

# Beschreibung der effektiven zyklischen Beanspruchungssituation im Nahfeld einer Rissspitze für elastisch-plastisches Materialverhalten

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
Genehmigte Dissertation von Florian Garnadt aus Ehringshausen  
Tag der Einreichung: 15. August 2023, Tag der Prüfung: 6. Dezember 2023

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Matthias Oechsner  
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald  
Darmstadt, Technische Universität Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Maschinenbau  
Institut für Werkstoffkunde  
Hochtemperaturwerkstoffe

Beschreibung der effektiven zyklischen Beanspruchungssituation im Nahfeld einer Riss Spitze für elastisch-plastisches Materialverhalten

Genehmigte Dissertation von Florian Garnadt

Tag der Einreichung: 15. August 2023

Tag der Prüfung: 6. Dezember 2023

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-264571

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/26457>

Jahr der Veröffentlichung auf TUprints: 2023

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)

Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

CC BY-NC-ND 4.0 International - Creative Commons

Namensnennung, Nicht-kommerziell, Keine Bearbeitung

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

*Für meinen Großvater*



---

## Erklärungen laut Promotionsordnung

### § 8 Abs. 1 lit. c PromO

Ich versichere hiermit, dass die elektronische Version meiner Dissertation mit der schriftlichen Version übereinstimmt.

### § 8 Abs. 1 lit. d PromO

Ich versichere hiermit, dass zu einem vorherigen Zeitpunkt noch keine Promotion versucht wurde. In diesem Fall sind nähere Angaben über Zeitpunkt, Hochschule, Dissertationsthema und Ergebnis dieses Versuchs mitzuteilen.

### § 9 Abs. 1 PromO

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen verfasst wurde.

### § 9 Abs. 2 PromO

Die Arbeit hat bisher noch nicht zu Prüfungszwecken gedient.

Darmstadt, 15. August 2023



---

Florian Garnadt



---

# Danksagung

---

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet und Institut für Werkstoffkunde der Technischen Universität Darmstadt.

Mein herzlicher Dank gilt dem Leiter des Instituts und meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Matthias Oechsner. Neben der Betreuung dieser Arbeit ermöglichte er mir die Tätigkeit am Institut bereits in der Rolle als Tutor und studentische Hilfskraft. Sein stetiges mir entgegengebrachtes Vertrauen und seine Unterstützung in all meinen Forschungsaktivitäten wertschätze ich sehr.

Außerdem möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald für die Übernahme des Korreferats und sein Interesse an meiner Arbeit bedanken. Seine Forschung auf dem Gebiet der Bruchmechanik inspirierte mich zu dieser Dissertation.

Mein besonderer Dank gilt dem Leiter des Kompetenzbereichs Hochtemperaturwerkstoffe Herrn Dr.-Ing. Christian Kontermann. Bereits durch die Zeit als seine studentische Hilfskraft und seine Betreuung meiner Masterthesis konnte ich unglaublich viel von ihm lernen. Seine wegweisenden Arbeiten bildeten den Ausgangspunkt meiner Forschung und gaben den Anstoß für diese Arbeit. Ich danke ihm ausdrücklich für die vielen fachlichen Diskussionen und seinen Rat.

Ebenso möchte ich allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts für Werkstoffkunde meinen Dank zum Ausdruck bringen. Neben den ausgezeichneten Arbeiten in den Laboren und der Werkstatt haben die vielen wertvollen Gespräche mich auf meinem Weg sehr unterstützt. Herrn Josef Arthur Schönherr und Herrn Timo Brune danke ich für die Übernahme des Lektorats.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie für die Förderung und Unterstützung über die ganzen Jahre hinweg danken.



---

# Kurzfassung

---

Mit den gestiegenen Anforderungen im Maschinenbau hinsichtlich einer optimalen Ausnutzung der Potentiale von Konstruktionswerkstoffen geht die Entwicklung von Konzepten zur Lebensdauerbewertung von Komponenten einher. Die Bewertung von Rissen spielt dabei eine übergeordnete Rolle. Neben der Initiierung von Rissen als Schadenskriterium kann nach schadenstoleranten Auslegungsphilosophien das Wachstum von Rissen bis zu technisch relevanten Größen in die Bewertung miteinbezogen werden. Die Beschreibung von Risswachstum ist daher für die Lebensdauerbewertung von Komponenten von zentraler Bedeutung.

Der Fokus dieser Dissertation liegt auf metallischen Werkstoffen, die ein ausgeprägtes elastisch-plastisches Verhalten aufweisen. Ihr Einsatzbereich sind Komponenten von Turbomaschinen, die im Betrieb eine zyklische Beanspruchung in Hochtemperaturbedingungen erfahren. Die Arbeit folgt der Philosophie, dass die Beanspruchung in der Nähe der Risspitze die Mechanismen der zyklischen Rissausbreitung kontrollieren und durch diese die Rissfortschrittsrate determiniert ist. Allerdings ist je nach Geometrie und Beanspruchungssituation einer zu bewertenden Struktur die Aufgabe der Ermittlung dieser lokalen, an der Risspitze wirkenden Beanspruchung nicht trivial.

Wie die Literatur zeigt, stehen verschiedene Parameter, wie z.B. das  $J$ -Integral, zur Quantifizierung der Intensität des Nahfelds zur Verfügung. Diese Intensitätsparameter wurden ursprünglich zur Anwendung für elastisches Materialverhalten entwickelt. Durch die Annahme einer deformationstheoretischen Beschreibung des Materialverhaltens ist dieser Parameter dennoch näherungsweise für elastisch-plastisches Materialverhalten anwendbar, solange ausschließlich monoton steigende Beanspruchungen betrachtet werden. Aufgrund der Lastumkehr im Zuge einer zyklischen Beanspruchung und der Berücksichtigung der Beanspruchungshistorie in Form von plastizitäts-induziertem Riss schließen ist das  $J$ -Integral für zyklische Belastungen grundsätzlich nicht mehr anwendbar. Um diese Effekte möglichst realitätsnah abzubilden, wird die inkrementelle Plastizitätstheorie angewendet.

Ein in der Literatur häufig beschriebener globaler Ansatz, um einen Parameter in Anlehnung an das  $J$ -Integral für zyklische Beanspruchungen unter Berücksichtigung von Riss schließen zu ermitteln, stellt den Ausgangspunkt der durchgeführten Arbeiten dar. Die Motivation dieser Dissertation ist zum einen die Einschränkungen dieses Ansatzes zu überwinden und zum anderen eine physikalische Interpretation des Parameters zu liefern. In diesem Zusammenhang wird die Beschreibung der effektiven zyklischen Beanspruchung im Nahfeld einer Risspitze durch das resultierende zyklische effektive  $J$ -Integral detailliert untersucht. Die Arbeiten umfassen die Simulation einer zyklisch beanspruchten Struktur mit Riss durch die Finite Elemente Methode zur Analyse der Eigenschaften verschiedener Auswertungsmethoden. Zudem findet eine Weiterentwicklung von lokalen Methoden statt, um zyklische Beanspruchungen und Riss schließen adäquat berücksichtigen zu können.

Wie die Untersuchungen zeigen, lassen sich die Ziele durch die Anwendung der Gebietsintegralmethode sowie des Konzepts der Konfigurationskräfte erreichen, falls eine separate Betrachtung des auf- und abstei-

---

genden Hysteresehalbasts stattfindet. Dazu sind alle Feldgrößen für den aufsteigenden Hysteresehalbast auf den Rissöffnungszeitpunkt und für den absteigenden Hysteresehalbast auf den oberen Lastumkehrpunkt zu referenzieren. Der Effektivwert des zyklischen  $J$ -Integrals ergibt sich durch Integration bis zum Risschließzeitpunkt. Die Ergebnisse aller analysierten lokalen Methoden sind durch dieses Vorgehen in guter Näherung wegunabhängig und stimmen daher mit dem Ergebnis des globalen Ansatzes näherungsweise überein. Mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte und der Analyse verschiedener möglicher relevanter plastischer Zonen zeigt sich, dass sich das zyklische effektive  $J$ -Integral als treibende Kraft für die Bewegung der Rissspitze in Kombination mit der aktiven plastischen Zone interpretieren lässt. Die Dissertation beleuchtet diese Interpretation vor dem Hintergrund von small scale yielding Bedingungen und geht auf die Herausforderungen und mögliche Lösungen im Fall von large scale yielding Bedingungen ein. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass die berechneten zyklischen effektiven  $J$ -Integrale zur Beschreibung der Beanspruchungssituation im Nahfeld der Rissspitze geeignet sind.

Innerhalb dieser Arbeit ist somit ein lokales Konzept entstanden, welches die Berechnung eines Intensitätsparameters für zyklische Beanspruchungen eines Risses in einem elastisch-plastischen Material ermöglicht. Dadurch kann, ohne den Einschränkungen des globalen Ansatzes zu unterliegen, prinzipiell für beliebige Geometrien und Beanspruchungsszenarien das Wachstum von Rissen in metallischen Werkstoffen beschrieben werden.

---

# Abstract

---

The increased requirements in the mechanical engineering industry with respect to an optimal utilisation of the potentials of construction materials are accompanied by the development of concepts for the lifetime assessment of components. The assessment of cracks plays a key role in this. In addition to the initiation of cracks as a damage criterion, the growth of cracks up to technically relevant sizes can be included in the evaluation according to damage-tolerant design philosophies. The description of crack growth is therefore of central importance for the lifetime assessment of components.

The focus of this dissertation is on metallic materials that show pronounced elastic-plastic behaviour. Their field of application are components of turbomachinery that experience cyclic loading in high-temperature conditions during operation. The work follows the philosophy that the stress near the crack tip controls the mechanisms of cyclic crack propagation and that the crack propagation rate is determined by this. However, depending on the geometry and stress situation of a structure to be evaluated, the task of determining this local stress acting at the crack tip is not trivial.

As the literature shows, various parameters, such as the  $J$ -integral, are available to quantify the intensity of the near field. These intensity parameters were originally developed for application to elastic material behaviour. Due to the assumption of a deformation plasticity description of the material behaviour, this parameter is nevertheless approximately applicable for elastic-plastic material behaviour, as long as only monotonically increasing loads are considered. Due to the load reversal in the course of a cyclic loading and the consideration of the loading history in the form of plasticity-induced crack closure, the  $J$ -integral is basically no longer applicable for cyclic loads. In order to represent these effects as realistically as possible, the incremental plasticity theory is applied.

A global approach often described in the literature to determine a parameter following the  $J$ -integral for cyclic loading under consideration of crack closure represents the starting point of the work carried out. On the one hand, the motivation of this dissertation is to overcome the limitations of this approach and, on the other hand, to provide a physical interpretation of the parameter. In this context, the description of the effective cyclic loading in the near-field of a crack tip by the resulting cyclic effective  $J$ -integral is investigated in detail. The work includes the simulation of a cyclically stressed structure with crack by the finite element analysis to analyse the properties of different evaluation methods. In addition, a further development of local methods is taking place in order to be able to adequately consider cyclic loading and crack closure.

As the investigations show, the objectives can be achieved by applying the domain integral method as well as the concept of configurational forces if a separate consideration of the ascending and descending hysteresis branch takes place. For this purpose, all field quantities for the ascending hysteresis branch have to be referenced to the crack opening point and for the descending hysteresis branch to the upper load reversal point. The effective value of the cyclic  $J$ -integral is obtained by integration up to the point of crack closure. The results of all analysed local methods are path-independent to a good approximation

---

by this procedure and therefore agree approximately with the result of the global approach. By means of the concept of configurational forces and the analysis of different possible relevant plastic zones, it is shown that the cyclic effective  $J$ -integral can be interpreted as the driving force for the movement of the crack tip in combination with the active plastic zone. The dissertation highlights this interpretation in the context of small scale yielding conditions and addresses the challenges and possible solutions in the case of large scale yielding conditions. Furthermore, the results show that the calculated cyclic effective  $J$ -integrals are suitable to describe the loading situation in the near-field of the crack tip.

Within this work, a local concept has been developed which allows the calculation of an intensity parameter for cyclic loading of a crack in an elastic-plastic material. Thus, without being subject to the limitations of the global approach, the growth of cracks in metallic materials can in principle be described for any geometries and loading scenarios.

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Nomenklatur</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>4</b>
2.1 Mechanismen des Risswachstums und deren vereinfachte Betrachtung . . . . .	4
2.2 Kontinuumsmechanische Beschreibung von elastisch-plastischem Materialverhalten . . .	7
2.2.1 Inkrementelle Plastizitätstheorie . . . . .	8
2.2.2 Deformationstheorie der Plastizität . . . . .	9
2.2.3 Formänderungsenergiedichte . . . . .	10
2.3 Beanspruchungsfeld nahe einer Rissspitze in stationären Bedingungen . . . . .	11
2.4 Ermittlung des $J$ -Integrals und dessen Interpretationen . . . . .	15
2.4.1 Herangehensweise über globale Kraft-Verschiebungs-Kurven . . . . .	15
2.4.2 Herangehensweise über ein Linienintegral . . . . .	17
2.4.3 Herangehensweise über Konfigurationskräfte . . . . .	20
2.5 Anwendung der Bruchmechanik zur Beschreibung von Ermüdungsrisswachstum . . . . .	23
2.6 Riss-schließphänomen . . . . .	24
2.6.1 Experimentelle Ermittlung von Riss-schließen . . . . .	25
2.6.2 Modellierung mittels Fließstreifen . . . . .	26
2.6.3 Simulation von Riss-schließen auf Basis der FEM . . . . .	27
2.7 Ermittlung des zyklischen $J$ -Integrals und dessen Interpretationen . . . . .	30
2.7.1 Herangehensweise über globale Kraft-Verschiebungs-Kurven . . . . .	30
2.7.2 Herangehensweise über ein Linienintegral . . . . .	33
2.7.3 Herangehensweise über Konfigurationskräfte . . . . .	36
<b>3 Problemstellung und Ziel</b>	<b>38</b>
<b>4 Simulations- und Berechnungsverfahren</b>	<b>41</b>
4.1 Simulation einer zyklisch beanspruchten Scheibe mit Tunnelriss . . . . .	41
4.1.1 Geometrisches Modell und Belastungssituation . . . . .	41
4.1.2 Materialmodell . . . . .	43
4.2 Berechnung des zyklischen effektiven $J$ -Integrals . . . . .	44
4.2.1 Ablauf des Berechnungsverfahrens . . . . .	44
4.2.2 Berechnung der Formänderungsenergiedichte . . . . .	46
4.2.3 Berechnung mittels des Gebietsintegrals . . . . .	51
4.2.4 Berechnung mittels der Konfigurationskräfte . . . . .	52
4.2.5 Berechnung mittels globaler Kraft-Verschiebungs-Kurven . . . . .	54
<b>5 Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>56</b>
5.1 Riss-öffnen und -schließen . . . . .	57



5.2	Zyklisches effektives $J$ -Integral anhand lokaler und globaler Methoden . . . . .	58
5.2.1	Scheibe mit Tunnelriss in SSY-Bedingungen . . . . .	59
5.2.2	Scheibe mit Tunnelriss in LSY-Bedingungen . . . . .	69
5.3	Effektive Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze . . . . .	81
5.4	Bedeutung der Erkenntnisse für die Bauteilanzwendung . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>86</b>
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>88</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>90</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>98</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Nachweis der Wegunabhängigkeit des Linienintegrals</b>	<b>104</b>
<b>B</b>	<b>Analytischer Ansatz zur Berechnung des <math>J</math>-Integrals - Monoton steigende Beanspruchung</b>	<b>106</b>
<b>C</b>	<b>Analytischer Ansatz zur Berechnung des <math>J</math>-Integrals - Zyklische Beanspruchung</b>	<b>107</b>
<b>D</b>	<b>Hintergründe zur numerischen Auswertung des Gebietsintegrals</b>	<b>110</b>

---

# Nomenklatur

---

## Lateinische Kleinbuchstaben

$a$	Risstiefe
$\Delta a$	Rissinkrement
$b_i$	Volumenkräfte
$c$	Materialparameter
$ds$	Infinitesimales Linienelement
$f_k$	Konfigurationskraftvektor
$f_k^{\text{bulk}}$	Konfigurationskräfte im Volumen, hervorgerufen durch Newton'sche Kräfte
$f_k^{\text{Elementnode}}$	Anteil der Konfigurationskraft eines Elements an einem Knoten
$f_k^{\text{inh}}$	Konfigurationskräfte im Volumen, hervorgerufen durch Inhomogenitäten
$f_k^{\text{Node}}$	Konfigurationskraft an einem Knoten
$f_k^{\text{P}}$	Konfigurationskräfte im Volumen, hervorgerufen durch plastische Deformationen
$f_k^{\text{tip}}$	Konfigurationskräfte an der Rissspitze
$i$	Inkrement
$m$	Materialparameter
$n$	Normalenvektor
$n$	Verfestigungsexponent
$q_1$	Gewichtungsfunktion
$r$	Abstand zur Rissspitze
$s_{ij}$	Spannungsdeviator
$t$	Zeit
$u_{i,k}$	Verschiebungsgradient
$w_p$	Gewichte Gauß'sche Quadratur

## Lateinische Großbuchstaben

$A$	Gebiet um die Rissspitze
$A^*$	Fläche innerhalb geschlossener Kontur $\Gamma^*$
$C$	Materialparameter
$C_{kj}$	Energie-Impuls Tensor, Konfigurationsspannungstensor
$C_1$	Koeffizient
$C_2$	Koeffizient
$D$	Gebiet um die Rissspitze ohne $A$
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Fließfunktion
$F$	Globale Kraft
$\Delta F$	Referenzierte Kraft
$\Delta F^a$	Referenzierte Kraft für Risstiefe $a$
$\Delta F^{a+\Delta a}$	Referenzierte Kraft für Risstiefe $a + \Delta a$
$G$	Energiefreisetzungsrate

$H$	Plastischer Tangentenmodul
$I_n$	Integrationskonstante
$J$	$J$ -Integral
$\Delta J$	Zyklisches $J$ -Integral
$J_{APZ}$	$J$ -Integral auf Basis der Konfigurationskräfte in der aktiven plastischen Zone
$K$	Spannungsintensitätsfaktor
$\Delta K$	Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors
$N$	Zyklenzahl
$N_A$	Anrisswechselzahl
$N$	Ansatzfunktion
$Q$	$Q$ -Faktor (Constraint)
$R$	Lastverhältnis
$S_R$	Beanspruchungsniveau
$T$	$T$ -Spannung (Constraint)
$U$	Globale Verschiebung
$U_{ia}$	Globale Knotenverschiebungen
$\Delta U$	Referenzierte Verschiebung
$\Delta U^a$	Referenzierte Verschiebung für Risstiefe $a$
$\Delta U^{a+\Delta a}$	Referenzierte Verschiebung für Risstiefe $a + \Delta a$
$W$	Formänderungsenergiedichte
$\Delta W$	Referenzierte Formänderungsenergiedichte
$X_{ia}$	Globale Knotenkoordinaten
$Y$	Geometriefaktor

### Griechische Kleinbuchstaben

$\alpha$	Constraint Parameter
$\alpha$	Fließoffset
$\alpha$	Rückspannung
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\Delta \varepsilon$	Referenzierte Dehnung
$\Delta \varepsilon_{eq}^{pl}$	Differenz der plastischen Vergleichsdehnungen zweier benachbarter Risstiefen
$\dot{\varepsilon}$	Dehnrage
$\tilde{\varepsilon}_{ij}$	Winkelfunktionen der Dehnungen
$\varepsilon$	Dehnung
$\varepsilon_0$	Normierungsgröße
$\gamma_p$	Plastische Verformungsarbeit pro Einheitsfläche an der Risspitze
$\gamma_s$	Energie pro Einheitsfläche um atomare Bindungen zu brechen
$\lambda$	Plastischer Multiplikator
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Delta \sigma$	Referenzierte Spannung
$\sigma$	Spannung
$\sigma_\infty$	Globale Spannung
$\sigma_0$	Bezugsspannung
$\sigma_f$	Bruchspannung
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Winkelfunktionen der Spannungen
$\sigma_0$	Fließgrenze
$\sigma_h$	Hydrostatische Spannung

$\theta$	Winkel
$\Delta u$	Referenzierte Verschiebung
$\tilde{u}_i$	Winkelfunktionen der Verschiebungen
$\eta_k$	Natürliche Koordinaten

### Griechische Großbuchstaben

$\Gamma$	Pfad
$\Gamma^*$	Geschlossene Kontur
$\Delta \Pi$	Energiedifferenz

### Indizes & Konventionen

$()_{1 \text{ mm}}$	Bezogen auf Risstiefe 1 mm
$()_{\text{eq}}$	Vergleichsgröße nach von Mises
$()_{\text{min}}$	Minimum
$()^1$	Zustand 1
$()^2$	Zustand 2
$()_{\text{p}}$	Gaußpunktindex
$()_{\text{s}}$	Gaußpunktindex
$()_{\text{th}}$	Schwellenwert
Global –	Differenz zwischen $a$ und $a - \Delta a$
Global +	Differenz zwischen $a$ und $a + \Delta a$
$()^{\text{global,avg}}$	Mittelwert aus der Lösung Global – und Global +
$()_{\text{loading}}$	Bezogen auf aufsteigenden Hysteresehalbast
$()_{\text{loc}}$	Lokal
$()_{\text{unloading}}$	Bezogen auf absteigenden Hysteresehalbast
$()_{\text{eff}}$	Effektivwert
$()^{\text{el}}$	Elastischer Anteil
$()^{\text{pl}}$	Plastischer Anteil
$()_{ij,j}$	Gradient eines Tensors
$()_{i,j}$	Gradient eines Vektors
$()_{ij}$	Tensor 2. Stufe
$()_i$	Tensor 1. Stufe
$()_{\text{max}}$	Maximum

### Abkürzungen

ACYIELD	Flagge Plastisch Ja/Nein
APZ	Aktive Plastische Zone
ASTM	American Society for Testing and Materials
CT	Compact Tension
$\Delta \text{CTOD}$	Zyklisches Crack Tip Opening Displacement
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
EEL	Element Edge Length
EPZ	Effektive Plastische Zone
ER	Rate der Totaldehnung
ESZ	Ebener Spannungszustand
FEM	Finite Elemente Methode
FKM	Forschungskuratorium Maschinenbau
GP	Gaußpunkt

---

GTN	Gurson-Tvergaard-Needleman
HRR	Hutchinson-Rice-Rosengreen
If W	Institut für Werkstoffkunde
LSY	Large-Scale Yielding
$\Delta$ PEEQ	Differenz der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung zweier benachbarter Risstiefen
PEEQ	Akkumulierte plastische Vergleichsdehnung
PENER	Plastischer Anteil der Formänderungsenergiedichte
PICC	Plasticity-Induced Crack Closure
SENER	Elastischer Anteil der Formänderungsenergiedichte
SSY	Small-Scale Yielding
VCCT	Virtual Crack Closure Technique
VCE	Virtual Crack Extension
XFEM	Extended Finite Element Method

---

# 1 Einleitung

---

In der Turbomaschinenbranche sind die Anforderungen an einen zuverlässigen und sicheren Betrieb der Anlagen von der Antriebstechnik bis zum Energiesektor relativ hoch. Im Bereich von Flugzeugtriebwerken wären beim Versagen von Komponenten letztlich die Passagiere in Gefahr, während im Bereich von Dampfturbinen in Kraftwerken ein Abbruch der Stromerzeugung drohen könnte. Ebenfalls erfordern steigende ökonomische, ökologische und gesellschaftliche Ansprüche eine besonders hohe Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Werkstoffe. Auf der konstruktiven Seite von neuen Anlagen bedeutet dies häufig ein möglichst leichtes und langlebigen Design. Auf der operationellen Seite sind die im Betrieb befindlichen Maschinen zu inspizieren, um über deren Reparatur oder den Austausch von Komponenten zu entscheiden. Die Werkstoffe sollen längst möglich im Einsatz sein ohne einen zuverlässigen und sicheren Betrieb der Anlagen zu gefährden.

Mit dieser Aufgabe des Ingenieurs geht einher, dass er die Lebensdauer der Bauteile kennt. Die tatsächliche Lebensdauer bleibt dabei in der Regel unbekannt. Es besteht aber die Möglichkeit unter bestimmten Annahmen eine rechnerische Lebensdauer mit Hilfe von Modellen zu bestimmen. Ein Ansatz für die Ermittlung der Bauteillebensdauer unter Ermüdungsbeanspruchung ist die Verwendung von Anrisskennlinien. Mit diesen kann für eine bestimmte wechselnde Beanspruchung die ertragbare Anzahl an Lastzyklen, respektive die Zeit bis zum Vorliegen eines Risses, bestimmt werden. Die Beanspruchung des Bauteils geht dabei aus Messungen oder Berechnungen hervor und stützt sich in der Regel auf die Orte, an denen sich die Beanspruchungen konzentrieren. Ein Beispiel hierfür sind konstruktionsbedingte Kerben. Abbildung 1.1 (a) zeigt am Beispiel einer Welle die Spannungskonzentration im Kerbgrund einer Schaufelnut. Die Anrisskennlinien werden für den jeweiligen Werkstoff und die jeweilige Einsatztemperatur über Stützstellen auf verschiedenen Lastniveaus in Versuchen erhoben, wie Abbildung 1.1 (b) zeigt. Dabei kommen standardmäßig zylindrische Proben zum Einsatz, die durch eine zyklische, einachsige Last beansprucht werden. Im Rahmen der Dissertation werden ausschließlich metallische Konstruktionswerkstoffe aus dem Bereich der Turbomaschinen untersucht, die durch eine niederzyklische Last beansprucht werden. Aufgrund des Geometrieunterschieds zwischen Bauteil und Probe liegt jedoch ein Übertragbarkeitsproblem vor. Dadurch ist in der rechnerischen Lebensdauer eine Konservativität enthalten, durch die der Werkstoff nicht vollständig ausgenutzt wird.

Einen Aspekt des Übertragbarkeitsproblems stellen Stützwirkungseffekte dar. In zahlreichen Forschungsprojekten, u.a. durchgeführt am Institut für Werkstoffkunde (IfW) [1–3], wurde daher der Einfluss von konstruktionsbedingten Kerben auf die Anrisswechselzahl experimentell untersucht und quantifiziert. Hierzu wurde der Lebensdauerunterschied von verschiedenen Ersatzstrukturen bei gleicher lokaler Beanspruchung am Kerbgrund und gleichen Risstiefen bestimmt. Es ließen sich bis zu einem Faktor zehn höhere Lebensdauern beobachten. Der Effekt basiert maßgeblich auf der Reduktion der Rissfortschrittsrate

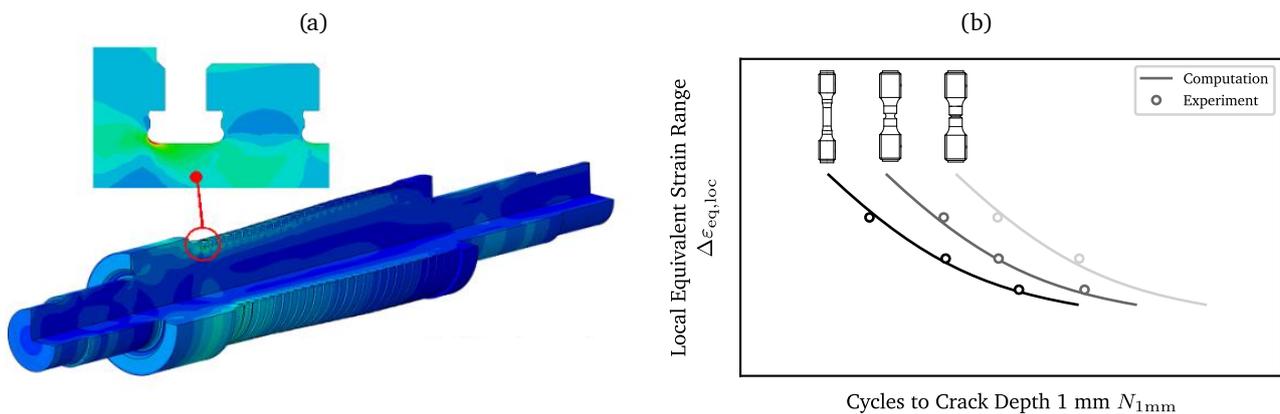


Abbildung 1.1: (a) Verteilung der Beanspruchung am Beispiel einer Welle aus dem Bereich der Turbomaschinen und deren Konzentration im Kerbgrund einer Schaufelnut, (b) Anrisskennlinien zur Lebensdauerbewertung bis zu einer Risstiefe von exemplarisch 1 mm für Probengeometrien ohne Kerbe und mit Kerbe verschiedener Geometrie

durch die vom Kerbgrund ausgehend abnehmende Beanspruchung. Der Spannungsgradient ist dabei von der jeweiligen Kerbgeometrie abhängig. Abbildung 1.1 (b) zeigt schematisch die für Rundproben mit Umfangskerben verschiedener Geometrie gemessenen Zyklenzahlen. Neben der experimentellen Ermittlung wurde ein bruchmechanisches Konzept zur Berechnung des Risswachstums am IfW entwickelt, siehe [4–7]. Dadurch ist es möglich für verschiedene Geometrien, Werkstoffe und Beanspruchungsbedingungen die Zyklenzahl bis zum Erreichen einer konstanten, technisch relevanten Risstiefe zu berechnen. In den beschriebenen Untersuchungen wie auch im Rahmen dieser Dissertation sind die Risstiefen mindestens in der Größenordnung mechanisch kurzer Risse, d.h. relativ zu mikrostrukturellen Längen groß, und weisen den Rissöffnungsmodus I auf. Theoretisch ist mit Hilfe der Bruchmechanik über die Quantifizierung von Stützzahlen im Bereich technischer Anrisse hinaus eine Berechnung bis zu einer beliebigen Risstiefe möglich. Im Sinne des damage-tolerant designs kann das Bauteil demnach trotz eines vorhandenen Risses weiter betrieben und der Werkstoff dadurch weiter ausgenutzt werden. Als Ergebnis können Kennlinien für konstante Risstiefen in einer beliebigen Geometrie unter beliebigen Beanspruchungsbedingungen generiert werden. Der Großteil der Lebensdauer vergeht allerdings in den meisten Fällen, solange die Risse noch relativ kurz sind.

Der zuvor beschriebene bruchmechanische Ansatz basiert auf dem semi-empirischen Zusammenhang zwischen einer in Versuchen gemessenen Rissfortschrittsrate und einem berechneten lokalen Beanspruchungsparameter nahe der Rissspitze. Dieser lässt sich theoretisch für eine beliebige Struktur und Risstiefe, z.B. anhand von Simulationen mittels der Finite Elemente Methode (FEM), ermitteln. Liegt eine zyklische Beanspruchung und elastisch-plastisches Materialverhalten vor, gehen mit den aktuell implementierten Methoden allerdings unplausible Ergebnisse einher. Aufgrund von Riss-schließeffekten kommt es zudem zu einer Beeinflussung der lokalen Beanspruchung, welche sich ebenfalls nicht adäquat abbilden lässt. Daher wurde im Rahmen der Forschungsprojekte ein Ansatz entwickelt, um auf Basis einer eigenständigen Auswertungsmethode den gesuchten Beanspruchungsparameter zu bestimmen. Die Grundlage dafür bilden Simulationen eines zyklisch beanspruchten wachsenden Risses für elastisch-plastisches Materialverhalten.

---

Aufgrund der ausschließlichen Untersuchung von Ersatzstrukturen, die einen eindeutigen Lastangriffspunkt aufweisen, ließ sich der Beanspruchungsparameter über die globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven ermitteln. Gleichzeitig konnten durch die Wahl dieser Strukturen die berechneten Rissfortschrittsraten experimentell validiert werden. Zur Bewertung von komplexeren Bauteilgeometrien und Beanspruchungsbedingungen ist dieser globale Ansatz aufgrund des fehlenden Lastangriffpunktes allerdings nicht geeignet. Darüber hinaus ist die physikalische Interpretation des berechneten Parameters trotz der experimentell validierten Ergebnisse unklar.

In diesen beiden defizitären Aspekten liegt die Motivation der vorliegenden Dissertation. Sie beschreibt zunächst im Kapitel 2 den Stand der Technik. Dabei geht sie auf unterschiedliche Berechnungsmethoden der Bruchmechanik und deren Anwendung für zyklische Beanspruchungen ein. Des Weiteren findet eine Zusammenfassung der existierenden physikalischen Sichtweisen auf unterschiedliche lokale Beanspruchungsparameter statt. Kapitel 3 formuliert die Problemstellung und das Ziel der Arbeit. Es werden zudem Hypothesen bezüglich des berechneten Beanspruchungsparameters und dessen Aussagen aufgestellt. Kapitel 4 beschreibt das verfolgte Vorgehen der Simulation eines allgemeinen Beispiels und stellt die Erweiterungen der angewendeten Auswertungsmethoden vor. Die Ergebnisse und deren Diskussion in Kapitel 5 dienen der Untersuchung der Hypothesen. Abschließend fasst Kapitel 6 die Erkenntnisse der Arbeit zusammen und Kapitel 7 gibt einen Ausblick auf mögliche Anschlussuntersuchungen.

---

## 2 Stand der Technik

---

Das folgende Kapitel gibt einen Überblick über den aktuellen Stand der Technik und beschränkt sich dabei auf die wesentlichen Entwicklungen in Bezug auf die Beschreibung von Risswachstum unter zyklischer Beanspruchung. Es berücksichtigt die zum Verständnis der Zusammenhänge notwendigen Hintergründe und zeigt relevante weiterführende Literatur auf.

Der Stand der Technik beginnt mit Modellen zu Mechanismen des Risswachstums in metallischen Werkstoffen, Kapitel 2.1, und fasst die grundlegenden Annahmen, auf der auch die in Kapitel 5 beschriebenen Arbeiten basieren, zusammen. Anschließend geht er auf die wesentlichen kontinuumsmechanischen Modelle zur Beschreibung von elastisch-plastischem Materialverhalten ein, Kapitel 2.2. Der zentrale Teil des Kapitels beschäftigt sich mit bisher bekannten Parametern zur Beschreibung der Intensität des Beanspruchungsfeldes nahe einer Rissspitze, Kapitel 2.3, 2.4 und 2.7. Anhand der Situation einer monoton steigenden Beanspruchung zeigt das Kapitel verschiedene Möglichkeiten auf, wie Intensitätsparameter des Nahfelds ermittelt und interpretiert werden können, Kapitel 2.4. Die im Zusammenhang mit Ermüdungsrissfortschritt vorhandenen Annahmen und zusätzlichen Phänomene, wie das Riss schließen, beschreiben Kapitel 2.5 und 2.6. Die Übertragung der für monoton steigende Beanspruchungen bekannten Parameter auf eine zyklische Beanspruchung, Kapitel 2.7, stellt den wesentlichen Aspekt dieser Dissertation dar.

### 2.1 Mechanismen des Risswachstums und deren vereinfachte Betrachtung

In der Beschreibung von Risswachstum sind zunächst die Rahmenbedingungen zu verdeutlichen, innerhalb derer die Betrachtung stattfindet. Ursprünglich beschäftigte sich die Bruchmechanik rein mit Bruchvorgängen unter monoton steigender Beanspruchung. Die in diesem Zusammenhang bekannten Mechanismen beschreibt das folgende Kapitel überblicksartig, weil sie zum Teil die Grundlage für Modelle unter zyklischer Beanspruchung darstellen. Des Weiteren geht es ausführlicher auf Mechanismen zyklischen Risswachstums und die verbreiteten Vereinfachungen zur Modellierung dieses Phänomens ein.

Die vermutlich naheliegendste Vorstellung eines Wachstumsmechanismus von Rissen ist die Trennung atomarer Bindungen. Dazu muss die in einer rissbehafteten Struktur vorhandene lokale Kraft an der Rissspitze größer der Kohäsionskraft zweier Atome sein. Die vorliegende Energie lässt sich durch Integration der Kraft über den Atomabstand und unter der Berücksichtigung weiterer Annahmen, Anderson [8], näherungsweise bestimmen. Griffith [9] nutzte diese notwendige Energie pro Einheitsfläche um atomare Bindungen zu brechen,  $\gamma_s$ , um im Jahre 1920 ein erstes Bruchkriterium aufzustellen. Die dahinter liegende thermodynamische Sichtweise Griffiths war die Theorie der minimalen potentiellen Energie. Er verglich in seinen Untersuchungen an Glas die notwendige Größe für Bruch mit der durch Rissverlängerung freigegebenen Energie. Um sein Bruchkriterium aufzustellen, griff er auf die Lösung für das Spannungsfeld

in einer unendlichen Scheibe mit Innenriss zurück, die kurze Zeit zuvor durch Inglis [10] und dessen Betrachtung des Risses als elliptisches Loch bekannt wurde. Die Bruchspannung  $\sigma_f$  nach Griffith ist schließlich durch Gleichung 2.1 gegeben.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}} \quad (2.1)$$

Darin stellen  $E$  den Elastizitätsmodul und  $a$  die Risttiefe dar. Im Fall von ideal spröden Materialien, wie z.B. näherungsweise Glas, ist der beschriebene Mechanismus und die Theorie der minimalen potentiellen Energie ausreichend. Im Fall von Metallen treten allerdings zusätzliche Phänomene, wie z.B. Versetzungsbewegungen, an der Risspitze auf und es kommt zusätzlich zur Dissipation von Energie. Irwin [11] und Orowan [12] erweiterten daher unabhängig voneinander Gleichung 2.1 um einen Term für die plastische Verformungsarbeit an der Risspitze pro Einheitsfläche  $\gamma_p$ . Durch die Modifikation des Bruchkriteriums von Griffith konnte die Bruchspannung für Metalle mit Gleichung 2.2 wesentlich präziser ermittelt werden.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2(\gamma_s + \gamma_p) E}{\pi a}} \quad (2.2)$$

Die Trennung atomarer Bindungen in der Matrix des Werkstoffs allein reicht allerdings nicht aus, um die vielfältigen Bruchphänomene insbesondere im Zusammenhang mit duktilen, metallischen Werkstoffen zu erklären.

Im Zusammenhang mit duktilem Risswachstum ist die Entstehung, das Wachstum und das Zusammenwachsen von Poren vor der Risspitze von zentraler Bedeutung. Die hohe lokale Spannungs- und Dehnungskonzentration vor der Spitze eines bereits vorhandenen Risses begünstigt die Entstehung von Poren. Die Bindung zwischen Teilchen, wie Ausscheidungen, Karbiden, nichtmetallischen Einschlüssen oder Partikeln einer zweiten Phase, und der Matrix bricht und es entstehen Mikrohohlräume. Durch den Bruch der Teilchen selbst können diese Hohlräume ebenfalls entstehen. Mit zunehmender Beanspruchung beginnen die Poren anschließend zu wachsen, während gleichzeitig die Risspitze abstumpft. In dieser Situation kann es dazu kommen, dass sich die Poren neben dem Zusammenwachsen auch mit der Risspitze vereinigen. Schließlich führt dies zum Wachstum des Risses. Abbildung 2.1 veranschaulicht schematisch die beschriebene Situation vor einer Risspitze.

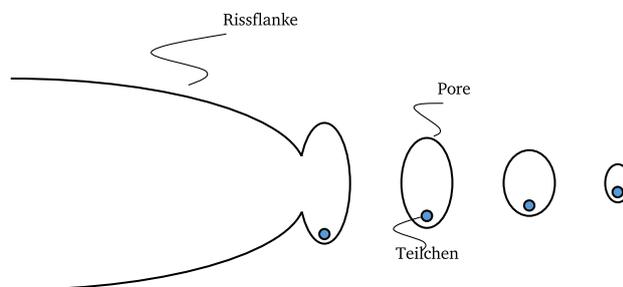


Abbildung 2.1: Koaleszenz von Poren mit der Risspitze als Mechanismus duktilen Risswachstums

Auf den Analysen dieses Mechanismus aufbauend wurden Modelle für dessen Beschreibung entwickelt, z.B. Rice und Tracey [13] oder McClintock [14]. Das zur Zeit wohl etablierteste Modell zur Berechnung des Porenwachstums und deren Koaleszenz basiert auf den Arbeiten von Gurson [15] und den Erweiterungen durch Tvergaard [16, 17], Chu und Needleman [18], sowie Tvergaard und Needleman [19] und ist als GTN-Model bekannt.

Die bisherigen Mechanismen des Risswachstums wurden für den Fall einer monoton steigenden Beanspruchung bis Bruch beschrieben. Liegt eine zyklische Beanspruchung vor, treffen die Modellvorstellungen nur eingeschränkt zu. Eine weit verbreitete Theorie für diesen Fall geht zurück auf Laird [20]. Er beschreibt den Vorgang des zyklischen Risswachstums als Prozess der plastischen Rissspitzenabstumpfung, welcher in Abbildung 2.2 schematisch dargestellt ist. Ausgehend von der minimalen Beanspruchung zum Zeitpunkt (a) nimmt die Beanspruchung zu. Dies führt dazu, dass sich der Riss zunehmend öffnet (b). Aufgrund der Spannungskonzentration an der Rissspitze werden Gleitebenen in einem Winkel von ca.  $45^\circ$  aktiviert. Es bildet sich zunehmend eine abgestumpfte halbkreisförmige Rissspitze, die zu einer Reduktion der Spannungskonzentration führt (c). Die Abstände der aktivierten Gleitebenen können dadurch zunehmen. Am Ende der Belastungsrampe (a)-(c) liegt ein um das Inkrement  $\Delta a$  längerer Riss vor. Nach Lastumkehr drehen sich die Gleitrichtungen an der Rissspitze um, (d). Die neu entstandene Oberfläche an der Spitze bewegt sich mit zunehmender Druckbeanspruchung in Richtung der Rissebene (d)-(e) und wird dabei „zusammengefaltet“ bzw. knickt ein. Dadurch entstehen zwei kleinere seitliche Kerben, die bei erneuter Belastung (f) die Aktivierung der Gleitebenen unterstützen. Weitere Modelle zur Beschreibung von zyklischem Risswachstum finden sich u.a. in [21–26].

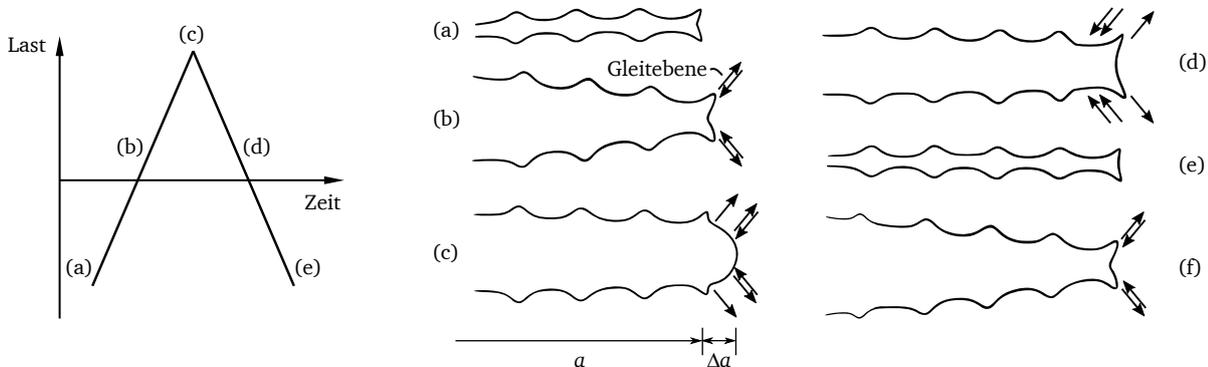


Abbildung 2.2: Mechanismus des Risswachstums durch Abstumpfen und Neuschärfen der Rissspitze unter zyklischer Beanspruchung nach Laird [20]

Alle Mechanismen, sowohl für Bruch- als auch zyklische Wachstumsvorgänge, eint, dass sie durch das lokale Beanspruchungsfeld in der Nähe der Rissspitze unmittelbar beeinflusst werden. Daraus ergibt sich die Möglichkeit einer vereinfachten Betrachtung. Im Zuge einer Modellierung dieser Beanspruchung im Nahfeld wird in den allermeisten Fällen ein scharfer Riss angenommen. Des Weiteren findet die Modellierung des Materialverhaltens auf Basis der Kontinuumsmechanik statt. Daraus folgt, dass der Bereich in dem die beschriebenen mikrostrukturellen Vorgänge stattfinden, auch als Prozesszone bezeichnet, nicht explizit berücksichtigt wird. Kapitel 2.3 geht auf die bekannten Theorien bezüglich der Felder näher ein.

Zusammenfassend zeigt dieses Kapitel, dass die alleinige Betrachtung der notwendigen Energie zur Trennung atomarer Bindungen in einem sich elastisch-plastisch verhaltenden Material unter zyklischer Beanspruchung allein nicht ausreichend sein kann. Dennoch kann eine vereinfachte Beschreibung des Risswachstums auf Basis des Nahfelds der Beanspruchung vorgenommen werden. Zu deren Berechnung geht das folgende Kapitel auf die relevanten Modelle für elastisch-plastisches Materialverhalten ein.

## 2.2 Kontinuumsmechanische Beschreibung von elastisch-plastischem Materialverhalten

Die bruchmechanischen Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit finden ausschließlich für Metalle statt. Daher beschreibt der folgende Abschnitt den Stand der Technik zur kontinuumsmechanischen Modellierung des Materialverhaltens von Metallen. Im Allgemeinen ist dieses durch bleibende Formänderungen gekennzeichnet. Eine solche plastische Formänderung folgt im Allgemeinen auf eine elastische Formänderung, sofern die Beanspruchung die Fließgrenze überschreitet. Insbesondere in der Nähe einer Risspitze treten sehr hohe Beanspruchungen auf, weshalb an dieser Stelle etwas ausführlicher auf die angewendeten Materialmodelle eingegangen wird. Grundsätzlich ist Plastizität durch irreversible Prozesse gekennzeichnet. Das heißt, nach einer Entlastung bleiben die plastischen Formänderungen bestehen und die verrichtete plastische Formänderungsarbeit dissipiert größtenteils in Form von Wärme.

Unabhängig vom Materialmodell wird im Folgenden angenommen, dass die Verzerrungen infinitesimal klein sind und daher eine additive Zerlegung der Dehnung in einen elastischen und plastischen Anteil zulässig ist, Gleichung 2.3. Für Dehnungen größer 10% verliert diese Annahme zunehmend an Gültigkeit, siehe z.B. Döring [27].

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.3)$$

Damit plastisches Verhalten auftritt, muss eine Fließbedingung, Gleichung 2.4, mit  $F = 0$  erfüllt sein. Die Funktion  $F$  stellt im mehrdimensionalen Raum eine Grenzfläche dar, die die Zustände elastisch  $F < 0$  und plastisch  $F \geq 0$  voneinander trennt. Die Fließgrenze ist durch  $\sigma_0$  gegeben. Die Fließbedingung kann für verschiedene Vergleichsspannungshypothesen  $f(\sigma_{ij})$  formuliert werden. Durch diese lässt sich die mehrachsige Beanspruchung hypothetisch auf eine repräsentative einachsige Spannung reduzieren. Eine für duktile Werkstoffe gebräuchliche Hypothese ist die Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises [28]. Ihr liegt die Beobachtung zu Grunde, dass plastisches Fließen von der hydrostatischen Spannung  $\sigma_h$  unabhängig ist und dass plastische Inkompressibilität vorliegt. Die Vergleichsspannung nach von Mises  $\sigma_{eq}$  lässt sich daher basierend auf der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $s_{ij}$  durch Gleichung 2.5 berechnen.

$$F = f(\sigma_{ij}) - \sigma_0 \quad (2.4)$$

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (2.5)$$

## 2.2.1 Inkrementelle Plastizitätstheorie

Die im Folgenden beschriebene Plastizitätstheorie betrachtet den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung in inkrementeller Form. Das Inkrement der plastischen Verzerrungen  $d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}}$  folgt direkt aus dem Inkrement der Spannungen  $d\sigma_{ij}$  und hängt darüber hinaus von der Vorgeschichte ab. Der Zusammenhang ist dabei abhängig vom aktuellen Spannungszustand und der vorliegenden Verfestigung. Um nun die plastischen Verzerrungsinkremente zu ermitteln, kann das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsleistung nach von Mises [29], Taylor [30] und Hill [31] angewendet werden. Daraus folgt, dass die Fließfläche konvex ist und das plastische Verzerrungsinkrement die Normale bildet. Die Fließregel nach Gleichung 2.6 wird daher auch als Normalenregel bezeichnet. Des Weiteren wird Gleichung 2.6 aufgrund ihrer Verknüpfung zur Fließbedingung, Gleichung 2.4, als assoziierte Fließregel bezeichnet. Die skalare Größe  $\lambda$  ist ein Proportionalitätsfaktor und wird auch als plastischer Multiplikator bezeichnet.

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.6)$$

Durch Einsetzen der Vergleichsspannung nach von Mises, Gleichung 2.5, ergibt sich das Fließgesetz nach Prandtl-Reuss, Gleichung 2.7.

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} = d\lambda \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{\text{eq}}} \quad (2.7)$$

Bei zunehmender Beanspruchung im plastischen Bereich tritt im Allgemeinen das Phänomen der Verfestigung auf. Das heißt, die Fließbedingung ändert sich in Abhängigkeit von inneren Variablen. Es wird in der Regel zwischen der isotropen und kinematischen Verfestigung unterschieden. Aufgrund der besonderen Rolle zyklischer Beanspruchungen in dieser Dissertation sind insbesondere die kinematischen Verfestigungsansätze von Bedeutung. Durch die isotrope Verfestigung nach Hill und Hodge [32, 33] bleibt der Ursprung der Fließfläche ortsfest und es ändert sich lediglich ihr Radius, also die Fließgrenze. Daher ist z.B. der für zyklische Beanspruchungen beobachtete Bauschinger Effekt [34] nicht abbildbar. Im Modell der kinematischen Verfestigung nach Prager [35] verschiebt sich der Mittelpunkt der Fließfläche um die Größe  $\alpha$ , welche auch als Rückspannung bezeichnet wird. Der Radius der Fließfläche ändert sich nicht. Die Fließbedingung aus Gleichung 2.4 mit der Vergleichsspannung nach von Mises aus Gleichung 2.5 wird um die Rückspannungen  $\alpha_{ij}$  erweitert und führt zu Gleichung 2.8.

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij})} - \sigma_0 \quad (2.8)$$

Die Verfestigungsregel von Prager [35] als auch Ziegler [36] ist durch Gleichung 2.9 gegeben. Danach verschiebt sich die Fließfläche in Richtung des plastischen Dehnungsinkrements. Die Größe  $c$  stellt einen Materialparameter dar.

$$d\alpha_{ij} = \frac{2}{3} c d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} \quad (2.9)$$

Neben diesem linearen Verfestigungsansatz existieren darüber hinaus nichtlineare Ansätze, wie z.B. von Armstrong und Frederick [37] oder Chaboche et al. [38]. Letzterer erweiterte die Beschreibung von Armstrong und Frederick durch Verwendung der Superposition mehrerer Rückspannungstensenoren und konnte damit die Abweichungen zum real beobachteten Materialverhalten reduzieren.

## 2.2.2 Deformationstheorie der Plastizität

Die im Folgenden vorgestellte Theorie zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens besitzt eine besondere Bedeutung im Zusammenhang mit der Bruchmechanik. Die grundlegenden Annahmen, infinitesimale Verzerrungen und Inkompressibilität, werden für diese Theorie übernommen. Anstelle der Fließregel der inkrementellen Plastizitätstheorie, Gleichung 2.6, tritt nun eine Proportionalität zwischen den totalen plastischen Verzerrungen und aktuellen deviatorischen Spannungen, Gleichung 2.10.

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \lambda s_{ij} \quad (2.10)$$

Unter Einbeziehung der Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises und dem Verfestigungspotenzgesetz nach Ramberg und Osgood [39] ergibt sich folgender Proportionalitätsfaktor  $\lambda$ , Gleichung 2.11.

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{E} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0} \right)^{(n-1)} \quad (2.11)$$

Darin sind  $\alpha$  der Fließoffset und  $n$  der Verfestigungsexponent. Zusammen mit den elastischen Verzerrungen ergibt sich damit das Materialgesetz für die Gesamtdehnung in Form von Gleichung 2.12.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{el}} + \varepsilon_{ij}^{\text{pl}} = \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma_h \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} s_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{E} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0} \right)^{(n-1)} s_{ij} \quad (2.12)$$

Unter der Bedingung gleichbleibender Hauptspannungsrichtungen ergeben sich die plastischen Verzerrungen direkt aus der Integration des Prandtl-Reuss Gesetzes nach Gleichung 2.7. Liegt in einer Struktur allerdings ein wachsender Riss vor oder kommt es aufgrund von zyklischer Beanspruchung zu einer Entlastung, verläuft diese nicht elastisch entlang der Hookeschen Gerade, sondern folgt dem nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang. Dies führt zu einer fehlerhaften Darstellung des realen elastisch-plastischen Materialverhaltens. Dadurch ist eine Berücksichtigung der Auswirkungen der Beanspruchungshistorie nicht möglich, was einen entscheidenden Nachteil der Deformationstheorie darstellt. Dennoch wird sie aufgrund ihrer mathematischen Einfachheit in vielen Problemstellungen angewendet. Wie Kapitel 2.4 beschreibt, basiert die ursprüngliche Definition des  $J$ -Integrals auf nichtlinear elastischem Materialverhalten dessen mathematische Beschreibung mit der Deformationstheorie übereinstimmt. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des  $J$ -Integrals sind, wie später zu sehen sein wird, eng mit den Einschränkungen der Deformationstheorie verbunden.

## 2.2.3 Formänderungsenergiedichte

Die Formänderungsenergiedichte ist von zentraler Bedeutung für die Berechnung der bruchmechanischen Parameter in Kapitel 2.4 und 2.7. Daher stellt dieses Kapitel die allgemeinen Zusammenhänge vor. Gleichung 2.13 zeigt die Formänderungsenergiedichte  $W$  an einem materiellen Punkt als Integral des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  über dem Dehnungstensor  $\varepsilon_{ij}$  in den Grenzen des undeformierten Zustands bis zur Dehnung  $\varepsilon_{ij}$ . Mathematisch betrachtet handelt es sich hierbei um ein Riemann-Stieltjes-Integral.

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.13)$$

Um die Formänderungsenergie eines Körpers zu erhalten, ist die Formänderungsenergiedichte über dessen Volumen zu integrieren. Liegt linear elastisches Materialverhalten vor, kann das Integral aus Gleichung 2.13 auch mit Gleichung 2.14 für z.B. eine zweidimensionale Struktur berechnet werden.

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}) \quad (2.14)$$

In Werkstoffen, die sich elastisch-plastisch Verhalten, kann die Formänderungsenergiedichte in einen elastischen und plastischen Anteil aufgeteilt werden, Gleichung 2.15.

$$W = W_{el} + W_{pl} = \int_0^{\varepsilon_{ij}^{el}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{el} + \int_0^{\varepsilon_{ij}^{pl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.15)$$

Ein Vergleich der inkrementellen Plastizitätstheorie und der Deformationstheorie ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Das Integral der Formänderungsenergiedichte entspricht für eine beliebige Spannungs- und Dehnungskomponente und monoton steigende Belastung der Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Kurve. Die beiden Theorien für elastisch-plastisches Materialverhalten liefern in diesem Fall gleiche Ergebnisse. Die Formänderungsenergiedichte am Ende der monoton steigenden Belastung entspricht der Summe aus elastischem und plastischem Anteil. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ist eindeutig über die Energie nach Gleichung 2.16 gegeben.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.16)$$

Liegt die Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Zusammenhangs durch einen Potenzansatz nach Ramberg-Osgood vor, Gleichung 2.12, kann die Formänderungsenergiedichte mit dessen Materialparametern über die hydrostatische Spannung  $\sigma_h$  und die Vergleichsspannung nach von Mises  $\sigma_{eq}$  bestimmt werden, Gleichung 2.17. Darin stellen die ersten beiden Summanden den elastischen und der dritte Summand den plastischen Anteil der Formänderungsenergiedichte dar.

$$W = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{eq}^2 + \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{E} \sigma_h^2 + \frac{n}{n+1} \frac{\alpha}{E \sigma_0^{n-1}} \sigma_{eq}^{n+1} \quad (2.17)$$

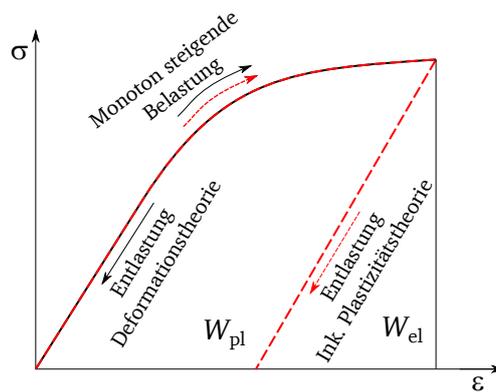


Abbildung 2.3: Spannungs-Dehnungs-Verlauf während einer monoton steigenden Belastung und anschließender Entlastung unter Annahme der Deformationstheorie und der inkrementellen Plastizitätstheorie

Kommt es z.B. aufgrund einer zyklischen Beanspruchung der Struktur global oder durch einen wachsenden Riss lokal zu einer Lastumkehr, unterscheiden sich die inkrementelle Plastizitätstheorie und die Deformationstheorie, wie es in Abbildung 2.3 dargestellt ist. Der weiterhin eindeutige Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung nach der Deformationstheorie, Gleichung 2.16, führt dazu, dass bei Entlastung der gleichen Kurve wie bei Belastung gefolgt wird. Nach der inkrementellen Plastizitätstheorie liegt nach Lastumkehr eine elastische Entlastung vor, sodass der eindeutige Zusammenhang nach Gleichung 2.16 verloren geht. Dieses Verhalten ist für veränderliche und nicht-proportionale Beanspruchungen dadurch näher an der Realität. Gleichzeitig befindet es sich aufgrund der Dissipation des plastischen Anteils der Formänderungsenergiedichte  $W_{pl}$  im Einklang mit der Thermodynamik.

Die beschriebenen Zusammenhänge bezüglich der Materialmodelle für elastisch-plastisches Verhalten sind u.a. der Ursprung für die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Herausforderungen in Bezug auf die Beschreibung von Risswachstum unter zyklischer Beanspruchung.

## 2.3 Beanspruchungsfeld nahe einer Rissspitze in stationären Bedingungen

Die in diesem Kapitel beschriebenen Zusammenhänge stellen die Grundlage für die in den folgenden Kapiteln 2.4, 2.5, 2.6 und 2.7 verfolgte Theorie dar. Demnach ist es möglich, die Beanspruchung im Nahfeld einer Rissspitze durch einen Intensitätsparameter zu beschreiben. Es gilt die Annahme eines scharfen Risses und die kontinuumsmechanische Beschreibung des Materialverhaltens. Zudem basieren die grundlegenden Betrachtungen auf einem stationären Riss unter monoton steigender Beanspruchung. Je nach Ausprägung der plastischen Zone vor der Rissspitze und dem Abstand zur Rissspitze lassen sich verschiedene geeignete Intensitätsparameter nutzen. Ist z.B. die Beanspruchung gering oder der Werkstoff spröde, können die plastischen Deformationen an der Rissspitze für die Beschreibung des lokalen Beanspruchungsfeldes vernachlässigt werden.

Anhand von Abbildung 2.4 werden im Folgenden die unterschiedlichen Szenarien und Lösungen für das Beanspruchungsfeld beschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränkt sich die Darstellung

auf die Spannungskomponente  $\sigma_{22}$  in Belastungsrichtung und zeigt schematisch die Verläufe über dem Abstand  $r$  zur Rissspitze. Das vollständige Spannungsfeld würde im zweidimensionalen Fall zusätzlich vom Winkel um die Rissspitze abhängen. Des Weiteren umfasst die Feldbeschreibung ein Dehnungs- und Verschiebungsfeld. Neben dem Spannungsverlauf sind in Abbildung 2.4 verschiedene Zonen vor der Rissspitze gestrichelt angedeutet, die in ihrer Form und Größe variieren können. Insbesondere die Auswirkung der Größe der plastischen Zone wird im Folgenden beschrieben. Die Prozesszone, in der die physikalischen Vorgänge der Risserweiterung stattfinden, wird weitestgehend ausgeklammert.

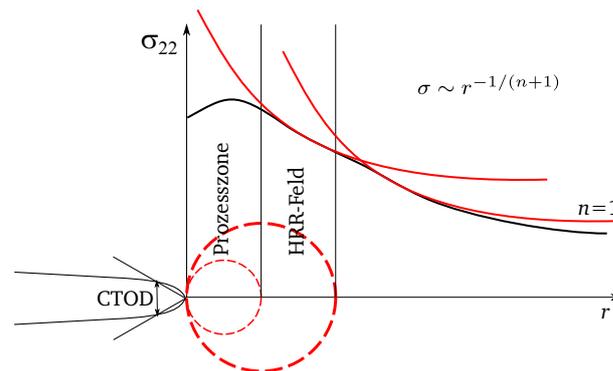


Abbildung 2.4: Beanspruchungsfeld an einer Rissspitze in elastisch-plastischem Material mit Definitionen von charakteristischen Bereichen

Durch einen Riss in einer Struktur entsteht eine Spannungskonzentration an dessen Spitze. In der Vergangenheit wurde diese Situation zunächst unter der Annahme ausschließlich linear elastischen Materialverhaltens mathematisch beschrieben. Angefangen mit der Analyse eines elliptischen Lochs in einer Scheibe durch Inglis [10], dessen Grenzfall mit unendlich kleinem Radius ein Riss darstellt, wurden zahlreiche Lösungen für die Beschreibung des Feldes an der Rissspitze entwickelt, z.B. Westergaard [40]. Williams [41] gab eine weitere Lösung auf Basis einer Reihenentwicklung des Eigenwertproblems an. Die Lösungen für den linear elastischen Fall zeigen eine  $1/\sqrt{r}$  Singularität nahe der Rissspitze. Das bedeutet, dass die Spannungen an der Rissspitze ins Unendliche steigen. Die Proportionalität des lokalen Feldes mit der global aufgebrachten Spannung  $\sigma_\infty$  kann in erster Ordnung durch den Spannungsintensitätsfaktor  $K$  nach Gleichung 2.18 bestimmt werden. Weitere Parameter niedrigerer Ordnung, wie z.B. die  $T$ -Spannung, sollen hier nicht weiter diskutiert werden.

$$K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (2.18)$$

Die Lösung für  $K$  in Gleichung 2.18 gilt für einen Riss in einer unendlichen Scheibe. Nimmt die Scheibe endliche Abmessungen ein, sodass das Beanspruchungsfeld durch den Rand der Scheibe beeinflusst wird, ändert sich auch die Intensität des Feldes. Der Spannungsintensitätsfaktor wird neben der Spannung und der Risttiefe abhängig von der Geometrie der Struktur. Diese Abhängigkeit ist für viele Anwendungs-

fälle bekannt und lässt sich durch Geometriefunktionen  $Y$  berücksichtigen, Gleichung 2.19. Für viele praxisrelevante Fälle liegen Lösungen für  $Y$  vor, siehe z.B. Murakami et al. [42] oder bruchmechanischer Festigkeitsnachweis der FKM-Richtlinie [43].

$$K = \sigma_{\infty} Y \sqrt{\pi a} \quad (2.19)$$

In einem sich elastisch-plastisch verhaltenden Material sind solch hohe Spannungen an der Riss Spitze allerdings nicht möglich. Durch plastische Deformationen werden diese in einem bestimmten Bereich nahe der Riss Spitze abgebaut. Ist diese plastische Zone deutlich kleiner als die Risstiefe und alle weiteren geometrischen Abmessungen der Struktur, kann weiterhin näherungsweise mit den Lösungen aus der linear elastischen Betrachtung gearbeitet werden. Dieser Fall wird als Kleinbereichsfließen oder aus dem Englischen als small scale yielding (SSY) bezeichnet und ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Das Beanspruchungsfeld innerhalb der plastischen Zone weist keine  $1/\sqrt{r}$  Singularität auf und dessen Intensität ist des Weiteren nicht durch  $K$  bestimmt. In der Vergangenheit wurden Näherungslösungen entwickelt, um dennoch mit den bekannten Feldlösungen arbeiten zu können. Zu nennen sind die Modelle von Irwin [44] und Dugdale [45] zur Ermittlung der Größe der plastischen Zone. Diese kann durch Addition mit der tatsächlichen Risstiefe zur Berechnung einer effektiven Risstiefe genutzt werden. Schließlich kann damit für diesen Fall ein Spannungsintensitätsfaktor ermittelt werden, der das Beanspruchungsfeld vor der Riss Spitze des theoretisch effektiven Risses beschreibt.

Abgesehen von dieser Näherung in SSY-Bedingungen beschrieben Hutchinson [46], Rice und Rosengren [47] das Spannungs- und Dehnungsfeld innerhalb der plastischen Zone auf Basis des  $J$ -Integrals, siehe Gleichung 2.20 und 2.21. Ähnlich dem Spannungsintensitätsfaktor  $K$  dient dieser Parameter der Beschreibung der Intensität des lokalen Feldes. Auch wenn es sich im Zusammenhang mit der plastischen Zone um ein Phänomen der Plastizität handelt, ist es wichtig festzuhalten, dass die entwickelten Beziehungen der Annahme der Deformationstheorie, Kapitel 2.2.2, und damit nichtlinear elastischem Verhalten unterliegen. Das Feld, im Folgenden HRR-Feld genannt, ist neben dem Abstand zur Riss Spitze  $r$  und dem Winkel  $\theta$  von den Parametern des Potenzansatzes nach Ramberg-Osgood zur Beschreibung des Materialverhaltens in Form von Gleichung 2.12 abhängig. Darin sind  $\sigma_0$  die Bezugsspannung, die näherungsweise als Anfangsfließspannung angenommen werden kann,  $\varepsilon_0$  eine Normierungsgröße,  $\alpha$  ein Fließoffset und  $n$  der Verfestigungsexponent. Von letzterem hängen des Weiteren die Integrationskonstante  $I_n$  sowie die Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}$  in Gleichung 2.20 und 2.21 ab, die sich wiederum analytisch bestimmen lassen und z.B. in Brocks [48] tabelliert zu finden sind.

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left[ \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \frac{1}{r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \left[ \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \frac{1}{r} \right]^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (2.21)$$

Die Ordnung der Singularität der Spannung in der plastischen Zone ist geringer und hängt nach der HRR-Feldtheorie durch  $1/(n+1)$  vom Verfestigungsexponenten ab. Dennoch treten an der Risspitze auch nach dieser Theorie unendlich große Spannungen auf. Dabei wurden in der Herleitung von Hutchinson, Rice und Rosengreen ein scharfer Riss und kleine Deformationen angenommen. In der Realität wird die Risspitze allerdings abstumpfen und dadurch die lokale Mehrachsigkeit reduzieren. Die Ergebnisse der Modellierung von McMeeking und Parks [49] unter der Annahme großer Deformationen zeigten, dass die auftretende Rissabstumpfung zu einem Abbau der Spannungssingularität führt. Unterhalb eines Abstands von ungefähr  $2J/\sigma_0$  fallen die Spannungen ab und nehmen einen endlichen Wert an, wie es auch in Abbildung 2.4 für die Komponente in Belastungsrichtung dargestellt ist. Die radiale Komponente muss an der Risspitze sogar gänzlich verschwinden. Die Singularität im Dehnungsfeld bleibt hingegen näherungsweise erhalten. Der Bereich unmittelbar um die Risspitze, unterhalb des Abstands ab dem das HRR-Feld nicht mehr zutrifft, liegt näherungsweise in der Größenordnung der Prozesszone. Die aufgrund der sehr großen Deformationen in diesem Bereich ablaufenden Vorgänge stehen in einem unmittelbaren Zusammenhang mit den in Kapitel 2.1 beschriebenen Mechanismen des Risswachstums. Aufgrund dessen, dass sich diese aber nicht explizit mit den zuvor eingeführten Feldgleichungen beschreiben lassen und stark durch die Mikrostruktur etc. beeinflusst sind, wird dieser Bereich in der Regel und so auch im Rahmen dieser Dissertation nicht weiter betrachtet. Die Vorgänge hängen aber natürlich von den umliegenden Beanspruchungsfeldern ab, weshalb der Autor es als essentiell erachtet, sich mit deren Ermittlung zu beschäftigen.

Die Dimension, in der die großen Deformationen zu deutlichen Abweichungen vom HRR-Feld führen, liegt in der Größenordnung der Rissspitzenöffnungsverschiebung oder im Englischen crack tip opening displacement (CTOD). Aus Rice und Johnson [50] geht die Größe dieser Zone als ungefähr dem Dreifachen von CTOD hervor. In Kuna [51] ist eine näherungsweise Übereinstimmung ab einem Abstand ungefähr größer dem Zweifachen von CTOD beschrieben. Die Größe CTOD wurde erstmals von Wells [52] eingesetzt, als er in Bruchzähigkeitsuntersuchungen beobachtete, dass sich die Rissflanken vor Eintreten des Bruchs voneinander entfernten. Durch Integration von Gleichung 2.21 folgt das Verschiebungsfeld nach Gleichung 2.22.

$$u_i = \alpha \varepsilon_0 \left[ \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \right]^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (2.22)$$

Durch Gleichung 2.22 lässt sich CTOD auch direkt beschreiben. Es ist ersichtlich, dass die Form der Rissflanke mit steigendem Verfestigungsexponenten  $n$  zunehmend abstumpft. Einen Zusammenhang zwischen dem  $J$ -Integral und CTOD auf Basis des HRR-Feldes und der Annahme der Deformationstheorie stellte u.a. Shih [53] her.

Die Vorgänge im Umfeld der Risspitze in der Größenordnung von CTOD spielen selbstverständlich eine entscheidende Rolle in der Beschreibung der Ausbreitung von Rissen. Ist dieser Bereich allerdings durch eine Zone, die durch einen Parameter wie das  $J$ -Integral kontrolliert wird, umgeben, können bereits auf Basis dieser Aussagen über das Ausbreitungsverhalten getroffen werden. Das HRR-Feld stellt lediglich einen Spezialfall unter den genannten Annahmen dar. Lässt sich das Materialverhalten nicht durch die

---

Annahme der Deformationstheorie der Plastizität abbilden, kann dennoch ein Beanspruchungsfeld nahe der Risssspitze vorliegen, dessen Intensität durch das  $J$ -Integral bestimmt ist, Andersson [8].

Sind die Bedingungen für SSY nicht erfüllt, z.B. wenn ein im Vergleich zur plastischen Zone kurzer Riss vorliegt oder im Fall eines langen Risses die plastische Zone an der Risssspitze sehr groß wird, kann die Gültigkeit der Beschreibung des Beanspruchungsfeldes nahe der Risssspitze durch einen einzelnen Parameter verloren gehen. Zusätzlich zur plastischen Zone an der Risssspitze können an anderer Stelle in der Struktur plastische Deformationen auftreten. Diese Situation wird auch als Großbereichsfließen oder im Englischen large scale yielding (LSY) bezeichnet. Erstreckt sich der plastisch deformierte Bereich über das gesamte Ligament kann auch von generellem Fließen gesprochen werden. In diesem Fall stellt das  $J$ -Integral keine geometrieunabhängige Größe dar und ist zur Beschreibung des Beanspruchungsfeldes allein nicht geeignet. Zusätzliche Parameter zur Berücksichtigung des sogenannten Constraints, wie z.B. in der  $J - Q$  Theorie von O'Dowd und Shih [54, 55] beschrieben, sind denkbar, werden aber im Rahmen dieser Dissertation nicht weiter betrachtet.

## 2.4 Ermittlung des $J$ -Integrals und dessen Interpretationen

Die vorangegangenen Kapitel zeigen, wie die Intensität der Beanspruchung im Nahfeld einer Risssspitze durch einen einzigen Parameter beschrieben werden kann. Auch wenn die Beanspruchung nicht exakt am Ort der Risssspitze bekannt ist, existiert in vielen Fällen ein Bereich in der Nähe der Risssspitze, der durch das  $J$ -Integral dominiert wird. Dadurch ist eine näherungsweise Korrelation mit den Rissfortschrittsmechanismen und letztlich dem Rissfortschritt möglich. Das folgende Kapitel beschränkt sich zunächst auf die verschiedenen Herangehensweisen zur Ermittlung des  $J$ -Integrals unter monoton steigender Beanspruchung. Es geht zudem auf die Einschränkungen der Definitionen und dessen verschiedene Interpretationen ein. Über eine globale Bilanzierung der für die Risserweiterung zur Verfügung stehenden Energie, die Berechnung des  $J$ -Integrals als ein Linienintegral in der Nähe der Risssspitze bis zum Konzept der Konfigurationskräfte fasst das Kapitel den Stand der Technik zusammen. Im Anhang B findet sich darüber hinaus ein Kapitel zur Berechnung des  $J$ -Integrals mittels analytischer Ansätze.

### 2.4.1 Herangehensweise über globale Kraft-Verschiebungs-Kurven

Im Jahr 1956, das als historischer Wendepunkt in die Geschichte der Bruchmechanik einging [56], veröffentlichte Irwin nach seiner Erweiterung des Bruchkriteriums von Griffith, Gleichung 2.2, eine weitere bedeutende Arbeit [57]. Unter der Annahme von linear elastischem Materialverhalten stellte er einen Zusammenhang zwischen der in der Struktur global gespeicherten Energie und der lokalen Beanspruchungen an einer Risssspitze her. Er nutzte dazu die sogenannte Energiefreisetzungsrate  $G$ , Gleichung 2.23, die sich aus der inkrementellen Änderung der für Rissverlängerung zur Verfügung stehenden Energie  $\Delta\Pi$  in Bezug auf die frei gewordene Oberfläche  $\Delta a$  ergibt.

$$G = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta a} \quad (2.23)$$

Um zu zeigen, dass die Energiefreisetzungsrate  $G$  nach Gleichung 2.23 zur Charakterisierung der Intensität des Risspitzennahfelds herangezogen werden kann, verwendete Irwin die Lösung von Westergaard [40]. Gleichung 2.24 gibt den Zusammenhang zwischen der Spannungsintensität nach Westergaard und der Energiefreisetzungsrate nach Griffith an. Aufgrund des Potentialcharakters der Felder in elastischen Strukturen kann  $G$  auch als risstreibende Kraft bezeichnet werden.

$$G = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (2.24)$$

Zur gleichen Lösung, allerdings für nichtlinear elastisches Materialverhalten, gelangte Rice [58] durch Anwendung eines Linienintegrals auf die bekannten Nahfeldlösungen an einer Rissspitze, siehe hierzu Kapitel 2.4.2. Damit treffen auf das  $J$ -Integral nach Rice und die Energiefreisetzungsrate für elastisches Materialverhalten  $G$  die gleichen Interpretationen zu. Sie beschreiben zum einen die risstreibende Kraft in Form der Energiefreisetzungsrate und geben zum anderen die Intensität des Nahfelds an.

Die inkrementelle Änderung der global gespeicherten Energie  $\Delta\Pi$  lässt sich anhand von globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven ermitteln. Abbildung 2.5 zeigt diese am Beispiel der rissbehafteten Struktur in (a) und vorliegendem nichtlinear elastischen Materialverhalten. Die Kraft-Verschiebungs-Kurven für die Risttiefe  $a$  und eine um das Inkrement  $\Delta a$  größere Risttiefe sind in (b) für den Fall konstanter Kraft  $F$  und in (c) für den Fall konstanter Verschiebung  $U$  dargestellt.

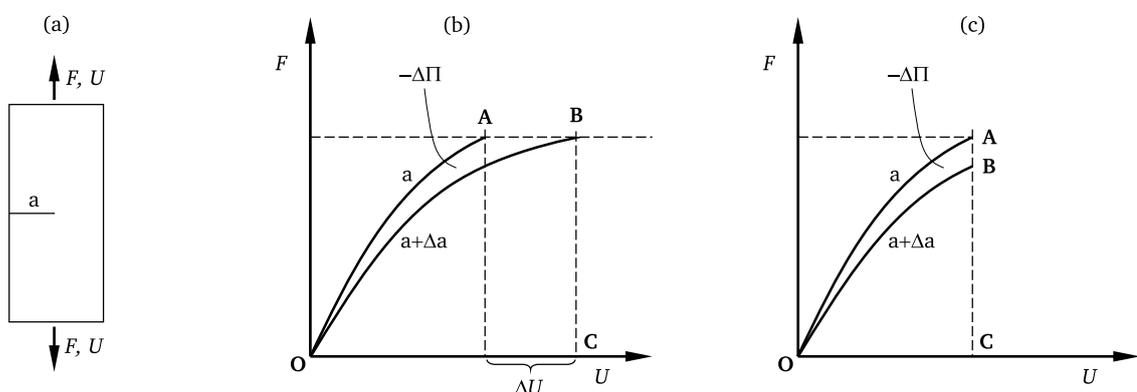


Abbildung 2.5: Ermittlung der inkrementellen Änderung der für Rissverlängerung  $\Delta a$  zur Verfügung stehenden Energie  $\Delta\Pi$  anhand von globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven einer Beispielstruktur (a) mit Risttiefe  $a$  für gleiche Kräfte (b) und gleiche Verschiebungen (c)

Die verrichtete Arbeit der äußeren Kraft  $F$  unter Annahme der Rissverlängerung  $\Delta a$  ist in (b) durch die Fläche OABCO gegeben. Die Rissverlängerung findet am Ende der Belastung A statt. Aufgrund des nichtlinear elastischen Verhaltens sind alle Deformationen reversibel, sodass die Kurve für die Entlastung von B nach O der Belastung gleicht. Die Formänderungsenergie zum Zustand B entspricht der Fläche OBCO. Die Differenz der äußeren verrichteten Arbeit und der Formänderungsenergie zum Zustand B entspricht der Fläche OABO. Dies ist die Energie, die zur Risserweiterung  $\Delta a$  benötigt wurde. Gleichzeitig entspricht diese Fläche der Differenz der potentiellen Energie für die beiden Risttiefen  $a$  und  $a + \Delta a$

---

und einer Kraft  $F$ . Liegt die Beanspruchung wie in (c) in Form einer globalen Verschiebung  $U$  vor, gleicht die potentielle Energie der Formänderungsenergie. Die Ergebnisse im Fall gleicher Kraft und gleicher Verschiebung unterscheiden sich lediglich durch die inkrementelle Verschiebung  $\Delta U$ . Durch Betrachtung kleiner Rissverlängerungen ist der Unterschied in der Regel allerdings vernachlässigbar klein. Die Betrachtung der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven zeigt, dass für die Annahme nichtlinear elastischen Materialverhaltens die für die Rissverlängerung benötigte Energie der Differenz der potentiellen Energie zweier benachbarter Risstiefen gleicht. Im Allgemeinen verliert  $J$  seine physikalische Bedeutung als risstreibende Kraft, da sich Werkstoffe wie z.B. Metalle elastisch-plastisch verhalten [58, 59]. Durch Dissipation aufgrund plastischer Deformationen steht lediglich der elastische Anteil der potentiellen Energie für eine Risserweiterung zur Verfügung und kann freigesetzt werden, Kapitel 2.2.3. Um die Betrachtung als risstreibende Kraft dennoch näherungsweise vornehmen zu können, müssen die Bedingungen des SSY erfüllt sein. Abgesehen davon wurde das  $J$ -Integral auch für größere Beiträge von Plastizität angewendet und dessen Anwendungsgrenzen ermittelt.

Begley und Landes [60] griffen die Idee des  $J$ -Integrals auf und verwendeten es erstmals zur Ermittlung der Bruchzähigkeit, d.h. für den Fall großer plastischer Deformationen bis hin zum generellen Fließen. Sie machten klar, dass das  $J$ -Integral in diesem Fall nicht als Energiefreisetzungsrates interpretiert werden kann. Im Unterschied zu Abbildung 2.5 unterscheidet sich die Kraft-Verschiebungs-Kurve während der Entlastung nach Rissverlängerung von der bei Belastung, da die Annahme nichtlinear elastischen Materialverhaltens ihre Gültigkeit verliert, Kapitel 2.2.3. Die benötigte Energie für Rissverlängerung stimmt nicht weiter mit der Differenz der potentiellen Energie für die beiden Risstiefen überein. Daher kann das  $J$ -Integral für elastisch-plastisches Materialverhalten nicht weiterhin als Energiefreisetzungsrates interpretiert werden. Die Bedeutung, dass das  $J$ -Integral als Intensitätsparameter für das Nahfeld anwendbar ist, bleibt davon unberührt.

Ein wesentlicher Vorteil ergibt sich durch die globale energetische Betrachtung des  $J$ -Integrals. Aufgrund der Berechnung auf Basis von globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven ist das Vorgehen für die experimentelle Ermittlung geeignet. Daher wurden Konzepte entwickelt, um im Rahmen von Versuchen mit monoton steigender Last das  $J$ -Integral als Bruchkriterium auf Basis von gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurven zu ermitteln ASTM E1820 [61].

Analog zur Auswertung über gemessene Kurven lässt sich das  $J$ -Integral auch anhand von rechnerisch ermittelten Kraft-Verschiebungs-Kurven bestimmen. Um diese für eine bestimmte Struktur mit einem eindeutigen Lastangriffspunkt zu erhalten, kann beispielsweise eine Simulation auf Basis der FEM durchgeführt werden. Kontermann [4] nutzte diese Vorgehensweise als Grundlage für ein Konzept zur Beschreibung von Risswachstum in gekerbten Rundproben, auf das Kapitel 2.7.1 näher eingegangen wird.

## 2.4.2 Herangehensweise über ein Linienintegral

Das vorherige Kapitel 2.4.1 erwähnte bereits, dass das  $J$ -Integral auch auf Basis eines Linienintegrals berechnet werden kann. Rice [58, 59] beschrieb  $J$  1968 erstmals über ein Linienintegral, mit der ursprünglichen Motivation, die Dehnungskonzentration an einer Kerbe zu bestimmen. Allerdings entspricht der Grenzfall der Betrachtung einer Kerbe mit unendlich kleinem Radius einem scharfen Riss.

Abbildung 2.6 veranschaulicht die notwendigen Konventionen, um das Linienintegral entlang eines Pfades  $\Gamma$  um die Risssspitze in einem zweidimensionalen Problem zu berechnen.

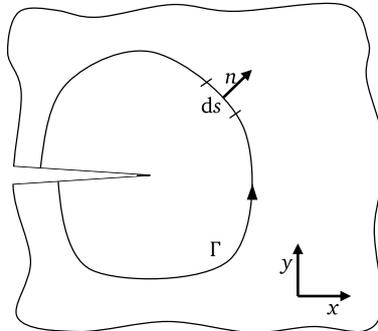


Abbildung 2.6: Definition des Linienintegrals entlang der Kontur  $\Gamma$  zur Berechnung des  $J$ -Integrals

Durch Gleichung 2.25 ist für das Beispiel in Abbildung 2.6 das  $J$ -Integral nach Rice gegeben. Darin ist  $\sigma_{ij}$  der Spannungstensor aus dem sich zusammen mit dem Dehnungstensor  $\varepsilon_{ij}$  die Formänderungsenergiegedichte  $W$  ergibt. Die Größe  $u_i$  ist der Verschiebungsvektor bzw. dessen Ableitung  $du_i/dx$  die Komponente des Verschiebungsgradienten in Rissausbreitungsrichtung.

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad \text{mit} \quad W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.25)$$

Eine wesentliche Eigenschaft des Linienintegrals ist die unter gewissen Voraussetzungen vorhandene Wegunabhängigkeit. Dadurch ist eine Berechnung des  $J$ -Integrals als risstreibende Kraft an der Risssspitze in einem beliebigen Abstand zu dieser möglich. Des Weiteren ist dadurch die Intensität der Beanspruchungen im Nahfeld gegeben. Neben der physikalischen Bedeutungen geht mit der Wegunabhängigkeit auch eine praktische Bedeutung einher. Denn damit kann der Integrationspfad die gesamte Struktur umschließen und geht damit in die globale Betrachtung aus Kapitel 2.4.1 über. Der Nachweis ist in Anhang A gegeben.

Die Voraussetzungen für die Wegunabhängigkeit von Gleichung 2.25 sind:

- infinitesimale Deformationen
- elastisches Materialverhalten (linear oder nichtlinear)
- proportionale Beanspruchung
- homogener Körper
- keine Volumenkräfte
- lastfreie Rissflanken
- ungekrümmte Rissflanken im Ausgangszustand

Die Voraussetzung nach infinitesimalen Deformationen ist in den meisten ingenieurtechnischen Anwendungen erfüllt. Die Forderung nach elastischem Materialverhalten ist in der Regel nur näherungsweise erfüllt. Allerdings ist die Interpretation des  $J$ -Integrals als Energiefreisetzungsrate  $G$  im Sinne von Irwin streng genommen nur in diesem Fall gültig. Eine Approximation von elastisch-plastischen Materialverhalten ist die in Kapitel 2.2.2 beschriebene Deformationstheorie. Demnach folgt das Material für eine Be- und Entlastung exakt der gleichen Spannungs-Dehnungs-Historie, wie im Fall von nichtlinear elastischem Materialverhalten. Liegt eine rein monoton steigende Beanspruchung eines stationären Risses vor, trifft diese Approximation des Materialverhaltens in vielen Fällen näherungsweise zu. Sowie ein wachsender Riss vorliegt können die Vorgänge nicht weiter durch die Deformationstheorie abgebildet werden. Die inkrementelle Plastizitätstheorie ist in diesem Fall in der Lage die Realität besser abzubilden. Eng verknüpft mit der Forderung nach elastischem Materialverhalten, um Wegunabhängigkeit zu erzielen, ist die Forderung nach einer proportionalen Beanspruchung. Diese liegt unter Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie für einen wachsenden Riss im Allgemeinen nicht vor. Die Voraussetzung bedeutet, dass an jedem Materialpunkt in einer Struktur und vor allem im Nahfeld der Rissspitze eine proportionale Beanspruchung vorliegen muss. In vielen technischen Anwendungen, in denen Metalle zum Einsatz kommen, ist diese Annahme näherungsweise erfüllt, da große plastische Deformationen über die Risssinitiation hinaus toleriert werden und lediglich kleine Rissfortschrittsinkremente vorliegen. Umso mehr von diesen Eigenschaften abgewichen wird, umso weniger ist die Annahme nach proportionaler Beanspruchung erfüllt. Wie Abbildung 2.7 schematisch zeigt, kommt es bei Risswachstum zu einer Entlastung hinter der Rissspitze. Durch die zwei entstandenen freien Oberflächen müssen sich die Spannungen im Nahfeld umverteilen, sodass ein Bereich nicht-proportionaler Beanspruchung entsteht. Diese Vorgänge können mit der inkrementellen Plastizitätstheorie, aber nicht mit der Deformationstheorie abgebildet werden. Die Interpretation des  $J$ -Integrals als risstreibende Kraft geht aufgrund der Wegabhängigkeit verloren. Dennoch existiert ein Bereich, Abbildung 2.7, dessen Beanspruchungsfeld durch das  $J$ -Integral dominiert wird.

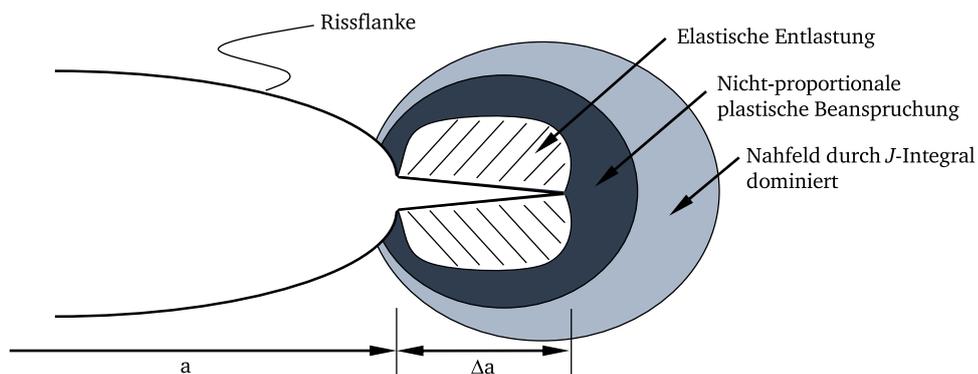


Abbildung 2.7: Lokale Felder in der Nähe der Spitze eines um  $\Delta a$  wachsenden Risses der Länge  $a$  unter statischer Beanspruchung bei elastisch-plastischem Materialverhalten

Um die weiteren Voraussetzungen für eine wegabhängige Lösung von Gleichung 2.25 zu erfüllen, finden sich in Kuna [51] Erweiterungen z.B. für belastete Rissflanken oder Erweiterungen für dreidimensionale Strukturen, auf die aber nicht weiter eingegangen wird. Auf die Wegabhängigkeit im Zusammenhang

mit der inkrementellen Plastizitätstheorie geht das folgende Kapitel näher ein. Insbesondere in Kapitel 2.7 wird dieser Aspekt erneut aufgegriffen, wenn es um die Anwendung des  $J$ -Integrals auf zyklische Beanspruchungen geht.

### 2.4.3 Herangehensweise über Konfigurationskräfte

Unabhängig vom Materialverhalten erlaubt das Konzept der Konfigurationskräfte einen alternativen Zugang zum  $J$ -Integral. Das folgende Kapitel stellt hierzu zum einen die Konfigurationskräfte als solche vor und geht zum anderen auf die Anwendung im Zusammenhang mit dem  $J$ -Integral und der physikalischen Interpretation ein.

Im Allgemeinen treten Konfigurationskräfte an Defekten auf, weil ein System aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik versucht, diese so zu bewegen, sodass die potentielle Energie des Systems sinkt. Solch ein Defekt kann z.B. ein Gitterfehler verschiedenster Dimension, wie eine Leerstelle oder eine Versetzung sein, oder wie im hier betrachteten Fall ein Riss. Eshelby [62] berechnete die Konfigurationskräfte auf Basis des sogenannten Energie-Impuls Tensors für elastische Probleme. Die ursprüngliche Idee dieser Art von Tensor geht zurück auf den Maxwell'schen Spannungstensor der Elektrostatik, der die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Kräften und mechanischem Impuls beschreibt.

Im Rahmen der Mechanik ist zwischen Newton'schen Kräften, die in der Momentankonfiguration wirken, und den materiellen Kräften oder auch Konfigurationskräften, die in der Referenzkonfiguration wirken, zu unterscheiden. Die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte gilt in beiden Konfigurationen. Nach dem direkten Ansatz von Maugin [63] folgt aus Gleichung 2.26 mit den Kräften  $\sigma_{ij,j}$  und den Volumenkräften  $b_i$  in der Momentankonfiguration Gleichung 2.27 für die Konfigurationskräfte in der Referenzkonfiguration. Die Kräfte aus Gleichung 2.26 sind hierzu mit der Transponierten des Verschiebungsgradienten zu multiplizieren.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.26)$$

$$(u_{k,i})^T \sigma_{ij,j} + (u_{k,i})^T b_i = 0 \quad (2.27)$$

Nach Umformen von Gleichung 2.27 ergibt sich das Gleichgewicht der Konfigurationskräfte, Gleichung 2.28. Weitere Details bzgl. der Umformungen finden sich z.B. in Tsakmakis und Vormwald [64].

$$C_{kj,j} + f_k^{\text{inh}} + f_k^{\text{bulk}} + f_k^{\text{p}} = 0 \quad (2.28)$$

Darin sind  $C_{kj}$  der Energie-Impuls Tensor nach Eshelby,  $f_k^{\text{inh}}$  die Konfigurationskräfte im Volumen, die durch Inhomogenitäten hervorgerufen werden,  $f_k^{\text{bulk}}$  die Konfigurationskräfte im Volumen, die durch Newton'sche Kräfte im Volumen hervorgerufen werden und  $f_k^{\text{p}}$  die Konfigurationskräfte im Volumen, die durch plastische Deformationen hervorgerufen werden.

Der Energie-Impuls Tensor  $C_{kj}$  ist durch Gleichung 2.29 gegeben und stimmt mit dem Integranden des Rice'schen Linienintegrals nach Gleichung 2.25 überein. Letzterer ist allerdings auf die Betrachtung in Richtung der Rissausbreitung  $x$  in Abbildung 2.6 beschränkt.

$$C_{kj} = W\delta_{kj} - u_{i,k}\sigma_{ij} \quad (2.29)$$

Aus der Divergenz des Energie-Impuls Tensors, erster Term in Gleichung 2.28, ergibt sich schließlich der auf einen Defekt wirkende Konfigurationskraftvektor  $f_k$ .

Um nun die Wegabhängigkeit und die physikalische Interpretation des  $J$ -Integrals im Zusammenhang mit elastisch-plastischem Materialverhalten genauer zu beleuchten, werden die in Abbildung 2.8 dargestellten Gebiete in einem homogenen Körper mit scharfem Riss definiert.

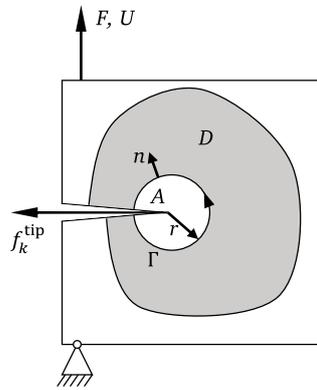


Abbildung 2.8: Definition verschiedener Gebiete um die Risspitze im Rahmen des Konzepts der Konfigurationskräfte

Das Gebiet  $A$  umfasst die Risspitze, an der die Konfigurationskraft  $f_k^{\text{tip}}$  vorliegt und wird von der Kontur  $\Gamma$  umgeben. Das Gebiet  $D$  umfasst das Volumen um das Risspitzengebiet  $A$ , enthält dieses aber nicht. Unter Vernachlässigung von Konfigurationskräften die durch Inhomogenitäten oder durch Newton'sche Kräfte im Volumen hervorgerufen werden ergibt sich aus Gleichung 2.28 die folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$C_{kj,j} + f_k^{\text{p}} = 0 \quad (2.30)$$

Im Fall von elastischem Materialverhalten treten keine zusätzlichen Konfigurationskräfte durch plastische Deformationen  $f_k^{\text{p}}$  auf, sodass folgendes Gleichgewicht im Risspitzengebiet  $A$  gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} C_{kj} n_j ds + f_k^{\text{tip}} = 0 \quad (2.31)$$

Daraus folgt, dass der Betrag der Komponente des Konfigurationskraftsvektors in Rissausbreitungsrichtung

tung (Index  $k=1$ ) mit dem skalaren  $J$ -Integral nach Gleichung 2.6 und der Energiefreisetzungsrate  $G$  übereinstimmen.

$$f_1^{\text{tip}} = -J = -G \quad (2.32)$$

Im Fall von elastisch-plastischem Materialverhalten treten zusätzlich die Konfigurationskräfte  $f_k^{\text{D}}$  im Gebiet  $D$  auf, wodurch das  $J$ -Integral nach Gleichung 2.25 wegabständig wird. Zudem werden unter bestimmten Bedingungen (z.B. elastisch, ideal-plastisches Verhalten) die risstreibende Kraft und damit alle Größen in Gleichung 2.32 Null.

Eine wegunabhängige Lösung für die risstreibende Kraft in elastisch-plastischen Materialien geht aus Simha et al. [65] hervor. Ihre Lösung basiert auf der Konfigurationskraft an der Rissspitze, welche allein mit dem elastischen Anteil der Formänderungsenergiedichte  $W_{\text{el}}$  berechnet wurde. Das Vorgehen ist insofern physikalisch nachvollziehbar, dass der dissipierte plastische Anteil  $W_{\text{pl}}$  nicht für eine Risserweiterung zur Verfügung steht. Allerdings ist eine alleinige Bewegung der Rissspitze in einem elastisch-plastischen Material ohne gleichzeitige Bewegung der plastischen Zone an einer Rissspitze nicht physikalisch begründbar. Abbildung 2.9 (a) zeigt schematisch die Bedeutung einer alleinigen Risssverlängerung. In Abbildung 2.9 (b) ist hingegen die kombinierte Bewegung von Rissspitze und plastischer Zone dargestellt. Aufgrund dieser Überlegungen kommen Kolednik et al. [66] in ihren Analysen eines wachsenden Risses unter statischer Beanspruchung zu dem Schluss, dass die mit der Rissspitze mit bewegte plastische Zone oder auch aktive plastische Zone (APZ) in der Berechnung des  $J$ -Integrals als „risstreibende“ Kraft zu berücksichtigen ist.

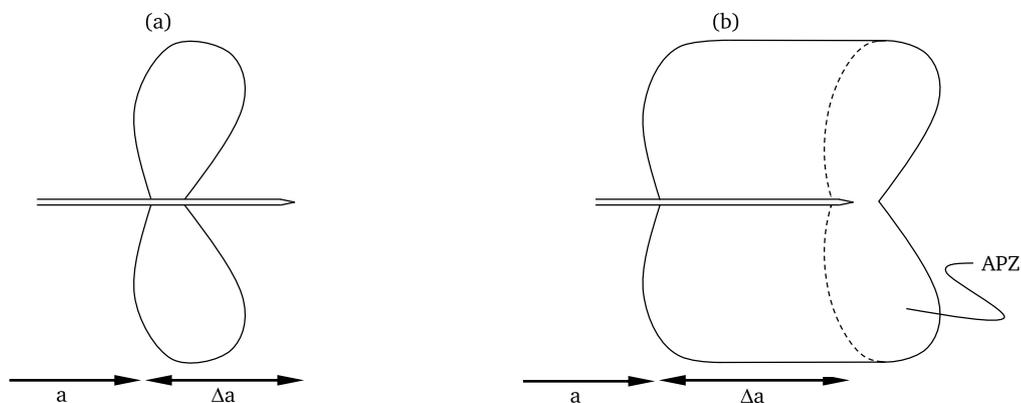


Abbildung 2.9: Risswachstum  $\Delta a$  in elastisch-plastischen Bedingungen (a) durch die alleinige Bewegung der Rissspitze und (b) durch die Bewegung der Kombination aus Rissspitze und aktiver plastischer Zone (APZ)

Das Kapitel zeigt für den Fall eines Risses unter monoton steigender bzw. statischer Beanspruchung verschiedene Möglichkeiten zur Ermittlung und physikalischen Interpretation des  $J$ -Integrals. Jede einzelne Herangehensweise unterliegt bestimmten Annahmen und Einschränkungen, die in der Anwendung zu berücksichtigen sind. Die Ermittlung anhand von globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven und deren energetische Interpretation, die auch die Grundlage für die analytischen Ansätze im Anhang B liefert, ist

---

vor allem in Anwendungen aus dem Ingenieurbereich verbreitet. Obwohl die ursprüngliche Interpretation des  $J$ -Integrals als rissstreibende Kraft oder Energiefreisetzungsrate theoretisch in elastisch-plastischen Materialien nicht exakt ist, ist die experimentelle sowie rechnerische Zugänglichkeit dieser Größe von Vorteil. Im Folgenden wird die Nutzung der in diesem Kapitel dargestellten Herangehensweisen für die Anwendung auf Risse unter zyklischer Beanspruchung beschrieben. Dabei spielen die lokalen Methoden, das Linienintegral und das Konzept der Konfigurationskräfte, eine zentrale Rolle zur Beleuchtung der physikalischen Interpretation eines zyklischen Parameters und der Konsistenz mit globalen Ansätzen.

Das durch Kapitel 1 beschriebene Anwendungsszenario macht den Bedarf einer Beschreibung von Risswachstum unter zyklischer Beanspruchung deutlich. Daher steht dies auch im Fokus der vorliegenden Dissertation. Die folgenden Kapitel 2.5, 2.6 und 2.7 geben einen Überblick über die bereits vorhandenen Konzepte, die auf den Vorgehensweisen unter monoton steigender Beanspruchung basieren. Im Wesentlichen geht es um die Ermittlung eines Parameters wie dem  $J$ -Integral, welcher zur Berechnung von Rissfortschrittsraten geeignet ist. Das Kapitel 2.5 geht zunächst auf das generelle Prinzip der Beschreibung von Ermüdungsrisswachstum ein und Kapitel 2.6 beleuchtet anschließend den Aspekt des Riss-schließens, welcher für eine einheitliche Beschreibung relevant ist. Die Ermittlung eines zyklischen  $J$ -Integrals auf Basis von globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven, dem Linienintegral und dem Konzept der Konfigurationskräfte beschreibt Kapitel 2.7 und geht dabei auf mögliche physikalische Interpretationen ein.

## 2.5 Anwendung der Bruchmechanik zur Beschreibung von Ermüdungsrisswachstum

Die Anwendung der Modelle für Bruchvorgänge auf zyklisch beanspruchte Risse setzt voraus, dass das Nahfeld um die Risspitze, wie im zuvor beschriebenen Fall einer monoton steigenden Beanspruchung, vollständig durch einen Parameter wie z.B. den Spannungsintensitätsfaktor beschrieben werden kann, Ritchie und Suresh [67]. Dabei wird implizit das Ähnlichkeitsprinzip, also identische Beanspruchungsfelder und plastische Zonen für gleiche Werte von  $K$  trotz unterschiedlicher Risstiefen vorausgesetzt. Demzufolge ist dann mit einer gleichen Rissverlängerung  $da$  zu rechnen. Ausgehend von dieser Idee wurde ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K$ , Gleichung 2.33, und der mittleren Rissverlängerung pro Zyklus  $da/dN$  hergestellt.

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} \quad (2.33)$$

Paris et al. [68] und Paris und Erdogan [69] stellten Anfang der 60er Jahre erstmals eine solche semiempirische Korrelation in Form von Gleichung 2.34 her. Der Zusammenhang wird seitdem auch als Paris Gesetz bezeichnet. Es handelt sich dabei um einen Potenzansatz mit den Parametern  $C$  und  $m$ . Diese sind im Wesentlichen vom Werkstoff sowie der Temperatur abhängig.

$$da/dN = C \Delta K^m \quad (2.34)$$

---

Dem Ähnlichkeitsprinzip liegen die Annahmen des SSY zu Grunde. Falls die Bedingungen des LSY vorliegen, die Risstiefe in der Größenordnung von mikrostrukturellen Längen ist oder der Rissfortschritt durch die Umgebungsbedingungen beeinflusst wird, um nur ein paar wenige Einflussfaktoren zu nennen, weicht die Betrachtung im Allgemeinen von diesem Prinzip ab. Ein weiterer wesentlicher Faktor der zu Abweichungen führt und welcher ein zentraler Bestandteil der vorliegenden Dissertation ist, ist der Mechanismus des Risssschließens. Es existieren zahlreiche Ansätze, um die erwähnten Einflussfaktoren im Paris Gesetz nach Gleichung 2.34 zu berücksichtigen.

Im Zusammenhang mit relevanten plastischen Deformationen nahe der Risssspitze geht die physikalische Bedeutung des zyklischen  $K$ -Faktors als Energiefreisetzungsrates verloren. Des Weiteren lässt sich das Nahfeld um die Risssspitze, Kapitel 2.4, für einen Riss unter monoton steigender Beanspruchung im Allgemeinen nicht mehr durch den Spannungsintensitätsfaktor beschreiben. Innerhalb der plastischen Zone kann das Nahfeld unter Annahme der Deformationstheorie über das  $J$ -Integral und die HRR-Feldgleichungen, Gleichung 2.20 und 2.21, im stationären Fall beschrieben werden. Daher ist es naheliegend, dass dieser Parameter in Analogie zum zyklischen Spannungsintensitätsfaktor prinzipiell auch für die Beschreibung des Nahfelds unter zyklischer Beanspruchung in Frage kommt. Im Folgenden geht Kapitel 2.7 ausführlich auf den Stand der Technik diesbezüglich ein. In diesem Zusammenhang spielt der Einfluss von Risssschließeffekten eine zentrale Rolle, weshalb das folgende Kapitel vorab auf das Phänomen als auch auf dessen Modellierung eingeht.

## 2.6 Risssschließphänomen

Im Allgemeinen ist der Mechanismus des Risssschließens dadurch gekennzeichnet, dass die Rissflanken während einer zyklischen Beanspruchung des Risses in Kontakt treten. Dadurch kommt es zu einer Beeinflussung der Beanspruchung im Nahfeld der Risssspitze und daraus resultierend zu einer Abweichung von der Korrelation der gemessenen Rissfortschritttrate und dem berechneten Intensitätsparameter. Suresh gab in [70] einen Überblick über verschiedene beobachtete Risssschließmechanismen. Diese sind

- das plastizitäts-induzierte Risssschließen,
- das oxidations-induzierte Risssschließen,
- das rauigkeits-induzierte Risssschließen,
- das flüssigkeits-induzierte Risssschließen,
- und das phasenumwandlungs-induzierte Risssschließen.

Alle diese Mechanismen eint, dass sie die Beanspruchung im Nahfeld einer Risssspitze durch den Kontakt der Rissflanken beeinflussen. Insbesondere das plastizitäts-induzierte Risssschließen, oder auch englisch *plasticity-induced crack closure (PICC)*, ist im Fall von zyklischer Beanspruchung von Werkstoffen, die elastisch-plastisches Verhalten aufweisen, von Bedeutung. Daher ist es auch von besonderem Interesse im Rahmen dieser Dissertation. Der Mechanismus des oxidations-induzierten Risssschließens kommt insbesondere bei Werkstoffen zum Tragen, die eine geringere Beständigkeit gegenüber Oxidation aufweisen. Zudem besteht eine Abhängigkeit vom Umgebungsmedium und dessen Temperatur, welche die Oxidationskinetik

---

beeinflussen. Das rauigkeits-induzierte Risssschließen ist vor allem durch die Mikrostruktur beeinflusst und wirkt sich daher nur in bestimmten Fällen aus. Neben diesen müssen auch für die beiden letztgenannten Risssschließmechanismen, flüssigkeits- und phasenumwandlungs-induziertes Risssschließen, spezifische Bedingungen erfüllt sein, damit diese sich auf das Risswachstum auswirken. Im Folgenden findet daher ausschließlich eine nähere Beschreibung von PICC mit dem Fokus auf dessen Berücksichtigung in Modellen statt. Falls nicht anders angegeben bezieht sich der Begriff Risssschließen im Folgenden allein auf diesen Mechanismus.

Der Effekt des PICC lässt sich wie folgt zusammenfassen: Ein wachsender Riss lässt hinter seiner Risspitze plastisch deformiertes Material in Form einer plastischen Nachlaufzone zurück. Dies kann anschließend dazu führen, dass abhängig vom Lastverhältnis die Rissflanken vor Erreichen der Minimallast in Kontakt treten. Elber [71] beobachtete in seinen Experimenten bereits 1970, dass sich die Steifigkeit von rissbehafteten Proben unter zyklischer Zugbeanspruchung innerhalb eines Zyklus änderte und konnte dies auf den Effekt des PICC zurückführen. Anschließend folgten zahlreiche experimentelle Untersuchungen, die dieses Phänomen genauer beleuchteten.

### 2.6.1 Experimentelle Ermittlung von Risssschließen

Von der Entdeckung Elbers [71] an fokussierten sich zahlreiche Wissenschaftler zunächst auf die Möglichkeiten der experimentellen Ermittlung des PICC. Viele der in diesem Zusammenhang verfügbaren Veröffentlichungen über verschiedene Messtechniken sind in [72] zusammengefasst. Zum Stand der Technik gehören heute Methoden, die auf der Auswertung von Steifigkeitsänderungen, Änderungen in einem Potentialsignal [73, 74] oder optischen Beobachtungen [72, 75, 76] basieren.

Ersteres Prinzip wurde bereits von Elber [71] eingesetzt und ist bis heute vermutlich eine der am weitesten verbreiteten Methoden. Daher beschreibt der folgende Abschnitt das Vorgehen etwas ausführlicher. Nähere Informationen zu den anderen Messprinzipien sind den angegebenen Quellen zu entnehmen. Die Steifigkeit der rissbehafteten Struktur wird demzufolge anhand der gemessenen Kräfte und Verschiebungen während eines Zyklus ausgewertet. Durch einen sich öffnenden Riss ändert sich die Steifigkeit einer Struktur von einem Initialwert zu einem geringeren Wert. Demgegenüber steigt sie an, wenn sich ein Riss schließt. Die Methode erlaubt die Erfassung eines näherungsweise diskreten Zeitpunkts im Zyklus, zu dem der Riss öffnet und schließt. Es ist wichtig festzuhalten, dass PICC vielmehr ein kontinuierlicher Prozess ist. Die Rissflanken treten nicht an jedem Ort zum gleichen Zeitpunkt in Kontakt bzw. lösen diesen auf. Dennoch wurden Näherungsmethoden entwickelt, um eine einheitliche Auswertung und damit eine Vergleichbarkeit von Ergebnissen zu ermöglichen, z.B. ASTM 647 [77]. Des Weiteren liegt im Zusammenhang mit der Kraft-Verschiebungs-Kurve der Ort der Verschiebungsmessung in der Regel in gewisser Entfernung zum Riss. Die Ergebnisse stellen daher lediglich eine grobe globale Abschätzung des Risssschließverhaltens dar. Um die lokale Auflösung der Verschiebung zu erhöhen, verwendeten Shi und Wei [78] mehrere Extensometer entlang des Risspfades. Vormwald [79] untersuchte das Risssschließverhalten von kurzen Rissen mit einer ähnlichen Vorgehensweise lokaler Dehnungsmessung. Er applizierte zusätzlich zu einem Seitenextensometer nach Auftreten eines Anrisses in dessen Nähe einen Dehnmessstreifen. Somit konnten auftretende Steifigkeitsänderungen in Form von Knicken in der lokalen Kraft-Verschiebungs-Hysterese detektiert werden, obwohl das globale Extensometer keine Änderungen anzeigte. Er konnte des Weiteren

---

beobachten, dass ein Riss näherungsweise bei gleicher globaler Dehnung öffnet und schließt. Dieser Aspekt wird im Zusammenhang mit den Nahfeldern in Kapitel 5.3 noch einmal aufgegriffen.

Basierend auf unterschiedlichen untersuchten Werkstoffen und Beanspruchungsbedingungen wurden zahlreiche empirische Rissschließbeziehungen aufgestellt, z.B. [80], auf die im Rahmen der Dissertation nicht weiter eingegangen wird. Über die experimentelle Ermittlung hinaus wurden unterschiedliche Modelle für PICC entwickelt, um den Einfluss auf einen Intensitätsparameters für die Beanspruchung nahe der Rissspitze zu ermitteln.

### 2.6.2 Modellierung mittels Fließstreifen

Der Modellierungsansatz mittels Fließstreifen basiert auf einer vereinfachten mathematischen Abbildung der plastischen Zone um eine Rissspitze. In diesem Zusammenhang existieren verschiedene Ansätze durch z.B. Irwin [44] oder Barenblatt [81]. Das Fließstreifenmodell von Dugdale [45] erlangte allerdings eine größere Aufmerksamkeit und wurde genutzt, um die sich ausbildende plastische Nachlaufzone zu modellieren. Newman [82, 83] modifizierte das Dugdale-Modell, indem er die plastische Zone, bisher als einzelnen Fließstreifen, in mehrere kleinere Fließstreifen unterteilte. Somit konnte abhängig vom Ort eine Trennung des Materials zugelassen werden. Das Materialverhalten in der Struktur wurde als linear elastisch und in den Fließstreifen als ideal-plastisch angenommen. Mit Hilfe des modifizierten Fließstreifenmodells konnte Newman die Rissöffnungsspannung berechnen. Sie ergibt sich aus der minimalen Beanspruchung innerhalb eines Zyklus und der Summe der Kontaktspannungen jedes einzelnen Fließstreifens. Er untersuchte die Abhängigkeit der Rissöffnungsspannung vom Lastverhältnis  $R$ , dem Beanspruchungsniveau  $S_R$  und einem „Constraint“ Parameter  $\alpha$  zur näherungsweisen Berücksichtigung eines Geometrieinflusses. Eine aus diesen Ergebnissen abgeleitete analytische Gleichung zur Berechnung der Rissöffnungsspannung in Abhängigkeit von den genannten Parametern findet sich in Newman [84] oder auch im bruchmechanischen Festigkeitsnachweis der FKM Richtlinie [43]. Vormwald zeigte in [79, 85] die näherungsweise Übereinstimmung seiner experimentellen Beobachtungen mit der Rissöffnungsspannung nach Newman. Daraufhin setzte er die analytische Beschreibung zur Berechnung von Anrisswechselzahlen unter zyklischer Beanspruchung mit variabler Amplitude ein.

Die ursprüngliche Entwicklung dieser Rissschließbeziehung zielte auf eine treffendere Beschreibung von Ermüdungsrissfortschrittsraten in Raumtemperaturanwendungen ab. Dennoch wurde das Modell darüber hinaus auch für andere Lastfälle genutzt und weiterentwickelt. Eine wesentliche Modifikation geht mit der Abhängigkeit der Rissöffnungsspannung von der Beanspruchungshöhe  $S_R$  einher. McClung [86] ermöglichte dadurch den Einfluss der Geometrie und das damit verbundene transiente Rissschließverhalten zu berücksichtigen. Eine Anwendung dieser Idee auf die Beschreibung des Kurzrischwachstums in gekerbten Strukturen unter niederzyklischer Beanspruchung bei hohen Temperaturen findet sich in Garnadt et al. [87]. Fischer et al. [88] und Almroth et al. [89] erweiterten den Ansatz von Newman durch eine temperaturabhängige Fließspannung, um Rissschließen für den Fall einer thermo-mechanischen Beanspruchung zu bestimmen.

Zusammenfassend ist die experimentelle Ermittlung von Rissschließen eine Möglichkeit, um den Effekt für die jeweils geltenden Rahmenbedingungen zu quantifizieren. Es stellt sich in diesem Zusammenhang

---

allerdings grundsätzlich die Frage nach der Übertragbarkeit auf andere Werkstoffe und Beanspruchungsbedingungen, sodass der Aufwand der Ermittlung für jeden dieser Einzelfälle vergleichsweise groß ist. Aus dem Zwecke der Validierung von Modellen führt aus Sicht des Autors kein Weg an Experimenten vorbei. Die analytischen Ansätze basierend auf dem Fließstreifenmodell unterliegen ebenfalls einigen Annahmen und Einschränkungen. Dennoch konnte insbesondere der Ansatz von Newman in der Vergangenheit erfolgreich für zusätzliche Anwendungsfälle weiterentwickelt werden. Um die größtmögliche Flexibilität hinsichtlich der Rahmenbedingungen für eine Modellierung zu erhalten, geht das folgende Kapitel auf die Nutzung der FEM zur Simulation von Risssschließen ein.

### 2.6.3 Simulation von Risssschließen auf Basis der FEM

Mit Hilfe der FEM ist die Simulation eines Risses in einer beliebigen Struktur, in einem beliebigen Werkstoff und in beliebigen Beanspruchungssituationen möglich. Daher sind die Ergebnisse aus einer Simulation zyklischer Beanspruchung und elastisch-plastischen Materialverhaltes für die Bewertung von Risssschließeffekten nutzbar. Die Modellierung sowie damit einhergehende Einflussfaktoren stellt das folgende Kapitel für den im Rahmen der Dissertation betrachteten Effekt des PICC dar.

Die Grundlage für die Auswertung von PICC auf Basis der FEM stellt die Simulation eines wachsenden Risses mit einer sich ausbildenden plastischen Nachlaufzone dar. Um die bewegte Risssspitze im Modell abzubilden, können zuvor eingebrachte Randbedingungen entlang des a priori bekannten Risspfades gelöst werden, was auch als node release technique bekannt ist, [90–92]. Damit sich die Rissflanken aufgrund der zyklischen Beanspruchung nicht überschneiden und Druckspannungen entstehen können, sind entsprechende Kontaktbedingungen entlang der Elementkanten zu formulieren, siehe hierzu z.B. [93–95]. Weitere Möglichkeiten zur Realisierung eines wachsenden Risses in der FEM sind z.B. der Einsatz von Balken- oder Kohäsivzonenelementen, die Extended Finite Element Method (XFEM) oder die Virtual Crack Closure Technique (VCCT). Eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Ansätze findet sich z.B. in Kuna [51]. Zur expliziten Analyse von PICC im Zusammenhang mit Rissen, deren Pfade bereits vorher bekannt sind, ist die node release technique ausreichend. Damit sich entlang der Rissflanken eine plastische Nachlaufzone ausbilden kann, sind insbesondere die Informationen bezüglich der plastischen Deformationen von einem Rissfortschrittsinkrement zum nächsten beizubehalten. Daher bleibt die Vernetzung im Modell von der Anfangs- bis zur Endrisstiefe identisch. Im Zusammenhang mit einer mitbewegten Risssspitzenvernetzung besteht die Möglichkeit der Übertragung der Informationen zwischen den verschiedenen Vernetzungen, auch als Mapping-Verfahren bezeichnet, Abaqus [96] oder auch z.B. Zerres [97].

Wie Kapitel 2.1 zeigt, basiert Ermüdungsrisswachstum auf einem diskontinuierlichen Prozess. D.h. für eine Rissverlängerung des Inkrements  $\Delta a$  vergeht eine gewisse Anzahl an Zyklen. In der Modellierung können die resultierenden realen Rissfortschrittsraten dargestellt werden, was allerdings mit einem relativ hohen Aufwand hinsichtlich der Vernetzung und Rechenzeit einhergeht. Daher nähern z.B. [4, 90, 95, 98, 99] den Vorgang des Risswachstums in ihren Modellen an und gehen vielmehr der Frage nach der minimal notwendigen Anzahl zu simulierender Zyklen nach, um eine konvergierende Lösung zu erhalten. Nach Antunes und Rodrigues [98] führt die Simulation von Risssschließen mit nur einem Zyklus zwischen den Rissfortschrittsinkrementen zu keiner zuverlässigen Lösung. Hingegen kamen sie und weitere Autoren [4, 90, 95, 99] zu dem Ergebnis, dass sich ab dem zweiten simulierten Zyklus kaum eine Änderung ergibt.

---

Des Weiteren bedarf das Modell der Vorgabe eines Zeitpunkts im Zyklus, an dem die nächste Randbedingung des vor der Rissspitze liegenden Knotens zu lösen ist. Dieser ist in der Realität nicht exakt bekannt, sodass nur angenommen werden kann, dass die Rissverlängerung während der Belastung stattfindet. In den Untersuchungen [93, 100–103] wurde daher der Zeitpunkt des Auftretens der Maximallast gewählt. Durch den damit einhergehenden Wegfall einer kinematischen Randbedingung sind in der Simulation zusätzliche Iterationen notwendig, um eine Stabilisierung der Simulation herbeizuführen. Die Untersuchungen in [90, 104, 105] zeigten, dass sich hinsichtlich des Risschließens kein Unterschied im Vergleich zum Lösen der Randbedingung zum Zeitpunkt der Minimallast einstellt. Anwendungen dieses Zeitpunktes finden sich u.a. auch in [4, 94, 95, 98, 106]. Der damit einhergehende Vorteil ist, dass insbesondere im Fall einer wechselnden Zug-Druck Beanspruchung die kurzzeitig auftretende Instabilität unmittelbar nach Lösen der Randbedingung durch die vorhandene Kontaktformulierung kompensiert werden kann.

Die Diskretisierung des Problems mittels finiter Elemente ist zum einen das Wesen der Simulationen, zum anderen gehen damit aber mögliche Fehlerquellen in Bezug zur Simulation von Risschließen einher. Hinsichtlich des Elementtyps ist zu vermeiden, dass aufgrund geringer Ordnung der Elementansatzfunktion eine nicht vorhandene Erhöhung der Elementsteifigkeit in risspitzennahen Bereiche aufgrund großer Deformationen auftritt, [107, 108]. Elementansatzfunktionen höherer Ordnung führen vor dem Hintergrund der Kontaktformulierung und dem Lösen von Randbedingungen im Rahmen von Risschließsimulationen nach Dougherty et al. [101] ebenfalls zu unrealistischen Ergebnissen. Durch Reduktion der Anzahl an Integrationspunkten in Elementen mit Ansatzfunktionen erster Ordnung ist zwar eine Einflussnahme auf die Elementsteifigkeit möglich, allerdings kann dies zu einem unrealistischen Sägezahnmuster entlang der Rissflanke führen. Daher schlugen Dougherty et al. [101] für den Einsatz von vollintegrierten Elementen mit Ansatzfunktionen erster Ordnung vor, entlang des Risspfades ein Verhältnis der Elementkantenlängen von zwei (senkrecht zur Rissausbreitungsrichtung) zu eins (in Richtung der Rissausbreitung) zu verwenden. U.a. folgten Andersson et al. [73] und Kontermann [4] dieser Empfehlung und konnten eine realitätsnahe Modellierung der Rissflanke ohne signifikante numerische Artefakte bestätigen.

Des Weiteren geht mit der Diskretisierung ein Einfluss der Elementgröße auf das berechnete Risschließverhalten einher. Im Allgemeinen sind für verlässliche Ergebnisse im Rahmen der FEM immer Konvergenzstudien durchzuführen. Allerdings steht die Elementgröße in Risschließsimulationen in einem engen Zusammenhang mit dem verwendeten Materialmodell. Um PICC bzw. eine plastische Nachlaufzone hinter der Risspitze des wachsenden Risses in der Simulation abzubilden, ist der Einsatz von Materialmodellen basierend auf der inkrementellen Plastizitätstheorie nötig. Durch die hohen Beanspruchungen in der Nähe der Risspitze und der gleichzeitigen zyklischen Beanspruchung kann es aufgrund des Materialmodells zu lokalem Ratcheting kommen. Cochran et al. [103] untersuchten den Einfluss von verschiedenen Verfestigungsansätzen auf Risschließen. Ihre Untersuchungen zeigten, dass die in früheren Untersuchungen beobachteten Kuriositäten hinsichtlich des Einflusses der Elementgröße und damit verbunden auch der Anzahl an simulierten Zyklen bis zu einer bestimmten Risstiefe durch unrealistisch hohe Anteile lokalen Ratchetings begründet waren. Eine Empfehlung aus Cochran et al. [103] und Cochran [109] ist daher der Einsatz von Materialmodellen mit linearer kinematischer Verfestigung und nicht zu geringen „moderaten“ Verfestigungsmodulen. In den Arbeiten von z.B. Kontermann et al. [1, 4, 6] oder Garnadt et al. [2, 3, 5, 87] wurde der Empfehlung gefolgt und für verschiedene warmfeste Stähle eine experimentell validierte Simulation von Risschließen durchgeführt.

Schließlich ist im Anschluss an die Simulation von Risssschließen auf Basis der FEM eine Auswertung der Rissöffnungs- und -schließzeitpunkte möglich, sodass damit ein Effektivwert eines Intensitätsparameters berechnet werden kann. Wie schon erwähnt stellt die Festlegung eines diskreten Öffnungs- und Schließzeitpunkts eine Vereinfachung des in der Realität kontinuierlich ablaufenden Prozesses dar. Um das Phänomen dennoch handhabbar zu machen, können mit geeigneten Kriterien solche diskreten Zeitpunkte im Zyklus auf Basis der Simulationen definiert werden. Allerdings geht damit ein weiterer Einflussfaktor einher, welcher in Untersuchungen des Risssschließens zwangsläufig zu berücksichtigen ist. Die folgenden drei Kriterien stellen einen Auszug der in der Literatur [73, 91, 93, 94, 98, 100, 103, 106, 110–112] dokumentierten Definitionen dar:

- *1stBack*
- *Front*
- *CC-Force*

Abbildung 2.10 veranschaulicht die drei Definitionen. Das erste Kriterium *1stBack* basiert auf der Verschiebung des ersten Knotens hinter der Rissspitze in Belastungsrichtung. Sobald dieser Knoten die Symmetrieebene verlässt, ändert sich nach dieser Definition der Zustand des Risses von geschlossen zu geöffnet. Das gleiche Prinzip trifft auf die Definition *Front* zu, wobei die Verschiebung des Knotens am Rissursprung an der Probenoberfläche betrachtet wird. Das dritte Kriterium *CC-Force* basiert auf dem Prinzip des Kräftegleichgewichts. Die Reaktionskräfte in Belastungsrichtung entlang des Ligaments werden hierzu summiert. Sobald die Differenz zwischen der aufgebrachtten Kraft am Lastangriffspunkt und der summierten Reaktionskräfte Null ergibt bzw. erstmals von Null abweicht, ändert sich der Zustand des Risses. Alle drei Kriterien sind in gleicher Art und Weise auf den absteigenden Hysteresehalbast anwendbar. Eine Zusammenfassung und Analyse dieser und weiterer Risssschließkriterien findet sich u.a. in Kontermann [4]. Er ging darüber hinaus explizit auf das Defizit der Abhängigkeit vom gewählten Kriterium ein und schlug ein energiebasiertes Kriterium auf Basis einer globalen Energiebetrachtung vor. Auf dieses Kriterium geht Kapitel 5 im Zusammenhang mit dem zyklischen effektiven  $J$ -Integral implizit ein.

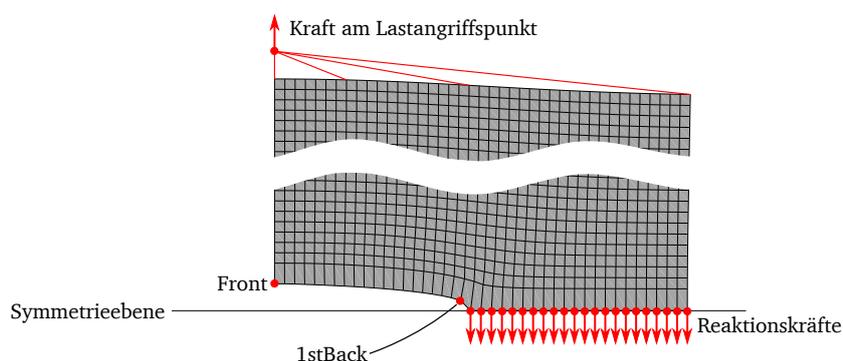


Abbildung 2.10: Definition der Knoten zur Auswertung der verschiebungsbasierten Risssschließkriterien *1stBack* und *Front*, sowie der Kräfte zur Auswertung des kraftbasierten Risssschließkriteriums *CC-Force*

## 2.7 Ermittlung des zyklischen $J$ -Integrals und dessen Interpretationen

Analog zum bereits eingeführten  $J$ -Integral für monoton steigende Beanspruchungen beschreibt dieses Kapitel die lokalen Ansätze und globale Herangehensweise für zyklische Beanspruchungen. Die Entwicklung eines zyklischen Beanspruchungsparameters an der Rissspitze bzw. im Nahfeld der Rissspitze ist wie im vorherigen Fall durch das Vorhandensein von Plastizität motiviert. In der Betrachtung des zyklischen Beanspruchungsfeldes nahe der Rissspitze kann die plastische Zone im Allgemeinen nicht mehr vernachlässigt werden. Neben der Ermittlung geht das Kapitel auch auf mögliche physikalische Interpretationen des Parameters ein. Das Kapitel gliedert sich in die unterschiedlichen zum Stand der Technik gehörenden Berechnungsmethoden. Dabei geht es aufbauend auf den Ergebnissen aus Kapitel 2.4 auf die Ermittlung des Beanspruchungsparameters mittels globaler Kraft-Verschiebungs-Kurven, die Beschreibung über ein Linienintegral sowie das Konzept der Konfigurationskräfte ein. Im Anhang C finden sich darüber hinaus analytische Berechnungsansätze.

### 2.7.1 Herangehensweise über globale Kraft-Verschiebungs-Kurven

Dowling und Begley [113] berechneten ähnlich zu Rice et al. [114] und dem in Kapitel 2.4.1 beschriebenen Verfahren unter monoton steigender Beanspruchung erstmals ein zyklisches  $J$ -Integral auf Basis global gemessener Kraft-Verschiebungs-Kurven. Die Grundlage für die Berechnung der Energie für verschiedene Risstiefen in ihren Untersuchungen an CT-Proben war die in Abbildung 2.11 dargestellte Fläche unterhalb des aufsteigenden Halbastes der Kraft-Verschiebungs-Hysterese. Während ihrer experimentellen Untersuchungen beobachteten sie das Phänomen des Risschließens aufgrund eines Knicks im absteigenden Hysteresehalbast. Sie trafen daraufhin die Annahme, dass der Teil des Zyklus in dem der Riss geschlossen ist, keinen Anteil am zyklischen  $J$ -Integral besitzt. Es wurde daher nur die Fläche unter der Kraft-Verschiebungs-Kurve ab dem Rissöffnungszeitpunkt, wie in Abbildung 2.11 zu sehen, integriert. Dieser Zeitpunkt wurde über den beobachteten Knick bestimmt. Dowling und Begley war bewusst, dass dies nur eine grobe Abschätzung des Risschließens darstellte.

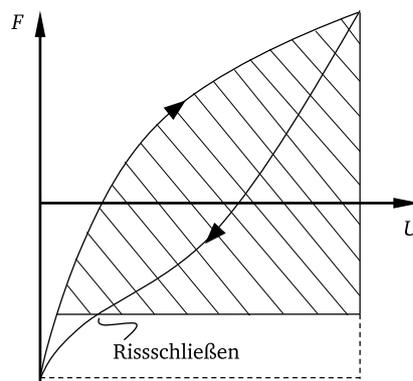


Abbildung 2.11: Berücksichtigte Fläche unter dem aufsteigenden Hysteresehalbast zur Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals nach Dowling und Begley [113]

---

Auf Grundlage dessen konnten Dowling und Begley eine Korrelation zwischen der gemessenen Ermüdungsrissfortschrittsrate  $da/dN$  und dem zyklischen  $J$ -Integral analog zum Paris Gesetz nach Gleichung 2.34 für näherungsweise elastisches Materialverhalten feststellen. Darüber hinaus fielen die Ergebnisse aus den Versuchen mit höherer Last und damit nicht zu vernachlässigenden Anteilen an Plastizität mit den Ergebnissen unter niedrigerer Last und damit näherungsweise elastischem Verhalten zusammen.

Die Untersuchungen von Dowling und Begley [113] waren zunächst auf die Geometrie einer CT-Probe und einen Druckbehälterstahl beschränkt. Mittels weiterer experimenteller Arbeiten an Mittenrissproben konnte Dowling [115] wiederum für verschiedene Beanspruchungsniveaus die Korrelation des zyklischen  $J$ -Integrals mit der Rissfortschrittsrate bestätigen. Daraufhin kam er zu dem Schluss, dass das zyklische  $J$ -Integral einen geometrie- und größenunabhängigen Parameter darstellen musste. Es folgten zahlreiche weitere Analysen dieser Art für verschiedene Probengeometrien, Lastniveaus, -verhältnisse und Werkstoffe, wie z.B. in [116–120]. Die Autoren konnten die von Dowling und Begley gefundene Korrelation bestätigen, merkten jedoch die fehlende physikalische Begründung dafür an.

Mit dem Aufkommen von leistungsfähigeren Computern und der Entwicklung der FEM konnte die Ermittlung des zyklischen  $J$ -Integrals über die globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven auch rein rechnerisch erfolgen. Banks-Sills und Volpert [121] führten u.a. vergleichende Untersuchungen der Auswertung anhand von experimentell ermittelten, sowie simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven durch. Die Grundlage dafür waren CT-Proben aus Aluminium die bei Raumtemperatur und positiven  $R$ -Verhältnissen untersucht wurden. Zudem setzten sie das Linienintegral von Rice, Gleichung 2.25, zur Ermittlung des zyklischen  $J$ -Integrals ein, um die Bedeutung des Parameters besser zu verstehen. Auf diese Analysen geht das folgende Kapitel 2.7.2 näher ein.

Die Betrachtung der globalen Energiedifferenz zwischen zwei Konfigurationen mit benachbarten Risstiefen auf Basis von Simulationsergebnissen diente Kontermann [4] zur Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals. In seinem Anwendungsfall analysierte er kurze Risse im Bereich von Kerben unter Kriechermüdungsbeanspruchung und überwiegend negativen  $R$ -Verhältnissen. Dabei berücksichtigte er in seinen Simulationen das transiente Riss-schließverhalten aufgrund des durch die Kerbe hervorgerufen Beanspruchungsgradienten und konnte für verschiedene Kerb- und Probengeometrien, sowie für verschiedene Lastniveaus und -verhältnisse eine einheitliche Korrelation des berechneten zyklischen effektiven  $J$ -Integrals und der gemessenen Rissfortschrittsrate beobachten. Zahlreiche Ergebnisse auf Basis dieses Ansatzes finden sich z.B. in Kontermann et al. [1, 4, 6] oder Garnadt et al. [2, 3, 5, 87]. Neben PICC erlaubt der Simulationsansatz auch die Berücksichtigung von oxidations-induziertem Riss-schließen, was in Garnadt und Kontermann [3] demonstriert und validiert werden konnte. Das prinzipielle Vorgehen des globalen Ansatzes von Kontermann [4] wird im Folgenden näher beschrieben. Es bildet ebenfalls die Grundlage für die durchgeführten Untersuchungen im Rahmen dieser Dissertation.

Abbildung 2.12 zeigt exemplarisch die globale Kraft-Verschiebungs-Hysterese (b) aus der Simulation einer zyklisch beanspruchten gekerbten Rundprobe als Beispiel (a). Das  $R$ -Verhältnis der am globalen Lastangriffspunkt aufgebrachten Kraft bzw. Verschiebung beträgt in diesem Beispiel -1. Daher treten zwangsläufig Riss-schließeffekte auf, die in der Simulation abgebildet werden. Die Details zur Simulation des fortschreitenden Risses und der Berücksichtigung von PICC sind in Kapitel 2.6.3 beschrieben. Mit den vorhandenen Ergebnissen ist eine Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals möglich. Um eine

Lastumkehr und damit eine Verletzung der Voraussetzung einer monoton steigenden Beanspruchung respektive einer proportionalen Beanspruchung zu umgehen, werden der aufsteigende und absteigende Hysteresehalbast getrennt voneinander betrachtet. Die globalen Kräfte und Verschiebungen werden für den aufsteigenden Hysteresehalbast auf den unteren Umkehrpunkt referenziert und bis zum oberen Umkehrpunkt betrachtet. Umgekehrt findet ein Referenzieren der globalen Kräfte und Verschiebungen auf den oberen Umkehrpunkt für die Auswertung des absteigenden Hysteresehalbast bis zum unteren Umkehrpunkt statt. Die referenzierten Größen sind in Abbildung 2.12 und im Folgenden mit einem  $\Delta$  gekennzeichnet. Um nun das zyklische effektive  $J$ -Integral zu ermitteln, wird die Differenz der Energie  $\Delta\Pi$  zwischen zwei benachbarten Risstiefen  $a$  und  $a + \Delta a$ , siehe Abbildung 2.12 (c), berechnet und auf die frei gewordene Oberfläche  $\Delta a$ , Gleichung 2.35, bezogen.

$$\Delta J = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta a} \quad (2.35)$$

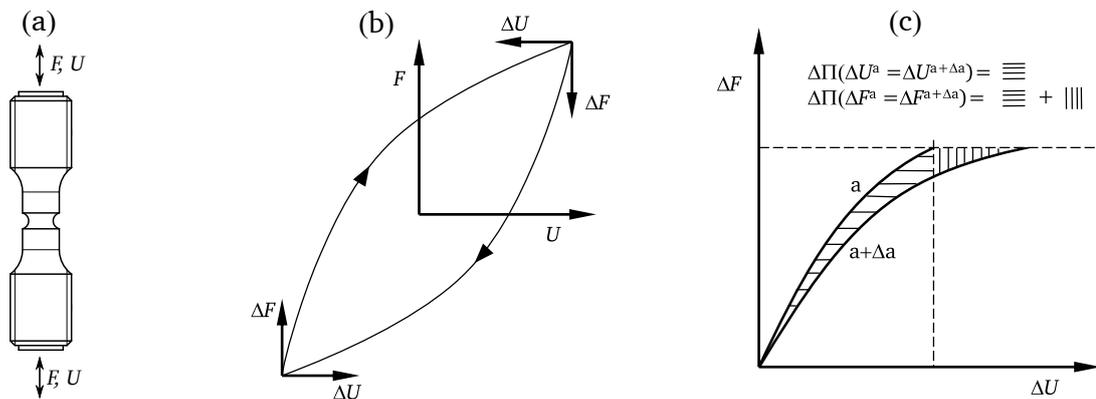


Abbildung 2.12: Globaler Ansatz zur Ermittlung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals, (a) Beispiel einer Struktur mit Riss und Position des globalen Lastangriffspunkts, (b) Referenzieren der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven auf den oberen und unteren Lastumkehrpunkt, (c) Berechnung der Energiedifferenz für zwei benachbarte Risstiefen bei gleicher Verschiebungs- bzw. Kraftvorgabe

Am Ende des aufsteigenden Hysteresehalbast liegt näherungsweise bereits der Effektivwert des zyklischen  $J$ -Integrals vor, da die Energiedifferenz für den geschlossenen Riss zu Beginn Null ist. Im absteigenden Hysteresehalbast wird nur die Energiedifferenz bis zum Riss-schließzeitpunkt betrachtet. Der Zeitpunkt kann mit einem der in Kapitel 2.6.3 vorgestellten Kriterien ermittelt werden. Im Beispiel der zyklisch beanspruchten Kerbprobe aus [1–6, 87] lag aufgrund der im Fokus stehenden Sekundärbeanspruchung eine Regelung der Verschiebung in der Nähe der Kerbe vor, sodass am globalen Lastangriffspunkt für die zwei benachbarten Risstiefen nicht die gleichen Kräfte bzw. Verschiebungen wirkten. Daher wurden Wiederholungssimulationen für die Risstiefe  $a + \Delta a$  mit zum einen gleicher Kraft und zum anderen gleicher Verschiebung, wie für die Risstiefe  $a$  durchgeführt. Somit existieren zwei Auswertungen, die in der Literatur auch als fixed grips, für die Betrachtung gleicher Verschiebungen, und dead load, für die

Betrachtung gleicher Kräfte, bezeichnet werden. Die Unterschiede sind in den meisten Fällen allerdings vernachlässigbar. In Abbildung 2.12 (c) entspricht die Energiedifferenz  $\Delta\Pi$  bei gleicher Verschiebungsvorgabe  $\Delta\Pi(\Delta U^a = \Delta U^{a+\Delta a})$  der horizontal schraffierten Fläche. Die Energiedifferenz bei gleicher Kraftvorgabe  $\Delta\Pi(\Delta F^a = \Delta F^{a+\Delta a})$  ist um die vertikal schraffierte Fläche größer.

Trotz der erfolgreichen Anwendung des experimentellen wie auch rechnerischen globalen Ansatzes bleibt die physikalische Interpretation des daraus abgeleiteten zyklischen effektiven  $J$ -Integrals unklar. Denn wie schon im Kapitel 2.4.1 für die monoton steigende Beanspruchung beschrieben, steht die durch Plastizität dissipierte Energie nicht für die Risserweiterung zur Verfügung. Daher entspricht das  $J$ -Integral auch im zyklischen Fall und bei elastisch-plastischem Materialverhalten nicht der risstreibenden Kraft bzw. der Energiefreisetzungsrates. Neben der globalen Vorgehensweise wurde auch das Linienintegral zur Ermittlung eines zyklischen  $J$ -Integrals eingesetzt, worauf das folgende Kapitel näher eingeht.

### 2.7.2 Herangehensweise über ein Linienintegral

Die Grundlage der Beschreibung eines zyklischen  $J$ -Integrals durch ein Linienintegral bildet Gleichung 2.25. Lamba [122] erweiterte das Integral für zyklische Beanspruchungen, indem er die Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen auf die Umkehrpunkte der Hysterese referenzierte. Abbildung 2.13 zeigt das beschriebene Vorgehen.

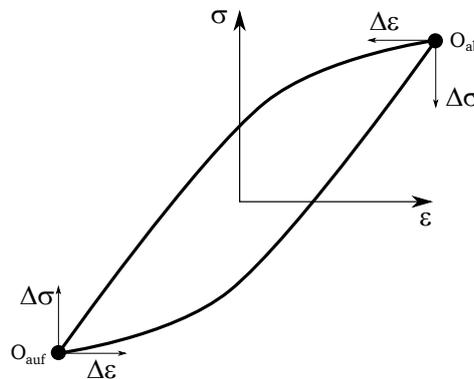


Abbildung 2.13: Referenzieren der Spannungen und Dehnungen in einer Hysterese auf die Lastumkehrpunkte  $O_{auf}$  und  $O_{ab}$  zur Berechnung eines zyklischen  $J$ -Integrals auf Basis des Linienintegrals nach Lamba [122]

In Gleichung 2.25 setzte er daher die Zustandsänderungen der Formänderungsenergiegedichte  $\Delta W$ , der Spannungen  $\Delta\sigma_{ij}$  und der Verschiebungen  $\Delta u_i$  ein, um damit schließlich die Zustandsänderung des  $J$ -Integrals zu berücksichtigen, siehe Gleichung 2.36. Das  $\Delta$  steht in diesem Fall demnach nicht für eine Schwingbreite.

$$\Delta J = \int_{\Gamma} \Delta W dy - \Delta\sigma_{ij} n_j \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x} ds \quad (2.36)$$

---

Interessanterweise war die Motivation Lambas nicht die explizite Beschreibung des Intensitätsparameters des Beanspruchungsfeldes nahe einer Rissspitze, sondern er suchte nach einer anderen Methode zur Ermittlung der Dehnungskonzentration an einer Kerbe unter zyklischer Beanspruchung. Seine Lösungen verglich er mit einem Vorgehen basierend auf den Arbeiten von Neuber [123]. Auch in diesem wurde bereits die Referenzierung der Spannungen und Dehnungen im Fall einer zyklischen Beanspruchung verwendet. Eine ähnliche Vorgehensweise, diesmal aber explizit für die Analyse von Rissen, ist durch Wüthrich [124] gegeben. Neben den bekannten Bedingungen für das  $J$ -Integral, wies er darauf hin, dass er ausschließlich Risse betrachte, die kein Riss schließen aufweisen. Durch die beschriebene Maßnahme des Referenzierens konnten Lamba [122] und Wüthrich [124] sicherstellen, dass alle Bedingungen für die Gültigkeit und die Wegunabhängigkeit des  $J$ -Integrals von Rice weiterhin erfüllt waren.

Eine Anwendung des Linienintegrals aus Gleichung 2.36 zur Berechnung eines zyklischen  $J$ -Integrals ist z.B. durch Banks-Sills und Volpert [121] gegeben. Sie stellten ihre Ergebnisse in den Kontext der über experimentelle sowie simulierte Kraft-Verschiebungs-Kurven ermittelten  $J$ -Integrale. Durch ihre Randbedingungen von ausschließlich positiven  $R$ -Verhältnissen und simulierten Rissen ohne Vorgeschichte wurde der Einfluss von Riss schließeffekten nicht untersucht. Banks-Sills und Volpert zeigten durch den Vergleich der lokalen und globalen Lösung, dass das zyklische  $J$ -Integral zumindest für elastisches Verhalten und unter SSY-Bedingungen einen geeigneten Parameter darstellen könnte. In ihrem Ausblick wiesen sie darauf hin, dass die lokale Lösung auf Basis des Linienintegrals für komplexe Geometrien besser geeignet sei. Diesen Aspekt greift im Folgenden auch Kapitel 3 als Einschränkung des globalen Ansatzes auf.

Im Zusammenhang des Linienintegrals und einer zyklischen Beanspruchung von Materialien, die nicht zu vernachlässigende plastische Deformationen im Umfeld der Rissspitze aufweisen, stellt sich grundsätzlich die Frage nach der Wegabhängigkeit der Lösung. Allen bisher beschriebenen Weiterentwicklungen und Anwendungen des Linienintegrals für zyklische Beanspruchungen liegt zu Grunde, dass das Materialverhalten im aufsteigenden und absteigenden Hysteresehalbast näherungsweise durch die Deformationstheorie beschrieben werden kann und kein Riss schließen auftritt. Daraus folgt, dass das Linienintegral unter diesen Bedingungen auch im zyklischen Fall, Gleichung 2.36, wegunabhängig ist. In Anhang A findet sich hierzu der Nachweis.

Die Wegunabhängigkeit im Zusammenhang mit zyklischen Beanspruchungen ist wie zuvor bei monoton steigenden Beanspruchungen von zentraler Bedeutung. Sie bedeutet, dass das zyklische  $J$ -Integral an der Rissspitze letztlich mit dem im Fernfeld des Risses übereinstimmt. Im Grenzfall lässt sich also auch mittels einer Kontur, welche die gesamte Struktur umfasst, das zyklische  $J$ -Integral und damit die risstreibende Kraft quantifizieren. Durch das Auftreten von Riss schließeffekten geht diese Eigenschaft allerdings im Allgemeinen aufgrund der Belastung der Rissflanken verloren. In zahlreichen Untersuchungen [85, 125–128] wurden neben dem unteren Lastumkehrpunkt weitere verschiedene Möglichkeiten analysiert, sodass die Integration des zyklischen  $J$ -Integrals lediglich für einen geöffneten Riss mit lastfreien Rissflanken vorgenommen wird.

Kubo et al. [125] untersuchten den Einfluss verschiedener Referenzzustände anhand von Simulationen eines Tunnelrisses in einer Scheibe. Sie beschränkten sich für die Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals in Anlehnung an die grundlegenden Arbeiten von Dowling und Begley [113] auf den aufsteigenden

---

Hysteresehalbast. Neben dem unteren Umkehrpunkt analysierten sie Rissöffnungszeitpunkte als mögliche Referenzzustände, die sie mit verschiedenen Kriterien definierten. Sie fanden heraus, dass durch das Referenzieren überhaupt eine mehr oder weniger ausgeprägte Wegunabhängigkeit vorliegt. Ein Vergleich mit aus der Simulation gewonnenen CTOD Werten und dem Dehnungsfeld in der Nähe der Risspitze ergab, dass die Referenz auf den Rissöffnungszeitpunkt einen geeigneten Parameter für eine einheitliche Beschreibung des Rissspitzenfelds darstellt. Die Wahl dieses Referenzzustands zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals findet sich auch in McClung et al. [129].

Demgegenüber wiesen Vormwald und Seeger [85] und Vormwald [126] darauf hin, dass der Rissöffnungszeitpunkt als Referenzzustand zu einer wegabhängigen Lösung führen müsse, da sich das Material zu diesem Zeitpunkt an unterschiedlichen Positionen in der Spannungs-Dehnungs-Hysterese befinde. Um dieses Problem zu umgehen, wendeten sie das Referenzieren auf den oberen Lastumkehrpunkt an und berechneten das zyklische  $J$ -Integral bis zum Rissschließzeitpunkt, um einen wegunabhängigen Effektivwert zu erhalten. Eine Anwendung dieses Vorgehens findet sich u.a. auch in Tchoffo Ngoula et al. [128]. In deren Arbeit wurde für mechanisch kurze Risse in Schweißverbindungen das zyklische effektive  $J$ -Integral basierend auf Feldgrößen aus einer FE-Simulation berechnet. Deren Algorithmus basiert darauf, dass alle für das Linienintegral benötigten Feldgrößen an den Knoten des FE Netzes ausgelesen werden. Die Integration mittels der referenzierten Größen fand bis zum Zeitpunkt, an dem die Verschiebung eines Knotens entlang der Rissflanke Null wurde, statt. Ähnlich zur beschriebenen Vorgehensweise in Tchoffo Ngoula et al. [128] berechneten kürzlich Xu et al. [130] das zyklische effektive  $J$ -Integral anhand von Simulationen einer CT-Probe. Gegenüber ihren vorherigen Arbeiten in Xu et al. [131] erweiterten sie ihre Untersuchungen auf wachsende zyklisch beanspruchte Risse und berücksichtigten dabei PICC. Ihre Ergebnisse nutzten sie zur grundlegenden Analyse der Bedeutung und Eignung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals zur Beschreibung des Beanspruchungsnahfelds unter Ermüdungsbeanspruchung.

Einen anderen Zugang zur Auswertung des Linienintegrals für zyklische Beanspruchungen wählten Metzger et al. [127]. Ihr Fokus lag dabei auf der Beleuchtung des Zusammenhangs zwischen einer zyklischen Rissspitzenöffnungsverschiebung  $\Delta CTOD$  und einem zyklischen  $J$ -Integral bei Vorhandensein von Riss schließen. Ihre Analysen beschränkten sich darauf, das Beispiel einer Scheibe mit Tunnelriss unter zyklischer Beanspruchung ohne wachsenden Riss und damit ohne eine plastische Nachlaufzone zu simulieren. Sie berechneten das zyklische  $J$ -Integral mit der internen Prozedur der FE-Software Abaqus. Damit wendeten sie indirekt die Umwandlung des Linienintegrals aus Gleichung 2.36 in ein Gebietsintegral basierend auf den Arbeiten von Shih et al. [132] an. Weil dieses aber den Gültigkeitskriterien des Rice'schen  $J$ -Integrals unterliegt und damit keine Lastumkehr zulässig ist, wendeten sie ein zweistufiges Berechnungsverfahren an. Im ersten Schritt wurden zwei Zyklen simuliert. Im zweiten Schritt wurde eine Wiederholungsrechnung des letzten aufsteigenden Hysteresehalbast mit Ursprung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung im unteren Umkehrpunkt durchgeführt. Die Vernetzung in diesem Referenzzustand entsprach dem deformierten Netz aus der Berechnung im ersten Schritt. Mit diesem Vorgehen ist es daher lediglich möglich ein zyklisches  $J$ -Integral mit dem Referenzzustand „unterer Lastumkehrpunkt“ zu berechnen. Dennoch kommen Metzger et al. zu dem Schluss, dass trotz Riss schließen näherungsweise eine Korrelation besteht und  $\Delta CTOD$  einen geeigneten Parameter zur Korrelation des Ermüdungsrissfortschritts darstellt.

### 2.7.3 Herangehensweise über Konfigurationskräfte

Abschließend geht dieses Kapitel auf das Konzept der Konfigurationskräfte zur Ermittlung des zyklischen  $J$ -Integrals unter Berücksichtigung von Risssschließen ein. Die Konfigurationskräfte ermöglichen gegenüber dem Linienintegral nach Gleichung 2.36 einen anderen Zugang zur Beantwortung der Frage nach der Wegabhängigkeit in elastisch-plastischen Materialien. Ochensberger und Kolednik [133, 134] führten aufbauend auf den in Kapitel 2.4.3 beschriebenen Arbeiten für monoton steigende Beanspruchungen anhand von FE-Simulationen Analysen am Beispiel einer zyklisch beanspruchten CT-Probe durch. Neben der Wegabhängigkeit verfolgten sie – wie bereits einige Autoren zuvor – das Ziel, einen physikalisch sinnvoll begründeten Parameter für die risstreibende Kraft unter dieser Beanspruchungssituation zu finden. Das  $J$ -Integral von Simha et al. [65] für einen Riss unter monoton steigender Beanspruchung in einem sich elastisch-plastisch verhaltenden Material spiegelt eine solche Interpretation auch im Fall von einer zyklischen Beanspruchung unter dem Einfluss von Risssschließen wider, Ochensberger und Kolednik [133, 134]. Allerdings trifft im Fall der Ermüdungsbeanspruchung, wie auch im Fall eines wachsenden Risses unter statischer Beanspruchung, die These aus Kolednik et al. [66] zu, dass sich der Riss nicht ohne eine gleichzeitige Bewegung der plastischen Zone an seiner Spitze ausbreiten kann, siehe Abbildung 2.9. Daher sind für ein zyklisches  $J$ -Integral die Konfigurationskräfte in der APZ zu integrieren. Mit diesem Vorgehen geht einher, dass lediglich diejenigen Konfigurationskräfte im Volumen einen Anteil am  $J$ -Integral besitzen, die in einem unmittelbaren Zusammenhang mit der Risspitze stehen. Treten durch LSY-Bedingungen an anderer Stelle in der Struktur plastische Deformationen auf, tragen die daraus resultierenden Konfigurationskräfte nicht zum  $J$ -Integral bei. Unter der Voraussetzung, dass SSY-Bedingungen vorliegen und die plastische Zone allein von elastischem Material umgeben ist, stimmen das über globale Kraft-Verschiebungs-Kurven ermittelte und das auf dem Konzept der Konfigurationskräfte basierende zyklische  $J$ -Integral überein. Damit ist die physikalische Bedeutung des globalen  $J$ -Integrals ebenfalls eine Beschreibung der treibenden Kraft für die Bewegung der Risspitze in Kombination mit der Prozesszone und der plastischen Zone.

Ein Referenzieren aller Feldgrößen, wie im Zusammenhang mit dem Linienintegral durch Kapitel 2.7.2 vorgestellt, findet in Ochensberger und Kolednik [133, 134] nicht statt. Sie berechneten vielmehr die zeitliche Entwicklung des  $J$ -Integrals und generierten daraus anschließend über das im Zyklus auftretende Minimum und Maximum einen Effektivwert für das zyklische  $J$ -Integral nach Gleichung 2.37.

$$\Delta J_{APZ}^{ep} = J_{APZ,max}^{ep} + J_{APZ,min}^{ep} - 2\sqrt{J_{APZ,max}^{ep} J_{APZ,min}^{ep}} \quad (2.37)$$

Durch das Auftreten höherer Beanspruchungen bzw. einer geringeren Beanspruchbarkeit des Werkstoffs kann es in einer Struktur auch unter zyklischer Beanspruchung zum generellen Fließen kommen. In diesem Fall kann die APZ nicht allein der Risspitze zugeordnet werden, da diese auch die Ränder der Struktur umfasst.

Tsakmakis und Vormwald [64] wendeten das Konzept der Konfigurationskräfte auf duktile Bruchvorgänge unter zyklischer Beanspruchung an. Sie untersuchten dabei u.a. den Einfluss verschiedener Verfestigungsansätze und diskutierten die Anwendbarkeit der Konfigurationskräfte für duktile Bruchvorgänge. Aufgrund der beschriebenen Problematik bzgl. der APZ definierten sie eine weitere physikalisch begründete Zone,

die für die Berechnung eines zyklischen  $J$ -Integrals geeignet sein könnte. Diese effektive plastische Zone (EPZ) lässt sich über die Differenz der plastischen Vergleichsdehnungen  $\Delta\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}$  zwischen zwei benachbarten Risstiefen  $a$  und  $a + \Delta a$  beschreiben, Gleichung 2.38. Dazu wurde in den Simulationen ein Knoten bei Maximallast gelöst und die Zustände vorher und nachher miteinander verglichen. Die EPZ begründet sich daher allein durch die Änderung der plastischen Deformationen durch Rissfortschritt. Aufgrund von Differenzen der plastischen Vergleichsdehnung an anderen Orten als in der Nähe der Rissspitze, die aber im Vergleich zu denen Nahe der Rissspitze klein waren, legten Tsakmakis und Vormwald einen Schwellenwert  $\Delta\varepsilon_{\text{eq,th}}^{\text{pl}}$  fest.

$$\Delta\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}} = \varepsilon_{\text{eq},a+\Delta a}^{\text{pl}} - \varepsilon_{\text{eq},a}^{\text{pl}} \quad \text{und} \quad \Delta\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}} \geq \Delta\varepsilon_{\text{eq,th}}^{\text{pl}} \quad (2.38)$$

Aufgrund des laut den Autoren hohen Aufwands zur Identifikation der EPZ wurde dieser Ansatz im Rahmen von [64] nicht eingehender untersucht. Tsakmakis und Vormwald merken an, dass das Konzept der Konfigurationskräfte sowie die weiteren Konzepte aus der elastischen Betrachtung für spröde Werkstoffe in dieser Form nur bedingt auf duktile Bruchvorgänge anwendbar seien. Ein idealisierter scharfer Riss und eine kontinuumsmechanische Beschreibung können die real stattfindenden Mechanismen der Porenbildung und des Porenwachstums in der Nähe der Rissspitze nicht berücksichtigen.

Das folgende Kapitel fasst die generelle Motivation dieser Dissertation sowie den bekannten Stand der Technik und die damit einhergehende Problemstellung zusammen. Darüber hinaus macht es das Ziel der Arbeit deutlich und geht auf Hypothesen im Zusammenhang mit möglichen Lösungsansätzen ein.

---

## 3 Problemstellung und Ziel

---

Kapitel 1 verdeutlicht generelle Anforderungen der Maschinenbauindustrie, insbesondere aus dem Bereich der Turbomaschinen. Dabei spielt die zuverlässige Lebensdauerbewertung von Bauteilen unter optimaler Werkstoffausnutzung eine zentrale Rolle. Die Berechnung von Risswachstum in Komponenten dient unter anderem diesem Zwecke. Dabei besteht die Herausforderung in den teils komplexen Geometrien und Beanspruchungsbedingungen. Kapitel 2 geht darauffolgend auf die Grundlagen von Risswachstumsmechanismen und deren vereinfachte kontinuumsmechanische Beschreibung ein. Anhand von Bruchvorgängen abstrahierter Strukturen unter monoton steigender Beanspruchung stellt es etablierte bruchmechanische Berechnungsansätze vor. Diese unterliegen in der Regel der Annahme einer zulässigen Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens durch die Deformationstheorie. Auf Basis dessen ist die Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze durch den Intensitätsparameter  $J$ -Integral beschreibbar. Des Weiteren trifft bei vorhandener Gültigkeit der beschriebenen Annahmen eine physikalische Interpretation des Intensitätsparameters als risstreibende Kraft oder Energiefreisetzungsrate  $G$  im Sinne Griffiths zu. Im Zusammenhang mit Ermüdungsrisswachstum zeigt Kapitel 2, dass unter Annahme des Ähnlichkeitsprinzips diesem Ansatz prinzipiell gefolgt werden kann. Allerdings verdeutlicht das Kapitel auch, dass die physikalische Interpretation der Parameter unter zyklischer Beanspruchung umstritten war und aus Sicht des Autors auch teilweise noch ist. Um das zyklische Materialverhalten näherungsweise korrekt abzubilden, ist die inkrementelle Plastizitätstheorie anzuwenden. Dadurch wird die Annahme der Deformationstheorie verletzt und die Lösung des  $J$ -Integrals wegabhängig. Damit einher geht, dass die Beanspruchung unmittelbar an der Rissspitze unbekannt ist. Jedoch ist es möglich, dass weiterhin ein Bereich im Nahfeld der Rissspitze existiert, dessen Intensität durch das  $J$ -Integral dominiert ist. Eine Ursache der Wegabhängigkeit ist das Auftreten von Risschließeffekten. Aufgrund der Annahme, dass ein Riss nur wachsen kann, wenn er geöffnet ist, wurden Konzepte für effektive Intensitätsparameter entwickelt. Damit konnten näherungsweise wegunabhängige Ergebnisse erzielt werden, die das effektive Nahfeld unter zyklischer Beanspruchung beschreiben könnten. Dies ist vermutlich auch der Grund, warum viele Beispiele zeigen, dass eine Korrelation des berechneten Parameters mit der Ermüdungsrissfortschrittsrate möglich ist.

Einer dieser Ansätze ist die in Kapitel 2.7.1 beschriebene Herangehensweise über globale Kraft-Verchiebungs-Kurven. Im Zusammenhang mit der einleitend geschilderten Herausforderung des Übertragbarkeitsproblems, Kapitel 1, wurde der globale Ansatz in den Arbeiten von Kontermann [1, 4, 6] und Garnadt [2, 3, 5, 7] auf vielfältige Geometrien von Ersatzstrukturen mit Kerben, unterschiedliche Lasthorizonte und -verhältnisse, überlagerte Haltezeiten und betriebsähnliche Zyklusformen, Werkstoffe und Temperaturen erfolgreich angewendet. Demzufolge liegt eine hinreichende Validierung des globalen Ansatzes zur Korrelation der gemessenen Rissfortschrittsrate und dem zyklischen effektiven  $J$ -Integral vor.

---

Der Ansatz geht allerdings auch mit Problemen einher. Zum einen ist die physikalische Interpretation des berechneten Parameters unklar. Zum anderen ist unbekannt, inwiefern der Parameter zur Beschreibung des Nahfelds der Risspitze unter zyklischer Beanspruchung und Berücksichtigung von Riss-schließen geeignet ist. Hinsichtlich der Anwendbarkeit liegen dem Ansatz die folgenden Einschränkungen zu Grunde:

- Ein eindeutiger Lastangriffspunkt muss existieren, um die globale Kraft und Verschiebung für die Berechnung der Energie zu erhalten.
- Die Lösungen des Randwertproblems für zwei benachbarte Risstiefen müssen vorliegen.
- Zwischen den beiden Lösungen sind die Randbedingungen eines Knotens entlang des a priori bekannten Risspfades zu lösen und eine bestimmte Anzahl an Zyklen zu rechnen, von deren Anzahl das Ergebnis abhängen kann.
- Für eine Risstiefe  $a$  existieren zwei Lösungen, da zum einen die Energiedifferenz zwischen  $a - \Delta a$  und  $a$  und zum anderen zwischen  $a$  und  $a + \Delta a$  betrachtet werden kann.
- Ein – wenn auch in den meisten praxisrelevanten Fällen vernachlässigbarer – Unterschied zwischen der Auswertung für gleiche Kräfte (dead load) und gleiche Verschiebungen (fixed grips) besteht.
- Die Betrachtung des Risses ist eindimensional, ohne die Möglichkeit einer lokalen Auflösung des Nahfelds entlang einer Rissfront.

Diese Dissertation adressiert die geschilderte Problemstellung mit dem folgenden Ziel:

### **Ziel**

Das Ziel der Dissertation ist zu klären, welche physikalische Bedeutung der berechnete zyklische effektive Parameter des globalen Ansatzes besitzt und ob er für eine quantitative Beschreibung der effektiven Beanspruchung im Nahfeld einer Risspitze geeignet ist. Die Dissertation soll dazu dienen, die Konsistenz mit lokalen Ansätzen unter Anwendung der Idee des Referenzierens zu überprüfen, um sich gleichzeitig aller Einschränkungen des globalen Ansatzes zu entledigen. In diesem Zusammenhang verfolgt sie das Ziel, Potentiale der Berechnungsmethoden zu identifizieren und individuelle Anwendungsgrenzen aufzuzeigen.

### **Hypothesen**

Mit dem formulierten Ziel gehen die folgenden Hypothesen einher, die durch diese Dissertation analysiert werden. Dabei ist ihre Bestätigung teilweise notwendig, um das Ziel zu erreichen.

- H1 Wenn ein Referenzieren aller Feldgrößen auf den Rissöffnungszeitpunkt für den aufsteigenden Hysteresehalbst und den oberen Lastumkehrpunkt eines Zyklus für den absteigenden Hysteresehalbst stattfindet, dann stimmen die Lösungen der lokalen und globalen Methode überein.

Die Hypothese H1 ist unmittelbar mit der Frage nach der Weg- bzw. Gebietsabhängigkeit der lokalen Methoden verbunden.

- H2 Nur wenn eine weg- bzw. gebietsunabhängige Lösung der lokalen Methoden existiert, kann H1 erfüllt sein.

---

Allerdings bedingt die Wegunabhängigkeit, dass die plastische Zone an der Rissspitze vollständig durch elastisches Materialverhalten umgeben ist und sich innerhalb des Integrationsgebiets befindet. Weil dies für SSY-Bedingungen und einen Riss mit Vorgeschichte und für LSY-Bedingungen, in denen sich die plastische Zone mitunter auch über das gesamte Ligament erstrecken kann, nicht gegeben ist, ergibt sich daraus folgende Hypothese:

H3 Es existiert ein Gebiet nahe der Rissspitze, welches physikalisch sinnvoll begründet für die Quantifizierung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals auf Basis der lokalen Methoden zu betrachten ist.

Lassen sich die Hypothesen H1-H3 bestätigen und damit ein zyklisches effektives  $J$ -Integral berechnen, führt dies zur Hypothese H4.

H4 Das zyklische effektive  $J$ -Integral beschreibt die Intensität der zyklischen Beanspruchung im Nahfeld einer Rissspitze unter Berücksichtigung von Riss schließen.

---

## 4 Simulations- und Berechnungsverfahren

---

Um eine Diskussion der aufgestellten Hypothesen bezüglich des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals durchzuführen, stellen die folgenden Kapitel 4.1 und 4.2 das hierzu eingesetzte Beispiel einer rissbehafteten Struktur vor. Das Kapitel 4.1 geht zunächst auf das zugrunde liegende Modell hinsichtlich seiner Geometrie und Beanspruchung sowie auf das Materialmodell ein. Anschließend beschreibt Kapitel 4.2 die Erweiterungen der Berechnungsmethoden für das zyklische effektive  $J$ -Integral, welche über die in Kapitel 2 beschriebenen Aspekte hinausgehen. Gleichzeitig zeigt das Kapitel sich dadurch eröffnende, mögliche Wege auf, um das formulierte Ziel – eine Auswertungsmethode ohne die Einschränkungen des globalen Ansatzes zu finden – zu erreichen.

### 4.1 Simulation einer zyklisch beanspruchten Scheibe mit Tunnelriss

Damit eine von der Geometrie einer Struktur möglichst unabhängige Betrachtung eines Risses unter einer reinen Modus I Beanspruchung vorgenommen werden kann, wird im Folgenden eine Scheibe mit Tunnelriss verwendet. Das geometrische Modell und das Materialmodell sowie das Vorgehen zur Simulation des wachsenden Risses beschreiben die folgenden Kapitel.

#### 4.1.1 Geometrisches Modell und Belastungssituation

Das geometrische Modell der Scheibe mit Tunnelriss, wie in Abbildung 4.1 (a) dargestellt, wird mit der FEM Software Abaqus erstellt. Die Wahl der absoluten Abmessungen des Viertels der Scheibe mit 5 mm x 5 mm und des Risses mit einer initialen Länge von 2 mm ist dabei willkürlich. Allerdings sollte es durch entsprechende Wahl der Beanspruchung möglich sein, sowohl SSY- als auch LSY-Bedingungen für eine gezielte Untersuchung derer Einflüsse einzustellen. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften und der dadurch vorhandenen Möglichkeit die Dimension des Problems zu reduzieren wird lediglich das in Abbildung 4.1 (a) dargestellte Viertel der Scheibe modelliert. Durch die entsprechenden Symmetrierandbedingungen wird sichergestellt, dass dieser Teil der Scheibe repräsentativ für die gesamte Scheibe ist. Es wird angenommen, dass der Riss sich entlang der Symmetrieachse ausbreitet. Daher wird eine Kontaktlinie entlang dieser Achse modelliert, sodass sich die Rissflanken bei auftretendem Riss schließen nicht überschneiden können. Die Vernetzung erfolgt in der Nähe des Risses durch eine strukturierte Vernetzung mit einer initialen Elementkantenlänge, element edge length (EEL), von 0,1 mm. Im Vergleich zu den weiteren Dimensionen des Risses und der Scheibe ist diese EEL allerdings relativ grob. Die Motivation dennoch mit dieser EEL zu arbeiten basiert auf dem Hintergrund, dass die Vernetzung für die Simulation eines wachsenden Risses mit Vorgeschichte vom rissfreien Zustand bis zur Endrisstiefe von 2 mm erhalten bleiben muss, damit die Informationen über die plastische Nachlaufzone nicht verloren gehen.

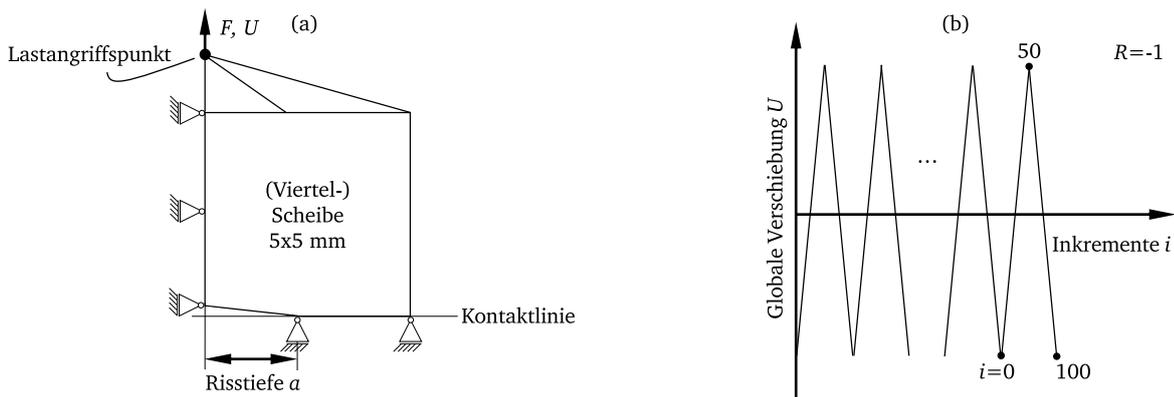


Abbildung 4.1: (a) Geometrisches Modell der Scheibe mit Tunnelriss unter Ausnutzung der Symmetrie, sowie Randbedingungen und globaler Lastangriffspunkt, (b) Wechselnde Zug-Druck-Belastung in Dreiecksform durch Verschiebung des globalen Lastangriffspunkts

Pro gelöster Randbedingung an einem Knoten sind zwei Zyklen zu simulieren, wie in Kapitel 2.6.3 beschrieben, sodass der zeitliche Aufwand der gesamten Simulation direkt mit der EEL zusammenhängt. Mit einer EEL von 0,1 mm und dem damit einhergehenden überschaubaren zeitlichen Umfang kann zunächst eine effiziente Entwicklung der Methoden ermöglicht werden. Zudem wird davon ausgegangen, dass sich der Diskretisierungsfehler in allen angewendeten Auswertungsmethoden des  $J$ -Integrals gleichermaßen auswirkt, sodass damit eine vergleichbare Grundlage für die Methoden untereinander vorliegt. Um den absoluten Einfluss der EEL auf das zyklische  $J$ -Integral und das Konvergenzverhalten zu untersuchen, wird die Vernetzung anschließend durch eine EEL von 0,05 mm und 0,01 mm verfeinert. Die eingesetzten Elemente sind zweidimensionale isoparametrische CPS4 Elemente. Das heißt, sie bestehen aus vier Knoten mit linearen Ansatzfunktionen und basieren auf der Annahme des ebenen Spannungszustands. Auch hier ist das Ziel eine Grundlage für den Vergleich der verschiedenen Auswertungsmethoden zu erhalten und nicht eine möglichst genaue Abbildung der Realität. Die Implementierung der Gebietsintegralmethode wie auch der Berechnung der Konfigurationskräfte kann prinzipiell, wie in Kapitel 2 beschrieben, auf dreidimensionale Strukturen erweitert werden. Hinsichtlich der in Kapitel 3 beschriebenen Problemstellung ist allerdings das beschriebene zweidimensionale geometrische Modell ausreichend.

Die Beanspruchung der Scheibe wird mittels der globalen Verschiebung eines Punktes realisiert, der mit der Oberkante der Scheibe kinematisch gekoppelt ist, wie Abbildung 4.1 (a) zeigt. Der Hintergrund für dieses Vorgehen ist die somit weiterhin vorhandene Möglichkeit der Auswertung der globalen Energiedifferenz auf Basis der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven. Die zyklische Beanspruchung besteht aus einer sich zeitlich ändernden Verschiebung des Lastangriffspunktes mit einem Verhältnis zwischen minimaler und maximaler Verschiebung von -1 in Form eines Dreieckszyklus, wie in Abbildung 4.1 (b) dargestellt. Die tatsächliche Dauer der Belastungsrampen ist in diesem Beispiel nicht von Bedeutung, da die verwendeten Materialmodelle nicht von der Zeit abhängen. Mit dieser Art der wechselnden Beanspruchung wird sichergestellt, dass der Riss öffnet und schließt und sich eine zyklische plastische Zone an der Risspitze ausbildet. In allen durchgeführten Simulationen wird jeder Zyklus gleichmäßig in 100 Lastinkremente aufgeteilt. Abbildung 4.1 (b) zeigt die Definition der Inkremente an den Lastumkehrpunkten  $i = 0, 50$  und

100 im jeweils zweiten simulierten Zyklus pro Risstiefe. Im Folgenden werden die Inkremente zwischen 0 und 100 aufgegriffen, um verschiedene Referenzpunkte für z.B. Lastumkehr oder Rissschließen zu benennen.

Um den Einfluss der plastischen Nachlaufzone gezielt zu untersuchen, werden Berechnungen für einen Riss der Länge  $a = 2$  mm sowohl ohne als auch mit Vorgeschichte durchgeführt. D.h. zum einen wird eine Scheibe mit Riss ohne Belastungshistorie zyklisch beansprucht. Zum anderen wird eine Scheibe zunächst ohne Riss zyklisch beansprucht und anschließend der Riss durch das sukzessive Lösen der Randbedingungen von Knoten entlang des Risspfades bis zu einer Länge von 2 mm erzeugt. Das angewendete Verfahren zur Simulation eines fortschreitenden Risses entspricht dem in Kapitel 2.6.3 beschriebenen. Nach jeweils zwei simulierten Zyklen wird die Randbedingung eines weiteren Knotens entlang des Risspfades bei Minimallast gelöst. Global führen die zwei Zyklen dazu, dass eine stabilisierte Hysterese der Kraft und Verschiebung vorliegt. In der Realität vergehen zwischen den hier vorliegenden Rissinkrementen natürlich deutlich mehr Zyklen. Mit einer EEL von 0,1 mm sind demzufolge 20 Simulationen, sprich 40 Zyklen, bis zum Erreichen einer Risstiefe von 2 mm durchzuführen.

#### 4.1.2 Materialmodell

Das eingesetzte Materialmodell zur Abbildung des zyklischen elastisch-plastischen Materialverhaltens basiert auf der inkrementellen Plastizitätstheorie, Kapitel 2.2. In Anlehnung an die in Kapitel 2.6.3 beschriebenen Einflüsse des Materialmodells im Zusammenhang mit Rissschließen wird ein bilinearer Ansatz gewählt. Das elastische als auch das plastische Verhalten werden dabei durch einen linearen Zusammenhang beschrieben. Im plastischen Anteil wird die lineare kinematische Verfestigung verwendet. Letztlich spielt es aufgrund des theoretischen, vergleichenden Charakters der im Rahmen der Dissertation durchgeführten Analysen keine Rolle, ob es sich um die Eigenschaften eines realen Werkstoffs handelt. Dennoch findet eine Anlehnung des bilinearen Materialmodells an die zyklische Fließkurve bei halber Anrisswechselzahl ( $N_A/2$ ) eines in den Projekten von Kong et al. [135] und Garnadt et al. [2] untersuchten 9%-Cr Stahlguss bei 600 °C statt. Der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang gegeben durch eine Ramberg-Osgood Beschreibung sowie die bilineare Approximation sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Dehnrage

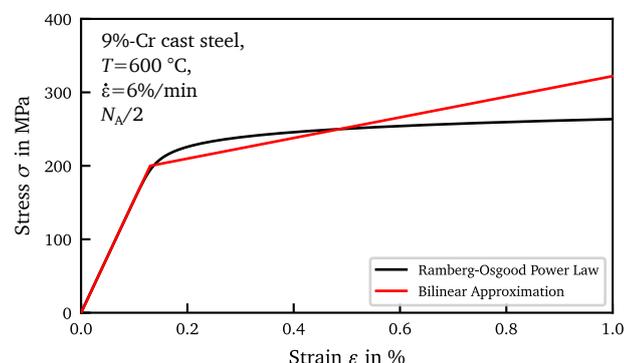


Abbildung 4.2: Zyklische Fließkurve nach Ramberg-Osgood, sowie die für die Simulationen eingesetzte bilineare Approximation für das Beispiel eines 9%-Cr Stahlguss bei 600 °C

---

$\dot{\epsilon}$  von 6%/min stellt eine im niederzyklischen Untersuchungsbereich häufig verwendete Größe dar. Durch die Wahl der zyklischen Fließkurve bei halber Anrisswechselzahl liegt eine näherungsweise Beschreibung des stabilisierten Werkstoffverhaltens vor. Der Elastizitätsmodul  $E$ , die Anfangsfließspannung  $\sigma_0$  sowie der plastische Tangentenmodul  $H$  des bilinearen Materialmodells sind in Tabelle 4.1 gegeben.

Tabelle 4.1: Parameter des bilinearen Materialmodells für einen 9%-Cr Stahlguss bei 600 °C

$E$ in MPa	$\sigma_0$ in MPa	$H$ in MPa
153725	200	15446

Der plastische Tangentenmodul ist relativ groß bzw. im Sinne von Cochran et al. [103] „moderat“, um Ratcheting nahe der Risssspitze in der Simulation zu reduzieren. Die Eignung dieser Approximation des Materialverhaltens für diesen Werkstoff zur letztlichen Beschreibung von Rissfortschritt konnte in Garnadt et al. [2, 5] experimentell anhand von Versuchen an gekerbten Rundproben, Corner-Crack Proben sowie Kreuzproben für diesen Werkstoff unter niederzyklischer Ermüdungsbeanspruchung bei 600 °C validiert werden.

Mit dem geometrischen Modell der Scheibe mit Tunnelriss sowie dem Modell für elastisch-plastisches Materialverhalten steht ein Setup zur Verfügung mit dem die verschiedenen Szenarien eines zyklisch beanspruchten Risses simuliert werden können. Im Anschluss an die Simulationen lassen sich das zyklische effektive  $J$ -Integral sowie die Nahfelder der Beanspruchung in der Nähe der Risssspitze auswerten.

## 4.2 Berechnung des zyklischen effektiven $J$ -Integrals

Das folgende Kapitel geht auf die Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals auf Basis des Gebietsintegrals, der Konfigurationskräfte und der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven ein. Zuvor beschreibt es das generelle Vorgehen sowie verschiedene Möglichkeiten im Postprocessing und wie die relevanten Daten aus den Simulationsergebnissen extrahiert werden. Die Formänderungsenergiegedichte spielt hierbei eine besondere Rolle, weil diese nicht unmittelbar in geeigneter Form aus der Simulation auslesbar ist.

### 4.2.1 Ablauf des Berechnungsverfahrens

Im Anschluss an die Simulation des beschriebenen Beispiels findet das Postprocessing statt. Je nach Berechnungsmethode sind verschiedene Pfade möglich, die in einem Ablaufschema in Abbildung 4.3 dargestellt sind. Die für alle Auswertungen benötigten Daten sind

- die Spannungstensoren  $\sigma_{ij}$  an jedem Gaußpunkt (GP),
- die Verschiebungsvektoren  $u_i$  an jedem Knoten,
- die Dehnungstensoren  $\varepsilon_{ij}$  an jedem Knoten, sowohl elastisch als auch plastisch,
- die Element- und Knotennummern
- sowie deren Koordinaten.

Alle Daten werden aus der Ergebnisdatei (Output Database) von Abaqus automatisiert ausgelesen. Es besteht die Möglichkeit die Daten an allen Knoten und GPs des Modells auszulesen oder nur in den Bereichen von Interesse, wie z.B. die von Abaqus oder manuell definierten Domains um die Rissspitze oder bestimmte Zonen wie die APZ oder EPZ. Dies bringt den Vorteil mit sich, dass aufgrund der geringeren Anzahl an Elementen die Daten schneller ausgelesen werden können. Die Gewichtungsfunktion  $q_1$ , auf die Anhang D ausführlicher eingeht, kann nach Wissen des Autors nicht aus der Ergebnisdatei ausgelesen werden. Durch Betrachtung zweier benachbarter Gebiete können die Gewichte aber nachträglich an den Knoten definiert und abgespeichert werden. Diese betragen an den Knoten des kleineren Gebiets eins und an den Knoten des größeren Gebiets null.

Hinsichtlich der für die Auswertung benötigten Formänderungsenergiedichte  $W$  gibt es die Besonderheit, dass diese nicht ohne weiteres für ein Referenzieren im zyklischen Fall zur Verfügung steht. Daher beschreibt das folgende Kapitel Möglichkeiten, wie diese trotz der inkrementellen Plastizitätstheorie für eine Auswertung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals berechnet werden kann.

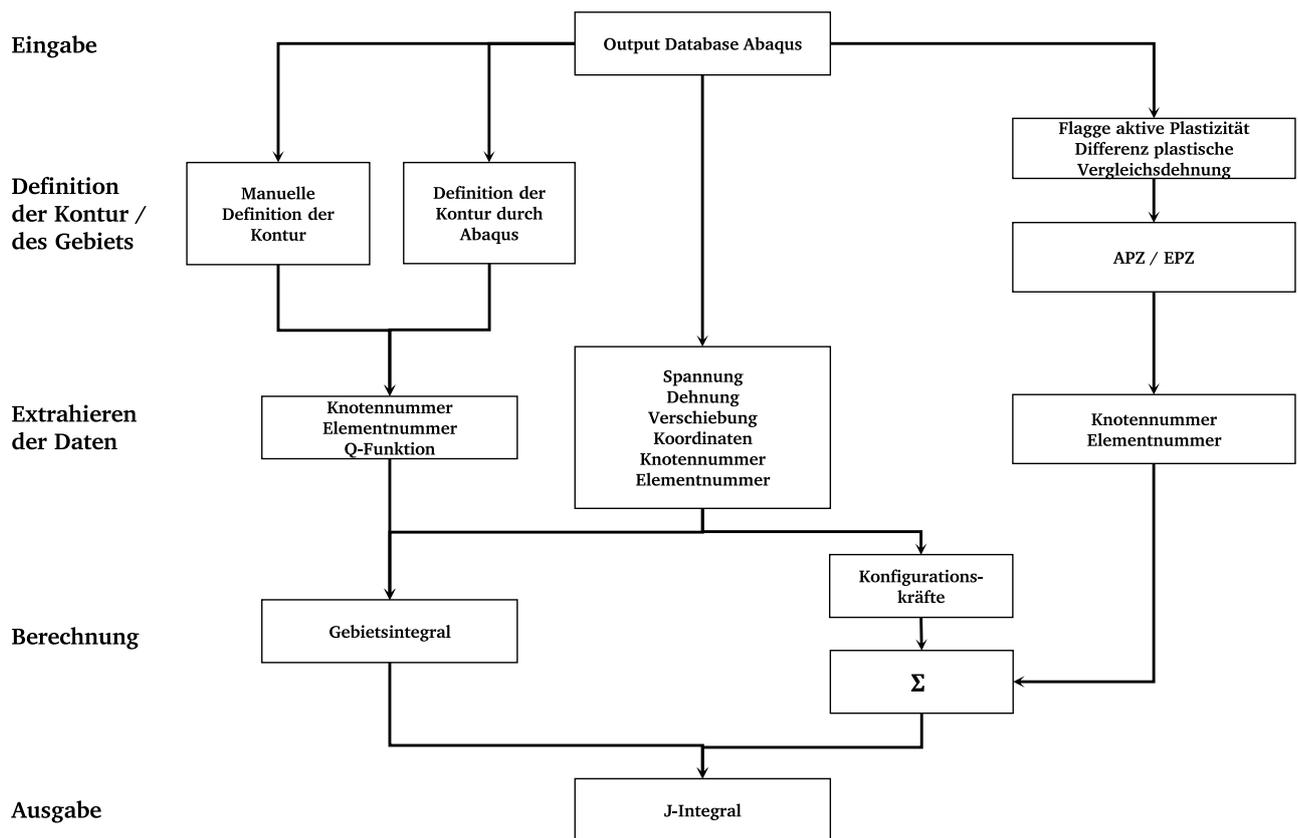


Abbildung 4.3: Ablauf des Postprocessings zur Berechnung des  $J$ -Integrals über das Gebietsintegral und die Konfigurationskräfte

---

## 4.2.2 Berechnung der Formänderungsenergiedichte

Die Formänderungsenergiedichte  $W$  in einem sich elastisch-plastisch verhaltenden Material setzt sich wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben aus einem elastischen und plastischen Anteil zusammen. Im Rahmen der Simulation einer zyklischen Beanspruchung unter Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie, wie sie im untersuchten Beispiel, Kapitel 4.1, vorliegt, geht die Formänderungsenergiedichte aus Abaqus nicht ohne weiteres hervor. Insbesondere das verfolgte Konzept des Referenzierens aller Größen auf einen beliebigen Zeitpunkt im Zyklus ist mit den vorhandenen Ausgabegrößen zur Ermittlung der Formänderungsenergiedichte nicht umsetzbar. Das folgende Kapitel beschreibt daher mögliche Ansätze, um an die zur Berechnung eines zyklischen  $J$ -Integrals notwendige Größe  $\Delta W$  zu gelangen und stellt diese den durch Abaqus vorhandenen Lösungen gegenüber.

Innerhalb von Abaqus stehen die Ausgabegrößen SENER und PENER an jedem GP zu jedem Berechnungsinkrement zur Verfügung. Dabei stellt SENER den elastischen Anteil und PENER den plastischen Anteil der Formänderungsenergiedichte dar. Der elastische Anteil lässt sich über den allgemeinen Zusammenhang zwischen Spannungen und elastischen Dehnungen über das Riemann-Stieltjes-Integral nach Gleichung 2.13 berechnen. Des Weiteren besteht die Möglichkeit den elastischen Anteil mittels der ersten beiden Summanden in Gleichung 2.17 zu berechnen. Dazu sind neben den elastischen Konstanten lediglich die hydrostatische Spannung sowie die Vergleichsspannung nach von Mises nötig. Im Rahmen einer Simulation unter Annahme der Deformationstheorie und Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Zusammenhangs über einen Ansatz nach Ramberg-Osgood, ergibt der dritte Summand aus Gleichung 2.17 den plastischen Anteil PENER. Neben der Fließspannung, dem Fließoffset und dem Verfestigungsexponenten findet die Berechnung über die von Mises Vergleichsspannung statt. Genauso wie der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung im Rahmen der Deformationstheorie eindeutig ist, ist auch der Zusammenhang zur Formänderungsenergiedichte  $W$  nach Gleichung 2.17 eindeutig. Das heißt, nach einer Lastumkehr in einem Zyklus nimmt die Energie ab, was zu einem unplausiblen Ergebnis insbesondere hinsichtlich des dissipativen plastischen Anteils führt. Durch Referenzieren auf den Lastumkehrpunkt kann für die Entlastung theoretisch das gleiche Ergebnis wie für die Belastung mittels Gleichung 2.17 erzielt werden. Allerdings ist eine Anwendung der Gleichung im Fall der inkrementellen Plastizitätstheorie und dem eingesetzten bilinearen Materialmodell aus Kapitel 4.1.2 nicht möglich.

In diesem Fall kann auf die allgemeine Definition der Formänderungsenergiedichte über das Riemann-Stieltjes-Integral in Gleichung 2.13 zurückgegriffen werden. Die numerische Berechnung des Integrals ist auf verschiedenen Wegen möglich. Daher werden folgende Herangehensweisen miteinander verglichen und den Lösungen SENER und PENER von Abaqus für das bilineare Materialmodell gegenübergestellt:

- Mittelpunktsregel
- Umwandlung von Gleichung 2.13 in ein Riemann-Integral unter Verwendung der numerisch approximierten Dehnrate
  - Dehnrate mittels Differenzenquotient 1. Ordnung
  - Dehnrate mittels Differenzenquotient 2. Ordnung

Die Mittelpunktsregel stellt ein mögliches Berechnungsverfahren zur numerischen Integration dar. Sie wird im Folgenden eingesetzt, um den plastischen Anteil der Formänderungsenergiedichte zu berechnen. Der

elastische Anteil wird weiterhin mittels Gleichung 2.14 berechnet. Gleichung 4.1 gibt die Näherungslösung für die Integration zwischen den plastischen Dehnungszuständen (1) und (2) an. Alle notwendigen Größen für dieses Vorgehen liegen direkt durch die Ausgabedatei von Abaqus vor und sind im Postprocessing nutzbar.

$$W_{\text{pl}} = \int_{\varepsilon_{ij}^{\text{pl}(1)}}^{\varepsilon_{ij}^{\text{pl}(2)}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} \approx \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{\text{pl}(2)} - \varepsilon_{ij}^{\text{pl}(1)}) \quad (4.1)$$

Eine weitere Möglichkeit stellt die Umwandlung des Riemann-Stieltjes-Integrals nach Gleichung 2.13 in ein Riemann-Integral nach Gleichung 4.2 dar. Dabei findet die Integration der Spannungen nicht weiter über den Dehnungen statt, sondern die zeitliche Ableitung der Dehnungen tritt im Integrand selbst auf und wird multipliziert mit den Spannungen über der Zeit integriert. Die Dehnraten aufgeteilt in einen elastischen und plastischen Anteil als solche gehen allerdings nicht direkt aus der Ausgabedatei von Abaqus hervor. Lediglich die Rate der totalen Dehnung steht in Form der Variable ER zur Verfügung. Daher wurden die zeitlichen Ableitungen der Dehnungsanteile nachträglich aus den Simulationsergebnissen berechnet. In diesem Zusammenhang wurde der Einfluss der 1. und 2. Ordnung des Differenzenquotienten betrachtet. Im Folgenden findet zunächst ein Vergleich der berechneten Dehnraten mit der Lösung von Abaqus statt.

$$W = W_{\text{el}} + W_{\text{pl}} = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{el}} dt + \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} dt \quad (4.2)$$

Abbildung 4.4 zeigt die berechneten Dehnraten im Vergleich zur totalen Dehnraten von Abaqus an einem einzelnen GP. Dieser stellt lediglich ein Beispiel zur Veranschaulichung dar. Er befindet sich im Element vor der Rissspitze und besitzt den kleinsten Abstand zur Rissspitze. Die betrachtete Beanspruchungssituation entspricht der Erstbelastung (Inkrement 0 bis 25) im Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss unter SSY-Bedingungen und einer Risstiefe von 2 mm ohne Vorgeschichte. Die elastischen, plastischen und totalen Anteile der Komponenten des Dehnratenensors auf der linken Seite in Abbildung 4.4 gehen aus der Berechnung mittels des Differenzenquotienten erster Ordnung hervor. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.4 sind die Ergebnisse anhand des Differenzenquotienten zweiter Ordnung dargestellt.

Alle Dehnraten sind zu Beginn der Rampe Null. Aufgrund der rein elastischen Werkstoffantwort bleiben die plastischen Anteile zunächst Null und die elastischen Anteile springen auf einen zunächst konstanten Wert abhängig von der Richtung. Mit zunehmender Beanspruchung treten plastische Dehnungen und damit Dehnraten auf, die sich in Abhängigkeit von der Richtung unterschiedlich entwickeln. Die Überlagerung des elastischen und plastischen Anteils ergibt jeweils die totale Dehnraten. Diese stimmt für den Differenzenquotienten erster Ordnung mit den Ergebnissen von Abaqus exakt überein. Hingegen weichen die Ergebnisse auf Basis des Differenzenquotienten zweiter Ordnung geringfügig von den Ergebnissen von Abaqus ab. Insbesondere am Ende der Belastungsrampe zeigt sich, dass es aufgrund der Unstetigkeit durch die zeitlich folgende Enlastungsrampe zu Abweichungen der Lösungen kommt. Die Frage nach dem Vorgehen an den Rändern eines Intervalls in dem der Differenzenquotient zweiter Ordnung angewendet werden soll, stellt sich im Allgemeinen. Durch geeignete Konventionen kann aus mathematischer Sicht eine

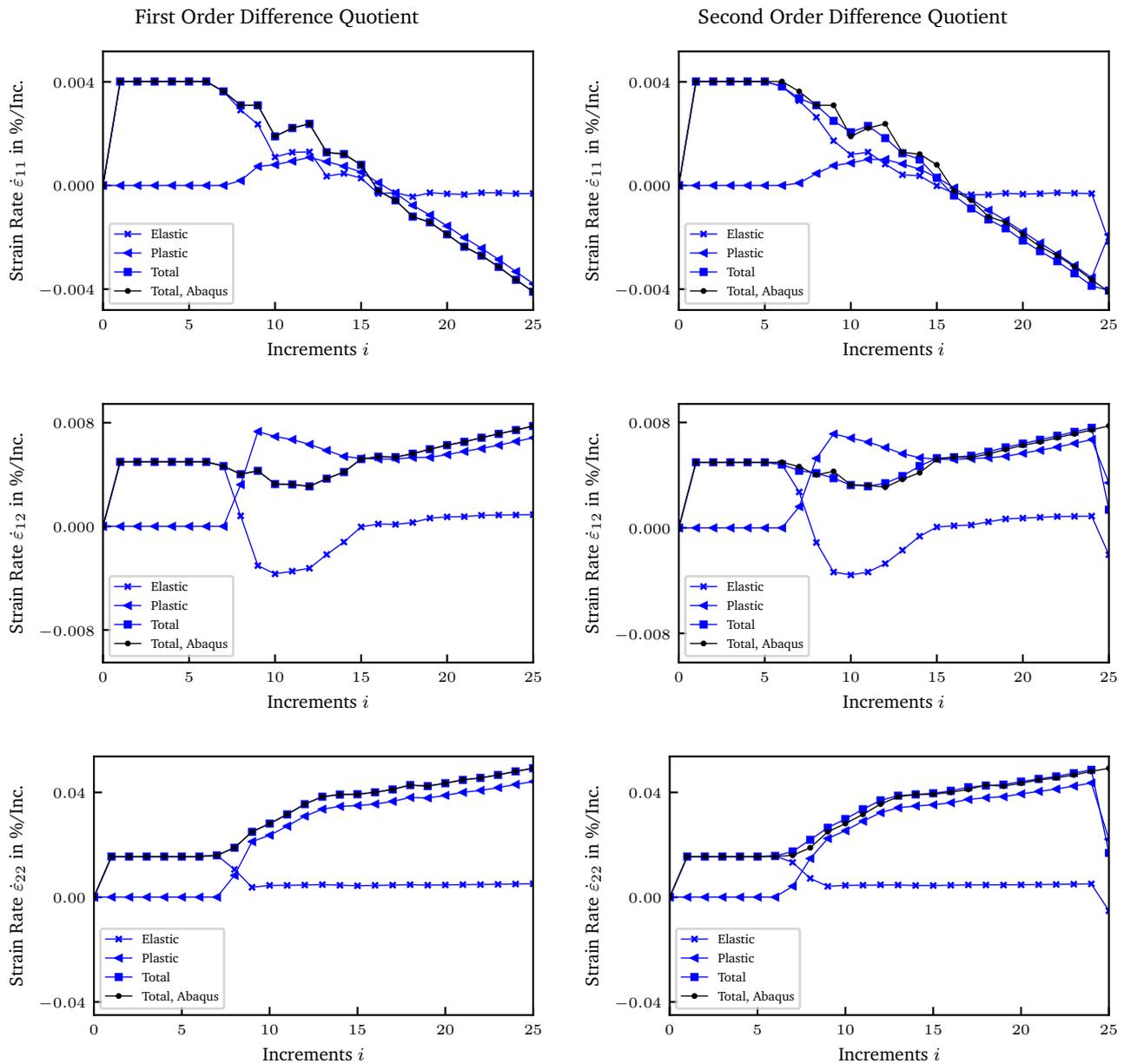


Abbildung 4.4: Komponenten des elastischen, plastischen sowie totalen Dehnratentensors berechnet mittels Differenzenquotienten erster (links) und zweiter Ordnung (rechts) am Gaußpunkt 1 des ersten Elements vor der Rissspitze für das Beispiel Scheibe mit Tunnelriss unter SSY Bedingungen und einer Risstiefe von 2 mm ohne Vorgeschichte im Vergleich zur Lösung von Abaqus

Lösung gefunden werden, was allerdings den Aufwand für die im Folgenden durchgeführten Analysen erhöht. Grundsätzlich sind alle in Abbildung 4.4 dargestellten Dehnraten lediglich eine Näherungslösung und können gleichberechtigt verwendet werden. Im Folgenden wurden die Dehnraten eingesetzt, um die Formänderungsenergiegedichte nach Gleichung 4.2 zu berechnen. Im Zuge der numerischen Integration des Riemann-Integrals gibt es wiederum verschiedene Näherungslösungen, wobei im Folgenden ausschließlich die Simpsonregel verwendet wurde. Die daraus hervorgehenden Formänderungsenergiegedichten wurden mit den Ergebnissen der Mittelpunktsregel und SENER und PENER von Abaqus verglichen.

Abbildung 4.5 zeigt die Lösungen am exemplarischen GP nahe der Rissspitze für die Erstbelastung der Scheibe mit Tunnelriss einer Länge von 2 mm ohne Vorgeschichte. Insgesamt betrachtet stimmen alle vier Näherungslösungen nahezu überein. Die größte Abweichung ergibt sich für das Riemann-Integral unter Verwendung der Dehnrates nach dem Differenzenquotient erster Ordnung.

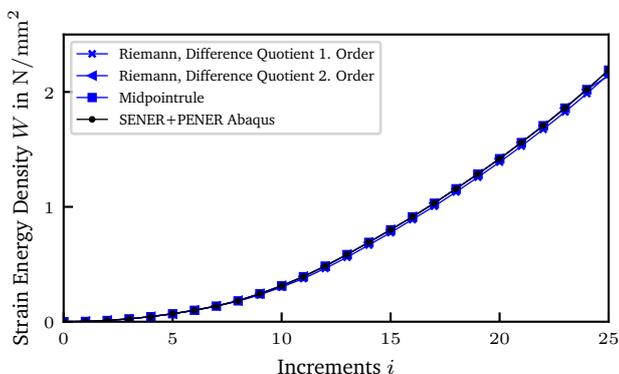


Abbildung 4.5: Vergleich der unterschiedlichen Auswertungsmethoden für die Formänderungsenergiegedichte während der Erstbelastung am Gaußpunkt 1 des ersten Elements vor der Rissspitze

Obwohl die totale Dehnrates nach diesem Verfahren exakt mit der Dehnrates ER von Abaqus übereinstimmt, kommt es zu dieser Abweichung. Das heißt, die Ursache liegt in den unterschiedlichen Verfahren der numerischen Integration. Es konnte herausgefunden werden, dass der plastische Anteil der Formänderungsenergiegedichte in Abaqus mittels der Mittelpunktsregel berechnet wird, woraus sich die Unterschiede in den Ergebnissen begründen lassen. Der elastische Anteil wird in Abaqus weiterhin über das Riemann-Stieltjes-Integral bzw. die Multiplikation der Spannungen und Dehnungen wie in Gleichung 2.14 berechnet. Gleiches Vorgehen wurde für die Ergebnisse nach der eigenen Berechnung über die Mittelpunktsregel in Abbildung 4.5 gewählt, sodass es hier zu einer exakten Übereinstimmung kommt. Die Ergebnisse des Riemann-Integrals und der Dehnrates mittels Differenzenquotient zweiter Ordnung liegen geringfügig oberhalb der Ergebnisse nach der Mittelpunktsregel und damit der Abaqus Lösung. Im letzten Inkrement, also am Rand des Intervalls, setzt sich die im Zusammenhang mit der Dehnrates angesprochene Problematik des Differenzenquotienten zweiter Ordnung fort. Durch die Unstetigkeit am Lastumkehrpunkt kommt es daher zu einer größeren Abweichung von den restlichen Verfahren. Abschließend ist noch einmal festzuhalten, dass alle dargestellten Ergebnisse zunächst einmal gleichberechtigte Näherungslösungen sind. Welche der Methoden für das übergeordnete Ziel der Berechnung einer Formänderungsenergiegedichte

mit Referenz auf einen beliebigen Zeitpunkt  $\Delta W$  in Frage kommen, um damit ein zyklisches  $J$ -Integral zu berechnen, wird im Folgenden diskutiert.

In Kapitel 3 wird das Problem der Ermittlung eines  $J$ -Integrals für elastisch-plastisches Materialverhalten unter zyklischer Beanspruchung beschrieben. Als eine hypothetische Lösung wird das Referenzieren aller Feldgrößen auf einen beliebigen Zeitpunkt vorgeschlagen. Im Zusammenhang mit der Formänderungsenergiegedichte muss es demnach ebenfalls möglich sein, ein Referenzieren durchzuführen und dabei plausible Ergebnisse zu erzielen. Die zuvor diskutierten Ergebnisse für die Erstbelastung (Inkrement 0 bis 25) der Scheibe mit Tunnelriss und einer Risstiefe von 2 mm ohne Vorgeschichte werden im Folgenden ergänzt durch eineinhalb weitere simulierte Zyklen (Inkrement 25 bis 175) mit einem  $R$ -Verhältnis von -1. Die Formänderungsenergiegedichte am GP nahe der Rissspitze ohne ein Referenzieren ist in Abbildung 4.6 (a) zu sehen. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Auswertungsmethoden sind weiterhin näherungsweise gleich. Die Anforderungen an die Methoden sind nun, dass ein Referenzieren auf bspw. den unteren Umkehrpunkt (Inkrement 75) möglich ist und sie plausible Ergebnisse für bspw. den aufsteigenden Hysteresehalbast (Inkrement 75 bis 125) liefern. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.6 (b) zu sehen.

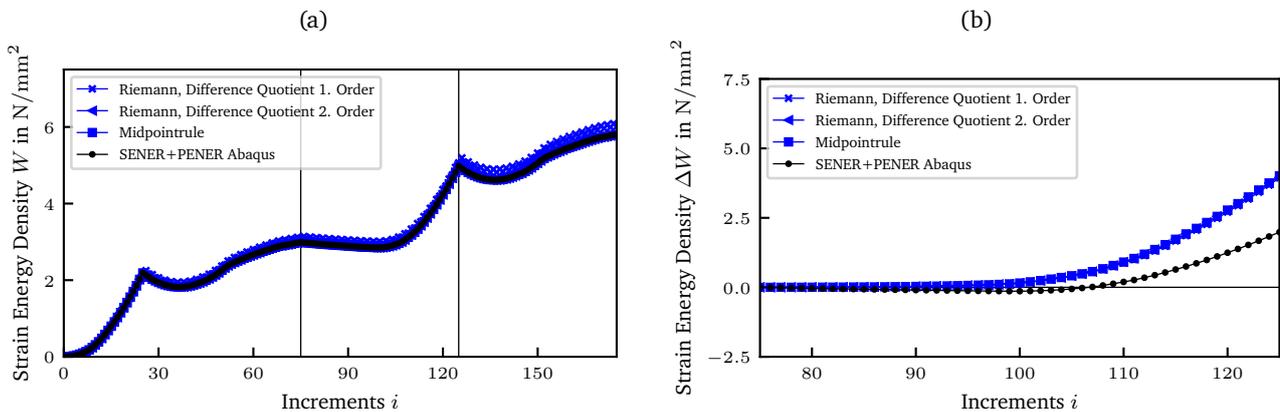


Abbildung 4.6: Vergleich der unterschiedlichen Auswertungsmethoden für die Formänderungsenergiegedichte am Gaußpunkt 1 des ersten Elements vor der Rissspitze, (a) zyklische Beanspruchung ohne Referenzieren, (b) aufsteigender Hysteresehalbast zwischen Inkrement 75 und 125 mit Referenzieren

Die Methoden Riemann-Integral und Mittelpunktsregel liefern zunächst keinen Energiebeitrag und steigen dann in ähnlichem Umfang bis auf ihren Endwert am Ende des Hysteresehalbast an. Im Fall der Lösungen von Abaqus führt ein Referenzieren auf Inkrement 75 dazu, dass die Energie zunächst leicht abnimmt und negativ wird. Dies stellt ein physikalisch unplausibles Ergebnis dar. Anschließend nimmt die Energie zwar zu und wird positiv, allerdings erreicht sie einen niedrigeren Wert am Inkrement 125 im Vergleich zu den restlichen Auswertungsmethoden.

Zusammenfassend betrachtet stellen alle diskutierten Methoden Näherungsverfahren zur Berechnung der Formänderungsenergiegedichte dar. Vor dem Hintergrund des übergeordneten Ziels der Berechnung eines zyklischen  $J$ -Integrals durch Referenzieren aller relevanten Größen auf beliebige Zeitpunkte muss die Methode allerdings physikalisch plausible Ergebnisse liefern. Daher wird die Lösung SENER und

PENER von Abaqus im Folgenden nicht weiter betrachtet. Die Lösungen auf Basis der Umwandlung der allgemeinen Gleichung 2.13 in ein Riemann-Integral bieten die Möglichkeit des Referenzierens und liefern plausible Lösungen. Allerdings treten in den Randbereichen des zu differenzierenden Intervalls hinsichtlich der Dehnraten Probleme auf, die zwar durch Konventionen gelöst werden können, aber dadurch den Aufwand in der Berechnung erhöhen. Dadurch ist vor allem die Berechnung in der Nähe von Lastumkehrpunkten, also Unstetigkeiten, vom gewählten Verfahren abhängig. Die Vorgehensweise über die Mittelpunktsregel zur Berechnung des plastischen Anteils der Formänderungsenergiedichte stimmt für monotone Belastungen mit der Lösung von Abaqus überein. Sie bietet darüber hinaus aber auch die Möglichkeit des Referenzierens und liefert physikalisch plausible Ergebnisse. Die Problematik an den Unstetigkeiten existiert in diesem Fall nicht, sodass der Berechnungsaufwand relativ gering ist. Aus diesen Gründen findet die Berechnung der Formänderungsenergiedichte im Folgenden ausschließlich auf Basis der Mittelpunktsregel statt.

### 4.2.3 Berechnung mittels des Gebietsintegrals

Zur numerischen Berechnung von  $J$  auf Basis des Linienintegrals von Rice nach Gleichung 2.25 wird eine Umwandlung in das Gebietsintegral nach Shih et al. [132], Gleichung 4.3, vorgenommen. Dadurch ist eine mit der FE Formulierung kompatible Berechnung möglich. Zudem geht eine effiziente und im Rahmen der FE genaue Vorgehensweise zur Berechnung des  $J$ -Integrals damit einher, Shih et al. [132]. Eine ausführliche Beschreibung der Hintergründe zur numerischen Auswertung mittels der Gebietsintegralmethode findet sich in Anhang D. Die Größen in Gleichung 4.3 innerhalb der ersten runden Klammer stimmen mit denen aus Gleichung 2.25 überein. Hinzu kommt eine Gewichtungsfunktion  $q_1$  sowie die Determinante der Jacobi-Matrix zur Koordinatentransformation. Anstelle des analytischen Integrals in Gleichung 2.25 tritt nun die numerische Integration mittels Gauß'scher Quadratur. Hierzu findet zunächst eine Gewichtung der Ergebnisse in der eckigen Klammer an jedem Gaußpunkt  $p$  mit den Gewichten  $w_p$  statt. Anschließend werden diese Ergebnisse innerhalb eines Elements summiert. Die Ergebnisse für jedes Element lassen sich dann für das interessierende Gebiet  $A$  summieren.

$$J = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Elemente} \\ \text{in } A}} \sum_{p=1}^n \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \det \left( \frac{\partial x_l}{\partial \eta_l} \right) \right]_p w_p \quad (4.3)$$

Die Erweiterung von Gleichung 4.3 für zyklische Beanspruchungen basiert auf der Idee von Lamba [122] für das Linienintegral nach Gleichung 2.36. Dazu werden die Spannungstensoren  $\sigma_{ij}$ , Verschiebungsvektoren  $u_i$  und die Formänderungsenergiedichte  $W$  in Gleichung 4.3 durch deren Referenzgrößen  $\Delta\sigma_{ij}$ ,  $\Delta u_i$  und  $\Delta W$  ersetzt. Daraus folgt Gleichung 4.4 für die Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals.

$$\Delta J = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Elemente} \\ \text{in } A}} \sum_{p=1}^n \left[ \left( \Delta\sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_1} - \Delta W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \det \left( \frac{\partial x_l}{\partial \eta_l} \right) \right]_p w_p \quad (4.4)$$

Durch diese Erweiterung ist es möglich, ein Referenzieren aller relevanten Feldgrößen auf einen beliebigen Zeitpunkt durchzuführen. Dadurch kann der Einfluss verschiedener Referenzzeitpunkte auf das  $J$ -Integral

im Zusammenhang mit zyklischen Beanspruchungen und Riss-schließen untersucht werden. Die Gebiete  $A$ , für die das Integral aus Gleichung 4.4 ausgewertet werden soll, können auf verschiedene Art und Weise bestimmt werden. Die verschiedenen Routen sind ebenfalls in Abbildung 4.3 dargestellt. Zum einen bietet Abaqus die Möglichkeit durch Angabe der Anzahl an Konturen die Elemente zu definieren. Dabei werden ausgehend von der Rissspitze Elementtring für Elementtring betrachtet. Dabei grenzt die Innenkante eines zusätzlichen Elementtrings immer an die Außenkante des vorherigen Elementtrings. Zum anderen können die Gebiete manuell, entweder durch Definition von Elementsets im Preprocessing oder nachträglich durch Betrachtung der Koordinaten, definiert werden. Dadurch ist die Flexibilität der Wahl von Konturen deutlich erhöht. Allerdings sind bei nicht strukturierten Vernetzungen Suchalgorithmen zum Auffinden der benachbarten Elemente nötig. Beide Wege besitzen ihre Vor- und Nachteile. Aufgrund der strukturierten Vernetzung im Fall des betrachteten Beispiels der Scheibe mit Tunnelriss spielt dies allerdings eine untergeordnete Rolle. Im Fall einer späteren Anwendung für komplexere Geometrien mit komplexeren Vernetzungen ist dieser technische Aspekt der Auswertung allerdings neu zu bewerten. Abbildung 4.7 zeigt die Definition der im Folgenden verwendeten Konturen  $\Gamma$ . Zur Übersichtlichkeit sind nur die Konturen 5, 10 und 20 dargestellt. Eine Auswertung findet für alle Konturen von 1 bis 20 statt. Kontur 1 liegt unmittelbar an der Rissspitze vor. Alle weiteren Konturen befinden sich in einem Abstand von einem Vielfachen von 0,1 mm. Demzufolge befindet sich z.B. Kontur 10 in einem Abstand von 1 mm in  $x$ - und  $y$ -Richtung von der Rissspitze. Die größte Kontur  $\Gamma = 20$  wird so gewählt, dass sie die gesamte plastische Nachlaufzone für einen Riss der Länge 2 mm umschließt.

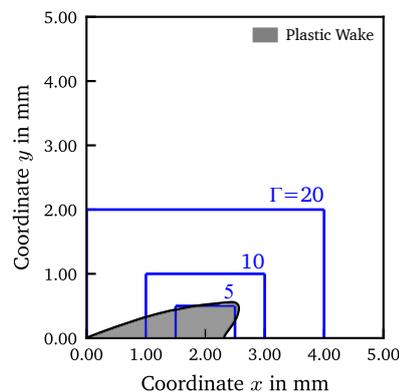


Abbildung 4.7: Lokalisierung der Konturen  $\Gamma$  zur Auswertung des Gebietsintegrals für die Scheibe mit einer Risstiefe von  $x = 2$  mm und der plastischen Nachlaufzone aus der Simulation des Risses mit Vorgeschichte

#### 4.2.4 Berechnung mittels der Konfigurationskräfte

Im Hinblick auf die Konfigurationskräfte läuft die Berechnung ähnlich zum Gebietsintegral ab. Die aus der Ergebnisdatei ausgelesenen Eingangsgrößen können in gleicher Weise genutzt werden. Ein Referenzieren aller relevanten Feldgrößen auf bestimmte Zeitpunkte ist analog zum Gebietsintegral möglich. Die Anteile der Konfigurationskräfte eines jeden Elements an einem seiner Knoten  $f_1^{\text{Elementknoten}}$  werden zunächst nach Gleichung 4.5 berechnet. Anschließend werden die Konfigurationskräfte für jeden Knoten  $f_1^{\text{Knoten}}$  aus den Ergebnissen der umliegenden Elemente nach Gleichung 4.6 assembliert. Schließlich können für ein

beliebiges Gebiet die Konfigurationskräfte an den Knoten summiert werden. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich allein auf die Komponente  $f_{k=1}$  in Rissausbreitungsrichtung (Index  $k=1$ ).

$$f_1^{\text{Elementnode}} = \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n \left( \Delta \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_1} - \Delta W \delta_{li} \right) \frac{\partial N}{\partial x_i} \det \left( \frac{\partial x_l}{\partial \eta_l} \right) w_p w_s \quad (4.5)$$

$$f_1^{\text{Node}} = \sum_{\text{Elementnode}} f_1^{\text{Elementnode}} \quad (4.6)$$

Ein Unterschied zum Gebietsintegral ist, dass die Auswertung für eine zusammenhängende Fläche stattfindet. Damit ist kein Elementring und auch keine Gewichtungsfunktion  $q$  nötig. Dies bietet den Vorteil einer höheren Flexibilität im Hinblick auf die Einbeziehung von verschiedenen interessierenden Bereichen in die Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals. Die Größe  $N$  in Gleichung 4.5 steht für die verwendeten Ansatzfunktionen der Elemente. Es ist möglich, die Konfigurationskräfte innerhalb von verschiedenen plastischen Zonen zu summieren, die eine a priori unbekannte Gestalt annehmen können. Der Nachteil ist im Umkehrschluss, dass die Auswertung zunächst für alle Knoten und Elemente stattfindet, um verschiedene Lösungen und Einflussfaktoren analysieren zu können. Sollte das Gebiet in zukünftigen Untersuchungen vorher bekannt sein, kann die Auswertung natürlich auf diesen Bereich beschränkt werden. Die angesprochenen plastischen Zonen, die im Rahmen der Dissertation untersucht werden, sind die bereits in Kapitel 2.4.3 und 2.7.3 eingeführte APZ und EPZ. Die Begründung dieser Zonen als relevantes Auswertungsgebiet für das  $J$ -Integral ist, dass sich diese Zonen gegenüber anderer plastischer Zonen mit der Risspitze durch die Struktur bewegen und daher für die Mechanismen des Rissfortschritts von Bedeutung sind. Die APZ wird in dieser Arbeit über die durch Abaqus vorliegende Zustandsgröße ACYIELD (active yielding) und die Bedingung in Gleichung 4.7 bestimmt. Nimmt diese Größe an einem Knoten den Wert eins an, liegt zu diesem Zeitpunkt an diesem Ort plastisches Materialverhalten vor. Die Menge aller Knoten an denen diese Bedingung erfüllt ist gehören zur APZ. Umgekehrt gehören die Knoten nicht zur APZ an denen ACYIELD gleich null ist, da dort zum aktuellen Zeitpunkt elastisches Materialverhalten vorliegt. Der diskrete Übergang von elastischem zu plastischem Materialverhalten durch das eingesetzte bilineare Modell, Abbildung 4.2, begünstigt zusätzlich die Zuordnung der Knoten zur APZ.

$$\begin{aligned} \text{ACYIELD} &= 1, \text{ Knoten} \in \text{APZ} \\ \text{ACYIELD} &= 0, \text{ Knoten} \notin \text{APZ} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die EPZ ergibt sich aus dem Vergleich der plastischen Vergleichsdehnungen PEEQ für zwei benachbarte Risstiefen  $a$  und  $a + \Delta a$ . Dadurch lässt sich das zyklische  $J$ -Integral durch das Gebiet definieren, welches sich durch die Änderung der plastischen Zone aufgrund von Risswachstum ergibt. Es wurden folgende zwei verschiedene Möglichkeiten, wie die Differenz berechnet werden kann, untersucht:

- a) Die im aktuellen aufsteigenden bzw. absteigenden Hysteresehalbast akkumulierte plastische Vergleichsdehnung PEEQ aus den beiden Rechnungen  $a + \Delta a$  und  $a$  werden subtrahiert. D.h. aus der Historie der durchgeführten Simulation ergibt sich  $\Delta \text{PEEQ} = \text{PEEQ}_{a+\Delta a} - \text{PEEQ}_a$ . Die Auswer-

tung der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven im Rahmen des globalen Ansatzes basiert ebenfalls auf diesen beiden Rampen, sodass für einen Vergleich der globalen und lokalen Lösung diese Definition geeignet erscheint. Zwischen diesen beiden Zuständen wird demnach die Randbedingung eines weiteren Knotens bei Minimallast gelöst und ein vollständiger Zyklus simuliert. Diese Definition wird im Folgenden als *History* bezeichnet.

- b) Im Anschluss an die Rechnung mit Risstiefe  $a$  wird ein Knoten bei Maximallast gelöst und lediglich die Gleichgewichtssiterationen durchgeführt. Die Differenz von PEEQ vor und nach dem Knotenlösen wird betrachtet. Dadurch entspricht die EPZ tendenziell eher der durch Rissfortschritt entstandenen Zone, weshalb diese Definition im Folgenden mit *Crack Growth* bezeichnet wird.

In beiden Fällen der Ermittlung der EPZ ist für eine Diskretisierung ein Schwellenwert  $\Delta\text{PEEQ}_{\text{th}}$  notwendig. Erst dadurch ist eine Zuordnung der Knoten zur EPZ und eine Abgrenzung gegenüber kleinerer Änderungen möglich. Diese können z.B. durch eine ungeeignete Wahl der Vernetzung oder durch numerische Fehler im Rahmen der FEM entstehen ohne eine physikalische Relevanz zu besitzen. Gleichung 4.8 fasst die Definition der EPZ noch einmal zusammen.

$$\begin{aligned} \Delta\text{PEEQ} &\geq \Delta\text{PEEQ}_{\text{th}}, \text{ Knoten} \in \text{EPZ} \\ \Delta\text{PEEQ} &< \Delta\text{PEEQ}_{\text{th}}, \text{ Knoten} \notin \text{EPZ} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Eine ausführlich Betrachtung verschiedener Schwellenwerte und deren Auswirkung auf das Ergebnis hinsichtlich des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals ist in Kapitel 5.2 gegeben.

#### 4.2.5 Berechnung mittels globaler Kraft-Verschiebungs-Kurven

Die bewusste Wahl des Beispiels einer Scheibe mit Tunnelriss zur Klärung der Hypothesen und der damit einhergehenden Orientierung am Ziel dieser Dissertation ermöglicht die Nutzung eines eindeutigen Lastangriffspunkts zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals auf Basis der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven. Das prinzipielle Vorgehen beruht auf der Berechnung der Energiedifferenz der gesamten Struktur zwischen zwei Konfigurationen mit benachbarten Risstiefen und ist in Kapitel 2.7.1 beschrieben. Das Vorgehen des Referenzierens der Kräfte und Verschiebungen, wie in Abbildung 2.12 allgemein dargestellt, wird für die folgenden Auswertungen übernommen. Es stellt sich allerdings in diesem Zusammenhang die Frage, welche Differenz für eine interessierende Risstiefe  $a$  zu betrachten ist. Abbildung 4.8 veranschaulicht die Problematik und stellt die Definitionen der beiden möglichen Lösungen Global + und Global – dar. Hierzu ist in (a) die Elementreihe, die direkt an den Risspfad angrenzt, zu sehen. Zur Auswertung sind die Ergebnisse aus den Simulationen mit einer Risstiefe  $a - \Delta a$ ,  $a$  und  $a + \Delta a$  notwendig, die sich jeweils um die Länge einer EEL unterscheiden. In (b) sind die globalen referenzierten Kraft-Verschiebungs-Kurven zu sehen aus denen die Energiedifferenzen  $\Delta\Pi^{\text{Global-}}$  und  $\Delta\Pi^{\text{Global+}}$  hervorgehen. Mit Gleichung 4.9 gehen demzufolge zwei Lösungen aus der Berechnung mittels des globalen Ansatzes hervor. Im Folgenden findet ebenfalls die Anwendung des Mittelwertes nach Gleichung 4.10 statt.

$$\Delta J = \frac{\Delta\Pi}{\Delta a} \quad \text{mit} \quad \Delta\Pi = \Delta\Pi^{\text{Global-}} \quad \text{oder} \quad \Delta\Pi^{\text{Global+}} \quad (4.9)$$

$$\Delta J^{\text{global,avg}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \Pi^{\text{Global-}} + \Delta \Pi^{\text{Global+}}}{\Delta a} \quad (4.10)$$

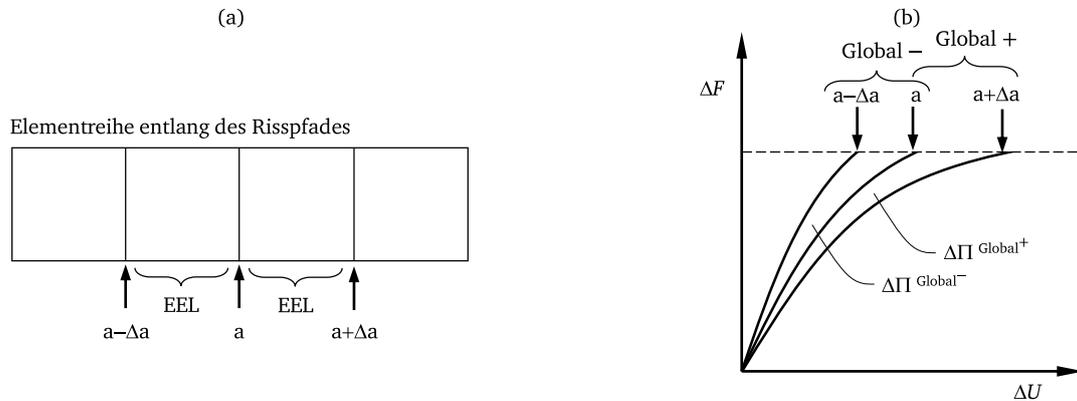


Abbildung 4.8: Definition der beiden Auswertungsoptionen Global + und Global – des globalen Ansatzes, (a) Elemente direkt an der Rissspitze  $a$ , (b) Kraft-Verschiebungs-Kurven zur Auswertung der beiden Energiedifferenzen

Die drei beschriebenen Methoden lassen sich auf das Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals anwenden. Die Ergebnisse und deren Diskussion im folgenden Kapitel ermöglichen es, die in Kapitel 3 aufgestellten Hypothesen zu bestätigen oder zu widerlegen.

## 5 Ergebnisse und Diskussion

Die Simulationen der in Kapitel 4.1 beschriebenen zyklisch beanspruchten Scheibe mit Tunnelriss bieten die Grundlage, um die Ergebnisse der lokalen und globalen Auswertungsmethoden des zyklischen  $J$ -Integrals für verschiedene Beanspruchungssituationen zu diskutieren. Zunächst werden die betrachteten, unterschiedlichen Szenarien vorgestellt.

Im Wesentlichen finden die Analysen für einen Riss der Länge  $a = 2$  mm mit und ohne Vorgeschichte unter SSY- und LSY-Bedingungen statt. Die aufgebrachte Verschiebungsamplitude im SSY-Fall beträgt 0,005 mm und im LSY-Fall 0,01 mm. Um zunächst einen Eindruck über die in diesen Beanspruchungssituationen vorliegenden plastischen Zonen zu erhalten, zeigt Abbildung 5.1 die elastischen und plastischen Gebiete in der Scheibe.

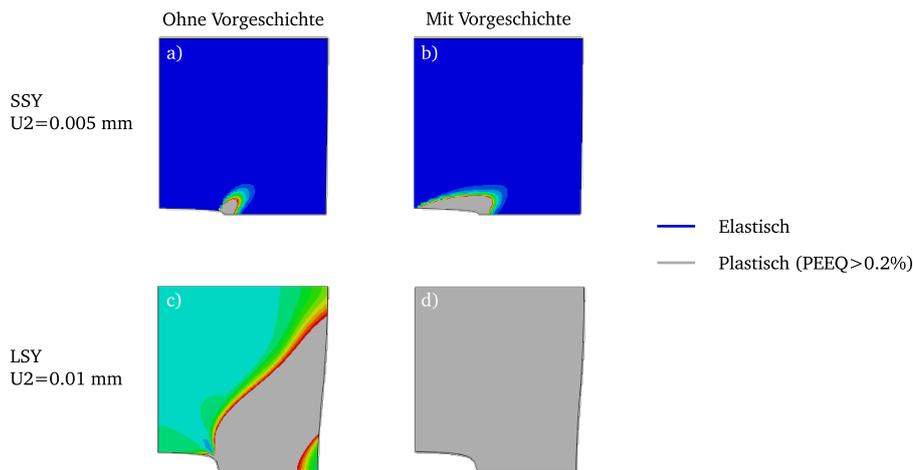


Abbildung 5.1: Übersicht über die elastischen und plastischen Gebiete in der Scheibe mit Tunnelriss für die vier untersuchten Beanspruchungssituationen. Darstellung des deformierten Zustands mit 50-facher Vergrößerung

Die plastische Zone ist aus Visualisierungsgründen als Gebiet, welches eine akkumulierte plastische Vergleichsdehnung PEEQ größer 0,2% aufweist, in grau angegeben. Die Farbe blau repräsentiert das Gebiet, in dem sich das Material rein elastisch verhält. Es ist ersichtlich, dass sich im Fall des Risses ohne Vorgeschichte unter SSY-Bedingungen, Abbildung 5.1 (a), eine plastische Zone allein vor der Risspitze ausbildet. Diese ist im Vergleich zur Risttiefe und dem Ligament klein. Sie ist vollständig von sich elastisch verhaltendem Material umgeben. Anders stellt sich die Situation im Fall des Risses mit Vorgeschichte unter SSY-Bedingungen, Abbildung 5.1 (b), dar. Hier liegt zusätzlich zur Zone vor der Risspitze eine plastische Nachlaufzone aufgrund der Berücksichtigung des Wachstums des Risses vor. Damit ist die Risspitze nicht mehr rein von sich elastisch verhaltendem Material umgeben. Unter LSY-Bedingungen stößt die plastische

---

Zone vor der Rissspitze im Fall des Risses ohne Vorgeschichte an den Rand der Scheibe, Abbildung 5.1 (c) und es existiert des Weiteren kein zusammenhängendes Gebiet um die Rissspitze in dem sich das Material rein elastisch verhält. Die Vorgeschichte des Risses und die damit verbundene plastische Nachlaufzone unter LSY-Bedingungen führt dazu, Abbildung 5.1 (d), dass die Plastizität sich über die gesamte Scheibe erstreckt. Zusätzlich zu den unterschiedlichen Anordnungen der elastischen und plastischen Gebiete fällt auf, dass die Risse unter LSY-Bedingungen weiter geöffnet sind und dass ihre Rissspitzen stumpfer sind, als unter SSY-Bedingungen. Zudem kann eine größere Einschnürung am rechten Rand der Scheibe beobachtet werden. Diese Beobachtung steht im Zusammenhang mit dem in Kapitel 5.2.2 diskutierten Einfluss der Geometrie.

Im Folgenden werden für diese vier Beispiele zunächst die Zeitpunkte zu denen der Riss öffnet und schließt bestimmt. Die Ergebnisse können anschließend genutzt werden, um ein Referenzieren aller Feldgrößen für die Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals durchzuführen. Anschließend findet ein Vergleich der verschiedenen Auswertungsmethoden im Hinblick auf die Hypothese H1 statt. Insbesondere für das Gebietsintegral findet eine Diskussion der Wegabhängigkeit der Lösung im Hinblick auf Hypothese H2 statt. Im Zusammenhang mit der Auswertung über die Konfigurationskräfte wird der Einfluss verschiedener relevanter Zonen im Hinblick auf Hypothese H3 diskutiert. Der Einfluss der Wahl des Referenzzeitpunkts respektive des Rissschließkriteriums bezüglich der Auswertungsmethoden wird diskutiert. Schließlich werden die zyklischen effektiven  $J$ -Integrale genutzt, um deren Eignung für die Beschreibung der effektiven Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze zu untersuchen und damit Hypothese H4 zu überprüfen.

## 5.1 Rissöffnen und -schließen

Das Öffnen und Schließen eines Risses ist im Allgemeinen ein kontinuierlich ablaufender Prozess. Die Rissflanke wird abhängig vom Ort zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit der gegenüberliegenden Rissflanke in Kontakt treten und damit die Rissspitze entlasten bzw. das Nahfeld an der Rissspitze beeinflussen. Um den Einfluss dennoch handhabbar zu machen und ihn in der Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals zu berücksichtigen, werden die in Kapitel 2.6.3 definierten Rissschließkriterien *CC-Force*, *1stBack* und *Front* angewendet. Das Ergebnis ist eine Vereinfachung des Prozesses als diskrete Zustandsänderung von einem geschlossenen hin zu einem geöffneten Riss und vice versa. Abbildung 5.2 zeigt anhand des Beispiels der Scheibe mit Tunnelriss unter SSY-Bedingungen und einem Riss mit Vorgeschichte, die Kraftdifferenzen und Verschiebungen, die zur Auswertung der Zeitpunkte betrachtet werden.

Beträgt die Kraftdifferenz erstmals 0 N ist der Riss vollständig geöffnet und weicht die Kraftdifferenz nach Lastumkehr erstmals von 0 N ab, beginnt der Riss zu schließen, *CC-Force*. Die Verschiebungen am ersten Knoten hinter der Rissspitze, *1stBack*, sowie am Ende der Rissflanke, *Front*, sind ebenfalls über einen Zyklus in Abbildung 5.2 dargestellt. Weichen diese von 0  $\mu\text{m}$  ab ist der Riss geöffnet und sind sie nach Lastumkehr erstmals wieder 0  $\mu\text{m}$  ist der Riss geschlossen. Allein der Unterschied zwischen den Kriterien *Front* und *1stBack* zeigt, dass Riss schließen vom Ort entlang der Rissflanke abhängt. Die Ergebnisse für alle weiteren Beanspruchungssituationen ähneln denen in Abbildung 5.2. Die sich aus dieser Betrachtung ergebenden Referenzinkremente für alle simulierten Beispiele sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Diese dienen im Folgenden zur Berechnung des effektiven Anteils des zyklischen  $J$ -Integrals.

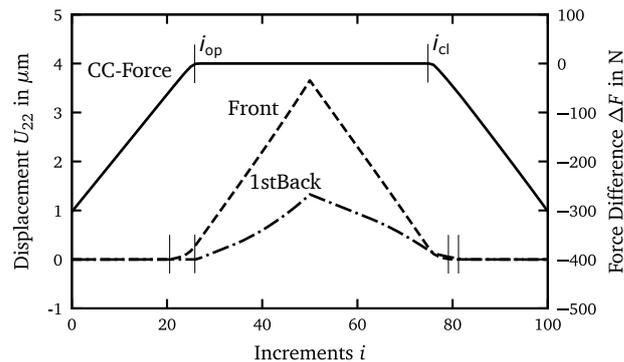


Abbildung 5.2: Auswertung der Inkremente für Rissöffnen  $i_{op}$  und -schließen  $i_{cl}$  anhand der drei Kriterien *CC-Force*, *1stBack* und *Front* am Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss und einer Risstiefe von 2 mm mit Vorgesichte

Tabelle 5.1: Inkremente für Rissöffnen  $i_{op}$  und -schließen  $i_{cl}$  anhand der drei Kriterien *CC-Force*, *1stBack* und *Front* für die verschiedenen Beanspruchungssituationen

Beanspruchungssituation	CC-Force		1stBack		Front	
	$i_{op}$	$i_{cl}$	$i_{op}$	$i_{cl}$	$i_{op}$	$i_{cl}$
SSY, Ohne Vorgesichte	25 <sup>*)</sup>	76 <sup>*)</sup>	12 <sup>*)</sup>	94 <sup>*)</sup>	24 <sup>*)</sup>	77 <sup>*)</sup>
SSY, Mit Vorgesichte	27	75	26	83	20	80
LSY, Ohne Vorgesichte	17 <sup>*)</sup>	85 <sup>*)</sup>	15 <sup>*)</sup>	86 <sup>*)</sup>	17 <sup>*)</sup>	87 <sup>*)</sup>
LSY, Mit Vorgesichte	17	84	16	85	13	89

<sup>\*)</sup> ohne die Inkremente der Erstbelastung und der Rampe bis zum unteren Lastumkehrpunkt

## 5.2 Zyklisches effektives $J$ -Integral anhand lokaler und globaler Methoden

Die Eignung der lokalen Methoden zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals, um das Ziel sich der Einschränkungen der globalen Methode zu entledigen, lässt sich auf Basis der im Folgenden beschriebenen Ergebnisse und durchgeführten Diskussion bewerten. Es findet zunächst ein Vergleich der Ergebnisse der Gebietsintegralmethode mit den Ergebnissen der globalen Methode für den Riss mit und ohne Vorgesichte unter SSY-Bedingungen statt. Dabei sind die Ergebnisse für den aufsteigenden und absteigenden Hysteresehalbast getrennt voneinander zu betrachten. Der Einfluss verschiedener Referenzzeitpunkte aus der Analyse des Rissenschließens wird charakterisiert. Neben den absoluten Werten für das zyklische effektive  $J$ -Integral ist in jedem Fall die Wegabhängigkeit der Gebietsintegralmethode zu berücksichtigen (H2). In diesem Zusammenhang stehen die anschließend diskutierten Ergebnisse auf Basis der Konfigurationskräfte. Durch diese ist eine Definition eines hypothetisch (H3) relevanten Gebietes möglich, welches für die Berechnung der Beanspruchung im Nahfeld der Risspitze zu berücksichtigen ist. Es werden die Ergebnisse für die APZ sowie verschiedene Definitionen der EPZ diskutiert. Schließlich findet ein Vergleich aller Methoden statt.

## 5.2.1 Scheibe mit Tunnelriss in SSY-Bedingungen

Abbildung 5.3 zeigt die Ergebnisse der Auswertung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals für den Riss unter SSY-Bedingungen.

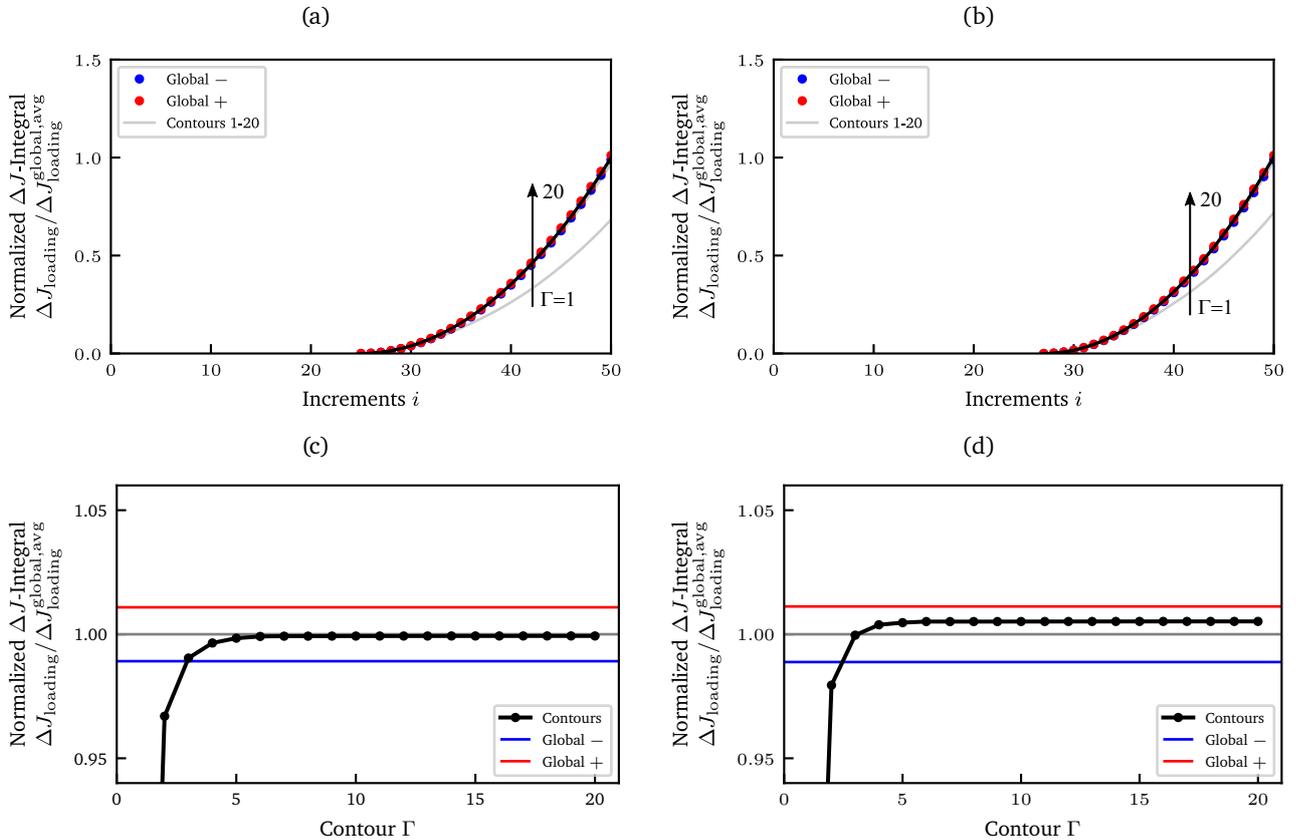


Abbildung 5.3: (a), (c): Aufsteigender Hysteresehalbst unter SSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm ohne Vorgesichte,  $\Delta J_{\text{loading}}^{\text{global,avg}} = 0,73$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 25$  (CC-Force)  
 (b), (d): Aufsteigender Hysteresehalbst unter SSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm mit Vorgesichte,  $\Delta J_{\text{loading}}^{\text{global,avg}} = 0,61$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 27$  (CC-Force)

Die beiden Darstellungen (a) und (c) in Abbildung 5.3 zeigen die Ergebnisse für den Riss ohne Vorgesichte. Die Normierung wurde mittels der gemittelten Lösung des globalen Ansatzes Global + und Global – bei Maximallast durchgeführt. In der Darstellung (a) ist der Verlauf des  $J$ -Integrals über der Anzahl an Inkrementen  $i$  zu sehen. Die Darstellung (c) zeigt die Ergebnisse des Gebietsintegrals für die einzelnen Konturen im Vergleich zu den Lösungen des globalen Ansatzes. In gleicher Art und Weise zeigen die Darstellungen (b) und (d) die Ergebnisse für den Riss mit Vorgesichte. Grundsätzlich ist festzuhalten, dass das  $J$ -Integral ab dem Zeitpunkt des Rissöffnens bis zur Maximallast zunimmt. Das exemplarisch gewählte Kriterium für Rissöffnen in beiden Fällen ist CC-Force. Die Lösungen des globalen Ansatzes Global – und Global + sind ähnlich, wobei die Lösung Global + ca. 2% größer als die Lösung Global – ist.

Die Lösungen der Gebietsintegralmethode für die unterschiedlichen Konturen sind untereinander, abgesehen von der ersten Kontur, ähnlich, sodass eine Unterscheidung der Linien in Abbildung 5.3 (a) und (b) kaum möglich ist. Die Kontur eins sollte laut der Dokumentation von Abaqus [96] aufgrund numerischer Ungenauigkeiten generell von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Die Ergebnisse zum Zeitpunkt der Maximallast in Abbildung 5.3 (c) und (d) ermöglichen eine Bewertung der Wegabhängigkeit der Lösungen der Gebietsintegralmethode. Das zyklische effektive  $J$ -Integral nimmt mit größer werdender Kontur zu. Ab Kontur zwei ist die Abweichung zur gemittelten globalen Lösung kleiner 5%. Die Lösung ändert sich ab Kontur fünf kaum und konvergiert gegen eine wegunabhängige Lösung. Die Beobachtungen treffen auf den Riss mit und ohne Vorgeschichte zu. Ein Unterschied ist, dass die Lösung für den Riss ohne Vorgeschichte gegen den Mittelwert der globalen Lösung konvergiert und die Lösung für den Riss mit Vorgeschichte oberhalb der mittleren globalen Lösung liegt. Es ist wichtig zu berücksichtigen, dass im Rahmen der Dissertation die Konsistenz der Methoden und die sich daraus ergebenden Möglichkeiten im Fokus stehen. Die absoluten Ergebnisse stehen nicht im Fokus der Betrachtungen.

In Abbildung 5.3 kommt aus Gründen der Vergleichbarkeit allein das Rissschließkriterium  $CC$ -Force zum Einsatz. Um den Einfluss verschiedener Referenzinkremente auf das zyklische effektive  $J$ -Integral einzuschätzen, werden im Folgenden die mittlere globale Lösung und die Lösung der Gebietsintegralmethode anhand von Kontur 20 betrachtet. Wie in Abbildung 4.7 dargestellt, umschließt diese Kontur die plastische Zone vor der Risspitze wie auch die gesamte plastische Nachlaufzone und sollte daher mit der Lösung des globalen Ansatzes übereinstimmen. Abbildung 5.4 zeigt das normierte  $J$ -Integral für den aufsteigenden Hysteresehalbast ermittelt mit verschiedenen Referenzinkrementen.

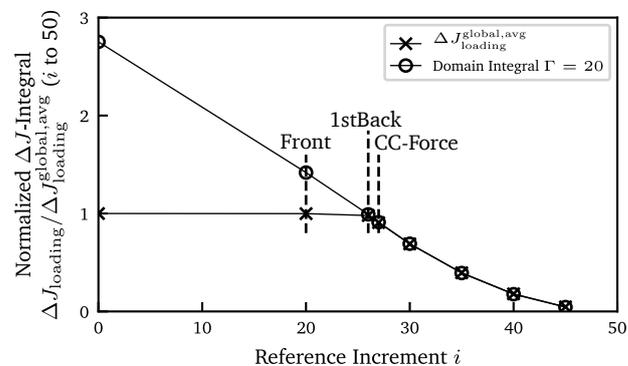


Abbildung 5.4: Zyklisches effektives  $J$ -Integral bei Maximallast für verschiedene Referenzinkremente ausgewertet mit dem globalen Ansatz und der Gebietsintegralmethode

Dabei ist zu beobachten, dass die Referenz auf den unteren Umkehrpunkt im Zyklus ( $i = 0$ ) zu Abweichungen zwischen der globalen und lokalen Methode führt. Im globalen Ansatz ergibt sich näherungsweise das gleiche Ergebnis für alle Referenzinkremente kleiner den Rissöffnungsinkrementen, welche mittels der Kriterien  $1stBack$  und  $CC$ -Force ermittelt wurden. Diese Beobachtung findet sich für zahlreiche Anwendungsbeispiele in den Arbeiten von Kontermann et al. [1] und Garnadt et al. [2] wieder. Dadurch, dass der Riss zu Beginn des aufsteigenden Hysteresehalbast bei einem  $R$ -Verhältnis von -1 geschlossen ist, ist die Energiedifferenz zwischen zwei benachbarten Risstiefen Null. Erst ab dem Zeitpunkt des Rissöffnens entsteht ein Beitrag zum zyklischen  $J$ -Integral, dessen Wert am Ende des aufsteigenden Hysteresehalbast

---

direkt näherungsweise dem Effektivwert entspricht. Die Lösung der Gebietsintegralmethode weicht für die Referenz auf den unteren Umkehrpunkt ( $i = 0$ ) um Faktor drei von der globalen Lösung ab. Die Abweichung für spätere Referenzinkremente nimmt ab, ist allerdings für das Riss-schließkriterium *Front* immer noch vorhanden. Ab dem Referenzinkrement *1stBack* ( $i = 26$ ) und *CC-Force* ( $i = 27$ ) stimmen die lokale und globale Lösung dann für alle folgenden Referenzinkremente überein. Die Rissflanken sind ab diesem Zeitpunkt vollständig unbelastet, sodass die Gültigkeitskriterien für das  $J$ -Integral erfüllt sind und dieses dadurch näherungsweise wegunabhängig ist. Dadurch ist ein Beleg für die Hypothese H1 und H2 zumindest für den aufsteigenden Hysteresehalbast und SSY-Bedingungen gegeben.

Nach Lastumkehr im Zyklus lässt sich ebenfalls ein zyklisches effektives  $J$ -Integral berechnen, indem alle Feldgrößen sowie globale Kräfte und Verschiebungen auf den oberen Umkehrpunkt referenziert werden. Der Riss ist zu Beginn des absteigenden Hysteresehalbasts vollständig geöffnet und die Rissflanken sind demnach lastfrei. In Abbildung 5.5 sind die Ergebnisse in gleicher Art und Weise wie für den aufsteigenden Hysteresehalbast dargestellt. In den Darstellungen (a) und (b) ist für den Riss ohne und mit Vorgeschichte gleichermaßen eine Zunahme mit der Anzahl an Inkrementen zu beobachten. Die globalen Lösungen *Global +* und *-* sind ähnlich, wobei die Lösung *Global +* ca. 2% größer ist. Der Referenzwert ist auch in diesem Fall der Mittelwert der globalen Lösungen. Allerdings nicht zum Zeitpunkt der Minimallast, sondern zum Zeitpunkt des Riss-schließens, welcher hier ebenfalls durch das Kriterium *CC-Force* ( $i = 75$ ) gegeben ist. Die Lösungen der Gebietsintegralmethode bis zu diesem Zeitpunkt sind abgesehen von der ersten Kontur an der Riss-spitze näherungsweise wegunabhängig. In den Darstellungen (c) und (d) ist zu sehen, dass die Abweichungen von lokaler und globaler Lösung kleiner 5% sind. Bereits ab der dritten Kontur stimmen die Lösungen der Gebietsintegralmethode mit dem Mittelwert der globalen Lösungen überein, sowohl für den Riss mit und ohne Vorgeschichte. Über den Zeitpunkt des Riss-schließens hinaus tritt entlang der Rissflanken sukzessive Kontakt auf. Dies führt dazu, dass das Gebietsintegral wegababhängig wird und von der globalen Lösung abweicht, wie in Abbildung 5.5 (a) und (b) zu sehen ist. Der Beginn der Abweichung und die beginnende Wegabhängigkeit können neben den bisherigen Riss-schließkriterien ebenfalls verwendet werden, um den Riss-schließzeitpunkt zu bestimmen. Der Vergleich der zyklischen effektiven  $J$ -Integrale für den auf- und absteigenden Hysteresehalbast, sowohl für den Riss mit und ohne Vorgeschichte, zeigt höhere Werte für den absteigenden Hysteresehalbast. Eine ausführlichere Analyse und Diskussion der Bedeutung für das effektive Beanspruchungsnahfeld in der Nähe der Riss-spitze erfolgt im Kapitel 5.3. Somit ist des Weiteren ein Beleg für die Hypothese H1 und H2 auch für den absteigenden Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen gegeben.

Obwohl die Lösungen der Gebietsintegralmethode und des globalen Ansatzes konsistent sind, ist das  $J$ -Integral aufgrund der dissipativen Anteile durch Plastizität streng genommen nicht gültig. Die physikalische Interpretation als Beanspruchung am Ort der Riss-spitze und der damit zugeschriebenen Bedeutung als „risstreibende“ Kraft oder Energiefreisetzungsrate, wie im Kapitel 2 anhand einer nichtlinear elastischen Betrachtung erläutert, ist nicht zutreffend. Dennoch kann es einen geeigneten Parameter zur Beschreibung des effektiven Beanspruchungsfeldes nahe der Riss-spitze darstellen. Die mit der physikalischen Interpretation zwangsläufig einhergehende Frage insbesondere für die Anwendung der lokalen Auswertungsmethoden ist, welcher Bereich außer der Riss-spitze in der Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals zu berücksichtigen ist. Das Kapitel konnte bisher am Beispiel der SSY-Bedingungen zeigen, dass die Konsistenz zwischen dem globalen Ansatz und der Gebietsintegralmethode ab einer gewissen

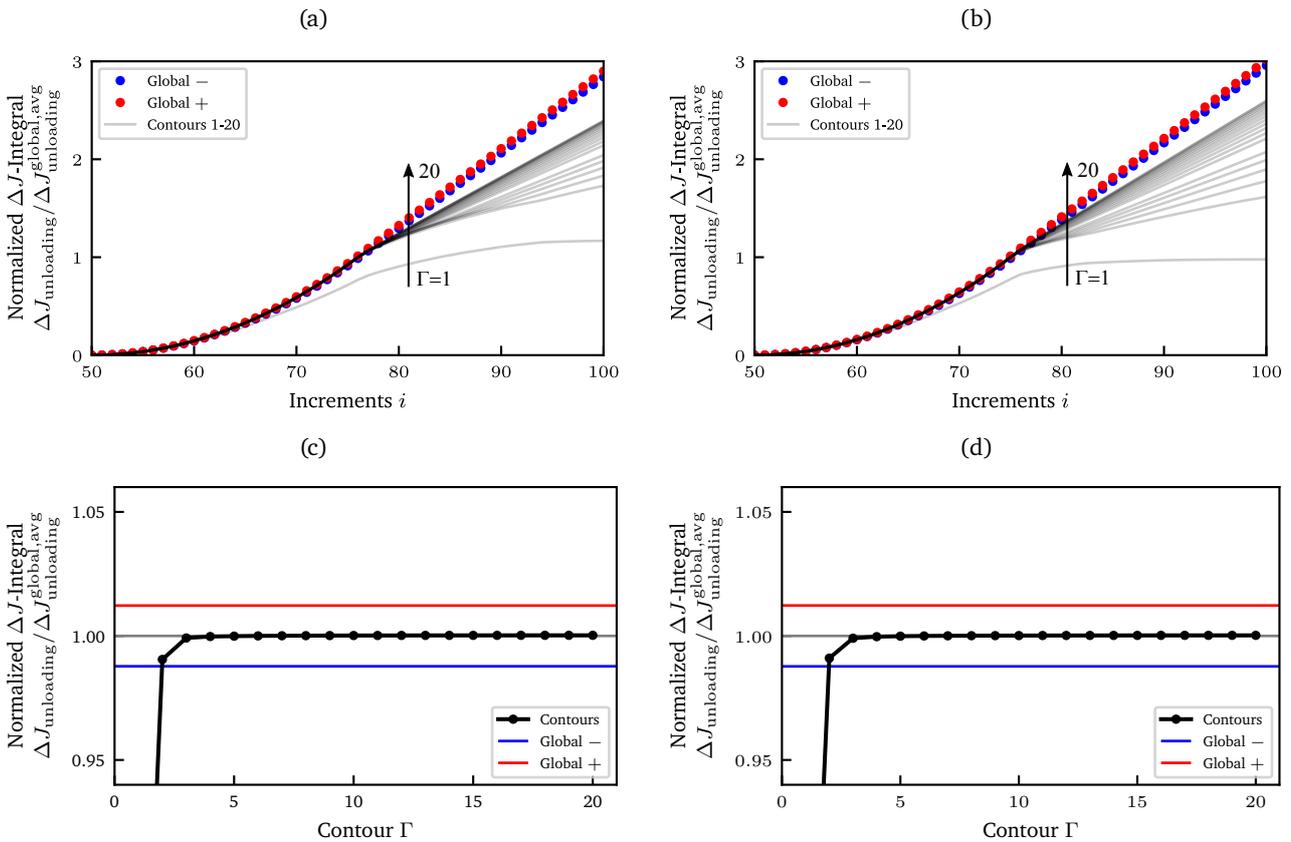


Abbildung 5.5: (a), (c): Absteigender Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm ohne Vorgeschichte,  $\Delta J_{\text{unloading}}^{\text{global,avg}} = 0,77$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 76$  (CC-Force)  
 (b), (d): Absteigender Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm mit Vorgeschichte,  $\Delta J_{\text{unloading}}^{\text{global,avg}} = 0,71$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 75$  (CC-Force)

Kontur vorliegt, insofern lediglich der geöffnete Riss betrachtet und ein Referenzieren aller Feldgrößen auf die entsprechenden Zeitpunkte durchgeführt wird. Es ist allerdings unklar, wie groß diese Kontur zu wählen ist. Ein Ansatz könnte sein, die Kontur entsprechend so zu wählen, dass sie die plastische Zone sowohl vor als auch hinter der Risspitze umschließt. Allerdings ist dies aufgrund der Geometrie einer Struktur oder höherer Beanspruchungen und damit u.U. LSY-Bedingungen nicht immer möglich. Obwohl im Folgenden auch LSY-Bedingungen analysiert werden, findet die Betrachtung von physikalisch sinnvoll begründeten Gebieten und damit der Hypothese H3 zunächst anhand der SSY-Bedingungen und dem Riss mit Vorgeschichte statt.

Ein aus Sicht des Autors plausibler Ansatz, der in Kapitel 2.4.3 beschrieben wurde, ist die Betrachtung der Kombination aus Risspitze und der mit ihr unmittelbar zusammenhängenden APZ. Findet also eine Berechnung des  $J$ -Integrals auf Basis der Konfigurationskräfte für dieses Gebiet statt, ist eine physikalisch plausible Interpretation als treibende Kraft für die kombinierte Bewegung von Risspitze und der mit ihr zusammenhängenden plastischen Zone möglich. Stimmt die Lösung darüber hinaus mit der Lösung des Gebietsintegrals und des globalen Ansatzes überein, kann auch für diese Methoden von der gleichen

---

physikalischen Interpretation ihrer Lösungen ausgegangen werden. Die APZ als relevantes Gebiet ist im Fall der LSY-Bedingungen allerdings nur dann geeignet, falls diese nicht mit den Rändern der Struktur interagiert. Dies würde zusätzliche dissipative Anteile im  $J$ -Integral hervorrufen, die nichts mit der Beanspruchung im Nahfeld der Riss Spitze zu tun hätten. Daher wird im Folgenden ein weiteres physikalisch begründetes Gebiet, die EPZ, zunächst auch für den Fall der SSY-Bedingungen herangezogen. Aufgrund der Unbekanntheit der sich im Einzelfall ausbildenden APZ und EPZ und der unterschiedlichen Definitionen mit unbekanntem Schwellenwert kommt aus Gründen der Flexibilität während der Auswertung im Folgenden das Konzept der Konfigurationskräfte zum Einsatz. Die Anwendung der Gebietsintegralmethode ist theoretisch weiterhin möglich. Allerdings ergeben sich durch die teils unregelmäßigen Formen, z.B. hinsichtlich einer Definition der Gewichtungsfunktion  $q$ , technische Herausforderungen für die Umsetzung.

Wie in Kapitel 4.2 beschrieben, wird die Idee des Referenzierens auch für die Berechnung der Konfigurationskräfte genutzt. Auch hier können wieder die verschiedenen Riss schließkriterien angewendet werden. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wird allerdings weiterhin das Kriterium *CC-Force* eingesetzt. Die Möglichkeit der Methode der Konfigurationskräfte, das  $J$ -Integral für beliebige Gebiete zu berechnen, wird genutzt, um die Ergebnisse für verschiedene relevante Gebiete wie die APZ oder EPZ miteinander zu vergleichen und Hypothese H3 zu überprüfen. Bezüglich der EPZ werden die Ergebnisse für die in Kapitel 4.2 gegebenen Definitionen *History* und *Crack Growth* und verschiedene Schwellenwerte diskutiert. Die Darstellung der Ergebnisse sowie deren Diskussion findet ausschließlich für den Riss mit Vorgeschichte statt, da hier die Auswirkungen der inkrementellen Plastizitätstheorie in Form der plastischen Nachlaufzone vollständig zum Tragen kommen und sich die Frage nach der relevanten Zone insbesondere stellt. Der Einfluss der Diskretisierung auf die Größe und Form der APZ und EPZ sowie die Auswirkungen auf das zyklische  $J$ -Integral sind darüber hinaus Gegenstand der Diskussion. Abschließend findet die Überprüfung der Konsistenz mit den bisherigen Ergebnissen der Gebietsintegralmethode sowie des globalen Ansatzes statt.

### Anwendung des Konzepts der Konfigurationskräfte

Abbildung 5.6 zeigt die Größe und Form der APZ (a) und EPZ (b)/(c) an der Riss Spitze ( $x = 2$  mm) für die EEL 0,1 mm. Die Linien umschließen die Menge an Knoten an denen die Bedingungen aus Kapitel 4.2 erfüllt sind. In (b) ist die EPZ nach der Definition *History* und in (c) nach der Definition *Crack Growth* jeweils für drei verschiedenen Schwellenwerte  $\Delta PEEQ_{th}$  dargestellt. Der betrachtete Zeitpunkt ist zum einen das Auftreten der Maximallast ( $i = 50$ ), für eine Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals im aufsteigenden Hysteresehalbast, und zum anderen zum Zeitpunkt des Riss schließens (*CC-Force*,  $i = 75$ ), für eine Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals im absteigenden Hysteresehalbast. Die EPZ nach der Definition *Crack Growth* ist in (c) lediglich zum Zeitpunkt der Maximallast dargestellt, da dies den unterstellten physikalischen Hintergrund dieser Definition bildet.

Die APZ und EPZ unterscheiden sich in ihrer Größe und Form abhängig von ihrer Definition und dem betrachteten Zeitpunkt. Aufgrund der EEL von 0,1 mm sind die Linien stufig, was für eine zunächst grundsätzliche Betrachtung eine untergeordnete Rolle spielt. Die APZ, Abbildung 5.6 (a), ist zum Zeitpunkt des Riss schließens kleiner als zum Zeitpunkt der vorliegenden Maximallast. Die Ursache ist das nach Lastumkehr zunächst auftretende elastische Materialverhalten. Bis zum Riss schließzeitpunkt liegt des

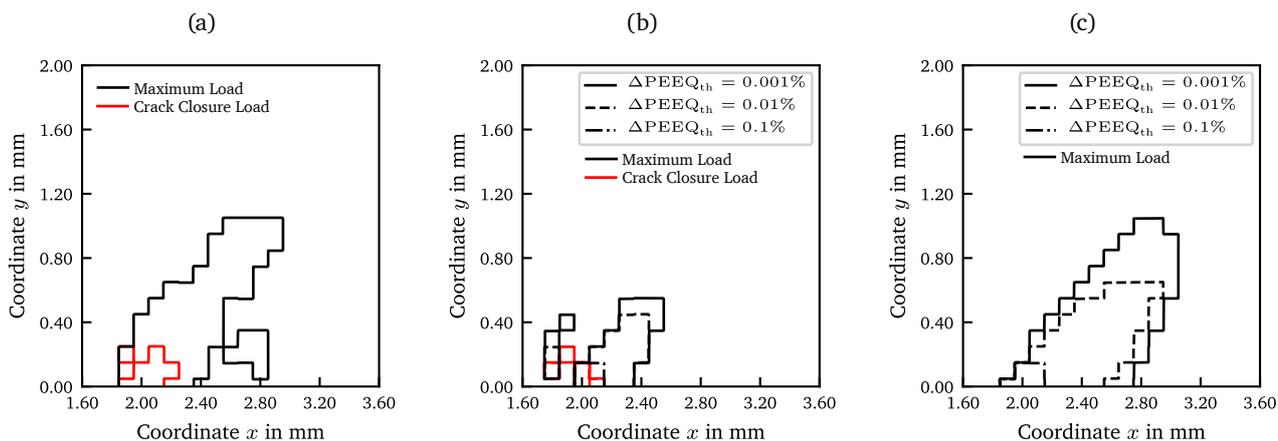


Abbildung 5.6: Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge  $a = 2$  mm in SSS-Bedingungen zum Zeitpunkt der Maximallast und des Rissenschließens. (a) APZ, (b) EPZ nach der Definition *History* und (c) EPZ nach der Definition *Crack Growth*. EPZs für drei verschiedene exemplarische Schwellenwerte  $\Delta PEEQ_{th}$ .  $EEL = 0,1$  mm

Weiteren nur in einem begrenzten Bereich nahe der Risssspitze plastisches Verhalten vor. In ihrer Form erstreckt sich die APZ bei Maximallast tendenziell in einem Winkel von ca.  $45^\circ$  zur Symmetrieebene bis zu 1 mm vor die Risssspitze. Im Vergleich zur APZ ist die EPZ nach der Definition *History*, Abbildung 5.6 (b), und den dargestellten Schwellenwerten kleiner. Die Unterschiede zwischen den beiden Zeitpunkten sind ähnlich wie für die APZ. Allerdings ergeben sich zusätzlich hinter der Risssspitze kleine Bereiche, an denen die Schwellenwerte überschritten werden. Umso kleiner der Schwellenwert ist, umso größer wirken sich Einflüsse der Diskretisierung auf die Detektion der EPZ aus. Somit kann die Auflösung der großen Gradienten in den plastischen Dehnungen nahe der Risssspitze mit einer EEL von 0,1 mm die Ergebnisse beeinflussen. Des Weiteren findet im Rahmen der Definition *History* die Simulation von eineinhalb Zyklen zwischen den beiden Dehnungszuständen statt, wodurch die Bereiche hinter der Risssspitze hervorgerufen werden könnten. Nach der Definition *Crack Growth* in Abbildung 5.6 (c) zeigen sich diese „Artefakte“ nicht. Diese EPZ ist für die jeweils gleichen Schwellenwerte gegenüber der Definition *History* größer. In ihrer Form ähnelt sie den bisher beschriebenen Zonen. Grundsätzlich wird die EPZ unabhängig von ihrer Definition mit zunehmendem Schwellenwert kleiner und zieht sich immer mehr auf die Risssspitze zusammen. Das zyklische  $J$ -Integral folgt schließlich aus der Summation der Konfigurationskräfte an den Knoten für die diskutierten EPZs nach Gleichung 4.6 mit Gleichung 4.5. Die Abhängigkeit der Lösungen von den unterschiedlichen Definitionen und dem Schwellenwert ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Aufgrund der absoluten Unterschiede zwischen aufsteigendem und absteigendem Hysteresehalbst sowie der Definition *History* und *Crack Growth* sind die Ergebnisse für eine isolierte Betrachtung der Schwellenwertabhängigkeit normiert. Die Bezugsgröße ist das Ergebnis für  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$ . Eine Diskussion der Absolutwerte zusammen mit den Ergebnissen auf Basis der APZ findet am Ende dieses Kapitels statt.

Alle Ergebnisse in Abbildung 5.7 bis zu einem Schwellenwert von ca. 0,1% liegen in einem Bereich von  $\pm 1\%$  Abweichung zum jeweiligen Bezugswert. Ausgehend vom Schwellenwert 0,001% sind die Lösungen zunächst für beide Definitionen der EPZ und für sowohl den auf- als auch den absteigenden Hysteresehalbst unabhängig vom Schwellenwert. Nach der Definition *History* zeigt sich für den aufsteigenden Hystere-

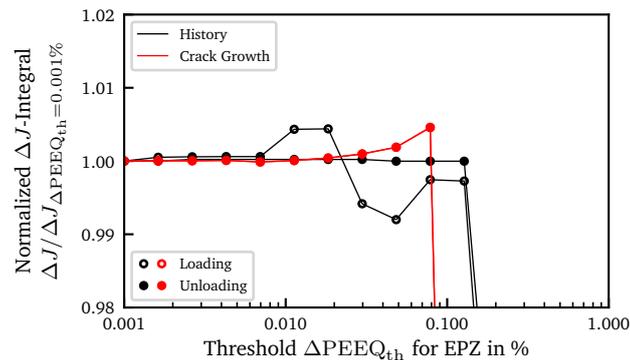


Abbildung 5.7: Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen  $J$ -Integrale vom Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,1 mm. SSY-Bedingungen

sehalbast eine Abhängigkeit beginnend mit einem Schwellenwert von ca. 0,01%. Das Ergebnis für den absteigenden Hysteresehalbast bleibt weiterhin nahezu konstant. Nach der Definition *Crack Growth* zeigt sich bezüglich der Abhängigkeit vom Schwellenwert für beide Hysteresehalbäste kaum ein Unterschied. Mit zunehmendem Schwellenwert nehmen die zyklischen  $J$ -Integrale in beiden Fällen leicht zu. Mit einem Schwellenwert von ca. 0,1% ist die EPZ nach allen Definitionen bereits vergleichsweise klein und auf die Risspitze beschränkt, wie in Abbildung 5.6 (b) und (c) zu sehen. Noch größere Schwellenwerte führen zu einer verschwindenden EPZ, sodass die Lösungen für das zyklische  $J$ -Integral daher ebenfalls stark abnehmen und schließlich verschwinden.

Der bisherigen Diskussion von verschiedenen hypothetisch (H3) physikalisch relevanten Gebieten im Rahmen des Konzepts der Konfigurationskräfte liegt eine EEL von 0,1 mm zugrunde. Es folgt eine erweiterte Diskussion des Einflusses der EEL auf die Größe und Form der APZ und EPZ. Ein in diesem Zusammenhang relevanter Unterschied zwischen APZ und EPZ ist, dass sich erstere anhand der Simulation der interessierenden Risstiefe allein für verschiedene EEL ermitteln lässt. Das Ergebnis bei Maximallast für die EEL 0,1, 0,05 und 0,01 mm zeigt Abbildung 5.8 (a).

Mit kleiner werdender EEL konvergiert die Größe und Form der APZ zu einem einheitlichen Gebiet. Durch die höhere Auflösung nimmt die Stufigkeit der Linien ab und es werden zusätzliche Eigenschaften, wie die beiden „Ohren“ sichtbar. Die EPZ erfordert hingegen die Simulation von zwei benachbarten Risstiefen. Die folgende Diskussion findet anhand der Definition *Crack Growth* statt. Vom Prinzip trifft sie in gleicher Art und Weise auch auf die Definition *History* zu. Zur Ermittlung der EPZ (*Crack Growth*) ist nach der Definition aus Kapitel 4.2 die Randbedingung eines Knotens bei Maximallast zu lösen. Die Differenz der plastischen Vergleichsdehnungen vor und nach „Risswachstum“ ( $\Delta a = EEL$ ) hängt demnach direkt von der EEL ab. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.8 (b) für einen konstanten Schwellenwert von 0,01%. Durch die kleineren Dehnungsdifferenzen mit kleinerer EEL ist die EPZ demzufolge kleiner. Um einen Vergleich von verschiedenen EEL vorzunehmen, sind daher gleiche Rissfortschrittsinkremente, wie z.B.  $\Delta a = 0,1$  mm, zu betrachten. Demnach sind für eine EEL von 0,1 mm die Randbedingungen eines Knotens zu lösen und z.B. für eine EEL von 0,01 mm dementsprechend zehn Knoten.

Die sich aus diesem Schema ergebenden EPZs für verschiedene EEL zeigt Abbildung 5.8 (c). Demnach fällt die Größe und Form der EPZ zu einem einheitlichen Gebiet zusammen.

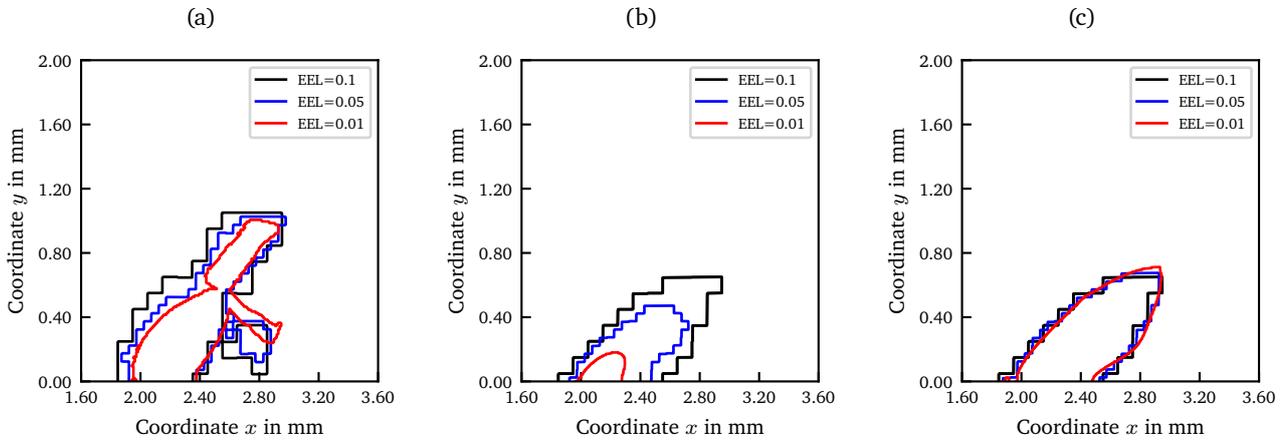


Abbildung 5.8: Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge  $a = 2$  mm in SSS-Bedingungen für verschiedene EEL zum Zeitpunkt der Maximallast. (a) APZ, (b) und (c) EPZ nach der Definition *Crack Growth* für einen konstanten Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th} = 0,01\%$ . Differenz der Risstiefe in (b)  $\Delta a = EEL$  und in (c)  $\Delta a = 0,1$  mm

Die Abhängigkeit der zyklischen  $J$ -Integrale vom Schwellenwert für eine EEL von 0,01 mm zeigt Abbildung 5.9. Die Ergebnisse für die EPZs sind auf der Grundlage von (a)  $\Delta a = EEL$  und (b)  $\Delta a = 0,1$  mm dargestellt. Dadurch ist ein Vergleich mit der Abhängigkeit für die EEL 0,1 mm, Abbildung 5.7, möglich.

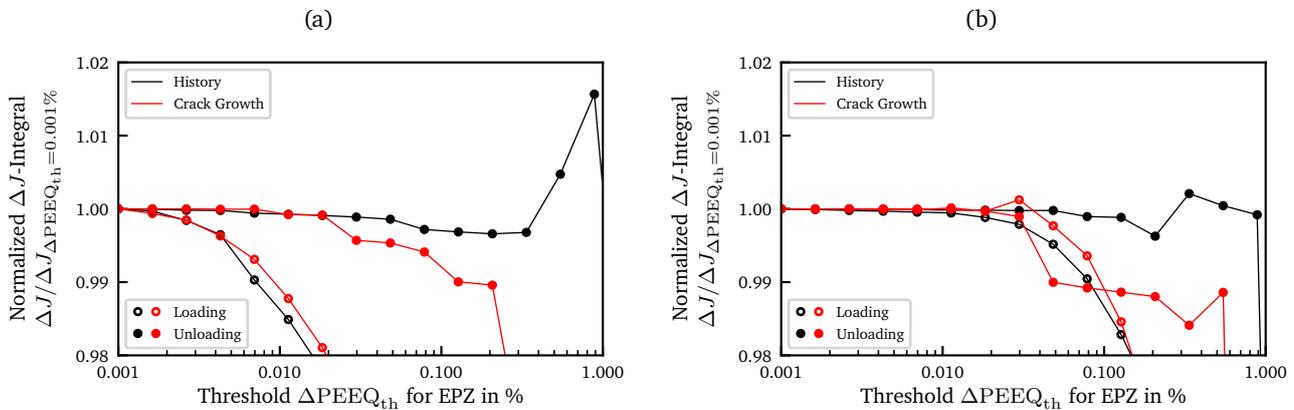


Abbildung 5.9: Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen  $J$ -Integrale vom Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,01 mm. (a)  $\Delta a = EEL = 0,01$  mm und (b)  $\Delta a = 0,1$  mm

Das Intervall der Schwellenwerte für welches die Ergebnisse eine Abweichung von weniger als  $\pm 1\%$  vom Bezugswert aufweisen ist für EEL 0,01 mm kleiner. Durch das Lösen der Randbedingungen von nur einem Knoten, Abbildung 5.9 (a), nimmt das zyklische  $J$ -Integral für den aufsteigenden Hysteresehalbast mit zunehmendem Schwellenwert ab. Dies ist sowohl für die Definition *History* als auch *Crack Growth* der Fall. Nahe zu gleich bleiben die Ergebnisse für den absteigenden Hysteresehalbast bis zu einem Schwellenwert

von ca. 0,03%. Im Unterschied dazu sind die Ergebnisse für  $\Delta a = 0,1$  mm, Abbildung 5.9 (b), sowohl für den auf- als auch für den absteigenden Hysteresehalbast bis zu ungefähr diesem Schwellenwert konstant. Im Hinblick auf eine Anwendung der EPZ ist die Anzahl an Knoten, deren Randbedingungen zu lösen sind, unbekannt. Als physikalisch sinnvoll könnte ein aus Messungen ermitteltes Rissfortschrittsinkrement pro Zyklus erachtet werden. Des Weiteren ist zu klären, ob ein bestimmter Schwellenwert für die plastische Vergleichsdehnung physikalisch begründbar ist. Auf Basis der durchgeführten Diskussion, führt ein Schwellenwert von kleiner 0,01% auf nahezu schwellenwertunabhängige Ergebnisse unabhängig von der Definition der EPZ und der Größe der EEL.

In Verbindung mit der EEL können sich neben der Größe und Form der APZ und EPZ auch die Werte der Konfigurationskräfte sowie deren Ort des Auftretens ändern. Mit der folgenden Analyse einer physikalischen Begründung für ein bestimmtes relevantes Auswertungsgebiet lässt sich die Hypothese H3 bestätigen.

Abbildung 5.10 zeigt jeweils im Hintergrund die an jedem Knoten berechneten Absolutwerte der Konfigurationskräfte und im Vordergrund die Umrisse der APZ und EPZ nach der Definition *Crack Growth* und einem Schwellenwert von 0,01%, wie sie auch aus Abbildung 5.8 hervorgehen.

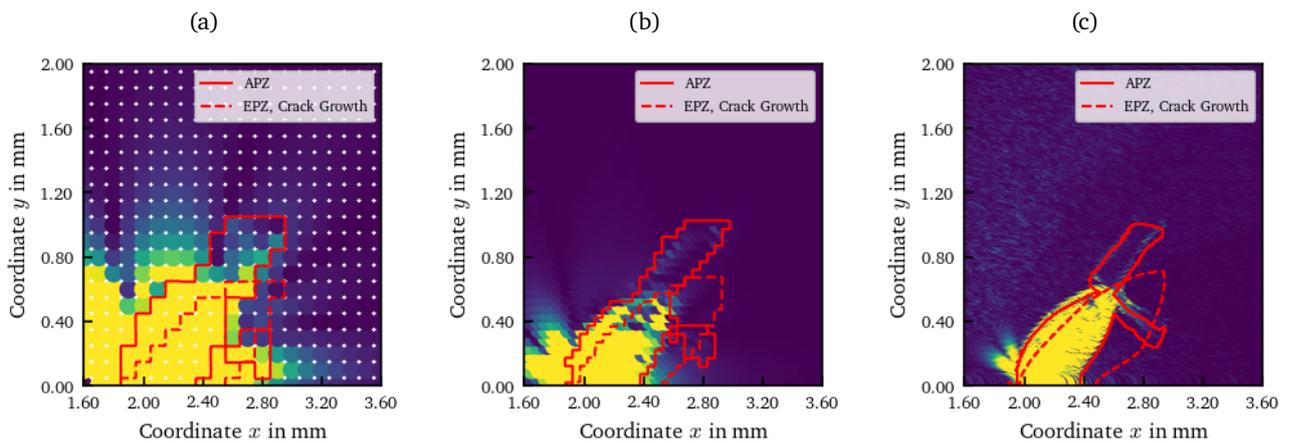


Abbildung 5.10: Lokalisierung der Konfigurationskräfte in  $x$ -Richtung an Knoten (betragsweise), gelb – hohe Werte, blau – niedrige Werte, zum Zeitpunkt der Maximallast für die verschiedenen EEL (a) 0,1 mm, (b) 0,05 mm und (c) 0,01 mm, sowie die jeweilige APZ und EPZ (*Crack Growth*,  $\Delta PEEQ_{th} = 0,01\%$ ,  $\Delta a = 0,1$  mm)

Dabei sind in (a)-(c) die Ergebnisse für die drei unterschiedlichen EELs dargestellt. Die Konfigurationskräfte für EEL 0,1 mm, Abbildung 5.10 (a), erstrecken sich über einen relativ großen Bereich nahe der Rissspitze. Es treten sowohl vor als auch hinter der Rissspitze Konfigurationskräfte auf. Lediglich die sich im Inneren der APZ bzw. EPZ befindlichen Kräfte werden für die Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals summiert. Die APZ deckt im Vergleich zur EPZ einen größeren Bereich ab in dem Konfigurationskräfte vorliegen. Mit kleinerer EEL, Abbildung 5.10 (b) und (c), verschwinden die Bereiche in denen Konfigurationskräfte hinter der Rissspitze vorliegen zunehmend. Zudem bildet sich eine Zone vor der Rissspitze, die in ihrer Größe und Form annähernd der APZ gleicht. Die EPZ umschließt diese Zone nur teilweise. Aus dieser Betrachtung kann geschlussfolgert werden, dass die APZ ein physikalisch sinnvoll begründetes Gebiet für

die Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals unter Berücksichtigung von Riss-schließeffekten darstellt. Die Hypothese H3 kann damit für das Beispiel einer Scheibe mit Tunnelriss unter SSY-Bedingungen bestätigt werden. Auf die Hypothese H3 im Beispiel unter LSY-Bedingungen geht das folgende Kapitel näher ein.

Zum Abschluss der Diskussion der lokalen Berechnungsmethoden und des globalen Ansatzes am Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss unter SSY-Bedingungen findet ein Vergleich der Absolutwerte des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals statt. Tabelle 5.2 zeigt die Ergebnisse jeder Methode jeweils für den auf- und absteigenden Hysteresehalbast sowie die drei EELs. Die im Zusammenhang mit dem Konzept der Konfigurationskräfte diskutierte Netzabhängigkeit der simulierten Feldgrößen liegt in allen Methoden gleichermaßen vor. Allerdings spielt diese in der Auswertung mittels der Gebietsintegralmethode oder dem globalen Ansatz an sich eine untergeordnete Rolle. Mit der Kontur 20 wird für jede EEL die gesamte plastische Zone sowohl vor als auch hinter der Riss-spitze umschlossen. Der globale Ansatz betrachtet immer die gesamte Scheibe. Am Vorgehen während der Auswertung ändert sich durch verschiedene EELs daher nichts. Die Absolutwerte können allerdings beeinflusst werden.

Tabelle 5.2: Absolutwerte des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals in N/mm der lokalen Methoden und des globalen Ansatzes für den auf- und absteigenden Hysteresehalbast sowie verschiedene EEL

EEL in mm	Global Average		Contour 20		APZ		EPZ (History)		EPZ (Crack Growth)	
	Load	Unload	Load	Unload	Load	Unload	Load	Unload	Load	Unload
0,1	0,612	0,710	0,615	0,715	0,601	0,714	0,491	0,586	0,601	0,710
0,05	0,615	0,718	0,618	0,718	0,613	0,712	0,477	0,557	0,604	0,711
0,01	0,617	0,721	0,620	0,721	0,616	0,720	0,621	0,711	0,618	0,719

Über alle Berechnungsmethoden hinweg zeigen sich ähnliche Tendenzen der Ergebnisse. Mit Ausnahme der summierten Konfigurationskräfte für die EPZ nach der Definition *History* sind die zyklischen  $J$ -Integrale aller Methoden für den aufsteigenden Hysteresehalbast nahezu gleich. Auch für den absteigenden Hysteresehalbast gleichen sich die Ergebnisse der unterschiedlichen Methoden. Allerdings sind die Werte im Vergleich zum aufsteigenden Hysteresehalbast größer. Eine Begründung für diesen Unterschied lässt sich anhand der analysierten Beanspruchungsfelder in Kapitel 5.3 diskutieren. Im Hinblick auf die EEL nehmen die zyklischen  $J$ -Integrale mit abnehmender EEL zu. Aufgrund dessen, dass die Abweichungen bereits für diese drei untersuchten EEL kleiner 1% ist, wird auf eine zusätzliche Verringerung zur Untersuchung einer etwaigen Konvergenz verzichtet. Die größeren Abweichungen der Ergebnisse für die EPZ (*History*) sind für die größte EEL am ausgeprägtesten. In diesem Fall ist zu berücksichtigen, dass die Zonen im Vergleich zur APZ oder EPZ (*Crack Growth*) kleiner sind, Abbildung 5.6 (b), und sie die diskutierten Bereiche hinter der Riss-spitze aufweisen. Mit abnehmender EEL verschwinden diese Bereiche zunehmend und die Absolutwerte nähern sich den Lösungen der restlichen Methoden an. Grundsätzlich liegt durch die APZ ein physikalisch begründetes Gebiet zur Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals vor (H3), Abbildung 5.10. Dieses beschreibt demnach die treibende Kraft für die Bewegung der Riss-spitze in Kombination mit der APZ. Weil die Anwendung der APZ für die Auswertung nicht in allen Beanspruchungssituationen möglich ist, wurde in Vorausschau auf die im folgenden Kapitel betrachteten LSY-Bedingungen die EPZ bereits für die SSY-Bedingungen untersucht. Durch die näherungsweise Übereinstimmung insbesondere der zyklischen  $J$ -Integrale auf Basis der APZ und der EPZ nach der Definition *Crack Growth* ist auch durch

---

diese eine plausible Berechnung möglich. Durch die Konsistenz des Konzepts der Konfigurationskräfte, der Gebietsintegralmethode sowie des globalen Ansatzes ist die physikalische Interpretation der jeweils berechneten zyklischen  $J$ -Integrale ebenfalls einheitlich.

Die Hypothesen H1-H3 konnten für das Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss unter SSY-Bedingungen bestätigt werden. Durch die Berücksichtigung von Riss schließen lässt sich eine näherungsweise wegunabhängige Lösung auf Basis der lokalen Methoden erhalten (H2) und dadurch stimmen die Lösungen mit denen des globalen Ansatzes überein (H1). Als physikalisch sinnvoll begründete Gebiete, die sich mit der Riss spitze fortbewegen und deren treibende Kraft durch das  $J$ -Integral beschrieben werden kann (H3), sind die APZ sowie die EPZ auf Basis der Definition *Crack Growth* geeignet.

Insbesondere wenn die Konturen im Rahmen der Gebietsintegralmethode nicht mehr durch rein elastische Bereiche verlaufen stellt sich die Frage nach der Wegabhängigkeit bzw. nach der Existenz eines relevanten Gebiets zur Auswertung. Daher werden im Folgenden die Ergebnisse unter LSY-Bedingungen für das gleiche Beispiel einer Scheibe mit Tunnelriss gezeigt und diskutiert.

### 5.2.2 Scheibe mit Tunnelriss in LSY-Bedingungen

Das Kapitel zeigt im Folgenden die Ergebnisse für die Scheibe mit Tunnelriss unter LSY-Bedingungen. Die Verschiebungsamplitude der zyklischen Beanspruchung beträgt 0,01 mm. Eine grobe Übersicht über die sich ausbildenden plastischen Bereiche in der Scheibe im Vergleich zu den SSY-Bedingungen ist durch Abbildung 5.1 gegeben. Die plastische Zone vor der Riss spitze im Fall des Risses ohne Vorgeschichte, Abbildung 5.1 (c), erstreckt sich bis zum Rand der Scheibe. Im Fall des Risses mit Vorgeschichte, Abbildung 5.1 (d), erstreckt sich der plastisch deformierte Bereich über die gesamte Scheibe. Im Folgenden findet eine Diskussion der Auswirkungen der LSY-Bedingungen auf die Auswertung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals statt. Dabei stellt sich insbesondere die Frage, welches Gebiet für die Berechnung einer möglichen Intensität des effektiven Nahfelds der Beanspruchung an der Riss spitze relevant ist und damit nach der Bestätigung oder Widerlegung von Hypothese H3.

Eingangs werden wie für die SSY-Bedingungen die Verläufe der normierten zyklischen  $J$ -Integrale über der Anzahl an Inkrementen  $i$ , Abbildung 5.11 (a) und (b), sowie die Ergebnisse der Gebietsintegralmethode für verschiedene Konturen im Vergleich zum globalen Ansatz, Abbildung 5.11 (c) und (d) für den aufsteigenden Hysteresehalbast und den Riss mit und ohne Vorgeschichte gezeigt. Auch im Beispiel der LSY-Bedingungen findet ein Referenzieren aller Größen auf den Rissöffnungszeitpunkt statt. Dieser kann mit den beschriebenen Kriterien ermittelt werden. Zur Konsistenz kommt auch hier das Kriterium *CC-Force* zum Einsatz. Die Rissöffnungszeitpunkte im Vergleich aller Fälle sind in Tabelle 5.1 gegeben. Mit Ausnahme des Kriteriums *1stBack* und den Beanspruchungssituationen ohne Vorgeschichte zeigen die Kriterien, dass der Riss unter LSY-Bedingungen zu einem früheren Zeitpunkt öffnet und zu einem späteren Zeitpunkt schließt als unter SSY-Bedingungen. Dies ist vermutlich auf die größere Rissöffnung, wie auch in Abbildung 5.1 zu beobachten ist, zurückzuführen. Für den Verlauf des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals ergibt sich ein ähnliches Bild wie unter SSY-Bedingungen. Ab dem Rissöffnungszeitpunkt steigt dieses sowohl nach der Gebietsintegralmethode als auch nach dem globalen Ansatz an. Abgesehen von der ersten Kontur liegen die Ergebnisse für die folgenden 19 Konturen nahe beieinander und stimmen

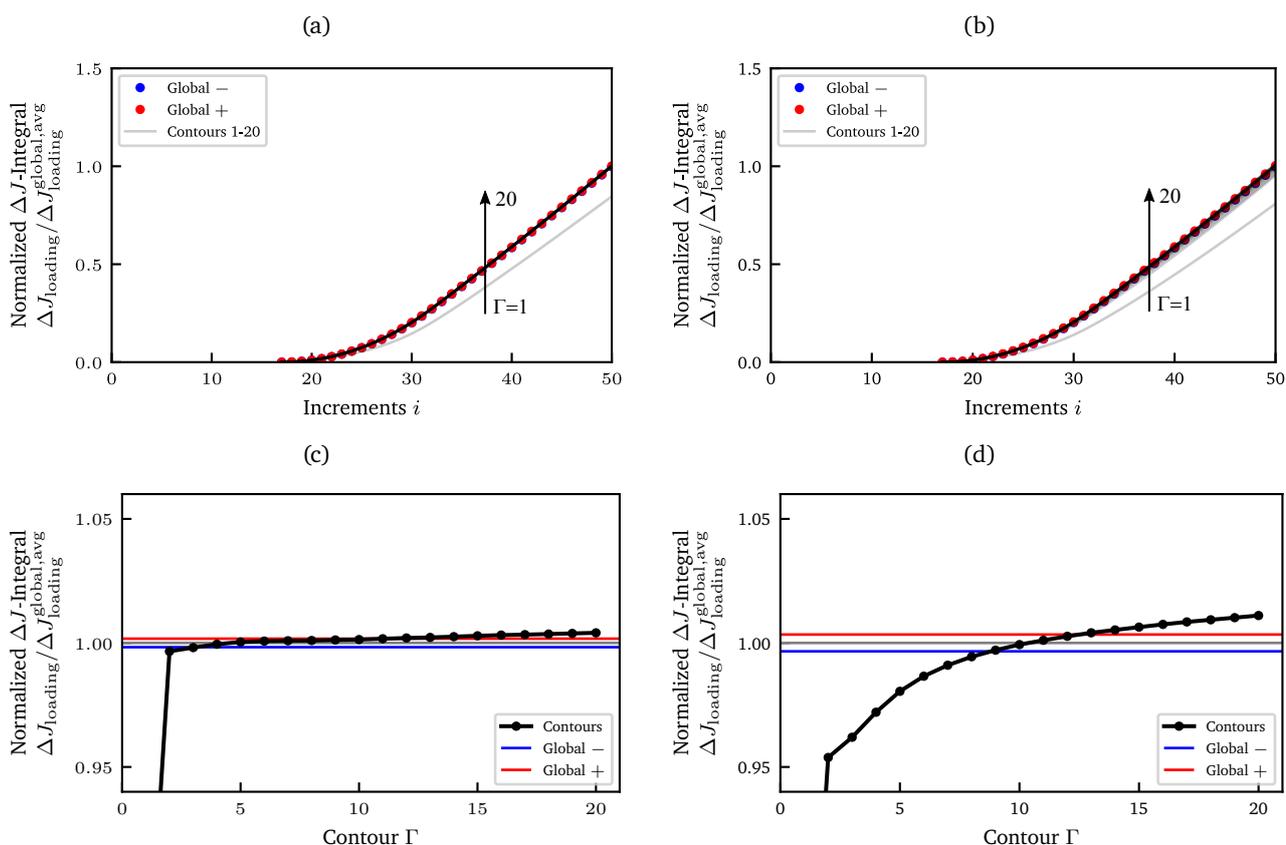


Abbildung 5.11: (a), (c): Aufsteigender Hysteresehalbst unter LSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm ohne Vorgeschichte,  $\Delta J_{\text{loading}}^{\text{global,avg}} = 3,96$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 17$  (CC-Force)  
 (b), (d): Aufsteigender Hysteresehalbst unter LSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm mit Vorgeschichte,  $\Delta J_{\text{loading}}^{\text{global,avg}} = 3,94$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 17$  (CC-Force)

näherungsweise mit der globalen Lösung überein. Auch die Ergebnisse des Ansatzes Global – und Global + sind kaum zu unterscheiden. Ein Unterschied gegenüber der SSY-Bedingungen ist, dass der Verlauf ab ungefähr einem Viertel des Endwerts linear ist. Dies könnte im Zusammenhang mit dem Abstumpfen der Risspitze durch das hohe Maß an Plastizität stehen. Die Rissflanken sind mehr oder weniger parallel zur Symmetrieebene ausgerichtet und bewegen sich von dieser weg. Die Verschiebung an jedem Knoten entlang der Rissflanke ist somit nahezu gleich und führt daher zur Linearität des Verlaufs des  $J$ -Integrals. Hinsichtlich der Wegabhängigkeit deutet sich in Abbildung 5.11 (b) an, dass diese im Fall des Risses mit Vorgeschichte größer ist als im Fall ohne Vorgeschichte. Dies wird durch Abbildung 5.11 (c) und (d) bestätigt. Mit Ausnahme von Kontur eins liegen alle Ergebnisse der Gebietsintegralmethode in einem Bereich von  $\pm 5\%$  um den globalen Ansatz. Im Fall ohne Vorgeschichte, Abbildung 5.11 (c), sind die Abweichungen nochmals wesentlich kleiner als im Fall mit Vorgeschichte, Abbildung 5.11 (d). In beiden Fällen liegen die Ergebnisse für die kleineren Konturen zunächst unterhalb der globalen Lösung. Mit zunehmender Kontur nehmen auch die Lösungen für das  $J$ -Integral zu bis sie schließlich mit der größten Kontur oberhalb der globalen Lösung liegen. Es kann keine Konvergenz beobachtet werden, sodass sich die Frage nach einer geeigneten Kontur bzw. einem geeigneten Gebiet für die Auswertung stellt. Dieser Aspekt

wird im Folgenden des Kapitels im Rahmen der Diskussion der Konfigurationskräfte aufgegriffen. Im Vergleich zu den SSY-Bedingungen fällt zusätzlich auf, dass die Lösungen Global + und Global – weniger voneinander abweichen. Das heißt, die Änderung der Energiedifferenz von  $a - \Delta a$  nach  $a$  und von dort nach  $a + \Delta a$  ist kleiner als im Fall SSY. Eine Diskussion des Einfluss verschiedener Referenzinkremente entfällt, da nicht klar ist, welche Kontur für eine solche Diskussion sinnvoll betrachtet werden kann.

Die Ergebnisse für den absteigenden Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen sind in Abbildung 5.12 gegeben.

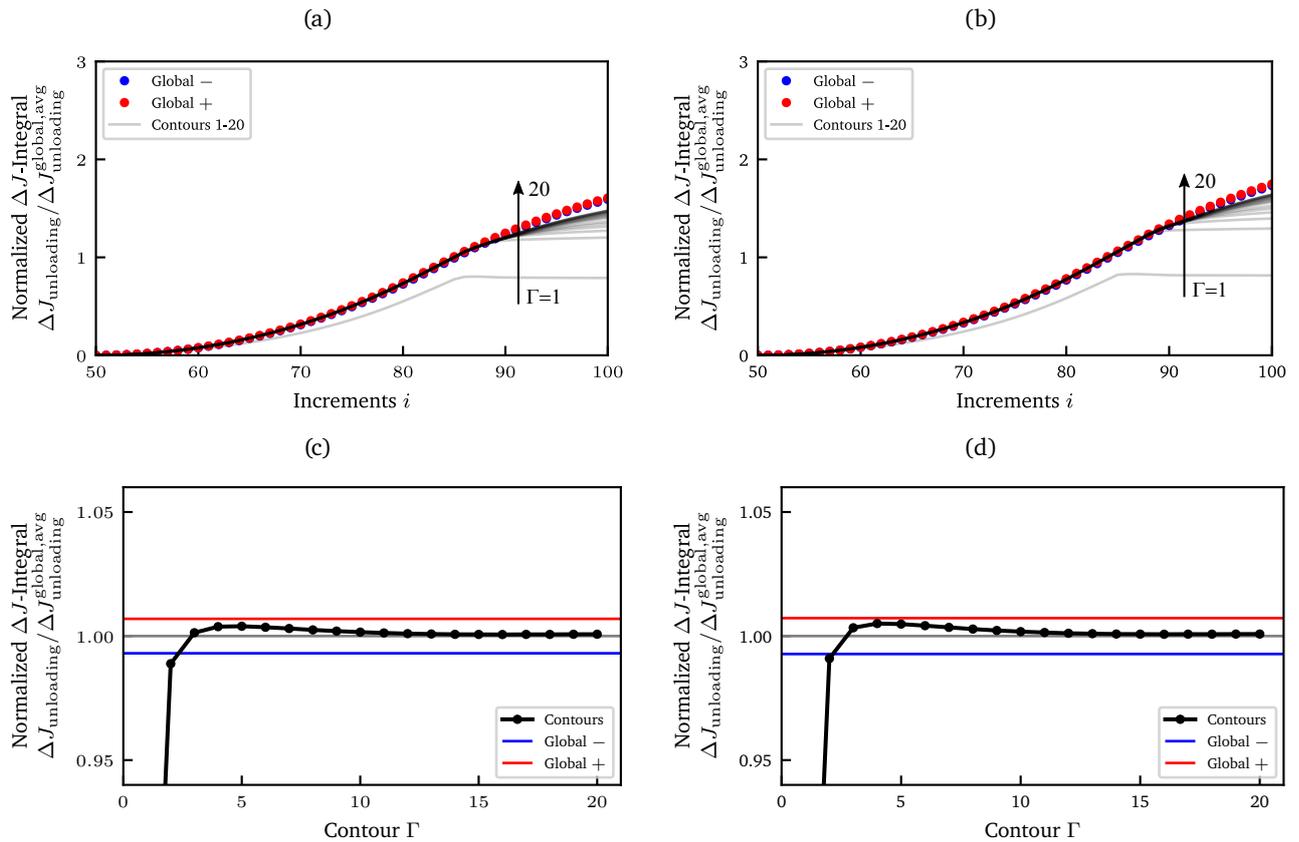


Abbildung 5.12: (a), (c): Absteigender Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm ohne Vorgeschichte,  $\Delta J_{\text{unloading}}^{\text{global,avg}} = 5,9$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 85$  (CC-Force)  
 (b), (d): Absteigender Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen für  $a = 2$  mm mit Vorgeschichte,  $\Delta J_{\text{unloading}}^{\text{global,avg}} = 5,58$  N/mm, Referenzinkrement  $i = 84$  (CC-Force)

Die Referenz aller Größen zur Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals ist der obere Lastumkehrpunkt. Ab diesem Zeitpunkt sind die Verläufe der Gebietsintegralmethode sowie des globalen Ansatzes über der Anzahl an Inkrementen  $i$  näherungsweise gleich, Abbildung 5.12 (a) und (b). Auch in diesem Fall kommt zum Tragen, dass die Rissflanken nach Lastumkehr zunächst lastfrei sind und die Entlastung zunächst rein elastisch erfolgt. Ab dem Zeitpunkt des Riss schließen beginnen die Verläufe voneinander abzuweichen und für das Gebietsintegral abhängig von der Kontur zu werden. Durch Gleichsetzen der Integrationsgrenze mit dem Riss schließzeitpunkt werden die in Abbildung 5.12 (c) und (d) dargestellten Ergebnisse eines

---

effektiven zyklischen  $J$ -Integrals erhalten. Abgesehen von Kontur eins liegen die Ergebnisse in einem Bereich von ca. 5% um den Mittelwert des globalen Ansatzes. Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen von Global – und Global + sind im Vergleich zum aufsteigenden Hysteresehalbast größer. Die Ergebnisse der Gebietsintegralmethode nehmen mit den ersten Konturen zu und überschreiten den Mittelwert des globalen Ansatzes. Mit darüber hinaus größerer Kontur nimmt das  $J$ -Integral ab und nähert sich dem Mittelwert des globalen Ansatzes. Für näherungsweise die Konturen 15 bis 20 ergibt sich ein nahezu wegunabhängiges Ergebnis. Diese Beschreibung trifft sowohl für den Riss ohne als auch mit Vorgeschichte zu.

Die Hypothese H2 lässt sich für die LSY-Bedingungen nur in guter Näherung bestätigen. Die Ergebnisse insbesondere für den aufsteigenden Hysteresehalbast sind wegababhängig. Im betrachteten Beispiel lässt sich daher auch lediglich eine näherungsweise Übereinstimmung mit der Lösung des globalen Ansatzes feststellen. Trotz der großen Bereiche mit plastischen Deformationen in der Scheibe liegen dennoch Konturen bzw. Gebiete vor, die zu einer mit dem globalen Ansatz übereinstimmenden Lösung führen. Die Hypothese H1 lässt sich daher in Abhängigkeit von Hypothese H2 bestätigen.

### **Anwendung des Konzepts der Konfigurationskräfte**

Zur weiterführenden Analyse der Wegabhängigkeit des zyklischen  $J$ -Integrals im Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss unter LSY-Bedingungen eignet sich eine Betrachtung der Konfigurationskräfte für verschiedene relevante Zonen. Die Summierung dieser für einen Bereich, dem sich eine hypothetisch physikalische Bedeutung zumessen lässt, kann zur Quantifizierung des  $J$ -Integrals und damit als potentieller Intensitätsparameter für das Nahfeld verwendet werden. Die in dieser Dissertation betrachteten Zonen sind zum einen die APZ und zum anderen die EPZ. Beide können wiederum mit den bekannten Definitionen aus Kapitel 4.2 ermittelt werden. Am Ende der Analyse kann die Hypothese H3 für die LSY-Bedingungen beurteilt werden.

Die prinzipielle physikalische Bedeutung der Berücksichtigung von Konfigurationskräften in lediglich einer bestimmten Zone wird an dieser Stelle noch einmal wiederholt. Durch Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie und der zyklischen Beanspruchung entstehen neben der plastischen Zone vor der Risspitze für den Riss mit Vorgeschichte auch eine plastische Nachlaufzone. Des Weiteren können im Allgemeinen auch an anderen Orten der Struktur und insbesondere in LSY-Bedingungen plastische Deformationen und damit einhergehende Konfigurationskräfte auftreten. Die zur Beschreibung eines Intensitätsparameters des Nahfelds an der Risspitze hypothetisch physikalisch sinnvollen Zonen sind aber rein die sich mit der Risspitze bewegendes APZs und EPZs. Die verschiedenen Definitionen und Auswirkungen auf die Größe und Form wurden bereits für die SSY-Bedingungen diskutiert. Die Besonderheit im Zusammenhang mit den LSY-Bedingungen ist, dass auch diese Zonen je nach Definition und Schwellenwert mit dem Rand der Scheibe in Kontakt kommen und damit nicht eindeutig der Risspitze allein zugeordnet werden können.

Im Unterschied zur Diskussion der APZ und EPZ in SSY-Bedingungen zeigt Abbildung 5.13 das gesamte Viertel der Scheibe (5 mm x 5 mm) mit der Risspitze am Ort  $x = 2$  mm. Die APZ ist in Abbildung 5.13 (a) und die EPZ nach der Definition *History* ist in Abbildung 5.13 (b) dargestellt. Die beiden Zonen sind jeweils zum Zeitpunkt der Maximallast und zum Zeitpunkt des Risssschließens dargestellt. Abbildung

5.13 (c) zeigt die EPZ nach der Definition *Crack Growth* lediglich zum Zeitpunkt der Maximallast, da dies der Zone unmittelbar nach Rissverlängerung entspricht. Die EPZs beider Definitionen sind für drei verschiedene Schwellenwerte  $\Delta PEEQ_{th}$  dargestellt.

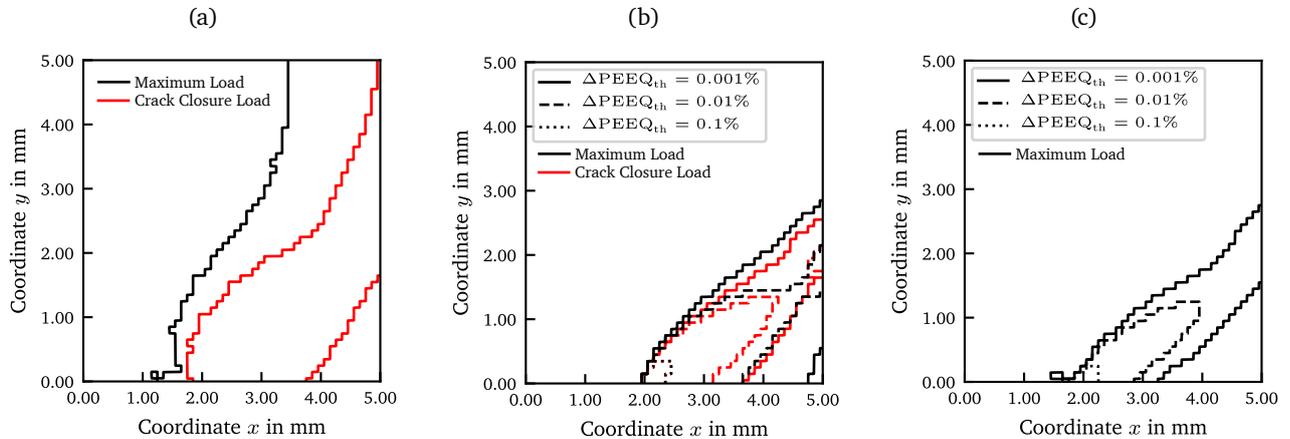


Abbildung 5.13: Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge  $a = 2 \text{ mm}$  in LSY-Bedingungen zum Zeitpunkt der Maximallast und des Risssschließens. (a) APZ, (b) EPZ nach der Definition *History* und (c) EPZ nach der Definition *Crack Growth*. EPZs für drei verschiedene exemplarische Schwellenwerte  $\Delta PEEQ_{th}$ .  $EEL = 0,1 \text{ mm}$

Die APZ in Abbildung 5.13 (a) erstreckt sich zu beiden Zeitpunkten aufgrund der hohen Beanspruchung bis zum rechten Rand der Scheibe ( $x = 5 \text{ mm}$ ), sodass generelles Fließen vorliegt. Zum Zeitpunkt der Maximallast nimmt die APZ zusätzlich einen Teil des oberen Randes der Scheibe ( $y = 5 \text{ mm}$ ) ein und beinhaltet das gesamte Ligament ( $y = 0 \text{ mm}$ ). Obwohl das Materialverhalten unmittelbar nach Lastumkehr zunächst elastisch ist, liegt zum Zeitpunkt des Risssschließens eine im Vergleich zu den SSY-Bedingungen große APZ vor. Die Form der APZ wird im Allgemeinen durch die Geometrie der Scheibe beeinflusst. Eine Unterscheidung der APZ in einen Teil, der mit der Risspitze zusammenhängt, und einen Teil, der durch den Rand der Scheibe begründet ist, lässt sich für den Zeitpunkt des Risssschließens ansatzweise erkennen.

Die EPZ (*History*), Abbildung 5.13 (b), ist für die dargestellten Schwellenwerte im Vergleich zur APZ kleiner. Sie zeigt nicht nur die Bereiche an, in denen sich ein Knoten momentan plastisch verhält, sondern lässt auch eine Aussage über das Maß an Plastizität zu. Je nach Schwellenwert weist sie aber ebenfalls Kontakt zum rechten Rand der Scheibe auf. Für den kleinsten dargestellten Schwellenwert in der Dehnungsdifferenz von 0,001% ist der Kontakt zu beiden Zeitpunkten gegeben. Selbst für einen Schwellenwert von 0,01% liegt zum Zeitpunkt der Maximallast eine mit dem Rand zusammenhängende Zone vor. Allerdings zeichnet sich eine Unterscheidung in einen Teil der Zone, der mit der Risspitze zusammenhängt, und einen Teil, der mit dem Rand der Scheibe zusammenhängt, ab. Die beiden Teilzonen sind aber weiterhin über eine schmale „Brücke“ miteinander verbunden. Demgegenüber liegen die beiden Teilzonen zum Zeitpunkt des Risssschließens getrennt voneinander vor. Das heißt, es liegen grundsätzlich Zonen am Rand der Scheibe mit nicht zu vernachlässigenden Dehnungsdifferenzen, hervorgerufen durch eine Rissverlängerung  $\Delta a$ , vor. Die Frage ist, ob diese in der Auswertung des  $J$ -Integrals eine Rolle spielen. Mit zunehmendem Schwellenwert nimmt die Größe der EPZ ab. Zudem beschränkt sie sich zunehmend allein

auf einen Bereich nahe der Rissspitze, in deren Nähe die größten Dehnungen vorliegen. Der Unterschied in der EPZ zwischen den beiden Zeitpunkten nimmt darüber hinaus ab, Abbildung 5.13 (b).

Die EPZ (*Crack Growth*), Abbildung 5.13 (c), ist im Vergleich zur EPZ (*History*) für gleiche Schwellenwerte kleiner. Dieses Verhalten stellt einen weiteren Unterschied zu den SSY-Bedingungen dar. Demzufolge sind die Dehnungsdifferenzen durch eine inkrementelle Rissverlängerung zum Zeitpunkt der Maximallast kleiner. Hinsichtlich ihrer Form unterscheidet sich diese EPZ ebenfalls von den bisher betrachteten Zonen. Sie zeichnet sich durch ein für das gewählte Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss typisches schmales Band in einem Winkel von ca.  $45^\circ$  aus, welches je nach Schwellenwert bis zum rechten Rand der Scheibe reicht. Ab einem bestimmten Schwellenwert bezieht sich die EPZ, auch nach dieser Definition, allein auf die Rissspitze und der Kontakt zum Rand der Scheibe verschwindet.

Um die Hypothese H3 und damit eine physikalische Begründung einer der vorgestellten Zonen für die Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals zu prüfen, findet im Folgenden eine Diskussion des Einflusses verschiedener Schwellenwerte statt. Hierzu zeigt Abbildung 5.14 die normierten zyklischen  $J$ -Integrale in Abhängigkeit des Schwellenwertes für die Definition *History* und *Crack Growth*, sowie den auf- als auch absteigenden Hysteresehalbast.

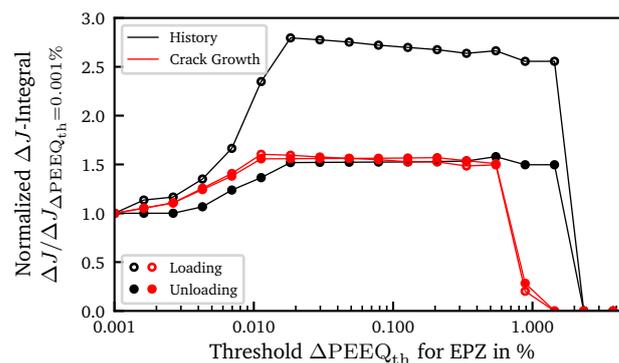


Abbildung 5.14: Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen  $J$ -Integrale vom Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,1 mm. LSY-Bedingungen

Die Bezugswerte sind die jeweiligen zyklischen  $J$ -Integrale für eine EPZ mit Schwellenwert 0,001% und in Tabelle 5.3 zusammengefasst. Gegenüber der SSY-Bedingungen sind die Ergebnisse der LSY-Bedingungen bei diesem Schwellenwert für jede Definition und jeden Hysteresehalbast sehr unterschiedlich. Ein Aspekt, der für diese Unterschiede ursächlich ist, stellt der vorhandene Kontakt der EPZ zum Rand der Scheibe dar. Abbildung 5.15 zeigt die an den Knoten vorliegenden Absolutwerte der Konfigurationskräfte für den (a) aufsteigenden und (b) absteigenden Hysteresehalbast zum Zeitpunkt der Maximallast und des Rissenschließens.

Wie in Kapitel 2.4.3 beschrieben, treten an Materialinhomogenitäten und so auch am Übergang zur Umgebung, am Rand der Scheibe, Konfigurationskräfte auf. Aufgrund der hohen Beanspruchung im Beispiel unter LSY-Bedingungen nehmen diese eine relevante Größenordnung an. Allerdings ist deren Anteil am zyklischen  $J$ -Integral physikalisch unbegründet, sodass auch die Werte in Tabelle 5.3 als unplausibel zu

Tabelle 5.3: Zyklische  $J$ -Integrale für die verschiedenen EPZs und einen Schwellenwert von  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$  als Bezugswerte für die Normierung in Abbildung 5.14. EEL = 0,1 mm

	EPZ (History)		EPZ (Crack Growth)	
	Load	Unload	Load	Unload
$\Delta J_{eff}$ in N/mm	1,248	2,883	2,464	3,523

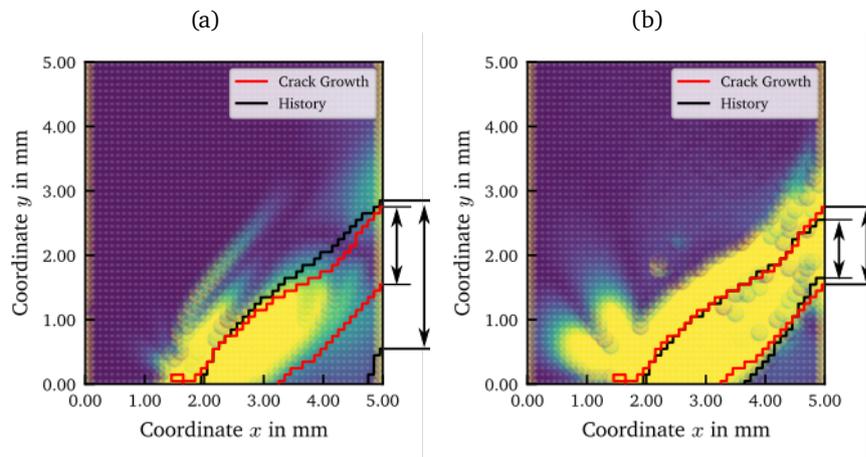


Abbildung 5.15: Lokalisierung der Konfigurationskräfte in  $x$ -Richtung an Knoten (betragsweise), gelb – hohe Werte, blau – niedrige Werte, sowie die EPZ (*History*) und die EPZ (*Crack Growth*) für  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$  zum Zeitpunkt der Maximallast (a) und des Riss-schließens (b) EEL = 0,1 mm

erachten sind. Die Vektoren der Konfigurationskräfte am rechten Rand der Scheibe zeigen in positive  $x$ -Richtung, sodass sie entgegengesetzt zum  $J$ -Integral wirken. Die Geometrie des Randes und damit auch die Einschnürung der Scheibe, wie in Abbildung 5.1 zu beobachten, beeinflussen die Konfigurationskräfte an dieser Stelle. Die größte Schnittmenge mit dem Rand weist die EPZ (*History*) zum Zeitpunkt der Maximallast auf, siehe Abbildung 5.15 (a), sodass die Lösung mit 1,248 N/mm im Vergleich am kleinsten ist. Allein der berücksichtigte Abschnitt des Randes erklärt allerdings die Unterschiede nicht vollständig. Das Ergebnis der EPZ (*Crack Growth*) für den absteigenden Hysteresehalbast ist trotz des größeren Anteils am Rand, Abbildung 5.15 (b), größer als das Ergebnis der EPZ (*History*).

Vor dem Hintergrund der Diskussion des Einflusses des Randes auf die Bezugswerte lässt sich der Einfluss des Schwellenwertes auf die zyklischen  $J$ -Integrale in LSY-Bedingungen diskutieren. Abbildung 5.14 zeigt, dass die  $J$ -Integrale ausgehend von ihren Bezugswerten zunächst mit dem Schwellenwert zunehmen. Die Abhängigkeit für die Definition *Crack Growth* ist für beide Hysteresehalbäste ähnlich. Sie steigen bis zu einem Schwellenwert von ca. 0,01% um ca. 50% und erreichen anschließend ein Plateau. Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die Ergebnisse für die Definition *History* und den absteigenden Hysteresehalbast. Demgegenüber steigt für diese Definition das Ergebnis für den aufsteigenden Hysteresehalbast um ca. 300% an bevor es näherungsweise ein Plateau erreicht. Es sei an dieser Stelle noch einmal festzuhalten, dass die Abhängigkeit unter SSY-Bedingungen zu Abweichungen im Bereich von 1% führt.

Das Erreichen des Plateaus geht mit dem Lösen der EPZ vom Rand und dem Verschwinden der EPZ am Rand der Scheibe einher. Abbildung 5.16 greift diese Beobachtung am Beispiel der EPZ nach der Definition *Crack Growth* auf.

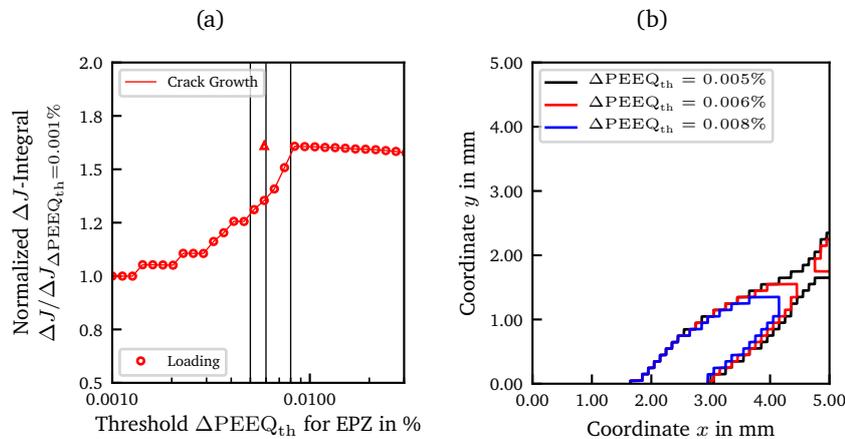


Abbildung 5.16: Abhängigkeit des zyklischen  $J$ -Integrals vom Schwellenwert (a) und den vorliegenden Teilzonen (b) am Beispiel der EPZ (*Crack Growth*) für den aufsteigenden Hysteresehalb-ast bei Erreichen des Plateaus

Sie zeigt in (a) im Detail die Abhängigkeit des zyklischen  $J$ -Integrals vom Schwellenwert beim Erreichen des Plateaus und in (b) diesbezüglich einzelne Zonen für charakteristische Schwellenwerte. Solange eine Verbindung zwischen der Risspitze und dem Rand der Scheibe besteht ( $\Delta PEEQ_{th} = 0,005\%$ ) steigen die Ergebnisse mit zunehmendem Schwellenwert an. Eine Trennung der Konfigurationskräfte, die allein der Risspitze zuzuordnen sind, ist nicht möglich. Ab einem gewissen Schwellenwert beginnen sich die Zonen zu trennen, wie am Beispiel von  $\Delta PEEQ_{th} = 0,006\%$  dargestellt. Die zyklischen  $J$ -Integrale nehmen auch dann noch mit steigendem Schwellenwert weiter zu, wenn die Konfigurationskräfte für beide Zonen summiert werden. Das Plateau ist erreicht, sobald die Zone am Rand der Scheibe vollständig verschwindet (ab ca.  $\Delta PEEQ_{th} = 0,008\%$ ). Es ist im Fall von  $\Delta PEEQ_{th} = 0,006\%$  möglich lediglich die Konfigurationskräfte für die Zone an der Risspitze zu summieren. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.16 (a) zusätzlich dargestellt und liegt näherungsweise auf der Höhe des Plateaus.

Steigt der Schwellenwert für die EPZ auf einen Wert von um die 1% und darüber hinaus, siehe Abbildung 5.14, fallen die zyklischen  $J$ -Integrale sprunghaft ab und werden zu Null. Dies geht einher mit dem Verschwinden der EPZ für große Schwellenwerte.

Aus der Analyse lässt sich schlussfolgern, dass die Abhängigkeit des zyklischen  $J$ -Integrals vom Schwellenwert der EPZ unter LSY-Bedingungen im Vergleich zu den SSY-Bedingungen sehr groß ist. Der Grund ist der Kontakt der EPZ zum Rand der Scheibe. Ist die EPZ allein auf die Risspitze bezogen und liegt keine zusätzliche Zone am Rand vor, erreichen die Ergebnisse ein Plateau. Je nach Definition der EPZ und Hysteresehalb-ast ändern sich die Ergebnisse für das Plateau dennoch um ca. 10%, sodass gegenüber der SSY-Bedingungen weiterhin eine deutlich größere Abhängigkeit vom Schwellenwert und damit vom Auswertungsgebiet besteht. Die Auswirkungen eines um 10% variierenden  $J$ -Integrals auf die effektive Beanspruchung im Nahfeld der Risspitze diskutiert Kapitel 5.3.

Im Folgenden findet eine Diskussion des Einflusses der EEL auf die beschriebenen Zusammenhänge statt. Prinzipiell liegen für die LSY-Bedingungen die gleichen Einflüsse der EEL auf die Größe und Form der APZ und EPZ wie für die SSY-Bedingungen vor, siehe Abbildung 5.8. Zu diesen zählt, dass die APZ mit abnehmender EEL zu einer einheitlichen Zone konvergiert. Des Weiteren stimmt die EPZ mit einem konstanten Schwellenwert für verschiedene EEL überein, solange das Rissfortschrittsinkrement gleich ist und entsprechend viele Knoten gelöst werden.

Aufgrund dessen, dass die Simulationen im Rahmen dieser Dissertation nicht der realistischen Abbildung einer Rissfortschrittsrate unterliegen, ist die EEL und die Anzahl an zu lösenden Knoten grundsätzlich frei wählbar. Daher wird im Folgenden ausschließlich auf die kleinste betrachtete EEL von 0,01 mm und einen gelösten Knoten zur Ermittlung der EPZ eingegangen. Eine Diskussion der Absolutwerte der zyklischen  $J$ -Integrale für alle drei untersuchten EEL findet am Ende des Kapitels statt.

Abbildung 5.17 (a) zeigt, dass die APZ zum Zeitpunkt der Maximallast eine im Vergleich zur EEL 0,1 mm, Abbildung 5.13 (a), ähnliche Größe und Form aufweist. Zum Zeitpunkt des Risssschließens ist die APZ für EEL gleich 0,01 mm kleiner. Hierfür verantwortlich ist das veränderte Risssschließverhalten. Durch die kleinere EEL lässt sich das Abstumpfen der Rissspitze besser auflösen, was nach Lastumkehr dazu führt, dass die Rissflanken aufeinander „abrollen“.

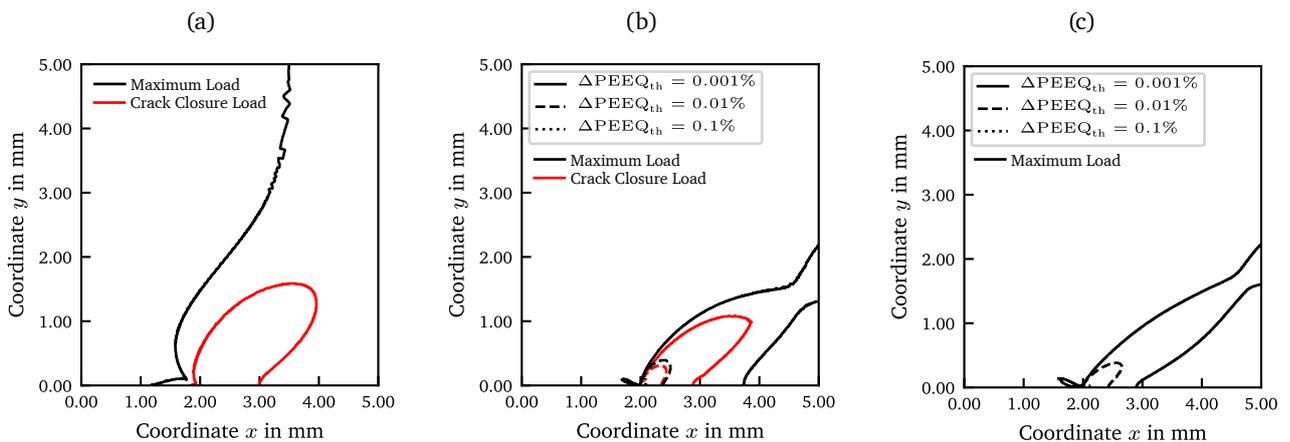


Abbildung 5.17: Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge  $a = 2$  mm in LSY-Bedingungen zum Zeitpunkt der Maximallast und des Risssschließens. (a) APZ, (b) EPZ nach der Definition *History* und (c) EPZ nach der Definition *Crack Growth*. EPZs für drei verschiedene exemplarische Schwellenwerte  $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,01 mm

Daher ist die Abweichung der summierten Reaktionskräfte entlang der Symmetrieebene von der globalen Kraft nach dem Kriterium *CC-Force* bereits zu einem früheren Zeitpunkt ungleich Null. Das ermittelte Risssschließinkrement ist somit kleiner, sodass für den absteigenden Hysteresehalbast bis zu diesem Punkt an weniger Knoten plastisches Verhalten vorliegt. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch in Abbildung 5.17 (b) für die EPZ nach der Definition *History*. Die EPZ für den kleinsten betrachteten Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$  zum Zeitpunkt der Maximallast berührt noch den Rand der Scheibe. Allerdings ist bereits eine Trennung in einen risspitzenbezogenen und randbezogenen Bereich ansatzweise sichtbar.

Die EPZs für größere Schwellenwerte sind allesamt kleiner und ziehen sich zunehmend auf die Rissspitze zusammen. Die Begründung für die im Vergleich zur EEL 0,1 mm, Abbildung 5.13 (b), kleineren EPZs mit weniger Kontakt zum Rand der Scheibe ist durch das kleinere Rissfortschrittsinkrement  $\Delta a = EEL$  begründet. Die Unterschiede in den plastischen Vergleichsdehnungen  $\Delta PEEQ$  sind dadurch kleiner. Mit einem gleichen  $\Delta a$  von 0,1 mm würden die Zonen auch für die EEL 0,01 mm eine ähnliche Größe und Form wie in Abbildung 5.13 (b) annehmen. Eine Diskussion dieses Zusammenhangs anhand der SSY-Bedingungen findet sich im vorherigen Kapitel 5.2.1. Auch die EPZ nach der Definition *Crack Growth* in Abbildung 5.17 (c) ist gegenüber der EEL 0,1 mm in Abbildung 5.13 (c) für gleiche Schwellenwerte kleiner. Die Form ist allerdings ähnlich. Mit  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$  zeigt sich ein schmales Band in einem Winkel von ca.  $45^\circ$  von der Rissspitze bis zum Rand der Scheibe.

Die Abhängigkeit der auf Basis der EPZ und dem Konzept der Konfigurationskräfte berechneten zyklischen  $J$ -Integral vom Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th}$  für eine EEL von 0,01 mm zeigt Abbildung 5.18. Die Ergebnisse sind auch in diesem Fall auf einen Referenzwert mit  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$  bezogen. Die Absolutwerte für diesen Schwellenwert sind in Tabelle 5.4 angegeben.

Tabelle 5.4: Zyklische  $J$ -Integrale für die verschiedenen EPZs und einen Schwellenwert von  $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$  als Bezugswerte für die Normierung in Abbildung 5.18. EEL = 0,01 mm

	EPZ (History)		EPZ (Crack Growth)	
	Load	Unload	Load	Unload
$\Delta J_{eff}$ in N/mm	2,744	3,630	3,287	3,620

Mit Ausnahme der EPZ zum Rissschließzeitpunkt nach der Definition *History* berühren alle EPZs für diesen Schwellenwert den Rand, sodass deren Ergebnisse als unplausibel einzuordnen sind. Alle Ergebnisse in Abbildung 5.18 liegen im Vergleich zu EEL 0,1 mm, Abbildung 5.14, deutlich näher beieinander und weichen zwischen 0-50% von ihrem Bezugswert ab. Die Ergebnisse für den aufsteigenden Hysteresehalbast und beide Definitionen nehmen für einen geringfügig größeren Schwellenwert sprunghaft zu, da die EPZ am Rand verschwindet. Anschließend sinken die Ergebnisse mit zunehmendem Schwellenwert bis die Zone an der Rissspitze, ab ca. 4% Dehnungsdifferenz, ebenfalls verschwindet. Die zyklischen  $J$ -Integrale für den absteigenden Hysteresehalbast sind weniger abhängig vom Schwellenwert der EPZ. Nach der Definition *History* sind sie bis nahezu 7% Dehnungsdifferenz konstant. Auch nach der Definition *Crack Growth* weichen die Ergebnisse nach dem anfänglichen Sprung aufgrund des Kontakts zum Rand bis zu solch hohen Dehnungsdifferenzen kaum ab.

Aus der Diskussion der zyklischen  $J$ -Integrale anhand der summierten Konfigurationskräfte für verschiedene plastische Zonen folgt, dass ein eindeutiges physikalisch relevantes Gebiet für die Auswertung durch die lokalen Methoden in LSY-Bedingungen nicht vorliegt. Daher kann Hypothese H3 nicht bestätigt werden. Dennoch lässt sich mittels der EPZ für bestimmte Schwellenwerte eine näherungsweise gebietsunabhängige Lösung finden. Der Rand der Scheibe als solches, sowie Teile der EPZ am Rand spielen dabei eine zentrale Rolle und sollten in der Berechnung des  $J$ -Integrals nicht berücksichtigt werden. Die gebietsunabhängigen Lösungen lassen darauf schließen, dass nicht die Größe der EPZ allein entscheidend ist. Vielmehr ist die Höhe der Konfigurationskräfte an jedem einzelnen Knoten von Bedeutung. Implizit

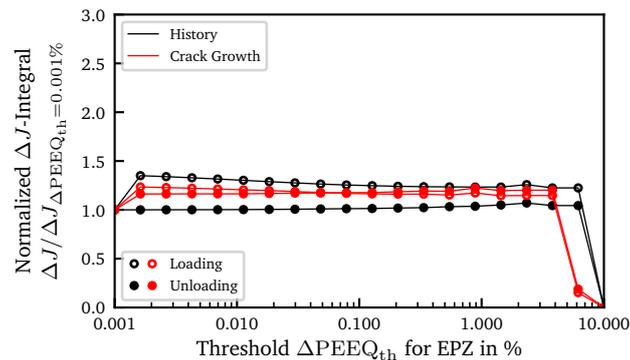


Abbildung 5.18: Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen  $J$ -Integrale vom Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,01 mm. LSY-Bedingungen

geht die Ermittlung für verschiedene Schwellenwerte der EPZ mit dieser Überlegung einher. Ließe sich ein physikalischer Grenzwert für Konfigurationskräfte bzw. Differenzen in der plastischen Vergleichsdehnung finden, die zum Rissfortschritt beitragen, könnte über diesen eine relevante Zone für die Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals vorgenommen werden. Die vorliegende Dissertation begrenzt sich auf eine quantitative vergleichende Betrachtung der verschiedenen Methoden. Daher werden im Folgenden die Ergebnisse auf Basis der EPZ für einen Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th} = 0,1\%$  herangezogen. Mit diesem lässt sich ein näherungsweise mittleres zyklisches  $J$ -Integral unabhängig von der EEL für das Konzept der Konfigurationskräfte ermitteln.

Tabelle 5.5 zeigt die absoluten zyklischen effektiven  $J$ -Integrale auf Basis aller Auswertungsmethoden für die LSY-Bedingungen und den Riss  $a = 2$  mm mit Vorgeschichte. Mit Ausnahme der für die APZ summierten Konfigurationskräfte liegen alle Lösungen in der gleichen Größenordnung. Hinsichtlich des Einflusses unterschiedlicher EELs zeigt sich aufgrund des veränderten Riss schließenverhaltens lediglich ein Einfluss auf die zyklischen  $J$ -Integrale im absteigenden Hysteresehalbast. Insgesamt sind diese gegenüber der Ergebnisse für den aufsteigenden Hysteresehalbast größer. Dies lässt sich ebenfalls für die SSY-Bedingungen beobachten, ist aber in LSY-Bedingungen ausgeprägter. Mit abnehmender EEL nähern sich die Lösungen jedoch an. Obwohl die Kontur 20 für das Gebietsintegral auch für die LSY-Bedingungen mit der ursprünglichen, in Abbildung 4.7 dargestellten Definition übereinstimmt, besitzt sie aufgrund der die ganze Scheibe umfassenden Plastizität keinerlei Begründung durch etwa das Umschließen einer bestimmten plastischen Zone. Die in Abbildung 5.11 (d) dargestellte Wegabhängigkeit und Abweichung des Gebietsintegrals vom globalen Ansatz deuten darauf hin, dass eine relevante Zone mit Konfigurationskräften oberhalb eines gewissen Grenzwerts existiert. Eine Übereinstimmung mit den diskutierten Zonen APZ und EPZ konnte allerdings nicht gefunden werden. Die Lösung auf Basis des Konzepts der Konfigurationskräfte mit der APZ ist aufgrund des Einschließens der Ränder der Scheibe überwiegend unplausibel. Eine Ausnahme stellt das Ergebnis für den absteigenden Hysteresehalbast und eine EEL von 0,01 mm dar. In diesem Fall stimmt das Ergebnis aufgrund der relativ kleinen und auf die Risspitze beschränkten APZ mit dem Gebietsintegral Kontur 20 und dem globalen Ansatz überein. Die Ergebnisse auf Basis der EPZ für einen festgelegten Schwellenwert  $\Delta PEEQ_{th} = 0,1\%$  stellen demgegenüber für

alle EEL eine mit dem globalen Ansatz näherungsweise konsistente Lösung dar. Die Absolutwerte nach der Definition *History* sind, wie unter SSY-Bedingungen auch, im Vergleich zur Definition *Crack Growth* geringer und weichen damit stärker vom globalen Ansatz ab.

Tabelle 5.5: Absolutwerte des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals in N/mm der lokalen Methoden und des globalen Ansatzes für den auf- und absteigenden Hysteresehalbast sowie verschiedene EEL

EEL in mm	Global Average		Contour 20		APZ		EPZ (History)		EPZ (Crack Growth)	
	Load	Unload	Load	Unload	Load	Unload	Load	Unload	Load	Unload
0,1	3,943	5,581	3,986	5,586	-0,052	1,002	3,376	4,399	3,804	5,517
0,05	3,937	4,959	3,990	4,962	-0,042	1,964	3,459	4,091	3,829	4,973
0,01	3,928	4,051	3,992	4,052	-0,036	4,051	3,677	3,677	3,843	4,256

Zusammenfassend zeigt das Kapitel 5.2 die Konsistenz der lokalen und globalen Berechnungsmethoden für das zyklische  $J$ -Integral unter bestimmten Bedingungen. Dabei wurde die Analyse anhand des Beispiels einer Scheibe mit Tunnelriss unter SSY- und LSY-Bedingungen durchgeführt. Die Konsistenz ist gegeben, wenn ein Referenzieren aller Feldgrößen auf den Rissöffnungszeitpunkt bzw. den oberen Lastumkehrpunkt durchgeführt wird und damit sichergestellt ist, dass lediglich der geöffnete Riss einen Beitrag am  $J$ -Integral leistet. Die Hypothese H1 kann daher bestätigt werden. Mit der Berücksichtigung von PICC geht das Vorliegen der Weg- bzw. Gebietsunabhängigkeit der lokalen Methoden einher, wobei diese je nach Beanspruchungssituation nicht exakt vorliegt. In den hier betrachteten Beispielen ist die Wegunabhängigkeit aber auch für die LSY-Bedingungen näherungsweise gegeben. Vor dem Hintergrund des in Kapitel 1 beschriebenen Anwendungsbereichs liegen in den meisten technischen Anwendungen SSY-Bedingungen vor bzw. werden lediglich SSY-Bedingungen in den verfolgten Bewertungskonzepten toleriert. Daher kann in guter Näherung von wegunabhängigen Lösungen ausgegangen werden. Die Bestätigung der Hypothese H2 ist gegeben, wobei der Maßstab für die Überprüfung der Abhängigkeit kein mathematisch exakter, sondern vielmehr ein ingenieurmäßiger Maßstab ist. Neben der Übereinstimmung der Gebietsintegralmethode mit dem globalen Ansatz existiert auch eine Konsistenz mit dem Konzept der Konfigurationskräfte. Hierzu wurden verschiedene relevante Zonen analysiert, die je nach Beanspruchungsbedingungen mehr oder weniger für die Berechnung des  $J$ -Integrals geeignet sind. Die Zonen sind nur dann geeignet, wenn sie allein auf die nähere Umgebung der Risspitze bezogen sind. Dies ist in den SSY-Bedingungen, aber nicht in den LSY-Bedingungen der Fall. Insbesondere wenn sich die APZ über das gesamte Ligament erstreckt, kann die EPZ für die Auswertung herangezogen werden. Hier zeigt die EPZ nach der Definition *Crack Growth* mit den restlichen Methoden übereinstimmende Ergebnisse. In diesem Zusammenhang wurde eine Analyse verschiedener Schwellenwerte durchgeführt. Die physikalische Interpretation des zyklischen  $J$ -Integrals auf Basis der lokalen Methoden ist die einer treibenden Kraft für die Bewegung der Risspitze und der mit ihr zusammenhängenden APZ bzw. EPZ. Die Interpretation des zyklischen  $J$ -Integrals auf Basis des globalen Ansatzes ist aufgrund der Konsistenz deckungsgleich, obwohl sie nicht die Frage nach einer relevanten Zone stellt. Schließlich ist dies die Bestätigung der Hypothese H3. Die Eignung der berechneten  $J$ -Integrale zur Beschreibung der Intensität des Nahfelds analysiert das folgende Kapitel.

---

## 5.3 Effektive Beanspruchung im Nahfeld der Risspitze

Auf den Ergebnissen des vorherigen Kapitels aufbauend findet im Folgenden eine Analyse der Beanspruchung im Nahfeld der Risspitze aus dem Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss statt. Die Hypothese H4 kann dadurch schließlich verifiziert werden. Hierbei wird die Beanspruchung in Form der Spannung und Dehnung ausschließlich in Belastungsrichtung und für den Abstand  $r$  zur Risspitze entlang des Ligaments, d.h. für einen Winkel  $\theta = 0^\circ$  betrachtet. Es werden sowohl die SSY-Bedingungen als auch die LSY-Bedingungen aus dem genannten Beispiel diskutiert. Aufgrund der unterschiedlichen zyklischen  $J$ -Integrale für den aufsteigenden und absteigenden Hysteresehalbast findet neben der Analyse der Felder zum Zeitpunkt der Maximallast ein Vergleich mit den jeweiligen Schwingbreiten aus den Referenzfeldern statt. Um die Eignung der berechneten zyklischen effektiven  $J$ -Integrale als Intensitäts- und damit Skalierungsparameter zu bewerten, findet die Analyse anhand verschiedener Risstiefen statt. Zur Einordnung der Ergebnisse ist die Lösung auf Basis des HRR-Feldes nach Gleichung 2.20 und 2.21 mit angegeben. Die Parameter der Ramberg-Osgood Beschreibung entsprechen denen zur Beschreibung der zyklischen Fließkurve des 9%-Cr Stahlguss in Abbildung 4.2. Mittels einer Vereinfachung der HRR-Feldgleichungen wird ein möglicher Weg aufgezeigt, wie eine Beschreibung der effektiven Beanspruchungsfelder nahe der Risspitze erfolgen kann. Anschließend wird die Sensitivität der Felder in Bezug auf das zyklische effektive  $J$ -Integral analysiert, um eine Einschätzung bezüglich des Einflusses der unterschiedlichen Auswertungsmethoden zu geben.

Die Darstellung der Felder findet aufgrund der größeren Relevanz für das Risswachstum vorwiegend anhand der Spannungs- und Dehnungskomponenten in Belastungsrichtung, d.h. senkrecht zur Rissausbreitungsrichtung, statt. In Abbildung 5.19 ist (a) das Spannungs- und (b) das Dehnungsfeld für die Scheibe mit Tunnelriss unter SSY-Bedingungen und die Risstiefen 0,5, 1, 1,5 und 2 mm jeweils mit Vorgeschichte dargestellt. Die Spannungen  $\sigma_{22}$  und Dehnungen  $\varepsilon_{22}$  sind mit der Anfangsfließspannung  $\sigma_0$  und der diesbezüglichen Dehnung  $\varepsilon_0$  normiert. Der Abstand zur Risspitze auf der Abszisse ist mit den zyklischen effektiven  $J$ -Integralen auf Basis des globalen Ansatzes abhängig von der Risstiefe sowie der Anfangsfließspannung normiert. Dadurch ist ein Vergleich der Felder bei unterschiedlichen Risstiefen möglich. Grundsätzlich kommt die überwiegende Anzahl an analysierten Auswertungsmethoden für das  $J$ -Integral zur Normierung in Frage. Allerdings wird in diesem Beispiel wie auch im Folgenden die Vorgehensweise des globalen Ansatzes aufgrund der Robustheit und Einfachheit in der Ermittlung gewählt. Wie in der Problemstellung beschrieben ist dieser Ansatz nur anwendbar, falls ein eindeutiger Lastangriffspunkt etc. vorhanden ist. Daher ist die Anwendung in diesem Beispiel, aber eben nicht im Allgemeinen möglich. Eine Diskussion der Auswirkungen variierender Lösungen auf die Felder findet gegen Ende dieses Kapitels statt. Zunächst wird der Frage nachgegangen, ob das zyklische  $J$ -Integral unter Berücksichtigung von Risschließeffekten geeignet ist, das Nahfeld an der Risspitze zu beschreiben. Dazu werden grundlegende Beobachtungen analysiert und diskutiert. In Abbildung 5.19 (a) bzw. (b) sind neben dem Feld zum Zeitpunkt der Maximallast  $\sigma_{\max}$  bzw.  $\varepsilon_{\max}$  die Felder auf Basis der Schwingbreite vom Rissöffnungszeitpunkt bis zur Maximallast  $\Delta\sigma_{\text{loading}}$  bzw.  $\Delta\varepsilon_{\text{loading}}$  und der Schwingbreite von Maximallast bis zum Risschließzeitpunkt  $\Delta\sigma_{\text{unloading}}$  bzw.  $\Delta\varepsilon_{\text{unloading}}$  angegeben. Letztendlich können im Hinblick auf die Spannungen, Abbildung 5.19 (a), zwei unterschiedliche charakteristische Felder innerhalb eines Zyklus beobachtet und deren Relevanz für den Rissfortschritt diskutiert werden. Zum einen ist dies das Feld bei Maximallast, welches sich von dem auf Basis der Schwingbreite für den Zeitraum des

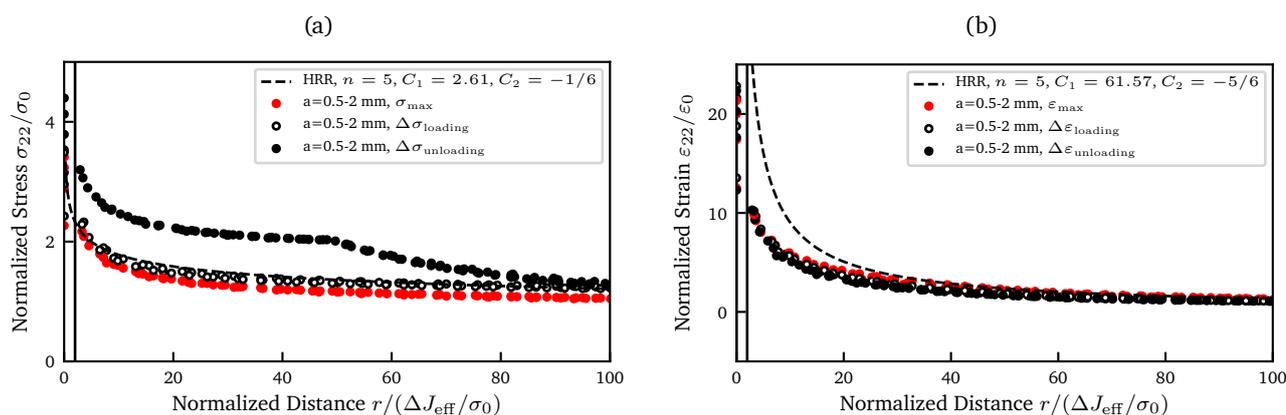


Abbildung 5.19: Entdimensionalisierte effektive Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze in SSY-Bedingungen, (a) in Form der Spannungskomponente und (b) in Form der Dehnungskomponente in Belastungsrichtung über dem mittels des globalen zyklischen effektiven  $J$ -Integrals entdimensionalisierten Abstand zur Rissspitze für die Risstiefen 0,5, 1, 1,5 und 2 mm

geöffneten Risses während des aufsteigenden Hysteresehalbasts kaum unterscheidet. Zum anderen ist es das Feld für den absteigenden Hysteresehalbst bis zum Rissschließzeitpunkt. Die Schwingbreite in letzterem Fall ist größer als für den aufsteigenden Hysteresehalbst, was durch die Betrachtung einer Spannungs-Dehnungs-Hysterese leicht nachvollziehbar ist. Da der Riss bei unterschiedlichen Spannungen öffnet und schließt, ergibt sich auch im Nahfeld an der Rissspitze auf Basis der Schwingbreiten ein solcher Unterschied. Darüber hinaus unterscheidet sich das Feld im absteigenden Hysteresehalbst durch eine Änderung des zunächst asymptotischen Verlaufs bis zu einem dimensionslosen Abstand von ca. 50 und einem anschließenden weiteren Abfall der Spannung. Der dimensionsbehaftete Abstand an diesem Punkt, z.B. für die Risstiefe von 2 mm, beträgt 0,17 mm und entspricht damit näherungsweise der Größe der APZ, siehe hierzu auch Abbildung 5.6 (a). In Anlehnung an Kapitel 2.3 und Abbildung 2.4 liegt außerhalb des  $J$ -dominierten Bereichs ein elastisches Beanspruchungsfeld vor, dessen Intensität auch durch den Spannungsintensitätsfaktor beschrieben werden kann.

Gegenüber dem Unterschied in den Spannungsfeldern zwischen auf- und absteigendem Hysteresehalbst zeigt sich dieser in den Dehnungsfeldern in Abbildung 5.19 (b) nicht. Vormwald [79, 85] beobachtete in seinen Untersuchungen, dass der Riss bei ungefähr gleicher globaler Dehnung öffnet und schließt. Mit Abbildung 5.19 (b) lässt sich zeigen, dass dies auch in diesem Beispiel für das Nahfeld an der Rissspitze zutrifft, insofern die Normierung mittels des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals erfolgt. Diese Beobachtung steht auch im Einklang mit der Analyse zyklischer Rissspitzenöffnungsverschiebungen  $\Delta\text{CTOD}$ , welche für das diskutierte Beispiel eine einheitliche Lösung pro Zyklus liefert. Es ergibt sich bei dieser Art von Betrachtung der Rissspitzenbeanspruchung keine Unterscheidung in einen aufsteigenden oder absteigenden Hysteresehalbst. Hinsichtlich einer energetischen Betrachtung des Nahfelds reicht allein das Dehnungs- bzw. Verschiebungsfeld nicht aus. Es stellt sich also die Frage, ob allein  $\Delta\text{CTOD}$  in der Lage ist Rissfortschritt zu beschreiben.

Die Ergebnisse zeigen des Weiteren, dass die Felder für die unterschiedlichen Risstiefen durch Normierung mittels zyklischem effektiven  $J$ -Integral zu näherungsweise einer einheitlichen Lösung konvergieren. Diese stimmt allerdings nicht mit dem ebenfalls in Abbildung 5.19 dargestellten HRR-Feld überein. Insbesondere das Dehnungsfeld in (b) weist eine schwächere Singularität nahe der Rissspitze auf. Dennoch scheint eine Skalierbarkeit der Beanspruchungsfelder mittels des bestimmten  $J$ -Integrals gegeben zu sein. Eine Möglichkeit der Beschreibung dieses Feldes ist in Anlehnung an das HRR-Feld ein Potenzansatz mit den Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  nach Gleichung 5.1. Durch Zusammenfassen aller Material- und Integrationskonstanten in den Feldgleichungen der HRR-Theorie für den ebenen Spannungszustand aus Gleichung 2.20 können die beiden Koeffizienten unter der Annahme der Deformationstheorie sowie einer monoton steigenden Beanspruchung ebenfalls bestimmt werden. Diese sind für die Darstellung in Abbildung 5.19 in der Legende mit angegeben. Im Fall eines zyklisch beanspruchten Risses unter Anwendung der inkrementellen Plastizitätstheorie und Berücksichtigung von Riss schließen, wie in den diskutierten Beispielen, würden sich diese Koeffizienten an die effektiven Beanspruchungsfelder anpassen lassen.

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = C_1 \left( \frac{J}{\sigma_0 r} \right)^{C_2} \quad (5.1)$$

Mit Ausnahme der Unterscheidung in ein Spannungsfeld innerhalb und außerhalb der APZ im absteigenden Hysteresehalbast trifft die Analyse anhand des Beispiels unter SSY-Bedingungen auch für die LSY-Bedingungen zu. Abbildung 5.20 zeigt in (a) die Spannungs- und in (b) die Dehnungsfelder analog zu Abbildung 5.19. Die zur Entdimensionalisierung verwendeten zyklischen effektiven  $J$ -Integrale stammen ebenso aus der Berechnung mittels des globalen Ansatzes.

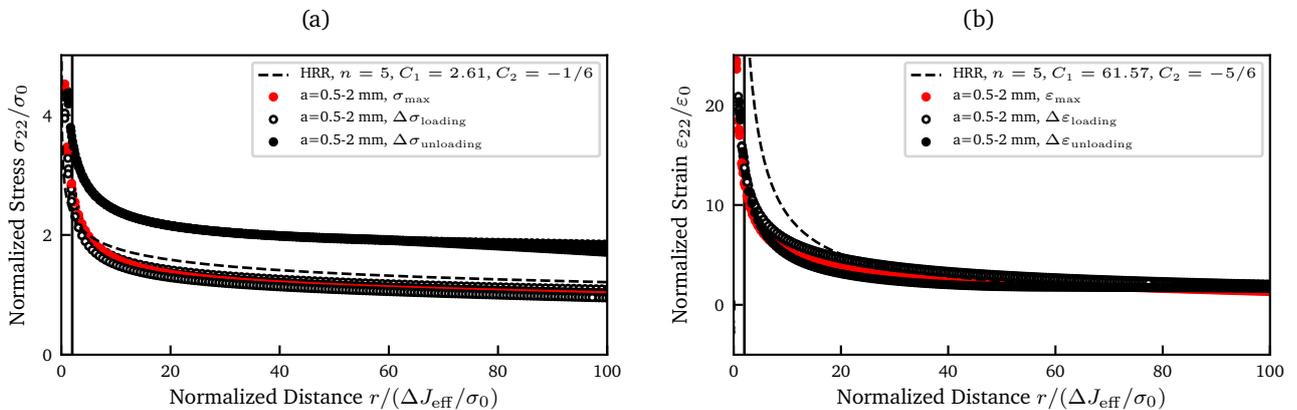


Abbildung 5.20: Entdimensionalisierte effektive Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze in LSY-Bedingungen, (a) in Form der Spannungskomponente und (b) in Form der Dehnungskomponente in Belastungsrichtung über dem mittels des globalen zyklischen effektiven  $J$ -Integrals entdimensionalisierten Abstand zur Rissspitze für die Risstiefen 0,5, 1, 1,5 und 2 mm

Um den Einfluss der verschiedenen Auswertungsmethoden des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals auf das Beanspruchungsnahfeld zu bewerten, wurde eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Hierzu wurde

ausschließlich eine Risstiefe von 2 mm betrachtet. Die Lösung des globalen Ansatzes wurde als Referenz herangezogen, um die Auswirkungen einer Variation um  $\pm 10\%$  zu analysieren. Wie im Kapitel 5.2 beschrieben, sind die Abweichungen der unterschiedlichen Methoden untereinander überwiegend geringer. Abbildung 5.21 zeigt für die SSY-Bedingungen in (a) und für die LSY-Bedingungen in (b) die Auswirkungen auf die Spannungs- und Dehnungsfelder. Dabei stellt sie die relative Abweichung der jeweiligen Größe über dem Abstand zur Rissspitze dar. Im Ergebnis weichen die Dehnungsfelder stärker als die Spannungsfelder vom Referenzwert ab. Dennoch liegt die maximale Abweichung unabhängig von den Beanspruchungsbedingungen in einem Bereich von ebenfalls  $\pm 10\%$ .

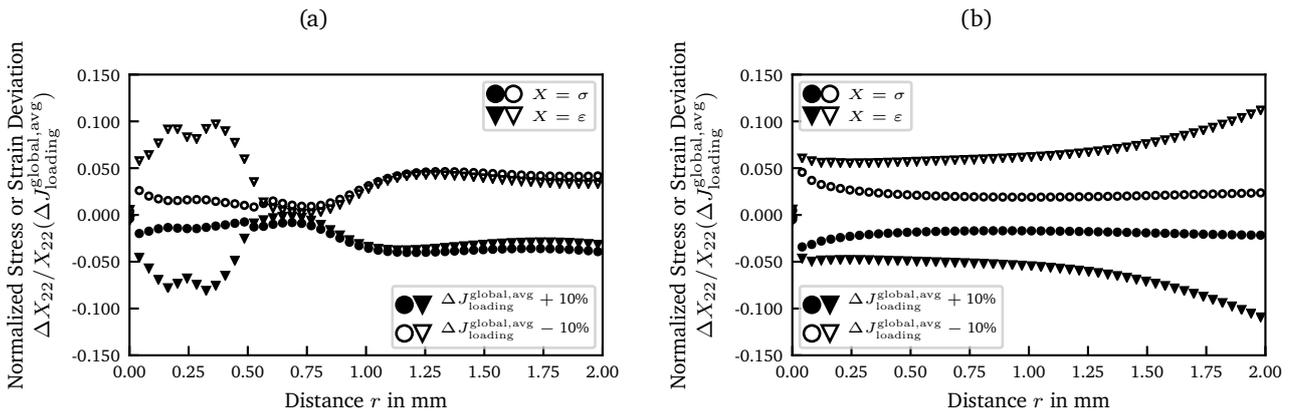


Abbildung 5.21: Auswirkungen einer Variation des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals von  $\pm 10\%$  auf das Spannungs- und Dehnungsfeld nahe der Rissspitze für den aufsteigenden Hysteresehalbast, (a) SSY-Bedingungen, (b) LSY-Bedingungen

Die Unterschiede im zyklischen effektiven  $J$ -Integral, die sich aus der Auswertung des auf- bzw. absteigenden Hysteresehalbastes ergeben, sind durch die Analyse der zehnpromigen Änderung des  $J$ -Integrals und Abbildung 5.21 ebenfalls abgedeckt. Tabelle 5.2 und 5.5 für die SSY-Bedingungen bzw. die LSY-Bedingungen zeigt, abgesehen vom Einfluss des Rissenschließzeitpunkts durch die größere EEL in LSY-Bedingungen, eine Abweichung des  $J$ -Integrals in ebendieser Größenordnung. Daraus folgt, dass sich die geringfügigen Abweichungen zwischen den beiden Hysteresehalbästen im Spannungs- und Dehnungsfeld nahe der Rissspitze wie in Abbildung 5.21 gleichermaßen widerspiegeln. Die Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze unter Berücksichtigung von Rissenschließen für die zyklisch beanspruchte Scheibe mit Tunnelriss unter SSY- und LSY-Bedingungen lässt sich somit durch das zyklische effektive  $J$ -Integral nahezu unabhängig von der Berechnungsmethode beschreiben. Die Hypothese H4 lässt sich aufgrund der durchgeführten Analysen schließlich bestätigen.

Das folgende Kapitel geht auf die Potentiale und Einschränkungen der entwickelten Methoden ein, die sich für die Bauteilanwendung ergeben.

## 5.4 Bedeutung der Erkenntnisse für die Bauteilanwendung

Die übergeordnete Motivation der durchgeführten Untersuchungen, wie sie Kapitel 1 und 3 beschreibt, ist die zuverlässige Bewertung der Lebensdauer von Bauteilen. Im Fokus steht dabei die Berechnung von Rissfortschritt hervorgerufen durch eine zyklische Beanspruchung in Werkstoffen, die ein elastisch-plastisches

---

Verhalten zeigen. Als Parameter zur Ermittlung der Rissfortschrittsrate durch einen semi-empirischen Zusammenhang wie dem Paris Gesetz, Gleichung 2.34, lässt sich das zyklische  $J$ -Integral verwenden. Kapitel 2 zeigt verschiedene Ansätze zur Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals unter Berücksichtigung von plastizitäts-induziertem Riss schließen. Es geht dabei insbesondere auf die Auswertung über globale Kraft-Verschiebungs-Kurven ein. Allerdings war die physikalische Bedeutung des berechneten Parameters bisher unklar und seine Ermittlung unterlag wesentlichen Einschränkungen. Eine Anwendung der Methode auf komplexere Geometrien und Beanspruchungsbedingungen, wie sie für Bauteile vorliegen, war ohne weiteres nicht möglich.

Anhand des Beispiels der Scheibe mit Tunnelriss konnten im Rahmen der Dissertation lokale Auswertungsmethoden entwickelt und die physikalische Interpretation des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals untersucht werden. In SSY-Bedingungen beschreibt es die Triebkraft für die Bewegung der Risspitze in Kombination mit seiner APZ. Das heißt, durch die Summe aller Konfigurationskräfte innerhalb dieser Zone lässt sich das  $J$ -Integral ermitteln. Ein vergleichbares Ergebnis liefert die Gebietsintegralmethode für die Auswertung einer Kontur, die die APZ umschließt. Aufgrund der eindeutigen Definition der APZ durch Gleichung 4.7 eignet sich die Auswertung mittels der Konfigurationskräfte ebenso für die Anwendung auf Bauteile. Es existieren prinzipiell keine besonderen Anforderungen an die Simulation, um im Anschluss eine Auswertung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals durchführen zu können. In LSY-Bedingungen ist die physikalische Interpretation nicht eindeutig, da sich die APZ nicht allein auf die Risspitze bezieht. Die großen Bereiche, in denen plastisches Materialverhalten vorliegt, erstrecken sich zum Teil über das gesamte Ligament und schließen die Geometrie der betrachteten Struktur mit ein. Dennoch konnte durch die Definition einer EPZ und der Betrachtung verschiedener Schwellenwerte in den analysierten Beispielen ein geeignetes Auswertungsgebiet gefunden werden. Ab einem entsprechend großen Schwellenwert löst sich die EPZ von den Rändern der rissbehafteten Struktur und beschränkt sich allein auf das Nahfeld der Risspitze. Für diesen Fall lässt sich eine vom Schwellenwert nahezu unabhängige Lösung finden. Für die Anwendung auf Bauteile in LSY-Bedingungen müsste daher im Einzelfall eine Analyse der verschiedenen Definitionen der EPZ und insbesondere der Abhängigkeit vom Schwellenwert stattfinden.

Unter der Annahme, dass die in Kapitel 2.1 beschriebenen Mechanismen des Risswachstums durch das Nahfeld bestimmt sind, kann letztlich eine Berechnung des Rissfortschritts durch das zyklische effektive  $J$ -Integral erfolgen. Vorteil der lokalen Methoden ist ihre Übertragbarkeit auf prinzipiell jede beliebige Geometrie und Beanspruchungssituation. Durch den Einsatz der Gebietsintegralmethode als auch durch die Herangehensweise über die Konfigurationskräfte entfällt die Beschränkung auf Probleme, die einen eindeutigen Lastangriffspunkt zur Auswertung der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven aufweisen. Darüber hinaus entfällt die Durchführung mehrerer Simulationen für benachbarte Risstiefen unter Vorgabe gleicher globaler Kräfte bzw. Verschiebungen. Zum einen reduziert sich dadurch der Simulationsaufwand und zum anderen entfällt die Unterscheidung in die beiden Lösungen bei gleicher Kraft- oder Verschiebungsvorgabe. Der Einfluss einer bestimmten Zyklenzahl, die zwischen zwei benachbarten Risstiefen vergeht, verschwindet, da die Lösung der lokalen Ansätze bereits für die eine interessierende Risstiefe vorliegt. Auch die grundsätzliche Beschränkung auf eine eindimensionale Betrachtung des Risses entfällt. Damit ist es prinzipiell möglich mehrdimensionale Rissfronten inklusive einer lokalen Berücksichtigung des Riss schließenverhaltens zu realisieren. Die lokalen Ansätze bieten somit großes Potential für die Anwendung auf Bauteile ohne der Einschränkungen des globalen Energieansatzes zu unterliegen.

---

## 6 Zusammenfassung

---

Diese Dissertation zeigt, dass das zyklische  $J$ -Integral zur Beschreibung der Beanspruchung im Nahfeld einer Rissspitze geeignet ist. Dies gilt auch, wenn der Riss sich in einem Werkstoff befindet, welcher sich elastisch-plastisch verhält. Die Voraussetzung dafür ist die Berücksichtigung des Riss-schließens sowie der Lastumkehr in der Berechnung des  $J$ -Integrals. Weiterhin stützen die Ergebnisse dieser Dissertation die physikalische Interpretation des Parameters als treibende Kraft für die Bewegung der Rissspitze in Kombination mit einer ihr zuzuordnenden aktiven plastischen Zone. Die Grundlage für die durchgeführten Analysen stellen Simulationen eines zyklisch beanspruchten Risses in einer Scheibe unter verschiedenen Beanspruchungsbedingungen mittels FEM dar.

Zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals werden verschiedene Methoden eingesetzt. Der globale Ansatz ermöglicht die Berechnung anhand von Kraft-Verschiebungs-Kurven, die an einem eindeutigen Lastangriffspunkt aus der Simulation hervorgehen. Durch das Referenzieren dieser auf die Lastumkehrpunkte im Zyklus ist eine getrennte Auswertung des  $J$ -Integrals für den aufsteigenden und absteigenden Hysteresehalbst möglich. Allerdings sind mit dieser Methode keine tiefgehenden Untersuchungen zur physikalischen Interpretation des Parameters möglich, da immer die gesamte rissbehaftete Struktur in der Auswertung berücksichtigt wird. Daher werden zudem lokale Methoden basierend auf dem Gebietsintegral und dem Konzept der Konfigurationskräfte im Rahmen dieser Dissertation angewendet. Mit diesen geht abhängig vom Ausmaß der vorliegenden Plastizität zwangsläufig die Diskussion über das zu wählende Auswertungsgebiet einher. Im Allgemeinen sind die Lösungen für elastisch-plastisches Materialverhalten wegabhängig. Die Wegabhängigkeit lässt sich aber maßgeblich reduzieren, insofern eine Aufteilung des Zyklus wie für den globalen Ansatz vorgenommen wird. Zudem ist ein Referenzieren aller Feldgrößen auf den Rissöffnungszeitpunkt für eine näherungsweise wegunabhängige Lösung des  $J$ -Integrals im aufsteigenden Hysteresehalbst notwendig. Um eine wegunabhängige Lösung für den absteigenden Hysteresehalbst zu erhalten, ist ein Referenzieren auf den oberen Lastumkehrpunkt und eine Berechnung bis zum Riss-schließzeitpunkt durchzuführen. Durch diese Maßnahmen lässt sich die Konsistenz der lokalen Methoden und der globalen Methode am Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss demonstrieren.

Im Rahmen der lokalen Berechnungsmethoden werden zunächst anhand der SSY-Bedingungen verschiedene Auswertungsgebiete untersucht, die eine physikalische Relevanz für die Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze haben könnten. Hierzu wird im Rahmen des Konzepts der Konfigurationskräfte eine aktive plastische Zone sowie eine effektive plastische Zone eingeführt. Die aktive plastische Zone umfasst dabei den Bereich, der sich aktiv – zu diesem Zeitpunkt – plastisch verhält. Im Fall der SSY-Bedingungen ist dies näherungsweise die plastische Zone vor der Rissspitze. Die effektive plastische Zone ergibt sich aus der Betrachtung der Differenz plastischer Dehnungen aufgrund von Rissfortschritt. In diesem Zusammenhang

---

werden zwei Definitionen angewendet, welche zudem die Wahl eines Schwellenwertes bedingen. Auch diese Zone ist im Fall der SSY-Bedingungen auf einen Bereich nahe der Rissspitze beschränkt. Diese Dissertation zeigt, dass unter den genannten Bedingungen und für die beschriebenen Auswertungsgebiete die zyklischen effektiven  $J$ -Integrale übereinstimmen. Daraus folgt, dass der mittels des globalen Ansatzes berechnete Parameter die treibende Kraft für die Bewegung der Rissspitze in Kombination mit der plastischen Zone darstellt. Am Beispiel der LSY-Bedingungen zeigen sich die Anwendungsgrenzen der betrachteten Auswertungsgebiete. Durch die Ausdehnung der plastisch deformierten Bereiche bis zum Rand der Scheibe ist keine Zuordnung der aktiven plastischen Zone zur Rissspitze möglich. Die Ergebnisse der lokalen Methoden sind für dieses Gebiet unbrauchbar. Die effektive plastische Zone ermöglicht weiterhin die Definition eines auf die Rissspitze bezogenen Bereichs abhängig vom gewählten Schwellenwert. Für sehr kleine Schwellenwerte umfasst auch dieses Gebiet den Rand der Scheibe. Sobald aber ein Schwellenwert gefunden ist, sodass die effektive plastische Zone den Rand gerade nicht mehr berührt, stimmen die zyklischen effektiven  $J$ -Integrale mit dem globalen Ansatz überein. Daraus folgt, dass nicht alle Bereiche einer Struktur in denen plastische Deformationen vorliegen zum  $J$ -Integral und damit zur Beanspruchung im Nahfeld der Rissspitze beitragen. Diese Dissertation zeigt, dass sich mit den berechneten zyklischen effektiven  $J$ -Integralen auch für die LSY-Bedingungen das Nahfeld beschreiben lässt.

Aufgrund der Eigenschaft als Intensitätsparameter der effektiven Beanspruchung im Nahfeld einer Rissspitze eignet sich das berechnete zyklische  $J$ -Integral zur Beschreibung von Risswachstum. Die Dissertation vertritt die Sichtweise, dass das die Rissspitze umgebende Beanspruchungsfeld die vielfältigen physikalischen Mechanismen beeinflusst. Letztere führen schließlich zur Materialtrennung. Das  $J$ -Integral kann die Felder in vielen technischen Anwendungen charakterisieren, da die Rissfortschrittsinkremente unter Ermüdungsbeanspruchung in der Regel so klein sind, dass sie immer innerhalb eines solchen Feldes liegen.

Ein weiteres wesentliches Ergebnis der Dissertation ist, dass durch diese nun eine lokale Berechnungsmethode zur Verfügung steht, die ohne die Einschränkungen des globalen Ansatzes auskommt. Dadurch, dass kein eindeutiger Lastangriffspunkt benötigt wird, ist es für beliebige Strukturen und damit auch Bauteile möglich zyklische effektive  $J$ -Integrale zu berechnen. Das Ergebnis für eine Risstiefe ist eindeutig und unabhängig von der Art der Beanspruchung durch Kräfte oder Verschiebungen. Die Methode bietet des Weiteren die Möglichkeit einer lokalen Auflösung der Rissspitzenbeanspruchung entlang einer mehrdimensionalen Rissfront.

---

## 7 Ausblick

---

Die im Rahmen der Dissertation entwickelten Methoden sollten in Anschlussuntersuchungen auf Geometrien und Beanspruchungssituationen angewendet werden, für die der globale Ansatz nicht weiter anwendbar ist. Dennoch sollten die Berechnungen zunächst durch experimentelle Untersuchungen unterstützt und validiert werden, bevor ein Einsatz in der Praxis erfolgen kann. In Betracht kommen bauteilähnliche Anwendungen wie z.B. Kreuzproben unter mehrachsiger Beanspruchung im Fernfeld oder Hohlzylinder unter einem Innendruck. Teilweise liegen durch abgeschlossene Forschungsprojekte [1, 2] bereits solche experimentelle Daten zur Validierung vor.

Die im Rahmen der Dissertation durchgeführten Arbeiten sind zudem auf eine eindimensionale Betrachtung des Risses beschränkt. Der globale Ansatz ermöglicht ohne weiteres auch keine mehrdimensionale Betrachtung, sodass die diskutierten Beispiele für eine Überprüfung der Konsistenz dementsprechend ausgewählt wurden. In den von Kontermann et al. [1, 4, 6] und Garnadt et al. [2, 3, 5, 87] untersuchten gekerbten Rundproben war die eindimensionale Betrachtung in den überwiegenden Fällen ausreichend, weil der Riss sich näherungsweise konzentrisch ausbreitete und somit an jedem Punkt die gleichen Beanspruchungen im Nahfeld vorlagen. Ein Beispiel in dem diese Bedingungen nicht erfüllt sind, konnte in Garnadt et al. [2] an Corner-Crack Proben beobachtet werden. Eine exemplarische Bruchfläche aus einem Ermüdungsrissschrittsversuch am 9%-Cr Stahlguss bei 600 °C und einem  $R$ -Verhältnis von -1 zeigt Abbildung 7.1. Die Rissfront ist nicht viertelkreisförmig, sodass die Beschreibung der Beanspruchung im Nahfeld vom Ort entlang der Front abhängen muss. Einen Zugang zu einer solchen Betrachtung liegt durch die in der Dissertation entwickelten lokalen Ansätze theoretisch vor. Mit diesen sollte sich ein entlang der Rissfront variierendes zyklisches  $J$ -Integral unter Berücksichtigung des lokalen Risschließverhaltens berechnen lassen, um damit eine Bewertung der mehrdimensionalen Rissausbreitung vornehmen zu können. Um dieses Ziel zu erreichen, sollte die Auswertung des Energie-Impuls Tensors im Dreidimensionalen erfolgen, wozu wiederum die Daten aus dann dreidimensionalen Elementen nötig wären.

Des Weiteren treten im Betrieb von Turbomaschinen häufig thermische Gradienten auf, die global betrachtet zu keinen Kräften führen. Daher kann der globale Ansatz in der beschriebenen Form für solche Beanspruchungsfälle nicht angewendet werden. Auch hier bieten sich theoretisch die lokalen Ansätze an, wobei zu klären ist, inwieweit diese geeignet und anwendbar sind. In der Literatur finden sich zu diesem Thema Erweiterungen des Gebietsintegrals, z.B. in Wilson und Yu [136] oder Shih et al. [132]. Eine Anwendung dieser findet sich z.B. in Bauerbach [137]. In Anschlussuntersuchungen sollten diese Erkenntnisse zusätzlich in die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zur Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals unter Berücksichtigung von Risschließen integriert werden.

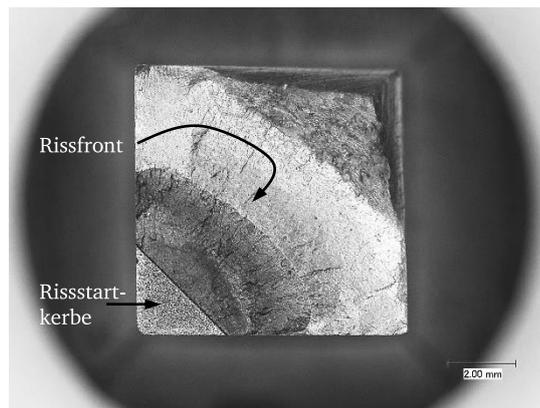


Abbildung 7.1: Mehrdimensionale Rissfront in einer Corner-Crack Probe aus 9%-Cr Stahlguss und einem Ermüdungsrissfortschrittsversuch mit  $R$ -Verhältnis -1 bei 600 °C, Garnadt et al. [2]

In Anschlussuntersuchungen sollte die Anwendbarkeit der entwickelten lokalen Methoden im Rahmen von Rissfortschrittssimulationen mit a priori unbekanntem Risspfaden überprüft werden. Aufbauend auf Lösungen, wie z.B. Franc3D, zur Berechnung von Risspfaden für elastisches Materialverhalten kann die Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals integriert werden. Damit verbunden ist die Neuvernetzung in der Nähe der Rissspitze, was aktuell in Verbindung mit plastischem Materialverhalten eine Herausforderung darstellt. Der Vorteil wäre jedoch, dass die Beanspruchung in der Nähe der Rissspitze zielgerichtet auflösbar ist, um die Struktur nicht von vornherein sehr fein vernetzen zu müssen. Die Übertragung von Variablen zwischen verschiedenen Vernetzungen im Zusammenhang mit Plastizität adressiert z.B. Zerres [97].

Durch den globalen Ansatz ließen sich in den Forschungsprojekten, Kontermann et al. [1] und Garnadt et al. [2], zahlreiche weitere Einflussfaktoren auf Risswachstum im Zusammenhang mit Hochtemperaturbeanspruchungen untersuchen. Eine Erweiterung der lokalen Ansätze aus dieser Dissertation für diese Situationen sollte vorangetrieben werden. Zum einen ist dies die Berücksichtigung des Einflusses von Haltezeiten, in denen für eine bestimmte Verweildauer in einem Zyklus die Last konstant gehalten wird. Die dadurch hervorgerufenen Kriechdehnungen beeinflussen neben den Risschließeffekten die Beanspruchungsfelder. Ein Konzept zur Berechnung der risstreibenden Kraft in solchen Situationen auf Basis der Konfigurationskräfte allerdings für stationäre Bedingungen wurde kürzlich in Kolednik et al. [138] beschrieben. Zum anderen konnte durch den globalen Ansatz und der Modellierung einer Oxidschicht entlang der Rissflanken der Einfluss von oxidinduziertem Riss schließen zusätzlich zum PICC in der Berechnung des zyklischen  $J$ -Integrals berücksichtigt werden. Es sollte geklärt werden, inwiefern die zusätzlich eingebrachten Elemente nahe der Rissspitze die Ergebnisse mittels der lokalen Methoden beeinflussen. In diesem Zusammenhang sollte überprüft werden, ob die Konsistenz des ermittelten zyklischen effektiven  $J$ -Integrals zu anderen Parametern wie der zyklischen Rissspitzenöffnungsverschiebung weiterhin gegeben ist. Die Messung der Beanspruchungsfelder in der Nähe der Rissspitze mittels optischer Methoden würde eine Möglichkeit der Validierung der berechneten Felder bieten.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] Kontermann, C., Scholz, A., Huang, M., Klenk, A., Hobt, A., Oechsner, M. und Weihe, S. „Influence of support effects on the long-term effect of creep-fatigue behavior of power plant components at high load rates of change“. *Final Report of AVIF A282, Issue R577, FVV Information Sessions Turbomachinery, Magdeburg* (2016).
- [2] Garnadt, F., Kontermann, C., Huang, M., Klenk, A., Oechsner, M. und Weihe, S. „Quantification of notch support effects for components made of cast steel against the background of a more flexible operation“. *Final Report of AVIF A310, Issue R597, FVV Information Sessions Turbomachinery, Frankfurt* (2021).
- [3] Garnadt, F. und Kontermann, C. „Stützwirkung unter Kriechermüdungsbeanspruchung - Entwicklung und Validierung eines Anwenderprogramms“. *Verbundprojekt ECOFlex-Turbo, Teilverbundprojekt-Nr. 4 Expansion, Darmstadt* (2020).
- [4] Kontermann, C. *Entwicklung und Validierung eines FEM-basierten Rissfortschrittsmodells zur Beschreibung von Stützwirkung unter Kriechermüdungsbeanspruchung*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2017.
- [5] Garnadt, F., Kontermann, C. und Oechsner, M. „Crack Closure in Cycles with Dwell Times at High Temperature“. *Engineering Fracture Mechanics* 268 (2022), S. 108463.
- [6] Kontermann, C., Almstedt, H., Müller, F. und Oechsner, M. „On the Evaluation and Consideration of Fracture Mechanical Notch Support Within a Creep-Fatigue Lifetime Assessment“. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 140(12) (2018).
- [7] Garnadt, F., Kontermann, C. und Oechsner, M. „Early Crack Growth from Notches under Creep-Fatigue Loading“. *Procedia Structural Integrity* 42 (2022), S. 1113–1120.
- [8] Anderson, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, Fourth Edition*. CRC Press, 2017.
- [9] Griffith, A. A. „The Phenomena of Rupture and Flow in Solids“. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 221 (1920), S. 163–198.
- [10] Inglis, C. E. „Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners“. *Trans Inst Naval Archit* 55 (1913), S. 219–241.
- [11] Irwin, G. „Fracture Dynamics, Fracturing of Metals“. *American Society for Metals, Cleveland, Ohio* (1948), S. 147–166.
- [12] Orowan, E. „Fracture and Strength of Solids“. *Reports on Progress in Physics*. Bd. 12. 1949.
- [13] Rice, J. R. und Tracey, D. M. „On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17(3) (1969), S. 201–217.
- [14] McClintock, F. A. „A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes“. *Journal of Applied Mechanics* 35(2) (1968), S. 363–371.

- 
- [15] Gurson, A. L. *Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth, and interaction*. PhD Thesis, Brown University, 1975.
- [16] Tvergaard, V. „On localization in ductile materials containing spherical voids“. *International Journal of Fracture* 18 (1982), S. 237–252.
- [17] Tvergaard, V. „Material failure by void growth to coalescence“. *Advances in Applied Mechanics* 27 (1989), S. 83–151.
- [18] Chu, C. und Needleman, A. „Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets“. *Journal of Engineering Materials and Technology* 102 (1980), S. 249–256.
- [19] Tvergaard, V. und Needleman, A. „Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar“. *Acta metallurgica* 32(1) (1984), S. 157–169.
- [20] Laird, C. „The Influence of Metallurgical Structure on the Mechanisms of Fatigue Crack Propagation“. *Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415*. ASTM International, 1967.
- [21] Pelloux, R. M. N. „Crack extension by alternating shear“. *Engineering Fracture Mechanics* 1(4) (1970), S. 697–700.
- [22] Neumann, P. „The geometry of slip processes at a propagating fatigue crack—II“. *Acta Metallurgica* 22(9) (1974), S. 1167–1178.
- [23] Tomkins, B. und Biggs, W. „Low Endurance Fatigue in Metals and Polymers, Part 3 The Mechanisms of Failure“. *Journal of Materials Science* 4 (1969), S. 544–553.
- [24] McEvily Jr, A. und Boettner, R. „On fatigue crack propagation in FCC metals“. *Acta Metallurgica* 11(7) (1963), S. 725–743.
- [25] Furukawa, K., Murakami, Y. und Nishida, S.-I. „A method for determining stress ratio of fatigue loading from the width and height of striation“. *International Journal of Fatigue* 20(7) (1998), S. 509–516.
- [26] Tomkins, B. „The Mechanism of Stage II Fatigue Crack Growth“. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 19(11) (1996), S. 1295–1300.
- [27] Döring, R. *Zum Deformations- und Schädigungsverhalten metallischer Werkstoffe unter mehrachsiger nichtproportionaler zyklischer Beanspruchung*. Bd. 78. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik der Technischen Universität Darmstadt, 2006.
- [28] Mises, R. v. „Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand“. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse* (1913), S. 582–592.
- [29] Mises, R. v. „Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8(3) (1928), S. 161–185.
- [30] Taylor, G. „A connexion between the criterion of yield and the strain ratio relationship in plastic solids“. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 191(1027) (1947), S. 441–446.
- [31] Hill, R. „A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity“. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1(1) (1948), S. 18–28.
- [32] Hill, R. *The mathematical theory of plasticity*. Bd. 11. Oxford, Clarendon Press, 1950.
- [33] Hodge Jr, P., Hopkins, H. und Lee, E. „The theory of piecewise linear isotropic plasticity“. *Deformation and Flow of Solids* (1956), S. 147–170.

- 
- [34] Bauschinger, J. „Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit des Eisens und Stahl durch Strecken und Quetschen, durch Erwärmung und Abkühlen und durch oftmals wiederholte Beanspruchung“. *Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule, München* 13 (1886).
- [35] Prager, W. „The theory of plasticity: a survey of recent achievements“. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 169(1) (1955), S. 41–57.
- [36] Ziegler, H. „A modification of Prager’s hardening rule“. *Quarterly of Applied mathematics* 17(1) (1959), S. 55–65.
- [37] Armstrong, P. und Frederick, C. „A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect“. *CEGB Report, RD/B/N731, Berkely Nuclear Laboratories* (1966).
- [38] Chaboche, J., Dang Van, K. und Cordier, G. „Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel“. *Transactions of 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology* (1979).
- [39] Ramberg, W. und Osgood, W. R. „Description of stress-strain curves by three parameters“. *NACA Technical Note No. 902* (1943).
- [40] Westergaard, H. M. „Bearing pressures and cracks: Bearing pressures through a slightly waved surface or through a nearly flat part of a cylinder, and related problems of cracks“. *Journal of Applied Mechanics* 6(2) (1939), A49–A53.
- [41] Williams, M. L. „On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack“. *Journal of Applied Mechanics* 24(1) (1957), S. 109–114.
- [42] Murakami, Y. und Keer, L. „Stress Intensity Factors Handbook, Vol. 3“. *Journal of Applied Mechanics* 60(4) (1993).
- [43] Forschungskuratorium Maschinenbau, e.V. *FKM-Richtlinie „Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“*. 2009.
- [44] Irwin, G. R. „Plastic zone near a crack and fracture toughness“. *Sagamore Research Conference Proceedings* 4 (1961), S. 63–78.
- [45] Dugdale, D. S. „Yielding of steel sheets containing slits“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8(2) (1960), S. 100–104.
- [46] Hutchinson, J. „Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16(1) (1968), S. 13–31.
- [47] Rice, J. R. und Rosengren, G. „Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16(1) (1968), S. 1–12.
- [48] Brocks, W., Klingbeil, D. und Olschewski, J. *Lösung der HRR-Feld-Gleichungen der elastisch-plastischen Bruchmechanik*. 1990.
- [49] McMeeking, R. und Parks, D. „On Criteria for J-dominance of Crack-Tip Fields in Large-Scale Yielding“. *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668*. ASTM International, 1979.
- [50] Rice, J. R. und A., J. M. „The role of large crack tip geometry changes in plane strain fracture“. *Inelastic Behaviour of Solids* (1970), S. 641–672.
- [51] Kuna, M. *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen, Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Springer, 2008.
- [52] Wells, A. „Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture“. *Proceedings of the Crack Propagation Symposium* 1(84) (1961).

- 
- [53] Shih, C. „Relationships between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 29(4) (1981), S. 305–326.
- [54] O’Dowd, N. und Shih, C. F. „Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter—I. Structure of fields“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39(8) (1991), S. 989–1015.
- [55] O’Dowd, N. P. und Shih, C. F. „Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter—II. Fracture applications“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40(5) (1992), S. 939–963.
- [56] Barsom, J. M. „Fracture Mechanics Retrospective: Early Classic Papers (1913-1965)“. *ASTM Retrospective Publication Series* (1987).
- [57] Irwin, G. R. „Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys“. *Sagamore Research Conference Proceedings* 2 (1956), S. 289–305.
- [58] Rice, J. R. „Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture“. *Fracture: An Advanced Treatise*. Bd. 2. 1968, S. 191–311.
- [59] Rice, J. R. „A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks“. *Journal of Applied Mechanics* 35(2) (1968), S. 379–386.
- [60] Begley, J. und Landes, J. „The J Integral as a Fracture Criterion“. *Fracture Toughness, Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II, ASTM STP 514*. ASTM International, 1972, S. 1–20.
- [61] *ASTM E1820-18: Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness*. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2018.
- [62] Eshelby, J. D. „The force on an elastic singularity“. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 244(877) (1951), S. 87–112.
- [63] Maugin, G. A. *Configurational Forces: Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics*. CRC Press, 2016.
- [64] Tsakmakis, A. und Vormwald, M. „Configurational forces and J-integrals in cyclic metal plasticity“. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 108 (2020), S. 102565.
- [65] Simha, N., Fischer, F. D., Shan, G., Chen, C. und Kolednik, O. „J-integral and crack driving force in elastic–plastic materials“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56(9) (2008), S. 2876–2895.
- [66] Kolednik, O., Schöngrundner, R. und Fischer, F. D. „A new view on J-integrals in elastic–plastic materials“. *International Journal of Fracture* 187(1) (2014), S. 77–107.
- [67] Ritchie, R. und Suresh, S. „The fracture mechanics similitude concept: questions concerning its application to the behavior of short fatigue cracks“. *Materials Science and Engineering* 57(2) (1983), S. L27–L30.
- [68] Paris, P. C., Gomez, M. und Anderson, W. „A rational analytic theory of fatigue“. *The Trend in Engineering* 13 (1961), S. 9–14.
- [69] Paris, P. und Erdogan, F. „A critical analysis of crack propagation laws“. *Journal of Basic Engineering* 85(4) (1963), S. 528–533.
- [70] Suresh, S. *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press, 1998.
- [71] Elber, W. „Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension“. *Engineering Fracture Mechanics* 2 (1970), S. 37–45.
- [72] McClung, R. C. und Newman Jr., J. C. *Advances in Fatigue Crack Closure Measurement and Analysis: Second Volume, ASTM STP 1343*. ASTM International, 1999.

- 
- [73] Andersson, H., Persson, C., Hansson, T., Melin, S. und Järnstråt, N. „Constitutive dependence in finite-element modelling of crack closure during fatigue“. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 27(2) (2004), S. 75–87.
- [74] Andersson, M., Persson, C. und Melin, S. „Experimental and numerical investigation of crack closure measurements with electrical potential drop technique“. *International Journal of Fatigue* 28(9) (2006), S. 1059–1068.
- [75] Patriarca, L., Foletti, S. und Beretta, S. „A comparison of DIC-based techniques to measure crack closure in LCF“. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 98 (2018), S. 230–243.
- [76] Carroll, J., Efstathiou, C., Lambros, J., Sehitoglu, H., Hauber, B., Spottswood, S. und Chona, R. „Investigation of fatigue crack closure using multiscale image correlation experiments“. *Engineering Fracture Mechanics* 76(15) (2009), S. 2384–2398.
- [77] *ASTM E647-15: Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates*. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2015.
- [78] Shih, T.-T. und Wei, R. P.-y. „A study of crack closure in fatigue“. *Engineering Fracture Mechanics* 6(1) (1974), S. 19–32.
- [79] Vormwald, M. *Anrisslebensdauervorhersage auf der Basis der Schwingbruchmechanik für kurze Risse*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1989.
- [80] Newman Jr., J. C. und Elber, W. *Mechanics of Fatigue Crack Closure, ASTM STP 982*. ASTM International, 1988.
- [81] Barenblatt, G. I. „The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture“. *Advances in Applied Mechanics* 7 (1962), S. 55–129.
- [82] Newman Jr., J. C. „A Crack-Closure Model for Predicting Fatigue Crack Growth under Aircraft Spectrum Loading“. *NASA Technical Memorandum 81941* (1981).
- [83] Newman Jr., J. C. „Application of a closure model to predict crack growth in three engine disc materials“. *International Journal of Fracture* 80(2) (1996), S. 193–218.
- [84] Newman Jr., J. C. „A crack opening stress equation for fatigue crack growth“. *International Journal of Fracture* 24 (1984).
- [85] Vormwald, M. und Seeger, T. „The consequences of short crack closure on fatigue crack growth under variable amplitude loading“. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 14(2-3) (1991), S. 205–225.
- [86] McClung, R. C. „Finite element analysis of specimen geometry effects on fatigue crack closure“. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 17(8) (1994), S. 861–872.
- [87] Garnadt, F., Kontermann, C., Almstedt, H. und Oechsner, M. „Application and Verification of an Engineering Approach to Assess Notch Support for Low Cycle Fatigue Loadings“. *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*. Bd. 84225. American Society of Mechanical Engineers. 2020, V10BT27A020.
- [88] Fischer, C., Schweizer, C. und Seifert, T. „A crack opening stress equation for in-phase and out-of-phase thermomechanical fatigue loading“. *International Journal of Fatigue* 88 (2016), S. 178–184.
- [89] Almroth, P., Gustafsson, D., Homs, J. L. und Simonsson, K. „Out-of-phase thermo-mechanical fatigue crack growth and the effect of the compressive minimum load level on crack closure at notches“. *International Journal of Fatigue* 141 (2020), S. 105906.

- 
- [90] McClung, R. C. „Finite element visualization of fatigue crack closure in plane stress and plane strain“. *International Journal of Fracture* 50(1) (1991), S. 27–49.
- [91] Park, S.-J., Earmme, Y.-Y. und Song, J.-H. „Determination of the most appropriate mesh size for a 2-D finite element analysis of fatigue crack closure behaviour“. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 20(4) (1997), S. 533–545.
- [92] Solanki, K., Daniewicz, S. R. und Newman Jr., J. C. „Finite element modeling of plasticity induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects“. *Engineering Fracture Mechanics* 70(12) (2003), S. 1457–1489.
- [93] Lee, H.-J. und Song, J.-H. „Influence of minimum element size to determine crack closure stress by the finite element method“. *Engineering Fracture Mechanics* 72(3) (2005), S. 337–355.
- [94] Matos, P. F. P. de und Nowell, D. „On the accurate assessment of crack opening and closing stresses in plasticity-induced fatigue crack closure problems“. *Engineering Fracture Mechanics* 74(10) (2007), S. 1579–1601.
- [95] Matos, P. F. P. de und Nowell, D. „Numerical simulation of plasticity-induced fatigue crack closure with emphasis on the crack growth scheme: 2D and 3D analyses“. *Engineering Fracture Mechanics* 75(8) (2008), S. 2087–2114.
- [96] *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 2017*. Dassault Systèmes Simulia Corp, 2017.
- [97] Zerres, P. *Numerische Simulation des Ermüdungsrisssfortschrittes in metallischen Strukturen unter Berücksichtigung zyklischer Plastizitätseffekte*. Bd. 88. Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik der Technischen Universität Darmstadt, 2010.
- [98] Antunes, F. V. und Rodrigues, D. M. „Numerical simulation of plasticity induced crack closure: Identification and discussion of parameters“. *Engineering Fracture Mechanics* 75(10) (2008), S. 3101–3120.
- [99] Pommier, S. und Bompard, P. „Bauschinger effect of alloys and plasticity-induced crack closure: a finite element analysis“. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 23(2) (2000), S. 129–139.
- [100] Solanki, K., Daniewicz, S. R. und Newman Jr., J. C. „Finite element analysis of plasticity induced fatigue crack closure: an overview“. *Engineering Fracture Mechanics* 71(2) (2004), S. 149–171.
- [101] Dougherty, J. D., Padovan, J. und Srivatsan, T. S. „Fatigue crack propagation and closure behavior of modified 1070 steel: Finite element study“. *Engineering Fracture Mechanics* 56(2) (1997), S. 189–212.
- [102] Ashbaugh, N. E., Dattaguru, B., Khobaib, M., Nicholas, T., Prakash, R. V., Ramamurthy, T. S., Seshadri, B. R. und Sunder, R. „Experimental and Analytical Estimates of Fatigue Crack Closure in an Aluminium-Copper Alloy, Part II: A Finite Element Analysis“. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 20(7) (1997), S. 963–974.
- [103] Cochran, K. B., Dodds, R. H. und Hjelmstad, K. D. „The role of strain ratcheting and mesh refinement in finite element analyses of plasticity induced crack closure“. *International Journal of Fatigue* 33 (2011), S. 1205–1220.
- [104] Wu, J. und Ellyin, F. „A study of fatigue crack closure by elastic-plastic finite element analysis for constant-amplitude loading“. *International Journal of Fracture* 82 (1996), S. 43–65.
- [105] Antunes, F. V., Borrego, L. F. P., Costa, J. D. und Ferreira, J. M. „A numerical study of fatigue crack closure induced by plasticity“. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 27 (2004), S. 825–835.

- 
- [106] Lee, H.-J. und Song, J.-H. „Finite-element analysis of fatigue crack closure under plane strain conditions: stabilization behaviour and mesh size effect“. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 28(3) (2005), S. 333–342.
- [107] Zienkiewicz, O. C. und Taylor, R. L. *The Finite Element Method, Volume 1, The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [108] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. und Witt, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 2002.
- [109] Cochran, K. B. *Numerical Modeling Issues in Finite Element Simulation of Plasticity Induced Crack Closure with an Emphasis on Material Model Effects*. PhD Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2009.
- [110] Rodrigues, D. M. und Antunes, F. V. „Finite element simulation of plasticity induced crack closure with different material constitutive models“. *Engineering Fracture Mechanics* 76(9) (2009), S. 1215–1230.
- [111] Antunes, F. V., Chegini, A. G., Branco, R. und Camas, D. „A numerical study of plasticity induced crack closure under plane strain conditions“. *International Journal of Fatigue* 71 (2015), S. 75–86.
- [112] Sehitoglu, H. und Sun, W. „The significance of crack closure under high temperature fatigue crack growth with hold periods“. *Engineering Fracture Mechanics* 33(3) (1989), S. 371–388.
- [113] Dowling, N. und Begley, J. „Fatigue Crack Growth During Gross Plasticity and the J-Integral“. *Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590*. ASTM International, 1976, S. 82–103.
- [114] Rice, J., Paris, P. und Merkle, J. „Some Further Results of J-Integral Analysis and Estimates“. *Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing, ASTM STP 536*. ASTM International, 1973, S. 231–245.
- [115] Dowling, N. „Geometry Effects and the J-Integral Approach to Elastic-Plastic Fatigue Crack Growth“. *Cracks and Fracture, ASTM STP 601*. ASTM International, 1976, S. 19–32.
- [116] Brose, W. und Dowling, N. „Size Effects on the Fatigue Crack Growth Rate of Type 304 Stainless Steel“. *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668*. ASTM International, 1979, S. 720–735.
- [117] Mowbray, D. „Use of a Compact-Type Strip Specimen for Fatigue Crack Growth Rate Testing in the High-Rate Regime“. *Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668*. ASTM International, 1979, S. 736–752.
- [118] El Haddad, M. H. und Mukherjee, B. „Elastic-Plastic Fracture Mechanics Analysis of Fatigue Crack Growth“. *Elastic-Plastic Fracture: Second Symposium, Volume II—Fracture Resistance Curves and Engineering Applications, ASTM STP 803*. ASTM International, 1983, S. II-689–II-707.
- [119] Jolles, M. „Effects of Load Gradient on Applicability of a Fatigue Crack Growth Rate-Cyclic J Relation“. *Fracture Mechanics: Sixteenth Symposium, ASTM STP 868*. ASTM International, 1985, S. 381–391.
- [120] Lambert, Y., Saillard, P. und Bathias, C. „Application of the J concept to fatigue crack growth in large-scale yielding“. *Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium, ASTM STP 969*. ASTM International, 1988, S. 318–329.
- [121] Banks-Sills, L. und Volpert, Y. „Application of the cyclic J-integral to fatigue crack propagation of Al 2024-T351“. *Engineering Fracture Mechanics* 40(2) (1991), S. 355–370.
- [122] Lamba, H. S. „The J-integral applied to cyclic loading“. *Engineering Fracture Mechanics* 7(4) (1975), S. 693–703.

- 
- [123] Stadnick, S. und Morrow, J. „Techniques for Smooth Specimen Simulation of the Fatigue Behavior of Notched Members“. *Testing for Prediction of Material Performance in Structures and Components, ASTM STP 515*. ASTM International, 1972, S. 229–252.
- [124] Wüthrich, C. „The extension of the J-integral concept to fatigue cracks“. *International Journal of Fracture* 20(2) (1982), R35–R37.
- [125] Kubo, S., Yafuso, T., Nohara, M., Ishimaru, T. und Ohji, K. „Investigation on Path-Integral Expression of the J-Integral Range Using Numerical Simulations of Fatigue Crack Growth“. *JSME International Journal, Series 1, Solid Mechanics, Strength of Materials* 32(2) (1989), S. 237–244.
- [126] Vormwald, M. „Fatigue crack propagation under large cyclic plastic strain conditions“. *Procedia Materials Science* 3 (2014), S. 301–306.
- [127] Metzger, M., Seifert, T. und Schweizer, C. „Does the cyclic J-integral  $\Delta J$  describe the crack-tip opening displacement in the presence of crack closure?“ *Engineering Fracture Mechanics* 134 (2015), S. 459–473.
- [128] Ngoula, D. T., Madia, M., Beier, H. T., Vormwald, M. und Zerbst, U. „Cyclic J-integral: Numerical and analytical investigations for surface cracks in weldments“. *Engineering Fracture Mechanics* 198 (2018), S. 24–44.
- [129] McClung, R. C., Chell, G., Lee, Y.-D., Russell, D. und Orient, G. „Development of a Practical Methodology for Elastic-Plastic and Fully Plastic Fatigue Crack Growth“. *NASA Report* (1999).
- [130] Xu, M., Liu, Y. und Yuan, H. „Characterization of crack-tip fields for elastoplastic fatigue crack growth Part I: Analysis of the  $\Delta J$ -integral“. *Engineering Fracture Mechanics* 275 (2022), S. 108847.
- [131] Xu, M., Liu, Y. und Yuan, H. „On  $\Delta J$  characterization of elastic–plastic crack-tip fields under fatigue loading conditions“. *International Journal of Fatigue* 160 (2022), S. 106849.
- [132] Shih, C. F., Moran, B. und Nakamura, T. „Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body“. *International Journal of Fracture* 30(2) (1986), S. 79–102.
- [133] Ochensberger, W. und Kolednik, O. „A new basis for the application of the J-integral for cyclically loaded cracks in elastic–plastic materials“. *International Journal of Fracture* 189 (2014), S. 77–101.
- [134] Ochensberger, W. und Kolednik, O. „Physically appropriate characterization of fatigue crack propagation rate in elastic–plastic materials using the J-integral concept“. *International Journal of Fracture* 192(1) (2015), S. 25–45.
- [135] Kong, R., Linn, S., Scholz, A., Biehler, J. und Oechsner, M. „Zur Schädigungsentwicklung mehrachsig und anisotherm hoch beanspruchter dickwandiger Gehäuse moderner thermischer Maschinen und Anlagen“. *Final Report of AVIF A269, Issue R573, FVV Information Sessions Turbomachinery, Frankfurt* (2015).
- [136] Wilson, W. und Yu, I. „The use of the J-integral in thermal stress crack problems“. *International Journal of Fracture* 15 (1979), S. 377–387.
- [137] Bauerbach, K. *Numerische Betrachtungen zu Deformationsverhalten und Schädigungsbewertung kurzer Risse unter thermozyklischer Beanspruchung*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2013.
- [138] Kolednik, O., Tiwari, A., Posch, C. und Kegl, M. „Configurational force based analysis of creep crack growth“. *International Journal of Fracture* 236(2) (2022), S. 175–199.
- [139] Bucci, R., Paris, P., Landes, J. und Rice, J. „J Integral Estimation Procedures“. *Fracture Toughness, Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II, ASTM STP 514*. ASTM International, 1972, S. 40–69.

- 
- [140] Shih, C. „J-Integral Estimates for Strain Hardening Materials in Antiplane Shear Using Fully Plastic Solution“. *Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590*. ASTM International, 1976, S. 3–26.
- [141] Shih, C. und Hutchinson, J. „Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems“. *Journal of Engineering Materials and Technology* 98(4) (1976), S. 289–295.
- [142] Kumar, V., German, M. und Shih, C. F. „An Engineering Approach for Elastic-Plastic Fracture Analysis“. *EPRI-Report NP-1931* (1981).
- [143] Dowling, N. „Crack Growth During Low-Cycle Fatigue of Smooth Axial Specimens“. *Cyclic Stress-Strain and Plastic Deformation Aspects of Fatigue Crack Growth, ASTM STP 637*. ASTM International, 1977, S. 97–121.
- [144] Dowling, N. und Iyyer, N. „Fatigue Crack Growth and Closure at High Cyclic Strains“. *Materials Science and Engineering* 96 (1987), S. 99–107.
- [145] Heitmann, H., Vehoff, H. und Neumann, P. „Life Prediction for Random Load Fatigue based on the Growth Behavior of Microcracks“. *Fracture 84, Proceedings of the 6th International Conference on Fracture (ICF6), New Delhi, India*. 1984, S. 3599–3606.
- [146] Dowling, N. E. „J-Integral Estimates for Cracks in Infinite Bodies“. *Engineering Fracture Mechanics* 26(3) (1987), S. 333–348.
- [147] Neumann, P., Vehoff, H. und HH, H. „Untersuchungen zur Betriebsfestigkeit von Stahl: Reihenfolgeeffekte während der Rissinitiationsphase“. *Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik* (1984).
- [148] Trantina, G., DeLorenzi, H. und Wilkening, W. „Three-dimensional elastic-plastic finite element analysis of small surface cracks“. *Engineering Fracture Mechanics* 18(5) (1983), S. 925–938.
- [149] Trantina, G. und Barishpolsky, M. „Elastic-plastic analysis of small defects—voids and inclusions“. *Engineering Fracture Mechanics* 20(1) (1984), S. 1–10.
- [150] Iyyer, N. und Dowling, N. „Opening and Closing of Cracks at High Cyclic Strains“. *2nd Eng. Foundation Int. Conf. and Workshop on Small Fatigue Cracks* (1986), S. 213–223.
- [151] Schijve, J. „Some formulas for the crack opening stress level“. *Engineering Fracture Mechanics* 14(3) (1981), S. 461–465.
- [152] Schmitt, W., Mohrmann, R., Riedel, H., Dietsche, A. und Fischersworing-Bunk, A. „Modelling of the fatigue life of automobile exhaust components“. *Fatigue 2002, Proceedings of the Eighth International Fatigue Conference* (2002).
- [153] Seifert, T., Schweizer, C., Schlesinger, M., Möser, M. und Eibl, M. „Thermomechanical fatigue of 1.4849 cast steel—experiments and life prediction using a fracture mechanics approach“. *International Journal of Materials Research* 101(8) (2010), S. 942–950.
- [154] Schlesinger, M., Seifert, T. und Preussner, J. „Experimental investigation of the time and temperature dependent growth of fatigue cracks in Inconel 718 and mechanism based lifetime prediction“. *International Journal of Fatigue* 99 (2017), S. 242–249.
- [155] Parks, D. „The virtual crack extension method for nonlinear material behavior“. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 12(3) (1977), S. 353–364.

---

# Abbildungsverzeichnis

---

1.1	(a) Verteilung der Beanspruchung am Beispiel einer Welle aus dem Bereich der Turbomaschinen und deren Konzentration im Kerbgrund einer Schaufelnut, (b) Anrisskennlinien zur Lebensdauerbewertung bis zu einer Risstiefe von exemplarisch 1 mm für Probengeometrien ohne Kerbe und mit Kerbe verschiedener Geometrie . . . . .	2
2.1	Koaleszenz von Poren mit der Rissspitze als Mechanismus duktilen Risswachstums . . . .	5
2.2	Mechanismus des Risswachstums durch Abstumpfen und Neuschärfen der Rissspitze unter zyklischer Beanspruchung nach Laird [20] . . . . .	6
2.3	Spannungs-Dehnungs-Verlauf während einer monoton steigenden Belastung und anschließender Entlastung unter Annahme der Deformationstheorie und der inkrementellen Plastizitätstheorie . . . . .	11
2.4	Beanspruchungsfeld an einer Rissspitze in elastisch-plastischem Material mit Definitionen von charakteristischen Bereichen . . . . .	12
2.5	Ermittlung der inkrementellen Änderung der für Rissverlängerung $\Delta a$ zur Verfügung stehenden Energie $\Delta\Pi$ anhand von globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven einer Beispielstruktur (a) mit Risstiefe $a$ für gleiche Kräfte (b) und gleiche Verschiebungen (c) . . . . .	16
2.6	Definition des Linienintegrals entlang der Kontur $\Gamma$ zur Berechnung des $J$ -Integrals . . . .	18
2.7	Lokale Felder in der Nähe der Spitze eines um $\Delta a$ wachsenden Risses der Länge $a$ unter statischer Beanspruchung bei elastisch-plastischem Materialverhalten . . . . .	19
2.8	Definition verschiedener Gebiete um die Rissspitze im Rahmen des Konzepts der Konfigurationskräfte . . . . .	21
2.9	Risswachstum $\Delta a$ in elastisch-plastischen Bedingungen (a) durch die alleinige Bewegung der Rissspitze und (b) durch die Bewegung der Kombination aus Rissspitze und aktiver plastischer Zone (APZ) . . . . .	22
2.10	Definition der Knoten zur Auswertung der verschiebungsbasierten Riss-schließkriterien <i>1stBack</i> und <i>Front</i> , sowie der Kräfte zur Auswertung des kraftbasierten Riss-schließkriteriums <i>CC-Force</i> . . . . .	29
2.11	Berücksichtigte Fläche unter dem aufsteigenden Hysteresehalbast zur Berechnung des zyklischen $J$ -Integrals nach Dowling und Begley [113] . . . . .	30
2.12	Globaler Ansatz zur Ermittlung des zyklischen effektiven $J$ -Integrals, (a) Beispiel einer Struktur mit Riss und Position des globalen Lastangriffspunkts, (b) Referenzieren der globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven auf den oberen und unteren Lastumkehrpunkt, (c) Berechnung der Energiedifferenz für zwei benachbarte Risstiefen bei gleicher Verschiebungsbzw. Kraftvorgabe . . . . .	32
2.13	Referenzieren der Spannungen und Dehnungen in einer Hysterese auf die Lastumkehrpunkte $O_{auf}$ und $O_{ab}$ zur Berechnung eines zyklischen $J$ -Integrals auf Basis des Linienintegrals nach Lamba [122] . . . . .	33

4.1	(a) Geometrisches Modell der Scheibe mit Tunnelriss unter Ausnutzung der Symmetrie, sowie Randbedingungen und globaler Lastangriffspunkt, (b) Wechselnde Zug-Druckbeanspruchung in Dreiecksform durch Verschiebung des globalen Lastangriffspunkts . . .	42
4.2	Zyklische Fließkurve nach Ramberg-Osgood, sowie die für die Simulationen eingesetzte bilineare Approximation für das Beispiel eines 9%-Cr Stahlguss bei 600 °C . . . . .	43
4.3	Ablauf des Postprocessings zur Berechnung des $J$ -Integrals über das Gebietsintegral und die Konfigurationskräfte . . . . .	45
4.4	Komponenten des elastischen, plastischen sowie totalen Dehnratentensors berechnet mittels Differenzenquotienten erster (links) und zweiter Ordnung (rechts) am Gaußpunkt 1 des ersten Elements vor der Risssspitze für das Beispiel Scheibe mit Tunnelriss unter SSY Bedingungen und einer Risstiefe von 2 mm ohne Vorgeschichte im Vergleich zur Lösung von Abaqus . . . . .	48
4.5	Vergleich der unterschiedlichen Auswertungsmethoden für die Formänderungsenergiedichte während der Erstbelastung am Gaußpunkt 1 des ersten Elements vor der Risssspitze . .	49
4.6	Vergleich der unterschiedlichen Auswertungsmethoden für die Formänderungsenergiedichte am Gaußpunkt 1 des ersten Elements vor der Risssspitze, (a) zyklische Beanspruchung ohne Referenzieren, (b) aufsteigender Hysteresehalbast zwischen Inkrement 75 und 125 mit Referenzieren . . . . .	50
4.7	Lokalisierung der Konturen $\Gamma$ zur Auswertung des Gebietsintegrals für die Scheibe mit einer Risstiefe von $x = 2$ mm und der plastischen Nachlaufzone aus der Simulation des Risses mit Vorgeschichte . . . . .	52
4.8	Definition der beiden Auswertungsoptionen Global + und Global – des globalen Ansatzes, (a) Elemente direkt an der Risssspitze $a$ , (b) Kraft-Verschiebungs-Kurven zur Auswertung der beiden Energiedifferenzen . . . . .	55
5.1	Übersicht über die elastischen und plastischen Gebiete in der Scheibe mit Tunnelriss für die vier untersuchten Beanspruchungssituationen. Darstellung des deformierten Zustands mit 50-facher Vergrößerung . . . . .	56
5.2	Auswertung der Inkremente für Rissöffnen $i_{op}$ und -schließen $i_{cl}$ anhand der drei Kriterien <i>CC-Force</i> , <i>1stBack</i> und <i>Front</i> am Beispiel der Scheibe mit Tunnelriss und einer Risstiefe von 2 mm mit Vorgeschichte . . . . .	58
5.3	(a), (c): Aufsteigender Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen für $a = 2$ mm ohne Vorgeschichte, $\Delta J_{loading}^{global,avg} = 0,73$ N/mm, Referenzinkrement $i = 25$ ( <i>CC-Force</i> ) (b), (d): Aufsteigender Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen für $a = 2$ mm mit Vorgeschichte, $\Delta J_{loading}^{global,avg} = 0,61$ N/mm, Referenzinkrement $i = 27$ ( <i>CC-Force</i> ) . . . . .	59
5.4	Zyklisches effektives $J$ -Integral bei Maximallast für verschiedene Referenzinkremente ausgewertet mit dem globalen Ansatz und der Gebietsintegralmethode . . . . .	60
5.5	(a), (c): Absteigender Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen für $a = 2$ mm ohne Vorgeschichte, $\Delta J_{unloading}^{global,avg} = 0,77$ N/mm, Referenzinkrement $i = 76$ ( <i>CC-Force</i> ) (b), (d): Absteigender Hysteresehalbast unter SSY-Bedingungen für $a = 2$ mm mit Vorgeschichte, $\Delta J_{unloading}^{global,avg} = 0,71$ N/mm, Referenzinkrement $i = 75$ ( <i>CC-Force</i> ) . . . . .	62
5.6	Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge $a = 2$ mm in SSY-Bedingungen zum Zeitpunkt der Maximallast und des Rissenschließens. (a) APZ, (b) EPZ nach der Definition <i>History</i> und (c) EPZ nach der Definition <i>Crack Growth</i> . EPZs für drei verschiedene exemplarische Schwellenwerte $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,1 mm . . . . .	64
5.7	Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen $J$ -Integrale vom Schwellenwert $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,1 mm. SSY-Bedingungen	65

5.8	Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge $a = 2$ mm in SSY-Bedingungen für verschiedene EEL zum Zeitpunkt der Maximallast. (a) APZ, (b) und (c) EPZ nach der Definition <i>Crack Growth</i> für einen konstanten Schwellenwert $\Delta PEEQ_{th} = 0,01\%$ . Differenz der Risstiefe in (b) $\Delta a = EEL$ und in (c) $\Delta a = 0,1$ mm . . . . .	66
5.9	Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen $J$ -Integrale vom Schwellenwert $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,01 mm. (a) $\Delta a = EEL = 0,01$ mm und (b) $\Delta a = 0,1$ mm . . . . .	66
5.10	Lokalisierung der Konfigurationskräfte in $x$ -Richtung an Knoten (betragsweise), gelb – hohe Werte, blau – niedrige Werte, zum Zeitpunkt der Maximallast für die verschiedenen EEL (a) 0,1 mm, (b) 0,05 mm und (c) 0,01 mm, sowie die jeweilige APZ und EPZ ( <i>Crack Growth</i> , $\Delta PEEQ_{th} = 0,01\%$ , $\Delta a = 0,1$ mm) . . . . .	67
5.11	(a), (c): Aufsteigender Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen für $a = 2$ mm ohne Vorgeschichte, $\Delta J_{loading}^{global,avg} = 3,96$ N/mm, Referenzinkrement $i = 17$ (CC-Force) (b), (d): Aufsteigender Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen für $a = 2$ mm mit Vorgeschichte, $\Delta J_{loading}^{global,avg} = 3,94$ N/mm, Referenzinkrement $i = 17$ (CC-Force) . . . . .	70
5.12	(a), (c): Absteigender Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen für $a = 2$ mm ohne Vorgeschichte, $\Delta J_{unloading}^{global,avg} = 5,9$ N/mm, Referenzinkrement $i = 85$ (CC-Force) (b), (d): Absteigender Hysteresehalbast unter LSY-Bedingungen für $a = 2$ mm mit Vorgeschichte, $\Delta J_{unloading}^{global,avg} = 5,58$ N/mm, Referenzinkrement $i = 84$ (CC-Force) . . . . .	71
5.13	Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge $a = 2$ mm in LSY-Bedingungen zum Zeitpunkt der Maximallast und des Risssschließens. (a) APZ, (b) EPZ nach der Definition <i>History</i> und (c) EPZ nach der Definition <i>Crack Growth</i> . EPZs für drei verschiedene exemplarische Schwellenwerte $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,1 mm . . . . .	73
5.14	Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen $J$ -Integrale vom Schwellenwert $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,1 mm. LSY-Bedingungen	74
5.15	Lokalisierung der Konfigurationskräfte in $x$ -Richtung an Knoten (betragsweise), gelb – hohe Werte, blau – niedrige Werte, sowie die EPZ ( <i>History</i> ) und die EPZ ( <i>Crack Growth</i> ) für $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$ zum Zeitpunkt der Maximallast (a) und des Risssschließens (b) EEL = 0,1 mm . . . . .	75
5.16	Abhängigkeit des zyklischen $J$ -Integrals vom Schwellenwert (a) und den vorliegenden Teilzonen (b) am Beispiel der EPZ ( <i>Crack Growth</i> ) für den aufsteigenden Hysteresehalbast bei Erreichen des Plateaus . . . . .	76
5.17	Plastische Zonen eines Risses mit Vorgeschichte der Länge $a = 2$ mm in LSY-Bedingungen zum Zeitpunkt der Maximallast und des Risssschließens. (a) APZ, (b) EPZ nach der Definition <i>History</i> und (c) EPZ nach der Definition <i>Crack Growth</i> . EPZs für drei verschiedene exemplarische Schwellenwerte $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,01 mm . . . . .	77
5.18	Abhängigkeit der mittels des Konzepts der Konfigurationskräfte für die EPZs berechneten zyklischen $J$ -Integrale vom Schwellenwert $\Delta PEEQ_{th}$ . EEL = 0,01 mm. LSY-Bedingungen	79
5.19	Entdimensionalisierte effektive Beanspruchung im Nahfeld der Risssspitze in SSY-Bedingungen, (a) in Form der Spannungskomponente und (b) in Form der Dehnungskomponente in Belastungsrichtung über dem mittels des globalen zyklischen effektiven $J$ -Integrals entdimensionalisierten Abstand zur Risssspitze für die Risstiefen 0,5, 1, 1,5 und 2 mm . . . . .	82
5.20	Entdimensionalisierte effektive Beanspruchung im Nahfeld der Risssspitze in LSY-Bedingungen, (a) in Form der Spannungskomponente und (b) in Form der Dehnungskomponente in Belastungsrichtung über dem mittels des globalen zyklischen effektiven $J$ -Integrals entdimensionalisierten Abstand zur Risssspitze für die Risstiefen 0,5, 1, 1,5 und 2 mm . . . . .	83

---

5.21 Auswirkungen einer Variation des zyklischen effektiven $J$ -Integrals von $\pm 10\%$ auf das Spannungs- und Dehnungsfeld nahe der Rissspitze für den aufsteigenden Hysteresehalbast, (a) SSY-Bedingungen, (b) LSY-Bedingungen . . . . .	84
7.1 Mehrdimensionale Rissfront in einer Corner-Crack Probe aus 9%-Cr Stahlguss und einem Ermüdungsrissfortschrittsversuch mit $R$ -Verhältnis -1 bei 600 °C, Garnadt et al. [2] . . . .	89
A.1 Geschlossene Kontur um eine Rissspitze zur Nachweisführung der Wegunabhängigkeit des $J$ -Integrals . . . . .	105
C.1 Definition der effektiven Spannungs- und Dehnungsschwingbreite zur Berechnung des zyklischen effektiven $J$ -Integrals nach Dowling und Iyyer [144] . . . . .	108
C.2 Ermittlung der elastischen und plastischen Anteile der Energie zur Berechnung des zyklischen effektiven $J$ -Integrals nach Heitmann et al. [145] . . . . .	109
D.1 „Plateau-Funktion“ als Gewichtungsfunktion der Gebietsintegralmethode für einen Riss mit schematischer Vernetzung . . . . .	112

---

## Tabellenverzeichnis

---

4.1	Parameter des bilinearen Materialmodells für einen 9%-Cr Stahlguss bei 600 °C . . . . .	44
5.1	Inkmente für Rissöffnen $i_{op}$ und -schließen $i_{cl}$ anhand der drei Kriterien <i>CC-Force</i> , <i>1stBack</i> und <i>Front</i> für die verschiedenen Beanspruchungssituationen . . . . .	58
5.2	Absolutwerte des zyklischen effektiven $J$ -Integrals in N/mm der lokalen Methoden und des globalen Ansatzes für den auf- und absteigenden Hysteresehalbast sowie verschiedene EEL . . . . .	68
5.3	Zyklische $J$ -Integrale für die verschiedenen EPZs und einen Schwellenwert von $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$ als Bezugswerte für die Normierung in Abbildung 5.14. EEL = 0,1 mm . . . . .	75
5.4	Zyklische $J$ -Integrale für die verschiedenen EPZs und einen Schwellenwert von $\Delta PEEQ_{th} = 0,001\%$ als Bezugswerte für die Normierung in Abbildung 5.18. EEL = 0,01 mm . . . . .	78
5.5	Absolutwerte des zyklischen effektiven $J$ -Integrals in N/mm der lokalen Methoden und des globalen Ansatzes für den auf- und absteigenden Hysteresehalbast sowie verschiedene EEL . . . . .	80

## Anhang A:

### Nachweis der Wegunabhängigkeit des Linienintegrals

Das folgende Kapitel liefert einen allgemeinen Nachweis für die Wegunabhängigkeit der Linienintegrale nach Gleichung 2.25 und Gleichung 2.36. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich um das  $J$ -Integral für monoton steigende Beanspruchungen oder  $\Delta J$  für zyklische Beanspruchungen handelt, sofern alle Feldgrößen nach Lamba [122] bzw. Abbildung 2.13 referenziert werden und die Voraussetzungen aus Kapitel 2.4.2 erfüllt sind. Gleichung A.1 entspricht dem Linienintegral von Rice, Gleichung 2.25, und stellt die Basis für den allgemeinen Nachweis dar. Gleichzeitig stellt sie die Grundlage für die zyklische Betrachtung nach Gleichung 2.36 dar, wobei im Folgenden auf die Referenzierung durch Deltas aufgrund der Übersichtlichkeit verzichtet wird.

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad \text{mit} \quad W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{A.1})$$

Die Wegunabhängigkeit des  $J$ -Integrals bzw. von  $\Delta J$  unter den in Kapitel 2.4.2 genannten Voraussetzungen lässt sich durch die Betrachtung einer geschlossenen Kontur  $\Gamma^*$  nachweisen, Rice [59]. Diese umschließt das Gebiet  $A^*$ . Durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes lässt sich das Linienintegral, Gleichung 2.25, in ein Gebietsintegral nach Gleichung A.2 umwandeln.

$$\int_{\Gamma^*} \left( W dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = \int_{A^*} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (\text{A.2})$$

Die Ableitung der Formänderungsenergiedichte ergibt sich unter der Annahme der Deformationstheorie bzw. für linear oder nichtlinear elastisches Materialverhalten mit Gleichung 2.16 nach Gleichung A.3.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen ist der Dehnungstensor durch die Anteile des Verschiebungsgradienten wie folgt gegeben:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.4})$$

Damit folgt aus Gleichung A.3:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (\text{A.5})$$

Aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen gilt  $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$  und Gleichung A.5 ergibt

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right). \quad (\text{A.6})$$

Demzufolge verschwindet das Gebietsintegral in Gleichung A.2 und es folgt, dass das  $J$ -Integral für jede beliebige geschlossene Kontur  $\Gamma^*$  Null ist, Gleichung A.7.

$$J = \int_{\Gamma^*} \left( W dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Umgeben die geschlossene Kontur  $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_+ + \Gamma_2 + \Gamma_-$  eine Risspitze, siehe Abbildung A.1, lässt sich die Wegunabhängigkeit des  $J$ -Integrals als Intensitätsparameter des Nahfeld eines Risses nachweisen.

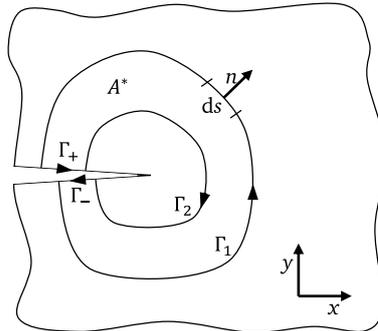


Abbildung A.1.: Geschlossene Kontur um eine Risspitze zur Nachweisführung der Wegunabhängigkeit des  $J$ -Integrals

Ähnlich zur Abbildung 2.6 findet die Integration des  $J$ -Integrals entlang der Kontur  $\Gamma_1$  gegen den Uhrzeigersinn statt. Zusätzlich folgt die Kontur  $\Gamma_+$  entlang der oberen Rissflanke, gefolgt von Kontur  $\Gamma_2$  im Uhrzeigersinn und Kontur  $\Gamma_-$  entlang der unteren Rissflanke. Die geschlossene Kontur  $\Gamma^*$  führt mit Gleichung A.7 zu  $J = 0$ . Sind die Voraussetzungen nach lastfreien und ungekrümmten Rissflanken erfüllt, verschwinden die  $J$ -Integrale entlang der Rissflanken  $\Gamma_+$  und  $\Gamma_-$ . Daraus folgt, dass die Summe der  $J$ -Integrale entlang  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  Null ergibt, sodass die Ergebnisse übereinstimmen müssen und damit die Wegunabhängigkeit nachgewiesen ist.

---

## Anhang B:

# Analytischer Ansatz zur Berechnung des $J$ -Integrals - Monoton steigende Beanspruchung

Über die durch Kapitel 2.4 vorgestellten Methoden zur Ermittlung des  $J$ -Integrals, basierend auf globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven, Linienintegral oder Konfigurationskräften, hinaus existieren analytischen Berechnungsmöglichkeiten. Dabei liegt solchen Näherungslösungen eine additive Zerlegung des  $J$ -Integrals in eine Lösung für rein elastisches und eine Lösung für vollständig plastisches Verhalten der rissbehafteten Struktur zu Grunde. Der Übergang zwischen den beiden Lösungen ergibt sich durch Interpolation. Das grundsätzliche Verfahren wurde erstmals in Bucci et al. [139] für elastisch ideal-plastisches Materialverhalten beschrieben. Shih [140] und Shih und Hutchinson [141] erweiterten dieses für elastisch-plastisches Materialverhalten mit Dehnungsverfestigung.

Diesem Vorgehen folgend wurden Lösungen für das  $J$ -Integral für unterschiedliche Strukturen und Rissgeometrien entwickelt. Einige sind in Form von Handbuchlösungen in Kumar et al. [142] zusammengefasst. Nach Kumar et al. [142] wird diese relativ einfache Vorgehensweise zur Ermittlung des  $J$ -Integrals auf Basis von Näherungslösungen auch „Engineering Approach“ genannt.

Ein halbkreisförmiger Oberflächenriss unter einachsiger Fernfeldbeanspruchung senkrecht zur Rissebene wird im Folgenden ausführlicher betrachtet, da diese Konfiguration für die Rissinitiierung sowie im Zusammenhang mit dem Wachstum kurzer Risse von besonderer Bedeutung ist. In zahlreichen experimentellen Untersuchungen des Rissinitiierungsverhaltens z.B. von Dowling [143], Dowling und Iyyer [144] oder Heitmann et al. [145] konnten solche Rissgeometrien beobachtet werden. Daher liegen auch mehrere Veröffentlichungen zur analytischen Beschreibung der Beanspruchung des Feldes nahe der Risspitze sowie zahlreiche Weiterentwicklungen für diesen Fall vor. Eine weit verbreitete Lösung, siehe Gleichung B.1, wurde von Dowling [146] entwickelt.

$$J = \left( 1, 24 \frac{\sigma^2}{E} + 1, 02 \sqrt{n} \sigma \varepsilon^{pl} \right) a \quad (\text{B.1})$$

Eine ähnliche Lösung für das  $J$ -Integral und den halbkreisförmigen Oberflächenriss wurde ebenfalls kurze Zeit zuvor von Neumann et al. [147] vorgestellt. Eine umfassende Validierung dieser Näherungslösung durch FE Berechnungen ist beispielsweise durch Trantina et al. [148, 149] gegeben.

---

## Anhang C:

# Analytischer Ansatz zur Berechnung des $J$ -Integrals - Zyklische Beanspruchung

Zusätzlich zu den in Kapitel 2.7 beschriebenen Ansätzen zur Ermittlung eines zyklischen  $J$ -Integrals, kann dieses aufbauend auf den für monoton steigende Beanspruchungen beschriebenen analytischen Überlegungen, siehe Anhang B, berechnet werden.

Dowling und Iyyer [144] erweiterten die Näherungslösung des  $J$ -Integrals einer monoton steigenden Beanspruchung nach Gleichung B.1 für eine zyklische Beanspruchung, indem sie die Spannungen und Dehnungen durch ihre Schwingbreiten ersetzten. Weiterhin für einen halbkreisförmigen Oberflächenriss folgt daraus daher Gleichung C.1. Das Vorgehen ähnelt dem Lambas [122] und Wüthrichs [124] im Zusammenhang mit dem Linienintegral.

$$\Delta J = \left( 1,24 \frac{\Delta \sigma^2}{E} + 1,02 \sqrt{n} \Delta \sigma \Delta \varepsilon^{pl} \right) a \quad (C.1)$$

Dowling und Iyyer berücksichtigten darüber hinaus in ihren Berechnungen in [144] näherungsweise Riss schließen durch effektive Spannungsschwingbreiten. Durch die Messungen von Steifigkeitsänderungen von Iyyer und Dowling in [150] und zusätzlicher Anwendung der Replika Technik zu verschiedenen Zeitpunkten im Zyklus konnten sie die Rissöffnungs- und -schließzeitpunkte näherungsweise bestimmen. Abbildung C.1 zeigt schematisch die Lage dieser Punkte in Anlehnung an Iyyer und Dowling [150]. Die Abbildung dient zu gleich dem Nachvollziehen der Überlegungen Iyyers und Dowlings zum effektiven zyklischen  $J$ -Integral.

Nach den Autoren sei davon auszugehen, dass eine Risserweiterung während der Belastung vom Punkt O nach Punkt B auftritt. Dennoch sei die Entlastung von Punkt B nach Punkt A ebenfalls von Bedeutung. Insbesondere gelte dies für die Deformationen entlang der Rissflanke. Eine Berechnung des effektiven zyklischen  $J$ -Integrals für die Belastung von Punkt O nach Punkt B sei allerdings nicht ausreichend. Daher führten Iyyer und Dowling eine hypothetische Wiederbelastung ausgehend von Punkt C ein. Außerhalb der Prozesszone würden sich die Spannungen und Dehnungen während der Entlastung Punkt B nach Punkt C wie im Fall einer fiktiven Belastung von Punkt C nach Punkt B verhalten. Daher könne das effektive zyklische  $J$ -Integral anhand dieser monotonen Belastung bestimmt werden. Der Zyklus C-B-C führe damit zum gleichen Rissfortschritt wie durch Zyklus A-B-A, mit dem Unterschied dass der Riss während des gesamten Zyklus geöffnet ist und somit das effektive zyklischen  $J$ -Integral bestimmt werden

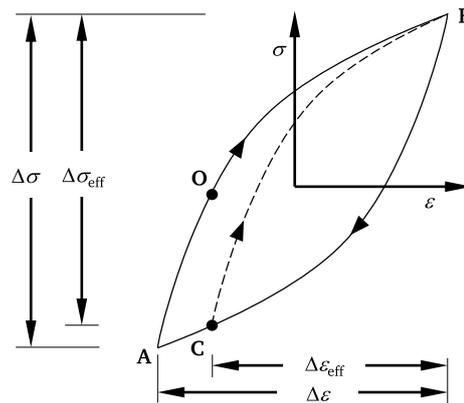


Abbildung C.1:: Definition der effektiven Spannungs- und Dehnungsschwingbreite zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals nach Dowling und Iyer [144]

kann.

Einen ähnlichen Ansatz zur Ermittlung des zyklischen  $J$ -Integrals, ebenfalls für einen halbkreisförmigen Oberflächenriss, verfolgten Heitmann et al. [145]. Ihr Vorgehen basiert auf der Argumentation von Dowling [143] im Zusammenhang mit kurzen Rissen unter niederzyklischer Beanspruchung. Demnach lässt sich das zyklische  $J$ -Integral auf Basis der elastischen und plastischen Energie  $W_{el}$  und  $W_{pl}$ , ermittelt anhand der stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Hysterese, nach Gleichung C.2 berechnen.

$$\Delta J_{eff} = a (2,9 W_{el} + 2,5 W_{pl}),$$

$$\text{mit } W_{el} = \frac{\Delta \sigma_{eff}^2}{2E} \quad (C.2)$$

$$\text{und } W_{pl} = \frac{n}{n+1} \Delta \sigma \Delta \varepsilon_{pl}$$

Des Weiteren enthält Gleichung C.2 jeweils einen Geometriefaktor für den elastischen sowie den plastischen Anteil. Heitmann et al. [145] ergänzten die Lösung von Dowling [143] durch genauere Geometriefaktoren sowie die Berücksichtigung von Risssschließen. Die Hysterese in Abbildung C.2 veranschaulicht, wie die beiden Energieanteile zustande kommen. Lediglich im elastischen Anteil der Energie wird durch eine effektive Schwingbreite der Spannung Risssschließen berücksichtigt. Heitmann et al. [145] berücksichtigten Risssschließen auf Basis der analytischen Risssschließbeziehung von Schijve [151]. Über die Eigenschaft von  $\Delta J_{eff}$  als Beanspruchungsparameter für das Nahfeld der Risssspitze hinaus wurde in Heitmann et al. [145] die weitergehende Anwendung in Form eines Schädigungsparameters vorgestellt. Dieser ermöglichte die Bewertung der Lebensdauer bis zum Erreichen eines technischen Anrisses mit relativ geringem Aufwand. Das beschriebene Vorgehen bildet u.a. durch letzteren Aspekt die Grundlage für zahlreiche Weiterentwicklungen. Zum Beispiel finden sich in Schmitt et al. [152] Erweiterungen bezüglich der Berücksichtigung von Viskoplastizität und thermo-mechanischer Beanspruchungen, die z.B. in Seifert et al. [153] oder Schlesinger et al. [154] Anwendung finden.

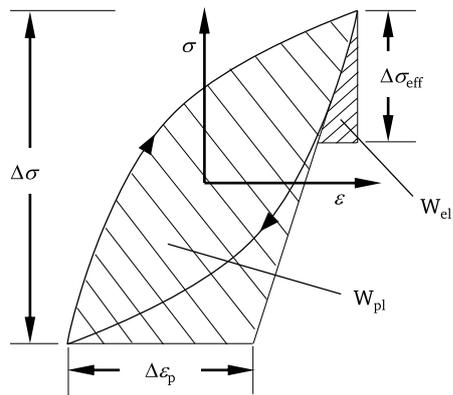


Abbildung C.2.: Ermittlung der elastischen und plastischen Anteile der Energie zur Berechnung des zyklischen effektiven  $J$ -Integrals nach Heitmann et al. [145]

---

## Anhang D:

# Hintergründe zur numerischen Auswertung des Gebietsintegrals

Dieses Kapitel beschreibt die wesentlichen Hintergründe der numerischen Auswertung des Konfigurationsspannungstensors  $C_{kj}$  und stellt die Gewichtungsfunktion  $q_1$  als Bestandteil des Gebietsintegrals vor.

Der Tensor  $C_{kj}$  bildet die Grundlage für die Berechnung des Gebietsintegrals als auch für das Konzept der Konfigurationskräfte. Er ist durch Gleichung D.1 gegeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die  $\Delta$ 's zur Referenzierung der Feldgrößen und damit auf die Möglichkeit einer Auswertung des zyklischen  $J$ -Integrals verzichtet. Das Vorgehen in diesem Fall ist allerdings identisch.

$$C_{kj} = W\delta_{kj} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sigma_{ij} \quad (\text{D.1})$$

Die Spannungen und Dehnungen liegen im Anschluss an eine Simulation an jedem Gaußpunkt bzw. Knoten eines Elements vor. Der Verschiebungsgradient  $\partial u_i / \partial x_k$  lässt sich aufgrund der folgenden Zusammenhänge bestimmen. Durch den Einsatz von isoparametrischen Elementen stimmen die Ansatzfunktionen  $N_a$  der Knotenkoordinaten und Knotenverschiebungen überein und lauten für ein zweidimensionales Element mit vier Knoten und linearen Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Mit Gleichung D.3 ist eine Überführung der globalen Knotenkoordinaten  $X_{ia}$  und -verschiebungen  $U_{ia}$  eines Elements des Modells in ein einheitliches natürliches Koordinatensystem möglich.

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{a=1}^4 N_a X_{ia} \\ u_i &= \sum_{a=1}^4 N_a U_{ia} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Um nun z.B. die Ableitung der Verschiebungen in 1-Richtung zu erhalten, siehe Gleichung D.4, werden die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den globalen Koordinaten benötigt.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \sum_{a=1}^4 \frac{\partial N_a}{\partial x_1} U_{ia} \quad (\text{D.4})$$

Unter Ausnutzung der Kettenregel ergeben sich die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach Gleichung D.5.  $J^{-1}$  stellt darin die inverse der Jacobi-Matrix dar.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_a}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Zusammen mit den Spannungen und Dehnungen und damit der Formänderungsenergiedichte stehen alle benötigten Größen zur Berechnung des Konfigurationsspannungstensors an einem Gaußpunkt eines Elements zur Verfügung. Im Rahmen des Konzepts der Konfigurationskräfte werden die Anteile an einem Knoten pro Element mittels der Gauß'schen Quadratur nach Gleichung 4.5 berechnet und anschließend nach Gleichung 4.6 assembliert.

Im Rahmen der Auswertung des Gebietsintegrals nach Gleichung 4.4 wird der Gradient der Gewichtungsfunktion  $q_1$  benötigt. Diese dient dazu das Linienintegral in ein Gebietsintegral zu überführen. Dabei kann der gleichen Überlegung wie zum Nachweis der Wegunabhängigkeit des Linienintegrals in Anhang A gefolgt werden. Es ist das Gebiet  $A^*$  aus Abbildung A.1 zu betrachten. Ohne Gewichtungsfunktion würde das  $J$ -Integral für das Gebiet Null ergeben. Mit  $q_1 = 1$  entlang des inneren Randes  $\Gamma_2$  und  $q_1 = 0$  entlang des äußeren Randes  $\Gamma_1$  entspricht der Wert des  $J$ -Integrals dem einer einzelnen Kontur. Der Vorteil gegenüber der direkten Auswertung des Linienintegrals für die Berechnung mittels der FEM ist allerdings, dass die Integration über ein Gebiet und die dafür benötigten Algorithmen standardmäßig implementiert sind. Zudem ist durch den Einsatz dieser sogenannten „Plateau-Funktion“ als Gewichtungsfunktion  $q_1$  lediglich die Betrachtung eines einzelnen Rings von Elementen um die Risspitze nötig. Der Gradient  $\partial q_1 / \partial x_i$  außerhalb verschwindet. Abbildung D.1 veranschaulicht die „Plateau-Funktion“ an einem schematischen Beispiel einer vernetzten Risspitze. Im Bereich I gilt  $q_1 = 0$  und im Bereich III gilt  $q_1 = 1$ . Im Bereich II liegt ein linearer Übergang von  $q_1 = 0$  nach  $q_1 = 1$  vor.

Die Gewichtungsfunktion  $q_1$  kann als Einheitsverschiebung des Gebietes III in die Rissausbreitungsrichtung bei gleichzeitiger Beibehaltung der Kontur  $\Gamma_1$  interpretiert werden. Daher lässt sich die Gebietsintegralmethode auch als eine virtual crack extension Methode ähnlich zu Parks [155] interpretieren.

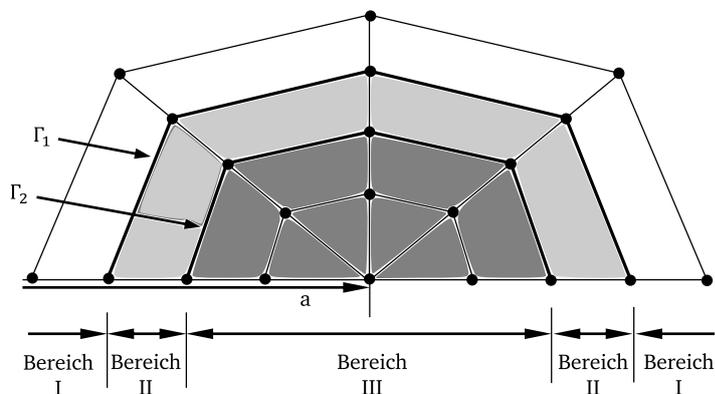


Abbildung D.1:: „Plateau-Funktion“ als Gewichtungsfunktion der Gebietsintegralmethode für einen Riss mit schematischer Vernetzung