Mitteilungen des Institutes für Grundbau, Boden- und Felsmechanik
der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. T. Dietrich

Heft 30

Coulombsches Extremalprinzip und Schranken des Erddrucks

Thomas DIETRICH und Ulvi ARSLAN

Juni 1989

Druck und Weiterverarbeitung : AStA - Druckerei Darmstadt

Mitteilungen des Institutes für Grundbau, Boden- und Felsmechanik
der Technischen Hochschule Darmstadt

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. T. Dietrich

Heft 30

Coulombsches Extremalprinzip und Schranken des Erddrucks

Prof. Dr.-Ing. Thomas DIETRICH
Dr.-Ing. Ulvi ARSLAN

Die Autoren danken Herrn Dipl.–Ing. Jörg Gutwald für die ausgezeichnete Verwirklichung ihrer unüblichen Ideen bezüglich der Textgestaltung und Herrn Norbert Neumann für die sorgfältige Ausführung der Zeichnungen.

Inhaltsverzeichnis

D'ailleurs,
les Sciences sont des monumens consacrés au bien public; chaque citoyen leur doit un tribut proportionné à ses talens. Tandis que les grands hommes, portés au sommet de l'édifice, tracent & élèvent les étages supérieurs, les artistes ordinaires répandus dans les étages inférieurs, ou cachés dans l'obscurité des fondemens, doivent seulement chercher à perfectionner ce que des mains plus habiles ont créé.

C.A.COULOMB(1776)

1 Einleitung

Die naturwissenschaftliche Behandlung der Mechanik der Böden beginnt mit Charles Augustin COULOMB(1736 – 1806). Die moderne Naturwissenschaft und die moderne Ingenieurwissenschaft, beide von Galileo GALILEI (1564 – 1642) begründet, unterscheiden sich von ihren Vorläufern hauptsächlich durch eine neue Art der Anwendung der Mathematik (SZABO,1979). Sie entwerfen nämlich mathematische Modelle der betrachteten Naturausschnitte. Anhand solcher Modelle lassen sich die Auswirkungen beabsichtigter Maßnahmen im voraus studieren und die Maßnahmen selbst optimieren. Da es immer Sachverhalte gibt, die mit den vorhandenen mathematischen Mitteln nicht modelliert werden können, besteht die Kunst des Naturwissenschaftlers darin, unter den interessanten Problemen die modellierbaren herauszufinden. COULOMB war ein Meister in dieser Kunst. Er modellierte unter anderem den Erddruck auf eine Stützmauer so treffend, daß die mit Hilfe seines Modells erstellten Prognosen nur wenige Prozent von den beobachteten wirklichen Werten abweichen und auch heutigen technischen Anforderungen genügen (siehe DIN 4085). Diese historisch gewichtige und nach wie vor nützliche Arbeit COULOMBs ist noch durch einen merkwürdigen Umstand ausgezeichnet: Obwohl der COULOMBsche Erddruck seit 200 Jahren zum Curriculum jeder Bauingenieurausbildung gehört, ist das Mißverständnis des zugrundeliegenden mathematischen Modells notorisch. Es wurde seit dem Erscheinen von COULOMBs Essai über einige Probleme der Statik in den Sitzungsberichten der Academie Royale des Sciences im Jahre 1776 durch die Sekundärliteratur verbreitet. Die Wirkung war zwiespältig. Während drei Autoren –REBHANN (1871),WINKLER (1872) und ENGESSER (1880) – durch die augenscheinlich ungenügende Begründung des als COULOMBsches Prinzip bekannten Theorems angespornt wurden, nach besseren Zugängen zur Erddrucktheorie zu suchen und neue Theoreme zu entdecken, wendeten andere Autoren das mißverstandene COULOMBsche Prinzip in mechanisch nicht zu rechtfertigender Weise an oder wußten ihre Ergebnisse nicht richtig zu deuten , so WOLTMANN(1794) ,JAKY (1948), GUDEHUS(1986) und FRANKE/HEIBAUM (1988). Zwei Autoren legten sogar Begründungen für das mißverstandene COULOMBsche Prinzip vor: BRÜNINGS (1799) und GUDEHUS (1981).

Coulomb hat ...sein Prinzip in logisch und mathematisch einwandfreier Weise begründet auf gewissen physikalischen Voraussetzungen ... und auf einer gewissen vereinfachenden Annahme mehr geometrischer Natur. (KÖTTER, 1893, S.77)

Daß COULOMBs Begründung – sie wird zu Beginn des nachfolgenden 2.Kapitels wiedergegeben – trotzdem mißverstanden wurde, und daß das Mißverständnis trotz Richtigstellung durch kompetente Autoren wie KÖTTER (1893), MÜLLER-BRESLAU (1906), REISSNER (1909) und HEYMAN (1972 – in diesem schönen Buch ist COULOMBS Essai im Original und in englischer Übersetzung wiedergegeben) bis in die jüngste Zeit immer wieder auftaucht, mag u.a. daran liegen, daß alle genannten Autoren sich in ihrer Argumentation – wie in den Naturwissenschaften und der klassischen Mathematik üblich – ausschließlich der Gemeinsprache bedienen.Der intendierte logische Gehalt solcher Texte kann aber im allgemeinen nur von solchen Lesern klar erfaßt werden, die mit dem in der einschlägigen mathematischen Literatur niederlegten speziellen Gebrauch der Gemeinsprache vertraut sind. Dieser Zustand der Dinge ist durch das epochemachende Werk von Gottlob FREGE (1848-1925) grundsätzlich überwunden. Im folgenden 2.Kapitel werden deshalb die von FREGE und von Giuseppe PEANO (1858-1932) geschaffenen sprachlichen Mittel [1] benützt, um das COULOMBsche Prinzip für den Erddruck auf Stützwände in fünf Stufen aufzubauen.

[1]Es handelt sich um die aussagenlogischen Junktoren und die prädikatenlogischen Quantoren, deren extensionale Definitionen in DIN 5474 genormt sind, um den Kennzeichnungsoperator “ι” und um die Symbole für Elementbeziehung und Inklusion. Die Rückführung des Kennzeichnungsoperators auf die genannten logischen Operatoren findet man z.B. bei HERMES (1976). Die mit großem Abstand beste Einführung in die praktische Logik gibt QUINE (1984).

Während COULOMB nur den Sonderfall einer glatten senkrechten Stützwand mit waagrechter unbelasteter Hinterfüllung behandelte, werden in der hier gebotenen Darstellung keine Einschränkungen bezüglich der Richtung des Erddruckes, der Neigung der Stützwand und der Oberfläche und der Belastung des gestützten Bodens gemacht. Es wird auch nicht vorausgesetzt, daß die Gleitfläche eben ist. Die diesbezügliche COULOMBsche Annahme wird nur insofern berücksichtigt, als die Untersuchung des Gleichgewichtes auf ebene Schnitte beschränkt bleibt. Mehr ist aber - wie die logische Analyse zeigt - auch nicht erforderlich, um mit einem Schlag sowohl die klassischen Extremalaussagen, als auch die in den üblichen Lehrbuchdarstellungen meist nachgeschobenen, plastizitätstheoretischen Schrankenaussagen zu gewinnen. Vertrautheit mit den logischen Symbolen ist für die Lektüre des 2.Kapitels nicht erforderlich, weil es sozusagen zweisprachig abgefaßt ist. Man kann den mit den logischen Symbolen parallellaufenden gemeinsprachlichen Text ohne weiteres lesen. Um die gemeinte Bedeutung in aller Schärfe zu erfassen, muß man jedoch die extensionalen Definitionen der Symbole beachten. Die Formalisierung (= Ersetzung der Gemeinsprache durch logische und mathematische Symbole) beschränkt sich auf die zu beweisenden Aussagen, während die Schlüsse gemeinsprachlich vorgetragen werden. Die im engeren Sinne mathematischen Teile des Beweises werden zwar rein algebraisch durchgeführt, doch ist die Bedeutung dieser Schritte an Hand der wohlvertrauten Kräftepolygone leicht zu erkennen.

In den Kapiteln 4 bis 8 wird die Spur des mißverstandenen COULOMBschen Prinzips in den Arbeiten von WOLTMANN, BRÜNINGS, JAKY, GUDEHUS und FRANKE/HEIBAUM bis in das Jahr 1988 verfolgt. Die im 2.Kapitel getroffenen Unterscheidungen von Erddruck, Stützkraft und Keilstützkraft und die dort identifizierten fünf Stufen (Grundsatz, Gleichgewicht mit Grenzbedingung, Eckstein, Schrankentheorem, Extremalprinzip) werden zur Analyse dieser Arbeiten benützt.

Eine Formel oder ein Symbol kann Teil der Rede oder Gegenstand der Rede sein. Für das Verständnis eines wissenschaftlichen Textes ist es wichtig, zwischen beiden Situationen zu unterscheiden. Im folgenden werden Anführungszeichen ausschließlich dazu benutzt um anzuzeigen, daß ein Symbol, oder eine Folge von Symbolen, Gegenstand der Rede ist (d.h. es wird über das Symbol geredet). Wenn eine Formel in einer Zeile für sich steht und Gegenstand der Rede ist, werden – wie üblich –

keine Anführungszeichen gesetzt. Statt dessen geht der betreffenden Formel ein Doppelpunkt voraus.

2 Die Erddrucktheorie von Coulomb

2.1 Coulombs Begründung seines Extremalprinzips

In seinem Essai wendet COULOMB(1776) sein Extremalprinzip auf vier verschiedene Tragfähigkeitsprobleme an. Seine, das Prinzip begründende Überlegung erscheint in der Einleitung des Essai und noch mehrere Male bei den einzelnen Anwendungen, jedesmal in etwas anderen Worten und mehr oder weniger vollständig. Im folgenden wird die vollständige Begründung für den Erddruck vorgetragen.

Eine Stützwand befinde sich im Gleichgewicht (siehe Bild 3). Durch konstruktive Maßnahmen sei die Richtung der Stützkraft festgelegt (COULOMB setzte eine glatte Wand voraus). Wenn man die Intensität der Stützkraft monoton verkleinert, wird das Gleichgewicht der Stützwand schließlich gestört. Die Wand gibt nach, wobei ein Teil der Hinterfüllung, der Wand folgend, auf einer vom Wandfuß ausgehenden Gleitfläche abrutscht. Wenn man – umgekehrt – die Intensität der Stützkraft monoton vergrößert, wird das Gleichgewicht schließlich ebenfalls gestört. Die Wand dringt in die Hinterfüllung ein, wobei ein Teil derselben – wiederum entlang einer vom Wandfuß ausgehenden Gleitfläche – weggeschoben wird. Jede der beschriebenen Bewegungstendenzen legt die Richtung der Schubspannungen in der Gleitfläche des entsprechenden Grenzfalles des Gleichgewichtes fest. Die Intensität der Schubspannungen ist durch die Scherfestigkeit des Bodens gegeben. COULOMB nahm die Gleitfläche vereinfachend als Ebene an. Wenn die Neigung der Gleitebene bekannt ist, läßt sich der untere bzw. obere Grenzwert der Stützkraft (und somit des Erddruckes) aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen und der gegebenen Scherfestigkeit berechnen. Für verschiedene Neigungen erhält man verschiedene untere bzw. – nach Umkehrung der Schubspannungsrichtung – obere Grenzwerte der Stützkraft. Der maximale so erhaltene untere Grenzwert der Stützkraft ist nach Coulomb der wahre Wert und betragsmäßig gleich dem unteren Grenzwert $\boldsymbol{E}_a$ des Erddruckes. Größer kann nämlich die Kraft $\boldsymbol{E}_a$ nicht sein – so argumentiert COULOMB – weil die Wand bei einer entsprechend größeren Stützkraft nicht nachgeben würde; und sie kann nicht kleiner sein, weil eine kleinere Stützkraft in der betrachteten, dem Maximum zugeordneten Schnittfläche zu einer Überschreitung der Scherfestigkeit führen würde. Entsprechendes gilt für den oberen Grenzwert E_p des Erddruckes, wobei die Wörter "größer" und "kleiner" zu vertauschen und die Wörter "maximal" und "Maximum" durch die Wörter "minimal" und "Minimum" zu ersetzen sind.

2.2 Logische Analyse von Coulombs Erddrucktheorie

Dem praktisch tätigen Ingenieur würde die obige Begründung sicherlich genügen, doch muß er sich verunsichert fühlen, wenn das COULOMBsche Prinzip von Lehrstühlen herab neuerlich in Frage gestellt wird. Ist es so, daß die klassischen Untersuchungen von COULOMB selbst, von KÖTTER(1893), MÜLLER-BRESLAU(1906) und RENDULIC(1940) sich als fehlerhaft erwiesen haben ? Die folgenden Äußerungen lassen dies befürchten.

Die Hypothese von Coulomb besagt, daß sich unter allen möglichen Gleitflächenneigungen gerade diejenige einstellt, die zum maximalen Erddruck E_a führt ... Die bekannten Extremalprinzipien der Mechanik ... enthalten (diese Hypothese) *nicht ... Es bleibt zu hoffen, daß sich diese wichtige Hypothese eines Tages mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie beweisen ... läßt.*(GUDEHUS, 1981)

Zwei auf Coulomb zurückgehende Hypothesen werden kritisch beleuchtet: 1.vom Wandfuß aus entsteht eine ebene Gleitfläche; 2. die Gleitfläche ist so geneigt, daß der Erddruck extremal ist ... Es ist aber nicht gelungen, die Annahmen 1. und 2. präzise experimentell zu belegen oder aus gültigen Gesetzen herzuleiten ... Das Coulomb'sche Extremalprinzip läßt sich immerhin beweisen, wenn die Gleitebenen als Klüfte in festem Fels vorhanden sind und das Zwischenmittel keine Entfestigung aufweist ... Das Extremalprinzip ist aber zunächst unbewiesen, wenn die Gleitflächen zunächst gar nicht vorhanden sind, die Kräfte in ihnen nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen folgen, der Boden sich in schmalen Scherzonen entfestigen kann.(GUDEHUS, 1986)

Im folgenden wollen wir die COULOMBsche Erddrucktheorie in fünf Stufen aufbauen, so daß klar und unmißverständlich zu erkennen ist, was das COULOMBsche Extremalprinzip besagt, und von welchen Voraussetzungen es abhängt.

Die Stützwände, mit denen Militäringenieure wie COULOMB sich befaßten, waren Schwergewichtsmauern. Folgende Erfahrungen lagen vor:

- Boden läßt sich nur bis zu einem gewissen Winkel aufschütten oder abböschen
- Manche Stützwände kommen nach kleinen Bewegungen zur Ruhe.
- Zu schwach dimensionierte Stützwände stürzen um.

Obige Erfahrungen deutete COULOMB so:

- Wenn die Stützwand den *Erddruck* $\boldsymbol{E}$ nicht ertragen kann, gibt sie nach (Bild 1).
- Der Boden, welcher der nachgebenden Wand folgt, ist vom stehenbleibenden Boden durch eine vom Wandfuß ausgehende *Gleitfläche* getrennt (Bild 2).
- Infolge der Bewegung wachsen die in der Gleitfläche übertragenen Schubspannungen τ an , wodurch die Wand entlastet wird und eventuell zur Ruhe kommt.
- Die Schubspannungen τ können nur bis zu einem gewissen Betrag, der *Scherfestigkeit* K_s anwachsen.
- Wegen der Beschränktheit der Schubspannungen bleibt selbst bei weiterem Nachgeben der Stützwand ein gewisser Erddruck wirksam, der sogenannte *aktive Erddruck* $\boldsymbol{E}_a$.

COULOMB machte folgende Annahmen (sie sind durch das Zeichen"$\boxed{\text{A}}$", allgemeine mechanische Prinzipien durch"$\boxed{\text{P}}$"gekennzeichnet) :

$\boxed{\text{A}}$ 2.1 || *Die Stützwand ist breit genug, um die ebene Betrachtungsweise zu rechtfertigen.*

Dementsprechend sind im folgenden alle Kräfte auf die Breite der Wand bezogen.

$\boxed{\text{A}}$ 2.2 || *Die Gleitfläche ist eine vom Wandfuß ausgehende Ebene*

$\boxed{\text{A}}$ 2.3 || *Die Richtung des Erddruckes* $\boldsymbol{E}$ *ist gegeben und unveränderlich.*

Konstante Richtung des Erddruckes können wir durch eine Versuchsanordnung wie in Bild 3 erzwingen. Sie entspricht einem von KÖTTER (1893, §12) angegebenen Gedankenexperiment. Für die Scherfestigkeit K_s übernahm COULOMB den linearen Ansatz :

$\boxed{\text{A}}$ 2.4 || $K_s := c + |\sigma| \tan\varphi \geq |\tau|$

Es soll $\tau > 0$ sein, wenn die Schubspannung τ so auf den von Wand und Gleitfläche eingeschlossenen Bodenkeil wirkt, wie im Bild 2 dargestellt. Diese Vorzeichenregelung übernehmen wir für beliebige Schnitte durch den gestützten Boden. Aus (2.1) und (2.4) folgt dann die Einschließung der Schubspannung τ auf jedem Flächenelement in 2 Grenzen, nämlich :

2.5 || $-(c + |\sigma| \tan\varphi) \leq \tau \leq c + |\sigma| \tan\varphi$

Diese *Grenzbedingung* ist zuerst von COULOMB auf das Erddruckproblem angewandt worden. Wie schon seine Vorgänger betrachtet COULOMB Reibung und Kohäsion als Widerstände, d.h.

$\boxed{\text{P}}$ 2.6 || *wenn die Scherfestigkeit (Reibung und Kohäsion) überwunden wird, verzehren die inneren Schubspannungen Energie.*

Damit ist der Richtungssinn der Schubspannungen in der Gleitfläche festgelegt. Die über seine Vorgänger hinausführende Erkenntnis COULOMB's beschreibt KÖTTER (1893, §5) mit folgenden Worten :

Zunächst hat Coulomb als der erste die wahre Natur des Problems der Erddruckbestimmung als eine Bestimmung von zwei Grenzwerten erkannt, zwischen denen der wirkliche von der besonderen Beschaffenheit, namentlich der Bewegungsfähigkeit der Mauer und den sonstigen auf die Wand wirkenden Kräften *abhängige Druck der Erde selbst liegt. Ist die Resultante der Kräfte, welche die Mauer gegen den Erddruck im Gleichgewicht halten sollen, zu schwach, so wird an einer gewissen Fläche im Innern des Erdreichs die Reibung und Cohäsion erschöpft, es tritt ein Bruch ein, die Mauer giebt nach. Ist hingegen die erwähnte Resultante zu stark, so wird die Mauer in das Innere getrieben. Auch hier wird längs einer gewissen Fläche die Reibung überwunden, und es tritt ebenfalls ein Bruch ein.*

Daß der wirkliche Erddruck zwischen zwei Grenzerddrücken, dem aktiven Erddruck $\boldsymbol{E}_a$ (Stützwand gibt nach) und dem *passiven Erddruck* $\boldsymbol{E}_p$ (Stützwand dringt ein) liegt, kann sinnvoll nur behauptet werden, wenn die Betrachtung auf eine eindimensionale , einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Erddrücken beschränkt bleibt. Eine solche ist *linear geordnet*, sodaß sich die grundsätzliche Erkenntnis COULOMBs folgendermaßen schreiben läßt :

2.7 || $\boldsymbol{E}_a \preceq \boldsymbol{E} \preceq \boldsymbol{E}_p$

E liegt zwischen E_a und E_p

Was COULOMB tatsächlich untersuchte, war ein RANKINEscher Sonderfall nämlich eine glatte, senkrechte Wand mit homogener, unbelasteter Hinterfüllung, deren Oberfläche eine horizontale Ebene ist. Hierbei wirkt der Erddruck parallel zur Oberfläche und greift im unteren Drittelspunkt der Wand an. COULOMBs Voraussetzungen enthalten also noch die Annahme :

$\boxed{\text{A}}$ 2.8 || *Der Angriffspunkt des Erddrucks* $\boldsymbol{E}$ *ist gegeben und unveränderlich.*

Auch diese Annahme wird durch die Versuchsanordnung nach Bild 3 gewährleistet. COULOMBs Annahmen (2.3) und (2.8) legen nun eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Erddrücken fest. Damit läßt sich die lineare Ordnungsrelation (2.7) konkretisieren. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von " $\boldsymbol{E}_a$ " und " $\boldsymbol{E}_p$ " muß sie folgendermaßen lauten : [2]

[2] Vektoren werden durch fette Buchstaben, ihre Beträge durch die entsprechenden mageren Buchstaben bezeichnet.

2.9 ‖	$\boldsymbol{E}_1 \prec \boldsymbol{E}_2$	$:\Longleftrightarrow$	$E_1 < E_2$
	E_1 ist untergeordnet zu E_2	definitionsgemäß genau dann wenn	der Betrag E_1 kleiner ist als der Betrag E_2

so daß *der* COULOMB*sche Grundsatz* (2.7) übergeht in

2.10 ‖ $E_a \leq E \leq E_p$

Um Konfusion zu vermeiden, reservieren wir – KÖTTER folgend – den Namen "Erddruck $\boldsymbol{E}$" für die Kraftwirkung des Bodens auf die Stützwand und bezeichnen die Gegenwirkung von der Stützwand auf den Boden als "*Stützkraft* $\boldsymbol{F}$" wie in Bild 3. Nach NEWTONs *lex tertia*

P	2.11 ‖	$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{F}$
		ist Kraft gleich Gegenkraft

Im Hinblick auf (2.11) und (2.10) wollen wir sagen, daß

2.12 ‖	$\boldsymbol{F} \in \mathcal{F}$	$:\Longleftrightarrow$	$E_a \leq F \leq E_p$
	die Kraft $\boldsymbol{F}$ eine mögliche Stützkraft ist	genau dann wenn	der Betrag F zwischen den Beträgen E_a und E_p liegt

Hierbei bezeichnet "$\mathcal{F}$" die Menge der möglichen Stützkräfte mit der gleichen Neigung und dem gleichen Angriffspunkt. Außer den Annahmen (2.1) bis (2.4) und (2.8) traf COULOMB, wie schon seine Vorgänger, stillschweigend noch eine sechste :

A	2.13 ‖	*Das aus Stützwand und Boden bestehende System ist starrplastisch.*

Insbesondere ist also die zur Herbeiführung des aktiven oder passiven Grenzzustandes erforderliche Bewegung der Stützwand vernachlässigbar klein.

Man erkennt, daß aus COULOMBs Voraussetzungen (2.3), (2.4), (2.8) und (2.13) der Grundsatz (2.10) folgt, dieser also keine zusätzliche Annahme darstellt. Über den Kern der COULOMBschen Untersuchung berichtet KÖTTER (1893, §5) :

So lange man nur den einen Fall ins Auge fasste, daß die Mauer in Gefahr sei, durch die Sandmasse verdrängt zu werden, lag es nahe, die durch den Fuss der Mauer gehende Böschungsebene als Trennungs- oder Gleitfläche zu betrachten. Zog man aber auch den entgegengesetzten Grenzfall in Betracht, so mußte schon die Überlegung, daß in beiden Fällen nicht an denselben Stellen die Trennung eintreten werde, zu einer Kritik dieser Annahme führen. So steht es denn im unmittelbaren Zusammenhang mit der Fragestellung C o u l o m b 's, daß er die Trennungsfläche nicht von vorn herein willkürlich annahm, sondern ihre Bestimmung zum Hauptziel seiner Deduction machte.

Betrachten wir nun einen Bodenkeil, der begrenzt ist von der Stützwand und einem ebenen Schnitt durch den hinteren Fußpunkt der Stützwand. Der Schnitt sei um einen beliebigen Winkel ϑ gegen die Horizontale geneigt, wie im Bild 4b dargestellt. An dem Keil greifen die Stützkraft $\boldsymbol{F}$, die Eigenlast $\boldsymbol{G}$ des Bodenkeils und die im Schnitt ϑ übertragene Kraft, aufgespalten in die Normalkraft $\boldsymbol{N}$ und Scherkraft $\boldsymbol{S}$, an. Der Betrag S von $\boldsymbol{S}$,

2.14 || $S := |\int_{\lambda=0}^{\lambda=l} \tau \, d\lambda|$

ist die absolute Summe der am abgeschnittenen Keil (der Einfachheit halber bezeichnen wir ihn ebenfalls mit " ϑ ") angreifenden Schubspannungen τ . Wegen (2.5) muß auch für $\boldsymbol{S}$ eine Grenzbedingung gelten :

2.15 || $\boldsymbol{S}_a \geq \boldsymbol{S} \geq \boldsymbol{S}_p$,

wobei die Zeiger " $_a$ " und " $_p$ " darauf hinweisen, daß der Richtungssinn der Schubspannungen derselbe ist wie im aktiven bzw. im passiven Grenzzustand. Die 3 Vektoren in (2.15) sind kollinear und können daher größenmäßig verglichen werden. Ihre Vorzeichen sind so geregelt wie die Vorzeichen der Schubspannungen (siehe Bild 2). Der Betrag S_a ist erklärt als Integral des Betrages des rechten Grenzwertes in (2.5) über die Länge l des Schnittes ϑ .

$$
\text{2.16} \quad \| \quad \begin{aligned} S_a &:= C + T_a \\ &:= C + N_a \tan\varphi \\ &:= cl + \left(\int_{\lambda=0}^{\lambda=l} |\sigma_a| \, d\lambda\right) \tan\varphi \\ &= \int_{\lambda=0}^{\lambda=l} (c + |\sigma_a| \tan\varphi) \, d\lambda \end{aligned}
$$

Die beiden *Scherparameter* c und φ betrachtete Coulomb als von Ort und Richtung unabhängige Materialkonstanten. Das gibt Anlaß zur Einführung der Vektoren $\boldsymbol{N}_a$, $\boldsymbol{T}_a$ und $\boldsymbol{C}$ (Bild 4a). S_p ist erklärt als Integral des Betrages des linken Grenzwertes in (2.5) über die Länge l.

$$
\text{2.17} \quad \| \quad \begin{aligned} S_p &:= C + T_p \\ &:= C + N_p \tan\varphi \\ &:= cl + \left(\int_{\lambda=0}^{\lambda=l} |\sigma_p| \, d\lambda\right) \tan\varphi \\ &= \int_{\lambda=0}^{\lambda=l} (c + |\sigma_p| \tan\varphi) \, d\lambda \end{aligned}
$$

Die Vektoren $\boldsymbol{N}_p$, $\boldsymbol{T}_p$ und $-\boldsymbol{C}$ sind in Bild 4c zu sehen.

Wie an jedem Teil eines ruhenden materiellen Körpers müssen auch an jedem Bodenkeil ϑ jederzeit die Gleichgewichtsbedingungen und, da die Festigkeit des Materials *Boden* beschränkt ist, eine entsprechende Grenzbedingung, nämlich die Bedingung (2.15), erfüllt sein. Deshalb

$$
\boxed{\text{P}} \quad \text{2.18} \quad \| \quad \underset{\substack{\text{ist } F \text{ eine} \\ \text{mögliche} \\ \text{Stützkraft}}}{\boldsymbol{F} \in \mathcal{F}} \quad \underset{\substack{\text{nur} \\ \text{dann} \\ \text{wenn}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\text{an} \\ \text{jedem} \\ \text{Keil } \vartheta}}{\forall \vartheta} \quad \underset{\substack{\text{die Summe der} \\ \text{angreifenden Kräfte} \\ F\,,\,G\,,\,S\,,\,N \text{ verschwindet}}}{[(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{S} + \boldsymbol{N} = \mathbf{o}}
$$

$$
\underset{\text{und}}{\wedge} \quad \underset{\substack{\text{die Scherkraft } S \text{ der Coulombschen} \\ \text{Grenzbedingung genügt.}}}{\boldsymbol{S}_a \geq \boldsymbol{S} \geq \boldsymbol{S}_p]}
$$

Weil sich die Vektorsumme $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ eindeutig in die Richtungen von $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{N}$ zerlegen läßt, (siehe Bild 4b) liefert die Gleichgewichtsbedingung (2.18) die Zuordnung [3]

$$2.18\text{–}1 \quad \| \quad \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} \longmapsto \boldsymbol{S}$$

Bei gegebenem Gelände (und eventueller Auflast) ist aber $\boldsymbol{G}$ durch ϑ eindeutig bestimmt, d.h. es gibt eine Zuordnung

$$2.18\text{–}2 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{G}$$

(2.18–1) und (2.18–2) ergeben schließlich die Zuordnung [4]

$$2.19 \quad \| \quad (\boldsymbol{F}, \vartheta) \longmapsto \boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F}, \vartheta)$$

Wenn im betrachteten Schnitt sowohl Reibung wie Kohäsion ausgenützt sind, erreicht die Scherkraft einen der Grenzwerte $\boldsymbol{S}_a$ oder $\boldsymbol{S}_p$ und die Stützkraft ist ebenfalls festgelegt. Sie wird dem Grenzwert der Scherkraft entsprechend mit " $\boldsymbol{F}_a$ " oder mit " $\boldsymbol{F}_p$ " bezeichnet und soll "*aktive Keilstützkraft*" bzw. "*passive Keilstützkraft*" heißen. Wir definieren also (Bild 4b)

$$2.20 \quad \| \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a :\Longleftrightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_a$$

und (Bild 4c)

---

[3] Es ist

$$(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} \mapsto \boldsymbol{S}) := \underbrace{\text{ɿ}\,\Gamma}_{\substack{\text{jenes Objekt (von}\\ \text{dem momentan}\\ \text{die Rede ist)}}} \underbrace{[\mathrm{Fkt}\Gamma}_{\substack{\text{das eine}\\ \text{Funktion ist}}} \underbrace{\wedge}_{\text{und}} \underbrace{((\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}), \boldsymbol{S}) \in \Gamma]}_{\substack{\text{zu dessen Elementen das}\\ \text{Paar } ((F+G), S) \text{ gehört.}}}$$

wobei

$\mathrm{Fkt}\Gamma :\Longleftrightarrow \Gamma$ eine Funktion ist (d.h. eine linkstotale, rechtseindeutige Relation)

[4] Es ist

$$((\boldsymbol{F}, \vartheta) \mapsto \boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F}, \vartheta)) :=$$

$$\underbrace{\text{ɿ}\,\Gamma[\mathrm{Fkt}\Gamma \wedge \forall\xi[\xi \in \mathrm{dom}\Gamma \Rightarrow (\xi, \boldsymbol{s}(\xi)) \in \Gamma]}_{\substack{\text{jene Funktion, die durch die Vorschrift}\\ \text{" } s(\ ) \text{ " vermittelt wird}}} \underbrace{\wedge}_{\text{und}} \underbrace{((\boldsymbol{F}, \vartheta), \boldsymbol{S}) \in \Gamma]}_{\substack{\text{zu deren Elementen das}\\ \text{Paar } ((F, \vartheta), S) \text{ gehört.}}}$$

wobei

$\mathrm{dom}\Gamma :=$ der Definitionsbereich der Funktion Γ

$$2.21 \quad \| \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_p :\Longleftrightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_p$$

Im ersten Fall lautet die Gleichgewichtsbedingung :

$$\boxed{\mathrm{P}} \quad 2.22 \quad \| \quad \begin{aligned} \mathrm{o} &= (\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{G}) + \quad \boldsymbol{S}_a \quad + \boldsymbol{N}_a = \\ &= (\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{G}) + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{T}_a) + \boldsymbol{N}_a = \\ &= \boldsymbol{F}_a + (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{T}_a + \boldsymbol{N}_a) = \\ &=: \boldsymbol{F}_a + (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{C}) + \quad \boldsymbol{Q}_a \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ergibt sich mit Hilfe der ersten Zeile von (2.16). $\boldsymbol{T}_a$ und $\boldsymbol{N}_a$ werden zur Reibungskraft $\boldsymbol{Q}_a$ zusammengefaßt. Der Vektor $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{C}$ läßt sich, der vierten Zeile von (2.22) entsprechend, eindeutig in die Richtungen von $\boldsymbol{F}_a$ und $\boldsymbol{Q}_a$ zerlegen. Nach Erhalt von $\boldsymbol{F}_a$ läßt sich der Vektor $\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{G}$, der ersten Zeile von (2.22) entsprechend, eindeutig in die Richtungen von $\boldsymbol{S}_a$ und $\boldsymbol{N}_a$ zerlegen (siehe Bild 4a). Die Gleichgewichtsbedingung (2.22) liefert also die Zuordnungen

$$2.22\text{–}1 \quad \| \quad \boldsymbol{G} + \boldsymbol{C} \longmapsto \boldsymbol{F}_a \ , \quad \boldsymbol{G} + \boldsymbol{C} \longmapsto \boldsymbol{S}_a$$

Für die Schnittlänge l besteht eine Zuordnung zum Keil ϑ

$$2.22\text{–}2 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto l$$

und damit und mit (2.16), 2. und 3.Zeile, und mit (2.18–2), auch eine für den Vektor $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{C}$

$$2.22\text{–}3 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{G} + \boldsymbol{C}$$

(2.22) und (2.22–2) ergeben so über (2.22–3) und (2.22–1) schließlich die Zuordnungen

$$2.23 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{S}_a = \boldsymbol{s}_a(\vartheta)$$

und

$$2.24 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{f}_a(\vartheta)$$

Wenn die Scherkraft den anderen Grenzwert erreicht, lautet die Gleichgewichtsbedingung (siehe Bild 4c) :

$$\boxed{\mathrm{P}} \quad 2.25 \quad \| \quad \begin{aligned} \mathbf{o} &= (\boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{G}) + \qquad \boldsymbol{S}_p \qquad + \boldsymbol{N}_p = \\ &= (\boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{G}) + (-\boldsymbol{C} + \boldsymbol{T}_p) + \boldsymbol{N}_p = \\ &= \ \boldsymbol{F}_p + (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{T}_p + \boldsymbol{N}_p) = \\ &=: \boldsymbol{F}_p + (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C}) + \qquad \boldsymbol{Q}_p \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ergibt sich entsprechend der 1.Zeile von (2.17). Aus Bild 4c ist zu sehen, daß zufolge der Gleichgewichtsbedingung (2.25) die Zuordnungen

$$2.26 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{s}_p(\vartheta)$$

und

$$2.27 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{f}_p(\vartheta)$$

bestehen.

Die funktionalen Ausdrücke aus (2.19), (2.23) und (2.26) werden nun in die Grenzbedingung $(2.18)_2$ eingesetzt. Die Gleichgewichtsbedingung $(2.18)_1$ ist verbraucht zur Erzeugung von (2.19). Die Aussage (2.18) geht somit über in :

$$2.28 \quad \| \quad \underbrace{\boldsymbol{F} \in \mathcal{F}}_{\substack{F \text{ ist eine} \\ \text{mögliche} \\ \text{Stützkraft}}} \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\text{nur} \\ \text{dann} \\ \text{wenn}}} \quad \underbrace{\forall \vartheta}_{\substack{\text{in jedem} \\ \text{Schnitt } \vartheta}} \quad \underbrace{[\boldsymbol{s}_a(\vartheta) \geq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F}, \vartheta) \geq \boldsymbol{s}_p(\vartheta)]}_{\substack{\text{die zum Gleichgewicht des Keils } \vartheta \text{ erforderliche} \\ \text{Scherkraft der COULOMBschen Grenzbedingung} \\ \text{genügt.}}}$$

Die nächsten Überlegungen führen zu einer Aussage, die sozusagen den *Eckstein des* Coulomb*schen Gedankengebäudes* bildet. Die Gleichgewichtsbedingung (2.18) vermittelt für jedes ϑ eine Relation $\mathcal{R}_\vartheta$ zwischen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{S}$, wobei (Bild 5)

$$2.29 \quad \| \quad \underset{\substack{\text{das Paar } (F,S\ ) \text{ die} \\ \text{Relation } \mathcal{R}_\vartheta \text{ erfüllt}}}{(\boldsymbol{F},\boldsymbol{S}) \in \mathcal{R}_\vartheta} \quad \underset{\substack{\text{definitionsgemäß} \\ \text{genau dann wenn}}}{:\Longleftrightarrow} \quad \underset{\substack{\text{die Gleichgewichtsbedingung} \\ \text{erfüllt ist.}}}{\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}=\mathbf{o}}$$

$\mathcal{R}_\vartheta$ ist, weil *linear* in $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{S}$, *eineindeutig.* Infolgedessen ist die durch Auflösung von (2.29) nach S entstandene Funktion (2.19) *streng monoton* und zwar – wegen der getroffenen Vorzeichenvereinbarung – *monoton fallend* , d.h. [5]

$$2.30 \quad \| \quad \underset{\substack{\text{für festes } \vartheta \text{ und} \\ \text{beliebige } F_1, F_2}}{\forall\vartheta\forall F_1\forall F_2} \quad \underset{\substack{\text{ist } s(F_1,\vartheta) \text{ größer} \\ \text{als } s(F_2,\vartheta)}}{[s(\boldsymbol{F}_1,\vartheta) > s(\boldsymbol{F}_2,\vartheta)} \quad \underset{\text{wenn}}{\Longleftarrow} \quad \underset{\substack{F_1 \text{ kleiner} \\ \text{als } F_2 \text{ ist.}}}{F_1 < F_2]}$$

Eine streng monotone Funktion ist invertierbar. Die inverse Funktion ist ebenfalls streng monoton. Daher dürfen wir das generalisierte *Konditional* (2.30) ergänzen zum *Bikonditional* :

$$2.31 \quad \| \quad \forall\vartheta\forall F_1\forall F_2[s(\boldsymbol{F}_1,\vartheta) > s(\boldsymbol{F}_2,\vartheta) \Longleftrightarrow F_1 < F_2]$$

Aus (2.15) entnehmen wir die Teilaussage :

$$2.31\text{–}1 \quad \| \quad \boldsymbol{S}_a > \boldsymbol{S}$$

Hieraus folgt mit (2.19) und (2.20) :

$$2.31\text{–}2 \quad \| \quad s(\boldsymbol{F}_a,\vartheta) > s(\boldsymbol{F},\vartheta)$$

Anwendung von (2.31) ergibt :

$$2.31\text{–}3 \quad \| \quad \forall\vartheta[\underbrace{s(\boldsymbol{F}_a,\vartheta)}_{\boldsymbol{S}_a} > s(\boldsymbol{F},\vartheta) \Leftrightarrow F_a < F]$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (2.23) und (2.24) :

[5] siehe z.B. dtv Atlas zur Mathematik, Band 2

$$2.31\text{–}4 \quad \| \quad \forall\vartheta[\boldsymbol{s}_a(\vartheta) > \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F},\vartheta) \Leftrightarrow f_a(\vartheta) < F]$$

Die Aussage (2.20) können wir ausführlicher so schreiben :

$$2.31\text{–}5 \quad \| \quad \forall\vartheta[\boldsymbol{s}_a(\vartheta) = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F},\vartheta) \Leftrightarrow f_a(\vartheta) = F]$$

Die letzten beiden Aussagen zusammen haben die Form :

$$2.31\text{–}6 \quad \| \quad \forall x[Px \Leftrightarrow Qx] \land \forall x[Rx \Leftrightarrow Tx]$$

Hieraus folgt :

$$2.31\text{–}7 \quad \| \quad \forall x[[Px \Leftrightarrow Qx] \land [Rx \Leftrightarrow Tx]]$$

weiter :

$$2.31\text{–}8 \quad \| \quad \forall x[[Px \land Rx] \Leftrightarrow [Qx \land Tx]]$$

und schließlich :

$$2.31\text{–}9 \quad \| \quad \forall x[[Px \lor Rx] \Leftrightarrow [Qx \lor Tx]]$$

Einsetzen der entsprechenden Bedeutungen aus (2.31–4) und (2.31–5) in das letzte Schema ergibt :

$$2.31\text{–}10 \quad \| \quad \forall\vartheta[\boldsymbol{s}_a(\vartheta) \geq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F},\vartheta) \Leftrightarrow f_a(\vartheta) \leq F]$$

wobei die durch den Junktor "$\lor$" ausgedrückte Oder–verknüpfung wie üblich zu einer Aussage zusammengezogen wurde, die durch das Zeichen "$\geq$" bzw. "$\leq$" symbolisiert ist. Ganz entsprechend folgt aus (2.15), (2.19), (2.21), (2.31), (2.26) und (2.27)

2.31–11 || $\forall\vartheta[\boldsymbol{s}(\boldsymbol{F},\vartheta) \geq \boldsymbol{s}_p(\vartheta) \Leftrightarrow F \leq f_p(\vartheta)]$

(2.31–10) und (2.31–11) zusammen haben wieder die Form (2.31–6). Das daraus folgende Schema (2.31–7) ist die Form des Ecksteins. Den Eckstein selbst erhalten wir, indem wir die Schemabuchstaben "P", "Q", "R", "T", "x" durch die ursprünglichen Prädikate und die Variable "ϑ"ersetzen, und indem wir die Vergleiche mit gleichen Elementen "$s(\boldsymbol{F},\vartheta)$" bzw. "$F$" zu fortlaufenden Vergleichen zusammenziehen. Also lautet der *Eckstein:*

2.32 ||	$\forall\vartheta$	$[\boldsymbol{s}_a(\vartheta) \geq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{F},\vartheta) \geq \boldsymbol{s}_p(\vartheta)$	$\Longleftrightarrow$	$f_a(\vartheta) \leq F \leq f_p(\vartheta)]$
	An jedem Keil ϑ	genügt die zum Gleichgewicht erforderliche Scherkraft der COULOMBschen Grenzbedingung	genau dann wenn	der Betrag der Stützkraft F zwischen den Beträgen von aktiver und passiver Keilstützkraft liegt.

der anhand der Bilder 4a,b,c unmittelbar einleuchtet. (2.28) hat die Form :

2.32–1 || $p \Rightarrow \forall x\, Ux$

sie ist äquivalent zu (*rule of passage*, WHITEHEAD/RUSSEL 1910) :

2.32–2 || $\forall x[p \Rightarrow Ux]$

Der Eckstein (2.32) hat die (grobe) Form :

2.32–3 || $\forall x[Ux \Leftrightarrow Vx]$

die äquivalent ist zu :

2.32–4 || $\forall x[[Ux \Rightarrow Vx] \wedge [Vx \Rightarrow Ux]]$

(2.32–2) und (2.32–4) zusammen entsprechen der Form :

2.32–5 || $\forall x[p \Rightarrow Ux] \wedge \forall x[[Ux \Rightarrow Vx] \wedge [Vx \Rightarrow Ux]]$

Weil der *Allquantor* "$\forall$" distributiv ist gegenüber dem Konjunktor "$\wedge$" (FREGE, 1879), folgt :

2.32–6 || $\forall x[[p \Rightarrow Ux] \wedge [Ux \Rightarrow Vx] \wedge [Vx \Rightarrow Ux]]$

Hieraus folgt (Regel des PETRUS – HISPANUS, 13. Jahrhundert) :

2.32–7 || $\forall x[[p \Rightarrow Ux] \wedge [Ux \Rightarrow Vx]]$

und hieraus (*modus barbara* (scholastische Bezeichnung dieser aristotelischen Schlußweise)) :

2.32–8 || $\forall x[p \Rightarrow Vx]$

beziehungsweise (rule of passage) :

2.32–9 || $p \Rightarrow \forall x \; Vx$

und schließlich, nach Ersetzen der Schemabuchstaben durch die ursprünglichen Aussagenbestandteile, die neue Aussage :

2.33 ||	$\boldsymbol{F} \in \mathcal{F}$	$\Longrightarrow$	$\forall\vartheta$	$[f_a(\vartheta) \leq F \leq f_p(\vartheta)]$
	F ist eine mögliche Stützkraft	nur dann wenn	für jeden Keil ϑ	ihr Betrag zwischen den Beträgen von aktiver und passiver Keilstützkraft liegt.

die wir auch in folgender Form (siehe (2.24) und (2.27)) als COULOMB*sches Schrankentheorem* aussprechen können :

2.34 ||	$\boldsymbol{F} \in \mathcal{F}$	$\Longrightarrow$	$\max F_a \leq F \leq \min F_p$
	F ist eine mögliche Stützkraft	nur dann wenn	ihr Betrag zwischen den Beträgen der größten aktiven und der kleinsten passiven Keilstützkraft liegt

Von allen betrachteten Keilstützkräften sind demnach höchstens die maximale aktive Keilstützkraft und die minimale passive Keilstützkraft mögliche Stützkräfte. Alle anderen sind auf jeden Fall unmöglich. Jede von ihnen verstößt gegen mindestens eine der beiden Bedingungen in (2.18).

Wenn wir die linke Seite von (2.34) durch die dazu äquivalente rechte Seite von (2.12) ersetzen, erhalten wir ein Konditional über 2 Einschränkungen des Betrages F einer möglichen Stützkraft :

$$2.35 \quad \| \quad E_a \leq F \leq E_p \Longrightarrow \max F_a \leq F \leq \min F_p$$

Dies Konditional soll wahr sein für den Betrag F jeder möglichen Stützkraft, also – wegen (2.12) – für jeden Betrag F, der das *Antezedens* (=linke Seite) des Konditionals wahr macht. Dies bringen wir explizit zum Ausdruck und gehen gleichzeitig zur Mengenschreibweise über :

$$2.36 \quad \| \quad \begin{array}{ccc} \forall F & [F \in [E_a, E_p] & \Longrightarrow F \in [\max F_a, \min F_p]] \\ \text{jeder Betrag} & \text{der im Schrankenintervall} & \text{liegt auch im Schrankenintervall} \\ F & [E_a, E_p] \text{ liegt} & [\max F_a, \min F_p] \end{array}$$

Nun hat (2.36) die Form der Definition der *Inklusion.* Äquivalent zu (2.36) ist also die Aussage :

$$2.37 \quad \| \quad \begin{array}{ccc} [E_a, E_p] & \subseteq & [\max F_a, \min F_p] \\ \text{Das Schrankenintervall} & \text{ist enthalten} & \text{dem Schrankenintervall} \\ [E_a, E_p] & \text{in} & [\max F_a, \min F_p] \end{array}$$

Hieraus folgt das Theorem :

$$2.38 \quad \| \quad \begin{array}{ccc} E_a & \geq & \max F_a \\ \text{Der Betrag des aktiven} & \text{ist gleich oder} & \text{der Betrag der maximalen} \\ \text{(unteren) Grenzwertes} & \text{größer als} & \text{aktiven Keilstützkraft} \\ \text{des Erddruckes} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \wedge & E_p & \leq & \min F_p \\ \text{und} & \text{der Betrag des passiven} & \text{ist gleich oder} & \text{der Betrag der minimalen} \\ & \text{(oberen) Grenzwertes} & \text{kleiner als} & \text{passiven Keilstützkraft} \\ & \text{des Erddruckes} & & \end{array}$$

welches in der Literatur allgemein als COULOMB*sches Prinzip* bekannt ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn bei Eintritt des aktiven Grenzwertes E_a (bzw. des passiven Grenzwertes E_p) die Scherfestigkeit in dem ebenen, $\max F_a$ (bzw. $\min F_p$) zugeordneten Schnitt ϑ tatsächlich erschöpft ist; m. a. W.: wenn COULOMBs Annahme (2.2) tatsächlich zutrifft. Dies kann aber, wie WINKLER (1872) bewies, bei beliebig gewählter Richtung und beliebigem Angriffspunkt des Erddruckes und bei beliebig geformtem und belastetem Gelände nicht der Fall sein. Im allgemeinen stellen deswegen die unter Voraussetzung von (2.2) ermittelten $\max F_a$ und $\min F_p$ nur auf der unsicheren Seite liegende Schranken der Grenzwerte der Beträge E_a und E_p dar. Insbesondere vergrößert also jede Abweichung vom RANKINEschen Schema, jede Veränderung der Neigung oder des Angriffpunktes des Erdduckes, den Betrag E_a über den Wert des betreffenden RANKINEschen Sonderfalles hinaus.

Die Schnitte ϑ , denen $\max F_a$ und $\min F_p$ zugeordnet sind, werden entsprechend bezeichnet, nämlich :

$$2.39 \quad \| \quad \vartheta = \vartheta_a :\Longleftrightarrow f_a(\vartheta) = \max F_a \quad , \quad \vartheta = \vartheta_p :\Longleftrightarrow f_p(\vartheta) = \min F_p$$

Wenn die Funktionen $\vartheta \mapsto f_a(\vartheta)$ und $\vartheta \mapsto f_p(\vartheta)$ an den Orten ihrer Extrema differenzierbar sind, ist bekanntlich

$$2.40 \quad \| \quad \underbrace{\frac{df_a(\vartheta)}{d\vartheta} = 0}_{df_a(\vartheta)\text{ nach }d\vartheta\text{ gleich 0}} \quad \underbrace{\Longleftarrow}_{\text{wenn}} \quad \underbrace{\vartheta = \vartheta_a}_{\vartheta\text{ gleich }\vartheta_a\text{ ist}} \quad , \quad \underbrace{\frac{df_p(\vartheta)}{d\vartheta} = 0}_{df_p(\vartheta)\text{ nach }d\vartheta\text{ gleich 0}} \quad \underbrace{\Longleftarrow}_{\text{wenn}} \quad \underbrace{\vartheta = \vartheta_p}_{\vartheta\text{ gleich }\vartheta_p\text{ ist}}$$

Daher nannte COULOMB seine Arbeit "*une application des regles des maximis et minimis*".

2.3 Diskussion der Coulombschen Annahmen und des Extremalprinzips

Welchen Gebrauch haben wir nun von COULOMBs Annahme (2.2) [6] gemacht? Wir haben uns zwar auf die Untersuchung ebener Schnitte beschränkt, haben aber nie behauptet, daß es eine (vom Wandfuß ausgehende) Ebene gibt, in deren Punkten die Scherfestigkeit irgendwann gleichzeitig erschöpft ist. Wie steht es mit den kinematischen Annahmen COULOMBs, wie sie sich in dem Wort "Gleitfläche" ausdrücken? Offensichtlich sind sie, – ebenso wie das Dissipationsprinzip (2.6) – für die obige Beweisführung nicht erforderlich. Wir wären zum selben Ergebnis (2.15) gekommen, wenn wir einfach nach der Menge der in einem ebenen Schnitt aufgrund der Grenzbedingung (2.5) möglichen Schubkräfte $\boldsymbol{S}$ gefragt hätten (siehe Bild 4a-c). Die ebenen Schnitte führten uns zu unsicheren Schranken der möglichen Stützkräfte (und damit des Erddrucks), nämlich zu unteren Schranken $\boldsymbol{F}_a (= \boldsymbol{f}_a(\vartheta))$ und zu oberen Schranken $\boldsymbol{F}_p (= \boldsymbol{f}_p(\vartheta))$, siehe Aussage (2.33). Nachdem die Schrankeneigenschaft feststeht, kommt die größte aller ermittelten unteren Schranken $\max \boldsymbol{F}_a$ dem aktiven Erddruck $\boldsymbol{E}_a$ betragsmäßig am nächsten und stimmt im günstigsten Falle mit ihm überein (siehe Aussage (2.38)) genauso notwendig, wie die größte von drei Zahlen, die kleiner als π sind, π am nächsten kommt. Wer in Kenntnis der Schrankeneigenschaft der Keilstützkräfte das COULOMBsche Extremalprinzip in Frage stellt, wirft demnach nicht ein mechanisches Problem auf, sondern bezweifelt die Ordnungseigenschaften der reellen Zahlen. Dank des Werkes von FREGE und PEANO sind diese aber inzwischen bestens gesichert, so daß wir uns über die zu Beginn von Kapitel 2.2 zitierten Einwände getrost hinwegsetzen und SZABO(1979) zustimmen dürfen, wenn er schreibt:

> *Charles Augustin* COULOMB *kann heute noch als Vorbild eines auf mathematisch-wissenschaftlicher Basis praktisch tätigen Ingenieurs ... gelten.*

---

[6] COULOMB war sich über die prinzipielle Entbehrlichkeit dieser Annahme sehr wohl im klaren.

3 Das Mißverständnis

Das Coulombsche Prinzip hat in der Folge den Namen des Princips vom Prisma (=Bodenkeil) *des größten Druckes erhalten. Dieser Name erscheint namentlich darum nicht glücklich gewählt, weil er leicht zu der unrichtigen Vorstellung Anlass geben kann und in der Folge auch wirklich Anlass gegeben hat, als ob die einzelnen Prismen, welche man durch verschiedene Ebenen von dem Erdkörper trennen kann, besondere von einander verschiedene Drucke auf die Mauer ausübten, von denen dann einer der grösste ist. Das ist natürlich unrichtig; denn für jedes Prisma ist offenbar der Druck gleich dem Widerstand der Mauer, und dieser muss ja naturgemäss von der Wahl des Prismas unabhängig sein. Wohl aber ändert sich der Widerstand, den die einzelnen Prismen erfordern, wenn sie nicht abgleiten sollen, und dieser erforderliche Widerstand* (=aktive Keilstützkraft) *ist es eben, dessen Maximum die untere Grenze für die zwischen Mauer und Erdreich wirkende Kraft oder kürzer den unteren Grenzwert des Erddrucks liefert.*

Zwar spricht auch Coulomb schon von einem Prisma des grössten Druckes. Aus dem ganzen Zusammenhang geht aber unzweifelhaft hervor, dass er sich dieses Ausdrucks nur im Interesse der Kürze und um weitschweifige Wiederholungen zu vermeiden bedient. Nicht einmal, sondern an verschiedenen Stellen spricht er deutlich aus, was gemeint ist: ein Prisma, welches den grössten Widerstand erfordert, wenn es am Abgleiten gehindert werden soll. Wenn Winkler (1872) *und Rebhann* (1871) *trotzdem einem Coulomb die oben gerügte ungereimte Ansicht vorwerfen, so ist das ein weiterer Beleg für die durch andere Umstände leicht zu beweisende Tatsache, dass sie beide die fundamentale Abhandlung Coulomb's nicht gekannt haben.* (KÖTTER, 1893, §6)

Während WINKLER und REBHANN das mißverstandene COULOMBsche Prinzip verwerfen und durch eigene Problemlösungen ersetzen, halten es jene Autoren, welche die Ungereimtheit des Mißverständnisses nicht erkennen, für ein unabhängiges Prinzip, das neben den (als selbstverständlich meist nicht erwähnten) Gleichgewichtsbedingungen und neben der COULOMBschen Grenzbedingung für die Lösung des Erddruckproblems erforderlich ist.

So liest man im Lehrbuch "Erddrucktheorien" von KEZDI (1962) auf S. 173:

Die Voraussetzungen der COULOMBschen Erddrucktheorie sind folgende (s. Abb. 8.3):

1. Die Gleitfläche ist eine Ebene.

2. Die Rückseite der Stützmauer ist lotrecht, die Erdoberfläche waagerecht; zwischen Mauerfläche und Boden tritt keine Reibung auf, die Richtung des Erddruckes ist also waagerecht.

3. Zwischen den normalen und den tangentialen Komponenten der resultierenden Kraft auf die Gleitfläche besteht die COULOMBsche Bruchbedingung; die Resultierende selbst wirkt also am Rande des Reibungskegels.

4. Von den unendlich vielen möglichen Ebenen AC (den sog. Prüfflächen, s. RENDULIĆ, 1940) ist nach den Grundsätzen der Extremalmethode diejenige die Gleitfläche, bei welcher der Erddruck einen *Extremwert* erreicht.

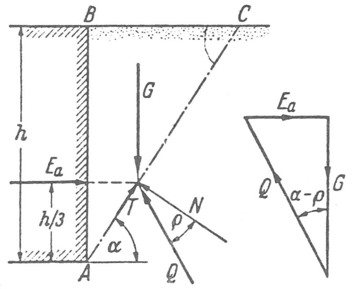

Abb. 8.3. Bestimmung des Erddruckes nach COULOMB

In dem Lehrbuch "Theoretische Bodenmechanik" von TERZAGHI/JELINEK, (1954) liest man auf S.82 :

Für praktische Zwecke ist jedoch die Auswertung der Formeln zu umständlich. Für den praktischen Gebrauch genügen die Ergebnisse einer Näherungsrechnung, in welcher die gekrümmten Gleitflächen durch eine ebene Begrenzung des Gleitkeiles ersetzt werden. Diese Annahme wurde erstmalig von COULOMB (1776) in die Erddrucktheorie eingeführt. Die auf dieser Annahme, die in Abb. 20 a dargestellt ist, beruhende Theorie wird deshalb die *COULOMBsche Erddrucktheorie* genannt. In der Abb. 20a stellt bc_1 eine willkürliche Ebene durch den Fußpunkt der Wandrückseite dar. Der keilförmige Teil der Hinterfüllung abc_1, dessen Gewicht G_1 beträgt, wird von folgenden Kräften beansprucht: Längs der Fläche bc_1 wirkt die Reaktionskraft Q_1 unter dem Winkel ϱ zur Flächennormalen und längs der Wandrückseite die Reaktionskraft E_1 unter dem Winkel δ zur Flächennormalen. In der Abb. 20 und den folgenden Gleichungen ist mit

α = der Neigungswinkel der Wandrückseite,
β = der Neigungswinkel der Hinterfüllung,
ϑ_1 = der Neigungswinkel der eben angenommenen Gleitfläche bc_1 des Gleitkeiles abc_1 und
ϱ = der Winkel der inneren Reibung nach Gl. (5.2) bezeichnet.

Wenn der Gleitkeil im Gleichgewichtszustand ist, muß das in Abb. 20b dargestellte Kräftedreieck geschlossen sein. Die Größe der Reaktionskraft E_1 hängt vom Neigungswinkel ϑ_1 der Fläche bc_1 ab. Für $\vartheta_1 = 180° - \alpha_1$ ist E_1 gleich Null. Mit abnehmendem Neigungswinkel ϑ_1 nimmt E_1 zu und erreicht einen Maximalwert. Dann nimmt E_1 wieder ab und wird für $\vartheta_1 = \varrho$ wieder Null. Die Stützwand muß schwer genug sein, um den größten seitlichen Druck $E_{max} = E_a =$ Erddruck aufzunehmen. Die Aufgabe besteht also im Aufsuchen von E, und diese Aufgabe wurde von COULOMB analytisch gelöst.

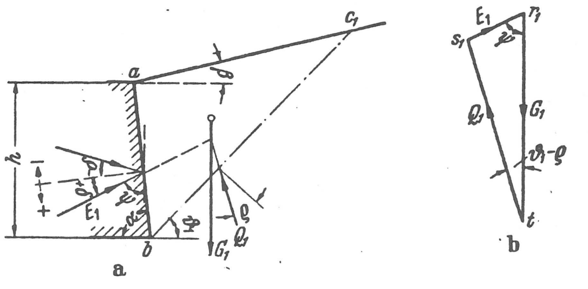

Abb. 20a—d. a u. b Darstellung der Annahmen der COULOMBschen Erddrucktheorie; —

Dieser Text ist ziemlich mißverständlich abgefaßt und dies obwohl TERZAGHI (ebenso KEZDI) in seinem Literaturverzeichnis nicht nur den Akademiebericht von 1776 sondern auch den KÖTTERschen Bericht anführt, aus dem das Zitat am Anfang dieses Kapitels stammt.

Ein weiteres Beispiel ist GUDEHUS wie man aus den Zitaten im Kapitel 2.2 bereits erkennen kann.

4 Ein frühes Beispiel einer mißglückten Anwendung des Coulombschen Prinzips

COULOMBs Vorgänger versuchten, den aktiven Erddruck durch das Abrutschen eines festen Körpers auf einer schiefen Ebene zu erklären. Die Ebene dachte man sich der Böschungsebene entsprechend und zerlegte die Gewichtskraft des Bodens über ihr in eine zu ihr normale und eine zu ihr parallele Komponente. Von letzterer dachte man sich einen Teil durch Reibung aufgezehrt und betrachtete den Rest als

Belastung der Stützwand wie in Bild 6 dargestellt.

WOLTMANN (1794) schlug, 18 Jahre nach dem Erscheinen von COULOMBs Theorie in den Akademieberichten, eine Erddrucktheorie vor, die,

> *abgesehen davon, daß die Kohäsion nicht berücksichtigt wird, mit derjenigen C o u l o m b's übereinstimmt und die letztere sogar an äußerer Eleganz übertrifft, indem W o l t m a n n an die Stelle des Reibungskoeffizienten den Reibungswinkel von Sand auf Sand einführt. Die Begründung allerdings bleibt an Klarheit und überzeugender Kraft weit hinter der des französischen Gelehrten zurück. Was das Schlimmste ist W o l t m a n n ist von der Richtigkeit seiner ersten Theorie so wenig überzeugt, daß er ihr eine zweite folgen läßt. So hat er zwei verschiedene Methoden der Erddruckbestimmung, zwischen denen er sich auf theoretischem Wege nicht zu entscheiden vermag.* (KÖTTER 1893, §7)

In seiner zweiten Theorie knüpft WOLTMANN an die alte Erddrucktheorie an, wählt aber nicht die Böschungsebene als Gleitfläche, sondern bestimmt letztere, indem er das COULOMBsche Maximalprinzip auf die horizontale Komponente H_a der zum betrachteten Schnitt ϑ parallelen Keilstützkraft $\boldsymbol{F}_a$ anwendet, wie in Bild 7 dargestellt.

In der Tat läßt sich die COULOMBsche Schlußweise formal auf den 2. WOLTMANNschen Ansatz übertragen. Dazu denken wir uns auf der Hinterfüllungsseite einen Anschlag, sodaß die Stützkraft beliebig wachsen kann, ohne daß die Stützwand jemals in den Boden eindringt. Dann können wir *die Menge $\mathcal{H}$ der Horizontalkomponenten H möglicher Stützkräfte $\boldsymbol{F}$* folgendermaßen definieren :

$$4.1 \quad \| \quad H \in \mathcal{H} :\Longleftrightarrow E_{ah} \leq H$$

Auf die Einführung der Scherkraft $\boldsymbol{S}$ können wir hier verzichten und statt (2.28) unter Beachtung von $(\vartheta, \boldsymbol{F}) \mapsto \varphi_{mob} = \Phi(\vartheta, \boldsymbol{F})$ direkt schreiben :

$$4.2 \quad \| \quad H \in \mathcal{H} \Longrightarrow \forall\vartheta[\Phi(\vartheta, \boldsymbol{F}) \leq \varphi]$$

Dem Eckstein (2.32) entspricht unter Beachtung der Zuordnung $\vartheta \mapsto H_a = h_a(\vartheta)$ die Aussage :

4.3 ‖	$\forall\vartheta[\Phi(\vartheta,\boldsymbol{F})\le\varphi$	$\Longleftrightarrow$	$H\ge h_a(\vartheta)]$
	in jedem Schnitt ϑ genügt φ_{mob} der COULOMBschen Grenzbedingung	genau dann wenn	die horizontale Komponente H der Stützkraft nicht kleiner ist als die horizontale Komponente der zum Schnitt ϑ parallelen Keilstützkraft

Womit aus (4.2) :

4.4 ‖ $H\in\mathcal{H}\Longrightarrow\forall\vartheta[H\ge h_a(\vartheta)]$

und hieraus die einseitige Schrankenaussage :

4.5 ‖ $H\in\mathcal{H}\Longrightarrow\max H_a\le H$

folgt.Einsetzen des Definiens (4.1) in (4.5) ergibt das Konditional :

4.6 ‖ $E_{ah}\le H\Longrightarrow\max H_a\le H$

Es verbietet lediglich, daß die *Konsequenz* (= rechte Seite von (4.6)) falsch ist, während das Antezedens wahr ist. Also folgt aus (4.6) :

4.7 ‖ $E_{ah}\ge\max H_a$

E_{av} müßte man dann bestimmen aus :

4.8 ‖ $E_{av}=E_{ah}\tan\vartheta_a$

Allerdings treffen (4.3) entsprechende Aussagen auch auf andere Komponenten von $\boldsymbol{F}$ zu. Deshalb schreibt KÖTTER (1893, §7):

so erscheint dennoch die Übertragung der genannten (COULOMBschen Maximums-) *Forderung rein willkürlich und äußerlich...... Warum nun gerade diejenige Fläche die richtige Gleitfläche sein soll, bei welcher die Horizontalkomponente ein Maximum ist, das ist schwer einzusehen.*

5 Brünings' teleologische Begründung des Extremalprinzips der Erddrucktheorie

In dem 1799 erschienenen 4. Band von WOLTMANNS "*Beyträgen zur Hydraulichen Architectur*" ist die Zuschrift des holländischen Mathematikers C.L.BRÜNINGS zu WOLTMANNS, im 3. Band seiner "*Beyträge*" enthaltenen Erddrucktheorien abgedruckt. Ein Teil dieser Zuschrift wird im folgenden wiedergegeben.
Die Formelbuchstaben des Zitats haben folgende Bedeutungen:

α	:=	aktiver Gleitflächenwinkel ϑ_a
β	:=	Reibungswinkel φ
Zusammenhang	:=	Kohäsion
p	:=	Wichte des Bodens
a	:=	Höhe der Stützwand
b	:=	Breite der Stützwand

Das Zitat beginnt mit einer Bemerkung über die alten Erddrucktheorien (vgl. den Anfang von Kap. 4).

Die besagten Theorien beruhen auf der unrichtigen Voraussetzung, daß alle die drückenden Erdtheile in mit ihrer natürlichen Böschung gleichlaufenden Richtungen abschießen würden und erfassen die Reibung entweder gar nicht, oder in vago.

Diesen Mängeln hat COULOMB *(Mém. prés. a. 1773) in einer ingeniösen Abhandlung über diesen Gegenstand abgeholfen: erst seit kurzem bin ich mit seiner Theorie bekannt geworden. Er ist ungefähr den nämlichen Weg mit Ihnen gegangen, hat außerdem den Zusammenhang der abschießenden Erde in seine Rechnung aufgenommen. Wenn ich in seinen Formeln, denen ich eine geschmeidige Gestalt gegeben habe, den Zusammenhang = 0 setze, so erhalte ich mit Ihnen (S.175 Ihrer Abhandlung)* $\frac{1}{2}paab[\tan(45° - \frac{1}{2}\beta°)]^2$. *Freilich enthält Ihre reichhaltige und schöne Abhandlung für die Anwendung noch so vieles, daß jeder unbefangene Leser ihr den Vorzug vor der des* COULOMB *geben muß.*

Ich habe es gewagt Ihre oder des COULOMB *Theorie auf ein teleologisches Principium zu gründen : wozu mich die Abhandlung* EULERS DES EINZIGEN *(methodus inveniendi lineas curvas etc.) veranlaßt hat:*

Die Erfahrung lehrt, daß eine gewisse Menge abschießen würde, wenn die Futtermauer sie nicht zurückhielte; Ferner würden zuverlässig alle die abschießenden Erdtheile (wie verwickelt auch ihre Bewegung seyn möge) mit der größten Geschwindigkeit abschießen, welche ihre Reibung und ihr Zusammenhang gestattet, weil der Gesetzgeber der Natur seine Absichten immer auf kürzestem Wege erreicht : daher wird auch die horizontale Kraft,welche sie zurückhält ein Maximum sein müssen. Nun ist es sehr wohl möglich, anstatt jener unbekannten Erdmasse ein trianguläres Erdprisma zu fingiren, dessen Theile alle in, mit seiner Grundfläche gleichlaufenden Richtungen gleiten würden, mit gleichem Erfolge : das heißt, so daß aus ihrem gesamten Drucke eine gleich große horizontale Kraft entspringt. Folglich müssen auch die Abmessungen dieses fingirten Prisma's dergestalt beschaffen seyn, daß die mehr besagte horizontale Kraft ein Maximum wird.
Hat man nun auf diese Weise $\tan 2\alpha = -\cot\beta$ *gefunden, so wird durch* α *keineswegs weder die drückende Erdmasse, noch die Richtung bestimmt, nach der sie in der That abschießen wird, sondern nur das Resultat einer Erscheinung, deren besondere Modifikationen wir weder a priori noch a posteriori jemahls erforschen können. - Dieser teleologische Grundsatz ist mir ein überzeugender Beweis, daß Ihre Theorie richtig ist : da vordem, ich will es Ihnen gerne gestehen, Ihr Verfahren nicht so einleuchtend für mich gewesen ist, zumalen nachdem ich unter den unzähligen grundlosen Einwürfen Ihres Recensenten in der Allg.Lit.Zeit. einige erhebliche gegen Ihre Vorstellungsart gelesen hatte........*
Alphen bey Leiden,
den 19. Decemb. 1798 C.L.BRÜNINGS

Dem Brief ist zu entnehmen, daß BRÜNINGS die COULOMBsche Arbeit gelesen hat. Trotzdem erkannte er die Coulomb'sche Extremalaussage nicht als Theorem, sondern hielt sie für eine der Begründung bedürftige Hypothese.

BRÜNINGS' Begründung ist nicht naturwissenschaftlich im GALILEIschen Sinne. Immerhin gibt er dies für jedermann zu erkennen, indem er sie als *teleologisch* (= die dem betrachteten System innewohnende Zielstrebigkeit berücksichtigend; Telos (griech.) = Ziel) bezeichnet. Teleologische Begründungen waren in der auf ARISTOTELES gegründeten *Naturphilosophie* beliebt. Das von BRÜNINGS erwähnte EULERsche principium lautet in der Übersetzung von SZABO(1979) :

Da der Plan des gesamten Universums der vollkommenste ist und vom weisesten Schöpfer festgelegt, so geschieht nichts auf der Welt, dem nicht irgend ein Verhältnis des Maximums oder Minimums zugrunde liegt.

6 Jaky's Kleinstwert des Erddrucks

An JAKYs Arbeiten kann man erkennen, wie die von mechanischen Überlegungen losgelöste Wertschätzung des COULOMBschen Prinzips nun, nachdem die teleologischen Begründungen des 18. Jahrhunderts vergessen sind, eine irrationale Eigendynamik entfaltet.

In JAKYs (1938) Abhandlung "*Die klassische Erddrucktheorie mit besonderer Rücksicht auf die Stützwandbewegung*" liest man:

Nochmals zusammengefaßt, bedient sich die Coulomb'sche Theorie nachfolgender Voraussetzungen:

1. *Die Gleitflächen sind Ebenen*
2. *bei beginnendem Gleiten ist an der Gleitfläche* $T = N \cdot \tan\varphi$
3. *von den unzähligen Erddrücken wird der seinem Wert nach größte der maßgebende sein.*

Von diesen Voraussetzungen scheint nur die zweite der Wirklichkeit zu entsprechen, wogegen sich die erste und dritte Voraussetzung durch keinerlei physikalische Beweisführung unterstützen läßt.

Dieses Bekenntnis zum perennierenden Mißverständnis des COULOMBschen Prinzips steht übrigens in klarem Gegensatz zu mehreren Arbeiten – darunter die Bücher von MÜLLER-BRESLAU (1906) und WINKLER (1872) – die JAKY in seinem Literaturverzeichnis aufführt. In einem Beitrag zur 2. Internationalen Konferenz für Bodenmechanik und Grundbau präsentiert JAKY (1948) "*neue Theoreme* *der klassischen Erddrucktheorie* ". Zunächst stellt er fest, daß der Erddruck im wesentlichen eine Funktion der beiden Variablen ϑ und ψ sei (hierauf werden wir zurückkommen) und schreibt dann die bekannte, durch Anwendung des Sinussatzes gewonnene Formel für den Betrag der aktiven Keilstützkraft an. Unter Verwendung des Symbols "F_a" aus Kap. 2.2 lautet sie [7] :

$$6.1 \quad \| \quad F_a = F_a(\vartheta, \psi) = G(\vartheta)\frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin(\vartheta - \varphi + \psi)}$$

Mit der Erddruckrichtung ψ hängt der *Wandreibungswinkel* δ und die *Wandneigung* α zusammen. Es ist

$$6.2 \quad \| \quad \delta = \tfrac{1}{2}\pi + \alpha - \psi$$

Gl.(6.1) führt bei ebenem, unbelastetem oder gleichmäßig belastetem Gelände zu einer Sattelfläche über der ϑ, ψ-Ebene bzw. der ϑ, δ -Ebene wie in Bild 8 dargestellt. Die Kammlinie der Sattelfläche wird von den maximalen aktiven Keilstützkräften $\max \boldsymbol{F}_a$

$$6.3 \quad \| \quad \max F_a = F_a(\vartheta_a, \psi) \leq E_a(\psi)$$

gebildet, wobei "ϑ_a" den Winkel der COULOMBschen Gleitebene bezeichnet. Er ergibt sich – der Aussage (2.40) entsprechend – aus

$$6.4 \quad \| \quad \left.\frac{\partial F_a(\vartheta, \psi)}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta = \vartheta_a} = 0$$

Der tiefste Punkt der Kammlinie ist der Sattelpunkt. Seine Grundrißkoordinaten $\vartheta = \vartheta_s$ und $\psi = \psi_s$ sind gegeben durch die simultanen Gleichungen

$$6.5 \quad \| \quad \frac{\partial F_a(\vartheta, \psi)}{\partial \vartheta} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial F_a(\vartheta, \psi)}{\partial \psi} = 0$$

---

[7] JAKYs Winkelbezeichnungen wurden den Vorschriften von DIN 1080 Teil 6 und DIN 4085 angepaßt.

JAKY behauptet, die Ordinate $F_a(\vartheta_s, \psi_s)$ des Sattelpunktes sei die für die Bemessung der Stützwand maßgebende Größe. Zum Beweis will er zeigen, daß aus mechanischen Gründen nur solche Paare (ϑ, ψ) in Frage kommen, die $(6.5)_1$ erfüllen, und daß zufolge der Versuchsergebnisse von TERZAGHI (1934) nur solche Paare (ϑ, ψ) in Frage kommen, die $(6.5)_2$ erfüllen. JAKY reproduziert dann den Ansatz von WINKLER (1872) und leitet daraus $(6.5)_1$ ab. Er verkündet, daß nun das COULOMBsche Prinzip aufgehört habe, eine Hypothese zu sein. Dabei übersieht er, daß die Implikation des COULOMBschen Prinzips durch den WINKLERschen Ansatz längst bewiesen ist, z.B. in dem von ihm selbst angeführten Buch von MÜLLER-BRESLAU (1906). Aus dem im Bild 9 wiedergegebenen Versuchsergebnissen von TERZAGHI entnimmt JAKY ziemlich kühn [8], daß

$$6.6 \quad \| \quad \frac{dE}{d\psi} = 0 \Longleftrightarrow E = E_{min}$$

und stellt fest, daß

$$6.7 \quad \| \quad \frac{dE}{d\psi} = \frac{dF_a}{d\psi} = \frac{\partial F_a}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{d\psi} + \frac{\partial F_a}{\partial \psi} = 0$$

woraus er mit Hinweis auf die zuvor bewiesene Aussage $(6.5)_1$

$$6.8 \quad \| \quad \frac{dE}{d\psi} = \frac{dF_a}{d\psi} = \frac{\partial F_a}{\partial \psi} = 0$$

also $(6.5)_2$ folgern zu können glaubt. JAKY identifiziert m.a.W. die experimentelle Kurve $\psi \mapsto E(\psi)$ mit der Kammlinie, unterstellt also, daß

[8] Bild 9 enthält zunächst nur die beiden Zuordnungen $s \mapsto \delta$ und $s \mapsto E$. Mit Hilfe von (6.2) verwandelt man erstere in $s \mapsto \psi$. Nur wenn diese Funktion umkehrbar ist, wenn also $\psi \mapsto s$ existiert, ergibt sich die gewünschte Zuordnung $\psi \mapsto E$ als Ergebnis der Produktbildung $(s \mapsto E) \circ (\psi \mapsto s)$. Nun hört aber $s \mapsto \delta$ vor dem interessierenden Minimum auf, wie man sieht, sodaß man den Funktionsverlauf extrapolieren muß. Der könnte aber sehr wohl an der interessierenden Stelle waagrecht sein, sodaß sich $s \mapsto \psi$ nicht mehr invertieren läßt, und die Bildung von $\psi \mapsto E$ an der Stelle des Minimums nicht mehr möglich ist. M. a. W. ist der Wert der Ableitung ("s_c" bezeichnet die Stelle des Minimums in Bild 9)

$$\left.\frac{dE}{d\psi}\right|_{\psi = \psi(s_c)} = \left.\frac{dE}{ds}\right|_{s = s_c} \cdot \left.\frac{ds}{d\psi}\right|_{\psi = \psi(s_c)} = 0 \cdot \infty = ?$$

dann unbestimmt.

6.9 || $E(\psi) = F_a(\vartheta_a(\psi), \psi)$

Hierfür gibt es aber keinen Grund außer dem Wunsch, ein Extremalprinzip zu bestätigen. Dieser Wunsch läßt JAKY auch übersehen, daß er einen instabilen Zustand als Bemessungsgrundlage vorschlägt. JAKYs Schüler KEZDI (1962) hat dies bei der Wiedergabe der JAKYschen Theorie übergangen und hat überhaupt auf die fragwürdige experimentelle Begründung von $(6.5)_2$ verzichtet. Statt dessen erklärte er, JAKY habe seinen Bemessungsvorschlag aufgrund einer vollständigen Analyse der Gl. (6.1) gemacht. Die Bezeichnung "vollständige Analyse" läßt erkennen, daß KEZDI, ebenso wie sein Lehrer, das COULOMBsche Extremalprinzip trotz des (wieder) entdeckten, es implizierenden WINKLERschen Theorems, nicht als bloße Charakterisierung des Grenzgleichgewichts betrachtet, sondern als eine Art höheren Prinzips, das, indem es auf mehrere Variablen ausgedehnt wird, noch tiefere Einsichten vermitteln kann.

JAKYs Theorie leidet an zwei Grundfehlern. Der erste ist die Konfusion von Keilstützkraft F_a, Erddruck E und dem aktiven Grenzwert E_a. F_a hängt in der Tat von ϑ und ψ ab, doch E bzw. E_a ist von ϑ unabhängig (siehe (6.3)). JAKYs erste Feststellung, mit der seine Analyse beginnt, ist deshalb falsch. Die Einbeziehung der Erddruckrichtung ψ in die Untersuchung muß von der Erkenntnis des vektoriellen Charakters des Erddruckes $\mathbf{E}$ ausgehen. Zu seiner Festlegung benötigt man im allgemeinen drei, im ebenen Fall zwei Angaben (dazu kommen – streng genommen – noch die Koordinaten des Angriffspunktes), z.b. Betrag E und Richtung ψ . Beide Größen sind als abhängige Variablen zu betrachten.

Der zweite Grundfehler der JAKYschen Theorie ist die mangelnde Reflexion des Begriffes des Grenzwertes. In das hier angesprochene Dilemma war schon COULOMB geraten. KÖTTER (1893, §12) schreibt hierüber:

> *Die Meinung* (über die Richtung des Erddrucks)*, welche bisher den meisten Anklang gefunden hat, geht auf Coulomb zurück. Sie beruht auf der Vorstellung, daß in einem Grenzfalle des Gleichgewichts die Reibung an der Wand zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts absorbirt werde, und daß also der Erddruck mit der Normalen der Wand den Reibungswinkel von Sand auf Mauerwerk einschließe, und zwar so, daß je nach der zu erwartenden Bewegung die seitliche*

Componente nach unten oder nach oben gerichtet ist. Beim activen Erddruck wird das erstere, beim passiven das letztere angenommen. Man hat also zwei der Größe und Richtung nach verschiedene Grenzwerte des Erddrucks. Daß hierbei der Begriff des Grenzfalls zu eng gefaßt ist, erkennt man, wenn man die Frage stellt, welche Kraft übt denn das Erdreich auf die Mauer dann aus, wenn es sich nicht um einen Grenzfall handelt. Während man für den Fall glatter Wand zwei Grenzen gleicher Richtung hat, zwischen denen die gesuchte Kraft liegt, steht man im anderen Falle ganz ratlos da, wenn man der C o u l o m b'schen Anschauung folgt. Denn es fehlen die vermittelnden Glieder, welche die extremen Glieder mit einander verbinden.

Indem JAKY die Erddruckrichtung freigibt, verliert er auch die lineare Ordnung (2.9) der Erddrücke. Die Menge der von JAKY betrachteten Erddrücke ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, für die es keine mechanisch deutbare lineare Ordnung, also auch keinen oberen bzw. unteren Grenzwert gibt. Nur wenn wir willkürlich E oder ψ festlegen, erhalten wir für jeden festen Wert der einen abhängigen Variablen zwei Grenzwerte der anderen abhängigen Variablen. Die so erweiterte Aufgabenstellung der klassischen Erddrucktheorie ist für ebene Gleitflächen durch ENGESSER (1880), für logarithmische Spiralen durch RENDULIC (1940) und für beliebige Gleitflächen durch KÖTTER (1893, §§19,20) selbst behandelt worden.

Die obigen Darlegungen zeigen, daß JAKYs *neues Theorem* überhaupt nichts mit der klassischen Erddrucktheorie zu tun hat und keine mechanische Grundlage besitzt.

Neuerdings wird JAKYs *Theorem* weiterverbreitet durch das von KEZDI verfaßte Kap.13 des *Ground Engineers Reference Book* (F.G.Bell ed.,1987).

7 Das Gudehussche Prinzip der kleinsten Sicherheit

Man findet es in dem 1981 erschienenen Lehrbuch der Bodenmechanik von G.GUDEHUS in Kap. 5.2.1., S. 129 bis 131. Die betreffenden Passagen lauten:

Die *Hypothese von* COULOMB (1773) besagt, daß sich unter allen möglichen Gleitflächenneigungen gerade diejenige einstellt, die zum maximalen Erddruck E_a führt. In Versuchen tritt die durch Glchg. 5.28 gegebene Gleitflächenneigung tatsächlich auf. Erddruckmessungen bestätigen Glchg. 5.29, sofern die Wand genügend weit nachgibt, so daß sich eine Scherfuge ausbildet. Mit Glchg. 5.29 erhält man somit den ***aktiven Erddruck***.

Mit $\varphi = 0$ ergibt sich nach Glchg. 5.29 der resultierende Druck $\gamma h^2/2$ wie bei einer Flüssigkeit. Bei Reibungswinkeln $\varphi \geqslant 30°$ (s. Tab. 5.1) beträgt der aktive Erddruck körniger Böden höchstens 1/3 des Flüssigkeitsdrucks, denn es ist $\tan^2(45° - 30°/2) = 1/3$.

Man kann die Hypothese von COULOMB durch ein anderes Extremalprinzip ersetzen. Die Wand habe – unabhängig von ihrer Verschiebung – eine bestimmte Tragfähigkeit E_g (Index g für „gegeben"). Als *Sicherheitsfaktor* η_E wird nun das Verhältnis

$$\eta_E := E_g/E \tag{5.30}$$

definiert, wobei E den erdstatisch berechneten Erddruck bezeichnet. Wenn E den Maximalwert E_a annimmt, wird η_E offenbar minimal. Der Hypothese von COULOMB äquivalent ist also das **Prinzip der kleinsten Sicherheit**: Die Gleitfläche ist so geneigt, daß der Sicherheitsfaktor zum Minimum wird. Das Minimum von η_E bezüglich der Gleitflächenneigung wird üblicherweise nicht besonders gekennzeichnet; so bedeutet $\eta_E = 1$, d.h. $E_g = E_a$, gerade Grenzgleichgewicht bei ungünstigster Gleitflächenneigung.

Man kann Sicherheitsfaktoren auch anders definieren. Aus einer vorgegebenen Tragfähigkeit E_g ergibt sich nach Glchg. 5.27 derjenige Reibungswinkel, bei dem der Gleitkeil im Gleichgewicht ist, zu

$$\varphi = \vartheta - \arctan(2E_g \tan\vartheta/\gamma h^2)\,. \tag{5.31}$$

Durch Vergleich mit einem gegebenen Reibungswinkel φ_g erhält man daraus den Sicherheitsfaktor

$$\eta_\varphi := \varphi_g/\varphi\,. \tag{5.32}$$

Mit Glchg. 5.31 und 5.32 kann man denjenigen Wert ϑ ausrechnen, bei dem η_φ minimal wird. Die ziemlich mühsame Berechnung soll hier nicht wiedergegeben werden; nur wenn man $E_g = E_a$ und $\varphi_g = \varphi$ setzt, ergibt sich das Minimum von η_φ bei ϑ_a nach Glchg. 5.28. Das Minimum von η_φ bezüglich ϑ wird nicht besonders gekennzeichnet. $\eta_\varphi > 1$ bedeutet einen sicheren Zustand.

Die Größen η_E und η_φ nennt man **Partialsicherheitsfaktoren** (BRINCH HANSEN 1962). Man bemißt eine Stützung zweckmäßig so, daß die Partialsicherheitsfaktoren bei ungünstigster Gleitflächenneigung vorgegebene Werte mindestens erreichen. Eine sicher bemessene Wand bewegt sich aber gar nicht so, daß eine unter ϑ_a geneigte Gleitfläche und der Erddruck E_a entstehen (s. Abschn. 6.2). Aus dem Dilemma kann man mit einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegung herauskommen: Man denkt sich die Größen E_g und φ_g statistisch streuend. Dann haben Grenzzustände, bei denen $E_g \leqslant E_a$ und $\varphi_g \leqslant \varphi$ ist, eine gewisse – wenngleich sehr geringe – Wahrscheinlichkeit. Diese sog. *Versagenswahrscheinlichkeit* darf einen vorgegebenen Wert – z.B. 10^{-4} – nicht übersteigen. Versagenswahrscheinlichkeit und Partialsicherheitsfaktoren können einander zugeordnet werden.

Das Prinzip der kleinsten Sicherheit läßt sich auch so formulieren: „Wenn es mit einer unter mehreren kinematisch möglichen Gleitflächen zum Grenzzustand kommen kann, wird er eintreten." Anders gesagt versagt der Erdkörper, wenn es nur irgend möglich ist (fast könnte man von der Tücke des Objekts sprechen). Bei vorgegebenem Reibungswinkel bedeutet dies, daß man bei einer Tragfähigkeit $E < E_a$ nicht damit rechnen darf, daß die Wand hält, obwohl es statisch möglich wäre.

Die bekannten Extremalprinzipe der Mechanik (s. z.B. SZÁBO 1960) enthalten das Prinzip der kleinsten Sicherheit nicht. Es bleibt zu hoffen, daß sich diese wichtige Hypothese eines Tages mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie beweisen und damit eingrenzen läßt. Bis dahin sollte man sie nur anwenden, soweit die Schlußfolgerungen durch Versuche bestätigt sind.

In dem GUDEHUS Erddrücke kleiner als E_a für statisch möglich hält (was dem Eckstein (2.36) widerspricht), fällt er dem von KÖTTER gerügten Mißverständnis (siehe Kap.3) zum Opfer. Folglich mißversteht er das COULOMBsche Extremalprinzip als heuristische Hypothese und sieht sich – wie C. L. BRÜNNINGS vor 200 Jahren – genötigt, diese Hypothese zu begründen. Die Begründungen weisen auch eine gewisse Ähnlichkeit auf: Wo BRÜNINGS das Verhalten des Bodens auf das ungestüme Temperament des Gesetzgebers der Natur zurückführte, macht GUDEHUS die Tücke des Objekts dafür verantwortlich; einen üblen Dämon also statt des vor Zeiten tätigen, erhabenen Dämons. Allerdings soll die Tücke des Objekts nur eine Metapher sein für das auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie angesiedelte Prinzip der kleinsten Sicherheit. Wie dem auch sei, GUDEHUS tut dem Boden unrecht. Der Boden ist nicht tückisch, vielmehr entlastet er die nachgebende Stützwand, soweit es die Statik überhaupt zuläßt. Gerade das ist die physikalische Bedeutung des COULOMBschen Grundsatzes (2.7), der die Existenz eines oberen und eines unteren Grenzwertes des Erdruckes behauptet.

In einer neueren Arbeit äußert sich GUDEHUS(1986) folgendermaßen zum Erddruckproblem :

> C.A. Coulomb (2) hat es anders ausgedrückt:
> 1. Die Gleitfläche ist gekrümmt, wird aber der Einfachheit halber und mit Hinweis auf die – leider nicht näher beschriebene – Erfahrung eben angenommen.
> 2. E_a soll die größte untere und E_p die kleinste obere Schranke des Erddrucks sein, die zur Bemessung empfohlen wird (ob E_a bzw. E_p wirklich auftritt, bleibt offen).
> 3. Das Reibungsgesetz wird für Kräfte, nicht für Spannungen formuliert (was sich auf den hier nicht behandelten Angriffspunkt des Erddrucks auswirken kann).
>
> Diese Theorie hat sich seit über 200 Jahren bei Stützwänden bewährt. Es ist aber nicht gelungen, die Annahmen 1 und 2 präzise experimentell zu belegen oder aus gültigen Gesetzen herzuleiten. Bei genauer Betrachtung erweisen sich nämlich beide als nur eingeschränkt gültig, was für andere Bauwerke als Stützwände auch praktisch wichtig ist.

Im Zusammenhang mit dem Vorangehenden ist vor allem die zweite der COULOMB zugesprochenen Aussagen interessant. Die darin vorkommende algebraische Terminologie hat COULOMB allerdings nicht benützt. Stellen wir deshalb zuerst den Begriff der unteren Schranke fest.[9] Sei $\mathcal{P}$ eine geordnete Menge, $\mathcal{E}$ eine Untermenge von $\mathcal{P}$ und U ein Element von $\mathcal{P}$. Dann ist U eine untere Schranke von $\mathcal{E}$ genau dann, wenn U jedem Element von $\mathcal{E}$ untergeordnet oder gleich ist. Wenn nun $\mathcal{E}$ ein kleinstes Element, sagen wir $\boldsymbol{E}_a$, besitzt, dann ist offenbar nach obiger Definition $\boldsymbol{E}_a$ die größte untere Schranke von $\mathcal{E}$. Was GUDEHUS hier unter Punkt 2 vorträgt, ist also keine zu hinterfragende These, sondern nur die Anwendung einer Definition. Was allenfalls in Frage zu stellen wäre, ist die Existenz einer von Null verschiedenen größten unteren Schranke des Erddrucks (d.h. praktisch, die Existenz von $\boldsymbol{E}_a$). Die ist aber bewiesen, wenn wenigstens eine Schranke, größer als Null, aufgefunden ist. Daß die größte aller bekannten unteren Schranken $\max \boldsymbol{F}_a$ der größten existierenden unteren Schranke nämlich $\boldsymbol{E}_a$ am nächsten kommt, ist dann – wie in 2.3 dargelegt – eine Folge der Ordnungseigenschaft der reellen Zahlen. Wenn nun GUDEHUS (1981) behauptet, das COULOMBsche Extremalprinzip sei zunächst unbewiesen, so obliegt es ihm, nachzuweisen, daß die nach COULOMB konstruierten aktiven Keilstützkräfte $\boldsymbol{F}_a$ keine unteren Schranken sind

[9] siehe z.B. dtv Atlas zur Mathematik, Band I

bzw. daß sie, wie er in (GUDEHUS, 1986) behauptet, Reaktionen statisch möglicher Erddrücke sind. Das kann aber schwerlich gelingen.

Seine Quellen gibt GUDEHUS in Kap. 1.12 Erddruckermittlung des *Grundbau Taschenbuchs*, 3.Aufl., Teil 1 (U.Smoltczyk ed., 1980) zu erkennen, nämlich TERZAGHI (1954) und KEZDI(1962). Das im Literaturverzeichnis seines Lehrbuchs angeführte Werk von MÜLLER-BRESLAU (1906) – K.HEILIG , der Herausgeber der 1947 erschienenen Neuauflage, nennt es "*das Hauptwerk der klassischen Erddrucktheorie, das für ein eingehendes Studium der Erddrucklehre unentbehrlich ist*" – scheint er unglücklicherweise nicht gelesen zu haben. Deshalb konnte er auch keinen Nutzen ziehen aus der dort schon auf S.3 zu findenden Mitteilung:

Die größte Ordinate (der CULMANNschen Kurve) *gibt die Grenze an, unter welche der Widerstand E der Wandfläche nicht sinken darf, ohne das Gleichgewicht zu stören.*

8 Die geringstmögliche Ankerkraft nach Franke/Heibaum

FRANKE und HEIBAUM (1988) behandeln die Standsicherheit einfach verankerter Stützwände auf der *tiefen Gleitfuge* . Insbesondere befassen sie sich mit Wänden, die durch Verpreßanker oder Verpreßpfähle (siehe DIN 4128) verankert sind.

In der Praxis dient die Untersuchung der tiefen Gleitfuge nach KRANZ der Festlegung der *erforderlichen Ankerlänge* . Zunächst wird die *vorhandene Ankerkraft* A_{vorh} ermittelt durch Berechnung der Stützwand als eines am Anker und im Boden aufgelagerten Balkens, der durch den aktiven Erddruck E_a belastet ist. Die erforderliche Ankerlänge wird dann so bestimmt, daß *die bei Ausnutzung der Scherfestigkeit der tiefen Gleitfuge mögliche Ankerkraft* um einen bestimmten Sicherheitsfaktor η größer ist als die vorhandene Ankerkraft A_{vorh} . Die Ankerkraft bei ausgenutzter Scherfestigkeit der tiefen Gleitfuge nennt KRANZ schlechtweg "möglich" und zwar mit Recht.Er unterstellt ja, daß – vorausgesetzt der Verankerungsboden bricht nicht auf – das System nur auf der durch die Ankerwand festgelegten tiefen Gleitfuge versagen kann, m.a.W.: daß allein diese Fuge eine *kinematisch mögliche* Gleitfuge ist. Folglich ist diejenige Ankerkraft, die sich bei voller Ausnützung der Reibung in der KRANZschen Gleitfuge unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen ergibt, eine *statisch mögliche* Ankerkraft und zwar die größte statisch mögliche Ankerkraft. Gerade deshalb darf sie ja nach KRANZ nicht kleiner als $\boldsymbol{A}_{vorh}$ sein.

Die von KRANZ betrachteten Stützwände waren mit Hilfe von Ankerwänden verankert. Deren Lage bestimmt den Verlauf der tiefen Gleitfuge (siehe Bild 10). Bei Verpreßankern wird zur Zeit die Mitte der Verpreßstrecke als Zwangspunkt für die Festlegung der tiefen Gleitfuge gewählt (siehe Bild 11). Statt dieser willkürlichen Wahl schlagen FRANKE/HEIBAUM (1988, S.394) vor, die Neigung der tiefen Gleitfuge durch eine Extremalbedingung zu bestimmen,

> *ausgehend von der Überlegung, daß für eine Sicherheitsbetrachtung die geringstmögliche Ankerkraft maßgeblich ist. Dazu wird* (bei festgehaltener Ankerlänge l) *die erste Ableitung der möglichen Ankerkraft nach dem Gleitfugenwinkel* ϑ *gebildet und gleich Null gesetzt* (FRANKE/HEIBAUM, 1988, S.394).

Die Bedeutung der Zeichen l und ϑ ist aus Bild 12 bzw. 13 zu sehen. FRANKE/HEIBAUM variieren also die Lage der tiefen Gleitfuge, d.h. sie unterstellen, daß es nicht nur eine einzige, sondern unendlich viele kinematisch mögliche Gleitfugen gibt. Gleichzeitig unterstellen sie, daß alle diese Gleitflächen und die ihnen durch Ausnützung der Scherfestigkeit zugeordneten Ankerkräfte möglich im KRANZschen Sinne, d.h. also: *statisch möglich* sind. Tatsächlich trifft dies aber höchstens auf eine von ihnen zu. Wie im folgenden gezeigt wird, liegt hier wieder eine Nonsens-Reaktion auf das mißverstandene COULOMBsche Prinzip vor.

Das System namens "verankerte Stützwand" setzen wir – wie das KRANZ und andere Ingenieure stillschweigend tun – als starrplastisch voraus. Demzufolge gibt es einen Bereich $\mathcal{A}$, in dem die Ankerkraft $\boldsymbol{A}$ variieren kann, ohne das Gleichgewicht zu stören. Da wir nur kollineare Ankerkräfte zulassen, hat $\mathcal{A}$ die Struktur einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit und demnach eine obere und untere Grenze. Die untere Grenze ist die in der Stützwandberechnung ermittelte Ankerkraft $\boldsymbol{A}_{vorh}$. Die obere Grenze nennen wir " $\boldsymbol{A}_{max}$ ", sodaß

$$8.1 \;\; \| \quad \boldsymbol{A} \in \mathcal{A} :\Longleftrightarrow A_{vorh} \le A \le A_{max}$$

Die Variation der Ankerkraft $\boldsymbol{A}$ kann man so verwirklichen, daß man am Ankerkopf die Zugkraft $\Delta\boldsymbol{A}$ anbringt (siehe Bild 12). Es ist dann

$$8.2 \;\; \| \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{vorh} + \Delta\boldsymbol{A}$$

Um die folgende Diskussion möglichst durchsichtig zu halten, wollen wir den in Bild 12 dargestellten einfachsten Sonderfall von Systemen mit Verpreßankern betrachten. Der Boden ist nicht bindig. Das unbelastete Gelände ist waagrecht, der Anker und die Erddrucklast $\boldsymbol{E}_a$ ebenfalls. Die Krafteintragung geschieht über die ganze Länge des Ankers, d.h. es handelt sich um einen Verpreßpfahl. In Bild 13 ist der von der Stützwand und einem nach Art der tiefen Gleitfuge geführten Schnitt begrenzte Erdkörper frei zu sehen. Anstelle des abgeschnittenen Ankerkopfes wirkt die Kraft $\boldsymbol{A}$ und anstelle des abgeschnittenen Ankerendes die Kraft $\boldsymbol{A}_1$. Im senkrechten Teil des Schnitts wirkt der waagrechte Erddruck $\boldsymbol{E}_1$, in dem um den Winkel ϑ geneigten Teil die Reibungskraft $\boldsymbol{Q}$, die um den zum Gleichgewicht erforderlichen Winkel φ_{mob} gegen die Schnittnormale geneigt ist. Der Aussage (2.18) entsprechend (siehe Bild 14)

$$\begin{array}{lcccc}
8.3 \;\; \| & \boldsymbol{A} \in \mathcal{A} & \Longrightarrow & \forall\vartheta & [\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{G} = \mathbf{o} \\
 & \text{ist } A \text{ eine mögliche Ankerkraft} & \text{nur dann wenn} & \text{an jedem Keil } \vartheta & \text{die Summe der angreifenden Kräfte } A, A_1, E_a, E_1, Q, G \text{ verschwindet} \\
 & \wedge & & \varphi_{mob} \le \varphi] & \\
 & \text{und} & & \text{die mobilisierte Reibung der Coulombschen Grenzbedingung gehorcht} &
\end{array}$$

Ähnlich wie zuvor in Kap.2 erkennt man, daß – siehe Bild 14 – unter Beachtung der Zuordnungen

$$8.4 \;\; \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{G} \text{ und } (\vartheta, \boldsymbol{A}) \longmapsto \boldsymbol{A}_1 \qquad (l \text{ ist konstant })$$

bei festem E_a und E_1 die Zuordnung

$$8.5 \quad \| \quad (\boldsymbol{A}, \vartheta) \longmapsto \varphi_{mob} = \Phi(\boldsymbol{A}, \vartheta)$$

besteht. Hiermit formulieren wir die (2.28) entsprechende Aussage :

$$8.6 \quad \| \quad \underset{\substack{A \text{ ist eine} \\ \text{mögliche} \\ \text{Ankerkraft}}}{\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}} \quad \underset{\substack{\text{nur} \\ \text{dann} \\ \text{wenn}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\text{in jedem} \\ \text{Schnitt } \vartheta}}{\forall \vartheta} \quad \underset{\substack{\text{die zur Erhaltung des Gleichgewichts mobilisierte} \\ \text{Reibung der einseitigen Coulombschen} \\ \text{Grenzbedingung entspricht}}}{[\Phi(\boldsymbol{A}, \vartheta) \leq \varphi]}$$

Wenn im betrachteten Schnitt ϑ die volle Reibung φ mobilisiert ist, ist auch die Ankerkraft festgelegt wie aus Bild 15 zu erkennen ist. Kap.2 entsprechend bezeichnen wir sie mit " $\boldsymbol{A}_a$ ". Sie soll "*aktive Keilankerkraft*" heißen. Es ist also

$$8.7 \quad \| \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_a \ (= \boldsymbol{A}_{m\ddot{o}gl} \text{ bei FRANKE/HEIBAUM }) :\Longleftrightarrow \varphi_{mob} = \varphi$$

Ähnlich wie in Kap. 2 erkennt man, daß unter Beachtung von (8.3) bei festem $\boldsymbol{E}_a$ und $\boldsymbol{E}_1$ die Zuordnung

$$8.8 \quad \| \quad \vartheta \longmapsto \boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{a}_a(\vartheta)$$

besteht. Aus den Bildern 14 und 15 ersieht man dann ohne weiteres die Wahrheit der dem Eckstein (2.32) entsprechenden Aussage :

$$8.9 \quad \| \quad \forall \vartheta [\Phi(\boldsymbol{A}, \vartheta) \leq \varphi \Longleftrightarrow A \leq a_a(\vartheta)]$$

Mit ihrer Hilfe gewinnt man aus (8.6) :

$$8.10 \quad \| \quad \boldsymbol{A} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \forall \vartheta [A \leq a_a(\vartheta)]$$

bzw. die Schrankenaussage :

$$8.11 \quad \| \quad \boldsymbol{A} \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \leq \min A_a$$

Einsetzen des Definiens (8.1) ergibt das Konditional :

8.12 $\| \; \forall A[A_{vorh} \leq A \leq A_{max} \Longrightarrow A \leq \min A_a]$

dessen Konsequenz für jeden Betrag A in den Grenzen des Antezedens wahr sein muß. Dementsprechend gilt die Extremalaussage :

8.13 $\|$	$\min A_a$	$\geq$	A_{max}
	Die von FRANKE/HEIBAUM ermittelte Ankerkraft	**ist gleich oder größer als**	**die größte statisch mögliche Ankerkraft**

im Gegensatz zur These von FRANKE/HEIBAUM. Das Gleichheitszeichen trifft nur dann zu, wenn die tiefe Gleitfläche die in Bild 12 wiedergegebene Gestalt hat. Tatsächlich ist sie aber gekrümmt wie die mitgeteilten Versuchsergebnisse belegen. Die Ankerkraft nach FRANKE/HEIBAUM ist also nicht nur nicht die geringstmögliche Ankerkraft sondern überhaupt keine mögliche Ankerkraft. Es ist nur eine auf der unsicheren Seite liegende Schranke der größten möglichen Ankerkraft. Eine bestimmte Annahme über den Verlauf der Schubspannungen entlang der Verpreßanker war für dieses Ergebnis nicht erforderlich. Die Aussage (8.13) gilt auch für das reichere System gemäß Bild 11, wie man sich leicht klar macht.

FRANKE/HEIBAUM empfehlen, aus Sicherheitsgründen (die nach ihrer Meinung geringstmögliche Ankerkraft) $\min \boldsymbol{A}_a$ der Bemessung der Ankerlänge zugrunde zu legen und machen den rechnerischen Mehraufwand schmackhaft durch den Hinweis auf die dadurch mögliche Einsparung an Ankerlänge. Wenn man aber verschiedene Gleitfugenneigungen bei Verpreßankern für kinematisch möglich hält – und das muß man wohl – , dann ist es nicht mehr nur empfehlenswert $\min \boldsymbol{A}_a$ zu verwenden, sondern zwingend geboten, weil – wie oben gezeigt wurde – jedes größere $\boldsymbol{A}$ statisch unmöglich ist. Ob man aber gleichzeitig die bisher bewährte Ankerlänge kürzen darf, wenn dies unter Annahme *gleichmäßig* über die Ankerlänge *verteilter Schubspannungen* möglich erscheint, müßte gerade unter dem Sicherheitsaspekt zum Hauptthema einer speziellen Untersuchung gemacht werden. Dabei müßte auch die Form der Gleitfläche wieder zur Diskussion gestellt werden.

Zusammenfassung

Die den Beginn der Bodenmechanik markierende COULOMBsche Erddrucktheorie wird – trotz der Bemühungen hervorragender Gelehrter – seit 200 Jahren immer wieder mißverstanden. Die Fortschritte der Logik lassen nunmehr eine wirksamere Aufklärung des Mißverständnisses möglich erscheinen. In dieser Arbeit wird das COULOMBsche Prinzip für den Erddruck in 5 Stufen aufgebaut, ohne Einschränkungen bezüglich Erddruckrichtung, Wandneigung, sowie Form und Belastung der Hinterfüllung. Dieses Vorgehen liefert zugleich die klassischen Extremalaussagen für den von COULOMB untersuchten Sonderfall und die bekannten Schrankentheoreme für den allgemeinen Fall. Die entscheidenden Aussagen wurden formalisiert. Dabei wurde der gemeinsprachliche Text parallel zu den logischen Zeichen weitergeführt, sodaß Vertrautheit mit diesen Zeichen für die Lektüre der Abhandlung nicht erforderlich ist. Das Ergebnis der logischen Analyse wird benutzt, um einige Beiträge zum Erddruckthema zu kritisieren. Es wird u.a. gezeigt, daß JAKYs neues Theorem der klassischen Erddrucktheorie, GUDEHUS' Prinzip der kleinsten Sicherheit und FRANKE/HEIBAUMs kleinstmögliche Ankerkraft auf dem notorischen Mißverständnis des COULOMBschen Extremalprinzips beruhen.

Summary

COULOMBs earth pressure theory, marking the beginning of soil mechanics, is misunderstood – in spite of efforts of prominent scientists – notoriously since 200 years. The tools of modern logic may prove more effective in dispelling the misunderstanding. In this paper COULOMBs principle for the general case, when direction of earth pressure, slope of retaining wall as well as shape and load of backfill are chosen arbitrarily, is construed in five steps. This procedure yields the classical extremum theorems for COULOMBs special case and at the same time the respective bounds of the theory of plasticity for the general case. The decisive passages are rendered in logical symbols and, parallel to them, in common language as well. The results of the logical analysis are used to criticize some contributions to earth pressure literature. JAKYs New Theorem of Classical Earth Pressure Theory, GUDEHUS' Principle of Minimal Safety and FRANKE/HEIBAUMs Least Possible Anchor Load are thus shown to rest on the notorious misunderstanding of COULOMBs principle.

Literaturverzeichnis

BELL, F. G. (editor), 1987 :
Ground engineers Reference Book
London(Butterworth)

BRÜNINGS, C. L., 1799 :
Brief an Woltmann,
abgedruckt in : Woltmann, Beyträge zur hydraulischen Architektur, Bd.IV

COULOMB, C. A., 1776 :
Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture.
Mém. Math. Phys. prés. Acad. R. p. div. sav. Année 1773, C. R. Acad. R., T.VII, pp343 – 382, Pl XV, XVI, Paris (l'Imprimerie Royale)

ENGESSER, F., 1880 :
Geometrische Erddrucktheorie
Zeitschr. für Bauwesen, XXX, S.189 – 210

FRANKE, E. / HEIBAUM, M., 1988 :
Ein Beitrag zum Nachweis der Standsicherheit auf der tiefen Gleitfuge
Bauingenieur 63, S.391 – 398

GUDEHUS, G., 1981 :
Bodenmechanik
Stuttgart (Enke)

GUDEHUS, G., 1986:
Einige Beiträge der Bodenmechanik zur Entstehung und Auswirkung von Diskontinuitäten
Felsbau Nr.4, S.190 – 195

HERMES, H., 1976 :
Einführung in die mathematische Logik
4.Auflage Stuttgart (Teubner)

HEYMANN, J., 1972 :
Coulomb's memoir on statics.
(An essay in the history of civil engineering)
Cambridge University Press, U.K.

JAKY, J., 1948 :
Minimum Value of Earth Pressure.
Proc. 2nd. Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg., Vol. I, pp, 61 – 69

KEZDI, A., 1962 :
Erddrucktheorien,
Berlin (Springer)

KÖTTER, F., 1893 :
Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck.
Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 2 S.128 – 154

MÜLLER-BRESLAU, H., 1906 :
Erddruck auf Stützmauern,
2.Auflage 1947
Stuttgart (Kröner)

REBHANN, G., 1871 :
Theorie des Erddruckes und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen.
Wien

REISSNER, H., 1909 :
Theorie des Erddruckes,
Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,
Vol. IV 2, ii, Teubner, Leipzig, pp. 386 – 417.

RENDULIC, L., 1940 :
Gleitflächen, Prüfflächen und Erddruck.
Bautechnik, H. 13/14.

QUINE, W.V., 1982 :
Methods of Logic
4.edition Harvard University Press.

SMOLTCZYK,U. (editor), 1980 :
Grundbau Taschenbuch,
3.Auflage, Teil 1,
Berlin (Ernst & Sohn)

SZABO,I., 1979 : *Geschichte der mechanischen Prinzipien,*
Basel (Birkhäuser)

TERZAGHI, K. / JELINEK, R., 1954 :
Theoretische Bodenmechanik,
Berlin (Springer)

WINKLER, E., 1872 :
Neue Theorie des Erddruckes,
Wien

WOLTMANN,R., 1794 :
Beyträge zur hydraulischen Architektur,
Bd.III p. 146-ff., Göttingen

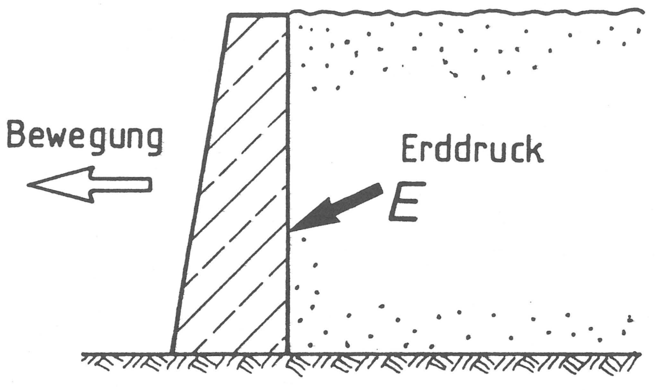

Bild 1 Erddruck $\boldsymbol{E}$ auf eine Schwergewichtsmauer

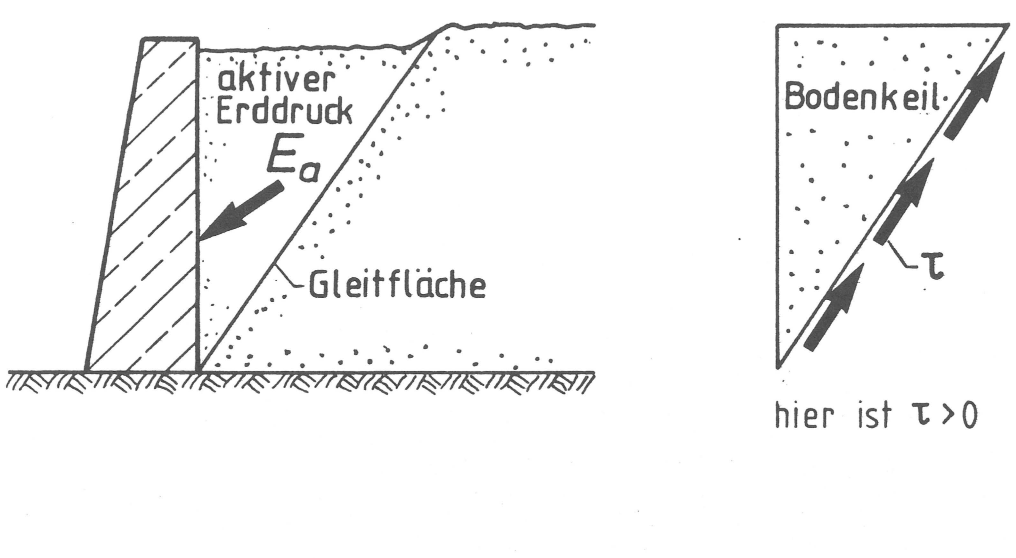

Bild 2 Aktiver Erddruck $\boldsymbol{E_a}$ nach Ausbildung einer Gleitfläche

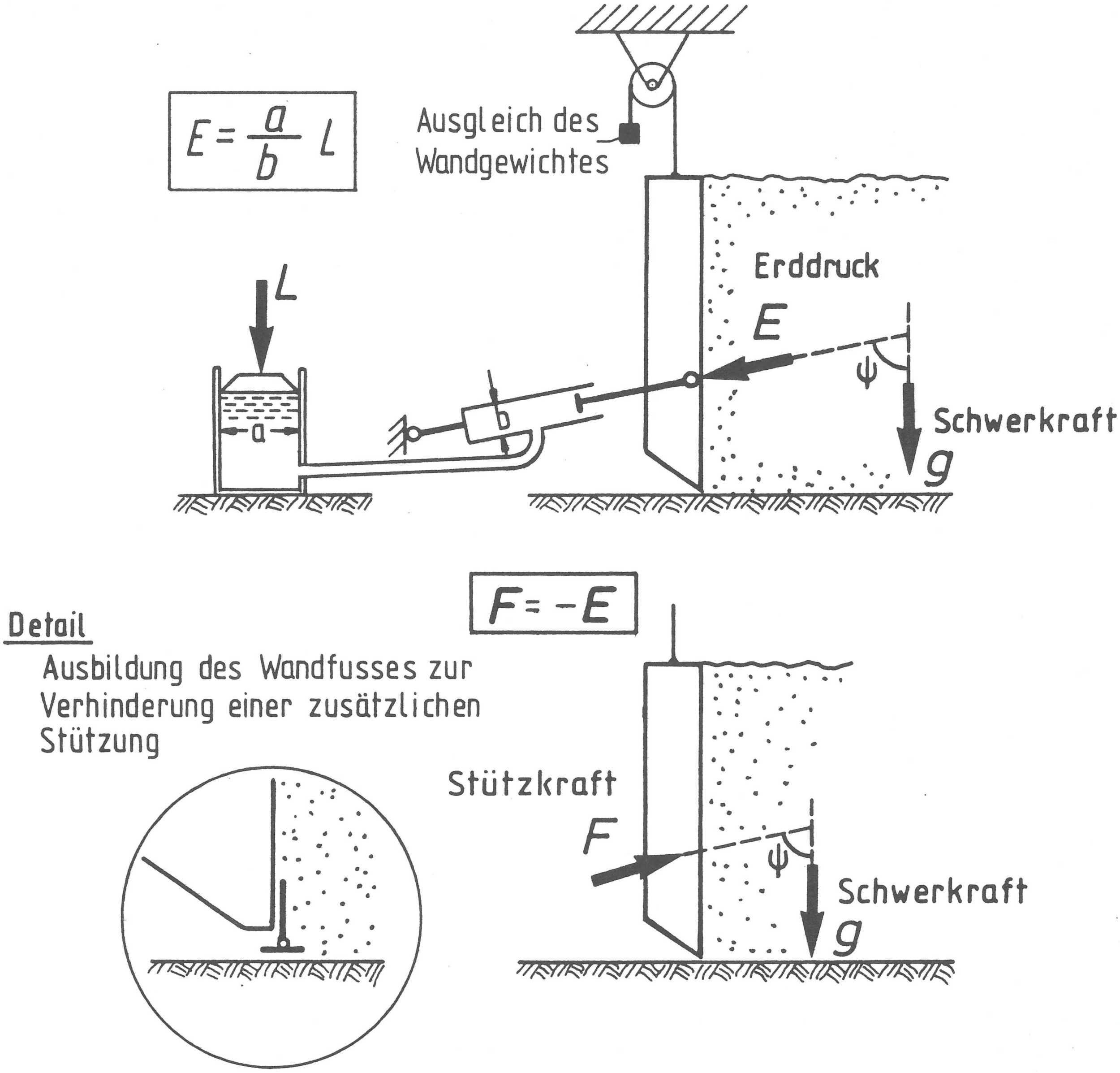

Bild 3 Versuch mit erzwungener Richtung ψ des Erddrucks

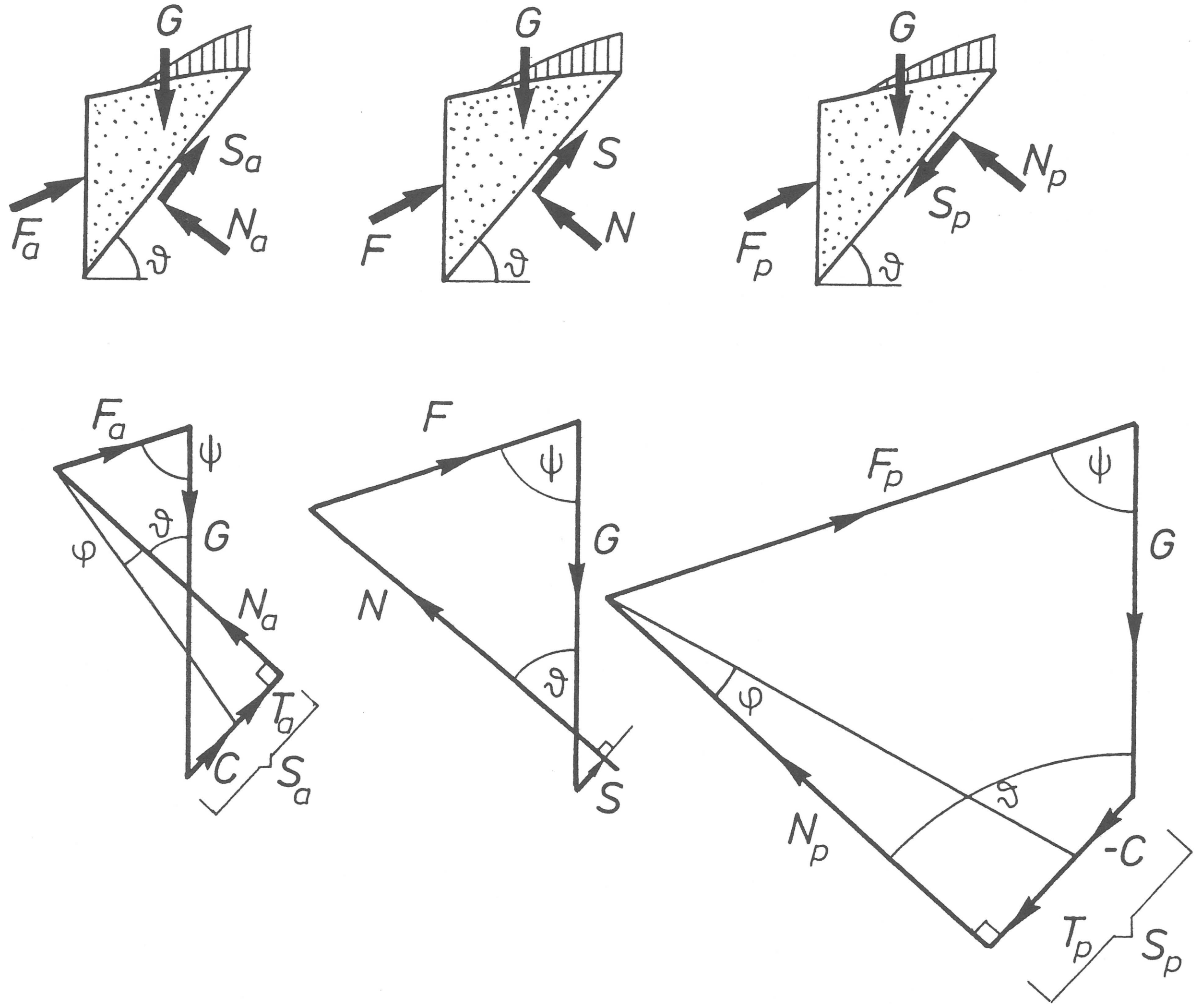

Bild 4a Aktive Keilstützkraft $\boldsymbol{F_a}$ des Keils ϑ bei Ausnutzung der Scherfestigkeit

Bild 4b Schnittkräfte im Schnitt ϑ zufolge der Stützkraft $\boldsymbol{F}$

Bild 4c passive Keilstützkraft $\boldsymbol{F_p}$ des Keils ϑ bei Ausnutzung der Scherfestigkeit

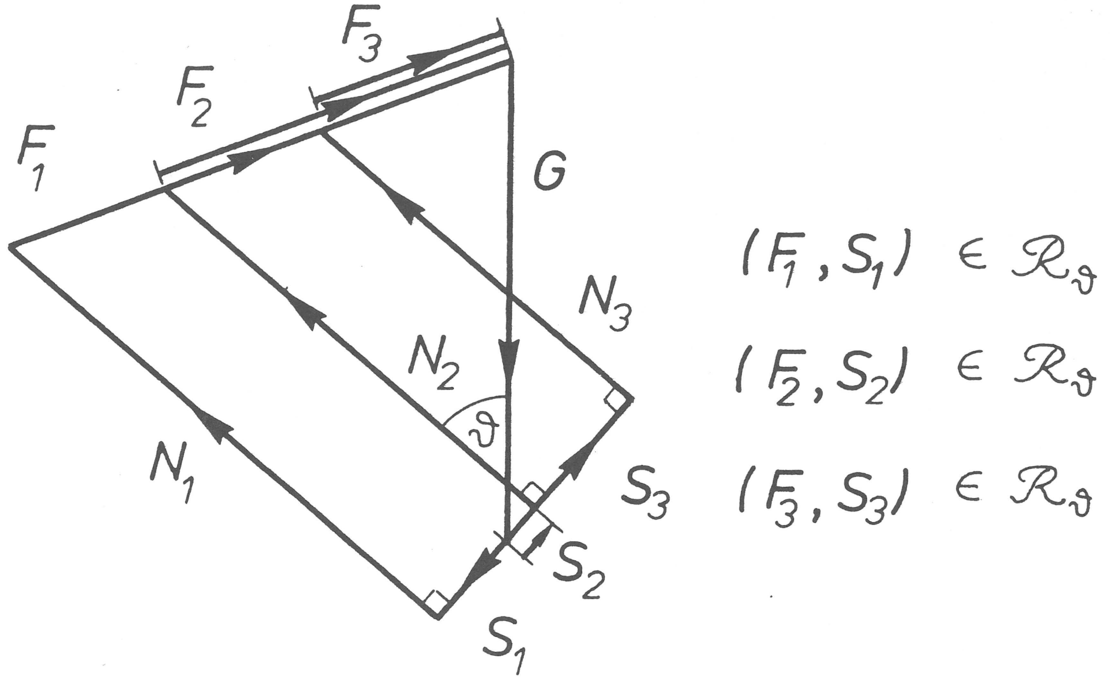

Bild 5 Drei Paare, welche eine Relation (2.29) erfüllen

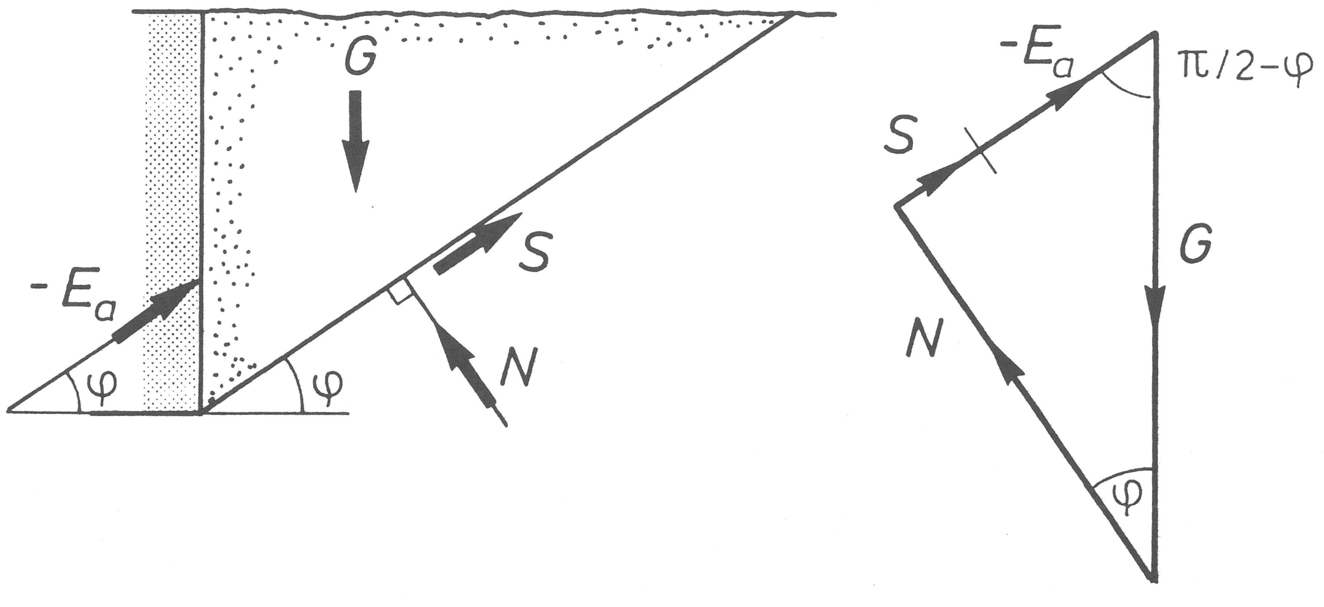

Bild 6 Stand der Theorie des aktiven Erddrucks in rolligen Boden zur Zeit COULOMBs

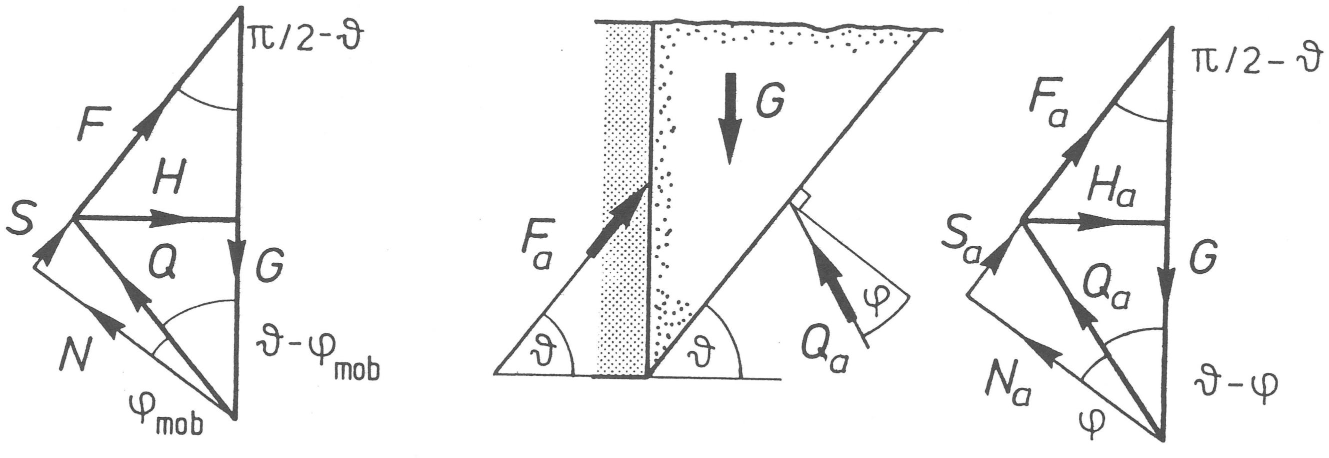

Bild 7 WOLTMANNs 2.Theorie, eine willkürliche Kombination der alten Theorie mit COULOMBs Extremalprinzip

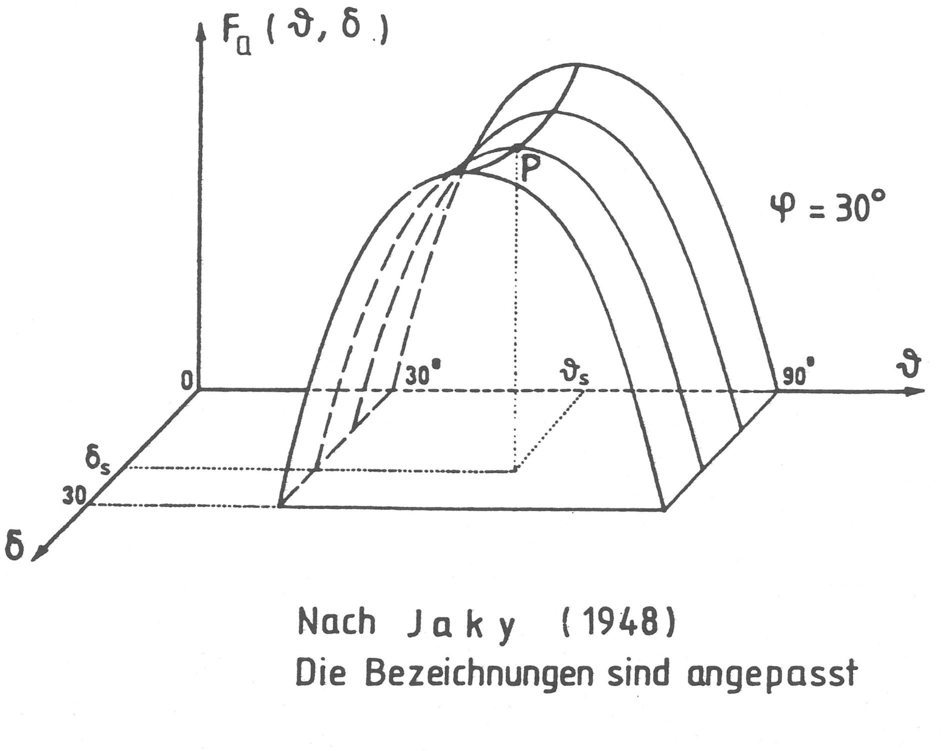

Bild 8 Betrag F_a der aktiven Keilstützkraft als Funktion des Schnittwinkels ϑ und des Wandreibungswinkels δ

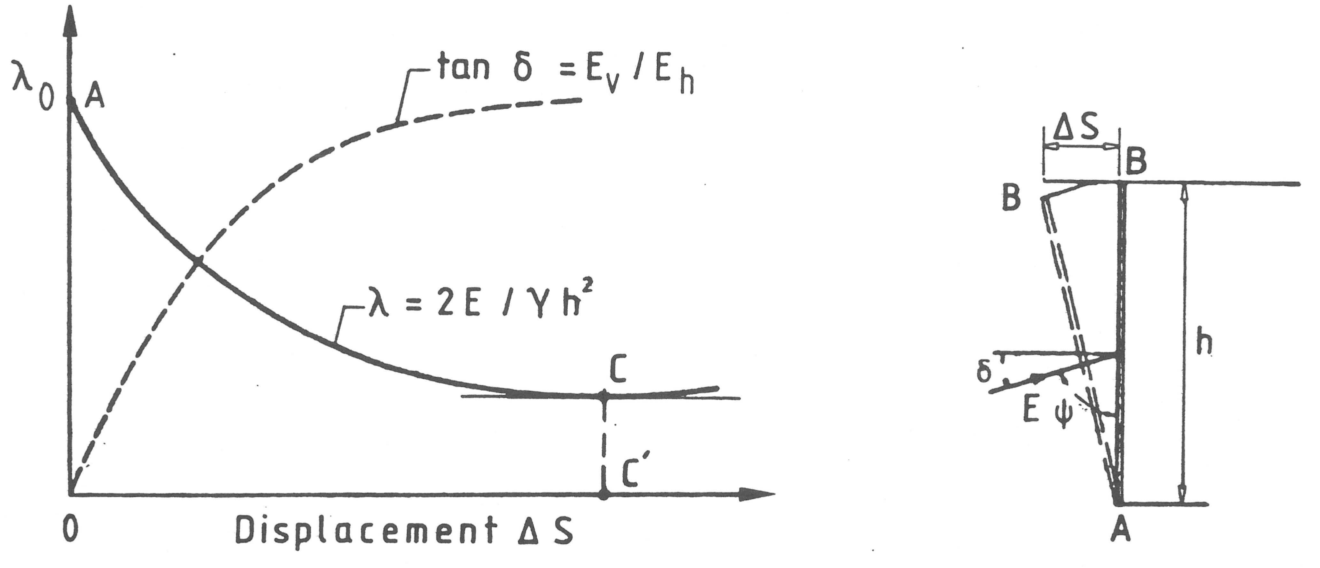

Bild 9 TERZAGHIs Versuche aus dem Jahr 1934, wiedergegeben durch JAKY (1948)

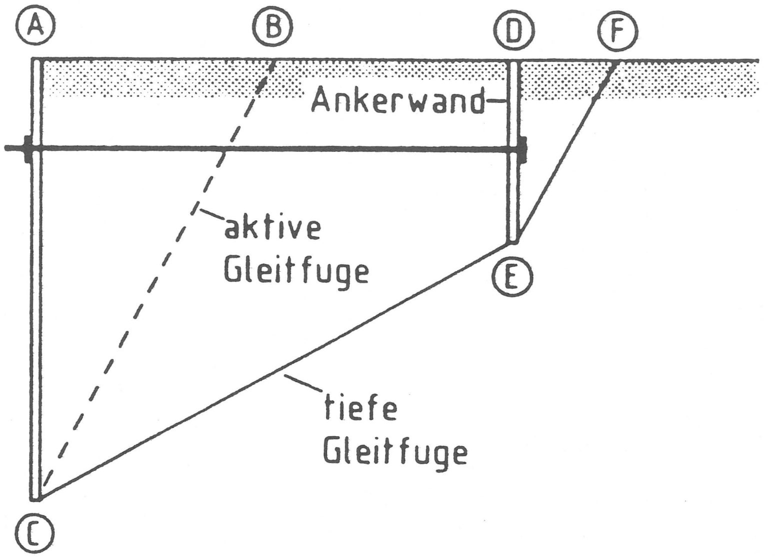

Bild 10 Tiefe Gleitfuge des Systems der verankerten Stützwand nach KRANZ

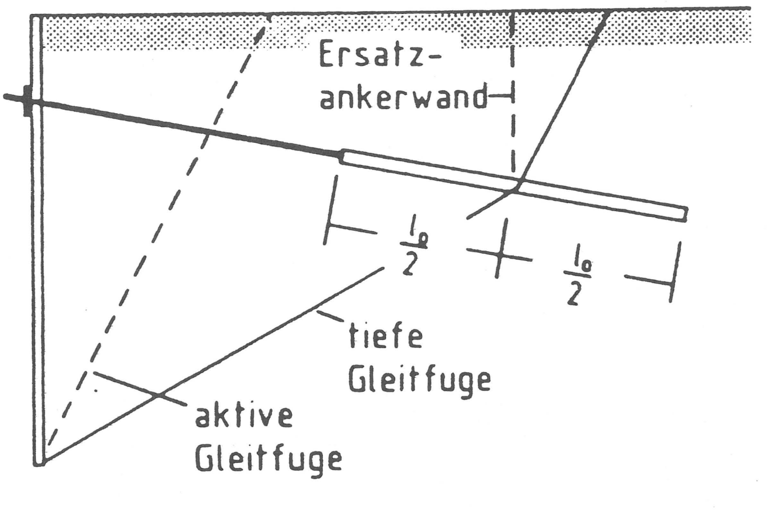

Bild 11 tiefe Gleitfuge bei Verankerung durch Verpreßanker nach EAU/EAB

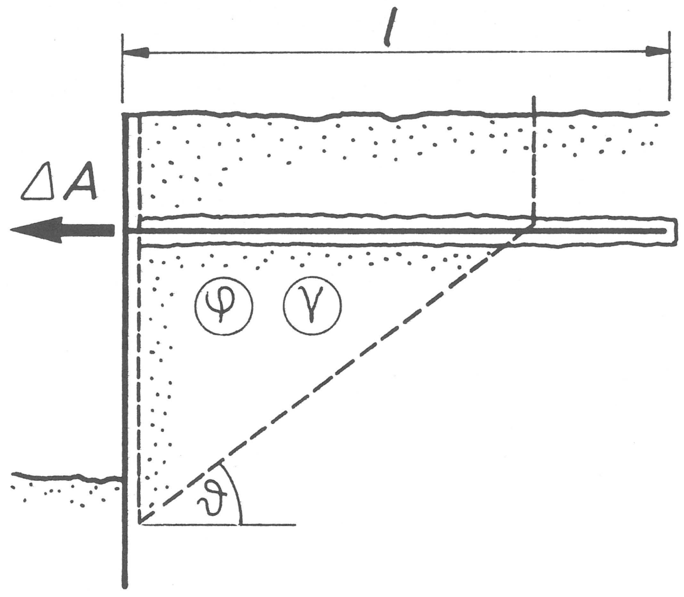

Bild 12 Schnitt nach Art der KRANZschen tiefen Gleitfuge unter dem Winkel ϑ durch Boden hinter der mit Verpeßpfählen veranker-ten Wand

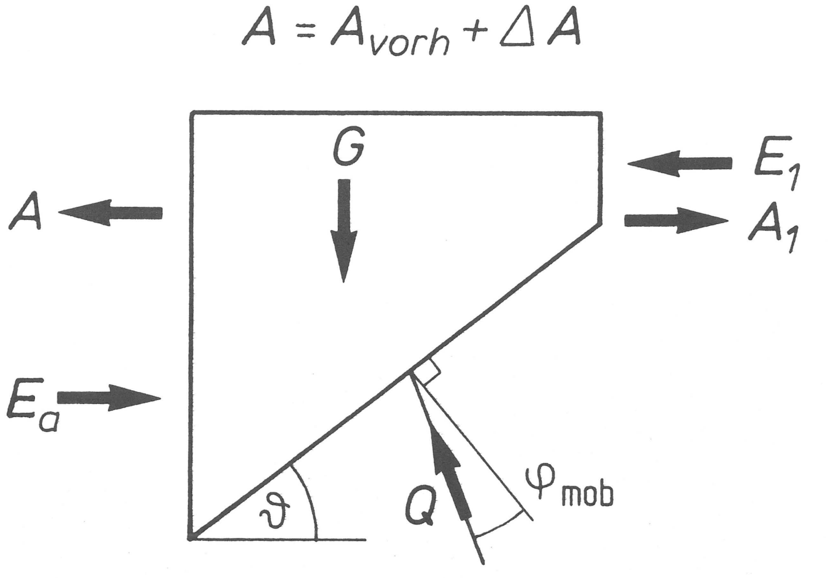

Bild 13 Freigeschnittener Bodenkeil ϑ und die an ihm angreifenden Kräfte

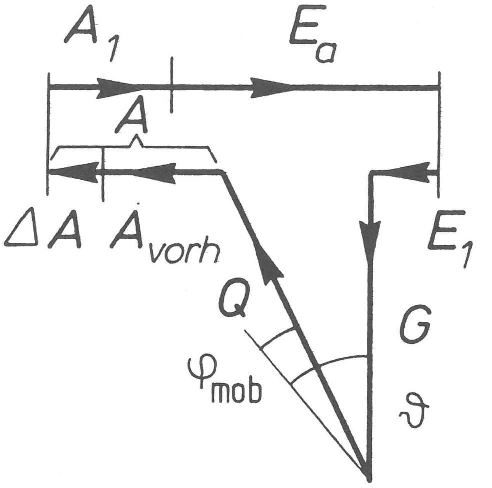

Bild 14 Schnittkräfte im Schnitt ϑ zufolge der variierten Ankerkraft $\boldsymbol{A}$

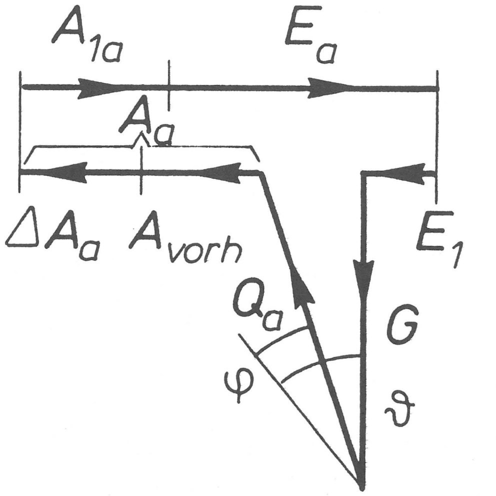

Bild 15 Aktive Keilankerkraft $\boldsymbol{A_a}$ des Keils ϑ bei vollständig mobilisierter Reibung φ im Schnitt ϑ

Mitteilungen des Instituts für Grundbau, Boden- und Felsmechanik der Technischen Hochschule Darmstadt

Nr. 1 Beitrag zur Berechnung von Gründungsbalken und einseitig ausgesteiften Gründungsplatten unter Einbeziehung der Steifigkeit von rahmenartigen Hochbauten
Dr.-Ing. H. Sommer, Februar 1965

Nr. 2 Aktuelle Probleme im Staudammbau
Veröffentlichungen in den Jahren 1966 und 1967

Nr. 3 Über den Einfluß eines dünnwandigen, im Boden verlegten Rohres auf das Tragverhalten des Bodens
Dr.-Ing. K.H. Schwinn, Januar 1968

Nr. 4 Das Tragverhalten des Frankfurter Tons bei im Tiefbau auftretenden Beanspruchungen
Prof. Dr.-Ing. H. Breth, Dipl.-Ing. E. Schultz, Dipl.-Ing. D. Stroh, April 1970

Nr. 5 Zur Frage der Erosionssicherheit unterströmter Erdstaudämme
Dr.-Ing. K. Günther, Juni 1970

Nr. 6 Ermittlung der rheologischen Zustandsgleichung eines Lehmes mit Hilfe einer neuentwickelten Versuchsapparatur
Dr.-Ing. D. Fedder, Dezember 1970

Nr. 7 Beiträge in den Jahren 1968 bis 1970

Nr. 8 Der Einfluß der Steifigkeit von Stahlbetonskelettbauten auf die Verformung und die Beanspruchung von Gründungsplatten auf Ton
Dr.-Ing. H. Heil, Juni 1971

Nr. 9 Der Einfluß von Fundamentlasten auf die Größe und Verteilung des Erddrucks auf biegsame, abgesteifte Baugrubenwände
Dr.-Ing. H.R. Wanoschek, März 1972

Nr. 10 Das Verformungsverhalten des Frankfurter Tons beim Tunnelvortrieb
Dipl.-Ing. G. Chambosse, Februar 1972

Nr. 11 Beiträge in den Jahren 1972 und 1973

Nr. 12 Messungen an einer verankerten Baugrubenwand
Dipl.-Ing. W. Romberg, Dezember 1973

Nr. 13 Berechnung verankerter Baugruben nach der Finite Element Methode
Dr.-Ing. D. Stroh, Juni 1974

Nr. 14 Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens einfach verankerter Baugrubenwände
Dr.-Ing. Gert-Peter Schmitt, Juli 1974

Nr. 15 Verformungsverhalten des Baugrundes beim Baugrubenaushub und anschließendem Hochchhausbau am Beispiel des Frankfurter Tons
Dr.-Ing. P. Amann, Prof. Dr.-Ing. H. Breth, Dr.-Ing. D. Stroh, Juni 1975

Nr. 16 Ermittlung des Tragverhaltens einer mehrfach verankerten Baugrubenwand durch Modellversuche
Dr.-Ing. R. Wolff, Juni 1975

Nr. 17 Die instationäre Brunnenströmung im anisotropen Grundwasserleiter mit freier Oberfläche
Dr.-Ing. Thomas Klüber, November 1975

Nr. 18 Spannungen und Verformungen in hohen Dämmen im Bauzustand
Dr.-Ing. Gunter Hardt, Januar 1976

Nr. 19 Beiträge in den Jahren 1974 bis 1977

Nr. 20 Spannungen und Verformungen in hohen Steinschüttdämmen im Bauzustand unter besonderer Berücksichtigung von Talform und Hangrauhigkeit
Dr.-Ing. Heinz Czapla, März 1979

Nr. 21 Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten
Eine vergleichende Studie
Dr.-Ing. Horst Rückel, August 1979

Nr. 22 Untersuchungen über das Verformungsverhalten von Asphaltbeton im Hinblick auf seine Verwendung als Innendichtung für Dämme (in Vorbereitung)
Dipl.-Ing. H. Schwab

Nr. 23 Beitrag zum Spannungs-Verformungsverhalten der Böden
Dr.-Ing. M. Ulvi Arslan, Dr.-Ing. Rainer Wanninger, August 1980

Nr. 24 Entwicklungstendenzen beim Bau und der Berechnung oberflächennaher Tunnel in bebautem Stadtgebiet
Dr.-Ing. Rolf Katzenbach, November 1981

Nr. 25 Großversuche zur Ermittlung des Tragverhaltens von Pfahlreihen unter horizontaler Belastung
Dr.-Ing. H.G. Schmidt, Januar 1986

Nr. 26 Pfahlgruppen in geschichtetem Boden unter horizontaler dynamischer Belastung
Dr.-Ing. H.G. Hartmann, April 1986

Nr. 27 Zur Frage der Standsicherheit verankerter Stützwände auf der tiefen Gleitfuge
Dr.-Ing. Michael H. Heibaum, April 1987

Nr. 28 Tragverhalten von Pfahlgruppen unter Horizontalbelastung
Dr.-Ing. Eberhard Klüber, März 1988

Nr. 29 Untersuchungen über den Primärspannungszustand in bindigen überkonsolidierten Böden am Beispiel des Frankfurter Untergrundes
Dr.-Ing. Hermann Mader, Februar 1988

Nr. 30 Coulombsches Extremalprinzip und Schranken des Erddrucks
Prof. Dr.-Ing. T. Dietrich und Dr.-Ing. U. Arslan, Juni 1989