist von großer Bedeutung. Eine Verwendung der linear-elastischen Bruchmechanik mit der Schwingweite der Spannungsintensität ΔK ist bei den Anwendungsfällen der Kurzzeitbetriebsfestigkeit (engl. *low cycle fatigue*) nicht möglich. Bei ausgeprägter Plastifizierung der Struktur um die Rissspitze etablierten sich Konzepte der elastisch-plastischen Bruchmechanik. Aufgrund des nichtlinearen, lastpfadabhängigen Materialverhaltens wird die Lösung von Randwertaufgaben der Plastizitätstheorie für rissbehaftete Körper recht schwierig. Für die Anwendung auf reale Risskonfigurationen in Bauteilen sind jedoch in den meisten Fällen entsprechende numerische Berechnungen der relevanten Kenngrößen erforderlich. In der elastisch-plastischen Bruchmechanik bestehen bereits vielfältige Methoden zur Bestimmung des zyklischen J -Integrals und finden in den verschiedenen Bereichen des Ingenieurwesens Anwendung. Dennoch wird die allgemeine Anwendbarkeit des zyklischen Parameters in den wissenschaftlichen Kreisen kontrovers behandelt und auf internationalen Konferenzen wird auf die beschränkte Gültigkeit und die Defizite der konventionellen Verfahren in der elastisch-plastischen Bruchmechanik hingewiesen. Basierend auf den bahnbrechenden Arbeiten von *Eshelby*, der die thermodynamischen Kräfte auf Defekte in Festkörpern durch die Einführung des Energie-Impuls-Tensors untersuchte, hat sich in den letzten 30 Jahren eine neue Theorie der verallgemeinerten **materiellen Kräfte** oder **Konfigurationskräfte** entwickelt. Im Rahmen dieser Theorie werden die Invarianzeigenschaften **thermodynamischer Erhaltungssätze** in

Bezug auf eine Transformation des materiellen Gebiets untersucht. Dadurch können generalisierte Kraftwirkungen von Feldern auf Störungen im homogenen Material, wie beispielsweise Defekte in Form von Rissen, berechnet werden. Diese Arbeiten gehen weit über das klassische J -Integral hinaus und ermöglichen einer umfassenderen physikalischen Interpretation der bruchmechanischen Vorgänge auf einer übergeordneten Ebene. Die Methode der materiellen Kräfte ist prädestiniert für die Lösung von numerischen Problemen für reale zyklisch-belastete Strukturen unter Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie. Die Anwendung der Theorie der konfigurellen Kräfte im Zusammenspiel mit einem entsprechenden leistungsfähigen Werkstoffgesetz birgt die vorteilhafte Möglichkeit, eine insgesamt thermodynamisch konsistente FE-Simulation des Ermüdungsrisssfortschritts durchzuführen. Abschließend kann die Lebensdauerberechnung auf Basis eines Risssfortschrittgesetzes analog der bisherigen Vorgehensweise mit konventionellen Rissspitzenparametern unternommen werden. Einen praktischen Mehrwert der Methodik sieht der Autor bei der numerischen Lebensdauerberechnung bei Strukturen, die aufgrund einer einzelnen Überlast im Kerbbereich mit Druckeigenstressungen versehen sind und damit die Einbeziehung von Effekten der Risswachstumsverzögerung im Vordergrund stehen.

Ziel und Inhalt der Arbeit

Die Entwicklung eines bruchmechanischen Konzeptes zusammen mit der Prämisse der Einhaltung von physikalischen Bilanzsätzen und damit einer Bereitstellung eines möglichst einschränkungsfreien, physikalisch nicht-angreifbaren bruchmechanischen FE-Modellkonzeptes zur Beschreibung eines Ermüdungsrisssfortschrittes unter zyklischer Beanspruchung, stellt das Hauptziel dieser Arbeit dar. Im Rahmen der Arbeit wird ein Konzept zur Durchführung einer thermodynamisch konsistenten FE-Simulation des Ermüdungsrisssfortschritts erarbeitet und vorgestellt. Im Fokus steht die Verwendung von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen zur Erfassung der relevanten Feldgrößen in der elastisch-plastischen Bruchmechanik, so dass das transiente Werkstoffverhalten von metallischen Strukturen unter zyklischer Belastung berücksichtigt werden kann. Eine zentrale Rolle nimmt hierbei die Bestimmung des zyklischen J -Integrals ein. Ein neuer hybrider Optimierungsalgorithmus wird zur Parameteridentifikation der Werkstoffparameter vorgestellt und angewendet. Abschließend werden Ergebnisse des neuen Konzeptes mit konventionellen Risssfortschrittmethoden verglichen und diskutiert.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Im Kapitel 2 werden ausgewählte Grundlagen der Kontinuumsmechanik aufgeführt, die zum Verständnis der Arbeit vorausgesetzt werden. Das Kapitel 3 beinhaltet den experimentellen Anteil der Arbeit, der größtenteils im Rahmen des AIF-Projektes [25] durchgeführt wurde und zur FE-Modell-Definition des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens des Vergütungsstahles 42CrMo4 verwendet wird. Einen wichtigen Bestandteil des Kapitels 3 bildet die experimentelle Datenbasis zum transienten Werkstoffverhalten, welche zur Parameteridentifikation von zyklisch elastisch-plastischen Werkstoffmodellen genutzt wird. Im anschließenden Kapitel 4 wird das Verfahren zur Parameteridentifikation für zyklische Plastizitätsmodelle mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsalgorithmen eingeführt und beschrieben. Hierbei steht ein neuer hybrider Optimierungsalgorithmus im Fokus, der sich durch Effizienz und sehr gute Performance im Benchmarktest auszeichnet. Das zugehörige Parameteridentifikationsprogramm wurde in der Sprache PYTHON umgesetzt. Das Kapitel 5 stellt die Entwicklung des Berechnungskonzeptes und die Konzeptübersicht zur bruchmechanischen Lebensdauerbewertung mit Hilfe des effektiven Rissspitzenparameters basierend auf materiellen Kräften dar. Einführend werden wichtige Aspekte der bruchmechanischen Grundlagen der materiellen Kräfte aufgeführt, die bei der Umsetzung der Konzeptidee notwendig sind. Eine zentrale Rolle in diesem Kapitel nimmt der neue Rissspitzenparameter und die

Mechanik der materiellen Kräfte ein. Es wird die Rissspitzenparameter-Variante basierend auf den Konfigurationskräften, die insbesondere den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik einbezieht, aufgezeigt und im Rahmen der zyklisch elastisch-plastischen Modellierung ausformuliert. Die dargestellte Konzeptübersicht dient dem Leser zur Übersicht über die einzelnen Bausteine, die zur Entwicklung des thermodynamisch konsistenten Gesamtverfahrens verwendet wurden. Im nachfolgenden Kapitel wird die numerische Umsetzung der Konzeptidee behandelt. Die wichtigsten numerischen Algorithmen stellen hierbei der transiente Rissschließalgorithmus und die numerische Berechnung der materiellen Kräfte mit anschließender Lebensdauerberechnung dar. Das Kapitel 6 dient hauptsächlich dem Aufzeigen des Gesamtverfahrens anhand von Anwendungsbeispielen und dem Vergleich der Ergebnisse der neuen Berechnungsalgorithmen mit konventionellen bruchmechanischen Methoden. Ausgehend vom stationären Riss werden bruchmechanische Feldgrößen, die aus der experimentellen Methode nach ASTM 1737-96, der klassischen J -Integral-Methoden und der Methode der Konfigurationskräfte bestimmt wurden miteinander verglichen. Im nächsten Anwendungsbeispiel steht die Rissfortschrittsberechnung mit zyklisch effektiven J -Integralen und dem neuen Rissspitzenparameter im Vordergrund. Hierzu werden Ergebnisse der konventionellen Methode der zyklisch effektiven J -Integrale (*Dowling-Begley-Wüthrich*) und Resultate des Rissspitzenparameters basierend auf der Methode der materiellen Kräfte anhand eines FE-Modells aus dem Forschungsvorhaben [25] diskutiert und miteinander verglichen. Die Ergebnisse der numerischen Lebensdauerberechnungen werden mit experimentellen Daten verglichen. Im letzten Kapitel 7 werden die wichtigsten Erkenntnisse der Arbeit zusammengefasst. Abschließend werden weiterführende Ideen und ein Ausblick zur Fortführung der wissenschaftlichen Untersuchungen im Zusammenhang mit der thermodynamisch-konsistenten FE-Simulation in der elastisch-plastischen Bruchmechanik vorgeschlagen.

2. Stand des Wissens

2.1. Mechanik großer Deformationen und die Linearisierung für kleine Deformationen

2.1.1. Konfiguration und Kinematik

Ein wichtiger Aufgabenbereich der Mechanik liegt in der Beschreibung der Zusammenhänge zwischen der Kinematik und Kinetik von materiellen Körpern. Die Belastung verursacht bei jedem deformierbaren Körper eine Bewegung im Raum und in der Zeit. Die zugeordneten physikalischen Eigenschaften der materiellen Punkte ändern sich im Allgemeinen mit der Bewegung. Zur eindeutigen mathematischen Beschreibung ist es erforderlich, zu jedem Zeitpunkt jedem materiellen Punkt des Körpers seinen Ort im Raum zuzuordnen. Eine solche Zuordnung wird durch die Konfiguration des Körpers definiert. Es soll kurz auf die jeweilige Definition der verschiedenen Arten der Konfiguration eingegangen werden. Ein materieller Körper \mathcal{B} wird durch eine Menge von materiellen Punkten $P \in \mathcal{B}$ bestimmt, die zu jedem Zeitpunkt t eindeutig und umkehrbar auf Bereiche des dreidimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 abgebildet werden können. Die Abbildung χ_t eines Punktes P des materiellen Körpers \mathcal{B} ist gegeben durch

$$\chi_t : \begin{cases} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto \mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t) = \chi_t(P) \end{cases} \quad (2.1)$$

In Abbildung 2.1 kann \mathbf{x}_t als die Bahnlinie eines Punktes mit der Ausgangsbetrachtung bei $t_R = 0$ oder auch oft bezogen auf eine beliebige Ausgangsbasis $t_R > 0$ bis zu einer Zeit $t_2 > t_R$ angesehen werden.

Über die sogenannte Referenz- oder Ausgangskonfiguration lassen sich Aussagen über die relativen Bewegungen des Körpers durchführen. Die gesamte Bewegung setzt sich aus den kinematischen Möglichkeiten in Form der Translation, Rotation und der Deformation des Körpers zusammen. Hierbei wird mithilfe der bijektiven stetigen Abbildung $\chi_R(P)$ jedem materiellen Punkt P des materiellen Körpers \mathcal{B} ein Ortsvektor \mathbf{X} zugeordnet:

$$\chi_R : \begin{cases} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_R \in \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto \mathbf{X} = \chi_R(P) \end{cases} \quad (2.2)$$

Die Referenzkonfiguration bezeichnet die Konfiguration, die der unbelastete Körper bei einer vorgegebenen Referenztemperatur einnimmt. Oft wird in der Literatur auch von einer *Lagrangischen* Konfiguration gesprochen. Wie in Abbildung 2.2 dargestellt ist, kann eine Abbildung ausgehend von der Referenzkonfiguration bis zur Momentankonfiguration als eine aufeinanderfolgende Ausführung der inversen Gleichungen 2.1 und 2.2 aufgefasst werden.

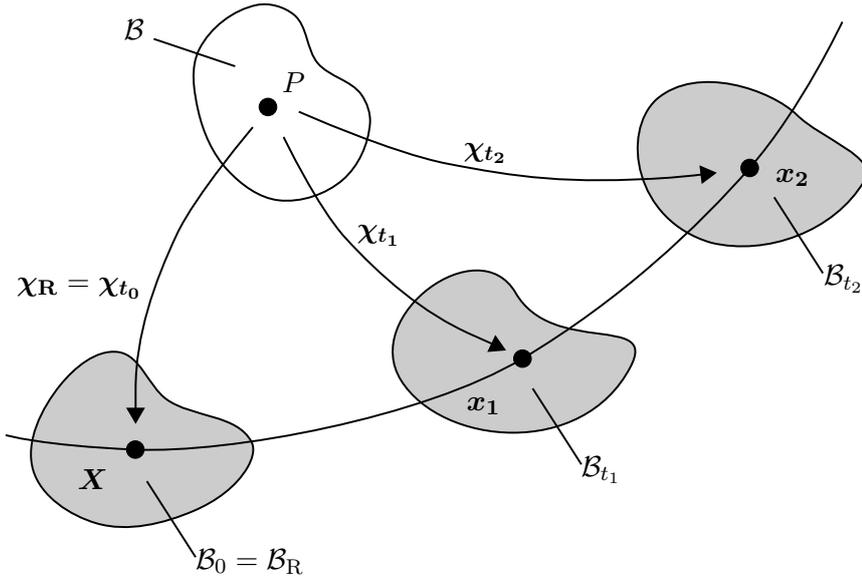


Abbildung 2.1.: Qualitative Darstellung der Bahnlinie eines Körpers ausgehend von der Referenzkonfiguration und bis zu zwei unterschiedlichen Momentankonfigurationenzeitpunkten

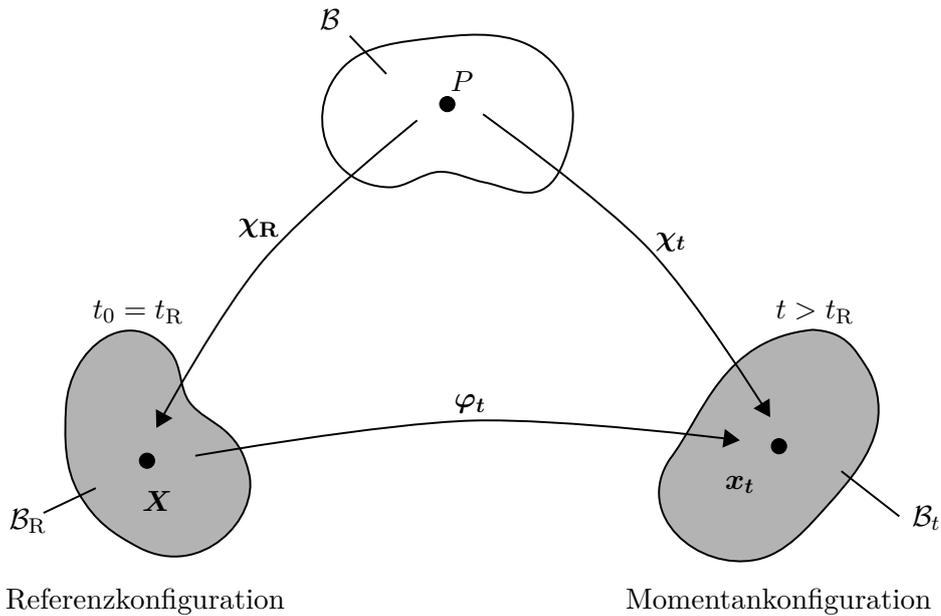


Abbildung 2.2.: Nichtlineare Abbildung eines Punktes P in der Referenzkonfiguration und in der Momentankonfiguration

Die durch die Abbildung φ_t definierte Konfiguration heißt Momentankonfiguration und wird in Abhängigkeit des Ortsvektors \mathbf{X} mit folgender Vorschrift definiert

$$\varphi_t : \begin{cases} \mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \varphi_t(\mathbf{X}) = \chi_t(\chi_R^{-1}(\mathbf{X})) \end{cases} \quad (2.3)$$

Sie beschreibt damit die Bewegung eines materiellen Körpers ausgehend von dem Raumbereich

\mathcal{B}_R in den Raumbereich \mathcal{B}_t zu einer bestimmten Zeit $t > t_R$. Im Zusammenhang der Momentankonfiguration spricht man oft von der *Eulerschen* Betrachtungsweise. Typischerweise wird hierbei die Veränderung der Feldgrößen an einem festgehaltenen Raumpunkt beobachtet. Prinzipiell sind die *Lagrangesche* und *Eulersche* Betrachtungsweise gleichwertig und lassen sich bei bekannter Bahnlinie ineinander umrechnen. Die *Eulersche* Betrachtungsweise wird bevorzugt in der Strömungsmechanik angewandt, weil dort meist Änderungen von Feldgrößen an fixierten Orten von Interesse sind. In der Festkörpermechanik ist die Anwendung der *Lagrangeschen* Betrachtungsweise von Vorteil, denn hier wird von einem bekannten Ausgangszustand die Veränderung der Eigenschaften der materiellen Teilchen während der Belastungsgeschichte verfolgt.

2.1.2. Deformation und Verzerrungen

Der Deformationsgradient nimmt in der Kontinuumsmechanik bzw. in der Kinematik finiter Deformationen eine zentrale Rolle ein. Seine Definition ist durch die partielle Ableitung von \mathbf{x} nach \mathbf{X} festgelegt

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \quad (2.4)$$

und stellt damit einen Tensor zweiter Stufe dar. Die grundlegendste Interpretation des Deformationsgradienten ist, dass er ein materielles Linienelement der Ausgangskonfiguration $d\mathbf{X}$ in ein Linienelement der Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ überführt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Hiermit wird der Zusammenhang zwischen der Lage des Linienelementes in der Momentan- und der Referenzkonfiguration hergestellt. Um diese Funktionalität des Deformationsgradienten hervorzuheben, wird die Tangentenabbildung mit der Abbildungsvorschrift in den jeweiligen Tangentialräumen als

$$\mathbf{F} : \begin{cases} T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}_R \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{T} \mapsto \mathbf{t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \end{cases} \quad (2.6)$$

angegeben. Somit kann der Deformationsgradient unter anderem als Transformationsbeziehungen für Flächenelemente und Volumenelemente zwischen den beiden Konfigurationen verwendet werden

$$d\mathbf{a} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad dv = \det(\mathbf{F}) dV. \quad (2.7)$$

Die Eindeutigkeitsforderung wird mit der positiv definiten Funktionaldeterminante

$$J = \det(\mathbf{F}) > 0 \quad (2.8)$$

gewährleistet, so dass die lineare Abbildung aus Gleichung 2.6 eindeutig umkehrbar ist. Diese Forderung stellt gleichzeitig die Undurchdringlichkeit der Materie sicher, d.h. zwei unterschiedliche Punkte können sich nicht zur selben Zeit am selben Ort befinden. Der Deformationsgradient ist im Allgemeinen ein unsymmetrischer Tensor und kann aus einer Streckung bzw. Stauchung und einer Rotation konstituiert sein. Verzerrungsmaße sollten keine Starrkörperanteile enthalten, da Rotations- und Translationsbewegungen keine Dehnungen und somit keine Spannungen in einem Körper hervorrufen. Bei Erfüllung der Bedingung 2.8 kann die polare Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} in den eigentlichen orthogonalen Drehtensor \mathbf{R} und einen symmetrischen, positiv definiten Rechtsstrecktensor \mathbf{U} oder einen Linksstrecktensor \mathbf{V}

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.9)$$

durchgeführt werden. Die Strecktensoren können so zur Definition von den beiden rotationsfreien Deformationsmaßen \mathbf{C} , dem rechten *Cauchy-Green-Deformationstensor*

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

und dem linken *Cauchy-Green*-Deformationstensor \mathbf{b}

$$\mathbf{b} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (2.11)$$

verwendet werden. Falls eine Verzerrung in einem Körper ausbleibt, gehen alle Deformationsmaße \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{C} und \mathbf{b} in den Einheitstensor \mathbf{I} über. Ausgehend von der allgemeinen Definition für die Längenänderung des Linienelementes mit der Differenz zwischen den Quadraten der Bogenlängen ausgedrückt in der Referenz-

$$\begin{aligned} (dl)^2 - (dL)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.12)$$

bzw. in der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned} (dl)^2 - (dL)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) = \\ &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \cdot d\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

kommt man auf die Beschreibung von gängigen Verzerrungsmaßen in der Kontinuumsmechanik. Die relativen Änderungen der Längen und Winkel materieller Linienelemente in der Umgebung des Punktes P infolge der Verformung werden mit dem *Green-Lagrangischen* Verzerrungstensor (bezogen auf die Referenzkonfiguration)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.14)$$

und mit dem *Almansi-Eulerschen* Verzerrungstensor (bezogen auf die Momentankonfiguration)

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.15)$$

bestimmt. Unter Einbeziehung der beiden Verzerrungsmaße lautet die Längenänderung des Linienelementes (siehe Gleichung 2.12 und 2.13)

$$(dl)^2 - (dL)^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathcal{E} \cdot d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.16)$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten lassen sich die Verzerrungstensoren beider Konfigurationen ineinander umrechnen. Letztendlich ist damit die Einführung von geeigneten Verzerrungsmaßen, die in der Ausgangskonfiguration und für eine reine Starrkörperbewegung den Wert Null annehmen, gelungen. Damit können tatsächlich auftretende Deformationen in Form von Dehnungen bewertet werden, was unter anderem für die Formulierung von Materialgleichungen vorteilhaft ist.

2.1.3. Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten

Die Geschwindigkeit des Deformationsprozesses ist bedeutsam für die Umsetzung von inelastischen Materialgesetzen, die in der Regel in differentieller Form angegeben werden. Die konstitutiven Verknüpfungen von Spannungen und Deformationen werden mithilfe der Deformationsgeschwindigkeit formuliert. Energie- und Entropiebilanzen werden in Verbindung von Deformationsgeschwindigkeiten postuliert. Die relative Geschwindigkeit $d\mathbf{v}$ zweier benachbarter Teilchen kann durch die zeitliche Ableitung eines materiellen Linienelementes $d\mathbf{x}$ bezogen auf die räumlichen Koordinaten wie folgt berechnet werden

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = d\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

wobei \mathbf{l} den Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

dargestellt. Die materielle Ableitung des Deformationsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (2.19)$$

führt nach einer Umformung zu einer Definition des Geschwindigkeitsgradienten in Abhängigkeit des Deformationsgradienten

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.20)$$

Der Zusammenhang aus Gleichung 2.20 bestätigt, dass im Geschwindigkeitsgradienten eine Deformation und eine Starrkörperrotation eines materiellen Teilchens enthalten ist. Auch hier kann von der additiven Zerlegung eines Tensors zweiter Stufe in einen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil Gebrauch gemacht werden

$$\mathbf{l} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)}_{\mathbf{d}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T)}_{\mathbf{w}} = \mathbf{d} + \mathbf{w}. \quad (2.21)$$

Der symmetrische Tensor \mathbf{d} beschreibt die Änderungsgeschwindigkeit der Längen und Winkel materieller Linienelemente in der Momentankonfiguration. Der schiefsymmetrische Bestandteil \mathbf{w} wird auch Spintensor oder Drehgeschwindigkeitstensor genannt und gibt die lokalen Starrkörperrotationen der materiellen Linienelemente wieder. Der symmetrische Tensoranteil der Deformationsgeschwindigkeit und die Zeitableitung des *Almansi-Eulerschen* Verzerrungstensors stehen in folgendem Zusammenhang

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{l}, \quad (2.22)$$

während in der Referenzkonfiguration mit Hilfe der Zeitableitung des *Green-Langrangeschen* Verzerrungstensors

$$\mathbf{D} = \dot{\mathcal{E}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} \right) \quad (2.23)$$

gilt.

2.1.4. Linearisierung für kleine Deformationen

Für die meisten Anwendungsfälle im technischen Bereich der Festigkeitslehre reicht es aus, die Verzerrungen als infinitesimal klein zu betrachten. Bei diesem Sonderfall, der direkt aus der zuvor dargestellten Theorie großer endlicher Deformationen hervorgeht, handelt es sich um eine Vereinfachung, die mit keinem signifikanten Verlust der tatsächlich im Bauteil auftretenden Deformationsinformation einhergeht. Die mathematische Simplifizierung zeigt sich in dem Wegfallen der nichtlinearen quadratischen Terme in den Definitionen der Verschiebungsgradienten beim *Green-Langrangeschen* und *Euler-Almansischen* Verzerrungstensors, so dass sich daraus der bekannte infinitesimale Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{e} \approx \mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) \quad (2.24)$$

ergibt. Es handelt sich hierbei um den symmetrischen Tensor zweiter Stufe

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

der mithilfe der Dehnungen und Gleitungen den Deformationszustand an einem Punkt P charakterisiert. Die Tensorkomponenten auf der Hauptdiagonalen (Index $i = j$)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.26)$$

entsprechen den Dehnungen, wohingegen die Gleitungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma_{12}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \gamma_{23}, \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{31} \end{aligned} \quad (2.27)$$

auf die Nebendiagonalterme (Index $i \neq j$) entfallen. Die Lösung des Eigenwertproblems bezogen auf den Verzerrungstensor führt auf die sogenannten Hauptachsen und die dazugehörigen Hauptdehnungen. Die Hauptachsen stellen die Koordinatenrichtungen dar, für die alle Gleitungen null werden und die daraus gewonnenen Dehnungen als Extremwerte den Hauptdehnungen entsprechen. Der Verzerrungstensor lässt sich in einen gestaltändernden und einen volumenändernden Anteil zerlegen. In diesem Zusammenhang entspricht der Kugeltensor der Summe der Dehnungen und der verbleibende gestaltändernde Anteil wird als Deviator bezeichnet:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^D + \varepsilon^H \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \varepsilon^H = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^H \delta_{ij}. \quad (2.28)$$

Eine weitere wichtige Vereinfachung im Sinne der kleinen Deformationen ist hinsichtlich der Ableitungen des Verschiebungsvektors nach den materiellen und räumlichen Koordinaten zu vermerken. Diesbezüglich fallen die Gradienten der Verschiebungsvektoren in der Referenz- und Momentankonfiguration nahezu zusammen

$$\frac{\partial u_M}{\partial X_N} \approx \frac{\partial u_m}{\partial x_n}. \quad (2.29)$$

Demnach ist zur Beschreibung der Kinematik des materiellen Punktes der Ortsvektor \mathbf{x} ausreichend. Für die Spannungsdefinition wird der Spannungstensor nach *Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$ verwendet und der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten geht direkt in die Verzerrungsgeschwindigkeit über ($\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$).

2.1.5. Spannungstensoren

Aufgrund der äußeren Belastungen entstehen im Körper innere Kräfte. Zur Beschreibung des Beanspruchungszustandes eines Körpers infolge einer äußeren Last zu einer bestimmten Zeit sind neben den eingeführten Deformations- und Verzerrungsmaßen auch die Spannungsmaße notwendig. Die entsprechenden Verformungs- und Spannungsmaße lassen sich durch ein Werkstoffgesetz verknüpfen. Das Spannungsmaß als ein Maß für die Beanspruchung in einem bestimmten Bereich des Körpers wird durch die dort herrschenden Spannungen bestimmt. Eine fundamentale Betrachtung in einem Punkt eines klassischen Kontinuums und damit unter der Vernachlässigung des Momentenspannungsvektors im Sinne des polaren Kontinuums bildet das Maß für die innere Kraft in einem Punkt P als Spannungsvektor

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}. \quad (2.30)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t} ist demnach nicht nur vom Ort und der Zeit abhängig, sondern auch von der Orientierung der Schnittfläche im betrachteten Punkt P , was durch den Normalenvektor \mathbf{n}

zum Ausdruck kommt. Die Gesamtheit aller denkbaren Spannungsvektoren für einen materiellen Punkt P definiert den Spannungszustand in diesem Punkt. Bis dato wurde nicht festgelegt für welche Art von Konfiguration die Spannungsdefinition gilt. Nach dem *Cauchy*-Theorem wird der Spannungsvektor in der Momentankonfiguration als eine lineare Funktion der Schnittnormalen \mathbf{n} definiert

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.31)$$

Der *Cauchy*sche Spannungstensor definiert die sogenannten wahren Spannungen und bezieht sich auf die Wirkung der lokalen Kraft auf der momentanen Fläche $d\mathbf{a}$ in der aktuellen Schnittdefinition (siehe Abbildung 2.3). Demnach werden die *Cauchy*schen Spannungen als *Eulersche* Objekte bezeichnet. Äquivalent zu der Definition des Spannungsvektors in der Momentankonfiguration gilt für das Beanspruchungsverhalten eines Körpers nach der *Piola-Kirchhoff*-Definition

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N} \quad (2.32)$$

in der Referenzkonfiguration. Die ersten *Piola-Kirchhoff*-Spannungen geben den Zusammenhang zwischen der lokal wirkenden Kraft bezogen auf die undeformierte Ausgangsfläche $d\mathbf{A}$ in der aktuellen Schnittfläche. Aufgrund der Definition in der *Lagrangeschen* Konfiguration wird dieser Tensor auch als *Lagrangescher* Spannungstensor bezeichnet.

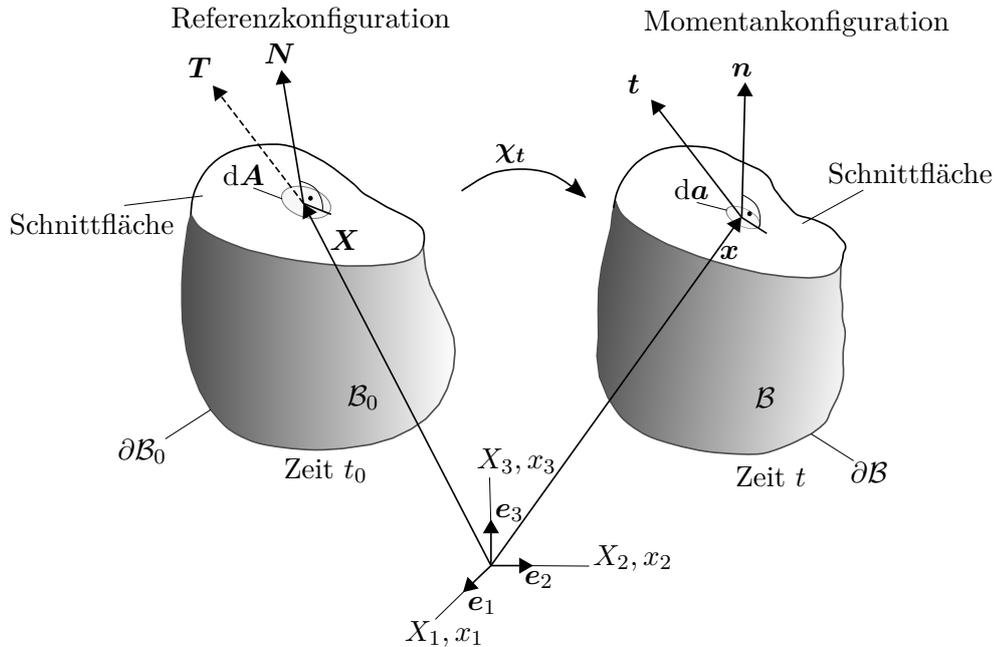


Abbildung 2.3.: Spannungsvektor in der Referenz- und Momentankonfiguration

Die Transformationsbeziehung zwischen den *Cauchy*-Spannungen und den ersten *Piola-Kirchhoff*-Spannungen ist durch

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.33)$$

gegeben. Für bestimmte Zwecke in der Kontinuumsmechanik wurde eine dritte Spannungstensor-Definition als der zweite *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor $\tilde{\mathbf{P}}$ eingeführt und steht mit dem *Cauchy*schen Spannungstensor wie folgt

$$\tilde{\mathbf{P}} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.34)$$

im Zusammenhang.

2.1.6. Physikalische Bilanzsätze der Kontinuumsmechanik

Die Bilanzgleichungen stellen allgemeingültige Aussagen über physikalische Prinzipien, die die Wechselwirkungen zwischen Einwirkungen und Zustandsänderungen des betrachteten Körpers beschreiben, dar. In diesem Zusammenhang wird das Verhalten bestimmter Feldgrößen in einem begrenzten Körper oder in einem definierten Volumen im Zeitablauf untersucht. Diese Lehrsätze bilden die physikalische Grundlage der Kontinuumsmechanik und haben axiomatischen Charakter, deren Gültigkeit materialunabhängig ist. Die Formulierung der Bilanzgleichungen kann in integraler Form als globale Aussage unter Betrachtung des Gesamtkörpers oder für hinreichend glatte Felder der zu bilanzierenden Größen in lokaler Form bezogen auf einen beliebig kleinen Teil des Körpers in Form von Differentialgleichungen durchgeführt werden. Die nachfolgend in dieser Arbeit verwendeten Konstitutivmodelle müssen die thermodynamische bzw. thermomechanische¹ Konsistenz erfüllen, d.h. die Materialgleichungen müssen mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik im Einklang stehen. Den Rahmen hierzu bilden die Bilanzgleichungen für Massenerhaltung, Impuls, Drehimpuls, Energie und Entropie in Verbindung mit dem zweiten Hauptsatz der Thermomechanik. Im Folgenden werden die grundlegenden Gleichungen für die thermomechanisch konsistente Materialmodellierung in einer zunächst noch allgemeinen Formulierung bereitgestellt.

Die Massenbilanz und das *Reynoldssche* Transporttheorem

Die Masse eines Körpers \mathcal{B} wird als positive skalare Größe mit

$$m(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} dm, \quad m > 0 \quad (2.35)$$

definiert. Das Axiom der Massenerhaltung besagt, dass Masse in einem definierten Kontrollvolumen weder verschwinden noch entstehen kann. Demnach ist die Masse eines materiellen Volumens zu allen Zeiten konstant. Es gilt demnach

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_R} \rho_R(\mathbf{X}, t) dV = konst., \quad (2.36)$$

wobei $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Dichteverteilung des Mediums in Abhängigkeit der räumlichen Koordinaten (Momentankonfiguration) und $\rho_R(\mathbf{X}, t)$ die Dichteverteilung des Mediums in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten (Referenzkonfiguration) ist. Die zeitliche Ableitung der Gleichung 2.36 unter Betrachtung der Definition in Momentankonfiguration ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0. \quad (2.37)$$

Das momentane Volumen Ω_t ist eine zeitabhängige Größe, so dass eine einfache Vertauschung der Differentiation und Integration nicht erlaubt ist. Hinzu kommt, dass im Sinne der klassischen Thermodynamik die Wahl der Systemgrenze eine entscheidende Rolle für den Betrachter spielt, so dass offene Systeme über ihre Grenzen Masse und Energie (Arbeit, Wärme) austauschen können, aber geschlossene Systeme ausschließlich einen Energieaustausch über ihre Systemgrenze erlauben bei fest definierter Masse. Abhilfe schafft an dieser Stelle das *Reynoldssche* Transporttheorem, das eine Überführung des obigen Ausdrucks in ein ortsfestes Volumen ermöglicht. Das *Reynoldssche* Transporttheorem gilt allerdings nicht nur für die Dichte eines Körpers, sondern

¹Nach Haupt [78] ist die Benennung thermodynamische Konsistenz äquivalent zu thermomechanischer Konsistenz verwendbar.

allgemein für Volumen bezogene skalare Feldgrößen, wie beispielsweise auch die Energiedichte. Bestimmte Herleitungen im Zusammenhang von Konfigurationskräften oder materiellen Kräften in der Bruchmechanik erfordern den Gebrauch dieses Theorems. Im Folgenden wird ein skalares Feld $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ zur Beschreibung einer physikalischen Größe (Dichte, innere Energie, freie Energie, Entropie, Wärme) eines Körperpunktes im Volumenraum bei einer bestimmten Zeit t betrachtet. Der momentane Zustand des Körpers sei durch den dreidimensionalen Bereich $\Omega(t)$ mit dem materiellen Volumen v zu einer gegebenen Zeit t als skalar wertige Funktion gegeben:

$$I(t) = \int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.38)$$

Eine Überführung der materiellen Ableitung der Funktion $I(t)$ in das Referenzsystem ist für die weitere Betrachtung bedeutsam, weil hierdurch die Kommutativität der Differentiation und Integration gegeben ist:

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \phi(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \int_{\Omega_R} \left[\dot{\phi}(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \phi(\chi(\mathbf{X}, t), t) \dot{J}(\mathbf{X}, t) \right] dV \\ &= \int_{\Omega_R} \left[\dot{\phi}(\chi(\mathbf{X}, t), t) + \phi(\chi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\dot{J}(\mathbf{X}, t)}{J(\mathbf{X}, t)} \right] J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi(\mathbf{x}, t) \frac{\dot{J}(\mathbf{X}, t)}{J(\mathbf{X}, t)} \right] dv \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] dv. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aus der materiellen Ableitung $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \int_{\Omega_t} \left[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] dv \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{v} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) \right) dv, \end{aligned} \quad (2.40)$$

so dass schließlich unter Anwendung des Satzes nach *Gauss* das eigentliche *Reynoldssche* Theorem in seiner allgemeinen Form resultiert

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi dv = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{\partial \Omega_t} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da. \quad (2.41)$$

Durch Ersetzen der allgemein skalar wertigen Funktion ϕ durch die Dichte ρ unter Verwendung der Gleichung 2.37, und 2.41 gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dv = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \Omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (2.42)$$

bzw. aus Gleichung 2.40 folgt für die zeitliche Ableitung der Dichtefunktion

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \, dv = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) \, dv = 0. \quad (2.43)$$

Da Bilanzgleichungen materialunabhängig sind, gilt diese Gesetzmäßigkeit sowohl für Festkörper als auch Fluide. Die Gleichung 2.42 bedeutet anschaulich, dass Zu- und Abfluss in bzw. aus dem Volumen Ω_t und die Dichteänderung in Ω_t gerade im Gleichgewicht sind. Aus unserer täglichen Erfahrung im Zusammenhang mit inkompressiblen Strömungen, d.h. bei Strömungen von Fluiden deren Dichte konstant ist ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), wie z.B. Wasser gilt nun

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \, dv = \int_{\partial \Omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = 0, \quad (2.44)$$

was nichts anderes bedeutet, als das alles, was in Ω_t an Wasser hineinströmt, auch hinausströmen muss, was bei einer einfachen Rohrströmung gegeben ist. Um auf die lokale Form der Massenerhaltungsgleichung zu kommen, betrachten wir die Gleichung 2.43, welche für jedes beliebige Volumen gilt, was nur erfüllt sein kann, wenn der Integrand zu Null gesetzt wird

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.45)$$

Diese partielle Differentialgleichung wird als Massenerhaltung- oder Kontinuitätsgleichung bezeichnet, da sie aus dem Prinzip der Massenerhaltung abgeleitet wurde.

Impuls- und Drehimpulsbilanzen

Die Definition des Impulses \mathcal{I} eines Körpers \mathcal{B} ist bekanntermaßen durch das Produkt aus dessen Masse und Geschwindigkeit gegeben.

$$\mathcal{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\Omega_t} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\Omega_R} \dot{\mathbf{u}}_R(\mathbf{X}, t) \rho_R(\mathbf{X}) \, dV. \quad (2.46)$$

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses während der Bewegung eines Körpers der Summe aller angreifenden Kräfte und damit der resultierenden Kraft \mathcal{F} äquivalent. In der Momentankonfiguration lässt sich die Impulsbilanz wie folgt darstellen

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\Omega_t} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \mathcal{F}(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{t} \, da + \int_{\Omega_t} \mathbf{b} \rho \, dv. \quad (2.47)$$

Dabei bezeichnet $\ddot{\mathbf{u}}$ die Beschleunigung, \mathbf{t} die Oberflächenlast bzw. den Spannungsvektor nach dem Cauchytheorem und \mathbf{b} die Masseneinheit bezogene Volumenkraftdichte. Die Volumenlast wird oft als die auf die Volumeneinheit bezogene Volumenkraftdichte angegeben, so dass der folgende Zusammenhang

$$\mathbf{b}^V(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (2.48)$$

gemeint ist. Die lokale Impulsbilanz resultiert aus der Verwendung des Gaußschen Satzes zur Umformung eines Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.49)$$

Die materielle lokale Form des Impulssatzes lässt sich unter Verwendung des zweiten *Piola-Kirchhoff*schen Tensors $\tilde{\mathbf{P}}$ bzw. des ersten *Piola-Kirchhoff*schen Tensors \mathbf{P} als

$$\rho_R \ddot{\mathbf{u}}_R(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{P}}) + \rho_R \mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_R \mathbf{B} \quad (2.50)$$

angeben. Während der Impulssatz die Bewegungsgleichungen für die Translationsbewegungen abzuleiten gestattet, liefert der Drehimpulssatz die notwendigen kinetischen Zusammenhänge zur Berechnung von Drehbewegungen. 1775 postulierte *Euler* den Drallsatz als ein fundamentales, eigenständiges Grundgesetz in der Mechanik, das nur unter bestimmten Annahmen aus dem Impulssatz² abgeleitet werden kann. Die allgemeine Definition des globalen Drehimpulsvektors \mathcal{L} in Abhängigkeit des Positionsvektors $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ ist durch die Gleichung 2.51 gegeben

$$\mathcal{L}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_R} \mathbf{r} \times \rho_R(\mathbf{X}, t) \dot{\mathbf{u}}_R(\mathbf{X}, t) dV. \quad (2.51)$$

In Analogie zu dem Impulssatz ergibt sich die Drehimpulsbilanzgleichung 2.52 eines Körpers in der Momentankonfiguration bezogen auf einen Punkt aus dem resultierenden Moment aller von außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenlasten bezüglich des gleichen Punktes

$$\dot{\mathcal{L}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} da + \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dv. \quad (2.52)$$

Nach weiteren Umformungen unter Anwendung des *Cauchy*-Theorems, des Divergenzsatzes und des Massenerhaltungssatzes lässt sich die Gleichung 2.52 als ein Volumenintegral schreiben

$$\dot{\mathcal{L}}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{u}} dv = \int_{\Omega_t} (\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{I} \cdot \times \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b}) dv. \quad (2.53)$$

Nach einer Zusammenfassung der zugehörigen Terme, ergibt sich für die globale Drehimpulsbilanzgleichung

$$\int_{\Omega_t} [\mathbf{r} \times (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b})] = \int_{\Omega_t} \mathbf{I} \cdot \times \boldsymbol{\sigma} dv. \quad (2.54)$$

Unter Beachtung des Impulssatzes verschwindet der Ausdruck in der runden Klammer, so dass sich die Drehimpulsbilanz in ihrer lokalen Ausführung auf die folgende Forderung reduziert

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{I} \cdot \times \boldsymbol{\sigma}) dv = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{I} \cdot \times \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.55)$$

Die Gleichung 2.55 führt somit auf die Symmetrieaussage für den *Cauchy*schen Spannungstensor. Die materielle Ausgabe der lokalen Drehimpulsbilanzgleichung zeigt die Symmetrie-Eigenschaft des 2. *Piola-Kirchhoff*schen Spannungstensors

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T. \quad (2.56)$$

2.1.7. Hauptsätze der Thermodynamik

Vorbemerkungen und verwendete Terminologie der Thermodynamik Für die nachfolgenden Abschnitte werden einige Grundbegriffe der Thermodynamik benötigt. Der Fokus liegt auf der Interpretation der thermodynamischen Betrachtungsweise aus Sicht der Kontinuumsmechanik. Eine thermodynamische Untersuchung beginnt mit der Abgrenzung des Gebietes, auf das sich

²Eine Ableitung des Drallsatzes aus dem Impulssatz und Drehimpulssatz erfordert die Voraussetzung, dass das „*Boltzmannsche Axiom*“ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ gilt.

die Untersuchung bezieht. Dieser abgegrenzte Raum wird als thermodynamisches System bezeichnet. Der Bereich außerhalb des Systems wird als Umgebung deklariert. Das System wird von seiner Umgebung in der Kontinuumsmechanik durch die Oberfläche des Körpers, die Systemgrenze, getrennt. Die physikalischen Eigenschaften des Systems werden durch drei Arten von Systemgrenzen, die als abgeschlossen, geschlossen oder offen gelten, bestimmt. Die abgeschlossene Systemgrenze ist weder für Energie noch für Materie durchlässig, so dass jegliche Form von Wechselwirkung mit der Umgebung verhindert wird. Von einem geschlossenen System sprechen wir, falls die Grenzen des Systems materieundurchlässig sind, aber Energieaustausch möglich ist. Demnach enthält ein geschlossenes System stets dieselbe Stoffmenge, wobei die Systemgrenzen sich bewegen dürfen. Das Volumen eines geschlossenen Systems muss nicht konstant sein. Lassen die Grenzen eines Systems Materie hindurch bei gleichzeitiger Möglichkeit eines Energieaustausches, sprechen wir von einem offenen System. Offene Systeme haben i.d.R. fest im Raume liegende Grenzen, die von einem oder mehreren Stoffströmen durchflossen werden. Ein solches System wird in der Fluidmechanik auch als Kontrollvolumen bezeichnet. Neben der Notwendigkeit der angemessenen Definition der Systemgrenze, wird die Systembeschreibung durch Zustandsgrößen bestimmt. Der Energiesatz der Mechanik stellt eine eingeschränkte Sonderform des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik dar. Diese Verallgemeinerung des Energiesatzes der Mechanik im thermodynamischen Sinne geschah in einem längeren historischen Prozess, dessen zahlreiche Umwege und Irrwege in *Truesdell* [197] beschrieben werden. Grundsätzlich erweitert die Thermodynamik den in der Mechanik behandelten Kreis von Erfahrungstatsachen um die Begriffe innere Energie und Wärme und somit können neben mechanischen Einflussgrößen auch thermische, chemische und elektromagnetische Wirkungen auf Kontinua einbezogen werden. In dieser Arbeit spielen ausschließlich die mechanische und thermische Einwirkung auf Körper eine Rolle, so dass im Folgenden thermodynamische Hauptsätze, in diesem Zusammenhang auch thermomechanische Hauptsätze genannt, auf diese beiden Wirkungsformen bezogen werden. Die thermomechanische Interpretation des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik postuliert, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Körpers gleich der Summe aus der Leistung der äußeren Oberflächen- und Volumenkräfte und der Wärmezufuhrleistung ist

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) + \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(t) + \mathcal{Q}(t). \quad (2.57)$$

Die kinetische Energie wird durch die Gleichung 2.58 definiert:

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \rho \, dv. \quad (2.58)$$

Die Integration der spezifischen inneren Energie und der Materialdichte über das betrachtete Volumen bestimmt die innere Energie zu

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Omega_t} \rho e \, dv. \quad (2.59)$$

Die Wirkung der äußeren Kräfte führt zu der externen Leistung, bestehend aus einem Flächen- und Volumenintegral

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, da + \int_{\Omega_t} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \rho \, dv. \quad (2.60)$$

Wärmezufuhrleistung besteht aus dem Anteil der Wärmezufuhr im Volumen, verursacht durch eine skalare Wärmequelle r , sowie der Wärmezufuhr über die Körperfläche a aufgrund der Wärmestromdichte \mathbf{q} :

$$\mathcal{Q} = \int_{\Omega_t} \rho r \, dv - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.61)$$

Mit den entsprechenden Ausdrücken für die kinetische Energie, die innere Energie, die äußeren Arbeiten und der Wärmezufuhrleistung erhalten wir hieraus die materielle Zeitableitung der Gesamtenergie als den ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + e \right) \rho \, dv = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da + \int_{\Omega_t} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + r) \rho \, dv. \quad (2.62)$$

Neben der Umformung des *Gauss*-Satzes und der Symmetrieeigenschaft des *Cauchy*-Spannungstensors wird die aus der Tensorrechnung bekannte Transformation

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{v}) = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (2.63)$$

angewendet, so dass aus der Gleichung 2.62 auf ein Volumenintegral

$$\int_{\Omega_t} \left[\underbrace{(\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b})}_{=0} \cdot \mathbf{v} + \rho \dot{e} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} - \rho r - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \right] dv = 0 \quad (2.64)$$

geschlossen werden kann. Wie bereits in Gleichung 2.64 angedeutet vereinfacht sich der Integrand mithilfe des Impulssatzes (siehe Gleichung 2.49) und es folgt die lokale Energiebilanz als erster Hauptsatz der Thermodynamik

$$\rho \dot{e} = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}. \quad (2.65)$$

Gemäß dieser Definition unterliegt ein thermodynamisches System infolge einer Gesamtenergieerhaltung nur einer Energietransformation von einer in die andere Energieform. Es ist wichtig zu betonen, dass präzisere Aussagen über die Richtung, Reversibilität und den Typ solcher Energieumwandlungen mit diesem Postulat nicht durchführbar sind. Diese fehlende Beschreibung des thermodynamischen Systems liefert der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. Die *Clausius-Duhem*-Ungleichung basiert auf dem zweiten Hauptsatz und wird insbesondere in der Kontinuumsmechanik verwendet. Als Ausgangspunkt für die Formulierung führt *Clausius* den Begriff der Entropie ein. Die Entropie S wird oft als das Maß für die Unordnung in einem System bezeichnet

$$S = \int_{\Omega_t} \rho s \, dv, \quad (2.66)$$

wobei s die auf die Dichte bezogene spezifische Entropie darstellt. Der Begriff Entropiebilanz bezieht sich auf die folgende Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho s \, dv = \int_{\Omega_t} \frac{r\rho}{\Theta} \, dv + \int_{\Omega_t} \gamma \rho \, dv - \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.67)$$

Die spezifische Entropieproduktion γ steht in einem engen Zusammenhang mit der Umwandlung der Dissipation der mechanischen Arbeit in Wärme und wird durch die Dissipationsungleichung

$$\int_{\Omega_t} \gamma \rho \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho s \, dv - \int_{\Omega_t} \frac{r\rho}{\Theta} \, dv + \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da \geq 0 \quad (2.68)$$

als *Clausius-Duhem*-Ungleichung verdeutlicht. Es ist von großer Bedeutung, ein klares Verständnis für die Signifikanz des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in der Werkstoffmodellierung und elastisch-plastischen Bruchmechanik zu erlangen. Insbesondere bringt dieses Axiom die Erfahrung zum Ausdruck, dass die Transformation der mechanischen Arbeit vollständig in Wärme erfolgen kann, aber die Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit nur zum Teil möglich ist. Die lokale Form der *Clausius-Duhem*-Ungleichung

$$\gamma = \dot{s} - \frac{r}{\Theta} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) \geq 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = \dot{s} + \frac{1}{\rho\Theta} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} - \rho r) - \frac{1}{\rho\Theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0 \quad (2.69)$$

lässt sich unter Einbeziehung der spezifischen inneren Energie als

$$\Theta\gamma = \Theta\dot{s} - \dot{e} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \frac{1}{\rho\Theta}\mathbf{q} \cdot \nabla_x \Theta \geq 0 \quad (2.70)$$

darstellen. Mit Einführung der spezifischen freien *Helmholtzenergie*

$$\psi = e - \Theta s \quad (2.71)$$

entsteht eine insbesondere in der Kontinuumsmechanik geläufige Form der *Clausius-Duhem-Ungleichung* unter der Annahme von kleinen Deformationen ($\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$)

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\mathbf{d}}_{\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} - \dot{\psi} - s\dot{\Theta} - \frac{1}{\rho\Theta}\mathbf{q} \cdot \nabla_x \Theta \geq 0. \quad (2.72)$$

Einen wichtigen Anwendungsfall in der Mechanik stellen thermodynamische Systeme, die als adiabatisch ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$), isotherm ($\dot{\Theta} = 0$) oder deren Temperaturfelder als homogen ($\nabla_x \Theta = \mathbf{0}$) gelten, dar. Diesbezüglich vereinfacht sich die Restriktion 2.72 zu

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\psi} \geq 0. \quad (2.73)$$

Dieser Sonderfall bringt die physikalische Interpretation des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in seiner einfachen Form näher. Er besagt, dass die spezifische Spannungsleistung stets größer sein muss als die Produktion der freien Energie, so dass die Leistung der äußeren Kräfte nicht dermaßen im Körper gespeichert werden, so dass mehr Energie vom Körper abgegeben werden kann als davor infolge der externen Leistung aufgenommen wurde. Eine wichtige Zielstellung dieser Forschungsarbeit liegt bei der Einhaltung des *Clausius-Duhem-Gesetzes* für beliebige Prozesse sowohl im Bereich der Materialmodellierung bzw. der Parameteridentifikation für die Werkstoffmodelle, als auch bei den bruchmechanischen Analysen im Zusammenhang mit den zyklischen Rissspitzenparametern. Auf diese Art und Weise gelingt es ein in sich geschlossenes Berechnungskonzept zu entwickeln, welches sich durch eine durchgehend thermomechanisch-konsistente Umsetzung auszeichnet.

Übersicht über die thermomechanischen Bilanzgleichungen

Die thermomechanischen Bilanzgleichungen werden im Folgenden sowohl in der Referenzkonfiguration als auch in der Momentankonfiguration in ihrer lokalen Form zusammenfassend angegeben.

Thermomechanische Bilanzgleichungen in der Momentankonfiguration

Kontinuitätsgleichung:	$\dot{\rho} + \rho \nabla_x \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$
Impulssatz:	$\rho \dot{\mathbf{u}} = \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{b}$
Drehimpulssatz:	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$
Energiebilanz:	$\dot{e}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla_x \cdot \mathbf{q} + r + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$
Entropiebilanz:	$-\dot{e} + \Theta \dot{s} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \frac{1}{\rho\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_x \Theta \geq 0$

Thermomechanische Bilanzgleichungen in der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned}
 \text{Kontinuitätsgleichung:} & \quad \rho_R = \rho_R(\mathbf{X}) \\
 \text{Impulssatz:} & \quad \rho_R \ddot{\mathbf{u}}_R = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{X}, t)) + \rho_R \mathbf{B} \\
 \text{Drehimpulssatz:} & \quad \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \\
 \text{Energiebilanz:} & \quad \dot{e}(\mathbf{X}, t) = -\frac{1}{\rho_R} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{q}_R + r + \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{E}} \\
 \text{Entropiebilanz:} & \quad -\dot{e} + \Theta \dot{s} + \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\rho_R \Theta} \mathbf{q}_R \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta \geq 0
 \end{aligned}$$

Ausgehend von den Bilanzgleichungen in der Momentankonfiguration und somit mit der Kontinuitätsgleichung, dem Impulssatz und der Energiebilanz stehen insgesamt fünf skalare Gleichungen zur Bestimmung der sechszehn Feldgrößen $\dot{\mathbf{u}}, \Theta, \rho, \sigma, e, \mathbf{q}$ und s zur Verfügung. Die Entropiegleichung fungiert als eine Restriktion zur Definition der Prozessrichtung, die zur physikalisch widerspruchsfreien Beschreibung dient, so dass diese nicht als zusätzliche Gleichung zur Lösung der unbekanntenen Größen gezählt wird. Letztendlich führt die Betrachtung der Bilanzgleichung in der Referenzkonfiguration zu der gleichen Schlussfolgerung, nämlich die alleinige Verwendung der Bilanzgleichungen liefert nicht ausreichend Gleichungen um die Unbekannten mathematisch aus einem Gleichungssystem zu bestimmen. Diesbezüglich wird von einer mathematisch unterbestimmten Problemstellung gesprochen. In der Referenzkonfiguration kann die Dichte $\rho_R = \rho(\mathbf{X})$ im Gegensatz zur materiellen Betrachtungsweise als eine bekannte Größe angenommen werden, was dazu führt, dass vier Gleichungen für fünfzehn zu bestimmenden Feldgrößen $x, \Theta, \tilde{\mathbf{P}}, e, \mathbf{q}_R$ und s gegenüberstehen. Die Einbeziehung der sogenannten konstitutiven Gleichungen oder Materialgleichungen ermöglicht den Lösungszugang, indem elf zusätzliche Gleichungen verwendet werden können. Die konstitutiven Gleichungen sind im Gegensatz zu den allgemeingültigen Bilanzgleichungen materialabhängige Definitionen. Eine herausragende Rolle in dieser Arbeit spielt der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in der Form der *Clausius-Duhem*-Ungleichung. Nach *Haupt* [78] bestehen zwei Möglichkeiten die Entropieungleichung im Rahmen einer Gesamtmodellierung zu erfüllen. Die eine Lösungsvariante basiert auf der Begrenzung der erlaubten thermodynamischen Prozesse. Der zweite Lösungsweg beruht auf der direkten Einbeziehung der *Clausius-Duhem*-Restriktion in die konstitutiven Gleichungen, so dass die Erfüllung der Entropieungleichung sichergestellt wird. Eine Beschreibung dieser Methode wird von *Coleman und Noll* in [39] vorgestellt.

2.2. Elastisch-plastische Materialgesetze für metallische Werkstoffe

2.2.1. Prinzipien der Materialtheorie - Konstitutive Materialgleichungen

Die in den vorangegangenen Kapiteln eingeführten kinematischen Beziehungen und Bilanzgleichungen sind von den konkreten Werkstoffeigenschaften unabhängig und sind für alle Kontinua gleichermaßen gültig. Erfahrungsgemäß kann beobachtet werden, dass Körper gleicher Geometrie und Belastung bei unterschiedlichen Materialien ein unterschiedliches Spannungs- und Verschiebungsverhalten aufweisen. Wie bereits im Abschnitt 2.1.7 erwähnt, ist die Anzahl der Bilanzgleichungen kleiner als die Anzahl der Feldgrößen, die das Kontinuum beschreiben. Um das vorliegende Materialverhalten zu charakterisieren, werden demnach zusätzliche Gleichungen benötigt. Die Zielstellung der Materialtheorie ist es eine Verbindung zwischen den Materialmodellgleichungen und den Bilanzgleichungen mit systematischen und rationalen Verfahren der mathematischen Werkstoffmodellierung herzustellen. Numerische Analysen von komplexen Beanspruchungen, die durch die Einwirkung unterschiedlicher physikalischer Felder, aber auch durch unterschiedliche Phasen des Materialzustandes gekennzeichnet sein können, erfordern

zunehmend auch im Ingenieurbereich genauere Kenntnisse der Materialtheorie [8]. Die sogenannten konstitutiven Materialgleichungen stellen einen funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen her und vervollständigen somit das zu lösende Gleichungssystem. Konstitutive Gleichungen beschreiben die wesentlichen Eigenschaften eines realen Werkstoffs in idealisierter Form mit Hilfe von mathematischen Modellen. Für einen bestimmten Werkstoff sind i.d.R. verschiedene Werkstoffmodelle unterschiedlicher Komplexität vorhanden und in den gängigen kommerziellen FE-Programmen bereits implementiert. Spezielles Werkstoffverhalten und die Beschreibung bestimmter Werkstoffeigenschaften, die mit den in der Software angebotenen Werkstoffmodellen nicht abgebildet werden können, können vom Anwender mit Subroutinen (UMATS) als Materialmodell in die FE-Software integriert werden. Konstitutivgleichungen umfassen alle das makroskopische Kontinuumsverhalten beschreibenden phänomenologischen Werkstoffvariablen mit den abgeleiteten mathematischen Gleichungen und den zugehörigen Parametern. Die Ermittlung der Materialeigenschaften, die insbesondere für die Parameteridentifikation notwendig sind, erfolgt im Experiment. Ein allgemein gültiges Konzept zur Begründung universeller Materialgleichungen zur Erfassung der vielfältigen Eigenschaften von Materialien existiert nicht [27, 8]. Die schrittweise Formulierung von konstitutiven Gleichungen kann gemäß folgender Vorgehensweise unternommen werden [8]:

- Formulierung plausibler Annahmen für Materialgleichungen,
- Überprüfen der Widerspruchsfreiheit der Annahmen mit den materialunabhängigen Aussagen der Thermodynamik und
- Identifikation der Materialparameter auf Basis von experimentellen Daten.

Auf die ersten beiden Punkte wird im Weiteren kurz eingegangen. Die Parameteridentifikation zur konkreten Definition des Werkstoffmodells nimmt einen wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit ein und wird im Kapitel 4 gesondert behandelt. Bei der Ableitung von Konstitutivgleichungen für Materialmodelle unterscheidet man grundsätzlich die induktive Vorgehensweise von den deduktiven Verfahren. Die induktive Vorgehensweise entspricht am ehesten der pragmatischen Herangehensweise eines Ingenieurs und geht von einfachsten konstitutiven Annahmen aus. Kompliziertere Materialgesetze werden dann durch empirische Schlussfolgerungen gefunden. Ein derartiges Konzept führt zu Werkstoffmodellen, deren physikalische Konsistenz nicht à priori gesichert ist. Bei der deduktiven Formulierung wird mit den Bilanzgleichungen und weiterer übergeordneter Prinzipien ein möglicher Rahmen für die Konstitutivgleichungen vorgegeben, so dass gewisse Restriktionen in Form von Axiomen der Materialtheorie per Definition den zulässigen Lösungsraum der Modellgleichungen auf eine physikalisch konsistente Wertemenge begrenzen. Für das so erhaltene Gleichungssystem, das mathematisch und physikalisch widerspruchsfrei ist, können im anschließenden Schritt die Parameter anhand von experimentellen Daten identifiziert werden. Im Folgenden werden einige dieser Axiome in Kurzfassung wiedergegeben:

- **Determinismus** Das Prinzip des Determinismus besagt, dass der aktuelle Zustand eines Kontinuums durch die aktuelle Beanspruchung und durch die gesamte Vorgeschichte charakterisiert wird. Das bedeutet, alle abhängigen konstitutiven Variablen werden durch Zeitfunktionale bzw. die Geschichte der unabhängigen Variablen im Körper bestimmt.
- **Materielle Objektivität** Die Materialgesetze eines realen Materials sind von der Wahl des Beobachters und der Bewegung des Beobachters im Raum unabhängig, d.h. die Materialgleichungen müssen invariant gegenüber konstanten Zeitverschiebungen, Starrkörpertranslationen und Starrkörperrotationen sein.
- **Lokale Wirkung** Der Zustand von materiellen Punkten wird ausschließlich durch die differentiell nahe Umgebung beeinflusst. Fernwirkungen werden entsprechend diesem Axiom vernachlässigt. Für die überwiegende Anzahl der praktischen Fälle genügt eine Approximation mit Hilfe von einfachen Materialien. Mit dieser Vereinfachung erhält man lokale

Materialgleichungen, die nur die Kenntnis der Originalgrößen und ihrer ersten Ableitungen nach dem Ort erfordern. Die konstitutiven Gleichungen werden somit lokal formuliert.

- **Physikalische Konsistenz und das Konzept interner Variablen** Konstitutivgesetze dürfen nicht den Bilanzgleichungen widersprechen. Damit wird die Erfüllung der im Kapitel 2.1.6 genannten Bilanzen vorausgesetzt, wobei die Hauptsätze der Thermodynamik von besonderer Bedeutung sind. Die Materialgesetze müssen die dissipative Ungleichung erfüllen und somit im Einklang mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik sein. Dissipative Effekte werden in plastischen Werkstoffmodellen durch zusätzlich in der freien Energie eingeführte interne Variablen oder innere Variablen beschrieben. Die Entwicklung von irreversiblen Prozessen im Material werden durch Evolutionsgleichungen bestimmt. Bei elastisch-plastischen Materialmodellen werden oft die Gesamtverzerrungen, plastischen Verzerrungen, die Verfestigungsvariablen und die Temperatur als innere Variablen deklariert. Da die Gesamtverzerrung durch die Dekomposition in elastischen und plastischen Verzerrungen ausgedrückt werden kann, nimmt die freie *Helmholtz*-energie eines elastisch-plastischen Materialmodells mit gemischter Verfestigung die folgende Form an: Es sei hingewiesen, dass die Entscheidung über die Zuordnung der inneren Variablen in diesem Zusammenhang nicht strikt einer bestimmten Definition entsprechen muss, sondern aus den konkreten Messmöglichkeiten und den Anwendungsbelangen folgt. Aufschlussreiche Diskussionen können der Literatur [114, 8] entnommen werden.

Materialgesetze geben den mathematisch formulierten Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand und den sich einstellenden Verzerrungen an und hängen von den mechanischen Eigenschaften der Werkstoffe ab. Das Verformungs- und Versagensverhalten der Werkstoffe kann nach der entsprechenden Abhängigkeit der Gesetzmäßigkeiten vom Ort, Richtung und Zeit klassifiziert werden:

- **Ortsabhängigkeit** Unterscheidet sich das Werkstoffverhalten an verschiedenen Koordinaten \boldsymbol{x} und zeigt damit ein vom Ort der Untersuchung abhängiges Verhalten, spricht man von Inhomogenität (z.B. Schweißverbindung, Schmiedestück). Falls ein Werkstoff als homogen bezeichnet wird, zeigt er homogenes Werkstoffverhalten und damit besitzt das Material an jedem Koordinatenpunkt \boldsymbol{x} gleiche Eigenschaften.
- **Richtungsabhängigkeit** Unterscheidet sich das Werkstoffverhalten am selben Ort in verschiedene Richtungen der Beanspruchungen, so liegt eine Anisotropie vor (z.B. Elastizitätsmodul von Laminaten, Kompositen). Falls keine Richtungsabhängigkeit besteht, nennt man diese Eigenschaft Isotropie.
- **Zeitabhängigkeit** Ein zeitunabhängiges Verhalten, bei dem der zeitliche Verlauf der Beanspruchung für das Werkstoffverhalten keine Rolle spielt, wird als skleronomes Verformungsverhalten bezeichnet. Das skleronome Werkstoffverhalten wird durch Werkstoffgesetze, die unabhängig von der Zeit t und der Geschwindigkeit des Verformungsprozesses sind, definiert. Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass Werkstoffe oft bei unterschiedlichen Beanspruchungsgeschwindigkeiten signifikante Unterschiede in der Spannungs-Dehnungs-Antwort zeigen, so dass zur Erfassung dieses Verhaltens die Zeit als Variable in das Materialgesetz einfließen muss. Diese Art des Verformungsverhaltens wird als rheonom bezeichnet. Rheonome Werkstoffgesetze werden beispielsweise zur Erfassung von viskoelastischen und viskoplastischen Eigenschaften eingesetzt. Ein weiteres zeitabhängiges Verhalten wird durch Alterung charakterisiert. Hierbei verändern sich die Werkstoffeigenschaften ohne Beanspruchung ausschließlich als Funktion der Zeit.

Zusätzlich zu den genannten Abhängigkeiten wird das Werkstoffverhalten von anderen physikalischen Effekten beeinflusst, wie z.B. den chemischen Reaktionen, der Korrosion, der radioaktiven Strahlung, der Temperatur und dem Feuchtegehalt. In dieser Arbeit wird das thermodynamisch

konsistente Gesamtkonzept anhand von metallischen Werkstoffen angewendet, die ausschließlich mit einem skleronomen, isotropen und homogenen Materialverhalten im Rahmen der inkrementellen Plastizitätstheorie behandelt werden.

2.2.2. Das elastische und das elastisch-plastische Materialverhalten

Das elastische Materialverhalten wird im Wesentlichen durch die Reversibilität und das skleronome Verformungsverhalten charakterisiert. Der Be- und Entlastungsvorgang eines elastischen Materials ist reversibel, d.h. bei Entlastung geht der Körper wieder vollständig in seinen ursprünglichen Ausgangszustand zurück. Treten im elastischen Bereich des Materials nur kleine Verzerrungen auf, so wird das elastische Verformungsverhalten linear und durch das bekannte *Hookesche Gesetz*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.74)$$

wiedergegeben. In der linearen Konstitutivgleichung sind die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ über einen Tensor vierter Stufe, dem Elastizitätstensor \mathbf{E} , miteinander verbunden. Bei einem Tensor vierter Stufe werden 81 Komponenten erwartet. Die Komponenten des Elastizitätstensors reduzieren sich aufgrund der Symmetrie des Spannungs- und Dehnungstensors sowie bei einer Voraussetzung eines elastischen Potentials und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen auf 21 unabhängige Elastizitätskonstanten. Eine weitere Vereinfachung des Elastizitätstensors ergibt sich unter der Annahme der Isotropie, wodurch sich die Komponenten durch zwei unabhängige Materialparameter darstellen lassen:

$$\mathbf{E} = E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.75)$$

Die *Laméschen* Konstanten λ und μ werden über die folgende Beziehung aus dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktion ν bestimmt

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.76)$$

Unter Verwendung der *Laméschen* Konstanten in Verbindung mit dem *Hookeschen* Gesetz 2.74 erhält man das Stoffgesetz für ein linear-elastisches isotropes Werkstoffverhalten als

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.77)$$

Ein Körper deformiert sich elastisch, wenn die Arbeit vollständig reversibel ist, so dass dissipative Anteile nicht vorkommen. Die *Clausius-Duhem*-Ungleichung 2.73 geht unter Annahme eines elastischen isothermen Materialverhalten in eine Gleichung (verlustfreie Umwandlung der externen Energie in die freie Energie)

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi}^e = 0 \quad (2.78)$$

über aus welcher direkt die Spannung abgeleitet werden kann

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{d\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{d\psi^e(d\varepsilon_{ij})}{d\varepsilon_{ij}}. \quad (2.79)$$

Die aufgewendete Verformungsarbeit wird vollständig als Verzerrungsenergie im Körper gespeichert, so dass aus 2.79 durch Integration die freie elastische Energie

$$\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\rho} U \quad \text{bzw.} \quad \psi^e(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl} = \frac{1}{\rho} U \quad (2.80)$$

folgt. Die konstitutiven Variablen sind unabhängig von der Belastungsgeschichte, somit besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der momentanen Spannung σ und der momentanen Verzerrung ε . Damit ist U vom Verformungsweg unabhängig und bedeutet, dass die Formänderungsenergie-dichte als spezifische potentielle Energie im Volumen gespeichert wird, was mit der Dichte in eine spezifische Energie $\psi^e = U/\rho$ umgerechnet werden kann. Im mathematischen Sinne stellt das U bzw. ψ^e ein wegunabhängiges Integral der Zustandsvariable ε dar. Im Hinblick auf die Lösung von Randwertproblemen sind im einfachsten Fall (infinitesimale Verzerrungen, isothermes und isotrop-lineares Werkstoffverhalten) 15 unbekannte Feldgrößen \mathbf{u} , ε und σ zu bestimmen. Aufgrund der 6 Konstitutivgleichungen als Elastizitätsgesetz und den 3 Bilanzgleichungen samt der 6 Kinematikgleichungen im Zusammenhang der Verzerrungsdefinition ist das Randwertproblem mit 15 Feldgleichungen mathematisch lösbar. Zur eindeutigen Lösung sind außerdem Randbedingungen als Spannungsrandbedingung, Verschiebungsrandbedingung oder gemischte Randbedingung zu berücksichtigen. Die Lösung eines statischen Randwertproblems ist im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie eindeutig. Im nichtlinearen Fall existieren unter Umständen mehrere Lösungen. Viele technisch relevante Materialien wie z.B. Metalle, Beton, Keramiken und Gläser verhalten sich bis zu einem bestimmten Beanspruchungsbetrag in guter Näherung als linear-elastisch und isotrop. Eine allgemeinere Form des Elastizitätsgesetzes kann durch die Hyperelastizität ausgedrückt werden. Die Hyperelastizität kann bei großen Deformationen, Anisotropie und beliebiger Nichtlinearität verwendet werden. Eine weiterführende Diskussion hyperelastischer Materialmodelle für große Deformationen findet man bei Haupt [78] und Ogden [144]. Metallische Werkstoffe werden i.d.R. durch elastisch-plastisches Materialverhalten beschrieben. Solche Werkstoffe zeigen nach Überschreiten einer bestimmten Beanspruchungsgrenze bzw. der Elastizitätsgrenze ein plastisches Verhalten, das durch inelastische, bleibende Verformungen gekennzeichnet ist. Nach Entlastung bleiben die plastischen Deformationen bestehen. Während des Belastungsablaufes resultiert die plastische Formänderung als ein quasistatisches Gleichgewicht zwischen den Beanspruchungen und dem Verformungswiderstand des Werkstoffes. Plastische Formänderungen sind irreversible dissipative Prozesse, die durch die Umwandlung der plastischen Formänderungsarbeit zum überwiegenden Anteil in Wärme zum Ausdruck gebracht wird. Entlang der Erstbelastungskurve verhält sich der Werkstoff bis zu der Fließgrenze elastisch. Wird die Belastung weiter über die Fließgrenze erhöht, so antwortet der Werkstoff mit einem nichtlinearen Verhalten und es bilden sich plastische Dehnungen $\varepsilon^p > 0$ aus. Ein ideal-plastisches Materialmodell antwortet auf eine Belastungserhöhung ab der Fließgrenze mit den plastischen Verformungen $\varepsilon^p \rightarrow \infty$, so dass die Tragfähigkeit des Werkstoffes hiermit erschöpft ist. Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass reales Werkstoffverhalten eines duktilen Metalls ab der Fließgrenze bei einer Beanspruchungserhöhung aufgrund der plastischen Deformationen entlang der monotonen Fließkurve und mit einer Verfestigung einhergeht. Wird die angelegte Belastung bis zur Spannung Null zurückgenommen, so folgt die Spannungs-Dehnungs-Kurve entlang der elastischen Gerade und der Werkstoff entlastet durch rein elastische Verformungen, wobei die plastischen Verzerrungen ε^p zurückbleiben. Eine Wiederbelastung auf den Anfangswert erfolgt ebenfalls elastisch und erst bei weiterer Lasterhöhung plastifiziert und verfestigt der Werkstoff weiter. Führt man ab dem Zustand eine Belastung in die entgegengesetzte Richtung (Zug \rightarrow Druck) durch, so setzt das plastische Fließen im Druckbereich meist früher ein als im Zugbereich. Diese Verschiebung der Fließgrenze bei Lastumkehr wird *Bauschinger*-Effekt genannt. Bei Erhöhung der Drucklast bis zum Punkt über die negative Fließgrenze verfestigt der Werkstoff auch im Druckbereich. Während der Belastungsumkehr folgt die Spannungs-Dehnungs-Kurve erneut dem Elastizitätsgesetz bis zu der Fließgrenze. Prägt man dem Werkstoff zyklische Be- und Entlastungsvorgänge auf, dann entstehen plastische Wechselverformungen und die Spannungs-Dehnungs-Kurve nimmt die Form einer Hysterese an, deren Gestalt sich mit den Lastzyklen in Abhängigkeit der Belastungsart (dehnungs- oder spannungskontrollierte Lastaufprägung), der Lastamplitude und der Mittelspannung bzw. Mitteldehnung noch verändern kann. Aus diesen Grundüberlegungen wird deutlich, dass reales Werkstoffverhalten von Metallen nur durch geeig-

nete Werkstoffmodelle, die in der Lage sind die elastisch-plastischen Effekte in einer ausreichenden Qualität wiederzugeben und als solche in einer FE-Simulation integriert sind, angemessen erfasst werden kann. Bevor der Grundaufbau von elastisch-plastischen Materialmodellen behandelt wird, die sich ausschließlich auf die Beschreibung des makroskopischen Werkstoffverhaltens beziehen, wird zunächst auf einige Aspekte der Mikroplastizität eingegangen.

2.2.3. Wichtige Aspekte der Mikroplastizität

Makroskopische Beobachtungen des plastischen Verhaltens gehen in der Regel auf die Mikrostruktur des Materials zurück. Metalle besitzen überwiegend einen polykristallinen Aufbau, wobei hier Plastizität hauptsächlich durch die Bewegung und Wechselwirkung von Versetzungen begründet werden. Um das plastische Verhalten von Metallen zu verstehen, ist es notwendig, sich näher mit Versetzungen zu beschäftigen. Unter Versetzungen werden eindimensionale Gitterstörungen verstanden, die als Stufen- oder Schraubensetzungen bekannt sind. Diese können unter anderem mit Hilfe des *Burgers*-Vektors unterschieden werden. Es sei angemerkt, dass Versetzungen ein Eigenspannungsfeld bewirken, dem eine elastische Energie zugeordnet werden kann [75]. Bei der Darstellung der kristallographischen Struktur eines einzelnen Kornes durch Atomebenen, können die plastischen Deformationen in Form von kristallographischer Scherung visualisiert werden. Im Gegensatz zur elastischen Verformung, bei der nur interatomare Bindungen gedehnt werden, erfordert das Aufbrechen und Umformen interatomarer Bindungen und die Bewegung einer Atomebene relativ zu einer anderen. Nach dem Scheren des Kristalls bleibt die Struktur bis auf die Enden des Kristalls unverändert. Die Bedeutung einer Reihe äußerst wichtiger Phänomene in der makroskopischen Plastizität wird anhand der folgenden Aspekte deutlich:

- Inkompressibilitätsbedingung der Plastizität schließt eine Volumenänderung aus,
- plastische Deformation ist ein Scherprozess, der durch hydrostatische Beanspruchungen nicht beeinflusst wird
- und plastisches Fließen in einem Polykristall ist ein isotroper Prozess.

Experimentelle Beobachtungen belegen, dass die plastische Deformation direkt mit dem Scherprozess zusammenhängt. Die Verschiebung der Versetzungen bzw. die Umordnung der Atome in der Umgebung der Versetzungslinie wird durch die Wirkung von Schubspannungen ausgelöst. Die dabei geleistete Arbeit dissipiert im Wesentlichen als Wärme. Ein Abgleiten der Gitterebenen folgt aus der Bewegung der Versetzungen und kann zur Bildung einer neuen Oberfläche führen. Das makroskopisch plastische Materialverhalten ist auf diese mikroskopischen Mechanismen zurückzuführen. Innerhalb des Kristalls ist die Versetzungsbewegung häufig nicht gleichförmig verteilt, sondern in Gleitbändern lokalisiert. In der Regel wird die Bewegung der Versetzungen durch das Aufstauen an Hindernissen, wie z. B. Korngrenzen oder Einschlüssen, behindert. Dieser Versetzungstau wird makroskopisch als Verfestigung bemerkbar.

2.2.4. Grundaufbau der verwendeten Plastizitätsmodelle

Die wichtigsten Bausteine der mehrdimensionalen Elasto-Plastizitätstheorie sind:

- die Fließbedingung,
- die Fließregel,
- die Verfestigungsregel und
- gegebenenfalls weitere modellspezifische Zustandsvariablen.

Die nachfolgend verwendete Plastizitätstheorie bezieht sich auf die Bestimmung des elastisch-plastischen Verformungsverhaltens eines mehrachsigen Beanspruchungsfalls mit der Einschränkung auf kleine Verzerrungen. Insbesondere kann bei zyklischen Beanspruchungen meist von kleinen Dehnungen ($< 1\%$) ausgegangen werden, so dass die Unterscheidung zwischen wahren und technischen Dehnungen nicht notwendig ist. Die Gesamtverzerrungen ε_{ij} und ihre zeitlichen Änderungen $\dot{\varepsilon}_{ij}$ setzen sich additiv aus den elastischen und plastischen Anteilen zusammen:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad \text{bzw.} \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (2.81)$$

Der inkrementellen Form des Verzerrungszuwachses $d\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} dt$ pro Zeitinkrement bezeichnet hier den inkrementellen Zuwachs pro Lastschritt. Viskoelastische oder -plastische Effekte werden in dieser Arbeit nicht untersucht. Die additive Zerlegung ist nur im Rahmen der infinitesimalen Verzerrungen anwendbar. Sie darf nach *Lemaitre* [113] bei Dehnungen bis ca. 10% und auch bei großen finiten Verzerrungen, wenn der elastische Verzerrungsanteil klein ist $\dot{\varepsilon}_{ij}^e \ll \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, verwendet werden. Die plastischen Verzerrungen sind von der Belastungsgeschichte abhängig. Die momentane Änderung bzw. das Inkrement der plastischen Verzerrungen $d\varepsilon_{ij}^p$ resultiert aus der Änderung des Spannungszustandes $d\sigma_{ij}$, sie hängt aber auch vom Verfestigungsniveau h_α und vom absoluten Spannungszustand σ_{ij} ab. Das Materialgesetz muss somit in inkrementeller Form oder Ratenform formuliert werden. Hieraus entspringt auch die Bezeichnung inkrementelle Plastizitätstheorie oder Fließtheorie, die sich insbesondere bei Betrachtungen von zyklischen Beanspruchungen bewährt hat. Eine weitere Annahme, die für metallische Werkstoffe experimentell erwiesen ist, und bei der Formulierung des Materialgesetzes berücksichtigt wird, stellt die plastische Inkompressibilität $\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0$ dar. Plastische Verzerrungen bewirken keine Volumenänderungen und das plastische Fließen ist unabhängig von den hydrostatischen Spannungen. Folglich kann das Inkrement der plastischen Verzerrung durch den Deviatoranteil beschrieben werden:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p \equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{pD}. \quad (2.82)$$

Die plastischen Verformungen rufen eine irreversible Veränderung des Werkstoffzustandes hervor, die innerhalb des Materialgesetzes mit sogenannten Zustandsvariablen oder inneren Variablen beschrieben wird. Grundsätzlich werden hierzu dehnungsähnliche Größen z_β , die thermodynamisch arbeitskonjugiert zu den Verfestigungsvariablen h_α sind und den Verfestigungszustand und seine Änderung festlegen, verwendet. Die Fließbedingung gibt den Fließbeginn bei einem mehrdimensionalen Spannungszustand an. Der mehrachsige Spannungszustand wird mit Hilfe einer Vergleichsspannung σ_V mit dem einachsigen Spannungszustand verglichen und der aktuellen Fließgrenze gegenübergestellt. In allgemeiner Form lautet die Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \sigma_F) = 0. \quad (2.83)$$

Mit den Zustandsvariablen in den Klammern wird die Fließbedingung im Spannungsraum³ formuliert. Ob der aktuelle Beanspruchungszustand im elastischen Bereich oder bereits ein Plastifizieren eingetreten ist, kann mit der Fließbedingung wie folgt bewertet werden:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \sigma_F) \begin{cases} < 0 & \text{elastischer Bereich} \\ = 0 & \text{plastischer Bereich und Verfestigung} \end{cases}. \quad (2.84)$$

Damit werden Spannungszustände, die außerhalb der Fließfläche liegen $F > 0$ ausgeschlossen. Ein Beanspruchungszustand kann sich oberhalb der Fließgrenze durch einen Verfestigungsvorgang einstellen, der durch eine Veränderung der Fließfläche während der Belastung mit einer Verfestigungsregel realisiert wird, so dass der aktuelle Spannungszustand, während der plastischen Verformung auf der Fließfläche bleibt. Die Darstellung der Fließfläche erfolgt über eine

³Neben der hier erwähnten Formulierung im Spannungsraum kann die Fließbedingung auch im Dehnungsraum definiert werden [207, 208].

konvexe Grenzfläche im neundimensionalen Spannungsraum. Die Berücksichtigung des Prinzips der maximalen plastischen Arbeit, auf das später eingegangen wird, führt auf eine konvexe Fließfläche. Die genaue Festlegung der Fließbedingung ist materialabhängig. Bei isotropem Werkstoffverhalten liegt es nahe, dass sich hierzu der Einsatz von den drei Invarianten des Spannungstensors anbietet. In der Literatur existiert eine Vielzahl an Fließbedingungen und Ansätzen, die in Abhängigkeit der Werkstoffart und Werkstoffverhaltens ihren Einsatz finden. Aufgrund der Inkompressibilität von metallischen Werkstoffen, wird die Fließbedingung in Abhängigkeit von der zweiten Invarianten formuliert. Die Definitionen nach *Tresca* und nach *von Mises* erfüllen diese Aspekte und haben sich insbesondere für die Bewertung von metallischen Werkstoffen bewährt. Die auf *von Mises*, *Huber* und *Hencky* zurückgehende Gestaltänderungshypothese hängt ausschließlich von der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators ab

$$F_{\text{Mises}}(I_2^{\sigma^D}) = -I_2^{\sigma^D} - \frac{1}{3}\sigma_{F0}^2 = 0. \quad (2.85)$$

Mit Verwendung der *von Mises*-Vergleichsspannung

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{kl}^D\sigma_{kl}^D} = \sqrt{-3 I_2^{\sigma^D}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \end{aligned} \quad (2.86)$$

resultiert für die Fließbedingung nach *von Mises*

$$F_{\text{Mises}}(\sigma_V) = \sigma_V - \sigma_{F0} = 0. \quad (2.87)$$

Im Falle des einachsigen Spannungszustandes ($\sigma_I = \sigma$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$) vereinfacht sich die Fließbedingung zu $\sigma_V = \sigma = \sigma_{F0}$. Einen wichtigen Spezialfall stellt der ebene Spannungszustand ($\sigma_{III} = 0$) dar, mit der Vereinfachung der *von Mises*-Spannung zu

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}} \quad (2.88)$$

und der entsprechenden Fließbedingung als

$$F_{\text{Mises}}(\sigma_V) = \sigma_V - \sigma_{F0} = 0. \quad (2.89)$$

Die Darstellung der Zusammenhänge mit der Gleichung 2.89 in dem Koordinatensystem der Hauptspannungen (σ_I, σ_{II}) führt auf die Gleichung einer Ellipse (siehe Abbildung 2.4).

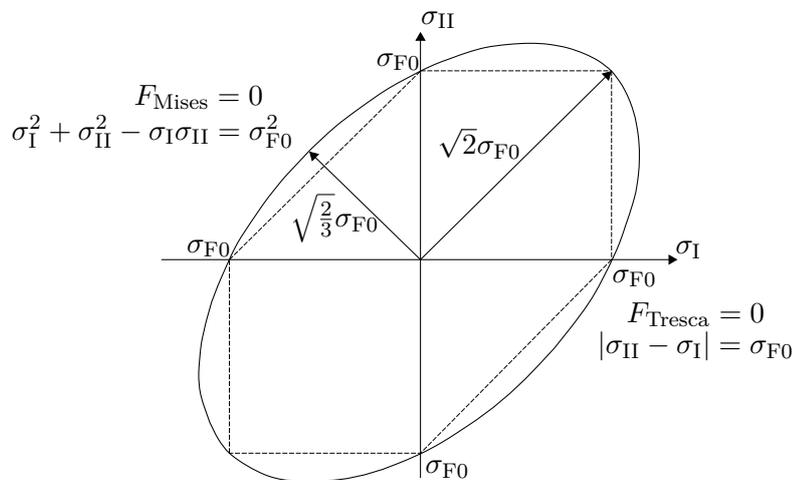


Abbildung 2.4.: Fließbedingung nach *von Mises* und *Tresca* für den ebenen Spannungszustand

Die allgemeine Betrachtung der Fließbedingung für den dreiachsigen Spannungszustand im Koordinatensystem der drei Hauptspannungen wird in Abbildung 2.5 veranschaulicht.

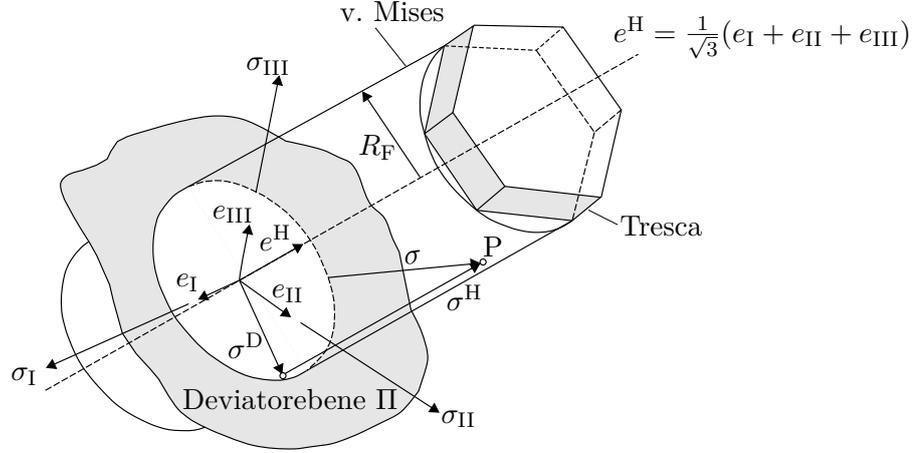


Abbildung 2.5.: Fließbedingung nach von Mises und Tresca im 3D Hauptspannungsraum

Hieraus wird die Unterteilung eines beliebigen Spannungszustandes in den hydrostatischen Anteil, der durch die Projektion auf die Raumdiagonale e^H (hydrostatische Achse) gekennzeichnet ist, und in den deviatorischen Anteil, der durch die sogenannte II-Ebene senkrecht zu e^H den geometrischen Ort eines Kreises (von Mises-Kreis) mit dem Radius $R_F = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{F0}$ begrenzt wird, deutlich. Die Fließbedingung nach Tresca wird in Abhängigkeit der maximalen Schubspannung und dem zugehörigen Grenzwert für das plastische Fließen postuliert:

$$\begin{aligned} F_{\text{Tresca}}(\sigma_{kl}) &= \tau_{\max} - \tau_{F0} = 0 \\ &= \max\left\{\frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{II}|, \frac{1}{2}|\sigma_{II} - \sigma_{III}|, \frac{1}{2}|\sigma_{III} - \sigma_I|\right\} - \tau_{F0} = 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Für den einachsigen Spannungszustand ergibt sich daraus $\tau_{\max} = |\sigma|$, womit der Zusammenhang $\tau_{F0} = \sigma_{F0}/2$ zwischen der Schubfließspannung und der Zugfließspannung folgt. Die geometrische Darstellung des ebenen Spannungszustandes mit der Trescaschen Fließbedingung führt auf ein Sechseck in der σ_I - σ_{II} -Ebene. In der Deviatorebene wird die Fließfläche des dreidimensionalen Spannungszustands mit der Bedingung $F_{\text{Tresca}} = 0$ durch ein regelmäßiges Sechseck interpretiert. Einen weiteren wichtigen Bestandteil der inkrementellen Plastizitätsmodelle bildet das Fließgesetz. Wird die Fließbedingung erfüllt und es tritt plastisches Fließen ein, dann sorgt das Fließgesetz für den eigentlichen Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen durch die inkrementelle Bestimmung der Entwicklung der plastischen Deformation. Hieraus ergibt sich die Definition der Richtung und des Betrages des plastischen Fließens. Hill und Drucker haben mit der Verwendung des Prinzipes vom Maximum der plastischen Dissipationsarbeit das Fließgesetz und die Normalenregel eingeführt [116]. Mit der plastischen Dissipationsarbeit

$$D^P = \hat{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P - \check{q}_{\beta} d\kappa_{\beta} \geq 0 \quad (2.91)$$

und der Fließbedingung nach von Mises als Nebenbedingung kann das Maximum von $D^P(\hat{\sigma}, \check{q}, d\lambda)$ durch die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \max D^P(\hat{\sigma}, \check{q}) &= \min -D^P(\hat{\sigma}, \check{q}, d\lambda) \\ \text{s.t. } F_{\text{Mises}}(\hat{\sigma}, \check{q}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

gefunden werden. Die zugehörige *Lagrange*-Funktion mit dem *Lagrange*-schen Multiplikator $d\lambda = \dot{\lambda}$ zu dem Optimierungsproblem lautet

$$\mathcal{L} = -D^P + \dot{\lambda} F_{\text{Mises}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \check{\mathbf{q}}). \quad (2.93)$$

Die assoziierte Fließregel resultiert aus dem Lösungsverfahren des *Lagrange*-Optimierungsproblems indem \mathcal{L} nach $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ bzw. $\hat{\sigma}_{ij}$ abgeleitet wird

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\sigma}_{ij}} = 0 : \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F_{\text{Mises}}}{\partial \hat{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} N_{ij}. \quad (2.94)$$

Die Fließregel bestimmt das Inkrement und die Richtung der plastischen Dehnungszuwächse. Die Ableitung der Gleichung 2.93 nach den Verfestigungsvariablen \mathbf{q} bzw. q_β führt zu dem Evolutionsgesetz (Gesetz für die zeitliche Entwicklung) der inneren Variablen $\boldsymbol{\kappa}$ bzw. κ_β

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\beta} = 0 : \dot{\kappa}_\beta = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_{\text{Mises}}}{\partial q_\beta}. \quad (2.95)$$

Der auch als plastischer Multiplikator bezeichnete *Lagrange* Parameter, ist eine nicht negative Größe und nimmt in Abhängigkeit der Fließbedingung und deren zeitlicher Ableitung die folgende Definition an:

$$\dot{\lambda} \begin{cases} > 0 & \text{bei } F_{\text{Mises}} = 0 \text{ und } \dot{F}_{\text{Mises}} = 0 & \text{plastisches Fließen} \\ = 0 & \text{bei } F_{\text{Mises}} \leq 0 \text{ und } \dot{F}_{\text{Mises}} < 0 & \text{elastischer Bereich bzw. Entlastung} \end{cases} \quad (2.96)$$

Die Bewertung nach 2.96 ermöglicht die Einordnung des aktuellen Beanspruchungszustandes in das plastische Fließen oder den elastischen Zustand bzw. Entlastungsvorgang und kann in Form der *Kuhn-Tucker*-Bedingung $\dot{\lambda} \dot{F}_{\text{Mises}} = 0$ zusammengefasst werden. Eine weitere Definition im Zusammenhang der Normalenregel stellt das Postulat von *Drucker* dar, das unter anderem als eine Form energetischer Bedingung für die Stabilität plastischen Werkstoffverhaltens aufgefasst werden kann. Gegenstand der Betrachtung ist der Übergang eines Ausgangszustandes σ_{ij}^0 zu einem Endzustand σ_{ij} und zurück, so dass ein geschlossener Belastungszyklus mit dem Verzerrungsinkrement $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^P$ gebildet wird. Die geleistete plastische Zusatzarbeit dU^P wird aus dem Skalarprodukt des plastischen Spannungsinkrementes und dem plastischen Verzerrungsinkrement gebildet. Das *Druckersche* Postulat unterscheidet per Definition bei einem eindimensionalen bzw. dreidimensionalen Beanspruchungszustand die folgenden drei Stabilitätsfälle:

$$\begin{aligned} 1\text{D} : (\sigma - \sigma^0) d\varepsilon = d\sigma d\varepsilon^P & \begin{cases} \geq 0 & \text{Verfestigung} \Rightarrow \text{stabil} \\ = 0 & \text{idealplastisch} \\ \leq 0 & \text{Entfestigung} \Rightarrow \text{instabil} \end{cases} \\ 3\text{D} : (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij} = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P & \end{cases} \quad (2.97) \end{aligned}$$

Wird in der Definition 2.97 die erste Restriktion $dU^P \geq 0$ erfüllt, so verhält sich das Material stabil und das Materialverhalten genügt dem Prinzip der maximalen plastischen Arbeit. Um diese Bedingung zu erfüllen, darf das Skalarprodukt $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P$ nicht negativ werden, weshalb $d\varepsilon^P$ genau senkrecht auf die Fließfläche $F = 0$ gerichtet sein muss (Normalenrichtung), da $d\sigma_{ij}$ eine beliebige Richtung haben darf. Aus diesem inkrementellen Ansatz folgt die Konvexität der Fließfläche und das Fließgesetz nach *Prandl-Reuss*. Im Anschluss sollen nur die wesentlichen Verfestigungsarten erläutert werden, die für die Beschreibung des zyklischen Werkstoffverhaltens von metallischen Werkstoffen geeignet sind. Die Hauptaufgabe des Verfestigungsgesetzes besteht grundsätzlich in der Erfassung der Veränderung der Fließfläche während einer plastischen Verformung. Für die präzise Beschreibung von Spannungs-Dehnungs-Verlauf infolge einer zyklischen Belastung besitzen die leistungsfähigeren Plastizitätsmodelle entsprechende Verfestigungsgesetze. Das Verfestigungsverhalten von metallischen Werkstoffen wird in Analogie zur Thermodynamik durch

Einführung innerer Zustandsvariablen beschrieben. Die Verfestigungsregeln beschreiben die mathematischen Abhängigkeiten dieser inneren Zustandsvariablen von der Verformungsgeschichte. Die Gesetzmäßigkeiten bestehen grundlegend aus Evolutionsgleichungen bzw. Variablen, welche die Position, Größe und Form der Fließfläche während einer plastischen Verformung beschreiben. Die Verfestigungsvariablen q_β quantifizieren die Verfestigung und können skalare oder tensorielle Größen darstellen. Im Laufe der Beanspruchung definieren die Evolutionsgesetze die Entwicklung der Verfestigungsvariablen q_β und verhalten sich proportional zum plastischen Multiplikator $\dot{\lambda}$, wobei die Verfestigungsfunktion Q_β direkt über das plastische Dissipationspotential bestimmt wird:

$$\dot{q}_\beta = Q_\beta(\sigma_{ij}, q_n) \dot{\lambda} \quad \text{z.B.} \quad Q_\beta = - \sum_{n=1}^{n_Q} \frac{\partial q_\beta}{\partial \kappa_\beta} \frac{\partial F}{\partial q_n}. \quad (2.98)$$

Zu den bekanntesten Verfestigungsdefinitionen, die insbesondere bei metallischen Werkstoffen verwendet werden und in kommerziellen FE-Programmen integriert sind, zählen die isotropen und die kinematischen Verfestigungsgesetze. Die spezielle Art der deformativen Verfestigung, die bei komplexen Fließbedingungen auftritt, welche zusätzliche Parameter für die Form der Fließfläche verwendet, um die veränderliche Kontur des Fließkörpers im Laufe der Belastung zu beschreiben, kommt in dieser Arbeit nicht zum Einsatz. Im Folgendem werden die beiden Grundmodelle der isotropen und kinematischen Verfestigung erläutert, die entweder einzeln oder zusammengesetzt in einem Werkstoffmodell als die gemischte oder kombinierte Verfestigung bekannt sind. Die Unterschiede zwischen den beiden Grundtypen der isotropen und kinematischen Verfestigung werden vor allem bei der Belastungsumkehr deutlich.

a) Isotrope Verfestigung Zur Beschreibung des isotropen Verhaltens wird zunächst das ein-dimensionale Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines zyklisch beanspruchten Werkstoffvolumens betrachtet. Während der ersten Belastung bis zum Zustand A treten nach Überschreiten der Fließgrenze σ_{F_0} plastische Verformungen auf und der Werkstoff verfestigt isotrop. Die Spannung steigt dabei von σ_{F_0} auf den Wert σ_A an. Wird ab dem Zustand A entlastet, so sinken die Spannungen und Dehnungen linearelastisch entlang einer Parallelen zur *Hookeschen* Geraden ab. Wird die Belastung in den negativen Spannungsbereich weiter über den Zustandspunkt B (mit der Spannung σ_B) fortgeführt, setzt eine plastische Rückverformung ein. Gilt $\sigma_B = -\sigma_A$ so wird von einer isotropen Verfestigung gesprochen. Somit umfasst der elastische Bereich bei Lastumkehr eine Spannungsdifferenz $\sigma_B - \sigma_A = 2\sigma_A$. Die isotrope Verfestigung wird als eine affine Aufweitung der Fließfläche im Deviatorraum dargestellt. Das Maß für die Aufweitung wird mit Hilfe der skalaren Größe $h_1 = R = R(\varepsilon^P)$, um die sich die Fließgrenze erhöht, definiert. Die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Beanspruchungszustand wird durch Einführung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung umgesetzt:

$$\varepsilon_v^P = \int_0^t \dot{\varepsilon}_v^P dt \quad \text{mit} \quad \dot{\varepsilon}_v^P = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P} = \dot{\lambda}. \quad (2.99)$$

Diese Festlegung beruht auf der Gestaltänderungshypothese, da jeder mehrachsige Zustand durch die *von Mises*-Vergleichsspannung σ_v und die Vergleichsdehnung ε_v^P auf einen einachsigen Zustand der Spannung σ_F und Dehnung ε^P abgebildet werden kann, der eine äquivalente Dissipationsleistung $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \sigma_v \dot{\varepsilon}_v^P$ aufweist. Im Sonderfall des einachsigen Zugs ($\sigma_{11} = \sigma$) kann der Zusammenhang $\dot{\varepsilon}_v^P = \dot{\varepsilon}^P$ aufgezeigt werden. Der Grundaufbau einer isotropen Verfestigung wird durch die folgenden Beziehungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \text{Fließbedingung nach v. Mises:} \quad & F(\sigma_{ij}, R) = \sigma_v - \sigma_{F_0} - R(\varepsilon_v^P) = 0 \\ \text{Verfestigungsgesetz:} \quad & \sigma_F(\varepsilon_v^P) = \sigma_{F_0} + R(\varepsilon_v^P) \\ \text{Evolutionsgesetz:} \quad & \dot{R} = H_1 \dot{\lambda} = \frac{dR}{d\varepsilon_v^P} \dot{\varepsilon}_v^P = E_p \dot{\varepsilon}_v^P. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Die geometrische Interpretation der Ableitung der isotropen Verfestigungsfunktion führt auf den Radius der zylindrischen Fließfläche mit dem Betrag $\sigma_F \sqrt{2/3}$. Die drei häufigsten mathematischen Formulierungen für die einachsige isotrope Verfestigung werden durch

- die lineare Verfestigung mit einem konstanten plastischen Tangentenmodul $E_p = \frac{dR}{d\varepsilon^p}$

$$R = E_p \varepsilon^p, \quad \varepsilon^p = \frac{1}{E_p} (\sigma_F - \sigma_{F0}), \quad (2.101)$$

- das Potenzgesetz nach *Ramberg-Osgood*

$$R = \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon^p}{\alpha \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{n}} - \sigma_{F0}, \quad \varepsilon^p = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma_F}{\sigma_0} \right)^n, \quad (2.102)$$

- und den Exponentialansatz nach *Chaboche*

$$R = Q \left(1 - e^{-bp} \right) \quad (2.103)$$

repräsentiert. Angemerkt sei, dass eine alleinige Verwendung der isotropen Verfestigungsregel zur Beschreibung des zyklischen Verhaltens von realen metallischen Werkstoffen nicht ausreicht und zudem den *Bauschinger*-Effekt nicht erfassen kann.

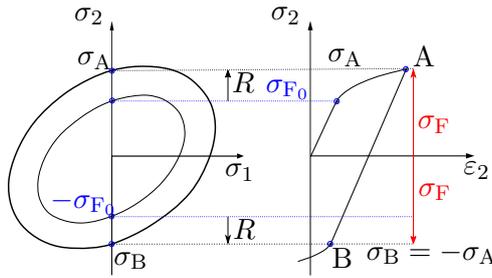


Abbildung 2.6.: Isotrope Verfestigung

b) Kinematische Verfestigung Die kinematische Verfestigungsregel beruht auf einer translatorischen Verschiebung der Fließfläche in Richtung der aktuellen Belastung, wobei Form und Größe der Fließfläche unverändert bleiben. Die translatorische Bewegung der Fließfläche wird durch die kinematische Verfestigungsvariable $\mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha}$, die als der Backstress- oder Rückspannungstensor bezeichnet wird, umgesetzt. Um die kinematische Verfestigung zu erläutern, wird in Abbildung 2.7 wieder von einem eindimensionalen Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines zyklisch belasteten Werkstoffvolumens ausgegangen. Im eindimensionalen Fall zeigt die Abbildung 2.7 die Verschiebung des Bezugspunktes durch X , wobei der elastische Bereich $AB = 2\sigma_{F0}$ unverändert bleibt. Es existieren zahlreiche Evolutionsgleichungen im Zusammenhang mit der kinematischen Verfestigung für den Rückspannungstensor \mathbf{X} , wobei die einfachste Ausführung nach *Prager* [158] definiert wurde. Im eindimensionalen Fall lauten die Fließbedingung und Evolutionsgleichung unter Verwendung der kinematischen Verfestigung nach *Prager*:

$$\begin{aligned} F(\sigma, X) &= |\sigma - X(\varepsilon^p)| - \sigma_{F0} = 0 \\ X &= X(\varepsilon^p) = c\varepsilon^p. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Bei der dreidimensionalen Darstellung wird der Rückspannungstensor als Tensor zweiter Stufe, der einen symmetrischen Deviator darstellt, verwendet. Somit definieren die Komponenten X_{ij} weitere 6 Verfestigungsvariablen, denen als innere Variablen die plastischen Verzerrungen zugeordnet sind. Der Grundaufbau der kinematischen Verfestigungsregel bzw. die Translation der

Fließfläche wird durch die Formulierung der Fließbedingung mit Hilfe der zweiten Invarianten von $\sigma_{ij}^D - X_{ij}$ und dem entsprechendem Evolutionsgesetz nach *Prager* des Rückspannungstensors $X_{ij} = \alpha_{ij}$ definiert:

$$\begin{aligned} \text{Fließbedingung nach v. Mises: } F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) &= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij}^D - \alpha_{ij}) (\sigma_{ij}^D - \alpha_{ij})} - \sigma_{F0} = 0 \\ \text{Evolutionsgesetz: } \dot{X}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^p \dot{\lambda} = c \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \equiv h_\alpha \dot{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Das exemplarisch ausgeführte *Pragersche* Gesetz beschreibt den Verfestigungsbereich mit linearen Verläufen und zählt somit zu den linear kinematischen Verfestigungsregeln. In nachfolgenden Abschnitten werden nichtlineare kinematische Verfestigungsmodelle verwendet, die neben der nichtlinearen Verfestigungsabbildung durch erweiterte Evolutionsgesetze bestimmte zyklische Plastizitätseffekte besser erfassen können.

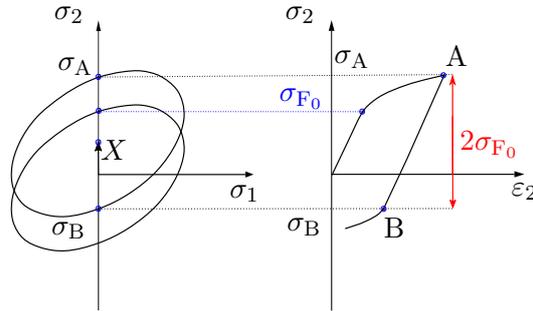


Abbildung 2.7.: Kinematische Verfestigung

c) Gemischte oder kombinierte Verfestigungsregel Experimentelle Untersuchungen an metallischen Werkstoffen zeigen häufig ein überlagertes Verfestigungsverhalten bestehend aus der isotropen und kinematischen Verfestigung. In diesem Fall wird bei der inkrementellen Darstellung des Spannungszustandes des zyklisch beanspruchten Werkstoffvolumens im Deviatorraum, eine gleichzeitige Aufweitung und eine translatorische Bewegung der Fließfläche beobachtet. Eine kompakte Darstellung der Gleichungen für eine kombinierte isotrope und nichtlineare kinematische Verfestigung nach *Prager* nimmt folgende Form an:

$$\begin{aligned} \text{Fließbedingung nach von Mises: } F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) &= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij}^D - \alpha_{ij}) (\sigma_{ij}^D - \alpha_{ij})} - \sigma_{F0} - R(\varepsilon_v^p) = 0 \\ \text{Evolutionsgleichungen: } \dot{R} &= H_1 \dot{\lambda} = \frac{dR}{d\varepsilon_v^p} \varepsilon_v^p = E_p \varepsilon_v^p \quad (\text{isotrop}) \\ \dot{\alpha}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^p \dot{\lambda} = c \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \equiv h_\alpha \dot{\lambda} \quad (\text{kinematisch}). \end{aligned} \quad (2.106)$$

2.2.5. Besondere Phänomene der zyklischen Plastizität

Unter den besonderen Phänomenen der zyklischen Plastizität sind hier im Wesentlichen die Eigenschaften des transienten Werkstoffverhaltens aufgrund von zyklischen Belastungen bei metallischen Werkstoffen zu verstehen. Diesbezügliche Erkenntnisse aus den experimentellen Untersuchungen begründen vielfältige Phänomene im Zusammenhang mit der Beanspruchungsart und dem Werkstofftyp selbst. Wie bereits im Abschnitt 2.2.3 erwähnt, wird die plastische Verformung von Metallen grundsätzlich durch die Beweglichkeit der Versetzungen bestimmt. Auf diesen

Verfestigungsmechanismen beruht unter anderem die Entwicklung von Konstruktionswerkstoffen mit hoher Festigkeit, indem die Bewegung der Versetzungen in solchen Werkstoffen gezielt durch Hindernisse behindert werden. Auch Phänomene der zyklischen Plastizität werden durch die Effekte der akkumulierten Versetzungsbewegungen bei zyklischer Beanspruchung begründet. Somit kann das transiente Werkstoffverhalten beispielsweise in Form des zyklischen Verfestigens bei dehnungsgesteuerten Versuchen aufgrund der Beobachtung einer anfänglich niedrigen Versetzungsdichte, die durch eine Versetzungsmultiplikation erhöht wird und damit zu einer zyklischen Verfestigung führt; ebenso kann bei bestimmten Metallen eine andere mikrostrukturelle Veränderung beobachtet werden, die in einer zyklischen Entfestigung resultiert. Bei ferritischen Stählen können sich während zyklischer Belastung die Versetzungen von den Kohlenstoffwolken um den Versetzungskern lösen. Infolgedessen fehlt eine deutlich ausgeprägte obere Streckgrenze, und die zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve liegt in diesem Dehnungsbereich unterhalb der statischen Kurve. Dieses Phänomen wird als zyklische Entfestigung bezeichnet. Unter einstufig dehnungskontrollierter Belastung wird bei zyklischer Entfestigung eine Abnahme der Spannungsamplitude mit zunehmender Zyklenzahl beobachtet und geht nach einigen Schwingungen in den stabilisierten Zustand über (Abbildung 2.8 a). Wohingegen die zyklische Verfestigung unter gleichen Versuchsbedingungen zu einer Zunahme der Spannungsamplituden führt und ebenfalls nach einer bestimmten Zyklenzahl die Stabilisierung erreicht (siehe Abbildung 2.8 b).

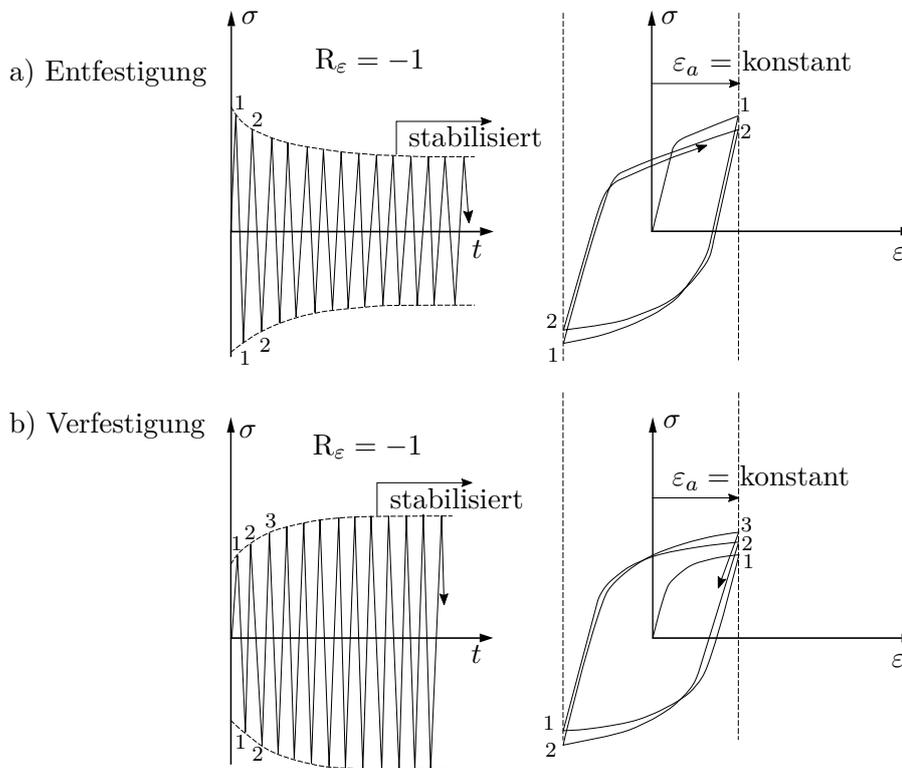


Abbildung 2.8.: Dehnungskontrollierte Versuche: a) Entfestigung und b) Verfestigung

Ab dem stabilisierten Zustand sind keine wesentlichen Amplitudenänderungen zu erkennen. Wird bei den einstufigen Versuchen die Spannungsamplitude statt der Dehnungsamplitude konstant gehalten liegt ein kraftkontrollierter Versuch vor. Bedingt durch die kraftkontrollierte einstufige Belastung resultiert die zyklische Entfestigung in zunehmend größeren Dehnungsamplituden während zyklische Verfestigung mit fortschreitender Zyklenzahl zu zunehmend kleineren Dehnungsamplituden führt. Ab einer bestimmten Schwingungszahl wird, wie bei der dehnungskontrollierten Versuchsführung ein stabilisierter Zustand erreicht, ab dem keine bemerkenswerte Amplitudenänderung zu erwarten ist. Dieser Grenzwert zur Definition des stabilisierten Zustan-

des wird in Richtlinien der Betriebsfestigkeit bei halber Lebensdauer $N/2$ angesetzt. Bestimmte Metalle besitzen mikrostrukturelle Eigenschaften, die zu Beginn der kraftkontrollierten Versuche eine Verfestigung begünstigen und anschließend nach mehreren Schwingspielen zum Entfestigen neigen. Oftmals zeigen austenitische Stähle wie z.B. X5CrNi18-10 ein solches Verhalten in einer dehnungskontrollierten Versuchsführung [63]. Damit ergibt sich die in Abbildung 2.9 dargestellte Verschiebung der Hystereseschleife, je nachdem ob der Werkstoff zum Entfestigen oder Verfestigen neigt.

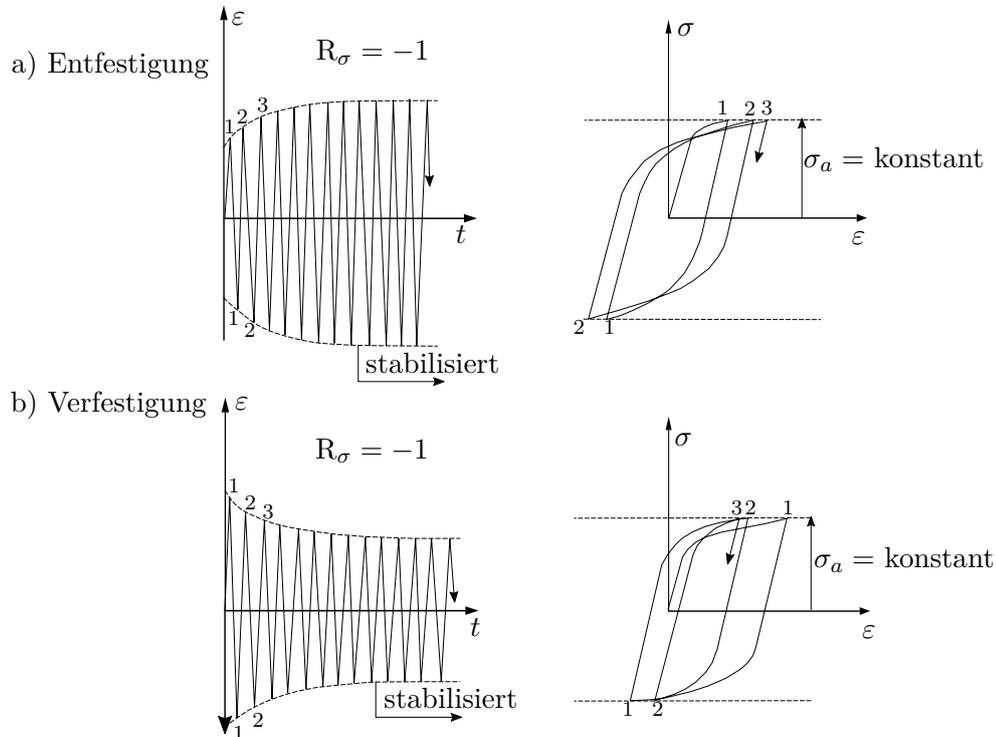
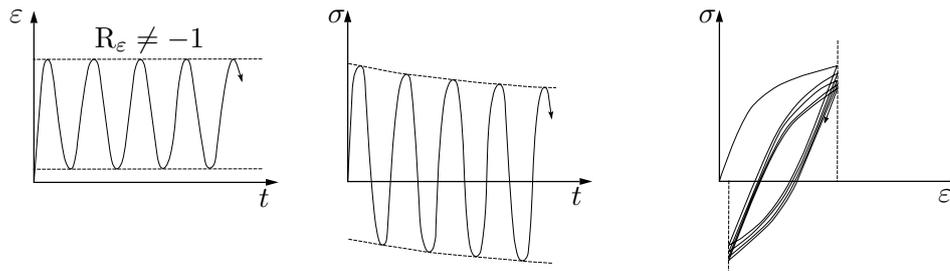


Abbildung 2.9.: Kraftkontrollierte Versuche: a) Entfestigung und b) Verfestigung

Bei der Durchführung eines spannungsgeregelten Ermüdungsversuchs mit einer von Null verschiedenen Mittelspannung tritt häufig eine Verschiebung der Hystereseschleife entlang der Dehnungsachse auf. Dies wird als zyklisches Kriechen oder Ratchetting bezeichnet. Zunächst bewegen sich die Versetzungen zwischen den Hindernissen hin und her, solange die kritische Schubspannung nicht überschritten wird. Bei dem spannungsgeregelten Versuch wird zwar die Maximal- und Minimalkraft geregelt, so dass eine extern herbeigeführte Spannungserhöhung ausgeschlossen werden kann. Dennoch wird oft eine Hindernisüberwindung aufgrund des Versetzungsaufstauens der hin und her laufenden Versetzungen zwischen den Hindernissen, das zu einer lokalen Spannungserhöhung führt und gleichzeitig ein zusätzliches plastisches Dehnungskrement impliziert, beobachtet. Wird das zyklische Kriechen nach einer bestimmten Schwingspielzahl durch einen eingespielten Zustand begrenzt, spricht man vom plastischen Shakedown oder plastischen Einspielen. Ab diesem Zeitpunkt ist keine Zunahme der plastischen Dehnung zu erkennen, so dass die Spannungs-Dehnungshysterese in einer Position verharret, obwohl die Lastschwingspielzahl fortschreitet. Bei den dehnungskontrollierten Versuchen $R_\epsilon \neq -1$ ist eine ähnliche Materialantwort im Zusammenhang von der Mittelspannung und der entsprechenden Mittelspannungsrelaxation zu beobachten, die ebenfalls zu einem Grenzwert konvergiert, ab dem keine Veränderung der Mittelspannung mit steigender Schwingspielzahl zu erkennen ist. Weitere Phänomene des transienten Werkstoffverhaltens sind nicht alleinig von der Werkstoffart, sondern zusätzlich von der Beanspruchungsart abhängig.

a) Zyklische Relaxation (dehnungsgeregelter Versuch)



b) Zyklisches Kriechen (kraftgeregelter Versuch)

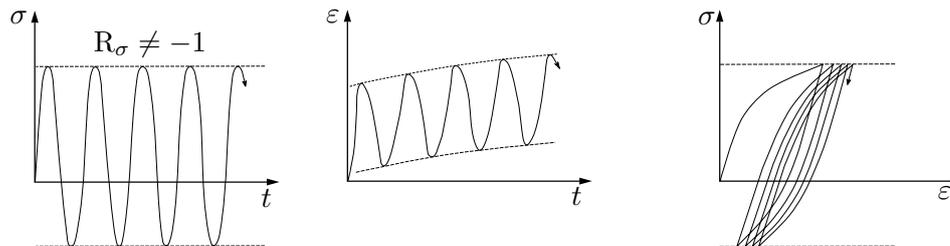


Abbildung 2.10.: Zyklisches Spannungs-Dehnungs-Verhalten mit von Null verschiedenen Mitteldehnungen bzw. -spannungen, links steht die Regelgröße und in der Mitte die Werkstoffantwort

Hierbei ist nicht ausschließlich der Betrag der Amplitude und des Mittelwertes der Dehnung oder der Spannung ausschlaggebend, vielmehr steht hinsichtlich der Sensitivität der beanspruchten Probe oder des Bauteils zur Mehrachsigkeit im Vordergrund. Ohne im Einzelnen auf die Kategorisierung der mehrachsigen Schwingbeanspruchung bzw. der Mehrachsichtigkeitsbeanspruchung einzugehen, wird auf die Literatur [162, 1] verwiesen und kurz auf einige spezielle Effekte der nichtproportionalen Verfestigung eingegangen. Ähnlich wie bei den Werkstoffversuchen mit einachsiger beanspruchten glatten Werkstoffproben ist auch bei den Versuchen der nichtproportionalen Zusatzverfestigung die Art der Versuchsführung relevant: *Sonsino* [186] und *Döring* [51] berichten bei 90° nichtproportionalen Beanspruchungen und dehnungsgeregelten Versuchen über einen Abfall der ertragbaren Amplitude bzw. über eine Lebensdauerverkürzung, bei spannungsgeregelten Versuchen jedoch über eine Lebensdauer verlängernde Wirkung. Bei der nichtproportionalen Verfestigung ist im Grunde eine bei nichtproportionaler Beanspruchung auftretender Zusatzverfestigung existent. Sie zeigt eine starke Abhängigkeit vom Werkstoffgefüge. Folgerungen aus experimentellen Beobachtungen [51] zeigen, dass beispielsweise bei Aluminiumlegierungen kaum mit Zusatzverfestigung zu rechnen ist, bei Baustählen erhöhen sich die Spannungen um einen Betrag von 20 bis 30 %, während austenitische Stähle auf nichtproportionalen Beanspruchungen mit einer Zusatzverfestigung von über 100 % antworten. Die Ursache für das entsprechende Werkstoffverhalten ist mit den werkstoffphysikalischen Vorgängen in Bezug auf die Wechselwirkung verschiedener Gleitebenen belegt. Die Aktivierung der verschiedenen Gleitsysteme, welche sich gegenseitig behindern, wird durch drehende Hauptspannungen unter nichtproportionaler Beanspruchung hervorgerufen, und wurden anhand von mikroskopischen Untersuchungen in verschiedenen Forschungsarbeiten nachgewiesen. Neben der nichtproportionalen Verfestigung bildet das Ratchettingverhalten unter mehrachsiger Beanspruchung einen wichtigen Aspekt der zyklischen Plastizität. Verschiedene Forschungsarbeiten zeigen die Besonderheiten des Ratchettingverhaltens unter mehrachsiger Beanspruchung ausgehend von experimentellen Erkenntnissen und implementieren basierend auf der phänomenologischen Vorgehensweise die kontinuumsmechanischen Erweiterungen der bereits vorhandenen Werkstoffmodelle. Die Erfassung solcher Zusatzeffekte der zyklischen Plastizität ist in Standardbibliotheken der Werkstoffmodelle von kommerziellen FE-Programmen nicht enthalten. Der Anwender muss bei Bedarf auf

eine bestehende UMAT zurückgreifen oder eine für den speziellen Anwendungsbereich geeignete UMAT programmieren. Zur Modellierung der nichtproportionalen Verfestigung werden im einfachsten Fall die Nichtproportionalitätsparameter in das isotrope Verfestigungsgesetz eingebaut. Streng genommen bildet die isotrope Verfestigung einen einfachen Sonderfall der deformativen Verfestigung [51]. Speziell konzipierte Evolutionsgleichungen bewirken eine deformativ Verfestigungsregel, die sich auf die geometrische Verformung der Fließfläche auswirken und einen breiteren Spielraum zur Abbildung der transienten Effekte (Ratchetting und nichtproportionale Verfestigung) anbieten. Die Verbesserung der Abbildung des realen Materialverhaltens wird grundsätzlich durch die Deformation der Fließfläche erreicht, indem die Normalenfließregel eine andere Richtung der plastischen Dehnungssinkremente hervorruft. Die Inkompressibilitätsbedingung und die Einbeziehung der Deviatorischen anstatt der hydrostatischen Beanspruchungen ist für die Beschreibung der Plastizität von polykristallinen Werkstoffen auf der Makroebene von großer Bedeutung. Sehr spröde metallische Werkstoffe erfüllen i.d.R. die Inkompressibilitätsbedingung nicht und zeigen eine Abhängigkeit von den hydrostatischen Spannungen, dennoch wird auch in diesem Fall die Volumenänderung nicht auf die plastische Deformation zurückgeführt. Für nicht-poröse metallischer Werkstoffe dagegen besteht eindeutig ein Zusammenhang zwischen den deviatorischen Beanspruchungen und dem plastischen Fließen, welches innerhalb der konstitutiven Gleichungen oft in Form der mehrachsigen Fließbedingung nach *von Mises* gut erfasst wird. Im nächsten Abschnitt wird die Entwicklungslinie einiger bekannter Materialmodelle zur Beschreibung der zyklischen Plastizitätseffekte aufgezeigt.

2.2.6. Bekannte Materialmodelle zur Beschreibung der zyklischen Plastizität

Die chronologische Entwicklungslinie der Materialmodelle mit kombinierter Verfestigung setzt sich bis heute fort. Einige dieser Werkstoffmodelle werden in Anlehnung an [51] hinsichtlich der Bestimmungsgleichungen der kinematischen und isotropen Verfestigungsregel näher betrachtet. Die folgende Ausführung besitzt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und fasst lediglich die aus Sicht des Autors erforderlichen Deformationsmodelle, die für diese Arbeit und die bearbeiteten Forschungsprojekte relevant sind, zusammen. Die vorgestellten Werkstoffmodelle beruhen auf rein phänomenologischen Ansätzen der Kontinuumsmechanik und gehören damit zu den makroskopischen Materialmodellen. Die Abhandlung der einfacheren Werkstoffmodelle trägt entscheidend zum Verständnis der wichtigsten Modellierungsbausteine der leistungsfähigeren Modelle bei. Die folgende Ausführung geht bei der Darstellung der Entwicklungslinie der Modelle von den sehr einfachen Modellen von *Prager* [158] und *Ziegler* [216] mit bilinear-kinematischer Verfestigung aus. Die kinematische Verfestigungsdefinition 2.105 der *Prager*-regel wurde bereits in dem Abschnitt 2.2.4 vorgestellt. Die wichtigste Eigenschaft des *Prager*-Modells ist die Fähigkeit der Beschreibung des *Bauschinger*-Effektes. Das *Ziegler*-Modell kann als eine Art Modifikation der *Prager*-Verfestigungsregel betrachtet werden, indem die Normalenregel an die Konsistenzbedingung mit dem plastischen Multiplikator gekoppelt wird. Das *Prager-Ziegler*-Modell ist nahezu in jeder kommerziellen FE-Software vertreten und findet in der Praxis aufgrund der unkomplizierten Parameterdefinition und den kurzen Rechenzeiten oft Anwendung. Die Korrelation zwischen der realen Spannungs-Dehnungs-Kurve und den berechneten Daten mit dem bilinearen Ansatz sind im Allgemeinen ungenau und für eine weiterführende Betrachtung, beispielsweise für eine Betriebsfestigkeitsberechnung, unzureichend. Zur Verbesserung der Modellierungsergebnisse sind auf dem *Prager-Ziegler*-Ansatz aufbauend grundsätzlich zwei verschiedene Entwicklungslinien erkennbar, Modelle mit multilineareren Verfestigungs- und mit nichtlinearer Verfestigungsregel. Die bekanntesten Vertreter der Modelle mit multilineareren Verfestigungsansätzen bilden das *Mróz*- [132, 133] und das *Besseling*-Modell [28]. Das *Mróz*-Modell wird auch als „Multisurface-Modell“ bezeichnet, da die Verfestigungsregel auf einem Satz von ineinander geschachtelten Fließflächen beruht. Die Fließflächenkinematik unterliegt gewissen Restriktionen zur Unterbindung der gegenseitigen Überschneidung der einzelnen Fließflächen. Der Modellierungs- und nu-

merische Lösungsaufwand wächst demnach mit der Anzahl der verwendeten Fließflächen. Zur Verringerung des Aufwandes gehen aus dem Mehrflächenmodell nach *Mróz* eine Reihe von Zweiflächenmodellen, wie von *Dafalias und Popov* [41, 42], *Krieg* [103], *Ohno und Kachi* [145], *McDowell* [126, 127, 128], *Tseng und Lee* [198] sowie *White* [210], hervor. Aufgrund der einfachen Parameteranpassung finden die Multiflächenmodelle auch heute noch eine hohe Akzeptanz beim praktischen Anwender. Wenn auch *Garud* Modifikationen am *Mróz*-Modell vorgenommen hat, die eine verbesserte Kinematikregel beinhaltet, um insbesondere das Ratchettingverhalten bei nicht-proportionalen Beanspruchungen besser zu beschreiben, sind die Ergebnisse ausschließlich bei proportionalen und mittelspannungsfreien Beanspruchungen akzeptabel [51]. Unter den multilinearen Verfestigungsansätzen konkurrieren die Multilayer bzw. Subvolumenmodelle mit dem Multiflächenmodellen. Bei den kommerziellen FE-Programmen gehört heutzutage das *Besseling*-Modell als Subvolumenmodell zu einem festen Bestandteil der Definitionsmöglichkeiten für das elastisch-plastische Werkstoffverhalten. Obwohl das *Besseling*-Modell unbestritten eine kinematische Verfestigungsregel beinhaltet, basiert es nicht auf einer herkömmlichen Verfestigungsregel mit einem Backstresstensor, sondern auf der Superposition mehrerer linear-elastisch, ideal-plastischer Teilmodelle [51]. Das Modell von *Besseling* [28] basiert auf der Idee der Unterteilung eines Kontinuums in mehrere Subvolumina mit unterschiedlichen elastisch-ideal-plastischen Verhalten. Eine eindimensionale Interpretation lässt sich anhand des rheologischen Modells unternehmen. Aufgrund der Parallelschaltung sind alle Teilvolumen mit der kompletten Dehnung ε beansprucht. Jedes Teilvolumen hat einen eigenen E-Modul E_i und eine eigene Fließgrenze $\sigma_{F,i}$, wobei der E-Modul mit Hilfe eines Parameters gewichtet wird. Die Wichtungsfaktoren ergeben sich aus dem Volumenanteil des jeweiligen Teilvolumens am Gesamtvolumen

$$w_i = \frac{V_i}{V}. \quad (2.107)$$

Aufgrund der Erfüllung des stabilen Materialverhaltens nach 2.97 gilt für monoton steigende $\sigma - \varepsilon$ -Kurven $\sigma_{F,i} < \sigma_{F,i+1}$. In jedem Subvolumen gilt die Normalenregel. Anhand des rheologischen Modelles kann erkannt werden, wie der stückweise lineare Verlauf und der Masing-Effekt abgebildet werden. Die tatsächliche Spannungs-Dehnungs-Kurve wird im Rahmen des Modells durch eine Polygonzugapproximation beschrieben. Anhand der bekannten $\sigma - \varepsilon$ -Kurve kann der Anwender die Diskretisierung für das Bessling-Modell frei wählen. Mit feiner werdenden Diskretisierung schmiegt sich die Polygonzugapproximation des *Bessling*-Modells exakter an die tatsächliche Spannungs-Dehnungs-Kurve an, jedoch steigt auch der numerische Aufwand entsprechend. Bei Spannungs-Dehnungs-Zusammenhängen, die annähernd durch ein Potenzgesetz (z.B. *Ramberg-Osgood*-Gesetz) definiert sind, werden gute Approximationen des tatsächlichen Materialgesetzes erzielt, wenn die plastischen Dehnungen der Stützstellen ungefähr eine geometrische Folge ($\varepsilon_{i+1}^{pl}/\varepsilon_i^{pl} \approx \text{konstant}$) bilden [51]. Eine Verwendung von aufwendigen Optimierungsalgorithmen ist für die Parameteridentifikation nicht notwendig. Das *Besseling*-Modell eignet sich zur Beschreibung des stabilisierten Spannungs-Dehnungsverhaltens. Wenig geeignet ist dieses Modell zur Beschreibung des transienten Werkstoffverhaltens, beispielsweise sind hiermit weder das proportionale noch das nichtproportionale Ratchettingverhalten zufriedenstellend zu erfassen [51]. Im Folgenden wird die chronologische Entwicklung einiger Werkstoffmodelle, die alle auf der *von Mises*-Fließbedingung und der Normalenfließregel aufbauen, mit dem Fokus auf die nichtlineare kinematische Verfestigungsregel erläutert. Den Ausgangspunkt für die Werkstoffdefinition mit nichtlinearer Verfestigungsregel bildet das Modell nach *Armstrong und Frederick* [15]. Im Wesentlichen war die Einführung des Rückspannungsterms mit einer sogenannten dynamischen Erholung (*engl.* dynamic recovery) $-\gamma\alpha_{ij}\dot{p}$ in die Verfestigungsregel

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{ij} &= \frac{2}{3}C\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma\alpha_{ij}\dot{p} \\ \dot{p} &= \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p : \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \end{aligned} \quad (2.108)$$

zu der damaligen Zeit eine innovative Neuerung gewesen und eröffnete neue Möglichkeiten zur Beschreibung der zyklischen Plastizität und insbesondere des Ratchettingverhaltens sowie des *Bauschingereffektes*. Obwohl das tatsächlich im Experiment beobachtete Ratchetting-Verhalten durch den eingebauten dynamischen Erholungsterm deutlich überschätzt wird, werden viele Wissenschaftler auf den Vorteil der neu eingeführten Verfestigungsregel nach *Armstrong und Frederick* aufmerksam. Motiviert durch diese Modellierungstechnik entstanden im weiteren Verlauf eine Reihe an Modifikationen zur verbesserten Abbildung der zyklischen Plastizitätsphänomene mit Hilfe von nichtlinearen Verfestigungs- und Evolutionsgesetzen. So konnte *Chaboche* auf der Arbeit *Armstrong und Frederick* aufbauen und die Modifikation [33] des Modells entscheidend vorantreiben, indem er den gesamten Rückspannungstensor in vier einzelne Teilbackstresstensenoren unterteilt, die im Grunde dem Evolutionsgesetz des *Armstrong und Frederick*-Modells folgen. Die entscheidende Verbesserung des ursprünglichen Modells besteht in der Abminderung der Überschätzung des zyklischen Kriechens durch einen dynamischen Erholungsterm, welcher insbesondere mit der Definition des vierten Teilrückspannungstensors beeinflusst wird. Hierzu wurde eine Aktivierungsregel für die dynamische Erholung ab dem Erreichen eines Grenzwertes eingeführt, der durch den Materialparameter α_4 kontrolliert wird:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^4 \alpha_{ij}^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \\
 \dot{\alpha}_{ij}^{(k)} &= \frac{2}{3} C^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\gamma^{(k)}}{C^{(k)}} \left[J(\alpha_{ij}^{(k)}) \right]^{m-1} \alpha_{ij}^{(k)} \dot{p} \\
 \dot{\alpha}_{ij}^4 &= \frac{2}{3} C^4 \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma^4 \left\langle 1 - \frac{\alpha_4}{J(\alpha_{ij}^4)} \right\rangle \alpha_{ij}^4 \dot{p} \\
 J(\alpha_{ij}^{(k)}) &= \sqrt{\frac{3}{2} \alpha_{ij}^{(k)} : \alpha_{ij}^{(k)}}.
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Mittels dieser *Chaboche*-Methode wurde zwar ein Grenzwert in der Definition der vierten Teilrückspannung zur Verbesserung des *Armstrong und Frederick*-Modells eingeführt, dennoch kann hiermit das experimentelle Verhalten von Werkstoffen hinsichtlich uniaxialen und mehraxialen Ratchetting noch immer nicht ausreichend gut beschrieben werden. Die ursprüngliche Version nach Gleichung 2.109 des *Chaboche*-Modells beinhaltete insgesamt vier einzelne Rückspannungstensenoren und wurde später auf die Möglichkeit von $k > 4$ Rückspannungsterme erweitert. Um die angesprochenen Mängel bei der Modellierung des Werkstoffverhaltens zu beseitigen, verbesserten *Ohno und Wang* [146] die *Chaboche*-Regel, indem sie eine Begrenzungsmethode in die Entwicklungsgleichung jeder einzelnen Rückspannungskomponente einführten und eine sogenannte Begrenzungsoberfläche (*engl.* critical surface) für jedes dynamische Erholungselement vorschlugen. Somit kann das dynamische Erholungselement in jeder Rückspannungskomponente aktiviert werden, wenn die kritische Oberflächenbegrenzung erreicht wird. Befindet sich der Wert der Rückspannungskomponente innerhalb der kritischen Oberfläche, so wird das zugehörige dynamische Erholungselement nicht wirksam und es tritt eine lineare Entwicklung der Rückspannungswerte in Bezug auf die plastische Dehnungsrate auf. Die Evolutionsgleichungen

der Rückspannungskomponenten nach *Ohno und Wang*-Modell I werden wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \\ \dot{\alpha}_{ij}^{(k)} &= \varsigma^{(k)} \left[\frac{2}{3} r^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - H \left(f^{(k)} \right) \alpha_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p : K_{ij}^{(k)} \right] \\ K_{ij}^{(k)} &= \frac{\alpha_{ij}^{(k)}}{\left\| \alpha_{ij}^{(k)} \right\|} \\ H(x) &= 1 \quad \text{für } x \geq 0 \\ H(x) &= 0 \quad \text{für } x < 0.\end{aligned}\tag{2.110}$$

Die Begrenzungsoberfläche für die dynamische Erholung wird durch die folgende Beziehung beschrieben:

$$f^{(k)} = \left\| \alpha_{ij}^{(k)} \right\|^2 - \left(r^{(k)} \right)^2.\tag{2.111}$$

Um das Ratchetting-Verhalten zu verbessern entwickelten *Ohno und Wang* ein weiteres Modell II [147] mit dem modifizierten Rückspannungstensor

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(k)} = \varsigma^{(k)} \left[\frac{2}{3} r^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \left(\frac{\left\| \alpha_{ij}^{(k)} \right\|}{r^{(k)}} \right)^{m^{(k)}} \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij}^p : K_{ij}^{(k)} \right\rangle \right].\tag{2.112}$$

Das nichtlineare Verhalten der Gleichung 2.112 und das modellierte Ratchettingverhalten zeigen eine starke Abhängigkeit von dem Parameter $m^{(k)}$. Anhand von experimentellen und numerischen Untersuchungen erkennen *Kang und Gao* [91], dass eine sinnvolle Anwendung des Modells auf bestimmte Werte von $m^{(k)}$ begrenzt ist und führt jedoch für $m^{(k)} > 6$ zu numerischen Instabilitäten. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen entwickelten *Abdel, Karim und Ohno* [5] eine Modifikation der Werkstoffdefinition mit einer kinematischen Verfestigungsregel, die sich aus einer Kombination der Bestandteile des *Ohno-Wang*-Modells I und des *Armstrong und Frederick*-Modells zusammensetzt:

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(k)} = \varsigma^{(k)} \left[\frac{2}{3} r^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \mu^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} \dot{p} - H \left(f^{(k)} \right) \alpha_{ij}^{(k)} \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij}^p : K_{ij}^{(k)} - \mu^{(k)} \dot{p} \right\rangle \right].\tag{2.113}$$

Eine weitere Entwicklung der kinematischen Verfestigungsregel in Hinsicht auf die präzisere Abbildung der zyklischen Ver- und Entfestigung mit zusätzlichem Erfassen der nichtproportionalen Verfestigungseffekte gelang *Jiang und Schitoglu* [89] mit folgender Definition:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \\ \dot{\alpha}_{ij}^{(k)} &= C^{(k)} r^{(k)} \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \left(\frac{\left\| \alpha_{ij}^{(k)} \right\|}{r^{(k)}} \right)^{\chi^{(k)}+1} K_{ij}^{(k)} \dot{p} \right] \\ C^{(k)} &= C_0^{(k)} \left[1 + a_1^{(k)} \cdot \exp(b_1^{(k)} p) + a_2^{(k)} \cdot \exp(b_2^{(k)} p) \right] \\ \chi^{(k)} &= \chi_0^{(k)} \left(2 - n_{ij} : \frac{\alpha_{ij}^{(k)}}{\left\| \alpha_{ij}^{(k)} \right\|} \right).\end{aligned}\tag{2.114}$$

Vergleichbar mit den *Ohno-Wang*-Modellen besteht hier auch das Konzept zur Steuerung des Ratchetting-Verhaltens über einen Exponenten. Die Exponenten $\chi^{(k)}$ stellen jedoch keine Konstanten mehr dar, sondern sind als Parameterfunktionen formuliert worden. Im Falle einer nichtproportionalen Beanspruchung erhöht sich entsprechend der Wert des Exponenten, so dass eine

Verringerung der zyklischen Kriechrate gegenüber proportionaler Beanspruchung simulierbar ist. Die erzielten Ergebnisse bezüglich des Ratchetting werden gegenüber dem *Ohno-Wang*-Modell II verbessert, was im Wesentlichen auf der Möglichkeit das zyklische Kriechen an verschiedenen Beanspruchungsniveaus anzupassen, beruht. Weitergehende multiaxiale Beanspruchungsuntersuchungen von *Döring* [51], *Bari und Hassan* [23] und *Chen* [35] zeigten allerdings größere Diskrepanzen beim Modellieren des Ratchettingverhaltens mit dem *Jiang*-Modell. Daraufhin befasste sich *Döring* [51] mit der Modifikation des Deformationsmodells nach *Jiang* mit der Zielsetzung die nichtproportionale Verfestigung und das transiente Werkstoffverhalten präziser abzubilden und postuliert die folgende kinematische Verfestigungsdefinition:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^{(k)} \\
 \dot{\alpha}_{ij}^{(k)} &= c^{(k)} \cdot \left[r^{(k)} n_l - W^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} \right] \dot{p} + \alpha_{ij}^{(k)} \frac{\dot{r}^{(k)}}{r^{(k)}}, \\
 W^{(k)} &= \left(\frac{\|\alpha_{ij}^{(k)}\|}{|r^{(k)}|} \right) \chi^{(k)} \\
 \chi^{(k)} &= \chi_0^{(k)} + \left(\chi_0^{(k)} + 0, 1 \right) \cdot \left(c_\chi^{(k)} - 1 \right) \cdot \left(1 - |n_l : K_{ij}^{(k)}| \right) \\
 \chi_0^{(k)} &= Q^{(k)} \cdot \left(1 + \frac{a_\chi}{(1 + b_\chi R_{M\varepsilon})^2} \right), \\
 c^{(k)} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\varepsilon^{p(k)}}, \quad r^{(k)} = \frac{2}{3} \frac{H^{(k)} - H^{(k+1)}}{c^{(k)}} \\
 H^{(k)} &= \frac{\sigma^{(k)} - \sigma^{(i-1)}}{\varepsilon^{p(k)} - \varepsilon^{p(k-1)}}, \quad H^{(1)} = \frac{\sigma^{(1)} - \tilde{\sigma}_F}{\varepsilon^{p(1)}}.
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

Das *Döring*-Modell zeigt eine signifikante Verbesserung in Bezug auf die Darstellung der Zusatzverfestigung und der nichtproportionalen Verfestigung bei vergleichenden Untersuchungen an austenitischen Stählen im Gegensatz zum *Jiang*-Modell. Es ist erkennbar, dass die wesentlichen Unterschiede zwischen dem *Döring*-Modell und dem *Jiang*-Modell nicht nur in der Art und Weise liegen, wie das Non-Masing-Verhalten formuliert wird, sondern auch in der Definition des Nichtproportionalitätsfaktors und der Parameter $\chi^{(k)}$, der gezielt zur Steuerung des nichtproportionalen Ratchettings verwendet werden. Darüber hinaus gibt es definierte Zusammenhänge zwischen $\chi^{(k)}$ und der Gedächtnisfunktion $R_{M\varepsilon}$, die beachtet werden müssen. Zur kombinierten Verfestigungsregel gehören neben der kinematischen zusätzlich die isotropen Bestimmungsgleichungen der Verfestigungsmodellierung. Für die vorangegangenen Modelle können die Details zu den entsprechenden Definitionen der Literatur [51, 89, 87, 92] entnommen werden. Die Einführung einer angemessenen isotropen Verfestigungsregel, die sich mit dem kinematischen Materialgesetz 2.108 kombinieren lässt, hat *Chaboche* [114] mit der einfachen Entwicklungsgleichung eingeführt:

$$\begin{aligned}
 R &= Q [1 - \exp(-b\varepsilon^p)] \\
 \dot{R} &= b(Q - R) \dot{p}.
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

Kang unternahm eine Reihe von Expertisen zur zyklischen Plastizität, wobei er sich nicht nur mit der Verbesserung der kinematischen, sondern auch der isotropen Verfestigungsfunktion beschäftigte und veröffentlichte hierzu eine Zusammenfassung seiner Erkenntnisse in [92]. Aus seinen langjährigen Studien heraus übertrug er die Grundidee aus der kinematischen Verfestigungsmodifikation auch die isotrope Verfestigungsregel in mehrere Bestandteile zu separieren, so dass jedes einzelne isotrope Glied einen kritischen Aktivierungsgrenzwert (engl. *critical state*) beinhaltet. Auf dieser Basis ist das zyklische Deformationsverhalten zusätzlich vom Beanspruchungszustand in Abhängigkeit von dem Dehnungswert nicht alleinig mit dem kinematischen,

sondern zusätzlich mit dem isotropen Anteil, beschreibbar. Die Grundbausteine seines Materialmodells mit kombinierter Verfestigung veröffentlichte *Kang* [94] in folgender Form:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^m r^{(k)} b_{ij}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \\
 \dot{b}_{ij}^{(k)} &= \zeta^{(k)} \left[\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{p}^{(k)} b_{ij}^{(k)} \right] \\
 \dot{p}^{(k)} &= H \left(f^{(k)} \right) \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij}^p : b_{ij}^{(k)} \right\rangle \\
 f^{(k)} &= \left(\tilde{b}^{(k)} \right)^2 - 1 = 0 \\
 \tilde{b}^{(k)} &= \sqrt{\frac{3}{2} b_{ij}^{(k)} : b_{ij}^{(k)}} \\
 r^{(k)} &= r_0^{(k)} + \left(1 - \omega^{(k)} \right) \left\{ r_{\Delta}^{(k)} \left[1 - \exp \left(c_{\text{NL}}^{(k)} p^{(k)} \right) \right] + c_{\text{L}}^{(k)} p^{(k)} \right\} \\
 Q &= Q_0 + \sum_{k=1}^m \omega^{(k)} \left\{ r_{\Delta}^{(k)} \left[1 - \exp \left(c_{\text{NL}}^{(k)} p^{(k)} \right) \right] + c_{\text{L}}^{(k)} p^{(k)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Die Besonderheit in der Definition 2.117 stellt die isotrope Verfestigungsfunktion Q dar, die eine eindeutige Abhängigkeit von der akkumulierten plastischen Dehnung $p^{(k)}$ zeigt. Zusätzlich besteht die Möglichkeit die Ausprägung des *Bauschinger*effekts mit dem Parameter $\omega^{(k)}$ zu beeinflussen. Je höher der Betrag von $\omega^{(k)}$ ist, desto schwächer fällt der *Bauschinger*effekt aus bei gleichzeitig nahezu unveränderter Abbildung der Oberspannung. Die Beeinflussung des *Bauschinger*effektes war ursprünglich in den Deformationsmodellen ausschließlich mit kinematischen Verfestigungsregeln umgesetzt worden. Die Erweiterung der Bestimmungsgleichung für $\dot{p}^{(k)}$ aus Definition 2.117 wird später von *Kang* [93] mit der Modifikation

$$\dot{p}^{(k)} = \mu^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} \dot{p} + H \left(f^{(k)} \right) \alpha_{ij}^{(k)} \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij}^p : K_{ij}^{(k)} - \mu^{(k)} \dot{p} \right\rangle \tag{2.118}$$

durchgeführt. Weitere vielversprechende Ansätze zur Modellierung von kombiniertem Verfestigungsverhalten beschreibt die Veröffentlichung von *Abdel Karim* [4]. Es ist deutlich geworden, dass die ursprünglich einfachen Modelle über die Entwicklungslinie zu den modifizierten Deformationsmodellen betrachtet, zwar immer weitere Verbesserungen hinsichtlich der Leistungsfähigkeit das transienten Werkstoffverhalten präzise abzubilden mit sich gebracht haben, gleichzeitig aber ihre Komplexität enorm angestiegen ist. Ein wesentlicher Nachteil leistungsfähiger Werkstoffmodelle liegt in der hohen Anzahl von Modellparametern, was die Anwendung in der Ingenieurpraxis erheblich erschwert.

2.3. Elastisch-plastische Bruchmechanik

2.3.1. Klassifizierung der Risslänge - Risslängenbezeichnung

Im Allgemeinen finden Schädigungsmechanismen, Versagensprozesse und Bruchvorgänge auf bestimmten Größenskalen, die von der Nano- bis zur Makroskala reichen, statt. Zur Erforschung der jeweiligen Schädigungsprozesse und -effekte, die auf einer bestimmten Skala ursächlich für einen Defekt oder eine Schädigung sind, etablierten sich die wissenschaftlichen Bereiche der Molekulardynamik, Mikro-, Schädigungs- und der Bruchmechanik. Für ein umfassendes Verständnis der Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe und ihres Bruchverhaltens, sowie der Übertragung dieser Eigenschaften auf Bauteilstrukturen, müssen alle in Abbildung 2.11 gezeigten Betrachtungsebenen einbezogen werden.

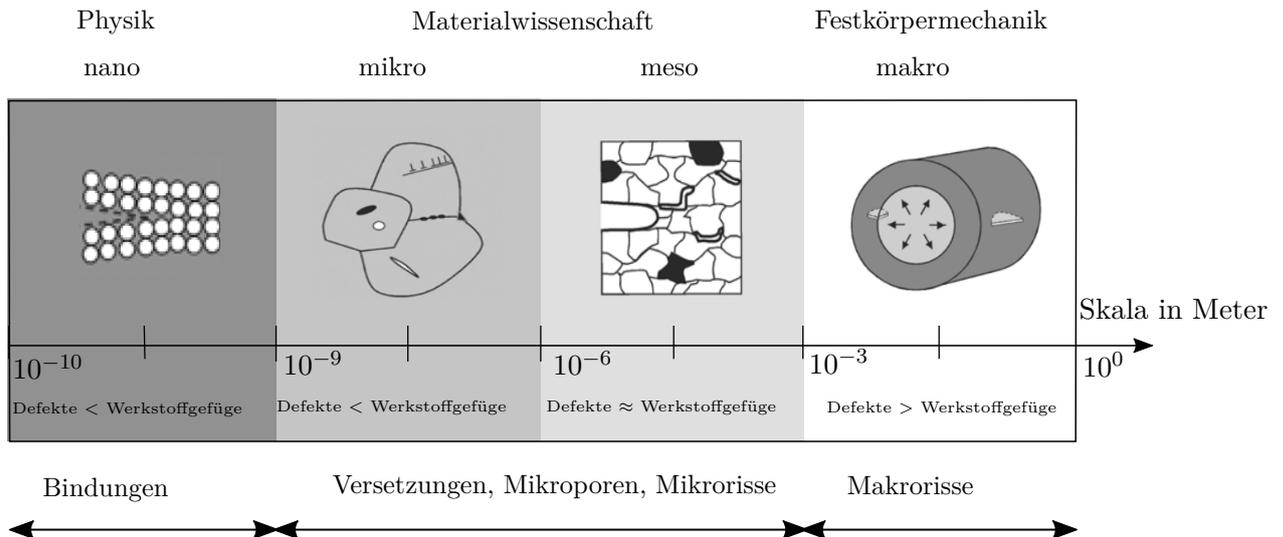


Abbildung 2.11.: Bruchvorgänge auf unterschiedlichen Skalen und Betrachtungsebenen (in abgewandelter Form nach [106])

Im Allgemeinen laufen die Bruch- und Versagensmodelle auf allen Größenskalen ab. Die makroskopische Betrachtungsweise ist grundsätzlich im Ingenieurwesen weit verbreitet, wohingegen sich der Materialwissenschaftler mehr für die im Werkstoffgefüge ablaufenden mesoskopischen Prozesse oder die mikroskopischen Phänomene interessiert. In der Festkörperphysik werden die mesoskopischen Strukturen der atomaren Bindungen vorrangig behandelt. Heutzutage stellen die sogenannten Mehrskalenmodelle einen wichtigen Bestandteil der Simulationstechnik dar, um skalenübergreifend Modelle zu entwickeln, mit denen die physikalischen Zusammenhänge von Defekten numerisch abbildbar sind. Die verschiedenen Phasen der Schädigung bei der Ermüdung eines Bauteils unter zyklischer Belastung werden von folgenden Aspekten begleitet:

- Rissinitiierung,
- Mikro- und Kurzrissswachstum,
- Langrissswachstum und
- instabiles Risswachstum bzw. Bruch.

Die Definition des Anrisses ist in erster Linie abhängig von der Größenordnung, die man der Untersuchung zu Grunde legt. Oft wird der technische Anriss in metallischen Werkstoffen als ein Ausgangsriss von der Länge 0,5 mm bis 1,0 mm definiert, ab dem der Rissfortschritt im Rahmen der Bruchmechanik hinsichtlich der Restlebensdauer der Struktur weiterbewertet wird. So kann eine Initiierung des Risses in einer Struktur grundsätzlich bereits als lokale Überwindung der interatomaren Kohäsionskräfte und Bildung einer neuen Oberfläche betrachten werden. Grundlagenorientierter Untersuchung entsprechende hochauflösende experimentelle Methoden und atomistische Modelle haben durchaus ihre wissenschaftliche Berechtigung und finden zunehmende Verbreitung, jedoch wird hier auf die physikalische Definition der Anrissbildung als Trennung einiger atomarer Bindungen nicht näher eingegangen. In dieser Arbeit steht ausschließlich die Anwendung der phänomenologischen Materialmodellierung im Zusammenhang mit einer entsprechend kompatiblen Schädigungsbewertung mit Hilfe der Bruchmechanik und damit einer makroskopischen Betrachtungsweise im Vordergrund. Die Initiierung eines Risses in einer glatten Oberfläche wird durch die mikrostrukturelle Gegebenheit (Korngröße, Gleitbänder und Gleitebenen) bestimmt. Im Werkstoff bilden sich an optimal orientierten Körnern bevorzugt in den Ebenen maximaler Gleitung Gleitbänder aus. In den Gleitebenen, die im Allgemeinen parallel zur maximalen Schubspannung orientiert sind, entstehen Mikrorisse. Nachdem der Riss

durch einige Körner hindurch gewachsen ist (Rissstadium 1), wechselt er unabhängig von der Gefügestruktur in die Ebene senkrecht zur maximalen Hauptnormalspannung. Diese Phase wird als Rissstadium 2 bezeichnet. Kurze Risse werden in der Bruchmechanik in drei Kategorien eingeteilt:

- mikrostrukturell kurze Risse,
- mechanisch kurze Risse und
- physikalisch kurze Risse.

Mikrostrukturell kurze Risse haben die Größenordnung der charakteristischen Abmessung der Mikrostruktur, so dass die Grenzen der Kontinuumsmechanik erreicht sind. Die Risswachstumsrate und der Pfad eines mikrostrukturell kurzen Risses wird durch die Mikrostruktur beeinflusst. Der mechanisch kurze Riss beginnt mit dem Stadium 2 und wächst infolge einer zyklischen Belastung weiter oder stoppt in Form eines Rissarrests. Die Länge der kurzen Risse liegt ungefähr in der Größenordnung der plastischen Zone an der Riss Spitze, so dass die Gültigkeit der linear-elastischen Bruchmechanik und des Kleinbereichfließens i.d.R. nicht zutrifft. Der physikalisch kurze Riss entspricht in etwa der Fehlergröße, die durch zerstörungsfreie Prüfverfahren detektierbar ist. Hierbei wird die Zulässigkeit der Anwendung der linear-elastischen Bruchmechanik in der Literatur kontrovers behandelt.

2.3.2. Das J -Integral in der linear-elastischen Bruchmechanik

Die Bedeutung und Herleitung des J -Integrale in der linear-elastischen Bruchmechanik

Der Einstieg in dieses Kapitel beginnt mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, angewendet auf einen linear-elastischen Körper mit Riss während der Rissausbreitung. Es soll zunächst die Bedeutung des J -Integrals und seiner besonderen Eignung zur Bewertung von Singularitäten in Form von Defekten oder Rissen im Zusammenhang mit der Bruchmechanik näher erläutert werden. Ausgehend von dem Ideengerüst wird man zu dem eigentlichen Konzept hingeführt. Die Aufstellung einer solchen Energiebilanz stellt eine Ergänzung der bereits besprochenen Gleichung 2.57 (siehe Kapitel 2.1.7) um den auf der linken Seite stehenden dissipativen Ausdruck \dot{D} dar:

$$\dot{\mathcal{K}}(t) + \dot{W}_{\text{int}}(t) + \dot{D}(t) = \dot{W}_{\text{ext}}(t) + \mathcal{Q}(t). \quad (2.119)$$

Der dissipative Anteil D ist direkt proportional zur Rissfläche A mit der Materialkonstante γ und wird zur Erzeugung von zwei neuen Oberflächen benötigt

$$D = 2\gamma A. \quad (2.120)$$

Bei einer statischen Betrachtung eines adiabatisch abgeschlossenen Körpers ohne innere Wärmequelle darf vereinfachend $\mathcal{K} = 0$ und $\mathcal{Q} = 0$ angenommen werden. Im rein mechanischen Fall entspricht die innere Energie der Formänderungsenergie

$$W_{\text{int}} = \int_V U \, dV, \quad U(\varepsilon_{kl}) = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn}) \, d\varepsilon_{ij}, \quad (2.121)$$

wobei unter der Annahme einer rein elastischen Formänderungen $U = U^e$ die innere Energie den Charakter des inneren Potentials $\Pi_{\text{int}} = W_{\text{int}}$ besitzt. Des Weiteren sei vorausgesetzt, dass die äußeren Lasten konservative Kräfte darstellen und daher ein Potential Π_{ext} bilden, welches mit der geleisteten Arbeit abnimmt $\Pi_{\text{ext}} = -W_{\text{ext}}$. Das Gesamtpotential kann aus der Summe der beiden Bestandteile bestimmt werden, so dass insgesamt $\Pi = \Pi_{\text{ext}} + \Pi_{\text{int}}$ gilt. Die Bilanzgleichung 2.119 nimmt demnach die vereinfachte Form an:

$$\dot{W}_{\text{ext}}(t) - \dot{W}_{\text{int}}(t) = \dot{D}(t) \quad \text{bzw.} \quad -\dot{\Pi}_{\text{ext}}(t) - \dot{\Pi}_{\text{int}}(t) = \dot{D}(t). \quad (2.122)$$

Anschließend wird der Rissausbreitungszustand deklariert, der zum Zeitpunkt $t^{(1)}$ auf die Ausgangsrisssfläche $A^{(1)} = A$ bezogen wird und sich während eines quasistatischen Rissfortschritts zum Zeitpunkt $t^{(2)} = t^{(1)} + \Delta t$ auf die Fläche $A^{(2)} = A^{(1)} + \Delta A$ vergrößert. Die Bestimmungsgleichung für die Potentialdifferenz zwischen dem Rissanfang- und Rissendzustand bezogen auf die Rissfläche ΔA lässt sich somit wie folgt aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{(W_{\text{ext}}^{(2)} - W_{\text{ext}}^{(1)}) - (W_{\text{int}}^{(2)} - W_{\text{int}}^{(1)})}{\Delta A} &= \frac{-(\Pi_{\text{ext}}^{(2)} - \Pi_{\text{ext}}^{(1)}) - (\Pi_{\text{int}}^{(2)} - \Pi_{\text{int}}^{(1)})}{\Delta A} = \frac{2\gamma(A + \Delta A) - 2\gamma A}{\Delta A} \\ \frac{\Delta(W_{\text{ext}} - W_{\text{int}})}{\Delta A} &= -\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} = \frac{\Delta D}{\Delta A} = 2\gamma. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Die sogenannte Energiefreisetzungsrates für infinitesimale Rissausbreitung wurde aus der gezeigten Energiebilanz 1920 von *A. A. Griffith* [74] hergeleitet und nach ihm benannt:

$$G = -\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\Pi}{\Delta A} = -\frac{d\Pi}{dA} = G_c = 2\gamma. \quad (2.124)$$

Weiterhin geht aus der Gleichung 2.124 das energetische Bruchkriterium hervor, das zur Beurteilung der Initiierung einer quasistatischen Rissausbreitung in einem konservativen System herangezogen wird. Demnach muss die bereitgestellte Energiefreisetzungsrates größer als die dissipierte Bruchenergie pro Rissfläche sein, um einen quasistatischen Rissfortschritt aufrechtzuerhalten. Eine weitere Größe, das sogenannte *J*-Integral, welches ebenfalls die Möglichkeit bietet, die rissflächenbezogene Potentialdifferenz zu quantifizieren, wurde unabhängig voneinander von *Cherpanov* [36] und *Rice* [163] eingeführt. Der Hauptfokus dieser wissenschaftlichen Arbeiten liegt auf der Anwendung von Energievariationen bei ebenen Rissproblemen, wobei die Freisetzung von Energie durch ein integralbasiertes, wegunabhängiges Verfahren beschrieben werden kann. Es sei angemerkt das *Cherpanov* in [36] die Umformung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik zur Beschreibung rissbehafteter Probleme der Strukturmechanik zur Herleitung der relevanten Schlussfolgerungen über das heutige *J*-Integral bereits verwendete. *Rice* [163] verfolgte einen ansprechenden mathematischen Ansatz mit einer leicht verständlichen Darstellung und einem ingenieurfrendlichen Zugang. Besonders betonte er den physikalischen Nutzen der Wegunabhängigkeit des *J*-Integrals und erlangte durch seine Arbeit eine hohe Popularität. Er prägte den inzwischen allgemein akzeptierten Begriff, der nach seinem Vornamen benannten Größe des *J*-Integrals in der zweidimensionalen Form:

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma} \left(U dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right). \quad (2.125)$$

Der Beweis, dass die Änderung der potentiellen Energie während der infinitesimalen Rissausbreitung mit Hilfe eines wegunabhängigen Linienintegrals ausgedrückt werden kann, eröffnet einen zusätzlichen Zugang zu der Bedeutung der Definition 2.125. Zunächst wird das in Abbildung 2.12a skizzierte, ebene Rissproblem mit der Einheitsdicke $B = 1$ betrachtet. Eine beliebig gewählte Kurve Γ mit dem nach außen zeigenden Normalenvektor n_i beginnt am unteren Rissufer und endet im mathematisch positiven Sinn an dem oberen Rissufer, so dass ein zusammenhängendes Gebiet A begrenzt wird. Das betrachtete System sei nur durch die Schnittspannungen t_i am Rand Γ belastet, bei Vernachlässigung der Volumenkräfte. Das inertielle Koordinatensystem sei mit den körperfesten Koordinaten (X_1, X_2) und das sich mit der Rissverlängerung mitbewegte Koordinatensystem sei mit den lokalen Koordinaten in Abhängigkeit vom Inertialsystem $(x_1 = X_1 - a, x_2 = X_2)$ bestimmt. Nun können die impliziten Veränderungen der Feldgrößen $f(x_1, x_2)$ mit der Risslänge direkt durch die totale Ableitung zum Ausdruck gebracht werden:

$$\frac{df(x_1, x_2)}{da} = \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial x_1}. \quad (2.126)$$

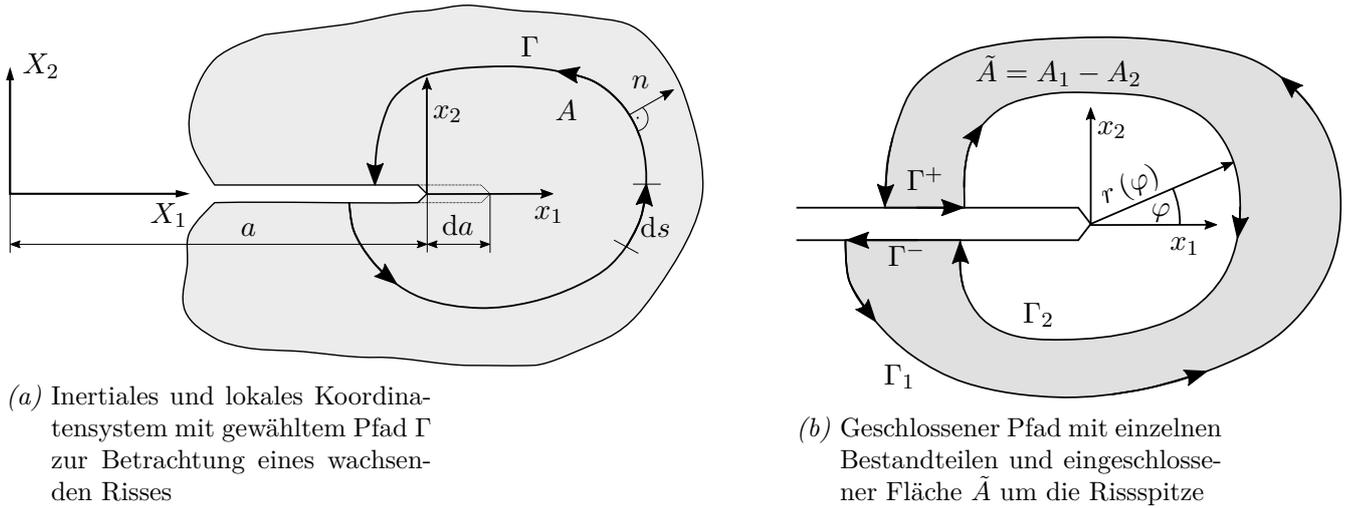


Abbildung 2.12.: Zur Betrachtung der Energiebilanz bei Risswachstum

Damit lautet die totale Ableitung der potenziellen Energie nach der Risslänge:

$$\begin{aligned}
 G &= -\frac{d\Pi}{da} = \frac{d(W_{\text{ext}} - W_{\text{int}})}{da} = \frac{d}{da} \left(\int_{\Gamma} t_i u_i ds - \int_A U dA \right) \\
 &= \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds - \int_A \frac{\partial U}{\partial a} dA + \int_A \frac{\partial U}{\partial x_1} dA.
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen, indem man zunächst die partielle Ableitung der inneren Energie als $\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a}$ ausschreibt, unter der Annahme eines rein elastischen Materialverhaltens $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ ansetzt und das Pfadintegral mit Hilfe des *Gauss*schen Satzes in ein Gebietsintegral unter Einbeziehung der Gleichgewichtsbedingung $\sigma_{ij,j} = 0$ umwandelt, so dass der erste und dritte Term in Gleichung 2.127 zusammen Null ergeben:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - \int_A \frac{\partial U}{\partial a} dA &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a} dA \\
 &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) - \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a} \right] dA = \int_A \left(\underbrace{\sigma_{ij,j}}_{=0} \frac{\partial u_i}{\partial a} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a} \right) dA = 0.
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

Die Konsequenz dieser Vereinfachung ist, dass aus der Definition 2.127 nur die beiden Terme mit den partiellen Ableitungen nach der x_1 -Koordinatenrichtung übrigbleiben und durch die Anwendung des *Gauss*schen Satzes mit einem Kurvenintegral zusammengefasst werden können:

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = J = \int_A \frac{\partial U}{\partial x_1} dA - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \int_{\Gamma} \left(U n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds. \tag{2.129}$$

Die partiellen Ableitungen nach x_1 weisen auf die Wirkungsrichtung der Energiefreisetzung im Rahmen des Rissfortschrittes hin und deshalb ist die x_1 -Komponente der Größe mit dem Index 1 als J_1 -Integral gekennzeichnet. Aus dem Beweis resultiert mit $n_1 ds = dx_2$ die Beziehung 2.125 für das J -Integral und bestätigt, dass die Energiefreisetzungsrates durch ein Linienintegral entlang der Kurve Γ berechnet werden kann

$$G = J = \int_{\Gamma} \left(U dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) = J_1. \tag{2.130}$$

Die Eigenschaft der Wegunabhängigkeit spielt bei der numerischen Berechnung des J -Integrals eine wesentliche Rolle. Eine mathematisch sinnvolle Auswertung der Rissspitzengröße gelingt unter Ausnutzung dieser Eigenschaft, indem der Singularitätsbereich durch einen von der Risspitze entfernte Pfaddefinition umgangen wird.

Für den Beweis der Wegunabhängigkeit wird eine geschlossene Kurve C , die aus den Einzelpfaden $\Gamma_1 + \Gamma^+ - \Gamma_2 + \Gamma^-$ besteht, betrachtet (siehe Abbildung 2.12b). Die geschlossene Kurve C begrenzt dabei ein zusammenhängendes Gebiet $\tilde{A} = A_1 - A_2$, das den singulären Bereich bzw. die Risspitze umgeht und somit ausschließlich ein homogener, defektfreier Materialbereich \tilde{A} eingeschlossen wird. Für die Herleitung müssen die folgenden Voraussetzungen gelten:

- Es wirken keine Volumen- und Trägheitskräfte: $\sigma_{ij,j} = 0$,
- es wirken keine Rissuferlasten,
- die Rissflanken sind gerade bzw. ungekrümmt (hier: Rissflanken parallel zur x_1 -Achse)
- die elastische Formänderungsenergie U ist eine Potenzialfunktion: $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$,
- und das Material ist homogen, U hängt nicht explizit von x_1 ab, nur implizit über $\varepsilon_{ij}(x_1)$.

Im Folgenden wird auf die physikalische Interpretation des *Gauss*schen Satzes in der Ebene bei der Umwandlung des Linienintegrals in ein Gebietsintegral eingegangen:

$$J_k = \int_C \underbrace{\left[U \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]}_{\Sigma_{kj}} n_j ds = \int_{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left[U \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]}_{\Sigma_{kj}} dA. \quad (2.131)$$

Der Klammerausdruck in Gleichung 2.131 wird als Energie-Impuls-Tensor Σ_{kj} bezeichnet. Der gesamte Integrand $\frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma_{kj}$ auf der rechten Gleichungsseite stellt die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors dar. Mit Hilfe der physikalischen Interpretation des *Gauss*schen Satzes kann die Divergenz eines Tensorfeldes als die Messung der Quellstärke des Feldes angesehen werden. Demnach kann die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors ausgewertet werden und im Falle von $\frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma_{kj} = 0$ kann geschlossen werden, dass sich weder materielle Kraftquellen noch -senken im Bereich \tilde{A} befinden.

Für den Beweis der Wegunabhängigkeit genügt es im ersten Schritt, den Energie-Impuls-Tensor auf Divergenzfreiheit zu prüfen:

$$\frac{\partial \Sigma_{kj}}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}}_{\sigma_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}}_{\sigma_{ij,j} = 0} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\varepsilon_{ij}} = 0. \quad (2.132)$$

Rückblickend auf die Gleichung 2.131 und die Zerlegung des Linienintegrals in seine Einzelpfade unter Bezugnahme der Schlussfolgerung aus 2.132 ergibt sich $J_k = 0$:

$$J_k = \int_C \Sigma_{kj} n_j ds = \int_{\Gamma_1} \Sigma_{kj} n_j ds - \int_{\Gamma_2} \Sigma_{kj} n_j ds + \int_{\Gamma^+} \Sigma_{kj} n_j ds + \int_{\Gamma^-} \Sigma_{kj} n_j ds = 0. \quad (2.133)$$

Aufgrund der Annahme der geraden, unbelasteten Rissflanken senkrecht zur x_2 -Achse gilt für die Normalendefinition $n_k = -\delta_{2k}$ (negative x_2 -Richtung) auf Γ^+ und $n_k = +\delta_{2k}$ (positive x_2 -Richtung) auf Γ^- und es folgt für die entsprechende Rissuferdefinition:

$$\int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \Sigma_{kj} n_j ds = \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \left(U n_k - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) ds = \int_{\Gamma^+} \left[(U^- - U^+) \delta_{2k} - \underbrace{t_i}_{=0} u_{i,k} \right] ds \quad (2.134)$$

Mit dem Ergebnis aus 2.134 folgt für die Gleichung 2.133:

$$J_k = \int_{\Gamma_1} \Sigma_{kj} n_j ds - \int_{\Gamma_2} \Sigma_{kj} n_j ds + \int_{\Gamma^+} (U^- - U^+) \delta_{2k} ds = 0. \quad (2.135)$$

Demzufolge ist bewiesen, dass die Komponente $k = 1$ ($\delta_{21} = 0$) unabhängig vom Integrationsweg ist:

$$J_1 = \int_{\Gamma_1} \Sigma_{1j} n_j ds - \int_{\Gamma_2} \Sigma_{1j} n_j ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_2} (\cdot) ds = \int_{\Gamma_1} (\cdot) ds. \quad (2.136)$$

Die Komponente $k = 2$ ($\delta_{22} = 1$) beinhaltet dagegen die Differenz der Formänderungsenergien auf den Rissufer, die nur im Fall reiner Symmetrie oder Antimetrie vernachlässigt werden darf:

$$J_2 = \int_{\Gamma_1} \Sigma_{2j} n_j ds - \int_{\Gamma_2} \Sigma_{2j} n_j ds + \int_{\Gamma^+} (U^- - U^+) ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_2} (\cdot) ds = \int_{\Gamma_1} (\cdot) ds + \int_{\Gamma^+} (U^- - U^+) ds. \quad (2.137)$$

Dies hat zur Folge, dass bei gekrümmten Rissen immer ein Beitrag des Terms $U n_k$ vorhanden ist und mit einer Wegabhängigkeit gerechnet werden muss.

Um die allgemeine Definition J_k zu bekommen, wird der Pfad Γ_2 auf die Risspitze zusammengezogen $r \rightarrow 0$:

$$J_k = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_2} \Sigma_{kj} n_j ds = \int_{\Gamma_1} \Sigma_{kj} n_j ds + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma^+} (U^- - U^+) \delta_{2k} ds. \quad (2.138)$$

2.3.3. Das J -Integral in der elastisch-plastischen Bruchmechanik

Im Unterschied zur Elastizitätstheorie besteht die Definition der inneren Energie neben dem elastischen zusätzlich aus einem plastischen Anteil der Formänderungsenergie

$$W_{\text{int}} = \int_V U^{\text{ep}}(\varepsilon_{kl}^{\text{ep}}, x_m) dV = \int_V (U^e(\varepsilon_{kl}^e) + U^p(x_m)) dV \quad \text{mit} \quad U^p(x_m) = \int_0^{\varepsilon_{kl}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p. \quad (2.139)$$

Aufgrund der irreversiblen plastischen Verzerrungen geht die wichtige Eigenschaft des Potenzialcharakters verloren. Das Gleichheitszeichen in Definition 2.128 ist ausschließlich für reversible Prozesse gültig, so dass nur der reversible Anteil $\frac{\partial U^e}{\partial \varepsilon^e} = \sigma$ mit der bei dem elastischen bzw. hyperelastischen Materialverhalten bekannten Eigenschaft der Potenzialexistenz weiterhin angenommen werden kann. Der plastische Anteil U^p hängt von der gesamten Belastungsgeschichte im betrachteten Materialpunkt mit der zugehörigen Koordinate x_m ab, was den Charakter einer expliziten Funktion unterstreicht. Die Bestimmung der spezifischen Formänderungsdichte kann als die graphische Ermittlung der eingeschlossenen Fläche unter der σ - ε -Kurve verstanden werden. Diesbezüglich steht die Hervorhebung der Unterschiede zwischen der Anwendung der plastischen Deformationstheorie und der inkrementellen Plastizitätstheorie im Mittelpunkt. Bei Betrachtung des Belastungsastes, beginnend im Ursprung 0 bis zum Punkt B, sind sowohl für die Beanspruchungsantworten der Deformationstheorie als auch der inkrementellen Plastizitätstheorie die gleichen σ - ε -Verläufe zu erkennen. Folglich führt das zu der trivialen Annahme, dass

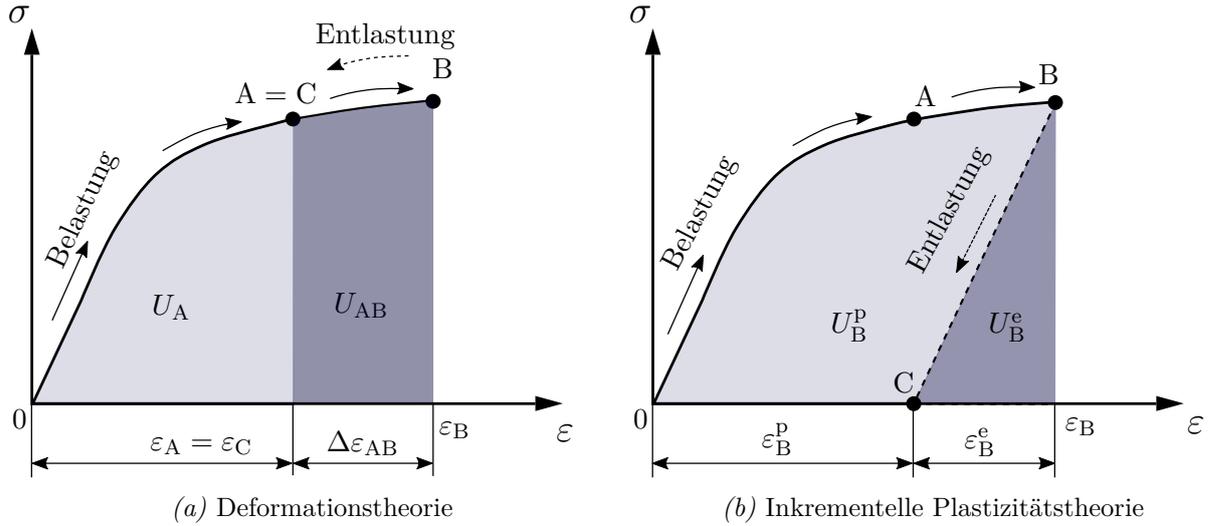


Abbildung 2.13.: Qualitative Darstellung der Formänderungsenergiedichte unter Annahme der Deformations- und der inkrementellen Plastizitätstheorie, während eines Belastungs- und Entlastungsschritts

für die monoton steigende Belastung bis zu der Maximallast (Punkt B) für beide Werkstoffdefinitionen die gleichen Flächeninhalte $U_B^{\text{Def}} = U_B^{\text{ep}}$ unter den σ - ε -Kurven begrenzt werden:

$$\begin{aligned}
 U_B^{\text{Def}} &= \int_0^{\varepsilon_B} \sigma_{ij} \, d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_A} \sigma_{ij} \, d\varepsilon + \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_B} \sigma_{ij} \, d\varepsilon, \\
 U_B^{\text{ep}} &= \int_0^{\varepsilon_B} \sigma_{ij} \, d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_B^e} \sigma_{ij} \, d\varepsilon^e + \int_0^{\varepsilon_B^p} \sigma_{ij} \, d\varepsilon^p.
 \end{aligned}
 \tag{2.140}$$

In vielen Ausarbeitungen und Experimenten konnte gezeigt werden, dass die Gültigkeit des klassischen J -Integrals bei monoton steigender Belastung für ruhende Risse und infinitesimale Deformationen der (nicht-)linearen Elastizitäts- bzw. der plastischen Deformationstheorie und bei der inkrementellen Plastizitätstheorie anwendbar ist. Der entscheidende Unterschied macht sich aber während des Entlastungsvorgang auf den Punkt C bemerkbar. Im Falle der Deformationstheorie sind die Spannungen und die Formänderungsenergie einer eindeutigen Funktion der Verzerrungen zugewiesen, so dass während der Entlastung der gleiche σ - ε -Pfad bis zum Punkt C durchlaufen wird (siehe Abbildung 2.13a). Dagegen beobachten wir bei der inkrementellen elastisch-plastischen Materialdefinition ein von der Belastungsgeschichte abhängiges Verhalten der untersuchten Feldgrößen. In Abbildung 2.13b wird eine für das elastisch-plastische Materialverhalten typische Unterteilung der Gesamtenergie U^{ep} in einen reversiblen Bestandteil U^e und in die irreversible Größe U^p hervorgehoben. Die thermodynamische Zuordnung des plastischen Anteils steht mit der Dissipation bzw. Irreversibilität in Verbindung. Die Existenz der Verlustwärme kann mit einem einfachen Experiment nachgewiesen werden, indem während des Zugversuches bei hohen Deformationen die Wärmebildung oder Verlustwärme registriert werden, die in direktem Zusammenhang mit der plastischen Verformung und damit der Dissipation stehen. Die sich hieraus ergebende Konsequenz für die J -Integral-Berechnung in Bezug auf die Wegunabhängigkeit wird durch die Anwendung des gleichen Formalismus wie in Abschnitt 2.3.2 deutlich. Ausgehend von der Gleichung 2.131 wird nun die elastisch-plastische Formänderungs-

energiedichte U^{ep} eingesetzt:

$$\int_C \left[U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j ds = \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left[U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right]}_{\Sigma_{1j}} dA. \quad (2.141)$$

Anschließend wird der Klammerausdruck der rechten Seite der Gleichung 2.141 auf Divergenzfreiheit geprüft, wobei die Verzerrungen und die spezifische Formänderungsarbeit in ihre elastischen und plastischen Anteile zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1j,j} &= \frac{\partial \Sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial U^{\text{ep}}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{\partial U^{\text{e}}}{\partial x_1} + \frac{\partial U^{\text{p}}}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial U^{\text{e}}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{e}}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{e}}}{\partial x_1} + \frac{\partial U^{\text{p}}}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{e}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{p}}}{\partial x_1} \right) = \partial U_{,1}^{\text{p}} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{\text{p}} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Zur Herleitung des Ausdruckes 2.142 wurde weiterhin die Gleichgewichtsbedingung $\sigma_{ij,j} = 0$ und der Potenzialcharakter des elastischen Anteils $\frac{\partial U^{\text{e}}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{e}}} = \sigma_{ij}$ vorausgesetzt. Dieses Ergebnis ordnet dem rechten Teil der Gleichung 2.141 einen Wert ungleich Null zu, so dass $\int_C (\cdot) ds \neq 0$ folgt, womit die Wegunabhängigkeit im Falle eines elastisch-plastischen Materialverhaltens nicht mehr gewährleistet werden kann. An dieser Stelle treten eine Reihe an Verständnisfragen auf:

- Welche Konsequenz hat die Dissipation auf die Bestimmung des elastisch-plastischen J -Integrals im Zusammenhang der Definition 2.141?
- Was bedeutet das für die Wegunabhängigkeit?
- Wie können zyklische Belastungen im Zusammenhang der J -Integral-Bestimmung physikalisch korrekt behandelt werden?

Bevor diese Fragen physikalisch beantwortet werden können, ist es zunächst erforderlich, im Sinne einer Analogie zu Kapitel 2.3.2, den ersten Hauptsatz der Thermodynamik eines elastisch-plastischen Körpers mit Riss während der Rissausbreitung zu betrachten und das Konzept der Wegunabhängigkeit des J -Integrals zu diskutieren. Weiterhin gelten die Beschränkungen eines quasistatischen und adiabatischen Systems ohne innere Energiequelle und einer Einheitsdicke $B = 1$. Aufgrund des dissipativen Charakters der plastischen Arbeit, steht für die Rissausbreitung die potenzielle Energieänderung, die aus der externen Arbeit und dem elastischen Anteil der Formänderungsenergie gebildet wird zur Verfügung, was in der folgenden Energiebilanzgleichung zum Ausdruck kommt

$$\dot{W}_{\text{ext}}(t) - \dot{W}_{\text{int}}^{\text{e}}(t) = \dot{W}_{\text{int}}^{\text{p}}(t) + \dot{D}(t). \quad (2.143)$$

Folglich wird die ursprüngliche *Griffiths*che Formulierung um einen weiteren irreversiblen Anteil modifiziert, so dass die J -Integral-Definition eine andere physikalische Interpretation erhält

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = \underbrace{\frac{dW_{\text{ext}} - dW_{\text{int}}^{\text{e}}}{da}}_{\text{Potentialänderungsrate für den Rissfortschritt}} = \underbrace{\frac{dW_{\text{int}}^{\text{p}}}{da} + \frac{dD}{da}}_{\text{Dissipationsrate = Bruchwiderstand}}. \quad (2.144)$$

Hieraus ist zu erkennen, dass die freigesetzte potenzielle Energie nicht nur aufgrund der spezifischen Bruchenergie dissipiert wird, sondern zusätzlich zur Bildung von plastischen Verformungen verbraucht wird. Die rechte Seite der Gleichung 2.144 wird als Bruchwiderstand bezeichnet und wird zur Definition von Risswiderstandskurven in der EPBM verwendet. In diesem Zusammenhang führte *Turner* [199] den Begriff der Dissipationsrate ein und bezweifelte zugleich die experimentelle Möglichkeit der Trennung der plastischen Arbeit in der Risswiderstandskurve. Die

geometrieabhängige plastische Verzerrungsarbeit führt demnach zu den geometrieabhängigen Risswiderstandskurven

$$J_R(\Delta a) = \frac{dW_{\text{int}}^{\text{P}}}{da} + \frac{dD}{da}. \quad (2.145)$$

Auf diese Schwierigkeiten der experimentellen Separation der beiden Bestandteile in Gleichung 2.145 verwiesen auch *Brocks* [130] und *Cotterell und Atkins* [40]. Dennoch sollte nicht unerwähnt bleiben, dass neue Ansätze mit Hilfe von Untersuchungen von Rissoberflächen und unter Verwendung von mikromechanischen Modellen neue physikalische Möglichkeiten für die Definition der Risszähigkeit anbieten [29].

Die Interpretation des J -Integrals als Energieflussintegral Aus der bisherigen Betrachtung ist deutlich geworden, dass die Bedeutung des J -Integrals im Rahmen der elastisch-plastischen Bruchmechanik nicht mehr als potenzielle Energiefreisetzungsrates aufgefasset werden darf. Eine physikalisch geeignetere Interpretation ist J als eine Art von Energiefluss aufzufassen, der über eine enge Kontur um die Risspitze von außen zugeführt wird. Im Weiteren wird diese Interpretation anhand der Energiebilanz bei duktilem Rissfortschritt $a(t)$ eines geraden Risses am ebenen Modus I Rissproblem des Körpers A betrachtet. Es wird angenommen, dass sich an der Risspitze eine werkstoffspezifische Bruchprozesszone $A_{\mathcal{F}}$ ausgebildet hat und im Rahmen der Rissausbreitung mitbewegt wird, während der Rand Γ ortsfest und die beiden Rissufer Γ^+ sowie Γ^- lastfrei betrachtet werden. Zum besseren Verständnis wird die Energiebilanz 2.143 für den kompakten Gesamtbereich $A = A_{\mathcal{K}} \cup A_{\mathcal{F}}$ mit dem homogenen, defektfreien Anteil $A_{\mathcal{K}}$ und dem Bereich für die Prozesszone $A_{\mathcal{F}}$ separat aufgestellt:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{K}} \in A: \quad \dot{W}_{\text{ext}} - \dot{W}_{A_{\mathcal{F}}} &= \dot{W}_{\text{int}}^{\text{e}} + \dot{W}_{\text{int}}^{\text{P}} \\ A_{\mathcal{F}} \in A: \quad \dot{W}_{A_{\mathcal{F}}} &= \dot{D}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

$\dot{W}_{A_{\mathcal{F}}}$ beschreibt die Leistung der Schnittspannungen mit den Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{W}_{A_{\mathcal{F}}} = \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} t_i^{\mathcal{F}} \dot{u}_i ds$, die über den Rand $\Gamma_{\mathcal{F}}$ den Energiefluss in die Prozesszone umsetzen. Die Prozesszone entzieht somit dem umliegenden Körperbereich denselben Energiebetrag, den Sie innerhalb des Bereiches $A_{\mathcal{F}}$ für die Materialtrennung benötigt, weshalb er in Gleichung 2.146 von der Leistung der externen Arbeit abgezogen wird und damit mit einem negativen Vorzeichen versehen ist. Mit der Einführung der Energietransportrate \mathcal{F} bzw. des Energieflusses pro Rissfortschritt da folgt aus der Gleichung 2.146

$$\mathcal{F} = \frac{dW_{A_{\mathcal{F}}}}{da} = \frac{\dot{W}_{A_{\mathcal{F}}}}{\dot{a}} = \frac{1}{\dot{a}} \left[\dot{W}_{\text{ext}} - \left(\dot{W}_{\text{int}}^{\text{e}} + \dot{W}_{\text{int}}^{\text{P}} \right) \right] = \frac{1}{\dot{a}} \left[\int_{\Gamma} t_i^{\mathcal{K}} \dot{u}_i ds - \frac{d}{dt} \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} U^{\text{ep}} dA \right]. \quad (2.147)$$

Im Sinne der *Eulerschen* Betrachtungsweise bewegt sich das Koordinatensystem (x_1, x_2) mit der Risspitze während des Rissfortschrittes mit. Das inertielle Koordinatensystem bzw. das *Langrangesche* Koordinatensystem (X_1, X_2) wird unabhängig von der Zeit t definiert, so dass folgender Zusammenhang gilt:

$$x_1 = X_1 - a(t), \quad x_2 = X_2 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v} = -\dot{a} \mathbf{e}_1. \quad (2.148)$$

Die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit $\dot{u}_i[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t]$ auf dem Rand $\Gamma^{\mathcal{F}}$ lautet unter der Annahme der lokalen Stationarität, indem das zweite Glied dominiert

$$\frac{du(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \dot{a} \mathbf{e}_1 \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{x}} \approx -\dot{a} u_{i,1}. \quad (2.149)$$

Aufgrund der mitbewegten Prozesszone $A_{\mathcal{F}}$ ist die Integralgrenze $A_{\mathcal{K}}$ zeitabhängig und daher muss die materielle Zeitableitung des zweiten Integrals von 2.147 mit Hilfe des *Reynoldschen* Transporttheorems durchgeführt werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} U^{\text{ep}} dA = \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} \frac{\partial}{\partial t} U^{\text{ep}} dA + \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} U^{\text{ep}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} \frac{\partial}{\partial t} U^{\text{ep}} dA - \dot{a} \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} U^{\text{ep}} n_1 ds. \quad (2.150)$$

Das Gebietsintegral über $A_{\mathcal{K}}$ kann wie gehabt durch die Anwendung des *Gauss'schen* Integral-satzes über die geschlossene Kurve $C = \Gamma + \Gamma^- + \Gamma^+ - \Gamma^{\mathcal{F}}$ in ein Pfadintegral umgewandelt werden, wobei die lastfreien Rissufer vernachlässigt werden dürfen. Nach Umwandlung der partiellen Ableitung $\partial U / \partial t = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}$ in $\partial U / \partial t = (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \dot{u}_i$ und der Einbeziehung der Gleichgewichtsbedingung $\sigma_{ij,j} = 0$ erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} U^{\text{ep}} dA = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j ds - \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j ds - \dot{a} \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} U^{\text{ep}} \delta_{1j} n_j ds. \quad (2.151)$$

Durch Einsetzen der Gleichung 2.151 in die Definition 2.147 und der Einbeziehung der materiellen Ableitung der Geschwindigkeit 2.149 lässt sich schließlich der Energiefluss in die Prozesszone pro Rissfortschritt durch ein Pfadintegral beschreiben

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} [U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}] n_j ds = \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} [U^{\text{ep}} n_1 - t_i u_{i,1}] ds. \quad (2.152)$$

Bis auf die unterschiedliche Integralgrenze erinnert diese Definition an die Gleichung 2.141. Die Schwierigkeit besteht in der realistischen Werkstoffmodellierung der Prozesszone, weshalb präzise Aussagen über das duktile Risswachstum mit diesem Ansatz problematisch sind. Um diese Probleme in der numerischen Berechnung zu umgehen, empfiehlt sich die Anwendung des *Gauss'schen* Satzes über die Kontur Γ außerhalb des Gebietes der Prozesszone

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} [U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}] n_j ds = \int_{\Gamma} [U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}] n_j ds - \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} [U_{,1}^{\text{ep}} - \sigma_{ij} u_{i,1j}] dA. \quad (2.153)$$

In Analogie zu 2.142 resultiert unter Ausführung des Gradienten des plastischen und elastischen Anteils der spezifischen Formänderungsenergie U^{ep}

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} [U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}] n_j ds = \int_{\Gamma} [U^{\text{ep}} \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}] n_j ds - \int_{A_{\mathcal{K}}(t)} [U_{,1}^{\text{p}} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{\text{p}}] dA. \quad (2.154)$$

Wichtige Erkenntnis aus dieser Herleitung ist, dass \mathcal{F} nicht als Energiefreisetzungsrate, wie im Sinne des konventionellen J -Integrals, durch ein wegunabhängiges Linienintegral allein aufgefasst werden kann. Für die vollständige Definition ist ein zusätzliches Gebietsintegral notwendig. Die physikalische Bedeutung von \mathcal{F} kann als eine Art elastisch-plastische Arbeitsrate bei virtueller Rissausbreitung, die über die Kontur $\Gamma^{\mathcal{F}}$ der Risspitze zugeführt wird, angesehen werden. Die Wahl der Kontur Γ ist beliebig, sofern diese außerhalb der Prozesszone und innerhalb des Körpers liegt. Die endgültige Definition des Energieflusses pro Rissfortschritt ist ausschließlich durch die Verwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik hervorgegangen. Ohne Zweifel ist 2.154 als eine Weiterentwicklung des konventionellen J -Integrals in der elastisch-plastischen Bruchmechanik anzusehen. Einige Forscher widmeten sich diesem Thema und postulierten aus diesen Erkenntnissen zahlreiche Varianten für das elastisch-plastische J -Integral, welche nicht den bisherigen Beschränkungen des konventionellen J -Integrals unterliegen und unter anderem bei zyklischen Belastungen (Entlastungen) anwendbar sein sollen. *Moran und Shih* zeigen in ihrer Arbeit [131] ausgehend von dem lokalen Impulssatz einen alternativen

Weg, der zu einer identischen Definition der Energieflüsse führt. Dennoch umfassen diese Arbeiten den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht und insbesondere der Energiebeitrag des transienten Werkstoffverhaltens bleibt unberücksichtigt, so dass eine vollständige physikalische Interpretation im Rahmen einer schwingenden Belastung ausbleibt.

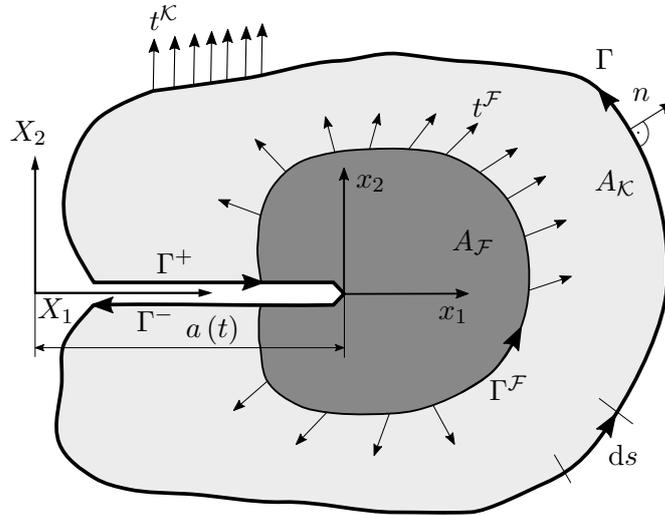


Abbildung 2.14.: Energiefluss bei duktilem Rissfortschritt

2.3.4. Zur experimentellen und numerischen Bestimmung des zyklischen J -Integrals

Experimentelle Bestimmung der J -Integral-Werte

Für die Ermittlung der Bruchzähigkeit oder der Risswiderstandskurven ist die Wahl der Probentypen und derer Vorbereitung, der Versuchsdurchführung und -auswertung mit einer einheitlichen Vorgehensweise nach internationalen Standards vereinbart. Hierbei haben sich zumeist die Normen ASTM E399, ASTM E1820 sowie ISO 12135 unter Verwendung der folgenden vier Probengeometrien in der Laborpraxis bewährt:

- Dreipunkt-Biegeprobe (SEB, engl. *Single-Edge Notched Bending*),
- Kompaktzugprobe (CT, engl. *Compact Tension*),
- C-förmige Probe und
- scheibenförmige Kompaktzugprobe (DCT, engl. *Disk-Shaped Compact Tension*).

Zur Erläuterung der experimentellen J -Integral-Bestimmung wird der Darstellung nach [104] gefolgt. Als Risswiderstandskurve (R-Kurve) wird der Zusammenhang zwischen einem monoton ansteigenden elastisch-plastischen Rissfeldparameter (J -Integral bzw. Rissspitzenöffnungsverschiebung CTOD) und der fortschreitenden stabilen, d.h. unter ständiger Energiezufuhr verlaufenden, Rissverlängerung verstanden. Der Beginn des stabilen Rissfortschritts erfolgt beim kritischen Wert des Rissfeldparameters und wird mit Risseinleitungs- oder Rissinitiierungszähigkeit bezeichnet. Er ist von der verwendeten Probengeometrie unabhängig, so dass eine Übertragbarkeit auf das Bauteilverhalten gegeben ist. Die Erfassung von Risswiderstandskurven kann sowohl durch die Einproben- als auch durch die Mehrprobentechnik erfolgen. Dies wird anhand der J_R -Risswiderstandskurve veranschaulicht, die in der Abbildung 2.15 qualitativ dargestellt ist und bei vereinfachter Berechnung des J -Integrals verwendet wird. Um die Einprobentechnik anzuwenden, bei der mindestens zwei bis drei Proben untersucht werden müssen, ist eine deutlich

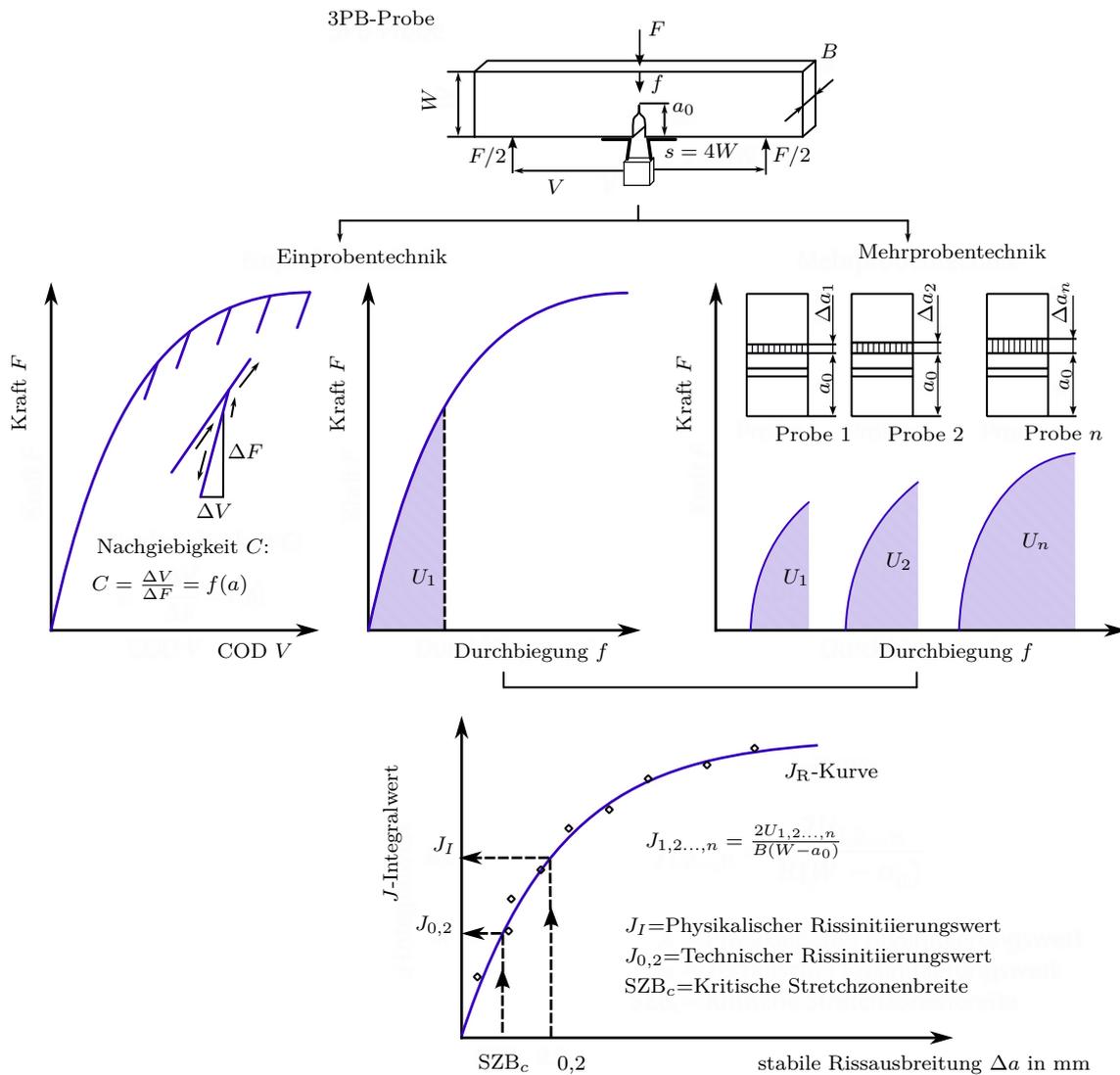


Abbildung 2.15.: Bestimmung der Risswiderstandskurve nach der Einproben- und Mehrproben-technik gemäß [104]

von der stabilen Rissausbreitung Δa abhängige Messgröße erforderlich. Die gebräuchlichsten Methoden, die in diesem Zusammenhang hauptsächlich zum Einsatz kommen, sind das Teilentlastungsverfahren, die Elektropotenzialmethode oder eine Kombination aus beiden. Das Prinzip des Teilentlastungsverfahrens, wie es in Abbildung 2.15 dargestellt ist, beruht auf der Beobachtung, dass die elastische Nachgiebigkeit der angerissenen Probe mit fortschreitendem Risswachstum zunimmt. Bei der schrittweisen Be- und Teilentlastung der Proben treten kurze Abschnitte der F - V -Kurven auf, die bei relativen Teilentlastungswerten zwischen 10% und 20% der aktuellen Kraft F auftreten. Aus der Steigung der Teilentlastungsgeraden können die Risslänge a und die stabile Rissverlängerung Δa bei der entsprechenden Belastung berechnet werden. Das zugehörige J -Integral resultiert aus der numerischen Integration der Kraft-Durchbiegungs-Kurve bis zum Beginn der jeweiligen Teilentlastung. Für die Mehrprobentechnik werden mindestens 6-8 Proben mit annähernd gleichen a_0/W -Verhältnissen benötigt. Durch die Anwendung unterschiedlicher Belastungen auf diese Proben werden verschiedene Beträge des stabilen Rissfortschritts erzeugt. Das J -Integral für jede beanspruchte Probe ergibt sich aus der aufgewendeten Arbeit U . Für die Berechnung werden entweder der gesamte Flächeninhalt unter der Kraft-Durchbiegungs-Kurve (SEB-Proben) oder der Flächeninhalt der Kraft-Kerbaufweitungs-Kurve (Stepped-Notch-CT-

Proben) verwendet. Die Mehrprobenmethode zur experimentellen Bestimmung der Kenngröße J geht ursprünglich auf die Vorgehensweise nach *Landes und Begley* im Sinne einer globalen Energiebetrachtung zurück. Anhand einer Versuchsreihe mit Proben gleicher geometrischer Abmessungen und Materialeigenschaften unterschiedlicher Risslängen entwickelten sie die Mehrprobenmethode, die als die ursprüngliche Testprozedur für die Bestimmung der Bruchzähigkeit J_{Ic} gilt. Der Nachteil des Mehrprobenverfahrens liegt allein, wie der Name schon besagt, in der Verwendung von mehreren Proben und den damit verbundenen hohen experimentellen Aufwand. Diesen Nachteil beheben *Rice et al.* [164] indem das Einprobenverfahren eingeführt wird, welches nur mit einer Probe zur J_{Ic} -Bestimmung auskommt. Das Hauptergebnis dieser experimentellen Untersuchungen ist eine erkennbare Korrelation zwischen J und der Formänderungsarbeit A_G (Fläche unter der F - V -Kurve), so dass sich verallgemeinernd konstatieren lässt, dass die Bestimmung des J -Kennwertes mit folgender Relation beschrieben werden kann:

$$J_{\text{exp}}^{\text{Rice}} = \frac{\eta A_G}{B(W-a)}. \quad (2.155)$$

Der Parameter A_G definiert die Fläche unter der F - V -Kurve des gekerbten Prüfkörpers, mit B wird die Breite der Probe bezeichnet, W stellt den Abstand vom Kraftangriffspunkt bis zum Probenende dar und mit a wird die Risslängendefinition gemessen vom Kraftangriffspunkt bis zur Risspitze definiert. Der dimensionslose Faktor $\eta(a/W)$ ist von dem Probentyp und der Geometrie abhängig und wird beispielsweise für den Dreipunktbiegekörper (SENB) auf $\lambda = 2$ genutzt. Im Falle einer CT-Probe wird eine andere Bestimmungsgleichung empfohlen. In den nachfolgenden Jahren wurden viele Forschungsprojekte aktiviert, um die experimentelle Validierung der J -Integral-Auswertungsmethoden mit Hilfe entsprechender Näherungsformeln auf verschiedene Probekörper zu übertragen. Die Unterschiede in den jeweiligen Modifikationen der analytischen Näherungsformeln sind grundsätzlich auf die Änderung des geometrieabhängigen Faktors η und des Parameters A_G zurückzuführen. Unter der Voraussetzung eines monoton steigenden Belastungspfades und elastisch-plastischen Materialverhaltens entspricht der J -Integral-Wert nach Gleichung 2.125 dem ermittelten Betrag gemäß der J -Integral-Testprozedur nach 2.155 für einen stationären Riss [110, 164]. Für den Fall der Rissfortschrittsbetrachtungen ist eine derartige Übereinstimmung zwischen den experimentell bestimmten Näherungsformeln und der klassischen J -Integral-Definition nicht zu erwarten [99, 100].

Experimentelle Bestimmung von zyklischen J -Integralen

Das zyklische Pendant zur Definition 2.155 nach *Rice* wird von *Dowling und Begley* [55] durch die Bestimmungsgleichung

$$\Delta J_{\text{exp}}^{\text{DB}} = \frac{\eta \Delta A_G}{B(W-a)} \quad \text{bzw.} \quad \Delta J_{\text{eff,exp}}^{\text{DB}} = \frac{\eta \Delta A_{\text{eff}}}{B(W-a)} \quad (2.156)$$

vorge stellt, welche aus Auswertungen experimenteller Daten anhand von CT-Proben (Werkstoff A533B) empirisch hervorgegangen ist. *Dowling und Begley* [55] erkennen in ihren Studien von Ermüdungsrissen einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Rissfortschrittsrate und einem experimentellen zyklischen J -Integral. Die Hauptaussage diesbezüglich ist, dass eine dem *Paris-Gesetz* ähnliche Korrelation zwischen der Rissfortschrittsrate und dem experimentellen zyklischen J -integral besteht und damit ein elastisch-plastischer Riss Spitzenparameter eingeführt werden darf. Dieses experimentelle zyklische J -Integral wird durch die eingeschlossene Fläche unter der Kraft-Verschiebung-Kurve F - u auf dem aufsteigenden Hystereseeast bestimmt. Mit weiteren experimentellen Nachweisen bestätigt *Dowling* [53] mit anderen Probekörpern (engl. *Center Cracked Specimen*, Werkstoff A533B) die Gültigkeit des elastisch-plastischen Rissfortschrittsgesetzes nach 2.156 und geht dabei insbesondere auf den Geometrieinfluss der Probe

ein. Falls Rissschließen vorhanden ist, empfehlen *Dowling und Begley* $\Delta J_{\text{eff,exp}}^{\text{DB}}$ den effektiven Wert des experimentellen zyklischen J -Integrals zu verwenden. Dabei wird zur Bestimmung des $\Delta J_{\text{eff,exp}}^{\text{DB}}$ -Betrages die Definition auf dem Belastungsast vorgeschlagen, indem die ΔA_{eff} -Fläche durch den F - v -Verlauf beginnend bei der Rissöffnungslast F_{op} bis zur Maximallast F_{max} begrenzt wird. Alternativ kann die effektive Schwingweite auf dem Entlastungsast ausgewertet werden, wobei die eingeschlossene ΔA_{eff} -Fläche von der Maximallast F_{max} bis zur Rissschließlast F_{cl} begrenzt wird (vgl. *Vormwald* [201]). Das zyklische Pendant zur Pfadintegraldefinition nach *Rice* [163] formulieren zunächst *Lamba* [108], *Wüthrich* [212] und *Tanaka* [191] unabhängig voneinander als

$$\Delta J = \int_{\Gamma} \left(\Delta U^{\text{ep}} dx_2 - \Delta t_i \frac{\partial (\Delta u_i)}{\partial x_1} ds \right) \quad \text{mit} \quad \Delta U^{\text{ep}} = \int_0^{\Delta \varepsilon_{kl}} \Delta \sigma_{ij} d(\Delta \varepsilon_{ij}). \quad (2.157)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Interpretation von Δ hier nicht als die Differenz zwischen Maximal- und Minimalbeträgen der Größen in einem Lastzyklus verstanden werden darf ($\Delta J \neq J_{\text{max}} - J_{\text{min}}$). In der Gleichung 2.157 geben die Werte $\Delta \sigma_{ij}$, Δt_i , $\Delta \varepsilon_{ij}$, und $\Delta u_{i,1}$ Änderungen der *Cauchy*-Spannungen, des Spannungsvektors, der Verzerrungen und Verschiebungsgradienten bezogen auf einen Referenzzustand an und können als Schwingweiten aufgefasst werden. Im Gegensatz dazu sind den Werten ΔU^{ep} und ΔJ keine Schwingweiten, sondern Absolutwerte zuzuschreiben. In der Folgezeit zeigten beispielsweise *Lambert et al.* [109] und *Banks-Sills und Volpert* [21] experimentelle und numerische Untersuchungen zum zyklischen J -Integral und bestätigten das Rissfortschrittsgesetz für verschiedene Werkstoffe und Randbedingungen. *Lambert et al.* [109] verwendete hierzu verschiebungskontrollierte Versuche mit CT-Proben aus dem Werkstoff AISI 316. *Banks-Sills und Volpert* [21] hingegen werteten kraftkontrollierte Versuche mit CT-Proben (Werkstoff Al 204-T351) bei Lastverhältnissen von $R = 0,05$ und $R = 0,5$ aus. Beide Arbeiten bestätigen die Korrelation zwischen dem $\Delta J_{\text{exp}}^{\text{DB}}$ -Wert und der Rissfortschrittsrate. Die numerische Untersuchung in [21] demonstriert die Übereinstimmung der J -Integral-Ergebnisse nach der Bestimmungsgleichung 2.156 auf Basis der F - u -Daten mit den resultierenden Werten aus den berechneten Pfadintegralen nach Definition 2.157. Eine wichtige Rolle für die analytischen Analysen in der Kurzrissbruchmechanik spielt ein weiterer Beitrag [54] von *Dowling* zum experimentellen zyklischen J -Integral für kurze Risse. Das experimentell bestimmte zyklische J -Integral

$$\Delta J_{\text{exp,SC}}^{\text{D}} = (3,2 \Delta U^{\text{e}} + 5,0 \Delta U^{\text{p}}) a \quad (2.158)$$

wird für kurze Risse in Abhängigkeit der elastischen und plastischen Formänderungsenergiedichte angegeben. Neben der Risslänge a werden in 2.158 zwei Faktoren angegeben, die dem Einfluss der Rissgeometrie (engl. *semi-circular cracks smooth low-cycle fatigue specimens*) gerecht werden. Die Auswertungen zeigen auch hier eine Korrelation zwischen dem $\Delta J_{\text{exp,SC}}^{\text{D}}$ -Wert und der Rissfortschrittsrate, so dass ein Rissfortschrittsgesetz für die elastisch-plastischen Kurzrissbruchmechanik postuliert werden kann. In [56] entwickelt *Dowling* die analytische Näherungsbeziehung des J -Integrals für einen halbkreisförmigen Oberflächenriss unter einer Membranspannung:

$$J_{\text{a}}^{\text{D}} = \left(1,24 \frac{\sigma_{\infty}^2}{E} + 1,02 \sqrt{n} \sigma \varepsilon_{\infty}^{\text{p}} \right) a, \quad (2.159)$$

wobei für den zyklischen Fall unter Verwendung von Schwingbreiten der Spannungen und Dehnungen der analytische Ausdruck

$$\Delta J_{\text{a}}^{\text{D}} = \left(1,24 \frac{\Delta \sigma_{\infty}^2}{E} + 1,02 \sqrt{n} \Delta \sigma \Delta \varepsilon_{\infty}^{\text{p}} \right) a \quad (2.160)$$

appliziert wird. Auf Basis der analytischen Formulierung des zyklischen J -Integrals werden eine Reihe an Schädigungsparametern für die Berechnung der Anrisslebensdauer entwickelt, die alleamt einen ähnlichen Grundaufbau wie der Ausdruck in der Klammer der Gleichung 2.160 bzw.

2.158 zeigen und somit unabhängig von der Risslänge a definiert werden. Motiviert durch die einfache Anwendbarkeit und die analytische Definition verwendet beispielsweise *Vormwald* [201] eine ähnliche Formulierung wie *Heitmann* [79], um einen Schädigungsparameter für die Anrisslebensdauervorhersage von zyklisch beanspruchten Strukturen zu beschreiben. Dieser vielfach verwendete Schädigungsparameter, der in der Betriebsfestigkeit als P_J bekannt ist und im Gegensatz zum Schädigungsparameter P_{SWT} bruchmechanisch begründet wird, hat zudem Eingang in die aktuelle Ausgabe der FKM-Richtlinie [2] gefunden. Trotz dieser weitreichenden Verwendung und Weiterentwicklung, die bis in die Kurzrisbruchmechanik und die Anrisslebensdauerkonzepte reicht, muss hingewiesen werden, dass bis heute für das experimentelle zyklische J -Integral eine klare physikalische Begründung im Sinne einer energetischen Interpretation als elastisch-plastische Bruchprozessgröße im Zusammenhang einer Rissfortschrittsberechnung fehlt. Diesbezüglich trifft das Verfahren nach *Dowling und Begley* hinsichtlich der Anwendbarkeit bzgl. eines Rissfortschrittes und einer wandernden plastischen Zone im Rahmen der zyklisch elastisch-plastischen Bruchmechanik sowie in diesem Zusammenhang vorhandener dissipativer Prozesse nicht auf breite Akzeptanz [143, 142]. Hervorgehoben sei die kritische Betrachtung von *Suresh* [189] und *Anderson* [9] hinsichtlich des Einsatzes der klassischen J -Integral-Bestimmung nach *Rice* bei zyklischen Bruchmechanik-Problemen alleinig mit Hilfe der Einführung der Schwingbreite in die *Ricesche* Definition. Werden die Gültigkeitsgrenzen der LEBM verletzt, so verliert strenggenommen das klassische J -Integral die Interpretation als die den Riss vorantreibende Energie. Dennoch kann dieses J -Integral unter bestimmten Voraussetzungen weiterhin als Bruchparameter verwendet werden. *Hutchinson* [84, 85] und *Rice* und *Rosengren* [165] zeigten, dass das J -Integral im plastischen Bereich vom Kleinbereichsfließen bis hin zu großen Plastifizierungen die Spannungs- und Dehnungsfelder im Rissnahbereich charakterisiert, wenn ein nicht linear-elastisches Materialverhalten oder die plastische Deformationstheorie vorausgesetzt wird. In der Literatur werden diese asymptotischen Näherungsformeln mit dem Ausdruck HRR-Felder bezeichnet. Im Rahmen der Deformationstheorie der Plastizität kann nichtlinear-elastisches Materialverhalten phänomenologisch durch das einachsige Verfestigungsgesetz von *Ramberg-Osgood* beschrieben werden. Analog zum Spannungsintensitätsfaktor K der LEBM bestimmt hier das J -Integral die Amplitude der singulären HRR-Felder. Das J -Integral ergibt sich insofern als Bruchkriterium, als dass an die Stelle der von K dominierten großen elastischen Zone um die Riss Spitze nun eine von J - bzw. dem HRR-Feld dominierte plastische Region tritt, die eine kleine sogenannte Bruchprozesszone direkt an der Riss Spitze einschließt. Die experimentelle Grundidee der physikalisch-konformen Kraft-Verschiebungs-Prozedur, um den Wert von J zu ermitteln, beruht auf dem Vergleich zweier identischer Proben, die mit unterschiedlichen Ausgangslängen a und $a + \Delta a$ monoton belastet werden. Bei einer Versuchsführung mit konstanter Verschiebung⁴ ($u = \text{const.}$) leistet zwar die Kraft F keine äußere Arbeit ($W_{\text{ext}} = F du = 0$ bzw. $\Pi_{\text{ext}} = 0$), so dass die äußere Arbeit W_{ext} komplett in die Formänderungsarbeit W_{int} umgesetzt wurde. Folglich ist die innere Arbeit in Abhängigkeit der aktuellen Risslänge mit folgender Gleichung bestimmbar:

$$W_{\text{int},a} = \int_0^{u_{\text{max}}} F_a du \quad \text{bzw.} \quad W_{\text{int},a+\Delta a} = \int_0^{u_{\text{max}}} F_{a+\Delta a} du. \quad (2.161)$$

Die Energiefreisetzungsrates bei einer Rissveränderung um dA ist in diesem Fall als die Differenz der potentiellen Energien der entsprechenden Risszustände anzusehen:

$$J = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\Delta A} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{W_{\text{int},a} - W_{\text{int},a+\Delta a}}{A_{a+\Delta a} - A_a} = - \frac{d\Pi}{dA}. \quad (2.162)$$

Die Potentialdifferenz ist in Abbildung 2.16 mit den Differenzen der inneren Arbeiten bezogen auf die jeweilige Risslänge dargestellt. Im Sinne einer mathematisch konvergenten und damit

⁴In Analogie zur Bestimmung der Energiefreisetzungsrates besteht die Möglichkeit alternativ eine kraftgesteuerte Versuchsführung mit $F = \text{const.}$ durchzuführen. Die Energiebilanzen der beiden Methoden führen auf das gleiche Ergebnis (vgl. [75, 106, 101]).

riszlängeninkrement-unabhängigen Lösung ist ein infinitesimal kleiner Wert für Δa erforderlich. Die zyklische Formulierung zu 2.162 wurde jüngst als sogenanntes „Konsekutives Konzept mit zyklischer Korrektur“ in [101] zur Ermittlung des zyklischen bzw. effektiven J -Wertes eingeführt:

$$\begin{aligned} \Delta J &= - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\Delta A} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{\text{int},a} - \Delta W_{\text{int},a+\Delta a}}{A_{a+\Delta a} - A_a} \\ &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\Delta u_{\text{max}}} \Delta F_a d\Delta u - \int_0^{\Delta u_{\text{max}}} \Delta F_{a+\Delta a} d\Delta u}{A_{a+\Delta a} - A_a}. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Kontermann [101] verwendet diese Methode in einer FE-Simulation zur Bildung der Energiebilanz für Zustände mit globaler konstanter Kraft $F = \text{const.}$ oder konstanter globaler Verschiebung $u = \text{const.}$ entsprechend wie in der Prinzipskizze 2.16 schematisch gezeigt.

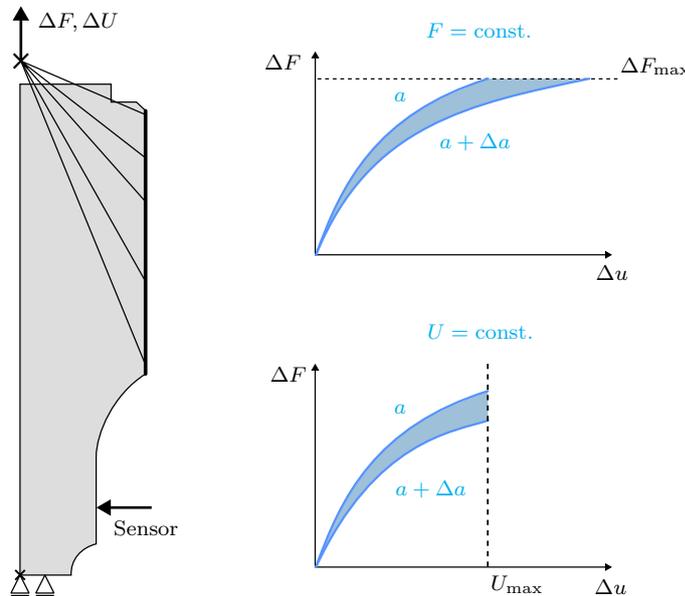


Abbildung 2.16.: Energiebilanz: Globale Methode nach [101]

Bei Verwendung der kraftgesteuerten Variante werden zwei Risszustände verglichen und die Differenz der beiden inneren Arbeiten gebildet. Ausgehend vom Zustand der Minimallast seien im Folgenden die globalen Kraft-Verschiebungs- und die W_{int} -Verschiebungs-Verläufe betrachtet, welche sich bei monotoner Belastung bis zum Erreichen der Maximallast des Schwingspiels ergeben. Dies geschieht sowohl für eine Risstiefe a als auch für eine Risstiefe $a + \Delta a$. In Abbildung 2.17 ist während der Umsetzung des Konzeptes die Grundidee nach *Dowling* [56] hinsichtlich der Verschiebung des Koordinatensystems, um auf die Schwingbreiten der Kräfte und Verschiebungen zu kommen, erkennbar.

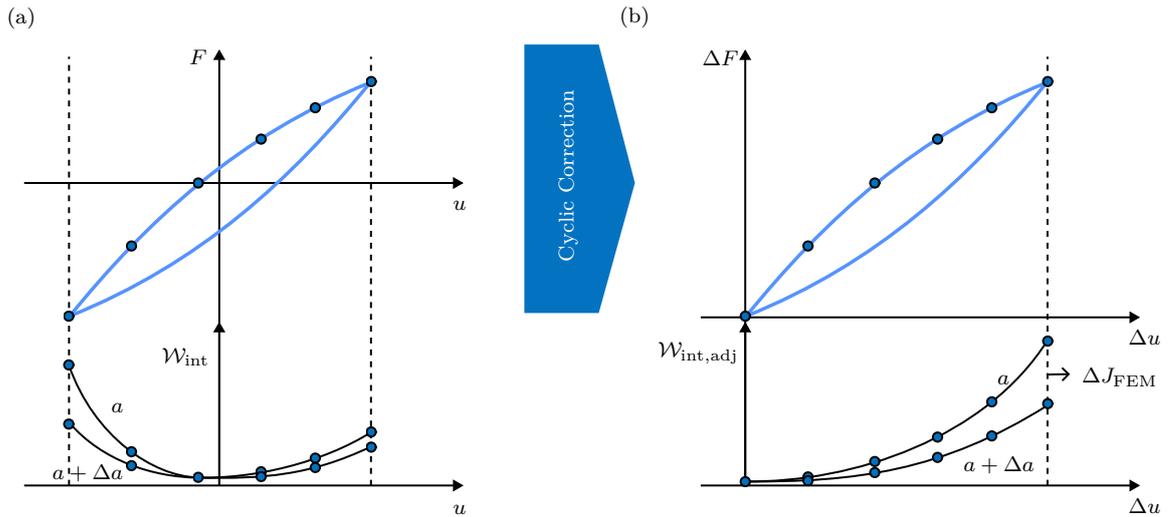


Abbildung 2.17.: Betrachtung des aufsteigenden Hysteresehalbastes zur Berechnung des zyklischen J -Integrals: Differenz der inneren Arbeit für zwei Risszustände [101]

Im Falle eines vorhandenen Risschließeffektes erfolgt die Auswertung der Differenzen der inneren Arbeit auf dem aufsteigenden Hysteresehalbast beginnend bei dem Rissöffnungszustand bis zum maximalen Belastungszustand, so dass der effektive Wert des zyklischen J -Integrals bei der Rissöffnungslast mit dem Wert Null startet und die Differenzbildung $\Delta W_{\text{int},a} - \Delta W_{\text{int},a+\Delta a}$ bis zur Maximallast ansteigt (siehe Abbildung 2.18a).

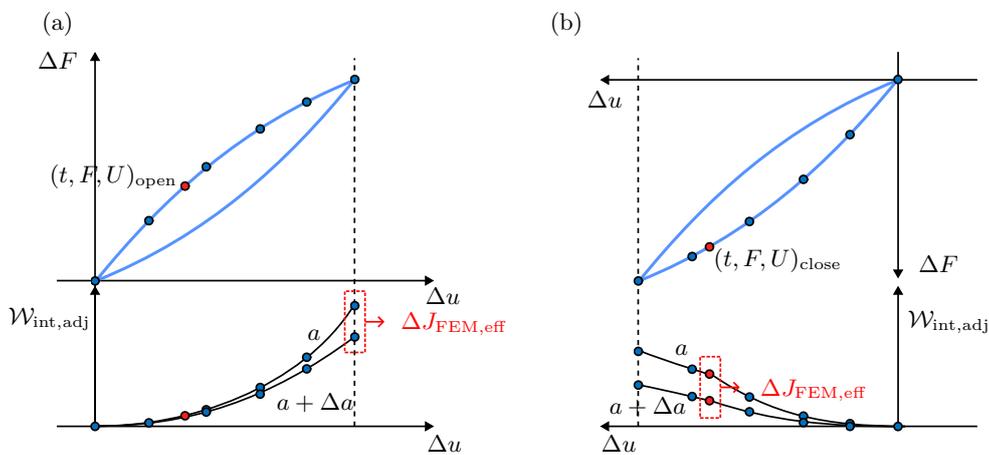


Abbildung 2.18.: Bestimmung des zyklisch effektiven J -Integrals unter Berücksichtigung des Risschließeffektes beim Rissöffnungszustand [101]

Der Wert der Differenzenbildung bei der Maximallast entspricht dem gesuchten ΔJ_{eff} -Betrag. In gleicher Weise kann nach [101] das Verfahren ausgehend von der Maximallast bis zur Risschließlast angewendet werden, wobei hier der Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt der Maximallast verschoben wird, so dass die Differenzbildung $\Delta W_{\text{int},a} - \Delta W_{\text{int},a+\Delta a}$ in diesem Punkt zu Null gesetzt wird und bis zur Risschließlast ausgewertet wird. In diesem Fall befindet sich das Endresultat für den gesuchten ΔJ_{eff} -Wert exakt während des eintretenden Risschließzu-

standes. Dennoch wird die Bestimmung des effektiven Anteils des J -Integrals am aufsteigenden Hysteresehalbast empfohlen, da die numerische Umsetzung verglichen mit der Methode am absteigenden Hysteresehalbast einfacher gestaltet werden kann [101].

Fazit: Die wohl größte Beschränkung der bis dahin gezeigten Methoden unterliegt eindeutig der werkstoffmechanischen Grundlage im Sinne der Deformationstheorie. In der Deformationstheorie wird davon ausgegangen, dass sich die Spannungsverteilung proportional zur angelegten Belastung einstellt. Solange keine Spannungsumlagerungen oder lokalen Entlastungen stattfinden und sich das elastisch-plastische Materialverhalten beispielsweise mit einem Potenzgesetz der Art 2.102 beschreiben lässt, ist das J -Integral eindeutig und wegunabhängig. Die Bedingung hierfür ist, dass die an der Risspitze auftretenden Zonen nicht proportionaler Belastung eingebettet sein müssen in große Zonen proportionaler Belastung [58]. In der Praxis zeigt sich allerdings, dass das J -Integral auch bei lokalen Entlastungen durch geringes Risswachstum eine Wegabhängigkeit aufweist. In anderen Worten gesagt treten jedoch Entlastungen oder Spannungsumlagerungen auf, so verliert auch die Annahme eines singulären Feldes vor der Risspitze ihre Gültigkeit. Die bis dahin eindeutige Beziehung zwischen den Spannungen und Dehnungen geht verloren, folglich wird das J -Integral wegunabhängig. Im Rahmen dieser Arbeit sind zyklische Lasten durch bestimmte Belastungs- und Entlastungsvorgänge mit Rissuferbelastung für die numerische Simulation maßgebend und somit treten Belastungen mit einer definierten Last, Entlastungen, Spannungsumlagerungen im Risspitzenbereich und Rissuferbelastungen in den Simulationen auf, so dass das J -Integral im klassischen Sinne die Eigenschaften der Wegunabhängigkeit und Eindeutigkeit verliert. Bei einem realen elastisch-plastischen Material kommt es während einer Rissausbreitung zwingend zur Entlastung, wobei die Formänderungsenergie dissipative plastische Anteile enthält, die nicht als potentielle rissantreibende Energie zur Verfügung steht ($W_{\text{int}} \neq II_{\text{int}}$). Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die bis hier gezeigten experimentellen und numerischen Bestimmungsmethoden des zyklischen J -Integrals bestimmten Beschränkungen unterliegen und somit nicht als die physikalisch-konsistente Interpretation im Sinne einer rissantreibenden Energie während eines Rissfortschrittes in einem realen elastisch-plastischen Werkstoff samt Berücksichtigung dissipativer Prozesse gehandelt werden kann (vgl. [189, 9, 142]).

Um über diese Grenzen hinaus einen wegunabhängigen Parameter auf der Basis des J -Integrals zur Verfügung zu haben, wurden verschiedene Modifikationen des Pfadintegrals vorgeschlagen. Einige dieser Parameter, unter Berücksichtigung der inkrementellen Plastizitätstheorie, werden im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt.

Numerische Bestimmung von zyklischen J -Integralen unter Berücksichtigung der inkrementellen Plastizitätstheorie

Um den Gültigkeitsbereich des klassischen J -Integrals auf die inkrementelle Plastizitätstheorie und größere Deformationen auszuweiten, wurden verschiedene Erweiterungen vorgeschlagen, die zudem geeigneter für die Bewertung von zyklisch belasteten Körpern erscheinen. Zur Erläuterung der Varianten wird direkt an das Kapitel 2.3.3 und die Gleichung 2.147 angeknüpft. Aus der Divergenz des Energieimpulstensors $\Sigma_{1j,j}$ per Definition 2.142 geht hervor, dass die Wegunabhängigkeit des Pfadintegrals nicht mehr gültig ist und das Linienintegral $\Gamma^{\mathcal{F}}$ somit gerade die Differenz zwischen dem Pfadintegral mit dem äußeren Pfad Γ innerhalb des Fernfeldes und dem Flächenintegral quantifiziert:

$$\tilde{J}_1 = \mathcal{F}_1 = \int_{\Gamma^{\mathcal{F}}} [U^{\text{ep}}\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1}] n_j ds = \int_{\Gamma} (U^{\text{ep}}\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1}) n_j ds - \int_{A_{\mathcal{K}}} (U_{,1}^{\text{p}} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}^{\text{p}}) dA. \quad (2.164)$$

Die elastisch-plastische Definition $\tilde{J}_1(\Gamma_\varepsilon)$ als vektorielle x_1 -Komponente kann ohne Weiteres auf den gesamten J -Integral-Vektor mit $x_1 := x_k$ übertragen werden, so dass

$$\tilde{J}_k = \int_{\Gamma} (U^{\text{ep}} \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,j}) n_j ds - \int_{A_{\mathcal{K}}} (U_{,k}^{\text{p}} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k}^{\text{p}}) dA \quad (2.165)$$

gilt. Diese formal einfache mathematische Herleitung führt mit Hilfe des Korrekturterms auf die Wegunabhängigkeit des \tilde{J} -Integrals für beliebige Lastpfade im Rahmen der plastischen Fließtheorie. Prinzipiell nimmt dieser Grundaufbau mit dem Korrekturterm einen wichtigen Bestandteil in den folgenden elastisch-plastischen J -Konzepten ein. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass aufgrund des Dissipationsanteils U^{ep} die Interpretation des \tilde{J} -Integrals im Sinne der Energiefreisetzungsrates aufgegeben werden muss. *Kishimoto et al.* [97, 13] haben sogenannte \hat{J} -Integrale vorgeschlagen, die auf dem Modell des Energieflussintegrals \mathcal{F} und einer fiktiven Bruchprozesszone $A_{\mathcal{F}}$ basieren, wie sie bereits im Abschnitt 2.3.3 anhand der Abbildung 2.14 diskutiert wurden:

$$\hat{J}_1(\Gamma_{\mathcal{F}}) = \int_{\Gamma} (U^e \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j ds + \int_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{\text{p}} dA. \quad (2.166)$$

Im Gegensatz zur Definition 2.164 verwenden die Autoren [97, 13] bewusst nur den elastischen Anteil der Formänderungsenergiedichte U^e , um die tatsächlich verfügbare potentielle Energiefreisetzungsrates hervorzuheben, so dass der dissipative Anteil U^{p} sowohl im Linien- als auch im Flächenintegral fehlt. Das \hat{J} -Konzept kann die Auswirkungen bestimmter Randbedingungen, wie z.B. Temperatureffekt bzw. Temperaturgradienten, die Wirkung der Volumenkräfte und belasteter Rissufer einbeziehen, indem die ursprüngliche Definition durch die entsprechenden Zusatzterme ergänzt wird. Eine praktische Anwendung auf Basis des \hat{J} für die thermomechanische Anwendung wird in der Arbeit von *Bauerbach et al.* [24] demonstriert. Die Autoren präsentieren eine Form des zyklischen \hat{J} -Integrals, welches für die Berechnung von $\Delta \hat{J}$ für thermomechanisch belastete Strukturen sowie für weiterführende TMF-Analysen unter Berücksichtigung des Risschließeffekts geeignet ist. Einen weiteren Vertreter des wegunabhängigen Integrals als vektorielles ΔT_k^* -Integral

$$\Delta T_k^* = \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} \Delta \check{\Sigma}_{kj} n_j ds = \int_{\Gamma} \Delta \check{\Sigma}_{kj} n_j ds - \int_{A_{\mathcal{K}}} \Delta \check{\Sigma}_{kj,j} dA, \quad (2.167)$$

das ähnlich wie das Flussintegral hergeleitet wurde, entwickelten *Atluri, Nishioka et al.* [19, 20]. Während der Betrachtung der beiden Bestandteile des vektoriellen Integrals kann der typische Aufbau des Flussintegrals \hat{J} -Integrals erkannt werden. Der Integrand im ersten Term wird als ein Inkrement des Energieimpulstensors $\Delta \check{\Sigma}_{kj} = \check{\Sigma}_{kj}(t + \Delta t) - \check{\Sigma}_{kj}(t)$ aufgefasst und nimmt die konkrete Darstellung an:

$$\begin{aligned} \Delta \check{\Sigma}_{kj} n_j &= \left[\Delta \check{U}^{\text{ep}} \delta_{jk} - (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta u_{i,k} - \Delta \sigma_{ij} u_{i,k} \right] n_j \\ &= \Delta \check{U}^{\text{ep}} n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k}. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Der zweite Term wird als die Korrektur der Wegabhängigkeit in Form eines Gebietsintegrals $A_{\mathcal{K}}$ in seiner inkrementellen Definition verwendet.

$$\int_{A_{\mathcal{K}}} \Delta \check{\Sigma}_{kj,j} dA = \int_{A_{\mathcal{K}}} \left[\Delta \check{U}_{,k}^{\text{ep}} - [(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta u_{i,k}]_{,j} - (\Delta \sigma_{ij} u_{i,k})_{,j} \right] dA. \quad (2.169)$$

Mit der inkrementellen Formänderungsenergiedichte $\Delta \check{U}^{\text{ep}} = (\sigma_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij}) \Delta \varepsilon_{ij}$, der Vereinfachung $(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})_{,j} = 0$, dem *Hookeschen* Gesetz $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e$ und den plastischen Verzerrungen $\varepsilon_{ij}^{\text{p}} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e$ entsteht ein wegunabhängiges inkrementelles Linien-Flächenintegral:

$$\Delta T_k^* = \int_{\Gamma} \Delta \check{\Sigma}_{kj} n_j ds - \int_{A_{\mathcal{K}}} \left[\left(\sigma_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,k} \right) \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{p}} - \left(\varepsilon_{ij,k}^{\text{p}} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij,k}^{\text{p}} \right) \Delta \sigma_{ij} \right] dA. \quad (2.170)$$

Das ΔT_k^* -Integral spiegelt de facto die inkrementelle Form des \hat{J} -Integrals wieder, was durch Integration über die Belastungsgeschichte bewiesen werden kann [106]. Das ΔT_k^* -Integral kann für statische und dynamische Rissprobleme verwendet werden und zeichnet sich zusätzlich durch seine Gültigkeit bei jedem inelastischen Materialgesetz aus. Weiterführende dreidimensionale Verallgemeinerungen mit der Berücksichtigung von Volumen- und Trägheitskräften werden in [20] beschrieben. *Moran und Shih* [131] leisteten konstruktive Kritik hinsichtlich der numerischen Implementierung des ΔT_k^* -Integrals und setzen die Einführung der Wichtungsfunktionen für eine korrekte Berechnung der Energieflussintegrale bzw. der Gebietsintegrale bei Verwendung der FEM voraus. Folglich präsentieren *Nikishkov und Atluri* [140] eine solche numerische Implementierung des ΔT_k^* -Integrals für die Behandlung von 3D-Problemen mit Hilfe einer Gewichtsfunktion, so dass Linienintegrale präziser in Volumenintegrale konvertiert werden können. Eine praktische Umsetzung und zyklische Erweiterung des ΔT_k^* -Integrals realisiert *Zerres* [213] im Rahmen einer neuartigen Rissfortschrittssimulation zur bruchmechanischen Dauerfestigkeitsbewertung von autofrettierten und nicht-autofrettierten Strukturen unter Einbeziehung der inkrementellen Plastizitätstheorie mit leistungsfähigen Werkstoffmodellen. Die Basis für die numerische 3D-Realisierung mit Hilfe von Wichtungsfunktionen bildet der Rissspitzenparameter nach *Nikishkov und Atluri* [140] unter Beachtung der Rissuferbelastung, der Node-Release-Technik, des Rissfortschrittsgesetzes, des Mapping-Verfahrens und des Risserschließverhaltens zur Bestimmung des effektiven Anteils des Rissspitzenparameters. Im Rahmen des Mapping-Verfahrens wird die zu untersuchende Struktur nach jedem Rissfortschrittsinkrement neu vernetzt und die Statusvariablen vom alten auf das neue Netz übertragen. Die Leistungsfähigkeit der Rissfortschrittsalgorithmen konnte an einem linear-elastischen Mixed-Mode- sowie einem elastisch-plastischen Modus-I-Problem aufgezeigt werden. Eine weitere Arbeit, die sich mit dem Thema der wegunabhängigen J -Integrale befasst und detailliert auf die numerische Umsetzung des ΔT_k^* -Integrals nach *Atluri* [20] sowie J^* nach *Simo* [182] eingeht, verfasste *Schimpfke* [169]. Angemerkt sei, dass die gezeigte Applikation der Rissspitzenparameter in erster Linie für die elastisch-plastische Bruchmechanikanalyse von zyklisch thermisch und mechanisch belasteten Strukturen ohne die Einbeziehung des Risserschließeffektes und damit zusammenhängenden effektiven Beanspruchungsgrößen konzipiert wurde. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt bei der programmtechnischen Realisierung der beiden Parameter mit der Methode der virtuellen Risserweiterung und den hierzu notwendigen Volumenintegrationsalgorithmen. Vergleichende Darstellungen der Ergebnisse zeigen eine Wegunabhängigkeit bzw. Gebietsunabhängigkeit der beiden Rissspitzenparameter, jedoch sind netzabhängige und von der Integrationsordnung abhängige Lösungen erkennbar. Insbesondere treten diese Abhängigkeiten und Ergebnisschwankungen beim Entlastungsvorgang in Verbindung mit einer rissspitzennahen Definition der Begrenzungspfade auf. Als Kompromiss zwischen einer akzeptablen Rissspitzennähe und einem Bereich mit stark schwankenden FE-Resultaten empfiehlt der Autor das Integralgebiet um einen bestimmten Bereich mit dem Abstandswert ε_0 um die Rissspitze mit einer sogenannten Rissspitzenaussparung zu begrenzen. Abschließend werden Praxisbeispiele mit realistischen Lastfällen samt Temperaturtransienten aus dem Reaktordruckbehälterbau mit der entwickelten Methode behandelt und die Ergebnisse der ΔT_k^* -Integrale und J^* -Integrale diskutiert. *Schimpfke* [169] und *Zerres* [213] weisen unabhängig voneinander auf die Unklarheit der physikalischen Interpretation und somit auf die Problematik, die die Modifikationen des J -Integrales zur Behebung der Wegabhängigkeit bei Anwesenheit von größeren plastischen Zonen mit sich bringen, hin. Im Grunde genommen folgen die Modifikationen größtenteils aus einer rein mathematischen Herleitung in Verbindung mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, um die Pfadunabhängigkeit unter bestimmten Bedingungen konsequent zu gewährleisten. Die physikalische Interpretation im Sinne einer vollständigen thermodynamisch konsistenten Formulierung wird allerdings schuldig geblieben. Diesbezüglich ist die fehlende Berücksichtigung des Effektes des transienten Werkstoffverhaltens, welcher grundsätzlich innerhalb des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und bei Verwendung von zyklisch elastisch-plastischen Werkstoffmodellen nicht zu vernachlässigen ist, kritisch

zu betrachten. *Simo und Honein* [182] gehen auf diese Defizite ein und führen das S -Integral zur Lösung der Diskrepanz hinsichtlich der thermodynamischen Konsistenz ein. Diese Variante des Rissspitzenparameters zeichnet sich durch die energetische Einbeziehung der Verfestigungsvariablen als Bestandteil der freien *Helmholtzenergie* und des dissipativen Energieanteils im Sinne des zweiten thermodynamischen Hauptsatzes aus. Ausgehend von allgemeinen Energiebetrachtungen und dem Prinzip der maximalen plastischen Dissipation wird eine diskrete Variationsformulierung von Plastizität und Viskoplastizität entwickelt, die zu einer Verallgemeinerung des J -Integrals unter Einbeziehung eines elastisch-plastischen und viskoplastischen Werkstoffverhaltens führt. Es wird jedoch eine diskrete inhomogene Form des *Eshelbyschen* Erhaltungsgesetzes abgeleitet, die zu einem wegunabhängigen Integral führt, das das klassische J -Integral auf Elastoviskoplastizität verallgemeinert. Die Autoren betonen, dass dieses pfad- und gebietsunabhängige Integral auch bei Be- und Entlastungsvorgängen eine physikalische Deutung analog zur klassischen J -Integral-Interpretation zulässt. Dennoch wird explizit keine Charakterisierung des Risswachstumes in elastisch-plastischen Materialien unter zyklischer Belastung vorgestellt. Die gesamte freie Energie setzt sich zusammen aus den Volumenkräften, den am Körper wirkenden äußeren Kräften und der inneren freien Energie, die eine Funktion der elastischen Dehnungen und der Verfestigungsparameter ist. Eine wichtige Rolle bei der Herleitung des S -Integrals spielt die Verwendung des *Noether*-Theorems, so dass hieraus auf eine diskretisierte Energiefunktion in Form einer Erhaltungsgröße geschlossen wird, welche für singularitätenfreie Volumina entfällt. Die Implementierung des Parameters im Rahmen eines FE-Programms wird in [204] gezeigt, Auswertungen bezüglich der Weg- bzw. Pfad- und Gebietsunabhängigkeit werden in [205] behandelt und Analysen von monoton belasteten Bruchmechanikproben mit thermischen Gradienten werden in [203] diskutiert. Die Charakterisierung des Risswachstumes in elastoplastischen Materialien unter zyklischer Belastung nach dem Konzept der konfigurrellen Kräfte (engl. *concept of configurational forces*) wird beispielsweise in [142] ausgearbeitet. Es wird ausdrücklich auf die Defizite des konventionellen J -Integrals im Zusammenhang von nichtproportionalen Belastungsbedingungen bei zyklischer Beanspruchung und Rissfortschritt sowie die werkstoffmechanische Beschränkung der Deformationstheorie hingewiesen. Bei der Herleitung des Gesamtverfahrens stützt sich der Autor auf die Theorie der konfigurrellen Kräfte nach *Gurtin* [76, 77], die weiterführenden Umformungen nach *Simha et al.* [181] und die numerische Umsetzung nach *Müller et al.* [135, 134] und *Denzer et al.* [46]. Die detaillierte Beschreibung der verwendeten Routine kann den Literaturen *Shan* [179] und *Schöngrundner* [171] entnommen werden. Für die Lösung der Probleme wird ein zyklischer J -Integralterm ΔJ^{ep} auf Basis des Konzeptes der konfigurrellen Kräfte und der inkrementellen Plastizitätstheorie ausgehend von

$$J^{\text{ep}} = J_{\text{tip}}^{\text{ep}} - \mathbf{e} \cdot \int_D \mathbf{f}^{\text{ep}} \, dA = J_{\text{tip}}^{\text{ep}} + \mathbf{e} \cdot \int_D \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\psi_e \mathbf{I} - \mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \mathbf{P}) \, dA \quad (2.171)$$

nach *Simha et al.* [181] begründet. Der Vorteil der Verwendung der Mechanik der Konfigurationskräfte wird hier insbesondere durch die Möglichkeit der Berücksichtigung der großen Deformationen deutlich, so dass in diesem Fall die Definition für \mathbf{f}^{ep} in der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{f}^{\text{ep}} = (\mathbf{F}^e)^{\text{T}} \mathbf{P} : \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{p}}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.172)$$

lautet und andernfalls bei Vorliegen von kleinen Verzerrungen (engl. *small strain plasticity*) in die vereinfachte Form der Momentankonfiguration

$$\mathbf{f}^{\text{ep}} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.173)$$

übergeht. Vielversprechender hinsichtlich der angesprochenen physikalischen Interpretation sind J -Integrale auf Basis der Konfigurationskräfte zu sehen und gewinnen aktuell vermehrt an Aufmerksamkeit. Exemplarisch hierzu ist die Arbeit von [148] zu nennen, die größtenteils die Behandlung von verschiedenen physikalischen Anwendungsproblemen der J -Integrale auf Basis

der materiellen Kräfte zeigt, wenn auch diese Arbeit keine konkrete zyklische Umsetzung des effektiven J -Integrals oder Rissspitzenparameters aufzeigt. Aufgrund der breiten Akzeptanz bei praktischen und wissenschaftlichen Anwendern hat diese Form des J -Integrals Eingang in die kommerzielle FE-Software ANSYS gefunden.

3. Experimentelle Datenbasis

3.1. Experimentelle Datenbasis für die Parameteridentifikation von Werkstoffmodellen

Das zentrale Ziel der experimentellen Arbeit ist die Bereitstellung der statischen und der zyklischen Werkstoffdaten und die Validierung der Werkstoff- und Berechnungsmodelle. Die experimentelle Basis für die Programmanwendung der Parameteridentifikation bilden die Versuchsergebnisse aus dem Forschungsvorhaben [25] sowie zusätzlich durchgeführte Versuche. Für die Proben mit dem Arbeitsschwerpunkt Autofrettage des Vorhabens [25] wurde der Vergütungsstahl 42CrMo4 eingesetzt. Bei der Ermittlung der Werkstoffeigenschaften wurden Versuche unter isothermen Randbedingungen bei drei verschiedenen Temperaturen 20 °C, 120 °C und 180 °C und einachsiger sowie einstufiger bzw. mehrstufiger geführter Kraft- und Dehnungsregelung verwendet. Zur Validierung des bruchmechanischen Modells wurden ausschließlich die experimentellen Arbeiten mit bauteilähnlichen Proben (Kreuzbohrungsproben) aus [25] eingesetzt. In diesem Kapitel werden die relevanten Einzelheiten der durchgeführten experimentellen Arbeiten dargestellt. Nach Einführung des verwendeten Versuchswerkstoffes folgt die Vorstellung verwendeter Probenotypen, eingesetzter Versuchstechnik und die Darstellung der Versuchsergebnisse.

3.1.1. Verwendete Werkstoffe: Vergütungsstahl 42CrMo4

Die experimentelle Basis für die Anwendung des Parameteridentifikationsprogrammes bilden die Versuchsergebnisse aus dem Forschungsvorhaben [25]. Es finden ausschließlich experimentelle Untersuchungen an dem Vergütungsstahl 42CrMo4 statt. Vergütungsstähle eignen sich aufgrund ihrer chemischen Zusammensetzung zum Härten und weisen im vergüteten Zustand gute Zähigkeitseigenschaften bei hoher Zugfestigkeit auf. Bauteile aus Vergütungsstählen können entsprechend ihren Gebrauchsanforderungen durch eine angepasste Wärmebehandlung, die in der Regel aus dem Härten und einem anschließenden Anlassen besteht, ideal auf ihren Verwendungszweck abgestimmt werden. Die spezielle Wärmebehandlungstechnik, das Vergüten, ermöglicht die Anpassung der Werkstoffeigenschaften der Vergütungsstähle an die technischen Erfordernisse des Bauteils. Die Stähle werden hauptsächlich für dynamisch bzw. zyklisch hoch beanspruchte Bauteile hoher Festigkeit im Maschinen- und Fahrzeugbau verwendet. Im Gegensatz zu den niedriggekohlten schweißgeeigneten Vergütungsstählen besitzen, die hier behandelten niedriglegierten Vergütungsstähle, höhere Kohlenstoffgehalte. Ohne aufwändige Vor- und Nachbehandlungen gelten sie als nicht schweißgeeignet. Der chrom-molybdänlegierte Vergütungsstahl (42CrMo4) wird unter der Werkstoffnummer 1.7225 bzw. AISI 4140 gehandelt.

Die chemische Zusammensetzung des Versuchswerkstoffes 42CrMo4 wurde mittels optischer Emissionsspektroskopie (OES) an der Materialforschungs- und -prüfanstalt (MFPA) an der Bauhaus-Universität-Weimar überprüft. Die Werte sind in der Tabelle 3.1 den Angaben nach dem Abnahmeprüfzeugnis 3.1.B. (EN 10204) und den Sollwerten der DIN EN 10083 und DIN EN 10084 gegenübergestellt. Die chemische Zusammensetzung der verwendeten Werkstoffchargen liegt in den Toleranzbereichen, die für diese Stähle in den Normen DIN EN 10083-3 und DIN EN 10084 festgelegt sind.

Tabelle 3.1.: Chemische Zusammensetzung des 42CrMo4 in %

	C	P	S	Si	Mn	Cr	Mo
Abnahmeprüfzeugnis 3.1.B.	0,406	0,017	0,009	0,30	0,76	1,20	0,28
OES	0,422	0,016	0,013	0,32	0,74	1,23	0,28
Anforderungen	0,38				0,60	0,9	0,15
nach	bis	max.	max.	max.	bis	bis	bis
DIN EN 10083-3:2007-01	0,45	0,025	0,035	0,40	0,90	1,20	0,30

3.1.2. Probengeometrie und Probenfertigung

Zur Ermittlung der Werkstoffdaten und zur Validierung der bruchmechanischen Simulationsergebnisse wurden die folgenden drei Probenformen verwendet:

- Werkstoffprobe als Hourglass-Probe (42CrMo4) mit der Benennung WHG 1 (Abbildung 3.1) und WHG 2 (Abbildung 3.2)
- 90°-Kreuzbohrungsprobe (42CrMo4) mit der Benennung KB (Abbildung 3.13).

Die ersten beiden Probentypen WHG 1 und WHG 2 werden ausschließlich zur Erzeugung von Referenzdaten für die Bestimmung der Werkstoffparameter im Rahmen von reinen Werkstoffversuchen verwendet. Die Kreuzbohrungsprobe KB dient zur Validierung der bruchmechanischen Berechnungsmethoden in Form eines Bauteilversuches. Ausgangspunkt für die Herstellung der Proben WHG1 (42CrMo4) war der gewalzte Rundstahl aus konventioneller Fertigung mit dem Durchmesser 60 mm. Es handelt sich um dieselbe Materialcharge, die auch zur Herstellung der 90°-Kreuzbohrungsproben KB aus 42CrMo4 verwendet wurde. Aus dem angelieferten Rundstahl $d = 60$ mm wurden am Fachgebiet Werkstoffmechanik (Darmstadt) 100 Stück Rundproben mit der in Abbildung 3.1 dargestellten Hourglass-Geometrie nach ASTM E606 [17] gefertigt. Die struktur- und fertigungsbedingten Einflüsse aus Kerben, Eigenspannungen und Oberflächenrauheit wurden bei den Prüflingen auf ein Minimum reduziert, so dass sie als reine Werkstoffproben angesehen werden können. Die spezielle Probenform als Hourglass-Probe gewährleistet darüber hinaus ausreichende Stabilität gegen plastisches Knicken, was insbesondere bei Druckbelastungen zum Tragen kommt.

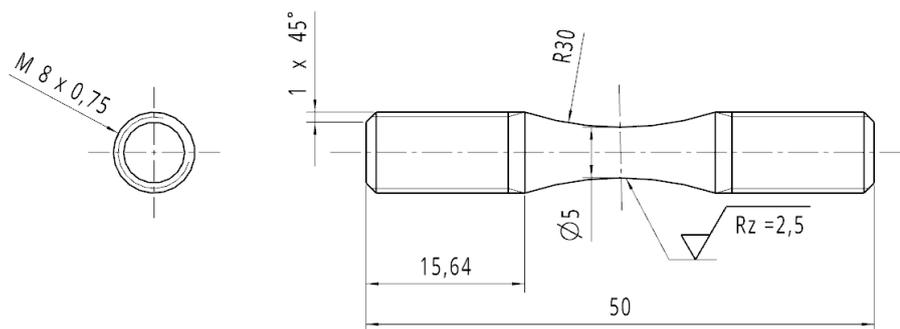


Abbildung 3.1.: Hourglass-Rundprobe WHG 1 mit Feingewinde

Die Proben wurden als Gewindeproben mit einem Durchmesser von $d = 5$ mm im Prüfquerschnitt und einem Feingewinde M8 x 0,75 zur Einspannung in die Adapter der Prüfmaschine konzipiert. Die Proben wurden kopiergedreht und die Gewinde ohne Umsetzen der Probe geschnitten, um mögliche außermittigen Positionierungen der Probe zu vermeiden. Das anschließende Kopierdrehen mit einer Zustellung von 0,03 mm, um eine hohe Oberflächengüte und geringe Eigenspannungen zu gewährleisten. Der spanende Bearbeitungsprozess wurde durch eine

Materialkühlung begleitet. Abschließend wurden die Proben in der Drehbank mit Schmirgelleinen der Körnung 200 und 400 bei mäßiger Drehzahl vorpoliert. Dabei wurde in Längsrichtung der Proben mit dem Schleifmittel gependelt. Das Endpolieren erfolgte jeweils direkt vor der Versuchsdurchführung mit Schmirgelleinen zunehmender Körnung 500 bis 1200. Poliert wurde in Längsrichtung der Proben unter mäßigem Druck, um keine Querriefen und möglichst geringe Eigenspannungen zu erzeugen. Die Qualitätsprüfung der Polierarbeit erfolgt mit Hilfe des Stereomikroskops. Das Qualitätskriterium ist erfüllt, falls nach Polierarbeiten keine Querriefen mehr erkennbar sind. Das Fertigungs- und Aufbereitungsverfahren der Hourglass-Proben ist am Fachgebiet Werkstoffmechanik langjährig erprobt. Zur Berechnung des Probenquerschnittes an der schmalsten Stelle der Hourglass-Proben wurde am Probenumfang mit einer Messuhr an 3 Positionen (0° , 60° , 120°) der Probendurchmesser aufgenommen und anschließend gemittelt. Zusätzliche Proben WHG2, die zur Validierung verwendet wurden, sind als Flachproben gemäß den Abmessungen nach Abbildung 3.2 hergestellt worden. Das Aufbereiten der Oberfläche der Flachproben erfolgte nach dem gleichem Polierablauf, der bei den Rundproben angewendet wurde. Bei den Flachproben wurde ein Durchmesser von 6 mm im Prüfquerschnitt definiert. Die Einspannung erfolgte über die Adapter der Prüfmaschine und den aufgerauten Flächen im Einspannungsbereich der Probe.

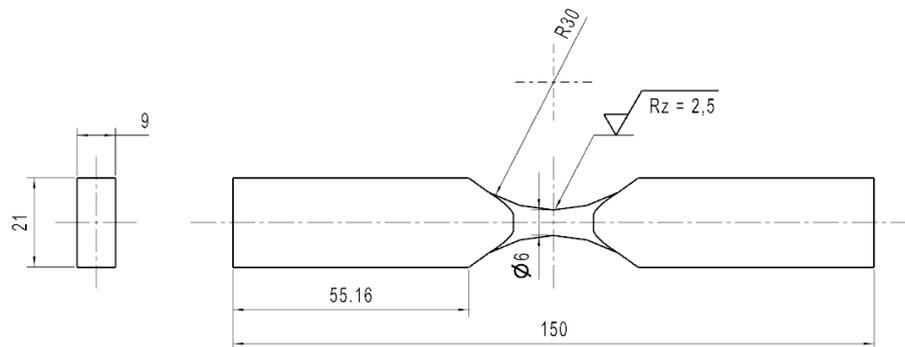


Abbildung 3.2.: Hourglass-Probe WHG 2 als Flachprobe

3.1.3. Versuchsbeschreibung: Werkstoffversuche

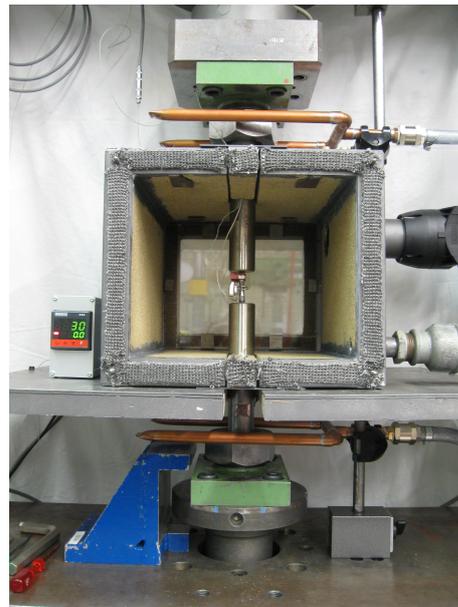
Die durchgeführten Versuche können im Allgemeinen in reine Werkstoffversuche zur Parameteridentifikation von Materialmodellen und in Bauteilversuche mit den Kreuzbohrungsproben unterteilt werden. Zunächst erfolgt die Versuchsbeschreibung zu den Werkstoffversuchen und im Anschluss werden die experimentellen Arbeiten mit den Kreuzbohrungsproben aus dem Forschungsvorhaben [25] beschrieben.

Versuchseinrichtung: Werkstoffversuche 42CrMo4

Die experimentellen Untersuchungen am Vergütungsstahl 42CrMo4 dienen zur Ermittlung der statischen und zyklischen Werkstoffdaten für drei Temperaturniveaus (Raumtemperatur RT bis ca. 30°C , $T_{120} = 120^\circ\text{C}$ und $T_{180} = 180^\circ\text{C}$) zur Identifikation der Modellparameter für die im Rahmen der Simulation eingesetzten Werkstoffmodelle. Die Versuche wurden an polierten und praktisch kerbfreien Hourglass-Proben WHG1 in der Ausführung als Gewindeproben durchgeführt (siehe Abbildung 3.1). Als Prüfeinrichtung zur Lastaufbringung und Durchführung der Versuche wurde eine servohydraulische Prüfmaschine vom Typ Schenck POZ 0375 ($\pm 60\text{ kN}$ Maximallast) verwendet, die zugehörige Regelungstechnik bildet das Programmsystem der Firma Instron.



(a) Prüfrahmen



(b) Konvektionsofen

Abbildung 3.3.: (a) Prüfrahmen mit eingebautem Konvektionsofen. (b) Konvektionsofen mit PID-Regler, Pressluftkühlung der Spannbacken. [25]

Für die Dehnungsmessung wurde ein DMS-basierter Axialdehnungsaufnehmer der Firma Sandner verwendet. Der Dehnungsaufnehmer hatte eine Messbasis von ungefähr 5 mm und eine Messlänge von $\pm 0,25$ mm. Der Messbereich beträgt damit maximal $\pm 5\%$. Die Regelung der drei festgelegten Prüftemperaturen wurde durch einen Konvektionsofen (Eigenbau Fachgebiet Werkstoffmechanik) mit PID-geregelter Heißluftheizung realisiert. Die Spanneinrichtung und die Kraftmessdose der Prüfmaschine wurden aktiv durch Druckluft gekühlt. Die Probenoberfläche oberhalb des Prüfquerschnittes wurde als Bezugsgröße zur Regelung herangezogen. Für die untersuchten Prüftemperaturen $T = 120^\circ\text{C}$ und $T = 180^\circ\text{C}$ wurden jeweils Kalibrierversuche mit Temperaturfühlern an den Positionen „Probenmitte“ und oberhalb der Probenmitte durchgeführt. Damit konnten die Solltemperaturen des Regelkreises hinsichtlich der Zieltemperatur in der Probenmitte justiert werden. Bedingt durch die Temperatur der Prüfmaschine betrug die Probenoberfläche bei Raumtemperatur jeweils $T = 29 \pm 2^\circ\text{C}$. Die Kalibrierung der Messsysteme Kraft, Dehnung und Temperatur wurde vor Versuchsbeginn abgeschlossen. Der Versuchsraum wurde während der Versuchsdurchführung mit einer mittleren Raumtemperatur von ca. 23°C bei einer relativen Luftfeuchte von ca. 60% klimatisiert. Die verwendete Datenbasis aus dem Forschungsvorhaben beinhaltet folgendes Versuchsprogramm nach Tabelle 3.2 mit dem Vergütungsstahl 42CrMo4.

Tabelle 3.2.: Werkstoffversuche 42CrMo4 an ungekerbten Werkstoffproben [25]

Probe WHG 1	RT	120 °C	180 °C	Summe
Zugversuche	3	3	3	9
Dehnungsgeregelte Versuche bei $R = -1$, inkl. Erstentlastung- / Bauschinger-Versuche	6	6	6	18
Spannungsgeregelte Versuche mit konstanter Mittelspannung	4	4	4	12
Incremental-Step-Tests (IST)	1	1	1	3
Summe	14	14	14	42

3.1.4. Ergebnisse: Statische Materialkennwerte aus dem Erstbelastungs- und dem Erstentlastungsversuch

Statische Materialkennwerte aus dem Zugversuch: 42CrMo4

Die statischen Festigkeitskennwerte Elastizitätsmodul E , Zugfestigkeit R_m und die Dehngrenze $R_{p0,2}$ wurden aus den Zugversuchen nach DIN EN 10002 und DIN EN ISO 6892 abgeleitet. Die Hourglass-Proben unterscheiden sich von den genormten Proportionalproben, so dass die Ergebnisse des Zugversuches nicht mit den Resultaten eines Normversuchs vergleichbar sind. Zudem lässt sich aufgrund der verwendeten Hourglass-Proben beispielsweise die Bruchdehnung A_5 nicht ermitteln. Die Versuche wurden bis zu einer maximalen Gesamtdehnung dehnungsgeregelt mit niedriger Dehnrage bis zu einer Dehnung von 7% und anschließend weggeregelt bis zum Bruch gefahren. Abschließend wurde die Bruchlast F_B und später der plastisch eingeschnürte Probendurchmesser d_u zur Berechnung der Bruchspannung σ_B ermittelt.

In den folgenden Tabellen (Tab. 3.3, 3.4 und 3.5) werden die aus den einzelnen Zugversuchen ermittelten Kennwerte aufgelistet.

Tabelle 3.3.: Prüfergebnisse der Zugversuche für Stahl 42CrMo4, Raumtemperatur [25]

Lfd. Nr.	Probe WHG 1	E N/mm ²	R_m N/mm ²	$R_{p0,2}$ N/mm ²	d_u mm	σ_B N/mm ²
1	031	196100	1281	1133	3,60	1857
2	032	202000	1265	1111	3,65	1778
3	033	202100	1246	1099	3,60	1747
Mittelwert		200100	1264	1114	3,62	1794

Tabelle 3.4.: Prüfergebnisse der Zugversuche für Stahl 42CrMo4, T120 [25]

Lfd. Nr.	Probe WHG 1	E N/mm ²	R_m N/mm ²	$R_{p0,2}$ N/mm ²	d_u mm	σ_B N/mm ²
1	049	198500	1221	1028	3,65	1692
2	050	203400	1203	1029	3,70	1618
3	063	195900	1206	1014	3,51	1812
Mittelwert		199300	1210	1024	3,62	1707

Tabelle 3.5.: Prüfergebnisse der Zugversuche für Stahl 42CrMo4, T180 [25]

Lfd. Nr.	Probe WHG 1	E N/mm ²	R_m N/mm ²	$R_{p0,2}$ N/mm ²	d_u mm	σ_B N/mm ²
1	029	199700	1190	1013	-	-
2	030	198400	1223	974	3,75	1693
3	034	201500	1192	989	3,75	1616
Mittelwert		199900	1202	992	3,75	1655

Beim Ausbau wurde die Probe WHG1 029 versehentlich einer Druckbeanspruchung ausgesetzt. Der Durchmesser der eingeschnürten Probe d_u konnte im Anschluss nicht mehr bestimmt werden. Die Zugversuchskurven zeigen praktisch keine Unterschiede für jeweils eine bestimmte Prüftemperatur. Daher wird von einer grafischen Darstellung aller neun Zugversuchskurven abgesehen. Die Temperaturabhängigkeit der ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kurven kann der

Abbildung 3.4 entnommen werden. Hier wird beispielhaft je eine Kurve pro Prüftemperatur dargestellt. Die aus den drei Zugversuchen je Prüftemperatur gemittelten Kennwerte Elastizitätsmodul E , Zugfestigkeit R_m und Dehngrenze $R_{p0,2}$ werden in Tabelle 3.6 angegeben.

Tabelle 3.6.: Kennwerte aus Zugversuchen, Mittelwerte aus je 3 Versuchen [25]

Probe WHG 1	RT	120 °C	180 °C	T180/RT
Elastizitätsmodul E in N/mm^2	200.100	199.300	199.900	1,00
Zugfestigkeit R_m in N/mm^2	1.264	1.210	1.202	0,95
Dehngrenze $R_{p0,2}$ in N/mm^2	1.114	1.024	992	0,89

Eine signifikante Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls lässt sich aus dem Ergebnis nicht ablesen, das Verhältnis der E-Moduln bei $T = 180\text{ °C}$ zu $T = RT (30\text{ °C})$ beträgt 1,00 (Tab. 3.6, letzte Spalte). Zugfestigkeit und Dehngrenze weisen bei $T = 180\text{ °C}$ eine messtechnisch wiederholbare Temperaturabhängigkeit auf, und zwar im Sinne einer Absenkung auf 95 % respektive 89 % der Raumtemperaturwerte. Die Kennwerte für $T = 120\text{ °C}$ unterscheiden sich hier nicht merklich von den T180-Werten.

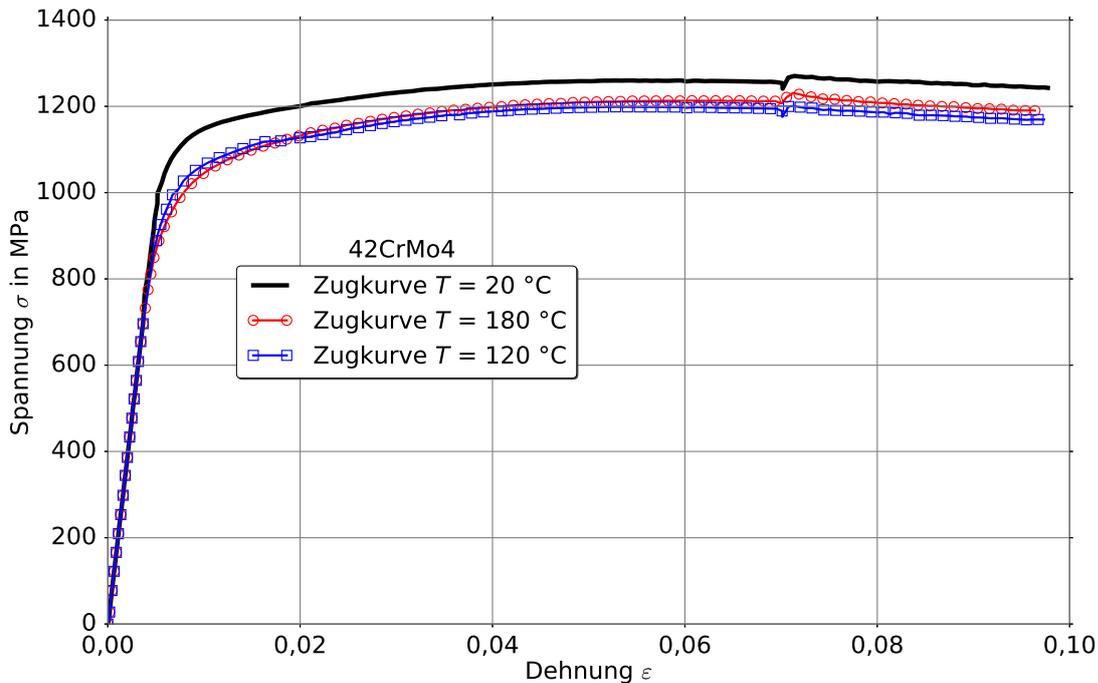


Abbildung 3.4.: Zugversuch 42CrMo4 bei $T = 20\text{ °C}$, $T = 120\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$

Statische Materialkennwerte aus dem Erstbelastungs- und Erstentlastungsversuch: 42CrMo4

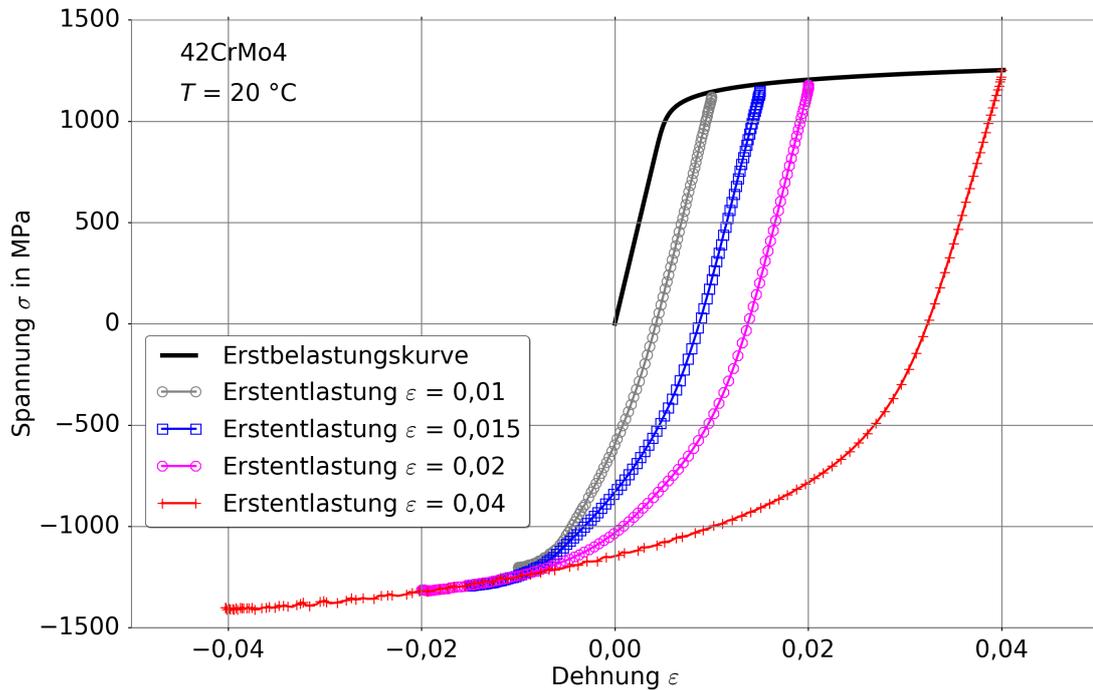


Abbildung 3.5.: Erstbelastungs- und Erstentlastungsversuch 42CrMo4 bei $T = 20 \text{ °C}$

3.1.5. Ergebnisse: Einachsig und einstufig geführte Versuche - Zyklisch dehnungsgeregelte Versuche

Zyklisch dehnungsgeregelte Versuche ohne Mitteldehnung

Folgende zyklisch dehnungsgeregelte Versuche wurden unternommen:

Tabelle 3.7.: Dehnungsgeregelte Versuche 42CrMo4, E -Modul = 200100 MPa, $T = 20 \text{ °C}$, $R = -1$ [25]

Proben-Nr.	ε_a %	$\varepsilon_{a,el}$ %	$\varepsilon_{a,pl}$ %	σ_a MPa	$N_A \setminus 2$	N_A
1-019	4,00	0,61	3,39	1218	12	24
2-014	2,00	0,54	1,46	1074	70	140
3-012	1,50	0,51	0,99	1015	150	300
4-016	1,00	0,46	0,54	922	390	780
5-013	0,70	0,40	0,30	801	1245	2490
6-017	0,50	0,40	0,10	796	2575	5150

Tabelle 3.8.: Dehnungsgeregelte Versuche 42CrMo4, E -Modul = 199900 MPa, $T = 180\text{ °C}$, $R = -1$ [25]

Proben-Nr.	ε_a %	$\varepsilon_{a,el}$ %	$\varepsilon_{a,pl}$ %	σ_a MPa	$N_A \setminus 2$	N_A
1-025	4,00	0,58	3,42	1151	11	21
2-024	2,00	0,50	1,50	995	63	126
3-023	1,50	0,45	1,05	902	165	330
4-021	1,00	0,40	0,60	806	550	1100
5-026	0,70	0,38	0,32	753	1150	2300
6-027	0,50	0,34	0,16	681	4500	9000

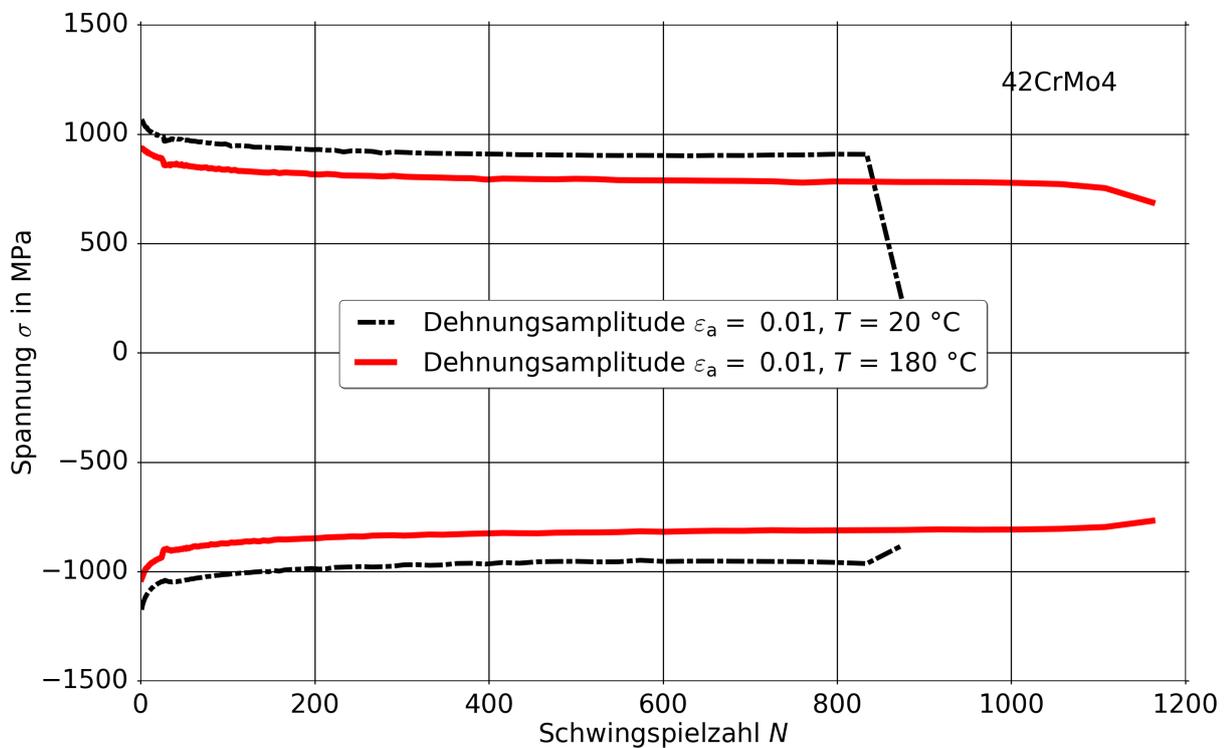


Abbildung 3.6.: Wechselverformungsverhalten 42CrMo4, $R_\varepsilon = -1$ bei $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$

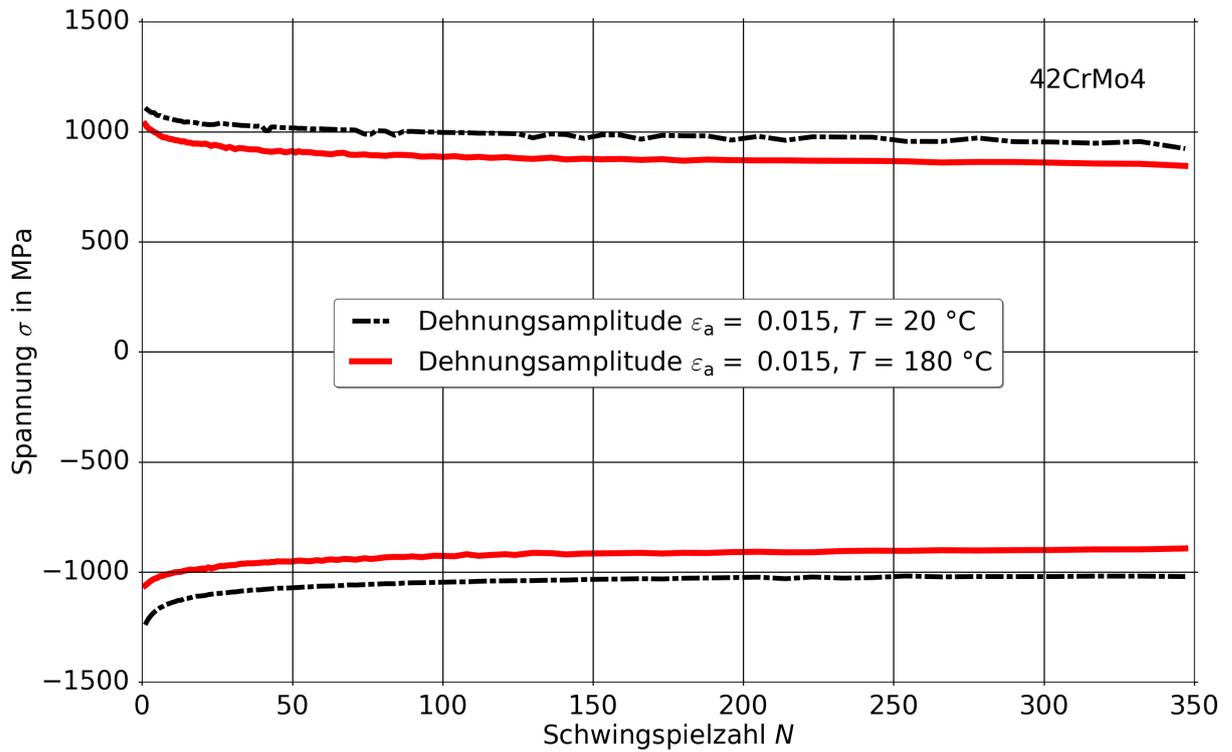


Abbildung 3.7.: Wechselverformungsverhalten 42CrMo4, $R_\varepsilon = -1$ bei $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ und $T = 180 \text{ }^\circ\text{C}$

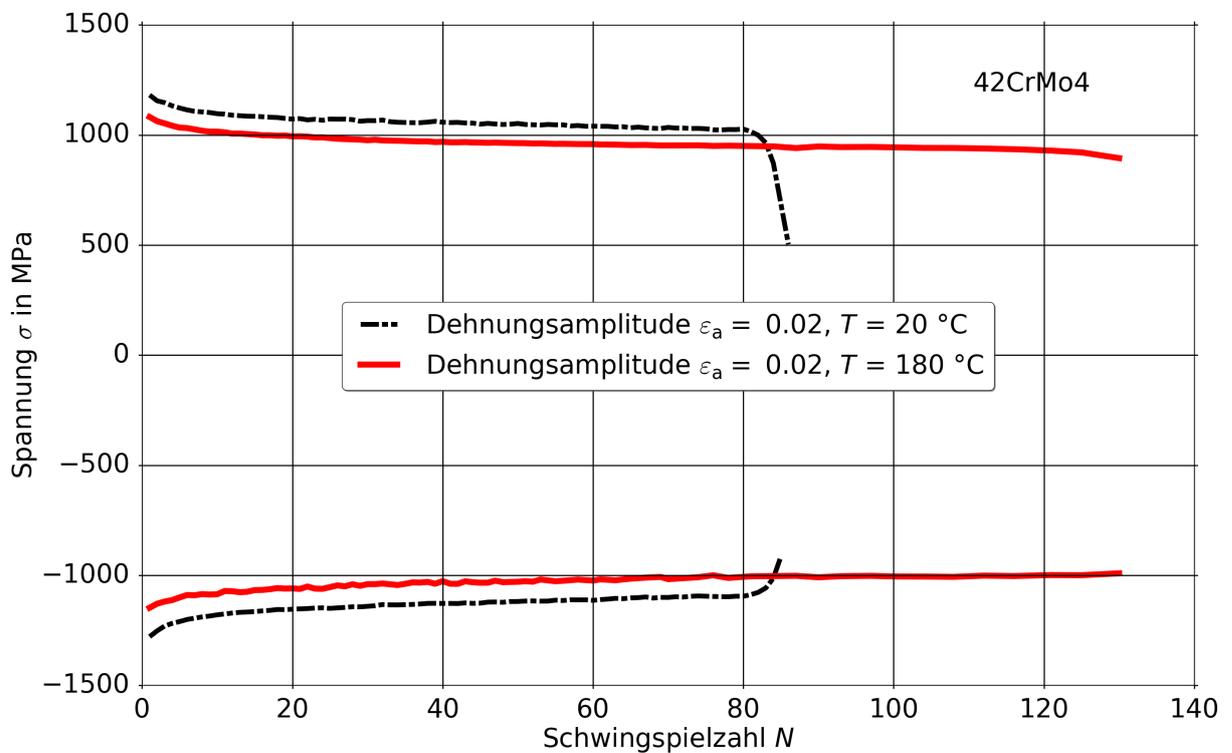


Abbildung 3.8.: Wechselverformungsverhalten 42CrMo4, $R_\varepsilon = -1$ bei $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ und $T = 180 \text{ }^\circ\text{C}$

Zyklisch stabilisiertes Spannungs-Dehnungsverhalten

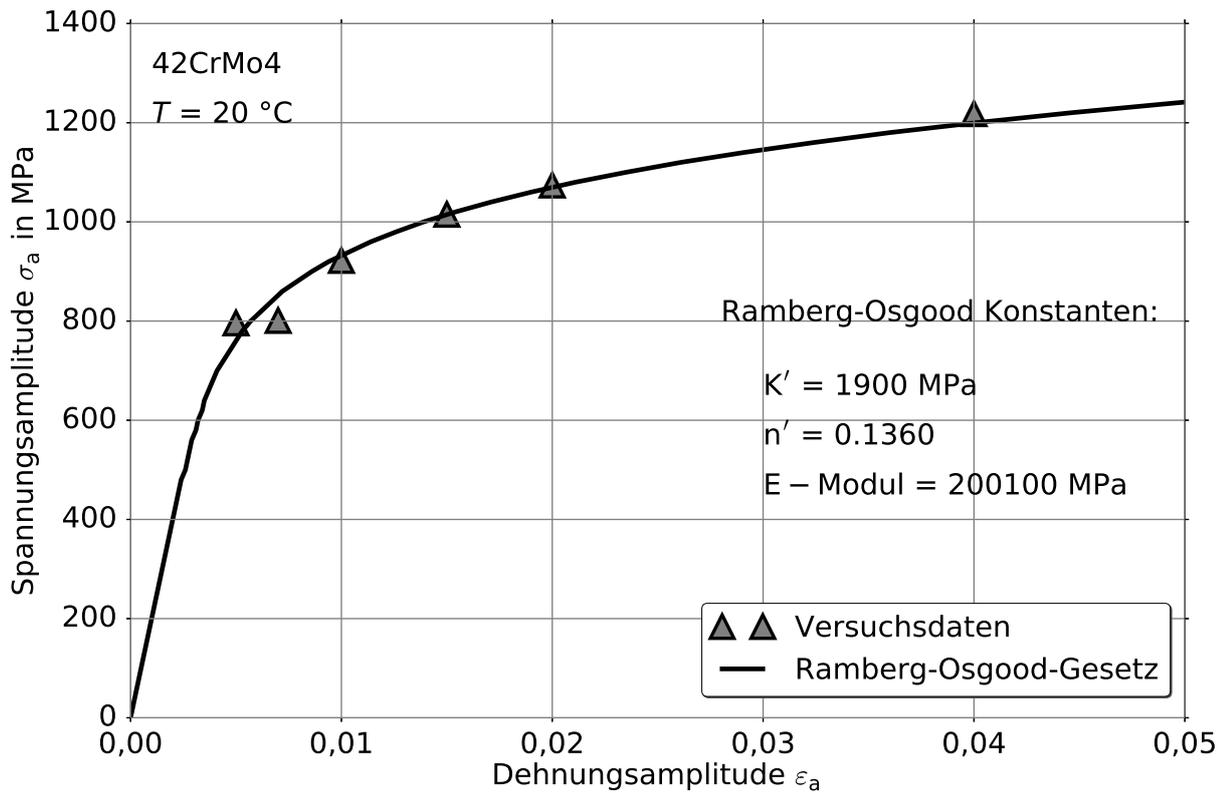


Abbildung 3.9.: Zyklisch stabilisiertes Spannungs-Dehnungsverhalten 42CrMo4 bei T = 20 °C

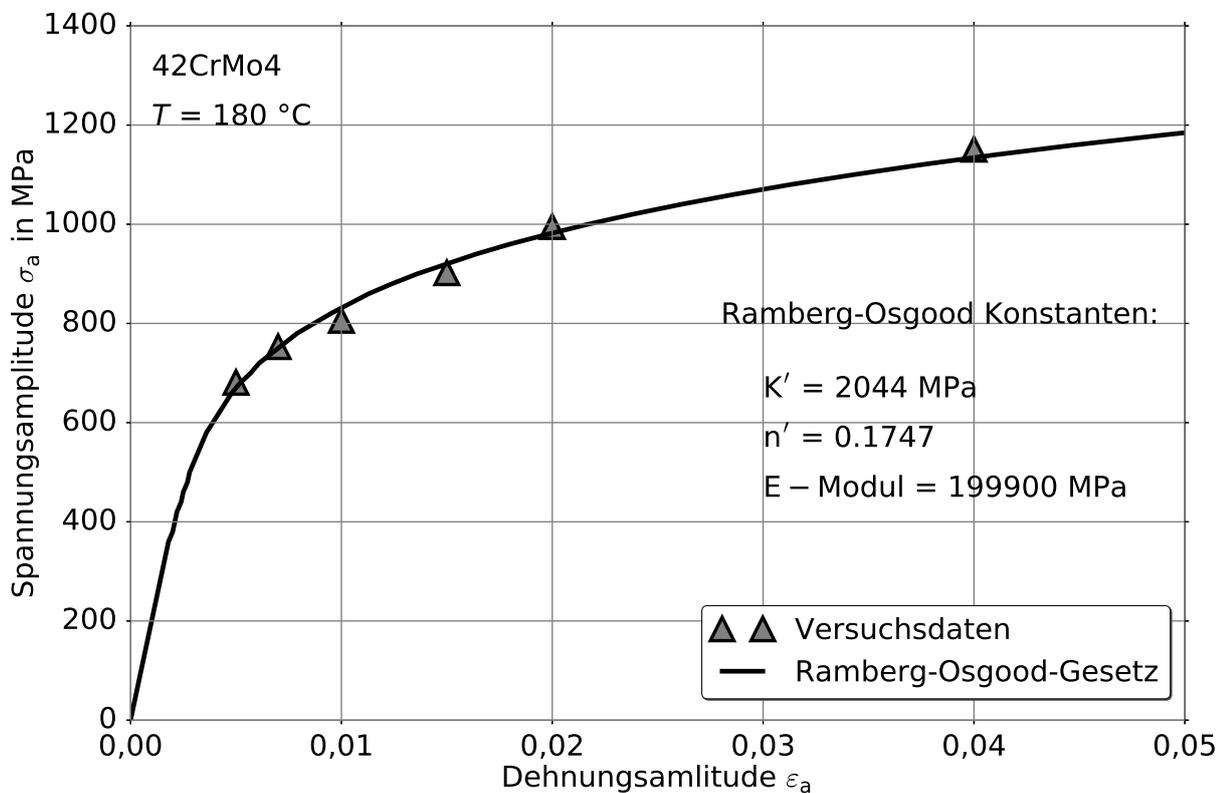


Abbildung 3.10.: Zyklisch stabilisiertes Spannungs-Dehnungsverhalten 42CrMo4 bei T = 180 °C

3.1.6. Ergebnisse: Einachsig und einstufig geführte Versuche - Zyklisch kraftgeregelte Versuche

Zyklisch kraftgeregelte Versuche mit Mittelspannung

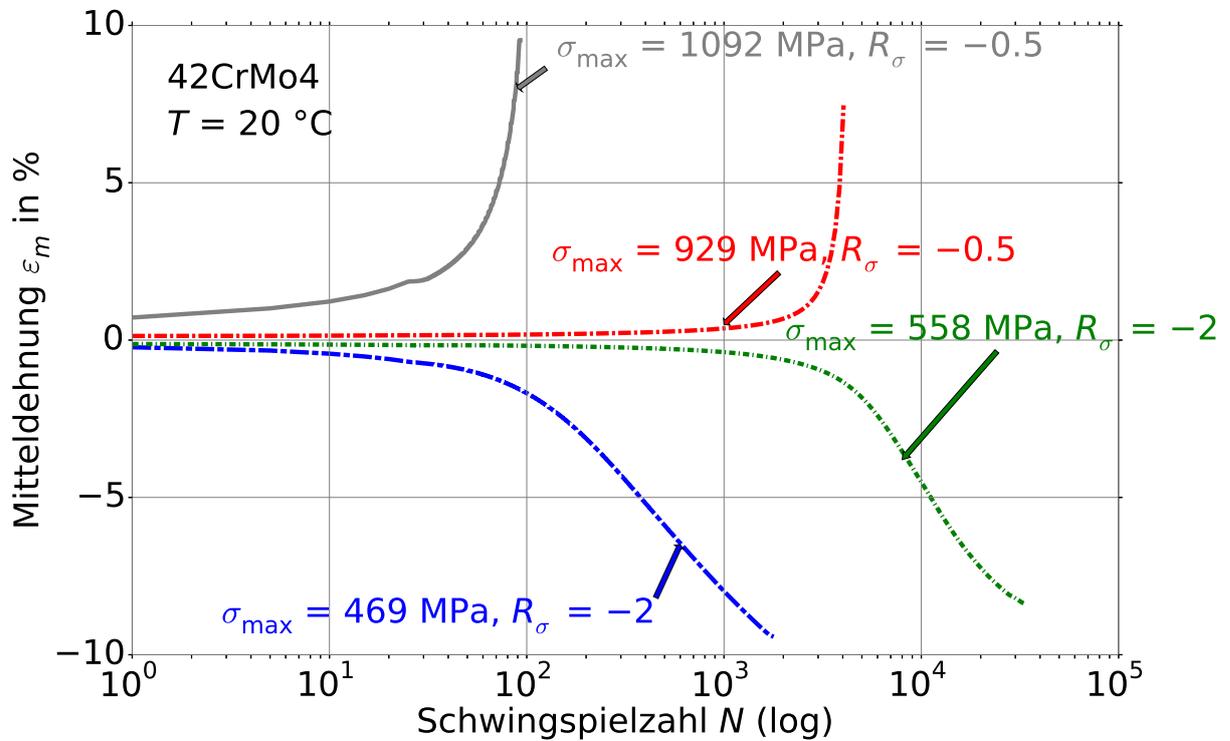


Abbildung 3.11.: Zyklisches Kriechen 42CrMo4 bei $T = 20 \text{ °C}$

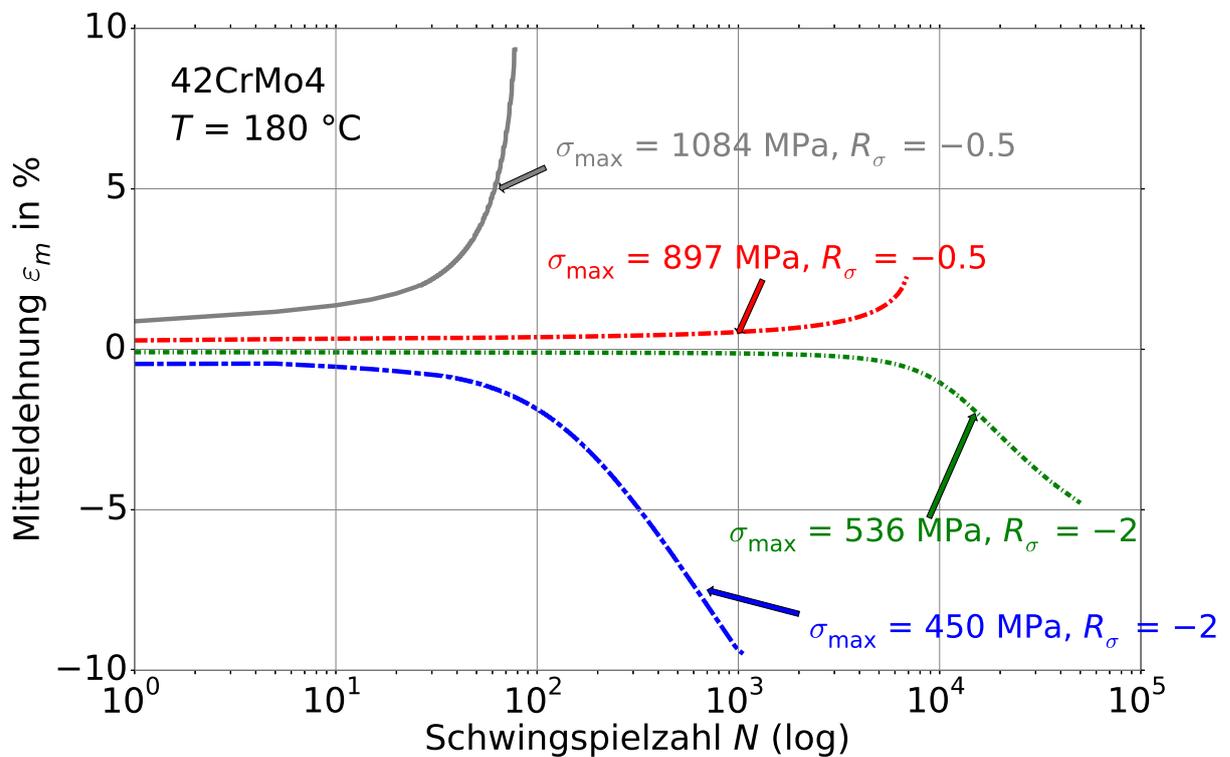


Abbildung 3.12.: Zyklisches Kriechen 42CrMo4 bei $T = 180 \text{ °C}$

3.2. Experimentelle Datenbasis für die Validierung des bruchmechanischen Konzeptes

3.2.1. Probengeometrie und Probenfertigung

Die Kreuzbohrung stellt ein typisches Konstruktionsdetail hochdruckbelasteter Bauteile dar und ist deshalb von besonderer Praxisrelevanz. Die Herstellung der Kreuzbohrungsproben KB (Abbildung 3.13) besteht aus der mechanischen Fertigung und der anschließenden Wärmebehandlung. Durch die Fertigung auf CNC-Maschinen werden versatzfreie Bohrungsverschneidungen sichergestellt. Die sich kreuzenden Bohrungen wurden als Durchgangsbohrungen mit 5 mm Durchmesser ausgeführt. Zur Einstellung praxisrelevanter und einheitlicher Verrundungsradien wurden alle Kreuzbohrungen vor der Wärmebehandlung druckfließgeläpft. Die Zielstellung für das Druckfließbläppen war die Beseitigung des Grates an der Verschneidungskante und die Einstellung von einem 0,1 - 0,2 mm großen Verrundungsradius. Für den Vorhabensschwerpunkt Autofrettage wurden Kreuzbohrungsproben aus 42CrMo4 gefertigt. Die Vergütung mit der Vorgabe zur Einstellung einer Zugfestigkeit von 1100 - 1200 MPa erfolgte bei einem externen Dienstleister. Im Anschluss an die Vergütung wurde ein Teil dieser Proben bei der Firma Maximator GmbH mit einem Druck von 8500 bar und einer Haltezeit von 5 Sekunden autofrettet. Damit standen Kreuzbohrungsproben aus 42CrMo4 im autofretteten und nicht autofretteten Zustand zur Verfügung.

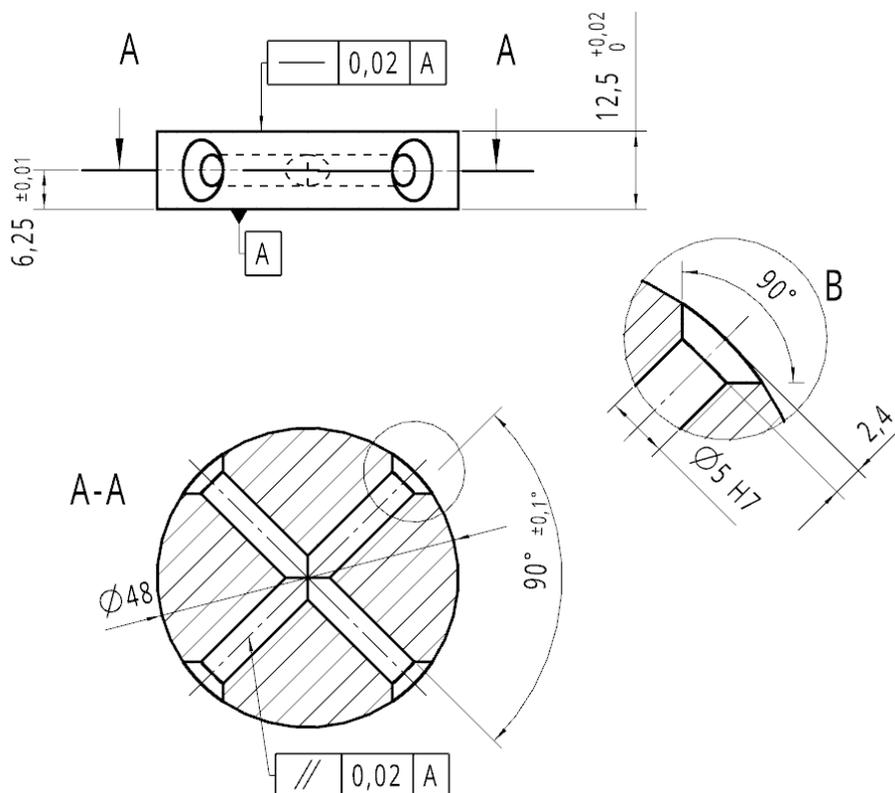


Abbildung 3.13.: 90°-Kreuzbohrungsprobe KB

3.2.2. Versuchsbeschreibung und Ergebnisse: Ermüdungsversuche Kreuzbohrungsproben

Versuchseinrichtung: Bauteilversuche mit den Kreuzbohrungsproben 42CrMo4

Die Autofrettagebehandlung der Kreuzbohrungsproben wurde bei der Firma Maximator GmbH als vorhabensbezogene Aufwendung der Wirtschaft im Rahmen des Forschungsvorhabens [25] erbracht. Die anschließenden Ermüdungsversuche der Kreuzbohrungsproben wurden auf Hochdruckprüfständen von der MFPA Weimar durchgeführt (Abbildung 3.14).



MSR-Schrank

Prüfkammer

Hydraulikaggregat

Abbildung 3.14.: Hochdruckprüfstand, Fabrikat Maximator [25]

Die MFPA Weimar ist nach DIN EN ISO/IEC 17025:2005 [48] für die „Ermittlung der Schwingfestigkeit innendruckbeanspruchter Bauteile“ akkreditiert. Der herausragende Vorteil der Prüf-anlage besteht in der Möglichkeit 20 Prüfkörper mit einem Mehrfachprüfkopf (Abbildung 3.15) gleichzeitig auf einem Lasthorizont in einem Versuch zu testen.

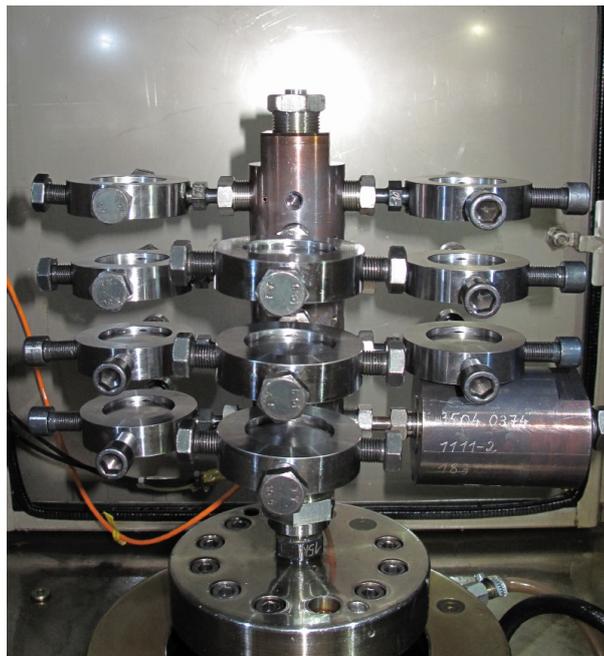


Abbildung 3.15.: Hochdruckprüfstand, Mehrfachprüfkopf [25]

Die Ermittlung der Dauerfestigkeit erfolgte nach dem Probitverfahren [14, 26, 64] und zur Bestimmung der Zeitfestigkeit wurde das Perlenschnurverfahren [98, 102] verwendet. Die Grenzlastspielzahl für die Innendruckschwellversuche wurde in Abhängigkeit der Bruchlebensdauer im Dauerfestigkeitsbereich der Bauteilversuche zwischen 5 Millionen bis auf 10 Millionen Lastwechsel festgelegt. Die Druckeinleitung erfolgte über entsprechende Adapter über eine der vier Bohrungsausgänge der Probe, während die anderen drei Bohrungsausgänge abgedichtet wurden. Der durch den Bediener festgelegte Druckaufbau wird durch einen Druckübersetzer mit Servoventil umgesetzt und kann durch die eingesetzte Versuchstechnik maximal 4500 bar Druck mit dem verwendeten Prüfmedium Shell Tellus T46 (Hydrauliköl) erreichen.

Ergebnisse

Die Ergebnisse der Ermüdungsversuche sind in Wöhlerdiagrammen dargestellt. Einen zusammenfassenden Überblick mit den Mittelwerten der Innendruckschwellfestigkeiten sowie den dazugehörigen Streuungen zeigen Tab. 3.9 für die Variante 42CrMo4 af, Tab. 3.10 für die Variante 42CrMo4 naf. In den Tabellen sind die dauerfest ertragbaren Druckschwingbreiten (in bar) und die zugehörigen Streuungen aufgeführt.

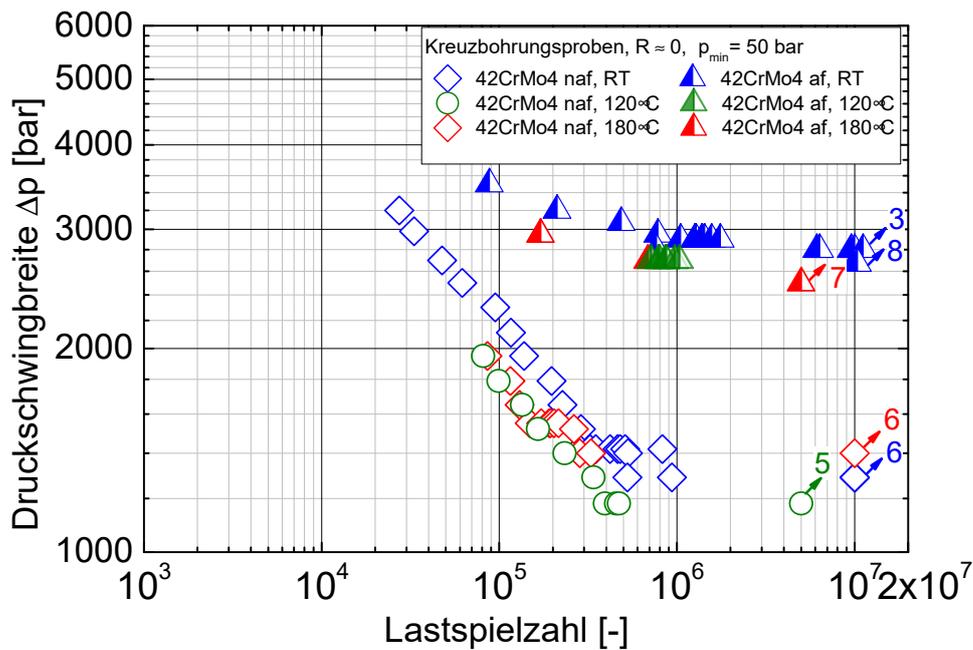


Abbildung 3.16.: Kreuzbohrungsproben 42CrMo4, Varianten af und naf bei $R \approx 0$ und verschiedenen Prüftemperaturen im Wöhlerdiagramm (Prüftemperaturen: RT, 120 °C, 180 °C) [25]

Tabelle 3.9.: Ergebnisse Kreuzbohrungsproben 42CrMo4, Variante af (mittlere experimentelle Dauerfestigkeit (Innendruckschwellfestigkeit)) [25]

R	Prüftemperatur	mittlere Dauerfestigkeit in bar	T
≈ 0	RT	2786	$\leq 1,08$
≈ 0	120 °C	≤ 2591	$\approx 1,08$
≈ 0	180 °C	≥ 2602	$\approx 1,08$

Tabelle 3.10.: Ergebnisse Kreuzbohrungsproben 42CrMo4, Variante naf (mittlere experimentelle Dauerfestigkeit (Innendruckschwellfestigkeit)) [25]

R	Prüftemperatur	mittlere Dauerfestigkeit in bar	T
≈ 0	RT	1329	$\leq 1,13$
≈ 0	120 °C	1197	$\approx 1,13$
≈ 0	180 °C	1446	$\leq 1,14$

4. Hybrides Optimierungsverfahren zur Parameteridentifikation von zyklischen Plastizitätsmodellen

Die nichtlineare Optimierung bildet die Grundlage für das verwendete Verfahren der Parameteridentifikation. Eine gute Übersicht über die nichtlinearen Optimierungsverfahren bietet unter anderem die Literatur von *Nocedal & Wright* [141], *Dennis und Schnabel* [45], *Fletcher* [65], *Luenberger* [117] und *Powell* [157] an. Nützliche Erläuterungen zu den stochastischen Optimierungsverfahren bzw. der Evolutionsstrategien können in der Literatur von *Schweifel* [172, 173] und *Weicker* [209] gefunden werden. Die hier beschriebenen Aspekte, Begriffsdefinitionen und Methoden für das entwickelte Optimierungskonzept stützen sich größtenteils auf die Arbeit von *Mahnken* [119]. Den Schwerpunkt dieses Kapitels stellt die Beschreibung der Formulierung und Lösung des Minimierungsproblems für die Parameteridentifikation der elastisch-plastischen Werkstoffmodelle in Form eines inversen Problems unter Verwendung von hybriden Optimierungsalgorithmen dar. Das entwickelte Verfahren ist zur Parameteridentifikation von verschiedenen Werkstoffmodellen geeignet, da die Zielfunktion ausschließlich aus dem gewichteten Fehlerquadrat-Funktional der Simulations- und Versuchsdaten besteht und gradientenfreie Algorithmen verwendet. Bei Verwendung dieses Konzeptes sind zur Optimierungslösung die aufwendigen Modellgleichungen der Materialmodelle nicht notwendig, was für eine Flexibilität und einfache Bedienbarkeit des Parameteridentifikationsprogrammes spricht.

4.1. Formulierung der Zielfunktion und Klassifizierung mehrdimensionaler Optimierungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme

Ein allgemeines Optimierungsproblem besteht per Definition aus einer zu minimierende Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$, mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\kappa}$, der gegebenenfalls durch nichtlineare Ungleichheits- und Gleichheitsnebenbedingungen \mathbf{g} und \mathbf{h} restringiert wird:

$$\min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} f(\boldsymbol{\kappa}) \quad \text{u.d.N. : } \begin{cases} g_j(\boldsymbol{\kappa}) \leq 0 & j = 1, \dots, n_g \\ h_k(\boldsymbol{\kappa}) = 0 & k = 1, \dots, m_h. \end{cases} \quad (4.1)$$

Der zulässige Parameterbereich $\mathbb{P} = \{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{n_\kappa}; g_j(\boldsymbol{\kappa}) \leq 0, h_k(\boldsymbol{\kappa}) = 0\}$ kann zusätzlich durch die obere und untere Schranke beschränkt werden:

$$\mathbb{P} = \{a_i \leq \kappa_i \leq b_i, i = 1, \dots, l\}. \quad (4.2)$$

Die Restriktionen bzw. Parameterschranken beruhen auf physikalischen Grundsätzen oder stammen aus bereits gewonnenen Erkenntnissen. Für ein effizientes Aufsuchen der Lösung spielt die angemessene Aufstellung der Zielfunktion eine wesentliche Rolle. Die Formulierung der Zielfunktion wird zunächst exemplarisch, anhand eines verzerrungsgesteuerten Erstbelastungs- und kraftgesteuerten Kriechversuchs, verdeutlicht. Die Darstellungen sind qualitativ zu verstehen. Die übliche Vorgehensweise ist die Gegenüberstellung von experimentell ermittelten Daten $\sigma_{\text{sim}_{ij}}$ und berechneten Daten $\sigma_{\text{dat}_{ij}}$ in einer geeigneten Norm. Zur Beschreibung der Zielfunktion wird die

sogenannte L_2 -Norm verwendet. Die Differenz zwischen Versuchsdaten und Simulation zu einem vergleichbaren Zeitpunkt t_k wird quadriert und anschließend über alle verfügbaren Datenpunkte n_d aufsummiert. Der Zeitpunkt t_k entspricht nicht der Einheit in Sekunden. Beispielsweise handelt es sich im Zusammenhang mit den dehnungsgesteuerten Versuchen um die geregelten Dehnungen $\varepsilon_{\text{dat}_{ij}} = \varepsilon_{\text{sim}_{ij}}$. Analog hierzu werden für kraftgesteuerte Versuche die entsprechenden Spannungen als Zeitpunkte $\sigma_{\text{dat}_{rt}} = \sigma_{\text{sim}_{rt}}$ herangezogen. Damit lauten die Zielfunktionen separat formuliert als Fehlerquadrat-Minimierungsproblem, bestehenden aus dehnungs- und kraftgeregelten Fehlerquadratfunktionalen F_σ und F_ε , wie folgt:

$$\min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} F_\sigma = \min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} \sum_{i=1}^{m_V} \sum_{j=1}^{n_d} \left\| \sigma_{\text{sim}_{ij}}(\varepsilon_{\text{dat}_{ij}}, \boldsymbol{\kappa}) - \sigma_{\text{dat}_{ij}}(\varepsilon_{\text{dat}_{ij}}) \right\|_2^2 \quad (4.3)$$

$$\min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} F_\varepsilon = \min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{s_V} \sum_{t=1}^{q_d} \left\| \varepsilon_{\text{sim}_{rt}}(\sigma_{\text{dat}_{rt}}, \boldsymbol{\kappa}) - \varepsilon_{\text{dat}_{rt}}(\sigma_{\text{dat}_{rt}}) \right\|_2^2. \quad (4.4)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Indexnotationen in den Definitionen 4.3 und 4.4 keine Tensorkomponenten darstellen. Sie werden zur Bezeichnung der einzelnen Datenpunkte j bzw. t in einer Versuchsreihe i bzw. r verwendet. Prinzipiell können nun die beiden Fehlerquadrat-Funktionen F_σ und F_ε zu einer Zielfunktion aufsummiert und zum Optimierungsproblem aufgestellt werden. Aus verschiedenen Gründen erscheint nach *Bard* [22] dieser einfache Ansatz nicht befriedigend, was im Folgenden kurz erläutert wird:

1. Eine gleichzeitige Integration der kraftgesteuerten (Beispiel zyklisches Kriechen) und verzerrungsgesteuerten Versuche (Beispiel Spannungsrelaxation) zu einer gesamten Zielfunktion bedeutet, dass Daten verschiedener physikalischer Dimension in einem Optimierungsproblem enthalten sind. In diesem Fall wird eine Skalierung der Einträge des Zielfunktionalen mit dem Kehrwert einer charakteristischen Größe notwendig (siehe *Senseny et al.* [178]). Für die Skalierung im Zusammenhang mit dem zyklischen Kriechen wird der Grenzwert ε_{m_g} und bei den verzerrungsgesteuerten Versuchen die Fließspannung σ_F , verwendet.
2. Einige Versuchsdaten besitzen höhere Zuverlässigkeit als andere Versuchsergebnisse. Auch in diesem Fall wird eine Skalierung mit entsprechendem Faktor empfohlen.
3. Bestimmten Daten wird eine höhere Bedeutung beigemessen als den restlichen Daten. Beispielsweise ist im Rahmen der Betriebsfestigkeitsberechnung die angemessene Beschreibung des zyklisch stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Zustandes von besonderem Interesse. Dagegen ist die Wiedergabe der Erstbelastungskurve von untergeordneter Wichtigkeit. Die Modifikation des Optimierungsproblems wird in diesen Fällen ebenfalls durch eine heuristische Skalierung der Daten vorgenommen (*Mahnken* [119]). Eine Erhöhung des Wichtigkeitsfaktors W_i bzw. W_r bemisst genau für diese Versuchsreihe einen hohen Beitrag in der Fehlerquadratsumme. Folglich gilt es diesen modellierten Datensatz mit Hilfe einer Parameteridentifikation so nahe wie möglich an die Versuchsdaten zu bringen, um die Zielfunktion insgesamt zu minimieren.

Unter Beachtung der oben angesprochenen Aspekte zur Skalierung bzw. Einbeziehung von Wichtigkeitsfaktoren wird die Modifikation der ursprünglichen Definition der Zielfunktion als gesamtes Optimierungsproblem wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} F_{\text{ges}} = \min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{P}} & \sum_{i=1}^{m_V} \sum_{j=1}^{n_d} W_i \frac{1}{n_d} \left\| \frac{\sigma_{\text{sim}_{ij}}(\varepsilon_{\text{dat}_{ij}}, \boldsymbol{\kappa}) - \sigma_{\text{dat}_{ij}}(\varepsilon_{\text{dat}_{ij}})}{\sigma_F} \right\|_2^2 \\ & + \sum_{r=1}^{s_V} \sum_{t=1}^{q_d} W_r \frac{1}{q_d} \left\| \frac{\varepsilon_{\text{sim}_{rt}}(\sigma_{\text{dat}_{rt}}, \boldsymbol{\kappa}) - \varepsilon_{\text{dat}_{rt}}(\sigma_{\text{dat}_{rt}})}{\varepsilon_{m_g}} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Zur effizienten Lösung des aufgestellten Optimierungsproblems ist eine geeignete Wahl des Lösungsalgorithmus notwendig. Die Lösungsmethoden des Optimierungsproblems können nach *Mahnken* [119] in gradientenbasierten und gradientenfreie sowie deterministische und stochastische Verfahren kategorisiert werden (siehe Abbildung 4.1).

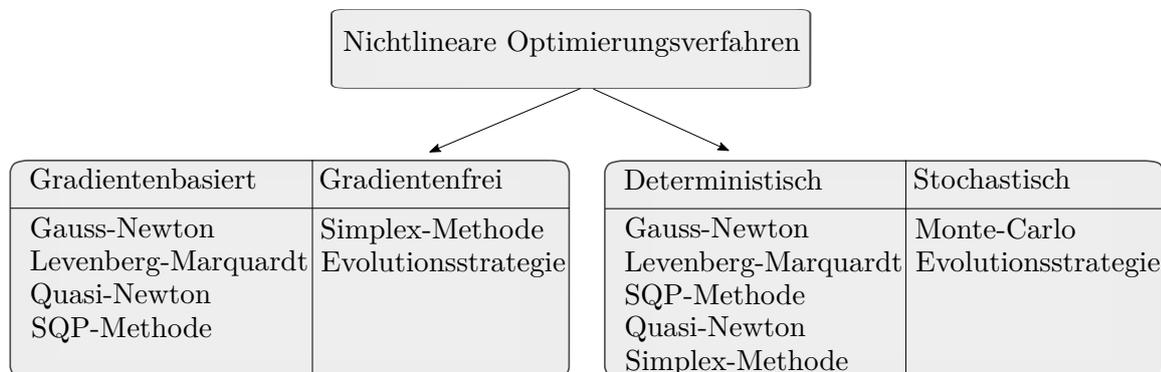


Abbildung 4.1.: Einteilung einiger numerischer Optimierungsverfahren in gradientenbasierte und gradientenfreie Verfahren sowie deterministische und stochastische Verfahren nach *Mahnken* [119]

Der Einsatzbereich der gradientenbasierte Verfahren besteht in der Auffindung der lokalen Minima. Die gradientenbasierten Lösungsalgorithmen sind bei der globalen Minimumsuche nicht effizient oder zur Lösungsfindung ganz ungeeignet. Dieser Nachteil liegt grundsätzlich bei *Newton*-ähnlichen Verfahren vor, da die Gradienteninformation auf einen lokalen Bereich beschränkt ist. Im Gegensatz hierzu stehen die stochastischen Verfahren, die ohne die Gradienten der Zielfunktion auskommen. Dem Vorteil der stochastischen Verfahren, das globale Minimum mit hoher Wahrscheinlichkeit zu finden, steht als Nachteil der hohe Aufwand bei der Funktionsauswertung und die große Anzahl der Iterationen bis zur Lösungsfindung gegenüber. Eine weitere Einteilung nach Abbildung 4.1 unterscheidet nach Verfahren, die reproduzierbare Ergebnisse in allen Teilschritten liefern, auch deterministische Verfahren genannt, und stochastische Verfahren, die unter Verwendung von Zufallszahlen die Suche vorantreiben. Eine Möglichkeit zum schnellen Auffinden der Minimalpunkte ergibt sich durch die Kopplung der Vorteile der lokalen und globalen Lösungsstrategie in einer hybriden Methode, um somit die Vorteile beider Algorithmenarten auszunutzen (*Mahnken* [119]). Oft werden bei den hybriden Optimierungsverfahren im Zusammenhang mit den lokalen Algorithmen gradientenbasierte Verfahren verwendet. Hierzu sind Vorgehensweisen zur Parameteridentifikation von schädigungsmechanischen Werkstoffmodellen beispielsweise mit Hilfe des Levenberg-Marquardt-Verfahrens in den Arbeiten von *Mahnken* [119] und *Rieger* [166] beschrieben. Aus diesen Studien wird deutlich, dass alleine bedingt durch die notwendigen Optimalitätsbedingungen, das mathematische Problem mit gradientenbasierten Methoden für komplexere Materialmodelle, kaum noch mit vernünftigem Aufwand realisierbar ist und dass das Konvergenzverhalten stark von der Qualität der Startwerte abhängig ist. Insbesondere leidet die Praktikabilität bei der Anwendung dieses Verfahrens. Um die Werkstoffmodellparameter mithilfe gradientenbasierter Verfahren zu bestimmen, ist es unerlässlich, dass der Anwender ein tiefes Verständnis der Modellgleichungen besitzt. Darüber hinaus bedeutet die Einführung eines neuen Werkstoffmodells, dass das Optimierungsprogramm von Grund auf neu gestaltet werden muss. Anwenderfreundlicher zeigen sich hingegen gradientenfreie Verfahren, so dass beispielsweise *Ekh et al.* [59] mit dem *Downhill-Simplex*-Algorithmus die Werkstoffparameter des *Jiang-Sehitoglu*-Modells, basierend auf uniaxialen und mehrachsigen Versuchen erfolgreich bestimmt. Anwendungsbeispiele zur Parameteridentifikation mit Hilfe von globalen Optimierungsverfahren zeigen *Huber und Tsakmakis* [83] basierend auf einer neuronalen Netzstrategie und *Furukawa und Yagawa* [70] durch Einsatz von Evolutionsstrategien. Solche Optimierungsstrategien dienen

als gängige Bestandteile von heutigen Machine-Learning-Programmen. Der Anwender muss zur effizienten Bedienung des Optimierungsprogramms nicht zwingend über das vollständige Verständnis der Modellphysik verfügen. In einer weiteren Forschungsarbeit [69] modifiziert *Furukawa et. al.* das Optimierungsverfahren zu einem hybriden Optimierungskonzept, bestehend aus dem evolutionären und gradientenbasierten Algorithmus zur Identifikation der Parameter des *Chaboche*-Modells. Zur Aussortierung der geeignetsten Individuen für den Rekombinationsschritt wurde das Gradientensuchverfahren des BFGS-Algorithmus, analog wie es im SQP verwendet wird, eingesetzt.

4.2. Umsetzung des hybriden Verfahrens und verwendete Lösungsalgorithmen

4.2.1. Der Differential-Evolution-Algorithmus als Basis globaler Optimierung

Die Differential evolution (DE, engl. *Differential Evolution*) wurde 1995 von *Storn und Price* [187] zur Lösung von kontinuierlichen (reellwertigen) Optimierungsproblemen entwickelt. Sie gehört mit der Partikelschwarmoptimierung [95] (engl. *Particle Swarm Optimization*) und den Ameisenalgorithmen [49, 50] (engl. *Ant Colony Optimization*) zu den bekanntesten Vertretern der naturbasierten Optimierungsverfahren und zählt zu einem der wichtigsten Werkzeuge der evolutionären Optimierungsalgorithmen für den Einsatz im Bereich der künstlichen Intelligenz bzw. des Machine Learning. Die Standardvariante ist leicht zu implementieren und erreichte bei mathematischen Wettbewerben in den verschiedenen Kategorien der Optimierungsverfahren sehr gute Bewertungen (erster Platz bei dem Wettbewerb Second International Contest on Evolutionary Optimization ICEC 1997 [188], zweiter Platz bei dem Wettbewerb zu kontinuierlichen Optimierungsproblemen der CEC 2005 [71]). Auf den ersten Blick unterscheidet sich die Standardprozedur der DE nicht von denen der evolutionären Optimierungsmethoden, die den Nachahmungsmechanismen aus der klassischen Evolutionstheorie entsprechen (siehe Abbildung 4.2).

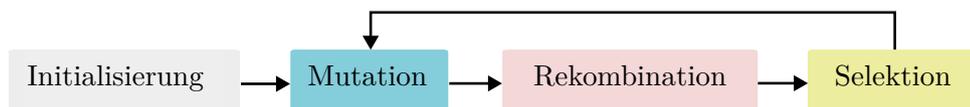


Abbildung 4.2.: Hauptbausteine des Differential-Evolution-Algorithmus

Bei der Übertragung der einzelnen Evolutionsmechanismen in einen konkreten Algorithmus wird mit vereinfachenden Modellvorstellungen gearbeitet, indem die Terminologie Mutation, Rekombination, Kreuzung und Selektion stark an das biologische Vorbild angelehnt ist. Der zu bestimmende Parametervektor sei nun mit $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_D]^T$ bezeichnet. Da die klassische DE für kontinuierliche Parameteroptimierung konzeptioniert wurde, muss jeder Parameter x_i einer reellen Zahl entsprechen. Im Grunde besteht die Hauptaufgabe in der Auffindung eines Vektors \mathbf{X}^* , welcher die Zielfunktion $f(\mathbf{X})$ minimiert mit der Beschränkung $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f(\mathbf{X}^*) < f(\mathbf{X})$ für alle $\mathbf{X}^* \in \Omega$ gilt. Im Falle einer unbeschränkten Optimierung ohne Nebenbedingungen entspricht $\Omega = \mathbb{R}^D$. Die Populationsstruktur der DE wird durch die diversen Parametervektoren $j = 1, 2, \dots, D$ der entsprechenden Generation, indem die folgende Notation $P_{\mathbf{X}_{i,G}}$ mit $\mathbf{X}_{i,G} = (x_{j,i,G})$ sowie dem Populationsindex $i = 1, \dots, N_p$ und dem Generationsindex $G = 0, 1, \dots, G_{\max}$ verwendet wird, aufgebaut. Im Allgemeinen eignet sich die DE zur Behandlung von komplizierten nichtlinearen Optimierungsproblemen, da keine Anforderungen an die Zielfunktion gestellt sind, so dass das Verfahren beispielsweise auch für die Minimierung von nichtdifferenzierbaren Zielfunktionen verwendet werden kann. Im Rahmen der DE-Optimierung

entfällt die Aufstellung der Gradienten, der Hessematrix oder der approximierten Hessematrix der Zielfunktion, wie es eigentlich von gradientenbasierten Methoden der nichtlinearen Optimierung bekannt ist. Für eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Definitionen der DE wird die Literatur [161] empfohlen. Im Folgenden wird auf die einzelnen Bestandteile der DE kurz eingegangen:

a) **Initialisierung**

Bevor die Population initialisiert werden kann, muss die obere und untere Grenze $X_{j,\max}$ und $X_{j,\min}$ der gesuchten Parameter gesetzt werden. Die Ausgangspopulation ($G = 0$) wird wie folgt ermittelt

$$\mathbf{X}_{i,0} = x_{j,i,0} = x_{j,\min} + \text{rand}_{i,j}[0, 1] \cdot (x_{j,\max} - X_{j,\min}), \quad (4.6)$$

wobei jede Parameterkomponente j des i -ten Vektors durch eine gleichverteilte Zufallszahl zwischen 0 und 1 mittels $\text{rand}_{i,j}[0, 1]$ instanziiert wird. Es wird also eine Population von zufällig generierten Parametervektoren initialisiert und über die Zielfunktion f bewertet.

b) **Mutation**

Die Mutationsoperatoren können unterschiedliche Aufgaben in evolutionären Algorithmen erfüllen. Zu den wichtigsten Funktionen zählt einerseits die Feinabstimmung (engl. *exploitation*), um ausgehend von einem Lösungskandidaten das zugehörige lokale Optimum zu finden, andererseits das stichprobenartige Erforschen (engl. *exploration*) weiter entfernter Gebiete des Suchraumes, um potenziell bessere Optimagebiete zu lokalisieren. Der besondere Unterschied bei dem DE-Verfahren im Vergleich zu den Standardalgorithmen der klassischen EA zeigt sich in der Definition des Mutationsschrittes. Für jeden Vektor $\mathbf{X}_{i,G}$ der Population wird ein sogenannter Donatorvektor (engl. *donor vector*) $\mathbf{V}_{i,G} = v_{j,i,G}$ aus drei zufälligen Vektoren $\mathbf{X}_{r_1^i}, \mathbf{X}_{r_2^i}, \mathbf{X}_{r_3^i}$ der Population wie folgt gebildet:

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{r_1^i,G} + F \cdot (\mathbf{X}_{r_2^i,G} - \mathbf{X}_{r_3^i,G}). \quad (4.7)$$

Neben der Mutationsstrategie entsprechend Definition 4.7 schlagen *Storn* und *Price* [187, 161, 160] noch vier weitere Mutationsmethoden vor:

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{\text{best},G} + F \cdot (\mathbf{X}_{r_1^i,G} - \mathbf{X}_{r_2^i,G}) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{i,G} + F \cdot (\mathbf{X}_{\text{best},G} - \mathbf{X}_{i,G}) + F \cdot (\mathbf{X}_{r_1^i,G} - \mathbf{X}_{r_2^i,G}) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{\text{best},G} + F \cdot (\mathbf{X}_{r_1^i,G} - \mathbf{X}_{r_2^i,G}) + F \cdot (\mathbf{X}_{r_3^i,G} - \mathbf{X}_{r_4^i,G}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{r_1^i,G} + F \cdot (\mathbf{X}_{r_2^i,G} - \mathbf{X}_{r_3^i,G}) + F \cdot (\mathbf{X}_{r_4^i,G} - \mathbf{X}_{r_5^i,G}). \quad (4.11)$$

Der Vektor $\mathbf{X}_{\text{best},G}$ stellt dabei den aktuell besten Parametervektor innerhalb einer Population dar. Die Indizes r_1^i, r_2^i und r_3^i sind paarweise verschieden und ungleich dem Index i des aktuellen Zielvektors (engl. *target vector*) $\mathbf{X}_{i,G}$. Die Mutationskonstante $F \in \mathbb{R}$ sollte nach *Storn* und *Price* [187] aus dem Intervall $[0, 4; 1, 0]$ gewählt werden.

c) **Rekombination (Crossover)**

Um die Anzahl der potenziellen Lösungskandidaten der Population zu erhöhen wird nach der Erzeugung des Donatorvektors $\mathbf{V}_{i,G} = v_{j,i,G}$ dieser mit dem Zielvektor $\mathbf{X}_{i,G}$ über die Exponential- bzw. Zwei-Punkt-Modulo-Rekombination oder die binomiale Rekombination zu einem Testvektor $\mathbf{U}_{i,G}$ rekombiniert. Die Exponential-Rekombination wird mit Hilfe der Modulo-Funktion $\langle \rangle_D$ mit dem Modulo D nach folgender Definition durchgeführt:

$$\mathbf{U}_{i,G} = u_{j,i,G} = \begin{cases} v_{j,i,G} & \text{für } j \in \{\langle n \rangle_D, \langle n + 1 \rangle_D, \dots, \langle n + L - 1 \rangle_D\} \\ x_{j,i,G} & \text{für alle anderen } j \in [1, D] \end{cases} \quad (4.12)$$

Somit werden durch die Rekombination L -Parameter vom Donatorvektor $\mathbf{V}_{i,G}$ gewählt und die restlichen Parameter werden vom Zielvektor $\mathbf{X}_{i,G}$ übernommen. Der Startindex n , ab dem die Parameter von $\mathbf{V}_{i,G}$ aufgestellt werden, wird per Zufall aus dem Indexintervall $[1, D]$ bestimmt. Die Anzahl L der von $\mathbf{V}_{i,G}$ zu übernehmenden Parameter wird nach dem Algorithmus ebenfalls zufällig aus $[1, D]$ definiert, wobei die Rekombinationswahrscheinlichkeit durch den sogenannten Crossover-Parameter $\text{CR} \in [0, 1]$ festgelegt wird. Die Werte für n und L werden für jede Anwendung der Rekombination neu bestimmt. Die binomiale Rekombination folgt der einfachen Gesetzmäßigkeit:

$$\mathbf{U}_{i,G} = u_{j,i,G} = \begin{cases} v_{j,i,G} & \text{falls } \text{rand}_{i,j}[0, 1] \leq \text{CR} \quad \text{oder } j = j_{\text{rand}} \\ x_{j,i,G} & \text{andernfalls} \end{cases}, \quad (4.13)$$

mit der bereits oben erwähnten Zufallszahloperation $\text{rand}_{i,j}[0, 1]$, angewendet auf jede j -te Komponente des i -ten Parametervektors. Durch die zufällig gewählte Indexzahl aus dem Intervall $j_{\text{rand}} = [1, 2, \dots, D]$ wird dem Testvektor $\mathbf{U}_{i,G}$ eine Komponente aus dem Donatorvektor $\mathbf{V}_{i,G} = v_{j,i,G}$ bereitgestellt. Dieser Ablauf wird einmal für jeden Vektor pro Generation ausgeführt. Die Ausführung dieser zusätzlichen Anforderung wird anhand des Crossover-Parameter CR durch eine angemessene Wahrscheinlichkeit garantiert, so dass eine Komponente des Testvektors tatsächlich von dem Donatorvektor vererbt wird. Im einfachen Falle des 2D-Parameterraums kann für die binomiale Rekombination beobachtet werden, dass drei mögliche Testvektoren aus der Kreuzung des Donatorvektors mit dem Zielvektor entstehen können:

- $\mathbf{U}_{i,G} = \mathbf{V}_{i,G}$, so dass beide Komponenten des Vektors $\mathbf{U}_{i,G}$ von $\mathbf{V}_{i,G}$ geerbt werden.
- $\mathbf{U}_{i,G}^{\perp}$, wobei die erste Komponente ($j = 1$) von $\mathbf{V}_{i,G}$ und die Zweite ($j = 2$) von $\mathbf{X}_{i,G}$ stammt.
- $\mathbf{U}_{i,G}^{\parallel}$, wobei die erste Komponente ($j = 1$) von $\mathbf{X}_{i,G}$ und die Zweite ($j = 2$) von $\mathbf{V}_{i,G}$ übernommen wird.

Die Grundidee der Selektion besteht in der Entscheidung, ob der Ziel- oder Testvektor in der nächsten Generation $G = G + 1$ übernommen oder aussortiert wird. Die Selektion wird mittels der Definition

$$\mathbf{X}_{i,G+1} = x_{j,i,G+1} = \begin{cases} u_{j,i,G} & \text{falls } f(u_{j,i,G}) \leq f(x_{j,i,G}) \\ x_{j,i,G} & \text{falls } f(u_{j,i,G}) > f(x_{j,i,G}) \end{cases} \quad (4.14)$$

durchgeführt. Erreicht die Zielfunktion mit dem Testvektor einen gleichen oder kleineren Wert als mit der Verwendung des Zielvektors, wird der Zielvektor durch den Testvektor in der nächsten Generation ersetzt. Andernfalls verbleibt der Zielvektor in der Population. Somit nimmt die Population in Bezug auf die Minimierung der Zielfunktion einen besseren oder zumindest einen gleichen Fitnesszustand ein, so dass eine Verschlechterung der Lösungskandidaten ausgeschlossen wird.

Nachdem der Selektionsschritt abgeschlossen ist, beginnt der Algorithmus erneut mit der Mutation und durchläuft die restlichen Operationen bis das Minimum der Zielfunktion gefunden oder ein durch den Anwender festgelegtes Abbruchkriterium erreicht wurde. Das Abbruchkriterium der DE wird i.d.R. durch das Erreichen einer maximalen Anzahl von Generationen G_{max} oder durch eine bestimmte Anzahl an Iterationsdurchläufen ausgelöst. Seit der erstmaligen Erwähnung der DE 1995 durch *Storn* und *Price* wurden zahlreiche Modifikationen des Verfahrens veröffentlicht. Hierzu zählen die multikriterielle DE, selbstadaptive DE, memetische DE, Varianten von DE für diskrete Optimierungsprobleme und verschiedene Erweiterungen der Mutations- und Rekombinationsoperatoren für den DE-Algorithmus. Für einen umfassenden Überblick über Arbeiten zu Differential Evolution sei auf die Zusammenfassungen von *Das* und *Nagaratnam* [44] und von *Neri* und *Tirronen* [137] verwiesen.

4.2.2. Das Verfahren nach *Nelder und Mead* als Basis lokaler Optimierung

In diesem Abschnitt wird zur Erläuterung des *Nelder und Mead* Algorithmus der Darstellung nach *Alt* [7] und *Gerdts* [72], welche auf dem Originalartikel [136] basiert, gefolgt. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die hier beschriebene Optimierungsmethode als Simplexmethode oder *Downhill Simplex Method* bezeichnet wird aber nicht mit dem Simplexverfahren aus der linearen Optimierung verwechselt werden darf. Der Name des Verfahrens ist auf die grundlegende Definition bzw. Konstruktion der Simplex zurückzuführen [72]:

Seien $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n \in \mathbb{R}^n$ gegebene Vektoren, wobei die Vektoren $\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0, i = 1, \dots, n$ linear unabhängig seien. Die konvexe Hülle

$$S = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{x}^i \mid \lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

dieser $n+1$ Punkte im \mathbb{R}^n heisst (n -dimensionales) Simplex mit den Ecken $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$.

(4.15)

Das Verfahren startet mit den vorgegebenen Startparametern und erzeugt damit einen Simplex S_0 . Die Grundidee des Verfahrens besteht in der Neukonstruktion des Simplex S_{k+1} , indem die Ecke x^{\max} aus dem vorgegebenem Parametersatz x^0, x^1, \dots, x^n mit dem größten Zielfunktionswert bestimmt und durch einen Kandidaten x^* nach folgendem Ablauf in jedem Iterationsschritt ausgetauscht wird:

- Zum aktuellen Simplex S_k mit den vorhandenen Ecken wird die Ecke mit dem maximalen Funktionswert bestimmt:

$$f(x^{\max}) = \max\{f(x^0), f(x^1), \dots, f(x^n)\}.$$

- Berechnung eines Punktes x^* mit einem kleineren Funktionswert $f(x^*) < f(x^{\max})$ und Ersetzung von x^{\max} durch den neuen Punkt x^* . Damit wird ein neuer Simplex S_{k+1} definiert. Die Bestimmung des neuen Punktes x^* wird durch drei Konstruktionsprinzipien durchgeführt:

a) Reflektion

Ein neuer Punkt x^r wird durch Reflektion bzw. Spiegelung der Ecke x^j am Schwerpunkt s^j wie folgt definiert

$$x^r = s^j + \gamma (s^j - x^j), \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

wobei für $j = 0, 1, \dots, n$ die Schwerpunkte der Ecken bzgl. x^j durch

$$s^j = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x^i$$

berechnet werden.

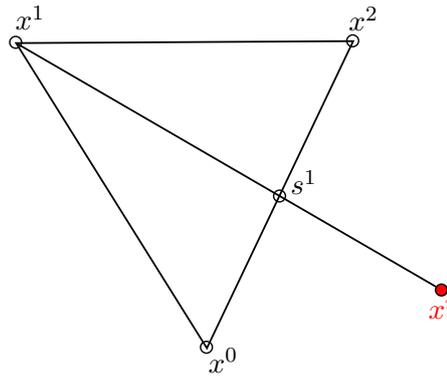


Abbildung 4.3.: Nelder und Mead Algorithmus: Reflexion

In anderen Worten formuliert, besteht die Grundidee der Reflexion in der Spiegelung des schlechtesten Punktes auf die andere Seite der übrigen Punkte bezogen auf den Schwerpunkt des Simplex.

b) Expansion

Falls nun der reflektierte Punkt aus dem vorherigen Schritt den kleinsten Zielfunktionswert besitzt, wird die Vergrößerung des Simplex in der entsprechenden Richtung mit Hilfe der Expansion durchgeführt. Durch die Expansion wird der Punkt x^e über x^r hinaus weiter nach außen in Richtung $s^j - x^j$ bzw. $x^r - s^j$ verschoben

$$x^e = s^j + \beta (x^r - s^j), \quad \beta > 1.$$

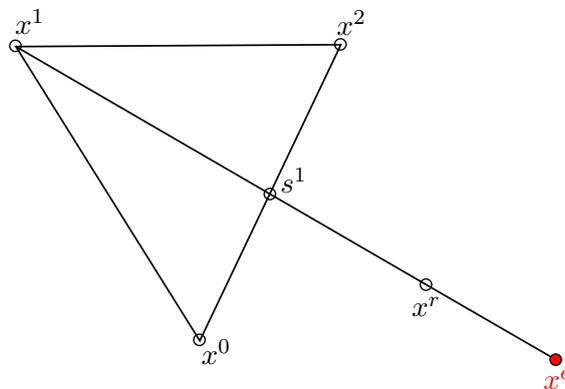


Abbildung 4.4.: Nelder und Mead Algorithmus: Expansion

c) Kontraktion

Im Falle der Verschlechterung der Zielfunktion nach dem Reflektionsschritt wird die Kontraktion angewendet. Bei der Kontraktion wird zwischen der inneren partiellen, äußeren partiellen und der totalen Kontraktion unterschieden. Für die innere partielle Kontraktion wird der Punkt x^{ic} zwischen x^j und s^j nach folgender Definition verschoben

$$x^{ic} = s^j + \alpha (x^j - s^j), \quad 0 < \alpha < 1.$$

während bei der äußeren partiellen Kontraktion der Punkt x^{oc} zwischen s^j und x^r verschoben wird

$$x^{oc} = s^j + \alpha (x^r - s^j), \quad 0 < \alpha < 1$$

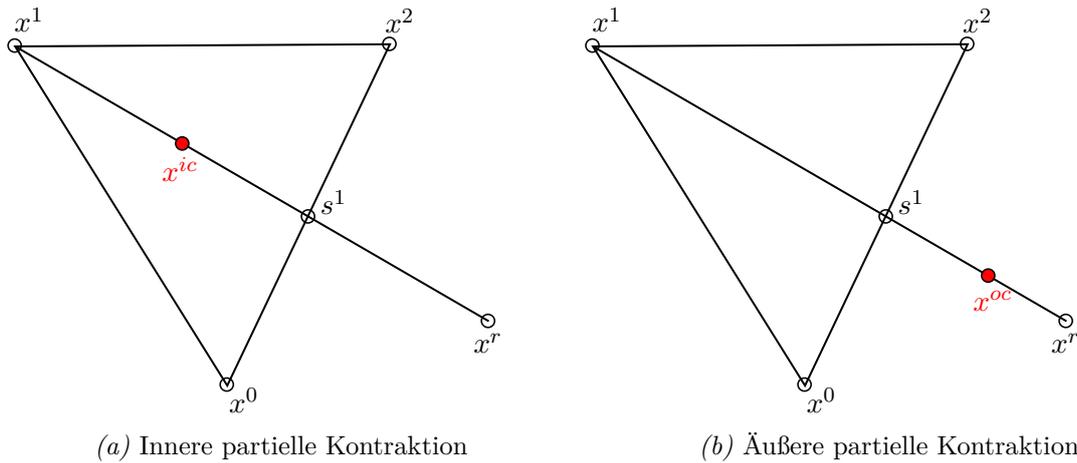


Abbildung 4.5.: Nelder und Mead Algorithmus: Arten der partiellen Kontraktion

Bleibt nach Anwendung der inneren und äußeren partiellen Kontraktion der Ziel-funktionswert maximal, wird der gesamte Simplex in Richtung des besten Punktes verkleinert, was als totale Kontraktion bezeichnet wird. Bei der Anwendung der totalen Kontraktion werden die Punkte $x^i, i = 0, 1, \dots, n$ mit $i \neq j$ durch die Mittelpunkte der Strecken von x^j nach x^i ersetzt

$$\hat{x}^i = x^i + \frac{1}{2} (x^j - x^i) = \frac{1}{2} (x^j + x^i)$$

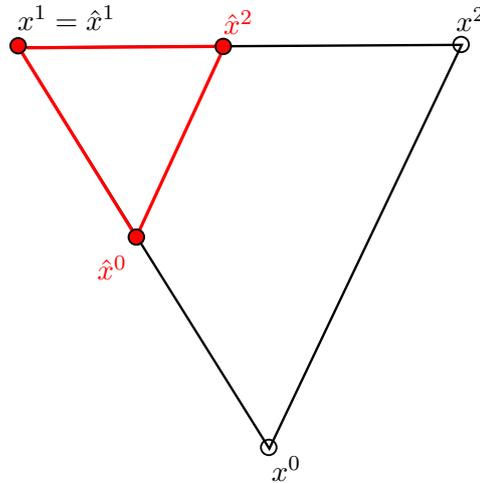


Abbildung 4.6.: Nelder und Mead Algorithmus: Totale Kontraktion

Die Methode wird bis zum Erreichen der Konvergenz bzw. bis zu einem vorgegebenen Abbruchkriterium nach *Nelder und Mead*

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (f(x^{k,i}) - \tilde{f}_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < tol, \quad \text{mit } \tilde{f}_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x^{k,i})$$

wiederholt, wobei erneut mit dem Reflektionsschritt begonnen wird. Bei Verwendung der Mathematiksoftware MATLAB wird das Optimierungsproblem nach der *Nelder und Mead*-Methode mit Hilfe der Befehlsfunktion `fminsearch` aufgestellt und das Abbruchkriterium wird erreicht, sobald der Durchmesser des Simplex S_k kleiner als eine vom Anwender festgelegte Toleranz ist.

Basierend auf diesen Konstruktionsregeln kann das Verfahren von *Nelder und Mead* numerisch umgesetzt werden. Für eine detailliertere, aber dennoch kompakte Übersicht der einzelnen Algorithmusschritte, welche für die Implementierung in einer Programmiersprache geeignet ist, kann die Literatur [72] verwendet werden. In der Praxis erfreut sich das Verfahren von *Nelder und Mead* großer Beliebtheit, da es keinerlei Voraussetzungen an die zu minimierende Zielfunktion stellt und damit als sehr anwenderfreundlich gilt. Zur Durchführung der Optimierung werden lediglich Funktionswerte f benötigt, die Bestimmung des Gradienten oder der Hessematrix bzw. der Approximation der Hessematrix sind hier nicht erforderlich. In anderen Worten ausgedrückt, bei der Aufstellung des Optimierungsproblems muss der Anwender nicht über detaillierte Kenntnisse der elastisch-plastischen Werkstoffmodellierung verfügen. Allerdings gibt es auch keine allgemeinen Konvergenzaussagen und keine Festlegung, dass das Verfahren tatsächlich ein lokales Minimum von f liefert. In [107] werden für bestimmte Funktionen und niedrige Raumdimensionen ansehnliche Konvergenzergebnisse erzielt. Andere Autoren [129] zeigen jedoch, dass diese Resultate nicht allgemein gültig sind, indem Beispiele konstruiert werden, für die das Verfahren gegen nichtstationäre Punkte konvergiert. Zur Beseitigung dieser Defizite wurde eine konvergente Modifikation des *Nelder und Mead*-Algorithmus in [159] postuliert. Im Allgemeinen kann gesagt werden, dass das *Nelder und Mead*-Verfahren eine gute Konvergenz aufzeigt und nahezu immer zu einer lokalen Optimierungslösung bei einer bestimmten Parameteranzahl führt. Der Einsatz des Downhill-Simplex-Verfahrens eignet sich sehr gut in Kombination mit dem bereits beschriebenen Differential Evolution Algorithmus zur Parameteridentifikation von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen. Hierbei werden die Stärken des lokalen und des globalen Optimierungstyps innerhalb einer hybriden Optimierungsstrategie vereint. Das leistungsfähige hybride Optimierungsverfahren wird im anschließenden Kapitel erläutert.

4.2.3. Numerische Umsetzung des hybriden Verfahrens

Abbildung 4.7 gibt einen Überblick über die wichtigsten Module des entwickelten hybriden Optimierungsprogrammes zur Parameteridentifikation für elastisch-plastische Werkstoffmodelle. Das Gesamtprogramm ist in drei Bereiche unterteilt, die als „PYTHON Level“, „ABAQUS Level“ und „FORTRAN Level“ benannt sind. Das Hauptprogramm zur Steuerung der Gesamtprogrammabläufe wurde in der Skriptsprache „PYTHON“ entwickelt.

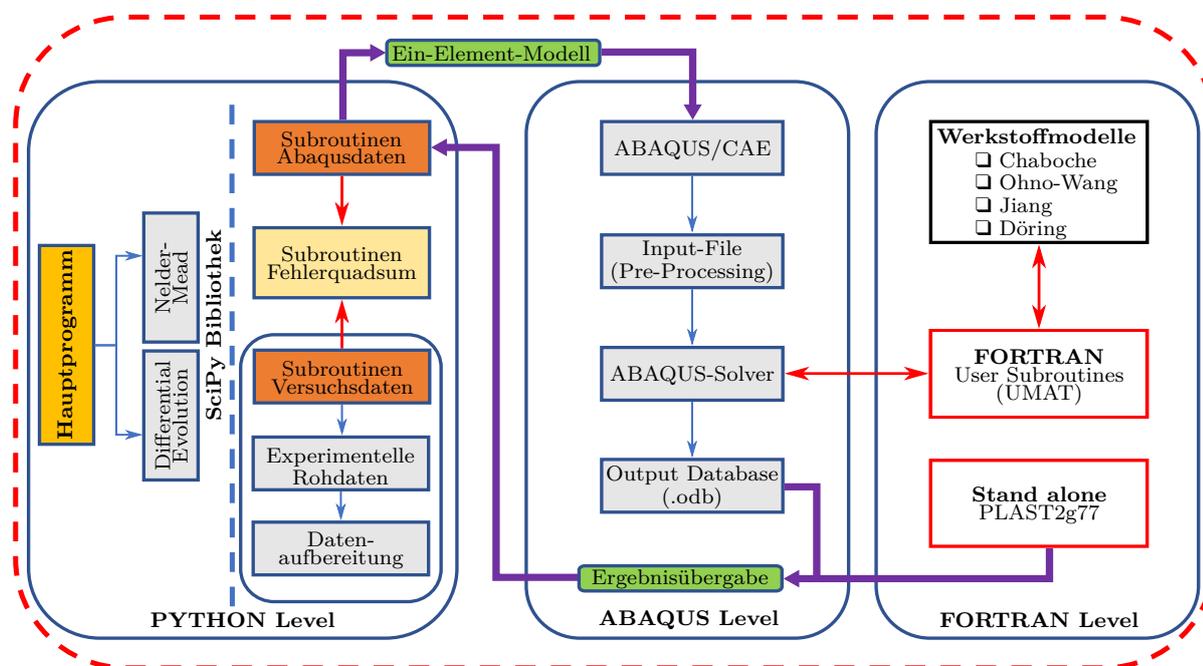


Abbildung 4.7.: Programm-Module der Parameteridentifikation

Auf dem sogenannten „PYTHON Level“ wird das eigentliche Einlesen und die Aufbereitung der Versuchsdaten durchgeführt und der hybride Optimierungsalgorithmus zur Minimierung der Zielfunktion unter Einsatz der Optimierungsbibliothek in „SciPy“ umgesetzt. In dieser Bibliothek sind bereits die fertigen Programme zum Differential Evolution-Algorithmus und *Nelder-Mead*-, die zu einem hybriden Optimierungsalgorithmus zusammengeführt werden, vorhanden. Weitere wichtige Bestandteile auf dieser Programmebene stellen die Subroutinen für die Aufbereitung der Versuchsdaten, die ein Bestandteil der zu minimierenden Zielfunktion bzw. der Fehlerquadratsumme sind, dar. Das Ein-Element-Modell wird aus dem „PYTHON Level“ heraus als Inputfile im FE-Programm ABAQUS mit einem vorgegebenen Startparametersatz gestartet. Somit können alle vorgegebenen Versuche mit diesem Input-File simuliert werden unter Einbeziehung des entsprechenden Werkstoffmodells mit den zugehörigen Modellparametern. Die experimentellen Daten bestehen aus dehnungs- bzw. weg- oder kraftgesteuerten Versuchsergebnissen. Um eine sinnvolle Zielfunktion zu konstruieren, werden die Versuchs- und Simulationsdaten in ein einheitliches Format gebracht. Gemessene Werte werden ausschließlich als technische Spannungen und technische Dehnungen aufgenommen. In der Simulationsumgebung mit ABAQUS werden die „wahren“ Werte benötigt. Aus diesem Grund werden die technischen Größen vor der Optimierung in wahre Werte umgewandelt, so dass die Vergleichbarkeit gewährleistet werden kann. Bei inkompressiblem Werkstoffverhalten stehen die gemessenen technischen Dehnungen und technischen Spannungen in folgender Beziehung zu den „wahren“ Werten:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{true}} &= \sigma_{\text{tech}} (1 + \varepsilon_{\text{tech}}) \\ \varepsilon_{\text{true}} &= \ln(1 + \varepsilon_{\text{tech}}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Kontinuumsmechanische Ausführungen der Werkstoffmodelle sind mittels einer aus der Arbeit von *Döring* [51, 52] vorliegenden UMAT in der Programmiersprache FORTRAN ausformuliert und kommunizieren aus dem sogenannten „FORTRAN Level“ mit dem ABAQUS-Solver. Das formulierte FE-Modell (Ein-Element-Modell) wird in der ABAQUS-Umgebung gelöst und als Ergebnisdatei (ODB-File) für das Hauptprogramm bereitgestellt. Im Folgeschritt werden die Simulationsergebnisse an das PYTHON Level übergeben (Ergebnisübergabe) und im Rahmen des Optimierungsverfahrens innerhalb der Zielfunktion als Quadrat der Differenzen der berechneten und der experimentellen Daten aufsummiert. Nach einer Bewertung der Ergebnisgüte der Parameter, anhand eines vom Anwender festgelegten Kriteriums für die Fehlerquadratsumme, wird im Hauptprogramm entschieden, ob der Parametersatz in einem weiteren Durchlauf optimiert werden muss oder bereits das Optimum vorliegt. Das Konvergenzkriterium kann durch das Festlegen eines Betrages für die Zielfunktion und die Anzahl der Programmdurchläufe durch den Benutzer vorgegeben werden. Falls das Kriterium nicht erfüllt ist, startet das Hauptprogramm mit einem optimierten Parametersatz erneut in das Inputfile bzw. begibt sich in das ABAQUS Level und wiederholt die beschriebenen Schritte so lange bis ein Optimum erreicht ist. Alternativ zu der Ein-Modell-Variante kann die werkstoffmodellspezifische Spannungs-Dehnungs-Information durch das Stand-Alone-Software Plast2g77 unabhängig von der kommerziellen FE-Software ABAQUS absolviert werden. Ergänzend zu der vorangehenden Beschreibung der einzelnen Bestandteile des hybriden Optimierungsverfahrens zeigt die Abbildung 4.8 ein Ablaufdiagramm des Programmes.

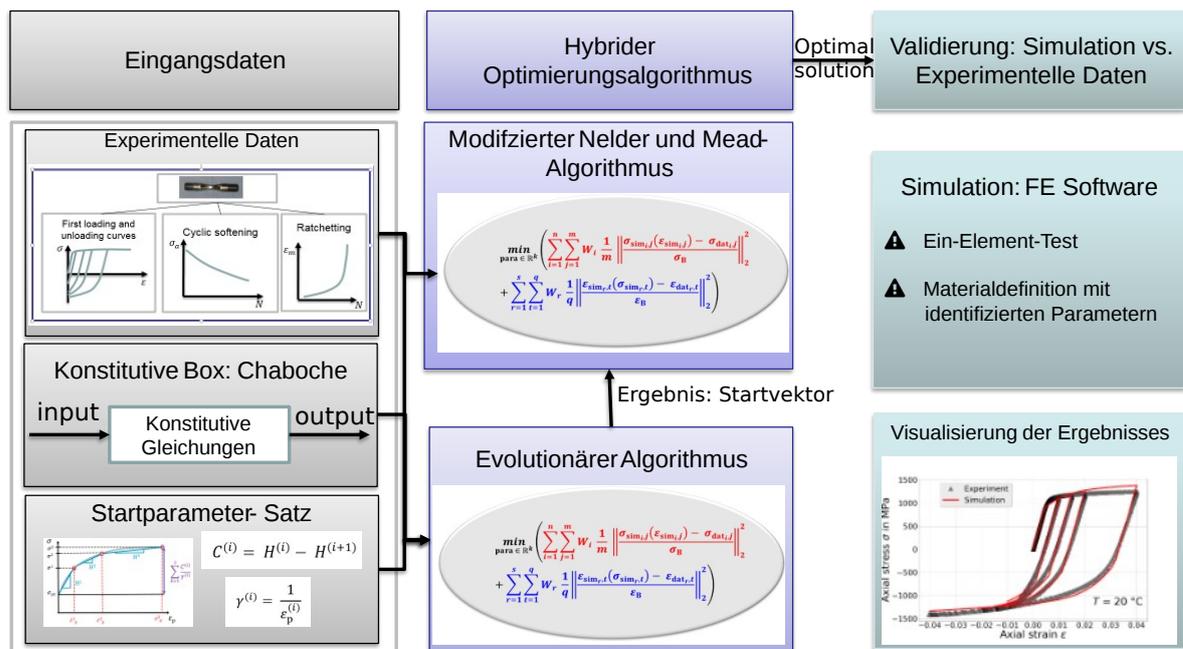


Abbildung 4.8.: Programm-Ablaufschema der Parameteridentifikation

Die Bedienung des Programms beginnt mit der Eingabe der aufbereiteten Versuchsdaten und der Wahl des elastisch-plastischen Materialmodells samt den Wichtungsfaktoren. Die hier ange-deutete konstitutive Box stellt die kontinuumsmechanische Definition des Modells in Form einer UMAT oder durch die Definition durch das Programm Plast2g77 dar. Bevor die eigentliche Optimierung beginnt, muss ein Startparametersatz eingegeben werden. Die eigentliche hybride Optimierung beginnt mit dem globalen Optimierungsverfahren (Differential Evolution) und wechselt nach einer bestimmten Anzahl an Programmdurchläufen, der Prüfung des Konvergenz-verhaltens und Übergabe des optimalen Parametersatzes zu der lokalen Methode, die auf dem *Nelder-Mead*-Algorithmus basiert, hin. Ab einer bestimmten Anzahl von Programmdurchläu-

fen und bei keiner weiteren Verbesserung der Zielfunktion kommt der evolutionäre Algorithmus zum Einsatz. Im Anschluss wird der Parametersatz als optimale Lösung (engl. *optimal solution*) ausgegeben und einer Validierung unterzogen. Den finalen Abschnitt der Validierung stellt das grafische Gegenüberstellen der simulierten und experimentellen Daten dar. Die Visualisierung der Ergebnisse befähigt den Anwender zu einer schnellen Beurteilung der Güte der identifizierten Parameter und zu einer Entscheidung ob weiterer Optimierungsbedarf besteht.

4.3. Werkstoffparameteridentifikation von zyklischen Plastizitätsmodellen

4.3.1. Verwendete Materialmodelle

Die verwendeten Materialmodelle gehören zu der Kategorie der phänomenologischen Materialmodelle mit den im Vordergrund stehenden makroskopischen Eigenschaften. Das vorangehend beschriebene Vorgehen zur Modellparameteridentifikation wird anhand des Werkstoffmodells nach *Chaboche* demonstriert. Die entsprechenden Ergebnisse der Parameteridentifikation für das *Döring*-Modell bezogen auf die Temperaturen $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 180^\circ\text{C}$ sind im Anhang B.2 angegeben.

Chaboche-Modell: Konstitutive Materialgleichungen

Das *Chaboche*-Modell [114] stellt einen bereits fest implementierten Bestandteil der Materialdefinition in einer kommerziellen Finite-Elemente-Software dar. Es basiert auf dem Modell nach *Armstrong und Frederick* und stellt eine Weiterentwicklung dieses Modells dar. Die wesentliche Erweiterung ist die additive Zerlegung des Backstresstensors in mehrere Teilbackstresstensen. Zusätzlich erfreut sich der Anwender bei diesem Materialmodell über die Möglichkeit der Behandlung von Lastfällen mit zyklisch thermischen Belastungen, da bestimmte Parameter temperaturabhängig in den Modellgleichungen integriert sind. Die wichtigsten Grundgleichungen des Werkstoffmodells nach *Chaboche* unter Einbeziehung der temperaturabhängigen Parameter werden in folgendem aufgeführt.

1. Fließbedingung nach von Mises:

$$F_{\text{Mises}} = \sqrt{(s - \alpha) : (s - \alpha)} - R(p) - (\sigma_F) \quad (4.17)$$

2. Gesamtdehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^{\text{th}} \quad (4.18)$$

3. Fließregel:

$$d\varepsilon^p = dp \cdot n \quad (4.19)$$

4. Elastizitätsgesetz:

$$\sigma = E : (\varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^{\text{th}}) \quad (4.20)$$

5. Kinematische Verfestigungsregel:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \quad (4.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)} = \frac{2}{3} C_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl} - \gamma^i \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \dot{p} + \frac{1}{C^{(i)}} \frac{\partial C^{(i)}}{\partial T} \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \dot{T} \quad (4.22)$$

6. Isotrope Verfestigungsregel:

$$\dot{R} = b(Q - R) \dot{p}. \quad (4.23)$$

In der vorliegenden Arbeit werden keine zyklischen Temperaturlasten (Thermozyklen) betrachtet, aber es wird ein Temperaturanstieg oder Temperatursprung nach dem Entlastungsvorgang des Autofrettageprozesses von $T = 20^\circ\text{C}$ auf $T = 180^\circ\text{C}$ einbezogen. Deshalb wird die Hinzunahme der Summanden mit Ableitungen nach der Temperatur in den Gleichungen 4.22 und 4.23 erforderlich. In erster Linie fällt in der Definition der kinematischen Verfestigung auf, dass die Gleichung zusätzlich zu dem bekannten *Armstrong und Frederick*-Gesetz einen zusätzlichen Term mit temperaturabhängigen C -Konstanten, welche grundsätzlich mit dem plastischen Verfestigungsmodul in Verbindung stehen, enthält. Die Wahl dieses Zusatzterms begründet *Chaboche* in [34] mit diversen Argumenten. Das wohl aus physikalischer bzw. kontinuumsmechanischer Sicht überzeugendste Argument ist die thermodynamische Betrachtung und die in diesem Zusammenhang stehende Verwendung der freien Helmholtzenergie mit dem Ziel, die thermodynamische Konsistenz des Materialmodelles zu gewährleisten.

4.3.2. Notwendige Eingangsgrößen und Startwerte

Die Anzahl der Materialparameter hängt grundsätzlich von der gewählten Anzahl der Rückspannungstensoren ab. Bei einer festgelegten Anzahl von 5 Rückspannungstensoren sind im Materialmodell nach Chaboche 16 Materialkonstanten zu definieren, wobei nicht alle Parameter aus der Optimierung zu folgern sind. Diesbezüglich wurde das hybride Optimierungsprogramm verwendet, so dass mit Hilfe einer nichtlinearen Optimierung die Parameteridentifikation durchgeführt wurde, die auf folgenden experimentellen Eingabedaten (siehe Kapitel 3) basiert:

- Erstbelastungs- und Erstentlastungskurve,
- zyklische Wechselverformungskurven (dehnungskontrollierte Versuche),
- zyklisches Kriechen oder Ratchetting (kraftkontrollierte Versuche).

In diesem Zusammenhang kann von einer inversen Problemstellung gesprochen werden, welche durch die Identifikation der Materialparameter des kontinuumsmechanischen Modells bei gegebenen Versuchsdaten gelöst werden soll. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktion kann als direkte Problemstellung betrachtet werden und wird im Vorfeld der Optimierung erledigt. Die Angabe eines Startparametersatzes ist nicht zwingend erforderlich. Der Autor nutzte zur Bestimmung der Startwerte ein EXCEL-Programm mit den dort zur Verfügung stehenden Optimierungsmethoden und den Chaboche-Modellgleichungen, die eigenständig für die kinematische Verfestigung in das Tabellenkalkulationsprogramm implementiert werden mussten. Die eigentliche Optimierungsarbeit besteht aus der typischen Vorgehensweise, der Verwendung einer Fehlerquadrat-Minimummethode zur Bestimmung eines optimalen Lösungsvektors für den Parametersatz, so dass die optimale Annäherung der Simulationsdaten an die Versuchsdaten in einem gewichteten Mittel erreicht wird. Der Lösungsparametersatz für das *Chaboche*-Modell wird in der Tabelle 4.1 angegeben und wird für die Definition des elastisch-plastischen Materialmodells in der FE-Software ABAQUS verwendet.

Tabelle 4.1.: Werkstoffparameter *Chaboche* bei $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 180^\circ\text{C}$

Werkstoffmodell	42CrMo4	
<i>Chaboche</i> -Modell	T = 20 °C	T = 180 °C
E-Modul in MPa	200000	199000
Querkontraktion	0,3	0,3
α_T in K^{-1}	1,2e-05	1,3e-05
σ_{F0} in MPa	900,717	731,266
Q in MPa	-283,173	-301,797
b	11,527	23,839
C_1 in MPa	80,936	82251,4
C_2 in MPa	229,308	46055,3
C_3 in MPa	55433,2	66885,4
C_4 in MPa	532,394	4834,29
C_5 in MPa	5769,9	2993,6
γ_1	5787,61	5787,61
γ_2	898,75	898,75
γ_3	153,157	153,157
γ_4	50,770	50,770
γ_5	7,459	7,459

4.3.3. Validierung der Werkstoffparameter auf Basis experimenteller Daten (Chaboche-Modell: Werkstoff 42CrMo4)

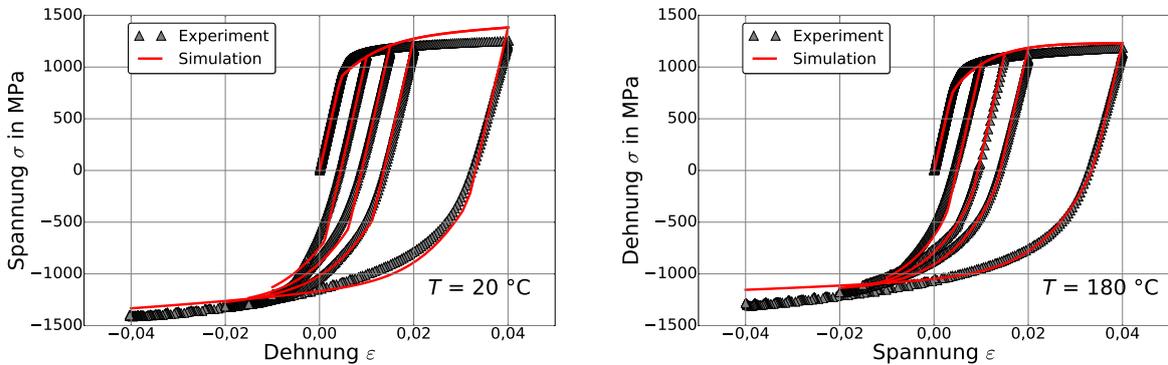


Abbildung 4.9.: Erstbelastungs- und Erstentlastungskurven, $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$

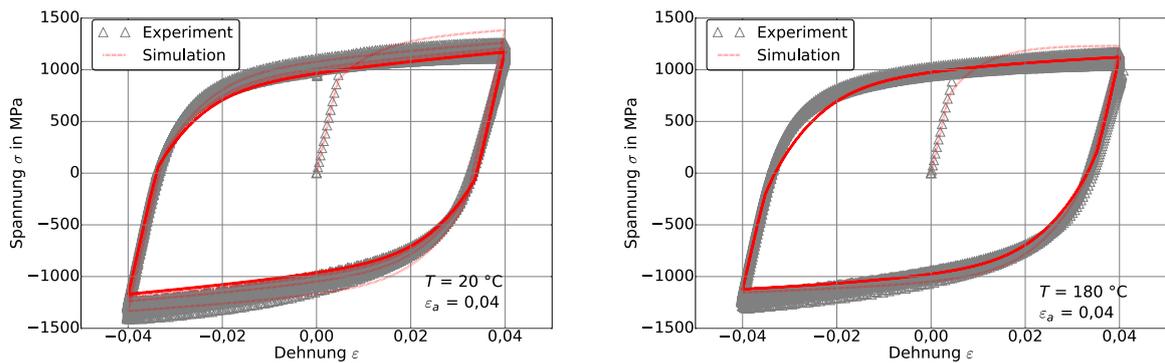


Abbildung 4.10.: Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\epsilon_a = 0,04$ ($R_\epsilon = -1$), $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$

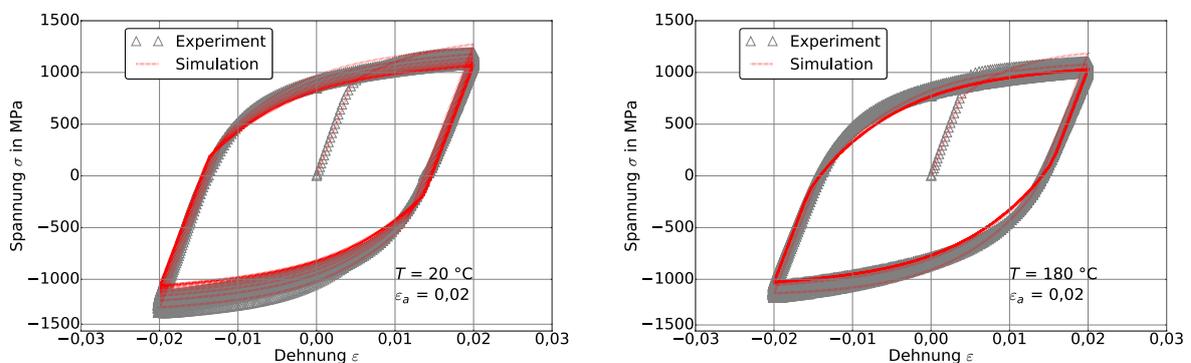


Abbildung 4.11.: Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\epsilon_a = 0,02$ ($R_\epsilon = -1$), $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$

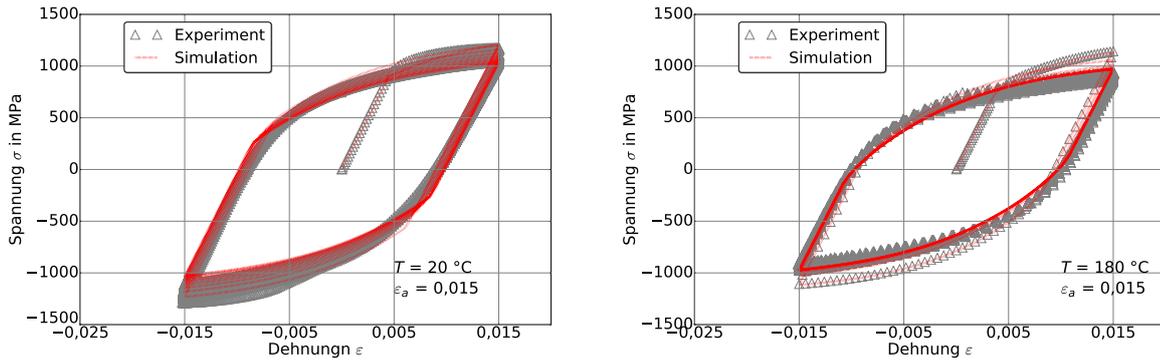


Abbildung 4.12.: Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\varepsilon_a = 0,015$ ($R_\varepsilon = -1$), $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 180^\circ\text{C}$

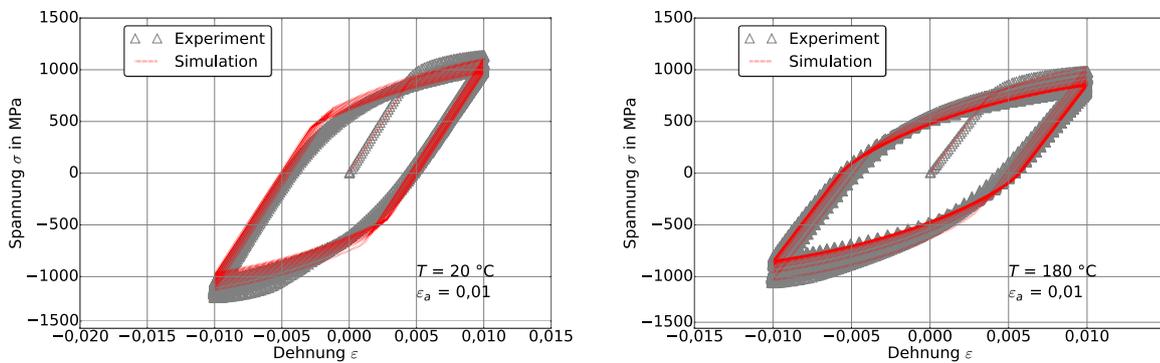


Abbildung 4.13.: Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\varepsilon_a = 0,010$ ($R_\varepsilon = -1$), $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 180^\circ\text{C}$

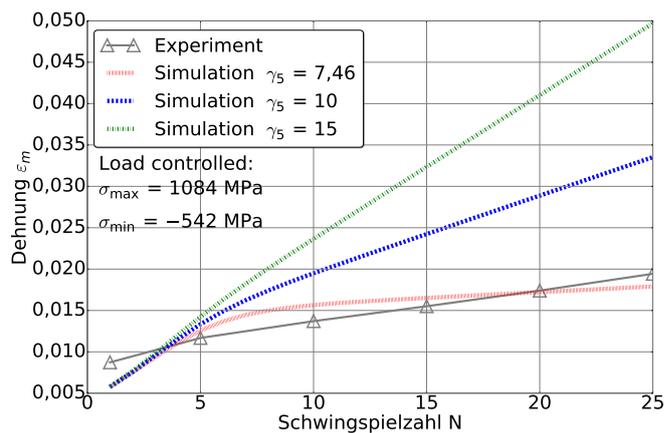


Abbildung 4.14.: Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den kraftgeregelten Versuch bei $T = 180^\circ\text{C}$

5. Entwicklung des Konzeptes und die Konzeptübersicht

5.1. Stand des Wissens und notwendige Herleitungen zur Umsetzung der Konzeptidee

5.1.1. Thermodynamisch konsistentes Plastizitätsmodell

Die Anforderungen an das Gesamtkonzept in Hinsicht des Werkstoffmodelles besteht in der Erfüllung der Bilanzgleichungen mit der besonderen Vorgabe der Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Hiermit können insbesondere die dissipativen Prozesse einbezogen werden und die Verfestigungsregel bekommt eine besondere Aufmerksamkeit. Das *Döring*-Modell müsste demnach erst mit der hier gezeigten Methode, die sich auf das *Chaboche*-Modell bezieht, auf den 2. Hauptsatzes der Thermodynamik geprüft werden. Erst bei der Einhaltung der restriktiven Bedingung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung kann der neu verwendete Rissspitzenparameter den Anteil der materiellen Kräfte, die sich auf die Verfestigungsregel des zyklischen Materialmodells beziehen, einbezogen werden. Das *Chaboche*-Modell mit dem gemischten Verfestigungsgesetz, bestehend aus isotroper und kinematischer Verfestigungsregel, wird im Folgenden weiter betrachtet. Die Definition der freien *Helmholtz*energie wird durch die internen Variablen wie folgt definiert:

$$\psi = \check{\psi}(\varepsilon^e, \Theta, \kappa) = \check{\psi}(\varepsilon_{ij}^e, \Theta, p, \alpha_{ij}^{(k)}). \quad (5.1)$$

Das Differenzieren der *Helmholtz*energie nach den inneren Variablen führt auf

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}^{(k)}} \dot{\alpha}_{ij}^{(k)}. \quad (5.2)$$

Entsprechend der Entropiebilanz

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{\psi} + S \dot{\Theta}) - q_i \frac{\Theta_{,i}}{\Theta} \geq 0 \quad (5.3)$$

wird die *Clausius-Duhem*-Ungleichung durch das Einsetzen der Definition 5.2 als

$$\sigma_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p) - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \psi}{\sum_{k=1}^M \partial \alpha_{ij}^{(k)}} \dot{\alpha}_{ij}^{(k)} + S \dot{\Theta} \right) - q_i \frac{\Theta_{,i}}{\Theta} \geq 0 \quad (5.4)$$

definiert. Durch das Ausklammern von bestimmten Termen entsteht die Umformung

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + S \right) \dot{\Theta} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} - \rho \sum_{k=1}^M \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}^{(k)}} \dot{\alpha}_{ij}^{(k)} - q_i \frac{\Theta_{,i}}{\Theta} \geq 0, \quad (5.5)$$

mit den thermodynamischen Statusvariablen

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e}; S = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}; R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p}; X_{ij}^{(k)} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}^{(k)}}. \quad (5.6)$$

Einen wichtigen und oft eintreffenden Anwendungsfall in der Mechanik stellen thermodynamische Systeme, die als adiabat ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$), isotherm ($\dot{\Theta} = 0$) oder deren Temperaturfelder als

homogen ($\nabla_{\mathbf{x}} \Theta = \mathbf{0}$) gelten, dar. Für diesen Sonderfall lautet die Entropiebilanz für das *Chaboche*-Modell

$$D^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \sum_{k=1}^M \frac{2}{3} C^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} \dot{\alpha}_{lm}^{(k)} - R\dot{p} \geq 0. \quad (5.7)$$

Es wird deutlich, dass die isotrope und kinematische Verfestigungsregel für das zyklische Plastizitätsmodell nach *Chaboche* im Sinne der Restriktion des 2. Hauptsatzes einen wichtigen Beitrag leistet und nicht vernachlässigt werden darf. Im Folgenden werden Bilanzgleichungen zur Herleitung eines Rissspitzenparameters verwendet und fügen sich zu einem thermodynamisch-konsistenten Gesamtkonzept.

5.1.2. Konfigurationskräfte: Mechanik der materiellen Kräfte

Eine gute Übersicht über die Theorie der Konfigurationskräfte oder materiellen Kräfte bietet unter anderem die Literatur von *Maugin* [122], *Kienzler und Herrmann* [96] und *Gurtin* [76] an.

Die physikalische Interpretation der materiellen Kräfte in einem elastischen Körper

Ausgehend vom Impulssatz in seiner lokalen Form bezogen auf die Referenzkonfiguration nach Gleichung 2.50 und dessen linksseitiger Multiplikation mit \mathbf{F}^T ergibt sich

$$\mathbf{F}^T \cdot (\rho_R \dot{\mathbf{u}}_R) = \mathbf{F}^T \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}) + \mathbf{F}^T \cdot (\rho_R \mathbf{B}). \quad (5.8)$$

Nach Umformung des ersten Gliedes auf der rechten Seite

$$\mathbf{F}^T \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}) = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P}) - \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F}^T : \mathbf{P} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \quad (5.9)$$

und dem Einsetzen in 5.8 unter der Annahme einer stationären Betrachtung $\dot{\mathbf{u}}_R = \mathbf{0}$ resultiert

$$\mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\rho_R \mathbf{B}). \quad (5.10)$$

Bei Annahme eines elastischen Verhaltens genügt es die freie *Helmholtzenergie* $\psi(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ in Abhängigkeit des Deformationsgradienten \mathbf{F} und der Referenzkoordinate \mathbf{X} auszudrücken, so dass daraus auf den Gradienten der freien *Helmholtzenergie*

$$\nabla_{\mathbf{X}} \psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}}_P : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.11)$$

geschlossen werden kann.

Mit der angedeuteten Äquivalenz $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{P}$ in Gleichung 5.11 wird der zweite Term auf der rechten Seite im abgewandelten Impulssatz 5.10 erkennbar. Unter Einbeziehung des Gradienten der freien *Helmholtzenergie* lässt sich der Ausdruck 5.10 als

$$\mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P}) - \nabla_{\mathbf{X}} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{B}^V \quad (5.12)$$

schreiben.

Nach einer weiteren Umformung mithilfe von $\nabla_{\mathbf{X}} \psi = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\psi \mathbf{I})$ folgt schließlich für den abgewandelten Impulssatz

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{(\psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P})}_{\Sigma} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{B}^V + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{f}^{\text{extV}} + \mathbf{f}^{\text{inh}}}_{\mathbf{f}^{\text{mat}}}. \quad (5.13)$$

Somit bringt die Definition 5.13 zum Ausdruck, dass die Divergenz des sogenannten *Eshelby*-Tensors

$$\boldsymbol{\Sigma} = \psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P}, \quad (5.14)$$

der Summe der materiellen Kräfte, bestehend aus den externen Volumenkräften \mathbf{f}^{extV} und der Materialinhomogenität \mathbf{f}^{inh} , entspricht. Folglich schreibt sich die starke Formulierung bestehend aus der Divergenz des *Eshelby*-Tensors und der Konfigurationskräfte der Definition als

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{f}_{\text{mat}} = \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Im Kapitel 5.2.2 wird detaillierter auf die FE-Umsetzung der materiellen Kräfte oder Konfigurationskräfte eingegangen. Es sei dennoch an dieser Stelle die Darstellung der schwachen Formulierung mithilfe der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$

$$\int_{\Omega_R} (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{f}_{\text{mat}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV = 0 \quad (5.16)$$

vorweggenommen. Nach Durchführung der partiellen Integrationsregel lautet die integrale Beziehung der Konfigurationskräfte im Zusammenhang mit dem *Eshelby*-Tensor

$$\int_{\partial\Omega_R} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{N}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA - \int_{\Omega_R} \boldsymbol{\Sigma} : \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\Omega_R} \mathbf{f}_{\text{mat}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV = 0. \quad (5.17)$$

Die physikalische Interpretation der materiellen Kräfte in einem elastisch-plastischen Körper

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit gelten die kontinuumsmechanischen Ausführungen mit der Anwendung kleiner Deformationen (siehe Abschnitt 2.1.4) auf einen elastisch-plastischen Körper, was bei der Beschreibung metallischer Werkstoffe im technischen Aufgabenbereich der Ingenieur-anwendung keinen relevanten Informationsverlust mit sich bringt. Der maßgebliche Vorteil der Linearisierung für kleine Deformationen ist mit einer signifikanten Simplifizierung der Gleichungssysteme verbunden und ist zudem mit der Verwendung von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen aus dem Kapitel 2.2 physikalisch verträglich. Insgesamt trägt diese Vereinfachung zu einem besseren Gesamtverständnis der bruchmechanischen Zusammenhänge und der Wirkung der Konfigurationskräfte innerhalb einer elastisch-plastischen Struktur bei. Die Gesamtverzerrung sei im Folgenden aus der elastischen, der plastischen und der thermischen Dehnung zusammengesetzt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta. \quad (5.18)$$

Die spezifische *Helmholtz*energie ist per Definition durch die elastischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, die Verfestigungsvariable $\boldsymbol{\kappa}$ und den Ortskoordinaten \mathbf{x} in der Momentankonfiguration festgelegt

$$\psi := \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}), \quad (5.19)$$

wodurch auf den räumlichen Gradienten $\nabla_{\mathbf{x}} \psi$ geschlossen werden kann

$$\nabla_{\mathbf{x}} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\kappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (5.20)$$

Die elastischen Verzerrungen in Gleichung 5.23 werden durch den Ausdruck

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \quad (5.21)$$

ersetzt und die partielle Ableitung der spezifischen *Helmholtz*energie nach dem Verfestigungstensor wird als

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \quad (5.22)$$

verwendet, was zu der folgenden Umformung

$$\nabla_x \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^P - \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta + \mathcal{H} : \nabla_x \boldsymbol{\kappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.23)$$

führt. Dieser Anteil der materiellen Kraft, der die Verfestigungsinformationen des elastisch-plastischen Werkstoffmodells enthält, muss für die spätere FEM-Umsetzung der Konzeptidee ausformuliert und einbezogen werden. Im Falle des *Chaboche*-Modells lautet die Umsetzung diesbezüglich

$$\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Hard,Chaboche}} = \mathcal{H} : \nabla_x \boldsymbol{\kappa} = R : \nabla_x p + \mathbf{X} : \nabla_x \boldsymbol{\alpha}. \quad (5.24)$$

mit den entsprechenden Verfestigungsvariablen bzw. -parametern

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = Q \left(1 - e^{-bp} \right) \quad (5.25)$$

und

$$\mathbf{X} = X_{ij} = \sum_{k=1}^M X_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^M \frac{2}{3} C^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)}. \quad (5.26)$$

Angemerkt sei, dass jedes Werkstoffmodell spezielle Verfestigungsdefinitionen beinhaltet, so dass der gezeigte Anteil aus 5.24 der materiellen Kraft nicht übergreifend für alle elastisch-plastischen Werkstoffmodelle gültig ist. Der räumliche Gradient der Gesamtdehnungen

$$\nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla_x \mathbf{h} + \nabla_x \mathbf{h}^T \right) \quad (5.27)$$

stellt einen Tensor dritter Stufe dar und ergibt bei einem äußeren Skalarprodukt mit dem *Cauchy*schen Spannungstensor die folgende Identität

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} \left(\nabla_x \mathbf{h} + \nabla_x \mathbf{h}^T \right) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \mathbf{h}^T = \nabla_x \mathbf{h}^T : \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.28)$$

Die Herleitung der schwachen Form des lokalen Impulssatzes wird analog zur Herangehensweise im vorherigen Abschnitt durchgeführt mit dem Unterschied, dass nun von dem lokalen Impulssatz in der Momentankonfiguration ausgegangen wird. Ein weiterer Unterschied besteht in der Multiplikation des Impulssatzes mit dem transponierten Verschiebungsgradienten $(\nabla_x \mathbf{u})^T = \mathbf{h}^T$ anstatt mit dem transponierten Deformationsgradienten, so dass aus dem umgeformten Impulssatz

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}^T \cdot (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}^V \quad (5.29)$$

unter Berücksichtigung des Divergenztheorems

$$\mathbf{h}^T \cdot (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \nabla_x \cdot (\mathbf{h}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nabla_x \mathbf{h}^T : \boldsymbol{\sigma} = \nabla_x \cdot (\mathbf{h}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.30)$$

resultiert die folgende Definition

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_x \cdot (\mathbf{h}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}^V. \quad (5.31)$$

Durch Einsetzen der Gleichung 5.31 in die Definition 5.23 wird die Divergenz des *Eshelby*tensors aufgestellt

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^P + \mathcal{H} : \nabla_x \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta + \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}^V + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.32)$$

wobei die rechte Seite der Gleichung zu den materiellen Kräften

$$\mathbf{f}_{\text{mat}} = -\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^P + \mathcal{H} : \nabla_x \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta + \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}^V + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.33)$$

zusammengefasst werden kann. Der *Eshelby*tensor in der Momentankonfiguration und bei Annahme von kleinen Deformationen wird durch die Äquivalenz

$$\Sigma = \psi \mathbf{I} - \mathbf{h}^T \cdot \sigma \quad (5.34)$$

definiert. Aus der lokalen Bilanz der Konfigurationskräfte im Zusammenhang eines elastisch-plastischen Körpers

$$\nabla_X \cdot \Sigma - \mathbf{f}_{\text{mat}} = \mathbf{0} \quad (5.35)$$

kann das globale Gleichgewicht über einen regulären Bereich $\tilde{\Omega}_t$

$$\int_{\tilde{\Omega}_t} (\nabla_X \cdot \Sigma - \mathbf{f}_{\text{mat}}) dv = 0 \quad (5.36)$$

postuliert werden.

5.2. Numerische Lebensdauerberechnung auf Basis materieller Kräfte als thermodynamisches Gesamtkonzept

Im Folgenden wird das thermodynamische Gesamtkonzept zur FE-Simulation des Ermüdungsrissfortschrittes in einem Übersichtsdiagramm dargestellt und zusammenfassend beschrieben.

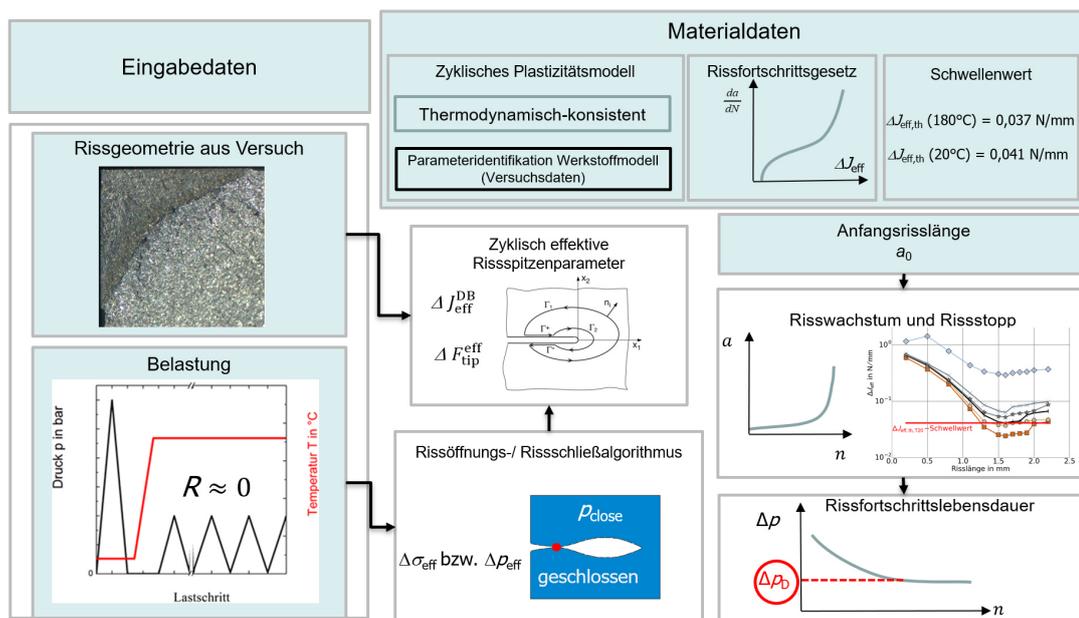


Abbildung 5.1.: Gesamtkonzept

In Abbildung 5.1 sind die typischen Eingabedaten farblich hervorgehoben worden und bestehen grundsätzlich aus nachfolgenden Punkten:

- Eingabe des FE-Modells mit den Abmessungen des untersuchten Bauteils und der Rissgeometrie sowie die zugehörigen Lagerungs- und Lastrandbedingungen.
- Die FE-Materialdaten beschränken sich ausschließlich auf die Wahl von zyklischen Plastizitätsmodellen, die thermodynamisch-konsistenten Restriktionen der kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen einhalten.

- Die Parameteridentifikation für das Werkstoffmodell erfolgt auf Basis der experimentellen Daten und wird mit dem neu entwickelten hybriden Optimierungsprogramm durchgeführt.
- Das Rissfortschrittsgesetz für elastisch-plastische Bruchmechanikanwendungen wird entweder aus Versuchsergebnissen gefolgert oder aus Abschätzungsformeln abgeleitet.
- Die Bereitstellung des Schwellenwertes des zyklischen Riss Spitzenparameters kann aus bruchmechanischen Werkstoffversuchen oder aus der Literatur bezogen werden.
- Die Definition des Anfangsrisses beruht auf Erfahrungswerten/Beobachtungen oder Abschätzungen, die aus mechanischen Berechnungen abgeleitet wurden.

Die erforderlichen Algorithmen zur Berechnung der zyklisch effektiven Größe des Riss Spitzenparameters $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ wurden als Postprocessing-Skript umgesetzt. Kapitel 5.2.2 beschreibt die wichtigsten Bausteine der numerischen Umsetzung. Der Rissöffnungs- bzw. Riss schließalgorithmus ist ein wesentlicher Bestandteil der Bestimmung der effektiven Feldgrößen. Das entsprechende Programm hierzu wurde durch den Autor bereits in dem Forschungsvorhaben [25] realisiert und im Zusammenhang mit dem zyklisch effektiven J -Integral (*Dowling und Begley*) angewendet. Weitere Erläuterungen hierzu sind im Abschnitt 5.2.1 zu finden. Zur Simulation des Rissfortschrittes wurde die Node-Release-Technik, die insbesondere für die Behandlung der vorliegenden Mode-I-Rissfälle geeignet ist, eingesetzt. Die einzelnen Ergebnisse der Rissfortschrittsberechnung können zunächst in einem Diagramm mit dem zyklisch effektivem $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ über der Risslänge a mit der zugehörigen zyklischen Belastungsinformation aufgetragen werden. Wächst der Riss in ein Druckeigen Spannungsfeld, so fallen die Beträge des effektiven Riss Spitzenparameters bis zu einer bestimmten Risslänge. Durch Einzeichnen des entsprechenden Schwellenwertes, kann die Dauerfestigkeit aus einem iterativen FE-Simulationsprozess mit verschiedenen Belastungen ermittelt werden. Fallen die $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}} - a$ -Kurven unter den effektiven Schwellenwert $\Delta J_{\text{eff,th}}$ so kann auf einen dauerfesten Lastzustand bzw. auf einen Risstopp geschlossen werden (siehe Abbildung 5.2). Das Gesamtkonzept wird als thermodynamisch konsistent bezeichnet, da die Einhaltung der thermodynamischen Hauptsätze bei der Anwendung der Werkstoffe im Zusammenhang mit dem risstreibenden Riss Spitzenparameter eingehalten werden. Diesbezüglich sind die folgenden Definitionen hervorzuheben:

- das *Chaboche*-Modell erfüllt den 2. Hauptsatz der Thermodynamik mit der *Clausius-Duhem*-Ungleichung

$$D^P = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \sum_{k=1}^M \frac{2}{3} C^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} \dot{\alpha}_{lm}^{(k)} - R\dot{p} \geq 0 \quad (5.37)$$

- die lokale Bilanzgleichung als Basis zur Definition des thermodynamisch konsistenten Riss Spitzenparameters unter Anwendung des Werkstoffgesetzes nach dem *Chaboche*-Modell lautet:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \Sigma &= -\sigma : \nabla_x \varepsilon^P + \mathcal{H} : \nabla_x \kappa - \sigma : \nabla_x \varepsilon^\Theta + \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}^V + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\sigma : \nabla_x \varepsilon^P + R : \nabla_x p + \mathbf{X} : \nabla_x \alpha - \sigma : \nabla_x \varepsilon^\Theta + \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}^V + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

- sowohl der Riss Spitzenparameter der materiellen Kräfte als auch die Werkstoffdefinition basiert auf der freien spezifischen *Helmholtz*energie, die von gleichen, internen Variablen abhängen, so dass das Gesamtkonzept insgesamt valide bleibt

$$\psi = \check{\psi}(\varepsilon^e, \Theta, \kappa) = \check{\psi}(\varepsilon_{ij}^e, \Theta, p, \alpha_{ij}^{(k)}). \quad (5.39)$$

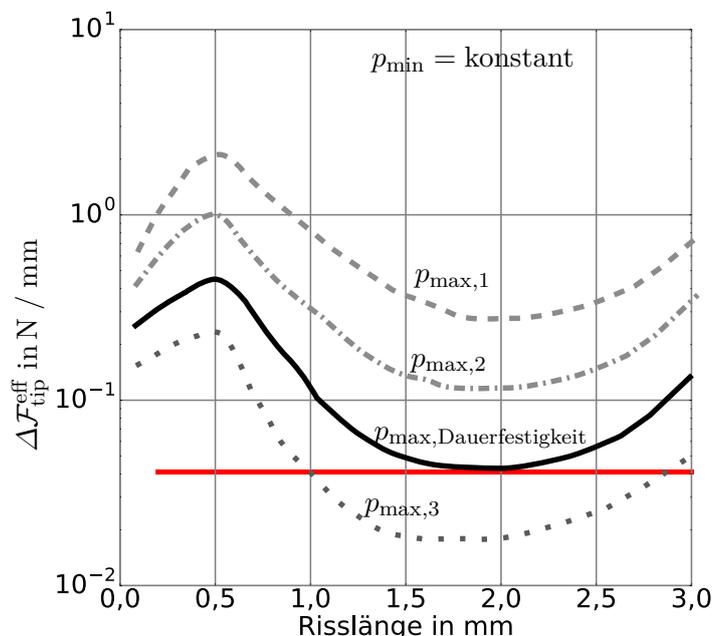


Abbildung 5.2.: Bestimmung der Dauerfestigkeit mit dem Risspitzenparameter $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$
 $p_{\text{max},1} > p_{\text{max},2} > p_{\text{max},3}$

Die Lebensdauer N wird numerisch bestimmt, indem der berechnete effektive Risspitzenparameter verwendet und die Risswachstumsgleichung für die zyklisch effektive Größe $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ integriert wird.

$$\frac{da}{dN} = C_J \left(\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}} \right)^m \quad \text{für } \Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}} > \Delta J_{\text{eff,th}}. \quad (5.40)$$

5.2.1. Numerische Umsetzung des transientes Risschließverhaltens

Der Risschließeffekt und der effektive Anteil des Risspitzenparameters

Im eigentlichen Sinne stellt das Rissöffnen die Aufhebung des Rissuferkontaktes bei steigender Belastung dar, wogegen mit Risschließens der Zustand des erneuten Kontaktes der Rissuferflanken während der Entlastung bezeichnet wird. Im Allgemeinen können die beiden zusammenhängenden Phänomene in einer angerissenen Struktur unter zyklischer Belastung in Abhängigkeit des R -Wertes immer beobachtet werden, so dass sie als Synonyme verwendet werden dürfen. Das Risschließen stellt eine bruchmechanische Kenngröße dar, die direkten Einfluss auf den Rissfortschritt sowie die Schädigungsbewertung einer zyklisch belasteten Struktur zeigt und in bruchmechanischen Berechnungsmodellen einen wichtigen Bestandteil einnimmt. Nach einer kurzen Einführung der experimentellen Ermittlung des Risschließens folgt eine kompakte Übersicht über die analytischen und numerischen Berechnungsmethoden für das plastizitätsinduzierte Risschließen. Die numerischen Simulationstechniken zum Abbilden des Risschließeffektes stützen sich

auf experimentelle Befunde. Im Wesentlichen kann den Forschungsarbeiten entnommen werden, dass sich die experimentellen Ermittlungen des Riss-schließverhaltens durch Verwendung unterschiedlicher Analyseverfahren in ihrem Aufwand unterscheiden und den drei folgenden Gruppen zuordnen lassen: Aufnahme der Nachgiebigkeits- oder Steifigkeitsänderung aus globalen Kraft-Verschiebungs- bzw. lokalen Kraft-Dehnungs-Daten (globale bzw. lokale Compliance-Verfahren), direkte Beobachtung der Rissfront und schließlich indirekte Beobachtung der Rissfront mittels einer Auswertung der Riefenbreite auf der Bruchfläche. *Allison* [6] gibt beispielsweise eine umfangreiche Übersicht über bewährte Prozeduren zur Bestimmung von Riss-schließlasten. Die meistverwendete Methode zur praktischen Erfassung des Riss-schließzeitpunktes wird aus der sogenannten Compliance-Methode abgeleitet (vgl. [9]). Eine kompakte Zusammenfassung über die gängigsten Methoden der Compliance-Technik können der ASTM-Norm E 647 [18] entnommen werden. Die Änderung der Nachgiebigkeit oder Steifigkeit im Rissnahbereich (engl. *mechanical compliance*) kann mit einem aufgesetzten, die Rissflanken überbrückenden Riss-aufweitungsgeber (engl. *clip gauge*) oder mit einem Dehnungsmessstreifen in unmittelbarer Nähe der Rissflanken (gelegentlich auch auf der dem Anriss gegenüberliegenden Probenseite) gemessen werden. Für die Versuchsauswertung der Riss-schließ- und Riss-öffnungslast werden Extrapolationsmethoden anhand des F - ε -Diagramms oder mittels der Compliance-Offset-Methode angegeben, da i.d.R. die gemessenen globalen Verschiebungsdaten mit hohen Streuungen versehen sind. *Vormwald* [201] verwendet in seiner Arbeit eine einfache Versuchstechnik zur Riss-schließ- und Riss-öffnungsbestimmung. Hierbei appliziert er einen Dehnungsmessstreifen (DMS) im Bereich der Oberfläche der Rissflanke und erfasst damit die lokale Dehnung $\varepsilon_{\text{local}}$. Durch die Auswertung der Spannungs- $\varepsilon_{\text{local}}$ -Hysterese kann der Zeitpunkt der Steifigkeitsänderung aufgrund von Rissflankenkontakt ermittelt werden und so die Riss-schließ- und Riss-öffnungslasten gemessen werden. Anhand der experimentellen Versuchsdaten erkennt er, dass die lokalen Riss-öffnungs- und Riss-schließdehnungen übereinstimmen, und implementiert diesen Befund in eine analytische Riss-öffnungsberechnung in dem inzwischen weit verbreiteten Kurzrisssmodell für die Lebensdauerbewertung [201] von zyklisch belasteten metallischen Strukturen. In einer weiteren Veröffentlichung [202] stellt *Vormwald* für ein komplettes Schwingspiel die Spannungs- $\varepsilon_{\text{local}}$ -Hysterese der Spannungs- $\varepsilon_{\text{global}}$ -Hysterese gegenüber und folgert hieraus, dass bei kurzen Rissen der Riss-öffnungs- und Riss-schließzeitpunkt mit lokalen Dehnungsmessungen zuverlässiger erfasst werden kann, im Gegensatz zu rein globalen Messverfahren. *Kontermann* [101] dagegen setzt den Schwerpunkt seiner experimentellen Verfahren auf die Compliance-Methode und wertet hierzu global ausgebildete Kraft-Dehnungs-Hystereseschleifen hinsichtlich der Steifigkeitsänderung am aufsteigenden bzw. am absteigenden Hystereseast aus. Durch die Verwendung globaler Messgrößen der Kraft und Verformung ist eine verhältnismäßig einfache Bestimmung der Riss-öffnungs- und Riss-schließgrößen anhand der abrupten Steifigkeitsänderung möglich. Mit dem direkten Beobachtungsverfahren bestimmt beispielsweise *McClung* in [124] die Riss-öffnungs- und Riss-schließlast durch optische Vermessung an der Oberfläche der Rissflanke und die entsprechende Betrachtung des Rissflankenkontaktes. Die Ursachen für das beobachtete Riss-öffnungs- und Riss-schließverhalten sind vielfältig und grundsätzlich von bestimmten Randbedingungen abhängig. Die wichtigsten Mechanismen lassen sich nach *Suresh* [189] und *Suresh und Ritchie* [190] in

- plastizitätsinduziertes Riss-schließen („PICC“, Plasticity Induced Crack Closure),
- rauigkeitsinduziertes Riss-schließen,
- flüssigkeitsinduziertes Riss-schließen,
- oxidationsinduziertes Riss-schließen,
- und phasenumwandlungsinduziertes Riss-schließen

unterteilen. In realen Bauteilen treten diese Mechanismen oft gleichzeitig auf und können mit den bekannten Messmethoden nicht voneinander isoliert erfasst werden. Der PICC-Effekt wird

im Rahmen einer Rissfortschrittsuntersuchung von metallischen Strukturen als der bedeutendste Mechanismus angesehen und findet daher in dieser Arbeit ausschließliche Beachtung. Als Rissspitzenparameter eignet sich i.A. je nach Anwendungsfall der zyklische Spannungsintensitätsfaktor ΔK , das zyklische J -Integral ΔJ oder $\Delta CTOD$.

Plastizitätsinduziertes Risschließen (PICC)

Das PICC beruht ursprünglich auf den Erkenntnissen aus den fundamentalen Arbeiten von *Elber* [60, 61]. Im Rahmen seiner Forschungstätigkeit konnte er experimentell nachweisen, dass sich die Ermüdungsrissse infolge einer zyklischen Zugbelastung mit konstanter Amplitude während der Belastung nicht bei der Minimallast öffnen bzw. während der Entlastung bereits vor Erreichen der Minimallast schließen. Daraufhin folgerte er, dass der Rissuferkontakt starken Einfluss auf die treibende Kraft des Ermüdungsrisswachstums hat, so dass während des geschlossenen Risszustandes nicht die komplette Rissbeanspruchung für die Ausbreitung des Risses verantwortlich sein kann. Die schädigende Wirkung wird einer effektiven zyklischen Rissspitzenbeanspruchung, die den Rissfortschritt insbesondere bei offenem Risszustand fördert, zugesprochen. Ausgehend von der *Paris*-Definition [153, 152, 151], die einen empirisch begründeten Zusammenhang zwischen der Risswachstumsrate und der Schwingweite des Spannungsintensitätsfaktors für den Bereich II⁵ mit der Gleichung

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (5.41)$$

definiert, überträgt *Elber* seine Befunde in Bezug auf die effektive Schwingweite des Spannungsintensitätsfaktors. Zunächst wird kurz auf das *Paris*-Gesetz, das in seiner ursprünglichen Form ein Risswachstumsgesetz ohne effektive Schwingweiten des Spannungsintensitätsfaktors definiert, eingegangen. Die Rissfortschrittskonstanten C und m werden experimentell bestimmt, wobei C sowohl vom Werkstoff als auch vom Spannungsverhältnis $R = \frac{K_{\min}}{K_{\max}}$ abhängt, wohingegen m eine reine Werkstoffkonstante ist. *Elber* modifizierte somit das Rissfortschrittsgesetz von *Paris und Erdogan* [152] mit Hilfe des effektiven Rissbeanspruchungsparameters ΔK_{eff} :

$$\frac{da}{dN} = C_{\text{eff}} \Delta K_{\text{eff}}^m \quad \text{mit} \quad \Delta K_{\text{eff}} = K_{\max} - K_{\text{op}}. \quad (5.42)$$

Es soll darauf hingewiesen werden, dass die Rissfortschrittskonstante C_{eff} i.d.R. nicht mit dem Wert C aus dem *Paris*-Gesetz 5.41 übereinstimmt. Die Rissöffnungs- bzw. Rissschließlast wird üblicherweise in der Nachgiebigkeitsänderung oder Steifigkeitsänderung der Lastverschiebungskurve bestimmt, die als Knick im F - v -Diagramm am Belastungs- bzw. Entlastungsast sichtbar ist (vgl. [60, 61, 189]). Die Korrelation des effektiven Rissbeanspruchungsparameters ΔK_{eff} mit der Rissfortschrittsrate $\frac{da}{dN}$ nach Gleichung 5.42 konnte für viele Metalle unter verschiedenen zyklischen Belastungsbedingungen nachgewiesen werden (siehe beispielsweise [162, 9, 189]). Im Bereich I wird der Kurvenverlauf durch Mikrostruktur, Mittelspannung und umgebendes Medium stark beeinflusst. Im Bereich II spielen die eben genannten Einflussgrößen eine geringere Rolle. Im Bereich III ist der Einfluss wiederum stark, außerdem kommt der Einfluss der Probenstärke hinzu. Darüber hinaus liefert das Rissschließphänomen eine Erklärung für die Abhängigkeit der Rissfortschrittsrate von dem Lastverhältnis R kurz R -Abhängigkeit. Der Mittelspannungseinfluss zeigt sich bei höherem Lastverhältnis R mit einer höheren Rissfortschrittsrate und einem niedrigerem Schwellenwert, so dass die Kurven im doppellogarithmischen $\frac{da}{dN}$ - ΔK_{eff} -Diagramm nach links verschoben werden. Eine Übersicht über weitere Einflussfaktoren auf den Rissfortschritt langer Risse⁶, wie z.B. Mikrostruktur, Werkstoff, umgebende Medien, Temperatur, Lastfrequenz und mehrstufige Belastung, wird in [162] geboten. Die ausgebildete plastische Zone

⁵Zur Beschreibung des gesamten Verlaufes der Rissfortschrittskurve wurde das *Paris*-Gesetz nach den Ansätzen von *Erdogan und Ratwani* [62] sowie durch die *Forman/Mettu*-Gleichung [66] unter Ergänzung sowohl des Schwellenwertes ΔK_{th} der Ermüdungsrissausbildung als auch der Risszähigkeit K_{IC} definiert.

⁶Einflüsse auf den kurzen Riss werden in der Literatur [162] gesondert in Kapitel 7 behandelt.

an und hinter der Risspitze hat erheblichen Einfluss auf das Rissöffnungs- und Rissschließverhalten. Während der Rissverlängerung um ein Risslängeninkrement wächst der Riss in die plastische Zone hinein, so dass nach dem abgeschlossenen Rissfortschritt erkennbare Plastifizierungen entlang der Rissufer verbleiben. Hier spricht man von dem Phänomen der plastischen Nachlaufzone, die sich während des Risswachstums ausbildet und die für den PICC-Effekt verantwortlich gemacht wird. Motiviert durch die Pionierarbeit von *Elber* [60, 61] und fasziniert durch den Effekt der plastischen Nachlaufzone an den Rissufern entstanden weitere Arbeiten, um das PICC-Verhalten zu untersuchen. Hierzu sind insbesondere die sogenannten Fließstreifenmodelle, die im Gegensatz zur linearen Schadensakkumulation zusätzlich Reihenfolgeeffekte aufgrund variabler Lastamplituden berücksichtigen können, zu nennen. Diese analytischen Methoden, die auch als Strip-Yield-Modelle bezeichnet werden, wurden grundsätzlich auf Basis des Modells nach *Dugdale* [57] entwickelt. Im Gegensatz zum *Dugdale*-Modell bei dem sich die Plastifizierungen auf einen schmalen Streifen vor dem Riss beschränken, werden beim Strip-Yield-Modell auch Plastifizierungen entlang der Rissflanken auf einem infinitesimalen dünnen Streifen in die Berechnung einbezogen. Aus umfangreichen experimentellen Untersuchungen sind zahlreiche Näherungsbeziehungen zur Ermittlung der Rissöffnungsspannung für den einachsigen Lastfall hervorgegangen. Die wohl bekannteste und in der Fachwelt am weitesten verbreitete Näherungsdefinition zur Ermittlung von Rissöffnungsspannungen, welche Eingang in die aktuelle FKM-Richtlinie gefunden hat, geht auf *Newman* [138] zurück. Die Bestimmungsgleichung zeigt die Abhängigkeit der Rissöffnungsspannung von der Ober(nenn)spannung der Lastfolge, des Spannungsverhältnisses R , der Fließspannung, der Zugfestigkeit und dem Constraintfaktors, der zwischen dem ebenen Spannungs- und ebenen Verzerrungszustand unterscheidet. Die ursprüngliche Beziehung nach *Newman* stützt sich auf Versuchsdaten von Aluminiumlegierungen und zeigt bei ihrer Anwendung Abweichungen bzw. überschätzte Rissöffnungsspannungen für Stähle. *Vormwald* [201] umgeht diese Diskrepanz, indem er die statische Dehnungsgrenze durch die Zyklische ersetzt und diese Änderung in seinem Kurzrisssmodell zur Anrisslebensdauer vorhersage verwendet. Weitere Arbeiten, die sich mit der analytischen Modellierung des Rissschließverhaltens im Zusammenhang mit dem Fließstreifenmodell befassen, veröffentlichten *Seeger* [174], *Dill und Saff* [47], *Führung und Seeger* [68], *Budiansky und Hutchison* [31], *Ibrahim et al.* [86] sowie *Wang und Blom* [206], die alle zusammen auf der Weiterentwicklung des *Dugdale*-Modells [57] bzw. der *Newman*-Beziehung aufbauen. *Dankert* [43] zeigt in seiner Untersuchung von Rissöffnungslasten in Kerbspannungsfeldern, dass das ursprüngliche *Newman*-Modell nicht ausschließlich auf die Anwendung auf homogene Werkstoffbeanspruchung beschränkt ist, sondern auch qualitativ gute Ergebnisse bei inhomogener überelastischer Beanspruchung liefert. Eine Erweiterung des *Newman*-Modells auf mehrachsige Beanspruchungen wurde von *Savaidis* [168] vorgeschlagen. In den Arbeiten [193, 194, 195, 25] wird über Dauerfestigkeits- bzw. Schwingfestigkeitsberechnungen für autofrettierte und nicht autofrettierte Komponenten bei zyklischer Belastung unter Verwendung elastischer und elastisch-plastischer Bruchmechanik umfangreich berichtet. Im Rahmen dieser Arbeiten kommen nicht ausschließlich FE-Simulationen zum Einsatz, zusätzlich wird die Anwendung des Fließstreifenmodells studiert mit dem Ziel vereinfachte Berechnungsmethoden sukzessive weiterzuentwickeln. Aufgrund der hohen Ergebnisqualität, die durch experimentelle Daten bestätigt bzw. validiert wurde, etablierten sich die erweiterten Fließstreifenmodelle als ein effizientes Berechnungswerkzeug zur Lebensdauerbewertung von Bauteilen. Das (semi)analytische Modell nach *Schlitzer* [170] zählt heute zu einer der leistungsfähigsten Modifikationen des ursprünglichen Fließstreifenmodells. Zu den bedeutendsten Erweiterungen neben der Möglichkeit der Einbeziehung des Eigenspannungsverlaufes im Untersuchungsbereich, der variablen Lastvorgaben und der thermischen Belastung bietet das erweiterte Fließstreifenmodell nach *Schlitzer* eine Berücksichtigung von Rissspitzenparametern mit Hilfe von bruchmechanischen Gewichtsfunktionen und der Mikrostruktur. Solche Konzepte stellen eine wichtige Ergänzung der bruchmechanischen Lebensdauerbewertung dar. Hierdurch wird eine analytische Bewertung druckeigenspannungsbehafteter Bauteile unter variabler

Lastamplitude ermöglicht.

Beschreibung des Rissöffnens und Risschließens mit Hilfe der FEM

Die numerische Simulation eines wachsenden Risses innerhalb einer duktilen Struktur bietet zur Lösung von bruchmechanischen Fragestellungen hervorragende Möglichkeiten. Für diesen Zweck wurden verschiedene Simulationstechniken entwickelt, die bei bestimmten bruchmechanischen Aufgabenstellungen erfolgreich eingesetzt werden, wobei zu den heute bekanntesten Methoden

- die Technik der Knotentrennung oder Node-Release-Technik,
- die Technik der Elementmodifikation,
- die Methode der mitbewegten Rissspitzenelemente,
- die adaptiven Vernetzungsstrategien,
- die Kohäsivzonenmodelle,
- die schädigungsmechanischen Modelle
- und der Einsatz der XFEM (engl. *Extended Finite Element Method*)

zählen. In dieser Arbeit wird ausschließlich die Node-Release-Technik (NRT) verwendet, die im Folgenden beschrieben und diskutiert wird. Die NRT ist die einfachste Methode, um Risswachstum in einem FEM-Netz zu simulieren, indem die Auftrennung eines Knotens um ein Inkrement Δa entlang der Elementkante bis zum nächsten Knoten vergrößert wird. Risswachstum bedeutet bei kontinuumsmechanischer Betrachtung eine Änderung der Randwertaufgabe (RWA), indem durch die Verlängerung des Risses neue Rissufer mit veränderten Randbedingungen entstehen. Zusätzlich ist ein leistungsfähiger FE-Algorithmus und die Verwendung von zyklisch elastisch-plastischen Werkstoffmodellen mit dem Fokus auf die Entwicklung der inelastischen Zone um die Rissspitze aufgrund zyklischer Belastung erforderlich. Hierdurch wird gleichzeitig eine angemessene Beschreibung der plastischen Nachlaufzone erreicht, was in einer präziseren Rissfortschrittssimulation mit realistischer Darstellung des Risschließverhaltens resultiert. Weitere Details zur Umsetzung der NRT, wie die Definition von Risschließen und Rissöffnen, die Wahl der Kontaktformulierung, die Entscheidung, ob Rissfortschritt zum Zeitpunkt der Minimal- oder Maximallast aktiviert wird und die Frage, welche Anzahl an Zyklen pro Rissfortschritt sinnvollerweise anzusetzen ist, haben einen großen Einfluss auf das Ergebnis und damit auf die effektive Größe des bruchmechanischen Rissspitzenparameters. Für die am häufigsten in der Literatur genannte Definition eines geöffneten bzw. geschlossenen Risses wird die Kontaktauswertung des ersten Knotens vor der Rissspitze auf dem Rissufer durchgeführt [154, 184, 10, 112, 111, 167, 11]. Ein Riss gilt als geschlossen sofern der besagte Knoten in Kontakt mit dem gegenüberliegenden Rissufer ist. Im Rahmen der impliziten FE-Simulation ist das Eintreten des Kontaktes oder Risschließzeitpunktes durch eine angemessene Unterteilung der Gesamtlast in mehrere Lastschritte, beispielsweise während einer Entlastung im ausgewerteten Bereich des absteigenden Hysteresehalbastes, präzise bestimmbar. Das Rissöffnen hingegen wird durch den Zeitpunkt oder Lastschritt definiert ab dem der Knoten keinen Kontakt mehr zu dem gegenüberliegenden Rissufer hat, was i.d.R. während der Belastung im Bereich des aufsteigenden Hysteresehalbastes eintritt. Die Auswertung des ersten Knotens hinter der Rissspitze stößt in der elastisch-plastischen Bruchmechanik insbesondere bei großen Verformungen an seine Grenzen. Aufgrund dieser Tatsache empfehlen [38, 176] stattdessen den zweiten Knoten vor der Rissspitze auszuwerten. Vielfach verwendete Definitionen mit einer Kontaktanalyse des gesamten Rissufers wurden von *Dill und Saff* [47] und *Solanki* [185] vorgeschlagen. Ein weiteres oft verwendetes Risschließkriterium stellt die Betrachtung des Vorzeichens der Spannung an der

Riss Spitze (engl. *Crack-Tip-Stress*) dar. Ein geschlossener Riss ist hier durch einen Druckspannungszustand an der Riss Spitze gekennzeichnet. Nicht unerwähnt sollten die Riss schließdefinitionen, die auf Basis von experimentellen Erkenntnissen über das Riss schließen und -öffnen anhand der globalen berechneten Kraft-Verschiebungsdaten abgeleitet wurden, bleiben [176]. Die Verfahren liefern stark modellierungs- und netzabhängige Ergebnisse für den Riss schließ- und Rissöffnungszeitpunkt. Es sind vielfältige Literaturempfehlungen hinsichtlich der Elementanzahl und Elementgröße vorhanden, wobei die Empfehlungen stets in Abhängigkeit der Größe der zyklisch ausgebildeten plastischen Zone angegeben sind. Dennoch sollte abschließend die Sensitivität der Ergebnisse in Bezug auf die Netzqualität durch eine Konvergenzstudie geprüft und gegebenenfalls die Netzdichte erhöht werden. Eine weitere wichtige Modellierungsabhängigkeit der NRT ist durch den Einfluss des eingesetzten Werkstoffmodells gegeben. *Cochran* [38, 37] führt die Netzabhängigkeit sowie den Einfluss der Zyklenzahl hinsichtlich des Riss schließens ausschließlich auf das eingesetzte Werkstoffmodell und dessen Abbildung des transienten Werkstoffverhaltens zurück. Insbesondere hebt er den Effekt der unterschiedlichen Schwingspielanzahl auf die Akkumulation inelastischer Dehnungen im Riss spitzenbereich hervor und begründet hiermit die Abweichungen in den Ergebnissen. Es werden exemplarisch Rissöffnungsbeiträge, Verschiebungsgrößen und das Spannungs-Dehnungs-Verhalten im Riss spitzenbereich resultierend aus FE-Simulationen unter Verwendung eines Materialmodells mit elastisch-idealplastischer, bilinear-kinematischer und nichtlinear-kinematischer Verfestigungsregel⁷ verglichen. Die Ergebnisse bestätigen, dass neben dem Modell mit der nichtlinearen Verfestigungsregel auch Modelle, definiert mit einem ebenen Verzerrungszustand, vergleichsweise zu Modellen, definiert mit einem ebenen Spannungszustand, eine höhere Ratchettingneigung zeigen. Die Konsequenz hieraus ist ein verspätetes Eintreten des Riss schließens für die Simulationsergebnisse aufgrund der überhöhten Akkumulation der plastischen Dehnungen im Vergleich zur Messung. Abschließend wird die Empfehlung gegeben, dass insbesondere bei Verwendung von Werkstoffmodellen mit nichtlinear-kinematischer Verfestigung und ebenem Verzerrungszustand das Konvergenzverhalten der untersuchten Riss spitzengrößen nur mit einer sinnvollen Anzahl an Lastschritten zwischen den Rissfortschrittsinkrementen Δa (Node-Release) und einer angemessenen Netzdichte zu verbessern ist. Ebenfalls ähnliche Fragestellungen zur Netzqualität und der Ergebnisabhängigkeit des plastizitätsinduzierten Riss schließverhaltens von Werkstoffmodellen, die jedoch das zyklische elastisch-plastische Materialverhalten präziser beschreiben als das *Armstrong-Frederick*-Modell, wurden beispielsweise von *Jiang et al.* [88] diskutiert. Für die Simulation der Riss schließgrößen wird ein Materialmodell mit bilinear-kinematischer Verfestigung sowie ein leistungsfähigeres Werkstoffmodell⁸ verwendet und die Ergebnisse der beiden PICC-Simulationen gegenübergestellt. Die Hauptaussage diesbezüglich ist, dass die Rissöffnungs-niveaus bei Verwendung des *Jiang*-Modells eine geringere Sensitivität gegenüber der Netzdichte zeigen als das Werkstoffmodell mit der bilinear-kinematischen Verfestigungsregel. Weitere Arbeiten [150, 194, 195] zum Einsatz der NRT bei Simulationen vom Rissfortschritt in Kreuzbohrungsproben mit Druckeigen Spannungsfeldern, wobei vergleichbare Werkstoffmodelle wie das *Jiang*-Modell verwendet wurden, zeigen den Einfluss bestimmter Modellierungstechniken auf die Ergebnisse. Grundsätzlich wird in diesen Arbeiten Wert auf eine bestimmte Schwingspielzahl zwischen den einzelnen Rissfortschrittsinkrementen gelegt, indem die endgültige Anzahl an Lastschritten in Abhängigkeit von einer abgeschlossenen Stabilisierung der Umlagerung der plastischen Zone im Riss spitzenbereich bestimmt wird. Der Stabilisierungszustand bzw. -zeitpunkt steht im direkten Zusammenhang zum zyklischen Kriech- und Wechselverformungsverhalten des definierten Werkstoffmodells. In dem Forschungsvorhaben [25] wird eine umfangreiche Identifikation der Materialparameter auf Basis von experimentellen Daten durchgeführt, wodurch die Qualität der Rissfortschrittssimulation wesentlich verbessert wird. Die Versuchsbasis für die Parameteridentifikation mit einem neu entwickelten Optimierungspro-

⁷ *Armstrong-Frederick*-Modell: Werkstoffmodell mit ausschließlich nichtlinear-kinematischer Verfestigungsregel und einem Rückspannungstensor.

⁸ *Jiang*-Modell [89, 90]: Werkstoffmodell mit isotroper, kinematischer Verfestigungsregel und weiteren Zusatzvariablen für das transiente Werkstoffverhalten.

gramm bilden neben den statischen Werkstoffkennwerten zusätzlich die zyklischen kraft- und dehnungsgeregelten Versuchsdaten. Ebenfalls ein vielfach diskutiertes Detail der NRT ist die Festlegung des Zeitpunktes bei dem ein Rissfortschrittsinkrement realisiert und die Änderung der Randbedingung (Node-Release) umgesetzt wird. Nach [123, 211, 10] führt eine Node-Release-Umsetzung zum Zeitpunkt der Minimallast im Vergleich zur Maximallast zu keinen Unterschieden bezüglich der berechneten Riss-schließgrößen. Eine detaillierte Übersicht gibt *Matos* [121] samt umfangreichen Tabellen zu den entsprechenden Arbeiten, die eine Maximallast- oder Minimallastdefinition bevorzugen, an. In [177, 183, 215, 88, 80, 38] legen die Autoren den Rissfortschritt bei Maximallast fest, während in [156, 12, 120, 121, 150, 25] Rissfortschritt bei Minimal-last implementiert wird. Die numerische Stabilität spricht für die Definition des Rissfortschritts zum Zeitpunkt der Minimallast, da das plötzliche Wegfallen der Lagerbedingung am Knoten und die hierdurch ausgelöste unrealistische kinematische Reaktion bei geschlossenem Riss, beispielsweise durch den definierten Kontaktalgorithmus, ausgeglichen werden kann. Diese Möglichkeit entfällt i.d.R. bei der Node-Release-Variante mit der Maximallast. Für Abhilfe sorgt hierbei ein zusätzliches Berechnungsinkrement, das nach dem Lösen der Randbedingung bei konstant gehaltener Maximallast eingebaut wird, so dass bei der Maximallast-Methode die numerische Stabilität verbessert werden kann [16]. In einer ähnlichen Weise implementiert *Zerres* [213] die NRT in der Rissfortschrittssimulation, jedoch aktiviert er das Knotenlösungsverfahren erst bei einer Teilentlastung von 90% der Maximallast. Die Motivation hierfür wird unter anderem mit der numerischen Stabilität hinsichtlich der korrekten Funktionsweise der Plastizitätsmodelle in einer FE-Simulation begründet, wie z.B. der Einhaltung der Normalenregel und Konvexitätsforderung. Danach werden nach dem Entlastungslastschritt 10 Schwingspiele zur Stabilisierung des Spannungszustandes vor der Riss-spitze verwendet. Die NRT ist streng genommen nur dann anwendbar, wenn der Pfad der Rissausbreitung im Bauteil bereits bekannt ist oder die Richtung des Risspfades bzw. der Rissablenkungswinkel durch etablierte Bruchkriterien, beispielsweise im Zusammenhang mit einer Mixed-Mode-Beanspruchung, erfasst wurde. Trotz dieser Beschränkungen ist die Technik für die Bestimmung der Rissbeanspruchung in standardisierten bruchmechanischen Prüfkörpern im Modus-I-Fall sehr gut geeignet. In dieser Arbeit wird das Modellierungsverfahren NRT für die Rissfortschrittssimulation einer CT-Probe (Modus-I) und einer autofrettierten Kreuzbohrungsprobe verwendet.

Beschreibung der eingesetzten NRT in der FE-Simulation

Zur Simulation eines Rissfortschrittes wird eine Verlängerung des Risses mit dem Node-Release-Verfahren (engl. *Node Release Technique*) realisiert, indem die Lagerungsrandbedingung an der Riss-spitze in jedem Rissfortschrittsinkrement gelöst wird. Damit die Technik der Knotentrennung angewendet werden kann, ist es im Grunde erforderlich, dass der Pfad der Rissausbreitung im Bauteil bereits bekannt ist. Auf diese Weise können die Elemente des Netzes entsprechend ihrer Orientierung und Größe angeordnet werden. Wenn jedoch der Pfad der Rissausbreitung im Bauteil nicht bekannt ist, kann die Lösung stark von der Netzanordnung abhängen. Die effektivste Anwendung dieses Verfahrens erfolgt hauptsächlich in Verbindung mit Standardbauelementen. Daher müssen Bruchkenngrößen mit robusten Methoden wie den J -Integralen bestimmt werden. Das Verfahren bleibt äußerst nützlich, um in Simulationen die Kinematik der Rissausbreitung nachzuvollziehen und auf dieser Grundlage die Beanspruchungen des Risses zu berechnen. Dies gilt insbesondere, wenn der Bruchverlauf bekannt ist. Die Methode wird häufig zur Analyse von bruchmechanischen Prüfkörpern angewendet. Dabei werden aus den gemessenen Beziehungen zwischen der Risslänge a (im Modus-I-Fall) und der Probenbelastung (Kraft, Weg) mithilfe von Simulationen die entsprechenden bruchmechanischen Kenngrößen bestimmt. Dadurch entsteht eine Erweiterung des Risses um eine Länge entsprechend der Kantenlänge eines Elements oder gegebenenfalls um mehrere vorgegebene Kantenlängen. Im einfachsten Fall einer Modus-I-Beanspruchung des Risses breitet sich der Riss in einer geradlinigen Form aus.

Durch das abrupte Entfernen der Lagerungskräfte würde es zu einer plötzlichen Entlastung im Bereich der Risspitze kommen, was zu einer erheblichen Verfälschung der mechanischen Feldgrößen und der plastischen Zone in diesem Bereich führen kann. Abhilfe hierfür bringt die bereits nach *Zerres* [213] praktizierte Methode des Knotenlösezeitpunktes, beim Entlastungsschritt (90% der Entlastungslast). Diese kommt auch in dieser Arbeit zur Anwendung. Im Kontext der Rissfortschrittssimulation der Kreuzbohrungsprobe (3D-Modell) gemäß Abbildung 6.20 werden spezifische Partitionen oder vollständige Lagerungssegmente gelöst, um das Wachstum der Rissoberfläche im entsprechenden Zeitschritt für den Rissmodus-I zu simulieren. Die Kontaktebene spielt eine wichtige Rolle im programmierten Rissschließalgorithmus für die Bestimmung des Rissöffnungs- bzw. Rissschließzeitpunktes sowie der Rissöffnungs- bzw. Rissschließlasten. Es ist wichtig anzumerken, dass bei der vorgestellten Technik der Knotentrennung die Energiedissipation durch den Bruchvorgang selbst nicht berücksichtigt wird. In Anbetracht dessen erscheint es umso wichtiger, einen Rissspitzenparameter zu verwenden, der die Einbeziehung der thermodynamischen Hauptsätze in Verbindung mit dem Node-Release-Verfahren ermöglicht.

Bestimmung des Rissöffnungs- und Rissschließparameter

Der Aufbau des Algorithmus lässt sich in vier Hauptbestandteile gliedern (siehe Abbildung 5.3). Im ersten Schritt werden die Daten aus der Ergebnisdatei der FE-Berechnung ausgelesen. Anschließend wird im nächsten Ablaufschritt ermittelt, ob die einzelnen Partitionen geöffnet oder geschlossen sind. Die einzelnen Partitionen werden durch die entsprechenden Längen des Rissfortschrittsinkrements festgelegt. Im dritten und letzten Teil des Algorithmus erfolgt die Ermittlung des Lastinkrements (auch Zeitpunkt genannt), in dem der Riss bestehend aus den einzelnen Partitionen der Rissoberflächen schließt oder öffnet.



Abbildung 5.3.: Gliederung vom Algorithmus COPEN zur Bestimmung der Rissöffnungs- und Rissschließigenschaften

Die Funktion zur Ermittlung der Distanz der Kontaktpartner COPEN (engl. contact opening), die bereits in dem FE-Programm Abaqus standardmäßig integriert ist, wird in dem Algorithmus zur Ermittlung des Verschiebungswertes senkrecht zur Rissöffnungsebene eingesetzt. Negative Werte der COPEN-Ausgabe deuten auf einen Kontakt der Kontaktflächen der Kontaktpartner hin, positive Werte hingegen bestätigen keine Berührung der Kontaktpartner bei dem untersuchten Lastzeitpunkt. Die ausgelesenen Daten werden zunächst in einem temporären Dictionary (Begriff aus Programmiersprache Python) als Modus-I-Information gespeichert. Die Partitionen sind ein wichtiger Bestandteil der Nodal-Release-Technik. Jede dieser Partitionen stellt ein mögliches Rissfortschrittsinkrement dar, das durch Lösen der entsprechenden Randbedingung an der aktuellen Partitionsfläche im Rahmen des Node-Release-Verfahrens die aktuelle Risslänge bzw. Rissoberfläche definiert. Beim Lösen der Randbedingungen der nächsten Rissinkrement-Partition besteht die neue Rissoberfläche aus der alten und neuen Partition. Im dritten Ablaufschritt des Algorithmus erfolgt die Auswertung der Risskontakteigenschaften, um dem Lastzustand ein Rissöffnen oder Riss schließen zuzuordnen. Alle Knoten der aktuellen Rissoberfläche sind Untersuchungsgegenstand der Prozedur für die Riss schließ- und Rissöffnungsdefinition. Der Riss zählt als geöffnet, wenn alle Partitionen als geöffnet gelten, d.h. alle Knoten des einen

Rissufer vor der Risspitze haben keinen Kontakt mit dem gegenüberliegenden Rissufer. Zur Bestimmung des Rissöffnungsstatus werden in einer Schleife alle Zeitschritte durchlaufen. Innerhalb dieser werden die Partitionen mittels einer weiteren Schleife durchlaufen. Es wird die Anzahl der Partitionen ermittelt, die im aktuellen Zeitschritt geöffnet ist, sowie die Anzahl der Partitionen, die im aktuellen Zeitschritt öffnen können. Der Riss ist geschlossen, wenn mindestens eine Partition als geschlossen zählt, d. h. mindestens ein Knoten hat Kontakt mit dem gegenüberliegenden Rissufer bzw. der Rissoberfläche. Bei starken Deformationen und Plastifizierungseffekten sowie unter bestimmten Voraussetzungen kann es passieren, dass Riss schließen ausbleibt, so dass das Riss schließkriterium erweitert werden muss. Die hier angewendeten Untersuchungen zeigten jedoch keinen Bedarf für eine solche Erweiterung des Algorithmus. Die Kontaktanalyse wurde in dieser Arbeit aufgrund der Möglichkeit der Symmetrienausnutzung eines Modus-I-Risses mit Hilfe einer konstruierten Hilfsebene bzw. Symmetrieebene innerhalb des FE-Modells umgesetzt. Daher ist die Kontaktdefinition zwischen der Symmetrieebene und der aktuellen Rissoberfläche maßgebend und stellt eine Kontaktinteraktion bestehend aus den beiden Kontaktpartnern Hilfsebene und dem Körper dar. Die Analyseergebnisse mit Hilfe der COPEN-Funktion lassen eindeutig auf einen bestehenden oder nicht bestehenden Kontakt zwischen den Kontaktkörpern schließen. Durch die Bestimmung des Rissöffnungs- und Riss schließzeitpunktes kann zusätzlich im Modell auf den aktuellen Betrag der Rissöffnungs- und Riss schließlast zugegriffen werden, so dass hierdurch im Gesamtkonzept der PICC-Effekt vollständig einbezogen werden kann. In Abbildung 5.4 wird der Ablaufplan des Algorithmus zur Bestimmung der Riss schließ- und Riss öffnungseigenschaften, die für die Berechnung der zyklisch effektiven Riss spitzenparameter von großer Bedeutung sind, gezeigt.

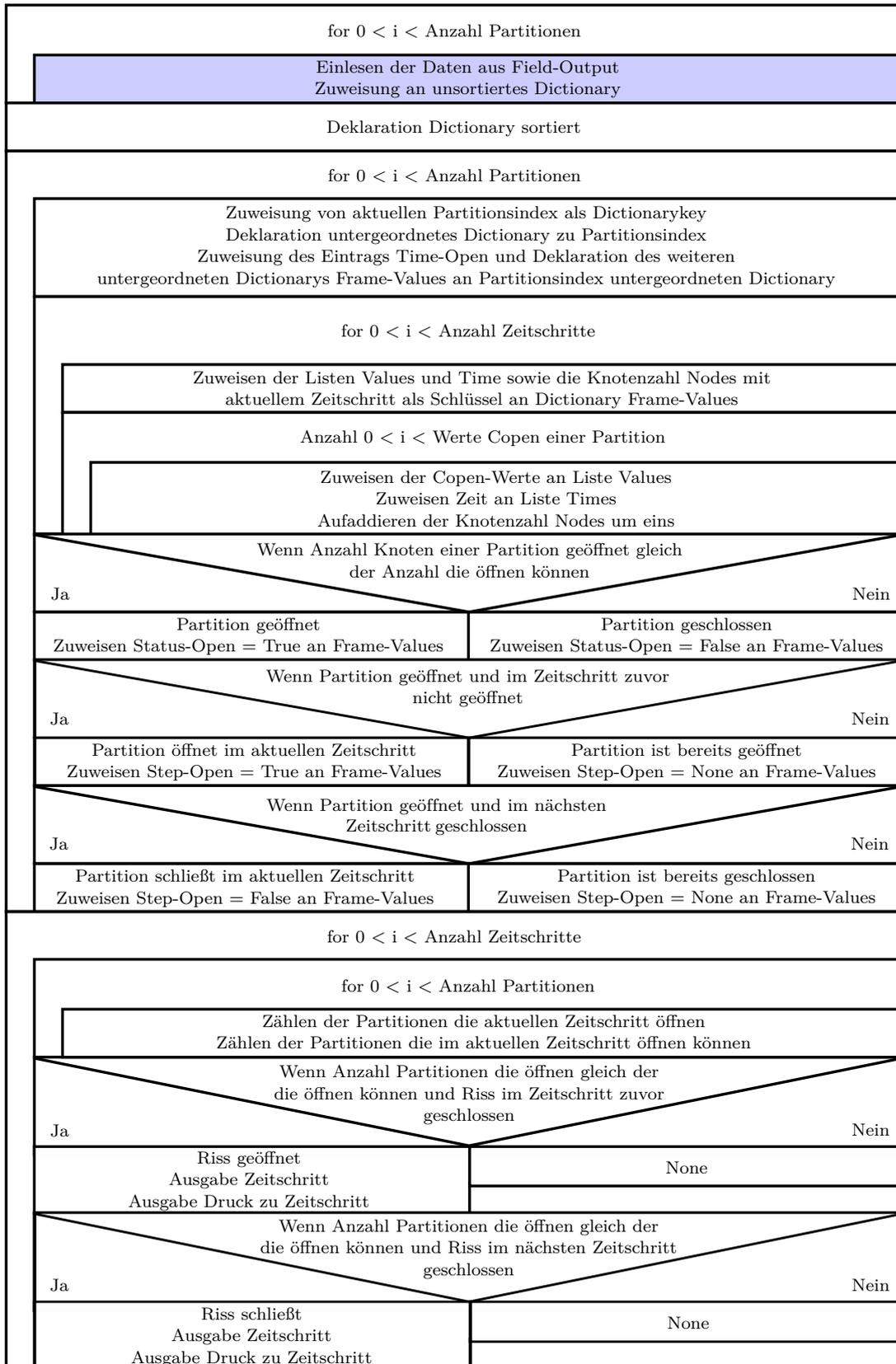


Abbildung 5.4.: Diagramm zur Programmablaufdarstellung für die Bestimmung der Riss-schließ- und Riss-öffnungseigenschaften

5.2.2. FE-Approximation der materiellen Kräfte

In diesem Abschnitt wird die numerische Umsetzung der Formulierung der Gleichungen in lokaler und globaler Form aus dem Kapitel 5.1.2 für eine numerische Auswertung der materiellen Kräfte im Rahmen der Methode der Finiten Elemente behandelt. Die Berechnung der einzelnen Bestandteile der diskreten materiellen Kräfte erfolgt im Anschluss der FE-Lösung des mechanischen Anfangswertproblems als Postprocessing-Schritt. Anhand der Herleitung der Bestimmungsgleichung der materiellen Kräfte für das elastisch-plastische Materialverhalten wird ersichtlich, dass die Energieflussdefinition in die Prozesszone nicht ausschließlich aus Linienintegralen besteht, sondern zusätzlich Gebietsintegrale zur vollständigen Beschreibung erforderlich sind. Zur Bestimmung der Kontur-Gebietsintegrale hat sich in der Bruchmechanik der Einsatz der Methode des äquivalenten Gebietsintegrals (EDI: equivalent domain integral) etabliert [115, 106]. In einer ähnlichen Form ist diese Technik bereits in [32, 139] für die Bestimmung der materiellen Kräfte bzw. Konfigurationskräfte erfolgreich angewendet worden und wird auch in dieser Arbeit implementiert. Die primären Feldgrößen (Verschiebungen) liegen an den Knoten der Finiten Elemente vor. Sekundäre Feldgrößen (Spannung, Dehnung, interne Variablen) werden an den Integrationspunkten der Finiten Elemente berechnet.

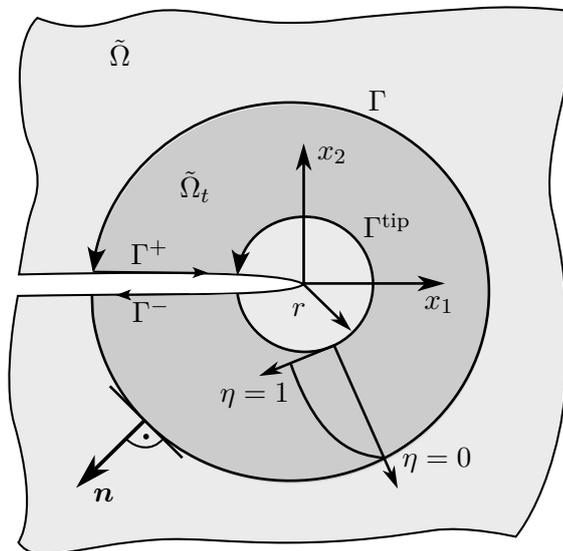


Abbildung 5.5.: Qualitative Darstellung eines Risses mit umgebendem regulärem Teilgebiet begrenzt durch die entsprechenden Konturen

Ausgehend von einem Riss und dessen umgebendem regulärem Teilgebiet (siehe Abbildung 5.5), wird in dem regulären Teilgebiet $\tilde{\Omega}_t$ des Gesamtkörpers $\tilde{\Omega}$ eine stetig differenzierbare Testfunktion

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

mit den Eigenschaften

$$\eta_i = \begin{cases} 0 & \text{auf } \Gamma \\ 1 & \text{auf } \Gamma^{\text{tip}} \end{cases} \quad (5.44)$$

eingeführt. Die schwache Formulierung der materiellen Kraftdefinition wird durch die Multiplikation der globalen Gleichgewichtsgleichung 5.36 mit der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$

$$\int_{\tilde{\Omega}_t} (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{f}_{\text{mat}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0 \quad (5.45)$$

erreicht. Der erste Bestandteil des Integranden wird durch das Divergenztheorem der Tensorrechnung in

$$\nabla_x \cdot (\Sigma^T \eta) = (\nabla_x \cdot \Sigma) \cdot \eta + \Sigma : \nabla_x \eta \quad (5.46)$$

umgeschrieben und anschließend in Gleichung 5.45 eingesetzt, so dass

$$\int_{\tilde{\Omega}_t} \nabla_X \cdot (\Sigma \cdot \eta) da - \int_{\tilde{\Omega}_t} \Sigma : \nabla_x \eta da - \int_{\tilde{\Omega}_t} \mathbf{f}_{\text{mat}} \cdot \eta da = 0 \quad (5.47)$$

folgt. Der Divergenzterm auf der linken Seite wird als Gebietsintegral unter Verwendung des Integralsatzes nach *Gauss* im Rahmen der Grenzwertbetrachtung in

$$\int_{\tilde{\Omega}_t} \nabla_X \cdot \Sigma \cdot \eta da = \int_{\Gamma} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) \eta ds - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) \eta ds - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma^{\text{tip}}} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) \eta ds \quad (5.48)$$

unter Einbeziehung der Anforderungen an die Testfunktion η umgeformt. Unter der Grenzwertbetrachtung eines infinitesimal kleinen um die Risssspitze zusammenziehenden Bereiches und durch Einsetzen der Umformung 5.48 in Gleichung 5.47 besteht die Möglichkeit, die auf die Risssspitze wirkende risstreibende Kraft mit der Bezeichnung \mathcal{F}_{tip} wie folgt auszudrücken

$$\lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\Gamma^{\text{tip}}} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) \eta ds}_{\mathcal{F}_{\text{tip}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) \eta ds}_{\mathcal{F}_{\Gamma^+ -}} - \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\tilde{\Omega}_t} \Sigma : \nabla_x \eta da}_{\mathcal{F}_{\Sigma}} - \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\tilde{\Omega}_t} \mathbf{f}_{\text{mat}} \cdot \eta da}_{\mathcal{F}_{\text{mat}}}. \quad (5.49)$$

Nach Gleichung 5.49 setzt sich die risstreibende Kraft \mathcal{F}_{tip} aus den Beiträgen der Rissuferbelastungen $\mathcal{F}_{\Gamma^+ -}$, ähnlich der aus der Literatur bekannten EDI-Version (EDI: equivalent domain integral) der J -Integraldefinition \mathcal{F}_{Σ} und dem Anteil der eigentlichen materiellen Kräfte \mathcal{F}_{mat} zusammen. Der Anteil $\mathcal{F}_{\Gamma^+ -}$, der sich auf die Rissuferbelastungen bezieht, beschränkt sich auf die Annahme einer geraden Rissflanke, wobei zusätzlich angemerkt sei, dass in dieser Arbeit ausschließlich die Untersuchung eines Mode-I-Rissöffnungsfalles relevant ist. Im Falle von unbelasteten Rissufern leistet dieser Anteil keinen Beitrag zur risstreibenden Kraft \mathcal{F}_{tip} . Im Wesentlichen unterscheidet sich die klassische J -Integralbestimmung von der Definition nach 5.49 insbesondere um den Anteil \mathcal{F}_{mat} . Im Folgenden wird kurz auf die fünf Bestandteile der materiellen Kraft

$$\mathcal{F}_{\text{mat}} = \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Diss}} + \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Hard}} + \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\ominus} + \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{V}} + \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Inh}} \quad (5.50)$$

eingegangen, wobei die einzelnen Integranden vor der Testfunktion erläutert werden

$$\mathcal{F}_{\text{mat}} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_t} \left(\underbrace{-\sigma : \nabla_x \varepsilon^{\text{P}}}_{f_{\text{mat}}^{\text{Diss}}} + \underbrace{\mathcal{H} : \nabla_x \kappa}_{f_{\text{mat}}^{\text{Hard}}} - \underbrace{\sigma : \nabla_x \varepsilon^{\ominus}}_{f_{\text{mat}}^{\ominus}} + \underbrace{h^{\text{T}} \cdot \mathbf{b}^{\text{V}}}_{f_{\text{mat}}^{\text{V}}} + \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}}_{f_{\text{mat}}^{\text{Inh}}} \right) \cdot \eta da. \quad (5.51)$$

Der dissipative Anteil der materiellen Kräfte beruht im Wesentlichen auf der im Abschnitt 5.1.2 gezeigten Herleitung im Zusammenhang mit der spezifischen *Helmholtzenergie* und ist von der Definition des elastisch-plastischen Werkstoffmodells abhängig.

$$\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Diss}} = -\sigma : \nabla_x \varepsilon^{\text{P}} = -\sigma_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{\text{P}}}{\partial x_m} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) = -\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{\text{P}}}{\partial x_m} \mathbf{e}_m \delta_{ik} \delta_{jl} = -\sigma_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{\text{P}}}{\partial x_m} \mathbf{e}_m \quad (5.52)$$

Die schwache Formulierung der dissipativen materiellen Kraft entspricht demnach

$$\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Diss}} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_t} (\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Diss}}) \cdot \eta da. \quad (5.53)$$

Die Verfestigungsregel des verwendeten Werkstoffmodells steht im direkten Zusammenhang mit der materiellen Kraft

$$\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Hard}} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\hat{\Omega}_t} (\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Hard}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da. \quad (5.54)$$

bzw. mit dem zugehörigen Integranden

$$\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Hard}} = \mathcal{H} : \nabla_x \boldsymbol{\kappa} = R : \nabla_x p + \mathbf{X} : \nabla_x \boldsymbol{\alpha}. \quad (5.55)$$

In Gleichung 5.55 werden die jeweiligen Terme, die aus der isotropen und kinematischen Verfestigungsregel des *Chaboche*-Modells abgeleitet wurden, gekennzeichnet. Falls ein anderes elastisch-plastisches Werkstoffmodell zur Anwendung kommt, müssen die Anteile basierend auf der zugehörigen Verfestigungsregel in $\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Hard}}$ modifiziert werden. Der thermische Effekt der materiellen Kraft, verursacht durch eine Temperaturänderung und daraus resultierenden Verformung im Spezialfall der Isotropie, wird durch die Definition des Integranden

$$\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\Theta} = -\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}^{\Theta} = -\alpha_t \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x (\Delta \Theta \delta_{ij}) \quad (5.56)$$

bestimmt. Da in dieser Arbeit ausschließlich rein homogene Strukturen untersucht werden, die keiner Volumenlast unterliegen, wird auf die Anteile $\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{V}}$ und $\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Inh}}$ nicht eingegangen und diese werden demzufolge nicht im Post-Processing-Script implementiert. Die FE-Approximation der einzelnen Terme wird im Sinne der FEM mit isoparametrischen Elementen durchgeführt. Hierzu werden die entsprechenden Variablen- bzw. Feldgrößenwerte $z_{(e)}$ innerhalb eines Finiten Elements mit (e) bezeichnet wird, das eine Anzahl an n_k Knoten besitzt, mit der Formfunktion $N_{(e)}^{(a)}(\boldsymbol{\xi})$ und dem diskreten Knotenwert $z_{(e)}^{(a)}$ mit der Benennung der Größe approximiert werden. Folglich lautet die Approximation der Testfunktion

$$\boldsymbol{\eta}_{(e)} = \sum_{a=1}^{n_k} N_{(e)}^{(a)}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\eta}_{(e)}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \eta_{(e)1} \\ \eta_{(e)2} \\ \eta_{(e)3} \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

und des materiellen Gradienten der Testfunktion eines Finiten Elements

$$\nabla_x \boldsymbol{\eta}_{(e)} = \sum_{a=1}^{n_k} \nabla_x N_{(e)}^{(a)}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\eta}_{(e)}^{(a)} = \sum_{a=1}^{n_k} \mathbf{D}_{(e)}^{(a)} \boldsymbol{\eta}_{(e)}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \eta_{(e)1,1} \\ \eta_{(e)2,2} \\ \eta_{(e)3,3} \\ \eta_{(e)1,2} \\ \eta_{(e)2,1} \\ \eta_{(e)2,3} \\ \eta_{(e)3,2} \\ \eta_{(e)3,1} \\ \eta_{(e)1,3} \end{Bmatrix}. \quad (5.58)$$

Hierbei stellt die Differentiationsmatrix den folgenden Ausdruck

$$\mathbf{D}_{(e)}^{(a)} = \begin{bmatrix} N_{(e),x_1}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{(e),x_2}^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{(e),x_3}^{(a)} \\ N_{(e),x_2}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{(e),x_1}^{(a)} & 0 \\ 0 & N_{(e),x_3}^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{(e),x_2}^{(a)} \\ 0 & 0 & N_{(e),x_1}^{(a)} \\ N_{(e),x_3}^{(a)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

dar, der angewendet auf den Vektor (Tensor erster Stufe) der Formfunktion zu den Gradienten der Formfunktion mit neun Komponenten (siehe Gleichung 5.58) bzw. einen Tensor zweiter Stufe führt. Für die kompakte Schreibweise unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften eines Tensors wird der differenzierte Formfunktionsausdruck

$$\mathbf{B}_{(e)}^{(a)} = \begin{bmatrix} N_{(e),x_1}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{(e),x_2}^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{(e),x_3}^{(a)} \\ N_{(e),x_2}^{(a)} & N_{(e),x_1}^{(a)} & 0 \\ 0 & N_{(e),x_3}^{(a)} & N_{(e),x_2}^{(a)} \\ N_{(e),x_3}^{(a)} & 0 & N_{(e),x_1}^{(a)} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

verwendet. Der *Eshelby*tensor Σ

$$\Sigma_{(e)} = \begin{Bmatrix} \Sigma_{(e)11} \\ \Sigma_{(e)22} \\ \Sigma_{(e)33} \\ \Sigma_{(e)12} \\ \Sigma_{(e)21} \\ \Sigma_{(e)23} \\ \Sigma_{(e)32} \\ \Sigma_{(e)31} \\ \Sigma_{(e)13} \end{Bmatrix}. \quad (5.61)$$

eines Finiten Elements wird nach der *Voigt*-Ingenieur-Notation formuliert. Die Definition der einzelnen Anteile des *Eshelby*tensor in der Momentankonfiguration wird nach Gleichung 5.34 unter Annahme kleiner Deformationen eingesetzt. Die primären Feldgrößen (Verschiebungen u_i) liegen an den Knoten der Finiten Elemente vor. Sekundäre Feldgrößen (Spannungs- σ_{ij} , Dehnungswerte ε_{ij} , Werte der internen Variablen) wurden an den Integrationspunkten der Finiten Elemente berechnet und müssen zur globalen FE-Assemblierung zur Gesamtgröße auf die Knoten des Elementes extrapoliert werden. Zur Implementierung des Postprogramms in der Umgebung der kommerziellen Software ABAQUS sei hingewiesen, dass bei diesem FE-Programm die Notation ε_{ij} mit $i \neq j$ für die Schubwinkel γ_{ij} verwendet wird und damit die doppelten Schubdehnungen gemeint sind. Die Approximation der Gesamtdehnungen kann mit Hilfe der kompakten Notation

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \sum_{a=1}^{n_k} \mathbf{B}_{(e)}^{(a)} \mathbf{u}_{(e)}^{(a)} = \sum_{a=1}^{n_k} \begin{bmatrix} N_{(e),x_1}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{(e),x_2}^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{(e),x_3}^{(a)} \\ N_{(e),x_2}^{(a)} & N_{(e),x_1}^{(a)} & 0 \\ 0 & N_{(e),x_3}^{(a)} & N_{(e),x_2}^{(a)} \\ N_{(e),x_3}^{(a)} & 0 & N_{(e),x_1}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(e)1}^{(a)} \\ u_{(e)2}^{(a)} \\ u_{(e)3}^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(e)11} \\ \varepsilon_{(e)22} \\ \varepsilon_{(e)33} \\ \gamma_{(e)12} \\ \gamma_{(e)23} \\ \gamma_{(e)31} \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

zusammengefasst werden, wobei $\gamma_{(e)12} = \gamma_{(e)21}, \gamma_{(e)23} = \gamma_{(e)32}, \gamma_{(e)31} = \gamma_{(e)13}$ gilt. Der Gradient der plastischen Dehnungen wird mit dem Differentialoperator $\mathbf{L}_{(e)}^{(a)}$ (siehe [67]) und den

plastischen Dehnungen bestimmt

$$\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^p = \sum_{a=1}^{n_k} \mathbf{L}_{(e)}^{(a)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^{(a)p} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(e)11,1}^p \\ \varepsilon_{(e)22,1}^p \\ \varepsilon_{(e)33,1}^p \\ \gamma_{(e)12,1}^p \\ \gamma_{(e)23,1}^p \\ \gamma_{(e)31,1}^p \\ \varepsilon_{(e)11,2}^p \\ \vdots \\ \gamma_{(e)31,2}^p \\ \varepsilon_{(e)11,3}^p \\ \vdots \\ \gamma_{(e)31,3}^p \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Damit wird die Berechnung des dissipativen Terms wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(e)\text{mat}}^{\text{Diss}} &= -\boldsymbol{\sigma}_{(e)} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^p = \\ &= - \begin{cases} \sigma_{(e)11} \varepsilon_{(e)11,1}^p + \sigma_{(e)22} \varepsilon_{(e)22,1}^p + \sigma_{(e)33} \varepsilon_{(e)33,1}^p + \sigma_{(e)12} \gamma_{(e)12,1}^p + \sigma_{(e)23} \gamma_{(e)23,1}^p + \sigma_{(e)31} \gamma_{(e)31,1}^p \\ \sigma_{(e)11} \varepsilon_{(e)11,2}^p + \sigma_{(e)22} \varepsilon_{(e)22,2}^p + \sigma_{(e)33} \varepsilon_{(e)33,2}^p + \sigma_{(e)12} \gamma_{(e)12,2}^p + \sigma_{(e)23} \gamma_{(e)23,2}^p + \sigma_{(e)31} \gamma_{(e)31,2}^p \\ \sigma_{(e)11} \varepsilon_{(e)11,3}^p + \sigma_{(e)22} \varepsilon_{(e)22,3}^p + \sigma_{(e)33} \varepsilon_{(e)33,3}^p + \sigma_{(e)12} \gamma_{(e)12,3}^p + \sigma_{(e)23} \gamma_{(e)23,3}^p + \sigma_{(e)31} \gamma_{(e)31,3}^p \end{cases} \end{aligned} \quad (5.64)$$

durchgeführt. Abschließend wird die in der Literatur weit verbreitete Assemblierungsmethode angewendet, um die Beiträge der umliegenden Elemente zu den materiellen Knotenkräften an den Knoten (K) in globaler Nummerierung zusammenzufassen.

$$\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{F}_{\text{tip}(e)}^{(a)} = \mathcal{F}_{\Gamma^{+-}}^{(K)} + \mathcal{F}_{\Sigma}^{(K)} + \mathcal{F}_{\text{mat}}^{(K)} \quad (5.65)$$

$$\mathcal{F}_{\Gamma^{+-}}^{(K)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{F}_{\Gamma^{+-}(e)}^{(a)} \quad (5.66)$$

$$\mathcal{F}_{\Sigma}^{(K)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{F}_{\Sigma(e)}^{(a)} \quad (5.67)$$

$$\mathcal{F}_{\text{mat}}^{(K)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{F}_{\text{mat}(e)}^{(a)}. \quad (5.68)$$

Es wird die typische Assemblierungsprozedur, die bei FEM-Programmen eingesetzt wird, verwendet. Die Assemblierungsoperation $\bigcup_{e=1}^{n_e}$ stellt sicher, dass die lokale Nummerierung der Knoten (a) auf Elementebene stimmig mit der globalen Nummerierung der Knoten (K) ist. Die Gesamtanzahl der Elemente wird mit n_e bezeichnet, wobei der Anwender an der Auswertung der risstreibenden Risskraft in einem bestimmten Bereich bzw. Integrationsgebiet interessiert ist. Damit lauten die entsprechenden Auswertungen der Gleichungen unter Einbeziehung der Assemblierung auf die Testfunktion und der Summation der Bestimmungsgrößen in einem festgelegten

Bereich Ω_t wie folgt:

$$\mathcal{F}_{\text{tip}} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)} \quad (5.69)$$

$$\mathcal{F}_{\Gamma+-} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \mathcal{F}_{\Gamma+-}^{(K)} \quad (5.70)$$

$$\mathcal{F}_{\Sigma} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \mathcal{F}_{\Sigma}^{(K)} \quad (5.71)$$

$$\mathcal{F}_{\text{mat}} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \mathcal{F}_{\text{mat}}^{(K)}. \quad (5.72)$$

Für die Ermittlung des effektiven Rissspitzenparameters $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ wird der Riss-schließalgorithmus (siehe Kapitel 5.2.1) verwendet. Hieraus wird der Rissöffnungs- und -schließzeitpunkt gefolgert und somit können die effektiven Schwingweiten der benötigten Feldgrößen zur Definition der effektiven zyklischen Rissspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ eingesetzt werden:

$$\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)} \quad (5.73)$$

$$\Delta \mathcal{F}_{\Gamma+-}^{\text{eff}} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \Delta \mathcal{F}_{\Gamma+-}^{(K)} \quad (5.74)$$

$$\Delta \mathcal{F}_{\Sigma}^{\text{eff}} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \Delta \mathcal{F}_{\Sigma}^{(K)} \quad (5.75)$$

$$\Delta \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{eff}} = \sum_{K \in \Omega_t} \eta^{(K)} \Delta \mathcal{F}_{\text{mat}}^{(K)}. \quad (5.76)$$

6. Berechnungsbeispiele: Anwendung des entwickelten Konzeptes

6.1. Stationärer Riss: Validierung der neuen Methode (CT-Probe)

6.1.1. Einführung: Probenform (CT-Probe) und Modellbeschreibung

Im ersten Beispiel liegt der Fokus auf der Untersuchung des stationären Mode-I-Risszustands einer CT-Probe mit dem neuen Rissspitzenparameter \mathcal{F}_{tip} . Alle Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf den für diese Arbeit relevanten Rissöffnungsmodus I. Entsprechende Indizierungen zur Unterscheidung der Rissöffnungsmodi bzw. Komponenten des Rissspitzenparameters werden daher im Folgenden nicht verwendet. Im definierten Koordinatensystem bedeutet das, dass die erste Komponente (in X_1 -Richtung zeigend) der Rissspitzengröße bei der Auswertung relevant ist. Da es sich in diesem Beispiel um einen homogenen Körper ohne zyklische Temperaturlasten und ohne Rissuferbelastung handelt, vereinfacht sich die Definition nach Gleichung 5.69 im Postprocessing-Skript auf die folgende Gleichung:

$$\mathcal{F}_{\text{tip}} = \mathcal{F}_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Diss}}. \quad (6.1)$$

Gegenstand dieses Beispiels ist die Überprüfung der Gebiets- und Netzunabhängigkeit des neuen Rissspitzenparameter-Verfahrens unter Bezugnahme von Auswertungen auf verschiedenen Konturbereichen eines Belastungs- und Entlastungslastfalles. Die Bestimmung der effektiven Größen der Rissspitzenparameter ist zu diesem Zweck nicht notwendig. Im Rahmen der Analyse werden Ergebnisse des neu-entwickelten F_{tip} Rissspitzenparameters, der J^{DB} -Integral-Berechnung nach *Dowling und Begley* und den Ergebnissen J^{Abaqus} nach der Gebietsintegralmethode der Software ABAQUS gegenübergestellt und verglichen. Hierfür wird die in Abbildung 6.1 dargestellte CT-Probe (Werkstoff 22NiMoCr3-7) mit den definierten Abmessungen ($B = 25$ mm, $W = 50$ mm, $a_0 = 27$ mm) betrachtet. Als Referenzbasis für den Belastungsast werden die Ergebnisse der J^{ASTM} -Integral-Berechnung der CT-Probe gemäß ASTM E1737-96 von [30, 3] übernommen. Die Definition der nichtlinearen Werkstoffmodellparameter für das Berechnungsbeispiel entspricht den in [30, 3] angegebenen Werkstoffdaten für 22NiMoCr3-7 (siehe Tabelle 6.1) mit einem Elastizitätsmodul 213 000 MPa und einer Querkontraktionszahl 0,3. Werkstoffdaten: Zur Lösung des Problems wird für die numerische Analyse ein 2D-FE-Modell mit der Benennung CT-Probe erstellt, das als Symmetriemodell die in Abbildung 6.2 gezeigte Netzstruktur mit dem Elementtyp CPE4 für den ebenen Dehnungszustand und Randbedingungen aufweist. Die Verschiebungslast $u = 0,8$ mm wird als Belastung bis zum ersten Lastschritt angesetzt und anschließend im weiteren Verlauf bis zum zweiten Lastschritt auf $u = 0,2$ mm entlastet. Ein weiteres 2D-FE-Modell mit der Benennung CT-Probe-fein (siehe Abbildung 6.3) wurde mit einer sehr feinen Diskretisierung des Netzes und ansonsten mit den gleichen Randbedingungen wie das Modell CT-Probe zur Untersuchung der Netzempfindlichkeit des Berechnungskonzeptes erstellt.

Tabelle 6.1.: Werkstoffdefinition 22NiMoCr3-7 nach [30, 3]: $\sigma_{\text{true}}-\epsilon^{\text{P}}$ -Kurve, Werkstoffmodell ABAQUS PLASTIC isotrop

plastische Dehnung	wahre Spannung in MPa
0	715,02
0,028993	742,17
0,03876	779,07
0,050445	810,14
0,069908	856,73
0,099066	913,02
0,14952	977,04
0,19801	1027,5
0,29877	1097,2
0,39949	1153,4
0,49825	1197,9
0,69766	1269,4
0,99575	1350,4
1,4931	1446,6
1,9923	1519,4

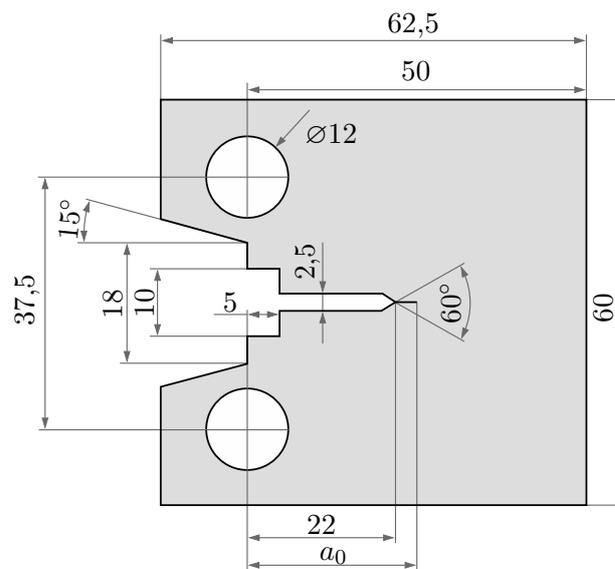


Abbildung 6.1.: Abmessungen der verwendeten CT-Probe

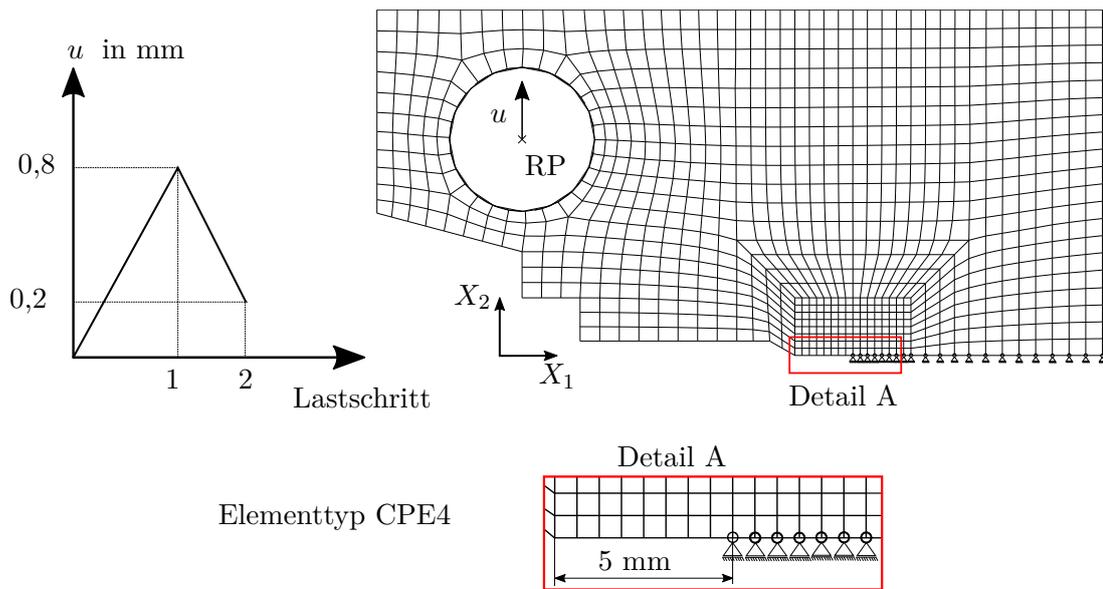


Abbildung 6.2.: CT-Probe als symmetrisches FE-Modell: Netz und Randbedingungen

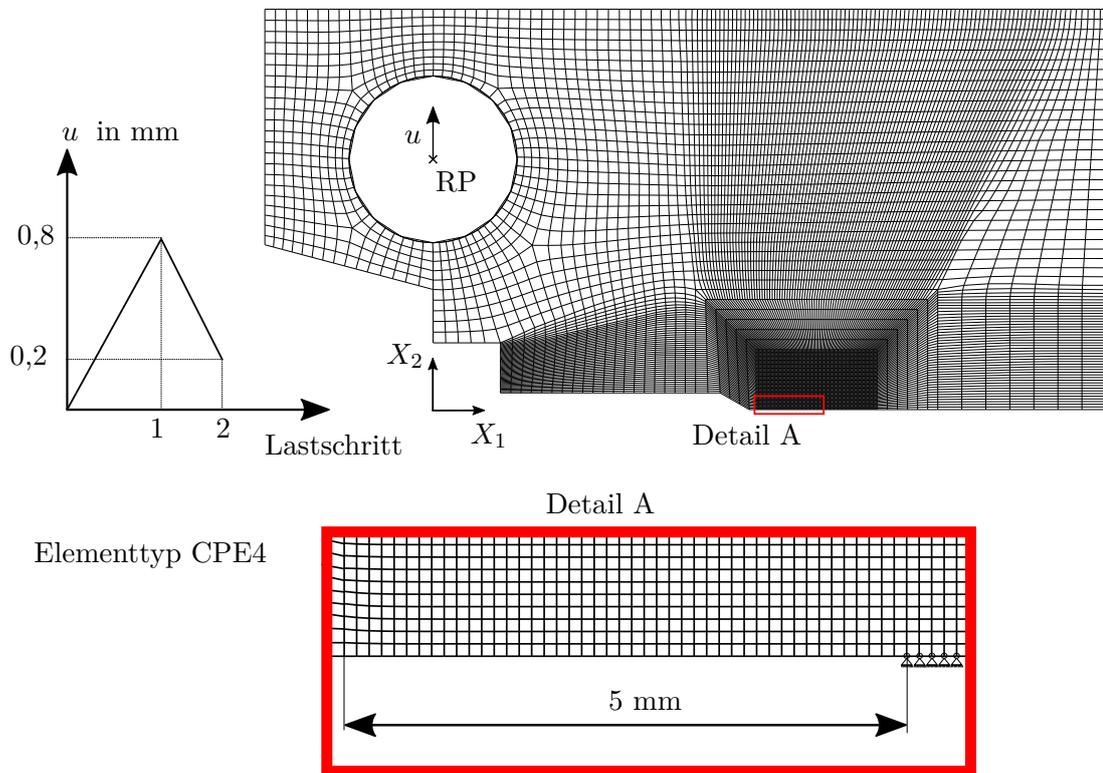


Abbildung 6.3.: CT-Probe-fein als symmetrisches FE-Modell: Netz und Randbedingungen

6.1.2. Ergebnisse

Bevor die bruchmechanische Ergebnisauswertung erfolgt, wird zunächst die Kraft-Verschiebungskurve des FE-Modells am Lastangriffspunktes RP überprüft, indem sie mit den Ergebnissen aus [3] verglichen wird. Somit werden die grundlegenden FE-Modell-Eigenschaften und Randbedingungen überprüft. Der angezeigte F - u -Verlauf aus den FE-Ergebnissen der CT-Probe in Abbildung 6.4 stimmt mit den Werten der Vergleichsdaten aus [3] überein.

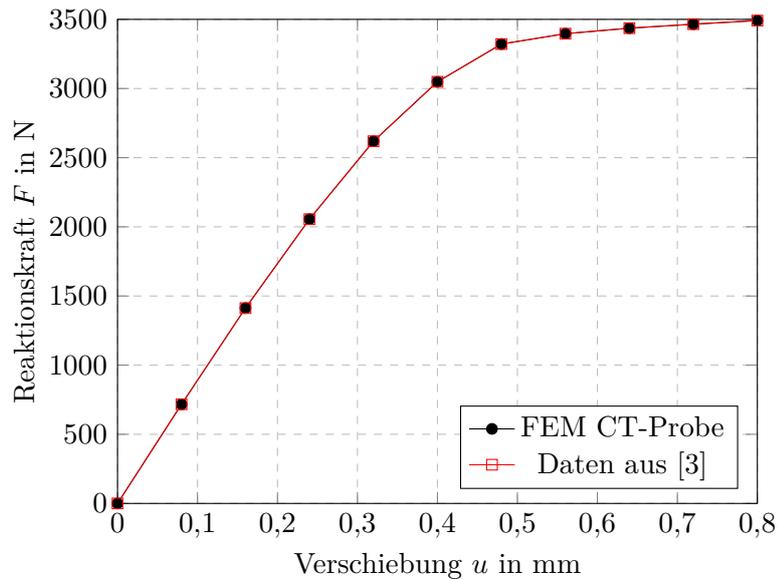


Abbildung 6.4.: Kraft-Verschiebungs-Kurve bis zum Lastschritt 1

Zur Verifizierung der Berechnungsroutine des selbst entwickelten Postprocessing-Skripts werden neben der J^{ASTM} -Integral-Auswertung nach ASTM E1737-96, die J -Integral-Berechnung in der FE-Software ABAQUS implementierte Formulierung nach Parks [155] und Shih *et al.* [180] der Belastungsschritt ausgewertet und in Abhängigkeit der Verschiebung u im Diagramm 6.6 aufgetragen. Das Postprozessor-Skript für das J^{DB} wurde vom Autor bereits im Forschungsvorhaben [25] entwickelt und wird hier als zusätzliche Vergleichsgröße herangezogen. Es handelt sich nicht um das zyklisch effektive Integral. Die Abgrenzung der Gebiete wird durch Konturen oder Pfade erreicht, wobei das Gebiet 1 bzw. Kontur 1 die Rissspitze darstellt. Jedes weitere Gebiet wird durch eine Erweiterung der Elemente, wie in Abbildung 6.5 gezeigt, definiert.

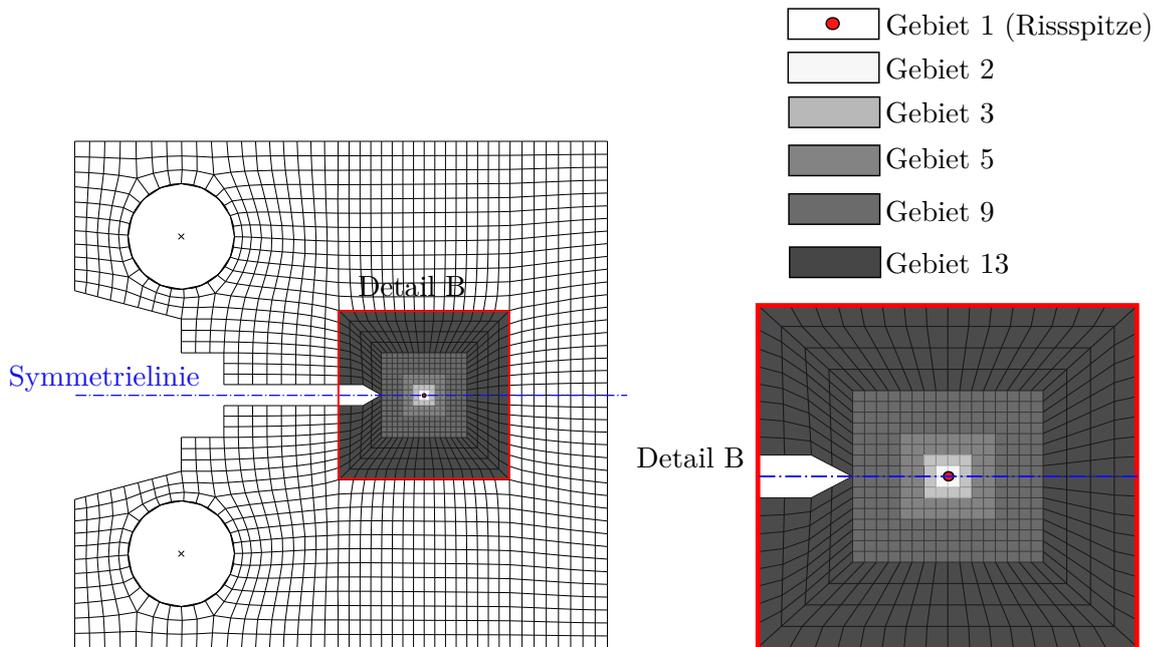


Abbildung 6.5.: Definition der Bereiche oder Gebiete für die Rissspitzenparameterauswertungen

Das Diagramm 6.6 zeigt übereinstimmende Verläufe aller Rissspitzenparameter-Verschiebungs-

Kurven (Auswertungsgebiet 13) für eine proportional steigende Last bis zu der maximalen Verschiebung $u = 0,8$ mm. Der Verlauf von F_{tip} liegt geringfügig unter den anderen Kurvenverläufen mit den vergleichbaren Größen. Ab dem Lastschritt von ca. $u = 0,4$ mm steigen die plastischen Vergleichsdehnungen im Risspitzenbereich merklich an und der dissipative Term trägt zu einem insgesamt kleineren Gesamtwert verglichen mit den klassischen Methoden J^{DB} und J^{Abaqus} bei. Dieser Effekt im Zusammenhang des dissipativen Anteils der materiellen Kräfte wurde bereits in einer ähnlichen FE-Analyse der CT-Probe in der Arbeit [148] bestätigt. Anhand von Abbildung 6.7 wird deutlich belegt, dass J^{DB} - und J^{Abaqus} nur in der initialen Belastungsstufe 1, die einen monotonen Anstieg aufweist, wegunabhängig bzw. gebietsunabhängig sind. Im weiteren Verlauf, während des Entlastungsschrittes, stellen sich drastische Unterschiede zwischen den J -Werten der verschiedenen Gebietsbegrenzungen ein. Aus der vergleichenden Darstellung in Abbildung 6.7 ist zusätzlich zu erkennen, dass die J^{DB} - und J^{Abaqus} -Werten bis auf die Auswertung im Zusammenhang der Gebietsbegrenzung 2 übereinstimmen.

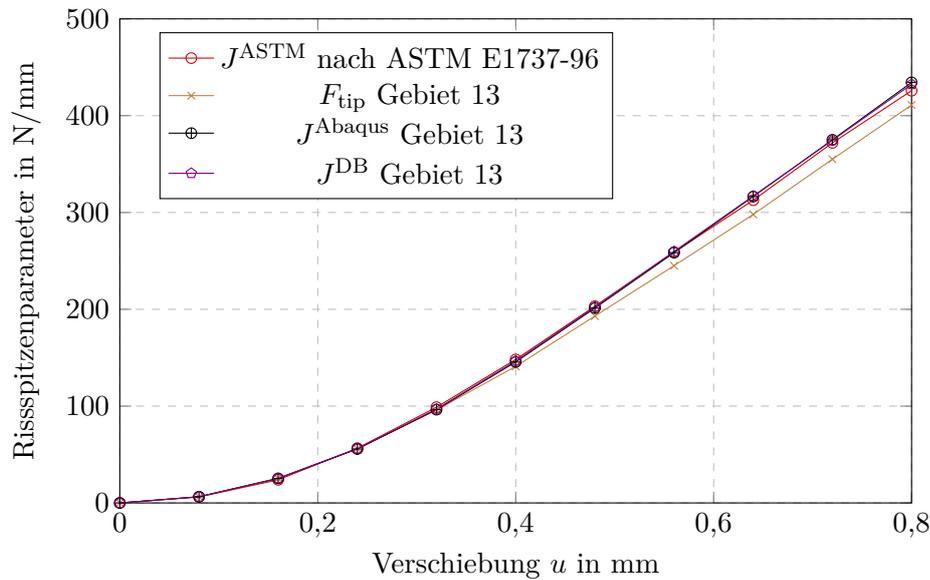
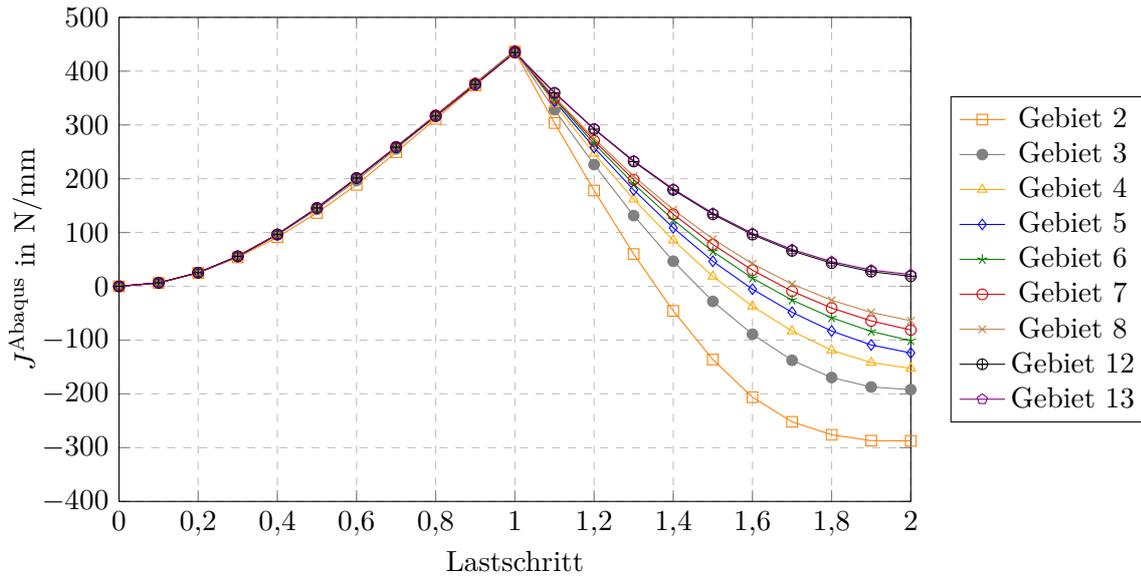
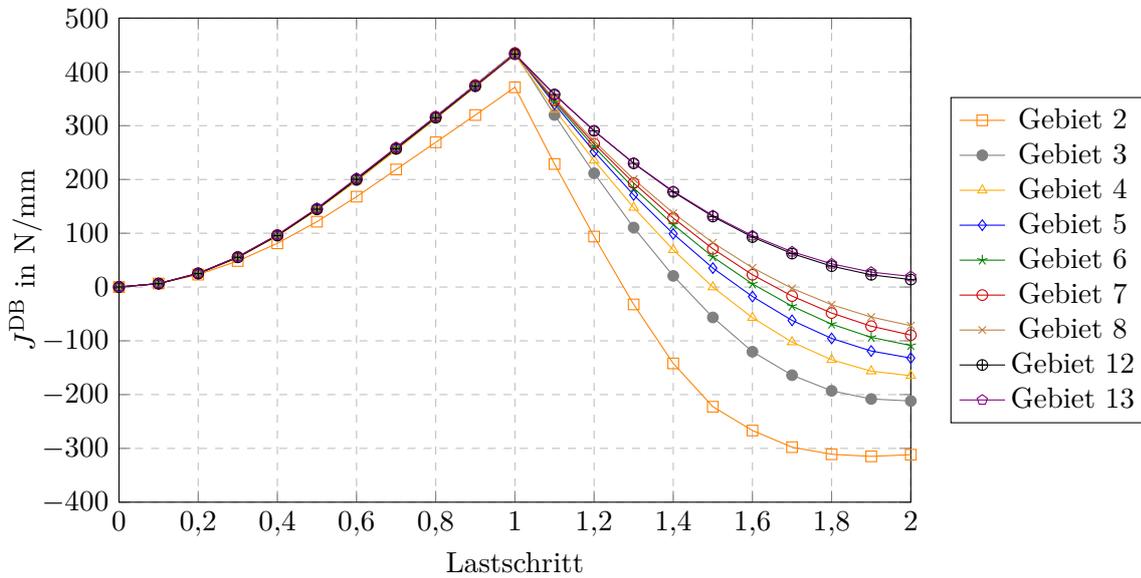


Abbildung 6.6.: Proportionale Belastung bis zum Lastschritt 1: Ergebnisse der verschiedenen Risspitzenparameter-Auswertungen in Abhängigkeit der Verschiebung u

Aufgrund der kontinuumsmechanischen Implementierung sollte der Parameter \mathcal{F}_{tip} für alle Bereiche, die die Risspitze umgeben, unabhängig von der Belastungsgeschichte und dem eingeschlossenen Konturbereich denselben Wert aufweisen. Die Berechnung des Parameters \mathcal{F}_{tip} bestätigt diese Unabhängigkeit vom Pfad und Gebiet für die untersuchten Netze. Die Integralwerte für verschiedene Konturdefinitionen um die Risspitze in einem gegebenen Netz bleiben während des gesamten Lastpfades (Belastung, Entlastung) nahezu unverändert, unabhängig vom gewählten Weg oder dem eingeschlossenen Gebiet (siehe Abbildung 6.8 und 6.9). Bei dem Entlastungsschritt sind jedoch geringfügige Abweichungen der Ergebnisse im Zusammenhang der verschiedenen Auswertungsgebieten zu erkennen. Eine Ursache für diese Unterschiede wurde im Zusammenhang der dissipativen Anteile der materiellen Kraft gebracht. Wie in der Abbildung 6.10 und 6.11 zu erkennen ist, können bestimmte Elementbereiche ausgeprägte Beträge $\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(\text{K})}$ beinhalten, die nicht ausschließlich im Risspitzenbereich lokalisiert sind. Die Ausprägung der plastischen Zone bemessen anhand der Ausbreitung der plastischen Vergleichsdehnung infolge der maximalen Belastung (Lastschritt 1) erstreckt sich gemäß der Abbildung 6.12 von der Risspitze bis an den Randbereich der Probe. Während des Entlastungsschrittes ist kein Riss schließen erkennbar und das deformierte Rissufer zeigt bleibende Dehnungen (siehe Abbildung 6.13). Folglich kann es bei der Assemblierung der einzelnen Knotenkräfte $\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(\text{K})}$ über



(a) J^{Abaqus} -Auswertung für verschiedene Konturbereiche in Abhängigkeit der Lastschrittweite



(b) J^{DB} -Auswertung nach J^{DB} Dowling und Begley für verschiedene Konturbereiche in Abhängigkeit der Lastschrittweite

Abbildung 6.7.: Vergleich der J -Integral-Auswertung nach Gebietsverfahrenmethode ABAQUS und dem Verfahren nach Dowling und Begley beim Belastungs- und Entlastungsschritt

verschiedene Bereiche zu einem merklichen Unterschied im Betrag der Gesamtgröße \mathcal{F}_{tip} führen. Resultierend daraus kann bei der Assemblierung der einzelnen materiellen Knotenkräfte $\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)}$ über die Bereiche zu einer signifikanten Variation des Betrags der Gesamtgröße \mathcal{F}_{tip} in Abhängigkeit der Konturdefinition kommen. Für die Analyse der Netzabhängigkeit wurde das Modell CT-Probe-fein (siehe Abbildung 6.3) mit einer detaillierten Elementdiskretisierung um den Risspitzenbereich versehen. Ansonsten wurden identische Werkstoffdefinitionen, Randbedingungen und Elementtypen wie bei dem Modell CT-Probe verwendet. Die Abbildung 6.9 zeigt, dass die Ergebnisgröße \mathcal{F}_{tip} während der Entlastungsschritte zu unterschiedlichen Resultaten für die beiden Modelle CT-Probe und CT-Probe-fein führt. Bei der Analyse der einzelnen Bestandteile des

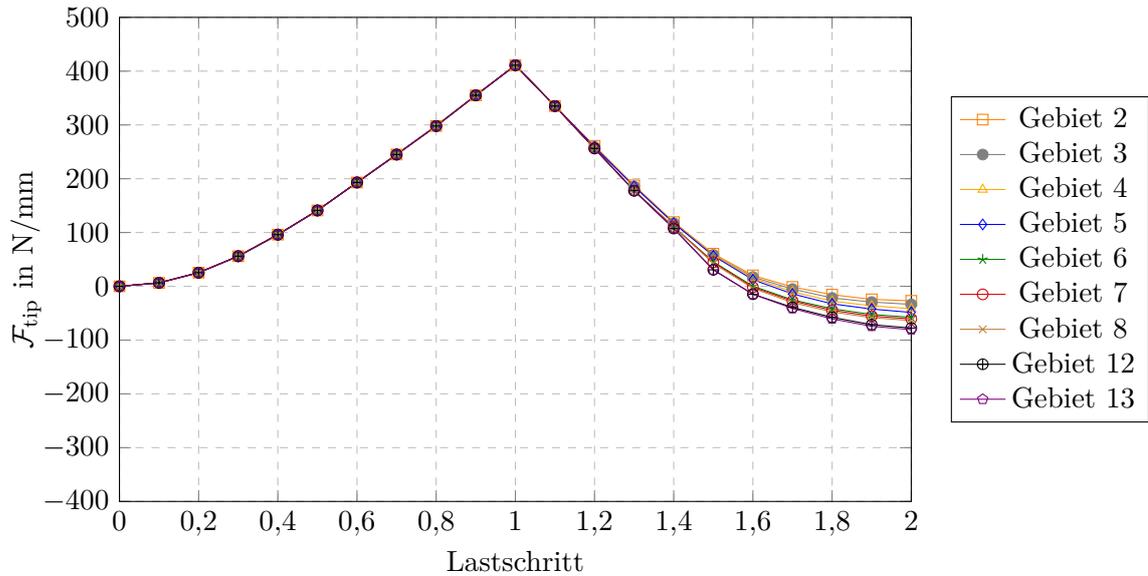


Abbildung 6.8.: \mathcal{F}_{tip} -Auswertung für verschiedene Konturbereiche in Abhängigkeit der Lastschrittweite

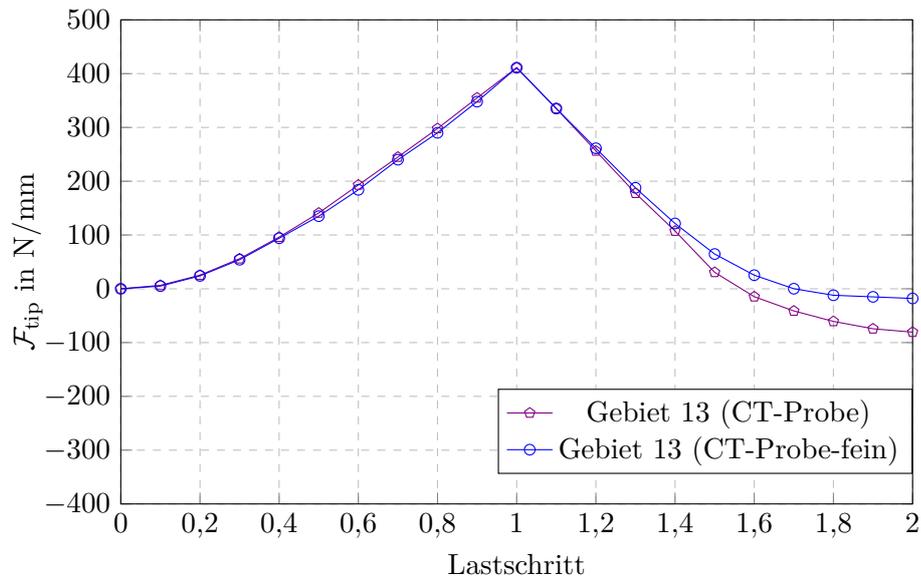


Abbildung 6.9.: \mathcal{F}_{tip} -Auswertung: FE-Modell CT-Probe und FE-Modell CT-Probe-fein zur Überprüfung der Netzabhängigkeit des Rissspitzenparameters

\mathcal{F}_{tip} zeigt sich, dass die J -Integrale nach *Kishimoto et al.* und *Atluri* einen ähnlichen dissipativen Term aufweisen (siehe Gleichung 2.166 und 2.167). Eine Arbeit, die sich mit dem Thema solcher wegunabhängigen J -Integrale befasst und detailliert auf die numerische Umsetzung des ΔT_k^* -Integrals nach *Atluri* [20] sowie J^* nach *Simo* [182] eingeht, verfasste *Schimpfke* [169]. Vergleichende Darstellungen der Ergebnisse zeigen eine Wegunabhängigkeit bzw. Gebietsunabhängigkeit der beiden Rissspitzenparameter, jedoch sind auch hier netzabhängige und von der Integrationsordnung abhängige Lösungen erkennbar, was sich mit den hier vorgestellten Erkenntnissen deckt. Damit kann auf eine Netzabhängigkeit der programmierten Auswertungsprozedur des Rissspitzenparameters geschlossen werden. Die Ergebnisschwankungen sind im Wesentlichen mit der numerischen Umsetzung des Gradienten 5.63 und damit insbesondere mit der numerischen Auswertung der dissipativen Terme $\mathbf{f}_{\text{mat}}^{\text{Diss}}$ der materiellen Kräfte zu begründen. Eine präzise

räumliche Diskretisierung ist erforderlich, da die Gradienten der sekundären Feldgrößen sorgfältig aufgelöst werden müssen. Bei einer Auswertung mit dem verwendeten Elementtyp CPE4 (bilineares 4-Knotenelement im FE-Programm ABAQUS) treten numerische Ungenauigkeiten besonders verstärkt in Bereichen von Singularitäten auf.

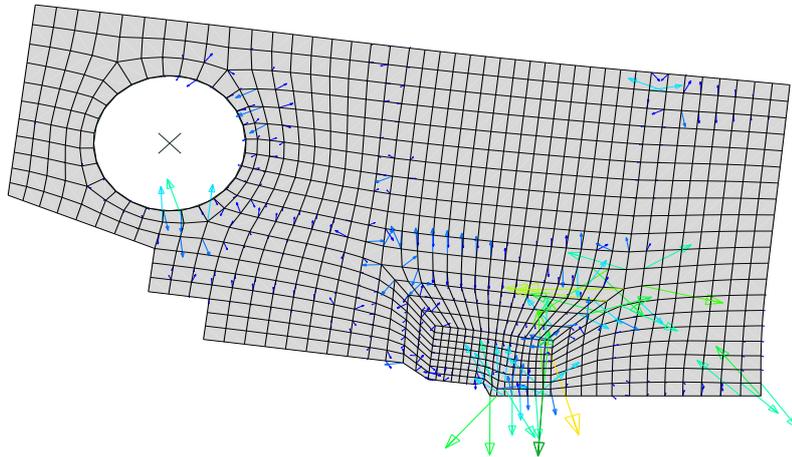


Abbildung 6.10.: Lastschritt 1 mit Belastung $u = 0,8$ mm: Darstellung der materiellen Knotenkräfte $-\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)}$

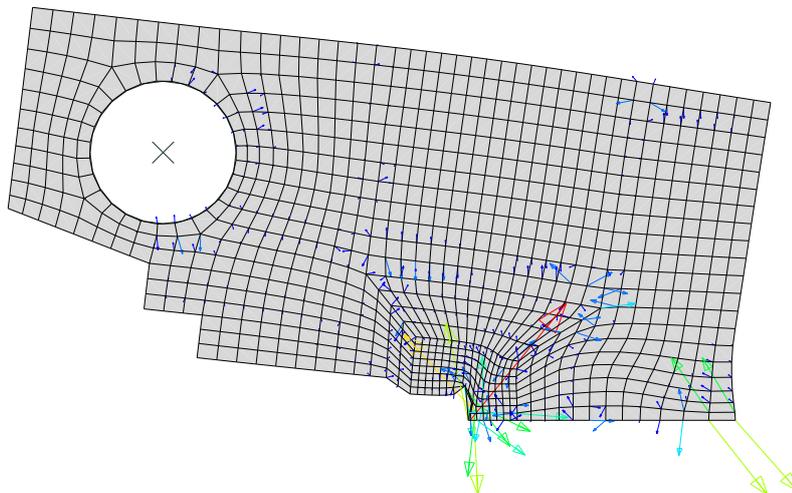


Abbildung 6.11.: Lastschritt 2 mit Entlastung $u = 0,2$ mm: Darstellung der materiellen Knotenkräfte $-\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)}$

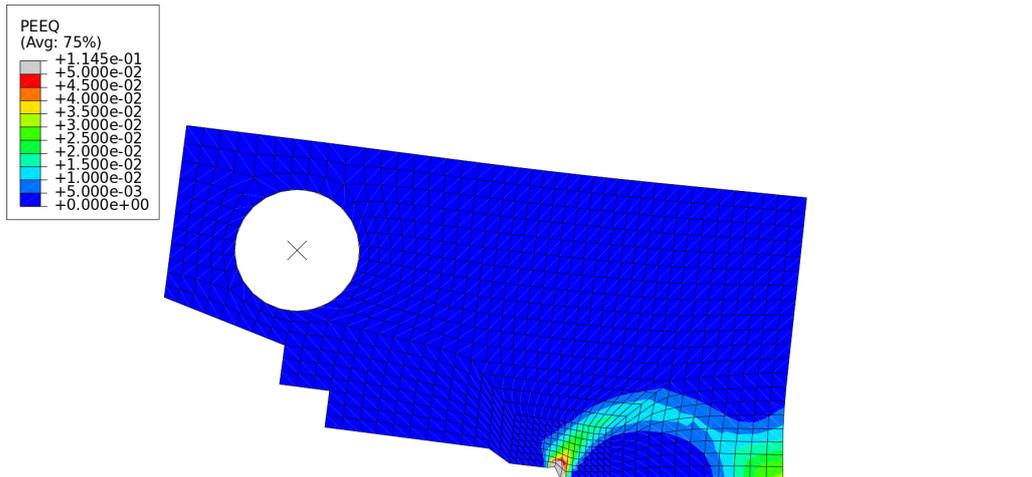


Abbildung 6.12.: Lastschritt 1 mit Belastung $u = 0,8$ mm: Darstellung der plastischen Vergleichsdehnung

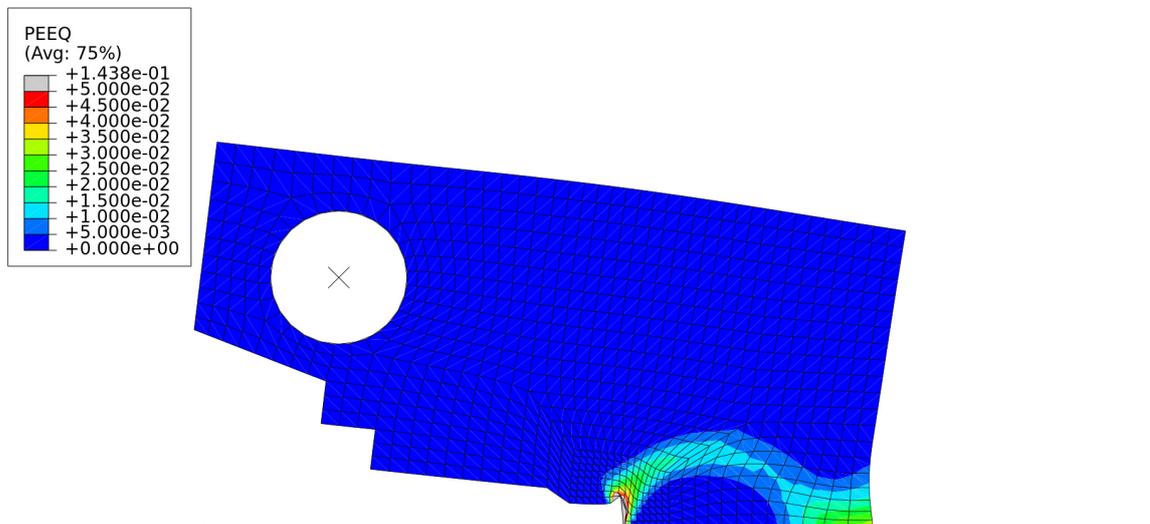


Abbildung 6.13.: Lastschritt 2 mit Entlastung $u = 0,2$ mm: Darstellung der plastischen Vergleichsdehnung

Zusammenfassend kann aus den Ergebnissen im Beispiel 1 bestätigt werden, dass der neue Riss-spitzenparameter insbesondere während der Entlastung eine geringfügige Wegabhängigkeit auf-

weist und damit für eine zyklisch effektive Risspitzengröße geeigneter erscheint als die konventionellen Auswertungsmethoden nach dem J^{Abaqus} -Integral und J^{DB} -Integral. Weitere Untersuchungen sollten mit einer Implementierung einer numerischen Methode zur exakteren Erfassung von Gradienten der sekundären Größen, wie sie im Anteil $\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Diss}}$ enthalten sind, unternommen werden.

6.2. Einfluss der Überlast und der induzierten Druckeigenstressungen auf die Rissfortschrittsberechnung

6.2.1. Einführung: Probenform (Kreuzbohrungsprobe) und Modellbeschreibung

Im folgenden Abschnitt wird die Anwendung der neu erarbeiteten Methoden der elastisch-plastischen Bruchmechanik zur Bestimmung der Dauerfestigkeit und Lebensdauer anhand eines praktischen Beispiels der Kreuzbohrungsproben (Werkstoff 42 CrMo 4) aus [25] betrachtet. Zum Gesamtkonzept zählt auch der Einsatz des entwickelten hybriden Optimierungsprogramms, der für die Identifikation der Werkstoffparameter verwendet wurde. In den Arbeiten [81, 82, 192, 196] wird über Dauerfestigkeits- bzw. Schwingfestigkeitsberechnungen für autofrettierte und nicht autofrettierte Komponenten bei zyklischer Belastung unter Verwendung von elastischer Bruchmechanik umfangreich berichtet. Im Rahmen dieser Arbeiten kommt es nicht nur zum Einsatz von numerischen Methoden mit Hilfe der FE-Software, sondern es wird die Anwendung des Fließstreifenmodells studiert, mit dem Ziel vereinfachte Berechnungsmethoden zu entwickeln. Weiterführende bruchmechanische Untersuchungen bei Raumtemperatur mit Verwendung einer neuartigen Rissfortschrittstechnik des Mapping-Verfahrens werden in [195, 213, 214] präsentiert. Anlehnend an diese Vorarbeiten wird der Fokus in diesem Beitrag in der zusätzlichen Einbeziehung des Temperatureinflusses auf die Dauerfestigkeit autofrettierter Bauteile gelegt und die numerische Dauerfestigkeits- und Lebensdauerberechnung unter Anwendung des Risspitzenparameters unter Einbeziehung der konfiguellen Kräfte oder materiellen Kräfte ergänzt. Die Schwingfestigkeitserhöhung von Bauteilen wird typischerweise durch Verfahren der mechanischen, thermischen sowie thermochemischen Randschichtverfestigung erreicht. Im Forschungsvorhaben [25] wurden als mechanisches Verfahren die Autofrettage (einmalige mechanische Überlast) und als thermochemisches Verfahren das Einsatzhärten untersucht. Beide Verfahren erzeugen im Kerbbereich Druckeigenstressungsfelder. Bedingt durch den Autofrettagevorgang führen die eingebrachten Druckeigenstressungen zu einer bis zum Faktor 3 höheren Dauerfestigkeit sowie zu einer erheblich geringeren Festigkeitsstreuung [175]. Die Erhöhung der ertragbaren Schwingungsamplituden ist nur gesichert, wenn die Eigenstressungen aufgrund von thermischen und mechanischen Lasten nicht abgebaut werden. Die maximalen Betriebstemperaturen liegen derzeit im Schwerölbetrieb bei 180 °C, in anderen Betriebsarten bei 120 °C. Der Einfluss solcher Temperaturen auf die Dauerfestigkeit druckeigenstressungsbehafteter Bauteile wird erstmals in [25] eingehend experimentell, numerisch und analytisch untersucht. In diesem Abschnitt werden ausschließlich die autofrettierten Proben analysiert. Hierbei werden die Ergebnisse des konventionellen zyklisch effektiven J -Integral-Verfahrens $\Delta J_{\text{eff}}^{\text{DB}}$ nach *Dowling und Begley* den Resultaten des effektiven Risspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ gegenübergestellt. Ziele dieser Betrachtung sind im Wesentlichen die Beschreibung der Eigenstressungsverläufe und deren Umlagerungsprozesse infolge von mechanischen und thermischen Lasten, die Bestimmung der Rissöffnungs- und Rissschließdrücke, sowie die Berechnung der Dauerfestigkeit und Lebensdauer basierend auf den Beträgen der zyklisch effektiven Risspitzenparameter des Modus-I-Lastfalles. Der Fokus der Stoffgesetzdefinition ist auf die Anwendung der beiden Plastizitätsmodelle nach *Chaboche* und *Döring* und der dafür notwendigen Parameteridentifikation, basierend auf den Werkstoffversuchsergebnissen, gerichtet. Im Rahmen der Parameteridentifikation wurden systematische Methoden entwickelt, mit denen makroskopische Materialeigenschaften experimentell erfasst und einer geeigneten Modellierung zu-

geführt werden. Diesbezüglich wurde ein neuartiges Optimierungsprogramm (siehe Kapitel 4) umgesetzt, so dass mit Hilfe einer nichtlinearen Optimierung die Parameteridentifikation, die auf Versuchsergebnissen basiert, durchgeführt werden kann. Die genaueren Berechnungen der

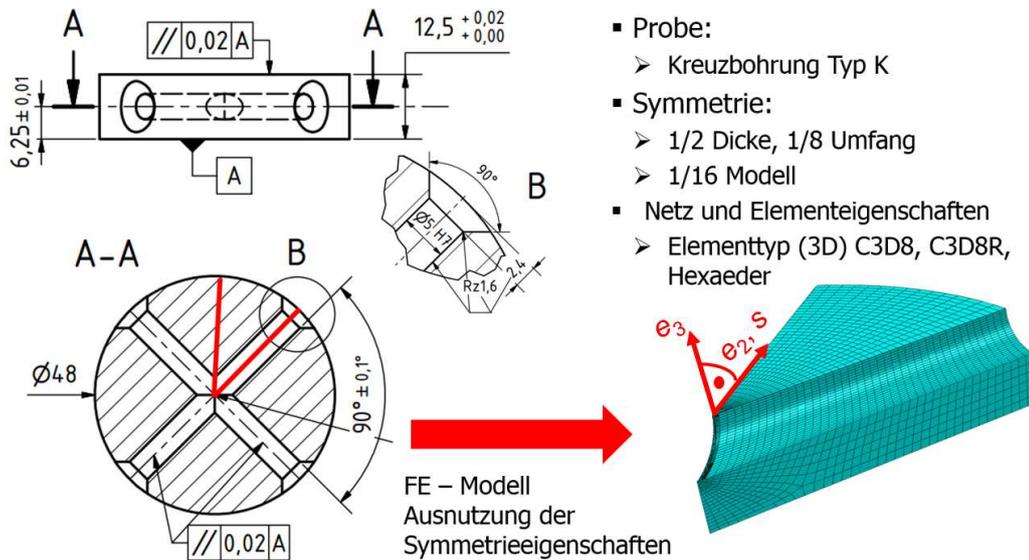


Abbildung 6.14.: Modellierung der Kreuzbohrungsprobe Typ-K als FE-Modell

Feldgrößen (Dehnungs- bzw. Verschiebungsfelder und Spannungsfelder) wirken sich direkt auf die Eigenspannungsverläufe und folglich auf die Feldgrößen, die zur Bestimmung von $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ und $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ notwendig sind, aus. Die geometrischen Abmessungen für das FE-Modell der Kreuzbohrungsprobe Bohrungsverschneidung Typ-K sind in Abbildung 6.14 dargestellt. Die vorliegende symmetrische Geometrie, sowie die symmetrischen Randbedingung erlauben eine Reduktion des Gesamtmodells auf ein 1/16-Symmetrie-Modell, das ausschließlich in der FE-Simulation im Folgenden verwendet wird. Die FE-Berechnungen wurden mit dem Hexaeder-Elementtyp C3D8R (reduzierte Integrationsmethode) und C3D8 (volle Integrationsmethode) mit dem FE-Programm Abaqus durchgeführt. Der größte Teil der Randbedingungsdefinition im Pre-Processing-Teil wird vereinfacht mit der folgenden Abbildung 6.15 dargestellt. In Abbildung 6.15 sind die Modelle

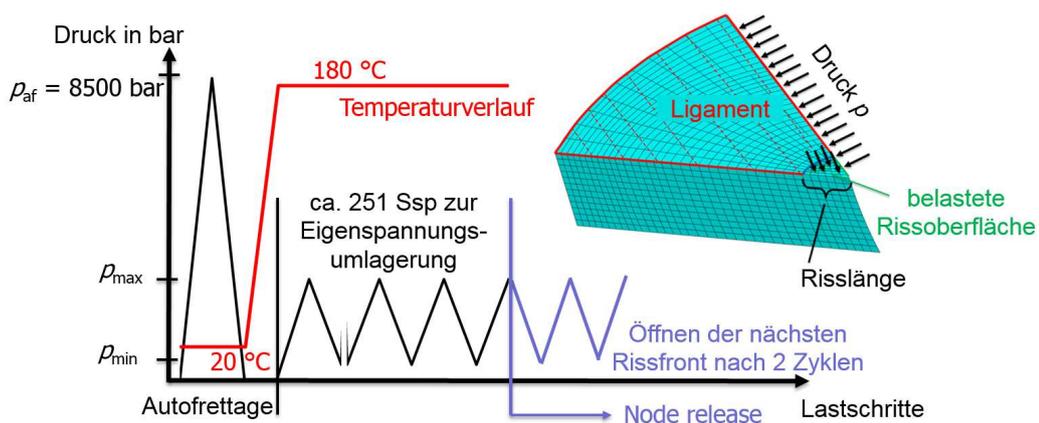


Abbildung 6.15.: Randbedingungen im FE-Modell mit Rissflächenbelastung

mit Temperatureinfluss ausgehend von dem Autofrettagedruck bei 20°C und darauffolgender zyklischer Betriebsdrucklast mit ca. 251 Schwingspielen bei 180°C zu sehen. Anschließend wird auf die Rissfortschrittssimulation mit dem Node-Release-Verfahren eingegangen, die nach zwei Schwingspielen durch das Öffnen der Randbedingungen bis zur nächsten Rissfront bei Belastung

der Rissoberfläche gekennzeichnet ist. Die Simulationsschritte können durch folgende Punkte zusammengefasst werden:

1. Abbilden des Autofrettageprozesses durch das Aufbringen des Autofrettagedruckes von 8500 bar und der Entlastung auf den Druck 0 bar bei einer Temperatur von 20 °C auf die Bohrung.
2. Modellierung der Eigenspannungsumlagerung durch das mehrfache zyklische Belasten mit dem maximalen Druck und minimalen Druck bei einer Temperatur von 180 °C. Der Autofrettagevorgang und die Eigenspannungsumlagerung sind mit einer ungerissenen Struktur modelliert worden.
3. Berechnungen mit zusätzlichen Modellen, die nach dem Autofrettagevorgang auf $T = 20\text{ °C}$ durchgehend verbleiben, dienen zur Ermittlung des Temperatureffektes.
4. Anwendung des Node-Release-Verfahrens: Zunächst wird schrittweise der gesamte maximale Druck auf die Bohrung sowie die bereits entstandene Rissoberfläche aufgebracht. Dabei kommt es zu teilweisem oder vollständigem Rissöffnen. Während der folgenden Entlastung werden die entsprechenden Auflagerbedingungen in den Knotenreihen auf der Oberfläche bis zur aktuellen Rissfront gelöst (siehe Abbildung 6.20). Damit ist der Riss im Rahmen einer Rissfortschrittssimulation um einen bestimmten Betrag gewachsen, der als Achtelkreisoberfläche interpretiert werden kann.

In dem Lastfall sind keine zyklischen Temperaturlasten definiert worden, aber es wird ein Temperaturanstieg nach dem Entlastungsvorgang des Autofrettageprozesses von $T = 20\text{ °C}$ auf $T = 180\text{ °C}$ vorgegeben. Der minimale Druck $p_{min} = 50\text{ bar}$ wird bei allen Modellen eingehalten, so dass für alle FE-Berechnungen ein Lastverhältnis von $R \approx 0$ gilt. Der Autofrettagevorgang und die Eigenspannungsumlagerung sind mit einer ungerissenen Struktur modelliert worden. Zur Verringerung des Rechenaufwandes wurde die Anwendbarkeit der Submodelltechnik untersucht. Die Realisierung dieses Verfahrens basiert auf dem Aufbringen der Verschiebungs-Zeit-Verläufe der Globalanalyse auf die Randknoten des Submodells (siehe Abbildung 6.16). Dabei sind bestimmte Ergebnisse eines Referenzmodells zur Überprüfung der Submodelltechnik verwendet worden. Das Referenzmodell unterliegt einer sehr feinen Vernetzung, so dass die Ergebnisse dieses Modells als eine relativ genaue Bezugsgröße für den Vergleich der Submodellergebnisse gehandelt werden. Als Vergleichsgrößen wurden die mechanischen Feldgrößen Verschiebungs-, Dehnungs- und Spannungswerte in besonderen Punkten (Kerbgrund und Verbindungsflächen zwischen Grob- und Submodell) gewählt.

Diese Validierung liefert eine angemessene Definition der Anzahl der Elemente des Grob- und

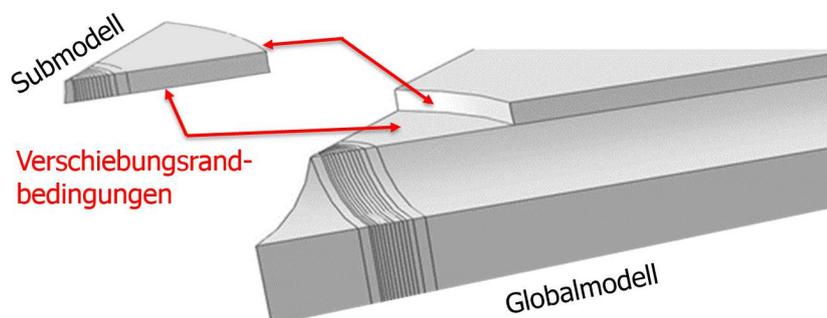


Abbildung 6.16.: Anwendung der Submodelltechnik mit Aufbringen der Verschiebungs-Zeit-Verläufe der Globalanalyse auf die Randknoten des Submodells

Submodells, so dass die lokale Plastizität nicht die globale Steifigkeit des FE-Modells beeinflusst, und sie kann zugleich als eine Art Konvergenzstudie betrachtet werden. Durch die Submodellierung wurde eine elastisch-plastische FE-Berechnung über mehrere Lastschritte in Verbindung

mit der bruchmechanischen Analyse, bei signifikanten Berechnungszeit- und Speicherbedarfsvorteilen gegenüber der konventionellen Berechnungsmethode, durchgeführt. Weitere Vorteile dieser Modellierungstechnik sind die Realisierung einer feineren Vernetzung im Risspitzenbereich und eine einfachere Anpassung der Konturpfaddefinition und der Gebietsdefinition für die anschließende Dauerfestigkeitsberechnung mit Hilfe von zyklisch effektiven Risspitzenparametern.

6.2.2. Ergebnisse: Praktische Anwendung des thermodynamisch konsistenten Gesamtkonzeptes

Ergebnisse basierend auf dem Werkstoffmodell nach Chaboche

Das Chaboche-Modell konstituiert ein elastisch-plastisches Werkstoffmodell, das sich als adäquat erweist für die Applikation des entwickelten Konzepts in Bezug auf den Risspitzenparameter $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ sowie die Integration materieller Kräfte in ein thermodynamisch konsistentes Gesamtverfahren. Die gegebenen Randbedingungen, darunter ein homogener Körper, konstante Temperatur über weite Bereiche, vorhandene Rissuferbelastungen und die Verwendung des Chaboche-Modells, bedingen die Ableitung des Risspitzenparameters gemäß der definierten Auswertungsvorschrift für das Postprocessing-Skript:

$$\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}} = \Delta\mathcal{F}_{\Sigma}^{\text{eff}} + \Delta\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{eff,Diss}} + \Delta\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{eff,Hard}} + \Delta\mathcal{F}_{\Gamma+-}^{\text{eff}}. \quad (6.2)$$

An dieser Stelle sei erneut darauf erinnert, dass $\Delta\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{eff,Hard}}$ in Verbindung mit der Verfestigungsregel des Chaboche-Modells steht. Beginnend mit dem Autofrettageprozess, der durch den Druck 8500 bar und der Entlastung auf 0 bar bei einer Temperatur von 20 °C gekennzeichnet ist, wird anschließend die Eigenspannungsumlagerung durch eine zyklisch-mechanische Belastung mit den Drücken p_{max} und p_{min} bei einer Temperatur von 20 °C und 180 °C verglichen (siehe Abbildung 6.17). Die Richtung der Spannung σ_{33} und des Pfades s kann der Abbildung 6.15 entnommen werden. Bei einer Betriebstemperatur von $T = 20$ °C ist die Eigenspannungsumlagerung

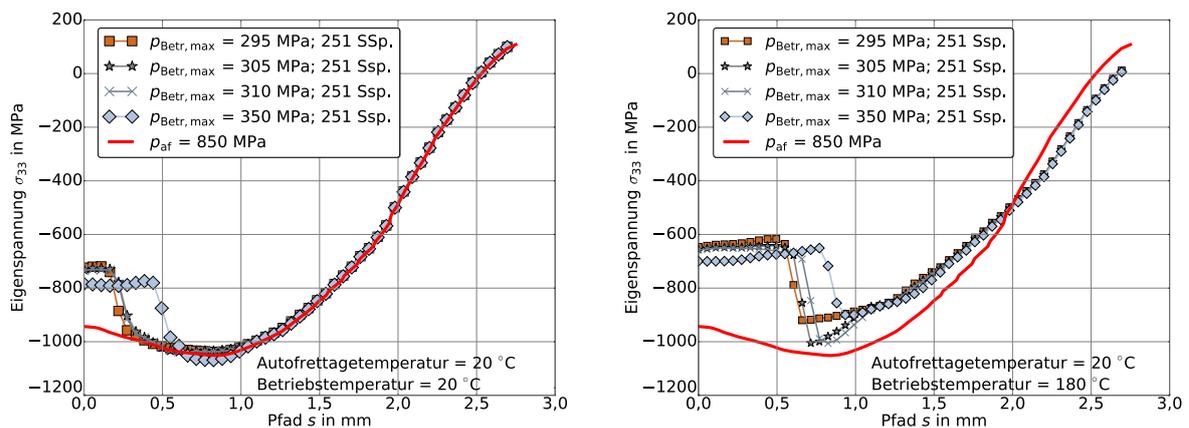


Abbildung 6.17.: links: Eigenspannungsverläufe für $T = 20$ °C, $p_{\text{af}} = 8500$ bar ($T_{\text{af}} = 20$ °C),
rechts: Eigenspannungsverläufe für $T = 180$ °C, $p_{\text{af}} = 8500$ bar ($T_{\text{af}} = 20$ °C)

aufgrund der unterschiedlichen zyklischen Drücke in einer Entfernung vom Kerbgrund nach ca. 0,6 mm abgeschlossen. Die Spannungs-Dehnungs-Kurven schließen sich danach dem Verlauf der Eigenspannungskurve des Autofrettageprozesses an. Bei dem Temperaturfall $T = 180$ °C reicht die Eigenspannungsumlagerung bis ca. 1,0 mm und die Kurven verlaufen danach nicht mehr entlang der ursprünglichen Eigenspannungskurve nach dem Autofrettagevorgang. Eine detailliertere Betrachtung der Eigenspannungsentwicklung nach mehreren Schwingspielen (Ssp.) und

thermischer Betriebslast bietet sich direkt im Kerbgrund durch die Auftragung der Spannungs-Dehnungs-Kurven an (siehe Abbildung 6.18). Es sind Effekte der Plastizität zu erkennen, die sich insbesondere in einer Kombination aus Mittelspannungsrelaxation und Ratchetting bemerkbar machen. Zusätzlich sei angemerkt, dass die Dehnungsamplitude nach 251 Schwingspielen etwas anwächst, was für ein zyklisch entfestigendes Materialverhalten spricht. Bei Temperaturanstieg auf $T = 180\text{ °C}$ sind dieselben zyklischen Phänomene mit größeren Beträgen der Dehnungsamplituden, Mittelspannungsrelaxationen und zyklischem Kriechen zu beobachten. Die soeben

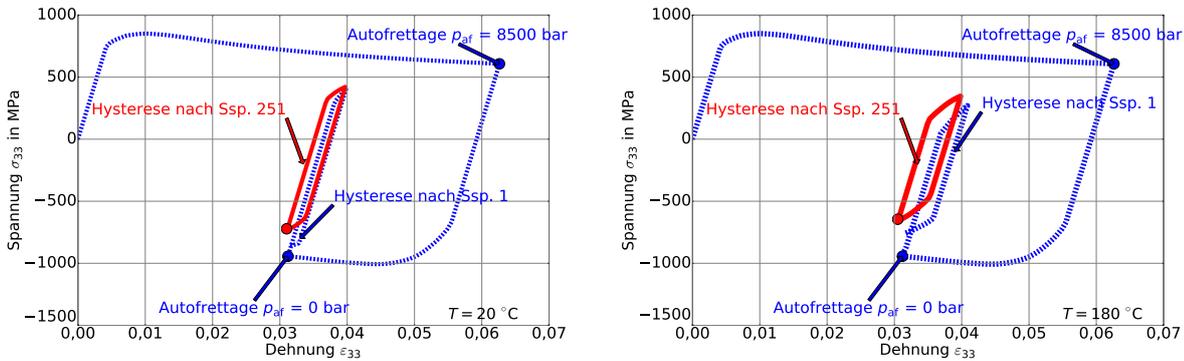


Abbildung 6.18.: links: σ_{33} - ϵ_{33} -Kurve im Kerbgrund für $T = 20\text{ °C}$ und $p_{\max} = 3050\text{ bar}$,
rechts: σ_{33} - ϵ_{33} -Kurve im Kerbgrund für $T = 180\text{ °C}$ und $p_{\max} = 3050\text{ bar}$

erwähnte Analyse bzgl. des transienten Werkstoffverhaltens im Kerbgrund kann zusätzlich in weiteren Punkten, die im plastischen Bereich liegen und entlang des Pfades s verlaufen, unternommen werden. Die Eigenspannungsstabilität ist bei zyklisch mechanischer Belastung von dem Überschreiten der zyklischen Streckgrenze abhängig. Wird diese zyklische Streckgrenze nicht überschritten, stellt sich ein elastischer Shakedown ein und es tritt kein Druckeigenspannungsabbau auf. Das transiente Werkstoffverhalten in der Nähe der Bohrungsverschneidung wird bei diesem Vergütungsstahl in den ersten 251 Schwingspielen in Form von Spannungsrelaxation und zyklischem Kriechen diktiert und stellt danach in Form eines plastischen Shakedowns den stabilisierten Zustand dar. Neben anderen Faktoren ist das transiente Werkstoffverhalten und damit die Eigenspannungsstabilität vorwiegend von der sich lokal einstellenden Dehnungsamplitude, Spannungsamplitude bzw. der Mittelspannung und der Anzahl der Schwingspiele abhängig [125, 58, 200, 118]. Eine Eigenspannungswirkung auf die Dauerfestigkeit ist bei hochfesten Werkstoffen deutlicher zu erkennen als bei Werkstoffen niedriger Festigkeit. Dieses Verhalten kann mit den Kurvenverläufen von Wechselfestigkeit, zyklischer und statischer Streckgrenze in Abhängigkeit von der Mittelspannungsempfindlichkeit, Zugfestigkeit R_m und Härte begründet werden [118]. Exemplarisch stellt die folgende Abbildung 6.19 den Einfluss der Temperatur auf die Rissöffnungs- und Risschließdrücke in Abhängigkeit von der Risslänge bei einem maximalen Druck von 3050 bar dar. Der Einfluss der erhöhten Temperatur zeigt sich hier in den niedrigeren Beträgen der Rissöffnungs- und Risschließdrücke verglichen mit den Ergebnissen bei $T = 20\text{ °C}$.

Bestimmung der Dauerfestigkeit mit dem zyklisch effektiven J -Integral $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ und dem Risspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$

Die angewendete Dauerfestigkeitsberechnungsmethode beruht im Wesentlichen auf dem plastizitätsinduzierten Risschließen bzw. Rissstoppen. Die Rissfortschrittssimulation mit der FE-Methode unter Berücksichtigung des plastischen Deformationsverhaltens wurde mit vorgegebener Rissoberflächengeometrie und einer empirisch ermittelten Rissanfangslänge von $a_0 = 0,2\text{ mm}$ durchgeführt. Der Rissfortschritt wird durch das NRT-Verfahren bis zu einer Risslänge von 2,2 mm

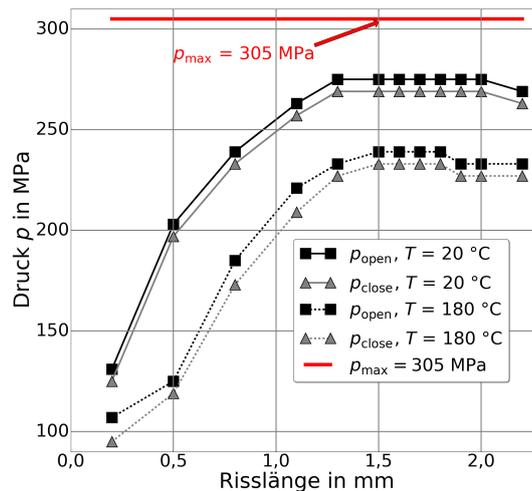


Abbildung 6.19.: Vergleich der Rissöffnungs- und Rissschließdrücke (p_{open} und p_{close}) bei der Temperatur $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$ bei einem maximalen Druck $p_{\text{max}} = 305\text{ MPa}$

durchgeführt, indem Lagerungsbedingungen der Partitionen in dem FE-Modell entfernt werden, so dass die Rissoberfläche schrittweise bis zu der Endrisslänge vergrößert wird. Obwohl es sich hierbei um ein 3D-Modell handelt, haben vorangehende Studien [25] gezeigt, dass die Auswertung des zyklischen Integrals $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ entlang der Konturen gemäß der in Abbildung 6.21 gezeigten Definition ausreichend ist. Diese Auswertungstechnik wird zur Begrenzung der Gebiete auch für den zyklischen $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -Parameter verwendet. Die Definition der Testfunktion η_i gemäß Abbildung 5.5 und die Definition des Auswertungsgebietes unter Ausschließung der Rissspitze sorgt dafür, dass der singuläre Bereich des Rissspitzenpunktes nicht in die Auswertung einfließt. Zu beachten ist, dass diese Anwendung nur den halben Betrag des Gesamtwertes darstellt, da es sich um ein symmetrisches Modell handelt und damit mit dieser Vorgehensweise nur die halbe Kontur einbezogen wurde. Im Anschluss wird im Post-Processing-Skript der berechnete Wert der Rissspitzenparameter mit dem Faktor 2 multipliziert, um den Gesamtwert zu erhalten. Das Auffinden der Dauerfestigkeitsgrenze, die sich experimentell in einem Rissstopp-Mechanismus bemerkbar macht, ist durch das Tangieren der zyklisch effektiven J -Integrale mit dem zugehörigen $\Delta J_{\text{eff,th}}$ -Schwellenwert definiert (siehe Abbildung 6.22). Während einer iterativen Vorgehensweise wird die äußere zyklische Belastung so lange variiert, bis der definierte Zustand der Dauerfestigkeitsdefinition erreicht wird. Der Schwellenwert für das zyklische J -Integral wird in Abhängigkeit vom Spannungsintensitätsfaktor hergeleitet:

$$\Delta J_{\text{eff,th}}(20\text{ °C}) = \frac{(\Delta K_{\text{eff,th}})^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) = \frac{(3\text{ MPa}\sqrt{\text{m}})^2}{200000\text{ MPa}} \cdot (1 - \nu^2) = 0,042\text{ N/mm}, \quad (6.3)$$

mit $\nu = 0,3$. (6.4)

Der Zusammenhang für eine Temperaturabhängigkeit des Schwellenwertes wird durch die folgenden Gleichungen erfasst:

$$\Delta \delta_{\text{th}} = \frac{\Delta J_{\text{eff,th}}(20\text{ °C})}{2\sigma_0(20\text{ °C})} \quad (6.5)$$

$$\Delta J_{\text{eff,th}}(180\text{ °C}) = \Delta J_{\text{eff,th}}(20\text{ °C}) \frac{\sigma_0(180\text{ °C})}{\sigma_0(20\text{ °C})} = 0,037\text{ N/mm}. \quad (6.6)$$

Für $T = 20\text{ °C}$ wurde der Schwellenwert von $\Delta J_{\text{eff,th},T20} = 0,042\text{ N/mm}$ und für den Fall $T = 180\text{ °C}$ ein Schwellenwert von $\Delta J_{\text{eff,th},T180} = 0,037\text{ N/mm}$ verwendet. Aus den elastisch-

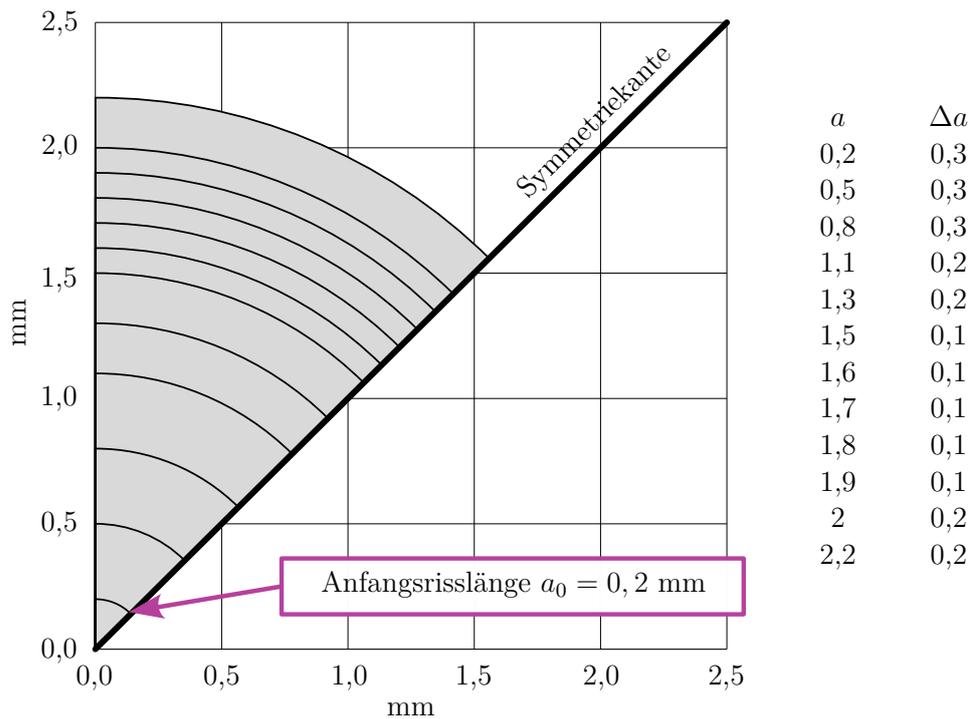


Abbildung 6.20.: Modell Kreuzbohrungsprobe: Inkrementelle Rissverlängerung und Vergrößerung der Rissoberfläche ausgehend von einem Ausgangsris $a_0 = 0,2$ mm

plastischen FE-Untersuchungen mit dem $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -Integral resultiert für $T = 20^\circ\text{C}$ eine Dauerfestigkeit von $\Delta p = (3020 - 50)$ bar = 2970 bar und für $T = 180^\circ\text{C}$ ein Dauerfestigkeitswert von $\Delta p = (2620 - 50)$ bar = 2570 bar (siehe Abbildung 6.22). Damit kann auf eine Reduktion der Dauerfestigkeit aufgrund des Temperatureinflusses um einen Faktor von ca. 1,16 geschlossen werden oder einem Abfall der Dauerfestigkeit um -16% .

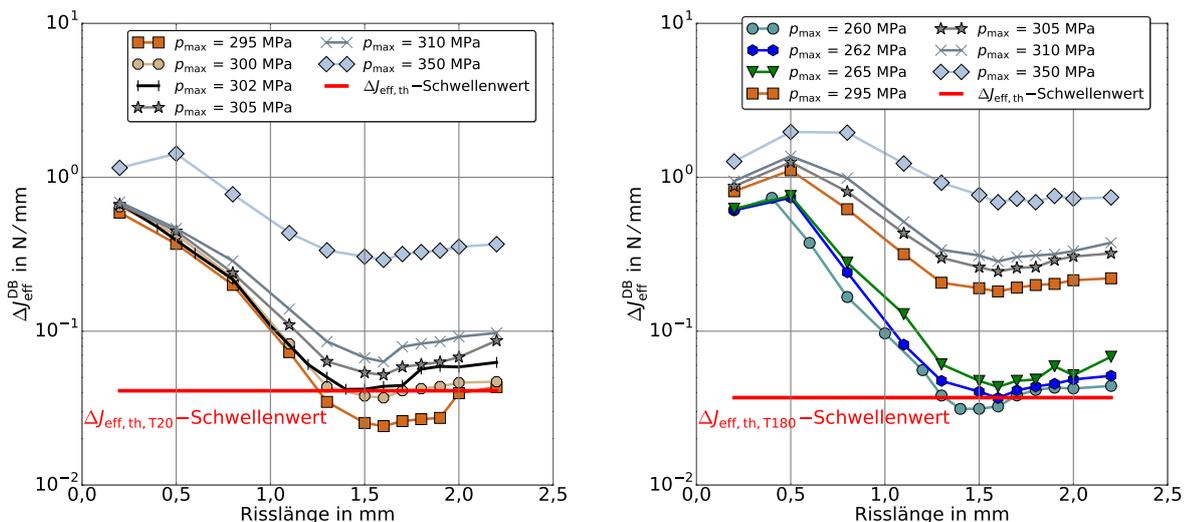


Abbildung 6.22.: links: $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 20^\circ\text{C}$, rechts: $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 180^\circ\text{C}$

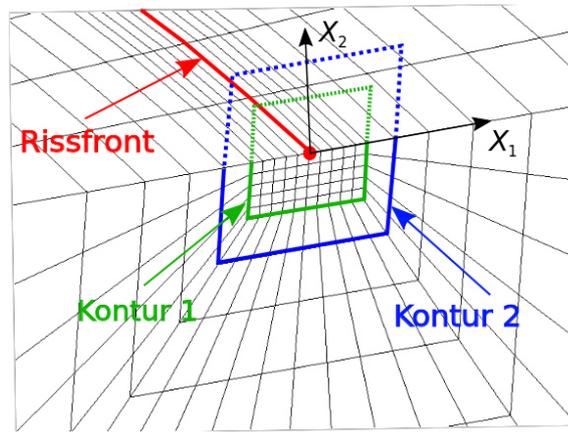


Abbildung 6.21.: Modell Kreuzbohrungsprobe [25]: Definition der Konturintegrale und der Auswertungsgebiete

Die $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -a- und $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -a-Kurven fallen trotz steigender Risslänge bis zu einem bestimmten Punkt ab. Dieser fallende Kurvenverlauf ist insbesondere mit dem Einfluss der Druckeigenstressungen in Verbindung zu bringen. In Bereichen hoher Druckeigenstressungen sind die Effekte der Risswachstumsverzögerung eindeutig anhand der sinkenden $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -Beträge bzw. $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ erkennbar. Zusätzlich kann der Abbau der Druckeigenstressungen durch das zyklische Belasten und durch die festigkeitsmindernde Wirkung der erhöhten Temperatur eindeutig aus den Resultaten schlußgefolgert werden. Aus der iterativen Ermittlung der Dauerfestigkeit mit dem Rissspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ kann für $T = 20^\circ\text{C}$ eine Dauerfestigkeit von $\Delta p = (3050 - 50) \text{ bar} = 3000 \text{ bar}$ und für $T = 180^\circ\text{C}$ kann ein Dauerfestigkeitswert von $\Delta p = (2670 - 50) \text{ bar} = 2620 \text{ bar}$ entnommen werden (siehe Abbildung 6.23). Demnach ergibt sich bei dieser numerischen Berechnung die Dauerfestigkeitsminderung aufgrund des Temperatureinflusses von RT bis 180°C um ca. 14,5%

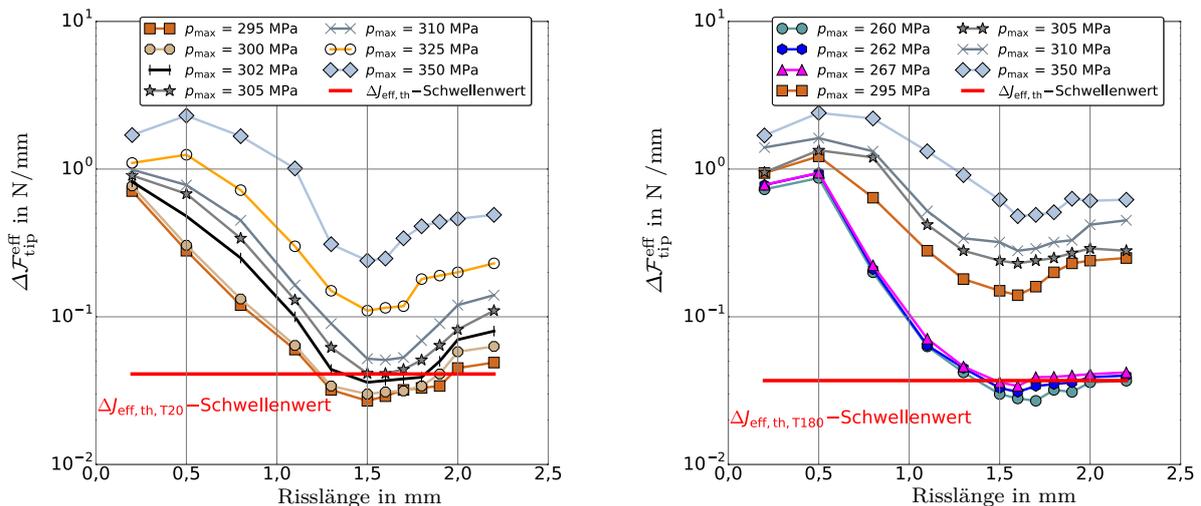


Abbildung 6.23.: links: $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 20^\circ\text{C}$,
rechts: $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 180^\circ\text{C}$

Die Auswertungen mit dem Rissspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ neigen zu Ergebnissen mit marginal höheren Dauerfestigkeiten. Für die Erfassung der Druckeigenstressungseffekte ist im Rahmen der Berechnungsprozedur neben dem Anteil $\Delta \mathcal{F}_{\Sigma}^{\text{eff}}$ insbesondere die $\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Diss}}$ -Definition zuständig. Im

Gegensatz zu dem $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -Integral beinhaltet die konventionelle $\Delta J_{\text{eff}}^{\text{DB}}$ -Methode keinen solchen Term. Dieser dissipative Anteil der effektiven materiellen Kraft wird in bestimmten Strukturbereichen, wo die Druckeigenspannung aus dem Autofrettageprozess dominiert, als zusätzlicher Risswiderstand aufgefasst, so dass der Gesamtbetrag von $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ hierdurch abgesenkt wird. Aus der Studie kann zusätzlich bei höheren zyklischen Betriebsdrücken geschlossen werden, dass die Druckeigenspannungen durch die Wirkung der zyklischen Betriebslast um einen gewissen Betrag reduziert werden und somit der Effekt des Risswiderstandes verloren geht. Bei Zugspannungen wirkt sich somit der entsprechende Term $\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Diss}}$ negativ auf die Lebensdauer aus. Das Übersichtsdiagramm 6.24 zeigt einen Vergleich der verschiedenen Berechnungsmethoden bei Raumtemperatur und bei der Betriebstemperatur von $T = 180^\circ\text{C}$ sowie die experimentellen Ergebnisse in einer Darstellung. Zusätzlich zu den beiden Methoden der EPBM werden die Resultate der Dauerfestigkeitsberechnung nach dem erweiterten Fließstreifenmodell nach Schlitzer [25] hinzugefügt.

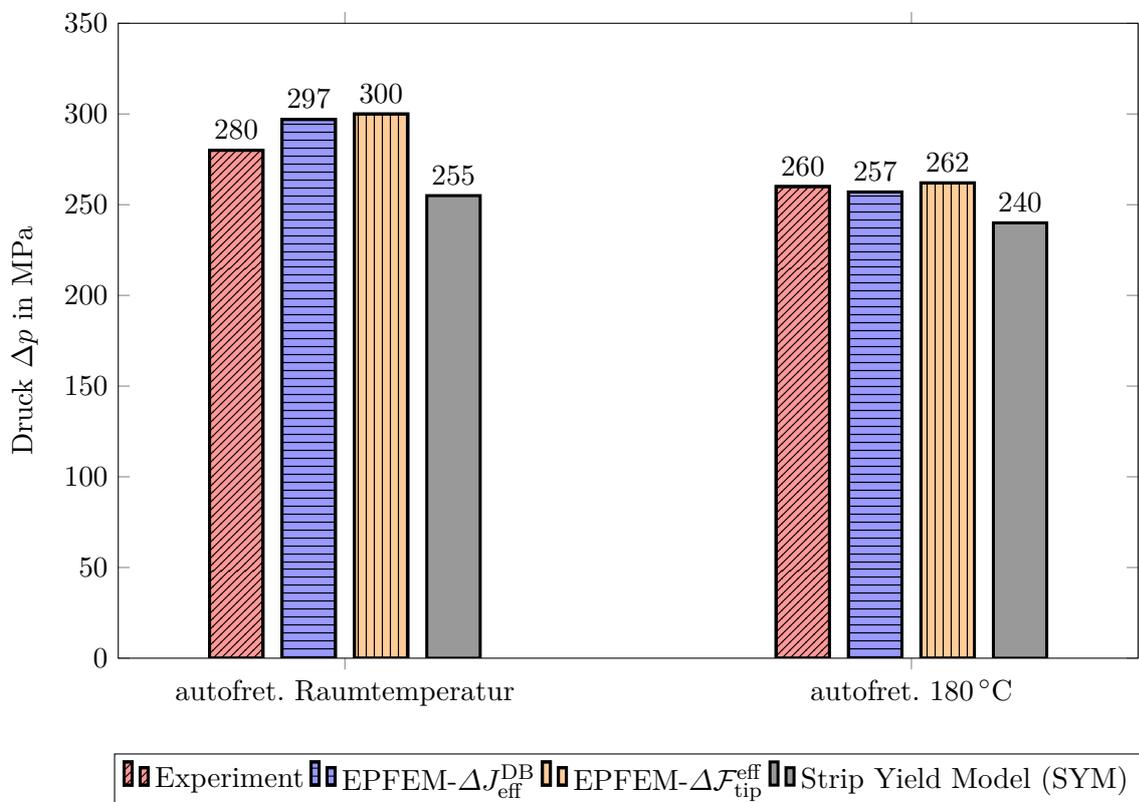


Abbildung 6.24.: Vergleich der experimentell bestimmten Dauerfestigkeit und der berechneten Dauerfestigkeit nach verschiedenen numerischen Bruchmechanikmethoden

In der Abbildung 6.25 wird das Ergebnis der Risslängenbestimmung (Raumtemperatur RT) bei einer Länge von ca. 1,65 mm mittels der numerischen Methode hervorgehoben und vergleichend der experimentellen Probe gegenübergestellt. Die versuchstechnisch untersuchte Kreuzbohrungsprobe zeigt einen Rissstopp bei einer Risslänge von ungefähr 1,78 mm.

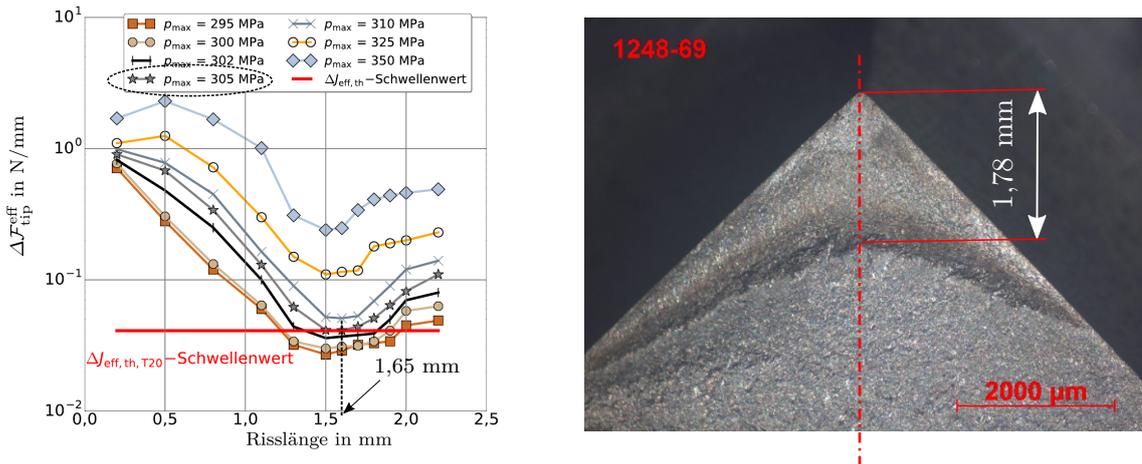


Abbildung 6.25.: links: Risslänge beim Rissstopp aus der FEM-Berechnung (RT)
rechts: experimentelle Bestimmung der Risslänge beim Rissstopp aus [25] (RT)

Lebensdauerberechnung auf Basis der Risspitzenparameter $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ und $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$

Die numerische Berechnung der Lebensdauer N wird aus den berechneten effektiven Risspitzenparameter und durch Integration der Risswachstumsgleichung für das zyklische J -Integral ΔJ_{eff} bzw. für die zyklisch effektive Größe $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= C_J (\Delta J_{\text{eff}})^m \quad \text{für } \Delta J_{\text{eff}} > \Delta J_{\text{eff,th}} \\ \frac{da}{dN} &= C_J (\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}})^m \quad \text{für } \Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}} > \Delta J_{\text{eff,th}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Unter Voraussetzung der klein gewählten Risslängenerweiterung im Rahmen der numerischen Realisierung des Rissfortschrittes ist eine direkte Integration der Rissfortschrittsgleichung angemessen. Der Rissfortschrittparameter C_J wird nach *Vormwald* [201] anhand der Gleichung

$$C_J = 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{Ssp}} \left(\frac{5 \cdot 10^5}{E \text{ mm}} \right)^m \quad (6.8)$$

und mit den temperaturabhängigen, experimentell bestimmten E-Modul (siehe Kapitel 3) zu $C_J(20^\circ\text{C}) = 5.199 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{Ssp}} \left(\frac{\text{mm}}{N} \right)^{1,8}$ bzw. $C_J(180^\circ\text{C}) = 5.208 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{Ssp}} \left(\frac{\text{mm}}{N} \right)^{1,8}$ abgeschätzt. Der Risswachstumsparameter $m = 1,8$ wird aus der Arbeit von *Schlitzer* [170] übernommen und für beide Temperaturwerte verwendet. Die Abbildungen 6.26 und 6.27 zeigen die Ergebnisse der Lebensdauerberechnung bei Raumtemperatur und bei der erhöhten Temperatur $T = 180^\circ\text{C}$. Hierzu wurden die experimentellen Daten, die numerischen Resultate auf Basis der Risspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ und $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ und zusätzlich die (semi)-analytischen Fließstreifenenergieergebnisse (SYM) eingetragen. Das angewendete numerische Berechnungskonzept zur Dauerfestigkeitsberechnung autofrettierter Komponenten unter Berücksichtigung von zyklischer Plastizität und von Temperatureffekten ermöglichte umfangreiche Detailstudien. Es wurden wichtige Einblicke von sonst experimentell schwer zugänglichen Informationen über Eigenspannungsfelder und deren Umlagerungen in komplizierten Bauteilgeometrien aufgrund von zyklischer und thermischer Belastung in gerissenen Strukturen gegeben. Das transiente Werkstoffverhalten wurde durch das Materialmodell nach *Chaboche* mit kinematischer und isotroper Verfestigung unter Berücksichtigung von temperaturabhängigen Parametern, die aus einer Parameteridentifikation gewonnen wurden, eingesetzt. Die Rissfortschrittssimulation mit der Finite-Elemente-Methode unter Berücksichtigung des plastischen Deformationsverhaltens und zyklisch effektiver J -Integrale

mit Rissoberflächenbelastungen wurde experimentell validiert. In diesem Zusammenhang wurden die experimentellen Arbeiten an autofrettierten Kreuzbohrungsproben an der Materialforschungs- und -prüfanstalt (MFPA) der Bauhaus-Universität-Weimar durchgeführt [25]. Die sehr gute Ergebnisübereinstimmung zwischen Simulation und experimentellen Daten spricht für die Ergebnisqualität. Der neue Rissspitzenparameter $\Delta\mathcal{F}_{tip}^{eff}$ zeigt eine numerische Anwendbarkeit im Sinne der gesamten Lebensdauerbewertung, im Zeitfestigkeitsbereich sind tendenziell konservativere Lebensdauerprognosen bei beiden Temperaturen zu erkennen und im Dauerfestigkeitsbereich neigt der Parameter zu einer leichten Überschätzung der ertragbaren Schwingspiele verglichen mit der Methode auf Basis ΔJ_{eff}^{DB} . Aufgrund der sehr begrenzten experimentellen Datenbasis lässt sich keine Aussage verallgemeinern. Die erhöhten Temperaturen bewirken verminderte Dauer- und Zeitfestigkeiten, was durch die analytische (erweitertes Fließstreifenmodell) Herangehensweise sowie die elastisch-plastische FE-Berechnung als auch durch die experimentellen Resultate bestätigt wurde.

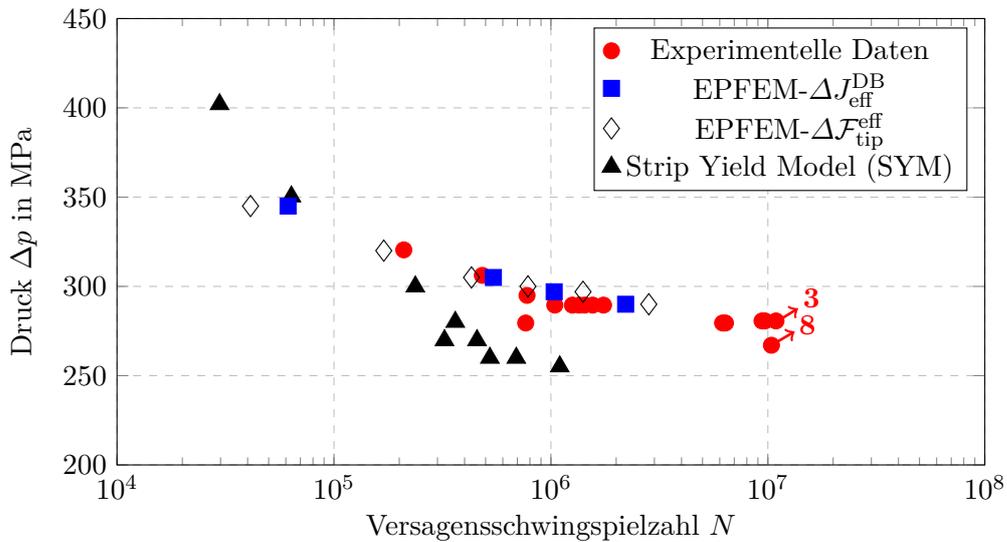


Abbildung 6.26.: Lebensdauerberechnung Kreuzbohrungsprobe (af) bei Raumtemperatur

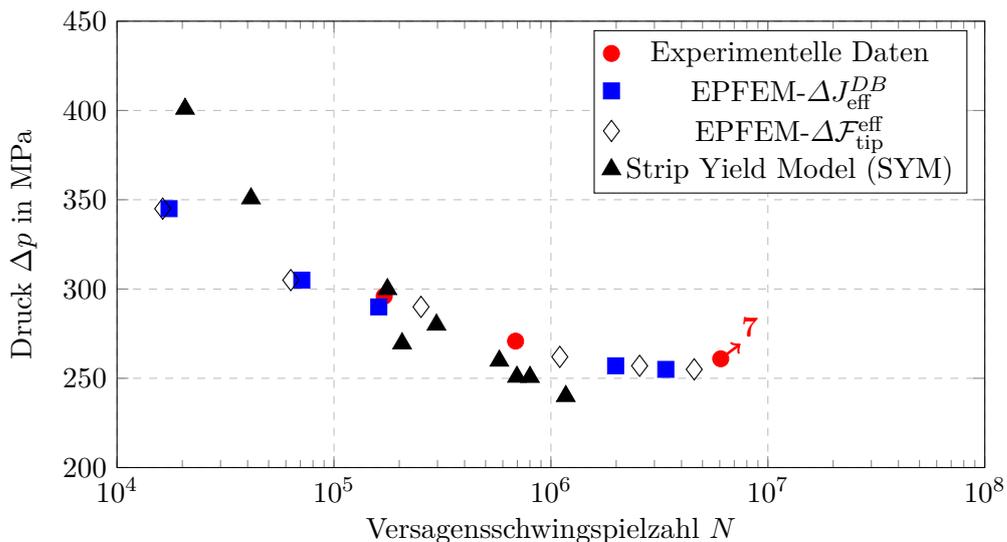


Abbildung 6.27.: Lebensdauerberechnung Kreuzbohrungsprobe (af) bei $T = 180\text{ }^{\circ}\text{C}$

6.2.3. Ergebnisse basierend auf $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -Integral: Vergleich Chaboche- und Döring-Modell

Vergleich der Ergebnisse: Einsatz des Chaboche- und Döring-Modells

Das Werkstoffmodell nach *Döring* beinhaltet im Rahmen der UMAT-Programmierung keine temperaturabhängigen Parameter, d. h. der tatsächliche Versuchsablauf mit dem Autofrettagedruck von 8500 bar bei Raumtemperatur und das anschließende zyklische Belasten der Kreuzbohrungsprobe bei einer Temperatur 180 °C kann nicht in einem Simulationsgang erfolgen. Die verwendete Materialdefinition wird durch die Parameter (siehe Anhang B.2) für die entsprechenden Temperaturen definiert. Daher wurde der Betriebsdruckschwingweite mit dem maximalen Druck von 3020 bar und minimalen Druck von 50 bar mit einer durchgehenden Temperatur von 20 °C, die als Dauerfestigkeitsgrenze bestimmt wurde, mit einer elastisch-plastischen FE-Berechnung basierend auf der Werkstoffdefinition nach *Döring* untersucht. Der Autofrettagedruck von 8500 bar wird bei einer Temperatur von 20 °C aufgebracht. Ein Vergleich des Eigenspannungsverlaufes entlang des Pfades *s* ist in Abbildung 6.28 zu sehen. Es ist zu beachten, dass das linke Bild die Eigenspannungen nach dem Autofrettageprozess und das rechte Bild die Eigenspannungen nach dem Autofrettageprozess und nachfolgenden Schwingspielen mit einer zyklischen Last von $\Delta p = 2970$ bar darstellen. Es lässt sich klar erkennen, dass das Ergeb-

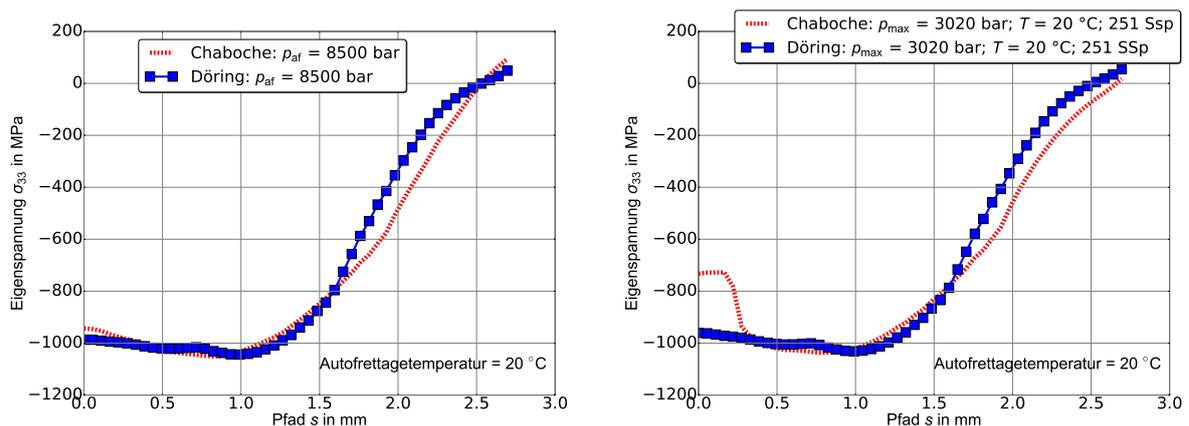


Abbildung 6.28.: links: Vergleich der Eigenspannungsverläufe nach dem Autofrettageprozess entlang des Pfades *s* basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach *Chaboche* und *Döring* bei $T=20$ °C, rechts: Vergleich der Eigenspannungsverläufe nach 251 Ssp mit $p_{\text{max}} = 3020$ bar entlang des Pfades *s* basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach *Chaboche* und *Döring* bei $T=20$ °C

nis unter Verwendung des Chaboche-Modells aufgrund der zyklisch mechanischen Lasten einen größeren Verlust an Druckeigenstressung im Anfangsbereich des Pfades aufweist im Vergleich zum Ergebnis bei Anwendung des *Döring*-Modells. Erneut ist in diesem Zusammenhang die Betrachtung der σ_{33} - ε_{33} -Verläufe im Kerbgrund aufschlussreich. In Abbildung 6.29 (links) sind die jeweiligen Kurven zu den zugehörigen Werkstoffdefinitionen zu sehen. Wie im vorhergehenden Abschnitt diskutiert, zeigt das Chaboche-Modell unter diesen Betriebslasten Effekte der Plastizität, insbesondere sind die Mittelspannungsrelaxation und Ratchetting zu erkennen. Das zeigt die Anwendung des *Döring*-Modells mit dem zugehörigen Parametersatz zeigt das Phänomen eines elastischen Shakedown, d. h. die Hysterese erfährt nach dem Autofrettageprozess bei diesen zyklisch mechanischen Lasten keine plastischen Anteile und verharrt nach den 251 Schwingspielen an der gleichen Position.

Die σ_{22} - ε_{22} -Verläufe wurden in einem zylindrischen Koordinatensystem im Kerbgrund ausgewertet und entsprechen den σ_{11} - ε_{11} -Verläufen. Im Wesentlichen sind hier die Unterschiede in den Dehnungen zu erkennen, was aufgrund des druckgesteuerten Lastfalls plausibel erscheint, da in der Bohrung der Autofrettagedruck und die zyklisch mechanischen Lasten wirken. Diese Lasten $p_{af} = 850$ MPa und $p_{max} = 302$ MPa bzw. $p_{min} = 5$ MPa sind im σ_{22} - ε_{22} -Diagramm nachvollziehbar. In Abbildung 6.30 werden die Rissöffnungs- und Rissschließdrücke (links) und die ΔJ_{eff} -Werte (rechts) resultierend aus der Werkstoffdefinition nach *Chaboche* und *Döring* gegenübergestellt. Die Rissschließdrücke liegen jeweils etwas unter den Beträgen der Rissöffnungsdrücke. Aus der Differenz des Maximaldrucks und dem Rissschließdruck kann der effektive Druck abgelesen werden. Die Abweichung der Ergebnisse beruht unter anderem auf der Tatsache, dass die Simulationen mit dem Döring-Modell ausschließlich mit dem Elementtyp C3D8 betrieben wurden. Im Vorfeld der Untersuchungen neigten die gleichen Kreuzbohrungsmodelle basierend auf dem *Chaboche*-Modell bei unterschiedliche Elementtypdefinition C3D8 und C3D8R zu unterschiedlichen Ergebnissen der Eigenspannungsbestimmung, Eigenspannungsumlagerung und letztendlich zu unterschiedlicheren zyklisch effektiven J -Integral-Werten. Bei der Anwendung der Elemente mit reduzierter Integration C3D8R resultieren größere zyklisch effektive J -Integral-Beträge als bei dem Einsatz von Elementen der vollen Integration C3D8. Die zum *Chaboche*-Modell zugehörige ΔJ_{eff} -Kurve liegt über der Kurve, die mit einer FE-Berechnung basierend auf dem Werkstoffmodell nach *Döring* bestimmt wurde. Weiterhin zeigt das Ergebnis, dass der Dauerfestigkeitsdruck für die Anwendung des *Döring*-Modells über dem Druck des *Chaboche*-Modells liegen muss. Die Berechnungsergebnisse des Ermüdungsrissfortschritts sind grundsätzlich von der Qualität der elastisch-plastischen Materialmodelle und der daraus gefolgerten Eigenspannungsverläufe abhängig. Die angewendete Dauerfestigkeitsberechnungsmethode beruht im Wesentlichen auf dem plastizitätsinduzierten Riss schließen bzw. Rissstoppen. Zur Bestimmung der zyklisch effektiven J -Integrale wurde der gleiche Algorithmus zur Bestimmung des Riss schließzeitpunktes, des Rissortes, -öffnungsdruckes und -schließdruckes verwendet. Die Dauerfestigkeitsergebnisse der elastisch-plastischen Bruchmechanik basierend auf der Werkstoffdefinition nach *Chaboche* stimmen mit den Versuchsergebnissen des Innendruckschwellversuchs für autofrettierte Proben gut überein. Nicht zuletzt wird mit den gezeigten Darstellungen der Ergebnisse deutlich, von welcher entscheidender Bedeutung die genaue Definition der Materialmodellierung samt der Parameterdefinition für die Eigenspannungsbeschreibung, die Rissöffnungs- und Riss schließ eigenschaften und die Berechnung der zyklisch effektiven J -Integrale ist.

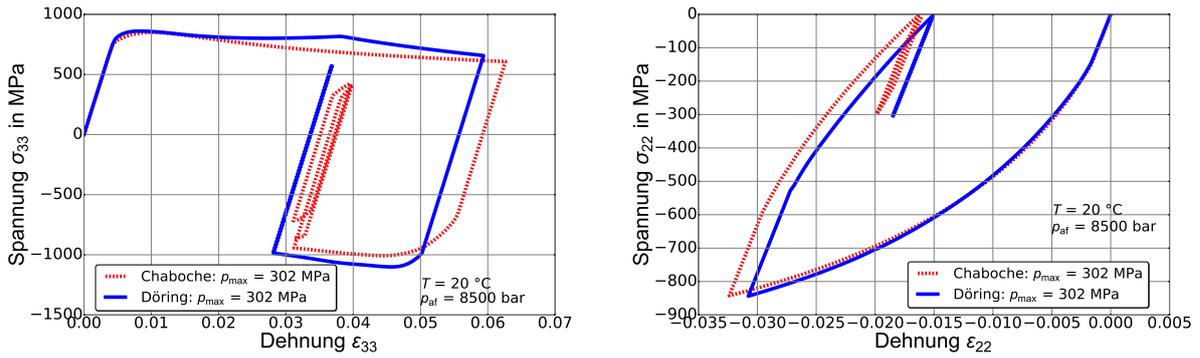


Abbildung 6.29.: links: Vergleich der σ_{33} - ϵ_{33} -Verläufe im Kerbgrund basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach *Chaboche* und *Döring*, rechts: Vergleich der σ_{22} - ϵ_{22} -Verläufe im Kerbgrund basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach *Chaboche* und *Döring*

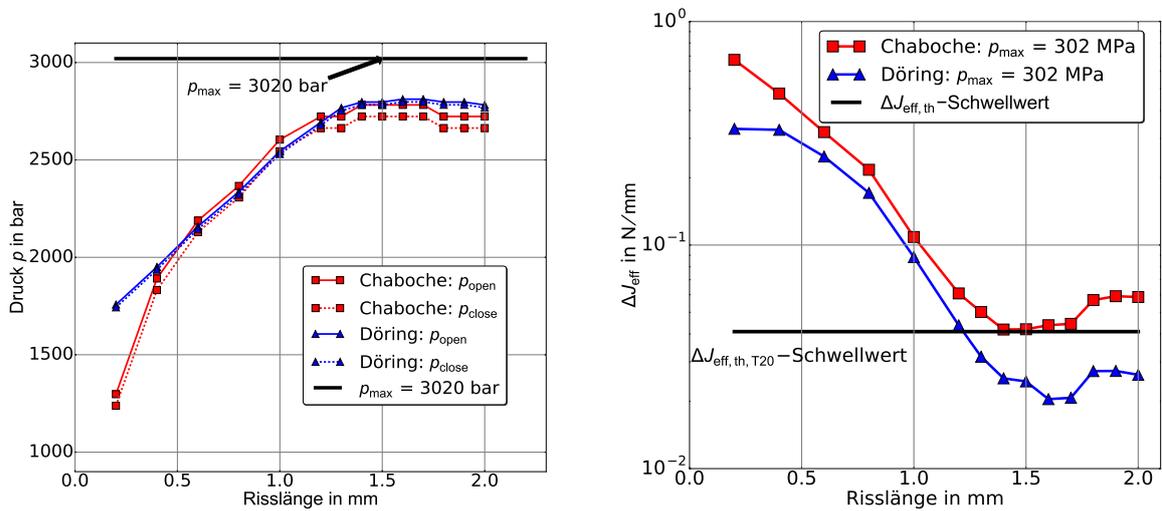


Abbildung 6.30.: links: Vergleich der Rissöffnungs- und Rissschließdrücke basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach *Chaboche* und *Döring*, rechts: Vergleich der ΔJ_{eff} -Kurven basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach *Chaboche* und *Döring*

7. Zusammenfassung und Ausblick

Die Entwicklung eines bruchmechanischen Konzeptes zusammen mit der Prämisse der Einhaltung von physikalischen Bilanzsätzen stellt das Hauptziel dieser Arbeit dar. Damit verbunden ist die Bereitstellung eines möglichst einschränkungsfreien, physikalisch nicht-angreifbaren bruchmechanischen FE-Modellkonzeptes zur Beschreibung eines Ermüdungsrisssfortschrittes unter zyklischer Beanspruchung. Im Rahmen der Arbeit wurde ein Konzept zur Durchführung einer thermodynamisch konsistenten FE-Simulation des Ermüdungsrisssfortschrittes erarbeitet und vorgestellt. Im Fokus steht die Verwendung von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen zur Erfassung der relevanten Feldgrößen in der elastisch-plastischen Bruchmechanik, so dass das transiente Werkstoffverhalten von metallischen Strukturen unter zyklischer Belastung berücksichtigt werden kann. Ein neues Optimierungsverfahren wurde zur Identifikation der Parameter des Werkstoffmodelles eingeführt, beschrieben und programmiert. Die erste Variante des Optimierungskonzeptes wurde bereits vom Autor im Rahmen des Forschungsvorhabens „Gewindeverbindungen Örtlich II“ [149] konzipiert und zur Identifikation der Modellparameter für das elastisch-plastische Materialmodell nach *Döring* und *Chaboche* in Bezug auf den Werkstoff 34CrNiMo6 angewendet. Das Optimierungsprogramm wurde in dieser Arbeit weiterentwickelt und vereint nun die Vorteile eines globalen Optimierungsalgorithmus in Form des Differential Evolution Algorithmus mit dem lokalen Verfahren nach *Nelder-Mead* zu einem hybriden Optimierungsverfahren. Die Zielfunktion besteht aus einem gewichteten Fehlerquadratfunktional der Simulations- und Versuchsdaten, die durch gradientenfreie Lösungsmethoden minimiert wird. Es wurde auf die eingesetzten Algorithmen detailliert eingegangen, um die Vorteile und Effizienz des Optimierungsprogrammes hervorzuheben. Die beiden Algorithmen wurden aus einer nicht-kommerziellen SCIPY-Bibliothek entnommen und wurden in der Scriptsprache PYTHON zu einem Gesamtprogramm zusammengeführt. Demonstriert wurde die Funktionalität des entwickelten Programms anhand der Identifikation der Parameter für die Werkstoffmodelle nach *Döring* und *Chaboche*. Die vergleichende Darstellung in Form von Diagrammen zeigte eine sehr gute Annäherung der Simulationsdaten an die Versuchsdaten. Eine zentrale Rolle nahm in dieser Arbeit die numerische Bestimmung des zyklischen Rissspitzenparameters mit Finite-Elemente-Methoden ein. Hierbei wurden vordergründig das zyklisch effektive J -Integral nach *Dowling und Begley* $\Delta J_{\text{eff}}^{\text{DB}}$ und ein Rissspitzenparameter $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$, der für die Bewertung der zyklisch belasteten Bruchmechanikprobleme in dieser Arbeit neu eingeführt wurde, eingesetzt. Die bruchmechanische Größe $\Delta J_{\text{eff}}^{\text{DB}}$ wurde bereits vom Autor im Rahmen des Forschungsvorhabens [25] als Postprocessing-Skript für den Einsatz mit der FE-Software ABAQUS in der Skriptsprache PYTHON entwickelt. Genaugenommen basiert das umgesetzte $\Delta J_{\text{eff}}^{\text{DB}}$ -Integral auf dem zyklisch-numerischen Pendant mit der Definition nach *Lamba, Wüthrich und Tanaka* 2.157 zu der klassischen Pfadintegraldefinition nach *Rice*. Besonderes Augenmerk wurde auf das Aufzeigen der konventionellen Methoden der J -Integral-Berechnung und erforderliche Erweiterungen hinsichtlich physikalischer Verbesserungen gelegt. Schließlich wurde die J -Integral-Variante mit den Konfigurationskräften, die insbesondere den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik einbezieht, aufgezeigt und im Rahmen der zyklischen elastisch-plastischen Modellierung ausformuliert sowie numerisch implementiert. Die im Kapitel 5 dargestellte Konzeptübersicht dient dem Leser zum Verständnis der einzelnen Schritte, die zur Entwicklung des thermodynamisch konsistenten Gesamtkonzeptes beigetragen haben. Nachfolgend wurde die konkrete numerische Umsetzung der Konzeptidee unter Verwendung eines FE-Programms behandelt. Die wichtigsten numerischen Algorithmen sind diesbezüglich:

- der transiente Rissschließalgorithmus (NRT),
- der Algorithmus zur numerischen Berechnung der materiellen Kräfte und der risstreibenden Kraft,
- das Berechnungsschema zur Bestimmung der effektiven Größe der risstreibenden Kraft,
- der Algorithmus zur Bestimmung des Rissarrestes bzw. des Rissstopps und somit der Dauerfestigkeit
- und die Lebensdauerberechnung auf Basis des Rissfortschrittgesetzes.

Im abschließenden Kapitel wurde das Konzept anhand von zwei Anwendungsbeispielen aufgezeigt. Im ersten Beispiel lag der Fokus auf der Untersuchung des stationären Mode-I-Risszustands einer CT-Probe unter Verwendung des neuen Rissspitzenparameters $\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$. Es erfolgte die Überprüfung der Gebiets- und Netzunabhängigkeit des neuen Rissspitzenparameter-Verfahrens anhand von Auswertungen in verschiedenen Konturbereichen eines Belastungs- und Entlastungslastfalls. Die neue bruchmechanische Feldgröße $\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ zeigte eine geringere Gebietsabhängigkeit als die konventionellen J -Integralmethoden $J_{\text{eff}}^{\text{DB}}$ und J^{Abaqus} . Im nächsten Anwendungsbeispiel wurden Ergebnisse der konventionellen Methoden nach *Dowling-Begley-Wüthrich* und der Methode der materiellen Kräfte anhand von autofrettierten Kreuzbohrungsproben diskutiert und miteinander verglichen. Hier konnte das Gesamtverfahren der materiellen Kräfte samt dem Parameteridentifikationsprogramm durchgeführt und validiert werden. Für das thermodynamisch-konsistente Gesamtkonzept wurde das elastisch-plastische Werkstoffmodell nach *Chaboche* verwendet. Bei dem Autofrettageprozess wurde durch die mechanisch einmalige Überlast eine Druckeigenspannung in bestimmten Bereichen der Probe eingebaut. In Verbindung mit einer elastisch-plastischen FE-Simulation unter Einbeziehung der physikalischen Bilanzgleichungen und der Verwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie wurde in dieser Arbeit erstmalig eine thermodynamisch konsistente Zugangsweise zu der Analyse von autofrettierten Proben auf Basis von materiellen oder konfigurellen Kräften geschaffen. Außerdem wurden die numerische Lebensdauer- und Dauerfestigkeitsberechnungen auf Basis des neuen Rissspitzenparameters mit den experimentellen Ergebnissen validiert. Die Resultate der numerischen Lebensdauerbewertung von Bauteilproben zeigten eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. In der vorliegenden Arbeit wurden ausschließlich Mode-I-Rissprobleme betrachtet. Weiterführende Studien im Zusammenhang von Mixed-Mode-Lastfällen in der elastisch-plastischen Bruchmechanik können aufgrund der mehrachsigen Definition des Rissspitzenparameters ohne großen Aufwand weitergeführt werden. Bei elastisch-plastischen Bruchmechanikaufgaben erfordert es den Einsatz leistungsfähigerer Werkstoffmodelle, welche die transienten Werkstoffantworten aufgrund der mehrachsigen Belastungen präzise erfassen können. Das neuentwickelte Parameteridentifikationsprogramm kann bei der Bestimmung der zugehörigen Modellparameter eingesetzt werden, da es einen modularen Aufbau beinhaltet und im aktuellen Stand mit den Werkstoffmodellen *Chaboche*, *Ohno-Wang I*, *Jiang* und *Döring* funktionsfähig ist. Neue Werkstoffmodelle, die derzeit keine Schnittstelle mit dem hybriden Optimierungsprogramm haben bzw. nicht in dem Programm integriert sind, können ohne großen Aufwand bei vorliegender UMAT hinzugefügt werden. Rückblickend auf das Kapitel 5 und die Definition des Rissspitzenparameters wird das Potential für eine umfassende Anwendung in der elastisch-plastischen Bruchmechanik zur Lösung verschiedener ingenieurtechnischer Fragestellungen deutlich. Diesbezüglich seien exemplarisch zwei Anwendungsgebiete des Gesamtkonzeptes der materiellen Kräfte genannt, die zukünftig behandelt werden können:

- Anwendung der konfigurellen Mechanik für weiterführende TMF-Analysen. Durchführung und experimentelle Validierung der FE-Analysen in der elastisch-plastischen Bruchmechanik unter Berücksichtigung der thermomechanischen Lastzyklen und Verwendung des effektiven Rissspitzenparameters unter Berücksichtigung des Rissschließeffektes und

anschließender Lebensdauerbewertung. Hierbei sind elastisch-plastische Werkstoffmodelle mit temperaturabhängigen Werkstoffparametern zu verwenden. Es müssen weiterhin thermodynamische Restriktionen beachtet werden und somit sollten die Verfestigungsgesetze des Materialmodells neben der Einhaltung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung zusätzlich in die Definition des Rissspitzenparameters eingebracht werden. Die relevante Ergänzung der konfigurrellen Rissspitzengröße bezieht sich bei diesen Untersuchungen auf den Term mit dem Gradienten der thermischen Dehnungen.

- Bruchmechanische Untersuchungen und Lebensdauerbewertung von inhomogenen Körpern unter zyklischen Beanspruchungen erfordern weiterführende numerische Untersuchungen, die durch experimentelle Versuche an inhomogenen Strukturen begleitet werden. Solche wissenschaftlichen Expertisen können zur Erforschung von Schweißverbindungen genutzt werden, die insbesondere in lokalen Bereichen durch existente Werkstoffinhomogenitäten aufgrund der Werkstoffunterschiede des Grundmaterials und des Schweißnahtwerkstoffes bestimmt sind. Die Anwendung der konfigurationellen Mechanik sowie das Einbeziehen des physikalischen Beitrags materieller Kräfte bieten sich hierfür an, um das inhomogene Verhalten per Definition 5.50 mit dem entsprechenden Term $\mathcal{F}_{\text{mat}}^{\text{Inh}}$ zu berücksichtigen. Die Durchführung optischer Dehnungsmessungen mithilfe optischer Messsysteme oder 3D-Korrelationstechniken stellt in diesem Kontext eine zuverlässige Methode zur Validierung der FE-Ergebnisse dar.

Bevor solche ambitionierten Ziele gesetzt werden können, müssen sich zukünftige Arbeiten mit dem brisanten Thema der numerischen Stabilität und einer angemessenen numerischen Umsetzung der Gradientenbestimmung von sekundären Variablen, wie z.B. $\nabla_x \epsilon^p$, auseinandersetzen. Die sekundären Variablen können ausschließlich am Gausspunkt mit einer akzeptablen Genauigkeit ausgegeben werden, sie müssen im Anschluss an die Knoten projiziert und zur Gesamtgröße assembliert werden. Die wohl bekannteste Projektionsmethode, die einen sogenannten L_2 -Algorithmus verwendet, wurde von *Zienkiewicz und Taylor* [217] veröffentlicht. Einige vergleichende Studien zu den verschiedenen Extrapolationsmethoden mit Bewertung der numerischen Effizienz sind in den Arbeiten von *Nguyen* [139] und *Kuhn et al.* [105] zu finden. Die Autoren berichten jedoch über weiteren Bedarf an verbesserten Methoden, um die Mechanik der Konfigurationskräfte oder materiellen Kräfte zur Behandlung von physikalischen Problemen bestmöglich auszuschöpfen. In diesem Kontext sei zur Motivation daran erinnert, dass die Wissenschaft zahlreiche Umwege und Irrwege beschreiten musste, bis die Verallgemeinerung des Energiesatzes der Mechanik im „thermodynamischen Sinne“ vervollständigt werden konnte.

Literaturverzeichnis

- [1] *Betriebsfestigkeit auf der Grundlage Örtlicher Beanspruchungen*. Seminarunterlagen (Teil 2), TU Darmstadt : Fachgebiet Werkstoffmechanik, 2013
- [2] *Richtlinie Nichtlinear*. 1. Auflage. Frankfurt am Main : Forschungskuratorium Maschinenbau, VDMA (Verlag), 2019
- [3] ABAQUS, Simulia: Fracture Mechanics Study of a Compact Tension Specimen Using Abaqus/CAE / Dassault Systemes. ABAQUS Technology Brief TB-04-FMCAE-1, 2007. – Forschungsbericht
- [4] ABDEL-KARIM, M.: An extension of the Ohno-Wang kinematic hardening rules to incorporate isotropic hardening. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 87 (2010), Nr. 4, S. 170–176
- [5] ABDEL-KARIM, M. ; OHNO, N.: Kinematic hardening model suitable for ratchetting. In: *International Journal of Plasticity* 16 (2000), Nr. 9, S. 1067–1082
- [6] ALLISON, J. E.: The Measurement of Crack Closure during Fatigue Crack Growth Rates. In: *ASTM STP 945, American Society for Testing and Materials, Philadelphia* (1988), S. 913–933
- [7] ALT, W.: *Nichtlineare Optimierung: Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. 1. Auflage, Vieweg Verlag, 2002
- [8] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik*. 3. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2015. – ISBN 978-3-662-47069-5
- [9] ANDERSON, T. L.: *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition*. 3rd ed. Hoboken : CRC Press, 2005. – ISBN 0849316561
- [10] ANTUNES, F. V. ; BORREGO, L. F. P. ; COSTA, J. D. ; FERREIRA, J. M.: A numerical study of fatigue crack closure induced by plasticity. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 27 (2004), S. 825–835
- [11] ANTUNES, F. V. ; CHEGINI, A. G. ; BRANCO, R. ; CAMAS, D.: A numerical study of plasticity induced crack closure under plane strain conditions. In: *International Journal of Fatigue* 71 (2015), S. 75–86
- [12] ANTUNES, F. V. ; RODRIGUES, D. M.: Numerical simulation of plasticity induced crack closure: Identification and discussion of parameters. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 10, S. 3101–3120
- [13] AOKI, S. ; KISHIMOTO, K. ; SAKATA, M.: Energy flux into the process region in elastic-plastic fracture problems. In: *Engineering Fracture Mechanics* 20 (1984), S. 827–836
- [14] ARMITAGE, P. ; COLTON, .: *Encyclopedia of Biostatistics*. John Wiley & Sons, 2005
- [15] ARMSTRONG, P. J. ; FREDERICK, C. O.: *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. Bd. 731. Berkeley Nuclear Laboratories Berkeley, CA, 1966

- [16] ASHBAUGH, N. E. ; DATTA GURU, B. ; KOHOB AIB, M. ; NICHOLAS, T. ; PRAKASH, R. V. ; RAMAMURTHY, T. S. ; SESHADRI, B. R. ; SUNDER, R.: Experimental and Analytical Estimates of Fatigue Crack Closure in an Aluminium-Copper Alloy, Part II: A Finite Element Analysis. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 20 (1997), Nr. 7, S. 963–974
- [17] Norm ASTM E606-80 1980. *Standard recommended practice for constant-amplitude low-cycle fatigue testing*. – American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA
- [18] Norm ASTM E 647-93 1993. *Standard Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates*. – American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA
- [19] ATLURI, S. N.: Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with forces, inertia, and arbitrary crack-face conditions. In: *Engineering Fracture Mechanics* 16 (1982), S. 341–364
- [20] ATLURI, S. N. ; NISHIOKA, T. ; NAKAGAKI, M.: Incremental path independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* 20 (1984), Nr. 2, S. 209–244
- [21] BANKS-SILLS, L. ; VOLPERT, Y.: Application of the cyclic J -integral to fatigue crack propagation of Al 2024-T351. In: *Engineering Fracture Mechanics* 40 (1991), S. 355–370
- [22] BARD, Y.: *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, New York, 1974
- [23] BARI, S. ; HASSAN, T.: An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. In: *International Journal of Plasticity* 18 (2002), Nr. 7, S. 873–894
- [24] BAUERBACH, K. ; RUDOLPH, J. ; VORMWALD, M.: Finite element simulation of short crack behavior under thermo-mechanical loading conditions. In: *Transactions, SMiRT-22, 22th Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology* (2013)
- [25] BEIER, H. T. ; BERGMANN, J. W. ; DIEMAR, A. ; KLEEMANN, A. ; KLEEMANN, S. ; PANIC, D. ; RICHTER, T. ; SCHLITZER, T. ; VORMWALD, M.: Temperatur und Hochdruck: Vorhaben Nr. 1160, Einfluss der Temperatur auf die Dauerfestigkeit autofrettierter und einatzgehärteter Bauteile von Dieseleinspritzsystemen / Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. Frankfurt am Main, 2017. – Forschungsbericht
- [26] BERKSON, J.: A Statistically Precise and Relatively Simple Method of Estimating the Bioassay with Quantal Response, Based on the Logistic Function. In: *Journal of the American Statistical Association* 48 (1953), sep, Nr. 263, 565-599. <http://www.jstor.org/stable/2281010>. – ISSN 01621459
- [27] BERTRAM, A.: What is the general constitutive equation? In: *Beiträge Festschrift zum 65. Geburtstag von Rudolf Trostel, TU Berlin* (1994), S. 28–37
- [28] BESSELING, J. F.: A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery and secondary creep. In: *Trans ASME Journal of Applied Mechanics* 25 (1959), S. 529–563
- [29] BROCKS, W.: Cohesive Strength and Separation Energy as Characteristic Parameters of Fracture Toughness and Their Relation to Micromechanics. In: *SID Structural Integrity and Durability 1 (4)* 1 (2005), S. 234–243
- [30] BROCKS, W. ; SCHEIDER, I.: Numerical Aspects of the Path-Dependence of the J -Integral in Incremental Plasticity / Institut für Werkstofforschung. GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, 2001. – Forschungsbericht

- [31] BUDIANSKY, B. ; HUTCHINSON, J. W.: Analysis of closure in fatigue crack growth. In: *Journal of Applied Mechanics* (1978), S. 267–276
- [32] BURGOLD, A.: *Modellierung des Bruchverhaltens austenitischer TRIP-Stähle*. Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Dissertation, 2019
- [33] CHABOCHE, J. L.: On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. In: *International Journal of Plasticity* 7 (1991), Nr. 7, S. 661–678
- [34] CHABOCHE, J.L.: A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. In: *International Journal of Plasticity* (2008), S. 1642–1693
- [35] CHEN, X. ; JIAO, R. ; KIM, K. S.: On the Ohno-Wang kinematic hardening rules for multiaxial ratcheting modeling of medium carbon steel. In: *International Journal of Plasticity* 21 (2005), Nr. 1, S. 161–184
- [36] CHEREPANOV, G. P.: Crack propagation in continuous media. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31 (1967), Nr. 3, S. 503–512. – ISSN 00218928
- [37] COCHRAN, K. B.: *Numerical Modeling Issues in Finite Element Simulation of Plasticity Induced Crack Closure with an Emphasis on Material Model Effects*. Urbana-Champaign, University of Illinois, Dissertation, 2009
- [38] COCHRAN, K. B. ; DODDS, R.H. ; HJELMSTAD, K. D.: The role of strain ratcheting and mesh refinement in finite element analyses of plasticity induced crack closure. In: *International Journal of Fatigue* 33 (2011), S. 1205–1220
- [39] COLEMAN, B. D. ; NOLL, W.: Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 13 (1963), S. 167–178
- [40] COTTERELL, B. ; ATKINS, A. G.: A review of the J and I integrals and their implications for crack growth resistance and toughness in ductile fracture. In: *International Journal of Fracture* 81 (1996), Nr. 4, S. 357–372
- [41] DAFLIAS, Y.F. ; POPOV, E.P.: A model of nonlinear hardening materials for complex loading. In: *Acta Mechanica* 21 (1975), S. 173–192
- [42] DAFLIAS, Y.F. ; POPOV, E.P.: Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. In: *Journal of Applied Mechanics* 43 (1976), S. 645–650
- [43] DANKERT, M.: *Ermüdungsrisswachstum in Kerben - Ein einheitliches Konzept zur Berechnung von Anriss- und Rissfortschrittslebensdauern*. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, Heft 60, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 1999
- [44] DAS, S. ; SUGANTHAN, P. N.: Differential Evolution: A Survey of the State-of-the-Art. In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 15 (2011), Nr. 1, S. 4–31
- [45] DENNIS, J.E. ; SCHNABEL, R.B.: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia. Originally published by Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996
- [46] DENZER, R. ; BARTH, F. J. ; STEINMANN, P.: Studies in elastic fracture mechanics based on the material force method. In: *International Journal of Numerical Methods Engineering* 58 (2003), S. 1817–1835

- [47] DILL, H. D. ; SAFF, C. R.: Spectrum crack growth prediction method based on crack surface displacement and contact analyses. In: *Wei, R. P. und R. I. Stephens (Hrsg.): Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads, ASTM STP 595* (1976), S. 306–319
- [48] Norm EN ISO/IEC 17025:2005 Oktober 2005. *Allgemeine Anforderungen an die Kompetenz von Prüf- und Kalibrierlaboratorien (ISO/IEC 17025:2005); Deutsche und Englische Fassung EN ISO/IEC 17025:2005*
- [49] DORIGO, M. ; MANIEZZO, V. ; COLORNI, A.: Distributed optimization by ant colonies. In: *European Conference on Artificial Life, Paris, France* (1991), S. 134–142
- [50] DORIGO, M. ; MANIEZZO, V. ; COLORNI, A.: Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics* 26 (1996), Nr. 1, S. 29–41
- [51] DÖRING, R.: *Zum Deformations- und Schädigungsverhalten metallischer Werkstoffe unter mehrachsiger nichtproportionaler zyklischer Beanspruchung*. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, Heft 78, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2006
- [52] DÖRING, R. ; HOFFMEYER, J. ; SEEGER, T. ; VORMWALD, M.: A plasticity model for calculating stress-strain sequences under multiaxial nonproportional cyclic loading. In: *Computational Materials Science* 28 (2003), Nr. 3-4, S. 587–596
- [53] DOWLING, N. E.: Geometry effects and the J -Integral approach to elastic plastic fatigue crack growth. In: *ASTM STP 601* (1976), S. 19–32
- [54] DOWLING, N. E.: Crack growth during low cycle fatigue of smooth axial specimens. In: *ASTM STP 637* (1977), S. 97–121
- [55] DOWLING, N. E. ; BEGLEY, J. A.: Fatigue crack growth during gross plasticity and the J -Integral. In: *ASTM STP 590* (1976), S. 82–103
- [56] DOWLING, N. E. ; IYYER, N. S.: Fatigue crack growth and closure at high cyclic strains. In: *Materials Science and Engineering* 96 (1987), S. 99–107
- [57] DUGDALE, D. S.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), Nr. 2, S. 100–104
- [58] EBENAU, A.: *Das Verhalten von kugelgestrahltem 42CrMo4 im normalisierten und vergüteten Zustand unter einachsiger homogener und inhomogener Wechselbeanspruchung*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1989
- [59] EKH, M. ; JOHANSSON, A. ; THORBERNTSSON, H. ; JOSEFSON, B.L.: Models for cyclic ratchetting plasticity - Integration and calibration. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 122 (1997), Nr. 1, S. 49
- [60] ELBER, W.: Fatigue crack closure under cyclic tension. In: *Engineering Fracture Mechanics* 2 (1970), Nr. 1, S. 37–44
- [61] ELBER, W.: The significance of fatigue crack closure. In: *Rosenfeld, M. S. (Hrsg.): Damage Tolerance in Aircraft Structures, ASTM STP 486* (1971), S. 230–242
- [62] ERDOGAN, F. ; RATWANI, M.: Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack. In: *International Journal of Fracture* 6 (1970), S. 379–392
- [63] FANG, Jie: *Cyclic plasticity modeling and multiaxial fatigue assessment for an austenitic steel*, University of Wuppertal, Dissertation, 2014
- [64] FINNEY, D. J.: *Probit Analysis*. Cambridge : University Press, 1971

- [65] FLETCHER, R. ; REEVES, C.: Function Minimization by Conjugate Gradients. In: *Computer Journal* 7 (1964), S. 149–154
- [66] FORMAN, R. G. ; KEARNEY, V. E. ; ENGLE, R. M.: Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures. In: *Journal of Basic Engineering (ASME)* 6 (1967), S. 459–464
- [67] FREDRIKSSON, P. ; GUDMUNDSON, P. ; PILGAARD M., L.: Finite element implementation and numerical issues of strain gradient plasticity with application to metal matrix composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), Nr. 22, S. 3977–3987
- [68] FÜHRING, H. ; SEEGER, T.: Dugdale crack closure analysis of fatigue cracks under constant amplitude loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 11 (1979), Nr. 1, S. 99–122
- [69] FURUKAWA, T. ; SUGATA, T. ; YOSHIMURA, S. ; HOFFMANN, M.: An automated system for simulation and parameter identification of inelastic constitutive models. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), S. 2235–2260
- [70] FURUKAWA, T. ; YAGAWA, G.: Inelastic constitutive parameter identification using an evolutionary algorithm with continuous individuals. In: *International journal for numerical methods in engineering* 40 (1997), Nr. 6, S. 1071–1090
- [71] GARCIA, S. ; MOLINA, D. ; LOZANO, M. ; HERRERA, F.: A Study on the Use of Non-parametric Tests for Analyzing the Evolutionary Algorithms Behaviour. In: *Journal of Heuristics* 15 (2009), Nr. 617, S. 617–644
- [72] GERDTS, M.: *Optimierung*. Preliminary Version 3, University of Birmingham : Management Mathematics Group School of Mathematics, 2008
- [73] GÖTZ, S. ; EULITZ, K.-G.: *Betriebsfestigkeit*. 1. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2020
- [74] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 221 (1920), S. 163–198
- [75] GROSS, Dietmar ; SEELIG, Thomas: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikro-mechanik*. 5., erw. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – ISBN 978-3-642-10195-3
- [76] GURTIN, M. E.: The nature of configurational forces. In: *Arch. Rational Mech. Anal.* 131 (1995), S. 67–100
- [77] GURTIN, M. E. ; PODIO-GUIDUGLI, P.: Configurational forces and the basic law for crack propagation. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), S. 905–927
- [78] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. 2. Berlin, New York : Springer Verlag, 2002. – ISBN 978-3-662-04775-0
- [79] HEITMANN, H. H. ; VEHOFF, H. ; NEUMANN, P.: Life Prediction for random load fatigue based on the growth behavior of microcracks. In: *Advances in Fracture Research 84 - Proceedings of the International Conference on Fracture* 6 (1984), S. 3599–3606
- [80] HERRERA, A. Gonz l. ; ZAPATERO, J.: Influence of minimum element size to determine crack closure stress by finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), S. 337–355
- [81] HERZ, E. ; HERTEL, O. ; VORMWALD, M.: Numerical simulation of plasticity induced fatigue crack opening and closure for autofrettaged intersecting holes. In: *Engineering Fracture Mechanics* 78 (2011), S. 559–572

- [82] HERZ, E. ; THUMSER, R. ; BERGMANN, J. W. ; VORMWALD, M.: Endurance limit of autofrettaged Diesel-engine injection tubes with defects. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), S. 3–21
- [83] HUBER, N. ; TSAKMAKIS, C.: A neural network tool for identifying the material parameters of a finite deformation viscoplasticity model with static recovery. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2001), S. 353–384
- [84] HUTCHINSON, J. W.: Plastic Stress and Strain Fields at a Crack Tip. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (1968), S. 337–347
- [85] HUTCHINSON, J. W.: Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (1968), S. 13–31
- [86] IBRAHIM, F. K. ; THOMPSON, J. C. ; TOPPER, T. H.: A study of the effect of mechanical variables on fatigue crack closure and propagation. In: *International Journal of Fatigue* 8 (1986), S. 135–142
- [87] JIANG, Y.: *Cyclic Plasticity with an Emphasis on Ratchetting*. Materials Engineering - Mechanical Behavior, University of Illinois, Dissertation, 1994
- [88] JIANG, Y. ; FENG, M. ; DING, F.: A reexamination of plasticity induced crack closure in fatigue crack propagation. In: *International Journal of Plasticity* 21 (2005), S. 161–170
- [89] JIANG, Y. ; SEHITOGLU, H.: A Modeling of cyclic ratchetting plasticity: Part I - Development of constitutive relations. In: *Journal of Applied Mechanics* 63 (1996), S. 720–725
- [90] JIANG, Y. ; SEHITOGLU, H.: A Modeling of cyclic ratchetting plasticity: Part II - Comparison of model simulations with experiments. In: *Journal of Applied Mechanics* 63 (1996), S. 726–733
- [91] KANG, G. ; GAO, Q.: Uniaxial and non-proportionally multiaxial ratchetting of U71Mn rail steel: Experiments and Simulations. In: *Mechanics of Materials* 34 (2002), Nr. 12, S. 809–820
- [92] KANG, G. ; KAN, Q.: *Cyclic Plasticity of Engineering Materials: Experiments and Models*. Bd. First Edition. 2017
- [93] KANG, G. ; KAN, Q. ; ZHANG, J. ; SUN, Y.: Time-dependent ratchetting experiments of SS304 stainless steel. In: *International Journal of Plasticity* 22 (2006), S. 858–894
- [94] KANG, G. ; OHNO, N. ; NEBU, A.: Constitutive modeling of strain range dependent cyclic hardening. In: *International Journal of Plasticity* 19 (2003), Nr. 10, S. 1801–1819
- [95] KENNEDY, J. ; EBERHART, R.: Particle Swarm Optimization. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks* 4 (1995), S. 1942–1948
- [96] KIENZLER, R. ; HERRMANN, G.: *Mechanics in material space. With application to defects and fracture mechanics*. Berlin : Springer, 2000
- [97] KISHIMOTO, K. ; AOKI, S. ; SAKATA, M.: Dynamic stress intensity factors using J-integral and finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 13 (1980), S. 387–394
- [98] KLEEMANN, U. ; ZENNER, H.: Bauteiloberfläche und Schwingfestigkeit - Untersuchungen zum Einfluss der Randschicht auf die Dauerschwingfestigkeit von Bauteilen aus Stahl. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 37 (2006), Nr. 5, S. 349–373
- [99] KOLEDNIK, O.: On the physical meaning of the J - Δa -curves. In: *Engineering Fracture Mechanics* 38 (1991), Nr. 6, S. 403–412

- [100] KOLEDNIK, O.: A simple model to explain the geometry dependence of J - Δa -curves. In: *International Journal of Fracture* 63 (1993), Nr. 3, S. 263–274
- [101] KONTERMANN, C.: *Entwicklung und Validierung eines FEM-basierten Rissfortschrittsmodells zur Beschreibung von Stützwirkung unter Kriechermüdungsbeanspruchung*. Fachgebiet und Institut für Werkstoffkunde (IfW), Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2017
- [102] KOTTE, K. L. ; EULITZ, K.-G.: Datensammlung Betriebsfestigkeit - Zuverlässigkeit von Lebensdauerabschätzungen. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 34 (2003), Nr. 9, S. 836–842
- [103] KRIEG, R.D.: A practical two surface plasticity theory. In: *Trans ASME Journal of Applied Mechanics* 42 (1975), S. 641–646
- [104] KRÜGER, L. ; TRUBITZ, P. ; HENSCHER, S.: *Moderne Methoden der Werkstoffprüfung*. John Wiley and Sons Ltd., 2014. – ISBN 9783527670673
- [105] KUHN, C. ; MÜLLER, R. ; GROSS, D.: Configurational forces in crystal plasticity: an analysis of the influence of grain boundaries on crack driving forces. In: *International Journal of Plasticity* (2014), Nr. 84, S. 1427–1439
- [106] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen: Finite Elemente in der Bruchmechanik*. 1. Aufl. s.l. : Vieweg+Teubner (GWV), 2008. – ISBN 9783835100978
- [107] LAGARIUS, J. C. ; REEDS, J. A. ; WRIGHT, M. H. ; WRIGHT, P. E.: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. In: *SIAM Journal on Optimization* 9 (1998), Nr. 1, S. 112–147
- [108] LAMBA, H. S.: The J -integral applied to cyclic loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 7 (1975), S. 693–703
- [109] LAMBERT, Y. ; SAILLARD, P. ; BATHIAS, C.: Application of the J concept to fatigue crack growth in large scale yielding. In: *ASTM STP 969* (1988), S. 318–329
- [110] LANDES, J. D. ; BEGLEY, J. A.: Test Results from J -Integral Studies: An Attempt to Establish a J_{Ic} Testing Procedure. In: *Fracture Analysis, ASTM STP 560* (1974), S. 170–186
- [111] LEE, H. J. ; SONG, J. H.: Finite-element analysis of fatigue crack closure under plane strain conditions: stabilization behaviour and mesh size effect. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 28 (2005), Nr. 3, S. 333–342
- [112] LEE, H. J. ; SONG, J. H.: Influence of minimum element size to determine crack closure stress by the finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 3, S. 337–355
- [113] LEMAITRE, J.: *Handbook of Materials Behavior Models*. Bd. 1. Academic Press, 2001
- [114] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J. L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge : Cambridge University Press, 1990
- [115] LI, F. ; SHIH, C. ; NEEDLEMAN, A.: A comparison of methods for calculating energy release rates. In: *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1985), Nr. 2, S. 405–421
- [116] LUBLINER, J.: *Plasticity theorie*. London : MacMillan, 1990
- [117] LUENBERGER, D.G.: *Linear and Nonlinear Programming*. Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989

- [118] MACHERAUCH, E.: Ermüdungsverhalten metallischer Werkstoffe / Verlag DGM Informationsgesellschaft, In: Munz, D. (Hrsg.). Oberursel, 1985. – Forschungsbericht
- [119] MAHNKEN, R.: Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen / Bericht Nr. F 98/2, Universität Hannover. Hannover, 1998. – Forschungsbericht
- [120] MATOS, P. F. P. ; NOWELL, D.: On the accurate assessment of crack opening and closing stresses in plasticity-induced fatigue crack closure problems. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 10, S. 1579–1601
- [121] MATOS, P. F. P. ; NOWELL, D.: Numerical simulation of plasticity-induced fatigue crack closure with emphasis on the crack growth scheme: 2D and 3D analyses. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), S. 2087–2114
- [122] MAUGIN, G. A.: *Material inhomogeneities in elasticity*. London : Chapman and Hall, 1993
- [123] MCCLUNG, R. C.: Finite element visualization of fatigue crack closure in plane stress and plain strain. In: *International Journal of Fracture* 50 (1991), Nr. 1, S. 27–49
- [124] MCCLUNG, R. C. ; SEHITOGLU, H.: Closure Behavior of Small Cracks Under High Strain Fatigue Histories. In: *Mechanics of Fatigue Crack Closure, ASTM STP 982* (1988)
- [125] MCCLUNG, R.C.: A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* (2007), S. 173–205
- [126] MCDOWELL, D.L.: *On the path dependence of transient hardening and softening to stable states under complex biaxial loading*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Dissertation, 1983
- [127] MCDOWELL, D.L.: A two surface model for transient nonproportional cyclic plasticity, part I: Comparison of theory with experiments. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 52 (1985), S. 303
- [128] MCDOWELL, D.L.: A two surface model for transient nonproportional cyclic plasticity, part II: Development of appropriate equations. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 52 (1985), S. 298–302
- [129] MCKINNON, K. I. M.: Convergence of the Nelder-Mead Simplex Method to a Nonstationary Point. In: *SIAM Journal on Optimization* 9 (1998), Nr. 1, S. 148–158
- [130] MEMHARD, D. ; BROCKS, W. ; FRICKE, S.: Characterization of ductile tearing resistance by energy dissipation rate. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 16 (1993), Nr. 10, S. 1109–1124
- [131] MORAN, B. ; SHIH, C. F.: Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. In: *Engineering Fracture Mechanics* 27 (1987), Nr. 6, S. 615–642
- [132] MRÓZ, Z.: On the description of anisotropic workhardening. In: *Journal of The Mechanics and Physics of Solids* 15 (1967), S. 163–175
- [133] MRÓZ, Z.: An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loading using a more general workhardening model. In: *Acta Mechanica* 7 (1968), Nr. 2-3, S. 198–206
- [134] MÜLLER, R. ; GROSS, D. ; MAUGIN, G. A.: Use of material forces in adaptive finite element methods. In: *Computational Mechanics* 33 (2004), S. 421–434

- [135] MÜLLER, R. ; KOLLING, S. ; GROSS, D.: On configurational forces in the context of the finite element method. In: *International Journal of Numerical Methods Engineering* 53 (2002), S. 1557–1574
- [136] NELDER, J. A. ; MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. In: *Computer Journal* 7 (1965), Nr. 4, S. 308–313
- [137] NERI, F. ; TIRRONEN, V.: Recent Advances in Differential Evolution: A Survey and Experimental Analysis. In: *Artificial Intelligence Review* 33 (2010), Nr. 2, S. 61–106
- [138] NEWMAN, J. C. Jr.: A crack opening stress equation for fatigue crack growth. In: *International Journal of Fracture* 24 (1984), S. 131–135
- [139] NGUYEN, T. ; GOVINDJEE, S. ; KLEIN, P. ; GAO, H.: A material force method for inelastic fracture mechanics. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53 (2005), Nr. 1, S. 91–121. – ISSN 00225096
- [140] NIKISHKOV, G. P. ; ATLURI, S. N.: Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the equivalent domain integral method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1987), S. 851–867
- [141] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S.J.: *Numerical Optimization*. Second Edition, Springer Verlag, 2000
- [142] OCHENSBERGER, W.: *Numerische Simulation des Ermüdungsrisssfortschrittes in metallischen Strukturen unter Berücksichtigung zyklischer Plastizitätseffekte*. Erich Schmid Institute of Materials Science, Materials Center Leoben Forschung GmbH, Montanuniversität Leoben, Dissertation, 2015
- [143] OCHENSBERGER, W. ; KOLEDNIK, O.: Physically appropriate characterization of fatigue crack propagation rate in elastic-plastic materials using the J -integral concept. In: *International Journal of Fracture* 192 (2015), S. 25–45
- [144] OGDEN, R. W.: *Non-linear elastic deformation*. Chichester : Ellis Horwood and John Wiley, 1984
- [145] OHNO, N. ; KACHI, Y.: A constitutive model of cyclic plasticity for nonlinear hardening materials. In: *Journal of The Mechanics and Physics of Solids* 53 (1986), S. 395–403
- [146] OHNO, N. ; WANG, J. D.: Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part I: Formulation and basic features for ratcheting behavior. In: *International Journal of Plasticity* 9 (1993), Nr. 3, S. 375–390
- [147] OHNO, N. ; WANG, J. D.: Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery Part II: Formulation and basic features for ratcheting behavior. In: *International Journal of Plasticity* 9 (1993), Nr. 6, S. 873–883
- [148] ÖZENC, K.: *Approaches to model failure of materials by configurational forces*. Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, Technische Universität Dresden, Dissertation, 2016
- [149] PANIC, D. ; OLVEDA, D. ; BEIER, H. T. ; BEYER, J. ; OECHSNER, M. ; VORMWALD, M.: Gewindeverbindungen Örtlich II / FKM-Vorhaben Nr. 297. Frankfurt am Main, 2014. – Forschungsbericht
- [150] PANIC, D. ; VORMWALD, M.: Numerisches Berechnungskonzept zur Dauerfestigkeitsberechnung autofrettierter Komponenten unter Berücksichtigung von zyklischer Plastizität und Temperatureffekten. In: *49.Tagung des DVM-Arbeitskreises Bruchmechanik und Bauwerksicherheit, DVM e.V.* (2016), S. 51–65

- [151] PARIS, P. C.: The fracture mechanics approach to fatigue. In: *Fatigue. An interdisciplinary approach* (1964), S. 107–132
- [152] PARIS, P. C. ; ERDOGAN, F.: A critical analysis of crack propagation laws. In: *Journal of Basic Engineering* 85 (1963), S. 528–534
- [153] PARIS, P. C. ; GOMEZ, M. P. ; ANDERSON, W. E.: A rational analytical theory of fatigue. In: *Trend in Engineering* 13 (1961), S. 9–14
- [154] PARK, S. J. ; EARMME, Y. Y. ; SONG, J. H.: Determination of the most appropriate mesh size for a 2-D Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure Behaviour. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 20 (1997), Nr. 4, S. 533–545
- [155] PARKS, . M. D: The Virtual Crack Extension Method for Nonlinear Material Behavior. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 12 (1977), S. 353–364
- [156] POMMIER, S.: Plane strain crack closure cyclic hardening. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), S. 25–44
- [157] POWELL, M.D.J.: Direct search algorithms for optimization calculations. In: *Acta Numerica, Cambridge University Press* 7 (1998), S. 287–336
- [158] PRAGER, W.: A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids. In: *Journal of Applied Mechanics* 23 (1956), Nr. 4, S. 493–496
- [159] PRICE, C. J. ; COOPE, I. D. ; BYATT, D.: A Convergent Variant of the Nelder-Mead Algorithm. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 113 (2002), Nr. 1, S. 5–19
- [160] PRICE, K. V.: *An Introduction to Differential Evolution. New Ideas in Optimization.* Maidenhead, UK, England : McGraw-Hill Ltd., 1999. – 79–108 S.
- [161] PRICE, K. V. ; STORN, R. M. ; LAMPINEN, J. A.: *Differential Evolution.* Springer-Verlag, Berlin, 2005
- [162] RADAJ, D. ; VORMWALD, M.: *Ermüdungsfestigkeit: Grundlagen für Ingenieure.* 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2007. – ISBN 978–3–540–71458–3
- [163] RICE, J. R.: A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), Nr. 2, S. 379–386
- [164] RICE, J. R. ; PARIS, P. C. ; MERKLE, J. G.: Some Further Results of J-Integral Analysis and Estimates. In: KAUFMAN, J. G. (Hrsg.) ; SWEDLOW, J. L. (Hrsg.) ; CORTEN, H. T. (Hrsg.) ; SRAWLEY, J. E. (Hrsg.) ; HEYER, R. H. (Hrsg.) ; WESSEL, E. T. (Hrsg.) ; IRWIN, G. R. (Hrsg.): *Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing.* 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959 : ASTM International, 1973. – ISBN 978–0–8031–6660–8, S. 231–245
- [165] RICE, J. R. ; ROSENGREN, G. R.: Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power Law Hardening Material. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (1968), S. 1–12
- [166] RIEGER, A.: *Zur Parameteridentifikation komplexer Materialmodelle auf der Basis realer und virtueller Testdaten.* Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, Dissertation, 2005

- [167] RODRIGUES, D. M. ; ANTUNES, F. V.: Finite element simulation of plasticity induced crack closure with different material constitutive models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), Nr. 9, S. 1215–1230
- [168] SAVAJDIS, G.: *Berechnung der Bauteillebensdauer bei mehrachsigen proportionalen Beanspruchungen*. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, Heft 54, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 1995
- [169] SCHIMPFKE, T.: *Numerische Untersuchungen zur J-Integralerweiterung für elastisch-plastisches Material im Hinblick auf die Integrität des Reaktordruckbehälters*. Fakultät Energietechnik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2002
- [170] SCHLITZER, T.: *Erweiterung des Fließstreifenmodells der elastisch-plastischen Schwingbruchmechanik*. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2019
- [171] SCHÖNGRUNDNER, R.: *Numerische Studien zur Ermittlung der risstreibenden Kraft in elastisch-plastischen Materialien bei unterschiedlichen Betriebsbedingungen*. Erich Schmid Institute of Materials Science, Materials Center Loeben Forschung GmbH, Monatnuniversität Loeben, Institut für Mechanik, Dissertation, 2011
- [172] SCHWEFEL, H.P.: *Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1977
- [173] SCHWEFEL, H.P.: *Evolution and Optimum Seeking*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995
- [174] SEEGER, T.: *Ein Beitrag zur Berechnung von statisch und zyklisch belasteten Rißscheiben nach dem Dugdale-Barenblatt-Modell*. Institut für Statik und Stahlbau, Heft 21, Technische Hochschule Darmstadt, Dissertation, 1973
- [175] SEEGER, T. ; GREULING, S. ; BERGMANN, J.W.: Autofrettage II: Dauerfestigkeitssteigerung durch Autofrettage / Abschlussbericht / Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e. V., Vorhaben Nr. 671. Frankfurt am Main, 2001. – Forschungsbericht
- [176] SEHITOGLU, H. ; SUN, W.: The significance of crack closure under high temperature fatigue crack growth with hold periods. In: *Engineering Fracture Mechanics* 33 (1989), Nr. 3, S. 371–388
- [177] SEHITOGLU, H. ; SUN, W.: Modelling of plane strain fatigue crack closure. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 113 (1991), S. 31–40
- [178] SENSENY, P.E. ; BRODSKY, N.S. ; DE VRIES, K.L.: Parameter Evaluation for an Unified Constitutive Model. In: *Transactions of the ASME: J. Eng. Mat. Tech.* 115 (1993), S. 157–162
- [179] SHAN, G. X.: Post-processing program for calculating the configurational force with ABAQUS / Internal report Institut of Mechanics. Monatnuniversität Loeben, Institut für Mechanik, 2005. – Forschungsbericht. – 1–10 S.
- [180] SHIH, C. F. ; MORAN, B. ; NAKAMURA, T.: Energy Release Rate along a Three-Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body. In: *International Journal of Fracture* 30 (1986), S. 70–102
- [181] SIMHA, N. K. ; FISCHER, F. D. ; SHAN, G. X. ; CHEN, C. R. ; KOLDENIK, O.: J-integral and crack driving force in elastic-plastic materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56 (2008), S. 2876–2895

- [182] SIMO, J. C. ; HONEIN, T.: Variational Formulation, Discrete Conservation Laws and Path Domain Independent Integrals for Elasto-Viscoplasticity. In: *Journal of Applied Mechanics* 57 (1990), S. 488–497
- [183] SOLANKI, K. ; DANIEWICZ, S. R. ; NEWMAN, J. C. J.: Finite element modeling of plasticity induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), Nr. 12, S. 1475–1489
- [184] SOLANKI, K. ; DANIEWICZ, S. R. ; NEWMAN, J. C. J.: Finite element analysis of plasticity induced fatigue crack closure: an overview. In: *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004), Nr. 2, S. 149–171
- [185] SOLANKI, K. ; DANIEWICZ, S. R. ; NEWMAN, J. C. J.: A new methodology for computing crack opening values from finite element analyses. In: *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004), S. 1165–1175
- [186] SONSINO, M.C.: Influence of load and deformation-controlled multiaxial tests on fatigue life to crack initiation. In: *International journal of fatigue* 23 (2001), Nr. 2, S. 159–167
- [187] STORN, R. ; PRICE, K. V.: Differential evolution: A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces / TR-95-012, Berkeley, CA, USA. 1995. – Forschungsbericht
- [188] STORN, R. ; PRICE, K. V.: Minimizing the real functions of the ICEC 96 contest by differential evolution. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Evol. Comput.* (1997), S. 842–844
- [189] SURESH, S.: *Fatigue of materials, Second Edition*. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1998
- [190] SURESH, S. ; RITCHIE, R. O.: A geometric model for fatigue crack closure induced by fracture surface roughness. In: *Metallurgical and Materials Transactions A* 18 (1982), S. 1627–1631
- [191] TANAKA, K.: The cyclic J -integral as a criterion for fatigue crack growth. In: *International Journal of Fracture* 22 (1983), S. 91–104
- [192] THUMSER, R.: *Simulation des Rissfortschritts in autofrettierten und nicht autofrettierten Bohrungsverschneidungen auf der Grundlage der linear-elastischen Bruchmechanik*, Bauhaus-Universität Weimar, Dissertation, 2009
- [193] THUMSER, R. ; HERZ, E. ; HERTEL, O. ; BERGMANN, J. W. ; VORMWALD, M.: Betriebsfestigkeit gekerbter Hochdruckbauteile ohne und mit Autofrettage / Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. Frankfurt am Main, 2007. – Forschungsbericht
- [194] THUMSER, R. ; HERZ, E. ; HERTEL, O. ; BERGMANN, J. W. ; VORMWALD, M.: Betriebsfestigkeit Hochdruckbauteile: Vorhaben Nr. 880, Betriebsfestigkeit gekerbter Hochdruckbauteile ohne und mit Autofrettage, Abschlussbericht / Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. Frankfurt am Main, 2009. – Forschungsbericht
- [195] THUMSER, R. ; KLEEMANN, S. ; DIEMAR, A. ; KLEEMANN, A. ; BEIER, H. T. ; ROSSETTI, A. ; SCHLITZER, T. ; ZERRES, P. ; BERGMANN, J. W. ; VORMWALD, M.: Betriebsfestigkeit Hochdruckbauteile: Vorhaben Nr. 1000, Betriebsfestigkeit von Hochdruckbauteilen mit kleinen Schwingspielen großer Häufigkeit, Abschlussbericht / Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. Frankfurt am Main, 2012. – Forschungsbericht
- [196] THUMSER, R. ; W., Bergmann J. ; VORMWALD, M.: Residual stress field and fatigue analysis of autofrettaged parts. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 79 (2002), S. 113–117

- [197] TRUESDELL, C.: *The tragicomical history of thermodynamics 1822-1854*. Springer Verlag, 1980. – ISBN 978-1-4613-9444-0
- [198] TSENG, N.T. ; LEE, G.C.: Simple plasticity model of the two surface type. In: *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 109 (1983), S. 795–810
- [199] TURNER CE: A re-assessment of ductile tearing resistance (Part I and II). In: *Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures* 1990, Nr. Proc. ECF 8; 2, S. 933–968
- [200] VÖHRINGER, O.: Relaxation of residual stresses by annealing or mechanical treatment. In: *Pergamon Press, Advances in Surface Treatments. Technology–Applications–Effects*. 4 (1987), S. 367–396
- [201] VORMWALD, M.: *Anrißlebensdauervorhersage auf der Basis der Schwingbruchmechanik für kurze Risse*. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, Heft 47, Technische Hochschule Darmstadt, Dissertation, 1989
- [202] VORMWALD, M. ; T., Seeger: The consequences of short crack closure on fatigue growth under variable amplitude. In: *Fatigue in Engineering Materials* 14 (1991), S. 205–225
- [203] WAGNER, D. A. ; SENDECKYJ, G. P. ; SHEPPARD: Verification of Fracture Parameter for Uncoupled Thermoelasticity. In: *Engineering Fracture Mechanics* 42 (1992), S. 461–478
- [204] WAGNER, D. A. ; SENDECKYJ, G. P. ; SHEPPARD, S. D. ; SIMO, J. C.: Finite Element Calculation of Path Domain Independent Integral for Thermoelasticity. In: *The American Society of Mechanical Engineers, Proceedings of ASME Winter Meeting, Atlanta, 91-WA-CIE-4* (1992)
- [205] WAGNER, D. A. ; SIMO, J. C.: Fracture Parameter for Thermoelasticity. In: *International Journal of Fracture* 56 (1992), S. 159–187
- [206] WANG, G. S. ; BLOM, A. F.: A strip model for fatigue crack growth predictions under general load conditions. In: *Engineering Fracture Mechanics* 40 (1991), Nr. 3, S. 507–533
- [207] WANG, H. ; BARKEY, M.E.: Strain space formulation of the armstrong-frederick family of plasticity models. In: *Journal of engineering materials and technology* 120 (1998), Nr. 3, S. 230–235
- [208] WANG, H. ; BARKEY, M.E.: A strain space nonlinear kinematic hardening/softening plasticity model. In: *International journal of plasticity* 15 (1999), Nr. 7, S. 755–757
- [209] WEICKER, K.: *Evolutionäre Algorithmen*. 3. Auflage, Springer Vieweg Verlag, 2015
- [210] WHITE, C.S.: A two surface plasticity model with bounding surface softening. In: *Journal of Engineering Materials* 118 (1996), Nr. 1, S. 37–42
- [211] WU, J. ; ELLYIN, F.: A study of fatigue crack closure by elastic-plastic finite element analysis for constant-amplitude loading. In: *International Journal of Fracture* 82 (1996), Nr. 1, S. 43–65
- [212] WÜTHRICH, C.: The extension of the J -integral concept to fatigue cracks. In: *International Journal of Fracture* 20 (1982), S. 35–37
- [213] ZERRES, P.: *Numerische Simulation des Ermüdungsrisssfortschrittes in metallischen Strukturen unter Berücksichtigung zyklischer Plastizitätseffekte*. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, D17, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2010
- [214] ZERRES, P. ; VORMWALD, M.: Finite element based simulation of fatigue crack growth with a focus on elastic-plastic material behavior. In: *Computational Materials Science* 57 (2012), S. 73–79

- [215] ZHAO, L.G. ; TONG, J. ; BYRNE, J.: The evolution of stress-strain fields near a fatigue crack tip and plasticity-induced crack closure revisited. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 27 (2004), Nr. 1, S. 19–29
- [216] ZIEGLER, H.: The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements. In: *Quarterly Applied Mathematics* 17 (1959), S. 55–65
- [217] ZIENKIEWICZ, O. Z. ; TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method*. Volume I. Oxford : Butterworth Heinemann, 2000

Abbildungsverzeichnis

2.1. Qualitative Darstellung der Bahnlinie eines Körpers ausgehend von der Referenzkonfiguration und bis zu zwei unterschiedlichen Momentankonfigurationen	6
2.2. Nichtlineare Abbildung eines Punktes P in der Referenzkonfiguration und in der Momentankonfiguration	6
2.3. Spannungsvektor in der Referenz- und Momentankonfiguration	11
2.4. Fließbedingung nach <i>von Mises</i> und <i>Tresca</i> für den ebenen Spannungszustand	26
2.5. Fließbedingung nach <i>von Mises</i> und <i>Tresca</i> im 3D Hauptspannungsraum	27
2.6. Isotrope Verfestigung	30
2.7. Kinematische Verfestigung	31
2.8. Dehnungskontrollierte Versuche: a) Entfestigung und b) Verfestigung	32
2.9. Kraftkontrollierte Versuche: a) Entfestigung und b) Verfestigung	33
2.10. Zyklisches Spannungs-Dehnungs-Verhalten mit von Null verschiedenen Mitteldehnungen bzw. -spannungen, links steht die Regelgröße und in der Mitte die Werkstoffantwort	34
2.11. Bruchvorgänge auf unterschiedlichen Skalen und Betrachtungsebenen (in abgewandelter Form nach [106])	41
2.12. Zur Betrachtung der Energiebilanz bei Risswachstum	44
2.13. Qualitative Darstellung der Formänderungsenergiegedichte unter Annahme der Deformations- und der inkrementellen Plastizitätstheorie, während eines Belastungs- und Entlastungsschritts	47
2.14. Energiefluss bei duktilem Rissfortschritt	51
2.15. Bestimmung der Risswiderstandskurve nach der Einproben- und Mehrproben-technik gemäß [104]	52
2.16. Energiebilanz: Globale Methode nach [101]	56
2.17. Betrachtung des aufsteigenden Hysteresehalbestes zur Berechnung des zyklischen J -Integrals: Differenz der inneren Arbeit für zwei Risszustände [101]	57
2.18. Bestimmung des zyklisch effektiven J -Integrals unter Berücksichtigung des Riss-schließeffektes beim Rissöffnungszustand [101]	57
3.1. Hourglass-Rundprobe WHG 1 mit Feingewinde	64
3.2. Hourglass-Probe WHG 2 als Flachprobe	65
3.3. (a) Prüfrahen mit eingebautem Konvektionsofen. (b) Konvektionsofen mit PID-Regler, Pressluftkühlung der Spannbacken. [25]	66
3.4. Zugversuch 42CrMo4 bei $T = 20\text{ °C}$, $T = 120\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	68
3.5. Erstbelastungs- und Erstentlastungsversuch 42CrMo4 bei $T = 20\text{ °C}$	69
3.6. Wechselverformungsverhalten 42CrMo4, $R_\epsilon = -1$ bei $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	70
3.7. Wechselverformungsverhalten 42CrMo4, $R_\epsilon = -1$ bei $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	71
3.8. Wechselverformungsverhalten 42CrMo4, $R_\epsilon = -1$ bei $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	71
3.9. Zyklisch stabilisiertes Spannungs-Dehnungsverhalten 42CrMo4 bei $T = 20\text{ °C}$	72
3.10. Zyklisch stabilisiertes Spannungs-Dehnungsverhalten 42CrMo4 bei $T = 180\text{ °C}$	72
3.11. Zyklisches Kriechen 42CrMo4 bei $T = 20\text{ °C}$	73
3.12. Zyklisches Kriechen 42CrMo4 bei $T = 180\text{ °C}$	73
3.13. 90°-Kreuzbohrungsprobe KB	74
3.14. Hochdruckprüfstand, Fabrikat Maximator [25]	75
3.15. Hochdruckprüfstand, Mehrfachprüfkopf [25]	75

3.16. Kreuzbohrungsproben 42CrMo4, Varianten af und naf bei $R \approx 0$ und verschiedenen Prüftemperaturen im Wöhlerdiagramm (Prüftemperaturen: RT, 120 °C, 180 °C) [25]	76
4.1. Einteilung einiger numerischer Optimierungsverfahren in gradientenbasierte und gradientenfreie Verfahren sowie deterministische und stochastische Verfahren nach <i>Mahnken</i> [119]	80
4.2. Hauptbausteine des Differential-Evolution-Algorithmus	81
4.3. <i>Nelder und Mead</i> Algorithmus: Reflektion	85
4.4. <i>Nelder und Mead</i> Algorithmus: Expansion	85
4.5. <i>Nelder und Mead</i> Algorithmus: Arten der partiellen Kontraktion	86
4.6. <i>Nelder und Mead</i> Algorithmus: Totale Kontraktion	86
4.7. Programm-Module der Parameteridentifikation	88
4.8. Programm-Ablaufschema der Parameteridentifikation	89
4.9. Erstbelastungs- und Erstentlastungskurven, $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	93
4.10. Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\varepsilon_a = 0,04$ ($R_\varepsilon = -1$), $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	93
4.11. Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\varepsilon_a = 0,02$ ($R_\varepsilon = -1$), $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	93
4.12. Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\varepsilon_a = 0,015$ ($R_\varepsilon = -1$), $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	94
4.13. Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den dehnungsgeregelten Versuch bei $\varepsilon_a = 0,010$ ($R_\varepsilon = -1$), $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	94
4.14. Vergleich experimenteller Daten und Simulation für den kraftgeregelten Versuch bei $T = 180\text{ °C}$	94
5.1. Gesamtkonzept	99
5.2. Bestimmung der Dauerfestigkeit mit dem Rissspitzenparameter $\Delta\mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ $p_{\text{max},1} > p_{\text{max},2} > p_{\text{max},3}$	101
5.3. Gliederung vom Algorithmus COPEN zur Bestimmung der Rissöffnungs- und Risschließseigenschaften	108
5.4. Diagramm zur Programmablaufdarstellung für die Bestimmung der Risschließ- und Rissöffnungseigenschaften	110
5.5. Qualitative Darstellung eines Risses mit umgebendem regulären Teilgebiet begrenzt durch die entsprechenden Konturen	111
6.1. Abmessungen der verwendeten CT-Probe	118
6.2. CT-Probe als symmetrisches FE-Modell: Netz und Randbedingungen	119
6.3. CT-Probe-fein als symmetrisches FE-Modell: Netz und Randbedingungen	119
6.4. Kraft-Verschiebungs-Kurve bis zum Lastschritt 1	120
6.5. Definition der Bereiche oder Gebiete für die Rissspitzenparameterauswertungen	120
6.6. Proportionale Belastung bis zum Lastschritt 1: Ergebnisse der verschiedenen Rissspitzenparameter-Auswertungen in Abhängigkeit der Verschiebung u	121
6.7. Vergleich der J -Integral-Auswertung nach Gebietsverfahrenmethode ABAQUS und dem Verfahren nach <i>Dowling und Begley</i> beim Belastungs- und Entlastungsschritt	122
6.8. \mathcal{F}_{tip} -Auswertung für verschiedene Konturbereiche in Abhängigkeit der Lastschrittweite	123
6.9. \mathcal{F}_{tip} -Auswertung: FE-Modell CT-Probe und FE-Modell CT-Probe-fein zur Überprüfung der Netzabhängigkeit des Rissspitzenparameters	123
6.10. Lastschritt 1 mit Belastung $u = 0,8\text{ mm}$: Darstellung der materiellen Knotenkräfte $-\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)}$	124

6.11. Lastschritt 2 mit Entlastung $u = 0,2$ mm: Darstellung der materiellen Knotenkräfte $-\mathcal{F}_{\text{tip}}^{(K)}$	124
6.12. Lastschritt 1 mit Belastung $u = 0,8$ mm: Darstellung der plastischen Vergleichsdehnung	125
6.13. Lastschritt 2 mit Entlastung $u = 0,2$ mm: Darstellung der plastischen Vergleichsdehnung	125
6.14. Modellierung der Kreuzbohrungsprobe Typ-K als FE-Modell	127
6.15. Randbedingungen im FE-Modell mit Rissoberflächenbelastung	127
6.16. Anwendung der Submodelltechnik mit Aufbringen der Verschiebungs-Zeit-Verläufe der Globalanalyse auf die Randknoten des Submodells	128
6.17. links: Eigenspannungsverläufe für $T = 20^\circ\text{C}$, $p_{\text{af}} = 8500$ bar ($T_{\text{af}} = 20^\circ\text{C}$), rechts: Eigenspannungsverläufe für $T = 180^\circ\text{C}$, $p_{\text{af}} = 8500$ bar ($T_{\text{af}} = 20^\circ\text{C}$)	129
6.18. links: σ_{33} - ε_{33} -Kurve im Kerbgrund für $T = 20^\circ\text{C}$ und $p_{\text{max}} = 3050$ bar, rechts: σ_{33} - ε_{33} -Kurve im Kerbgrund für $T = 180^\circ\text{C}$ und $p_{\text{max}} = 3050$ bar	130
6.19. Vergleich der Rissöffnungs- und Rissschließdrücke (p_{open} und p_{close}) bei der Temperatur $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 180^\circ\text{C}$ bei einem maximalen Druck $p_{\text{max}} = 305$ MPa	131
6.20. Modell Kreuzbohrungsprobe: Inkrementelle Rissverlängerung und Vergrößerung der Rissoberfläche ausgehend von einem Ausgangsriss $a_0 = 0,2$ mm	132
6.22. links: $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 20^\circ\text{C}$, rechts: $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 180^\circ\text{C}$	132
6.21. Modell Kreuzbohrungsprobe [25]: Definition der Konturintegrale und der Auswertungsgebiete	133
6.23. links: $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 20^\circ\text{C}$, rechts: $\Delta \mathcal{F}_{\text{tip}}^{\text{eff}}$ -a-Kurven für verschiedene Maximaldrücke bei $T = 180^\circ\text{C}$	133
6.24. Vergleich der experimentell bestimmten Dauerfestigkeit und der berechneten Dauerfestigkeit nach verschiedenen numerischen Bruchmechanikmethoden	134
6.25. links: Risslänge beim Rissstopp aus der FEM-Berechnung (RT) rechts: experimentelle Bestimmung der Risslänge beim Rissstopp aus [25] (RT)	135
6.26. Lebensdauerberechnung Kreuzbohrungsprobe (af) bei Raumtemperatur	136
6.27. Lebensdauerberechnung Kreuzbohrungsprobe (af) bei $T = 180^\circ\text{C}$	136
6.28. links: Vergleich der Eigenspannungsverläufe nach dem Autofrettageprozess entlang des Pfades s basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach <i>Chaboche und Döring</i> bei $T=20^\circ\text{C}$, rechts: Vergleich der Eigenspannungsverläufe nach 251 Ssp mit $p_{\text{max}} = 3020$ bar entlang des Pfades s basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach <i>Chaboche und Döring</i> bei $T=20^\circ\text{C}$	137
6.29. links: Vergleich der σ_{33} - ε_{33} -Verläufe im Kerbgrund basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach <i>Chaboche</i> und <i>Döring</i> , rechts: Vergleich der σ_{22} - ε_{22} -Verläufe im Kerbgrund basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach <i>Chaboche</i> und <i>Döring</i>	139
6.30. links: Vergleich der Rissöffnungs- und Rissschließdrücke basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach <i>Chaboche</i> und <i>Döring</i> , rechts: Vergleich der ΔJ_{eff} -Kurven basierend auf den FE-Ergebnissen mit den Werkstoffmodellen nach <i>Chaboche</i> und <i>Döring</i>	139

Tabellenverzeichnis

3.1.	Chemische Zusammensetzung des 42CrMo4 in %	64
3.2.	Werkstoffversuche 42CrMo4 an ungekerbten Werkstoffproben [25]	66
3.3.	Prüfergebnisse der Zugversuche für Stahl 42CrMo4, Raumtemperatur [25]	67
3.4.	Prüfergebnisse der Zugversuche für Stahl 42CrMo4, T120 [25]	67
3.5.	Prüfergebnisse der Zugversuche für Stahl 42CrMo4, T180 [25]	67
3.6.	Kennwerte aus Zugversuchen, Mittelwerte aus je 3 Versuchen [25]	68
3.7.	Dehnungsgeregelte Versuche 42CrMo4, E -Modul = 200100 MPa, $T = 20\text{ °C}$, $R = -1$ [25]	69
3.8.	Dehnungsgeregelte Versuche 42CrMo4, E -Modul = 199900 MPa, $T = 180\text{ °C}$, $R = -1$ [25]	70
3.9.	Ergebnisse Kreuzbohrungsproben 42CrMo4, Variante af (mittlere experimentelle Dauerfestigkeit (Innendruckschwellfestigkeit)) [25]	76
3.10.	Ergebnisse Kreuzbohrungsproben 42CrMo4, Variante naf (mittlere experimentelle Dauerfestigkeit (Innendruckschwellfestigkeit)) [25]	77
4.1.	Werkstoffparameter <i>Chaboche</i> bei $T = 20\text{ °C}$ und $T = 180\text{ °C}$	92
6.1.	Werkstoffdefinition 22NiMoCr3-7 nach [30, 3]: $\sigma_{\text{true}}-\varepsilon^{\text{P}}$ -Kurve, Werkstoffmodell ABAQUS PLASTIC isotrop	118

A. Anhang: Mathematische Notation und Darstellung

A.1. Tensor- und Matrixnotationen

Die mathematische Darstellung skalarer Größen (Tensoren nullter Stufe) erfolgt als kursivgestellter Kleinbuchstabe. Die Tensoren erster (Vektoren) und zweiter Stufe sowie die algebraischen und analytischen Rechenregeln werden sowohl in symbolischer Form (fett und kursiv) als auch in Indexschreibweise nach den allgemein anerkannten Notationsvorschriften und der *Einsteinschen* Summenkonvention definiert. Die zugehörigen Basisvektoren beschränken sich auf den euklidischen Raum und werden grundsätzlich auf ein kartesisches, raumfestes Koordinatensystem bezogen. Große Buchstaben bei Variablen und Indizes weisen i.d.R. auf die Referenzkonfiguration hin, hingegen Kleinbuchstaben bringen die Definition in einer Momentankonfiguration zum Ausdruck. Matrizen werden fett und aufrecht geschrieben.

Skalar bzw. Tensor 0. Stufe:	p
Vektor bzw. Tensor 1. Stufe:	$\vec{x} \hat{=} \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i$
Tensor 2. Stufe:	$\vec{\sigma} \hat{=} \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$
Tensor 4. Stufe:	$\mathbb{E} \hat{=} E_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$
Einheitstensor 2. Stufe:	$\mathbf{I} \hat{=} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ mit <i>Kronecker-Symbol</i> δ_{ij}
Skalarprodukt zw. Vektoren:	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$
Skalarprodukt zw. Tensoren 2. Stufe:	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{jl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l$
doppeltes Skalarprodukt:	$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$
transponierter, inverser Tensor 2. Stufe:	$\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^{-1}, (\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-T}$
Variationssymbol:	δ
partielle Ableitung:	$\partial(\cdot) / \partial x_i = (\cdot)_{,i}$
totale Differential (hier nach der Zeit):	$d(\cdot) / dt$
<i>Nabla</i> -Operator:	$\nabla(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = (\cdot)_{,i} \mathbf{e}_i$
Gradient (Referenzkonfiguration):	$\text{Grad}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{X}}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_i} \mathbf{e}_i$
Divergenz (Referenzkonfiguration):	$\text{Div}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_i} \cdot \mathbf{e}_i$
Gradient (Momentankonfiguration):	$\text{grad}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{x}}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$
Divergenz (Momentankonfiguration):	$\text{div}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i$

B. Anhang: Zusätzliche Betrachtungen unter Verwendung des Werkstoffmodells nach Döring

B.1. Elastisch-plastisches Werkstoffmodell nach Döring

Die im Werkstoffmodell nach Döring [52] enthaltene Materialtheorie liefert die vollständige mathematische Darstellung im Rahmen der Kontinuumsmechanik, sowie die Mittel und Konzepte für eine verbesserte Darstellung des zyklischen Werkstoffverhaltens. Aufgrund der fehlenden Prüfung der thermodynamischen Konsistenz und die fehlende Erweiterung des Modells mit temperaturabhängigen Parametern ist die Anwendung auf isotherme Problemstellungen beschränkt. Die wichtigsten Grundgleichungen des elastisch-plastischen Werkstoffmodells nach Döring werden im Folgenden aufgeführt:

1. Fließbedingung nach von Mises:

$$\phi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}, r^{(0)}) = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) - (r^{(0)})^2 \quad (\text{B.1})$$

2. Gesamtdehnung:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (\text{B.2})$$

3. Fließregel:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = dp \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|}, \quad p = \int dp = \int \|d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\| \quad (\text{B.3})$$

4. Elastizitätsgesetz:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^{el} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - dp \cdot \mathbf{n}) \quad (\text{B.4})$$

5. Kinematische Verfestigungsregel:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \quad (\text{B.5})$$

$$d\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = c^{(i)} \cdot \left[r^{(i)} \mathbf{n} - W^{(i)} \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \right] dp + \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \frac{dr^{(i)}}{r^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (\text{B.6})$$

$$W^{(i)} = \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|}{|r^{(i)}|} \right)^{\chi^{(i)}} \quad (\text{B.7})$$

$$\chi^{(i)} = \chi_0^{(i)} + (\chi_0^{(i)} + 0, 1) \cdot (c_\chi^{(i)} - 1) \cdot (1 - |\mathbf{n} : \mathbf{L}^{(i)}|) \quad (\text{B.8})$$

$$\chi_0^{(i)} = Q^{(i)} \cdot \left(1 + \frac{a_\chi}{(1 + b_\chi R_{M_\varepsilon})^2} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$c^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\varepsilon^{pl,(i)}}, \quad r^{(i)} = \frac{2}{3} \frac{H'^{(i)} - H'^{(i+1)}}{c^{(i)}} \quad (\text{B.10})$$

$$H'^{(i)} = \frac{\sigma^{(i)} - \sigma^{(i-1)}}{\varepsilon^{pl,(i)} - \varepsilon^{pl,(i-1)}}, \quad H'^{(1)} = \frac{\sigma^{(1)} - \tilde{\sigma}_F}{\varepsilon^{pl,(1)}} \quad i = 2, \dots, M \quad (\text{B.11})$$

$$(\text{B.12})$$

6. Isotrope Verfestigungsregel:

$$dr^{(i)} = \left\{ \begin{array}{l} b \cdot (r_T^{(i)} - r^{(i)}) dp, \quad |r_T^{(i)} - r^{(i)}| \leq 1 \\ b \cdot (r_T^{(i)} - r^{(i)}) |r_T^{(i)} - r^{(i)}| dp, \quad |r_T^{(i)} - r^{(i)}| > 1 \end{array} \right\} \quad (\text{B.13})$$

$$i = 0, 1, \dots, M$$

$$r_T^{(i)} = r_\infty^{(i)} \cdot \left(1 + \frac{a_1^{(i)}}{(1+b_1p)^2} + \frac{a_2^{(i)}}{(1+b_2p)^2} + \frac{a_3^{(i)}}{(1+b_3p)^2} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$i = 0, 1, \dots, M$$

$$r_\infty^{(0)} = r_{\infty,0}^{(0)} \cdot [A \cdot q_N(R_{M\varepsilon}) + (1-A) \cdot q_p^{(0)}(R_{M\varepsilon})] \quad (\text{B.15})$$

$$r_\infty^{(i)} = r_{\infty,0}^{(i)} \cdot q_P^{(i)}(R_{M\varepsilon}) \cdot \left(1 + \frac{a_k^{(i)}}{(1+b_k\chi^{(i)})^2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (\text{B.16})$$

$$q_p^{(i)}(R_{M\varepsilon}) = 1 + \frac{a_p^{(i)}}{(1+b_p R_{M\varepsilon})^2}, \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (\text{B.17})$$

$$q_N(R_{M\varepsilon}) = q_{N,0} \cdot \left(1 + \frac{a_N}{(1+b_N R_{M\varepsilon})^2} \right) \quad (\text{B.18})$$

7. Gedächtnisfläche:

$$dR_{M\varepsilon} = [\eta \cdot H(F^*) - (1-H(F^*)) \cdot (c_{M\varepsilon} R_{M\varepsilon})^\omega] \cdot \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}^* \rangle dp \quad (\text{B.19})$$

$$d\beta = (1-\eta) \cdot H(F^*) \cdot \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}^* \rangle \mathbf{n}^* dp \quad (\text{B.20})$$

$$F^* = \|\mathbf{n}^*\| - 1 \leq 0, \quad \mathbf{n}^* = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} - \beta}{R_{M\varepsilon}} \quad (\text{B.21})$$

8. Nichtproportionalitätsparameter nach Tanaka:

$$dC_{ijkl} = c_T \cdot (n_{ij}n_{kl} - C_{ijkl}) dp \quad (\text{B.22})$$

$$dA = c_A \cdot (A_T - A) dp, \quad A_T = \sqrt{1 - \frac{n_{kl}C_{ijkl}C_{ijmn}n_{mn}}{C_{ijkl}C_{ijkl}}} \quad (\text{B.23})$$

Die jeweiligen Zusammenhänge der einzelnen Parameter mit dem dazugehörigen Werkstoffverhalten sind wie folgt gegeben:

- $r_\infty^{(i)}$ (einschließlich $r_\infty^{(0)}$) und $c^{(i)}$ beschreiben die zyklisch stabilisierte σ - ε -Kurve,
- $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}$ und $r_{init}^{(0)}$ bilden die transiente zyklische Ver- bzw. Entfestigung ab, wobei die b-Werte das Zeitverhalten bestimmen,
- $q_{N,0}, a_N$ und b_N charakterisieren die Höhe der nichtproportionalen Zusatzverfestigung,
- c_T und c_A bestimmen die Rate der nichtproportionalen Zusatzverfestigung,
- $a_p^{(i)}$ und b_p sind für die Beschreibung des Non-Masing-Verhaltens zuständig,
- $\eta, c_{M\varepsilon}$ und ω beschreiben das Verhalten der Dehnungsgedächtnisfläche,
- $Q^{(i)}, a_\chi$ und b_χ steuern das proportionale Ratchetting und
- c_χ wird zur Steuerung von nichtproportionalem Ratchetting benötigt.

B.2. Parameteridentifikation: Döring-Modell

Die zyklischen Werkstoffversuche zur Identifikation der Parameter des Materialmodells nach Döring wurden für die Ableitung der Parameter aufbereitet. Es handelt sich grundsätzlich um die folgenden experimentellen Daten:

- Erstbelastungskurve,
- Erstentlastungskurve,
- Wechselverformungskurve,
- zyklisches Kriechen
- und zyklisch stabilisierte Spannungs-Dehnungs-Kurve.

Der berechnete Parametersatz, der mathematisch als Lösungsvektor des nichtlinearen Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen zu sehen ist, umfasst im Einzelnen 63 Parameter. Die Anzahl der zu bestimmenden Parameter ist durch die gewählte Anzahl der Teilbackstresstensenoren definiert. Die Anzahl der Rückspannungstensenoren wurde auf 5 festgelegt. Insgesamt sind Parameter für die spätere Materialdefinition in das Finite-Elemente-Programm einzugeben. Die restlichen modellspezifischen Parameter wie z. B. der E-Modul und die Querkontraktionszahl wurden direkt aus Versuchsergebnissen ohne Optimierungsaufwand abgeleitet. Die Parameter für eine Materialbeschreibung bei nichtproportionaler Belastung wurden auf bestimmten Startwerten unverändert belassen, da die Bestimmung und Untersuchung von Nichtproportionalitätsparametern nicht Untersuchungsgegenstand dieses Vorhabens sind. Die Lösung der nichtlinearen Optimierungsaufgabe liegt in der Minimierung der Zielfunktion, so dass die Differenz zwischen den experimentellen Ergebnissen und den zugehörigen simulierten Daten bei einem bestimmten Parametersatz (im Döring Modell) eine festgelegte Toleranz nicht überschreitet. Ähnlichkeiten mit dem neu zu untersuchenden Werkstoff aufweist, wurden die Startwerte mit den Parametern des Materials 42CrMo4 aus dem Vorgängerprojekt definiert.

Parameteridentifikation für das Döring-Modell basierend auf den Werkstoffversuchen bei $T = 20^\circ\text{C}$

i	$c^{(i)}$	$r_{\text{inf},0}^{(i)}$ [MPa]	$a_1^{(i)}$	$a_2^{(i)}$	$a_3^{(i)}$	$Q^{(i)}$	$a_P^{(i)}$	$c_\chi^{(i)}$
0		13.7481	0.375574	-0.12631	-0.296912		0	
1	6003.65	241.61	-0.824539	0.031087	-0.377423	-15526300	0	100688
2	628.1	21.6998	-0.00809173	5.6274	-0.00445486	497.549	0	-37806.8
3	375.23	0.907721	-0.123245	-0.797694	-0.0604708	408628000	0	410553
4	136.1	65.5445	-1.3496	0.146408	1.91278	-493932	0	100011
5	25.5	64.9601	2.58565	0.379605	0.909966	2.32547	0	190765

$r_{\text{init}}^{(0)}$ [MPa]	a_χ	b_χ	b_1	b_2	b_3	q_{N0}	a_N	b_N
740.004	0.04526	3233.575	12.37092	-2.5854	-1.5573	0.2	-3.085	3741.2

b_p	η	ω	c_e	c_s	c_T	c_A	E-Modul [MPa]	ν
231.53	0.2083	0.927	0.08323	535.84	58.15	122.21	200000	0.3

Parameteridentifikation für das Döring-Modell basierend auf den Werkstoffversuchen bei $T = 180^\circ\text{C}$

i	$c^{(i)}$	$r_{\text{inf},0}^{(i)}$ [MPa]	$a_1^{(i)}$	$a_2^{(i)}$	$a_3^{(i)}$	$Q^{(i)}$	$a_P^{(i)}$	$c_\chi^{(i)}$
0		600.006	0.112389	-0.311549	0.186357		0	
1	5103	72.0823	-0.485683	0.0292363	-0.232653	68.6475	0	4.97704
2	1276	24.1629	-1.38151	1.2741	0.798161	2.8315	0	13.4482
3	319	26.1957	-0.366095	0.835712	0.875336	11033.9	0	6.00373
4	80	21.0077	-0.707636	0.998643	0.845079	14409.1	0	3.16997
5	20.45	24.8468	-0.750947	1.21325	0.894909	4428.24	0	4.58823

$r_{\text{init}}^{(0)}$ [MPa]	a_χ	b_χ	b_1	b_2	b_3	q_{N0}	a_N	b_N
667.046	0.29143	7693.96	143.684	8.20489	1.10837	1.2	2.9	500

b_p	η	ω	c_e	c_s	c_T	c_A	E-Modul [MPa]	ν
100	0.1	1	5	200	50	80	199000	0.3

C. Anhang: Zyklisch effektive J -Integral nach Dowling und Begley

Eine Erweiterung des J -Integrals auf zyklische Belastungen präsentieren *Dowling and Begley* in [55]:

$$\Delta J_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} [\Delta W n_1 - \Delta t_i \Delta u_{i,1}] ds, \quad (C.1)$$

$$\text{mit } \Delta W = \int_0^{\Delta \hat{\varepsilon}} \Delta \sigma_{ij} d(\Delta \varepsilon_{ij}) \quad (C.2)$$

In den Gleichungen C.1 und C.2 geben die Werte $\Delta \sigma_{ij}$ bzw. Δt_i , $\Delta \varepsilon_{ij}$ und Δu_i Änderungen der Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen bezogen auf einen Referenzzustand an und können als Schwingweiten aufgefasst werden. Im Gegensatz dazu sind den Werten ΔW und ΔJ keine Schwingweiten, sondern Absolutwerte zuzuschreiben. Der $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ -Betrag wird auf dem Entlastungsast gerechnet mit den Grenzen im oberen Lastumkehrpunkt und dem Zeitpunkt des Riss-schließens, der durch einen Algorithmus bestimmt wird. Dieser Algorithmus ermöglicht detaillierte Aussagen über die Rissöffnungs- und Riss-schließeeigenschaften, die durch die Bestimmung des Riss-schließzeitpunktes, des Rissortes, -öffnungsdruckes und -schließdruckes gekennzeichnet sind. Zur Berücksichtigung des Riss-schließeffektes empfiehlt sich die Anwendung des zyklisch effektiven J -Integrals. Der ΔJ_{eff} -Betrag wird auf dem Entlastungsast gerechnet mit den Grenzen im oberen Lastumkehrpunkt und dem Zeitpunkt des Riss-schließens, der durch den Algorithmus Copen (siehe Kapitel 5.2.1) bestimmt wird. In dieser Arbeit basieren die Ergebnisse des zyklisch effektiven J -Integrals die als $\Delta J_{\text{eff}}^{DB}$ bezeichnet werden, auf der zyklischen ΔJ -Definition nach *Dowling und Begley* [55], unter Beachtung der Rissuferbelastung.

