Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau
der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von o. Prof. Dr.-Ing. H. Breth

Heft 23

# Beitrag zum Spannungs-Verformungsverhalten der Böden

## Zur Frage des elastoplastischen Verformungsverhaltens von Sand

Dr.-Ing. M. Ulvi Arslan

## Zur Lösung von Grundbauaufgaben mit Hilfe von elastoplastischen Stoffgesetzen vorgeführt am Einzelfundament und an der verankerten Wand

Dr.-Ing. Rainer Wanninger

3

August 1980

Urheberrechtlich geschützt / In Copyright: https://rightsstatements.org/page/InC/1.0/

44131-23-3
Fachgebiet
Bodenmechanik und Grundbau
Prof. Dr.-Ing. H. Breth
Technische Hochschule Darmstadt

Reproduktion und fototechnischer Druck · STUDENTENWERK DARMSTADT · Abt. Druck und Kopie

Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau

der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von o. Prof. Dr.-Ing. H. Breth

Heft 23

# Beitrag zum Spannungs-Verformungsverhalten der Böden

## Zur Frage des elastoplastischen Verformungsverhaltens von Sand

Dr.-Ing. M. Ulvi Arslan

## Zur Lösung von Grundbauaufgaben mit Hilfe von elastoplastischen Stoffgesetzen vorgeführt am Einzelfundament und an der verankerten Wand

Dr.-Ing. Rainer Wanninger

August 1980

# V o r w o r t

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft hat im Jahre 1971 einen Schwerpunkt "Bodenmechanik" gebildet, der sich gezielt mit dem Spannungs-Verformungsverhalten der Böden befassen sollte. Eine breit angelegte Forschung in dieser Richtung wurde als notwendig erkannt, nachdem sich die konventionellen Berechnungsmethoden für die Behandlung von Grundbauaufgaben als unzureichend erwiesen haben. Die Zeit für verbesserte Verfahren war gekommen, nachdem mit dem Großrechner die Voraussetzung gegeben war, auch höher entwickelte Stoffgesetze in die Berechnung einzuführen.

Das Forschungsvorhaben wurde von uns auf vier Wegen in Angriff genommen:

1. Feldmessungen in Frankfurt/Main über das Verformungsverhalten des dortigen überkonsolidierten tertiären Tons beim Aushub tiefer Baugruben, unter Hochhäusern und beim Vortrieb oberflächennaher Tunnel.

2. Modellversuche über das Verformungsverhalten von Sand beim Aushub vor einer ausgesteiften und einer verankerten Wand, sowie unter einem Fundament.

3. Triaxialversuche mit ungestörten Tonproben aus Frankfurt/M. und mit dem für die Modellversuche ausgesuchten Sand.

4. Entwicklung eines FE-Programmes, mit dem die Bauvorgänge und Spannungswege mit den bei den Versuchen ermittelten Stoffparametern bei den jeweils vorgegebenen Rand- und Verformungsbedingungen simuliert werden können.

Nachdem unsere Arbeit zu einem vorläufigen Abschluß gekommen ist, lassen sich die erzielten Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

Frankfurter Ton:

Die vorwiegend volumenkonstante Verformung des überkonsolidierten Tons läßt sich in guter Annäherung mit einem nichtlinear elastischen Stoffgesetz beschreiben, das sich auf die Approximation und hyperbolische Formulierung der bei Triaxialversuchen erhaltenen Druck-Setzungslinien beschränkt, ohne auf die mechanischen Vorgänge im Boden einzugehen. Letzteres hätte bei dem gerissenen Ton keinen Vorteil gebracht. Mit dieser erstmals von Duncan und Chang vorgeführten Analyse wurde eine für die praktischen Bedürfnisse befriedigende Übereinstimmung von Rechnung und Feldmessungen erzielt. Ebenso ließen sich mit diesem Gesetz die wesentlichen Einflüsse auf die Spannungen und Dehnungen im Bauwerk und Baugrund in gezielten Parameterstudien aufzeigen, über die im Einzelfall berichtet wurde und in einem Mitteilungsheft über die Verformung und Beanspruchung des Tons beim Tunnelvortrieb noch berichtet werden wird.

Sand:

Auf den Sand läßt sich das nichtlinear elastische Gesetz nur bei den konventionellen Triaxialversuchen ähnlichen Spannungswegen mit stetig zunehmender deviatorischer Ausnutzung, wie sie etwa bei der Dammschüttung auftreten, anwenden. Andernfalls versagt das Gesetz. Es ist nicht in der Lage, das für den Sand typische dilatante Verhalten, die Verformung infolge Rotation der Hauptspannungsrichtungen sowie den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf sein Verformungs- und Bruchverhalten zu erfassen. Zunehmend setzte sich die Erkenntnis durch, daß diese Eigenschaften und Einflüsse besser mit einem elastoplastischen Stoffgesetz beschrieben werden können, wenn wie beim Sand von Beginn der Belastung an und bei jedem Spannungswechsel irreversible plastische Dehnungen auftreten.

Daraufhin wurden die bisher veröffentlichen elastoplastischen Stoffgesetze auf ihre Anwendbarkeit auf den Sand überprüft.

Hierzu standen eigene Verformungsversuche zur Verfügung, bei denen die Verformung des Sandes bei verschiedenen Spannungswegen mit großer Genauigkeit gemessen worden sind. Aus dieser Untersuchung entwickelte sich das von ARSLAN erarbeitete "double hardening model", das auf einem elastoplastischen verfestigenden Stoffmodell aufbaut. Nachdem dieses Gesetz eine gute Übereinstimmung von Versuch und Rechnung auch bei sehr unterschiedlichen Spannungswegen erbrachte, wurde es von ARSLAN so aufbereitet, daß für jeden Spannungswechsel der Anteil der elastischen Dehnung und der Anteil der dilatanten oder kontraktanten plastischen Dehnung an der insgesamt durch den Spannungswechsel verursachten Dehnung angegeben werden kann.

Nach den guten Erfahrungen mit dem Stoffgesetz wurde es von WANNINGER in ein Rechenprogramm eingearbeitet und sein Aussagewert am Vergleich von Rechnungen mit Modellversuchen und seine Anwendbarkeit an einem Beispiel aus dem Grundbau geprüft. Um die komplizierten Spannungs- und Verformungsvorgänge im Boden während des Bauablaufes nachvollziehen und die mit jeder Spannungsänderung auftretende Dilatanz des Sandes in die Berechnung einbeziehen zu können, hat WANNINGER Entscheidungsgrößen eingeführt, die in jeder Bauphase und in jedem Element des Kontinuums über die aufgetretene Verformung, Volumenänderung und die bisher ausgenutzte Scherfestigkeit Auskunft und zu erkennen geben, ob der Sand in dem betrachteten Element sich in der Phase der Erstbelastung, der Ent- bzw. Wiederbelastung oder in einer Übergangsphase befindet. Hierbei mußte berücksichtigt werden, daß nach den Untersuchungen von ARSLAN der dilatante Sand auf gleichzeitige sphärische und deviatorische Belastung in gegenseitiger Wechselwirkung ungleich elastisch und plastisch reagiert.

Die Überprüfung des von ARSLAN entwickelten Stoffgesetztes an unseren Modellversuchen erbrachte den Nachweis, daß mit dem elastoplastischen Stoffgesetz die Verformung des Sandes weit besser berechnet werden kann, als dies bisher möglich war. Das Gesetz ermöglicht somit auch im Sand Parameterstudien über

die Wirkung von Konstruktion, Ausführung und Randbedingungen. Die Möglichkeiten, die das neue Gesetz bietet, werden an der mehrfach verankerten Wand und an einem Einzelfundament vorgeführt.

Das Gesetz gilt zunächst nur für dichtgelagerten Sand und für Spannungen, wie sie normalerweise bei Großausführungen auftreten. Bei extrem kleinen Spannungen scheint das Einzelkorn soviel Bewegungsfreiheit zu haben, daß hier die angestellte Kontinuumsbetrachtung nur mehr eingeschränkt gültig sein dürfte. Im locker gelagerten Sand ist auch die Anisotropie von entscheidender Bedeutung.

Es bleibt festzuhalten, daß ich auf Stoffgesetze Wert gelegt habe, die aus üblichen Triaxialversuchen abgeleitet, sich dennoch als hinreichend genau erweisen und damit Aussicht haben, in der Praxis Anwendung zu finden. Eine ergänzende Studie, inwieweit das hier vorgestellte Stoffgesetz auch für Schluff gültig ist, soll folgen.

Abschließend möchte ich nicht versäumen, allen Beteiligten, die an der Durchführung der Untersuchungen, dem Bau der Versuchs- und Meßgeräte beteiligt waren und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die uns zuteil gewordene finanzielle Unterstützung herzlich zu danken.

H. Breth

Darmstadt, im Sommer 1980

# ZUR FRAGE DES ELASTOPLASTISCHEN VERFORMUNGSVERHALTENS VON SAND

Dr.-Ing.M.Ulvi Arslan

Die vorliegende Arbeit entstand als Dissertation während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Die Untersuchungen wurden durch den Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Breth, initiiert, dem ich für Anregungen und Förderung der Arbeit zu großem Dank verpflichtet bin.

Das Korreferat wurde von Herrn Prof. Dr.-Ing. T. Seeger von der Technischen Hochschule Darmstadt übernommen, dem ich für die kritische Durchsicht und die zahlreichen Ratschläge sehr verbunden bin.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Uhlmann von der Technischen Hochschule Darmstadt für wertvolle Hinweise.

Die für die Durchführung der Versuche und für die Erstellung der Diagramme und Druckvorlagen notwendigen Arbeiten wurden in der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt ausgeführt. Für die freundliche Zusammenarbeit und Unterstützung danke ich allen Mitarbeitern. Ebenso bedanke ich mich bei allen Kollegen, besonders bei Herrn R. Wanninger, für die Unterstützung durch zahlreiche Gespräche und das rege Interesse.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft hat die Untersuchungen mit einer Beihilfe unterstützt.

Darmstadt, im August 1980 M. Ulvi Arslan

Inhaltsverzeichnis


| | | Seite |
|---|---|---|
| Bezeichnungen | | III |
| 1. | Einleitung und Ziel der Arbeit | 1 |
| 2. | Theoretische Grundlagen | 6 |
| 2.1 | Grundlagen der Elastizitätstheorie | 6 |
| 2.1.1 | Einleitung | 6 |
| 2.1.2 | Verallgemeinerte Hooke'sche Gesetze | 7 |
| 2.1.3 | Isotroper Fall | 10 |
| 2.2 | Grundlagen der klassischen Plastizitäts-theorie | 11 |
| 2.2.1 | Einleitung | 11 |
| 2.2.2 | Fließfläche | 13 |
| 2.2.2.1 | Fließbedingungen von Tresca und v. Mises | 17 |
| 2.2.3 | Fließregel | 19 |
| 2.2.4 | Work-hardening-Konzept | 22 |
| 3. | Verformungsverhalten kohäsionsloser Böden | 24 |
| 3.1 | Einleitung | 24 |
| 3.2 | Grundversuche | 25 |
| 3.2.1 | Triaxialversuch | 25 |
| 3.2.2 | Ödometerversuch | 26 |
| 3.2.3 | Direkter Scherversuch | 27 |
| 3.2.4 | Versuchsgeräte für Forschungszwecke | 28 |
| 3.3 | Eigene Versuchsanlage | 30 |
| 3.3.1 | Triaxialversuchsapparatur | 30 |
| 3.3.2 | Versuchssand | 35 |
| 3.3.3 | Ausgangsspannungszustand | 37 |
| 3.4 | Auswertung und Analyse der Versuchser-gebnisse | 38 |
| 3.4.1 | Allgemeines | 38 |
| 3.4.2 | Verformungsverhalten des Sandes bei ver-schiedenen Belastungswegen im Triaxial-gerät | 40 |
| 3.4.2.1 | Über den inneren Verformungsmechanismus | 40 |
| 3.4.2.2 | Verformungsverhalten unter hydrostati-scher Belastung und Entlastung | 42 |

| | | Seite |
|---|---|---|
| 3.4.2.3 | Verformungsverhalten im Triaxial-kompressionsversuch | 45 |
| 3.4.2.4 | Das Verhalten bei Entlastungs- und Wiederbelastungszyklen im Triaxial-versuch | 49 |
| 3.4.2.5 | Einfluß des Spannungsweges auf das Verformungsverhalten des Sandes | 61 |
| 3.4.3 | Einfluß der Drehung von Spannungshaupt-achsen auf das Verformungsverhalten | 72 |
| 3.4.4 | Einfluß der mittleren Hauptspannung ($\sigma_2$) auf das Verformungs- und Bruchverhalten; Bruchkriterien | 78 |
| 3.4.5 | Zusammenfassung | 93 |
| 4. | Das elastoplastische Stoffgesetz | 96 |
| 4.1 | Elastische Dehnungsanteile | 96 |
| 4.2 | Plastische Dehnungen | 97 |
| 4.2.1 | Kontraktant-plastische Dehnungen ($\Delta\varepsilon_{ij}^{p2}$) | 101 |
| 4.2.2 | Dilatant-plastische Dehnungen ($\Delta\varepsilon_{ij}^{p1}$) | 104 |
| 4.3 | Zusammenstellung der Stoffkonstanten und analytische Approximation der Versuchs-ergebnisse | 116 |
| 4.4 | Herleitung der Stoffmatrix für numeri-sche Verfahren | 118 |
| 5. | Zusammenfassung | 136 |
| 6. | Literaturverzeichnis | 140 |
| Anhang A | | 146 |
| Anhang B | | 152 |

Bezeichnungen

Symbole, die nur in einem Abschnitt verwendet werden und dort erklärt sind, werden in diesem Verzeichnis nur teilweise aufgeführt.

| | |
|---|---|
| A - | Konstante für das plastische Potential ($g_1$) |
| a - | reziproke Anfangssteigung der Kurven für plastische Arbeit [$(f_1-f_{1T})$; $W_{p1}$] |
| $B_1$,$B_2$ - | Parameter des Bruchkriteriums "Erweiterte Mohr-Coulomb" nach Bishop $B_1 = \sin \varnothing'$, $B_2 = 0.425 - 0.605.n$ |
| b - | Parameter nach Bishop für die mittlere Hauptspannung ($\sigma_2$) |
| D - | Lagerungsdichte |
| $d_1$,$d_2$ - | Konstanten des Ansatzes für die plastische Arbeit ($W_{p1}$) |
| E - | Elastizitätsmodul (Young-modulus) |
| e - | Porenzahl |
| F - | Funktional |
| f - | Funktion der Fließfläche |
| $f_{1T}$ - | Schwellwert des Fließkriteriums ($f_1$) beim hydrostatischen Belastungszustand |
| G - | Schubmodul (shear-modulus) |
| g - | Funktion des plastischen Potentials |
| h - | Verfestigungsparameter |
| $I_D$ - | bezogene Lagerungsdichte |
| $I_1$,$I_2$,$I_3$ - | Invarianten des Spannungstensors |
| $J_1$,$J_2$,$J_3$ - | Invarianten des Spannungsdeviators |
| K - | Parameter des Ansatzes für plastische Arbeit ($W_{p1}$) |

| | |
|---|---|
| $K_{el}$ - | Parameter des Ansatzes für Elastizitätsmodul |
| $K_q$ - | Parameter des Ansatzes für Querdehnungszahl |
| $k_1$ - | Parameter der Bruchbedingung nach Lade |
| $k_2$ - | Parameter der Funktion des plastischen Potentials ($g_1$) |
| L,M - | Parameter des hyperbolischen Ansatzes für plastische Arbeit ($W_{p2}$) |
| n - | Exponent im Ansatz für plastische Arbeit ($W_{p1}$) |
| $n_{el}$ - | Exponent im Ansatz für Elastizitätsmodul |
| $n_q$ - | Exponent im Ansatz für Querdehnungszahl |
| $P_a$ - | Atmosphärischer Druck |
| $R_f$ - | Parameter im Ansatz für plastische Arbeit ($W_{p1}$) |
| $W_p$ - | Plastische Arbeit |
| $\alpha,\beta,\gamma$ - | Querisotropie-Faktoren |
| $\alpha_\mu$ - | Winkel in der Deviatorebene des Hauptspannungsraums |
| $\gamma$ - | Schubverzerrung |
| $\Delta\lambda, d\lambda$ - | Proportionalitätsfaktor für plastische Dehnungsinkremente |
| $\delta_{ij}$ - | Kronecker Symbol |
| $\varepsilon_{ij}$ - | Komponente des Verzerrungstensors |
| $\varepsilon_i$ - | Hauptkomponente des Verzerrungstensors |
| $\lambda$ - | Hauptspannungsverhältnis |
| $\nu$ - | Querdehnungszahl |
| $\sigma_{ij}$ - | Komponente des Spannungstensors |
| $\sigma_i$ - | Hauptkomponente des Spannungstensors |

$\tau$ - Schubspannung

$\emptyset, \phi, \varphi$ Reibungswinkel

Matrizen und Vektoren:

$\{\varepsilon\}$ - Vektor der Verformungskomponenten

$\{\Delta\varepsilon\}$, $\{d\varepsilon\}$, $\{\dot{\varepsilon}\}$ - Vektor der Verzerrungsinkremente

$\{\sigma\}$ - Vektor der Spannungskomponenten

$\{\Delta\sigma\}$, $\{d\sigma\}$, $\{\dot{\sigma}\}$ - Vektor der Spannungsinkremente

$[a]$ - Stoffmatrix des Hooke'schen Gesetzes

$[D]$ - Stoffmatrix

Kopfzeiger:

e - elastisch

p - plastisch

1 - Kennzeichnung der Größen, die mit dem Konus (1. Fließfläche) zusammenhängen

2 - Kennzeichnung der Größen, die mit der Kappe (2. Fließfläche) zusammenhängen

Fußzeiger:

f oder Br - Bruchwert (Failure)

v - volumetrisch

i,j = 1,2,3 - Indizierung der Hauptkomponenten

i,j = x,y,z - Indizierung der Komponenten in kartesischen Koordinaten

oct - Indizierung der Oktaeder-Komponenten

e - elastisch

p - plastisch

| | |
|---|---|
| 1 - | Kennzeichnung der Größen, die mit dem Konus (1. Fließfläche) zusammenhängen |
| 2 - | Kennzeichnung der Größen, die mit der Kappe (2. Fließfläche) zusammenhängen |
| T - | transponiert |

## 1. Einleitung und Ziel der Arbeit

Das Thema dieser Arbeit sind die Spannungs-Dehnungsbeziehungen kohäsionsloser Böden unter dränierten Bedingungen, und die Arbeit reiht sich ein in ein Forschungsprogramm, das seit einigen Jahren am Institut für Bodenmechanik und Grundbau an der TH Darmstadt durchgeführt wird.

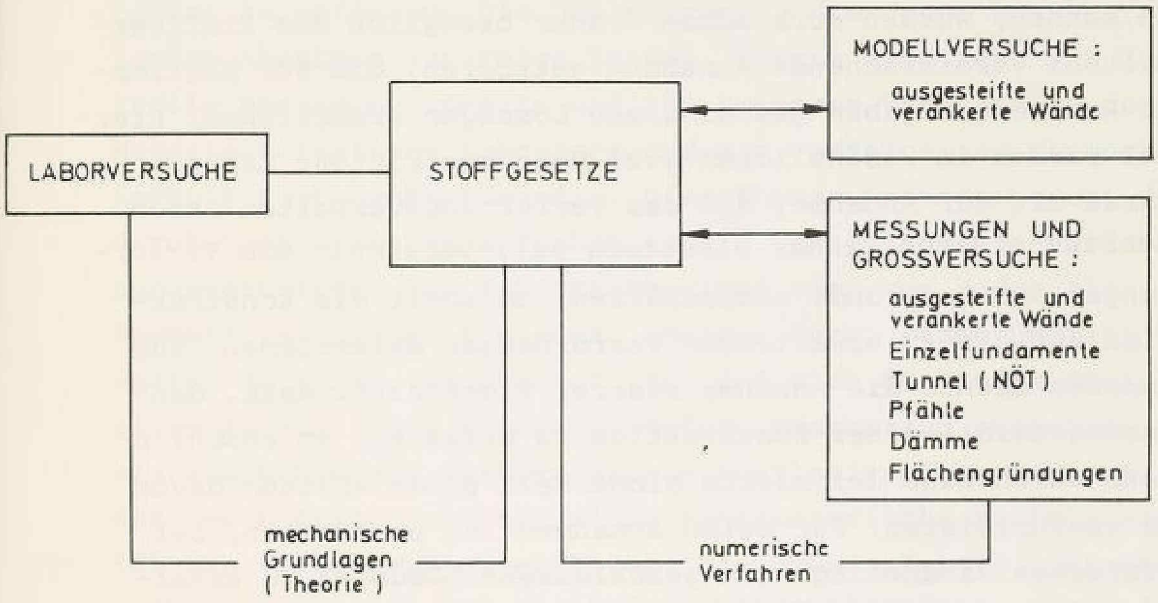



Bild 1.1

Die Untersuchungen konzentrierten sich auf praxisrelevante Spannungsbereiche, wobei der Einfluß des Spannungsweges auf das Verformungsverhalten zu erfassen versucht wurde.

Das komplexe Verformungsverhalten der Böden bringt es mit sich, daß die in der Bodenmechanik benutzten vereinfachenden Grundhypothesen über das Materialverhalten mehr als in den anderen Ingenieurwissenschaften von der Wirklichkeit

abweichen. Für die meisten Grundbauaufgaben existieren keine geschlossenen Lösungen. Den in einigen speziellen Fällen existierenden Lösungsmöglichkeiten liegen stark vereinfachende Annahmen zugrunde, so daß es sehr schwierig ist, bei der Übertragung auf Problemstellungen mit geänderten Voraussetzungen über die Tragweite der getroffenen Annahmen und die Zuverlässigkeit solcher Berechnungsverfahren überhaupt Aussagen zu machen.

Um die Brauchbarkeit von Grundbaukonstruktionen beurteilen zu können, wurden auch schon früher bezüglich des Stoffverhaltens vereinfachende Annahmen getroffen, die für bestimmte Randwertaufgaben geschlossene Lösungen ermöglichen. Hierbei wurden im wesentlichen zwei Wege bestritten: Einmal wurde mit der Annahme, daß das Verformungsverhalten unter Gebrauchslasten linear elastisch sei, versucht, die Verformungen des Baugrunds abzuschätzen, um somit die Konstruktion auf die zu erwartenden Verformungen abzustimmen. Zum anderen diente die Annahme starrer Plastizität dazu, den Versagensfall einer Konstruktion zu erfassen, um anschließend durch eine definierte Sicherheit einen Abstand davon zu gewährleisten. Für beide Annahmen ist es möglich, bei einfachen Randbedingungen geschlossene Lösungen zu erhalten.

Wie schon die bodenmechanischen Routineversuche zeigen, ist das Spannungs-Dehnungsverhalten der Böden aber hochgradig nichtlinear. Der Boden verformt sich in-situ unter den äußeren Lasten von einem Anfangs-Spannungs-Verformungszustand kontinuierlich bis zum Bruch und darüber hinaus. Obwohl Deformation und Bruch so zwei Aspekte von demselben Prozeß sind, werden sie mit den obigen Annahmen im allgemeinen als getrennte Probleme betrachtet und viele Analysen beziehen sich auf einen Aspekt und vernachlässigen den anderen. Somit verletzen beide Annahmen mechanische Anforderungen. Die Annahme ideal-elastischen Verhaltens ist nur in engen Bereichen streng zulässig. Außerdem verletzt sie die Grenzbedingung des Materialverhaltens, nämlich die begrenzte Festigkeit. Die Annahme starr-plastischen Verhal-

tens berücksichtigt die vorhergehenden Verformungen nicht und verletzt die Verträglichkeitsbedingung. Wegen dieser unzutreffenden Annahmen muß das Ergebnis nicht unsicher sein, ist aber sicherlich unzutreffend. Die Methode der Finiten Elemente brachte hier erstmals einen Fortschritt. Sie erlaubt die gleichzeitige Berücksichtigung beider Aspekte des Materialverhaltens. Somit hatte man die Möglichkeit, durch ein bilineares Stoffgesetz das Materialverhalten in zwar sehr modifizierter Form, aber doch einen Schritt besser zu erfassen. Die Unsicherheit, die diese unzutreffenden Annahmen zur Folge hatten, führte dazu, daß zur Kontrolle Messungen in-situ und zum besseren Verständnis des Materialverhaltens Laborversuche mit verfeinerter Versuchstechnik durchgeführt wurden. Die höheren Anforderungen, die durch komplexere Bauaufgaben an die Vorhersage des Verformungsverhaltens von Bauwerk-Baugrund oder vom Boden als Baumaterial gestellt wurden, zwangen dazu, einen Schritt weiter zu gehen. Da bekannt ist, daß sich der Boden von einem anfänglichen Spannungsverformungszustand ausgehend bis zum Bruch und darüber hinaus kontinuierlich verformt, war der nächste Schritt, diese kontinuierliche Nichtlinearität des Verhaltens zu erfassen. Die Schwierigkeit, das nichtlineare Verhalten des Stoffes zu berücksichtigen, wurde durch den Übergang auf kleine Lastschritte (Inkremente) überwunden. Somit hatte man eine variable elastische Steifigkeit, deren Variation z.B. in Form einer Hyperbel dargestellt werden kann (Duncan/Chang 1970). Diese ingenieurmäßige Erfassung der Nichtlinearität des Verhaltens wird inzwischen auf breiter Basis angewendet.

Ohne Zweifel ist der wesentliche Aspekt bei numerischen Verfahren, insbesondere bei der Methode der Finiten Elemente, das Modell zur Erfassung des Spannungs-Dehnungsverhaltens. Die Ergebnisse solcher Berechnungen werden durch nichts stärker beeinflußt, als durch das benutzte Stoffgesetz. Es muß problemspezifisch das Stoffgesetz gewählt werden, das im Hinblick auf die Aufgabenstellung die wesentlichen Aspekte des Materialverhaltens erfaßt. Die auch im

Institut für Bodenmechanik und Grundbau der TH Darmstadt vielfach benutzte hyperbolische Approximation erfaßt in diesem Sinne nach bisherigem Verständnis ausreichend das nichtlineare Verhalten bei nicht allzu großen Ausnutzungsgraden. Der wesentliche Vorteil dürfte jedoch sein, daß sich die erforderlichen Parameter aus konventionellen Triaxialversuchen ermitteln lassen. Andererseits aber haben Isotropie und inkrementelle lineare Elastizität als Voraussetzungen der hyperbolischen Approximation zur Folge, daß die Hauptachsen des Spannungsinkrementtensors und des Dehnungsinkrementtensors koaxial sind und Schubbeanspruchungen - entgegen der Erfahrung - nur Gestaltsänderungen hervorrufen, d.h. daß der deviatorische Anteil des Spannungstensors keine Volumendehnung hervorruft. Da während eines Inkrements die unbeschränkte Superponierbarkeit der Verformungsanteile gilt, hat der Spannungsweg - wiederum entgegen der Erfahrung (Breth, Chambosse, Arslan, 1978) - keinen Einfluß auf Größe und Richtung der Verformungen. Außerdem gilt für den Grenzzustand die Mohr-Coulomb'sche Bruchbedingung, die den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Bruchverhalten nicht berücksichtigt.

Aus diesen Gründen kann eine hyperbolische Approximation nicht gerecht werden:

a) Dem Verformungsverhalten in der Nähe des Bruchs und nach dem Bruch;
b) dem Verformungsverhalten bei Spannungswegen, bei denen die Hauptachsenrichtungen des Spannungstensors sich stark drehen;
c) dem dilatanten Verhalten des Bodens.

Die am hiesigen Institut durchgeführten Großmodellversuche (Breth, Arslan et.al. 1976), mit denen über den Verformungsablauf im Boden besserer Einblick gewonnen wurde, lassen auch erkennen, daß der Einfluß des nichtlinearen Verformungsverhaltens, der Einfluß des Spannungsweges, der mittleren Hauptspannung, der plastischen Verfestigung, der Hauptachsendrehungen und der Anisotropie auf das Verformungsverhalten berücksichtigt werden müssen, um für die

Praxis brauchbare Berechnungsverfahren entwickeln zu können, die dem tatsächlichen Verformungsverhalten der Böden gerecht werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die oben genannten Einflüsse an Versuchsreihen über das Verhalten von Bodenproben unter speziellen Beanspruchungen zu untersuchen und sie auf der Grundlage eines elastoplastischen Stoffgesetzes in ein mechanisches Modell einzuarbeiten, um auf das allgemeine Stoffverhalten unter beliebigen Beanspruchungen schließen zu können. Zum Abschluß wird die Brauchbarkeit dieses Modells an Triaxialversuchen überprüft.

## 2. Theoretische Grundlagen

Im folgenden werden einige theoretische Zusammenhänge in der Elastizitätstheorie und in der klassischen Plastizitätstheorie erläutert, sofern sie für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind.

### 2.1 Grundlagen der Elastizitätstheorie

#### 2.1.1 Einleitung

Wir bezeichnen einen Werkstoff als "elastisch", wenn sich mit der Belastung auch die Verformungen umkehren, wenn also in jedem Punkt des Körpers zwischen dem Spannungstensor (der den Spannungszustand an der untersuchten Stelle bestimmt) und dem Verzerrungstensor (der den Verzerrungszustand an der untersuchten Stelle bestimmt) eine umkehrbare, eindeutige Zuordnung besteht. Diese Zuordnung gibt uns die Möglichkeit, die sechs Komponenten ($\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$, $\gamma_{xy}$, $\gamma_{yz}$, $\gamma_{xz}$) des Verzerrungstensors durch die sechs Komponenten ($\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$, $\tau_{xy}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{xz}$) des Spannungstensors auszudrücken. Die hierzu erforderlichen sechs Gleichungen bilden das sogenannte "Elastizitätsgesetz". Ist das Elastizitätsgesetz gegeben, so genügt es, den Spannungstensor oder den Verzerrungstensor zu ermitteln, da sich der eine auf den anderen zurückführen läßt. Das einfachste praktisch fast ausschließlich verwendete Elastizitätsgesetz liegt vor, wenn die genannten sechs Gleichungen linear sind. Wir sagen dann, der Werkstoff gehorcht dem "Hooke'schen Formänderungsgesetz".

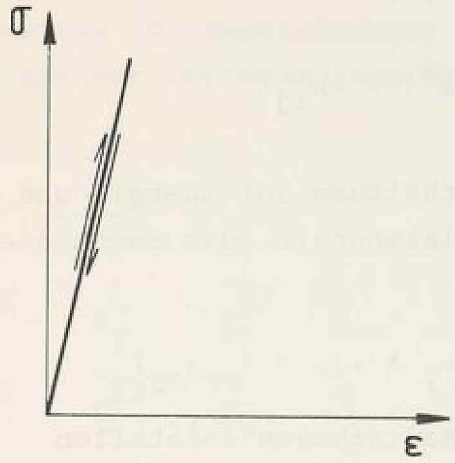



Bild 2.1: Das linearelastische Verhalten

### 2.1.2 Verallgemeinerte Hooke'sche Gesetze
(Lekhnitskii, 1963)

Das Modell für linearelastisches Verhalten setzt voraus, daß Verformungen lineare Funktionen der Spannungen sind.

$$\{\varepsilon_{ij}\} = [a^e]\{\sigma_{ij}\}.$$

In homogenen Körpern mit kartesischen Koordinaten (x,y,z) für den allgemeinsten Fall kann man diese sechs Gleichungen, die 36 Koeffizienten enthalten, anschreiben.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots \\
&\vdots \\
\gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + \dots + a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

$$[a^e] = [a_{ij}]$$

Mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie und der Berücksichtigung der Potentialenergie, die durch die Verformungen eingeführt wird,

$$\bar{V} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \dots + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)$$

lassen sich folgende Bedingungen aufstellen

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial\bar{V}}{\partial\sigma_x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial\bar{V}}{\partial\sigma_y},\ \dots,\ \gamma_{xy} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial\tau_{xy}} \\
&\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial\sigma_y} = \frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\sigma_x} \quad \dots \text{ usw.}
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

was zur Folge hat, daß die elastischen Konstanten sich auf 21 reduzieren.

$$a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13},\ \dots,\ a_{65} = a_{56} \qquad (2.3)$$

Wenn ein anisotroper Körper aufgrund der Materialzusammensetzung drei elastische Symmetrie-Ebenen hat, reduziert sich die Zahl der elastischen Konstanten auf 9

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\
a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}
\qquad (2.4)
$$

Bei Böden wird, da sie im allgemeinen vertikal sedimentiert und konsolidiert sind, eine Querisotropie mit der Vertikalachse der Rotationssymmetrie angenommen (d.h. alle horizontalen Richtungen haben gleiche elastische Eigenschaften, die sich von denen der vertikalen Richtung unterscheiden). Mit der Einführung der technischen Konstanten läßt sich die Steifigkeitsmatrix für querisotropes Material in der folgenden Form schreiben (Cross-Anisotropy, Transversale Isotropie).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yy}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{yy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

$$G_{yy} = \frac{E_y}{2(1 + \nu_{yy})}$$

$E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yy}, G_{xy}$ - 5 unabhängige Konstanten

$$\nu_{yx} = \frac{E_y}{E_x} \cdot \nu_{xy}$$

$E_x$ - Verformungsmodul (Elastizitätsmodul) in der vertikalen Richtung

$E_y$ - Elastizitätsmodul in der horizontalen Richtung

$\nu_{xy}$ - Poisson-Zahl in der vertikalen Ebene bei vertikaler Spannungswirkung

$\nu_{yx}$ - Poisson-Zahl in der vertikalen Ebene bei horizontaler Spannungswirkung

$\nu_{yy}$ - Poisson-Zahl in der horizontalen Ebene
$G_{yy}$ - Schubmodul in der horizontalen Ebene
$G_{xy}$ - Schubmodul in der vertikalen Ebene

### 2.1.3 Isotroper Fall

Ein elastisch-isotroper Körper ist gekennzeichnet dadurch, daß er in allen Richtungen dieselben elastischen Eigenschaften hat und alle Ebenen elastische Symmetrieebenen sind. Durch zwei unabhängige Konstanten $E$ und $\nu$ läßt sich die Elastizitätsmatrix aufbauen.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.6)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Die Annahmen, daß das Verformungsverhalten linear elastisch und isotrop ist und die Hooke'schen Gesetze gültig sind, haben folgende Konsequenzen:

1. Das Verformungsverhalten ist nicht spannungswegabhängig;
2. Superposition der Verformungen ist gültig;
3. Hauptspannungsrichtungen fallen mit den Hauptverformungsrichtungen immer zusammen;
4. Hydrostatische und deviatorische Komponenten des Spannungstensors sind getrennt zuzuordnen, d.h. die hydro-

statische (sphärische) Komponente des Spannungstensors bewirkt keine Gestaltsänderung, die deviatorische Komponente des Spannungstensors bewirkt keine Volumenänderung.

## 2.2 Grundlagen der klassischen Plastizitätstheorie

### 2.2.1 Einleitung

Der grundlegende Gedanke der Plastizitätstheorie geht auf St. Venant zurück. Nach St. Venant sollen die plastischen Verzerrungsinkremente koaxial zu den Spannungen sein. Die Grundlagen und Voraussetzungen der klassischen Plastizitätstheorie wurden von von Mises zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Metallen formuliert, die im folgenden zusammengefaßt werden sollen (siehe hierzu Reckling, Hill, Mendelson).

- Betrachtet werden Werkstoffe mit einem ideal elastischen - ideal plastischen und mit einem verfestigenden Werkstoffverhalten (Bild 2.2).

- Es werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

a) Die kinematischen Kräfte, also Beschleunigungs- und Verzögerungskräfte bleiben unberücksichtigt, indem angenommen wird, daß der Fließvorgang entsprechend langsam vor sich geht.
b) Es wird vorausgesetzt, daß das Stoffverhalten nicht von Zeit und Temperatur abhängt. Dementsprechend werden die Erscheinungen des Kriechens und der Relaxation nicht behandelt.
c) Der Werkstoff wird meist als isotropes Kontinuum angenommen.
d) Für den plastischen Anteil der Verformungen wird angenommen, daß die Zuwachsrichtungen der Hauptdehnungen dauernd mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen (St. Venant).

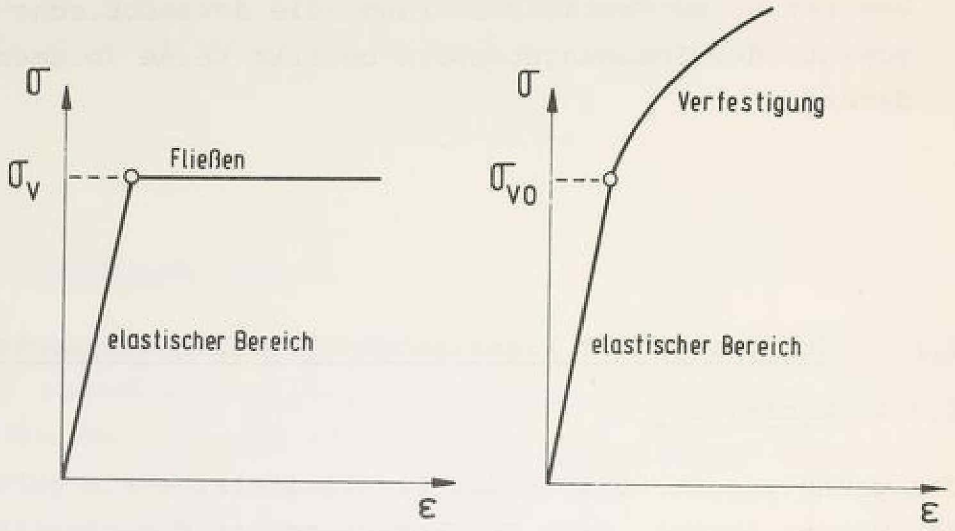



Bild 2.2: Das elastoplastische Verhalten

- Im Gegensatz zur Elastizitätslehre braucht man hier zwei Hypothesen, um das aus den Versuchen gewonnene Materialgesetz auf die mehrdimensionalen Spannungszustände übertragen zu können:

a) Die Fließbedingung (yield condition)
   Diese Bedingung stellt die Grenze der Elastizität dar, d.h. alle möglichen Spannungszustände, bei denen das Material anfängt zu fließen, d.h. sich plastisch zu verformen.

b) Ein Spannungs-Verformungsgesetz für den Fließ- bzw. Verfestigungsbereich, das durch eine Fließregel (flow-rule) und ein Verfestigungsgesetz (work-hardening-law) aufgestellt wird.

### 2.2.2 Fließfläche (yield-surface)

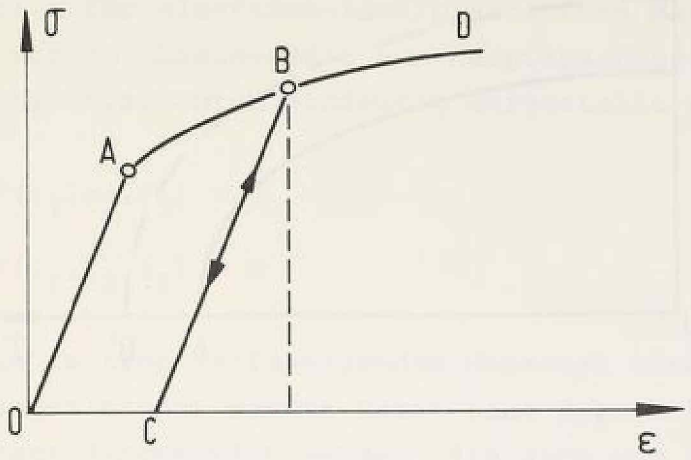



Bild 2.3: Reversible und irreversible Verformungsanteile

Bei einaxialer Belastung von Metallproben beobachtet man im allgemeinen das Verformungsverhalten wie im Bild 2.3. Mit beginnender Belastung verformt sich die Probe zunächst elastisch, so daß sie beim Entfernen der Belastung ihre Anfangsform wiedergewinnt. In dieser vereinfachten Darstellung tritt die erste plastische Verformung am Punkt A auf. Die dazugehörige Spannung wird Fließspannung ($\sigma_{vo}$) genannt. Wenn die Probe zum Punkt B belastet und zum Punkt C voll entlastet wird, beobachtet man, daß die Verformung am Punkt B sich aus einem reversiblen und einem irreversiblen Teil zusammensetzt. Bei anschließender Wiederbelastung wird Punkt B zum neuen Fließpunkt. Auf der Spannungsebene $(\sigma,\tau)$ lassen sich die Punkte A und B durch die Punkte A' und B' darstellen.

Die in der Literatur bekanntgewordenen Zug- und Torsionsversuche zeigen, daß die Fließfläche am Anfang und bei fortschreitender Plastizierung in der Mohrschen Spannungsebene eine elliptische Form hat. (Taylor, G.I. und Quinney, H., 1931).

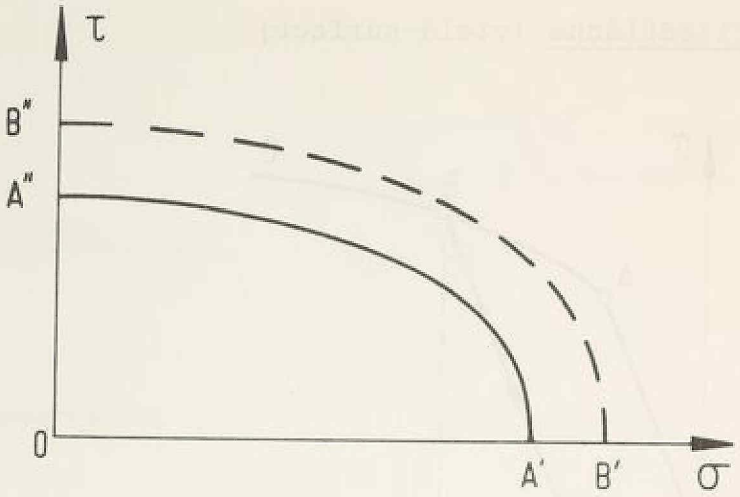



Bild 2.4: Verfestigung eines Materials

Diese geschlossene Kurve teilt die Spannungsebene in einen im Inneren liegenden elastischen und einen außerhalb liegenden elastoplastischen Bereich. Bei einem idealplastischen Werkstoff bleibt sie unverändert. Wird dagegen ein verfestigender Werkstoff in den elastoplastischen Bereich hinein belastet, so deformiert und verschiebt sie sich im allgemeinen in komplizierter Weise. In der klassischen Arbeit von Taylor und Quinney (1931) wird angenommen, daß die Anfangsfließfläche sich mit fortschreitender Verfestigung isotrop aufweitet. Neuere Arbeiten zeigen, daß die Deformation und Verschiebung der Fließfläche bei Verfestigung von vielen Faktoren abhängen, wobei Spannungsgeschichte und Werkstoff wohl die wichtigsten sind. Einfachheitshalber wird die isotrope Aufweitung der Fließfläche bei vielen mathematischen Formulierungen der heutigen Plastizitätstheorie zugrundegelegt. Zusammenfassend kann man folgendes festhalten: Die Spannungszustände, bei denen ein Material zu fließen beginnt, bilden im Spannungsraum eine Fließhyperfläche. Für elastisch-idealplastisches Material bedeutet dies eine konstante Grenzfläche im dreidimensionalen Hauptspannungsraum, auf der alle möglichen Fließgrenzspannungszustände liegen (Bruchfläche). Da der Werkstoff als isotrop und homogen angenommen wird,

kann diese Fläche nur von der Größe der Spannungen abhängen, nicht von deren Richtungen. Deswegen kann ein Fließkriterium für elastisch-idealplastisches Material wie folgt nur in Abhängigkeit von Hauptspannungen oder von Spannungsinvarianten eindeutig dargestellt werden.

$$F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 0$$
$$F(I_1,I_2,I_3) = 0 \qquad (2.7)$$

Für ein isotrop verfestigendes Material können die Fließspannungszustände wieder durch eine Hyperfläche im Spannungsraum dargestellt werden, die sich von der Fließgrenzfläche des elastisch-idealplastischen Materials dadurch unterscheidet, daß sie nicht konstant bleibt, sondern sich mit fortschreitender Verfestigung geometrisch ähnlich aufweitet und im Grenzzustand der Bruchfläche identisch wird. Das Fließkriterium für verfestigendes Material muß zusätzlich von dem vorhergehenden plastischen Deformationsprozeß abhängen.

Für eine solche Fläche gilt dann;

$$f(\sigma_{ij},\ \varepsilon^p_{ij},\ k_{ij}) = 0 \qquad (2.8)$$

$k_{ij}$ ist ein Tensor, der die Verfestigung des Materials beschreibt. Im Falle einer sogenannten kinematischen Verfestigung beschreibt dieser Tensor den Weg eines ausgezeichneten Punktes (P) der Fließhyperfläche (Bild 2.5).

Im Falle der isotropen Verfestigung degeneriert dieser Tensor zu einem Skalar (Bild 2.6).

Bei Metallen stellt man unter allseitig gleichem, sogenanntem hydrostatischen Druck eine geringe Abnahme des Volumens fest. Wie Versuche gezeigt haben, ist diese Abnahme mit sehr guter Näherung völlig reversibel, d.h. sie ist elastisch. Plastische Verformungen werden nur durch Schubspannungen hervorgerufen. Beim plastischen Fließen ändert die Probe ihr Volumen praktisch nicht.

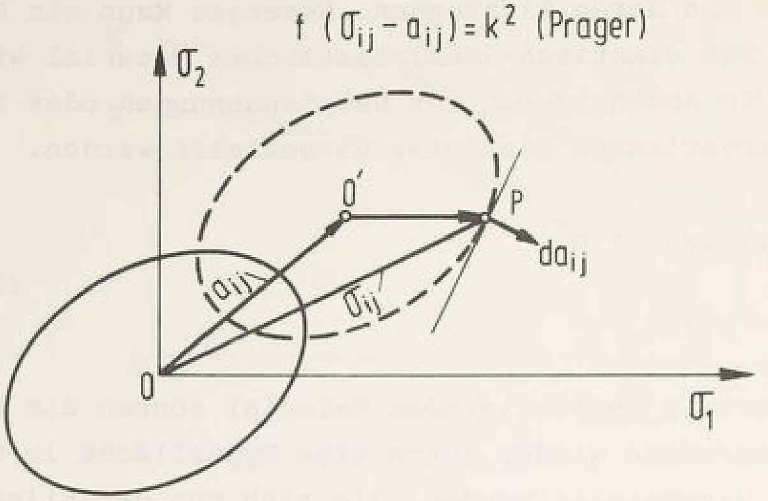



Bild 2.5: Kinematische Verfestigung

Das experimentell bestätigte Phänomen, nach dem ein hydrostatischer Spannungszustand das Fließen praktisch nicht beeinflußt, ist mathematisch erfaßbar durch die Forderung, daß das Fließen nur eine Funktion des Spannungsdeviators sein soll. Da bei einem isotropen Werkstoff die Richtungen der Hauptspannungen keinen Einfluß auf das Fließen haben, sondern nur deren Größe, kann das Fließen nur von den Invarianten des Deviators abhängen.

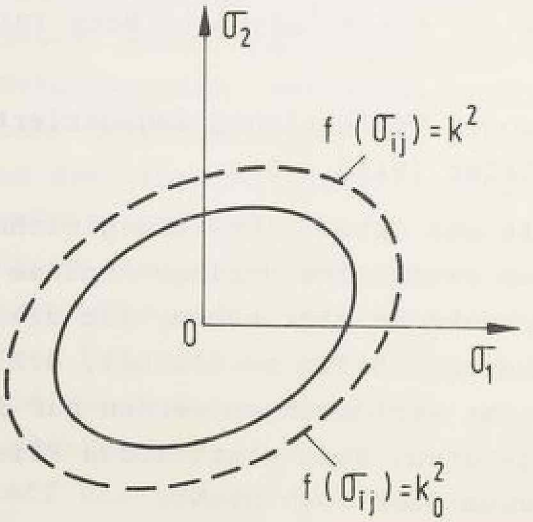



Bild 2.6: Isotrope Verfestigung

### 2.2.2.1 Fließbedingungen von Tresca und v. Mises

Erst der französische Ingenieur Tresca kam 1865 aufgrund von Versuchen zu der Hypothese, daß Metalle zu fließen beginnen, wenn die größte Schubspannung $\tau_{max} = (\sigma_1-\sigma_3)/2$ den konstanten Wert $\frac{1}{2}\,\sigma_{vo}$ erreicht, d.h. wenn die Beziehung

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\,(\sigma_1-\sigma_3) = \frac{1}{2}\,\sigma_{vo}$$

gilt, falls ein allgemeiner Spannungszustand mit den Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ vorliegt.

$\sigma_{vo}$ läßt sich aus einem einaxialen Zugversuch bestimmen und nennt sich einachsige Vergleichsspannung. V. Mises stellte im Jahre 1913 aufgrund mathematischer Überlegungen die Fließbedingung

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_{vo}^2$$

auf (v. Mises, 1913).

Zum besseren Verständnis der Darstellung dieser Fließbedingungen im Hauptspannungsraum sei der Leser auf einige Details über Spannungsinvarianten und ihre Darstellung in diesem Raum im Anhang A verwiesen.

Diese Fließbedingungen stellen im Hauptspannungsraum die Flächen im Bild 2.7 dar. Das Bild 2.8 zeigt die Spuren dieser Flächen auf der Deviatorebene.

Bei der Beschreibung der Verfestigung von Stahl wird der Verfestigungsskalar aus einem einachsialen Versuch als Vergleichsspannung $(\sigma_v)$ gewonnen (Bild 2.9).

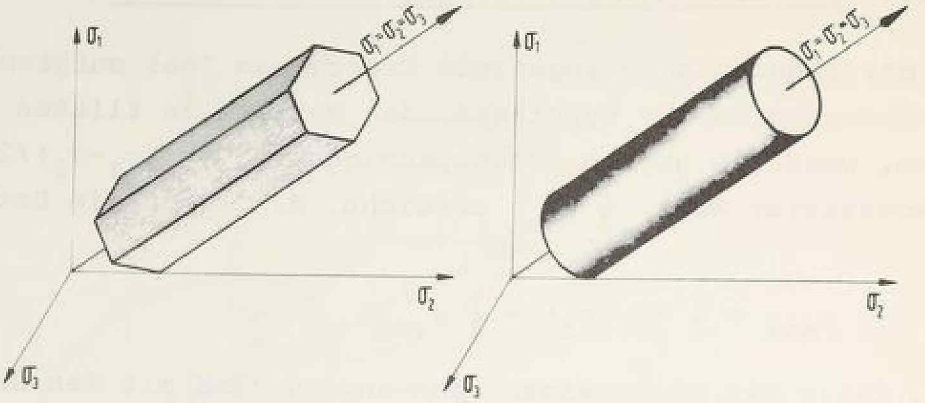


Bild 2.7: Tresca und v. Mises Fließbedingungen im Hauptspannungsraum

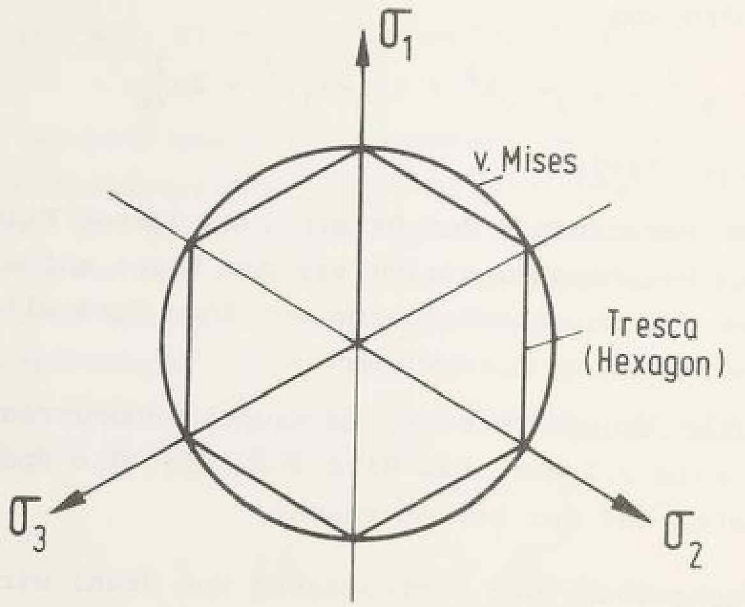



Bild 2.8: Spuren der Fließbedingungen von Tresca und v. Mises in der Deviatorebene

Die in dieser Hinsicht meist angewandte Hypothese, workhardening genannt, besagt, daß die isotrope Verfestigung eine Funktion der "totalen plastischen Arbeit" und unabhängig vom Deformationsweg ist.

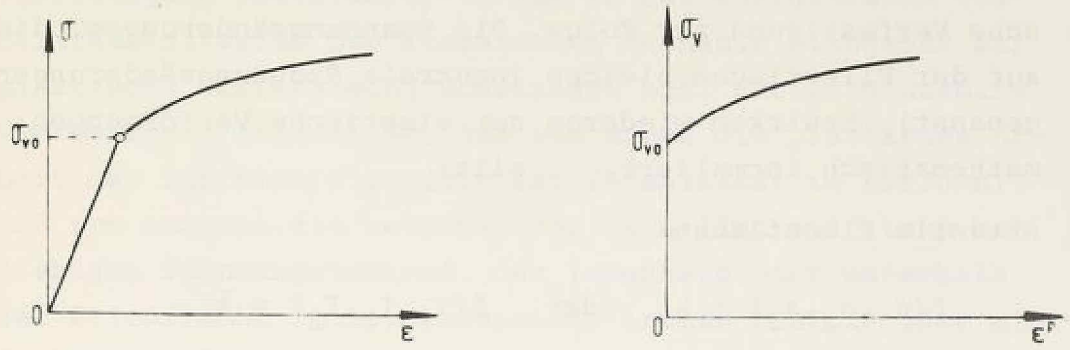



Bild 2.9: Vergleichsspannung

Da die Abhängigkeit der Fließhyperfläche von dem plastischen Deformationstensor im allgemeinen nicht berücksichtigt wird, bekommt (2.8) die Form

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,W_p) = 0 \quad \text{oder}$$
$$f(I_1,I_2,I_3,W_p) = 0 \qquad (2.9)$$

(Hill, 1950).

### 2.2.3 Fließregel (flow-rule)

Die Frage ist, welche Beziehung und Regeln zwischen den Spannungen und plastischen Verformungsinkrementen bestehen, wenn die Plastizierung (Verfestigung) fortschreitet. Die gesuchte Fließregel soll die Beziehung zwischen den Spannungen und Verformungsinkrementen bei fortschreitender Verfestigung darstellen. Im vorigen Abschnitt hatten wir die Feststellung, daß die Fließfläche den Spannungsraum in zwei Bereiche einteilt: einen im Inneren liegenden elastischen und einen außerhalb liegenden elastoplastischen Bereich. Das heißt, alle Spannungsänderungen, die ins Innere der Fließfläche führen (Entlastungen), verursachen elasti-

sche Verformungen; die ins Äußere der Fließfläche führen, haben elastoplastische Verformungen und somit eine plastische Verfestigung zur Folge. Die Spannungsänderungen, die auf der Fließfläche bleiben (neutrale Spannungsänderungen genannt), bewirken wiederum nur elastische Verformungen; mathematisch formuliert, gilt:

Aktuelle Fließfläche:

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = k \quad \text{oder} \quad f(I_1,I_2,I_3) = \overline{k}$$

Änderung des Spannungszustandes:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}$$

$$\begin{aligned} df &> 0 \quad \text{Verfestigung (Belastung)} \\ df &= 0 \quad \text{neutrale Spannungsänderung} \\ df &< 0 \quad \text{Entlastung} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

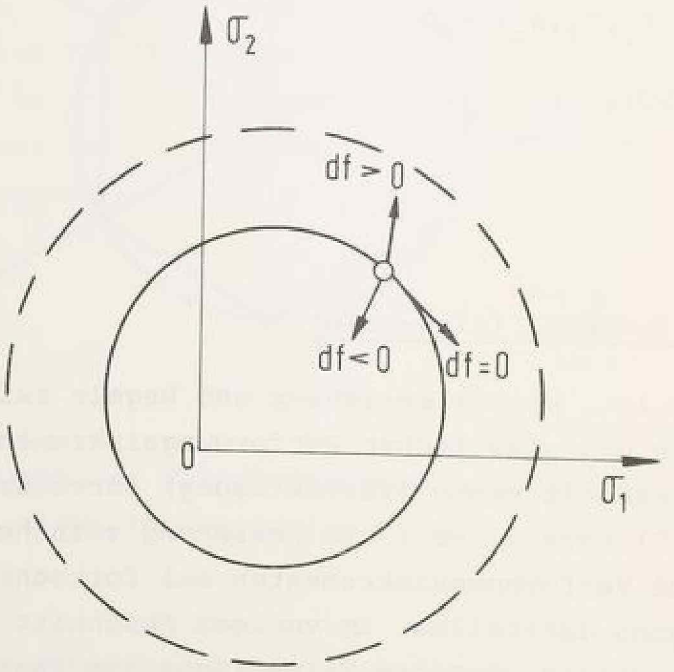



Bild 2.10: Mögliche Spannungsänderung an der aktuellen Fließfläche

Drucker hat (1951) ein Stabilitätskriterium für stabile Verfestigung postuliert, in dem er das energetische Stabilitätskriterium der klassischen Mechanik sinngemäß auf plastische Verfestigung übertragen hat. Für eine stabile Verfestigung fordert er, daß zum einen die plastische Arbeit der Inkremente positiv ist (Stabilität im Kleinen), und zum anderen die zwischen dem aktuellen und einem beliebigen Spannungszustand, der innerhalb oder unterhalb der Fließfläche liegt, geleistete Arbeit positiv oder mindestens zu Null wird (Stabilität im Großen).

$$ddW_p = d\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon^p_{ij} > 0 \qquad (2.11)$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij}) \cdot d\varepsilon^p_{ij} \geq 0 \qquad (2.12)$$

Durch den Vergleich von (2.10) und (2.11) wird die sogenannte Orthogonalitätsbedingung abgeleitet.

$$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \qquad (2.13)$$

$d\lambda$ - Proportionalitätsfaktor, der bei Belastungen einen positiven Wert annimmt, bei Entlastung zu Null wird. (2.13) bedeutet, daß die Fließfläche ein plastisches Potential formt, d.h. das plastische Verformungsinkrement senkrecht auf der Fließfläche steht. Daß die Form der Fließfläche konvex sein muß, ist eine Folge der Forderung "Stabilität im Großen".

Diese Form der Fließregel, die ein plastisches Potential identisch der Fließfläche voraussetzt, nennt sich "Assoziierte Fließregel" (associated flow-rule) und ergibt im Falle des Fließens von Metallen sinnvolle Ergebnisse.

Bei Werkstoffen wie Boden erlaubt diese Form der Fließregel nicht ohne weiteres Verdichtungs- bzw. Auflockerungseffekte während plastischer Deformation zu beschreiben, daher wird üblicherweise eine Fließregel in der Form

$$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\lambda \qquad (2.14)$$

vereinbart, wobei g ein plastisches Potential darstellt, über das noch verfügt werden kann, und nicht identisch zur Fließfläche sein muß. In diesem Falle liegt eine nichtassoziierte Fließregel vor (non-associated flow-rule).

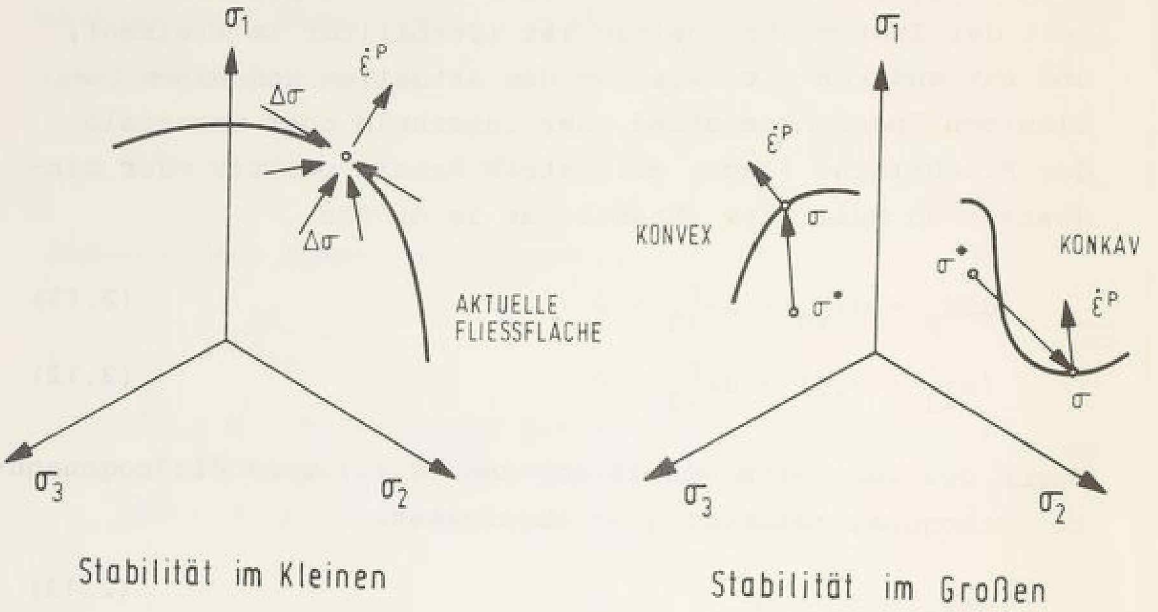



Bild 2.2: Stabilitätskriterien von Drucker

2.2.4 Work-hardening-Konzept (Hill, 1950)

Wie in 2.2.2.1 schon erwähnt wurde, ist das work-hardening-law die für die Verfestigung meist angewandte Hypothese und sie besagt, daß der Grad der Verfestigung nur von der totalen plastischen Arbeit, nicht vom Spannungsweg abhängt. Sie stellt die Beziehung zwischen der Verfestigung und der für diese Verfestigung aufgebrachten totalen plastischen Arbeit dar.

$$f(I_1,I_2,I_3) = F(W_p) \qquad (2.15)$$

Plastisches Arbeitsinkrement:

$$dW_p = \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon^p_{ij} \tag{2.16}$$

Totale plastische Arbeit:

$$W_p = \int dW_p = \int \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon^p_{ij} \tag{2.17}$$

(2.13) eingesetzt in (2.16) ergibt

$$dW_p = \sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \tag{2.18}$$

$$d\lambda = \frac{dW_p}{\sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} \tag{2.19}$$

Nach Euler's Theorem für homogene Funktionen n-ten Grades kann man zeigen, daß

$$\sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = n \cdot g$$

ist (siehe hierzu Anhang B), somit rechnet sich $d\lambda$-Proportionalitätsfaktor zu

$$d\lambda = \frac{dW_p}{n \cdot g} \tag{2.20}$$

Aus diesen Grundlagen der Plastizitätstheorie ist zu erkennen, daß zur Aufstellung eines allgemeinen plastischen Stoffgesetzes folgende Funktionen bekannt sein müssen:

- Eine Fließfunktion (f), die im Grenzzustand der Bruchbedingung identisch wird,
- ein plastisches Potential,
- ein Ansatz über die plastische Arbeit $f(\sigma_{ij}) = F(W_p)$.

# 3. Verformungsverhalten kohäsionsloser Böden

## 3.1 Einleitung

Die Entwicklung der Stoffansätze für das Spannungs-Dehnungsverhalten der Böden basiert sehr oft auf den Daten der Laborversuche. Daher nimmt die Versuchstechnik im Studium der Spannungs-, Verformungseigenschaften der Böden einen sehr wichtigen Platz ein. Die primäre Anforderung an die Versuchsapparatur ist, daß sie erlaubt, in der Bodenprobe einen homogenen Spannungszustand und einen homogenen Verformungszustand zu erzeugen. Da es nicht möglich ist, im Inneren der Probe das Spannungs- und Verschiebungsfeld genügend genau und vollständig zu messen, kann ein Verformungsversuch nur dann eine zuverlässige Aussage liefern, wenn durch Messung der Spannungen und Verschiebungen an den Rändern der Probe die Spannungen und Verschiebungen in der Probe bestimmt werden können. Das Messen aller Spannungs- und Verformungskomponenten kommt für die richtige Interpretierbarkeit der Versuchsergebnisse als nächste Bedingung hinzu. Die Belastungsart und der daraus resultierende Spannungsweg werden durch die Randbedingungen der Versuchsapparatur bestimmt, so daß bei der Interpretation der Versuchsergebnisse auf den Einfluß der apparaturspezifischen Randbedingungen zu achten ist, um die allgemeingültigen Aussagen über Verformungseigenschaften der Probe herausfiltern zu können. Da ein enger Zusammenhang zwischen den Stoffgesetzen und den Laborversuchen besteht, sollen im folgenden die wichtigsten Versuche für die Ermittlung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen anhand der Prinzipskizzen beschrieben werden.

## 3.2 Grundversuche

### 3.2.1 Triaxialversuch

Der gebräuchlichste und vielseitigste unter den Routineversuchen der Bodenmechanik ist der Triaxialversuch. Am meisten wird der Versuch in der Form durchgeführt, daß die zylindrische Bodenprobe bis zu einem bestimmten Zelldruck ($\sigma_3$) hydrostatisch belastet, dann der Stirndruck ($\sigma_1$) bis zum Erreichen des Bruches gesteigert wird, während der Zelldruck konstant gehalten wird (Bild 3.1). Diese konventionelle Art des Triaxialversuches wird als "triaxialer Kompressionsversuch" bezeichnet und ist der Standardversuch der Bodenmechanik. Wenn die Probe durch Senken des Stirndrucks zu Bruch gefahren wird, spricht man vom "triaxialen Extensionsversuch".

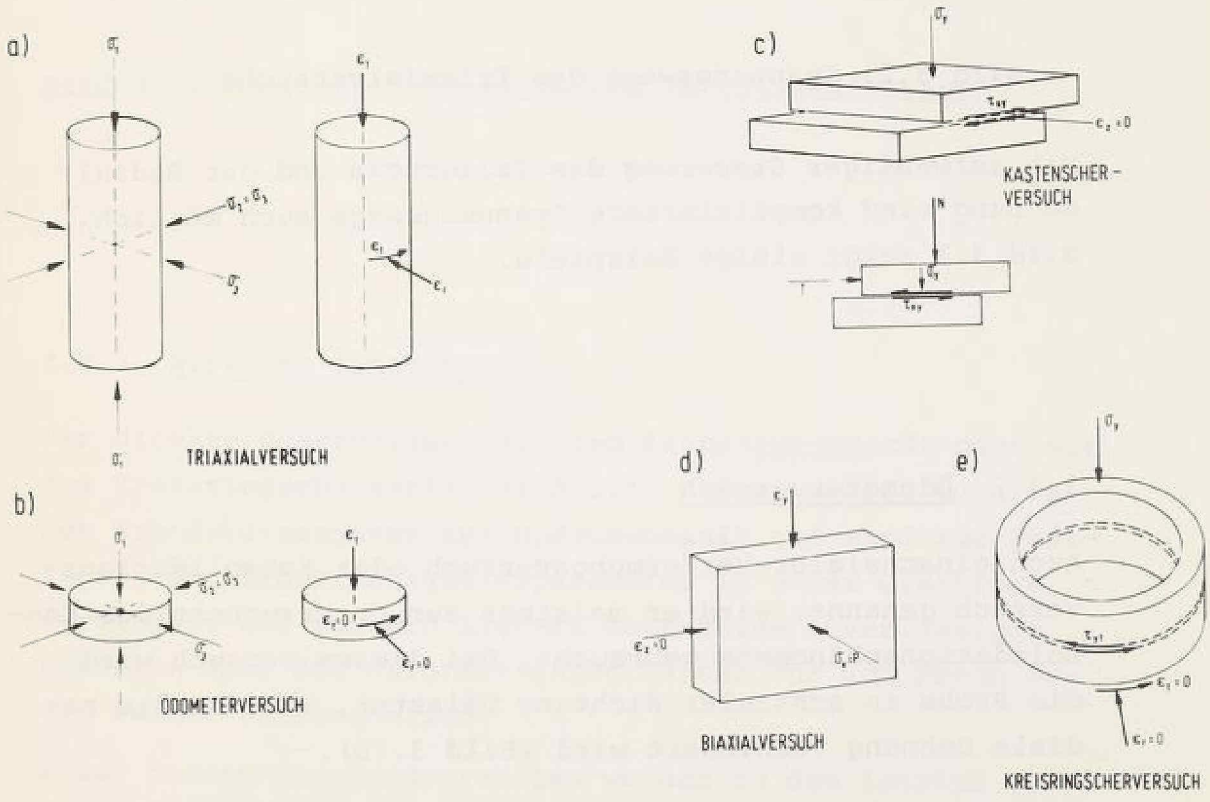



Bild 3.1: Prinzipskizzen der Grundversuche

(Bild 3.2) zeigt die Spannungswege des Triaxialversuchs, dargestellt im Hauptspannungsraum (siehe hierzu Anhang A).

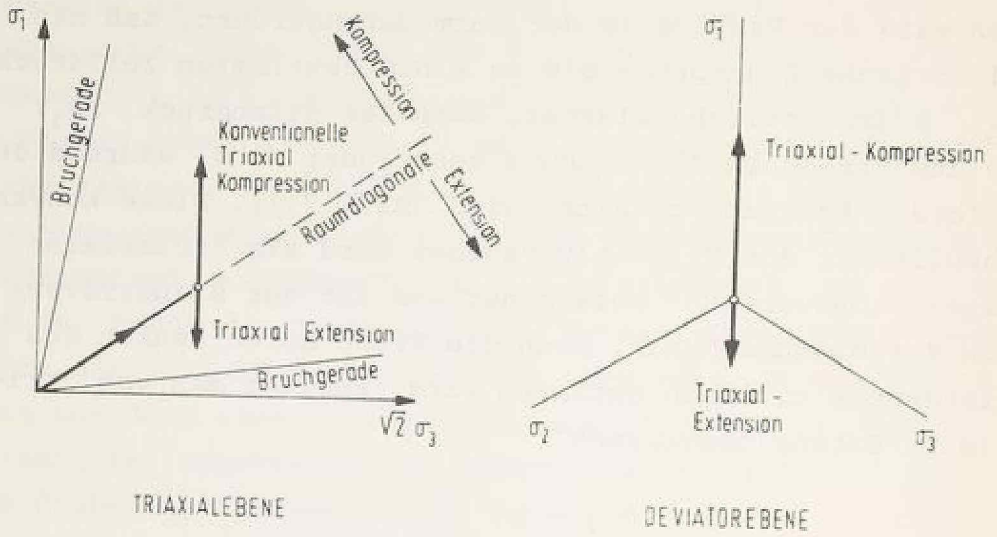
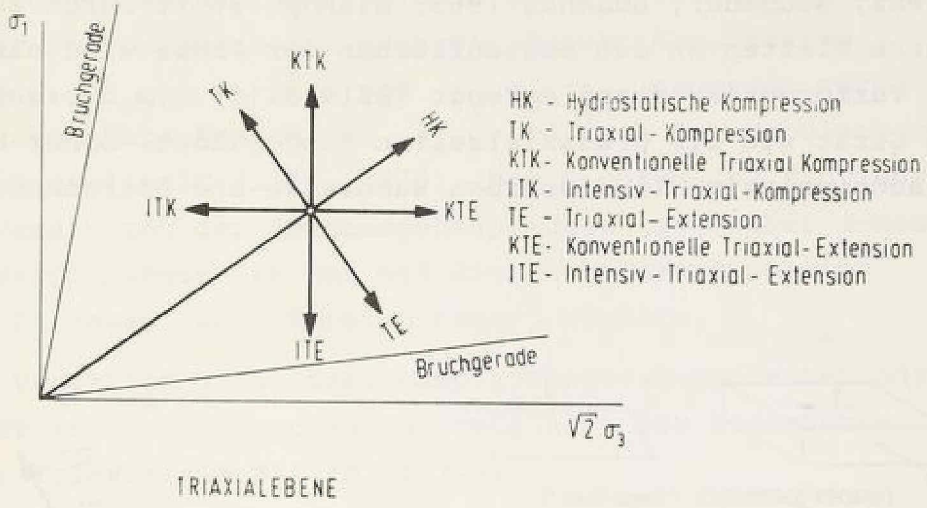



Bild 3.2: Spannungswege des Triaxialversuchs

Mit aufwendiger Steuerung des Zelldrucks und der Radialdehnung sind kompliziertere Spannungswege auch möglich. Bild 3.3 zeigt einige Beispiele.

### 3.2.2 Ödometerversuch

Auch einachsialer Verformungsversuch oder Konsolidationsversuch genannt, wird er meistens zur Untersuchung des Konsolidationsphänomens gebraucht. Bei diesem Versuch wird die Probe in achsialer Richtung belastet, während die radiale Dehnung verhindert wird (Bild 3.1b).




TRIAXIALEBENE

Bild 3.3: Mögliche Versuchsspuren im Triaxialversuch

### 3.2.3 Direkter Scherversuch

Der direkte Scherversuch mit dem Kastenschergerät oder mit dem Kreisringschergerät (Bild 3.1c und e) gehört auch zu den Standardversuchen der Bodenmechanik und wird zur Festlegung der Scherfestigkeitsparameter in einer Gleitfuge verwendet. Der Versuch liefert aber keine zuverlässigen Aussagen über das Deformationsverhalten vor dem Bruch wegen seiner Fehlerquellen.

Außer diesen Standardversuchen wurden in den letzten zwei Jahrzehnten Versuchsgeräte vor allem für wissenschaftliche Untersuchungszwecke entwickelt, die eine präzisere und eindeutigere Erforschung des Stoffverhaltens ermöglichen.

### 3.2.4 Versuchsgeräte für Forschungszwecke

Zur Untersuchung von ebenen Spannungs- und Verformungszuständen sind zweiaxiale Druckgeräte (Biaxialgeräte) entwickelt worden (Bjerrum, Kummeneje 1961; Cornforth 1964; Lorenz, Neumeuer, Gudehus 1965; Bishop 1966). Durch zwei starre Platten an den Seitenflächen der Probe wird ein ebener Verformungszustand erzeugt (Bild 3.1d). Im übrigen ist das Gerät wie die Dreiaxialzellen ausgebildet. Daher hat es auch prinzipiell dieselben Nachteile und Schranken.

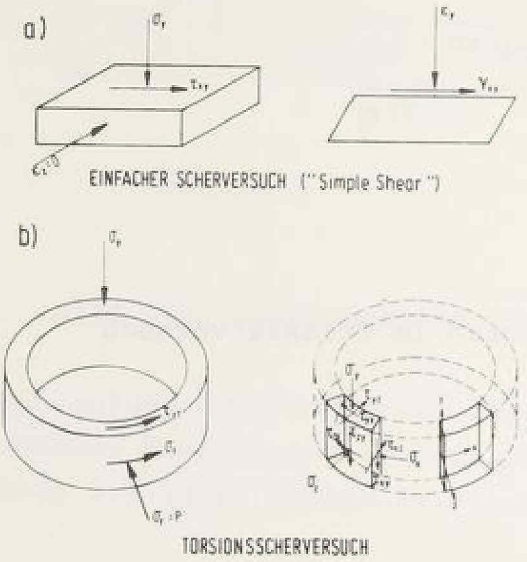



Bild 3.4: "Simple-Shear"- und "Torsion-Shear"-Versuche

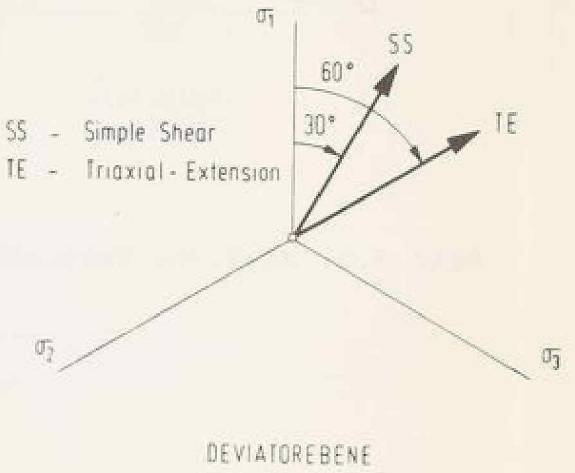



Bild 3.5: Spannungsweg des "Simple-Shear"-Versuchs, dargestellt in der Deviatorebene

Eine Weiterentwicklung des direkten Schergerätes stellen das "Simple Shear" (Einfachschergerät) und das Torsionsschergerät dar (Bild 3.4). Beim "Simple Shear"-Gerät (Bild 3.4a) werden sechs starre Platten so gelagert und gegeneinandergeführt, daß eine im Ausgangszustand quaderförmige Probe zu einem Parallelogramm mit der ursprünglichen Länge, aber beliebigen Winkeln ($\theta$) und Höhe (h) verformt werden

kann. Dabei werden der erzeugte ebene Verformungszustand und der dazugehörige Spannungszustand eindeutig gemessen (Roscoe, 1953; Roscoe et.al., 1967; Roscoe, 1970 (a) und (b)).

Beim Torsionsscherapparat (Bild 3.4b) wird dagegen ein ebener Spannungszustand erzeugt, dessen Komponenten $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$ sind und $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}$ gemessen werden. Die unbekannte Komponente $\sigma_x$ wird nach dem Probierverfahren ermittelt (Lade, 1975). Das Studium des Einflusses der Verdrehung der Spannungshauptachsen gegenüber denen der Verformungen ist nur mit diesen beiden Apparaten "Simple Shear" und "Torsion Shear" möglich.

Eine Variation aller drei Hauptspannungskomponenten oder Hauptverformungskomponenten ermöglicht das sogenannte "True-Triaxial-Gerät" (Bild 3.6).

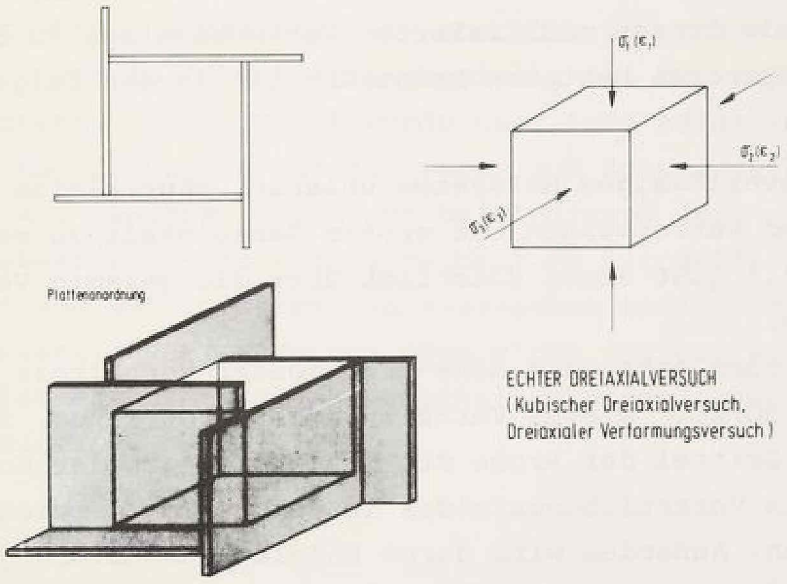



Bild 3.6

Sechs quadratische starre Platten werden so angeordnet und gegeneinander reibungsfrei geführt, daß sie stets einen orthogonalen Quader einschließen (Hambly, 1969; Gold-

scheider, 1972). Dabei werden die Verformungen und die Stempelkräfte gemessen. Das Quaderverformungsgerät ist zur Zeit dasjenige mit der größten Zahl von unabhängigen Variablen (Freiheitsgrade), das auch der primären Forderung nach Homogenität der Verformungen genügt.

## 3.3 Eigene Versuchsanlage

### 3.3.1 Triaxialversuchsapparatur

Über die Versuchsanlage, mit der die in dieser Arbeit ausgewerteten Versuche durchgeführt worden sind, wurde schon von Chambosse (1976) ausführlich berichtet.

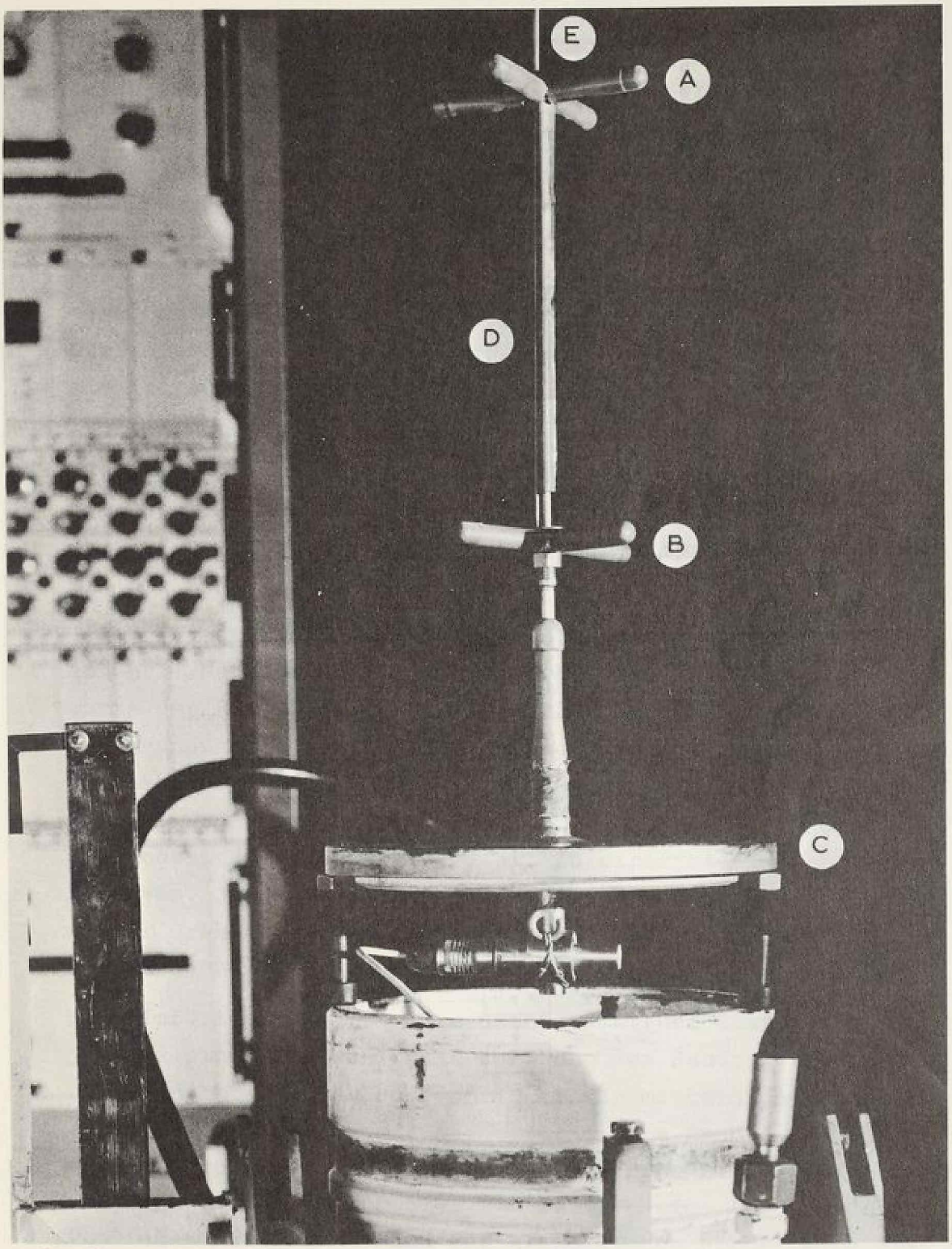
Von seiner Version unterscheidet sich die jetzige Anlage im wesentlichen durch die Art der Messung der Vertikalspannung und durch die verbesserte Probenaufbereitung. Die Unterschiede dieser modifizierten Versuchsanlage zu den Standardgeräten bestehen hauptsächlich in den folgenden Punkten:

- Ein zuverlässiges Meßsystem erlaubt, sehr kleine Spannungen und Verformungen mit großer Genauigkeit zu messen. Bild 3.7 gibt einen Überblick über die gesamte Versuchsanlage.
- Die Proben haben ein Höhe-Durchmesser-Verhältnis von H/D = 50/20. Dieses Verhältnis ist groß genug, im mittleren Drittel der Probe der Forderung nach der Homogenität des Verschiebungsfeldes in der Probe ausreichend zu genügen. Außerdem wird durch Endplattenschmierung die Ausbildung starrer Zonen an den Stirnflächen weitgehend verhindert.
- Sowohl die Messung der Axialdehnungen als auch die Messung der Radialdehnungen erfolgt mit induktiven Wegaufnehmern, und sie beziehen sich nur auf das mittlere Drittel der Probe (Bild 3.8). Die Messung der Axialdehnung erfolgt durch ein zentrisch angeordnetes Meßgestänge, bei dem zwei

relativ zueinander verschiebbare Meßkreuze die mittleren 20 cm der Probe begrenzen und ihre relative Verschiebung durch einen Induktiv-Wegaufnehmer registriert wird, der unter der unteren Platte sitzt (Bild 3.9).
Die Radialdehnung wird über vier außerhalb der Probe paarweise einander gegenüber angeordnete Wegaufnehmer gemessen. Diese Aufnehmer sind an einem Scherenkreuz befestigt, das den Probenverformungen folgt, so daß die Relativverschiebung zwischen den Meßstellen und Wegaufnehmern verhindert wird. An den Meßstellen wird die Verschiebung der Ankerbleche, die zwischen der Gummihülle und der Probe sitzen, nach außen übertragen. Auf die dafür speziell konstruierten Bolzen werden die Anker der induktiven Wegaufnehmer aufgeschraubt. Somit wird die relative Verschiebung der zwei gegenübersitzenden Bleche, d.h. die Durchmesseränderung der Probe, ohne Einfluß der Gummihüllenverformung direkt gemessen.

- Der vertikale Druck wird durch eine Druckmeßdose mit drei DMS-Aufnehmern gemessen, die unterhalb der Probe angeordnet ist. Der Zelldruck wird ebenfalls mit DMS-Aufnehmern registriert. Dieser Druck wurde über Luft aufgebracht, da die Abdichtung der Meßaufnehmer zum Schutz gegen das Wasser auf längere Zeit nicht befriedigend war.
- Alle Meßwerte können von einem Meßturm automatisch registriert und auf Lochstreifen ausgegeben werden, so daß die Auswertung der Versuche über einen Rechner erfolgen kann. Das elektronische Blockschaltbild der gesamten Anlage zeigt das Bild 3.10.

Bild 3.7: Versuchsanlage




(A) (B) Meßstreckenbegrenzung (20 cm)
(C) untere Endplatte
(D) Meßgestänge
(E) Haltestange

Bild 3.9: Wegaufnehmer für Vertikaldehnung

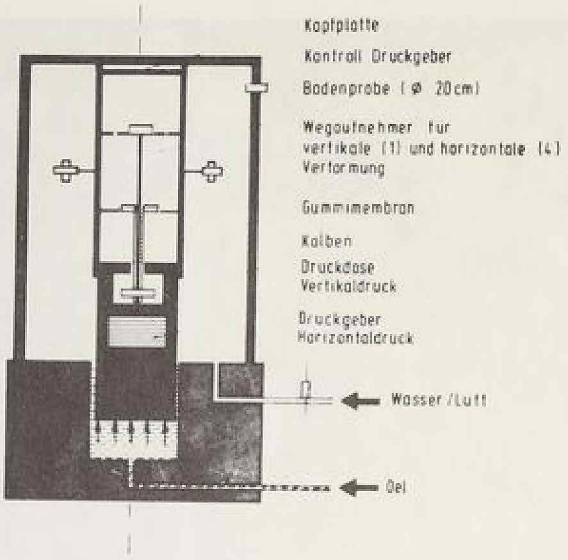



Bild 3.8: Schemaskizze der Triaxialzelle

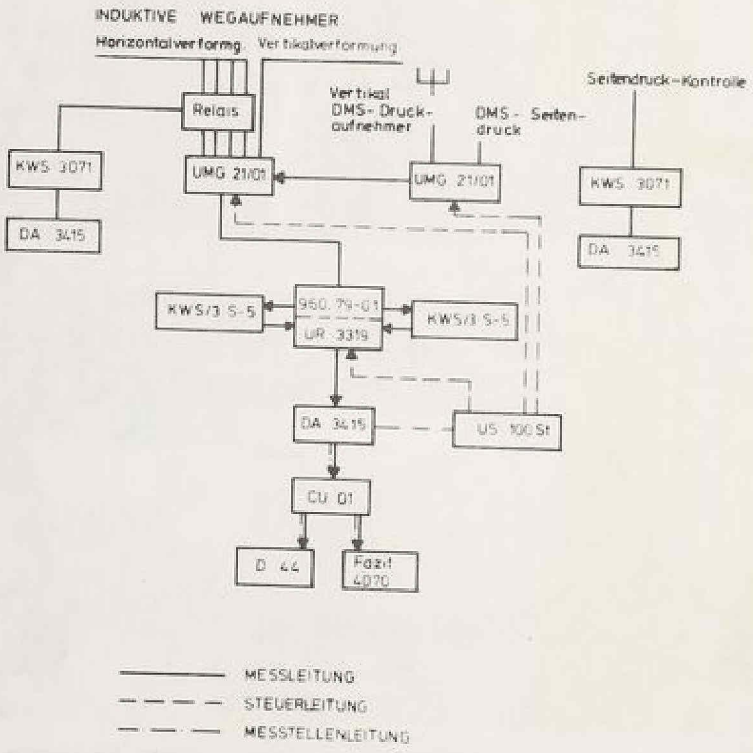



Bild 3.10: Blockschaltbild der Versuchsanlage

### 3.3.2 Versuchssand

Der Versuchssand sollte ein typischer, möglichst häufig in der Natur vorkommender Sand sein und wenig Feinanteile enthalten. Daher wurde aus der näheren Umgebung von Darmstadt ein geeigneter Sand für die Versuche ausgewählt. Der verwendete Sand ist ein luftgetrockneter Mittel- bis Grobsand mit einer Ungleichförmigkeitszahl von $U = 2.2$ und einer Krümmungszahl von $C_c = 0.96$.
Die Kornverteilungskurve für diesen Sand ist im Bild 3.11 als "Versuchssand" gekennzeichnet.

Die lockerste und dichteste Lagerung des Versuchssandes wurde mit den üblichen Methoden bestimmt. Der Porenanteil bzw. die Porenzahl bei lockerster Lagerung beträgt $\max n = 0.456$, $\max e = 0.838$ und bei dichtester Lagerung $\min n = 0.327$, $\min e = 0.486$.

Jeder Versuch wurde mit zwei verschiedenen Dichten durchgeführt. Um eine möglichst homogene Probe herzustellen, wurde der Sand eingerieselt. Hierbei ist es möglich, über die Probenhöhe gleichmäßige und reproduzierbare Dichten zu erzielen. Die Einbaudichte ist abhängig von der Fallhöhe und der Größe der Fallöffnung, d.h. der Intensität des Sandregens (Kolbuszewski, 1948). Ab einer bestimmten Fallhöhe (ca. 30 cm) bleibt die erreichte Dichte konstant. Bei dieser Grenzhöhe oder größeren Höhen kann eine relative Dichte größer als 1.0 erreicht werden.

Der Einfüllvorgang erfolgte deshalb in fünf Stufen, wobei jeweils eine mittlere freie Fallhöhe des Sandregens von 25 cm für dichte Proben und von 10 cm für mitteldichte Proben eingehalten wurde. Somit wurde für dichte Proben eine bezogene Lagerungsdichte von $I_D = 0.92$, eine Lagerungsdichte von $D = 0.902$ ($e = 0.514$, $n = 0.34$), eine Trockenwichte von $\gamma_d = 17.5\ kN/m^3$ und für mitteldichte Proben eine bezogene Lagerungsdichte von $I_D = 0.545$, eine Lagerungsdichte $D = 0.496$ ($e = 0.646$, $n = 0.392$), eine Trockenwichte von $\gamma_d = 16.1\ kN/m^3$ erreicht.

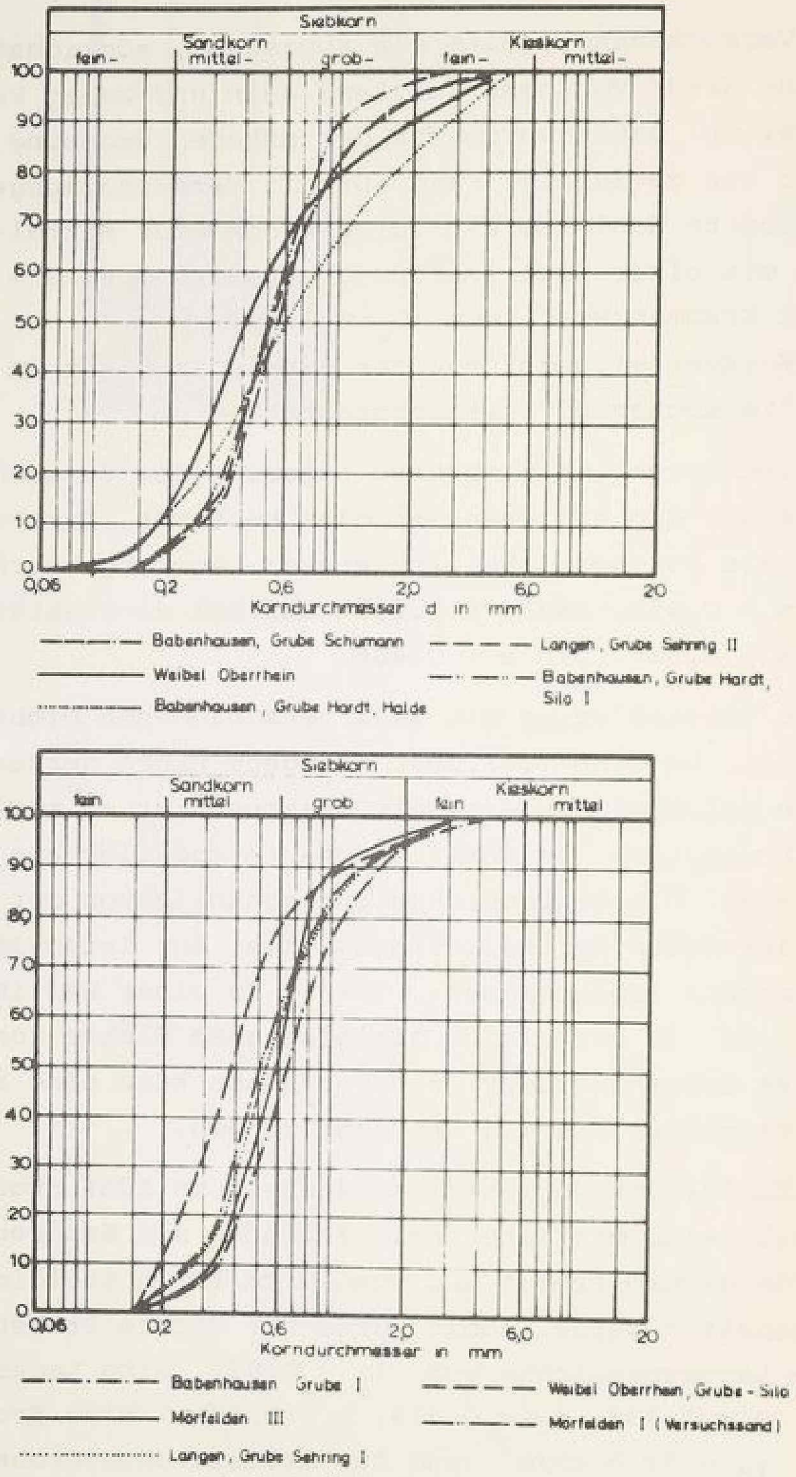



Bild 3.11: Kornverteilungskurven

Diese Dichten waren mit Streuungen von ± 1% reproduzierbar, so daß für die Untersuchungen homogene, reproduzierbare Sandproben mit gleicher Anfangsdichte gegeben waren.

Die im allgemeinen vorausgesetzte Isotropie der Versuchsproben war nur für dichte Proben gewährleistet. Im Bild 3.13 sind die Versuchsergebnisse unter hydrostatischer Belastungsänderung für dichten und auch für mitteldichten Sand aufgetragen. Beim mitteldichten Sand war $\varepsilon_3$ stets größer als $\varepsilon_1$, woraus die Anisotropie der mitteldichten Sandproben folgt. Diese gemessene Anisotropie stimmt mit den Ergebnissen von El-Sohby und Andrawes (1972) und von Wiendieck (1970) überein, die nachgewiesen haben, daß sich im allgemeinen keine isotropen Versuchsproben herstellen lassen.

### 3.3.3 Ausgangsspannungszustand

Für den Probeneinbau können die entsprechenden Spannungen und Verformungen im einzelnen bestimmt und registriert werden. Nach dem Einfüllen des Sandes und dem Aufsetzen der Kopfplatte befindet sich die Probe im Ruhedruckzustand ($K_o$), da die Seitendehnung durch das starre Stützgestell verhindert wird, das die exakt-zylindrische Form der Probe gewährleistet (Weg 1).

Um die induktiven Wegaufnahmer am Scherenkreuz aufhängen zu können, wird die Probe durch ein Vakuum von 15 kN/m$^2$ stabilisiert (Weg 2). Weitere Arbeitsgänge verursachen die Änderungen des Spannungszustandes nach Wegen 3, 4 und 5. Da sich die Gummihülle erst vom Stützgestell lösen kann, wenn das Vakuum den Wert des seitlichen Reaktionsdruckes erreicht hat, gibt es den Sprung über dem $K_o$-Verhältnis. Es ist anzunehmen, daß diese Störung durch die Erhöhung vom sphärischen Anteil des Spannungszustandes bei weiteren Arbeitsgängen ausgeglichen wird. Der bei dieser Versuchs-

anlage kleinstmögliche, hydrostatische Ausgangsspannungszustand liegt bei 10 kN/m$^2$.

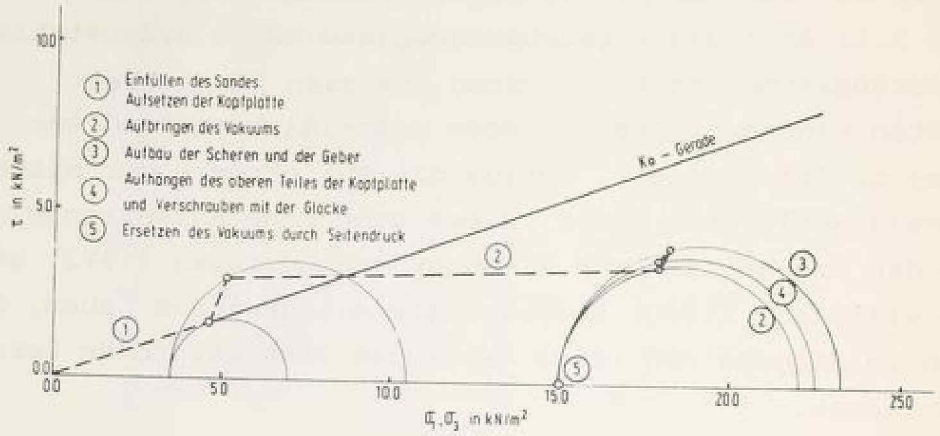



Bild 3.12: Ausgangsspannungszustand

## 3.4 Auswertung und Analyse der Versuchsergebnisse

### 3.4.1 Allgemeines

Für die Lösung der Randwertprobleme werden außer Erhaltungssätzen der Mechanik sechs Gleichungen zwischen statischen ($\sigma_{ij}$) und kinematischen ($u_i$) Größen benötigt, die die Verformungseigenschaften des Materials berücksichtigen. Diese stellen das sogenannte Material- oder Stoffgesetz dar.

Da die strukturelle (mikroskopische) Betrachtungsweise im Sinne der statistischen Mechanik bis heute noch nicht zu brauchbaren Ergebnissen geführt hat - sicher hat sie zur Deutung globaler Stoffeigenschaften sehr viel beigetragen, führte jedoch nicht zur quantitativen Ermittlung von Stoffgleichungen, die für die Lösung von Randwertproblemen an-

wendbar sind -, wird das Problem üblicherweise phänomenologisch behandelt, d.h. der Sandkörper (Haufwerk) wird durch einen stetigen Modellkörper im Sinne der Kontinuumsmechanik ersetzt, und es werden äußere Einflußfaktoren auf diesen Körper (Black-box) bei Konstanthaltung der inneren Einflußfaktoren untersucht. In dieser Beziehung sind mit Hilfe der strukturellen Betrachtungsweise Idealisierungen für diesen Modellkörper zu treffen, die die Eigenschaften des Haufwerks möglichst gut wiedergeben und mathematisch zu erfassen ermöglichen. Weiterhin beschränken wir uns auf ohne Beschleunigungseinfluß ablaufende Vorgänge im Boden.

Somit wird der Sand als Kontinuum betrachtet. Dabei gehen die inneren Einflußfaktoren, wie die Kornform, die Korngröße, die Wechselwirkungen der Körner, die Oberflächenrauhigkeit usw. nicht explizit, aber sicher implizit in unbekannter Weise in die Stoffkonstanten ein. Nur die Dichte (oder Porenanteil) wird als Maß der Geometrie der Haufwerksstruktur aufgenommen. Nach dem Prinzip des Determinismus wird die Verknüpfung von $\sigma_{ij}$ und $u_i$ für den weiteren Verlauf vollständig von der Vorgeschichte und Belastung bestimmt. Das Prinzip der lokalen Wirkung besagt, daß der Spannungszustand $(\sigma_{ij})$ in einem Volumenelement nur mit den auftretenden Verschiebungsgradienten $(u_{i,j})$ dieses Volumenelements verknüpft ist. Beim sogenannten einfachen Stoff genügt die Betrachtung des symmetrischen Anteils des Verschiebungstensors, des sogenannten Verzerrungstensors (siehe hierzu Truesdell/Noll, 1965; Gudehus, 1973).

Da wir mit den Inkrementen operieren werden, sollen die Verschiebungsgradienten höherer Ordnung ohne Einfluß sein, d.h. die Linearisierung des Verzerrungstensors ist erlaubt. Wir betrachten die Dehnungsinkrementtensoren, d.h. ein homogenes Dehnungsfeld $(\varepsilon_{ij})$ bestimmt das Spannungsfeld vollständig. In vielen Versuchsgeräten beobachtete homogene Dehnungsfelder bei homogenen Spannungen bestätigen dies. Außerdem soll das Verformungsverhalten zeitunabhängig sein, d.h. Verformungen sollen unabhängig davon sein, wie schnell

die Spannungen aufgebracht werden. (Exakte Zeitunabhängigkeit für natürliche Stoffe ist nicht gegeben, erfahrungsgemäß kann man bei dichtem und mitteldichtem Sand diese Annahme treffen).

Mit diesen Annahmen werden wir nach den Materialgesetzen der Art

$$\Delta\varepsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}, \Delta\sigma_{ij})$$

suchen, bei denen die Spannungen als unabhängige - weil sie bei den üblichen Versuchen genauer beobachtet und kontrolliert werden können -, die Dehnungen als abhängige Variablen definiert sind und die Funktionen f von der Vorgeschichte abhängen. Hierfür werden Dehnungen nach Lagrange und Spannungen in der momentanen Konfiguration nach Cauchy berechnet. Im folgenden werden die durchgeführten Versuche unter diesen Voraussetzungen ausgewertet und analysiert.

### 3.4.2 Verformungsverhalten des Sandes bei verschiedenen Belastungswegen im Triaxialgerät

#### 3.4.2.1 Über den inneren Verformungsmechanismus

Die Verformungen eines Sandkörpers unter äußeren Belastungen resultieren aus den elastischen Verformungen der einzelnen Körner und aus Kornumlagerungen (Reorientierung des Korngefüges unter der gegebenen Belastung), die zum größten Teil auf Gleitbewegungen der Körner zurückzuführen sind. Die Drehung der Körner hat auf diese Kornumlagerungen, sofern die Spannungen nicht sehr klein sind, weniger Einfluß. Bei sehr hohen Belastungen kommt die Kornzertrümmerung als wesentlicher Faktor hinzu. In dem Spannungsbereich der durchgeführten Versuche war Kornzertrümmerung nicht vorhanden. Dies zeigten die Kornverteilungskurven, die vor und nach den Versuchen keinen Unterschied aufwiesen.
Eine homogene Korngerüststruktur weist zwei Grundmerkmale auf (ODA 1972 a):

- Die Orientierung der Körner mit ihren Längsachsen, die durch die statistische Hauptorientierungsrichtung der Körner und die Intensität dieser Richtung charakterisiert wird (orientation-fabric).
- Die räumliche Anordnung der Körner, die durch die Richtung der Kontaktflächennormalen und die Anzahl der Kontaktpunkte charakterisiert wird (packing).

Bei nahezu runden Körnern, wie dem Versuchssand, wäre die Orientierung (orientation-fabric) ohne Bedeutung. Dieses bei länglichen Körnern in Frage kommende Merkmal beeinflußt die räumliche Anordnung der Körner (packing) unmittelbar. Somit ist dieser Einfluß in der räumlichen Anordnung implizit enthalten. Deswegen ist die geometrische Anordnung der Körner das grundlegende Merkmal eines regellosen Haufwerks, das seine mechanischen Eigenschaften bestimmt. Diese Anordnung wird durch die Häufigkeitsverteilung der Kontaktflächennormalen in einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschrieben, wobei Wiendieck (1967) von der Anzahl der in eine Richtung fallenden Kontaktpunkten ausgeht, während ODA (1972 a) die Projektionen der Kontaktflächen auf die drei von Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen für die Definition des Anisotropie-Index zugrundelegt, mit der Annahme, daß die Kontaktflächen mit guter Näherung gleich groß angesehen werden können. Daher haben beide Definitionen eine Gemeinsamkeit.

Wegen des vorherrschenden Einflusses des lotrecht orientierten Gravitationsfeldes während des Einfüllvorgangs (wie während der Sedimentation in der Natur) stützen sich die Sandkörner vorwiegend in vertikaler Richtung ab, während die Horizontalabstützungen zur Sicherstellung des Gleichgewichts erst in zweiter Linie erforderlich werden. Dabei unterscheiden sich die verschiedenen Richtungen in einer horizontalen Ebene nicht voneinander (Querisotropie). In diesem Fall kann die geometrische Anisotropie der Struktur nach ODA (1972) durch nur einen Anisotropie-Index $S_z/S_x$ oder $S_z/S_y$ beschrieben werden. Zur Darstellung der querisotropen Struktur wird ein Rotationsellipsoid mit verti-

kaler Symmetrieachse herangezogen, dessen Achsenverhältnis gleich dem Anisotropie-Index ist. Im Falle der Isotropie wird dieses Ellipsoid zu einer Kugel. Bei dichter gelagerten Sanden ist die absolute Anzahl der Kontaktpunkte größer. Mit der größer werdenden Porenziffer nimmt die absolute Anzahl der Kontaktpunkte ab, während die geometrische Richtungsabhängigkeit der Kontaktpunkte in der Struktur steigt, weil mit der kleiner werdenden relativen Dichte die Abnahme der Kontaktpunktezahl mehr die seitlichen Stützpunkte betreffen würde, um auch in der lockeren Lagerung möglichst stabile Stützungen gegen die Gravitationskraft zu gewährleisten. Die im allgemeinen vorausgesetzte Isotropie gilt somit nur für sehr dicht gelagerte, unvorbelastete Sande.

#### 3.4.2.2 Verformungsverhalten unter hydrostatischer Belastung und Entlastung

Diesem Versuch ist bis heute wenig Beachtung geschenkt worden, da das Problem von weniger praktischer Bedeutung ist und Probleme bei der Messung der dabei auftretenden sehr kleinen Verformungen bestehen. Dieser Versuch bringt aber die Möglichkeit, über das Verformungsverhalten in verschiedenen Richtungen und somit über die Ausgangsgeometrie der Haufwerksstruktur einiges aussagen zu können. Dies ist für die Beurteilung über Isotropie sowie elastisches Verhalten von Bedeutung.

Die bei diesen Versuchen auftretenden sehr kleinen Verformungen führten oftmals dazu, daß das Verformungsverhalten bei diesen Belastungsspuren als isotrop und elastisch angenommen wurde. El Sohby (1969 a), Holubec (1968) haben gezeigt, daß das Verhalten unter hydrostatischer Belastung nicht ohne weiteres als isotrop und elastisch angenommen werden kann. Dies bestätigen auch die eigenen Versuchsergebnisse.

Im Bild 3.13a sind die $\varepsilon_1$- und $\varepsilon_3$-Werte unter hydrostatischer Belastung für dichte und auch für mitteldichte Proben aufgetragen. Während der dichte Sand ein isotropes Verhalten zeigte, war der mitteldichte Sand anisotrop. (Inherent-Anisotropy, Ausgangsanisotropie).

Im Bild 3.13b und c sind die $\varepsilon_1$- und $\varepsilon_v$-Verläufe der Versuche mit dichtem bzw. mitteldichtem Sand unter hydrostatischer Belastung, Entlastung und Wiederbelastung dargestellt. Bei den dichten wie auch bei den mitteldichten Proben sind die Volumendehnungen nach Entlastungen nicht vollständig zurückgegangen.

Die Größe dieser irreversiblen Verformungen nach dem zweiten Entlastungszyklus nahm im Vergleich zum ersten ab.

Zusammenfassend kann man folgendes festhalten:

- Das Verhältnis $\varepsilon_v/\varepsilon_1$ hatte stets etwa den Wert 3.0 bei dichtem Sand. Dieses Verhältnis war bei mitteldichtem Sand stets größer als 3.0 und wurde mit fortschreitenden Belastungen und Entlastungen kleiner.
- Die reversiblen Verformungen der dichten Proben resultieren zum größten Teil aus den elastischen Verformungen der Körner. Die Gleitungen der Körner relativ zueinander, die mit der Strukturänderung verknüpft sind, können für Ent- und Wiederbelastungsschleifen bei dichtem Sand vernachlässigt werden, während bei mitteldichtem Sand in den Ent- und Wiederbelastungszyklen diese Gleitungen (slidings) eine wesentliche Rolle im Verformungsverhalten spielen, da die anisotrope Struktur mit zunehmender, isotroper Belastung isotrop wird. So war zu beobachten, daß der mitteldichte Sand sich nach dem hydrostatischen Ent- und Wiederbelastungszyklus in vertikaler Richtung gedehnt und gleichzeitig verdichtet hat.
- Bei dichtem Sand können bei Ent- und Wiederbelastungen die Gleitungen der Sandkörner vernachlässigt werden. Die Verformungen resultieren zum größten Teil aus den elastischen Formänderungen einzelner Körner und

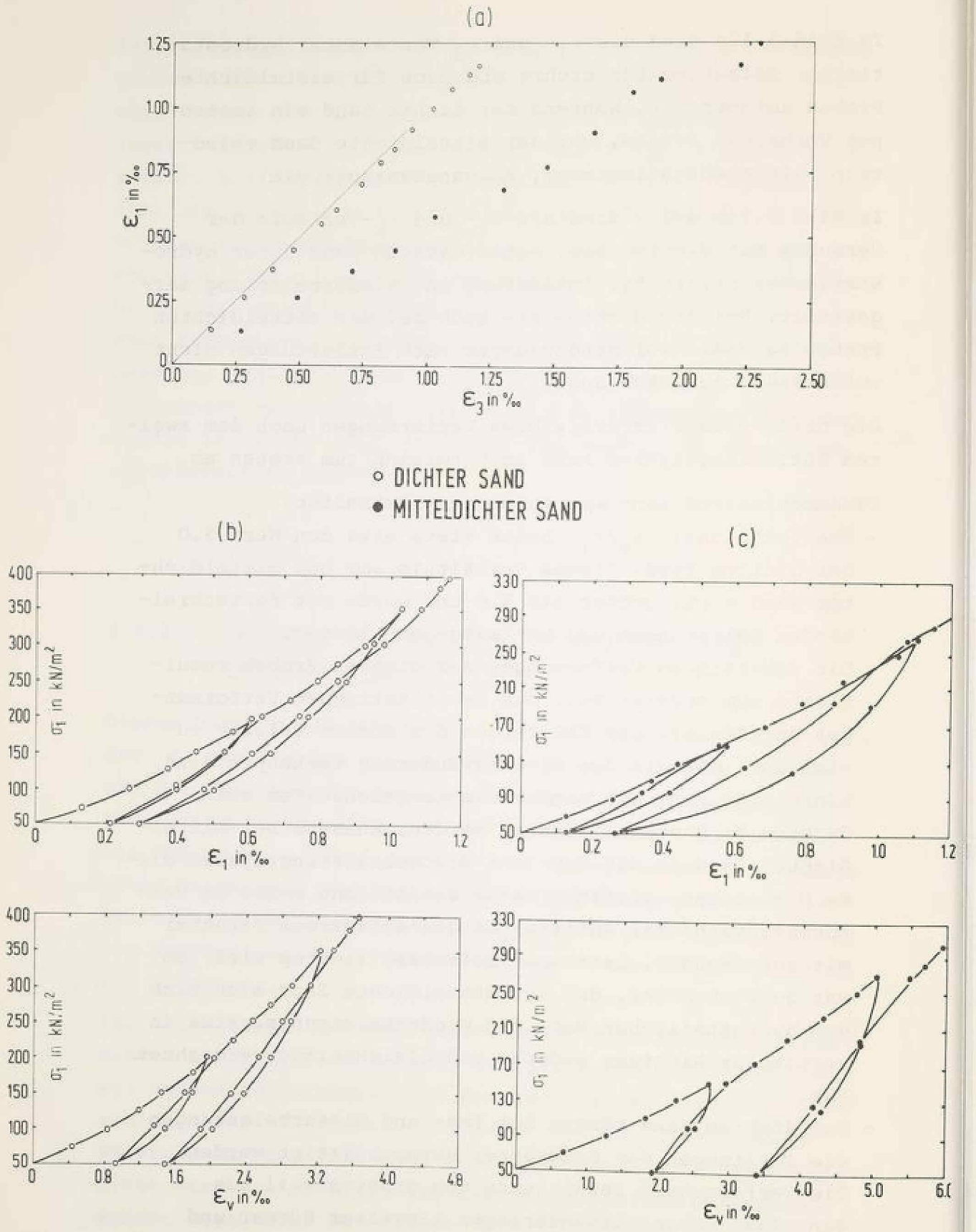



Bild 3.13: Verformungen unter hydrostatischer Be- und Entlastung

stellen den elastischen Anteil der Verformungen auf dem Erstbelastungsast dar. Was nach der Entlastung zurückbleibt, ist der irreversible (plastische) Anteil der Verformungen, der mit Strukturänderungen verbunden ist. Bei mitteldichtem Sand sind die Verformungen insgesamt größer als bei dichtem Sand und haben einen anisotropen und elastoplastischen Charakter für alle reversiblen und irreversiblen Anteile.

Daraus ist zu folgern: Bei dichtem Sand ist die Annahme der Isotropie zutreffend. Das Verformungsverhalten bei hydrostatischer Ent- und Wiederbelastung kann als elastisch angesehen werden, während es bei Erstbelastung elastoplastisch ist. Mitteldichter Sand ist anisotrop und in allen Be- und Entlastungsbereichen sind elastoplastische Effekte vorhanden.

### 3.4.2.3 Verformungsverhalten im Triaxialkompressionsversuch

Die Spannungs-, Verformungs- und Volumenänderungscharakteristika des Versuchssandes in Serien von dränierten triaxialen Kompressionsversuchen sind im Bild 3.14 für dichten und im Bild 3.15 für mitteldichten Sand dargestellt. Diese Bilder zeigen jeweils den Einfluß des Seitendrucks ($\sigma_3$) auf das Verformungsverhalten der Proben, die mit gleichen Ausgangsporenvolumen eingebaut worden waren.

Da das Spannungsverhältnis ($\sigma_1/\sigma_3$) im dränierten Zustand ein dimensionsloses Maß für die Deviatorbeanspruchung des Korngerüstes darstellt, sind die Spannungs-Dehnungskurven zur besseren Vergleichbarkeit über dieses Verhältnis ($\sigma_1/\sigma_3$) aufgetragen. Wie aus den Diagrammen zu ersehen, zeigen die dichten Proben mit zunehmendem Seitendruck ein weniger sprödes Verformungsverhalten, die Dehnung bis zum Bruchspannungsverhältnis ($\sigma_1/\sigma_3 = 5.3$ für dichten und

$\sigma_1/\sigma_3$ = 3.9 für mitteldichten Sand) wird größer und die Tendenz zur Dilatation nimmt ab. Die Volumenänderungen sind bei allen Seitendrücken am Anfang kompressiv. Dieselben Aussagen gelten in verstärktem Maße für den mitteldichten Sand. Das Verformungs- und Volumenänderungsverhalten von dichtem Sand bei hohen Seitendrücken gleicht dem von mitteldichtem Sand bei kleineren Seitendrücken. Daraus folgt, daß aus den Verformungseigenschaften ohne Kenntnis des Seitendrucks nicht auf die Lagerungsdichte des Sandes geschlossen werden kann. Dies ist wiederum durch die kontinuierliche Änderung der Korngerüststruktur unter steigender Belastung zu erklären (Stress-Induced Anisotropy, Spannungsinduzierte Anisotropie) (siehe hierzu ODA 1972b und c, Arthur et.al. 1977a). Nach den Untersuchungen von ODA besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Anisotropie-Index $S_1/S_3$ (der sich während der Belastung kontinuierlich ändert), dem Hauptspannungsverhältnis $(\sigma_1/\sigma_3)$ und der Dilatationsgeschwindigkeit $(1 - \Delta\varepsilon_v/\Delta\varepsilon_1)$ unabhängig davon, welche Ausgangslagerungsdichte die Sandproben hatten. Mit den mikroskopischen Betrachtungen, die er zu verschiedenen Versuchsphasen durchgeführt hat, kann er auch den grundlegenden Mechanismus der Verformung klären, der sich in verschiedenen Versuchsphasen bis zum Bruchpunkt (peak-point) ohne plötzliche Änderung fortsetzt. Daraus zieht er den Schluß, daß die Ansätze, die für den Peak-Spannungszustand formuliert sind, auch auf die Zustände vor dem Peak anwendbar sind. In der sich verformenden Probe unterscheidet er zwischen drei Zonen (dead domain, expanded domain, shear domain). Im mittleren Drittel der Probe (expanded domain) beobachtet er ein nahezu homogenes Verschiebungsfeld bis zum Erreichen des Peak-Points, erst nach Überschreiten des Peak-Points bildet sich eine Scherzone (shear domain) aus, die das Verhalten der Probe nach dem Peak im wesentlichen bestimmt (post-peak behaviour, strain-softening). In dieser Phase ist ein homogenes Verschiebungsfeld auch im mittleren Drittel der Probe nicht mehr gewährleistet. Eigene

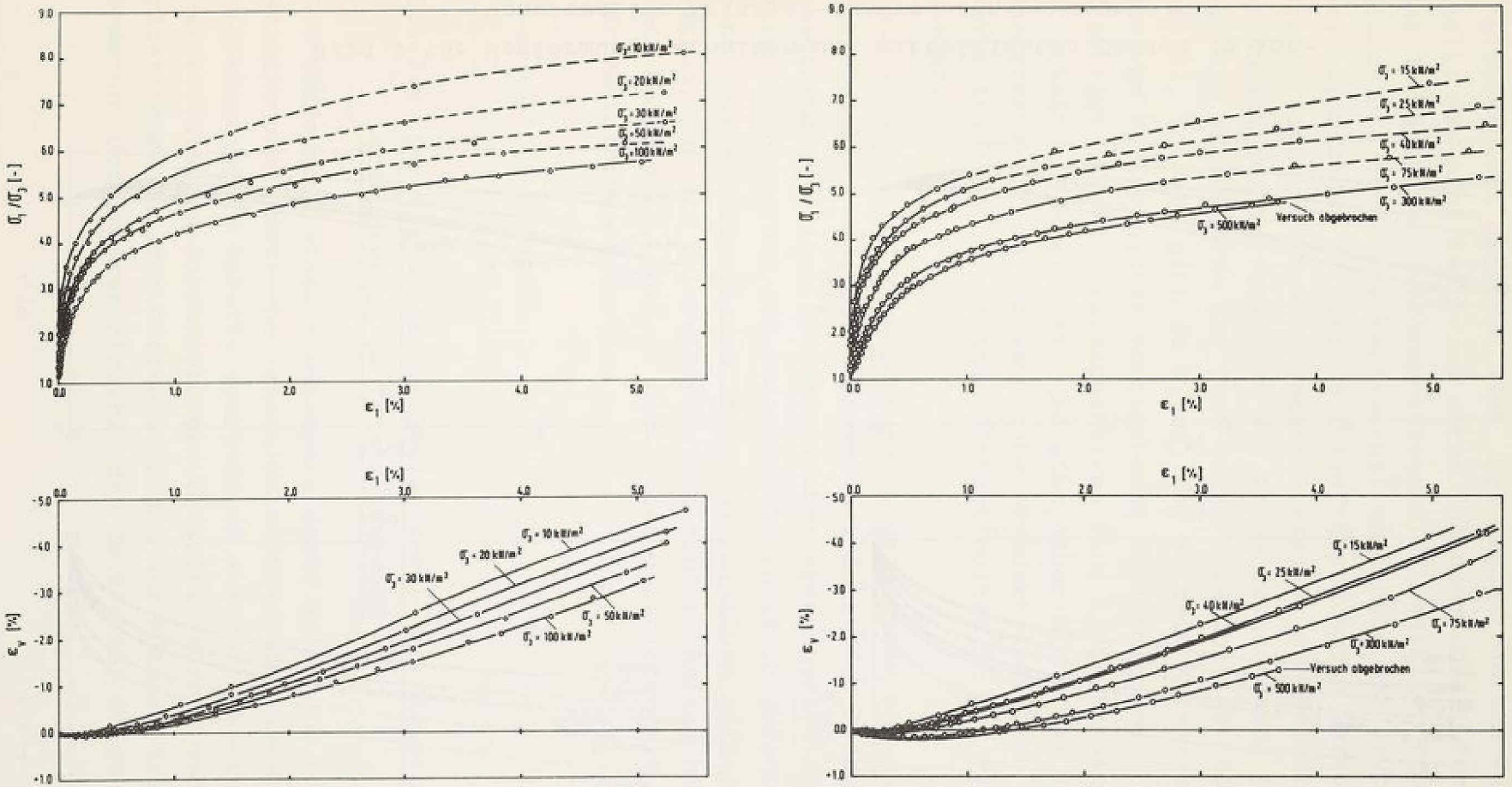



Bild 3.14: Verformungsverhalten des dichten Sandes im konventionellen Triaxial-Kompressionsversuch

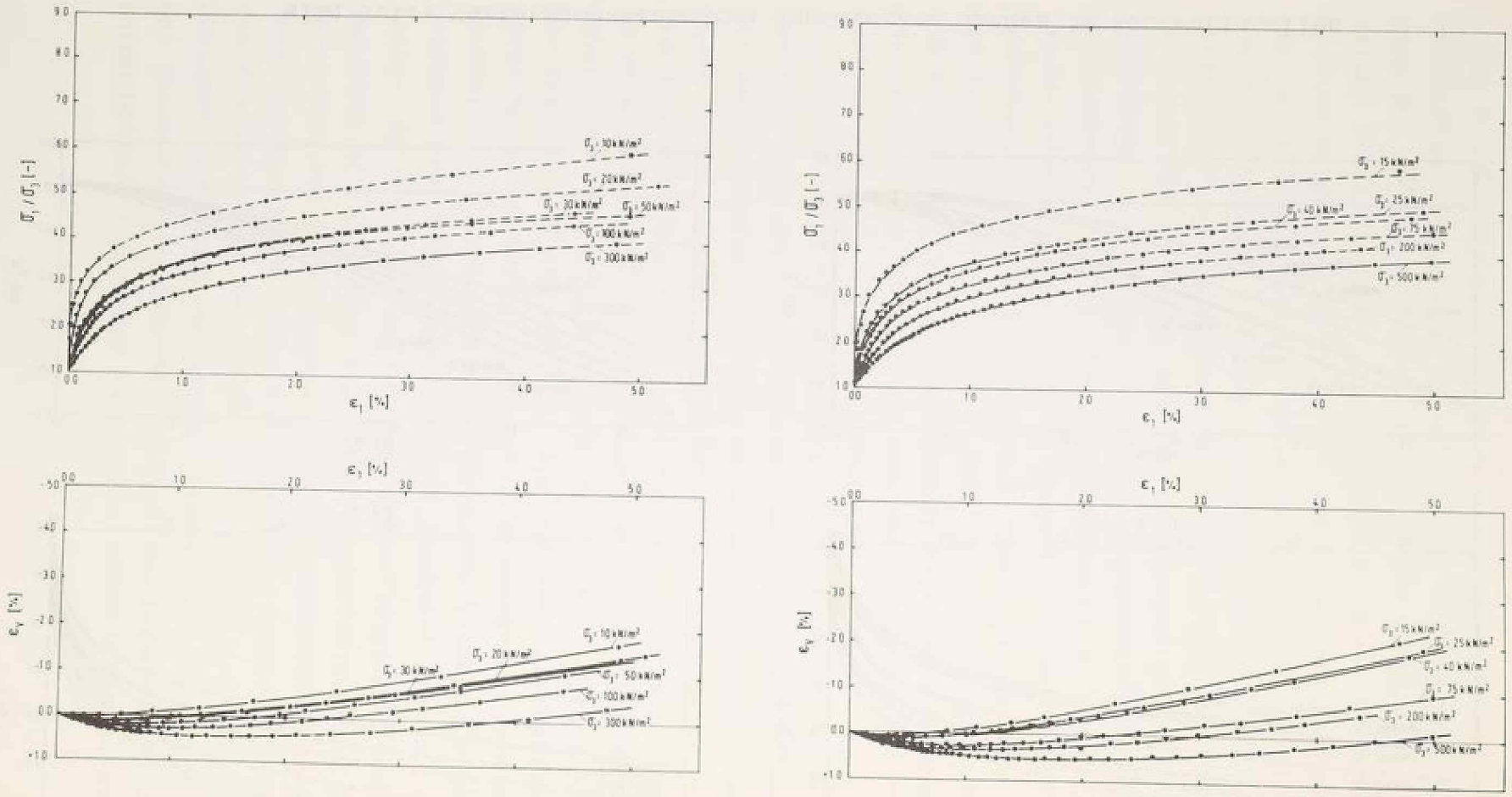



Bild 3.15: Verformungsverhalten des mitteldichten Sandes im konventionellen Triaxial-Kompressionsversuch

Versuchskurven zeigen keinen Peak-Point, da die Versuche kraftgesteuert gefahren sind. Bei weggesteuerten Versuchen stellt man nach dem Bruch einen Spannungsabfall fest, der aus der größeren Verformungsgeschwindigkeit der Probe (durch die Scherzone verursacht) gegenüber der Druckkolbengeschwindigkeit erfolgt. Bei kraftgesteuerten Versuchen stellt sich kein Spannungsabfall ein, da die Belastung unverändert den Verformungen der Probe folgen kann. Somit ist die Probe, wenn der Peak-Point erreicht ist, nicht mehr stabil, sondern geht zu Bruch. Der weitere Kurvenverlauf ist vom Versuchsgerät vorgegebenen Randbedingungen beeinträchtigt (bei den Versuchskurven sind diese Bereiche gestrichelt eingezeichnet) und gibt daher nicht das Verformungsverhalten der ganzen Probe, sondern lediglich das Verhalten einer Scherzone (Diskontinuität in der Probe) wieder.

Im Bild 3.16 sind Versuchskurven für dichten und auch für mitteldichten Sand aufgetragen, bei denen die Proben, ausgehend von einem hydrostatischen Spannungszustand, durch Verringerung des Seitendrucks zu Bruch gefahren sind. Die Versuchskurven zeigen die gleichen Effekte wie vorhin, nur die Volumenänderungen sind zu Anfang nicht mehr kompressiv, sondern die Proben dilatieren mit Beginn der Deviatorbeanspruchung.

### 3.4.2.4 Das Verhalten bei Entlastungs- und Wiederbelastungszyklen im Triaxialversuch

Die Verformung eines Sandkörpers unter Belastung hat elastische und plastische (energiedissipierende) Anteile. Die elastischen Anteile resultieren aus der Gesamtheit der elastischen Formänderungen einzelner Körner und die plastischen aus den Gleitbewegungen der Körner, die die Änderung der inneren Struktur des Sandes zur Folge haben.

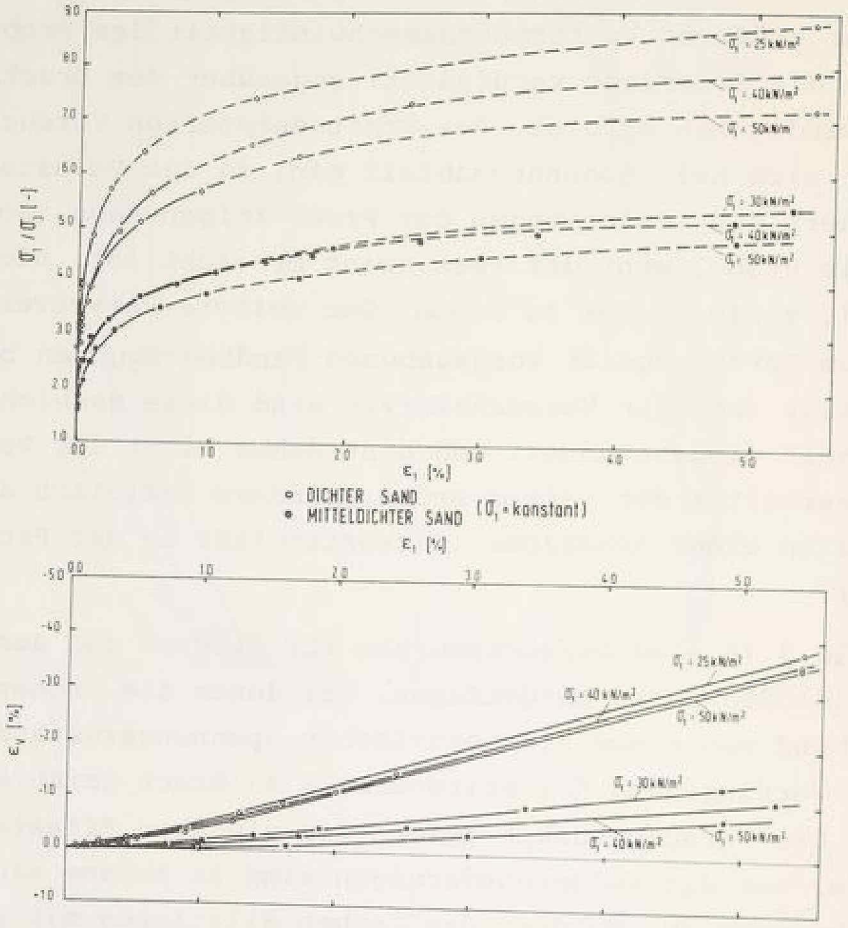
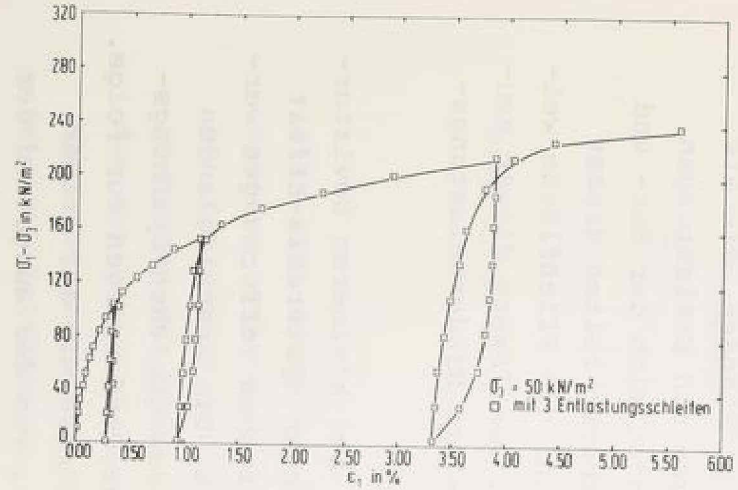


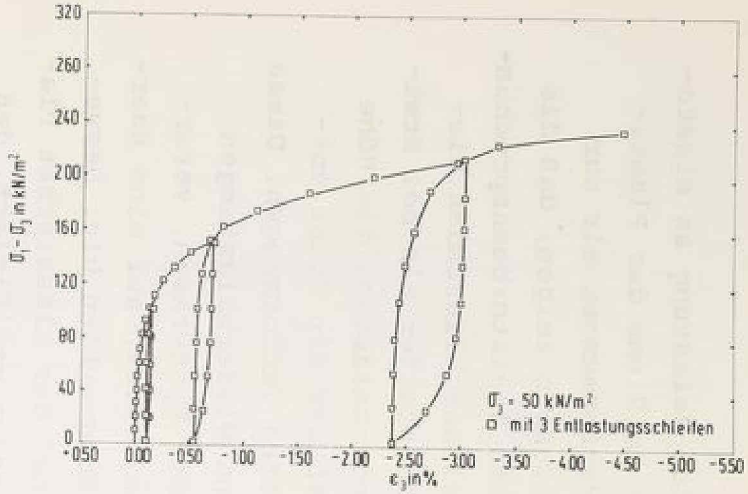

Bild 3.16: Verformungsverhalten des Sandes im Kompressionsversuch mit abnehmender $\sigma_3$

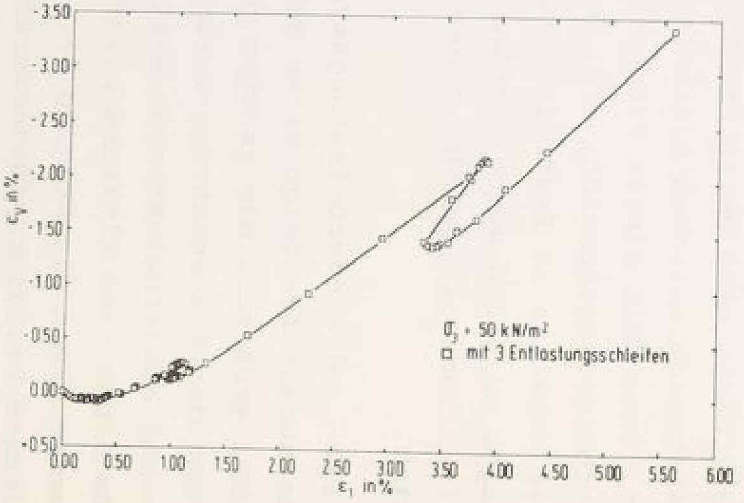
Dies kann durch die Entlastung der Probe auf eine geringere Deviatorspannung sichtbar gemacht werden, da bei Entlastungen nicht die ganzen vorhergehenden Verformungen der Probe zurückgehen. Das Bild 3.17 zeigt das typische Verhalten der Probe bei Erst-, Ent- und Wiederbelastung. Eine dichte Sandprobe wurde bei konstantem Seitendruck ($\sigma_3$ = 50 kN/m$^2$) einer Deviatorbelastung und bei drei verschiedenen Stufen dieser Belastung den Ent- und Wiederbelastungszyklen unterworfen.

Die Probe verformt sich von Anfang der Belastung an elastoplastisch. Es gibt keine Fließgrenze im Sinne der Plastizitätstheorie, unterhalb derer die Verformungen als nur elastisch anzusehen sind. Die Entlastungen zeigen, daß die Verformungen auch schon bei geringeren Deviatorbeanspruchungen nicht völlig reversibel sind. Bei anschließenden Wiederbelastungen verhält sich die Probe steifer als bei Erstbelastungen. Erst dann, wenn die Wiederbelastung die Höhe der Deviatorspannung erreicht hat, ab der die Probe entlastet wurde, kommt es wieder zu großen Verformungen. Diese reversiblen Verformungen bei Ent- und Wiederbelastungen sind nicht rein elastischer Natur. Die Hysteresen, verursacht bei Ent- und Wiederbelastungen, weisen auf eine Energiedissipation während dieser Belastungszyklen hin. Deswegen wird das "Konzept der Fließfläche" der klassischen Plastizitätstheorie in dieser Arbeit derart modifiziert, daß die Fließfläche im Hauptspannungsraum nicht die Grenze der Elastizität, sondern die Grenze der Bereiche darstellt, zwischen denen bezüglich der Verformungen grundsätzlich unterschieden werden muß. Somit wird Fließfläche zunächst lediglich als eine Belastungsfläche verstanden, die als ein Kriterium zwischen Erstbelastungen und Entlastungen dient. Innerhalb dieser Fläche befindet sich der Ent- und Wiederbelastungsbereich, erst nach Überschreiten dieser Grenze kommt es zu Erstbelastungen und die Fließfläche weitet sich zu einem neuen Zustand auf. Das Innere dieser neuen Fließfläche ist wiederum der Ent- und Wiederbelastungsbereich.

Der Ent- und Wiederbelastungszyklus bei kleineren Deviatorbelastungsstufen zeigt einen geringeren Hysteresis-Effekt als bei größeren. Die größten plastischen Verformungen werden von der Erstbelastung verursacht. Die anschließenden Ent- und Wiederbelastungen entlang des gleichen Spannungsweges haben viel kleinere plastische Verformungen zur Folge. Außerdem nimmt die Neigung der Hysterese mit der größer werdenden Deviatorspannungsstufe zu, von der ausgehend der Ent- und Wiederbelastungszyklus ausgeführt wurde (Bild 3.18).



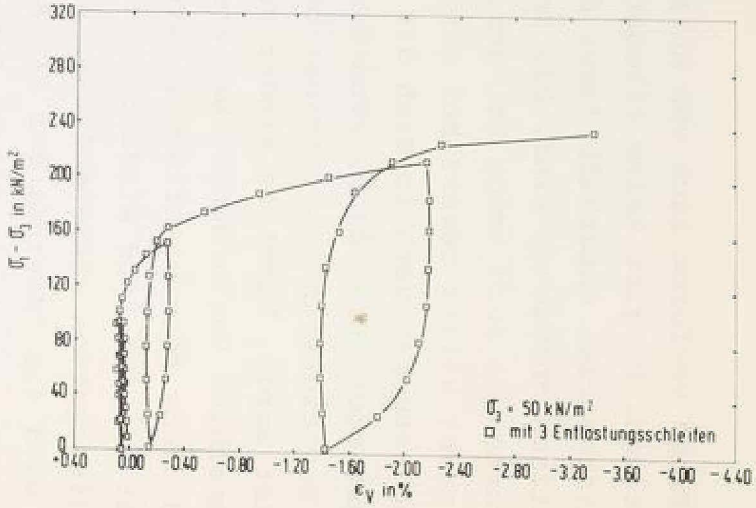




Bild 3.17: Verformungsverhalten des dichten Sandes in Ent- und Wiederbelastungszyklen

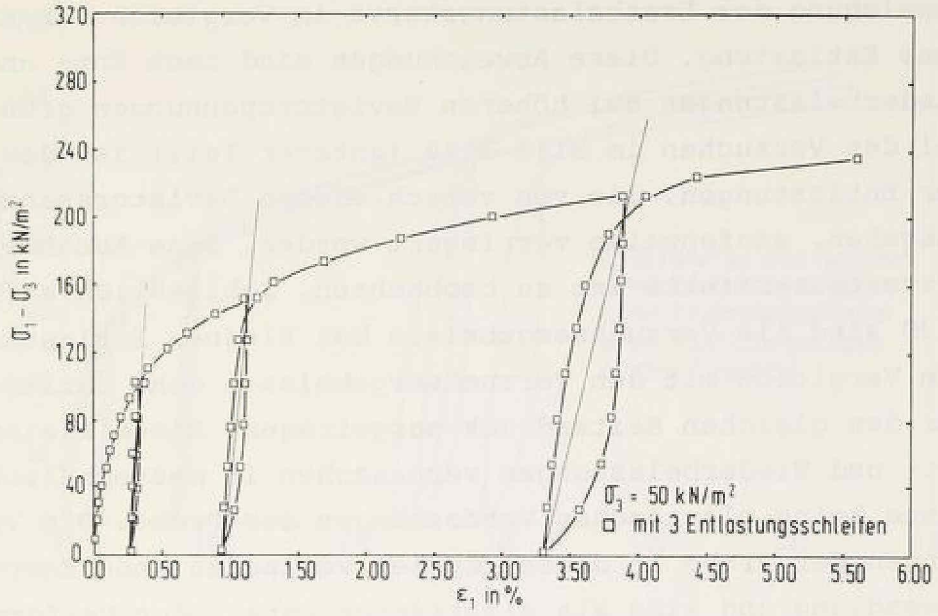



Bild 3.18: Neigung der Ent- und Wiederbelastungsschleifen

Diese Zunahme der Neigung ist besonders bei dem Zyklus groß, bei dem die Deviatorspannung ca. 90% der Grenzdeviatorspannung betrug. Außerdem zeigten gleichartige Versuche bei verschiedenen Seitendrücken, daß die Neigung der Hysteresen mit dem größer werdenden Seitendruck abnahm. Diese Hysteresiseffekte zeigen, daß alle möglichen Belastungsänderungen (auch geringfügige, wie bei kleineren Deviatorspannungen) Änderungen der Korngerüststruktur, d.h. Gleitungen der Körner und somit eine Energiedissipation verursachen. Es stellt sich die Frage, ob ein Bereich existiert, in dem keine plastischen Verformungen vorkommen und wir nur mit den elastischen Verformungen der Körner zu tun haben. Die Frage kann nur auf experimenteller Basis beantwortet werden und die Antwort wird wohl wesentlich von der Präzision der Versuchstechnik abhängig sein. Hierfür wurden Versuche mit verschiedener Anzahl von Hysteresen bei dem gleichen Seitendruck durchgeführt und im Bild 3.19 (oberer

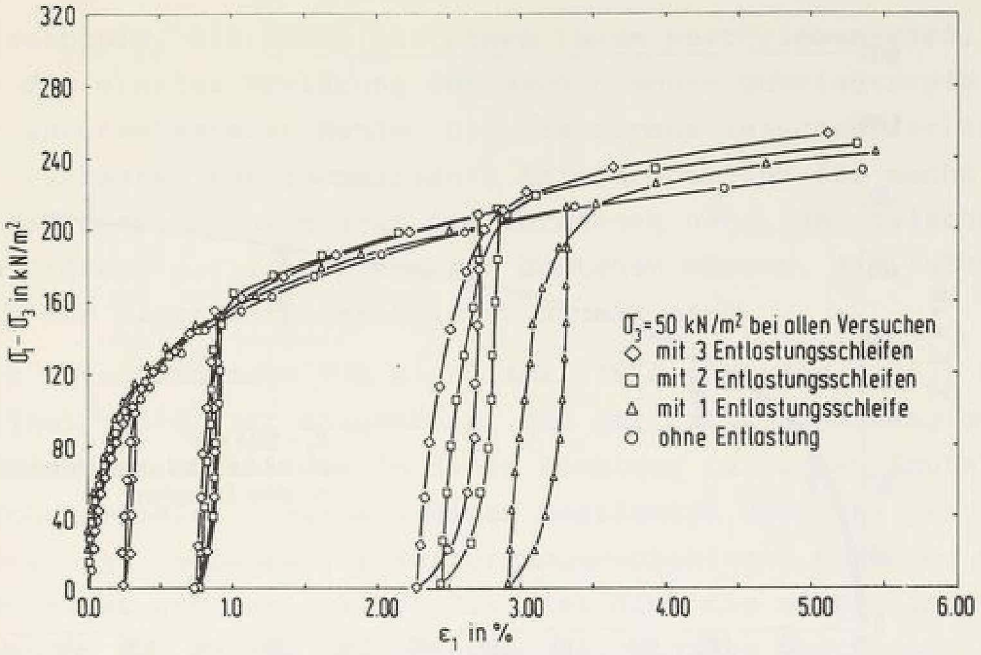
Teil) aufgetragen. Jede Hysterese bringt eine zusätzliche Abweichung der Erstbelastungskurve im Vergleich zur Kurve ohne Entlastung. Diese Abweichungen sind nach Ent- und Wiederbelastungen bei höheren Deviatorspannungen größer. Bei den Versuchen im Bild 3.19 (unterer Teil) ist die Größe der Entlastungen, die von verschiedenen Deviatorspannungen ausgehen, stufenweise verringert worden. Eine Abnahme der Hysteresis-Effekte ist zu beobachten. Schließlich auf Bild 3.20 sind die Versuchsergebnisse bei kleinen Entlastungen zum Vergleich mit den Versuchsergebnissen ohne Entlastung für den gleichen Seitendruck aufgetragen. Diese kleinen Ent- und Wiederbelastungen verursachen in meßtechnischem Sinne keine plastischen Verformungen der Probe. Die Verformungen der Probe in diesen Zyklen verlaufen ohne Energieumwandlung und sind als elastischer Anteil der Verformungen auf dem Erstbelastungsast anzusehen. Sie resultieren nur aus den elastischen Formänderungen der Körner, eine Gleitung der Körner tritt nicht auf.

Die elastischen Verformungen eines querisotropen Mediums (wie es im allgemeinen für Sand vorausgesetzt wird) werden durch fünf voneinander unabhängige Konstanten bestimmt (siehe hierzu Kapitel 2). Daß eine direkte Messung dieser Größen auf außerordentliche versuchstechnische Schwierigkeiten stößt, liegt auf der Hand. Deswegen sucht man andere Anhaltspunkte in bezug auf die Korngerüststruktur, um die Frage der Querisotropie zu behandeln. Zunächst, um von der Sandart unabhängige Größen zu erhalten, werden die dimensionslosen Größen

$$\alpha = \frac{E_y}{E_x} , \quad \gamma = \frac{\nu_{yy}}{\nu_{xy}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{G_{yy}}{G_{xy}} \tag{3.1}$$

eingeführt.

Da der elastische Anteil der Verformungen bei Sand in Verbindung mit den Kontaktflächen der Körner zu sehen ist, kann angenommen werden, daß die relativen Größen $\alpha, \gamma, \beta$ nur durch die Korngerüststruktur bedingt sind.
Die im Kapitel 3.4.2.1 angesprochene geometrische




DICHTER SAND

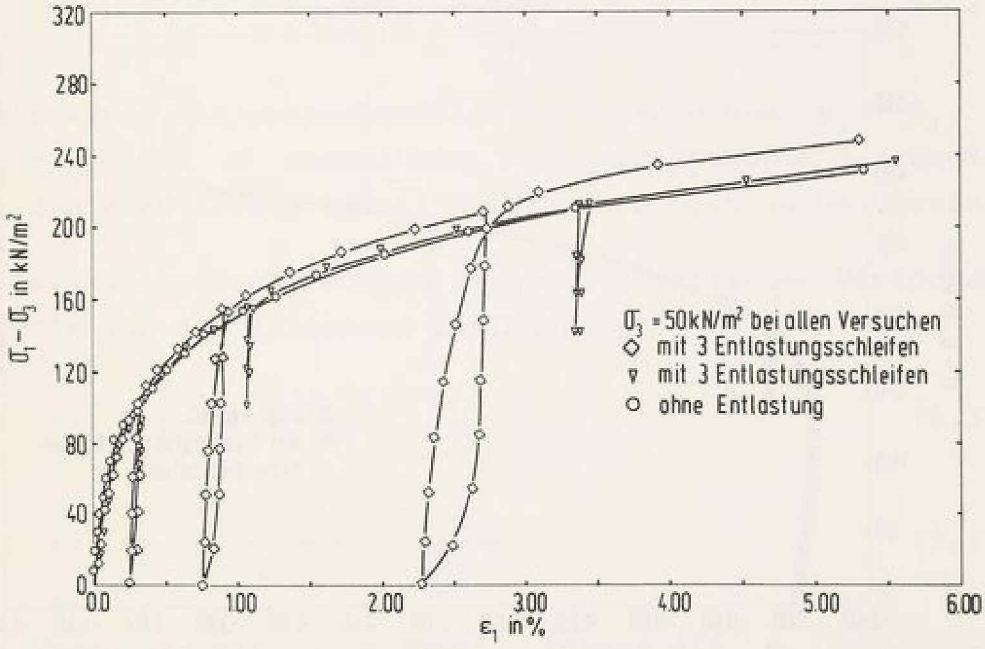
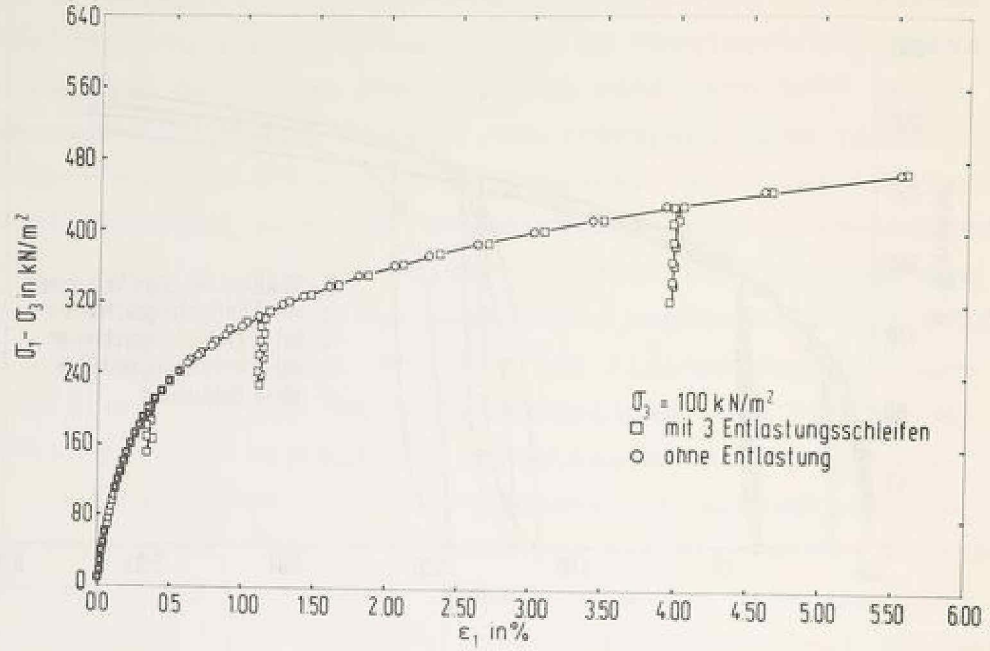



Bild 3.19: Einfluß der Ent- und Wiederbelastungszyklen auf das Verformungsverhalten des dichten Sandes




DICHTER SAND

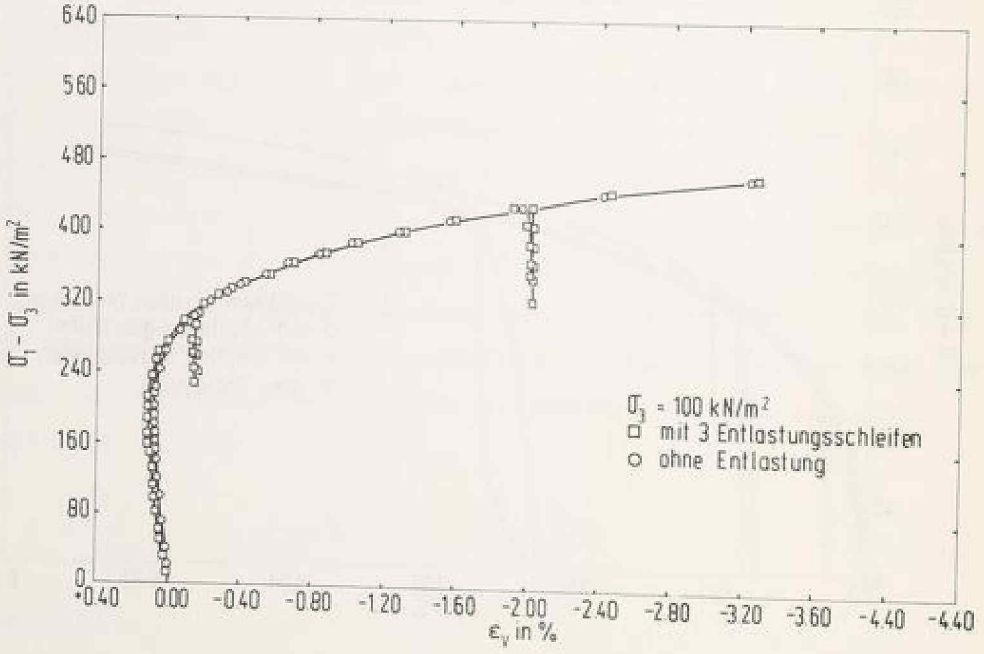



Bild 3.20: Einfluß der kleinen Entlastungen auf das Verformungsverhalten des dichten Sandes

Anisotropie, die durch nur einen Index beschrieben wird, ist die einzige Erklärung der mechanischen Querisotropie der unvorbelasteten Sande. Die Diskrepanz zwischen der Zahl der Parameter für geometrische Anisotropie und für mechanische Querisotropie legt die Vermutung nahe, daß zwischen den Größen $\alpha, \gamma, \beta$ Beziehungen bestehen müssen, die außerhalb der Elastizitätstheorie zu suchen sind.

Nach Untersuchungen von Wiendieck (1970), Barden (1963) und Jelinek (1948) ist anzunehmen, daß der richtungsabhängige E-Modul der Anzahl der in diese Richtung fallenden Kontaktflächennormalen innerhalb eines bestimmten Volumens proportional ist. Solange der Verformungsmechanismus körniger Medien nicht genauer geklärt ist, ist dies die nächstliegende Annahme. Mit diesen durch Versuchsergebnisse gestützten und elastizitätstheoretischen Überlegungen erhält Wiendieck (1970) zwischen $\alpha, \gamma$ und $\beta$ die folgenden Beziehungen

$$\alpha = \gamma \qquad \beta = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + 2\alpha\ \nu_{xy}}{2(1 + \gamma\ \nu_{xy})} \tag{3.2}$$

Somit würde die versuchsmäßige Bestimmung von $E_x = E_1$, $\nu_{xy} = \nu_1$ und $\alpha$ ausreichen, die Querisotropie der Sande für den elastischen Anteil der Verformungen zu beschreiben.

Im Triaxialversuch rechnen sich die elastischen Verformungsanteile aus den folgenden Beziehungen:

$$\Delta\varepsilon_1^e = \frac{\Delta\sigma_1}{E_1} - \frac{2\nu_3\ \Delta\sigma_3}{E_3} \tag{3.3}$$

$$\Delta\varepsilon_3^e = \frac{(1-\nu_3)\cdot\Delta\sigma_3}{E_3} - \frac{\nu_1\ \Delta\sigma_1}{E_1} \tag{3.4}$$

Bei Versuchen mit $\sigma_3$ = Konst. können die $E_1$ und $\nu_1$-Werte für kleine Entlastungen mit den Gleichungen

$$\Delta\varepsilon_1^e = \frac{\Delta\sigma_1}{E_1}\ ; \qquad \Delta\varepsilon_3^e = -\frac{\nu_1\ \Delta\sigma_1}{E_1} \tag{3.5}$$

und bei Versuchen mit $\sigma_1$ = Konst. können die $E_3$ und

$\nu_3$-Werte für kleine Entlastungen mit den Gleichungen

$$\Delta\varepsilon_1^e = \frac{2\nu_3 \cdot \Delta\sigma_3}{E_3} \quad \text{und} \quad \Delta\varepsilon_3^e = \frac{1-\nu_3}{E_3}\,\Delta\sigma_3 \tag{3.6}$$

bestimmt werden.

Die so erhaltenen $E_1, E_3, \nu_1, \nu_3$-Werte sind für dichten und auch für mitteldichten Sand im Bild 3.21 über

$\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}$, eine dimensionslose Größe des Spannungszustandes,

aufgetragen. Wie aus den Diagrammen ersichtlich, können die Elastizitätsparameter des dichten Sandes durch die Beziehungen

$$E_1 = 1500\, p_a \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{0.23} \tag{3.7}$$

$$\nu_1 = 0.44 \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{-0.15} \tag{3.8}$$

$$\alpha = \frac{E_3}{E_1} = 1.0 \tag{3.9}$$

und des mitteldichten Sandes durch die Beziehungen

$$E_1 = 1100\, p_a \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{0.27} \tag{3.10}$$

$$\nu_1 = 0.5 \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{-0.08} \tag{3.11}$$

$$\alpha = \frac{E_3}{E_1} = 0.68 \tag{3.12}$$

mit guter Näherung angegeben werden.

Holubec (1968) hat, um den Einfluß des Spannungsweges auf die elastischen Eigenschaften des Ottawa-Sandes zu untersuchen, verschiedene Serien von Triaxial-Versuchen durch-

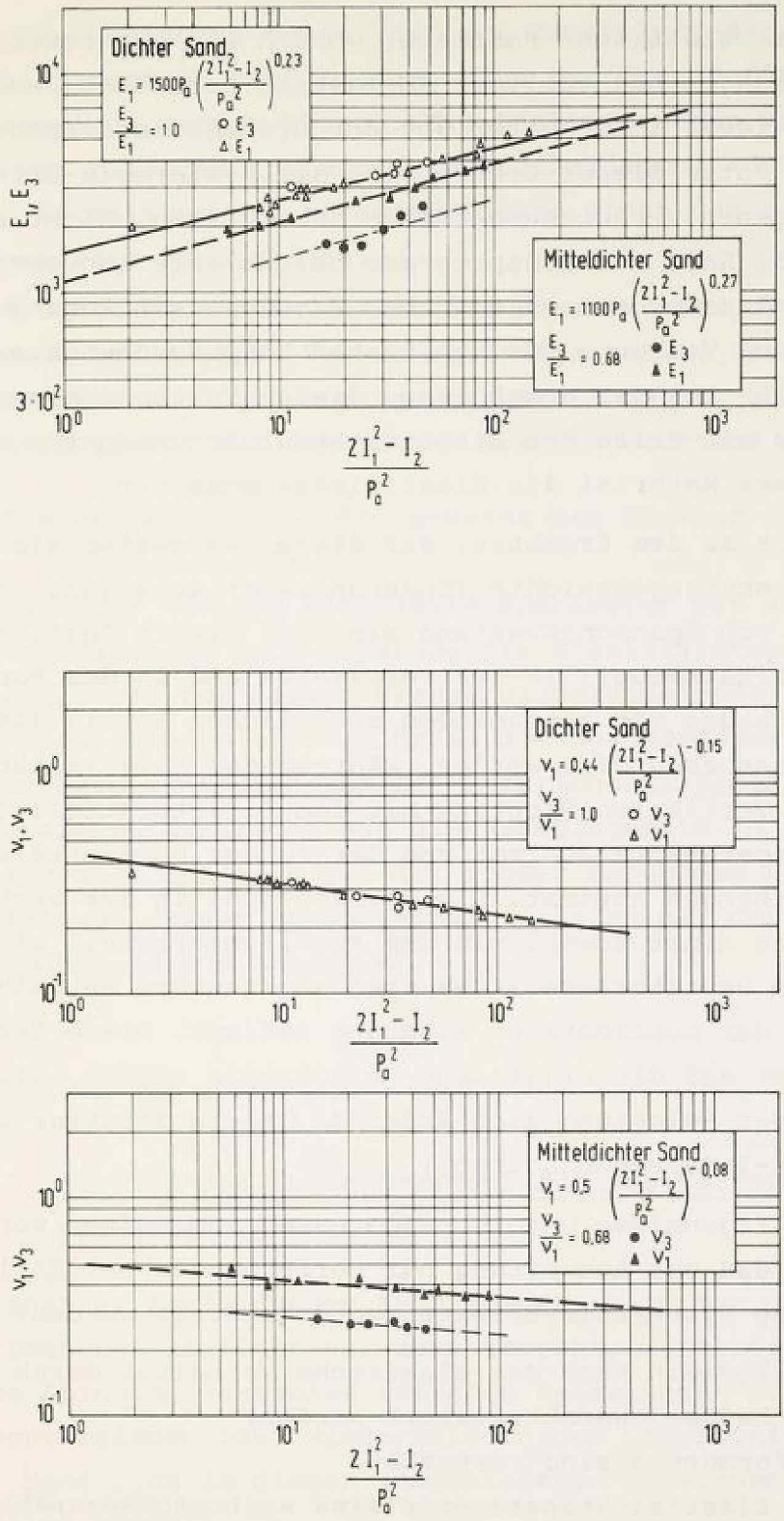



Bild 3.21: Elastizitätsparameter des dichten und des mitteldichten Sandes

geführt. Elastische Parameter wurden aus den reversiblen Verformungen bei völliger Entlastung berechnet, wobei der stress-level immer unter 80% der Grenzdeviatorspannung blieb. Unter dieser Grenze sind die Hysteresis-Effekte, wie die eigenen Versuchsergebnisse auch zeigen, nicht schwerwiegend. Sein Versuchsprogramm beinhaltete konventionelle Triaxial-Kompressionsversuche, Versuche mit konstanter $\sigma_{oct}$ und Versuche mit konstantem Hauptspannungsverhältnis $(\sigma_3/\sigma_1)$. Aus den Ergebnissen dieser Versuche errechnet Holubec mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen für ein querisotropes Material die Elastizitätsparameter.

Er kommt zu dem Ergebnis, daß diese Parameter nicht von der Spannungsgeschichte (Spannungsweg) abhängen, aber Funktionen vom Spannungszustand sind. Er stellt fest, daß die Elastizitätsmoduli in der vertikalen und in der horizontalen Richtung mit zunehmendem sphärischen Anteil des Spannungstensors größer werden, während der Elastizitätsmodul in der vertikalen Richtung mit dem Deviatoranteil des Spannungstensors zunimmt und der in der horizontalen Richtung hingegen abnimmt. Die Poisson-Zahl in der vertikalen Richtung nimmt sowohl mit dem Kugeltensoranteil als auch mit dem Deviatoranteil des Spannungstensors ab, während sie in der horizontalen Richtung zunimmt. Diese Tendenzen führt er auf die elastische Anisotropie zurück, die die im Laufe der Belastung sich ändernde innere Struktur zeigt (Stress-Induced-Anisotropy).

Eigene Ergebnisse unterscheiden sich von seinen vor allem darin, daß zur Auswertung nur Verformungen bei Entlastungen ohne Hysteresis-Effekte zugrundegelegt wurden.

Ganz allgemein kann das elastische Verhalten durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden:

1. Verformungen sind reversibel
2. Die Elastizitätsparameter sind spannungswegunabhängig (sie sind Zustandsparameter)
3. Das eingeführte elastische Potential ist zurückgewinnbar, d.h. ein Belastungszyklus verläuft ohne Energieumwandlung.

Aus der 3. Bedingung folgt, daß zur Ermittlung der Elastizitätsparameter Verformungen ohne Hysteresis-Effekte zugrundegelegt werden müssen. Die Ansätze, denen Verformungen bei völliger Entlastung zugrundeliegen, können wegen der enthaltenen Hysteresis-Effekte nicht das elastische Verhalten beschreiben.

Die Spannungswegunabhängigkeit der Elastizitätsparameter wurde auch bei eigenen Versuchen festgestellt. Die Elastizitätsparameter hängen vom Spannungszustand ab, aber nicht vom Spannungsweg, auf dem dieser Spannungszustand erreicht wird. Die Größe $(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2})$ scheint den Einfluß des Spannungszustandes auf die Elastizitätsparameter gut wiederzugeben, so daß eine gute Näherung für Elastizitätsparameter in Abhängigkeit von dieser Spannungszustandsgröße erzielt wurde. Diese dimensionslose Größe des Spannungszustandes zeigt im Hauptspannungsraum ein Rotationsellipsoid mit der Rotationsachse senkrecht auf die Raumdiagonale im Koordinatenursprung, das sich mit der größer werdenden Belastung aufweitet und dessen Achsenverhältnis sich mit der Belastung ändert (siehe Anhang B).

### 3.4.2.5 Einfluß des Spannungsweges auf das Verformungsverhalten des Sandes

Wie bisherige Ausführungen auch zeigen, wird man dem Spannungs-Dehnungsverhalten nur dann gerecht, wenn bei Änderungen des Spannungszustandes zwischen Belastungs- und Entlastungsvorgängen bzw. Wiederbelastungen unterschieden wird, da der Sand sich in diesen verschiedenen Bereichen unterschiedlich verhält.

Eines von den gebräuchlichsten Unterscheidungskriterien dafür ist die Neigung der Tangente (Stress-level) an den Spannungskreis im Mohr'schen Diagramm (Bild 3.22). Belastung oder Entlastung liegt vor, wenn die Neigung der Tan-

gente zu- oder abnimmt. Diese Neigung kann als Funktion von Spannungen ausgedrückt werden

$$\sin \varphi_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = f_1(\sigma_{ij}) \qquad (3.13)$$

Das Kriterium stellt sich im Hauptspannungsraum für den Triaxialversuch in der Ebene der Rotationsymmetrie in zwei durch den Ursprung verlaufende Geraden dar (Bild 3.23). Die Neigungen dieser Geraden stehen mit $\varphi_m$ in folgenden Beziehungen

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (\sigma_1 > \sigma_3) \qquad (3.14)$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} \quad (\sigma_3 > \sigma_1) \qquad (3.15)$$

Nach der Plastizitätstheorie fängt das plastische Fließen an, wenn die Fließfläche erreicht worden ist. Für ein idealplastisches Material bleibt die Fließfläche konstant (die Grenze der möglichen Spannungszustände, somit identisch mit der Bruchfläche) und es kommt zu indefiniten (unendlichen) plastischen Verformungen in diesem Bruchzustand. Die verfestigenden Materialien (strain-hardening-materials), wie kohäsionslose Böden, unterliegen plastischem Fließen, bevor der Bruchzustand erreicht wird, d.h. irreversible aber endliche plastische Verformungen finden schon statt bei stress-levels, die niedriger liegen als die dem Bruchzustand entsprechenden. Bei solchen Materialien kann der Spannungsweg die Fließbedingung überschreiten. Mit den irreversiblen Verformungen ändert sich auch die Fließbedingung und die neue maßgebende Fließfläche verläuft in jedem Fall durch den vom Spannungsweg erreichten Spannungspunkt. Nach dem in der Plastizitätstheorie entwickelten Konzept der isotropen Verfestigung (Hill, 1950) weitet sich die Fließfläche im Hauptspannungsraum bei Durchlaufen eines monotonen (knickfreien) Spannungsweges isotrop auf und wird im

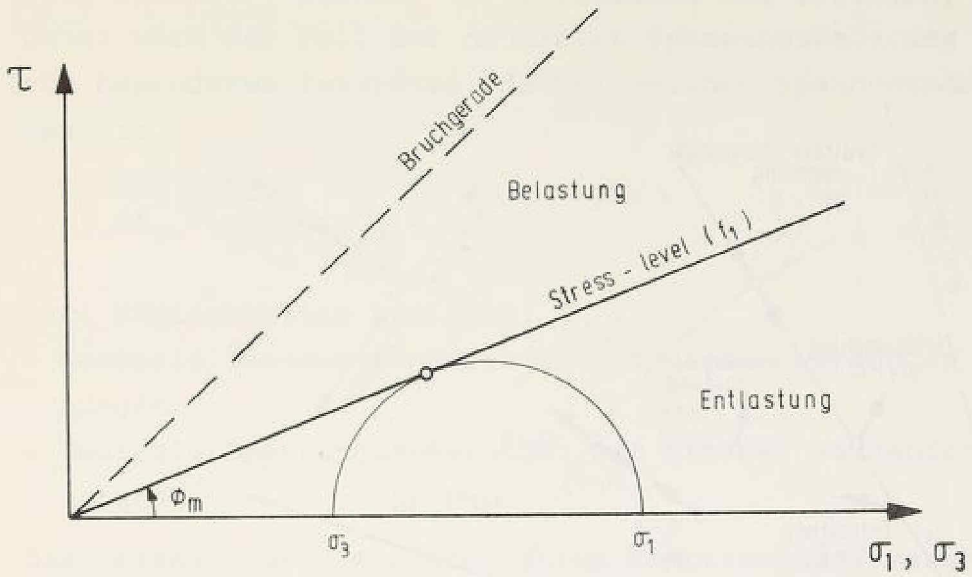



Bild 3.22: Unterscheidungskriterium für Belastungs- und Entlastungsvorgänge, dargestellt in der Mohr'schen Ebene

Grenzzustand zur Bruchfläche. Die für jeden aktuellen Zustand maßgebende Fließbedingung hängt vom Spannungszustand $(\sigma_{ij})$ und von den plastischen Verformungen sowie auch vom Spannungsweg ab, der vor Erreichen dieses Spannungszustandes durchlaufen worden ist (siehe hierzu Kapitel 2).

Für eine Spannungsänderung $(d\sigma_{ij})$ im Anschluß an einen vorgegebenen Spannungszustand, der auf der aktuellen Fließfläche liegt, d.h. der die Bedingung $f_1(\sigma_{ij}) = k_{aktuell}$ erfüllt, gibt es drei Möglichkeiten:

- Wenn $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$ (3.16)

  dann erhöht sich der Stress-level, es liegt eine Belastung vor, es kommt zu irreversiblen Verformungen.

- Wenn $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ (3.17)

  dann verringert sich der Stress-level. Es liegt eine Entlastung vor. Es kommt zu reversiblen Verformungen.

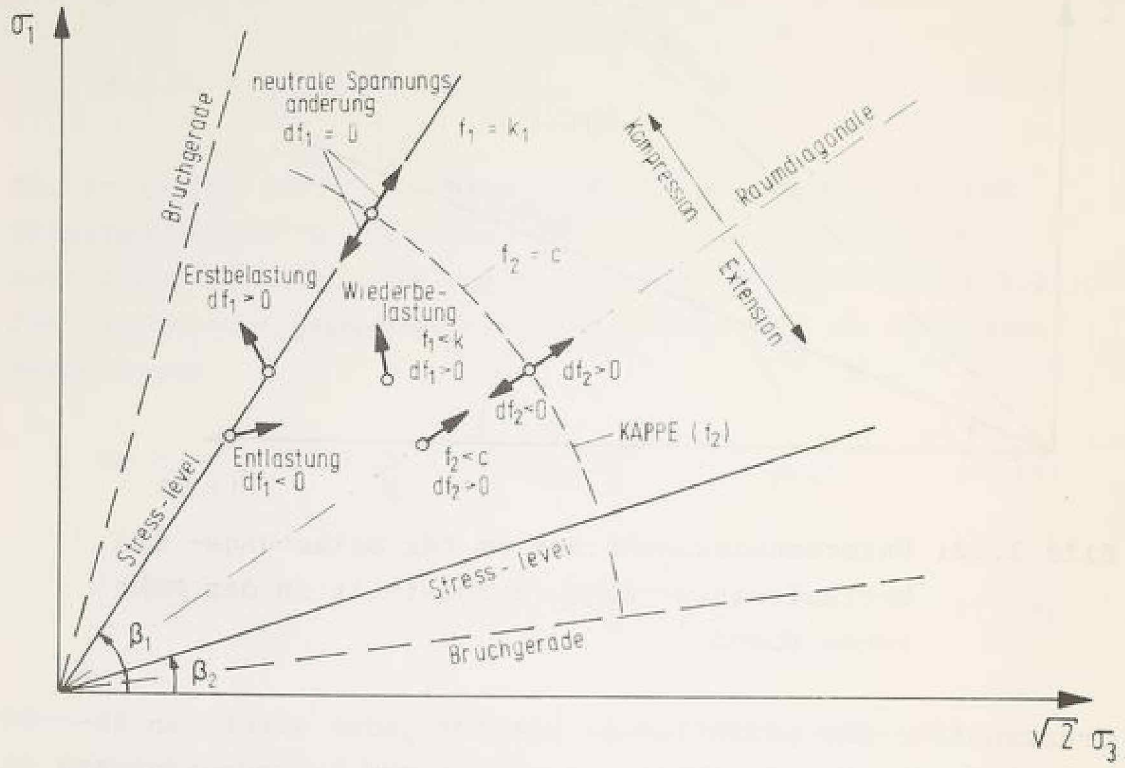



Bild 3.23: Mögliche Änderungen des Spannungszustandes und ihre Unterscheidungskriterien

- Wenn $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ (3.18)

  ist weder Entlastung noch Belastung. Es liegt eine neutrale Spannungsänderung vor.

Bei Spannungszuständen, die innerhalb der aktuellen Fließfläche liegen, d.h. für die $f_1 < k_{aktuell}$ ist, wenn $df_1 > 0$ wird, liegt eine Wiederbelastung vor.
Für kohäsionslose Böden könnte die Funktion (3.13), die über den mobilisierten Reibungswinkel (Stress-level) definiert ist, analog zur Plastizitätstheorie für verfestigende Stoffe als ein Fließkriterium dienen (Poorooshasb et.al.,

1966 und 1967; Stroud, 1971; Tatsuoka und Ishihara, 1974). Dabei wäre der Fall der neutralen Spannungsänderung nun von besonderem Interesse, da bei solchen Spannungsänderungen wie

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \qquad (3.19)$$

zwei Möglichkeiten bestehen:

- Neutrale Spannungsänderungen mit größer werdenden Spannungen
- Neutrale Spannungsänderungen mit kleiner werdenden Spannungen.

Die Spannungswege mit konstantem Hauptspannungsverhältnis stellen z.B. neutrale Spannungsänderungen dar. Wie aus Bild 3.13 für isotrope Belastung und aus Bild 3.24 für Belastung mit einem konstanten Hauptspannungsverhältnis $K = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0.5$ zu ersehen ist, zeigen aber die Verformungen Unterschiede in Abhängigkeit davon, ob die Spannungen größer oder kleiner werden.

Um diesem Phänomen gerecht zu werden, wird im Hauptspannungsraum eine zweite Funktion $f_2$ derart eingeführt, daß bei Spannungsänderungen mit konstantem Spannungsverhältnis

- $df_2 > 0$ wird, wenn eine Zunahme der Spannungen vorliegt,
- $df_2 < 0$ wird, wenn die Spannungen kleiner werden, so daß sie als Fließkriterium für plastische oder irreversible Verformungen bei neutralen Belastungen dienen kann.

Diese Teilfließfläche ist in der Triaxial-Ebene als eine gekrümmte Linie auf Bild 3.23 angedeutet (zur vollständigen Formulierung siehe Kapitel 4).

Die Einführung dieser zweiten Teilfließfläche steht nicht im Widerspruch zu den Untersuchungen von Tatsuoka und Ishihara (1974) und Poorooshasb et.al. (1966) für mögliche Fließflächen. Sie haben vorgeschlagen, die aufeinander folgenden Fließflächen durch eine Schar von Linien

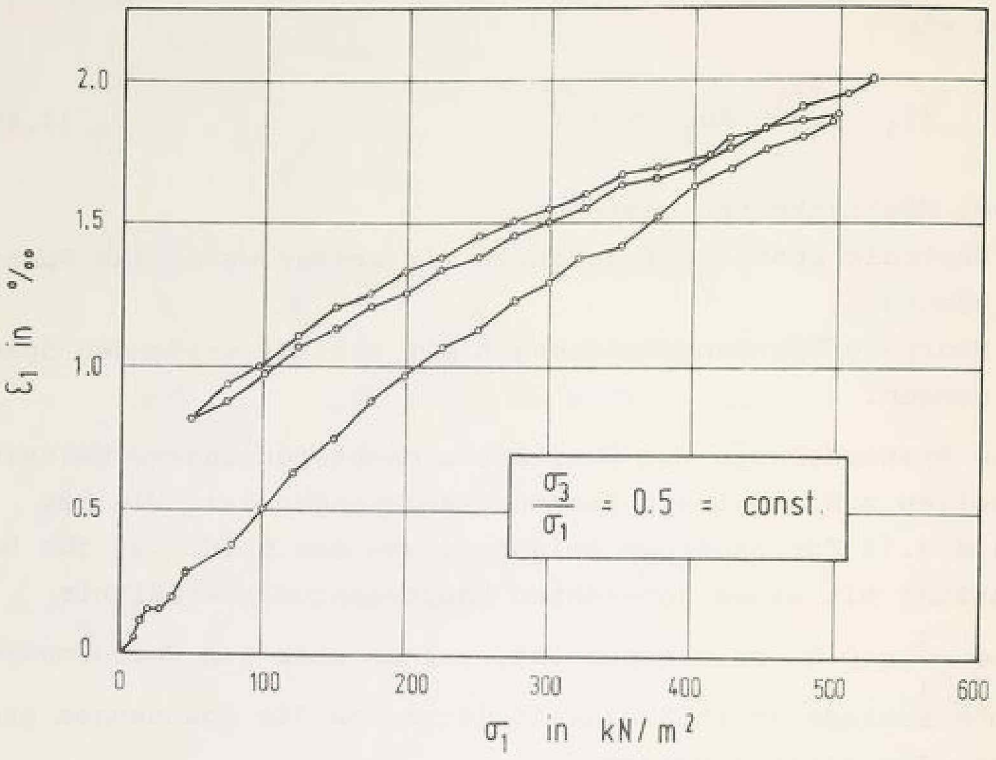



Bild 3.24: Verformungsverhalten des dichten Sandes unter Belastung und Entlastung mit konstantem Spannungsverhältnis

in der Triaxial-Ebene darzustellen. Tatsuoka und Ishihara haben aber darauf hingewiesen, daß diese Form der Fließbedingung z.B. den plastischen Verformungen unter hydrostatischer Belastung nicht gerecht wird.

Mit der Einführung der Teilfließfläche $f_2$ setzt sich die Fließbedingung aus zwei voneinander unabhängigen Flächen zusammen, die sich unter allgemeiner Belastung ($df_1 > 0$, $df_2 > 0$) beide aufweiten. Die plastischen Verformungen haben zwei Komponenten, die sich aus der Änderung der beiden Teilfließflächen ergeben (Double-Hardening-Model) (siehe hierzu Kapitel 4). Hierbei

haben die plastischen Verformungskomponenten bei einer Änderung von $f_1$ einen dilatanten und bei einer Änderung von $f_2$ einen kontraktanten Charakter.

Über den Einfluß des Spannungsweges auf das Verformungsverhalten bei Sand wurde schon von Breth et.al. (1978) berichtet. Die Bilder 3.25 und 3.27 zeigen anschaulich die Abhängigkeit der Dehnungen vom Spannungsweg. Das gilt sowohl für Belastungen als auch für Entlastungen. Im Bild 3.25 sind die Belastungsversuche nach den Spannungswegen, wie sie im Bild 3.26 eingezeichnet sind, dargestellt. Bild 3.27 zeigt Entlastungsversuche nach den Spannungswegen im Bild 3.28. Die Radialdehnung $\varepsilon_3$ reagiert empfindlicher auf den Spannungsweg als die Axialdehnung $\varepsilon_1$.

Die Entlastungsversuche widerlegen auch die Vorstellung, daß sich der Sand bei voller Entlastung elastisch verhält. Hierzu muß noch bemerkt werden, daß der Spannungsweg 5 im Bild 3.28 von A' bis zur Raumdiagonalen keine Entlastung in bezug auf $f_2$ darstellt, sondern eine Belastung, hingegen eine Entlastung in bezug auf $f_1$.

Aus den Bildern wird deutlich, daß die Vorgeschichte des Probekörpers, d.h. die vorangehenden Spannungszustände, die die Sandprobe durchlaufen hat, umso größeren Einfluß auf das Verformungsverhalten haben, je mehr sich die Spannungswege voneinander unterscheiden. Da die Summe der plastischen Verformungsinkremente auf dem bisherigen Spannungsweg den momentanen mechanischen Zustand des Haufwerks im zuletzt erreichten Spannungszustand bestimmt, kommt es nach verschiedenen Spannungswegen zu verschiedenen Verformungszuständen im selben Spannungszustand, der durch diese verschiedenen Spannungswege erreicht worden ist (dieses Phänomen wird als Erinnerungsvermögen des Bodens bezeichnet).

Im Bild 3.26 sind die Komponenten der plastischen Verformungen bei verschiedenen Belastungswegen aufgrund der Änderung der seitlichen Fließfläche ($f_1$) bei den letzten Spannungsinkrementen, die zum Spannungszustand (A) führen, in der Tabelle angegeben (bezüglich der plastischen Verformungen

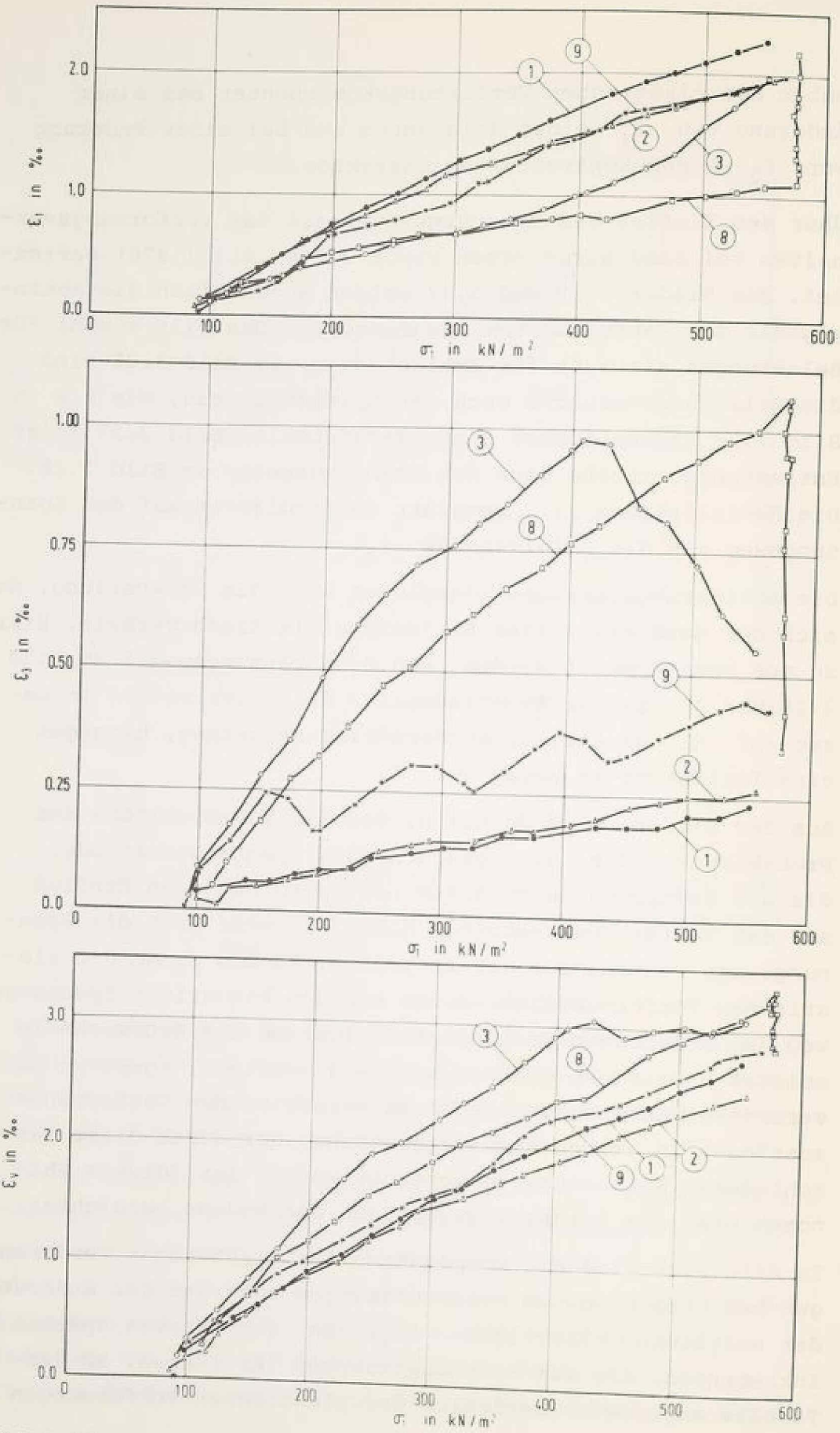
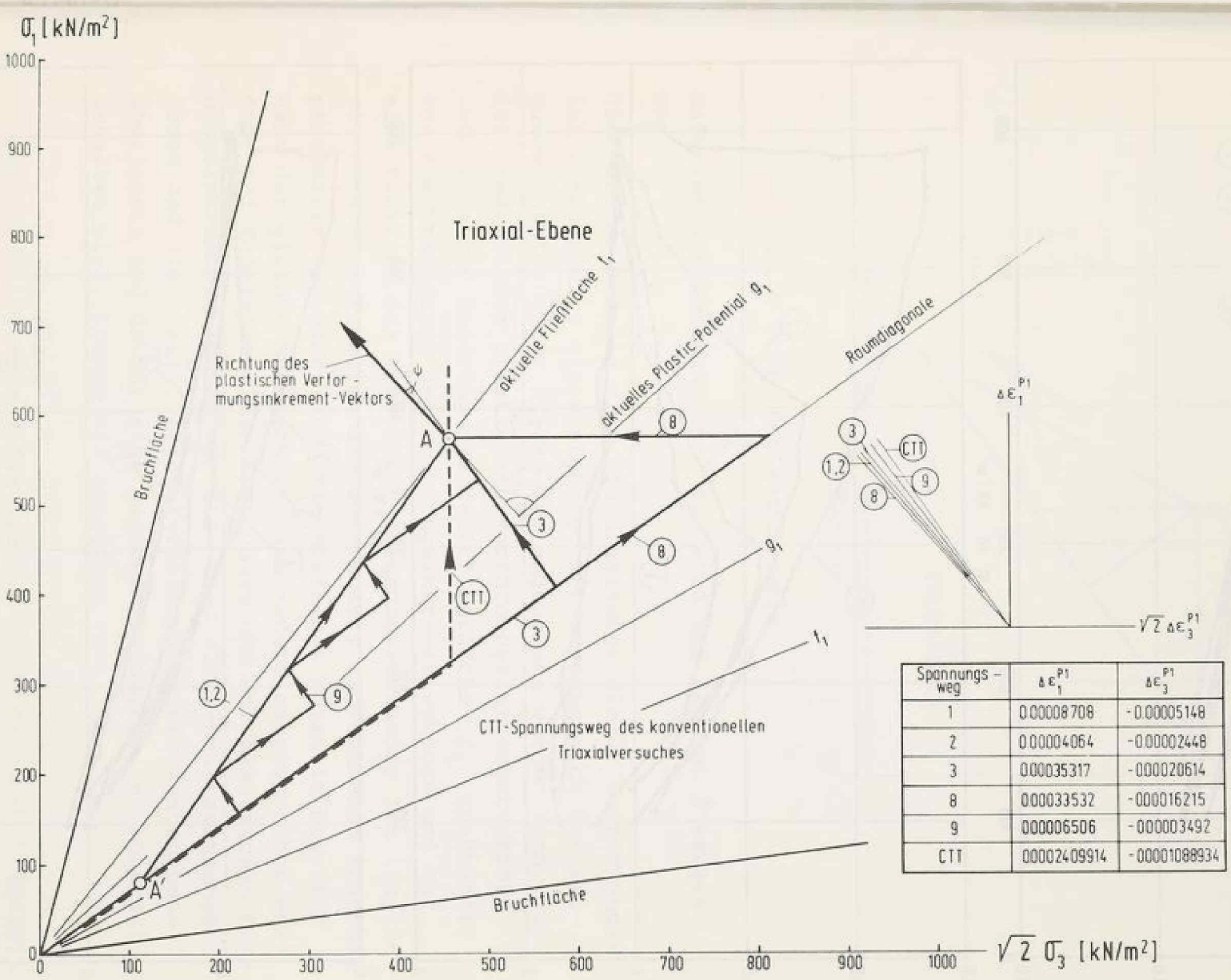



Bild 3.25: Einfluß der Spannungswege auf das Verformungsverhalten bei Belastungen für dichten Sand




| Spannungs-weg | $\Delta\varepsilon_1^{P1}$ | $\Delta\varepsilon_3^{P1}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.00008708 | -0.00005148 |
| 2 | 0.00004064 | -0.00002448 |
| 3 | 0.00035317 | -0.00020614 |
| 8 | 0.00033532 | -0.00016215 |
| 9 | 0.00006506 | -0.00003492 |
| CTT | 0.00024099 14 | -0.00010889 34 |

Bild 3.26: Belastungswege und ihr Einfluß auf die plastischen Verformungen

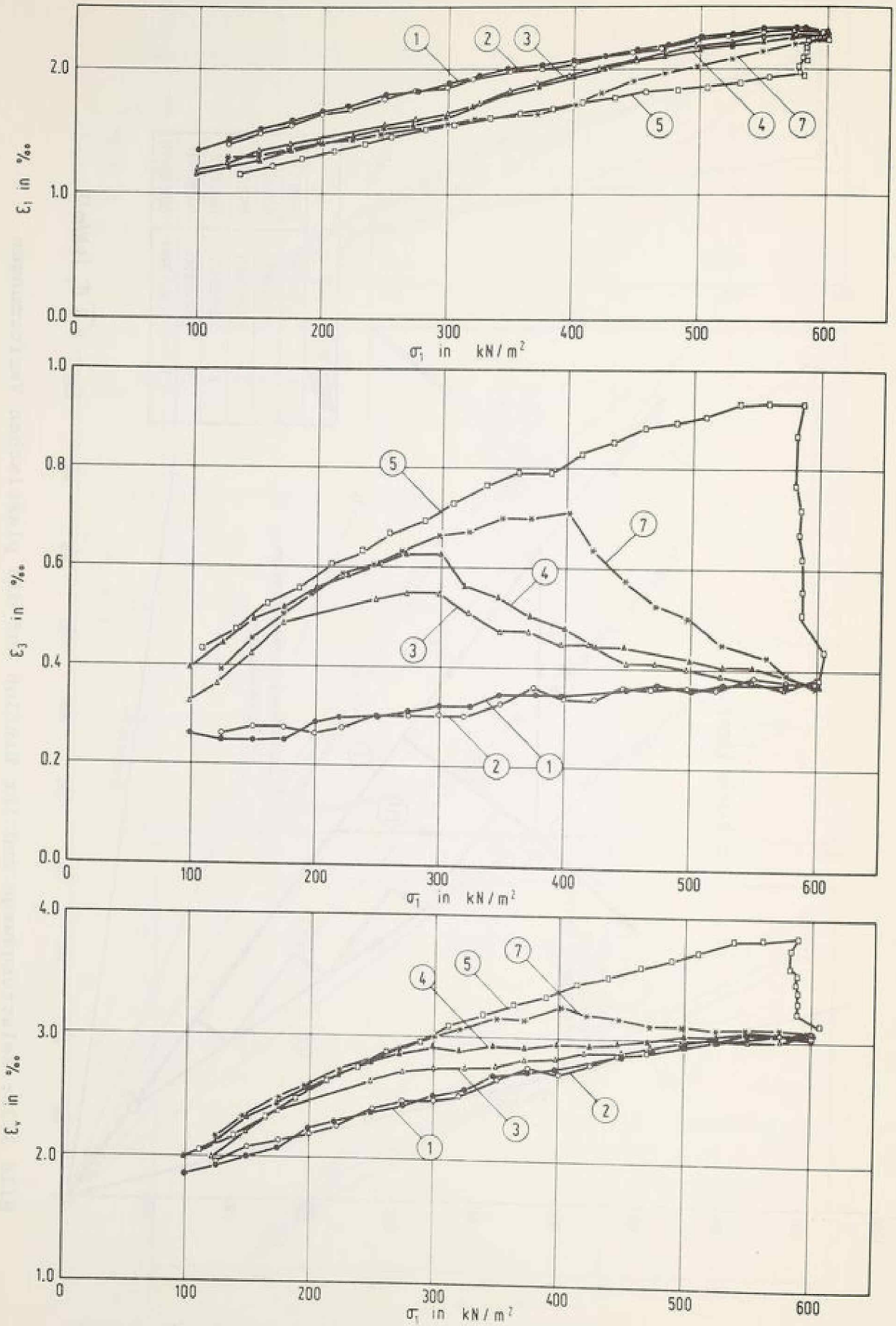



Bild 3.27: Einfluß der Spannungswege auf das Verformungsverhalten bei Entlastungen für dichten Sand

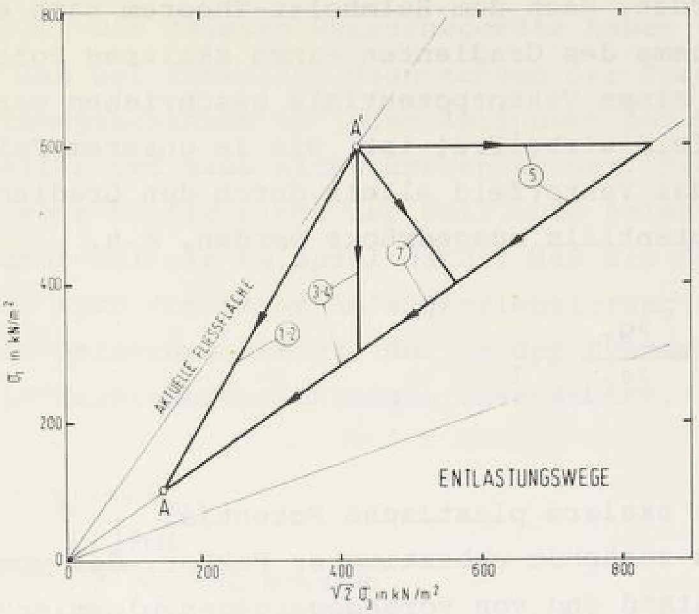



Bild 3.28: Entlastungswege

aufgrund der Änderung von $f_2$ wird auf Kapitel 2 verwiesen).

Über dieser Tabelle sind die Gradienten dieser Verformungsinkrementanteile eingezeichnet. Der Streubereich der Neigungen bleibt unter $3^{\circ}$, so daß angenommen werden kann, daß der Gradient des plastischen Verformungsinkrementvektors infolge einer Änderung der Teilfließfläche $f_1$ unabhängig von dem Gradienten des Spannungsinkrementvektors und nur eine Funktion des erreichten Spannungszustandes ist (implizit auch eine Funktion des unverändert angenommenen Zustandsparameters e oder n). Mit Hilfe des Potentialbegriffs kann der gleiche Sachverhalt auch anders ausgesprochen werden: Bei Koaxialität der Spannungen und der plastischen Dehnungsinkremente können wir die $(\sigma_1, \sqrt{2}\sigma_3)$-Hauptspannungsebene und die $(\Delta\varepsilon_1^{p1}, \sqrt{2}\Delta\varepsilon_3^{p1})$-Verformungsinkrementenebene überlagern und da für eine gegebene Sandprobe e konstant gehalten wird, können wir schreiben

$$\frac{\sqrt{2}\Delta\varepsilon_3^{p1}}{\Delta\varepsilon_1^{p1}} = f(\sigma_{ij}, e) \qquad (3.20)$$

Diese Funktion kann für die Beschreibung des Einheitsvektors des Gradienten der plastischen Verformungsinkremente heran-

gezogen werden. Nach dem Helmholtz-Theorem kann ein Vektorfeld als Summe des Gradienten eines skalaren Potentials und des Rotors eines Vektorpotentials beschrieben werden. Wenn das Vektorfeld wirbelfrei ist, wie in unserem Fall angenommen, kann das Vektorfeld allein durch den Gradienten eines skalaren Potentials ausgedrückt werden, d.h.

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p1} = \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} \Delta\lambda_1 \qquad (3.21)$$

wobei

$g_1$ - das skalare plastische Potential

$\Delta\lambda_1$ - ein zunächst unbestimmter Faktor, der vom Spannungszustand und von vorangegangenen plastischen Verformungen abhängt,

sind.

Der Ansatz (3.21) beinhaltet bestimmte Stoffeigenschaften, die für die Formulierung des Verhaltens nach der Plastizitätstheorie von Bedeutung sind (siehe hierzu Kapitel 4). Eine experimentelle Überprüfung, wie im Bild 3.26 gezeigt, wurde auch von Poorooshasb et.al. (1966) durchgeführt. Die Autoren stellten auch eine konstante Neigung (mit sehr geringer, vernachlässigter Streuung) der plastischen Verformungsinkremente bei einem auf verschiedenen Spannungswegen erreichten Spannungszustand fest.

### 3.4.3 Einfluß der Drehung von Spannungshauptachsen auf das Verformungsverhalten

In den konventionellen Triaxialgeräten werden die Bodenproben Spannungs- und Verformungszuständen unterworfen, die nur selten auf ein Bodenelement im Feld zu übertragen sind. Um mit den Spannungs- und Verformungsversuchsspuren möglichst die in der Natur herrschenden Verhältnisse nachahmen zu können, wurden neuere Versuchsgeräte entwickelt (siehe hierzu

Kapitel 3.2). Die meisten Versuchsgeräte haben jedoch den Nachteil, daß bei ihnen die Hauptachsen der Spannungs- und Verformungszustände zu jedem Zeitpunkt der Belastung zusammenfallen und sich nicht drehen können. Dies ist in der Natur sehr häufig nicht der Fall. Die Belastung durch ein Fundament sei ein Beispiel dafür, daß die Spannungshauptachsen sich von ihrer Anfangsorientierung aus drehen, während die Belastung steigt. Nur in der Symmetrieachse bleiben die Hauptachsenrichtungen unverändert.

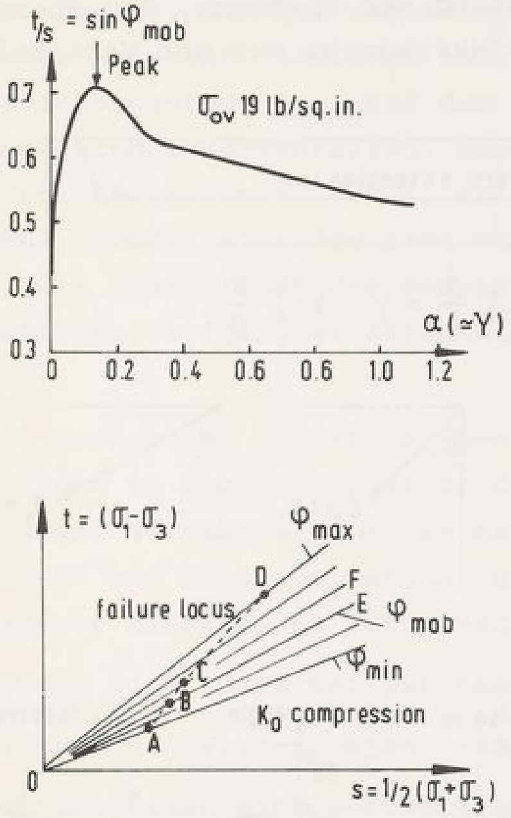



Bild 3.29: Typische Spannungsverhältnis-Scherverformungskurve des Sandes im "simple-shear-Gerät" mit fortschreitender Aufweitung der Fließflächen während der Belastung (nach Roscoe, 1970).

Das in Cambridge entwickelte "einfache Schergerät" (simple-shear) erlaubt ebenso wie die Torsionsschergeräte mit dünnen Hohlzylindern die Drehung der Hauptachsen während des

Versuchs, da bei diesen Versuchsgeräten auf die Bodenproben Scherspannungen aufgebracht werden können.

Vollständigkeitshalber soll hier über die Versuche mit dem "Simple-shear-Gerät" von Roscoe (1970 a,b) kurz berichtet werden, weil solche Versuche selbst nicht durchgeführt werden konnten. Bei den Untersuchungen von Roscoe im einfachen Schergerät wurde "Leighton Buzzard Sand" verwendet. In unserem Zusammenhang interessieren uns die Änderungen der Hauptachsen des Spannungstensors und des Verformungstensors bei stetig wachsender Belastung (Bild 3.29). Die Abweichungswinkel der Hauptrichtung der Spannung, des Spannungsinkrementes und des Dehnungsinkrementes von der Vertikalen sind, wie

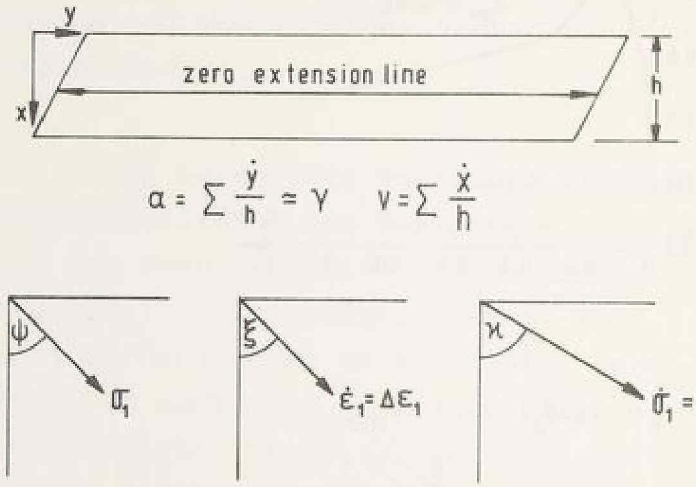



Bild 3.30: Änderung der Winkel $\psi$ für $\sigma_1$, $\xi$ für $\Delta\varepsilon_1$, $\chi$ für $\Delta\sigma_1$ gegenüber der Vertikalen während des "simple shear"-Versuchs (nach Roscoe, 1970)

im Bild 3.30 definiert. In diesem Bild ist $\psi$ der Winkel zwischen der größten Hauptspannung ($\sigma_1$) und der Vertikalen. $\chi$ und $\xi$ sind die Winkel der Richtungen von $\Delta\sigma_1 = \dot{\sigma}_1$ bzw. $\Delta\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_1$ gegenüber der Vertikalen. Diese Winkel können, wie sie im Bild 3.31 dargestellt sind, anhand der Mohr'schen Kreise ermittelt werden. Bei dem "simple shear"-Gerät sind in horizontalen Ebenen durch die Probe keine Längenänderungen vorhanden (zero-extension-lines). Wie mit Hilfe von Röntgenstrahlen nachgewiesen wurde, liegen die Bruchebenen bei diesen Versuchen ebenso horizontal. Die Versuche ergaben, daß bei wachsender Belastung zu Beginn das Verformungsverhalten elastisch ist, d.h. Hauptrichtungen des Spannungsinkrementes ($\chi$) und des Verformungsinkrementes ($\xi$) annähernd zusammenfallen. Sobald die minimale Porenziffer erreicht ist (min. V.R.), ab der die Probe anfängt zu dilatieren, verhält sich der Sand wie ein plastisches Material, d.h. die Koaxialität der Hauptrichtungen der Spannung ($\psi$) und des Verformungsinkrementes ($\xi$) ist erreicht (Bild 3.30).

Der Bruch bei peak-point findet in Ebenen ohne Längenänderung statt, nicht in Ebenen, in denen das Verhältnis der Scherspannung zur Normalspannung den maximalen Wert annimmt. Während der Ent- und Wiederbelastung (Bild 3.32) wurde ein mehr oder weniger elastisches Verhalten beobachtet.

Der Sand verhält sich somit bei zunehmender Erstbelastung bis zum Erreichen des Bruchpunktes ($\sin \phi_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$) wie ein elastisch-plastisch sich verfestigendes Material. Roscoe hat auch festgestellt, daß der Bruch ab Erreichen des peak-points ($(t/s)_{max}$) im Simple-shear-Gerät in horizontalen Ebenen (zero-extension-lines) stattfindet, die Dilatation sich nur auf diese kleinen Scherzonen beschränkt (Lokalisierung der Dilatanz) und die Verformungsmessungen an den Rändern der Probe in diesem Stadium des Versuchs das Verformungsverhalten nicht mehr repräsentativ wiedergeben.

Aus dem Spannungsdehnungsverhalten des Sandes während der Drehung der Spannungshauptachsen folgt nach den Versu-

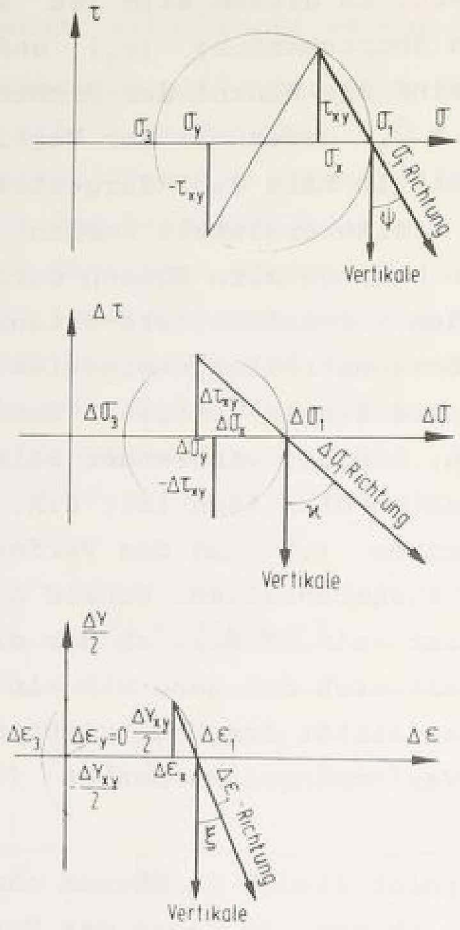



Bild 3.31: Ermittlung der Winkel $\psi, \chi, \xi$ anhand der Mohr'schen Kreise.

chen von Roscoe als wichtiges Ergebnis: Der Sand verhält sich bei niedrigem Stress-level wie ein elastisches, bei hohem Stress-level bis zum Bruch wie ein plastisches, sich verfestigendes Material. In den dazwischenliegenden Ausnutzungsgraden findet ein kontinuierlicher Übergang statt. Jede Theorie über das Spannungsverformungsverhalten des Sandes muß, wenn sie für die Praxis genügend genaue Ergebnisse liefern soll, die Dilatation berücksichtigen.

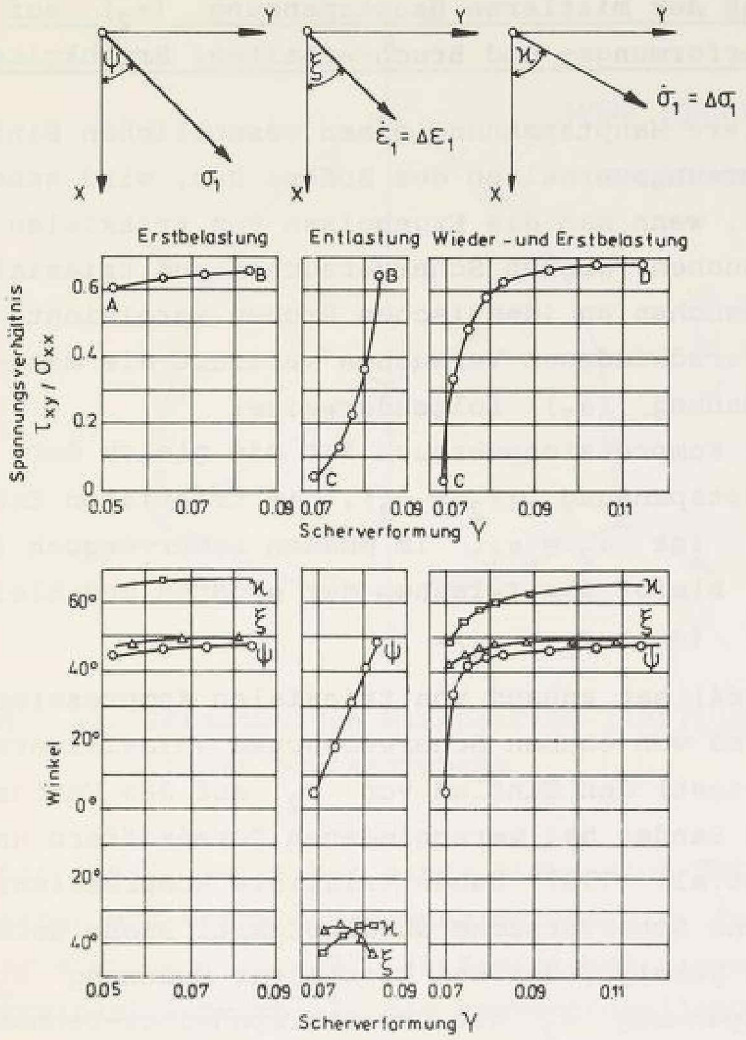



Bild 3.32: Abhängigkeit der Winkel $\psi, \xi, \chi$ von der Scherverformung während eines "simple shear"-Versuchs (nach Roscoe, 1970).

### 3.4.4 Einfluß der mittleren Hauptspannung ($\sigma_2$) auf das Verformungs- und Bruchverhalten; Bruchkriterien

Daß die mittlere Hauptspannung einen wesentlichen Einfluß auf das Verformungsverhalten des Bodens hat, wird schon dann deutlich, wenn man die Ergebnisse von triaxialen Kompressionsversuchen, ebenen Scherversuchen und triaxialen Extensionsversuchen an identischen Proben vergleicht. In diesen drei verschiedenen Versuchen variiert die mittlere Hauptspannung ($\sigma_2$) folgenderweise:
Im triaxialen Kompressionsversuch ist sie gleich der kleinsten Hauptspannung ($\sigma_2 = \sigma_3$), im triaxialen Extensionsversuch ist $\sigma_2 = \sigma_1$, im ebenen Scherversuch (Biaxialversuch) bleibt sie zwischen der größten und kleinsten Hauptspannung ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Cornforth (1964) hat anhand von triaxialen Kompressions-, Extensions- und von ebenen Scherversuchen (Biaxialversuch, plane-strain-test) den Einfluß von $\sigma_2$ auf das Verformungsverhalten des Sandes bei verschiedenen Porenziffern untersucht. Finn et.al. (1967) haben triaxiale Kompressionsversuche und ebene Scherversuche durchgeführt. Diese Untersuchungen haben gezeigt, daß bei konstanter Spannung $\sigma_3$ mit zunehmender Spannung $\sigma_2$ die Deviatorspannungs-Dehnungskurve ($[\sigma_1-\sigma_3]$; $\varepsilon_1$-Diagramm) steiler wird und die Dehnung bis zum Bruch abnimmt. Das volumetrische Verhalten wird bei niedrigem Stress-level mit zunehmender Spannung $\sigma_2$ kompressiver.

Die Versuche von Kirkpatrick (1957) an Sandproben, die in einer dickwandigen Hohlzylinderform in Ergänzung zu den triaxialen Kompressions- und Extensionsversuchen ausgeführt worden sind, ergaben gute Übereinstimmung der Reibungswinkel ($\sin \phi = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$) von triaxialen Kompressions- und Extensionsversuchen. Hingegen ist der Reibungswinkel größer in den dazwischenliegenden Spannungszuständen (Bild 3.33).

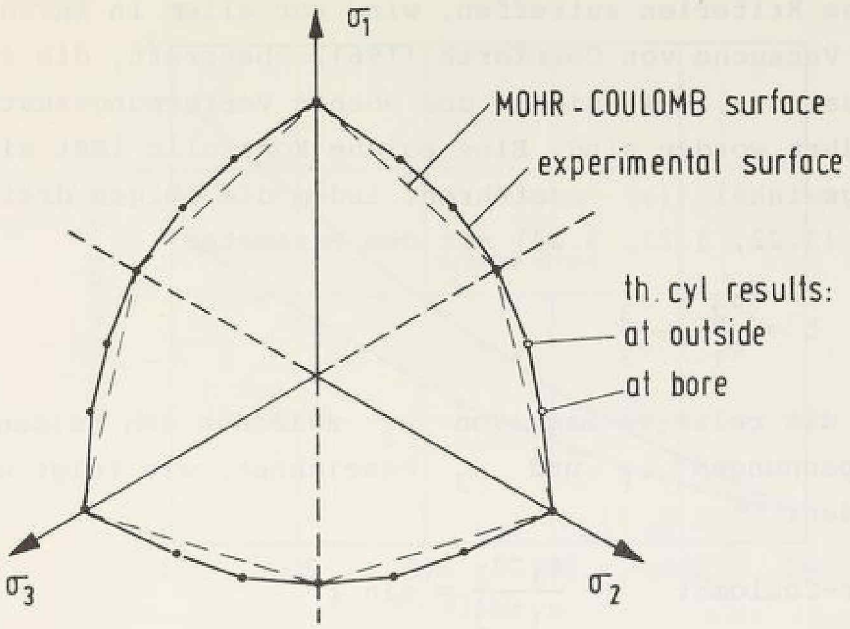



Bild 3.33: Versuche von Kirkpatrick (1957), dargestellt in der Deviatorebene

Bishop (1961) weist bei einer Diskussion über Bodeneigenschaften und deren Bestimmung darauf hin, daß ebene Scherversuche ($\varepsilon_2 = 0$) an Sandproben einen größeren Reibungswinkel ergeben als die konventionellen Triaxial-Kompressionsversuche.
In seiner Rankine-Lecture im Jahre 1966 untersucht Bishop kritisch die gebräuchlichen Bruchkriterien. Er wählt drei zu der damaligen Zeit allgemein bekannte Bruchkriterien:

Mohr-Coulomb: $$\sigma_1 - \sigma_3 = \sin \phi \ (\sigma_1 + \sigma_3) \qquad (3.22)$$

Extended-Tresca: $$\sigma_1 - \sigma_3 = \alpha \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad (3.23)$$

Extended-v.Mises: $$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\alpha^2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 \qquad (3.24)$$

Hierbei sind $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die wirksamen Hauptspannungen, $\phi$ der wirksame Reibungswinkel und $\alpha = \frac{3(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}$. Inwieweit

diese Kriterien zutreffen, wird vor allem in Anlehnung an die Versuche von Cornforth (1961) überprüft, die im Kompressions-, Extensions- und ebenen Verformungszustand durchgeführt worden sind. Eine solche Kontrolle läßt sich am Reibungswinkel ($\phi$) ausführen, indem die obigen drei Gleichungen (3.22, 3.23, 3.24) mit dem Parameter

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \tag{3.25}$$

der die relative Lage von $\sigma_2$ zwischen den beiden Extremumspannungen $\sigma_1$ und $\sigma_3$ bezeichnet, wie folgt umgeformt werden:

Mohr-Coulomb:
$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3} = \sin\phi \tag{3.26}$$

Extended-Tresca:
$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{3}b} \tag{3.27}$$

Extended-v.Mises:
$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\alpha}\sqrt{1-b+b^2} - \frac{2}{3}b} \tag{3.28}$$

Der Parameter b kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen (0 für Kompressionszustand und 1 für Extensionszustand).

Die Ergebnisse einer Vielzahl von Kompressions-, Extensions- und ebenen Verformungsversuchen mit kohäsionslosen Böden zeigen im wesentlichen folgendes:

- Der Reibungswinkel $\phi$ (Gleichung 3.26) liegt bei ebenen Verformungsversuchen (plane-strain-tests) je nach Lagerungsdichte um $0.5^\circ$ bis $4.0^\circ$ höher als bei Triaxialversuchen (Bild 3.34).
Bei gleicher Lagerungsdichte erbringen Kompressions- und Extensionsversuche gleich große Reibungswinkel.

- Das Mohr-Coulombsche Kriterium kennzeichnet das Bruchverhalten besser als die Kriterien von Tresca und von v. Mises. Die letzteren versagen bei dichtem Sand in einem weiten Bereich von b sogar völlig (Bild 3.35). Ihre Benutzung führt zu einem Überschätzen der Scherfestigkeit.

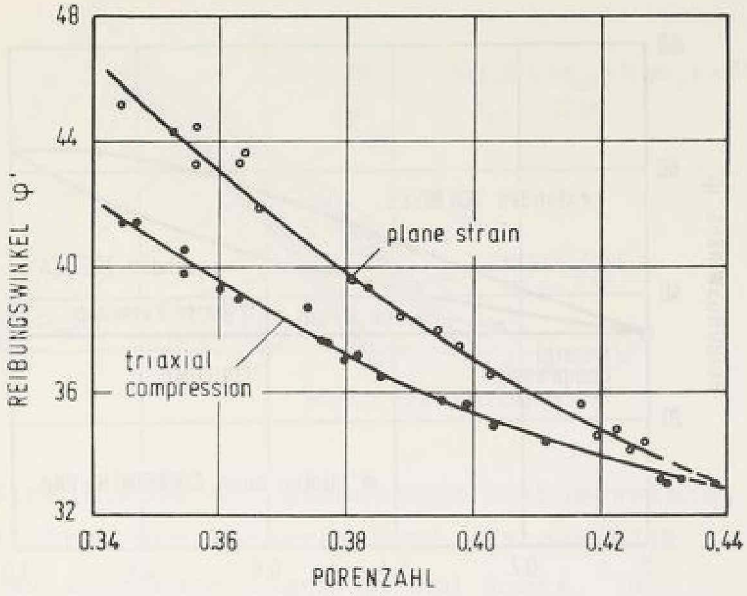
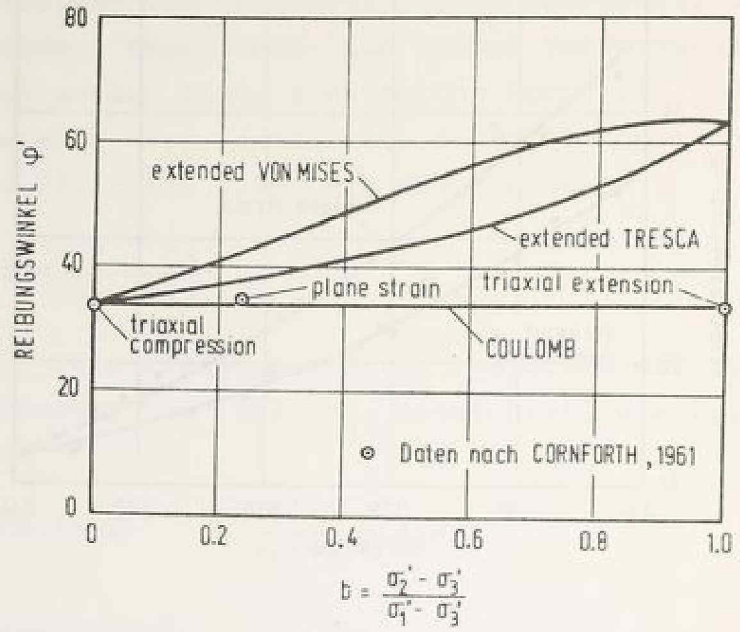



Bild 3.34: Vergleich der Ergebnisse von dränierten Triaxial- und ebenen Scherversuchen mit kohäsionslosem Boden (nach Bishop, 1966)

Die wichtigsten Untersuchungen über den Einfluß der mittleren Hauptspannung ($\sigma_2$) auf das Verformungs- und Bruchverhalten der Böden sind mit Versuchsgeräten durchgeführt worden, bei denen die Variation aller drei Hauptspannungen unabhängig voneinander möglich ist (True-Triaxial-Test).

Die Idee eines solchen Versuchsapparates geht auf Kjellmann (1936) zurück. Er stellt eine Zunahme des Reibungswinkels mit größer werdendem b fest.

Ko und Scott (1967 a,b,c und 1968) haben mit einem kubischen Versuchsapparat Sandproben getestet, bei dem die Probe über voneinander unabhängige Membrane belastet wurde. Da sie bei den Versuchskurven keinen Peak-Point feststellen konnten, wurde der Beginn der beschleunigten Zunahme der Dehnungen als Bruch angesehen und die so erhaltenen Bruchspannungen wurden der Auswertung zugrundegelegt. Das Bild 3.36 zeigt die erhaltenen Ergebnisse in der Deviatorebene.



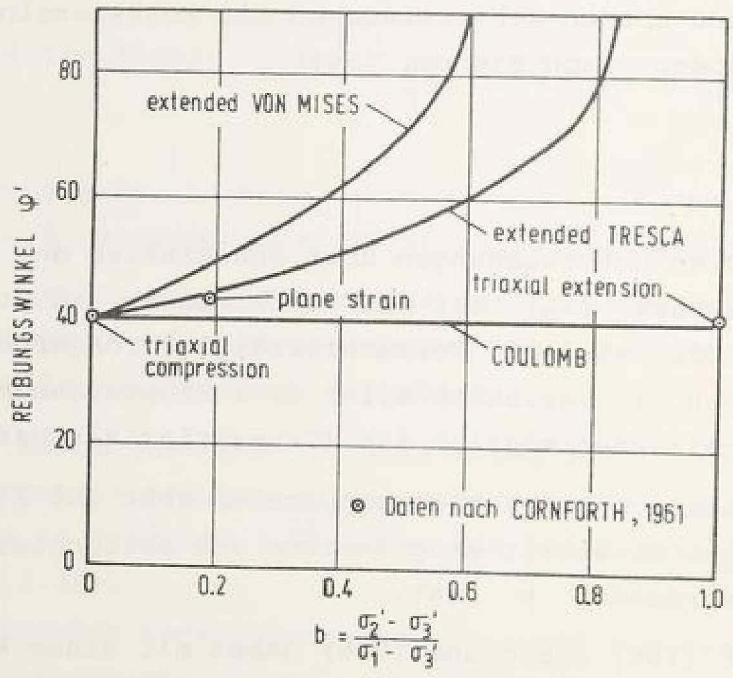




Bild 3.35: Vergleich gemessener Reibungswinkel von lockeren (oben) und dichten (unten) Sand mit den theoretischen Bruchkriterien in Abhängigkeit von der mittleren Hauptspannung (nach Bishop, 1966)

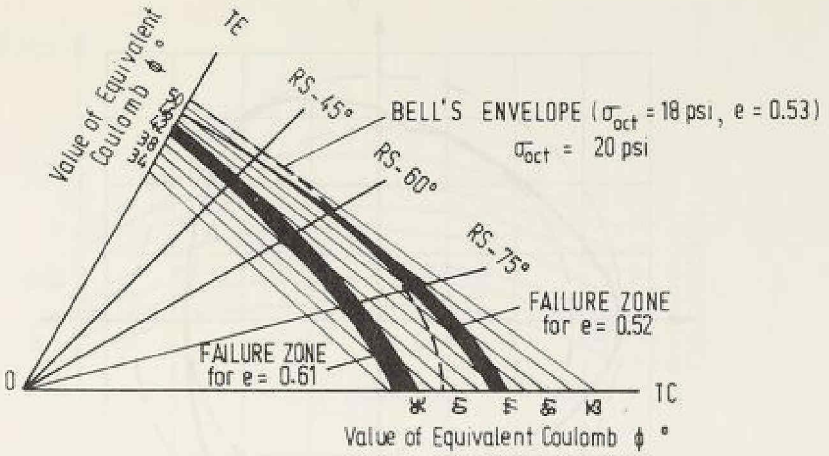



Bild 3.36: Einhüllende der gemessenen Reibungswinkel von dichtem und lockerem Sand, dargestellt in der Deviatorebene (nach Ko und Scott, 1968)

Eine Zunahme des Reibungswinkels von der Kompression über Zwischenwerte von b bis zur Extension ist zu ersehen.

Lomize und Kryzhanovsky (1967) führten Versuche an Sandproben mit einem Apparat nach demselben Prinzip wie bei Ko und Scott durch und erhielten ähnliche Ergebnisse. Sie schlagen folgendes Bruchkriterium vor

$$u_2 = \Pi_o^* \cdot u_1 \cdot \left(\frac{u_3}{u_1^3}\right)^{\alpha} \qquad (3.29)$$

worin $\Pi_o^*$ und $\alpha$ bodenabhängige Konstanten sind und

$$u_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$u_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$$u_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

bedeuten (Bild 3.37).

Sutherland und Mesdary (1969) fassen die Ergebnisse ihrer umfangreichen Untersuchungen an Sandproben mit Triaxial-Kompressionsversuchen und Versuchen in einem kubischen Triaxialgerät wie folgt zusammen:

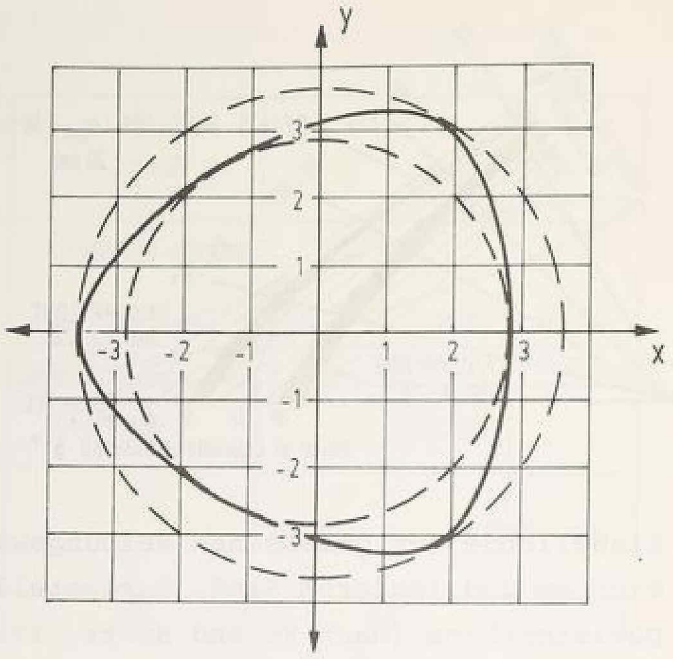



Bild 3.37: Das Bruchkriterium nach Lomize und Kryzhanovsky (1967)

- Die kubischen Triaxialversuche bringen für Kompression gleiche Ergebnisse wie die konventionellen Triaxialversuche.
- Die mittlere Hauptspannung ($\sigma_2$) hat einen wesentlichen Einfluß auf das Bruchverhalten. Die erhaltenen Reibungswinkel sind im Bereich zwischen Kompression und Extension für verschiedene $\sigma_2$-Werte im Bild 3.38 in Abhängigkeit von b dargestellt. Die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen wird mit dem Kriterium

$$\text{Extended Mohr-Coulomb} \quad \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3} = \frac{B_1}{1 - B_2\sqrt{b(1-b)}} \qquad (3.30)$$

nach Bishop (1966) erhalten. Green und Bishop (1969) sowie Proctor und Barden (1969) stellen in einem großen Bereich der b-Werte um etwa $5^{\circ}$ größere Reibungswinkel als beim Kompressionszustand fest (Bild 3.39).

Lade und Duncan (1973) berichten über die von Lade durchgeführten umfangreichen kubischen Triaxialversuche an locke-

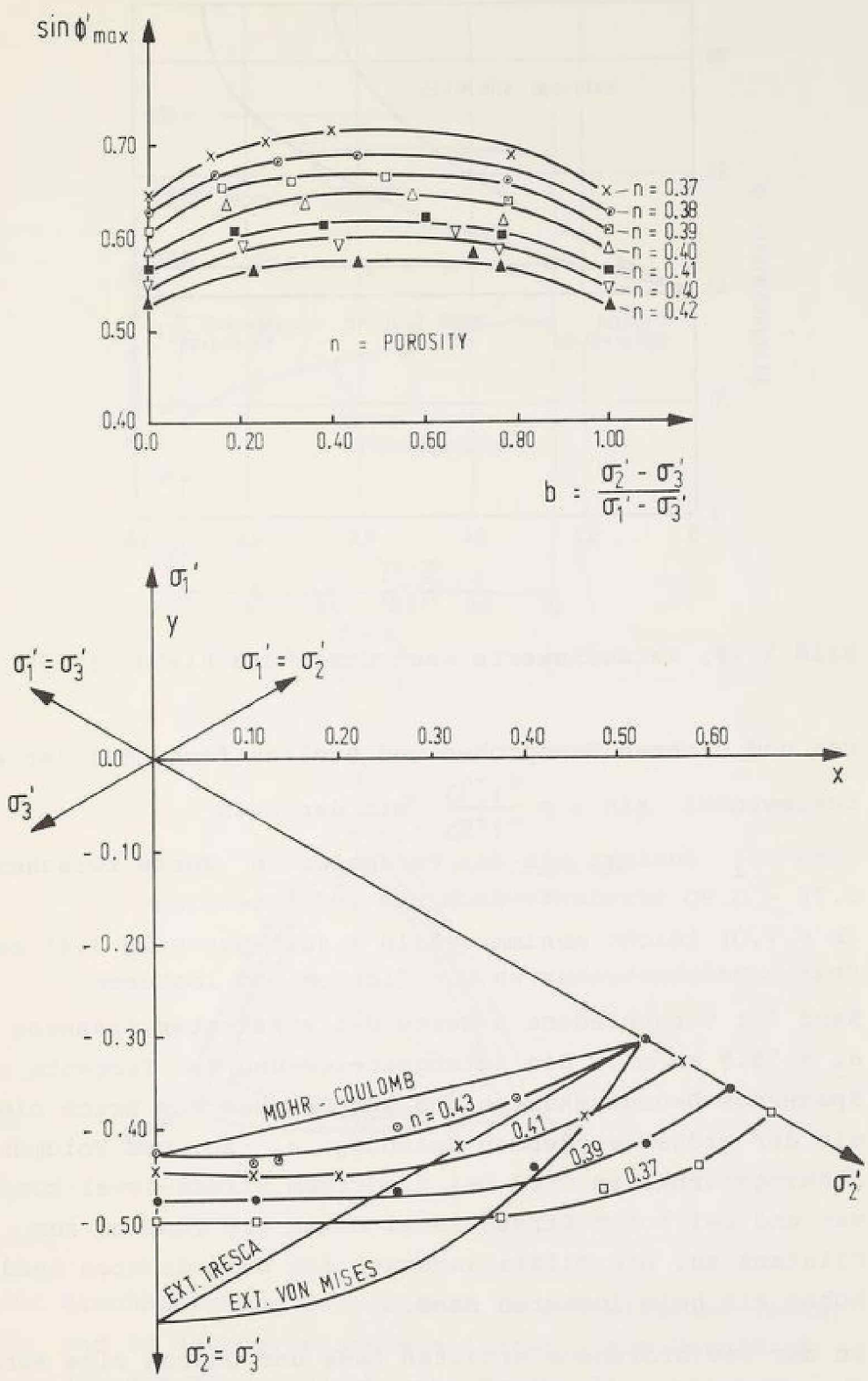



Bild 3.38: Änderung des Reibungswinkels in Abhängigkeit von b (oben) und dargestellt in der Deviatorebene (unten) nach Sutherland und Mesdary (1969)

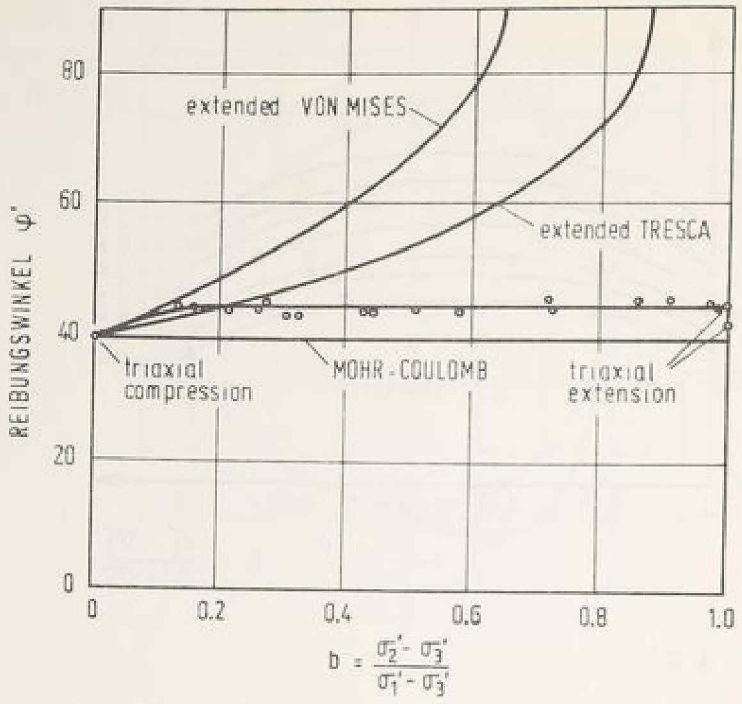



Bild 3.39: Versuchswerte nach Green und Bishop (1969)

ren und dichten Sandproben und stellen fest, daß der Reibungswinkel $\sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$ mit der Spannung $\sigma_2$ zunimmt bis der Parameter b Werte zwischen 0.75 - 0.90 erreicht, dann bis zur Extension (b = 1.0) leicht abnimmt (Bild 3.40). Das Bild 3.41 zeigt Spannungsdehnungskurven von dichtem und lockerem Sand für verschiedene b-Werte bei konstanter Spannung $\sigma_3 = 58.8\ kN/m^2$. Die Anfangssteigerung der Tangente an die Spannungs-Dehnungskurven und Dehnung bis zum Bruch nimmt mit der größer werdenden Spannung $\sigma_2$ zu. Das Volumendehnungsverhalten wird bei niedrigem Stress-level kompressiver und bei hohem Stress-level nimmt die Tendenz zur Dilatanz zu. Die Dilatationsrate ist beim dichten Sand viel höher als beim lockeren Sand.

In der Deviatorebene erhalten Lade und Duncan eine sehr gute Übereinstimmung der Versuchsdaten mit einem neuen Bruchkriterium $k_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$, indem sie mit der Voraussetzung des isotropen Verhaltens eine sechsfache Symmetrie der Ver-

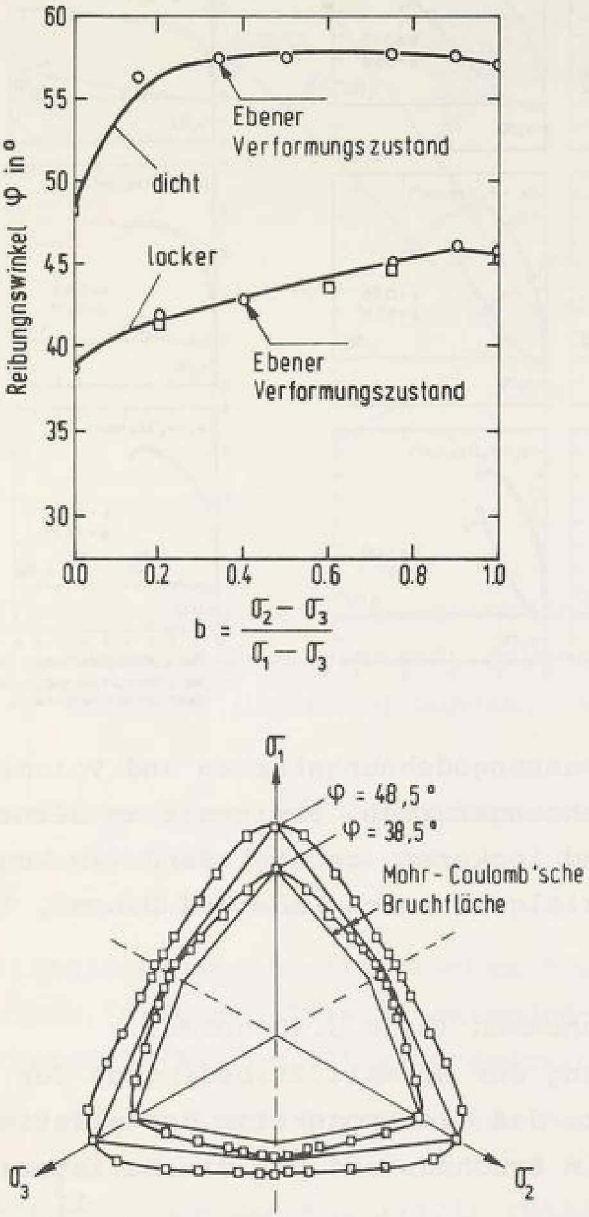



Bild 3.40: Bruchbedingung dargestellt im $\phi$-b-Diagramm (oben) und in der Deviatorebene (unten), zum Vergleich ist die Mohr-Coulomb'sche Bruchbedingung eingezeichnet (nach Lade und Duncan, 1973)

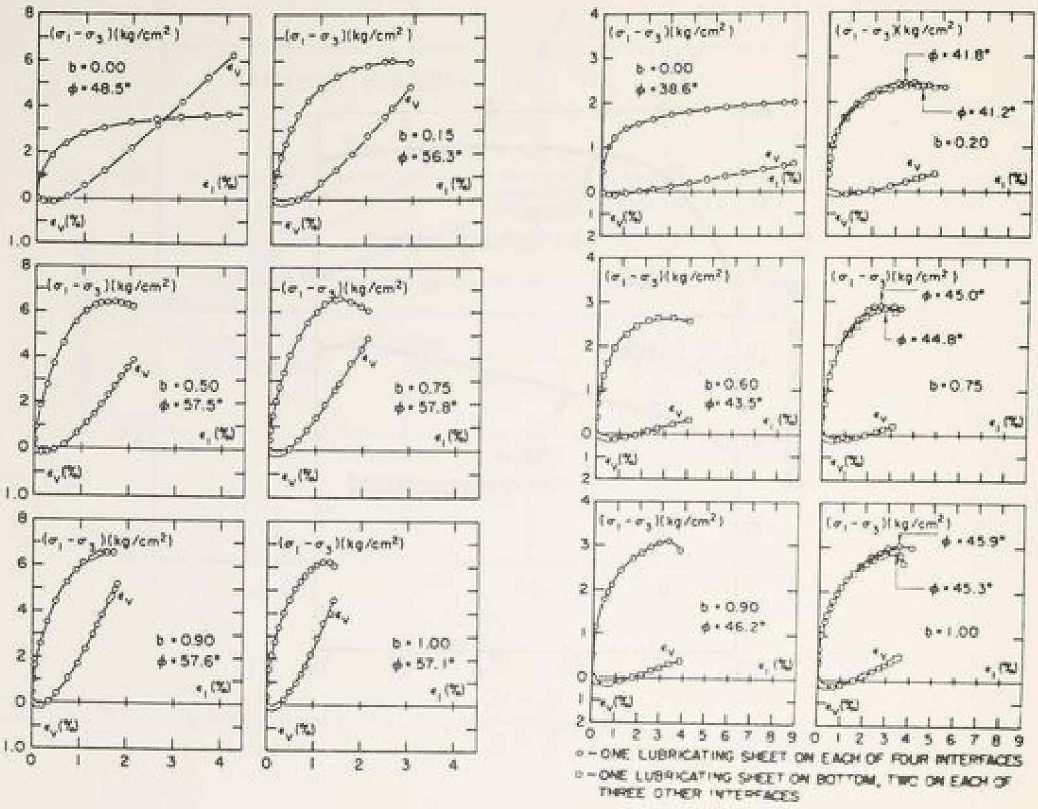



Bild 3.41: Spannungsdehnungskurven und Volumenänderungsdehnungskurven, ermittelt am dichten (links) und lockeren (rechts) Sand (im kubischen Triaxialgerät nach Lade und Duncan, 1973).

suchsdaten annehmen (Bild 3.40 unten).
Die Überprüfung der Normalitätsbedingung der Plastizitätstheorie zeigt, daß die Projektion des plastischen Dehnungsinkrementes im Bruchzustand auf die Deviatorebene senkrecht zur Spur der Bruchbedingung $k_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$ in der Deviatorebene steht, weshalb das plastische Potential für Sand in der Deviatorebene affine Spuren zu denen der Bruchbedingung, $k_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$, haben müßte (Bild 3.42).

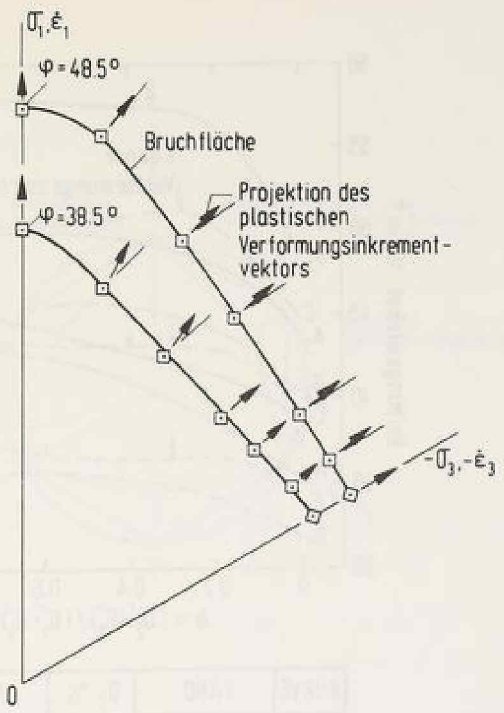


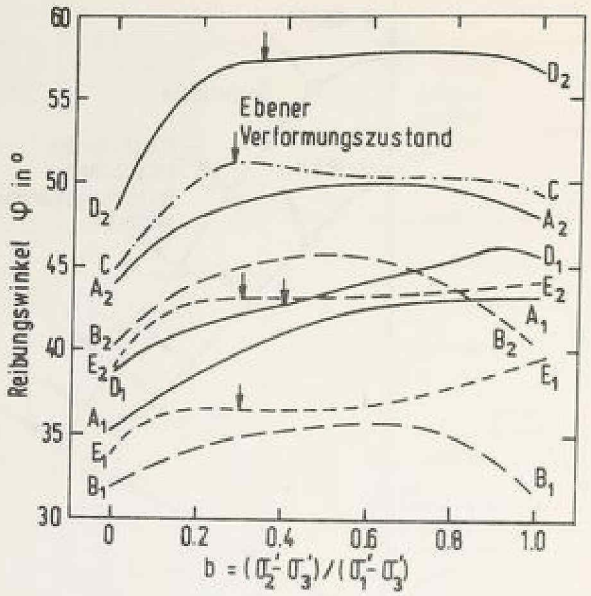

Bild 3.42: Projektionen der plastischen Verformungsinkremente im Bruchzustand, dargestellt in der Deviatorebene (Lade und Duncan, 1973).

Eine Zusammenstellung der Ergebnisse von Untersuchungen vieler Autoren über den Einfluß von $\sigma_2$ auf den Reibungswinkel zeigt das Bild 3.43.

Die Unzulänglichkeit der klassischen Bruchkriterien, wie Mohr-Coulomb, extended-Tresca, extended-v. Mises (oder Drucker-Prager) (Bild 3.44) wird deutlich.

Zu den aus diesem Grund formulierten neuen Bruchkriterien kann man noch zählen:

- Das Kriterium von Gudehus (1973) (Bild 3.45)
- Das Kriterium von Stutz (1972) (Bild 3.46)
- Das Kriterium von Matsuoka (1977) (Bild 3.47).




| KURVE | SAND | $D_r$ % | AUTOR |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | Ottawa | locker | Ko und Scott 1968 |
| $A_2$ | | m.dicht | |
| $B_1$ | Med Fine Loch Aline | 30 | Sutherland und Mesdary 1969 |
| $B_2$ | | 80 | |
| C | River Welland | dicht | Proctor und Barden 1969 |
| $D_1$ | Monterey No. 0 | 27 | Lade und Duncan 1973 |
| $D_2$ | | 98 | |
| $E_1$ | Ham River | locker | Reades und Green 1974 |
| $E_2$ | | dicht | |

Bild 3.43: Zusammenstellung der Ergebnisse verschiedener Autoren

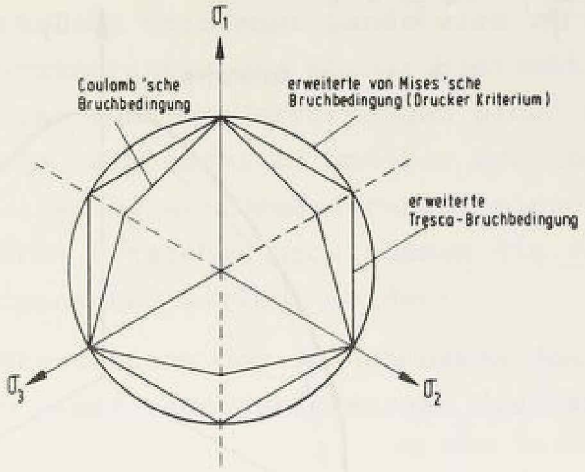



Bild 3.44: Klassische Bruchkriterien, dargestellt in der Deviatorebene

GUDEHUS :

$$f = c_1 \frac{J_2}{I_1} + c_2 \frac{J_3}{J_2^{3/2}} - 1 = 0$$

$c_1$ , $c_2$ sind Konstanten

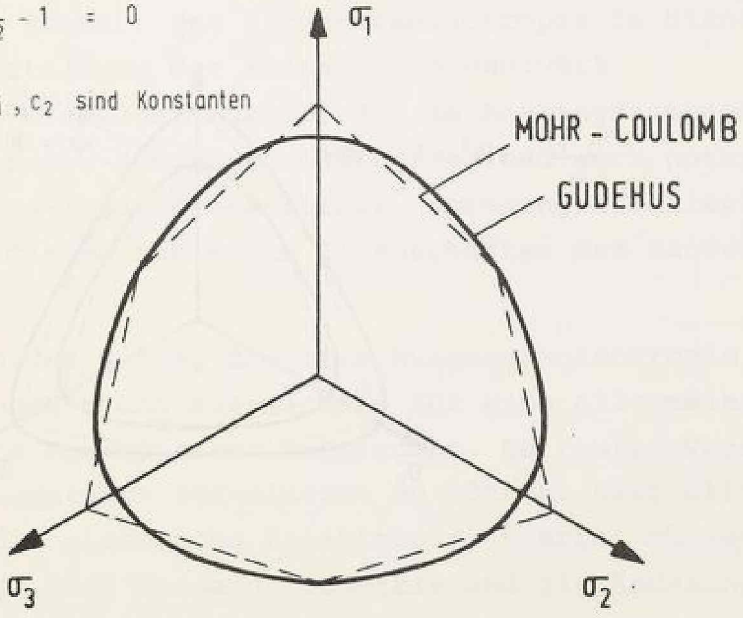



Bild 3.45: Das Kriterium von Gudehus (1973)

STUTZ :

$$f = \left(1 - B \frac{J}{J_2^{3/2}}\right)^{2m} - A^2 \frac{I_1^2}{J_2} = 0$$

A , B , m sind Konstanten

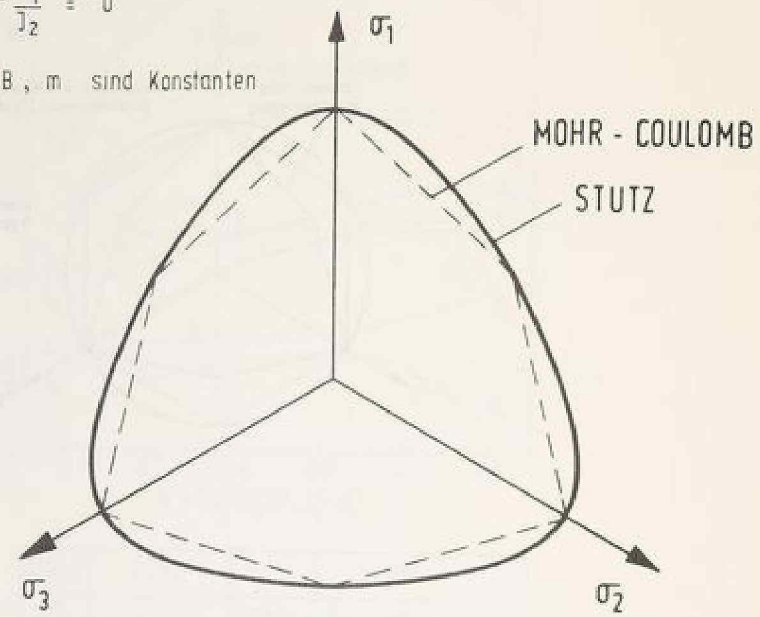



Bild 3.46: Das Kriterium von Stutz (1972)

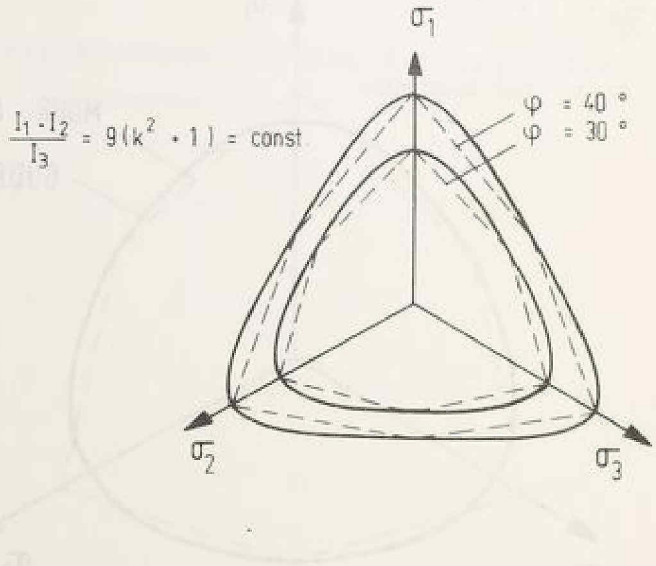



Bild 3.47: Das Kriterium von Matsuoka (1977)

### 3.4.5 Zusammenfassung

Das mechanische Verhalten trockener Sande wird im wesentlichen von der Lagerungsstruktur der Körner bestimmt. Die mikroskopische Analyse lokaler Verformungen eines Kornhaufwerkes zeigt, daß sie hauptsächlich von der Reibung in den Kontakten und den elastischen Formänderungen einzelner Körner abhängen. Ihrem Entstehen nach können die Verformungen in folgende Komponenten zerlegt werden:

- Gleitungen nach Überwindung der aufnehmbaren Kontaktkräfte (sie haben plastische Verformungen des Haufwerks zur Folge)
- Elastische Formänderung einzelner Körner (deren statistische Summe die elastische Verformung des Haufwerks ausmacht)
- Plastische Volumenverformungen infolge Gleitungen zur Stabilisierung lokaler Instabilitäten (Collapse-Verformungen)
- Verformungen infolge Sprödbruch einzelner Körner unter hohen Spannungen (Kornzertrümmerung).

Außer der Kornzertrümmerung, die von der Festigkeit einzelner Körner abhängt, sind die anderen Komponenten des mechanischen Verhaltens grundlegend abhängig von der räumlichen Anordnung der Körner. Die Strukturanisotropie im Sinne der räumlichen Verteilung der Kontakte im Haufwerk ist daher ein wichtiger Faktor, der im Ausgangszustand (inherent-anisotropy, Ausgangsanisotropie) und auch unter Belastung (stress-induced-anisotropy, spannungsinduzierte Anisotropie) die mechanischen Eigenschaften des Haufwerks bestimmt.

Das Verhalten der Sande, die eine Ausgangsanisotropie aufweisen, ist noch nicht ausreichend für eine allgemeingültige mechanische Formulierung untersucht. Es fehlen Versuche, um diese mathematisch formulieren zu können. Dies gilt besonders für die plastische Anisotropie. Hierbei müssen noch Untersuchungen über Ausgangsgeometrie und die Änderung der Strukturparameter im Laufe des Verformungsprozesses vorgenommen werden, um der inneren Logik mathematischer Verfah-

ren gerecht werden zu können (siehe hierzu Gudehus, 1973a).

Hingegen zeigt das Verformungsverhalten der kohäsionslosen Böden mit anfänglicher Isotropie folgende Eigenschaften:

- Sowohl unter hydrostatischer als auch unter deviatorischer Erstbelastung bleibt bei nachfolgender Entlastung eine irreversible Verformung zurück. Weitere Ent- und Wiederbelastungen verlaufen reversibel. Große Ent- und Wiederbelastungszyklen weisen einen nicht vernachlässigbaren Hysteresis-Effekt auf.
- Der Elastizitätsmodul ist abhängig vom Spannungszustand und nicht vom Spannungsweg.
- Unter hydrostatischer Belastung zeigt der Sand eine Volumenabnahme, unter deviatorischer Belastung zu Anfang eine Volumenabnahme (Kontraktanz) und dann eine Volumenvergrößerung (Auflockerung, Dilatanz).
- Die "Fließfläche", definiert nach der Plastizitätstheorie stellt ein geeignetes Kriterium zur Unterscheidung von Erstbelastung, Entlastung und Wiederbelastung dar, bei denen der Boden sich sehr unterschiedlich verhält.
- Allgemein gilt, daß die Verformung des Sandes bei gleichem Anfangs- und Endspannungszustand vom dazwischenliegenden Spannungsweg abhängt. Der Endverformungszustand ist somit abhängig von der Vorgeschichte der Belastung (Spannungsweg). Dabei ist die Richtung des plastischen Verformungsinkrements unabhängig vom Spannungsweg und von der Richtung des Spannungsinkrements. Sie ist nur eine Funktion des erreichten Spannungszustandes. In dieser ist implizit die Änderung der Lagerungsdichte auf dem jeweiligen Spannungsweg enthalten.
- Der Bruchzustand ist so zu verstehen, daß in einer dünnen Zone der Probe ausgeprägt große Verformungen auftreten (Lokalisierung). Das Verformungsverhalten der Probe im Bruchzustand wird daher im wesentlichen vom Verformungsverhalten dieser Scherzone bestimmt (line-failure).
- Bei Drehung der Spannungshauptachsen verhält sich der Sand wie ein elastoplastisches, verfestigendes Material.

Zu Anfang sind die Spannungsinkremente und Verformungsinkremente koaxial (elastisches Verhalten), mit der Annäherung zum Bruch setzt die Koaxialität der Verformungsinkremente mit den bisher erreichten Spannungen ein (plastisches Verhalten). Dazwischen findet ein kontinuierlicher Übergang statt.

- Die mittlere Hauptspannung ($\sigma_2$) hat einen wesentlichen Einfluß auf das Verformungs- und Bruchverhalten. Mit dem Mohr-Coulomb'schen Bruchkriterium wird die Grenzfestigkeit des Sandes, den Kompressionsbruch ausgenommen, unterschätzt. Dagegen läßt sich das Bruchverhalten des Sandes mit dem Kriterium von Lade und Duncan ($k_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$) hinreichend genau beschreiben.

## 4. Das elastoplastische Stoffgesetz

Bei Belastung eines Haufwerks treten bereits bei Beginn der Belastung elastische und plastische Verformungen auf. Zunächst überwiegen die elastischen, mit zunehmender Belastung hingegen die plastischen Verformungsanteile. Bei stetiger, monotoner Belastung findet ein kontinuierlicher Übergang statt, so daß in jeder Laststufe die Dehnungen als Summe eines elastischen und eines plastischen Anteils angeschrieben werden können:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^{e}_{ij} + \Delta\varepsilon^{p}_{ij} \qquad (i;j = x,y,z)$$

### 4.1 Elastische Dehnungsanteile

Elastische Dehnungen werden nach dem verallgemeinerten Hooke'schen Gesetz mit dem im Kapitel 3.4.2 für Elastizitätsparameter vorgeschlagenen empirischen Ansatz berechnet. Der Ansatz für die Elastizitätsparameter lautet:

$$E_{xx} = K_{el} p_a \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{n_{el}}$$

$$\nu_{xy} = K_q \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{n_q} \qquad (4.1)$$

$$\alpha = \frac{E_{yy}}{E_{xx}} = \frac{\nu_{yy}}{\nu_{xy}}, \qquad \beta = \frac{G_{yv}}{G_{xy}} = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + 2\alpha\,\nu_{xy}}{2(1 + \alpha\nu_{xy})}$$

Die Konstanten des Ansatzes, $K_{el}$, $n_{el}$, $K_q$, $n_q$ und $\alpha$ werden aus kleinen Entlastungen, wie im Kapitel 3.4.2 beschrieben, abgeleitet.

## 4.2 Plastische Dehnungen

Nach der klassischen Plastizitätstheorie sind folgende Hypothesen erforderlich, um das aus den Versuchen gewonnene Materialgesetz auf allgemeine Spannungszustände übertragen zu können.

a) Ein Fließkriterium (Yield-Surface), das zur Unterscheidung von Belastungen und Entlastungen dient und bei Erreichen der Materialfestigkeit in das Bruchkriterium (Failure-Surface) übergeht.
b) Eine Fließregel, die die Richtung der plastischen Dehnungsinkremente festlegt (flow-rule).
c) Schließlich ein Verfestigungsgesetz, das die Größe der plastischen Dehnungsinkremente infolge der aufgebrachten Spannungsinkremente determiniert (Work-Hardening-Law).

Das hier vorgeschlagene Modell zur Berechnung plastischer Dehnungen schließt an das elastoplastische Modell von Lade und Duncan (1975) an. Sie haben vorgeschlagen, eine Fließfläche im Hauptspannungsraum $f_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$ ($I_1$ und $I_3$ sind Invarianten des momentanen Spannungszustandes) als Unterscheidungskriterium zu wählen, das im Grenzzustand mit der Bruchfläche $k_1 = (\frac{I_1^3}{I_3})_{Br}$ identisch ist.

Diese Fließfläche, die den Einfluß der mittleren Hauptspannung ($\sigma_2$) auf das Verformungs- und Bruchverhalten von Sand recht gut wiedergibt, wird auch in dieser Arbeit als Fließfläche benutzt. Um den plastischen Verformungen bei Belastungswegen mit konstantem Spannungsverhältnis gerecht zu werden, wird die Fließbedingung $f_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$ im Hauptspannungsraum durch eine zweite Fließbedingung ($f_2 = \frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}$) vervollständigt (Bild 4.1a).
Somit setzt sich die Fließfläche im Hauptspannungsraum aus zwei Teilflächen zusammen.

$$f_1 = \frac{I_1^3}{I_3} \tag{4.2}$$

$$f_2 = \frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2} \tag{4.3}$$

Darin bedeuten: $I_1, I_2$-Invarianten des Spannungstensors $p_a$ - Atmosphärischer Druck. Der Konus $(f_1)$ bildet im Hauptspannungsraum einen Kegel, der seine Spitze im Koordinatenursprung hat und in der Deviatorebene eine Spur aufweist, die eine Form zwischen Kreis und Dreieck hat (siehe Anhang B). Diese Fläche weitet sich mit zunehmender Deviatorbelastung isotrop auf und wird im Grenzzustand zur Bruchfläche $(f_1 = k_1$ im Bruchzustand).

Die Kappe $(f_2)$ bildet im Hauptspannungsraum ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse im Koordinatenursprung senkrecht auf die Raumdiagonale steht. Im Schnitt mit der Symmetrieebene (Triaxialebene) entsteht eine Ellipse (siehe Anhang B). Mit zunehmender Belastung bei konstantem Spannungsverhältnis weitet sich die Ellipse auf, wobei sich ihr Achsenverhältnis ändert.

Weiten sich beide Fließflächen auf $(df_1 > 0,\ df_2 > 0)$, dann hat das plastische Dehnungsinkrement zwei Komponenten, die aus der Änderung der beiden Teilflächen errechnet werden können (Bild 4.16), d.h.

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p} = \Delta\varepsilon_{ij}^{p1} + \Delta\varepsilon_{ij}^{p2} \quad (i;j = x,y,z) \tag{4.4}$$

Dabei haben $\Delta\varepsilon_{ij}^{p1}$ einen dilatanten und $\Delta\varepsilon_{ij}^{p2}$ einen kontraktanten Charakter. Da die Fließflächen bei der Aufweitung symmetrisch um die Raumdiagonale bleiben, haben sie eine isotrope Verfestigung des Materials zur Voraussetzung. Das vorgeschlagene Modell mit zwei voneinander unabhängigen Fließflächen wird "double-hardening-model" genannt und schafft im Vergleich zur klassischen Plastizitätstheorie ein modifiziertes Kriterium zur Unterscheidung von Belastungs- und Entlastungsvorgängen. Ausgehend vom aktuellen Spannungszustand

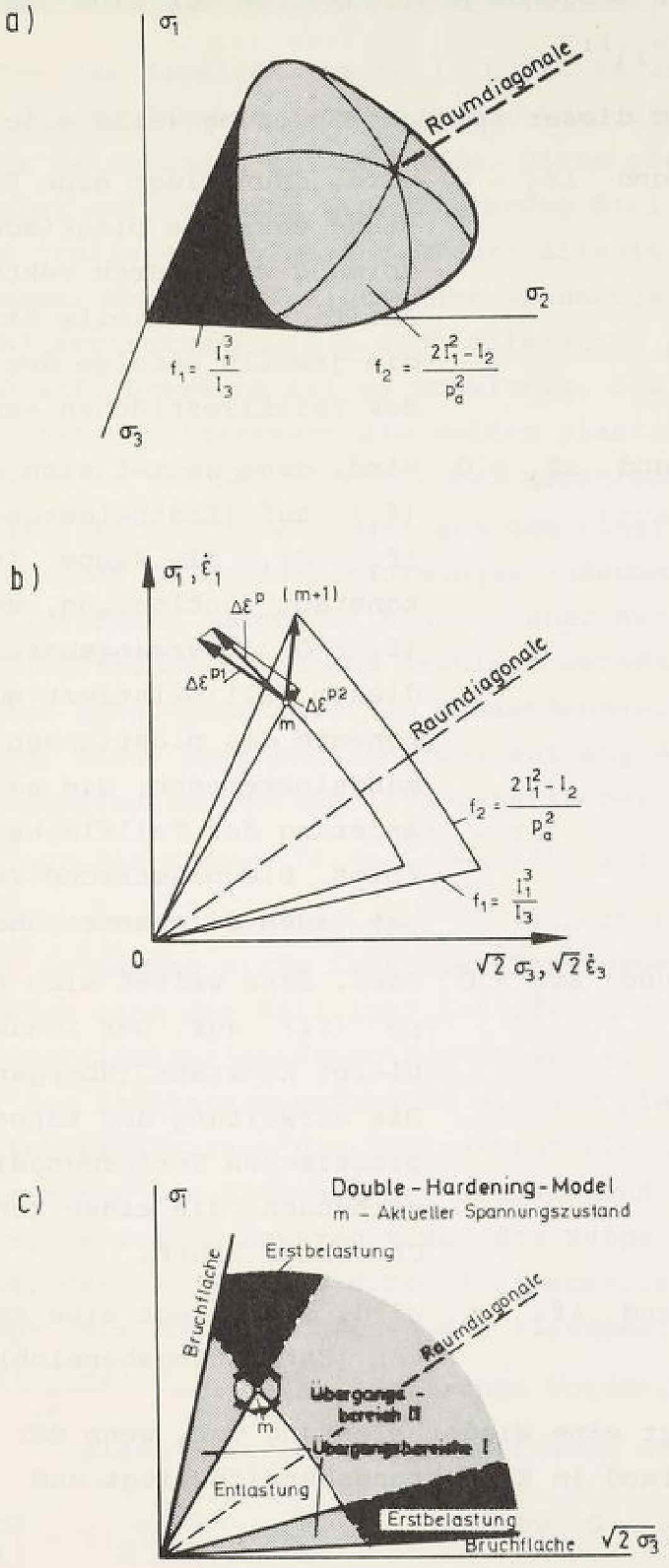



Bild 4.1: Das "double-hardening-model"

(m) bestehen folgende Möglichkeiten für eine Spannungsänderung ($\Delta\sigma_{ij}$):

Wenn aufgrund dieser Spannungsänderung (Bild 4.1c)

- $\Delta f_1 > 0$ und $\Delta f_2 > 0$ wird, dann liegt eine Erstbelastung vor. Die plastische Verformung wird durch vektorielle Addition der Anteile berechnet, die jeweils infolge der Änderung der Teilfließflächen auftreten.
- $\Delta f_1 > 0$ und $\Delta f_2 \leq 0$ wird, dann weitet sich der Konus ($f_1$) auf (Erstbelastung, weil $\Delta f_1 > 0$), die Kappe ($f_2$) bleibt konstant (Entlastung, weil $\Delta f_2 \leq 0$) (Übergangsbereich I). In diesem Fall existiert nur die Komponente des plastischen Verformungsinkrements, die aufgrund der Änderung der Teilfläche $f_1$ erfolgt. Die plastische Verformung hat einen dilatanten Charakter.
- $\Delta f_1 \leq 0$ und $\Delta f_2 > 0$ wird, dann weitet sich nur die Kappe ($f_2$) auf. Der Konus ($f_1$) bleibt konstant (Übergangsbereich II). Die Aufweitung der Kappe ist mit den plastischen Verformungsinkrementen verbunden, die einen kontraktanten Charakter haben.
- $\Delta f_1 \leq 0$ und $\Delta f_2 \leq 0$ wird, dann liegt eine Entlastung vor (Entlastungsbereich).

Außerdem liegt eine Wiederbelastung vor, wenn der aktuelle Spannungszustand im Entlastungsbereich liegt und $\Delta f_1 > 0$ oder/und $\Delta f_2 > 0$ werden.

### 4.2.1 Kontraktant-plastische Dehnungen ($\Delta\varepsilon_{ij}^{p2}$)

Bei Zunahme des Kugeltensoranteils kommt es zu einer plastischen Volumendehnung, wie auch bei Versuchen mit hydrostatischer Belastung deutlich wurde. Diese plastische Dehnung erfolgt aufgrund der Stabilisierung örtlicher Instabilitäten (Collapse-Verformungen) bei allseitiger Spannungszunahme. Bei einer allgemeinen Spannungszunahme treten sowohl kontraktante, als auch dilatante, plastische Dehnungen auf. Deswegen ist es schwierig, bei einem allgemeinen Spannungsinkrement die beiden plastischen Dehnungsanteile zu trennen. Nur bei hydrostatischer Belastung setzen sich die Dehnungen aus dem elastischen Anteil und plastischen Collapse-Verformungen zusammen. Die kontraktanten plastischen Dehnungen können daher nur bei Versuchen mit hydrostatischer Belastung bestimmt werden, indem die elastischen Dehnungsanteile von Gesamtdehnungen abgezogen werden. Bei einer Spannungsänderung entlang der Raumdiagonalen im Hauptspannungsraum (hydrostatischer Belastung) weitet sich nur die Kappe ($f_2 = \frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}$) auf; die Probe verfestigt sich; es kommen Collapse-Verformungen vor. Hydrostatische Belastung eines isotropen Sandkörpers (wie es beim dichten Sand der Fall ist) hat gleich große Dehnungen in drei Koordinatenrichtungen zur Folge, so daß bei Überlagerung des Hauptspannungsraumes mit dem plastischen Verformungsinkrementenraum die kontraktant-plastischen Verformungsinkremente die Richtung der Raumdiagonalen zeigen. Das heißt, sie stehen senkrecht auf die Kappe, die sich so aufweitet, daß sie jeweils durch den aktuellen Spannungspunkt geht. Wir können deswegen die Fließbedingung ($f_2 = \frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}$) auch als plastisches Potential für kontraktant-plastische Dehnungen auffassen und schreiben:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p2} = \Delta\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}} \cdot p_a^2 \qquad (4.5)$$

Somit liegt eine assoziierte Fließregel (associated flow-rule) für kontraktant-plastische Dehnungen vor. Nach dem Work-Hardening-Konzept der Plastizitätstheorie (siehe hierzu Kapitel 2) kann man den Proportionalitätsfaktor $-\Delta\lambda_2$ wie folgt errechnen

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\Delta W_{p2}}{2 \cdot f_2 \cdot p_a^2} \tag{4.6}$$

da $f_2$ eine homogene Funktion 2-ten Grades ist (siehe hierzu Anhang B).

Die Größe der kontraktant-plastischen Dehnungen können durch eine experimentell-ermittelte Beziehung zwischen der totalen plastischen Arbeit ($W_{p2}$), die für diese plastischen Dehnungen geleistet wurde, und dem Grad der Verfestigung, der durch die Fließfunktion dargestellt wird, bestimmt werden.

$$W_{p2} = F(f_2) \tag{4.7}$$

$$W_{p2} = \int \{\sigma_{ij}\}^T \cdot \{d\varepsilon_{ij}^{p2}\} = \Sigma \{\sigma_{ij}\}^T \cdot \{\Delta\varepsilon_{ij}^{p2}\} \tag{4.8}$$

Für hydrostatische Belastung in der Triaxialzelle kann man schreiben

$$W_{p2} = \Sigma\, \sigma_o \cdot \Delta\varepsilon_v^{p2}, \quad \text{worin} \quad \sigma_o = \sigma_1 = \sigma_3$$

$$\Delta\varepsilon_v^{p2} = 3\Delta\varepsilon_1^{p2} \quad \text{sind.}$$

Die so errechneten gesamt plastischen Arbeitswerte sind über den zugehörenden $f_2$-Werten für dichten Sand im Bild 4.2 dargestellt. Die experimentellen Ergebnisse können mit dem hyperbolischen Ansatz

$$\frac{W_{p2}}{p_a} = \frac{f_2}{M + L \cdot f_2} \tag{4.9}$$

in guter Näherung wiedergegeben werden. Hierbei sind M und L dimensionslose Parameter, die nach Transformation und Linearisierung der Beziehung (4.9) derart

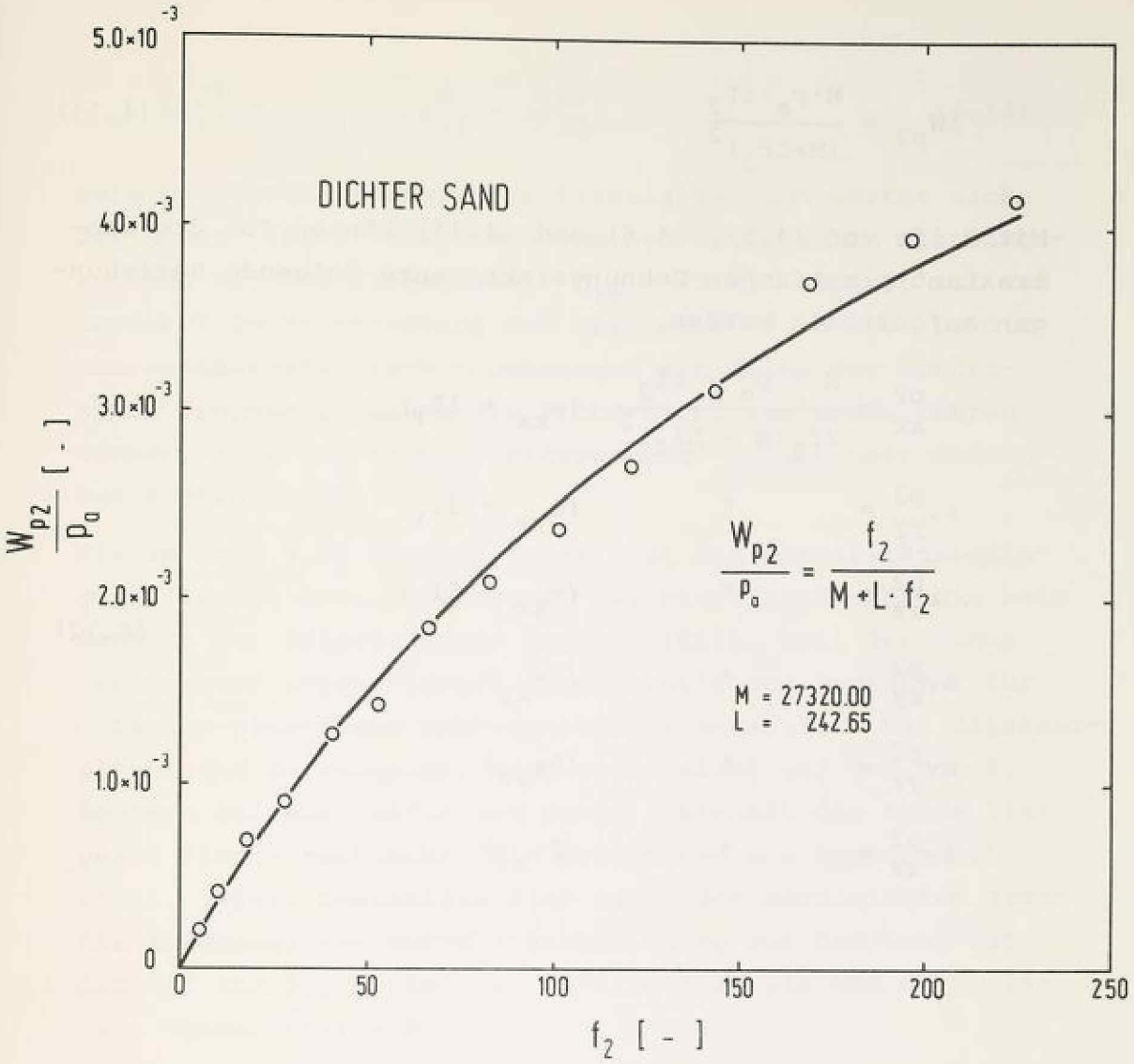



Bild 4.2: Plastische Arbeit für kontraktantplastische Verformungen

$$\frac{p_a \cdot f_2}{W_{p2}} = M + L\, f_2 \qquad (4.10)$$

als Achsabschnitt (M) und Neigung (L) der Geraden bestimmt werden können.

Die Ableitung von (4.9) liefert das plastische Arbeitsinkrement infolge kontraktant-plastischer Dehnung:

$$\Delta W_{p2} = \frac{M \cdot p_a \cdot \Delta f_2}{(M+Lf_2)^2} \tag{4.11}$$

Mit Hilfe von (4.5), (4.6) und (4.11) können für die kontraktant-plastischen Dehnungsinkremente folgende Beziehungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon^{p2}_{xx} &= \frac{M \cdot p_a \cdot \Delta f_2}{2f_2(M + Lf_2)^2} \quad (\sigma_{xx} + 3I_1) \\
\Delta\varepsilon^{p2}_{yy} &= \quad " \quad (\sigma_{yy} + 3I_1) \\
\Delta\varepsilon^{p2}_{zz} &= \quad " \quad (\sigma_{zz} + 3I_1) \\
\Delta\gamma^{p2}_{xy} &= \quad " \quad (2\tau_{xy}) \\
\Delta\gamma^{p2}_{yz} &= \quad " \quad (2\tau_{yz}) \\
\Delta\gamma^{p2}_{xz} &= \quad " \quad (2\tau_{xz})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

### 4.2.2 Dilatant-plastische Dehnungen $(\Delta\varepsilon^{p1}_{ij})$

Dicht gelagerte Sande lockern sich unter einer monotonen Scherbelastung nach anfänglich kleiner Verdichtung auf (siehe Kapitel 3). Im konventionellen Triaxial-Kompressionsversuch verläuft der Spannungsweg im Erstbelastungsbereich (Bild 4.1c), wo sich beide Fließflächen (Konus und Kappe) aufweiten.

Es treten sowohl kontraktante als auch dilatante plastische Dehnungen auf. Um die dilatant-plastischen Dehnungen bestimmen zu können, werden in jeder Laststufe die elastischen Dehnungen nach (4.1) und die kontraktant-plastischen Dehnungsanteile nach (4.12) errechnet und von den gemessenen Dehnungen abgezogen.

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p1} = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^{e} - \Delta\varepsilon_{ij}^{p2} \qquad (4.13)$$

Beim monotonen Abscheren im Triaxialversuch weitet sich der Konus $(f_1)$, ausgehend vom hydrostatischen Spannungszustand mit dem Anfangswert $f_{1T} = 27.0$, isotrop auf und erreicht im Bruchzustand den Grenzwert $f_1 = k_1$. Da die kontraktant-plastischen Dehnungen als Folge der sphärischen Spannungszunahme die Probe nicht zum Bruch führen können, wird der Bruch (Grenzzustand) allein über den Konus kontrolliert.

Wie im Bild 3.26 gezeigt wurde, ist die Normalitätsbedingung (assoziierte Fließregel) der Plastizitätstheorie beim Sand in der Triaxialebene nicht erfüllt, weil der Konus (erreichter Stress-level) kein plastisches Potential für dilatant-plastische Dehnungsanteile darstellt. Das dilatant-plastische Dehnungsinkrement steht nicht auf den Konus, sondern auf eine affin zum Konus innerhalb des Konus liegende Fläche senkrecht. Die Ergebnisse von Poorooshasb et.al. (1966) bestätigen dies auch. Der Haupteinwand gegen die Anwendung der Normalitätsbedingung auf den Sand ist, daß mit ihr der Winkel $\psi$ im Bild 3.26 als Maß der Dilatanz überschätzt wird.

Nach den Versuchen von Lade und Duncan (1973) dürfte jedoch die Gestaltsänderung des Sandes in der Deviatorebene mit der Normalitätsbedingung verträglich sein (Bild 3.42), weshalb der Vorschlag von Hill (1950), ein plastisches Potential $g_1 \neq f_1$ zu verwenden (siehe hierzu Kapitel 2.2.3), von Lade und Duncan (1975) übernommen worden ist.

Das plastische Potential für dilatant-plastische Dehnungen ist zwar mit der Teilfließfläche $(f_1)$ nicht identisch, weist aber eine ähnliche Form auf, d.h. wir können das plastische Potential beschreiben

$$g_1 = I_1^3 - k_2 \cdot I_3, \qquad (4.14)$$

worin $g_1$ das plastische Potential darstellt und $I_1$

und $I_3$ die Invarianten des Spannungstensors sind. Der Parameter $k_2$ ist zwar nicht identisch mit $f_1$, aber konstant bei einem gegebenen Wert von $f_1$.

Die dilatant-plastischen Dehnungsinkremente können über das plastische Potential (4.14) mit den Spannungen in Beziehung gebracht werden:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p1} = \Delta\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.15}$$

Diese nicht-assoziierte Fließregel (non-associated flow-rule) stellt die Basis der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für dilatant-plastische Dehnungen dar. Mit den Ableitungen von $g_1$ (4.14) nach den Spannungen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{xx}^{p1} &= \Delta\lambda_1 \cdot k_2 \cdot \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \tau_{yz}^2\right) \\
\Delta\varepsilon_{yy}^{p1} &= \quad " \quad \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \tau_{xz}^2\right) \\
\Delta\varepsilon_{zz}^{p1} &= \quad " \quad \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \tau_{xy}^2\right) \\
\Delta\gamma_{xy}^{p1} &= \quad " \quad \left(2\sigma_{zz}\tau_{xy} - 2\tau_{yz}\tau_{xz}\right) \\
\Delta\gamma_{yz}^{p1} &= \quad " \quad \left(2\sigma_{xx}\tau_{yz} - 2\tau_{xz}\tau_{xy}\right) \\
\Delta\gamma_{xz}^{p1} &= \quad " \quad \left(2\sigma_{yy}\tau_{xz} - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

und aus diesen die dilatant-plastischen Hauptdehnungen:

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_1^{p1} &= \Delta\lambda_1 \cdot k_2 \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3\right) \\
\Delta\varepsilon_2^{p1} &= \Delta\lambda_1 \cdot k_2 \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3\right) \\
\Delta\varepsilon_3^{p1} &= \Delta\lambda_1 \cdot k_2 \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2\right)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung (4.17) kann für den konventionellen Triaxialversuch das Verhältnis von den dilatant-plastischen Dehnungskomponenten berechnet werden.

$$-\nu^{p1} = \frac{\Delta\varepsilon_3^{p1}}{\Delta\varepsilon_1^{p1}} = \frac{\Delta\lambda_1 \cdot k_2 \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3\right)}{\Delta\lambda_1 \cdot k_2 \left(\frac{3}{k_2} I_1^2 - \sigma_3 \cdot \sigma_3\right)} \tag{4.18}$$

Nach Auflösung von (4.18) wiederum nach $k_2$ erhält man:

$$k_2 = \frac{3I_1^2 \left(1 + \nu^{p1}\right)}{\sigma_3(\sigma_1 + \nu^{p1}\sigma_3)} \tag{4.19}$$

Die $k_2$-Werte werden für jede Laststufe des Triaxialversuchs nach Gleichung 4.19 berechnet. Die aus einigen Versuchen erhaltenen $k_2$-Werte sind im Bild 4.3 über den zugehörigen $f_1$-Werten aufgetragen. Der Auswertung liegt eine weitaus größere Zahl von Versuchsdaten zugrunde als im Bild angegeben.

Die im Bild 4.3 zum Ausdruck kommende lineare Beziehung läßt sich in folgende Gleichung fassen:

$$k_2 = A(f_1 - 27.0) + 27.0 \tag{4.20}$$

Das Bestimmtheitsmaß der Regression liegt bei $r^2 = 0.99$. Der Parameter A (Neigung der linearen Beziehung) hat den Wert 0.44 für den untersuchten dichten Sand.

Gleichung 4.20 erlaubt in jeder Stufe der Belastung, die Neigung der nach Gleichung 4.18 berechneten, dilatant-plastischen Dehnungsinkremente zu bestimmen.

Analog zur hier festgestellten Beziehung 4.20 fanden auch Rowe (1962, 1963, 1972), Horne (1965a, 1965b, 1969) und Oda (1972) aus ihren Versuchen über eine mikroskopische Betrachtungsweise ebenfalls eine lineare "stress-dilatancy-relation". Die Gleichung 4.20 stellt aber im Vergleich zur "stress-dilatancy-relation" eine allgemeinere Beziehung dar, weil in ihr auch der Einfluß der mitt-

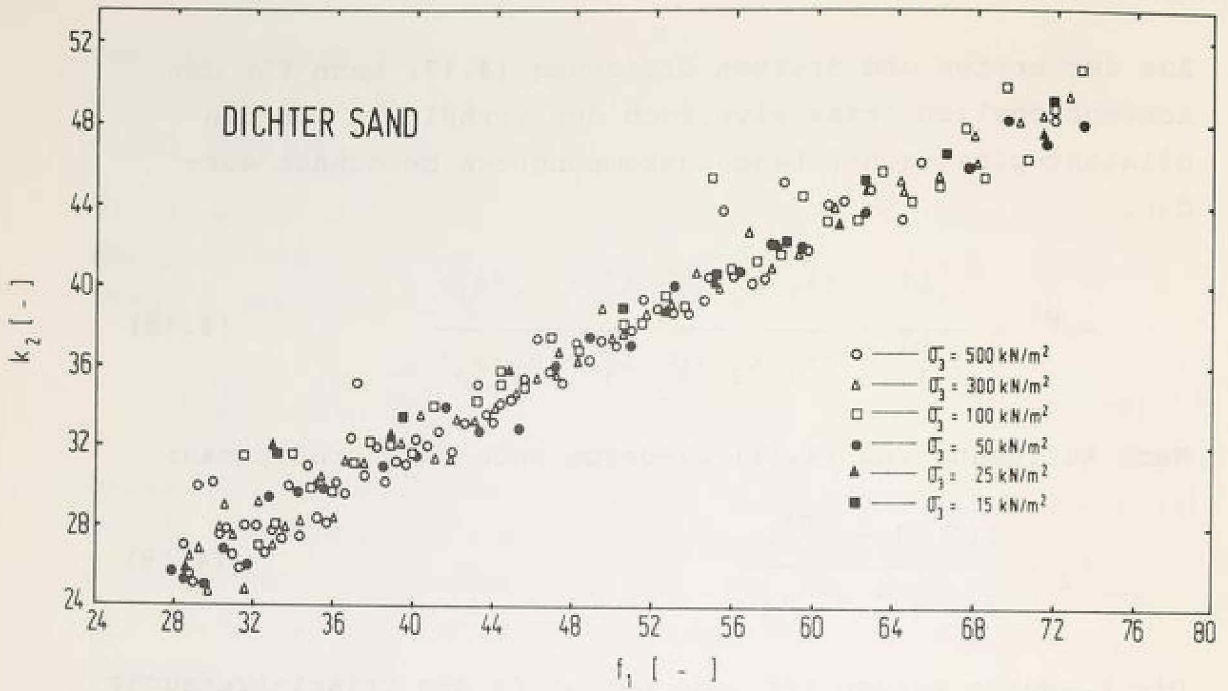



Bild 4.3: Änderung von $k_2$ (Parameter des plastischen Potentials) mit der Fließfläche ($f_1$)

leren Hauptspannung ($\sigma_2$) enthalten ist und sie sich nicht auf spezielle Versuchsbedingungen beschränkt, wie es bei der "stress-dilatancy-relation" der Fall ist.

Die Größe der dilatant-plastischen Dehnungsinkremente infolge eines Spannungsinkrements kann nach dem "work-hardening"-Konzept (siehe hierzu Kapitel 2) anhand einer experimentell ermittelten Beziehung zwischen der plastischen Arbeit und dem Stress-level berechnet werden. Nach der Hypothese der isotropen Verfestigung ist der Grad der Verfestigung unabhängig vom Spannungsweg und nur eine Funktion der gesamten plastischen Arbeit ($W_{p1}$), die für diese Verfestigung aufgewandt wird.

$$f_1 = F(W_{p1}) \tag{4.21}$$

Die gesamte plastische Arbeit, die für die dilatant-plastischen Dehnungen geleistet wird, ist

$$W_{p1} = \int \{\sigma_{ij}\}^T \{d\varepsilon_{ij}^{p1}\} = \Sigma \{\sigma_{ij}\}^T \{\Delta\varepsilon_{ij}^{p1}\} \tag{4.22}$$

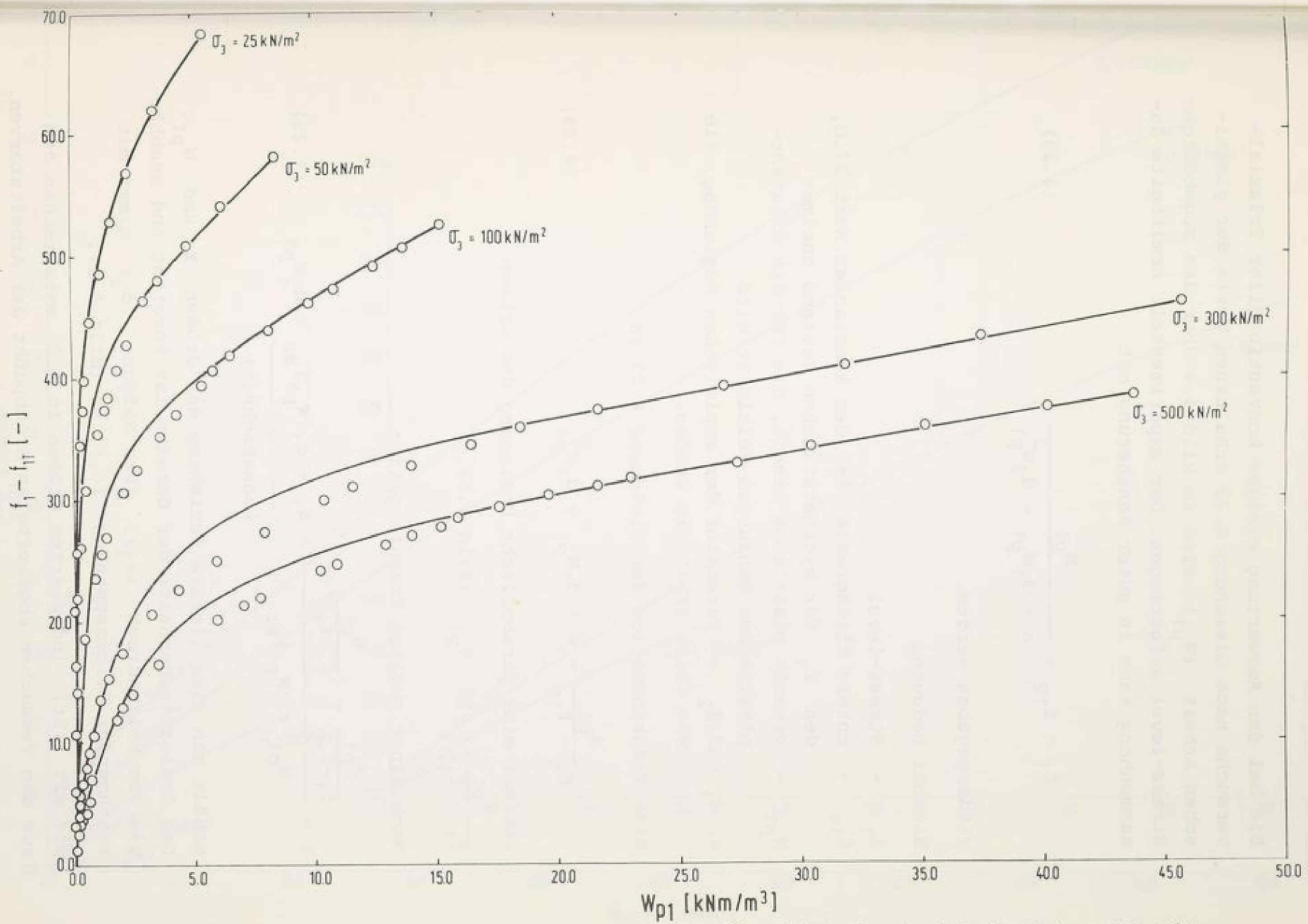



Bild 4.4: Änderung der plastischen Arbeit für dilatant-plastische Dehnungen mit dem Stress-level für dichten Sand

Die bei der Auswertung einiger konventioneller Triaxialversuche nach Gleichung 4.22 erhaltenen Werte der plastischen Arbeit ($W_{p1}$) sind im Bild 4.4 über den zugehörigen Stress-level aufgetragen. Der experimentell ermittelte Zusammenhang kann in guter Annäherung mit

$$f_1 - f_{1T} = \frac{W_{p1}}{a + d_1 W_{p1} + d_2 W_{p1}^2} \qquad (4.23)$$

wiedergegeben werden.

Hierbei bedeuten

$f_1$ - Stress-level

$f_{1T}$ - untere Fließgrenze, hat den konstanten Wert 27.0, den $f_1$ für hydrostatischen Zustand annimmt

$W_{p1}$ - gesamte plastische Arbeit, die für die dilatant-plastischen Dehnungen geleistet wird

$a$, $d_1$ und $d_2$ - Parameter der empirischen Beziehung, die wie folgt ermittelt werden.

Eine Transformation der Gleichung 4.23 in

$$\frac{W_{p1}}{f_1 - f_{1T}} = a + d_1 W_{p1} + d_2 W_{p1}^2 \qquad (4.24)$$

liefert eine parabolische Beziehung der Größen $\frac{W_{p1}}{f_1 - f_{1T}}$ und $W_{p1}$ (Bild 4.5).

Nach einer zweiten Transformation

$$Y = \frac{\frac{W_{p1}}{f_1 - f_{1T}} - \left(\frac{W_{p1}}{f_1 - f_{1T}}\right)_{Br}}{W_{p1} - (W_{p1})_{Br}} = \underbrace{d_1 + d_2 (W_{p1})_{Br}}_{\text{Achsabschnitt}} + d_2 W_{p1} \qquad (4.25)$$

erhält man eine lineare Beziehung der Größen $Y$ und $W_{p1}$. Der Ordinatenabschnitt der Geraden ist konstant und unabhängig vom Seitendruck ($\sigma_3$), ihre Neigung ($d_2$) nimmt mit zunehmender Seitenspannung ($\sigma_3$) ab (Bild 4.6).

Die mit (Br) indizierten Größen in 4.25 entsprechen dem aus den Versuchen abgeleiteten Bruchpunkt der Arbeitskurven.

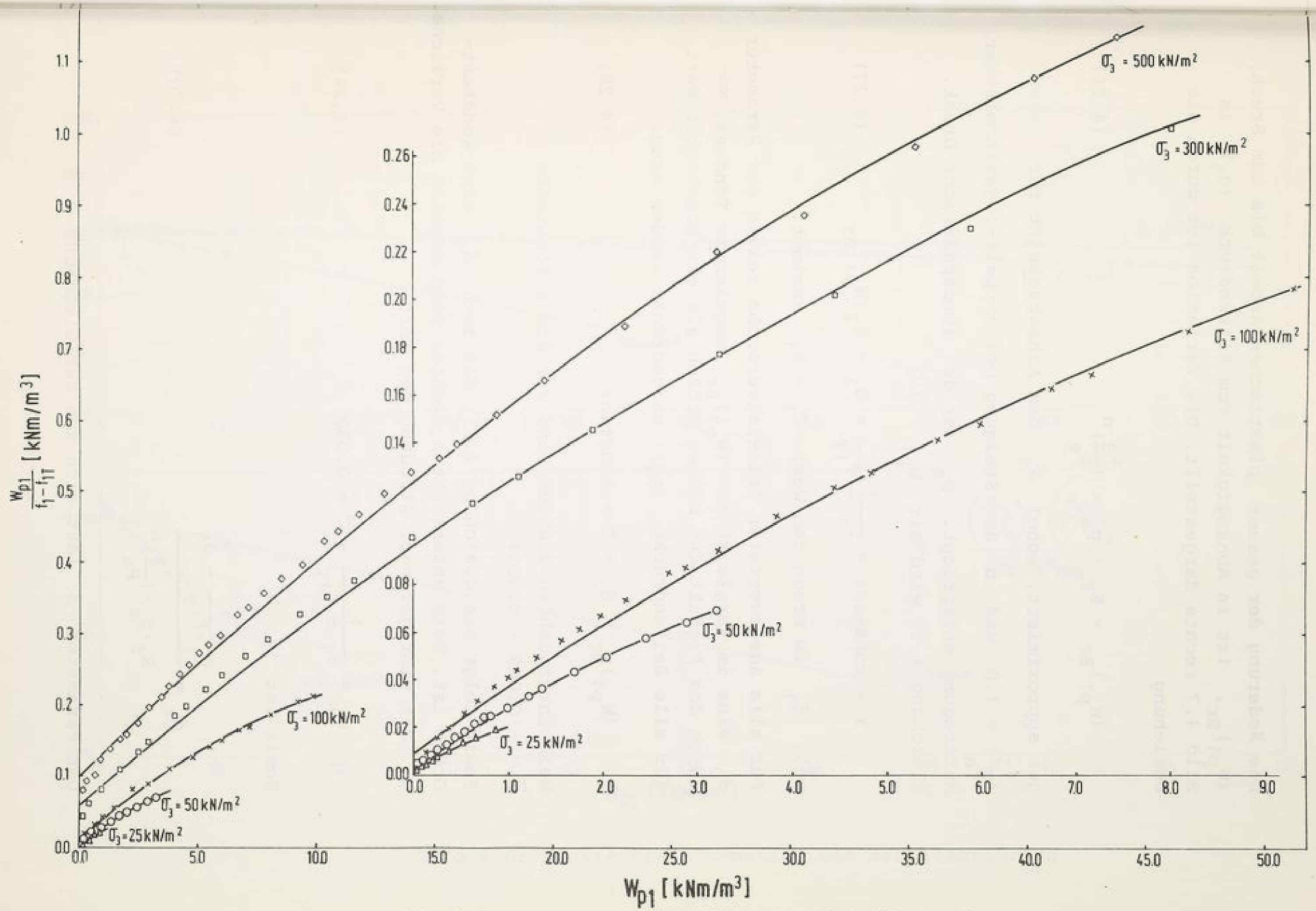



Bild 4.5: Erste Transformation des Arbeitsansatzes

Die Änderung der gesamt plastischen Arbeit bis zum Bruch, $(W_{p1})_{Br}$, ist in Abhängigkeit vom Seitendruck $(\sigma_3)$ im Bild 4.7 rechts dargestellt. Die Variation ist durch die Beziehung

$$(W_{p1})_{Br} = R_f \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \qquad (4.26)$$

gut approximiert, wobei $R_f$ dem Achsabschnitt für $\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) = 1.0$ und $n$ der Steigung bei doppelt-logarithmischer Auftragung entspricht. $p_a$ ist der atmosphärische Druck. Gleichung 4.25 wird mit $W_{p1} = 0.0$

$$Y = \text{konstant} = \frac{1}{k_1 - f_{1T}} = d_1 + d_2 (W_{p1})_{Br} \qquad (4.27)$$

weil $f_1$ im Bruch den Wert $f_1 = k_1$ annimmt.

Für alle ausgewerteten Triaxialversuche zeigte der Parameter $d_2$ eine im Vergleich zu $(W_{p1})_{Br}$ umgekehrte Tendenz, wodurch das Produkt der beiden Größen als ein konstanter Wert für alle Seitendrücke $(\sigma_3)$ ausgedrückt werden kann.

$$(W_{p1})_{Br} \cdot d_2 = \overline{C} = \text{konstant} \qquad (4.28)$$

Beim untersuchten dichten Sand war diese Konstante $\overline{C} = -0.009 \pm 0.0001$.

Somit folgt aus Gleichung 4.27, daß auch $d_1$ eine konstante Größe ist. Beim untersuchten dichten Sand ergaben die Versuche $d_1$ mit sehr geringer Streuung den Wert

$$d_1 = \frac{1}{k_1 - f_{1T}} - \overline{C} \cong 0.030 \qquad (4.29)$$

Somit ist

$$d_2 = \frac{\frac{1}{k_1 - f_{1T}} - d_1}{R_f \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n} \qquad (4.30)$$

Der Parameter $a$ läßt sich aus der Gleichung

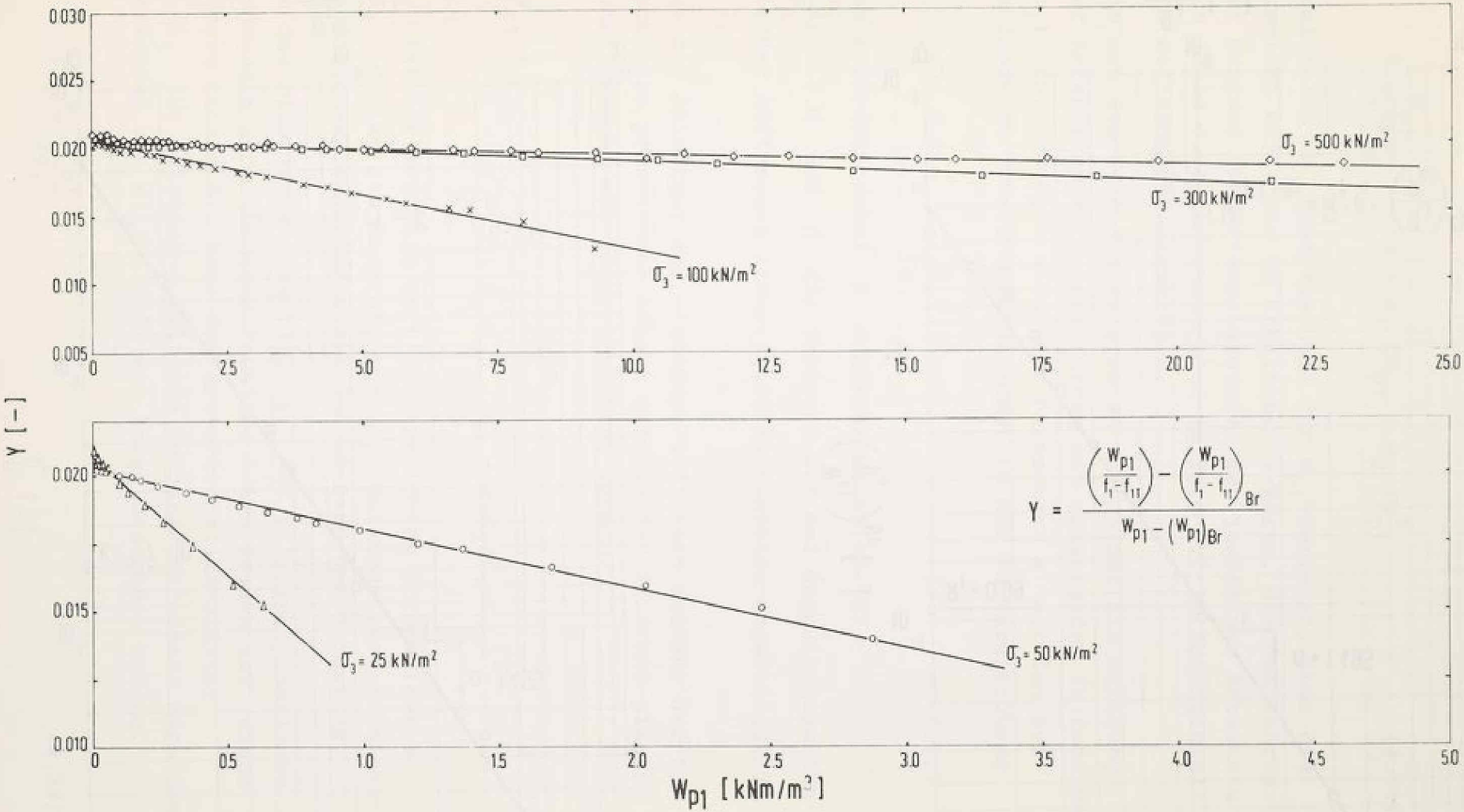
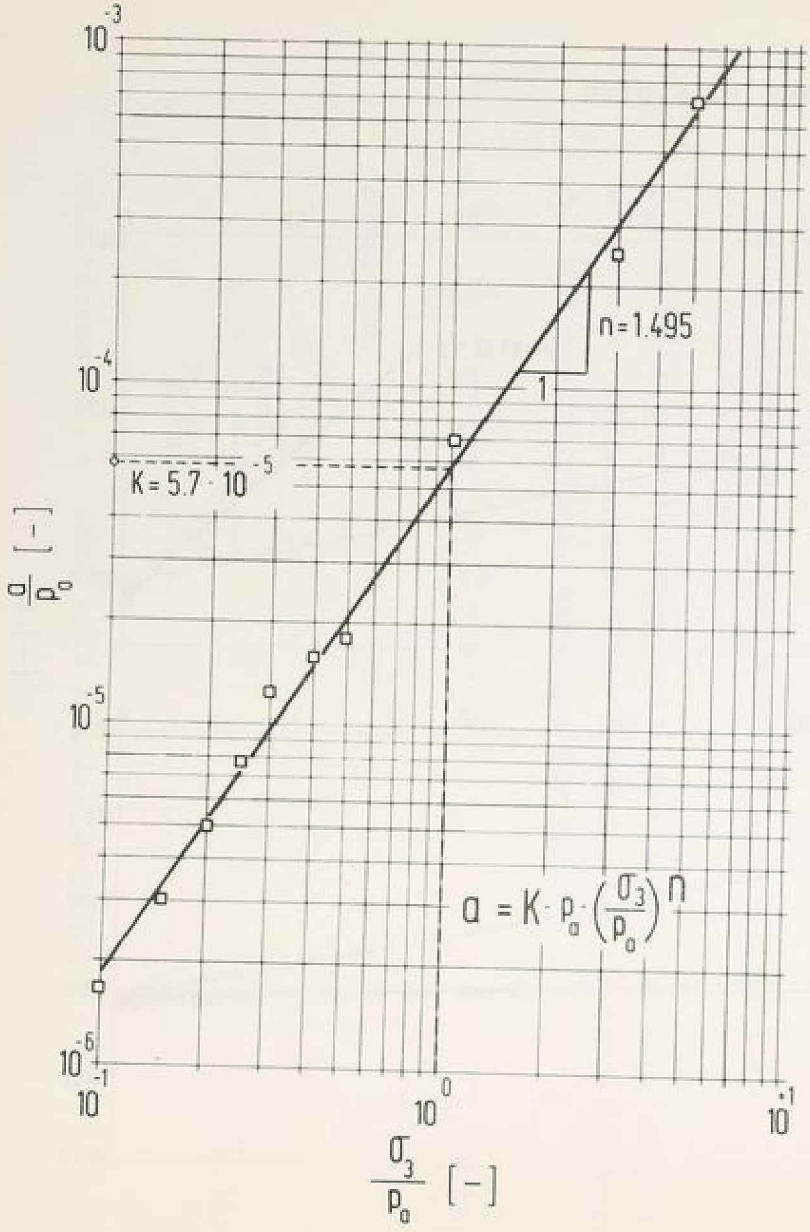



Bild 4.6: Zweite Transformation des Arbeitsansatzes



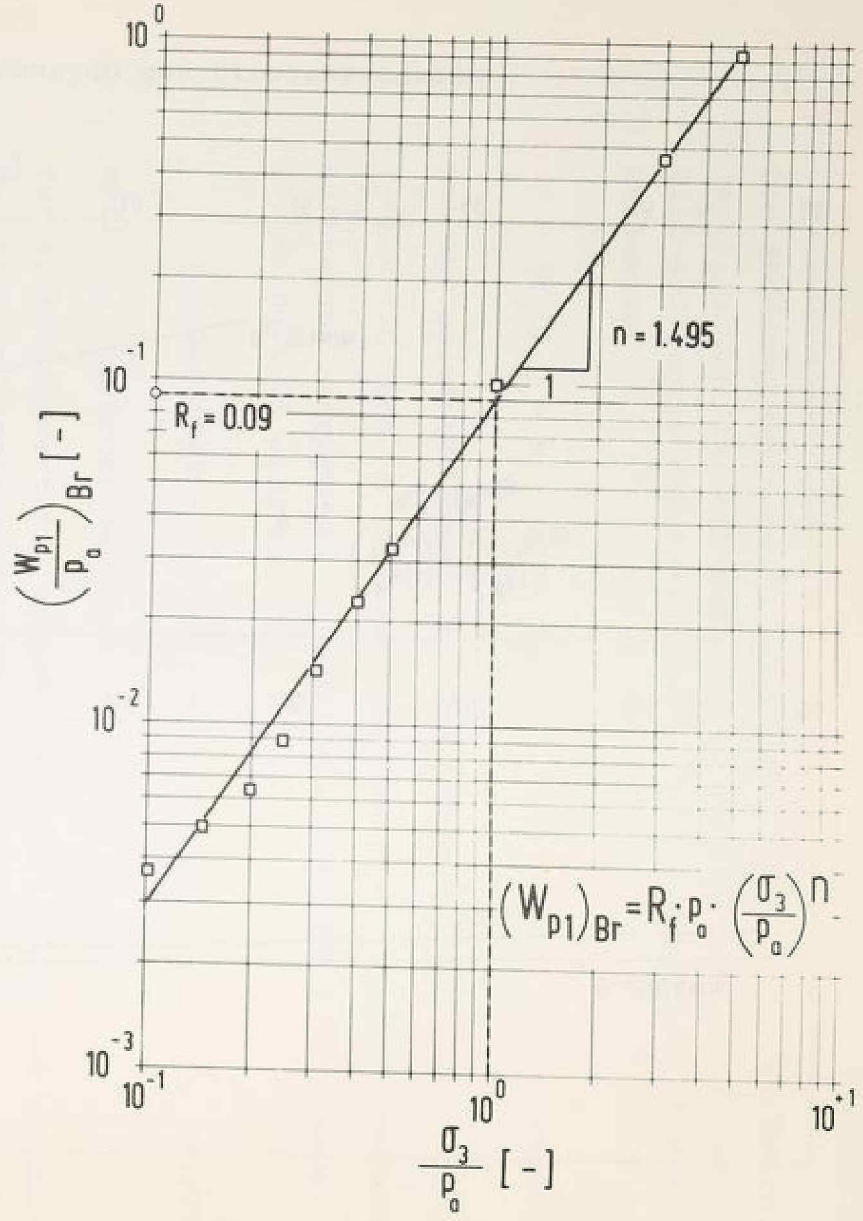




Bild 4.7: Änderung des Parameters a und der totalen plastischen Arbeit bis zum Bruch in Abhängigkeit vom Seitendruck

$$\Sigma \frac{W_{p1}}{f_1 - f_{1T}} = m \cdot a + d_1 \, \Sigma W_{p1} + d_2 \, \Sigma W_{p1}^2 \qquad (4.31)$$

ermitteln. $m$ gibt die Zahl der $W_{p1}$-Werte an, über die summiert wird. Die so erhaltenen a-Werte, die den Kehrwert der Neigung von Anfangstangenten der jeweiligen Arbeitskurven (Bild 4.4) bedeuten, sind im Bild 4.7 in Abhängigkeit vom Seitendruck aufgetragen.

Wie aus dem Bild 4.4 zu ersehen ist, nimmt die Steigung der Anfangstangenten der Kurven mit zunehmendem Seitendruck $(\sigma_3)$ ab. Deswegen nimmt der Parameter $a$ mit dem Seitendruck zu. Diese Zunahme kommt in der Potenzgleichung

$$a = K \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \qquad (4.32)$$

zum Ausdruck, wobei $K$ den Achsabschnitt für $\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) = 1.0$ und $n$ die Steigung der bei doppelt-logarithmischer Auftragung linearisierten Funktion angeben (Bild 4.7).

Aus der Ableitung der Gleichung 4.23 kann nunmehr der Zuwachs der plastischen Arbeit infolge der dilatant-plastischen Dehnung wie folgt errechnet werden.

$$\Delta W_{p1} = \frac{a \cdot \Delta f_1}{\left[1 - (f_1 - f_{1T})(d_1 + d_2 W_{p1})\right]^2 - a \cdot d_2 (f_1 - f_{1T})^2} \qquad (4.33)$$

$f_1$ ist der aktuelle Wert des erreichten Stress-levels. $\Delta f_1 \geq 0$ ist die Änderung von $f_1$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spannungszuständen während der Belastung.

Da das plastische Potential $g_1$ der dilatant-plastische Dehnungen eine homogene Funktion 3-ten Grades ist (siehe hierzu Anhang B), kann der Proportionalitätsfaktor $-\Delta\lambda_1$ für dilatant-plastische Dehnungsinkremente nach dem Vorschlag von Hill (1950) wie folgt berechnet werden.

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\Delta W_{p1}}{3 g_1} \qquad (4.34)$$

worin $\Delta W_{p1}$ der Zuwachs der plastischen Arbeit infolge einer Erhöhung des Stress-levels ($\Delta f_1$) innerhalb des Belastungsinkrements ist.

## 4.3 Zusammenstellung der Stoffkonstanten und analytische Approximation der Versuchsergebnisse

Die Ermittlung der Stoffkonstanten erfolgt, wie in den Kapiteln 4.1 und 4.2 gezeigt wurde, anhand eines hydrostatischen Belastungsversuchs und von konventionellen dränierten Triaxialkompressionsversuchen. Der hydrostatische Versuch läßt sich auch mit den anschließenden Triaxialversuchen verbinden. Bei den Triaxialversuchen sind kleine Ent- und Wiederbelastungszyklen erforderlich, um die Elastizitätsparameter zu erhalten. Die manuelle Auswertung der Versuche ist ziemlich zeitaufwendig. Aus diesem Grund wurde vom Verfasser ein Computer-Programm zur Bestimmung der Stoffkonstanten entwickelt, das die notwendigen Regressionen durchführt und die Versuchskurven sowie analytischen Kurven in Tabellenform und, falls gewünscht, als Plotterzeichnungen ausgibt. Bei Vorgabe des Spannungsweges können mit dem Programm Dehnungen für beliebige vorgegebene Spannungswege berechnet und geplottet werden.

Von dem untersuchten dichten Sand wurden unter Voraussetzung einer Ausgangsisotropie folgende Stoffkonstanten ermittelt.

Für die elastischen Dehnungsanteile

$K_{el} = 1500.0$
$n_{el} = 0.23$
$K_q = 0.44$
$n_q = -0.15$
$\alpha = 1.0$

für die kontraktant-plastischen Dehnungsanteile:

$M = 27320.0$
$L = 242.655$

für die dilatant-plastischen Dehnungsanteile:

- Die Konstante für das plastische Potential

  $A = 0.44$

- die Konstanten für die dilatant-plastische Arbeit

  $d_1 = 0.030$

  $R_f = 0.090$

  $K = 0.000057$

  $n = 1.495$

- Das Fließkriterium ist im hydrostatischen Zustand (vor dem Abscheren)

  $f_{1T} = 27.0$

  und im Bruchzustand

  $f_1 = k_1 = 73.224$

Das Bruchkriterium entspricht einem Hauptspannungsverhältnis von

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 5.3$$ und einem Reibungswinkel nach Mohr-Coulomb

$$\varnothing = \arcsin \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = 43.0\,^\circ$$

Die Umrechnung vom Reibungswinkel auf den Wert $k_1$ im Bruchzustand beim konventionellen Triaxialkompressionsversuch erfolgt durch die Beziehung

$$k_1 = \left(\frac{I_1^3}{I_3}\right)_{Br} = \frac{\left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3} + 2\right]^3}{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} = \frac{\left[\frac{1 + \sin \varnothing}{1 - \sin \varnothing} + 2\right]^3}{\frac{1 + \sin \varnothing}{1 - \sin \varnothing}} \qquad (4.35)$$

Mit diesen Stoffkonstanten wurden die Verformungen, die bei hydrostatischen und triaxialen Kompressionsversuchen auftraten, mit den berechneten Verformungen verglichen, die sich nach dem vom Verfasser entwickelten Stoffgesetz ergeben. In den Bildern 4.8 bis 4.18 sind die berechneten Kurven den Versuchskurven gegenübergestellt. Die untersuchten Spannungswege sind im Bild 4.12 zu sehen. Die zu-

friedenstellende Übereinstimmung läßt erkennen, daß mit dem abgeleiteten Stoffgesetz die wesentlichsten Einflüsse auf das Verformungsverhalten des Bodens, wie die Nichtlinearität, die Spannungswegabhängigkeit, die Dilatanz und der Einfluß der Hauptspannung $\sigma_3$ erfaßt werden können. Der Beweis, daß mit dem Stoffgesetz auch die Wirkung der mittleren Hauptspannung $\sigma_2$ und der Drehung der Spannungshauptachsen auf das Verformungsverhalten einbezogen werden kann, konnte nicht erbracht werden, weil eigene Versuche für diesen Nachweis nicht durchgeführt werden konnten. Das Stoffgesetz impliziert aber diese Einflüsse mit der eingeführten Fließfläche $(f_1)$ und der Simulation der plastischen Verfestigung. Eine eingehende Diskussion dieser Einflüsse mit einer experimentellen Beweisführung findet man bei Lade und Duncan (1975).

## 4.4 Herleitung der Stoffmatrix für numerische Verfahren

In numerischen Verfahren wie der Methode der finiten Elemente werden Spannungs-, Dehnungsbeziehungen in Form einer quadratischen Matrix gebraucht, die im Falle der Isotropie die als Spaltenmatrizen geschriebenen Spannungs- und Dehnungstensoren miteinander verknüpft.

$$\{\Delta\sigma_{ij}\} = [D^{ep}]\,\{\Delta\varepsilon_{ij}\} \qquad i;j = x,y,z$$

Nach dem "double-hardening"-Modell errechnen sich die Gesamtdehnungsinkremente aus der Summe der drei Dehnungsanteile,

$$\{\Delta\varepsilon_{ij}\} = \{\Delta\varepsilon^{e}_{ij}\} + \{\Delta\varepsilon^{p1}_{ij}\} + \{\Delta\varepsilon^{p2}_{ij}\} \qquad (4.36)$$

die durch die Gleichungen (2.5), (4.1), (4.12) und (4.16) mit den Spannungen verknüpft sind.

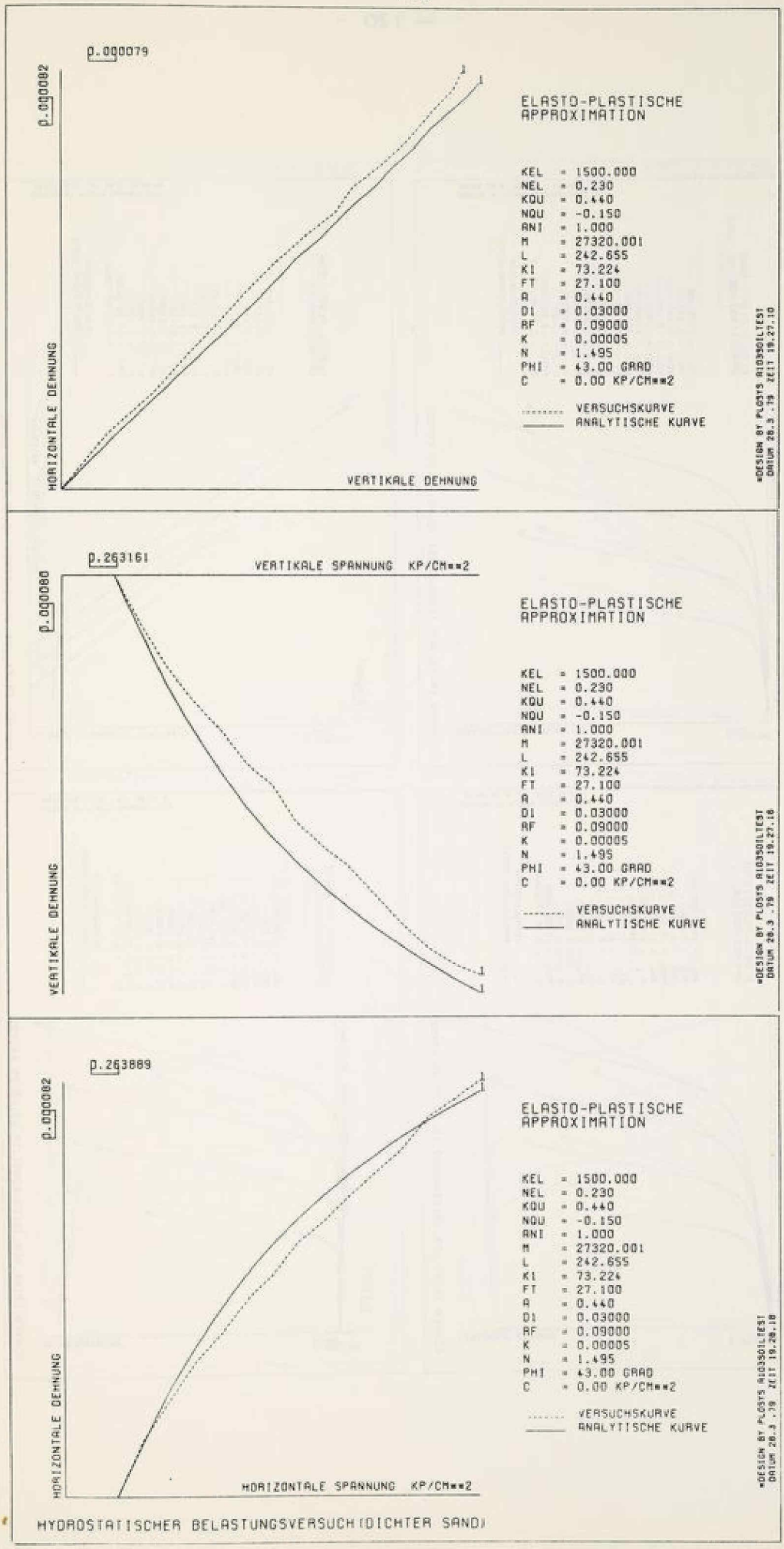



Bild 4.8: Vergleich von analytischen und Versuchskurven bei hydrostatischer Belastung

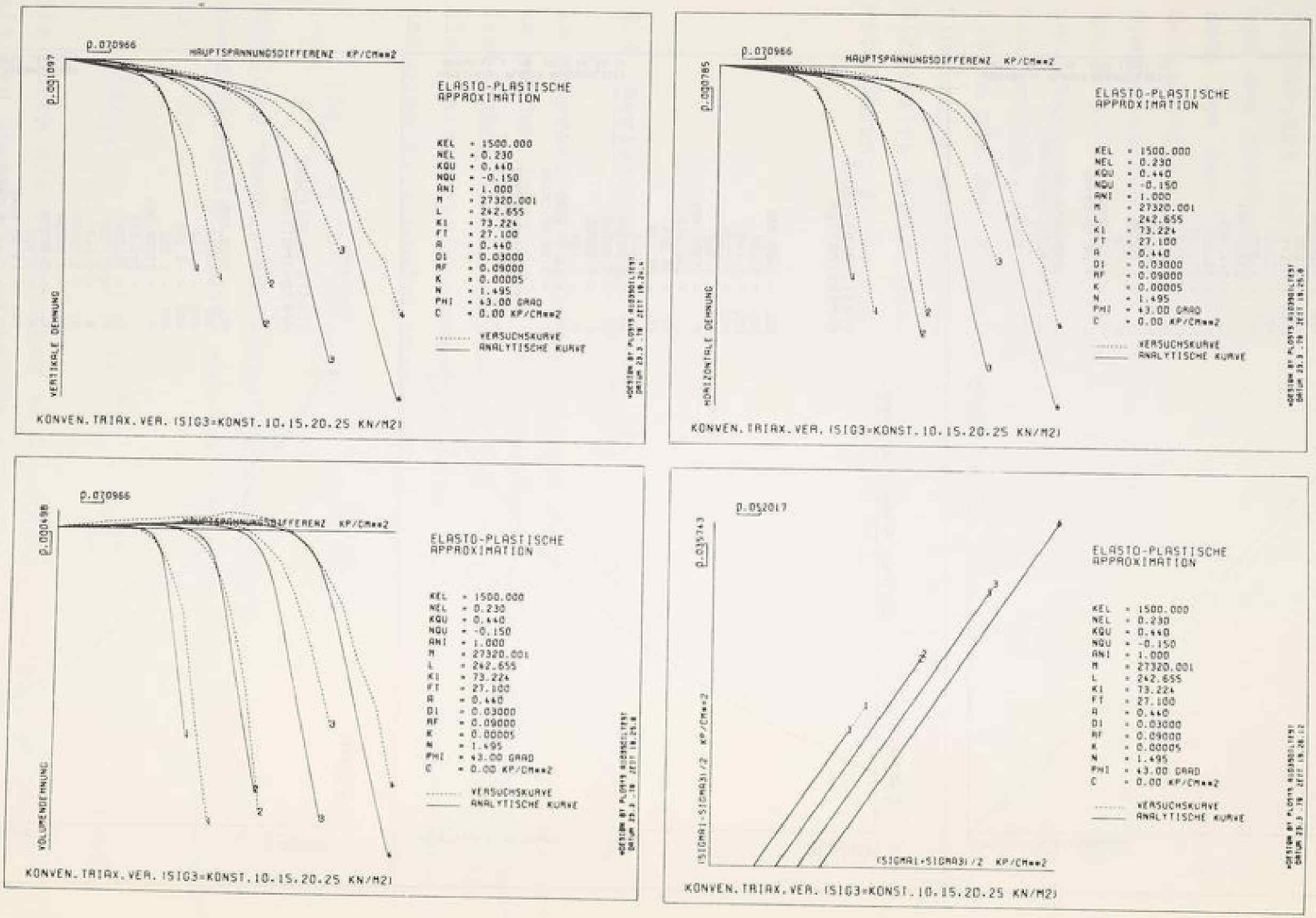



Bild 4.9: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim konventionellen Triaxialversuch

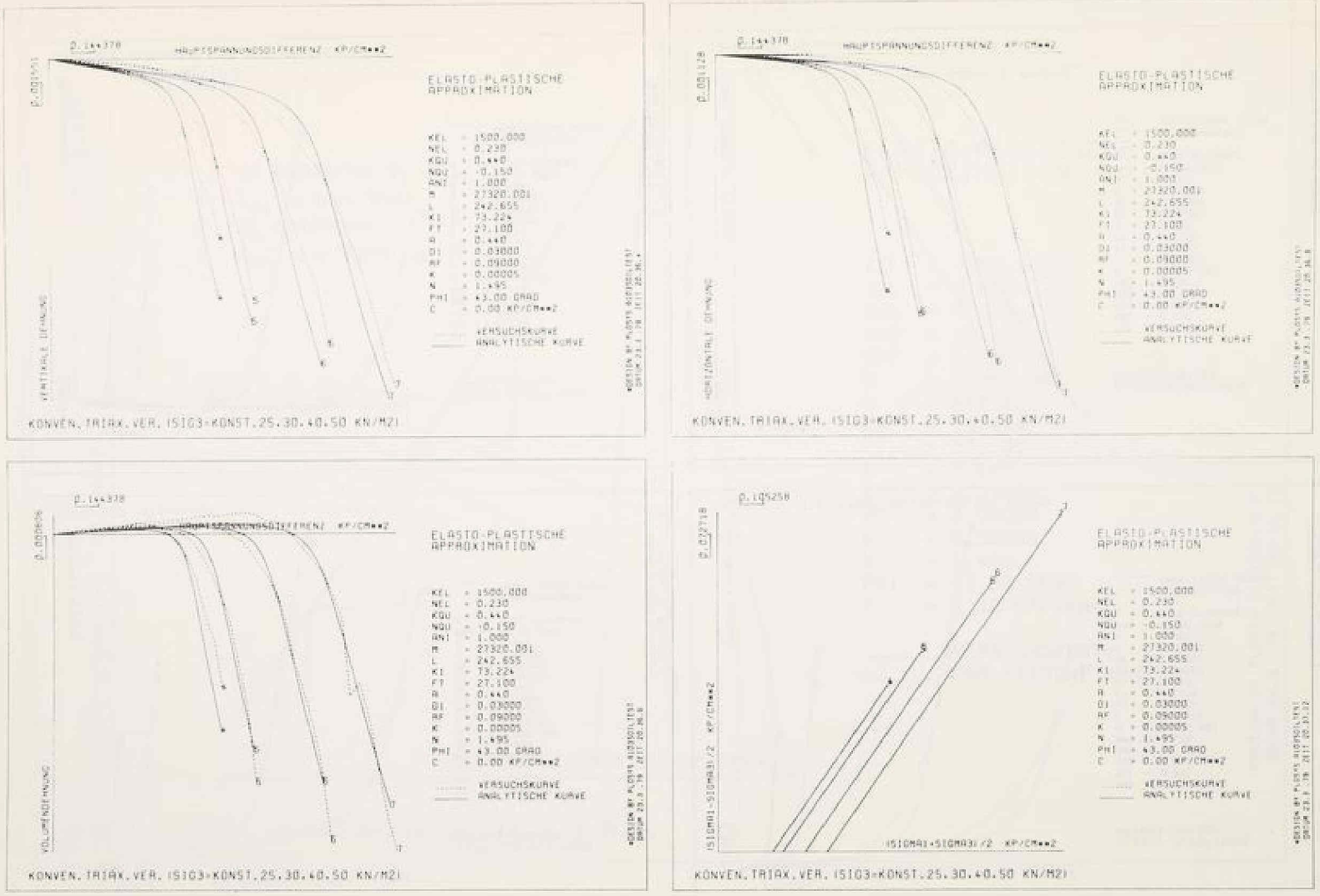



Bild 4.10: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim konventionellen Triaxialversuch

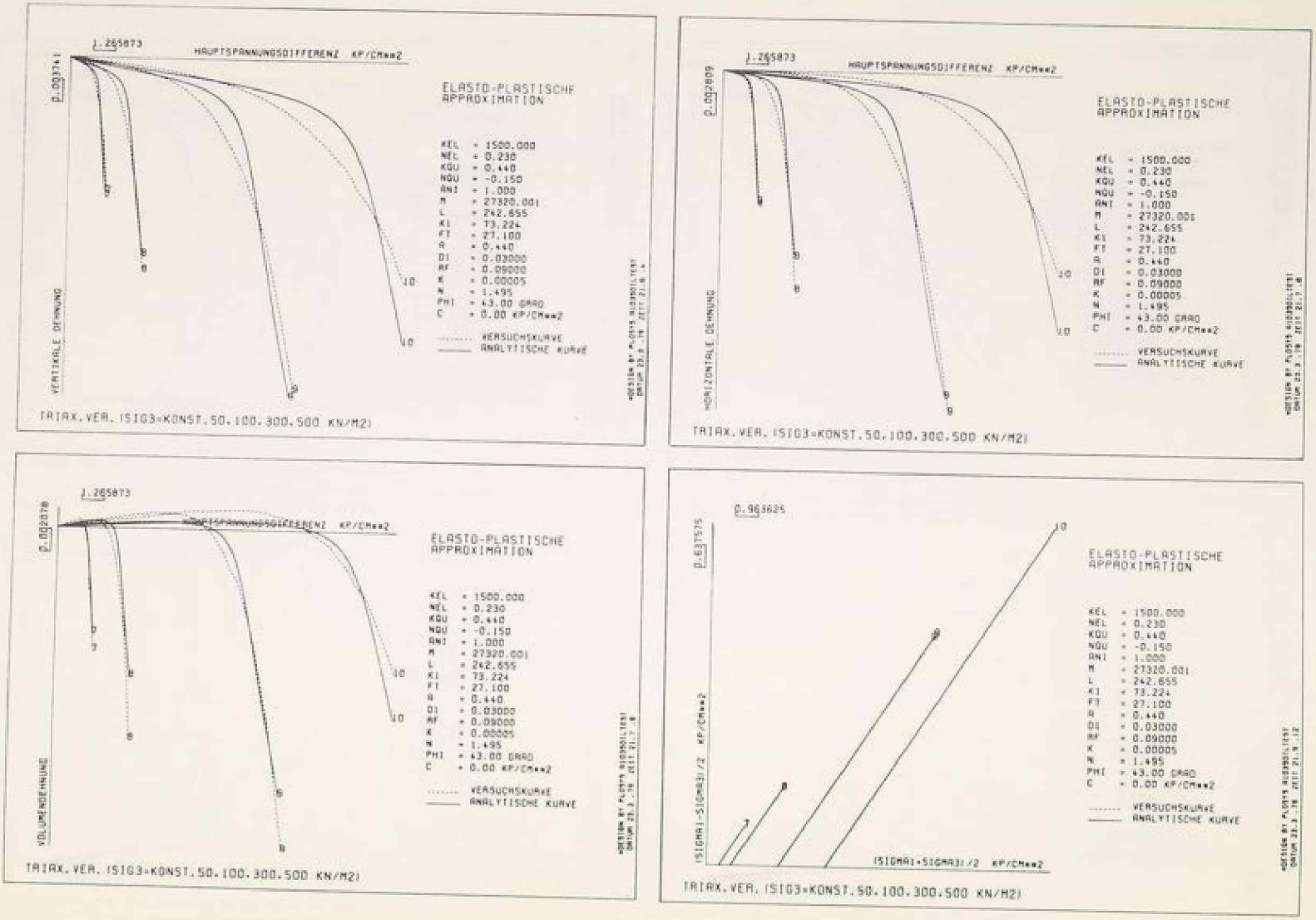



Bild 4.11: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim konventionellen Triaxialversuch

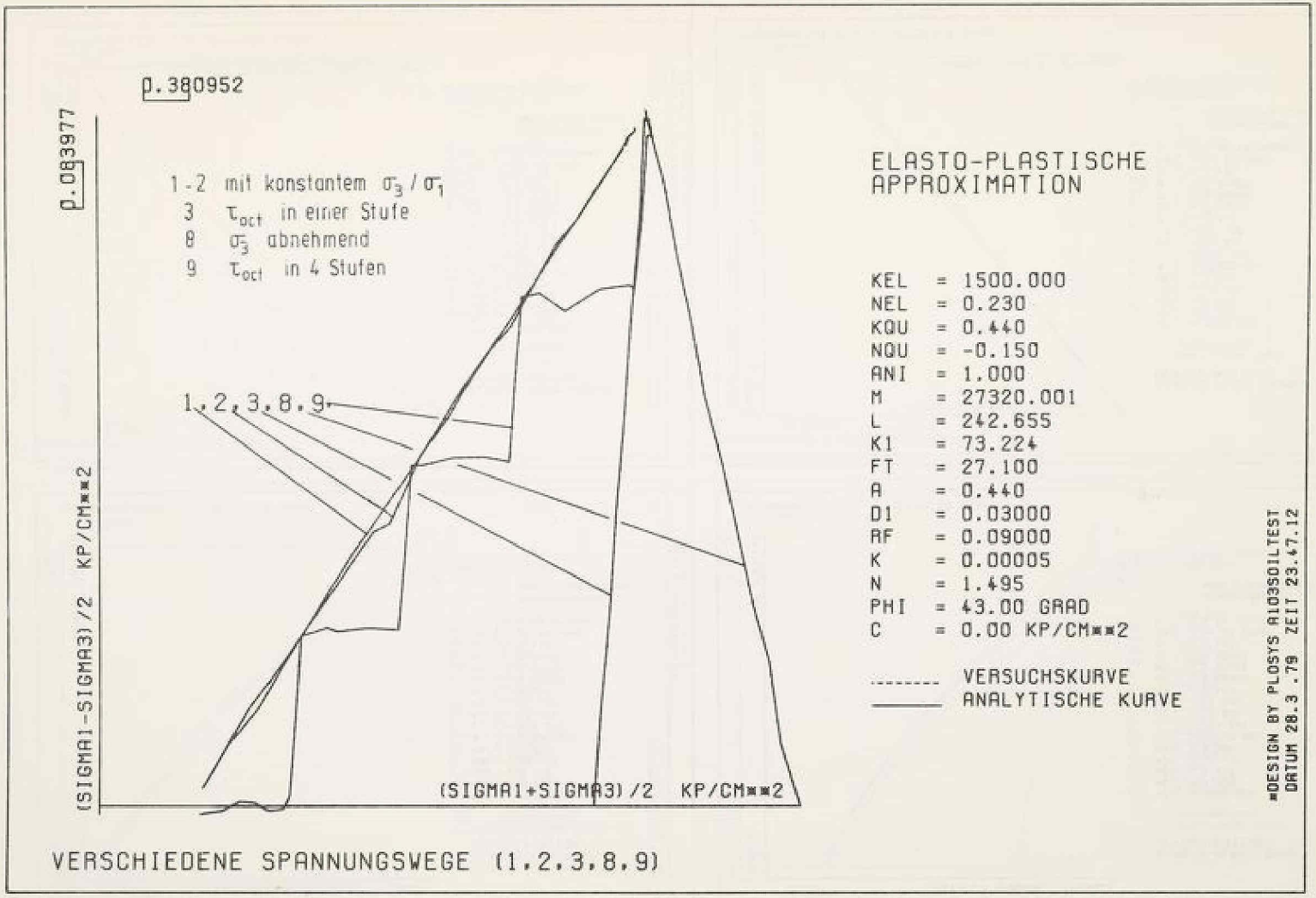



Bild 4.12: Spannungswege der Belastungsversuche an dichtem Sand

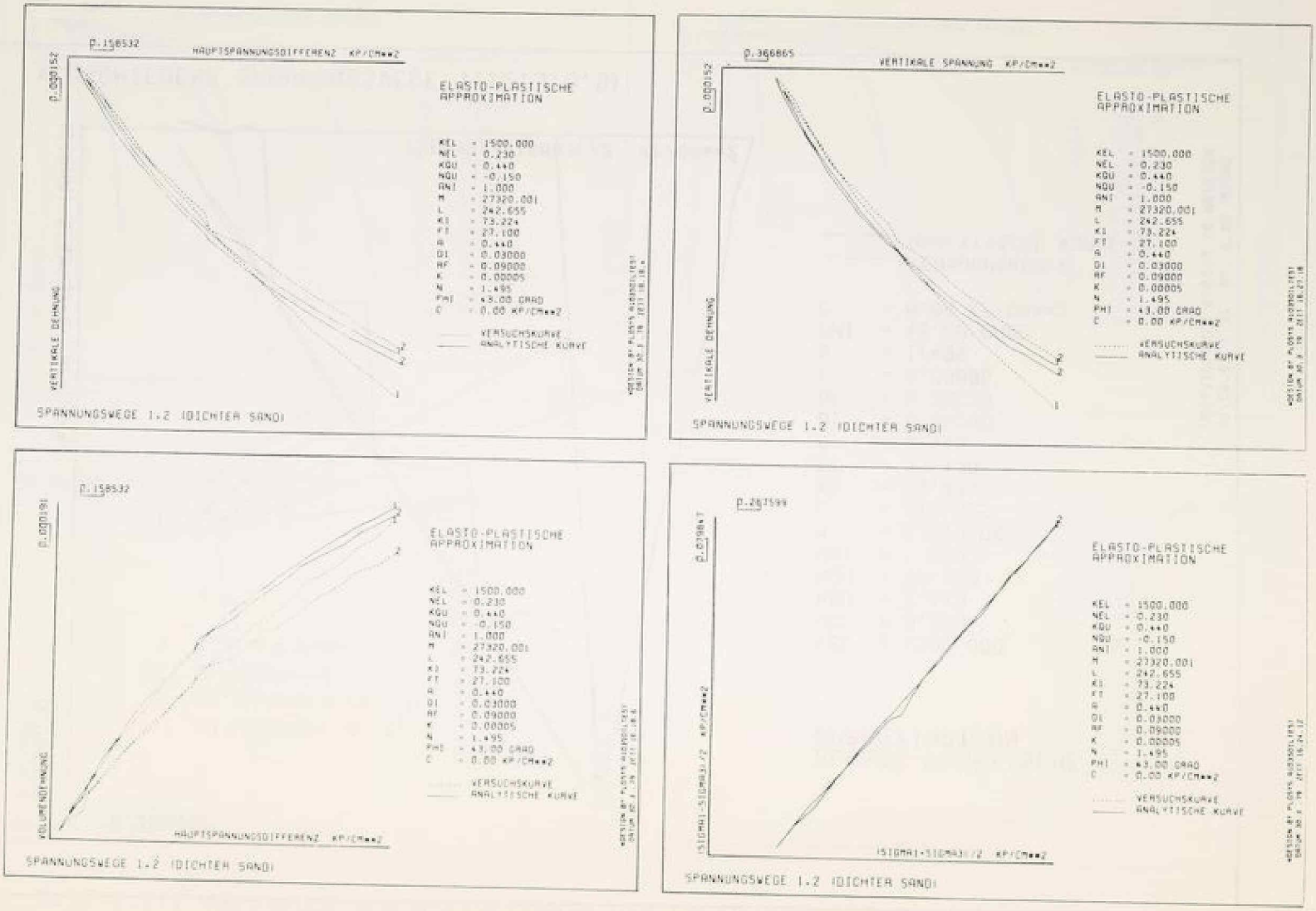



Bild 4.13: Vergleich von analytischen und Versuchskurven bei den Spannungswegen 1 und 2

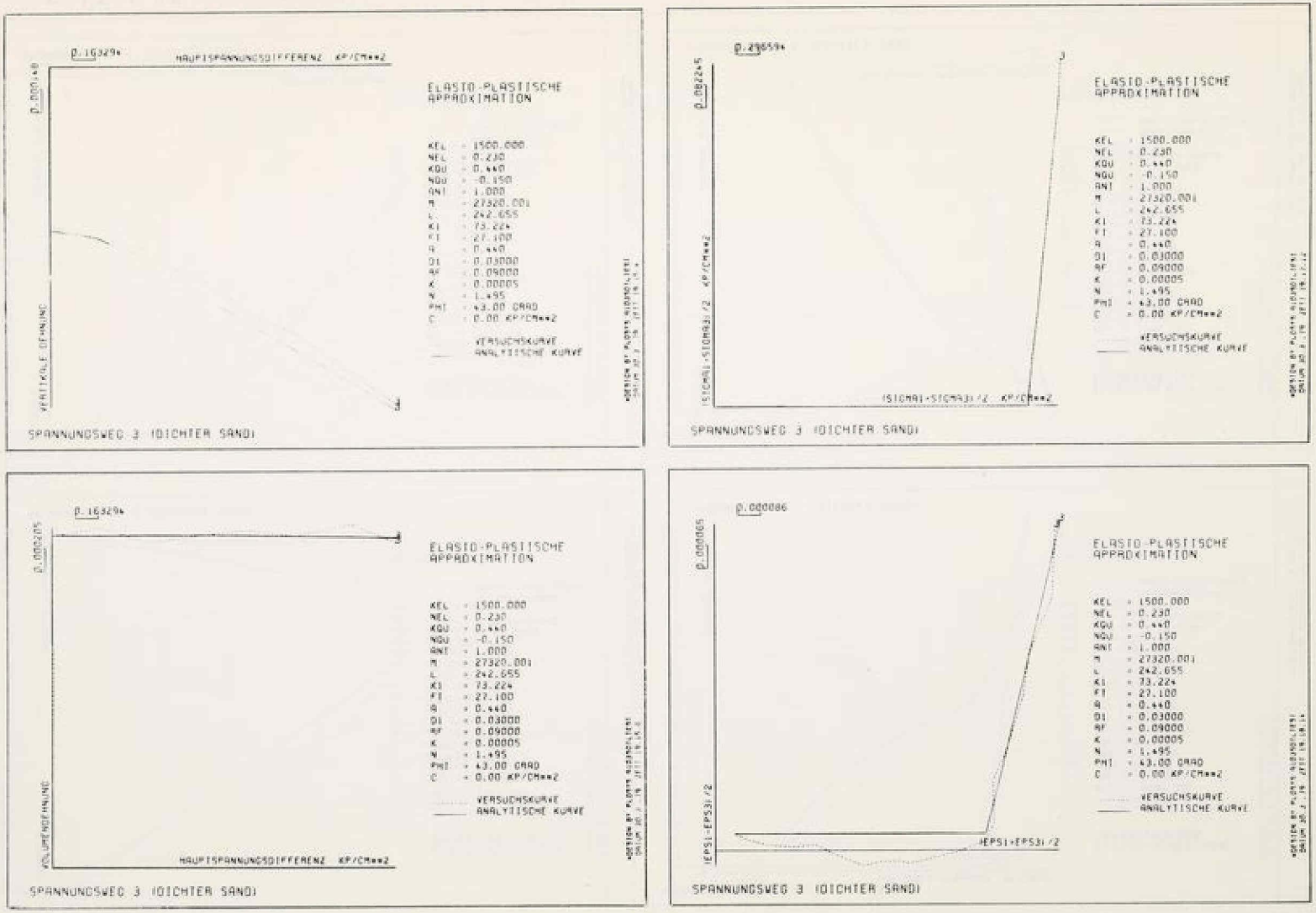



Bild 4.14: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim Spannungsweg 3

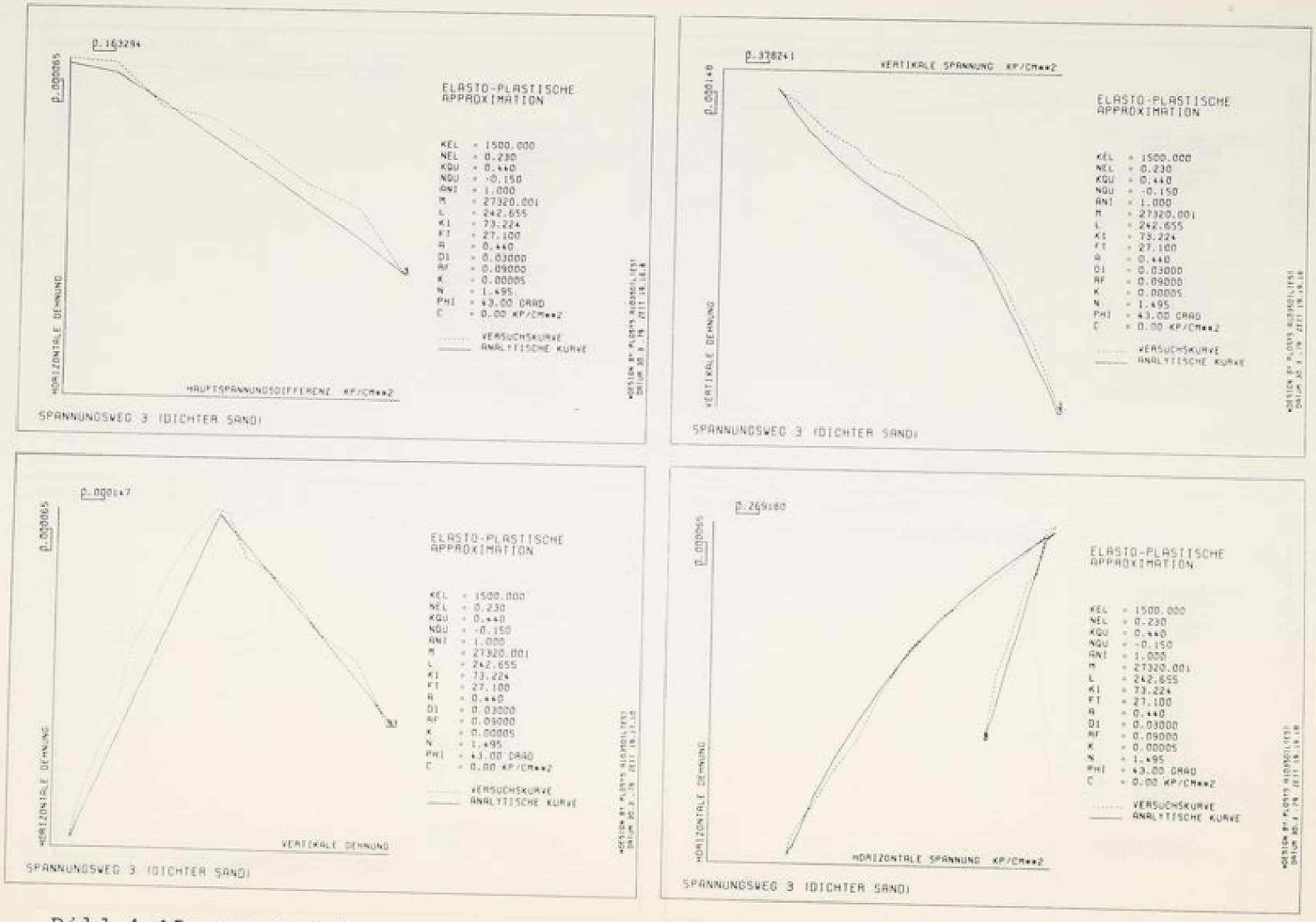



Bild 4.15: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim Spannungsweg 3

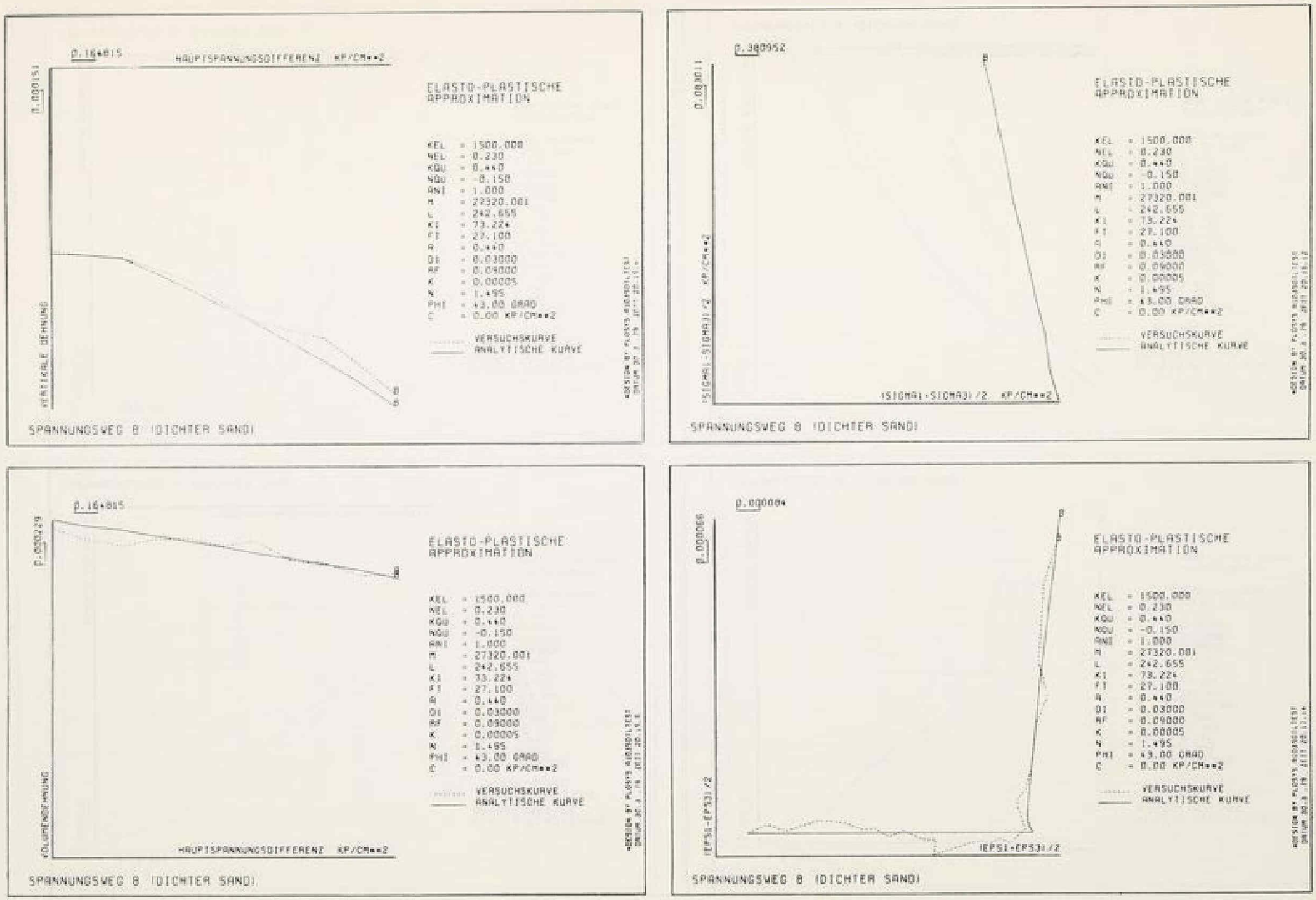



Bild 4.16: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim Spannungsweg 8

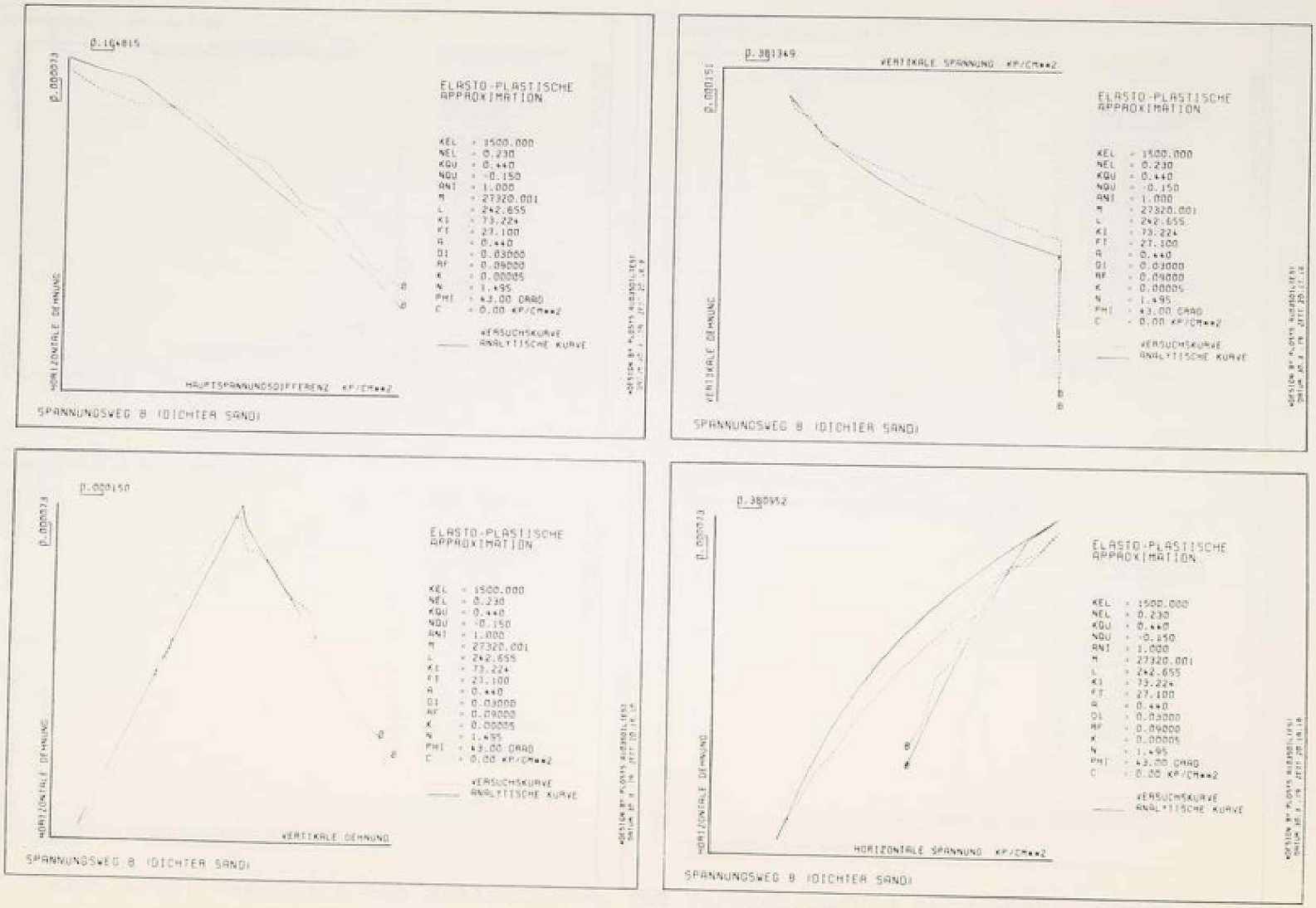



Bild 4.17: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim Spannungsweg 8

Bild 4.17: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim Spannungsweg 8

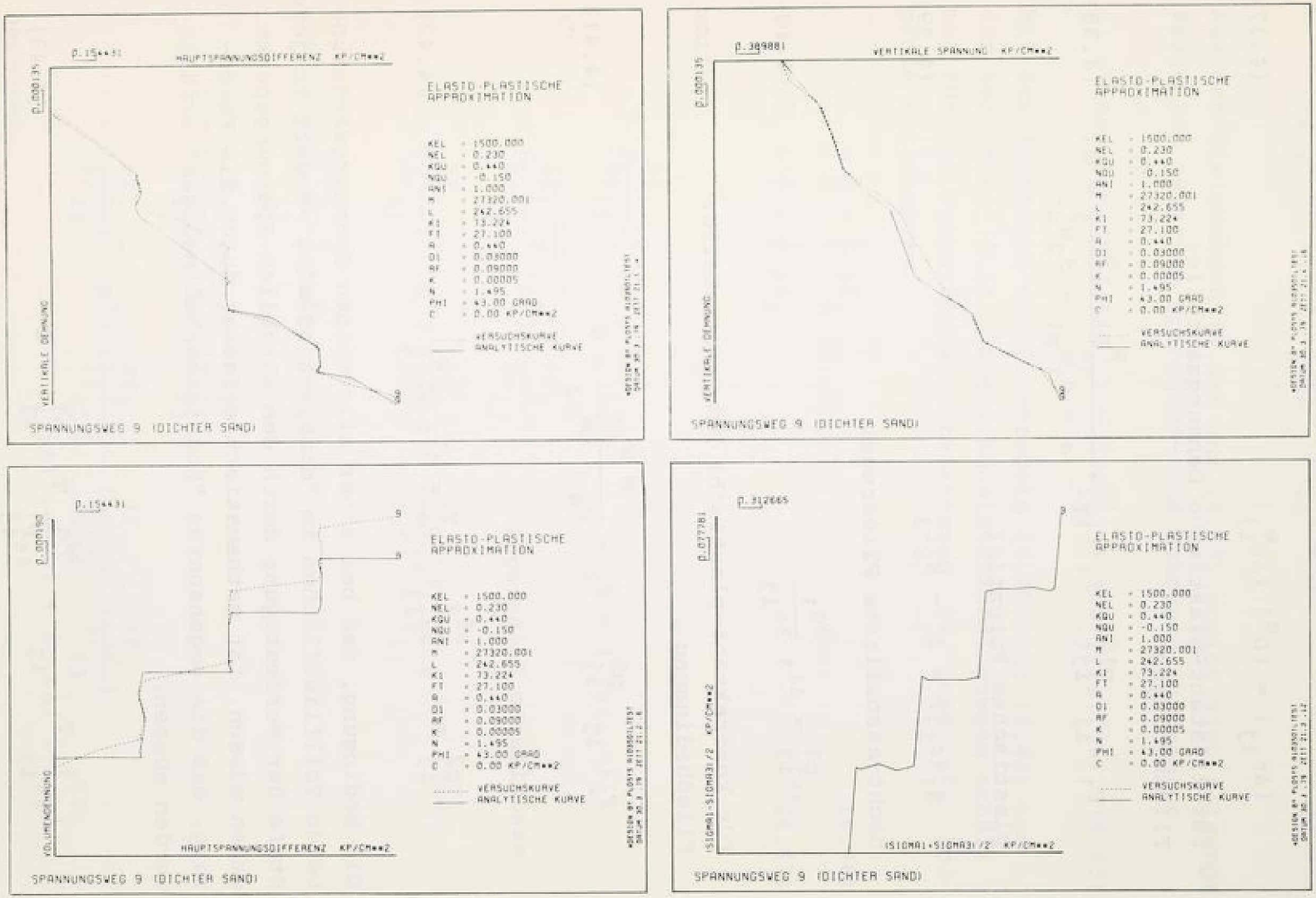



Bild 4.18: Vergleich von analytischen und Versuchskurven beim Spannungsweg 9

Es gelten

- für elastische Dehnungsanteile:

$$\{\Delta\sigma_{ij}\} = [D^e]\,\{\Delta\varepsilon^e_{ij}\} \tag{4.37}$$

- für dilatant-plastische Dehnungsanteile:
  Fließbedingung

$$F_1(\sigma_{ij},\varepsilon^{p1}_{ij}) = f_1 - f_{1T} - \frac{W_{p1}}{a + d_1 W_{p1} + d_2 W_{p1}^2} = 0 \tag{4.38}$$

  plastisches Potential

$$g_1(\sigma_{ij}) = I_1^3 - k_2 I_3 \tag{4.39}$$

  nicht-assoziierte Fließregel

$$\Delta\varepsilon^{p1}_{ij} = \Delta\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.40}$$

- für kontraktant-plastische Dehnungsanteile:
  Fließbedingung

$$F_2(\sigma_{ij},\varepsilon^{p2}_{ij}) = f_2 - \frac{M\,W_{p2}}{p_a - L W_{p2}} = 0 \tag{4.41}$$

  assoziierte Fließregel

$$\Delta\varepsilon^{p2}_{ij} = \Delta\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}} \cdot p_a^2 = \Delta\bar{\lambda}_2 \frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.42}$$

Die Bedingung, daß bei einer allgemeinen Spannungsänderung beide Teilfließflächen im "double-hardening"-Modell in jeder Stufe der Verfestigung durch den aktuellen Spannungspunkt gehen müssen, ist mathematisch erfaßbar durch die Forderung, daß die sogenannten "Konsistenzbedingungen" erfüllt werden müssen.

$$\{\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_{ij}}\}^T\{\Delta\sigma_{ij}\} + \{\frac{\partial F_1}{\partial\varepsilon^{p1}_{ij}}\}^T\{\Delta\varepsilon^{p1}_{ij}\} = 0 \tag{4.43}$$

$$\{\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{ij}}\}^T\{\Delta\sigma_{ij}\} + \{\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon^{p2}_{ij}}\}^T\{\Delta\varepsilon^{p2}_{ij}\} = 0 \qquad (4.44)$$

Aus den Gleichungen (4.36) und (4.37) ergibt sich folgende Beziehung zwischen Spannungs- und Dehnungsinkrementen

$$\{\Delta\sigma_{ij}\} = [D^e](\{\Delta\varepsilon_{ij}\} - \{\Delta\varepsilon^{p1}_{ij}\} - \{\Delta\varepsilon^{p2}_{ij}\}) \qquad (4.45)$$

Mit dem Einsetzen der Fließregeln (4.40) und (4.42) und der Beziehung (4.45) in die Konsistenzbedingungen erhält man für die Proportionalitätsfaktoren $\Delta\lambda_1$ und $\Delta\bar{\lambda}_2$ folgende Beziehungen:

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\eta}{\Lambda} - \frac{\Omega}{\Lambda}\,\Delta\bar{\lambda}_2 \qquad (4.46)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_2 = \frac{\gamma}{\Gamma} - \frac{\xi}{\Gamma}\,\Delta\lambda_1 \qquad (4.47)$$

worin

$$\eta = \{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \{\Delta\varepsilon_{ij}\}$$

$$\Omega = \{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}$$

$$\Lambda = \{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\} - \{\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon^{p1}_{ij}}\}^T\{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\}$$

$$\gamma = \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \{\Delta\varepsilon_{ij}\}$$

$$\xi = \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\}$$

$$\Gamma = \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\} - \{\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon^{p2}_{ij}}\}^T \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}$$

bedeuten.

Aus (4.46) und (4.47) ergeben sich die Proportionalitätsfaktoren jeweils zu

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\eta \cdot \Gamma - \Omega \cdot \gamma}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \tag{4.48}$$

$$\Delta\bar{\lambda}_2 = \frac{\gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \eta}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \tag{4.49}$$

Indem diese in die Fließregeln (4.40) und (4.42) eingesetzt werden, errechnen sich die plastischen Dehnungsanteile zu

$$\{\Delta\varepsilon_{ij}^{p1}\} = \frac{\eta \cdot \Gamma - \Omega \cdot \gamma}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\} \tag{4.50}$$

$$\{\Delta\varepsilon_{ij}^{p2}\} = \frac{\gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \eta}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\} \tag{4.51}$$

Aus (4.45), (4.50) und (4.51) ergibt sich dann

$$\{\Delta\sigma_{ij}\} = ([D^e] - [D^e] \cdot \frac{\eta^1 \cdot \Gamma - \gamma^1 \cdot \Omega}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\} -$$

$$- [D^e] \frac{\gamma^1 \cdot \Lambda - \xi \cdot \eta^1}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}) \cdot \{\Delta\varepsilon_{ij}\}$$

wobei

$$\gamma^1 = \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e]$$

$$\eta^1 = \{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}\}^T [D^e] \quad \text{bedeuten.}$$

Somit läßt sich die elastoplastische Stoffmatrix für das "double-hardening"-Modell zu

$$[D^{ep}] = [D^e] - [D^e] \cdot \frac{\eta^1 \cdot \Gamma - \gamma^1 \cdot \Omega}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\} -$$

$$- [D^e] \frac{\gamma^1 \cdot \Lambda - \xi \cdot \eta^1}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega} \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\} \tag{4.52}$$

ermitteln.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß in den Gleichungen (4.46) und (4.47) für den Übergangsbereich - I $\Delta\bar{\lambda}_2 = 0$ und für den Übergangsbereich - II $\Delta\lambda_1 = 0$ einzusetzen sind.

Nach dem Konzept "Work-Hardening" der Plastizitätstheorie wird die Abhängigkeit der Fließflächen von den plastischen Dehnungen durch die plastische Arbeit ausgedrückt, so daß bei isotroper Verfestigung

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) = f(\sigma_{ij}) - f^*(\int dW_p) \quad \text{gilt}$$

und für

$$\{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\}^T = - \frac{\partial f^*}{\partial W_p} \{\frac{\partial W_p}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\}$$

geschrieben werden kann.

Da sich das Inkrement der plastischen Arbeit zu

$$\Delta W_p = \{\sigma_{ij}\}^T \{\Delta \varepsilon^p_{ij}\} \quad \text{errechnet, folgt}$$

$$\{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\}^T = - \frac{\partial f^*}{\partial W_p} \{\sigma_{ij}\}^T \tag{4.53}$$

Aus den Gleichungen (4.53), (4.38) und (4.41) ergeben sich dann

$$\{\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon^{p1}_{ij}}\}^T = - \frac{a - d_2 W^2_{p1}}{(a + d_1 W_{p1} + d_2 W^2_{p1})^2} \{\sigma_{ij}\}^T \tag{4.54}$$

$$\{\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon^{p2}_{ij}}\}^T = - \frac{M \cdot p_a}{(p_a - L W_{p2})^2} \{\sigma_{ij}\}^T \tag{4.55}$$

Man beachte, daß dann die Terme

$$\{\sigma_{ij}\}^T \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\} \quad \text{und} \quad \{\sigma_{ij}\}^T \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\}$$

in $\Lambda$ bzw. in $\Gamma$ sich nach dem Eulerschen Theorem für homogene Funktionen n-ten Grades jeweils zu

$$\{\sigma_{ij}\}^T \{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\} = 3 \cdot g_1$$

$$\{\sigma_{ij}\}^T \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\} = 2 \cdot f_2 \quad \text{ergeben.}$$

(Siehe hierzu Anhang B).

Zur Ergänzung sollen noch einige tensorielle Größen aus den Gleichungen in Komponentenschreibweise dargestellt werden.

Die Elastizitätsmatrix $[D^e]$ für den isotropen Fall

$$[D^e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Gradienten der Teilfließfläche ($f_1$ - Konus) für dilatant-plastische Dehnungsanteile

$$\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ij}}\} = \{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}\} = \frac{1}{I_3} \cdot \begin{Bmatrix} 3I_1^2 - f_1(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{yz}^2) \\ 3I_1^2 - f_1(\sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xz}^2) \\ 3I_1^2 - f_1(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2) \\ - 2f_1(\tau_{yz}\tau_{xz} - \tau_{xy}\sigma_{zz}) \\ - 2f_1(\tau_{xz}\tau_{xy} - \tau_{yz}\sigma_{xx}) \\ - 2f_1(\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}\sigma_{yy}) \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Für den Gradienten des plastischen Potentials $\{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\}$ wird in Gleichung (4.56) statt $f_1$, $k_2$ eingesetzt und der Term $\frac{1}{I_3}$ entfällt.

Die Komponenten des Gradienten der Kappe ($f_2$)

$$\{\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{ij}}\} = \{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\} = \frac{1}{p_a^2} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} + 3I_1 \\ \sigma_{yy} + 3I_1 \\ \sigma_{zz} + 3I_1 \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

Diese Grundgleichungen des "double-hardening"-Modells wurden von Wanninger in ein Finite-Element-Programm implementiert. Die Brauchbarkeit des Stoffgesetzes wurde sowohl an einfachen Beispielen als auch an komplexen Grundbauaufgaben überprüft. Eine ausführliche Diskussion hierüber findet sich bei Wanninger (1980). Wesentlicher Unterschied gegenüber inkrementell-elastischen Stoffmatrizen ist, daß alle Spannungsgrößen in die Stoffmatrix eingehen. Das bedingt einen organisatorischen Mehraufwand. Zusätzlich ist die Stoffmatrix unsymmetrisch, so daß auch aufwendige Lösungsalgorithmen für das Auflösen des Gleichungssystems erforderlich werden. Untersucht wurden mehrere Grundbauprobleme mit unterschiedlichen Randbedingungen. Die Berechnung von Einzelfundamenten zeigte gute Übereinstimmung mit Großversuchen (Breth, Arslan, Rückel, Stroh 1976), aber auch den großen Einfluß der Dilatanz auf die errechnete Lastsetzungskurve. Die Anwendung auf verankerte Baugrubenwände zeigt, daß - verglichen mit Modellversuchen und Messungen an Großausführungen - das elastoplastische Stoffgesetz in der Lage ist, die Verformungen in allen betrachteten Schnitten vorzeichengerecht und qualitativ richtig wiederzugeben. Während mit den Modellversuchen eine quantitative Übereinstimmung nicht erreicht werden konnte, ist für Großausführungen eine zutreffende quantitative Aussage möglich. Insbesondere konnte gezeigt werden, daß nur mit einem elastoplastischen Stoffgesetz die Verformungen der Geländeoberfläche berechnet werden können.

Diese Berechnungsbeispiele bestätigen, daß mit dem "double-hardening"-Modell kontinuierliche Vorgänge im Boden, ausgehend von einem anfänglichen Spannungs- und Verformungszustand bis zum Bruch, wirklichkeitsnäher, als dies bisher möglich war, beschrieben werden können.

## 5. Zusammenfassung

Die Aufgabenstellung dieser Arbeit bestand darin, ein Stoffgesetz für Sand aufzustellen, das die wesentlichen Verformungseigenschaften des Materials unter dränierten Bedingungen erfaßt und zugleich, im Einklang mit numerischen Verfahren, auf praktische Grundbauaufgaben anwendbar ist.

Der Verformungsmechanismus eines Haufwerks wird im wesentlichen von der Lagerungsstruktur seiner Körner bestimmt. Die räumliche Verteilung der Kontaktpunkte ist das grundlegende Merkmal körniger Medien, von dem die mechanischen Eigenschaften dieser Haufwerke entscheidend abhängen. Eine anisotrope Verteilung der Normalen an den Kornkontakten im Ausgangszustand hat richtungsabhängige mechanische Verformungseigenschaften unter Belastungen zur Folge, so daß der Ausgangszustand solcher Sande, die eine Ausgangsanisotropie aufweisen (dies trifft mehr für locker gelagerte als für dicht gelagerte Sande zu), allein durch die Porenzahl (e) nicht hinreichend gekennzeichnet ist. Für allgemeingültige Formulierungen müßte diese Richtungsabhängigkeit der Verformungseigenschaften versuchsmäßig weitgehender und allgemeiner (mehrdimensionale Fälle) untersucht werden. Bei Belastungen mit plötzlicher Drehung der Spannungshauptachsen hat sicherlich die aus der vorangegangenen Belastung des Sandkörpers resultierende Anisotropie wiederum das Problem der anisotropen Struktur und die Richtungsabhängigkeit der Verformungseigenschaften zur Folge. In der Praxis ist mehr der Gesamteffekt der Ausgangsanisotropie und der spannungsinduzierten Anisotropie (kombinierte Anisotropie) von Interesse. Spezielle Versuche zu diesem Problem aber existieren bis heute nicht. Das Anisotropie-Problem bedarf daher noch zusätzlicher, versuchsmäßiger Untersuchungen, um mathematisch behandelt werden zu können. Es wurde aus dem Grund im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die Gesamtdehnungen eines Sandkörpers haben zwei Komponenten: ein elastischer Anteil infolge der Formänderungen einzelner Körner und ein plastischer Anteil infolge der Gleitungen (slidings) der Körner.

Der Sprödbruch der Körner (Kornzertrümmerung) ist in den Spannungsbereichen, wie sie in dieser Arbeit betrachtet wurden, von keinem meßbaren Einfluß. In jeder Stufe der Belastung können die Gesamtdehnungen als Summe dieser Anteile berechnet werden. Rein elastische Dehnungen (im meßtechnischen Sinne) kommen nur bei kleinen deviatorischen Ent- und Wiederbelastungsschleifen oder bei Ent- und Wiederbelastungen mit konstantem Spannungsverhältnis vor. Bei allen anderen Belastungswegen werden sie von plastischen Dehnungen begleitet.

Die wichtigsten Aspekte des Verformungsverhaltens trockener Sande, wie sie in Versuchen beobachtet werden, sind:

- Ausgeprägte Nichtlinearität
- Einfluß der hydrostatischen Belastung
- Einfluß der kleinsten Hauptspannung ($\sigma_3$)
- Einfluß der mittleren Hauptspannung ($\sigma_2$)
- Dilatanz (Volumenvergrößerung) unter Scherbeanspruchung
- Einfluß des Spannungsweges
- Koaxialität von Spannungsinkrement und Dehnungsinkrement bei niedrigem Stress-level (elastisches Verhalten). Koaxialität von Dehnungsinkrement und Gesamtspannung bei hohem Stress-level (plastisches Verhalten) und kontinuierlicher Übergang in den dazwischenliegenden Ausnutzungsgraden bei monotoner Belastung.
- Plastische Dehnungen bei großen deviatorischen Ent- und Wiederbelastungszyklen.
- Das Erreichen des Grenzzustands durch Ausbildung einer dünnen Scherzone in der Probe. Das Nachbruchverhalten der Probe wird im wesentlichen von dieser Zone bestimmt.

Die Aspekte (ausgenommen die zwei letztgenannten) des Verhaltens wurden mit Hilfe eigener Versuchsergebnisse und einer Literaturstudie erläutert. Auf der Grundlage der Versuchsergebnisse wird für dichten Sand, der der Forderung isotroper Ausgangskonfiguration genügt, ein Stoffgesetz vorgeschlagen, das die oben genannten Einflüsse auf das Verformungsverhalten erfaßt. Das vorgeschlagene Modell ("double-hardening"-Modell) stellt eine modifizierte Form

des elastoplastischen Stoffgesetzes von Lade und Duncan (1975) dar. Unter Verwendung der Grundkonzepte der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie wurde ein Fließkriterium mit zwei voneinander unabhängigen Teilfließflächen - Kappe und Konus - formuliert, das dem sehr unterschiedlichen Verformungsverhalten des Bodens in verschiedenen Belastungsbereichen gerecht wird. Demzufolge haben die plastischen Verformungsanteile zwei Komponenten, die jeweils aus der Änderung einzelner Teilfließflächen mit Hilfe der assoziierten und nichtassoziierten Fließregeln und der aufgrund der umfangreichen Versuchsergebnisse vorgeschlagenen empirischen Verfestigungsansätze errechnet werden. Durch das Zusammenwirken von diesen dilatanten und kontraktanten plastischen Verformungskomponenten kann das bereichsweise kontraktante bzw. dilatante Verhalten der Probe mit ausreichender Genauigkeit simuliert werden.

Die für das vorgeschlagene Modell erforderlichen Stoffkonstanten können aus den konventionellen Triaxialkompressionsversuchen und einem hydrostatischen Kompressionsversuch bestimmt werden.

Mit dem neu formulierten Stoffgesetz wurden Triaxialversuche bei verschiedenen Spannungswegen nachgerechnet. Dabei zeigt sich zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung. Das Modell wurde bis zu der für numerische Berechnungsverfahren erforderlichen Stoffmatrix ($[D^{ep}]$) aufbereitet.

Das Nachbruchverhalten (post-peak-behaviour) der Probe wird im wesentlichen von einer dünnen Scherzone bestimmt. Die Fortsetzung der Scherdeformation in dieser Scherfuge führt zur Entfestigung des Probekörpers. Theoretisch wird diese Lokalisierung der Deformation auf einer Scherfuge als Verzweigungsproblem behandelt (Vardoulakis, 1977).

Daß es bei großen deviatorischen Ent- und Wiederbelastungszyklen zu plastischen Verformungen kommt, bevor der Stresslevel, von dem ausgehend entlastet wurde, wieder erreicht wird, ist ein Effekt, den man auch bei Metallen beobachtet (Bauschinger-Effekt). Im Gegensatz zu den Metallen tritt dieser Effekt beim Boden bereits während der Entlastung auf.

Das Konzept der isotropen Verfestigung ist für die theoretische Behandlung dieses Problems ungeeignet. Dagegen besteht die Möglichkeit, auf der Grundlage der Hypothese "kinematischer Verfestigung" (Mróz, 1969-1979) das Problem theoretisch und experimentell zu untersuchen. Es sind aber hierfür noch umfangreiche Experimente für Ent- und Wiederbelastungen im allgemeinen Sinne vorzunehmen, um geeignete Fließflächenformen und empirische Verfestigungsansätze explizit bestimmen zu können.

## 6. Literaturverzeichnis

ARTHUR, J.R.F.; JAMES, R.G.; ROSCOE, K.H. (1964): The Determination of Stress Fields during Plane Strain of a Sand Mass. Geotechnique 14, S. 283.

ARTHUR, J.R.F.; MENZIES, B.K. (1972): Inherent Anisotropy in a Sand. Geotechnique 22, No. 1, S. 115-128.

ARTHUR, J.R.F.; CHUA, K.S.; DUNSTAN, T. (1977a): Induced Anisotropy in a Sand. Geotechnique 27, No. 1, S. 13-20.

ARTHUR, J.R.F.; DUNSTAN, T.; AL-ANI, Q.A.J.L.; ASSADI, A. (1977b): Plastic Deformation and Failure in Granular Media. Geotechnique 27. No. 1, S. 53-74.

BARDEN, L. (1963): Stresses and Displacements in a Cross-Anisotropic Soil. Geotechnique 13, S. 198-210.

BISHOP, A.W. (1961): Discussion on "Soil Properties and their Measurement". Proc. of the 5th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Paris, Vol. 3, S. 97-100.

BISHOP, A.W. (1966): The Strength of Soils as Engineering Materials. 6th Rankine Lecture, Geotechnique 16, No. 2, S. 89-130.

BISHOP, A.W.; GREEN, G.E.; GARGA, V.K.; ANDERSEN, A.; BROWN, J.D. (1971): A New Ring Shear Apparatus and its Application to the Measurement of Residual Strength. Geotechnique 21, No. 4, S. 273-328.

BJERRUM, L.; KUMMENEJE, O. (1961): Shearing Resistance of Sand Samples with Circular and Rectangular Cross Sections. Publ. Norw. Geot. Inst. No. 44.

BRETH, H.; ARSLAN, U.; RÜCKEL, H.; STROH, D. (1976): Zur Setzung von Flachgründungen; Vorträge der Grundbautagung Nürnberg. Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e.V., S. 603-626.

BRETH, H.; CHAMBOSSE, G.; ARSLAN, U. (1978): Einfluß des Spannungsweges auf das Verformungsverhalten des Sandes. Geotechnik 1, S. 2-9.

BRONSTEIN, I.N.; SEMENDJAJEW, K.A. (1973): Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/M., 13. Auflage.

CHAMBOSSE, G. (1976): Stoffansatz für den Sand unter den Verformungsbedingungen im Standard-Triaxialversuch. Dissertation, Darmstadt.

CORNFORTH, D.H. (1961): Plane Strain Failure Characteristics of a Saturated Sand. Ph. D. Thesis, London.

CORNFORTH, D.H. (1964): Some Experiments on the Influence of Strain Conditions on the Strength of Sand. Geotechnique 14, S. 143-167.

DRUCKER, D.C. (1950): Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 7, S. 411-418.

DRUCKER, D.C. (1951): A More Fundamental Approach to Stress-Strain Relations. Proc. 1st. U.S. National Congr. Appl. Mech., ASME, S. 487-491.

DRUCKER, D.C.; PRAGER, W. (1952): Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 10, S. 157-165.

DRUCKER, D.C.; GIBSON, R.E., HENKEL, D.J. (1955): Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity. Transactions of the ASCE. Paper No. 2864, S. 338-346.

DRUCKER, D.C. (1956): On the Uniqueness in the Theory of Plasticity. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 14, S. 35-42.

DRUCKER, D.C. (1959): A Definition of Stable Inelastic Material. Journal of Applied Mechanics. Vol 26, S. 101-106.

DUNCAN, J.M.; CHANG, C.Y. (1970): Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE, Vol 96, SM5, S. 1629-1653, (Closure May 1972).

EL-SOHBY, M.A. (1969a): Deformation of Sand under Constant Stress Ratios. Proc. of 7th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Mexico City, Vol. I., S. 111-119.

EL-SOHBY, M.A. (1969b): Elastic Behaviour of Sand. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 95, SM6, S. 1393-1409.

EL-SOHBY, M.A.; ANDRAWES, K.Z. (1972): Deformation Characteristics of Granular Materials under Hydrostatic Compression. Canadian Geotechnical Journal, 9, S. 338-350.

FINN, W.D.L.; WADE, N.H.; LEE, K.L. (1967): Volume Changes in Triaxial and Plane Strain Tests. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, SM6, S. 297-308.

GOLDSCHEIDER, M. (1972): Spannungen in Sand bei räumlicher, monotoner Verformung. Dissertation, Karlsruhe.

GREEN, G.E.; BISHOP, A.W. (1969): A Note on the Drained Strength of Sand under Generalized Strain Conditions. Geotechnique 19, S. 144-149.

GUDEHUS, G. (1973a): Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenen Sand. Ingenieur-Archiv 42, S. 151-169.

GUDEHUS, G. (1973b): Ebene und achsensymmetrische Formänderungen in Sand: Grundgleichungen. Die Bautechnik 50, S. 129-134.

HAMBLY, E.C. (1969): A New True Triaxial Apparatus. Geotechnique 19, S. 307-309.

HILL, R. (1950): The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford.

HOLUBEC, I. (1968): Elastic Behaviour of Cohesionless Soil. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, SM6, S. 1215-1231.

HOLUBEC, I. (1970): Closure to "Elastic Behaviour of Cohesionless Soil". Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 96, SM2, S. 763-764.

HORNE, M.R. (1965a): The Behaviour of an Assembly of Rotund, Rigid, Cohesionless Particles, I. Proc. Roy. Soc. A., Vol. 286, S. 62-78.

HORNE, M.R. (1965b): The Behaviour of an Assembly of Rotund, Rigid, Cohesionless Particles, II. Proc. Roy. Soc. A., Vol. 286, S. 79-87.

HORNE, M.R. (1969): The Behaviour of an Assembly of Rotund, Rigid, Cohesionless Particles, III. Proc. Roy. Soc. A., Vol. 310, S. 21-34.

JELINEK, R. (1948): Der Boden als querisotropes Medium. Abhandlungen über Bodenmechanik und Grundbau. E. Schmidt-Verlag, Bielefeld, S. 19-33.

KIRKPATRICK, W.M. (1957): The Condition of Failure for Sand. Proc. of the 4th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., London, Vol. I, S. 172-178.

KJELLMANN, W. (1936): Report on an Apparatus for Consummate Investigation of the Mechanical Properties of Soils. Proc. of the 1st Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Cambridge, Mass., Vol. II. S. 16-20.

KO, H.Y.; SCOTT, R.F. (1967a): A New Soil Testing Apparatus. Geotechnique 17, No. 1, S. 40-57.

KO, H.Y.; SCOTT, R.F. (1967b): Deformation of Sand in Hydrostatic Compression. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, SM3, S. 137-156.

KO, H.Y.; SCOTT, R.F. (1967c): Deformation of Sand in Shear. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, SM5, S. 283-310.

KO, H.Y.; SCOTT, R.F. (1968): Deformation of Sand at Failure. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, SM4, S. 883-898.

KOLBUSZEWSKI, J.J. (1948): An Experimental Study of the Maximum and Minimum Porosities of Sands. Proc. of the 2nd Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Rotterdam, Vol. I., S. 158-165.

LADE, P.V. (1973): Written Discussion, Symposium on Plasticity and Soil Mechanics, Cambridge, S. 129-144.

LADE, P.V.; DUNCAN, J.M. (1973): Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 99, SM10, S. 793-811.

LADE, P.V. (1975): Torsion Shear Tests on Cohesionless Soils. Proc. of the 5th Panamerican Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Buenos Aires, Argentina, Vol. I, S. 117-127.

LADE, P.V.; DUNCAN, J.M. (1975): Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil. Journal of the Geotechnical Division, ASCE, Vol. 101, GT10, S. 1037-1053.

LADE, P.V. (1976): Interpretation of Torsion Shear Tests on Sand. Proc. of the 2nd Intern. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg, S. 381-389.

LADE, P.V.; DUNCAN, J.M. (1976): Stress-Path Dependent Behaviour of Cohesionless Soil. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 102, GT1, S. 51-68.

LEKHNITSKII, S.G. (1963): Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden Day, San Francisco.

LOMIZE, G.M.; KRYZHANOVSKY, A.L. (1967): On the Strength of Sand. Proc. of the Geotechnical Conf., Oslo, Vol. I, S. 215-219.

LOMIZE, G.M.; KRYZHANOVSKY, A.L.; VORONTSOV, E.I.; GOLDIN, A.L. (1969): Study on Deformation and Strength of Soils under Three-Dimensional State of Stress. Proc. of the 7th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Mexico City, Vol. I, S. 257-265.

LORENZ, H.; NEUMEUER, H.; GUDEHUS, G. (1965): Tests Concerning Compaction and Displacements Performed on Samples of Sand in the State of Plane Deformation. Proc. of the 6th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Montreal, Vol. I, S. 293-297.

MATSUOKA, H.; NAKAI, T. (1977): Stress-Strain Relationship of Soil Based on the SMP. Proc. of Specialty Session 9, 9th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Tokyo, Japan, S. 153-162.

MENDELSON, A. (1968): Plasticity: Theory and Practice. The MacMillan Company, New York.

MISES, R. von (1913): Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, S. 582-592.

MRÓZ, Z. (1963): Nonassociated Flow Rules in Plasticity. Journal de Mécanique 2, No. 1, S. 21-42.

MRÓZ, Z. (1967): On the Description of Anisotropic Workhardening. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 15, S. 163-175.

MRÓZ, Z. (1969): An Attempt to Describe the Behaviour of Metals Under Cyclic Loads Using a More General Work-Hardening Model. Acta Mechanica 7, S. 199-212.

MRÓZ, Z.; LIND, N.C. (1975): Simplified Theories of Cyclic Plasticity. Acta Mechanica 22, S. 131-152.

MRÓZ, Z. (1976): A Nonlinear Hardening Model and Its Application to Cyclic Loading. Acta Mechanica 25, S. 51-61.

MRÓZ, Z.; NORRIS, V.A.; ZIENKIEWICZ, O.C. (1979): Application of an Anisotropic Hardening Model in the Analysis of Elasto-Plastic Deformation of Soils. Geotechnique 29, No. 1, S. 1-34.

ODA, M. (1972a): Initial Fabrics and their Relations to Mechanical Properties of Granular Material. Soils and Foundations, Vol. 12, No. 1, S. 17-36.

ODA, M. (1972b): The Mechanism of Fabric Changes during Compressional Deformation of Sand. Soils and Foundations, Vol. 12, No. 2, S. 1-18.

ODA, M. (1972c): Deformation Mechanism of Sand in Triaxial Compression Tests. Soils and Foundations, Vol. 12, No. 4, S. 45-63.

POOROOSHASB, H.B.; HOLUBEC, I.; SHERBOURNE, A.N. (1966): Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression, Part I. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 3, No. 4, S. 179-190.

POOROOSHASB, H.B.; HOLUBEC, I.; SHERBOURNE, A.N. (1967): Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression, Part II and III. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 4, No. 4, S. 376-397.

PROCTOR, D.C.; BARDEN, L. (1969): Correspondence zu Green und Bishop (1969): Geotechnique 19, No. 3, S. 424-426.

RECKLING, K.A. (1967): Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer-Verlag.

ROSCOE, K.H. (1953): An Apparatus for the Application of Simple Shear to Soil Samples. Proc. 3rd Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Zürich, Schweiz, Vol. I., S. 186-191.

ROSCOE, K.H.; SCHOFIELD, A.N.; WROTH, C.P. (1958): On the Yielding of Soils. Geotechnique 8, S. 25-53.

ROSCOE, K.H.; SCHOFIELD, A.N.; THURAIRAJAH, A. (1963a): Yielding of Soils in States Wetter than Critical. Geotechnique 13, S. 211-240.

ROSCOE, K.H.; SCHOFIELD, A.N.; THURAIRAJAH, A. (1963b): An Evaluation of Test Data for Selecting a Yield Criterion of Soils. American Society for Testing Materials, Special Technical Publication No. 361, S. 111-133.

ROSCOE, K.H.; BASSETT, R.H.; COLE, E.R.L. (1967): Principal Axes Observed during Simple Shear of a Sand. Proceedings of the Geotechnical Conference, Oslo, Vol. I, S. 231-237.

ROSCOE, K.H. (1970a): The Influence of Strains in Soil Mechanics. 10th Rankine-Lecture, Geotechnique 20, S. 129-170.

ROSCOE, K.H. (1970b): Some Results of Tests in the Latest Model of the Simple Shear Apparatus and New Biaxial Apparatus. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 44, S. 62-94.

ROWE, P.W. (1962): The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact. Proceed. of the Roy. Soc. Series A., Vol. 269, S. 500-527.

ROWE, P.W.; BARDEN, L.; LEE, I.K. (1964): Energy Components During the Triaxial Cell and Direct Shear Tests. Geotechnique 14, S. 247-261.

ROWE, P.W. (1972): The Relevance of Soil Fabric to Site Investigation Practice. The Rankine Lecture, Geotechnique 22, S. 195-300.

STROUD, M.A. (1971): The Behaviour of Sand at Low Stress Levels in the Simple-Shear Apparatus. Ph.-D. Thesis, University of Cambridge.

STUTZ, P. (1972): Comportement élasto-plastique des milieux granulaires. Intern. Symposium on Foundations of Plasticity, Warschau, S. 37-49.

SUTHERLAND, H.B.; MESDARY, M.S. (1969): The Influence of the Intermediate Principle Stress on the Strength of Sand. Proc. of the 7th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Mexico City, Vol. I, S. 391-399.

TATSUOKA, F.; ISHIHARA, K. (1974): Yielding of Sand in Triaxial Compression. Soils and Foundations 14, No. 2, S. 63-76.

TAYLOR, G.I.; QUINNEY, H. (1931): The Plastic Distortion of Metals. Phil. Trans. of the Roy. Soc. Series A, London, S. 323.

TRUESDELL, C.; NOLL, W. (1965): Die nicht-linearen Feldtheorien der Mechanik. Handbuch der Physik. Band III/3, Springer-Verlag.

VARDOULAKIS, J. (1977): Scherfugenbildung als Verzweigungsproblem. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 70.

WANNINGER, R.M. (1980): Zur Lösung von Grundbauaufgaben mit Hilfe von elastoplastischen Stoffgesetzen, vorgeführt am Einzelfundament und an der verankerten Wand. Dissertation, Darmstadt.

WIENDIECK, K. (1967): Zur Struktur körniger Medien. Die Bautechnik 42, Heft 6, S. 196.

WIENDIECK, K. (1970): Relative Dichte als ein Kriterium zur Abschätzung der Querisotropie unvorbelasteter Sande. Die Bautechnik, Heft 4, S. 109-117.

Anhang A: Die Darstellung im Hauptspannungsraum

Der in jedem Punkt (x,y,z) des Kontinuums herrschende Spannungszustand läßt sich durch den sogenannten Spannungstensor ausdrücken.

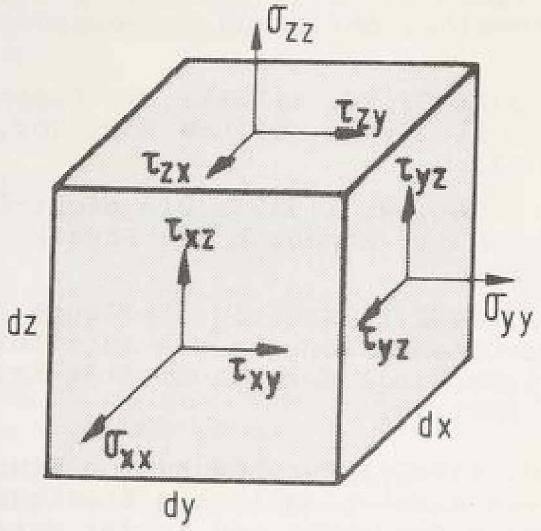



Bild A 1: Spannungszustand an einem Element

$$\text{(Spannungstensor)} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

Aus Gleichgewichtsgründen ist dieser Tensor symmetrisch und besitzt wie jeder symmetrische Tensor zweiter Stufe drei Eigenwerte (die Hauptspannungen $-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) und drei Invarianten, die bei Koordinatentransformationen ihren Wert beibehalten.

Die Bestimmungsgleichung der Hauptspannungen:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \qquad (A.2)$$

Die Invarianten des Spannungszustandes:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\cdot\sigma_{ij}^T - I_1^2) \qquad (A.3)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2$$

Ein Spannungstensor läßt sich additiv in einen Kugeltensor-Anteil (sphärischer Anteil) und einen Deviatortensor-Anteil zerlegen. In Tensorenschreibweise:

Kugeltensor: $\sigma_{ij}^S = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$

Deviatorischer Tensor: $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ (A.4)

($\delta_{ij}$ - Kronecker Delta)

Der deviatorische Spannungstensor hat die Invarianten:

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ji}^D = \frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2] \qquad (A.5)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}^D\cdot\sigma_{jk}^D\cdot\sigma_{ki}^D = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2) \end{vmatrix}$$

Anschaulich läßt sich ein Spannungszustand im Hauptspannungsraum $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ darstellen. Der Spannungszustand (P) ist durch den Vektor R mit den Komponenten $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ im Bild A 2 gegeben. Dieser läßt sich zerlegen in einen Anteil längs der Raumdiagonalen (S) und einen senkrecht dazu (T).

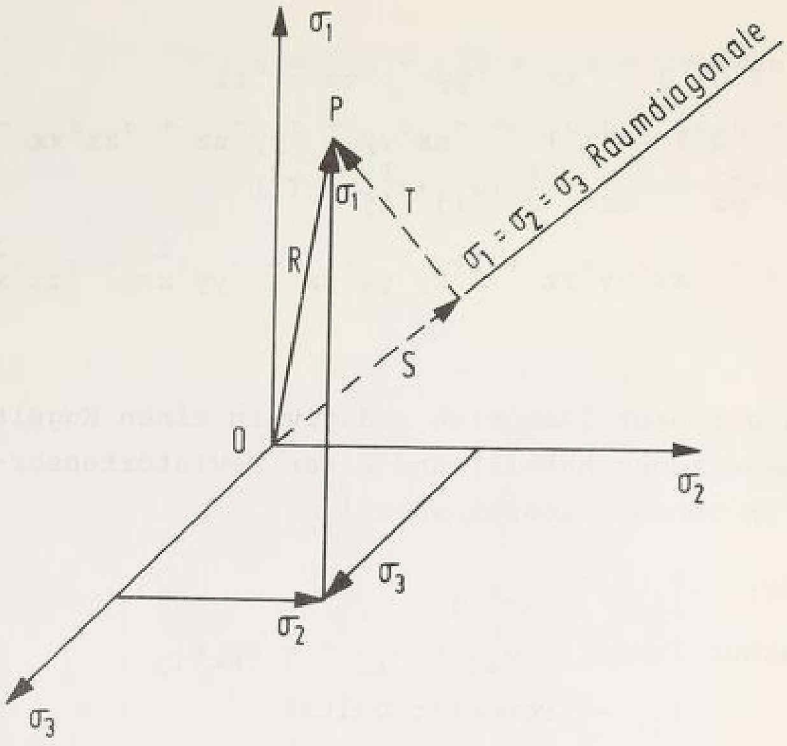



Bild A 2: Darstellung im Hauptspannungsraum

S hat die Komponenten:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

und die Länge: (A.6)

$$|s| = \sqrt{s^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

T hat die Komponenten:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{3} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \\ T_2 &= \frac{1}{3} (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1) \\ T_3 &= \frac{1}{3} (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \qquad (A.7)$$

und die Länge:

$$|T| = \sqrt{T^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

Die Vektoren S und T sind die Raumdiagonalen zweier Würfel jeweils mit den Kantenlängen

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

bzw.

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} \qquad (A.8)$$

Durch den Vergleich von (A.3) mit (A.6) und von (A.5) mit (A.7) läßt sich schreiben

$$|S| = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1$$

$$|T| = \sqrt{2J_2}$$

$|S|$ ist ein Maß für den Kugeltensor und $|T|$ für den Deviator des Spannungszustandes.

In der Plastizitätstheorie bedient man sich einer anschaulicheren Darstellungsart. Die Spannungszustände mit gleichem Kugeltensoranteil befinden sich in einer Ebene, die senkrecht auf der Raumdiagonalen des Hauptspannungsraumes steht und deshalb Deviatorebene genannt wird. Eine solche Ebene durch den Ursprung des Hauptspannungsraumes und die Spur der Fließfläche von v. Mises auf dieser Ebene sind im Bild A 3 dargestellt. Diese Ebene ($\pi$-Ebene) hat den Normalenvektor $\vec{n}\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und erfüllt die Gleichung

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Da der hydrostatische Spannungszustand keinen Einfluß auf das plastische Fließen von Metallen hat, reicht die Betrachtung der Spannungszustände in der Deviatorebene bei Metallen aus. Beim Boden dagegen muß die Betrachtung in der Ebene der Rotationssymmetrie zusätzlich herangezogen werden, weil der sphärische Anteil des Spannungszustandes im Verhalten der Böden eine sehr große Rolle spielt.

Im Bild A 4 ist der Spannungszustand (P) und seine Projektionen auf die Deviatorebene und auf die Ebene der Rotationssymmetrie (Triaxialebene) dargestellt. Die Strecke (O'P) stellt den deviatorischen und die Strecke OO' den sphärischen Anteil des Spannungszustandes dar. Die Achsabschnitte

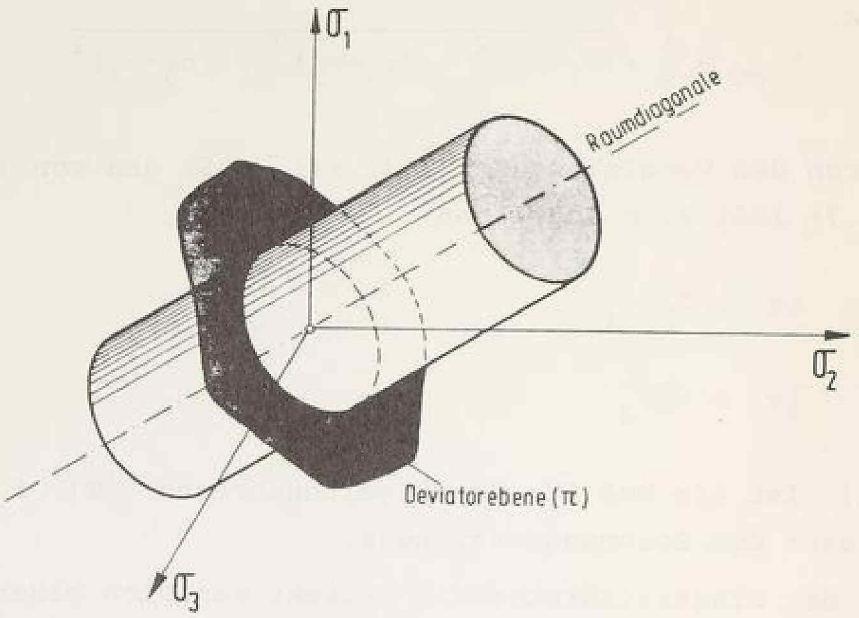



Bild A.3: Darstellung der Deviatorebene im Hauptspannungsraum

a,b,c sind gegeben durch

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_{oct})$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_2 - \sigma_{oct})$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_3 - \sigma_{oct})$$

Der Winkel $\alpha_\mu$ ist ein Maß für die Größe der dritten Invarianten des Deviators, d.h. für die Richtung der Schubbeanspruchung (man beachte, daß es für die Bestimmtheit des Spannungszustandes ausreicht, daß $\sigma_{oct}$ und zwei Größen des deviatorischen Anteils gegeben sind) und es gilt (Lode's Parameter)

$$\alpha_\mu = \frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} = \operatorname{arctg}\ \sqrt{3}\,\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}$$

$$\overline{O'P} = \sqrt{2J_2}$$

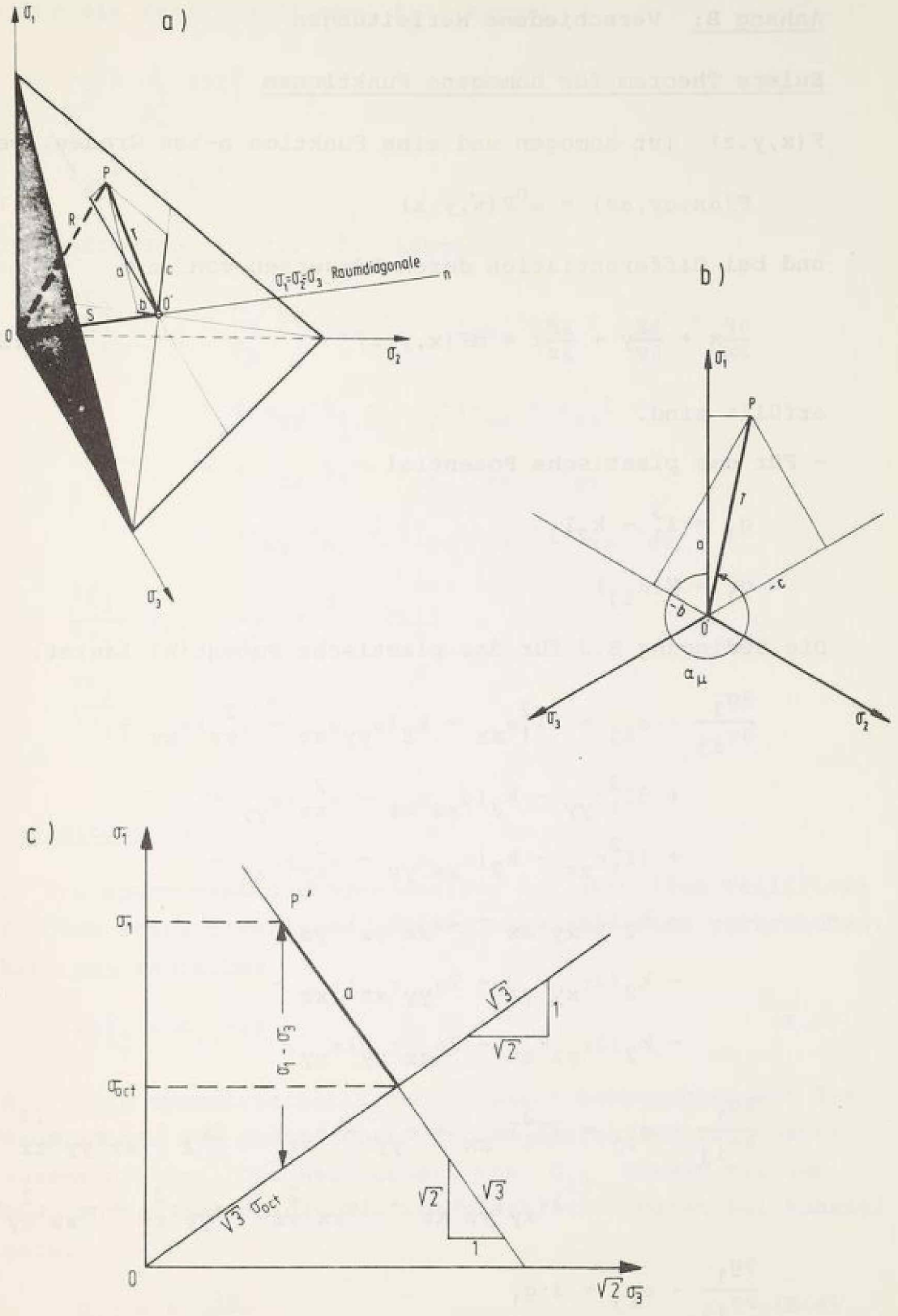



Bild A.4: a) Hauptspannungsraum
b) Deviatorebene
c) Ebene der Rotationssymmetrie (Triaxialebene)

Anhang B: Verschiedene Herleitungen

Eulers Theorem für homogene Funktionen

$F(x,y,z)$ ist homogen und eine Funktion n-ten Grades, wenn

$$F(\alpha x,\alpha y,\alpha z) = \alpha^n F(x,y,z) \qquad (B.1)$$

und bei Differentiation durch Einsetzen von $\alpha=1$

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z = nF(x,y,z) \qquad (B.2)$$

erfüllt sind.

- Für das plastische Potential

$$g_1 = I_1^3 - k_2 I_3$$

$$g_1 = F(\sigma_{ij})$$

Die Bedingung B.2 für das plastische Potential lautet:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \sigma_{ij} = 3I_1^2\sigma_{xx} - k_2(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{yz}^2)\sigma_{xx} +$$
$$+ 3I_1^2\sigma_{yy} - k_2(\sigma_{xx}\sigma_{zz} - \tau_{xz}^2)\sigma_{yy} +$$
$$+ 3I_1^2\sigma_{zz} - k_2(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2)\sigma_{zz} -$$
$$- k_2(2\tau_{xy}\tau_{zx} - 2\sigma_{xx}\tau_{yz})\tau_{yz} -$$
$$- k_2(2\tau_{xy}\tau_{yz} - 2\sigma_{yy}\tau_{xz})\tau_{xz} -$$
$$- k_2(2\tau_{yz}\tau_{zx} - 2\sigma_{zz}\tau_{xy})\tau_{xy}.$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \sigma_{ij} = 3I_1^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - 3k_2\,[\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} +$$
$$2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - (\sigma_{xx}\tau_{yz}^2 + \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 + \sigma_{zz}\tau_{xy}^2)]$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \sigma_{ij} = 3 \cdot g_1$$

- Für die Teilfließfläche $f_2$ (Kappe)

$$f_2 = \frac{1}{p_a^2}\,(2I_1^2 - I_2)$$

$$f_2 = F(\sigma_{ij})$$

Die Bedingung B.2 für $f_2$ lautet

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\,\sigma_{ij} = \frac{1}{p_a^2}\,[4\cdot\sigma_{xx}\cdot I_1 - \sigma_{xx}\cdot(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) +$$

$$+ 4\cdot\sigma_{yy}\cdot I_1 - \sigma_{yy}\cdot(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) +$$

$$+ 4\cdot\sigma_{zz}\cdot I_1 - \sigma_{zz}\cdot(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) +$$

$$+ 2\tau_{xy}\cdot\tau_{xy} + 2\tau_{yz}\cdot\tau_{yz} + 2\tau_{xz}\cdot\tau_{xz}]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\,\sigma_{ij} = \frac{1}{p_a^2}\,[4I_1^2 - 2I_2]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\,\sigma_{ij} = 2\cdot f_2$$

Herleitung von $\Delta\lambda$

Da die Spannungsänderungen entlang der aktuellen Teilfließflächen keine plastische Verformungskomponenten verursachen, kann man schreiben

$$\Delta\varepsilon^p_{ij} = G_{ij}\cdot\Delta f \qquad \text{(B.3)}$$

$G_{ij}$ - ein symmetrischer Tensor, dessen Hauptachsen mit den Hauptachsen des plastischen Verformungsinkremententensors zusammenfallen. Die Hauptachsen von $G_{ij}$ müssen mit den Komponenten des Gradienten vom plastischen Potential koaxial sein.

$$G_{ij} = h\,\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{(B.4)}$$

h - Verfestigungsparameter

g - plastisches Potential

(B.4) eingesetzt in (B.3) ergibt

$$\Delta\varepsilon^p_{ij} = h \cdot \Delta f \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{B.5}$$

$$\Delta\lambda = h \cdot \Delta f$$

Nach dem Konzept "Work-Hardening"

$$f = F(\int \Delta W_p)$$

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta W_p} (\sigma_{mn} \cdot \Delta\varepsilon^p_{mn}) \tag{B.6}$$

(B.6) eingesetzt in (B.5) ergibt

$$\Delta\varepsilon^p_{ij} = h \cdot \frac{\Delta f}{\Delta W_p} (\sigma_{mn} \cdot \Delta\varepsilon^p_{mn}) \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{B.7}$$

Durch Multiplikation der beiden Seiten von (B.7) mit $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij} \cdot \Delta\varepsilon^p_{ij} = h \cdot \frac{\Delta f}{\Delta W_p} (\sigma_{mn} \cdot \Delta\varepsilon^p_{mn}) \cdot \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$1 = h \cdot \frac{\Delta f}{\Delta W_p} \cdot \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{B.8}$$

Nach Eulers Theorem für homogene Funktionen n-ten Grades ist

$$\sigma_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = n \cdot g$$

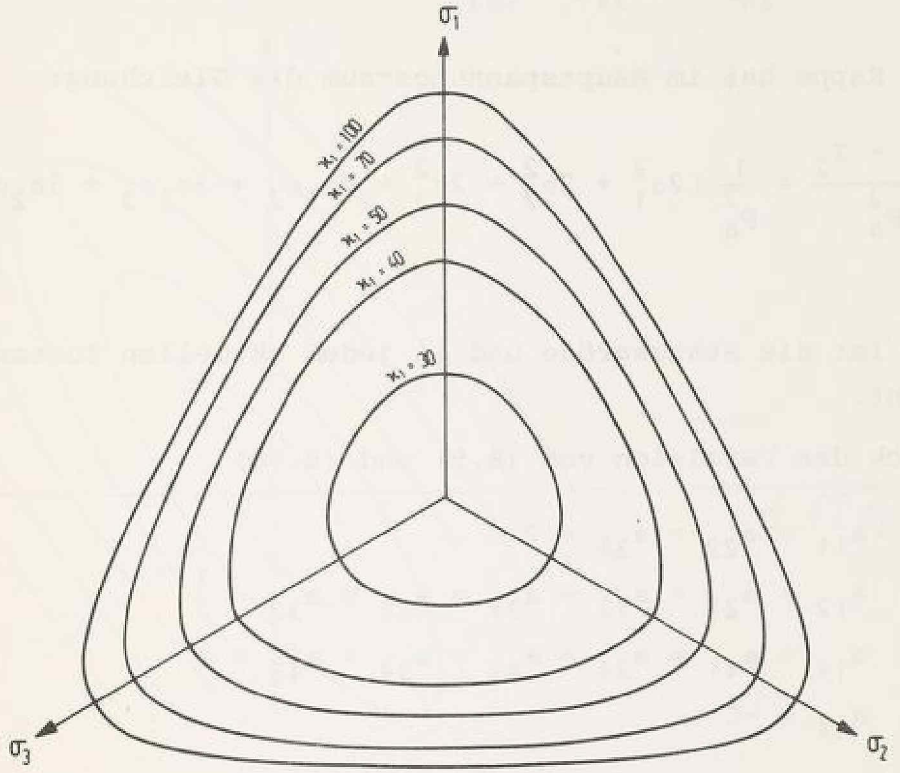
Demnach folgt aus (B.8)

- der Proportionalitätsfaktor

$$\Delta\lambda = h \cdot \Delta f = \frac{\Delta W_p}{n \cdot g}$$

Der Konus (Teilfließfläche - $f_1$)

Im Bild B 1 sind die Spuren der sukzessiven Teilfließflächen $f_1$ in der Deviatorebene dargestellt. Für alle Spannungszustände in dieser Ebene ist der sphärische Anteil der Spannungszustände gleich (im Bild B 1 z.B. $\frac{I_1}{p_a} = 30$). Bei einem gegebenen $\chi_1$-Wert reicht die Variation von zwei Spannungsgrößen, um die Spuren zu erhalten.




$$\chi_1 = \frac{I_1^3}{I_3} \qquad I_1 = 30.0$$

Bild B 1: Spuren der sukzessiven Teilfließflächen ($f_1$), dargestellt in der Deviatorebene.

Die Kappe (Teilfließfläche - $f_2$)

Die Funktion $f_2 = \frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}$ stellt eine Fläche zweiter Ordnung im Haupt- spannungsraum dar.

Die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung (allgemeine Theorie) lautet:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (B.9)$$

Die Kappe hat im Hauptspannungsraum die Gleichung:

$$\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2} = \frac{1}{p_a^2}\left[2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3\right] = \frac{C}{p_a^2} \qquad (B.10)$$

C - ist die Statusgröße und in jedem aktuellen Zustand konstant.

Durch den Vergleich von (B.9) und (B.10)

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$$
$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = \frac{3}{2}$$
$$a_{14} = a_{41} = a_{24} = a_{42} = a_{34} = a_{43} = 0$$
$$a_{44} = -C$$

Die Invarianten einer Fläche zweiter Ordnung lauten:

$$\Delta = |a_{ij}| \quad i,j = 1,2,3,4$$
$$\delta = |a_{kl}| \quad k,l = 1,2,3$$
$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2$$

Die Gestalt einer Fläche zweiter Ordnung aufgrund ihrer Gleichung ermittelt man nach den Vorzeichen ihrer Invarianten $\Delta, \delta, S$ und $T$.

Die Gleichung B.10 zeigt im Hauptspannungsraum ein Rotationsellipsoid mit der Rotationsachse, welche senkrecht auf der Raumdiagonalen im Koordinatenursprung steht, weil

$$\Delta < 0, \quad S \cdot \delta > 0, \quad T > 0 \quad \text{sind.}$$

(Siehe hierzu Bronstein-Semendjajew 1973, S. 199).

Im Bild B.2 sind die Spuren der sukzessiven Ellipsoide in der Ebene der Rotationssymmetrie (Triaxialebene) dargestellt.

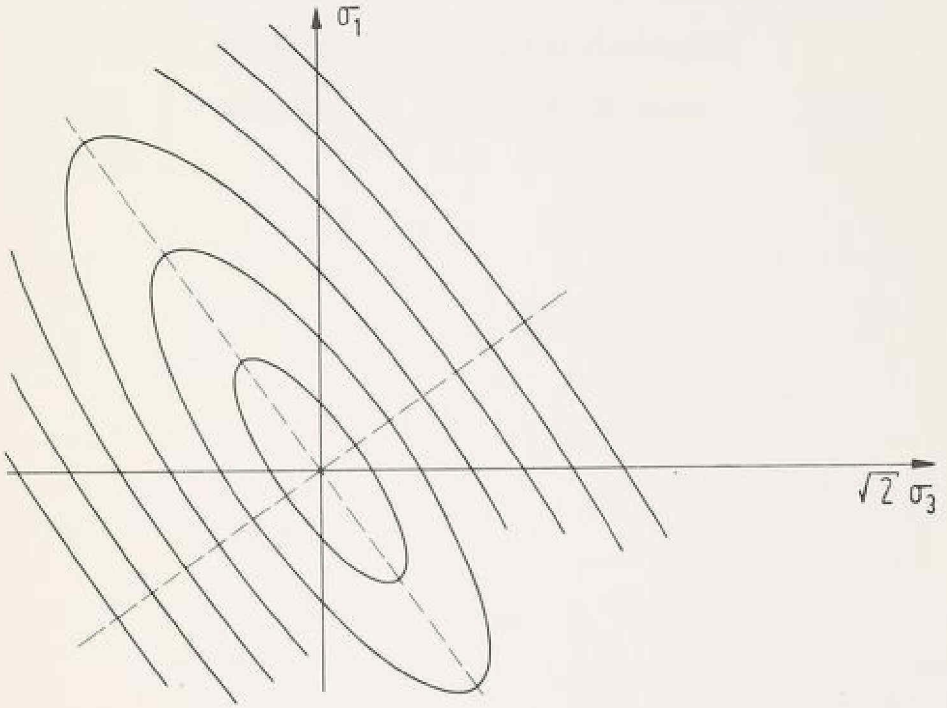



Bild B 2: Spuren der sukzessiven Teilfließflächen $(f_2)$, dargestellt in der Triaxialebene.

# ZUR LÖSUNG VON GRUNDBAUAUFGABEN MIT HILFE VON ELASTOPLASTISCHEN STOFFGESETZEN VORGEFÜHRT AM EINZELFUNDAMENT UND AN DER VERANKERTEN WAND

Dr.-Ing. Rainer Wanninger

Diese Arbeit entstand als Dissertation während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Breth bin ich zu großem Dank verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Förderung, die er mir zuteil werden ließ. Er sorgte stets für eine schöpferische Atmosphäre des freien und selbständigen wissenschaftlichen Arbeitens. Nicht zuletzt schulde ich Herrn Professor Breth Dank für die Mühe des Referats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Ebel danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Uhlmann sei gedankt für einige Anregungen und für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat.

Herrn Prof. Poul Lade, University of California in Los Angeles, danke ich für die Gespräche und Diskussionen anläßlich seiner Besuche in Darmstadt.

Allen Kollegen, deren Anregungen und Diskussionen zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, sei herzlich gedankt. Eine herausragende Stelle nimmt hier Herr Ulvi Arslan ein, mit dem zusammen in unzähligen Gesprächen Fragen der Stoffgesetze diskutiert wurden. Seine stete Bereitschaft zum Gespräch war eine unschätzbare Hilfe.

Darmstadt, im August 1980 Rainer Wanninger

Inhaltsverzeichnis


| | Seite |
|---|---|
| 1. Einleitung und Problemstellung | 1 |
| 2. Elastische Stoffansätze und die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeiten | 6 |
| 3. Elastoplastische Stoffmodelle | 22 |
| 3.1 Grundlagen | 23 |
| 3.2 Idealplastische nichtverfestigende Modelle | 30 |
| 3.3 Verfestigende Modelle mit einer Cap | 46 |
| 3.4 Verfestigende Modelle mit seitlichen Fließflächen | 53 |
| 3.5 Verfestigende Modelle mit allseitigen Fließflächen | 58 |
| 4. Wege zur Berechnung mit elastoplastischen Stoffmodellen | 63 |
| 4.1 Erforderliche Programmkonzeption | 64 |
| 4.2 Inkrementelle und iterative Lösungsmöglichkeiten | 68 |
| 5. Das Stoffgesetz von Arslan aus der Sicht des Anwenders | 87 |
| 5.1 Zusätzliche Anforderungen an ein Rechenprogramm | 88 |
| 5.2 Organisation und Aufbau der Stoffmatrix | 91 |
| 5.3 Ermittlung der Parameter und Eignungsnachweis | 98 |
| 6. Verformungsverhalten unter einem Einzelfundament | 113 |
| 7. Verformungsverhalten einer verankerten Wand | 142 |
| 7.1 Berechnungen im Modellmaßstab | 147 |
| 7.2 Berechnungen für Baugruben natürlicher Größe | 167 |
| 8. Erfahrungen und Schlußfolgerungen | 192 |
| 9. Literaturverzeichnis | 197 |

der numerischen Verfahren im Grundbau bei ihrem heutigen Entwicklungsstand nahezu ausschließlich durch unsere Fähigkeit begrenzt ist, das Materialverhalten treffend zu beobachten und zu beschreiben, greift die vorliegende Arbeit mit einem Stoffgesetz neuester Entwicklung einige Probleme auf.

Erforderlich ist an dieser Stelle eine Definition für den Begriff "Stoffgesetz", da er in verschiedenen Arbeiten in der Vergangenheit für Beschreibungen des Materialverhaltens von sehr unterschiedlicher Qualität benutzt wurde. Als Vorgriff auf Kapitel 2 sei bemerkt, daß die dort vorgestellten Beschreibungen auf der Basis des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes keine Stoffgesetze sind. Von einem Stoff"gesetz" wird verlangt, daß es die ganze Breite des Materialverhaltens beschreiben kann. Selbstverständlich kann die Verwirklichung dieser rigorosen Forderung nur ein Ziel sein. Umgekehrt kann man jedoch ebenso sagen, daß Stoffbeschreibungen, die lediglich in funktionaler Form das Verhalten eines Materials bei genau definierten Versuchsbedingungen widerspiegeln, keine Stoff"gesetze", sondern bestenfalls Ansätze zur Erfassung der Spannungsdehnungsbeziehung sind. In diesem Sinne werden daher vom Verfasser nachfolgend die Begriffe "Stoffgesetz" und "Stoffansatz" in der Bedeutung von "constitutive law" und "approach" gebraucht. Als übergreifender Begriff wird die Bezeichnung "Stoffmodell" gewählt. Die Anforderung an künftige Weiterentwicklungen für ein vollständigeres Stoffgesetz lautet:

- Von einem Stoffgesetz wird erwartet, daß es den Verformungsweg bei allgemeinen Spannungswegen sowie den Spannungsweg bei allgemeinen Verformungswegen hinreichend genau beschreibt.

Allgemeine Spannungswege sind nur in echt triaxialen, also kubischen Versuchsgeräten mit unabhängig voneinander aufzubringenden Hauptspannungen möglich. Zusätzlich müssen Schubspannungen einleitbar sein, um eine Rotation der Hauptspannungsachsen zu ermöglichen. Versuchsgeräte dieser Art existieren nicht. Simple Shear Apparate erfüllen die Forderung nach Rotation der Hauptachsen, jedoch ist die Größe der Hauptspannungen nicht beliebig und unabhängig voneinander wählbar. Insbesondere ist deutlich, daß im "konventionellen Triaxialversuch " (eigentlich: axialsymmetrischer Versuch) keine allgemeinen Spannungswege gefahren werden können. Daß der konventionelle Triaxialversuch trotzdem zur Ermittlung von Parametern für hochentwickelte Stoffgesetze sinnvoll genutzt werden kann, zeigt Kapitel 5 mit dem Stoffgesetz von Arslan.

Der Begriff "hinreichend genau" bedarf ebenfalls einer kurzen Präzisierung. Als Maßstab für die Qualität eines Stoffgesetzes soll gelten, daß zumindest das qualitative Verhalten des Bodens vorzeichenrichtig erfaßt wird. Dies ist eine keineswegs triviale Forderung, da Dilatanz und Kontraktanz als gleichzeitig auftretende Effekte im Boden, die aber einander entgegenwirken, auch quantitativ beherrscht werden müssen, wenn die Volumendehnungscharakteristik des Materials qualitativ darstellbar sein soll. In Kapitel 6 und 7 werden Beispiele dafür gezeigt, daß das Vorzeichen von Verformungsrichtungen je nach Güte des Stoffmodells unterschiedlich sein kann.

Die Anforderungen an Stoffgesetze müssen recht hoch gesetzt werden, da numerische Verfahren alle möglichen Spannungswege ergeben können. Die eingesetzten Stoffgesetze sollten dem gerecht werden, da sie im Ablauf des numerischen Verfahrens für alle Spannungswege als gültig angesehen werden müssen. Unplausible Ergebnisse von Berechnungen sind die Folge, wenn gegen diese elementare Anforderung verstoßen wird. Eine besondere Einschränkung sollte frühzeitig fallengelassen werden: Stoffgesetze sollen grundsätzlich dreidimensional sein, daher also Axialsymmetrie und ebenen Verformungszustand als Sonderfall enthalten. Eine Vielzahl von Entwicklungen der Vergangenheit ist von Sonderfällen, vor allem dem ebenen Verformungszustand, ausgegangen. Als Strategie in der vorliegenden Arbeit gilt es, die volle Dreidimensionalität hinsichtlich des Stoffgesetzes für alle Leistungen zu erhalten. Dreidimensionale Finite Element Berechnungen sind zur Zeit durchaus realisierbar bei der heutigen Kapazität selbst mittlerer Rechenanlagen, wenn bei der Diskretisierung des Problems, also bei der Anzahl der Unbekannten, vernünftige Einschränkungen hingenommen werden. Der durch hochentwickelte Stoffgesetze bedingte Mehraufwand ist dann ebenfalls wirtschaftlich tragbar.

Aus der Sicht der Ingenieurpraxis wäre es wünschenswert, wenn Hinweise gegeben werden können, wann ein höherer Aufwand erforderlich ist, wann aber auch einfachere Stoffansätze oder einfachere Berechnungsverfahren ausreichen. Die Arbeit wird zeigen, ob eine solche Abgrenzung sinnvoll und überhaupt möglich ist. Wenn nicht nur Grenzzustände betrachtet werden sollen, sind folgende Forderungen zu stellen :

- Vom anfänglich elastischen bis zum letzlich plastischen Zustand des Bodens einschließlich aller Zwischenzustände muß es möglich sein, das Spannungs- und Verformungsverhalten zu verfolgen.

- Alle Elemente eines Kontinuums sollen bei gleichem Stoffgesetz unterschiedlichen Spannungswegen folgen können.

- Beliebige Inhomogenitäten des Untergrunds müssen darstellbar sein.

- Alle Arten von Laster und Lastwechseln sollen aufgebracht werden können.

- Die Randbedingungen des Problems sollen beliebig und während der Berechnung veränderlich sein.

- Möglichkeiten zur Simulation von Bauzuständen und Bauabläufen sind erforderlich.

Diese Forderungen können mit geschlossenen analytischen Rechenverfahren nicht erfüllt werden. Der einzige praktikable Lösungsweg führt über die Methode der Finiten Elemente. Andere Möglichkeiten, z.B. die Methode der Boundary Elemente, werden nicht diskutiert.

Im Unterschied zu mehreren anderen Arbeiten, die die Entwicklung von Stoffmodellen im Hinblick auf spezielle Anwendungen betreiben, wird hier allgemein vorgegangen. Es steht nicht im Vordergrund, für spezielle Anwendungsfälle komplette Problemlösungen zu liefern. Vielmehr soll aus den Erfahrungen der Vergangenheit heraus ein Weg und eine Konzeption für ein besseres Stoffgesetz transparent gemacht werden. Es werden zwei Anwendungsarten gewählt, die sehr unterschiedliche Anforderungen an Stoffgesetz und Rechenprogramm stellen. Wenn bei beiden befriedigende Antworten gegeben werden können, ist dies eine wesentliche Bestätigung für den eingeschlagenen Weg.

Über eine kritische Bestandsaufnahme einfacher Formulierungen des Bodenverhaltens in Kapitel 2 führt der Weg zu Beschreibungen mit Hilfe elastoplastischer Stoffmodelle in Kapitel 3. Hier erfolgt die Auswahl eines geeigneten Gesetzes, das dann später in Kapitel 5 erläutert und für eine numerische Lösung aufbereitet wird. In Kapitel 4 wird zuvor eine Konzeption erarbeitet, um mit Hilfe der Finite Element Methode nichtlineares und elastoplastisches Verhalten erfassen zu können. Anschließend wird in Kapitel 6 das Verformungsverhalten einer Einzelgründung berechnet und mit Messungen verglichen. Kapitel 7 beschäftigt sich mit dem Verhalten ver-

ankerter Baugrubenwände. In Kapitel 8 werden die Erfahrungen zusammengefaßt und Schlußfolgerungen für die Anwendung gezogen.

Sämtliche Berechnungen erfolgen für einen trockenen Sand. Mit diesem Material sind am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt sowohl eine Vielzahl von Laborversuchen als auch Modellversuche und großmaßstäbliche Versuche unternommen worden. Es ist sinnvoll, diese Versuche zur Prüfung von Stoffgesetzen und Rechenverfahren heranzuziehen.

Die gewählten Beispiele sind von der Art, daß entweder - bei den Einzelfundamenten - für die Annahme einfachen Materialverhaltens und einfacher Randbedingungen geschlossene Lösungen vorliegen oder - für die verankerten Wände - zwar viele Messungen und Erfahrungen vorliegen, aber eine Übertragung auf andere Bodenverhältnisse und Abmessungen oder eine Vorhersage des Verhaltens mit "einfachen" Verfahren nicht möglich ist. Gerade hier aber entscheidet oftmals das Verformungsverhalten über die Eignung der Baumethode in einem bestimmten Fall.

## 2. Elastische Stoffansätze und die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeiten

Boden ist nicht elastisch. In den Anfängen der numerischen Verfahren wurden dennoch zunächst ausschließlich Stoffmodelle auf der Grundlage der Elastizitätstheorie angewendet. Der Grund war naheliegend: Die benötigten Parameter - im elastisch-isotropen Fall sind es zwei - waren zwar aus Versuchen nicht immer leicht bestimmbar, entsprachen aber den bisher erforderlichen Parametern für einfache Berechnungsverfahren. Sie waren also von der physikalischen Bedeutung und von der Größenordnung her vertraut. Das Problem, aus Versuchskurven idealisierte elastische Parameter zu abstrahieren, war mit Erfahrung und Vorstellungsvermögen für die zu lösende Aufgabe durchaus zu bewältigen. Noch häufiger allerdings wurden sie abgeschätzt oder aus empirischen Relationen gewonnen. Diese Vorgehensweise hat in der Ingenieurpraxis nach wie vor erhebliche Bedeutung. Oftmals ist es unmöglich, verbindliche Auskünfte über das Materialverhalten zu erreichen:

- Eine Probenentnahme kann schwierig oder unmöglich sein.
- "Ungestörte Proben" sind nicht zu erhalten.
- Laboruntersuchungen an Proben können sehr aufwendig und dennoch für das Materialverhalten in situ nicht repräsentativ sein.

In solchen Fällen kann die überschlägliche Ermittlung elastischer Parameter im relevanten Spannungsbereich unumgänglich sein. Aufwendige numerische Berechnungen haben jedoch unter solchen Umständen nur Sinn, wenn die Unsicherheit in den Annahmen durch eine entsprechend breite Variation der Eingabedaten erfaßt und eine Empfindlichkeitsuntersuchung ("sensitivity analysis") durchgeführt wird. Vorsicht bei der Interpretation der Berechnungsergebnisse ist dann jedoch geboten.

Dieses Problem ist zwar bei allen Stoffansätzen und Stoffgesetzen vorhanden, jedoch in sehr unterschiedlichem Maße. Wenn es gelingt, durch geeignete Formulierungen die Verhaltenscharakteristika des Bodens zumindest qualitativ richtig zu erfassen, wird das Vertrauen in das errechnete Verhalten komplexer Strukturen größer werden und je nach Problem sogar ausreichend groß sein, um Baumaßnahmen beurteilen zu können und Entscheidungen zu treffen. Ein in der historischen Entwicklung zuerst eingeschla-

gener und auch mit geringem Organisations- und Rechenaufwand verbundener Weg besteht darin, die Parameter der Elastizitätstheorie schrittweise dem jeweils vorhandenen und errechneten Spannungs- und Verformungszustand anzupassen. Ansätze dieser Art sind weiterhin "elastisch", wenngleich nichtlinear. Die Elastizitätstheorie wird für jeden Schritt als gültig vorausgesetzt. Eine kurze Definition elastischer Stoffansätze ist an dieser Stelle erforderlich.

Elastisch werden im folgenden Spannungsdehnungsbeziehungen genannt, bei denen das Dehnungsinkrement koaxial mit dem Spannungsinkrement gerichtet ist. Die Formulierung in Inkrementen - gleichbedeutend mit Lastschritten - beinhaltet daher, daß im linear-elastischen Fall die Hauptachsen von Gesamtdehnung und Gesamtspannung gleichgerichtet sind. Dies läßt sich am einfachsten für einen zweidimensionalen Fall (Abb. 2.1) darstellen, für den auf den Koordinatenachsen Spannungen und zugehörige Dehnungen aufgetragen sind, wobei 1 und 2 als Index beliebige Komponenten darstellen. Andererseits ist auch der in der Praxis wichtige Fall nichtlinear-elastischen Verhaltens eingeschlossen: Der Belastungsvorgang wird in Inkremente aufgeteilt, für die mit neuen elastischen Parametern Dehnungs- und Spannungsinkremente ermittelt werden, die jeweils inkrementweise koaxial sind. Daraus sind Rechenverfahren zur Erfassung nichtlinearen Verhaltens entstanden, die in Kapitel 4 näher diskutiert werden. Die Spannungsdehnungsbeziehung des

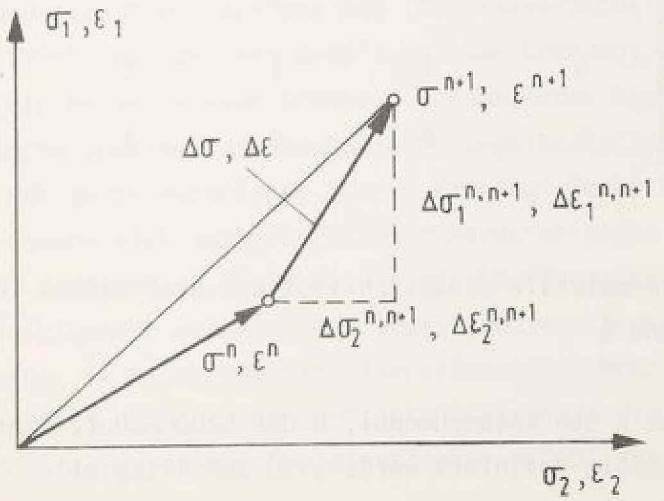



Abb. 2.1 Koaxialität von Spannungs- und Dehnungsinkrementen dargestellt am zweidimensionalen Fall

Materials muß daher so interpretiert werden, daß die das Materialverhalten darstellende Stoffmatrix [D]

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \cdot \{\Delta\varepsilon\}$$

erstellt werden kann. Hierbei bedeutet $\{\Delta\varepsilon\}$ das Dehnungsinkrement und $\{\Delta\sigma\}$ das dazugehörige Spannungsinkrement. Wichtig ist, daß zum Aufbau von [D] im elastisch-isotropen Fall zwei Parameter, im elastisch transversal-isotropen Fall fünf Parameter erforderlich sind. Wie diese Parameter selbst definiert werden, ist zunächst unbedeutend. In jedem Fall läßt sich für [D] eine Aufbauvorschrift finden. An dieser Stelle ist als entscheidendes Merkmal der Elastizitätstheorie zu erkennen, daß insbesondere keine Spannungsterme in [D] auftreten, sondern lediglich Konstante. Die Parameter können zwar spannungsabhängig sein, jedoch ist in [D] die Herkunft der Terme nicht mehr zu erkennen. Kapitel 3 und 4 werden zeigen, daß bei angenommener Gültigkeit der Plastizitätstheorie die Spannungen unmittelbar in [D] einfließen. Als Beispiel sei [D] für den dreidimensionalen isotropen Fall angegeben (Abb. 2.2).

$$[D] = \begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

Abb. 2.2 Dreidimensionale elastisch-isotrope Stoffmatrix [D] formuliert in K und G

Hierbei bedeutet K den Volumenmodul, G den Schubmodul. Sämtliche Größen können wechselseitig definiert werden, so zum Beispiel:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Damit ist ein weites Spektrum von Formulierungen möglich. Aus praktischen Erwägungen und aus der Gewohnheit der Ingenieurpraxis heraus haben sich einige Formulierungen durchgesetzt. Einen wesentlichen Einfluß hat hierbei noch die Möglichkeit der Versuchsdurchführung und -auswertung. Je nach Gerät sind andere inkrementell elastische Größen direkt aus Versuchskurven interpretierbar. Als elastische Parameter sind bisher benutzt worden:

$E$ und $\nu$
$K$ und $G$
$\lambda$ und $\mu$ (Lamé Konstanten)
$E_s$ und $G$

Bezüglich der Definitionen wird auf Desai und Christian (1977) verwiesen.

Eine zusammenfassende Darstellung der Konzepte von Elastizität sowie der höhergradigen Hyperelastizität und Hypoelastizität bringen Truesdell und Noll (1965). Zum Beispiel enthält ein hyperelastisches Modell zweiter Ordnung Terme in der dritten Potenz in den Funktionen der Verzerrungsenergie. Demzufolge stellt das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz die niedrigste (nullte) Ordnung der höheren Elastizitätsmodelle dar. Mit zunehmender Ordnung nimmt die Anzahl der erforderlichen Parameter zu. Der Vorschlag von Meissner (1971) sowie das Anwendungsbeispiel von Meissner und Wibel (1973) benötigen 2 mal 12 Parameter. Coon und Evans (1971) schlagen ein hypoelastisches Modell erster Ordnung vor. Sie selbst äußern Zweifel, ob ihr Modell auf andere Spannungszustände als die des Triaxialversuchs anzuwenden ist. Ko und Masson (1976) benutzen ein Modell dritter Ordnung; Vagneron, Lade und Lee (1976) ein Modell erster Ordnung. Wesentlicher Nachteil ist, daß die Parameter keine unmittelbar anschauliche physikalische Bedeutung mehr haben, sondern nur durch numerische "curve-fitting" Techniken gewonnen werden können. Obwohl sich auch die Volumencharakteristika des Bodens damit erfassen lassen, konnte sich diese Klasse von Stoffgesetzen bisher nicht durchsetzen. Im folgenden werden daher lediglich verallgemeinerte Hooke'sche Gesetze betrachtet. In einer neueren Diskussion zeigt Mroz (1980), daß vor allem im Hinblick auf mögliche Entlastungsvorgänge die plastizitätstheoretischen Ansätze gegenüber hypoelastischen erhebliche Vorteile bieten.

Brown und King (1966) benutzen als erste die Finite Element Methode im Grundbau für die Analyse von aufgeschütteten und abgegrabenen Böschungen. Sie nehmen linear-elastisches Verhalten an. Der besondere Wert ihrer

Untersuchungen ist mehr darin zu sehen, daß sie dem Bauvorgang große Bedeutung beimessen und eine realistischere Simulierung des Schütt- bzw. Abtragevorgangs fordern. Clough und Woodward (1967) untersuchen ebenfalls den Einfluß des Schüttvorgangs bei der Berechnung von Dämmen. Sie weisen bereits darauf hin, daß der inkrementelle Bauablauf eine besondere Form der inkrementellen Belastung ist und sich daher die Verwendung eines nichtlinearen Stoffansatzes ohne großen Mehraufwand anbietet. Anstelle von Young's Modulus E und Poissonzahl $\nu$ benutzen sie einen Volumenmodul ("bulk modulus") und einen Verzerrungsmodul ("distortional modulus"). Den Volumenmodul nehmen sie als konstant an, so daß die Nichtlinearität ausschließlich durch den Verzerrungsmodul ausgedrückt wird. Die Wahl dieser Parameter ist nicht besonders zweckmäßig, da sie in diesem Fall wieder aus E und $\nu$ rückgerechnet werden. Ein besonderes Problem taucht hier bereits auf: Die Triaxialversuche, die den Berechnungen zugrundeliegen, erlauben keine Aussage über die Poissonzahl $\nu$. Sie muß geschätzt werden. Dieses Problem tritt bei der großen Mehrzahl der Berechnungen in den folgenden Jahren ebenfalls auf. Trotz aller Einschränkungen stellt diese Untersuchung aber den nicht zu übersehenden Beginn einer stürmischen Entwicklung dar: Berücksichtigung von Bauvorgang und gleichzeitiger Nichtlinearität des Bodenverhaltens. Girijavallabhan und Reese (1968) interpretieren ihre Versuchsergebnisse im Sinne von Oktaedernormal- und Schubspannungen. Für ihre Berechnungen eines Kreisfundaments auf Ton sowie eines passiven Erddruckproblems benutzen sie jedoch ebenfalls rückgerechnete pseudoelastische Konstanten E und $\nu$. Rechentechnisch gehen sie so vor, daß $\nu$ konstant angenommen wird, E als Sekantenmodul angenommen und iterativ nach der Methode der Sekantensteifigkeit verbessert wird. Hierzu siehe Kapitel 5. Ihre Arbeit ist eine der ersten, die einen iterativen Lösungsweg zur Einhaltung der Nichtlinearität einschlägt. Erstaunlich ist, daß die Autoren gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch erhalten, obwohl sich gerade bei ihrem Problem eine deutliche Diskontinuität - die Gleitfläche des passiven Bruchzustands - einstellt. Huang (1969) benutzt für seine Untersuchungen von Kreisfundamenten auf Sand und Ton die gleiche iterative Technik. Für Sand stellt er E dar als eine Funktion der ersten Spannungsinvarianten $I_1$, für Ton als eine Funktion der zweiten Spannungsinvarianten $I_2$. Die Poissonzahlen sind wiederum mit $\nu = 0.3$ für Sand und $\nu = 0.45$ für Ton geschätzt, wobei letztere nur deshalb so niedrig angesetzt wurde, um numerische Instabilitäten zu vermeiden.

Ein Aspekt der Untersuchungen bis zu diesem Zeitpunkt war die Frage der Seitendruckabhängigkeit des Verformungsverhaltens oder - allgemein und ohne Bindung an die Versuchstechnik ausgedrückt - die Abhängigkeit des Verformungsverhaltens von der ersten Spannungsinvarianten. Die begrenzte Scherfestigkeit des Bodens stellte kein besonderes Problem dar; hierfür standen das Tresca-, von Mises- und Mohr-Coulomb Bruchkriterium zur Verfügung.

Die Arbeiten der Jahre 1966 bis 1970 zeigen vielfältige Versuche, das nichtlineare Verformungsverhalten der Böden in einer computergerechten Form darzustellen. Die zitierten und eine große Zahl weiterer Arbeiten erfassen das nichtlineare Verhalten durch einen pseudoelastischen Ansatz. Alle Effekte, die im Boden auftreten, werden im Sinne der Elastizitätstheorie interpretiert. Unabhängig davon, ob das Verhalten elastisch, plastisch, dilatant oder kontraktant ist, wird die Existenz eines elastischen Potentials vorausgesetzt. Die Interpretation und Verarbeitung der analytisch formulierten Versuchskurve ist dann auf inkrementell-elastische Weise möglich. Bei der pseudoelastischen Vorgehensweise ist es erforderlich, die versuchsmäßig erhaltenen Spannungsdehnungskurven in einer Form darzustellen, die rechentechnisch günstig verarbeitbar ist. Zwei grundsätzlich unterschiedliche Möglichkeiten sind anwendbar: die tabellarische und die funktionale Form. Die erstere Form ist recht mühsam, aber in einigen Finite Element Programmen (NONSAP, ADINA) vorgesehen. Sie ist jedoch nach Kenntnis des Verfassers nie im Grundbau angewendet worden.

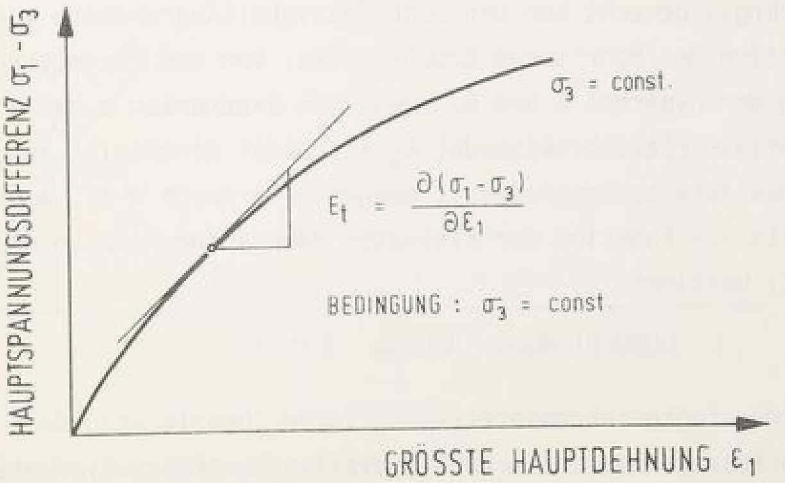



Abb. 2.3 Definition des Tangentenmoduls $E_t$ am zweidimensionalen Problem

Die zweite, funktionale Form hat große Attraktivität hinsichtlich der rechentechnischen Anwendung. Die Aufgabe wird darin gesehen, mit möglichst wenigen, aber anschaulichen Parametern die versuchsmäßig ermittelten Kurven zu approximieren. Der große Vorteil der Anschaulichkeit beinhaltet gleichzeitig einen schwerwiegenden Nachteil. Da ausschließlich eine globale Approximation an Versuchskurven angestrebt wird ("curve fitting"), geht der Blick für die das Verformungsverhalten bestimmenden mechanischen Eigenschaften des Bodens verloren. Insbesondere wenn für die Ermittlung von Stoffparametern der konventionelle Triaxialversuch herangezogen wird - möglicherweise ohne Messung der Seiten- oder Volumendehnung - ist zunächst der interpretierende Blick ausschließlich auf die gewohnte Darstellung $\sigma_1 - \sigma_3$ bezogen auf $\varepsilon_1$ fixiert. Der daraus abgeleitete Tangentenmodul $E_t$ (Abb. 2.3) hat gegenüber dem zweiten elastischen Parameter $\nu$ ein optisch höheres Gewicht. Es wird später gezeigt, welche Fehler dadurch entstehen können.

Diese aus der Konvention entstandene Denk- und Betrachtungsweise hat die Entwicklung von Stoffgesetzen ohne jeden Zweifel sehr stark gehemmt.

Eine bemerkenswerte und die Anwendung der Finite Element Methode im Grundbau auf Teilgebieten für einige Jahre stark beeinflussende Arbeit ist die Darstellung von Duncan und Chang (1970). Aus der multiplikativen Kombination einer hyperbolischen Approximation von triaxialen Versuchskurven nach Kondner (1963) und eines Potenzansatzes nach Janbu (1963) für die Abhängigkeit des Verformungsverhaltens von der kleineren Hauptspannung ergibt sich ein geschlossener Ausdruck für den tangentialen Elastizitätsmodul. Er ist abhängig gemacht von den Scherfestigkeitsparametern $\varphi$ und c nach der Definition des Mohr'schen Bruchkreises, von den Parametern zur Beschreibung der Hyperbel K und $R_f$ sowie vom Exponenten n des Potenzansatzes. Der tangentiale Elastizitätsmodul $E_t$ ist damit einerseits ausgedrückt als Funktion des Ausnutzungsgrades S, dargestellt durch $\sigma_1 - \sigma_3$, $\varphi$ und c sowie andererseits als Funktion der kleinsten Hauptspannung $\sigma_3$, die die Anfangssteigung $E_i$ bestimmt:

$$E_t = (1 - R_f \cdot S)^2 \cdot E_i$$

Die zugrundegelegte inkrementell-elastische Theorie erfordert jedoch ebenfalls eine Aussage über eine zweite elastische Größe, hier also über die Poissonzahl. In der zur gleichen Zeit erschienenen Arbeit von Chang und Duncan (1970) werden bereits größere Schwierigkeiten deutlich, die Poisson-

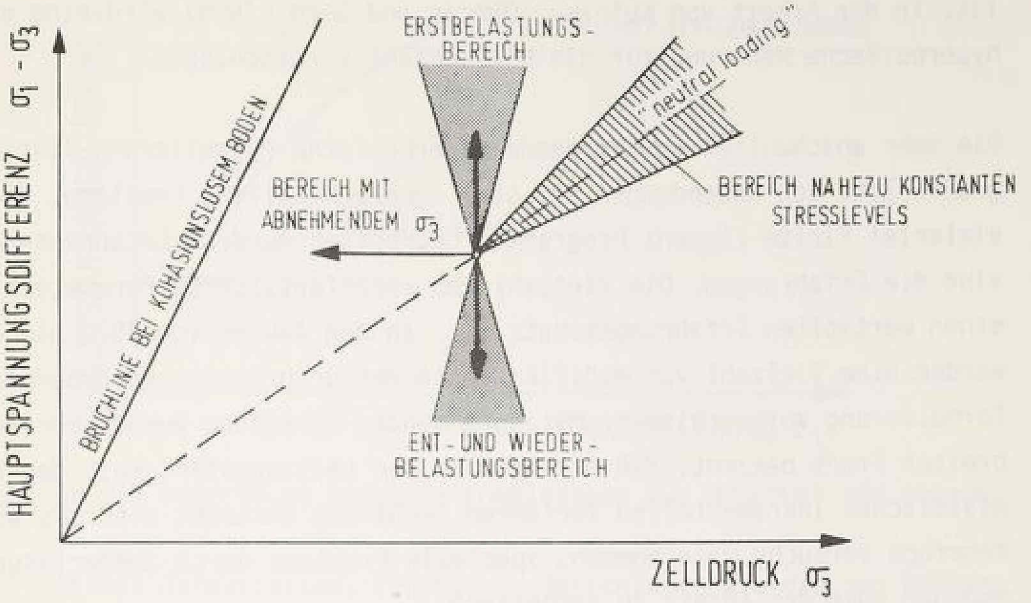



Abb. 2.4 Bereiche mit stark unterschiedlichem Verformungsverhalten beim konventionellen Triaxialversuch

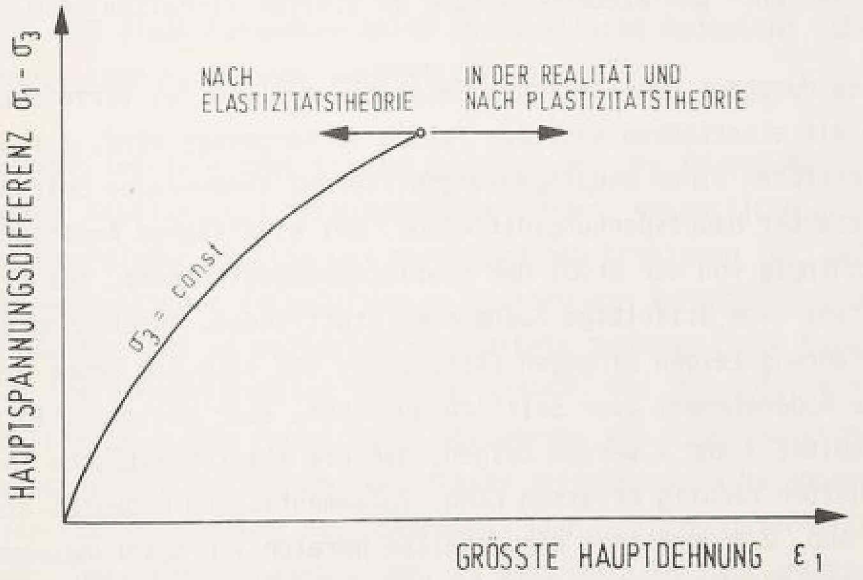



Abb. 2.5 Verformung bei allseitiger Druckverminderung im konventionellen Triaxialversuch und nach der Theorie

zahl zu bestimmen. Die aus der Messung der Volumendehnung rückgerechneten Werte streuen so stark, daß selbst eine tendenzielle Aussage nicht möglich ist. In der Arbeit von Kulhawy, Duncan und Seed (1969) wird eine ebenfalls hyperbolische Näherung für die Poissonzahl vorgeschlagen.

Die sehr anschaulich erscheinende hyperbolische Formulierung führte zu einer großen Zahl von Anwendungen auf sehr unterschiedliche Probleme, die mit vielerlei Finite Element Programmen bearbeitet wurden. Entsprechend breit sind die Erfahrungen. Die Vielzahl von veröffentlichten Parametern stellt einen wertvollen Erfahrungsschatz dar. In den Jahren von 1970 bis heute wurden eine Vielzahl von Modifikationen der ursprünglichen hyperbolischen Formulierung vorgeschlagen. Mit zunehmender Anwendung wurde aber auch auf breiter Front bekannt, daß die Grenzen der Leistungsfähigkeit der nichtlinear-elastischen inkrementellen Verfahren recht eng gesteckt sind. Es wurden mehrfach Versuche unternommen, spezielle Probleme durch Sonderlösungen zu umgehen oder den Ansatz zu verbessern.

Duncan und Chang (1972) stellen in der abschließenden Diskussion ihrer Veröffentlichung einen Spannungsweg vor, der mit ihrem Ansatz besonders schlecht erfaßt wird: Für Belastung bei nahezu konstantem Stresslevel ("neutral loading") liefern die Tangentenmoduli für Erstbelastung zu weiches, die Moduli für Ent- und Wiederbelastung zu steifes Verhalten (Abb. 2.4).

Ein weiteres durchaus realistisches Beispiel, bei dem das Vorzeichen der Verformung mit elastischen Ansätzen falsch vorhergesagt wird, ist der Fall des nach Erreichen einer Hauptspannungsdifferenz abnehmenden Seitendrucks $\sigma_3$ bei konstanter Hauptspannungsdifferenz. Bei elastischen Ansätzen wird immer, unabhängig von der Größe der Hauptspannungsdifferenz, bei allseitiger Entlastung eine allseitige Ausdehnung stattfinden. Anschauung und Versuchserfahrung zeigen hingegen (Abb. 2.5), daß sich die Probe bzw. das betrachtete Bodenelement zwar seitlich ausdehnt, aber gleichzeitig vertikal staucht. Kapitel 3 und 4 werden zeigen, daß die elastoplastische Theorie dieses Verhalten richtig erfassen kann. Zusammenfassend bedeutet dies, daß nur der in Abb. 2.4 gerastert dargestellte Bereich von Spannungswegen mit hyperbolischen Ansätzen vertretbar genau dargestellt werden kann.

Unabhängig von der mathematischen Charakteristik des gewählten funktionalen Ansatzes treten diese Schwierigkeiten bei elastischen Ansätzen immer auf. Die vielfältigen Bedürfnisse, Versuchskurven durch geschicktes "curve-

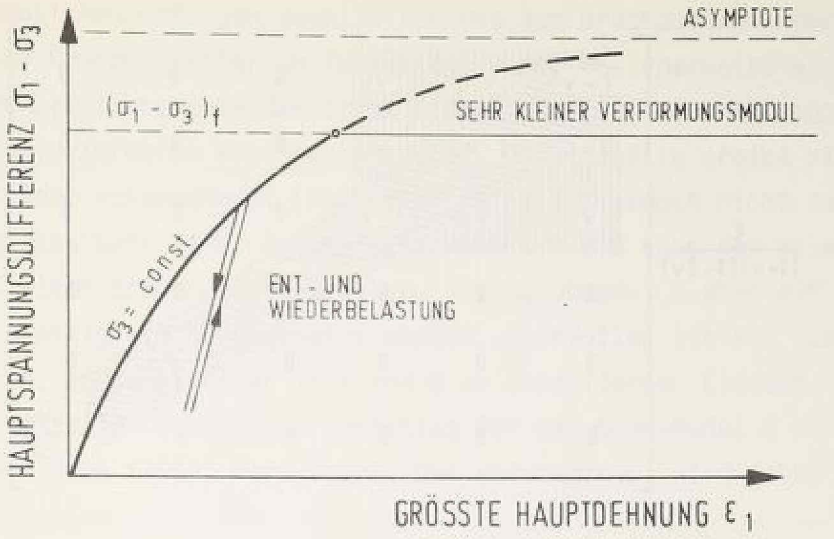



Abb. 2.6 Für die Berechnung benutzte Kombination aus Hyperbel und Gerade

fitting" optimal darzustellen, führten zu Vorschlägen wie die von Ramberg und Osgood (1943), Richard und Abbott (1975), Corotis, Farzan und Krizek (1974) sowie dem Vorschlag von Desai (1972), Spline-Funktionen zu benutzen. Hier ist auch der Vorschlag von Breth, Schuster und Pise (1973) einzuordnen, die die Versuchskurven von Sand durch Polynome darstellen. Der Vorteil vieler Funktionen, vor allem der Spline-Funktionen, beliebige Kurven mit hoher Genauigkeit und wenigen Parametern darzustellen, hat jedoch den Nachteil, daß diese Parameter keine physikalische Bedeutung haben und selbst kurvenanalytisch nicht mehr vorstellbar sind.

Im folgenden sollen einige Schwierigkeiten bei der Anwendung nichtlinear-elastischer Stoffansätze herausgestellt werden. Wesentliche Ursache für das Versagen dieser Ansätze bei verschiedenen Problemen ist, daß sie zumeist in enger gedanklicher Verknüpfung zu bestehenden Versuchstechniken entwickelt wurden. Der am weitesten verbreitete hyperbolische Ansatz bezieht sich auf den konventionellen Triaxialversuch, bei dem unter konstant gehaltenem Zelldruck $\sigma_3$ die Probe durch Steigerung von $\sigma_1 - \sigma_3$ abgeschert wird. Der Spannungs- und Verformungsweg dieses Versuchs wird herangezogen, um durch direkte Übertragung das Spannungs- und Verformungsverhalten für alle Beanspruchungsarten zu beschreiben. Es wird kein Versuch unternommen, die bei unterschiedlichen Beanspruchungsarten auftretenden unterschiedlichen Verhaltensweisen des Bodens gesondert zu betrachten. Da die Gültigkeit eines elastischen Potentials vorausgesetzt wurde, müssen alle Verhaltensformen durch elastische Parameter beschrieben werden.

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

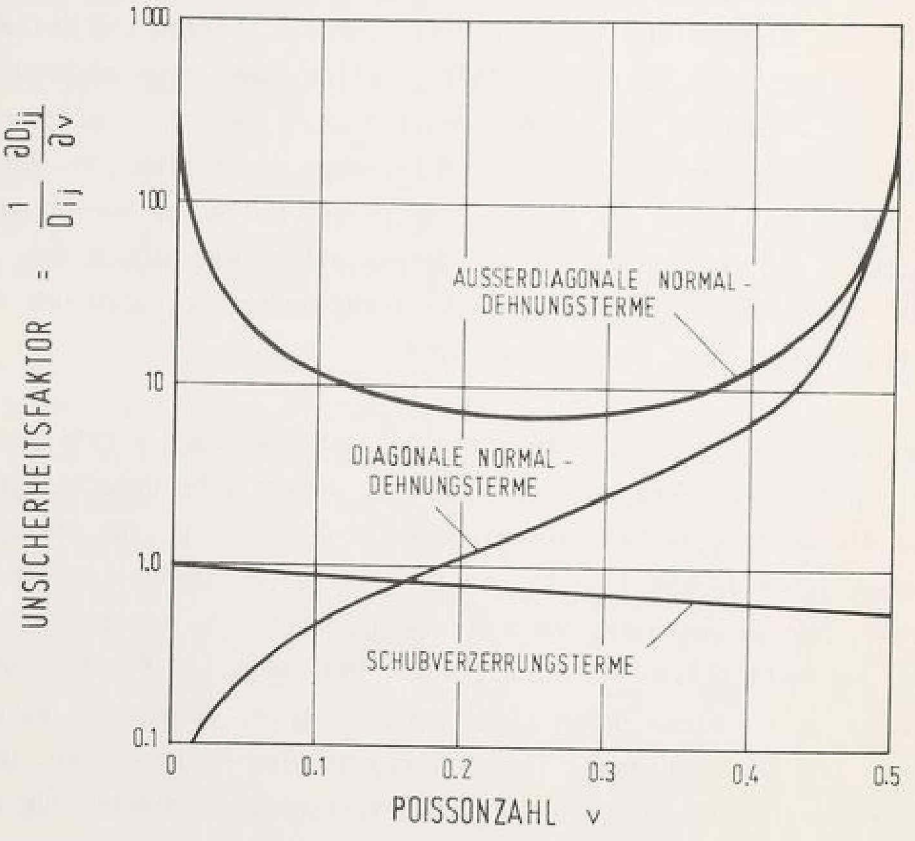



Abb. 2.7 Empfindlichkeit der Terme in der Stoffmatrix [D] in Abhängigkeit von Streuungen der Poissonzahl

Die Approximationen erfolgen jeweils nur bis zum Bruchzustand, der meist nach dem Mohr-Coulomb Kriterium festgelegt wird. Üblicherweise wird für nachfolgende Lastinkremente der Elastizitätsmodul auf einen kleinen numerisch noch tolerierbaren Wert herabgesetzt. Gleichzeitig ergibt sich damit ein sehr kleiner Volumenmodul (Abb. 2.6). Dies ist jedoch nicht zutreffend. Durch geschickte Wahl einer Poissonzahl nahe $\nu = 0.5$ kann der Volumenmodul K auf einem großen Wert gehalten, der Schubmodul G aber auf eine kleine Reststeifigkeit herabgesetzt werden. Sinnvoller ist es, das Spannungs-dehnungsverhalten unmittelbar in K und G zu formulieren. Ein dem hyperbolischen Ansatz für E analoger Vorschlag für den Schubmodul G wurde von Domaschuk und Wade (1969) formuliert. Der Volumenmodul wird dabei konstant gehalten. Es gilt

$$G_t = (1 - R_f \cdot S)^2 \cdot G_i$$

mit
- $G_t$ tangentialer Schubmodul
- $G_i$ Anfangsschubmodul
- $S$ Ausnutzungsgrad
- $R_f$ Koeffizient für Bruchzustand.

Der Anfangsschubmodul kann nach der empirischen Beziehung von Hardin und Black (1968) angenähert werden. Laborversuche wie der Resonant Column Test sind ebenso denkbar wie in-situ Messungen der Scherwellengeschwindigkeit, aus der G ermittelt werden kann. Der Volumenmodul K kann durch Laborversuche, aber auch in-situ durch Messung der Druckwellengeschwindigkeit bestimmt werden. Domaschuk und Wade stellen einen entscheidenden Vorzug der K - G - Formulierung heraus: Die Parameter können aus unabhängigen Versuchen ermittelt werden.

Drnevich (1975) formuliert sowohl K als auch G als hyperbolische Funktion. Den Vorzug gegenüber einer E - $\nu$ - Formulierung sieht er vor allem darin, daß die Streubreiten der Terme in der Stoffmatrix [D] gleich groß sind wie die Streuungen der Parameter selbst. Für den Fall der E - $\nu$ - Formulierung gibt er die Unsicherheitsfaktoren der Ausdrücke der Schubverzerrung sowie der Diagonal- und Außerdiagonalterme der Dehnung in Abhängigkeit von der Poissonzahl an (Abb. 2.7).

Schad (1979) stellt ein nichtlinear-elastisches hyperbolisches Modell vor, das nach Erreichen der Mohr-Coulomb Bruchbedingung als elastoplastisches Modell mit assoziierter Fließregel arbeitet. Hier findet ein Übergang statt

Urheberrechtlich geschützt / In Copyright: https://rightsstatements.org/page/InC/1.0/

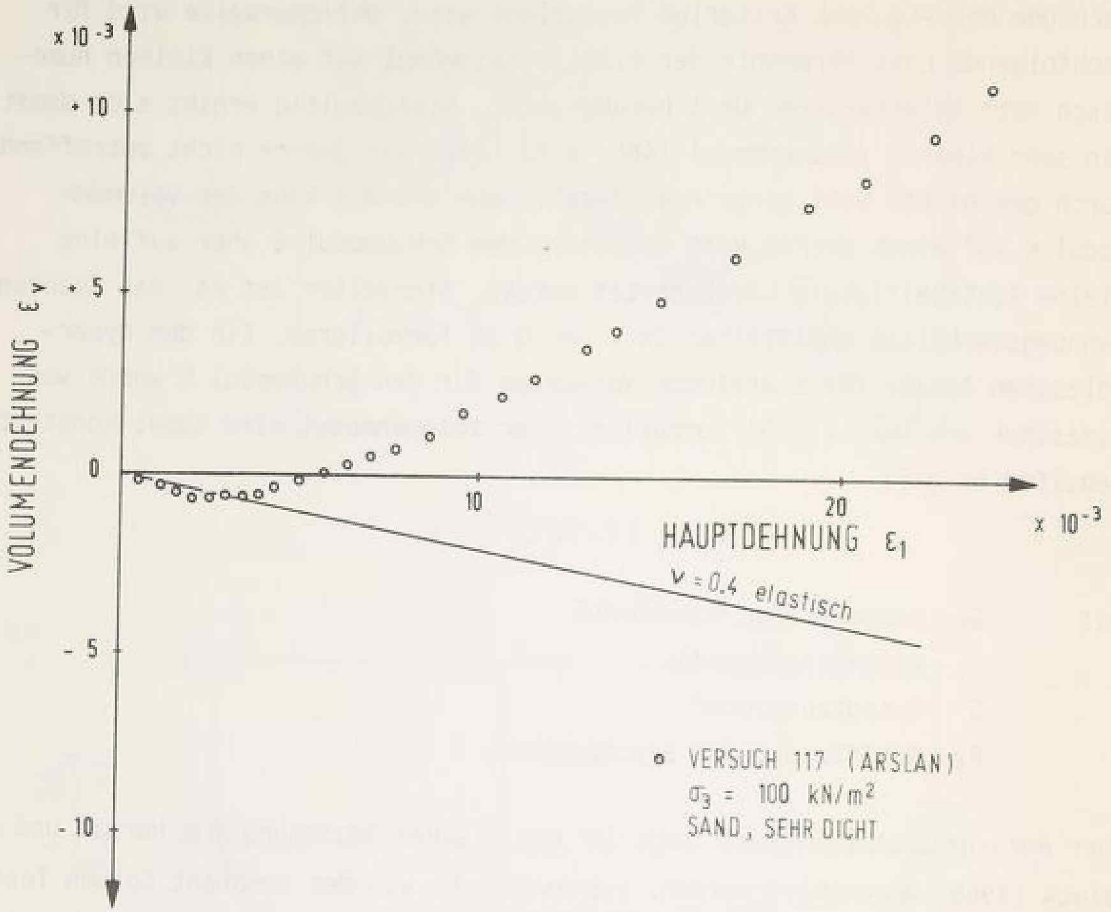



Abb. 2.8 Volumendehnung eines nichtbindigen Bodens im Versuch und bei Annahme der Gültigkeit der Elastizitätstheorie (nach Versuchen von Arslan 1980)

zu den später in Kapitel 3 vorgestellten konsequent elastoplastischen Stoffmodellen.

Eine wesentliche Grenze für eine sinnvolle Anwendung elastischer Stoffansätze ist, daß sie das Volumendehnungsverhalten rolliger Böden nicht erfassen können (Abb. 2.8). Solange ein elastisches Potential vorausgesetzt ist, muß bei einer isotropen E - ν - Formulierung $\nu < 0.5$ sein. Wenn jedoch bei einer Auswertung der Volumendehnungscharakteristik im Sinne eines elastischen Ansatzes sich $\nu \approx 0.5$ ergibt, so ist das als Hinweis zu verstehen, daß dieser Ansatz nicht mehr zutreffend ist. Ein Weg, um Volumendehnungsverhalten realistisch zu berücksichtigen, ist am einfachsten mit den elastoplastischen Stoffgesetzen (Kapitel 3) gegeben. Solange aber

angenommen wird, daß der Boden einem inkrementellen Hooke'schen Gesetz folgt, besteht auch keine Beziehung zwischen Schubverzerrungen und Volumendehnungen. Die entsprechenden Terme der Stoffmatrix sind nicht besetzt (siehe Abb. 2.2 und 2.7). Der Boden ist als nicht dilatant vorausgesetzt. Es ist jedoch bekannt, daß Dilatanz ein wesentliches Merkmal der meisten Böden ist. Soll sie berücksichtigt werden, sind zuverlässige Messungen der Volumendehnung und eine aufwendigere Formulierung des Spannungsdehnungsverhaltens erforderlich.

Aufbauend auf einem nichtlinear-elastischen Ansatz mit K und G führt Laumans (1977) einen Dilatanzwinkel ein, dessen Größe eine Funktion des aktuellen Spannungszustands ist. Sein Vorschlag ist auf den ebenen Formänderungszustand beschränkt.

Einen Überblick und gleichzeitig eine klare und kritische Einordnung der früheren Entwicklung geben Smith und Kay (1971). Ihre wesentliche Kritik an den bis dahin angewendeten meist elastischen Modellen ist, daß sie die volumetrischen Dehnungen bei dilatanten und kontraktanten Materialien nicht erfassen. Sie weisen darauf hin, daß dadurch bei gekoppelter Berechnung von Verformungen und Porenwasserüberdrücken die Porenwasserüberdrücke vollkommen falsch vorhergesagt werden können. Die Anwendungsbeispiele in Kapitel 6 und 7 zeigen, daß auch bei trockenem Sand elastische Ansätze falsche, allen Messungen und der Erfahrung widersprechende Verformungen liefern können.

Seit den Versuchen von Roscoe,Bassett und Cole (1967) und der Rankine Lecture von Roscoe (1970) ist auch bekannt, daß anstelle der Koaxialität von Dehnungsinkrementtensor und Spannungsinkrementtensor es zutreffender ist, eine Koaxialität zwischen Dehnungsinkrementtensor und dem Tensor der gesamten Spannungen anzunehmen. Diese Erkenntnis kann nur an Versuchsgeräten gewonnen werden, bei denen die Hauptachsen der Spannungen und Verformungen nicht zwangsweise identisch sind, wie dies beim konventionellen Triaxialversuch der Fall ist.

Biegstraaten und Kenter (1978) stellen eine iterative Methode auf der Idee des Initial Strain (Kapitel 4.2) basierend vor, mit der bei elastischem Stoffgesetz die Richtung des plastischen Dehnungsinkrements in die Richtung der Gesamtspannung gedreht werden kann. Mit dem gleichen iterativen Verfahren des Initial Strain behandeln sie auch die Dilatanz. Ihr Vorschlag

ist jedoch durch den heutigen Entwicklungsstand elastoplastischer Stoffgesetze nicht mehr aktuell.

Bei vielen unbedachten Anwendungen elastischer Stoffansätze, aber auch dann, wenn aus Mangel an besser zutreffenden Spannungsdehnungsbeziehungen auf elastische Ansätze zurückgegriffen werden mußte, zeigte sich bald, daß der zulässige Anwendungsbereich sehr eng begrenzt ist. Streng betrachtet sind lediglich monotone Spannungswege mit zunehmendem deviatorischem Ausnutzungsgrad und Entlastungen zuverlässig darstellbar. Das bedeutet, daß bei der am meisten angewendeten hyperbolischen Formulierung mit E und ν bei Finite Element Berechnungen nur Spannungswege verläßlich erfaßt werden, die denen des konventionellen Triaxialversuchs nahekommen. Dies wäre selbst bei axialsymmetrischer Geometrie und axialsymmetrischer Belastung nur unmittelbar in der Symmetrieachse der Fall. Der ebene Verformungszustand, auf den die Probleme in der praktischen Anwendung numerischer Verfahren aus Wirtschaftlichkeitsgründen oft reduziert werden, führt nochmals einen weiteren Schritt von der grundlegenden Annahme der Randbedingungen des Versuchs weg. Diese grundsätzliche Unzulänglichkeit, verbunden mit der Unmöglichkeit, die Richtung des Dehnungsinkrements im allgemeinen Fall annähernd richtig vorherzusagen, und der Unfähigkeit, dilatantes Verhalten zu erfassen,läßt den dringenden Wunsch nach leistungsfähigeren Stoffmodellen aufkommen.

Zusammenfassend ist über die Möglichkeiten von Stoffgesetzen auf der Basis des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes festzuhalten:

- Sie sind einfach und stehen in allen Finite Element Programmen zur Verfügung.

- Die benötigten Parameter sind anschaulich und liegen bereits für viele unterschiedliche Bodenarten als Erfahrungswerte vor.

aber

- Sie sind meist sehr stark an speziellen Versuchstechniken orientiert und daher bestenfalls in der Lage, diese Versuche optimal zu erfassen.

- Sie können bestimmte im Boden auftretende Spannungswege weder qualitativ noch quantitativ beschreiben.

- Sie sind nicht in der Lage, wesentliche Charakteristika des Verhaltens - Dilatanz - zu erfassen.

- Sie liefern bei allgemeinen Spannungszuständen oft unkorrekte Richtungen der Dehnungsinkremente.

- Sie berücksichtigen nicht den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Verformungs- und Bruchverhalten.

Die Entwicklung hat nach Meinung des Verfassers gezeigt, daß der überzeugend formulierte Vorschlag von Duncan und Chang (1970) auf eine zu unkritische Aufnahmebereitschaft gestoßen ist.Er enthielt zwei sehr vorteilhafte Merkmale: allmähliche Abnahme des Schubmoduls bis zum Bruch und Abhängigkeit des Verformungsverhaltens vom Seitendruck. Seit 1970 schien ein einfacher Weg zur Beschreibung nichtlinearen Materialverhaltens vorgegeben. Dabei wurde jedoch vielfach übersehen, daß in der abschließenden Diskussion 1972 von den Autoren die Grenzen ihres Vorschlags eindringlich dargestellt wurden. Es war klar, daß der Weg zu einer qualitativ richtigen Beschreibung des allgemeinen Materialverhaltens nur mit einer grundsätzlich anderen Methodik zu finden ist. Eine bestmögliche Approximation von Triaxialkurven reicht nicht aus. Smoltczyk (1978) gibt einen Überblick über einen Teil der in letzter Zeit in Deutschland durchgeführten Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet und faßt sinnvolle Entwicklungslinien zusammen.

## 3. Elastoplastische Stoffgesetze

Das Verhalten des Bodens ist erheblich komplizierter als es die im vorhergehenden Kapitel vorgestellten Ansätze ausdrücken können. Vor allem das Wissen, daß Boden bei vielen Ingenieurproblemen ein Verhalten aufweist, das weit entfernt ist von linearer Elastizität, gab Anlaß zu vielen Bemühungen, dem nichtlinearen Verformungsverhalten gerecht zu werden. Die bekannten einfachen Ansätze zur Erfassung der Nichtlinearität, die zuvor dargestellt worden sind, werden unzuverlässig, sobald ausgeprägte irreversible - plastische - Anteile an Verformungen auftreten. Da dies beim Boden nahezu von Beginn der Belastung an der Fall ist, bietet es sich an, zusätzlich zur Elastizitätstheorie die Plastizitätstheorie zur Beschreibung der Verformungsphänomene mit heranzuziehen. Die Bezeichnung "elastoplastisch" besagt daher, daß für Spannungszuwächse sowohl elastische als auch plastische Verformungsanteile existieren. Dieses Kapitel will versuchen, einen Bogen zu spannen von den einfachsten plastischen Ansätzen bis zu neuesten Entwicklungen von verfestigenden Materialien mit mehreren Fließflächen. Dabei soll die Terminologie im Zusammenhang kurz dargestellt und auf jeder Stufe der Entwicklung die Eignung für numerische Berechnungen im Grundbau beurteilt werden. Für weitergehende Fragen wird auf die angeführte Literatur verwiesen.

Die Diskussion der bisherigen Entwicklung erfolgt nur soweit, daß die Entscheidung des Verfassers für das Stoffgesetz von Arslan (1980) transparent wird. Die numerische Verarbeitung und Einbettung in ein Finite Element Programmsystem - vorgenommen vom Verfasser - ist stark beeinflußt von den Erfahrungen und auch von den aufgedeckten Mängeln beim theoretischen und numerischen Umgang mit den bisher existierenden elastischen und elastoplastischen Stoffansätzen und Stoffgesetzen. Der Umfang der folgenden Diskussion spiegelt nicht unbedingt in jedem Kapitel die Fülle der publizierten Arbeiten anteilmäßig korrekt wieder. Zu bemerken ist, daß die Anzahl von Veröffentlichungen bei Kapitel 3.2 am größten und bei Kapitel 3.5 am geringsten ist.

Die Entwicklung elastoplastischer Stoffmodelle wird im folgenden beobachtet und dargestellt aus einer betont ingenieurwissenschaftlichen Sicht. Kriterien für eine Eignung für geotechnische Anwendungen können nicht nur einfacher mechanischer Aufbau und leichte Programmierbarkeit sein. Wesentlich wichtiger

und als einziges auch korrekt ist der Gesichtspunkt der qualitativ und quantitativ richtigen Aussage. Dieses Ziel im Hinblick auf alle Aspekte des Bodenverhaltens zu erreichen ist schwierig genug und bedarf noch erheblicher Anstrengungen. Kapitel 3.1 gibt in sehr kurzer Form einen Überblick über die Begriffe und grundsätzlichen Eigenschaften der elastoplastischen Theorien. Kapitel 3.2 stellt einfache nichtverfestigende Ansätze vor, die in der Ingenieurpraxis teilweise angewendet werden, bei näherer Vertrautheit mit den Verhaltensweisen des Bodens jedoch zunehmend unbefriedigender werden. Die wissenschaftliche Entwicklung von Stoffgesetzen ist über diese einfachen Ansätze inzwischen hinweggegangen. Grundlegendes läßt sich an ihnen noch sehr gut zeigen und zur Einführung in die Denkweise sind sie durchaus gut geeignet. Die verfestigenden Modelle mit Cap, vorgestellt in Kapitel 3.3, werden zwar von verschiedenen Gruppen stark propagiert, konnten sich jedoch aus verschiedenen noch zu diskutierenden Gründen ebenfalls nicht auf breiter Front durchsetzen. Die in Kapitel 3.4 vorgestellten Modelle mit sich aufweitender seitlicher Fließfläche sind relativ junge Entwicklungen mit beträchtlichen, noch keineswegs ausgeschöpften Möglichkeiten. Zusammen mit den darauf aufbauenden verfestigenden Modellen mit mehreren Fließflächen (Kapitel 3.5) bietet sich ein immenses Entwicklungspotential für die Erfassung weiterer Komponenten des Bodenverhaltens.

Führt man sich die Möglichkeiten der Finite Element Methode vor Augen, insbesondere ihr zukünftiges Potential auch für dreidimensionale Berechnungen, aber auch für qualitativ bessere zweidimensionale unter Einschluß zyklischen Verhaltens, kann eine ausbaufähige Entwicklung nach dem heutigen Kenntnisstand am einfachsten über den in Kapitel 3.5 erschlossenen Weg gehen. Dies wird im folgenden zu begründen sein.

## 3.1 Grundlagen

Grundlage aller elastoplastischen Modelle ist die Annahme, daß sich Verformungen immer in elastische (reversible) und plastische (irreversible) Anteile aufspalten lassen. Das ist die natürliche Voraussetzung dafür, elastisches und plastisches Verhalten nach den ihnen jeweils eigenen Gesetzen unterschiedlich behandeln zu können. Es wird angenommen, daß das erstmalige Auftreten irreversibler Verformungsanteile durch eine oder mehrere

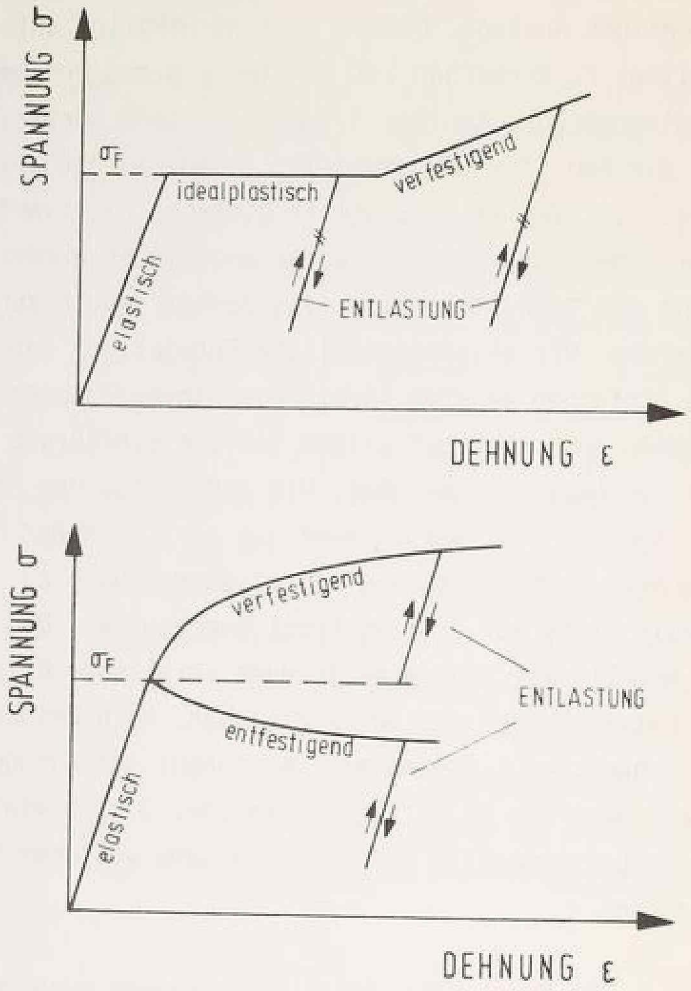



Abb. 3.1.1 Grundbegriffe der Plastizitätstheorie

Funktionen - Fließflächen, Fließbedingungen ("yield surfaces, yield conditions") - eindeutig ausgedrückt werden kann. Diese Funktionen

$$f(\sigma, \varepsilon, \varkappa) = 0$$

können Spannungen, aber auch Verzerrungen und weitere Parameter $\varkappa$ enthalten, die ihrerseits von der Spannungsgeschichte abhängen können. Insbesondere werden plastische Verzerrungen und plastische Arbeit benutzt. Zu unterscheiden ist zwischen Materialien, für die diese Funktionen unabhängig vom Spannungszustand konstant sind und solchen, für die sie sich im Laufe der Belastung verändern. Erstere Werkstoffe verhalten sich idealplastisch, letztere verfestigend oder entfestigend. Die Bezeichnung "verfestigend" ("hardening") ist leicht irreführend, da das Material mit

Beginn des Fließens ($\sigma_F$) nicht fester, sondern weicher wird. Im Gegensatz zu idealplastischem Verhalten kann das Material aber auch noch nach Beginn des Fließens zusätzliche Spannungen aufnehmen. Der Begriff der Verfestigung ist in der Behandlung der metallischen Plastizität entstanden, bei der Idealisierungen nach Abb. 3.1.1 (oben) möglich sind. Bei eindimensionalen Spannungszuständen wie in Abb. 3.1.1 ist die Fließbedingung durch die Angabe eines Zahlenwertes - der Fließspannung $\sigma_F$ - eindeutig festgelegt. Bei zweidimensionalen Spannungszuständen ist die Angabe einer Kurve erforderlich. Bei dreidimensionalen Spannungszuständen - solcher Art sind die im Grundbau auftretenden - ist die Fließfläche eine Raumfläche. Es kann also unterschieden werden zwischen Zuständen innerhalb und gerade auf der Raumfläche. Spannungszustände außerhalb der Raumfläche sind nicht möglich. Alle Spannungsänderungen, die zu einem neuen Spannungszustand innerhalb der Fließfläche führen, bewirken elastische Verformungen. Spannungsänderungen, die die Fließfläche erreichen, haben gleichzeitig elastische und plastische Verformungsanteile. Bei verfestigenden Materialien weitet sich die Anfangsfließfläche mit steigendem Spannungszustand immer mehr auf (Abb. 3.1.2) und kann gegebenenfalls im Grenzzustand eine Bruchbedingung ("failure surface") erreichen. Jede Verfestigung bewirkt daher eine Veränderung des elastischen Bereichs. Spannungszustände außerhalb der Bruchfläche sind ebenso wie Spannungszustände außerhalb der Fließfläche nicht möglich.

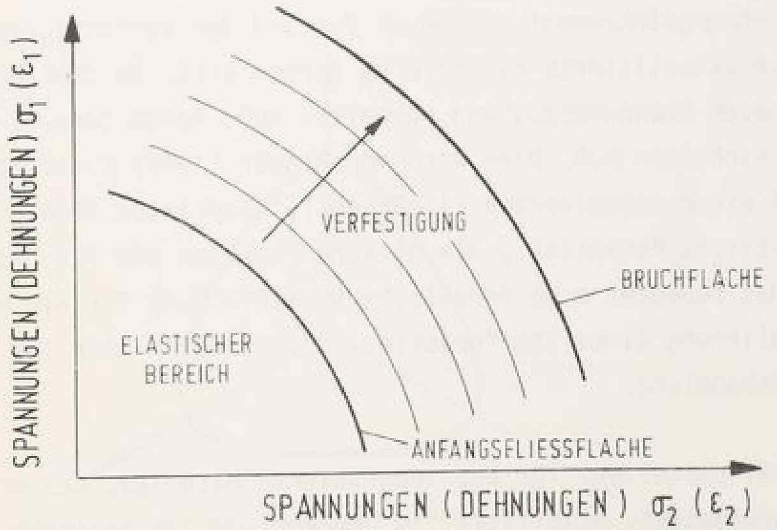



Abb. 3.1.2 Aufweitung von Anfangsfließfläche bis zur Bruchfläche infolge Verfestigung

Für die Darstellung von Fließflächen im dreidimensionalen Spannungsraum sind mehrere Konventionen üblich. Einmal kann die Fließfläche als Raumkurve dargestellt werden (Abb. 3.1.3 a). In der Bodenmechanik wird auch oft ein Schnitt in der $\sigma_2 = \sigma_3$ - Ebene gewählt, weil er der Darstellung für den am häufigsten ausgeführten Triaxialversuch entgegenkommt (Abb. 3.1.3 b). Zur in der Bodenmechanik besonders intensiven Diskussion der Form der Fließfläche eignet sich besonders ein Schnitt lotrecht zur Raumdiagonalen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Diese Ebene (Abb. 3.1.3 c) wird $\pi$-Ebene oder Deviatorebene genannt.

Um eine Aussage über die Richtung der Dehnungsinkremente bezogen auf die Spannungen machen zu können, wird eine Fließregel ("flow rule") benötigt. Im allgemeinen wird hierfür das plastische Potential ("plastic potential") benutzt. Es ist eine Fläche im Hauptspannungsraum, auf der die plastischen Dehnungsinkremente senkrecht stehen, wenn sie im gleichen Koordinatensystem wie die Spannungen aufgetragen werden. Wenn also aus Versuchen bei festgelegten Spannungszuständen die plastischen Dehnungsinkremente ermittelt werden können, besteht die Aufgabe darin, eine Raumfläche zu finden, deren Tangentialfläche in allen Punkten senkrecht zur Richtung des plastischen Dehnungsinkrements ist.

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

Das totale Differential $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ gibt die Richtung an. Der Skalar $\lambda$ ist eine zunächst noch unbekannte Größe, die die Größe der plastischen Verformungen beschreibt. Handelt es sich um ein verfestigendes Material, wird durch das plastische Dehnungsinkrement ein neuer Zustand der Verfestigung erzeugt und durch die aktualisierte Fließfläche dargestellt. Da die neue Fließfläche den neuen Spannungszustand enthalten muß, folgt daraus, daß $\lambda$ bestimmte Bedingungen einhalten muß. Dies wird von Prager (1949) Konsistenzbedingung genannt. Bei einer assoziierten Fließregel ("associated flow rule") wird für das plastische Potential g die gleiche Funktion wie für die Fließfläche f benutzt. Das bedeutet eine erhebliche Vereinfachung für die mathematische Formulierung eines Stoffgesetzes, insbesondere aber für die numerische Behandlung.

Drucker (1959) postuliert für das idealisierte Material, das er seinen Theorien zugrundelegt, Stabilität "im großen" und "im kleinen". Dieses Postulat soll hier nicht weiter diskutiert werden, da diese Forderungen in rigoroser Form für Böden nicht gelten. Sie laufen darauf hinaus, als Richtung des plastischen Dehnungsinkrements nur die Normale zur Fließ-

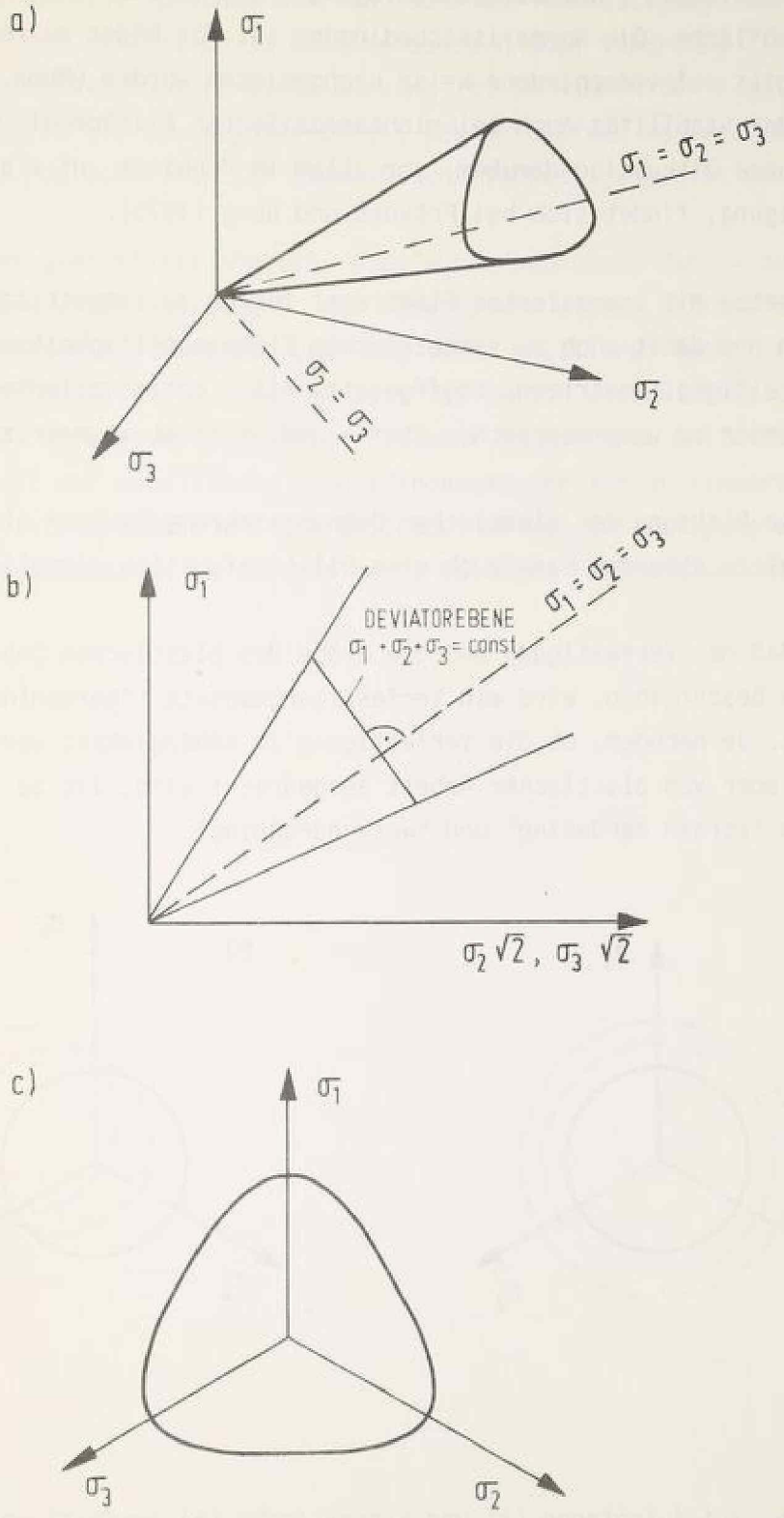



Abb. 3.1.3 Darstellungsweise von Fließflächen und Bruchflächen im dreidimensionalen Spannungsraum (a), in der Triaxialebene (b) und in der Deviatorebene (c)

fläche zuzulassen ("Normalitätsbedingung") und fordern zusätzlich Konvexität der Fließfläche. Die Normalitätsbedingung ist für Böden zu restriktiv. Es ist bereits auf verschiedene Weise nachgewiesen worden (Mroz 1963, Mandel 1964), daß Stabilität auch bei nichtassoziierten Fließregeln möglich ist. Eine neuere Diskussion darüber, vor allem im Hinblick auf eine mögliche Entfestigung, findet sich bei Prêvost und Höeg (1975).

Stoffgesetze mit assoziierter Fließregel führen zu symmetrischen Stoffmatrizen und damit auch zu symmetrischen Elementsteifigkeitsmatrizen und Gesamtsteifigkeitsmatrizen. Stoffgesetze mit nichtassoziierter Fließregel führen immer zu unsymmetrischen Stoff- und Steifigkeitsmatrizen.

Statt die Richtung der plastischen Dehnungsinkremente über ein plastisches Potential zu steuern, kann auch eine Dilatanzfunktion formuliert werden.

Um das Maß der Verfestigung und die Größe des plastischen Dehnungsinkrements zu beschreiben, wird ein Verfestigungsansatz ("hardening law") benötigt. Je nachdem, ob die Verfestigung in Abhängigkeit von plastischer Dehnung oder von plastischer Arbeit ausgedrückt wird, ist zu unterscheiden zwischen "strain hardening" und "work hardening".

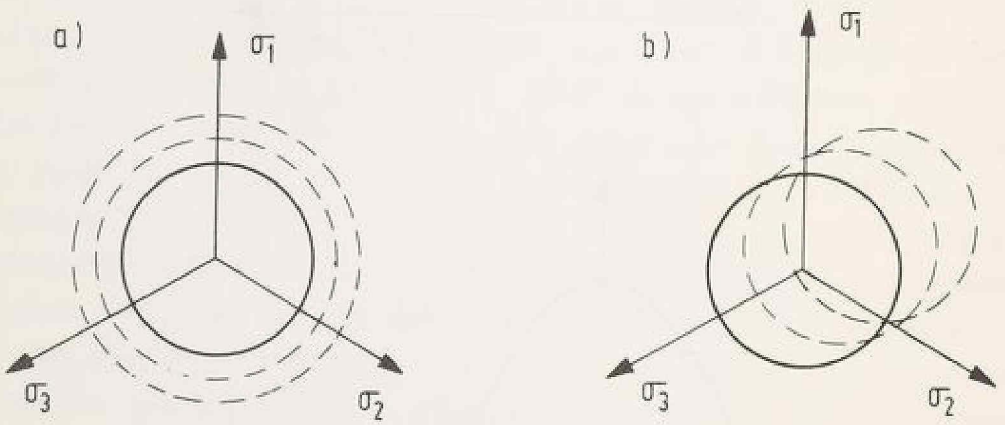



Abb. 3.1.4 Isotrope (a) und kinematische (b) Verfestigung

Erfolgt die Verfestigung, also das Aufweiten der Fließfläche, in allen Richtungen gleichmäßig, sprechen wir von isotroper Verfestigung. Wird sie ausschließlich oder zusätzlich im Raum verschoben oder verdreht, liegt kinematische Verfestigung vor. Diese Wirkung ist im Rahmen der Plastizitätstheorie für Metalle als Bauschinger-Effekt bekannt. Einen neueren Überblick über numerische Möglichkeiten für kinematische Verfestigung gibt Armen (1980).

Entfestigung ist gleichfalls möglich. Dies würde bedeuten, daß - zumeist nach vorhergehender Verfestigung - die Fließfläche wieder schrumpft. Entsprechende Vorschläge (Prêvost und Höeg 1975) existieren auch für bodenmechanische Stoffmodelle. In jüngster Zeit ist jedoch eine Diskussion entstanden darüber, ob die versuchsmäßig scheinbar beobachtete Entfestigung nicht in Wahrheit auf spezifische Randbedingungen der Versuchsapparatur zurückzuführen ist. Insbesondere ist unsicher, ob bei Entfestigung weiterhin die Kontinuumsmechanik in der bis heute üblichen Form angewendet werden darf.

## 3.2 Idealplastische nichtverfestigende Modelle

Das Fließkriterium von Tresca besagt, daß plastisches Fließen eintritt, sobald die maximale Schubspannung die Scherfestigkeit erreicht. Die maximale Schubspannung ist gleich der halben Differenz zwischen größter und kleinster Hauptspannung. Für den ebenen Verformungszustand gilt dann

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0$$

wobei k die Scherfestigkeit und $\sigma_1$ und $\sigma_3$ die größte bzw. kleinste Hauptspannung darstellen.

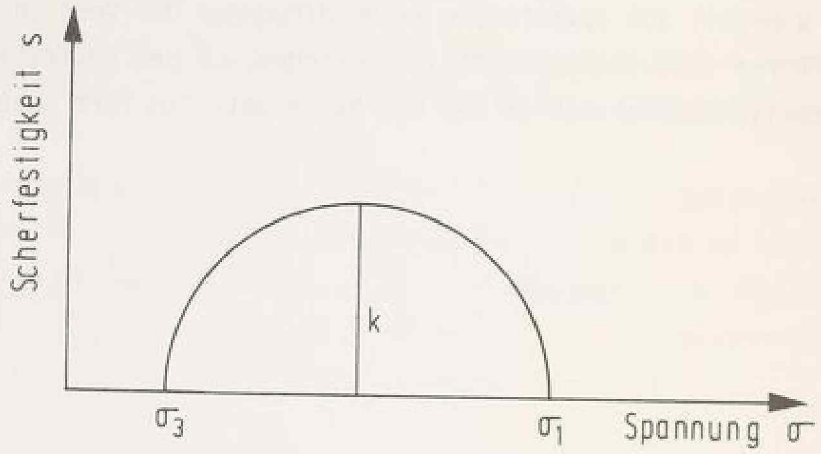



Abb. 3.2.1 Fließbedingung von Tresca für den ebenen Formänderungszustand

Die undrainierte Scherfestigkeit bindiger Böden bei einfachen Standsicherheitsberechnungen im Grundbau läßt sich durch das Tresca-Kriterium einfach ausdrücken (Abb. 3.2.1).

In der Deviatorebene ergibt sich die Darstellung nach Abb. 3.2.2. Es ist leicht zu erkennen, daß die jeweils mittlere Hauptspannung in der Fließbedingung nicht enthalten ist. Eine ausführliche und anschauliche Ableitung eines elastoplastischen Stoffansatzes auf der Basis der Fließbedingung von Tresca findet sich bei Christian und Desai (1977). Stoffansätze nach Tresca sind bei numerischen Berechnungen im Grundbau außer von Höeg, Christian und Whitman (1968) kaum angewendet worden. Die Gründe dafür sind im wesentlichen in der Form der Fließfläche zu suchen, die für Böden im drainierten Zustand experimentell nicht bestätigt werden kann.

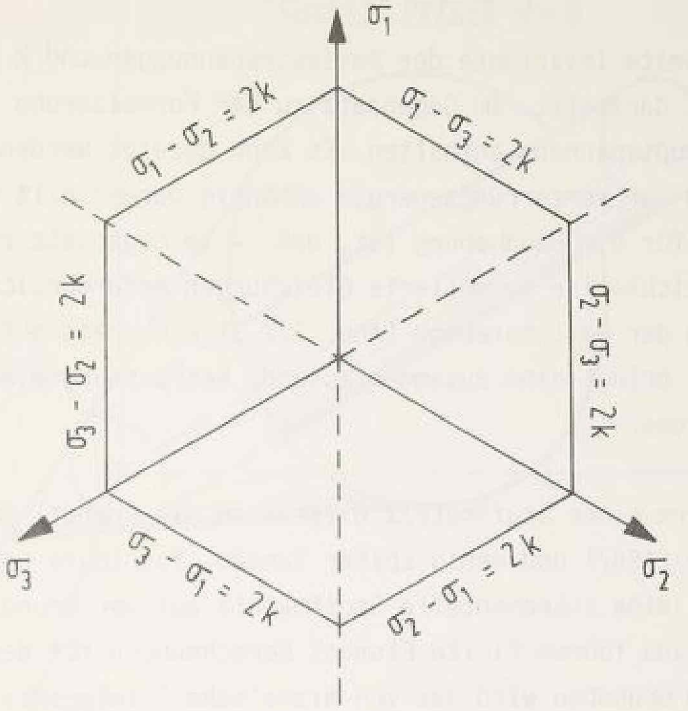



Abb. 3.2.2 Fließbedingung nach Tresca, dargestellt in der Deviatorebene

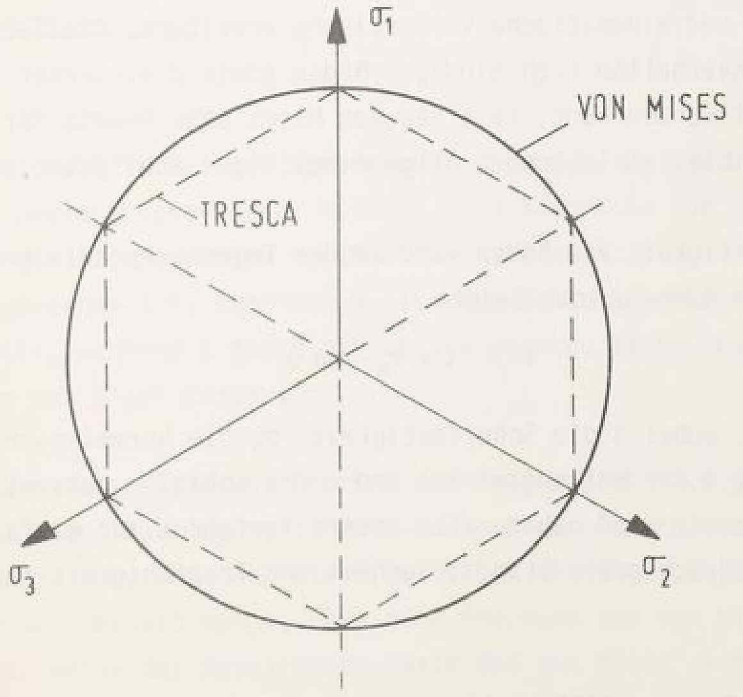



Abb. 3.2.3 Fließbedingung nach von Mises, dargestellt in der Deviatorebene

Eine weitere Fließbedingung wurde von von Mises (1913) aufgestellt:

$$f = k^2 - J_2 = 0$$

wobei $J_2$ die zweite Invariante der Deviatorspannungen und k wiederum die Scherfestigkeit darstellt. Im Gegensatz zu der Formulierung von Tresca ist die mittlere Hauptspannung enthalten. Es kann gezeigt werden, daß das Fließen als von der Verzerrungsenergie abhängig dargestellt wird. Wesentlicher Vorteil für die Handhabung ist, daß - im Gegensatz zu Tresca - nicht mehr bereichsweise formulierte Gleichungen erforderlich sind, sondern beim Schnitt in der Deviatorebene (Abb. 3.2.3) ein Kreis auftritt. Bereits Rendulic (1938) bringt eine zusammenfassende Betrachtung dieser Modelle und ihrer Probleme.

Als bekannte Form einer Stoffmatrix existieren die Prandtl-Reuß Gleichungen. Marcal und King (1967) und wenig später Yamada, Yoshimura und Sakurai (1968) leiten erstmals eine inkrementelle Stoffmatrix auf der Grundlage dieser Beziehungen ab und führen Finite Element Berechnungen für den Werkstoff Stahl durch. Im Grundbau wird das von Mises'sche Fließgesetz nur zur Darstellung des Verhaltens undrainierter bindiger Böden benutzt. Anwendungsbeispiele hierfür sind zahlreich, so zum Beispiel Höeg (1972) sowie Davidson und Chen (1977). Einen Schritt weiter geht Prévost (1978), der das von Mises Kriterium zur Erfassung von spannungsinduzierter Anisotropie um isotrope und kinematische Verfestigung erweitert. Die Tatsache, daß das Reibungsverhalten nichtbindiger Böden sowie drainierter bindiger Böden nicht erfaßt werden kann, läßt das von Mises'sche Gesetz für weitere aufwärtskompatible Entwicklungen allgemeingültiger Stoffgesetze ausscheiden.

Die Scherfestigkeit von Böden wird in der Ingenieurpraxis gewöhnlich durch das einfache Mohr-Coulomb Gesetz

$$s = c + \sigma_N \cdot \tan \varphi$$

ausgedrückt, wobei s die Scherfestigkeit, $\sigma_N$ die Normalspannung auf eine Bruchfläche, $\varphi$ den Reibungswinkel und c die Kohäsion darstellt. Mit diesem einfachen Gesetz sind nahezu alle unsere Verfahren zur einfachen Ermittlung von Erddruck sowie Standsicherheit und Tragfähigkeit hergeleitet worden.

Drucker und Prager (1952) schlagen vor, das Mohr-Coulomb'sche Gesetz für den dreidimensionalen Fall in der Art zu verallgemeinern, daß alle Haupt-

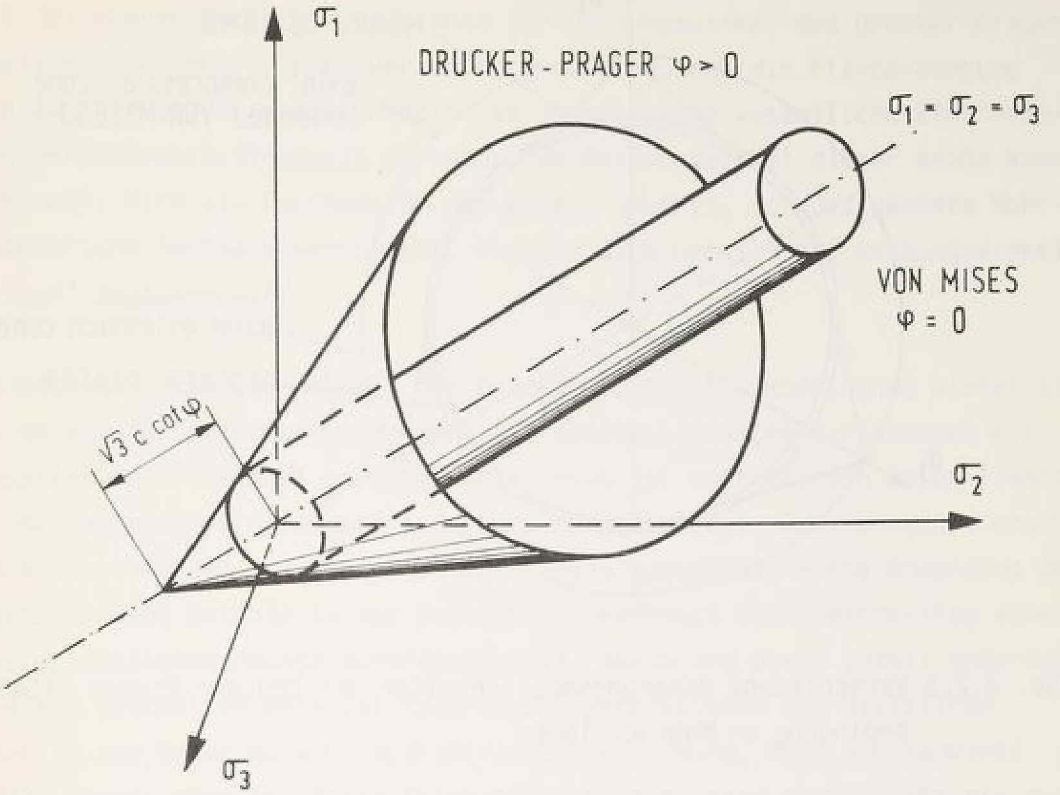



Abb. 3.2.4 Drucker-Prager und von Mises Fließbedingung dargestellt im Hauptspannungsraum

spannungen enthalten sind:

$$f = \alpha \cdot I_1 + J_2^{1/2} - k = 0$$

$I_1$ bedeutet die erste Invariante des Spannungstensors, $J_2$ die zweite Invariante der Deviatorspannungen, $\alpha$ und k sind Ausdrücke für die Scherfestigkeit. Da die Fließfunktion durch $\alpha$ vom hydrostatischen Spannungsanteil abhängig geworden ist, kann man $\alpha$ als eine Größe ansehen, die die Reibung darstellt, während k für die kohäsive Wirkung steht. Für $\alpha = 0$ ergibt sich das von Mises Kriterium.

Die Abbildung des Vorschlags von Drucker und Prager (Abb. 3.2.4) zeigt, daß zwar eine Analogieüberlegung zu Mohr-Coulomb den Anstoß zur Formulierung gegeben haben mag, daß aber die Fließfläche als Ergebnis, insbesondere als Schnitt in der Deviatorebene, eher eine Analogie zur von Mises Fließfläche aufweist. Unter der Bezeichnung "extended von Mises" ist sie auch in der Literatur bekannt. Bezüglich der Eleganz der Formulierung und der Einfachheit in der Anwendung ist sie dem von Mises Kriterium gleichzusetzen.

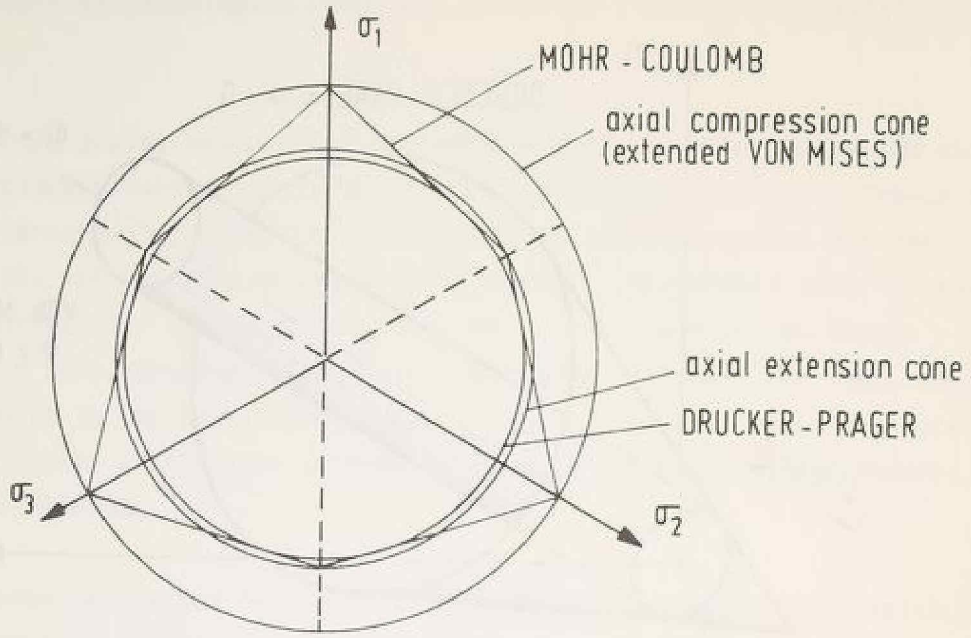



Abb. 3.2.5 Verschiedene Näherungsmöglichkeiten der Drucker-Prager Fließbedingung an Mohr-Coulomb

Um die ungewohnten und versuchsmäßig nicht direkt ermittelbaren Parameter $\alpha$ und k an die üblichen Parameter anzubinden, stellen Drucker und Prager eine Beziehung zu den Scherfestigkeitsparametern $\varphi$ und c her. Da das Mohr-Coulomb Kriterium in der Deviatorebene ein Sechseck, das Drucker-Prager Kriterium hingegen einen Kreis darstellt, kann sich eine Beziehung zwischen $\varphi$ und c einerseits und $\alpha$ und k andererseits nur für einen bestimmten Spannungszustand herleiten lassen. Für den ebenen Verformungszustand gilt nach Drucker und Prager:

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{(9 + 12 \tan \varphi)^{1/2}} \qquad k = \frac{3c}{(9 + 12 \tan \varphi)^{1/2}}$$

Da dieser Fall bei numerischen Berechnungen häufig auftritt, werden $\alpha$ und k meist in dieser Form benutzt. Ein Vergleich mit dem Mohr-Coulomb Kriterium in der Deviatorebene (Abb. 3.2.5) zeigt, daß damit zugleich die konservativsten Parameter gewählt worden sind. Für den Kompressionsversuch $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ sowie für den Extensionsversuch $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ und alle dazwischenliegenden Spannungszustände geben Klein und Gerthold (1979) die Werte $\alpha$ und k an. Die Diskussion, ob die von Drucker und Prager vorgeschlagenen Beziehungen nicht nur bei starrplastischem, sondern auch bei elastisch-idealplastischem Material gelten, ist durch die Bemerkungen von Chang, Nair und Karwoski (1976) abgeschlossen.

Für rollige Böden mit Reibungswinkeln $\varphi > 52°$ läßt sich zeigen, daß im Fall des ebenen Verformungszustands der Öffnungswinkel des Drucker-Prager Kegels mit den empfohlenen Werten so groß wird, daß die Fließbedingung auch Zugspannungen zuläßt. Hierin ist jedoch keine wesentliche Einschränkung der Gebrauchsfähigkeit zu sehen, da Reibungswinkel dieser Größe kaum vorkommen. Wird ein Durchmesser des Kegels gewählt, der das gesamte Mohr-Coulomb'sche Sechseck umschließt, ergeben sich bereits bei Reibungswinkeln $\varphi > 36.9°$ Zugspannungen.

Die mathematische Einfachheit der Drucker-Prager Fließbedingung bietet sich an, um auf ihr aufbauend inkrementelle elastoplastische Beziehungen mit assoziierter Fließregel zu entwickeln. Dies ist erstmals von Reyes (1966) für den ebenen Verformungszustand vorgenommen worden. Bemerkenswert erscheint dem Verfasser, daß zur damaligen Zeit Reyes sowohl die erste Anwendung der Finite Element Methode in der Geotechnik überhaupt und gleichzeitig einen elastoplastischen Ansatz veröffentlichte. Reyes und Deere (1966) untersuchen an einem abstrakten Beispiel Spannungskonzentrationen und plastische Zonen in der Umgebung von Felshohlraumbauten. Chang, Nair und Karwoski (1972) untersuchen ebenfalls Felshohlraumbauten, aber bereits für ein reales Kavernenprojekt.

Gates (1972) schlägt eine Erweiterung des Drucker-Prager Modells in der Form von Reyes (1966) derart vor, daß bei Erreichen der Fließfläche die Festigkeit auf einen Residualwert abfällt. Das Postpeak-Verhalten wird dann durch eine konzentrisch zur ursprünglichen Fließfläche und in ihr verlaufenden zweiten Fließfläche bestimmt. Ähnliches schlägt Höeg (1972) vor. Ein iterativer Prozeß ist erforderlich.

Tanaka und Nakano (1976) vertreten die Ansicht, daß aus elastoplastischen Berechnungen eines Dammes sich Aussagen über die Standsicherheit herleiten lassen und vergleichen ihre Berechnungen mit einer nichtlinear-elastischen hyperbolischen Approximation. Der Vergleich ist wenig aussagekräftig, da bei dem von ihnen untersuchten Damm die Bruchbedingung nirgendwo erreicht wird. Das Verhalten ist dann ausschließlich elastisch und daher insgesamt weniger realistisch als eine nichtlinear-elastische Rechnung.

Inkrementelle elastoplastische Stoffansätze auf der Basis des Drucker-Prager Kriteriums werden häufig angewendet für ingenieurmäßige Berechnungen im Grundbau. Erstaunlich ist jedoch, daß nach wie vor versucht wird,wissen-

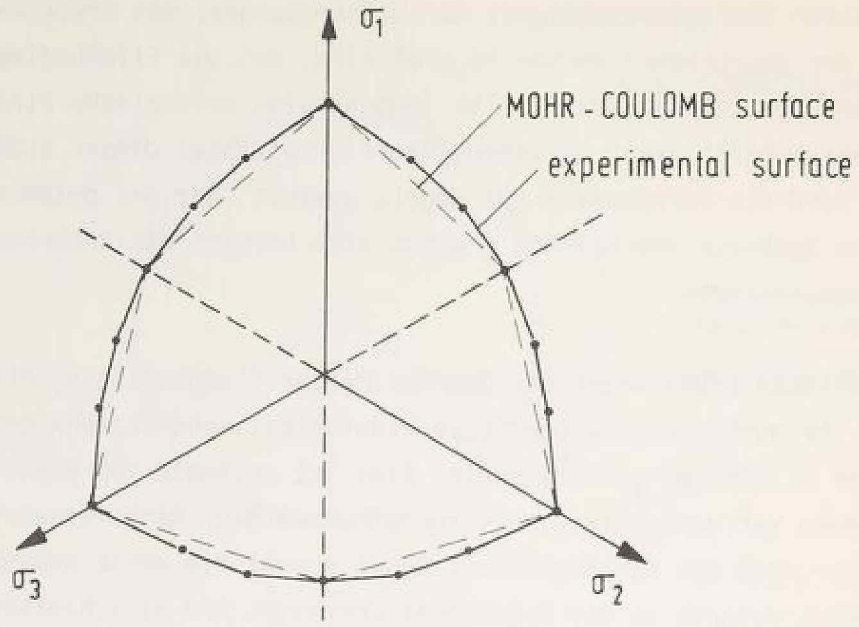



Abb. 3.2.6 Versuche von Kirkpatrick, dargestellt in der Deviatorebene

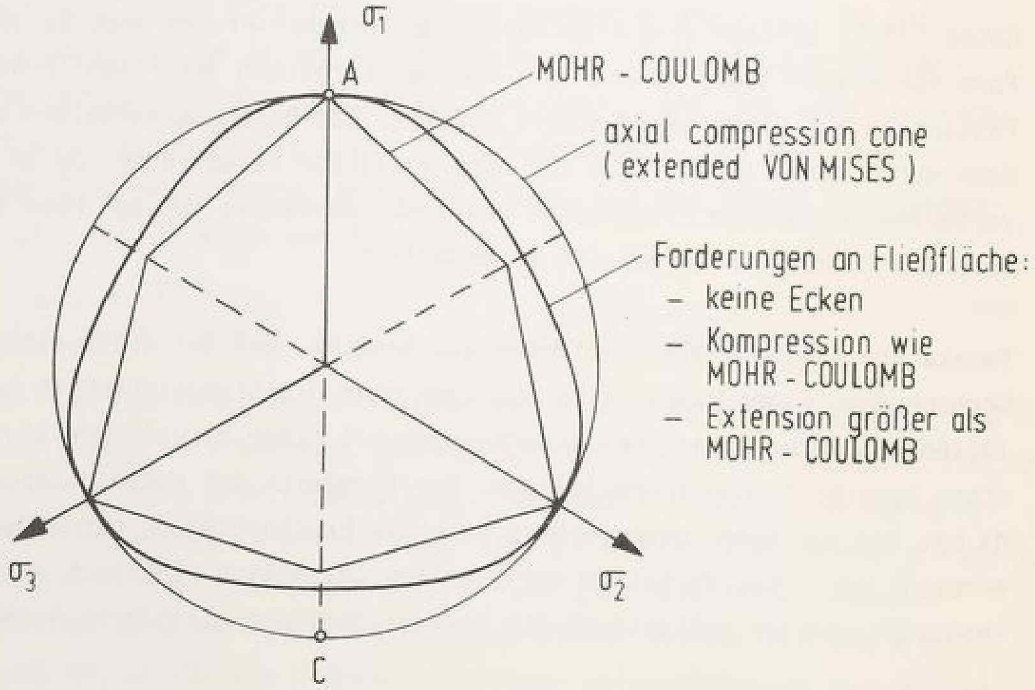
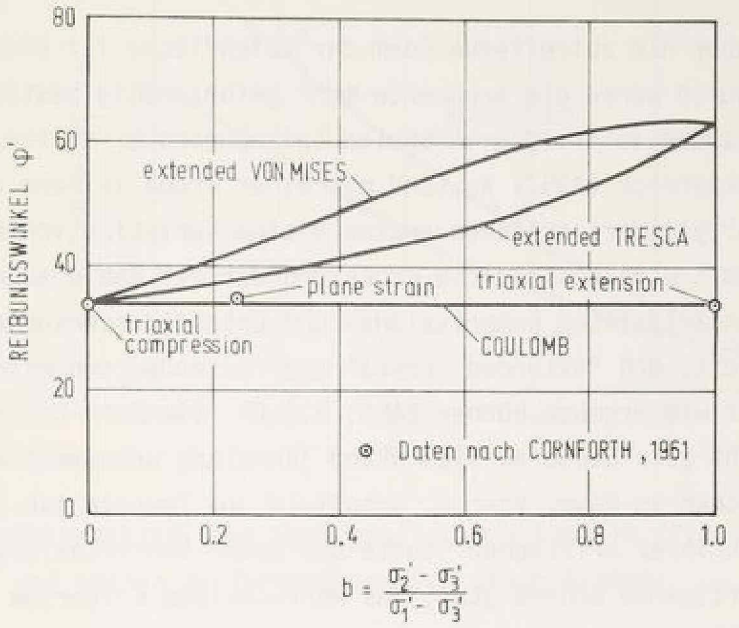



Abb. 3.2.7 Tendenzielle Abweichungen des Bodenverhaltens vom Mohr-Coulomb und Drucker-Prager Kriterium



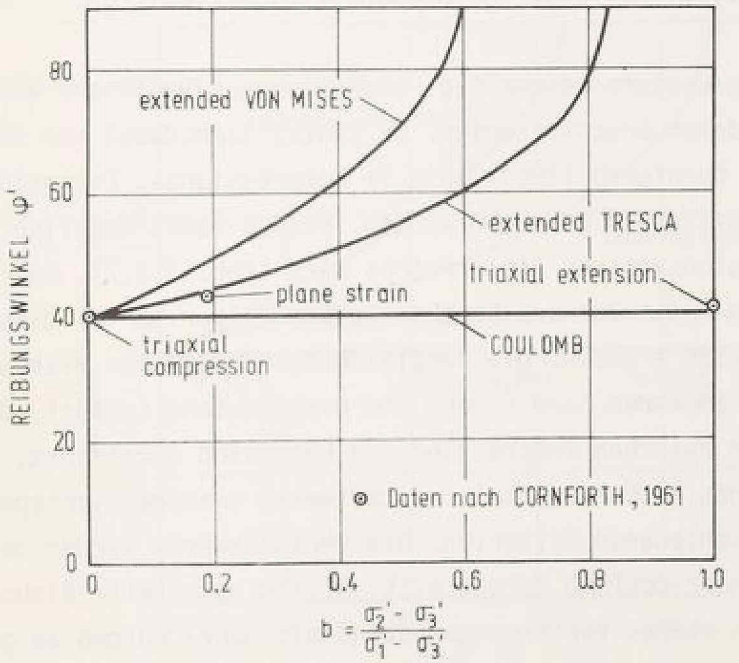




Abb. 3.2.8 Vergleich von Versuchsergebnissen mit Bruchkriterien für lockeren Sand (oben) und dichten Sand (unten) nach Bishop

schaftliche Erkenntnisse daraus zu gewinnen. Davidson und Chen (1976) versuchen, die Tragfähigkeit von Flachgründungen damit zu berechnen. Snitbhan und Chen (1978) berechnen mit gleichem Stoffansatz, aber Theorie großer Verformungen, die Standsicherheit von Böschungen.

Die Diskussion über die zutreffende Form der Fließfläche für Böden ist alt. Lange Jahre hindurch waren die Argumente mehr gefühlsmäßig bestimmt, da zuverlässige Versuche im dreidimensionalen Spannungsraum fehlten. Die Versuche von Kirkpatrick (1957) an Sand mit einer Probe in Form eines dickwandigen Hohlzylinders erlauben erstmals eine Variation von $\sigma_2$ zwischen $\sigma_1$ und $\sigma_3$ und damit eine wesentliche Ergänzung der bis dahin auch nur wenig vorhandenen triaxialen Kompressions- und Extensionsversuche. Kirkpatrick stellt fest, daß "extended Tresca" und "extended von Mises" die Bruchpunkte nicht wiedergeben können (Abb. 3.2.6). Die Mohr-Coulomb Fläche paßt dagegen recht gut. Diese Aussage stand jahrelang unkommentiert, aber auch unwidersprochen im Raum. Roscoe, Schofield und Thurairajah (1963) betonen, daß nach ihrer kritischen Studie der Daten von Triaxialversuchen es wenig rechtfertigende Gründe gäbe, das Mohr-Coulomb Kriterium zu wählen. Sie schlagen stattdessen vor, das erweiterte von Mises Kriterium (Drucker-Prager) bis auf weiteres ("for the present") zu akzeptieren.

In seiner Rankine Lecture beschäftigt sich Bishop (1966) sehr ausführlich mit den verschiedenen Bruchkriterien. Er stützt sich dabei vor allem auf die Versuche von Cornforth (1961), die im Kompressions-, Extensions- und ebenen Verformungszustand gefahren wurden. Bishop macht deutlich, daß Punkt C im Extensionsversuch nie erreicht wird (Abb. 3.2.7). Das bedeutet, daß das von Mises Kriterium und Drucker-Prager Kriterium für diesen Fall zu hohe Festigkeiten ergeben. Die Vergleichsrechnungen von Bishop (Abb. 3.2.8) für lockeren Sand (oben) und dichten Sand (unten), der alle Spannungszustände zwischen Kompression und Extension durchfährt, zeigt - je nach Größe des Reibungswinkels - teilweise extreme Diskrepanzen zwischen den verschiedenen Kriterien. Die Versuchswerte werden deutlich am besten durch Mohr-Coulomb dargestellt. Allerdings stellt Bishop auch fest, daß für den ebenen Verformungszustand mit Mohr-Coulomb zu geringe Festigkeiten angegeben werden. Die Reibungswinkel im Versuch sind zwischen 0.5° bei lockerem Sand und 4° bei dichtem Sand größer als das Bruchkriterium angibt (Abb. 3.2.9).

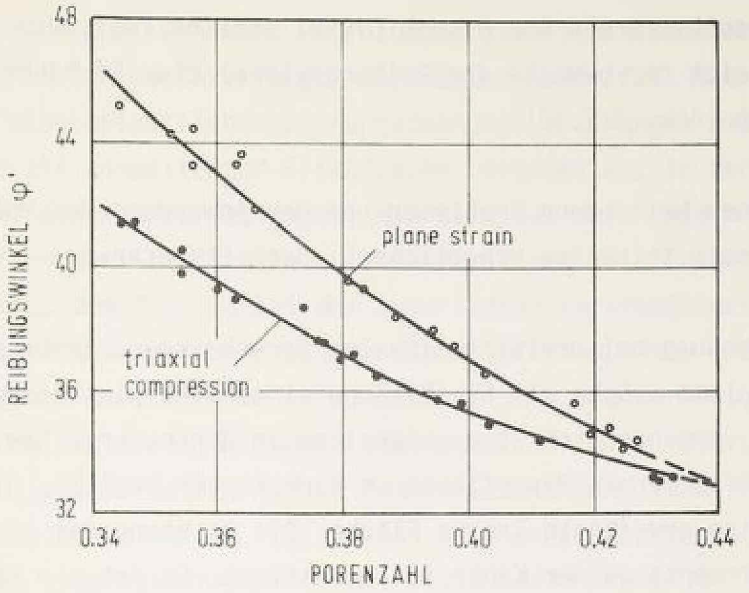



Abb. 3.2.9 Unterschiedliche Festigkeiten von Sand im triaxialen Kompressions- und ebenen Verformungsversuch (nach Bishop)

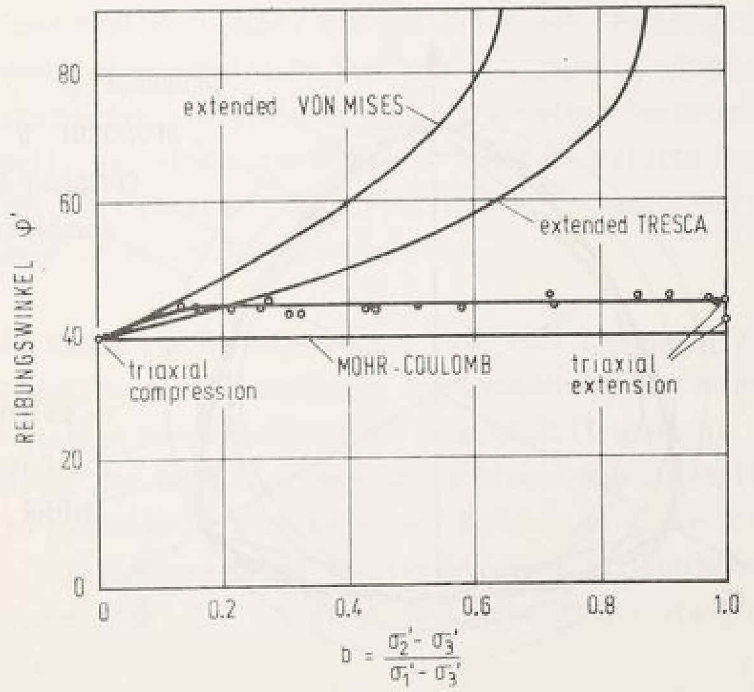



Abb. 3.2.10 Ebene Verformungsversuche nach Green und Bishop

Lee (1970) stellt zumindest für dichten Sand bei ebenen Versuchen noch größere Reibungswinkel fest. Sie liegen bis zu 8° über den Werten des Triaxialversuchs. Green und Bishop (1969) stellen fest, daß im weitaus größten Bereich der b-Werte die Reibungswinkel etwa 5° höher sind als nach Mohr-Coulomb (Abb. 3.2.10).

Daher bestehen bei ebenen Problemen und der Anwendung des Mohr-Coulomb Kriteriums noch teilweise erhebliche Sicherheitsreserven.

Für die Anwendung bei dreidimensionalen Berechnungen, insbesondere wenn die Mohr-Coulomb Fläche als Fließfläche eines idealplastischen Modells verwendet wird, ergeben sich Schwierigkeiten in der numerischen Handhabung, da die Fließfläche als Hyperfläche im Raum Kanten besitzt. Dies gilt ebenfalls für eine erweiterte Tresca Fläche. Die Richtung des plastischen Dehnungsinkrements an der Kante ist unbestimmt. Es ist ein Fächer von Richtungen möglich zwischen den Tangenten an die angrenzenden Flächen. Eine Vielzahl von Vorschlägen existiert, um entweder geeignete mittlere Richtungen zu bestimmen oder den Kantenbereich auszurunden.

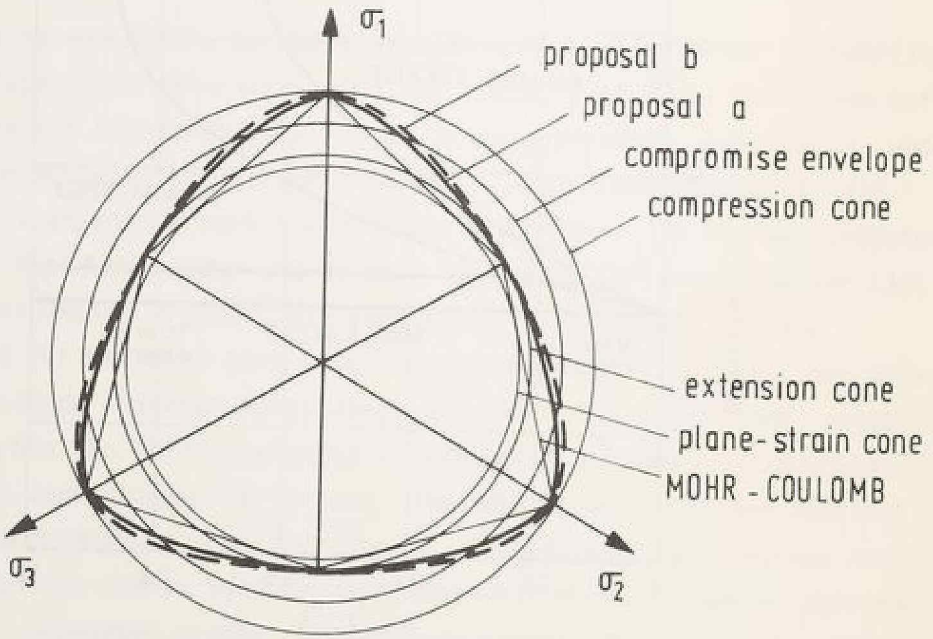



Abb. 3.2.11 Vorgeschlagene Fließfläche nach Zienkiewicz und Pande

Für den ebenen Verformungszustand existieren diese Probleme nicht. Das Mohr-Coulomb Kriterium kann ohne Ergänzungen als Fließfläche benutzt werden, da das Fließen in der Ebene erfolgt. Für diesen Sonderfall hat Hagmann (1971) inkrementelle elastoplastische Spannungsdehnungsbeziehungen mit der Mohr-Coulomb Fläche als assoziierter Fließfläche hergeleitet. In der Folgezeit entstanden zahlreiche Untersuchungen, die sich mit der Frage nach der zweckmäßigen Form der Fließfläche auseinandersetzen. Die Fragestellung erfolgt immer aus dem Blickwinkel der numerischen Verarbeitbarkeit heraus. Neue Erkenntnisse aus Versuchen liegen nicht vor. Humpheson und Naylor (1975) vergleichen verschiedene Öffnungswinkel des Drucker-Prager Kegels mit der Mohr-Coulomb Pyramide. Wenig konsequent ist dabei aber, daß - in der Deviatorebene betrachtet - extrem unterschiedliche Kreise miteinander verglichen werden. Es ist von vornherein abzusehen, daß ein Kreis durch den Kompressionspunkt (Abb. 3.2.5) eine erheblich höhere Scherfestigkeit darstellt als ein Kreis durch den Extensionspunkt. Drucker und Prager (1952) haben für den ebenen Verformungszustand bereits einen bestimmten Öffnungswinkel vorgeschlagen. Nichtsdestoweniger ist es aufschlußreich, an einem konkreten Beispiel die enormen Unterschiede zu beobachten, die aus der Wahl des Kegeldurchmessers resultieren. Der Vorschlag von Humpheson und Naylor erlaubt, die Kriterien von Drucker-Prager und Mohr-Coulomb durch eine gemeinsame Funktion mit jeweils unterschiedlichen Parametern auszudrücken. Im gleichen Sinne erarbeiten Davis und Mullenger (1979) ein Modell, das eine noch erheblich breitere Palette von Bruchkriterien erfaßt. Van Eekelen (1980) faßt ebenfalls Versuchsergebnisse in der Deviatorebene in einer Funktion zusammen.

Zienkiewicz und Pande (1975) umgehen die numerisch ungünstig zu handhabende Mohr-Coulomb Formulierung und benutzen den Lode-Winkel $\theta$ ,um eine in der Deviatorebene stetige Kurve zu erhalten (Abb. 3.2.11). Um die Unstetigkeit an der Spitze des Kegels zu umgehen, schlagen sie zusätzlich vor, als Erzeugende eine Hyperbelkurve zu benutzen. Dadurch wird die Spitze ausgerundet. Eine Vergleichsrechnung für ein biegeweiches Fundament im ebenen Verformungszustand (Abb. 3.2.12) zeigt deutliche Unterschiede der untersuchten Varianten.

Solange für inkrementelle elastoplastische Ansätze die Mohr-Coulomb oder Drucker-Prager oder eine ähnliche numerisch günstiger darstellbare Fläche

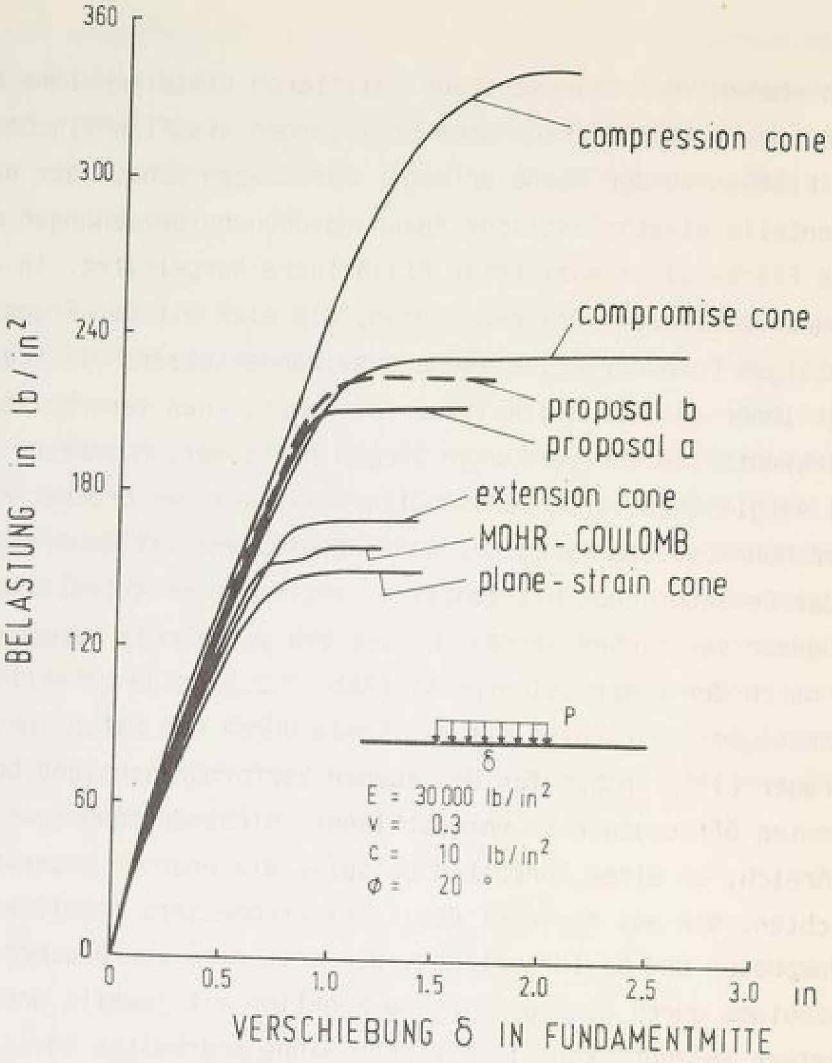



Abb. 3.2.12 Vergleichsuntersuchungen an einem Streifenfundament für unterschiedliche Fließflächen (nach Zienkiewicz und Pande)

für eine assoziierte Fließregel benutzt wird, muß die Dilatanz des Bodens erheblich überschätzt werden.

Durch die für die Ableitung benutzte Normalitätsbedingung (Abb. 3.2.13 a) ergeben sich immer Volumenvergrößerungen in einer Größe, die bei den meisten Böden nicht erreicht wird. Da die Dilatanz bei einer Vielzahl von Problemen durch geometrische Randbedingungen behindert wird, entsteht durch die Zwängung eine Erhöhung der Normalspannungen. Dies bewirkt fast immer eine Stabilisierung des Systems. Die durch den Ansatz bedingte zu hohe Einschätzung der Dilatanz bedeutet daher, daß die Berechnungen auf der unsicheren Seite liegen: Tragfähigkeiten werden als zu hoch, Verformungen als zu gering ermittelt. Es fehlt nicht an Versuchen, die Auswirkungen

dieses grundsätzlichen Fehlers auf Finite Element Berechnungen zu untersuchen. Hagmann, Christian und D'Appolonia (1970) entwickeln elastoplastische Beziehungen für ein idealplastisches Material mit einer nichtassoziierten Fließregel (Abb. 3.2.13 b). Alle durch Dilatanz bedingten plastischen Verzerrungen werden eliminiert ("removed dilatancy"). Für die numerische Verarbeitung hat dies zur Folge, daß die Stoffmatrizen und demnach auch die Gesamtsteifigkeitsmatrizen nicht mehr symmetrisch sind.

Richter (1978) führt Vergleichsrechnungen durch für assoziierte und nichtassoziierte Fließregeln. Für letztere nimmt er an, daß die plastischen Verzerrungen volumenkonstant verlaufen. Als Funktion für das plastische Potential nimmt er den von Mises Kreiszylinder im Hauptspannungsraum an. Seine Rechnungen bestätigen, daß die Tragfähigkeit von Flachgründungen bei zu hoch angesetzter Dilatanz im Stoffmodell erheblich überschätzt wird.

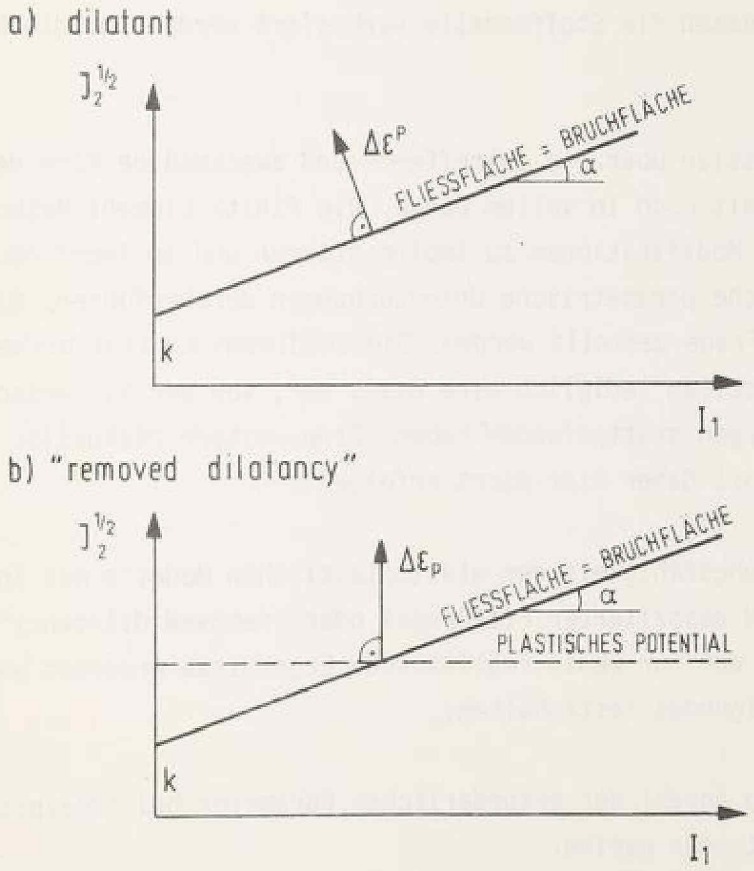



Abb. 3.2.13 Assoziierte und nichtassoziierte Fließregel am Beispiel der Drucker-Prager Fließfläche

In ähnlicher Weise gehen Christian, Hagmann und Marr (1977) vor. Für ein Mohr-Coulomb Fließgesetz mit assoziierter Fließregel und entsprechend großer Dilatanz sowie für ein Modell mit "removed dilatancy" untersuchen sie ein Tragfähigkeits- und ein Erddruckproblem. Sie stellen fest, daß bei Erddruckproblemen die Ergebnisse unabhängig vom gewählten Modell gute Übereinstimmung mit den Lösungen der "klassischen" Theorie zeigen. Die Tragfähigkeitsberechnungen überschätzen ihrer Ansicht nach die wahre Tragfähigkeit erheblich. Als Vergleichsmaßstab ziehen sie allerdings die Tragfähigkeitsformel nach Terzaghi heran.

Es deutet sich hier bereits die Richtung für wichtige Untersuchungen an: Die Erfahrung, daß dilatante und nichtdilatante Modelle je nach Problem einmal ähnliche, einmal extrem unterschiedliche Ergebnisse zeigen, muß dazu führen, diese Problemgruppen zu erkennen und zu trennen. Damit wäre bekannt, wo bei der Interpretation Vorsicht geboten ist. Sollen jedoch nicht Grenzbetrachtungen durchgeführt, sondern realistische Aussagen gemacht werden, müssen die Stoffmodelle verbessert werden und die Dilatanz richtig erfassen.

Die Diskussion über die zutreffende und zweckmäßige Form der Fließfläche ist zur Zeit noch in vollem Gange. Die Finite Element Methode erlaubt es, beliebige Modifikationen zu implementieren und an immer neuen Problemen umfangreiche parametrische Untersuchungen durchzuführen. Dies soll hier nicht in Frage gestellt werden. Die in diesem Kapitel bisher diskutierten Modelle stellen lediglich eine Basis dar, von der aus entscheidende Weiterentwicklungen stattgefunden haben. Eine weitere Diskussion über diese Modelle soll daher hier nicht erfolgen.

Die Leistungsfähigkeit der elastoplastischen Modelle mit konstanter Fließfläche und assoziierter Fließregel oder "removed dilatancy" ist so beschränkt, daß nur wenig realistische Ergebnisse erwartet werden dürfen. Es ist folgendes festzuhalten:

- Die Anzahl der erforderlichen Parameter bei idealplastischen Modellen ist sehr gering.

- Die numerische Verarbeitung ist aufwendig, verglichen mit nichtlinear- elastischen Stoffansätzen (Kapitel 2), aber sehr einfach verglichen mit Stoffmodellen mit Verfestigung (Kapitel 3.3) und

Stoffgesetzen mit nichtassoziierter Fließregel und Verfestigung (Kapitel 3.4 und 3.5).

- Die Dilatanz nichtbindiger Böden wird entweder extrem überschätzt oder bleibt gänzlich unberücksichtigt.

- Form und Lage der Fließfläche sind bei diesen Modellen nicht abhängig vom Spannungsweg oder von der Spannungsgeschichte des Materials.

- Spannungswege, die die Fließfläche nicht erreichen (z.B. solche in der Nähe der Raumdiagonalen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) hinterlassen keine plastischen Verformungen.

Der zuletzt erwähnte wesentliche Mangel hat zu einer vielbenutzten Weiterentwicklung geführt.

## 3.3 Verfestigende Modelle mit einer Cap

Die bisher vorgestellten elastoplastischen Ansätze sind zumindest nach der Form der Fließfläche von sehr einfachem Aufbau. Wie bereits in Kapitel 3.1 gezeigt, ist es nicht zwingend erforderlich, die Fließfläche als eine konstante Raumkurve zu betrachten. Ganz im Gegenteil zeigt das Verhalten des Bodens deutlich, daß das erstmalige Auftreten von Fließen nicht identisch mit Bruch ist.

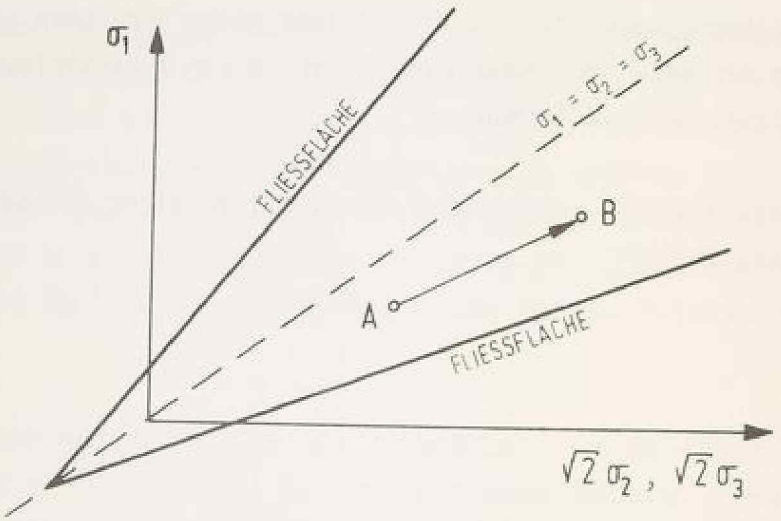



Abb. 3.3.1 Spannungsweg innerhalb einer Fließfläche

Drucker, Gibson und Henkel (1955) diskutieren erstmals, daß die mechanische Theorie der idealen Plastizität insbesondere für die Bodenmechanik nicht zutrifft. Sie schlagen vor, Boden als ein verfestigendes Material zu betrachten. Wird eine Bodenprobe sphärisch belastet, wie zum Beispiel von A nach B in Abb. 3.3.1, und als Fließfläche ist eine Funktion wie die von Drucker und Prager oder die Mohr-Coulomb Fläche vorgesehen, finden ausschließlich elastische Volumenänderungen statt. Dies ist jedoch nicht zutreffend, wie hydrostatische Belastungsversuche oder, bei anderem Spannungsweg, eindimensionale Konsolidierungsversuche zeigen. Drucker et. al. (1955) schlagen vor, den in Richtung der Raumdiagonalen sich unendlich weit ausdehnenden Kegel durch eine einfache Fläche - eine Cap - zu begrenzen. Sie wählen eine Halbkugel, deren Mittelpunkt auf der hydrostatischen Achse liegt. Dadurch ist der elastische Bereich im dreidimensionalen Spannungsraum eindeutig eingegrenzt. Es sind nunmehr zwei Spannungs-

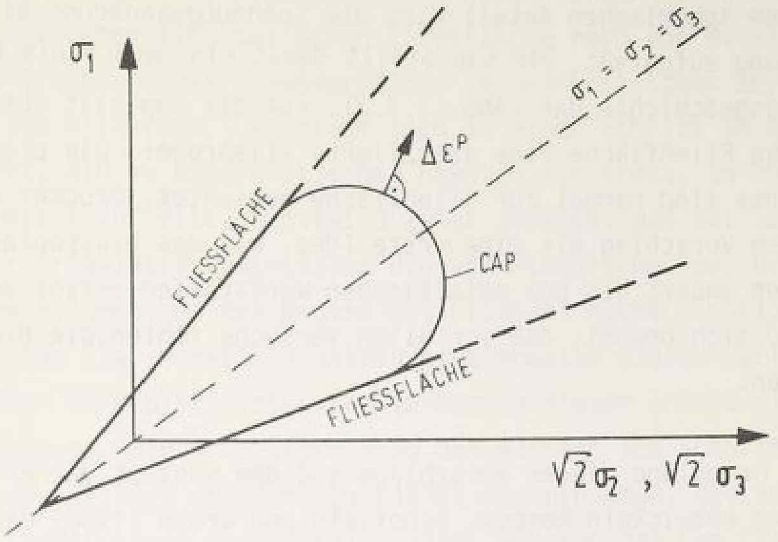



Abb. 3.3.2 Vorgeschlagene kugelsegmentförmige Cap (nach Drucker,Gibson und Henkel)

änderungen möglich, die zu plastischen Dehnungsanteilen führen. Ein Spannungsweg, der die seitliche Fließfläche erreicht, führt zu idealplastischem Fließen. Spannungszuwachs über die seitliche Fließfläche hinaus ist nicht möglich. Die Lage der seitlichen Fließfläche ist unveränderlich, eine Verschiebung oder Aufweitung des Öffnungswinkels - gleichbedeutend mit Verfestigung in dieser Richtung - findet nicht statt. Für Spannungsanteile in Richtung der Raumdiagonalen bewirkt ein Erreichen der Cap, daß plastische Volumenänderungen auftreten. Für nachfolgende Belastungsschritte wird die Position der Cap dem erreichten Spannungszustand angepaßt, wenn

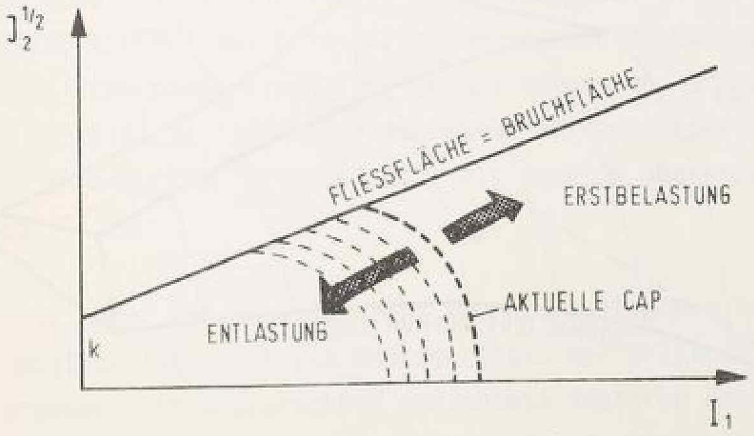



Abb. 3.3.3 Verfestigende Cap als Grenze zwischen Erstbelastung und Entlastung

dieser einen höheren sphärischen Spannungsanteil aufweist. Bei geringer werdendem sphärischen Anteil wird die Spannungsänderung als elastische Entlastung aufgefaßt. Die Cap stellt damit ein Gedächtnis ("memory") der Spannungsgeschichte dar (Abb. 3.3.3). Für die Cap gilt ebenso wie für die seitliche Fließfläche eine assoziierte Fließregel. Die plastischen Dehnungsinkremente sind normal zur Fließfläche gerichtet. Drucker et. al. betrachten ihren Vorschlag als eine erste Idee, wie das elastoplastische Verhalten von Böden anders als bei metallischen Werkstoffen erfaßt werden kann. Sie sind sich bewußt, daß vor allem Versuche fehlen,die die Form der Cap bestimmen.

Auf der Grundlage dieser Vorschläge und dem Konzept der kritischen Dichte aufbauend entwickeln Roscoe, Schofield und Wroth (1958) ein isotrop verfestigendes Modell, das Cam Clay Modell. In einer verbesserten Form mit elliptischer Fließfläche nach Burland (1967) und nach Roscoe und Burland (1968) unter der Bezeichnung "Modified Cam Clay" (Abb. 3.3.4) überwindet es einige sehr wesentliche Einschränkungen, die aus seiner ursprünglichen Herleitung aus dem triaxialen Kompressionsversuch entstanden sind.

Roscoe (1967) stellt die wesentlichen Merkmale heraus: Es wird isotrope Verfestigung angenommen mit assoziierter Fließregel, die der Drucker'schen

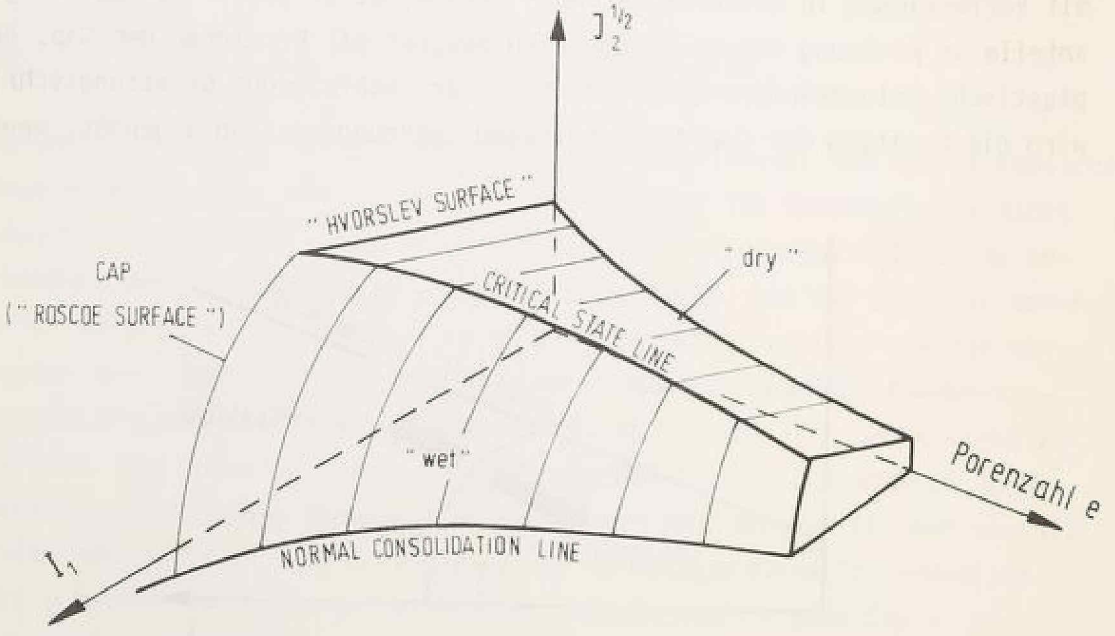



Abb. 3.3.4 Das Cam Clay Modell als Sonderform eines Cap Modells (Bezeichnungen nach Atkinson und Bransby)

Normalitätsbedingung genügt. Die plastischen Dehnungen unterhalb der Critical State Line ergeben sich aus einer Fließfläche nach von Mises und einer Cap. Für den Bruch und das Fließverhalten im überkritischen Bereich gilt das Mohr-Coulomb Kriterium. Das zeigt sich in einem Schnitt in der Deviatorebene derart, daß im unterkritischen Bereich ein Kreis, im überkritischen ein Sechseck auftritt. Kapitel 3.2 hat gezeigt, daß bei Spannungszuständen außer der triaxialen Kompression die von Mises'sche bzw. Drucker-Prager Bedingung im allgemeinen den Beginn des Fließens nicht richtig angeben kann. Da das Cam Clay Modell in seinen mittlerweile vielen Varianten nur für bindige Böden konzipiert ist, wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen. Die Grundlagen sind den Büchern von Schofield und Wroth (1968) und Atkinson und Bransby (1978) zu entnehmen, die auch zur Einführung in die Terminologie erforderlich sind. Während das Cam Clay Konzept zur Erklärung des Bodenverhaltens durchaus beizutragen vermag, wird es nur sehr zögernd für numerische Berechnungen eingesetzt. Ein wesentliches Hindernis ist die nach wie vor starke Kopplung des Modells an die Randbedingungen des Versuchs.

Zienkiewicz und Naylor (1971) formulieren das Cam Clay Konzept so, daß sie es in einer Finite Element Berechnung für den Aufbau elastoplastischer Stoffmatrizen verwenden können. Banerjee und Stipho (1978) vergleichen die Wirkung der Annahme von assoziierten und nichtassoziierten Fließregeln auf die Qualität der Aussagen des Cam Clay Modells.

Ein ähnliches Modell, bei dem Fließfläche, plastisches Potential und Bruchfläche als explizite mathematische Ausdrücke dargestellt werden, präsentieren Nova und Wood (1979). Ihr Modell beschränkt sich in der vorliegenden Version ausschließlich auf den triaxialen Kompressionszustand und ist nur als vorläufige Zwischenphase einer Entwicklung anzusehen. Schad (1979) formuliert die Fließfläche in der Deviatorebene bereichsweise durch eine Hyperbel sowohl im unterkritischen ("wet") als auch im überkritischen ("dry") Bereich.

Erwähnenswert ist noch, daß eine Dilatanz im unterkritischen Bereich des Modells nicht möglich ist. Erst bei Überschreiten der Critical State Line (Abb. 3.3.5) ergeben sich entsprechend gerichtete Vektoren des plastischen Dehnungsinkrements. Voraussetzung ist, daß die Cap im überkritischen Bereich als plastisches Potential benutzt wird.

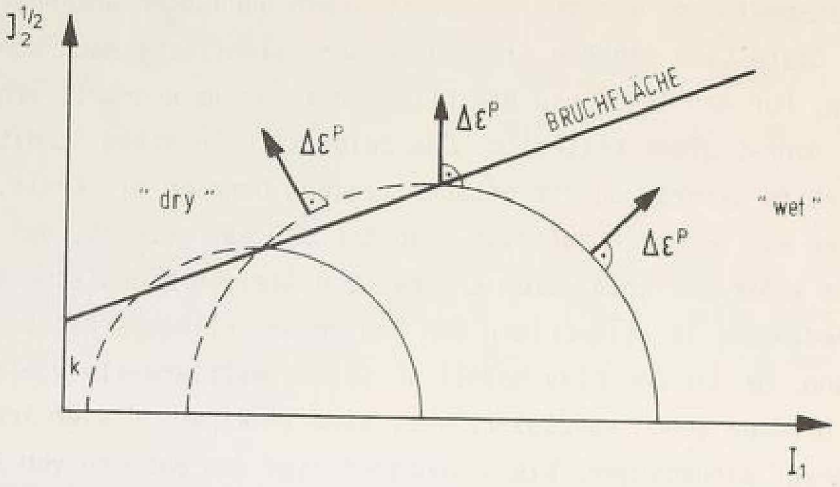



Abb. 3.3.5 Beherrschung der Dilatanz im überkritischen Bereich, wenn die Cap auch dort gültig ist

Als wesentliche Einschränkung der Gebrauchsfähigkeit wird angesehen, daß als Zustandsgröße("state variable") des Bodens die Porenzahl e benutzt wird. Da es sich hierbei um einen Skalar handelt, kann weder die Anisotropie noch eine kinematische Verfestigung ausgedrückt werden. Kriterium für die Wahl eines Stoffgesetzes in dieser Arbeit ist, eine Formulierung auszuwählen, die für möglichst viele zukünftige Erweiterungen nach oben offen ist. Aus diesem Grund scheidet das Cam Clay Modell in seinen bis heute vorliegenden Formulierungen aus.

Ähnlich der Entwicklung des Cam Clay Modells durch die Gruppe in Cambridge, England, ist auch am MIT in Cambridge,Massachussetts, in einer Gruppenarbeit an der Entwicklung eines Cap Modells gearbeitet worden. Hagmann (1971) berichtet über die grundlegende Entwicklung; Christian, Hagmann und Marr (1977) führen parametrische Untersuchungen durch. Grundlage ihres Modells ist eine Mohr-Coulomb Fläche als seitliche nicht verfestigende Fließfläche und eine elliptische Cap. Die Ellipse hat eine horizontale Tangente beim Durchgang durch die Mohr-Coulomb Fläche.

Ein weiteres Cap Modell in mehreren Variationen ist für Auftragsforschung der US-Regierung entstanden. Sandler, DiMaggio und Baladi (1976) schlagen ein Cap Modell vor, das im Bereich unter der Bruchfläche eine Ellipsenform annimmt. Als seitliche Fließfläche wählen sie eine Kombination aus der Drucker-Prager Fläche im Bereich kleiner Spannungen und der von Mises Fläche als Asymptote bei großen Spannungen. Mit diesem Modell führen sie

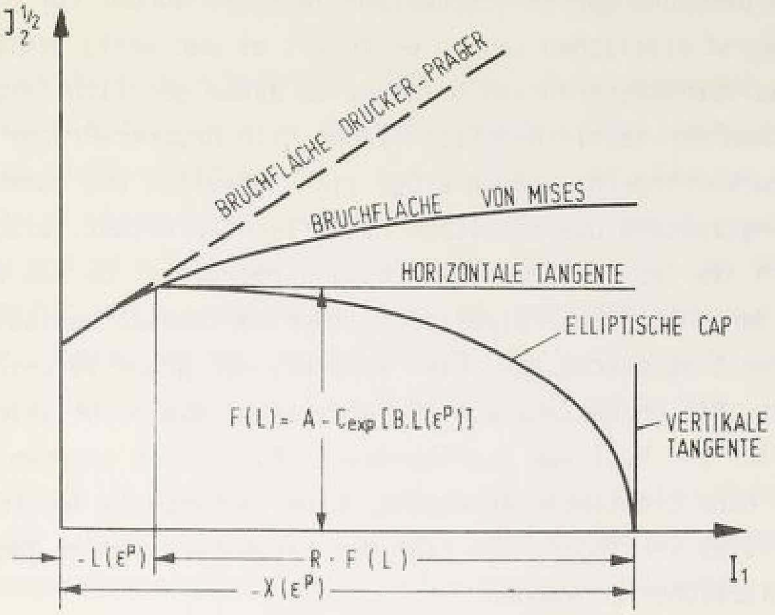
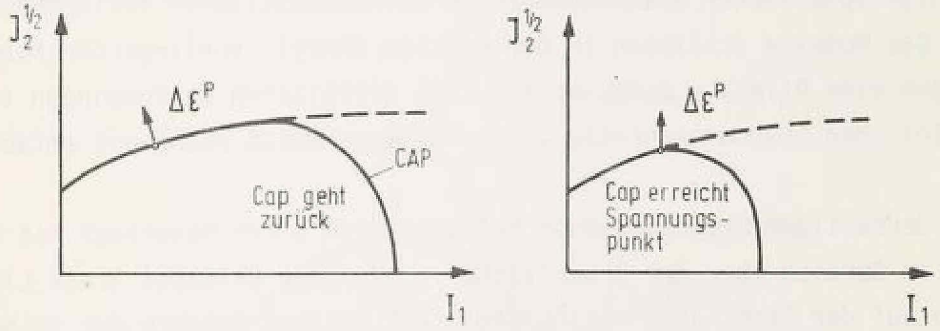



Abb. 3.3.6 Cap Modell (nach Sandler, DiMaggio und Baladi)




a) Wenn Bruch auftritt, bewegt sich die Cap rückwärts bis zum Spannungspunkt
b) Im Spannungspunkt dient die Cap als Fließfläche bei assoziierter Fließregel

Abb. 3.3.7 Verhinderung von Dilatanz durch Bewegen einer Cap

dynamische Berechnungen von Stoßwellen im Boden durch. Für die Anwendung bei vorwiegend statischen Lasten erscheint es nur wenig geeignet, da die Autoren das Vorhandensein von Dilatanz im Boden gänzlich leugnen. Um die bei Erreichen der seitlichen Fließfläche nach Drucker-Prager auftretende Dilatanz zu verhindern, kann die Cap sich aufweiten und verengen. Sobald ein Spannungszustand die seitliche Fließfläche erreicht, also dilatiert, bewegt sich die Cap bis zu diesem Zustand rückwärts. Da sie im Schnittpunkt mit der seitlichen Fließfläche immer horizontal verläuft, ist die Dilatanz damit ausgeschaltet. Dies wird als der große Vorteil dieses Modells geschildert. Die große Zahl von 29 Parametern, die nicht leicht zu bestimmen sind und sich zum Teil aus transzendenten Funktionen ergeben, verhindert zusätzlich eine praktische Anwendung. Eine verbesserte Version (Sandler und Rubin 1979) verringert die Zahl der Parameter, ändert jedoch nichts an den grundsätzlichen Einwänden.

Anstoß für die Entwicklung von Cap Modellen waren zwei Feststellungen, daß die vorher bekannten Modelle und die Realität in wesentlichen Merkmalen nicht übereinstimmen. Einmal wird bei allen elastoplastischen Ansätzen mit kegelförmiger Fließfläche die Dilatanz überschätzt. Zum anderen treten infolge sphärischer Spannungsanteile keine plastischen Verformungen auf. Die Cap Modelle schließen in den meisten derzeit vorliegenden Formulierungen eine Dilatanz zunächst aus. Die plastischen Verformungen infolge sphärischer Spannungsanteile werden dagegen meist recht gut erfaßt.

Die derzeitigen Untersuchungen befassen sich daher bevorzugt mit der Frage, was im Bereich über der Bruchfläche - oder der Critical State Line - , also auf der "trockenen" Seite geschieht. Dieser Bereich hat seinen Namen von der dort auftretenden Dilatanz und der damit dort möglichen Wasseraufnahme. Es existieren Vorschläge, die Cap der Fließfläche dort ebenfalls gelten zu lassen (Abb. 3.3.5), aber auch solche, dort das Mohr-Coulomb Kriterium mit nichtassoziierter Fließregel anzunehmen.

Der Verfasser ist der Meinung, daß eine ausreichende Erfassung der Dilatanz rolliger Böden, ihrer Anisotropie und ihrer kinematischen Verfestigung mit Cap Modellen jedweder Art nicht möglich ist.

## 3.4 Verfestigende Modelle mit seitlichen Fließflächen

Bei den bisher vorgestellten Modellen fand eine Verfestigung nur statt über die Aufweitung einer Cap, die einen unveränderlichen Kegel im Hauptspannungsraum in Richtung der Raumdiagonalen abschließt. Die Cap dient gleichzeitig als ein Gedächtnis für Spannungszustände und als Kriterium, wann Entlastung und wann Erstbelastung stattfindet. Es ist nun aber keineswegs so, daß Verfestigung ausschließlich durch sphärische Beanspruchung stattfinden muß. Ebenso können Schubbeanspruchungen die Grenze zwischen elastischem und elastoplastischem Materialverhalten aufweiten.

Gudehus (1973 a) stellt ein verfestigendes elastoplastisches Modell vor, für das - in der Deviatorebene betrachtet - die Normalitätsbedingung gilt. Die deviatorischen Verformungsanteile - die Gestaltsänderungen - werden mit Hilfe einer assoziierten Fließregel erfaßt. Für die Darstellung der volumetrischen Anteile wird eine Dilatanzfunktion eingeführt. Sie ersetzt die Fläche des plastischen Potentials. In der diesem Ansatz zugrundeliegenden Arbeit von Gudehus (1973 b) werden die dazugehörigen Parameter angegeben. Die Öffnungsweite des Kegels und die Kurvenform in der Deviatorebene (Abb. 3.4.1) hängen von zwei Parametern ab. Beide enthalten die

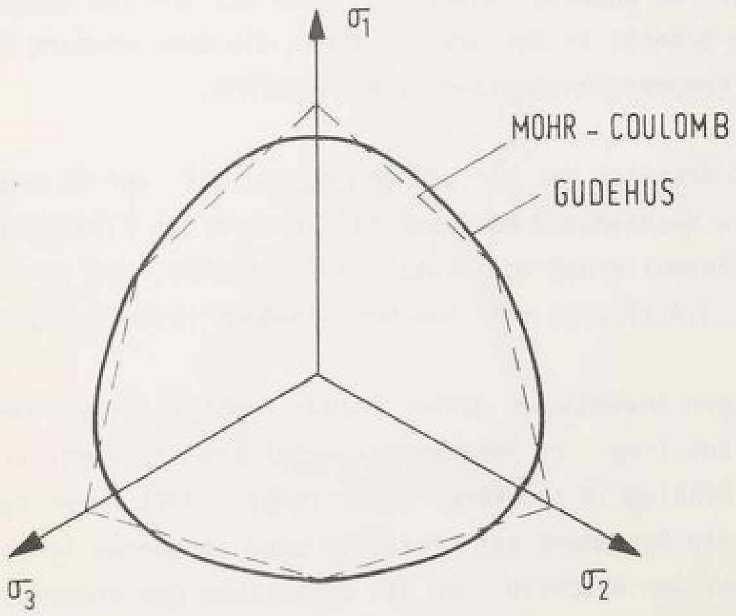



Abb. 3.4.1 Fließfläche von Gudehus, dargestellt in der Deviatorebene

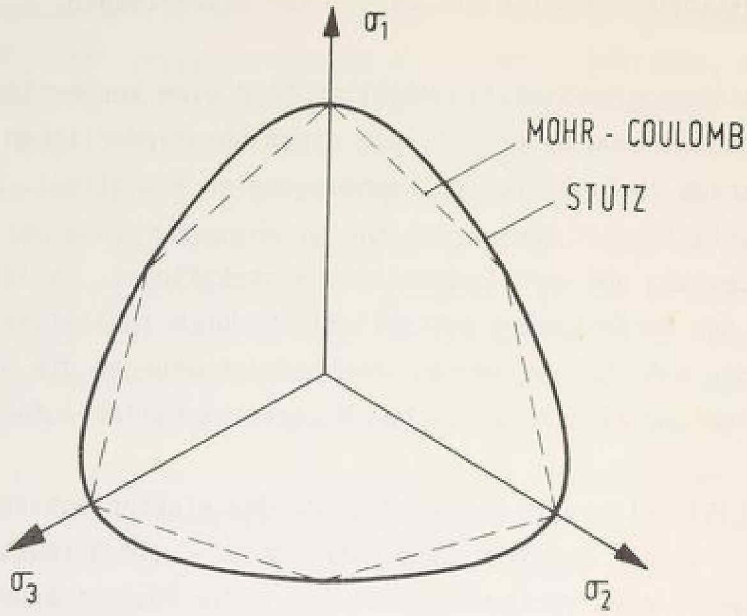



Abb. 3.4.2 Fließfläche von Stutz, dargestellt in der Deviatorebene

Porenzahl e. Da die Porenzahl sich durch Dilatanz verändert, stellen die empirischen Formeln für die beiden Parameter das Verfestigungsgesetz dar. Die Dilatanzfunktion hängt ebenfalls wieder von e ab. Für einen bestimmten Wert von e, die kritische Porenzahl, wird die Dilatanzfunktion zu null. Bemerkenswert an Gudehus' Ansatz ist, daß die von ihm vorgeschlagene Raumfläche beim Schnitt in der Deviatorebene die Mohr-Coulomb Bedingung im triaxialen Kompressionszustand nicht erreicht.

In späteren Arbeiten der Karlsruher Gruppe, z.B. von Meißner und Wibel (1974) sowie Meißner und Mühlhaus (1975) wird die Fließbedingung von Gudehus durch eine Formulierung von Stutz (1972) ersetzt, die in der Deviatorebene (Abb. 3.4.2) sich mehr dem Mohr-Coulomb Kriterium annähert.

Die bisherigen Anwendungen dieser beiden Ansätze liegen vorwiegend auf dem Gebiet des Trag- und Verformungsverhaltens von vertikal und horizontal belasteten Pfählen im trockenen Sand. Zangl (1977) führt Vergleichsrechnungen für ein Fundament auf trockenem Sand im ebenen Verformungszustand durch. Es hat den Anschein, daß die Ermittlung der erforderlichen Parameter sehr aufwendig ist. Bei den vorgestellten Anwendungen wird meist der gleiche Satz von Werten verwendet, der durch direktes "curve-fitting" in eine funktionale Abhängigkeit gebracht wird. Die Folge sind recht unangenehme Darstellungsformen.

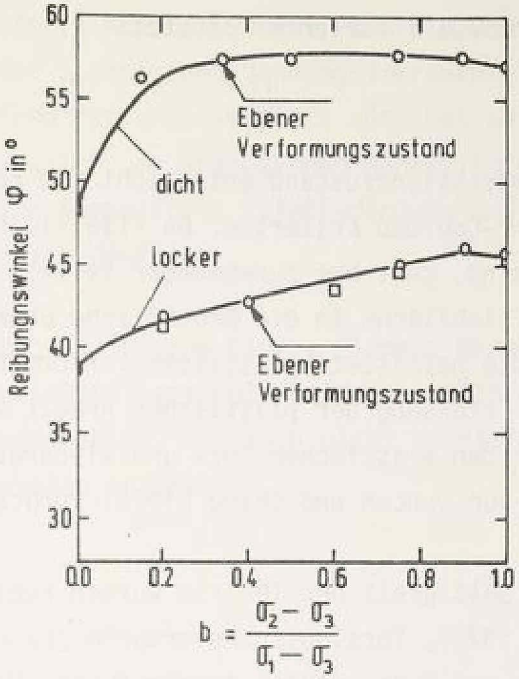



Abb. 3.4.3 Abhängigkeit des Reibungswinkels vom Verformungszustand (nach Lade)

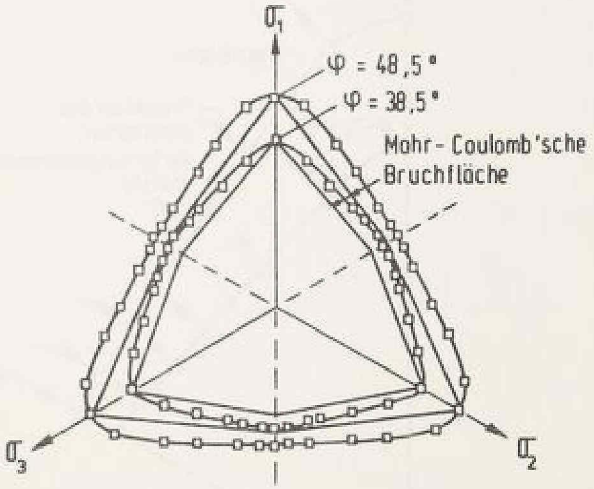



Abb. 3.4.4 Fließfläche nach Lade und Versuchsergebnisse, dargestellt in der Deviatorebene

Lade und Duncan (1975) schlagen ein Stoffgesetz mit nichtassoziierter Fließregel und isotroper Verfestigung vor. Als Fließbedingung wird ein einfacher Quotient aus Invarianten benutzt:

$$f = \frac{I_1^3}{I_3}$$

Im triaxialen Kompressionszustand entspricht die Formulierung als Bruchbedingung dem Mohr-Coulomb Kriterium. Da Fließfläche und Bruchfläche von gleichem Aufbau sind, geht bei zunehmender Verfestigung mit zunehmendem Stresslevel die Fließfläche in die Bruchfläche über. Die isotrope Verfestigung wird durch die geleistete plastische Verformungsarbeit gesteuert. Zur analytischen Erfassung der plastischen Arbeit wird eine Hyperbelfunktion benutzt. Für den elastischen Ent- und Wiederbelastungsmodul wird auf die Formulierung von Duncan und Chang (1970) zurückgegriffen.

Zum Nachweis der Gültigkeit der Theorie wurden kubische Triaxialversuche (Lade und Duncan 1973), Torsionsscherversuche (Lade 1976) sowie Spannungswegversuche (Lade und Duncan 1976) durchgeführt. Die Versuche bestätigen die Aussage von Bishop (1966), daß das Mohr-Coulomb Kriterium im Bereich zwischen ebenem Verformungszustand und triaxialer Extension die Festigkeit

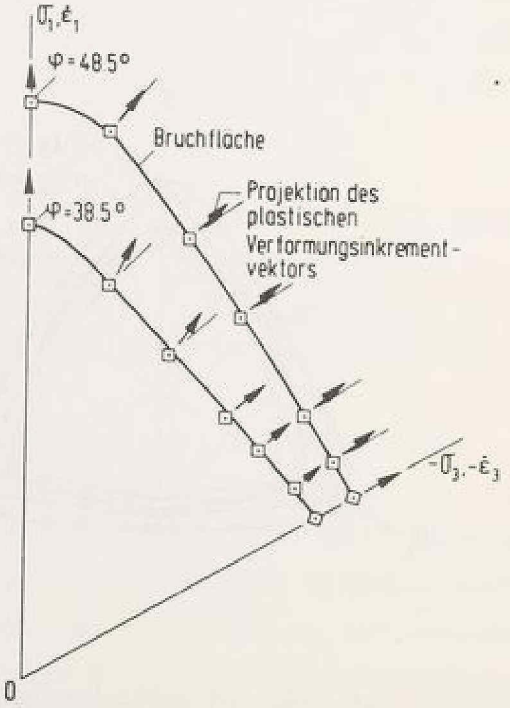



Abb. 3.4.5 Richtung des Dehnungsinkrementvektors in der Deviatorebene

des Bodens je nach Lagerungsdichte erheblich unterschätzt (Abb. 3.4.3 und Abb. 3.4.4). Insbesondere die Messungen von Green und Bishop (1969) werden bestätigt. Lade stellt ebenfalls fest, daß die von Gudehus (1973 a) angenommene Normalität der plastischen Dehnungsinkremente in der Deviatorebene weitgehend zutreffend ist und setzt sie auch bei seinem Ansatz voraus (Abb. 3.4.5). Bezüglich der erzeugenden Mantellinie des Kegels im Raum herrscht jedoch keine Normalität. Fließbedingung und plastisches Potential unterscheiden sich deutlich.

Eine Umsetzung dieser Theorie in eine Finite Element Berechnung wurde bisher nur von Ozawa und Duncan (1976) versucht. Leider enthält die Ableitung der Stoffmatrix schwerwiegende Fehler, die auch nicht korrigiert wurden, so daß sich hier eine Diskussion erübrigt.

## 3.5 Verfestigende Modelle mit allseitiger Fließfläche

Als Erweiterung seiner bereits veröffentlichten Theorie präsentiert Lade (1977) eine weiter ausgebaute Version des elastoplastischen Konzepts. Um plastische Effekte infolge des sphärischen Spannungsanteils zu berücksichtigen, ergänzt er die konische seitliche Fließfläche durch eine Cap, die den elastischen Bereich zur Raumdiagonalen hin abschließt. Als Form für die Cap wählt er eine Kugel mit dem Mittelpunkt auf der Raumdiagonalen. Sie ist ebenfalls in Invarianten formuliert:

$$f = I_1^2 + 2I_2$$

Im Gegensatz zu der zuerst veröffentlichten Theorie hat die seitliche Bruchfläche als Erzeugende keine Geraden, sondern konkav zur Raumdiagonalen gekrümmte Linien (Abb. 3.5.1). Dadurch ist eine einfache Möglichkeit gegeben, einen im Bereich kleiner Spannungen größeren Reibungswinkel darzustellen. Die gewählte Funktion ist etwas nachteilig, wenn die Spannungen sehr groß werden, da sie grundsätzlich immer konkav verläuft. Durch entsprechende Parameterwahl kann wieder ein konstanter Reibungswinkel, also eine gerade Erzeugende der Bruchfläche, dagestellt werden. Als Fließfläche wird die gleiche Funktion angenommen.

Um das Postfailure-Verhalten zu erfassen, hat Lade gegenüber seinem ersten Vorschlag die Funktion für die plastische Arbeit geändert. Verwendete er vorher eine Hyperbel, also eine Funktion mit asymptotischer Zunahme der plastischen Arbeit, so benutzt er jetzt eine Exponentialfunktion. Sie hat einen ausgeprägten Peakpoint und einen anschließenden Abfall der plasti-

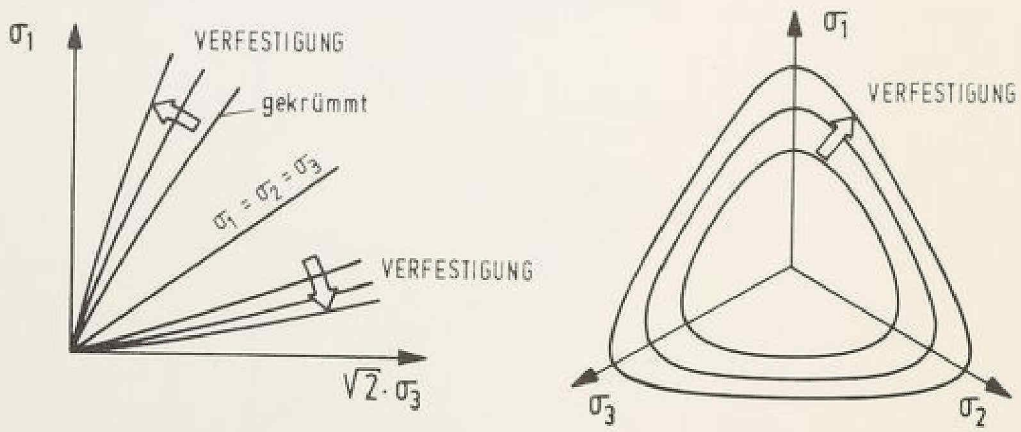



Abb. 3.5.1 Erweiterte Theorie von Lade, dargestellt in Triaxial- und Deviatorebene

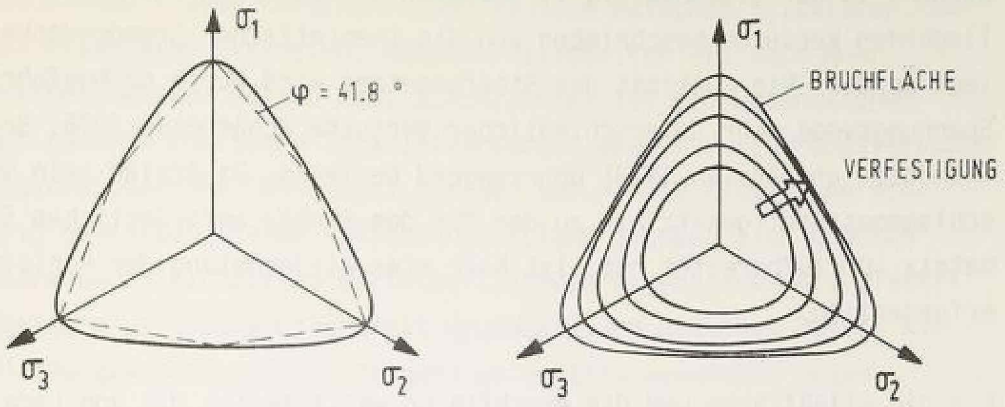



Abb. 3.5.2 Fließfläche nach Vermeer und Aufweitung infolge Verfestigung

schen Arbeit, der einem Abfall der Scherfestigkeit nach dem Bruch entspricht. Für sehr große Werte der plastischen Arbeit geht die Residualscherfestigkeit gegen Null. Finite Element Berechnungen für praktische Probleme des Grundbaus sind mit diesem Ansatz bisher nicht durchgeführt worden. Einfache Plausibilitätskontrollen für gezielt aufgeprägte Spannungswege an einzelnen Elementen führen Aubry und Des Croix (1979) durch.

Vermeer (1978) schlägt ein isotrop verfestigendes Stoffgesetz für Sand mit ebenfalls zwei Fließflächen vor. In der Deviatorebene ähnelt seine von Matsuoka und Nakai (1977) übernommene Bruchbedingung der von Stutz (1972) sowie Zienkiewicz und Pande (1975) vorgeschlagenen (Abb. 3.5.2). Sie orientiert sich - im Gegensatz zu dem Vorschlag von Lade - im triaxialen Kompressions- und Extensionszustand an der Mohr-Coulomb Bedingung, liegt jedoch im ebenen Verformungszustand auch etwas darüber. In Richtung der Raumdiagonalen ist der elastische Bereich durch eine Cap abgeschlossen, die die einfachste Form hat, nämlich eine Ebene senkrecht zur Raumdiagonalen. Zur Darstellung der Fließregel verwendet Vermeer kein plastisches Potential, sondern benutzt Rowe's Stress Dilatancy Concept (Rowe 1971). Anwendung findet sein Modell für eine Berechnung zyklischen Verhaltens eines Offshore-Gründungscaissons (Kenter und Vermeer 1978).

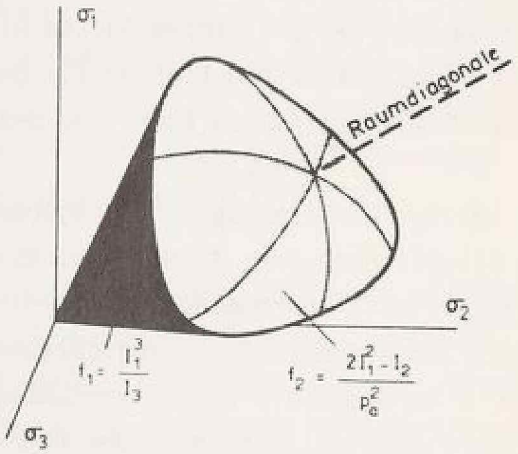
In den letzten Jahren entwickelte Arslan (1980) am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt ein elastoplastisches isotrop verfestigendes Stoffgesetz mit zwei Fließflächen. Da der Verfasser dieses Stoffgesetz als für seine Berechnungen am besten geeignet ansieht, sollen im folgenden die wesentlichen Züge kurz dargestellt

werden. In der gleichzeitig vorgelegten Arbeit von Arslan sind die zugrundeliegenden Versuche beschrieben und die theoretischen Grundgedanken dargelegt worden. Die Qualität des Stoffgesetzes wird durch nachgefahrene Spannungswege sehr unterschiedlicher Versuche (Chambosse 1976; Breth, Chambosse und Arslan 1978) überzeugend bewiesen. Da Arslan sein vorgeschlagenes Stoffgesetz bis zu der für den Einbau erforderlichen Stoffmatrix [D] aufbereitet hat, ist hier eine Wiederholung der Herleitung nicht erforderlich.

Für die Fließfläche und die Bruchfläche wählt Arslan die von Lade und Duncan (1975) vorgeschlagene Kombination von Spannungsinvarianten

$$f_1 = \frac{I_1^3}{I_3}$$

Als wesentlicher Vorteil ist anzusehen, daß damit für den Bereich der



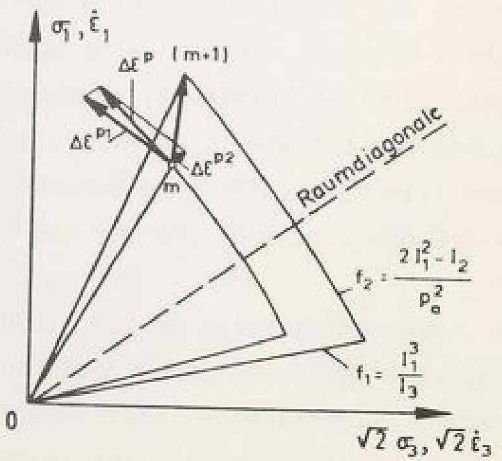




Abb. 3.5.3 Fließflächen des Double-Hardening Modell von Arslan

b-Werte nach Bishop (1966) zwischen 0 und 1, also zwischen triaxialer Kompression und triaxialer Extension, höhere Festigkeiten als nach Mohr-Coulomb ermittelt werden (siehe Abb. 3.4.3). Dies ist ein wesentliches Ergebnis der neueren kubischen Triaxialversuche, ebenen Verformungsversuche und Torsionsscherversuche. Besonders für den bei Finite Element Berechnungen häufig gewählten ebenen Verformungszustand ergeben sich dadurch realistischere und gleichzeitig wirtschaftlichere Ergebnisse. Als plastisches Potential g wird eine Fläche mit grundsätzlich gleichem Aufbau wie die Fließfläche gewählt, jedoch mit geringerem Öffnungswinkel gegenüber der Raumdiagonalen. Daher ist die Fließregel nicht assoziiert. Da es sich um eine sehr einfache Kombination von Invarianten handelt, kann auch leicht der Differentialquotient $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ gebildet werden. Die Ableitungen sind von einfacher mathematischer Form. In Richtung der Raumdiagonalen ist der Konus der seitlichen Fließfläche durch eine Cap mit der Funktion

$$f_2 = \frac{2 I_1^2 - I_2}{p_a^2}$$

abgeschlossen. Durch Einführung des atmosphärischen Luftdrucks $p_a$ ist auch diese Funktion dimensionsunabhängig. Für kontraktant-plastische Volumenänderungen wird eine assoziierte Fließregel angenommen, so daß das plastische Potential g für die Cap gleich der Fließfläche für die Cap ist.

Beide Komponenten der plastischen Verformungen - dilatant-plastische aus seitlicher Fließfläche und kontraktant-plastische aus der Cap - werden durch empirische Arbeitsansätze beschrieben. Für die Anteile aus der Cap wird die plastische Arbeit über eine Hyperbelfunktion dargestellt. Die dilatant-plastischen Verformungen werden über einen Arbeitsansatz beschrieben, der einen Peak aufweist und demnach auch Postfailure-Verhalten ("work-softening"), also Entfestigung erfassen könnte. Da jedoch sowohl von Arslan als auch vom Verfasser es als nicht zulässig angesehen wird, das Entfestigungsverhalten des Bodens in der gewohnten Form kontinuumsmechanisch zu behandeln, wird der Arbeitsansatz nur bis zum Peak benutzt. Es erscheint notwendig, wie bereits in früheren Kapiteln erwähnt, die Versuchsrandbedingungen und den Versuchsablauf bei derartigen Erscheinungen kritisch zu untersuchen. Die Versuche von Vardoulakis (1977) deuten darauf hin, daß es sich hierbei um ein Verzweigungsproblem handelt und daß für Finite Element Berechnungen des Postfailure-Verhaltens noch einige Probleme zu meistern sind (Gudehus 1979).

Für den elastischen Verformungsanteil werden die beiden Parameter E und ν als Potenzfunktionen von erster und zweiter Spannungsinvariante ausgedrückt:

$$E = K_{el} \cdot p_a \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{n_{el}}$$

$$\nu = K_q \cdot \left(\frac{2I_1^2 - I_2}{p_a^2}\right)^{n_q}$$

Hierbei stellen $K_{el}$ und $K_q$ sowie $n_{el}$ und $n_q$ bei doppeltlogarithmischer Auftragung von E und ν den Wert bei $(2I_1^2 - I_2)/p_a^2 = 1$ sowie die Steigung dar. Die elastischen Parameter gelten auch für Entlastungen. Diese werden ausschließlich als nichtlinear-elastisch aufgefaßt. Die bei großen Entlastungen auftretenden plastischen Effekte sind auf kinematische Verfestigung zurückzuführen und können mit dem hier benutzten Modell zur Zeit nicht erfaßt werden. Eine Diskussion zu diesem Punkt findet man bei Arslan (1980). Es ist jedoch abzusehen *), daß das hier benutzte Stoffgesetz in dieser Richtung ergänzt werden kann.

Das Stoffgesetz von Arslan wurde vom Verfasser anderen teilweise ähnlichen Modellen aus folgenden Gründen vorgezogen:

- Es erfaßt die elastischen Verformungsanteile besser als alle anderen Modelle.
- Die von Arslan gewählte Funktion für die Darstellung der plastischen Arbeit erlaubt eine bessere Approximation der Versuchskurven.
- Die Beschreibung der Verfestigung durch Cap und seitliche Fließfläche ermöglicht es, auch komplizierte nichtmonotone Spannungswege zu erfassen.

*) U. Arslan, mündliche Mitteilung

## 4. Wege zur Berechnung mit elastoplastischen Stoffmodellen

Die Leistungsfähigkeit der Finite Element Methode bedingt zwangsläufig eine Komplexität in der Durchführung der Berechnung, die zunächst für den ungeübten Anwender eher abschreckend wirkt. Schon frühzeitig sind daher Programmsysteme entstanden, die Leistungen bündeln und in benutzerfreundlicher Form präsentieren. Hierzu zählen Entwicklungen wie NASTRAN, ASKA, ANSYS, MARC, STRUDL, SAP und NONSAP oder ADINA. Bezeichnenderweise sind viele dieser Universalprogramme für den Flugzeugbau entwickelt worden und haben anschließend vor allem im Maschinenbau Anwendung gefunden bei statischen und dynamischen Problemen; in Sparten also, wo hohe Produktionsserien aufwendige analytische und numerische Untersuchungen rechtfertigen. Die Anwendung der Finite Element Methode im Bauwesen kam erst spät und hat sich bis heute nur auf sehr wenigen Teilgebieten durchgesetzt. Ein gewichtiger Hinderungsgrund sind die zur Zeit (1980) immer noch relativ hohen Kosten, die jedoch bereits durch die extreme Verbilligung der Hardware gesunken sind und dadurch eine Berechnung auch bei Einzelbauwerken möglich werden lassen. In der Vergangenheit wurde die Methode trotz hoher Kosten angewendet, wenn ein hohes Sicherheitsniveau gefordert wurde bei gleichzeitig komplexer Problematik. Die Fragestellungen sind oft derart, daß eine Beantwortung mit anderen Methoden unmöglich ist. Der oftmals unvertretbar hohe Aufwand für die Erstellung der Eingabedaten und die Darstellung der Ergebnisse war Hauptursache für die hohen Kosten. Er kann durch entsprechende Automatisierung, z. B. Czapla (1979), als inzwischen nicht mehr vorhanden angesehen werden.

Im Grundbau liegen die ersten Anwendungen erst in den sechziger Jahren. Brown und King (1966) sowie Clough und Woodward (1967) untersuchen erstmals ein spezifisches Grundbauproblem, nämlich die Schüttung eines Dammes. Sie weisen gleich darauf hin, daß der Simulation des Bauablaufs entscheidende Bedeutung zukommt. Malina (1969), als erster in Deutschland, entwickelt ein für die damalige Zeit fortschrittliches Programm und untersucht Streifenfundamente auf Sand und geklüftetem Fels.

Von den USA und England ausgehend setzt ab 1970 eine forcierte Entwicklung der Finite Element Methode in Grundbau und Bodenmechanik ein. An der Technischen Hochschule Darmstadt entstehen am Institut für Bodenmechanik und Grundbau die Arbeiten von Stroh (1974), Amann (1975) und Hardt (1976).

Bei ihnen wurde, um kein neues Finite Element Programm entwickeln zu müssen, auf das damals am Anfang seiner Entwicklung stehende Finite Element Programmsystem STATAN, eine Entwicklung des Fachgebiets Maschinenelemente und Getriebe der TH Darmstadt (Duda 1971) zurückgegriffen. Dieses Programm wurde gezielt für die jeweilige grundbautechnische Fragestellung - verankerte Wand, Setzungen, Dämme - modifiziert. Damit waren, von der Entwicklung von STATAN abzweigend, drei Insellösungen für den Grundbau entstanden.

## 4.1 Erforderliche Programmkonzeption

Zu Beginn seiner Tätigkeit erhielt der Verfasser den Auftrag, im Rahmen einer sich bildenden Arbeitsgruppe gemeinsam ein Konzept zu entwickeln, wie unterschiedliche Grundbauaufgaben mit einem einzigen Programmsystem wissenschaftlich und baupraktisch bearbeitet werden können. Es sollte also nicht die "amerikanische Lösung" verfolgt werden, bei der aus teilweise bestehenden Moduln für eine neue Fragestellung ein neues Programm zusammengebaut und getestet werden muß. Vielmehr war an ein Universalprogramm für den Grundbau gedacht, das es auch einem nur wenig geübten Benutzer erlaubt, schon nach kurzer Einarbeitung baupraktische Fragestellungen zu bearbeiten.

Die vier Mitarbeiter der Arbeitsgruppe *) einigten sich auf ein Modell, das auf einer frühen Version von STATAN aufbauend die Leistungen der bisherigen getrennten Programme von Stroh (1974), Amann (1975) und Hardt (1976) enthält und erweitert und für jede Entwicklung nach oben offen ist. So entstand das Finite Element Programmsystem STATAN-15 Version Bodenmechanik in seiner heutigen Form. Im Rahmen dieser Konzeption wird angestrebt, alle Programmleistungen für alle Elementtypen und alle Stoffmodelle zur Verfügung zu stellen. Um ein jederzeit auf baupraktische Probleme anwendbares Programm zur Verfügung zu haben, an dem gleichzeitig vier Autoren Weiterentwicklung betreiben, ist eine konsequente innere Strukturierung erforderlich. Nur so ist es möglich, Weiterentwicklungen und Verbesserungen

---

*) Der Arbeitsgruppe gehörten an:

| | |
|---|---|
| H. Czapla | von August 1973 bis März 1979 |
| H. Rückel | von Oktober 1974 bis Mai 1979 |
| R. Wanninger | seit Oktober 1974 |
| R. Katzenbach | seit Februar 1976 |

durch einen Autor schon nach kurzer Zeit den Mitautoren und wenig später allen Benutzern anbieten zu können. Aufgrund der Organisationsstruktur von STATAN-15 ist eine Entkopplung der Probleme bei der Weiterentwicklung der Finite Element Methode im Grundbau möglich geworden. Es lassen sich folgende Problemgruppen mit teilweise unterschiedlichen Bearbeitern feststellen:

- Elementimplementierung
- Strukturhandling
- Simulationstechniken
- Stoffgesetze
- Programmorganisation
- anlagenspezifische Implementierungsprobleme

Es ist selbstverständlich, daß bedingt durch die Gruppenarbeit weitreichende Überschneidungen der Tätigkeitsbereiche und komplexe Verzahnungen auftreten können.

Die durch die Arbeitsorganisation bedingte Einteilung muß nicht identisch sein mit der hardwarebedingten Programmorganisation, die durch beschränkte Rechnerresourcen erforderlich wird. Es ist jedoch erfreulich und für die praktische Arbeit vorteilhaft, wenn Programmsegmentierung und Overlaystrukturen mit den sonstigen organisatorischen Unterteilungen, wie in diesem Fall, zusammentreffen, weil sich erst dann Organisationsschemata konsequent einhalten lassen.

Für die Aufgabenstellung des Verfassers hat die Problemgruppe "Stoffgesetze" herausragende Bedeutung. Im Rahmen der Arbeitsteilung in der Gruppe war es zunächst erforderlich, für alle Phasen der Finite Element Berechnung, in denen unmittelbar mit Spannungsdehnungsbeziehungen gearbeitet wird, eine organisatorische Trennung vorzunehmen. Ziel sollte sein, bei Vorliegen aller Informationen über eine neue Stoffmodellformulierung die Implementierung in kürzester Zeit vornehmen zu können. Der Grundgedanke war, daß mit nur einem Stoffmodell keine baupraktische Anwendung möglich ist. Es soll hier keine Position verfochten werden in der mehr philosophischen

Diskussion, ob es möglich ist, ein umfassendes Stoffgesetz für alle Bodenarten zu formulieren, die Parameter dafür mit erträglichem Aufwand zu ermitteln und anschließend eine Grundbauaufgabe in kurzer Zeit zu berechnen. Vielmehr erschien es zunächst zweckmäßig, eine Palette von sehr einfachen Stoffmodellen zur unmittelbaren Verwendung für einfache Berechnungs- und Vergleichsaufgaben anzubieten. Hierzu gehören auch elastische und elastisch-plastische isotrope und transversal-isotrope Ansätze.

Man kann durchaus den Standpunkt vertreten, daß sich bestimmte versuchsmäßig ermittelte Spannungsdehnungsbeziehungen nicht von jedem Stoffmodell gleich gut approximieren lassen. Dies wird auch in absehbarer Zukunft der Fall sein, solange die benutzten Stoffmodelle die in der Natur auftretenden Effekte gar nicht, nur teilweise oder unzulänglich beschreiben. Ein leistungsfähiges Finite Element Programmsystem wie STATAN-15 stellt mehrere Stoffmodelle alternativ zur Verfügung und ermöglicht es, bei Bedarf weitere mit geringem Aufwand implementieren zu können. Voraussetzung ist, daß das Stoffmodell in inkrementeller Form vorliegt. Das ist meistens der Fall.

Zur Zeit sind folgende Stoffmodelle implementiert:
Als elastische Modelle

1. isotrop linear-elastisch und bilinear
2. isotrop nichtlinear-elastisch (Duncan und Chang 1970)
3. transversal-isotrop linear-elastisch und bilinear
4. transversal-isotrop nichtlinear-elastisch (analog zu 2)

und als elastoplastische Modelle

5. elastisch-idealplastisch (Drucker und Prager 1952)
6. elastoplastisch verfestigend (Lade und Duncan 1975)
7. elastoplastisch verfestigend "double-hardening" (Arslan 1980).

Die Stoffmodelle 1, 3, 4 und 5 wurden vom Verfasser implementiert, um einfache Vergleichsmöglichkeiten bei seinen Berechnungen zu haben.

Vor allem Modell 4 wurde bei der Berechnung verankerter Baugrubenwände zu Vergleichen herangezogen. Modell 5 stellt den einfachsten elastoplastischen Ansatz dar, der für nichtbindige Böden angewendet werden kann, ist jedoch häufig 3 und 4 unterlegen. Die beim Umgang mit Modell 6 gewonnenen Erfahrungen führten zur Entwicklung von Modell 7, das der Verfasser wegen der bereits diskutierten Merkmale für die in Kapitel 6 und 7 behandelten Beispiele als das geeignete ansieht.

Zur Organisationsstruktur, Leistungsfähigkeit und Handhabung sei auf das STATAN-15 Manual sowie für die graphische Auswertung auf das PLOSYS-Manual (Czapla, Katzenbach, Rückel und Wanninger 1978) verwiesen. Näheres zu den verwendeten Elementtypen ist den einschlägigen Lehrbüchern zur Finite Element Methode (Zienkiewicz 1971 und 1977, Desai und Abel 1972, Cook 1974, Huebner 1975, Gallagher 1976 u.v.a.) zu entnehmen. Angaben zu dem implementierten Reibungs- und Kluftelement, ein dazugehöriges Stoffgesetz sowie die Ermittlung der dazugehörigen Parameter finden sich bei Czapla (1979).

Detaillierte Informationen zur Anwendung der Finite Element Methode im Grundbau unter den verschiedenen Aspekten finden sich in den von Gudehus (1977) und Desai/Christian (1977) herausgegebenen Sammelwerken, die ein Kompendium von Zeitschriften- und Vortragsveröffentlichungen diverser Autoren darstellen. Den jeweiligen Stand der Entwicklung spiegeln die Konferenzen in Vicksburg (Ed. Desai 1972), Blacksburg (Ed. Desai 1976) und Aachen (Ed. Wittke 1979) wider. In ihnen werden nahezu alle derzeitigen Anwendungen diskutiert. Speziell mit nichtlinearen Berechnungen befaßt sich Oden (1972).

## 4.2 Inkrementelle und iterative Lösungsmöglichkeiten

Als Verfahren der Elastostatik ist die Finite Element Methode bei linearen Problemen besonders leistungsfähig. Ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Systems einmal aufgestellt - worin ein erheblicher Teil des Rechenaufwands besteht - so lassen sich beliebig viele Lastfälle für das gleiche System mit geringem Aufwand durchrechnen und die Spannungen und Verformungen ermitteln. Fragestellungen bei linear-elastischem Materialverhalten lassen sich daher besonders schnell und wirtschaftlich beantworten. Wesentliche Weiterentwicklungen der Finite Element Methode, zum Beispiel genauere Elementtypen, sind durchgeführt worden unter der Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens. Genauigkeitsuntersuchungen (Duda 1975), wie sie auch von Seiten der Mechanik häufig angestellt werden, setzen oft eine Vergleichsmöglichkeit mit "exakten" geschlossenen Lösungen voraus, die meist wiederum auf der Elastizitätstheorie beruhen. Es ist jedoch bekannt, daß sich nahezu alle Materialien zumindest von einem bestimmten Spannungsniveau an nicht mehr linear-elastisch verhalten. Das gilt für alle Baustoffe, insbesondere für Boden und Fels. Gerade im Grundbau wurde die Notwendigkeit, das nichtlineare Verhalten zu erfassen, um realistische Ergebnisse zu erhalten, schon früh erkannt und eine entsprechende Entwicklung eingeleitet (siehe Kapitel 2 und 3). Mit der Entwicklung von Stoffmodellen ging die Entwicklung von Rechentechniken einher, die es erlaubt, mit der Finite Element Methode nichtlineares Verhalten zu erfassen. Da die Stoffmodelle in der inkrementellen Form

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \cdot \{\Delta\epsilon\}$$

vorliegen, wobei [D] die Stoffmatrix darstellt, die vom Spannungszustand abhängig ist, also

$$[D] = [D(\sigma)]$$

kann mit der inkrementweise gültigen Stoffmatrix die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufgebaut und das System für dieses Lastinkrement berechnet werden. Der Berechnungsablauf besteht darin, die Belastung in Lastschritte (Inkremente) zu unterteilen und die errechneten Verformungen und Spannungen eines jeden Inkrements anschließend zu superponieren. Die Berechnung eines nichtlinearen Problems ist also durch bereichsweise Linearisierung auf die Berechnung sukzessiver linearer Probleme zurückgeführt worden. Abb. 4.2.1 zeigt schematisch das Ergebnis dieser Vorgehensweise. Bereits hier wird ersichtlich, daß die Lösung eines Problems mit nichtlinearem

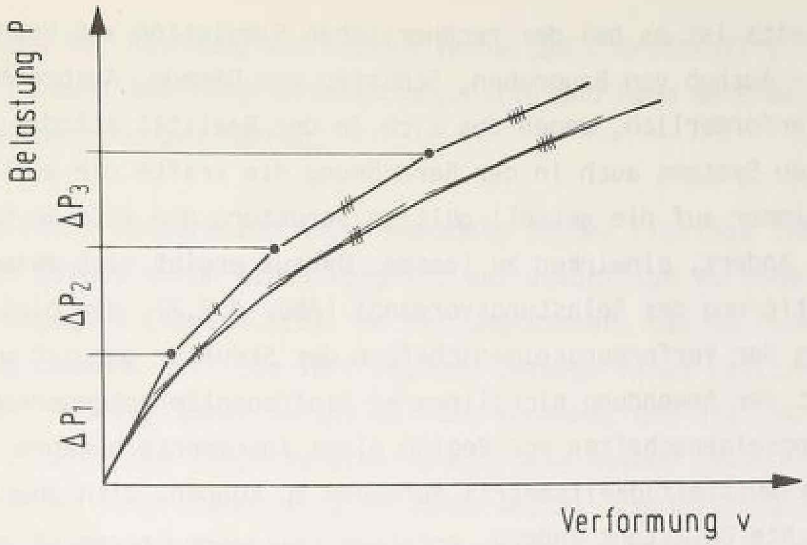



Abb. 4.2.1 Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens durch bereichsweise Linearisierung

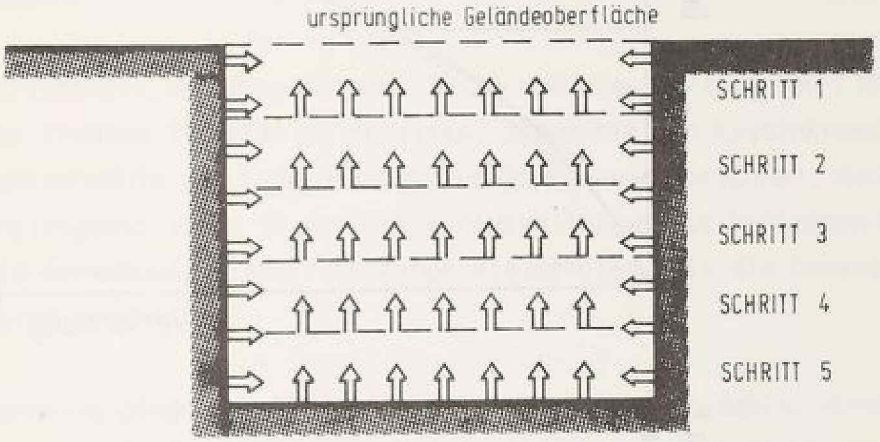



Abb. 4.2.2 Inkrementierung eines Belastungsvorgangs bei gleichzeitiger Änderung des statischen Systems am Beispiel eines Baugrubenaushubs

Stoffmodell gegenüber einer elastischen Berechnung einen erheblichen organisatorischen und kostenmäßigen Mehraufwand bedeutet, da für jedes Inkrement die Gesamtsteifigkeitsmatrix neu aufgebaut und das Gleichungssystem neu gelöst werden muß. Alle Vorteile der Elastostatik wie zum Beispiel die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes sowie die sehr wirtschaftliche Berechnung eines mehrspaltigen Lastvektors aus mehreren Lastfällen gleichzeitig gehen verloren.

Andererseits ist es bei der rechnerischen Simulation von Grundbaumaßnahmen - Aushub von Baugruben, Schütten von Dämmen, Ausbruch von Tunneln usw. - erforderlich, wegen des sich in der Realität ständig ändernden statischen Systems auch in der Berechnung die Kräfte nie auf das Endsystem, sondern immer auf die aktuell gültige Struktur, die sich im Laufe der Baumaßnahme ändert, einwirken zu lassen. Daraus ergibt sich zwangsläufig eine Inkrementierung des Belastungsvorgangs (Abb. 4.2.2), die gleichzeitig zur Anpassung der Verformungseigenschaften der Struktur genutzt werden kann und somit der Anwendung nichtlinearer Stoffmodelle entgegenkommt. Da die Verformungseigenschaften vor Beginn eines Inkrements bekannt sein müssen, um die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufbauen zu können, sich aber durch die aufgebrachte Belastung ändern, entsteht bei jedem Inkrement zwangsläufig

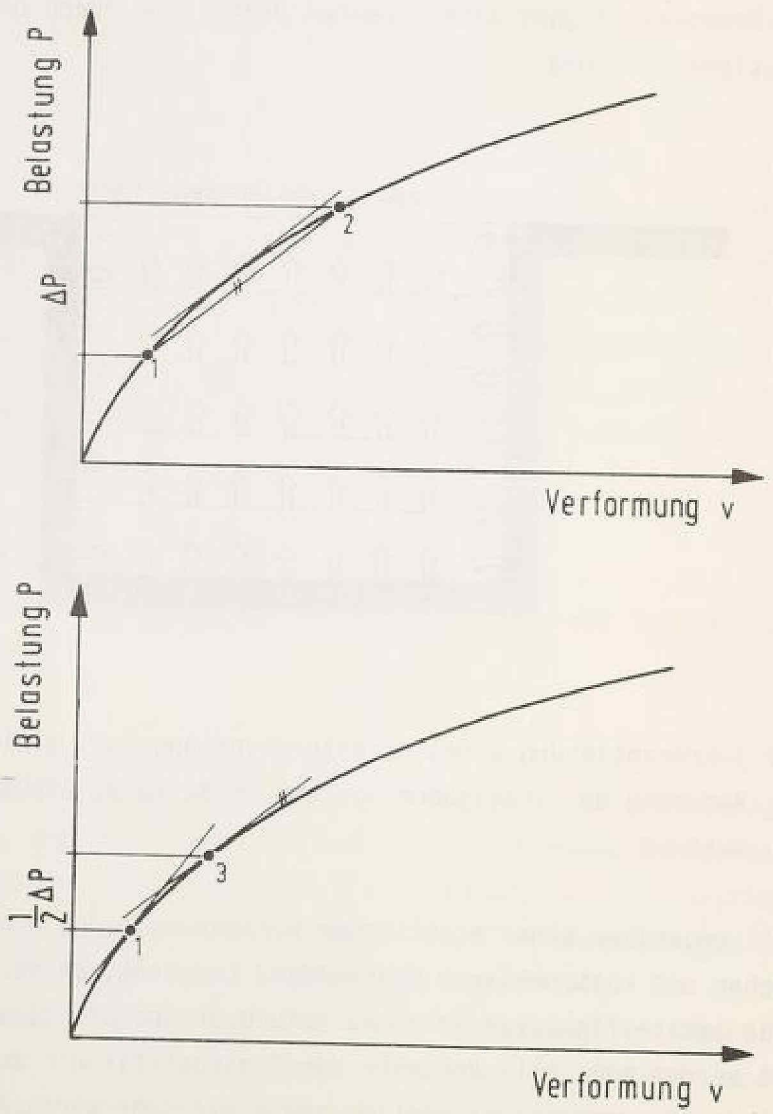



Abb. 4.2.3 Mid-Point Integration Rule nach Felippa

eine Abweichung der Rechnung vom wahren Verhalten ("drift-off"). Die Fehlerfortpflanzung ist ausgesprochen ungünstig und kann am Ende zu beträchtlichen Abweichungen führen.

Das als "Mid-Point Integration Rule" bekannte Schema (Felippa 1966) versucht, diesem Effekt durch einen Vorgriff auf zukünftige Verformungseigenschaften zu begegnen (Abb. 4.2.3). Es sei angenommen, daß im Punkt 1 die exakte Lösung bekannt ist. Die Verformungen infolge eines Lastinkrements $\Delta P$ seien gesucht. Das Verfahren beruht auf der Annahme, daß die Sekantensteifigkeit 1 - 2 durch die Tangentensteifigkeit beim halben Lastinkrement gut angenähert werden kann. Daher wird in einem ersten Schritt zunächst nur das halbe Lastinkrement aufgebracht, wobei als Steifigkeit die Tangentensteifigkeit in Punkt 1 benutzt wird. Anschließend wird die Tangentensteifigkeit im Punkt 3 ermittelt, also beim halben Lastinkrement. Diese Steifigkeit wird dann benutzt, um das volle Lastinkrement $\Delta P$ aufzubringen. Jedes Lastinkrement erfordert daher zweimaliges Aufbauen und Lösen des linearen Gleichungssystems.

Eisenstein, Krishnayya und Morgenstern (1972) und ebenso Palmerton (1972) versuchen, das Problem iterativ zu erfassen, indem sie ein Lastinkrement mit den Tangentenmoduln vom Ende des letzten Inkrements berechnen, dann die Verformungseigenschaften in der Mitte dieses Inkrements bestimmen und mit diesen die Berechnung iterativ solange wiederholen, bis die Genauigkeit ausreichend erscheint.

Verständlicherweise gingen die Bemühungen früherer Autoren dahin, durch geschickte Wahl der Verformungseigenschaften diesen grundsätzlichen Mangel zu minimieren, ohne das gleiche Lastinkrement mehrfach berechnen zu müssen. So wird gerne mit gemittelten und extrapolierten Werten zwischen aktuellem Spannungszustand und dem nach Aufbringen eines neuen Inkrements erwarteten gearbeitet, eine Technik, die keineswegs als besonders sicher bezeichnet werden kann, da sie beim Festlegen der elementweise unterschiedlichen Verformungseigenschaften zur Berechnung eines neuen Inkrements die Kenntnis der erst noch zu berechnenden Spannungen bereits voraussetzt (Desai 1972, Stroh 1974).

Stattdessen wird hier vorgeschlagen, auch bei einfachen Stoffmodellen nicht zu große Belastungsinkremente zu wählen, dafür aber auch bei monotoner Belastung auf Extrapolation von Parametern oder Mid-Point Integration

gänzlich zu verzichten.Es ist eine Ersparnis an Rechenzeit ohne wesentlichen Verlust an Genauigkeit zu erreichen. Dem Verfasser erscheint es sinnvoller, die gesparte Rechenzeit für eine weitere Berechnung mit variierten Eingabewerten zu verwenden.

Erheblicher Mehraufwand tritt bei nichtmonotoner Belastung auf; eine Belastungsart, wie sie bei Finite Element Berechnungen im Grundbau durch Simulation von Bauvorgängen (Stroh 1974, Wanninger und Breth 1978) häufig vorkommt. Ist die Entlastung vorhersehbar, können durch Zwischenschalten einer tastenden Vorberechnung der zukünftige Spannungsweg beim nächsten Inkrement festgestellt und die entsprechenden Stoffparameter für diesen Spannungsweg (Erst-, Ent- oder Wiederbelastung) herangezogen werden. Der Rechenaufwand für die Vorberechnung ist der gleiche wie für ein normales Belastungsinkrement. In den meisten Fällen jedoch ist nicht vorhersehbar, ob wesentliche Strukturteile be- oder entlastet werden. Gänzlich unmöglich ist es, dies für einzelne Elemente vorherzusehen, da diese in ihrem Spannungsweg durchaus zwischen Erst- und Ent-/Wiederbelastung schwanken können. Fehler infolge der für den Spannungsweg unzutreffend gewählten Parameter sind unvermeidlich und zudem in ihrer Größe nicht erkennbar. Eine gewissenhafte Simulation eines nichtmonotonen Belastungsvorgangs wird daher durch den großen Anteil an einzuschaltenden Tastrechnungen aufwendig.

Da die Belastungsinkremente endliche Größe haben, also nicht infinitesimal klein sind, wie eigentlich vorausgesetzt, treten bei einfachen Stoffmodellen bei Überschreitung von Bruchgrenzen oder zulässigen Zugspannungen endliche Fehler und damit statisch nicht zulässige Spannungszustände auf (Abb. 4.2.4). Die Überschreitung solcher Grenzen wird erst nach vollzogener Spannungsänderung erkannt und als einfachste Vorgehensweise bei folgenden Inkrementen durch herabgesetzte Steifigkeitsparameter (Eigenschaften für Bruchverhalten) berücksichtigt. Der einmal entstandene Fehler bleibt jedoch in der Spannungs- und Verschiebungsgeschichte erhalten. Schwerwiegender noch für den weiteren Verlauf der Berechnung ist, daß gerade wegen der verminderten Steifigkeiten der betroffenen Elemente sich etwa folgende dem ursprünglichen Spannungsweg entgegengerichtete Spannungswege dem Element nicht mehr mitteilen. Wegen der bewußt stark verminderten Steifigkeit folgen auch aus großen Verzerrungen nur noch sehr geringe Spannungsänderungen. Bodenbereiche, die einmal den Bruchzustand erreicht haben, können auch bei entgegengerichteten Spannungsänderungen diesen

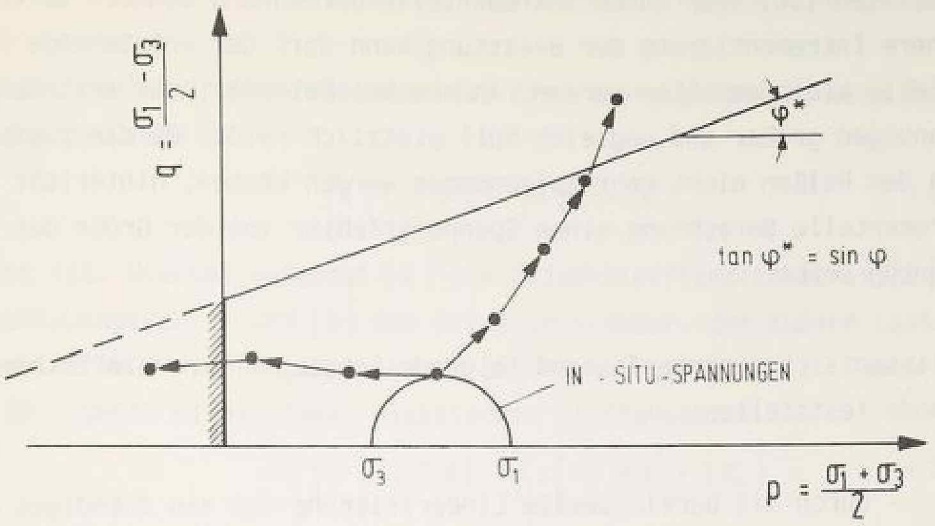



Abb. 4.2.4 Möglichkeiten der Überschreitung von Grenzbedingungen bei inkrementellen Berechnungen

entgegen aller Versuchserfahrung meist nicht mehr verlassen. Bauvorgänge, die nicht nur einzelne Elemente, sondern ganze Bodenbereiche bis zum plastischen Grenzzustand beanspruchen, bilden bei diesen sehr einfachen idealelastisch-idealplastischen Stoffmodellen die Grenze der Berechnungsmöglichkeiten. Ist zum Beispiel bei tiefen Baugruben die Sohle nach dem Aushub rechnerisch im Bruchzustand, kann die anschließende Belastung nicht mehr nachvollzogen werden (Breth, Stroh und Wanninger 1976).

Entfestigendes Materialverhalten führt die inkrementelle Berechnungsmethode vollends an die Grenzen ihrer Möglichkeiten. Der Abfall der Scherfestigkeit nach Erreichen des Peakpoint kann nicht mehr ausschließlich inkrementell in den Berechnungen weiterverfolgt werden. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß gegen vereinfachte Berechnungen des Postfailure-Verhaltens erhebliche versuchsmäßig begründete Einwände bestehen (siehe hierzu auch Kapitel 3.5).

Materialien, die in der Lage sind, zwar hohen Druck, jedoch nur geringe Zugspannungen aufnehmen zu können - Beton, Fels, Boden - , entziehen sich der rein inkrementellen Berechnung völlig, wenn Spannungen über die Zuggrenze hinaus auftreten. Im Fall eines Zugrisses werden Spannungen frei, die bei gleichbleibender Belastung von anderen Strukturteilen aufgenommen, also umgelagert werden müssen. Dieser Fall unterscheidet sich grundlegend von dem in Abb. 4.2.4 dargestellten Beispiel, bei dem keine Zugspannung

zugelassen ist, aber durch inkrementelle Berechnung dennoch auftritt. Durch feinere Inkrementierung der Belastung kann dort der entstehende Fehler beliebig klein gehalten werden. Anders bei Material, das erst bei Zugspannungen größer und ungleich Null plötzlich reißt. Da die Zugspannungen nach dem Reißen nicht mehr aufgenommen werden können, hinterläßt die inkrementelle Berechnung einen Spannungsfehler von der Größe der Zugspannung selbst.

Es lassen sich zusammenfassend folgende Schwächen der rein inkrementellen Methode feststellen:

- Durch die bereichsweise Linearisierung ist ein ständiges Abdriften von der zugrundegelegten Spannungsdehnungsbeziehung unvermeidlich. Extrapolierende Techniken sind tückisch und in ihren Wirkungen auch für den erfahrenen Benutzer nicht immer vorhersehbar.

- Entlastungen sind nur durch aufwendige Tastschritte und auch dann nur bedingt zu erkennen.

- Durch Überschreitung von Bruchbedingungen entstandene inkrementelle Fehler bleiben erhalten und können Weiterbelastungen auch auf völlig anderen Spannungswegen unmöglich machen.

- Entfestigendes Materialverhalten kann selbst bei einfachstem Stoffmodell nicht behandelt werden.

Diese physikalischen Sachverhalte, die unabhängig von der sonstigen Komplexität eines Stoffmodells auftreten, gaben den wesentlichen historischen Anstoß zur Entwicklung eines Umlagerungsverfahrens, das es erlaubt, unzulässige errechnete Spannungszustände in Elementen iterativ zu beseitigen und auf benachbarte Elemente zu transferieren. Zienkiewicz, Valliappan und King (1968) stellen erstmals ein "stress transfer" Verfahren vor und führen damit mehrere Finite Element Berechnungen durch, bei denen sie Fels als "no-tension" Material behandeln, dessen zunächst in einer elastischen Rechnung ermittelte Zugspannungen iterativ umgelagert werden.

Wegen der grundsätzlichen Bedeutung der iterativen Verfahren für alle nichtlinearen Berechnungen ist hier ein kurzer Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten angebracht.

Zienkiewicz (1971) stellt den Grundgedanken in knapper Form wie folgt dar:

Bei linear elastischen Problemen ist die Lösung gefunden, wenn das Gleichungssystem

$$[K] \cdot \{\delta\} - \{R\} = 0 \qquad (1)$$

gelöst ist. Hierbei bedeutet $[K]$ die Gesamtsteifigkeitsmatrix, $\{\delta\}$ den Verschiebungsvektor und $\{R\}$ den Belastungsvektor, der äußere Lasten sowie Kräfte aus Anfangsspannungen und -dehnungen enthält. Dabei wird die Gültigkeit eines linear elastischen Stoffansatzes

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\right) + \{\sigma_0\} \qquad (2)$$

angenommen mit $\{\sigma\}$ und $\{\varepsilon\}$ als den Spannungen und Dehnungen, $\{\sigma_0\}$ und $\{\varepsilon_0\}$ als Anfangsspannungen bzw. -dehnungen und der Stoffmatrix $[D]$. Bei nichtlinearen Stoffmodellen muß (2) ergänzt werden durch eine neue Beziehung der allgemeinen Form

$$f\left(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}\right) = 0 \qquad (3)$$

Wenn eine Lösung von (1) dadurch gefunden werden kann, daß in (2) einer oder mehrere der Parameter $[D]$, $\{\varepsilon_0\}$ oder $\{\sigma_0\}$ so variiert werden können, daß (2) und das Stoffmodell (3) gleiche Spannungen und Dehnungen liefern, ist das Gesamtproblem gelöst. Eine iterative Vorgehensweise ist offensichtlich erforderlich. Welcher der drei Parameter im Iterationsprozeß variiert wird, hängt ab

a) von der Lösungsmethode des äquivalenten elastischen Problems;

b) von der Art des Stoffgesetzes.

Wenn die Iteration durchgeführt wird durch ständige Anpassung der Matrix $[D]$, arbeiten wir mit der Methode der variablen Steifigkeit. Wenn $\{\varepsilon_0\}$ oder $\{\sigma_0\}$ verändert werden, sprechen wir von der Anfangsdehnungs- bzw. Anfangsspannungsmethode.

Soweit die sehr prägnante Darstellung von Zienkiewicz (1971).

Die Methode der variablen Steifigkeit ("variable stiffness" nach Zienkiewicz (1971); "iterative method" nach Desai und Abel (1972); "direct iteration solution" nach Cook (1973) ) stellt ein einfach zu organisierendes Verfahren zur Lösung nichtlinearen Verhaltens dar. Abb. 4.2.5 zeigt an einem einfachen eindimensionalen Fall *) die grundsätzliche Vorgehensweise.

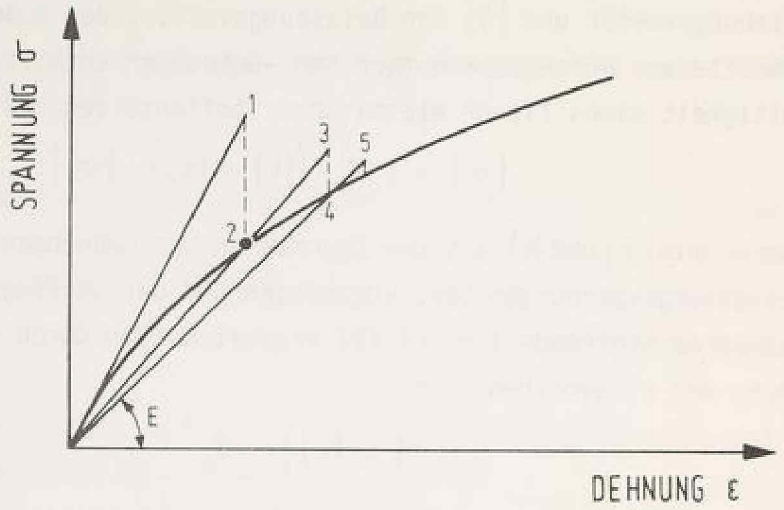



Abb. 4.2.5 Methode der variablen Steifigkeit

Die Belastung - entweder die Gesamtlast oder bei Gültigkeit eines inkrementellen Stoffmodells ein Lastinkrement - wird auf ein elastisches Kontinuum aufgebracht. Aufgrund der errechneten Spannungen und Dehnungen (Punkt 1) wird elementweise der Elastizitätsmodul so reduziert, daß bei gleichem Dehnungszustand sich die korrekte Spannung oder auch bei gleichem Spannungszustand sich die korrekte Dehnung (nicht dargestellt) am Element oder Integrationspunkt ergibt (Punkt 2). Anschließend wird die Belastung mit den element- bzw. integrationspunktweise unterschiedlich reduzierten Elastizitätsmoduli wieder aufgebracht (Punkt 3) und E wieder reduziert. Der Vorgang wird solange wiederholt, bis Spannungen und Verformungen konvergieren. Die nichtlineare Spannungsdehnungsbeziehung wird also nur dazu benutzt, einen pseudo-elastischen Sekantenmodul für jeden Iterationsschritt zu ermitteln. Eine getrennte Behandlung von elastischen und plastischen Anteilen entsprechend der Plastizitätstheorie ist nicht möglich. Elastizität im

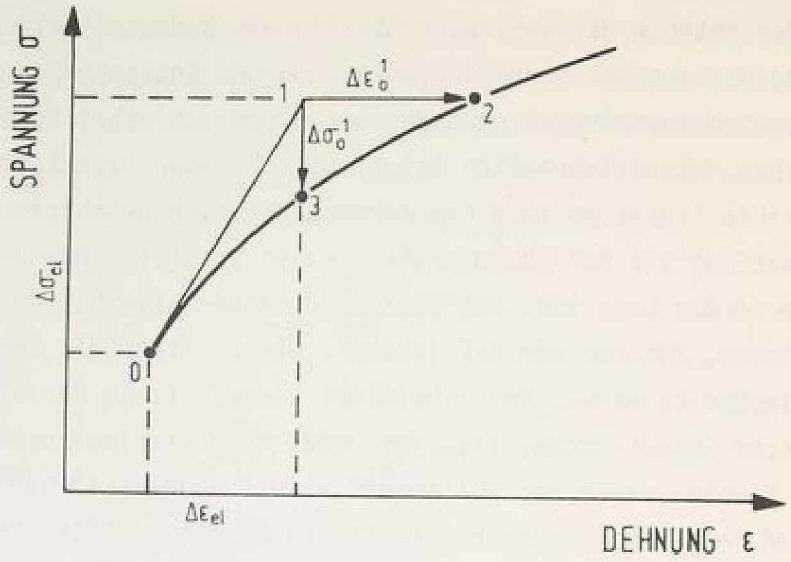
---

*) Alle anderen Verfahren werden als Prinzipskizze einfachheitshalber ebenfalls am eindimensionalen Fall gezeigt.

Sinne der Methode der variablen Steifigkeit bedeutet weiterhin, daß die Spannungsdehnungsbeziehung für Belastung und Entlastung die gleiche ist, d.h. es wird spannungswegunabhängiges hypoelastisches Verhalten vorausgesetzt. Das Materialverhalten ist elastisch, aber nichtlinear. Nur dann führt die direkte Iteration zu einem korrekten Gleichgewichtszustand. Diese Voraussetzung ist bei Böden praktisch nie erfüllt . Der Vorteil, daß die Methode in der Lage ist, entfestigendes Materialverhalten ("softening") zu erfassen, ist nur ein scheinbarer. Hierzu siehe die bereits mehrfach diskutierten Einwände. Der scheinbare Vorteil liegt darin, daß der pseudoelastische Sekantenmodul sich für jeden Kurvenverlauf ermitteln läßt. Wesentlicher Nachteil auch bei Gültigkeit eines hypoelastischen Stoffgesetzes ist, daß in jedem Iterationsschritt die Gesamtsteifigkeitsmatrix neu aufgebaut und das System neu gelöst werden muß. Im Grundbau angewendet wurde die Methode der variablen Steifigkeit z.B. von Girijavallabhan und Reese (1968) bei Kreisfundamenten auf Ton.

Um die Nachteile der Methode der variablen Steifigkeit zu umgehen, wurden schon früh alternative Vorgehensweisen entwickelt. Zu den ersten zählte die Methode der Anfangsdehnungen ("initial strain method"), die erstmals von Gallagher, Padlog und Bijlaard (1962) angewendet und anschließend insbesondere von Argyris (1965) und späteren Koautoren weiterentwickelt und stark favorisiert wurde. Den Grundgedanken zeigt Abb. 4.2.6 . Das Verfahren eignet sich im geotechnischen Anwendungsbereich besonders für die Behandlung von Kriecherscheinungen. Da es jedoch im Fall der idealen (nicht verfestigenden) Plastizität versagt - eine eindeutige Zuordnung von Dehnungen zu einem Spannungszustand ist nicht mehr möglich - wurde bereits bei den ersten plastischen Berechnungen die im folgenden erläuterte vielseitigere Methode der Anfangsspannungen verwendet.

Die Anfangsspannungsmethode wurde 1968 von Zienkiewicz, Valliappan und King als Alternative zur Anfangsdehnungsmethode vorgestellt. Zunächst unter dem Begriff "stress transfer method", dann als "initial stress method" und in jüngster Zeit unter dem Namen "residual force method" erfährt sie eine breite Verwendung bei der Behandlung nichtlinearer Werkstoffprobleme. Der grundsätzliche Unterschied zwischen Anfangsdehnungs- und Anfangsspannungsverfahren ist an Abb. 4.2.6 zu verdeutlichen. Der durch eine elastische Berechnung erreichte Spannungsdehnungszustand sei 1 . Beim Anfangsdehnungsverfahren wird unter der Annahme, daß die errechneten Spannungen korrekt sind, eine Korrekturdehnung $\Delta\varepsilon_0^1$ im ersten Iterationsschritt errechnet. Beim




0 Ausgangszustand

1 errechneter Spannungsdehnungszustand

2 korrigierter Spannungsdehnungszustand als erster Iterationsschritt des Anfangsdehnungsverfahrens

3 korrigierter Spannungsdehnungszustand als erster Iterationsschritt des Anfangsspannungsverfahrens

Abb. 4.2.6 Korrektur von Spannungen und Dehnungen beim Anfangsspannungs- und Anfangsdehnungsverfahren

Anfangsspannungsverfahren wird hingegen bei dem errechneten $\varepsilon_{el}$ eine Korrekturspannung $\Delta\sigma_0^1$ ermittelt.

Bevor die Weiterverarbeitung der Korrekturspannungen und der Iterationsablauf erläutert wird, sei zunächst auf die dem Verfahren zugrundeliegende Möglichkeiten hingewiesen, Nullstellen von Funktionen zu finden, wenn ein Näherungswert vorhanden ist. Abb. 4.2.7 a zeigt den Ablauf des Verfahrens von Newton. Durch ständig neues Ableiten einer Funktion ist es möglich, iterativ eine Nullstelle zu finden. Abb. 4.2.7 b zeigt, daß auch bei nur einmaligem Ableiten eine, wenn auch langsamere, Konvergenz vorhanden ist. Für den Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher ist die erstere Technik unter dem Namen Newton-Raphson Verfahren, die zweite als "modified" Newton-Raphson Verfahren bekannt (Bicanic und Johnson 1979). Auf letzterem Verfahren

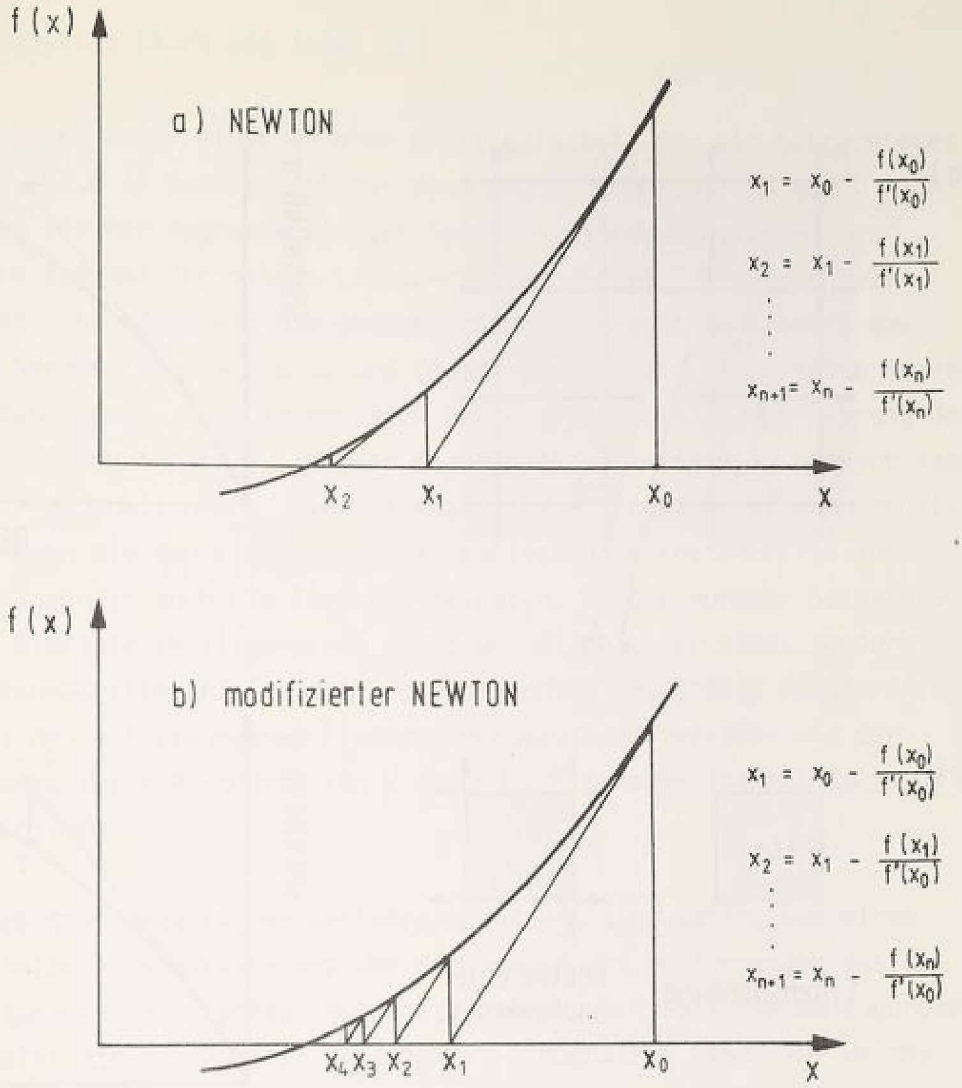



Abb. 4.2.7 Prinzip des Newton'schen Näherungsverfahrens

beruht die Idee zur Methode der Anfangsspannungen oder Anfangslasten, die noch gelegentlich in Lehrbüchern unter dem Namen "modified Newton-Raphson" Verfahren aufgeführt wird. Gerade bei der Lösung großer nichtlinearer Gleichungssysteme zeigt sich der besondere wirtschaftliche Vorteil. Es ist nicht mehr erforderlich, ständig neu das Gleichungssystem aufbauen und lösen zu müssen, was mit erheblichem Rechenzeitaufwand verbunden wäre. Stattdessen wird die Nichtlinearität auf die rechte Seite verlagert und durch sukzessives Durchrechnen immer neuer rechter Seiten erfaßt. Voraussetzung für die wirtschaftliche Durchführung ist, daß die Steifigkeitsmatrix in eliminierter Form zur Verfügung steht und in jedem Iterationszyklus wieder benutzt werden kann. Der Rechenzeitaufwand für wiederholte Berechnung mit neuer rechter Seite beträgt nur noch einen Bruchteil desjenigen beim erstmaligen Berechnen.

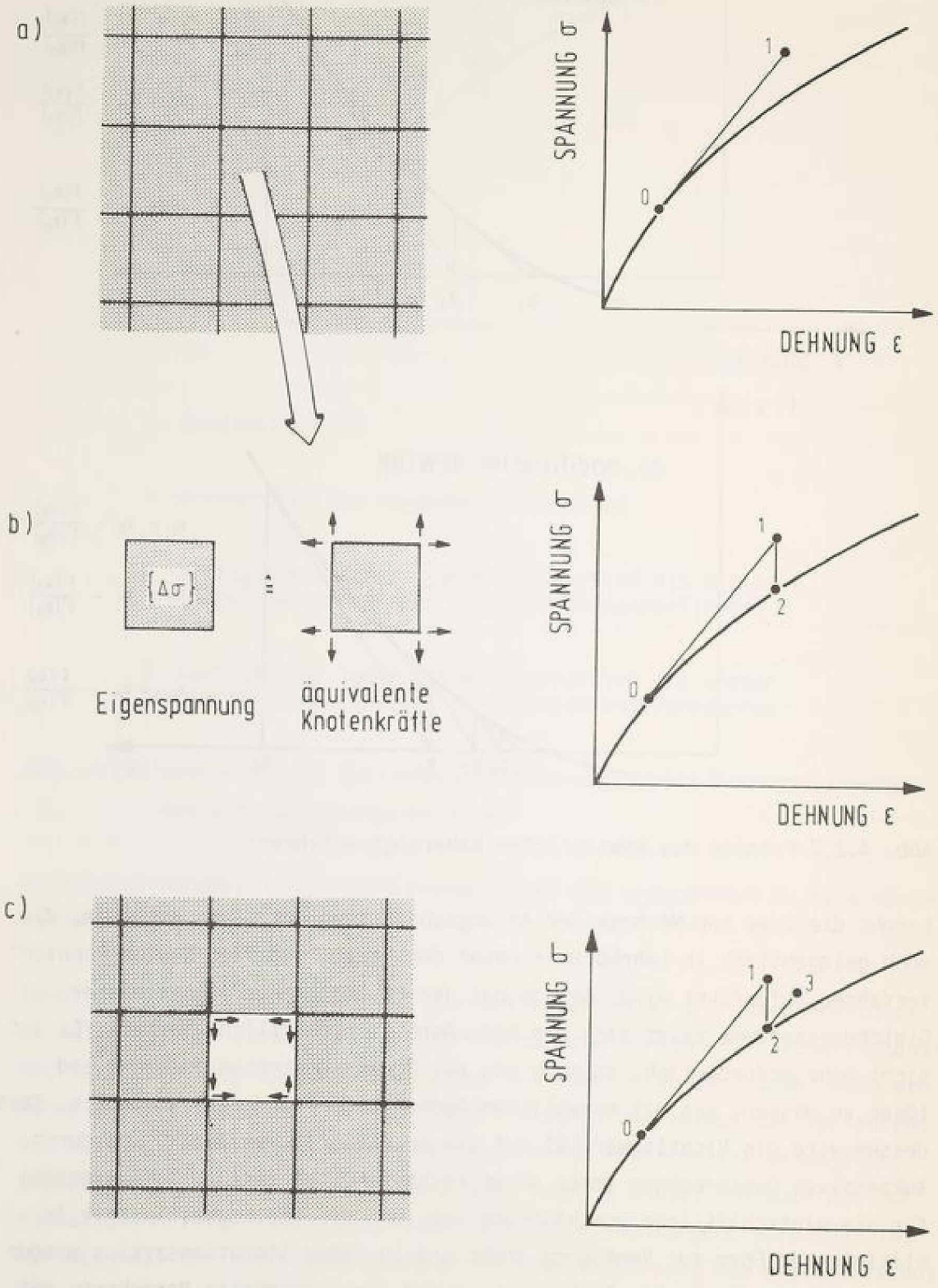



Abb. 4.2.8 Ablauf eines Iterationszyklus beim Anfangsspannungsverfahren, verfolgt an einem Element

Der Iterationszyklus läuft wie folgt ab:

Eine Struktur wird unter einer äußeren Kraft belastet. Für ein betrachtetes Element (Abb. 4.2.8 a) ändert sich der Spannungsdehnungszustand von 0 nach 1. Die Abweichung von der zugrundegelegten Spannungsdehnungsbeziehung des Werkstoffs infolge des für diesen Lastschritt benutzten Tangentenmoduls ist offensichtlich. Lösen wir nun gedanklich das betrachtete Element aus der Struktur heraus (Abb. 4.2.8 b) und fügen ihm einen korrigierenden Eigenspannungszustand hinzu, dann ändert sich bei konstant bleibender Dehnung der Spannungszustand von 1 nach 2 . Dieser Eigenspannungszustand am Element kann jedoch beim - gedanklichen - Wiedereinbau in die Struktur nur dann erhalten bleiben, wenn die den Eigenspannungen äquivalenten Knotenkräfte aus Gleichgewichtsgründen auch die Struktur belasten. Da die nunmehr belasteten benachbarten Elemente im allgemeinen nicht unendlich starr sind, sondern auf die Reaktionskräfte infolge der Eigenspannungen nachgiebig reagieren, geht ein Teil des aufgezwungenen Eigenspannungszustand verloren und der Spannungsdehnungszustand wandert von 2 nach 3 . Ein neuer Iterationszyklus muß sich anschließen.

Der erkennbare Grundgedanke des Verfahrens besteht also darin, von einem leicht ermittelbaren Näherungswert der Spannungen und Verformungen aus die einmal erhaltene Lösung iterativ solange zu verbessern, bis die Bedingungen des Stoffmodells mit vorgebbarer Genauigkeit eingehalten sind. Auf welche Art und Weise der Näherungswert erhalten wird, ist für den Ablauf des Verfahrens grundsätzlich bedeutungslos. Verständlich ist aber auch, daß eine bessere Näherung schneller zum Erfolg führt.

Die Steifigkeits- und Spannungsverhältnisse der berechneten Struktur bedingen - unabhängig von den vorher erwähnten Unterschieden - anderes Verhalten je nach Art des statischen Systems. Zwei Fälle begrenzen die Palette des möglichen Verhaltens. Im Fall eines nahezu bestimmten statischen Systems, das im Grundbau nie auftritt, sind die errechneten Spannungen korrekt (Abb. 4.2.9 a) und werden auch durch den Iterationsvorgang nicht mehr verändert. Lediglich die Dehnungen passen sich an. Im Fall eines endlich steifen Elements in einer unendlich starren Umgebung (Abb. 4.2.9 c) ist die Iteration bereits nach einem Schritt beendet, da die dem aufgeprägten Eigenspannungszustand des Elements äquivalenten Knotenkräfte auf die starre Umgebung keine Dehnung und damit keinen Abfall des Eigenspannungszustands mehr bewirken. Das übliche Konvergenzverhalten eines endlich steifen Elements (Abb. 4.2.9 b) in einer endlich steifen Umgebung liegt zwischen beiden Extremen.

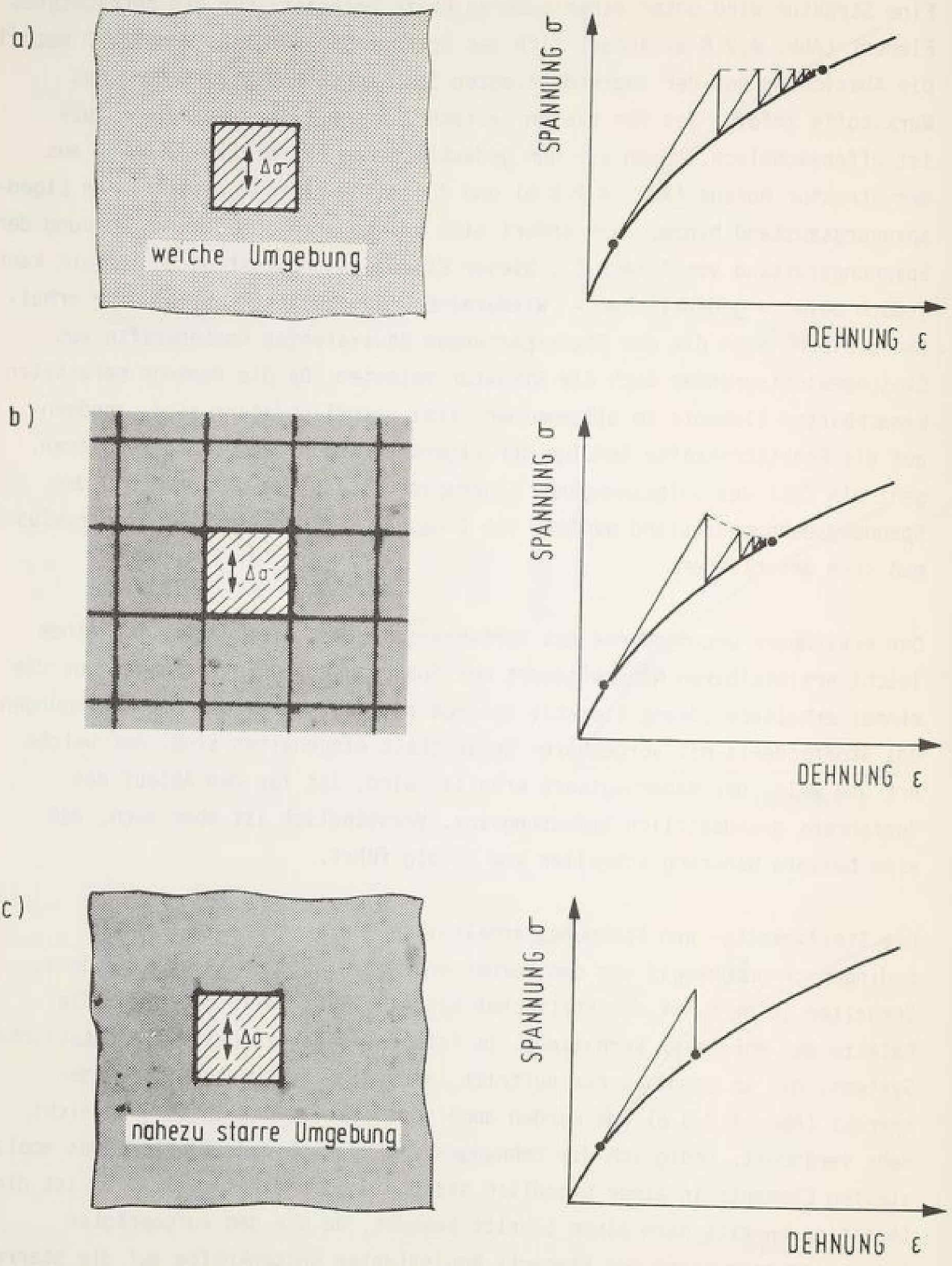



Abb. 4.2.9 Unterschiedliche Konvergenz bei unterschiedlichen Systemen

Die gewünschte Genauigkeit und damit das Abbruchkriterium des Iterationsvorgangs ist wesentlich von der ingenieurmäßigen Beurteilung des Problems abhängig. In Anbetracht der natürlichen Streuungen der bodenmechanischen Parameter und der Unvollkommenheit der Stoffmodelle ist eine allzuhohe Anforderung nicht angebracht. Dennoch ist eine konsequente Überprüfung des Iterationsfortschritts erforderlich.

Als erstes bietet sich die Überprüfung des Lastvektors der Umlagerungskräfte an, der bei erfolgreicher Iteration gegen Null konvergieren muß. Problematisch ist allerdings, wie die relative Größe festgestellt werden soll. Ist die Konvergenz ausreichend, wenn die Summe der Absolutwerte der Komponenten des Lastvektors im i-ten Iterationsschritt nur noch 1% des Wertes im ersten Iterationsschritt beträgt? Im Regelfall ja; allerdings ist dadurch noch keine Aussage möglich über seine Größe relativ zum Vektor der äußeren aufgebrachten Lasten. Ein ständiger Vergleich könnte eine wirtschaftliche Iterationsgrenze liefern, ist jedoch nur möglich, wenn tatsächlich Lasten (und keine Verschiebungen) vorgegeben werden.

Ein gegenüber der Belastungsart neutrales Konvergenzkriterium ist die Norm des Verformungsinkrementvektors während der Iteration:

$$N = \sqrt{\Sigma \delta_i^2}$$

Sie kann mit der entsprechenden Norm infolge äußerer Lasten oder aufgeprägter Verschiebungen verglichen werden. Ein Verhältniswert von etwa $10^{-4}$ bedeutet ausreichende Konvergenz.

Diese Kriterien, die das Gesamtverhalten einer Struktur beschreiben, sagen sehr wenig aus über das Konvergenzverhalten eines einzelnen Elements. Um sicherzustellen, daß nicht bei einzelnen Elementen noch große Unverträglichkeiten im Spannungsdehnungszustand auftreten, während für die Gesamtstruktur das gewählte Konvergenzkriterium bereits zum Iterationsabbruch führt, ist eine ständige Kontrolle des Ablaufs sowohl auf globaler als auch auf Elementebene erforderlich.

Untersuchungen zu Fragen der Konvergenz sind zahlreich. Scharpf (1969) untersucht das von Mises'sche Gesetz mit den Prandtl-Reuß Gleichungen. Quoc Son (1977) gibt einen Konvergenzbeweis für verfestigende Materialien. Mühlhaus (1977) befaßt sich mit Konvergenz bei nichtassoziierten Fließregeln.

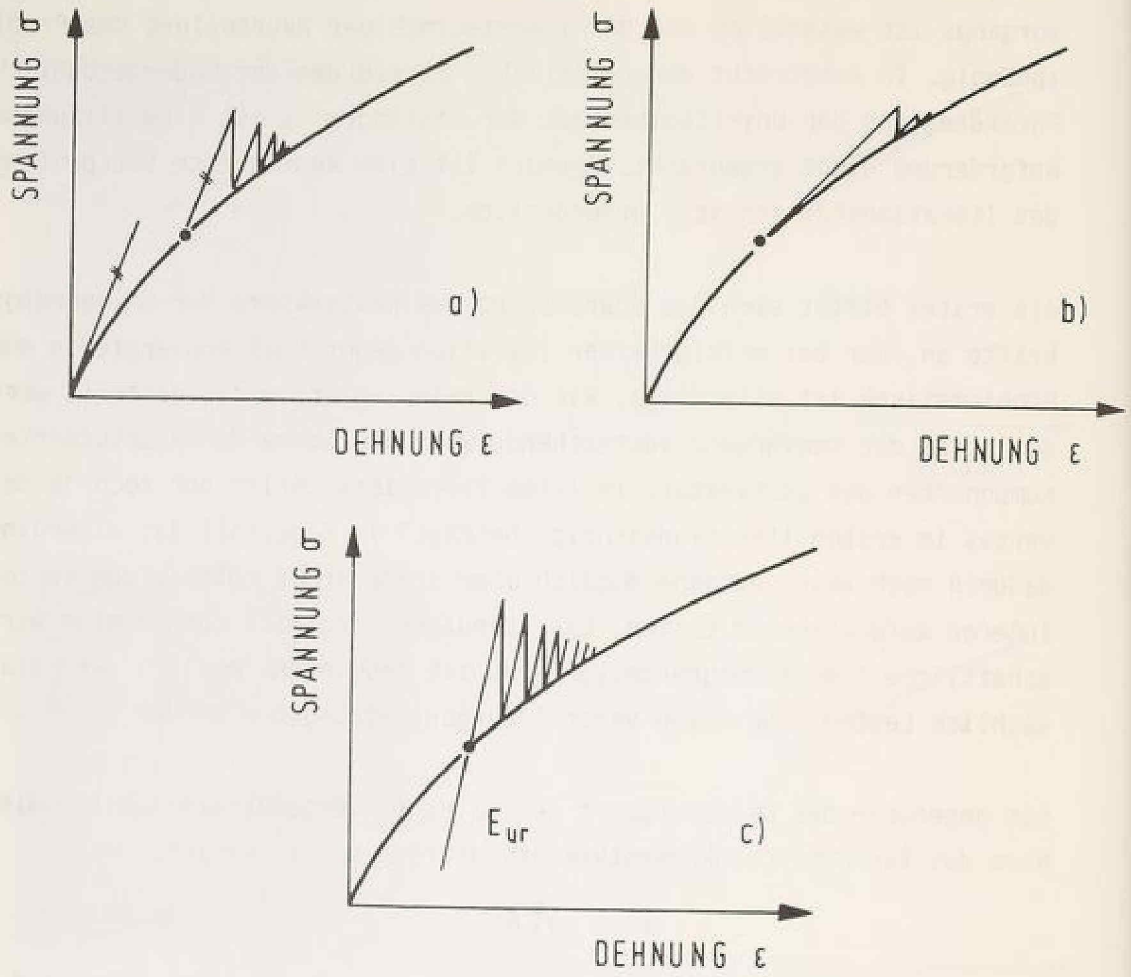



Abb. 4.2.10 Unterschiedliche Möglichkeiten für die Wahl des Elastizitätsmoduls bei Beginn der Iteration

Die erforderliche Anzahl der Iterationen hängt ab

- von der Größe der Abweichung des errechneten Spannungsdehnungszustands zum exakten;
- von den Steifigkeits- und Spannungsverhältnissen der berechneten Struktur;
- von der gewünschten Genauigkeit.

Die Abweichung des Spannungsdehnungszustands, der sich aus der Berechnung ergibt, zu der zugrundegelegten Spannungsdehnungsbeziehung des Materials kann von unterschiedlicher Größenordnung sein. Im Anfangsbereich einer Last-

verformungskurve ist die Abweichung durchaus gering, später erheblich, vor allem in Bruchnähe. Entscheidend ist, mit welchen Materialeigenschaften die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufgebaut worden ist (Abb. 4.2.10). Wird, wie zum Beispiel beim Werkstoff Stahl üblich, als Elastizitätsmodul die Anfangssteigung benutzt, so sind im Bereich hoher Ausnutzungsgrade sehr viel mehr Iterationen erforderlich als wenn mit wachsendem Ausnutzungsgrad angepasste Tangentenmoduli herangezogen werden (Abb. 4.2.10 a und b). Die Verwendung des aktuellen Tangentenmoduls hat jedoch den schwerwiegenden Nachteil, daß nicht mehr automatisch alle Entlastungsvorgänge elastisch sind und betroffene Elemente im Iterationsprozeß kurzerhand übergangen werden können. Vielmehr muß in einem solchen Fall wieder durch ständige Tastrechnungen festgestellt werden, wo Entlastung stattfindet.

Eine weitere Komplikation bringt die Tatsache mit sich, daß bei Boden der Entlastungsmodul spannungsabhängig ist (siehe Kapitel 3.5). Um Entlastungsvorgänge automatisch als elastisch zu behandeln, ist denkbar, diesen spannungsabhängigen Ent- und Wiederbelastungsmodul als Elastizitätsmodul einzuführen und die Steifigkeitsmatrix damit aufzubauen. Dies bedeutet, daß der größere Teil der Nichtlinearität ausschließlich durch Iterationen eingearbeitet werden kann. Ein solches Verfahren ist in jedem Falle extrem unwirtschaftlich.

Vorteilhaft ist, daß an dieser Stelle bereits eine Möglichkeit zur rechnerischen Erfassung der nichtlinearen Entlastung ("kinematic hardening") vorgegeben ist. Die betreffenden Elemente sind bereits herausgefiltert. Die große Zahl von erforderlichen Iterationsschritten, insbesondere bei hohen Ausnutzungsgraden, macht praktische Berechnungen oftmals ganz unmöglich. Hier kann zwar ein Iterationsbeschleunigungsverfahren (Nayak und Zienkiewicz 1972) deutliche Verbesserungen bringen. Bei sehr großer Abweichung vom Stoffgesetz besteht jedoch dann die Gefahr, daß Konvergenz nur auf nicht nachvollziehbaren Spannungswegen erreicht wird. Insbesondere bei stark spannungswegabhängigem Verhalten ist eine Berechnung auf diesem Weg ein Wagnis mit ungewissem Ausgang.

Sinnvoller und einfacher ist es, die inkrementelle und iterative Methode zweckmäßig miteinander zu verbinden. Da das Programmsystem STATAN-15 ohnehin für inkrementelle Berechnungen vorgesehen ist, bieten sich beliebige Kombinationsmöglichkeiten. Die Steifigkeitsmatrix des Systems wird nicht mit einer elastischen, sondern mit der elastoplastischen oder nichtlinear-

elastischen Stoffmatrix aufgebaut. Dies setzt eine entsprechend feine Inkrementierung der Belastung voraus. Die Abweichung des errechneten Spannungszustands von dem nach Stoffgesetz zulässigen ist erheblich geringer. Die Anzahl der Iterationen erniedrigt sich.

Programmorganisatorisch und im Hinblick auf die Rechenzeit ist nachteilig, daß nunmehr je nach Stoffmodell ein nichtsymmetrisches Gleichungssystem aufgebaut und gelöst werden muß.

Zusammenfassend ist die Feststellung angebracht, daß keinesfalls inkrementelle und iterative Methoden als alternative Vorgehensweisen angesehen werden können. Tatsächlich sind nahezu alle nichtlinearen Spannungsdehnungsbeziehungen auf inkrementeller Ebene formuliert, d.h. sie sind nur für kleine Lastschritte gültig. Werden aus wirtschaftlichen Gründen nicht infinitesimal kleine, sondern endlich große Lastinkremente gewählt, so stellt dies, streng betrachtet, einen Verstoß gegen die Anforderungen und Voraussetzungen des Stoffmodells dar, der sich bei rein inkrementeller Berechnung in akkumulierenden Abweichungen äußert.

Die Kombination von inkrementeller und iterativer Methode ist geeignet, eine wirtschaftliche Berechnung mit beliebig vorgebbarer Genauigkeit zu ermöglichen. Elastoplastische Stoffgesetze mit Verfestigung erfordern ohnehin sehr kleine Inkremente, um den Verfestigungseffekt annähernd korrekt zu erfassen. Je nach Problem kann es sehr wirtschaftlich sein und ist nicht mit Genauigkeitsverlust verbunden, die Iteration nur zur Ausschaltung eventuell auftretender unzulässiger Zugspannungen sowie zum Einhalten der Bruchbedingungen zu verwenden. Von dieser Möglichkeit wurde auch in der vorliegenden Arbeit Gebrauch gemacht.

## 5. Das Stoffgesetz von Arslan aus der Sicht des Anwenders

Das Stoffgesetz von Arslan (1980) ist bereits in Kapitel 3.5 als konsequente Weiterentwicklung und Kombination bisheriger Ansätze vorgestellt worden. Die wesentlichen Merkmale sind bekannt, seine Einordnung in die Entwicklungslinie elastoplastischer Modelle ist transparent. Auf Details der Herleitung wird nicht eingegangen; sie sind der Arbeit von Arslan zu entnehmen. Ziel dieses Kapitels ist, den Anwender mit den Erfordernissen eines solchen Ansatzes bei der Anwendung numerischer Verfahren bekannt zu machen.

Die Steigerung der Leistungsfähigkeit des benutzten Stoffgesetzes gegenüber herkömmlichen nichtlinear-elastischen, aber auch idealplastischen und Nur-Cap Modellen drückt sich vor allem in folgenden Punkten aus:

- Das Stoffgesetz ist grundsätzlich dreidimensional. Ebener Verformungszustand und Axialsymmetrie sind als Sonderfall enthalten.

- Zur Ermittlung der Parameter sind nur konventionelle Triaxialversuche erforderlich.

- Fließfläche und Bruchfläche enthalten die mittlere Hauptspannung.

- Die Bruchfläche ergibt im ebenen Verformungszustand und im triaxialen Extensionszustand höhere und realistischere Festigkeiten als nach Mohr-Coulomb.

- Die Fließregel ist nicht assoziiert; d.h. die Dilatanz wird in realistischer Größe erfaßt.

- Durch die Cap werden plastische Verformungen infolge sphärischer Beanspruchungen erfaßt.

- Verformungen infolge Rotation der Spannungshauptachsen werden berücksichtigt.

Als derzeit noch nicht erfaßte, aber mittelfristig realisierbare *) Vorteile sind anzusehen:

- Die Berücksichtigung kinematischer Verfestigung ist möglich.

- Lagerungsbedingte Anisotropie ("inherent anisotropy") und spannungsinduzierte Anisotropie ("stress-induced anisotropy") kann - auch im Zusammenhang mit kinematischer Verfestigung - erfaßt werden.

Insbesondere zur korrekten Erfassung des Bodenverhaltens bei zyklischer Beanspruchung sind die beiden letzten Punkte von besonderer Bedeutung.

## 5.1 Zusätzliche Anforderungen an ein Rechenprogramm

Nahezu alle Finite Element Programme haben ihre eigene Entwicklungsgeschichte durchlaufen; so auch im vorliegenden Fall. Die in Kapitel 4 vorgestellte Programmkonzeption hatte mehrere Ursachen: Einmal war große Flexibilität erforderlich, um Bauabläufe simulieren zu können, d.h. Strukturen zu verändern, Lastvektoren zu erzeugen und Randbedingungen zu ändern. Zum andern erforderte die Anzahl der daran Arbeitenden eine interne Segmentierung. Der Schritt von elastischen zu inkrementell-elastischen Berechnungen, verbunden mit gleichzeitig stattfindenden Strukturänderungen, erfordert leicht steuerbare Ablaufregelungen. Der Aufbau der Stoff- und Steifigkeitsmatrizen kann grundsätzlich gleich erfolgen, nur müssen schrittweise für jedes Element bzw. jeden Integrationspunkt neue elastische Parameter ermittelt werden. Dies hat zur Folge, daß die Elastizitätsparameter als Feld oder extern abgespeichert zur Verfügung stehen müssen. Ebenso müssen zumindest diejenigen Spannungen aufaddiert und abgespeichert werden, die zur Aktualisierung der Elastizitätsparameter benötigt werden. Das können z.B. die Hauptspannungen sein. Darüber hinaus ist es zweifellos auch sinnvoll, weitere Spannungen aufzuheben, um sie anschließend an die Rechnung graphisch auszuwerten.

Eine Berechnung mit dem elastoplastischen Stoffgesetz von Arslan erfordert das konsequente Anlegen einer vollständigen Spannungsgeschichte. Im allge-

---

*) U. Arslan, mündliche Mitteilung

meinen dreidimensionalen Fall, für den das Stoffgesetz und das Programmsystem STATAN-15 Version Bodenmechanik ausgelegt sind, haben die Spannungen und Dehnungen jeweils 6 Komponenten *) :

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}$$
$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}$$

Im axialsymmetrischen Fall existieren jeweils 4 Spannungen und Dehnungen:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_\theta \quad \tau_{rz}\}$$
$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_\theta \quad \gamma_{rz}\}$$

Für den ebenen Verformungszustand werden bei elastischen und nichtlinearelastischen Berechnungen üblicherweise nur 3 Komponenten berechnet:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$$
$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$$

Die Dehnung senkrecht zur Scheibenebene ist Null, die Spannung $\sigma_z$ kann - auch inkrementweise - aus den beiden anderen Koordinatenspannungen ermittelt werden.

Da bei elastoplastischen Berechnungen auch im ebenen Verformungszustand 4 Spannungskomponenten in die Stoffmatrix eingehen, nämlich

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}\}$$

muß auch die Spannung $\sigma_z$ korrekt ermittelt und in der Spannungsgeschichte (externer Datenträger) aufgehoben werden. Das hat zur Folge, daß in der Finite Element Berechnung nach dem Ermitteln der Knotenverschiebungen in der Nachlaufrechnung zur Ermittlung der Spannungen von dem bei elastischen Rechnungen üblichen Weg abgewichen werden muß. Die für die Spannungsberechnung erforderliche Matrix [D]

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \cdot \{\Delta\varepsilon\}$$

ist nun keine 3 x 3 Matrix mehr, sondern hat 4 x 4 Elemente. Sie ist als Ausschnitt aus der Matrix [D] des räumlichen Falls anzusehen. Hierin liegt bereits der Grund für einen höheren Rechenzeitaufwand.

---

*) Die Definition der Spannungen und Dehnungen ist den einschlägigen Lehrbüchern zu entnehmen.

Für den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix [K]

$$[K] = \iint [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV$$

ändert sich grundsätzlich nichts, da sich der Einfluß des Stoffgesetzes nur in [D] bemerkbar macht. Wenn nun zum Aufbau der elastoplastischen Matrix [D] die aktuellen Spannungen bekannt sein müssen (siehe Kapitel 5.2), ist es nur ein organisatorisches Problem, diese Spannungen element- bzw. integrationspunktweise bereit zu halten. Da dies nicht in-core geschehen kann, sondern durch Lesevorgänge externer Datenträger, macht sich diese spezielle Anforderung wieder in zusätzlicher Rechenzeit bemerkbar.

Bei elastischen Ansätzen mit symmetrischer Steifigkeitsmatrix ist es gängige Praxis, beim Assemblieren der Elementsteifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix die Symmetrie auszunutzen und nur eine Hälfte aufzubauen. Die andere Hälfte wird dann durch einfache Spiegelung um die Hauptdiagonale gewonnen. Da das jetzt nicht mehr möglich ist, vergrößert sich der Rechenzeitaufwand weiter.

Für die Lösung des nichtsymmetrischen Gleichungssystems ist eine geeignete Eliminationsmethode erforderlich. Vom Verfasser wurde hier zweigleisig vorgegangen. Zur Berechnung von Strukturen mit geringem Arbeitsspeicherbedarf wurde Aufbau und Lösung einer Gesamtsteifigkeitsmatrix als Bandmatrix in-core implementiert. Dieser Lösungsweg steht - bei nahezu halbiertem Platzbedarf - auch für symmetrische Matrizen zur Verfügung und ist in der STATAN-15 Befehlssprache ansteuerbar. Für größere Strukturen, insbesondere solche mit großer oder unregelmäßiger Bandbreite, wurde von Katzenbach die Frontal Solution Methode nach Irons (1970) mit Input-Output Puffer implementiert. Dieses Verfahren wurde vom Verfasser für nichtsymmetrische Matrizen erweitert. Es hat sich bei den meisten Problemen als die schnellste Lösungsmöglichkeit herausgestellt, selbst im Vergleich zur reinen in-core Lösung. Zusätzlich ist der Hauptspeicherplatzbedarf extrem gering. Anzumerken ist noch, daß der modulare Aufbau des Programmsystems den Einbau verschiedener Lösungsverfahren sehr erleichtert. Es stehen derzeit in STATAN-15 Version Bodenmechanik insgesamt 5 unabhängige Lösungsverfahren für Gleichungssysteme zur Verfügung. Ihre Auswahl richtet sich nach der Leistung des Rechners.

Der Rechenzeitaufwand zur Lösung nichtsymmetrischer Matrizen ist bei der Frontal Solution um lediglich 60 % höher als zur Lösung symmetrischer. Aufwendiger ist ebenfalls die Erstellung der Steifigkeitsmatrizen. Wegen der vielen Rechenoperationen zum Aufbau der Stoffmatrix [ D ] im elastoplastischen Fall steigt die Rechenzeit für diese Leistung um 50 % an. Es kommt sogar vor, daß der Aufbau der Matrix länger dauert als die Lösung. Insgesamt ergibt sich infolge des elastoplastischen Stoffgesetzes ein um 60 % höherer Rechenzeitaufwand. Dieser Mehraufwand kann ohne weiteres hingenommen werden.

Sämtliche Berechnungen wurden durchgeführt am Hochschulrechenzentrum der Technischen Hochschule Darmstadt auf einer IBM /370-168 unter Betriebssystem OS/VS2.

## 5.2 Organisation und Aufbau der Stoffmatrix

Die vorhergehenden Darlegungen haben gezeigt, daß abgesehen von einigen organisatorischen Ergänzungen und Erweiterungen der Lösungsverfahren für Gleichungssysteme sich die ganze Komplexität aufwendigerer Stoffgesetze vor allem im Aufbau der Stoffmatrix [ D ] äußert. An dieser Stelle ist für die Formulierung sehr viel mehr Aufwand erforderlich als z.B. für Stoffansätze auf der Basis des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes (dazu siehe die Abb. 2.2 und 2.7). Sowohl gedanklich und organisatorisch als auch algebraisch sind mehr Vorgänge erforderlich.

Es geht nun darum, einen Weg zu finden, wie die Formulierung einer elastoplastischen Matrix vorgenommen werden kann, ohne sich allzu eng an einem konkreten Stoffgesetz zu orientieren. Änderungen von Fließflächen und plastischen Potentialen sollen möglich bleiben, ohne ganze Programmteile neu schreiben zu müssen. Eine derartige Strategie wird von neueren Autoren (z.B. Schad 1979) grundsätzlich gewählt, um entwicklungsfähig zu bleiben. Die Aufgabe besteht also darin, nicht jeden Term der im räumlichen Fall 6 x 6 Stoffmatrix explizit anzugeben, sondern es werden die tensoriellen Beiträge von beiden Fließflächen und plastischen Potentialen sowie der Ableitungen einzeln ermittelt und entsprechend einer Vorschrift aufgebaut. Diese Vorschrift ist unabhängig von der mathematischen Formulierung der Funktionen, die jede für sich beliebig austauschbar sind.

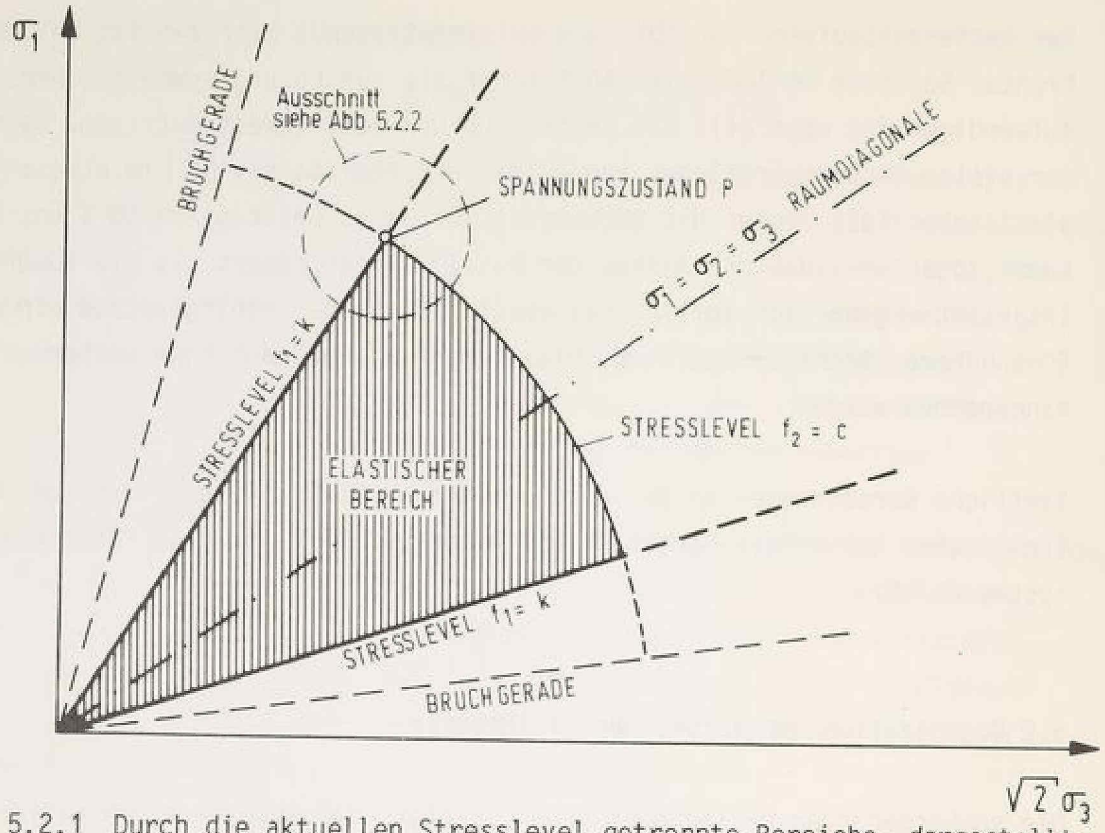



Abb. 5.2.1 Durch die aktuellen Stresslevel getrennte Bereiche, dargestellt in der Triaxialebene

Arslan leitet die elastoplastische Stoffmatrix für sein "double-hardening" Modell her als

$$[D^{ep}] = [D^e] - [D^e]\frac{\gamma^1 \cdot \Gamma - \gamma^1 \cdot \Omega}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}\right\} - [D^e] \cdot \frac{\gamma^1 \cdot \Lambda - \xi \cdot \eta^1}{\Gamma \cdot \Lambda - \xi \cdot \Omega}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\right\}$$

Darin bedeutet $[D^e]$ die elastische Stoffmatrix auf der Basis des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes. Die Größen $\gamma^1$ und $\eta^1$ sind Zeilenvektoren; $\Gamma$, $\Lambda$, $\Omega$ und $\xi$ sind Skalare, die sich aus Vektor- und Matrizenoperationen ergeben. Die Funktion $g_1$ ist das plastische Potential der seitlichen Fließfläche, $f_2$ ist die Cap. Die Bedeutung und Herleitung der einzelnen Größen ist in der notwendigen Ausführlichkeit der Arbeit von Arslan zu entnehmen. Auf eine Wiedergabe wird hier verzichtet. Anzumerken ist lediglich, daß grundsätzlich die volle Dreidimensionalität aufrechterhalten wird. Für Berechnungen im axialsymmetrischen oder ebenen Verformungszustand können jedoch alle Vektor- und Matrizenoperationen verkürzt und daher rechenzeitsparend vorgenommen werden.

Die im Laufe einer Berechnung möglichen Spannungswege sind von Arslan analysiert und in ihrer Bedeutung unterschieden worden. Abb. 5.2.1 zeigt, aus-

gehend von einem im Laufe der Spannungsgeschichte erreichten Zustand P, den aktuellen Stand der beiden Statusgrößen k für die seitliche Fließfläche und c für die Cap. Die beiden Größen stellen ein Gedächtnis dar und markieren den bisher erreichten Stand der Verfestigung. Sie sind jeweils der größte bisher erreichte Stresslevel $f_1$ und $f_2$ . Jede Vergrößerung eines der beiden Stresslevel vergrößert automatisch die entsprechende Statusgröße k oder c.

Es gibt also keinen Spannungszustand außerhalb desjenigen Raums, der von dem Kegel mit der Funktion $f_1$ und der Cap mit der Funktion $f_2$ abgeschlossen wird. Der abgeschlossene Raum selbst stellt den elastischen Bereich dar. Spannungsänderungen in diesen Raum hinein bewirken daher keine Veränderung der Statusgrößen k und c. Sie bleiben nach Art eines "Schleppzeigers" auf ihrem bis dahin maximal erreichten Wert stehen.

Alle Spannungsänderungen, die von einem Ausgangsspannungszustand P ausgehend nicht in den abgeschlossenen Raum hineinführen, haben daher plastische Verformungsanteile.

Würde nur eine einzige Fließfläche $f_1$ existieren, wäre die Situation sehr einfach. Alle Spannungszustände mit einem Stresslevel $f_1 < k$, also erreicht durch eine Spannungsänderung $df_1 < 0$, wären elastisch. Auch darauf folgende Spannungsänderungen mit $df_1 > 0$ wären solange elastisch, bis wieder $f_1 = k$ erreicht würde. Auch "neutrale" Spannungsänderungen wären möglich. Hierbei bewegt sich der Spannungszustand bei konstantem Stresslevel $f_1 = k$. Die Spannungen nehmen zu oder ab, ohne daß sich der Stresslevel ändert.

Beim "double-hardening" Modell von Arslan sind derartige "neutrale" Spannungsänderungen nicht möglich. Da zwei Fließflächen, also auch zwei Verfestigungsmöglichkeiten mit unterschiedlicher Gesetzmäßigkeit existieren, bewirkt eine "neutrale" Spannungsänderung entlang der Oberfläche einer Fließfläche zwangsläufig immer entweder eine Belastung oder eine Entlastung bezüglich der zweiten Fließfläche. Über Erstbelastung und Ent- bzw. Wiederbelastung kann daher nur anhand der Wechselwirkung beider Statusgrößen k und c entschieden werden.

Abb. 5.2.2 zeigt einen Ausschnitt aus Abb. 5.2.1 für die Umgebung des Spannungszustand P, der zuvor durch eine eindeutige Erstbelastung erreicht worden sei. Daher liegt P im Schnittpunkt der beiden Fließflächen aus Kegel und Cap. Die aktuellen Stresslevel $f_1$ und $f_2$ entsprechen den Statusgrößen k und c.

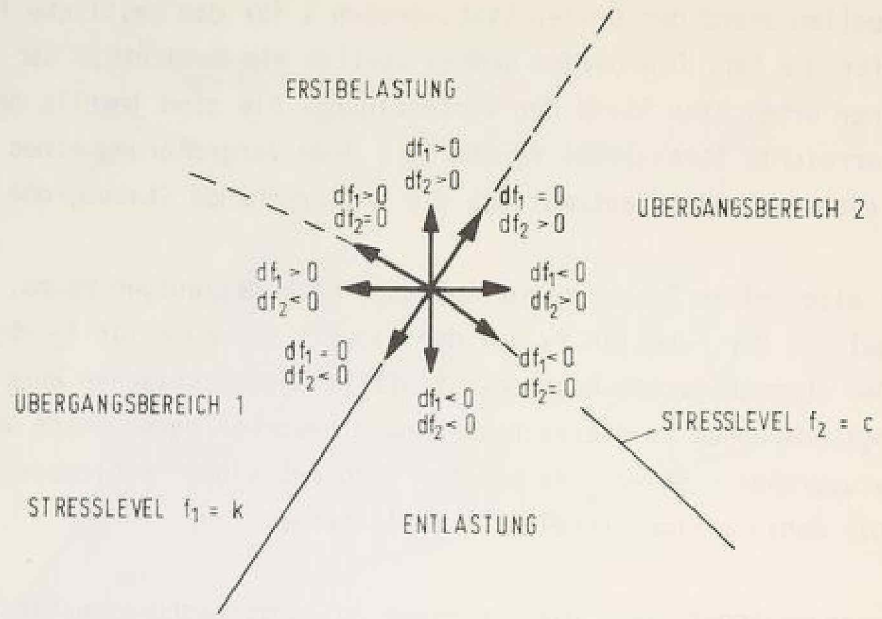



Abb. 5.2.2 Mögliche Spannungsänderungen für einen Spannungspunkt, der durch Erstbelastung erreicht wurde

Eine Spannungsänderung mit $df_1 > 0$ und $df_2 \geq 0$ ist eine Erstbelastung. Die Statusgrößen k und c vergrößern sich. Für Verformungsanteile, die durch die seitliche Fließfläche und auch für jene, die durch die Cap beschrieben werden, gilt Elastoplastizität. Die Verformung enthält daher elastische, dilatant-plastische und kontraktant-plastische Anteile.

Eine Spannungsänderung mit $df_1 \leq 0$ und $df_2 < 0$ ist eine Entlastung. Die Statusgrößen k und c bleiben auf ihrem bisher größten Wert stehen. Es gilt Elastizität.

Eine Spannungsänderung mit $df_1 \leq 0$ und $df_2 \geq 0$ ist für die seitliche Fließfläche eine Entlastung, für die Cap eine Erstbelastung. Die Statusgröße k bleibt auf ihrem bisher größten Wert stehen, c vergrößert sich (Übergangsbereich 2). Für Verformungsanteile aus der Änderung von $f_1$ gilt Elastizität, für Anteile aus der Cap gilt Elastoplastizität.

Eine Spannungsänderung $df_1 > 0$ und $df_2 < 0$ ist für die seitliche Fließfläche eine Erstbelastung, für die Cap eine Entlastung. Die Statusgröße k vergrößert sich, c bleibt auf seinem bisher größten Wert stehen (Übergangsbereich 1). Für Verformungsanteile aus der Änderung von $f_1$ gilt Elastoplastizität, für Anteile aus der Cap gilt Elastizität.

Diese Festlegungen gelten in dieser Form nur, wenn der Ausgangsspannungspunkt auf dem Wege der Erstbelastung erreicht wurde. Wenn er durch Entlastung erreicht wurde, sind andere Kontrollen erforderlich. Abb. 5.2.3 zeigt, daß unabhängig vom Vorzeichen von $df_1$ und $df_2$ Wiederbelastung auftritt, solange durch die Stresslevel $f_1$ und $f_2$ die Statusgrößen k und c nicht wieder erreicht werden. Da zur Zeit zwischen Entlastung und Wiederbelastung bei $f_1$ und $f_2$ nicht unterschieden wird, braucht eine gesonderte Behandlung nicht zu erfolgen.

Wurde der Ausgangsspannungszustand P durch eine Spannungsänderung in den Übergangsbereich 1 erreicht (Abb. 5.2.4), wird sofort die Statusgröße k dem neuen Spannungszustand angepaßt, da für sie eine Erstbelastung vorliegt. Jede Vergrößerung des Stresslevels $f_1$ bewirkt in dieser Situation eine Erhöhung von k. Eine Vergrößerung des Stresslevels $f_2$ bewirkt für die durch die Cap beschriebenen Verformungsanteile solange Wiederbelastung und daher Elastizität, solange $f_2$ die Statusgröße c nicht wieder erreicht hat. Falls das auftreten sollte, gilt ab dort Erstbelastung. Ein steigender Stress-

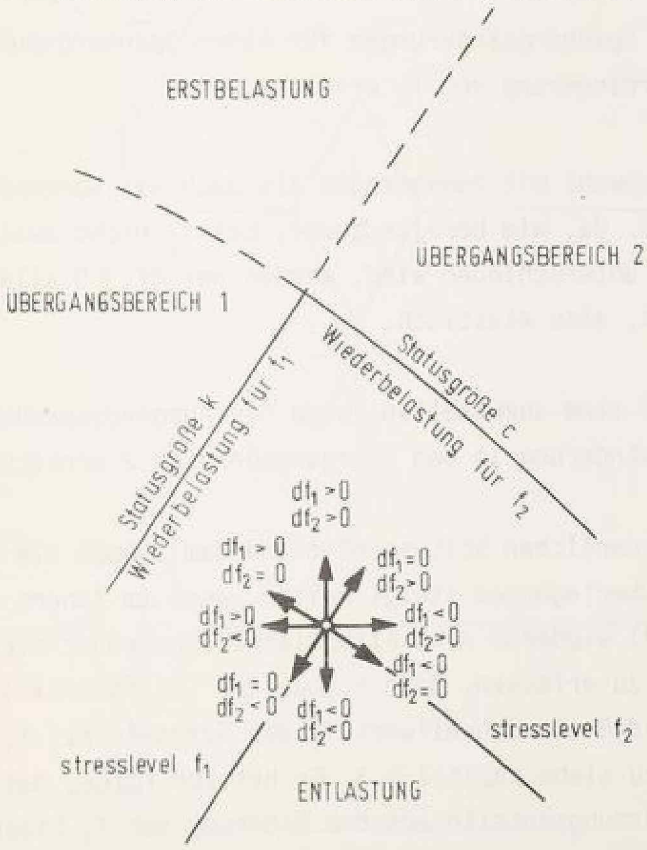



Abb. 5.2.3 Mögliche Spannungsänderungen für einen Spannungspunkt, der durch Entlastung erreicht wurde

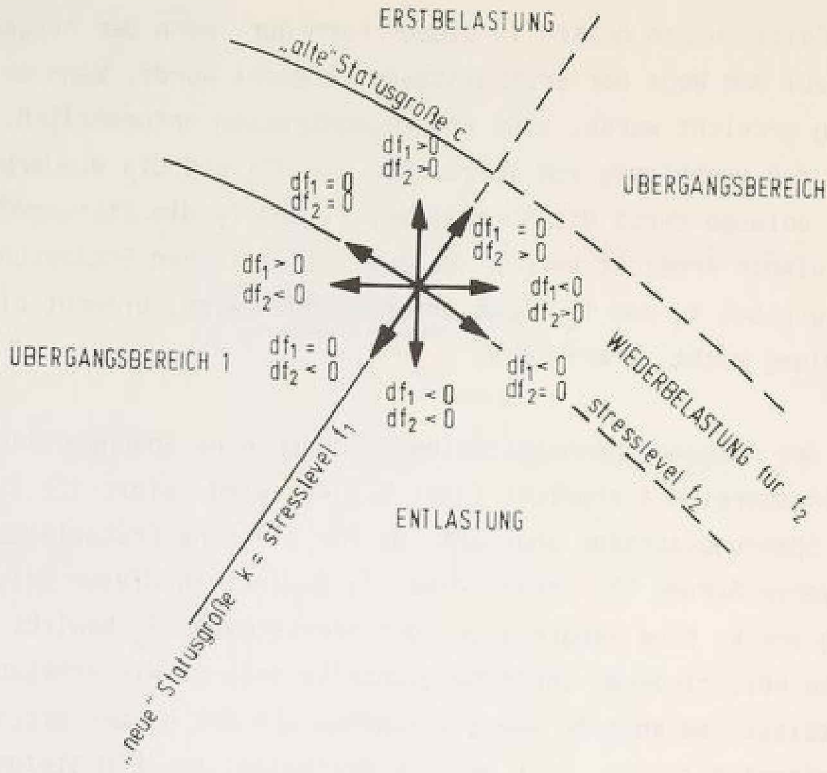



Abb. 5.2.4 Mögliche Spannungsänderungen für einen Spannungspunkt, der durch Verringerung von $f_2$ erreicht wurde

level $f_1$ kann also sowohl mit zunehmendem als auch mit abnehmendem Stresslevel $f_2$ einhergehen. Da, wie bereits zuvor, bei $f_2$ nicht zwischen Ent- und Wiederbelastung unterschieden wird, werden bei $df_1 > 0$ alle Änderungen $df_2$ gleich behandelt, also elastisch.

Analoge Überlegungen sind anzustellen, wenn der Ausgangsspannungszustand P durch eine Spannungsänderung in den Übergangsbereich 2 erreicht wurde.

Die Anzahl der erforderlichen Statusgrößen und damit auch die Komplexität der erforderlichen Überlegungen steigt weiter, wenn im Innern des elastischen Bereichs (Abb. 5.2.1) wiederum eine Fließfläche angeordnet wird, um kinematische Verfestigung zu erfassen. Beim Aufbau der Stoffmatrix ist weiterhin zu berücksichtigen, daß ein Schwellwert $f_t$ des Stresslevels $f_1$ eingeführt wurde. Näheres hierzu siehe Kapitel 5.3. Er hat zur Folge, daß im Bereich $f_1 < f_t$ für die Verformungsanteile aus der Änderung von $f_1$ Elastizität gilt. Da es für die Anteile aus $f_2$ keinen Schwellwert gibt, ist dieser Bereich gesondert zu behandeln. Abb. 5.2.5 zeigt die zu treffenden Entscheidungen beim Aufbau der Stoffmatrix als Flußdiagramm. Die Erläuterung der Größen folgt in Kapitel 5.3.

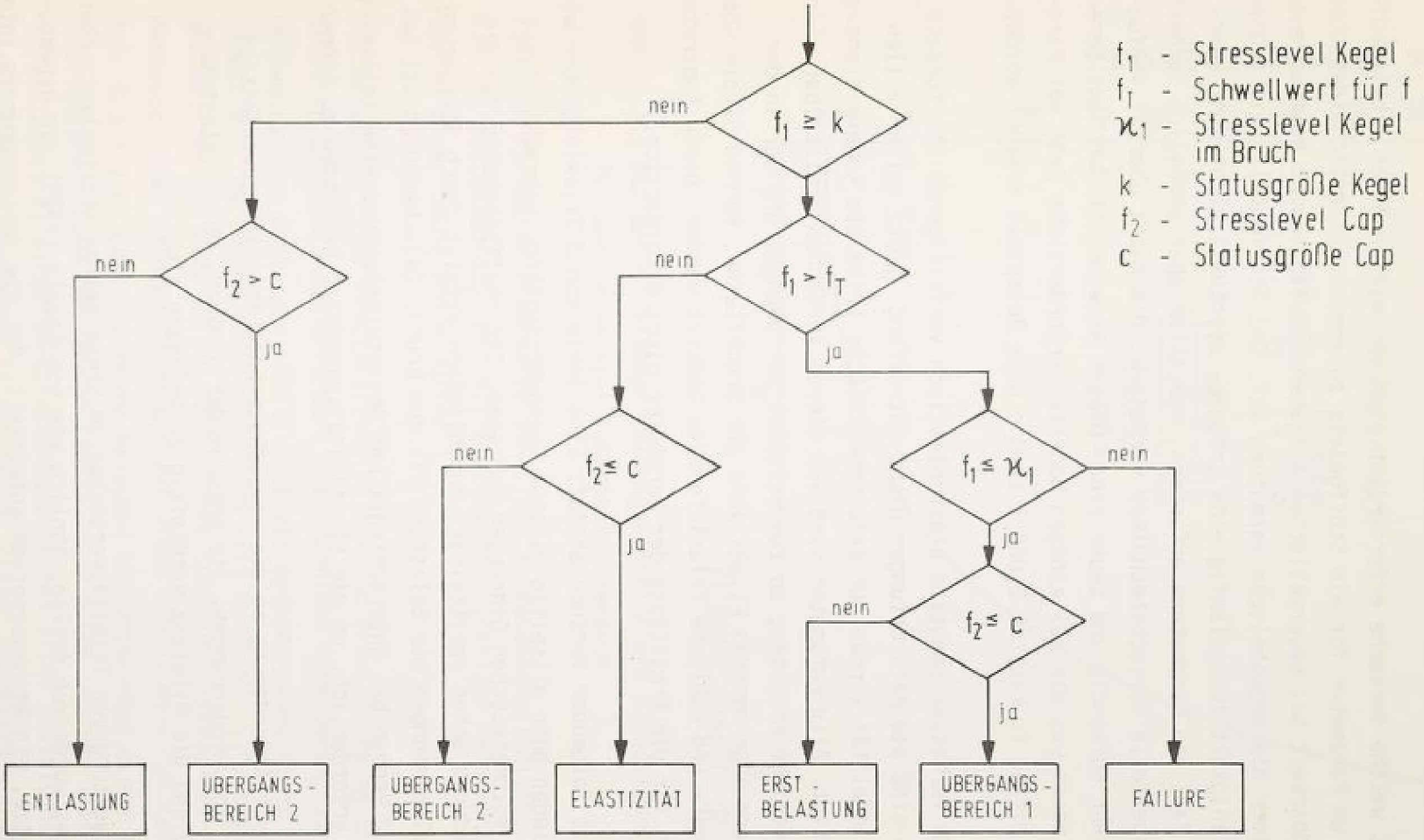



Abb. 5.2.5 Flußdiagramm für die Entscheidungen beim Aufbau der Stoffmatrix

## 5.3 Ermittlung der Parameter und Eignungsnachweis

Die Frage, welche Versuche erforderlich sind und wie groß der Arbeitsaufwand ist, um Parameter für ein Stoffgesetz zu ermitteln, entscheidet über die Anwendbarkeit bei baupraktischen Aufgaben. Häufig taucht beim anwendenden Ingenieur die argwöhnische Vermutung auf, daß Stoffmodelle mit größerer Leistungsfähigkeit zwangsläufig eine größere, eventuell nicht mehr überschaubare Zahl von Parametern erfordern, vor allem aber womöglich hochentwickelte spezielle Versuchstechniken verlangen, die nicht überall verfügbar oder sehr aufwendig und teuer sind. Dieser Argwohn ist durchaus berechtigt, zumindest was die bei einigen Modellen erforderliche Zahl von Parametern betrifft. In Kapitel 2 und 3 sind einige Beispiele erwähnt worden.

Für das vom Verfasser benutzte elastoplastisch verfestigende Stoffgesetz von Arslan sind die Befürchtungen nicht zutreffend. Trotz seiner vollen Dreidimensionalität werden nur axialsymmetrische triaxiale Kompressionsversuche benötigt. Alle Parameter sind aus diesen Versuchen ermittelbar. Für wissenschaftliche Arbeiten, so zum Beispiel zur Überprüfung der in der Deviatorebene angenommenen Fließfläche und Bruchfläche, können Simple Shear-, Torsion Shear- und kubische Triaxialgeräte benutzt werden. Diese Apparate sind jedoch für die Ermittlung der Parameter nicht erforderlich.

Sinnvoll ist folgender Versuchsablauf: Eine Serie von 3 Triaxialproben wird auf verschieden hohe allseitig gleiche Spannungszustände gebracht. Dabei werden die volumetrischen Dehnungen gemessen. Die Stoffparameter für die Cap sind dadurch schon ermittelbar. Anschließend erfolgt durch Steigerung der Vertikalspannungen die Belastung bis zum Bruch. Zwischendurch ist bei mindestens 2 Proben bei unterschiedlicher Deviatorbelastung eine teilweise Entlastung erforderlich, um die Elastizitätsparameter bestimmen zu können.

Die wichtigste Anforderung an die Versuchstechnik ist eine zuverlässige Messung der Volumendehnungen. Sie entscheidet darüber, ob die elastische Querdehnung und die Dilatanz vernünftig zu erfassen sind.

Für die Auswertung von Triaxialversuchen im Sinne seines elastoplastischen Stoffgesetzes wurde von Arslan, ähnlich wie von Czapla (1979) für hyperbolische Ansätze, ein Rechenprogramm entwickelt, das die Versuchskurven intern in elastische und zwei plastische Anteile zerlegt und nach der in seiner Arbeit dargestellten Weise verarbeitet. In der Tat ist eine manuelle Ermitt-

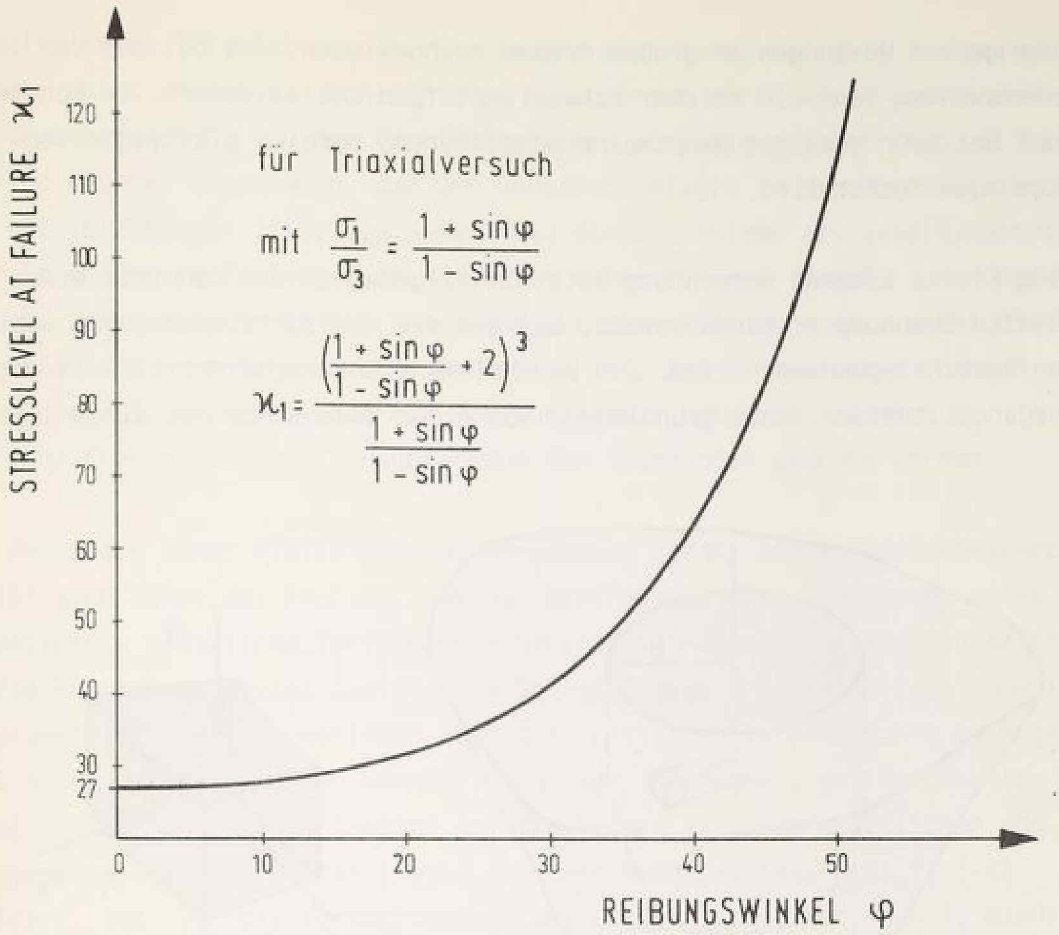



Abb. 5.3.1 Beziehung zwischen Reibungswinkel $\varphi$ und Stresslevel "at failure" für den triaxialen Kompressionsversuch

lung der Parameter einerseits erheblich zu fehlerempfindlich, andererseits viel zu zeitaufwendig. Mit Hilfe eines dialogfähigen Rechenprogramms wird sie zu einer Sache von Minuten.

Die Benutzung einer realistischen Fließ- und Bruchfläche im dreidimensionalen Spannungsraum erfordert vom Ingenieur eine geringfügig andere Denkweise. Der Reibungswinkel $\varphi$ geht als Bodenkennwert nicht in das Stoffgesetz ein. Der Beanspruchungszustand wird durch den Stresslevel $f_1$ ausgedrückt, der vom Wert 27 bei sphärischem Spannungszustand mit zunehmender deviatorischer Beanspruchung bis auf einen Stresslevel "at failure" ansteigt. Abb. 5.3.1 gibt eine Beziehung zwischen Reibungswinkel $\varphi$ und Stresslevel $\varkappa_1$ "at failure". Lade und Duncan (1975) haben einen unteren Grenzwert $f_t$ des Stresslevels $f_1$ eingeführt, unterhalb dessen keine plastischen Dehnungen infolge größer werdendem $f_1$ auftreten. Dieser Schwellwert ("threshold value") ist weder theoretisch begründet noch versuchsmäßig nachgewiesen; er wurde nur zum besseren "curve-fitting" eingeführt. Arslan hat durch

sehr genaue Messungen an großen Proben nachgewiesen, daß bei dem von ihm untersuchten Sand ein solcher Schwellwert $f_t$ nicht existiert. Er konnte auch bei sehr geringer Hauptspannungsdifferenz bereits plastische Verformungen feststellen.

Eine Finite Element Berechnung setzt im allgemeinen die Kenntnis eines in-situ Spannungszustands voraus, bei dem die Horizontalspannungen ungleich den Vertikalspannungen sind. Ein Bodenelement unterscheidet sich in der Ausgangssituation damit grundlegend von einer Bodenprobe bei einem isotrop

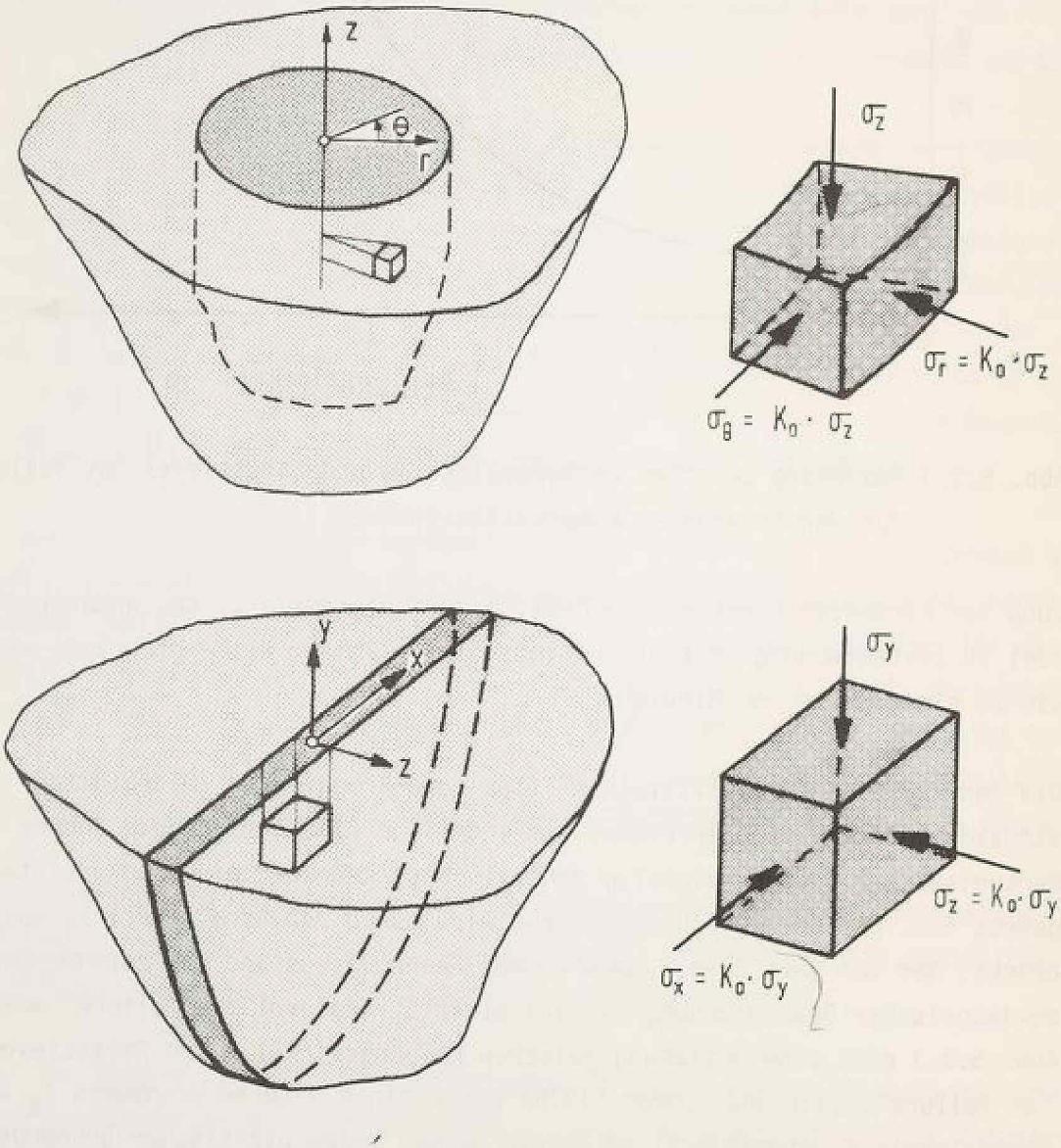



Abb. 5.3.2 Festlegung der in-situ Spannungen bei axialsymmetrischem und ebenem Verformungszustand

konsolidierten Triaxialversuch. Die Spannungen können beliebig festgelegt werden; meist werden die horizontalen Komponenten durch einen gemeinsamen Ruhedruckbeiwert $K_o$ von der Vertikalspannung abhängig gemacht (Abb. 5.3.2). Es wird hierbei angenommen, daß der Ruhedruckbeiwert in der Horizontalen für alle Richtungen gilt. Die Behandlung eines Problems als axialsymmetrisch oder im ebenen Verformungszustand stellt daher für den in-situ Spannungszustand einen Ausschnitt aus einem unbegrenzten Kontinuum dar, wobei die geographische Orientierung ohne Bedeutung ist. Bei tektonischer Vorbeanspruchung ist natürlich auch ein richtungsweise unterschiedliches $K_o$ möglich. Ebenso können die Hauptachsen der Spannungen gedreht werden.

Für den Start einer Finite Element Berechnung mit $K_o$ als Ruhedruckbeiwert ergibt sich daher das Problem, daß das Stoffgesetz ohne Einführung eines Schwellwerts plastische Verformungen bereits im Ausgangszustand impliziert. Da die Entstehung dieses Zustands - Sedimentation und Tektonik - ohnehin unbekannt ist und Informationen über die plastische Vorgeschichte im Regelfall nicht gewonnen werden können, wird hier angenommen, daß der Stresslevel $f_1$ (=k) im in-situ Zustand auf der Grenze zwischen elastischem und elastoplastischem Verhalten liegt, also der Anfangsstresslevel $f_1$ (=k) gleich $f_t$ ist. Für die Versuchsauswertung ergibt sich daher, daß $f_t$ mindestens gleich dem Anfangsstresslevel $f_1$ sein muß. Selbstverständlich kann $f_t$ auch deutlich größer als der Anfangsstresslevel $f_1$ (=k) sein. In einem solchen Fall treten keine dilatant-plastischen Verformungen auf, solange $f_1 < f_t$ ist.

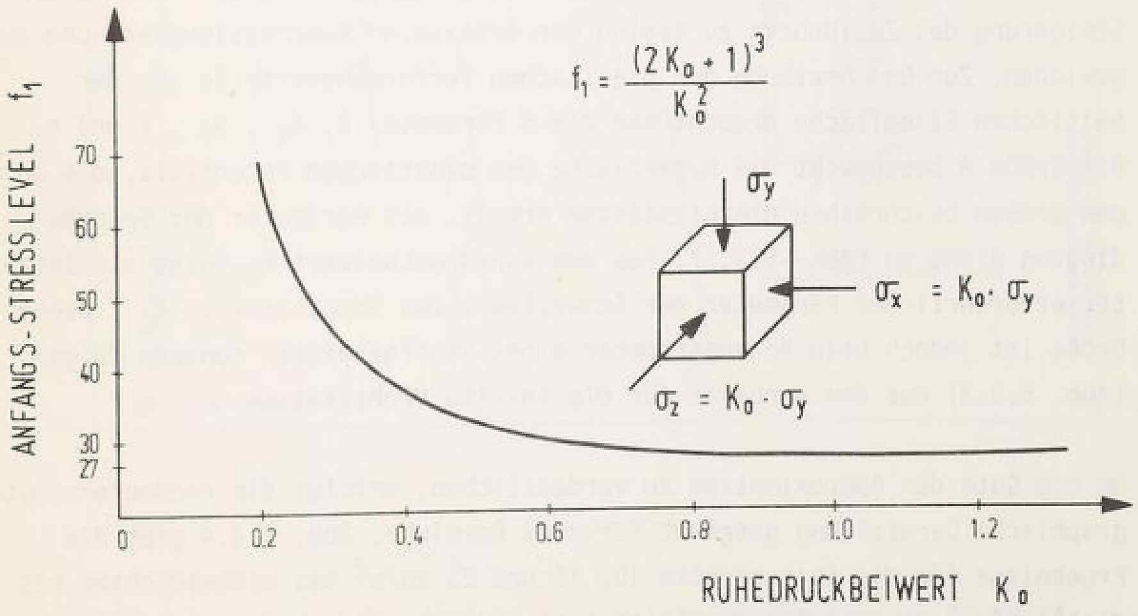
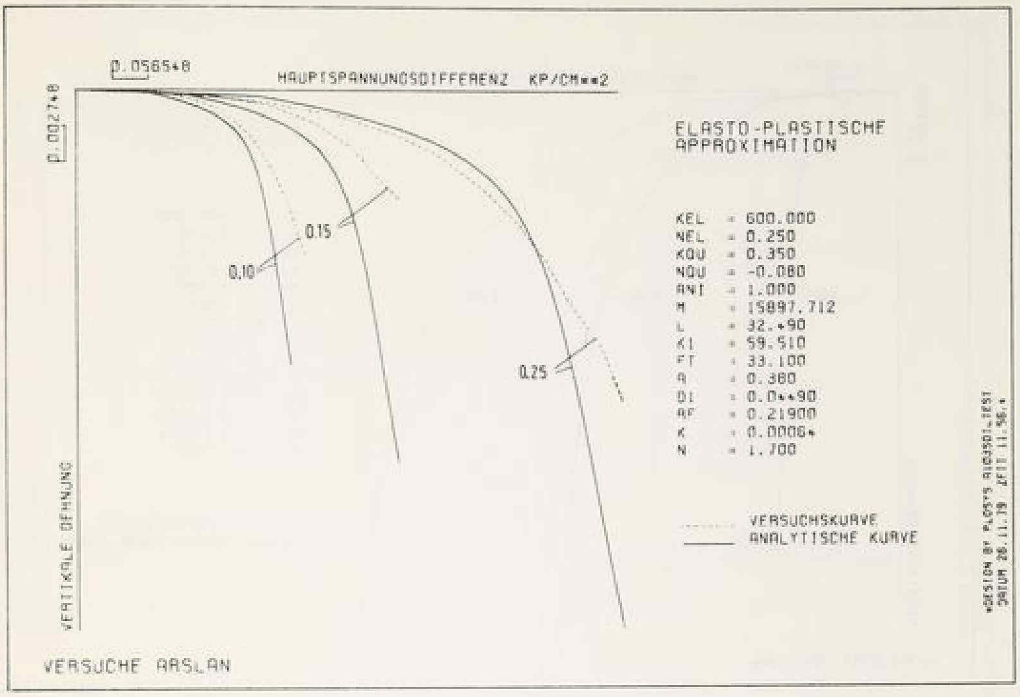



Abb. 5.3.3 Beziehung zwischen Ruhedruckbeiwert und erforderlichem Anfangsstresslevel $f_1$

Diese Annahme wird auch von anderen Autoren (z.B. Schad 1979) getroffen. Es muß aber bewußt bleiben, daß damit für die Rechnung eine Vorgabe gemacht wird. Abb. 5.3.3 zeigt die Abhängigkeit des Anfangsstresslevels vom Ruhedruckbeiwert $K_o$ , wenn für die horizontalen Richtungen gleiche Verhältnisse angenommen werden. Für kohäsionsloses Lockergestein kommen $f_t$ - Werte zwischen 32 und 37 in Frage. Da für die Berechnungen mit dichtem Sand ein $K_o$ von 0.47 vorausgesetzt wurde, ergibt sich ein $f_t$ von 33.1 , das für die Auswertung zugrundezulegen ist. Entsprechend folgt für sehr dichten Sand mit $K_o$ = 0.42 ein $f_t$ von 35.32 . Die Auswertung der Versuche von Arslan erfolgte für Zelldrücke von 10 kN/m$^2$ bis 500 kN/m$^2$. Der gesamte Spannungsbereich wird mit dem gleichen Satz von Parametern abgedeckt.

Für die Erfassung des elastischen Verformungsanteils sind 4 Parameter erforderlich. $K_{el}$ und $n_{el}$ sind Anfangssteigung und Exponent eines Potenzansatzes für den Elastizitätsmodul. $K_q$ und $n_q$ sind entsprechend Anfangssteigung und Exponent eines Potenzansatzes für die Poissonzahl. Diese 4 Parameter werden aus Teilentlastungen nach vorhergehender deviatorischer Belastung gewonnen. Sie beschreiben sowohl den elastischen Anteil bei elastoplastischem Verhalten als auch die Verformungen bei Ent- und Wiederbelastungen. Für die plastischen Verformungsanteile infolge der Cap, also aus sphärischen Beanspruchungen, werden 2 Parameter M und l benötigt. Sie beschreiben die Hyperbelfunktion der plastischen Arbeit infolge allseitiger Beanspruchung und sind durch eine Auswertung der Verformungen während der Steigerung des Zelldrucks zu Beginn der triaxialen Kompressionsversuche zu gewinnen. Zur Beschreibung der plastischen Verformungsanteile aus der seitlichen Fließfläche braucht man die 5 Parameter A, $d_1$ , $R_f$ , K und n. Die Größe A beschreibt die Hyperfläche des plastischen Potentials, die übrigen Größen beschreiben die plastische Arbeit. Als Parameter der Bruchbedingung dient $\varkappa_1$ (Abb. 5.3.1). Aus dem Ruhedruckbeiwert $K_o$ folgt als letzter erforderlicher Parameter der Schwellwert des Stresslevels, $f_t$ . Diese Größe ist jedoch kein Bodenparameter eines Stoffgesetzes, sondern folgt (Abb. 5.3.3) aus den Vorgaben für die in-situ Verhältnisse.

Um die Güte der Approximation zu verdeutlichen, erfolgt die rechnererzeugte graphische Darstellung getrennt für zwei Bereiche. Abb. 5.3.4 gibt die Ergebnisse für die Seitendrücke 10, 15 und 25 kN/m$^2$ bei mitteldichtem bis dichtem Sand - im folgenden "dicht" genannt - wieder. Abb. 5.3.5 zeigt den gleichen Parametersatz bei 100, 300 und 500 kN/m$^2$ Seitendruck.



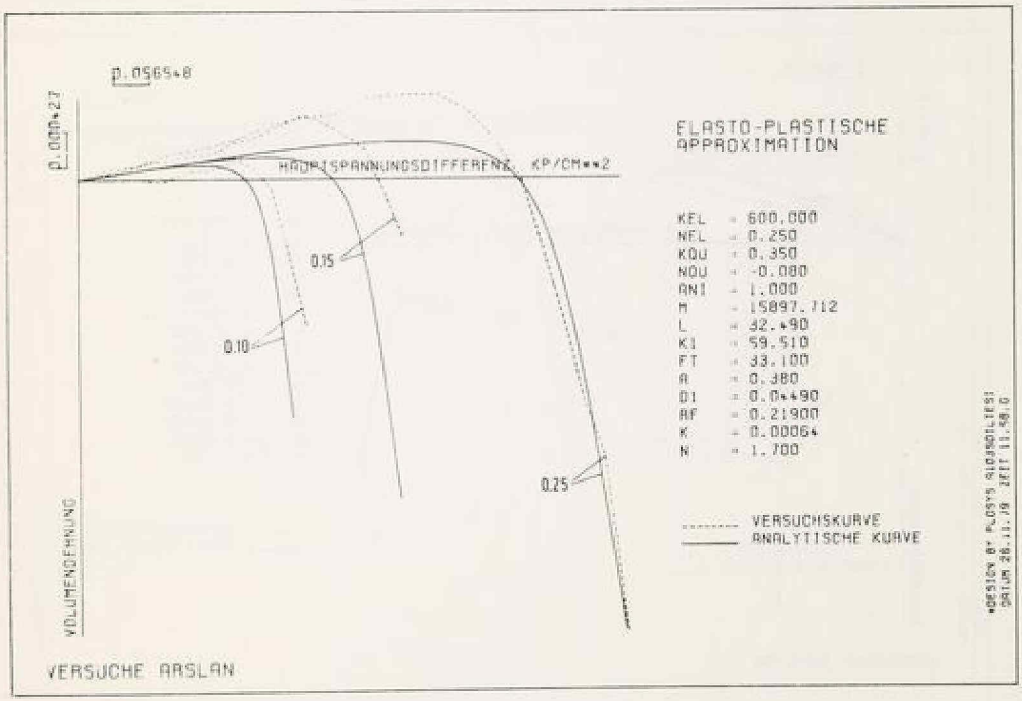
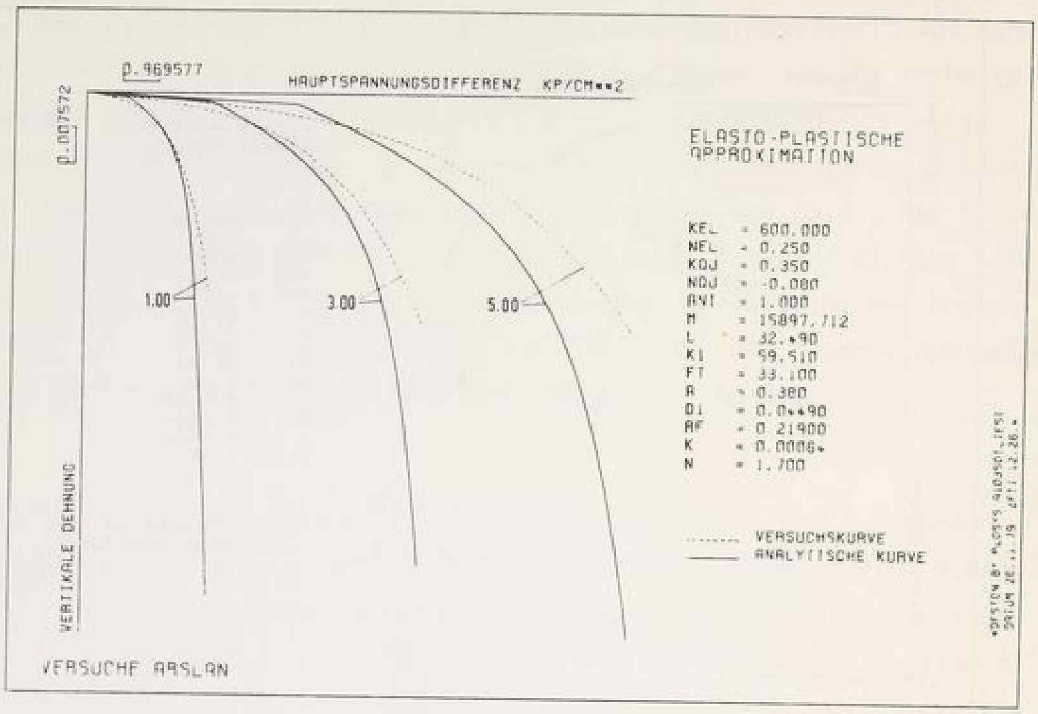




Abb. 5.3.4 Approximation für dichten Sand bei Seitendrücken von 10 kN/m$^2$ (0.10 kp/cm$^2$), 15 kN/m$^2$ (0.15 kp/cm$^2$) und 25 kN/m$^2$ (0.25 kp/cm$^2$)



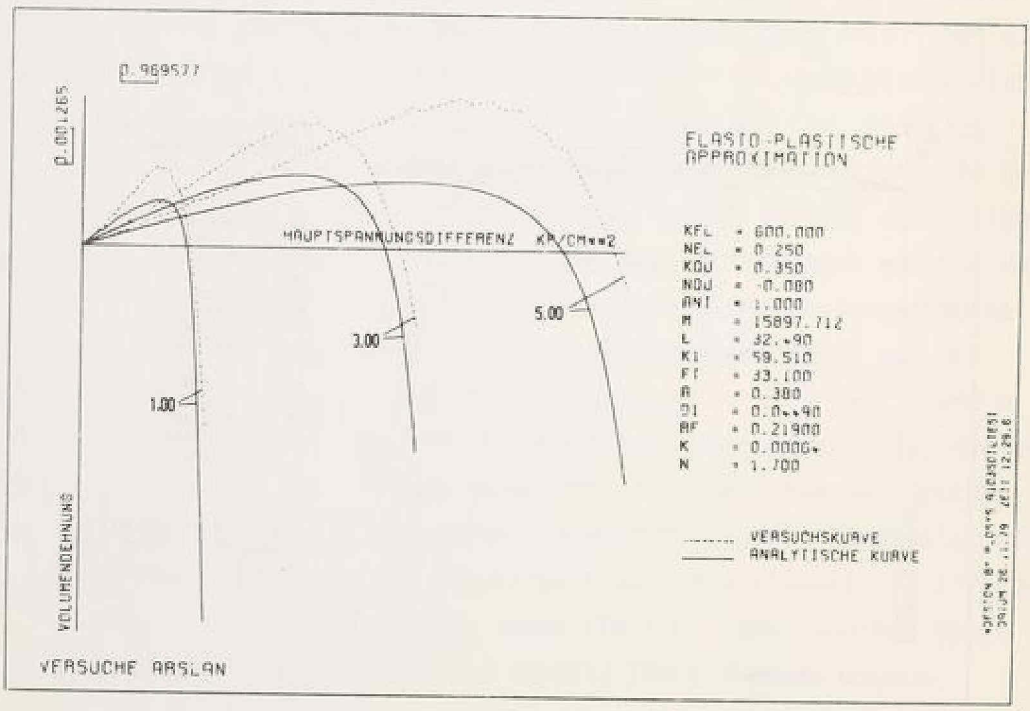
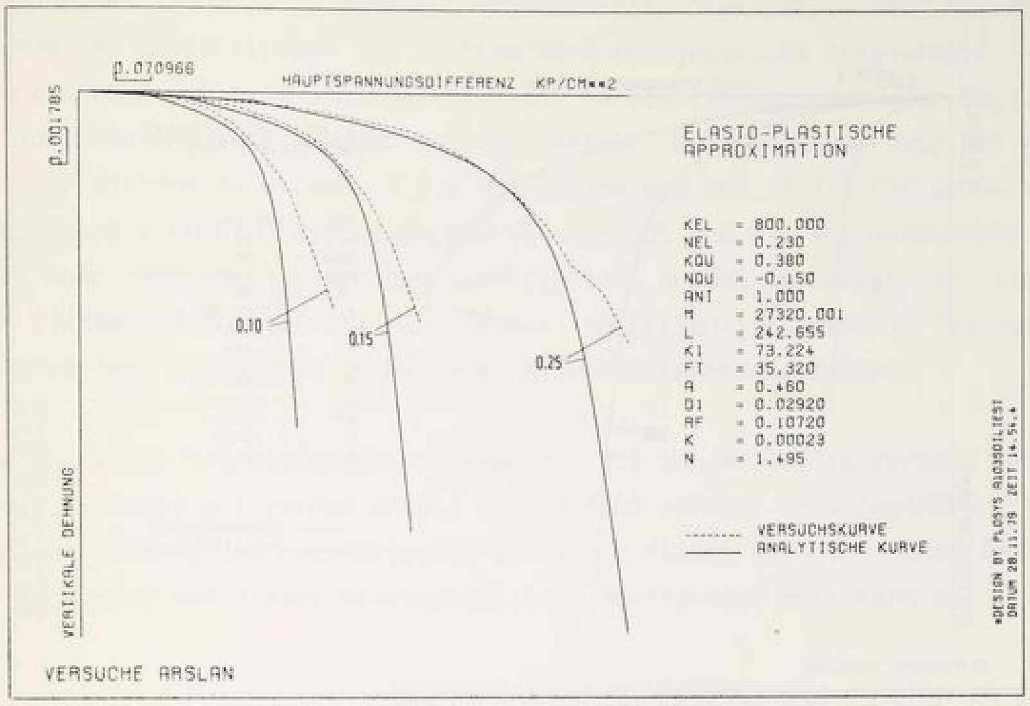




Abb. 5.3.5 Approximation für dichten Sand bei Seitendrücken von 100 kN/m$^2$ (1.0 kp/cm$^2$), 300 kN/m$^2$ (3.0 kp/cm$^2$) und 500 kN/m$^2$ (5.0 kp/cm$^2$)



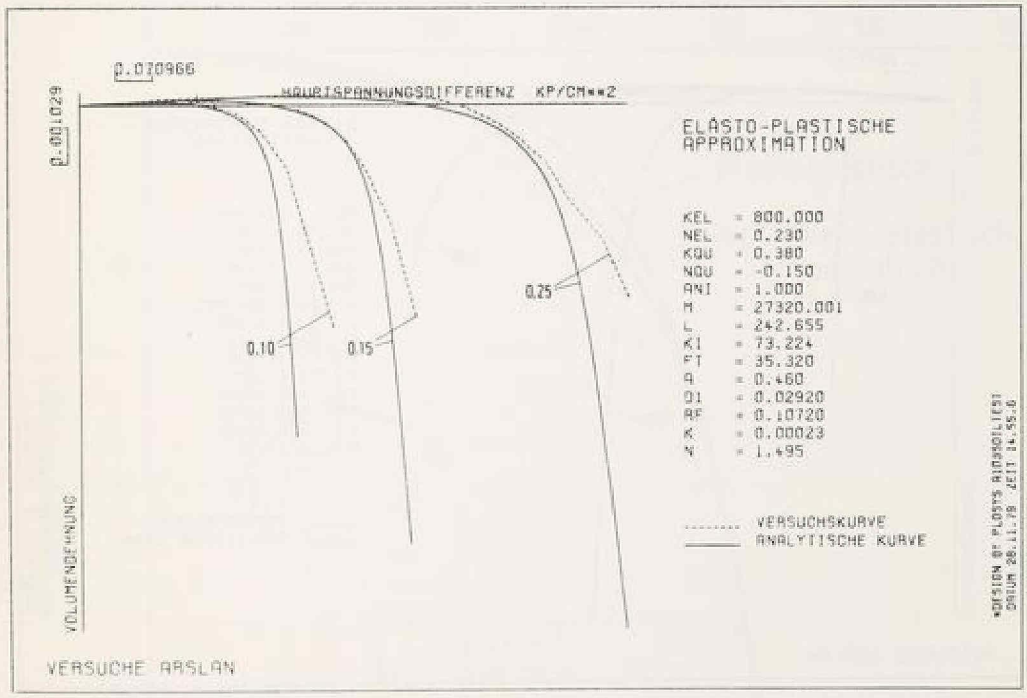
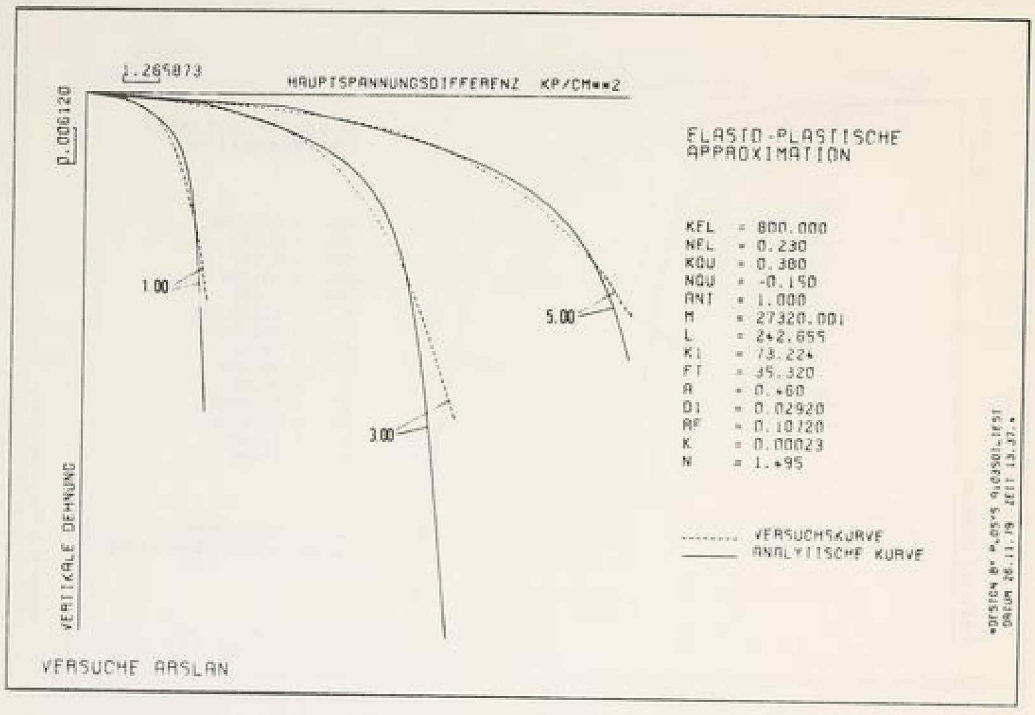




Abb. 5.3.6 Approximation für sehr dichten Sand bei Seitendrücken von 10 kN/m$^2$ (0.10 kp/cm$^2$), 15 kN/m$^2$ (0.15 kp/cm$^2$) und 25 kN/m$^2$ (0.25 kp/cm$^2$)



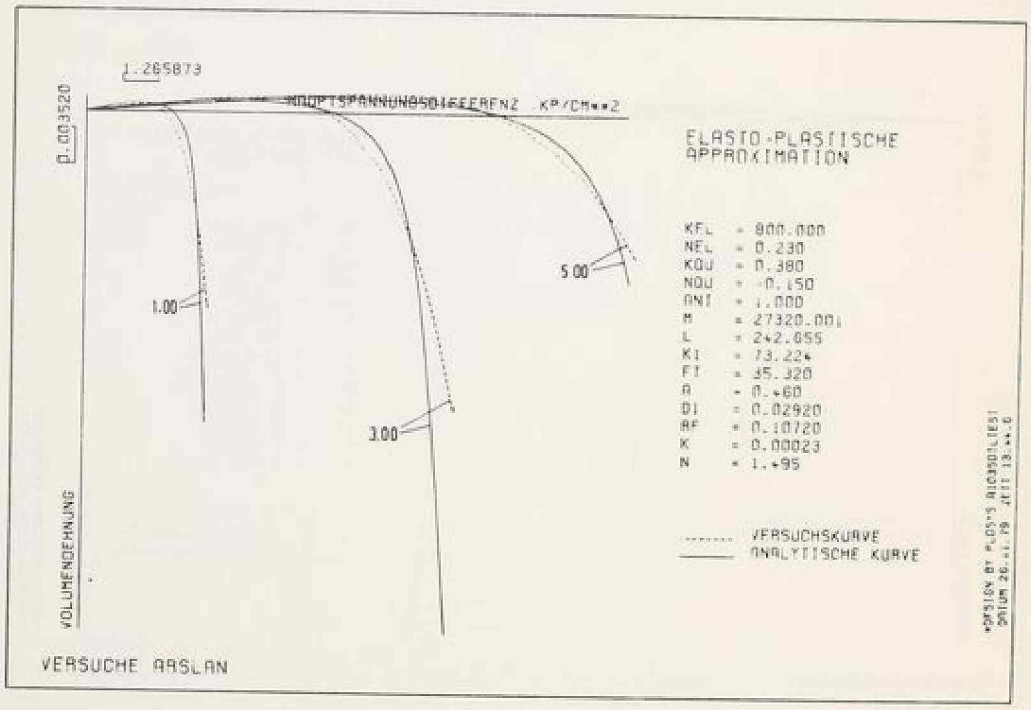




Abb. 5.3.7 Approximation für sehr dichten Sand bei Seitendrücken von 100 kN/m$^2$ (1.0 kp/cm$^2$), 300 kN/m$^2$ (3.0 kp/cm$^2$) und 500 kN/m$^2$ (5.0 kp/cm$^2$)

Erkennbar ist der infolge des $f_t$ - Wertes auftretende Knick in der Darstellung Hauptspannungsdifferenz - Vertikaldehnung. Die anfängliche Verdichtung des Sandes wird generell unterschätzt. Dies ist - nach Arslan - auf die bei mitteldichtem bis dichtem Sand festgestellte Anisotropie zurückzuführen, die im Stoffgesetz nicht berücksichtigt wird. Der Beginn der Auflockerung wird dagegen sehr gut erfaßt. Bei der Auswertung der Versuche mit sehr dichtem Sand (Abb. 5.3.6 für kleine und Abb. 5.3.7 für größere Spannungen) wird die Lastsetzungskurve sehr gut und die Volumendehnung in nicht mehr verbesserungsfähigem quantitativen Ausmaß getroffen. Bei diesem sehr dichten Sand hat Arslan auch nahezu vollständige Isotropie festgestellt, die sich dann konsequent in besserer Approximierbarkeit äußert.

Eine Reihe von triaxialen Spannungswegen, die von Arslan im Versuch gefahren wurden, konnten mit seinem Ansatz voll erfaßt werden. Eine Gegenüberstellung von Messung und rechnerischem Verhalten findet sich in seiner Arbeit. Der Nachweis, daß dieses elastoplastische Stoffgesetz mehr kann als einen

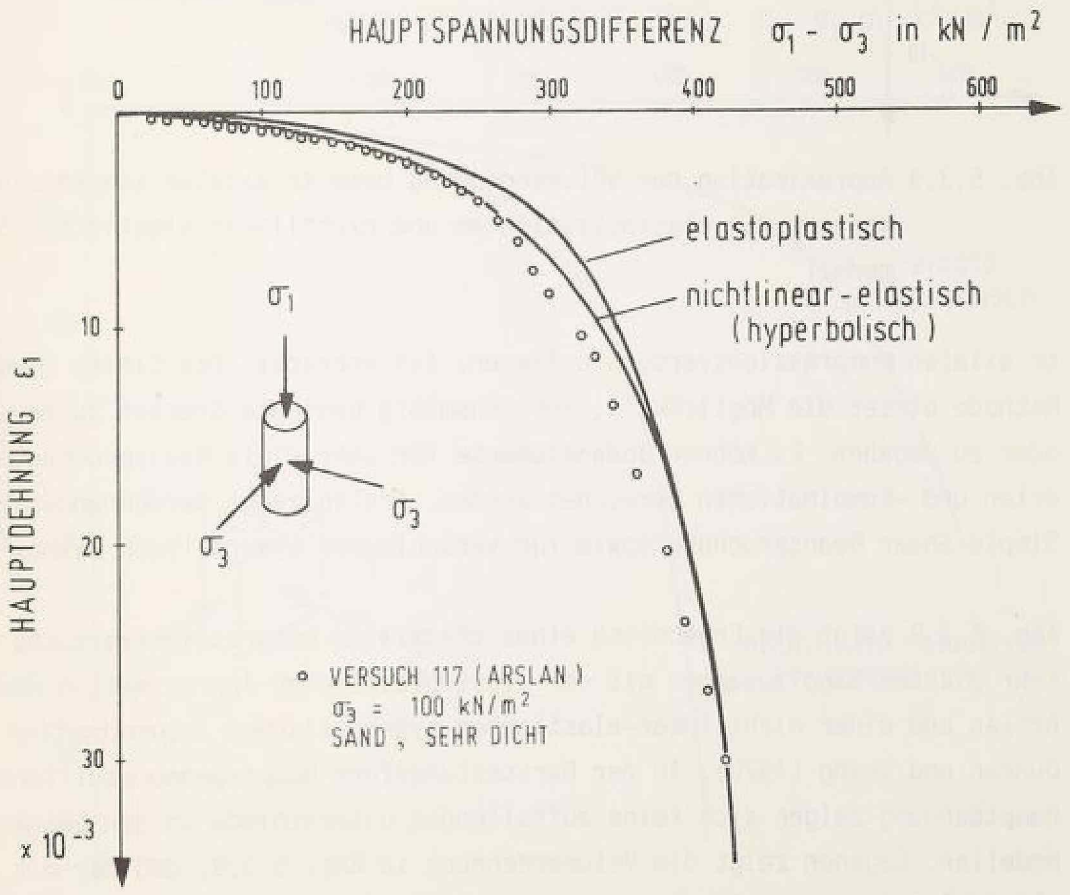



Abb. 5.3.8 Approximation der Spannungsdehnungsbeziehung beim triaxialen Kompressionsversuch mit elastoplastischem und nichtlinear-elastischem Stoffmodell

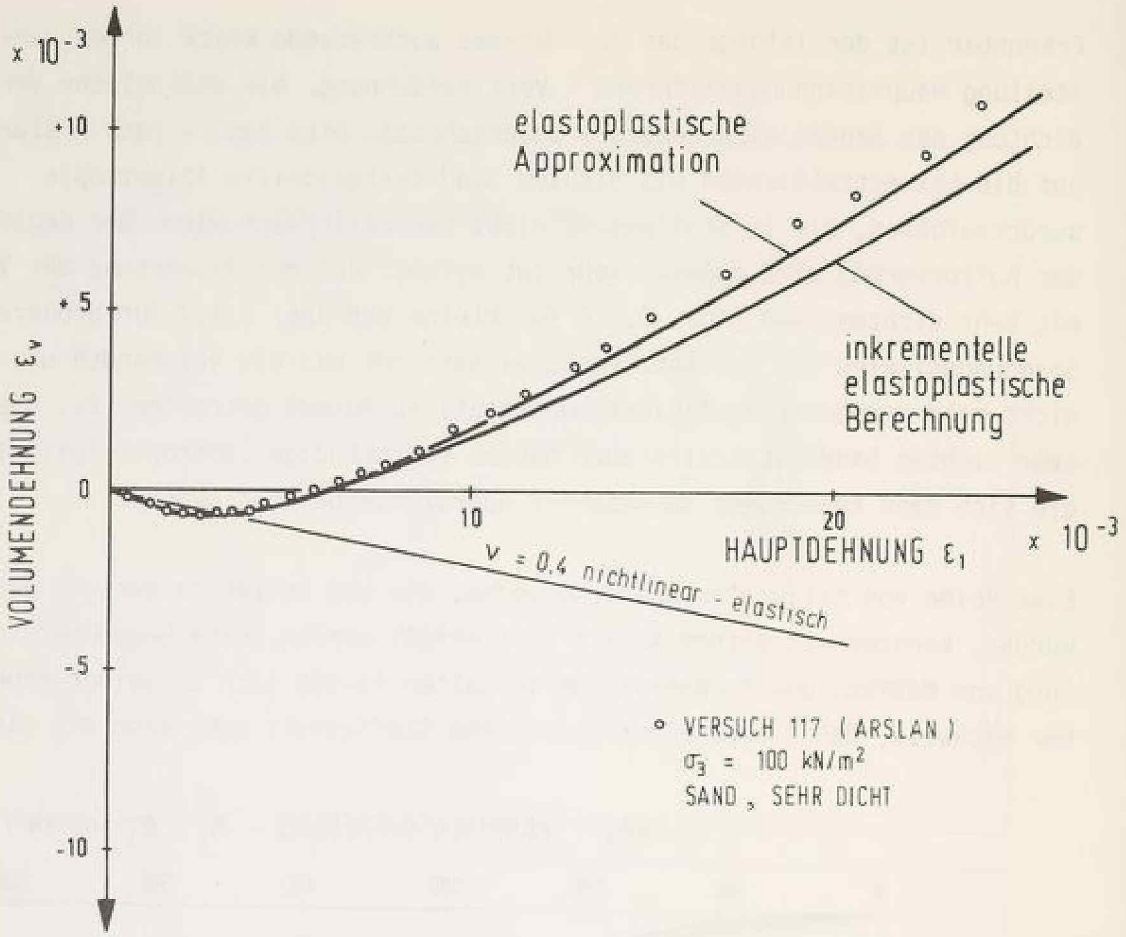



Abb. 5.3.9 Approximation der Volumendehnung beim triaxialen Kompressionsversuch mit elastoplastischem und nichtlinear-elastischem Stoffmodell

triaxialen Kompressionsversuch erfassen, ist erbracht. Die Finite Element Methode bietet die Möglichkeit, versuchsmäßig bedingte Grenzen zu erweitern oder zu umgehen. Es können Bodenelemente für sehr viele Beanspruchungsarten und -Kombinationen berechnet werden. Arslan zeigt Berechnungen mit Simple Shear Beanspruchung sowie für verschiedene b-Werte nach Bishop (1966).

Abb. 5.3.8 zeigt die Ergebnisse eines triaxialen Kompressionsversuchs bei sehr dichtem Sand zusammen mit der elastoplastischen Approximation nach Arslan und einer nichtlinear-elastischen hyperbolischen Approximation nach Duncan und Chang (1970). In der Darstellungsform Hauptspannungsdifferenz - Hauptdehnung zeigen sich keine auffallenden Unterschiede in den beiden Modellen. Dagegen zeigt die Volumendehnung in Abb. 5.3.9, daß nur mit dem elastoplastischen Stoffgesetz das Verhalten erfaßt werden kann. Die Approximation liegt sehr dicht bei den Messwerten. Etwas unterhalb liegen die

Ergebnisse einer inkrementellen elastoplastischen Berechnung. Infolge der Größe des gewählten Spannungsinkrements von 20 kN/m$^2$ folgt zwangsläufig eine vor allem im Bereich der stärksten Krümmung der Volumendehnungskurve stark abdriftende rechnerische Kurve.Die Inkremente wären also hier zu verkleinern.

Als Ausgangsspannungszustand wurde allseitig 100 kN/m$^2$ gewählt. Denken wir uns nun ein Bodenelement (Abb. 5.3.10), das ebenfalls allseitig mit 100 kN/m$^2$ als Anfangszustand belastet ist. Bei einer Berechnung mit elastoplastischem und nichtlinear-elastischem Modell, die im axialsymmetrischen Zustand zu nahezu gleichem vertikalen Dehnungsverhalten führte, bewirkt eine Vergrößerung der Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_3$ sehr unterschiedliches Verhalten. Die nichtlinear-elastische Rechnung führt im ebenen Verformungszustand bei der gleichen Hauptspannungsdifferenz zum Bruch wie im axialsymmetrischen Zustand: Es gehen nur größte und kleinste Hauptspannung in die Bruchbedingung ein. Da bei der elastoplastischen Rechnung die mittlere Hauptspannung eingeht, verhält sich das Bodenelement steifer und geht erst bei einer erheblich

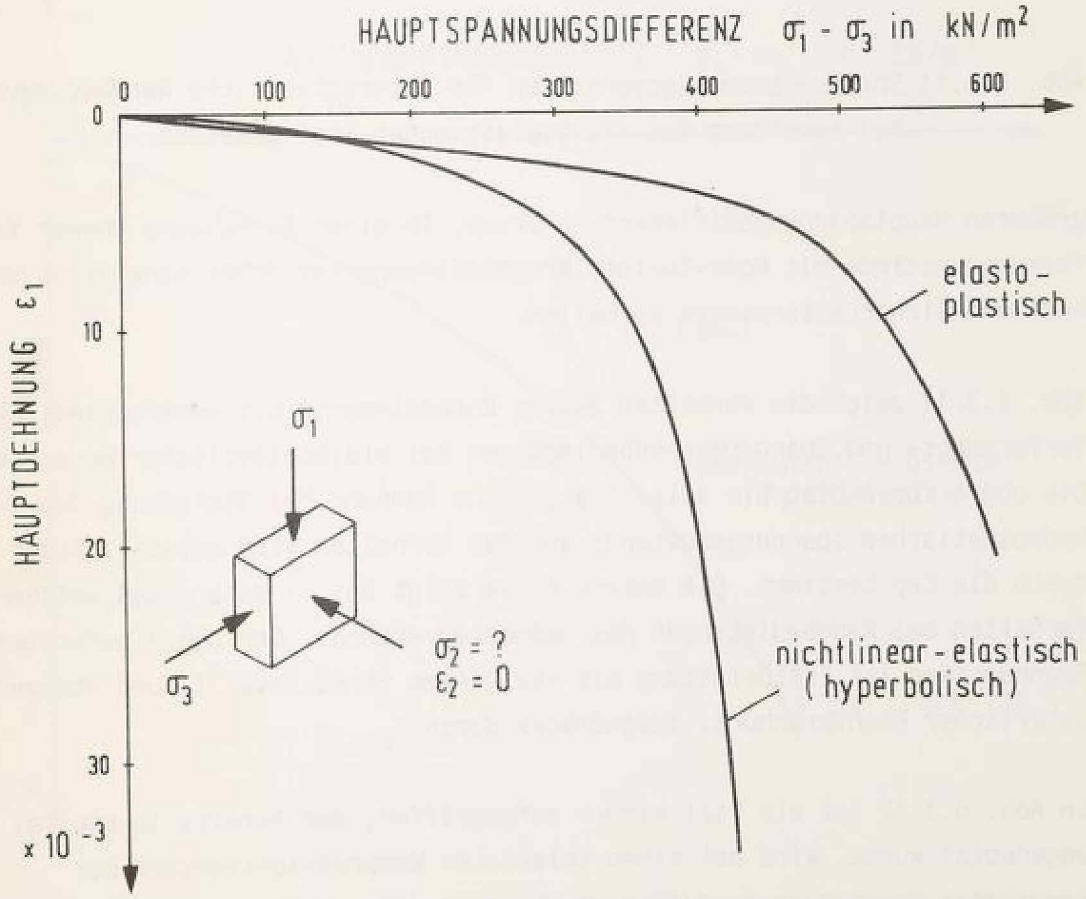



Abb. 5.3.10 Unterschiedliches Verhalten im ebenen Verformungszustand in Abhängigkeit vom Stoffmodell

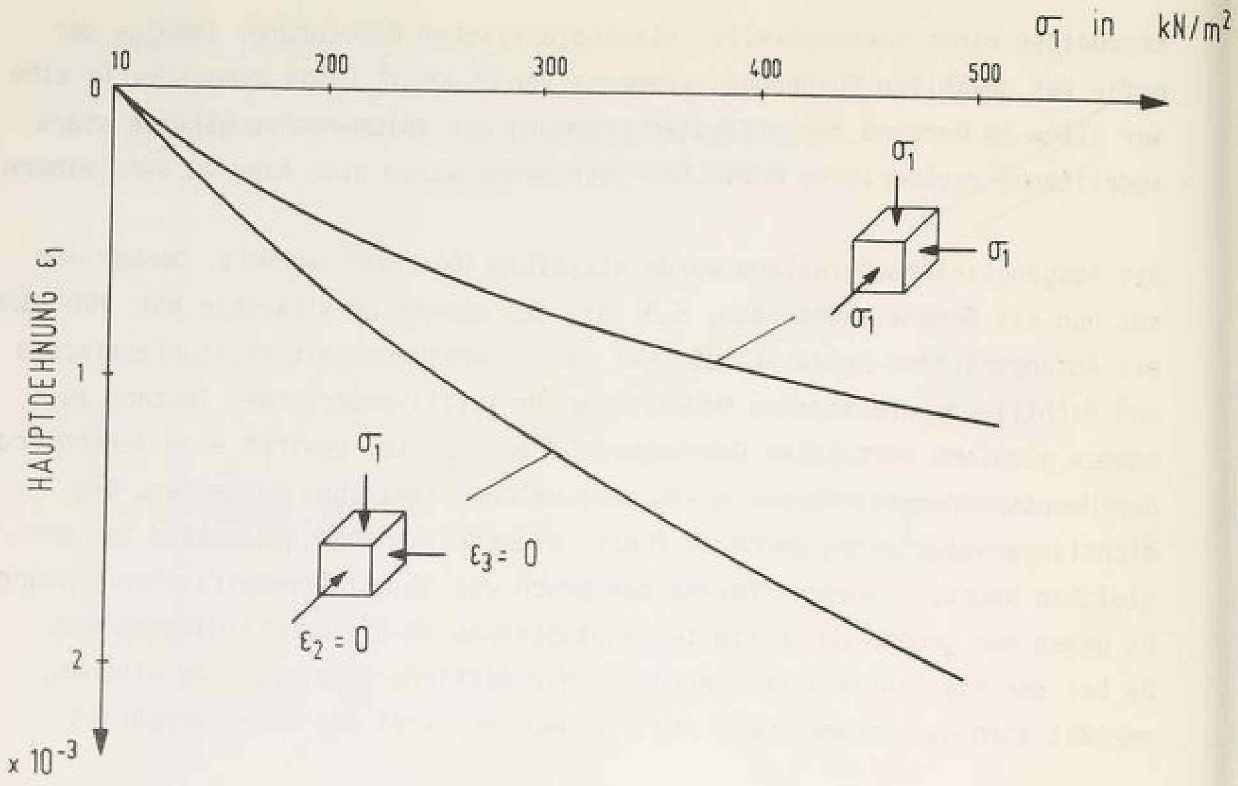



Abb. 5.3.11 Spannungsdehnungsverhalten für unterschiedliche Randbedingungen bei Anwendung des elastoplastischen Stoffgesetzes

größeren Hauptspannungsdifferenz zu Bruch. In einer Berechnung ebener Verformungszustände mit Mohr-Coulomb Bruchbedingung ist daher eine nicht unerhebliche Sicherheitsreserve enthalten.

Abb. 5.3.11 zeigt das Verhalten zweier Bodenelemente mit unterschiedlichen Verformungs- und Spannungsrandbedingungen bei elastoplastischer Berechnung. Die obere Kurve gibt die allseitig gleiche Dehnung bei Steigerung des hydrostatischen Spannungszustands an. Das Verhalten wird ausschließlich durch die Cap bestimmt. Die untere Kurve zeigt das - naturgemäß weichere - Verhalten bei Randbedingungen des Oedometerversuchs. Der dabei auftretende Spannungsweg ist Erstbelastung mit steigendem Stresslevel $f_1$ und steigender sphärischer Beanspruchung, ausgedrückt durch $f_2$ .

In Abb. 5.3.12 ist ein Fall wieder aufgegriffen, der bereits in Kapitel 2 angedeutet wurde. Wird bei einem triaxialen Kompressionsversuch bei konstanter Hauptspannungsdifferenz der allseitige Zelldruck verringert, so wird im Versuch immer eine zusätzliche Zusammendrückung der Probe registriert. Das elastoplastische Stoffgesetz ist in der Lage, diesen

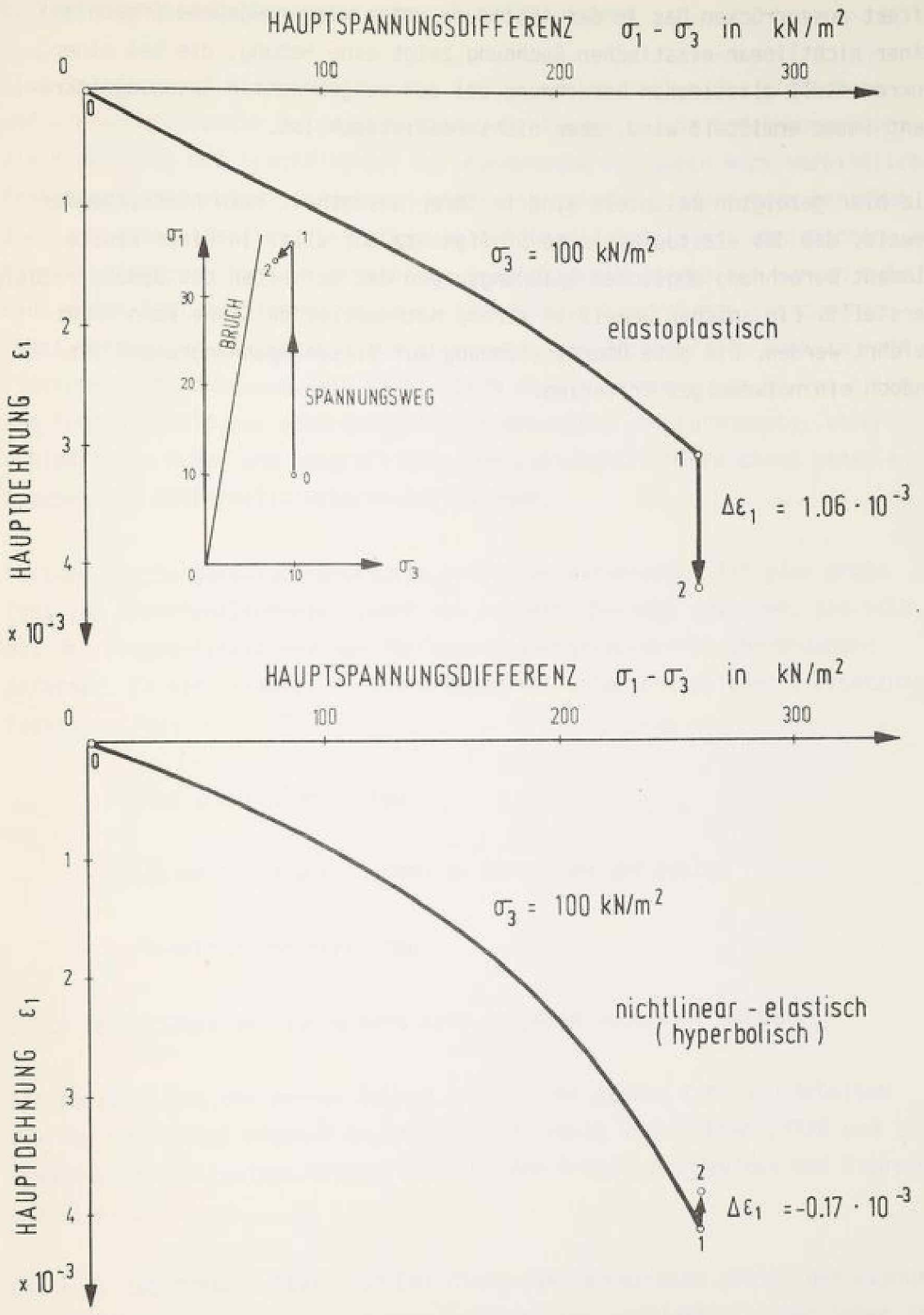



Abb. 5.3.12 Zusätzliche Verformung infolge Verminderung des Zelldrucks im triaxialen Kompressionsversuch nach elastoplastischem (oben) und nichtlinear-elastischem Stoffmodell (unten)

Effekt auszudrücken.Das in der Abbildung unten wiedergegebene Ergebnis einer nichtlinear-elastischen Rechnung zeigt eine Hebung, die bei einer inkrementell-elastischen Berechnung bei dem aufgebrachten Spannungsinkrement immer ermittelt wird, aber nicht realistisch ist.

Die hier gezeigten Beispiele sind in ihrer Gesamtheit kein hinreichender Beweis, daß das elastoplastische Stoffgesetz auf allen in einer Finite Element Berechnung möglichen Spannungswegen das Verhalten des Bodens richtig darstellt. Ein solcher Beweis im streng mathematischen Sinne kann nicht geführt werden. Die gute Übereinstimmung auf diesen Spannungswegen ist jedoch ein notwendiges Kriterium.

## 6. Verformungsverhalten unter einem Einzelfundament

Eine Gründung auf Einzelfundamenten ist in vielen Fällen die einfachste und wirtschaftlichste Gründungsmethode. Es liegen reiche Erfahrungen vor; die Berechnung der Tragfähigkeit der Fundamente ist durch Norm verbindlich festgelegt. Die zugrundeliegenden einfachen Berechnungsverfahren beziehen sich auf stark idealisierte Fälle, so daß in der Praxis mit empirischen Korrekturfaktoren für die errechnete Tragfähigkeit gearbeitet werden muß. Eine große Zahl von Versuchen in kleinem und großem Maßstab ist durchgeführt worden, um die Empirie zu untermauern und gegebenfalls auch zu modifizieren (z.B. Muhs und Weiß 1971). Sinn dieser Versuche war es vor allem, die Tragfähigkeit bei unterschiedlicher Geometrie des Fundaments, unterschiedlichem Boden und unterschiedlichem Lastangriff hinreichend genau anzugeben und Sicherheitsfaktoren festzulegen.

Seitdem leistungsfähige numerische Verfahren existieren, ist eine große Zahl von Veröffentlichungen (mehr als hundert) bekannt geworden, die sich mit der Tragfähigkeit und dem Verformungsverhalten von Flachgründungen befassen. Es sind hierbei einige Gruppen mit unterschiedlicher Zielsetzung festzustellen:

- Prüfen von Stoffmodellen
- Genauigkeitsuntersuchungen an Elementen und Netzen
- Nachrechnen von Versuchen.

Echte Vorhersagen des Verhaltens sind hingegen noch sehr selten.

Als Beispiel aus der ersten Gruppe sei aus der großen Zahl von Arbeiten die von Christian, Hagmann und Marr (1977) sowie von Richter (1978 und 1979) erwähnt. In der zweiten Gruppe ist z.B. die Arbeit von Savidis und Richter (1978) einzuordnen.

Generell ist festzuhalten, daß bei diesen beiden Gruppen sowohl die Eignung des Stoffmodells als auch die "Genauigkeit" der erreichten Lösung immer an einfachen Lösungen der Plastizitätstheorie oder sogar an Normen gemessen wird. Dieser Standpunkt ist mehr als nur unzureichend; er ist aber andererseits verständlich, wenn man weiß, wie wenig geeignete Modellversuche oder

Großversuche es gibt, für die auch das Bodenverhalten ausreichend genau bekannt ist. Weiterhin ist zu bedenken, daß selbst sorgfältige Laborversuche mit dem verwendeten Boden nicht unbedingt das Verhalten des Bodens in situ unter dem Fundament wiedergeben müssen.

In diesen Kreis hinein begeben sich diejenigen aus der dritten Gruppe, die eigene oder fremde Versuche nachrechnen wollen. Sie benötigen hochentwickelte Stoffmodelle einerseits und verläßliche Messungen andererseits.

Viele Versuche sind in sehr kleinem Maßstab durchgeführt worden (Fundamentbreite etwa 5 - 10 cm) und bringen daher von der Meßtechnik her einige Schwierigkeiten. Insbesondere werden sehr selten Verformungen im Boden gemessen. Eine Ausnahme stellt die Arbeit von Zangl (1977) dar, der mittels Röntgentechnik und vorher eingebauten Bezugspunkten die Verformungen im Kontinuum messen kann. Nachteilig für ihn ist, daß wegen der begrenzten Durchdringungsfähigkeit der Strahlung die Abmessungen seines Modells stark begrenzt sind. Insbesondere kann er nur Versuche im ebenen Verformungszustand, also für unendlich lange Streifenfundamente durchführen.

Versuche in größerem Maßstab bis etwa 1:1 sind sehr aufwendig. Es ist zu unterscheiden zwischen Versuchen zur Feststellung der Tragfähigkeit (z.B. die Degebo-Versuche) und Versuchen zur Ermittlung des Verformungsverhaltens unter und neben Fundamenten. Eggestad (1963) verwendet im Boden eingebaute Induktionsspulen zur Messung horizontaler und vertikaler Verformungen. Der Durchmesser des von ihm untersuchten Fundaments beträgt jedoch nur 20 cm bei einem Durchmesser des Versuchskastens von 113 cm. Wibel (1971) führt Versuche mit einem Fundamentdurchmesser von 25 cm durch. Dabei werden Sohlnormal- und Schubspannungen gemessen.

Die Versuche an Einzelfundamenten mit den bisher größten bekanntgewordenen Fundamentdurchmessern von 75 cm, 100 cm und 150 cm und Messungen im Boden selbst wurden am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt durchgeführt (Breth, Arslan, Rückel und Stroh 1976 sowie Arslan 1978). Die Versuche wurden auf dichtem und sehr dichtem Sand in einer 5 x 5 m großen und bis zu 3 m tiefen Grube durchgeführt. Es war nicht Ziel der Versuche, Grenzlasten zu erreichen, sondern Verformungen des Fundaments, der Sandoberfläche und des Bodens unter und neben dem Fundament in horizontaler und vertikaler Richtung bei Gebrauchslasten zu messen. Die Abmessungen der Grube wären nicht geeignet gewesen, bei den vorgegebenen

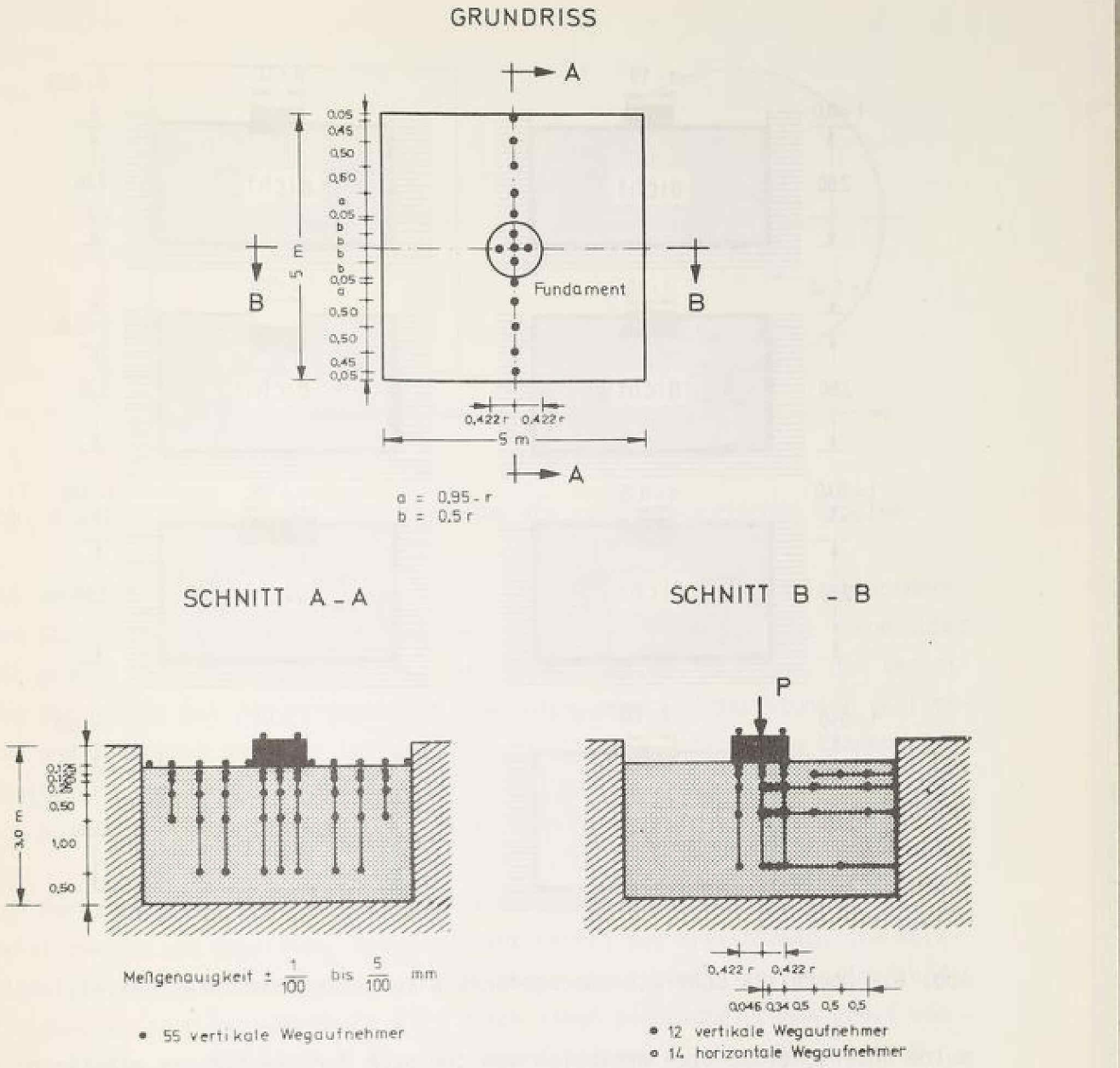



Abb. 6.1 Abmessungen der Versuchsgrube und Meßeinrichtungen (nach Breth et.al.)

Fundamentabmessungen Grenztragfähigkeiten zu bestimmen. Es hat sich sehr deutlich gezeigt, daß die Verformungen durch die Randbedingungen stark beeinflußt wurden.

Die Abmessungen der Grube sowie die installierten Meßeinrichtungen sind Abb. 6.1 zu entnehmen. Einen Überblick über die durchgeführten Versuche gibt Abb. 6.2 .

Wesentliches Ergebnis der Versuche ist, daß deutliche Horizontalverformungen unter und neben dem Fundament festzustellen sind. Die gemessene Setzungs-

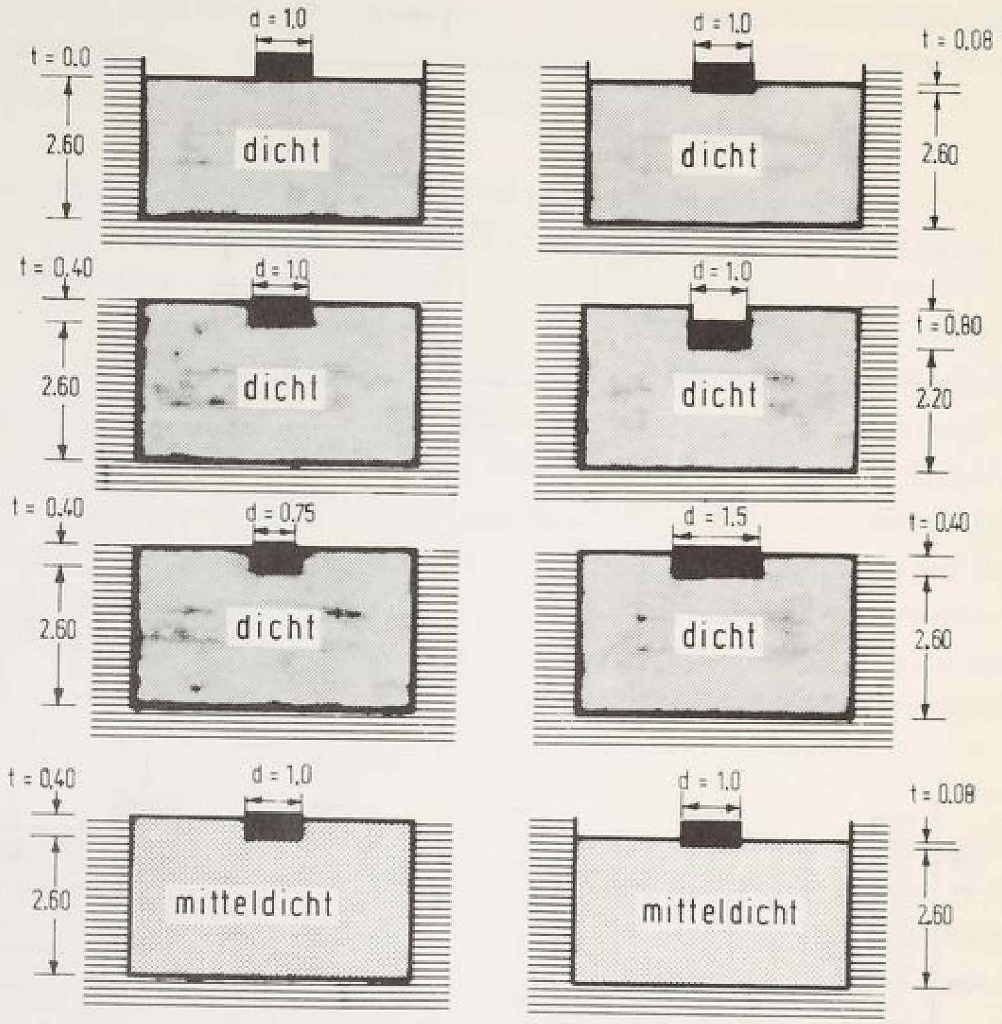



Abb. 6.2 Überblick über die durchgeführten Versuche (nach Breth et.al.)

mulde unterscheidet sich erheblich von der nach der Theorie des elastisch isotropen Halbraums berechneten. Insbesondere treten bei dichtem Sand bei höheren Laststufen Hebungen der Geländeoberfläche auf. In all diesen Punkten stimmen die Beobachtungen mit denen von Eggestad (1963) überein.

Es bietet sich nun an, die sehr genauen und für viele Punkte im Boden vorliegenden Messungen zu benutzen, um die Qualität von Stoffmodellen zu überprüfen. Die früheren Versuche, das Verformungsverhalten unter diesen Fundamenten mit Hilfe eines nichtlinear-elastischen hyperbolischen Stoffansatzes zu berechnen, sind gescheitert. Die Lastsetzungskurve nach der Rechnung ist um Größenordnungen zu weich. Berücksichtigt man, daß der dichte Sand starke Dilatanz aufweist, ist das Versagen des hyperbolischen Ansatzes verständlich.

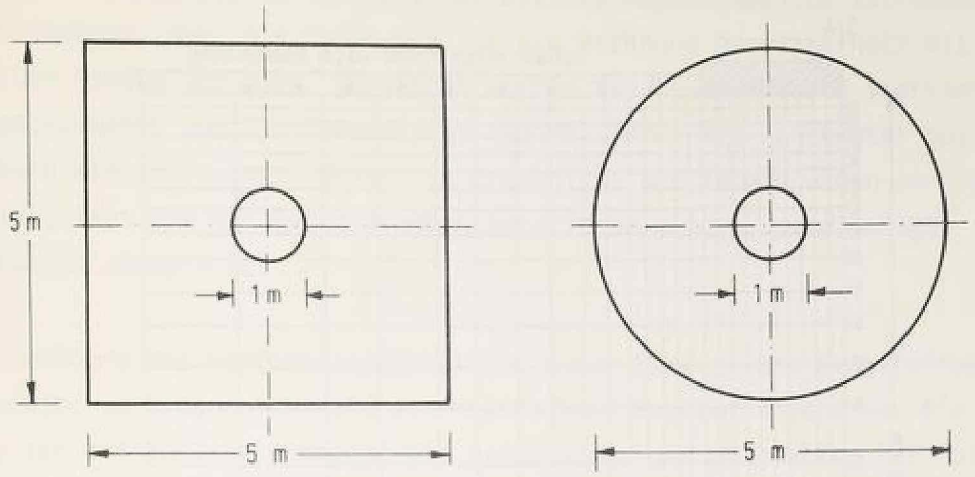



Abb. 6.3 Idealisierung der Versuchsgrube als axialsymmetrisches Problem

Mit dem nunmehr vorliegenden Stoffgesetz von Arslan (1980) und insbesondere den Stoffparametern für einen Sand, der dem in der Versuchsgrube eingebauten mit großer Wahrscheinlichkeit sehr nahe kommt, besteht Hoffnung, das Verhalten des Sandes bei den vorgegebenen Randbedingungen und Belastungen qualitativ und innerhalb gewisser Grenzen auch quantitativ erfassen zu können. Die Ermittlung der Parameter ist in Kapitel 5.3 geschildert worden, so daß hier nur noch eine kurze Beschreibung des Berechnungsablaufs erforderlich ist.

Zur Berechnung mit Hilfe der Finite Element Methode wird das Problem als axialsymmetrisch angesehen. Das Fundament selbst ist kreisförmig; die Belastung bei den Versuchen war mit großer Genauigkeit zentrisch. Die im Grundriß quadratische Versuchsgrube wird durch einen einbeschriebenen Kreis von 2.5 m Radius ersetzt (Abb. 6.3). Das Betonfundament selbst wird nicht abgebildet. Die Belastung wird unmittelbar in den Sand eingeleitet in Form von vorgeschriebenen Vertikalverschiebungen. Dadurch wird eine gleichmäßige Setzung der Fundamentsohle simuliert. Aus der Vielzahl der in Abb. 6.2 dargestellten Versuche wird ein charakteristischer Versuch ausgewählt:

- Durchmesser 1 m; Einbindetiefe 0.4 m.

Von einer Nachrechnung des Fundaments mit 1.5 m Durchmesser wird abgesehen, da sich bei den Versuchen eine starke horizontale Aussteifung gegen die seitliche Begrenzung der Versuchsgrube eingestellt hat. Die Lastverformungskurve ergibt einen deutlichen Wendepunkt, woraus man schließen kann, daß

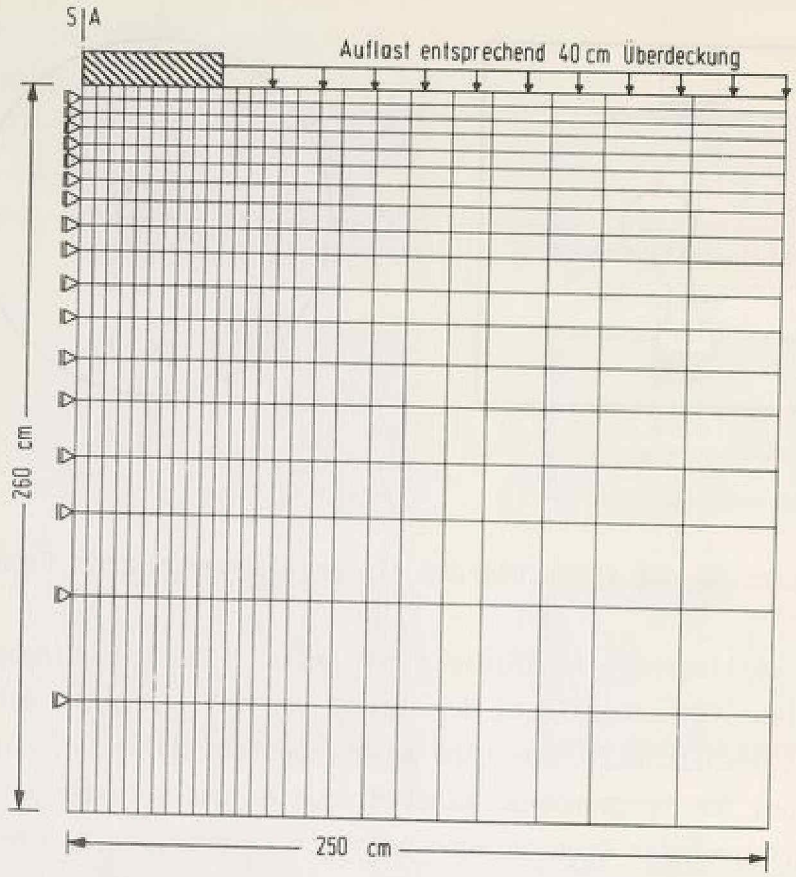



Abb. 6.4 Finite Element Struktur und Abmessungen

die Abmessungen der Grube das Verhalten sehr stark beeinflussen. Der kleinere Durchmesser von 0.75 m zeigt kein signifikant anderes Verhalten als der von 1 m und wird deshalb für die Berechnung ebenfalls nicht herangezogen.

Zusätzlich wird bei festgehaltener Einbindetiefe von 0.4 m statt eines dichten Sandes ein sehr dichter Sand angenommen. Dadurch soll festgestellt werden, in welcher Größenordnung der Einfluß der Lagerungsdichte liegt. Die Einbindetiefe von 0.4 m wird durch eine entsprechende Auflast in Höhe der Gründungssohle dargestellt. Diese Vorgehensweise ist üblich und reduziert den Rechenaufwand, da der Boden im Bereich der Einbindetiefe nicht durch Elemente diskretisiert werden muß. Die Gründungssohle wird als ideal glatt angenommen. Vergleichsberechnungen haben ergeben, daß dadurch die rechnerischen Sohlpressungen um etwa 5 % geringer sind als im ideal rauhen Fall. Ähnliche Ergebnisse wurden auch von Rückel (1979) bei großen biegesteifen Gründungsplatten erzielt. Der zusätzliche Aufwand zur Darstellung einer

beliebigen Rauhigkeit in der Sohlfuge mittels Fugenelementen ist daher nicht gerechtfertigt. Abb. 6.4 zeigt das für die Rechnung benutzte Netz mit den gewählten Randbedingungen. Verwendet wurden axialsymmetrische vierknotige Viereckselemente vom Typ Serendipity (Rückel 1979) mit konstanter Spannung innerhalb eines Elements. Bevor die Ergebnisse der Berechnungen im einzelnen diskutiert und mit den Messungen verglichen werden, sind einige Bemerkungen angebracht.

Die Berechnung des Verformungsverhaltens unter Einzel- und Streifenfundamenten wird im allgemeinen als ein "einfaches" Problem angesehen. Die Geometrie ist tatsächlich einfach, die Randbedingungen ebenfalls. Der Ablauf der Belastung ist klar und stellt keine großen Anforderungen an ein Finite Element Programm, im Gegensatz zu den Simulationen von Bauvorgängen in Kapitel 7. Tiefe und Breite des Elementnetzes haben auf das Ergebnis einer Berechnung im allgemeinen durchaus einen gewissen Einfluß. Im vorliegenden Fall sind sie jedoch durch die Abmessungen der Versuchsgrube vorgegeben. Die Berechnung wird daher fast ausschließlich durch die Art des Materialverhaltens bestimmt. Betrachtet man das Netz (Abb. 6.4), die vorgegebenen Randbedingungen und die Art der Belastung, stellt man fest, daß die Struktur über sehr wenige "äußere" Freiheitsgrade verfügt. Als "äußere" Freiheitsgrade kommen nur die Knoten an der Sandoberfläche in Frage. Das hier behandelte Problem hat daher extreme äußere Zwänge ("constraints"), die das Verformungsverhalten im Innern des Kontinuums maßgeblich beeinflussen. Bei inkompressiblem Material könnte sich das Fundament nur in dem Maße setzen, in dem sich die Geländeoberfläche hebt. Tritt Dilatanz auf, kann der Boden nur durch verstärktes Ausweichen reagieren. Wird dieses Ausweichen durch die äußeren Zwänge behindert, führt die Dilatanz zu einer starken Versteifung des Systems. Die Lastsetzungskurve des Fundaments ist daher ausschließlich durch das Verhalten der Sandoberfläche und durch die Volumencharakteristik des Sands bestimmt. Es ist also abzusehen, daß geringe Änderungen im Volumenverhalten das Gesamtverhalten der Struktur und die Lastsetzungskurve des Fundaments sehr weitgehend bestimmen. Das gilt im vorliegenden Fall in ganz besonderem Ausmaß, da die Begrenzungen der Versuchsgrube recht nah am Fundament liegen. Für die z.B. von Richter (1978 und 1979) vorgelegten Beispiele gilt es weit weniger, da das Fundament dort sehr klein ist im Vergleich zu den Strukturabmessungen.

Wenn daher Finite Element Rechnungen von Einzelfundamenten oder Streifenfundamenten als einfaches Problem angesehen werden, kann sich das nur auf

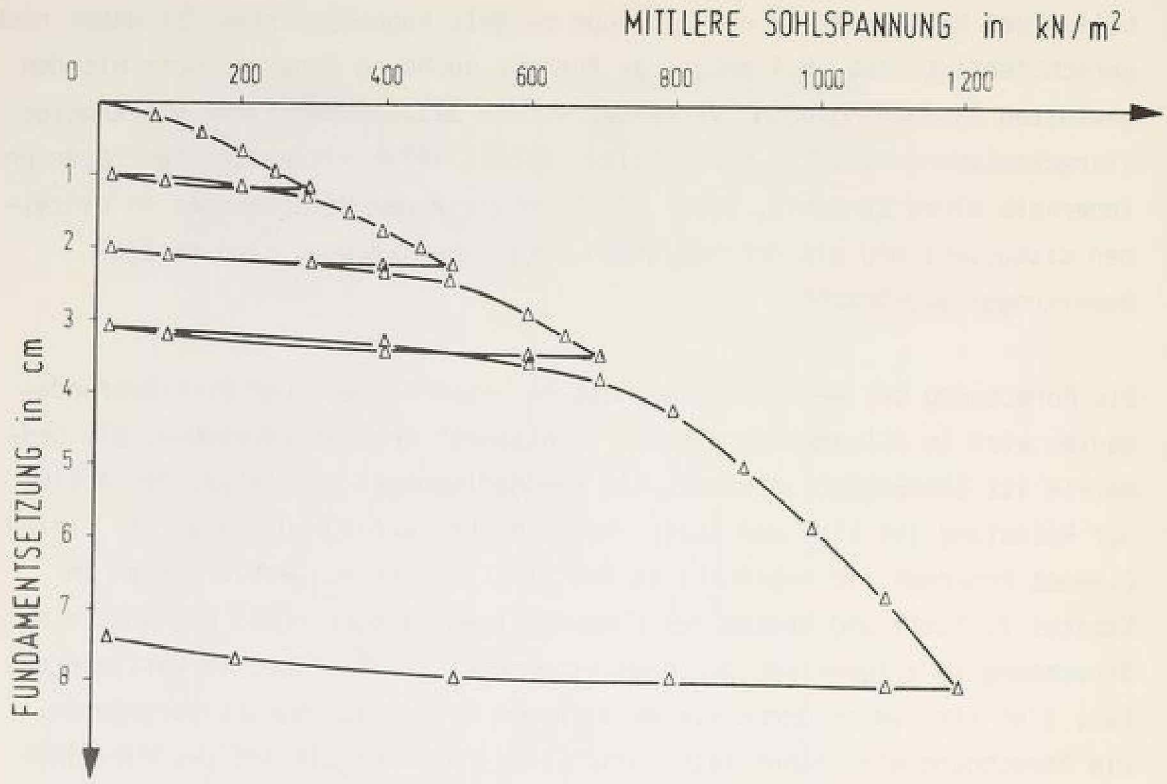



Abb. 6.5 Im Versuch durchgeführte Ent- und Wiederbelastungen (nach Breth et.al.)

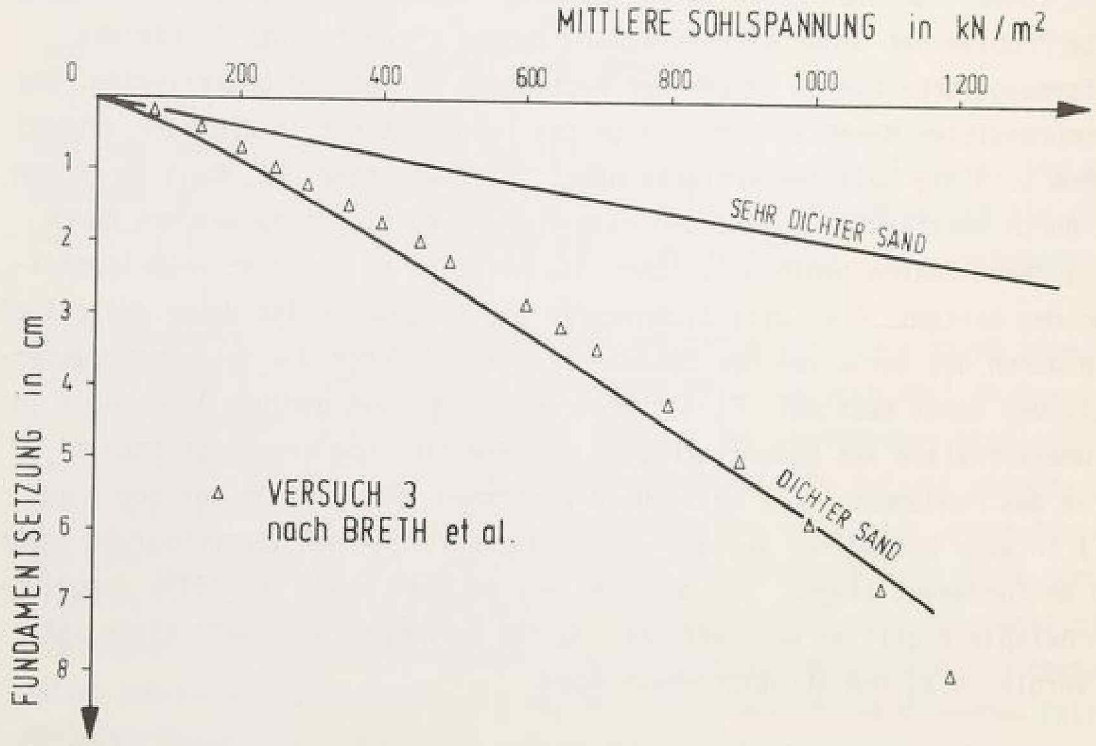



Abb. 6.6 Vergleich von Versuch und Rechnung

die einfache Geometrie und die Anforderungen hinsichtlich des Berechnungsablaufs beziehen. An das Stoffgesetz werden extrem hohe Anforderungen gestellt; vor allem dann, wenn die Berechnungsergebnisse wenigstens annähernd Messungen entsprechen sollen. Bei den hier vorgelegten Berechnungen wird dies erwartet.

Die Versuche von Breth et.al. (1976) und Arslan (1978) wurden mit einer großen Zahl von vollständigen Entlastungen durchgeführt. Die Hysteresisschleifen während Ent- und Wiederbelastung sind im größten Bereich kaum wahrnehmbar (Abb. 6.5). Bei Wiedereinmündung in den Erstbelastungsast ist die Vertikalverformung jedoch deutlich größer als zu Beginn der Entlastung. Da die Ent- und Wiederbelastung in dem benutzten Stoffgesetz zur Zeit nur durch einen vergleichsweise einfachen nichtlinear-elastischen Ansatz erfaßt wird, also die plastischen Effekte bei Entlastung nicht erfaßt werden, wurden bei der Nachrechnung der Versuche die Entlastungen nicht berücksichtigt.

Um in der Finite Element Berechnung bei vorgeschriebenen Vertikalverschiebungen des Fundaments die dazugehörigen Fundamentlasten zu erhalten, ist es üblich, nach Lösung des Gleichungssystems eine Einsetzkontrolle durchzuführen. Sie ergibt die zu den aufgezwungenen Verformungen gehörigen Knotenkräfte. Da die Einsetzkontrolle je nach gewähltem Gleichungsauflösungsalgorithmus einen erheblichen Mehraufwand an Rechenzeit bedeuten kann und für jedes Inkrement durchgeführt werden müßte, wird hier ein anderer Weg gewählt. Nach einer vorgeschriebenen Anzahl von Verformungsinkrementen werden für die unterhalb der Fundamentsohle gelegenen Elemente aus den Spannungen äquivalente Knotenkräfte errechnet.

Die Auftragung der gemessenen Lastverformungskurve des Fundaments und der errechneten Werte (Abb. 6.6) zeigt, daß sich bei dichtem Sand eine vernünftige Übereinstimmung ergibt. Für einen sehr dichten Sand setzt sich das Fundament nach der Rechnung wesentlich weniger. Diese Rechnung ist durch einen Versuch jedoch nicht belegt. Während sich bei dichtem Sand unter einer Fundamentsetzung von 7 cm eine mittlere Sohlspannung von 1170 $kN/m^2$ ergibt, führt die Reaktion des Bodens bei sehr dichtem Sand zu einer Sohlspannung von 6000 $kN/m^2$. In diesem Spannungsbereich ist wahrscheinlich eine deutliche Kornzertrümmerung vorhanden.

Angesichts dieser deutlichen Unterschiede im Lastsetzungsverhalten des Fundaments ist zu fragen, ob diese unterschiedlichen Ergebnisse aus den

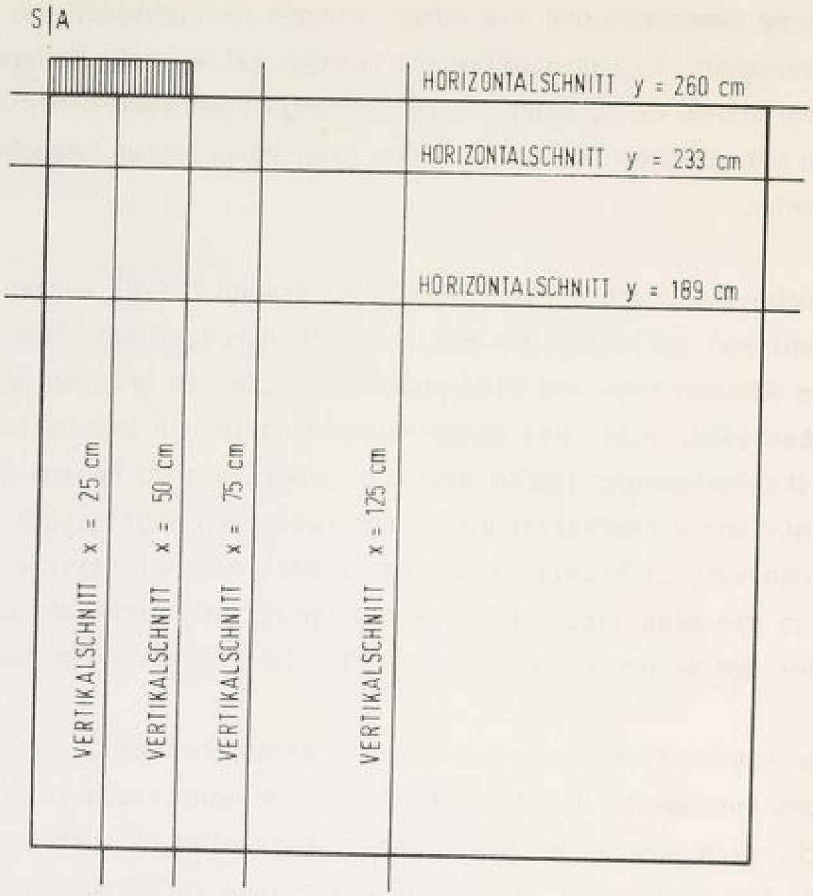



Abb. 6.7 Ausgewählte Schnitte für die Interpretation der Ergebnisse

Spannungsdehnungskurven des Triaxialversuchs vorherzusehen gewesen wären. Der Verfasser ist der Auffassung, daß die in der Approximation der Versuchswerte für sehr dichten Sand deutlich stärkere Dilatanz zwar qualitativ eine Tendenz zu größeren Sohlspannungen andeutet, jedoch nicht im festgestellten quantitativen Ausmaß mit dem Faktor 5.

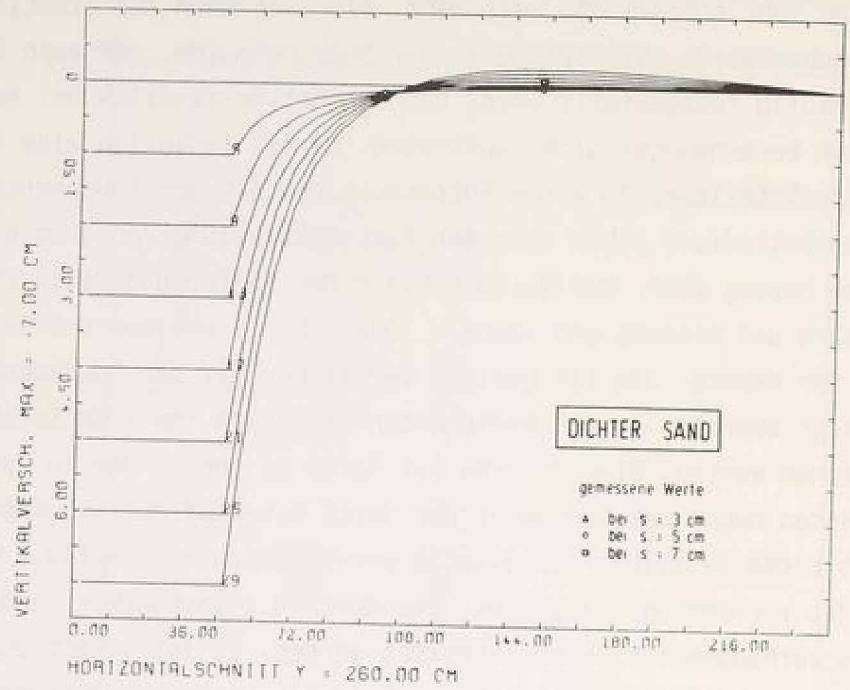
Es bleibt zu untersuchen, inwieweit dieser große Unterschied in den Sohlspannungen sich auch in anderen Verhaltenscharakteristiken widerspiegelt. Hierzu werden in verschiedenen horizontalen und vertikalen Schnitten durch die Versuchsgrube die beiden Berechnungen mit dichtem und sehr dichtem Sand gegenübergestellt. Abb. 6.7 gibt einen Überblick über die ausgewählten Querschnitte. In den Kurven für dichten Sand sind zusätzlich die gemessenen Verformungswerte für 3 cm, 5 cm und 7 cm Fundamentsetzung eingetragen, soweit sie im jeweiligen Schnitt aus den Versuchen bekannt sind. Die an den Kurven angegebenen Nummern 5, 9, 13, 17, 21, 25 und 29 bezeichnen die für die Darstellung ausgewählten Laststufen von 1 cm Setzung bis 7 cm in Schritten von 1 cm.

Ein horizontaler Schnitt in Höhe der Gründungssohle (y-Koordinate 260 cm) zeigt die Vertikalverformungen (Abb. 6.8). Neben dem Fundament nehmen die Verformungen sehr schnell ab, weit mehr, als sich nach der Elastizitätstheorie ergeben würde. Ein Sprung in der Setzungsmulde, der auch bei Messungen häufig festgestellt wird, kann selbstverständlich bei kontinuumsmechanischen Berechnungen nicht auftreten. Es ist lediglich eine starke Gradiente feststellbar. In einer Entfernung von 1 R vom Fundamentrand ( R = Fundamentradius) gehen ab einer Fundamentsetzung von 1 cm die Setzungen in eine Hebung über. Der Nulldurchgang der Verformungslinie stimmt nach Rechnung und Messung gut überein. Quantitativ weniger befriedigend ist die Größe der Hebung. Sie ist gering, verglichen mit der Fundamentsetzung selbst, liegt aber bis zu der berechneten Laststufe von 7 cm Setzung über den gemessenen Werten. Eine Ursache ist darin zu sehen, daß in der Berechnung der Boden neben dem Fundament nur durch eine Auflast simuliert, nicht aber durch Elemente selbst dargestellt wurde. Durch eine Auflast kann die Zwängung des Verformungsverhaltens, die durch die vorhandene Sandlage zweifellos vorhanden ist, nicht erreicht werden. Es ist jedoch zu erwarten, daß bei noch größeren Fundamentsetzungen im Versuch auch progressiv stärker werdende Hebungen aufgetreten wären.

Die Berechnungen mit sehr dichtem Sand zeigen gleiche Tendenzen. Wegen der stärkeren Dilatanz sind die Hebungen in dem Horizontalschnitt in Höhe der Gründungssohle allerdings noch stärker.

Ein Horizontalschnitt 25 cm unter Fundamentsohle (Abb. 6.9) und 70 cm unter Sohle (Abb. 6.10) stellt analoges Verhalten dar. Der in Höhe der Gründungssohle zu beobachtende Knick in der Verformungslinie wird mehr und mehr ausgerundet, die Hebungen werden geringer, bleiben aber bei dichtem und sehr dichtem Sand tendenziell in gleichem Verhältnis zueinander.

Ein Vertikalschnitt im Viertelspunkt des Fundamentdurchmessers (Abb. 6.11) zeigt den Verlauf der Horizontalverformungen über die Tiefe. Bei kleinen Setzungen bis zu etwa 1.5 cm bewegt sich der Boden in Sohlnähe nach innen hin zur Symmetrieachse. Bei rauher Sohle wären daher die Schubspannungen nach innen gerichtet. Dieses Verhalten entspricht der Elastizitätstheorie. Es konnte für niedrige Laststufen von Wibel (1971) und Zangl (1977) experimentell beobachtet und auch rechnerisch bestätigt werden. Das Maximum der Horizontalverformungen beträgt bei Fundamentsetzung s = 7 cm etwa 0.5 cm in diesem Schnitt sowohl bei dichtem als auch bei sehr dichtem Sand.



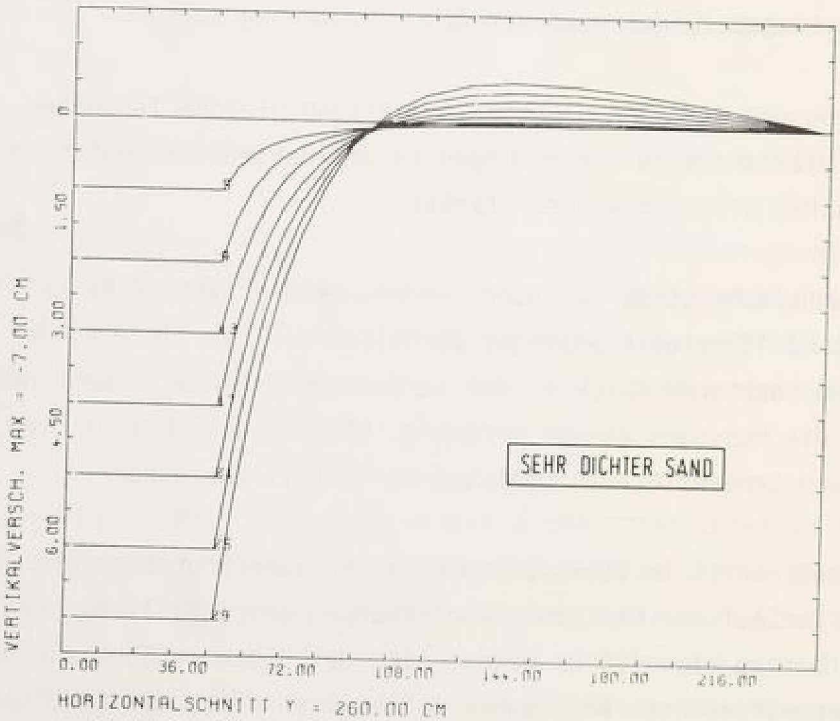
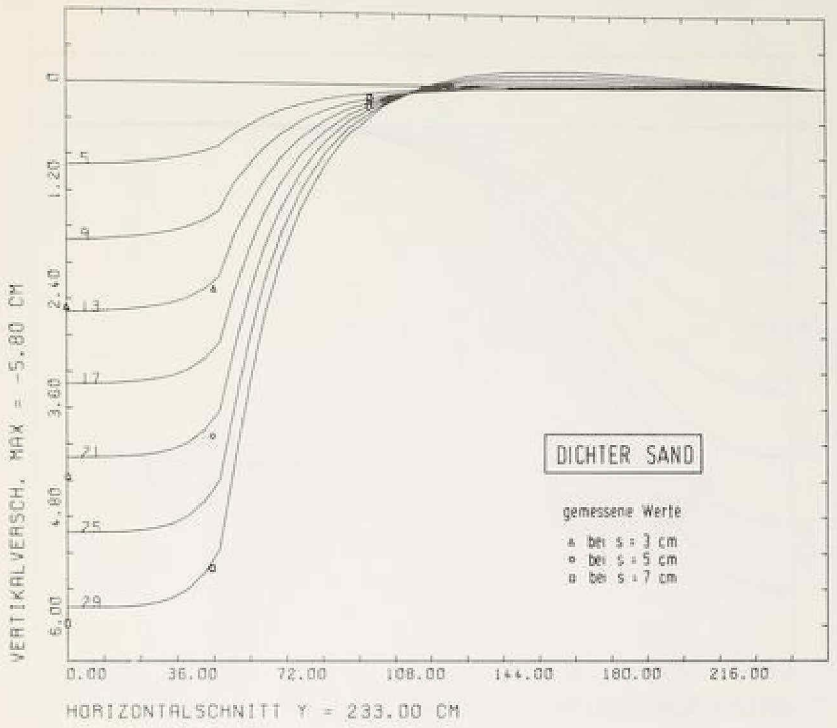




Abb. 6.8 Vertikalverformungen in einem Horizontalschnitt in Höhe der Gründungssohle



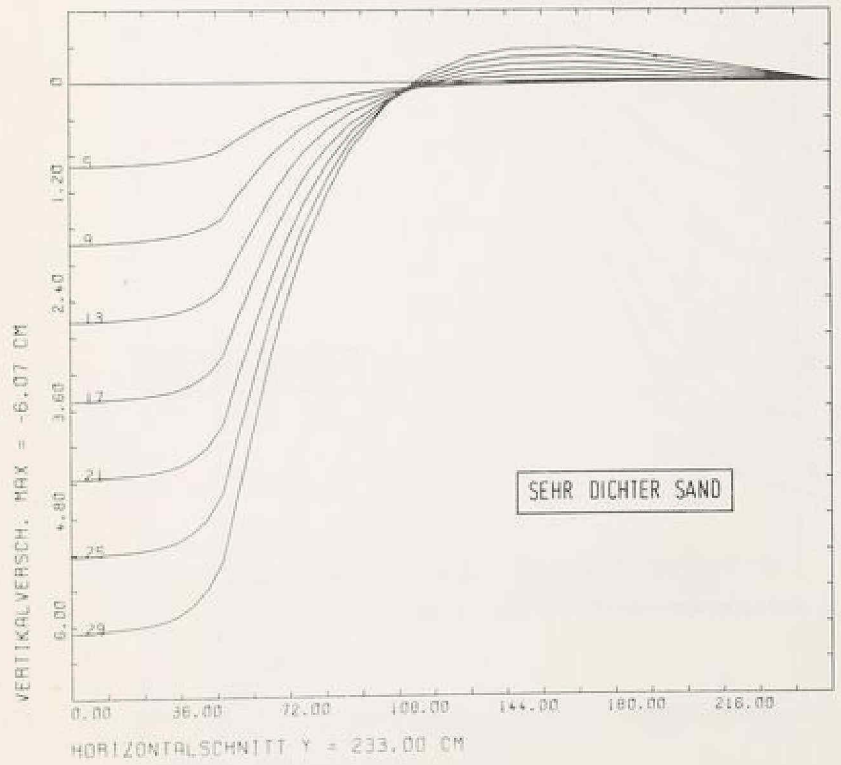




Abb. 6.9 Vertikalverformungen in einem Horizontalschnitt
25 cm (0.5 R) unter Gründungssohle

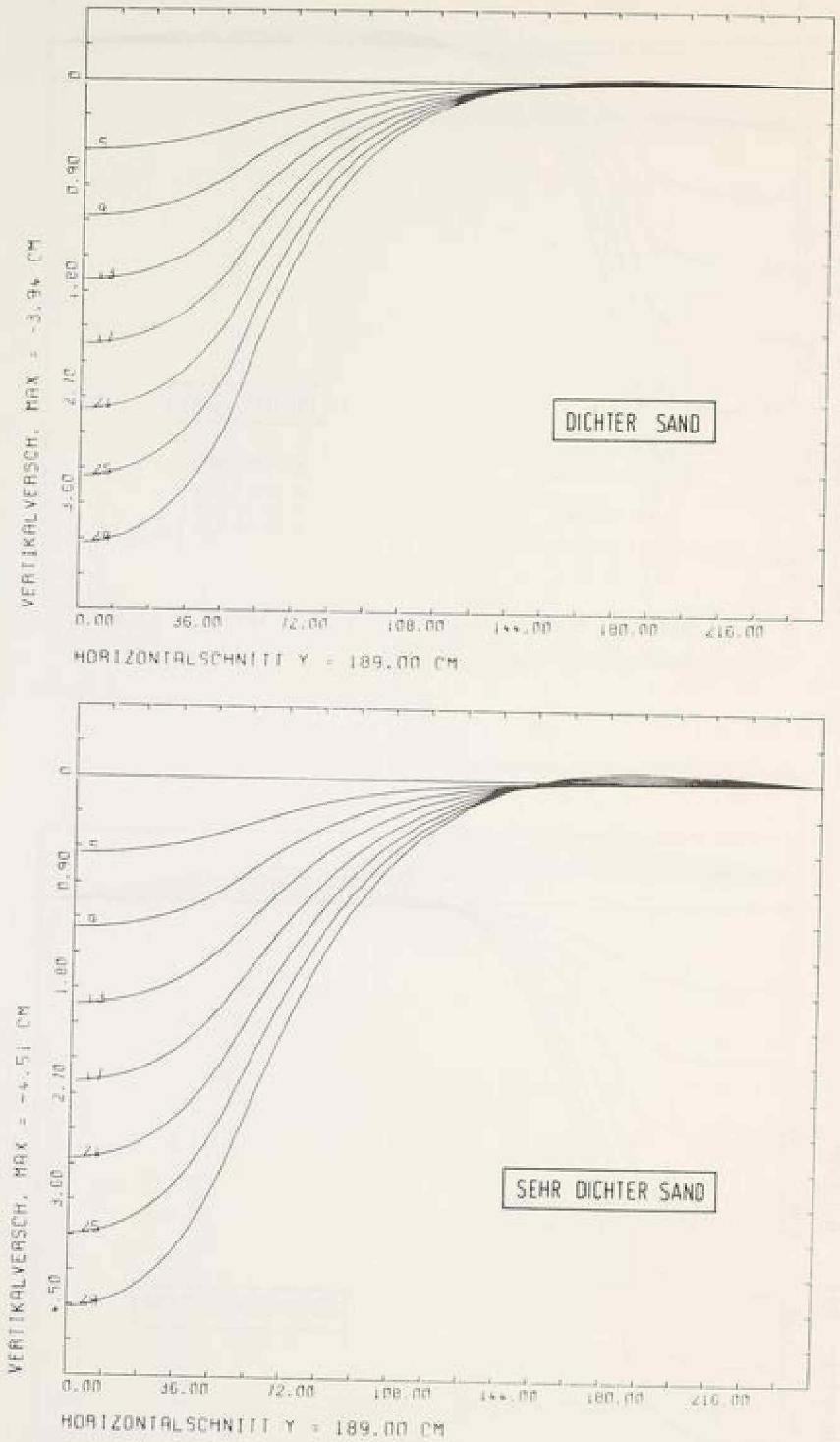
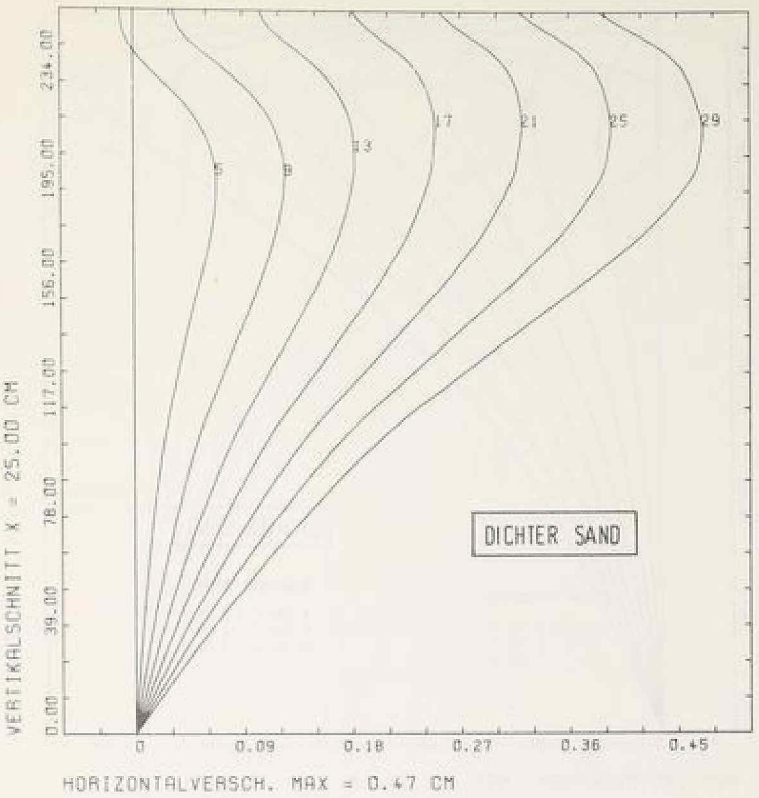



Abb. 6.10 Vertikalverformungen in einem Horizontalschnitt 70 cm (1.4 R) unter Gründungssohle



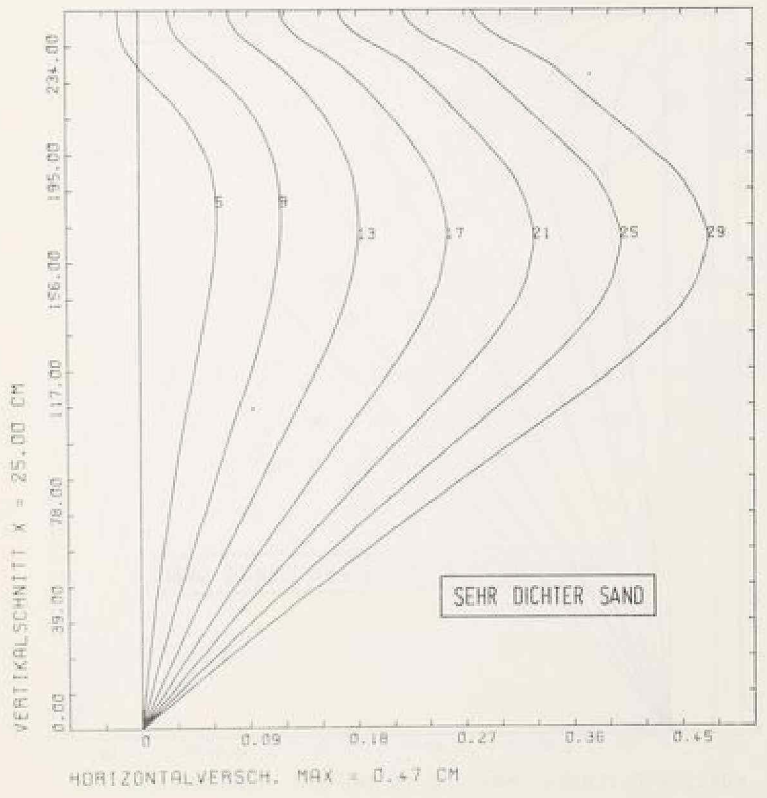
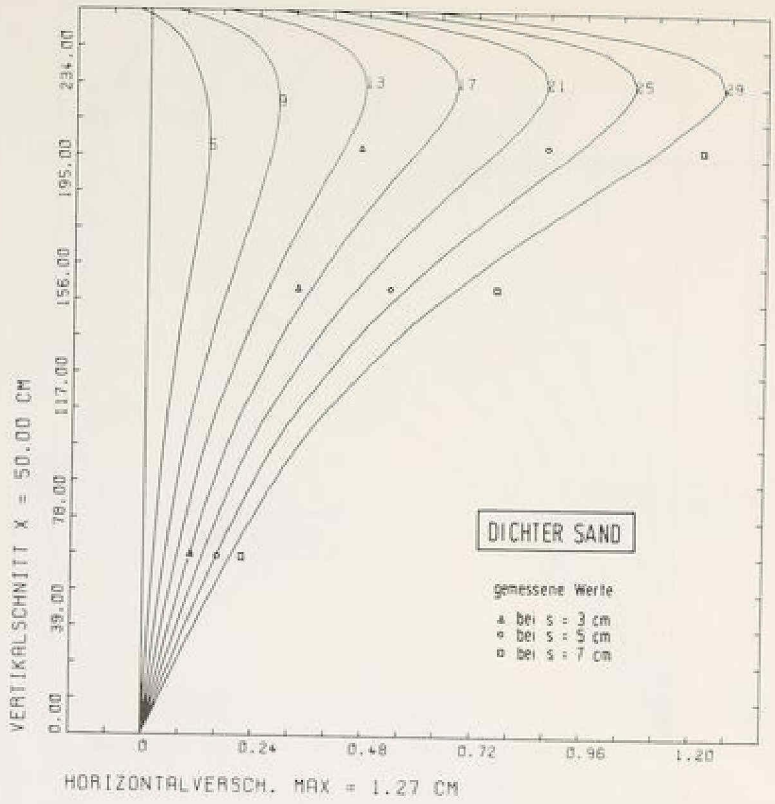




Abb. 6.11 Horizontalverformungen in einem Vertikalschnitt 25 cm (0.5 R) von der Symmetrieachse



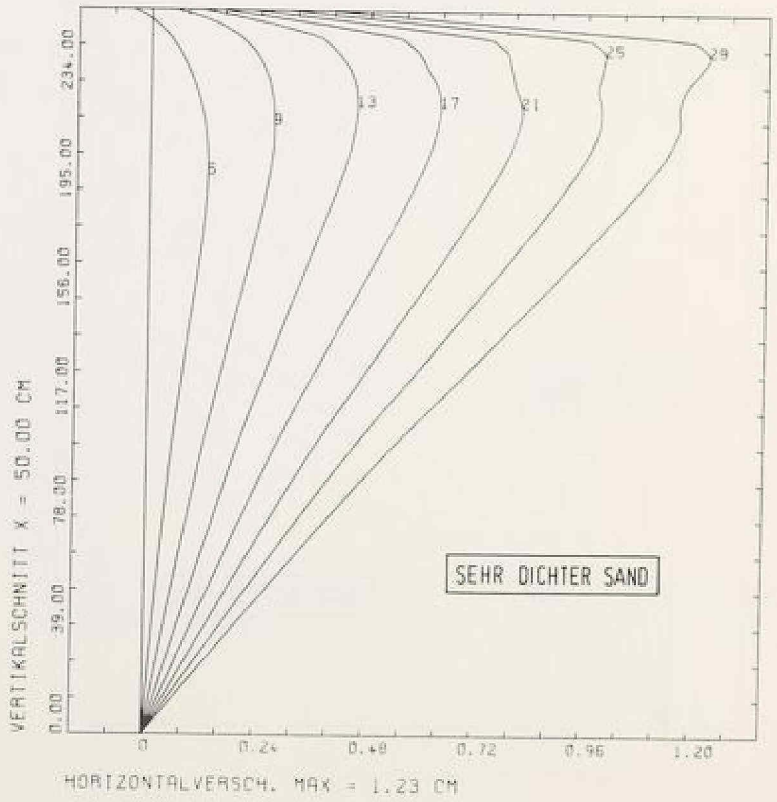
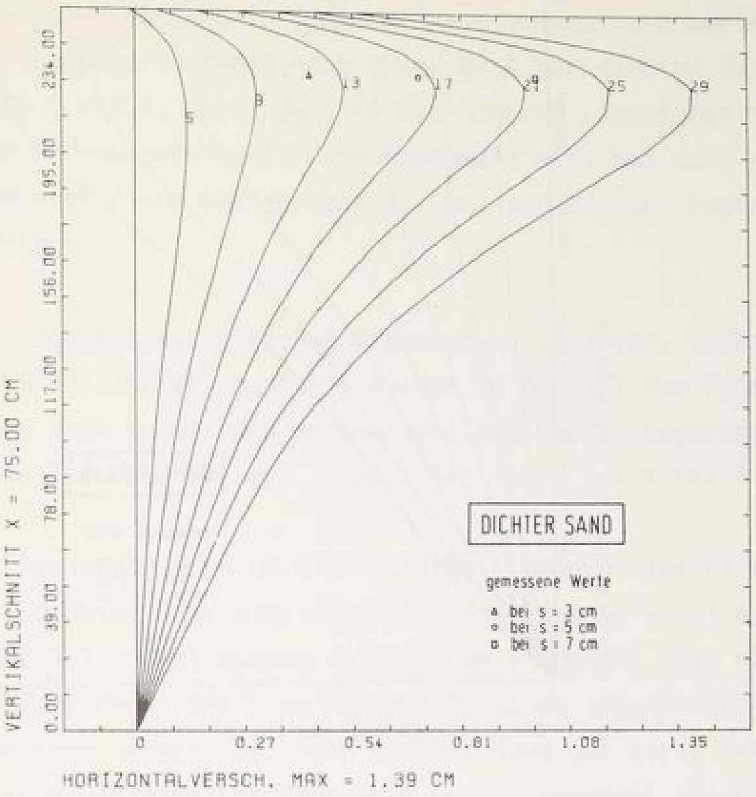




Abb. 6.12 Horizontalverformungen in einem Vertikalschnitt 50 cm (1 R) von der Symmetrieachse



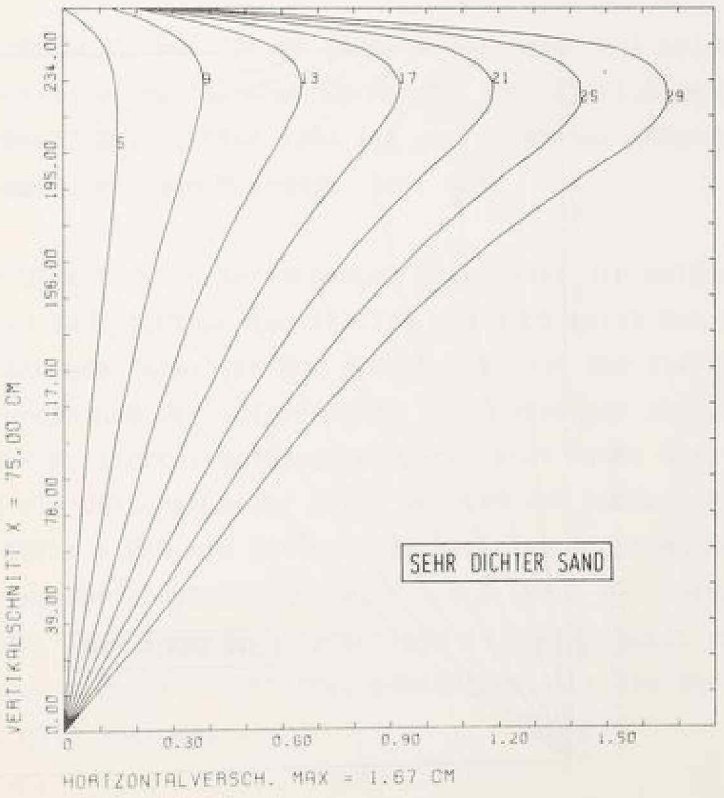
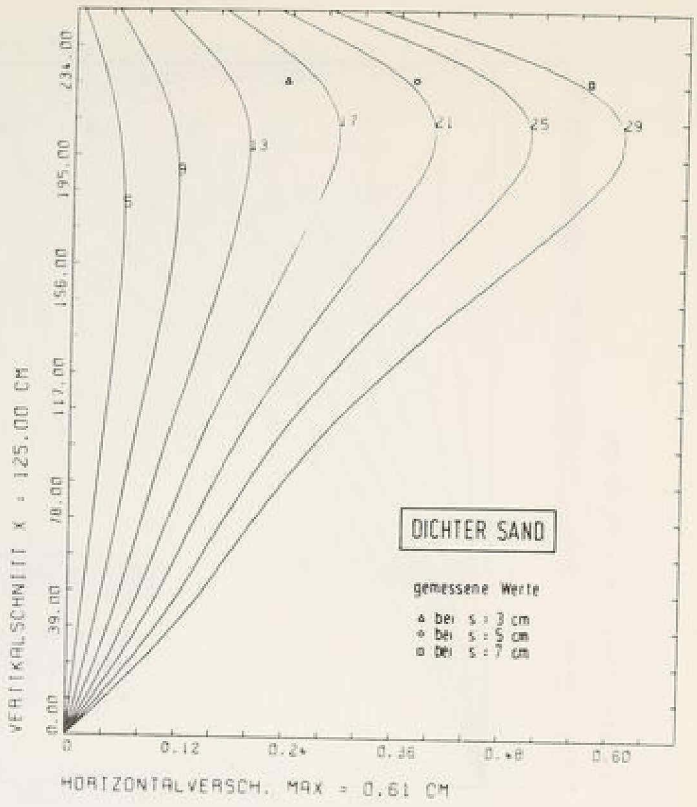




Abb. 6.13 Horizontalverformungen in einem Vertikalschnitt 75 cm (1.5 R) von der Symmetrieachse



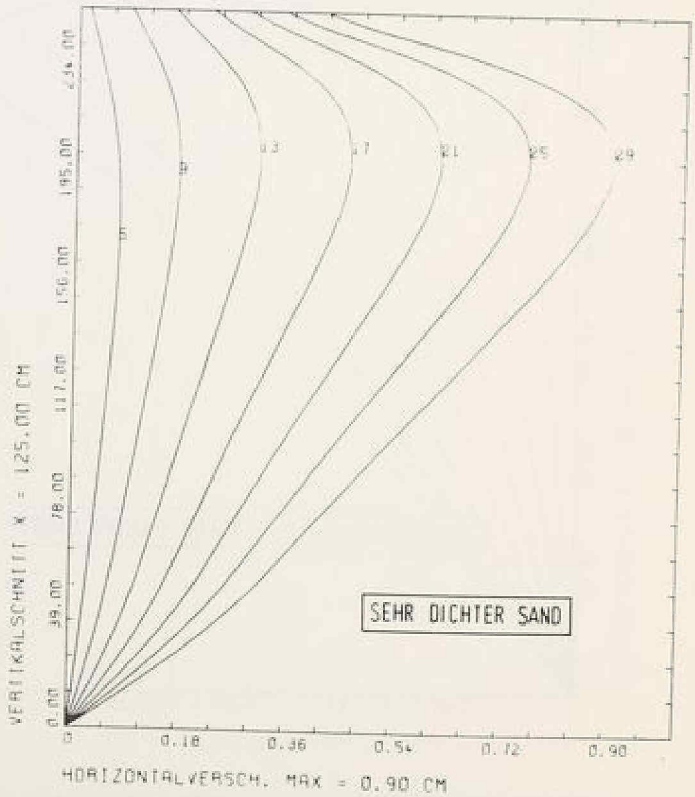




Abb. 6.14 Horizontalverformungen in einem Vertikalschnitt 125 cm (2.5 R) von der Symmetrieachse

Es tritt bei dichtem Sand in einer Tiefe t = R auf und verlagert sich mit zunehmender Last geringfügig nach oben. Bei sehr dichtem Sand liegt es in der Tiefe t = 2 R, wobei es sich bei höheren Laststufen nach unten bewegt. Der Bodenbereich unter dem Fundament wird bei sehr dichter Lagerung in größerer Tiefe beansprucht als bei nur dichter Lagerung und zur Seite verdrängt.

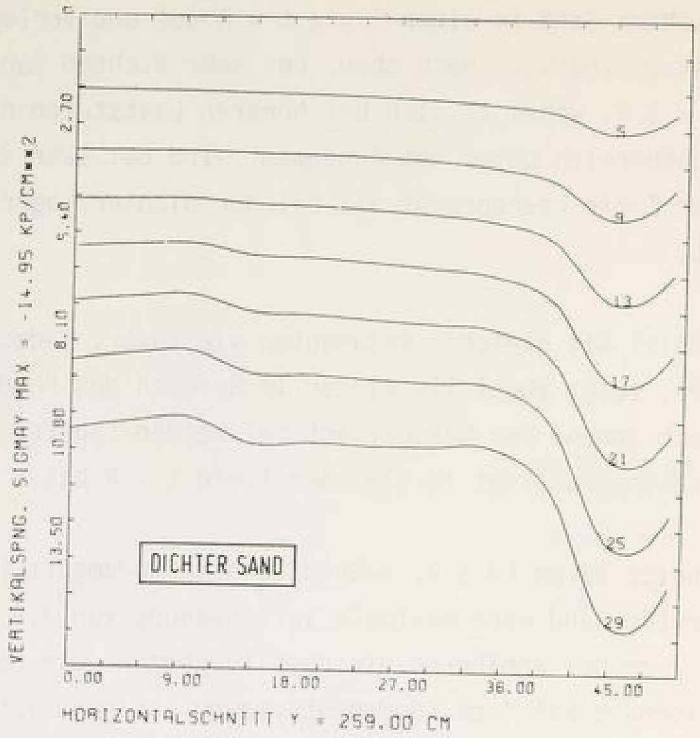
Ein Vertikalschnitt mit gleichen Argumenten wie zuvor, jedoch am Fundamentrand (Abb. 6.12), zeigt ebenfalls wieder im Bereich des Fundaments kleine Verformungen nach innen. Der Maximalwert bei beiden Lagerungsdichten beträgt etwa 1.2 cm und liegt in gleicher Tiefe t = R bis t = 0.5 R abnehmend.

Ein Vertikalschnitt 25 cm (0.5 R) außerhalb des Fundaments (Abb. 6.13) liefert bei dichtem Sand eine maximale Verschiebung von 1.4 cm, bei sehr dichtem Sand 1.7 cm bei annähernd gleichen Tendenzen. Die nach innen gerichtete Verformung bei 1 cm Fundamentsetzung ist bei dichtem Sand nur noch in geringem Umfang, bei sehr dichtem Sand gar nicht mehr vorhanden. Die gemessenen Horizontalverformungen werden generell in der Rechnung in diesem Schnitt überschätzt.

Der Vertikalschnitt bei 125 cm (Abb. 6.14) zeigt bei beiden Lagerungsdichten bereits wieder abnehmende Maxima. Der Einfluß des Grubenrands macht sich bemerkbar. Bei dichtem Sand ist vor allem bei höheren Laststufen die Übereinstimmung mit den Messungen sehr gut.

Die bisher diskutierten Verformungen zeigen bei den beiden gewählten Lagerungsdichten sehr geringe qualitative und auch meist nur geringe quantitative Unterschiede. Dies ist zum großen Teil auf den starken Einfluß der Randbedingungen und der aufgeprägten Verschiebungen zurückzuführen. Am Beispiel der Horizontalverformungen betrachtet heißt dies: In der Symmetrieachse sind die Verschiebungen Null, wachsen zum Fundamentrand hin an und erreichen bei r = 2 R ein Maximum. In radialer Richtung weiter nach außen müssen sie wieder abnehmen, um bei r = 5 R (Rand der Versuchsgrube) wieder Null zu sein. Grundlegende Unterschiede in Abhängigkeit von der Art des Sandes können sich gar nicht erst einstellen. Für die Vertikalverformungen des Bodens gilt analoges.

Unterschiede im Bodenverhalten können sich daher im wesentlichen nur an den Spannungen bemerkbar machen. Diese Aussage steht in scheinbarem Widerspruch



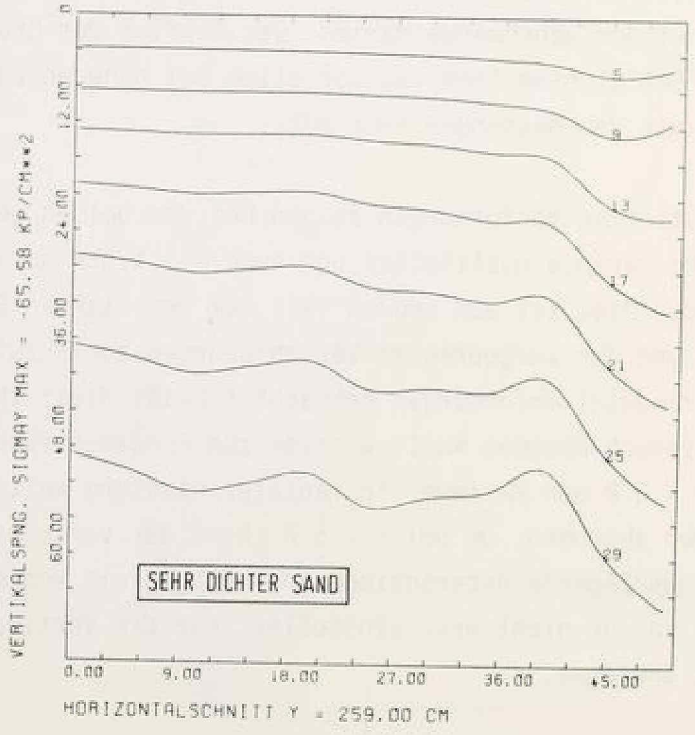
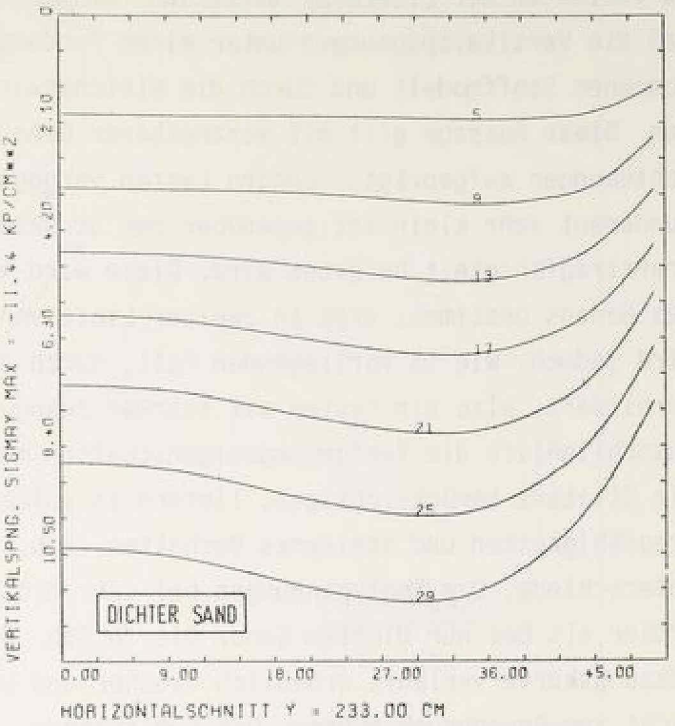




Abb. 6.15 Sohlspannungsverteilung



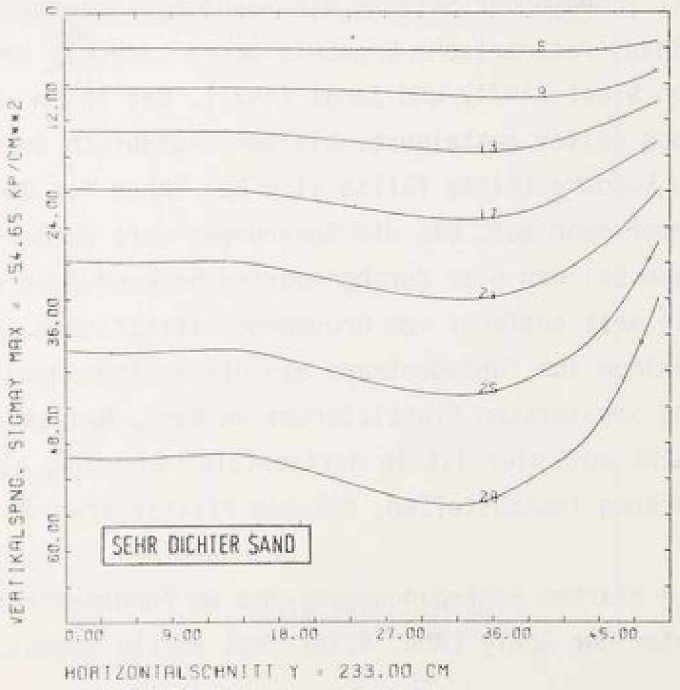
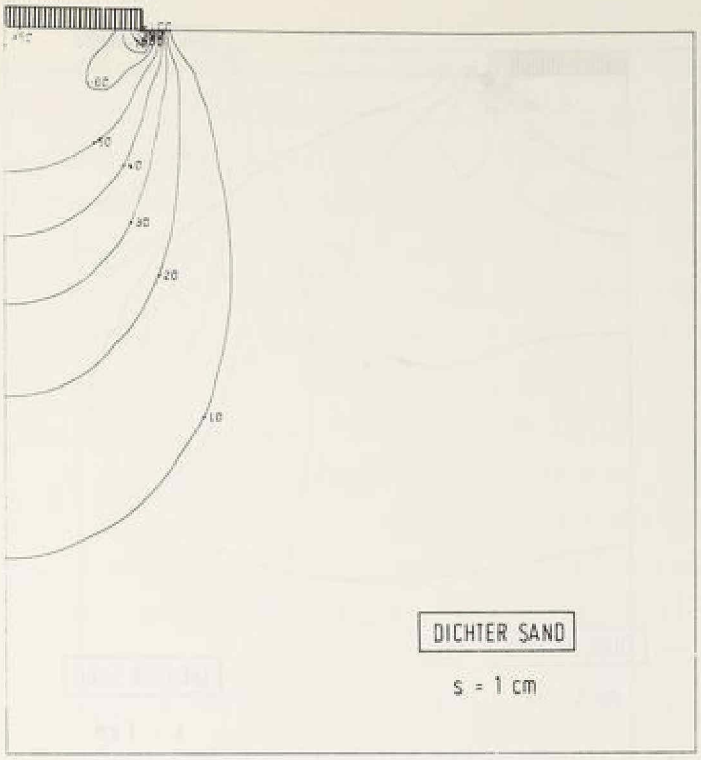




Abb. 6.16 Vertikalspannungen in einem Horizontalschnitt in 25 cm (0.5 R) Tiefe unter dem Fundament

zu vielen in der Literatur aufzufindenen Äußerungen. Dort wird ausgesagt, daß die Vertikalspannungen unter einem Fundament unabhängig sind vom angenommenen Stoffmodell und durch die Gleichgewichtsbedingungen erzwungen werden. Diese Aussage gilt mit vertretbarer Genauigkeit dann, wenn keine Verschiebungen aufgeprägt, sondern Lasten vorgegeben werden und wenn das Fundament sehr klein ist gegenüber den Strukturabmessungen und bis zur Grenztragfähigkeit belastet wird. Diese wird vor allem von der Festigkeit des Bodens bestimmt, erst in zweiter Linie von den Verformungseigenschaften. Wird jedoch, wie im vorliegenden Fall, durch die Abmessungen ein Grundbruch verhindert, also ein System mit starken Zwängungen aufgebaut, dann sind fast ausschließlich die Verformungseigenschaften maßgebend. Alle Stoffmodelle, die Dilatanz berücksichtigen, liefern in solchen Fällen erheblich höhere Tragfähigkeiten und steiferes Verhalten. Abb. 6.15 zeigt die gravierenden Unterschiede. Die Sohlspannungen bei sehr dichtem Sand sind um den Faktor 5 größer als bei nur dichtem Sand. Die in Abb. 6.6 bereits gezeigte Lastsetzungskurve verläuft erheblich flacher und wird auch bei größten Lasten nicht zum Grundbruch führen. Die Sohlspannung, dargestellt in einem Schnitt von Fundamentmitte bis zum Rand, nimmt mit zunehmender Fundamentsetzung insbesondere am Rand stetig zu. Während bei geringen Setzungen die Spannungen am Rand nur geringfügig höher sind als in der Fundamentmitte, nimmt mit zunehmender Setzung die Spannungskonzentration am Rand immer mehr zu. Dieses rechnerische Ergebnis deckt sich mit den Messungen und Rechnungen von Wibel (1971) und Zangl (1977). Bei ihnen wurde jedoch die Belastung noch weiter gesteigert, bis der Grundbruch auftrat. Das Sohlspannungstal in Fundamentmitte füllte sich bei ihnen mit Annäherung an den Grundbruch immer mehr auf, bis die Spannungen dort größer waren als am Rand. Derartiges kann bei den hier durchgeführten Berechnungen nicht beobachtet werden, da sie weit entfernt vom Grundbruch stattfinden. Bei dichtem Sand nimmt vom Maximum zum Fundamentrand hin die Sohlspannung wieder geringfügig ab infolge des verstärkten Plastizierens am Rand. Bei sehr dichtem Sand tritt das nicht auf; hier ist in horizontaler Richtung eine starke aussteifende Wirkung festzustellen, die ein Plastizieren am Rand behindert.

Die starken Sohlspannungsmaxima am Fundamentrand sind bereits in 25 cm Tiefe unter der Sohle (Abb. 6.16) fast völlig abgebaut.

In Ergänzung zur Darstellung der Spannungen in Schnitten ist die Darstellung als Linien gleicher Spannung (Isobaren) vorteilhaft. Sie entspricht der



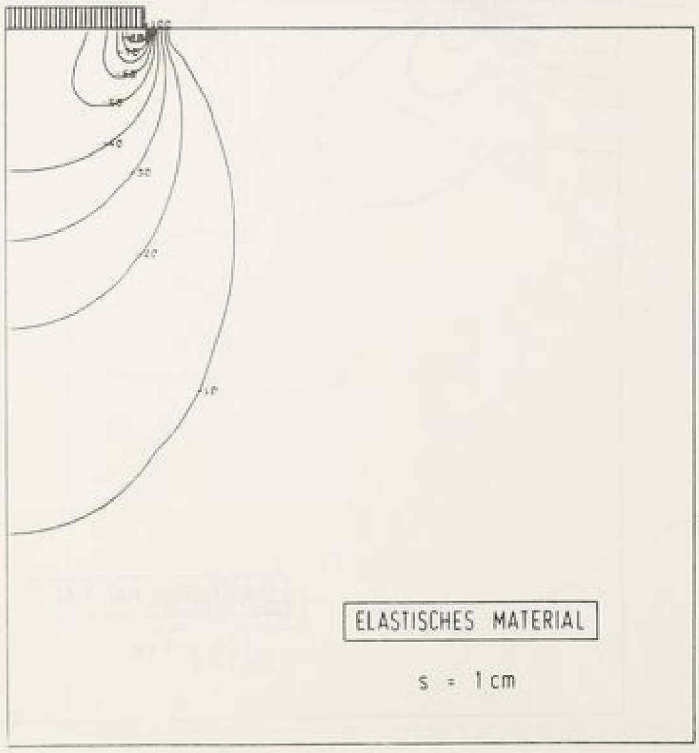
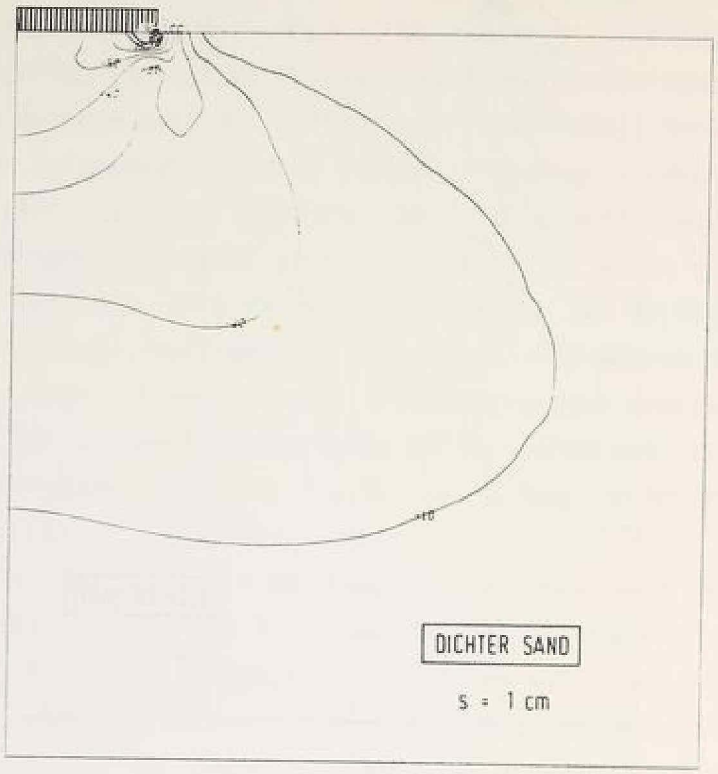




Abb. 6.17 Linien gleicher Vertikalspannung bei s = 1 cm (prozentweise Darstellung)



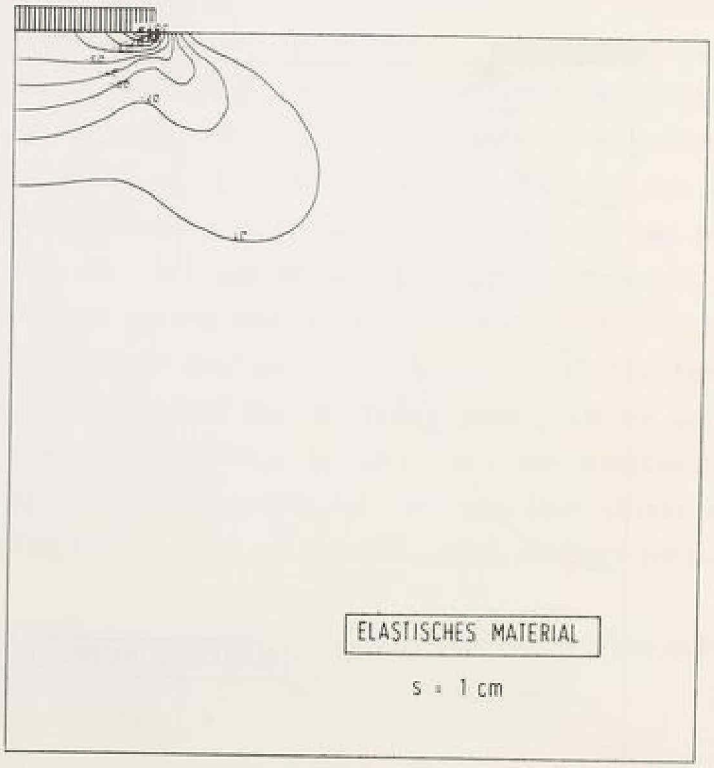
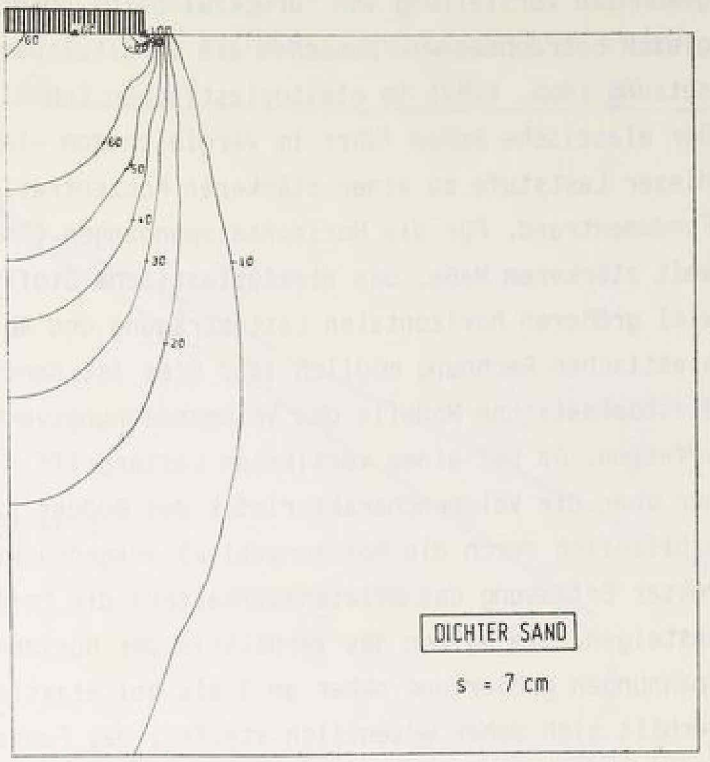




Abb. 6.18 Linien gleicher Horizontalspannung bei s = 1 cm (prozentweise Darstellung)



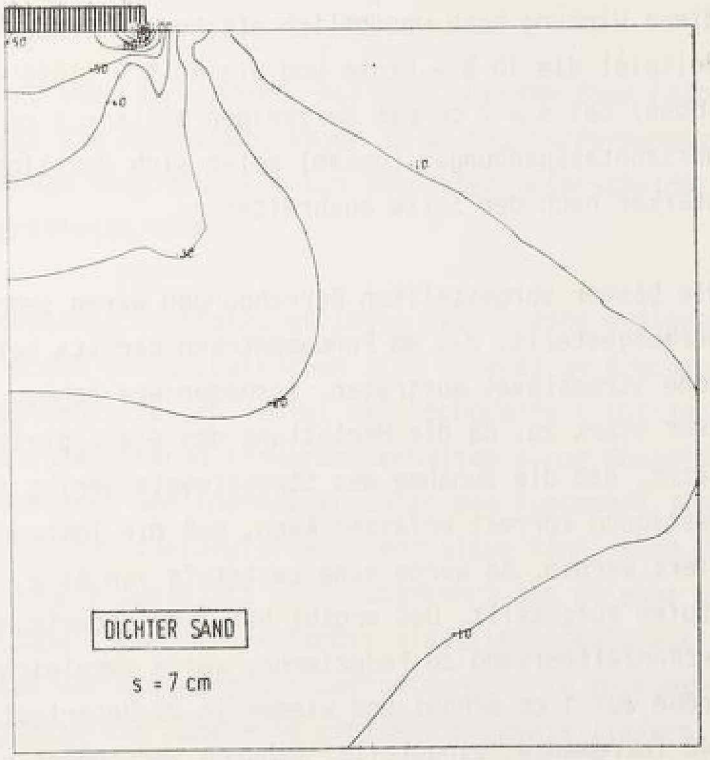




Abb. 6.19 Linien gleicher Vertikalspannungen (oben) und Horizontalspannungen (unten) bei s = 7 cm (prozentweise Darstellung)

gewohnten Vorstellung von "Druckzwiebeln" unter einem Fundament. Zum Vergleich betrachten wir zunächst die Vertikalspannungen bei 1 cm Fundamentsetzung (Abb. 6.17) im elastoplastischen (oben) und elastischen Fall (unten). Der elastische Boden führt im Vergleich zum elastoplastischen bereits bei dieser Laststufe zu einer stärkeren Konzentration der Vertikalspannungen am Fundamentrand. Für die Horizontalspannungen (Abb. 6.18) gilt das noch in weit stärkerem Maße. Das elastoplastische Stoffgesetz führt zu einer sehr viel größeren horizontalen Lastabtragung und Abstützung als nach einer elastischen Rechnung möglich ist. Dies ist darauf zurückzuführen, daß elastoplastische Modelle das Volumendehnungsverhalten des Sandes richtig erfassen. Da bei einem vertikalen Lastangriff die horizontalen Spannungen nur über die Volumencharakteristik des Bodens (im elastischen Fall ausschließlich durch die Poissonzahl $\nu$) ausgedrückt werden, können bei korrekter Erfassung des Dilatanzverhaltens die horizontalen Spannungen stark ansteigen. Sie halten das Verhältnis der horizontalen zu den vertikalen Spannungen größer und näher an 1 als bei elastischen Rechnungen. Der Boden verhält sich daher wesentlich steifer; das Fundament setzt sich bei gleicher Last weniger bzw. hat bei gleicher Setzung eine höhere Sohlspannung.

Abschließend zeigt Abb. 6.19, daß sich bei größeren Setzungen ($s = 7$ cm) diese Wirkung noch wesentlich stärker bemerkbar macht. Man vergleiche zum Beispiel die 10 % - Linie und die 50 % - Linie der Vertikalspannungen (oben) bei $s = 7$ cm mit derjenigen bei $s = 1$ cm (Abb. 6.17). Auch bei den Horizontalspannungen (unten) zeigt sich deutlich, daß sie sich sehr viel stärker nach der Seite ausbreiten.

Die bisher vorgestellten Berechnungen waren sehr aufwendig. Es hat sich herausgestellt, daß am Fundamentrand bereits bei kleinen Laststufen sehr hohe Stresslevel auftreten. Insbesondere nehmen sie in jedem Inkrement sehr stark zu. Da die Herleitung des elastoplastischen Stoffgesetzes voraussetzt, daß die Zunahme des Stresslevels gering ist, und nur dann die Verfestigung korrekt erfassen kann, muß die Inkrementgröße drastisch reduziert werden. So wurde eine Laststufe von $\Delta s = 0.25$ cm in 20 Unterlaststufen aufgeteilt. Das ergibt bei 7 cm Endsetzung 560 Inkremente. Um den Rechenzeitaufwand zu reduzieren, wurde vergleichsweise die Laststufengröße auf 1 cm erhöht und wieder in 20 Unterlaststufen, d.h. insgesamt 140 Inkremente, eingeteilt. Dadurch verringert sich die Rechenzeit proportional zur Anzahl der Inkremente auf ein Viertel. Abb. 6.20 zeigt, daß das Lastsetzungsverhalten merklich steifer ist. Bei gleicher Setzung ist

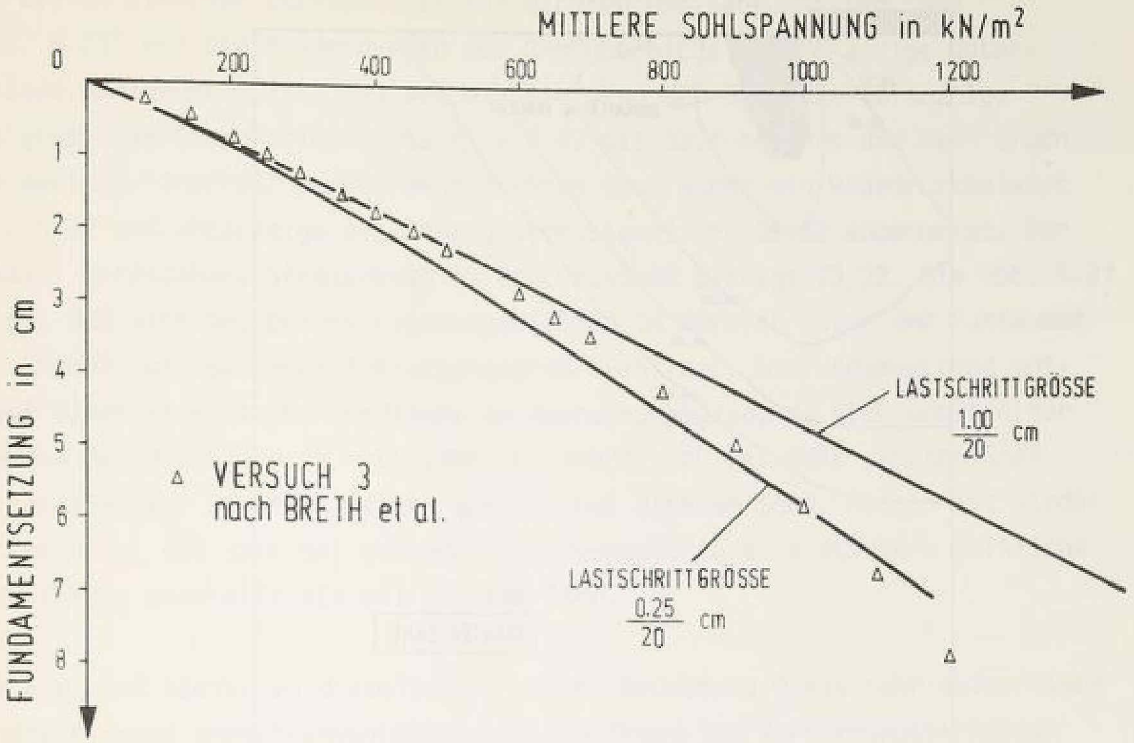
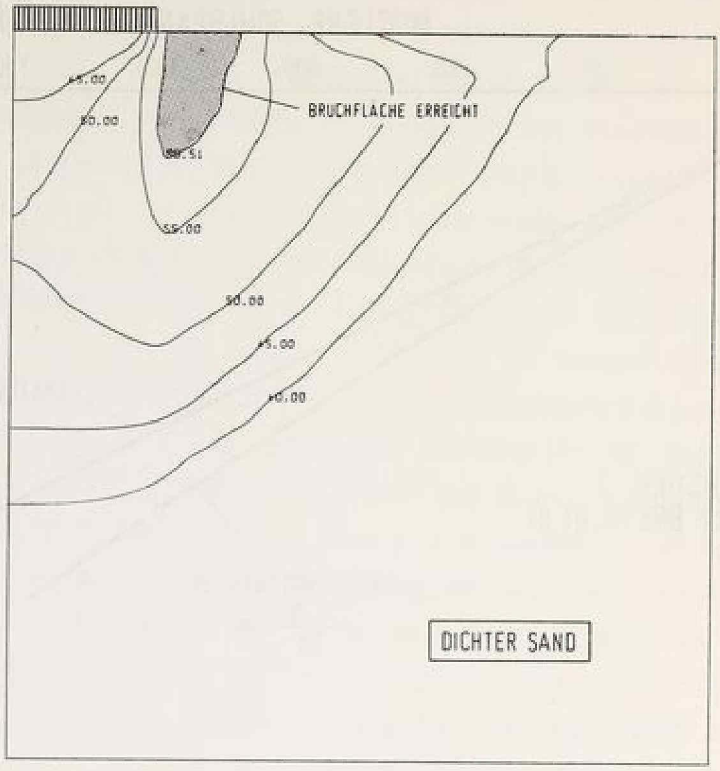



Abb. 6.20 Einfluß der Lastschrittgröße auf die Größe der mittleren Sohlspannung

die mittlere Sohlspannung etwa 15 % höher. Bei sehr dichtem Sand (nicht mehr dargestellt) beträgt die Abweichung sogar 20 %. Das Verformungsverhalten in den verschiedenen oben diskutierten Schnitten unterscheidet sich qualitativ und quantitativ nicht.

Die berechneten und gemessenen Lastsetzungslinien zeigen eine weitgehende Linearität, obwohl der Boden in Teilbereichen sich bereits im Bruchzustand befindet. Daraus ist umgekehrt zu schließen, daß hochgradig nichtlineares Bodenverhalten durchaus zu annähernd linearem Verhalten einer Gesamtstruktur führen kann. Die mittleren Sohlspannungen unter dem Fundament sind ein Mittelwert, der einzelne Plastizierungseffekte enthalten kann, ohne daß das gesamte Verhalten dadurch dominiert wird. Umgekehrt ist es aber nicht erlaubt, daraus zu schließen, daß ein einfaches elastisch-idealplastisches Stoffmodell mit einem aus der Steigung der Lastsetzungskurve rückgerechneten Elastizitätsmodul jemals ein annähernd gleiches Ergebnis liefern könnte.



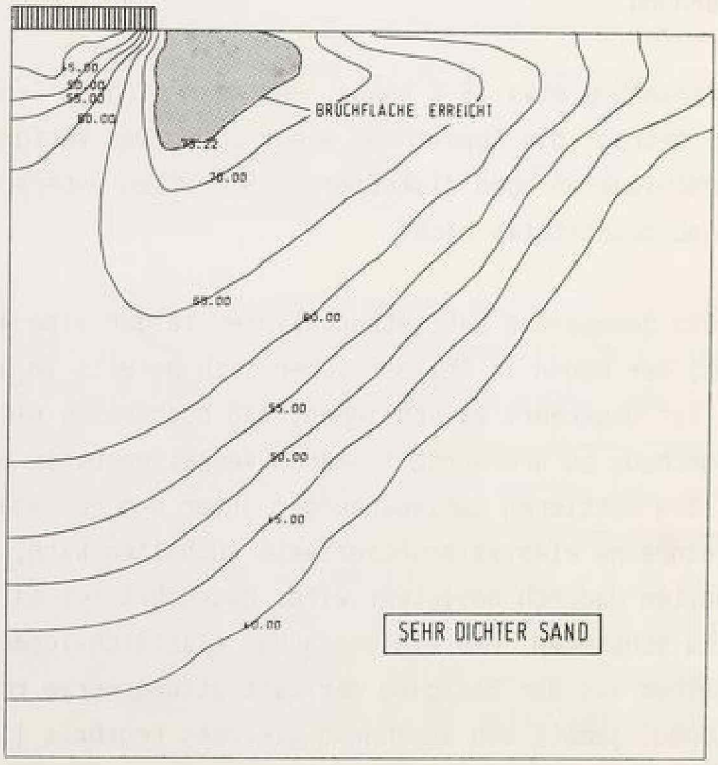




Abb. 6.21 Linien gleichen Stresslevels und Bruchbereiche bei dichtem und sehr dichtem Sand

Die Linien gleichen Stresslevels für dichten und sehr dichten Sand (Abb. 6.21) und die Ausdehnungen der Bruchbereiche zeigen einige Unterschiede. Anzumerken ist, daß bei dichtem Sand der Stresslevel infolge des gewählten Ruhedruckbeiwerts $K_0$ = 0.47 mit 33.1 beginnt und beim Bruch den Wert 59.51 erreicht. Bei sehr dichtem Sand wurde ein Ruhedruckbeiwert $K_0$ = 0.42 und demzufolge ein Anfangsstresslevel von 35.32 angenommen. Der maximal erreichbare Stresslevel im Bruchzustand beträgt 73.22. Die Abb. 6.21 zeigt, daß sich bei beiden Lagerungsdichten im Bereich unter dem Fundament ein Erdkeil mit geringem Ausnutzungsgrad ausbildet. Am Fundamentrand entsteht daher eine starke Gradiente im Ausnutzungsgrad, da sich unmittelbar daneben der Bruchbereich ausbildet. Er dehnt sich bei sehr dichtem Sand in horizontaler Richtung weiter aus als bei dichtem Sand. Hieran ist wieder zu erkennen, daß sich bei größerer Lagerungsdichte eine stärkere seitliche Tragwirkung einstellt als bei dichtem Sand.

Zum Abschluß bleibt zu diskutieren, welche Bedeutung diese sehr aufwendigen Finite Element Berechnungen haben, um das Trag- und Verformungsverhalten von Flachgründungen zu erklären. Die hier berechneten Beispiele haben beim Vergleich mit den Messungen gezeigt, daß bei zutreffenden Parametern qualitativ und quantitativ vernünftige Übereinstimmung mit Messungen erreicht werden kann. Sie machen aber auch deutlich, daß bei dem hier untersuchten Problem mit starken Zwängungen bei geringfügig anderem Bodenverhalten extrem anderes Lastsetzungsverhalten des Fundaments auftritt. Der Verfasser ist der Auffassung, daß die bei den Sohlspannungen festgestellte extreme Abhängigkeit vom Bodenverhalten deutlich genug zeigt, daß Stoffgesetz und dazugehörige repräsentative Parameter in ihrer Bedeutung nicht hoch genug eingeschätzt werden können. Probleme mit starken Zwängungen stellen extreme Anforderungen.

Zusammenfassend können folgende Punkte festgehalten werden:

- Wegen des starken Spannungsgradienten am Fundamentrand sind die Berechnungen sehr aufwendig.

- Bei Problemen mit starken Zwängungen können sich bei unterschiedlichem Boden im Kontinuum zwar ähnliche Verformungen, aber sehr unterschiedliche Spannungen einstellen.

- Die korrekte Erfassung der Dilatanz ist auch für eine nur qualitative Aussage von extremer Bedeutung.

## 7. Verformungsverhalten einer verankerten Wand

Die Rückverankerung von Geländesprüngen als vorübergehende und als dauernde Maßnahme ist eine Technik des Grundbaus, die sich seit ihrer erstmaligen Anwendung vor etwa 15 Jahren zu einer Standardbauweise entwickelt hat. Die bis dahin übliche Abtragung des Erddrucks über Steifen wurde mehr und mehr eingeschränkt und ist heute nur noch bei sehr kleinen Baugruben und bei schwierigen Verhältnissen üblich. Welche Bodenverhältnisse und Situationen für Verankerungen als schwierig anzusehen sind, hat sich erst im Laufe der Zeit herauskristallisiert. Es lagen zunächst wenig Informationen und Erfahrungen vor über Größe und Verteilung des Erddrucks und über die Wechselwirkung zwischen Wandverformung und Erddruckverteilung.

Von verschiedenen Autoren wurden Messungen publiziert, die auch das Verhalten von verankerten und ausgesteiften Wänden vergleichbar machten. Da jedoch Messungen in situ im rauhen Baustellenbetrieb nur schwierig durchzuführen und zudem teuer sind, bot es sich an, unter Laborbedingungen Modellversuche vorzunehmen. Sie haben den Vorteil, unter kontrollierten äußeren Bedingungen abzulaufen und reproduzierbare Ergebnisse zu liefern. Insbesondere können mit erträglichem Aufwand an einer Vielzahl von Punkten Spannungen und Verformungen gemessen werden, ohne den Baubetrieb zu behindern. Um die Messungen an ausgesteiften und verankerten Baugruben (z.B. Breth und Wanoschek 1969, Breth und Romberg 1972, Romberg 1973) durch systematische Untersuchungen zu ergänzen, wurden am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt mehrere umfangreiche Versuchsreihen durchgeführt. Wanoschek (1972) untersucht den Einfluß von Fundamentlasten verschiedener Größe und Anordnung auf den Erddruck auf ausgesteifte Baugrubenwände. Bei der Versuchsdurchführung wird der Boden vor der Wand lagenweise abgegraben und die Steifenlagen werden nacheinander eingebaut. Die Fundamentlasten sind bereits vor Aushubbeginn vorhanden. Wesentliches Ergebnis der Versuche ist, daß die Erddruckverteilung entscheidend von Steifenanordnung und Aushubvorgang geprägt wird. Eine Zusammenfassung der Erkenntnisse findet sich bei Wanoschek und Breth (1972).

Schmitt (1974) benutzt Modellversuche an der im Grundsatz gleichen Versuchseinrichtung und mit dem gleichen Sand, um seine analytischen Untersuchungen und Ansätze zur Standsicherheit einfach verankerter Baugruben-

wände zu überprüfen. Die Ankerlänge ist im Versuch so bemessen, daß bei der gewählten Endaushubtiefe der Bruch des Systems eintritt. Die Versuche bilden den Nachweis, daß für Standsicherheitsuntersuchungen an einfach verankerten Baugrubenwänden der Boden vereinfacht als idealplastisch angesehen werden kann (Schmitt und Breth 1975).

Wolff (1975) führt in dem gleichen Versuchskasten Versuche mit mehrfach verankerten Baugrubenwänden durch. Hierbei werden u.a. Ankeranzahl, Ankeranordnung, Ankerlänge, Vorspannung und Steifigkeit der Wand variiert. Der Bodenaushub erfolgt ebenfalls bis zum Bruch des Systems Wand-Boden-Anker. Der Erddruck nimmt nahezu linear mit der Tiefe zu, wenn nicht bewußt durch die Vorspannung der Anker eine andere Erddruckverteilung erzwungen wird. Durch die Vorspannung der Anker wird der Boden hinter der Wand beim Aushub an einer Entspannung gehindert, so daß der Erddruck dadurch nicht auf den aktiven Grenzwert abfällt. Vergleichsversuche unter sonst gleichen Bedingungen mit ausgesteiften Wänden zeigen, daß dort erhebliche Konzentrationen des Erddrucks an den Steifen auftreten, während bei verankerten Wänden dieser Effekt wesentlich geringer ist. Ebenso ist festzustellen, daß der Erddruck unterhalb der untersten Steife erheblich stärker abfällt als unterhalb des untersten Ankers. Der Einfluß des Aushubvorgangs bei der verankerten Wand ist weitaus geringer als bei der ausgesteiften Wand. Eine Verringerung der Wandverschiebung läßt sich nur durch Vorspannung, durch mehr und durch längere Anker erreichen. Die wesentlichen Ergebnisse wurden von Breth und Wolff (1976) veröffentlicht.

Es bietet sich nun an, die Finite Element Methode zu benutzen, um von Erkenntnissen aus kleinmaßstäblichen Modellversuchen auf das Verhalten von Großausführungen zu schließen. In einem weiteren Schritt könnten dann die Bodeneigenschaften in der Berechnung variiert werden, ohne an versuchstechnisch bedingte Grenzen gebunden zu sein.

Der Verfasser beschränkt sich angesichts der vielen Vergleichs- und Variationsmöglichkeiten auf zwei wesentliche Punkte. Einmal soll festgestellt werden, ob sich bei Anwendung numerischer Verfahren die Ergebnisse der Modellversuche bestätigen lassen. Wenn dies möglich ist, sollen die parametrischen Untersuchungen am Modell in der Finite Element Methode wiederholt werden. Wenn es nicht möglich ist, muß zunächst die Ursache geklärt werden. Kann ein plausibler Grund gefunden werden, sollen unabhängig von der fehlenden Übertragungsmöglichkeit die Verformungsabläufe und Erddrücke für Baugruben natürlicher Größe untersucht werden.

Finite Element Berechnungen von Baugruben im Modellmaßstab und solchen in natürlicher Größe unterscheiden sich in Ablauf und Aufwand grundsätzlich nicht. Bei gleichem Bauvorgang sind der Rechenablauf und die Anforderungen an die Simulationsmöglichkeiten im Finite Element Programm identisch. Die Herstellung einer verankerten Baugrube kann im Finite Element Modell nahezu beliebig genau nachgeahmt werden. Über die grundsätzlichen Möglichkeiten wurde z.B. von Stroh (1974) berichtet. Einen Erfahrungsbericht über Berechnungen von Baugruben in weichem Ton geben Clough und Mana (1976). Der Bauablauf in der Realität besteht aus den Vorgängen: Aushub sowie Einbau und Vorspannen der Anker. Umgesetzt in die Terminologie der Finite Element Methode sind folgende Leistungen zu erbringen:

- Elemente, die ausgehoben werden, sind physikalisch zu entfernen.
- Aus den Spannungen der Elemente im Aushubbereich ist ein Lastvektor zu erstellen.
- Bauteile, z.B. Ankerstähle, sind zu aktivieren.
- Bauteile sind vorzuspannen; d.h. es sind entsprechende äußere Lasten zu ermitteln und im Lastvektor zu berücksichtigen.

Um diese Leistungen im Programmablauf benutzerfreundlich steuern und gezielt anfordern zu können, wurden zwei vielseitig verwendbare Programmbausteine entwickelt. Das Konzept hat sich auch bei anderen Problemen (Wanninger und Breth 1978) bewährt.

Zu Beginn der Berechnungen ist sowohl für Baugruben im Modellmaßstab als auch solche in natürlicher Größe zu überlegen, welche Aspekte des Verhaltens wichtig und für spätere Schlußfolgerungen die entscheidenderen sind. Die Frage nach dem Erddruck allein lohnt nicht aufwendige Untersuchungen. Wichtiger erscheinen die Wandverformungen, da an ihnen das Wechselspiel zwischen Erddruck, Ankeranordnung, Ankervorspannung und Bauabfolge sich besonders bemerkbar macht. Die Wandverformung selbst ist für die Beurteilung einer Verbaumaßnahme jedoch erst an zweiter Stelle interessant. Noch wichtiger und oftmals alleiniges Kriterium sind die Verformungen der Geländeoberfläche. Sie entscheiden darüber, ob die gewählte Verbauart für eine benachbarte Bebauung nicht im Hinblick auf Nutzung und Konstruktion des Gebäudes schädlich ist.

Wenn man also das Prinzip der verankerten Wand als die Sicherung eines vertikalen Geländesprungs nicht nur aus der Sicht der statischen Berechenbarkeit heraus betrachtet, sondern die Auswirkungen an der ursprünglichen Geländeoberfläche verfolgen will, sind die Anforderungen an das Rechenhilfsmittel Finite Element Methode wesentlich größer. Das verwendete Stoffmodell muß in der Lage sein, die in der Geländeoberfläche infolge Aushub der Baugrube auftretenden Verformungen realistisch zu erfassen. Das heißt, daß auch im Bereich unmittelbar hinter der Wand Setzungen auftreten, aber keine Hebungen. Sämtliche bisher vorgelegten Finite Element Berechnungen zeigen gegengerichtete Verformungstendenzen. Bei einer Anzahl weiter Untersuchungen verankerter Wände wird der Aspekt der Vertikalverformungen völlig übergangen. Die von Stroh (1974) sowie Breth und Stroh (1976) diskutierten Berechnungen verankerter Wände im steifen Ton zeigen erst im Bereich hinter der Verankerungsstrecke Setzungen der Geländeoberfläche, im Bereich zwischen Wand und Verankerungsstrecke dagegen deutliche Hebungen. Die Berechnungen von Huder (1975) mit einem einfachen bilinear-elastischen Stoffmodell führen ebenfalls zu sehr deutlichen Hebungen, die teilweise die gleiche Größe wie die Wandverformungen erreichen. Gleiches gilt für die von Izumi, Kamemura und Sato (1976) durchgeführten Berechnungen ausgesteifter Baugruben, bei denen Hebungen berechnet, aber Setzungen gemessen wurden. Gartung, Bauernfeind und Bianchini (1978) stellen ebenfalls ausschließlich Hebungen fest. In der Veröffentlichung von Egger (1972) werden zwar ausschließlich Erddrücke und Wandverformungen diskutiert, jedoch ist bei dem von ihm verwendeten einfachen Stoffmodell in der Berechnung ebenfalls mit Hebungen der Geländeoberfläche zu rechnen.

Die einzigen Beispiele, bei denen Finite Element Berechnungen ausschließlich Setzungen der Geländeoberfläche ergeben, sind solche bei weichen bindigen Böden, bei denen sich aufgrund der Volumenkonstanz aus Hebungen der Baugrubensohle und Verformungen der Wand zwangsläufig Setzungen der Geländeoberfläche ergeben (Clough und Tsui 1974).

Hebungen der Geländeoberfläche hinter verankerten Wänden sind bisher nie berichtet worden. Auch die umfangreiche Zusammenfassung von Peck (1969) enthält keine derartigen Fälle.

Nach kritischer Durchsicht der bisherigen veröffentlichten Berechnungen des Verhaltens verankerter Wände bleibt der unbefriedigende Eindruck, daß zwar Ankerkräfte, Erddrücke und Wandverformungen berechnet werden können

und auch plausibel erscheinen, daß aber die Verformungen der Geländeoberfläche bisher qualitativ und quantitativ nicht vorhergesagt werden können.

Dieser Zustand ist sehr unbefriedigend, da die Eignung des Bauverfahrens "Verankerte Wand" und die Wechselwirkung Wand-Boden-Bauwerk nicht beurteilt werden können. Um eine Aussage über die Sicherheit und die Verformungen von Bauwerken im Nachbarbereich zu tiefen Baugruben machen zu können, ist die Kenntnis der Verformungen vor allem der Geländeoberfläche wichtig.

## 7.1 Berechnungen im Modellmaßstab

Die von Wolff (1975) durchgeführten Modellversuche an mehrfach verankerten Wänden zeichnen sich durch besondere Realitätsnähe aus. Vor allem die Anker werden in ihrer Wirkungsweise sinnvoll abgebildet. Einen Querschnitt durch den Versuchskasten zeigt Abb. 7.1.1. Für eine Finite Element Modellierung der Versuche ist bedeutsam, daß sie unter ebenen Verformungsbedingungen durchgeführt wurden, also einem Schnitt durch eine unendlich lange Wand entsprechen. Vergleichsuntersuchungen von Wolff haben gezeigt, daß die seitliche Reibung beim Versuch durch entsprechende Maßnahmen weitgehend ausgeschaltet werden kann. Ebenfalls bedeutsam für den Versuchsablauf, aber auch für seine Abbildung in der Rechnung, sind die Reibungsverhältnisse am Kastenboden und an der vorderen und hinteren Begrenzung. Ebenso muß das Reibungsverhalten der Modellwand dargestellt werden können. Da der Kastenboden und die vordere und hintere Wand mit Sand beklebt sind, wurden zur Erfassung dieser Begrenzungsflächen ebene Scherversuche durchgeführt und nach dem Stoffmodell von Clough und Duncan (1971) ausgewertet (Abb. 7.1.2). Für die Darstellung der Wandreibung wurden ebene Scherversuche von Sand gegen Stahl ausgewertet. Als Parameter ergaben sich K = 1764, $R_f$ = 0.588, n = 0.0875 sowie $\varphi$ = 19.5 . Diese Auswertungen wurden bereits früher von Heibaum (1977) vorgenommen, der einen Ansatz unternahm, die Modellversuche mit nichtlinear-elastischem Stoffansatz zu berechnen. Für die Auswertung wurde ein von Czapla (1979) geschriebenes Programm benutzt. Die Grenzflächen mit definierter Reibung werden durch das bereits von Czapla implementierte und benutzte eindimensionale Element (Goodman, Taylor und Brekke 1968) dargestellt.

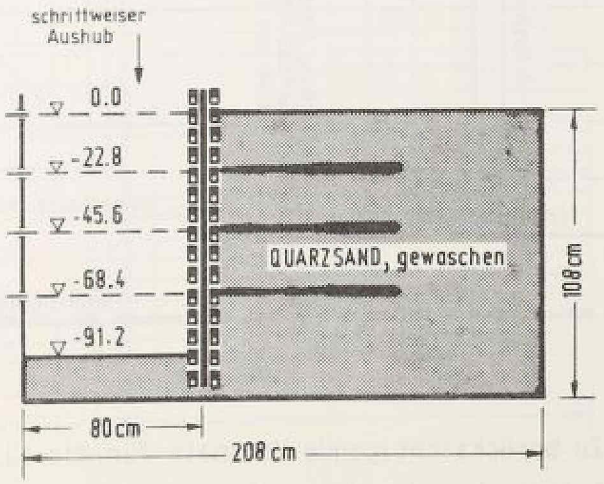



Abb. 7.1.1 Querschnitt durch den Versuchskasten nach Wolff

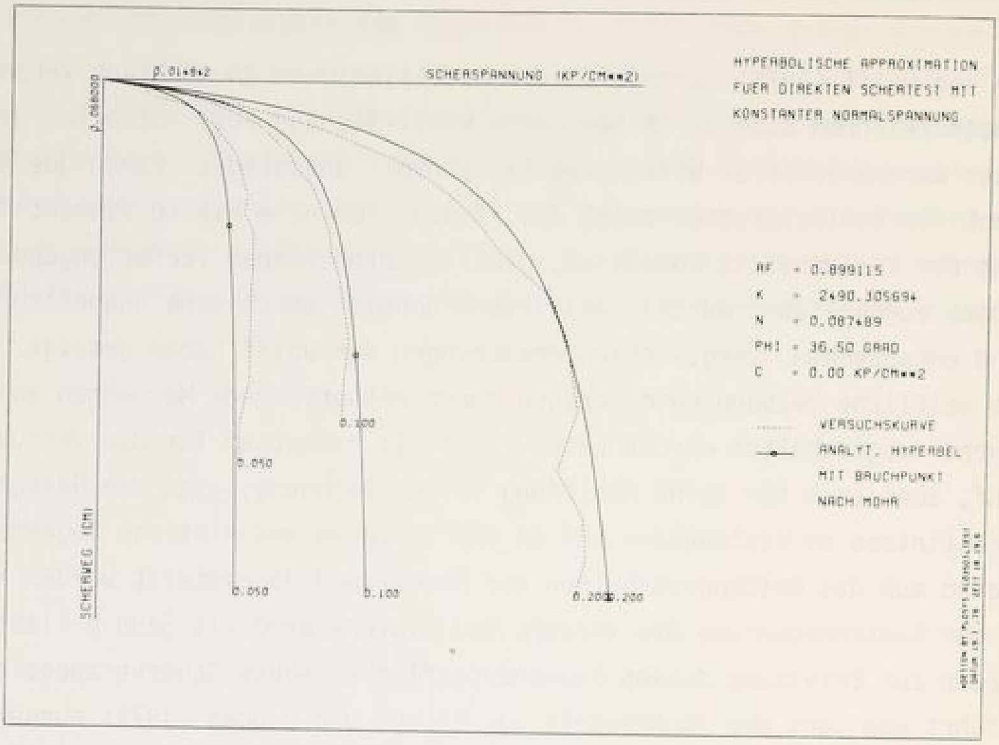



Abb. 7.1.2 Approximation eines direkten Scherversuchs mit Sand

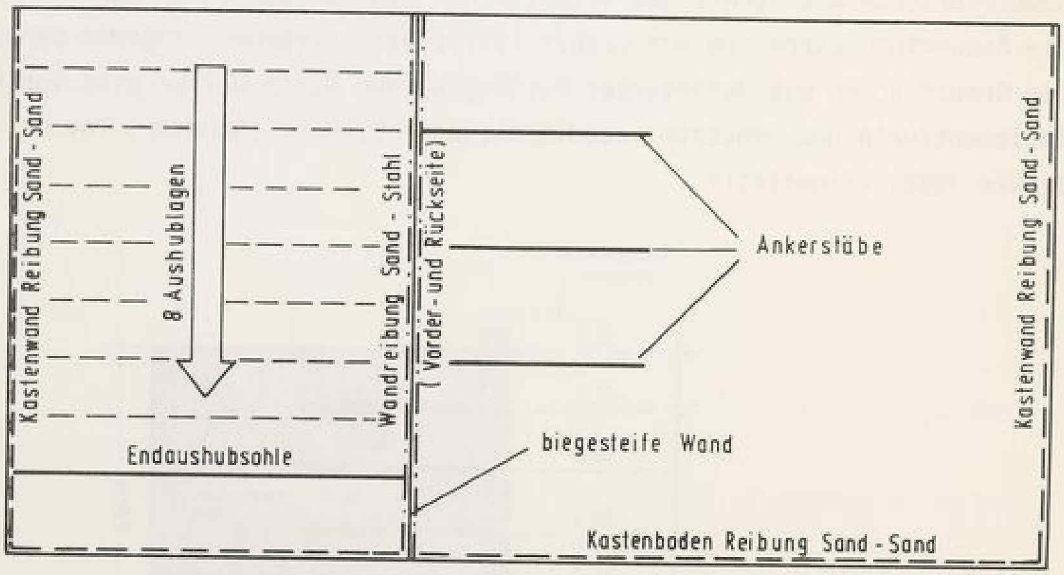



Abb. 7.1.3 Zu berücksichtigende Merkmale für die Elementwahl und Netzeinteilung bei der Nachrechnung der Modellversuche

Die Anker werden durch einfache Stabelemente simuliert. Für die Baugrubenwand ist ein einfaches Balkenelement mit jeweils drei Freiheitsgraden pro Knoten vorteilhaft (Scheffler 1976, Langhagen 1976). Es wurde von Katzenbach im Rahmen der Arbeitsgruppe implementiert und hat den Vorteil, unmittelbar Normalkräfte, Querkräfte und Biegemomente zu liefern. Der Boden wird dargestellt durch vierknotige Viereckselemente, die nach Gallagher (1976) aus vier Dreieckselementen aufgebaut werden (siehe auch Czapla 1979). Innerhalb eines Elements wird die Spannung konstant angenommen.

Für die Darstellung des Modellversuchs als Finite Element Struktur ergeben sich die in Abb. 7.1.3 dargestellten Anforderungen und Randbedingungen. In der Struktur in Abb. 7.1.4 sind die eindimensionalen Stab-, Balken- und Kluftelemente nicht mehr erkennbar. Sie fallen mit den Elementgrenzen der Kontinuumselemente zusammen. Da die Struktur, abgesehen von der Oberfläche, mit Kluftelementen umgeben ist, werden als Randbedingungen an diesen drei Rändern keine Verschiebungen zugelassen. Durch die Kluftelemente ergeben sich die Verschiebungen parallel zum Rand selbsttätig. Für die Berechnung ausgesucht wurde Versuch Nr. 17 von Wolff. Es werden drei horizontale Ankerlagen von l = 47 cm Länge eingebaut (l = Abstand Wand bis Mitte Ankerplatte). Der Ankerdurchmesser beträgt 1,5 mm, die Wandsteifigkeit 0.1422 $cm^4/m$. Da die Vorspannung von 20 % in diesem Versuch gerade ausreicht, um eine kraftschlüssige Verbindung herzustellen, wird sie in der Berechnung nicht simuliert. Der Aushub des Bodens vor der Wand erfolgt

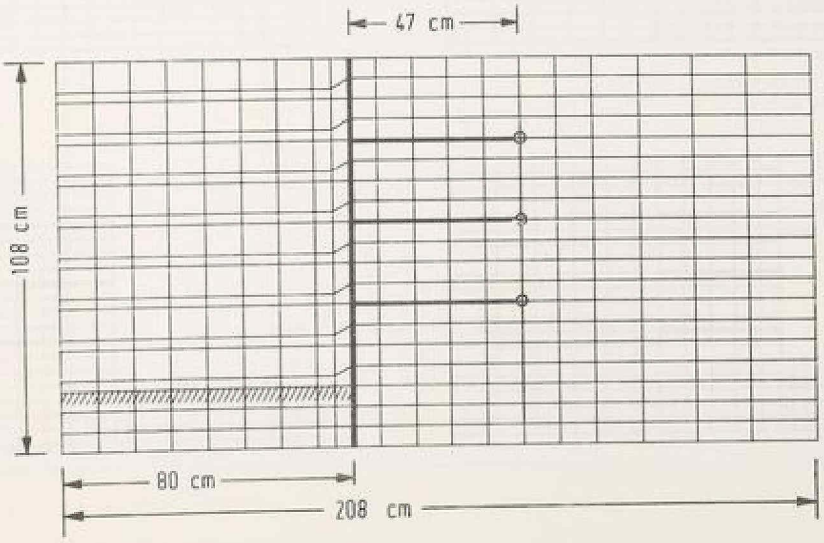



Abb. 7.1.4 Finite Element Struktur für Nachrechnung des Modellversuchs

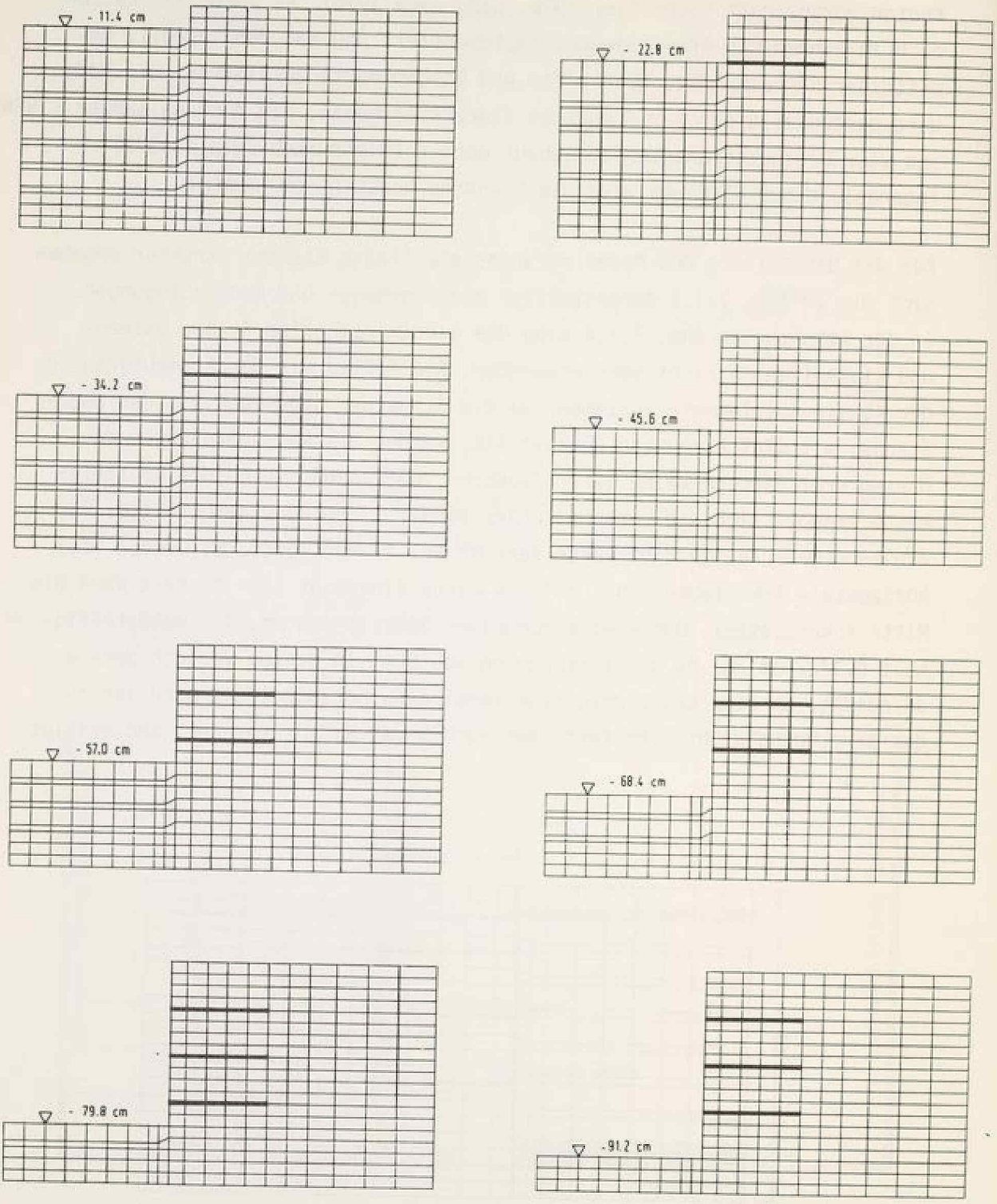



Abb. 7.1.5 Schrittweiser Bodenaushub und Ankereinbau in der Finite Element Rechnung

in insgesamt 8 Lagen (Abb. 7.1.5). Jede Lage ist durch zwei Elementreihen dargestellt. Nach jeweils zwei ausgehobenen Lagen werden die entsprechenden Anker aktiviert. Sie hatten vorher nur eine sehr kleine numerisch noch darstellbare Steifigkeit und erhalten jetzt ihren tatsächlichen Querschnitt. Damit werden sie in folgenden Aushubschritten beansprucht und eine Ankerkraft baut sich auf. Die Berechnung jedes Aushubschritts wird intern wieder in drei Inkremente unterteilt, um den nichtlinearen Stoffmodellen gerecht zu werden.

Die Ermittlung der Parameter für das elastoplastische Stoffgesetz von Arslan (1980) ist bereits in Kapitel 5.3 erfolgt. Zu Vergleichszwecken werden die gleichen Versuche auch für ein nichtlinear-elastisches hyperbolisches Modell (Duncan und Chang 1970) ausgewertet. Die Approximation an die Versuchskurven wurde mit dem Programm von Czapla (1979) vorgenommen und ist aus Abb. 7.1.6 ersichtlich. Es zeigt sich, daß bei diesen Versuchen im Bereich sehr kleiner Spannungen Streuungen - eventuell Störungen im Versuchsablauf - eintreten, die es schwierig machen, im Sinne von

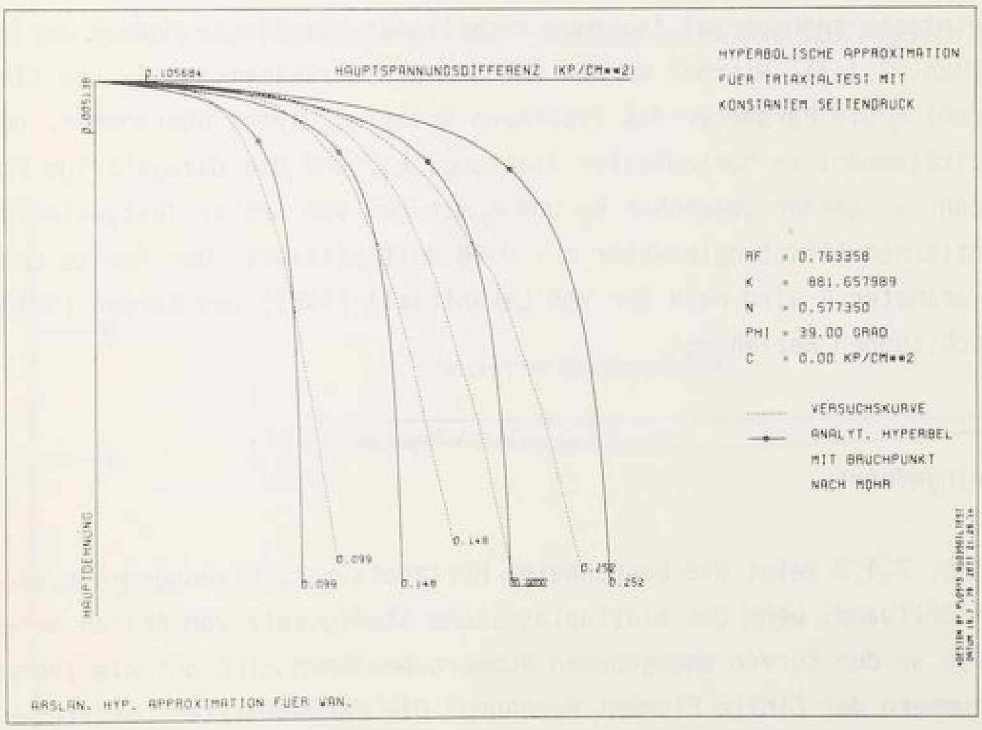



Abb. 7.1.6 Hyperbolische Approximation der Versuchskurven von Arslan im Bereich kleiner Spannungen

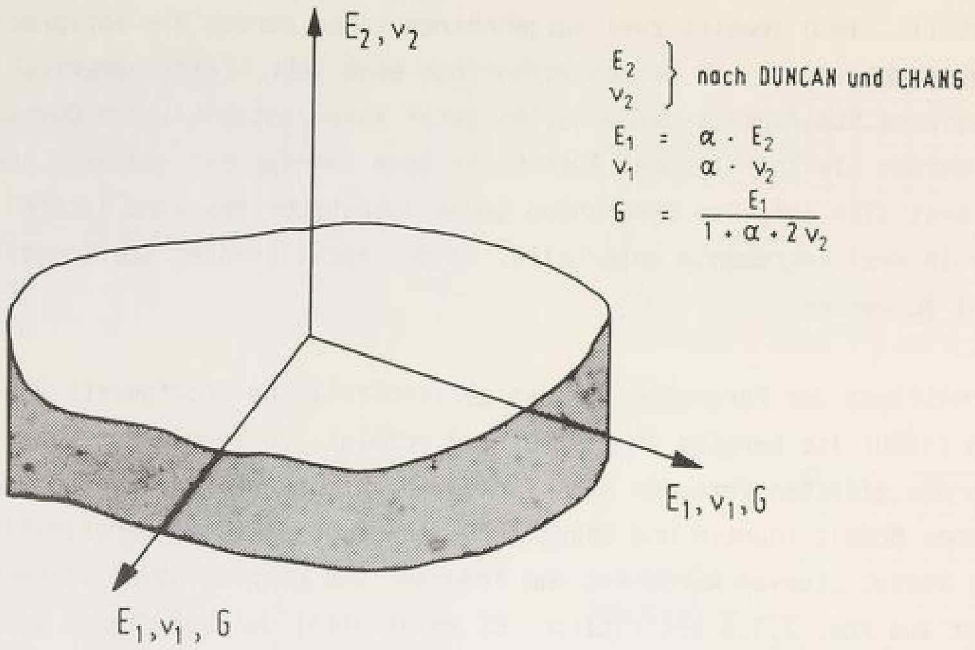



Abb. 7.1.7 Transversal isotropes Stoffmodell

Hyperbeln auszuwerten. Darüber hinaus kam das vom Verfasser implementierte einfache transversal isotrope nichtlinear-elastische Modell zur Anwendung (Abb. 7.1.7). Hierbei werden für den Elastizitätsmodul $E_2$ und die Poissonzahl $\nu_2$ die Parameter des isotropen Ansatzes direkt übernommen. Der Elastizitätsmodul in horizontaler Richtung, $E_1$, und die dazugehörige Poissonzahl $\nu_1$ werden gegenüber $E_2$ und $\nu_2$ mit dem von Arslan festgestellten elastischen Anisotropiefaktor $\alpha = 0.68$ multipliziert. Der fünfte unabhängige Parameter G wird nach der von Lekhnitskii (1963) und Barden (1963) vorgeschlagenen Beziehung

$$G = \frac{E_1}{1 + \alpha + 2\nu_2}$$

eingeführt.

Abb. 7.1.8 zeigt die berechneten Horizontalverschiebungen der verankerten Modellwand, wenn das elastoplastische Stoffgesetz von Arslan benutzt wird. Die an den Kurven angegebenen Nummern beziehen sich auf die Inkrementnummern der Finite Element Rechnung. Die dargestellten Laststufen 4, 7, 10, 13, 16, 19 und 22 entsprechen den in Abb. 7.1.5 gezeigten Zwischenzuständen des Bauablaufs. Laststufe 25 entspricht dem Endaushubzustand. Die Verschiebungen zeigen die in Versuchen und in-situ Messungen festgestellten Charakteristika: Der Wandfuß bleibt mit zunehmendem Aushub infolge des

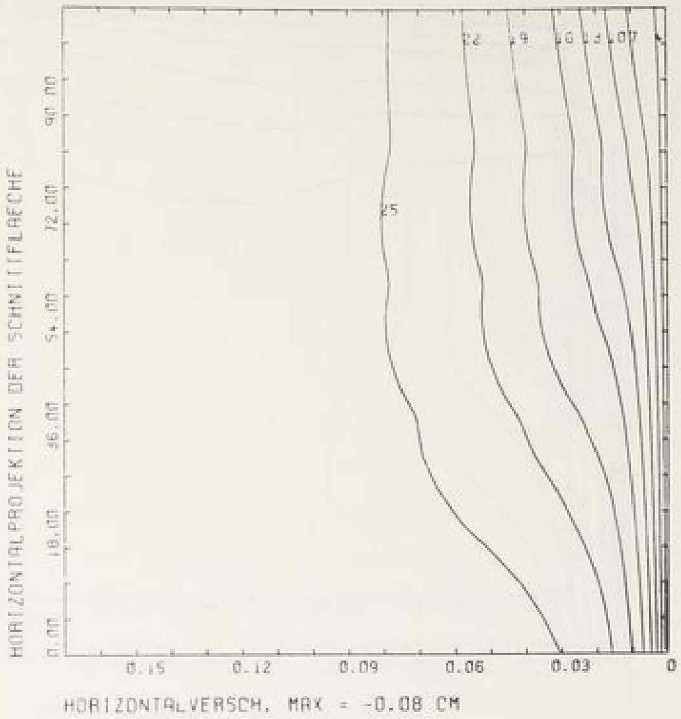



Abb. 7.1.8 Berechnete Wandverformungen bei elastoplastischem Stoffgesetz

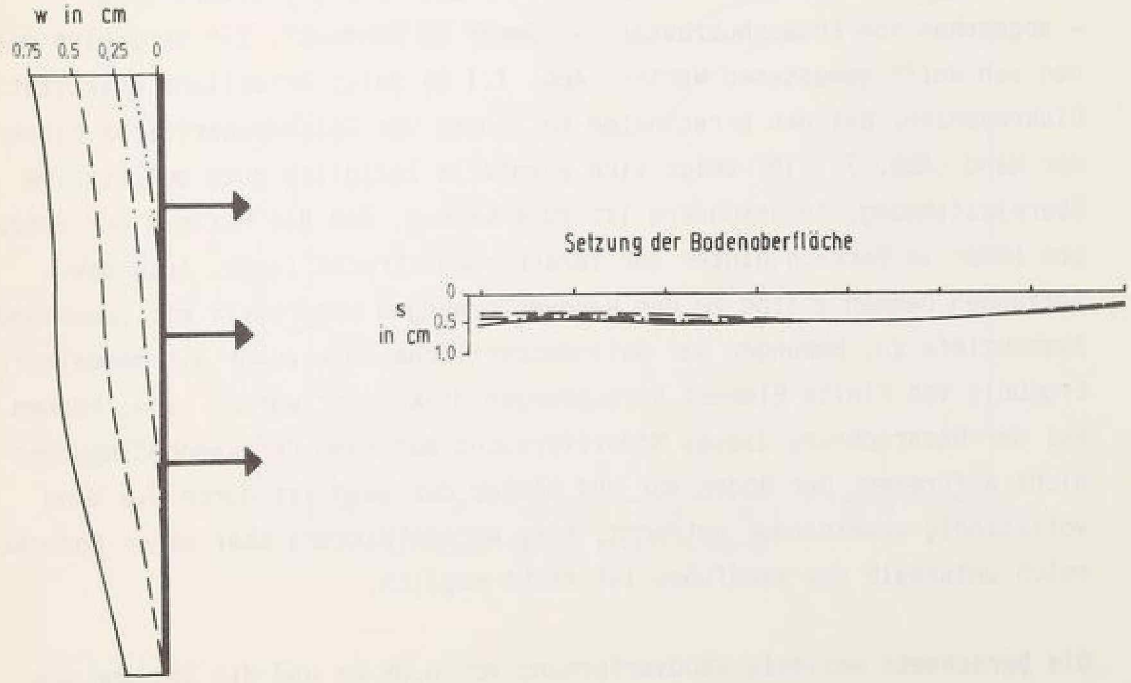



Abb. 7.1.9 Versuchsergebnisse von Wolff (Versuch Nr. 17; 20 % Vorspannung)

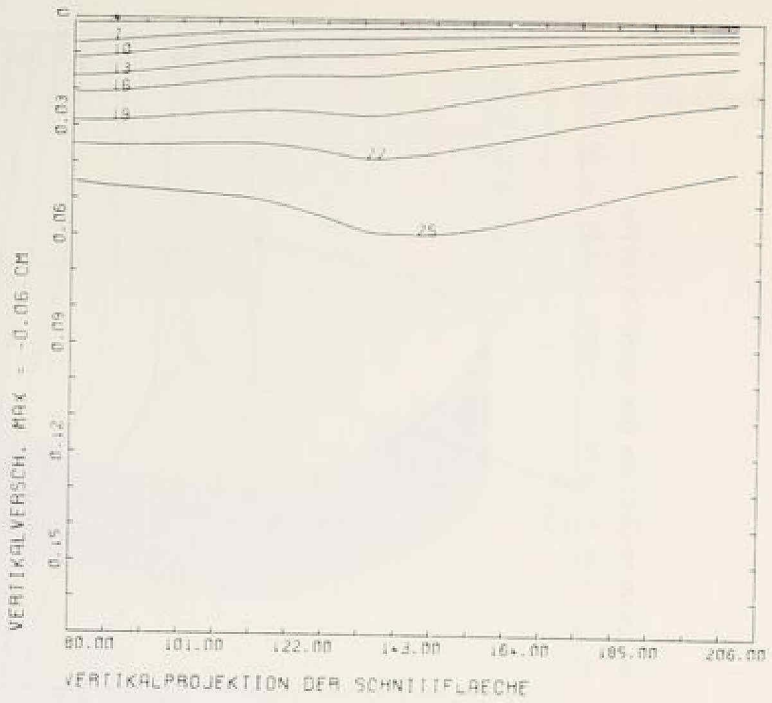



Abb. 7.1.10 Berechnete Vertikalverformungen der Geländeoberfläche hinter der Wand bei elastoplastischem Stoffgesetz

sich aufbauenden Erdwiderstands vor der Wand immer weiter zurück. Die Verformungen insgesamt nehmen progressiv zu; der Maximalwert liegt - abgesehen vom Endaushubzustand - immer am Wandkopf. Ein Vergleich mit den von Wolff gemessenen Werten (Abb. 7.1.9) zeigt erhebliche quantitative Diskrepanzen. Bei den errechneten Setzungen der Geländeoberfläche hinter der Wand (Abb. 7.1.10) zeigt sich ebenfalls lediglich gute qualitative Übereinstimmung. Insbesondere ist zu erkennen, daß das Maximum der Setzungen immer im Bereich hinter der Verankerungsstrecke liegt. Auch die Setzungen nehmen analog zu den Wandverformungen progressiv mit zunehmender Aushubtiefe zu. Hebungen der Geländeoberfläche, die zuvor als mangelhaftes Ergebnis von Finite Element Berechnungen diskutiert worden sind, können bei der Nachrechnung dieses Modellversuchs aufgrund der Randbedingungen nicht auftreten: Der Boden vor und hinter der Wand ist durch die Wand vollständig voneinander getrennt. Eine Wechselwirkung über einen Bodenbereich unterhalb des Wandfußes ist nicht möglich.

Die berechnete maximale Wandverformung von 0.08 cm und die Setzung von 0.06 cm liegen beachtlich unter den gemessenen Wwerten. Es ist der Faktor 10 zu erkennen. Diese extreme Diskrepanz bedarf weitergehender Unter-

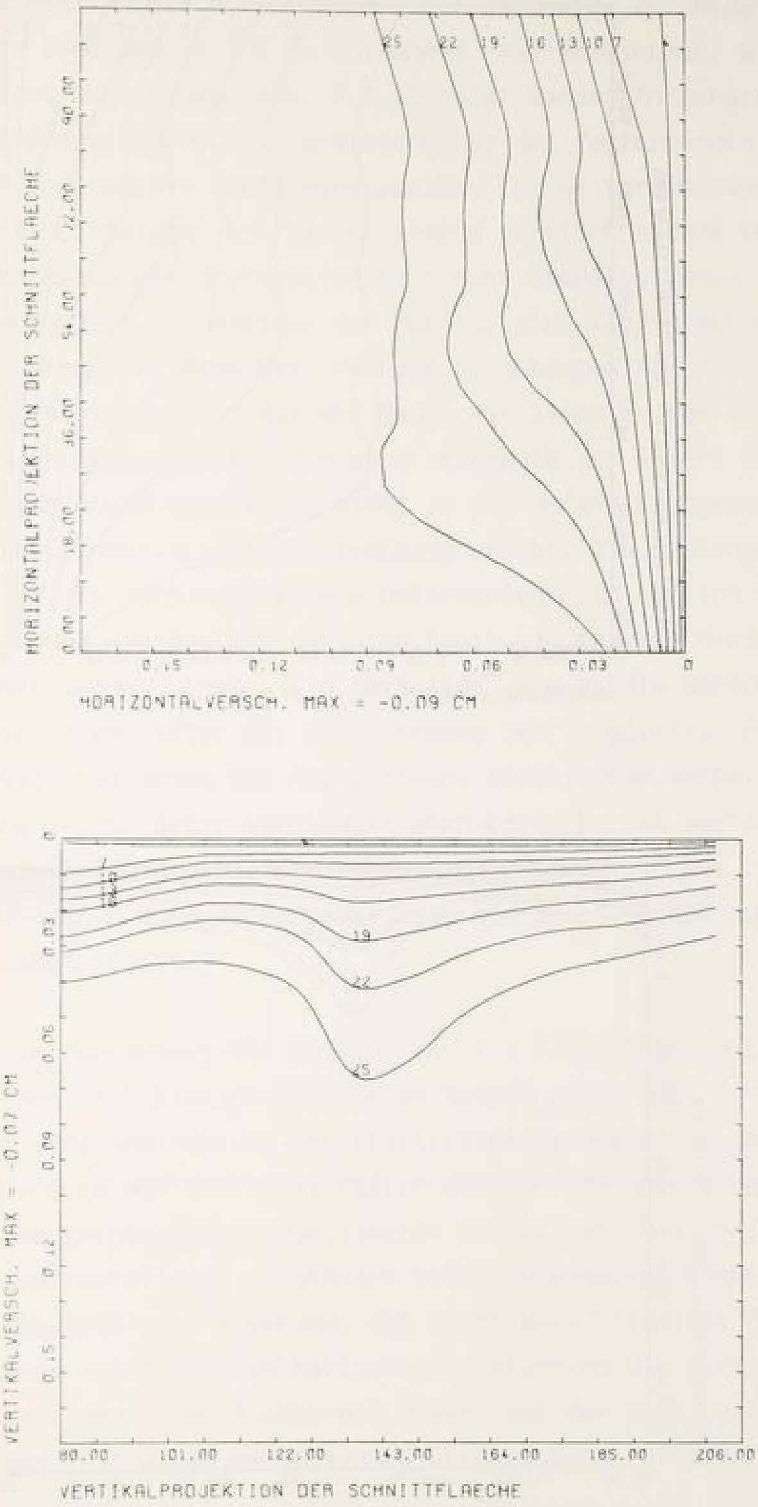



Abb. 7.1.11 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Annahme eines nichtlinear-elastischen Stoffansatzes

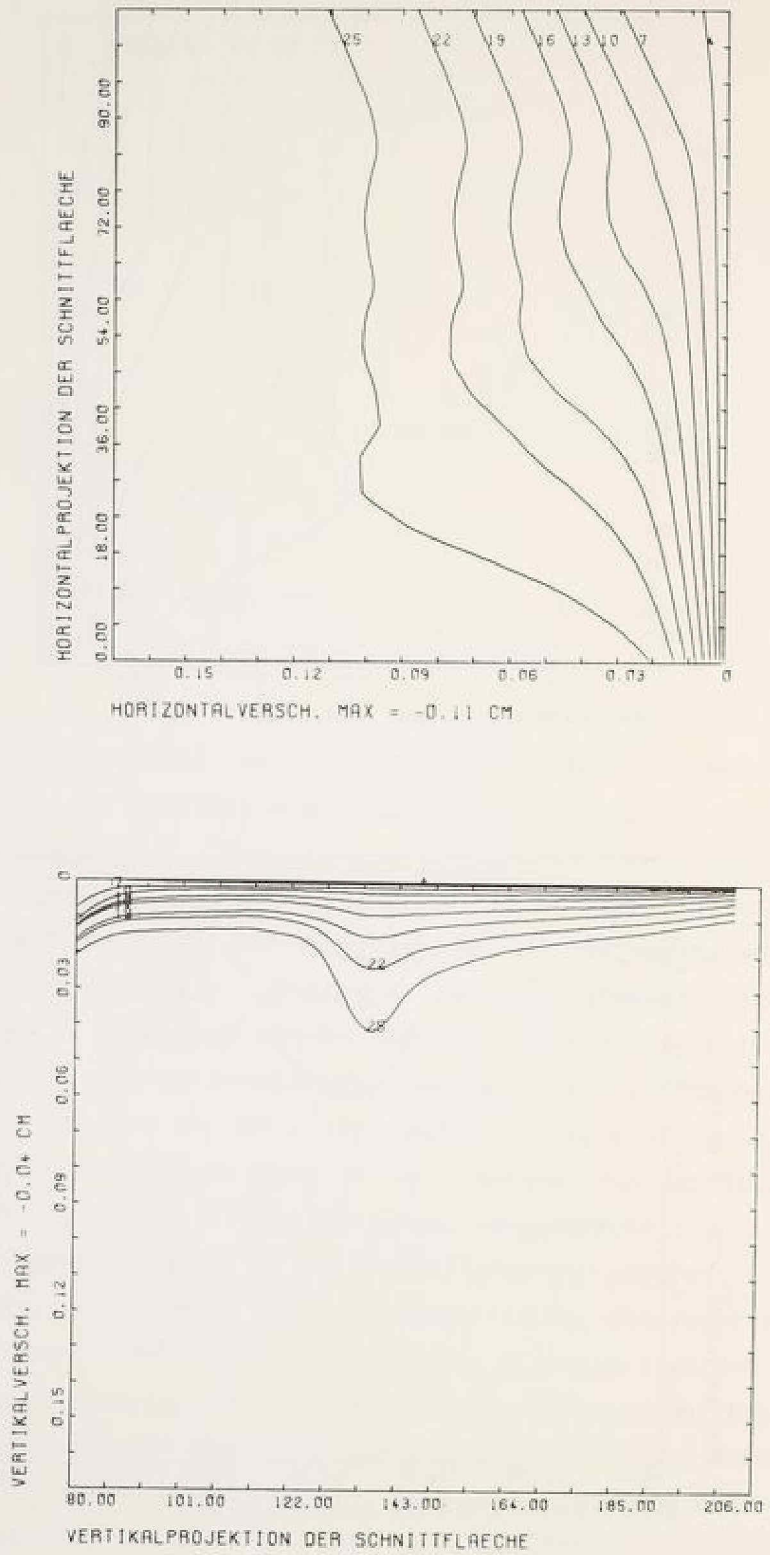



Abb. 7.1.12 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Annahme eines transversal isotropen nichtlinear-elastischen Stoffansatzes nach Abb. 7.1.7

suchungen. Zu Vergleichszwecken wird eine Berechnung mit einfachem nichtlinear-elastischem Stoffansatz herangezogen. Die Parameter der hyperbolischen Approximation sind Abb. 7.1.6 zu entnehmen. Als Poissonzahl wird $\nu = 0.40$ als konstant angenommen. Abb. 7.1.11 zeigt Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche. Die Größenordnung der Verformungen bleibt gleich, ebenso die progressive Verformungszunahme bei weitergehendem Bodenaushub vor der Wand. Es zeigen sich jedoch einige deutlich andere Verhaltensweisen, die mit den Messungen qualitativ nicht mehr übereinstimmen. Mit zunehmendem Aushub wandert das Maximum der horizontalen Wandverschiebungen vom Wandkopf nach unten. Das bedeutet, daß die eingebauten Anker die Verformungen erheblich behindern und daß der Boden vor allem in dem auf den Ankereinbau folgenden Aushubschritt die Wand unterhalb des Ankers stark verformt. Bei den Messungen konnte das nicht in dem Umfang festgestellt werden, den die nichtlinear-elastische Rechnung ergibt. Die Setzungen der Geländeoberfläche zeigen noch deutlichere Unterschiede. Im Bereich der Verankerungsstrecke und unmittelbar dahinter tritt ein starkes Maximum auf, das nicht beobachtet werden konnte. Ein Verhalten, wie es die Berechnung hier liefert, hätte in der Natur für die Bebauung sehr ungünstige Folgen. Es steht jedoch fest, daß diese bei nichtlinear- elastischem Verhalten auftretende Setzung in der Natur nicht auftreten kann. Es ist ausschließlich eine Folge des Stoffansatzes, der in diesem Bodenbereich bei zunehmendem Baugrubenaushub hohe Ausnutzungsgrade und im Endaushub sogar Bruchzustände im Boden ergibt.

Die Ergebnisse einer Berechnung mit dem in Abb. 7.1.7 als Prinzip skizzierten transversal isotropen nichtlinear-elastischen Modell zeigt Abb. 7.1.12. Es zeigt sich, daß eine Abminderung der Elastizitätsparameter in der Horizontalen um $\alpha = 0.68$ auf die horizontalen Wandverformungen einen zwar feststellbaren, aber keineswegs proportionalen Effekt hat. Bei gleichbleibender Verformungscharakteristik vergrößern sich die Wandverschiebungen nur um etwa 20 %. Daraus läßt sich erkennen, daß nicht ausschließlich die Verformungseigenschaften des Bodens in horizontaler Richtung die horizontalen Wandverformungen bestimmen. Der Aushub des Bodens vor der Wand, d.h. die vertikale Entlastung, hat einen maßgeblichen Einfluß auch auf die Horizontalverformungen.

Die Setzung der Geländeoberfläche bei transversal isotropem Ansatz zeigt gleiche Merkmale wie bei isotropem Ansatz. Die Beträge sind jedoch um die Hälfte reduziert und damit noch weiter von den gemessenen Werten entfernt.

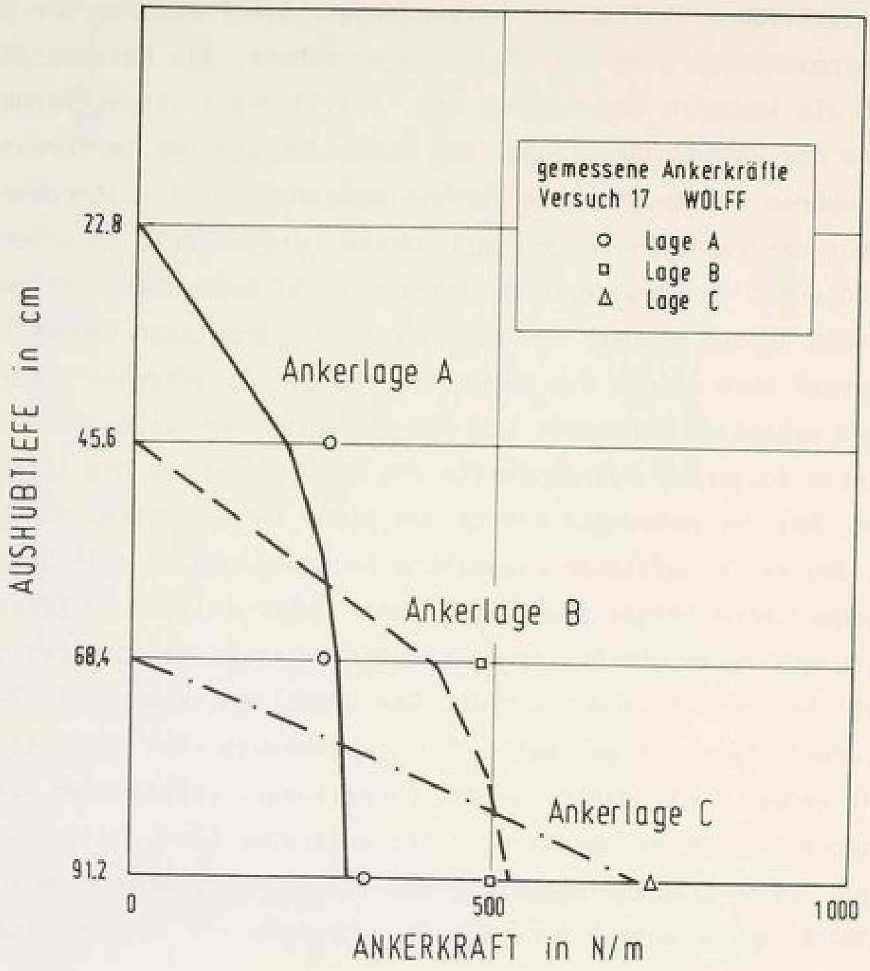
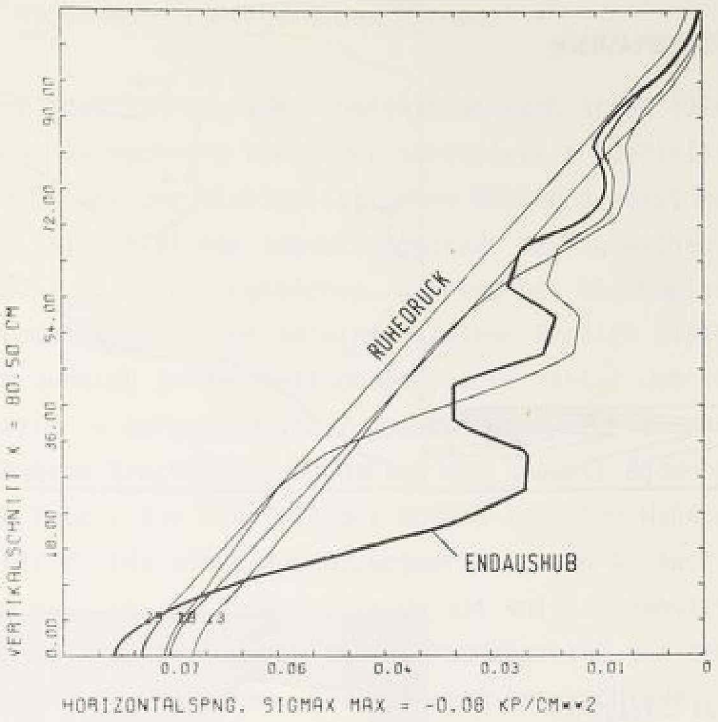



Abb. 7.1.13 Vergleich von errechneten und gemessenen Ankerkräften (elastoplastische Berechnung)

Unabhängig von der schlechten Übereinstimmung der Verformungen bei Rechnung und Modellversuch ergeben sich die Ankerkräfte bei der Berechnung in sehr guter Übereinstimmung mit den Messungen. Abb. 7.1.13 zeigt errechnete und gemessene Werte für die drei Ankerlagen in Abhängigkeit von der Aushubtiefe. Als wesentliches Ergebnis ist festzuhalten, daß die Ankerkräfte nur in dem auf den Einbau folgenden Aushubschritt einen wesentlichen Kraftzuwachs erfahren. Nach Einbau eines tiefer liegenden Ankers wird vor allem dieser neu eingebaute stark beansprucht. Das ist auch bei den Modellversuchen von Wolff festgestellt worden.

Ein Vergleich der errechneten Erddruckverteilungen (Abb. 7.1.14) untereinander, aber auch mit den Messungen von Wolff, zeigt einige sehr deutliche Unterschiede. Während sich bei einer elastoplastischen Berechnung der Erd-



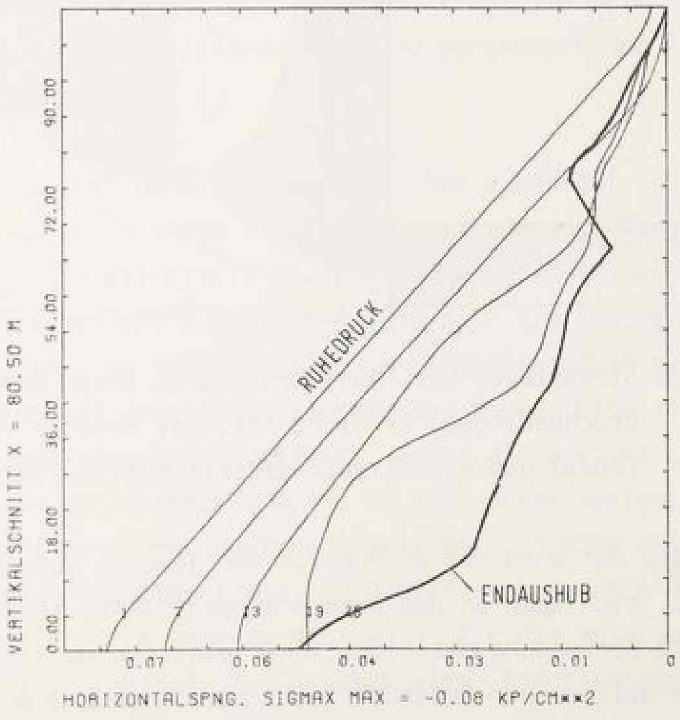




Abb. 7.1.14 Errechnete Erddruckverteilung bei elastoplastischem (oben) und nichtlinear-elastischem Stoffmodell (unten)

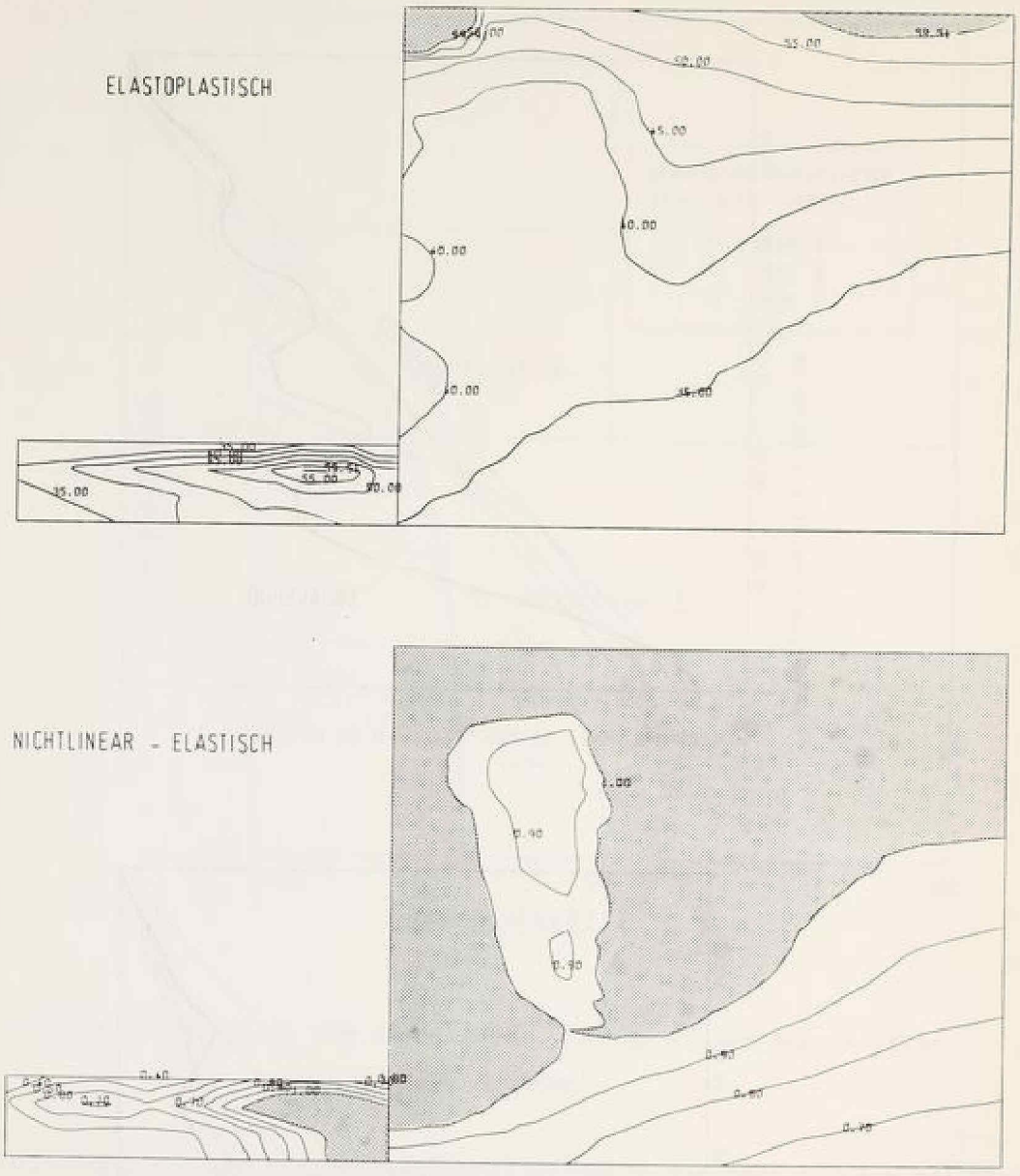



Abb. 7.1.15 Stresslevel bzw. Ausnutzungsgrad sowie Bereiche, in denen die Bruchbedingung erreicht ist, bei Annahme von elastoplastischem (oben) und nichtlinear-elastischem Stoffmodell (unten)

druck hinter der Wand nur im Bereich der jeweils ausgehobenen Lage stark vermindert, sich aber an den Ankern konzentriert, zeigt die darunter abgebildete Berechnung mit nichtlinear-elastischem Ansatz ein gänzlich anderes Verhalten. Der Erddruck fällt beim Aushub über die gesamte Wandhöhe ab und zeigt nur an der oberen Ankerlage eine geringe Konzentration. Der Gesamterddruck ist wesentlich kleiner als im elastoplastischen Fall, entspricht damit aber nicht den von Wolff gemessenen Werten (nicht dar-

gestellt). Anzumerken ist, daß die Erddruckmessungen im Modellversuch ein geringeres Auflösungsvermögen aufweisen als die Berechnung, daher also Minima und Maxima nicht so gut wiedergeben können.

Die Darstellung des Ausnutzungsgrades (Definition nach Stroh 1974) bei der nichtlinear-elastischen Rechnung sowie des Stresslevels (Definition nach Lade und Duncan 1975) bei der elastoplastischen Rechnung zeigt wesentliche Unterschiede. Die Linien gleicher Ausnutzungsgrade bzw. gleichen Stresslevels sind in Abb. 7.1.15 zu vergleichen. Während bei elastoplastischem Stoffgesetz die Bruchbedingung nur in einem kleinen Bereich hinter dem Wandkopf und einem Bereich an der Geländeoberfläche hinter der Verankerungsstrecke erreicht wird - Auftreten von Zugspannungen - , ist bei Ansatz mit Mohr-Coulomb Bruchbedingung nahezu der gesamte Bodenbereich hinter der Wand im Bruch. Nur ein Teil des Bodens zwischen Wand und Verankerungsstrecke bleibt bei einem Ausnutzungsgrad von 90 %. Auch der Boden vor dem Wandfuß im Bereich des Erdwiderstands ist voll ausgenutzt. Bei elastoplastischem Stoffgesetz dagegen ist im Bodenbereich vor der Wand praktisch kein Bruch zu verzeichnen. Die extremen Unterschiede in der Ausdehnung der Bruchbereiche bei beiden Stoffmodellen sind die deutliche Auswirkung der gewählten Bruchbedingung. Während bei Mohr-Coulomb die Spannung senkrecht zur betrachteten Ebene nicht eingeht, trägt sie beim Stoffgesetz von Arslan erheblich zur Stabilisierung bei und vergrößert den Abstand vom Bruch.

Während bisher bei gleicher Geometrie und gleichem Bauablauf lediglich verschiedene Stoffmodelle in ihren Auswirkungen miteinander verglichen wurden, soll im folgenden die Finite Element Methode benutzt werden, um die Grenzen des Modellversuchs auszuweiten. Sie soll als ein Werkzeug dienen, um festzustellen, ob zum Beispiel die Randbedingungen des Modells entscheidenden Einfluß auf die Versuchsergebnisse haben. Eine solche Untersuchung wird hier exemplarisch durchgeführt, wobei die vertikale Begrenzung des Versuchskastens in der Rechnung um 100 cm nach unten verlegt wird. Der in der Berechnung erfaßte Boden endet nun nicht mehr in Höhe des Wandfußes, sondern in etwa doppelter Tiefe. Es ergibt sich dadurch die gleiche Netzeinteilung, wie sie - in anderem Maßstab - für die Untersuchung von Wänden im Maßstab 1:1 in Kapitel 7.2 benutzt wird. Die Ergebnisse der Berechnungen lassen sich kurz zusammenfassen:

Bei Anwendung eines elastoplastischen Stoffgesetzes ergeben sich für "flache" und für "tiefe" Modellwand nahezu übereinstimmende Wandverformun-

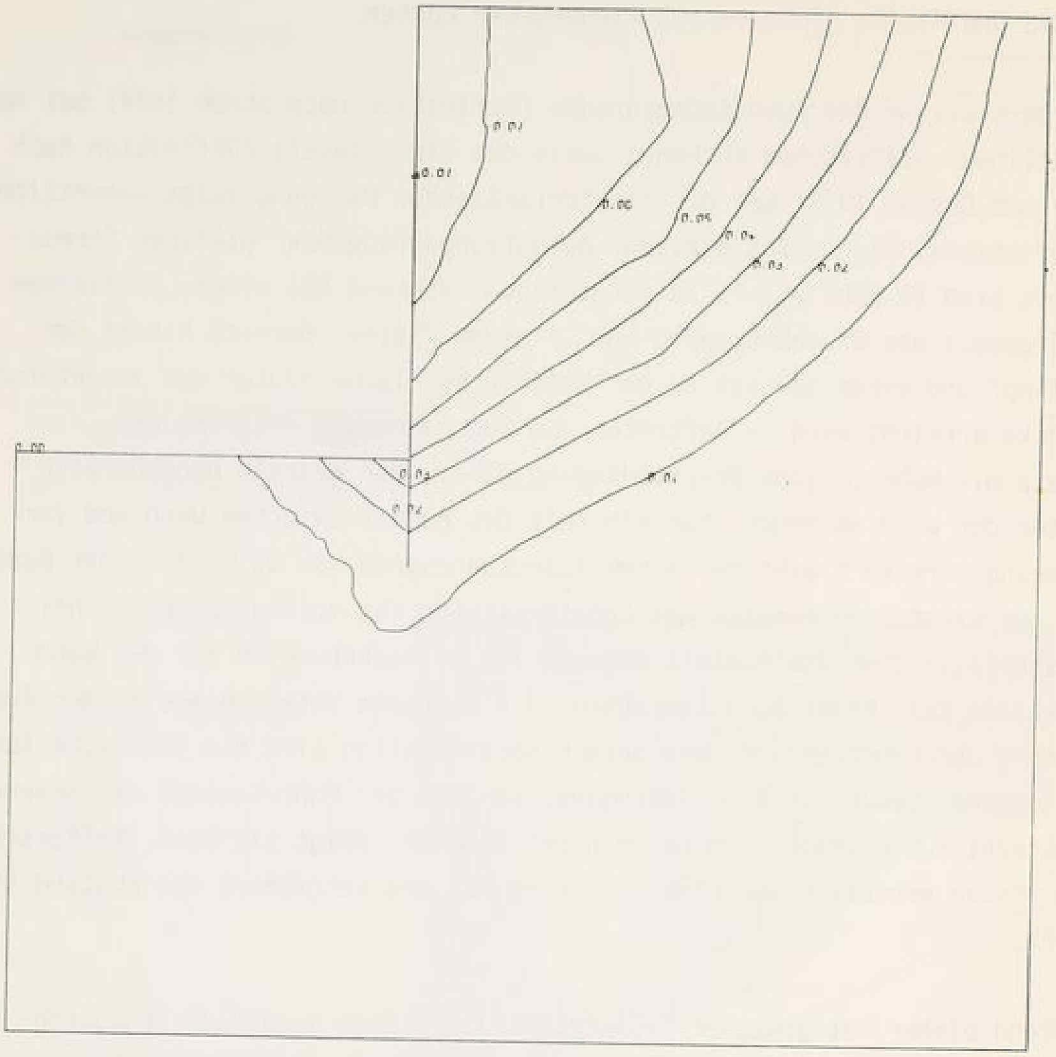


Abb. 7.1.16 Linien gleicher Horizontalverformungen für "tiefen" Modellkasten (in cm)

gen, Setzungen der Geländeoberfläche, Ankerkräfte und Erddrücke. Die Ergebnisse der Berechnungen sind hier nicht noch einmal dargestellt; sie sind deckungsgleich mit den Abb. 7.1.8, 7.1.10, 7.1.13 und 7.1.14 weiter oben. Auch die Linien gleicher Horizontalverformungen (Abb. 7.1.16) und Vertikalverformungen (Abb. 7.1.17) zeigen, daß im Bodenbereich unterhalb des Wandfußes nur sehr geringe Verformungen stattfinden. Die Hebungen, die aus dem Baugrubenaushub und der daraus folgenden Entlastung zwangsläufig entstehen, sind recht klein, verglichen mit den Setzungen des Bodenbereichs hinter der Wand. Einander überlagert ergeben sich immer beachtliche Setzungen der Geländeoberfläche.

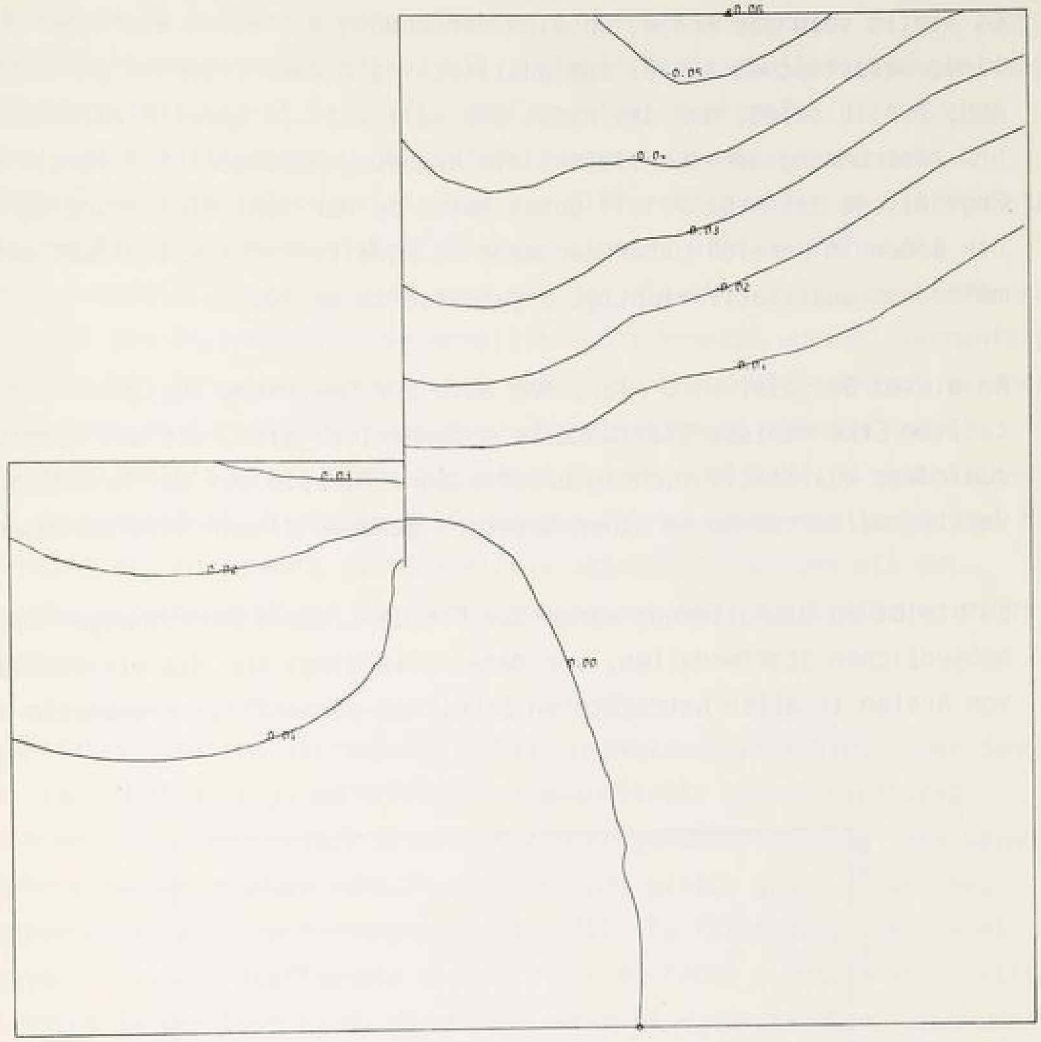


Abb. 7.1.17 Linien gleicher Vertikalverformungen für "tiefen" Modellkasten (in cm )

Auf diese Weise zeigt die Finite Element Berechnung mit elastoplastischem Stoffgesetz, daß die Abmessungen eines Modellversuchs damit überprüft werden können. In diesem hier untersuchten Fall ist die Aussage erlaubt, daß nach der Berechnung die im Versuch fehlende Tiefenwirkung keinen Einfluß auf das Verformungsverhalten von Wand und Geländeoberfläche hat. Es ist daher mit großer Sicherheit zulässig, die im Modellversuch gewonnenen Erfahrungen auf den nicht untersuchten Fall des "tiefen" Modellkastens zu übertragen. Da dieser erheblich mehr Ähnlichkeit mit der Natur hat, ist eine solche Übertragungsmöglichkeit durchaus von Bedeutung. Die Durchführung

von Modellversuchen wird erleichtert, wenn die Abmessungen des Modells sinnvoll eingeschränkt werden können.

Es stellt sich die Frage, ob eine Berechnung mit einem einfachen nichtlinear-elastischen Ansatz zum qualitativ gleichen Ergebnis gekommen wäre. Abb. 7.1.18 zeigt, daß das nicht der Fall ist. Im Bereich zwischen Wand und Verankerungsstrecke liefert die Rechnung Hebungen. Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit Abb. 7.1.11 unten hätte zu der Schlußfolgerung geführt, daß der Boden im Bereich unter der Wand im Modellversuch mit erfaßt werden müßte, um qualitativ richtige Ergebnisse zu erzielen.

An diesem Beispiel wird klar, daß auch zur Gewinnung ausschließlich qualitativer Erkenntnisse Stoffmodelle erforderlich sind, die das Bodenverhalten zumindest qualitativ richtig beschreiben. Modelle auf der Grundlage des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes genügen diesen Anforderungen nicht.

Es bleibt zu diskutieren, warum die Finite Element Berechnungen mit drei unterschiedlichen Stoffmodellen, von denen allerdings nur das elastoplastische von Arslan in allen betrachteten Schnitten vernünftige Ergebnisse liefert,

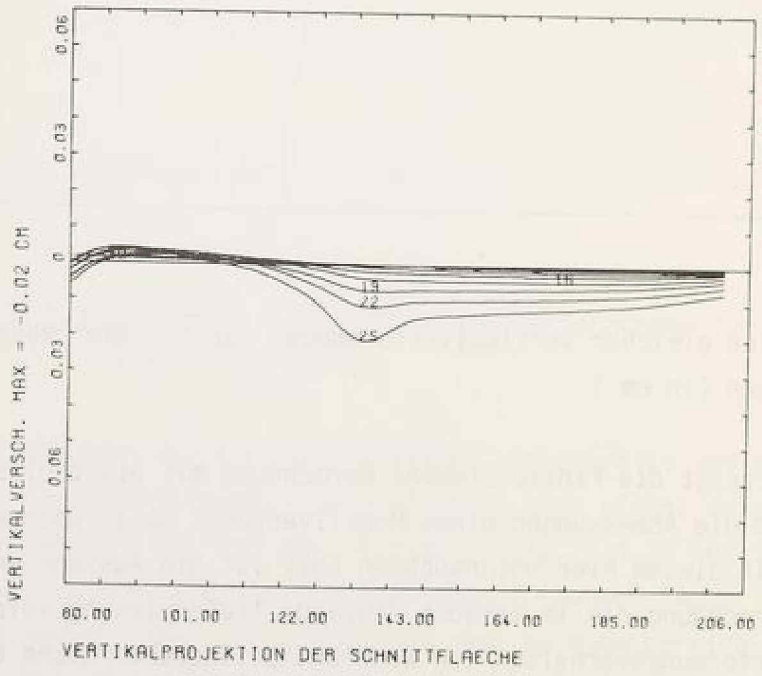



Abb. 7.1.18 Errechnete Verformung der Geländeoberfläche bei "tiefem" Modellkasten, wenn ein nichtlinear-elastischer Ansatz benutzt wird

allesamt um den Faktor 10 zu geringe Verformungen ergeben. Das ansonsten vielfach vorgebrachte Argument, daß im Bereich kleiner Spannungen die Scherfestigkeit größer und die Verformungen geringer seien, ist hier nicht angebracht, da ja die Verformungen zu gering errechnet wurden. Es muß sehr nachdenklich stimmen, daß ein Sand mit gleicher Kornverteilung und gleichem Trockenraumgewicht ($\rho_d$ = 1.61 t/m$^3$), aber eventuell geringfügig anderer Kornform, im Triaxialversuch und im Modellversuch um den Faktor zehn unterschiedliches Verhalten zeigt. Daß die Differenzen weder am Stoffgesetz noch an der Finite Element Diskretisierung liegen, wird im folgenden Kapitel 7.2 gezeigt. Dort ergeben sich mit den gleichen Stoffparametern, wie sie auch für die Nachrechnung des Modellversuchs benutzt wurden, vernünftige Verformungen bei Baugruben natürlicher Größe. Ein Sand mit zehnfach weicherem Verhalten, wie es für eine quantitative Übereinstimmung mit dem Modellversuch erforderlich wäre, würde bei einer verankerten Wand im natürlichen Maßstab zu unrealistisch großen Verformungen führen. Auch die in Kapitel 6 beim Problem des Fundaments festgestellten starken Zwängungen mit entsprechenden Auswirkungen auf das Verhalten lassen sich zur Erklärung nicht heranziehen.

Bei qualitativ gleichem Verformungsverhalten zweier unterschiedlicher Sande ergaben sich dort infolge äußerer Zwänge quantitativ unterschiedliche Lastverformungskurven (Faktor 5). Bei der hier behandelten Wand ohne besondere äußere Zwänge ergeben Versuch und Rechnung gleich große Erddrücke, aber unterschiedliche Verformungen (Faktor 10). Es fällt auf, daß sowohl das elastoplastische Stoffgesetz als auch das einfache nichtlinear-elastische Modell nicht in der Lage sind, die Modellversuche wiederzugeben. Erddruckverteilung und Ankerkräfte können qualitativ und quantitativ richtig berechnet werden. Die Größe der Verformungen ist nicht berechenbar.

Bereits Ohde (1950) stellt fest, daß bei Modellversuchen mit Stützwänden in Sand außer Gleitbewegungen auch Rollbewegungen von Sandkorngruppen auftreten. Diese Rotationen sind in dem hier benutzten mechanischen Modell nicht berücksichtigt.

Becker (1978) kommt nach seinen Versuchen mit einem idealisierten Modellmaterial allerdings zu der Auffassung, daß die Korndrehungen keinen nennenswerten Einfluß haben.

Eine abschließende Beurteilung hierüber ist dem Verfasser derzeit nicht möglich. Es liegt jedoch die Schlußfolgerung nahe, daß bei geringer werdendem Spannungszustand ein rolliger Boden sich zunehmend vom Denkmodell des Kontinuums entfernt und daß das Einzelverhalten der Körner insbesondere bei lockerer Lagerung bedeutsam werden kann. Ein solches Material setzt jedoch andere verfeinerte mechanisch-mathematische Modelle voraus.

Als zusammenfassende Erfahrung über die Bemühungen, die Ergebnisse von Modellversuchen mit Hilfe der Finite Element Methode nachzuvollziehen, kann gelten:

- Das benutzte elastoplastische Stoffgesetz von Arslan liefert für Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche qualitativ gute Übereinstimmung mit den Messungen.

- Erddrücke und Ankerkräfte können mit dem elastoplastischen Stoffgesetz auch quantitativ sehr gut erfaßt werden.

- Selbst Untersuchungen, die lediglich den Einfluß von Randbedingungen klären sollen, führen zu falschen Schlußfolgerungen, wenn Stoffmodelle auf der Grundlage des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes benutzt werden.

- Die Größe der Verformungen konnte nicht berechnet werden.

## 7.2 Berechnungen für Baugruben natürlicher Größe

Unbeeinflußt von den Schwierigkeiten, bei der Berechnung von Baugrubenwänden im Modellmaßstab quantitative Übereinstimmung zu erzielen, besteht die Möglichkeit, mit der Finite Element Methode unmittelbar verankerte Wände in natürlicher Größe zu untersuchen. Dieser Weg ist vorzuziehen, wenn die errechneten Verformungen mit Messungen in situ und mit Erfahrungswerten verglichen werden oder auch lediglich auf Plausibilität überprüft werden sollen. Einschränkend wirkt sich aus, daß bei Messungen in situ das Verhalten des Bodens nur selten hinreichend bekannt ist, um Parameter für eine Berechnung angeben zu können. Für die folgenden Untersuchungen wird diese Situation dadurch umgangen, daß die von Arslan (1980) ermittelten Parameter für sein elastoplastisches Stoffgesetz übernommen werden. Es handelt sich um die gleichen Parameter, die zuvor für die Berechnung der verankerten Wand im Modell Anwendung fanden. Somit sind Vergleiche mit Baustellenmessungen direkt nicht möglich. Dafür aber beziehen sich die Berechnungen sowohl für Baugruben natürlicher Größe als auch im Modellmaßstab auf die gleichen Ergebnisse von Triaxialversuchen. Die Versuche stellen daher einen maßstabneutralen Festpunkt in der Diskussion der Berechnungsergebnisse dar. Insbesondere war es nicht erforderlich, die Versuche für den Bereich kleiner Spannungen im Modellversuch und mittlerer Spannungen in situ getrennt mit unterschiedlichen Parametern zu approximieren. Die in Kapitel 5.3 vorgenommenen Auswertungen zeigen, daß beide Bereiche mit den vorgelegten Parametern gleich gut angenähert werden.

Um die Vergleichsmöglichkeit mit den für das Modell durchgeführten Berechnungen uneingeschränkt aufrechterhalten zu können, wird die gleiche Finite Element Struktur benutzt wie sie für die Untersuchungen am "tiefen" Modellkasten erstellt wurde. Die Abmessungen werden mit dem geometrischen Faktor 15 multipliziert. Es ergibt sich damit eine 13.7 m tiefe dreifach verankerte Wand (Abb. 7.2.1). Die Lage der Anker bleibt unverändert horizontal. Dies ist zwar nicht üblich, wird jedoch nach Stroh (1974) auf das Berechnungsergebnis nur wenig Einfluß haben. Jeder Aushubschritt hat eine Tiefe von 3.4 m. Die Simulation des Aushubs erfolgt daher wie in Abb. 7.1.5 bereits dargestellt. Das Vorspannen der Anker wird in jeweils 2 Inkrementen vorgenommen. Um die Steifigkeit der Wand zu erhalten, wird die Steifigkeit der Modellwand von 0.1422 $cm^4/m$ mit dem Maßstabfaktor 15 umgerechnet zu $15^4 \times 0.1422 = 7200\ cm^4/m$. Diese Steifigkeit entspricht einem Spundwandprofil Larssen 21 oder Hoesch 95. Zur Bemessung der Anker wurde eine

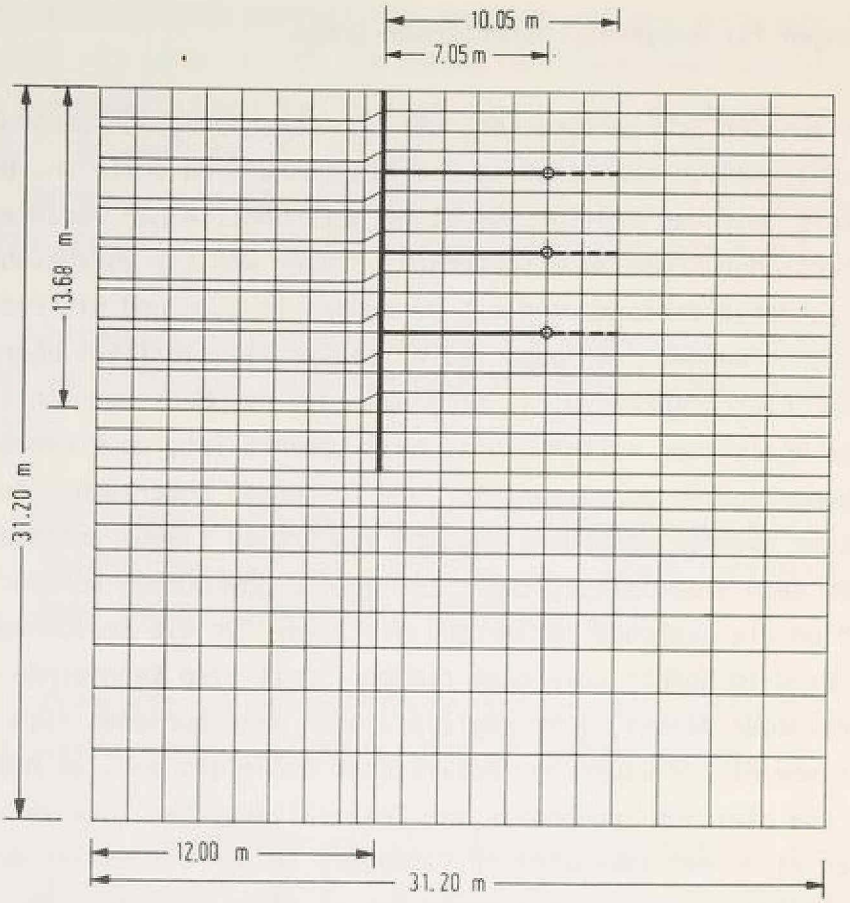



Abb. 7.2.1 Finite Element Struktur und Abmessungen für Berechnungen im Maßstab 1:1

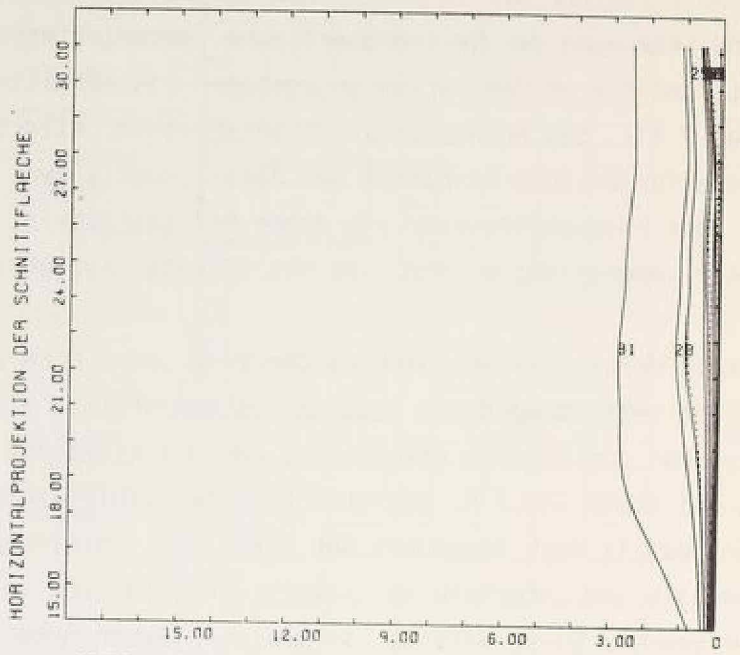
Berechnung der Wand nach dem Traglastverfahren durchgeführt. Bei Annahme einer trapezförmigen Erddruckverteilung folgen Ankerkräfte von maximal 135 kN/m Wand. Gewählt werden übliche Einstabanker St 110/125 mit Ø 26.5 mm und einer zulässigen Ankerlast von 347 kN. Damit wird ein Ankerabstand von 2.5 m in der Horizontalen möglich. In der Finite Element Berechnung wird, entsprechend dem angenommenen ebenen Verformungszustand und der willkürlich gewählten Systembreite von 1 m der Ankerquerschnitt von 5.52 $cm^2$ auf 2.5 m verteilt. Die die Anker darstellenden Stabelemente haben somit einen Querschnitt von 2.21 $cm^2$.

Um eine Vorspannung der Anker auf 80 % der Gebrauchslast zu simulieren, wird in der Rechnung jeder Anker auf 100 kN/m Systembreite vorgespannt. Die Ankerlänge von Wand bis Mitte Verpreßstrecke wird maßstäblich entsprechend den Modellversuchen übernommen. Daraus ergibt sich eine Länge von 7.05 m. Vergleichsweise wird auch eine Länge von 10.05 m ("lange Anker") untersucht.

Eine elastoplastische Berechnung mit der Ankerlänge 7 m und einem Vorspanngrad von 80 % liefert die in Abb. 7.2.2 dargestellten Wandverformungen (oben) und Setzungen der Geländeoberfläche (unten) hinter der Wand. Einzufügen ist, daß die an den Kurven angegebenen Lastschrittnummern - analog zu Kapitel 7.1 - den Aushubzuständen entsprechen. Allerdings ergeben sich durch das erforderliche Anspannen der Anker jeweils zwei weitere Lastschritte. Der Endaushubzustand ist daher bei Lastschritt 31 erreicht. Falls keine Anker vorgespannt werden, ist die höchste Lastschrittnummer 25.

Die maximale Horizontalverschiebung der Wand von 2.8 cm ergibt sich zu über 50 % aus den Verformungen des letzten Aushubschritts, also zwischen Einbau und Vorspannen der unteren Ankerlage C und dem Erreichen des Endaushubzustands bei Sohle -13.7 m. Die strichlierten Linien zeigen die Wandverformungen jeweils nach Anspannen der Ankerlage. In einem Bereich der Wand wenig oberhalb und unterhalb des Ankers wird die Wand in geringem Maß gegen den Boden bewegt. Diese Wirkung ist bei der oberen Ankerlage naturgemäß stärker als bei den beiden unteren. Insgesamt sind die dadurch bedingten Verformungen jedoch extrem gering. Zu beachten ist weiterhin, daß in der Berechnung alle Anker einer Lage gleichzeitig vorgespannt werden, da der ebene Verformungszustand angenommen wurde. Weil in der Realität die Anker einzeln nacheinander vorgespannt werden, kann wegen der sich einstellenden räumlichen Tragwirkung bei jedem einzelnen Anker die resultierende Verformung noch erheblich geringer sein.

Der Wandfuß bleibt mit Horizontalverformungen von etwa 0.8 cm weit zurück. Ebenso ist festzustellen, daß in Höhe der oberen Ankerlage die Verschiebung geringer ist als an tieferen Punkten. Hier ist zu bedenken, daß alle Ankerlagen gleich auf 100 kN/m Wand vorgespannt wurden. Da für die obere Lage diese Kraft den aktiven Erddruck und auch den Ruhedruck weit übersteigt, ergibt sich eine starke Fixierung des Bodenbereichs zwischen Wand und Verpreßstrecke. Die Entwicklung der Ankerkräfte, die später diskutiert wird, zeigt, daß die Kraft in der oberen Lage nicht mehr zunimmt. Die Wandverformung bei anschließenden Aushubschritten kann also nur durch eine gleichmäßige Horizontalbewegung des gesamten Bodens zwischen Wand und Verpreßkörper verursacht werden. Das ist deutlich zu erkennen an den zusätzlichen Wandverschiebungen zwischen Laststufe 28 und 31, also infolge Aushub der letzten 1.7 m. Die Wand verschiebt sich gleichmäßig auf der gesamten Höhe. Obwohl die Verformungen bei diesem Aushubschritt sich gegenüber dem



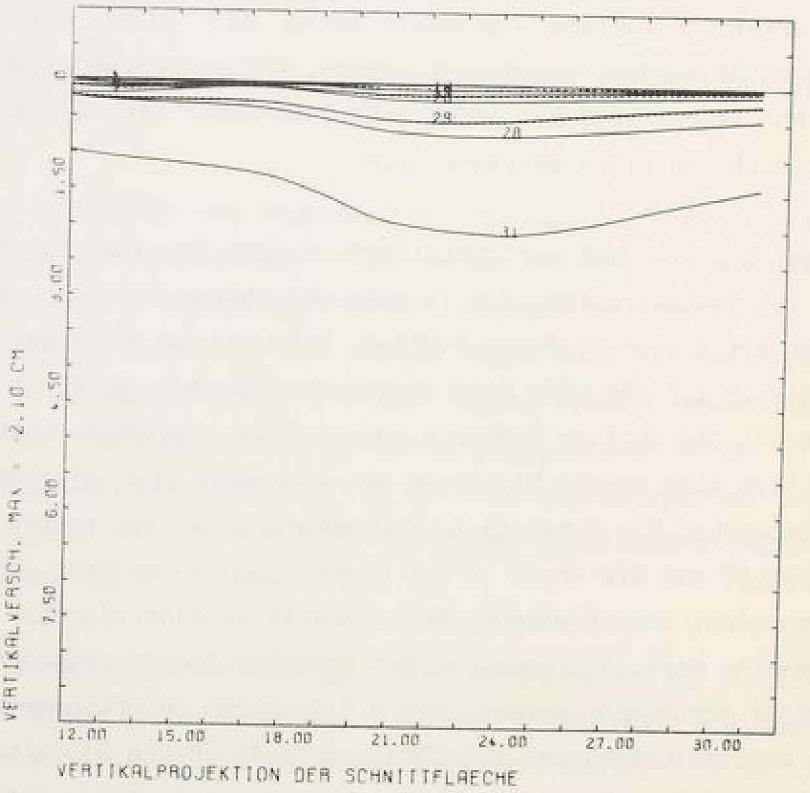




Abb. 7.2.2 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Berechnung mit elastoplastischem Stoffgesetz (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

vorhergehenden verfünffacht haben, kann man daraus noch nicht schließen, daß das System Wand-Boden-Anker sich dem Grenzzustand nähert. Auch die Verformungen beim drittletzten Aushubschritt haben sich gegenüber dem davorliegenden etwa verdoppelt. Es läßt sich daraus eher schließen, daß die Anker voll ausgenutzt sind.

Die Vertikalverschiebungen der Geländeoberfläche zeigen ein zum Ablauf der Wandverformungen synchrones Verhalten. Der Maximalwert von 2.1 cm beträgt 75 % des Wertes der horizontalen Wandverformung. An der Wandrückseite setzt sich der Boden nur 1 cm. Die Setzungen nehmen mit zunehmender Entfernung von der Wand zu und erreichen ihr Maximum in einer Entfernung von der Wand vom 1.7 fachen der Ankerlänge. Obwohl sie anschließend wieder abnehmen, haben sie am Strukturrand noch einen Wert von 1.5 cm. Die an dieser Begrenzung der Finite Element Struktur vorhandenen Reibungselemente stellen eine realistische Randbedingung dar. Sie lassen definierte Vertikalbewegungen zu und können dadurch einen fehlenden Teil des Kontinuums ersetzen. Es kann mit dem verwendeten Elementnetz nicht festgestellt werden, wie weit die Setzungsmulde reicht. Sicher ist, daß ihre Horizontalausdehnung weit größer ist als durch die für die gewohnten Standsicherheitsuntersuchungen erforderlichen Erdkörper angenommen wird.

Durch den Vorspannvorgang der Anker wölbt sich die Geländeoberfläche zwischen Wand und Verpreßstrecke geringfügig auf. Diese Aufwölbung bleibt auch bei großen Setzungen tendenziell erhalten und erkennbar.

Die Linien gleicher Horizontalverformungen im Endaushubzustand (Abb. 7.2.3) zeigen, daß im Bodenbereich unterhalb des Wandfußes nur sehr geringe Bewegungen stattfinden. Der Verformungsverlauf an der Wand ist bereits durch den in Abb. 7.2.2 dargestellten Schnitt deutlich geworden. Aufschlußreich an der hier benutzten Darstellungsweise ist, daß sich im Bereich des verankerten Bodenkörpers nur sehr geringe horizontale Dehnungen einstellen. Er bewegt sich im wesentlichen als ganzer Körper seitlich in die Baugrube hinein. Erst im Bereich hinter der Verankerungsstrecke ergibt sich eine starke Zunahme der horizontalen Dehnungen, erkennbar an dem dichten Abstand der Iso-Linien. Vom Ende des untersten Ankers bis zum Wandfuß zieht sich eine ähnliche Zone horizontaler Dehnungen hin. Da diese sich erst nach Einbau des untersten Ankers bis zum Erreichen der endgültigen Baugrubensohle ausbilden kann, verwundert es nicht, daß die Wandverformungen (Abb. 7.2.2 oben) während dieser Phase so stark zunehmen. In der Geländeoberfläche

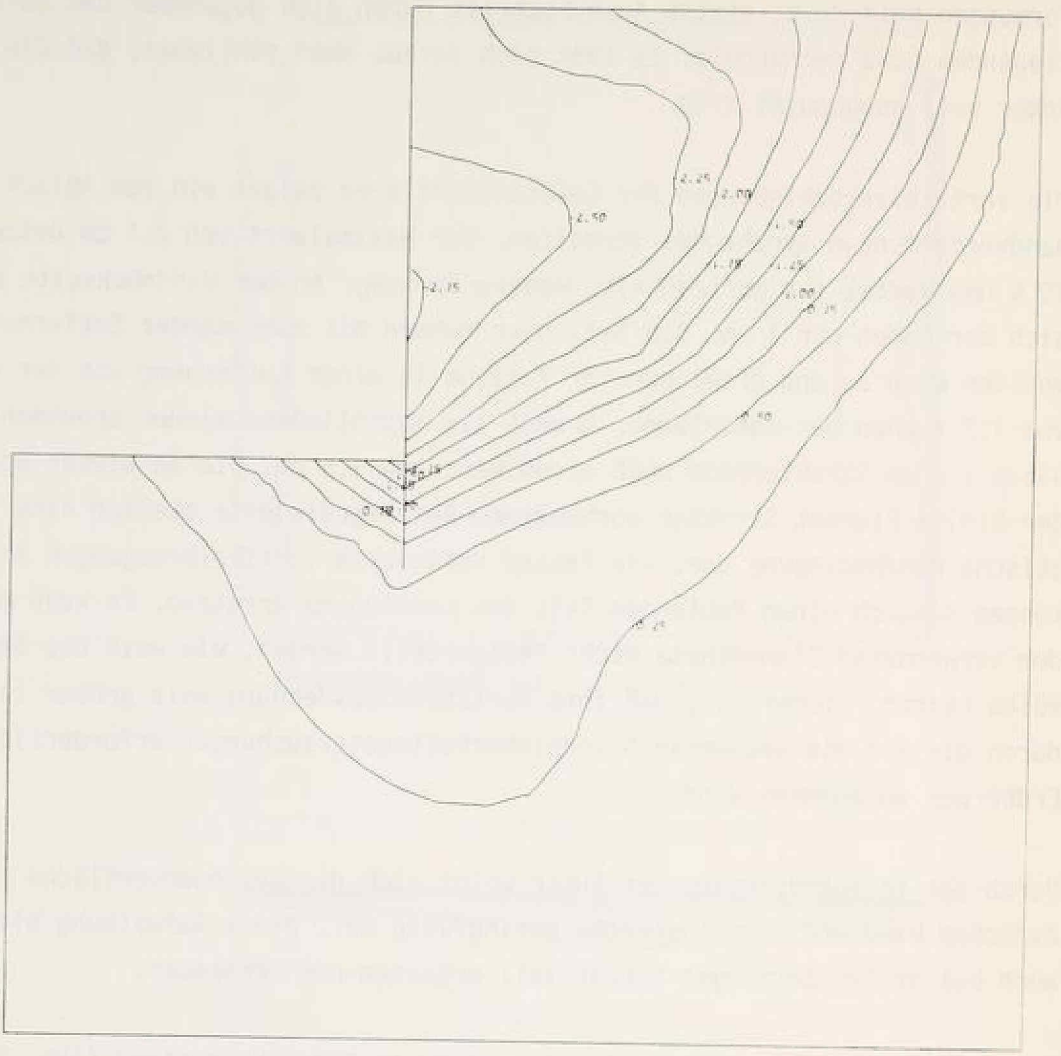


Abb. 7.2.3 Linien gleicher Horizontalverformungen (in cm) beim Endaushubzustand (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

ergibt sich, von der Wand aus gemessen, im Bereich der ersten 12 m eine horizontale Extension von 0.5 cm. Die folgenden 6 m dehnen sich dann aber um 1.5 cm horizontal. Es bedarf keiner näheren Erläuterung, daß diese horizontale Dehnung Auswirkungen auf eine sich in diesem Bereich befindende Bebauung hat.

Die in Abb. 7.2.4 dargestellten Erddruckverteilungen zeigen, daß sich während des Aushubvorgangs und des Anspannens der Anker sehr unterschied-

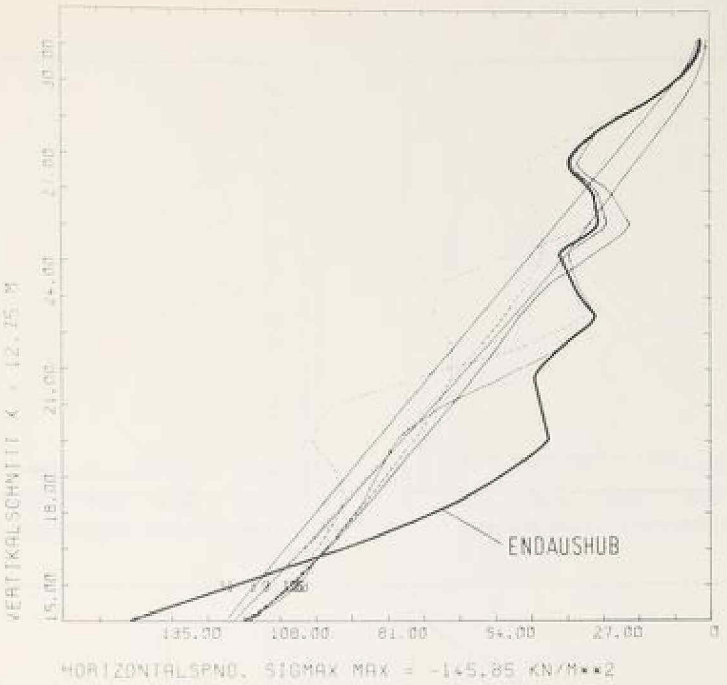



Abb. 7.2.4 Erddruckverteilung für alle Bauphasen (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

liche Erddrücke einstellen, die sich dann aber in folgenden Schritten wieder deutlich ändern. Im Endaushub ergibt sich eine Verteilung, die im oberen Wandbereich über dem Ruhedruck liegt und im unteren Bereich wieder darunter.Unterhalb der Baugrubensohle steigt der Erddruck wieder über den Ruhedruck an. Die strichlierten Linien in Abb. 7.2.4 stellen den Erddruck unmittelbar nach dem Anspannen der jeweiligen Anker dar. Die starken Maxima in Höhe der gerade vorgespannten Ankerlage verschwinden jedoch bei dem folgenden Aushub wieder sehr schnell.

Es erscheint lohnenswert, die Entwicklung der Erddrücke mit dem Bauablauf zu verfolgen. Abb. 7.2.5 zeigt jeweils strichliert den Ruhedruck ($K_o$ = 0.47) und den Erddruck eines Bauzustands. Nach Ende des ersten Aushubschritts (Sohle 3.4 m unter GOF) ist bemerkbar, daß der Erddruck hinter der Wand keinesfalls nur in Höhe des gerade ausgehobenen Bereichs abgefallen ist, sondern über die ganze Wandhöhe. Die Entfernung des Gewichts des ausgehobenen Bodens führt zu einer Spannungsänderung im Kontinuum mit einem Maximum etwa in halber Wandhöhe. Das Vorspannen von Ankerlage A führt zu einem starken Anstieg des Erddrucks in der Nähe der Ankerlage. Der Erddruck

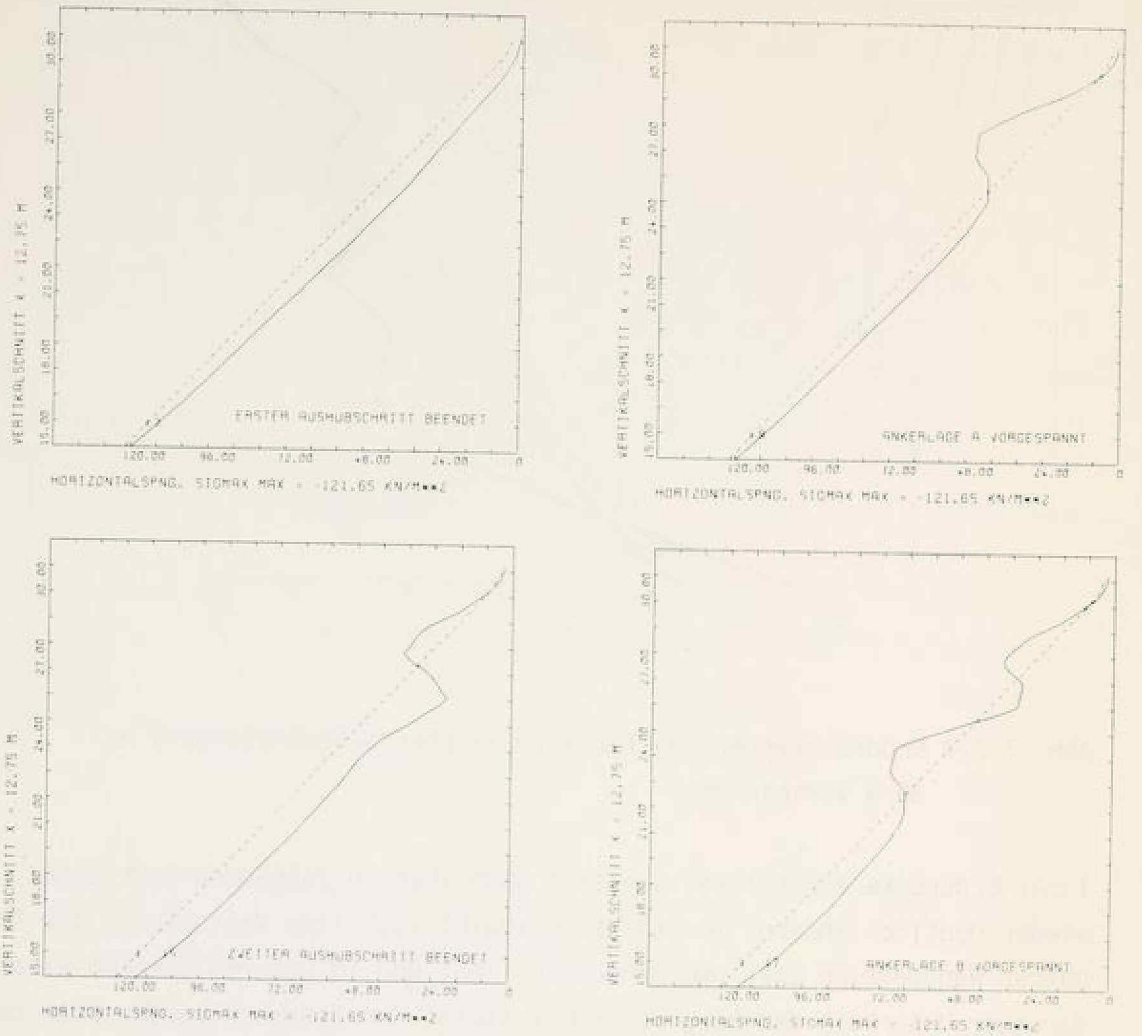



Abb. 7.2.5 Entwicklung der Erddruckverteilung mit zunehmendem Baufortschritt

in größerer Tiefe bleibt unverändert. Der folgende zweite Aushubschritt (Sohle 6.8 m unter GOF) läßt den Erddruck in Höhe der Ankerlage A wieder abfallen. Die Konzentration wird erheblich geringer. In größerer Tiefe fällt der Erddruck gegenüber dem Ruhedruck noch weiter ab. Das Vorspannen der Ankerlage B bringt ein zweites Maximum, ohne daß das erste in seiner Größe verändert wird. Beim dritten Aushubschritt (Sohle 10.2 m unter GOF) fällt der Erddruck beim gerade zuvor durch die zweite Ankervorspannung erzeugten Maximum wieder stark ab und erreicht nur noch die Größe der Ruhedruck-ordinate. Wenig unterhalb baut sich ein deutliches Minimum des Erddrucks auf.

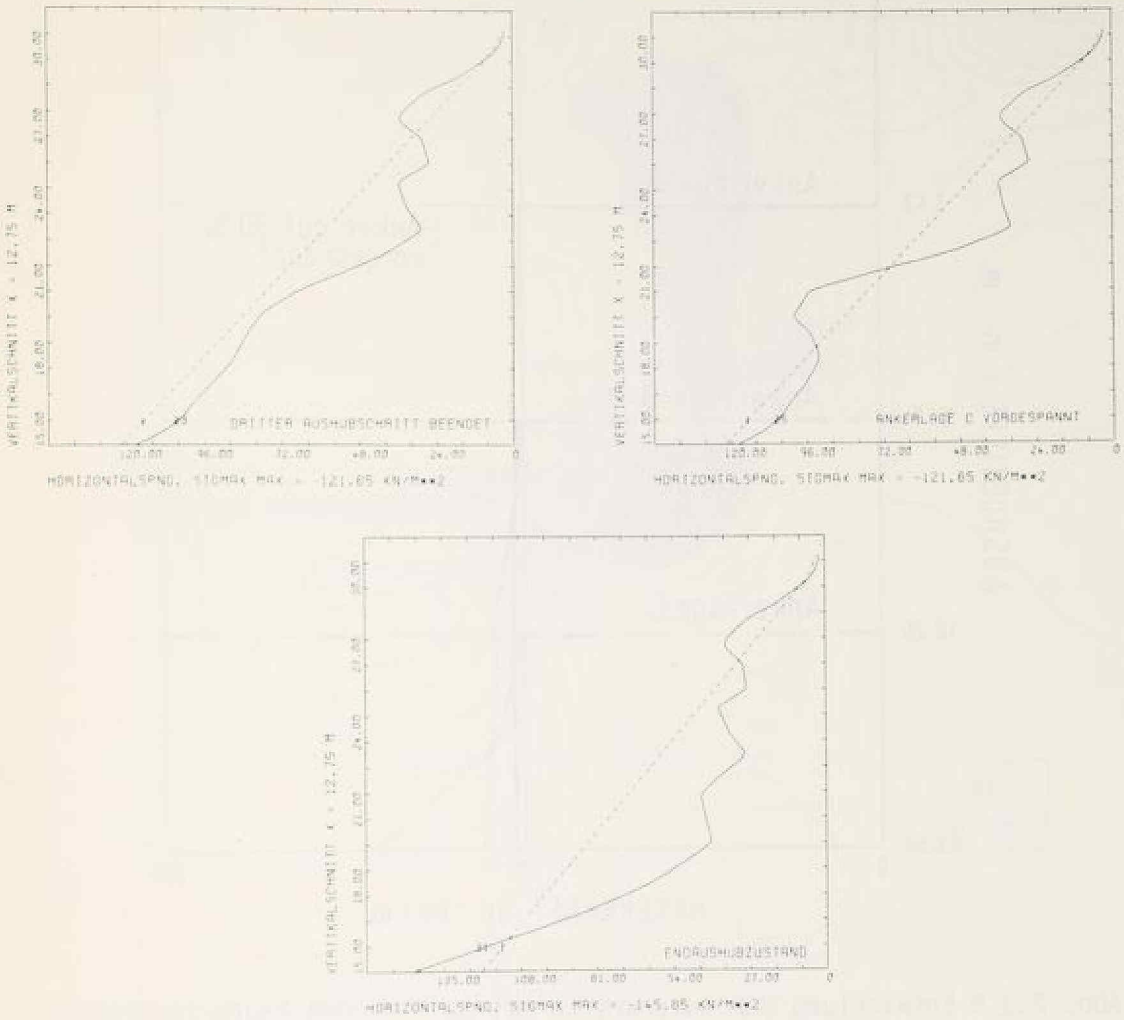



Abb. 7.2.5 (Fortsetzung) Entwicklung der Erddruckverteilung mit zunehmendem Baufortschritt

Im Bereich unterhalb der Baugrubensohle erhöht er sich wieder, weil sich eine bevorzugte Tragwirkung im Boden zwischen Ankerkopf und Boden unter Aushubsohle aufbaut. Vorspannen der dritten Ankerlage C baut ein weiteres Maximum auf. Der letzte Aushubschritt (Sohle 13.7 m unter GOF) baut auch dieses Maximum wieder ab und führt im freigelegten Wandbereich zu einem deutlich unter dem Ruhedruck liegenden lokalen Erddruck, der sich unterhalb der Sohle wieder über den Ruhedruck vergrößert.

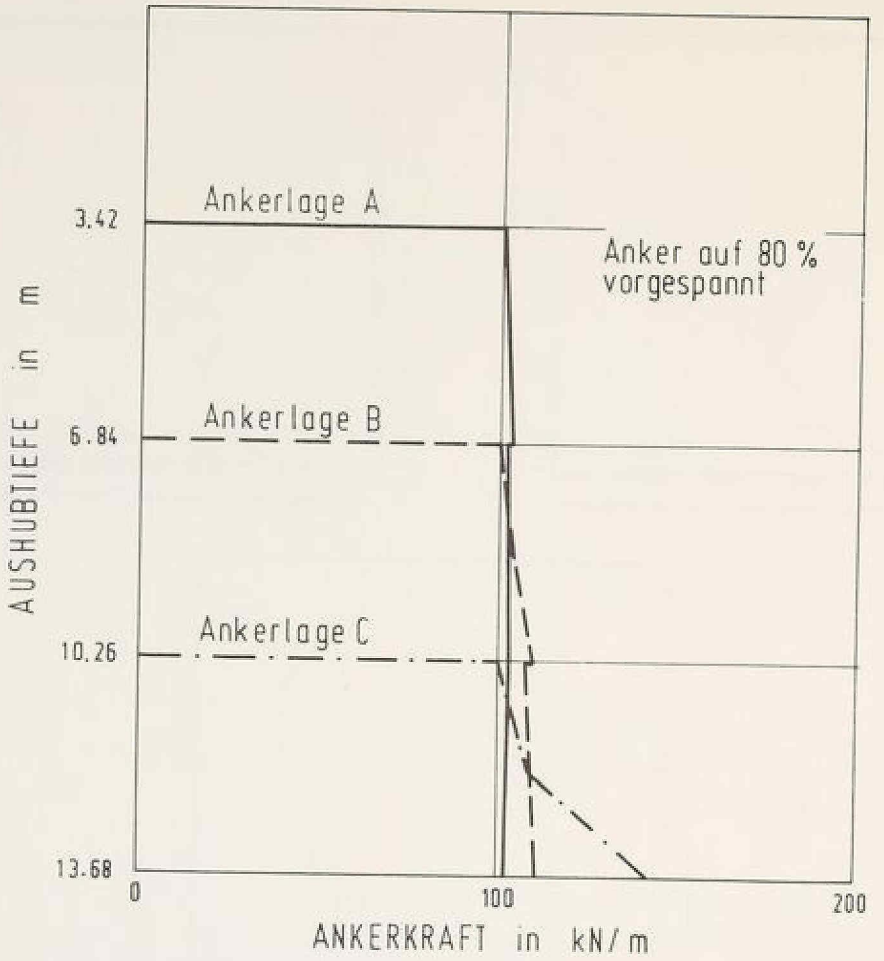



Abb. 7.2.6 Entwicklung der Ankerkräfte mit zunehmendem Baufortschritt (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

Ergänzend zur Diskussion der Erddruckverteilung erfolgt eine Betrachtung der Ankerkräfte (Abb. 7.2.6). Die obere Ankerlage A erhält nach dem Vorspannen auf 80 % der rechnerischen Ankerkraft praktisch keinen weiteren Kraftzuwachs während des Aushubvorgangs. Bei Ankerlage B erhöht sich die Ankerkraft vom Vorspannwert 100 kN/m auf 110 kN/m. Lediglich Ankerlage C wird bis 145 kN/m beansprucht. Dieser Wert liegt über der rechnerischen Ankerkraft.

Abb. 7.2.7 zeigt Linien gleicher Oktaederdehnung und die Bereiche, die eine Volumenverminderung erfahren. Deutlich erkennbar ist, daß der Boden im Bereich zwischen Wand und Verankerungsstrecke durch das Vorspannen komprimiert wird, und zwar im oberen Bereich stärker als unten, da die

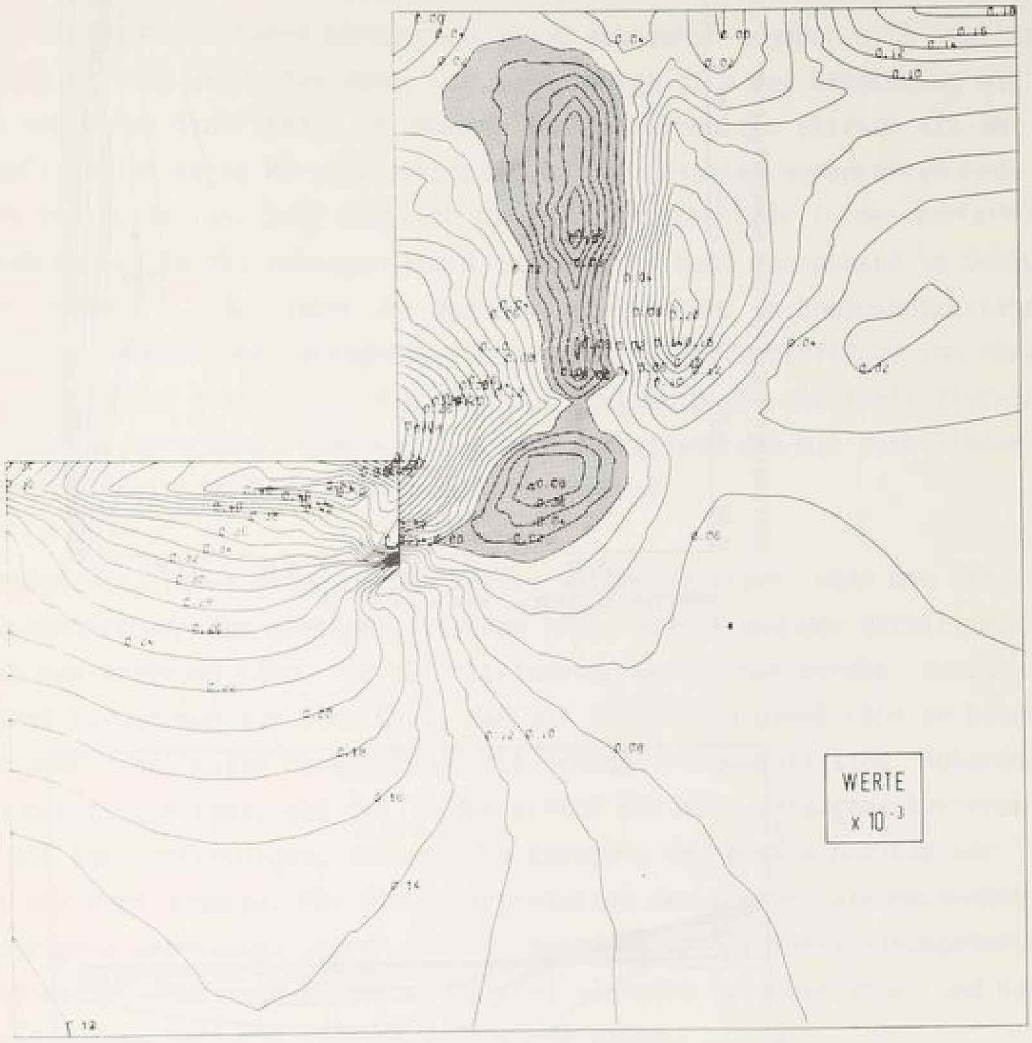
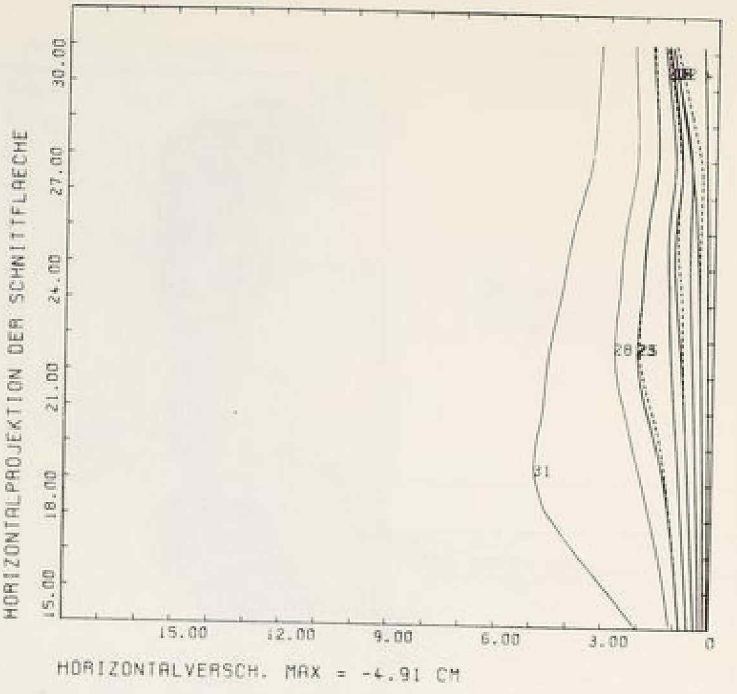



Abb. 7.2.7 Linien gleicher Oktaederdehnung; gerastert dargestellt der Bereich der Volumenverminderung (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

obere Ankerlage im Vergleich zum dort wirkenden Erddruck sehr stark vorgespannt wird. Im Bereich unterhalb der Ankerlage C nahe der Wand erfolgt eine starke Auflockerung. Daran benachbart nach hinten entwickelt sich eine unabhängige Verdichtungszone unter dem verankerten Erdblock. Der Boden hinter der Verpreßstrecke der Anker wird aufgelockert, da er sich dort entspannen kann. Gleiches gilt für den Boden unter der Aushubsohle.

Um die Vorteile des verwendeten elastoplastischen Stoffgesetzes noch einmal zu verdeutlichen, wird die gleiche Wand ebenfalls mit einem nichtlinear-



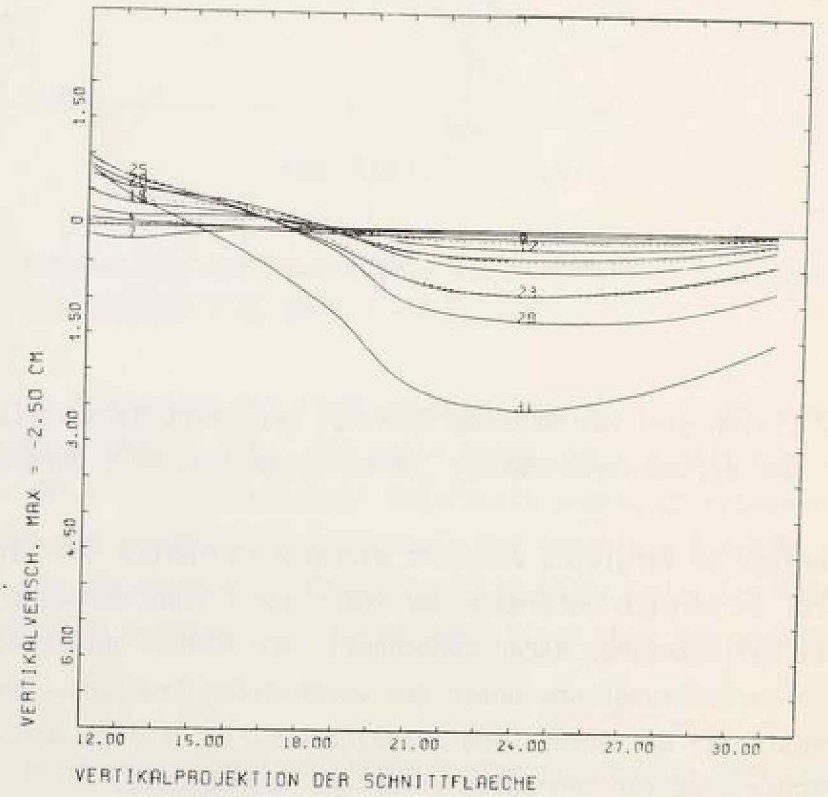




Abb. 7.2.8 Wandverformungen und Verformungen der Geländeoberfläche bei Berechnung mit nichtlinear-elastischem Stoffansatz (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

elastischen isotropen Stoffmodell berechnet. Es zeigen sich die bereits bei den Nachrechnungen der Modellversuche festgestellten Erscheinungen (Abb. 7.2.8). Von der insgesamt größeren Wandverschiebung abgesehen ergeben sich qualitativ wenig befriedigende Aussagen. Die Wand bewegt sich bei Berechnung mit diesem einfachen Stoffansatz im unteren Bereich erheblich stärker als am Wandkopf; es ist keine Parallelverschiebung des gesamten verankerten Erdkörpers festzustellen. Sehr deutlich sind die Unterschiede in den Verformungen der Geländeoberfläche: Hebungen von 1 cm nahe der Wand übergehend in Setzungen von maximal 2.5 cm hinter der Verankerungsstrecke. Im Endaushubzustand ergibt sich dadurch eine errechnete Neigung der Geländeoberfläche von etwa 1:300, verglichen mit 1:1000, die sich bei Anwendung des elastoplastischen Stoffgesetzes errechnen. Bedenklich stimmt vor allem, daß mit nichtlinearelastischem Ansatz Hebungen errechnet worden sind.

Diese grundsätzlichen Unterschiede werden weiter deutlich, wenn die Verschiebungsvektoren der elastoplastischen (Abb. 7.2.9) und der nichtlinearelastischen Rechnung (Abb. 7.2.10) miteinander verglichen werden. Vorausgeschickt werden muß die Bemerkung, daß die Verschiebungsmaßstäbe in beiden Fällen zwecks optimaler Darstellung unterschiedlich gewählt sind. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die in der Kontur der Wand gezeigten Vektoren nicht die Wandverformungen, sondern die Bewegung des Bodens unmittelbar hinter der Wand angeben. Für die Interpretation der Horizontalkomponenten ist dies ohne Bedeutung; jedoch muß bei Betrachtung der Vertikalkomponenten bedacht werden, daß sich aufgrund des Kluftelements zwischen Boden und Wand die Wand anders verformt als der anliegende Boden.

Abb. 7.2.9 zeigt ein insgesamt vernünftiges Verschiebungsbild. Die Aushubsohle hebt sich; ebenso der Boden hinter der Wand in Tiefen größer als der Aushubtiefe. In Höhe der Aushubsohle bewegen sich die Punkte horizontal und die Verschiebungen werden mit zunehmender Entfernung von der Wand sehr schnell geringer. Weiter oberhalb erfolgen ausschließlich Setzungen, die nach oben zunehmen und - ebenso wie die Horizontalverschiebungen - sich mit Annäherung an die Geländeoberfläche weiter nach hinten ausbreiten. Deutlich zu erkennen ist auch, daß die Horizontalverschiebungen vor allem im Bereich hinter der Verankerungsstrecke entstehen.

Bezüglich Abb. 7.2.10 soll nur erwähnt werden, daß die Herkunft der errechneten Hebungen an der Geländeoberfläche rückverfolgt werden kann. Es sind die Hebungen in Höhe der Baugrubensohle, die durch den Aushub verursacht

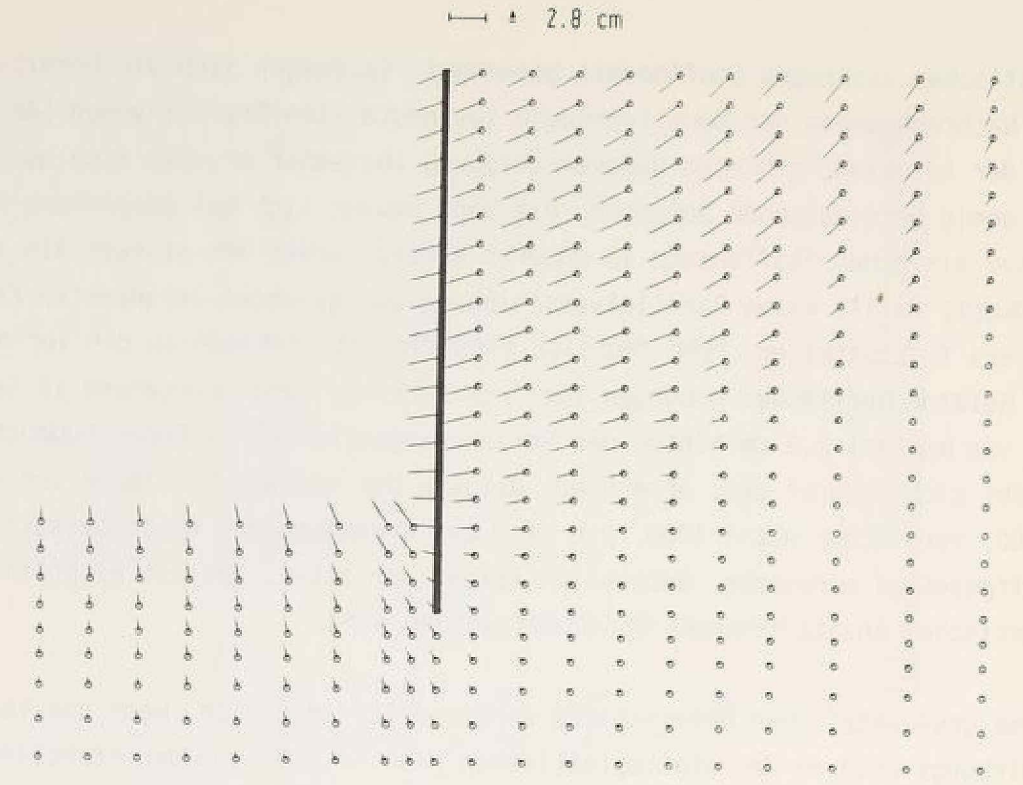



Abb. 7.2.9 Verschiebungsvektoren (Ausschnitt) im Endaushubzustand bei elastoplastischer Berechnung (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

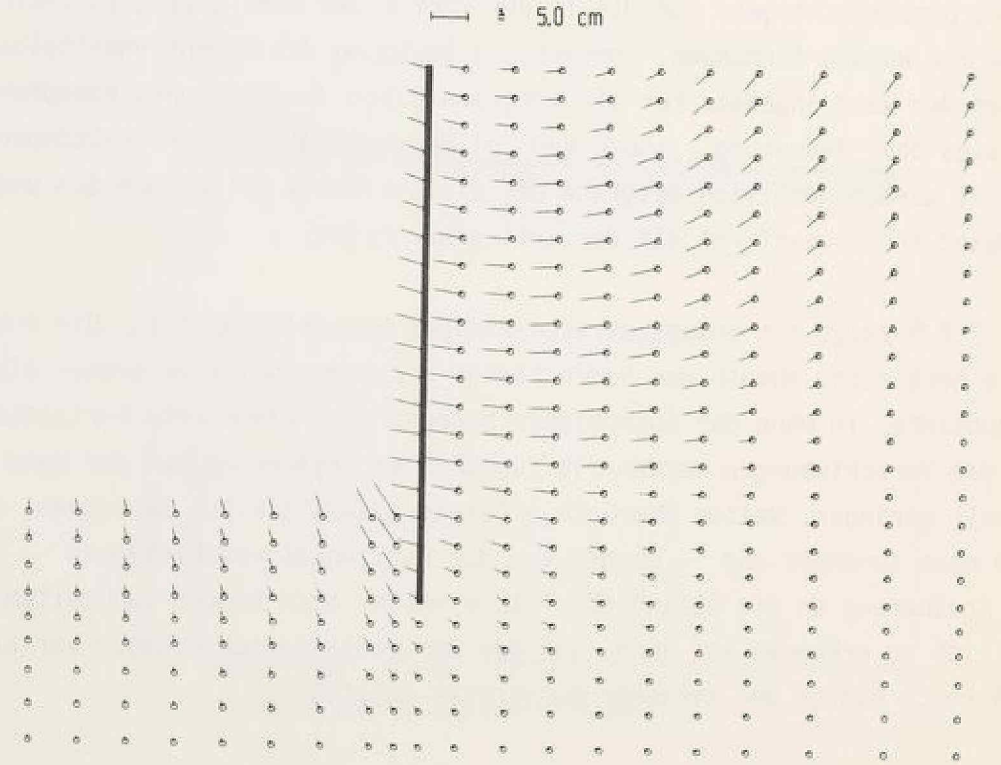
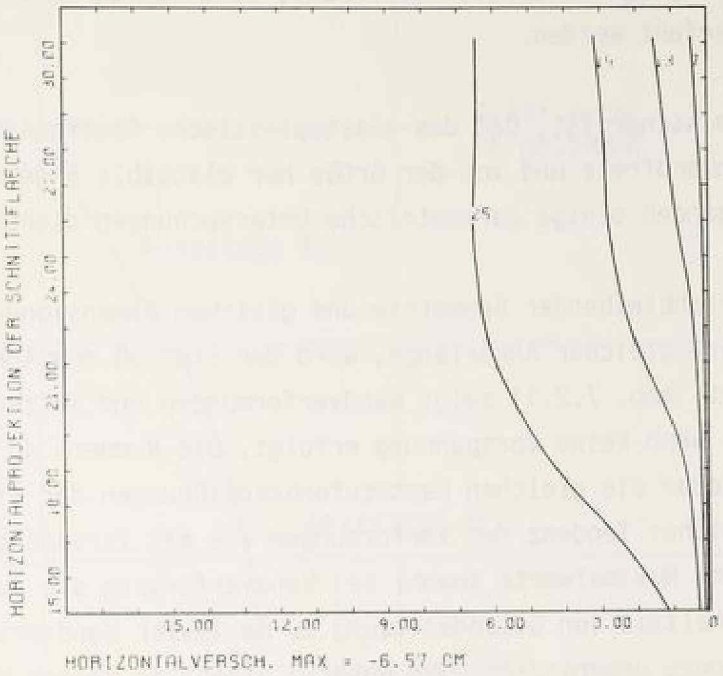



Abb. 7.2.10 Verschiebungsvektoren (Ausschnitt) im Endaushubzustand bei nichtlinear-elastischer Berechnung (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)



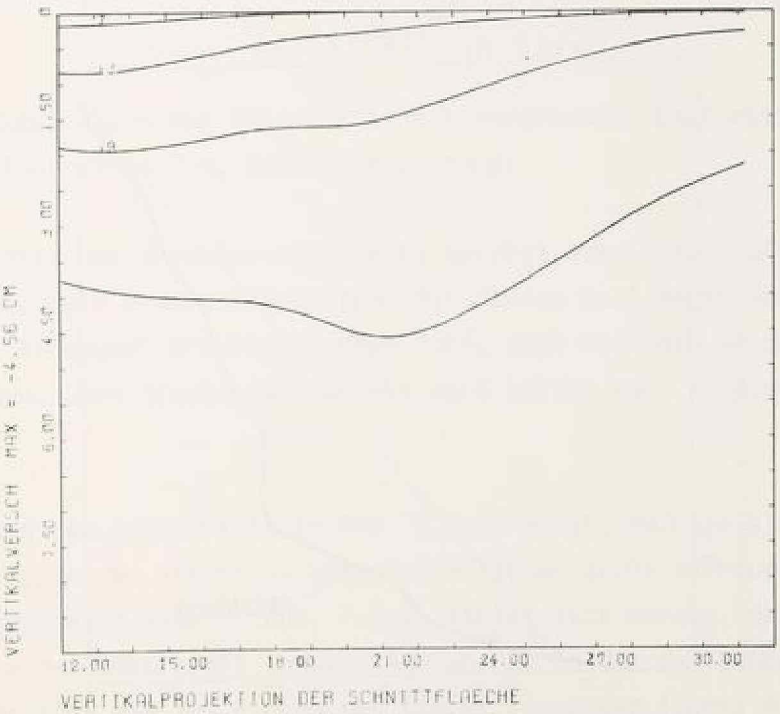




Abb. 7.2.11 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Berechnung mit elastoplastischem Stoffgesetz (Ankerlänge 7 m; keine Vorspannung)

werden und sich durch den gesamten verankerten Bodenkörper nach oben fortpflanzen. Daß sich der Boden infolge Wegnahme der seitlichen Stützung infolge seines Eigengewichts zusammendrückt, kann von einem elastischen Stoffansatz nicht erfaßt werden.

Nachdem sicher ist, daß das elastoplastische Stoffgesetz von Arslan qualitativ einwandfreie und von der Größe her plausible Ergebnisse liefert, werden im folgenden einige parametrische Untersuchungen diskutiert.

Bei gleichbleibender Geometrie und gleichen Dimensionen der Bauteile, insbesondere gleicher Ankerlänge, wird der Einfluß der Ankervorspannung studiert. Abb. 7.2.11 zeigt Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche, wenn keine Vorspannung erfolgt. Die Nummern an den Kurven stellen hier wieder die gleichen Laststufenbezeichnungen dar wie in Kapitel 7.1. Bei gleicher Tendenz der Verformungen wie mit Vorspannung ergeben sich 2.4 fache Maximalwerte sowohl bei Wandverformung als auch bei Geländesetzung. Das Verhältnis von Geländesetzung zu maximaler Wandverschiebung bleibt mit 70 % nahezu unverändert. Der Wandfuß bleibt in seinen Verschiebungen relativ stärker zurück als im Fall mit Vorspannung. Die maximale Neigung der Gelände-

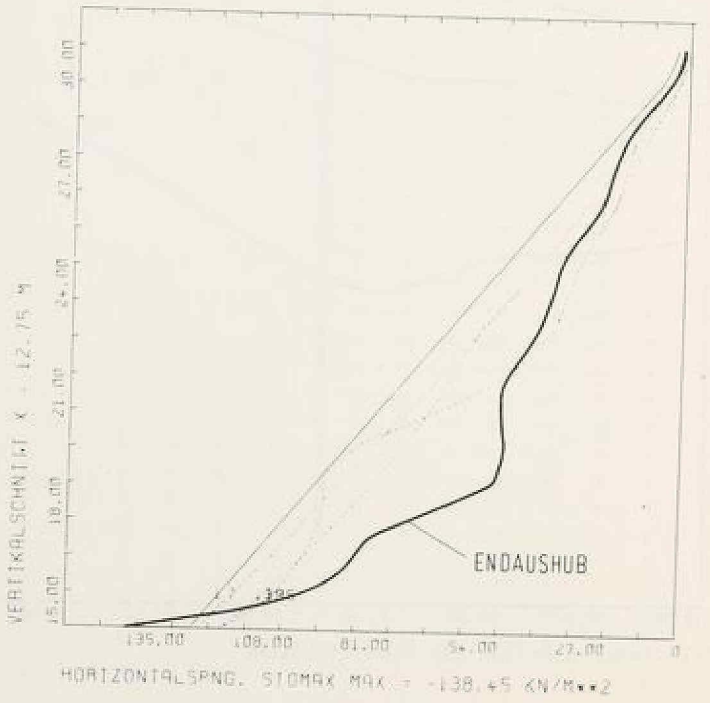



Abb. 7.2.12 Erddruckverteilung für alle Bauphasen (Ankerlänge 7 m; nicht vorgespannt)

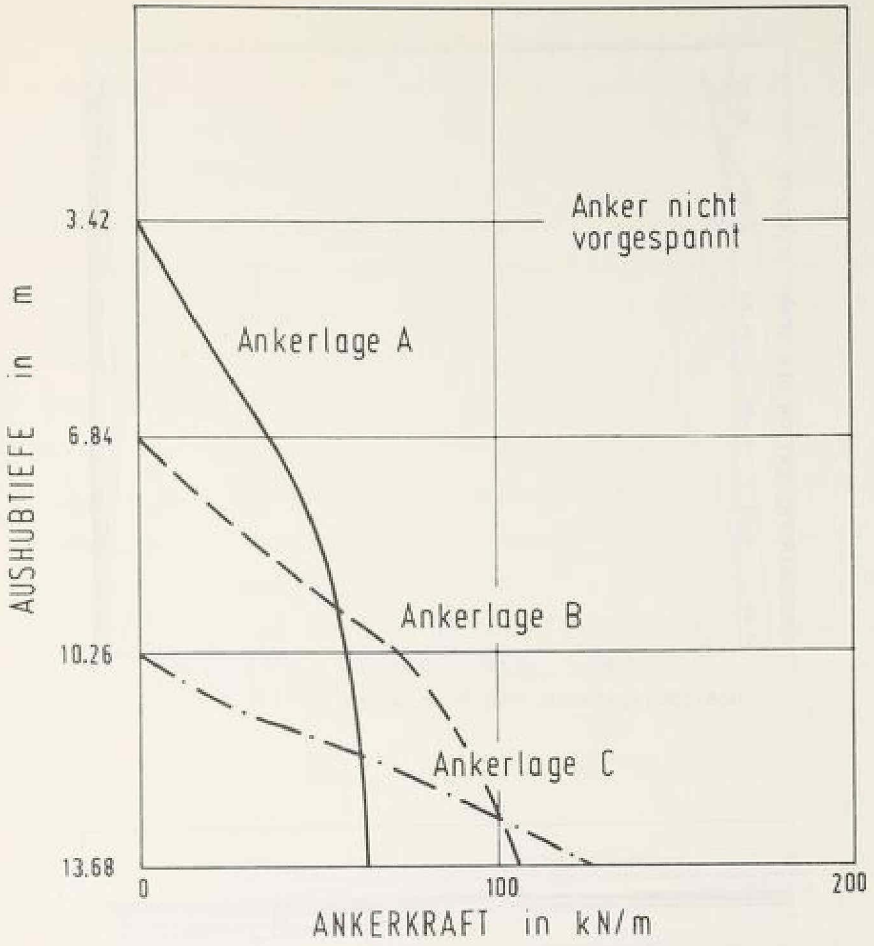
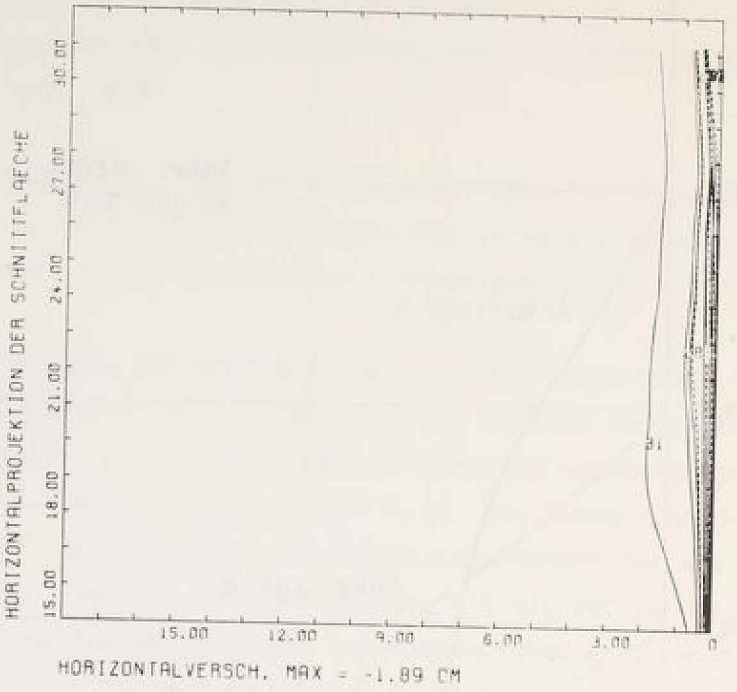



Abb. 7.2.13 Entwicklung der Ankerkräfte mit zunehmendem Baufortschritt (Ankerlänge 7 m; keine Vorspannung)

oberfläche hinter der Verankerungsstrecke beträgt etwa 1:400. Die in Abb. 7.2.12 gezeigte Erddruckverteilung für diesen Fall macht deutlich, daß kein "aktiver Erddruck" erwartet werden darf, auch wenn die Anker nicht vorgespannt werden. Über diesen Sachverhalt wird später noch zu diskutieren sein.

Die Entwicklung der Ankerkräfte in Abb. 7.2.13 zeigt, daß sie sich entsprechend der Lage des Ankers in unterschiedlicher Größe aufbauen. Ähnlich wie bei vorgespannten Ankern (Abb. 7.2.6) stellt sich heraus, daß wesentliche Zuwächse der Ankerkraft infolge Aushub nur in den dem Einbau folgenden Aushubschritten bis zum Einbau des tiefer liegenden Ankers möglich sind. Die Summe der Ankerkräfte, die sich ohne Vorspannung bis zum Ende des Aushubs in den Ankern aufbaut, beträgt 295 kN/m. Sie liegt damit niedriger als im Fall mit Vorspannung, wo sie 360 kN/m beträgt. Der letztere Wert wurde



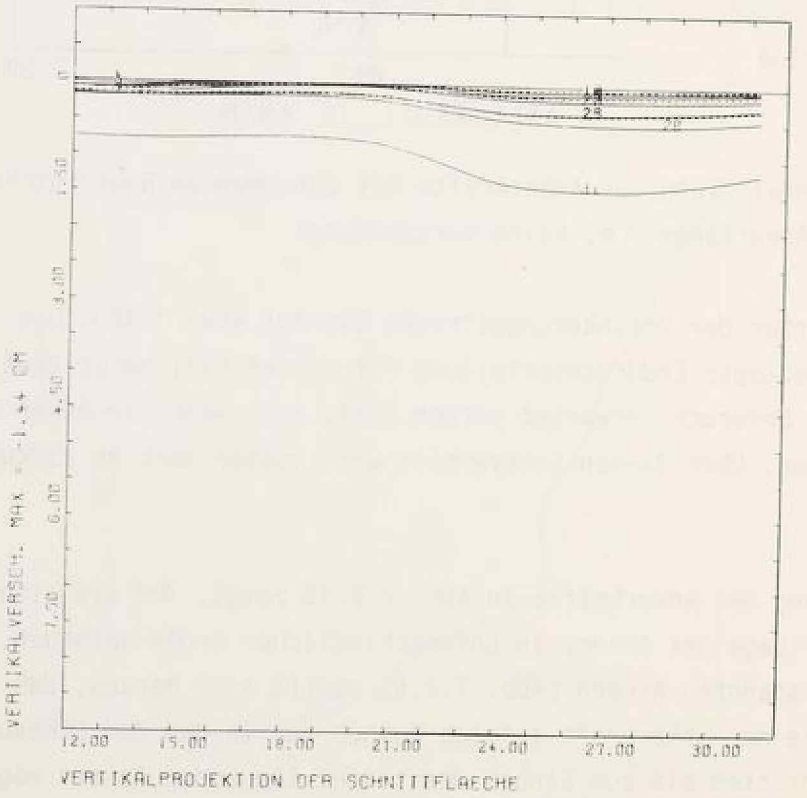
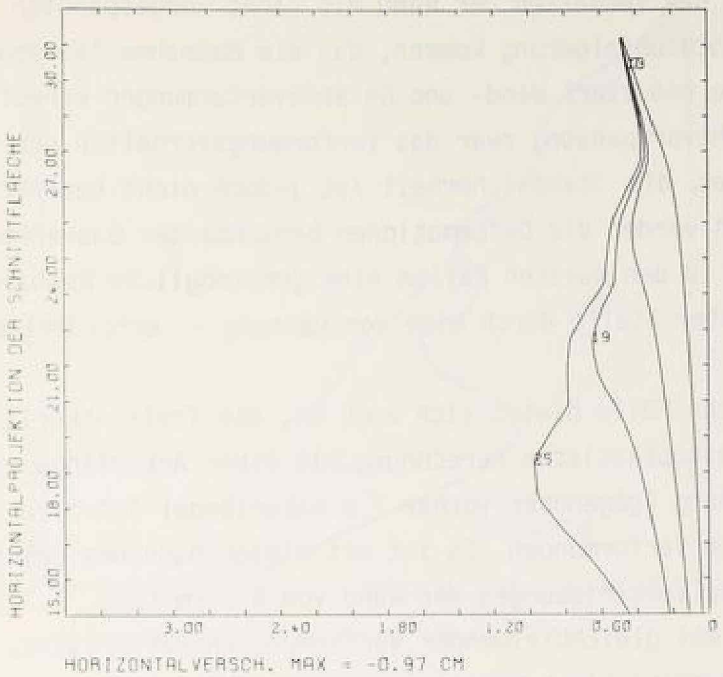




Abb. 7.2.14 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Berechnung mit elastoplastischem Stoffgesetz (Ankerlänge 10 m; 80 % Vorspannung)



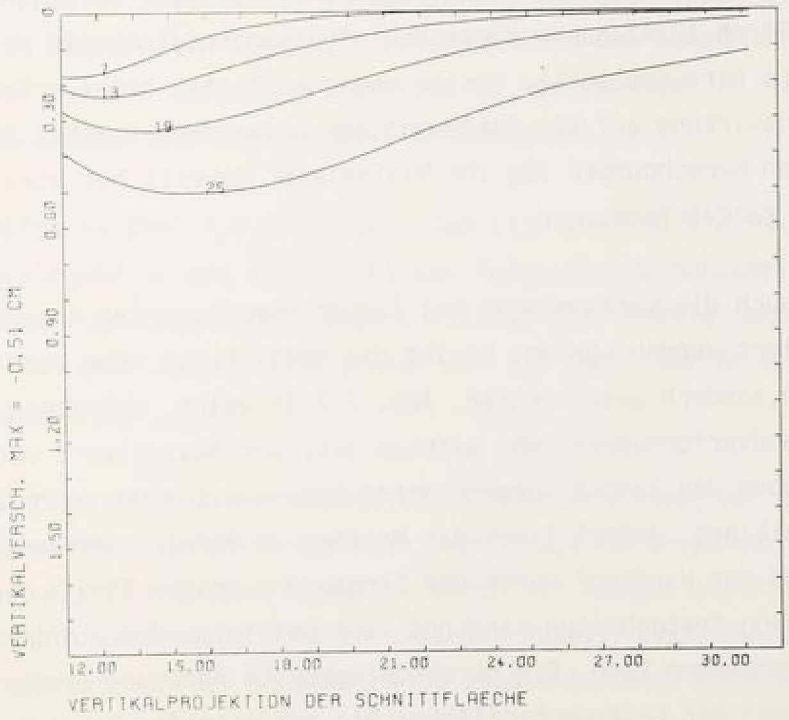




Abb. 7.2.15 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Berechnung mit elastoplastischem Stoffgesetz (ausgesteifte Baugrube)

allerdings zu 85 % durch die Vorspannung erzeugt. Betrachtet man zusammenfassend das Verhalten der Wand mit nicht vorgespannten Ankern, muß man zu der Schlußfolgerung kommen, daß die Maßnahme "Vorspannung" sehr sinnvoll ist. Sie reduziert Wand- und Geländeverformungen erheblich. Umgekehrt wird bei Nichtvorspannung zwar das Verformungsverhalten der Wand sehr viel ungünstiger, die Standsicherheit ist jedoch nicht beeinträchtigt. Eher kritisch werden die Deformationen benachbarter Bauwerke. Deren Anforderungen dürften in den meisten Fällen eine größtmögliche Reduzierung der Bewegungen - an erster Stelle durch eine Vorspannung - erforderlich machen.

Für solche Fälle bietet sich auch an, die freie Ankerlänge zu vergrößern. Eine elastoplastische Berechnung mit einer Ankerlänge von 10 m und 80 % Vorspannung (gegenüber vorher 7 m Ankerlänge) führt zu den in Abb. 7.2.14 gezeigten Verformungen. Es ist mit dieser Maßnahme gelungen, die maximalen Horizontalverschiebungen der Wand von 2.8 cm (Abb. 7.2.2) auf 1.9 cm zu verringern bei gleichbleibender Verformungscharakteristik. Ähnliches gilt für die Setzungen: Sie betragen maximal 1.4 cm gegenüber vorher 2.1 cm. Daß die Wandverformungen durch diese Maßnahme vermindert werden können, ist keine neue Erkenntnis. Sowohl die Modellversuche mit Sand (Wolff 1975) als auch die vom Stoffmodell her einfachen Finite Element Berechnungen für steifen Ton (Stroh 1974) haben diese Beeinflussungsmöglichkeit des Verformungsverhaltens herausgestellt. Unklar und quantitativ nicht erfaßbar war bisher die Auswirkung auf die Setzungen der Geländeoberfläche. Bei den durchgeführten Berechnungen lag ihr Maximalwert jeweils bei etwa 70 % der maximalen Wandverformungen.

Wenn auch die Verformungen bei langen vorgespannten Ankern nicht mehr toleriert werden können, bleibt die Möglichkeit, die Wand nicht mehr zu verankern,sondern auszusteifen. Abb. 7.2.15 zeigt, daß diese Maßnahme für die Wandverformungen sehr wirksam ist. Der Maximalwert von etwa 1.0 cm ist gegenüber den langen vorgespannten Ankern mit einem Wert von 1.9 cm zwar nur halbiert. Jedoch liegt das Maximum im Bereich der untersten Ankerlage, während der Wandkopf durch den Einbau der ersten Steife auf 0.5 cm Verschiebung festgehalten wird und sich bei folgenden Aushubschritten nicht mehr verändern kann. Die durchschlagendste Änderung ergibt sich bei den Setzungen der Geländeoberfläche: Die ausgesteifte Baugrube zeigt im Vergleich zur verankerten eine völlig andere Charakteristik. Der Maximalwert liegt bei 0.5 cm und die Setzungsmulde ist sehr viel flacher und ohne Wendepunkte, wie sie bei Verankerungen auftreten. Auch die Erddruckver-

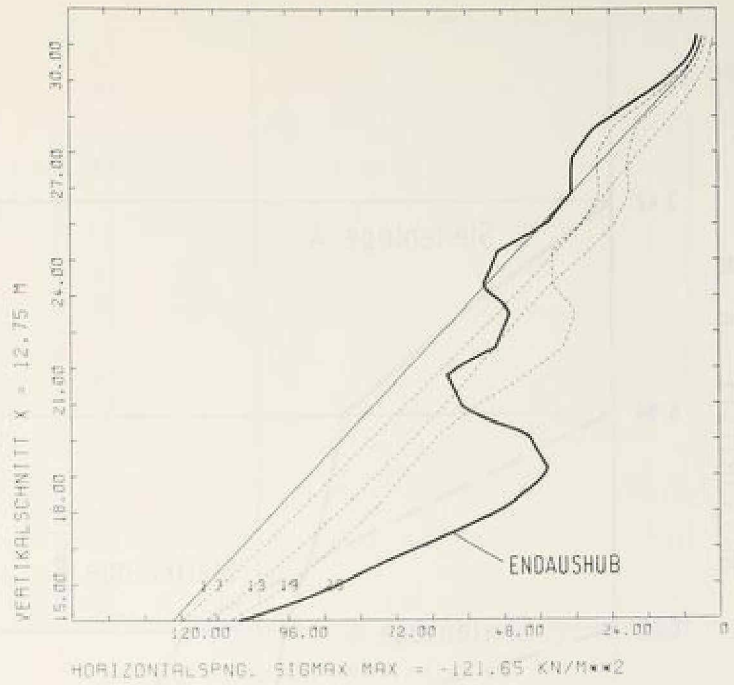



Abb. 7.2.16 Erddruckverteilung für alle Bauphasen (ausgesteifte Wand)

teilung (Abb. 7.2.16) zeigt im Vergleich zu verankerten Wänden andere Merkmale. Im oberen Wandbereich liegt der Erddruck über dem Ruhedruck, im unteren Bereich ist ein merkliches Abfallen zu verzeichnen. In Höhe der beiden unteren Steifen sind ausgeprägte örtliche Maxima.

Die Steifenkräfte in Abb. 7.2.17 zeigen, daß sich ähnlich wie bei Ankern die Kräfte vorwiegend in dem auf den Einbau folgenden Aushubschritt aufbauen. Sie nehmen von Lage A nach Lage C relativ gleichmäßig nach unten zu. Die Summe von 465 kN/m ist um 30 % größer als die Summe der Ankerkräfte bei 80 % Vorspannung.

Zur grundsätzlichen Klärung des Verhaltens Wand-Boden-Anker war es für den Verfasser ein gewisser gedanklicher Reiz, der Frage nachzugehen, welcher Anteil der Wand- und Geländeverformungen durch den Aushub und die Entlastung der Baugrubensohle verursacht wird und welcher Anteil durch den Wegfall des stützenden Erddrucks vor der Baugrubenwand entsteht. Die Finite Element Methode erlaubt, ein derartiges Gedankenspiel numerisch zu realisieren. Statt des gesamten Baugrubenaushubs wird nur ein schmaler Schlitz vor der Wand ausgehoben. Die entsprechende vertikale Entlastung ist sehr klein. Abb. 7.2.18 zeigt die Auswirkungen. Bei Ankerlänge 7 m und 80 % Vorspannung

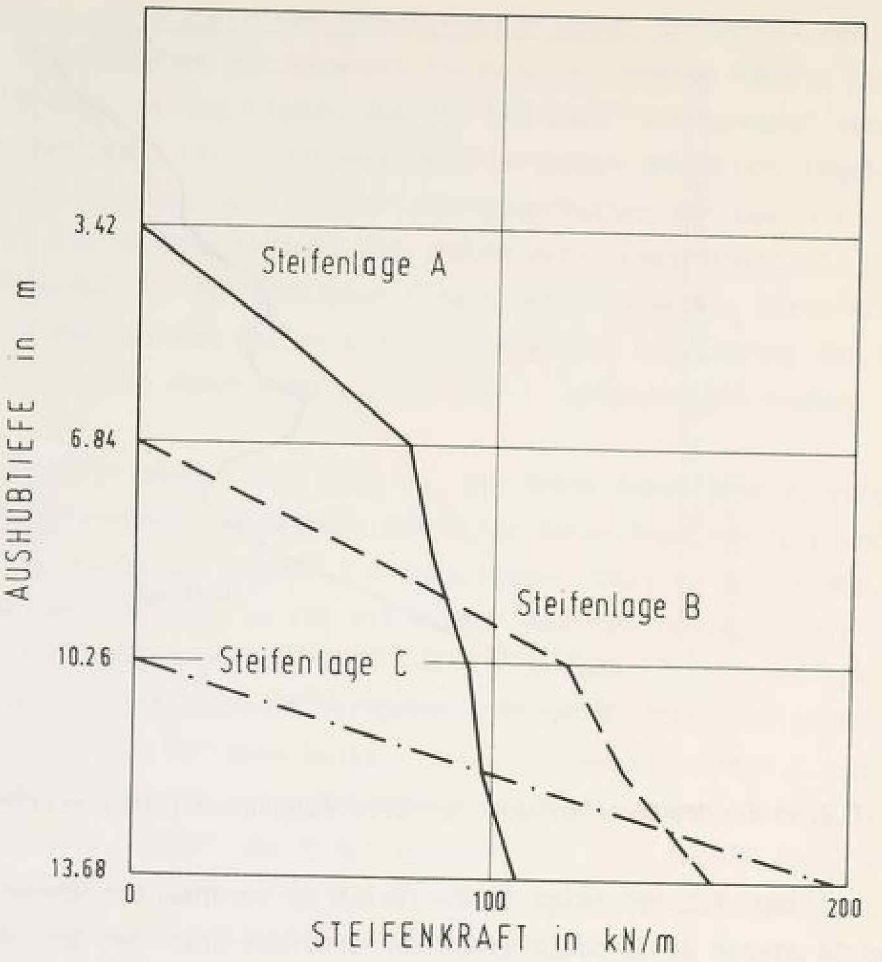



Abb. 7.2.17 Entwicklung der Steifenkräfte mit zunehmendem Baufortschritt

ergibt sich eine maximale Wandverschiebung von 1.9 cm gegenüber 2.8 cm bei Aushub der gesamten Baugrube (Abb. 7.2.2). Diese Reduzierung der Verschiebungen um ein Drittel gilt auch für die Geländeoberfläche. Hier werden 1.4 cm gegenüber vorher 2.1 cm festgestellt. Die Entlastung des Baugrunds ist also zu einem Drittel Verursacher der Wandverformungen; die Entfernung der seitlichen Stützung bestimmt die übrigen zwei Drittel. Diese Aussage gilt naturgemäß auch bei gleichen Bodenverhältnissen nur bei dem hier untersuchten Verhältnis von Baugrubenbreite zu Wandhöhe. Erwähnt sei noch, daß eine Berechnung mit nichtlinear-elastischem Stoffansatz eine Reduzierung der Verformungen um nahezu 60 % vortäuscht, also einen wesentlich größeren Teil der Verschiebungen auf die Entlastung der Baugrubensohle zurückführt.

Es bleibt noch ein Aspekt zu diskutieren, der bei der Interpretation von Finite Element Berechnungen bei Erddruckproblemen zu Unsicherheiten führt.

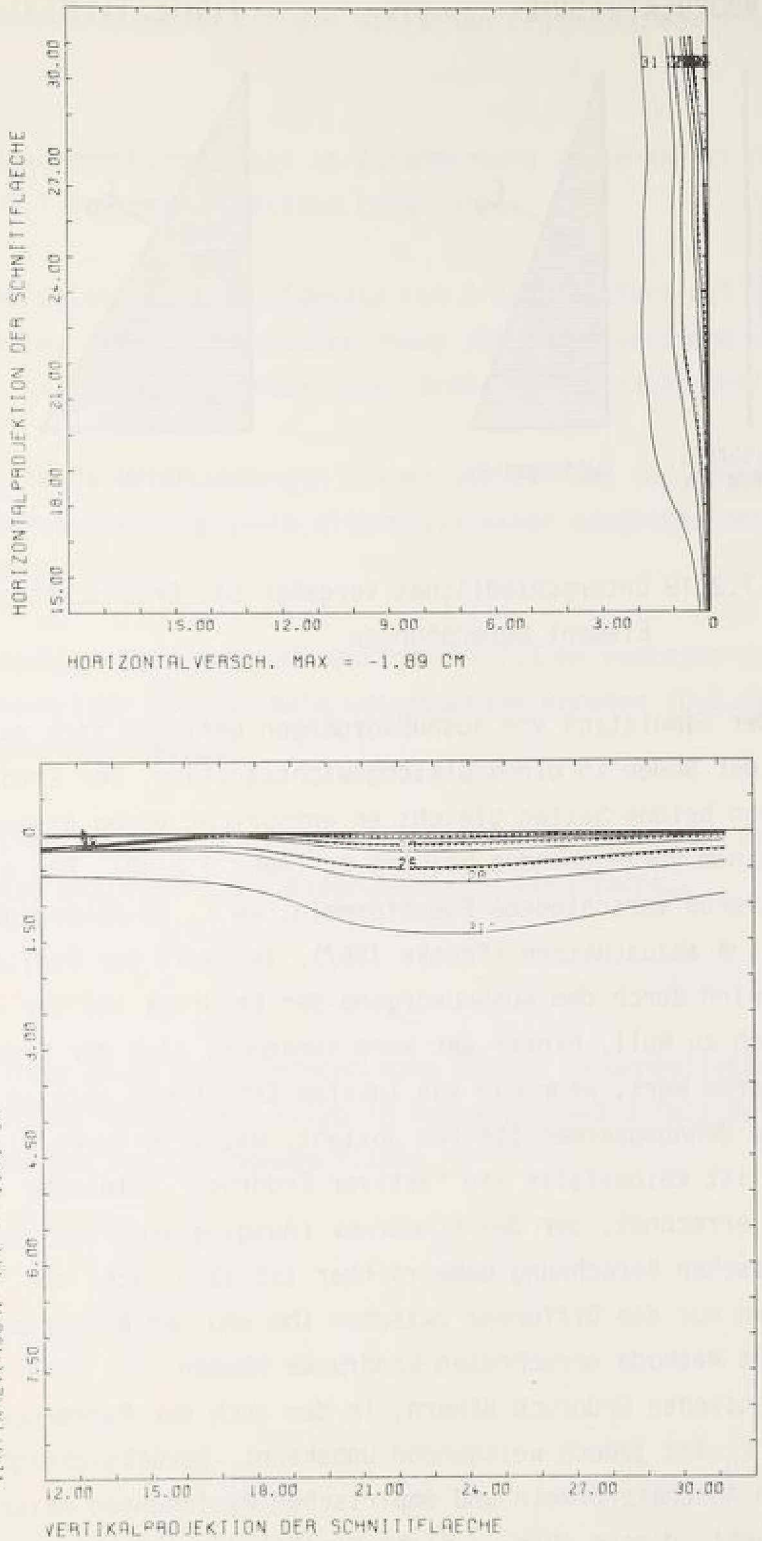



Abb. 7.2.18 Wandverformungen und Setzungen der Geländeoberfläche bei Aushub eines schmalen Schlitzes (Ankerlänge 7 m; 80 % Vorspannung)

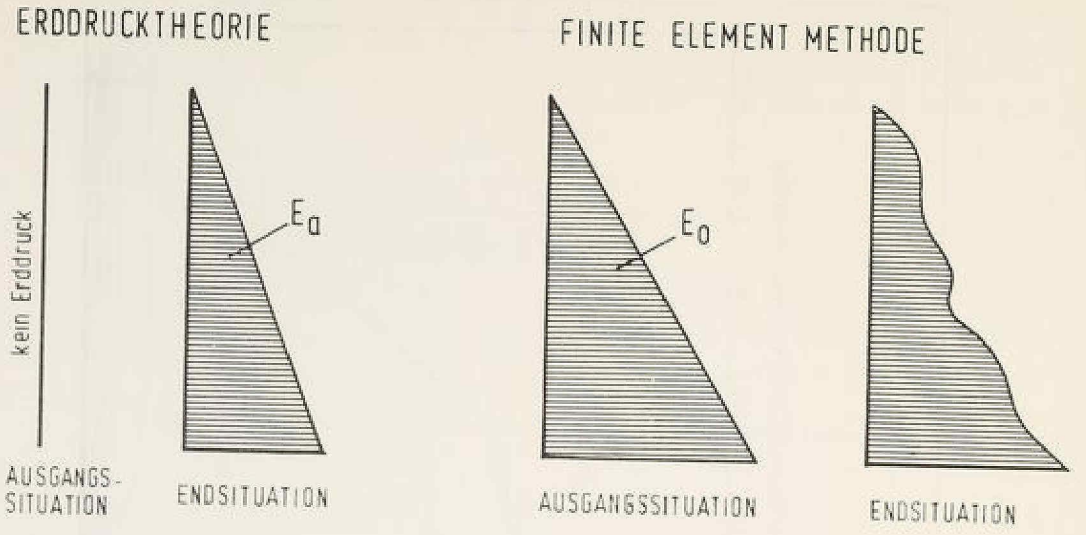



Abb. 7.2.19 Unterschiedliches Vorgehen bei Erddrucktheorie und Finite Element Berechnungen

Bei der Simulation von Aushubvorgängen befindet sich zu Beginn der Berechnung der Boden in einem Gleichgewichtszustand. Der Erddruck auf die Wand ist von beiden Seiten gleich; er entspricht einem angenommenen Ruhedruck mit einem vorzugebenden Beiwert $K_o$ (Abb. 7.2.19). Für nichtbindige Böden existieren verschiedene Faustformeln, um $K_o$ in Abhängigkeit vom Reibungswinkel $\varphi$ abzuschätzen (Franke 1967). Im Laufe der Finite Element Berechnung wird durch den Aushubvorgang der Erddruck vor der Wand im ausgehobenen Bereich zu Null. Hinter der Wand verändert sich der Erddruck auf einen kleineren Wert, wenn man von lokalen Erhöhungen infolge Vorspannen oder Einbau dehnungsarmer Steifen absieht. Was also durch die Berechnung erzeugt wird, ist keinesfalls ein "aktiver Erddruck". Vielmehr wird ein Differenzdruck errechnet, der den Ruhedruck (Ausgangserddruck) verringert. In der numerischen Berechnung beherrschbar ist also nicht der "aktive Erddruck", sondern nur die Differenz zwischen ihm und dem Ruhedruck. Die mit der Finite Element Methode errechneten Erddrücke können sich daher nur in dem Maß dem realistischen Erddruck nähern, in dem auch der Ruhedruck bekannt ist. Die Größe $K_o$ ist jedoch weitgehend unbekannt. Berücksichtigt man weiter, daß in den Abschätzformeln und empirischen Beziehungen meist der Reibungswinkel $\varphi$ eingeht, dieser aber - siehe Kapitel 3 - im ebenen Verformungszustand erheblich höher sein kann als im triaxialen Kompressionsversuch, braucht es nicht zu verwundern, daß die numerischen Verfahren andere Erddrücke liefern als die gewohnten Grenzwertbetrachtungen der Erddrucktheorie.

Angesichts der sehr komplexen Verformungsbedingungen des Systems Wand-Boden-Anker wäre eine Übereinstimmung mit der einfachen Erddrucktheorie sehr erstaunlich.

Die folgenden Schlußbemerkungen sind im Zusammenhang zu sehen mit den am Ende von Kapitel 7.1 zusammengestellten Erfahrungen:

- Das elastoplastische Stoffgesetz von Arslan liefert mit den gleichen Parametern, die bei der Nachrechnung der Modellversuche verwendet wurden, bei Baugruben natürlicher Größe realistische Verformungen.

- Parametrische Untersuchungen zeigen den Einfluß von Ankerlänge und Ankervorspannung sowie alternativ einer ausgesteiften Baugrubenwand.

- Die maximalen Setzungen der Geländeoberfläche betragen unabhängig von Ankern oder Steifen beim untersuchten Problem 70 % der maximalen Wandverformungen.

- Ein Drittel der Verformungen wird bei dem untersuchten Problem durch die Entlastung der Baugrubensohle verursacht.

Und wiederum:

- Nichtlinear-elastische Berechnungen können zu unrealistischen Ergebnissen führen, vor allem zu vorzeichenmäßig falschen Verformungen der Geländeoberfläche.

## 8. Erfahrungen und Schlußfolgerungen

Während noch vor einer Reihe von Jahren teilweise sehr unterschiedliche Standpunkte über die Anwendbarkeit numerischer Verfahren im Grundbau zu finden waren, hat die anfängliche Zustimmung oder entschiedene Ablehnung einer realistischen Betrachtungsweise Platz gemacht. Es hat sich herausgestellt, daß einige Probleme derzeit quantitativ, andere nur qualitativ und wieder andere weder quantitativ noch qualitativ zu lösen sind. Ernüchterung auf der einen und Verständnis auf der anderen Seite führen im Laufe der Zeit zu einer Konvergenz der Ansichten, die der Entwicklung von Berechnungsmöglichkeiten und der Lösung von Grundbauproblemen nur nützlich sein kann. Ausschließlich unter dem Aspekt der Statik und Dynamik gesehen ist vieles berechenbar geworden; die Kenntnis des Bodens ist jedoch meist weit dürftiger als für Berechnungen erforderlich. Werden bei der Anwendung numerischer Verfahren wesentliche Unzulänglichkeiten bei den Stoffmodellen erkennbar, muß zunächst der Schwerpunkt auf die Weiterentwicklung dieser Modelle gelegt werden. Die bis dahin gewonnenen Erfahrungen und die aufgetretenen Probleme sind noch einmal kritisch zu überprüfen.

Die Grenzen der Anwendbarkeit numerischer Verfahren im Grundbau liegen in unserer unvollkommenen Fähigkeit, das beobachtete Verhalten des Bodens zu formulieren, nicht in einer Unfähigkeit, einmal formuliertes Verhalten in Rechenprogramme umzusetzen. Fortschritte in der Anwendung numerischer Verfahren im Grundbau können daher nur basieren auf einem besseren Verständnis des Bodenverhaltens. Dazu sind bessere Versuchstechniken und mechanisch-mathematische Modelle erforderlich. Die oft gestellte Frage: "Was kann die Finite Element Methode im Grundbau leisten?" ist vom gedanklichen Ansatz her falsch. Sie müßte lauten: "Was können unsere Stoffgesetze leisten?" Um sie zu beantworten, werden weniger Erfahrungen mit numerischen Methoden und Großrechenanlagen benötigt als vielmehr grundlegendes Verständnis des Bodenverhaltens.

Spannungsdehnungsbeziehungen zu entwickeln, die den im einleitenden Kapitel 1 definierten Anforderungen an ein "Stoffgesetz" gerecht werden, ist ohne Zweifel eine schwierige Arbeit, die - bei derart allgemeiner Aufgabenstellung - auf absehbare Zeit noch nicht als beendet angesehen werden kann. Teilaspekte sind bereits gut gelöst, andere noch im wissenschaftlichen Anfangsstadium. Ganz offensichtlich ist die Anzahl von unabhängigen Größen, die das Materialverhalten beschreiben, bei weitem zu groß, um die Hoffnung

zu erwecken, daß in absehbarer Zeit Beziehungen entwickelt werden können, die das Verhalten aller Böden unter allgemeinen Belastungsverhältnissen beschreiben. Jedoch können Schritt für Schritt die Hilfsmittel zum Verständnis und zur Darstellung des Bodenverhaltens weiterentwickelt werden.

Während häufig eine problemspezifische Lösung erstellt wird, also ein Stoffmodell für eine begrenzte Aufgabenstellung formuliert und ein Problem damit angegangen wird, wurde in der vorliegenden Arbeit anders vorgegangen. Aufbauend auf im Hause vorliegenden, teilweise vom Verfasser selbst gewonnenen Erfahrungen mit einfachen Stoffmodellen, wurden deren Mängel zusammengetragen (Kapitel 2). Gleichzeitig wurde ein Finite Element Programm in eine organisatorische Form gebracht, die aufnahmebereit für komplexere Stoffgesetze ist. Der dafür benötigte Aufwand ist nicht unerheblich. Nachdem derart der Lösungsweg methodisch verbessert war, konnten mit dem gleichzeitig und auf die Bedürfnisse der Finite Element Methode abgestimmt entstandenen Stoffgesetz von Arslan (1980) drei Anwendungsbeispiele bearbeitet werden. Die Anwendung des Stoffgesetzes ist selbstverständlich nicht auf die gewählten Beispiele beschränkt. Diese wurden ausgewählt, weil dafür Erfahrungen und Messungen vorliegen.

Die Großversuche mit Einzelfundamenten konnten mit gutem Ergebnis nachgerechnet werden. Auch die Horizontalverformungen im Boden unter und neben dem Fundament wurden qualitativ und quantitativ zutreffend berechnet. Da das untersuchte Problem sehr starken äußeren Zwängen unterliegt, ist die Berücksichtigung von Dilatanz und Kontraktanz im Stoffgesetz besonders wichtig. Eine parametrische Untersuchung zeigte den großen Einfluß der Volumendehnungscharakteristik des Sands - ausgedrückt durch die Lagerungsdichte - auf das Lastsetzungsverhalten.

Bei der Nachrechnung von Modellversuchen mit dreifach verankerten Baugrubenwänden konnte keine zahlenmäßige Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse mit den Messungen erreicht werden. Das qualitative Verformungsverhalten wird durch das elastoplastische Stoffgesetz gut erfaßt. Der Versuch, mit einfachen nichtlinear-elastischen Stoffansätzen parametrisch lediglich den Einfluß von Randbedingungen zu erfassen, zeigt, daß die Gefahr von Fehlinterpretationen sehr groß ist, wenn bei dem benutzten Stoffmodell entscheidende Bodeneigenschaften nicht berücksichtigt werden.

Die Berechnung einer dem Modell geometrisch ähnlichen Baugrubenwand natür-

licher Größe mit Hilfe der Finite Element Methode und des elastoplastischen Stoffgesetzes zeigt realistische Ergebnisse. Stoffmodelle auf der Grundlage des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes sind für Sand bei dieser Art von Problemen gänzlich ungeeignet. Vor allem die Verformungen der Geländeoberfläche neben Baugruben werden mit diesen einfachen Modellen falsch vorhergesagt. Demgegenüber wurde hier mit elastoplastischem Stoffgesetz der Einfluß von Ankerlänge, Ankervorspannung und eines alternativ vorgesehenen Steifensystems deutlich gemacht, wobei jeweils auch die Geländeverformungen zur Plausibilitätsüberprüfung herangezogen wurden.

Ein häufig vorgebrachter Einwand gegen numerische Berechnungen einerseits und hochentwickelte Stoffmodelle andererseits soll hier ebenfalls noch diskutiert werden: Welchen Sinn hat es, Stoffgesetze zu verfeinern, wenn der in-situ Spannungszustand des Bodens noch häufig weitgehend unbekannt ist ? So wurde z.B. in Kapitel 5.3 deutlich, wie der Ruhedruckbeiwert $K_o$ in die Berechnung eingeht und vor allem den Erddruck (Kapitel 7) zu einem großen Teil bestimmt. Die Antwort hierauf beruht auf einem Denkschritt, der zeitlich noch eine Entwicklungsstufe vorher angesiedelt ist: Solange wir nicht in der Lage waren, wenigstens das nachzuvollziehen, was in Laborversuchen festgestellt wird, war keine Hoffnung angebracht, die weitaus komplexeren Vorgänge in der Natur zu berechnen. Es wurde mehrfach gezeigt, daß mit Stoffmodellen eines bestimmten einfachen Niveaus das Verhalten selbst beim triaxialen Kompressionsversuch nicht beschrieben werden kann. Arslan hat mit seinem elastoplastischen Stoffgesetz bewiesen, daß zumindest für dichten und sehr dichten Sand die Vorgänge im Laborversuch bei einer Vielzahl von Spannungswegen zutreffend erfaßt werden können. Das berechtigt zu der Aussage, daß damit bei gleichem Boden die gleichen Phänomene in der Natur durch eine numerische Berechnung darstellbar sind. Inwieweit das Verhalten im Labor dem Verhalten in der Natur ähnelt, insbesondere der Boden im Labor dem Boden in situ entspricht, ist nur unzureichend bekannt. Es ist erforderlich, mehr und mit besseren Methoden in situ zu untersuchen. Ähnliches gilt auch für Untersuchungen im Labor, vor allem im Triaxialversuch. Eine zuverlässige Messung der Volumendehnung ist Voraussetzung für die Ermittlung von Stoffparametern.

Wünschenswert wäre, wenn bei der Bearbeitung von Grundbauproblemen mit numerischen Verfahren die Bearbeiter sich stärker bewußt würden, wie unterschiedliche Stoffmodelle sich auf das Ergebnis von Berechnungen auswirken können. Lagerungsdichte, Anisotropie und Dilatanz bestimmen das Verhalten.

Es braucht nicht zu verwundern, wenn z.B. ebene Finite Element Berechnungen mit Stoffmodellen, die in der Bruchbedingung die mittlere Hauptspannung enthalten, einen sehr viel größeren Abstand zum Bruch ergeben als Berechnungen mit Modellen, in die nur die größte und kleinste Hauptspannung eingeht. Diskrepanzen zwischen derartigen Ergebnissen numerischer Methoden und einfachen erdstatischen Vorstellungen sind unvermeidlich.

Zur gedanklichen Unterstützung des Vorstellungsvermögens und zur Kontrolle des Stoffmodells auf Übereinstimmung mit bekannten Verhaltensweisen des Bodens ist es durchaus sinnvoll, an einfachen Beispielen, eventuell sogar einzelnen Elementen, Plausibilitätsüberprüfungen vorzunehmen. Das statische System und der Spannungsweg sind dort so vorgebbar, daß Versuchsergebnisse direkt nachvollzogen werden können. Beispiele für derartiges Vorgehen sind in Kapitel 2 und 5.3 gegeben.

Unser Vorstellungsvermögen reicht nicht aus, um bei komplexen statischen Systemen die Auswirkungen konstruktiver Maßnahmen in allen Bereichen verfolgen zu können. Selbst wenn wir Gültigkeit der Elastizitätstheorie voraussetzen, fällt es gelegentlich schwer, beispielsweise die Auswirkung gewählter Randbedingungen vorherzusehen. Sehr viel schwieriger, oft sogar unmöglich, ist es, bei nichtlinear-elastischen Modellen Tendenzen vorher zu erkennen. Wenn wir noch einen Schritt weitergehen und mit elastoplastischen verfestigenden Stoffmodellen arbeiten, stellt sich die Frage, ob wir uns damit von unserer Anschauung und unserem Vorstellungsvermögen nicht noch weiter weg bewegen. Der Verfasser ist der Auffassung, daß das Gegenteil der Fall ist: Diese Stoffmodelle führen zu genau denjenigen Ergebnissen, die dem Bodenverhalten entsprechen und die wir uns vorstellen können, während einfachere Modelle bei bestimmten Bedingungen keine plausiblen Ergebnisse zeigen.

Die Erkenntnis, daß bestimmte Merkmale des Bodenverhaltens nur mit Hilfe der Plastizitätstheorie ausgedrückt werden können, darf jedoch nicht dazu führen, unbedenklich auch einfachste elastoplastische Modelle wie Drucker-Prager oder Mohr-Coulomb zu verwenden. Diese idealplastischen nicht verfestigenden Modelle nehmen bis zum Erreichen der Fließbedingung lineare Elastizität an. Die Tatsache, daß sie ab Erreichen der Fließbedingung elastoplastisch reagieren, kann nicht darüber hinweg täuschen, daß sie bei vielen Problemen nichtlinear-elastischen Ansätzen unterlegen sind, da sie den allmählichen Abbau der Schubsteifigkeit nicht beinhalten.

Assoziierte Fließregeln, die bei einfachen Modellen üblich sind, bieten zwar Vorteile bei der numerischen Bearbeitung (symmetrische Matrizen), überschätzen aber bei fast allen Böden die Dilatanz erheblich.

Sind im konkreten Anwendungsfall einfachere Methoden anwendbar, um den Einfluß konstruktiver Maßnahmen zahlenmäßig zu erfassen?

Es ist bekannt, daß eine Vergrößerung der Ankerlänge oder Einbau von Steifen sinnvoll ist, um Verformungen von Baugrubenwänden zu verringern. Welche Berechnungen sind aber erforderlich, um z.B. die horizontale Extension der Geländeoberfläche im Bereich hinter der Verankerungsstrecke abzuschätzen und Maßnahmen zu beurteilen, die die Verformungen auf ein für dort befindliche Bebauung unschädliches Maß reduzieren? Oder: Läßt sich rechnerisch überschlagen, welcher Maximalabstand zwischen unterster Steifenlage und Baugrubensohle für die Verformungen der Geländeoberfläche noch tolerierbar ist? Eine Antwort kann nur in folgendem Sinne gegeben werden: Wenn wir wissen, daß das System Wand-Boden-Bauwerk hochgradig statisch unbestimmt und der Boden ein elastoplastisch-verfestigendes Material ist, scheiden einfache Näherungsformeln zur Abschätzung des Verformungsverhaltens aus. Selbst wenn wir eine Finite Element Berechnung mit nichtlinear-elastischem Stoffansatz als einfache Näherung betrachten, zeigt sich, daß in wesentlichen Bereichen die Verformungen falsches Vorzeichen haben. Wenn derartige Fehleinschätzungen vermieden werden sollen, hat die Anwendung eines besseren und geringfügig aufwendigeren Stoffgesetzes einen Sinn.

Die Ergebnisse von Berechnungen sind nur dann verantwortbar, wenn zutreffende Annahmen zugrunde liegen. Diese Annahmen sind nur mit größerem Aufwand, oftmals aber gar nicht erkundbar. Der ingenieurgemäße Weg kann daher unter solchen - in der Praxis nahezu als Regelfall auftretenden - Zwängen nur sein, konstruktive Lösungen vorzusehen.

## 9. Literaturverzeichnis

AMANN, P. (1975): Über den Einfluß des Verformungsverhaltens des Frankfurter Tons auf die Tiefenwirkung eines Hochhauses und die Form der Setzungsmulde. In: Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 15.

ARGYRIS, J. H. (1965): Elasto-Plastic Matrix Displacement Analysis of Three-Dimensional Continua. Journal of the Royal Aeronautical Society Vol. 69, S. 633-655.

ARMEN, H. (1979): Assumptions, Models, and Computational Methods for Plasticity. Computers & Structures Vol. 10, S. 161-174.

ARSLAN, U. (1978): Versuche an Fundamenten auf dichtem Sand. Unveröffentlicht.

ARSLAN, U. (1980): Zur Frage des elastoplastischen Verformungsverhaltens von Sand. Diss. Darmstadt.

ATKINSON, J. H., BRANSBY, P.L. (1978): The Mechanics of Soils.An Introduction to Critical State Soil Mechanics. McGraw Hill London.

AUBRY, D., DES CROIX, P. (1979): Numerical Algorithm for an Elastoplastic Constitutive Equation with Two Yield Surfaces. Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics.Aachen. S. 283-288.

BANERJEE, P. K., STIPHO, A. S. (1978): Associated and Non-Associated Constitutive Relations for Undrained Behaviour of Isotropic Soft Clays. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 2, S. 35-56.

BARDEN, L. (1963): Stresses and Displacements in a Cross-Anisotropic Soil. Geotechnique 13, S. 198-210.

BECKER, H. M. (1978): Ebenes plastisches Fließen von granularem Modellmaterial. Versuchseinrichtung und Ergebnisse. Diss. München.

BICANIC, N.,JOHNSON, K. H. (1979): Who Was '-Raphson'? International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 14, S. 148-152.

BIEGSTRAATEN, T.,KENTER, C. (1978): Stress-Strain Behaviour for Finite Elements. Symposium on Foundation Aspects of Coastal Structures. Delft, Paper II.2.

BISHOP, A. W. (1966): The Strength of Soils as Engineering Materials (Sixth Rankine Lecture). Geotechnique 16, S. 91-130.

BRETH, H., WANOSCHEK, H. R. (1969): Steifenkraftmessungen in einer durch Pfahlwände gesicherten Tiefbahnbaugrube im Frankfurter Ton. Der Bauingenieur 44, S. 240-243.

BRETH, H.,SCHUSTER, E., PISE, P. (1973): Axial Stress-Strain Characteristics of Sand. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 99 SM8, S. 617-632.

BRETH, H., ROMBERG, W. (1972): Messungen an einer verankerten Wand. Vorträge der Baugrundtagung Stuttgart. Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e. V. S. 807

BRETH, H.,ARSLAN, U.,RÜCKEL, H., STROH, D. (1976): Zur Setzung von Flachgründungen. Vorträge der Baugrundtagung Nürnberg. Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e. V. S. 603-626.

BRETH, H.,STROH, D. (1976): Ursachen der Verformung im Boden beim Aushub tiefer Baugruben und konstruktive Möglichkeiten zur Verminderung der Verformung von verankerten Baugruben. Der Bauingenieur 51, S. 81-88.

BRETH, H.,STROH, D.,WANNINGER, R. (1976): Untersuchungen über die zulässige Aushubtiefe von Baugruben im steifplastischen Ton. Sechste Europäische Konferenz für Bodenmechanik und Grundbau. Wien. S. 617-624.

BRETH, H., WOLFF, R. (1976): Versuche mit einer mehrfach verankerten Modellwand. Die Bautechnik 53, S. 38-42.

BRETH, H., CHAMBOSSE, G., ARSLAN, U. (1978): Einfluß des Spannungsweges auf das Verformungsverhalten des Sandes. Geotechnik 1, S. 2-9.

BROWN, C.B., KING, I.P. (1966): Automatic Embankment Analysis: Equilibrium and Instability Conditions. Geotechnique 16, S. 209-219.

BURLAND, J.B. (1967): Deformation of Soft Clays. Ph. D. Thesis, Cambridge.

CHAMBOSSE, G. (1976): Stoffansatz für den Sand unter den Verformungsbedingungen im Standard-Triaxialversuch. Diss. Darmstadt

CHANG, C. Y., DUNCAN, J. M. (1970): Analysis of Soil Movement around a Deep Excavation. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 96 SM5, S. 1655-1681.

CHANG, C. Y.,NAIR, K.,KARWOSKI, W. J. (1972): Finite Element Analysis of Excavations in Rock. Proceedings of the Symposium of Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering. Vicksburg, Miss. S. 457-504.

CHANG, C.Y.,NAIR, K.,KARWOSKI,W. J. (1976): Finite Element Analysis of Excavations in Rock (Closure). Proceedings of the Symposium of Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering. Vicksburg, Miss. S. 1223-1226.

CHRISTIAN, J. T.,DESAI, C. S. (1977): Constitutive Laws for Geologic Media. In: Numerical Methods in Geotechnical Engineering, edited by C. S. Desai and J. T. Christian. McGraw Hill, New York, S. 65-115.

CHRISTIAN, J. T.,HAGMANN, A. J.,MARR, W. A. (1977): Incremental Plasticity Analysis of Frictional Soils. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 1, S. 343-375.

CLOUGH, G. W.,DUNCAN, J. M. (1971): Finite Element Analysis of Retaining Wall Behavior. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 97 SM12, S. 1657-1673.

CLOUGH, G. W.,TSUI, Y. (1974): Performance of Tied-Back Walls in Clay. Journal of the Geotechnical Division. ASCE Vol. 100 GT12, S. 1259-1273.

CLOUGH, G. W., MANA, A. I. (1976): Lessons learned in Finite Element Analyses of Temporary Excavations in Soft Clay. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg,Va. S. 496-510.

CLOUGH, R. W.,WOODWARD, R. J. (1967): Analysis of Embankment Stresses and Deformations. Journal ot the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 93 SM4 S. 529-549.

COOK,R. D. (1974): Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, New York.

COON, M. D.,EVANS, R. J. (1971): Recoverable Deformations of Cohesionless Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 97 SM2 S. 375-391.

CORNFORTH, D. H. (1961): Plane Strain Failure Characteristics of a Saturated Sand. Ph. D. Thesis,London.

COROTIS, R. B.,FARZIN, M. H.,KRIZEK,R. J. (1974): Nonlinear Stress-Strain Formulation for Soils. Journal of the Geotechnical Engineering Division. ASCE Vol. 100 GT9 S. 993-1008.

CZAPLA, H.,KATZENBACH, R.,RÜCKEL, H.,WANNINGER, R. (1978): Manual zum Finite Element Programmsystem STATAN-15 Version Bodenmechanik und Manual zum Graphischen Datenverarbeitungssystem PLOSYS. Fachgebiet Bodenmechanik und Grundbau. Technische Hochschule Darmstadt.

CZAPLA, H. (1979): Spannungen und Verformungen in hohen Steinschüttdämmen im Bauzustand unter besonderer Berücksichtigung von Talform und Hangrauhigkeit. Mitteilungen derVersuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 20.

DAVIDSON, H. L.,CHEN, W. F. (1976): Nonlinear Analyses in Soil and Solid Mechanics. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg,Va. S. 205-216.

DAVIDSON, H. L.,CHEN, W. F. (1977): Nonlinear Response of Undrained Clay to Footings. Computer & Structures Vol. 7 S. 539-546.

DAVIS, R. O.,MULLENGER, G. (1979): Derived Failure Criteria for Granular Media. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 3, S. 279-283.

DESAI, C. S. (1971): Nonlinear Analyses Using Spline Functions. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 97 SM10 S. 1461-1480.

DESAI, C. S. (Editor) (1971): Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering. Proceedings of the Symposium held at Vicksburg, Mississippi.

DESAI, C. S.,ABEL, J. F. (1972): Introduction to the Finite Element Method. Van Nostrand Reinhold, New York.

DESAI, C. S. (Editor) (1976): Numerical Methods in Geomechanics.Papers presented and discussed at the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg, Virginia.

DESAI, C. S.,CHRISTIAN, J T. (Editors) (1977): Numerical Methods in Geotechnical Engineering. McGraw Hill, New York.

DOMASCHUK, L.,WADE, N.H. (1969): A Study of Bulk and Shear Moduli of a Sand. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 95 SM2, S. 561-581.

DRNEVICH, V. P. (1975): Constrained and Shear Moduli for Finite Elements. Journal of the Geotechnical Engineering Division. ASCE Vol. 101 GT5, S. 459-473.

DRUCKER, D. C.,PRAGER,W. (1952): Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. Quarterly of Applied Mathematics. Vol. 10, S. 157-165.

DRUCKER, D. C.,GIBSON, R.E.,HENKEL, D. J. (1955): Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity. Transactions of the ASCE Paper No. 2864, S. 338-346.

DRUCKER, D. C. (1959): A Definition of Stable Inelastic Material. Journal of Applied Mechanics. Vol. 26, S. 101-106.

DUDA, M. (1971): STATAN. Anwendersystem zur statischen Strukturanalyse. Lehrstuhl und Laboratorium II für Maschinenelemente der Technischen Hochschule Darmstadt.

DUDA, M. (1975): Eine vergleichende Untersuchung der Wirtschaftlichkeit ebener finiter Elemente. Diss. Darmstadt.

DUNCAN, J. M.,CHANG, C. Y. (1970): Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 96 SM5, S. 1629-1653 (Closure May 1972).

EEKELEN, H.A.M. van (1980): Isotropic Yield Surfaces in Three Dimensions for Use in Soil Mechanics. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 4, S. 89-101.

EGGER, P. (1972): Influence of Wall Stiffness and Anchor Prestressing on Earth Pressure Distribution. Proceedings of the 5th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Madrid. S. 259-264.

EGGESTAD, A. (1963): Deformation Measurements below a Model Footing on the Surface of Dry Sand. European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Wiesbaden. S. 233-239.

EISENSTEIN, Z.,KRISHNAYYA, A. V. G.,MORGENSTERN, N. R. (1972): An Analysis of Cracking in Earth Dams. Proceedings of the Symposium on Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering. Vicksburg, Miss. S. 431-456.

FELIPPA, C. L. (1966): Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two-Dimensional Structures. Ph. D. Thesis University of California,Berkeley.

FRANKE, E. (1967): Ruhedruck in kohäsionslosen Böden im ebenen Fall. Die Bautechnik 44, S. 42-47.

GALLAGHER, R. H.,PADLOG, J.,BIJLAARD, P.P. (1962): Stress Analysis of Heated Complex Shapes. Journal of the American Rocket Society 32, S. 700-707.

GALLAGHER, R. H. (1976): Finite-Element-Analysis. Springer Berlin.

GARTUNG, E.,BAUERNFEIND, P.,BIANCHINI, J. C. (1978): Spannungs-Verformungs-berechnung für eine Rückverankerte Baugrubenwand im Keupersandstein. Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Landesgewerbeanstalt Bayern Heft 34.

GATES, R. H. (1973): Progressive Failure Model for Clay Shale. Proceedings of the Symposium of Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering.Vicksburg, Miss. S. 327-347.

GIRIJAVALLABHAN, C. V.,REESE, L. C. (1968): Finite-Element Method for Problems in Soil Mechanics. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 94 SM2, S. 473-496.

GOODMAN, R.E., TAYLOR, R.L., BREKKE, T.L. (1968): A Model for the Mechanics of Jointed Rock. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 94 SM3, S. 637-659.

GREEN, G. E.,BISHOP, A. W. (1969): A Note on the Drained Strength of Sand under Generalized Strain Conditions. Geotechnique 19, S. 144-149.

GUDEHUS, G. (1973a): Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenen Sand. Ingenieur - Archiv 42, S. 151-169.

GUDEHUS, G. (1973b): Ebene und achsensymmetrische Formänderungen in Sand: Grundgleichungen. Die Bautechnik 50, S. 129-134.

GUDEHUS, G. (Ed.) (1977): Finite Elements in Geomechanics. John Wiley & Sons, London.

GUDEHUS, G. (1979): A Comparison of some Constitutive Laws for Soils under Radially Symmetric Loading and Unloading (Main Lecture). Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Aachen.

HAGMANN, A. J. (1971): Prediction of Stress and Strain under Drained Loading Conditions. MIT Dept. Civ. Eng. Report R71-3.

HAGMANN, A. J.,CHRISTIAN,J.T.,D'APPOLONIA,D. J. (1970): Stress-Strain Models for Frictional Materials. MIT Dept. Civ. Eng. Report R70-18.

HARDIN, B. O.,BLACK, W. L. (1968): Vibration Modulus of Normally Consolidated Clays. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 94 SM2, S. 353-369.

HARDT, G. (1976): Spannungen und Verformungen in hohen Dämmen im Bauzustand. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 18.

HEIBAUM, M. (1977): Studienarbeit am Fachgebiet Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

HILL, R. (1950): The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford.

HÖEG, K.,CHRISTIAN, J. T.,WHITMAN, R. V. (1968): Settlement of Strip Load on Elastic-Plastic Soil. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 94 SM2, S. 431- 443.

HÖEG, K. (1972): Finite Element Analysis of Strain-Softening Clay. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 98 SM1, S. 43-58.

HUANG, Y. H. (1969): Finite Element Analysis of Nonlinear Soil Media. Proceedings on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering. Vanderbilt University. S. 663-690.

HUDER, J. (1975): Tiefe Baugruben. Erddrücke und Deformationen. Mitteilungen der Schweizerischen Gesellschaft für Boden- und Felsmechanik Nr. 92, S. 1-10.

HUEBNER, K. H. (1975): The Finite Element Method for Engineers. Johh Wiley & Sons, New York.

HUMPHESON, C.,NAYLOR, D. J. (1975): The Importance of the Form of the Failure Criterion. International Conference on Numerical Methods in Soil and Rock Mechanics. Karlsruhe.

IRONS, B. M. (1970): A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 2, S. 5-32.

IZUMI, H.,KAMEMURA, K., SATO, S. (1976): Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Excavations. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics.Blacksburg, Va. S. 701-712.

JANBU, N. (1963): Soil Compressibilty as Determined by Oedometer and Triaxial Tests. European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Wiebaden. Vol. 1, S. 19-25.

KENTER, C. J., VERMEER, P. A. (1978): Computation by Finite Elements. Symposium on Foundation Aspects of Coastal Structures. Delft, Paper III.2.

KIRKPATRICK, W. M. (1957): The Condition of Failure for Sands. Proceedings of the Fourth International Conference of Soil Mechanics. London. S. 172-178.

KLEIN, J.,GERTHOLD, A. (1979): Die Fließbedingung von Drucker/Prager im Vergleich zu anderen Bruchkriterien bei der Bemessung von Gefrierschächten. Die Bautechnik 56, S. 368-375.

KO, H. Y.,MASSON, R. M. (1976): Nonlinear Characterization and Analysis of Sand. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methodes in Geomechanics. Blacksburg, Va. S. 294-305.

KONDNER, R. L. (1963): Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 89 SM1, S. 115-143.

KULHAWY, F. H.,DUNCAN, J. M.,SEED, H. B. (1969): Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Embankments during Construction. U.S.Army Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi. Contract Report 569-8.

LADE, P. V., DUNCAN, J. M. (1973): Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 99 SM10, S. 793-811.

LADE,P. V.,DUNCAN, J.M. (1975): Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil. Journal of the Geotechnical Division. ASCE Vol. 101 GT10, S.1037-1053.

LADE, P.V. (1976): Interpretation of Torsion Shear Tests on Sand. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg, Va. S. 381-389.

LADE, P. V.,DUNCAN, J. M. (1976): Stress-Path Dependent Behavior of Cohesionless Soil. Journal of the Geotechnical Engineering Division ASCE Vol. 102 GT1, S. 51-68.

LADE, P. V. (1977): Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces. International Journal of Solids and Structures Vol. 13, S. 1019-1035.

LANGHAGEN, K. (1976): Berechnung von Felshohlraumbauten in Gebirge mit regelmäßigen Klüften und einzelnen Störungsflächen. Bericht Nr. 76-17 aus dem Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig.

LAUMANS, Q. (1977): Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens. Baugrundinstitut Stuttgart Mitteilung 7.

LEE, K. L. (1970): Comparison of Plane Strain and Triaxial Tests on Sand. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 96 SM3, S. 901-923.

LEKHNITSKII, S. G. (1963): Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden Day, San Francisco.

MALINA, H. (1969): Berechnung von Spannungsumlagerungen in Fels und Boden mit Hilfe der Elementenmethode. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe Heft 40.

MANDEL, J. (1964): Conditions des Stabilitê et postulat de Drucker. Symposium Rheology and Soil Mechanics, Grenoble. S. 58-68.

MARCAL, P. V.,KING, I. P. (1967): Elastic-Plastic Analysis of Two-Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method. International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 9, S. 143-155.

MATSUOKA, H., NAKAI, T. (1977): Stress-Strain Relationship of Soil Based on the SMP. Proceedings of Specialty Session 9. Ninth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering Tokyo S. 153-162.

MEISSNER, H. (1971): Nichtlineares Kraft-Verformungsverhalten zylindrischer Körper aus rolligem Erdstoff. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe Heft 45.

MEISSNER, H., WIBEL, A. R. (1973): Numerisches Rechenverfahren für Randwertprobleme in der Bodenmechanik. Die Bautechnik 50, S. 65-69.

MEISSNER, H.,WIBEL, A. (1974): Parameter eines elasto-plastischen Stoffansatzes für körnige Erdstoffe. Die Bautechnik 51, S. 263-269.

MISES, R. von (1913): Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse S. 582-592.

MÜHLHAUS, H.B. (1977): Ein Konergenzkriterium für die Methode der Anfangsspannung bei inkrementell nichtlinearem und nichtassoziiertem Stoffgesetz. Jahresbericht 1977 des SFB 77 Karlsruhe S. 101-112.

MUHS, H.,WEISS, K. (1971): Untersuchung von Grenztragfähigkeit und Setzungsverhalten flachgegründeter Einzelfundamente im ungleichförmigen nichtbindigen Boden. Mitteilungen der DEGEBO Heft 26.

MROZ, Z. (1963): Non Associated Flow Laws in Plasticity. Journal de Mécanique 2, No. 1, S. 21-42.

MROZ, Z. (1980): On Hypoelasticity and Plasticity Approaches to Constitutive Modelling of Inelastic Behaviour of Soils. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics Vol. 4, S. 45-55.

NAYAK, G. C.,ZIENKIEWICZ, O. C. (1972): Note on the "Alpha"-Constant Stiffness Method for Analysis of Non-Linear Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 4, S. 579-582.

NOVA, R., WOOD , D. M. (1979): A Constitutive Model for Sand in Triaxial Compression. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 3, S. 255-278.

ODEN, J.T. (1972): Finite Elements of Nonlinear Continua. McGraw-Hill New York.

OHDE, J. (1950): Zur Erddruck-Lehre. Die Bautechnik 27, S. 111-114.

OZAWA, Y.,DUNCAN, J. M. (1976): Elasto-Plastic Finite Element Analyses of Sand Deformations. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg, Va. S. 243-263.

PALMERTON, J. B. (1972): Application of Three-Dimensional Finite Element Analysis. Proceedings of the Symposium of Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering. Vicksburg, Miss. S. 155-214.

PECK, R. B. (1969): Deep Excavations and Tunneling in Soft Ground (State of the Art Report). Proceedings of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Mexico, S. 225-290.

PRAGER, W. (1949): Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity. Journal of Applied Physics. Vol. 20, S. 235-241.

PREVOST, J.-H.,HÖEG, K. (1975): Soil Mechanics and Plasticity Analysis of Strain-Softening. Geotechnique 25, S. 279-297.

PREVOST, J.-H. (1978): Plasticity Theory for Soil Stress-Strain Behavior. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE Vol. 104 EM5, S. 1177-1194.

QUOC SON, N. (1977): On the Elastic Plastic Initial-Boundary Value Problem and its Numerical Integration. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol 11, S. 817-832.

RAMBERG, W., OSGOOD, W.R. (1943): Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters. Natl. Advis. Comm. Aeronaut. Tech. Note 902 Washington D. C.

RENDULIC, L. (1938): Eine Betrachtung zur Frage der plastischen Grenzzustände. Der Bauingenieur 19, S. 159-164.

REYES, S. F. (1966): Elastic-Plastic Analysis of Underground Openings by the Finite Element Method. Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana.

REYES, S. F.,DEERE, D. U. (1966): Elastic-Plastic Analysis of Underground Openings by the Finite Element Method. Proceedings of the Congress of the International Society of Rock Mechanics. Lissabon S. 477-483.

RICHARD, R. M.,ABBOTT, B. J. (1975): Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE Vol. 101 EM4

RICHTER, T. (1978): Zum Einfluß der Fließregel bei der Berechnung eines Streifenfundaments auf rolligem Boden mit der Methode der Finiten Elemente. Die Bautechnik 55, S. 243-248.

RICHTER, T. (1979): Vergleichende Berechnungen mit einigen in der Bodenmechanik bekannten Stoffgesetzen unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente. Die Bautechnik 56, S. 267-273.

ROMBERG, W. (1973): Messungen an einer verankerten Wand. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 12.

ROSCOE, K. H.,SCHOFIELD, A. N.,WROTH, C. P. (1958): On the Yielding of Soils. Geotechnique 8, S. 25-53.

ROSCOE, K. H.,SCHOFIELD, A. N.,THURAIRAJAH, A. (1963): Yielding of Soils in States Wetter than Critical. Geotechnique 13, S. 211-240.

ROSCOE, K. H. (1967): Diskussionsbeitrag. Proceedings of the Geotechnical Conference. Oslo. S. 120-122.

ROSCOE, K. H.,BASSETT, R. H.,COLE, E. R. L. (1967): Principal Axes Observed during Simple Shear of a Sand. Proceedings of the Geotechnical Conference. Oslo. S. 231-237.

ROSCOE, K. H.,BURLAND, J. B. (1968): On the Generalized Stress-Strain Behaviour of "Wet" Clay. In: Engineering Plasticity. Cambridge University Press, Cambridge.

ROSCOE, K. H. (1970): The Influence of Strains in Soil Mechanics (Tenth Rankine Lecture). Geotechnique 20, S. 129-170.

ROWE, P. W. (1971): Theoretical Meaning and Observed Values of Deformation Parameters for Soil. Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge. S. 143-194.

RÜCKEL, H. (1979): Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten. Eine vergleichende Studie. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 21.

SANDLER, I. S.,DIMAGGIO, F. L.,BALADI,G. Y. (1976): Generalized Cap Model for Geological Materials. Journal of the geotechnical Engineering Division. ASCE Vol. 102 GT7, S. 683-699.

SANDLER, I. S.,RUBIN, D. (1979): An Algorithm and a Modular Subroutine for the Cap Model. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 3, S. 173-186.

SAVIDIS, S.,RICHTER, T. (1978): Einfluß des Elementtypes und der Netzwahl bei der Standsicherheitsberechnung eines Streifenfundamentes. Finite Elemente in der Baupraxis. Ernst & Sohn, Berlin.

SCHAD, H. (1979): Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben. Baugrundinstitut Stuttgart Mitteilung 10.

SCHARPF, D. W. (1969): Die Frage der Konvergenz bei der Berechnung elastoplastisch deformierbarer Tragwerke und Kontinua. Diss. Stuttgart.

SCHEFFLER, E. (1976): Die abgesteifte Baugrube berechnet mit nichtlinearen Stoffgesetzen für Wand und Boden. Bericht Nr. 76-16 aus dem Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig.

SCHMITT, G. P. (1974): Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens einfach verankerter Baugrubenwände. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 14.

SCHMITT, G. P.,BRETH, H. (1975): Tragverhalten und Bemessung von einfach verankerten Baugrubenwänden. Straße Brücke Tunnel 27, S. 145-152.

SCHOFIELD, A.,WROTH, P. (1968): Critical State Soil Mechanics. McGraw Hill, London.

SMITH, I. M.,KAY, S. (1971): Stress Analysis of Contractive or Dilative Soil. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE Vol. 97 SM7, S. 981-997.

SMOLTCZYK, U. (1978): Ergebnisse eines Forschungsprogramms der DFG zum Spannungs-Dehnungsverhalten der Böden. Beiträge zu Staudammbau und Bodenmechanik. Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. H. Breth. Ebenfalls erschienen in Geotechnik 1.

SNITBHAN, N. CHEN, W. F. (1978): Elastic-Plastic Large Deformation Analysis of Soil Slopes. Computers & Structures Vol. 9, S. 567-577.

STROH, D. (1974): Berechnung verankerter Baugruben nach der Finite Element Methode. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 13.

STUTZ, P. (1972): Comportement élasto-plastique des milieux granulaires. International Symposium on Foundations of Plasticity, Warschau, S. 37-49.

TANAKA, T.,NAKANO, R. (1976): Finite Element Analysis of Miyama Rockfill Dam. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Blacksburg, Va. S. 650-661.

TRUESDELL, C.,NOLL, W. (1965): The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik Band III/3. Springer Berlin.

VAGNERON, J.,LADE, P. V.,LEE, K. L. (1976): Evaluation of Three Stress-Strain Models for Soils. Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methodes in Geomechanics. Blacksburg, Va. S. 1329-1351.

VARDOULAKIS, J. (1977): Scherfugenbildung als Verzweigungsproblem. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe Heft 70.

VERMEER, P. A. (1978): A Double Hardening Model for Sand. Geotechnique 28, S. 413-433.

WANNINGER, R., BRETH, H. (1978): Möglichkeiten und Grenzen numerischer Rechenverfahren im Grundbau. Der Bauingenieur 53, S. 465-470.

WANOSCHEK, H. R. (1972): Der Einfluß von Fundamentlasten auf die Größe und Verteilung des Erddrucks auf biegsame, abgesteifte Baugrubenwände. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 9.

WANOSCHEK, R.,BRETH, H. (1972): Auswirkung von Hauslasten auf die Belastung ausgesteifter Baugrubenwände. Straße Brücke Tunnel 24, S. 197-200.

WIBEL, A. R. (1971): Spannungsverteilung unter flachgegründeten Kreisfundamenten auf trockenem Sand. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe Heft 46.

WITTKE, W. (Editor) (1979): Numerical Methods in Geomechanics. Proceedings of the Third International Conference.Aachen.

WOLFF, R. (1975): Ermittlung des Tragverhaltens einer mehrfach verankerten Baugrubenwand durch Modellversuche. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt Heft 16.

YAMADA, Y.,YOSHIMURA, N.,SAKURAI, T. (1968): Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method. International Journal of Mechanical Sciences Vol. 10, S. 343-354.

ZANGL, L. W. (1977): Experimentelle und numerische Untersuchungen eines ebenen Verformungsproblems bei trockenem Sand. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe Heft 68.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1971): The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw Hill, London.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1977): The Finite Element Method. Third Edition. McGraw Hill, London.

ZIENKIEWICZ, O. C.,VALLIAPPAN, S.,KING, I. P. (1968): Stress Analysis of Rock as a "No-Tension" Material. Geotechnique 18, S. 56-66.

ZIENKIEWICZ, O.C.,VALLIAPPAN, S.,KING, I. P. (1969): Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems. "Initial Stress" Finite Element Approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 1, S. 75-100.

ZIENKIEWICZ, O. C.,NAYLOR, D. J. (1971): The Adaptation of Critical State Soil Mechanics Theory for Use in Finite Elements. Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge. S. 537-547.

ZIENKIEWICZ, O. C.,PANDE, G. N. (1975): Some Useful Forms of Isotropic Yield Surfaces for Soil and Rock Mechanics. International Conference on Numerical Methods in Soil and Rock Mechanics. Karlsruhe. S. 3-16.

Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Breth

Nr. 1 Beitrag zur Berechnung von Gründungsbalken und einseitig ausgesteiften Gründungsplatten unter Einbeziehung der Steifigkeit von rahmenartigen Hochbauten
Dr.-Ing. H. Sommer, Februar 1965

Nr. 2 Aktuelle Probleme im Staudammbau
Veröffentlichungen in den Jahren 1966 und 1967

Nr. 3 Über den Einfluß eines dünnwandigen, im Boden verlegten Rohres auf das Tragverhalten des Bodens
Dr.-Ing. K. H. Schwinn, Januar 1968

Nr. 4 Das Tragverhalten des Frankfurter Tons bei im Tiefbau auftretenden Beanspruchungen
Prof. Dr.-Ing. H. Breth, Dipl.-Ing. E. Schultz Dipl.-Ing. D. Stroh, April 1970

Nr. 5 Zur Frage der Erosionssicherheit unterströmter Erdstaudämme
Dr.-Ing. K. Günther, Juni 1970

Nr. 6 Ermittlung der rheologischen Zustandsgleichung eines Lehmes mit Hilfe einer neuentwickelten Versuchsapparatur
Dr.-Ing. D. Fedder, Dezember 1970

Nr. 7 Beiträge in den Jahren 1968 - 1970

Nr. 8 Der Einfluß der Steifigkeit von Stahlbetonskelettbauten auf die Verformung und die Beanspruchung von Gründungsplatten auf Ton
Dr.-Ing. H. Heil Juni 1971

Nr. 9 Der Einfluß von Fundamentlasten auf die Größe und Verteilung des Erddrucks auf biegsame, abgesteifte Baugrubenwände
Dr.-Ing. H. R. Wanoschek, März 1972

Nr. 10 Das Verformungsverhalten des Frankfurter Tons beim Tunnelvortrieb
Dipl.-Ing. G. Chambosse, Februar 1972

Nr. 11 Beiträge in den Jahren 1972-1973

Nr. 12 Messungen an einer verankerten Baugrubenwand
Dipl.-Ing. W. Romberg, Dezember 1973

Nr. 13 Berechnung verankerter Baugruben nach der Finite Element Methode
Dr.-Ing. D. Stroh, Juni 1974

Nr. 14 Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens einfach verankerter Baugrubenwände
Dr.-Ing. Gert-Peter Schmitt, Juli 1974

Nr. 15 Verformungsverhalten des Baugrundes beim Baugrubenaushub und anschließendem Hochhausbau am Beispiel des Frankfurter Tons
Dr.-Ing. P. Amann, Prof. Dr.-Ing. H. Breth, Dr.-Ing. D. Stroh, Juni 1975

Nr. 16 Ermittlung des Tragverhaltens einer mehrfach verankerten Baugrubenwand durch Modellversuche
Dr.-Ing. Reinhard Wolff, Juni 1975

Nr. 17 Die instationäre Brunnenströmung im anisotropen Grundwasserleiter mit freier Oberfläche
Dr.-Ing. Thomas Klüber, November 1975

Nr. 18 Spannungen und Verformungen in hohen Dämmen im Bauzustand
Dr.-Ing. Gunter Hardt, Januar 1976

Nr. 19 Beiträge in den Jahren 1974 - 1977

Nr. 20 Spannungen und Verformungen in hohen Steinschüttdämmen im Bauzustand unter besonderer Berücksichtigung von Talform und Hangrauhigkeit
Dr.-Ing. Heinz Czapla, März 1979

Nr. 21 Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten
Eine vergleichende Studie
Dr.-Ing. Horst Rückel, August 1979

Nr. 22 Untersuchungen über das Verformungsverhalten von Asphaltbeton im Hinblick auf seine Verwendung als Innendichtung für Dämme (in Vorbereitung)
Dipl.-Ing. H. Schwab

Nr. 23 Beitrag zum Spannungs-Verformungsverhalten der Böden
Dr.-Ing. M. Ulvi Arslan, Dr.-Ing. Rainer Wanninger, August 1980