

Thermomechanische Modellierung und bruchmechanische Versagensanalyse von dickschichtigen Klebverbindungen

**Vom Fachbereich Maschinenbau
der Technischen Universität Darmstadt**

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

Thomas Steffen Methfessel, M.Sc.

aus Witten

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Tag der Einreichung: 01.12.2023
Tag der mündlichen Prüfung: 13.02.2024

Darmstadt 2024

Thomas Steffen Methfessel

*Thermomechanische Modellierung und bruchmechanische Versagensanalyse
von dickschichtigen Klebverbindungen*


Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUprints: 2024

Tag der mündlichen Prüfung: 13.02.2024

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-266910

URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/26691>

 Creative Commons License (CC BY–NC–ND 4.0 International),
2024.

Freies Vervielfältigen und Weiterverbreiten – Namensnennung –
Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung

Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Fachgebietes Strukturmechanik an der Technischen Universität Darmstadt entstanden. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, bedanken.

Mein besonderer Dank geht an Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker für seine wohlwollende Unterstützung und Förderung meiner wissenschaftlichen Arbeit und die hierfür gewährte Freiheit. Sein fachlicher Rat und seine kompetente Betreuung waren eine große Hilfe.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt, Leiter des Fachgebietes Leichtbau und Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt, möchte ich sehr für sein Interesse an der vorliegenden Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferats danken.

Bei meinen Kolleginnen und Kollegen am Fachgebiet Strukturmechanik bedanke ich mich für die vielen konstruktiven Diskussionen und die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre.

Abschließend möchte ich mich ganz besonders bei meiner Familie und meinen Freunden für ihre Geduld und ihre beständige Unterstützung bedanken.

Kurzfassung

Der Einsatz von Klebverbindungen bietet aufgrund der hohen spezifischen Festigkeit, des beschädigungsfreien Fügeprozesses und der flächig verteilten Lastübertragung viele Vorteile gegenüber anderen Verbindungsarten. Insbesondere im Bereich des konstruktiven Leichtbaus finden Klebverbindungen daher eine breite Anwendung. Aufgrund der unterschiedlichen Steifigkeiten von Klebstoff und Fügepartnern sowie des Auftretens geometrisch bedingter Kerben weisen Klebverbindungen jedoch ein sehr komplexes strukturmechanisches Verhalten auf und sind versagensanfällig. Für eine sichere Auslegung geklebter Strukturen sind daher geeignete Analysekonzepte erforderlich, mit denen die Lastübertragung und das Versagensverhalten von Klebverbindungen angemessen abgeschätzt werden können. Analytische Modelle eignen sich dabei aufgrund ihrer Einfachheit und Effizienz besser als aufwendige experimentelle Versuche.

Zentraler Bestandteil dieser Arbeit ist die Entwicklung einer analytischen Modellierung zur Erfassung des mechanischen Verhaltens von Klebverbindungen mit dickerer Klebschicht. Da bestehende Modelle fast ausschließlich für Verbindungen mit sehr dünnen Klebschichten geeignet sind, wird in dieser Arbeit ein Modell mit einem Verschiebungsansatz höherer Ordnung für die Klebschicht vorgestellt, das eine genauere Beschreibung des Verformungsverhaltens in Klebschichtdickenrichtung erlaubt. Das zugehörige Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der Klebverbindung wird unter Anwendung der linearen Elastizitätstheorie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials hergeleitet und einer Lösung zugeführt. Die Eignung des vorgestellten Modells wird anhand vorgenommener Spannungsermittlungen für verschiedene Belastungssituationen und unterschiedliche Fügekonfigurationen im Vergleich zu Finite-Elemente-Berechnungen und bestehenden analytischen Modellen gezeigt. Die Vorteile des vorliegenden analytischen Modells zeigen sich mit zunehmender Klebschichtdicke insbesondere bei der Darstellung lokaler Spannungsspitzen am äußeren Rand der Klebschicht von einschnittigen Überlappungsfügungen.

An die Modellierung der Klebverbindung schließt sich eine Versagensbewertung zur Analyse von spröden Grenzschichtbrüchen mit dem gekoppelten

Spannungs- und Energiekriterium der Finiten Bruchmechanik an. Ein in dieser Arbeit entwickelter Optimierungsalgorithmus ermöglicht unter Berücksichtigung des nicht monotonen Verlaufs der Energiefreisetzungsrates die Abschätzung der kritischen Versagenslast, bei der ein Riss initiiert wird, der zum Versagen der Klebverbindung führt. Durch eine geeignete analytische Modellierung des Risses ist es möglich, die während des Rissprozesses entstehende Rissöffnung und die dabei freigesetzte Energie, die eine zentrale Rolle im Versagensprozess spielt, genau zu erfassen. Die so ermittelten kritischen Versagenslasten werden in Parameterstudien für verschiedene Struktursituationen und Belastungsfälle untersucht und mit numerischen und experimentellen Referenzergebnissen validiert.

Abstract

Adhesive joints offer many advantages over other types of joints due to their high strength-to-weight ratio, the non-destructive joining process, and a load transfer that is distributed over a large area. Adhesive joints are therefore widely used, especially in the field of lightweight construction. However, due to the different stiffnesses of adhesive and adherends, and the occurrence of geometrically induced notches, adhesive joints have a complex mechanical behavior and are susceptible to failure. For a safe design of adhesively bonded structures, appropriate analysis concepts are needed to capture the load transfer and failure behavior of adhesive joints. Analytical models are more suitable than experimental tests due to their simplicity and efficiency.

The central part of this thesis is the development of an analytical model to capture the mechanical behavior of adhesive joints with a relatively thick adhesive layer. Since existing models are almost exclusively suitable for joints with very thin adhesive layers, a model with a higher-order displacement approach for the adhesive layer is proposed in this work, which allows a more accurate description of the deformation behavior in the direction of the adhesive layer thickness. The corresponding differential equation system for the description of the adhesive joint is derived and solved using linear elasticity theory and the minimum total potential energy principle. The suitability of the presented model is demonstrated by stress determinations for different loading situations and different joint configurations in comparison to finite element calculations and existing analytical models. The advantages of the present analytical model become apparent with increasing adhesive layer thickness, particularly in the representation of local stress peaks at the outer edge of the adhesive layer of single-lap joints.

The modeling of the adhesive joint is complemented by a failure evaluation for the analysis of brittle interface failure using the coupled stress and energy criterion of Finite Fracture Mechanics. Taking into account the non-monotonic behavior of the energy release rate, an optimization algorithm developed in this thesis allows the estimation of the critical failure load at which a crack initiates leading to the failure of the adhesive joint. Through appropriate analytical modeling of the crack, it is possible to accurately determine the

crack opening that occurs during the cracking process and the energy released, which plays a central role in the failure process. The critical failure loads determined in this way were investigated in parametric studies and validated with numerical and experimental reference results.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziel der Arbeit	2
1.3 Aufbau der Arbeit	3
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Lineare Elastizitätstheorie	5
2.2 Mechanik ebener flächiger Strukturen	11
2.3 Variations- und Energieprinzipien	16
2.4 Festigkeitskriterien	18
2.5 Bruchmechanik	20
2.6 Finite Bruchmechanik	24
3 Stand der Forschung zur Strukturmechanik von Klebverbindungen	31
3.1 Einführende Bemerkungen zu Klebverbindungen	31
3.2 Spannungsmodellierung	34
3.2.1 Bestehende Konzepte zur Spannungsberechnung	34
3.2.2 Detaillierte Darstellung der zentralen Grundprinzipien	38
3.3 Versagensbewertung	41
3.3.1 Versagensarten	41
3.3.2 Bestehende Konzepte zur Versagensbewertung	42
4 Neuer Ansatz der Klebschichtmodellierung	49
4.1 Analytische Modellierung	49
4.1.1 Grundlagen und Modellannahmen	50
4.1.2 Modellierung der Klebverbindung	51
4.1.3 Herleitung des Differentialgleichungssystems	56
4.1.4 Lösung des Differentialgleichungssystems	61
4.1.5 Randbedingungen	64
4.2 Numerische Modellierung	65

Inhaltsverzeichnis

4.3	Ergebnisse	67
4.3.1	Modellvergleich anhand einschnittiger Überlappungs- fügungen	68
4.3.2	Analyse unterschiedlicher Belastungssituationen	75
4.3.3	Parameterstudien	78
5	Versagensanalyse von Klebverbindungen	83
5.1	Einführung	83
5.2	Versagensanalyse mittels Finiter Bruchmechanik	84
5.2.1	Berechnung der Energiefreisetzungsrates	85
5.2.2	Modellierung der gerissenen Struktur	87
5.2.3	Optimierungsverfahren	90
5.3	Versagensanalyse mittels Kohäsivzonenmodellierung	95
5.4	Ergebnisse	99
5.4.1	Ergebnisse zur Auswertung des gekoppelten Kriteriums	100
5.4.2	Versagensanalyse einschnittiger Stahlfügungen	103
5.4.3	Versagensanalyse verstärkter Betonstrukturen	110
6	Zusammenfassung und Ausblick	113
6.1	Zusammenfassung	113
6.2	Ausblick	115
	Anhang A	117
	Literaturverzeichnis	123

Nomenklatur

Abkürzungen

AM n	Analytisches Modell mit Klebschichtansatz n -ter Ordnung
CLT	Klassische Laminattheorie (Engl.: Classical Laminate Theory)
CFK	carbonfaserverstärkter Kunststoff
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
EXP	Experiment
FBM	Finite Bruchmechanik
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FSDT	Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (Engl.: First-Order Shear Deformation Theory)
GR	Modell von Goland und Reissner
KZM	Kohäsivzonenmodell
OE	Modell von Ojalvo und Eidinoff
VCCT	Auswertung des virtuellen Riss-schließintegrals (Engl.: Virtual Crack Closure Technique)

Indizes und Schreibweisen

\Im	Imaginärteil
\Re	Realteil
$(\cdot)'$	Ableitung nach x
$(\cdot)_c$	kritischer Wert
$(\cdot)_h, (\cdot)_p$	Homogener und partikulärer Lösungsteil
$(\cdot)_I, (\cdot)_{II}, (\cdot)_{III}$	Rissöffnungsarten
$(\cdot)_{ij}$	Indexnotation ($i, j = 1, 2, 3$)
$(\cdot)_L, (\cdot)_R$	Größen bezüglich Bereich L bzw. R der Energiefreisetzungsrates
$(\cdot)_R, (\cdot)_C, (\cdot)_N$	Größen bezüglich reeller, komplexer oder Nulleigenwerte
$(\cdot)_S, (\cdot)_E$	Größen bezüglich des Spannungs- bzw. Energiekriteriums

Nomenklatur

$(\cdot)^T$	transponierte Größe
$(\cdot)_V$	Vergleichsgröße
$(\cdot)^{(a)}$	Größen bezüglich der Klebschicht
$(\cdot)^{(i)}$	Größen bezüglich des Fügepartners ($i = 1, 2$)
$(\cdot)^{(m.)}$	mittlerer Wert
$(\cdot)^{(o.)}$	oberer Wert
$(\cdot)^{(u.)}$	unterer Wert
$\delta(\cdot)$	virtuelle Größe
$\langle \cdot \rangle$	Macaulay-Klammer

Lateinische Formelzeichen

a, A	Risslänge bzw. Rissfläche
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$	Matrizen des Differentialgleichungssystems
b	Breite
C_{ij}	Steifigkeiten
C	Konstante
c_{ijkl}	Elastizitätstensor
\mathbf{d}	Vektor des Differentialgleichungssystems
E	Elastizitätsmodul
f	Funktion
f_i	Volumenkraft
f_{ij}	Dimensionslose Eigenfunktion der Spannungen
F	Kraft
\mathcal{F}	Verschiebungsterm höherer Ordnung
g_i	Dimensionslose Eigenfunktion der Verschiebungen
G	Schubmodul
\mathcal{G}	differentielle Energiefreisetzungsrate
$\bar{\mathcal{G}}$	inkrementelle Energiefreisetzungsrate
h_i	Fügepartnerhöhe ($i = 1, 2$)
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
K	Spannungsintensitätsfaktor
K_e	Steifigkeit von Kohäsivzonenelementen
M	Biegemoment
M^{ij}	Schnittmomente
N_e	Anzahl von Kohäsivzonenelementen in der Prozesszone
N^{ij}	horizontale Schnittkräfte
l	Länge des Überlappungsbereichs
l_e	Elementlänge entlang des Risspfades

l_f	Länge der Enden der Fügepartner ohne Überlappungsbereich
p	Knotenkraft
\mathcal{P}	Hilfsfunktion beim inneren Potential
Q^{ij}	vertikale Schnittkräfte
\bar{Q}_{ij}	reduzierte Steifigkeiten
\hat{Q}_{ij}	transformierte reduzierte Steifigkeiten
Q	Hilfsfunktion beim äußeren Potential
r	Radius im Polarkoordinatensystem
\mathbf{r}, \mathbf{r}_T	Vektoren der Randbedingungen
s_{ijkl}	Nachgiebigkeitstensor
S	Oberfläche
t	Klebschichtdicke
t_i	Oberflächenkraft
T	Temperatur
u, v, w	Verschiebungen
U_0	Formänderungsenergiedichte
$u_0^{(i)}, w_0^{(i)}$	Verschiebungen der Mittelebene der Fügepartner ($i = 1, 2$)
$\tilde{u}^{(a)}, \tilde{w}^{(a)}$	Rissflankenverschiebungen der Klebschicht
$\hat{u}^{(i)}, \hat{w}^{(i)}$	Verschiebungen der Fügepartner ($i = 1, 2$) am Rand zur Klebschicht
\mathbf{v}	Eigen- bzw. Hauptvektor
V	Volumen
W_i, W_a	Arbeit der inneren bzw. äußeren Kräfte
x, y, z	Koordinaten

Griechische Formelzeichen

α	thermischer Ausdehnungskoeffizient
γ	technische Gleitung
δ	Separation
$\Delta a, \Delta A$	finite Risslänge bzw. finite Rissfläche
ΔT	Temperaturdifferenz
$\Delta \Pi$	Änderung des Gesamtpotentials
ϵ	Toleranzwert
$\varepsilon, \varepsilon^T$	Dehnung, thermische Dehnung
ϑ	Winkel der Faserorientierung in faserverstärkten Verbundwerkstoffen
κ	Schubkorrekturfaktor
λ	Eigenwert
λ	Singularitätsordnung
μ	viskoser Regularisierungsparameter

Nomenklatur

ν	Querkontraktionszahl
Π, Π_i, Π_a	Gesamtpotential, Potential der inneren bzw. äußeren Kräfte
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	Winkel im Polarkoordinatensystem
ϕ, Φ, Ψ	Vektoren der gesuchten Verformungsfunktionen
χ_u, χ_w	zu bestimmende Verformungsfunktionen
ψ	Verdrehung der Querschnitte der Fügepartner
Ω_c	potentielle Rissfläche

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Das Klebverfahren ist ein kostengünstiges und vielseitig einsetzbares Fügeverfahren, das sowohl im Bauwesen als auch im Maschinen- und Anlagenbau zur Anwendung kommt. Es gehört zu den stoffschlüssigen Fügeverfahren, bei denen zwei Bauteile durch einen flächig aufgetragenen nichtmetallischen Klebstoff fest miteinander verbunden werden. Neben der flächig verteilten Lastübertragung zählen die hohe spezifische Festigkeit und die Fügbarkeit von Bauteilen unterschiedlicher Werkstoffe zu den Vorteilen von Klebverbindungen gegenüber anderen Fügearten wie Schweiß- oder Nietverbindungen. Klebverbindungen eignen sich insbesondere für das Fügen von dünnwandigen Leichtbaustrukturen, wie sie in der Luft- und Raumfahrt, im Fahrzeugbau oder im Bauwesen, beispielsweise bei der Konstruktion von Rotorblättern für Windkraftanlagen, eingesetzt werden. So bestehen Flugzeuge heute, bezogen auf ihr Gewicht, zu bis zu 50 % aus Faserverbundstrukturen, in denen auch Klebverbindungen eine Rolle spielen (Adams, 2021).

Während Klebverbindungen in der Herstellung einfach sind, ist die sichere Auslegung für den Betrieb sehr anspruchsvoll. Grund dafür ist die komplexe Lastübertragung in der Klebverbindung, die aus einer Kombination von geometrisch bedingten Kerben und stark unterschiedlichen Steifigkeitseigenschaften der beteiligten Materialien resultiert. Dies führt unter Belastung trotz gleichmäßig aufgetragenem Klebstoff zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung in der Klebschicht. Insbesondere an den sogenannten Bimaterialkerben am Rand des Überlappungsbereiches zwischen Klebschicht und Fügepartner treten lokal sehr hohe Spannungskonzentrationen auf. Unter kritischer Belastung kann es dort daher zu einer schlagartigen Bildung von Rissen kommen. Einmal entstandene Risse breiten sich dann entlang der Schichtgrenze zwischen Klebschicht und Fügepartner weiter aus, bis es aufgrund der verhältnismäßig

Kapitel 1 Einleitung

nachgiebigeren Klebschicht zu einem klebschichtseitigen Grenzschichtbruch kommt, der zum Versagen der Klebverbindung führt.

Um das Versagen geklebter Strukturen in technischen Anwendungen zu vermeiden, ist eine umfassende Kenntnis des strukturmechanischen Verhaltens der Klebverbindung und der auftretenden Versagensmechanismen erforderlich. Damit kann die Klebverbindung so dimensioniert werden, dass die im Betrieb auftretenden Belastungen stets unterhalb der maximal ertragbaren Belastung liegen und ein sicherer Einsatz gewährleistet ist. Um die maximale Belastbarkeit abzuschätzen, werden entweder experimentelle Versuche durchgeführt oder Berechnungsmodelle verwendet. Experimentelle Auswertungen liefern zwar sehr realitätsnahe Ergebnisse, sind jedoch teuer und aufwendig in der Durchführung. Aus diesem Grund besteht ein großes Interesse an analytischen Lösungen sowie an numerischen Simulationsmodellen, die wesentlich einfacher und kostengünstiger in der Anwendung sind. Darüber hinaus erlauben diese auch Aussagen über die Spannungsverläufe innerhalb der Klebverbindung, mit deren Hilfe überbeanspruchte Bereiche identifiziert werden können. Durch die Möglichkeit der parametrischen Implementierung sind sie außerdem flexibel auf unterschiedliche Struktursituationen mit verschiedenen Werkstoffen anwendbar.

Bei analytischen Modellen können insbesondere für Verbindungen mit sehr dünnen Klebschichten stark vereinfachte Annahmen getroffen werden, die sie wesentlich effizienter als numerische Modelle machen, sodass sie sich besonders für eine erste grobe Abschätzung in der Entwurfsphase eignen. Hierzu bestehende, etablierte Konzepte für die Spannungsanalyse und Versagensbewertung wurden jedoch hauptsächlich für Verbindungen mit sehr dünnen Klebschichten entwickelt. Aufgrund der starken Vereinfachungen nimmt die Genauigkeit der Ergebnisse bei diesen mit zunehmender Klebschichtdicke ab. Für die Analyse von Klebverbindungen mit dickeren Klebschichten, wie sie bei Dickschichtklebungen oder Mehrschichtverbunden auftreten, besteht daher noch ein Bedarf an geeigneten analytischen Modellen, wozu die vorliegende Arbeit einen Beitrag leistet.

1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Implementierung eines analytischen Verfahrens zur effizienten Analyse der Lastübertragung und des Versagensverhaltens von Klebverbindungen mit dicken Klebschichten. Da das Verformungsverhalten der Klebschicht mit zunehmender Klebschichtdicke

komplexer wird, liegt ein besonderer Fokus auf der genauen Beschreibung des Verformungsverhaltens der Klebschicht in Dickenrichtung.

Für die Analyse der Lastübertragung ist ein analytisches Modell der Klebverbindung mit einem neuen Ansatz zur Beschreibung der Verformungen über die Klebschichtdicke auf der Grundlage der linearen Elastizitätstheorie erforderlich. Das Modell soll die unter Belastung auftretenden Spannungen und Verformungen für verschiedene Klebkonfigurationen ermitteln können, wobei ein Kompromiss aus Einfachheit und Effizienz der Modellierung bei gleichzeitiger Genauigkeit der Ergebnisse anzustreben ist. Darüber hinaus sollte die Modellierung möglichst vielseitig für verschiedene geometrische Konfigurationen, Lastfälle und Materialkonstellationen anwendbar sein. Ziel ist, dass die Modellierung die Qualität numerischer Vergleichsrechnungen erreicht.

Auf Grundlage einer effizienten Modellierung der Klebverbindung kann die Versagensanalyse durchgeführt werden. Für die Bestimmung der kritischen Last und die Analyse der Rissbildung soll in dieser Arbeit das Konzept des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums der Finiten Bruchmechanik verwendet werden. Für die Auswertung des gekoppelten Kriteriums ist ein geeigneter Optimierungsalgorithmus zu entwickeln und zu implementieren, der eine möglichst genaue und effiziente Versagensanalyse ermöglicht. Zusätzlich soll der Einfluss verschiedener Struktur-, Last- und Materialparameter auf das Versagen von Klebverbindungen untersucht werden. Ziel ist, die Qualität der Ergebnisse durch eine Validierung mittels numerischer Vergleichsrechnungen mit einer Kohäsivzonenmodellierung und experimenteller Ergebnisse aus der Literatur sicherzustellen. Zusätzlich wird ein Vergleich zwischen analytischer und numerischer Auswertung des gekoppelten Kriteriums durchgeführt.

1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden die für diese Arbeit relevanten theoretischen Grundlagen erläutert. Dazu wird zunächst auf die wichtigsten Zusammenhänge der linearen Elastizitätstheorie und der Mechanik ebener flächiger Strukturen eingegangen. Es folgt eine kurze Einführung in die Variations- und Energieprinzipien. Um einen Überblick über die Durchführung von Versagensanalysen zu geben, werden verschiedene Festigkeitskriterien und bruchmechanische Konzepte aufgezeigt. Abschließend wird das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium der Finiten Bruchmechanik vorgestellt.

Kapitel 1 Einleitung

Eine Einführung in den Stand der Forschung zur Strukturmechanik von Klebverbindungen wird in Kapitel 3 gegeben. Nach einigen einleitenden Bemerkungen wird zunächst auf die Spannungsanalyse und dann auf die Versagensbewertung von Klebverbindungen Bezug genommen. Für die Spannungsanalyse werden etablierte Modellierungskonzepte und relevante Grundprinzipien vorgestellt. Der Abschnitt zur Versagensbewertung beginnt mit einer Beschreibung der bei Klebverbindungen auftretenden Versagensarten. Im Weiteren werden bestehende Konzepte zur Versagensbewertung aufgeführt. Dabei wird sowohl auf die Finite Bruchmechanik als auch auf die Kohäsivzonenmodellierung eingegangen.

In Kapitel 4 wird ein neuer Ansatz zur Klebschichtmodellierung für die Analyse des strukturmechanischen Verhaltens von Klebverbindungen vorgestellt. Dabei werden zunächst die Modellannahmen und der eingeführte Ansatz für die Klebschicht detailliert erläutert. Anschließend wird die Herleitung der Ergebnisse für Spannungen und Verschiebungen aus dem Differentialgleichungssystem beschrieben. Außerdem wird die numerische Modellierung gezeigt, die zur Überprüfung des analytischen Modells verwendet wird. Abschließend werden die Ergebnisse der Spannungsberechnungen für verschiedene Klebverbindungen und Parameterstudien vorgestellt.

Die Versagensanalyse von Klebverbindungen ist das Thema von Kapitel 5. Nach einer kurzen Einführung wird auf die Versagensanalyse mit dem gekoppelten Kriterium der Finiten Bruchmechanik eingegangen. Dazu wird die erforderliche Berechnung der Energiefreisetzungsrates, die Rissmodellierung und das in dieser Arbeit entwickelte Optimierungsverfahren zur Versagensbewertung beschrieben. Neben der Finiten Bruchmechanik wird auch die numerisch durchgeführte Kohäsivzonenmodellierung erläutert. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden am Ende des Kapitels für verschiedene Klebverbindungen dargestellt, diskutiert und mit experimentellen Ergebnissen validiert.

In Kapitel 6 werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und es wird ein Ausblick auf sinnvolle zukünftige Erweiterungen der Modellierung gegeben.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist die Darstellung der wichtigsten theoretischen Grundlagen, die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Dazu werden zunächst die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, der Mechanik orthotroper flächiger Strukturen und der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung beschrieben. Anschließend werden energetische Konzepte und Variationsprinzipien vorgestellt. Es folgt eine Einführung in die zur Bewertung von Strukturversagen gebräuchlichen Festigkeitskriterien und in die Bruchmechanik. Abschließend wird das Konzept der Finiten Bruchmechanik mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium erläutert.

2.1 Lineare Elastizitätstheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie vorgestellt, bei der es sich um eine Theorie zur Modellierung und Auswertung von Spannungen und Verformungen in elastischen Körpern handelt, die infolge äußerer Lasten entstehen. Unter der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens (physikalische Linearität) und kleiner Verformungen (geometrische Linearität) lassen sich zentrale Grundgleichungen formulieren, mit denen sich das Verhalten eines beliebigen linear-elastischen Kontinuums beschreiben lässt. Einen guten Überblick über die in diesem Abschnitt vorgestellten strukturmechanischen Grundlagen liefern die Werke von Becker u. Gross (2002), Gross et al. (2018) und Sadd (2021).

Im Allgemeinen werden in der linearen Elastizitätstheorie drei Arten von Grundgleichungen verwendet. Dies sind die *Gleichgewichtsbedingungen*, die *kinematischen Gleichungen* und die *konstitutiven Gleichungen*:

- Die *Gleichgewichtsbedingungen* beschreiben für einen statisch belasteten Körper das Kräftegleichgewicht in jedem betrachteten Punkt

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

des Körpers in jeder vorhandenen Koordinatenrichtung. Treten dynamische Effekte auf, werden stattdessen Bewegungsgleichungen verwendet.

- Die *kinematischen Gleichungen* ermöglichen es, aus den auftretenden Verformungen auf den Verzerrungszustand eines Körpers zu schließen.
- Das *Konstitutivgesetz* berücksichtigt das Materialverhalten des elastischen Körpers und liefert so einen Zusammenhang zwischen den aus den Belastungen resultierenden Spannungen und den sich einstellenden Verzerrungen.

Mit den Grundgleichungen lassen sich mechanische *Randwertprobleme* betrachten, die sich in Abhängigkeit von auftretenden Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen eindeutig lösen lassen. Damit können Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen an jedem Punkt des Körpers in Abhängigkeit von der Belastung und dem Materialverhalten ermittelt werden. Die Grundgleichungen werden im Folgenden ausführlich dargestellt und erläutert.

Gleichgewichtsbedingungen

Es gibt zwei verschiedene Arten von Belastungen, denen ein Körper ausgesetzt sein kann: Belastungen im Körperinneren, zum Beispiel durch das Eigengewicht des Körpers, und Belastungen, die von außen auf die Körperoberfläche einwirken. Aus der Belastung durch äußere Kräfte resultieren innere Kräfte, die im Körperinneren wirken. Betrachtet man einen beliebigen Schnitt durch einen Körper mit der Normalen n_i , so können die auf die infinitesimale Schnittfläche ΔA bezogenen Kräfte ΔF_i als Spannungen interpretiert werden. Geht die Größe der Schnittfläche gegen Null, lässt sich im jeweiligen Angriffspunkt ein sogenannter *Spannungsvektor* mit den folgenden Komponenten formulieren:

$$t_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

Der Spannungsvektor setzt sich im Allgemeinen aus drei Komponenten zusammen: eine senkrecht zur Schnittfläche wirkende Normalspannung und zwei in der Ebene der Schnittfläche wirkende, linear voneinander unabhängige Schubspannungen. Betrachtet man ein infinitesimales würfelförmiges Volumenelement in einem kartesischen Koordinatensystem mit Schnittflächen in

allen drei Raumrichtungen, so lässt sich aus den zerlegten Spannungsvektoren der *Cauchysche Spannungstensor* σ_{ij} formulieren:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Der Index i der Spannungskomponente kennzeichnet die Richtung der Flächennormalen der betrachteten Schnittfläche und der Index j die Wirkungsrichtung der Spannungskomponente an dieser Stelle. Die Auswertung lokaler Momentengleichgewichte am infinitesimalen Volumenelement ergibt

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (2.3)$$

sodass der Spannungstensor symmetrisch ist. Unter Verwendung des griechischen Buchstabens τ für die Schubspannungen kann der Cauchysche Spannungstensor als

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

geschrieben werden. Spannungsvektor und Spannungstensor sind dabei über das *Cauchysche Gesetz* voneinander abhängig. So lässt sich der Spannungsvektor eines beliebigen Schnittes in einem Körper aus der zugehörigen Flächennormalen und dem Cauchyschen Spannungstensor berechnen:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (2.5)$$

Analog zu den lokalen Momentengleichgewichten, die zu Gleichung (2.3) führen, lassen sich am infinitesimalen Volumenelement auch Kräftegleichgewichte aufstellen. Unter Berücksichtigung der Volumenkräfte f_i ergibt sich

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad (2.6)$$

was drei partiellen Differentialgleichungen für die drei mit den Koordinaten x_j bezeichneten Raumrichtungen entspricht. Über doppelt auftretende Indizes wird dabei nach den Regeln der Indexnotation summiert. Aufgrund der Spannungssymmetrie enthalten die Differentialgleichungen sechs unbekannte Spannungskomponenten. Das System ist somit statisch unbestimmt und die Spannungskomponenten können nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Aus diesem Grund müssen neben den Gleichgewichtsbedingungen auch die konstitutiven und kinematischen Gleichungen berücksichtigt werden.

Kinematik

Die Verformungen eines elastischen Körpers unter Belastung können durch Verzerrungstensenoren beschrieben werden. Dabei beschreiben die Verzerrungen die Deformation eines Körpers bezüglich eines Referenzzustandes. In vielen Anwendungsfällen treten nur kleine Verformungen auf, weshalb die Verzerrungen vereinfacht durch den *linearisierten* bzw. *infinitesimalen Verzerrungstensor* ε_{ij} formuliert werden können:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Auf der Hauptdiagonalen befinden sich die Dehnungen, die, am infinitesimalen Volumenelement betrachtet, Längenänderungen gegenüber der Ausgangslänge in einer Koordinatenrichtung entsprechen. Die übrigen Verzerrungen sind Gleitungen, die als Winkeländerungen interpretiert werden können. Analog zum Cauchyschen Spannungstensor ist auch der linearisierte Verzerrungstensor symmetrisch. Ersetzt man die Gleitungen durch die in der Praxis häufig verwendeten technischen Gleitungen mit $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ für $i \neq j$, lässt sich der linearisierte Verzerrungstensor als

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

schreiben. Die kinematischen Gleichungen liefern einen Zusammenhang zwischen den Komponenten ε_{ij} des linearisierten Verzerrungstensors und den Verschiebungen u_i , die infolge von Belastungen entstehen:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.9)$$

Konstitutivgesetz

Um Spannungen und Verzerrungen in Beziehung zu setzen, wird das Konstitutivgesetz verwendet. Im Gegensatz zu den Gleichgewichtsbedingungen und den kinematischen Gleichungen ist das Konstitutivgesetz werkstoffabhängig. In vielen technisch relevanten Fällen kann es als linear-elastisch angenommen werden, sodass Spannungen und Verzerrungen über den Elastizitätstensor

c_{ijkl} in direkter Proportionalität zueinander stehen. Diese Art des Konstitutivgesetzes wird auch als *Hookesches Gesetz* bezeichnet und lautet in Indexnotation:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.10)$$

Der Elastizitätstensor beschreibt dabei die mechanische Steifigkeit der Struktur. Durch Invertieren der Gleichung (2.10) kann das Hookesche Gesetz auch unter Verwendung des Nachgiebigkeitstensors s_{ijkl} dargestellt werden:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (2.11)$$

Betrachtet man thermomechanische Situationen, in denen neben mechanischen auch thermische Dehnungen wirken, so wird das Hookesche Gesetz um die thermischen Dehnungen ε_{ij}^T erweitert. Die Gesamtdehnung ε_{ij} ergibt sich dann zu:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^T. \quad (2.12)$$

Thermische Dehnungen treten auf, wenn eine Struktur gegenüber ihrem Ausgangszustand um eine Temperaturdifferenz ΔT erwärmt oder abgekühlt wird. Die Verformungen der Struktur unter thermischer Belastung werden durch einen Satz an materialabhängigen thermischen Ausdehnungskoeffizienten α_{ij} beschrieben. Für die thermischen Dehnungen gilt:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}\Delta T. \quad (2.13)$$

Der Elastizitätstensor c_{ijkl} hat 81 Komponenten, die nicht alle voneinander unabhängig sind. Unter Berücksichtigung der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensor und der Existenz einer Formänderungsenergie kann der Elastizitätstensor im Fall der Anisotropie vereinfacht und die Anzahl der Komponenten auf 21 unabhängige reduziert werden. Anstelle des Elastizitätstensors wird für die Formulierung des Konstitutivgesetzes die Steifigkeitsmatrix C_{ij} verwendet. Bei anisotropem Materialverhalten lautet das Konstitutivgesetz somit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Dazu werden die Spannungen und Verzerrungen in Vektorschreibweise nach Voigtscher Notation geschrieben. Neben dem anisotropen Materialverhalten gibt es eine Vielzahl weiterer Materialmodelle, unter anderem für orthotropes und isotropes Material. Orthotropes Materialverhalten zeichnet sich durch drei orthogonal zueinander orientierte Symmetrieebenen aus, wie sie in der Praxis häufig bei faserverstärkten Strukturen in Verbundwerkstoffen auftreten. Die Einträge der Steifigkeitsmatrix vereinfachen sich in diesem Fall zu

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

sodass zur Beschreibung des Materialverhaltens nur noch neun voneinander unabhängige Steifigkeitseinträge erforderlich sind. Die Steifigkeitseinträge bestehen wiederum aus einer Kombination der in der Mechanik gebräuchlichen materialspezifischen Ingenieurkonstanten. Im orthotropen Fall sind dies die drei Elastizitätsmoduli E_{11} , E_{22} und E_{33} , die sechs Querkontraktionszahlen ν_{23} , ν_{32} , ν_{13} , ν_{31} , ν_{12} und ν_{21} sowie die drei Schubmoduli G_{23} , G_{13} und G_{12} . Drei der Querkontraktionszahlen lassen sich dabei durch *Reziprozitätsbeziehungen* als Linearkombinationen aus den anderen Ingenieurkonstanten ausdrücken, wodurch sich auch hier neun unabhängige Größen ergeben. Die Reziprozitätsbeziehungen ergeben sich aus der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix und haben die Form

$$\frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}. \quad (2.16)$$

Für viele Anwendungsfälle ist gerade das isotrope Materialverhalten relevant, bei dem die Richtungsabhängigkeit des Materials entfällt. Damit reduziert sich auch die Anzahl der unabhängigen Steifigkeitseinträge weiter auf zwei. Die Steifigkeitsmatrix für isotropes Materialverhalten sieht wie folgt aus:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

2.2 Mechanik ebener flächiger Strukturen

Der Zusammenhang zwischen Steifigkeitseinträgen und den isotropen Ingenieurkonstanten E und ν lautet:

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.18)$$

Der isotrope Schubmodul G lässt sich gemäß

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.19)$$

berechnen. In vielen praktisch relevanten Fällen lassen sich dreidimensionale Strukturen aufgrund ihrer Geometrie und Belastung auf eine zweidimensionale Betrachtung reduzieren. In diesem Kontext wird dann von ebenen Problemen gesprochen, bei denen sich das Konstitutivgesetz durch den Wegfall einzelner Spannungs- oder Verzerrungskomponenten vereinfacht. Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie werden typischerweise zwei Fälle von ebenen Problemen unterschieden, der *ebene Verzerrungszustand* (EVZ) und der *ebene Spannungszustand* (ESZ):

- Beim ebenen Verzerrungszustand wird angenommen, dass die in einer bestimmten Raumrichtung, zum Beispiel in x_3 -Richtung, wirkenden Verschiebungen verschwinden oder vernachlässigbar klein sind und die übrigen Verschiebungen sowie die Belastungen von dieser Raumrichtung unabhängig sind. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Verschiebung in x_3 -Richtung durch eine geeignete Lagerung verhindert wird oder im Vergleich zur zugehörigen Länge der Struktur hinreichend klein ist. In diesen Fällen verschwinden auch die Verzerrungen und es gilt $\varepsilon_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$.
- Der ebene Spannungszustand wird hauptsächlich bei sehr dünnen, ebenen Strukturen angenommen, die nur in der Ebene belastet werden. Aufgrund der geringen Dicke der Struktur sind die in Dickenrichtung wirkenden Spannungskomponenten vernachlässigbar klein. Für einen ebenen Spannungszustand bezüglich der x_3 -Richtung gilt daher $\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$. Die restlichen ebenen Spannungen sind unabhängig von der x_3 -Richtung.

2.2 Mechanik ebener flächiger Strukturen

In der Strukturmechanik werden die Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie auf Strukturelemente wie Stäbe, Balken, Scheiben, Platten und Mehr-

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

schichtverbunde angewendet. Unter Berücksichtigung geometrischer und materialspezifischer Annahmen und Vereinfachungen wurden in der Vergangenheit je nach Struktursituation geeignete Berechnungskonzepte entwickelt, wie zum Beispiel die Balken-, Platten- und Laminattheorien. Im Folgenden wird insbesondere auf die Mechanik orthotroper flächiger Strukturen und die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung eingegangen. Detailliertere Grundlagen zum Materialverhalten in Scheiben, Platten und Laminaten und zu Theorien höherer Ordnung sind in den Büchern von Becker u. Gross (2002), Reddy (2003), Mittelstedt u. Becker (2016) und Mittelstedt (2022) zu finden.

Mechanik orthotroper Strukturen

Orthotrope Scheiben und Platten werden aufgrund ihrer günstigen Steifigkeitseigenschaften in vielen Anwendungsfällen vorteilhaft eingesetzt. Orthotropes Materialverhalten kommt in verschiedenen Strukturen in der Natur vor, kann aber auch bewusst konstruktiv erzeugt werden. Eines der bekanntesten Beispiele für konstruktive Anwendungen ist die Verwendung von Laminaten, bei denen es sich um Mehrschichtverbunde aus faserverstärkten orthotropen Schichten handelt. Die orthotropen Eigenschaften der Schichten ergeben sich durch die Orientierung der Fasern. Im Spezialfall einer unidirektionalen Faserverstärkung, wie in Abbildung 2.1 zu sehen, vereinfacht sich das orthotrope Materialverhalten und nimmt einen transversal isotropen Charakter an. Für das Konstitutivgesetz bedeutet dies, dass das Material eine isotrope Ebene senkrecht zur Faserrichtung besitzt, in der das Materialverhalten bei beliebiger Drehung um die faserparallele Achse gleich ist. Bei der Betrachtung dünner flächiger Strukturen lässt sich in guter Näherung ein ebener Spannungszustand annehmen. Damit verschwinden die transversalen Spannungen σ_{33} , τ_{23} und τ_{13} . Das im x_1, x_2, x_3 -Materialhauptachsensystem formulierte Konstitutivgesetz der orthotropen Strukturen kann daher unter Verwendung von Gleichung (2.15) wesentlich vereinfacht werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_{11}\Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_{22}\Delta T \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Die Größen Q_{ij} sind *reduzierte Steifigkeiten*, die sich aus der orthotropen Steifigkeitsmatrix C_{ij} infolge der Reduktion auf einen ebenen Spannungszustand

2.2 Mechanik ebener flächiger Strukturen

ergeben. Ausgedrückt in Ingenieurkonstanten ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Da sich das Materialhauptachsensystem auf Faserorientierung und nicht auf die Strukturform bezieht, wird zusätzlich noch das in Abbildung 2.1 dargestellte x, y, z -Koordinatensystem eingeführt. Bei Laminaten kann so trotz schichtweise unterschiedlicher Faserorientierungen das mechanische Verhalten des gesamten Laminats untersucht werden. Die Materialeigenschaften der orthotropen Struktur werden dann durch eine geeignete Koordinatentransformation im x, y, z -Koordinatensystem ausgedrückt, sodass sich der folgende Zusammenhang zwischen den betrachteten Spannungen und Verzerrungen ergibt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_{xx}\Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_{yy}\Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy}\Delta T \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Dabei sind \bar{Q}_{ij} die *transformierten reduzierten Steifigkeiten* ausgedrückt im x, y, z -Koordinatensystem. Die Transformation erfolgt mit der Transformationsmatrix T_{ij} in Abhängigkeit des Winkels ϑ nach:

$$\bar{Q}_{ij} = T_{ik}Q_{kl}T_{lj}. \quad (2.23)$$

Die Transformationsmatrix ist in Abhängigkeit des Winkels ϑ durch

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & -2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

gegeben. Zur Untersuchung konkreter Lastfälle ist es zweckmäßig, die auftretende Spannungen zu Schnittkräften N und Schnittmomenten M zusammenzufassen. Dabei werden die Spannungen über die Dicke h der Struktur integriert:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz. \quad (2.25)$$

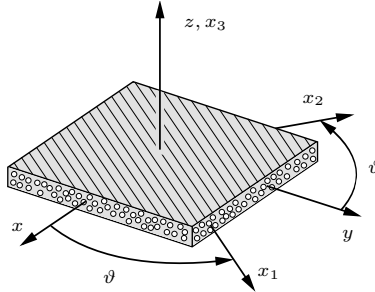


Abbildung 2.1: Unidirektional faserverstärkte flächige Struktur mit an der Faserrichtung orientiertem x_1, x_2, x_3 -Materialhauptsachsensystem und um den Winkel ϑ dazu verdrehtem x, y, z -Koordinatensystem.

Schubdeformationstheorie 1. Ordnung

Für die Analyse des Verformungsverhaltens von Platten gibt es mehrere gängige Modellierungskonzepte. Das einfachste davon ist die *Kirchhoffsche Plattentheorie*, die auch im Rahmen der *Klassischen Laminattheorie* (CLT) Anwendung findet. Die Kirchhoffsche Plattentheorie ist jedoch nur für hinreichend dünne und schubstarre Platten anwendbar, bei denen die transversalen Schubdeformationen vernachlässigbar sind. Für dickere und schubweiche Platten ist eine Theorie höherer Ordnung, wie die *Schubdeformationstheorie 1. Ordnung* (FSDT), vorzuziehen, die aus einer Kombination der *Reissner-Mindlinschen Plattentheorie* und der Scheibentheorie besteht. Wie bei der Kirchhoffschen Plattentheorie wird auch bei der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung ein ebener Spannungszustand angenommen und ein auf bestimmten kinematischen Annahmen basierender Verschiebungsansatz verwendet:

- Die Querschnittsfläche bleibt unter Belastung eben und verwölbt sich nicht.
- Die Plattendicke ändert sich bei einer Verformung der Platte nicht.

Im Gegensatz zur Kirchhoffschen Plattentheorie wird hier nicht gefordert, dass die Querschnittsfläche der Platte im deformierten Zustand zwingend senkrecht zur Plattenmittelebene stehen muss. Das Verschiebungsfeld der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung lautet:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

2.2 Mechanik ebener flächiger Strukturen

Die Verschiebungen setzen sich aus zwei Anteilen zusammen, einem von z unabhängigen Scheibenanteil mit den Verschiebungen der Mittelebene u_0 , v_0 und w_0 und einem linear von z abhängigen Plattenanteil mit den Verdrehwinkeln ψ_x bzw. ψ_y . Der Unterschied zur Kirchhoffschen Plattentheorie liegt darin, dass die Verdrehwinkel nicht der jeweiligen Ableitung der Durchbiegung w_0 entsprechen. Die ebenen Verzerrungen ergeben sich unter Berücksichtigung der kinematischen Gleichungen (2.9) zu:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Zugunsten der Übersichtlichkeit werden hier die Funktionsargumente x , y und z weggelassen. Die Verzerrung ε_{zz} verschwindet nach der Ableitung der Verschiebung w nach der z -Koordinate. Neben den ebenen Verzerrungen, die in etwas anderer Form auch bei der Kirchhoffschen Platte auftauchen, ermöglicht der Ansatz der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung auch die Berechnung transversaler Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} . Für sie ergibt sich:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y. \quad (2.28)$$

Mit den Ausdrücken für die Schubverzerrungen lässt sich das Konstitutivgesetz auf transversale Schubspannungen erweitern. Ähnlich wie bei den ebenen Spannungen und Verzerrungen folgt:

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Bei \bar{C}_{44} , \bar{C}_{45} , und \bar{C}_{55} handelt es sich um transformierte transversale Schubsteifigkeiten, die sich aus den Steifigkeiten C_{44} und C_{55} des orthotropen Konstitutivgesetzes ergeben. Die so berechneten transversalen Schubspannungen verlaufen allerdings konstant über die Dicke der Platte und nicht parabelförmig mit verschwindenden Spannungen am oberen und unteren Rand, wie nach der elementaren Biegetheorie zu erwarten ist. Um dennoch realistische Spannungen zu erhalten, wird zu den Schubspannungen ein Schubkorrekturfaktor κ hinzu multipliziert, der für isotrope und orthotrope Strukturen mit Rechteckquerschnitt den Wert $5/6$ hat:

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Auch aus den transversalen Schubspannungen lassen sich durch Integration über die Plattendicke h Schnittkräfte berechnen. Dabei handelt es sich um resultierende Querkraftflüsse Q_x und Q_y die sich wie folgt ergeben:

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz. \quad (2.31)$$

2.3 Variations- und Energieprinzipien

Zur Lösung von mechanischen Randwertproblemen können Energieprinzipien herangezogen werden, wie in diesem Abschnitt näher erläutert wird. Dabei kommt dem Begriff der Arbeit zentrale Bedeutung zu, die beispielsweise durch das Wirken einer Kraft entlang eines Weges verrichtet wird. Ausgehend davon lassen sich unter anderem die Konzepte des allgemeinen Arbeitssatzes, des Prinzips der virtuellen Verrückungen und des Prinzips vom Stationärwert des Gesamtpotentials herleiten. Neben der Erläuterung dieser Prinzipien soll in diesem Abschnitt auch das dabei angewendete Variationsprinzip thematisiert werden. Für die Ausführungen zu Variations- und Energieprinzipien wurden neben den zuvor genannten Lehrbüchern primär die Werke von Becker u. Gross (2002), Mittelstedt (2017) und Gross et al. (2018) herangezogen.

Allgemeiner Arbeitssatz

Der Arbeitssatz lässt sich aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (2.6) der linearen Elastizitätstheorie ableiten. Multipliziert man die Gleichgewichtsbedingungen mit einem Verschiebungsfeld und integriert über das Volumen des Körpers, so erhält man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes den *allgemeinen Arbeitssatz*:

$$\int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_S t_i^{(1)} u_i^{(2)} dS. \quad (2.32)$$

Der Index (1) steht bei den Spannungen $\sigma_{ij}^{(1)}$ und den Volumen- und Oberflächenkräften $f_i^{(1)}$ und $t_i^{(1)}$ für eine beliebige Gleichgewichtsgruppe und der Index (2) bei den Verzerrungen $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ und Verschiebungen $u_i^{(2)}$ für ein zulässiges Verzerrungs- bzw. Verschiebungsfeld. Die Integration erfolgt über das Volumen V des jeweils betrachteten Körpers bzw. über seine Oberfläche S . Verbalisiert bedeutet der Arbeitssatz, dass die äußere Arbeit W_a , die aus den

2.3 Variations- und Energieprinzipien

auf den Körper wirkenden Volumen- und Oberflächenkräften resultiert, gleich der inneren Arbeit W_i im Körper ist:

$$W_i = W_a. \quad (2.33)$$

Bei der Anwendung auf wirkliche Spannungen und Verformungen entspricht im linear elastischen Fall die innere Arbeit W_i dem zweifachen inneren Potential Π_i . Das innere Potential ist unabhängig von der Verformungsgeschichte des Körpers und besteht aus der über das Körpervolumen integrierten Formänderungsenergiedichte U_0 , die wiederum aus den Spannungen und Verzerrungen im Körper resultiert:

$$\Pi_i = \int_V U_0 dV \quad \text{mit} \quad U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (2.34)$$

Die Formänderungsenergiedichte ergibt sich aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Verformungen bei linearer Elastizität zu:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.35)$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Aus dem Arbeitssatz lässt sich das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* ableiten, das einer Gleichgewichtsaussage aus virtuellen Arbeiten entspricht. Danach befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, wenn infolge einer virtuellen Verrückung die resultierende virtuelle innere Arbeit δW_i gleich der virtuellen äußeren Arbeit δW_a ist. Unter virtuellen Verrückungen versteht man geometrisch mögliche Verrückungen, welche die geometrischen Randbedingungen erfüllen, aber nur gedacht und infinitesimal klein sind. Es gilt:

$$\delta W_i = \delta W_a. \quad (2.36)$$

Ausgehend vom Arbeitssatz werden die Kraftgrößen (1) durch reale Spannungen und Kräfte und die kinematischen Größen (2) durch virtuelle Verzerrungen und Verschiebungen ersetzt. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen lautet somit in ausgeschriebener Form:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS. \quad (2.37)$$

Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials

Für elastisches Materialverhalten kann aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen das *Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials* hergeleitet werden. Dabei entspricht eine virtuelle Änderung der inneren Arbeit δW_i einer virtuellen Änderung des inneren Potentials $\delta \Pi_i$ und eine virtuelle Änderung der äußeren Arbeit δW_a bewirkt mit umgekehrtem Vorzeichen eine virtuelle Änderung des äußeren Potentials $\delta \Pi_a$:

$$\delta W_i = \delta \Pi_i, \quad \delta W_a = -\delta \Pi_a. \quad (2.38)$$

Aus der Gleichung (2.36) folgt, dass ein elastisches System dann im Gleichgewicht ist, wenn die Änderung des virtuellen Gesamtpotentials $\delta \Pi$ infolge einer beliebigen zulässigen Variation der kinematischen Größen Null ist:

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i + \Pi_a) = 0. \quad (2.39)$$

Dementsprechend nimmt das Gesamtpotential im Gleichgewicht einen Extrem- oder Stationärwert an. Bei linear-elastischem Materialverhalten ist dieser Stationärwert ein Minimum:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \text{Minimum}. \quad (2.40)$$

Das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials kann zur Lösung von Randwertproblemen für verschiedene elastische Strukturen herangezogen werden. Die Auswertung der Gleichung (2.39) liefert einen Satz von Differentialgleichungen mit zugehörigen Randbedingungen, die das Strukturverhalten beschreiben und aus denen die kinematischen Größen und damit auch die Spannungen ermittelt werden können. Die verwendeten virtuellen kinematischen Größen werden mathematisch auch als Variationen und deren Auswertung im virtuellen Gesamtpotential als Variationsrechnung bezeichnet.

2.4 Festigkeitskriterien

Festigkeitskriterien werden in der Mechanik verwendet, um das Versagen von technischen Strukturen zu bewerten, bei denen die Spannungszustände überwiegend gleichmäßig verteilt sind und keine lokalen Spannungssingularitäten auftreten. Das Versagen beginnt typischerweise mit der Entstehung kleinster Risse im Bauteil infolge fortschreitenden Verschleißes oder durch Überbeanspruchung und endet mit dem Bruch der Struktur, wodurch diese ihre konstruktiv zgedachte Funktion nicht mehr erfüllen kann. Festigkeitskriterien werden in der Regel bereits in der Entwurfsphase technischer Strukturen

berücksichtigt, um eine sichere Konstruktion zu erreichen. Nachfolgend werden einige der gebräuchlichsten Kriterien aus dem Buch Gross u. Seelig (2016) kurz vorgestellt.

Bei den Festigkeitskriterien, auch Versagenshypothesen genannt, werden im Wesentlichen zwei Arten von Kriterien unterschieden, von denen die eine die Festigkeit in Abhängigkeit vom vorliegenden Spannungszustand und die andere die Festigkeit in Abhängigkeit vom vorliegenden Verzerrungszustand angibt:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{und} \quad g(\varepsilon_{ij}) = 0. \quad (2.41)$$

Die Funktionen f und g bestehen dabei sehr oft aus der Differenz einer Vergleichsspannung σ_V bzw. einer Vergleichsdehnung ε_V und einem entsprechenden kritischen Wert σ_c bzw. ε_c :

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_V(\sigma_{ij}) - \sigma_c \quad \text{und} \quad g(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_V(\varepsilon_{ij}) - \varepsilon_c. \quad (2.42)$$

Die Vergleichsspannung oder die Vergleichsdehnung wird je nach gewähltem Festigkeitskriterium unterschiedlich bestimmt. Ein Spannungskriterium, das für spröde Werkstoffe geeignet ist, ist die *Hauptnormalspannungshypothese* nach Rankine, Lamé und Navier, nach der Versagen eintritt, wenn die größte positive Hauptnormalspannung σ_1 die kritische Spannung überschreitet. Die Vergleichsspannung ist somit gegeben durch:

$$\sigma_V = \sigma_1. \quad (2.43)$$

Im Fall eines ebenen Spannungszustandes, dessen Spannungen nicht im Hauptsystem vorliegen, wird die Vergleichsspannung durch

$$\sigma_V = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.44)$$

berechnet. Für Strukturen mit duktilem Materialverhalten wird typischerweise die *Gestaltänderungsenergiehypothese* verwendet, die auch als Fließbedingung nach von Mises bekannt ist und bei der die Gestaltänderungsenergiegedichte einen kritischen Wert zum Versagen erreichen muss. Die entsprechende Vergleichsspannung ergibt sich im allgemeinen ebenen Fall zu:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}. \quad (2.45)$$

Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere Versagenshypothesen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Als Dehnungskriterium gibt es analog

zur Hauptnormalspannungshypothese die weniger gebräuchliche *Hauptdehnungshypothese* nach Saint-Venant und Bach, mit der Versagen postuliert wird, wenn die größte Hauptdehnung die kritische Dehnung überschreitet. Weitere bekannte Spannungskriterien sind die *Mohr-Coulomb-Hypothese* und die *Drucker-Prager-Hypothese*, die Verallgemeinerungen der Fließbedingung nach von Mises darstellen. Beide sind jedoch hauptsächlich für die Vorhersage des Gleitversagens körniger, geologischer Materialien geeignet. Für die Versagensanalyse von orthotropen Laminaten gibt es ebenfalls geeignete Kriterien wie das Tsai-Hill-Kriterium und das Tsai-Wu-Kriterium sowie die Kriterien von Puck und Hashin. Damit können Faserbrüche, Matrixbrüche und Faser-Matrix-Ablösungen sowie die Delamination ganzer Einzelschichten vorhergesagt werden.

2.5 Bruchmechanik

Im Gegensatz zu den Festigkeitskriterien werden in der Bruchmechanik Strukturen mit lokal hohen Spannungsgradienten untersucht, wie sie beispielsweise an Rissspitzen auftreten. Dabei ermöglicht die Bruchmechanik die Abschätzung des möglichen Versagens einer Struktur durch die Ausbreitung eines vorhandenen Risses bis zum Bruch. Dies geschieht entweder mit der *linear-elastischen Bruchmechanik*, bei der inelastische Verformungen vernachlässigt werden, oder mit der *elastisch-plastischen Bruchmechanik*, bei der auch plastische Effekte in meist duktilen Werkstoffen berücksichtigt werden. Im Rahmen dieser Arbeit ist in erster Linie die linear-elastische Bruchmechanik relevant, auf die im Folgenden näher eingegangen wird. Die dargestellten Grundlagen sind den Büchern von Kuna (2008), Schijve (2009), Gross u. Seelig (2016) und Anderson (2017) entnommen.

Entsteht in einer räumlichen Struktur ein Riss, so zeigt sich dies durch eine flächige Aufspaltung der Struktur, wobei zwei *Rissoberflächen* entstehen, die auch als *Rissflanken* oder *Rissufer* bezeichnet werden. Die Rissflanken laufen weiter im Inneren der Struktur zur *Rissspitze* oder *Rissfront* zusammen, an die sich der noch ungerissene Teil anschließt. Je nach Beanspruchung verschieben sich die Rissflanken gegeneinander, wodurch sich der Riss öffnet. Bei dieser Rissöffnung werden, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, drei verschiedene Fälle unterschieden, die als *Rissöffnungsmoden* bezeichnet werden. Modus I entsteht durch vertikales Auseinanderziehen der Rissufer, während bei Modus II und Modus III die Rissufer senkrecht bzw. parallel zur Rissfront gegeneinander verschert werden. Treten gemischte Beanspruchungen

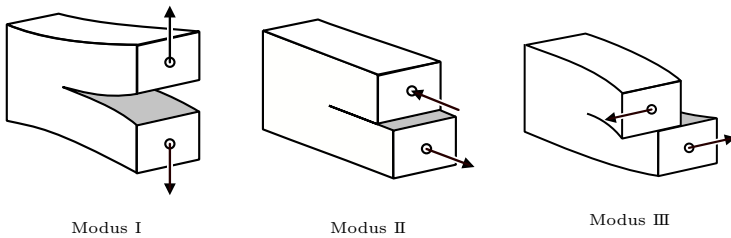


Abbildung 2.2: Darstellung der unterschiedlichen Rissöffnungsmoden.

auf, sodass sich die Rissöffnungsmoden überlagern, spricht man von Mixed-Mode-Beanspruchungen.

Für die bruchmechanische Beurteilung der Struktur ist das Geschehen an der Rissfront von großer Bedeutung. In diesem Bereich, der sogenannten *Prozesszone*, in der die Beanspruchung besonders hoch ist, lösen sich auf mikroskopischer Ebene Bindungen, was zur Bildung eines makroskopischen Risses führt. Sind die dabei auftretenden plastischen Verformungen klein und treten nur sehr lokal auf, können sie für die makroskopische Analyse vernachlässigt und die Gesamtstruktur kann vereinfacht als linear-elastisch betrachtet werden.

Rissspitzenfeld

Zur Analyse des mechanischen Verhaltens in der Prozesszone können die auftretenden Spannungen und Verschiebungen um die Rissfront, das sogenannte *Rissspitzenfeld*, mit einem asymptotischen Ansatz bestimmt werden. Betrachtet man eine ebene Struktursituation mit isotropem Materialverhalten und führt in der Risspitze ein Polarkoordinatensystem mit Radius r und Winkel φ ein, so lässt sich folgendes Rissspitzenfeld herleiten:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= r^{-1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\varphi) + \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(3)}(\varphi) + \dots, \\ u_i - u_{i0} &= r^{1/2} \hat{u}_i^{(1)}(\varphi) + r \hat{u}_i^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \hat{u}_i^{(3)}(\varphi) + \dots.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Die Spannungen σ_{ij} und die Verschiebungen u_i ergeben sich aus der Summe der einzelnen Eigenfunktionen, die auch als Deformations- bzw. Spannungsmoden bezeichnet werden. Die Verschiebung u_{i0} berücksichtigt mögliche Starrkörperverschiebungen. Ausgewertet im Nahfeld der Risspitze ($r \rightarrow 0$)

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

dominiert jeweils der erste Term, der bei den Spannungen ein singuläres Verhalten aufweist. Teilt man das Rissspitzenfeld im ebenen Fall in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil auf, so ergibt sich vereinfacht:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= r^{-1/2} \left[K_{\text{I}} f_{ij}^{\text{I}}(\varphi) + K_{\text{II}} f_{ij}^{\text{II}}(\varphi) \right], \\ u_i - u_{i0} &= r^{1/2} \left[K_{\text{I}} g_i^{\text{I}}(\varphi) + K_{\text{II}} g_i^{\text{II}}(\varphi) \right].\end{aligned}\tag{2.47}$$

Die Größen K_{I} und K_{II} werden als *Spannungsintensitätsfaktoren* bezeichnet, die den Rissöffnungsmoden I und II zugeordnet werden können und mit einer jeweiligen Winkelfunktion f bzw. g multipliziert werden. Im dreidimensionalen Fall kann in gleicher Weise zusätzlich der Spannungsintensitätsfaktor K_{III} hergeleitet werden. Die Spannungsintensitätsfaktoren sind von der Geometrie und der Beanspruchung der Struktur abhängig und müssen daher für jede konkrete Struktursituation individuell, meist numerisch, ermittelt werden. Eine umfassende Übersicht über die Spannungsintensitätsfaktoren für verschiedene Strukturfälle findet sich in den Handbüchern von Murakami (1987) und Tada et al. (2000).

Risse bilden einen Spezialfall gekerbter Strukturen, bei denen der Kerböffnungswinkel verschwindend klein ist. Eine Verallgemeinerung der Gleichungen (2.46) für beliebige gekerbte Strukturen, in denen Spannungssingularitäten auftreten, ergibt

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= r^{\lambda_1 - 1} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)} + r^{\lambda_2 - 1} \hat{\sigma}_{ij}^{(2)} + r^{\lambda_3 - 1} \hat{\sigma}_{ij}^{(3)} + \dots, \\ u_i - u_{i0} &= r^{\lambda_1} \hat{u}_i^{(1)} + r^{\lambda_2} \hat{u}_i^{(2)} + r^{\lambda_3} \hat{u}_i^{(3)} + \dots,\end{aligned}\tag{2.48}$$

wobei der erste Eigenwert, der bei kleinen Radien r dominiert, die sogenannte *Singularitätsordnung* λ bestimmt. Abhängig von der Singularitätsordnung gibt es unterschiedlich starke Singularitäten:

Rissspitzensingularität:	$\lambda = 1/2,$
schwache Singularität:	$1/2 < \lambda < 1,$
starke Singularität:	$0 < \lambda < 1/2.$

Schwache Spannungssingularitäten treten beispielsweise in Strukturen mit Spitzkerben auf, bei denen sich die Singularitätsordnung im Kerbgrund in Abhängigkeit vom Kerböffnungswinkel ergibt (Williams, 1952, Bogy, 1971). Für kleinere Öffnungswinkel nimmt die Singularitätsordnung ab, bis sie bei einem Öffnungswinkel nahe Null Grad in den Sonderfall der Rissspitzensingularität übergeht. Weitere Beispiele für schwache Spannungssingularitäten sind

Bimaterialübergänge, bei denen zwei unterschiedliche Materialien miteinander verbunden sind (Hein u. Erdogan, 1971, Sator u. Becker, 2012). Die Singularitätsordnung hängt neben der Kerbgeometrie auch vom Steifigkeitsverhältnis der beiden Materialien ab. Auch am Rand von faserverstärkten Laminatverbunden treten Spannungssingularitäten im Zuge des Laminatrandeffekts auf (Mittelstedt u. Becker, 2004, Wang u. Choi, 1983). Starke Singularitäten sind eher selten, können aber unter bestimmten Bedingungen in Bimaterialkerben auftreten (Sator, 2010, Mayland, 2012, Leguillon, 2013, Hell u. Becker, 2015).

Bruchmechanische Vorhersage von Risswachstum

In der Bruchmechanik gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, Risswachstum vorherzusagen. Besonders etabliert ist das *Irwinsche Kriterium* (Irwin, 1957), das auch *K-Konzept* genannt wird und das mit den Spannungsintensitätsfaktoren K_I , K_{II} und K_{III} zur Versagensbewertung arbeitet. Aus dem K-Konzept folgt, dass, wenn die Spannungsintensitätsfaktoren kritische Werte überschreiten, ein lokales Versagen der Struktur und damit Risswachstum auftritt. Für eine Struktur unter reiner Modus I Beanspruchung gilt dementsprechend:

$$K_I \geq K_{Ic}. \quad (2.49)$$

Ein vorhandener Riss kann also weiter wachsen, sobald der Spannungsintensitätsfaktor K_I die materialspezifische Bruchzähigkeit K_{Ic} übersteigt. Analoges gilt für die Spannungsintensitätsfaktoren der Rissöffnungsmoden II und III. Bei einer Mixed-Mode-Beanspruchung gilt ein allgemeines Bruchkriterium:

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) \geq 0. \quad (2.50)$$

Ein weiteres Versagenskriterium ist das *Energiekriterium* nach Griffith (1921), bei dem das Auftreten von Versagen in Abhängigkeit einer Energiefreisetzungsrates bewertet wird. Damit ein vorhandener Riss wachsen kann, ist eine entsprechende Energie zur Überwindung des Materialwiderstandes und damit zum Lösen der mikroskopischen Bindungen erforderlich, die als *Energiefreisetzungsrates* \mathcal{G} eingeführt wird. Betrachtet man eine zweidimensionale Struktur mit einem Riss unter quasistatischer Belastung, so ergibt sich die Energiefreisetzungsrates aus der freigesetzten potentiellen Energie $-d\Pi$ bezogen auf das infinitesimale Risswachstum der Länge da zu:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{da}. \quad (2.51)$$

\mathcal{G} wird dabei als *differentielle Energiefreisetzungsrate* bezeichnet. Für räumliche Betrachtungen wird anstelle der Risslänge da die Rissoberfläche dA verwendet, für die $dA = b \cdot da$ mit der Breite b gilt. Bei linear-elastischem Materialverhalten stehen Energiefreisetzungsrate und Spannungsintensitätsfaktoren in direktem Zusammenhang. Für die Energiefreisetzungsrate unter Mixed-Mode-Belastung gilt:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E^*} (K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2) + \frac{1}{2G} K_{\text{III}}^2. \quad (2.52)$$

Der Elastizitätsmodul E^* entspricht im ebenen Spannungszustand gerade dem Elastizitätsmodul E des verwendeten Materials und im ebenen Verzerrungszustand dem Term $E/(1-\nu^2)$. Im Versagensfall muss die Energiefreisetzungsrate einen kritischen Wert \mathcal{G}_c erreichen, der als Risswiderstand oder in Analogie zu K_{Ic} auch als Bruchzähigkeit bezeichnet wird. Das Bruchkriterium nach Griffith zum Nachweis des Risswachstums ist somit:

$$\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.53)$$

2.6 Finite Bruchmechanik

Die Finite Bruchmechanik ist ein noch neues Konzept, das der Annahme von Hashin (1996) folgt, dass Risse nicht kontinuierlich wachsen, sondern in einem diskreten Vorgang mit endlicher Länge entstehen können. Sie eignet sich daher zur Versagensbewertung von Strukturen mit lokalen Spannungsüberhöhungen und schwachen Spannungssingularitäten und stellt damit eine wichtige Ergänzung zu den klassischen Festigkeitskriterien aus Abschnitt 2.4 und den bruchmechanischen Kriterien aus Abschnitt 2.5 dar.

In gekerbten Strukturen oder an Multimaterialverbindungen treten lokale Spannungssingularitäten bereits vor der Rissentstehung auf. Wendet man dort ein klassisches Festigkeitskriterium an, so führt die Spannungssingularität dazu, dass selbst bei kleinsten angreifenden Lasten die Spannungen oberhalb der kritischen Spannung σ_c liegen und somit das Festigkeitskriterium immer ein Strukturversagen vorhersagt. Bruchmechanische Kriterien hingegen zeigen nie ein Strukturversagen an, da die differentielle Energiefreisetzungsrate an einer schwachen Spannungssingularität gleich Null ist und somit nie die Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c übersteigt (Leguillon, 1999).

Um dennoch sinnvolle Versagensaussagen mit Festigkeits- und Bruchkriterien zu erhalten, wurde zunächst von Neuber (1936, 1958) eine modifizierte Auswertung der Festigkeitskriterien vorgeschlagen und auf gekerbte Strukturen

angewendet. Dazu führte Neuber ein sogenanntes *elastisches Elementarteilchen* endlicher Länge im Kerbgrund ein, über dessen Länge eine gemittelte Auswertung des Festigkeitskriteriums möglich ist. Die Vergleichsspannung des Festigkeitskriteriums ergibt sich somit nicht mehr aus den singulären Spannungen im Kerbgrund, sondern aus über das Elementarteilchen gemittelten Spannungen, in denen der lokale Einfluss der Spannungssingularität nur noch abgeschwächt enthalten ist (Seweryn, 1994). Ein ähnliches Auswertungsverfahren wurde von Novozhilov (1969) für Scheiben mit elliptischen Löchern vorgestellt. Anstatt die Spannungen über einen bestimmten Abstand zu mitteln, was auch als *Line Method* (Taylor, 2007) bekannt ist, ist es auch möglich, die Spannungen punktweise in einem bestimmten Abstand vom Kerbgrund zu bestimmen. Beide Konzepte werden in der *Theorie kritischer Distanzen* von Taylor (2008) ausführlich behandelt. Im Falle der punktuellen Auswertung spricht man von der *Point Method*, die unter anderem von Wieghardt (1907), Whitney u. Nuismer (1974) und Taylor (2007) angewendet wurde. Modifikationen der Bruchkriterien führten in der Regel zur Einführung von fiktiven Anfangsrissen (Waddoups et al., 1971) oder Anfangsdefekten (Leblond u. Mouro, 1999), auf die dann die Bruchmechanik zur Beschreibung des Risswachstums angewendet werden kann. Grundsätzlich wird jedoch immer ein empirisch zu bestimmender Längenparameter benötigt, sei es der Abstand für die Spannungsauswertung oder die Größe eines infinitesimalen Risses, was in der Anwendung aufwendig und bis zu einem gewissen Grad willkürlich ist, aber die Ergebnisse wesentlich beeinflusst.

Betrachtung finiter Risse

Ausgehend von der Idee fiktiver Anfangsrisse führte Hashin (1996) eine Versagensbewertung auf der Basis finiter Risse ein, die die Grundlage der Finiten Bruchmechanik bildet. Er modellierte die Rissentstehung an thermomechanisch beanspruchten Laminaten unter der Annahme, dass die Rissentstehung nicht kontinuierlich, sondern spontan durch sprunghaftes Auftreten von Mikrorissen endlicher Länge erfolgt. Die zugehörige Energiefreisetzungsrates für einen Riss finiter Länge ist die inkrementelle Energiefreisetzungsrates \bar{G} , die der freigesetzten potentiellen Energie bezogen auf die finite Rissoberfläche ΔA entspricht. Im ebenen Fall wird die freigesetzte Energie bezogen auf die Risslänge Δa betrachtet und es gilt:

$$\bar{G} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta a}. \quad (2.54)$$

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate ist eine gemittelte Größe, die sich aus dem Integral der differentiellen Energiefreisetzungsrate über die Risslänge Δa ergibt:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \mathcal{G}(\bar{a}) d\bar{a}. \quad (2.55)$$

Analog zum Bruchkriterium nach Griffith gemäß der Gleichung (2.53) formulierte Hashin eine Versagensaussage, nach der ein Bruch eintreten kann, wenn die inkrementelle Energiefreisetzungsrate für einen Riss finiter Länge Δa die Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c erreicht oder übersteigt:

$$\bar{\mathcal{G}} \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.56)$$

Gekoppeltes Kriterium

Die von Hashin vorgestellte Modellierung finiter Risse wurde von Leguillon (2002) aufgegriffen, der ein gekoppeltes Kriterium zur Beschreibung der sprunghaften Entstehung finiter Risse in spröden Strukturen entwickelte. Beim gekoppelten Kriterium werden das Spannungs- und das Energiekriterium, die bisher isoliert voneinander behandelt wurden, gemeinsam betrachtet. Dies ist insbesondere bei Strukturen mit lokalen Spannungsüberhöhungen von Vorteil, bei denen Spannungs- und Energiekriterium getrennt betrachtet keine sinnvollen Versagensaussagen zulassen. Aufgrund der Verwendung einer spannungsbasierten und einer energiebasierten Komponente wird das gekoppelte Kriterium auch als hybrides Kriterium bezeichnet (Müller et al., 2006, Hebel u. Becker, 2008). Damit für eine konkrete Risslänge Δa beide Teilkriterien erfüllt sind, muss

$$\sigma_V(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c \quad (2.57)$$

gelten. Demnach muss die Vergleichsspannung in der ungerissenen Struktur über die gesamte Oberfläche Ω_c des potentiell entstehenden Risses größer oder gleich der Festigkeit sein und gleichzeitig muss die inkrementelle Energiefreisetzungsrate des Risses größer oder gleich der Bruchzähigkeit sein. Alternativ kann das Spannungskriterium auch im integralen Mittel betrachtet werden, wobei eine über die entstehende Risslänge gemittelte Spannung verwendet wird (Cornetti et al., 2006). In jedem Fall hängt das gekoppelte Kriterium ausschließlich von den beiden kritischen Materialkennwerten σ_c und \mathcal{G}_c ab und ist nicht auf zusätzliche empirische Längenparameter angewiesen.

Mit Hilfe der beiden Teilkriterien kann sowohl die für die Rissinitiierung erforderliche kritische Versagenslast F_c als auch die Länge des im Versagensfall

entstehenden Risses Δa_c ermittelt werden. Die kritische Versagenslast ist die kleinste Last, bei der das Spannungs- und das Energiekriterium gleichzeitig erfüllt sind. Zur Bestimmung der Versagenslast ist daher ein Optimierungsproblem folgender Art zu lösen:

$$F_c = \min_{F, \Delta a} \left\{ F \mid \sigma_V(\sigma_{ij}(\mathbf{x}, F)) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{G}(\Delta a, F) \geq \mathcal{G}_c \right\}. \quad (2.58)$$

Der Aufwand des Optimierungsverfahrens bei der Suche nach der Versagenslast kann in vielen Fällen erheblich reduziert werden, wenn die Spannungen ausgehend vom Rand der Struktur, an dem die Spannungssingularität auftritt, einen streng monoton fallenden Verlauf aufweisen und gleichzeitig die inkrementelle Energiefreisetzungsrage streng monoton ansteigt. Dann folgt, dass die maximale Risslänge Δa_S , die nach dem Spannungskriterium möglich ist, eine obere Schranke für die gesuchte Risslänge darstellt und die minimale Risslänge Δa_E aus dem Energiekriterium eine untere Schranke für die gesuchte Risslänge darstellt. Daraus ergeben sich in Abhängigkeit der aufgebrachten Last F drei verschiedene Fälle, die in Abbildung 2.3 dargestellt sind:

- Bei unterkritischer Beanspruchung ($F \leq F_c$), dargestellt in Abbildung 2.3 links, ist die durch Δa_S beschriebene obere Schranke kleiner als die durch Δa_E beschriebene untere Schranke, weshalb es keine mögliche Risslänge gibt, bei der das Spannungs- und das Energiekriterium gleichzeitig erfüllt sind. Damit sich die Schranken annähern und eine gemeinsame kritische Risslänge bestimmt werden kann, muss die Last F erhöht werden.
- Entspricht die aufgebrachte Last der gesuchten kritischen Last ($F = F_c$), bei der das Versagen auftritt, wie in Abbildung 2.3 in der Mitte dargestellt, so sind das Spannungs- und das Energiekriterium des Optimierungsproblems aus Gleichung (2.58) genau an einem Punkt erfüllt. Die Risslänge der oberen Schranke Δa_S fällt genau mit der Risslänge der unteren Schranke Δa_E zusammen.
- Bei überkritischer Beanspruchung ($F \geq F_c$), wie in Abbildung 2.3 rechts beschrieben, gibt es einen größeren Risslängenbereich, in dem beide Kriterien gleichzeitig erfüllt sind. Dadurch ist keine eindeutige Zuordnung der Risslänge möglich und die aufgebrachte Last ist zwar kritisch, aber nicht die kleinste kritische Last. Durch Reduzierung der Last fallen die Kurven des Spannungs- und Energiekriteriums ab und die Risslängen Δa_S und Δa_E nähern sich an, bis die kleinste kritische Last ermittelt ist.

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

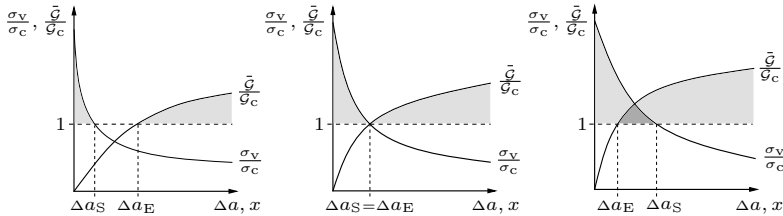


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums für eine unterkritische (links), eine kritische (mittig) und eine überkritische (rechts) Belastung. Die Vergleichsspannung σ_v und die inkrementelle Energiefreisetzungsrate \tilde{G} sind auf den jeweiligen kritischen Wert σ_c bzw. \mathcal{G}_c bezogen. Die Bereiche, in denen das Spannungs- und das Energiekriterium erfüllt sind, sind grau hervorgehoben.

Anwendungsgebiete

Die Versagensanalyse mit Hilfe des gekoppelten Kriteriums der Finiten Bruchmechanik ist auf eine Vielzahl von Struktursituationen mit schwachen Singularitäten oder Spannungsüberhöhungen anwendbar. Eine gute Übersicht über Anwendungsgebiete und relevante Veröffentlichungen findet sich in der Arbeit von Weißgraeber et al. (2016b). Nach der Einführung des gekoppelten Kriteriums von Leguillon (2002) wurde es unter anderem erfolgreich auf Spitzkerben mit schwachen Spannungssingularitäten im Kerbgrund angewendet (Cornetti et al., 2006, Taylor et al., 2005). Ein Überblick über die Versagensbewertung von Spitzkerben findet sich beispielsweise in Lazzarin et al. (2014). Es wurden Versagensanalysen für Spitzkerben sowohl unter einfachen Belastungen (Carpinteri et al., 2011) als auch unter Mixed-Mode-Belastung (Hebel u. Becker, 2008, Sapora et al., 2013) durchgeführt und der Einfluss des Kerbwinkels auf das Versagensgeschehen untersucht (Leguillon u. Yosibash, 2003, Cornetti et al., 2013). Grundsätzlich zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Finiten Bruchmechanik und den Experimenten (Tran et al., 2012). Auch Bi- und Multimaterialübergänge können mit dem gekoppelten Kriterium gut analysiert werden (Felger et al., 2019a). Häufig handelt es sich dabei um Klebverbindungen, bei denen Bauteile aus unterschiedlichen Materialien gefügt werden. Neben analytischen Auswertungen bei Weißgraeber u. Becker (2013), Carrere et al. (2015) und Stein et al. (2015) finden sich numerische Auswertungen der Finiten Bruchmechanik in den Arbeiten von Müller et al. (2006) und Hebel u. Becker (2008). Letztere sowie Bremm et al. (2021) wenden ihre Klebschichtmodellierung auf Metall-Keramik-Verbindungen in Brennstoffzellenstacks an, die großen thermischen Beanspruchungen ausgesetzt sind. Neben linear-elastischen Klebverbindun-

gen können auch Klebverbindungen mit nichtlinearem Materialverhalten untersucht werden (Rosendahl et al., 2019). Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen finden sich unter anderem in Mendoza-Navarro et al. (2013), Moradi et al. (2013) und Hell et al. (2014). Aber auch an Laminaträndern und -ecken treten am Übergang der Laminatschichten schwache Spannungssingularitäten auf, deren Delaminationsverhalten mit dem gekoppelten Kriterium untersucht werden kann (Hebel et al., 2010, Martin et al., 2010, García et al., 2014, Dölling et al., 2021, Frey et al., 2021). Weitere mögliche Anwendungsgebiete der Finiten Bruchmechanik sind die Bewertung von Bolzenverbindungen (Catalanotti u. Camanho, 2013, Nguyen-Hoang u. Becker, 2020, 2023), von Rundkerben (Taylor et al., 2005) oder von mit Löchern versehenen Strukturen (Weißgraeber et al., 2016a, Leite et al., 2021).

Kapitel 3

Stand der Forschung zur Strukturmechanik von Klebverbindungen

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die Grundlagen des Klebens sowie über den für diese Arbeit relevanten Stand der Forschung zur Mechanik von Klebverbindungen gegeben. Dabei werden zunächst bestehende Konzepte zur Modellierung und Spannungsanalyse von Klebverbindungen vorgestellt. Anschließend wird ein Einblick in das Versagensverhalten von Klebverbindungen gegeben und auf gängige Verfahren zur Versagensmodellierung eingegangen.

3.1 Einführende Bemerkungen zu Klebverbindungen

Kleben ist nach DIN 8593-8 (2003) ein Fertigungsverfahren aus der Gruppe der Fügeverfahren, bei dem die zu fügenden Bauteile durch einen Klebstoff miteinander verbunden werden. Es gehört damit, wie das Löt- und das Schweißen, zu den stoffschlüssigen Fügeverfahren. Neben den stoffschlüssigen Fügeverfahren kann eine Verbindung auch durch Kraftschluss, wie bei Schraub- und Pressverbindungen, oder durch Formschluss, wie bei Niet- und Bolzenverbindungen, hergestellt werden. Der stoffschlüssige Verbund beim Kleben entsteht durch die Verwendung eines nichtmetallischen Klebstoffes, der flächig zwischen den Fügepartnern aufgebracht wird und an diesen haftet. Um eine gute Haftung zu erreichen, wird der Klebstoff typischerweise vor dem Auftragen erwärmt und härtet dann bei Raumtemperatur aus. Die flächige Haftung an der Schichtgrenze zwischen Klebstoff und Fügepartner wird als *Adhäsion* bezeichnet, die zusammen mit der inneren Festigkeit des Klebstoffs, der *Kohäsion*, die Festigkeit der gesamten Klebverbindung bestimmt (Jüntgen, 2019). Die Klebstoffschicht ist dabei in der Regel deutlich dünner als die Fügepartner.

Aufgrund der flächig verteilten Lastübertragung durch Adhäsion eignen sich Klebverbindungen im Vergleich zu Schraub-, Niet- oder Bolzenverbindungen besonders für leichte, dünnwandige Strukturen, wie sie im konstruktiven Leichtbau zum Einsatz kommen. Es können Fügepartner aus unterschiedlichen Werkstoffen wie Metallen, Kunststoffen und den im Leichtbau typischen Faserverbundwerkstoffen in beliebiger Kombination miteinander verbunden werden. Je nach Wahl des Klebstoffs kann die thermische Beeinflussung der Fügepartner beim Aushärten des Klebstoffs stark reduziert werden, sodass auch Fügepartner mit geringer thermischer Belastbarkeit gefügt werden können (Jüntgen, 2019). Verbindungen mit dickeren Klebstoffschichten weisen zudem eine hohe Schwingungsdämpfung auf, die mit einer guten Festigkeit bei dynamischer Beanspruchung einhergeht. Nachteile von Klebverbindungen liegen in den materialabhängigen Fertigungs- und Aushärtungsbedingungen. Damit eine Klebverbindung optimal hält, müssen die Oberflächen der Fügepartner vor dem Verkleben vorbereitet und gereinigt werden (Wegman u. Van Twisk, 2013). Nach dem Aushärten lassen sich Klebstoff und Fügepartner nicht mehr voneinander lösen, wie es beispielsweise bei Schraubverbindungen möglich ist. Es werden allerdings auch keine Löcher benötigt, an denen die in Abschnitt 2.5 beschriebenen Kerbwirkungen auftreten. Darüber hinaus sind Klebverbindungen im Vergleich zu anderen Fügeverfahren empfindlicher gegenüber Temperaturänderungen und dem Auftreten von Feuchtigkeit, wodurch sich der Klebstoff und die Fügepartner je nach Werkstoff unterschiedlich stark ausdehnen können, was zu zusätzlichen Spannungen führt.

Klebverbindungen gibt es in verschiedenen Ausführungen hinsichtlich Material und Geometrie. Für die Klebschicht eignen sich vor allem synthetisch hergestellte, nichtmetallische Klebstoffe, die nach dem Auftragen eine gewisse Zeit aushärten müssen, um ihre volle Tragfähigkeit zu erreichen (DIN EN 923, 2015). Weit verbreitet sind Strukturklebstoffe und Epoxidharze auf der Basis einer oder mehrerer reaktiver Komponenten. Hinsichtlich der Fügepartner gibt es nur wenige Einschränkungen. Neben Metallen, Kunststoffen und Faserverbundwerkstoffen können auch organische Strukturen oder Glas gefügt werden. Hinsichtlich der Form und der Abmessungen unterscheidet man verschiedene Arten von Klebverbindungen. Allen gemeinsam ist, dass der Klebstoff flächig auf die Fügepartner aufgetragen wird und diese dann überlappend verbunden werden. Die gebräuchlichsten Ausführungen sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen einschnittigen und mehrschnittigen Überlappungsfügungen, die sich durch eine oder mehrere Klebstoffschichten auszeichnen.

3.1 Einführende Bemerkungen zu Klebverbindungen

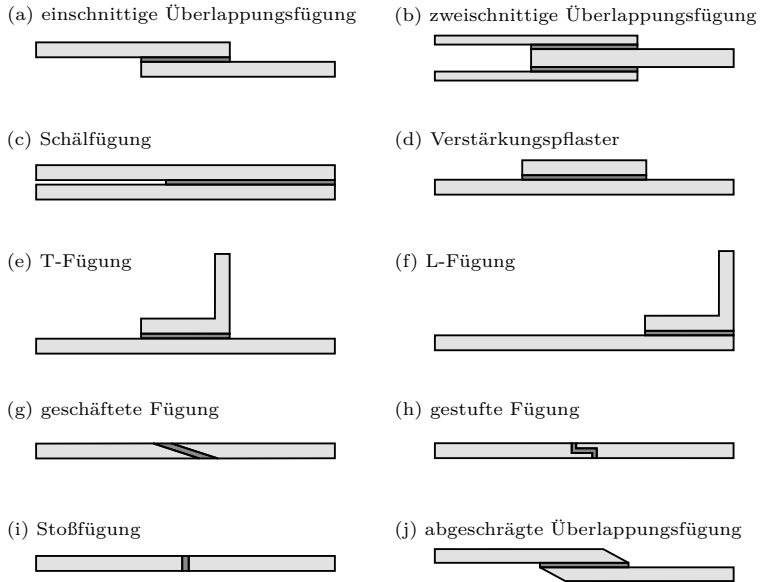


Abbildung 3.1: Übersicht über die gebräuchlichsten Klebefügungen. In den einschlägigen Veröffentlichungen werden die folgenden entsprechenden englischen Bezeichnungen verwendet: (a) single-lap joint, (b) double-lap joint, (c) double cantilever beam, (d) reinforcing patch, (e) T-joint, (f) L-joint, (g) scarfed joint, (h) stepped joint, (i) butt joint, (j) bevelled joint.

Die Einsatzmöglichkeiten von Klebverbindungen sind vielfältig. Insbesondere die Luft- und Raumfahrtindustrie, die stark auf Schalenbauweisen mit großen, flächigen Strukturen setzt, ist auf gewichtssparende Klebverbindungen angewiesen, aber auch zunehmend der Fahrzeugbau und der allgemeine Maschinenbau. Dort können Klebverbindungen neben der Fügefunktion auch zur Abdichtung eingesetzt werden. In der Elektrotechnik werden Chips mit Klebstoffen auf Substraten montiert (Suhir et al., 2007), im Bauwesen werden Betonkonstruktionen mit Faserverbundpflastern verstärkt (Bahn u. Harichandran, 2008, Methfessel u. Becker, 2023a) und auch in der Verpackungsindustrie wird eine Vielzahl von Produkten geklebt. Einschnittige Überlappungsfügungen werden dabei aufgrund ihrer einfachen Herstellung am häufigsten eingesetzt (Adams et al., 1997, Habenicht, 2009).

3.2 Spannungsmodellierung

Ein wesentlicher Vorteil von Klebverbindungen gegenüber anderen Verbindungsarten ist die flächig verteilte Lasteinleitung (siehe Abschnitt 3.1). Während die resultierenden Spannungen senkrecht zur Belastungsrichtung in Tiefenrichtung in guter Näherung konstant verteilt sind, treten insbesondere bei einschnittigen Überlappungen, wie in Abbildung 3.2 zu sehen, an den Enden des Überlappungsbereiches in Belastungsrichtung lokale Spannungsspitzen auf (Habenicht, 2009). Diese resultieren aus der lokal unterschiedlichen Längsdehnung der Fügepartner. Für einen sicheren Einsatz der Klebverbindung ist eine genaue Untersuchung der genannten Spannungsverteilungen und der auftretenden Verformungen erforderlich, die als Grundlage für Festigkeits- und Versagensanalysen dienen. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die verhältnismäßig nachgiebige Klebschicht gelegt, die in erster Linie für das Versagen verantwortlich ist.

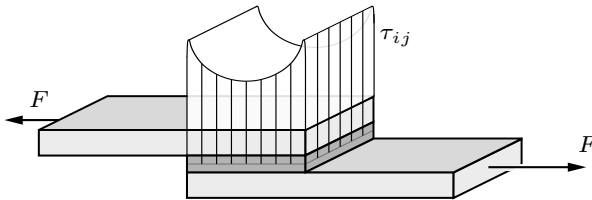


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Schubspannungsverteilung in der Klebschichtmitte einer auf Zug beanspruchten einschnittigen Überlappungsfügung.

3.2.1 Bestehende Konzepte zur Spannungsberechnung

Bis heute wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Modellierungskonzepte zur Spannungsanalyse von Klebverbindungen entwickelt. Neben numerischen Modellen (Wooley u. Carver, 1971, Adams u. Peppiatt, 1974, Adams u. Harris, 1987, Gonçalves et al., 2002) existieren zahlreiche analytische Berechnungskonzepte, die auf bestimmten vereinfachenden Annahmen beruhen. Während numerische Auswertungen, zum Beispiel mittels Finite-Elemente-Analysen (FEA), sehr zeit- und rechenaufwendig sind, liefern sie detaillierte Ergebnisse mit hoher Genauigkeit auch für Klebverbindungen mit komplexer Geometrie oder komplexem Materialverhalten. Analytische Modelle hingegen zeichnen sich durch ihre Einfachheit und Effizienz aus und liefern schnelle Ergebnisse, sind aber oft auf konkrete Struktursituationen beschränkt und daher weniger

flexibel einsetzbar. Einen umfassenden Überblick über bestehende Modelle für Klebverbindungen geben da Silva et al. (2009a,b), Wong u. Liu (2017) und Budhe et al. (2017). Ein Überblick zu numerischen Berechnungsmodellen von Klebverbindungen finden sich bei da Silva u. Campilho (2012). Im Folgenden werden die wichtigsten existierenden Modellierungskonzepte kurz vorgestellt.

Die erste theoretische Analyse der Spannungsverteilung in Klebverbindungen wurde 1938 von Volkersen vorgestellt, der ein einfaches Modell zur Untersuchung von einschnittigen Nietverbindungen entwickelte. Die Verbindungen sind dreischichtig und bestehen aus zwei Fügepartnern und einer dünnen elastischen Zwischenschicht, mit der die Fügepartner verbunden sind. Die Fügepartner werden als isotrope Balken mit linear-elastischem Materialverhalten modelliert. Auftretende Längsdehnungen werden berücksichtigt, Biegeverformungen jeglicher Art werden jedoch ausgeschlossen. Die äußeren Lasten werden an den Enden der Fügepartner durch Zugkräfte eingeleitet. Die verbindende Zwischenschicht, die verallgemeinernd auch als Klebschicht angesehen werden kann, wird als isotrope linear-elastische Schicht aus Schubfedern modelliert. Damit können die aus der Verformung der Fügepartner resultierenden Schubverzerrungen in die Klebschicht übertragen werden. Diese stark vereinfachte Art der Modellierung dünner Klebschichten wird oft als *weak-interface*-Modell bezeichnet (Lenci, 2001), das vor allem bei spröden Klebstoffen gute Ergebnisse liefert.

Eine weitere bedeutsame Arbeit wurde 1944 von Goland und Reissner vorgelegt, die die Spannungen in zementierten einschnittigen Überlappungsfügungen für steife und nachgiebige Klebschichten ermittelten. Im Gegensatz zu Volkersen (1938) betrachteten sie zusätzlich Biegeverformungen in den Fügepartnern, indem sie neben den Normalkräften auch Biegemomente und Querkräfte an den Enden des Überlappungsbereiches berücksichtigten. Dies ist besonders wichtig bei einschnittigen Überlappungsfügungen, bei denen sich der Überlappungsbereich unter Belastung verdreht. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, haben Goland und Reissner einen Biegemomentenfaktor zur Abschätzung der variierenden Biegemomente und einen entsprechenden Querkraftfaktor für die Querbelastung eingeführt. Die Biegung der Fügepartner führt neben den bereits von Volkersen festgestellten Schubspannungen auch zur Entstehung von Schälspannungen. Um diese Spannungen zu erfassen, wird die Klebschicht wie auch bei Volkersen mit einem *weak-interface*-Ansatz modelliert, der jedoch in diesem Fall aus einer Kombination von Schub- und transversalen Zugfedern besteht. Zugfedern in Längsrichtung und zugehörige Normalspannungen in der Klebschicht werden in der Modellierung vernachlässigt. Mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen, Kinematik und konstitutiven

Kapitel 3 Stand der Forschung zur Strukturmechanik von Klebverbindungen

Gleichungen wird ein System von Differentialgleichungen hergeleitet. Die Auswertung der resultierenden Spannungsverteilungen erfolgt in der horizontalen Mittelebene der Klebschicht, da die Spannungen nur in Längsrichtung variieren und in Dickenrichtung als konstant angenommen werden.

Auf der Grundlage der beiden vorgestellten Modelle wurden zahlreiche Modifikationen entwickelt. So untersuchte de Bruyne (1944) abgeschrägte Fügepartner, um gleichmäßig verteilte Schubspannungen in der Klebschicht zu erhalten. Sowohl Hart-Smith (1973a) als auch Srinivas (1975) zeigten anhand geschäfteter und gestufter Verbindungen, dass die hohen Schälspannungen an den Enden des Überlappungsbereichs durch geeignete konstruktive Maßnahmen reduziert werden können, sodass die Struktur weniger versagensanfällig ist. Wah (1973) bewertete erstmals Fügepartner mit anisotropem Materialverhalten in Form von faserverstärkten Laminaten. In mehreren weiteren Studien wurde dieser Ansatz verfeinert, so zum Beispiel von Renton u. Vinson (1975) für symmetrisch verklebte Lamine, während Delale et al. (1981) und Yang u. Pang (1996) das Modell verallgemeinerten, um auch asymmetrische Konfigurationen mit Laminatfügepartnern berechnen zu können. Mortensen u. Thomsen (1997) analysierten eine Kombination von geschäfteten und gestuften Verbindungen von Laminaten. Zuletzt haben Golewski u. Sadowski (2019) die Spannungen für eine Vielzahl von Fügungen mit unterschiedlichen Geometrien untersucht. Aufbauend auf dem Ansatz von Volkersen (1938) versuchten Tsai et al. (1998) die von Volkersen und Goland u. Reissner (1944) vernachlässigten Schubdeformationen in den Fügepartnern zu berücksichtigen. Sie schlugen linear variierende Schubdeformationen in transversaler Richtung durch die Fügepartner vor und bewerteten deren Auswirkung auf die Klebstoffschicht in zweischnittigen Überlappungsfügungen. Neben den Materialeigenschaften der Fügepartner wurde auch das Konzept des Biegemomentenfaktors weiterentwickelt. In diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von Hart-Smith (1973b), Oplinger (1994), Zhao et al. (2010) und zuletzt Talmon l'Armée et al. (2016) zu erwähnen, welche die Bestimmung des Biegemomentenfaktors maßgeblich verbesserten. Cheng et al. (1991) leiteten für den Fall nicht identischer Fügepartner zwei Biegemomentenfaktoren für die beiden Fügepartner ab.

Die bisher genannten Ansätze zur Analyse der Spannungsverteilung in Klebverbindungen haben jedoch alle einige gemeinsame Schwächen. So erfüllen sie beispielsweise nicht die Bedingung der spannungsfreien Ränder an den freien Enden der Klebschicht. Renton u. Vinson (1973), Pirvics (1974), Allman (1977) und Chen u. Cheng (1983) ist es gelungen, Modelle zu entwickeln, die unter Verwendung von Spannungsfunktionen die Bedingung der spannungsfreien Ränder der Klebschicht erfüllen. Da die Klebschicht an den Enden

des Überlappungsbereichs freie, unbelastete Ränder hat, müssen die Schubspannungen der Klebschicht dort verschwinden und dürfen nicht, wie in den meisten Modellen, endliche Werte annehmen. Eine weitere Schwäche liegt in der Beschränkung auf bestimmte Fügekonfigurationen, für die in Abhängigkeit von Geometrie und Beanspruchung individuelle Lösungen hergeleitet wurden. Daher stellten Bigwood und Crocombe 1989 ein verallgemeinertes Modell vor, mit dem Fügekonfigurationen unterschiedlicher Geometrie unter verschiedenen Lastbedingungen untersucht werden können. Anstatt eine konkrete Konfiguration zu berücksichtigen, modellierten sie nur den Überlappungsbereich und sowohl der Lastfall als auch die Geometrie wurden durch Schnittkräfte und Schnittmomente am linken und rechten Ende des Überlappungsbereichs in die Fügepartner eingeleitet. Diese Art von Modell wird aufgrund der sandwichartigen Struktur oft als *general sandwich-type*-Modell bezeichnet und ermöglicht vielseitige Analysen von ein- und zweiseitigen Fügungen, T-Fügungen, Verstärkungspflastern, Schälfügungen und vielen anderen Konfigurationen. Zusätzlich zu den Fügepartnern wurde auch die Modellierung der Klebschicht erweitert, da die meisten Modelle auf Fügungen mit sehr dünnen Klebstoffschichten limitiert sind, bei denen der *weak-interface*-Ansatz noch ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Die Anwendung dieses Ansatzes auf Strukturen mit dickeren Klebstoffschichten führt jedoch zu Ungenauigkeiten und motiviert die Verwendung neuer, fortschrittlicher Ansätze für die Klebstoffschicht. Ojalvo u. Eidinoff (1978) haben eine erste nennenswerte Studie zu dicken Klebstoffschichten durchgeführt. Sie schlugen eine leicht modifizierte Kinematik für die Klebstoffschicht vor, die lineare Änderungen der Schubspannungen in Richtung der Klebschichtdicke zulässt, anstatt, wie in früheren Studien, konstante Spannungen anzunehmen. Weitere neuere Arbeiten zur Berechnung von Spannungsverteilungen höherer Ordnung stammen von Chen u. Qiao (2012), Rabinovitch (2014), Wong (2015) und Jiang u. Qiao (2015). Anstatt wie Ojalvo und Eidinoff die Klebstoffverschiebungen zu modifizieren, stellten sie direkt Spannungsfunktionen höherer Ordnung auf. Parallel dazu gab es ähnliche Bemühungen auf dem Gebiet der Elektronik, bei denen Überlappungsfügungen unter vorwiegend thermischer Belastung untersucht wurden. An erster Stelle sind hier die Arbeiten von Chen u. Nelson (1979) und Suhir (1986, 1989) zu nennen, deren Ansätze denen von Goland u. Reissner (1944) ähneln. Darüber hinaus wurde die Klebschichtmodellierung in verschiedenen anderen Forschungsbereichen angewendet, wie zum Beispiel in den jüngsten Studien zur Modellierung von Schneebrettlawinen von Rosendahl u. Weißgraeber (2020a,b).

3.2.2 Detaillierte Darstellung der zentralen Grundprinzipien

Im Folgenden werden die für die vorliegende Arbeit relevanten Grundlagen aus den Arbeiten von Volkersen (1938), Goland u. Reissner (1944), Ojalvo u. Eidinoff (1978) und Bigwood u. Crocombe (1989) aus Abschnitt 3.2.1 ausführlicher dargestellt.

Kinematische Grundlagen

Sowohl bei Volkersen (1938), als auch bei Goland u. Reissner (1944) und bei Ojalvo u. Eidinoff (1978) wird die jeweilige analytische Klebschichtmodellierung anhand einer einschnittigen Überlappungsfügung vorgestellt, wie sie schematisch in Abbildung 3.3 zu sehen ist. Dabei werden Klebverbindungen betrachtet, deren Klebschicht und Fügepartner isotropes Materialverhalten aufweisen und durch den jeweiligen Elastizitätsmodul E und die zugehörige Querkontraktionszahl ν beschrieben werden können. Oberer und unterer Fügepartner (Index 1,2) mit den Dicken h_1 und h_2 überlappen sich in einem Bereich der Länge l , in welchem sie mit der Klebschicht (Index a) der Dicke t verbunden sind. Die über den Überlappungsbereich hinausgehenden Enden der Fügepartner haben die Länge l_f . Bei der untersuchten Beanspruchung wirken Zugkräfte in horizontaler x -Richtung, die zu den Verformungen u und w in der x, z -Ebene führen. Effekte in y -Richtung entlang der Breite b der Klebverbindung werden in guter Näherung vernachlässigt.

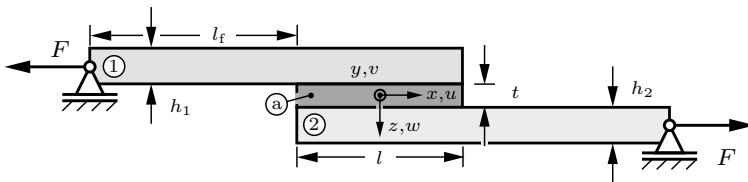


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung einer axial zugbeanspruchten, einschnittigen Überlappungsfügung bestehend aus den beiden Fügepartnern (1) und (2) und der Klebschicht (a).

Volkersen (1938) modellierte Klebverbindungen mit biegestarren Fügepartnern, die sich unter Zugbelastung nur horizontal in Lastrichtung dehnen und nicht verbiegen. Infolge der Dehnung der Fügepartner entsteht in der

Klebschicht eine Schubverzerrung $\gamma_{xz}^{(a)}$, die Volkersen aus der Verschiebungsdifferenz der Fügepartner bezogen auf die Klebschichtdicke ermittelt:

$$\gamma_{xz}^{(a)} = \frac{\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}}{t}. \quad (3.1)$$

Die Verschiebungen $\hat{u}^{(1)}$ und $\hat{u}^{(2)}$ entsprechen den Verschiebungen der beiden Fügepartner am Übergang zur Klebschicht. Die Klebschicht selbst wird nicht genauer modelliert und die Verformung der Klebschicht wird aus der Verformung der Fügepartner bestimmt. Diese Art des Modells wird, wie in Abschnitt 3.2.1 eingeführt, als *weak-interface*-Modell bezeichnet. Während mit der Volkersen-Modellierung in horizontaler Richtung komplexe Schubspannungsverläufe abgebildet werden können (Habenicht, 2009), lassen sich in Richtung der Klebschichtdicke nur konstante Schubspannungsverläufe berechnen.

Die Modellierung von Goland u. Reissner (1944) stellt eine Erweiterung der Modellierung von Volkersen dar, bei der erstmals die Biegeverformung der Fügepartner an symmetrischen einschnittigen Überlappungsfügungen berücksichtigt wird. Insbesondere bei einschnittigen Überlappungsfügungen kommt es unter Zugbelastung zu einer Biegung der Fügepartner und damit zu einer Verdrehung des Überlappungsbereiches, woraus neben einer horizontalen Schubbeanspruchung eine vertikale Schälbeanspruchung resultiert. Daher wird in der Kinematik nach Goland und Reissner neben der Schubverzerrung $\gamma_{xz}^{(a)}$ auch eine aus den Durchbiegungen $\hat{w}^{(1)}$ und $\hat{w}^{(2)}$ der Fügepartner resultierende vertikale Dehnung $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ verwendet:

$$\gamma_{xz}^{(a)} = \frac{\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}}{t}, \quad \varepsilon_{zz}^{(a)} = \frac{\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)}}{t}. \quad (3.2)$$

Aus den Verzerrungen resultieren nach dem Hookeschen Gesetz aus Abschnitt 2.1 Schub- und Schälspannungen, die wie bei Volkersen über die Klebschichtdicke konstant sind.

Die Berechnung linearer Spannungsverläufe in Dickenrichtung der Klebschicht gelang erstmals Ojalvo u. Eidinoff (1978) durch die Einführung linearer Verschiebungsfelder in der Klebschicht. Mit Hilfe des linearisierten Verzerrungstensors aus Gleichung (2.9) lassen sich damit in vertikaler z -Richtung linear verlaufende Schubverzerrungen und konstante Dehnungen herleiten:

$$\gamma_{xz}^{(a)} = \frac{\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}}{t} + \frac{\hat{w}^{(1)'} + \hat{w}^{(2)'}}{2} + z \frac{\hat{w}^{(2)'} - \hat{w}^{(1)'}}{t}, \quad \varepsilon_{zz}^{(a)} = \frac{\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)}}{t}. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet $(\cdot)'$ die Ableitungen nach der x -Koordinate. Ziel dieser Erweiterung war es, den Einfluss der Klebschichtdicke auf die in der Klebschicht auftretenden Spannungen besser zu berücksichtigen. Während die bisherigen Modelle nur für Klebverbindungen mit sehr dünnen Klebschichten geeignet sind, bei denen die Annahme konstanter Spannungsverläufe über die Klebschichtdicke gerechtfertigt ist, ermöglicht der Ansatz von Ojalvo und Eidinoff eine genauere Beschreibung des Spannungsgeschehens und liefert auch bei zunehmender Klebschichtdicke noch gute Ergebnisse.

General sandwich-type-Modell

Zur Berechnung der Spannungen und Verformungen in der Klebschicht werden in den Arbeiten von Volkersen (1938), Goland u. Reissner (1944) und Ojalvo u. Eidinoff (1978) neben den jeweiligen kinematischen Beziehungen und dem Hookeschen Gesetz auch Gleichgewichtsbedingungen formuliert. Aus diesen lassen sich Differentialgleichungen ableiten, mit denen die auftretenden Spannungen berechnet werden können. Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen erfolgt bei Ojalvo und Eidinoff am freigeschnittenen Überlappungsbereich. Die belasteten Enden der Fügepartner werden dabei am Rand des Überlappungsbereichs als Schnittgrößen berücksichtigt. Dieses reduzierte Modell, wie es in Abbildung 3.4 zu sehen ist, entspricht dem von Bigwood u. Crocombe (1989) eingeführten *general sandwich-type*-Modell, das neben einschnittigen Überlappungsfügungen unter Zugbelastung verallgemeinert auf alle Arten von Klebverbindungen mit beliebiger Geometrie und Belastung angewendet werden kann. Die Schnittgrößen können durch einfache Gleichgewichtsbetrachtungen oder aufwendiger unter Verwendung von Biegemomentenfaktoren ermittelt werden (Goland u. Reissner, 1944, Hart-Smith,

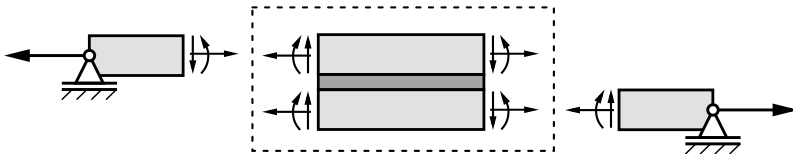


Abbildung 3.4: *General sandwich-type*-Modell (Bigwood u. Crocombe, 1989) dargestellt am Beispiel des freigeschnittenen Überlappungsbereichs einer einschnittigen Überlappungsfügung.

1973b, Oplinger, 1994, Zhao et al., 2010, Talmon l'Armée et al., 2016). Die zentrale Aufgabe der Biegemomentenfaktoren ist dabei die möglichst genaue Bestimmung der auftretenden Schnittgrößen.

3.3 Versagensbewertung

Die in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Spannungsverteilungen führen bei einer Überbeanspruchung der Klebverbindung zur lokalen Rissbildung, die schließlich zum Versagen der gesamten Verbindung führt. Je nach Belastung, Form und Material der Klebverbindung können unterschiedliche Versagensarten auftreten, über die im Folgenden ein Überblick gegeben wird. Außerdem wird der Stand der Forschung zur Bewertung des Versagens von Klebverbindungen dargestellt.

3.3.1 Versagensarten

Eine offizielle Klassifizierung der Versagensarten von Klebschichten ist mit der DIN EN ISO 10365 (2022) möglich. Danach werden grundsätzlich zwei Versagensarten unterschieden: der Adhäsionsbruch und der Kohäsionsbruch (Habenicht, 2009). Beim Adhäsionsbruch erfolgt das Versagen durch eine vollständige Trennung der Klebschicht vom Fügepartner, ohne dass Klebstoffreste am Fügepartner zurückbleiben. In der Praxis bleiben jedoch immer Klebstoffreste am Fügepartner haften, die sich aus der Klebschicht herausgelöst haben. In diesem Fall spricht man nicht von einem reinen Adhäsionsbruch, sondern von einem klebschichtseitigen Grenzschichtbruch, bei dem es auch innerhalb der Klebschicht am Rand zum Fügepartner zu einem lokalen Versagen kommt (Jüntgen, 2019). Eine genauere Beschreibung der Vorgänge in der Grenzschicht finden sich in der Literatur unter dem Begriff *weak boundary layer* (Brockmann et al., 2005). Die Entstehung von Adhäsionsbrüchen ist in der Regel auf einen für die Klebverbindung ungeeigneten Klebstoff oder eine mangelhafte Oberflächenvorbehandlung der Fügepartner vor dem Kleben zurückzuführen.

Kohäsionsbrüche sind durch Rissbildung innerhalb der Schicht gekennzeichnet und können je nach Werkstoff als spröde oder duktile Kohäsionsbrüche auftreten. Beim spröden Bruch treten zunächst kaum Verformungen auf, bis schlagartig ein sich schnell ausbreitender Riss entsteht, der das Versagen der Klebverbindung einleitet. Beim Bruch in duktilen Werkstoffen kommt es vor dem eigentlichen Bruch zu einer plastischen Verformung der Schicht, die zum

Abbau der äußeren Belastung führt. Ob sich eine Klebschicht eher spröde oder duktil verhält, hängt im Wesentlichen vom verwendeten Material ab, wird aber zusätzlich auch von der vorliegenden Temperatur, der Geschwindigkeit der Beanspruchung, der Geometrie und dem wirkenden Spannungszustand beeinflusst (Habenicht, 2009).

Neben dem Adhäsionsbruch und dem Kohäsionsbruch kann es auch zu einem Mischbruch kommen, bei dem beide Brucharten kombiniert auftreten. Darüber hinaus ist auch ein Fügepartnerbruch möglich, bei dem ein Fügepartner infolge der Überschreitung seiner Zugfestigkeit durch einen vertikalen Riss geteilt wird, oder ein Versagen durch Delamination bei verklebten Laminaten (Talmon l'Armée, 2019).

3.3.2 Bestehende Konzepte zur Versagensbewertung

Für die Versagensbewertung und Modellierung des Bruchgeschehens in Klebverbindungen gibt es eine Vielzahl von analytischen und numerischen Konzepten. Einen guten Überblick geben die Arbeiten von Anderson (2017) und Gross u. Seelig (2011). Ziel aller Konzepte ist es, die kritische Belastung einer Klebverbindung, häufig in Form der kritischen Versagenslast, zu bestimmen und Ort und Art der Rissbildung, die zum Versagen der Verbindung führt, vorherzusagen. Im Folgenden werden die verschiedenen bestehenden Berechnungsansätze und die beim Versagen von Klebverbindungen auftretenden Effekte und Phänomene näher erläutert. Dabei wird ausführlich auf die Versagensbewertung mit den in dieser Arbeit verwendeten Konzepten der Finiten Bruchmechanik und der Kohäsivzonenmodellierung eingegangen.

Überblick

Wie verschiedene experimentelle Untersuchungen zeigen (Adams et al., 1986, Adams u. Harris, 1987, Pinto et al., 2014), tritt das Versagen von Klebverbindungen hauptsächlich an der Schichtgrenze zwischen Klebstoffschicht und Fügepartner auf. Grund hierfür sind die in Abschnitt 2.5 beschriebenen Spannungssingularitäten, die an der Schichtgrenze durch einen großen Unterschied in der Materialsteifigkeit von Klebstoff und Fügepartner auftreten. Der qualitative Verlauf der Grenzschichtspannungssingularitäten ist schematisch in Abbildung 3.5 dargestellt. Risse entstehen daher hauptsächlich an der Schichtgrenze zwischen Klebstoff und Fügepartner, den Bimaterialübergängen (Leguillon et al., 2003, Sator u. Becker, 2012), und wachsen ausgehend

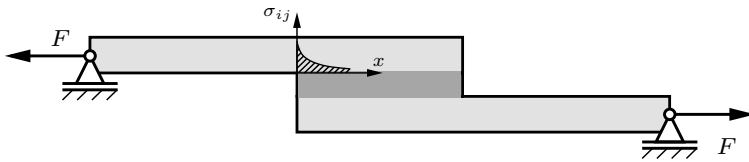


Abbildung 3.5: Einschnittige Überlappungsfügung mit schematisch eingezeichnetem qualitativem Spannungsverlauf zur Darstellung der Spannungssingularitäten, die infolge des Bimaterialübergangs zwischen Fügepartner und Klebschicht und der lokal vorhandenen Kerbwirkung auftreten.

vom Rand des Überlappungsbereichs in die Fügung hinein. Neben den materialbedingten Spannungssingularitäten beeinflussen auch geometrische Effekte, wie das Vorhandensein von Kerben, den Bruchverlauf. Bei der in Abbildung 3.5 dargestellten einschnittigen Überlappungsfügung sind beispielsweise am linken Ende der oberen Schichtgrenze sowie am rechten Ende der unteren Schichtgrenze zusätzlich zum Bimaterialübergang 90°-Kerben vorhanden, deren Kerbwirkung, wie in Abschnitt 2.5 erläutert, die Möglichkeit der dortigen Rissbildung noch deutlich erhöht. Die numerische Analyse des Versagens von Klebverbindungen erfolgt in der Regel mit Hilfe von Finite-Elemente-Analysen und nutzt beispielsweise die Konzepte der Finiten Bruchmechanik oder der Kohäsivzonenmodellierung, wie bei Mendoza-Navarro et al. (2013) und Ramalho et al. (2020) für verschiedene Klebkonfigurationen oder bei Moradi et al. (2013) und Hell et al. (2014) speziell für einschnittige Überlappungsfügungen. Ein besonderes Interesse besteht aber an einfachen analytischen Modellen, mit denen sich Versagenslasten schnell und ohne großen numerischen Aufwand abschätzen lassen. Die meisten analytischen Versagensmodelle verwenden für die Spannungsanalyse einen *weak-interface*-Ansatz, wie er in Abschnitt 3.2.1 beschrieben ist (Lenci, 2001, Weißgraeber u. Becker, 2011, Stein, 2018) oder asymptotische Ansätze (Leguillon et al., 2003, Moradi et al., 2013). Zusätzlich wird ein geeignetes Versagenskriterium benötigt. Neben der Versagensbewertung mit Spannungsintensitätsfaktoren (Hu, 1995) hat sich in jüngster Zeit vor allem die Versagensbewertung mit dem gekoppelten Kriterium der Finiten Bruchmechanik bewährt (Henninger u. Leguillon, 2007, Weißgraeber et al., 2014, Felger et al., 2019b), mit dem die Versagenslast und die resultierende Risslänge erfolgreich abgeschätzt werden können (siehe Abschnitt 2.6). Weißgraeber u. Becker (2013), und Stein et al. (2015, 2016) haben das Versagen von Klebverbindungen unter Mixed-Mode-Belastung mit

der Finiten Bruchmechanik untersucht. Wie von Hell et al. (2014) gezeigt, ist dabei die Annahme gerechtfertigt, dass sich ein Riss typischerweise entlang der Schichtgrenze zwischen Fügepartner und Klebschicht ausbildet.

Einflussfaktoren auf die Festigkeit

Hinsichtlich Abmessungen und Materialeigenschaften wurden an Klebverbindungen verschiedene Parameterstudien durchgeführt und deren Einfluss auf das Versagensverhalten und die Versagenslast näher untersucht (da Silva u. Campilho, 2012, da Silva et al., 2011). So haben da Silva et al. (2008) anhand von einschnittigen Überlappungsfügungen gezeigt, dass sich die ertragbare Versagenslast einer Klebverbindung durch die Verwendung steiferer Fügepartner und einer zäheren Klebschicht erhöht. Hinsichtlich der Abmessungen sind dickere Fügepartner (Papini et al., 1994) wegen der höheren Biegesteifigkeit und ein längerer Überlappungsbereich (da Silva et al., 2004, Habenicht, 2009) wegen der gleichmäßigeren Lastübertragung vorteilhaft. Eine Erhöhung der Klebschichtdicke führt allerdings zu einer Verringerung der ertragbaren Versagenslast. Dieser sogenannte *Klebschichtdickeneffekt* wurde bereits in vielen wissenschaftlichen Arbeiten beschrieben (Gleich et al., 2001, da Silva et al., 2006, Castagnetti et al., 2011, Moradi et al., 2013), konnte aber bisher nur unzureichend erklärt werden. Während Adams u. Peppiatt (1974) eine erhöhte Porosität und das vermehrte Auftreten von Mikrodefekten in der Klebschicht für den Dickeneffekt verantwortlich machten, sahen Crocombe u. Adams (1981) und Gleich et al. (2001) die Ursache in einer erhöhten Flexibilität der Klebschicht. Letztere führt zu einer stärkeren Variation der Spannungen am Rand der Klebschicht in Dickenrichtung und damit zu einer komplexeren Spannungsverteilung mit lokal höheren Spannungskonzentrationen am Übergang zum Fügepartner. Die hohen Spannungskonzentrationen im Randbereich der Schichtgrenze zwischen Fügepartner und Klebschicht stellen grundsätzlich ein Problem für den praktischen Einsatz von Klebverbindungen dar und machen diese versagensanfällig. Daher wurden in der Vergangenheit verschiedene konstruktive Modifikationen vorgeschlagen, um die für die Spannungskonzentrationen verantwortliche Kerbwirkung zu reduzieren und einen gleichmäßigeren Lastübergang zwischen Fügepartner und Klebschicht zu ermöglichen. So tragen abgeschrägte und abgerundete Klebkehlen wesentlich zum Abbau lokaler Spannungskonzentrationen bei (Adams u. Peppiatt, 1974, Crocombe u. Adams, 1981, Adams u. Harris, 1987, Lang u. Mallick, 1998). Auch die von Adams u. Harris (1987) an einschnittigen Überlappungsfügungen untersuchte Abrundung der Ecken der Fügepartner am Übergang zur Klebschicht trägt positiv zur Tragfähigkeit bei. Ebenso wurde der Einfluss

von abgeschrägten Fügepartnern auf die lokalen Spannungskonzentrationen untersucht, die jedoch in der Herstellung aufwendiger sind (Kaye u. Heller, 2002, Belingardi et al., 2002, Vallée u. Keller, 2006, da Silva u. Adams, 2007). Neben der Form von Klebschicht und Fügepartnern kann auch durch geeignete Modifikationen des Klebstoffmaterials die Festigkeit erhöht werden. Dabei eignen sich Klebstoffkombinationen und gradierte Klebstoffe mit zum Rand des Überlappungsbereichs hin abnehmender Steifigkeit (Fitton u. Broughton, 2005, das Neves et al., 2009a,b, Stapleton et al., 2012, Stein, 2018).

Finite Bruchmechanik

Die in dieser Arbeit verwendete Finite Bruchmechanik kann sowohl analytisch als auch numerisch zur Versagensanalyse von Klebverbindungen eingesetzt werden. Die Anwendung erfolgt dabei auf die in Abschnitt 2.6 dargestellte Weise. Aufgrund der schwachen Spannungssingularitäten an den Bimaterialübergängen zwischen der Klebschicht und den Fügepartnern tritt der in Abschnitt 2.6 beschriebene Fall einer nicht monoton steigenden inkrementellen Energiefreisetzungsrate auf, der die Auswertung des gekoppelten Kriteriums erschwert. Wie Hell et al. (2014) zeigen, steigt die inkrementelle Energiefreisetzungsrate entlang des Risspfades zwischen Fügepartner und Klebschicht bei kleinen Risslängen zunächst deutlich bis zu einem lokalen Maximum an, um dann nach einem begrenzten Abfall weiter anzusteigen. Der Effekt der nicht monoton verlaufenden inkrementellen Energiefreisetzungsrate ist auch bei anderen Strukturen mit Bimaterialübergängen erkennbar (Müller et al., 2006). Aufgrund der bereichsweise negativen Steigung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate werden diese Strukturen auch als negative Geometrien bezeichnet (Jenq u. Shah, 1985, Planas u. Elices, 1991, Bažant et al., 1991). Eine Berechnung der Energiefreisetzungsrate ist unter anderem durch die Auswertung des virtuellen Riss-schließintegrals¹ möglich, wie bei Carpinteri et al. (2009) beschrieben oder anhand der differentiellen Energiefreisetzungsrate bei Rybicki et al. (1977). Dabei wird die für das Öffnen eines Risses erforderliche Energie ermittelt. Neben Klebverbindungen wird das virtuelle Riss-schließintegral auch auf andere Strukturverbindungen (Rybicki et al., 1977, O'Brien, 1982) und in verschiedenen Modifikationen (Buchholz, 1985, Raju, 1987) vorteilhaft angewendet. Eine alternative Möglichkeit der Berechnung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate besteht in der Auswertung des J-Integrals, wie bei Hu et al. (1992) und Fraisse u. Schmit (1993) beschrieben, welches einem Konturintegral um die Riss-spitze entspricht. Es

¹ Engl.: Virtual Crack Closure Technique (VCCT)

eignet sich besonders für die elastisch-plastische Bruchmechanik, stimmt im linear-elastischen Fall aber mit der Energiefreisetzungsrates überein.

Kohäsivzonenmodellierung

Ein weiteres Verfahren, das zur Versagensbewertung von Klebverbindungen verwendet werden kann, ist das Kohäsivzonenmodell² (KZM). Dabei handelt es sich um ein auf die Arbeiten von Barenblatt (1959) und Dugdale (1960) zurückgehendes Versagenskonzept, bei dem das Versagen einer Struktur ohne Annahme einer Anfangsrislänge durch das Bruchgeschehen in einer vor der Rissspitze liegenden Kohäsivzone bewertet wird. In dem Bereich, der von Dugdale als plastische Zone und von Barenblatt als Kohäsivzone bezeichnet wird, tritt Rissswachstum unter meist inelastischem Verhalten auf. Für die Modellierung als elastisches Problem wird diese längliche Zone, wie in Abbildung 3.6a gezeigt, künstlich in eine fiktive Verlängerung des vorhandenen Risses der Länge d umgewandelt. Die resultierenden fiktiven Rissufer werden mit einer Fließspannung (Dugdale, 1960) bzw. Kohäsionsspannung t (Barenblatt, 1959) belastet und führen eine Relativverschiebung δ aus, die auch als Separation bezeichnet wird. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Separation ist werkstoffabhängig. Bei Dugdale ist das Materialverhalten in der plastischen Zone elastisch-idealplastisch, sodass die wirkende Fließspannung unabhängig von der Separation über die gesamte Länge der Zone konstant ist. Bei Barenblatt gibt es keinen konstanten Zusammenhang zwischen Spannung und Separation. Stattdessen wird, wie in Abbildung 3.6b dargestellt, ein exponentielles Kohäsivgesetz verwendet. Das Kohäsivgesetz $t(\delta)$, das auch als Spannungs-Separationsgesetz bezeichnet wird, kann je nach Anwendungsfall in unterschiedlicher Form verwendet werden. So hat sich auch der Einsatz von bilinearen und trapezförmigen Kohäsivgesetzen bewährt (vgl. 3.6c und 3.6d). Das Kohäsivgesetz hängt dabei, ähnlich wie das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium, von der Bruchfestigkeit σ_c , die das Versagen einleitet, und der Bruchzähigkeit oder spezifischen Separationsarbeit \mathcal{G}_c , die dem Integral der Spannungen über die Verschiebungen entspricht, ab. Nach Überschreiten der Bruchfestigkeit kommt es bei Erreichen einer kritischen Rissoffnung δ_c zum Versagen in der Kohäsivzone, wodurch der Riss weiter wächst.

Ausgehend von den Modellen von Barenblatt (1959) und Dugdale (1960), die symmetrische Risse in unendlich ausgedehnten isotropen Strukturen analysierten, wurden Kohäsivzonenmodellierungen auf verschiedene andere Struktursituationen angewendet (Hillerborg et al., 1976, Elices et al., 2002).

² Engl.: Cohesive Zone Model (CZM)

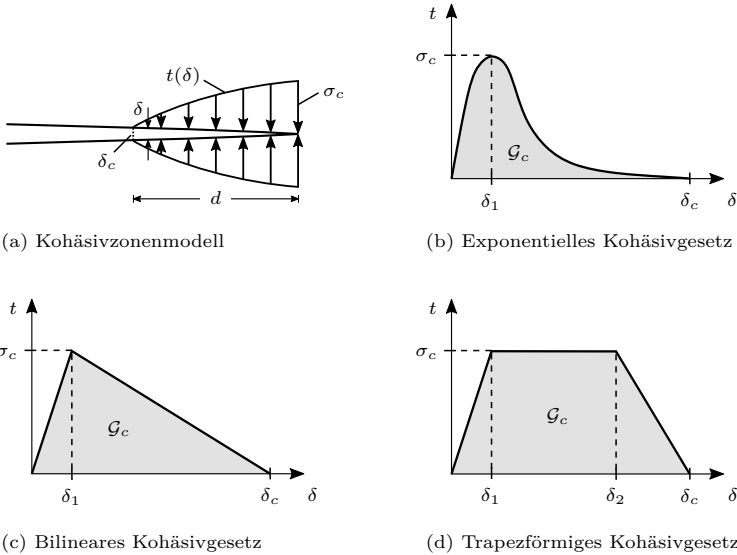


Abbildung 3.6: Darstellung des Kohäsivzonenmodells mit den gängigsten Kohäsivgesetzen

Klebverbindungen wurden intensiv in den Arbeiten von Campilho et al. (2012, 2013) und Neto et al. (2012) analysiert, die mit ihrer Kohäsivzonenmodellierung verklebte Lamine auswerteten. Cornetti et al. (2012) betrachteten ebenfalls Klebverbindungen und verglichen die Ergebnisse ihrer Kohäsivzonenmodellierung mit denen der Finiten Bruchmechanik. Die Ergebnisse der Kohäsivzonenmodellierungen zeigen dabei im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen (Neto et al., 2012, Campilho et al., 2013). Allerdings ist die Berechnung aufgrund der Nichtlinearität der Kohäsivzonenmodelle sehr aufwendig und daher meist nur numerisch sinnvoll möglich, zum Beispiel mit der Finite-Elemente-Analyse. Dazu wird die Kohäsivzone durch eine diskrete Anzahl von Kohäsivzonenelementen ersetzt, die sich entlang des potentiellen Risspfades erstrecken. Da, wie in Hell et al. (2014) gezeigt, Risse in Klebverbindungen in der Regel entlang der Schichtgrenze zwischen Fügepartner und Klebschicht verlaufen, werden die Kohäsivzonenelemente dort verwendet. Bei der Implementierung im Finite-Elemente-Programm werden grundsätzlich zwei Varianten unterschieden. Zum einen können Kohäsivzonenelemente mit endlicher Höhe verwendet werden, die in die Klebschicht

Kapitel 3 Stand der Forschung zur Strukturmechanik von Klebverbindungen

integriert sind. Zum anderen können aber auch Kohäsivzonenelemente mit infinitesimaler Höhe verwendet werden, die zwischen der Klebschicht und dem Fügepartner angeordnet sind. Beim Kohäsivgesetz sind in den meisten Fällen das bilineare oder das trapezförmige Verhalten ausreichend und in vielen Finite-Element-Programmen bereits hinterlegt (Alfano, 2006, Park u. Paulino, 2013, Rosendahl et al., 2017, Cornetti et al., 2019). Einen guten Überblick über die Durchführung von Kohäsivzonenmodellierungen geben die Arbeiten von Gross u. Seelig (2011), da Silva u. Campilho (2012) und Kuna (2013).

Kapitel 4

Neuer Ansatz der Klebschichtmodellierung

Die analytische Modellierung von Klebverbindungen erfolgt häufig mit Hilfe eines weak-interface-Ansatzes für die Klebschicht. Dieser Ansatz liefert für dünne Klebschichten noch gute Ergebnisse, stößt aber mit zunehmender Klebschichtdicke und damit zunehmender Komplexität der Verformungen an seine Grenzen. Daher wird in diesem Kapitel eine Klebschichtmodellierung höherer Ordnung vorgestellt, die eine genauere Erfassung des Verformungsverhaltens in der Klebschicht ermöglicht. Basierend auf polynomialen Verschiebungsansätzen und unter Anwendung von Energieprinzipien wird ein Differentialgleichungssystem hergeleitet, das eine effiziente und gleichzeitig genaue Beschreibung des Klebschichtverhaltens ermöglicht. Es folgt eine detaillierte Analyse der Spannungs- und Verformungszustände in der Klebverbindung, wobei die Ergebnisse des analytischen Modells mit denen einer numerischen Referenzmodellierung verglichen werden. Die in diesem Kapitel vorgestellte Modellierung und die vorgenommenen Auswertungen wurden in international begutachteten Fachzeitschriften und Tagungsbänden veröffentlicht (Methfessel u. Becker, 2021, 2022, 2023b).

4.1 Analytische Modellierung

In diesem Abschnitt werden zunächst die grundlegenden Modellannahmen der analytischen Modellierung behandelt und anschließend wird die Modellierung im Detail erläutert. Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Klebverbindungen wird ein Differentialgleichungssystem hergeleitet und gelöst. Die Herleitung des Differentialgleichungssystems und die damit verbundenen Berechnungen werden mit der Software Mathematica 11.3 durchgeführt. Die Lösung des Systems und weitere anschließende Auswertungen werden mit der Software Matlab R2021a vorgenommen.

4.1.1 Grundlagen und Modellannahmen

In diesem Abschnitt werden die Modellannahmen beschrieben, die der in dieser Arbeit vorgestellten Klebschichtmodellierung zugrunde liegen. Wie bei den meisten anderen Berechnungsmodellen in Abschnitt 3.2 wird die Klebverbindung auf eine zweidimensionale Struktur reduziert. Dies ist in guter Näherung möglich, wenn die Klebverbindung nur in ihrer Ebene und nicht in Tiefenrichtung belastet wird und sich die Geometrie in Tiefenrichtung nicht ändert. In diesem Fall bietet sich die Verwendung eines ebenen Verzerrungszustandes in Tiefenrichtung an. Die Modellierung erfolgt im Rahmen der in Abschnitt 2.1 vorgestellten linearen Elastizitätstheorie, sodass von kleinen Verformungen und linear elastischem Materialverhalten ausgegangen wird. Die Klebschicht wird dabei als defektfreie, homogene und isotrope Schicht betrachtet. Im Gegensatz zu herkömmlichen *weak-interface*-Ansätzen, bei denen die Verformungen der Klebschicht ausschließlich durch die Verschiebungen der Fügepartner ausgedrückt werden, erfolgt die Modellierung der Klebschicht in dieser Arbeit durch Verschiebungsansätze höherer Ordnung, bei denen neue, explizit für die Klebschicht geltende Verformungsfunktionen eingeführt werden. Die hier vorgestellten Verschiebungsansätze ermöglichen eine genauere Erfassung des Verformungsverhaltens in der Klebschicht und erlauben damit auch die Darstellung von Spannungsvariationen über die Klebschichtdicke, was mit den bestehenden *weak-interface*-Modellen nur eingeschränkt möglich ist. Die steiferen Fügepartner werden mit der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung modelliert. Dabei wird das in Abbildung 4.1 dargestellte und

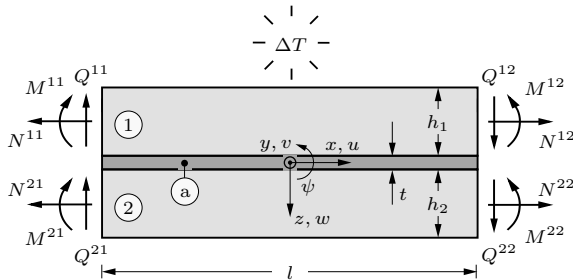


Abbildung 4.1: Darstellung des in dieser Arbeit verwendeten *general sandwich-type*-Modells nach Bigwood u. Crocombe (1989) zur Modellierung des Überlappungsbereichs von Klebverbindungen. Die am Rand der Fügepartner angreifenden Normalkräfte N , Querkräfte Q und Biegemomente M sind entsprechend des Fügepartners und der Seite, an der sie angreifen, mit hochgestellten Indizes versehen.

in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Konzept des *general sandwich-type*-Modells verwendet, bei dem ausschließlich der Überlappungsbereich modelliert wird und die Enden der Fügepartner und die auf sie wirkenden äußeren Lasten und Lagerreaktionen als Schnittkräfte und Schnittmomente an den Rändern des Überlappungsbereichs in die Fügepartner eingeleitet werden. Die Berechnung der Schnittgrößen erfolgt je nach Form der Klebefügung unterschiedlich, meist durch einfache Gleichgewichtsbetrachtungen.

4.1.2 Modellierung der Klebverbindung

Aufbauend auf den vorgestellten Grundlagen und den getroffenen Annahmen wird im Folgenden die in dieser Arbeit verwendete Modellierung von Klebverbindungen detailliert beschrieben. Dabei werden ausgehend von Verschiebungsansätzen für die Klebschicht und die Fügepartner Grundgleichungen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Klebverbindungen hergeleitet.

Fügepartner

Oberer und unterer Fügepartner werden in gleicher Weise modelliert, sodass die folgenden Gleichungen mit dem Index (i) gekennzeichnet sind, der, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, im Fall des oberen Fügepartners (1) und im Fall des unteren Fügepartners (2) ist. Zusätzlich werden für die Notation der Grundgleichungen der Fügepartner lokale x_i, z_i -Koordinatensysteme eingeführt, deren Ursprung jeweils in der Mitte der Fügepartner liegt. Die Beziehungen der lokalen Koordinaten zum in Abbildung 4.1 dargestellten globalen x, z -Koordinatensystem sind:

$$x_i = x, \quad (4.1)$$

$$z_i = z - \frac{t + h_i}{2} \cdot (-1)^i. \quad (4.2)$$

Unter der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes in Tiefenrichtung können die Verschiebungen $v^{(i)}$ in y -Richtung vernachlässigt werden, sodass nur noch die horizontalen und vertikalen Verschiebungen $u^{(i)}$ und $w^{(i)}$ übrig bleiben. Um die Schubverformungen angemessen zu berücksichtigen, wird für die Verschiebungen die Schubdeformationstheorie erster Ordnung verwendet (siehe Abschnitt 2.2). Damit ergeben sich die Verschiebungen der Fügepartner zu

$$u^{(i)}(x, z_i) = u_0^{(i)}(x) + z_i \psi^{(i)}(x), \quad (4.3)$$

$$w^{(i)}(x, z_i) = w_0^{(i)}(x). \quad (4.4)$$

Die Funktionen $u_0^{(i)}(x)$ und $w_0^{(i)}(x)$ bezeichnen die Verschiebungen der Mittelebenen der Fügepartner und $\psi^{(i)}(x)$ die Verdrehung ihrer Querschnitte in der x, z -Ebene. Im Folgenden werden die Funktionsargumente x und z aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Nach der linearen Elastizitätstheorie sind die Verzerrungen als

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}, \quad (4.5)$$

$$\gamma_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} \quad (4.6)$$

definiert. Die anderen Verzerrungen $\varepsilon_{yy}^{(i)}, \varepsilon_{zz}^{(i)}, \gamma_{xy}^{(i)}, \gamma_{yz}^{(i)}$ verschwinden aufgrund des ebenen Verzerrungszustandes. Mit dem Verschiebungsansatz aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) ergeben sich die Verzerrungen zu:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = u_0^{(i)'} + z\psi^{(i)'}, \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz}^{(i)} = w_0^{(i)'} + \psi^{(i)}. \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnet $(\cdot)'$ die Ableitung nach der x -Koordinate. Aus den Verzerrungen können mit Hilfe des Konstitutivgesetzes die Spannungen in den Fügepartnern berechnet werden. Mit den Annahmen aus Abschnitt 4.1.1 lässt sich somit unter Berücksichtigung des mechanischen und thermischen Verhaltens der Fügepartner und unter Verwendung der reduzierten Steifigkeiten Q_{ij} nach Gleichung (2.20) das Konstitutivgesetz herleiten:

$$\sigma_{xx}^{(i)} = Q_{xx}^{(i)} (\varepsilon_{xx}^{(i)} - \alpha_{xx}^{(i)} \Delta T) - Q_{xy}^{(i)} \alpha_{yy}^{(i)} \Delta T \quad (4.9)$$

$$= \frac{E_{xx}^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} (\varepsilon_{xx}^{(i)} - \alpha_{xx}^{(i)} \Delta T) - \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_{yy}^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \alpha_{yy}^{(i)} \Delta T,$$

$$\tau_{xz}^{(i)} = \kappa G_{xz}^{(i)} \gamma_{xz}^{(i)}. \quad (4.10)$$

Dabei entspricht κ dem Schubkorrekturfaktor mit dem Wert $\frac{5}{8}$ (Mittelstedt u. Becker, 2016). Bei isotropen Fügepartnern lässt sich das Konstitutivgesetz beschreiben durch:

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \varepsilon_{xx}^{(i)} - \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \alpha^{(i)} \Delta T \quad (4.11)$$

$$= \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \left(\varepsilon_{xx}^{(i)} - (1 + \nu^{(i)}) \alpha^{(i)} \Delta T \right),$$

$$\tau_{xz}^{(i)} = \kappa G^{(i)} \gamma_{xz}^{(i)}. \quad (4.12)$$

Klebschicht

Während in den in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten *weak-interface*-Modellen die Kinematik der Klebschicht stark vereinfacht wird und die Verformungen der Klebschicht ausschließlich durch eine Linearkombination der Verformungen der beiden Fügepartner ausgedrückt werden, entspricht die in dieser Arbeit vorgestellte Klebschichtmodellierung eher einer Kontinuumsmodellierung, bei der die Klebschicht als vollwertige eigenständige Schicht mit eigenem Verformungsverhalten betrachtet wird. Dazu wird aufbauend auf dem in Richtung der Klebschichtdicke linearen *weak-interface*-Ansatz von Ojalvo u. Eidinoff (1978) ein polynomial erweiterter Verschiebungsansatz vorgestellt. Die Erweiterung erfolgt durch zusätzlich eingeführte Verschiebungsterme höherer Ordnung $\mathcal{F}_u^{(n)}$ und $\mathcal{F}_w^{(n)}$, die Polynome höherer Ordnung bezüglich der z -Koordinate enthalten. Der modifizierte Verschiebungsansatz für die Verschiebungen $u^{(a)}$ und $w^{(a)}$ der Klebschicht lautet damit:

$$u^{(a)}(x, z) = \frac{\hat{u}^{(1)}(x) + \hat{u}^{(2)}(x)}{2} + z \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - \hat{u}^{(1)}(x)}{t} + \mathcal{F}_u^{(n)}(x, z), \quad (4.13)$$

$$w^{(a)}(x, z) = \frac{\hat{w}^{(1)}(x) + \hat{w}^{(2)}(x)}{2} + z \frac{\hat{w}^{(2)}(x) - \hat{w}^{(1)}(x)}{t} + \mathcal{F}_w^{(n)}(x, z). \quad (4.14)$$

Die Verschiebungen $\hat{u}^{(1)}$, $\hat{u}^{(2)}$, $\hat{w}^{(1)}$ und $\hat{w}^{(2)}$ entsprechen, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, den Verschiebungen der Fügepartner ausgewertet am Übergang zur Klebschicht. Sie ergeben sich somit aus den Verschiebungen der Fügepartner aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) durch:

$$\hat{u}^{(1)} = u^{(1)}\left(z_1 = \frac{h_1}{2}\right) = u_0^{(1)} + \frac{h_1}{2}\psi^{(1)}, \quad (4.15)$$

$$\hat{w}^{(1)} = w^{(1)}\left(z_1 = \frac{h_1}{2}\right) = w_0^{(1)}, \quad (4.16)$$

$$\hat{u}^{(2)} = u^{(2)}\left(z_2 = -\frac{h_2}{2}\right) = u_0^{(2)} - \frac{h_2}{2}\psi^{(2)}, \quad (4.17)$$

$$\hat{w}^{(2)} = w^{(2)}\left(z_2 = -\frac{h_2}{2}\right) = w_0^{(2)}. \quad (4.18)$$

Um die Verbindung zwischen der Klebschicht und den Fügepartnern herzustellen und um Diskontinuitäten der Verschiebungen zu vermeiden, müssen die folgenden Bedingungen gelten:

$$u^{(a)}\left(z = -\frac{t}{2}\right) = \hat{u}^{(1)}, \quad w^{(a)}\left(z = -\frac{t}{2}\right) = \hat{w}^{(1)}, \quad (4.19)$$

$$u^{(a)}\left(z = \frac{t}{2}\right) = \hat{u}^{(2)}, \quad w^{(a)}\left(z = \frac{t}{2}\right) = \hat{w}^{(2)}. \quad (4.20)$$

Kapitel 4 Neuer Ansatz der Klebschichtmodellierung

Der lineare Ansatz von Ojalvo und Eidinoff erfüllt diese Bedingung bereits. Damit dies auch noch für den erweiterten Ansatz gilt, müssen die neu eingeführten Verschiebungsterme höherer Ordnung $\mathcal{F}_u^{(n)}$ und $\mathcal{F}_w^{(n)}$ an den Grenzflächen zwischen Klebschicht und Fügepartner verschwinden:

$$\mathcal{F}_u^{(n)}\left(z = \pm \frac{t}{2}\right) = 0, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{F}_w^{(n)}\left(z = \pm \frac{t}{2}\right) = 0, \quad (4.22)$$

wodurch sie nur innerhalb der Klebschicht zu einer genaueren Abbildung des Verformungsverhaltens beitragen. Der in den Verschiebungstermen höherer Ordnung enthaltene hochgestellte Index n gibt die Polynomordnung an, mit welcher der lineare Ansatz erweitert wird. Es gilt $n = \{2, 3, 4, \dots\}$, wobei $n = 2$ eine quadratische Erweiterung, $n = 3$ eine kubische Erweiterung und höhere n Erweiterungen mit entsprechend höheren Polynomansätzen darstellen. Ordnungen kleiner als n werden dabei stets mitberücksichtigt. Für die Verschiebungsterme höherer Ordnung $\mathcal{F}_u^{(n)}$ und $\mathcal{F}_w^{(n)}$ gilt:

$$\mathcal{F}_u^{(n)}(x, z) = \sum_{k=2}^n \chi_u^{(k)}(x) f^{(k)}(z), \quad (4.23)$$

$$\mathcal{F}_w^{(n)}(x, z) = \sum_{k=2}^n \chi_w^{(k)}(x) f^{(k)}(z). \quad (4.24)$$

Dabei sind $\chi_u^{(k)}$ und $\chi_w^{(k)}$ unbekannte, noch zu bestimmende Verformungsfunktionen der Klebschicht bezüglich der x -Koordinate und $f^{(k)}$ Polynomfunktionen k -ter Ordnung in Dickenrichtung bezüglich der z -Koordinate, welche die Bedingungen (4.21) und (4.22) an den Grenzflächen zwischen Klebschicht und Fügepartnern erfüllen müssen. Die unbekanntenen Verformungsfunktionen $\chi_u^{(k)}$ und $\chi_w^{(k)}$ entsprechen somit einer Skalierung der verschiedenen Verformungsmoden, die durch die Polynomfunktionen $f^{(k)}$ beschrieben werden. Für die Polynomfunktionen wird folgende Darstellung gewählt:

$$f^{(k)}(z) = \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) z^{k-2}. \quad (4.25)$$

In Abbildung 4.2 ist die vorgenommene Erweiterung des Verschiebungsansatzes der Klebschicht am Beispiel der horizontalen Verschiebung grafisch dargestellt. Dem linearen Verschiebungsansatz wird gemäß Gleichung (4.13) der Verschiebungsterm $\mathcal{F}_u^{(n)}$ hinzugefügt, der sich, wie in Gleichung (4.23)

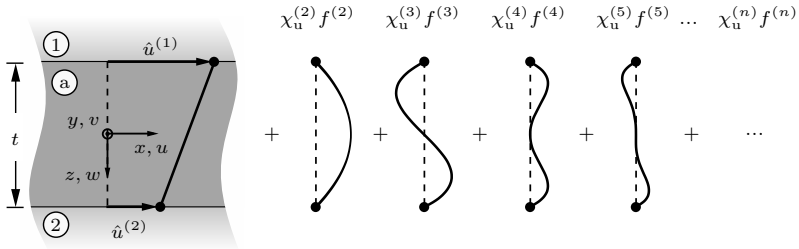


Abbildung 4.2: Grafische Veranschaulichung des Verschiebungsansatzes der Klebschicht am Beispiel der horizontalen Verschiebung $u^{(a)}$. Links ist ein vergrößerter Ausschnitt der Klebschicht mit dem linearen Verschiebungsansatz dargestellt. Dieser entspricht an der Grenzfläche zum oberen Fügepartner der Verschiebung $\hat{u}^{(1)}$ und an der Grenzfläche zum unteren Fügepartner der Verschiebung $\hat{u}^{(2)}$. Rechts davon sind die einzelnen Komponenten der Verschiebungsterme höherer Ordnung $\mathcal{F}_u^{(n)}$ dargestellt, die in Abhängigkeit von der gewählten Ordnung n in den Verschiebungsansatz der Klebschicht eingehen. Es ist zu erkennen, dass die Verschiebungen der einzelnen Moden $\chi_u^{(k)} f^{(k)}$ an den Übergängen zur Klebschicht jeweils Null betragen.

beschrieben, aus der Überlagerung verschiedener Verformungsmoden in Abhängigkeit der Polynomfunktionen zusammensetzt. Werden beispielsweise kubische Verschiebungsterme höherer Ordnung $\mathcal{F}_u^{(3)}$ und $\mathcal{F}_w^{(3)}$ für die Klebschichtmodellierung verwendet, so werden die quadratischen und kubischen Verformungsmoden berücksichtigt und es ergeben sich für das Verschiebungsfeld in der Klebschicht die Gleichungen:

$$u^{(a)}(x, z) = \frac{\hat{u}^{(1)}(x) + \hat{u}^{(2)}(x)}{2} + z \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - \hat{u}^{(1)}(x)}{t} + \chi_u^{(2)}(x) \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) + \chi_u^{(3)}(x) \left(z - \frac{4}{t^2} z^3\right), \quad (4.26)$$

$$w^{(a)}(x, z) = \frac{\hat{w}^{(1)}(x) + \hat{w}^{(2)}(x)}{2} + z \frac{\hat{w}^{(2)}(x) - \hat{w}^{(1)}(x)}{t} + \chi_w^{(2)}(x) \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) + \chi_w^{(3)}(x) \left(z - \frac{4}{t^2} z^3\right). \quad (4.27)$$

Wie für die Fügepartner wird auch für die Klebschicht ein ebener Verzerrungszustand angenommen. Somit verschwinden die Verzerrungen $\varepsilon_{yy}^{(a)}$, $\gamma_{xy}^{(a)}$ und $\gamma_{yz}^{(a)}$ in der Klebschicht und es verbleiben nur noch die Verzerrungen

$$\varepsilon_{xx}^{(a)} = \frac{\partial u^{(a)}}{\partial x}, \quad (4.28)$$

$$\gamma_{xz}^{(a)} = \frac{\partial u^{(a)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x}, \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(a)} = \frac{\partial w^{(a)}}{\partial z}. \quad (4.30)$$

Im Gegensatz zu den Fügepartnern ist hier das Auftreten der Verzerrung $\varepsilon_{zz}^{(a)}$ möglich. Die konstitutiven Gleichungen der Klebschicht ergeben sich aus dem dreidimensionalen isotropen Hookeschen Gesetz, das durch den ebenen Verzerrungszustand wie folgt vereinfacht wird:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^{(a)} = E^{(a)*} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}^{(a)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha\Delta T \\ -\alpha\Delta T \\ \varepsilon_{zz} - \alpha\Delta T \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^{(a)}, \quad (4.31)$$

mit $E^{(a)*}$ definiert als

$$E^{(a)*} = \frac{E^{(a)}}{(1 + \nu^{(a)})(1 - 2\nu^{(a)})}. \quad (4.32)$$

4.1.3 Herleitung des Differentialgleichungssystems

Aus den der Modellierung zugrundeliegenden Gleichungen lässt sich mit Hilfe von Energieprinzipien ein Differentialgleichungssystem herleiten, welches das Verhalten der Klebverbindung beschreibt. Dazu wird zunächst das Potential für den Überlappungsbereich aufgestellt und dann das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials angewendet.

Potential der Klebverbindung

Das Potential setzt sich aus dem inneren Potential Π_i und dem äußeren Potential Π_a zusammen:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a. \quad (4.33)$$

Das äußere Potential ergibt sich aus der Arbeit, die durch die auf die betrachtete Struktur wirkenden äußeren Lasten verrichtet wird. Bei Klebefügungen tritt die Belastung typischerweise an den Enden der Fügepartner auf, weshalb diese in die Formulierung des äußeren Potentials eingehen. Die Klebschicht hingegen ist keinen direkten äußeren Belastungen ausgesetzt. Das äußere Potential berechnet sich daher aus dem Integral der Oberflächenkräfte t_i

und der Verschiebungen u_i über die Randflächen S_1 und S_2 der beiden Fügepartner, auf die sie wirken:

$$\Pi_a = - \int_{S_1} t_i^{(1)} u_i^{(1)} dS_1 - \int_{S_2} t_i^{(2)} u_i^{(2)} dS_2. \quad (4.34)$$

In dem auf den Überlappungsbereich reduzierten *general sandwich-type*-Modell wirken die Belastungen ausschließlich bei $x = \pm \frac{l}{2}$ an den Rändern des Überlappungsbereichs auf die Fügepartner. Das äußere Potential kann daher auch geschrieben werden als

$$\Pi_a = - \left[Q \right]_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} \quad (4.35)$$

mit

$$Q = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} t_i^{(1)} u_i^{(1)} b dz_1 + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} t_i^{(2)} u_i^{(2)} b dz_2. \quad (4.36)$$

Dabei ist b die Breite der Verbindung in y -Richtung. Nach Integration und unter Verwendung der in Abbildung 4.1 dargestellten Schnittgrößen ergibt sich für das äußere Potential:

$$\begin{aligned} \Pi_a = & N^{11} u_0^{(1)} \left(x = -\frac{l}{2} \right) - N^{12} u_0^{(1)} \left(x = \frac{l}{2} \right) + N^{21} u_0^{(2)} \left(x = -\frac{l}{2} \right) \\ & - N^{22} u_0^{(2)} \left(x = \frac{l}{2} \right) + Q^{11} w_0^{(1)} \left(x = -\frac{l}{2} \right) - Q^{12} w_0^{(1)} \left(x = \frac{l}{2} \right) \\ & + Q^{21} w_0^{(2)} \left(x = -\frac{l}{2} \right) - Q^{22} w_0^{(2)} \left(x = \frac{l}{2} \right) + M^{11} \psi^{(1)} \left(x = -\frac{l}{2} \right) \\ & - M^{12} \psi^{(1)} \left(x = \frac{l}{2} \right) + M^{21} \psi^{(2)} \left(x = -\frac{l}{2} \right) - M^{22} \psi^{(2)} \left(x = \frac{l}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Normalkräfte N verrichten äußere Arbeit über die Horizontalverschiebungen u_0 , die Querkräfte Q über die Vertikalverschiebungen w_0 und die Biegemomente M über die Verdrehungen ψ der Querschnitte der Fügepartner. Das innere Potential entspricht der über das Volumen V integrierten Formänderungsenergiedichte

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 + \frac{1}{2} \int_{V_a} \sigma_{ij}^{(a)} \varepsilon_{ij}^{(a)} dV_a, \quad (4.38)$$

bestehend aus drei Integralen für die beiden Fügepartner und die Klebschicht, welche die jeweiligen Spannungen σ_{ij} und Verzerrungen ε_{ij} enthalten. Zerlegt

man das Volumenintegral in die einzelnen Integrale über Länge, Höhe und Breite, so erhält man die Schreibweise

$$\Pi_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathcal{P} \, dx, \quad (4.39)$$

mit

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} b \left(\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \, dz_1 + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \, dz_2 + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij}^{(a)} \varepsilon_{ij}^{(a)} \, dz \right). \quad (4.40)$$

Da Spannungen und Verzerrungen von der y -Richtung unabhängig sind, führt die Integration dort zu einer einfachen Multiplikation mit der Breite b . Für die in dieser Arbeit konkret betrachtete Modellierung gilt für \mathcal{P} unter Verwendung der Konstitutivgesetze der Fügepartner und der Klebschicht:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{1}{2} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[\sigma_{xx}^{(1)} (\varepsilon_{xx}^{(1)} - (1 + \nu^{(1)}) \alpha^{(1)} \Delta T) + \tau_{xz}^{(1)} \gamma_{xz}^{(1)} \right] b \, dz \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[\sigma_{xx}^{(2)} (\varepsilon_{xx}^{(2)} - (1 + \nu^{(2)}) \alpha^{(2)} \Delta T) + \tau_{xz}^{(2)} \gamma_{xz}^{(2)} \right] b \, dz \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\sigma_{xx}^{(a)} (\varepsilon_{xx}^{(a)} - \alpha^{(a)} \Delta T) - \sigma_{yy}^{(a)} \alpha^{(a)} \Delta T \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{zz}^{(a)} (\varepsilon_{zz}^{(a)} - \alpha^{(a)} \Delta T) + \tau_{xz}^{(a)} \gamma_{xz}^{(a)} \right] b \, dz. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Über die kinematischen Gleichungen der Fügepartner und der Klebschicht hängt das innere Potential direkt von den zu bestimmenden Verformungsfunktionen ab. Da es sich bei diesen allerdings um unbekannte Funktionen bezüglich der x -Koordinate handelt, ist das Längenintegral für Π_i in Gleichung (4.39) nicht direkt lösbar. Die Integration über y und z zur Berechnung von \mathcal{P} in Gleichung (4.40) ist jedoch leicht möglich. Die gesuchten Verformungsfunktionen lassen sich in einem Vektor Φ zusammenfassen, der sich aus den vektoriell zusammengefassten Verformungsfunktionen der beiden Fügepartner $\phi^{(1)}$ und $\phi^{(2)}$ und der Klebschicht $\phi^{(a)}$ zusammensetzt:

$$\Phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \phi^{(a)}]^T. \quad (4.42)$$

Sowohl $\phi^{(1)}$ als auch $\phi^{(2)}$ enthalten jeweils die horizontale und vertikale Verschiebung der Mittelebene des Fügepartners und die Querschnittsverdrehung:

$$\phi^{(1)} = [u_0^{(1)} \quad w_0^{(1)} \quad \psi^{(1)}]^T, \quad (4.43)$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(2)} = [u_0^{(2)} \quad w_0^{(2)} \quad \psi^{(2)}]^T. \quad (4.44)$$

Die Anzahl der unbekanntenen Verformungsfunktionen der Klebschicht hängt von der gewählten Ordnung der Verschiebungsterme $\mathcal{F}_u^{(n)}$ und $\mathcal{F}_w^{(n)}$ in den Gleichungen (4.13) und (4.14) ab. Der Vektor der Verformungsfunktionen der Klebschicht enthält daher $2(n - 1)$ Einträge und ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\phi}^{(a)} = [\chi_u^{(2)} \quad \chi_w^{(2)} \quad \chi_u^{(3)} \quad \chi_w^{(3)} \quad \dots \quad \chi_u^{(n)} \quad \chi_w^{(n)}]^T. \quad (4.45)$$

Variation des Potentials

Zur Herleitung des Differentialgleichungssystems wird das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials verwendet, nach dem sich ein System dann in einem stabilen Gleichgewicht befindet, wenn die potentielle Energie minimal wird. Die Variation des Gesamtpotentials muss also verschwinden:

$$\delta\Pi \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.46)$$

Mit den Formulierungen für das innere und äußere Potential aus den Gleichungen (4.39) und (4.35) sowie der Definition des Gesamtpotentials aus Gleichung (2.39) ergibt sich für die Variation des Potentials:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta(\Pi_i + \Pi_a) \\ &= \delta\left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathcal{P} \, dx - \left[\mathcal{Q} \right]_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}}\right) \\ &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\Phi}'} \right) \right) \delta \boldsymbol{\Phi} \, dx + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\Phi}'} - \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \right) \delta \boldsymbol{\Phi} \right]_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Damit $\delta\Pi$ aus Gleichung (4.47) im gesamten Definitionsbereich $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$ verschwindet, müssen sowohl das Integral als auch der Randterm einzeln zu Null werden. Es gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\Phi}'} \right) = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\Phi}'} - \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \delta \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad x = \pm \frac{l}{2}. \quad (4.49)$$

Gleichung (4.48) entspricht dem Differentialgleichungssystem, welches das mechanische Verhalten der Klebverbindung über die gesamte Überlappungslänge beschreibt. Die einzelnen Differentialgleichungen werden häufig als Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen der Variationsrechnung (Kozsik, 2020)

oder auch als Eulersche Differentialgleichungen (Mittelstedt, 2017) bezeichnet. Die beiden Gleichungen in (4.49) gelten nur am Rand des Überlappungsbereichs und entsprechen den dynamischen und geometrischen Randbedingungen des Systems.

Reduzierung der Ordnung

Das so hergeleitete Differentialgleichungssystem ist ein System zweiter Ordnung in der Form

$$\mathbf{A}\Phi'' + \mathbf{B}\Phi' + \mathbf{C}\Phi = \mathbf{d} \quad (4.50)$$

mit den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} (siehe Anhang A). Der Vektor \mathbf{d} auf der rechten Seite tritt auf, wenn die Klebschicht Temperaturänderungen ausgesetzt ist. In dem Fall liegt ein inhomogenes Differentialgleichungssystem vor. Treten dagegen nur mechanische Belastungen auf, so ist das Differentialgleichungssystem homogen und der Vektor \mathbf{d} verschwindet. Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist es vorteilhaft, das System zweiter Ordnung aus Gleichung (4.50) in ein System erster Ordnung umzuwandeln. Zur Reduzierung der Ordnung wird ein neuer Vektor von Verformungsfunktionen Ψ eingeführt, der die bisherigen Verformungsfunktionen Φ und deren Ableitungen enthält:

$$\Psi = [\Phi \ \Phi']^T. \quad (4.51)$$

Unter Verwendung von Ψ ergibt sich das Differentialgleichungssystem zu

$$\bar{\mathbf{A}}\Psi' + \bar{\mathbf{B}}\Psi = \bar{\mathbf{d}} \quad (4.52)$$

mit den neuen Matrizen $\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ sowie dem Vektor $\bar{\mathbf{d}}$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

mit \mathbf{I} als der Einheitsmatrix. Für die Randbedingungen gilt

$$[\mathbf{D} \ \mathbf{A}] \Psi = \mathbf{r} + \mathbf{r}_T \quad (4.54)$$

mit den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{D} und den Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}_T . Der Vektor \mathbf{r} enthält von außen auf die Klebverbindung einwirkende mechanische Lasten in Form der aufgebracht Schnittgrößen N , Q und M , während der Vektor \mathbf{r}_T die Einträge aus äußeren thermischen Beanspruchungen enthält. Die Anzahl der Differentialgleichungen und Randbedingungen und damit die Dimension der Matrizen und Vektoren hängt von der Anzahl der Verformungsfunktionen ab,

die durch die Ordnung des Verschiebungsansatzes in der Klebschicht bestimmt wird. Für den Fall eines kubischen Verschiebungsansatzes enthält der Anhang A eine detaillierte Darstellung der konkreten Einträge der Matrizen und Vektoren. Die Anzahl der Verformungsfunktionen der beiden Fügepartner beträgt immer sechs, bestehend aus den beiden Verschiebungen $u_0^{(i)}(x)$ und $w_0^{(i)}(x)$, der Verdrehung $\psi^{(i)}(x)$ und den jeweiligen Ableitungen. In der Klebschicht ist die Anzahl der Verformungsfunktionen variabel. Für die Modellierung eines kubischen Verschiebungsansatzes in der Klebschicht werden acht zusätzliche Verformungsfunktionen verwendet. Der Vektor Ψ setzt sich somit wie folgt zusammen:

$$\Psi = \left[u_0^{(1)} \quad w_0^{(1)} \quad \psi^{(1)} \quad u_0^{(2)} \quad w_0^{(2)} \quad \psi^{(2)} \quad \chi_u^{(2)} \quad \chi_w^{(2)} \quad \chi_u^{(3)} \quad \chi_w^{(3)} \right. \\ \left. u_0^{(1)'} \quad w_0^{(1)'} \quad \psi^{(1)'} \quad u_0^{(2)'} \quad w_0^{(2)'} \quad \psi^{(2)'} \quad \chi_u^{(2)'} \quad \chi_w^{(2)'} \quad \chi_u^{(3)'} \quad \chi_w^{(3)'} \right]^T. \quad (4.55)$$

4.1.4 Lösung des Differentialgleichungssystems

Die Lösung des Differentialgleichungssystems aus Gleichung (4.52) besteht aus zwei Komponenten, einer homogenen Lösung Ψ_h und einer partikulären Lösung Ψ_p , die zusammen die Randbedingungen erfüllen müssen. Die Herleitung und Berechnung der Lösungen wird im Folgenden näher beschrieben.

Homogene Lösung

Zur Bestimmung der homogenen Lösung wird das homogene Differentialgleichungssystem

$$\bar{\mathbf{A}}\Psi_h' + \bar{\mathbf{B}}\Psi_h = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

betrachtet. Die Lösung des Systems mit exponentiellen Lösungsansätzen führt auf ein sogenanntes Eigenwertproblem (Burg et al., 2013), bei dem das Verhalten des homogenen Systems durch eine Kombination von Eigenwerten und Eigenvektoren beschrieben wird. Dazu wird das Differentialgleichungssystem durch Multiplikation mit der inversen Matrix von $\bar{\mathbf{A}}$ in die vereinfachte Form

$$\Psi_h' + \tilde{\mathbf{A}}\Psi_h = \mathbf{0} \quad (4.57)$$

umgeschrieben, mit $\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$. Die zugehörigen Eigenwerte λ werden aus der Determinante

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (4.58)$$

berechnet, die auch als charakteristisches Polynom (Tsonis, 1992, Burg et al., 2012) bezeichnet wird. Die Lösung des charakteristischen Polynoms ist eine Menge von reellen Eigenwerten, komplexen Eigenwerten und Nulleigenwerten, die alle verschiedene Deformationsmoden der Klebverbindung beschreiben. Die reellen Eigenwerte entsprechen Lösungsanteilen, die je nach Vorzeichen an den Rändern des Überlappungsbereichs auf- oder abklingen. Die komplexen Eigenwerte beschreiben oszillierende Lösungsanteile und die Nulleigenwerte Starrkörperbewegungen und Dehnungs- oder Biegemoden. Bei Verwendung des kubischen Ansatzes für die Verschiebungen der Klebschicht aus den Gleichungen (4.26) und (4.27) ergeben sich zwanzig Eigenwerte, von denen im vorliegenden Fall sechs reell, acht komplex und sechs Null sind. Die zugehörigen Eigenvektoren erhält man durch Lösen der Gleichung

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

für jeden einzelnen Eigenwert. Jeder Eigenwert und sein zugehöriger Eigenvektor beschreiben einen Eigenmodus des Differentialgleichungssystems. Die resultierenden Lösungsanteile haben die Form $\mathbf{v}^{(j)} e^{\lambda^{(j)} x}$ und werden mit einer noch zu bestimmenden Konstanten C skaliert. Somit ergibt sich der Lösungsanteil $\Psi_{\text{h}}^{\text{R}}$ aus einer Menge von n_{R} reellen Eigenwerten mit

$$\Psi_{\text{h}}^{\text{R}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{R}}} C_{\text{R}}^{(j)} \mathbf{v}_{\text{R}}^{(j)} e^{\lambda_{\text{R}}^{(j)} x}. \quad (4.60)$$

Die komplexen Eigenwerte liegen als jeweils konjugiert komplexe Paare der Menge n_{C} vor. Für die Eigenwerte und analog für die Eigenvektoren gilt daher:

$$\lambda_{\text{C}} = \lambda_{\text{C}1} \pm i\lambda_{\text{C}2}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{v}_{\text{C}} = \mathbf{v}_{\text{C}1} \pm i\mathbf{v}_{\text{C}2}. \quad (4.62)$$

Die imaginäre Einheit i kann durch geeignete Umformungen aus der komplexen Lösung eliminiert werden. Dazu werden die Exponentialterme zunächst mit der Eulerschen Formel

$$e^{(\lambda_{\text{C}1} \pm i\lambda_{\text{C}2})x} = e^{\lambda_{\text{C}1}x} (\cos(\lambda_{\text{C}2}x) + i \sin(\lambda_{\text{C}2}x)) \quad (4.63)$$

in trigonometrische Summen überführt und anschließend durch Äquivalenzumformungen

$$\Re(i\lambda_{\text{C}2}) = -\Im(\lambda_{\text{C}2}), \quad (4.64)$$

$$\Im(i\lambda_{\text{C}2}) = \Re(\lambda_{\text{C}2}) \quad (4.65)$$

weiter umgewandelt. Für den Lösungsanteil $\Psi_{\text{h}}^{\text{C}}$, der aus den komplexen Eigenmoden resultiert, ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{h}}^{\text{C}} &= \sum_{j=1}^{n_{\text{C}}} C_{\text{C}}^{(j)} \left[\Re(\mathbf{v}_{\text{C}}^{(j)}) \cos(\lambda_{\text{C}2}^{(j)} x) - \Im(\mathbf{v}_{\text{C}}^{(j)}) \sin(\lambda_{\text{C}2}^{(j)} x) \right] e^{\lambda_{\text{C}1}^{(j)} x} \\ &+ \sum_{j=1}^{n_{\text{C}}} \bar{C}_{\text{C}}^{(j)} \left[\Im(\mathbf{v}_{\text{C}}^{(j)}) \cos(\lambda_{\text{C}2}^{(j)} x) + \Re(\mathbf{v}_{\text{C}}^{(j)}) \sin(\lambda_{\text{C}2}^{(j)} x) \right] e^{\lambda_{\text{C}1}^{(j)} x}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Während mit Gleichung (4.59) für jeden reellen Eigenwert ein reeller Eigenvektor und für jeden komplexen Eigenwert ein komplexer Eigenvektor bestimmt werden kann, lassen sich für die Nulleigenwerte in den meisten Fällen weniger linear unabhängige Eigenvektoren bestimmen als Nulleigenwerte vorhanden sind. Die algebraische Vielfachheit ist also größer als die geometrische Vielfachheit. Deshalb werden zusätzlich sogenannte Hauptvektoren höherer Stufe benötigt. Die Berechnung eines Hauptvektors der Stufe m erfolgt durch

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I})^m \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.67)$$

Dies entspricht einer potenzierten Version der Gleichung (4.59). Der Lösungsanteil $\Psi_{\text{h}}^{\text{N}}$ der Nulleigenwerte ist:

$$\Psi_{\text{h}}^{\text{N}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{N}}} C_{\text{N}}^{(j)} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} \tilde{\mathbf{A}}^k \mathbf{v}_{\text{N}}^{(j)} \right]. \quad (4.68)$$

Für die Hauptvektoren höherer Ordnung ergibt sich der Lösungsanteil aus Linearkombinationen der Hauptvektoren, die von Potenzen mit Basis x abhängen (Burg et al., 2013). Zusammen bilden die einzelnen Lösungsanteile aus den Gleichungen (4.60), (4.66) und (4.68) ein sogenanntes Fundamentalsystem, dessen unbekannte Konstanten nachfolgend mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

Partikuläre Lösung

Die Bestimmung der partikulären Lösung Ψ_{p} erfolgt über einen Ansatz vom Typ der rechten Seite (Wirsching, 2006). Da der Vektor \mathbf{d} des inhomogenen Differentialgleichungssystems aus Gleichung (4.52) konstant ist und nicht von x abhängt, genügt auch für die partikuläre Lösung ein konstanter Ansatz. Die Wahl des konstanten Ansatzes hat zur Folge, dass

$$\Psi_{\text{p}}' = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

gilt. Wird die partikuläre Lösung in das Differentialgleichungssystem eingesetzt, so vereinfacht sich dieses auf das lineare Gleichungssystem

$$\bar{B}\Psi_p = d, \quad (4.70)$$

das einfach nach der partikulären Lösung ausgewertet werden kann.

4.1.5 Randbedingungen

Die ermittelte Lösung der Verformungsfunktionen, bestehend aus homogener und partikulärer Lösung

$$\Psi = \Psi_h + \Psi_p \quad (4.71)$$

wird zur Bestimmung der noch unbekanntenen Konstanten $C_R^{(j)}$, $C_C^{(j)}$, $\bar{C}_C^{(j)}$ und $C_N^{(j)}$ in die Randbedingungen (4.54) eingesetzt. Das sich daraus ergebende lineare Gleichungssystem kann ohne großen Aufwand gelöst und die Konstanten können auf einfache Weise bestimmt werden. Da der Vektor r , der die an den Rändern der Fügepartner angreifenden Schnittgrößen enthält, lediglich dynamische Randbedingungen berücksichtigt, sind Starrkörperverschiebungen der Klebverbindung nicht ausgeschlossen. Um diese zu vermeiden, werden drei dynamische Randbedingungen durch geometrische Randbedingungen ersetzt, sodass das *general sandwich-type*-Modell statisch bestimmt gelagert ist. Die am *general sandwich-type*-Modell angebrachten Lagerungen stehen dabei nicht im Widerspruch zur eigentlichen Lagerung der Klebefügung, die über die durch Gleichgewichtsbetrachtungen ermittelten Schnittgrößen berücksichtigt wird. Sie dienen lediglich dazu, Starrkörperverschiebungen zu verhindern und es zu ermöglichen, den Verschiebungen absolute Werte zuzuordnen. Im Gegensatz zu den Verschiebungen werden die Spannungen und Verzerrungen im Überlappungsbereich durch die Wahl der Lagerung nicht beeinflusst. Die Lagerungen werden in Abhängigkeit von der betrachteten Struktursituation und der Belastung der Klebefügung so gewählt, dass möglichst symmetrische und leicht plausibilisierbare Verschiebungsverläufe berechnet werden. Mögliche Lagerungen für das *general sandwich-type*-Modell sind in Abbildung 4.3 dargestellt. In der konkreten Umsetzung bedeuten die Lagerungen, dass die als Randbedingungen aufgebrauchten drei Schnittgrößen durch an der gleichen Stelle wirkende Verschiebungsrandbedingungen ersetzt werden. So werden beispielsweise in der in Abbildung 4.3a dargestellten Struktursituation einer Einspannung des unteren Fügepartners am rechten Rand des Überlappungsbereichs die mit den Schnittgrößen N^{22} , Q^{22} und M^{22} assoziierten Randbedingungen nicht mehr verwendet und stattdessen die dort

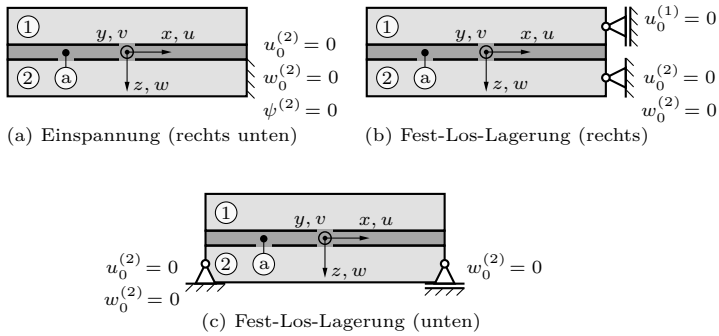


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung verschiedener Lagerungsarten für das *general sandwich-type*-Modell mit Angabe der jeweils gesperrten Verschiebungen und Verdrehungen.

gesperrten Verschiebungen $u_0^{(2)}$ und $w_0^{(2)}$ sowie die verhinderte Verdrehung $\psi^{(2)}$ des unteren Fügepartners berücksichtigt. Die weggelassenen dynamischen Randbedingungen werden implizit durch das Variationsprinzip erfüllt, ohne dass dies aktiv gefordert werden muss.

4.2 Numerische Modellierung

Neben der analytischen Modellierung wurde eine numerische Referenzmodellierung mittels Finite-Elemente-Analyse (FEA) durchgeführt, deren Ergebnisse in Abschnitt 4.3 mit den analytischen Ergebnissen verglichen werden. Für die numerische Modellierung wurde die Finite-Elemente-Software ABAQUS 6.18-1 (2018) verwendet. Zur effizienten Umsetzung von Auswertungsschleifen und Parametervariationen wurde die numerische Modellierung mittels Python-Skripten realisiert, die über eine spezielle Schnittstelle die Modelle in ABAQUS generieren. Wie auch bei der analytischen Modellierung wird der *general sandwich-type*-Ansatz verwendet und die Struktur auf eine zweidimensionale Betrachtung des Überlappungsbereichs reduziert. Der Überlappungsbereich wird als Rechteck modelliert, das durch zwei Partitionierungen in die beiden Fügepartner und die Klebschicht unterteilt wird, denen dann die jeweiligen Materialeigenschaften zugewiesen werden. Die mechanischen Belastungen werden durch die Schnittgrößen N , Q und M aufgebracht, die verteilt an vier Referenzpunkten angreifen, die den Rändern der Fügepartner zugeordnet sind. Die Referenzpunkte sind wiederum über Kopplungsbedingungen mit

den an den jeweiligen Rändern liegenden Knoten verbunden und leiten so die Belastung in die Fügepartner ein. Für eine statisch bestimmte Lagerung werden, wie bei der analytischen Modellierung in Abschnitt 4.1.5 beschrieben, drei der Schnittgrößen durch entsprechende Verschiebungsbedingungen ersetzt, die ebenfalls an den Referenzpunkten gelten. Thermische Belastungen werden durch ein auf die gesamte Struktur einwirkendes Temperaturfeld aufgebracht, das in Abhängigkeit der unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten zu Verformungen der Fügepartner und der Klebschicht führt. Die Vernetzung erfolgt mit zweidimensionalen Kontinuums-elementen³ mit acht Knoten unter Berücksichtigung des ebenen Verzerrungszustandes. Der gesamte Überlappungsbereich ist vernetzt, wobei Fügepartner und Klebschicht an ihren Grenzflächen gemeinsame Knoten besitzen, die eine Lastübertragung zwischen den Schichten ermöglichen. Da in der Klebschicht und dort insbesondere an den Rändern links und rechts des Überlappungsbereichs kritische Bereiche mit größeren Spannungsgradienten auftreten, wird die Vernetzung dort lokal verfeinert, wie in Abbildung 4.4 gezeigt. Zur Wahl der Feinheit der Vernetzung wurden Konvergenzstudien durchgeführt, welche die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der gewählten Vernetzung gewährleisten. So hat das numerische Modell einer typischen in dieser Arbeit verwendeten Konfiguration mit den Abmessungen $l = b = 25$ mm, $t = 0,5$ mm und $h_1 = h_2 = 2$ mm etwa 1 300 000 Freiheitsgrade, für deren Berechnung ein normaler Arbeitsrechner⁴ etwa 130 Sekunden benötigt. Im Vergleich dazu liefert die analytische Berechnung der gleichen Konfiguration bereits nach 1,2 Sekunden die erforderlichen Spannungs- und Verschiebungslösungen.

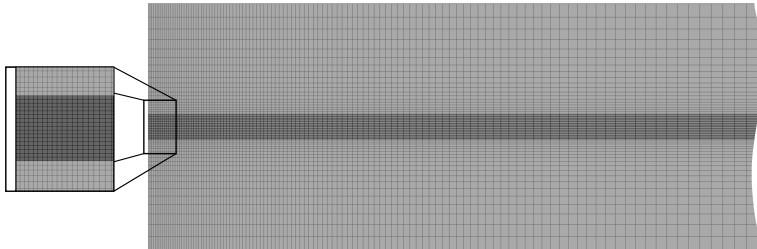


Abbildung 4.4: Darstellung der in der Finite-Elemente-Modellierung verwendeten Vernetzung anhand der abgebildeten linken Hälfte des *general sandwich-type*-Modells mit vergrößertem Ausschnitt im Bereich der Klebschicht für eine Struktur mit den Abmessungen $l = b = 25$ mm, $t = 0,5$ mm und $h_1 = h_2 = 2$ mm.

³ In ABAQUS: Kontinuums-element vom Typ CEP8

⁴ Daten des Arbeitsrechners: Intel® Core™ i5-8600K Prozessor mit 6 Kernen à 3.60 GHz

4.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden verschiedene Analysen mit dem in dieser Arbeit eingeführten analytischen Modell durchgeführt und die erhaltenen Ergebnisse dargestellt und diskutiert. Um die Vorteile des vorgestellten Modells hervorzuheben, wird zunächst ein Vergleich mit den in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen, etablierten analytischen Modellen von Goland u. Reissner (1944) und Ojalvo u. Eidinoff (1978) für einschnittige Überlappungsfügungen durchgeführt. Neben einschnittigen Überlappungsfügungen lassen sich durch die Verwendung des *general sandwich-type*-Konzepts (Bigwood u. Crocombe, 1989) aber auch andere der in Abbildung 3.1 dargestellten Überlappungsfügungen untersuchen. So werden für verschiedene Klebverbindungen die Spannungsverläufe infolge mechanischer und thermischer Beanspruchung berechnet. Darüber hinaus wird der Einfluss wesentlicher Klebschichtparameter auf die resultierenden Spannungsverläufe untersucht, woraus sich konstruktive Optimierungsaussagen ableiten lassen. Die Eignung des Modells wird dabei stets durch den Vergleich mit numerischen Referenzergebnissen überprüft. In Tabelle 4.1 sind die in den Auswertungen verwendeten Klebstoffe und die isotropen Werkstoffe

Tabelle 4.1

Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν und thermischer Ausdehnungskoeffizient α der für die Klebschicht und die Fügepartner verwendeten Materialien.

	E in GPa	ν	α in $10^{-6}/\text{K}$
Beton ^a	30	0,2	10
Stahl	210	0,33	11,3
Aluminium	70	0,33	23,1
Tra-Bond F113 ^b	2,46	0,4	55
Epo-Tek 301-2 ^b	3,66	0,36	37
EC2216 ^c	4	0,25	65
Epoxy	2,7	0,36	65

^a Materialkennwerte von Albert (2022).

^b Materialkennwerte von Cease et al. (2006).

^c Materialkennwerte von Reedy Jr u. Guess (2002).

Tabelle 4.2

Materialkennwerte einer unidirektional faserverstärkten transversal isotropen CFK-Einzelschicht aus T300 im lokalen Materialhauptachsensystem mit $E_{33} = E_{22}$, $G_{13} = G_{12}$, $\nu_{13} = \nu_{12}$ und $\alpha_{33} = \alpha_{22}$. Die weiteren Querkontraktionszahlen ergeben sich aus den orthotropen Reziprozitätsbeziehungen.

Einzelschicht	E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12}	ν_{23}	α_{11}	α_{22}
	in GPa				–		in $10^{-6}/\text{K}$	
CFK (T300)	135	10	5	3,85	0,27	0,3	-0,6	30

Tabelle 4.3

Geometrische Abmessungen gemäß Abbildung 4.5a für die in diesem Abschnitt verwendete einschnittige Überlappungsfüug in mm.

	l	h_1	h_2	t	b	l_f
Standardkonfiguration	25	2	2	0,5	25	25

der Fügepartner aufgeführt. Die Kennwerte des als Fügepartner verwendeten orthotropen carbonfaserverstärkten Kunststoffes (CFK) sind in Tabelle 4.2 angegeben. Zur Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse ist in Tabelle A.1 im Anhang A eine Übersicht der an den Enden des Überlappungsbereichs angreifenden Schnittgrößen für die nachfolgend untersuchten Struktursituationen gegeben.

4.3.1 Modellvergleich anhand einschnittiger Überlappungsfüugungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Auswertungen an einschnittigen Überlappungsfüugungen durchgeführt, welche die Stärken des vorgestellten analytischen Modells und seine Vorteile gegenüber bestehenden Modellen aufzeigen. Dabei werden alle Auswertungen für die gleiche Struktursituation vorgenommen, die im Folgenden als Standardkonfiguration bezeichnet wird. Die Standardkonfiguration ist in Abbildung 4.5a schematisch dargestellt und wird mit einer äußeren Last von $F = 5 \text{ kN}$ belastet. Die Abmessungen der Standardkonfiguration sind in Tabelle 4.3 angegeben. Abbildung 4.5b zeigt die verschiedenen Pfade, entlang derer die nachfolgenden Auswertungen vorgenommen wurden. Die Pfade H1, H2 und H3 entsprechen horizontalen Auswertepfaden entlang der Mittellinie bzw. der oberen und unteren Schichtgrenze, der Pfad V1 entspricht vertikalen Auswertepfaden zur Ermittlung von

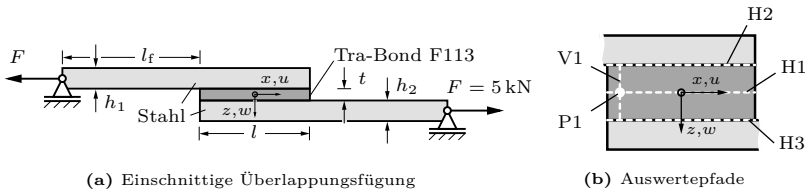
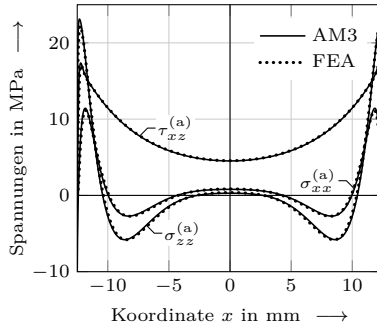
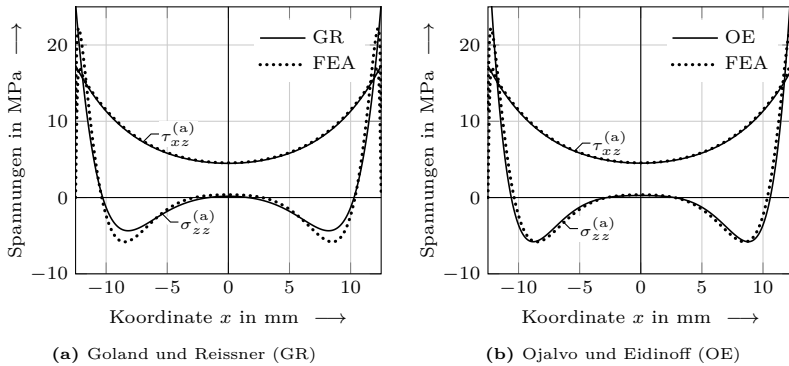


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung der Standardkonfiguration in (a) mit detaillierter Darstellung der betrachteten Auswertepfade in (b).

Ergebnissen in Dickenrichtung und bei P1 erfolgen punktuelle Auswertungen an einer Stelle auf mittlerer Höhe in der Klebschicht bei $z = 0$ mm.

Abbildung 4.6 zeigt für die gegebene Klebverbindung die Spannungslösungen von drei verschiedenen analytischen Modellen jeweils im Vergleich zu numerischen Referenzlösungen. Die Auswertung erfolgt dabei im Überlappungsbereich entlang der horizontalen Mittellinie in der Klebschicht, die in Abbildung 4.5b als Auswertepfad H1 eingezeichnet ist. In Abbildung 4.6a werden die analytischen Lösungen für die Schub- und Schälspannungen $\tau_{xz}^{(a)}$



(c) Vorgestelltes analytisches Modell mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3)

Abbildung 4.6: Vergleich der Spannungslösungen verschiedener analytischer Modelle mit numerischen Referenzergebnissen (FEA) für eine einschnittige Überlappungsfügung mit der Standardkonfiguration aus Abbildung 4.5a und Tabelle 4.3. Die Auswertung erfolgt entlang der horizontalen Mittellinie der Klebschicht (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b).

und $\sigma_{zz}^{(a)}$ nach dem Modell von Goland u. Reissner (1944) berechnet und mit Finite-Elemente-Lösungen verglichen. Es ist zu erkennen, dass beide Spannungskomponenten zum Rand des Überlappungsbereichs hin deutliche Spannungsspitzen aufweisen, die charakteristisch für einschnittige Überlappungsfügungen sind und auf die unterschiedlichen Längsdehnungen und Verdrehungen der Fügepartner zurückzuführen sind, aber auch durch die Spannungssingularitäten an den Bimaterialkerben beeinflusst werden. Daher sind die Schubspannungen in der Mitte des Überlappungsbereichs besonders gering und nehmen zum Rand hin zu. Die Schälspannungen weisen ebenfalls hohe Spannungskonzentrationen zum Rand der Klebung hin auf und zeigen zudem einen Vorzeichenwechsel entlang der x -Koordinate, sodass sie im integralen Mittel über die Länge der Klebschicht verschwinden. Ein ähnlicher Effekt ist auch an Laminaträndern zu beobachten (Mittelstedt u. Becker, 2016). Die Schubspannungen zeigen größtenteils eine gute Übereinstimmung mit den Finite-Elemente-Ergebnissen. Deutliche Unterschiede sind an den Enden des Überlappungsbereichs zu erkennen, wo die analytischen Schubspannungen zum Rand hin weiter ansteigen, während die numerischen Schubspannungen aufgrund der Bedingung spannungsfreier Ränder verschwinden. Dieses Problem, auf das in Abschnitt 3.2.1 näher eingegangen wurde, ist typisch für *weak-interface*-Modelle. Die Schälspannungen weisen ebenfalls an den Rändern sichtbare Abweichungen auf und unterscheiden sich außerdem an den Stellen der lokalen Minima deutlich von der numerischen Referenzlösung. Ähnlich verhalten sich die Spannungslösungen in Abbildung 4.6b, bei denen für die analytische Berechnung das Modell von Ojalvo u. Eidinoff (1978) mit seinem im Vergleich zu Goland u. Reissner (1944) höherwertigen *weak-interface*-Ansatz verwendet wird. Die Übereinstimmung mit den Finite-Elemente-Lösungen ist insbesondere bei den Schälspannungen besser als bei Goland u. Reissner. Jedoch werden die Spannungen am Rand des Überlappungsbereichs ebenfalls nur unzureichend erfasst. In Abbildung 4.6c werden die Spannungen der in dieser Arbeit vorgestellten analytischen Modellierung mit der Finite-Elemente-Lösung verglichen. Dazu wird für die Klebschicht ein Verschiebungsansatz 3. Ordnung gewählt, der konstante, lineare, quadratische und kubische Deformationsmoden über die Klebschichtdicke berücksichtigt, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben. Im Vergleich zu den Ergebnissen von Goland u. Reissner (1944) und Ojalvo u. Eidinoff (1978) werden die lokalen Spannungsspitzen im Randbereich deutlich besser erfasst und der Spannungsabfall an den Rändern der Klebschicht kann gut abgebildet werden. Neben den Schäl- und Schubspannungen werden auch die in den anderen Modellen vernachlässigten Normalspannungen $\sigma_{xx}^{(a)}$ aufgetragen. Das Zusammenspiel des vorgestellten Ansatzes höherer Ordnung für die Klebschicht

mit den neu eingeführten Verformungsfunktionen und der Berücksichtigung der Normalspannungen ermöglicht eine genauere Modellierung der Spannungszustände, was sich erkennbar in einer besseren Übereinstimmung der analytischen Ergebnisse mit den Finite-Elemente-Ergebnissen zeigt.

Ein weiterer Vorteil der neuen analytischen Modellierung gegenüber den Modellen von Goland u. Reissner (1944) und Ojalvo u. Eidinoff (1978) ist, dass das Differentialgleichungssystem verschiebungsbasiert und nicht spannungsbasiert formuliert und gelöst wird. Dadurch lassen sich geometrische Randbedingungen wesentlich einfacher formulieren und es ist möglich, Verschiebungslösungen direkt aus dem Differentialgleichungssystem herzuleiten, ohne dass eine aufwendigere Berechnung aus den Spannungslösungen erforderlich ist. Da bei der Modellierung jedoch lediglich der Überlappungsbereich betrachtet wird, werden die Verschiebungen nicht in Abhängigkeit von der Lagerung der gesamten einschnittigen Überlappungsfügung (vgl. Abbildung 4.5a), sondern in Abhängigkeit von der Lagerung des Überlappungsbereichs (vgl. Abbildung 4.3) berechnet. Bei der in diesem Abschnitt untersuchten einschnittigen Überlappungsfügung wird die Lagerung des Überlappungsbereichs durch eine am unteren Fügepartner angreifende Fest-Los-Lagerung gemäß Abbildung 4.3c realisiert. Entsprechend ergeben sich die in Abbildung 4.7 dargestellten Klebschichtverschiebungen $u^{(a)}$ und $w^{(a)}$ ausgewertet entlang der horizontalen Klebschichtmittellinie (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b). Es ist zu erkennen, dass die horizontalen Verschiebungen $u^{(a)}$ zu den beiden

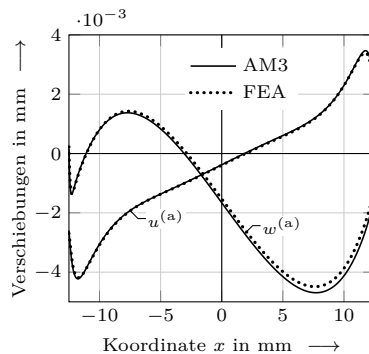


Abbildung 4.7: Analytische und numerische Verschiebungsergebnisse für eine einschnittige Überlappungsfügung mit der Standardkonfiguration, ausgewertet entlang der horizontalen Mittellinie der Klebschicht (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b). Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

Rändern hin mit jeweils umgekehrtem Vorzeichen zunehmen. Dies entspricht einer horizontalen Dehnung der Klebschicht, die sich aus dem Auseinanderziehen der Fügepartner infolge der äußeren Zugkraft F ergibt. Der Verlauf der vertikalen Durchbiegung $w^{(a)}$ folgt im Wesentlichen aus der gegenläufigen Durchbiegung der Fügepartner und wird ebenso wie die horizontale Verschiebung mit ausreichender Genauigkeit approximiert.

Betrachtet man das Verhalten der Klebschicht in Dickenrichtung, so wird die Notwendigkeit eines Ansatzes höherer Ordnung besonders deutlich. In Abbildung 4.8 sind die mit dem analytischen Modell mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) ermittelten Spannungen für die zuvor vorgestellte einschnittige Überlappungsfügung entlang eines vertikal durch die Klebschicht verlaufenden Pfades ausgewertet (Auswertepfad V1 in Abbildung 4.5b). Der Auswertepfad wird hier beispielhaft in den Bereich der in Abbildung 4.6 festgestellten hohen randnahen Spannungskonzentrationen im Abstand der eineinhalbfachen Klebschichtdicke vom linken Rand gelegt. Die Finite-Elemente-Ergebnisse zeigen deutlich, dass die Spannungsverläufe in Dickenrichtung sehr komplex sind, sodass sie mit konstanten oder linearen Ansätzen, wie sie bei Goland u. Reissner (1944) und Ojalvo u. Eidinoff (1978) verwendet werden, nur sehr unzureichend abgebildet werden können. Die hier vorgestellte Modellierung mit einem Verschiebungsansatz 3. Ordnung approximiert die Spannungsverläufe dagegen durch die zusätzlichen quadratischen

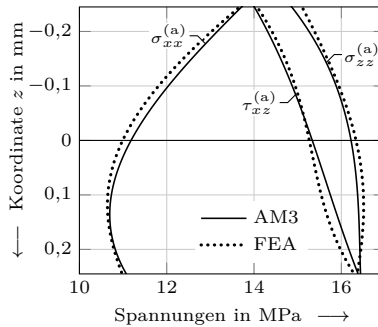
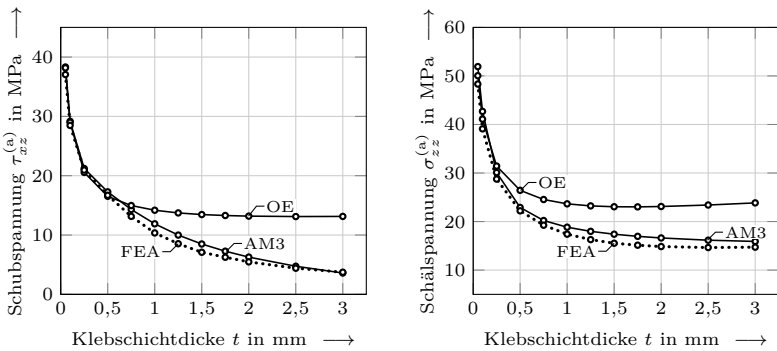


Abbildung 4.8: Auswertung der analytischen und numerischen Spannungsverläufe für eine einschnittige Überlappungsfügung mit der Standardkonfiguration in Dickenrichtung der Klebschicht entlang eines vertikalen Pfades (Auswertepfad V1 in Abbildung 4.5b) im Abstand der eineinhalbfachen Klebschichtdicke vom linken Rand des Überlappungsbereichs. Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

und kubischen Deformationsmoden mit zufriedenstellender Genauigkeit.

Komplexe Spannungsverläufe in Richtung der Klebschichtdicke treten besonders bei Klebverbindungen mit dickeren Klebschichten auf, bei denen sich die Klebschicht noch stärker eigenständig verformen kann. Der Einfluss der Klebschichtdicke auf die Qualität der Ergebnisse der verschiedenen Modelle ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Dort werden die Schub- und Schälspannungen nach dem Modell von Ojalvo u. Eidinoff (1978) und der aktuellen Modellierung für einschnittige Überlappungsfügungen der Standardkonfiguration mit unterschiedlichen Klebschichtdicken aufgetragen und mit numerischen Ergebnissen verglichen. Die Auswertung der Spannungen erfolgt dabei in einem Punkt lokaler Spannungsspitzen, der vertikal in halber Höhe der Klebschicht und horizontal im Abstand der halben Klebschichtdicke vom linken Rand liegt (Auswertepunkt P1 in Abbildung 4.5b).



(a) Vergleich der Schubspannungen in Abhängigkeit der Klebschichtdicke.

(b) Vergleich der Schälspannungen in Abhängigkeit der Klebschichtdicke.

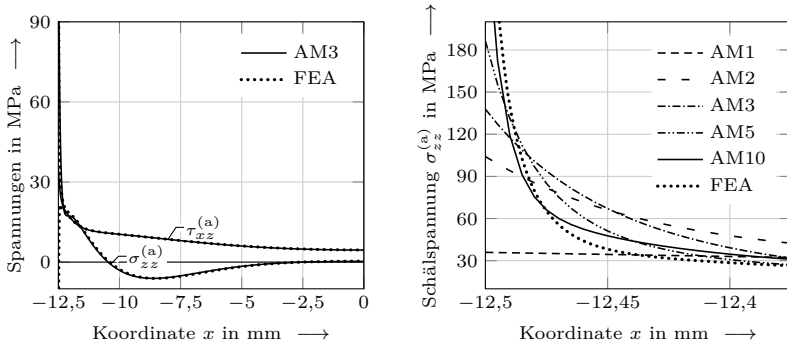
Abbildung 4.9: Vergleich der Schub- (a) und Schälspannungen (b) für eine einschnittige Überlappungsfügung mit der Standardkonfiguration (Auswertepunkt P1 in Abbildung 4.5b). Die Auswertung der Spannungen erfolgt dabei in einem Punkt auf halber Höhe der Klebschicht im Abstand der halben Klebschichtdicke vom linken Rand. Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3), des Modells von Ojalvo und Eidinoff (OE) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

Sowohl bei den Schubspannungen als auch bei den Schälspannungen ist zu erkennen, dass die Spannungswerte mit zunehmender Klebschichtdicke abnehmen. Es zeigt sich, dass die Übereinstimmung der Spannungsergebnisse der beiden analytischen Modelle mit der Finite-Elemente-Lösung bei vergleichsweise dünnen Klebschichten sehr hoch ist. Mit zunehmender Klebschichtdicke

Kapitel 4 Neuer Ansatz der Klebschichtmodellierung

treten jedoch größere Abweichungen der Ergebnisse der Modellierung nach Ojalvo und Eidinoff von den numerischen Referenzergebnissen auf. So zeigt die vorliegende Auswertung für die Schälspannungen in Abbildung 4.9a nur bis zu einer Klebschichtdicke von $t = 0,5$ mm und für die Schubspannungen in Abbildung 4.9b nur bis zu einer Klebschichtdicke von $t = 0,25$ mm eine gute Übereinstimmung. Die neue Modellierung mit dem Verschiebungsansatz 3. Ordnung zeigt dagegen auch bei dickeren Klebschichten noch eine gute Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen. Daraus folgt, dass für die Auswertung von Klebverbindungen mit dickeren Klebschichten ein Modell höherer Ordnung wie das in dieser Arbeit vorgestellte erforderlich ist, das aufgrund der höheren Ansatzordnung mit seinen zusätzlichen Verformungsfunktionen das Verformungsverhalten in der Klebschicht genauer abbildet.

Ein weiterer Vorteil des in dieser Arbeit vorgestellten Modells besteht darin, dass die Ansatzordnung der Verschiebungen in der Klebschicht beliebig gewählt werden kann. Eine Erhöhung der Ansatzordnung führt zwar zu einem größeren Differentialgleichungssystem und damit zu einem höheren Rechenaufwand, ermöglicht aber auch eine genauere Erfassung des Verformungsverhaltens in der Klebschicht, wodurch auch die Genauigkeit der Spannungs- und Verschiebungsergebnisse verbessert werden kann. Wie bereits in Bezug auf die Ergebnisse in Abbildung 4.6c gezeigt, ist für Auswertungen in der Mitte der Klebschicht eine Modellierung mit einem Verschiebungsansatz 3. Ordnung völlig ausreichend, um Ergebnisse mit sehr guter Genauigkeit zu erhalten. Eine weitere Erhöhung der Ansatzordnung lässt hier keine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse mehr erwarten und führt ausschließlich zu einer komplizierteren Modellierung. In der Nähe der Spannungssingularitäten an den Bimaterialkerben zwischen Klebschicht und Fügepartnern, die für Versagensbewertungen von besonderer Bedeutung sind, spielt die Ansatzordnung dagegen eine größere Rolle. Da die analytischen Modelle Spannungssingularitäten nicht abbilden können, treten dort größere Abweichungen zu den numerischen Ergebnissen auf. Aus diesem Grund erfolgt in Abbildung 4.10 eine Auswertung der Spannungen an der Schichtgrenze zwischen oberem Fügepartner und Klebschicht (Auswertepfad H2 in Abbildung 4.5b), an der im linken Bereich eine Spannungssingularität vorliegt. In Abbildung 4.10a sind die später auch für eine Versagensanalyse relevanten Schub- und Schälspannungen entlang der gesamten Schichtgrenze ausgewertet. Es ist erkennbar, dass die Spannungen in ausreichendem Abstand von der Spannungssingularität noch relativ genau durch die analytische Modellierung mit dem Ansatz 3. Ordnung abgebildet werden können. Zur Analyse der Vorgänge in unmittelbarer Nähe der Spannungssingularität ist in Abbildung 4.10b der linke, randnahe Bereich



(a) Schub- und Schälspannungen entlang der Schichtgrenze zwischen oberem Fügepartner und Klebschicht.

(b) Vergrößerte Darstellung der Schälspannungen im Randbereich in Abhängigkeit der Ansatzordnung.

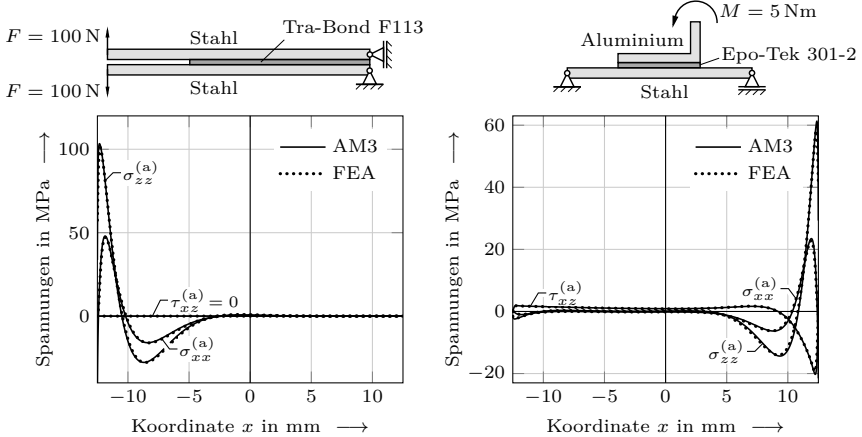
Abbildung 4.10: Darstellung der versagensrelevanten Spannungen an der Schichtgrenze zwischen Klebschicht und Fügepartner (Auswertepfad H2 in Abbildung 4.5b) für eine einschnittige Überlappungsfügung mit der Standardkonfiguration in (a) und Vergleich der vorgestellten analytischen Modellierung in Abhängigkeit der verwendeten Ansatzordnungen in der Nähe der Spannungssingularität in (b).

vergrößert dargestellt. Am Beispiel der Schälspannung wird hier der Einfluss der Ansatzordnung auf die Qualität der analytischen Ergebnisse und damit auf die Bestimmung der lokalen Spannungssingularität gezeigt. Der Ansatz 1. Ordnung ist dabei vergleichbar mit dem von Ojalvo u. Eidinoff (1978) verwendeten Ansatz für die Verschiebungen der Klebschicht. Es ist ersichtlich, dass sich die Spannungsergebnisse mit zunehmender Ansatzordnung kontinuierlich verbessern, jedoch auch bei Verwendung des Ansatzes 10. Ordnung noch erkennbare Abweichungen zur Finite-Elemente-Lösung auftreten. Da es sich bei der Spannungssingularität jedoch um einen lokal begrenzten Effekt handelt, ist auch der Bereich, in dem analytische und numerische Ergebnisse stärker voneinander abweichen, klein. Für die folgenden Auswertungen wird daher der Einfachheit halber weiterhin die analytische Modellierung mit dem Verschiebungsansatz 3. Ordnung verwendet.

4.3.2 Analyse unterschiedlicher Belastungssituationen

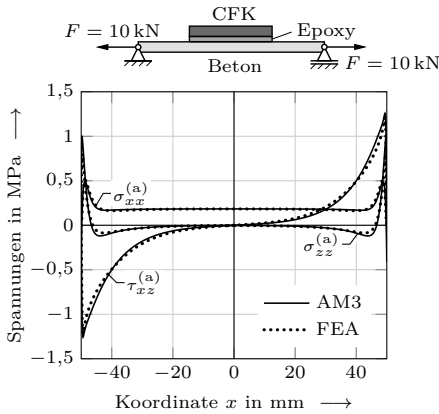
Während bisher nur einschnittige Überlappungsfügungen der Standardkonfiguration betrachtet wurden, wird in diesem Abschnitt die Eignung des neuen analytischen Modells für verschiedene andere Klebefügungen unter

Kapitel 4 Neuer Ansatz der Klebschichtmodellierung



(a) Schälungsfügung mit den Abmessungen: $l = b = 25 \text{ mm}$, $t = 0,5 \text{ mm}$, $h_1 = h_2 = 2 \text{ mm}$, $l_f = 100 \text{ mm}$. Die Länge l_f entspricht hier die Länge der nicht verklebten Enden der Fügepartner.

(b) T-Fügung mit den Abmessungen: $l = b = 25 \text{ mm}$, $t = 0,5 \text{ mm}$, $2h_1 = h_2 = 4 \text{ mm}$, $l_h = 10 \text{ mm}$. Dabei ist l_h die Länge des vertikalen Hebelarms, über den das äußere Moment aufgebracht wird.

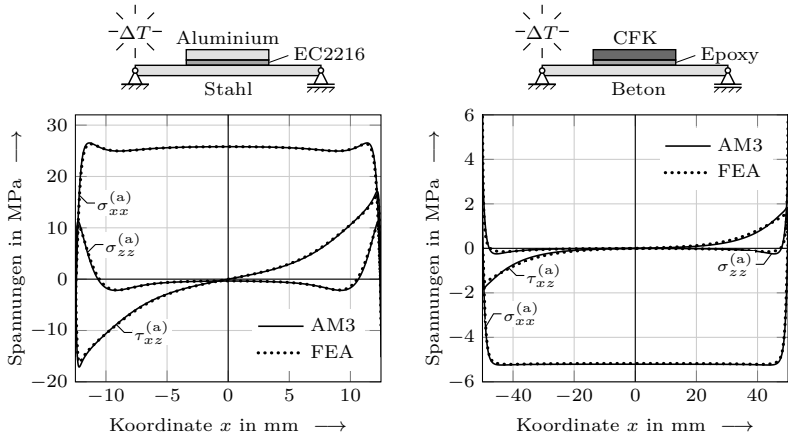


(c) Verstärkungspflaster mit den Abmessungen: $l = b = 100 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$, $10h_1 = h_2 = 20 \text{ mm}$, $l_f = 50 \text{ mm}$. Die Länge l_f entspricht hier jeweils der Länge der nicht verklebten Enden des unteren Fügepartners.

Abbildung 4.11: Vergleich der analytischen und numerischen Spannungsverläufe verschiedener Klebefügungen entlang der horizontalen Mittellinie der Klebschicht (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b). Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

mechanischer und thermischer Beanspruchung untersucht. Die Fügungen unterscheiden sich durch die Fügekonfiguration, die Abmessungen und die verwendeten Werkstoffe für Klebschicht und Fügepartner. Die jeweiligen Materialkennwerte sind den Tabellen 4.1 und 4.2 zu entnehmen. In Abbildung 4.11a werden die Spannungen in einer Schälfügung ausgewertet, bei der zwei Fügepartner aus Stahl mit dem Klebstoff Tra-Bond F113 verbunden sind. Die Fügepartner werden an ihren nicht verklebten Enden mit der Kraft $F = 100\text{ N}$ auseinandergezogen. Dadurch erfährt die Klebschicht eine starke Dehnung in vertikaler z -Richtung, aus der insbesondere am lastangriffsseitigen Klebschichtrand hohe Schälspannungen $\sigma_{zz}^{(a)}$ resultieren. Die Querkontraktion der Klebschicht erzeugt gleichzeitig auch Normalspannungen $\sigma_{xx}^{(a)}$ in Längsrichtung der Klebschicht. Der symmetrische Aufbau der Verbindung bewirkt, dass die Mitte der Klebschicht völlig frei von Schubspannungen ist. Eine ähnliche Dominanz der Schälspannungen ist auch in Abbildung 4.11b zu erkennen. Die dort gezeigten Spannungsverläufe ergeben sich für eine T-Fügung mit Fügepartnern aus Aluminium und Stahl, die mit dem Klebstoff Epo-Tek 301-2 verklebt sind. Wie in der entsprechenden schematischen Darstellung ersichtlich, wird der obere Fügepartner mit einem Moment $M = 5\text{ Nm}$ belastet, wodurch ähnlich wie bei der Schälfügung hohe vertikale Dehnungen und somit große Schälspannungen in der Nähe der Lasteinleitung entstehen. Abbildung 4.11c zeigt die Spannungsverläufe eines im Bauwesen häufig verwendeten Verstärkungspflasters. Eine mit einer Zuglast von $F = 10\text{ kN}$ belastete Betonstruktur wird mit einer Lamineinzelschicht aus CFK verstärkt, deren Fasern entlang der Klebverbindung in x -Richtung verlaufen. Das Spannungsfeld wird in diesem Fall von den Schubspannungen dominiert, die aus den unterschiedlichen horizontalen Dehnungen der beiden Fügepartner resultieren. Aus der symmetrischen Struktursituation ergeben sich dabei symmetrische Spannungsverläufe. Die Schäl- und Normalspannungen sind über die Klebschichtlänge nahezu konstant und weisen nur an den Enden der Klebschicht lokale Spannungsspitzen aufgrund der vorhandenen Bimaterialkerben auf.

In Abbildung 4.12 sind die Spannungsverläufe für zwei Verstärkungspflaster unter thermischer Belastung dargestellt. Die jeweilige Temperaturänderung wird mit konstantem Wert gleichmäßig über die gesamte Klebverbindung aufgebracht. Bei dem Verstärkungspflaster aus Abbildung 4.12a handelt es sich um eine Stahlstruktur, die durch den Klebstoff EC2216 mit einer Schicht aus Aluminium verstärkt und einer Temperaturänderung von $\Delta T = -100\text{ K}$ ausgesetzt wird. Das Verstärkungspflaster aus Abbildung 4.12b entspricht der bereits in Abbildung 4.11c untersuchten mit CFK verstärkten Betonstruktur, die diesmal um eine Temperaturänderung von $\Delta T = 20\text{ K}$ erwärmt wird. In den thermisch belasteten Verbindungen treten besonders hohe Normal-



(a) Verstärkungspflaster mit den Abmessungen: $l = b = 25$ mm, $t = 0,5$ mm, $4h_1 = h_2 = 4$ mm, $l_f = 25$ mm. Die Temperaturlast ist $\Delta T = -100$ K.

(b) Verstärkungspflaster mit den Abmessungen: $l = b = 100$ mm, $t = 1$ mm, $10h_1 = h_2 = 20$ mm, $l_f = 50$ mm. Die Temperaturlast ist $\Delta T = 20$ K.

Abbildung 4.12: Vergleich analytischer und numerischer Spannungsverläufe von thermisch beanspruchten Verstärkungspflastern. Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

spannungen $\sigma_{xx}^{(a)}$ auf, die aus der temperaturbedingten Längsdehnung der Fügepartner resultieren. Sind die thermischen Ausdehnungskoeffizienten von oberem und unterem Fügepartner unterschiedlich, führt die unterschiedlich starke Ausdehnung bei Temperaturänderung zusätzlich zu Schubspannungen, die zu den Rändern hin kontinuierlich zunehmen.

Grundsätzlich zeigen die analytischen und numerischen Ergebnisse sowohl für die vorgestellten mechanisch als auch für die thermisch beanspruchten Klebverbindungen eine hohe Übereinstimmung. Darüber hinaus werden die in der numerischen Referenzlösung auftretenden spannungsfreien Randbedingungen durch die analytische Modellierung zufriedenstellend angenähert.

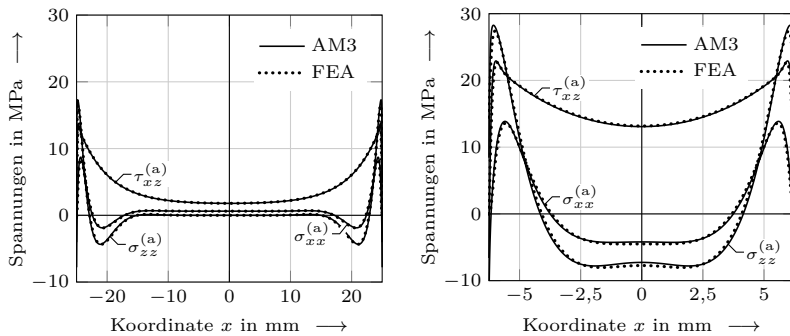
4.3.3 Parameterstudien

Im Folgenden werden einige Parameterstudien durchgeführt, um den Einfluss des Klebstoffmaterials und der Abmessungen der Klebverbindung auf die

Spannungsverläufe in der Klebschicht zu bewerten. Dabei wird für alle Auswertungen die einschnittige Überlappungsfügung der Standardkonfiguration aus Abschnitt 4.3.1 verwendet, bei der jeweils nur einzelne Parameter variiert werden. Die Spannungsverläufe wurden entlang der horizontalen Mittellinie des Überlappungsbereichs ausgewertet (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b).

Einfluss der Geometrie

In Abbildung 4.13 wird der Einfluss der Überlappungslänge l auf die Spannungsverteilung untersucht. Ausgehend von der Standardkonfiguration wird dazu die Überlappungslänge in Abbildung 4.13a auf $l = 50$ mm erhöht und in Abbildung 4.13b auf $l = 12,5$ mm verringert. Um die Unterschiede in den Spannungswerten besser hervorzuheben, ist die Skalierung der vertikalen Achse in beiden Abbildungen gleich. Es wird deutlich, dass die Spannungen in der Verbindung mit längerem Überlappungsbereich deutlich niedriger sind, als in der Verbindung mit kürzerem Überlappungsbereich. Ein längerer Überlappungsbereich ist daher vorteilhaft, da die Lastübertragung über eine größere Fläche verteilt erfolgen kann und die Klebverbindung somit höhere Lasten ertragen kann. Die Spannungsspitzen an den Rändern sind allerdings auch



(a) Einschnittige Überlappungsfügung mit einer Überlappungslänge von $l = 50$ mm.

(b) Einschnittige Überlappungsfügung mit einer Überlappungslänge von $l = 12,5$ mm.

Abbildung 4.13: Analytische und numerische Spannungsergebnisse für einschnittige Überlappungsfügungen mit der Standardkonfiguration für verschiedene Überlappungslängen, ausgewertet entlang der horizontalen Mittellinie der Klebschicht (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b). Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

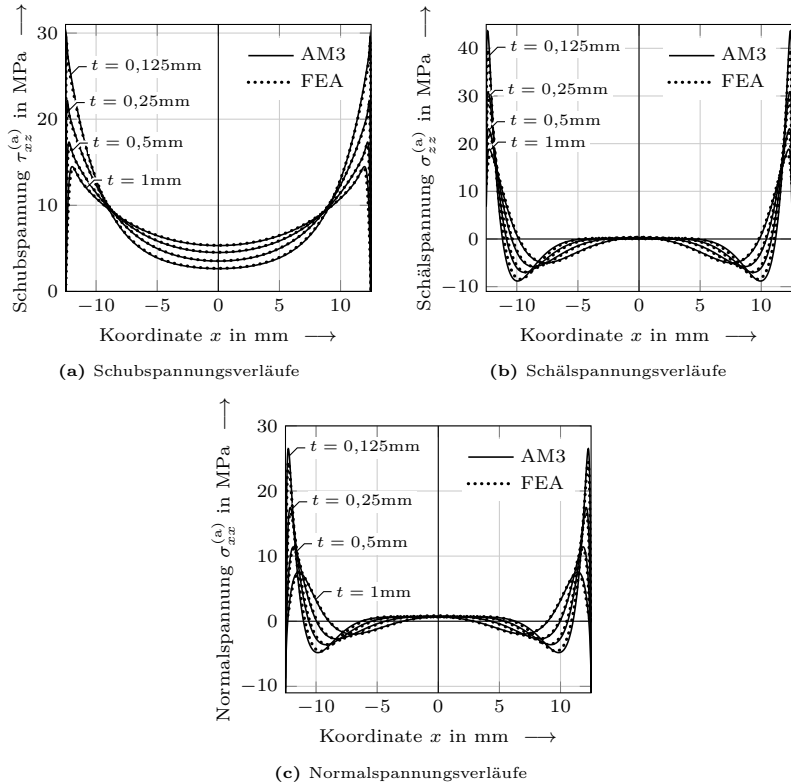


Abbildung 4.14: Analytische und numerische Spannungsergebnisse für einschichtige Überlappungsfügungen mit der Standardkonfiguration für verschiedene Klebschichtdicken, ausgewertet entlang der horizontalen Mittellinie der Klebschicht (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b). Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

bei einem langen Überlappungsbereich verhältnismäßig stark ausgeprägt. Der Einfluss der Klebschichtdicke auf die Spannungsverläufe ist in Abbildung 4.14 jeweils für die verschiedenen Spannungskomponenten getrennt dargestellt. Die Klebschichtdicken der betrachteten Strukturen reichen von $t = 0,125$ mm bis $t = 1$ mm. Dies entspricht $1/16$ bzw. $1/2$ der Fügepartnerdicke. Die gewählten Konfigurationen decken somit einen Bereich von sehr dünnen bis zu eher

dicken Klebschichten ab. Bei den Schubspannungen in Abbildung 4.14a ist zu erkennen, dass mit zunehmender Klebschichtdicke die Spannungsspitzen am Rand des Überlappungsbereichs abnehmen und die Lage ihres Extremwertes sich leicht vom Rand der Klebschicht entfernt. Auch bei den Schäl- und Normalspannungen führt eine Erhöhung der Klebschichtdicke zu einer Abschwächung der Spannungsspitzen am Rand. Außerdem sind die für beide Spannungen charakteristischen lokalen Minima, die etwas weiter vom Rand entfernt auftreten, betragsmäßig deutlich kleiner und weniger stark ausgeprägt. Die Lage der beiden Extremwerte verschiebt sich mit zunehmender Klebschichtdicke, bei den lokalen Minima sogar sehr deutlich, vom Klebschichttrand in Richtung der Mitte. In der Mitte des Überlappungsbereichs ist der Einfluss der Klebschichtdicke auf die Schäl- und Normalspannungen hier kaum erkennbar und die Verläufe liegen nahe beieinander. Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass die Zunahme der Klebschichtdicke mit einer gleichmäßigeren Verteilung der Spannungen in der Klebschicht und einer Abschwächung der lokalen Spannungsspitzen einhergeht. Diese Beobachtung legt den Schluss nahe, dass hinsichtlich der Festigkeit dicke Klebschichten vorzuziehen sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zu dem in der Praxis auftretenden Klebschichtdickeneffekt, der in Abschnitt 3.3.2 thematisiert wurde und der besagt, dass die Festigkeit einer Klebverbindung mit zunehmender Klebschichtdicke abnimmt. Der Zusammenhang zwischen der Klebschichtdicke und der Festigkeit von Klebverbindungen wird in Kapitel 5 anhand der in dieser Arbeit vorgestellten Modellierung genauer analysiert.

Einfluss des Klebstoffmaterials

Bei der praktischen Anwendung von Klebverbindungen kommt der geeigneten Wahl des Klebstoffes eine zentrale Bedeutung zu. Im Folgenden wird daher der Einfluss der Steifigkeit des Klebstoffs auf die Spannungsverteilung in der Klebschicht analysiert. Zu diesem Zweck werden Auswertungen durchgeführt, bei denen der Elastizitätsmodul der Klebschicht zwischen $E^{(a)} = 0,5 \text{ GPa}$ und $E^{(a)} = 4 \text{ GPa}$ variiert wird. Die Querkontraktionszahl bleibt dabei unverändert gleich. Die Spannungsergebnisse sind in Abbildung 4.15 getrennt für die verschiedenen Spannungskomponenten dargestellt. Eine Verringerung des Elastizitätsmoduls $E^{(a)}$ führt zu einer gleichmäßigeren Verteilung der Spannungen im Überlappungsbereich, wodurch auch die Spannungsspitzen am Rand reduziert werden. Diese Effekte sind in ähnlicher Weise auch in Abbildung 4.14 durch eine Erhöhung der Klebschichtdicke zu beobachten.

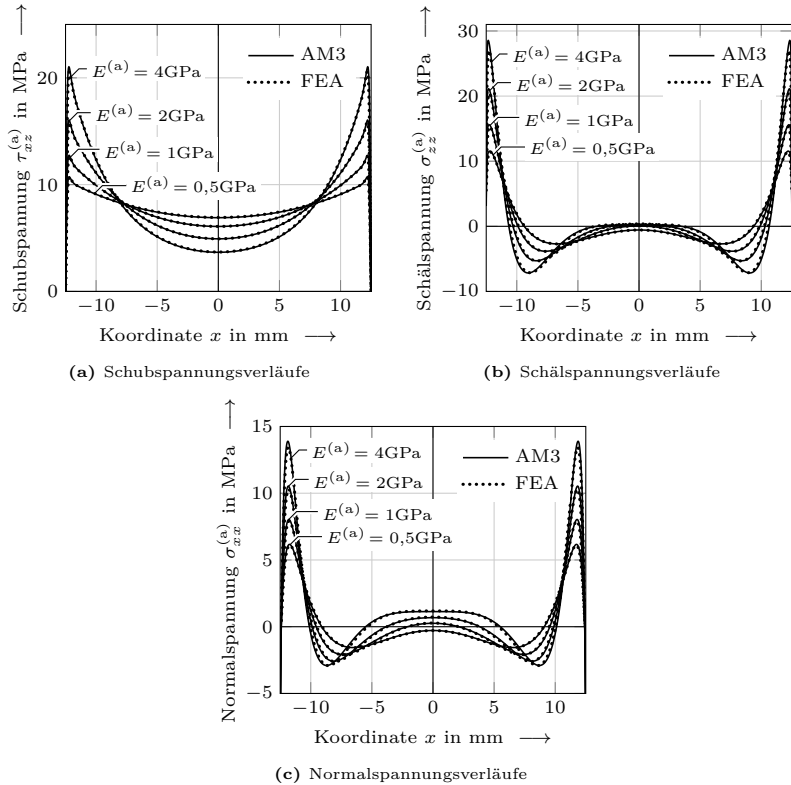


Abbildung 4.15: Analytische und numerische Spannungsergebnisse für einschichtige Überlappungsfügungen mit der Standardkonfiguration für verschiedene Klebstoffsteifigkeiten, ausgewertet entlang der horizontalen Mittellinie der Klebschicht (Auswertepfad H1 in Abbildung 4.5b). Die Ergebnisse ergeben sich unter Verwendung des vorgestellten analytischen Modells mit Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) und der Finite-Elemente-Analyse (FEA).

Kapitel 5

Versagensanalyse von Klebverbindungen

Aufbauend auf der im vorigen Kapitel vorgestellten Modellierung zu der Spannungs- und Verformungsanalyse von Klebverbindungen werden in diesem Kapitel Versagensbewertungen an einschnittigen Überlappungsfügungen durchgeführt. Die Spannungssingularitäten an den Schichtgrenzen zwischen Klebschicht und Fügepartner begünstigen die lokale Entstehung von Rissen, welche zum Versagen der gesamten Klebverbindung führt. Dieser Versagensfall wird im Folgenden sowohl analytisch als auch numerisch mit Hilfe der Finiten Bruchmechanik untersucht. Zur Überprüfung der Ergebnisse wird zusätzlich eine numerische Kohäsivzonenmodellierung durchgeführt. Für die Anwendung der Finiten Bruchmechanik wird ein geeignetes Optimierungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Belastung und der initialen Risslänge unter Berücksichtigung des nicht monoton ansteigenden Verlaufs der Energiefreisetzungsrates vorgestellt. Die Modellierung wird anschließend auf verschiedene einschnittige Überlappungsfügungen angewendet, wobei die Resultate mit experimentellen Ergebnissen verglichen und der Einfluss der Geometrie und des Klebstoffmaterials auf die Versagenslast untersucht werden. Teile der numerischen Auswertungen und Ergebnisse wurden im Rahmen der Masterarbeit von Mesbah (2023) erarbeitet. Diese und weitere zentrale Inhalte dieses Kapitels wurden in international begutachteten Fachzeitschriften und Tagungsbänden veröffentlicht (Methfessel u. Becker, 2023a, Methfessel et al., 2024).

5.1 Einführung

Bei der in diesem Kapitel durchgeführten Versagensanalyse wird das spröde Versagen von symmetrischen, einschnittigen Überlappungsfügungen untersucht. Es wird davon ausgegangen, dass das Versagen der Klebverbindung durch Rissbildung verursacht wird. Ab einer kritischen Belastung kommt es, wie in Abbildung 5.1 zu sehen, an einer der Bimaterialkerben am Rand des Überlappungsbereichs zur Initiierung eines Risses entlang der Schichtgrenze

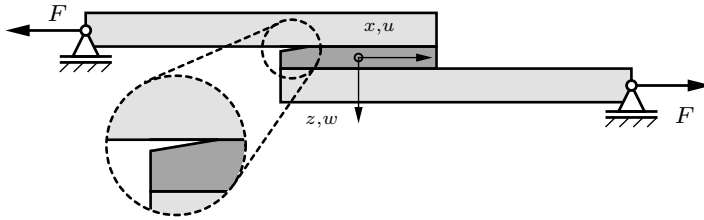


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung einer einschnittigen Überlappungsfügung mit eingezeichnetem Riss, der sich ausgehend vom Punkt der Bimaterialkerbe entlang der Schichtgrenze zwischen Klebstoff und oberem Fügepartner ausbildet.

zwischen Fügepartner und Klebschicht (Hell et al., 2014). Von dort aus wächst der Riss weiter, bis die Schädigung so groß ist, dass der Fügepartner vollständig abreißt. Die sich einstellende Rissöffnung ist bei einschnittigen Überlappungsfügungen unter ausschließlich ebener Zugbelastung in der x, z -Ebene unabhängig von der Tiefenrichtung und wird ausschließlich durch die Rissöffnungsmoden I und II bestimmt. Unter Berücksichtigung dessen wird im Folgenden auf die Versagensbewertung mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium der Finiten Bruchmechanik in Abschnitt 5.2 und mit der Kohäsivzonenmodellierung in Abschnitt 5.3 eingegangen und die Ergebnisse werden in Abschnitt 5.4 präsentiert. Für die Auswertung mit der Finiten Bruchmechanik ist aufgrund der Bestimmung der Energiefreisetzungsrate die Berechnung von Konfigurationen mit und ohne Riss erforderlich. Die Modellierung eines Risses erfolgt dabei durch eine modifizierte Form der in Abschnitt 4.1 beschriebenen analytischen Modellierung, bei der Klebschicht und Fügepartner voneinander getrennt sind und eine realitätsnahe Ermittlung der Rissöffnung möglich ist.

5.2 Versagensanalyse mittels Finiten Bruchmechanik

Zunächst wird die Versagensanalyse mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium der Finiten Bruchmechanik durchgeführt. Die in dieser Arbeit gewählten Kriterien werden im Folgenden näher vorgestellt. Zur Auswertung des Spannungskriteriums werden neben den Festigkeiten σ_c und τ_c auch die Spannungen $\sigma_{zz}^{(a)}$ und $\tau_{xz}^{(a)}$ an der Schichtgrenze zwischen Fügepartner und Klebschicht der ungerissenen Klebverbindung benötigt. Bei der numerischen Auswertung können diese direkt aus der Finite-Elemente-Lösung ermittelt werden. Die Berechnung der analytischen Spannungsergebnisse erfolgt mit der

5.2 Versagensanalyse mittels Finiter Bruchmechanik

in Abschnitt 4.1 beschriebenen Modellierung. Für das Spannungskriterium eignen sich verschiedene Festigkeitskriterien, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das elliptische Interaktionsgesetz verwendet, welches einem verallgemeinerten Mohr-Coulomb-Gesetz in der Form

$$\left(\frac{\sigma_{zz}^{(a)}}{\sigma_c} \right)^n + \left(\frac{\tau_{xz}^{(a)}}{\tau_c} \right)^n \geq 1 \quad (5.1)$$

mit dem Exponenten $n = 2$ entspricht und sich bei der Anwendung auf Klebverbindungen unter Mixed-Mode-Belastung bewährt hat (García u. Leguillon, 2012, Tran et al., 2012). Beim Energiekriterium erfolgt die Versagensbewertung in Abhängigkeit von der inkrementellen Energiefreisetzungsrate und der materialspezifischen Bruchzähigkeit. Als Energiekriterium wurde hier ein Kriterium nach Griffith (1921) in der Form

$$\frac{\bar{G}}{\bar{G}_c} \geq 1 \quad \text{mit} \quad \bar{G} = \bar{G}_I + \bar{G}_{II} \quad (5.2)$$

verwendet. Da es in diesem Abschnitt in erster Linie darum geht, die Methodik der Versagensbewertung zu demonstrieren und nicht darum, verschiedene Teilkriterien zu bewerten, wurde ein relativ einfaches Energiekriterium verwendet, das zwar die beiden relevanten Versagensmoden berücksichtigt, aber hinsichtlich ihrer Beteiligung am Versagen keine Unterscheidung trifft. Ein Überblick über die gängigsten Teilkriterien findet sich bei Doitrand et al. (2023). Für die Auswertung des Energiekriteriums wird die inkrementelle Energiefreisetzungsrate \bar{G} benötigt, deren Berechnung in Abschnitt 5.2.1 näher beschrieben wird. Da die inkrementelle Energiefreisetzungsrate von der Risslänge abhängt, ist es für ihre Bestimmung erforderlich, verschiedene gerissene Konfigurationen mit Rissen unterschiedlicher Länge zu betrachten. Die Modellierung der gerissenen Konfigurationen ist in Abschnitt 5.2.2 für die analytische und numerische Betrachtung beschrieben. Da sowohl die kritische Belastung als auch die initiale Risslänge der jeweils betrachteten Klebverbindung unbekannt sind und der Verlauf der inkrementellen Energiefreisetzungsrate nicht monoton ist, ist eine iterative Auswertung des gekoppelten Kriteriums erforderlich. Der hierfür entwickelte Optimierungsalgorithmus ist in Abschnitt 5.2.3 detailliert beschrieben.

5.2.1 Berechnung der Energiefreisetzungsrate

Wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, gibt es verschiedene Methoden zur Berechnung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate. In dieser Arbeit wird

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

die inkrementelle Energiefreisetzungsrates mit Hilfe des virtuellen Risschließintegrals berechnet, mit dem die Arbeit bestimmt werden kann, die erforderlich ist, um einen virtuellen Riss durch Belastung seiner Rissflächen quasistatisch zu schließen. Es handelt sich also um ein lokales Verfahren, bei dem nur der Bereich um den Riss betrachtet wird. Die Auswertung des virtuellen Risschließintegrals kann für beide Versagensmoden getrennt erfolgen. Dabei werden entlang des Risspfades die Spannungen der ungerissenen Struktur mit den Differenzen der oberen (o.) und unteren (u.) Rissflankenverschiebungen der gerissenen Struktur multipliziert und über die Rissfläche bzw. Risslänge integriert. Die Energiefreisetzungsrates der beiden relevanten Rissöffnungsmoden ergeben sich aus

$$\bar{G}_I = \frac{1}{2b\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{zz}(s) \left(w^{(o.)}(s) - w^{(u.)}(s) \right) b ds, \quad (5.3)$$

$$\bar{G}_{II} = \frac{1}{2b\Delta a} \int_0^{\Delta a} \tau_{xz}(s) \left(u^{(o.)}(s) - u^{(u.)}(s) \right) b ds \quad (5.4)$$

mit der Breite b und der Risslänge Δa . Für die numerische Auswertung entlang eines diskretisierten Risspfades kann im Fall geometrischer Linearität eine vereinfachte Form des virtuellen Risschließintegrals verwendet werden, bei der die Integrale in Summen überführt werden (Rybicki u. Kanninen, 1977, Krueger, 2004, Carrere et al., 2015). Dazu werden die Knotenkräfte p_x und p_z mit den entsprechenden Knotenverschiebungen multipliziert und für die Knoten entlang des Risspfades aufsummiert:

$$\bar{G}_I = \frac{1}{2b\Delta a} \sum_{k=1}^N p_{zk} \left(w_k^{(o.)} - w_k^{(u.)} \right), \quad (5.5)$$

$$\bar{G}_{II} = \frac{1}{2b\Delta a} \sum_{k=1}^N p_{xk} \left(u_k^{(o.)} - u_k^{(u.)} \right). \quad (5.6)$$

Qualitativ ergeben sich so die in Abbildung 5.2 dargestellten Verläufe für die inkrementellen Energiefreisetzungsrates \bar{G}_I und \bar{G}_{II} der Rissöffnungsmoden I und II sowie die inkrementelle Gesamtenergiefreisetzungsrates \bar{G} , die jeweils vom Koordinatenursprung ausgehen. Für verhältnismäßig kleine Risse dominiert der Einfluss der Energiefreisetzungsrates von Modus I, der deutlich über der Energiefreisetzungsrates von Modus II liegt. Nach Erreichen eines lokalen Maximums fällt die Kurve dann wieder ab und der Einfluss des Rissöffnungsmodus II wird mit zunehmender Risslänge stärker. Die inkrementelle Gesamtenergiefreisetzungsrates zeigt somit einen nicht monoton ansteigenden

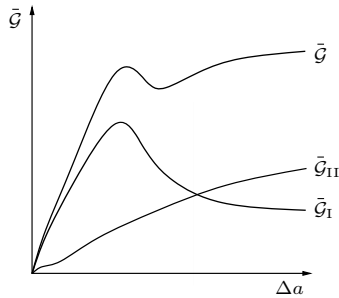


Abbildung 5.2: Qualitative Darstellung der Komponenten der inkrementellen Energiefreisetzungsrates an einschnittigen Überlappungsfügungen in Abhängigkeit von der Risslänge Δa .

Verlauf, wodurch wie in Abschnitt 2.6 beschrieben die Auswertung des gekoppelten Kriteriums aufwendiger wird. Eine weitere häufig angewandte Methode zur Berechnung der Energiefreisetzungsrates ist die Bestimmung der Differenz der Gesamtenergie der Klebverbindung vor und nach der Entstehung eines Risses finiter Länge. Die Subtraktion großer sich wenig unterscheidender Zahlen bei der Bestimmung der Potentialdifferenz für die gesamte Klebverbindung kann jedoch zu einer Verringerung der Genauigkeit der ermittelten Energiefreisetzungsrates führen. Ein anderes bewährtes Verfahren, das insbesondere bei analytischen Auswertungen vielfach verwendet wird, basiert auf einer stark vereinfachten Form des J-Integrals. Dabei wird angenommen, dass sich die Länge des Überlappungsbereiches der Klebverbindung infolge der Entstehung eines Risses um die Risslänge verringert (Hu, 1995). Für elastisches Materialverhalten kann so ein Ausdruck für die Energiefreisetzungsrates hergeleitet werden, der ausschließlich von den Spannungen am Rand des Überlappungsbereichs abhängt (Hu et al., 1992, Krenk, 1992, Fraise u. Schmit, 1993), sodass eine Berechnung der Rissflankenverschiebungen nicht erforderlich ist. Der Nachteil ist jedoch, dass die so berechneten Energiefreisetzungsrates bei verschwindender Risslänge nicht gegen Null gehen (Weißgraber, 2014).

5.2.2 Modellierung der gerissenen Struktur

Die Modellierung von Rissen in Klebverbindungen wird im Folgenden zunächst für die analytische und anschließend für die numerische Umsetzung beschrieben. Bei der bisherigen analytischen Modellierung der ungerissenen Klebverbindung wird die Verbindung zwischen der Klebschicht und den

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

Fügepartnern durch den Verschiebungsansatz der Klebschicht gemäß den Gleichungen (4.13) und (4.14) realisiert. Sie enthalten die Verschiebungen $\hat{u}^{(i)}(x)$ und $\hat{w}^{(i)}(x)$, die den Verschiebungen des oberen und unteren Fügepartners entsprechen, ausgewertet an der Schichtgrenze zur Klebschicht. Die so erzeugte Kopplung der Verschiebungen ermöglicht eine Lastübertragung zwischen den verschiedenen Schichten. Tritt nun, wie in Abbildung 5.3 zu sehen, vom Rand ausgehend ein Riss zwischen Fügepartner und Klebschicht mit der Risslänge Δa auf, so müssen zwei Bereiche, der bereits gerissene und der noch ungerissene Bereich, modelliert werden. Der ungerissene Bereich kann weiterhin mit der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Modellierung beschrieben werden. Im gerissenen Bereich hingegen muss die Kopplung zwischen dem Fügepartner und der Klebschicht, zwischen denen der Riss verläuft, aufgehoben werden, damit sich der Riss öffnen und die Rissflanken sich unabhängig voneinander verformen können. Dazu ist eine entsprechende Modifizierung des Verschiebungsansatzes der Klebschicht erforderlich, die im Folgenden am Beispiel eines linksseitigen Risses zwischen oberem Fügepartner und Klebschicht, wie in Abbildung 5.3 dargestellt, näher beschrieben wird.

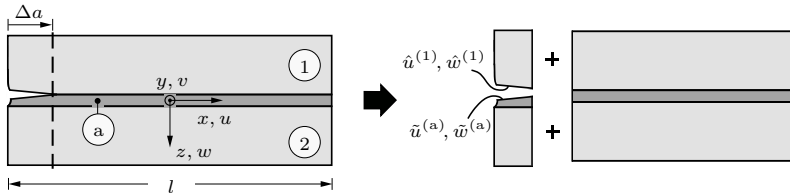


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung zur Modellierung des Überlappungsbereichs der Klebverbindung mit einem Riss der Länge Δa .

Die Verschiebungen der oberen Rissflanke gehören zum oberen Fügepartner und werden durch dessen Verschiebungsansatz beschrieben, der unverändert dem Ansatz in den Gleichungen (4.3) und (4.4) aus Abschnitt 4.1.2 entspricht. Die Verschiebungen der unteren Rissflanke werden durch den Verschiebungsansatz der Klebschicht beschrieben, der im gerissenen Fall nicht mehr von den Verschiebungen des oberen Fügepartners abhängen kann, sondern neu formuliert werden muss. Daher werden im Verschiebungsansatz der Klebschicht, wie in Abbildung 5.3 zu sehen, anstelle der Verschiebungen des oberen Fügepartners neue Verschiebungsfunktionen $\tilde{u}^{(a)}(x)$ und $\tilde{w}^{(a)}(x)$ eingeführt, die den horizontalen und vertikalen Verschiebungen der unteren Rissflanke entsprechen. Der neue Ansatz für die Verschiebungen der Klebschicht im

5.2 Versagensanalyse mittels Finiter Bruchmechanik

gerissenen Fall ergibt sich somit aus den Gleichungen (4.13) und (4.14) zu

$$u^{(a)}(x, z) = \frac{\tilde{u}^{(a)}(x) + \hat{u}^{(2)}(x)}{2} + z \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - \tilde{u}^{(a)}(x)}{t} + \mathcal{F}_u^{(n)}(x, z), \quad (5.7)$$

$$w^{(a)}(x, z) = \frac{\tilde{w}^{(a)}(x) + \hat{w}^{(2)}(x)}{2} + z \frac{\hat{w}^{(2)}(x) - \tilde{w}^{(a)}(x)}{t} + \mathcal{F}_w^{(n)}(x, z). \quad (5.8)$$

Aufgrund der unterschiedlichen Modellierung und der unterschiedlichen Anzahl von Verformungsfunktionen im gerissenen und ungerissenen Bereich werden beide Bereiche separat voneinander betrachtet. Das Gesamtpotential der Klebverbindung errechnet sich somit aus der Summe der Potentiale der beiden Bereiche, die entsprechend der jeweiligen Modellierung für den gerissenen und ungerissenen Bereich getrennt aufgestellt werden. Folglich liefert die Anwendung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials auch zwei Differentialgleichungssysteme, die das Verhalten der beiden Bereiche beschreiben. Zur Lösung der Differentialgleichungssysteme sind, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, an den äußeren Enden der Fügepartner Randbedingungen zu berücksichtigen. Zusätzlich werden am Übergang zwischen gerissenenem und ungerissenem Bereich Übergangsbedingungen für die Fügepartner und die Klebschicht formuliert, sodass beide Bereiche miteinander verbunden sind. Die Übergangsbedingungen ergeben sich aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials, sodass am Übergang alle Verformungsfunktionen der gerissenen Seite identisch mit denen der ungerissenen Seite sind. Darüber hinaus liefert das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials auch dynamische Übergangsbedingungen, die als Schnittkräfte oder Momente am Übergang interpretiert werden können. Da die beiden neuen Verformungsfunktionen $\tilde{u}^{(a)}(x)$ und $\tilde{w}^{(a)}(x)$ nur für den gerissenen Bereich definiert sind, werden hier die folgenden Beziehungen als Übergangsbedingungen verwendet:

$$\tilde{u}^{(a)}\left(x = \Delta a - \frac{l}{2}\right) = \hat{u}^{(1)}\left(x = \Delta a - \frac{l}{2}\right), \quad (5.9)$$

$$\tilde{w}^{(a)}\left(x = \Delta a - \frac{l}{2}\right) = \hat{w}^{(1)}\left(x = \Delta a - \frac{l}{2}\right). \quad (5.10)$$

Mit den Rand- und Übergangsbedingungen lassen sich die Differentialgleichungen lösen und die Rissflankenverschiebungen für die Auswertung des virtuellen Rissschließintegrals berechnen.

Das Einbringen von Rissen in die numerische Modellierung ist vergleichsweise einfach und die Modellierung unterscheidet sich nur geringfügig von der ungerissenen Klebverbindung. Im Gegensatz zur ungerissenen Konfiguration werden entlang des vorgesehenen Risspfades an der Schichtgrenze zwischen Fügepartner und Klebschicht die Knoten, die beide Schichten verbinden,

durch Doppelknoten ersetzt, von denen jeweils einer zum Fügepartner und einer zur Klebschicht gehört. Dadurch wird die Verbindung im gerissenen Bereich zwischen den beiden Schichten aufgehoben und die Doppelknoten können sich unabhängig voneinander bewegen und ermöglichen so eine dem Lastfall entsprechende Rissöffnung. Die knotenweise ermittelten Rissflankenverschiebungen werden dann zur Berechnung der Energiefreisetzungsrate in die Gleichungen (5.5) und (5.6) eingesetzt. Zur Durchführung des Optimierungsverfahrens und zur genauen Bestimmung der initialen Risslänge wird sowohl bei der Modellierung des ungerissenen als auch bei der Modellierung des gerissenen Zustands eine gegenüber Abbildung 4.4 modifizierte Vernetzung verwendet. Anstatt das Netz zum linken und rechten Rand hin kontinuierlich zu verfeinern, werden entlang des Risspfades Elemente mit konstanter Kantenlänge l_e verwendet, sodass der Prozess der Rissöffnung mit gleich großen Schritten beschrieben werden kann.

5.2.3 Optimierungsverfahren

In diesem Abschnitt wird der iterative Optimierungsalgorithmus vorgestellt, der in dieser Arbeit sowohl für die analytische als auch für die numerische Auswertung des gekoppelten Kriteriums zur Berechnung der kritischen Belastung und der initialen Risslänge verwendet wird. Wie bereits in Abschnitt 3.3.2

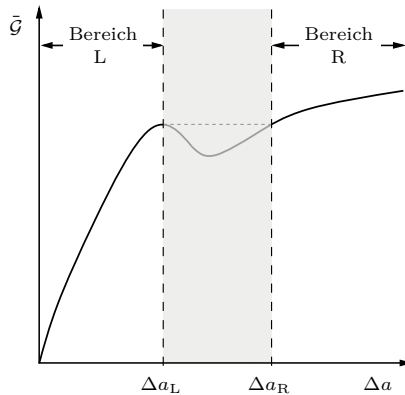


Abbildung 5.4: Qualitative Darstellung der für das gekoppelte Kriterium relevanten Bereiche der nicht monoton verlaufenden inkrementellen Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von der Risslänge Δa .

beschrieben und in Abbildung 5.4 schematisch dargestellt, ist der Verlauf der inkrementellen Energiefreisetzungsrates über die Risslänge bei Klebverbindungen nicht durchgehend monoton steigend. So fällt die Energiefreisetzungsrates nach einem lokalen Maximum bei noch relativ kleinen Risslängen mit zunehmender Risslänge zunächst auf ein lokales Minimum ab, von dem aus sie wieder ansteigt. Der in Abbildung 5.4 grau hinterlegte Bereich um das lokale Minimum ist für die Versagensanalyse uninteressant, da dort die Energiefreisetzungsrates stets kleiner und somit weniger kritisch als an den beiden Randpunkten bei den Risslängen Δa_L und Δa_R ist. Für die Versagensanalyse sind die beiden Bereiche links und rechts des grau markierten Bereichs relevant, die nachfolgend als *Bereich L* und *Bereich R* bezeichnet werden und in denen die Energiefreisetzungsrates monoton ansteigt. Um zu ermitteln, welcher der beiden Bereiche der Energiefreisetzungsrates letztlich für das Versagen der Klebverbindung verantwortlich ist, werden im Optimierungsalgorithmus beide Bereiche separat untersucht und für beide die jeweilige kritische Last ermittelt. Die gesuchte kritische Versagenslast entspricht dann der kleineren der beiden Lasten. Der Optimierungsalgorithmus ist in Abbildung 5.5 dargestellt, wobei der linke Teil dem Bereich L der Energiefreisetzungsrates aus Abbildung 5.4 und der rechte Teil dem Bereich R der Energiefreisetzungsrates entspricht.

Auswertung von Bereich L

Die Lösung des in Gleichung (2.58) beschriebenen Optimierungsproblems zur Bestimmung der kritischen Versagenslast mit dem gekoppelten Kriterium führt bei der Auswertung für den Bereich L zu zwei möglichen kritischen Fällen:

- Im Bereich $0 < \Delta a < \Delta a_L$ kann das gekoppelte Kriterium aufgrund des monoton steigenden Verlaufs der Energiefreisetzungsrates und des monoton fallenden Verlaufs der Spannung, wie in Abbildung 2.3 veranschaulicht, ausgewertet werden. Die kritische Last mit der initialen Risslänge ist gefunden, sobald das Energiekriterium und das Spannungskriterium genau in einem gemeinsamen Punkt, das heißt bei gleicher Risslänge, erfüllt sind.
- Am lokalen Maximum bei $\Delta a = \Delta a_L$ kann dagegen der Fall auftreten, dass das Energiekriterium dort gerade in dem Punkt erfüllt ist, während das Spannungskriterium überkritisch ist, also in einem bestimmten Bereich auch noch für Risslängen größer als Δa_L erfüllt ist. Das Spannungskriterium gibt also einen Bereich an, in dem es unter kritischer Belastung erfüllt ist, während das Energiekriterium nur

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

für genau einen Punkt innerhalb dieses Bereiches eingehalten wird, der am lokalen Maximum bei Δa_L liegt. Dessen genaue Position wird noch bestimmt.

Vor der Auswertung ist jedoch nicht klar, welcher der beiden Fälle versagensrelevant ist, und auch die Lage des lokalen Maximums ist noch unbekannt.

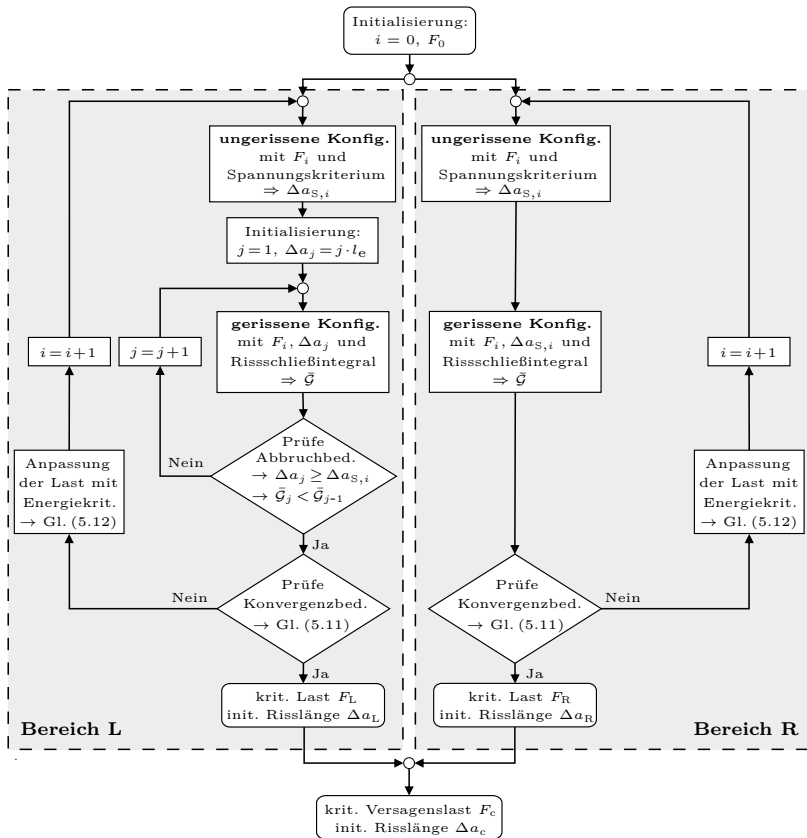


Abbildung 5.5: Ablaufplan des Optimierungsverfahrens zur iterativen Ermittlung der kritischen Versagenslast. Die Abkürzung *Konfig.* steht für Konfiguration und entspricht der betrachteten gerissenen oder ungerissenen Klebverbindung.

5.2 Versagensanalyse mittels Finiter Bruchmechanik

Das genaue iterative Vorgehen zur Bestimmung der kritischen Last im Bereich L ist im linken Teil der Abbildung 5.5 dargestellt und wird im Folgenden näher erläutert. Zunächst wird der aufgebrachten Last F_i ein frei wählbarer Startwert F_0 zugewiesen, der den Ausgangspunkt für eine große Iterationsschleife mit dem Index i bildet. Innerhalb der Iterationsschleife wird das gekoppelte Kriterium ausgewertet. Dazu wird zunächst einmal die ungerissene Klebverbindung betrachtet und die Spannungen werden entlang des potentiellen Risspfades ermittelt. Die Spannungsergebnisse werden in das Spannungskriterium aus Gleichung (5.1) eingesetzt und es wird die Risslänge Δa_S berechnet, bis zu der das Spannungskriterium erfüllt ist. Es folgt eine integrierte Iterationsschleife über den Index j , in der eine Reihe von Berechnungen gerissener Konfigurationen durchgeführt wird, bei denen die Risslänge sukzessive um den Wert l_e erhöht wird. In der numerischen Auswertung entspricht l_e der Elementkantenlänge entlang des Risspfades. In der analytischen Auswertung ist diese Länge frei wählbar, wobei hinreichend kleine Werte für eine hohe Ergebnisgenauigkeit empfehlenswert sind. Für jede gerissene Konfiguration werden die Rissflankenverschiebungen bestimmt, aus denen zusammen mit den entsprechenden Spannungen der ungerissenen Konfiguration unter Verwendung des virtuellen Risssschließintegrals die inkrementelle Energiefreisetzungsrate berechnet wird. Auf diese Weise werden aus den diskreten Ergebnissen der verschiedenen gerissenen Konfigurationen schrittweise Werte auf der Kurve der Energiefreisetzungsrate ermittelt und es wird für jeden dieser Werte geprüft, ob das Energiekriterium bereits erfüllt ist. Dies wird so lange fortgesetzt, bis entweder die Energiefreisetzungsrate gegenüber der vorherigen Iteration abnimmt ($\bar{G}_j < \bar{G}_{j-1}$), womit das lokale Maximum der Energiefreisetzungsrate erreicht wäre, oder bei der Auswertung der gerissenen Konfigurationen die Risslänge aus dem Spannungskriterium bereits überschritten ist und die Spannungen nicht mehr kritisch sind ($\Delta a_j \geq \Delta a_{S,i}$). Da das lokale Maximum in der Regel bei recht kleinen Risslängen auftritt und damit auch der Bereich L relativ klein ist, ist die Berechnung von nur wenigen gerissenen Konfigurationen meist ausreichend. Sobald die Iterationsschleife am lokalen Maximum oder an der Risslänge des Spannungskriteriums beendet ist, wird an dieser Stelle eine Konvergenzprüfung mit dem Energiekriterium durchgeführt. Unter Verwendung des Energiekriteriums nach Griffith aus Gleichung (5.2) wird Folgendes gefordert:

$$\left| 1 - \frac{\bar{G}}{G_c} \right| < \epsilon. \quad (5.11)$$

Die Konvergenzqualität ist erreicht, wenn die relative Abweichung der Gleichung (5.11) unter einen Toleranzwert ϵ fällt, der für die nachfolgenden

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

Auswertungen auf $\epsilon = 0,001$ festgelegt wurde. Ist das Konvergenzkriterium erfüllt, so ist die aktuelle Last F_i die gesuchte kritische Last F_L für den Bereich L und die Risslänge Δa_j die entsprechende initiale Risslänge Δa_L . Wenn das Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist, erfolgt in Abhängigkeit des Energiekriteriums eine Anpassung der aufgebrachten Last. Aufgrund der näherungsweise quadratischen Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate von der aufgebrachten Last erfolgt die Lastanpassung mit

$$F_{i+1} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}_c}{\bar{\mathcal{G}}}} F_i \quad (5.12)$$

und der Algorithmus wird mit der so angepassten Last erneut durchlaufen.

Auswertung von Bereich R

Bei der Anwendung des Optimierungsverfahrens für den Bereich R kann bei monoton zunehmender Energiefreisetzungsrate und monoton abnehmender Spannung das in Abbildung 2.3 dargestellte Verfahren, bei dem beide Teilkriterien des gekoppelten Kriteriums in genau einem Punkt erfüllt sind, angewendet werden. Der Algorithmus zur Bestimmung der kritischen Versagenslast im Bereich R ist daher eine vereinfachte Version des Algorithmus für den Bereich L. Abhängig von der Startlast F_0 wird zunächst ebenfalls in einer großen Iterationsschleife mit dem Index i eine ungerissene Konfiguration berechnet und das Spannungskriterium ausgewertet. Im Gegensatz zum Bereich L wird dann aber nur eine einzige gerissene Konfiguration mit der aus dem Spannungskriterium erhaltenen Risslänge Δa_S berechnet, wodurch die Auswertung weniger komplex wird. Aus den Rissflankenverschiebungen und den Spannungen wird die Energiefreisetzungsrate ermittelt, die anschließend in das Energiekriterium eingesetzt und dessen Konvergenzgüte nach Gleichung (5.11) überprüft wird. Bei unzureichender Konvergenz wird die aufgebrachte Last gemäß Gleichung (5.12) angepasst. Bei hinreichender Konvergenzgüte liefert die letzte Iterationsschleife die kritische Last F_R und die initiale Risslänge Δa_R für den Bereich R.

Bestimmung der kritischen Versagenslast

Nach Durchlaufen der Optimierungsschleifen für beide Bereiche wird die kritische Versagenslast F_c der Klebverbindung ermittelt. Dies ist die kleinere

5.3 Versagensanalyse mittels Kohäsivzonenmodellierung

der beiden kritischen Lasten F_L und F_R und die zugehörige Risslänge ist dann die gesuchte initiale Risslänge der Klebverbindung. Es gilt:

$$F_c = \min \{F_L, F_R\}$$
$$\text{mit } \Delta a_c = \begin{cases} \Delta a_L & \text{falls } F_c = F_L, \\ \Delta a_R & \text{falls } F_c \neq F_L. \end{cases} \quad (5.13)$$

Für den Fall $F_L = F_R$ wird die kleinere Risslänge Δa_L verwendet.

5.3 Versagensanalyse mittels Kohäsivzonenmodellierung

Zur Überprüfung der Ergebnisse des gekoppelten Kriteriums der Finiten Bruchmechanik, die mit dem in Abschnitt 5.2 beschriebenen Verfahren ermittelt wurden, wird in dieser Arbeit neben experimentellen Referenzergebnissen auch die in der Praxis bewährte Kohäsivzonenmodellierung angewendet. Die Auswertung erfolgt numerisch mit der Finite-Elemente-Software ABAQUS in Kombination mit Python. Durch eine parametrische, skriptbasierte Auswertung ist die Modellierung auf beliebige Klebverbindungen mit unterschiedlichen Geometrien anwendbar. Im Rahmen dieser Arbeit werden einschnittige Überlappungsfügungen mit der Kohäsivzonenmodellierung untersucht. Dabei wird die Klebverbindung zweidimensional unter Berücksichtigung eines ebenen Verzerrungszustandes in Tiefenrichtung modelliert. Mit der Annahme aus Abschnitt 5.1, dass zu erwarten ist, dass bei einschnittigen Überlappungsfügungen ein Riss ausgehend von einer Bimaterialkerbe entlang der jeweiligen Schichtgrenze zwischen Klebschicht und Fügepartner entsteht, wird zwischen den Elementen der Klebschicht und denen des Fügepartners eine Reihe von Kohäsivzonenelementen vorgesehen. Diese bilden, wie in Abbildung 5.6 dargestellt, eine eigene Schicht mit verschwindender Höhe, sodass die ursprünglichen Abmessungen der Klebverbindung durch die eingefügten Kohäsivzonenelemente nicht verändert werden. Für die Vernetzung werden zweidimensionale Kohäsivzonenelemente mit vier Knoten⁵ für die Kohäsivzone und zweidimensionale Kontinuumselemente mit ebenfalls vier Knoten⁶ für die Klebschicht und die Fügepartner verwendet.

Bei der Durchführung der Versagensanalyse wird die zu untersuchende Klebverbindung durch eine kontinuierlich aufgebrachte Belastung bis zum vollständigen Versagen beansprucht. Im Gegensatz zu den Auswertungen der Finiten

⁵ In ABAQUS: Kohäsivzonenelement vom Typ COH2D4

⁶ In ABAQUS: Kontinuumselement vom Typ CEP4

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

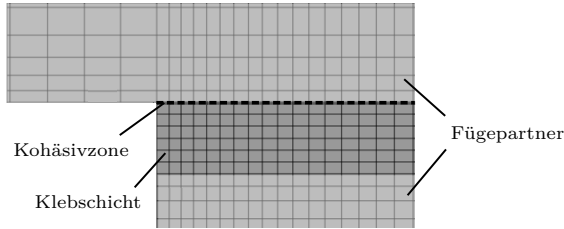


Abbildung 5.6: Schematischer Detailausschnitt der gewählten Vernetzung der Klebverbindung mit den zwischen Klebschicht und Fügepartner eingebrachten Kohäsivzonenelementen.

Bruchmechanik erfolgt die Belastung der Klebverbindung hier verschiebungsbasiert. Eine kraftbasierte Belastung hätte zur Folge, dass bei vollständigem Versagen der Struktur aufgrund der weiterhin konstant wirkenden Kraft unendlich große Verschiebungen auftreten würden, die bei der numerischen Berechnung in ABAQUS zu Konvergenzproblemen führen würden. Dies ist bei einer verschiebungsbasierten Belastung nicht der Fall. Außerdem wird anstelle der Verwendung der *general sandwich-type*-Modellierung aus Abschnitt 4.1.1 die gesamte Geometrie der Klebverbindung modelliert. Damit entfällt die Berechnung der Schnittgrößen aus der aufgebrachten Verschiebung, was die Qualität der Ergebnisse verbessert.

Mit zunehmender Belastung kommt es, wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, aufgrund des Kohäsivgesetzes zum Versagen einzelner Kohäsivzonenelemente und damit zur Rissbildung und zum Risswachstum. Zur Beschreibung des konstitutiven Verhaltens der Kohäsivzonenelemente wurde in dieser Arbeit das bilineare Kohäsivgesetz aus Abbildung 3.6 verwendet. Danach verformen sich die belasteten Kohäsivzonenelemente zunächst linear-elastisch, bis die Spannungen groß genug sind, um ein Schadensinitiiierungskriterium zu erfüllen. In Abbildung 3.6 ist dies der Fall, wenn eine Separation von δ_1 erreicht wird, bei welcher der Versagensbeginn des Elements eingeleitet wird. Das hier verwendete Schadensinitiiierungskriterium ist ein quadratisches Interaktionsgesetz, ähnlich dem Spannungskriterium der Finiten Bruchmechanik aus Gleichung (5.1):

$$\left(\frac{\langle \sigma_{zz} \rangle}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}}{\tau_c} \right)^2 = 1. \quad (5.14)$$

Das Symbol $\langle \cdot \rangle$ ist die Macaulay-Klammer, die sicherstellt, dass nur Zugspannungen berücksichtigt werden und eine Schädigung nicht durch Druckspan-

5.3 Versagensanalyse mittels Kohäsivzonenmodellierung

nungen verursacht werden kann:

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = \begin{cases} \sigma_{zz} & \text{falls } \sigma_{zz} \geq 0, \\ 0 & \text{falls } \sigma_{zz} < 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Nach Schädigungsbeginn nimmt die Steifigkeit des Kohäsivzonenelementes kontinuierlich bis zum Erreichen der kritischen Separation δ_c ab, bei der das Element vollständig versagt. Das Kohäsivzonenelement kann dann keine Last mehr übertragen und wird aus dem Finite-Elemente-Modell entfernt, wodurch der Riss über das betrachtete Element hinauswächst. Das Versagen der Kohäsivzonenelemente wird durch ein Interaktionsgesetz⁷ (Stein et al., 2017) der Form

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}} \right)^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{IIc}} \right)^2 = 1 \quad (5.16)$$

beschrieben.

Die Genauigkeit der Ergebnisse und das Konvergenzverhalten der Kohäsivzonenmodellierung werden durch verschiedene nicht-physikalische Parameter beeinflusst, die im Folgenden näher erläutert werden. Es handelt sich dabei um die Anzahl N_e der Kohäsivzonenelemente in der Prozesszone, die Steifigkeit K_e der Kohäsivzonenelemente und den viskosen Regularisierungsparameter μ . Damit die Lösungen unabhängig von der gewählten Vernetzung sind, ist eine ausreichend große Anzahl von Kohäsivzonenelementen in der Prozesszone erforderlich. Die Länge der Prozesszone ist dabei nach Hillerborg et al. (1976), Falk et al. (2001) und Hui et al. (2003) näherungsweise beschreibbar als

$$l_{KZM} = ME \frac{\mathcal{G}_c}{(\sigma_c)^2} \quad (5.17)$$

mit den Materialkonstanten E , \mathcal{G}_c und σ_c sowie dem Parameter M , der nach Hillerborg et al. (1976) auf eins gesetzt wird. Abbildung 5.7 zeigt für eine einschnittige Überlappungsfügung die Abhängigkeit der kritischen Versagenslast von der Anzahl der Kohäsivzonenelemente in der Prozesszone, wobei mit zunehmender Elementanzahl eine Konvergenz der Versagenslast erkennbar ist. Wie in der Arbeit von Turon et al. (2007) beschrieben, sind in vielen Fällen 2 bis 10 Elemente in der Prozesszone ausreichend, weshalb hier, auch in Übereinstimmung mit Abbildung 5.7, $N_e = 10$ gewählt wurde. Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, führt eine weitere Erhöhung der Elementanzahl nur noch zu einer geringfügigen Verbesserung der Ergebnisgenauigkeit um etwa 1,5% bei gleichzeitiger Erhöhung des numerischen Rechenaufwandes.

⁷ Engl.: Power Law

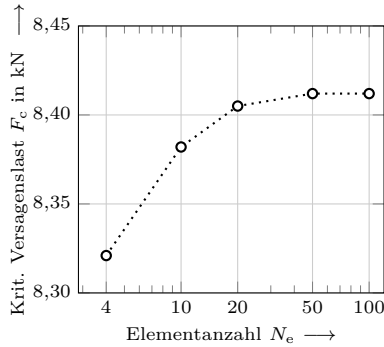
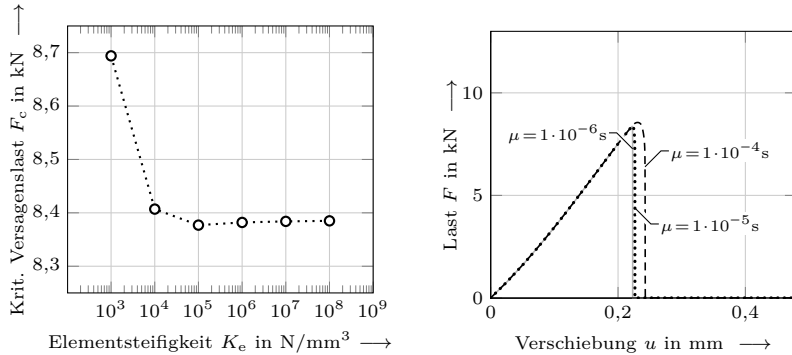


Abbildung 5.7: Konvergenzstudie der kritischen Versagenslast in Abhängigkeit von der Anzahl der Kohäsivzonelemente in der Prozesszone einer einschnittigen Überlappungsfügung bestehend aus zwei mit dem Klebstoff AV138 verbundenen Stahlplatten mit $K_e = 10^6 \text{ N/mm}^3$ und $\mu = 10^{-5} \text{ s}$. Die Abmessungen der Struktur sind in Tabelle 5.2 angegeben.

Einen weiteren Einfluss auf die Güte der Lösung hat die Steifigkeit K_e der Kohäsivzonelemente, die den linear-elastischen Bereich im Kohäsivgesetz vor einer Schädigungsinitiierung beschreibt. Bei der hier verwendeten Modellierung mit einer Kohäsivzonenschicht von verschwindender Höhe muss die Elementsteifigkeit einerseits so hoch sein, dass die Nachgiebigkeit der Gesamtstruktur nicht durch Verformungen der Kohäsivzonelemente beeinflusst wird, andererseits darf die Steifigkeit nicht zu hoch sein, da sonst der Rechenaufwand erheblich ansteigt (Lu et al., 2019). Wie in den Arbeiten von Camanho et al. (2003) und Turon et al. (2007) beschrieben, ist ein Wert in der Größenordnung von 10^6 N/mm^3 bei der Betrachtung von Rissen in Schichtverbunden unter Mixed-Mode-Belastung geeignet. Dies wird auch durch die Ergebnisse der in Abbildung 5.8a dargestellten Konvergenzstudie bestätigt, weshalb für die Auswertungen in dieser Arbeit im Folgenden $K_e = 10^6 \text{ N/mm}^3$ verwendet wird.

Die Nichtlinearität des Kohäsivgesetzes der Kohäsivzonelemente während des Schädigungsprozesses führt zu starken Konvergenzproblemen bei der numerischen Auswertung von Kohäsivzonenmodellierungen. Um diesem Problem entgegenzuwirken, kann ein geeignet gewählter viskoser Regularisierungsparameter μ verwendet werden, wie in Chaboche et al. (2001), Yu et al. (2016) und Sepsadar u. Shakiba (2020) beschrieben. Dabei wird dem Kohäsivgesetz eine künstliche Viskosität hinzugefügt, welche die Konvergenzeigenschaften verbessert, aber gleichzeitig die kritische Versagenslast aufgrund einer Erhöhung der



(a) Konvergenzanalyse der Versagenslast mit einem viskosen Regularisierungsparameter von $\mu = 10^{-5}$ s und einer Anzahl von $N_e = 10$ Elementen in der Prozesszone.

(b) Last-Verschiebungsdiagramm für eine Klebverbindung mit einer Elementsteifigkeit von $K_e = 10^6$ N/mm³ und einer Anzahl von $N_e = 10$ Elementen in der Prozesszone.

Abbildung 5.8: Untersuchung des Einflusses der Elementsteifigkeit K_e und des viskosen Regularisierungsparameters μ der Kohäsivzonenmodellierung auf die Versagenslast anhand einer einschnittigen Überlappungsfügung aus Stahl und AV138 mit den Abmessungen aus Tabelle 5.2.

Bruchzähigkeit überschätzt. Dieser Effekt zeigt sich in den Ergebnissen in Abbildung 5.8b, wo mit zunehmendem viskosen Regularisierungsparameter die kritische Last künstlich erhöht wird und der Lastabfall erst verzögert eintritt. Als Kompromiss zwischen Konvergenzgüte und Ergebnissen Genauigkeit wird in den folgenden Auswertungen ein Regularisierungsparameter von $\mu = 10^{-5}$ s verwendet.

5.4 Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird das in dieser Arbeit vorgestellte Auswerteverfahren des gekoppelten Kriteriums der Finiten Bruchmechanik auf konkrete Klebverbindungen angewendet. Die Auswertungen erfolgen sowohl analytisch mit dem Verschiebungsansatz 3. Ordnung (AM3) als auch numerisch mit der Finite-Elemente-Analyse (FEA) und werden mit den Ergebnissen der durchgeführten Kohäsivzonenmodellierung (KZM) und mit Experimenten (EXP) aus der Literatur verglichen. Die Auswahl der betrachteten Klebverbindungen ergibt sich aus der Verfügbarkeit von Veröffentlichungen, in denen experimentelle Versuchsergebnisse und bruchmechanische Kennwerte angegeben

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

Tabelle 5.1

Materialkennwerte der in diesem Abschnitt verwendeten Klebstoffe.

Einzelschicht	E	ν	σ_c	τ_c	\mathcal{G}_{Ic}	\mathcal{G}_{IIc}
	GPa	–	MPa		N/mm	
AV138 ^a	4,89	0,35	39,45	30,2	0,3	0,6
HysolEA9321 ^b	3,87	0,36	46,0	33,0	0,45	0,9
Redux 326 ^c	4,44	0,35	50,9	36,6	0,3	0,6
Loctite 330 ^d	0,88	0,15	35,0	20,2	0,12	0,24

^a Materialkennwerte von da Silva et al. (2006) und Campilho et al. (2011).

^b Materialkennwerte von da Silva et al. (2006) und da Silva et al. (2009b).

^c Materialkennwerte von da Silva et al. (2009b) und Stein et al. (2015).

^d Materialkennwerte von Goglio et al. (2008) und Stein (2018).

sind. Die in diesem Abschnitt verwendeten Klebstoffe sind in der Tabelle 5.1 aufgeführt. Es handelt sich um die Zweikomponentenklebstoffe AV138 und Hysol EA 9321 auf Epoxidharzbasis sowie die Strukturklebstoffe Redux 326 und Loctite 330. Die Bruchzähigkeiten des Modus II, für die in der Literatur keine Werte gefunden werden konnten, wurden über den Zusammenhang $\mathcal{G}_{IIc} = 2\mathcal{G}_{Ic}$ ermittelt, wie er auch von Jung Lee et al. (2010) und Stein et al. (2015) für hinreichend spröde Klebstoffe zugrunde gelegt wurde.

Im Folgenden werden zunächst am Beispiel einer einschnittigen Überlappungsfügung die für die Auswertung mit der Finiten Bruchmechanik relevanten Spannungen und Energiefreisetzungsraten dargestellt und ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der analytischen und numerischen Umsetzung vorgenommen. Anschließend erfolgt die eigentliche Versagensanalyse an verschiedenen Struktursituationen, wobei konkrete kritische Versagenslasten und initiale Risslängen berechnet und mit entsprechenden Referenzlösungen verglichen werden.

5.4.1 Ergebnisse zur Auswertung des gekoppelten Kriteriums

Zentraler Bestandteil der Versagensanalyse mit dem gekoppelten Kriterium der Finiten Bruchmechanik ist die iterative Auswertung des Spannungskriteriums und des Energiekriteriums. Daher werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse der für die Auswertung der beiden Kriterien relevanten Größen, auf deren Grundlage die anschließende Versagensbewertung möglich ist, dargestellt. Die Auswertungen erfolgen beispielhaft an der in Abbildung 5.9 dargestellten einschnittigen Überlappungsfügung, bestehend aus zwei mit dem Klebstoff AV138 verbundenen Stahlfügepartnern unter Zugbelastung. Die

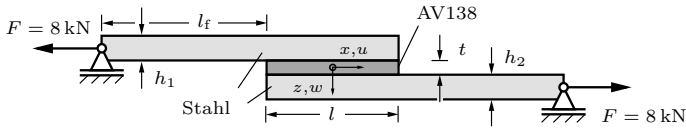


Abbildung 5.9: Schematische Darstellung einer einschnittigen Überlappungsfügung von Stahlfügepartnern, die mit dem Klebstoff AV138 verbunden sind.

Tabelle 5.2

Geometrische Abmessungen gemäß Abbildung 5.9 für die in diesem Abschnitt verwendete einschnittige Überlappungsfügung in mm.

	l	h_1	h_2	t	b	l_f
Standardkonfiguration	25	2	2	0,5	25	95

Materialkennwerte des Klebstoffs sind in Tabelle 5.1, die der Stahlfügepartner in Tabelle 4.1 angegeben. Die Abmessungen der betrachteten Fügung sind der Tabelle 5.2 zu entnehmen. Die Berechnung der für die *general sandwich-type*-Modellierung erforderlichen Schnittgrößen erfolgt hier nach dem Konzept von Talmon l'Armée et al. (2016). Das analytische Konzept berücksichtigt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung und den Schnittgrößen aufgrund der starken Biegeverformungen, die bei einschnittigen Überlappungsfügungen auftretenden.

Abbildung 5.10 zeigt die Ergebnisse der Schub- und Schälspannungen, die in der linken Hälfte des Überlappungsbereichs bei $-l/2 \leq x \leq 0$ auftreten. Aufgrund der Symmetrie der Struktur treten entsprechende Spannungsverläufe auch in der rechten Hälfte der Überlappungsfügung auf. Die Spannungen werden horizontal in der Mitte (m.) der Klebschicht sowie an der oberen (o.) und unteren (u.) Schichtgrenze zwischen Klebschicht und Fügepartner ausgewertet (Auswertungspfade H1, H2 und H3 in Abbildung 4.5b). Im Vergleich zu den Spannungen in der Klebschichtmitte ist zu erkennen, dass an der oberen und unteren Schichtgrenze aufgrund der Bimaterialübergänge deutlich höhere Spannungen auftreten. Dies ist sowohl in den analytischen als auch in den numerischen Spannungsergebnissen erkennbar, die beide gut miteinander übereinstimmen. Die Spannungen $\sigma_{zz}^{(o.)}$ und $\tau_{xz}^{(o.)}$ an der oberen Schichtgrenze sind aufgrund der zusätzlichen Kerbwirkung am Rand betragsmäßig am größten, was eine Rissentstehung dort am ehesten erwarten lässt. Daher werden die Spannungen an der oberen Schichtgrenze zur Auswertung des Spannungskriteriums herangezogen.

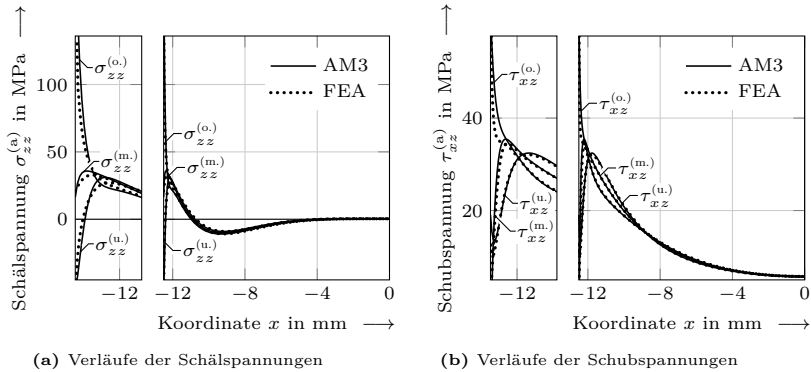


Abbildung 5.10: Spannungsverläufe der (a) Schälspannungen und (b) Schubspannungen an den Schichtgrenzen zwischen Klebschicht und oberem bzw. unterem Fügepartner und in der Klebschichtmitte für die in Abbildung 5.9 dargestellte Klebverbindung (Auswertepfade H1, H2 und H3 in Abbildung 4.5b).

Für die Auswertung des Energiekriteriums wird die inkrementelle Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von der betrachteten Risslänge benötigt. Wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, wird die Energiefreisetzungsrate in dieser Arbeit über das virtuelle Risschließintegral berechnet, für dessen Auswertung die bereits in Abbildung 5.10 dargestellten Spannungen der ungerissenen Struktur und die Rissflankenverschiebungen der gerissenen Struktur benötigt werden. Die Rissflankenverschiebungen sind in Abbildung 5.11a exemplarisch für eine gerissene Klebverbindung mit einer Risslänge von 0,5 mm dargestellt. Abgebildet sind die Verläufe der horizontalen und vertikalen Rissflankenverschiebungen des oberen (o.) und unteren (u.) Rissufers aus den analytischen und numerischen Berechnungen. Trotz der erkennbaren Unterschiede zeigen die analytischen und numerischen Ergebnisse plausible Verschiebungsverläufe. So ist erkennbar, wie die korrespondierenden Verschiebungen an der Risspitze noch genau übereinander liegen und mit zunehmendem Abstand von der Risspitze auseinander laufen. Für das virtuelle Risschließintegral sind dabei wie aus den Gleichungen (5.3) und (5.4) ersichtlich nicht die absoluten Verschiebungswerte relevant. Stattdessen gehen die Differenzen der Verschiebungen in das virtuelle Risschließintegral ein, die den horizontalen und vertikalen Rissöffnungen entsprechen und in den analytischen und numerischen Ergebnissen nahe beieinander liegen. Dementsprechend ergeben sich aus den Spannungen an der Schichtgrenze und den Differenzen der Rissflankenverschiebungen die in Abbildung 5.11b dargestellten Energiefreisetzungsraten. Qualitativ zeigen

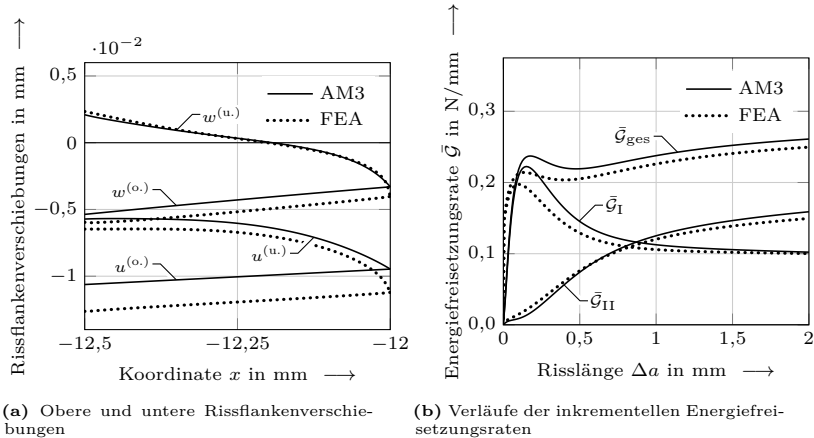


Abbildung 5.11: Darstellung der horizontalen und vertikalen Rissflankenverschiebungen eines 0,5 mm langen Risses zwischen der Klebschicht und dem oberen Fügepartner sowie der inkrementellen Energiefreisetzungsraten in Abhängigkeit von der Risslänge für die in Abbildung 5.9 dargestellte Klebverbindung.

sowohl die analytisch als auch die numerisch ermittelten Kurven aller drei Energiefreisetzungsraten die in Abschnitt 5.2.1 beschriebenen charakteristischen Verläufe. Die inkrementelle Gesamtenergiefreisetzungsraten \bar{G}_{ges} zeigt mit zunehmender Risslänge zunächst ein lokales Maximum aufgrund der Energiefreisetzungsraten \bar{G}_I und nach kurzem Abfall wieder einen weiteren Anstieg aufgrund der Zunahme der Energiefreisetzungsraten \bar{G}_{II} . Die anfängliche Dominanz des Rissöffnungsmodus I ist im Wesentlichen auf die im Vergleich zu den Schubspannungen deutlich höheren Schälspannungsverläufe zurückzuführen. Die erkennbaren Abweichungen zwischen den analytischen und numerischen Ergebnissen hängen dort maßgeblich von der Approximation der hohen Randspannungen ab und liegen bei etwa 10%. Mit zunehmender Risslänge nimmt jedoch der Einfluss der lokalen Spannungsspitzen auf die inkrementellen Energiefreisetzungsraten ab und die Abweichungen zwischen den Kurven aus der analytischen und numerischen Berechnung werden geringer.

5.4.2 Versagensanalyse einschnittiger Stahlfügungen

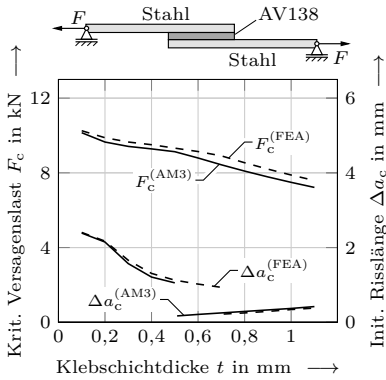
Auf Basis der Ausführungen aus Abschnitt 5.4.1 wird im Folgenden die vorgestellte Versagensanalyse auf verschiedene Stahlfügungen angewendet.

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

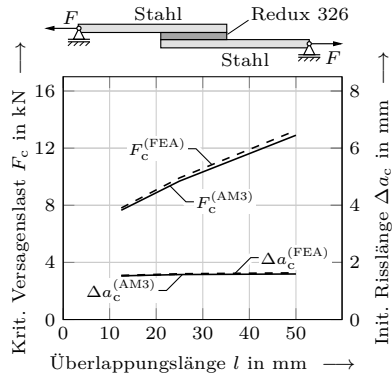
Dabei wird das Versagensverhalten von einschnittigen Überlappungsfügungen unter Zugbelastung und deren Abhängigkeit von verschiedenen geometrischen Parametern untersucht. Die Materialkennwerte von Stahl sind der Tabelle 4.1 zu entnehmen.

Parameterstudien mit der Finiten Bruchmechanik

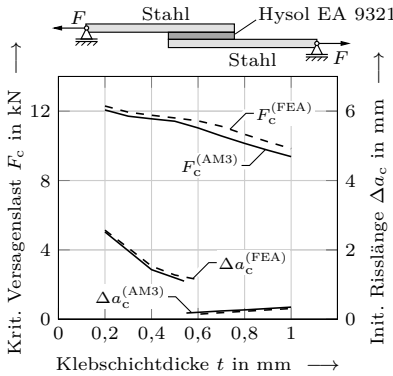
Zunächst erfolgt in Abbildung 5.12 eine Auswertung der analytischen und numerischen Ergebnisse des gekoppelten Kriteriums der Finiten Bruchmechanik. Analysiert wird der Einfluss der Klebschichtdicke und der Überlappungslänge auf die kritischen Versagenslasten und die initialen Risslängen. In Abbildung 5.12a wird die Versagenslast von mit dem Klebstoff AV138 verbundenen Stahlfügepartnern in Abhängigkeit von der Dicke der Klebschicht ausgewertet. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Klebschichtdicke die kritische Versagenslast, bei der die Klebverbindung versagt, kontinuierlich abnimmt. Dieses auch als Klebschichtdickeneffekt bezeichnete Phänomen zeigt sich sowohl bei der analytischen als auch bei der numerischen Auswertung der Finiten Bruchmechanik. Die initialen Risslängen zeigen einen diskontinuierlichen Verlauf. So lassen sich die Kurven der Risslängen in Abhängigkeit von der Klebschichtdicke in zwei Bereiche einteilen: einen Bereich größerer Risslängen, die mit zunehmender Klebschichtdicke abnehmen, und einen Bereich kleinerer Risslängen, die mit zunehmender Klebschichtdicke leicht zunehmen. Der Grund für das Auftreten der beiden Bereiche liegt in dem in Abbildung 5.4 dargestellten nicht monotonen Verlauf der Energiefreisetzungsrate. Während bei dünneren Klebschichten der in Abbildung 5.4 dargestellte Bereich R mit vergleichsweise großen Risslängen versagensrelevant ist, ist es bei dickeren Klebschichten der Bereich L, in dem kleine Risslängen vorliegen. Bezogen auf das in Abbildung 5.5 dargestellte Optimierungsverfahren gilt demnach für dünnere Klebschichten $F_c = F_R$ und für dickere Klebschichten $F_c = F_L$ für die kritische Versagenslast. Die maximale Abweichung zwischen den analytischen und numerischen Ergebnissen liegt bei 5%. Vorhandene Abweichungen lassen sich im Wesentlichen durch Abweichungen in den Verläufen der Energiefreisetzungsrate erklären, die in Abbildung 5.11b dargestellt sind. Dort ist zu erkennen, dass die analytischen Ergebnisse der Energiefreisetzungsraten überwiegend oberhalb der numerischen Ergebnisse liegen. Dementsprechend sind die analytisch berechneten Versagenslasten etwas geringer als die numerischen. Die leicht unterschiedlichen Werte der Klebschichtdicken, bei denen sich die analytischen und numerischen Risslängen sprunghaft ändern, sind ebenfalls auf die Unterschiede in den Energiefreisetzungsraten zurückzuführen. An den Stellen, an denen die Sprünge in den Risslängen auftreten, zeigen



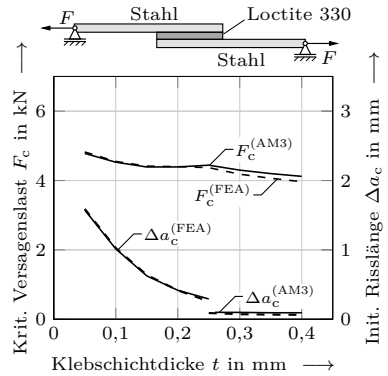
(a) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $l = b = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $l_f = 95$ mm.



(b) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $b = 25$ mm, $t = 0,12$ mm, $h_1 = h_2 = 1,5$ mm. Die Gesamtlänge der Fügepartner ist jeweils 94 mm.



(c) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $l = b = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $l_f = 95$ mm.



(d) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $l = 12,7$ mm, $b = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 1,6$ mm, $l_f = 88,9$ mm.

Abbildung 5.12: Vergleich der mit dem gekoppelten Kriterium berechneten analytischen (AM3) und numerischen (FEA) Versagenslasten und initialen Risslängen verschiedener einschnittiger Überlappungsfügungen in Abhängigkeit von der Klebschichtdicke bzw. der Überlappungslänge. Die Abmessungen beschreiben die Klebverbindung wie in Abbildung 3.3 dargestellt.

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

die Versagenslasten einen Knick, der ebenfalls darauf hinweist, dass sich der versagensrelevante Bereich in der Kurve der Energiefreisetzungsrate geändert hat. Die gleichen Erkenntnisse lassen sich aus den Ergebnissen in den Abbildungen 5.12c und 5.12d ziehen, in denen die Klebstoffe Hysol EA 9321 und Loctite 330 verwendet wurden. Auch hier wird der Klebschichtdickeneffekt wiedergegeben.

In Abbildung 5.12b wird der Einfluss der Länge des Überlappungsbereichs auf das Versagensverhalten an einer mit dem Klebstoff Redux 326 gefügten Klebverbindung gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die kritische Versagenslast mit zunehmender Überlappungslänge ansteigt. Dies ist aufgrund der größeren Klebfläche, über welche die Lastübertragung zwischen den Fügepartnern erfolgt, anschaulich nachvollziehbar. Wie bereits in Abbildung 4.13 veranschaulicht, nehmen die Spannungsspitzen in der Klebschicht mit zunehmender Überlappungslänge ab und der Versagensfall tritt erst bei höheren Lasten ein. Ein Sprung im Verlauf der initialen Risslängen ist bei einer Änderung der Überlappungslänge nicht zu beobachten. Der Grund hierfür ist, dass die Position des lokalen Maximums im Verlauf der Energiefreisetzungsrate in Abbildung 5.4, die, wie von Weißgraeber (2014) untersucht, einen entscheidenden Einfluss auf den Versagensfall hat, hauptsächlich von der Klebschichtdicke und nicht von der Überlappungslänge abhängt.

Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass die analytischen und numerischen Ergebnisse der Finiten Bruchmechanik eine sehr gute Übereinstimmung aufweisen. Die größte Abweichung der Versagenslasten liegt im Bereich von 5 %, wobei die analytische Lösung meist etwas konservativer ist. Damit zeigt sich für die analytische Modellierung, wie schon bei den Ergebnissen aus Kapitel 4, die Eignung der gewählten Schubdeformationstheorie 1. Ordnung für die Fügepartner und des gewählten Verschiebungsansatzes 3. Ordnung für die Klebschicht. Der Einfluss, den die Ansatzordnung der Klebschichtverschiebungen auf die Versagenslasten hat, ist in Abbildung 5.13 exemplarisch für die Stahl-AV138-Stahl-Fügung aus Abbildung 5.12a dargestellt. Wie bereits im Kapitel 4 in Abbildung 4.10b gezeigt, führt eine niedrigere Ansatzordnung zu einer schlechteren Approximation der Spannungsspitzen am Rand des Überlappungsbereichs. Die Auswirkungen auf die Versagenslasten und die resultierenden initialen Risslängen sind in den Abbildungen 5.13a und 5.13b dargestellt. Es zeigt sich, dass die mit dem linearen Verschiebungsansatz berechneten Versagenslasten mit zunehmender Klebschichtdicke deutlich von den numerischen Ergebnissen abweichen. Bei Verwendung des quadratischen Verschiebungsansatzes sind die Abweichungen dagegen deutlich geringer, ebenso wie bei der Wahl eines Ansatzes 3. oder 4. Ordnung, für die die Ergebnisse genau aufeinander liegen. Das deutet darauf hin, dass eine weitere

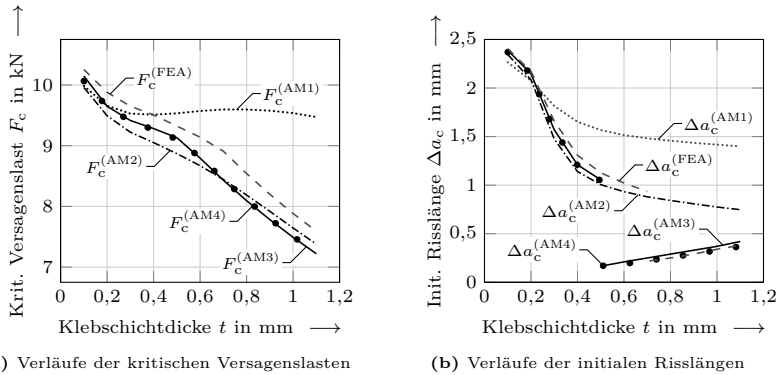


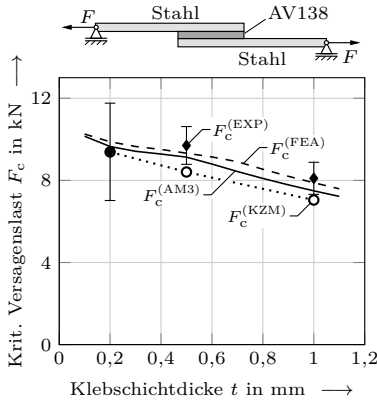
Abbildung 5.13: Darstellung des Einflusses der Ansatzordnung des in dieser Arbeit eingeführten analytischen Verschiebungsansatzes für die Klebschicht auf die mit der Finiten Bruchmechanik berechneten (a) Versagenslasten und (b) Risslängen.

Erhöhung der Ansatzordnung keine weiteren Verbesserungen bringen würde. Die Betrachtung der Risslängen in Abbildung 5.13b liefert eine Erklärung für die sichtbaren Abweichungen der mit dem linearen Ansatz berechneten Versagenslasten. Demnach nimmt mit zunehmender Klebschichtdicke die Übereinstimmung der analytisch berechneten Risslängen mit der numerischen Lösung ab und der charakteristische sprunghafte Abfall der Risslängen tritt nicht auf. Dies ist auf eine unzureichende Approximation der Spannungen zurückzuführen, wie bereits in Abbildung 4.10b anhand einer anderen Klebverbindung gezeigt, wodurch sich kein lokales Maximum in der Energiefreisetzungsrate ausbildet, sodass der kritische Bereich stets bei großen Risslängen liegt. Ähnliches ist auch bei den mit dem quadratischen Verschiebungsansatz berechneten Ergebnissen zu erkennen. Der in Abbildung 5.4 als Bereich L eingeführte Teil der Energiefreisetzungsratenkurve vor dem lokalen Maximum wird in der Optimierungsrechnung aufgrund der unzureichenden Approximation der Spannungsergebnisse nicht richtig erfasst. Ab der Verwendung des Ansatzes 3. Ordnung sind die Übereinstimmungen hingegen auch bei den Risslängen sehr gut, mit Abweichungen von unter 5%.

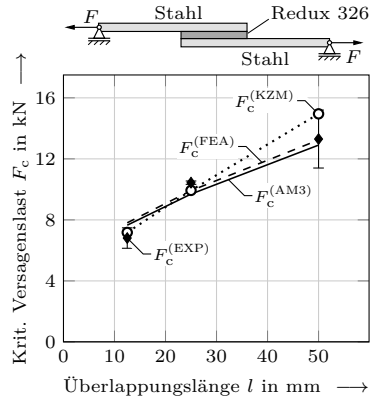
Vergleich mit Referenzlösungen

Um die zuvor dargestellten Ergebnisse der Versagensanalyse mit der Finiten Bruchmechanik realistisch einordnen zu können, werden diese im Folgenden mit numerischen und experimentellen Referenzlösungen verglichen. Die nu-

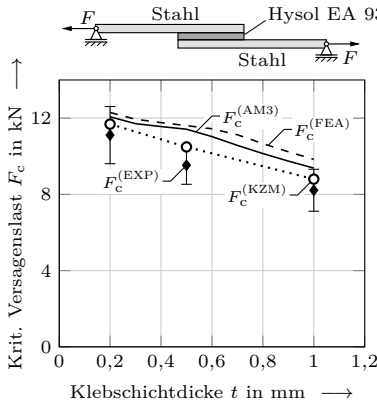
merischen Referenzlösungen wurden mit der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Kohäsivzonenmodellierung berechnet. Die experimentellen Ergebnisse stammen aus den Veröffentlichungen von da Silva et al. (2004), da Silva et al. (2006) und Castagnetti et al. (2011), die Parameterstudien an einschrittigen Überlappungsfügungen aus hochfesten Stahlfügepartnern mit den in Tabelle 5.1 angegebenen spröden Klebstoffen durchgeführt haben. Da die Ermittlung einer initialen Risslänge, die das Versagen der Klebverbindung einleitet, bei der Kohäsivzonenmodellierung und bei experimentellen Versuchen aufgrund der schnellen Ausbreitung des Risses nicht möglich ist, werden in Abbildung 5.14 nur die kritischen Versagenslasten verglichen. Bei den betrachteten Klebverbindungen handelt es sich um die bereits in Abbildung 5.12 mit der Finiten Bruchmechanik ausgewerteten Klebverbindungen. Die Ergebnisse in Abbildung 5.14a zeigen durchweg eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Kohäsivzonenmodellierung und den Experimenten bei maximalen Abweichungen von 7-8%. Auch der Klebschichtdickeneffekt zeigt sich in den Referenzlösungen in ähnlicher Form. Bei der Auswertung des Einflusses der Überlappungslänge in Abbildung 5.14b zeigen die Referenzlösungen ähnlich wie die Ergebnisse der Finiten Bruchmechanik einen Anstieg der Versagenslast mit zunehmender Überlappungslänge. Größere Abweichungen ergeben sich lediglich bei der größten untersuchten Überlappungslänge für das Ergebnis der Kohäsivzonenmodellierung, wie bereits in der Auswertung von Stein (2018) festgestellt. Die Ergebnisse der mit Hysol EA 9321 verklebten Struktur in Abbildung 5.14c ähneln denen der Stahl-AV138-Stahl-Fügung. Die höhere Bruchzähigkeit von Hysol EA 9321 führt zu vergleichsweise höheren Versagenslasten. Die mit dem gekoppelten Kriterium der Finiten Bruchmechanik berechneten Ergebnisse liegen bei dickeren Klebschichten etwas über dem Streubereich der Experimente. In Abbildung 5.14d sind die Versagenslasten der mit Loctite 330 gefügten Klebverbindung dargestellt. Es fällt auf, dass die Ergebnisse der Finiten Bruchmechanik bei geringen Klebschichtdicken zum Teil deutlich von den experimentellen Ergebnissen abweichen, mit Abweichungen von bis zu 20%. Diese starken Abweichungen sind auf die hier verwendeten Bruchzähigkeiten zurückzuführen, die nicht wie in den anderen Literaturquellen experimentell bestimmt wurden. Stattdessen wurden sie aus der Arbeit von Stein (2018) übernommen, wo sie mit einer Methode der minimalen Abweichungen zwischen den experimentellen Werten und der dort verwendeten analytischen Modellierung ermittelt wurden. Dementsprechend wurden die Werte der Bruchzähigkeiten speziell für die analytische Modellierung von Stein (2018) hergeleitet. Da hier jedoch eine andere analytische Modellierung verwendet wird, sind die Bruchzähigkeiten nur bedingt geeignet und gewisse Abweichungen zu den Experimenten erwartbar. Die Eignung der hier vorgestellten Modellierung wird aber grundsätzlich bestätigt, da bei der



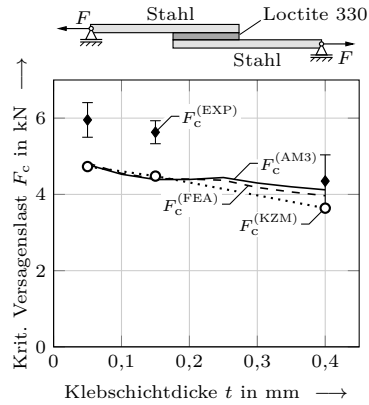
(a) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $l = b = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $l_f = 95$ mm. Die experimentellen Ergebnisse entstammen da Silva et al. (2006).



(b) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $b = 25$ mm, $t = 0,12$ mm, $h_1 = h_2 = 1,5$ mm. Die Gesamtlänge der Fügepartner ist jeweils 94 mm. Die experimentellen Ergebnisse entstammen da Silva et al. (2004).



(c) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $l = b = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm, $l_f = 95$ mm. Die experimentellen Ergebnisse entstammen da Silva et al. (2006).



(d) Einschnittige Überlappungsfügung mit den Abmessungen: $l = 12,7$ mm, $b = 25$ mm, $h_1 = h_2 = 1,6$ mm, $l_f = 88,9$ mm. Die experimentellen Ergebnisse entstammen Castagnetti et al. (2011).

Abbildung 5.14: Vergleich der analytisch (AM3) und numerisch (FEA) ermittelten kritischen Versagenslasten des gekoppelten Kriteriums mit denen der Kohäsivzonenmodellierung (KZM) und mit Experimenten (EXP) anhand verschiedener einschnittiger Überlappungsfügungen in Abhängigkeit von der Klebschichtdicke bzw. der Überlappungslänge. Die Abmessungen beschreiben die Klebverbindung wie in Abbildung 3.3 dargestellt.

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

Kohäsivzonenmodellierung die gleichen Bruchzähigkeiten wie bei der Auswertung der Finiten Bruchmechanik verwendet wurden und die Ergebnisse der Kohäsivzonenmodellierung sehr gut mit denen der Finiten Bruchmechanik übereinstimmen.

Die vorgestellten Ergebnisse der Finiten Bruchmechanik zeigen bis auf wenige erklärbare Ausnahmen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Referenzlösungen und liegen überwiegend im Bereich der experimentellen Streuungen. Die Diagramme bestätigen so das in dieser Arbeit vorgestellte Auswerteverfahren der Finiten Bruchmechanik und die Modellierung der Klebverbindung. Weiterhin werden die Anwendung der *general sandwich-type*-Modellierung und die verwendete Schnittgrößenberechnung durch die Ergebnisse bestätigt. Die Rechenzeit der analytischen Auswertung der Finiten Bruchmechanik beträgt exemplarisch für das Ergebnis aus Abbildung 5.14a mit einer Klebschichtdicke von $t = 0.5$ mm eine Minute. Die Rechenzeit der numerischen Auswertung der Finiten Bruchmechanik liegt dagegen bei etwa 10 Minuten und die der Kohäsivzonenmodellierung sogar über einer Stunde. Damit eignet sich das vorgestellte Auswerteverfahren der Finiten Bruchmechanik auch aufgrund seiner Effizienz für den Einsatz bei Versagensbewertungen in der Praxis.

5.4.3 Versagensanalyse verstärkter Betonstrukturen

Im Folgenden wird die Versagensanalyse auf weitere relevante Klebefügungen und Lastfälle angewendet, um ihre vielseitige Anwendbarkeit zu demonstrieren. Dazu werden mit CFK verstärkte Betonstrukturen untersucht, die in der Praxis häufig zur Sicherung von Betonträgern, an denen sich bereits Risse gebildet haben, eingesetzt werden. In Abbildung 5.15a sind die Ergebnisse für einen auf Zug beanspruchten Betonträger dargestellt, der durch einen Epoxidharzkleber mit einer CFK-Verstärkung aus T300 verbunden ist. Die Materialkennwerte von Beton und Epoxy sind in der Tabelle 4.1 und die von T300 in der Tabelle 4.2 angegeben. Als zu überprüfender Versagensfall wird hier das Ablösen der Verstärkung vom Betonfügepartner durch die Bildung von Rissen an den Bimaterialkerben zwischen Beton und Epoxy betrachtet. Da Beton aufgrund seiner geringen Zugfestigkeit unter Zugbeanspruchung besonders versagensanfällig ist, werden anstelle des Klebstoffs die Festigkeiten und Bruchzähigkeiten des Betons für die Analyse mit dem gekoppelten Kriterium der Finiten Bruchmechanik verwendet. Basierend auf der Veröffentlichung von Grégoire et al. (2013) werden die Festigkeiten $\sigma_c = \tau_c = 3,9$ MPa und die Bruchzähigkeiten $\mathcal{G}_{IIc} = 2\mathcal{G}_{Ic} = 0,0852$ N/mm verwendet. Als konservative Annahme wird die Schubfestigkeit mit der Zugfestigkeit gleichgesetzt. Die

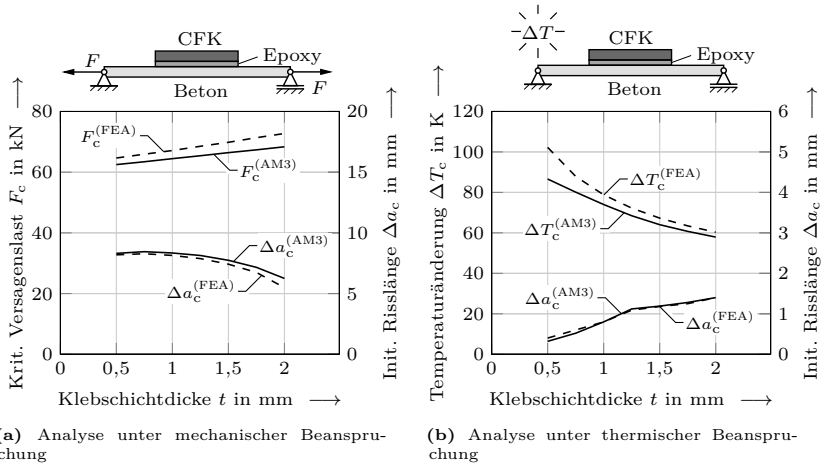


Abbildung 5.15: Mechanische und thermische Versagensanalyse von Verstärkungspflastern in Abhängigkeit von der Klebschichtdicke mit den Abmessungen: $l = b = 100$ mm, $10h_1 = h_2 = 20$ mm, $l_f = 50$ mm. Die Länge l_f entspricht hier jeweils der Länge der nicht verklebten Enden des unteren Fügepartners.

berechneten Ergebnisse in Abbildung 5.15a zeigen, dass der Einfluss der Klebschichtdicke auf die kritischen Versagenslasten gering ist und diese mit zunehmender Klebschichtdicke nur geringfügig ansteigen. Die Übereinstimmung zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen ist sowohl für die Versagenslasten als auch für die Risslängen gut. Die maximale Abweichung der Versagenslasten liegt im Bereich von 6%. Die Versagenslast von $F_c = 63$ kN bei einer Klebschichtdicke von 1 mm entspricht einer mittleren Spannung von 31,5 MPa, die auf den Betonträger wirkt und etwa dem Achtfachen der Zugfestigkeit des Betons entspricht. Folglich wird bei dem Verstärkungspflaster zunächst ein Versagen der Betonstruktur eintreten, bevor es zu einem Ablösen der Verstärkung kommt. Das Verstärkungspflaster erfüllt somit seinen Zweck.

In Abbildung 5.15b wird die gleiche Struktur unter thermischer Belastung untersucht. Auch hier wird das Versagen zwischen Betonfugepartner und Klebschicht betrachtet, jedoch in Abhängigkeit von einer kritischen Temperaturänderung anstelle einer kritischen mechanischen Versagenslast. Das gekoppelte Kriterium der Finiten Bruchmechanik wird entsprechend für die Analyse eines thermischen Versagensfalles angepasst und liefert eine kritische Temperaturänderung bezogen auf einen spannungsfreien Zustand der Struktur

Kapitel 5 Versagensanalyse von Klebverbindungen

bei Raumtemperatur. Die Ergebnisse zeigen, dass die kritische Temperaturänderung mit zunehmender Klebschichtdicke abnimmt. Die Übereinstimmung zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen der Temperaturänderungen ist zufriedenstellend mit einer maximalen Abweichung von 15 % bei sehr dünnen Klebschichten. Die Abweichung der Risslängen ist noch deutlich geringer. Temperaturänderungen von 60 K bis 100 K werden in eher seltenen Fällen nur unter extremen Bedingungen erreicht (Almasaeid et al., 2022), sodass ein thermisches Versagen des Verstärkungspflasters nicht zu erwarten ist. Es ist aber durchaus möglich, dass bei anderer Wahl der geometrischen Parameter und bei Überlagerung von mechanischer und thermischer Belastung praxisrelevante kritische Fälle auftreten.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein neues analytisches Modell zur strukturmechanischen Analyse der Lastübertragung von Klebverbindungen entwickelt. Aufbauend auf dieser Modellierung wurde ein geeignetes Konzept zur bruchmechanischen Versagensbewertung von Klebverbindungen erstellt und in Form eines Optimierungsalgorithmus implementiert.

Der Schwerpunkt bei der strukturmechanischen Analyse lag dabei auf der Entwicklung einer analytischen Modellierung, die es erlaubt, das mit zunehmender Klebschichtdicke komplexer werdende Verformungsverhalten in der Klebschicht korrekt zu erfassen. Im Gegensatz zu bestehenden sogenannten *weak-interface*-Ansätzen wurde ein durch Verschiebungsterme höherer Ordnung erweiterter Verschiebungsansatz in der Klebschicht vorgestellt. Die zusätzlichen Verschiebungsterme enthalten Polynomfunktionen, die zusätzliche Verformungsmoden der Klebschicht, gewichtet mit neu eingeführten Verformungsfunktionen, beinhalten und somit eine genauere Abbildung des Deformationszustandes der Klebschicht infolge äußerer Beanspruchungen ermöglichen. Zugrunde gelegt wurde eine *general sandwich-type*-Modellierung, mit der sich die Klebverbindung auf den Überlappungsbereich reduzieren lässt. Ausgehend von den Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie wurde unter Anwendung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungslösungen hergeleitet. Anschließend wurden mit der entwickelten Modellierung für konkrete Fügekonfigurationen unter mechanischen und thermischen Belastungen Auswertungen durchgeführt, die stets mit numerischen Referenzlösungen verglichen wurden. Anhand von einschnittigen Überlappungsfügungen unter Zugbeanspruchung wurden die Vorteile der vorgestellten Modellierung gegenüber bestehenden analytischen Modellen sowie die

Kapitel 6 Zusammenfassung und Ausblick

Notwendigkeit eines Ansatzes höherer Ordnung bei zunehmender Klebschichtdicke aufgezeigt. Neben einschnittigen Überlappungsfügungen wurden auch verschiedene andere Fügekonfigurationen und Lastfälle untersucht und die jeweiligen Ergebnisse anschaulich interpretiert. Die Untersuchung einschnittiger Überlappungsfügungen zeigte deutlich, wie eine Verlängerung des Überlappungsbereichs zu einer Reduzierung der Spannungen in der Klebschicht führt. Darüber hinaus bewirkte die Verwendung dickerer Klebschichten mit geringerer Steifigkeit eine gleichmäßigere Spannungsverteilung und eine Abnahme der Spannungsspitzen, die am Rand des Überlappungsbereichs auftreten. Die analytischen Ergebnisse zeigen dabei stets eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Vergleichsrechnungen.

Die daran anknüpfende Versagensbewertung erfolgte mit Hilfe des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums der Finiten Bruchmechanik mit dem Ziel, für verschiedene Klebverbindungen die kritischen Lasten und die initialen Risslängen zu bestimmen. Die hierfür erforderliche Rissmodellierung fand in der analytischen Umsetzung durch eine Modifikation des zuvor für die ungerissene Verbindung entwickelten Verschiebungsansatzes der Klebschicht statt. Die Modellansätze für den gerissenen und den ungerissenen Bereich der Klebverbindung wurden durch Übergangsbedingungen, die sich aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials herleiten ließen, miteinander verbunden. Damit konnten die Verläufe der Spannungen der ungerissenen Verbindung und der Rissflankenverschiebungen der gerissenen Verbindung berechnet und die inkrementelle Energiefreisetzungsraten durch die Auswertung des Risschließintegrals ermittelt werden. Vergleichsrechnungen mit der Finite-Elemente-Methode lieferten dabei sehr ähnliche Ergebnisse. Anschließend wurde ein Optimierungsalgorithmus entwickelt, mit dem sich, unter Verwendung der Ergebnisse der Spannungen und Energiefreisetzungsraten, das gekoppelte Kriterium der Finiten Bruchmechanik auswerten lässt. Die daraus resultierenden Ergebnisse wurden mit Referenzlösungen verglichen. Zunächst erfolgte ein Vergleich der analytischen mit der numerischen Umsetzung des gekoppelten Kriteriums, wobei die vorteilhafte Anwendung des Verschiebungsansatzes höherer Ordnung für die Klebschicht auch für die Versagensbewertung bestätigt werden konnte. Vergleiche mit den Ergebnissen einer Kohäsivzonenmodellierung und den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen bestätigten weiterhin die Anwendbarkeit des gekoppelten Kriteriums auf den hier untersuchten Versagensfall der Rissinitiierung in Klebverbindungen. In Parameterstudien zeigte die analytische Modellierung eine korrekte Abbildung des Klebschichtdickeneffekts und eine zu erwartende Abnahme der Versagenslast bei Verkürzung des Überlappungsbereichs.

6.2 Ausblick

Der zentrale Vorteil einer analytischen Modellierung liegt in der deutlich höheren Effizienz im Vergleich zu Finite-Elemente-Analysen oder Experimenten, wodurch sie sich besonders für die Vorauslegung und Strukturoptimierung von Klebverbindungen eignet. Um eine einfache analytische Beschreibung zu ermöglichen, werden vereinfachende Modellannahmen entsprechend der betrachteten Struktursituation getroffen. Hierdurch wird aber auch die Anwendbarkeit des Modells eingeschränkt, sodass im Folgenden mögliche Erweiterungen der in dieser Arbeit vorgestellten Modellierung aufgezeigt werden.

Bei dem vorliegenden Modell werden Klebverbindungen unter der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes und linear-elastischen Materialverhaltens betrachtet. Dies erweist sich insbesondere bei der Betrachtung hochfester Fügepartner mit sprödem Klebstoff als sehr geeignet. Nichtlinear-elastisches und plastisches Materialverhalten werden nicht berücksichtigt, wobei eine entsprechende Erweiterung des Materialmodells die Anwendbarkeit der Modellierung noch weiter verbessern würde. Die Fügepartner wurden als isotrop oder transversal isotrop modelliert. Eine Erweiterung der Modellierung auf orthotrope Fügepartner oder Lamine ist mit geringem Aufwand möglich. Hierdurch würde die Modellierung insbesondere für den Einsatz im Flugzeugbau noch attraktiver werden. Die Anwendung der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung liefert für die in dieser Arbeit betrachteten Strukturen sehr gute Ergebnisse, setzt aber eine ausreichende Schlankheit der Fügepartner voraus. Für dickere, schubweichere Fügepartner ist eine Erweiterung der Modellierung auf die Anwendung der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy (2003) mit ähnlicher Implementierung sinnvoll. Bei der Modellierung der Klebschicht konnte durch die hier verwendeten Polynomterme höherer Ordnung eine erfolgreiche Erweiterung des *weak-interface*-Ansatzes für dickschichtige Klebverbindungen erreicht werden. Alternative Ansätze, beispielsweise auf Basis trigonometrischer Funktionen, wurden in dieser Arbeit nicht untersucht, könnten aber zu einer weiteren Verbesserung der Abbildung des Verformungsverhaltens beitragen. Darüber hinaus ist auch eine Zerlegung der Klebschicht in mehrere Teilschichten mit jeweils eigenen Ansätzen denkbar, wie dies in der Arbeit von Weißgräber (2014) erfolgt ist. Anstelle von linearen Ansätzen könnten in den Teilschichten die in dieser Arbeit vorgestellten kubischen Ansätze verwendet werden und es bestünde die Möglichkeit einer gezielten Verfeinerung des Ansatzes in einzelnen stark beanspruchten Bereichen der Klebschicht. Um Biegeeffekte, die in einschnittigen Überlappungsfügungen auftreten, auszuschließen ist auch eine Betrachtung von zweischnittigen Überlappungsfügungen von Relevanz. Für eine analytische Untersuchung bedarf

Kapitel 6 Zusammenfassung und Ausblick

es einer entsprechenden Modifikation der *general sandwich-type*-Modellierung auf zwei Klebschichtbereiche und drei Fügepartner. Von praktischem Interesse ist auch die analytische Untersuchung der in Abschnitt 3.3.2 vorgestellten konstruktiven Mechanismen zur Reduzierung von Spannungsspitzen am Rand der Klebverbindung, wie zum Beispiel eine mit dem *general sandwich-type*-Ansatz kompatible Modellierung von Klebkehlen und deren Einfluss auf die Versagensanalyse.

Die in dieser Arbeit durchgeführte Versagensbewertung betrachtet ausschließlich das Versagen von Klebverbindungen durch klebschichtseitigen Grenzschichtbruch infolge Rissbildung zwischen Klebschicht und Fügepartner. Je nach Material der Fügepartner ist Versagen aber auch durch die Rissbildung in den Fügepartnern und bei Laminaten durch Delaminationsrisse möglich. Durch die Berücksichtigung weiterer Versagensarten kann eine noch allgemeingültigere Versagensbewertung erreicht werden. Die Ergebnisse hängen ebenfalls von dem hier gewählten elliptischen Spannungskriterium und dem zugrunde gelegten Energiekriterium nach Griffith ab, für die auch andere existierende Kriterien in Betracht gezogen werden können. Bei Verwendung eines Interaktionsgesetzes für das Energiekriterium wäre beispielsweise eine klare Zuweisung des versagensrelevanten Rissöffnungsmodus möglich.

Anhang A

Differentialgleichungssystem

Detaillierte Darstellung des Differentialgleichungssystems (A.1) mit den zugehörigen Randbedingungen (A.2) für die in Kapitel 4 dieser Arbeit vorgestellte Modellierung von Klebverbindungen. Die Gleichungen sind beispielhaft für den in Gleichung (4.26) und (4.27) dargestellten kubischen Verschiebungsansatz über die Klebschichtdicke hergeleitet.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Psi' + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$[\mathbf{D} \quad \mathbf{A}] \Psi = \mathbf{r} + \mathbf{r}_T \quad (\text{A.2})$$

Die in den Differentialgleichungen und Randbedingungen auftretenden Untermatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} sowie die Vektoren \mathbf{d} , \mathbf{r} und \mathbf{r}_T sind in den Gleichungen (A.3) bis (A.10) angegeben.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & a_4 & a_5 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & a_7 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 & a_9 & 0 & a_{10} \\ a_2 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & a_{13} & a_2 & 0 & a_{14} & 0 \\ a_3 & 0 & a_{12} & a_{15} & 0 & a_{16} & a_5 & 0 & -a_6 & 0 \\ 0 & a_8 & 0 & 0 & a_{17} & 0 & 0 & a_9 & 0 & -a_{10} \\ a_4 & 0 & a_{13} & a_{16} & 0 & a_{18} & a_{16} & 0 & a_{19} & 0 \\ a_5 & 0 & a_2 & a_5 & 0 & a_{16} & a_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_9 & 0 & 0 & a_9 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 \\ -a_6 & 0 & -a_{14} & a_6 & 0 & -a_{19} & 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{10} & 0 & 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Anhang A

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_2 & 0 & b_5 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_4 & 0 & 0 & -b_6 & 0 & 0 & b_7 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & b_6 & b_1 & 0 & b_8 & -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_5 & 0 & 0 & -b_8 & 0 & 0 & b_9 & 0 & 0 \\ 0 & -b_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{10} \\ -b_3 & 0 & -b_7 & b_3 & 0 & -b_9 & 0 & 0 & b_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{10} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & -c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 & -c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_5 & -c_2 & 0 & c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & -c_2 & c_1 & 0 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_4 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & c_6 & -c_3 & 0 & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ -d_3 & 0 & d_4 & d_3 & 0 & d_5 & d_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_7 & 0 & 0 & d_7 & 0 & 0 & d_8 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ -d_3 & 0 & d_9 & d_3 & 0 & d_{10} & -d_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{11} & 0 & 0 & d_{11} & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{13} \\ -d_6 & 0 & -d_{14} & d_6 & 0 & -d_{15} & 0 & 0 & d_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & e_{12} & 0 & 0 & -e_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} r_{\mathbf{T}1} & 0 & r_{\mathbf{T}2} & r_{\mathbf{T}3} & 0 & r_{\mathbf{T}4} & r_{\mathbf{T}5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{r}|_{x=-l/2} = \begin{bmatrix} N^{11} & Q^{11} & M^{11} & N^{21} & Q^{21} & M^{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{r}|_{x=l/2} = \begin{bmatrix} N^{12} & Q^{12} & M^{12} & N^{22} & Q^{22} & M^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10})$$

Die einzelnen Matrizen- und Vektoreinträge sind im Folgenden aufgelistet:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{E^{(1)}h_1}{E^{(\text{a})^*}(1-\nu^{(1)2})} & e_2 &= \frac{E^{(2)}h_2}{E^{(\text{a})^*}(1-\nu^{(2)2})}, & e_3 &= \frac{\kappa^{(1)}E^{(1)}h_1}{2E^{(\text{a})^*}(1+\nu^{(1)})}, \\ e_4 &= \frac{\kappa^{(2)}E^{(2)}h_2}{2E^{(\text{a})^*}(1+\nu^{(2)})}, & e_5 &= \frac{E^{(1)}h_1^3}{12E^{(\text{a})^*}(1-\nu^{(1)2})}, & e_6 &= \frac{E^{(2)}h_2^3}{12E^{(\text{a})^*}(1-\nu^{(2)2})}, \\ e_7 &= 1 - \nu^{(\text{a})}, & e_8 &= \frac{G^{(\text{a})}}{E^{(\text{a})^*}}, & e_9 &= \left(\frac{G^{(\text{a})}}{E^{(\text{a})^*}} + \nu^{(\text{a})} \right), \\ e_{10} &= \left(\frac{G^{(\text{a})}}{E^{(\text{a})^*}} - \nu^{(\text{a})} \right) & e_{11} &= \nu^{(\text{a})} & e_{12} &= (1 + \nu^{(\text{a})})\alpha^{(\text{a})}\Delta T \\ e_{13} &= \frac{E^{(1)}h_1\alpha^{(1)}\Delta T}{E^{(\text{a})^*}(1+\nu^{(1)})} & e_{14} &= \frac{E^{(2)}h_2\alpha^{(2)}\Delta T}{E^{(\text{a})^*}(1+\nu^{(2)})}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1 + \frac{t}{3}e_7, & a_2 &= \frac{th_1}{6}e_7, & a_3 &= \frac{t}{6}e_7, & a_4 &= -\frac{th_2}{12}e_7, \\ a_5 &= \frac{t}{3}e_7, & a_6 &= -\frac{t^2}{30}e_7, & a_7 &= e_3 + \frac{t}{3}e_8, & a_8 &= \frac{t}{6}e_8, \\ a_9 &= \frac{t}{3}e_8, & a_{10} &= -\frac{t^2}{30}e_8, & a_{11} &= e_5 + \frac{th_1^2}{12}e_7, & a_{12} &= \frac{th_1}{12}e_7, \\ a_{13} &= -\frac{th_1h_2}{24}e_7, & a_{14} &= -\frac{t^2h_1}{60}e_7, & a_{15} &= e_2 + \frac{t}{3}e_7, & a_{16} &= -\frac{th_2}{6}e_7, \\ a_{17} &= e_4 + \frac{t}{3}e_8, & a_{18} &= e_6 + \frac{th_2^2}{12}e_7, & a_{19} &= -\frac{t^2h_2}{60}e_7, & a_{20} &= \frac{8t}{15}e_7, \\ a_{21} &= \frac{8t}{15}e_8, & a_{22} &= -\frac{2t^3}{105}e_7, & a_{23} &= -\frac{2t^3}{105}e_8, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Anhang A

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{2}e_{10}, & b_2 &= \frac{1}{2}e_9, & b_3 &= \frac{2}{3}e_9, & b_4 &= e_3 - \frac{h_1}{4}e_{10}, \\
 b_5 &= -\frac{h_2}{4}e_9, & b_6 &= -\frac{h_1}{4}e_9, & b_7 &= \frac{h_1}{3}e_9, & b_8 &= e_4 - \frac{h_2}{4}e_{10}, \\
 b_9 &= \frac{h_2}{3}e_9, & b_{10} &= \frac{4t}{15}e_9
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{1}{t}e_8, & c_2 &= -\frac{h_1}{2t}e_8, & c_3 &= -\frac{h_2}{2t}e_8, & c_4 &= -\frac{1}{t}e_7, \\
 c_5 &= -e_3 - \frac{h_1^2}{4t}e_8, & c_6 &= -\frac{h_1h_2}{4t}e_8, & c_7 &= -e_4 - \frac{h_2^2}{4t}e_8, & c_8 &= -\frac{16}{3t}e_8, \\
 c_9 &= -\frac{16}{3t}e_7, & c_{10} &= \frac{4t}{5}e_8, & c_{11} &= \frac{4t}{5}e_7
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -\frac{1}{2}e_{11}, & d_2 &= \frac{2}{3}e_{11}, & d_3 &= \frac{1}{2}e_8, & d_4 &= e_3 - \frac{h_1}{4}e_8, \\
 d_5 &= -\frac{h_2}{4}e_8, & d_6 &= \frac{2}{3}e_8, & d_7 &= \frac{h_1}{4}e_{11}, & d_8 &= \frac{h_1}{3}e_{11}, \\
 d_9 &= -\frac{h_1}{4}e_8, & d_{10} &= e_4 + \frac{h_2}{4}e_8, & d_{11} &= -\frac{h_2}{4}e_{11}, & d_{12} &= \frac{h_2}{3}e_{11}, \\
 d_{13} &= \frac{4t}{15}e_{11}, & d_{14} &= \frac{h_1}{3}e_8, & d_{15} &= \frac{h_2}{3}e_8, & d_{16} &= \frac{4t}{15}e_8,
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 r_{T_1} &= e_{13} + \frac{t}{2}e_{12}, & r_{T_2} &= \frac{h_1t}{4}e_{12}, & r_{T_3} &= e_{14} + \frac{t}{2}e_{12}, & r_{T_4} &= -\frac{h_2t}{4}e_{12}, \\
 r_{T_5} &= \frac{2t}{3}e_{12}.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Schnittgrößen für die Spannungsanalyse

Tabelle A.1

Übersicht der Schnittgrößen, die an den Enden des Überlappungsbereichs der in Kapitel 4 untersuchten Klebverbindungen wirken. Die Schnittgrößen sind pro Einheitstiefe aufgetragen, mit den Schnittkräften N und Q in N/mm und den Schnittmomenten M in Nmm/mm.

Abbildung	N^{11}	Q^{11}	M^{11}	N^{12}	Q^{12}	M^{12}	N^{21}	Q^{21}	M^{21}	N^{22}	Q^{22}	M^{22}
4.5a	200	6,7	166,7	0	0	0	0	0	0	200	6,7	-166,7
4.11a	0	4	400	0	0	0	0	0	-4	-400	0	0
4.11b	0	0	0	0	0	200	0	4,4	44,4	0	4,4	-44,4
4.11c	0	0	0	0	0	0	0	2000	0	0	2000	0
4.12a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.12b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Literaturverzeichnis

- [Adams 2021] ADAMS, R. D.: *Adhesive Bonding - Science, Technology and Applications*. 2. Auflage. Elsevier Ltd, 2021
- [Adams et al. 1986] ADAMS, R. D.; ATKINS, R. W.; HARRIS, J. A.; KINLOCH, A. J.: Stress Analysis and Failure Properties of Carbon-Fibre-Reinforced-Plastic/Steel Double-Lap Joints. In: *The Journal of Adhesion* 20 (1986), Nr. 1, 29–53
- [Adams et al. 1997] ADAMS, R. D.; COMYN, J.; WAKE, W. C.: *Structural adhesive joints in engineering*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 1997
- [Adams u. Harris 1987] ADAMS, R. D.; HARRIS, J. A.: The influence of local geometry on the strength of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 7 (1987), Nr. 2, 69–80
- [Adams u. Peppiatt 1974] ADAMS, R. D.; PEPPIATT, N. A.: Stress analysis of adhesive-bonded lap joints. In: *Journal of Strain Analysis* 9 (1974), Nr. 3, 185–196
- [Albert 2022] ALBERT, A.: *Schneider - Bautabellen für Ingenieure*. 25. Auflage. 2022
- [Alfano 2006] ALFANO, G.: On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 6, 723–730
- [Allman 1977] ALLMAN, D. J.: A Theory for Elastic Stresses in Adhesive Bonded Lap Joints. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 30 (1977), 11, Nr. 4, 415–436
- [Almasaeid et al. 2022] ALMASAEID, H. H.; SULEIMAN, A.; ALAWNEH, R.: Assessment of high-temperature damaged concrete using non-destructive tests and artificial neural network modelling. In: *Case Studies in Construction Materials* 16 (2022), e01080
- [Anderson 2017] ANDERSON, T. L.: *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. 4. Auflage. Boca Raton: CRC press, 2017
- [Bahn u. Harichandran 2008] BAHN, B. Y.; HARICHANDRAN, R. S.: Flexural Behavior of Reinforced Concrete Beams Strengthened with CFRP Sheets and Epoxy Mortar. In: *Journal of Composites for Construction* 12 (2008), Nr. 4, 387–395
- [Barenblatt 1959] BARENBLATT, G. I.: The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 23 (1959), Nr. 3, 622–636

Literaturverzeichnis

- [Bažant et al. 1991] BAŽANT, Z. P.; GETTU, R.; KAZEMI, M. T.: Identification of nonlinear fracture properties from size effect tests and structural analysis based on geometry-dependent R-curves. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 28 (1991), Nr. 1, 43–51
- [Becker u. Gross 2002] BECKER, W.; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin: Springer, 2002
- [Belingardi et al. 2002] BELINGARDI, G.; GOGLIO, L.; TARDITI, A.: On the Optimization of Single Lap Metal/Plastics Adhesive Joints. In: *Key Engineering Materials* Bd. 221, Trans Tech Publications Ltd, 2002, 161–172
- [Bigwood u. Crocombe 1989] BIGWOOD, D. A.; CROCOMBE, A. D.: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 9 (1989), Nr. 4, 229–242
- [Bogy 1971] BOGY, D. B.: Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. In: *Journal of Applied Mechanics* 38 (1971), Nr. 2, 377–386
- [Bremm et al. 2021] BREMM, S.; DÖLLING, S.; BECKER, W.; BLUM, L.; PETERS, R.; MALZBENDER, J.; STOLTEN, D.: A methodological contribution to failure prediction of glass ceramics sealings in high-temperature solid oxide fuel cell stacks. In: *Journal of Power Sources* 507 (2021), 230301
- [Brockmann et al. 2005] BROCKMANN, W.; GEISS, L. R.; KLINGEN, J.; SCHRÖDER, B.: *Klebertechnik: Klebstoffe, Anwendungen und Verfahren*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2005
- [Buchholz 1985] BUCHHOLZ, F. G.: Local formulae of higher order for the modified crack closure integral method. In: *Ingenieur-Archiv, Springer* 55 (1985), 342–347
- [Budhe et al. 2017] BUDHE, S.; BANEJA, M. D.; DE BARROS, S.; DA SILVA, L. F. M.: An updated review of adhesively bonded joints in composite materials. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 72 (2017), 30–42
- [Burg et al. 2012] BURG, K.; HAF, H.; WILLE, F.; MEISTER, A.: *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band II: Lineare Algebra*. 7. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2012
- [Burg et al. 2013] BURG, K.; HAF, H.; WILLE, F.; MEISTER, A.: *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. 6. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013
- [Camanho et al. 2003] CAMANHO, P. P.; DAVILA, C. G.; DE MOURA, M. F.: Numerical Simulation of Mixed-Mode Progressive Delamination in Composite Materials. In: *Journal of Composite Materials* 37 (2003), Nr. 16, 1415–1438
- [Campilho et al. 2012] CAMPILHO, R. D. S. G.; BANEJA, M. D.; NETO, J. A. B. P.; DA SILVA, L. F. M.: Modelling of Single-Lap Joints Using Cohesive Zone Models: Effect of the Cohesive Parameters on the Output of the Simulations. In: *The Journal of Adhesion* 88 (2012), Nr. 4-6, 513–533

- [Campilho et al. 2013] CAMPILHO, R. D. S. G.; BANEJA, M. D.; NETO, J. A. B. P.; DA SILVA, L. F. M.: Modelling adhesive joints with cohesive zone models: effect of the cohesive law shape of the adhesive layer. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 44 (2013), 48–56
- [Campilho et al. 2011] CAMPILHO, R. D. S. G.; PINTO, A. M. G.; BANEJA, M. D.; SILVA, R. F.; DA SILVA, L. F. M.: Strength Improvement of Adhesively-Bonded Joints Using a Reverse-Bent Geometry. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 25 (2011), Nr. 18, 2351–2368
- [Carpinteri et al. 2009] CARPINTERI, A.; CORNETTI, P.; PUGNO, N.: Edge debonding in FRP strengthened beams: Stress versus energy failure criteria. In: *Engineering Structures* 31 (2009), Nr. 10, 2436–2447
- [Carpinteri et al. 2011] CARPINTERI, A.; CORNETTI, P.; SAPORA, A.: Brittle failures at rounded V-notches: a finite fracture mechanics approach. In: *International Journal of Fracture* 172 (2011), Nr. 1, 1–8
- [Carrere et al. 2015] CARRERE, N.; MARTIN, E.; LEGUILLON, D.: Comparison between models based on a coupled criterion for the prediction of the failure of adhesively bonded joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 138 (2015), 185–201
- [Castagnetti et al. 2011] CASTAGNETTI, D.; SPAGGIARI, A.; DRAGONI, E.: Effect of bondline thickness on the static strength of structural adhesives under nearly-homogeneous shear stresses. In: *The Journal of Adhesion* 87 (2011), Nr. 7-8, 780–803
- [Catalanotti u. Camanho 2013] CATALANOTTI, G.; CAMANHO, P. P.: A semi-analytical method to predict net-tension failure of mechanically fastened joints in composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 76 (2013), 69–76
- [Cease et al. 2006] CEASE, H.; DERWENT, P. F.; DIEHL, H. T.; FAST, J.; FINLEY, D.: Measurement of mechanical properties of three epoxy adhesives at cryogenic temperatures for CCD construction / Fermi National Accelerator Laboratory, FERMLAB-TM-2366-A. 2006. – Forschungsbericht
- [Chaboche et al. 2001] CHABOCHE, J. L.; FEYEL, F.; MONERIE, Y.: Interface debonding models: a viscous regularization with a limited rate dependency. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 18, 3127–3160
- [Chen u. Cheng 1983] CHEN, D.; CHENG, S.: An Analysis of Adhesive-Bonded Single-Lap Joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), 03, Nr. 1, 109–115
- [Chen u. Qiao 2012] CHEN, F.; QIAO, P.: On the intralaminar and interlaminar stress analysis of adhesive joints in plated beams. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 36 (2012), 44–55
- [Chen u. Nelson 1979] CHEN, W. T.; NELSON, C. W.: Thermal Stress in Bonded Joints. In: *IBM Journal of Research and Development* 23 (1979), Nr. 2, 179–188
- [Cheng et al. 1991] CHENG, S.; CHEN, D.; SHI, Y.: Analysis of Adhesive-Bonded Joints with Nonidentical Adherends. In: *Journal of Engineering Mechanics* 117 (1991), Nr. 3, 605–623

Literaturverzeichnis

- [Cornetti et al. 2012] CORNETTI, P.; MANTIČ, V.; CARPINTERI, A.: Finite fracture mechanics at elastic interfaces. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 7-8, 1022–1032
- [Cornetti et al. 2019] CORNETTI, P.; MUÑOZ-REJA, M.; SAPORA, A.; CARPINTERI, A.: Finite fracture mechanics and cohesive crack model: Weight functions vs. cohesive laws. In: *International Journal of Solids and Structures* 156-157 (2019), 126–136
- [Cornetti et al. 2013] CORNETTI, P.; SAPORA, A.; CARPINTERI, A.: Mode mixity and size effect in V-notched structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 10, 1562–1582
- [Cornetti et al. 2006] CORNETTI, P.; PUGNO, N.; CARPINTERI, A.; TAYLOR, D.: Finite fracture mechanics: A coupled stress and energy failure criterion. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 14, 2021–2033
- [Croccombe u. Adams 1981] CROCOMBE, A. D.; ADAMS, R. D.: Influence of the spew fillet and other parameters on the stress distribution in the single lap joint. In: *The Journal of Adhesion* 13 (1981), Nr. 2, 141–155
- [da Silva et al. 2004] DA SILVA, L. F. M.; ADAMS, R. D.; GIBBS, M.: Manufacture of adhesive joints and bulk specimens with high-temperature adhesives. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 24 (2004), Nr. 1, 69–83
- [da Silva u. Adams 2007] DA SILVA, L. F. M.; ADAMS, R. D.: Techniques to reduce the peel stresses in adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 27 (2007), Nr. 3, 227–235
- [da Silva et al. 2008] DA SILVA, L. F. M.; CRITCHLOW, G. W.; FIGUEIREDO, M. A. V.: Parametric study of adhesively bonded single lap joints by the Taguchi method. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 22 (2008), Nr. 13, 1477–1494
- [da Silva et al. 2009a] DA SILVA, L. F. M.; DAS NEVES, P. J. C.; ADAMS, R. D.; SPELT, J. K.: Analytical models of adhesively bonded joints—Part I: Literature survey. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, 319–330
- [da Silva et al. 2009b] DA SILVA, L. F. M.; DAS NEVES, P. J. C.; ADAMS, R. D.; WANG, A.; SPELT, J. K.: Analytical models of adhesively bonded joints—Part II: Comparative study. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, 331–341
- [da Silva et al. 2006] DA SILVA, L. F. M.; RODRIGUES, T. N. S. S.; FIGUEIREDO, M. A. V.; MOURA, M. F. S. F.; CHOUSAL, J. A. G.: Effect of Adhesive Type and Thickness on the Lap Shear Strength. In: *The Journal of Adhesion* 82 (2006), Nr. 11, 1091–1115
- [da Silva u. Campilho 2012] DA SILVA, L. F. M.; CAMPILHO, R. D. S. G.: *Advances in Numerical Modeling of Adhesive Joints*. Springer Berlin Heidelberg, 2012
- [da Silva et al. 2011] DA SILVA, L. F.; ÖCHSNER, A.; ADAMS, R. D.: *Handbook of Adhesion Technology*. Springer Berlin Heidelberg, 2011
- [de Bruyne 1944] DE BRUYNE, N. A.: The Strength of Glued Joints. In: *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 16 (1944), Nr. 4, 115–118

- [Delale et al. 1981] DELALE, F.; ERDOGAN, F.; AYDINOGLU, M. N.: Stresses in Adhesively Bonded Joints: A Closed-Form Solution. In: *Journal of Composite Materials* 15 (1981), Nr. 3, 249–271
- [DIN 8593-8 2003] DIN 8593-8: Fertigungsverfahren Fügen - Teil 8: Kleben; Einordnung, Unterteilung, Begriffe. In: *Deutsches Institut für Normung, Beuth-Verlag, Berlin* (2003)
- [DIN EN 923 2015] DIN EN 923: Klebstoffe – Benennungen und Definitionen. In: *Deutsches Institut für Normung, Beuth-Verlag, Berlin* (2015)
- [DIN EN ISO 10365 2022] DIN EN ISO 10365: Klebstoffe – Bezeichnung der wichtigsten Bruchbilder. In: *Deutsches Institut für Normung, Beuth-Verlag, Berlin* (2022)
- [Doitrand et al. 2023] DOITRAND, A.; DUMINY, T.; GIRARD, H.; CHEN, X.: *A review of the coupled criterion*. Version: März 2023. – working paper or preprint
- [Dölling et al. 2021] DÖLLING, S.; BREMM, S.; KOHLSTETTER, A.; FELGER, J.; BECKER, W.: Predicting thermally induced edge-crack initiation using finite fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* 252 (2021), 107808
- [Dugdale 1960] DUGDALE, D. S.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), Nr. 2, 100–104
- [Elices et al. 2002] ELICES, M.; GUINEA, G. V.; GÓMEZ, J.; PLANAS, J.: The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), Nr. 2, 137–163
- [Falk et al. 2001] FALK, M. L.; NEEDLEMAN, A.; RICE, J. R.: A critical evaluation of cohesive zone models of dynamic fracture. In: *Journal de Physique IV France* 11 (2001), Nr. PR5, Pr5–43–Pr5–50
- [Felger et al. 2019a] FELGER, J.; ROSENDAHL, P. L.; LEGUILLON, D.; BECKER, W.: Predicting crack patterns at bi-material junctions: A coupled stress and energy approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 164 (2019), 191–201
- [Felger et al. 2019b] FELGER, J.; STEIN, N.; FREY, C.; BECKER, W.: Scaling laws for the adhesive composite butt joint strength derived by finite fracture mechanics. In: *Composite Structures* 208 (2019), 546–556
- [Fitton u. Broughton 2005] FITTON, M. D.; BROUGHTON, J. G.: Variable modulus adhesives: an approach to optimised joint performance. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 25 (2005), 329–336
- [Fraisse u. Schmit 1993] FRAISSE, P.; SCHMIT, F.: Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints. In: *International Journal of Fracture* 63 (1993), Nr. 1, 59–73
- [Frey et al. 2021] FREY, C.; DÖLLING, S.; LEŠTÁKOVÁ, M.; BECKER, W.: Free-edge crack onset induced by thermal loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 230-231 (2021), 111160

Literaturverzeichnis

- [García u. Leguillon 2012] GARCÍA, I. G.; LEGUILLON, D.: Mixed-mode crack initiation at a V-notch in presence of an adhesive joint. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 15-16, 2138–2149
- [García et al. 2014] GARCÍA, I. G.; MANTIČ, V.; BLÁZQUEZ, A.; PARÍS, F.: Transverse crack onset and growth in cross-ply [0/90]_s laminates under tension. Application of a coupled stress and energy criterion. In: *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014), Nr. 23, 3844–3856
- [Gleich et al. 2001] GLEICH, D. M.; TOOREN, M. J. L. V.; BEUKERS, A.: Analysis and evaluation of bondline thickness effects on failure load in adhesively bonded structures. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 15 (2001), Nr. 9, 1091–1101
- [Goglio et al. 2008] GOGLIO, L.; ROSSETTO, M.; DRAGONI, E.: Design of adhesive joints based on peak elastic stresses. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 28 (2008), Nr. 8, 427–435. – Special Topic Issue on Structural Adhesive Joints
- [Goland u. Reissner 1944] GOLAND, M.; REISSNER, E.: The Stresses in Cemented Joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 11 (1944), Nr. 1, A17–A27
- [Golewski u. Sadowski 2019] GOLEWSKI, P.; SADOWSKI, T.: The Influence of Single Lap Geometry in Adhesive and Hybrid Joints on Their Load Carrying Capacity. In: *Materials* 12 (2019), Nr. 12
- [Gonçalves et al. 2002] GONÇALVES, J. P. M.; DE MOURA, M. F. S. F.; DE CASTRO, P. M. S. T.: A three-dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 22 (2002), Nr. 5, 357–365
- [Griffith 1921] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 221 (1921), Nr. 582-593, 163–198
- [Gross et al. 2018] GROSS, D.; HAUGER, W.; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Bd. 10. Springer-Verlag, 2018
- [Gross u. Seelig 2011] GROSS, D.; SEELIG, T.: *Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics*. Bd. 2. Springer, 2011
- [Gross u. Seelig 2016] GROSS, D.; SEELIG, T.: *Bruchmechanik*. 6. Auflage. Berlin: Springer, 2016
- [Grégoire et al. 2013] GRÉGOIRE, D.; ROJAS-SOLANO, L. B.; PIJAUDIER-CABOT, G.: Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 37 (2013), Nr. 10, 1434–1452
- [Habenicht 2009] HABENICHT, G.: *Kleben - Grundlagen, Technologien, Anwendungen*. 6. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2009

- [Hart-Smith 1973a] HART-SMITH, L. J.: *Adhesive-bonded scarf and stepped-lap joints*. National Aeronautics and Space Administration, 1973 (NASA CR-112237)
- [Hart-Smith 1973b] HART-SMITH, L. J.: *Adhesive-bonded Single-lap Joints*. National Aeronautics and Space Administration, 1973 (NASA CR-112236)
- [Hashin 1996] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, 1129–1145
- [Hebel u. Becker 2008] HEBEL, J.; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), Nr. 6-7, 410–420
- [Hebel et al. 2010] HEBEL, J.; DIERINGER, R.; BECKER, W.: Modelling brittle crack formation at geometrical and material discontinuities using a finite fracture mechanics approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 18, 3558–3572
- [Hein u. Erdogan 1971] HEIN, V. L.; ERDOGAN, F.: Stress singularities in a two-material wedge. In: *International Journal of Fracture Mechanics* 7 (1971), Nr. 3, 317–330
- [Hell u. Becker 2015] HELL, S.; BECKER, W.: The scaled boundary finite element method for the analysis of 3D crack interaction. In: *Journal of Computational Science* 9 (2015), 76–81
- [Hell et al. 2014] HELL, S.; WEISSGRAEBER, P.; FELGER, J.; BECKER, W.: A coupled stress and energy criterion for the assessment of crack initiation in single lap joints: a numerical approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 117 (2014), 112–126
- [Henninger u. Leguillon 2007] HENNINGER, C.; LEGUILLON, D.: Adhesive fracture of an epoxy joint under thermal and mechanical loadings. In: *Journal of Thermal Stresses* 31 (2007), Nr. 1, 59–76
- [Hillerborg et al. 1976] HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and Concrete Research* 6 (1976), Nr. 6, 773–781
- [Hu et al. 1992] HU, G. K.; FRANÇOIS, D.; SCHMIT, F.: Non Linear Fracture Mechanics for Adhesive Lap Joints. In: *The Journal of Adhesion* 37 (1992), Nr. 4, 261–269
- [Hu 1995] HU, G.: Mixed mode fracture analysis of adhesive lap joints. In: *Composites Engineering* 5 (1995), Nr. 8, 1043–1050
- [Hui et al. 2003] HUI, C.-Y.; A., J.; BENNISON, S. J.; LONDONO, J. D.: Crack blunting and the strength of soft elastic solids. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 459 (2003), Nr. 2034, 1489–1516
- [Irwin 1957] IRWIN, G. R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), Nr. 3, 361–364

Literaturverzeichnis

- [Jenq u. Shah 1985] JENQ, Y.; SHAH, S. P.: Two Parameter Fracture Model for Concrete. In: *Journal of Engineering Mechanics* 111 (1985), Nr. 10, 1227–1241
- [Jiang u. Qiao 2015] JIANG, W.; QIAO, P.: An improved four-parameter model with consideration of Poisson's effect on stress analysis of adhesive joints. In: *Engineering Structures* 88 (2015), 203–215
- [Jung Lee et al. 2010] JUNG LEE, M.; MIN CHO, T.; SEOCK KIM, W.; CHAI LEE, B.; JU LEE, J.: Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 5, 322–328
- [Jüntgen 2019] JÜNTGEN, T.: *Klebtechnik: Klebgerechte Konstruktionen und Anwendungen in der Praxis*. Vogel Communications Group, Würzburg, 2019
- [Kaye u. Heller 2002] KAYE, R. H.; HELLER, M.: Through-thickness shape optimisation of bonded repairs and lap-joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 22 (2002), Nr. 1, 7–21
- [Komzsig 2020] KOMZSIK, L.: *Applied Calculus of Variations for Engineers*. 3. Auflage. Taylor & Francis, 2020
- [Krenk 1992] KRENK, S.: Energy release rate of symmetric adhesive joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 43 (1992), Nr. 4, 549–559
- [Krueger 2004] KRUEGER, R.: Virtual crack closure technique: History, approach, and applications . In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), 04, Nr. 2, 109–143
- [Kuna 2008] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008
- [Kuna 2013] KUNA, M.: *Finite Elements in Fracture Mechanics*. 1. Auflage. Dordrecht: Springer, 2013
- [Lang u. Mallick 1998] LANG, T. P.; MALLICK, P. K.: Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 3, 167–177
- [Lazzarin et al. 2014] LAZZARIN, P.; CAMPAGNOLO, A.; BERTO, F.: A comparison among some recent energy- and stress-based criteria for the fracture assessment of sharp V-notched components under Mode I loading. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 71 (2014), 21–30. – Energy density: Mechanics of solids (EDMS)
- [Leblond u. Mouro 1999] LEBLOND, J.-B.; MOURO, P.: Crack propagation from a preexisting flaw at a notch root. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy* 327 (1999), Nr. 6, 581–587
- [Leguillon 2002] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21 (2002), Nr. 1, 61–72
- [Leguillon et al. 2003] LEGUILLON, D.; LAURENCIN, J.; DUPEUX, M.: Failure initiation in an epoxy joint between two steel plates. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22 (2003), Nr. 4, 509–524

- [Leguillon u. Yosibash 2003] LEGUILLON, D.; YOSIBASH, Z.: Crack onset at a V-notch. Influence of the notch tip radius. In: *International Journal of Fracture* 122 (2003), Nr. 1/2, 1–21
- [Leguillon 1999] LEGUILLON, D.: Asymptotic Analysis of a Spontaneous Crack Growth. Application to a Blunt Crack. In: *IUTAM Symposium on Non-linear Singularities in Deformation and Flow*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999, 169–180
- [Leguillon 2013] LEGUILLON, D.: A simple model of thermal crack pattern formation using the coupled criterion. In: *Comptes Rendus Mécanique* 341 (2013), Nr. 6, 538–546
- [Leite et al. 2021] LEITE, A.; MANTIČ, V.; PARÍS, F.: Crack onset in stretched open hole PMMA plates considering linear and non-linear elastic behaviours. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 114 (2021), 102931
- [Lenci 2001] LENCI, S.: Analysis of a crack at a weak interface. In: *International Journal of Fracture* 108 (2001), Nr. 3, 275–290
- [Lu et al. 2019] LU, X.; RIDHA, M.; CHEN, B. Y.; TAN, V. B. C.; TAY, T. E.: On cohesive element parameters and delamination modelling. In: *Engineering Fracture Mechanics* 206 (2019), 278–296
- [Martin et al. 2010] MARTIN, E.; LEGUILLON, D.; CARRÈRE, N.: A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 9, 1297–1305
- [Mayland 2012] MAYLAND, W.: *Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2012
- [Mendoza-Navarro et al. 2013] MENDOZA-NAVARRO, L. E.; DIAZ-DIAZ, A.; CASTAÑEDA-BALDERAS, R.; HUNKELER, S.; NORET, R.: Interfacial failure in adhesive joints: Experiments and predictions. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 44 (2013), 36–47
- [Mesbah 2023] MESBAH, C.: *Finite-Elemente-Modellierung des Versagensverhaltens geklebter einschichtiger Überlappungsfügungen*, Technische Universität Darmstadt, Masterthesis, 2023
- [Methfessel u. Becker 2022] METHFESSEL, T. S.; BECKER, W.: A generalized model for predicting stress distributions in thick adhesive joints using a higher-order displacement approach. In: *Composite Structures* 291 (2022), 115556
- [Methfessel et al. 2024] METHFESSEL, T. S.; EL YAAKOUBI-MESBAH, C.; BECKER, W.: Failure analysis of crack-prone joints with Finite Fracture Mechanics using an advanced modeling approach for the adhesive layer. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 130 (2024), 103608

Literaturverzeichnis

- [Methfessel u. Becker 2021] METHFESSEL, T. S.; BECKER, W.: An advanced quadratic displacement approach for the analytical stress analysis of adhesive bonded joints. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 21 (2021), Nr. 1, e202100015
- [Methfessel u. Becker 2023a] METHFESSEL, T. S.; BECKER, W.: Debonding Prediction of a Reinforcing CFRP Patch on Concrete Structures. In: *CICE - 11th International Conference on Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Composites in Civil Engineering* (2023). – Paper 35
- [Methfessel u. Becker 2023b] METHFESSEL, T. S.; BECKER, W.: A geometrical parameter study of the analytical stress calculation in adhesive joints with thick bonding layers. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 22 (2023), Nr. 1, e202200043
- [Mittelstedt 2017] MITTELSTEDT, C.: *Energiemethoden der Elastostatik*. Darmstadt: Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2017
- [Mittelstedt 2022] MITTELSTEDT, C.: *Flächentragwerke*. Berlin: Springer, 2022
- [Mittelstedt u. Becker 2004] MITTELSTEDT, C.; BECKER, W.: Interlaminar stress concentrations in layered structures: Part I - a selective literature survey on the free-edge effect since 1967. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), Nr. 12, 1037–1062
- [Mittelstedt u. Becker 2016] MITTELSTEDT, C.; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminate*. Darmstadt: Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2016
- [Moradi et al. 2013] MORADI, A.; CARRÈRE, N.; LEGUILLON, D.; MARTIN, E.; COGNARD, J.-Y.: Strength prediction of bonded assemblies using a coupled criterion under elastic assumptions: Effect of material and geometrical parameters. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 47 (2013), 73–82
- [Mortensen u. Thomsen 1997] MORTENSEN, F.; THOMSEN, O. T.: Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates. In: *Composite Structures* 38 (1997), Nr. 1, 281–294. – Ninth International Conference on Composite Structures
- [Murakami 1987] MURAKAMI, Y.: *Stress Intensity Factors Handbook*. 1. Auflage. Oxford: Pergamon Press, 1987
- [Müller et al. 2006] MÜLLER, A.; BECKER, W.; STOLTEN, D.; HOHE, J.: A hybrid method to assess interface debonding by finite fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 8, 994–1008
- [Neto et al. 2012] NETO, J. A. B. P.; CAMPILHO, R. D. S. G.; DA SILVA, L. F. M.: Parametric study of adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 37 (2012), 96–101
- [Neuber 1936] NEUBER, H.: Theorie der technischen Formzahl. In: *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens* 7 (1936), Nr. 6, 271–274

- [Neuber 1958] NEUBER, H.: *Kerbspannungslehre*. 2. Auflage. Springer Berlin, Heidelberg, 1958
- [das Neves et al. 2009a] NEVES, P. J. C.; DA SILVA, L. F. M.; ADAMS, R. D.: Analysis of mixed adhesive bonded joints part I: theoretical formulation. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009a), Nr. 1, 1–34
- [das Neves et al. 2009b] NEVES, P. J. C.; DA SILVA, L. F. M.; ADAMS, R. D.: Analysis of mixed adhesive bonded joints part II: parametric study. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009b), Nr. 1, 35–61
- [Nguyen-Hoang u. Becker 2020] NGUYEN-HOANG, M.; BECKER, W.: Tension failure analysis for bolted joints using a closed-form stress solution. In: *Composite Structures* 238 (2020), 111931
- [Nguyen-Hoang u. Becker 2023] NGUYEN-HOANG, M.; BECKER, W.: Tension failure assessment of composite bolted joints under bearing-bypass load interaction using analytical means. In: *Journal of Composite Materials* 57 (2023), Nr. 8, 1459–1475
- [Novozhilov 1969] NOVOZHILOV, V. V.: On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 33 (1969), Nr. 2, 201–210
- [O'Brien 1982] O'BRIEN, T. K.: Characterization of delamination onset and growth in a composite laminate. In: REIFSNIDER, K. L. (Hrsg.): *Damage in Composite Materials: Basic Mechanisms, Accumulation, Tolerance, and Characterization*. STP 775. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1982, 140–167
- [Ojalvo u. Eidinoff 1978] OJALVO, I. U.; EIDINOFF, H. L.: Bond Thickness Effects upon Stresses in Single-Lap Adhesive Joints. In: *AIAA Journal* 16 (1978), Nr. 3, 204–211
- [Oplinger 1994] OPLINGER, D. W.: Effects of adherend deflections in single lap joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 18, 2565–2587
- [Papini et al. 1994] PAPINI, M.; FERNLUND, G.; SPELT, J. K.: The effect of geometry on the fracture of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 14 (1994), Nr. 1, 5–13
- [Park u. Paulino 2013] PARK, K.; PAULINO, G. H.: Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. In: *Applied Mechanics Reviews* 64 (2013), Nr. 6, 1–20
- [Pinto et al. 2014] PINTO, A. M. G.; CAMPILHO, R. D. S. G.; MENDES, I. R.; BAPTISTA, A. P. M.: Numerical and experimental analysis of balanced and unbalanced adhesive single-lap joints between aluminium adherends. In: *The Journal of Adhesion* 90 (2014), Nr. 1, 89–103
- [Pirvics 1974] PIRVICS, J.: Two Dimensional Displacement-Stress Distributions in Adhesive Bonded Composite Structures. In: *The Journal of Adhesion* 6 (1974), Nr. 3, 207–228

Literaturverzeichnis

- [Planas u. Elices 1991] PLANAS, J.; ELICES, M.: Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. In: *International Journal of Fracture* 51 (1991), 139–157
- [Rabinovitch 2014] RABINOVITCH, O.: An extended high order cohesive interface approach to the debonding analysis of FRP strengthened beams. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 81 (2014), 1–16
- [Raju 1987] RAJU, I. S.: Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements. In: *Engineering Fracture Mechanics* 28 (1987), Nr. 3, 251–274
- [Ramalho et al. 2020] RAMALHO, L. D. C.; CAMPILHO, R. D. S. G.; BELINHA, J.; DA SILVA, L. F. M.: Static strength prediction of adhesive joints: A review. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 96 (2020), 102451
- [Reddy 2003] REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2. Auflage. Boca Raton: CRC press, 2003
- [Reedy Jr u. Guess 2002] REEDY JR, E. D.; GUESS, T. R.: Nucleation and propagation of an edge crack in a uniformly cooled epoxy/glass bimaterial. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), Nr. 2, 325–340
- [Renton u. Vinson 1975] RENTON, J. W.; VINSON, J. R.: On the behavior of bonded joints in composite material structures. In: *Engineering Fracture Mechanics* 7 (1975), Nr. 1, 41–60
- [Renton u. Vinson 1973] RENTON, W. J.; VINSON, J. R.: The analysis and design of composite material bonded joints under static and fatigue loadings / Delaware Univ Newark Dept of Mechanical and Aerospace Engineering. 1973. – Forschungsbericht
- [Rosendahl et al. 2019] ROSENDAHL, P. L.; STAUDT, Y.; SCHNEIDER, A. P.; SCHNEIDER, J.; BECKER, W.: Nonlinear elastic finite fracture mechanics: Modeling mixed-mode crack nucleation in structural glazing silicone sealants. In: *Materials & Design* 182 (2019), 108057
- [Rosendahl u. Weißgraeber 2020a] ROSENDAHL, P. L.; WEISSGRAEBER, P.: Modeling snow slab avalanches caused by weak-layer failure – Part 1: Slabs on compliant and collapsible weak layers. In: *The Cryosphere* 14 (2020), Nr. 1, 115–130
- [Rosendahl u. Weißgraeber 2020b] ROSENDAHL, P. L.; WEISSGRAEBER, P.: Modeling snow slab avalanches caused by weak-layer failure – Part 2: Coupled mixed-mode criterion for skier-triggered anticracks. In: *The Cryosphere* 14 (2020), Nr. 1, 131–145
- [Rosendahl et al. 2017] ROSENDAHL, P. L.; WEISSGRAEBER, P.; STEIN, N.; BECKER, W.: Asymmetric crack onset at open-holes under tensile and in-plane bending loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 113–114 (2017), 10–23
- [Rybicki u. Kanninen 1977] RYBICKI, E. F.; KANNINEN, M. F.: A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. In: *Engineering Fracture Mechanics* 9 (1977), Nr. 4, 931–938

- [Rybicki et al. 1977] RYBICKI, E. F.; SCHMUESER, D. W.; FOX, J.: An Energy Release Rate Approach For Stable Crack Growth in the Free-Edge Delamination Problem. In: *Journal of Composite Materials* 11 (1977), Nr. 4, 470–487
- [Sadd 2021] SADD, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. London, San Diego, Cambridge, Oxford: Academic Press, 2021
- [Sapora et al. 2013] SAPORA, A.; CORNETTI, P.; CARPINTERI, A.: A finite fracture mechanics approach to V-notched elements subjected to mixed-mode loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 97 (2013), 216–226
- [Sator 2010] SATOR, C.: *Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2010
- [Sator u. Becker 2012] SATOR, C.; BECKER, W.: Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions. In: *Archive of Applied Mechanics* 82 (2012), Nr. 5, 643–658
- [Schijve 2009] SCHIJVE, J.: *Fatigue of Structures and Materials*. 2. Auflage. Dordrecht: Springer, 2009
- [Sepasdar u. Shakiba 2020] SEPASDAR, R.; SHAKIBA, M.: Overcoming the convergence difficulty of cohesive zone models through a Newton-Raphson modification technique. In: *Engineering Fracture Mechanics* 233 (2020), 107046
- [Seweryn 1994] SEWERYN, A.: Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 47 (1994), Nr. 5, 673–681
- [Srinivas 1975] SRINIVAS, S.: Analysis of bonded joints / National Aeronautics and Space Administration (NASA), Report TN D-7855. 1975. – Forschungsbericht
- [Stapleton et al. 2012] STAPLETON, S. E.; WAAS, A. M.; ARNOLD, S. M.: Functionally graded adhesives for composite joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 35 (2012), 36 – 49
- [Stein et al. 2017] STEIN, N.; DÖLLING, S.; CHALKIADAKI, K.; BECKER, W.; WEISSGRAEBER, P.: Enhanced XFEM for crack deflection in multi-material joints. In: *International Journal of Fracture* 207 (2017), Nr. 2, 193–210
- [Stein et al. 2015] STEIN, N.; WEISSGRAEBER, P.; BECKER, W.: A model for brittle failure in adhesive lap joints of arbitrary joint configuration. In: *Composite Structures* 133 (2015), 707–718
- [Stein et al. 2016] STEIN, N.; WEISSGRAEBER, P.; BECKER, W.: Brittle failure in adhesive lap joints - a general Finite Fracture Mechanics approach. In: *Procedia Structural Integrity* 2 (2016), 1967–1974
- [Stein 2018] STEIN, N.: *Analytische und semi-analytische Berechnungsmodelle zur Auslegung von Strukturklebverbindungen*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2018
- [Suhir 1986] SUHIR, E.: Stresses in Bi-Metal Thermostats. In: *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), 09, Nr. 3, 657–660

Literaturverzeichnis

- [Suhir 1989] SUHIR, E.: Interfacial Stresses in Bimetal Thermostats. In: *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989), 09, Nr. 3, 595–600
- [Suhir et al. 2007] SUHIR, E.; LEE, Y. C.; WONG, C. P.: *Micro- and Opto-Electronic Materials and Structures: Physics, Mechanics, Design, Reliability, Packaging*. 1. Auflage. Springer New York, 2007
- [Tada et al. 2000] TADA, H.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3. Auflage. New York: ASME Press, 2000
- [Talmon l'Armée 2019] TALMON L'ARMÉE, A.: *Analyse interlaminarer Rissentstehung in einschnittigen Überlappungsklebungen zwischen Laminatfügeteilen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2019
- [Talmon l'Armée et al. 2016] TALMON L'ARMÉE, A.; STEIN, N.; BECKER, W.: Bending moment calculation for single lap joints with composite laminate adherends including bending-extensional coupling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 66 (2016), 41–52
- [Taylor 2007] TAYLOR, D.: *The Theory of Critical Distances: A New Perspective in Fracture Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 2007
- [Taylor 2008] TAYLOR, D.: The theory of critical distances. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 7, 1696–1705. – Critical Distance Theories of Fracture
- [Taylor et al. 2005] TAYLOR, D.; CORNETTI, P.; PUGNO, N.: The fracture mechanics of finite crack extension. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 7, 1021–1038
- [Tran et al. 2012] TRAN, V.-X.; LEGUILLON, D.; KRISHNAN, A.; XU, L. R.: Interface crack initiation at V-notches along adhesive bonding in weakly bonded polymers subjected to mixed-mode loading. In: *International Journal of Fracture* 176 (2012), Nr. 1, 65–79
- [Tsai et al. 1998] TSAI, M. Y.; OPLINGER, D. W.; MORTON, J.: Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 12, 1163–1185
- [Tsonis 1992] TSONIS, A. A.: *Chaos - From Theory to Applications*. 1. Auflage. New York: Springer, 1992
- [Turon et al. 2007] TURON, A.; DÁVILA, C. G.; CAMANHO, P. P.; COSTA, J.: An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 10, 1665–1682
- [Vallée u. Keller 2006] VALLÉE, T.; KELLER, T.: Adhesively bonded lap joints from pultruded GFRP profiles. Part III: Effects of chamfers. In: *Composites Part B: Engineering* 37 (2006), Nr. 4, 328–336
- [Volkersen 1938] VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. In: *Luftfahrtforschung* 15 (1938), Nr. 1/2, 41–47

- [Waddoups et al. 1971] WADDOUPS, M. E.; EISENMANN, J. R.; KAMINSKI, B. E.: Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), Nr. 4, 446–454
- [Wah 1973] WAH, T.: Stress Distribution in a Bonded Anisotropic Lap Joint. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 95 (1973), 07, Nr. 3, 174–181
- [Wang u. Choi 1983] WANG, S. S.; CHOI, I.: The Mechanics of Delamination in Fiber-Reinforced Composite Materials. Part 1. Stress Singularities and Solution Structure. / NASA Contractor Report 172269. 1983. – Forschungsbericht
- [Wegman u. Van Twisk 2013] WEGMAN, R. F.; VAN TWISK, J.: *Surface preparation techniques for adhesive bonding*. 2. Auflage. Elsevier Science & Technology, 2013
- [Weißgraeber 2014] WEISSGRAEBER, P.: *Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2014
- [Weißgraeber u. Becker 2013] WEISSGRAEBER, P.; BECKER, W.: Finite fracture mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 14-15, 2383–2394
- [Weißgraeber et al. 2016a] WEISSGRAEBER, P.; FELGER, J.; GEIPEL, D.; BECKER, W.: Cracks at elliptical holes: stress intensity factor and finite fracture mechanics solution. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 55 (2016), 192–198
- [Weißgraeber et al. 2016b] WEISSGRAEBER, P.; LEGUILLON, D.; BECKER, W.: A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. In: *Archive of Applied Mechanics* 86 (2016), Nr. 1-2, 375–401
- [Weißgraeber et al. 2014] WEISSGRAEBER, P.; STEIN, N.; BECKER, W.: A general sandwich-type model for adhesive joints with composite adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 55 (2014), 56–63
- [Weißgraeber u. Becker 2011] WEISSGRAEBER, P.; BECKER, W.: A New Finite Fracture Mechanics Approach for Assessing the Strength of Bonded Lap Joints. In: *Key Engineering Materials* Bd. 471, Trans Tech Publications Ltd, 6 2011, 1075–1080
- [Whitney u. Nuismer 1974] WHITNEY, J. M.; NUISMER, R. J.: Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. In: *Journal of Composite Materials* 8 (1974), Nr. 3, 253–265
- [Wiegardt 1907] WIEGHARDT, K.: Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik: Organ für angewandte Mathematik* 55 (1907), 60–103
- [Williams 1952] WILLIAMS, M. L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), Nr. 4, 526–528
- [Wirsching 2006] WIRSCHING, G.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung mit Beispielen, Aufgaben und Musterlösungen*. 1. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2006

Literaturverzeichnis

- [Wong 2015] WONG, E. H.: Interfacial stresses in sandwich structures subjected to temperature and mechanical loads. In: *Composite Structures* 134 (2015), 226–236
- [Wong u. Liu 2017] WONG, E. H.; LIU, J.: Interface and interconnection stresses in electronic assemblies – A critical review of analytical solutions. In: *Microelectronics Reliability* 79 (2017), 206–220
- [Wooley u. Carver 1971] WOOLEY, G. R.; CARVER, D. R.: Stress concentration factors for bonded lap joints. In: *Journal of Aircraft* 8 (1971), Nr. 10, 817–820
- [Yang u. Pang 1996] YANG, C.; PANG, S.-S.: Stress-Strain Analysis of Single-Lap Composite Joints Under Tension. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 118 (1996), 04, Nr. 2, 247–255
- [Yu et al. 2016] YU, H.; OLSEN, J. S.; OLDEN, V.; ALVARO, A.; HE, J.; ZHANG, Z.: Viscous regularization for cohesive zone modeling under constant displacement: An application to hydrogen embrittlement simulation. In: *Engineering Fracture Mechanics* 166 (2016), 23–42
- [Zhao et al. 2010] ZHAO, X.; ADAMS, R. D.; DA SILVA, L. F. M.: A new method for the determination of bending moments in single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 2, 63–71

Die Arbeit berücksichtigt 208 Quellen.