

Mitteilungen des Instituts für Grundbau, Boden- und Felsmechanik  
der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. T. Dietrich

Heft 26

**Pfahlgruppen in geschichtetem Boden unter  
horizontaler dynamischer Belastung**

**Dr.-Ing. H. G. Hartmann**

April 1986







Mitteilungen des Instituts für Grundbau, Boden- und Felsmechanik  
der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. T. Dietrich

Heft 26

**Pfahlgruppen in geschichtetem Boden unter  
horizontaler dynamischer Belastung**

**Dr.-Ing. H. G. Hartmann**

April 1986



## Vorwort des Herausgebers

Traditionellerweise unterscheidet man die Bodendynamik von der Bodenmechanik. Erstere idealisiert den Baugrund als linear elastische oder viskoelastische Schicht oder Halbraum. Dasselbe Stoffmodell verwendet auch die Terzaghisches Bodenmechanik erweitert um einen idealplastischen Bereich. Der kennzeichnende Unterschied ist die Berücksichtigung der Impulsänderungsrate in der Bodendynamik, die in der Impulsbilanz der Bodenmechanik gleich Null gesetzt wird. Nachdem man erkannt hat, daß die genannten Stoffmodelle nicht alle wichtigen Aspekte des Verhaltens des Baugrundes wiedergeben, daß vielmehr Stoffverhaltensforschung betrieben werden muß, um den Grundbau voranzubringen, ist die säuberliche Trennung der beiden Disziplinen nicht mehr opportun. In diesem Sinne ist dynamische Stoffverhaltensforschung an zyklisch beanspruchten Proben von Dammbaustoffen schon von dem früheren Ordinarius für Bodenmechanik und Gründer unseres Instituts, Herrn Prof. em.Dr.-Ing. H. Breth, gepflegt worden.

Die wissenschaftlich bedeutsame Arbeit von Herrn Dr.-Ing.H.G. Hartmann zeigt an einem praktisch wichtigen Randwertproblem die Umstände auf, unter denen ein erweitertes Stoffverständnis Nutzen bringen kann.

T. Dietrich

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt ich durch die Beschäftigung mit praktischen Problemen bei Bauprojekten während meiner Tätigkeit bei der Hochtief AG .

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. G. Waas, auf dessen wissenschaftliche Arbeiten zum Problem der Wechselwirkung zwischen Boden und Bauwerk meine Dissertation Bezug nimmt. Darüber hinaus hat mich Herr Dr. Waas durch seinen erfahrenen Rat und seine hilfreichen Anregungen unterstützt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. T. Dietrich als Referenten danke ich herzlich für die kritische Beurteilung der Arbeit und für seine wertvollen Hinweise zu dem nichtelastischen Problem des Pfahles im Sandboden.

Herr Prof. Dr.-Ing. G. König hat meine Arbeit mit stetigem Interesse begleitet und hat das Korreferat übernommen. Dafür danke ich ihm gern.

H. G. Hartmann

## I N H A L T

	Seite
1. Einführung	1
1.1 Bedeutung	1
1.2 Bisherige Arbeiten zu horizontal belasteten Pfählen	2
1.3 Vorhaben	6
1.4 Annahmen und Einschränkungen	8
1.5 Definition der wichtigsten Begriffe	8
2. Methodische Grundlagen	11
2.1 Grundlage eines Berechnungsverfahrens im Frequenzbereich für Schwingungsprobleme	12
2.1.1 Darstellungsformen harmonischer Größen	12
2.1.2 Transformation zeitabhängiger Größen in den Frequenzbereich	14
2.1.3 Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich	16
2.2 Rotationsperiodische Wellenausbreitung im viskoelastischen Kontinuum	19
2.2.1 Fourierreihenentwicklung der Kraft- und der Weggrößen	19
2.2.2 Grundgleichungen des rotationsperiodischen Kontinuums	21
2.2.3 Rayleigh- und Love-Wellen im rotationsperiodischen Kontinuum	23
2.3 Rotationsperiodische Wellenausbreitung im geschichteten visko- elastischen Medium	29
2.3.1 Diskretisierung in vertikaler Richtung	29
2.3.2 Prinzip der virtuellen Arbeiten	33
2.3.3 Rayleigh- und Love-Wellen im rotationsperiodischen, geschich- teten Medium	36
3. Dynamische Bodenkennwerte	38
3.1 Experimentelle Bestimmung der Bodenkennwerte	38
3.1.1 Tests im Labor	38

	Seite
3.1.2 Tests im Feld	39
3.2 Darstellung von Steifigkeit und Dämpfung des Bodens durch einen komplexen Modul	40
3.3 Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen im Boden	43
4. Berechnungsverfahren für Pfahlgründungen	44
4.1 Idealisierung von Bauwerk, Pfählen und Boden	45
4.2 Boden als Teilsystem	47
4.2.1 Flexibilitätsmatrix	47
4.2.2 Freifeldverformungen	48
4.3 Pfähle als Teilsystem	49
4.3.1 Physikalisches Modell	49
4.3.2 Mechanisches Lösungsprinzip	50
4.3.3 Steifigkeitsmatrix	50
4.3.4 Massenmatrix	52
4.4 Berechnung des Schwingungssystems aus Pfählen und Boden	53
4.5 Einarbeiten der Randbedingungen an den Pfahlköpfen	56
4.6 Symmetrische Systeme	62
4.6.1 Rotationsperiodische Systeme	62
4.6.2 Einfach- und doppelsymmetrische Systeme	73
4.7 Verfahren zur Berechnung des Systems aus Pfahlgründung und Gebäude	75
4.8 Numerische Aspekte	77
4.8.1 Diskretisierung des Bodens	77
4.8.2 Wahl der Koppelpunkte	77
4.8.3 Interpolation der Übertragungsfunktion	78

	Seite
5. V e r g l e i c h s r e c h n u n g e n	80
5.1 Vergleich mit Berechnungsverfahren aus der Literatur	80
5.1.1 Statisch belastete Pfahlgruppe	80
5.1.2 Dynamisch belasteter Einzelpfahl	82
5.2 Vergleich mit dynamischem Pfahlversuch	84
6. P a r a m e t e r s t u d i e n a n P f a h l - g r ü n d u n g e n	91
6.1 Beschreibung der maßgebenden Parameter	91
6.1.1 Einfluß von Pfahldurchmesser und Poissonzahl des elasti- schen Bodens	92
6.2 Wertebereich der Parameterstudie	97
6.2.1 Baugrund	97
6.2.2 Pfahlgründungen	99
6.2.3 Lastfälle	100
6.3 Anmerkungen zum Berechnungsverfahren beim Lastfall Erdbeben	103
6.3.1 Definition der kinematischen und der trägen Wechselwirkung	111
6.4 Einzelpfahl	112
6.4.1 Statische Belastung	112
6.4.2 Dynamische Belastung	114
6.4.3 Erdbeben	119
6.4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse	130
6.5 Pfahlgruppe	132
6.5.1 Statische Belastung	132
6.5.2 Dynamische Belastung	143
6.5.3 Erdbeben	153
6.5.4 Zusammenfassung der Ergebnisse	167

	Seite
7. Hinweise für die Praxis	171
7.1 Näherungsverfahren	171
7.2 Empfehlungen zur Konstruktion und Bemessung von Großbohrpfählen	176
7.2.1 Statische oder dynamische Horizontallast an der Pfahl- kopfplatte	176
7.2.2 Erdbeben	177
8. Zusammenfassung und Ausblick	183
8.1 Problematik	183
8.2 Pfahlprogramm PILAX	183
8.3 Parameterstudien	186
8.4 Hinweise für die Praxis	187
8.5 Ausblick	187
Zusammenstellung der Symbole, Indizes und Bezeichnungen	189
Literatur	195

## **A n h ä n g e**

Anhang A : Schematische Gegenüberstellung von dynamischen Berechnungsverfahren für Pfahlgründungen

Anhang B : Berechnung der Hankel- und Besselfunktionen

Anhang C : Das Eigenwertproblem des geschichteten Mediums

Anhang D : Lösung der Eigenwertprobleme von Love- und Rayleigh-Welle

Anhang E : Verformungen im rotationsperiodischen geschichteten Medium  
infolge Ring- und Einzellasten

Anhang F : Eindimensionale Wellenausbreitung im Freifeld

## 1. Einführung

### 1.1 Bedeutung

Pfähle werden zur Gründung von Bauwerken verwendet, wenn die oberen Schichten des Baugrundes die Bauwerkslasten nicht tragen können oder wenn unzulässig große Setzungen auftreten würden. Andere Maßnahmen wie Bodenaustausch oder Bodenverbesserung sind meist aufwendig und damit unwirtschaftlich.

In erster Linie sollen Pfähle die Fundamentlasten in tiefere Bodenschichten ableiten. Für die Konstruktion und Bemessung vertikal belasteter Pfähle gibt es umfassende Erfahrungen und Vorschriften. Problematischer ist es hingegen, die Tragfähigkeit von senkrechten Pfählen unter Horizontallast anzugeben. Die Schwierigkeit liegt hauptsächlich darin, Größe und Verteilung des Bodenwiderstandes über die Pfahltiefe anzugeben. Wegen dieser Unsicherheit empfahlen noch vor zwanzig Jahren die deutschen Vorschriften, Pfählen lediglich axiale Lasten zuzuweisen. Horizontalkräfte sollten über Schrägpfähle oder Pfahlböcke aufgenommen werden, was bei Pfählen kleineren Durchmessers ohne Schwierigkeiten möglich war. Seit der Einführung der Großbohrpfähle in die Baupraxis war eine Lösung des Problems jedoch notwendig geworden. Einerseits waren schräge Großbohrpfähle nur schwierig herzustellen, wenn überhaupt, andererseits war eine nutzbare Tragfähigkeit senkrecht zur Pfahlachse ja durchaus vorhanden. Die Forschung hat seitdem in Theorie und Praxis Erkenntnisse geliefert, die in der Vornorm DIN 4014, Teil 2 zusammengefaßt worden sind. ( siehe dazu Franke /15/ ). Obwohl darin noch viele Fragen offen geblieben sind ( zum Beispiel die der gegenseitigen Beeinflussung der Pfähle in einer Gruppe ), sind in der Zwischenzeit zahlreiche Gründungen mit Vertikalpfählen unter horizontaler Belastung erfolgreich ausgeführt worden.

In jüngerer Zeit gewinnt die Auslegung von Pfahlgründungen für dynamische Lasten wachsende Bedeutung. Dazu beigetragen haben die hohen Sicherheitsanforderungen an Kernkraftwerke beim Lastfall Erdbeben und auch an Offshore Bauwerke zur Öl- und Gasförderung in stürmischer See. Wie beim statischen Fall bereitet auch hier die Abtragung der horizontalen Lasten die meisten Schwierigkeiten. Die vorliegende Arbeit stellt ein neues Berechnungsverfahren vor zur Bestimmung der Pfahlschnittgrößen und der Antwortschwingung einer Pfahlgründung unter horizontaler dynamischer Belastung, insbesondere beim Lastfall Erdbeben. Es wird dabei die linear-elastische Theorie vorausgesetzt. Diese Annahme ist meist genügend genau zur Behandlung der oben erwähnten praktischen Probleme.

## 1.2 Bisherige Arbeiten zur Berechnung horizontal belasteter Pfähle

Übliche Berechnungsmethoden sind Bettungs- und Steifemodulverfahren. Beide verwenden einfache Rechenmodelle. Der Baugrund beim Bettungsmodulverfahren ( auch  $k_s$  - Theorie oder Winkler'sches Verfahren genannt ) besteht aus einem System von ungekoppelten horizontalen Federn. Sie sind über die Länge des Pfahles in einer bestimmten Weise verteilt, die auf Erfahrungswerte bei Pfahlversuchen zurückgeht. Als erster in einer Reihe von Autoren hat Titze ( siehe auch / 70 / ) Verfeinerungen und Tabellierungen vorgelegt. Bei der praktischen Bemessung hat sich dieses Verfahren durchgesetzt. Die Schwächen der Modellvorstellung liegen darin, daß die Steifigkeit der Federn ( der Bettungsmodul ) kein reiner Bodenkennwert ist, sondern vom Durchmesser des Pfahles abhängt. Da er sich auch längs des Pfahles ändert, müssen notwendigerweise Annahmen getroffen werden, die die Aussagekraft der Ergebnisse beeinträchtigen. Die gegenseitige Beeinflussung der Pfähle wird meist sehr grob da-

durch erfaßt, daß der Bettungsmodul in Abhängigkeit vom Pfahlabstand abgemindert wird. Die DIN 4014 gibt Abminderungsvorschriften an, die auf kleinmaßstäblichen Versuchen von Prakash an Pfählen in Sand basieren. Das Verformungsverhalten von Pfählen in einer Gruppe ist aber im allgemeinen dem eines einzelnen Pfahles nicht ähnlich. Die Biegemomenten- und Querkraftlinien können wesentlich anders sein. Durch Hinzufügen von Massen- und Dämpfungsparametern kann das Bettungsmodulverfahren für dynamische Lastfälle erweitert werden. Die geeignete Wahl dieser Parameter setzt jedoch wichtige Vorkenntnisse voraus, da die mitschwingende Bodenmasse und die Abstrahlungsdämpfung wesentlich von der Bodenschichtung und der Frequenz der Schwingung abhängt. Zur Erfassung der dynamischen Gruppenwirkung ist das Verfahren kaum geeignet. Möglich ist eine Vorgehensweise in Verbindung mit der  $E_s$  - Theorie. Der Lastfall Erdbeben kann berücksichtigt werden, indem Freifeldverschiebungen an den Bodenfedern eingepreßt werden.

Beim Steifemodulverfahren ( oder  $E_s$  - Theorie ) werden im elastischen homogenen Halbraum durch Lösung der Mindlin'schen Gleichung Kraft-Verformungsbeziehungen hergeleitet und mit den entsprechenden Beziehungen des Pfahlmodelles gekoppelt. Von Nachteil ist dabei, daß an Kopf- und Fußpunkt des Pfahles Spannungsspitzen auftreten, die in der Wirklichkeit wegen örtlicher Plastifizierung nicht vorkommen. Hier sind Korrekturen durch Ausgleichskurven erforderlich. Vor allem aber : da Pfahlgründungen in der Regel bei heterogenen Böden verwendet werden, ist die Voraussetzung des homogenen Halbraumes nicht erfüllt. Zur Berücksichtigung der Gruppenwirkung hat Poulos /49/, /50/, /51/, /52/ in Anwendung der  $E_s$  - Theorie ein einfaches Verfahren angegeben. Er berechnet die Verschiebungen eines unbelasteten Pfahles infolge der Belastung eines zweiten Pfahles. Das

Verhältnis der zwei Kopfverschiebungen in Abhängigkeit vom Pfahlabstand wird als Interaktionskurve aufgezeichnet. Liest man aus dieser Kurve für alle Pfähle einer Gruppe die Verschiebungen ab, wenn jeweils zwei Pfähle betrachtet werden (jeder mit jedem), so erhält man eine volle Flexibilitätsmatrix. Das Verfahren ist eine Näherung, weil bei der Berechnung der Interaktionskurven zweier Pfähle die Steifigkeiten aller übrigen ( auch der dazwischenliegenden ) Pfähle vernachlässigt werden. Die von Poulos für den homogenen Halbraum angegebenen Interaktionskurven sind allerdings nur beschränkt anwendbar, weil der Boden in der Regel geschichtet ist. Die Gruppenwirkung ist bei Schichtung aber sicherlich anders als bei homogenen Verhältnissen. Das Verfahren ist deshalb erweitert worden für geschichtete Böden. Es ist auch für dynamische Berechnungen anwendbar. ( Kaynia und Kausel /25/ ). Die Lösung der Mindlin'schen Gleichung wird dabei ersetzt durch die Green'schen Funktionen als spezielle Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung.

Einen dynamisch angeregten Einzelpfahl in einer homogenen Bodenschicht auf starrem Untergrund haben Tajimi /66/, /67/ und Blaney, Kausel und Roesset /3/ untersucht. Auch hier ist eine Erweiterung auf Pfahlgruppen theoretisch möglich.

Näherungsweise kann der geschichtete Charakter des Baugrundes um den Pfahl herum berücksichtigt werden, indem die Bodenschichten als übereinandergelagerte, gelochte Scheiben in ebenem Dehnungszustand idealisiert werden. Ein solches Verfahren kann als Erweiterung der  $k_s$  - Theorie in den dynamischen Bereich aufgefaßt werden. Novak ( /36/ bis /41/ ) hat auf diese Weise die dynamische Wechselwirkung zwischen Pfahl und Boden studiert. Er gibt geschlossene Lösungen für die Kraft-Verformungsbeziehungen am Lochrand der Scheibe an. Die Verformungen konvergieren allerdings nicht bei

statischer Last, so daß er auf Näherungen angewiesen ist. Außerdem hat die Methode mit dem Bettungsmodulverfahren den Nachteil gemein, daß die Verformungen an den Schichtgrenzen nicht kompatibel sind. Die detaillierteste Abbildung des Bodens um den Pfahl herum ist mit der Finite-Element-Methode ( FEM ) möglich. Damit kann neben der Veränderung der Bodensteifigkeit in der Vertikalen auch die in der Horizontalen berücksichtigt werden. Im Nahbereich des Pfahles läßt sich somit eine Auflockerung bei Bohrpfählen, eine Verdichtung bei Rammfählen qualitativ simulieren. Meißner /33/ hat mit der FEM auch nichtlineare Effekte untersucht und Parameterstudien angestellt. Der Hohe Berechnungsaufwand der FEM beschränkt das Verfahren allerdings auf exemplarische Fallstudien am Einzelpfahl. Für die praktische Anwendung ist der Detaillierungsgrad auch unnötig, da zumeist unklar ist, inwieweit das theoretische Bodenmodell mit den tatsächlichen Gegebenheiten übereinstimmt.

Auch Dietrich /6/ richtet sein Augenmerk auf die nichtlinearen Effekte. Er läßt die elastischen Eigenschaften des Bodens außer acht und stellt ihn durch ein Kontinuum dar, das nur die Coulomb'sche Reibung zwischen den als starr vorgestellten Körnern abbildet. Aus dem Vergleich mit Versuchen an kleinmaßstäblichen Modellpfählen in Sand stellt er fest, daß unter gewissen Voraussetzungen auch bei kleinen Verformungen ein elastisches Verhalten des Bodens nur untergeordnete Bedeutung hat.

Faßt man den Boden als geschichtetes, seitlich unendlich ausgedehntes Medium auf, so lassen sich für Punkt- oder Ringlasten die Verformungen des Bodens mittels der Green'schen Funktionen angeben. Auf diese Weise kann eine Flexibilitätsmatrix des Bodens aufgebaut werden. In Verbindung mit den Steifigkeitsmatrizen der Pfählen erhält man ein Gleichungssystem, dessen Auflösung die Pfahlschnittgrößen

ergibt. Wolf und von Arx /79/,/80/ verwenden dazu ein großes achsensymmetrisches Finite-Element Netz. In den Arbeiten von Waas und Hartmann /75/,/76/, von Kaynia und Kausel /25/ und von Tyson und Kausel /72/ wird ein halbanalytisches Verfahren genutzt, indem der Boden nur in vertikaler Richtung diskretisiert wird. In horizontaler Richtung sind Hankel- und Besselfunktionen analytische Lösungen der Wellengleichung.

In den Tabellen 1 bis 6 des Anhangs A sind die genannten Berechnungsverfahren zusammen mit weiteren Literaturhinweisen schematisch versammelt. Für statisch horizontal belastete Pfähle fassen Franke und Klüber in /17b/ den Stand der Wissenschaft zusammen.

### 1.3 Vorhaben

Die vorliegende Arbeit behandelt die Entwicklung und Anwendung eines halbanalytischen Verfahrens zur Berechnung der Schnittgrößen von Pfählen innerhalb einer Pfahlgruppe. Es werden die von horizontalen Belastungen verursachten Verformungen, Querkräfte und Biegemomente errechnet. Die Belastungen können statisch oder dynamisch wirkende Kräfte sein oder als eingeprägte Verformungen oder Beschleunigungen wirken. Die Wechselwirkung Pfahl-Boden-Pfahl wird berücksichtigt. Der Boden ist horizontal geschichtet. Er ist seitlich unendlich ausgedehnt und ruht in einer bestimmten Tiefe auf starrem Halbraum. Der Boden wird als linear elastisches oder viskoelastisches Medium angesehen. Bei der Geometrie der Pfahlgründung können Einfach- und Doppelsymmetrie sowie rotationsperiodische Symmetrie berücksichtigt werden. Damit ermöglicht es das Verfahren insbesondere, große Strukturen mit mäßigem Aufwand an Speicherkapazität und Rechenzeit abzubilden. Im statischen Fall liegt der Einsatzschwerpunkt bei Pfahlgründungen in solchen Böden, für die ein linear elastisches ( bzw.

viskoelastisches ) Werkstoffgesetz eine angemessene Idealisierung bedeutet. Bei dynamischen Problemen ist es gut anwendbar, wenn nur kleine oder hochfrequente Verformungen im Boden auftreten ( z.B.: Maschinengründungen, Erdbeben ). Bei höherer statischer oder bei zyklischer Belastung müssen im allgemeinen nichtlineare und plastische Effekte berücksichtigt werden. Sie können in dem Verfahren näherungsweise berechnet werden, ersetzt man den Elastizitätsmodul des Bodens durch einen in einem iterativen Prozeß ermittelten Sekantenmodul. Sinnvoll wäre es dann, Teilbereiche ( z.B. den Boden im unmittelbaren Bereich um den Pfahl herum ) vom Gesamtsystem abzutrennen und nur diese nichtlinear zu berechnen. Allerdings steigen bei einer solchen Vorgehensweise die Datenmenge und der Rechenaufwand beträchtlich an, so daß in den allermeisten Fällen ein Mißverhältnis zu den Unwägbarkeiten des tatsächlichen Problems entsteht. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich jedenfalls auf die linear elastische Theorie, da schon hier genügend Phänomene einer Erforschung bedürfen.

Nach Formulierung des Programmes PILAX im FORTRAN-Code werden zur Verifikation einige einfache Berechnungsbeispiele aus der Literatur nachvollzogen. Ein Vergleich von Rechenergebnissen mit dynamischen Pfahltests von Novak und El Sharnouby /13/ und /39/ soll zeigen, daß das Programm geeignet ist, das Verhalten von tatsächlichen Pfahlgründungen zu simulieren. PILAX wird anschließend angewendet, um am idealisierten Modell das Verhalten von verschiedenen Typen von Pfahlgruppen bei statischer und dynamischer Belastung aufzuzeigen. In Parameterstudien werden typische Phänomene wie statische und dynamische Gruppenwirkung und Pfahl-Boden-Wechselwirkung bei Erdbeben untersucht. Die am theoretischen Modell gewonnenen Erkenntnisse sollen anschließend in ihrer Auswirkung auf Bemessung und

Konstruktion gewertet werden. Die Arbeit schließt mit Hinweisen zur vereinfachten Berechnung und zur praktischen Bemessung von Pfählen bei dynamischer Belastung und bei Erdbeben.

#### 1.4 **Annahmen und Einschränkungen**

In der vorliegenden Arbeit werden folgende Annahmen und Einschränkungen getroffen. Für alle weiteren wird auf den Text verwiesen.

- Die Dehnungen im Boden und in den Pfählen werden als klein vorausgesetzt.
- Der Boden ist horizontal geschichtet. Innerhalb einer Schicht ist er homogen und isotrop.
- Das Material von Boden und Pfahl verhält sich elastisch, im dynamischen Fall viskoelastisch. Das Werkstoffverhalten läßt sich durch einen komplexen Modul ausdrücken.
- Die Pfähle sind zu vertikalen biege- und schubnachgiebigen Stäben idealisiert.
- Der Boden ist in der Lage Zugspannungen aufzunehmen. Die hinteren Pfähle einer Gruppe tragen somit den gleichen Lastanteil wie die vorderen.
- Zwischen Pfahl und Boden bildet sich kein Spalt.
- Die Horizontal- und die Kippschwingungen der Pfahlgründung sind entkoppelt.
- Die Erdbebenanregung pflanzt sich im Boden über vertikal propagierende Scherwellen aus.

#### 1.5 **Definition der wichtigsten Begriffe**

Nachfolgend werden die wichtigsten der im Text verwendeten Begriffe definiert. Da sie zum Teil aus dem Englischen übernommen worden sind, werden auch die Originalbezeichnungen angegeben.

- Ansatzfunktion : Funktion, die den Verlauf der Verschiebungen im Inneren eines Finiten Elementes approximiert
- Antwortspektrum : Nach Eigenfrequenzen geordnete Zusammenstellung der maximalen Amplituden von Bewegungsgrößen für Einmassenschwinger
- Bewegungsgleichung : Differentialgleichung, deren Variablen Bewegungsgrößen sind
- Bewegungsgrößen : Oberbegriff für Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung
- Boden-Bauwerk-Wechselwirkung ( soil structure interaction, SSI ) : Gegenseitige Beeinflussung von Boden und Bauwerk
- Fourier-Transformation : hier ist speziell gemeint die Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich und umgekehrt ( z.B. : Fast Fourier Transformation ( FFT ) : schneller numerischer Algorithmus nach Cooley und Tukey )
- Freifeld ( freefield ) : Boden in einiger Entfernung vom Fundament des Bauwerks und unbeeinflusst von ihm
- Frequenzbereich ( frequency domain ) : Funktionen mit der Frequenz als Variabler
- Frequenzverlauf : frequenzabhängige Funktion von Kraft- oder Weggrößen
- harmonische Größe : Kraft- oder Weggröße, die sich im Zeitbereich sinus-förmig ändert
- kinematische Wechselwirkung ( kinematic interaction ) : bei Erdbeben die Wechselwirkung zwischen Boden und Fundament infolge Reflexion, Streuung und Beugung der seismischen Wellen bei Erdbeben
- Koppelpunkt : Knotenpunkt im Berechnungsmodell, an dem Boden und Pfahl verknüpft sind
- Methode der komplexen Variablen ( complex response method ) :

Formulierung und Lösung der komplexen Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich

Modale Analyse : Entwicklung der Gebäudeschwingungen nach ungedämpften Eigenformen

Rayleigh- und Lovewellen : Wellen an der Oberfläche eines Mediums  
rotationsperiodische Struktur : mehrfach symmetrische Struktur, deren Symmetrieachsen sich in einem Punkt schneiden

träge Wechselwirkung ( inertial interaction ) : Wechselwirkung zwischen Boden und Gebäude infolge der Trägheitskräfte des Gebäudes, der Nachgiebigkeit der Gründung und der Energieabstrahlung im Boden

viskoelastisches Material : linearelastisch und linearviskoses Material ( Kelvin-Voigt Modell )

Zeitbereich ( time domain ) : Funktion mit der Zeit als Variabler

Zeitverlauf ( time history ) : Zeitabhängige Funktion von Kraft- oder Weggrößen ( z.B. Erdbebenbeschleunigungen )

## 2. Methodische Grundlagen

Die dynamische Berechnung der Pfahlgründung wird im Frequenzbereich vorgenommen. Kapitel 2.1 behandelt die Grundlagen und Voraussetzungen eines solchen Berechnungsverfahrens und die notwendigen Transformationen aus dem Zeit- in den Frequenzbereich.

Neben den Materialeigenschaften des Bodens bestimmt die Art der Wellenausbreitung im Baugrund das Schwingungsverhalten einer Pfahlgründung. Mögliche Rechenmodelle sind der elastische Halbraum, die Einzelschicht oder das Schichtenpaket aus übereinanderliegenden Schichten, mit oder ohne Kompatibilität an den Grenzflächen. Das Schwingungsverhalten des Bodens wird zweckmäßig durch eine komplexe Flexibilitätsmatrix (Komplianzmatrix) ausgedrückt. Als Grundlage dazu dienen die Beziehungen zwischen Last und Verformung an verschiedenen Stellen innerhalb des Bodens. In Kapitel 2.2 werden die zugehörigen Differentialgleichungen für den viskoelastischen Halbraum hergeleitet.

Klassische Finite-Element Modelle haben den Nachteil, daß das Elementnetz wegen der zwei- oder gar dreidimensionalen Diskretisierung sehr groß gerät. Störende Reflexionen an den Modellrändern müssen vermieden werden. In der Praxis hat sich das Schichtenmodell als vorteilhaft erwiesen, da der Baugrund in den meisten Fällen eine (wenn auch nicht immer horizontale) Schichtung mit unterschiedlichen Materialeigenschaften aufweist. Soll die Energieabstrahlung in die Tiefe erfaßt werden, muß die Kompatibilität an den Schichtgrenzen berücksichtigt werden.

Den geschichteten Boden haben Waas /74/, Tajimi /67/ und Kausel und Peek /24/ mit gleichen oder ähnlichen Ansätzen untersucht. Waas und Werkle /77/ legen die von Waas /73/ angegebenen Formeln für Verschiebungen infolge Ringkräften in konsequenter Formulierung vor.

Da das Verfahren noch weitgehend unbekannt ist, wird im Anhang dieser Arbeit auf die Herleitung der Last-Verformungsbeziehungen ausführlich eingegangen.

## 2.1 Grundlagen eines Berechnungsverfahrens im Frequenzbereich für Schwingungsprobleme

### 2.1.1 Darstellungsformen harmonischer Größen

Man nennt eine Größe harmonisch, wenn sie eine Sinus- oder Cosinusfunktion der Zeit  $t$  oder einer anderen skalaren Variablen ist. Unter Größen werden in diesem Zusammenhang Kräfte, Verformungen, Spannungen oder Verzerrungen verstanden. Harmonische Größen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden. Ist zum Beispiel  $g(t)$  eine harmonische Größe, dann gilt

$$g(t) = \bar{g} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad (2.1.1)$$

oder

$$g(t) = g_1 \cdot \cos \Omega t - g_2 \cdot \sin \Omega t \quad (2.1.2)$$

oder

$$g(t) = \operatorname{Re}(\underline{g} \cdot e^{i\Omega t}) \quad (2.1.3)$$

mit

$$i = \sqrt{-1}$$

$\operatorname{Re}(\ )$  : Realteil einer komplexen Größe

$\operatorname{Im}(\ )$  : Imaginärteil einer komplexen Größe

$\Omega = 2\pi f$  : Kreisfrequenz

$f = \frac{1}{T}$  : Frequenz

$T$  : Periode der Schwingung

$\bar{g}$  in Gleichung (2.1.1) wird als Amplitude,  $\varphi$  als Phasenwinkel bezeichnet.

Wie aus Gleichung ( 2.1.3 ) zu erkennen ist, können harmonische Größen durch komplexe Zahlen ausgedrückt werden.

Komplexe Größen sind in diesem und den nächsten Kapiteln durch Untersteichung gekennzeichnet.

Zwischen den drei Darstellungen ( 2.1.1 ), ( 2.1.2 ) und ( 2.1.3 ) bestehen folgende Zusammenhänge :

$$\underline{g}_1 = \bar{g} \cos \varphi, \quad \underline{g}_2 = \bar{g} \sin \varphi \quad ( 2.1.4a)$$

$$\bar{g} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad ( 2.1.4b)$$

$$\underline{g} = \bar{g} e^{i\varphi} = \bar{g} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = g_1 + i g_2 \quad ( 2.1.4c)$$

$$\varphi = \arctan \frac{g_2}{g_1} \quad ( 2.1.4d)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{g} e^{i\Omega t}) = \operatorname{Re}(\bar{g} e^{i(\Omega t + \varphi)}) = \bar{g} \cos(\Omega t + \varphi) \quad ( 2.1.5e)$$

Eine anschauliche Deutung der Zusammenhänge zeigt Bild 2.1 .

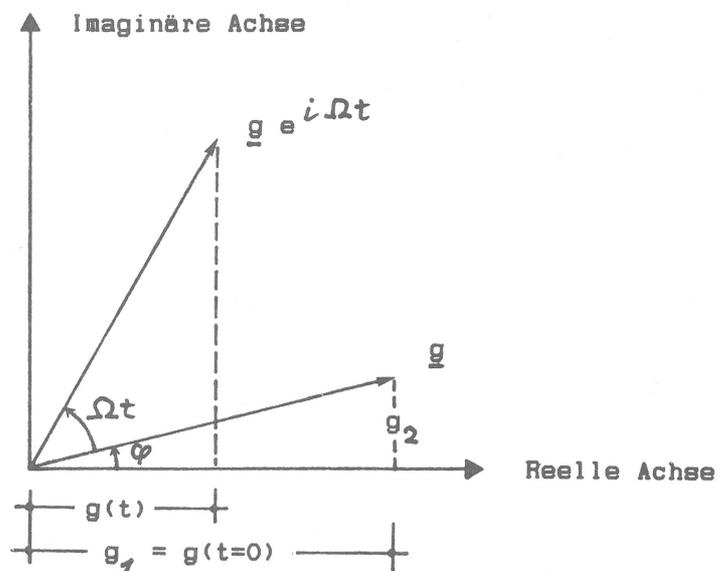


Bild 2.1 : Anschauliche Deutung der komplexen Größen

Die harmonische Größe  $g(t)$  erscheint als Projektion eines in der komplexen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um den Ursprung rotierenden Ortsvektors  $\underline{g} e^{i\Omega t}$  auf die reelle Achse.

### 2.1.2 Transformation zeitabhängiger Größen in den Frequenzbereich

#### a) Im Zeitbereich periodische Größen :

Eine von der Zeit  $t$  abhängende variable Größe  $x(t)$  ( z.B. die Verschiebung eines Punktes in einem viskoelastischen System ), die periodisch mit der Periode  $T$  variiert, also der Bedingung

$$x(t) = x(t + j \cdot T) , \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad ( 2.1.5 )$$

genügt, läßt sich als Summe harmonischer Größen darstellen und unter Verwendung von ( 2.1.3 ) folgendermaßen schreiben :

$$x(t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \underline{y}(\Omega_j) e^{i\Omega_j t} \right) \quad ( 2.1.6 )$$

Diese Darstellung wird als Fourierreihenentwicklung bezeichnet. Die Glieder der Reihe sind Funktionen der diskreten Frequenzen  $\Omega_j$  .

$$\Omega_j = j \cdot \Omega = j \frac{2\pi}{T} , \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\Omega$  .  $\underline{y}(\Omega_j)$  ist die komplexe Amplitude des  $j$ -ten Summanden. Mit Hilfe der Eulerschen Formel läßt sie sich durch die darzustellende Funktion  $x(t)$  ausdrücken.

$$\underline{y}(\Omega_j) = \frac{2}{T} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{j,0} \right) \int_0^T x(t) e^{-i\Omega_j t} dt \quad ( 2.1.7 )$$

mit  $\delta_{j,0} = 0$  für  $j \neq 0$   
 $\delta_{j,0} = 1$  für  $j = 0$

Beispiele für periodische Lasten sind Massenkräfte aus Kompressoren und Turbinen, Wasserdruck aus Seegang bei Off-Shore Anlagen. Bei

der praktischen Anwendung genügt es häufig, einige wenige Reihenglieder zu berücksichtigen.

b) Im Zeitbereich transiente Größen :

Auch nichtperiodische Vorgänge von begrenzter Dauer (transient) können mit der Fouriertransformation in den Frequenzbereich überführt werden, wenn man die Wirkungszeit und eine daran anschließende Ruhezeit als Periode auffaßt. Belastungen aus Stoß oder Erdbeben lassen sich auf diese Weise darstellen. Man kann sich die Fouriertransformation als Grenzfall der Fourierreihenentwicklung vorstellen, wenn man die diskreten Amplituden in ein kontinuierliches Frequenzspektrum übergehen läßt. Man schreibt dann statt ( 2.1.7 )

$$\underline{y}(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad ( 2.1.8 )$$

wenn  $x(t) = 0$  für  $t \leq 0$

Die Transformation analog zu ( 2.1.6 ) geht über in

$$x(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \quad ( 2.1.9 )$$

Eine andere Schreibweise des komplexen Spektrums  $\underline{y}(\omega)$  ist

$$\underline{y}(\omega) = \bar{y}(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad ( 2.1.10 )$$

mit  $\bar{y}(\omega)$  : Fourierspektrum der Amplitude

$\varphi(\omega)$  : Fourierspektrum der Phase

Zur numerischen Auswertung der Gleichungen ( 2.1.8 ) und ( 2.1.9 ) steht mit dem Cooley-Tukey Algorithmus (FFT - Fast Fourier Transformation) ein sehr schnelles Berechnungsverfahren zur Verfügung.

### 2.1.3 Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich

Die Bewegungsgleichung des gedämpften Einmassenschwingers mit der Masse  $M$ , der Federsteifigkeit  $K$  und der viskosen Dämpfung  $C$  ist

$$K \cdot u(t) + C \cdot \dot{u}(t) + M \cdot \ddot{u}(t) = P(t) \quad (2.1.11)$$

$u(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  und  $\ddot{u}(t)$  sind Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung.  $P(t)$  ist die anregende Kraft. Die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ist

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.1.12)$$

Der dimensionslose Quotient

$$D = \frac{C \cdot \Omega_0}{2K} = \frac{C}{2M\Omega_0} \quad (2.1.13)$$

wird als Lehrsches Dämpfungsmaß bezeichnet und beschreibt das Verhältnis der viskosen Dämpfung des betrachteten Schwingers zur kritischen Dämpfung. Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist

$$\Omega_D = \Omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad (2.1.14)$$

Bei kleinem Dämpfungsmaß  $D$  stimmen  $\Omega_0$  und  $\Omega_D$  praktisch überein. Im Fall der harmonischen Bewegung  $u(t) = \underline{v} e^{i\Omega t}$  kann (2.1.11) geschrieben werden als

$$(\underline{K} - \Omega^2 M) \underline{v} = \underline{P} \quad (2.1.15)$$

mit den komplexen Größen Steifigkeit  $\underline{K}$ , Verschiebung  $\underline{v}$  und Kraft  $\underline{P}$ . Dabei ist

$$\underline{K} = \text{Re}(\underline{K}) + i \text{Im}(\underline{K}) = K + i\Omega C \quad (2.1.16)$$

Die komplexe lineare Gleichung (2.1.15) ist äquivalent den beiden gekoppelten reellen Gleichungen

$$\operatorname{Re}(\underline{K}) \operatorname{Re}(\underline{V}) - \operatorname{Im}(\underline{K}) \operatorname{Im}(\underline{V}) - \Omega^2 M \operatorname{Re}(\underline{V}) = \operatorname{Re}(\underline{P}) \quad (2.1.17a)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{K}) \operatorname{Im}(\underline{V}) + \operatorname{Im}(\underline{K}) \operatorname{Re}(\underline{V}) - \Omega^2 M \operatorname{Im}(\underline{V}) = \operatorname{Im}(\underline{P}) \quad (2.1.17b)$$

die einfach gelöst werden können.

In Verallgemeinerung von Gleichung ( 2.1.15 ) läßt sich für ein System mit  $n$  Freiheitsgraden schreiben

$$([\underline{K}] - \Omega^2 [\underline{M}]) \{\underline{V}\} = \{\underline{P}\} \quad (2.1.18)$$

Darin bezeichnet  $[\underline{K}]$  die komplexe Steifigkeitsmatrix und  $[\underline{M}]$  die Massenmatrix. Die Matrizen haben die Dimension  $n \times n$ .

$$[\underline{K}] = [K] + i \Omega [C] \quad (2.1.19)$$

Der Realteil der komplexen Steifigkeitsmatrix  $[\underline{K}]$  enthält die Steifigkeiten, der Imaginärteil die mit  $\Omega$  multiplizierten viskosen Dämpfungen. Die Vektoren  $\{\underline{V}\}$  und  $\{\underline{P}\}$  enthalten die komplexen Verformungen bzw. Kräfte.

Statt der viskosen (d.h. geschwindigkeitsabhängigen) Dämpfung  $C$  kann auch eine Materialdämpfung oder hysteretische (d.h. dehnungsabhängige) Dämpfung  $C_h$  verwendet werden. In Gleichung ( 2.1.11 ) ist dann  $C$  durch  $C_h/\Omega$  zu ersetzen. Das Lehrsche Dämpfungsmaß  $D$  wird nun frequenzabhängig und zwar

$$D = \frac{C_h \Omega_0}{2 K \Omega} = \xi \frac{\Omega_0}{\Omega} \quad (2.1.20)$$

Das Verhältnis  $\xi$  wird als hysteretisches Dämpfungsmaß bezeichnet und gibt den Bruchteil der kritischen Dämpfung an.

$$\xi = \frac{C_h}{2 K} = D \frac{\Omega}{\Omega_0} \quad (2.1.21)$$

Bei der Eigenfrequenz  $\Omega_0 = \Omega$  stimmen Lehrsches und hysteretisches Dämpfungsmaß überein. Die komplexen Steifigkeiten in den Gleichungen

chungen ( 2.1.16 ) und ( 2.1.19 ) gehen im Fall der hysteretischen Dämpfung über in

$$\underline{k} = K ( 1 + i 2 \xi ) \quad ( 2.1.22 )$$

$$[\underline{k}] = [K] ( 1 + i 2 \xi ) \quad ( 2.1.23 )$$

## 2.2 Rotationsperiodische Wellenausbreitung im viskoelastischen Kontinuum

### 2.2.1 Fourierreihenentwicklung der Kraft- und Weggrößen

Das betrachtete Kontinuum sei viskoelastisch und orthotrop zur vertikalen z-Achse. Die Kraft- und Weggrößen oszillieren harmonisch in der Zeit. Die komplexe Formulierung erlaubt eine Berechnung im Frequenzbereich. Zur Vereinfachung der Darstellung wird ab hier auf die Kennzeichnung der komplexen Größen durch Unterstreichung verzichtet.

Formuliert man die Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten, so kann das dreidimensionale Problem durch eine Fourierreihenentwicklung in eine Anzahl von ungekoppelten zweidimensionalen Problemen zerlegt werden. Die eingprägten Kräfte oder Verformungen lassen sich oft schon mit einem oder mit zwei Reihengliedern ausdrücken. Damit bietet diese Methode erhebliche Vorteile gegenüber der vollen dreidimensionalen Berechnung.

Gemäß Bild 2.2 sind  $v_r$ ,  $v_z$  und  $v_\varphi$  radiale, vertikale und tangentielle Verschiebungsfelder.  $p_r$ ,  $p_z$  und  $p_\varphi$  sind die entsprechenden Felder der eingprägten Kräfte.

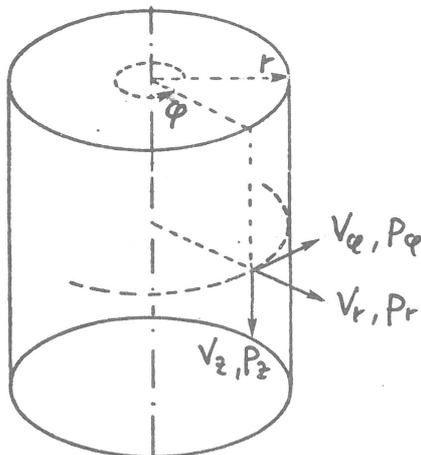


Bild 2.2 : Definition der Kraft- und Weggrößen

Die Verschiebungen lassen sich entwickeln in die rotationsperio-

dische Form

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\varphi \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos n\varphi & & \\ & \cos n\varphi & \\ & & -\sin n\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r,s,n} \\ v_{z,s,n} \\ v_{\varphi,s,n} \end{bmatrix} \quad (2.2.1a)$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin n\varphi & & \\ & \sin n\varphi & \\ & & \cos n\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r,a,n} \\ v_{z,a,n} \\ v_{\varphi,a,n} \end{bmatrix}$$

oder

$$\{v\} = \sum_{n=0}^{\infty} ( [\phi_{s,n}] \{v_{s,n}\} + [\phi_{a,n}] \{v_{a,n}\} ) \quad (2.2.1b)$$

Die modalen Amplituden mit dem Index s beziehen sich auf die zur Ebene  $Q = 0$  symmetrischen Verschiebungsfelder, der Index a kennzeichnet die antimetrischen. Ist ein beliebiges Verschiebungsfeld vorgegeben, dann ergeben sich die modalen Amplituden aus

$$\{v_{s,n}\} = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{n0} \right) \int_0^{2\pi} [\phi_{s,n}] \{v\} d\varphi \quad (2.2.2a)$$

$$\{v_{a,n}\} = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{n0} \right) \int_0^{2\pi} [\phi_{a,n}] \{v\} d\varphi \quad (2.2.2b)$$

mit

$$\delta_{n0} = 0 \quad \text{für } n \neq 0$$

$$\delta_{n0} = 1 \quad \text{für } n = 0$$

Auf gleiche Weise erhält man die Beziehung für die eingepprägten Kräfte

$$\{p\} = \sum_{n=0}^{\infty} ( [\phi_{s,n}] \{p_{s,n}\} + [\phi_{a,n}] \{p_{a,n}\} ) \quad (2.2.3)$$

Die Verzerrungen und Spannungen lassen sich auf ähnliche Weise darstellen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\varphi} \\ \gamma_{\varphi z} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \begin{bmatrix} \cos n\varphi & & & & & \\ & \cos n\varphi & & & & \\ & & \cos n\varphi & & & \\ & & & \cos n\varphi & & \\ & & & & -\sin n\varphi & \\ & & & & & -\sin n\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr,s,n} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi,s,n} \\ \varepsilon_{zz,s,n} \\ \gamma_{rz,s,n} \\ \gamma_{r\varphi,s,n} \\ \gamma_{\varphi z,s,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin n\varphi & & & & & \\ & \sin n\varphi & & & & \\ & & \sin n\varphi & & & \\ & & & \sin n\varphi & & \\ & & & & \cos n\varphi & \\ & & & & & \cos n\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr,a,n} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi,a,n} \\ \varepsilon_{zz,a,n} \\ \gamma_{rz,a,n} \\ \gamma_{r\varphi,a,n} \\ \gamma_{\varphi z,a,n} \end{bmatrix} \right) \quad (2.2.4a)$$

oder

$$\{\varepsilon\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( [\bar{\phi}_{s,n}] \{\varepsilon_{s,n}\} + [\bar{\phi}_{a,n}] \{\varepsilon_{a,n}\} \right) \quad (2.2.4b)$$

und

$$\{\sigma\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( [\phi_{s,n}] \{\sigma_{s,n}\} + [\phi_{a,n}] \{\sigma_{a,n}\} \right) \quad (2.2.5)$$

### 2.2.2 Grundgleichungen des rotationsperiodischen Kontinuums

Die Kompatibilitätsbedingung verknüpft Verschiebungen und Verzerrungen durch

$$\{\varepsilon_{s,n}\} = [\Theta_{\varepsilon,n}] \{v_{s,n}\} \quad (2.2.7a)$$

$$\{\varepsilon_{a,n}\} = [\Theta_{\varepsilon,n}] \{v_{a,n}\} \quad (2.2.7b)$$

mit der Operatormatrix  $[\Theta_{\varepsilon,n}]$ .

$$[\mathbb{C}_{\varepsilon,n}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & & & & & \\ \frac{1}{r} & & & & & -\frac{n}{r} \\ & & \frac{\partial}{\partial z} & & & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial r} & & & \\ \frac{n}{r} & & & & -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & \\ & & \frac{n}{r} & & & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Im dynamischen Fall bedingt das Gleichgewicht

$$[\mathbb{C}_{\sigma,n}] \{\sigma_{s,n}\} + \rho \Omega^2 \{V_{s,n}\} = \{0\} \quad (2.2.9a)$$

$$[\mathbb{C}_{\sigma,n}] \{\sigma_{a,n}\} + \rho \Omega^2 \{V_{a,n}\} = \{0\} \quad (2.2.9b)$$

mit der Operatormatrix

$$[\mathbb{C}_{\sigma,n}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & -\frac{1}{r} & & & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{n}{r} & \\ & & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & & & -\frac{n}{r} \\ & \frac{n}{r} & & & \frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} & \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

Zwischen Spannungen und Verzerrungen gilt für jedes Reihenglied das Hooke'sche Gesetz. Für isotropes, viskoelastisches Material nimmt das Werkstoffgesetz für die symmetrischen Reihenglieder die Form an

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr,s,n} \\ \sigma_{\varphi\varphi,s,n} \\ \sigma_{zz,s,n} \\ \tau_{rz,s,n} \\ \tau_{r\varphi,s,n} \\ \tau_{\varphi z,s,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr,s,n} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi,s,n} \\ \varepsilon_{zz,s,n} \\ \gamma_{rz,s,n} \\ \gamma_{r\varphi,s,n} \\ \gamma_{\varphi z,s,n} \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

Für die antimetrischen Fourierreihenglieder gilt die gleiche Beziehung. In matrizieller Darstellung ist

$$\{\sigma_{s,n}\} = [D] \{\varepsilon_{s,n}\} \quad (2.2.12a)$$

$$\{\sigma_{a,n}\} = [D] \{\varepsilon_{a,n}\} \quad (2.2.12b)$$

Die Gleichungen ( 2.2.1 ) bis ( 2.2.12 ) zeigen, daß die Beziehungen für die symmetrischen und die antimetrischen Fourierreihenglieder vollkommen analog sind. Das gilt auch für die folgenden Ableitungen. Man kann daher bei der Darstellung auf die Indizes s und a verzichten. Die Beziehungen haben gleichermaßen Gültigkeit für den symmetrischen und den antimetrischen Anteil.

Auch der Index n , der die Abhängigkeit vom Reihenglied anzeigt, wird der Übersichtlichkeit halber im folgenden weggelassen.

### 2.2.3 Rayleigh- und Love-Wellen im rotationsperiodischen Kontinuum

Setzt man die Gleichungen ( 2.2.7 ) und ( 2.2.11 ) in die Gleichgewichtsbedingung ( 2.2.9 ) ein, so erhält man Differentialgleichungen mit Verschiebungen als Unbekannten.

$$\{w\} = [\Theta_r][D][\Theta_z]\{v\} + \rho \Omega^2 \{v\} = \{0\} \quad (2.2.13)$$

oder

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2G)\frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2G\frac{n}{r}\bar{\omega}_z + 2G\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial z} \\ (\lambda+2G)\frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2G\frac{\partial(r\bar{\omega}_r)}{r\partial r} - 2G\frac{n}{r}\bar{\omega}_r \\ (\lambda+2G)\frac{n}{r}\Delta - 2G\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial z} + 2G\frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial r} \end{bmatrix} + \rho\Omega^2 \begin{bmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial}{\partial r} v_r - \frac{n}{r} v_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} v_z \quad (2.2.15a)$$

$$\bar{\omega}_r = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{r} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_\varphi \right) \quad (2.2.15b)$$

$$\bar{\omega}_z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\varphi) - \frac{n}{r} v_r \right) \quad (2.2.15c)$$

$$\bar{\omega}_\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} v_r - \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) \quad (2.2.15d)$$

Das Differentialgleichungssystem ( 2.2.13 ) ist nur abhängig von den Variablen r und z und der Nummer n des Fourierreihengliedes. Man nennt ( 2.2.13 ) daher auch modale Wellengleichung.

Nach Sezawa /61/ erhält man die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems über den modalen Produktansatz

$$\{v\} = \sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\nu}^{(1)} \begin{bmatrix} (1) \\ H_{\nu} \end{bmatrix} + \alpha_{\nu}^{(2)} \begin{bmatrix} (2) \\ H_{\nu} \end{bmatrix}) \{x_{\nu}\} \quad (2.2.16)$$

Die Matrizen  $[H_{\nu}^{(1)}]$  und  $[H_{\nu}^{(2)}]$  sind abhängig von der Variablen r . Sie erfüllen das Differentialgleichungssystem identisch. Der Vektor  $\{x_{\nu}\}$  beschreibt als Funktion von z den Verlauf der Verschiebungen in vertikaler Richtung.  $[H_{\nu}^{(1)}]$ ,  $[H_{\nu}^{(2)}]$  und  $\{x_{\nu}\}$  hängen außerdem von dem noch freien Parameter  $k_{\nu}$  ab, der als Wellenzahl bezeichnet wird. Ähnlich dem bekannten Verfahren der modalen Analyse werden die Verformungen entwickelt als Linearkombinationen der  $\mu$  orthogonalen Eigenformen. An die Stelle der Eigenfrequenz tritt die Wellenzahl  $k_{\nu}$  . Die Beteiligungsfaktoren  $\alpha_{\nu}^{(1)}$  und  $\alpha_{\nu}^{(2)}$  sind zunächst unbestimmt. Sie werden durch die Randbedingungen festgelegt.

Gleichung ( 2.2.16 ) soll nun näher untersucht werden. Nach Kausel

/23/ haben die Matrizen  $[H_{\nu}^{(1)}]$  und  $[H_{\nu}^{(2)}]$  die Struktur

$$[H_{\nu}] = \left[ \begin{array}{cc|c} H'_{\nu} & 0 & \frac{n}{r} H_{\nu} \\ 0 & k_{\nu} H_{\nu} & 0 \\ \frac{n}{r} H_{\nu} & 0 & H'_{\nu} \end{array} \right] \quad (2.2.17)$$

mit  $H'_{\nu} = \frac{d}{dr} H_{\nu}$

Es wird sich bei späteren Rechenschritten als zweckmäßig erweisen, die Matrix  $[H_{\nu}]$  in Untermatrizen aufzuteilen.

$$[H_{\nu}] = \left[ \begin{array}{c|c} [H_{R,\nu}] & [H_{L,\nu}] \end{array} \right] \quad (2.2.18)$$

Der Index R steht für Rayleigh-Wellen, der Index L für Love-Wellen. Der Hintergrund dazu wird später erläutert werden. Für  $H_{\nu}$  in (2.2.17) ist entweder  $H_n^{(1)}(k_{\nu}r)$  oder  $H_n^{(2)}(k_{\nu}r)$  einzusetzen, nämlich die Hankelfunktionen der ersten bzw. der zweiten Art und der Ordnung n. Beide sind Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} y(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} y(r) + (k_{\nu}^2 - (\frac{n}{r})^2) y(r) = 0 \quad (2.2.19)$$

Der Index n kennzeichnet die Abhängigkeit der Hankelfunktion von der Nummer des Fourierreihengliedes. Wie bei den anderen Größen wird n zur Vereinfachung der Darstellung weggelassen. In Verbindung mit dem Faktor  $e^{i\Omega t}$  stellen die Hankelfunktionen Wellen dar, die sich bei  $H_n^{(1)}(k_{\nu}r)$  entgegengesetzt zur positiven r - Richtung und bei  $H_n^{(2)}(k_{\nu}r)$  in positiver r - Richtung fortbewegen. Die numerische Auswertung der Hankel- und der später verwendeten Besselfunktionen wird im Anhang B erläutert.

Um die Darstellung zu vereinfachen, werden beide Arten der Hankelfunktionen zu einem Ausdruck zusammengefaßt. Statt Gleichung

( 2.2.16 ) wird verkürzt geschrieben

$$\{v\} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} [H_{\nu}] \{x_{\nu}\} \quad ( 2.2.20 )$$

Die analytische Form des Vektors  $x$  gibt Sezawa an als

$$\{x_{\nu}\} = \begin{bmatrix} x_{x,\nu}(z) e^{i\Omega t} \\ x_{z,\nu}(z) e^{i\Omega t} \\ x_{y,\nu}(z) e^{-i\Omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_{R,\nu}(z)\} e^{i\Omega t} \\ x_{L,\nu}(z) e^{-i\Omega t} \end{bmatrix} \quad ( 2.2.21 )$$

mit

$$x_{x,\nu}(z) = k_{\nu} (A_1 e^{-l_{\nu} z} + A_2 e^{l_{\nu} z}) - m_{\nu} (C_1 e^{-m_{\nu} z} - C_2 e^{m_{\nu} z}) \quad ( 2.2.22a )$$

$$x_{z,\nu}(z) = -l_{\nu} (A_1 e^{-l_{\nu} z} - A_2 e^{l_{\nu} z}) + k_{\nu} (C_1 e^{-m_{\nu} z} + C_2 e^{m_{\nu} z}) \quad ( 2.2.22b )$$

$$x_{y,\nu}(z) = B_1 e^{-m_{\nu} z} + B_2 e^{m_{\nu} z} \quad ( 2.2.22c )$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  und  $C_2$  sind Integrationskonstanten, und mit

$$l_{\nu} = \sqrt{k_{\nu}^2 - \frac{\Omega^2}{v_p^2}} \quad ( 2.2.23a )$$

$$m_{\nu} = \sqrt{k_{\nu}^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}} \quad ( 2.2.23b )$$

$v_p$  ist die Kompressionswellengeschwindigkeit,  $v_s$  die Scherwellengeschwindigkeit im Halbraum.

Der Produktansatz nach ( 2.2.20 ) enthält eine Transformation der rotationsperiodischen Verformungen auf eine von  $n$  abhängige Hauptachsenform. Die Indizes  $x, z,$  und  $y$  in Gleichung ( 2.2.22 ) korrespondieren mit radialen, vertikalen und tangentialen Richtungen bezüglich derartiger Hauptachsen. Im Fall  $n = 0$  fallen die Hauptachsen mit dem Koordinatensystem nach Bild 2.2 zusammen.

Der Faktor  $e^{i\Omega t}$  in Gleichung ( 2.2.21 ) wird fortan weggelassen,



erkennt, ist die dritte dieser Gleichungen unabhängig von den beiden ersten. Das Differentialgleichungssystem zerfällt damit in eines für radiale und vertikale und in eines für tangentielle Verformungen bezüglich der Hauptachsen. Es sind die Differentialgleichungen der rotationsperiodischen Rayleigh- und Love-Wellen. Beide Wellenarten propagieren horizontal. Die Bodenteilchen vollziehen beim Durchgang einer Rayleigh-Welle eine elliptische Bewegung in der x-z-Ebene. Die Love-Welle verursacht tangentielle Bewegungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Bild 2.3 zeigt beide Wellenarten im ebenen Fall.

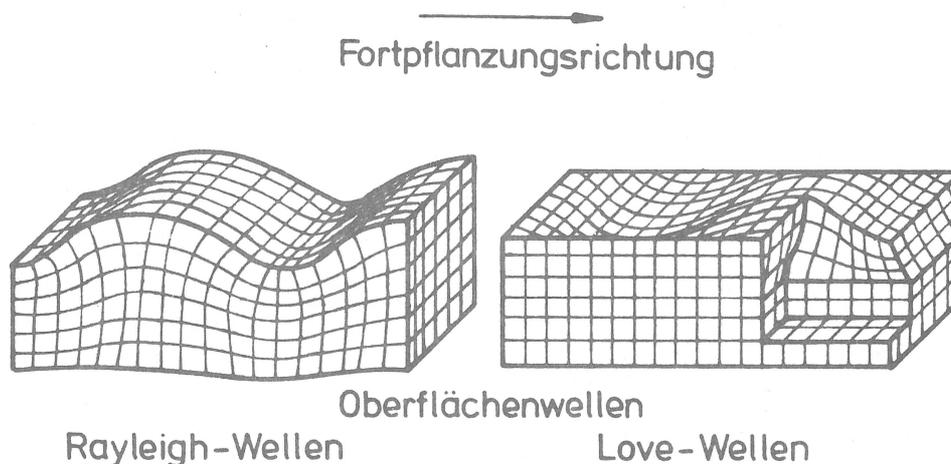


Bild 2.3 : Rayleigh- und Love-Wellen in anschaulicher Darstellung

nach / 20 /

Der Vektor  $\{x_v\}$  enthält beim viskoelastischen Kontinuum mit einer Linearkombination von Exponentialfunktionen einen analytischen Ansatz für die vertikale Wellenfortpflanzung. Beim geschichteten Boden wird dieser Ansatz durch eine Näherung ersetzt.

## 2.3 Rotationsperiodische Wellenausbreitung im geschichteten, viskoelastischen Medium

### 2.3.1 Diskretisierung in vertikaler Richtung

Bei inhomogenen, in der vertikalen Richtung geschichteten Böden ist eine geschlossene Lösung der Differentialgleichungen (2.2.13) nicht möglich. Es wird daher eine Näherungslösung im Sinne der Finite-Element-Methode (FEM) verwendet.

Ausgehend von der natürlichen Schichtung wird der Boden in eine Anzahl von Unterschichten aufgeteilt. Diese Unterschichten sind keine finiten Elemente im strengen Sinne, da sie in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnt und lediglich in der Vertikalen begrenzt, also finit sind. ( Waas /74/ verwendet die Bezeichnung "semifinite Elemente" ). Da jedoch die Theorie der FEM uneingeschränkt anwendbar ist, kann die gebräuchliche Terminologie übernommen werden.

Die Änderung des Verschiebungsfeldes innerhalb einer Schicht in vertikaler Richtung wird durch die diskreten Verschiebungen an den Schichtgrenzen dargestellt. Die Funktion selbst soll sich linear über die Schichtdicke verändern. Die Verschiebungen benachbarter Schichten sind an den Grenzflächen gleich.

Das gesamte Schichtenmodell ruht auf dem starren Halbraum und hat oben eine spannungsfreie Oberfläche. Bild 2.4 zeigt ein solches Modell.

Grundsätzlich gelte die folgende Vereinbarung : Auf das einzelne Element ( i.e. Unterschicht )  $j$  bezogene Vektoren und Matrizen werden mit dem Index  $j$  gekennzeichnet.  $\{v_j\}$  sind zum Beispiel die Verformungen des  $j$ -ten Elementes. Die Matrix  $[\psi_v]$  nach Gleichung ( 2.2.25 ) für das  $j$ -te Element ist daher  $[\psi_{j,v}]$ .

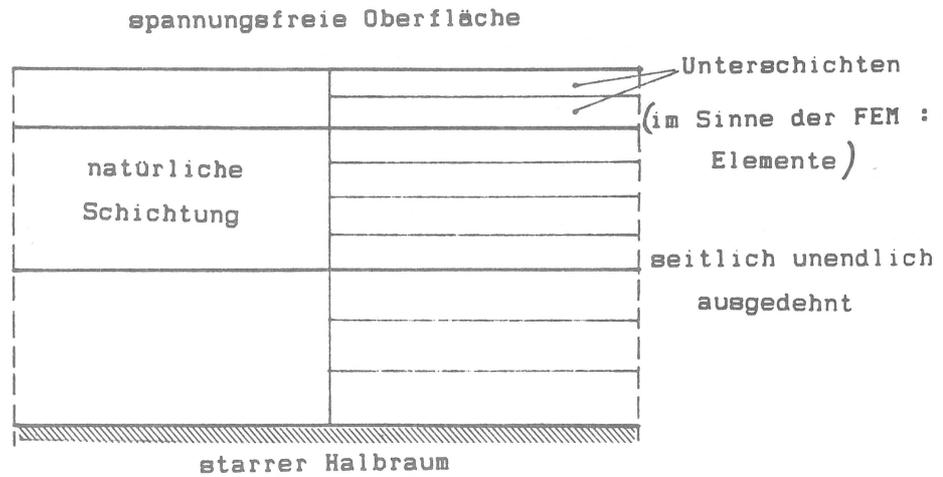


Bild 2.4 : Schichtenmodell des Bodens

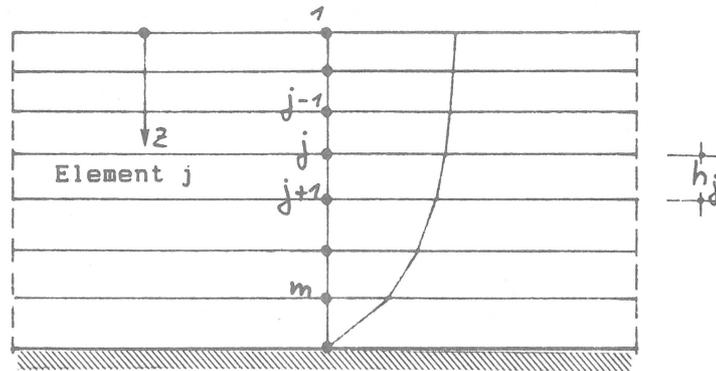


Bild 2.5 : Diskretisierung in vertikaler Richtung

Bei linearem Ansatz nach Bild 2.5 kann die Verschiebung des j-ten Elementes geschrieben werden als

$$\{v_j(z)\} = [N_j]\{V_j\} \quad ( 2.3.1 )$$

mit

$$[N_j] = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} z_{j+1} - z & z - z_j & & & \\ & z_{j+1} - z & z - z_j & & \\ & & z_{j+1} - z & z - z_j & \\ & & & z_{j+1} - z & z - z_j \end{bmatrix}$$

oder

$$[N_j] = \left[ \begin{array}{c|c} [N_{R,j}] & [N_{L,j}] \end{array} \right]$$

und den diskreten Verschiebungen an den oberen und unteren Schichtgrenzen

$$\{v_j\} = \begin{bmatrix} \{v_{x,j}\} \\ \{v_{z,j}\} \\ \{v_{y,j}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{v_{x,j}^o\} \\ \{v_{x,j}^u\} \\ \{v_{z,j}^o\} \\ \{v_{z,j}^u\} \\ \{v_{y,j}^o\} \\ \{v_{y,j}^u\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{v_{R,j}\} \\ \{v_{L,j}\} \end{bmatrix}$$

Der Zusammenhang zwischen Element  $j$  und dem gesamten Schichtenmodell mit  $m$  Elementen kann formal ausgedrückt werden mit

$$\{v\} = \sum_{j=1}^m \{v_j\} \quad (2.3.2a)$$

oder

$$[\psi_u] = \sum_{j=1}^m [\psi_{j,u}] \quad (2.3.2b)$$

wenn man dabei voraussetzt, daß  $\{v_j\}$  in den Zeilen,  $[\psi_{j,u}]$  in den Zeilen und Spalten 1 bis  $3(j-1)$  und  $3(j+1)$  bis  $3m$  mit Nullen aufgefüllt wird. Die Summation in Gleichung (2.3.2) bewirkt dann eine Überlagerung gemeinsamer Matrizenelemente benachbarter Schichten. Bild 2.6 zeigt diese Überlagerung im Schema.

Der Vektor  $[x_u]$  aus Gleichung (2.2.20) geht für das  $j$ -te Element über in

$$\{x_{j,u}\} = [N_j] \{x_{j,u}\} \quad (2.3.3)$$

$\{x_{j,u}\}$  enthält die diskreten modalen Verschiebungen an den Schicht-

grenzen.

$$\{x_{j,0}\} = \begin{bmatrix} \{x_{x,j,0}\} \\ \{x_{z,j,0}\} \\ \{x_{y,j,0}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_{x,j,0}^{\sigma}\} \\ \{x_{x,j,0}^{\mu}\} \\ \{x_{z,j,0}^{\sigma}\} \\ \{x_{z,j,0}^{\mu}\} \\ \{x_{y,j,0}^{\sigma}\} \\ \{x_{y,j,0}^{\mu}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_{R,j,0}\} \\ \{x_{L,j,0}\} \end{bmatrix}$$

Gleichung ( 2.3.3 ) eingesetzt in Gleichung ( 2.2.20 ) und wiederum angewendet auf die j-te Schicht führt auf

$$\{v_j\} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\nu} [H_{\nu}] [N_j] \{x_{j,0}\} \quad ( 2.3.5 )$$

und aus Gleichung ( 2.2.24 ) wird

$$\{w_j\} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\nu} [H_{\nu}] [\psi_{j,\nu}] [N_j] \{x_{j,0}\} \quad ( 2.3.6 )$$

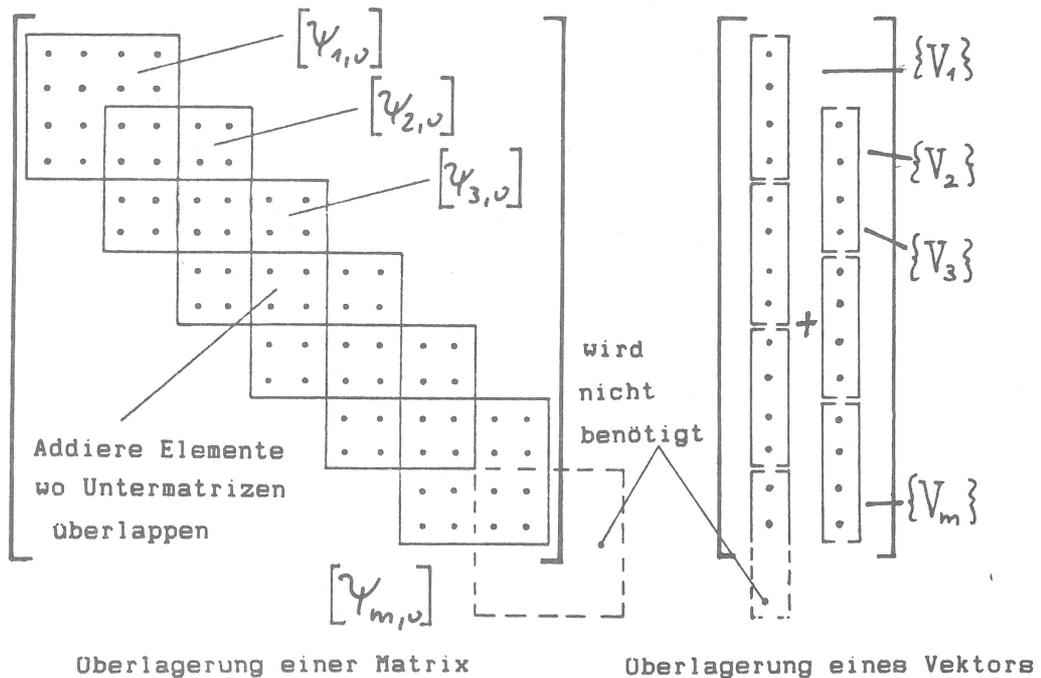


Bild 2.6 : Überlagerungsschema

### 2.3.2 Prinzip der virtuellen Arbeiten

Wählt man ein Verfahren im Sinne der Finite-Element-Methode, d.h. Diskretisierung eines Bereichs in Teilbereiche und Näherungsansätze für die Verformungen in den Teilbereichen, dann ist es zweckmäßig, ein Variationsprinzip anzuwenden. Die Ansatzfunktionen stellen dann die beste Näherung im Sinne der Variationsrechnung für die Lösung der Differentialgleichung dar, wenn sie das Prinzip der virtuellen Arbeiten erfüllen.

Die Differentialgleichungen ( 2.2.13 ) formulieren eine Gleichgewichtsbedingung. Eine alternative Form dieser Bedingung ist das Prinzip der virtuellen Verformungen. Durch eine Umformung mit dem Gauß'schen Integralsatz kommt man zu einer gleichwertigen Aussage, nämlich zum Prinzip der virtuellen Arbeiten. In der allgemeinen Form des dynamischen Falles ist es als Hamiltons Prinzip bekannt.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V \delta \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dV + \int_V \delta \{ u \}^T \rho \{ \ddot{u} \} dV - \int_{O_p} \delta \{ u \}^T \{ p \} dO_p \right) dt = 0 \quad ( 2.3.7 )$$

Darin bedeuten

- $\{ \sigma \}$  : Spannungen
- $\rho \{ \ddot{u} \}$  : Massenkräfte
- $\{ p \}$  : äußere Kräfte
- $\delta \{ \epsilon \}$  : virtuelle Verzerrungen
- $\delta \{ u \}$  : virtuelle Verformungen

Die Integration über V erstreckt sich über das Körpervolumen, unter  $O_p$  seien die Teile der Körperoberfläche verstanden, auf denen keine Verformungen eingepreßt werden. Die virtuellen Verformungen und Verzerrungen werden als klein aufgefaßt.  $\delta \{ u \}$  muß außerdem die Verträglichkeitsbedingungen und die Randbedingungen erfüllen und zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  zu Null werden. Der Term  $\delta \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \}$  beinhaltet

nicht nur die Änderung der elastischen Energie, sondern auch die Verlustenergie infolge innerer Dämpfung.

Wird über die Zeit integriert und werden komplexe Variablen eingeführt, erhält man die Variationsaussage für die harmonische Bewegung in der stationären Form

$$\int_V \delta \{ \epsilon \}^* \{ \sigma \} dV - \rho \Omega^2 \int_V \delta \{ v \}^* \{ v \} dV - \int_{O_p} \delta \{ v \}^* \{ p \} dO_p = 0 \quad ( 2.3.8 )$$

( der Index ( \* ) bezeichnet eine konjugiert transponierte komplexe Größe )

Man drückt nun in Gleichung ( 2.3.8 ) die virtuellen Dehnungen durch die virtuellen Verformungen aus und wendet den Gauß'schen Integralsatz an. Auf rotationsperiodische Systeme angewendet kann das Prinzip auch in einer Fourierreihe entwickelt werden. Aufgrund der Orthogonalitätsbedingungen gilt es für jedes einzelne Reihenglied n. Setzt man die Reihenentwicklung der Kraft- und Weggrößen in den Integralen ein, kann die Integration der Transformationsmatrizen  $[\phi]$  und  $[\bar{\phi}]$  abgespalten werden. Es verbleibt für den symmetrischen und antimetrischen Anteil der Term

$$\int_r \int_z \delta \{ v \}^* ( [\bar{\sigma}] \{ \sigma \} + \rho \Omega^2 \{ v \} ) r dr dz + \int_S \delta \{ v \}^* ( - [\bar{\sigma}] \{ n_s \} + \{ p_s \} ) r dS = 0 \quad ( 2.3.9 )$$

mit

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{rz} \\ \tau_{rz} & \sigma_{zz} \\ \tau_{r\varphi} & \tau_{\varphi z} \end{bmatrix} \quad ( 2.3.10 )$$

Der Klammerausdruck im ersten Integral der Gleichung ( 2.3.9 ) ist

die Gleichgewichtsbedingung des Körpervolumens. Das zweite Integral enthält die Kräfte- und Randbedingungen auf dem Teil der Körperoberfläche, an dem keine Verformungen eingeprägt werden. Die Oberfläche wird durch Schnitte  $S$  definiert, mit denen der betrachtete Körper aus seiner Umgebung herausgelöst wird. Zulässig sind horizontale Schnitte, außerdem als Folge der Fourierreihenentwicklung solche Schnitte, die ihrerseits in einer Reihe entwickelt werden können. Das sind rotationsperiodische, im einfachsten Fall zylindrische Schnitte um die  $z$ -Achse.  $\{n_s\}$  ist ein Einheitsvektor, der normal auf einer Schnittfläche  $S$  steht.

$$\{n_s\} = \begin{bmatrix} \{n_{r,s}\} \\ \{n_{z,s}\} \end{bmatrix} \quad ( 2.3.11 )$$

In Gleichung ( 2.3.9 ) sind die virtuellen Verformungen wie die tatsächlichen in einer Fourierreihe entwickelt.

Setzt man nun im ersten Integral der Gleichung ( 2.3.9 ) anstelle der Spannungen die Dehnungen ein und drückt diese mit Gleichung ( 2.2.7 ) durch die Verschiebungen aus, so erhält man

$$\int_{r,z} \delta \{v\}^* ( [\bar{\sigma}] [D] [\bar{\epsilon}] \{v\} + g \Omega^2 \{v\} ) r dr dz + \int_S \delta \{v\}^* ( -[\bar{\sigma}] \{n_s\} + \{p_s\} ) dS = 0 \quad ( 2.3.12 )$$

oder mit Gleichung ( 2.2.13 )

$$\int_{r,z} \delta \{v\}^* \{w\} r dr dz + \int_S \delta \{v\}^* ( -[\bar{\sigma}] \{n_s\} + \{p_s\} ) dS = 0 \quad ( 2.3.13 )$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen soll nun angewendet werden

auf das Schichtenmodell des Bodens, um die Lösungen der Bewegungsgleichungen zu bestimmen. Berücksichtigt man die Randbedingungen an den Schichtgrenzen, so erhält man für jede Anregungsfrequenz  $\Omega$  ein vollständiges Verschiebungsfeld in Abhängigkeit von den Funktionswerten an den Schichtgrenzen sowie von den noch freien Wellenzahlen  $K_{\nu}$ . Die Lösung eines solchen Eigenwertproblems liefert die Wellenzahlen nebst zugehörigen Eigenformen.

Würde man die exakte Lösung der Wellengleichung nach ( 2.2.21 ) als Ansatzfunktion verwenden, so hätte man ein transzendentes Eigenwertproblem zu lösen. Das ist im allgemeinen nur mit sehr hohem Aufwand möglich.

Ein Ansatz in der Näherung nach Gleichung ( 2.3.1 ) führt dagegen zu einem algebraischen Eigenwertproblem, das mit vorhandenen Algorithmen schnell numerisch gelöst werden kann.

### 2.3.3 Rayleigh- und Love-Wellen im rotationsperiodischen, geschichteten Medium

Setzt man für jede der  $m$  Schichten Gleichung ( 2.3.1 ) in Gleichung ( 2.3.13 ) ein, so erhält man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für das gesamte Schichtenmodell. Die Randbedingungen werden für einen Torus formuliert, den man sich aus dem Schichtenmodell herausgeschnitten denkt. Setzt man sie in das Prinzip ein, dann erhält man nach einigen Umformungen und nach Integration die beiden Eigenwertprobleme der Rayleigh- und der Love-Welle mit den Dimensionen  $2m \times 2m$  bzw.  $m \times m$ . Die ausführliche Herleitung ist im Anhang C enthalten.

Bei vorgegebener Erregungsfrequenz  $\Omega$  handelt es sich um quadratische Eigenwertprobleme bezüglich der Wellenzahl  $k_{\nu}$ . Sie sind unabhängig von der Ordnung des Fourierreihengliedes und für den

symmetrischen und antimetrischen Anteil gleich.

Die Lösung der Eigenwertprobleme führt auf 4 m bzw. 2 m komplexe Wellenzahlen  $k_{\nu}$  mit zugehörigen komplexen Eigenformen  $\{X_{\nu}\}$ .

Nach Waas /73/ braucht nur die Hälfte der Wellenzahlen errechnet zu werden, weil es zu jeder Lösung  $k_{\nu}$  und  $\{X_{\nu}\}$  eine weitere linear unabhängige Lösung  $-k_{\nu}$  und  $\{\bar{X}_{\nu}\}$  gibt. Im gedämpften Fall stellen die korrespondierenden Lösungen Wellen dar, die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehen und die in den Ursprung laufen. Bei den Lovewellen haben beide Lösungen die gleiche Eigenform,  $\{X_{\nu}\} = \{\bar{X}_{\nu}\}$ , bei den Rayleighwellen unterscheiden sich die Eigenformen in den Richtungen ihrer Komponenten.

Bei Waas /73/ ist eine umfassende Diskussion der Eigenschaften der Lösungen zu finden. Er wählt aus allen Lösungen die 2 m Lösungen für die Rayleigh-Welle und die m Lösungen für die Love-Welle nach folgenden Kriterien aus

- wenn  $k_{\nu}$  komplex : Wellenzahlen mit negativem Imaginärteil
- wenn  $k_{\nu}$  reell : positive Wellenzahlen.

Grundlage dieses Kriteriums ist es, daß sich die Wellen vom Ursprung entfernen müssen und daß die Amplitude mit wachsendem Abstand abnehmen muß. Das quadratische Eigenwertproblem wird gelöst, indem es unter Verdoppelung der Dimension auf ein lineares Eigenwertproblem reduziert wird. Das Verfahren zur Lösung der Eigenwertprobleme ist in Anhang D erläutert.

### 3. **D y n a m i s c h e   B o d e n k e n n w e r t e**

Eine zuverlässige Berechnung von Problemen der Bodendynamik hängt entscheidend vom Ansatz der Bodenkennwerte ab. In den letzten Jahren sind in zahlreichen Forschungsarbeiten Verfahren zur Bestimmung von Kennwerten entwickelt und abgesichert worden, mit denen das dynamische Verhalten des Bodens hinreichend genau beschrieben werden kann. (s.a. Richard, Hall und Woods /55/, Seed und Idriss /60/, Prakash und Puri /53/)

#### 3.1 **Experimentelle Bestimmung der Bodenkennwerte**

Die Kennwerte werden experimentell im Labor oder im Feld gemessen. Die wichtigsten dynamischen Kennwerte sind :

- Scherfestigkeit, Spannungs-Dehnungs-Diagramme
- Bodenverflüssigungsparameter (Schubspannung, Verformung und Porenwasserdruck unter zyklischer Belastung)
- Scherwellengeschwindigkeit, elastische Moduli (E-Modul, Steifemodul, Schubmodul)
- Dämpfungsmaß
- Poissonzahl

##### 3.1.1 **Tests im Labor**

###### a) Direkte Bestimmung der Spannung-Dehnung-Beziehung

Diagramme wie das in Bild 3.1 dargestellte werden durch Triaxial-, Abscher- und Torsionsversuche mit zyklischen Lasten gewonnen. Die Dehnungsamplituden bewegen sich zwischen  $10^{-2}$  und 5 % .

###### b) Test mit erzwungener Schwingung

Zylindrischen Bodenproben werden zyklische Längs- und Torsionsverformungen eingeprägt. Die Dehnungsamplituden liegen im Bereich von  $10^{-4}$  bis  $10^{-2}$  % .

c) Test mit freier Schwingung

Die Bodenprobe wird in Längsrichtung oder tordierend angeregt.

Das Dämpfungsmaß charakterisiert das Ausschwingverhalten.

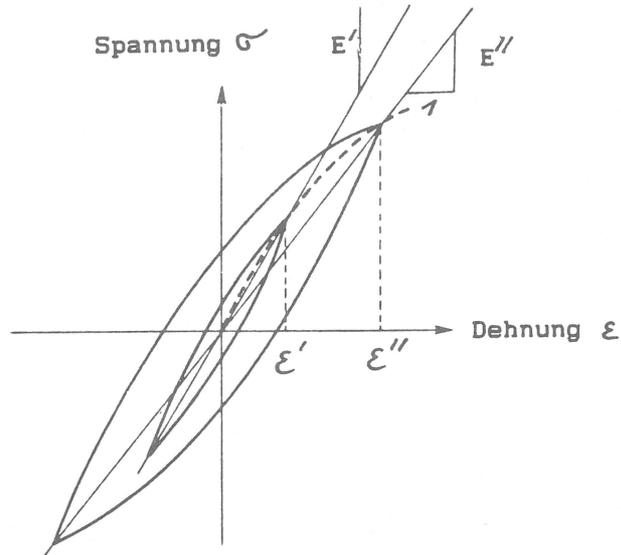


Bild 3.1 : Spannung-Dehnungs-Diagramm

3.1.2 **Tests im Feld**

Es werden die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Kompressionswellen, Scher- und Rayleigh-Wellen gemessen. Aus den Geschwindigkeiten werden die elastischen Moduli bei kleinen Dehnungen (ca.  $5 \cdot 10^{-4} \%$ ) errechnet.

Die Moduli können auch über zyklische Lastplattenversuche und Standard Penetration Tests abgeschätzt werden.

### 3.2 Darstellung von Steifigkeit und Dämpfung des Bodens durch komplexen Modul

Der Boden (hier : eine Bodenschicht) wird als homogenes, isotropes und viskoelastisches Material idealisiert. Die Spannung-Dehnungs-Beziehung des Materials unter harmonischer Belastung mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  beschreibt die Gleichung

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon} \quad ( 3.2.1 )$$

mit dem komplexen Elastizitätsmodul

$$\underline{E} = E ( 1 + 2 i \xi ) \quad ( 3.2.2 )$$

Der Realteil entspricht dem physikalischen Elastizitätsmodul und ist proportional zur gespeicherten Energie. Der Imaginärteil ist ein Maß für die durch hysteretische Dämpfung dissipierte Energie.

Das hysteretische Dämpfungsmaß  $\xi$  wird festgelegt durch

$$\xi = \frac{1}{2} \tan \varphi = \frac{1}{2} \frac{\text{Im}(\underline{E})}{\text{Re}(\underline{E})} \quad ( 3.2.3 )$$

$\varphi$  ist der Winkel zwischen Spannungs- und Dehnungsvektor in der komplexen Ebene. Aufgrund der Materialdämpfung folgen die Dehnungen den harmonischen Spannungen mit der zeitlichen Verzögerung von  $\frac{\varphi}{\Omega}$ .

Zum Zeitpunkt  $t$  haben Spannung und Dehnung die Größen

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \quad ( 3.2.4 )$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \cos(\Omega t) \quad ( 3.2.5 )$$

Die Gleichungen können umgeformt werden zu

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0}\right)^2} \cdot \sin \varphi \quad ( 3.2.6 )$$

oder

$$\sigma = \varepsilon \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \sin \varphi \quad ( 3.2.7 )$$

Gleichung ( 3.2.7 ) beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung in Form einer elliptischen Hystereseschleife. Sie ist geeignet, das tatsächliche Werkstoffverhalten (s.a. Bild 3.1) näherungsweise darzustellen. Bild 3.2 zeigt die charakteristischen Größen der Ellipse.

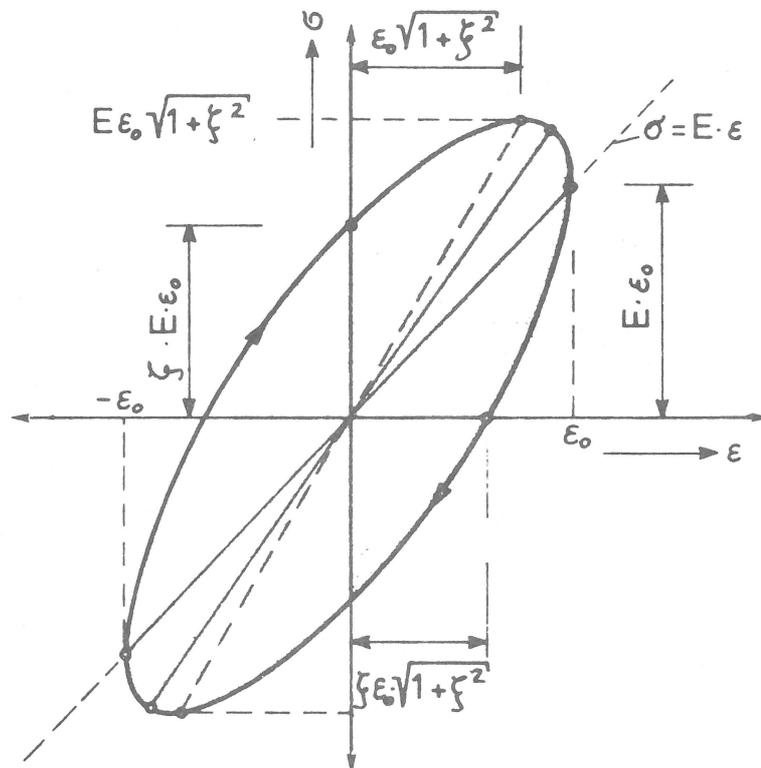


Bild 3.2 : Elliptische Hystereseschleife ( nach /18/ )

Mit den Maximalwerten der Hystereseschleife kann ein Sekantenmodul definiert werden. Die Fläche innerhalb der Schleife wird durch das Dämpfungsmaß beschrieben. Beide Parameter sind abhängig von der absoluten Größe der Dehnung. Lediglich bei kleinen Dehnungen kann das Bodenverhalten als näherungsweise linear angesehen werden. Bei dem

in dieser Arbeit untersuchten Problem wird unterstellt, daß Modul und Dämpfung nicht von der Dehnungsamplitude abhängig sind. Das trifft bei vielen dynamischen Lastfällen zu, da die Dehnungen meist klein sind. Kann die Abhängigkeit nicht vernachlässigt werden, so sind der Modul ( hier: Sekantenmodul ) und das Dämpfungsmaß in einer iterativen Rechnung zu approximieren.

Oft werden die Bodenkennwerte in Gestalt der Lamé'schen Konstanten  $G$  und  $\lambda$  ausgedrückt. Aus der Elastizitätstheorie erhält man die Beziehungen

$$E = 2 ( 1 + \nu ) G \quad ( 3.2.8 )$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \nu \cdot G}{1 - 2 \nu} \quad ( 3.2.9 )$$

Der komplexe Schubmodul hat die Form

$$\underline{G} = G ( 1 + 2 i \xi ) \quad ( 3.2.10 )$$

mit  $\xi$  als dem hysteretischen Dämpfungsmaß für Schubverformungen.

### 3.3 Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen im Boden

Wichtige Kennwerte in der Bodendynamik sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Scherwellen ( S-Wellen ) und Kompressionswellen ( P-Wellen ).

$$v_s = \left( \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\rho}{\underline{G}}} \right) \right)^{-1} \quad ( 3.3.1 )$$

$$v_p = \left( \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\rho}{\underline{\lambda} + 2\underline{G}}} \right) \right)^{-1} \quad ( 3.3.2 )$$

mit  $\rho$  als der Massendichte des Bodens.

Bei kleiner Dämpfung vereinfachen sich die Formeln :

$$v_s = \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{G}{\rho}} \right) = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad ( 3.3.3 )$$

$$v_p = \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \right) = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}} \quad ( 3.3.4 )$$

mit  $G = \operatorname{Re} ( \underline{G} )$  ,

$\lambda = \operatorname{Re} ( \underline{\lambda} )$  .

$v_s$  und  $v_p$  sind im allgemeinen frequenzabhängig, können aber bei kleiner Dämpfung als konstant betrachtet werden.

#### 4. Berechnungsverfahren für Pfahlgründungen

In Kapitel 4.1 wird das idealisierte Modell einer Pfahlgründung beschrieben. In Kapitel 4.2 wird die Flexibilitätsmatrix des Bodens, in Kapitel 4.3 die Steifigkeits- und Massenmatrix des Pfahles hergeleitet. Es gibt zwei Möglichkeiten, Boden und Pfähle zum Gesamtsystem zu verknüpfen.

- Überlagerung der Steifigkeitsmatrizen und Berechnung der Verformungen an den Verknüpfungspunkten von Pfählen und Boden ( Koppelpunkten )
- Überlagerung der Flexibilitätsmatrizen und Berechnung der Kräfte zwischen Pfählen und Boden ( Koppelkräfte ).

Die erste Vorgehensweise entspricht der des Weggrößenverfahrens, die zweite der des Kraftgrößenverfahrens. Die Inversion der vollen Flexibilitätsmatrix des Bodens erfordert bei größeren Systemen einen großen Aufwand an Rechenzeit. Die Inversion der Steifigkeitsmatrizen der Pfähle, die beim Kraftgrößenverfahren erforderlich ist, kann dagegen einzeln vorgenommen werden. In Kapitel 4.4 wird dieses Verfahren angewendet. Man muß allerdings zunächst voraussetzen, daß sich die Pfähle am Pfahlkopf unabhängig voneinander verformen können. Da sie aber im allgemeinen über eine Kopfplatte miteinander verbunden sind, muß diese Kopplung nachträglich berücksichtigt werden. Die Vorgehensweise ist in Kapitel 4.5 beschrieben. Man erkennt, daß der Minderaufwand an Rechenzeit durch eine kompliziertere Formulierung des Problems erkaufte wird.

Bis hierher ist das auf den Pfählen stehende Gebäude noch nicht im Modell berücksichtigt. Es ist vielfach möglich, Gebäudestrukturen auf Einmassenschwinger zurückzuführen. Für diesen Fall wird das

Gesamtproblem gelöst, indem die Masse gleich auf die Masse der Pfahlkopfplatte addiert wird ( s.a. Kapitel 4.5 ). Kann das Eigenschwingverhalten der Gebäudestruktur nicht vernachlässigt werden, ist eines der in Kapitel 4.6 erwähnten Verfahren zur Kopplung der Teilsysteme anzuwenden.

Die Behandlung von symmetrischen Strukturen ist in Kapitel 4.7 erläutert. Ausnutzung der Symmetriebedingungen bei rotationsperiodischen Strukturen erlaubt in bestimmten Fällen eine radikale Reduzierung der Größe des Gleichungssystems. Auch große unsymmetrische Pfahlgründungen können im allgemeinen in derartige Ersatzsysteme umgeformt werden, da das globale Schwingungsverhalten im wesentlichen von der Pfahlanzahl und dem mittleren Pfahlabstand abhängt. Am rotationsperiodischen Ersatzsystem können dann mit geringem Aufwand Parameterstudien angestellt werden.

Eine Anmerkung zur Darstellung der Formeln : Bis auf wenige Ausnahmen wird im Frequenzbereich gerechnet. Die in den Formeln genannten Größen sind also als komplex aufzufassen. Nur dort, wo es nötig ist, sie von reellen Größen zu unterscheiden, werden die komplexen Größen durch Unterstreichung gekennzeichnet.

#### 4.1 **Idealisierung von Bauwerk, Pfählen und Boden**

Der erste Schritt bei der Berechnung von physikalischen Phänomenen ist die Wahl eines geeigneten idealisierten Rechenmodells. Insbesondere bei dem vorliegenden Problem der Pfahlgründung sind umfassende Vereinfachungen notwendig, um die sehr komplexe Struktur abbilden zu können. Bild 4.1 zeigt einige Einflußparameter für das Schwingungsverhalten der Gründung. Bei der Berechnung können nur die wichtigsten von ihnen berücksichtigt werden. Das Bauwerk auf der Pfahlkopfplatte wird in herkömmlicher Weise modelliert. In der

vorliegenden Arbeit wird der Einfachheit halber eine Einzelmasse gewählt. Das entspricht einer Betrachtung von starren Gebäuden. Die Pfähle werden durch linear-elastische Stäbe mit Biege- und Schubverformungen dargestellt. Der Boden wird zu einem visko-elastischen, horizontal unendlich ausgedehnten Schichtenmodell vereinfacht. Bild 4.2 zeigt in der Gegenüberstellung die Struktur in der idealisierten Wirklichkeit und als Rechenmodell.

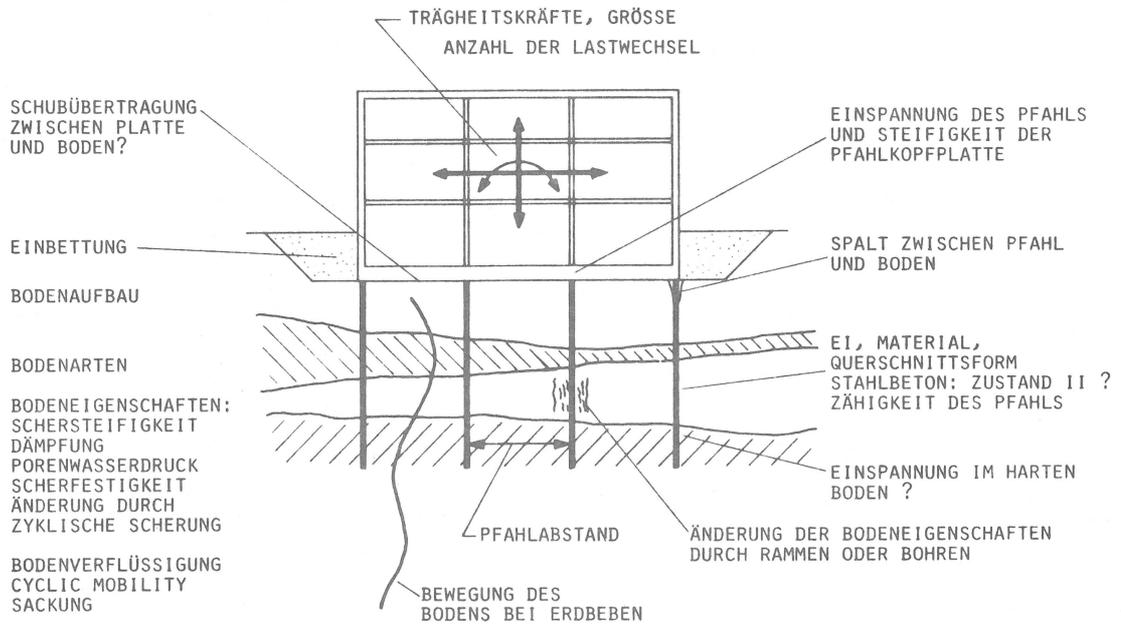


Bild 4.1 : Einflüsse auf das Verhalten einer Pfahlgründung

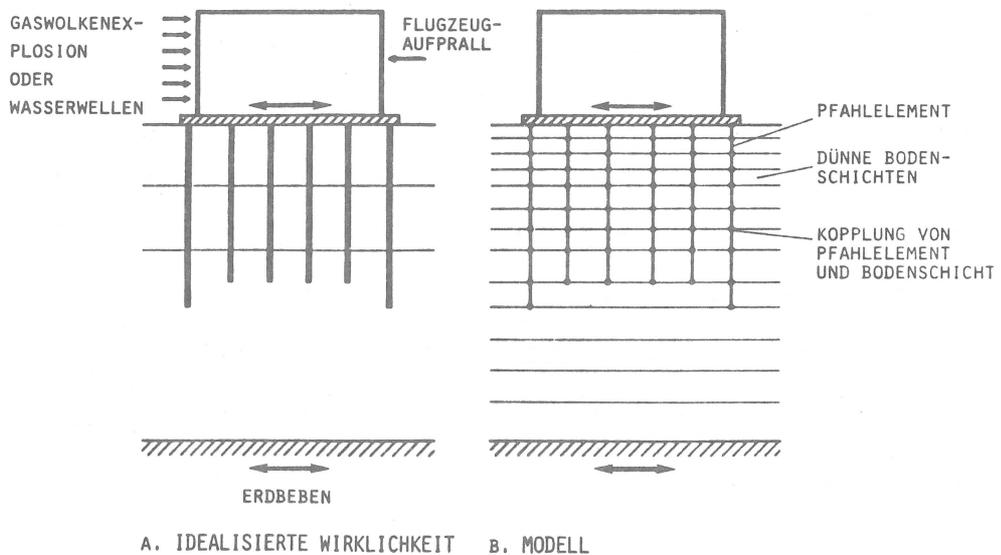


Bild 4.2 : Idealisierte Struktur und Rechenmodell

## 4.2 Boden als Teilsystem

Es wird zunächst allein der Boden ohne Pfähle betrachtet. Man definiert an den Stellen, an denen die Pfähle zu stehen kommen, eine bestimmte Anzahl von Punkten, wie es in Bild 4.2 B angedeutet ist. Die Punkte werden im folgenden als Koppelpunkte bezeichnet, da in ihnen die Verschiebungen von Boden und Pfahl kompatibel sein sollen. Setzt man an jedem Punkt eine Einzelkraft an, dann läßt sich an jedem anderen Punkt die entsprechende Verformung errechnen. Die Kraft-Verformungs-Beziehungen zwischen allen Koppelpunkten werden zweckmäßig zu einer Flexibilitätsmatrix  $[F_s]$  zusammengefaßt. Es gilt die Beziehung

$$\{V_s\} = [F_s] \cdot \{P_c\} + \{V_F\} \quad (4.2.1)$$

mit

$\{V_s\}$  : Verformungen des Bodens an den Koppelpunkten

$\{P_c\}$  : Kräfte im Boden an den Koppelpunkten

$\{V_F\}$  : seismische Freifeldverformungen an den Koppelpunkten

### 4.2.1 Flexibilitätsmatrix

In Anhang E wird beschrieben, wie innerhalb des geschichteten Bodens Verformungen infolge Ring- und Einzellasten berechnet werden. Kraft-Verformungsbeziehungen zwischen solchen Punkten, die dem gleichen Pfahl zugeordnet sind, werden über die Ringlasten hergeleitet. Wie in Bild 4.3 dargestellt, werden Radial- und Tangentialkräfte mit dem Fourierreihenglied  $n = 1$  und dem Radius des zylindrischen Pfahls angesetzt. Über den Kreisring integriert hat die Horizontalkraft den Betrag "1". Die Verschiebung des Koppelpunktes wird definiert als Mittelwert der Verschiebungen  $V_r$  bei  $\varphi = 0$  und  $V_\varphi$  bei  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Bei dieser Definition wird angenommen, daß sich die Querschnittsfläche innerhalb der Ringlast nicht ver-

formt. Die Annahme ist wegen der hohen Querschnittssteifigkeit des Pfahles plausibel.

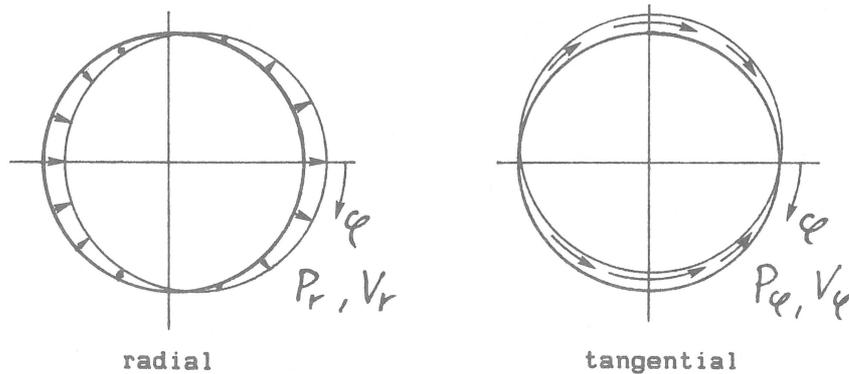


Bild 4.3 : Ringlasten und Ringverformungen am Pfahlquerschnitt für das Fourierglied  $n = 1$

An solchen Koppelpunkten, die verschiedenen Pfählen zugeordnet sind, werden die Kraft-Verformungsbeziehungen über die Einzellasten hergeleitet, um den Berechnungsaufwand zu beschränken. Das ist gerechtfertigt, da nach dem Saint Venant'schen Prinzip in einiger Entfernung vom Lasteintrag nur noch der Lastbetrag, nicht aber die Lastverteilung bedeutsam ist.

#### 4.2.2 Freifeldverformungen

Bodenverformungen  $\{V_F\}$  infolge seismischer Wellen werden Freifeldverformungen genannt, wenn keine Gebäudestruktur das Schwingungsverhalten beeinflusst. Es wird hier vereinfachend angenommen, daß die Verformungen durch vertikal propagierende Scherwellen verursacht werden. Der Anhang F zeigt Herleitung und typischen Frequenzverlauf von  $\{V_F\}$  für eine Bodenschicht auf starrem oder elastischem Untergrund.

### 4.3 Pfähle als Teilsystem

#### 4.3.1 Physikalisches Modell

Zur Modellierung der Pfähle eignen sich Stabelemente, die Biege- und Schubverformungen zulassen. Gemäß der Kirchhoff'schen Theorie bleiben die Querschnitte eben. Sie stehen jedoch nicht unbedingt senkrecht zur verformten Stabachse.

Der Werkstoff verhalte sich linear elastisch. Im dynamischen Fall wird hysteretische Dämpfung und kontinuierliche Massenbelegung angenommen. Die Verformungen werden als klein vorausgesetzt.

Als Freiheitsgrade ergeben sich pro Knoten vier unbekannte Weggrößen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen,

- die Horizontalverschiebungen in x- und in y-Richtung
- die Verdrehungen um die y- und die x-Achse.

Es wird vorausgesetzt, daß die Stabelemente in ihren Hauptachsen belastet werden. Damit sind die beiden Richtungen entkoppelt. Die zugehörigen Kraftgrößen sind Querkraft und Biegemoment in beiden Richtungen. Bild 4.4 zeigt die Richtungen der Verformungen und die Vorzeichen der Schnittkräfte an einem Pfahlelement.

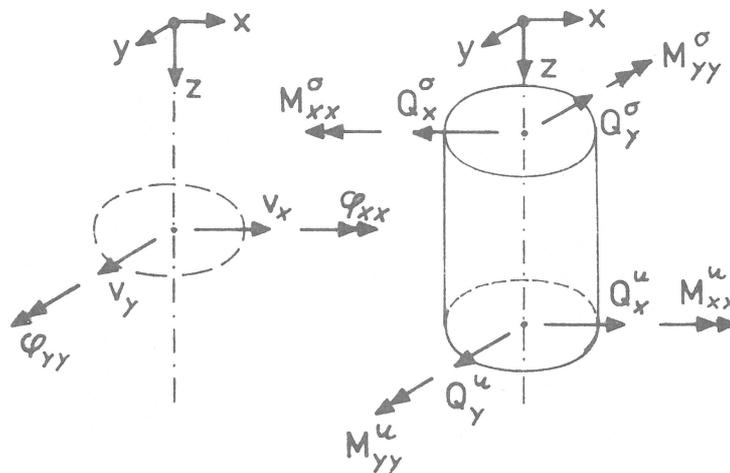


Bild 4.4 : Vorzeichenregelung am Pfahlelement

Bei der Berechnung der Flexibilitätsmatrix des Bodens in Kapitel 4.2.1 wird nicht berücksichtigt, daß an den Stellen der Pfähle im Boden Hohlräume gedacht werden müssen. Daher werden von den Steifigkeiten und Massen der Pfähle diejenigen der entsprechenden Bodensäulen abgezogen.

#### 4.3.2 Mechanisches Lösungsprinzip

Die Berechnung erfolgt nach der klassischen Vorgehensweise der Finite-Element-Methode. Die dynamische Grundgleichung für einen Pfahl ist eine Gleichgewichtsbedingung. Das Problem kann mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verformungen ausgedrückt werden. Die Extremalbedingung für die Formänderungsenergie wird mit bereichsweisen Verschiebungsansätzen formuliert. Es wird ein kubischer Ansatz für die horizontale Verformung verwendet.

#### 4.3.3 Steifigkeitsmatrix

Desai und Abel /5/ geben die Steifigkeitsmatrix des Stabelementes bei Verformungen in x-Richtung an mit

$$[K_{xx}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+\psi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\psi)} & -\frac{12EI}{L^3(1+\psi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\psi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+\psi)} & \frac{(4+\psi)EI}{L(1+\psi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\psi)} & \frac{(2-\psi)EI}{L(1+\psi)} \\ -\frac{12EI}{L^3(1+\psi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\psi)} & \frac{12EI}{L^3(1+\psi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\psi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+\psi)} & \frac{(2-\psi)EI}{L(1+\psi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\psi)} & \frac{(4+\psi)EI}{L(1+\psi)} \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

mit  $\psi = \frac{12 EI}{GA_s \cdot l^2}$

$l$  : Länge des Stabelementes

$EI$  : Biegesteifigkeit

$GA_s$  : Schubsteifigkeit

Bei Verformungen in  $y$ -Richtung ergibt sich die Matrix

$$[K_{yy}] = \begin{bmatrix} \frac{12 EI}{l^3(1+\psi)} & -\frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} & -\frac{12 EI}{l^3(1+\psi)} & -\frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} \\ -\frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} & \frac{(4+\psi)EI}{l(1+\psi)} & \frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} & \frac{(2-\psi)EI}{l(1+\psi)} \\ -\frac{12 EI}{l^3(1+\psi)} & \frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} & \frac{12 EI}{l^3(1+\psi)} & \frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} \\ -\frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} & \frac{(2-\psi)EI}{l(1+\psi)} & \frac{6 EI}{l^2(1+\psi)} & \frac{(4+\psi)EI}{l(1+\psi)} \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Setzt man für die Pfähle Materialdämpfung mit dem hysteretischen Dämpfungsmaß  $\xi$  an, so erhält man die komplexe Steifigkeitsmatrix durch

$$\underline{K} = K (1 + 2 i \xi) \quad (4.3.3)$$

#### 4.3.4 Massenmatrix

Es wird eine kontinuierlicher Massenbelegung über die Elementlänge angenommen, die Rotationsmassen werden vernachlässigt. Man erhält für Verformungen in x-Richtung die Massenmatrix

$$[M_{xx}] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

bei Verformungen in y-Richtung

$$[M_{yy}] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

mit

$\rho$  : Massendichte pro Volumeneinheit

A : Querschnittsfläche des Stabelementes

#### 4.4 Berechnung des Schwingungssystems aus Pfählen und Boden

Mit dem Kraftgrößenverfahren werden die Teilsysteme Boden und Pfähle zum Gesamtsystem verknüpft. Die zu bestimmenden Unbekannten sind die Kräfte zwischen den Teilsystemen. Sie werden hier als Koppelkräfte bezeichnet. Der Zusammenhang ist schematisch in Bild 4.5 dargestellt.

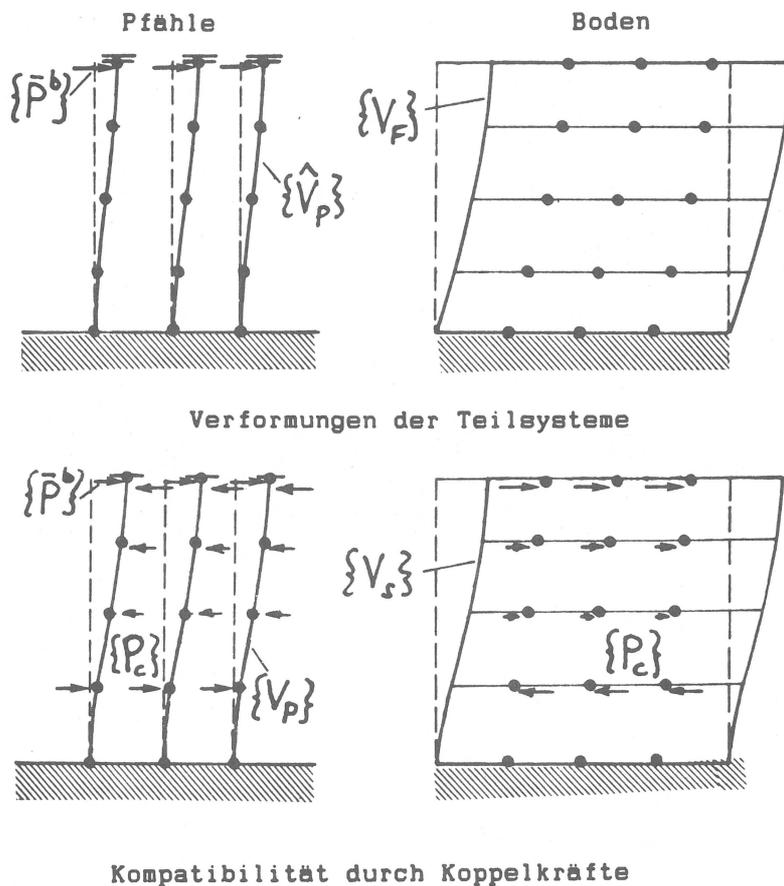


Bild 4.5 : Verknüpfung der Teilsysteme

Der Boden verformt sich an den Koppelpunkten ( s.a. ( 4.2.1 ) )

$$\{V_s\} = [F_s] \{P_c\} + \{V_F\} \quad (4.4.1)$$

Wird bei den Koppelpunkten unterschieden zwischen Punkten a, an denen Verformungen  $\{\bar{V}^a\}$ , und Punkten b, an denen Kräfte  $\{\bar{P}^b\}$  eingeprägt werden, dann entsteht aus Gleichung (4.4.1)

$$\begin{bmatrix} \{V_s^a\} \\ \{V_s^b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_s^{aa}] & [F_s^{ab}] \\ [F_s^{ba}] & [F_s^{bb}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{P_c^a\} \\ \{P_c^b\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{V_F^a\} \\ \{V_F^b\} \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

und

$$\{V_s^a\} = \{\bar{V}^a\} \quad (4.4.3)$$

Die Pfähle verformen sich an den Koppelpunkten um

$$\{V_p\} = [F_p] (\{\bar{P}\} - \{P_c\}) \quad (4.4.4)$$

oder

$$\begin{bmatrix} \{V_p^a\} \\ \{V_p^b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_p^{aa}] & [F_p^{ab}] \\ [F_p^{ba}] & [F_p^{bb}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\{P_c^a\} \\ \{\bar{P}^b\} - \{P_c^b\} \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

und

$$\{V_p^a\} = \{\bar{V}^a\} \quad (4.4.6)$$

Inversion überführt Gleichung (4.4.5) in

$$\begin{bmatrix} [K_p^{aa}] & [K_p^{ab}] \\ [K_p^{ba}] & [K_p^{bb}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\bar{V}^a\} \\ \{V_p^b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{\bar{P}^b\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{P_c^a\} \\ \{P_c^b\} \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Daraus erhält man

$$[K_p^{ba}] \{\bar{V}^a\} + [K_p^{bb}] \{V_p^b\} = \{\bar{P}^b\} - \{P_c^b\}$$

oder

$$\{V_p^b\} = [K_p^{bb}]^{-1} (\{\bar{P}^b\} - \{P_c^b\} - [K_p^{ba}] \{\bar{V}^a\}) \quad (4.4.8)$$

Aus der Kompatibilitätsbedingung  $\{V_S\} = \{V_P\}$  folgt

$$\begin{bmatrix} [F_s^{aa}] & [F_s^{ab}] \\ [F_s^{ba}] & [F_s^{bb}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{P_c^a\} \\ \{P_c^b\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{V_F^a\} \\ \{V_F^b\} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \{\bar{V}^a\} \\ [K_P^{bb}]^{-1} (\{\bar{P}^b\} - \{P_c^b\} - [K_P^{ba}] \{\bar{V}^a\}) \end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix} [F_s^{aa}] & [F_s^{ab}] \\ [F_s^{ba}] & [F_s^{bb}] + [K_P^{bb}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{P_c^a\} \\ \{P_c^b\} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \{\bar{V}^a\} \\ [K_P^{bb}]^{-1} (\{\bar{P}^b\} - [K_P^{ba}] \{\bar{V}^a\}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{V_F^a\} \\ \{V_F^b\} \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

oder

$$[F_{SP}] \{P_c\} = \{\hat{V}_P\} - \{V_F\} \quad (4.4.10)$$

$[F_{SP}]$  ist die überlagerte Flexibilitätsmatrix von Boden und Pfählen. Der Vektor  $\{\hat{V}_P\}$  enthält die Verformungen der Pfähle infolge der eingepprägten Kräfte und Verformungen, wenn der Boden als nicht vorhanden gedacht ist.

Nach Auflösung des Gleichungssystems (4.4.10) ergeben sich die Koppelkräfte  $\{P_c\}$ . Die Pfahlverformungen  $\{V_P\}$  lassen sich durch Rückrechnung aus Gleichung (4.4.4) gewinnen. Die Schnittkräfte in den Pfählen erhält man aus der Multiplikation der Elementsteifigkeitsmatrizen mit den Pfahlverformungen.

#### 4.5 Einarbeiten der Randbedingungen an den Pfahlköpfen

Die Kopplung der Pfähle über die Kopfplatte wird nun nachträglich berücksichtigt. Die Randbedingungen werden eingearbeitet mit dem Weggrößenverfahren in Verbindung mit der sogenannten statischen Kondensation.

Für ein allgemeines System aus zwei Teilstrukturen d und c beschreibt die Gleichung

$$\left( \begin{array}{cc} [K^{cc}] & [K^{cd}] \\ [K^{dc}] & [K^{dd}] \end{array} - \Omega^2 \begin{array}{cc} [M^{cc}] & [M^{cd}] \\ [M^{dc}] & [M^{dd}] \end{array} \right) \begin{array}{c} \{V^c\} \\ \{V^d\} \end{array} = \begin{array}{c} \{P^c\} \\ \{P^d\} \end{array} \quad (4.5.1)$$

die harmonische Bewegung der Gesamtstruktur. Die Teilstruktur c habe n Freiheitsgrade, d habe m Freiheitsgrade. Es bedeuten

$[K^{cc}] [K^{dd}]$ : Steifigkeitsmatrizen der Teilstrukturen c und d mit der Dimension n x n und m x m

$[K^{cd}] [K^{dc}]$ : Blöcke der Steifigkeitsmatrix ( Festhaltekräfte in der Teilstruktur c infolge Einheitsverformungen in Teilstruktur d und umgekehrt )

$[M^{cd}] [M^{dc}]$ : Blöcke der Massenmatrix bei exzentrischem Schwerpunkt

$\{V^c\}, \{V^d\}$ : Knotenverformungen in den Teilstrukturen c und d

$\{P^c\}, \{P^d\}$ : Knotenkräfte in den Teilstrukturen c und d

Durch statische Kondensation sollen die m Freiheitsgrade des Teilstruktur d herauskondensiert werden. Setzt man im weiteren  $[M^{cd}]$  und  $[M^{dc}]$  als Nullmatrizen voraus, so kann man aus Gleichung ( 4.5.1 ) ausgliedern

$$\{V^d\} = ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} (-[K^{dc}] \{V^c\} + \{P^d\}) \quad (4.5.2)$$

Einsetzen von ( 4.5.2 ) in die oberen Zeilen von ( 4.5.1 ) ergibt

$$[\hat{K}^{cc}] \{V^c\} = \{\hat{P}^c\} \quad ( 4.5.3 )$$

mit der reduzierten Steifigkeitsmatrix

$$[\hat{K}^{cc}] = [K^{cc}] - \Omega^2 [M^{cc}] - [K^{cd}] ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} [K^{dc}] \quad ( 4.5.4 )$$

und dem reduzierten Lastvektor

$$\{\hat{P}^c\} = \{P^c\} - [K^{cd}] ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} \{P^d\} \quad ( 4.5.5 )$$

Angewendet auf das aktuelle Problem der Pfahlkopfkopplung werden jetzt die Pfähle als Teilstruktur d und die Kopfplatte als Teilstruktur c verstanden.

In diesem Zusammenhang wird eine starre Gebäudestruktur vorausgesetzt. Der Einfluß des Gebäudes ist dann allein durch eine Massenmatrix  $[M^{cc}]$  mit einer maximalen Dimension von  $n = 6$  erfaßt. Kann das Gebäude nicht als starr idealisiert werden, so wendet man eines der in Kapitel 4.7 genannten Verfahren an.

Es wird ebenfalls vereinfachend vorausgesetzt, daß sich die Kopfplatte nur starr verformen kann. Auch die Steifigkeitsmatrix hat dann eine Dimension von maximal  $n = 6$ . Drei Starrkörperverschiebungen und drei Starrkörperverdrehungen sind möglich.

In Kapitel 4.4 sind die Pfahlverformungen und Pfahlschnittkräfte über das Kraftgrößenverfahren berechnet worden. Die Steifigkeitsmatrizen  $[K^{cc}]$ ,  $[K^{cd}]$  und  $[K^{dd}]$  und die Massenmatrix  $[M^{dd}]$  aus der Überlagerung von Pfählen und Boden liegen also in expliziter Form nicht vor. Die entsprechenden Terme der Gleichungen ( 4.5.2 ) bis ( 4.5.5 ) werden daher auf eine andere Weise ermittelt.

Dazu werden zunnächst ein Lastverformungszustand ( LVZ ) und  $n$  Eigenverformungszustände ( EVZ ) definiert. Die Verformungszustände

sind in den Bildern 4.6 und 4.7 dargestellt. Wie man leicht erkennt, repräsentiert  $[K^{dd}]$  die Steifigkeitsmatrix,  $[M^{dd}]$  die Massenmatrix und  $\{P^d\}$  den Lastvektor des LVZ. Die Verformungen im LVZ betragen demnach

$$\{V_{LVZ}^d\} = ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} \{P^d\} \quad (4.5.6)$$

und die Festhaltekräfte an der oberen Einspannung

$$\begin{aligned} \{P_{LVZ}^c\} &= [K^{cd}] \{V_{LVZ}^d\} \\ &= [K^{cd}] ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} \{P^d\} \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Das Gleichungssystem der n EVZs läßt sich schreiben

$$\begin{bmatrix} [K^{cc}] - \Omega^2 [M^{cc}] & [K^{cd}] \\ [K^{dc}] & [K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_{EVZ}^c] \\ [V_{EVZ}^d] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

Die Matrix  $[V_{EVZ}^c]$  mit der Dimension n x n enthält die n eingepprägten Einheitsverformungen "1". Weiter erhält man

$$([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}]) [V_{EVZ}^d] = - [K^{dc}] [V_{EVZ}^c] \quad (4.5.9)$$

Die Verformungen in den EVZs sind

$$[V_{EVZ}^d] = - ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} [K^{dc}] [V_{EVZ}^c] \quad (4.5.10)$$

und die Kräfte zur Aufbringung der Einheitsverformungen

$$[P_{EVZ}^c] = ([K^{cc}] - \Omega^2 [M^{cc}]) [V_{EVZ}^c] + [K^{cd}] [V_{EVZ}^d]$$

oder mit (4.5.10)

$$\begin{aligned} [P_{EVZ}^c] &= ([K^{cc}] - \Omega^2 [M^{cc}] \\ &\quad - [K^{cd}] ([K^{dd}] - \Omega^2 [M^{dd}])^{-1} [K^{dc}]) [V_{EVZ}^c] \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Die Gleichungen ( 4.5.7 ) und ( 4.5.11 ) werden in ( 4.5.3 ) eingesetzt

$$[P_{EVZ}^c] [V_{EVZ}^c]^{-1} \{V^c\} = \{P^c\} - \{P_{LVZ}^c\} \quad ( 4.5.12 )$$

Die unbekanntenen Verformungen ergeben sich mit

$$\{V^c\} = [V_{EVZ}^c] [P_{EVZ}^c]^{-1} (\{P^c\} - \{P_{LVZ}^c\}) \quad ( 4.5.13 )$$

Die Verformungen  $\{V^d\}$  erhält man durch Rückeinsetzen in ( 4.5.2 ) mit Gleichung ( 4.5.10 )

$$\{V^d\} = [V_{EVZ}^d] [V_{EVZ}^c]^{-1} \{V^c\} + \{V_{LVZ}^d\} \quad ( 4.5.14 )$$

Weitere Vereinfachungen sind möglich, wenn man voraussetzt

- der Pfahlrost wird nur horizontal belastet
- der Pfahlrost wird in Hauptachsenrichtung belastet
- Horizontalverschiebung und Kippen sind nur schwach gekoppelt.

Die Kopplung wird daher vernachlässigt.

Mit  $n = 1$  beschränken sich die Freiheitsgrade der starren Kopfplatte auf die Horizontalverschiebung  $V_H$

Mit

$$\begin{aligned} \{V^c\} &= V_H \\ \{P^c\} &= P_H \\ [M^{cc}] &= M \end{aligned}$$

folgt aus Gleichung ( 4.5.13 )

$$V_H = 1 \cdot \frac{P_H - P_{H,LVZ}}{P_{H,EVZ}} \quad ( 4.5.15 )$$

und aus Gleichung ( 4.5.14 )

$$\{V^d\} = \{V_{EVZ}^d\} \frac{V_H}{1} + \{V_{LVZ}^d\} \quad ( 4.5.16 )$$

Die Schnittkräfte lassen sich analog aus der Überlagerung der Schnittkräfte der EVZs und des LVZ bestimmen.

Teilstruktur c : Pfahlkopfplatte mit n Freiheitsgraden

Teilstruktur d : Pfähle und Boden mit m Freiheitsgraden

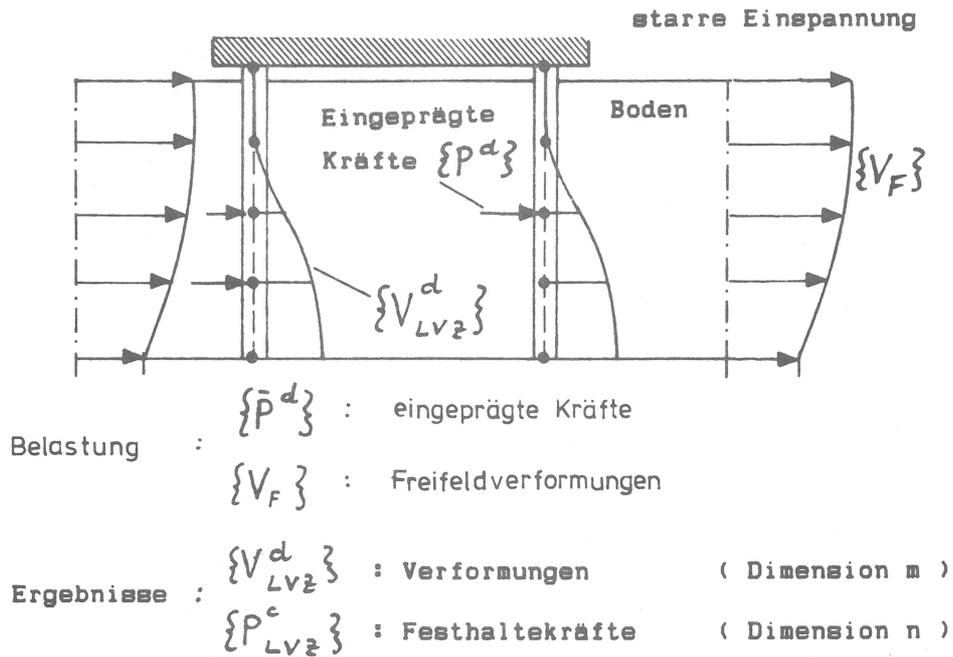
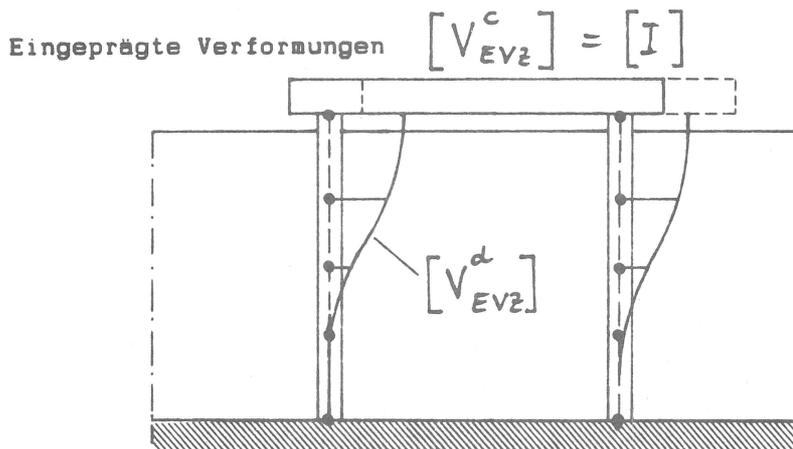


Bild 4.6 : Lastverformungszustand ( LVZ )



Belastung :  $[V_{EVZ}^c]$  : eingeprägte Einheitsverformungen

Ergebnisse :  $[V_{EVZ}^d]$  : Verformungen ( Dimension m x n )

$[P_{EVZ}^c]$  : Kräfte zur Aufbringung der eingeprägten Verformung ( Dimension n x n )

Bild 4.7 : Eigenverformungszustände ( EVZ )

#### 4.6 Symmetrische Systeme

Wenn die geometrische Konfiguration eines Pfahlsystems eine oder mehrere Symmetrieachsen enthält, kann der Berechnungsaufwand vermindert werden, indem die aufgrund der Symmetriebedingungen abhängigen Freiheitsgrade herauskondensiert werden. Schon bei einfacher oder doppelter Symmetrie vorteilhaft - die Anzahl der Freiheitsgrade verringert sich auf die Hälfte bzw. auf ein Viertel - , hat das Verfahren bei mehrfach rotationsperiodischen Systemen eine entscheidende Bedeutung. Es ermöglicht in vielen Fällen überhaupt erst eine Berechnung mit erträglichem Aufwand. Im folgenden wird gezeigt, wie bei verschiedenen Arten von Symmetrien die Kondensierung der Flexibilitätsmatrix des Bodens vorgenommen werden kann. Der Übersichtlichkeit der Formeln wegen entfällt im weiteren der Index  $s$  zur Kennzeichnung des Teilssystems Boden.

##### 4.6.1 Rotationsperiodische Systeme

Man bezeichnet Systeme als rotationsperiodisch, wenn für ihre in Zylinderkoordinaten beschriebene Geometrie gilt

$$S ( r, \varphi, z ) = S ( r, \varphi + j \Delta \varphi, z ) \quad ( 4.6.1 )$$

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{2\pi}{n} : \text{geometrisches Winkelinkrement} \\ n &: \text{Anzahl der Rotationsperioden} \\ j &= 1, 2, 3 \dots n \end{aligned}$$

Gleichung ( 4.6.1 ) sagt aus, daß durch die Definition des Sektors von  $\varphi$  bis  $\varphi + \Delta \varphi$  die Geometrie des gesamten Systems durch wiederholte Drehungen des Sektors um den Winkel  $\Delta \varphi$  festgelegt ist.

In Einschränkung der allgemeinen Definition gelten hier die folgen-

den Voraussetzungen

- die Pfähle sind in  $m$  Pfahlringen angeordnet
- die Anzahl  $n$  der Pfähle ist in jedem Pfahlring gleich
- $n$  ist ein Vielfaches von 4, d.h. es stehen Pfähle auf der X- und der Y-Achse des Systems

Die folgenden Betrachtungen gelten exakt nur unter diesen Voraussetzungen. Es ist jedoch möglich, in abweichenden Fällen gute Näherungslösungen zu erhalten.

Bild 4.8 zeigt ein dergestalt definiertes System.

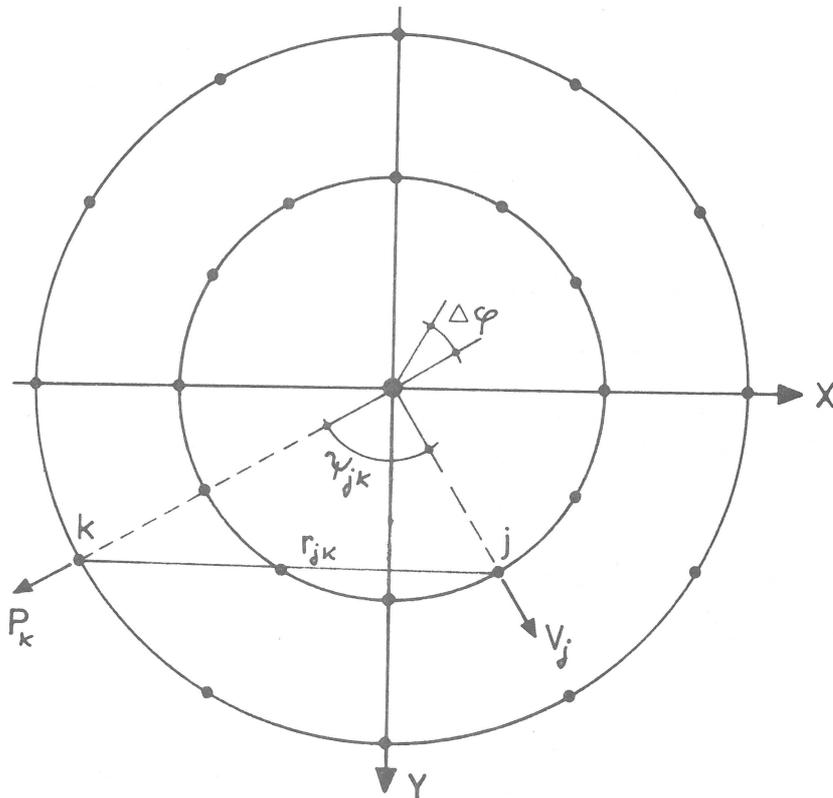


Bild 4.8 : Rotationsperiodisches System

Im folgenden Abschnitt wird die Herleitung der kondensierten Flexibilitätsmatrix des Bodens beschrieben. Die Position der Pfähle ist

durch die Punkte  $j$  und  $k$  definiert. Es ist zu beachten, daß bei der Überlagerung der Flexibilitätsmatrizen von Boden und Pfählen nach Gleichung ( 4.4.9 ) ist die Flexibilitätsmatrix der Pfähle mit  $n$  zu multiplizieren ist.

Man kann statt eines kontinuierlichen Funktionsverlaufes mit der Variablen  $\varphi$  auch die diskreten Funktionswerte bei  $j \Delta \varphi$  in einer Fourierreihe entwickeln, indem man die Besselschen Formeln anwendet. Darin sind nach der Trapezregel die Integrale der Eulerschen Formeln ( vgl. 2.1.7 ) durch Summen ersetzt.

Für die an dem Punkt  $k$  wirkende harmonische Kraft  $P_k$  hat die Fourierreihe die Gestalt

$$P_k = \sum_{l=0}^{n-1} \bar{P}_l e^{i(k \cdot l \cdot \Delta \varphi)} \quad ( 4.6.2 )$$

oder

$$\{P\} = [\Phi] \{\bar{P}\} \quad ( 4.6.3 )$$

Der Vektor  $\{P\}$  hat als Dimension  $n$ , der Vektor  $\{\bar{P}\}$  hat  $n/2$ , die Fouriertransformationsmatrix  $[\Phi]$   $n \times n$ .

Die Elemente von  $[\Phi]$  sind

$$\phi_{kl} = e^{i(k \cdot l \cdot \Delta \varphi)} \quad ( 4.6.4 )$$

mit  $k = 0, 1, 2 \dots n - 1$

$l = 0, 1, 2 \dots n/2 - 1$

Die Fourierkoeffizienten erhält man aus den Besselschen Formeln :

$$\bar{P}_l = \frac{2}{n} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{l0} \right) \sum_{k=0}^{n-1} P_k e^{-i(k \cdot l \cdot \Delta \varphi)} \quad ( 4.6.5 )$$

mit  $\delta_{l0} = 0$  für  $l \neq 0$

$\delta_{l0} = 1$  für  $l = 0$

Analoge Beziehungen gelten für die Verformungen am Punkt j

$$V_j = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \bar{V}_l e^{i(j \cdot l \cdot \Delta\varphi)} \quad (4.6.8)$$

oder

$$\{V\} = [\Phi] \{\bar{V}\} \quad (4.6.9)$$

Man beachte, daß die Transformation für jeden der m Kreisringe getrennt vorgenommen werden muß, d.h. die gesamte Anzahl der unbekannt modalen Verformungen beträgt  $n \times m/2$  pro betrachteter horizontaler Ebene.

Die Kraft-Verformungsbeziehung zwischen den Punkten k und j ist bei isotropem Material nur von den beiden Variablen r und  $\psi$  abhängig.

$$V_j = F_{jk}(r, \psi) \cdot P_k \quad (4.6.10)$$

Zusammengefaßt zur Flexibilitätsmatrix

$$\{V\} = [F] \{P\} \quad (4.6.11)$$

[F] ist eine komplexe symmetrische Matrix zyklischer Bauart. Man versteht darunter Matrizen, deren Zeilen aus der ersten durch zyklische Vertauschung hervorgehen.

Setzt man (4.6.6) in (4.6.11) ein, so erhält man

$$\{V\} = [F][\Phi]\{\bar{P}\} \quad (4.6.12)$$

Mit (4.6.9) folgt

$$[\Phi]\{\bar{V}\} = [F][\Phi]\{\bar{P}\} \quad (4.6.13)$$

Gleichung (4.6.13) wird von links mit der zu  $[\Phi]$  konjugiert Trans-

ponierten  $[\Phi]^*$  multipliziert.

$$[\Phi]^* [\Phi] \{ \bar{V} \} = [\Phi]^* [F] [\Phi] \{ \bar{P} \} \quad ( 4.6.14 )$$

In Indizes schreibt man in der l-ten Zeile und der k-ten Spalte für  $[\Phi]^* [\Phi]$

$$\phi_{lj}^* \phi_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-i(l \cdot j \cdot \Delta\varphi)} e^{i(j \cdot k \cdot \Delta\varphi)} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(j(k-l)\Delta\varphi)} \quad ( 4.6.15 )$$

Für  $l = k$  ist jeder der Summanden ein Vektor in der komplexen Ebene, der bezogen auf die reelle Achse um den Winkel  $j(k-1)\Delta\varphi$  gedreht ist. Der Winkel zwischen zwei in der Reihe aufeinanderfolgenden Vektoren ist  $\Delta\varphi(k-1)$ . Nach  $n$  Reihengliedern ist der gesamte Drehwinkel  $n \Delta\varphi(k-1)$  oder  $2\pi(k-1)$ , was ein Vielfaches von  $2\pi$  ist. Die Vektoren der Reihe bilden damit einen geschlossenen Polygonzug mit der Vektorsumme Null. Ein Beispiel ist in Bild 4.9 dargestellt.

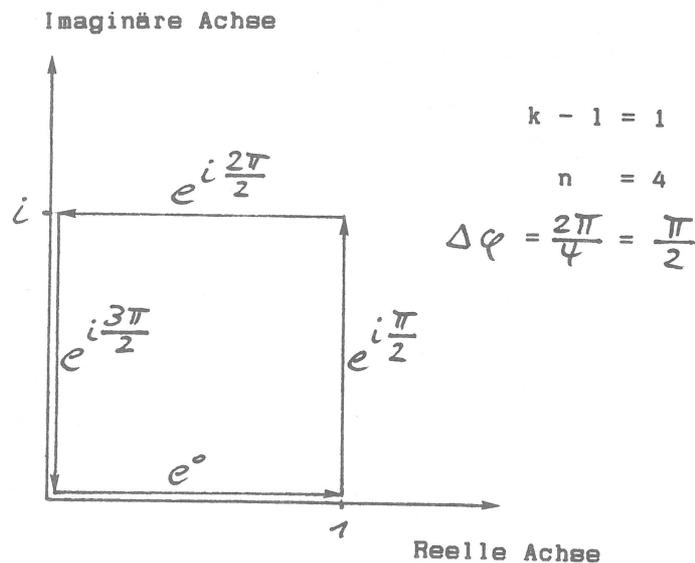


Bild 4.9 : Polygonzug mit Vektorsumme Null

Damit folgt für Gleichung ( 4.6.15 )

$$\phi_{lj}^* \phi_{jk} = \begin{cases} n & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \quad ( 4.6.16 )$$

Gleichung ( 4.6.14 ) kann dann geschrieben werden

$$n\{\bar{V}\} = [\Phi]^* [F] [\Phi] \{\bar{P}\}$$

oder

$$n\{\bar{V}\} = [\bar{F}] \{\bar{P}\} \quad ( 4.6.17 )$$

$[F]$  ist eine Matrix zyklischer Bauart. Zurmühl /82/ gibt für eine solche Matrix die Matrix  $[X]$  der Eigenvektoren an.  $[X]$  hat die Dimension  $n \times n$  und die Elemente

$$X_{kl} = e^{i(k \cdot l \cdot \Delta\varphi)} \quad ( 4.6.18 )$$

mit  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Der  $l$ -te Eigenwerte ist

$$\lambda_l = \{F_1\}^T \{X_l\} \quad ( 4.6.19 )$$

wobei  $\{F_1\}^T$  die erste Zeile der Matrix  $[F]$  und  $\{X_l\}$  der  $l$ -te Eigenvektor ist.

Eigenvektoren und Eigenwerte erfüllen die Bedingungsgleichung

$$[F][X] = [X][\lambda] \quad ( 4.6.20 )$$

mit  $[\lambda]$  als Diagonalmatrix der Eigenwerte.

Multipliziert man Gleichung ( 4.6.20 ) von links mit  $[X]^*$  als konjugiert Transponierter von  $[X]$ , so ergibt sich

$$[X]^* [F] [X] = [X]^* [X] [\lambda] = n [\lambda] \quad ( 4.6.21 )$$

Ein Vergleich der Gleichungen ( 4.6.18 ) und ( 4.6.4 ) zeigt, daß  $[\Phi]$  Teilmatrix von  $[X]$  ist. Statt ( 4.6.19 ) bis ( 4.6.21 ) kann

man daher schreiben

$$\lambda_l = \{F_l\}^T \{\phi_l\} \quad \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.6.22)$$

$$[F][\phi] = [\phi][\bar{\lambda}] \quad (4.6.23)$$

$$[\bar{F}] = [\phi]^*[F][\phi] = n[\bar{\lambda}] \quad (4.6.24)$$

$[\bar{\lambda}]$  ist Teilmatrix von  $[\lambda]$ .

Gleichung (4.6.24) in (4.6.17) eingesetzt ergibt

$$\{\bar{V}\} = [\bar{\lambda}]\{\bar{P}\} \quad (4.6.25)$$

$[\bar{\lambda}]$  ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte der symmetrischen Matrix mit zyklischer Bauart  $[F]$ . Es beeinflussen sich daher nur Kräfte und Verschiebungen der gleichen Fourierreihenordnung. Setzt man zum Beispiel in Bild 4.8 diskrete  $(\cos n\varphi)$ -förmig verteilte Radiallasten an Punkten auf einem Ring an, dann sind die Verschiebungen an den Punkten auf einem zweiten Ring diskret  $(\sin n\varphi)$ - oder  $(\cos n\varphi)$ -förmig verteilt.

Bei der praktischen Anwendung der Kondensation nach Gleichung

(4.6.24) beschränkt man sich in der Regel auf eines der beiden

ersten Reihenglieder, d. h. auf eine der beiden ersten Spalten von  $[\phi]$  und Zeilen von  $[\phi]^*$ . Die erste Spalte  $\{\phi_0\}$  bzw. Zeile  $\{\phi_0\}^*$  enthält das nullte Fourierreihenglied. Die zweite Spalte bzw. Zeile  $\{\phi_1\}$  bzw.  $\{\phi_1\}^*$  enthält das erste Reihenglied.

a) Anwendung beim Lastfall Torsion

Bild 4.10 zeigt für  $n = 8$  die Einheitskräfte beim Lastfall Torsion.

Für  $l = 0$  wird aus den Gleichungen ( 4.6.2 ) und ( 4.6.8 ) :

$$P_k = \bar{P}_0$$

$$V_k = \bar{V}_0$$

für  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

und aus ( 4.6.4 )

$$\phi_{k0} = 1$$

( 4.6.26 )

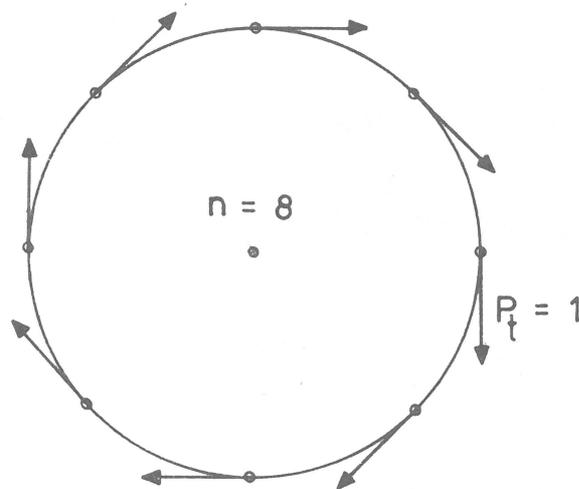


Bild 4.10 : Einheitskräfte beim Lastfall Torsion

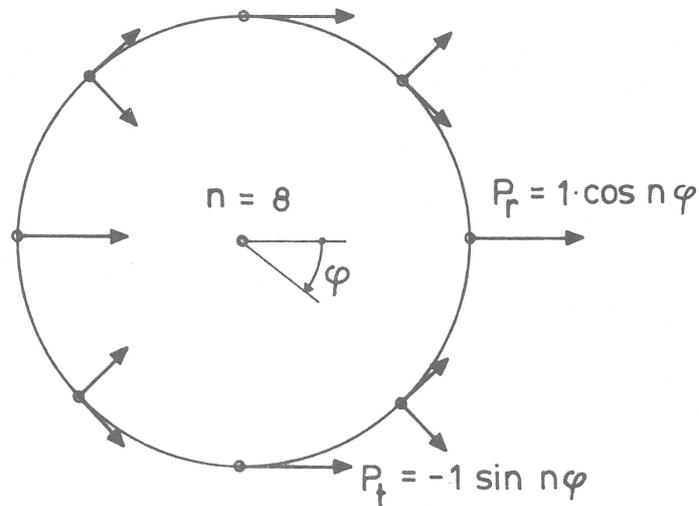


Bild 4.11 : Einheitskräfte beim Lastfall Horizontallast

Die vollständige, zyklisch symmetrische Flexibilitätsmatrix ist bei Torsion

$$[F] = [F_{tt}]$$

mit der Dimension  $n \times n$ .

Mit ( 4.6.22 ) und ( 4.6.24 ) folgt

$$\bar{F}_T = n \lambda_0 = n \{F_{tt,1}\}^T \{\phi_0\} \quad ( 4.6.27 )$$

Führt man die Vektormultiplikation aus, so erhält man mit ( 4.6.26 ) die Torsionsnachgiebigkeit des Pfahlrings

$$\bar{F}_T = n \sum_{k=0}^{n-1} F_{tt,1,k} \quad ( 4.6.28 )$$

$F_{tt,1,k}$  sind die Elemente der ersten Zeile von  $[F_{tt}]$ .

b) Anwendung beim Lastfall Horizontallast

Bild 4.11 zeigt für  $n = 8$  die Einheitskräfte beim Lastfall Horizontallast. Die Radialkräfte sind cos-förmig, die Tangentialkräfte sin-förmig verteilt. Für  $l = 1$  wird aus Gleichung ( 4.6.2 )

$$P_{r,k} = \bar{P}_{r,1} e^{i k \Delta \varphi} \quad ( 4.6.29a )$$

$$P_{t,k} = \bar{P}_{t,1} e^{i k \Delta \varphi} \quad ( 4.6.29b )$$

$\bar{P}_{r,1}$  und  $\bar{P}_{t,1}$  sind um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben. Setzt man  $\hat{P}_{r,1} = P_{r,1}$  und  $\hat{P}_{t,1} = i P_{t,1}$ , so wird aus ( 4.6.29 )

$$P_{r,k} = \hat{P}_{r,1} e^{i k \Delta \varphi} \quad ( 4.6.30a )$$

$$P_{t,k} = \hat{P}_{t,1} (-i) e^{i k \Delta \varphi} \quad ( 4.6.30b )$$

Analog ergibt sich für die Verformungen

$$V_{r,k} = \hat{V}_{r,1} e^{i k \Delta \varphi} \quad ( 4.6.31a )$$

$$V_{t, \kappa} = \hat{V}_{t, 1} (-i) e^{i \kappa \Delta \varphi} \quad (4.6.31b)$$

Die zyklisch symmetrische Flexibilitätsmatrix hat die Form

$$[F] = \begin{bmatrix} [F_{rr}] & [F_{rt}] \\ [F_{tr}] & [F_{tt}] \end{bmatrix} \quad (4.6.32)$$

mit der Dimension  $2n \times 2n$ .

Analog zu (4.6.27) gilt hier

$$[F_H] = n \begin{bmatrix} \{F_{rr, 1}\}^T & \{F_{rt, 1}\}^T \\ \{F_{tr, 1}\}^T & \{F_{tt, 1}\}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\phi_1\} & \{0\} \\ \{0\} & -i\{\phi_1\} \end{bmatrix} \quad (4.6.33)$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_{k1} &= e^{i \kappa \Delta \varphi} \\ &= \cos(\kappa \Delta \varphi) + i \sin(\kappa \Delta \varphi) \end{aligned}$$

Man betrachte nun das Matrizelement  $\{F_{rr, 1}\}^T \{\phi_1\}$ . Die antimetrischen Anteile summieren sich über den Umfang zu Null. Damit entfällt der Imaginärteil

$$F_{H, rr} = n \{F_{rr, 1}\}^T \{\phi_1\} = n \sum_{\kappa=0}^{n-1} F_{rr, 1, \kappa} \cos(\kappa \Delta \varphi) \quad (4.6.34a)$$

Auf die gleiche Weise erhält man

$$F_{H, rt} = n \{F_{rt, 1}\}^T \{\phi_1\} = n \sum F_{rt, 1, \kappa} \sin(\kappa \Delta \varphi) \quad (4.6.34b)$$

$$F_{H, tr} = n \{F_{tr, 1}\}^T \{\phi_1\} = n \sum F_{tr, 1, \kappa} \cos(\kappa \Delta \varphi) \quad (4.6.34c)$$

$$F_{H, tt} = n \{F_{tt, 1}\}^T \{\phi_1\} = n \sum F_{tt, 1, \kappa} \sin(\kappa \Delta \varphi) \quad (4.6.34d)$$

Die horizontale Nachgiebigkeit des Pfahlringes kann damit zu der

$2 \times 2$  - Matrix  $[F_H]$  zusammengefaßt werden

$$[F_H] = \begin{bmatrix} [F_{H,rr}] & [F_{H,rt}] \\ [F_{H,tr}] & [F_{H,tt}] \end{bmatrix} \quad (4.6.35)$$

Der erste Freiheitsgrad  $\hat{v}_{r,1}$  bedeutet die Horizontalverschiebung des Pfahles bei  $\varphi = 0$ , der zweite Freiheitsgrad  $\hat{v}_{t,1}$  die des Pfahles bei  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

#### 4.6.2 Einfach- und doppelsymmetrische Systeme

Die Symmetriebedingungen werden hier ausgenutzt, um die Flexibilitätsmatrix  $[F]$  durch Überlagerung von Zeilen und Spalten auf die Hälfte bzw. auf ein Viertel der ursprünglichen Dimension zu verkleinern. Die Art der Überlagerung, nämlich Addition oder Subtraktion, hängt davon ab, ob die Verschiebungen in den zu überlagernden Freiheitsgraden gleich oder entgegengesetzt gleich groß sind. Bei Doppelsymmetrie werden vier Quadranten nach Bild 4.12 definiert.

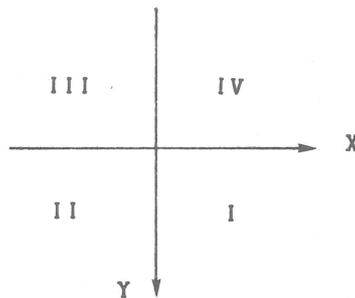


Bild 4.12 : Definition der Quadranten

Außerdem werden vier Lastfälle unterschieden :

- SA : Symmetrie zur X-Achse und Antimetrie zur Y-Achse  
( z.B. Horizontalkraft in X-Richtung, Moment um Y-Achse )
- AS : Antimetrie zur X-Achse und Symmetrie zur Y-Achse  
( z.B. Moment um X-Achse, Horizontalkraft in Y-Richtung )
- SS : Symmetrie zur X-Achse und Symmetrie zur Y-Achse  
( z.B. Vertikalkraft in Z-Richtung )
- AA : Antimetrie zur X-Achse und Antimetrie zur Y-Achse  
( z.B. Torsionsmoment um Z-Achse )

Definiert man die zwei Verschiebungen  $V_x$  und  $V_y$  im Quadranten I als + 1 , so lassen sich die Symmetriebedingungen wie in Bild 4.13 angeben. Bei Einfachsymmetrie zur X-Achse kann die Vorzeichenregelung in den Quadranten I und II, bei Einfachsymmetrie zur Y-Achse

die in den Quadranten I und IV übernommen werden.

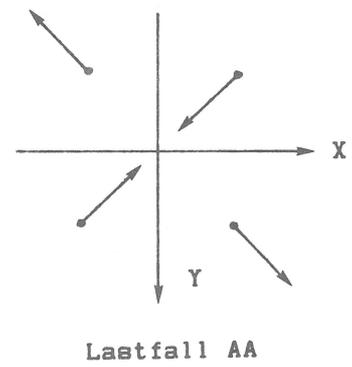
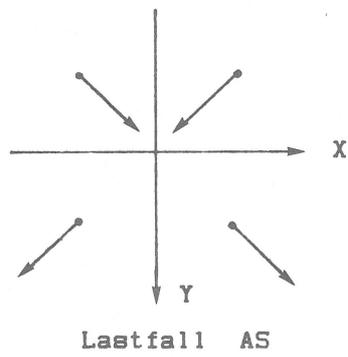
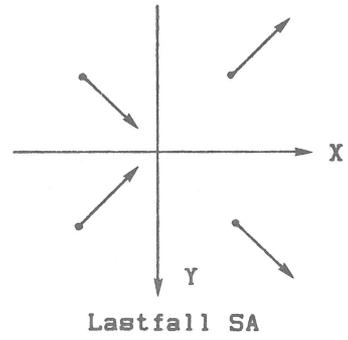
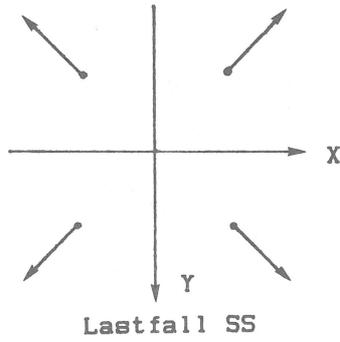


Bild 4.13 : Symmetriebedingungen

#### 4.7 Verfahren zur Berechnung des Systems aus Pfahlgründung und Gebäude

In diesem Kapitel werden einige Methoden vorgestellt, die Teilstruktur Pfahl-Pfahlkopfplatte-Boden mit der Gebäudestruktur zu verknüpfen. Bei dynamischer Belastung, insbesondere beim Lastfall Erdbeben, bezeichnet man diese Aufgabe als Problem der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung.

In vielen Anwendungsfällen, so z.B. bei den steifen und kompakten Gebäuden im Kernkraftwerksbau, ist es möglich, die Gebäudestruktur auf einen Einmassenschwinger mit maximal sechs Freiheitsgraden zurückzuführen. Man kann dann den in Kapitel 4.5 beschriebenen einfachen Lösungsweg gehen, indem man die Gebäudemasse direkt zu der Masse der starren Pfahlkopfplatte addiert. Die Parameterstudien im Kapitel 6 beschränken sich auf diesen einfachen Fall.

Handelt es sich bei dem Gebäude um eine flexible Struktur, bei der schon im Frequenzbereich der Fundamentalschwingung Eigenformen erwartet werden, muß das Eigenschwingverhalten des Gebäudes auch bei der Auslegung der Pfahlgründung berücksichtigt werden. Für Lösungen im Frequenzbereich gibt es mehrere Verfahren. Sie können grob eingeteilt werden in :

- direkte Verfahren
- Verfahren der Überlagerung von Teillösungen.

Beim direkten Verfahren wird die Gesamtstruktur, also Boden, Pfähle und Gebäude geschlossen im Frequenzbereich gelöst. Wegen des großen Gleichungssystems, das für jeden Frequenzschritt gelöst werden muß, ist diese Vorgehensweise i. a. nicht zweckmäßig.

Verfahren, bei denen Teillösungen überlagert werden, sind rechen-technisch günstiger zu handhaben. Darüberhinaus ermöglichen sie es, in den Einzelschritten Parameter zu variieren und die Teillösungen zu optimieren. Dabei muß natürlich die Konsistenz der

der Teillösungen beachtet werden. Grundsätzlich kann man zwei Methoden unterscheiden :

- Unterteilung des Gesamtproblems in die Teilprobleme der kinematischen und der trägen Wechselwirkung
- Unterteilung der Gesamtstruktur in Unterstrukturen.

Es gibt nun innerhalb der beiden Methoden eine ganze Anzahl von unterschiedlichen Vorgehensweisen, da es im Prinzip beliebig ist, wie ein Gesamtproblem in Teilprobleme aufgelöst wird. Auch Mischformen der beiden genannten Methoden sind möglich, wenn die Lösungsschritte noch weiter unterteilt werden. ( siehe auch /18/ )  
Bild 4.14 zeigt eine schematische Zusammenstellung der dynamischen Berechnungsverfahren.

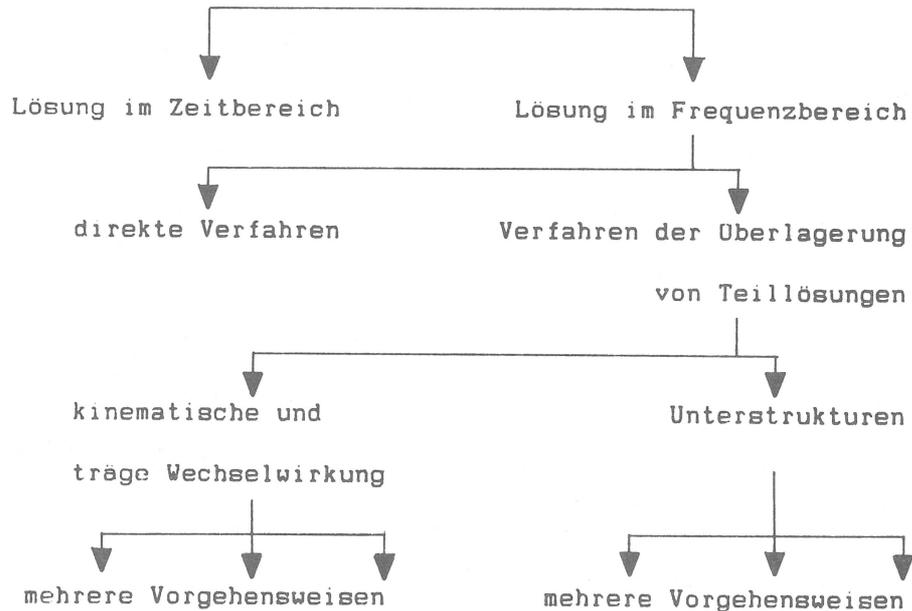


Bild 4.14 : Dynamische Berechnungsverfahren bei flexibler Gebäudestruktur

## 4.8 Numerische Aspekte

### 4.8.1 Diskretisierung des Bodens

Die Genauigkeit der Rechnung hängt von der Feinheit der vertikalen Einteilung ab. Prinzipiell gilt, daß die Diskretisierung desto feiner gewählt werden sollte, je größer der Gradient der Verzerrungen erwartet wird. Ein charakteristisches Maß liefern bei der harmonischen Bewegung die Wellenlängen der Scherwellen ( S-Wellen ). Sie sind im gleichen Medium und bei der gleichen Frequenz immer kürzer als die Wellenlängen bei Kompressionswellen ( P-Wellen ). Eine S-Wellenlänge muß mindestens vier Bodenschichten umfassen, um vom Modell zugelassen werden zu können. Eine feinere Einteilung ist jedoch im Interesse der Rechengenauigkeit anzuraten. Die Schichtdicke in Oberflächennähe soll in der Regel nicht größer sein als der halbe Pfahldurchmesser. Mit der Tiefe dürfen die Schichtdicken zunehmen. Die Dicken kann man wählen wie die Abmessungen von finiten Volumenelementen mit linearen Verschiebungsansätzen. So empfehlen z.B. Lysmer und Kuhlemeyer /30/ eine Dicke von 1/10 der S-Wellenlänge bei rechteckigen, in zwei Richtungen diskretisierten finiten Elementen.

### 4.8.2 Wahl der Koppelpunkte

An den Koppelpunkten sind die Horizontalverschiebungen von Pfahl und Boden kompatibel. Es hat sich als praktikabel erwiesen, ca. 10 bis 20 Koppelpunkte pro Pfahl vorzusehen. In der Nähe der Oberfläche oder in Bodenbereichen mit starken Steifigkeitssprüngen empfiehlt sich eine dichte Konzentrierung der Punkte. Bei extremen Steifigkeitssprüngen (  $G_{i+1}/G_i > 30$  ) müssen Verfälschungen der Pfahlschnittgrößen erwartet werden. Hier haben nämlich an den Schichtgrenzen die vertikal gerichteten Schubspannungen zwischen Pfahl und Boden einen nicht vernachlässigbaren Einfluß. Die Kompa-

tibilität muß dann auch für die Vertikalverschiebungen von Pfahl und Boden am Pfahlmantel gefordert werden.

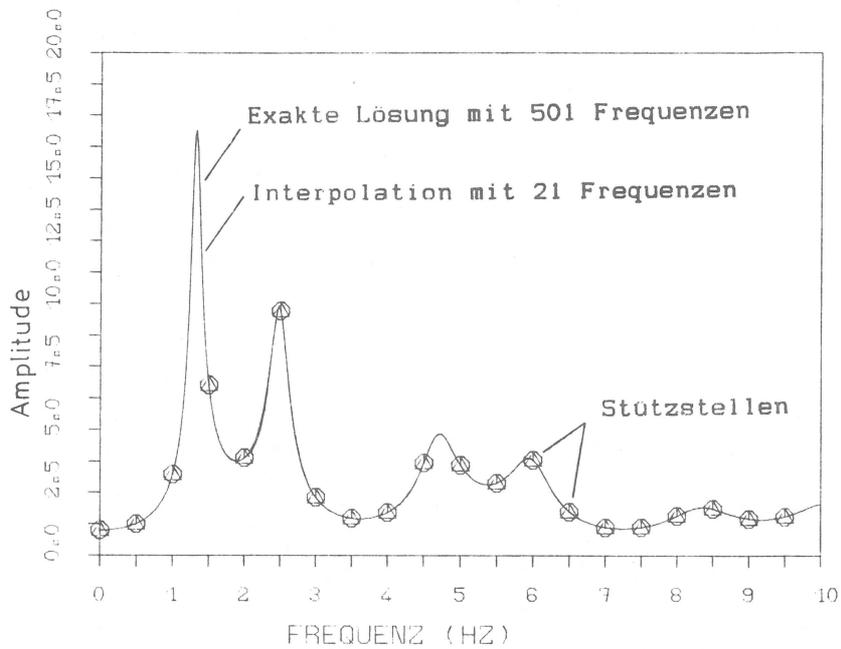
#### 4.8.3 Interpolation der Übertragungsfunktion

Die Berechnungen erfolgen im Frequenzbereich. Das bedeutet, daß man für jede gewählte Anregungsfrequenz als Ergebnis einen Satz von komplexen Kraft- und Weggrößen erhält, die die harmonische Antwortschwingung des Systems darstellen. Wünscht man Ergebnisse für ein ganzes Frequenzband, was z.B. bei anschließender Fourier-Transformation erforderlich ist, so sind mehrere Berechnungen mit einem genügend kleinen Frequenzschritt auszuführen. Durch Interpolation erhält man schließlich die frequenzabhängigen komplexen Übertragungsfunktionen der Kraft- und Weggrößen. Da der Rechenaufwand proportional ist zur Anzahl der benötigten Stützstellen, ist die Leistung des Interpolationsverfahrens von besonderer Bedeutung. Quadratische oder kubische Interpolationen erfordern ein sehr kleines Frequenzintervall, wenn die Stützstellen große Sprünge aufweisen. Tajirian hat in /68/ ein Verfahren entwickelt, das von der Antwortschwingung eines Zweimassenschwingers bei harmonischer Fußpunkterregung ausgeht. Er zeigt, daß die komplexe Übertragungsfunktion formuliert werden kann als

$$H(\Omega) = \frac{C_1 \Omega^4 + C_2 \Omega^2 + C_3}{\Omega^4 + C_4 \Omega^2 + C_5} \quad (4.8.1)$$

mit den fünf komplexen Konstanten  $C_1$  bis  $C_5$ . Berechnet man  $H(\Omega)$  für fünf Frequenzen, dann lassen sich die Konstanten bestimmen und der Verlauf der Funktion ist eindeutig festgelegt. Auch Übertragungsfunktionen von Systemen mit vielen Freiheitsgraden können mit Gleichung (4.8.1) in guter Näherung dargestellt werden, wenn man jeweils zwischen fünf Frequenzen interpoliert. Bild 4.17 verdeut-

licht die Effizienz dieses Verfahrens. Abgebildet ist die Freifeldbeschleunigung eines unregelmäßig geschichteten Bodenprofils. Sie ist einmal für 501 Frequenzen direkt berechnet worden, einmal nur mit 21 Frequenzen und anschließender Interpolation. Die beiden Kurven unterscheiden sich praktisch nicht. Bei typischen Problemen der in dieser Arbeit behandelten Art reicht es aus, lediglich 20 bis 40 Frequenzen zu berechnen.



**Bild 4.17 : Vergleich der Interpolation nach Tajirian mit exakter Lösung**

## 5. Vergleichsrechnungen

Die in den vorherigen Kapiteln hergeleiteten Beziehungen sind im FORTRAN-Code formuliert, das Programm ist PILAX genannt worden. Zur Verifikation des Berechnungsverfahrens werden Vergleiche zwischen Lösungen nach PILAX und einigen in der Literatur angegebenen Verfahren vorgestellt. Novak und El Sharnouby haben dynamische Versuche mit einem Pfahlgruppenmodell gemacht. Zuvor wurde mit PILAX das Schwingungsverhalten theoretisch bestimmt, nach den Messungen wurden die Eingabeparameter der Berechnung variiert. In Kapitel 5.2 sind die Ergebnisse von Versuch und Rechnung gegenübergestellt.

### 5.1 Vergleich mit Berechnungsverfahren aus der Literatur

#### 5.1.1 Statisch belastete Pfahlgruppe

Bild 5.1 zeigt die aus 9 Pfählen bestehende Pfahlgruppe 9 im elastischen Halbraum. Ihre statische Steifigkeit ist von Poulos und Davis /52/ und von Kaynia /25/ mit verschiedenen Modellen berechnet worden. Die verwendeten Verfahren sind in Kapitel 1.2 beschrieben. Poulos und Davis betrachten beim Aufbau der Flexibilitätsmatrix nur jeweils zwei Pfähle gemeinsam, Kaynia benutzt ein ähnliches Modell wie das in dieser Arbeit verwendete.

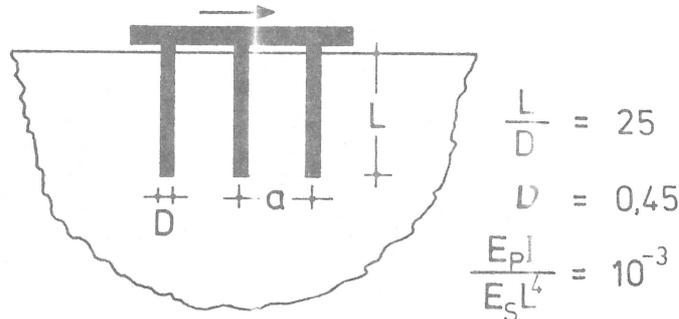
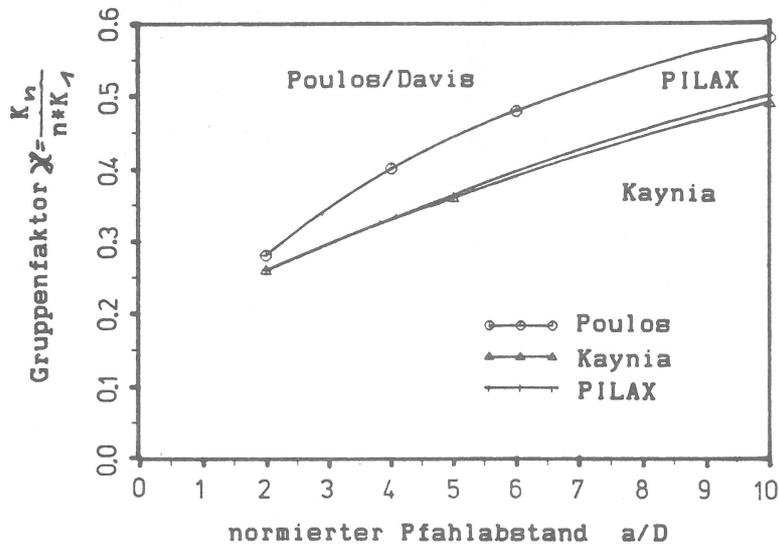


Bild 5.1 : Pfahlgruppe 9 im elastischen Halbraum

In Bild 5.2 ist die normierte Horizontalsteifigkeit (Gruppenfaktor) in Abhängigkeit vom Verhältnis  $a/D$  ( $a$  = Pfahlabstand,  $D$  = Pfahldurchmesser) aufgetragen. Man erkennt, daß bei kleinem  $a/D$  die Übereinstimmung sehr gut ist. Bei großem Pfahlabstand weicht die Näherungslösung von Poulos um 20 % von der genaueren Lösung ab.



$K_1$  : Steifigkeit des Einzelpfahles

$K_h$  : Steifigkeit der Pfahlgruppe

$n$  : Anzahl der Pfähle

Bild 5.2 : Vergleich der statischen Gruppenwirkung

### 5.1.2 Dynamisch belasteter Einzelpfahl

Dobry u.a. /12/ haben einen dynamisch belasteten Einzelpfahl in einer homogenen Schicht untersucht. Bild 5.3 zeigt das verwendete Modell.

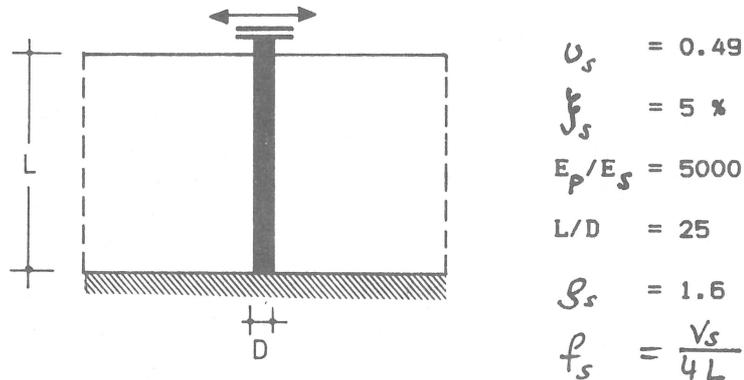


Bild 5.3 : Einzelpfahl in homogener Schicht

Die Autoren berechnen Steifigkeit und Dämpfung mit der Finite-Element-Methode und geben die Ergebnisse in normierter Form an. Die Bilder 5.4 und 5.5 zeigen diese Funktionen neben denen, die mit PILAX berechnet worden sind. Die Ergebnisse stimmen praktisch überein. Die normierte Frequenz ist definiert als

$$\bar{f} = \frac{f}{f_s} \quad ( 5.1.1 )$$

mit  $f_s$  als der ersten Eigenfrequenz des Bodenprofils.

$$f_s = \frac{v_s}{4L} \quad ( v_s : \text{Scherwellengeschwindigkeit} )$$

Zur Definition des Dämpfungsmaßes siehe auch Gleichung (6.4.4).

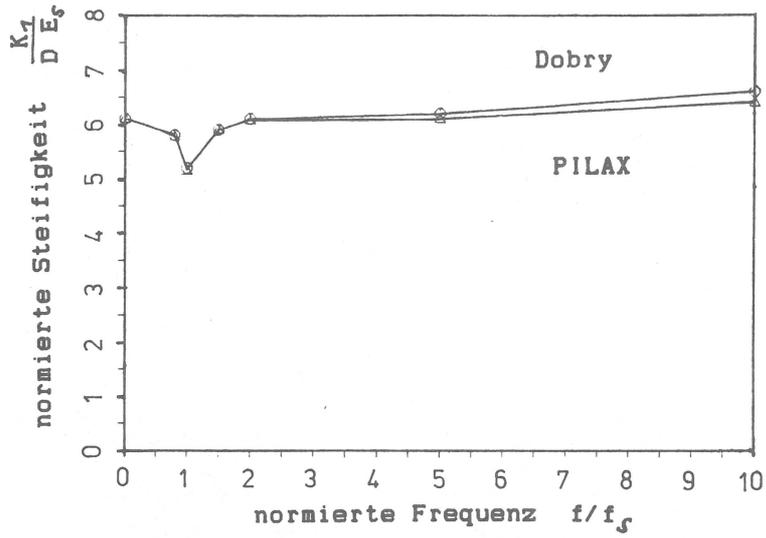


Bild 5.4 : Dynamische Horizontalsteifigkeit

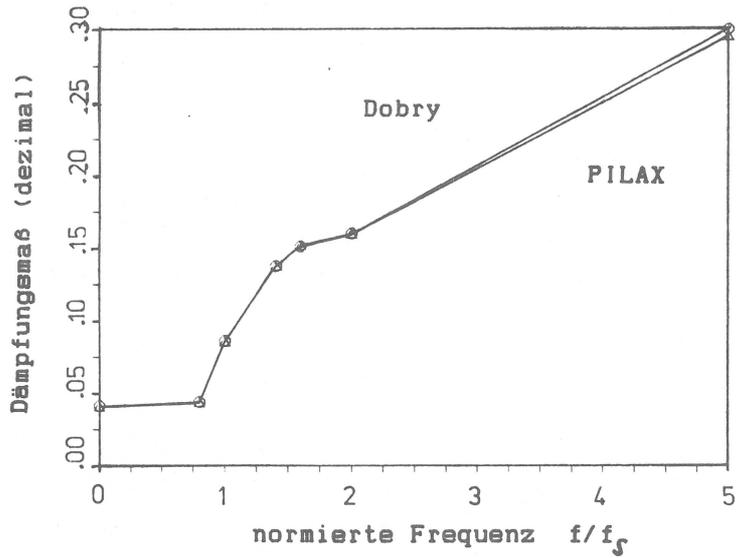


Bild 5.5 : Dämpfungsmaß

## 5.2 Vergleich mit dynamischem Pfahlversuch

El Sharnouby und Novak beschreiben in /13/ dynamische Versuche mit einer kleinmaßstäblichen Gruppe von 102 Modellpfählen. Sie verwenden Stahlrohre mit dem Durchmesser  $D = 26.7$  mm und der Länge  $L = 1060$  mm. Eine steife Betonplatte verbindet die Pfähle zu einer Gruppe mit einem mittlerem Pfahlabstand von  $a = 80$  mm. Mit  $a/D = 3$  stehen die Pfähle also relativ dicht. Am Pfahlkopf sind sie biegesteif in die Platte eingespannt. Bild 5.6 zeigt das Versuchsmodell.

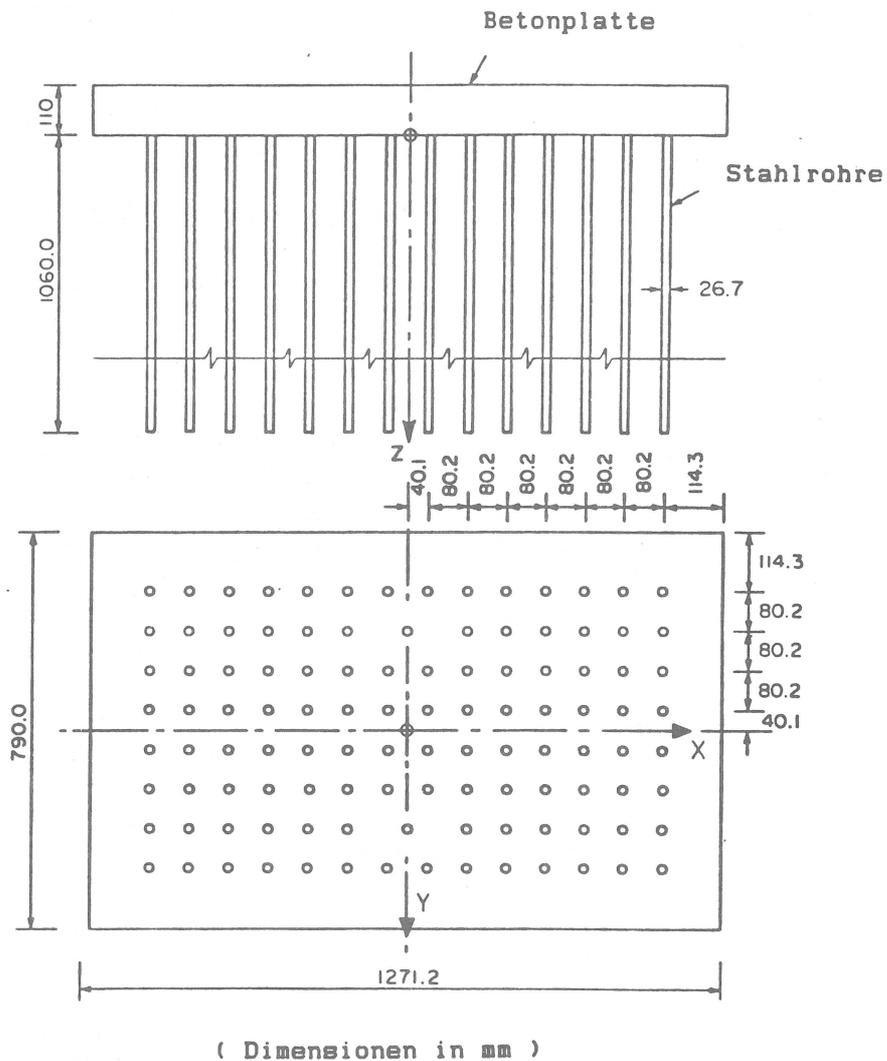


Bild 5.6 : Pfahlgruppenmodell mit 102 Pfählen

Es ist im freien Gelände aufgebaut worden, um Modellränder zu vermeiden, an denen störende Wellenreflexionen auftreten könnten. Der Boden zwischen den Pfählen ist nachträglich eingebracht und verdichtet worden. Er besteht aus einer künstlichen Mischung aus Sand und Flugasche. Die Materialeigenschaften stimmen gut mit denen des umliegenden gewachsenen Bodens überein. Im Labor sind die Bodenkenngrößen, im freien Gelände ist die Scherwellengeschwindigkeit gemessen worden. An der Pfahlkopfplatte sind Unwuchterreger montiert, mit denen die dynamischen Lasten erzeugt werden. Man erhält so eine Horizontalkraft  $H$  als

$$H = m_e \cdot e \cdot \Omega^2 \quad ( 5.2.1 )$$

mit  $m_e$  : rotierende Masse

$e$  : Unwucht ( Hebelarm der rotierenden Masse )

$\Omega$  : Kreisfrequenz der Rotation

Zur Definition der Laststufe wird das frequenzunabhängige Unwuchtmoment  $M_e$  verwendet.

$$M_e = m_e \cdot g \cdot e \quad ( 5.2.2 )$$

mit  $g$  : Erdbeschleunigung

In den Versuchen sind an der Kopfplatte verschiedenen Zusatzmassen angebracht worden, um im durchfahrenen Frequenzbereich klare Resonanzen zu erhalten. Die Amplituden der Horizontalverschiebung sind an der Pfahlkopfplatte gemessen worden. Sie werden als Funktion der Frequenz in der normierten Form aufgetragen.

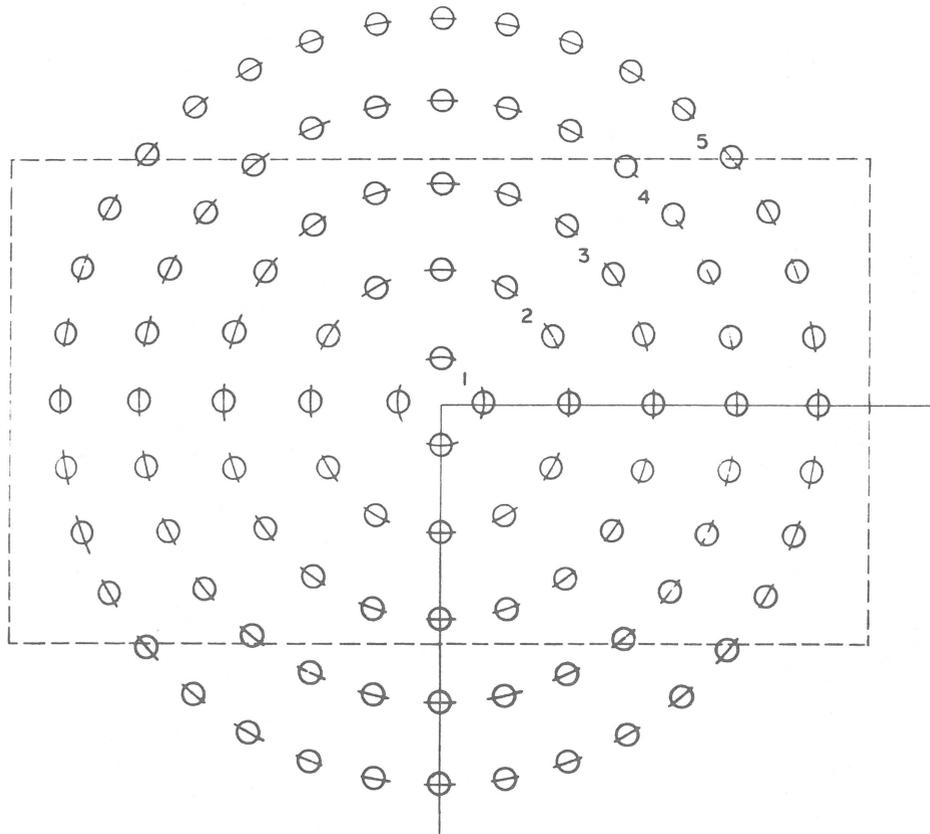
$$\bar{u} = M \cdot \Omega^2 \cdot \frac{u}{H} \quad ( 5.2.3 )$$

mit  $M$  : Gesamtmasse aus Pfahlkopfplatte, Versuchsgerät und Zusatzmasse

Die Bilder 5.9 und 5.10 zeigen die Verschiebungen  $\bar{u}$  für verschiedene Laststufen. Es ist klar zu erkennen, daß sich die Pfahlgründung im wesentlichen elastisch verformt. Bei der beobachteten Resonanzfrequenz wird eine reine Horizontalverformung gemessen. Eine Fundamentkipfung tritt erst bei höheren Frequenzen auf; die Resonanzen sind somit klar voneinander getrennt. Offensichtlich sind die Versuchsergebnisse gut geeignet, linear elastische Berechnungsmethoden zu überprüfen.

Bei der Berechnung mit PILAX ist die tatsächliche Pfahlanordnung durch eine ringförmige Anordnung der Pfähle ersetzt worden. Der Rechenaufwand läßt sich so erheblich vermindern. Bild 5.7 zeigt das äquivalente Modell. Die gemessene Horizontalsteifigkeit der Pfahlgründung wird verwendet, um die nur in wenigen Bodentiefen bekannte Scherwellengeschwindigkeit  $v_s$  zu einem vollständigen Profil zu ergänzen. Es wird zunächst ein parabolischer Verlauf des Profils über die Tiefe angenommen. Die Meßwerte von  $v_s$  werden mit einer solchen Kurve interpoliert. Berechnet man nun die Horizontalsteifigkeit der Pfahlgruppe und vergleicht sie mit der gemessenen, so läßt sich in einem begrenzten Maße durch Modifikation der Parabel der berechnete Wert der Steifigkeit dem gemessenen Wert anpassen. Bild 5.8 zeigt die gemessenen und interpolierten Rechenwerte für die Scherwellengeschwindigkeit. In Tabelle 5.1 sind die zugehörigen Horizontalsteifigkeiten der Pfahlgruppe zusammengestellt.

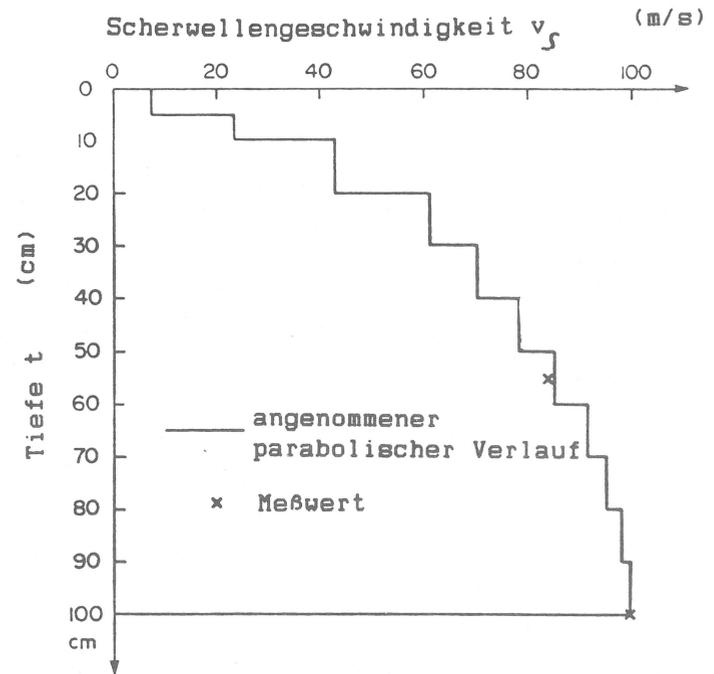
Die Impedanzen ( dynamische Steifigkeiten ) sind im Frequenzbereich 0 bis 50 Hz mit den gleichen Bodenkennwerten errechnet worden. Für mehrere Frequenzen sind sie außerdem mit einem großen doppelsymmetrischen Modell ( entsprechend der Pfahlanordnung nach Bild 5.6 ) bestimmt worden. Die Ergebnisse weichen nur gering voneinander ab (  $< 10\%$  ). Sie sind hier nicht vollständig aufgeführt.



Ringnummer Radius Anzahl der Pfähle

Ringnummer	Radius	Anzahl der Pfähle
1	50 mm	4
2	150 mm	12
3	250 mm	20
4	350 mm	28
5	450 mm	36

Bild 5.7 : Äquivalentes Modell für PILAX mit 100 Pfählen



Masse  $\rho$  : 1.68 t/m<sup>3</sup> für 0 mm < t < 1060 mm

$\rho$  : 1.82 t/m<sup>3</sup> für 1060 mm < t < 5060 mm

Poissonzahl  $\nu$  : 0.3

hysteretische Dämpfung  $\xi$  : 2 %

Bild 5.8 : Bodenkennwerte

	Horizontalsteifigkeit (kN/mm)
Experiment	
Y-Richtung	22.8
doppeltsym. PILAX-Modell	
Y-Richtung	23.1
X-Richtung	21.9
äquivalentes PILAX-Modell	
X- oder Y-Richtung	21.6

Tabelle 5.1 : Horizontalsteifigkeiten des Pfahlgruppenmodelles

Die Bilder 5.9 und 5.10 zeigen im Vergleich die berechneten und gemessenen Horizontalverschiebungen der Pfahlkopfplatte. Die Übereinstimmung ist gut, bei Anregung in X-Richtung (Längsrichtung) jedoch schlechter als bei Anregung in Y-Richtung (Querrichtung). Der Grund ist wohl der, daß die mitschwingende Bodenmasse in Wirklichkeit kleiner ist als in der linear elastischen Theorie errechnet wird. Die Abweichung ist geringer bei der Bodenmasse in Schwingungsrichtung als bei der quer zur Schwingungsrichtung. Die Materialdämpfung des Bodens ist mit 2% recht gering angesetzt. Sie wird durch den Versuch bestätigt. Die Abweichungen in den Resonanzfrequenzen deuten darauf hin, daß die dynamische Bodensteifigkeit (i.e. Scherwellengeschwindigkeit) im Versuch höher liegt als rechnerisch angesetzt. Zum Vergleich sind daher Berechnungsergebnisse dargestellt, bei denen  $v_s$  um den Faktor 1.22 erhöht worden ist. Die Kurven in den Bildern 5.9 und 5.10 werden nun praktisch deckungsgleich. Einzig im hohen Frequenzbereich fällt auf, daß die Abstrahlungsdämpfung in der Rechnung überschätzt wird. Das überrascht nicht, wenn man bedenkt, daß im Modell eine ideale Bodenschichtung angenommen

wird. Insgesamt gesehen wird das dynamische Verhalten der Gründung in allen berechneten Fällen gut erfaßt. Wegen des dichten Pfahlabstandes kommt es jedoch zu keiner ausgeprägten Wechselwirkung zwischen den Pfählen. Das System verhält sich ähnlich, als sei es auf einem dicken Einzelpfahl gegründet. Hier sind weitere Versuche wünschenswert.

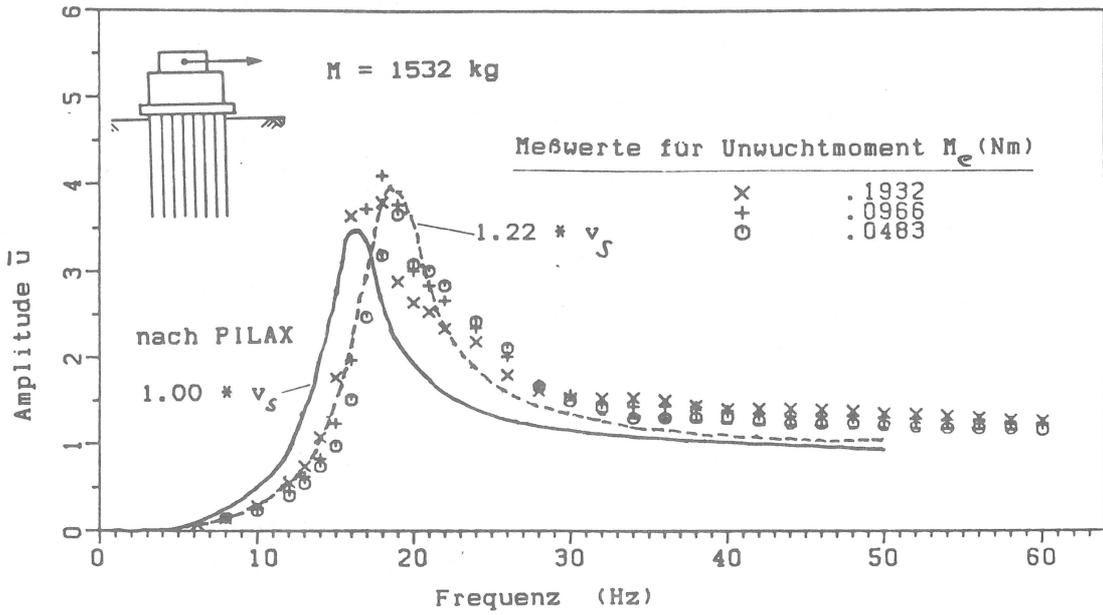


Bild 5.9 : Normierte Horizontalverschiebung  $\bar{u}$  in Y-Richtung

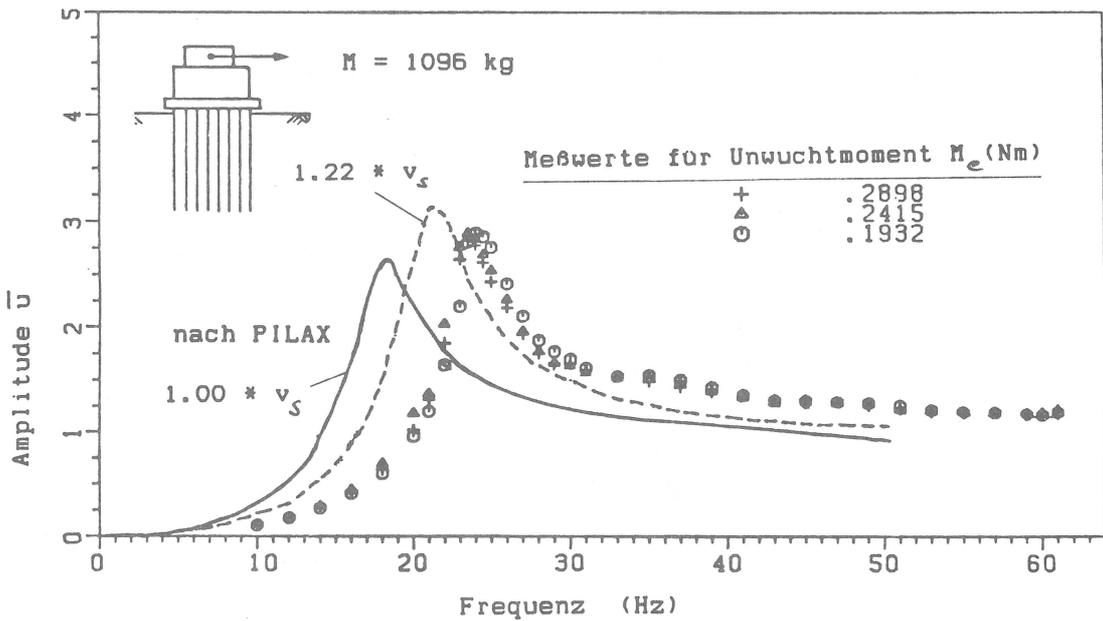


Bild 5.10 : Normierte Horizontalverschiebung  $\bar{u}$  in X-Richtung

## 6. Parameterstudien an Pfahlgründungen

### 6.1 Beschreibung der maßgebenden Parameter

Beim Versuch, das Verhalten horizontal belasteter Pfahlgründungen rechnerisch zu erfassen, stößt man auf eine Reihe von Problemen. Läßt man einmal die nichtlinearen Effekte unberücksichtigt, so stellen sich im statischen Fall im wesentlichen die folgenden Fragen :

- in welcher Weise erfolgt der Lastabtrag beim homogenen und beim geschichteten Boden ?
- wie groß ist der Einfluß des Pfahlabstandes auf die Steifigkeit der Gruppe ?
- wie verteilen sich die Schnittkräfte auf die einzelnen Pfähle ?
- wie beeinflußt die Pfahlanzahl die Steifigkeit der Gruppe ?
- wie unterscheidet sich ein gelenkiger Pfahlkopfanschluß von einem biegesteifen in seiner Auswirkung auf Steifigkeit und Pfahlschnittkraft ?

Im dynamischen Fall kann der Boden zu einem viskoelastischen Medium idealisiert werden. Man steht dann vor den weiteren Fragen :

- in welcher Weise hängen Steifigkeit und Dämpfung von der Frequenz der Anregung ab ?
- wie weicht die dynamische Gruppenwirkung von der statischen ab ?
- wie ändert sich die Verteilung der Pfahlschnittkräfte gegenüber dem statischen Fall ?

und schließlich bei Erdbebenanregung über das Freifeld :

- wie beeinflußt die Pfahlgründung das Übertragungsverhalten des Bodens ?
- wie ist die Auswirkung auf das Verhalten der Pfahlgründung, wenn

in größerer Tiefe starrer Fels statt elastischem Halbraum angenommen wird ?

- wie groß ist die Bedeutung der kinematischen und der trägen Wechselwirkung ?

In einer Parameterstudie mit dem Programm PILAX soll ein Beitrag zur Beantwortung dieser Fragen geleistet werden. Zunächst wird jedoch der Einfluß von Pfahldurchmesser und Poissonzahl des Bodens auf das Verformungsverhalten des Pfahles bestimmt. Diese Variablen werden dann in der weiteren Untersuchung konstant gehalten.

#### 6.1.1 Einfluß von Pfahldurchmesser und Poissonzahl des elastischen Bodens

Bei der Anwendung des Bettungsmodulverfahrens nach Titze / 70 / wird der Bettungsmodul  $k_s$  über die Tiefe als konstant oder beliebig veränderlich angenommen.  $k_s$  ist ein Maß für die Bodensteifigkeit pro Einheitsfläche. Er hat die Dimension ( Kraft/Längeneinheit<sup>3</sup> ). Üblicherweise wird die Kopplung benachbarter Bodenbereiche vernachlässigt.  $k_s$  ist keine Bodenkonstante, sondern muß dem jeweiligen Pfahldurchmesser angepaßt werden. Es gibt verschiedene Vorschläge zur Ermittlung von  $k_s$ , die entweder empirisch durch Labor- und Feldversuche oder über die Elastizitätstheorie abgeleitet worden sind. (siehe dazu Rollberg / 57 / und Smoltzyk / 64 /). DIN 4014 empfiehlt vereinfachend die halbempirische Formel

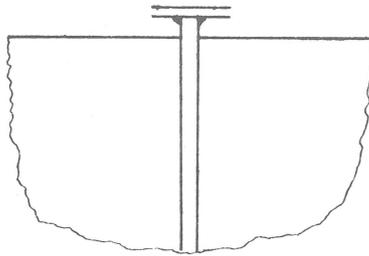
$$k_s = \frac{E_s}{D} \quad ( 6.1.1 )$$

mit  $E_s$  als Steifemodul des Bodens und  $D$  als Pfahldurchmesser.

In der Elastizitätstheorie gilt zwischen Steifenzahl, Elastizitätsmodul und Poissonzahl die Beziehung

$$E_s = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{2(1+\nu)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ( 6.1.2 )$$

$E_s$  entspricht dem Elastizitätsmodul bei allseitig behinderter Seitendehnung. Der Einfluß von Durchmesser und Poissonzahl auf  $k_s$  nach der Näherungsformel ( 6.1.1 ) wird mit Ergebnissen nach PILAX verglichen. Bild 6.1 zeigt das für den Vergleich verwendete Modell.



Wertebereich
$G = 100 \text{ MN/m}^2$
$\nu = 0 \text{ bis } 0.495$
$D = 0.20 \text{ bis } 3.00 \text{ m}$
$EI = 1470 \text{ MNm}^2$

Bild 6.1 : Pfahl in homogenem Halbraum

Bei  $\nu = 0.3$  beträgt  $E = 2 G (1 + \nu) = 260 \text{ MN/m}^2$  und  $E_s = 1.35 E = 350 \text{ MN/m}^2$ . Der Bettungsmodul sei über die Tiefe konstant. Die charakteristische Länge des Pfahles ist definiert als

$$l_0 = \sqrt[4]{\frac{4 EI}{K_B}} \quad ( 6.1.3 )$$

mit  $k_B = k_s D = E_s$ .

Man erhält damit :

$$l_0 = 2.02 \text{ m.}$$

Der Momentennullpunkt liegt bei :

$$\frac{\pi}{4} \cdot l_0 = 1.59 \text{ m.}$$

Die wirksame Pfahllänge beträgt :

$$\max l = 3 l_0 = 6.06 \text{ m.}$$

d.h. : Die Schnittkräfte sind in der Tiefe von 6 m abgeklungen.

Es werden die Bettungsmoduli, die mit beiden Verfahren errechnet worden sind, im folgenden miteinander verglichen.

a) Bettungsmodul nach DIN 4014, Teil 2 ( Bettungsmodulverfahren )

$$K_S = \frac{E_s}{D}$$

b) Bettungsmodul nach PILAX

Mit PILAX werden die Werte der Horizontalsteifigkeit berechnet. Flores-Berrones / 14 / gibt für einen am Pfahlkopf eingespannten Pfahl in einer homogenen Schicht als analytische Lösung die Horizontalsteifigkeit an :

$$K_H = 4EI \frac{1}{l_0^3} \frac{\sinh^2 \frac{H}{l_0} + \cos^2 \frac{H}{l_0}}{\sinh \frac{H}{l_0} \cosh \frac{H}{l_0} - \sin \frac{H}{l_0} \cos \frac{H}{l_0}} \quad (6.1.5)$$

mit  $l_0$  als charakteristischer Länge und  $H$  als Schichtdicke.

Wird  $H/l_0 > 2.5$ , was hier zutrifft, vereinfacht sich ( 6.1.5 ) zu

$$K_H = \frac{4EI}{l_0^3} \quad (6.1.6)$$

Mit den Gleichungen ( 6.1.3 ) und ( 6.1.6 ) kann aus der Horizontalsteifigkeit eines Pfahles, wie sie mit PILAX bestimmt worden ist, ein fiktiver Bettungsmodul rückerrechnet werden.

$$K_S = \frac{1}{D} \sqrt[3]{\frac{K_H^4}{4EI}} \quad (6.1.8)$$

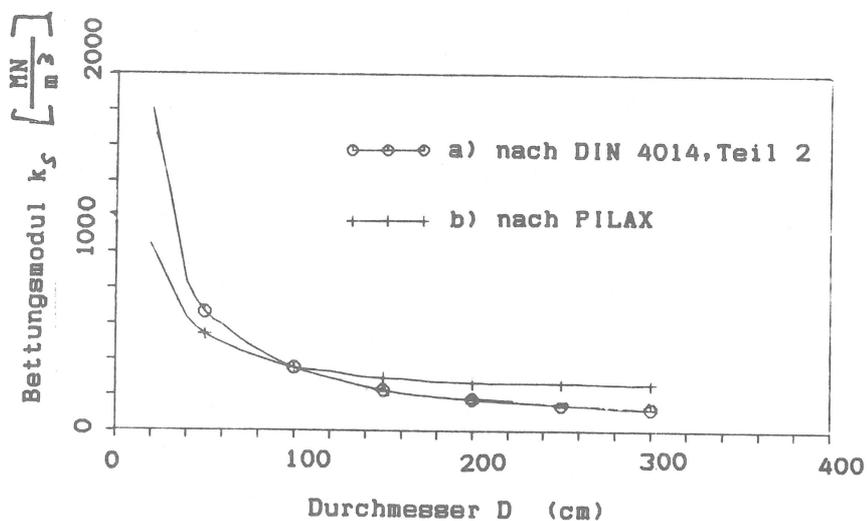


Bild 6.2 : Bettungsmodul in Abhängigkeit vom Pfahldurchmesser

Bild 6.2 zeigt die Bettungsmoduli, die mit den beiden beschriebenen Verfahren errechnet worden sind. Bei konstanter Pfahlsteifigkeit ist der Durchmesser verändert worden, um seinen Einfluß auf den Bettungsmodul festzustellen. Man erkennt, daß die Werte im Bereich der üblichen Pfahldurchmesser gut übereinstimmen. Für  $D > 100$  cm ergibt die Näherungsformel der DIN eine kleinere Bettungszahl als die Lösung für das dreidimensionale Kontinuum.

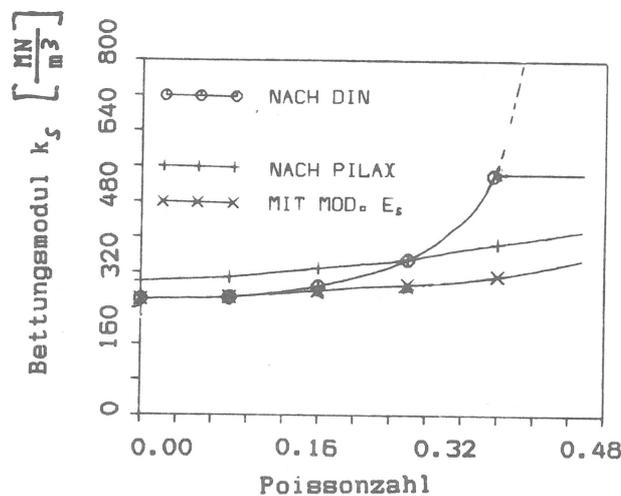


Bild 6.3 : Bettungsmodul in Abhängigkeit von der Poissonzahl

Bild 6.3 zeigt die Abhängigkeit des Bettungsmoduls von der Poissonzahl bei  $D = 100$  cm. Der Steifemodul wird bei der Errechnung aus  $E$  und  $\nu$  nach Gleichung ( 6.1.2 ) infinit. Da hier kein sinnvoller physikalischer Hintergrund existiert, wird das Verhältnis  $E_s/E$  auf 2.0 begrenzt, wie es auch bei Setzungsberechnungen üblich ist. Die maximale Poissonzahl entspricht dabei  $\nu = 0.39$ .

Die mit PILAX errechnete Funktion zeigt nur eine schwache Abhängigkeit von  $\nu$ . Da die Bodensteifigkeit über die Pfahllänge konstant ist, bestimmt der Boden in Oberflächennähe das Pfahlverhalten. Die in der  $k_s$  - Theorie implizierte Annahme eines ebenen Dehnungszustan-

des trifft hier nicht zu. Dabei wächst der Fehler mit zunehmendem  $\nu$ . Die PILAX-Berechnung dagegen erfaßt diese dreidimensionalen Effekte. Der Einfluß der Poissonzahl auf den Bettungsmodul in der Formel nach DIN wird stark überschätzt, wendet man die Beziehungsgleichung der Elastizitätstheorie an. Wie schon erwähnt, ist  $E_s$  dabei der Modul bei allseits behinderter Seitendehnung. Es liegt nahe, stattdessen den Modul für einseitig behinderte Seitendehnung ( nämlich der in Richtung der Pfahlachse ) zu verwenden.

$$\text{mod } E_s = E \frac{1}{1-\nu^2} \quad ( 6.1.9 )$$

Die entsprechende Kurve ist ebenfalls in Bild 6.3 eingetragen. Der Einfluß der Poissonzahl ist nun ähnlich wie bei den Ergebnissen nach PILAX.

## 6.2 Wertebereich der Parameterstudie

### 6.2.1 Bodenprofile

Die Parameterstudie wird exemplarisch durchgeführt für Bodenverhältnisse, wie sie im norddeutschen Küstenbereich anzutreffen sind. Der Boden besteht nahe der Oberfläche aus organischen Weichschichten (Klei und Torf) von breiiger Konsistenz mit eingelagerten Sandschichten. Darunter folgen Sande und Kiese, die über mitteldicht und dicht in größerer Tiefe schließlich (ca. 50 m) sehr dicht gelagert sind. Felsuntergrund ist in erreichbarer Tiefe nicht vorhanden. PILAX enthält die Einschränkung, daß das Schichtenmodell des Bodens auf starrem Halbraum aufliegen muß. Ist wie hier kein Felsuntergrund vorhanden, so muß die Modellunterkante in eine solche Tiefe verlegt werden, bei der nur schwache Beeinflussungen der Pfahlschnittgrößen erwartet werden. In Abweichung von den tatsächlichen Verhältnissen am Standort wird zunächst angenommen, daß sich in 50.4 m Tiefe der

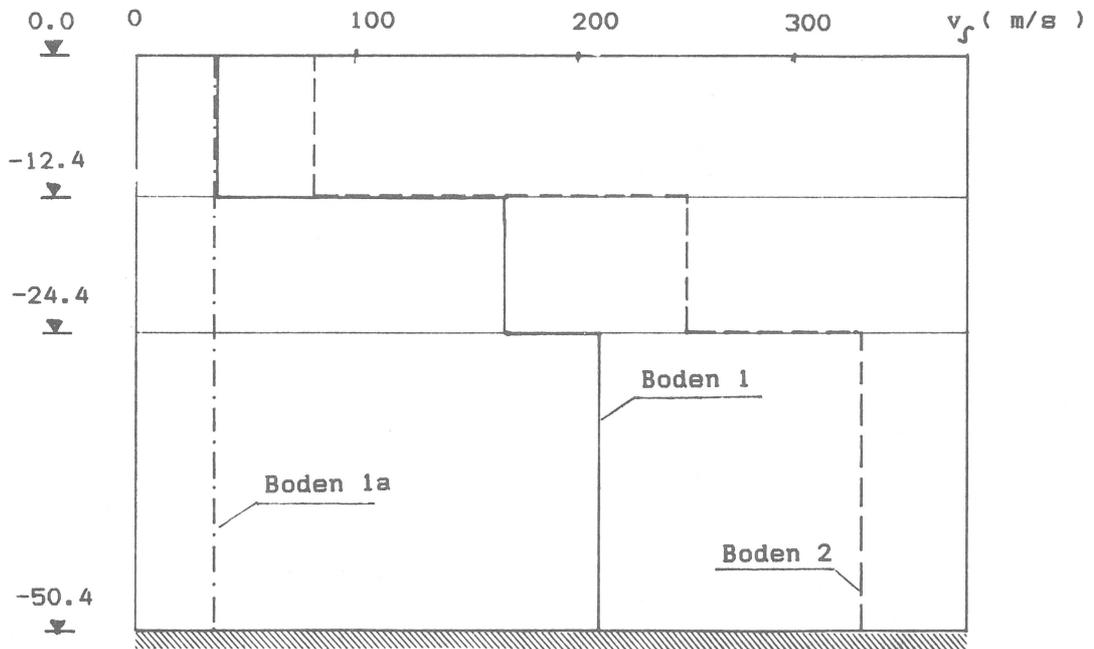


Bild 6.5 : Scherwellengeschwindigkeit im Bodenprofil

starre Untergrund befindet. Im Anschluß daran wird in einer Näherungsberechnung untersucht, wie sich die Ergebnisse bei Annahme des elastischen Untergrundes verändern.

Die Bodenkennwerte sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Mit Boden 1 ist ein weicher Boden definiert, mit Boden 2 ein steiferer. Diese minimalen und maximalen Kennwerte decken im wesentlichen die Streuung der Bodeneigenschaften ab. Zum Vergleich ist mit Boden 1a ein Profil definiert, bei dem sich die weiche Zone des Boden 1 unverändert in die Tiefe erstreckt. Bild 6.5 zeigt den Verlauf der Scherwellengeschwindigkeiten in den drei Bodenprofilen.

Boden 1 ( geschichtet, weich )						
Tiefe	Wichte	Schubmodul	Poissonzahl	Scherwellengeschw.	mod. $E_S^*$	Dämpfungsmaß
m	t/m <sup>3</sup>	MN/m <sup>2</sup>	-	m/s	MN/m <sup>2</sup>	%
12.4	1.5	2.0	0.49	36.5	7.8	10
24.4	1.8	50.0	0.49	167.0	196.0	10
50.4	2.0	91.0	0.48	213.0	350.0	10
bei elastischem Untergrund :						
> 50.4	2.0	200.0	0.48	316.0	-	-
Boden 2 ( geschichtet, steif )						
Tiefe	Wichte	Schubmodul	Poissonzahl	Scherwellengeschw.	mod. $E_S^*$	Dämpfungsmaß
m	t/m <sup>3</sup>	MN/m <sup>2</sup>	-	m/s	MN/m <sup>2</sup>	%
12.4	1.5	10.0	0.49	82.0	39.2	6
24.4	1.8	115.0	0.49	253.0	451.0	4
50.4	2.0	220.0	0.48	332.0	846.0	5
bei elastischem Untergrund :						
> 50.4	2.0	500.0	0.48	500.0	-	-

Tabelle 6.1 : Bodenkennwerte <sup>\*</sup> nach Gleichung ( 6.1.9 )

### 6.2.2 Pfahlgründungen

Bild 6.6 zeigt die untersuchten Pfahlgruppenmodelle.

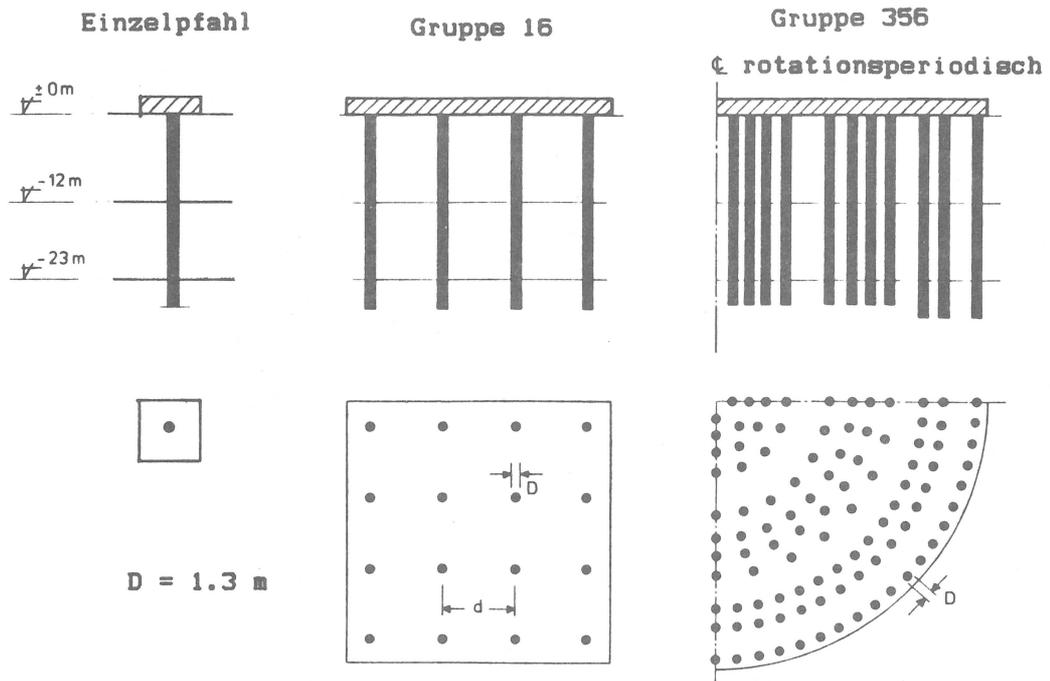


Bild 6.6 : Untersuchte Pfahlgruppen

Die Pfahlkennwerte sind :

Durchmesser $D$ :	1.30 m	Biegesteifigkeit $EI$ :	4206 MNm <sup>2</sup>
Pfahllänge $l$ :	26.4 m	Massendichte $\rho$ :	2.5 t/m <sup>3</sup>
E-Modul $E_p$ :	30000 MN/m <sup>2</sup>	Materialdämpfung $\xi$ :	-
Poissonzahl $\nu$ :	0.2	Pfahlkopfanschluß :	biegesteif oder gelenkig

Dobry e.a. / 12 / schlagen als Klassifikationsmerkmal für die Pfahlsteifigkeit den dimensionslosen Parameter  $S_H$  vor.

$$S_H = \frac{L/D}{\sqrt[4]{E_p/E_s}} \quad ( 6.2.1 )$$

mit  $S_H > 5$  : langer oder weicher Pfahl : die dynamische Pfahlkopfverschiebung ist unabhängig von der Pfahllänge

$S_H < 5$  : kurzer oder steifer Pfahl : die Pfahllänge beeinflusst die Verschiebungen

Man erhält damit für die zu untersuchenden Pfähle

Boden 1 :  $S_H = 5.8$

Boden 2 :  $S_H = 7.1$

Boden 3 :  $S_H = 2.6$

### 6.2.3 Lastfälle

Die Belastungen wirken grundsätzlich horizontal, erzeugen in den vertikalen Pfählen also Querkräfte und Biegemomente. Es werden drei Lastfälle untersucht :

#### 1. Statischer Fall :

- statische Horizontalkraft  $H = n \cdot 1.0$  MN an der Pfahlkopfplatte  
(  $n$  : Anzahl der Pfähle )

#### 2. Dynamischer Fall :

- harmonische Horizontalkraft  $H = n \cdot 1.0 e^{i\Omega t}$  MN an der Pfahlkopfplatte

#### 3. Erdbeben :

- harmonische Horizontalbeschleunigung  $b_1 = 1.0 e^{i\Omega t}$  m/s<sup>2</sup> an der Modellunterkante. Im Falle eines starren Untergrundes ist  $b_1$  die Gesamtamplitude der Scherwelle. Bei elastischem Untergrund wird  $b_1$  zu  $b_1'$ , nämlich zur Amplitude der einfallenden Scherwelle. ( siehe dazu Kapitel 6.3 ).

- Zwei Beschleunigungszeitverläufe an der Modellunterkante wie auf den Bildern 6.7 und 6.8 dargestellt. Die Beschleunigungen wurden beim Friaul-Erdbeben 1976 in Tolmezzo und bei einem amerikanischen Erdbeben 1940 in El Centro gemessen. Ebenfalls abgebildet sind die zugehörigen Beschleunigungsantwortspekten. Als Antwortspektrum be-

zeichnet man die Maxima der Bewegungsgrößen von Einmassenschwingern, die der Eigenfrequenz nach geordnet sind. Das Spektrum veranschaulicht, wie stark das Erdbeben ein Bauwerk in bestimmten Frequenzbereichen anregt. Da die Antwortschwingung von der jeweiligen Strukturdämpfung im Gebäude abhängt, werden Antwortspektren im allgemeinen für mehrere Dämpfungsmaße angegeben, im vorliegenden Fall für  $D = 5\%$  und  $D = 10\%$  .

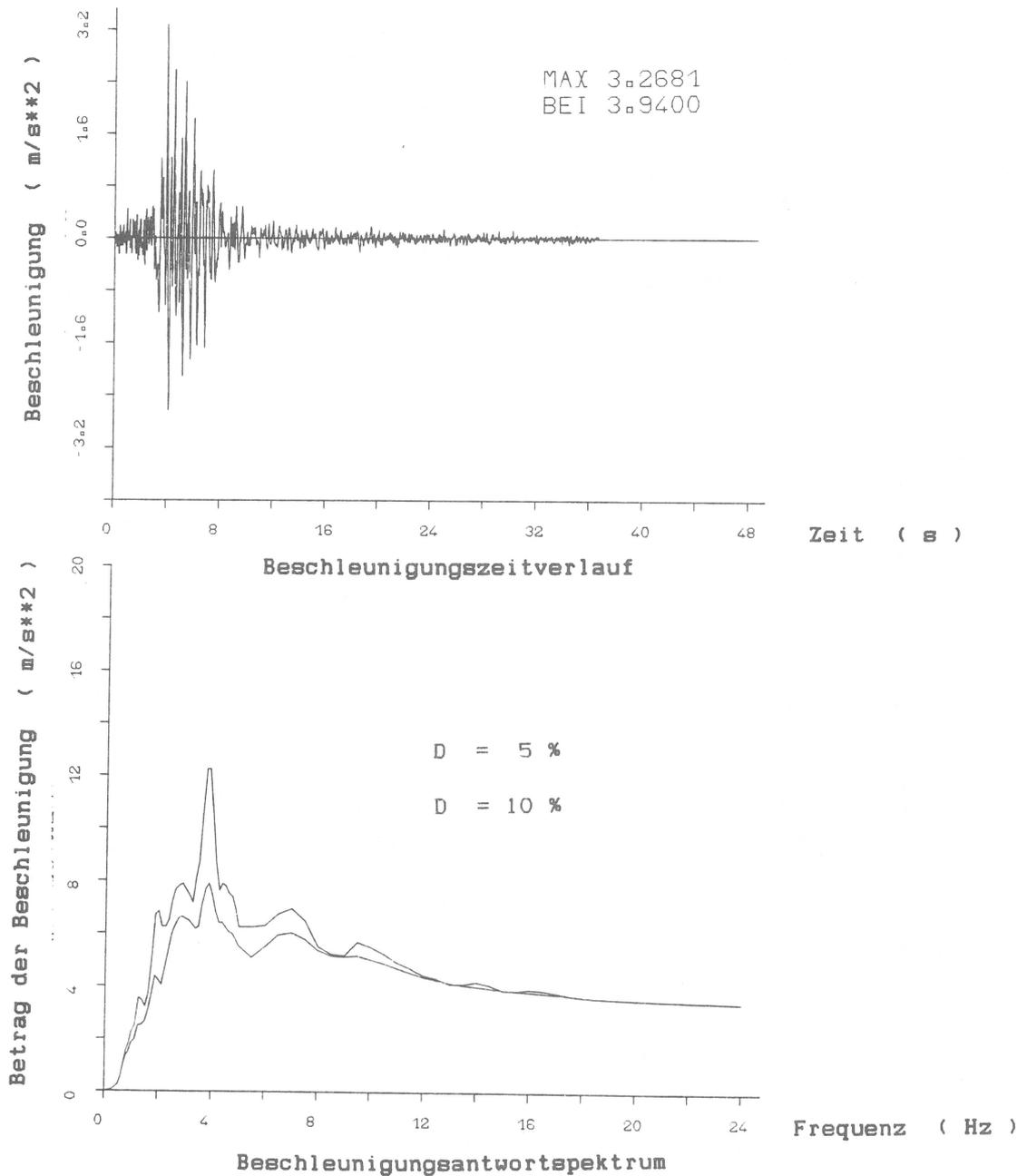
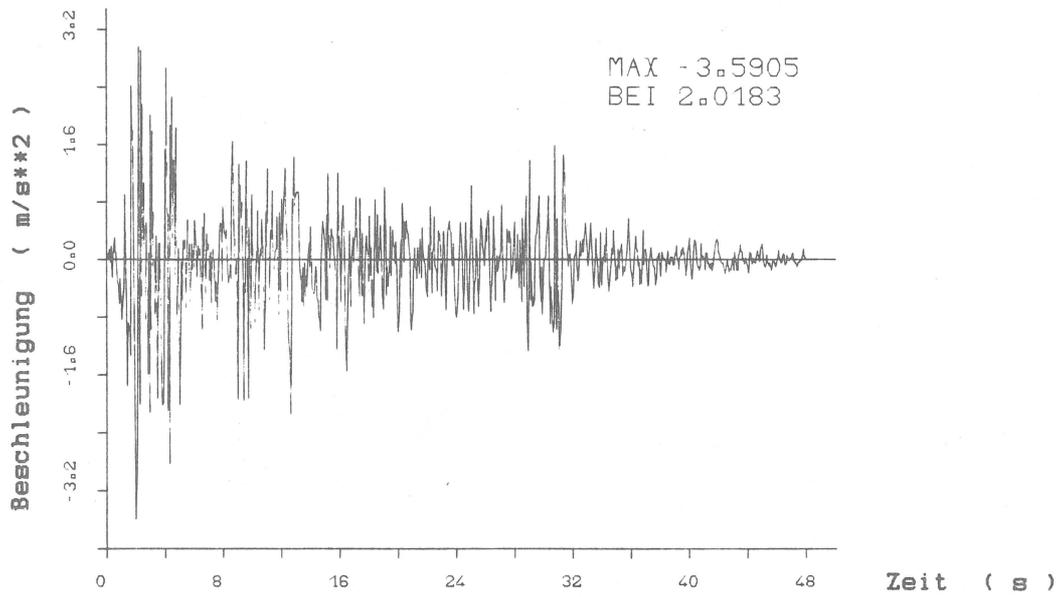
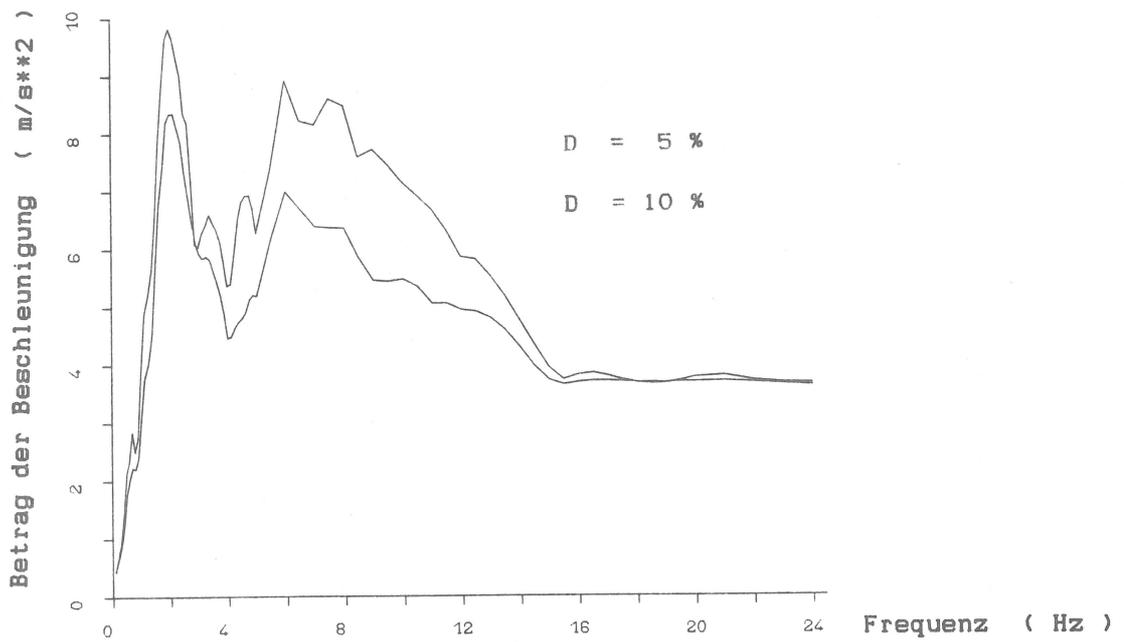


Bild 6.7 : Erdbeben Friaul 1976, Tolmezzo Komponente Nord-Süd



Beschleunigungszeitverlauf



Beschleunigungsantwortspektrum

Bild 6.8 : Erdbeben El Centro 1940, Komponente West



Definitionsgemäß sind die Zustandsgrößen im Frequenzbereich harmonisch. Damit gilt die gleiche Übertragungsfunktion für die Freifeldbeschleunigung

$$H_{12}(\Omega) = \frac{b_2(\Omega)}{b_1(\Omega)} = \frac{-\Omega^2 u_2(\Omega)}{-\Omega^2 u_1(\Omega)} \quad (6.3.2)$$

Die Funktion  $H_{12}$  wird für die Bodenprofile 1 und 2 mit der in Anhang F hergeleiteten Theorie berechnet.

Mit dem Programm PILAX wird  $H_{13}$ , die Übertragungsfunktion der Beschleunigung von der Basis zur Pfahlkopfplatte errechnet. Die Übertragungsfunktion von der Geländeoberfläche des Freifeldes zur Pfahlkopfplatte erhält man als

$$H_{23}(\Omega) = H_{21}(\Omega) \cdot H_{13}(\Omega) = H_{12}^{-1}(\Omega) \cdot H_{13}(\Omega) \quad (6.3.3)$$

Auf die gleiche Weise wie für die Beschleunigungen lassen sich Übertragungsfunktionen für beliebige Verformungen und Schnittkräfte in den Pfählen herleiten.

Die Bilder 6.10a und 6.10b zeigen Betrag und Phase der Funktion  $H_{12}$  für Boden 1 und Boden 2 auf starrem Halbraum ( $\alpha = \infty$ ). Man erkennt eine starke Überhöhung bei Resonanz. Die sich in der Schichtung ausbreitenden Scherwellen werden an der Geländeoberfläche und am starren Untergrund vollständig reflektiert. Da sie nicht in die Tiefe zurücklaufen können, speichert sich seismische Energie in der Schichtung an, die lediglich durch hysteretische Dämpfung abgebaut werden kann. Man erhält deshalb bei  $\xi = 0$  bei den Resonanzfrequenzen der Übertragungsfunktion Singularitäten.

In Anhang F ist eine einzelne Bodenschicht auf dem Halbraum untersucht worden. Die Annahme eines starren Halbraumes führt, insbesondere bei niedriger Dämpfung, zu starken Überhöhungen der Übertragungsfunktionen. Sie lassen sich wesentlich reduzieren, wenn durch

einen elastischen Halbraum Abstrahlungsdämpfung in die Tiefe zugelassen wird. An die Stelle der Beschleunigungsamplitude  $b_1$  tritt dabei die Amplitude  $b_1'$  der einfallenden Scherwelle.

Es werden auf die gleiche Weise wie in Anhang F die Übertragungsfunktionen von Boden 1 und Boden 2 modifiziert. In den Bildern 6.10 a und b gelten die mit  $\alpha = 100$  bezeichneten Funktionen für einen Halbraum mit der 100-fachen Steifigkeit der untersten Schicht. Bei  $\alpha = 2$  ist der Halbraum doppelt so steif, entspricht also dem in Tabelle 6.1 angegebenen Bodenprofil. Wie man erkennt, verschwindet in beiden Profilen die zweite Resonanzspitze fast vollständig. Sie entsteht bei  $\alpha = \infty$  durch die Schwingung des gesamten Schichtenpaketes auf der starren Unterlage.

Die Bilder 6.11a und 6.11b zeigen mit der Übertragungsfunktion  $H_{1/1}$  das Verhältnis der Gesamtamplitude an der Oberfläche des Halbraumes zur Amplitude der einfallenden Welle.

$$H_{1/3} \approx H_{1/1} \cdot H_{13} \quad ( 6.3.4 )$$

Durch Multiplikation mit  $H_{13}$  erhält man eine Näherungslösung für die Beschleunigung an der Pfahlkopfplatte. Die Lösung ist eine Näherung, weil vorausgesetzt werden muß, daß an der Unterseite der Schichtung die aussteifende Wirkung der Pfähle vernachlässigbar klein ist. Das ist im Prinzip immer möglich, wenn das Schichtenmodell genügend tief gewählt wird.

Für die Bemessung der Pfahlgründung und des Bauwerks benötigt man die zeitlichen Maxima der Schnittgrößen bei Anregung durch Erdbeben. Der Beschleunigungszeitverlauf wird entweder an der Oberfläche oder in einer bestimmten Tiefe des Freifeldes angenommen. Er wird zunächst mit Gleichung ( 2.1.8 ) in den Frequenzbereich transformiert. Man erhält ein Fourierspektrum, das mit der entsprechenden Übertra-

gungsfunktion multipliziert und damit auf den zu untersuchenden Ort und die zu untersuchende Schnittgröße bezogen wird. Die Rücktransformation in den Zeitbereich geschieht mit Gleichung ( 2.1.9 ) und ergibt den Zeitverlauf der Antwortschwingung oder -schnittgröße. Bei den hier verwendeten Zeitverläufen Tolmezzo und El Centro wird der Einfachheit halber angenommen, daß sie an der Modellunterkante, also bei -50.4 m auftreten. Bei weichem Boden erhält man an der Stelle ② ( siehe Bild 6.9 ) Antwortspektren, die auf den Bildern 6.12a und 6.12b aufgezeichnet sind. Die Ergebnisse für den steifen Boden findet man auf den Bildern 6.13a und 6.13b. Nebeneinander gestellt sind jeweils Ergebnisse bei Annahme eines starren und eines elastischen Halbraumes. Wie schon bei den Übertragungsfunktion ist zu erkennen, daß das Anregungsniveau stark sinkt, wenn die Wellenabstrahlung in den Halbraum zugelassen wird ( im Mittel auf die Hälfte ).

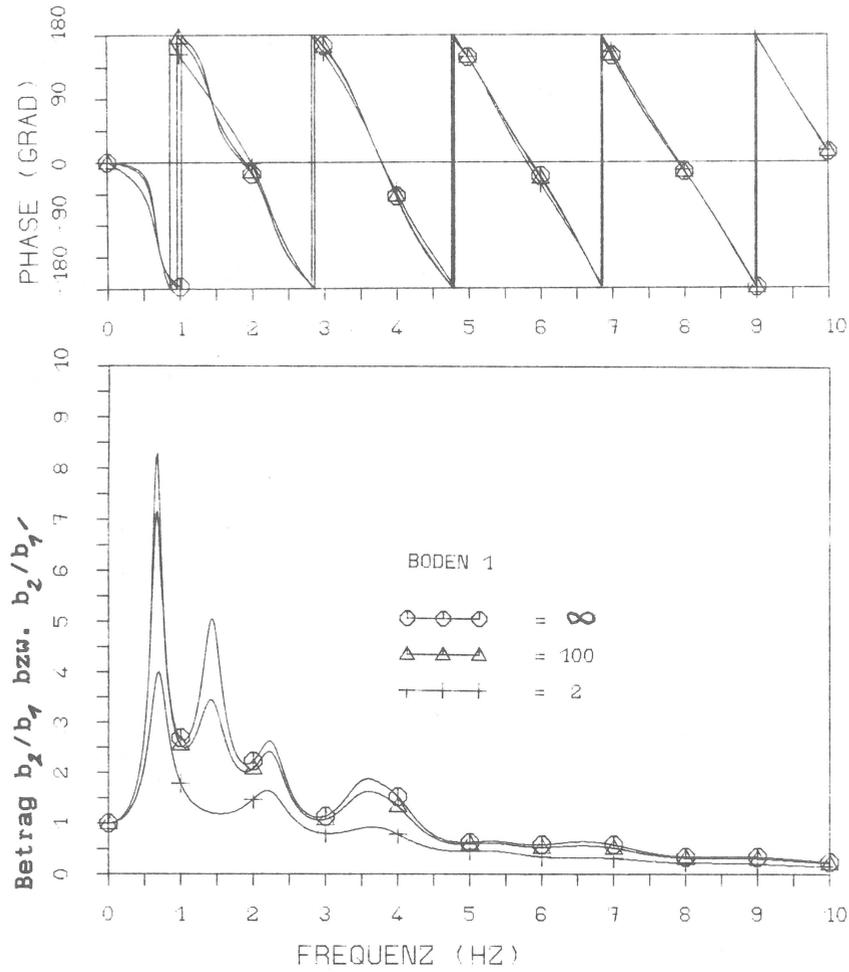


Bild 6.10a : Übertragungsfunktion der Horizontal beschleunigung  $H_{12}$  für Boden 1

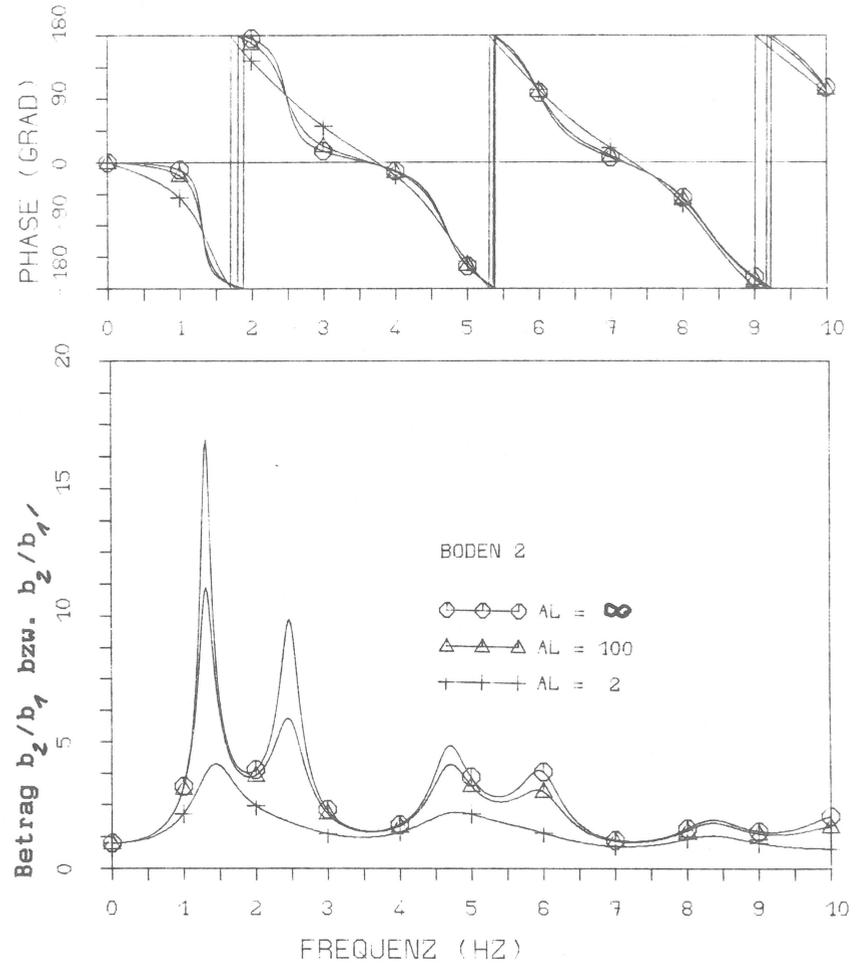


Bild 6.10b : Übertragungsfunktion der Horizontal beschleunigung  $H_{12}$  für Boden 2

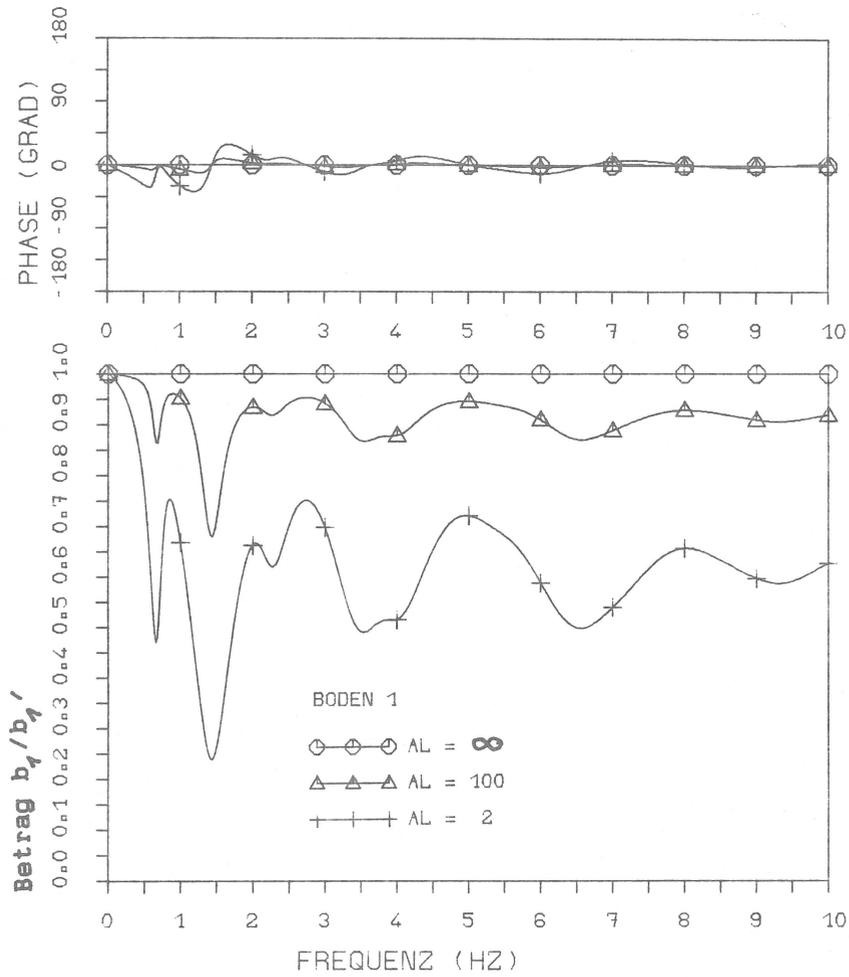


Bild 6.11b : Übertragungsfunktion der Horizontal beschleunigung  $H_{1,1}$  für Boden 1

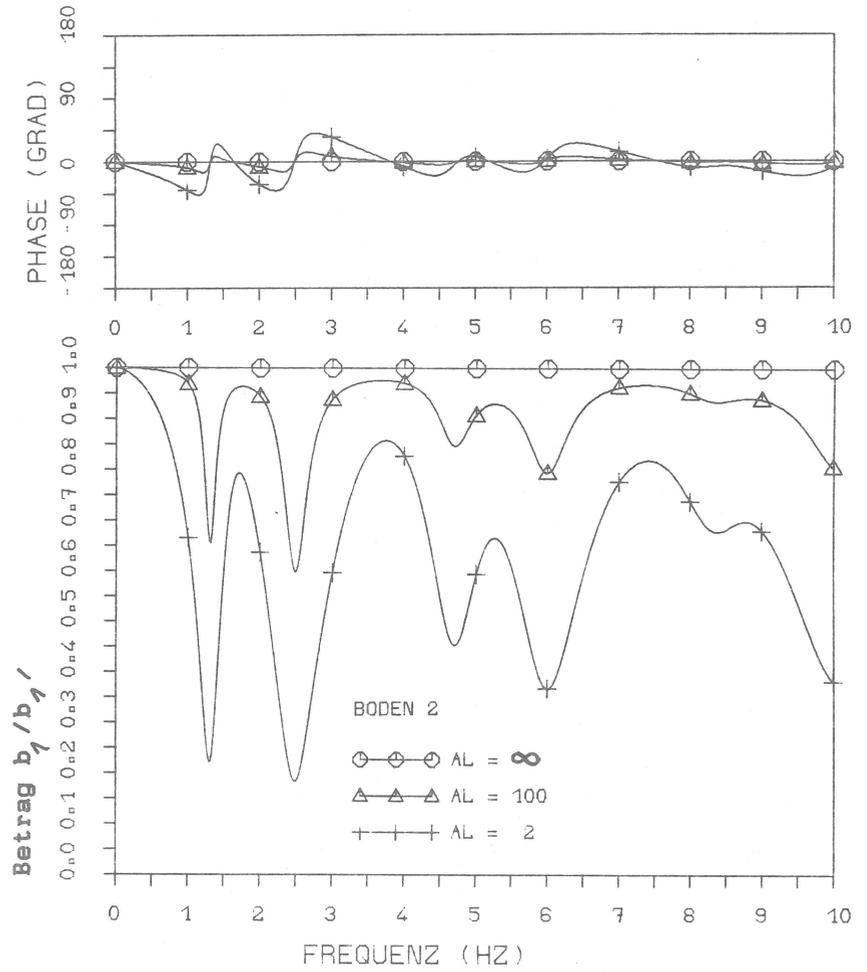


Bild 6.11a : Übertragungsfunktion der Horizontal beschleunigung  $H_{1,1}$  für Boden 2

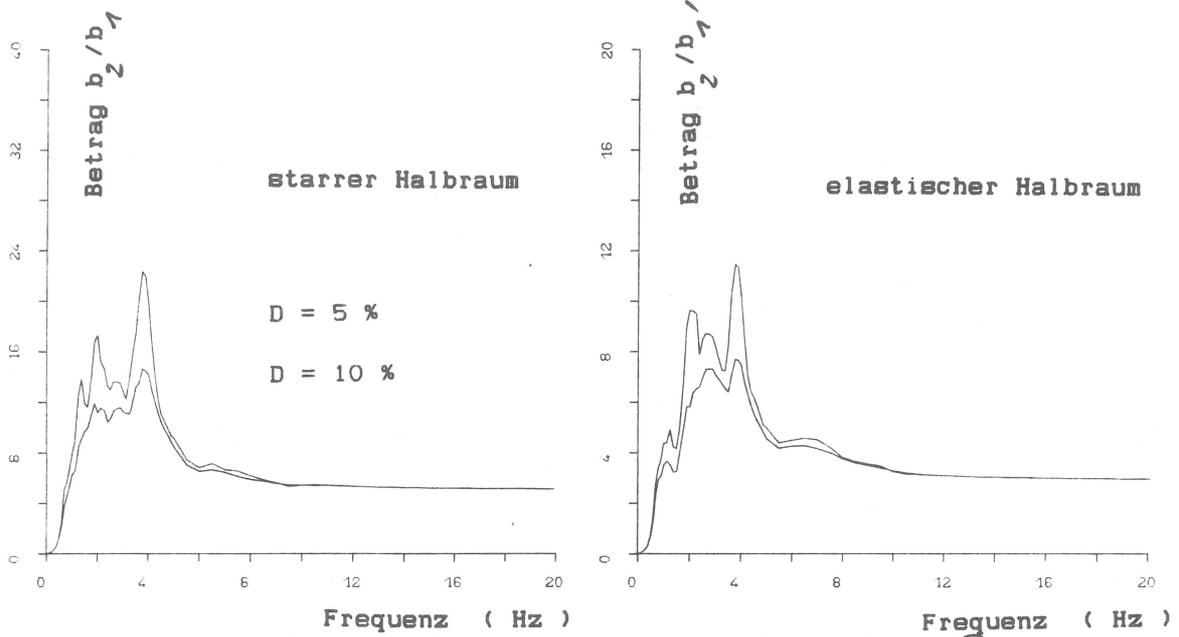


Bild 6.12a : Beschleunigungsantwortspektren an Stelle (2)

für Boden 1 Tolmezzo

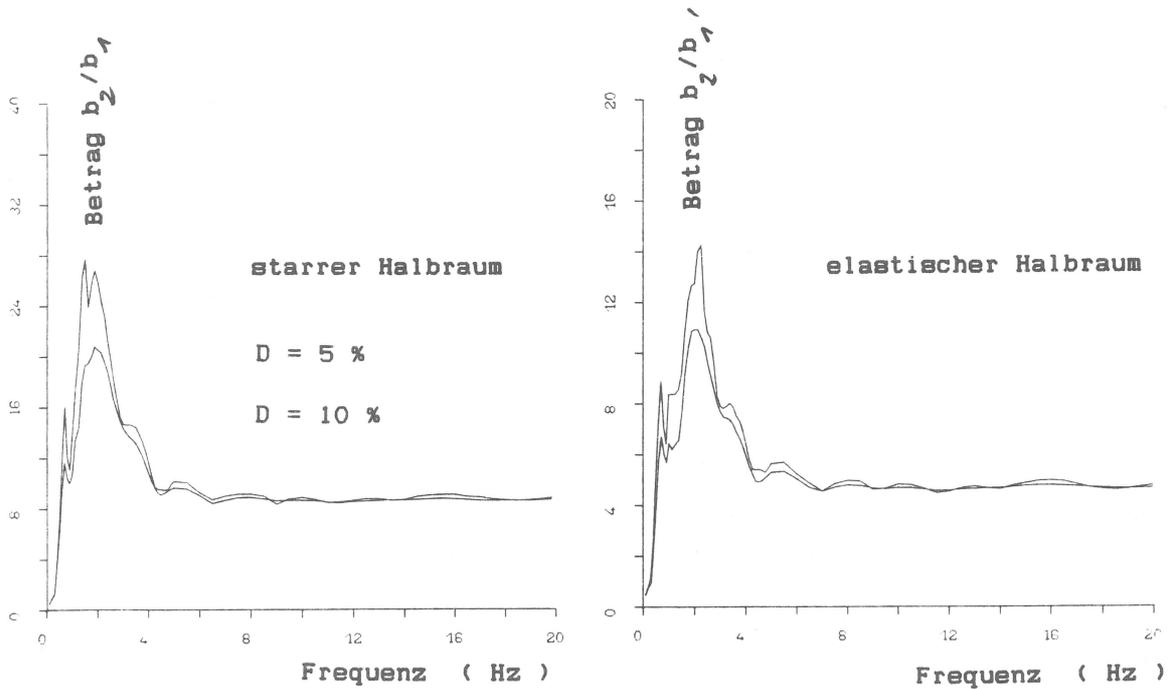


Bild 6.12b : Beschleunigungsantwortspektren an Stelle (2)

für Boden 1 , El Centro

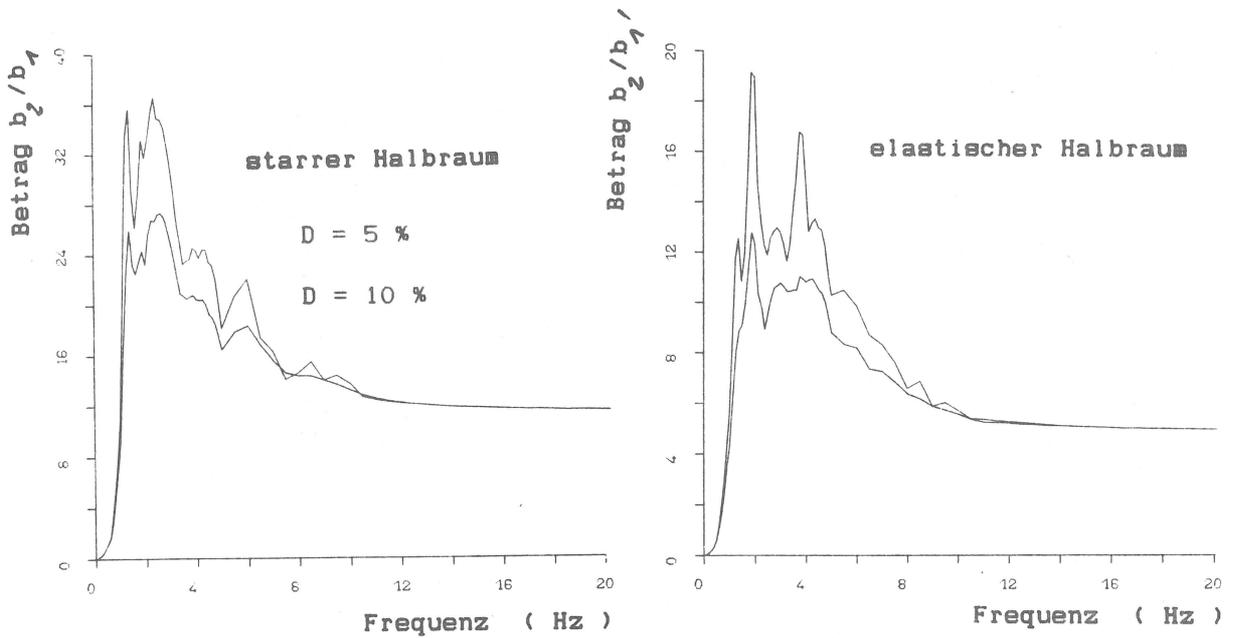


Bild 6.13a : Beschleunigungsantwortspektren an Stelle (2) für Boden 2, Tolmezzo

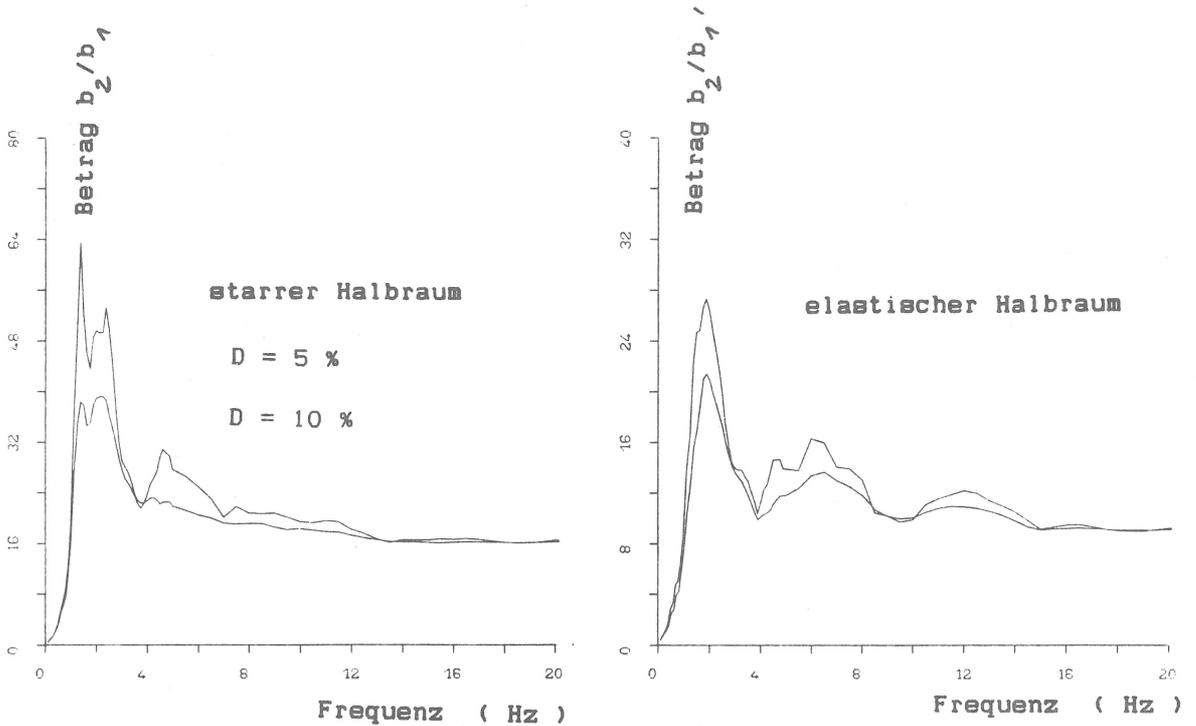


Bild 6.13b : Beschleunigungsantwortspektren an Stelle (2) für Boden 2, El Centro

### 6.3.1 Definition der kinematischen und der trägen Wechselwirkung

In den Kapiteln 6.4.3 und 6.5.3 der Parameterstudie wird die Erdbebenwirkung in kinematische und träge Wechselwirkung unterteilt. Unter kinematischer Wechselwirkung versteht man die Veränderung des seismischen Wellenfeldes aufgrund der lokalen Bodenverhältnisse in der Nähe der Oberfläche und aufgrund der Geometrie und Steifigkeit des Gebäudes. Inhomogene obere Bodenschichten filtern die Wellen in Frequenzgehalt und Amplitude. Die Außenflächen des Gebäudes reflektieren, streuen oder beugen sie. Die Wellen ihrerseits prägen dem Gebäude Verformungen ein und verursachen somit Schnittkräfte.

Die träge Wechselwirkung entsteht durch die Schwingung des Gebäudes. Dabei wird Energie in den Boden abgestrahlt, der Boden beeinflusst durch seine Nachgiebigkeit das dynamische Verhalten des Gebäudes.

Bild 6.14 illustriert die Aufteilung des Gesamtproblems in die Teilprobleme.

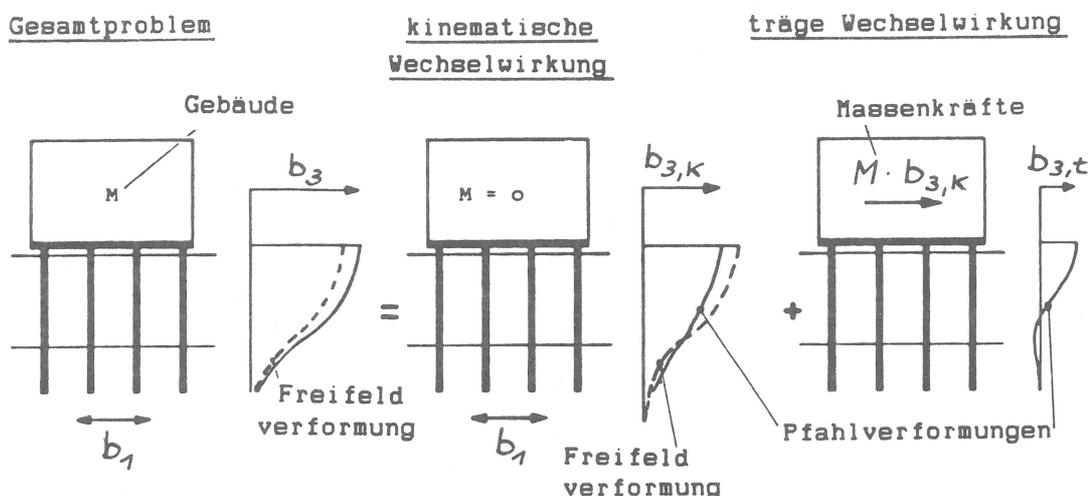


Bild 6.14 : Unterteilung des Gesamtproblems in kinematische und träge Wechselwirkung

## 6.4 Einzelpfahl

### 6.4.1 Statischer Fall

Im einfachsten Fall besteht eine Pfahlgründung aus einem Einzelpfahl. Wenn bei einer Pfahlgruppe die Abstände  $d$  zwischen den  $n$  Pfählen so groß sind, daß gegenseitige Beeinflussungen vernachlässigbar werden, genügt im Rechenmodell die Betrachtung eines  $n$ -fachen Einzelpfahles. Die DIN 4014 empfiehlt eine solche Vereinfachung ab  $d = 8 D$  zu.

Der unterschiedliche Lastabtrag eines biegesteif oder gelenkig angeschlossenen Pfahles im homogenen oder im geschichteten Boden soll zunächst untersucht werden. Tabelle 6.2 enthält die am Pfahlkopf errechneten Horizontalsteifigkeiten. Der Index  $b$  kennzeichnet einen biegesteif, der Index  $g$  einen gelenkig angeschlossenen Pfahlkopf.

Horizontalsteifigkeit $K_1$ ( MN/m )			
Profil	$K^b$	$K^g$	$K^g/K^b$
Boden 1	53	28	0.53
Boden 2	175	103	0.59
Boden 1a	45	26	0.58

Tabelle 6.2 : Horizontalsteifigkeiten des Einzelpfahles

Maximales Biegemoment $M$ ( MNm )			
Profil	$M^b$	$M^g$	$M^g/M^b$
Boden 1	3.5	1.9	0.54
Boden 2	2.1	1.1	0.52
Boden 1a	3.3	1.8	0.55

Tabelle 6.3 : Biegemomente des Einzelpfahles bei  $F = 1$  MN

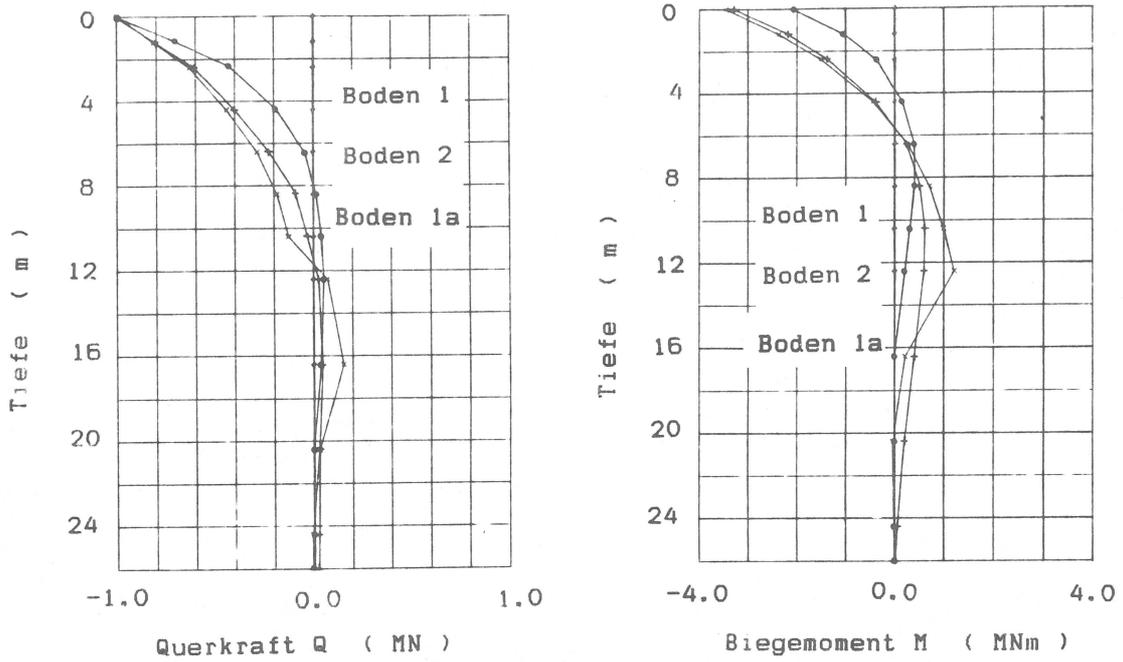


Bild 6.14 : Schnittkräfte des biegesteif angeschlossenen Pfahles  
infolge  $F = 1 \text{ MN}$

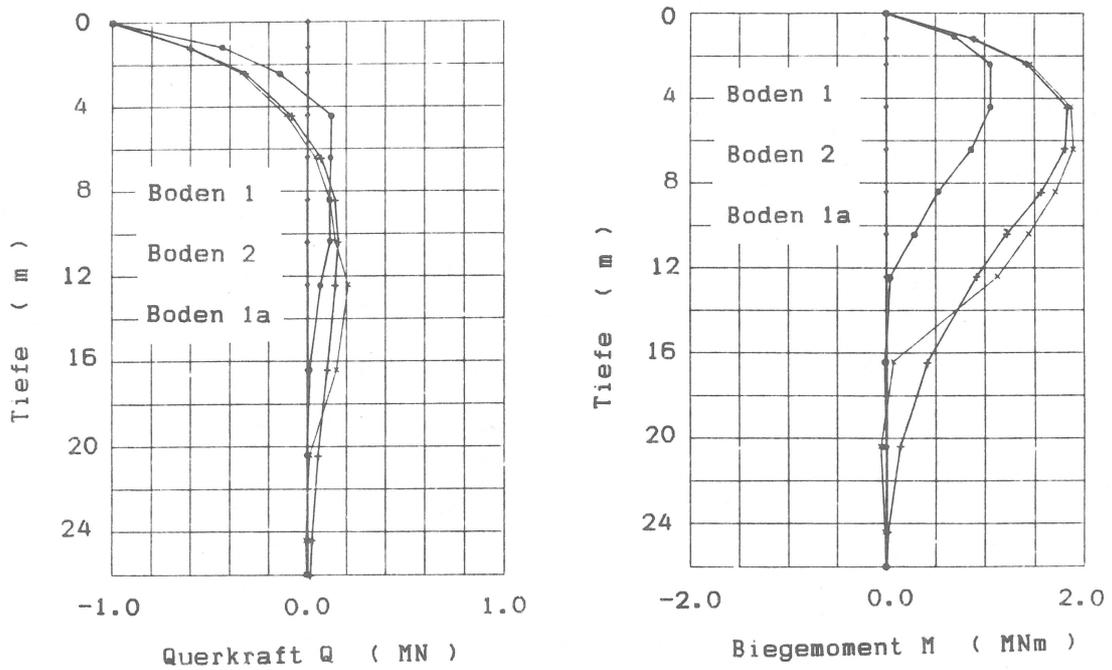


Bild 6.15 : Schnittkräfte des gelenkig angeschlossenen Pfahles  
infolge  $F = 1 \text{ MN}$

Die Horizontalkraft  $F = 1.0 \text{ MN}$  am Pfahlkopf erzeugt Schnittkräfte wie auf den Bildern 6.14 und 6.15 dargestellt. Tabelle 6.3 zeigt die maximalen Biegemomente. Es ist bemerkenswert, daß bei gleicher Horizontallast die Biegemomente  $M^g$  in der Tiefe kleiner als 60 % der Pfahlkopfmomente  $M^b$  sind. Das Verhältnis der Steifigkeiten ist ähnlich. Wenn bei einer Pfahlgründung die Größe der Horizontalverschiebung keine große Bedeutung hat, ist ein gelenkiger Anschluß eine günstige Lösung. Dabei muß allerdings die linear elastische Theorie für den Boden näherungsweise gelten. Bei ausgeprägtem nichtlinearem Verhalten des Bodens wachsen die maximalen Biegemomente  $M^g$  stärker an als die Biegemomente  $M^b$ . Der Lastabtrag findet nämlich bei gelenkigem Pfahlkopfanschluß mehr im oberflächennahen Bereich des Bodens statt, wo nichtlineare Schubverzerrungen überproportional anwachsen können.

Vergleicht man die Schnittkräfte von Einzelpfählen in geschichtetem (Boden 1) und in homogenem Boden (Boden 1a), so erkennt man, daß Größe und Verteilung im wesentlichen von den Eigenschaften der oberen Bodenzonen bestimmt wird. Das gilt selbst dann, wenn der Boden, wie im vorliegenden Fall, sehr weich ist. Eine Vernachlässigung der Bodenschichtung zur vereinfachten Berechnung des Einzelpfahles ist daher im untersuchten Parameterbereich angemessen.

#### 6.4.2 Dynamischer Fall

Im dynamischen Fall geht die statische Horizontalsteifigkeit  $K_1(f=0)$  des Einzelpfahles in die frequenzabhängige und komplexe Impedanz  $\underline{K}_1(f)$  über.

$$\underline{K}_1(f) = \text{Re}(\underline{K}_1(f)) + i \text{Im}(\underline{K}_1(f)) \quad (6.4.1)$$

In Analogie zum Einmassenschwinger schreibt man (s.a. Gl.(2.1.22))

$$\underline{K}_1(f) = K_1(f)(1 + 2iD(f)) \quad (6.4.2)$$

Die Steifigkeit  $K_1(f)$  und das Dämpfungsmaß  $D(f)$  sind im Unterschied zum viskos gedämpften Einmassenschwinger frequenzabhängig. Der Koeffizientenvergleich führt auf

$$K_1(f) = \text{Re}(\underline{K}_1(f)) \quad (6.4.3)$$

$$D(f) = \left| \frac{\text{Im}(\underline{K}_1(f))}{2 \text{Re}(\underline{K}_1(f))} \right| \quad (6.4.4)$$

Absolutwert der Steifigkeit, Phase und Dämpfungsmaß bei Boden 1 und Boden 2 zeigen die Bilder 6.16 und 6.17. Der Absolutwert ist in normierter Form aufgetragen. Bei der ersten Resonanzfrequenz des Bodens verringert sich die Steifigkeit auf ca. 80%. Bei steifem Boden ist im betrachteten Frequenzbereich eine bedeutsame Wechsel-

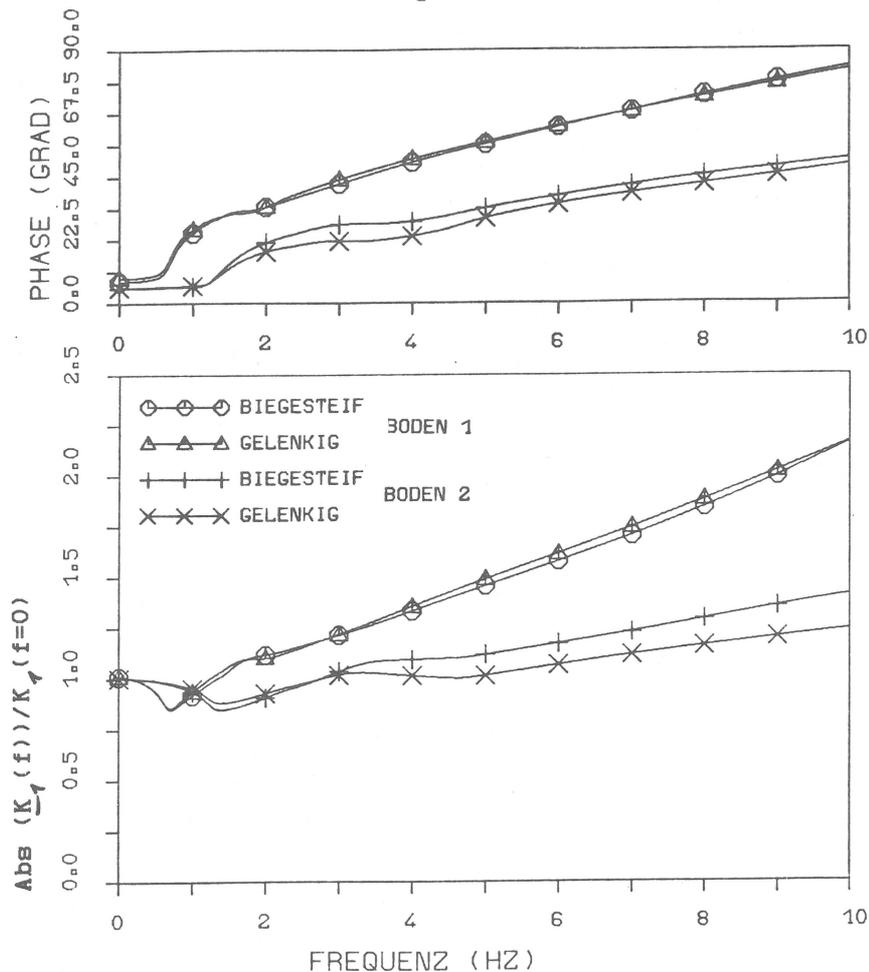


Bild 6.16 : Normierte Horizontalsteifigkeit des Einzelpfahles

wirkung mit dem Pfahl nicht erkennbar. Beim weichen Boden wächst die Steifigkeit mit der Frequenz an. Die Anregung und die Schwingungsantwort zeigen eine deutliche Phasenverschiebung.

Die Art der Pfahlkopfeinspannung ( biegesteif oder gelenkig ) hat bei beiden Bodenprofilen lediglich geringen Einfluß auf die Frequenzabhängigkeit von Steifigkeit und Dämpfung.

Beim Dämpfungsmaß auf Bild 6.17 erkennt man, daß unterhalb der Resonanzfrequenz des Bodens allein Materialdämpfung auftritt. Überschreitet die Anregungsfrequenz diese Grenze, so wächst die Dämpfung dank der Energieabstrahlung rasch an.

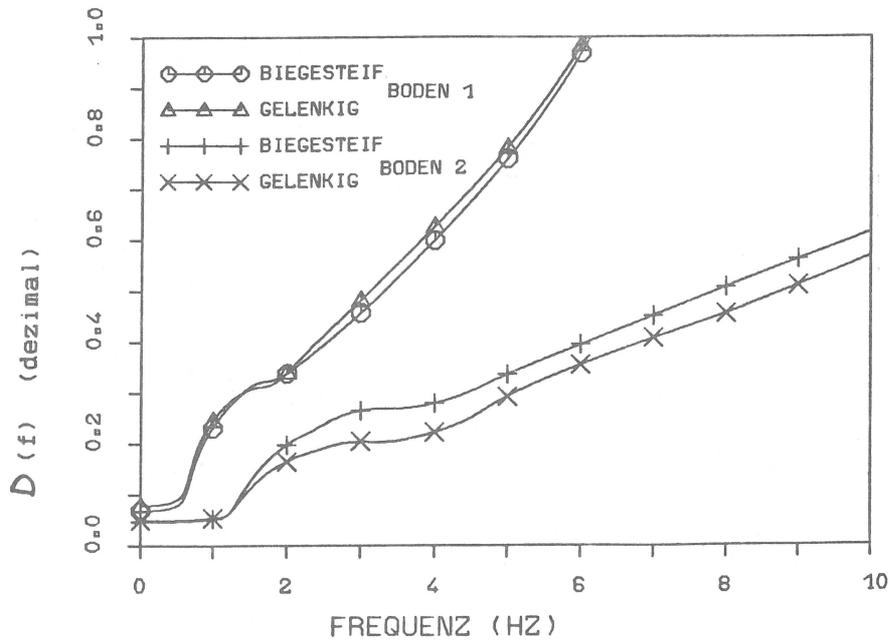


Bild 6.17 : Dämpfungsmaß  $D(f)$

Die praktische Bedeutung der Impedanz wird dann deutlich, wenn man die Gebäudemasse in die Rechnung einbezieht. Für eine ( anteilige ) Pfahlkopfmasse  $M$  geht Gleichung (6.4.1) über in

$$K_1^*(f) = \operatorname{Re}(\underline{K}_1(f)) - \Omega^2 M + i \operatorname{Im}(\underline{K}_1(f)) \quad (6.4.5)$$

Die Ergebnisse von Gleichung ( 6.4.5 ) werden anschaulicher, indem

man die Verformungen unter der dynamischen Last  $\underline{F} = 1 e^{i\Omega t}$  betrachtet. Die horizontale Verschiebung der Pfahlkopfmasse beträgt

$$\underline{u}(f) = \frac{F}{K_1^*} \quad (6.4.6)$$

Bild 6.18 zeigt den Absolutwert der Verschiebung für verschiedene Pfahlkopfmassen beim Boden 1. Die Kurven ähneln denen eines gedämpften Einmassenschwingers. Tabelle 6.4 enthält deshalb im Vergleich die ungedämpften Eigenfrequenzen des analogen Einmassenschwingers mit

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{M}} \quad (6.4.7)$$

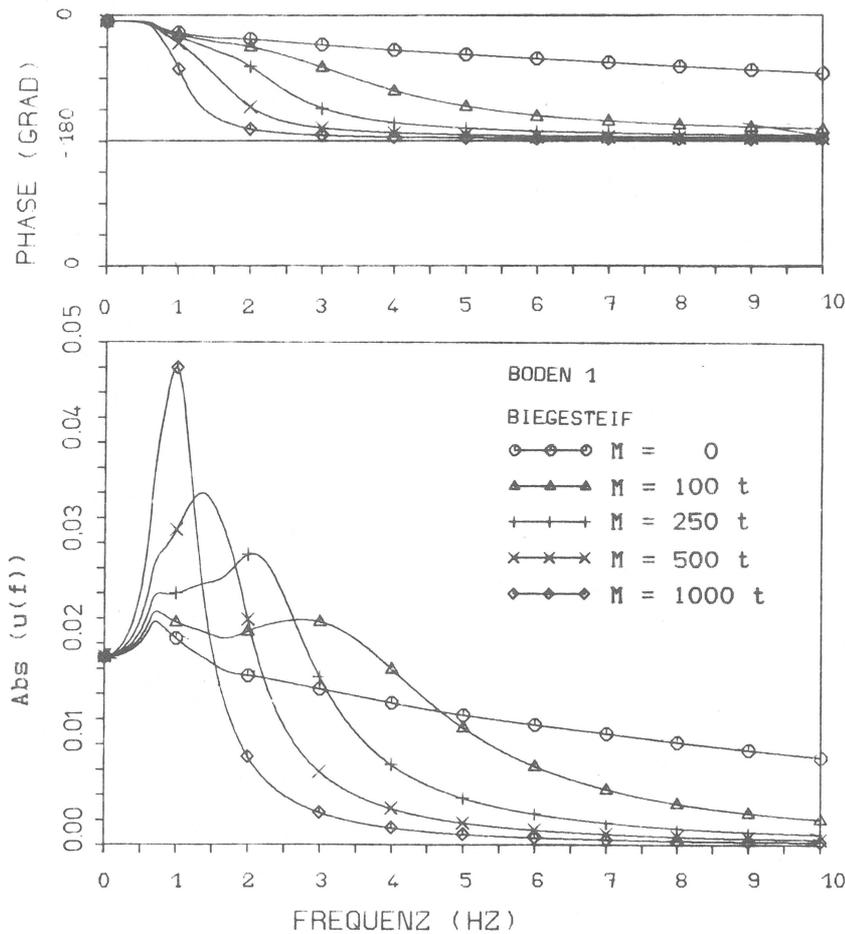


Bild 6.18 : Pfahlkopfverschiebung infolge  $\underline{F} = 1.0 e^{i\Omega t}$ , Boden 1

stat. Horizontal- steifigkeit	Pfahlkopfmasse	ungedämpfte Eigenfrequenz	Grundfrequenz nach PILAX ( Bild 6.18 )
$K_1$ ( MN/m )	M ( t )	$f_0$ ( Hz )	f ( Hz )
53	100	3.7	2.9
"	250	2.3	2.1
"	500	1.6	1.4
"	1000	1.2	1.0

Tabelle 6.4 : Eigenfrequenzen des analogen Einmassenschwingers

Gegenüber den in Tabelle 6.4 angegebenen Werten sind die Grundfrequenzen nach PILAX zu niedrigeren Frequenzen hin verschoben. Die Abweichung vergrößert sich mit zunehmender Grundfrequenz ( also abnehmender Pfahlkopfmasse ), weil das Dämpfungsmaß nach Bild 6.17 anwächst. Die gedämpfte Eigenfrequenz des Einmassenschwingers beträgt nämlich ( s.a. ( 2.1.14 ) )

$$f_D = f_0 \sqrt{1 - D^2} \quad ( 6.4.8 )$$

Ebenfalls wegen wachsender Dämpfung nehmen die Absolutwerte der Verschiebung mit wachsender Grundfrequenz ab. Beim Zusammenfall der Grundfrequenz des Systems aus Pfahl und Masse mit der der Bodenschicht erhält man die maximale Verschiebung.

Die Schnittkräfte des Einzelpfahles zeigen eine ähnliche Frequenzabhängigkeit wie die Pfahlkopfverschiebung. Sie sind daher hier nicht dargestellt.

### 6.4.3 Erdbeben

Die Bilder 6.19 und 6.20 zeigen die Übertragungsfunktionen  $H_{12}$  für die Freifeld- und  $H_{13}$  für die Pfahlkopfbeschleunigung. Die Beschleunigungen sind bezogen auf die gesamte Amplitude der Basisbeschleunigung an der Unterkante der Schichtung. Wie in Kapitel 6.3 ausführlich erläutert worden ist, bedeutet das, daß als Basis ein starrer Halbraum angenommen wird. Die entsprechenden Übertragungsfunktionen für den elastischen Halbraum,  $H_{1/2}$  und  $H_{1/3}$ , sind auf den Bildern 6.21 und 6.22 dargestellt. Wie man sieht, entsprechen die Pfahlkopfbeschleunigungen im unteren maßgebenden Frequenzbereich im wesentlichen den Bodenbeschleunigungen ( Freifeld ). Bei höherer Frequenz sind sie geringer. Die Pfahlkopfeinspannung hat nur beim weichen Boden einen Einfluß. Beim biegesteif angeschlossenen Pfahl sind die Beschleunigungen merklich kleiner.

Im Kapitel 6.3 ist ebenfalls beschrieben, wie mittels Fouriertransformation aus dem Frequenzbereich in den Zeitbereich übergewechselt wird. Auf diese Weise werden die Pfahlkopfbeschleunigungen infolge der Erdbebenzeitverläufe Tolmezzo und El Centro bestimmt. Tabelle 6.5 enthält die maximalen Beschleunigungen bei den untersuchten Fällen.

		Boden 1		Boden 2	
		Tolmezzo	El Centro	Tolmezzo	El Centro
Freifeld	starrer Halbraum	5.01	8.46	11.3	15.8
	elastischer	2.92	4.47	4.78	8.82
Pfahl	starrer Halbraum	1.97	4.13	8.70	14.7
	elastischer	1.26	1.98	3.71	8.32

Tabelle 6.5 : Maximale Beschleunigungen (  $m/s^2$  ) im Freifeld und am Kopf des biegesteif angeschlossenen Pfahles (  $M = 0$  )

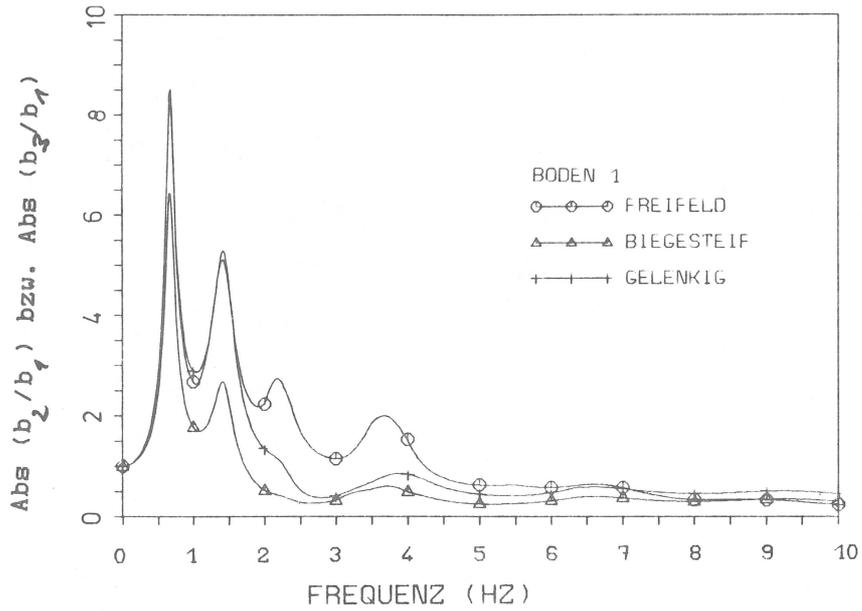


Bild 6.19 : Übertragungsfunktion der Beschleunigung  $H_{13}$  bei Boden 1  
( starrer Halbraum )

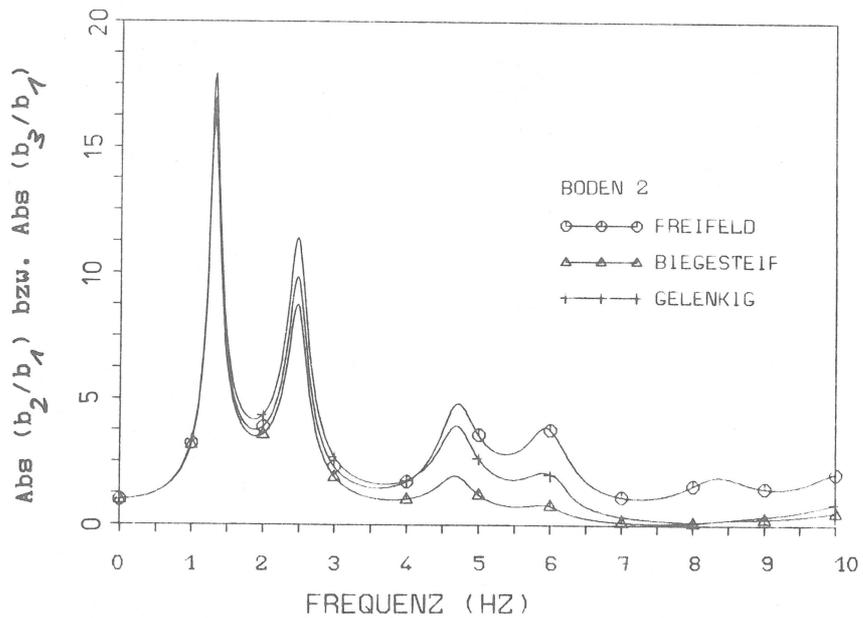


Bild 6.20 : Übertragungsfunktion der Beschleunigung  $H_{13}$  bei Boden 2  
( starrer Halbraum )

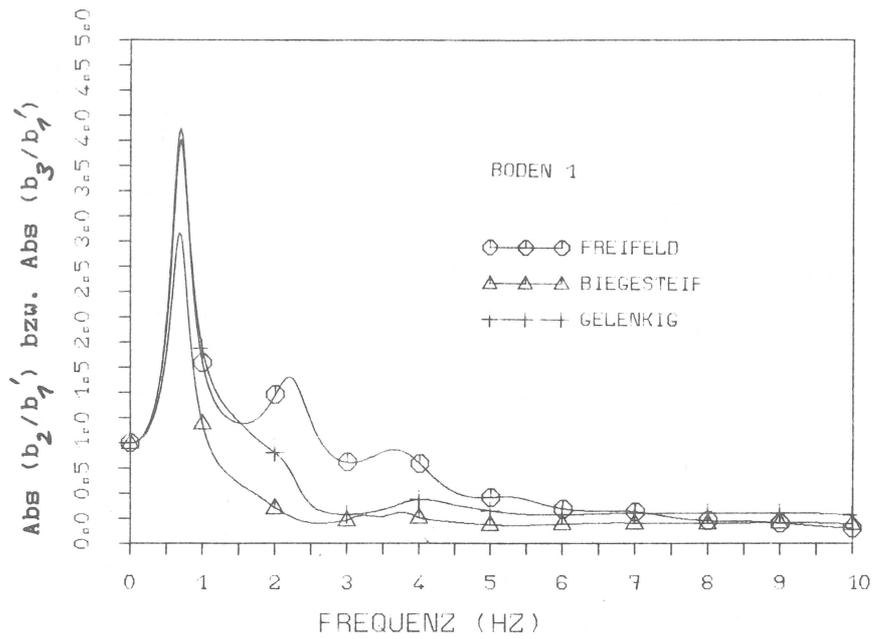


Bild 6.21 : Übertragungsfunktion der Beschleunigung  $H_{1/3}$  bei Boden 1  
( elastischer Halbraum )

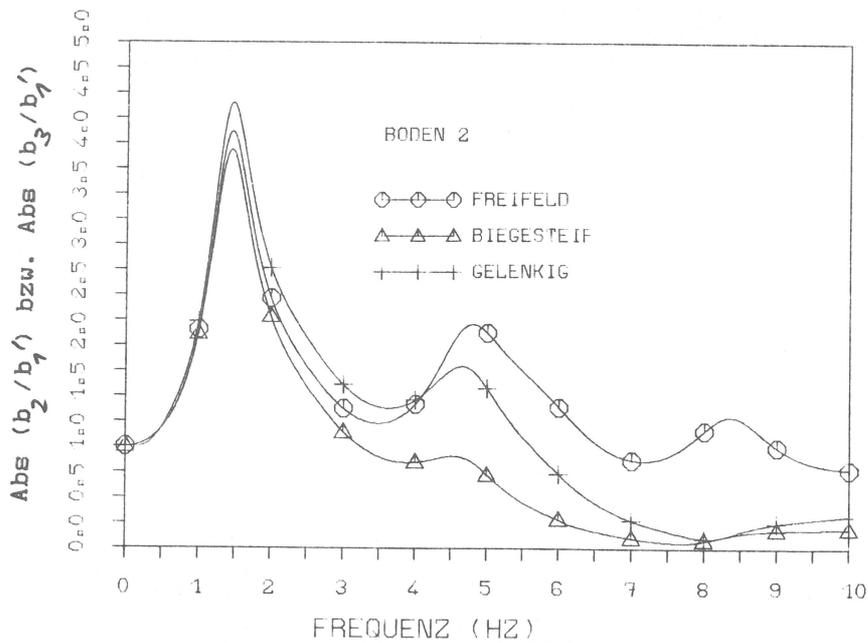


Bild 6.22 : Übertragungsfunktion der Beschleunigung  $H_{1/3}$  bei Boden 2  
( elastischer Halbraum )

Zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens sind außerdem die zugehörigen Antwortspektren erforderlich. Man findet sie auf den Bildern 6.23 bis 6.26 für die Dämpfungen 5 und 10%. Der Vergleich mit den Freifelderergebnissen ( Bilder 6.12 bis 6.13 ) bestätigt die Schlüsse, die bereits aus dem Vergleich der Übertragungsfunktionen gezogen worden sind. Bei Annahme eines elastischen Halbraumes als Basis des Modelles sind die Spektralwerte ( die Maxima der Beschleunigungsantwortspektren ) nur halb so groß wie bei starrem Halbraum. Das Schwingungsverhalten des Einzelpfahles stimmt im unteren Frequenzbereich ( bis ca. 3 Hz ) mit dem des Bodens überein. Im höheren Frequenzbereich werden die Spektralwerte deutlich kleiner. Der Effekt ist bei weichem Boden besonders stark ausgeprägt.

Das Biegemoment am Kopf des biegesteif angeschlossenen Pfahles ist für verschiedene Pfahlkopfmassen auf den Bildern 6.27 bis 6.30 abgebildet. Bei der Anregung über den starren Halbraum ( Bilder 6.27 und 6.28 hat der Frequenzverlauf des Biegemomentes eine ausgeprägte Spitze, wenn die Anregungsfrequenz mit der Grundfrequenz des Freifeldes zusammenfällt. Das war auch beim Frequenzverlauf der Beschleunigung ( Bilder 6.19 und 6.20 ) aufgefallen. Ursache ist wieder die idealisierte Annahme des starren Halbraumes. Die Bilder 6.29 und 6.30 zeigen das Pfahlkopfmoment bei Anregung durch die aus dem elastischen Halbraum (  $\alpha = 2$  ) einfallende Scherwelle. Gegenüber den Ergebnissen für den starren Halbraum verändern sich die Momente ähnlich wie die Beschleunigungen. In Tabelle 6.6 sind die Maxima der Biegemomente bei den beiden Erdbebenzeitverläufen eingetragen. Auch hier beträgt die Reduzierung bei Annahme des elastischen Halbraumes in allen Fällen ungefähr 50% .

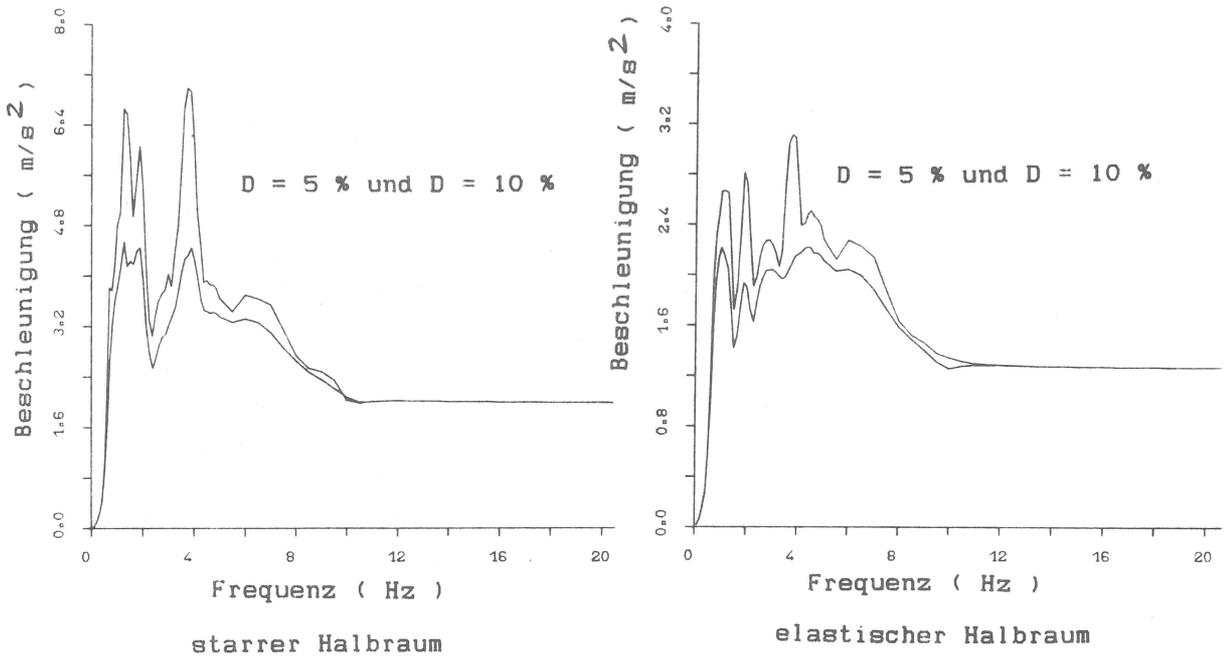


Bild 6.23 : Antwortspektren der Beschleunigung am Pfahlkopf

Erdbeben Tolmezzo,  $M = 0$ , Boden 1

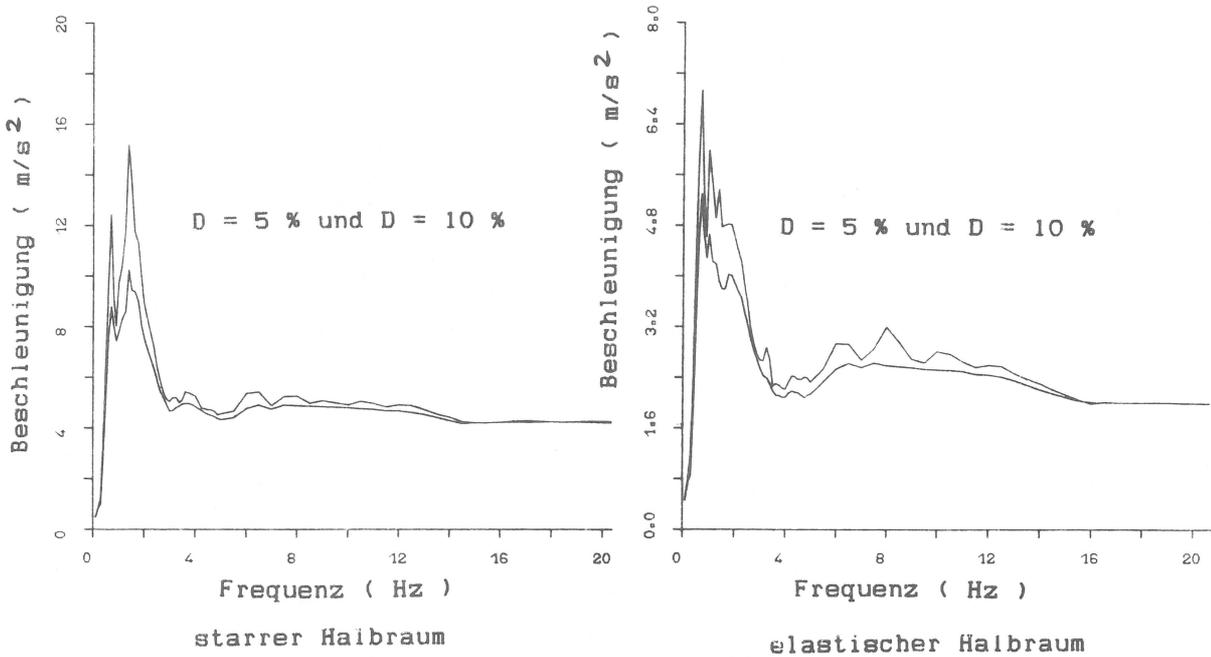


Bild 6.24 : Antwortspektren der Beschleunigung am Pfahlkopf

Erdbeben El Centro,  $M = 0$ , Boden 1

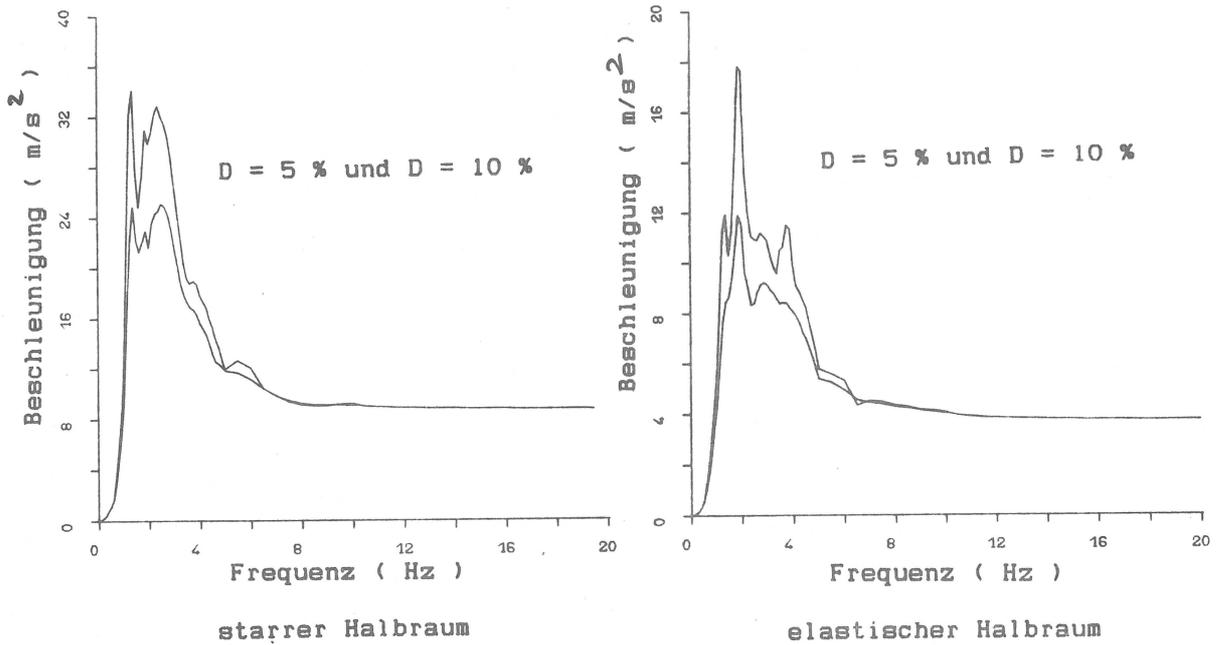


Bild 6.25 : Antwortspektren der Beschleunigung am Pfahlkopf  
Erdbeben Tolmezzo,  $M = 0$ , Boden 2

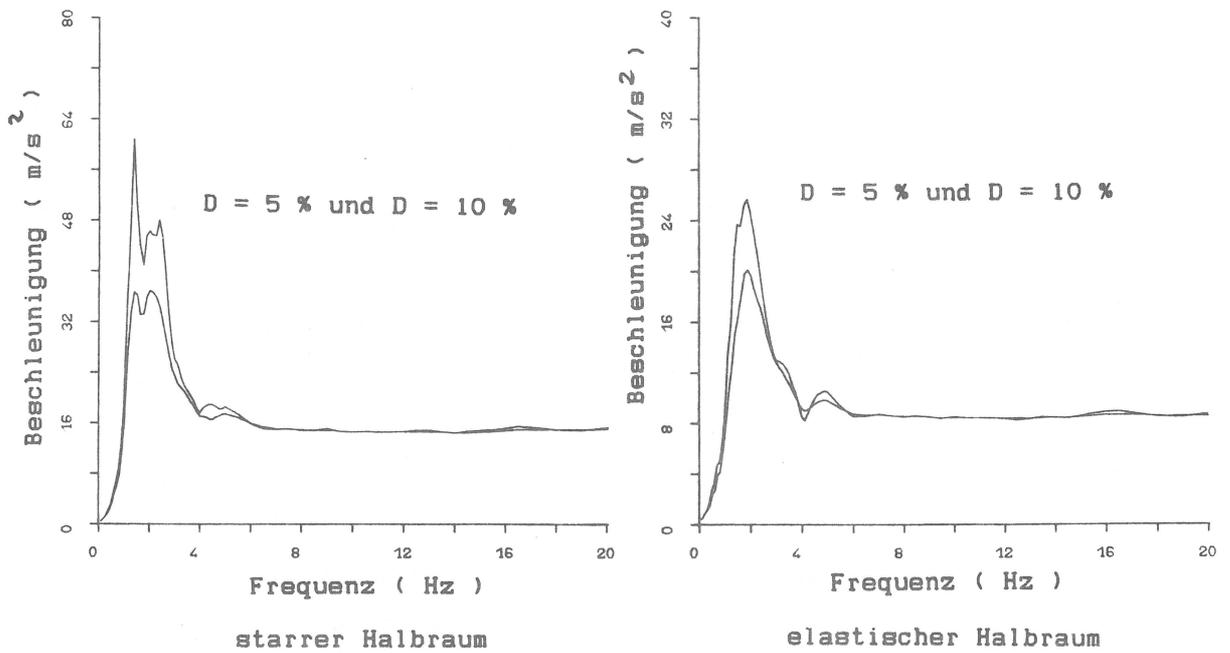


Bild 6.26 : Antwortspektren der Beschleunigung am Pfahlkopf  
Erdbeben El Centro,  $M = 0$ , Boden 2

		Boden 1		Boden 2	
		Tolmezzo	El Centro	Tolmezzo	El Centro
M = 0	starrer	5.14	13.9	6.12	10.3
	— Halbraum elastischer	3.24	6.64	2.61	5.73
M = 0.5 kt	starrer	8.53	24.6	21.3	33.6
	— Halbraum elastischer	5.41	11.6	8.32	18.6

Tabelle 6.6 : Maximale Biegemomente ( MNm ) am Kopf der Einzelpfähle  
mit den Pfahlkopfmassen M = 0 und M = 500 t

Die Übertragungsfunktionen der Biegemomente gelten für Einzelpfähle mit verschiedenen Pfahlkopfmassen. Die für M = 0 gültige Funktion kann aufgefaßt werden als Anteil der kinematischen Wechselwirkung am Biegemoment ( s.a. Kapitel 6.3.1 ). Die Differenz der übrigen Übertragungsfunktionen zur Funktion M = 0 ist als Anteil der trägen Wechselwirkung der jeweiligen Masse zu verstehen. Aus den Bildern wird klar, daß die kinematische Wechselwirkung dann dominiert, wenn die Grundfrequenz des schwingenden Systems aus Masse, Pfahl und Boden deutlich über der Grundfrequenz des Freifeldes liegt, das heißt, wenn der Boden weich und die Pfahlkopfmasse klein ist. ( Siehe dazu auch Bild 6.18 .) Nimmt die Pfahlkopfmasse zu und nähern sich damit die Grundfrequenzen einander, so gewinnt die träge Wechselwirkung schnell an Bedeutung und übertrifft den Einfluß der kinematischen Wechselwirkung. Weil die Übertragungsfunktionen in ihrer Form ähnlich sind, bietet sich im Zeitbereich das gleiche Bild. Die Maxima der Biegemomente für M = 500 t ( siehe Tabelle 6.6 ) setzen sich in etwa gleichem Maße aus den Anteilen aus kinematischer und träger Wechselwirkung zusammen.

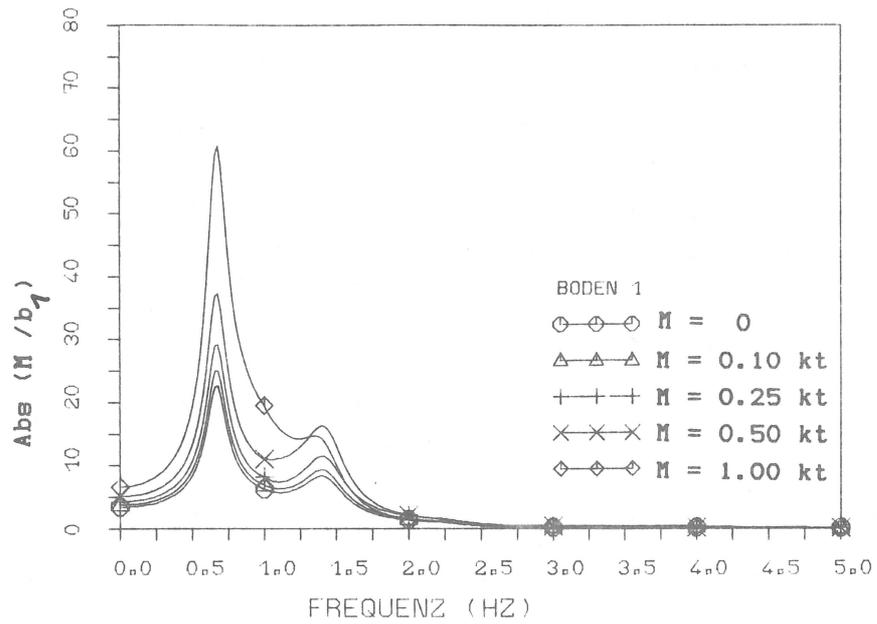


Bild 6.27 : Pfahlkopfmoment bei Boden 1, starrer Halbraum

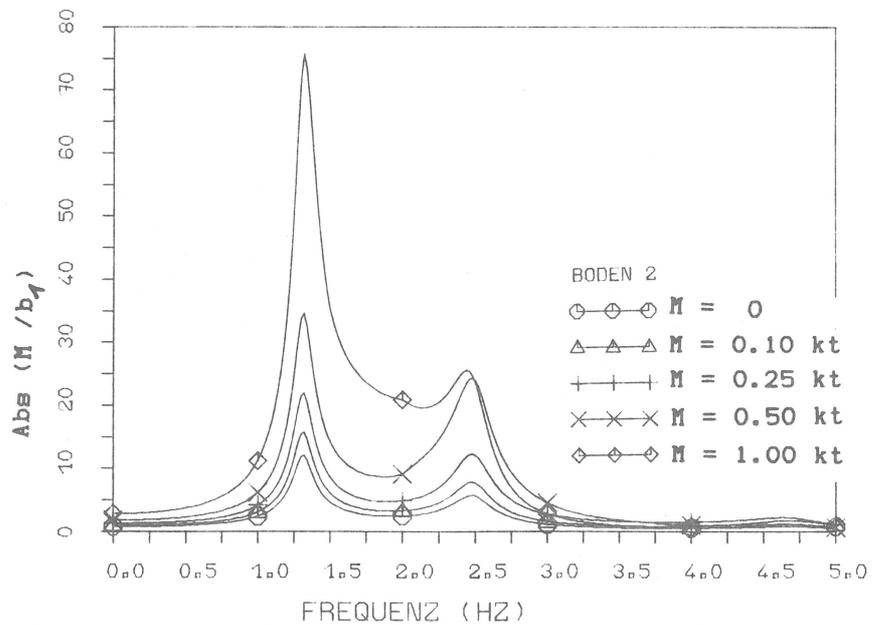


Bild 6.28 : Pfahlkopfmoment bei Boden 2, starrer Halbraum

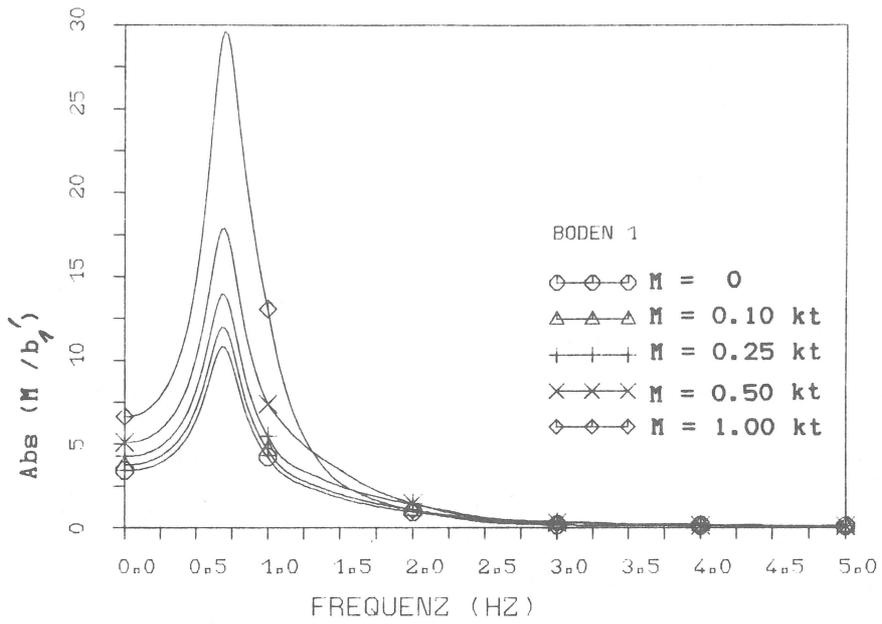


Bild 6.29 : Pfahlkopfmoment bei Boden 1, elastischer Halbraum

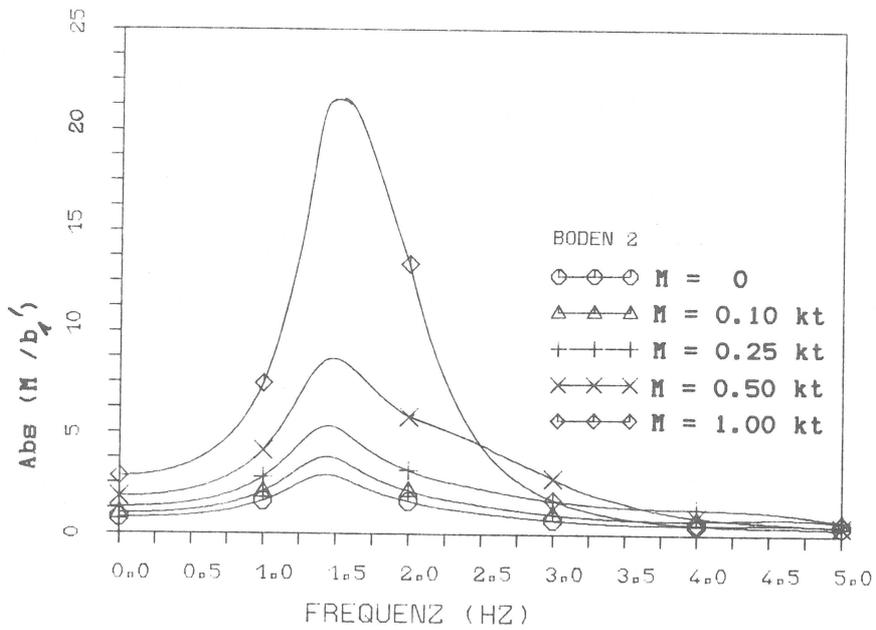


Bild 6.30 : Pfahlkopfmoment bei Boden 2, elastischer Halbraum

Der Schnittkraftverlauf über die Pfahltiefe bei der Grundfrequenz des Freifeldes ist den Bildern 6.31 und 6.32 zu entnehmen. Aufgetragen sind die Absolutwerte von Querkraft und Biegemoment infolge der harmonischen Basisbeschleunigung  $b_1 = 1 \cdot e^{i\Omega t}$ . Der Anteil der kinematischen Wechselwirkung ist gesondert dargestellt. Der Pfahlkopf trägt eine Einzelmasse von 500 t. Die hier gewählte vertikale Pfahllast entspricht einer Normalspannung von  $3.8 \text{ N/mm}^2$  im Pfahlquerschnitt und damit einem praxisüblichen Maß. Wie es zu erwarten ist, bestimmt die träge Wechselwirkung im oberen Bereich des Pfahlschaftes, die kinematische im unteren die Pfahlgrößen. Bemerkenswert erscheint, daß bei weichem Boden die Querkraft unterhalb des Pfahlkopfes noch zunimmt. Die oberen weichen Bodenbereich hängen sich also bei Erdbeben an den Pfahl und belasten ihn eher als daß sie ihn stützen. In der Tiefe -12 m, also dort, wo die tragfähige Bodenschicht beginnt, erreichen Querkraft und Biegemoment einen bedeutenden Betrag, der in der Größenordnung der Schnittkräfte am Pfahlkopf liegt. Die kinematische Wechselwirkung ist also bei einem Einzelpfahl von Bedeutung und sollte auch in vereinfachten Näherungsrechnungen berücksichtigt werden.

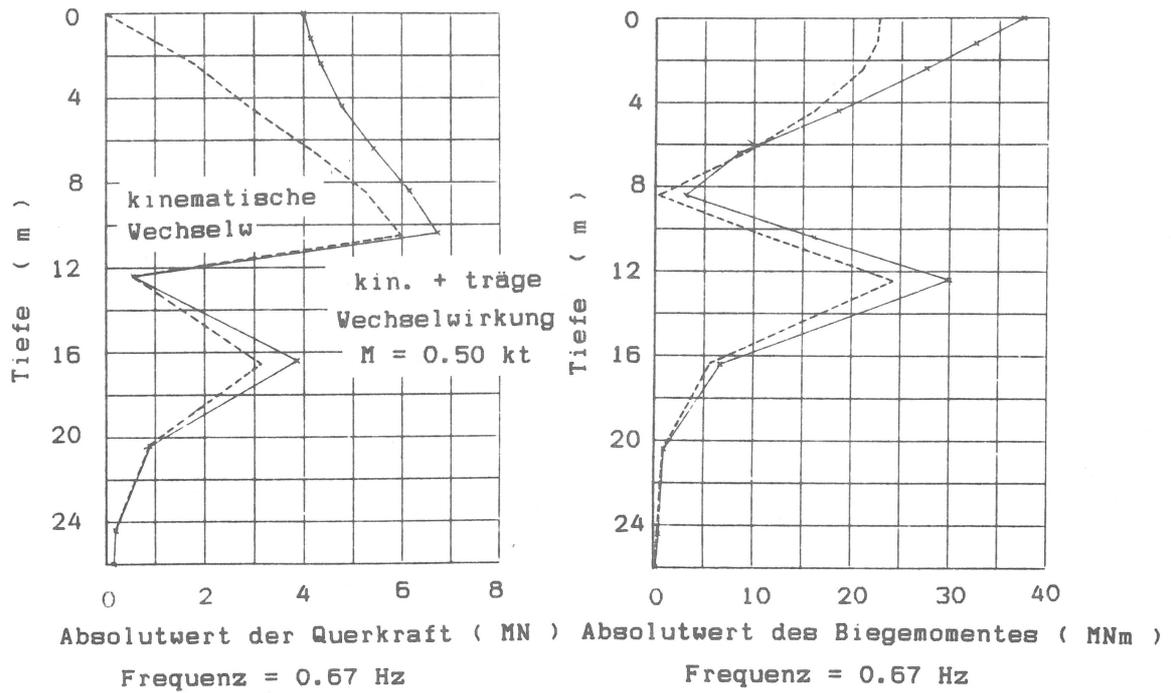


Bild 6.31 : Schnittkräfte des biegesteif angeschlossenen Pfahles  
starrer Halbraum , Boden 1

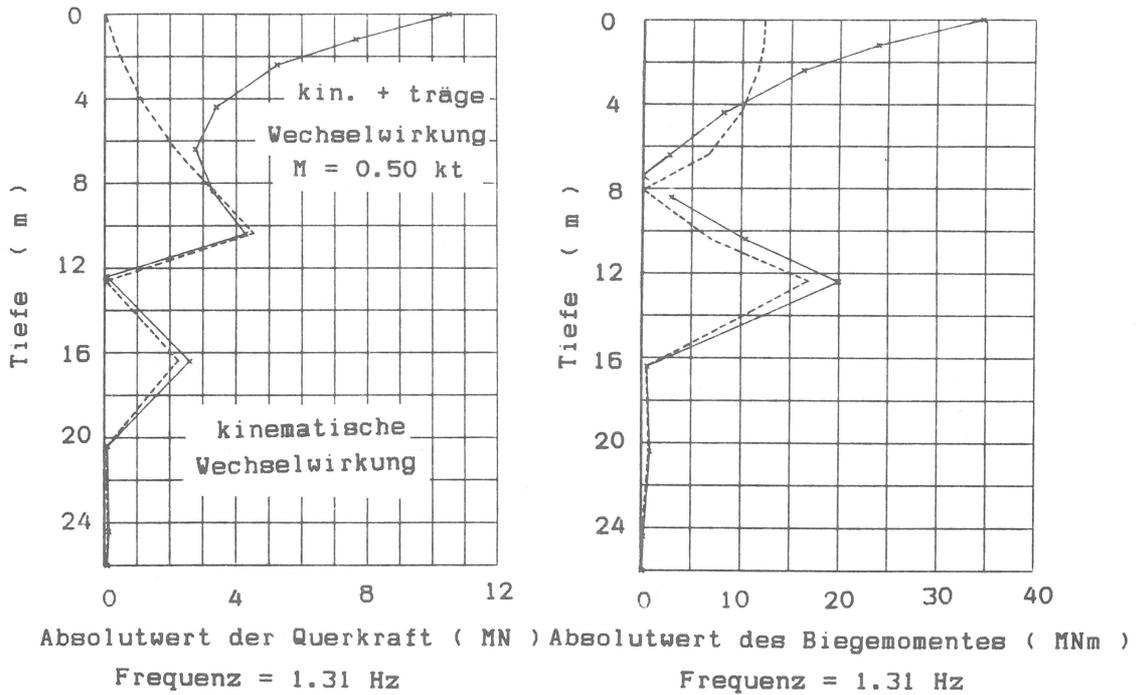


Bild 6.32 : Schnittkräfte des biegesteif angeschlossenen Pfahles  
starrer Halbraum , Boden 2

#### 6.4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für den Einzelpfahl

Aus den Untersuchungen am horizontal belasteten Einzelpfahl lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Die Gültigkeit der linear-elastischen Theorie sei immer vorausgesetzt.

- Im statischen Fall beeinflussen im wesentlichen die oberflächennahen Bodenzonen die Schnittgrößen des Einzelpfahles. Auf eine Abbildung der Schichtung des Bodenprofils kann normalerweise verzichtet werden.
- Im Vergleich zu genaueren Berechnungsverfahren liefern Näherungen mit dem Bettungsmodulverfahren gute Ergebnisse für die Pfahlschnittkräfte.
- Bei gelenkigem Pfahlkopfanschluß erhält man bei gleicher Horizontallast im Pfahl kleinere Biegemomente als bei biegesteifem Anschluß ( nur ca. 60 % ). Die Verformungen nehmen im gleichen Verhältnis zu.
- Bei harmonischer Anregung nimmt der Betrag der Horizontalsteifigkeit des Pfahles mit steigender Frequenz zunächst ab. Bei der Grundfrequenz des Freifeldes beträgt er etwa 80% der statischen Steifigkeit. Mit weiter wachsender Frequenz wächst er wieder langsam an. Insgesamt ist der Frequenzverlauf ziemlich gleichmäßig. Die Art des Pfahlkopfanschlusses hat keinen Einfluß auf den Frequenzverlauf.
- Der Frequenzverlauf von Verschiebungen und maximalen Pfahlschnittgrößen ist ungefähr gleich.
- Bei seismischer Anregung hat der Pfahl im unteren maßgebenden Frequenzbereich die gleichen Beschleunigungen wie der Boden. Die hoch-

frequenten Anteile werden weitgehend herausgefiltert.

- Die Beiträge von kinematischer und träger Wechselwirkung zu den Pfahlschnittgrößen hängen von der Größe der Pfahlkopfmasse ab. Bei praxisüblichen Verhältnissen haben sie die gleiche Größenordnung.
- Am Pfahlkopf dominiert die träge Wechselwirkung, im unteren Bereich des Pfahlschaftes die kinematische Wechselwirkung. Die Pfahlschnittgrößen in der Tiefe sollten berücksichtigt werden, da sie im Betrag den Schnittgrößen am Pfahlkopf gleichkommen. Weiche Bodenschichten belasten den Pfahl eher als daß sie ihn stützen.
- Zum Rechenverfahren : bei Annahme eines starren Halbraumes als Basis des Bodenmodells ergeben sich im Resonanzfall hohe Amplituden in den Übertragungsfunktionen. Sie haben nur theoretische Bedeutung. Wird eine Basis mit einer endlichen Steifigkeit verwendet, lassen sie sich stark reduzieren.

## 6.5 Pfahlgruppen

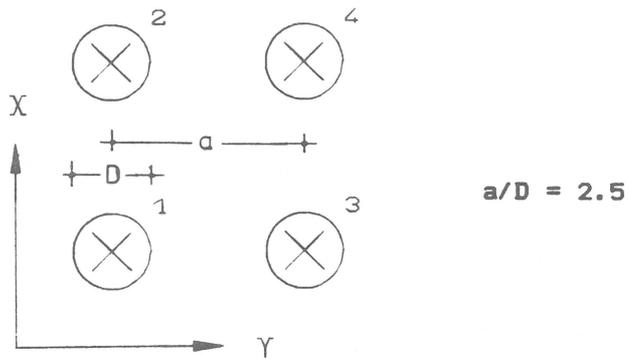
### 6.5.1 Statischer Fall

Die Bilder 6.50 und 6.51 zeigen die doppelt symmetrische Gruppe 16 und die rotationsperiodische Gruppe 356 im Grundriß. Für verschiedene Verhältnisse  $a/D$  ( Abstand zu Durchmesser ) sind die Horizontalsteifigkeiten in den Tabellen 6.7 und 6.8 aufgelistet. Der Index b bezeichnet einen biegesteifen Pfahlkopfanschluß, der Index g einen gelenkigen. Das Verhältnis der Horizontalsteifigkeiten von Pfahlgruppen mit biegesteifem und mit gelenkigem Pfahlkopfanschluß entspricht in etwa dem Verhältnis beim Einzelpfahl. In allen Fällen beträgt die Steifigkeit bei gelenkigem Anschluß 50 bis 60 % derjenigen bei biegesteifem Anschluß. Das Verhältnis

$$\alpha = \frac{K_n}{n \cdot K_1} \quad ( 6.5.1 )$$

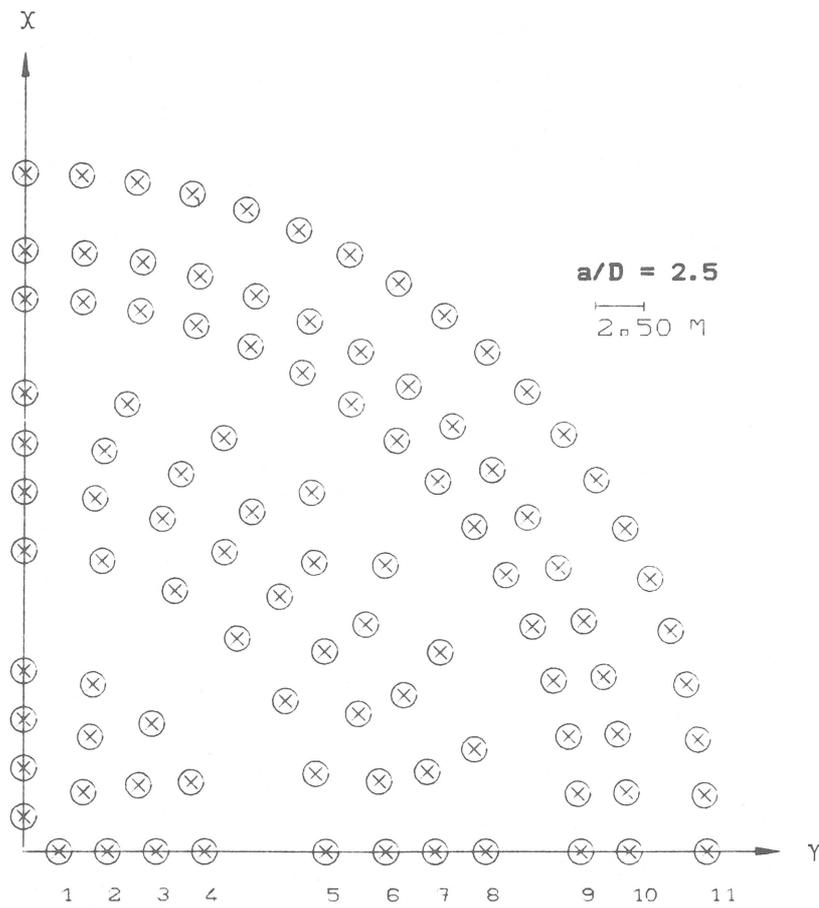
wird üblicherweise als Gruppenfaktor bezeichnet.  $n$  ist die Anzahl der Pfähle und  $K_n$  die Horizontalsteifigkeit einer Gruppe aus  $n$  Pfählen.  $\alpha$  gibt an, auf welchen Bruchteil die Steifigkeit einer Pfahlgruppe abfällt gegenüber der  $n$ -fachen Steifigkeit eines Einzelpfahles. In Bild 6.52 ist  $\alpha$  dargestellt in Abhängigkeit von  $a/D$ . Man erkennt, daß für die Gruppe 16 der Gruppenfaktor von 1.0 ( bei  $a/D > 25$  ) auf 0.3 bis 0.4 ( bei  $a/D = 2.5$  ) abfällt, während er für die Gruppe 356 auf 0.15 bis 0.25 zurückgeht. Beim steifen Boden ist die Abnahme jeweils etwas stärker als beim weichen Boden. Die Verhältnisse sind bei biegesteifem und gelenkigem Anschluß in etwa gleich.

Zum Vergleich ist in Bild 6.52 eingezeichnet, wie die Steifigkeit abnimmt, wenn nach der Empfehlung der DIN 4014, Teil 2 das Bettungsmodulverfahren verwendet wird. Dabei wird bei  $a/D = 3$  der Bettungsmodul auf 25 % abgemindert, bei  $a/D > 8$  wird er zu 100 % angesetzt.



Symmetrie zur X- und zur Y-Achse : 16 Pfähle

Bild 6.50 : Grundriß der Gruppe 16



Rotationsperiodische Symmetrie : 356 Pfähle

Bild 6.51 : Grundriß der Gruppe 356

Horizontalsteifigkeit $K_{16}$ (MN/m)				
	a/D	$K_{16}^b$	$K_{16}^g$	$K^g/K^b$
Boden 1	2.5	347	159	0.46
	5	467	234	0.50
	10	654	343	0.52
	20	790	418	0.53
	>100	848	448	0.53
Boden 2	2.5	894	549	0.61
	5	1400	881	0.63
	10	2080	1300	0.63
	20	2660	1580	0.59
	>100	2800	1650	0.59

Tabelle 6.7 : Horizontalsteifigkeiten der Gruppe 16

Horizontalsteifigkeit $K_{356}$ (MN/m)				
	a/D	$K_{356}^b$	$K_{356}^g$	$K^g/K^b$
Boden 1	2.5	4460	1920	0.43
	10	10400		
	>100	18900	9970	0.53
Boden 2	2.5	9250	5550	0.60
	10	30500		
	>100	62300	36700	0.59

Tabelle 6.8 : Horizontalsteifigkeiten der Gruppe 356

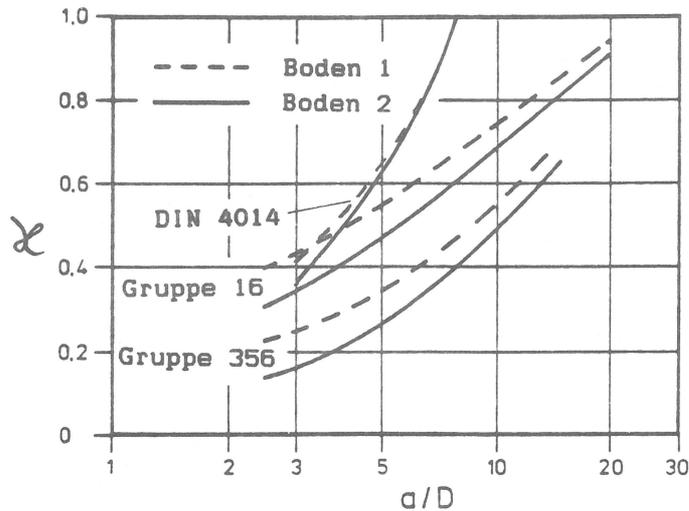


Bild 6.52 : Gruppenfaktor

Der Vergleich zeigt, daß die Ergebnisse der Berechnung nach DIN gut mit den PILAX-Ergebnissen übereinstimmen, wenn der Pfahlabstand gering ist. Bei größerer Pfahlanzahl und bei größerem Pfahlabstand ergeben die PILAX-Ergebnisse jedoch eine stärkere gegenseitige Beeinflussung der Pfähle.

Setzt man die statische Horizontallast der Größe  $F = n \cdot 1 \text{ MN}$  an der Pfahlkopfplatte an, so kann man unmittelbar den Einfluß der Gruppenwirkung auf die Pfahlschnittgrößen erkennen.

Die Bilder 6.53 und 6.54 zeigen für ein Verhältnis  $a/D = 2.5$  die Schnittkraftverteilung am Kopf der biegesteif angeschlossenen Pfähle der Gruppe 16 für  $F = 16 \text{ MN}$ . Man bemerkt, daß die außen stehenden Pfähle einen größeren Teil der Last übernehmen. Der Effekt ist beim weichen Boden schwächer als beim steifen. Hier variiert die Querkraft von 60% (Innenpfahl) bis 150% (Außenpfahl) gegenüber der Querkraft des Einzelpfahles. Bei den Biegemomenten sind die Unterschiede zwischen Innen- und Außenpfahl geringer. Die Beträge liegen zwischen 120 und 180% des maximalen Biegemomentes eines Einzelpfahles.

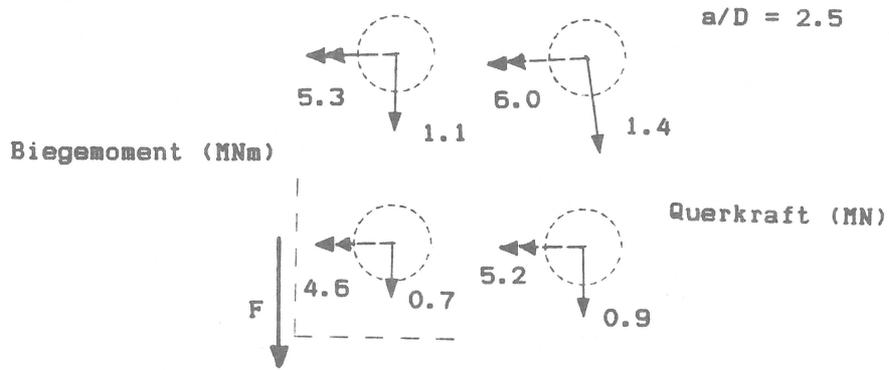


Bild 6.53 : Schnittkraftverteilung bei Gruppe 16, Boden 1  
für F = 16 MN

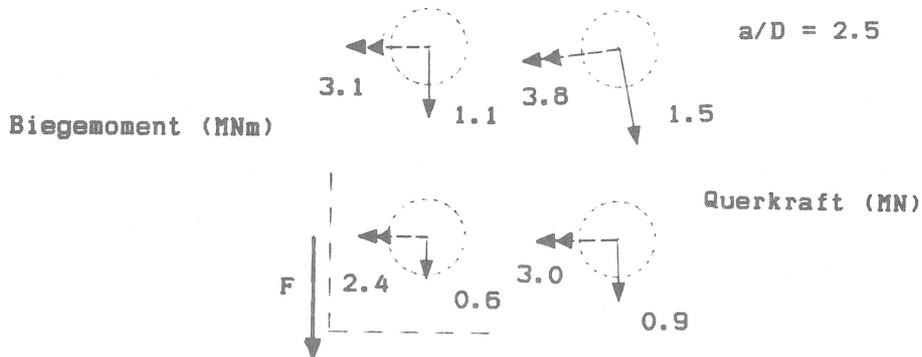


Bild 6.54 : Schnittkraftverteilung bei Gruppe 16, Boden 2  
für F = 16 MN

Bei den gelenkig angeschlossenen Pfählen ist der Gruppeneffekt in etwa gleich groß ( ohne Abbildung ).  
Auf den Bildern 6.55 und 6.56 sieht man den Verlauf der Schnittkraft über die Tiefe beim Innen- und beim Außenpfahl in Boden 1. Zum Vergleich ist der Querkraftverlauf des Einzelpfahles abgebildet. Es zeigt sich ein prinzipieller Unterschied im Tragverhalten: Der Einzelpfahl gibt seine Querkraft schon in geringerer Tiefe an den Boden ab als die Pfähle innerhalb der Gruppe. Beim Innenpfahl im weichen Boden bleibt die Querkraft nahezu unverändert bis in die steifen Bodenzonen hinein erhalten. Unten ist sie sogar größer als beim Außenpfahl, während sie am Pfahlkopf nur halb so groß ist.

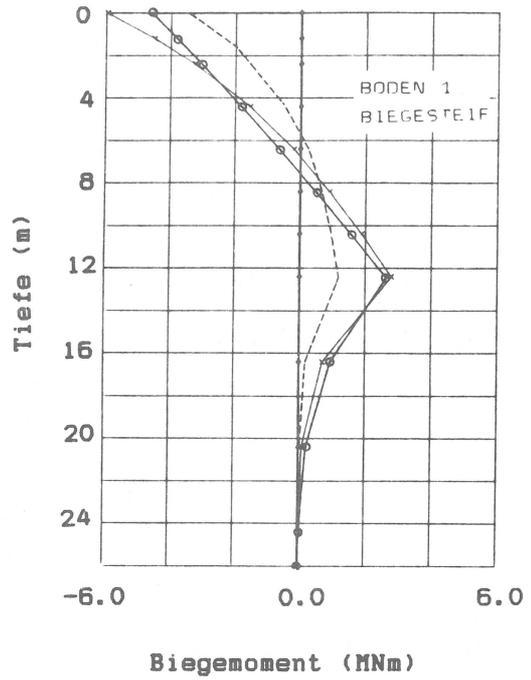
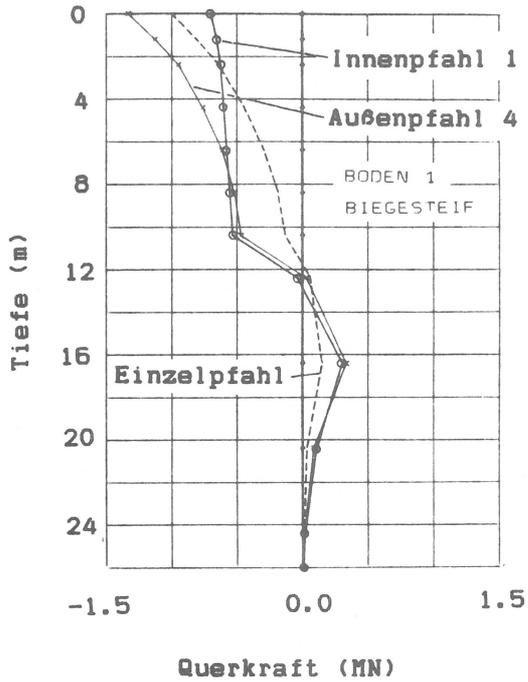


Bild 6.55 : Schnittkraftverlauf bei Gruppe 16, Boden 1

für  $F = 16 \text{ MN}$   $a/D = 2.5$

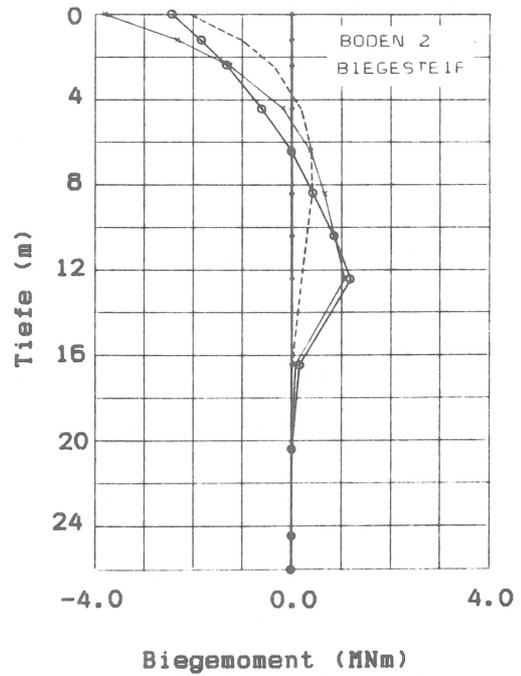
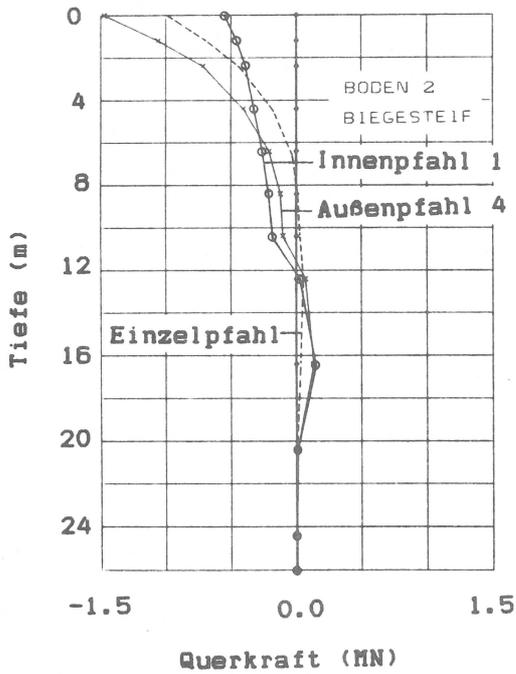


Bild 6.56 : Schnittkraftverlauf bei Gruppe 16, Boden 2

für  $F = 16 \text{ MN}$   $a/D = 2.5$

Das Biegemoment ist in der Tiefe bei Innen- und Außenpfahl gleich groß. Bemerkenswert ist, daß das Moment beim Innenpfahl mehr als 50% des Betrages am Pfahlkopf erreichen kann.

Die Querkraftverteilung in der Gruppe 356 ( $a/D=2.5$ ) zeigen die Bilder 6.57 und 6.58. Nach außen hin nimmt die Querkraft zwar leicht zu, ist aber insgesamt sehr gleichmäßig verteilt. Dagegen erhält der äußerste Pfahlring wesentlich mehr an Querkraft. Der Effekt ist beim weichen Boden schwächer als beim steifen. Die Schwankungsbreite der Querkraft für die Pfähle liegt zwischen 60 und 190% der Querkraft des Einzelpfahles.

Der Gruppeneffekt bei gelenkig angeschlossenen Pfählen ist wieder gleich groß wie bei den biegesteif angeschlossenen Pfählen.

Die Bilder 6.59 und 6.60 zeigen den Verlauf der Querkraft und des Biegemomentes über die Tiefe. In der Form ähneln die Schnittkräfte denen bei der Gruppe 16. Die Querkraft bleibt jedoch über die Tiefe noch ausgeprägter im Pfahl erhalten.

In den Tabellen 6.9 und 6.10 sind die maximalen Biegemomente eines Innen- und eines Außenpfahles bei gelenkigem und bei biegesteifem Pfahlkopfanschluß eingetragen. Mit abnehmendem Pfahlabstand verändert sich das Verhältnis  $M_g/M_b$  beim steifen Boden nur unwesentlich, beim weichen Boden verringern sich die Unterschiede in den Biegemomenten.

$M_1$  ist das maximale Biegemoment eines Einzelpfahles,  $M_n$  das eines Pfahles in der Gruppe.  $M_n$  ist über alle Pfähle gemittelt.

In Bild 6.61 ist dargestellt, wie beim biegesteifen Anschluß das über alle Pfähle gemittelte maximale Kopfmoment mit abnehmendem Pfahlabstand anwächst. Bei der Gruppe 356 nimmt das Moment stärker zu als bei der Gruppe 16. Die Empfehlung der DIN führt zu einer guten Übereinstimmung mit den PILAX-Ergebnissen für die kleine

Bild 6.58 : Querkraftverteilung bei Gruppe 356, Boden 2

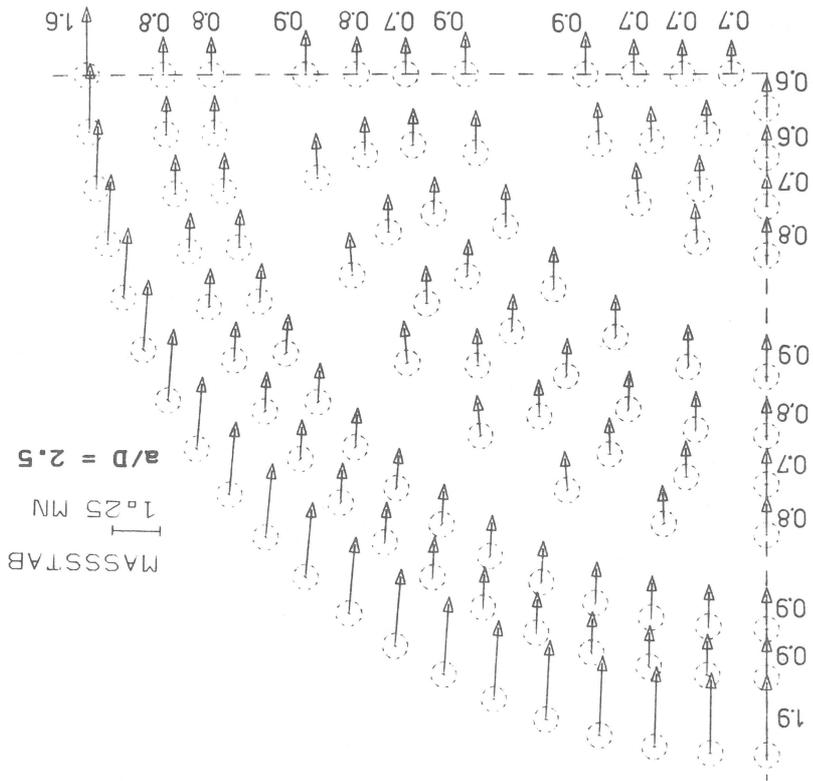
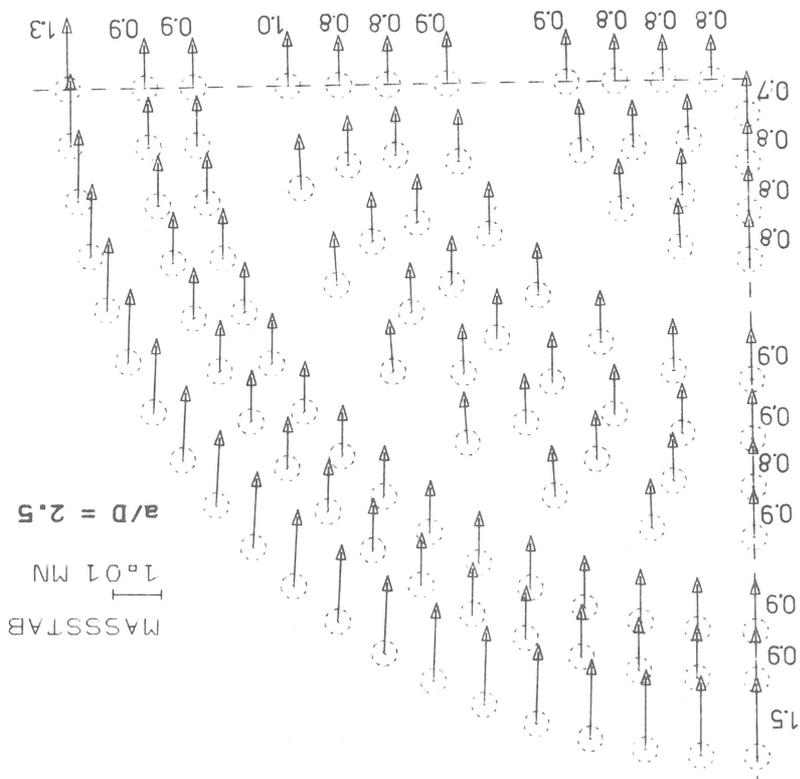


Bild 6.57 : Querkraftverteilung bei Gruppe 356, Boden 1



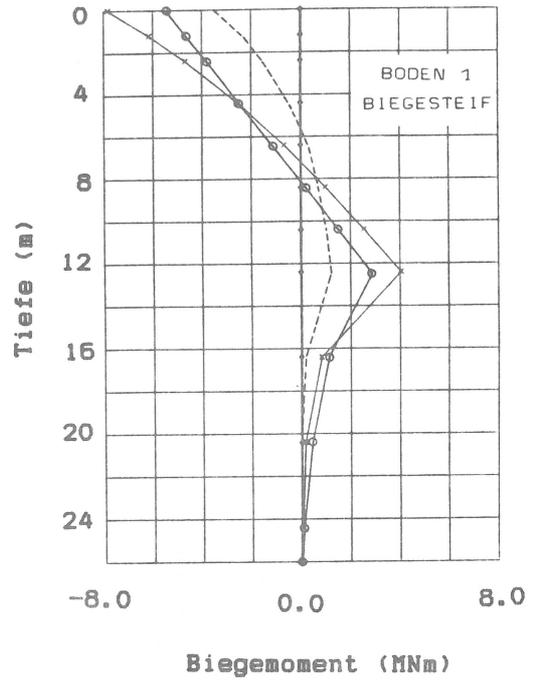
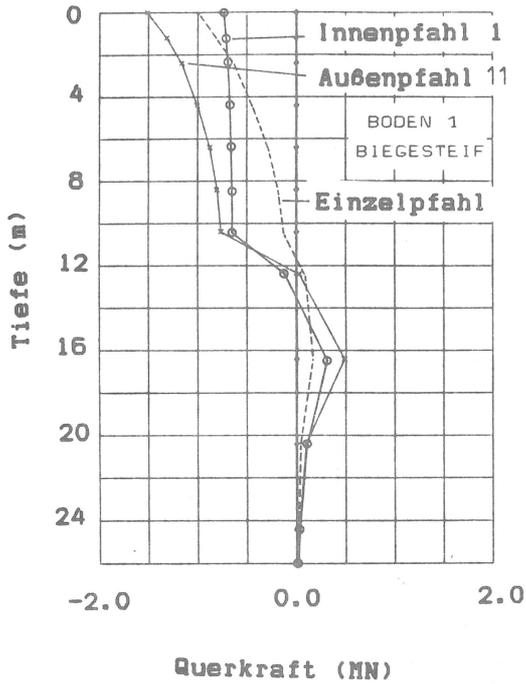


Bild 6.59 : Schnittkraftverlauf bei Gruppe 356, Boden 1

für  $F = 356 \text{ MN}$   $a/D = 2.5$

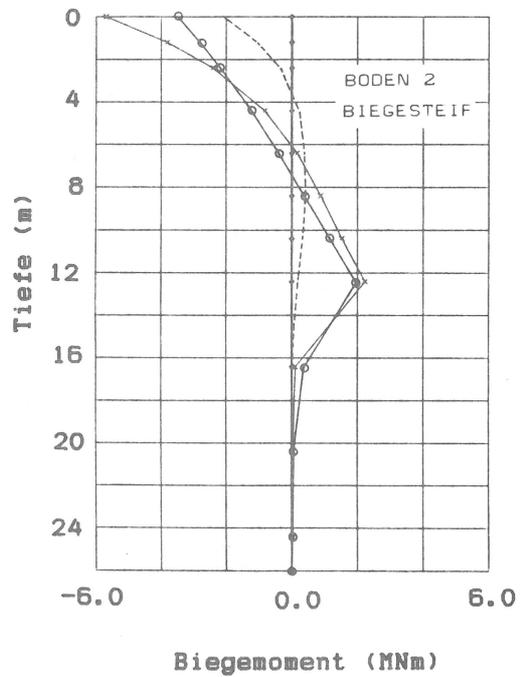
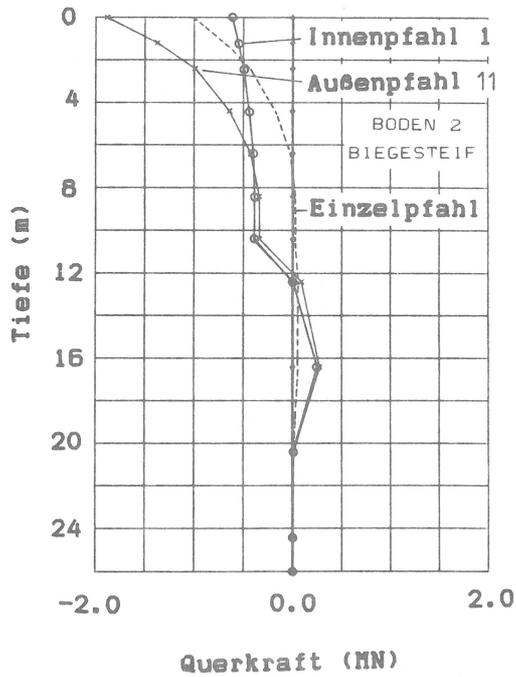


Bild 6.60 : Schnittkraftverlauf bei Gruppe 356, Boden 2

für  $F = 356 \text{ MN}$   $a/D = 2.5$

Maximales Biegemoment ( MNm ) Gruppe 16							
	a/D	$M^b$		$M^g$		$M^g/M^b$	
		Innen- pfahl	Außen- pfahl	Innen- pfahl	Außen- pfahl	Innen- pfahl	Außen- pfahl
Boden 1	2.5	4.6	6.0	4.1	3.9	0.88	0.65
	5	4.1	5.0	3.0	2.6	0.73	0.53
	10	3.6	4.1	1.8	2.2	0.50	0.53
	20	3.5	3.6	1.9	2.0	0.54	0.54
	>100	3.5	3.5	1.9	1.9	0.54	0.54
Boden 2	2.5	2.4	3.8	1.2	1.6	0.49	0.43
	5	2.2	2.9	.74	1.3	0.34	0.46
	10	2.1	2.4	.96	1.2	0.46	0.50
	20	2.1	2.2	1.1	1.2	0.52	0.53
	>100	2.1	2.1	1.1	1.1	0.52	0.52

Tabelle 6.9 : Biegemomente in der Pfahlgruppe 16

Maximales Biegemoment ( MNm ) Gruppe 356							
	a/D	$M^b$		$M^g$		$M^g/M^b$	
		Innen- pfahl	Außen- pfahl	Innen- pfahl	Außen- pfahl	Innen- pfahl	Außen- pfahl
Boden 1	2.5	5.6	7.8	6.2	7.0	1.10	0.90
	>100	3.5	3.5	1.9	1.9	0.54	0.54
Boden 2	2.5	3.5	5.7	2.6	2.5	0.73	0.44
	>100	2.1	2.1	1.1	1.1	0.52	0.52

Tabelle 6.10 : Biegemomente in der Pfahlgruppe 356

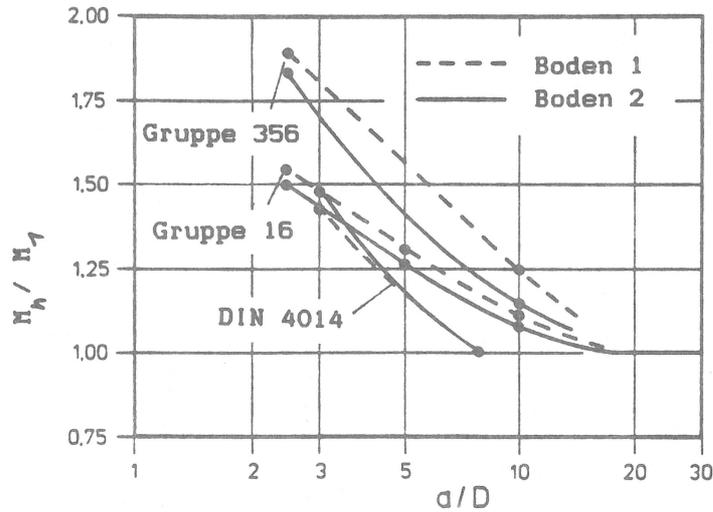


Bild 6.61 : Mittleres Pfahlkopfmoment, biegesteifer Anschluß

Gruppe, liefert jedoch zu kleine Momente für die große Gruppe. Bild 6.62 zeigt die Zunahme des über alle Pfähle gemittelten maximalen Biegemomentes bei gelenkigem Anschluß in Abhängigkeit vom Pfahlabstand. Man bemerkt, daß die Zunahme stärker ist als beim biegesteifen Anschluß. Das gilt umso mehr, je weicher der Boden und je größer die Pfahlanzahl ist.

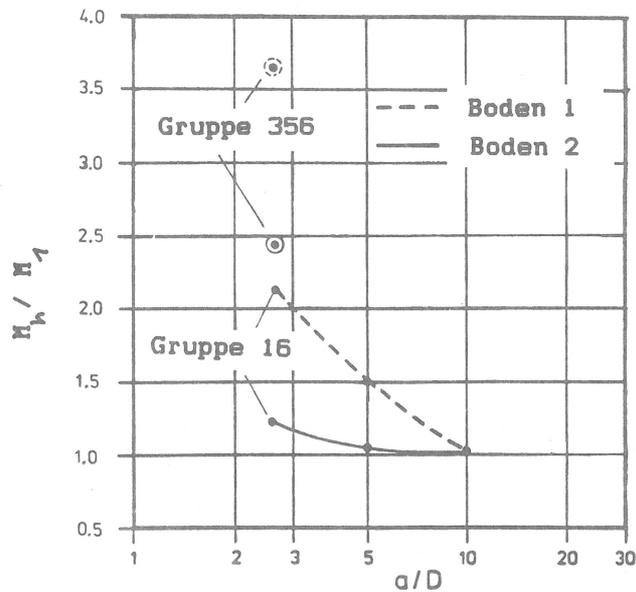


Bild 6.62 : Mittleres Pfahlmoment in der Tiefe, gelenkiger Anschluß

6.5.2 **Dynamischer Fall**

Im dynamischen Fall geht die Steifigkeit  $K_n$  in die komplexe Impedanz  $\underline{K}_n$  über. Der normierte Absolutwert der Steifigkeit kann als dynamischer Gruppenfaktor aufgefaßt werden, wenn man Gleichung ( 6.5.1 ) in den Frequenzbereich erweitert.

$$\chi(f) = \left| \frac{K_n(f)}{n \cdot \text{Re}(\underline{K}_1(f=0))} \right| \quad ( 6.5.2 )$$

Im Falle  $n = 1$  fällt die Funktion mit dem Frequenzverlauf der Steifigkeit des Einzelpfahles nach Bild 6.16 zusammen. Für  $n > 1$  kommt zusätzlich der Einfluß der Gruppe hinzu. Deren Frequenzabhängigkeit entsteht durch Interferenzerscheinungen der Bodenwellen zwischen den Pfählen. In physikalischer Betrachtungsweise bedeutet das, daß die sich ausbreitenden Wellen an den Pfählen gebrochen, gestreut und reflektiert werden. Im Kapitel 6.2.1 sind die Bodenkennwerte in Anlehnung an tatsächliche, geschichtete Bodenprofile gewählt worden. Das dynamische Verhalten des Bodens wird aber durch die Schichtung stark geprägt. Um den Mechanismus der dynamischen Gruppenwirkung zu verstehen, ist es sinnvoll, ihn zunächst an einem einfacheren Bodenprofil zu studieren. In Tabelle 6.11 ist eine homogene Bodenschicht als Boden 2a definiert. Die weiche Zone des Boden 2 erstreckt sich bis in die Tiefe -50.4 m, wo starrer Felsuntergrund angenommen wird.

Boden 2a						
Tiefe	Wichte	Schubmodul	Poissonzahl	Scherwellengeschw.	mod. $E_S$	Dämpfungsmaß
m	t/m <sup>3</sup>	MN/m <sup>2</sup>	-	m/s	MN/m <sup>2</sup>	%
50.4	1.5	10.0	0.49	82.0	39.2	6

Tabelle 6.11 : Bodenkennwerte einer Schicht auf starrem Halbraum

Der dynamische Gruppenfaktor  $\chi(f)$  wird für Gruppe 16 im Boden 2a (biegesteifer Anschluß) errechnet. In den Bildern 6.63 und 6.64 sind der normierte Absolutwert und das Dämpfungsmaß für verschiedene Pfahlabstände  $a/D$  aufgetragen. Bei den mit  $a/D = \infty$  bezeichneten Kurven entfällt die Gruppenwirkung. Sie entsprechen den Ergebnissen für einen  $n$ -fachen Einzelpfahl. Nach Gleichung ( F.13 ) betragen die ersten vier Grundfrequenzen der Bodenschicht :

$$f_1 = 0.41 \text{ Hz}, \quad f_2 = 1.22 \text{ Hz}, \quad f_3 = 2.03 \text{ Hz}, \quad f_4 = 2.85 \text{ Hz}, \text{ etc.}$$

Die Resonanzen sind im Frequenzverlauf der Steifigkeit deutlich erkennbar. Sie prägen sich umso stärker aus, je mehr Boden zwischen den Pfählen zum Mitschwingen angeregt wird. Erhöht man die Anregungsfrequenz, beginnend bei 0 Hz, so kann man ein charakteristisches Verhalten beobachten :

Die Horizontalsteifigkeit nimmt wegen mitschwingender Bodenmassen ab, solange bis die erste Grundfrequenz der Bodenschicht erreicht wird. Bis hier tritt Dämpfung nur in hysteretischer Form auf. Oberhalb dieser Grundfrequenz beginnt die Energieabstrahlung wirksam zu werden. Sie nimmt mit wachsender Frequenz rasch zu. Die nächsten Grundfrequenzen markieren jeweils lokale Minima im Frequenzverlauf von Steifigkeit und Dämpfung. Sobald die Scherwellenlänge in den Bereich der doppelten Fundamentabmessung gerät, kann man bei der Steifigkeit eine eindeutig steigende Tendenz beobachten. Physikalisch betrachtet schwingen nun die äußeren Pfähle in Gegenphase. Das Maximum wird erreicht, wenn sich benachbarte Pfähle gegenphasig bewegen, sich also gegenseitig aussteifen. Die entsprechende Frequenz beträgt

$$f = \frac{V_s}{2a} \quad ( 6.5.3 )$$

Die Scherwellenlänge ist gleich dem Doppelten des Pfahlabstandes.

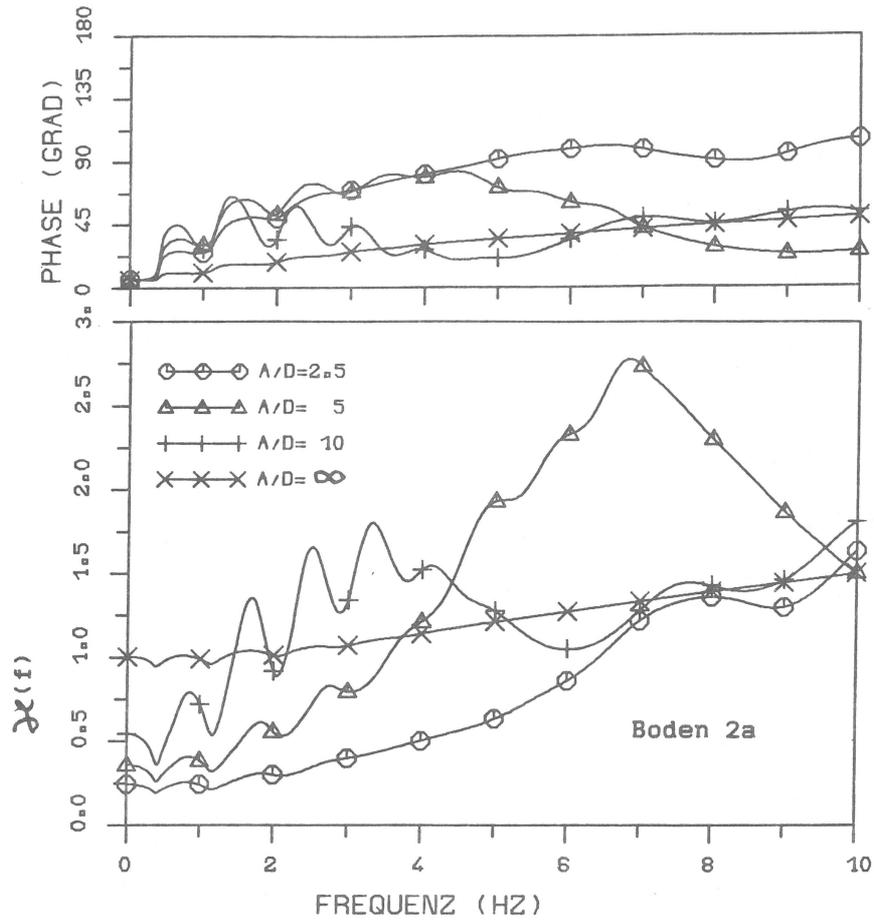


Bild 6.63 : Normierte Steifigkeit der Gruppe 16 in homogener Schicht

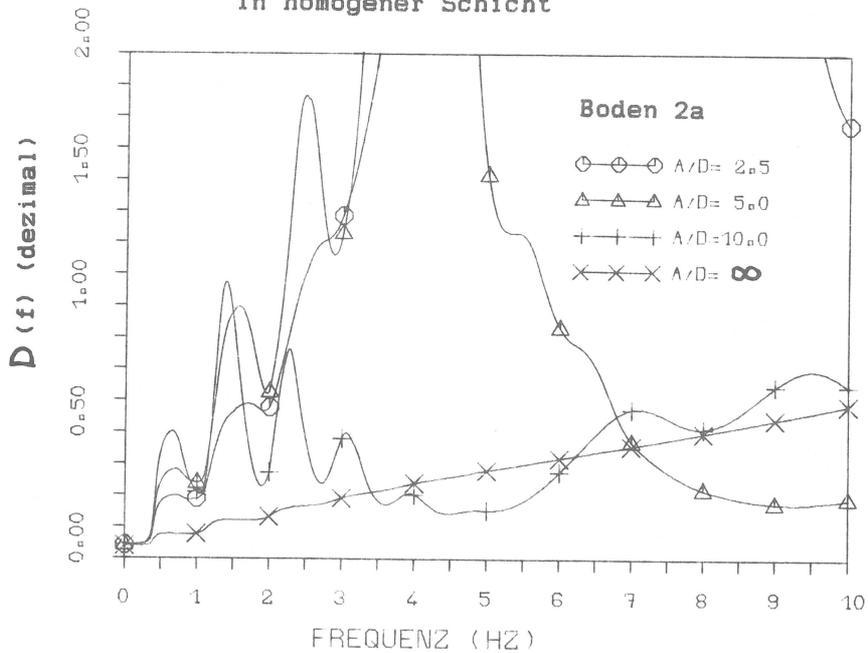
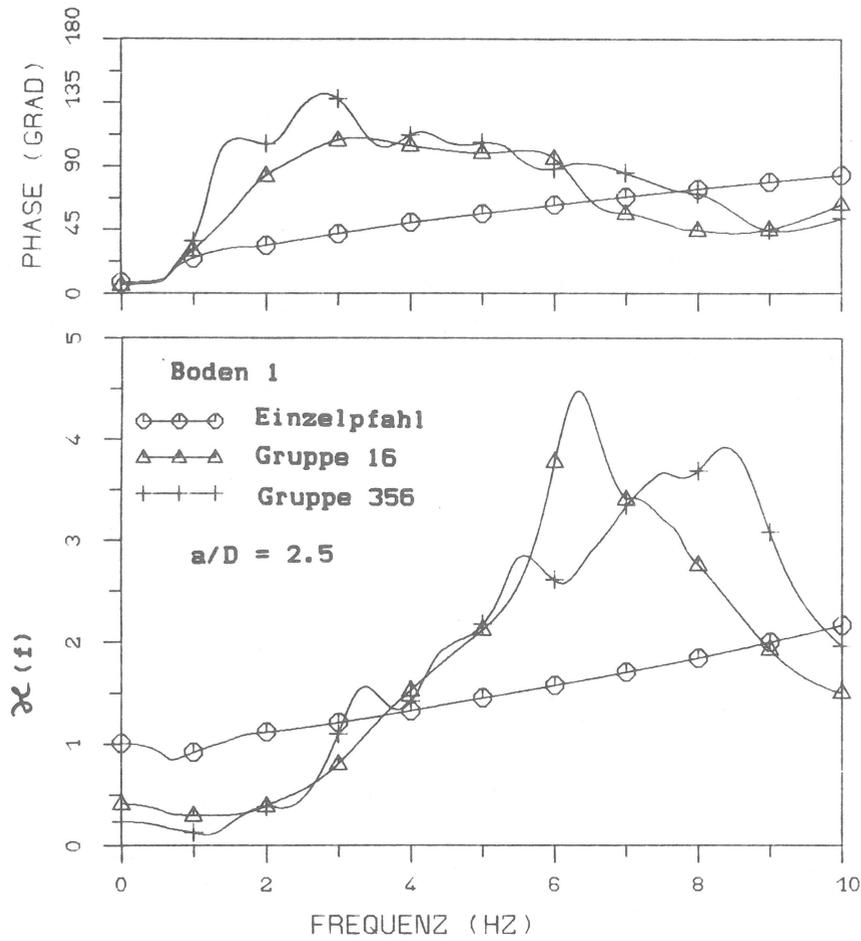


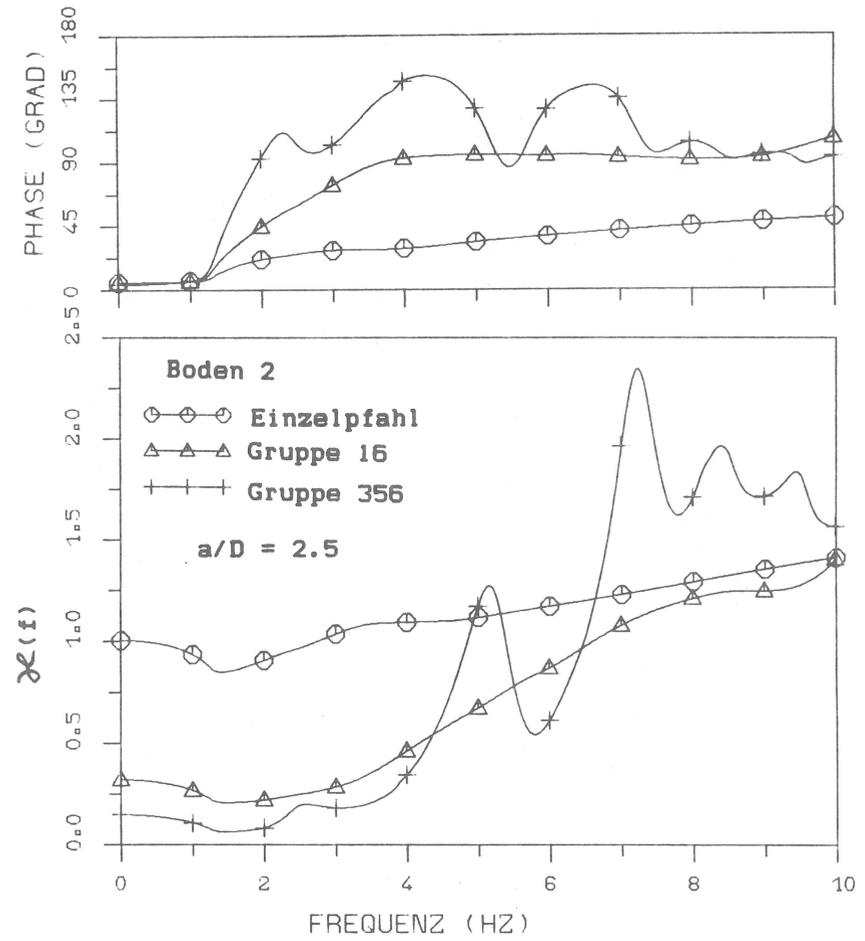
Bild 6.64 : Dämpfungsmaß der Gruppe 16 in homogener Schicht

Man beachte, daß die Steifigkeit der Gruppe größer werden kann als die eines n-fachen Einzelpfahles. Mit weiter wachsender Frequenz fällt die Steifigkeit wieder ab und schmiegt sich schließlich der Kurve für den Einzelpfahl an. Der Pfahlabstand hat einen bedeutenden Einfluß auf die Interaktionseffekte zwischen den Pfählen. Ist er gering, schwingt die ganze Gruppe einheitlich. Sie könnte näherungsweise durch einen äquivalenten Einzelpfahl ersetzt werden. Bei größerem Pfahlabstand entstehen Interferenzerscheinungen. Das charakteristische Schwingverhalten der Bodenschicht macht sich deutlich bemerkbar. Im niedrigen, für die Bemessung wesentlichen Frequenzbereich wächst die Dämpfung mit zunehmendem Pfahlabstand. Das liegt daran, daß der größere Gründungsumfang mehr Energieabstrahlung zuläßt.

Als nächstes wird das Verhalten der Pfahlgruppen in den geschichteten Bodenprofilen 1 und 2 untersucht. Alle Pfähle sind am Pfahlkopf biegesteif angeschlossen. Die normierte Horizontalsteifigkeit nach Gleichung ( 6.5.2 ) ist den Bilder 6.65 und 6.66 zu entnehmen. Während der Frequenzverlauf beim Einzelpfahl nahezu konstant ist, zeigt er bei Gruppe 16 und besonders bei Gruppe 356 starke Schwankungen. Obwohl die einzelnen Extremwerte der Funktionen nicht immer eindeutig zu identifizieren sind, ist der Frequenzverlauf doch wieder ähnlich typisch wie in Bild 6.63 für Pfähle in einer homogenen Bodenschicht. Bildet man den Kehrwert von  $\chi(f)$ , so erhält man die frequenzabhängigen Nachgiebigkeiten der Pfahlgründungen, wie sie auf den Bilder 6.67 und 6.68 dargestellt sind. Sie geben die Verschiebungen der masselosen Pfahlkopfplatte an, wenn an ihr eine dynamische Last  $F = n \cdot e^{i\Omega t}$  wirkt. Bei den gewählten Parametern liegen die wesentliche Verschiebungen unterhalb von 4 Hz. Wieder ist der Einfluß der ersten Grundfrequenz des Bodens deutlich erkenn-



**Bild 6.65 : Normierte Steifigkeiten der Gruppen  
in weichem, geschichteten Boden**



**Bild 6.66 : Normierte Steifigkeiten der Gruppen  
in steifem, geschichteten Boden**

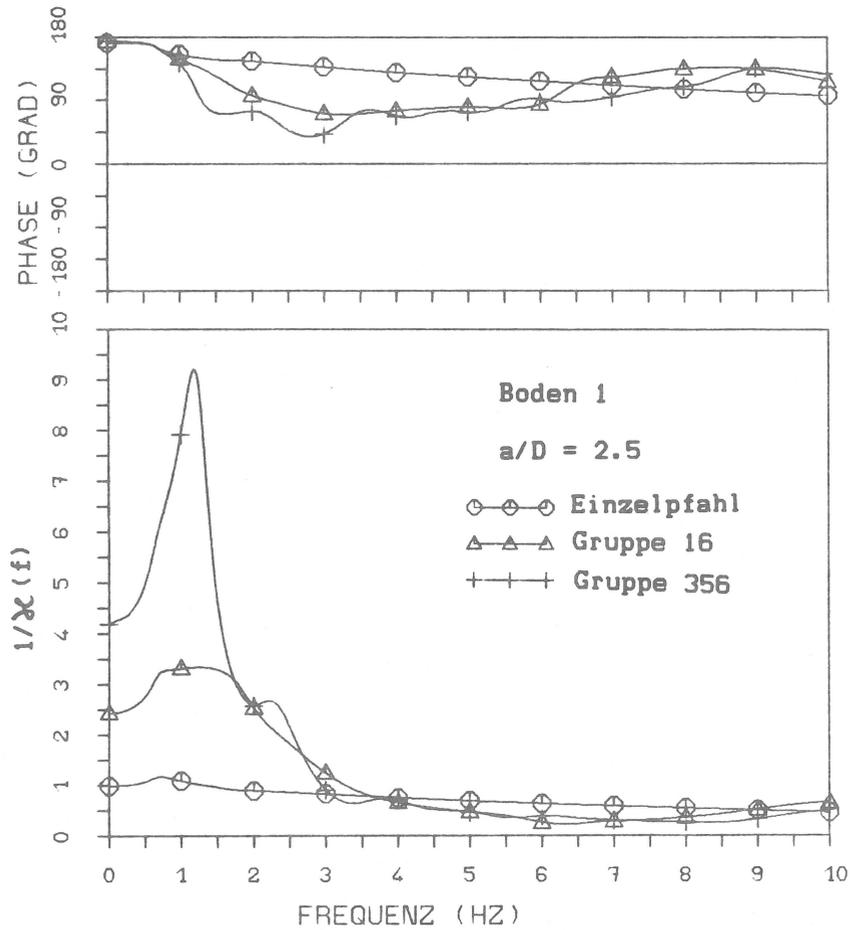


Bild 6.67 : Normierte Nachgiebigkeiten der Gruppen  
in weichem, geschichteten Boden

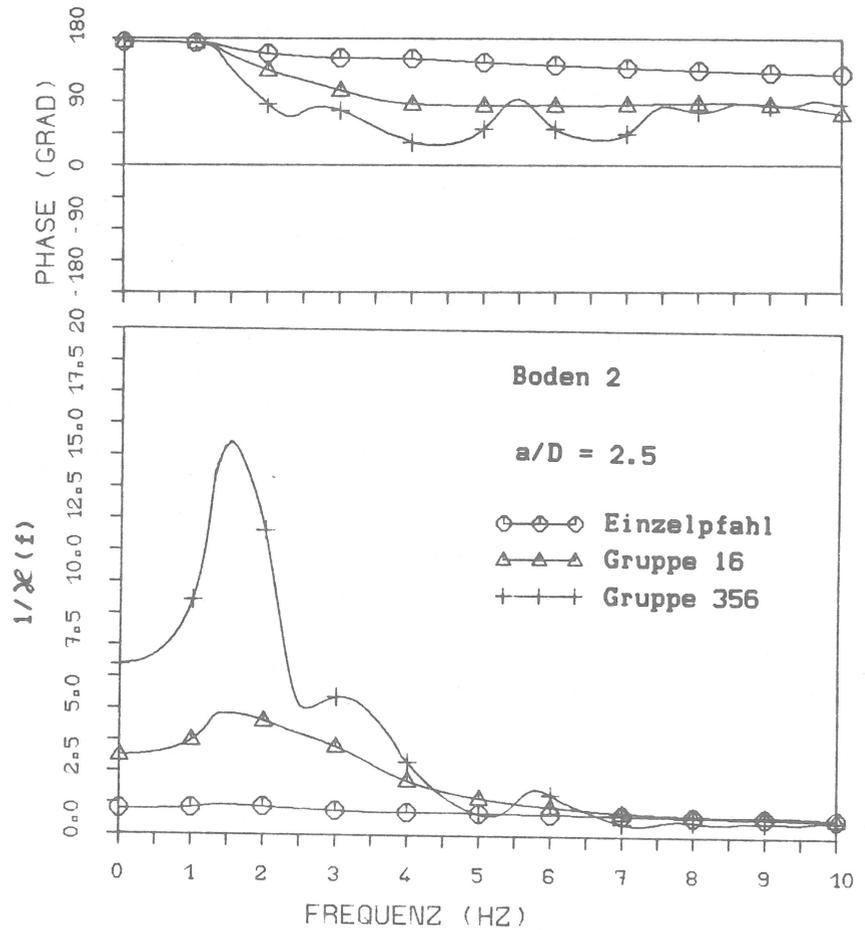


Bild 6.68 : Normierte Nachgiebigkeiten der Gruppen  
in steifem, geschichteten Boden

bar. Sie liegt beim weichen Boden bei 0.7 Hz, beim steifen bei 1.3 Hz. Der Maximalwert der Verschiebung ist jedoch bei Gruppe 16 und besonders bei Gruppe 356 infolge der zusätzlichen Trägheitskräfte der mitschwingenden Bodenmasse im Frequenzbereich verschoben. Bemerkenswert ist die ausgeprägte Spitze bei der großen Pfahlgruppe. In der Praxis ist die Pfahlkopfplatte nicht masselos, wie bis jetzt vorausgesetzt worden ist. Außerdem trägt sie noch die Masse des Gebäudes. Der Einfluß der Masse soll nun untersucht werden. Um einen Vergleich zwischen den Gruppen zu ermöglichen, wird eine anteilige Pfahlkopfmasse definiert als

$$M = \frac{M_{ges}}{n} \quad ( 6.5.3 )$$

Mit  $M = 100 \text{ t}$  wird ein relativ leichtes, mit  $M = 500 \text{ t}$  ein schweres Gebäude simuliert. Die Verschiebungen der Pfahlkopfplatte unter der Einheitslast  $F = n \cdot e$  <sup>ist</sup> sind auf den Bildern 6.69 und 6.70 aufgezeichnet. Sie gelten für das weiche Bodenprofil. Bei Gruppe 356 mit der schweren Gebäudemasse liegt die Grundfrequenz des Gesamtsystems unmittelbar unter der ersten Grundfrequenz des Bodens. Wegen der geringen Dämpfung erhält man hier große Schwingungsamplituden. Bei Gruppe 16 werden bei gleichen Verhältnissen vergleichsweise geringere Bodenmassen zum Mitschwingen angeregt. Die Verschiebung reagiert deshalb weniger sensibel bei Resonanz mit der Grundfrequenz des Bodens.

Die Verteilung der Einheitslast  $F$  auf die einzelnen Pfähle der Gruppen ist den Bildern 6.71 bis 6.74 zu entnehmen. Aufgetragen ist jeweils die Querkraft am Kopf eines Innen- und eines Außenpfahles. Bei schwerer Gebäudemasse beobachtet man im unteren Frequenzbereich eine zum statischen Fall proportionale Lastverteilung. Die Außenpfähle beteiligen sich stärker als die Innenpfähle. Bei geringeren Massen

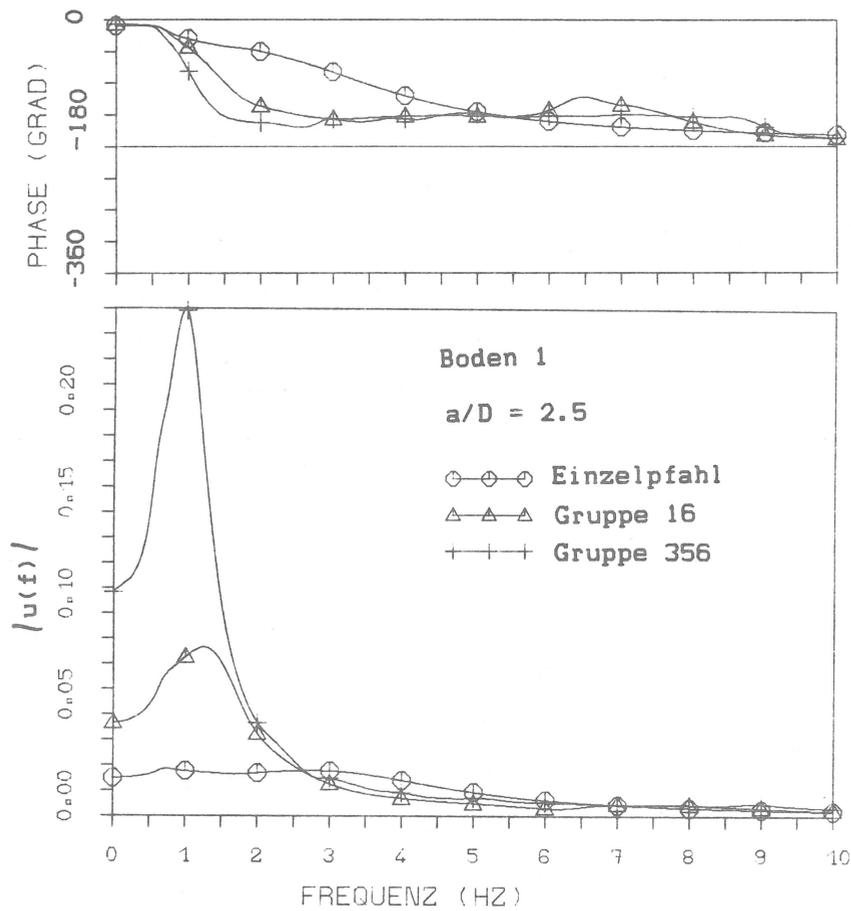


Bild 6.69 : Horizontalverschiebung der Pfahlkopfplatte  
 infolge  $F = n * 1.0 * e^{i\Omega t}$ ,  $M = n * 0.1 \text{ kt}$

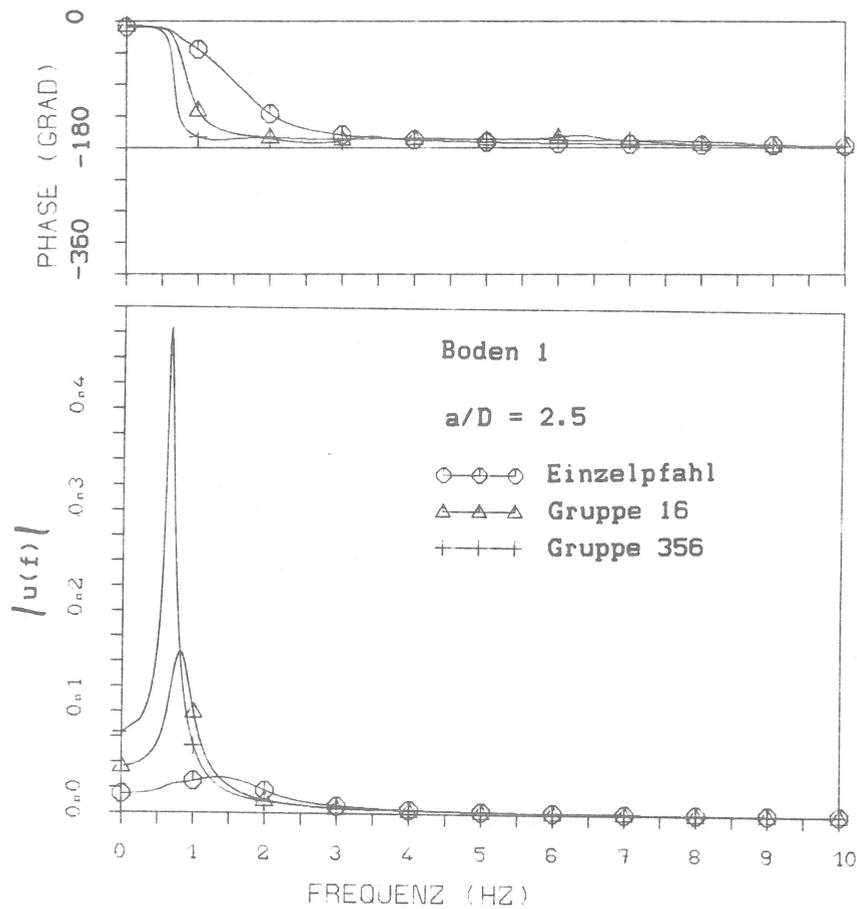


Bild 6.70 : Horizontalverschiebung der Pfahlkopfplatte  
 infolge  $F = n * 1.0 * e^{i\Omega t}$ ,  $M = n * 0.5 \text{ kt}$

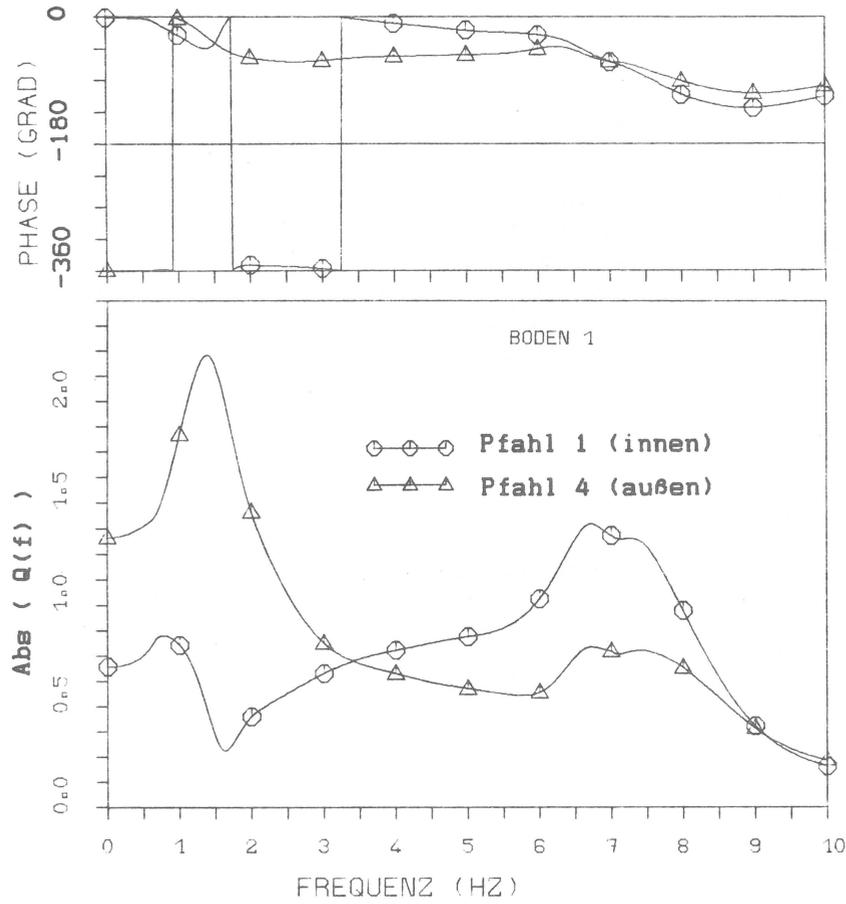


Bild 6.71 : Querkraftverteilung in Gruppe 16 , Boden 1  
 infolge  $F = 16 * e^{i\Omega t}$  ,  $M = 1.6 \text{ kt}$

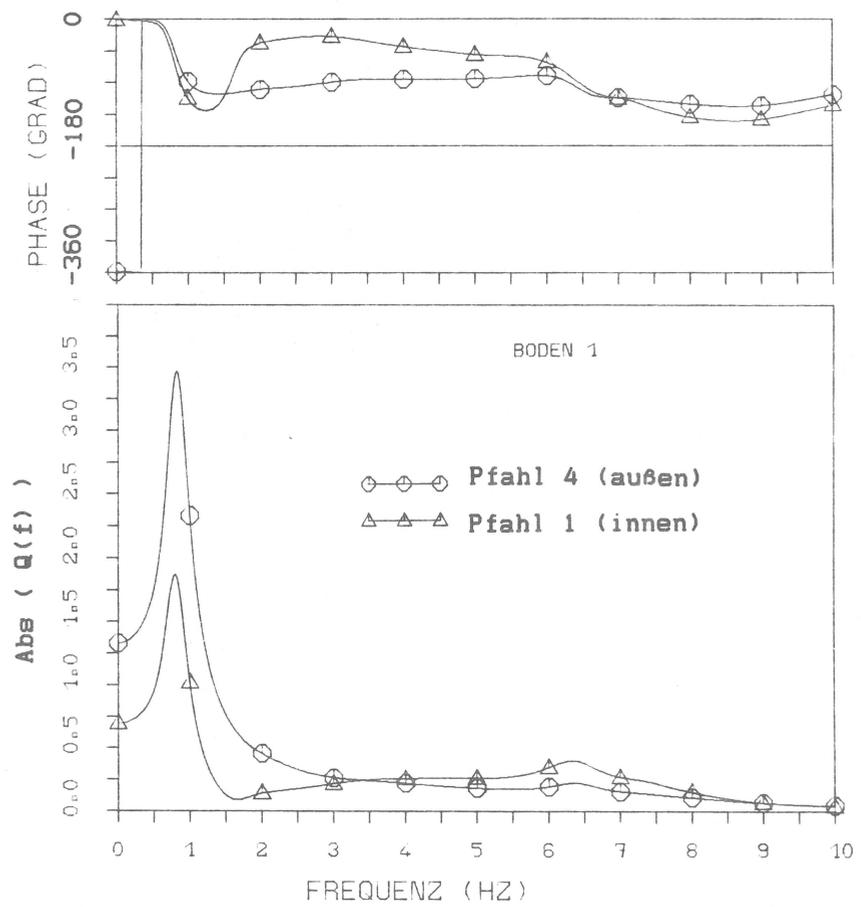


Bild 6.72 : Querkraftverteilung in Gruppe 16 , Boden 1  
 infolge  $F = 16 * e^{i\Omega t}$  ,  $M = 8.0 \text{ kt}$

oder bei höheren Frequenzen trifft das jedoch nicht mehr zu. Die Innenpfähle können dann durchaus stärker belastet werden als die Außenpfähle. Insgesamt zeigt dann die Lastverteilung ein sehr kompliziertes Bild, das sich einer qualitativen Beschreibung entzieht.

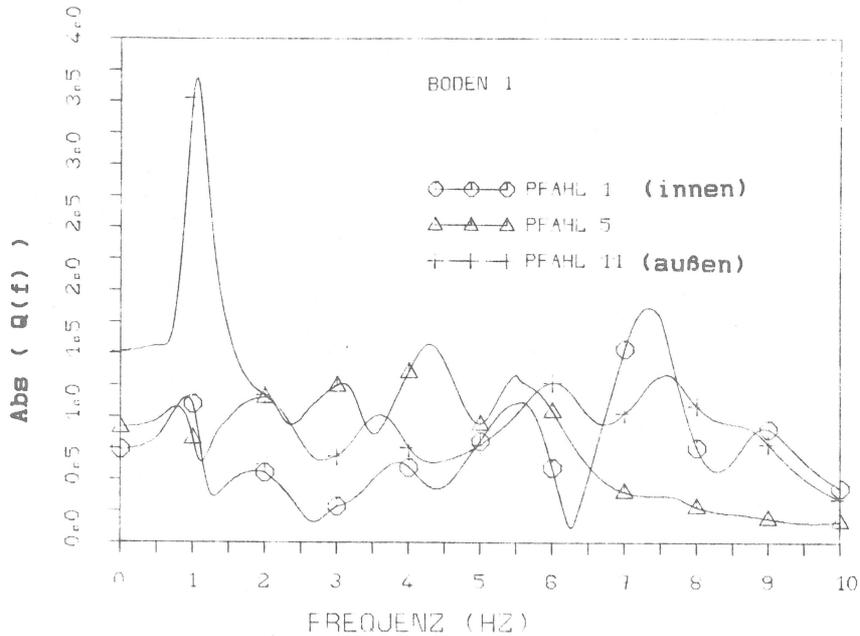


Bild 6.73 : Querkraftverteilung in Gruppe 356 , Boden 1  
infolge  $F = 356 * e^{i\Omega t}$ ,  $M = 35.6 \text{ kt}$

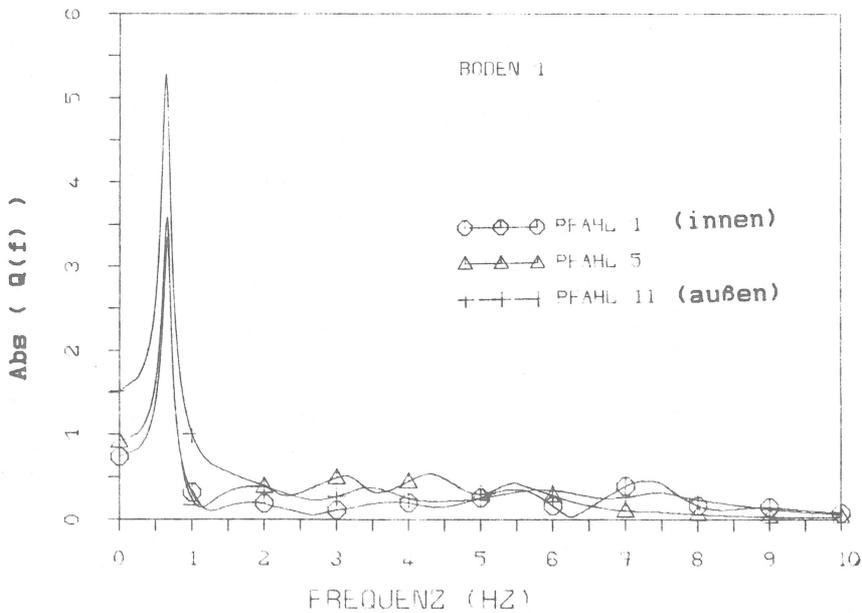


Bild 6.74 : Querkraftverteilung in Gruppe 356 , Boden 1  
infolge  $F = 356 * e^{i\Omega t}$ ,  $M = 178 \text{ kt}$

### 6.5.3 Erdbeben

Die Bilder 6.75 und 6.76 zeigen für den weichen Boden 1 und den steifen Boden 2 die Übertragungsfunktionen der Beschleunigungen, wie sie in Bild 6.9 definiert worden sind.  $H_{12}$  ist die Freifeldbeschleunigung in Höhe der Geländeoberfläche,  $H_{13}$  ist die Beschleunigung an der Pfahlkopfplatte, beide infolge einer harmonischen Basisbeschleunigung. In den Bildern werden die Absolutwerte für Freifeld, Einzelpfahl, Gruppe 16 und Gruppe 356 verglichen. Wie schon in Kapitel 6.4.3 festgestellt, unterscheidet sich die Beschleunigung des Einzelpfahles bei niedrigen Frequenzen nur unwesentlich von der des Freifeldes. Für Pfahlgruppen gilt das nicht. Sie steifen vielmehr den Boden aus; je größer die Pfahlanzahl ist, desto mehr. Die niederfrequenten Anteile der Freifeldbeschleunigung mit ihrem Maximum bei der ersten Grundfrequenz des Bodens werden zunehmend herausgefiltert, die Anteile im Bereich der zweiten bleiben erhalten oder werden sogar verstärkt. Mit weiter zunehmender Frequenz wird das Bild wegen der vielfältigen Wechselwirkungen undurchsichtig. Für die praktische Anwendung hat dieser Frequenzbereich jedoch keine Bedeutung mehr. Auf den Bildern 6.77 und 6.78 sieht man die entsprechenden Übertragungsfunktionen  $H_{12}$  und  $H_{13}$ , wenn der elastische Halbraum die Basis des Schichtenmodelles bildet. Der Spitzenwert der Beschleunigung liegt wesentlich niedriger als bei dem Fall mit starrer Basis. Durch die Aussteifungswirkung der Pfähle werden auch hier die niederfrequenten Anteile der Beschleunigung reduziert. Es fällt auf, daß bei der großen Gründung eine gewisse Verschiebung Grundfrequenz auftritt.

Mit einer Fouriertransformation erhält man wieder aus den Übertragungsfunktionen und den Erdbebenzeitverläufen die Beschleunigungen der Pfahlkopfplatte im Zeitbereich. Die jeweiligen Maxima sind in

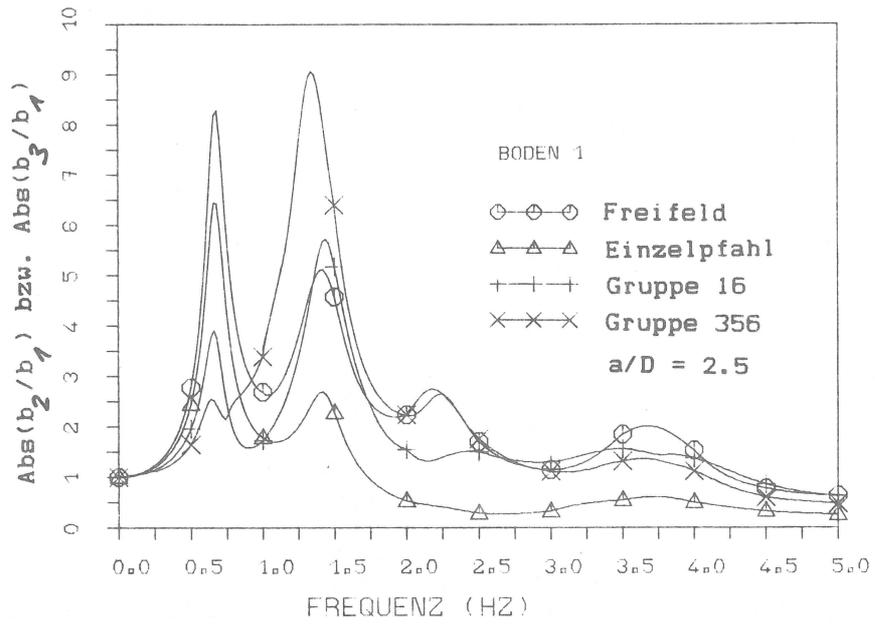


Bild 6.75 : Übertragungsfunktionen der Beschleunigung  $H_{12}$  und  $H_{13}$  für Boden 1, starre Basis

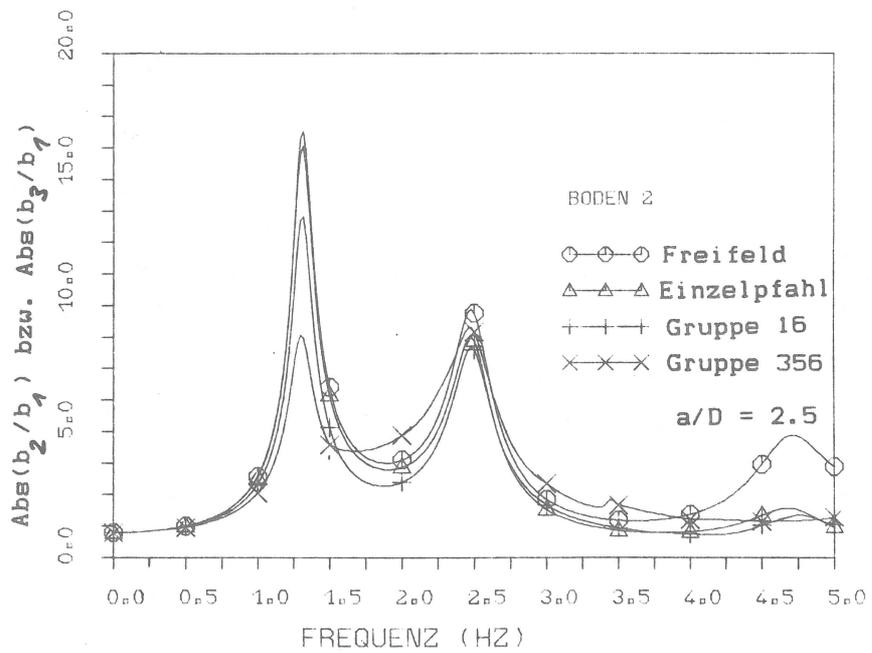


Bild 6.76 : Übertragungsfunktionen der Beschleunigung  $H_{12}$  und  $H_{13}$  für Boden 2, starre Basis

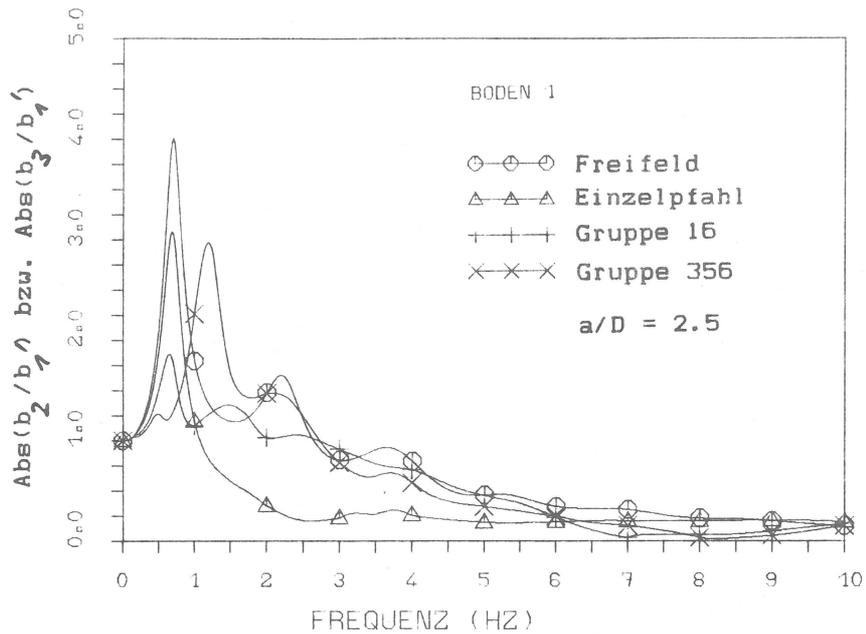


Bild 6.77 : Übertragungsfunktionen der Beschleunigung  $H_{1/2}$  und  $H_{1/3}$  für Boden 1, elastische Basis

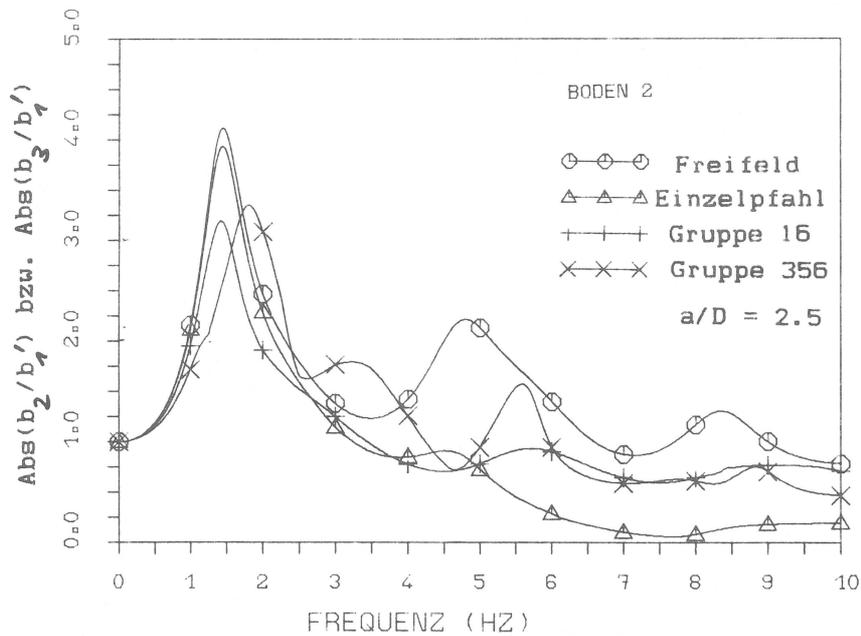


Bild 6.78 : Übertragungsfunktionen der Beschleunigung  $H_{1/2}$  und  $H_{1/3}$  für Boden 2, elastische Basis

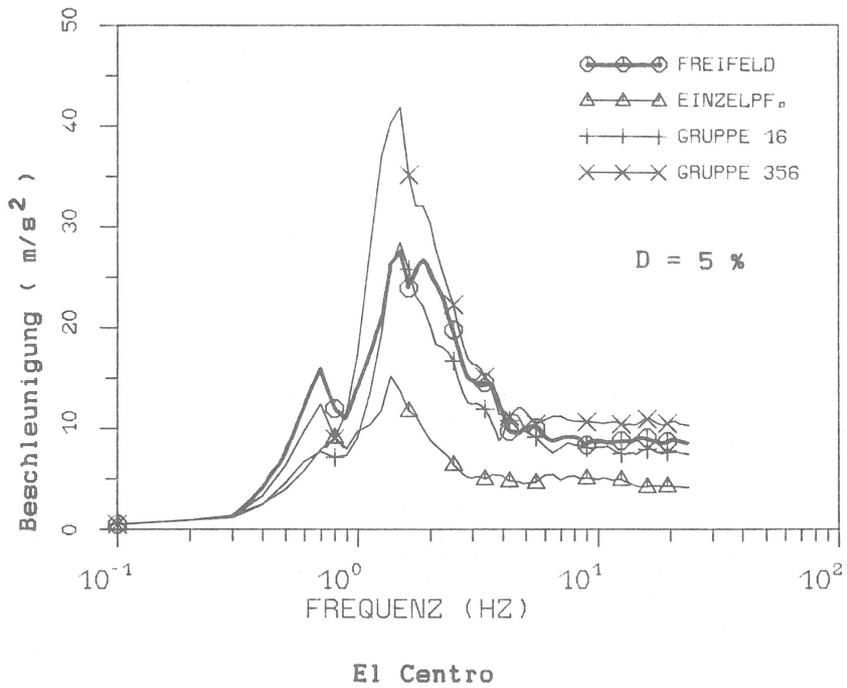
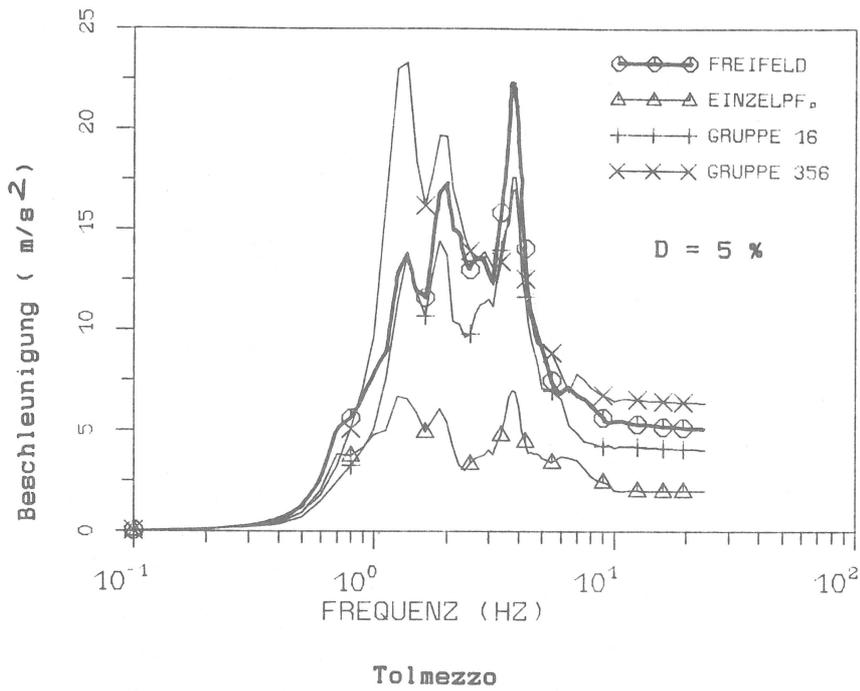
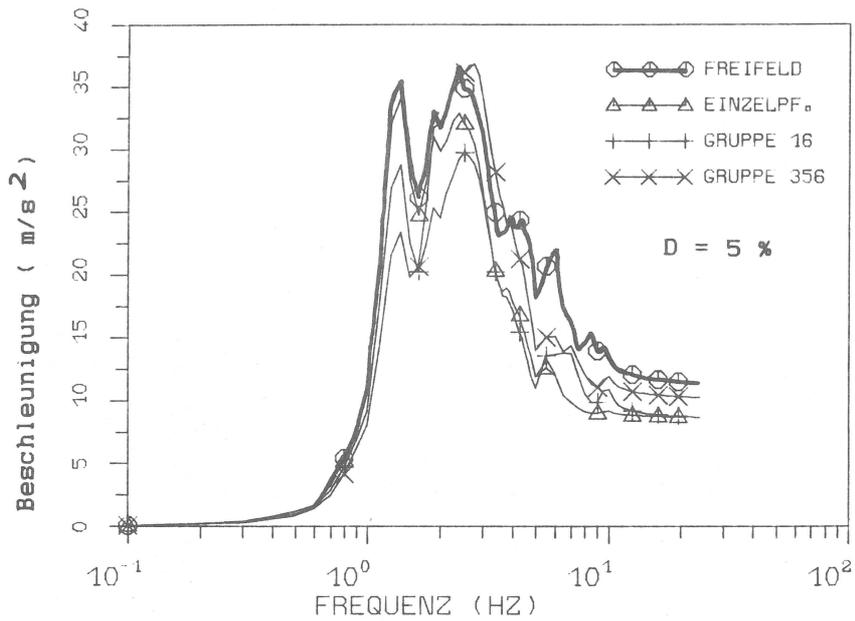
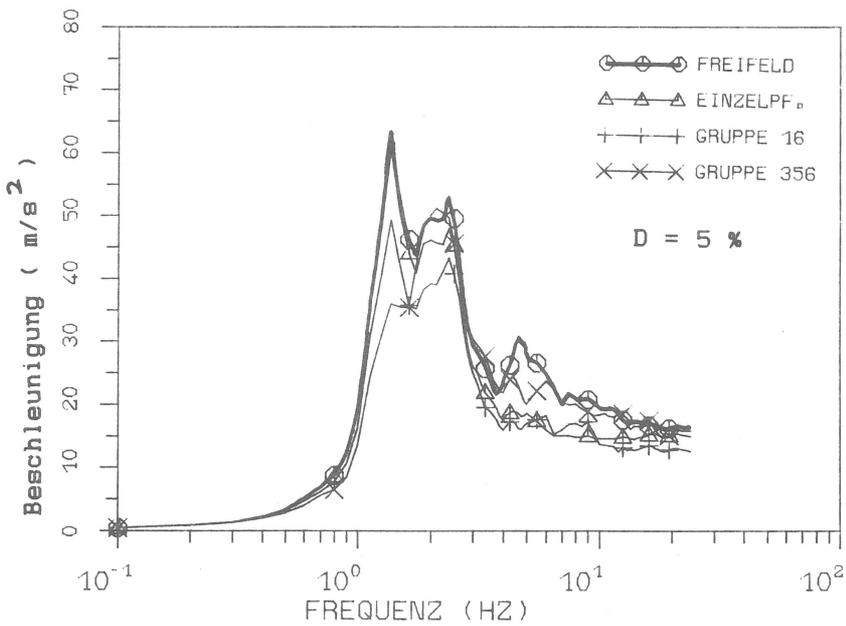


Bild 6.79 : Antwortspektrum der Beschleunigung  
Boden 1 starrer Halbraum.



Tolmezzo



El Centro

Bild 6.80 : Antwortspektrum der Beschleunigung

Boden 2, starrer Halbraum

Tabelle 6.12 zusammengefaßt. Die Bilder 6.79 und 6.80 zeigen im Vergleich die Beschleunigungsantwortspektren an der Freifeldoberfläche und an den Pfahlkopfplatten von Einzelpfahl, Gruppe 16 und Gruppe 356 (  $D = 5\%$  , starre Basis ). Die spektralen Beschleunigungen von Einzelpfahl und kleiner Gruppe liegen durchweg unter der des Freifeldes. Auf der großen Gruppe im weichen Boden sind die Antworten einiger Einmassenschwinger größer als derjenigen im Freifeld. Darauf deutet schon die der Rechnung zugrundeliegende Übertragungsfunktion ( Bild 6.75 ) hin. Beim steifen Boden ist dagegen das Spektrum der Freifeldbeschleunigung die Einhüllende der Spektren an allen Pfahlkopfplatten. Zur Bestimmung der Maximalbeschleunigung eines Gebäudes auf einer Pfahlgründung ist es demnach gerechtfertigt, die Spektralwerte aus einem Freifeldspektrum abzulesen, was auch in Näherungsrechnungen üblich ist. Vorsicht ist lediglich dann

Bodenprofil		Boden 1		Boden 2	
Erdbebenzeitverlauf		Tolmezzo	El Centro	Tolmezzo	El Centro
Freifeld	starrer Halbraum	5.01	8.46	11.3	15.8
	elastischer	2.92	4.47	4.78	8.82
Einzelpfahl $M = 0$	starrer Halbraum	1.97	4.13	8.70	14.7
	elastischer	1.26	1.98	3.71	8.32
Gruppe 16 $M = 0$	starrer Halbraum	3.98	7.31	8.67	12.2
	elastischer	2.25	4.21	3.91	7.13
Gruppe 356 $M = 0$	starrer Halbraum	6.35	10.1	10.2	14.6
	elastischer	3.13	4.69	5.62	8.17

Tabelle 6.12 : Maximale Beschleunigungen (  $m/s^2$  ) an den Pfahlkopfplatten

geboden, wenn der Boden durch eine große Pfahlgründung großflächig ausgesteift wird. In solchen Fällen kann man sich behelfen, indem man bei der Berechnung des Freifeldspektrums den oberen Bodenschichten eine größere Schubsteifigkeit zuweist.

Bis hierher galt die Betrachtung dem Schwingungsverhalten einer masselosen Pfahlkopfplatte, also dem Einfluß der kinematischen Wechselwirkung. Die Auswirkung der der Gebäudemasse und damit der trägen Wechselwirkung wird am Beispiel der Gruppe 356 in den Bildern 6.81 und 6.82 deutlich. Mit wachsender Gebäudemasse sinkt die Grundfrequenz des Gesamtsystems aus Pfählen, Masse und Boden. Der Spitzenwert wird am größten, sobald er diejenige des Freifeldes unterschreitet. Das liegt daran, daß die Abstrahlungsdämpfung entfällt und gleichzeitig Freifeld und Pfahlgründung in Phase schwingen. Bei dem steiferen Boden 2 erkennt man das Phänomen am deutlichsten. Mit wachsender Gebäudemasse von  $M = 0 \text{ kt}$  bis  $M = 89 \text{ kt}$  steigt das Amplitudenmaximum der Übertragungsfunktion an. Bei einer Masse, die etwas kleiner als  $89 \text{ kt}$  ist, schwingen Freifeld und Gesamtsystem in Phase. Die Abstrahlungsdämpfung geht verloren und es verbleibt nur die relativ geringe hysteretische Bodendämpfung von  $6\%$  in den oberen und  $4\%$  in den unteren Schichten. Infolge des schlagartigen Verlustes der Abstrahlung wächst die Amplitude schnell an. Mit weiter steigender Masse entfernen sich die Resonanzfrequenzen wieder voneinander, der Spitzenbetrag der Amplitude nimmt ab. Beim weicheren Boden 1 sind die Verhältnisse etwas verwickelter, weil auch die zweite Grundfrequenz des Bodens beteiligt ist. Aber auch hier ist gut zu erkennen, wie sich die Grundfrequenz des Gesamtsystems verschiebt, wenn die Gebäudemasse vergrößert wird.

Tabelle 6.13 enthält die maximalen Beschleunigungen eines starren Gebäudes auf der Pfahlgruppe 356 bei den beiden Erdbeben Tolmezzo

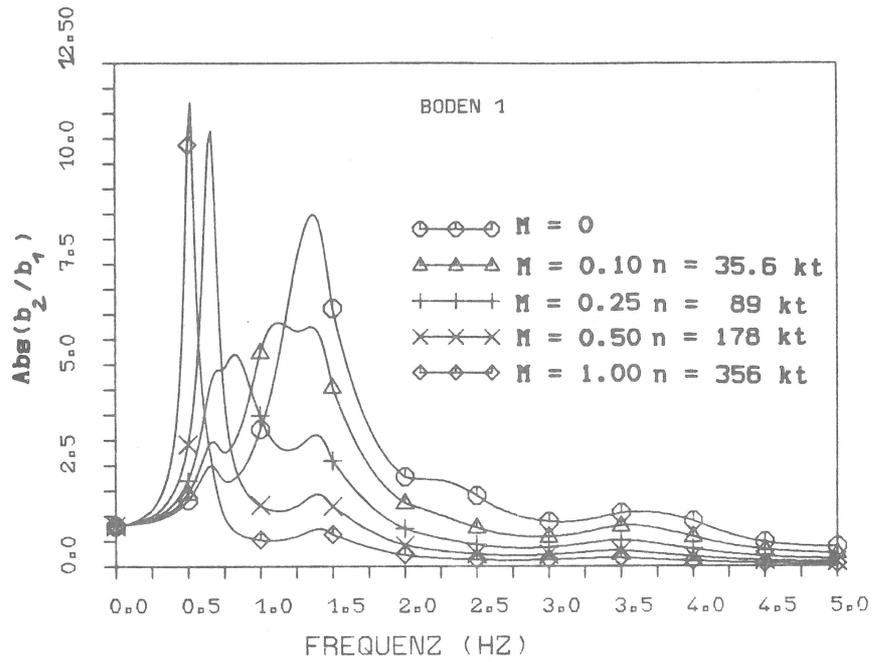


Bild 6.81 : Übertragungsfunktion der Beschleunigung in Abhängigkeit von der Gebäudemasse, Gruppe 356, Boden 1

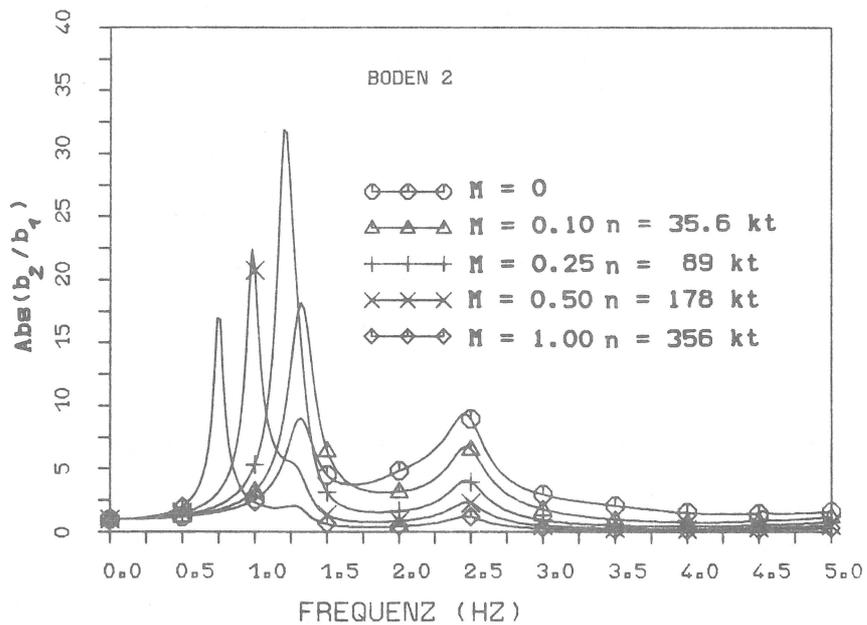


Bild 6.82 : Übertragungsfunktion der Beschleunigung in Abhängigkeit von der Gebäudemasse, Gruppe 356, Boden 2

und El Centro. Die Bilder 6.83 und 6.84 zeigen die jeweiligen Antwortspektren. Die im Mittel auf den einzelnen Pfahl entfallende Querkraft ist der Tabelle 6.14 zu entnehmen. Man erhält sie aus

$$Q = b \frac{M_{ges}}{h} = b \cdot M \quad ( 6.5.4 )$$

Bei den untersuchten Fällen verhält es sich im allgemeinen so, daß mit wachsender Masse ( also sinkender Eigenfrequenz ) die maximalen Beschleunigungen kleiner werden. Die betrachteten Eigenfrequenzen liegen nämlich unterhalb des Bereiches der maximalen Anregungen des Antwortspektrums ( Bilder 6.79 und 6.80). Fallen jedoch im besonderen die Grundfrequenzen von Gesamtsystem und Freifeld zusammen, so machen sich nach der Integration in den Zeitbereich die im Frequenzbereich beobachteten starken Überhöhungen bemerkbar. In den Tabellen 6.13 und 6.14 sind die entsprechenden Werte durch " \* " gekennzeichnet. Der Effekt ist beim steifen Boden stark ausgeprägt, beim weichen dagegen nur schwach, weil auch die zweite Freifeld-Grundfrequenz Bedeutung hat.

Bodenprofil	Boden 1		Boden 2	
	Tolmezzo	El Centro	Tolmezzo	El Centro
M = 0.0 kt	6.35	10.1	10.2	14.6
M = 35.6 kt	4.85	7.48	8.69	13.0
M = 89 kt	2.46	4.32	9.07 *	15.8 *
M = 178 kt	1.92 *	4.56 *	5.44	7.50
M = 356 kt	0.83	3.15	2.71	4.70

Tabelle 6.13 : Maximale Beschleunigungen ( m/s<sup>2</sup> ) von starren Gebäuden auf der Pfahlgruppe 356

Bodenprofil	Boden 1		Boden 2	
	Tolmezzo	El Centro	Tolmezzo	El Centro
M = 0.0 kt	-	-	-	-
M = 35.6 kt	0.49	0.75	0.87	1.30
M = 89 kt	0.62	1.08	2.27	3.95
M = 178 kt	0.96	2.28	2.72	3.75
M = 356 kt	0.83	3.15	2.71	4.70

Tabelle 6.14 : Maximale Pfahlkopfquerkraft ( MN ) eines mittleren Pfahles der Gruppe 356

Bei den Schnittkräften der Pfähle wird zweckmäßigerweise unterschieden, ob sie durch kinematische oder durch träge Wechselwirkung erzeugt werden. Die Schnittkräfte aus kinematischer Wechselwirkung entstehen bei masselos angenommener Pfahlkopfplatte durch die seismisch induzierten Bewegungen des Bodens ( Freifeldbewegungen ). Bild 6.83 zum Beispiel zeigt für den steifen Boden 2 den Frequenzverlauf der Querkraft am Kopf einzelner Pfähle. Im Unterschied zu den Beschleunigungen ( Bild 6.82 ) haben die Querkräfte zwischen der ersten und zweiten Grundfrequenz des Freifeldes relativ große Amplituden. Der Grund ist der, daß sich zwischen den Frequenzen die Phasen der Pfahlkopfquerkräfte ändern. Mit wachsender Frequenz pflanzt sich der Phasenwechsel über die Pfähle der Gründung von außen nach innen fort. Phasenwechsel bedeutet hier, daß die Querkräfte unterschiedliche Richtungen haben. Die Summe aller Kräfte muß Null sein, da definitionsgemäß  $M = 0$  ist und daher keine Trägheitskraft an der Pfahlkopfplatte wirkt. Bild 6.84 veranschaulicht die Verteilung der Querkräfte im Grundriß bei 1.0 Hz. Die Kräfte im äußeren Pfahlring halten denen in allen übrigen Pfählen das Gleichgewicht.

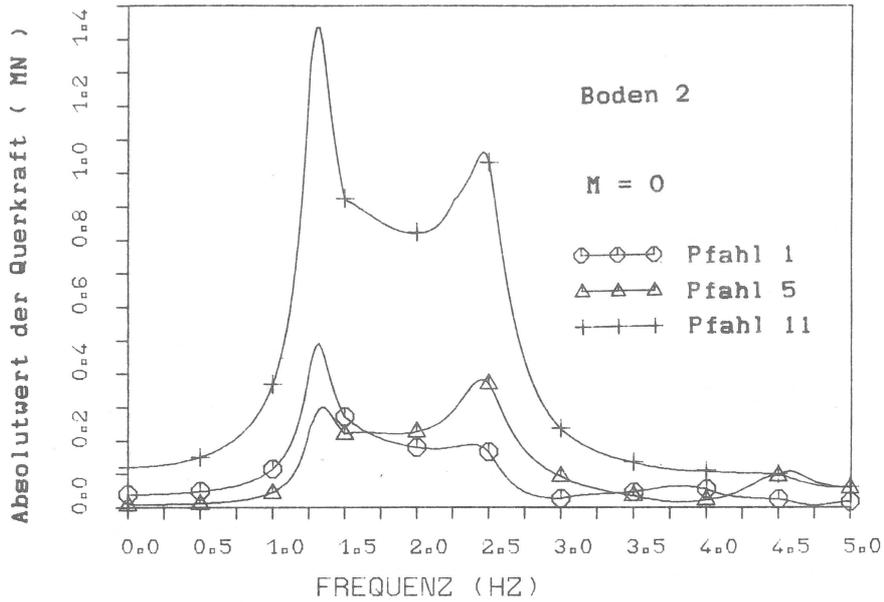


Bild 6.83 : Pfahlkopfquerkräfte in den Pfählen der Gruppe 356  
infolge Basisbeschleunigung, M = 0 kt

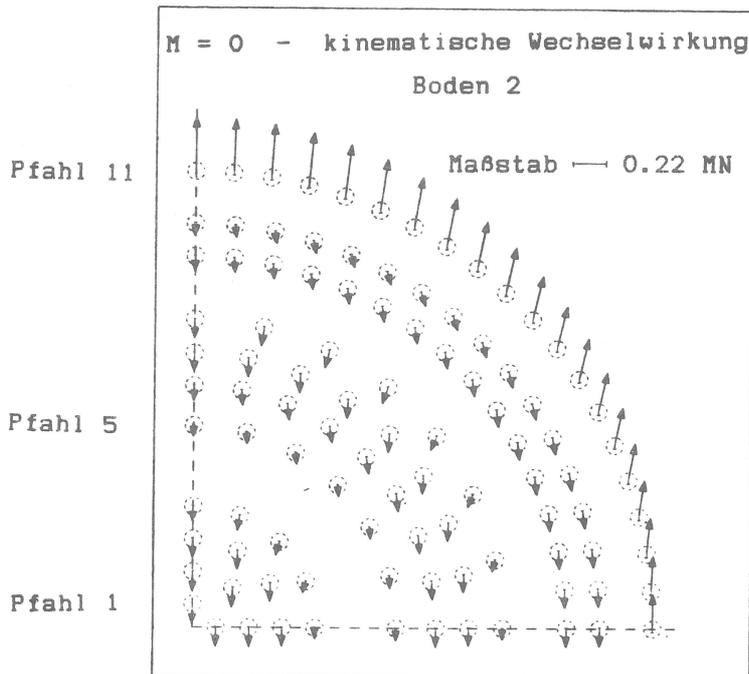


Bild 6.84 : Verteilung der Querkräfte auf die Pfähle der Gruppe 356  
infolge Basisbeschleunigung mit 1.0 Hz, M = 0 kt

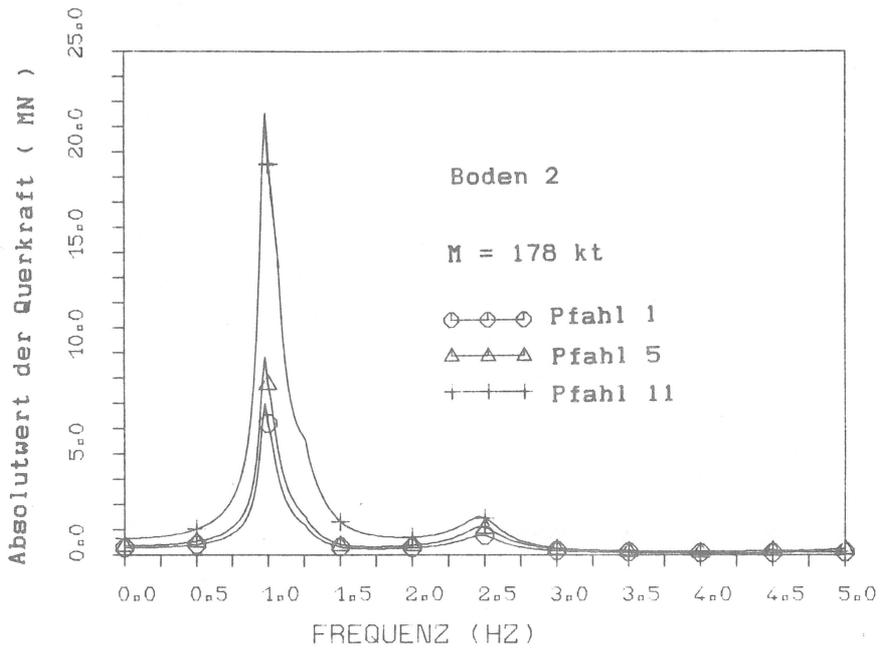


Bild 6.85 : Pfahlkopfquerkräfte in den Pfählen der Gruppe 356  
infolge Basisbeschleunigung, M = 178 kt

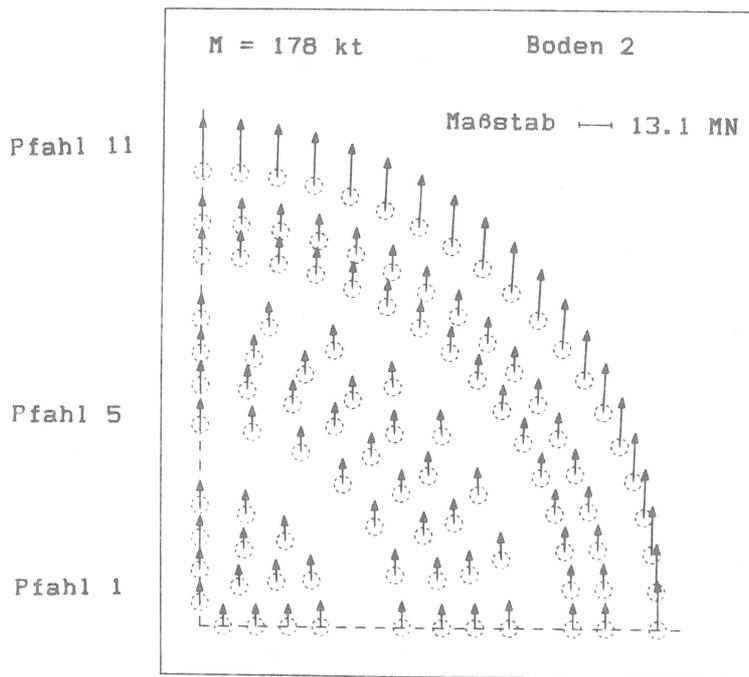


Bild 6.86 : Verteilung der Querkräfte auf die Pfähle der Gruppe 356  
infolge Basisbeschleunigung mit 1.0 Hz, M = 178 kt

Bei der betrachteten Frequenz sind die Schnittkräfte aus kinematischer Wechselwirkung am Pfahlkopf allerdings klein verglichen mit denen aus träger Wechselwirkung. Das geht aus Bild 6.85 hervor. Es zeigt die Amplituden der Pfahlquerkräfte für eine Gebäudemasse von  $M = 178 \text{ kt}$ . Wie schon in Bild 6.82 bei der Beschleunigung beobachtet, dominieren auch hier die Amplituden bei der Grundfrequenz. Für einfache Näherungen kann das hier verwendete Rechenmodell gut durch das eines Einmassenschwingers ersetzt werden. Die Verteilung der Querkräfte über den Grundriß, wie in Bild 6.86 für die Frequenz 1.0 Hz aufgetragen, ist ähnlich wie im statischen Fall.

Die maximalen Amplituden der Pfahlkopfquerkräfte bei den Erdbebenzeitverläufen Tolmezzo und El Centro sind in Tabelle 6.15 angegeben.

Bodenprofil		Boden 2	
Erdbebenzeitverlauf		Tolmezzo	El Centro
Pfahl 1	M = 0	0.36	0.62
	M = 178 kt	1.82	2.38
Pfahl 5	M = 0	0.36	0.71
	M = 178 kt	2.50	3.41
Pfahl 11	M = 0	1.25	2.35
	M = 178 kt	5.03	6.80

**Tabelle 6.15 : Maximale Pfahlkopfquerkraft ( MN ) von Pfählen  
in der Gruppe 356**

Es fällt auf, daß die kinematische Wechselwirkung auf die maximalen Amplituden einen größeren Einfluß hat, als die Übertragungsfunktion nach den Bildern 6.83 und 6.85 vermuten läßt. Das liegt daran, daß die Spitzenwerte aus träger Wechselwirkung auf ein enges Frequenzband um 1.0 Hz beschränkt sind, das unterhalb des Bereichs der maximalen Anregungen des Antwortspektrums ( Bild 6.80 ) liegt . Bei Erdbeben mit breiten Antwortspektren und Spitzenanregungen oberhalb

1.0 Hz wirkt sich die Resonanz nur abgeschwächt aus. Bei dem Vergleich der Tabellenwerte ist zu beachten, daß die Querkräfte aus kinematischer und träger Wechselwirkung unterschiedliche Richtungen haben können, wie aus den Bildern 6.84 und 6.86 ersichtlich ist. Bild 6.87 zeigt den Verlauf von Querkraft und Biegemoment über die Pfahllänge bei 1.0 Hertz. Während am Pfahlkopf die Schnittkräfte der Außenpfähle bedeutend größer sind als die der Innenpfähle, sind sie in der Tiefe gleichmäßig auf alle Pfähle verteilt. Zum Vergleich ist der Anteil der kinematischen Wechselwirkung an den Schnittgrößen eingezeichnet. Er ist bei der Grundfrequenz und der vorhandenen Gebäudemasse von  $M = 178 \text{ kt}$  vernachlässigbar klein. Allerdings ist auch hier zu beachten, daß bei Fouriertransformation in den Zeitbereich die kinematische Wechselwirkung große Bedeutung hat, wenn die Grundfrequenz durch das Erdbebenspektrum nur wenig angeregt wird.

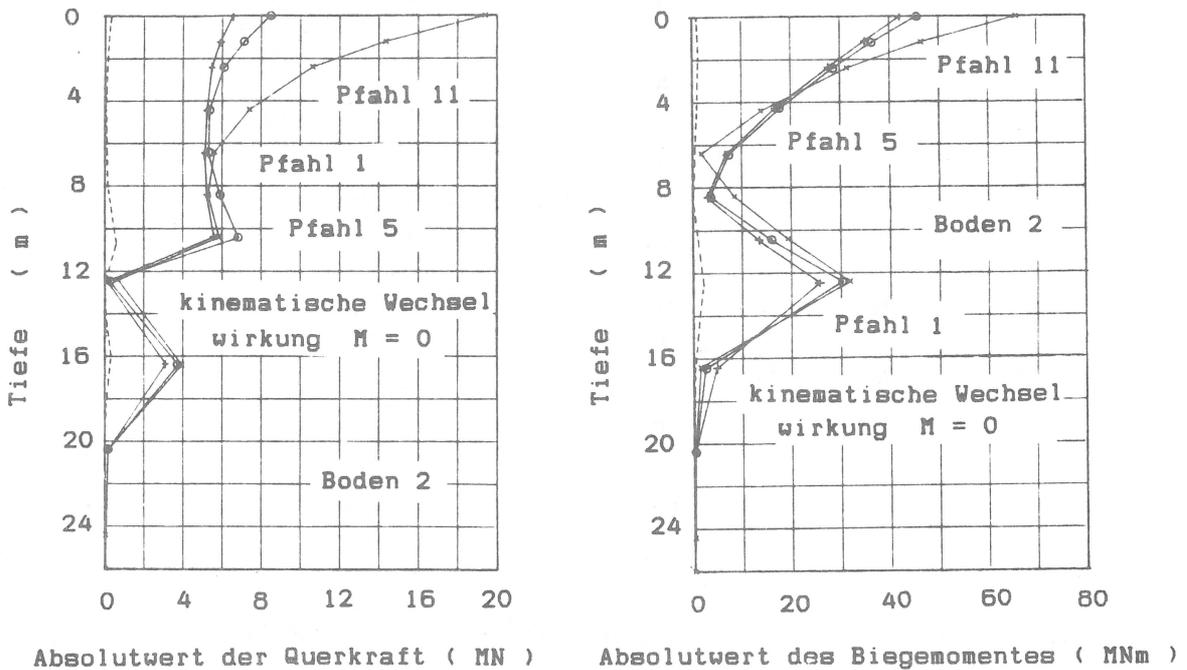


Bild 6.87 : Pfahlschnittkräfte der Gruppe 356 infolge Basisbeschleunigung  $1.0 e^{i\Omega t}$  bei 1.0 Hz ,  $M = 178 \text{ kt}$

#### 6.5.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für Pfahlgruppen

Aus den Ergebnissen für horizontal belastete Pfahlgruppen lassen sich die folgenden Schlußfolgerungen ziehen. Die Gültigkeit der elastischen Theorie sei vorausgesetzt.

- Bei statischer Belastung unterscheiden sich die Schnittgrößen von Pfählen innerhalb einer Gruppe von denen eines Einzelpfahles. Da sich die Querkräfte erst in tieferen Zonen von den Pfählen in den Boden umlagern, beeinflußt die Bodenschichtung die Schnittgrößen der Pfählen stärker als beim Einzelpfahl.
- Die Horizontalsteifigkeit der Gruppe sinkt mit abnehmendem Pfahlabstand. Das Verhältnis der Steifigkeit eines Pfahles in der Gruppe zu der eines Einzelpfahles ( Gruppenfaktor ) ist umso kleiner, je steifer der Boden und je größer die Pfahlanzahl ist. Für eine große Gruppe beträgt das Verhältnis ungefähr 0.20, für eine kleinere Gruppe ungefähr 0.35, jeweils bei  $a/D = 2.5$  ( mit  $a$  als Pfahlabstand,  $D$  als Pfahldurchmesser ). Die Art der Pfahlkopfeinspannung hat kaum einen Einfluß.
- Die Schnittkräfte der Pfähle einer Gruppe sind im Mittel höher als die eines Einzelpfahles im gleichen Boden.
- Die außen stehenden Rand- und Eckpfähle übernehmen einen überproportional großen Anteil der Querkräfte. Bei einer großen Pfahlgruppe ist die Querkraftverteilung auf die Innenpfähle ziemlich gleichmäßig. Bei den Biegemomenten sind die Unterschiede zwischen Innen- und Außenpfählen kleiner als bei den Querkräften.
- Bei gelenkigem Pfahlkopfanschluß ist die Horizontalsteifigkeit der Gründung etwa halb so groß wie bei biegesteifem Anschluß. Die Querkraftverteilung auf die einzelnen Pfähle ist ungefähr

gleich. Das Verhältnis der maximalen Biegemomente bei biegesteifem und bei gelenkigem Pfahlkopfanschluß ist im allgemeinen ähnlich wie beim Einzelpfahl. Bei dichtem Pfahlabstand und weichem Boden jedoch kann das maximale Biegemoment des gelenkig angeschlossenen Pfahles überproportional anwachsen.

- Bei dynamischer Belastung ist im Gegensatz zum Einzelpfahl die Steifigkeit ( Impedanz ) stark frequenzabhängig. Minima treten auf bei den unteren Resonanzfrequenzen des Bodens und zwar umso deutlicher, je größer die Gruppe und je weicher der Boden ist. Eine weitere Einflußgröße ist das Verhältnis der Scherwellenlänge zum Durchmesser der Pfahlgruppe und zum Pfahlabstand.
- Die dynamische Steifigkeit der Pfahlgruppe kann größer werden als die einer entsprechenden Anzahl von Einzelpfählen. Das ist dann der Fall, wenn die Pfähle der Gründung nicht in Phase schwingen. Sie steifen sich dann gegenseitig aus.
- Wenn die Gebäudemasse genügend groß ist, haben die Amplituden bei der Grundfrequenz die dominierende Bedeutung in den Übertragungsfunktionen der Schnittgrößen. Das dynamische Verhalten einer Pfahlgründung kann dann durch einen gedämpften Einmassenschwinger approximiert werden.
- Wenn die Gebäudemasse genügend groß ist, ähnelt die Verteilung der Schnittkräfte auf Innen- und Außenpfähle den Verhältnissen im statischen Fall. Die Pfähle geben jedoch ihre Querkraft erst in tieferen Pfahlbereichen an den Boden ab.

- Bei Erdbebenanregung entwickelt die Pfahlgruppe im Gegensatz zum Einzelpfahl ein selbstständiges Schwingungsverhalten. Bei der untersten Grundfrequenz sind die Beschleunigungen an der Pfahlkopfplatte deutlich geringer als die Freifeldbeschleunigung.
- Die Antwortspektren an der masselosen Pfahlkopfplatte sind meist niedriger als die Freifeldspektren. Das gilt umso mehr, je kleiner die Pfahlgruppe ist.
- Wenn die Grundfrequenzen eines Bauwerkes auf einer Pfahlgründung mit der des Freifeldes zusammenfallen, entstehen große Beschleunigungsamplituden an der Pfahlkopfplatte. Sie sind jedoch auf ein enges Frequenzband beschränkt.
- Bei der Anregung bei der Resonanzfrequenz werden die Schnittkräfte der Pfähle nahezu ausschließlich durch die träge Wechselwirkung bestimmt, wenn die Gebäudemasse groß ist. Lediglich bei leichten Gebäuden kann die kinematische Wechselwirkung Bedeutung erlangen.
- Wenn es nicht vermieden werden kann, daß die Grundfrequenz des Gesamtsystems in den Bereich der stärksten Anregungen des Erdbebenantwortspektrums fällt ( Resonanz ) fällt, dann werden die Schnittkräfte aus träger Wechselwirkung groß. Die Schnittgrößen aus kinematischer Wechselwirkung sind in diesem Falle vernachlässigbar.
- Wird die Grundfrequenz durch das Erdbeben nur wenig angeregt, haben die Schnittkräfte aus kinematischer und träger Wechselwirkung die gleiche Größenordnung. Am Pfahlkopf überwiegt die träge Wechselwirkung, in der Pfahltiefe die kinematische.

- Die Pfahlschnittkräfte, die an Grenzen zwischen weichen und steifen Bodenschichten in der Tiefe auftreten, sind bei der Bemessung zu berücksichtigen. Sie können die gleiche Größe erreichen wie die Pfahlschnittgrößen am Pfahlkopf.

## 7. Hinweise für die Praxis

### 7.1 Näherungsverfahren zur dynamischen Rechnung

In den meisten praktischen Anwendungsfällen ist eine vollständige dynamische Berechnung, wie sie im Kapitel 6 für die Parameterstudien vollzogen worden ist, sicherlich nicht angemessen. Hat man sich im Einzelfall über die Charakteristik der dynamischen Effekte Klarheit verschafft, dann reicht es im allgemeinen aus, die Bedeutung abzuschätzen. Dazu werden im folgenden einige Hinweise gegeben. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Näherungen auf der linear elastischen Theorie beruhen. Wenn es erforderlich ist, kann nichtlineares Werkstoffverhalten iterativ erfaßt werden. An die Stelle des Elastizitätsmoduls tritt dabei der Sekantenmodul. Im allgemeinen ist es jedoch sinnvoller, statt eines aufwendigen Modells ein einfaches, linear-elastisches zu verwenden und dessen Eingabeparameter zu variieren.

#### 7.1.1 Dynamisches Verhalten des Einzelpfahles

Zur Abschätzung der Horizontalsteifigkeit  $K_1$  bietet die Literatur eine Fülle von Näherungsformeln. Zum Teil sind sie mit dem Bettungsmodul- oder Steifemodulverfahren bestimmt worden, zum Teil basieren auf Rechnungen mit FE-Modellen oder sind empirisch bestimmt worden. ( /3/, /12/, /36/, /38/ ). Exemplarisch genannt sei hier die Formel von Flores-Berrones und Whitman /14/, die in Gleichung ( 6.1.5 ) verwendet worden ist. Allen Näherungsformeln ist gemein, daß die Eigenschaften des Bodens einfach beschreibbar sein müssen. Leider trifft das meist nicht zu. Bei unregelmäßigem, geschichtetem Boden kann man dann das übliche Bettungsmodulverfahren anwenden. Die Dämpfung im Boden läßt sich durch viskose Dämpfer simulieren, wie sie etwa durch Dobry e.a. /12/ oder Novak und El Sharnouby /38/ angegeben werden. Das Verfahren ist leicht programmierbar und kann

auf Tischrechnern eingesetzt werden.

Ein Einzelpfahl mit der Pfahlkopfmasse  $M$  kann in seinem Schwingungsverhalten in guter Näherung zu einem Einmassenschwinger idealisiert werden. Die Grundfrequenz des Systems aus Pfahl, Boden und Masse beträgt

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{M}} \quad (7.1.1)$$

Eine elastische homogene Schicht auf starrer Unterlage diene als Modell für eine weiche Bodenschicht auf steifem Boden. Die Grundfrequenz ist dann

$$f_s = \frac{V_s}{4H} \quad (7.1.2)$$

mit der Scherwellengeschwindigkeit  $v_s$  und der Schichtdicke  $H$ .

Bei dynamischer Krafterregung an der Pfahlkopfplatte ist anzustreben, daß  $f_0$  nicht in den Spitzenbereich des Anregungsspektrums fällt. Es sollte auch vermieden werden, daß  $f_0$  und  $f_s$  zusammenfallen. Es ergeben sich sonst in diesem Frequenzbereich starke dynamische Überhöhungen bei Verformungen und Schnittgrößen gegenüber einer statischen Betrachtung. Der Überhöhungsfaktor beträgt ungefähr  $\frac{1}{2\zeta}$  mit  $\zeta$  als hysteretischer Bodendämpfung (dezimale Schreibweise). Günstig sind solche Pfähle, bei denen  $f_0$  deutlich größer ist als  $f_s$ . In diesem Fall steigt die Dämpfung infolge der zunehmenden Abstrahlung an, der Faktor wird kleiner als 1. Bei seismischer Anregung kann das Gesamtproblem immer in die Teilprobleme von träger und kinematischer Wechselwirkung aufgespalten werden. Eine zuverlässige Näherungsberechnung ist dann möglich, wenn sich die Wechselwirkung Pfahl-Boden auf die alleinige Wirkung des Bodens auf den Pfahl vereinfachen läßt. Mit anderen Worten: wenn der Boden das Pfahlverhalten, der Pfahl aber nicht das Boden-

verhalten beeinflusst.

Bei der trägen Wechselwirkung ist die Voraussetzung erfüllt, wenn es keine wesentlichen Resonanzeffekte gibt :  $f_0 \gg f_s$  . Die Pfahlschnittgrößen werden in guter Näherung erfaßt, indem man am Pfahlkopf die statische Trägheitskraft

$$F = M \cdot b_{max} \quad ( 7.1.3 )$$

ansetzt.  $M$  ist wieder die Pfahlkopfmasse,  $b_{max}$  ist die maximale horizontale Freifeldbeschleunigung in Höhe des Pfahlkopfes.

Bei der kinematischen Wechselwirkung gilt die Voraussetzung bei relativ steifen Böden und biegeweichen Pfählen. Die Pfähle folgen den Verformungen im Boden ohne großen Widerstand.

Eine Abschätzung des Einflusses findet sich bei Flores-Berrones /14/ für den einfachen Fall eines Pfahles in einer homogenen Bodenschicht. Der Pfahl ist oben am Pfahlkopf und unten im harten Boden eingespannt.

$$\lambda = \frac{k_s D H^4}{4 EI} \quad ( 7.1.4 )$$

- mit  $k_s$  : Bettungsmodul  
 $D$  : Pfahldurchmesser  
 $EI$  : Biegesteifigkeit des Pfahles  
 $H$  : Schichtdicke des Bodens

Für  $\lambda > 10$  ist der Pfahl weich gegenüber dem Boden. Die Pfahlverformungen entsprechen denen des Freifeldes. Aus den Verformungen und Krümmungen des Pfahles können die Schnittkräfte bestimmt werden. In der Praxis trifft dieser Fall häufig zu.

Für  $\lambda < 0.5$  ist der Pfahl starr gegenüber dem Boden.

### 7.1.2 Dynamisches Verhalten der Pfahlgruppe

Die Horizontalsteifigkeit  $K_n$  der Pfahlgruppe ist in (6.5.1) definiert worden als

$$K_n = \chi \cdot n \cdot K_1 \quad ( 7.1.5 )$$

mit  $n$  : Anzahl der Pfähle

$K_1$  : Horizontalsteifigkeit des Einzelpfahles

$\chi$  : Gruppenfaktor

Für die Frequenz  $f = 0$  kann der Gruppenfaktor  $\chi$  den Arbeiten von Poulos entnommen werden, der in /50/, /51/, /52/ umfangreiche Parameterstudien angestellt hat. Im Unterschied zum Einzelpfahl ist die Steifigkeit der Gruppe jedoch stark frequenzabhängig ( siehe auch Bilder 6.63 bis 6.66 ). Im interessanten niedrigen Frequenzbereich wird man jedoch für die Grundfrequenz  $f_0$  mithilfe der Gleichungen (7.1.5) und (7.1.1) eine brauchbare Näherung erzielen. Zu beachten ist jedoch, daß bei  $f_s$ , der Grundfrequenz der weichen Bodenschicht der Gruppenfaktor  $\chi$  deutlich kleiner wird als beim Einzelpfahl. In diesem Fall gewinnt das dynamische Verhalten des Bodens den dominierenden Einfluß auf die maximalen Amplituden der Gebäudeschwingung. Die Pfahlgründung verhält sich wie ein fiktiver Einzelpfahl, bestehend aus den realen Pfählen und dem dazwischenliegenden Boden. Es ist in diesem Fall bemerkenswert, daß die Verformungsamplituden zwar stark anwachsen, die Pfahlschnittgrößen wegen des gleichförmigen Verhaltens von Pfahl und Boden relativ gering bleiben. Über die Schnittgrößenverteilung kann kaum eine allgemeingültige Aussage gemacht werden.

Bei seismischer Anregung kann  $b_{max}$ , die maximale Beschleunigung der Pfahlkopfplatte aus dem Bodenantwortspektrum bei der Frequenz  $f_0$  abgelesen werden. Eine Gleichsetzung mit der maximalen Freifeldbe-

## 7.2 **Empfehlungen zur Konstruktion und Bemessung von Großbohrpfählen**

Bei der Konstruktion und Bemessung von Stahlbetonpfählen sind die allgemeinen Regeln der DIN 1045 /8/ einzuhalten. Zum Mindestmaß der Querbewehrung von Großbohrpfählen macht DIN 4014, Teil 2 /10/ einige zusätzliche Angaben. Anhand dieser Normen sind Pfähle wie Druckglieder oder Stützen zu konstruieren und zu bemessen. Das Knickproblem hat bei voll eingebetteten Pfählen keine Bedeutung, da schon ein Boden von breiiger Konsistenz das seitliche Ausweichen zuverlässig verhindert.

### 7.2.1 **Statische oder dynamische Horizontallast an der Pfahlkopfplatte**

Die Bemessungsschnittgrößen für Pfähle in der Gruppe unterscheiden sich von denen eines Einzelpfahles. Das Kippmoment erzeugt in den Außenpfählen höhere Normalkräfte als in den Innenpfählen. Weil der Erdwiderstand ( oder die Bettungssteifigkeit ) der Außenpfähle größer ist, tragen sie einen größeren Anteil der Vertikallast und erhalten höhere Querkräfte und Biegemomente aus der Horizontallast. Beim Übergang des Betonquerschnittes vom Zustand I in den Zustand II lagern sich die Kräfte von den Außenpfählen zu den weniger ausgelasteten Innenpfählen um. Ein weiterer Ausgleich findet auch bei noch höherer Beanspruchung statt, weil die Steifigkeit von Boden und Betonquerschnitt mit wachsender Verformung weiter abnimmt. Trotzdem ist es zweckmäßig die Außenpfähle für eine größere Last auszulegen, damit in allen Pfählen die Sicherheit gegen Versagen in etwa gleich hoch ist. Die Außenpfähle sollten demnach entweder dichter angeordnet werden oder sie sollten 30 bis 50 Prozent stärker bemessen werden als die Innenpfähle.

schleunigung ist möglich, wenn die Platte im Boden eingebettet ist und die Gebäudemasse ungefähr der Masse des Bodenaushubes entspricht. In einer quasi-statischen Betrachtungsweise wie in Gleichung (7.1.3) können dann die Pfahlschnittkräfte errechnet werden.

### 7.2.2 Erdbeben

Zur Bemessung und Konstruktion von erdbebenbelasteten Pfählen geben deutsche Normen DIN 4149 /11/ oder KTA 2201.3 /25a/ keine speziellen Hinweise. Die KTA-Richtlinie befreit den Konstrukteur sogar ausdrücklich, die angegebenen Vorschriften bei Pfählen berücksichtigen zu müssen. Trotzdem können die Angaben über Rahmenstiele auf Pfähle übertragen werden, wo es sinnvoll erscheint. Der kritische Pfahlkopfbereich ist ja einem Stützenanschluß vergleichbar. Weitere ausführliche Informationen zur Zähigkeit erdbebenbelasteter Rahmenstiele enthält die Arbeit von Sitka /63/. Speziell zu Pfählen findet man Angaben in den amerikanischen Richtlinien ATC-3 und ATC-6 /2a,2b/. Die Hinweise zur Konstruktion sind sehr detailliert und berücksichtigen auch die Stärke des anzusetzenden Erdbebens und das Risiko bei Versagen des Bauwerks.

Sollen Pfähle größere Erdbeben ertragen können, so müssen sie vor allem über Zähigkeit verfügen. Man sollte an die Genauigkeit der rechnerischen Erfassung der Wirklichkeit keine übertriebenen Ansprüche stellen. Umso wichtiger ist es, Pfähle zu konstruieren, die kurzzeitige Überlastungen aushalten können und eine Umlagerung der Kräfte ermöglichen. Sprödes Schubversagen der Pfähle gefährdet die Standsicherheit des Bauwerks und muß unbedingt vermieden werden. Dagegen kann Biegeversagen einkalkuliert werden. Plastische Gelenke schaffen die Voraussetzung für eine Lastverteilung. Auch tragen sie durch ihr plastisches Arbeitsvermögen zum Verzehr der seismisch induzierten Energie bei.

Die Bemessungsschubkraft muß konservativ ermittelt werden. Die Schubdeckung ist für die zu den aufnehmbaren Momenten gehörende Querkraft vorzunehmen. Dabei muß den Stellen besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden, wo plastische Gelenke auftreten können, damit

auch bei mehrfachem Lastwechsel die Festigkeit des Querschnitts erhalten bleibt. Bei biegesteif angeschlossenen Pfählen sind das der Pfahlkopf und die Stelle des Biegemomentenmaximums in der Tiefe. Im Prinzip wird man so konstruieren, daß Schäden unterhalb der Erdoberfläche möglichst gering gehalten werden, damit auch nach einem Erdbeben die Standsicherheit des Bauwerks beurteilt werden kann.

Gelenkig an der Kopfplatte angeschlossene Pfähle sind bei Erdbeben weniger geeignet. Die horizontale Tragfähigkeit einer solchen Gründung ist wesentlich geringer als bei biegesteifem Anschluß, der Energieverzehr am Pfahlkopf entfällt. Außerdem ist die Konstruktion eines in jeder Drehrichtung wirksamen Betongelenkes problematisch, wenn neben Querkraft auch Zug aus Kippmomenten aufgenommen werden muß.

Gründungen aus Schrägpfählen haben bei Erdbeben große Nachteile. Da der Lastabtrag im wesentlichen über die Normalkräfte der Pfähle vor sich geht, ist die Pfahlgruppe in horizontaler Richtung sehr steif. Durch die Bewegung des Bodens bei Erdbeben werden den Pfählen jedoch Verformungen aufgezwungen, die große Biegemomente im Pfahl und in der Kopfplatte erzeugen ( kinematische Wechselwirkung ).

Am besten geeignet sind nachgiebige Pfähle, die die Lasten bereits im oberen Bereich ihres Schaftes abtragen. Wegen der großen Verformungen ist ein zähes Werkstoffverhalten besonders notwendig. Hat man sehr starke Erdbeben zu erwarten, so sind in dieser Hinsicht ausbetonierte Stahlrohre die optimale Lösung. Bei üblichen Stahlbetonpfählen erreicht man die plastische Verformbarkeit ( Rotationsfähigkeit des Querschnittes ) durch Begrenzung der Längszugbewehrung und der Betondruckkraft. So verlangen DIN 4149 und KTA 2201.3 für Rahmenstiele die Abminderung der Betondruckkraft auf 50% des Wertes bei ausgenutzter Betondruckzone und gleichzeitigem Erreichen

der Fließgrenze in der Längsbewehrung. Als Schubbewehrung verwendet man Wendel oder Bügel. Als Querbewehrung sind sie auch äußerst wichtig zur Sicherung der Betondruckzone. In den Bereichen plastischer Gelenke ist eine besonders gute Verbügelung vorzusehen, damit die Druckfestigkeit des Betonquerschnittes erhalten bleibt und die Längsbewehrung gegen Ausknicken gesichert ist. Damit die Funktion auch nach Abplatzen der Betondeckung gewährleistet ist, sind die Stabenden kraftschlüssig zu verbinden ( Schweißen oder Abbiegen der Haken in den Betonkernquerschnitt ).

Die Längsbewehrung soll ausreichend in die Pfahlkopfplatte hineinreichen, um den Zusammenhalt der Bauteile zu sichern und das Abheben der Pfahlkopfplatte auszuschließen. Nach ATC-6 soll die Verankerung mindestens für die Kraft  $1.25 A_s \beta_s$  bemessen werden, wenn die Rechnung keinen höheren Wert ergibt.

$A_s$  : Querschnittsfläche der Längsbewehrung

$\beta_s$  : Fließgrenze des Stahles

a) Bemessung der Schubbewehrung

Da Schubversagen ausgeschlossen werden soll, muß die Bemessungsschubkraft konservativ berechnet werden. Man erhält sie entweder aus der Querkraft der linear-elastischen Rechnung oder man bestimmt sie als die Kraft, die entsteht, wenn der Pfahl ein Fließgelenk ausbildet. Die größere Kraft ist maßgebend. Bei Pfählen mit kleinen Normalkräften sollte der Beitrag des Betons zur Aufnahme der Schubspannungen nicht angesetzt werden, da wegen der wechselnden Richtung der Erdbebenlast die ungerissenen Betonzone nicht zuverlässig angegeben werden kann. Die ATC-6 empfiehlt einen Mindestwert von

$$0.1 A_b \beta_R \cdot$$

$A_b$  : Gesamtquerschnitt des Pfahles

$\beta_R$  : Rechenfestigkeit des Betons

Weiter empfiehlt sie, daß die Schubbewehrung mindestens bis zur Länge eines Pfahldurchmessers in die Anschlüsse hineingezogen wird. In die Pfahltiefe sollte sie reichen bis zu drei Pfahldurchmessern unterhalb des ideellen Einspannpunktes.

b) Bemessung der Querbewehrung zur Umschnürung von plastischen Gelenken

Als potentiell plastisches Gelenk sollte das obere Ende eines jeden Pfahles besonders umschnürt oder verbügelt werden, ausgenommen die Pfähle, bei denen signifikante Horizontalverformungen ausgeschlossen werden können ( ATC-6 ). Die Zone, in der sich das plastische Gelenk ausbilden kann, soll sich erstrecken von der Unterseite der Pfahlkopfplatte bis zu einer Tiefe von zwei Pfahldurchmessern nach ATC-6 bzw. eineinhalb Durchmessern nach DIN 4149. Wenn die Berechnung ergibt, daß ein plastisches Gelenk in größerer Tiefe auftritt, sollte die Bewehrung bis in diese Tiefe heruntergezogen werden. Die Bemessung der Umschnürung kann vorgenommen werden nach der in der ATC-6 angegebenen Formel

$$A_{sw} = \frac{0.45}{4} S_w d_k \left( \frac{A_b}{A_k} - 1 \right) \frac{\beta_R}{\beta_{sw}} \quad ( 7.2.1 )$$

bzw.

$$A_{sw} = \frac{0.12}{4} S_w d_k \frac{\beta_R}{\beta_{sw}} \quad ( 7.2.2 )$$

Der größere Wert ist maßgebend. Dabei ist

- $d_k$  : Kerndurchmesser = Achsdurchmesser der Wendel
- $A_{sw}$  : Stabquerschnitt der Wendel
- $S_w$  : Ganghöhe der Wendel
- $\beta_{sw}$  : Streckgrenze der Wendelbewehrung
- $A_k$  : Kernquerschnitt

Die Gleichung beruht auf der Vorstellung, daß unter Druckkraft die

maximale Traglast der wendelumschnürten Säule vor dem Verlust der Betondeckung gleich ist wie beim Zustand nach Abplatzen und bei Erreichen der Fließgrenze der Umschnürung. Statt einer Bemessungsformel empfiehlt die KTA-Richtlinie ganz allgemein eine Reduzierung des Bügelabstandes in den plastischen Gelenken auf ein Drittel des Abstandes im übrigen Stützenbereich.

Bild 7.1 zeigt die empfohlene Konstruktion eines erdbebensicheren Großbohrpfahles im Überblick.

### 8.2.2 Berechnungsannahmen

Der Boden ist horizontal geschichtet. Er ist seitlich unendlich ausgedehnt und ruht in einer bestimmten Tiefe auf starrem Halbraum.

Der Boden wird als linear-elastisches oder visko-elastisches Medium angesehen. Bei Rechnung im Frequenzbereich kann so der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung mit einem komplexen Modul formuliert werden. Nichtlineares Stoffverhalten kann näherungsweise erfaßt werden, indem iterativ die Bodenkennwerte der einzelnen Schichten den berechneten Dehnungen angepaßt werden.

Die Pfähle bestehen aus vertikalen Stabelementen mit linearem Werkstoffgesetz. Auch hier kann Materialdämpfung berücksichtigt werden. Die Position der Pfähle im Grundriß ist willkürlich. Die Ausnutzung von Symmetriebedingungen (insbesondere Rotationssymmetrie) mindert jedoch den Rechenaufwand erheblich.

Die Pfahlkopfplatte wird starr angenommen. Die Pfähle sind mit ihr biegesteif oder gelenkig verbunden.

### 8.2.3 Verfahren

Boden und Pfahl sind an jeweils 10 - 20 Knoten über die Tiefe, den Koppelpunkten, miteinander gekoppelt. An diesen Stellen sind die Horizontalverschiebungen von Pfahl und Boden kompatibel. Um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, wird das Gesamtsystem aufgeteilt in ein Boden- und ein Pfahlsystem. Zunächst wird das Verschiebungsfeld im geschichteten visko-elastischen Boden bestimmt. Die Verschiebungsansätze für die Schichten sind linear in vertikaler Richtung. In horizontaler Richtung erfüllen sie die Differentialgleichungen des Kontinuums.

Im zweiten Schritt werden an den Koppelpunkten nacheinander Einheitslasten aufgebracht und die Verformungen an allen anderen Koppelpunkten bestimmt. Diese Verformungen bilden in geordneter

Darstellung  $[F_s]$ , die Flexibilitätsmatrix des Bodens.

Im dritten Schritt wird  $[F_p]$ , die Flexibilitätsmatrix des Pfahlsystems errechnet. Pfähle und Boden werden an den gemeinsamen Punkten gekoppelt. Aus der Kompatibilitätsbedingung erhält man die Kräfte zwischen Pfählen und Boden, die Koppelkräfte  $\{P_c\}$ . Die Matrizen und Vektoren sind komplex. Sie stellen Amplituden und Phasen einer harmonischen Bewegung bei vorgegebener Frequenz dar.

$[F_s]$  enthält neben Material- und Abstrahlungsdämpfung des Bodens auch implizit eine mitschwingende Bodenmasse.

Anstelle der hier verwendeten Kraftgrößenformulierung könnte alternativ die Flexibilitätsmatrix  $[F_s]$  des Bodens zur Steifigkeitsmatrix invertiert und anschließend das üblichere Weggrößenverfahren angewendet werden. Es ist jedoch zu beachten, daß  $[F_s]$  unter Umständen sehr groß werden kann. Bei 20 Pfählen mit jeweils 10 Koppelunkten besteht die Matrix aus 400 x 400 Elementen. Eine Inversion bedeutet in diesem Fall einen erheblichen Mehraufwand.

Ein gewisser Nachteil der hier verwendeten Methode besteht darin, daß die Kopplung der Pfähle über die Pfahlkopfplatte im Nachhinein eingeführt werden muß. Nach Kondensierung auf die Freiheitsgrade am Pfahlkopf wird dazu in einem weiteren Rechenschritt das Weggrößenverfahren verwendet.

#### 8.2.4 Behandlung symmetrischer Systeme

Bei einfacher oder doppelter Symmetrie der Pfahlanordnung im Grundriß verkleinert sich die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems auf die Hälfte bzw. auf ein Viertel.

Bei rotationssymmetrischer Pfahlkonfiguration lassen sich Kräfte und Verformungen in Fourierreihen entwickeln. Ist eine starre Pfahl-

kopfplatte vorhanden oder wirken horizontale Lasten aus vertikal propagierenden Erdbebenwellen, so kann die Anzahl der Freiheitsgrade auf zwei Verschiebungen und zwei Verdrehungen pro Pfahlring und Tiefenkote reduziert werden. Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Pfahlrings entspricht somit der Anzahl der Freiheitsgrade eines Pfahles im nicht symmetrischen Fall. Verformungen und Schnittkräfte verändern sich elliptisch längs des Ringumfangs. Im strengen Sinne gilt diese Vereinfachung nur dann, wenn die Abstände der Pfähle innerhalb eines Ringes gleich sind und darüberhinaus die Anzahl der Pfähle in allen Ringen gleich ist. Bei den rotationssymmetrischen Systemen in der praktischen Anwendung kommen die mit dieser Vereinfachung errechneten Schnittgrößen den exakten im Rahmen der übrigen Annahmen jedoch sehr nahe. Die Annahme der elliptischen Verteilung über den Ringumfang bedeutet eine erhebliche Reduzierung des Rechenaufwandes.

#### 8.2.5 Erdbebenanregung

Die Erdbebenanregung geschieht in Form vertikal propagierender Scherwellen. Sie werden im Modell durch horizontale Beschleunigungen in Höhe des starren Halbraumes erzeugt. Die zu den Scherwellen gehörenden Verformungen werden als Freifeldverformungen  $\{V\}$  bezeichnet. Sie entsprechen den Bodenbewegungen in einiger Entfernung von der Pfahlgründung und unbeeinflusst von ihr.

#### 8.3 Parameterstudien

Nach der Verifikation von PILAX durch Vergleich mit anderen Verfahren werden Parameterstudien durchgeführt. Der Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung folgender Probleme :

##### im statischen Fall

- Einfluß von Pfahlabstand, Pfahlanzahl, Pfahlkopfanschluß auf

die Horizontalsteifigkeit der Gruppe

- Verteilung der Schnittkräfte auf die einzelnen Pfähle

#### im dynamischen Fall

- Einfluß der Frequenz auf Steifigkeit und Dämpfung
- Unterschiede zwischen statischer und dynamischer Gruppenwirkung

#### und bei Erdbebenanregung

- Verformungen und Schnittkräfte der Pfähle
- Bedeutung von kinematischer und träger Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Boden

### 8.4 **Hinweise für die Praxis**

In vielen praktischen Anwendungsfällen reicht es völlig aus, das dynamische Verhalten von Pfahlgründungen näherungsweise zu erfassen. Zu diesem Zweck werden einige Möglichkeiten beschrieben, wie eine solche Abschätzung vorgenommen werden kann.

Besonders wichtig ist selbstverständlich eine gute Konstruktion der Pfähle, insbesondere am Pfahlkopf. Keine noch so aufwendige Berechnung darf schließlich darüber hinwegtäuschen, daß es sich beim Boden um einen sehr heterogenen Baustoff handelt, der im idealisierten Modell nur grob abgebildet werden kann. Eine gute Konstruktion bietet dann die Gewähr dafür, daß durch örtliches Plastifizieren zu hohe Lasten umgelagert werden. Im Kapitel 7 werden Empfehlungen zur Konstruktion und Bemessung von Stahlbetonpfählen gegeben.

### 8.5 **Ausblick**

Um den heutigen Kenntnisstand zu verbessern, bedarf es weiterer Anstrengung. Notwendig sind rechnerische Parameterstudien für dynamisch belastete Pfahlgruppen mit möglichst realistischen Annahmen. Dazu gehört ein nichtlineares Werkstoffgesetz für den Boden im Nah-

bereich der Pfähle.

Ebenfalls erforderlich sind bessere dynamische Versuche an Einzelfählen und Pfahlgruppen, um die Modellannahmen der Berechnungsverfahren zu prüfen.

Ein weithin unerforschtes Gebiet ist das Verhalten von Pfahlgründungen bei tatsächlichen Erdbeben. Hier könnten Beobachtungen und Messungen wertvolle Erkenntnisse liefern.

### Zusammenstellung der Symbole, Indizes und Bezeichnungen

#### Mathematische Zeichen

- $i$  :  $\sqrt{-1}$
- $\underline{z}$  : komplexe Zahl  $z$
- $\text{Re}(\underline{z})$  : Realteil einer komplexen Zahl  $z$
- $\text{Im}(\underline{z})$  : Imaginärteil einer komplexen Zahl  $z$
- $|\underline{z}|$  : Betrag einer komplexen Zahl  $z$
- $\delta_{mn}$  : Kroneckersymbol 1 für  $m = n$   
0 für  $m \neq n$
- $e$  : Exponentialfunktion
- $\underline{H}_n^{(1)}(\underline{z})$  : Hankelfunktion der ersten Art von der Ordnung  $n$
- $\underline{H}_n^{(2)}(\underline{z})$  : Hankelfunktion der zweiten Art von der Ordnung  $n$
- $\underline{J}_n(\underline{z})$  : Besselfunktion der Ordnung  $n$
- $\underline{Y}_n(\underline{z})$  : Neumannsche Besselfunktion der zweiten Art von der Ordnung  $n$
- $[\underline{z}]$  : Matrix  $Z$
- $\{\underline{z}\}$  : Spaltenvektor  $Z$
- $\{\underline{z}\}^T$  : Zeilenvektor  $Z$
- $[\underline{z}]^T$  : Transponierte einer Matrix  $Z$
- $[\underline{z}]^{-1}$  : Inverse einer Matrix  $Z$
- $[\underline{z}]^*$  : konjugiert Transponierte einer komplexen Matrix  $Z$
- $[\underline{I}]$  : Einheitsmatrix
- $[\underline{O}]$  : Nullmatrix
- $\sum_m^n$  : Summe aus  $m$  Summanden
- $\prod_m^n$  : Produkt aus  $m$  Faktoren
- $\left| \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix} \right|_{z_j}$  : an der Stelle  $z = z_j$
- $z', z_j$  : Ableitungen von  $z$
- $\delta(z)$  : Variation von  $z$

Indizes und Symbole

Soweit nicht anders vermerkt sind die Indizes tiefgestellt. Bei mehrfach genannten Indizes ist die Bedeutung aus dem Textzusammenhang ersichtlich.

- a : antimetrisch
- a,b,c,d : Teilbereiche a bis d ( hochgestellter Index )
- b : biegesteifer Pfahlkopfanschluß ( hochgestellter Index )
- C : Kopplung
- EVZ : Eigenverformungszustände
- F : Freifeld
- g : gelenkiger Pfahlkopfanschluß ( hochgestellter Index )
- H : horizontal
- j : am Element j oder an der Schichtgrenze j
- K : Kippen
- L : abhängig von Love-Welle
- LVZ : Lastverformungszustand
- n : abhängig vom Fourierglied n
- n : abhängig von der Pfahlanzahl n
- o : oben ( hochgestellter Index )
- p : abhängig von äußerer Belastung
- P : Pfahl
- R : abhängig von Rayleigh-Welle
- r : radial
- S : am Schnitt S
- S : Boden
- s : symmetrisch
- SP : Boden und Pfahl
- T : Torsion
- u : unten ( hochgestellter Index )

- v : vertikal
- x,y,z : kartesische Koordinaten
- x : horizontaler Anteil der Rayleigh-Welle
- y : horizontaler Anteil der Love-Welle
- z : vertikaler Anteil der Rayleighwelle
- $\varepsilon$  : abhängig von der Dehnung
- $\nu$  : abhängig vom Eigenwert
- $\sigma$  : abhängig von der Spannung
- $\tau$  : tangential
- I, II : im Teilbereich I bzw. II ( hochgestellter Index )
- (1),(2) : abhängig von der ersten bzw. der zweiten Art der Hankel-funktion ( hochgestellter Index )

### Bezeichnungen

Bei Bezeichnungen mit mehrfacher Bedeutung ist der Sinn aus dem Textzusammenhang ersichtlich.

- [A] : Koeffizientenmatrix des Eigenwertproblems nach ( C.13 )
- {a} : substituierte Beteiligungsfaktoren nach ( E.27 )
- a : Pfahlabstand in Pfahlgruppen
- [B],[ $\bar{B}$ ] : Koeffizientenmatrix des Eigenwertproblems nach ( C.13 )
- {b} : substituierte Beteiligungsfaktoren nach ( E.27 )
- b : Beschleunigung
- [C],[ $\bar{C}$ ] : Koeffizientenmatrix des Eigenwertproblems nach ( C.13 )
- C,[C] : viskose Dämpfung, Dämpfungsmatrix
- [ $\hat{C}$ ] : generalisierte Dämpfungsmatrix
- {c} : substituierte Beteiligungsfaktoren nach ( E.27 )
- [D] : Matrix des Werkstoffgesetzes
- D : Pfahldurchmesser

- D : Lehrsches Dämpfungsmaß
- $\{d\}$  : substituierte Beteiligungsfaktoren nach ( E.27 )
- E : Elastizitätsmodul
- $E_s$  : Steifemodul
- $[F]$  : Flexibilitätsmatrix
- F : Einzelkraft
- f : Frequenz
- $f_o$  : ungedämpfte Eigenfrequenz des Einmassenschwingers
- $f_D$  : gedämpfte Eigenfrequenz des Einmassenschwingers
- G : Schubmodul
- $[H]$  : Matrix mit Hankelfunktionen nach ( 2.2.17 )
- $[\bar{H}]$  : Matrix mit Hankelfunktionen nach ( C.4 )
- H : frequenzabhängige Übertragungsfunktion
- $[J], [\bar{J}]$  : Matrix mit Besselfunktionen nach ( E.17 )
- K ,  $[K]$  : Steifigkeit, Steifigkeitsmatrix
- $[\hat{K}]$  : generalisierte Steifigkeitsmatrix
- K : statische oder dynamische Steifigkeit ( Impedanz )
- k : Wellenzahl
- $k_s$  : Bettungsmodul
- L : Pfahllänge
- M ,  $[M]$  : Masse, Massenmatrix
- $[M]$  : Koeffizientenmatrix des Eigenwertproblems nach ( C.13 )
- $[\hat{M}]$  : generalisierte Massenmatrix
- M : Biegemoment
- $[N]$  : Matrix der linearen Ansatzfunktionen nach ( 2.3.1 )
- $\{n\}$  : Normaleneinheitsvektor
- n : Anzahl der Pfähle in einer Gruppe
- $\{P\}$  : äußere Kräfte ( in vertikaler Richtung diskretisiert )
- $\{\bar{P}\}$  : Fourierkoeffizienten der Kräfte

- $\{p\}$  : äußere Kräfte
- $[Q]$  : Matrix nach ( E.20 )
- Q : Querkraft
- $[R]$  : Matrix nach ( E.10 )
- $[S], [\bar{S}]$  : Matrix nach ( E.5 )
- $S_H$  : Steifigkeitsparameter nach Dobry ( 6.2.1 )
- $[T], [\bar{T}]$  : Matrix nach ( E.5 )
- $[T]$  : geometrische Transformationsmatrix
- T : Periode
- $[U]$  : Übertragungsmatrix
- $\{u\}$  : Verformungen im Zeitbereich
- u : Verschiebung
- $\{v\}$  : Verformungen im Frequenzbereich
- ( in vertikaler Richtung diskretisiert )
- $\{\bar{v}\}$  : eingeprägte Verformungen
- $\{\bar{v}\}$  : Fourierkoeffizienten der Verformungen
- $\{v\}$  : Verformungen im Frequenzbereich
- $v_p$  : Kompressionswellengeschwindigkeit
- $v_s$  : Scherwellengeschwindigkeit
- $\{w\}$  : linke Seite der Wellengleichung
- ( in vertikaler Richtung diskretisiert )
- $\{w\}$  : linke Seite der Wellengleichung
- $\{x\}, [X]$  : Vektor oder Matrix der Eigenformen
- ( in vertikaler Richtung diskretisiert )
- x ,  $[x]$  : Vektor oder Matrix der Eigenformen
- $\bar{y}(\omega)$  : Fourierspektrum der Amplitude
- $\{z\}$  : Zustandsgrößen
- $\alpha$  : modale Beteiligungsfaktoren ( in Kapitel 3 )
- $\alpha$  : Verhältnis von Schubmoduli benachbarter Bodenschichten
- $[\Gamma]$  : Matrix der modalen Beteiligungsfaktoren

- $\gamma$  : Verzerrungen
- $\Delta \varphi$  : geometrisches Winkelinkrement
- $\{\varepsilon\}$  : Dehnungen
- $[\Theta]$  : Differentialoperator
- $\chi$  : Gruppenfaktor der Horizontalsteifigkeit nach ( 6.5.1 )
- $\wedge$  : Logarithmisches Dämpfungsmaß
- $\lambda$  : Lamé'sche Konstante
- $\lambda$  : Steifigkeitsparameter nach Flores-Berrones ( 7.1.4 )
- $\nu$  : Querdehnungszahl
- $\xi$  : hysteretisches Dämpfungsmaß
- $\rho$  : Massendichte
- $\{\sigma\}$  : Spannungen
- $\{\tau\}$  : Schubspannungen
- $[\Phi]$  : Transformationsmatrix
- $\varphi$  : Phasenwinkel
- $\varphi(\omega)$  : Fourierspektrum der Phase
- $[\chi]$  : Differentialoperator nach ( C.6 )
- $[\psi]$  : Differentialoperator nach ( 2.2.5 )
- $\Omega$  : diskrete Kreisfrequenz
- $\Omega_0$  : ungedämpfte Eigenkreisfrequenz des Eimassenschwingers
- $\Omega_D$  : gedämpfte Eigenkreisfrequenz des Eimassenschwingers
- $\omega$  : variable Kreisfrequenz

## Literatur

- / 1 / Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1965)  
"Handbook of Mathematical Functions",  
Dover Publications, New York
- / 2a/ Applied Technical Council (ATC) (1978)  
"Tentative Provisions for the Development of Seismic  
Regulations for Buildings",  
ATC-3-06, NSF 78-8, Berkeley, California
- / 2b/ Applied Technical Council (ATC) (1981)  
"Seismic Design Guidelines for Highway Bridges",  
ATC-6, Berkeley, California
- / 3 / Blaney, G. W., Kausel, E. and Roesset, J. M. (1976)  
"Dynamic Stiffness of Piles", 2nd Int. Conf. of Numerical  
Methods in Geomechanic, ASCE, Blacksburg, Virginia
- / 4 / Butterfield, R. and Banerjee, P. K., (1971)  
"The Elastic Analysis of Compressible Piles and Pile Groups",  
Geotechnique, Vol. 21
- / 5 / Desai, C.S. and Abel, J.F. (1972)  
"Introduction to the Finite Element Method",  
Van Nostrand Reinhold, New York
- / 6 / Dietrich, T. (1982)  
"Seitlich belastete Pfähle im psammischen Halbraum,  
analysiert mit Hilfe der Ähnlichkeitsmechanik und  
verglichen mit Messungen im Sand",  
DGEG, Baugrundtagung 1982, Braunschweig
- / 8 / DIN 1045 (1978)  
"Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung",  
Dezember 1978
- / 9 / DIN 1054 (1976)  
"Baugrund und Gründungen",  
November 1976
- / 10 / DIN 4014, Teil 2 (1977)  
"Bohrpfähle, Großbohrpfähle Herstellung, Bemessung und  
zulässige Belastung",  
Vornorm September 1977
- / 11 / DIN 4149, Teil 1 (1981)  
"Bauten in deutschen Erdbebengebieten",  
April 1981
- / 12 / Dobry, R., Vicente, E., O'Rourke, M.J. and  
Roesset, J.M. (1982)  
"Horizontal Stiffness and Damping of Single Piles",  
Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,  
Vol.108, GT 3

- / 13 / El Sharnouby, B. and Novak, M. (1983)  
"Dynamic Experiments with a Group of Piles",  
Research report, University of Western Ontario,  
London, Canada
- / 14 / Flores-Berrones, R. and Whitman, R.V. (1982)  
"Seismic Response of End Bearing Piles",  
Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,  
Vol.108, GT 4
- / 15 / Franke, E. (1977)  
"Normung von Großbohrpfählen DIN 4014, Teil 2, Entwurf August  
1977 : Bericht über die Erarbeitung unter Berücksichtigung  
neuerer Erkenntnisse über das Tragverhalten",  
Die Bautechnik, Heft 8
- / 16 / Franke, E. (1981)  
"Pfähle mit aktiver Horizontalbelastung, ein Überblick",  
Seminar der Technischen Akademie Wuppertal : Horizontal be-  
lastete Pfähle , Wuppertal
- / 17 / Franke, E. (1983)  
"Pfähle", veröffentlicht im  
Grundbautaschenbuch 3.Auflage, Teil 2  
Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, München
- / 17b/ Franke, E. und Klüber, E. (1984)  
"Vertikalpfähle - einzeln und in Gruppen - unter aktiven  
Horizontal- und Momentenbelastungen : Ein Überblick über  
den Stand der Kenntnisse",  
Geotechnik, 1, 1984
- / 18 / Gerhardt, H.C., Hosser, D., König, G.  
und Liphardt, S. (1979)  
"Methodenuntersuchung zur erdbebensicheren Auslegung von Kern-  
kraftwerken - Auslegung der Baustrukturen",  
Förderungsvorhaben BMFT RS 308  
König und Heunisch, Frankfurt/M
- / 19 / Hakuno (1973)  
"Evaluation of Dynamical Properties of Pile Foundation based  
on Wave Dissipation Theory",  
5th World Conference on Earthquake Engineering, Rome 1973
- / 20 / Jung, K. (1980)  
"Kleine Erdbebenkunde",  
Springer Verlag, Berlin
- / 21 / Kagawa, T. and Kraft, L. M. (1981)  
"Dynamical Characteristics of Lateral Load-Deflection Rela-  
tionships of Flexible Piles",  
International Journal of Earthquake Engineering and  
Structural Dynamics, Vol. 9

- / 22 / Kausel, E. (1974)  
"Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media",  
Dissertation, Massachusetts Institute of Technology,  
Cambridge, Massachusetts
- / 23 / Kausel, E. (1981)  
"An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamic  
Loads in Layered Media",  
Research Report R 81 - 13,  
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- / 24 / Kausel, E. and Peek, R. (1982)  
"Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum : An  
Explicit Solution",  
Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.72, No.5
- / 25 / Kaynia, A. M. and Kausel, E. (1982)  
"Dynamic Stiffness and Seismic Response of Pile Groups",  
Research Report R 82 - 03,  
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- / 25b/ Kerntechnischer Ausschuß (KTA) (1980)  
"Auslegung von Kernkraftwerken gegen seismische Einwirkungen,  
Teil 3 : Bemessung der baulichen Anlagen",  
KTA 2201.3, Entwurf
- / 26 / Kishida, H. (1965)  
"Damage of Reinforced Concrete Buildings in Niigata City with  
Special Reference to Foundation Engineering",  
Soil and Foundation Engineering, Tokyo, Japan, Vol.6
- / 27 / Kishida, H. (1980)  
"Damage of Reinforced Precast Concrete Piles during the  
Miyagiken-Okai Earthquake of June 12, 1978",  
7th World Conference on Earthquake Engineering, Vol.9,  
Istanbul, Turkey
- / 28 / Kuhlemeyer, R. L. (1979)  
"Static and Dynamic Laterally Loaded Piles",  
Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,  
Vol.105, GT 2
- / 29 / Lamb, H. (1904)  
"On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic  
Solid",  
Philosophical Transactions of the Royal Society,  
Ser.203, London
- / 30 / Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L. (1969)  
"Finite Dynamic Model for Infinite Media",  
Journal of the Engineering Mechanical Division, ASCE,  
Vol.95, EM 4

- / 31 / Matlock, H. (1970)  
"Correlations for Design of Laterally Loaded Piles in Soft Clay",  
Offshore Technology Conference, OTC 1204
- / 32 / Matlock, H. and Foo, S. C. (1978)  
"Simulation of Lateral Pile Behavior under Earthquake Motion",  
Report to Chevron Oil Field Research Company, La Habra,  
California ( on research performed at Univ. of Texas, Austin )
- / 33 / Meißner, H. (1976)  
"Laterally Loaded Pipe Pile in Cohesionless Soil",  
International Conference on Numerical Methods in Geomechanics,  
Vol. 3, Blacksburg
- / 34 / Mindlin, R. (1939)  
"Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid",  
Journal of Applied Physics, Vol.7
- / 35 / Nogami, T. and Novak, M. (1977)  
"Resistance of Soil to a Horizontally Vibrating Pile",  
Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics,  
Vol. 5
- / 36 / Novak, M. (1974)  
"Dynamic Stiffness and Damping of Piles",  
Canadian Geotechnical Journal, 11, No. 4
- / 37 / Novak, M. and Aboul-Ella (1978)  
"Impedance Functions of Piles in Layered Media",  
Journal of the Engineering Mechanical Division, ASCE,  
Vol.104, EM 3
- / 38 / Novak, M. and El Sharnouby, B. (1983)  
"Stiffness Constants of Single Piles",  
Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,  
Vol.109, GT 7
- / 39 / Novak, M. and El Sharnouby, B. (1983)  
"Evaluation of Dynamic Experiments on a Pile Group",  
Research report, University of Western Ontario,  
London, Canada
- / 40 / Novak, M. and Nogami, T. (1977)  
"Soil Pile Interaction in Horizontal Vibration",  
Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics,  
Vol. 5
- / 41 / Novak, M. and Sheta, M. (1982)  
"Dynamic Response of Piles and Pile Groups",  
2nd International Conference on Numerical Methods in Offshore  
Piling, Austin, Texas

- / 42 / Ohoka, H. (1979)  
"Damage of Pretensioned Spun High Strength Concrete Piles  
( A.C. Piles ) due to Earthquake", (in Japanese)  
Annual Report of Building Research Institute, Ministry of  
Construction
- / 43 / Ohoka, H. und Sugimura, Y. (1980)  
"Excavation Survey of Precast Concrete Piles Suffered Earth-  
quake Damage", (in Japanese)  
Summaries of Annual Meeting of Architectural Institute of  
Japan
- / 44 / Ohoka, H. (1981)  
"Base Shear Coefficients Estimated from Earthquake Damage of  
Prestressed Concrete Piles", (in Japanese)  
Summaries of Annual Meeting of Architectural Institute of  
Japan
- / 45 / Ohoka, H. und Sugimura, Y. (1981)  
"Earthquake Damage of High Strength Prestressed Concrete Piles  
and Case Studies of their Horizontally Bearing Capacities",  
(in Japanese)  
Annual Meeting of the Japanese Society of Soil Mechanics and  
Foundation Engineering
- / 46 / Penzien, J. (1964)  
"Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending  
through Deep Sensitive Clays",  
University of California, Berkeley
- / 47 / Penzien, J. (1970)  
"Soil - Pile Foundation Interaction",  
Earthquake Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- / 48 / Penzien, J., Scheffey, C.F. and Parmelee, R.A. (1964)  
"Seismic Analysis of Bridges on Long Piles",  
Journal of the Engineering Mechanical Division, ASCE,  
Vol.90, EM 3
- / 49 / Poulos, H.G. (1971)  
"Behavior of Laterally Loaded Piles : I - Single Piles",  
Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE,  
Vol.97, SM 5
- / 50 / Poulos, H.G. (1971)  
"Behavior of Laterally Loaded Piles : II - Pile Groups",  
Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE,  
Vol.97, SM 5
- / 51 / Poulos, H.G. (1979)  
"Group Factors for Pile-Deflection Estimation",  
Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,  
Vol.105, GT 12

- / 52 / Poulos, H.G. and Davis, E.H. (1980)  
"Pile Foundation Analysis and Design"  
John Wiley and Sons
- / 53 / Prakash, Sh. and Puri, V.K. (1982)  
"Dynamic Soil Properties for Machine Foundation Design",  
Soil Dynamics and Earthquake Engineering Conference,  
Southampton, Great Britain
- / 54 / Reese, L.G. (1975)  
"Field Testing and Analysis of Laterally Loaded Piles in  
Stiff Clay",  
7th Offshore Technology Conference, OTC 2312, Houston, Texas
- / 55 / Richard, F.E., Hall, J.R. and Woods, R.D. (1970)  
"Vibrations of Soils and Foundations",  
Prentice-Hall
- / 56 / Roesset, J.M. (1980)  
"Stiffness and Damping Coefficients of Foundations",  
Session on Dynamic Response of Pile Foundations : Analytical  
Aspects, ASCE National Convention, Florida
- / 57 / Rollberg, D. (1982)  
"Bestimmung des Bettungsmoduls horizontal belasteter Pfähle  
aus Sondierungen",  
Der Bauingenieur 57
- / 58 / Schmidt, H.G. (1981)  
"Group Action of Laterally Loaded Bored Piles",  
Proceedings of the Tenth International Conference on Soil  
Mechanics and Foundation Engineering, Vol.2, Stockholm
- / 58b/ Schmidt, H.G. (1984)  
"Horizontale Gruppenwirkung von Pfahlreihen in nichtbindigem  
Boden",  
Geotechnik, 1, 1984
- / 59 / Seed, H.B. (1969)  
"The Influence of Local Soil Conditions on Earthquake Damage",  
7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation  
Engineering, Mexico City, Mexico
- / 60 / Seed, H.B. and Idriss, I.M. (1970)  
"Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response  
Analyses",  
Report No. EERC 70-10, University of California, Berkeley
- / 61 / Sezawa, K. (1929)  
"Further Studies on Rayleigh Waves Having Some Azimuthal  
Distribution",  
Bulletin of the Earthquake Research Institute, Vol. 6  
Tokyo, Japan

- / 62 / Sheta, M. and Novak, M. (1982)  
"Vertical Vibration of Pile Groups",  
Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,  
Vol.108, GT 4
- / 63 / Sitka, R. (1980)  
"Zur konstruktiven Durchbildung erdbebenbeanspruchter Stahl-  
betonbauteile",  
Dissertation, TH Darmstadt
- / 64 / Smoltczyk, U. (1977)  
"Bestimmung der Baugrundfestigkeit mit der Seitendrucksonde",  
Symposion : Stand von Normung, Bemessung und Ausführung von  
Pfählen und Pfahlwänden, München  
Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau, Essen
- / 65 / Stavnitser and Shekter (1971)  
"Horizontal Vibrations in Piles induced by Seismic Waves",  
Osnovaniya, Fundamenty Mekhanika Gruntov, No. 5
- / 66 / Tajimi, H. (1969)  
"Dynamic Analysis of a Structure Embedded in an Elastic  
Stratum",  
4th World Conference on Earthquake Engineering, Chile
- / 67 / Tajimi, H. (1980)  
"A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness  
of Surface Foundations",  
7th World Conference on Earthquake Engineering,  
Istanbul, Turkey
- / 68 / Tajirian, F. (1981)  
"Impedance Matrices and Interpolation Techniques for  
3-D Interaction Analysis by the Flexible Volume Method",  
Dissertation, University of California, Berkeley
- / 69 / Takemiya, H. and Yamada, Y. (1981)  
"Layered Soil - Pile - Structure Dynamic Interaction",  
International Journal of Earthquake Engineering and  
Structural Dynamics, Vol. 5
- / 70 / Titze, E. (1970)  
"Über den seitlichen Bodenwiderstand bei Pfahlgründungen",  
Wilhelm Ernst und Sohn
- / 71 / Trbojevic, V.M., Marli, J., Danisch, R. und Delinic, K.  
"Pile-Soil-Pile Interaction Analysis for Pile Groups",  
SMiRT 1981, Paris, Frankreich
- / 72 / Tyson, T.R. and Kausel, E. (1983)  
"Dynamic Analysis of Axisymmetric Pile Groups",  
Research Report R 83 - 07,  
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

- / 73 / Waas, G. (1972)  
"Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamic Problems in  
Semi-Infinite Layered Media",  
Dissertation, University of California, Berkeley
- / 74 / Waas, G. (1980)  
"Dynamisch belastete Fundamente auf geschichtetem Baugrund",  
VDI-Bericht Nr. 381
- / 75 / Waas, G. and Hartmann, H.G. (1981)  
"Pile Foundations Subjected to Dynamic Horizontal Loads",  
European Meeting : Modelling and Simulation of Large Scale  
Structural Systems, Capri, Italy  
(also SMiRT 1981, Paris, France)
- / 76 / Waas, G. und Hartmann, H.G. (1982)  
"Pfahlgründungen",  
Seminar Bauten in Erdbebengebieten, Technische Universität  
Berlin
- / 77 / Waas, G. und Werkle, H. (1983)  
"Bauwerksbeanspruchungen durch Luftdruck- und Bodenwellen,  
Teil 2 : Induzierte Bodenwelle",  
noch unveröffentlicht
- / 78 / Werkle, H. (1981)  
"Ein Randelement zur dynamischen Finite-Element-Berechnung  
dreidimensionaler Baugrundmodelle",  
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
- / 79 / Wolf, J.P. and von Arx, G.A. (1978)  
"Impedance Functions of a Group of Vertical Piles",  
Specialty Conference on Earthquake Engineering and Soil  
Dynamics, ASCE, Pasadena, California
- / 80 / Wolf, J.P. and von Arx, G.A. (1982)  
"Horizontally Travelling Waves in a Group of Piles Taking  
Pile - Soil - Pile Interaction into Account",  
Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10,  
No. 2
- / 81 / Yamamoto, S. and Seki, T. (1973)  
"Earthquake Response of Multi-Story Buildings Supported on  
Piles",  
5th World Conference on Earthquake Engineering, Rome, Italy
- / 82 / Zurmühl, R. (1964)  
"Matrizen und ihre technischen Anwendungen",  
Springer Verlag, Berlin

TABELLE 1

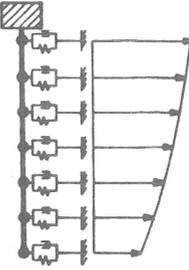
BETTUNGSZIFFERVERFAHREN ( $k_s$ - THEORIE, VERFAHREN NACH WINKLER )	
 <p>UNGEKOPPELTE FEDERN UND DÄMPFER; KNOTENMASSEN FÜR MITTSCHWINGENDEN BODEN.</p>	
DYNAMISCHE BERECHNUNG	IM ZEITBEREICH
ABSTRAHLUNGS-DÄMPFUNG	NUR NÄHERUNGSWEISE BEI VORKENNTNIS DER ABSTRAHLUNGSDÄMPFUNG
ERDBEBENANREGUNG	FREIFELDVERSCHIEBUNG
MATERIALGESETZ FÜR BODEN	STEIFIGKEIT LINEAR/NICHTLINEAR-PLASTISCH; DÄMPFUNG VISKOS
GRUPPENWIRKUNG	NUR NÄHERUNGSWEISE DURCH REDUZIERUNG DER FEDER-, DÄMPFUNGS- UND MASSENPARAMETER
VORTEILE	LEICHTE HANDHABUNG BEI LINEAREN SYSTEMEN; NICHTLINEARE EFFEKTE DARSTELLBAR, WENN FEDERCHARAKTERISTIK BEKANNT IST.
NACHTEILE	GRUPPENWIRKUNG, ABSTRAHLUNGSDÄMPFUNG UND MASSEEFFEKTE NUR NÄHERUNGSWEISE ERFASSBAR DURCH GEEIGNETE WAHL DER MODELLPARAMETER (VORKENNTNIS ERFORDERLICH)
LITERATUR	TITZE 1970 ) MATLOCK 1970 ) NUR STATISCH REESE 1975 ) PENZIEN 1964 YAMAMOTO, SEKI 1973 MATLOCK, FOO 1978

TABELLE 2

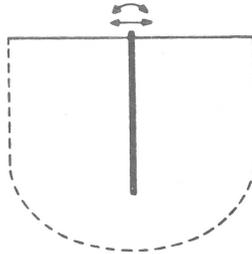
PFAHL IM HOMOGENEN HALBRAUM ( $E_s$ - THEORIE, STEIFEMODULVERFAHREN )	
 <p>BODEN: HOMOGENER, ISOTROPER HALBRAUM STATISCH: MINDLIN'S LÖSUNG DYNAMISCH: LAMB'S LÖSUNG</p>	
DYNAMISCHE BERECHNUNG	IM FREQUENZBEREICH FÜR ANREGUNG AM PFAHLKOPF
ABSTRAHLUNGS-DÄMPFUNG	JA
ERDBEBENANREGUNG	NEIN, NUR IMPEDANZEN ( DYN. STEIFIGKEITEN )
MATERIALGESETZ FÜR BODEN	LINEAR ELASTISCH
GRUPPENWIRKUNG	NÄHERUNG NACH POULOS: NACHGIEBIGKEITSMATRIX EINES PFAHLSYSTEMS AUS DER WECHSELWIRKUNG VON JE ZWEI PFÄHLEN ERMITTELT
VORTEILE	GRUPPENWIRKUNGEN KÖNNEN IM STATISCHEN FALL MIT VORLIEGENDEN INTERAKTIONSKURVEN (POULOS) EINFACH ABGESCHÄTZT WERDEN
NACHTEILE	KEINE BODENSCHICHTUNG; UNREALISTISCHE SPANNUNGSSPITZEN AN DEN PFAHLENDEN; KINEMATISCHE WECHSELWIRKUNG BEI ERDBEBENANREGUNG WIRD NICHT ERFASST
LITERATUR	POULOS 1971 BIS 1978 } NUR STATISCH BUTTERFIELD, BANERJEE 1971 } HAKUNO 1973

TABELLE 3

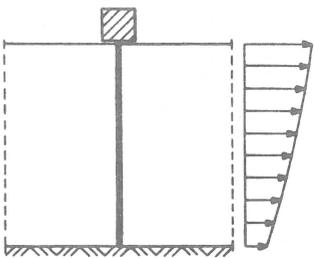
PFAHL IN HOMOGENER BODENSCHICHT	
 <p>HOMOGENE BODENSCHICHT AUF STARREM HALBRAUM; GESCHLOSSENE FORM DER LÖSUNG IN BESSEL-FUNKTIONEN</p>	
DYNAMISCHE BERECHNUNG	IM FREQUENZBEREICH
ABSTRAHLUNGS-DÄMPFUNG	JA
ERDBEBENANREGUNG	FREIFELDBEWEGUNG
MATERIALGESETZ FÜR BODEN	LINEAR-ELASTISCH LINEAR-HYSTERETISCH
GRUPPENWIRKUNG	NUR GROB DURCH REDUZIERUNG DER BODEN-STEIFIGKEIT UND BODENDICHTE
VORTEILE	EINFACHE HANDHABUNG
NACHTEILE	KEINE BODENSCHICHTUNG; GRUPPENWIRKUNG NUR NÄHERUNGSWEISE
LITERATUR	TAJIMI, 1969 NOGAMI, NOVAK 1977 NOVAK, NOGAMI 1977 KAGAWA, KRAFT 1981

TABELLE 4

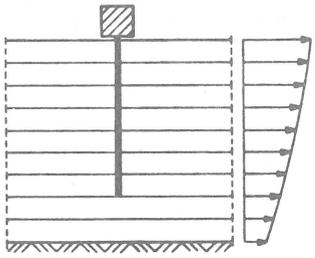
PFAHL IN BODENSCHLEIBEN	
 <p>BODENSCHLEIBEN IN EBENEM DEHNUNGSZUSTAND; KEINE KOMPATIBILITÄT ZWISCHEN DEN SCHLEIBEN LÖSUNG IN GESCHLOSSENER FORM</p>	
DYNAMISCHE BERECHNUNG	IM FREQUENZBEREICH
ABSTRAHLUNGS-DÄMPFUNG	NUR HORIZONTAL MÖGLICH
ERDBEBENANREGUNG	FREIFELDBEWEGUNG
MATERIALGESETZ FÜR BODEN	LINEAR-ELASTISCH LINEAR-HYSTERETISCH
GRUPPENWIRKUNG	KOPPLUNG DER PFÄHLE NUR SCHLEIBENWEISE ÜBER NACHGIEBIGKEITSMATRIZEN
VORTEILE	BODENSCHICHTUNG; WEICHE ZONE UM DEN PFÄHL KANN IN EINFACHER WEISE BERÜCKSICHTIGT WERDEN
NACHTEILE	STATISCHE STEIFIGKEIT NICHT BERECHENBAR; KEINE KOPPLUNG DER SCHICHTEN
LITERATUR	STAVNITZER, SHEKTER 1971 NOVAK 1974 NOVAK, ABOUL-ELLA 1978 NOVAK, SHETA 1980

TABELLE 5

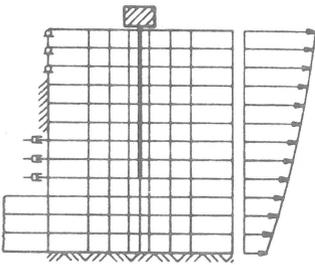
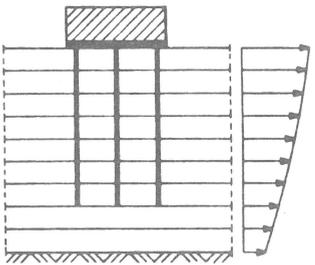
FINITE-ELEMENTE-VERFAHREN FÜR EINZELPFAHL ( FEM )	
 <p>ACHSENSYMMETRISCHES MODELL; FOURIER-ENTWICKLUNG IN UM- FANGSRICHTUNG (<math>n = 0,1</math>) ODER 3-D; RANDBEDINGUNG SEITLICH FREI, FEST, DÄMPFER, ODER RANDELE- MENTE NACH WAAS/LYSMER</p>	
DYNAMISCHE BERECHNUNG	IM FREQUENZBEREICH
ABSTRAHLUNGS- DÄMPFUNG	ÜBER DÄMPFER (NÄHERUNGSWEISE) ODER GENAUER MIT RANDELEMENTEN NACH WAAS/LYSMER
ERDBEBENANREGUNG	FREIFELDBEWEGUNG AM UNTEREN UND SEITLICHEN RAND DES MODELLS
MATERIALGESETZ FÜR BODEN	LINEAR-ELASTISCH, LINEAR-HYSTERETISCH (NICHT-LINEAR STATISCH, MEIBNER)
GRUPPENWIRKUNG	NEIN
VORTEILE	DETAILLIERTE ABBILDUNG DES BODENS (SCHICHTUNG, WEICHERE ZONE UM DEN PFAHL)
NACHTEILE	GROSSER AUFWAND KEINE GRUPPENWIRKUNG
LITERATUR	KAGAWA, KRAFT 1981 BLANEY, KAUSEL, ROESSET 1976 KUHLEMEYER 1979 MEIBNER 1976 (NICHTLINEAR, STATISCH)

TABELLE 6

PFAHLGRUPPEN IN GESCHICHTETEM BODEN	
 <p>BODEN ALS GESCHICHTETES MEDIUM; SEITLICH UNENDLICH AUSGE- DEHNT; LÖSUNG MIT HILFE VON GREEN- FUNKTIONEN HALBANALYTISCH ODER MIT GROSSEM ACHSENSYMMETRISCHEN FE-MODELL (WOLF, VON ARX)</p>	
DYNAMISCHE BERECHNUNG	IM FREQUENZBEREICH
ABSTRAHLUNGS- DÄMPFUNG	EXAKT ERFASST FÜR GESCHICHTETES MEDIUM (BEI WOLF, VON ARX ABHÄNGIG VON GRÖSSE DES FE- MODELLS UND RANDBEDINGUNGEN)
ERDBEBENANREGUNG	FREIFELDBEWEGUNGEN
MATERIALGESETZ FÜR BODEN	LINEAR-ELASTISCH LINEAR-HYSTERETISCH
GRUPPENWIRKUNG	EXAKT ERFASST IM RAHMEN DER MODELL- ANNAHMEN
VORTEILE	GRUPPENWIRKUNG UND EINFLUSS DER BODEN- SCHICHTUNG GUT ERFASSBAR
NACHTEILE	HOHER AUFWAND BEI GROSSEN PFAHLGRUPPEN; WEICHE ZONE UM DEN PFAHL NICHT DIREKT ABBILDBAR <b>WIE BEI FEM MOGLICH</b>
LITERATUR	WOLF, VON ARX 1978 WAAS, HARTMANN 1981 KAYNIA, KAUSEL 1982 <b>TYSON, KAUSEL 1983</b>

## Anhang B

Berechnung der Hankel- und Besselfunktionen

Die Hankelfunktionen der ersten und der zweiten Art von der Ordnung  $n$  sind definiert als

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + i Y_n(z) \quad (\text{B.1})$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - i Y_n(z) \quad (\text{B.2})$$

mit der Besselfunktion  $J_n(z)$  und der Neumann'schen Besselfunktion  $Y_n(z)$ . Im allgemeinen ist  $z$  komplex.

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Damit die Amplituden mit wachsendem Betrag von  $z$  abklingen, muß gelten

$$-\pi \leq \varphi \leq 0$$

Für  $|z| < 10$  werden Reihen verwendet, die sich aus Reihen ableiten lassen, die Abramowitz und Stegun [1] angeben.

$$H_0^{(2)}(z) = a + \sum_{K=1}^{\infty} \left( a + i \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{K} \right) \right) b_K^2 \quad (\text{B.3})$$

$$H_1^{(2)}(z) = \left( a + i \frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{4}{z^2} \right) \right) \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \sum_{K=1}^{\infty} \left( a + i \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{K} + \frac{1}{2(K+1)} \right) \right) \frac{b_K^2}{K+1} \quad (\text{B.4})$$

mit  $i = \sqrt{-1}$

$$a = 1 - i \frac{2}{\pi} \left( 0.577215664901533 + \ln \frac{z}{2} \right)$$

$$b_K = i \frac{z^K \pi}{2K!}$$

Die Reihen werden abgebrochen, wenn  $b_K < 10^{-8}$  ( bei Rechnung mit 14 Dezimalen ).

Für  $|z| > 10$  werden Hankels asymptotische Entwicklungen verwendet, die semikonvergent sind, aber sehr gute Ergebnisse liefern, wenn sie rechtzeitig abgebrochen werden.

$$H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz + i\frac{\pi n}{2} + i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(1 + \sum_{K=1}^{\infty} C_K\right) \quad (\text{B.5})$$

mit

$$C_K = \frac{1}{K! (i8z)^K} \cdot \prod_{j=1}^K (4n^2 - (2K-1)^2)$$

Diese Reihen werden abgebrochen, wenn  $k > 2 \cdot |z|$  oder  $|c_k| < 10^{-8}$ . So berechnete Werte wurden von Waas /73/ mit Tafelwerten für viele verschiedene Werte von  $|z|$  und  $\varphi$  verglichen. Den größten Fehler fand er mit etwa  $5 \times 10^{-7}$  im Übergangsbereich  $|z| \approx 10$  bei  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ .

Bild B1 zeigt den Verlauf für  $J_0, J_1$  und  $Y_0, Y_1$  mit reellem Argument.

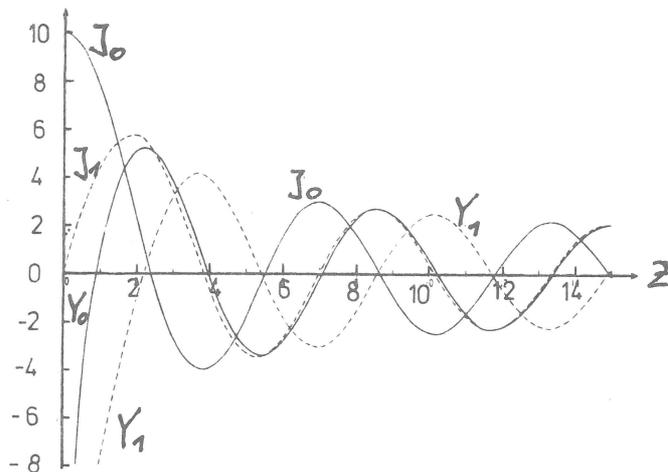


Bild B1 : Besselfunktionen nach / 1 /

Die Besselfunktionen werden für  $|z| < 10$  aus den Reihen berechnet :

$$J_0(z) = 1 - \frac{\frac{1}{4} z^2}{(1!)^2} + \frac{(\frac{1}{4} z^2)^2}{(2!)^2} - \frac{(\frac{1}{4} z^2)^3}{(3!)^2} + \dots$$

$$J_2(z) = 1 - \frac{\frac{1}{4} z^2}{(1!)^2 2^2} + \frac{(\frac{1}{4} z^2)^2}{(2!)^2 3^2} - \frac{(\frac{1}{4} z^2)^3}{(3!)^2 4^2} + \dots$$

Für  $|z| > 10$  wird die asymptotische Form verwendet

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (d \cdot \cos \alpha - f \cdot \sin \alpha)$$

mit

$$\alpha = z - \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \pi$$

$$d = 1 - \frac{(m-1^2)(m-3^2)}{2! (8z)^2} + \frac{(m-1^2)(m-3^2)(m-5^2)(m-7^2)}{4! (8z)^4} - \dots$$

$$f = \frac{(m-1^2)}{8z} - \frac{(m-1^2)(m-3^2)(m-5^2)}{3! (8z)^3} + \dots$$

$$m = 4n^2$$

## Anhang C

Das Eigenwertproblem des geschichteten Mediums

Man betrachte einen aus dem geschichteten Medium herausgeschnittenen Torus, wie er in Bild C1 dargestellt ist. Der Innenrand ist beschrieben durch  $r = r_0$ , der Außenrand durch  $r = r_0 + 1$ . Das gesamte Modell besteht aus  $m$  Schichten. Die Kreisringflächen  $S_1$  und  $S_3$  begrenzen die Schicht  $j$  in der Vertikalen, die Zylinderflächen  $S_2$  und  $S_4$  in der Horizontalen. An den Rändern  $S_2$  und  $S_4$  wirken die äußeren Kräfte  $\{p_2\}$  und  $\{p_4\}$ . An den einzelnen Schichtgrenzen gelten die Kompatibilitäts- und Gleichgewichtsbedingungen.

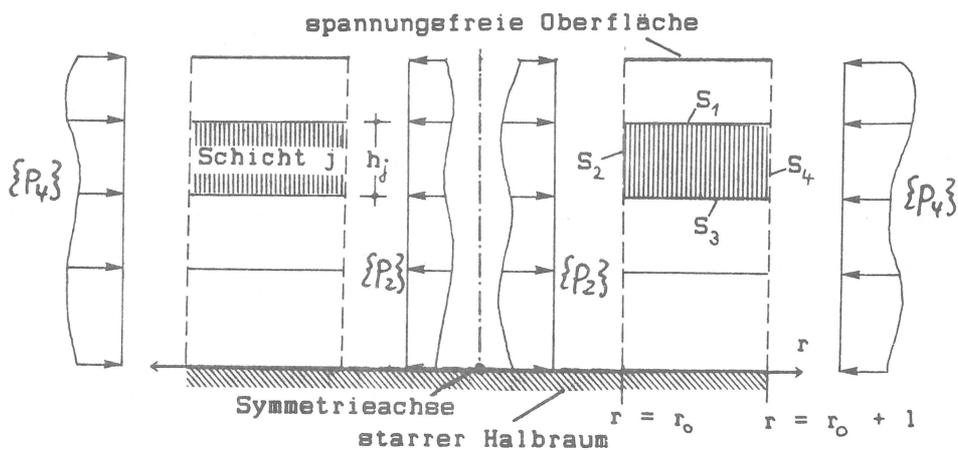


Bild C1 : Torus als Ausschnitt aus geschichtetem Medium

Für das gesamte Schichtenmodell kann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Form von Gleichung ( 2.3.2 ) nun geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \left[ \int_{r_0}^{r_0+L} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta \{V_j\}^* \left( [\ominus_\sigma] [D_j] [\ominus_\varepsilon] \{V_j\} + g \Omega^2 \{V_j\} \right) r dr dz \right. \\
& + \int_{r_0}^{r_0+L} \delta \{V_j\}^* \left( -[\bar{\sigma}_j] \{n_1\} \right) r dr \Big|_{z=z_j} \\
& + \int_{r_0}^{r_0+L} \delta \{V_j\}^* \left( -[\bar{\sigma}_j] \{n_3\} \right) r dr \Big|_{z=z_{j+1}} \\
& + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta \{V_j\}^* \left( -[\bar{\sigma}_j] \{n_2\} + \{P_2\} \right) r dz \Big|_{r=r_0} \\
& \left. + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta \{V_j\}^* \left( -[\bar{\sigma}_j] \{n_4\} + \{P_4\} \right) r dz \Big|_{r=r_0+L} \right] = \{0\} \quad (C.1)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß wegen der starren unteren Berandung das Integral über  $S_3$  beim  $m$ -ten Element entfällt, da hier Verformungen vorgeschrieben werden.

Die Flächenlasten  $\{P_2\}$  und  $\{P_4\}$  an den Rändern  $S_2$  und  $S_4$  werden zu diskreten Ringlasten  $\{P_2\}$  und  $\{P_4\}$  zusammengefaßt, die in Höhe der Schichtgrenzen wirken. Ihr Betrag wird so festgelegt, daß die beiden Integrale über  $S_2$  und  $S_4$  verschwinden. Das heißt

$$\sum_{j=1}^m \left( \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta \{V_j\}^* \left( -[\bar{\sigma}_j] \{n_2\} + \{P_2\} \right) r dz \Big|_{r=r_0} \right) = \{0\} \quad (C.2a)$$

$$\sum_{j=1}^m \left( \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta \{V_j\}^* \left( -[\bar{\sigma}_j] \{n_4\} + \{P_4\} \right) r dz \Big|_{r=r_0+L} \right) = \{0\} \quad (C.2b)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist für alle  $\mu$  Teillösungen gültig. Setzt man den Näherungsansatz für die Verformungen nach (2.3.3) in Gleichung (C.1) ein, dann folgt mit Gleichung (2.2.20)

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \left[ \int_{z_j}^{z_{j+1}} \int_{r_0}^{r_0+l} \delta \{X_{j,0}\}^* [N_j]^T [H_0]^* [H_0] [\Psi_{j,0}] [N_j] \{X_{j,0}\} r dr dz \right. \\
& \quad - \int_{r_0}^{r_0+l} \delta \{X_{j,0}\}^* [N_j]^T [H_0]^* [\bar{G}_j] \{n_1\} r dr \Big|_{z=z_j} \\
& \quad \left. - \int_{r_0}^{r_0+l} \delta \{X_{j,0}\}^* [N_j]^T [H_0]^* [\bar{G}_j] \{n_3\} r dr \Big|_{z=z_{j+1}} \right] = \{0\}
\end{aligned} \quad (C.3)$$

Wegen der speziellen Struktur der Matrix  $[N_j]^T$  läßt sich umformen

$$[N_j]^T [H_0]^* [H_0] = [\bar{H}_0] [N_j]^T \quad (C.4)$$

mit

$$[\bar{H}_0] = \begin{bmatrix}
(H_0')^2 + (\frac{n}{r} H_0)^2 & & & & 2 \frac{n}{r} H_0 H_0' \\
& (H_0')^2 + (\frac{n}{r} H_0)^2 & & & 2 \frac{n}{r} H_0 H_0' \\
& & K_0^2 H_0^2 & & \\
& & & K_0^2 H_0^2 & \\
2 \frac{n}{r} H_0 H_0' & & & & (H_0')^2 + (\frac{n}{r} H_0)^2 \\
& 2 \frac{n}{r} H_0 H_0' & & & (H_0')^2 + (\frac{n}{r} H_0)^2
\end{bmatrix}$$

Die Spannungen an den Schichtgrenzen  $S_1$  und  $S_3$  mit den Einheitsnormalen

$$\{n_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \{n_3\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind

$$\{\bar{\sigma}_{1,j}\} = [\bar{\sigma}_j] \{h_1\} = - \begin{bmatrix} \chi_{rz,j} \\ \sigma_{zz,j} \\ \chi_{\varphi z,j} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5a})$$

und

$$\{\bar{\sigma}_{3,j}\} = [\bar{\sigma}_j] \{h_3\} = \begin{bmatrix} \chi_{rz,j} \\ \sigma_{zz,j} \\ \chi_{\varphi z,j} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5b})$$

Mit den Gleichungen ( 2.2.7 ) und ( 2.2.12 ) lassen sich die Spannungen durch die Verschiebungen und diese durch die Ansatzfunktionen ausdrücken. Berücksichtigt man außerdem Gleichung ( 2.2.20 ), so erhält man

$$\{\bar{\sigma}_{1,j}\} = - [H_0] [\chi_{j,\nu}] [N_j] \{X_{j,\nu}\} \quad (\text{C.6})$$

und

$$[\chi_{j,\nu}] = \begin{bmatrix} G \frac{\partial}{\partial z} & \kappa_0 G & \\ -\kappa_0 \lambda & (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} & \\ & & G \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\chi_{j,\nu}] = \begin{bmatrix} [\chi_{R,j,\nu}] & \\ & [\chi_{L,j,\nu}] \end{bmatrix}$$

$[H_0]$  ist unabhängig von der Variablen  $z$ . Mit den Umformungen erhält man aus Gleichung ( C.3 )

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \left[ \delta \{X_{j,\nu}\}^* \int_{r_0}^{r_0+L} [\bar{H}_\nu] r dr \left( \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T [\psi_{j,\nu}] [N_j] dz \right. \right. \\
& \quad + [N_j]^T [\chi_{j,\nu}] [N_j] \Big|_{z=z_j} \\
& \quad \left. \left. - [N_j]^T [\chi_{j,\nu}] [N_j] \Big|_{z=z_{j+1}} \right) \{X_{j,\nu}\} \right] = \{0\}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Gleichung ( C.7 ) gilt für beliebige virtuelle Verformungen. Die Matrix  $[\bar{H}_\nu]$  ist nicht singulär und für alle Schichten gleich. Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \left[ \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T [\psi_{j,\nu}] [N_j] dz \right. \\
& \quad + [N_j]^T [\chi_{j,\nu}] [N_j] \Big|_{z=z_j} \\
& \quad \left. - [N_j]^T [\chi_{j,\nu}] [N_j] \Big|_{z=z_{j+1}} \right] \{X_{j,\nu}\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Die Struktur der Matrizen  $[\psi_{j,\nu}]$  und  $[\chi_{j,\nu}]$  gestattet es, die Gleichung in zwei voneinander unabhängige Gleichungen zu zerlegen. Mit den Matrizen

$$\begin{aligned}
[\psi_{j,\nu}] &= \left[ \begin{array}{c|c} [\psi_{R,j,\nu}] & \\ \hline & [\psi_{L,j,\nu}] \end{array} \right] & \text{nach ( 2.2.26 )} \\
[\chi_{j,\nu}] &= \left[ \begin{array}{c|c} [\chi_{R,j,\nu}] & \\ \hline & [\chi_{L,j,\nu}] \end{array} \right] & \text{nach ( 2.3.12 )} \\
[N_j] &= \left[ \begin{array}{c|c} [N_{R,j}] & \\ \hline & [N_{L,j}] \end{array} \right] & \text{nach ( 2.3.1 )}
\end{aligned}$$

erhält man dann

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_{R,j}]^T [\psi_{R,j,\nu}] [N_{R,j}] dz + [N_{R,j}]^T [\chi_{R,j,\nu}] [N_{R,j}] \Big|_{z=z_j} \right. \quad (C.10a)$$

$$\left. - [N_{R,j}]^T [\chi_{R,j,\nu}] [N_{R,j}] \Big|_{z=z_{j+1}} \right] \{X_{R,j,\nu}\} = \{0\}$$

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_{L,j}]^T [\psi_{L,j,\nu}] [N_{L,j}] dz + [N_{L,j}]^T [\chi_{L,j,\nu}] [N_{L,j}] \Big|_{z=z_j} \right. \quad (C.10b)$$

$$\left. - [N_{L,j}]^T [\chi_{L,j,\nu}] [N_{L,j}] \Big|_{z=z_{j+1}} \right] \{X_{L,j,\nu}\} = \{0\}$$

( C.10a ) ist die Bewegungsgleichung der rotationsperiodischen Rayleigh-Wellen, ( C.10b ) ist die der rotationsperiodischen Love-Wellen. Auch die Wellenzahlen  $k_\nu$  sind für den Rayleigh- und den Love-Fall zu unterscheiden. Sie werden unterschieden in  $k_{R,\nu}$  und  $k_{L,\nu}$ . Führt man in den Gleichungen ( C.10 ) die vorgeschriebenen Matrizenmultiplikationen und die Integration über  $z$  aus, so erhält man die homogenen linearen Gleichungssysteme

$$\left( [A_R] k_{R,\nu}^2 + [B_R] k_{R,\nu} + ([\bar{C}_R] - \Omega^2 [M_R]) \right) \{X_{R,\nu}\} = \{0\} \quad (C.11a)$$

$$\left( [A_L] k_{L,\nu}^2 + [B_L] k_{L,\nu} + ([\bar{C}_L] - \Omega^2 [M_L]) \right) \{X_{L,\nu}\} = \{0\} \quad (C.11b)$$

oder mit

$$\begin{aligned} [C_R] &= [\bar{C}_R] - \Omega^2 [M_R] \\ [C_L] &= [\bar{C}_L] - \Omega^2 [M_L] \end{aligned}$$

ergibt sich

$$([A_R]^{k_{R,v}} + [B_R]^{k_{R,v}} + [C_R]) \{X_{R,v}\} = \{0\} \quad (C.12a)$$

$$([A_L]^{k_{L,v}} + [B_L]^{k_{L,v}} + [C_L]) \{X_{L,v}\} = \{0\} \quad (C.12b)$$

Die Matrizen  $[A]$ ,  $[B]$  und  $[C]$  sind Überlagerungen der Untermatrizen  $[A_j]$ ,  $[B_j]$ ,  $[\bar{C}_j]$  und  $[M_j]$  im Sinne der Gleichung (2.3.2) und des Schemas in Bild 2.7.  $[A]$ ,  $[B]$  und  $[C]$  sind symmetrisch. Gleichung (C.12a) hat die Dimension  $2m \times 2m$ , (C.12b) hat die Dimension  $m \times m$ .

Im einzelnen haben Matrizen und Vektoren die folgenden Strukturen

### Rayleighwellen

$$[A_{R,j}] = \begin{bmatrix} [A_{xx,j}] & & & \\ & & & \\ & & [A_{zz,j}] & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (C.13a)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{h}{3}(\lambda+2G) & \frac{h}{6}(\lambda+2G) & & \\ \frac{h}{6}(\lambda+2G) & \frac{h}{3}(\lambda+2G) & & \\ & & \frac{h}{3}G & \frac{h}{6}G \\ & & \frac{h}{6}G & \frac{h}{3}G \end{bmatrix}$$

$$[B_{R,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} & [B_{xz,j}] \\ \hline [B_{zx,j}] & \end{array} \right]$$

( C.13b )

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} & & \frac{1}{2}(\lambda-G) & -\frac{1}{2}(\lambda+G) \\ & & \frac{1}{2}(\lambda+G) & -\frac{1}{2}(\lambda-G) \\ \frac{1}{2}(\lambda-G) & \frac{1}{2}(\lambda+G) & & \\ -\frac{1}{2}(\lambda+G) & -\frac{1}{2}(\lambda-G) & & \end{array} \right]$$

$$[\bar{C}_{R,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} [\bar{C}_{xx,j}] & \\ \hline & [\bar{C}_{zz,j}] \end{array} \right]$$

( C.13c )

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{h}G & -\frac{1}{h}G & & \\ -\frac{1}{h}G & \frac{1}{h}G & & \\ & & \frac{1}{h}(\lambda+2G) & -\frac{1}{h}(\lambda+2G) \\ & & -\frac{1}{h}(\lambda+2G) & \frac{1}{h}(\lambda+2G) \end{array} \right]$$

$$[M_{R,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} [M_{xx,j}] & \\ \hline & [M_{zz,j}] \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{h}{3}S & \frac{h}{6}S & & \\ \frac{h}{6}S & \frac{h}{3}S & & \\ & & \frac{h}{3}S & \frac{h}{6}S \\ & & \frac{h}{6}S & \frac{h}{3}S \end{array} \right]$$

( C.13d )

Lovewellen

$$[A_{L,j}] = [A_{YY,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{h}{3} G & \frac{h}{6} G \\ \hline \frac{h}{6} G & \frac{h}{3} G \end{array} \right] \quad (C.14a)$$

$$[\bar{B}_{L,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (C.14b)$$

$$[\bar{C}_{L,j}] = [\bar{C}_{YY,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{h} G & -\frac{1}{h} G \\ \hline -\frac{1}{h} G & \frac{1}{h} G \end{array} \right] \quad (C.14c)$$

$$[M_{L,j}] = [M_{YY,j}] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{h}{3} S & \frac{h}{6} S \\ \hline \frac{h}{6} S & \frac{h}{3} S \end{array} \right] \quad (C.14d)$$

## Anhang D

Lösung des Eigenwertproblems der Love-Welle

Das algebraische Eigenwertproblem der Love-Welle hat die Form

$$([A_L]K^2 + [C_L])\{V\} = \{0\} \quad (D.1)$$

mit den  $n$  komplexen Eigenwerten  $k_i^2$  und den korrespondierenden Eigenvektoren  $\{V_i\}$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ ).

$[A_L]$  und  $[C_L]$  sind symmetrische und komplexe Matrizen der Dimension  $n \times n$ . Das Eigenwertproblem wird mit dem Newton'schen Iterationsverfahren gelöst. Man errechnet sich dabei die Wurzeln der Determinante  $|[A_L]K^2 + [C_L]|$ . Die Eigenvektoren ergeben sich aus der inversen Iteration. Man erhält die Orthogonalitätsbedingungen der Eigenvektoren, indem man die zwei Lösungen  $j$  und  $l$  in Gleichung (D.1) einsetzt.

$$([A_L]k_j^2 + [C_L])\{V_j\} = \{0\} \quad (D.2)$$

$$([A_L]k_l^2 + [C_L])\{V_l\} = \{0\} \quad (D.3)$$

Gleichung (D.2) wird von links mit  $\{V_l\}^T$  multipliziert, Gleichung (D.3) wird transponiert und von rechts mit  $\{V_j\}$  multipliziert.

$$\{V_l\}^T([A_L]k_j^2 + [C_L])\{V_j\} = \{0\} \quad (D.4)$$

$$\{V_l\}^T([A_L]k_l^2 + [C_L])\{V_j\} = \{0\} \quad (D.5)$$

Subtrahiert man Gleichung (D.5) von (D.4), so erhält man

$$(k_j^2 - k_l^2)\{V_l\}^T[A_L]\{V_j\} = \{0\}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \{V_L\}^T [A_L] \{V_j\} &\neq 0 \quad \text{für } j = 1 \\ &= 0 \quad \text{für } j \neq 1 \end{aligned}$$

Faßt man die Eigenvektoren zur Modalmatrix  $[X_L]$  und die Wellenzahlen zur Diagonalmatrix  $[K_L]$  zusammen, so kann man die Orthogonalitätsbedingung normieren zur Form

$$[K_L] [X_L]^T [A_L] [X_L] [K_L] = [I] \quad (D.6)$$

Die Einheitsmatrix  $[I]$  hat dabei die Dimension  $n \times n$ .

Gleichung ( D.1 ) kann auch geschrieben werden als

$$([K_L] [A_L] [K_L] + [C_L]) [X_L] = [0]$$

oder

$$[K_L] [X_L]^T [A_L] [X_L] [K_L] + [X_L]^T [C_L] [X_L] = [0]$$

mit ( D.6 ) folgt dann

$$[X_L]^T [C_L] [X_L] = - [I]$$

oder

$$[C_L] [X_L] [X_L]^T = - [I] \quad (D.7)$$

Lösung des Eigenwertproblems der Rayleigh-Welle

Das algebraische Eigenwertproblem der Rayleigh-Welle hat die Form

$$([A_R]K^2 + [B_R]K + [C_R])\{V\} = \{0\} \quad (\text{D.8a})$$

mit den komplexen und symmetrischen Matrizen  $[A_R]$ ,  $[B_R]$  und  $[C_R]$  der Dimension  $2n \times 2n$ .

Aufgeteilt in horizontale und vertikale Komponenten hat (D.8a) die Form

$$\left( \begin{array}{cc|cc} [A_{xx}] & [0] & [0] & [B_{xz}] \\ [0] & [A_{zz}] & [B_{zx}] & [0] \\ \hline [C_{xx}] & [0] & [0] & [C_{zz}] \end{array} \right) \begin{array}{c} \{V_x\} \\ \{V_z\} \end{array} = \begin{array}{c} \{0\} \\ \{0\} \end{array} \quad (\text{D.8b})$$

Das quadratische Eigenwertproblem (D.8) kann unter Verdoppelung der Dimension auf ein lineares zurückgeführt werden.

$$([E] - [F]K)\{W\} = \{0\} \quad (\text{D.9})$$

mit

$$[E] = \begin{bmatrix} [0] & [C_R] \\ [C_R] & [B_R] \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$[F] = \begin{bmatrix} [C_R] & [0] \\ [0] & -[A_R] \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

und

$$\{W\} = \begin{bmatrix} \{W_1\} \\ \{W_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{V\} \\ \{V\}K \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$[E]$  und  $[F]$  haben die Dimension  $4n \times 4n$ . Die Links- und Rechtseigenvektoren zu (D.9) sind identisch, da  $[E]$  und  $[F]$  symmetrisch sind. Sie sind orthogonal in Bezug auf  $[F]$ .

Als Lösungsmethode wird eine Rayleighquotienten-Iteration gewählt, da bei ihr die geringe Bandbreite von  $[A_R]$ ,  $[B_R]$  und  $[C_R]$  ausgenutzt werden kann. Es wird inverse Vektoriteration mit Nullpunktverschiebung bei jedem Schritt durchgeführt. Um Konvergenz gegen einen bereits bekannten Eigenvektor zu vermeiden, wird der Vektor, mit dem die Iteration für den nächsten Eigenvektor begonnen wird, zu allen bereits bekannten Eigenvektoren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthogonalisiert.

Aus den Lösungen des linearen Eigenwertproblems ( D.9 ) erhält man mit ( D.12 ) die Lösungen des Problems nach Gleichung ( D.8 ). Dieses homogene Gleichungssystem hat  $4n$  nicht-triviale Lösungen, da die  $2n$  Gleichungen in  $k$ , der unbekanntem Wellenzahl, quadratisch sind. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Problems gibt es zu jeder Lösung  $k_j$  und  $\{V_j\}$  eine komplementäre Lösung  $-k_j$  und  $\{\tilde{V}_j\}$  mit

$$\{V_j\} = \begin{bmatrix} \{V_{x,j}\} \\ \{V_{z,j}\} \end{bmatrix} ; \quad \{\tilde{V}_j\} = \begin{bmatrix} -\{V_{x,j}\} \\ \{V_{z,j}\} \end{bmatrix} \quad ( D.13 )$$

und  $j = 1, 2, 3, \dots, 2n$ .

Bei Waas /67/ ist eine ausführliche Diskussion der Eigenlösungen zu finden.

Zur Bestimmung der Orthogonalitätsbedingung werden zwei Lösungen in ( D.8 ) eingesetzt :

$$\begin{aligned} \{V_j\} & \text{ mit der Wellenzahl } k_j \neq 0 & \text{ und} \\ \{V_L\} & \text{ mit der Wellenzahl } k_L \neq 0 \end{aligned}$$

Man erhält

$$([A_R]K_j^2 + [B_R]K_j + [C_R])\{V_j\} = \{0\} \quad ( D.14a )$$

$$([A_R]K_L^2 + [B_R]K_L + [C_R])\{V_L\} = \{0\} \quad ( D.14b )$$

Gleichung ( D.14a ) wird von rechts mit  $\{V_j\}^T \frac{1}{K_j}$  multipliziert,  
 ( D.14b ) mit  $\{V_j\}^T \frac{1}{K_l}$  und transponiert.

$$\{V_l\}^T ([A_R] K_j + [B_R] + [C_R] \frac{1}{K_j}) \{V_j\} = 0 \quad ( D.15a )$$

$$\{V_l\}^T ([A_R] K_l + [B_R] + [C_R] \frac{1}{K_l}) \{V_j\} = 0 \quad ( D.15b )$$

Die Gleichungen werden voneinander subtrahiert

$$\{V_l\}^T ([A_R] (K_j - K_l) - [C_R] \frac{K_j - K_l}{K_j \cdot K_l}) \{V_j\} = 0 \quad ( D.16 )$$

Division durch  $(K_j - K_l)$  ergibt die Orthogonalitätsbedingung für  
 $j \neq l$ .

$$K_l \{V_l\}^T [A_R] \{V_j\} K_j - \{V_l\}^T [C_R] \{V_j\} = 0 \quad ( D.17a )$$

Für den Fall  $j = l$  kann man in normierter Form schreiben

$$K_j \{V_j\}^T [A_R] \{V_j\} K_j - \{V_j\}^T [C_R] \{V_j\} = 2 \quad ( D.17b )$$

Nimmt man die korrespondierenden Lösungen nach ( D.13 ) hinzu, kann  
 mit  $\tilde{k}_l$  und  $\{\tilde{V}_l\}$  eine zweite Orthogonalitätsbedingung angegeben  
 werden.

$$\tilde{k}_l \{\tilde{V}_l\}^T [A_R] \{V_j\} K_j - \{\tilde{V}_l\}^T [C_R] \{V_j\} = 0$$

$k_j$  ist immer ungleich  $\tilde{k}_l$ . Außerdem ist  $\tilde{k}_l = -k_l$  und damit gilt

$$-k_l \{\tilde{V}_l\}^T [A_R] \{V_j\} K_j - \{\tilde{V}_l\}^T [C_R] \{V_j\} = 0 \quad ( D.17c )$$

Faßt man die Eigenvektoren zu den Modalmatrizen  $[X_R]$  und  $[\tilde{X}_R]$   
 zusammen, so erhält man

$$[K_R] [X_R]^T [A_R] [X_R] [K_R] - [X_R]^T [C_R] [X_R] = 2 [I] \quad ( D.18a )$$

und

$$[K_R] [\tilde{X}_R]^T [A_R] [X_R] [K_R] + [\tilde{X}_R]^T [C_R] [X_R] = [0] \quad (D.18b)$$

$[K_R]$  ist die Diagonalmatrix mit den Wellenzahlen  $k$ . Die Einheitsmatrix hat die Dimension  $2n \times 2n$ .

Wählt man die Darstellung in Form der horizontalen und vertikalen Komponenten, so hat die Orthogonalitätsbedingung die Gestalt

$$[K_R] [X_z]^T [A_{zz}] [X_z] [K_R] - [X_x]^T [C_{xx}] [X_x] = [I] \quad (D.19a)$$

$$[K_R] [X_x]^T [A_{xx}] [X_x] [K_R] - [X_z]^T [C_{zz}] [X_z] = [I] \quad (D.19b)$$

## Anhang E

### Verformungen im rotationsperiodischen, geschichteten Medium infolge Ring- oder Einzellasten

Die Beteiligungsfaktoren  $\alpha_\nu$  der Teillösungen in Gleichung ( 2.2.20 ) lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen. Aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhält man mit Gleichung ( C.2a ) die Gleichgewichtsbedingungen an der zylinderförmigen Schnittfläche bei  $r = r_0$ . Da vereinfachend vorausgesetzt worden ist, daß die äußeren Kräfte nur an den Schichtgrenzen wirken, folgt

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int_{z_j}^{z_{j+1}} \delta \{V_j\}^* (-[\bar{\sigma}_j] \{n_2\}) dz + \delta \{V_j\}^* \{P_{2,j}\} \right] = \{0\} \quad ( E.1 )$$

$\delta \{V_j\}$  sind die diskreten virtuellen Verschiebungen an den Stellen  $j$ .

Geht man davon aus, daß die virtuellen Verschiebungen genauso wie die tatsächlichen stückweise linear über die Tiefe verlaufen, dann erhält man

$$\delta \{V_j\} = [N_j] \delta \{v_j\} \quad ( E.2 )$$

Gleichung ( E.1 ) gilt für beliebige, kinematisch zulässige virtuelle Verschiebungen. Mit ( E.2 ) folgt

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T (-[\bar{\sigma}_j] \{n_2\}) dz + \{P_{2,j}\} \right] = \{0\} \quad ( E.3 )$$

Die Einheitsnormale auf der Randfläche  $S_2$  ist

$$\{n_2\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man erhält damit

$$\{\bar{\sigma}_{2,j}\} = [\bar{\sigma}_j] \{n_2\} = - \begin{bmatrix} \sigma_{rr,j} \\ \tau_{rz,j} \\ \tau_{r\varphi,j} \end{bmatrix} \quad ( E.4 )$$

Die Spannungen werden durch die Verschiebungen und diese durch den

modalen Ansatz nach Gleichung ( 2.2.20 ) ausgedrückt

$$\{\bar{\sigma}_{2,j}\} = \sum_{\nu=1}^M \alpha_{\nu} \left[ [S_{j,\nu}] \{X_{j,\nu}\} + [T_{j,\nu}] \frac{d}{dz} \{X_{j,\nu}\} \right] \quad ( E.5 )$$

mit

$$[S_{j,\nu}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 2G \left( \left( \frac{n}{r_0} \right)^2 H_{\nu} - \frac{1}{r_0} H_{\nu}' \right) \\ - K_{\nu}^2 (2G + 2) H_{\nu} \end{array} & & \begin{array}{c} 2G \frac{n}{r_0} (H_{\nu}' - \frac{1}{r_0} H_{\nu}) \end{array} \\ \hline & K_{\nu} G H_{\nu}' & \\ \hline \begin{array}{c} 2G \frac{n}{r_0} (H_{\nu}' - \frac{1}{r_0} H_{\nu}) \end{array} & & \begin{array}{c} 2G \left( \left( \frac{n}{r_0} \right)^2 H_{\nu} - \frac{1}{r_0} H_{\nu}' \right) \\ - K_{\nu}^2 G H \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$[T_{j,\nu}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & K_{\nu} \lambda H_{\nu} & \\ \hline G H_{\nu}' & & \frac{n}{r_0} G H_{\nu} \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Ersetzt man den Vektor  $\{X_{j,\nu}\}$  durch den Ansatz

$$\{X_{j,\nu}\} = [N_j] \{X_{j,\nu}\}$$

nach Gleichung ( 2.3.3 ), so erhält man die Spannungen in der Form

$$\{\bar{\sigma}_{2,j}\} = \sum_{\nu=1}^M \alpha_{\nu} \left( [S_{j,\nu}] [N_j] + [T_{j,\nu}] \frac{d}{dz} [N_j] \right) \{X_{j,\nu}\} \quad ( E.6 )$$

Einsetzen in Gleichung ( E.3 ) ergibt

$$\sum_{j=1}^m \{P_{2,j}\} = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\nu} \left( \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T [S_{j,\nu}] [N_j] dz \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T [T_{j,\nu}] \frac{d}{dz} [N_j] dz \right) \{X_{j,\nu}\} \right] \quad (\text{E.7})$$

Wegen der speziellen Struktur der Matrix  $[N_j]$  kann man umformen

$$[N_j]^T [S_{j,\nu}] [N_j] = [N_j]^T [N_j] [\bar{S}_{j,\nu}] \quad (\text{E.8a})$$

$$[N_j]^T [T_{j,\nu}] [N_j] = [N_j]^T [N_j] [\bar{T}_{j,\nu}] \quad (\text{E.8b})$$

Die Matrizen  $[\bar{S}_{j,\nu}]$  und  $[\bar{T}_{j,\nu}]$  entstehen aus  $[S_{j,\nu}]$  bzw.  $[T_{j,\nu}]$  durch Verdoppelung der Zeilen und Spalten ähnlich wie in Gleichung ( C.4 ) die Matrix  $[\bar{H}_{\nu}]$ .

$$\sum_{j=1}^m \{P_{2,j}\} = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\nu} \left( \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T [N_j] dz [\bar{S}_{j,\nu}] \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{z_j}^{z_{j+1}} [N_j]^T \frac{d}{dz} [N_j] dz [\bar{T}_{j,\nu}] \right) \{X_{j,\nu}\} \right] \quad (\text{E.9})$$

Führt man die in Gleichung ( E.7 ) vorgeschriebenen Integrationen und Matrizenoperationen aus, so erhält man

$$\sum_{j=1}^m \{P_{2,j}\} = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\nu} [R_{j,\nu}] \{X_{j,\nu}\} \right] \quad (\text{E.10})$$

wobei die in ( C.13 ) und ( C.14 ) definierten Matrizen verwendet werden.

$$[R_{j,\nu}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} K_{\nu}^2 H_{\nu} [A_{xx,j}] \\ -2 \left( \left( \frac{n}{r_0} \right)^2 H_{\nu} - \frac{1}{r_0} H_{\nu}' \right) \\ \cdot [A_{zz,j}] \end{array} & K_{\nu} H_{\nu} [B_{xz,j}] & \begin{array}{c} -2 \frac{n}{r_0} (H_{\nu}' - \frac{1}{r_0} H_{\nu}) \\ [A_{yy,j}] \end{array} \\ \hline H_{\nu}' [B_{zx,j}] & -K_{\nu} H_{\nu}' [A_{zz,j}] & \frac{n}{r_0} H_{\nu} [B_{zx,j}] \\ \hline \begin{array}{c} -2 \frac{n}{r_0} (H_{\nu}' - \frac{1}{r_0} H_{\nu}) \\ [A_{zz,j}] \end{array} & [0] & \begin{array}{c} K_{\nu}^2 H_{\nu} [A_{yy,j}] \\ -2 \left( \left( \frac{n}{r_0} \right)^2 H_{\nu} - \frac{1}{r_0} H_{\nu}' \right) \\ [A_{yy,j}] \end{array} \\ \hline \end{array}$$

oder

$$[R_{j,\nu}] = \left[ [R_{R,j,\nu}] \mid [R_{L,j,\nu}] \right]$$

Die innere Summation in Gleichung ( E.10 ) geht bei  $m$  Bodenschichten über  $\mu = 3m$  Eigenformen. Sie können noch unterteilt werden in die  $2m$  Eigenformen  $\{X_{x,j,\nu}\}$  und  $\{X_{z,j,\nu}\}$  für die Rayleigh-Wellen und in die  $m$  Eigenformen  $\{X_{y,j,\nu}\}$  für die Love-Wellen. Die Beteiligungsfaktoren  $\alpha_\nu$  werden auf die gleiche Weise in  $\alpha_{R,\nu}$  und  $\alpha_{L,\nu}$  aufgeteilt.

Gleichung ( E.10 ) nimmt nun die Form an

$$\sum_{j=1}^m \{P_{z,j}\} = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,\nu} [R_{R,j,\nu}] \{X_{R,j,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,\nu} [R_{L,j,\nu}] \{X_{L,j,\nu}\} \right] \quad ( E.11 )$$

Die Summation über die Anzahl  $m$  der Schichten bedeutet wie in Gleichung ( 2.3.2 ), daß die Zeilen und Spalten der Matrizen benachbarter Bodenschichten an gemeinsamen Schichtgrenzen überlagert werden. Nach der Überlagerung erhält man schließlich

$$\{P_2\} = \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,\nu} [R_{R,\nu}] \{X_{R,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,\nu} [R_{L,\nu}] \{X_{L,\nu}\} \quad ( E.12 )$$

Der Vektor  $\{P_2\}$  enthält die an der zylindrischen Schnittfläche  $S_2$  wirkenden Kräfte  $\{P_r\}$ ,  $\{P_z\}$  und  $\{P_\varphi\}$  in Höhe der Schichtgrenzen. Er hat die Dimension  $3m$ . Der Vektor  $\{X_{R,\nu}\}$  enthält die Eigenformen  $\{X_{x,\nu}\}$  und  $\{X_{z,\nu}\}$  für die Rayleigh-Wellen, der Vektor  $\{X_{L,\nu}\}$  die Eigenform  $\{X_{y,\nu}\}$  für die Love-Wellen. Die korrespondierenden Beteiligungsfaktoren  $\alpha_{R,\nu}$  und  $\alpha_{L,\nu}$  müssen so gewählt werden, daß die Verschiebungsrandbedingungen und das Gleichgewicht an der Schnittfläche  $S_2$  erfüllt werden.

a) Ringlasten in geschichtetem Boden

Man betrachte eine rotationsperiodische Ringlast wie in Bild E1 dargestellt. Der Ring hat den Radius  $r_0$ . Es können zwei Teilbereiche unterschieden werden, nämlich

$r < r_0$  : Teilbereich I

$r \geq r_0$  : Teilbereich II

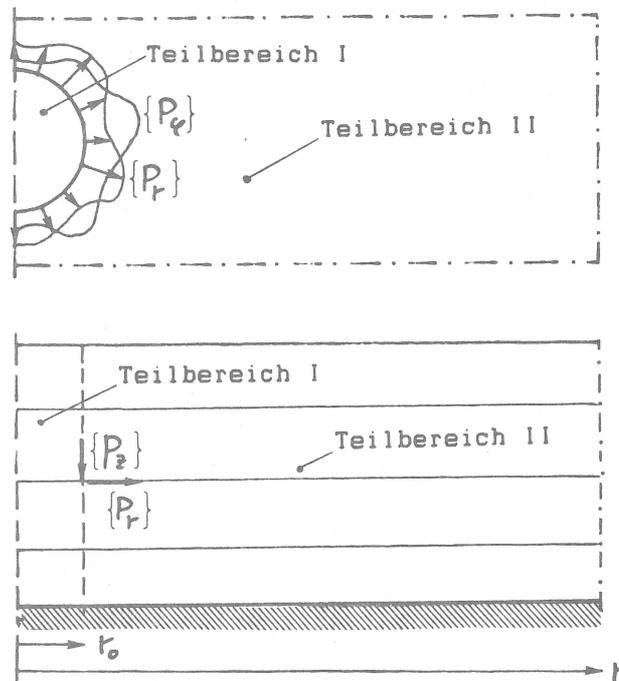


Bild E1 : Ringlast im geschichteten Boden

Nach Gleichung ( 2.2.16 ) erhält man für die Verschiebungen den Ausdruck

$$\{V\} = \sum_{\nu=1}^M (\alpha_\nu^{(1)} [H_\nu^{(1)}] + \alpha_\nu^{(2)} [H_\nu^{(2)}]) \{X_\nu\} \quad ( E.13 )$$

Im Teilbereich II müssen die Verschiebungen mit wachsendem Radius  $r$  abklingen. Die Wellen pflanzen sich nur in positiver  $r$  - Richtung

fort. Allein die Hankelfunktionen der zweiten Art erfüllen diese Bedingung für Eigenwerte, deren Imaginärteil negativ ist.

Im Teilbereich I können die Wellen sowohl in positiver wie auch in negativer  $r$  - Richtung propagieren. Es müssen hier also auch die Hankelfunktionen der ersten Art berücksichtigt werden.

Die Hankelfunktionen können ersetzt werden durch

$$H_n^{(1)}(k_0 r) = J_n(k_0 r) + i Y_n(k_0 r) \quad (\text{E.14a})$$

$$H_n^{(2)}(k_0 r) = J_n(k_0 r) - i Y_n(k_0 r) \quad (\text{E.14b})$$

mit

$J_n(k_0 r)$  : Besselfunktion der ersten Art von der Ordnung  $n$

$Y_n(k_0 r)$  : Besselfunktion der zweiten Art von der Ordnung  $n$

Außerdem gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_n(k_0 r) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{E.15a})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} Y_n(k_0 r) \rightarrow \infty \quad (\text{E.15b})$$

Die Verschiebungen im Ursprung müssen endliche Werte annehmen.

Setzt man die Umformungen nach Gleichung ( E.14 ) in den Klammerausdruck der Gleichung ( E.13 ) ein, so erhält man

$$\alpha_\nu^{(1)} [H_\nu^{(1)}] + \alpha_\nu^{(2)} [H_\nu^{(2)}] = \quad (\text{E.16})$$

$J_\nu'(\alpha_{x,\nu}^{(1)} + \alpha_{x,\nu}^{(2)})$ $+ i Y_n'(\alpha_{x,\nu}^{(1)} - \alpha_{x,\nu}^{(2)})$		$\frac{n}{r} J_\nu(\alpha_{y,\nu}^{(1)} + \alpha_{y,\nu}^{(2)})$ $+ \frac{n}{r} i Y_n(\alpha_{y,\nu}^{(1)} - \alpha_{y,\nu}^{(2)})$
	$k_0 J_\nu(\alpha_{z,\nu}^{(1)} + \alpha_{z,\nu}^{(2)})$ $+ i Y_n(\alpha_{z,\nu}^{(1)} - \alpha_{z,\nu}^{(2)})$	
$\frac{n}{r} J_\nu(\alpha_{x,\nu}^{(1)} + \alpha_{x,\nu}^{(2)})$ $+ \frac{n}{r} i Y_n(\alpha_{x,\nu}^{(1)} - \alpha_{x,\nu}^{(2)})$		$J_\nu'(\alpha_{y,\nu}^{(1)} + \alpha_{y,\nu}^{(2)})$ $+ i Y_n'(\alpha_{y,\nu}^{(1)} - \alpha_{y,\nu}^{(2)})$

Beachtet man die Gleichungen ( E.15 ), so erkennt man, daß endliche Verschiebungen an der Stelle  $r = 0$  nur dann erreicht werden, wenn

$$\begin{aligned}\alpha_{x,\nu}^{(1)} &= \alpha_{x,\nu}^{(2)} \\ \alpha_{z,\nu}^{(1)} &= \alpha_{z,\nu}^{(2)} \\ \alpha_{y,\nu}^{(1)} &= \alpha_{y,\nu}^{(2)}\end{aligned}$$

Die Beteiligungsfaktoren der von  $r = r_0$  aus in den Ursprung ausgesandten Wellen ( $H_\nu^{(1)}$ -Terme) sind betragsmäßig gleich denen der im Ursprung reflektierten Wellen ( $H_\nu^{(2)}$ -Terme).

Gleichung ( E.13 ) nimmt für die beiden Teilbereiche spezielle Formen an. Im Teilbereich I betragen die Verschiebungen des j-ten Elementes

$$\{V_j^I\} = \sum_{\nu=1}^M \alpha_\nu^I [F_\nu] \{X_{j,\nu}\} \quad ( E.17 )$$

Matrix  $[F_\nu]$  ist analog zur Matrix  $[H_\nu]$  in Gleichung ( 2.2.17 ) aufgebaut. Sie enthält statt der Hankelfunktionen die Besselfunktionen. Setzt man den linearen Verschiebungsansatz in ( E.17 ), so erhält man als Verschiebung an der j-ten Schichtgrenze

$$\{V_j^I\} = \sum_{\nu=1}^M \alpha_\nu^I [N_j]^T [F_\nu] [N_j] \{X_{j,\nu}\} \quad ( E.18 )$$

Mit der Definition

$$[E_{xx,j}] = [E_{yy,j}] = [E_{zz,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ( E.19 )$$

wird aus Gleichung ( E.18 )

$$\{V_j^I\} = \sum_{\nu=1}^M \alpha_\nu^I [Q_{j,\nu}^I] \{X_{j,\nu}\} \quad ( E.20a )$$

oder nach Unterteilung in Rayleigh- und Love-Wellen

$$\{V_j^I\} = \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,\nu}^I [Q_{R,j,\nu}^I] \{X_{R,j,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,\nu}^I [Q_{L,j,\nu}^I] \{X_{L,j,\nu}\} \quad ( E.20b )$$

$$[Q_{j,\nu}] = [Q_{R,j,\nu}] [Q_{L,j,\nu}] = \left[ \begin{array}{c|c} \int_{\nu}' [E_{xx,j}] & \frac{n}{r} \int_{\nu} [E_{yy,j}] \\ \hline & K_{\nu} \int_{\nu} [E_{zz,j}] \\ \hline \frac{n}{r} \int_{\nu} [E_{xx,j}] & \int_{\nu}' [E_{yy,j}] \end{array} \right]$$

Geht man von dem Element  $j$  zum Gesamtmodell über, so ist für jedes Element die Gleichung ( E.20 ) im Sinne des Schemas nach Bild 2.7 zu überlagern. Man erhält

$$\{V^I\} = \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu}^I [Q_{\nu}^I] \{X_{\nu}\} \quad (\text{E.21a})$$

oder

$$\{V^I\} = \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,\nu}^I [Q_{R,\nu}^I] \{X_{R,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,\nu}^I [Q_{L,\nu}^I] \{X_{L,\nu}\} \quad (\text{E.21b})$$

wegen  $[E_{xx}] = [E_{zz}] = [E_{yy}] = \sum_{j=1}^m [E_{xx,j}] = [I]$  gilt

$$[Q_{\nu}^I] = \left[ \begin{array}{c|c} \int_{\nu}' [I] & \frac{n}{r} \int_{\nu} [I] \\ \hline & K_{\nu} \int_{\nu} [I] \\ \hline \frac{n}{r} \int_{\nu} [I] & \int_{\nu}' [I] \end{array} \right] \quad (\text{E.22})$$

Die Einheitsmatrix  $[I]$  hat die Dimension  $m \times m$ .

Für den Teilbereich II gilt Gleichung ( E.21 ) ebenfalls, wenn man

in ( E.22 ) die Besselfunktion durch die Hankelfunktion ersetzt. Aus der Matrix  $[Q_v^I]$  wird so die Matrix  $[Q_v^{II}]$  .

An der Berührungsfläche  $r = r_0$  der Teilbereiche müssen Kompatibilitäts- und Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein. Das heißt

$$\{V^{II}\} = \{V^I\} \quad ( E.23 )$$

und

$$\{P\} = \{P^{II}\} - \{P^I\} \quad ( E.24 )$$

$\{P\}$  sind die an den Schichtgrenzen wirkenden äußeren Kräfte. Setzt man die Ansätze nach ( E.21 ) in die Kompatibilitätsbedingung ein, so erhält man

$$\sum_{v=1}^m (\alpha_v^{II} [Q_v^{II}] - \alpha_v^I [Q_v^I]) \{X_v\} = \{0\} \quad ( E.25a )$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{2m} (\alpha_{R,v}^{II} [Q_{R,v}^{II}] - \alpha_{R,v}^I [Q_{R,v}^I]) \{X_{R,v}\} \\ & + \sum_{v=1}^m (\alpha_{L,v}^{II} [Q_{L,v}^{II}] - \alpha_{L,v}^I [Q_{L,v}^I]) \{X_{L,v}\} = \{0\} \end{aligned} \quad ( E.25b )$$

In gleicher Weise wird ( E.12 ) in die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt. Hier erhält man

$$\sum_{v=1}^m (\alpha_v^{II} [R_v^{II}] - \alpha_v^I [R_v^I]) \{X_v\} = \{P\} \quad ( E.26a )$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{2m} (\alpha_{R,v}^{II} [R_{R,v}^{II}] - \alpha_{R,v}^I [R_{R,v}^I]) \{X_{R,v}\} \\ & + \sum_{v=1}^m (\alpha_{L,v}^{II} [R_{L,v}^{II}] - \alpha_{L,v}^I [R_{L,v}^I]) \{X_{L,v}\} = \{P\} \end{aligned} \quad ( E.26b )$$

$[R_{R,\nu}^I]$ ,  $[R_{L,\nu}^I]$  und  $[R_{R,\nu}^{II}]$ ,  $[R_{L,\nu}^{II}]$  ergeben sich aus Gleichung ( E.10 ), indem für  $H_\nu$  die speziellen Formen  $f_\nu$  und  $H_\nu^{(2)}$  eingesetzt werden. ( E.25 ) und ( E.26 ) bilden ein lineares Gleichungssystem mit 6m Gleichungen und den 6m Unbekannten  $\alpha_{R,\nu}^I, \alpha_{R,\nu}^{II}, \alpha_{L,\nu}^I, \alpha_{L,\nu}^{II}$ .

Das Gleichungssystem vereinfacht sich durch die Substitution

$$\alpha_{R,\nu}^I = H_\nu^{(2)} a_\nu + \frac{d}{dr} H_\nu^{(2)} c_\nu \quad ( E.27a )$$

$$\alpha_{R,\nu}^{II} = f_\nu a_\nu + \frac{d}{dr} f_\nu c_\nu \quad ( E.27b )$$

$$\alpha_{L,\nu}^I = H_\nu^{(2)} b_\nu + \frac{d}{dr} H_\nu^{(2)} d_\nu \quad ( E.27c )$$

$$\alpha_{L,\nu}^{II} = f_\nu b_\nu + \frac{d}{dr} f_\nu d_\nu \quad ( E.27d )$$

Die 6m Unbekannten  $a_\nu$ ,  $b_\nu$ ,  $c_\nu$  und  $d_\nu$  sind Komponenten der Vektoren

$$\{a\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2m} \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \{c\} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{2m} \end{bmatrix} \quad \{d\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

Mit der Beziehung

$$H_\nu^{(2)} \frac{d}{dr} f_\nu - f_\nu \frac{d}{dr} H_\nu^{(2)} = \frac{2i}{\pi r} \quad ( E.28 )$$

wird aus der Kompatibilitätsbedingung ( E.25 )

$$\sum_{\nu=1}^m [\bar{Q}_\nu] \{X_\nu\} = \{0\}. \quad ( E.29a )$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^{2M} [\bar{Q}_{R,\nu}] \{X_{R,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^M [\bar{Q}_{L,\nu}] \{X_{L,\nu}\} = \{0\} \quad (\text{E.29b})$$

mit

$$[\bar{Q}_\nu] = \left[ \begin{array}{c|c} -\frac{2i}{\pi r_0} [I] a_\nu & \frac{2i}{\pi r_0} \frac{n}{r_0} [I] d_\nu \\ \hline & K_\nu \frac{2i}{\pi r_0} [I] c_\nu \\ \hline \frac{2i}{\pi r_0} \frac{n}{r_0} [I] c_\nu & -\frac{2i}{\pi r_0} [I] b_\nu \end{array} \right]$$

$$[\bar{Q}_\nu] = \left[ [\bar{Q}_{R,\nu}] \mid [\bar{Q}_{L,\nu}] \right]$$

Die Gleichgewichtsbedingung ( E.26 ) kann man auf die gleiche Weise umformen zu

$$\sum_{\nu=1}^M [\bar{R}_\nu] \{X_\nu\} = \{P\} \quad (\text{E.30a})$$

$$[\bar{R}_\nu] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{2i}{\pi r_0} K^2 [A_{xx}] c_\nu & \frac{2i}{\pi r_0} (2 \frac{n}{r_0} [A_{yy}] d_\nu + \frac{2n}{r_0} [A_{yy}] b_\nu) \\ -\frac{2i}{\pi r_0} (2 (\frac{n}{r})^2 [A_{zz}] c_\nu + \frac{2}{r_0} [A_{zz}] a_\nu) & K \frac{2i}{\pi r_0} [B_{xz}] c_\nu \\ \hline -\frac{2i}{\pi r_0} [B_{zx}] a_\nu & K \frac{2i}{\pi r_0} [A_{zz}] a_\nu & \frac{2i}{\pi r_0} \frac{n}{r_0} [B_{zx}] d_\nu \\ \hline \frac{2i}{\pi r_0} (2 \frac{n}{r_0} [A_{zz}] a_\nu + 2 \frac{n}{r_0^2} [A_{zz}] c_\nu) & [0] & \frac{2i}{\pi r_0} K^2 [A_{yy}] d_\nu - \frac{2i}{\pi r_0} (2 (\frac{n}{r})^2 [A_{yy}] d_\nu + \frac{2}{r_0} [A_{yy}] b_\nu) \end{array} \right]$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^{2m} [\bar{R}_{R,\nu}] \{X_{R,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^m [\bar{R}_{L,\nu}] \{X_{L,\nu}\} = \{P\} \quad (\text{E.30b})$$

Berücksichtigt man in ( E.30 ) schon die Verformungsbedingungen ( E.29 ), vereinfacht sich  $[\bar{R}_\nu]$  zu

$$[\bar{R}_\nu] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{2i}{\pi r_0} K_R^2 [A_{xx}] c_\nu & \\ \hline & K_R \frac{2i}{\pi r_0} [A_{zz}] a_\nu \\ \hline & & \frac{2i}{\pi r_0} K_L^2 [A_{yy}] d_\nu \end{array} \right]$$

$$[\bar{R}_\nu] = \left[ [\bar{R}_{R,\nu}] \mid [\bar{R}_{L,\nu}] \right]$$

( E.29 ) und ( E.30 ) bilden ein teilweise entkoppelte Gleichungssystem der Dimension  $6m \times 6m$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} [X_x] & & -\frac{\eta}{r_0} [X_y] \\ \hline & [X_z] [K_R] & \\ \hline [X_y] & -\frac{\eta}{r_0} [X_x] & \\ \hline & [A_{xx}] [X_x] [K_R]^2 & \\ \hline [A_{zz}] [X_z] [K_R] & & \\ \hline & & [A_{yy}] [X_y] [K_L]^2 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \\ \{d\} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \frac{\pi r_0}{2i} \{P_r\} \\ \frac{\pi r_0}{2i} \{P_z\} \\ \frac{\pi r_0}{2i} \{P_y\} \end{array} \right] \quad (\text{E.31})$$

Es enthält mit  $[X_x]$ ,  $[X_z]$  und  $[X_y]$  die Modalmatrizen der Eigenformen  $\{X_{x,\nu}\}$ ,  $\{X_{z,\nu}\}$  und  $\{X_{y,\nu}\}$ .  $[K_R]$  und  $[K_L]$  sind Diagonalmatrizen mit den Wellenzahlen. Die Orthogonalitätsbedingungen der Rayleigh-Wellen ist im Anhang D angegeben durch Gleichung ( D.23 ).

$$-[X_z]^T [C_{zz}] [X_z] + [K_R] [X_x]^T [A_{xx}] [X_x] [K_R] = [I] \quad (\text{ E.32a })$$

$$-[X_x]^T [C_{xx}] [X_x] + [K_R] [X_z]^T [A_{zz}] [X_z] [K_R] = [I] \quad (\text{ E.32b })$$

Für die Love-Welle gilt nach Gleichungen ( D.6 ) und ( D.7 )

$$[K_L] [X_y]^T [A_{yy}] [X_y] [K_L] = [I] \quad (\text{ E.32c })$$

$$[C_{xx}] [X_y] [X_y]^T = [C_{yy}] [X_y] [X_y]^T = -[I] \quad (\text{ E.32d })$$

Die Lösung des Gleichungssystems ( E.31 ) läßt sich nun explizit angeben. Unter Beachtung von ( E.32c ) folgt aus der sechsten Zeile

$$\{d\} = -i \frac{\pi r_0}{2} [X_y]^T \{P_\varphi\} \quad (\text{ E.33a })$$

Multiplikation der ersten Zeile mit  $-[X_x]^T [C_{xx}]$ , der fünften Zeile mit  $[K_R]^T [X_z]^T$  und Addition führt zu

$$\begin{aligned} & (- [X_x]^T [C_{xx}] [X_x] + [K_R]^T [X_z]^T [A_{zz}] [X_z] [K_R] ) \{a\} \\ & - i \frac{\pi \eta}{2} [X_x]^T [C_{xx}] [X_y] [X_y]^T \{P_\varphi\} = - i \frac{\pi r_0}{2} [K_R]^T [X_z]^T \{P_z\} \end{aligned}$$

Mit ( E.32b ) und ( E.32d ) folgt

$$\{a\} = -i \frac{\pi r_0}{2} [K_R] [X_z]^T \{P_z\} - i \frac{\pi \eta}{2} [X_x]^T \{P_\varphi\} \quad (\text{ E.33b })$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit  $-[X_z]^T [C_{zz}]$ , der vierten Zeile mit  $[K_R]^T [X_x]^T$  und Addition :

$$\begin{aligned} & (- [X_z]^T [C_{zz}] [X_z] + [K_R]^T [X_x]^T [A_{xx}] [X_x] [K_R] ) [K_R] \{c\} \\ & = - i \frac{\pi r_0}{2} [K_R]^T [X_x]^T \{P_r\} \end{aligned}$$

oder

$$\{C\} = -i \frac{\pi \cdot k_0}{2} [X_x]^T \{P_r\} \quad (\text{E.33c})$$

Multiplikation der dritten Zeile mit  $-[X_y]^T [C_{xx}]$  und Einsetzen von ( E.33a ) führt zu

$$-[X_y]^T [C_{xx}] [X_y] \{b\} = i \frac{\pi n}{2} [X_y]^T [C_{xx}] [X_x] [X_x]^T \{P_r\}$$

oder

$$\{b\} = i \frac{\pi n}{2} [X_y]^T [C_{xx}] [X_x] [X_x]^T \{P_r\} \quad (\text{E.34})$$

Mit der Gleichung

$$i \frac{\pi k_0}{2} [X_z] [K_R] [X_x]^T \{P_r\} = \{0\}$$

aus der zweiten Zeile von ( E.31 ) erhält man aus ( E.32b )

$$[C_{xx}] [X_x] [X_x]^T \{P_r\} = -[I] \{P_r\}$$

Gleichung ( E.34 ) läßt sich nun umformen zu

$$\{b\} = -i \frac{\pi n}{2} [X_y]^T \{P_r\} \quad (\text{E.33d})$$

Damit sind alle Unbekannten errechnet.

Durch Rückeinsetzen in Gleichung ( E.27 ) können jetzt die Beteiligungsfaktoren aus Wellenzahlen, Eigenformen und äußeren Kräften errechnet werden.

Das abschließende Ergebnis kann aus Gleichung ( 2.2.20 ) hergeleitet werden.

An Schichtgrenzen einwirkende Kräfte verursachen an Punkten mit den Koordinaten  $r$  und  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  in Höhe der Schichtgrenzen die Verschiebungen

$$\{V\} = \sum_{\nu=1}^M \alpha_\nu [H_\nu] \{X_\nu\} \quad (\text{E.35})$$

oder

$$\{V\} = \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,\nu} [H_{R,\nu}] \{X_{R,\nu}\} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,\nu} [H_{L,\nu}] \{X_{L,\nu}\} \quad (\text{E.36})$$

Man erinnere sich, daß der Vektor  $\{V\}$  die Amplituden der in einer Fourierreihe entwickelten Verschiebungen enthält. Führt man die Indizes  $s$  (symmetrischer Anteil) und  $a$  (antimetrischer Anteil) sowie  $n$  als Nummer des Fouriergliedes wieder ein, so folgt mit Gleichung (2.2.1) als Verschiebung für das Reihenglied  $n$  und den Winkel  $\varphi$  :

$$\{V_n\} = \sum_{\nu=1}^m (\alpha_{s,n,\nu} [\phi_{s,n}] + \alpha_{a,n,\nu} [\phi_{a,n}]) [H_{\nu,n}] \{X_{\nu}\} \quad (\text{E.37})$$

oder

$$\begin{aligned} \{V_n\} = & [\phi_{s,n}] \left( \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,s,n,\nu} [H_{R,\nu,n}] \{X_{R,\nu}\} \right. \\ & \left. + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,s,n,\nu} [H_{L,\nu,n}] \{X_{L,\nu}\} \right) \\ & + [\phi_{a,n}] \left( \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{R,a,n,\nu} [H_{R,\nu,n}] \{X_{R,\nu}\} \right. \\ & \left. + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{L,a,n,\nu} [H_{L,\nu,n}] \{X_{L,\nu}\} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

mit

$$[\phi_{s,n}] = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & & \\ & \cos n\varphi & \\ & & -\sin n\varphi \end{bmatrix} \quad \text{nach (2.2.1)}$$

$$[\phi_{a,n}] = \begin{bmatrix} \sin n\varphi & & \\ & \sin n\varphi & \\ & & \cos n\varphi \end{bmatrix} \quad \text{nach (2.2.1)}$$

$$[H_{\nu,n}] = \left[ \begin{array}{c|c} H'_{R,\nu,n} & \frac{n}{r} H_{L,\nu,n} \\ \hline & K_{R,\nu} H_{R,\nu,n} \\ \hline \frac{n}{r} H_{R,\nu,n} & H'_{L,\nu,n} \end{array} \right]$$

$$[H_{\nu,n}] = \left[ [H_{R,\nu,n}] \parallel [H_{L,\nu,n}] \right]$$

$$\{V_n\} = \begin{bmatrix} V_{r,n} \\ V_{z,n} \\ V_{\varphi,n} \end{bmatrix} ; \{X_{\nu}\} = \begin{bmatrix} \{X_{x,\nu}\} \\ \{X_{z,\nu}\} \\ \{X_{y,\nu}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{X_{R,\nu}\} \\ \{X_{L,\nu}\} \end{bmatrix}$$

mit der Definition

$$H_{R,\nu,n} = H_n^{(2)}(K_{R,\nu} r) \quad (\text{E.39a})$$

$$H_{L,\nu,n} = H_n^{(2)}(K_{L,\nu} r) \quad (\text{E.39b})$$

$$H'_{R,\nu,n} = \frac{d}{dr} H_{R,\nu,n} \quad (\text{E.39c})$$

$$H'_{L,\nu,n} = \frac{d}{dr} H_{L,\nu,n} \quad (\text{E.39d})$$

und der entsprechenden Definition für die Besselfunktionen.

Handelt es sich bei den einwirkenden Kräften um Ringlasten mit dem Radius  $r_0$ , so betragen die Beteiligungsfaktoren

$$\begin{bmatrix} \alpha_{R,s,n,\nu} & \alpha_{R,a,n,\nu} \\ \alpha_{L,s,n,\nu} & \alpha_{L,a,n,\nu} \end{bmatrix} =$$

( E.40 )

$$-i \frac{\pi k}{2} \begin{bmatrix} J'_{R,\nu} \{X_{x,\nu}\} & K_{R,\nu} J_{R,\nu} \{X_{z,\nu}\} \frac{n}{r_0} J_{R,\nu} \{X_{x,\nu}\} \\ \frac{n}{r_0} J_{L,\nu} \{X_{y,\nu}\} & 0 & J'_{L,\nu} \{X_{y,\nu}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{r,s,n,\nu} & P_{r,a,n,\nu} \\ P_{z,s,n,\nu} & P_{z,a,n,\nu} \\ P_{\varphi,s,n,\nu} & P_{\varphi,a,n,\nu} \end{bmatrix}$$

Die Gleichungen gelten für den äußeren Bereich II. Bei den Besselfunktionen  $J_{R,\nu}, J_{L,\nu}$  ist im Argument der Radius  $r = r_0$  einzusetzen. Sind die Verschiebungen für den Bereich I, also innerhalb der Ringlasten, gesucht, so sind in den Gleichungen ( E.38 ) und ( E.40 ) Hankel- und Besselfunktionen miteinander zu vertauschen.

Die Gleichungen gelten für beliebige Fourierreihenglieder  $n$ .

Meist werden nur die Terme  $n = 0$  und  $n = 1$  benötigt, um die äußeren Kräfte zu entwickeln. Man kann so die folgenden Lastfälle erzeugen

Last	Symmetrie art	Nummer des Reihengliedes	Nummer des Lastfalles	Lastfall
$P_r$	s	0	1	Radiallast
$P_z$	s	0	2	Vertikallast
$P_{\varphi}$	a	0	3	Torsionsmoment
$P_r$	s	1	4	Horizontallast
$P_z$	s	1	5	Kippmoment
$P_{\varphi}$	s	1	6	Horizontallast

Wie man leicht erkennt, regt eine vertikale Last mit beliebiger Fourierordnung nur Rayleigh-Wellen an. Bei Lastfallnummer 1 werden nur Rayleigh-Wellen, bei Lastfallnummer 3 nur Love-Wellen angeregt.

b) Einzellast in geschichtetem Boden

Läßt man den Radius  $r$  des zylinderförmigen Bodenausschnittes gegen Null gehen, dann gehen die Ringlasten in Einzellasten über.

Bei der vertikalen Ringlast erzeugt allein das Reihenglied  $n = 0$  bei Integration über den Umfang eine resultierende Last ungleich Null, bei der radialen und tangentialen Ringlast allein das Reihenglied  $n = 1$ . Man kann sich also auf die beiden ersten Reihenglieder beschränken. Für  $n = 0$  und  $n = 1$  gelten die folgenden Beziehungen :

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_0(Kr) = 1 \quad (\text{E.41a})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_0'(Kr) = 0 \quad (\text{E.41b})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_1(Kr) = 0 \quad (\text{E.41c})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_1'(Kr) = \frac{K}{2} \quad (\text{E.41d})$$

Mit der vertikalen Einzellast

$$P_V = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (2\pi r_0 P_{z,s,0,0}) \quad (\text{E.42})$$

und Gleichung ( E.41a ) wird für  $n = 0$  aus Gleichung ( E.40 ) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{R,s,0,0} \\ \alpha_{L,s,0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} K_{R,0} \{X_{z,0}\} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot P_V \quad (\text{E.43})$$

Bei der horizontalen Einzellast muß berücksichtigt werden, daß die Kompatibilität gewahrt ist, wenn der Radius  $r_0$  gegen Null geht.

Die Radialverschiebung bei  $\varphi = 0$  muß gleich sein mit der Tangentialverschiebung bei  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Das trifft dann zu, wenn gilt

$$P_{r,s,1,\nu} = -P_{\varphi,a,1,\nu} \quad (\text{E.44})$$

Die horizontale Einzellast kann damit definiert werden als

$$P_H = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (2\pi r_0 P_{r,s,1,\nu}) + \lim_{r_0 \rightarrow 0} (2\pi r_0 P_{\varphi,a,1,\nu}) \quad (\text{E.45})$$

Mit Gleichung ( E.41d ) wird für  $n = 1$  aus Gleichung ( E.40 ) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{R,s,1,\nu} \\ \alpha_{L,s,1,\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \frac{1}{8} K_{R,\nu} \{X_{x,\nu}\} \\ -i \frac{1}{8} K_{L,\nu} \{X_{y,\nu}\} \end{bmatrix} \cdot P_H \quad (\text{E.46})$$

Bei Verwendung der Rekursionsformeln

$$\frac{1}{r} J_n(Kr) = K J_0(Kr) - J_n'(Kr) \quad (\text{E.47a})$$

$$J_0'(Kr) = -K J_1(Kr) \quad (\text{E.47b})$$

lassen sich auch die Beteiligungsfaktoren für die Einzelmomente angeben.

Für das Kippmoment um die Achse  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$M_K = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (-\pi r_0^2 P_{z,s,1,\nu}) \quad (\text{E.48})$$

erhält man

$$\begin{bmatrix} \alpha_{R,s,1,\nu} \\ \alpha_{L,s,1,\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} K_{R,\nu}^2 \{X_{z,\nu}\} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot M_K \quad (\text{E.49})$$

Für das Torsionsmoment

$$M_T = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (2\pi r_0^2 P_{\varphi,s,0,\nu}) \quad (\text{E.50})$$

erhält man

$$\begin{bmatrix} \alpha_{R,a,o,v} \\ \alpha_{L,a,o,v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \frac{1}{8} K_{L,v}^2 \{X_{y,v}\} \end{bmatrix} \cdot M_T \quad ( E.51 )$$

Es ist zu beachten, daß die Verschiebung am Kraftangriffspunkt infinit wird.

## Anhang F

Eindimensionale Wellenausbreitung im Freifeld

Für die Berechnung des Lastfalls Erdbeben werden die Freifeldverformungen des Bodens benötigt. Darunter versteht man die tiefenabhängigen Bodenverformungen in großer Entfernung von der als lokaler Störung wirkender Gründung. Das Erdbeben wird idealisiert zu einem Feld von vertikal propagierenden Scherwellen. Sie dringen über die Grenzfläche eines starren oder elastischen Halbraumes in das Schichtenmodell des Bodens ein. Da Oberflächenwellen nicht berücksichtigt werden, handelt es sich somit um ein eindimensionales Problem. Bild F1 zeigt das idealisierte System.

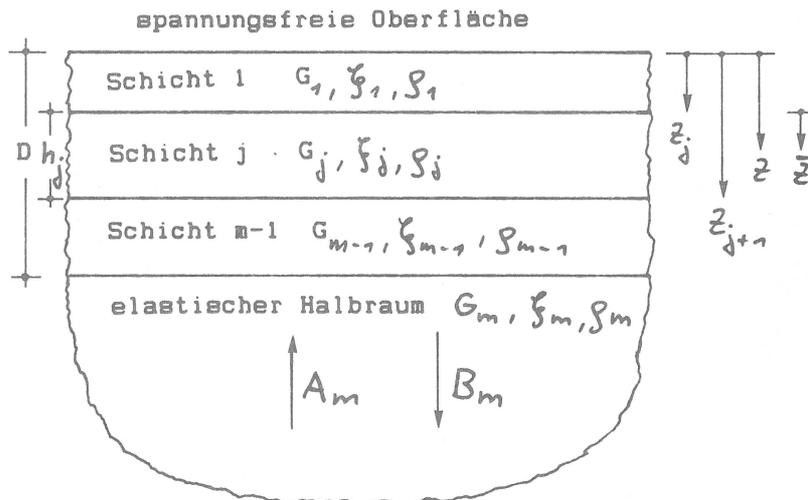


Bild F1 : Schichtenmodell auf elastischem Halbraum

Das Problem ist identisch mit dem des nur durch Schub deformierten, vertikal orientierten Stabes, der zu horizontalen Schwingungen angeregt wird. Analog zum elastischen Halbraum unter den Bodenschichten ruht der Stab auf einem frequenzabhängigen Feder-Dämpfer-

System. Die Differentialgleichung des Problems ist bekanntlich

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, z) - \frac{G}{S} \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(t, z) = 0 \quad (\text{F.1})$$

mit den von der Zeit  $t$  und der Tiefe  $z$  abhängigen horizontalen Verschiebungen  $u$ . Für harmonische Schwingungen mit der Frequenz  $\Omega$  wird Gleichung ( F.1 ) in den Frequenzbereich überführt.

$$-\Omega^2 V(z) - \frac{G}{S} \frac{d^2}{dz^2} V(z) = 0 \quad (\text{F.2})$$

mit der komplexen Verschiebung  $V$  und dem komplexen Schubmodul  $G$ . Man betrachte die Schicht  $j$  des gesamten Schichtenmodells. Mit dem Ansatz

$$V_j(z) = A_j e^{i\kappa_j \bar{z}} + B_j e^{-i\kappa_j \bar{z}} \quad (\text{F.3})$$

$$\kappa_j = \Omega \sqrt{\frac{\rho_j}{G_j}}$$

und den Randbedingungen an den Schichtgrenzen  $\bar{z} = 0$  ( Index  $\sigma$  )

und  $\bar{z} = h_j$  ( Index  $u$  )

$$V_{j,\sigma} = A_j + B_j \quad (\text{F.4a})$$

$$\tau_{j,\sigma} = i\kappa_j G_j (A_j - B_j) \quad (\text{F.4b})$$

$$V_{j,u} = A_j e^{i\kappa_j h_j} + B_j e^{-i\kappa_j h_j} \quad (\text{F.4c})$$

$$\tau_{j,u} = i\kappa_j G_j (A_j e^{i\kappa_j h_j} - B_j e^{-i\kappa_j h_j}) \quad (\text{F.4d})$$

ergeben sich die Koeffizienten

$$A_j = \frac{1}{2} \left( V_{j,\sigma} + \frac{1}{i\kappa_j G_j} \tau_{j,\sigma} \right) \quad (\text{F.5a})$$

$$B_j = \frac{1}{2} \left( V_{j,\sigma} - \frac{1}{i\kappa_j G_j} \tau_{j,\sigma} \right) \quad (\text{F.5b})$$

Außerdem gilt

$$\cos(k_j \bar{z}) = \frac{1}{2} (e^{ik_j \bar{z}} + e^{-ik_j \bar{z}}) \quad (\text{F.6a})$$

$$i \sin(k_j \bar{z}) = \frac{1}{2} (e^{ik_j \bar{z}} - e^{-ik_j \bar{z}}) \quad (\text{F.6b})$$

Man erhält damit aus Gleichung ( F.4 )

$$\begin{bmatrix} V_{j,u} \\ \tau_{j,u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_j h_j) & \frac{1}{k_j G_j} \sin(k_j h_j) \\ -k_j G_j \sin(k_j h_j) & \cos(k_j h_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{j,\sigma} \\ \tau_{j,\sigma} \end{bmatrix} \quad (\text{F.7a})$$

oder

$$\{z_{j,u}\} = [H_j] \{z_{j,\sigma}\} \quad (\text{F.7b})$$

Gleichung ( F.7 ) beschreibt den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Spannungen der unteren Schichtgrenze mit denen an der oberen Schichtgrenze.

Die Übertragungsfunktion des gesamten Schichtenpaketes erhält man, indem man die Übertragungsmatrizen der einzelnen Schichten aufmultipliziert.

$$\{z_{m,\sigma}\} = \{z_{m-1,u}\} = \prod_{j=1}^{m-1} [H_j] \{z_{1,\sigma}\} \quad (\text{F.8})$$

Die Randbedingung an der freien Oberfläche ist

$$\tau_{1,\sigma} = 0 \quad (\text{F.9a})$$

An der Oberfläche des elastischen Halbraumes gilt

$$V_{m-1,u} = A_m + B_m \quad (\text{F.9b})$$

$$\tau_{m-1,u} = i k_m G_m (A_m - B_m) \quad (\text{F.9c})$$

$A_m$  ist die Amplitude der einfallenden Welle,  $B_m$  die der reflektierten Welle. Normiert man die einfallende Welle als  $A_m = 1$ ,

so erhält man als Randbedingung

$$V_{m-1,u} = 2 - \frac{1}{i K_m G_m} \tau_{m-1,u} \quad (\text{ F.9d })$$

Setzt man diese Randbedingungen in Gleichung ( F.8 ) ein, so kann man alle Zustandsgrößen  $\{Z_j\}$  leicht bestimmen.

Man kann auch einen mit Kapitel 2.3 konsistenten Ansatz verwenden, indem man die Kontinuumstheorie durch eine Näherung im Sinne der Finite-Element-Methode ersetzt. Mit einem linearen Verschiebungsansatz erhält man statt Gleichung ( F.7a)

$$\begin{bmatrix} V_{j,u} \\ \tau_{j,u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_j}{b_j} & \frac{1}{b_j} \\ \frac{a_j^2 - b_j^2}{b_j} & \frac{a_j}{b_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{j,\sigma} \\ \tau_{j,\sigma} \end{bmatrix} \quad (\text{ F.10 })$$

mit

$$a_j = \frac{G_j}{h_j} - \frac{1}{3} \Omega^2 g_j h_j \quad (\text{ F.11a })$$

$$b_j = \frac{G_j}{h_j} + \frac{1}{6} \Omega^2 g_j h_j \quad (\text{ F.11b })$$

Für eine homogene Schicht auf elastischem Halbraum werden nun Übertragungsfunktionen der Horizontalverschiebung (bzw. Horizontalbeschleunigung) berechnet. Die frequenzabhängige Übertragungsfunktion ist definiert als

$$H_{01}(\Omega) = \frac{V_1(\Omega)}{V_0(\Omega)} \quad (\text{ F.12 })$$

mit  $V_1$  als Verschiebung am Punkt  $\textcircled{1}$   
und  $V_0$  als Verschiebung am Punkt  $\textcircled{0}$ .

Bild F2 zeigt das verwendete Modell. Für verschiedene Verhältnisse der Schubmoduli ( $\alpha = \frac{G_2}{G_1}$ ) sind Betrag und Phase der Übertragungsfunktion bei einer hysteretischen Bodendämpfung von 5 % im Bild F3 dargestellt. Die bezogene Frequenz ist definiert als

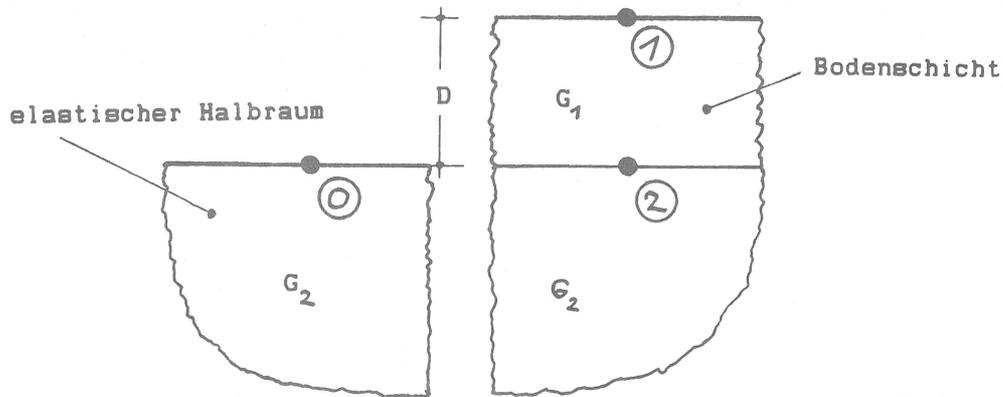


Bild F2 : Schicht auf elastischem Halbraum

$$\bar{f} = f \frac{4D}{V_S} = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{4D}{V_S}$$

mit  $V_S$  als Scherwellengeschwindigkeit in der Bodenschicht. Die Spitzen der Übertragungsfunktion markieren die Eigenfrequenzen der horizontalen Schwingung.

$$\frac{\Omega_j}{2\pi} = f_j = \frac{V_S}{4D} (2j - 1) \quad ( F.13 )$$

Mit  $j = 1, 2, 3 \dots$

Bild F4 zeigt den Betrag der Übertragungsfunktion bei der ersten Eigenfrequenz in Abhängigkeit vom Dämpfungsmaß.

Die Übertragungsfunktion  $H_{02}$  ist definiert als

$$H_{02}(\Omega) = \frac{V_2(\Omega)}{V_0(\Omega)}$$

mit  $V_2$  als Verschiebung am Punkt ②. Bild F5 zeigt Betrag und Phase von  $H_{02}$ .

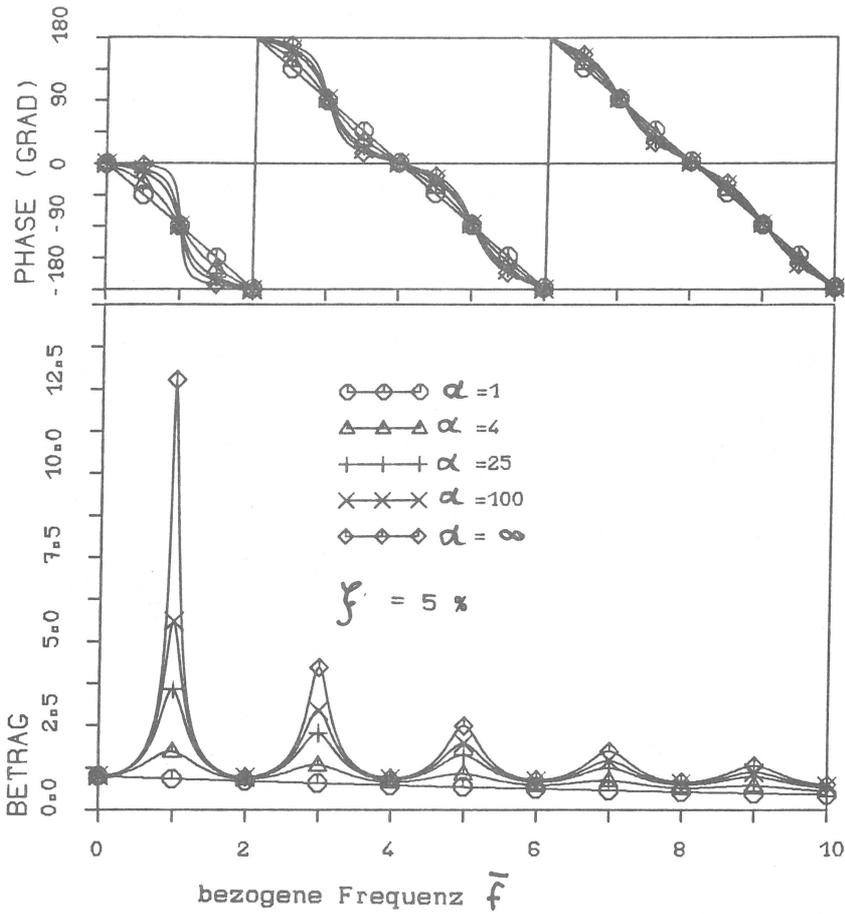


Bild F3 : Übertragungsfunktion  $H_{01}$

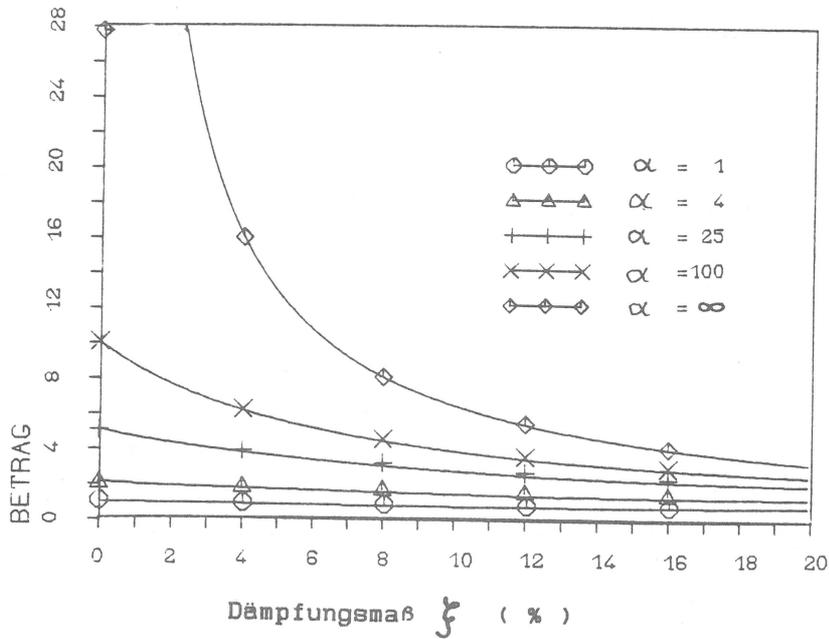
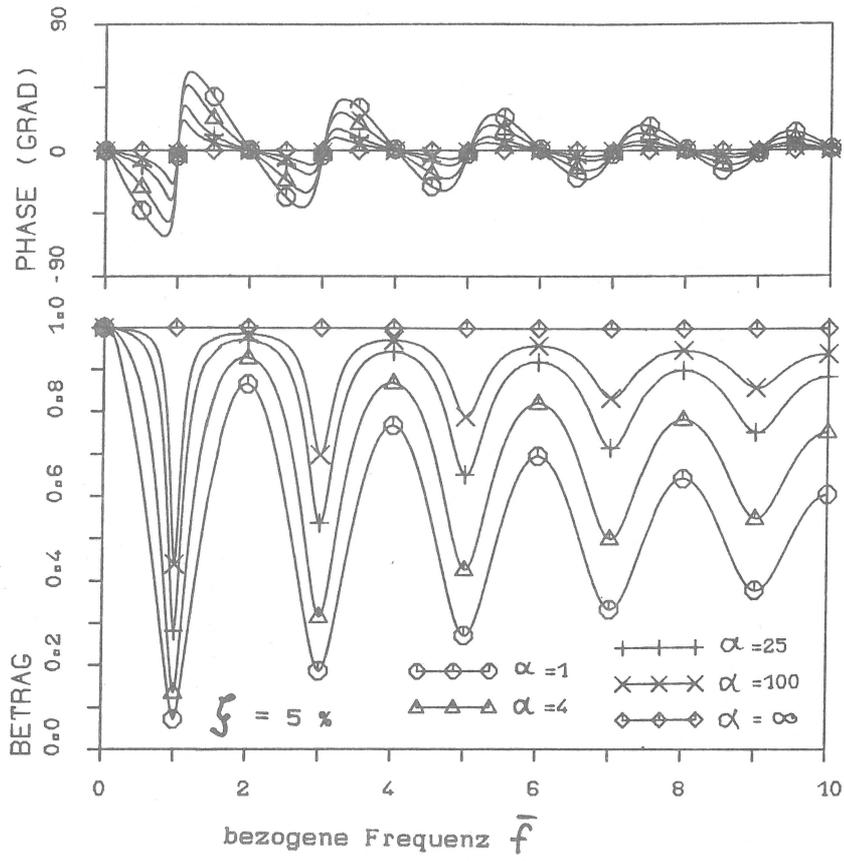


Bild F4 : Betrag der Übertragungsfunktion  $H_{01}$  bei  $\bar{f} = 1.0$

Bild F5 : Übertragungsfunktion  $H_{02}$

## Lebenslauf

Geburtsdatum : 24. Februar 1954

Geburtsort : Recklinghausen

Eltern : Josef Hartmann und  
Maria Hartmann, geb. Schöttler-Geesmann

Schulbildung : 1960 - 1964 Volksschule Recklinghausen-Ost  
1964 - 1972 Gymnasium Petrinum, Recklinghausen  
1972 Reifezeugnis

Wehrdienst : 1973 - 1974

Studium : 1972 - 1973 Abt. für konstruktiven Ingenieurbau  
: 1974 - 1979 der Ruhruniversität Bochum  
1979 Diplomzeugnis

Beruf : seit 1979 Mitarbeiter der Hochtief AG,  
Frankfurt/Main

