

**Dynamisches Stabwerkmodell
eines versagenden Bogens aus
Verbundsicherheitsglas mit Zugband**

Vom Fachbereich Architektur
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Frank Brückner
aus Frankfurt - Höchst

Referent: Prof. Dr.-Ing. Dietger Weischede
Korreferent: Prof. Dipl.-Ing. Johann Eisele

D 17
Darmstadt 2011

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Dietger Weischede
Korreferent:	Prof. Dipl.-Ing. Johann Eisele
Tag der Einreichung:	26.01.2011
Tag der mündlichen Prüfung:	02.03.2011

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2006 - 2010 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Entwerfen und Tragwerksentwicklung von Prof. Dr.-Ing. Dietger Weischede des Fachbereichs Architektur der Technischen Universität Darmstadt.

Herrn Weischede gilt mein besonderer Dank, da er den Impuls für das Thema gab und die Arbeit durch seine Diskussionsbereitschaft und vielfältige, inhaltliche Anregungen unterstützte. Weiterhin schuf er Rahmenbedingungen, die ein intensives Bearbeiten der Promotion, auch über seinen Wechsel in den Ruhestand hinaus, ermöglichten.

Nach dem Wechsel Herrn Weischedes in den Ruhestand konnte ich meine Arbeit am Fachgebiet Entwerfen und Baugestaltung von Herrn Prof. Dipl.-Ing. Johann Eisele intensiv fortsetzen. Für diese Möglichkeit, eine vielseitige Unterstützung und die Übernahme des Korreferates bin ich ihm ebenfalls sehr dankbar.

Allen weiteren, die mich bei der Bearbeitung der vorliegenden Arbeit unterstützten, gilt ebenfalls mein Dank.

Meinem ehemaligen Kollegen Markus Dietz für seine Gesprächsbereitschaft während seiner Zeit an der Universität, meiner Frau Antje Fuchs, meiner Schwester Jele Brückner und meinem Kollegen Claus Maier für das Korrekturlesen und der Studentin Melanie Hassel für die Hilfe beim Layout.

Herrn Dipl.-Ing. Gunnar Wieland, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Struktur-dynamik des Fachbereichs Maschinenbau (Lehrgebiet experimentelle Berechnungsmethoden) für die Diskussionen zum Thema der vorliegenden Arbeit.

Weiterhin gilt mein Dank dem Studenten Aleksandar Maksimovic, der mich bei der Erstellung der Tragmodelle und graphischer Darstellungen wesentlich unterstützte.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Übersicht	2
2	Materialeigenschaften und Tragverhalten von Verbundsicherheitsglas aus Einscheibensicherheitsglas	3
2.1	Diskussion der gewählten Materialparameter	4
2.1.1	Linear-elastisches Materialverhalten	4
2.1.2	Sprödes Materialverhalten	4
2.1.3	Spannungs-Dehnungsverhalten unter einachsiger Beanspruchung	4
2.1.4	Eigenspannungszustand von thermisch vorgespanntem Einscheibensicherheitsglas (ESG)	5
2.1.5	Bruchbild von ESG	6
2.2	Versuche zu Materialeigenschaften von ESG	7
2.2.1	Theoretische Betrachtung der Ausdehnung von ESG bei Bruch	7
2.2.2	Versuche zur Ausdehnung und Rissgeschwindigkeit von brechendem Einscheibensicherheitsglas	9
2.2.3	Auswertung der Versuche zur Ausdehnung von brechendem ESG	10
2.2.4	Auswertung der Versuche zur Rissgeschwindigkeit von brechendem Einscheibensicherheitsglas	12
2.3	Materialeigenschaften von Polyvinylbutyral (PVB)	14
2.3.1	Viskoelastisches Tragverhalten	14
2.3.2	Einfluss der Temperatur	14
2.3.3	Zugtragverhalten von PVB-Folien	15
2.3.4	Schubtragverhalten von PVB-Folien	16
2.4	Systemeigenschaften von Verbundsicherheitsglas (VSG)	17
2.4.1	Ansatz der Verbundwirkung bei der Bemessung	18
2.4.2	Biegesteifigkeit einer VSG-Scheibe mit nachgiebigem Verbund	18
2.4.3	Zugtragfähigkeit von gebrochenem VSG	21
2.4.4	Biegetragfähigkeit von gebrochenem VSG	22
3	Mechanische und mathematische Grundlagen	23
3.1	Grundlagen der Statik	23
3.1.1	Stabwerkmodelle	23
3.1.2	Ergänzende Darstellungsregeln für Kraftecke	23
3.1.3	Prinzip der virtuellen Kräfte	25
3.2	Grundlagen der Kinematik	27
3.3	Grundlagen der Kinetik	29
3.3.1	Translation und Rotation	29
3.4	Grundlagen der Mathematik: Numerische Integration	31
3.5	Relativbewegungen und Trägheitskräfte	31

4	Analyse eines Glasbogens mit Zugband durch Stabwerkmodelle	
	Herstellung und statisches System	33
4.1	Statisches System: Bogen mit Zugband	33
4.1.1	Geometrische Vereinfachung	34
4.1.2	Lage der Knickpunkte, Knoten und Einzellasten	35
4.2	Herstellung des Glasbogens	36
4.2.1	Thermische Vorspannung	36
4.2.2	Aufbringen des gewünschten Stichts	36
4.2.3	Modellierung der Elastica mit Stabwerkmodellen	38
4.2.4	Kontrolle der Ergebnisse	42
4.3	Lastabtrag durch äußere Lasten	43
5	Dynamische Stabwerkmodelle	47
5.1	Kurzbeschreibung der Vorgehensweise	48
5.2	Hintergründe	49
5.2.1	Lageplan	49
5.2.2	Der dynamische Stab	49
5.2.3	Ermittlung dynamischer Kräfte in Kraffecken	51
5.2.4	Kinematische Zustandsgrößen	52
5.2.5	Eintragen des berechneten Weges im Lageplan: Translation und Zentripetalbewegung	54
5.3	Auswirkung der Zentripetalkraft auf den Krafftfluss	57
5.3.1	Zentripetalkraft und Stabkräfte in statisch best. Einmassensystemen	57
5.3.2	Zentripetalkraft und Stabkräfte in statisch best. Mehrmassensystemen	58
5.4	Krafftfluss in statisch einfach überbestimmten Mehrmassensystemen	61
5.4.1	Dynamische Kräfte aus äußeren Lasten	61
5.4.2	Dynamische Kräfte aus Zentripetalbewegungen	64
5.5	Verallgemeinerung der Vorgehensweise aus 5.4	66
5.6	Grundaufgaben mit dynamischen Stabwerkmodellen	67
5.6.1	Beispiel 1: Einmassenpendel mit kleiner Amplitude (10°)	68
5.6.2	Beispiel 2: Einmassenpendel mit großer Amplitude (160°)	70
5.6.3	Beispiel 3: Einmassenpendel, 10° Amplitude, beschleunigtes Auflager	72
5.7	Beispiele 4 - 6: Bögen mit variierenden Geometrien und Lasten	
	Ein Beitrag zur Formfindung im Hinblick auf die Resttragfähigkeit	74
5.7.1	Beispiel 4: Versagender Sinusbogen mit symmetrischer Last	76
5.7.2	Beispiel 5: Versagender, rahmenartiger Bogen mit symmetrischer Last	78
5.7.3	Beispiel 6: Versagender Sinusbogen mit asymmetrischer Last	80
5.8	Besprechung der Ergebnisse	82
5.8.1	Konsistenz der Berechnungen	82
5.8.2	Beschreibung der Ergebnisse und ihr Beitrag zur Formfindung im Hinblick auf die Resttragfähigkeit	82

6	Kontrolle der dynamischen Stabwerkmodelle durch bewegliche Tragmodelle und Bewegungsgleichungen	85
6.1	Herstellung und Genauigkeit der Tragmodelle	85
6.1.1	Konstruktion der Startvorrichtung	86
6.2	Genauigkeit der Highspeedkamera	87
6.3	Vergleichsberechnungen durch Bewegungsgleichungen	87
6.4	Kontrolle der Grundaufgaben aus Kapitel 5	88
6.4.1	Beispiel 1: Einmassenpendel mit kleiner Amplitude (10°)	88
6.4.2	Beispiel 2: Einmassenpendel mit großer Amplitude (160°)	91
6.4.3	Beispiel 3: Einmassenpendel, 10° Amplitude, beschleunigtes Auflager	94
6.4.4	Beispiel 4: Versagender Sinusbogen mit symmetrischer Last	96
6.4.5	Beispiel 5: Versagender, rahmenartiger Bogen mit symmetrischer Last	98
6.4.6	Beispiel 6: Versagender Sinusbogen mit asymmetrischer Last	100
6.5	Zusammenfassung der Kontrolle durch Tragmodelle	102
7	Dynamisches Stabwerkmodell eines Glasbogens aus Verbundsicherheitsglas mit Zugband am Beispiel der «Loggia Wasseralfingen»	103
7.1	Der Glasbogen mit Zugband in Wasseralfingen	103
7.1.1	Sicherheitskonzept des Glasdachs in Wasseralfingen	105
7.2	Ebene Darstellung eines räumlichen Lastabtrags	106
7.3	Herstellung des Glasbogens in Wasseralfingen	108
7.3.1	Eigenspannungen aus thermischer Vorspannung	108
7.3.2	Herstellung des Bogenstichs durch elastische Krümmung	109
7.3.3	Überlagerung der Normalspannungen aus der Herstellung des Bogens	111
7.4	Statische Betrachtung	112
7.4.1	Lastfall Eigengewicht	113
7.4.2	Lastfall Schnee	114
7.5	Dynamisches Stabwerkmodell des Glasbogens mit Zugband	115
7.5.1	Einleitung	115
7.5.2	Phase 0: Die untere Scheibe bricht und dehnt sich dabei aus	118
7.5.3	Phase 1: Die zweite, obere Scheibe bricht und dehnt sich dabei aus	119
7.5.4	Phase 2: Das gedehnte Zugband zieht es sich zusammen	121
7.5.5	Phase 3: Die Massen erreichen den Scheitel und fallen anschließend herab	124
7.5.6	Phase 4: Der gebrochene Glaskörper fällt auf die Zugstäbe	136
7.5.7	Auswertung	151
8	Zusammenfassung und Ausblick	155
9	Anhang zu den Kapiteln 1 - 8	159
10	Literaturverzeichnis	183
11	Lebenslauf	187

Begriffe, Abkürzungen, Formelzeichen

Abkürzungen

FLG	Floatglas
ESG	Einscheibensicherheitsglas
VSG	Verbundsicherheitsglas
TVG	Teilvorgespanntes Glas
PVB	Polyvinylbutyral
fps	frames per second
FKG	Fachverband Konstruktiver Glasbau
BÜV	Bau-Überwachungsverein
FE	Finite Elemente
PdvK	Prinzip der virtuellen Kräfte

Materialkennwerte

E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
k_f	Federkonstante
$f_{c,k}$	Charakteristische Druckfestigkeit von Glas
$f_{g,k}$	Charakteristische Biegezugfestigkeit von Glas
ρ	Dichte

Geometrische Größen, Querschnittswerte, Formelzeichen

b, h, l	Querschnittsbreite, Querschnittshöhe, Bauteillänge
A	Querschnittsfläche
W	Widerstandsmoment
I	Flächenmoment 2. Grades
w	Stichhöhe, Durchbiegung
u, δ	Verformungen
Δ	Differenz
Δl_{Mess}	Längenänderung der Messeinrichtung
Δl_{Stahl}	Längenänderung des Stahlrahmens
$\Delta l_{\text{Glas,M}}$	Längenänderung der Glasscheibe in der Messvorrichtung
$\Delta l_{\text{Glas,F}}$	Längenänderung der Glasscheibe aus äußerer Kraft
Δl_{Glas}	absolute Längenänderung der Glasscheibe
T	Temperatur
α	Winkel
ε	Dehnung
π	Kreiszahl
δ_{10}	Kopplung der Integralflächen aus 1- und 0-System
δ_{11}	Kopplung der Integralflächen aus 1- und 1-System

Σ	Summe
\emptyset	Durchschnitt

kinematische Größen

a	Beschleunigung
g	Gravitation
v	Geschwindigkeit
r	Wegstrecke
m	Masse
s	Sekunde
φ	Winkel
$\dot{\varphi}, \omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\ddot{\varphi}$	Winkelbeschleunigung
T_0	Periodendauer
h, d, mo	Stunde, Tag, Monat
t	Zeit
D	Dämpfungsdekrement

Kräfte, Schnittgrößen, Spannungen, Einheiten

F	Einzellast
q	Streckenlast
S	Kumulierte Schneelast
G	Kumuliertes Eigengewicht
Q, M, N	Querkraft, Moment, Normalkraft
F_{krit}	Kritische Knicklast
S_x	Stabkraft des Stabes x
S'_x	Stabkraft x im 0-System
\bar{S}_x	Stabkraft x im 1-System
$S_{dyn\ k,i}$	Dynamische Stabkraft an Knoten k im Zeitschritt i
$S'_{dyn\ k,i}$	Dynamische Stabkraft im 0-System an Knoten k im Zeitschritt i
$\bar{S}_{dyn\ k,i}$	Dynamische Stabkraft im 1-System an Knoten k im Zeitschritt i
F_{dyn}	Dynamische Kraft
F_{zp}	Zentripetalkraft
M_{Kk}	Moment an Knoten k
R_{Druck}	Resultierende Druckkraft
R_{Zug}	Resultierende Zugkraft
σ	Normalspannung
σ_m	Gemittelte Normalspannung
τ	Schubspannung
N, kN	Newton, Kilonewton
mm, cm, m	Millimeter, Zentimeter, Meter
g, kg	Gramm, Kilogramm

1 Einleitung

Das systematische Konstruieren und Detaillieren flächiger und stabförmiger Bauteile mittels Stabwerkmodellen wurde durch Schlaich und Weischede [F3], aufbauend auf dem durch Moersch geprägten Begriff der Fachwerksanalogie [F4] entwickelt. Hierbei werden Kräfte konsequent vom Lastangriffspunkt (= Quelle) bis zur Lagerung bzw. Lasteinleitung in den Untergrund (= Mündung) verfolgt und anhand von Vektoren in Kräftecken analysiert. Dies ermöglicht die anschauliche Ermittlung der Kraftgrößen sowohl in den Bauteilen selbst als auch die Analyse des Kraftflusses und der Kraftgrößen innerhalb der Details. Dem Ingenieur ist es möglich, komplexes Materialverhalten wie Nichtlinearität, Inhomogenität und Plastizität wirklichkeitsnah in die Tragwerksentwicklung einzubeziehen und System beeinflussende Kraftumlagerungen im Entwurfsprozess zu berücksichtigen. Ohne die Anwendung von Stabwerkmodellen müssen Details im Allgemeinen mit hohem numerischem Aufwand durch computergestützte Berechnungen analysiert werden, da sich diese «Diskontinuitätsbereiche» der allgemeinen technischen Biegelehre entziehen. Bei der Entwicklung dynamischer Stabwerkmodelle wurde die Idee der Kraftflussanalyse von der Statik aufgegriffen und auf dynamische Prozesse erweitert.

Bei Tragwerken spielen dynamische Prozesse nicht nur aufgrund von menscheninduzierten Schwingungen oder Schwingungen durch Erdbeben oder Wind eine Rolle. Auch durch Bauteilversagen können Tragwerke kinematisch werden und durch einen Bewegungsprozess in ein neues, statisches System übergehen. Hierbei wird definitionsgemäß sowohl der bewegte als auch der statische Anteil des Prozesses der Dynamik zugeordnet. Eine lückenlose Analyse und Darstellung des gesamten Prozesses durch Stabwerkmodelle wird möglich, da sowohl der Ruhezustand als auch der bewegte Prozess durch Kräfte definiert wird. Befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht, ist der Körper im statischen Ruhezustand (Ausnahme: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit). Bleibt jedoch eine Kraft übrig, d.h. sind die Kräfte nicht im Gleichgewicht, treibt diese Kraft den Körper an und er bewegt sich.

Als Beispiel wird in der vorliegenden Arbeit ein versagender Glasbogen mit Zugband untersucht. Als Ausgangslage befindet sich der Glasbogen in einem statischen Gleichgewichtszustand und somit in einer Ruhelage. Die gekrümmte Glasscheibe trägt die Lasten aufgrund der Geometrie und Lagerungsbedingungen wie ein Bogen ab. Wird die Glasscheibe zerstört, befinden sich die Kräfte nicht mehr im Gleichgewicht und die gebrochene, jedoch über die Folie noch lose zusammenhängende Glasscheibe fällt herab, bis sie auf den Zugstäben liegen bleibt und dort wieder ein statisches Gleichgewicht bildet.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Analyse des oben beschriebenen Bewegungsprozesses mit dynamischen Stabwerkmodellen. Hierbei soll die Auswertung der Ergebnisse eine Aussage über das Potential und den Erkenntnisgewinn dieses neuen Verfahrens liefern. Neben der ermittelten Bewegungsgeometrie, den kinematischen Größen und Kräften während des Bewegungsprozesses, könnte die gefundene Endgeometrie als Basis für eine nachfolgende Resttragfähigkeitsuntersuchung dienen. Der Rahmen der vorliegenden Arbeit umfasst jedoch ausschließlich den Bewegungsprozess vom Zeitpunkt der Zerstörung des Glasbogens bis zum Auffinden eines neuen statischen Gleichgewichts.

1.1 Übersicht

Das **zweite Kapitel** beschäftigt sich mit den Materialeigenschaften von Einscheibensicherheitsglas (ESG) und den Systemeigenschaften von Verbundsicherheitsglas (VSG). Die zur Analyse des Glasbogens erforderlichen Parameter von intaktem und gebrochenem VSG aus ESG werden ausgewählt und diskutiert. Weiterhin wird die zur Berechnung erforderliche Steifigkeit für intaktes VSG unter Berücksichtigung des nachgiebigen Verbundes recherchiert und bestimmt.

In der Literatur nicht dokumentierte Materialparameter, wie die Rissgeschwindigkeit und Ausdehnung von brechendem ESG werden im Rahmen dieser Arbeit durch weitergehende Versuche experimentell ermittelt.

Im **dritten Kapitel** werden die mechanischen und mathematischen Grundlagen zur Berechnung von Tragwerken mit statischen und dynamischen Stabwerkmodellen beschrieben.

Im **vierten Kapitel** wird die Herstellung und das statische Tragverhalten eines Bogens mit Zugband unter Berücksichtigung der Steifigkeiten mit Stabwerkmodellen analysiert. In Kombination mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte lässt sich für sämtliche Geometrien (Bogen, Rahmen, Balken) eine anschauliche Berechnungsmethode ableiten.

Im **fünften Kapitel** wird die Anwendung der dynamischen Stabwerkmodelle allgemein beschrieben und der mechanische und mathematische Hintergrund dargestellt. Nachfolgend wird das Verfahren an weniger komplexen Grundaufgaben (Pendel, Bogen) ohne Berücksichtigung der Materialeigenschaften überprüft.

Das **sechste Kapitel** beschäftigt sich mit der Kontrolle der durch die dynamischen Stabwerkmodelle ermittelten Ergebnisse aus Kapitel fünf. Die Kontrolle erfolgt über bewegliche, physisch gebaute Tragmodelle, die mit einer Highspeedkamera gefilmt werden. Die Tragmodelle wiederum werden durch die theoretische Analyse mit Bewegungsgleichungen geeicht und überprüft.

Im **siebten Kapitel** wird der gesamte Lebenszyklus eines Glasbogens mit Zugband durch Stabwerkmodelle analysiert. Es wird die Herstellung, die statische Standzeit und der bewegte Versagensprozess bis hin zum neuen statischen Gleichgewicht der gebrochenen Scheibe nach dem Herunterfallen des Bogens unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften mit dynamischen Stabwerkmodellen dargestellt.

Im **achten Kapitel** wird ein Fazit gezogen und in einem Ausblick weitere Anwendungsmöglichkeiten für Forschungsaufgaben im Zusammenhang mit dynamischen Stabwerkmodellen vorgeschlagen.

2 Materialeigenschaften und Tragverhalten von Verbundsicherheitsglas aus Einscheibensicherheitsglas

Die nachfolgende Recherche zu Materialeigenschaften von Glas und Verbundsicherheitsglas dient der Festlegung von Rahmenbedingungen, die aufgrund differierender Angaben in der Literatur für die Analyse eines Glasbogens mittels Stabwerkmodellen erforderlich ist. Die Streuung der Angaben zu den Glaseigenschaften resultiert in erster Linie aus unterschiedlichen Prüfverfahren, verschiedenen Rezepturen, Beanspruchungen während der Lagerung und Transport und damit einhergehenden Oberflächendefekten im Glaskörper. Weitere untergeordnete Rahmenbedingungen können der Literatur entnommen werden [F9].

Bei der Recherche handelt es sich um Eigenschaften, die Einfluss auf das Tragverhalten des in Kapitel 7 untersuchten Glasbogens während der Herstellung, der Standzeit und der Zerstörung haben. Der betrachtete Bogen wurde in Verbundsicherheitsglas (VSG) aus Einscheibensicherheitsglas (ESG) mit einer Zwischenschicht aus Polyvinylbutyral (PVB) hergestellt. Das Basisprodukt der Scheiben ist ein im Floatverfahren hergestelltes Kalk-Natron-Silikat-Glas, das in der Weiterverarbeitung thermisch vorgespannt wurde. Auf andere Glassorten oder Vorspannprozesse wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen. Die wichtigsten Materialeigenschaften, die dieser Arbeit als Grundlage dienen, werden in Tabelle 2.1 aufgelistet und in den darauf folgenden Abschnitten diskutiert und begründet. Zu Materialeigenschaften, die in der Literatur nach Kenntnis des Verfassers nicht untersucht wurden, werden im Rahmen dieser Arbeit Versuche durchgeführt (Kapitel 2.2).

Eigenschaft	Einheit	Recherche	Annahme	Quelle
Dichte ρ	kg/m ³	2.500	2.500	[N3]
Elastizitätsmodul E	N/mm ²	70.000	70.000	[N3]
Zugfestigkeit	N/mm ²	7 - 100	45	[F9]
Druckfestigkeit	N/mm ²	390 - 900	590	[F9], [F10]
Bruchstauchung	Promille	5,6 - 12,9	8,6	[F9]
Thermischer Ausdehnungskoeffizient α	K ⁻¹	9·10 ⁻⁶	9·10 ⁻⁶	[N3]
Charakteristische Biegezugfestigkeit FLG	N/mm ²	45	45	[N3], [F23]
Charakteristische Biegezugfestigkeit ESG	N/mm ²	120	120	[F23]
Oberflächendruckspannung aus thermischen Vorspannprozess bei ESG	N/mm ²	90 - 150 75	110	[F23], [F9], [F31]
Ausdehnung von brechendem ESG (12 mm)	%	0,08 - 2,3	0,11	[F9], Kap. 2.2
Bruchgeschwindigkeit von brechendem ESG	m/s	-	1.504	Kap. 2.2
E-Modul Zug von gebrochenem VSG	N/mm ²	51	51	[F2]
E-Modul Biegung von gebrochenem VSG	N/mm ²	4,2	4,2	[F2]

Tab. 2.1 Physikalische Eigenschaften von Kalk-Natron-Silikat-Glas als ESG und VSG

2.1 Diskussion der gewählten Materialparameter

2.1.1 Linear-elastisches Materialverhalten

In der Arbeit von Frank Schneider [F28] wurde das inelastische Materialverhalten von Glas untersucht und quantifiziert. Für das im Bauwesen in der Regel relevante Natron-Silikat-Glas betragen die zeitabhängigen, inelastischen Verformungen maximal 2% der elastischen Verformungen. Dieser inelastische Anteil ist bereits nach einem Tag zu ca. 90% vorhanden. Aufgrund der geringen Größe der inelastischen Verformungen wird der Werkstoff Glas in der vorliegenden Arbeit vereinfachend als linear-elastisches Material mit einem E-Modul von 70.000 N/mm² betrachtet.

2.1.2 Sprödes Materialverhalten

Aufgrund des spröden Materialverhaltens des Werkstoffs Glas treten in erster Linie an den Oberflächendefekten Spannungsspitzen auf, die nicht durch Umlagerungen (plastisches Fließen) im Glaskörper abgebaut werden können. Diese Oberflächendefekte resultieren aus mechanischer Beanspruchung aus Herstellung, Transport und Weiterverarbeitung des Werkstoffs. Aufgrund dieses Verhaltens pflanzt sich ein Riss, der zum Bruch der Scheibe führt, mit bis zu 1.520 m/s in einem Floatglas fort. Hierbei ist die Größe der Rissgeschwindigkeit von der Oberflächenspannung [F30] abhängig. Versuche zur Rissgeschwindigkeit von Einscheibensicherheitsglas werden im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt. Sie werden in Kapitel 2.2 beschrieben.

2.1.3 Spannungs-Dehnungsverhalten unter einachsiger Beanspruchung

In Abbildung 2.1a ist das Spannungs-Dehnungsverhalten von Floatglas (FLG) und Einscheibensicherheitsglas (ESG) unter Druck-, in 2.1b unter Biegezugbeanspruchung dargestellt.

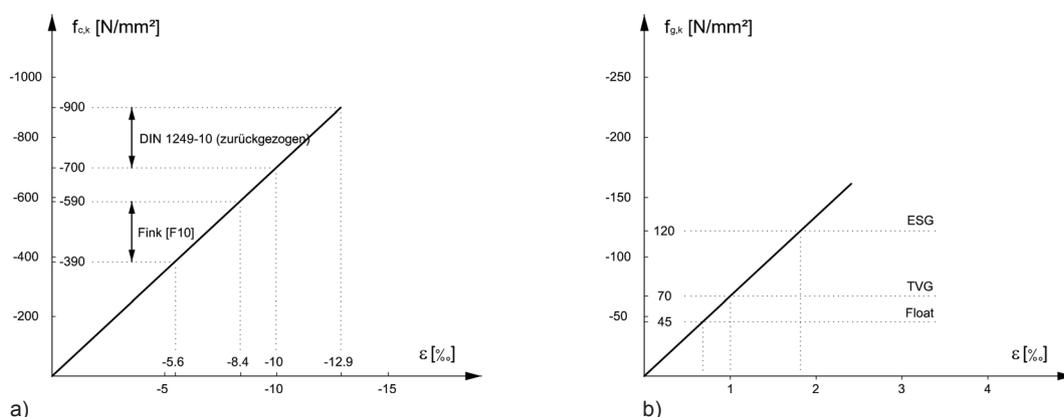


Abb. 2.1 Spannungs-Dehnungsdiagramm von Kalk-Natron-Silikatglas (a) unter Druckbeanspruchung (b) unter Biegebeanspruchung, in Anlehnung an [F9]

In der Arbeit von Andreas Fink [F10] wurde die in 2007 zurückgezogene DIN 1249-10 angegebene Prüffestigkeit für kurzzeitige Druckbelastung von 700 N/mm² bis 900 N/mm² in keinem Fall erreicht (Abb. 2.1a). Sie lag mit 390 N/mm² bis 590 N/mm² deutlich darun-

ter. Weiterhin konnte durch die Versuche eine Abhängigkeit zwischen der Belastungsgeschwindigkeit und der Festigkeit festgestellt werden, ähnlich der Charakteristik biegebelasteter Proben. Bei abnehmender Belastungsgeschwindigkeit wurden auch geringere Prüffestigkeiten erzielt. Bei Langzeitbelastungen bis zu 50 Jahren ist mit einer Festigkeitsminderung um den Faktor drei zu rechnen. Für die vorliegende Untersuchung wird von einer deutlich geringeren Standzeit als 50 Jahre und einer stoßartigen Versagenslast ausgegangen, ausgelöst beispielsweise durch Steinschlag. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit mit 590 N/mm^2 eine Druckfestigkeit im oberen Bereich der von Fink ermittelten Werte für Kurzzeitbelastungen gewählt.

Die Biegezugfestigkeit ist ebenfalls von der Belastungsdauer, jedoch zusätzlich von der Größe der belasteten Fläche und der Größe der Oberflächendefekte abhängig [F9]. Je größer die Oberflächendefekte sind, desto kleiner wird die Biegezugfestigkeit (Abb. 2.2c). Der Flächeneinfluss wirkt sich dahingehend aus, dass die Wahrscheinlichkeit großer Risstiefen im belasteten Probekörper bei großen Flächen größer ist, als bei kleinen. In Bild 2.2b ist der Einfluss aus der Dauer der Belastung dargestellt. Je größer die Belastungsdauer, desto stärker sinkt die Biegezugfestigkeit.

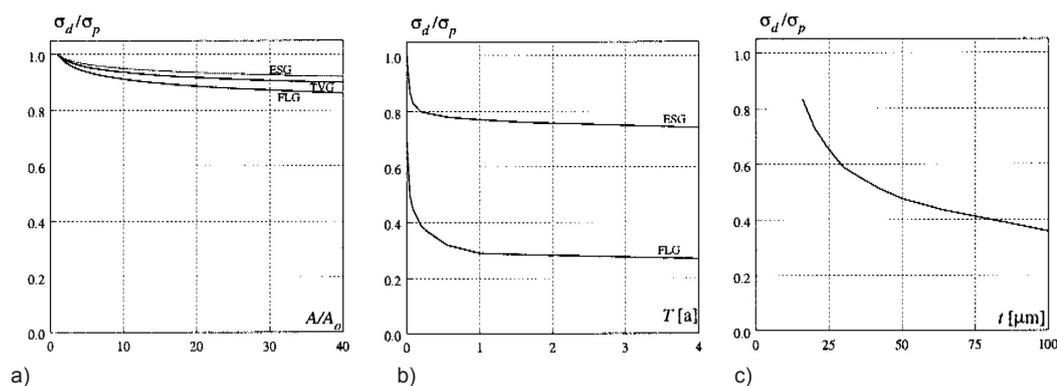


Abb. 2.2 Abnahme der Biegezugfestigkeit (a) abhängig von der Fläche unter größter Zugbeanspruchung (b) abhängig von der Belastungsdauer (c) abhängig von der Schädigungstiefe [F9]

2.1.4 Eigenspannungszustand von thermisch vorgespanntem Einscheibensicherheitsglas (ESG)

Durch einen thermischen Vorspannprozess ist es möglich, die Empfindlichkeit des Floatglases gegen Oberflächendefekte zu reduzieren und damit die Oberflächenfestigkeit des Glases zu erhöhen. Die Vorspannung wird aufgebracht, indem das Glas auf eine Temperatur oberhalb des Transformationsprozesses erhitzt (650°C) und anschließend durch Anblasen mit Luft schnell wieder abgekühlt wird. Der dadurch eingepreßte Spannungszustand verursacht Druckspannungen auf der kerbempfindlichen Glasoberfläche und Zugspannungen im Glasinneren [F28]. Erst wenn die aufgebrachte Biegezugspannung die aus dem thermischen Vorspannprozess aufgebrachte Druckspannung an der Glasoberfläche überschreitet, kann die äußere Last die vorhandenen Risse und Oberflächendefekte (die durch die eingepreßte Vorspannung überdrückt wurden) beeinflussen und vergrößern. Bezüglich der Verteilung der Oberflächenspannung kann die Glasscheibe prinzipiell in vier Zonen eingeteilt werden [F21].

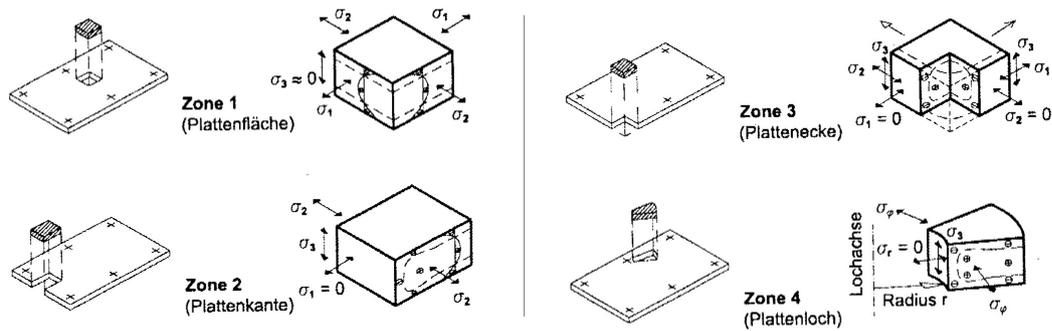


Abb. 2.3 Spannungsverteilung einer thermisch vorgespannten Scheibe in vier Zonen [F21]

Eine parabelförmige Spannungsverteilung kann nur in Zone 1 angenommen werden [F26]. Vereinfachend wird in dieser Arbeit durchgängig mit einer parabelförmigen Spannungsverteilung gerechnet.

Über die Größe der Eigenspannungen an der Oberfläche gehen die Angaben in verschiedenen wissenschaftlichen Untersuchungen auseinander. Die Werte differieren in der Literatur zwischen 75 und 150 N/mm². In der vorliegenden Arbeit wird von einer eingepprägten Oberflächenspannung von 110 N/mm² ausgegangen. Dieser Wert wurde bei der Kontrolle zweier Referenzkörper für das Glasdach in Wasseralfingen mittels eines optischen Messverfahrens durchschnittlich ermittelt [F31]. Weiterhin deckt sich der Wert mit den Ergebnissen der Versuche zur Expansionskraft von ESG (Kapitel 2.2). Die Spannung über die Querschnittshöhe lässt sich durch nachfolgende Formel berechnen [F23].

$$\sigma^{\text{ESG}} = \sigma_{\text{Zug}} \cdot \left(1 - 3 \cdot \left(\frac{2z}{d} \right)^2 \right) \quad (2.1)$$

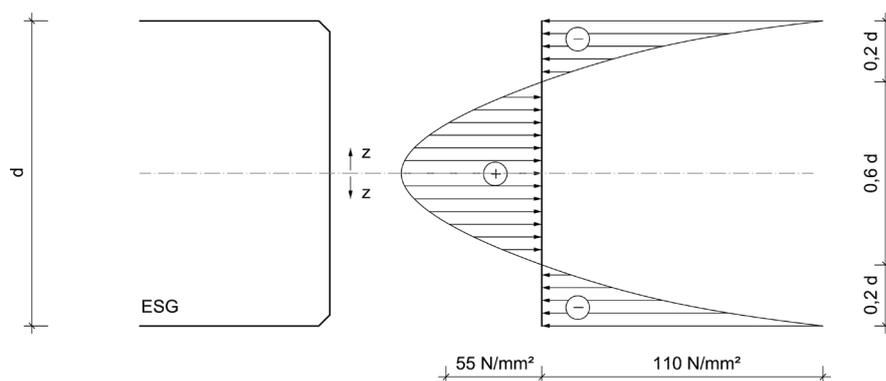


Abb. 2.4 Parabelförmige Spannungsverteilung einer thermisch vorgespannten Glasscheibe mit einer Oberflächendruckspannung von 110 N/mm²

2.1.5 Bruchbild von ESG

Ist die Schädigung der vorgespannten Glasscheibe tiefer als die eingepprägte Druckzonenhöhe, kann das innere Gleichgewicht im Querschnitt nicht mehr aufrechterhalten werden. Das Glas zerspringt in kleine, würfelförmige, stumpfkantige Bruchstücke mit einer Kantenlänge von ca. 0,6 cm x 0,6 cm x Glasdicke. Diese Bruchstücke hängen un-

tereinander in größeren, lockeren Verbänden zusammen. Die stumpfen Kanten entstehen durch Abplatzungen am Scheibenrand. Sie betragen bei einer Scheibendicke von 10 mm ca. 1,5 mm [F2].

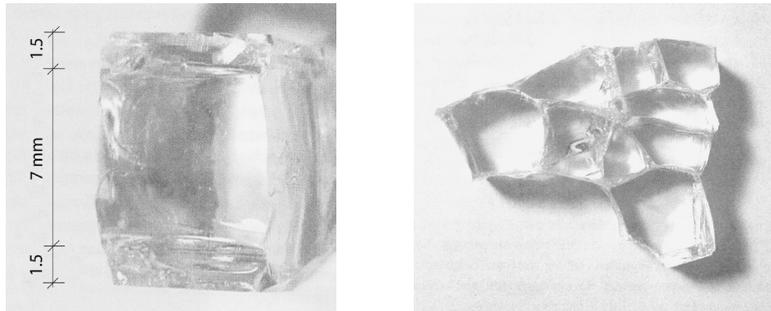


Abb. 2.5 (a) Glaskorn mit Abplatzungen (b) Glaskörner in lockerem Verband, in Anlehnung an [F2]

2.2 Versuche zu Materialeigenschaften von ESG

Um den Bewegungsvorgang eines zerstörten Glasbogens zu analysieren, ist neben den in Abschnitt 2.1.1 angeführten Materialeigenschaften die Kenntnis über die Ausdehnung einer ESG-Scheibe während des Bruchvorgangs und die Rissgeschwindigkeit von ESG erforderlich. Versuche zur Dehnung von brechendem ESG wurden in [F9] durchgeführt und mit einer durchschnittlichen Ausdehnung von $\varepsilon = 2,3 \%$ quantifiziert. Eine theoretische Kontrolle dieses Ergebnisses (siehe Abschnitt 2.2.1) deutet jedoch auf einen Messfehler hin, weswegen im Rahmen dieser Arbeit weitere Versuche durchgeführt wurden (Abschnitt 2.2.2).

Gesicherte Angaben zur Rissgeschwindigkeit wurden lediglich zu nicht vorgespanntem Floatglas recherchiert. Um dennoch hinreichend genaue Werte für die Analyse des zerstörten Glasbogens zu erhalten, wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit auch Messungen zur Rissgeschwindigkeit von ESG durchgeführt. Bei den Versuchen handelt es sich nicht um Parameterstudien mit wechselnden Rahmenbedingungen. Die Versuchsreihen wurden ausschließlich an Einscheibensicherheitsglas mit Scheibendicken von 12 mm durchgeführt, da diese Dimensionierung bei der Analyse des zu untersuchenden Glasbogens mit Zugband zur Anwendung kam und damit eine Randbedingung dieser Arbeit darstellt.

2.2.1 Theoretische Betrachtung der Ausdehnung von ESG bei Bruch

Aufgrund des Spannungs- Dehnungs- Verhaltens des Glases (Abschnitt 2.1.3) kann davon ausgegangen werden, dass durch den Eigenspannungszustand des thermisch vorgespannten Glases an der gedrückten Oberfläche Stauchungen vorliegen und in der Kernzone der Glasscheibe Dehnungen. Wird die Scheibe zerstört, entspannen sich die Dehnungen zumindest teilweise wieder, was für die Glasoberfläche eine Ausdehnung und für den Kern ein Zusammenziehen zur Folge hat. Während sich die ausdehnenden Glaskörner an der Scheibenoberfläche voneinander abstoßen, fehlt für die Übertragung der Zugkräfte in der Kernzone des Glases ein «Detail». D.h. es ergibt sich über den Glas-

querschnitt ein Ungleichgewicht, das eine Ausdehnung der Scheibe hervorruft.

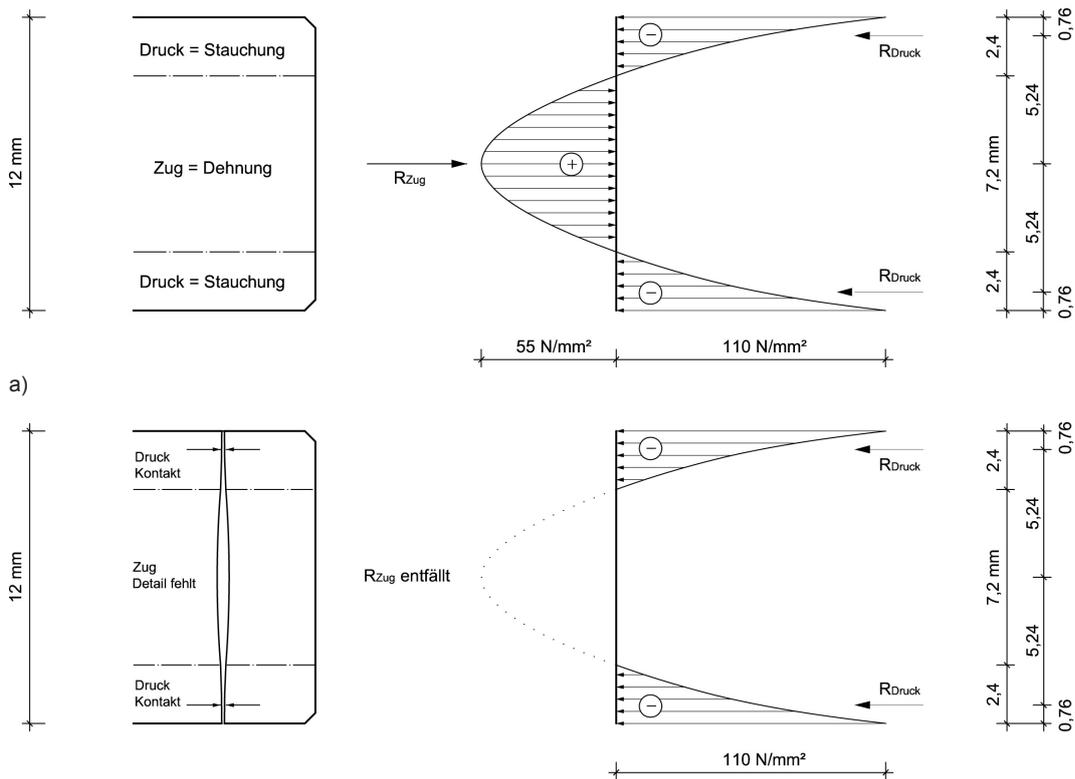


Abb. 2.6 (a) Spannungsverteilung vor dem Bruch der Scheibe (b) durch Bruch der Scheibe

Über das Hooksche Gesetz lassen sich aus den Spannungen am Querschnitt die Dehnungen ermitteln. Ermittelt man das «Auseinanderdriften» der Bruchstücke mit den Randspannungen, erhält man die maximal mögliche Ausdehnung der Scheibe:

Dehnung aus Randspannung:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{11 \text{ kN/cm}^2}{7.000 \text{ kN/cm}^2} = 0,0016 \quad (2.2)$$

Werden die Dehnungen nicht über die maximalen Randspannungen berechnet, sondern mit gemittelten Spannungen über die Druckzonenhöhe, ergibt sich für einen 100 cm breiten Probekörper:

$$\sigma_m = \frac{R_{\text{Druck}}}{A_{\text{Druck}}} = \frac{254 \text{ kN}}{(0,48 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm})} = 5,3 \text{ kN/cm}^2$$

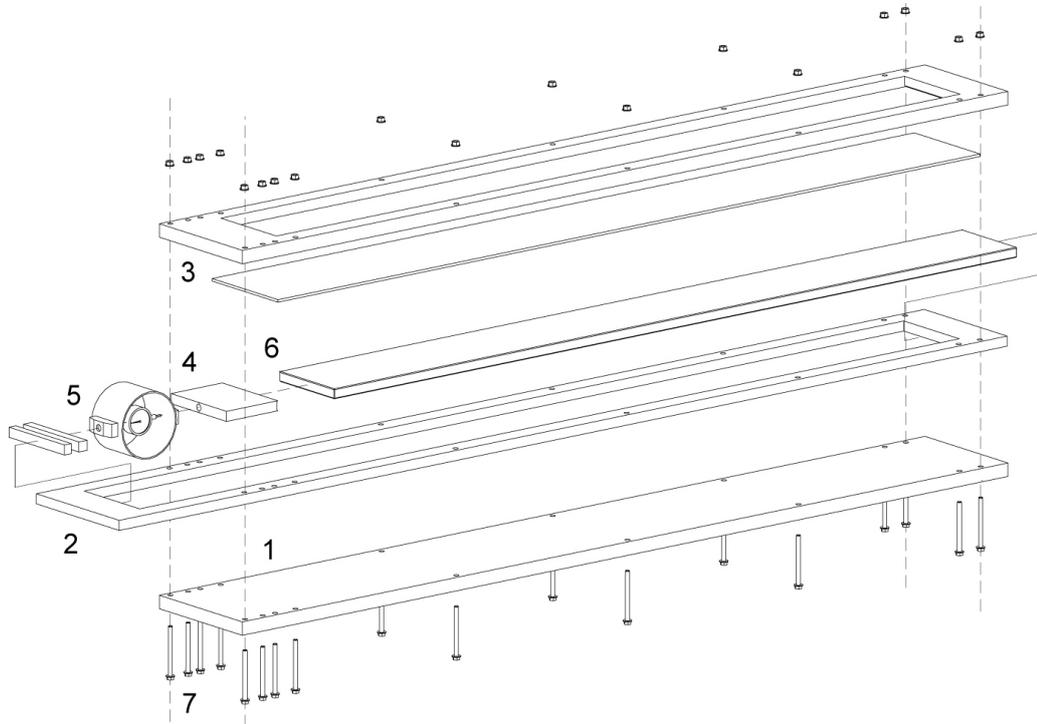
Dehnung aus gemittelten Druckspannungen:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_m}{E} = \frac{5,3 \text{ kNcm}^2}{7.000 \text{ kNcm}^2} = 0,00075 \quad (2.3)$$

Vernachlässigt wurden bei den Dehnungsberechnungen die noch in den Bruchstücken verbleibenden Restspannungen. Je nach Größe dieser Restspannungen müssen die theoretisch ermittelten Dehnungen noch reduziert werden.

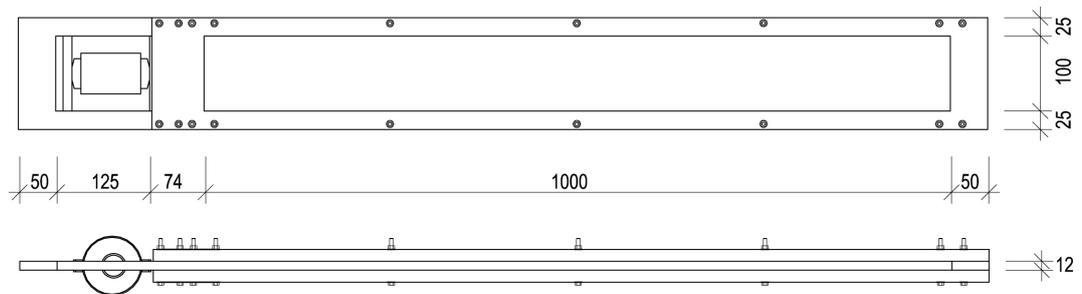
2.2.2. Versuche zur Ausdehnung und Rissgeschwindigkeit von brechendem Einscheibensicherheitsglas

Folgender Versuchsaufbau wurde zur Messung der Dehnung und Rissgeschwindigkeit
des Glases verwendet:

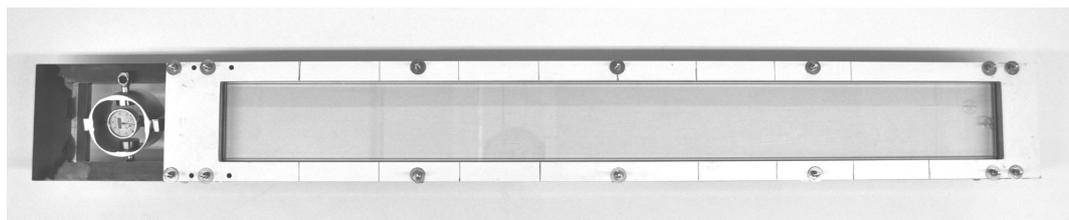


a)

Legende: (1) Lagerbrett (2) Stahlrahmen, S235 (3) Abdeckung (4) Distanzschlitten aus Stahl mit Zentrierdorn
(5) Ringkraftmesser (6) ESG-Probekörper (7) Schrauben zur Lagefixierung



b)



c)

Abb. 2.7 (a) Isometrie (b) Aufsicht und Ansicht (c) Foto der Messeinrichtung

Als Probekörper wurden sechs Glasscheiben aus ESG mit den Abmessungen $l / b / h = 100 / 10 / 1,2$ cm zerstört. Für die Versuchsdurchführung wurden die Probekörper (6) in den Stahlrahmen (2) eingelegt. Um ein Herausspritzen kleiner Glasteile zu verhindern und um die Lage der Scheibe zu fixieren, wurde der Probekörper mit einer in einem gefrästen Holzrahmen (3) eingelegten Plexiglasscheibe abgedeckt. Um die Ausdehnung des Glases bei Bruch nicht durch Reibung an der Abdeckung zu verfälschen wurden die Schrauben nicht angezogen. Sie dienten lediglich der genauen Ausrichtung des Versuchskörpers auf der Messeinrichtung. An jedem Versuchskörper wurde die Dehnung der Scheibe und an drei Probekörpern zusätzlich die Rissgeschwindigkeit gemessen.

2.2.3. Auswertung der Versuche zur Ausdehnung von brechendem ESG

Für die Messung der Ausdehnung der Glasscheiben beim Bruchvorgang wurden sechs ESG-Scheiben geprüft. Zwei Scheiben lagen sowohl in Längs- als auch in Querrichtung passgenau in dem Stahlrahmen (Versuch 4 und 5). Bei vier Scheiben waren in Querrichtung bis 0,5 mm Spiel vorhanden, um beim Bruch eine Zwängung und damit ein Abstützen an den Seitenteilen des Rahmens zu verhindern.

In Längsrichtung lag das Glas passgenau an den Stahlteilen an. Eine zentrische Lasteinleitung aus der Glasscheibe in den Ringkraftmesser (Ringwaage der Fa. Tiedemann & Betz, Typ F 580) wurde über ein verschiebliches Stahlblech mit gefrästem Lasteinleitungsdorn gewährleistet. Nachfolgend wurde der Glaskörper mit einem Körner an einem Ende der Scheibe von oben angeschlagen. Aufgrund des spröden Materialverhaltens und der thermischen Vorspannung brach der komplette Glaskörper in kleine Bruchstücke. Die auf der Messuhr ablesbare Stauchung des Federrings (1 Skalenteil = 0,01 mm) konnte wiederum über eine Messscala in eine Kraft umgerechnet werden.

Versuch	Bemerkung	Skalenteile	Δl [mm]	Kraft [kg]
1	mit Spiel in Querrichtung	87	0,87	1511
2	mit Spiel in Querrichtung	67	0,67	1127
3	mit Spiel in Querrichtung	90	0,90	1540
4	passgenau in Querrichtung	25	0,25	422
5	passgenau in Querrichtung	26	0,26	439
6	mit Spiel in Querrichtung	79	0,79	1326
∅	mit Spiel in Querrichtung (aus 1, 2, 3, 6)	80,75	0,81	1376

Tab. 2.2 Versuchsergebnisse

Aufgrund der Messergebnisse und der Passgenauigkeit der Scheiben in Querrichtung ist zu vermuten, dass sich die Scheiben in den Versuchen 4 und 5 an den Seiten des Stahlrahmens abstützten. Zur Berechnung der Dehnungen wurden daher nur die Versuche 1, 2, 3 und 6 herangezogen. Die Versuche ergaben eine durchschnittliche Stauchung des Federrings von: $\Delta l = 0,81$ mm.

Über die zugehörige Messtabelle wurde eine durchschnittliche «Expansionskraft» von:

$F = 13,76 \text{ kN}$ zugeordnet.

Zur Ermittlung der tatsächlichen Dehnung der Glasscheibe wird nachfolgend die Dehnung des Stahlrahmens berücksichtigt und mit der Dehnung des Glases addiert.

$$\Delta l_{\text{Stahl}} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{13,76 \text{ kN} \cdot 100 \text{ cm}}{21.000 \text{ kN/cm}^2 \cdot (5,0 \text{ cm} \cdot 1,2 \text{ cm})} = 0,011 \text{ cm}$$

$$\Delta l_{\text{Glas,M}} = \Delta l_{\text{Stahl}} + \Delta l_{\text{Mess}} = 0,081 \text{ cm} + 0,011 \text{ cm} = 0,092 \text{ cm} \quad (2.4)$$

mit:

- Δl_{Mess} Stauchung des Federrings an der Messeinrichtung
- Δl_{Stahl} Längenänderung der Seitenteile des Stahlrahmens
- $\Delta l_{\text{Glas,M}}$ Längenänderung der Glasscheibe in der Messvorrichtung

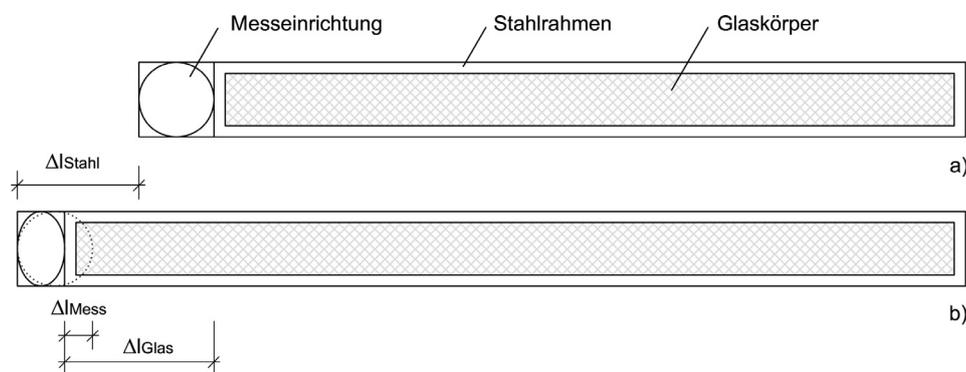


Abb. 2.8 Längenänderung der Glasscheibe durch Bruch (a) Ausgangslänge, (b) Längenänderung der Einzelkomponenten

Aufgrund der passgenauen Lagerung des Probekörpers in der Messvorrichtung kann sich die Glasscheibe nicht frei ausdehnen, da die Stauchung des Federrings und die Dehnung des Stahlrahmens eine Rückstellkraft auf die Glasscheibe verursachen. Um das Maß der freien Dehnung des gebrochenen Glases ohne Messvorrichtung zu erhalten, muss somit noch die Glasstauchung aufgrund der aufgebauten Gegenkraft aus dem Ringkraftmesser zu der oben ermittelten Dehnung addiert werden. Zur Ermittlung dieser Dehnung wird nachfolgend als druckbelasteter Querschnitt die Querschnittshöhe abzüglich der Abplatzungen am Rand angesetzt. Als Längenänderung aus «äußerer» Kraft der Kraftmessdose erhält man:

$$\Delta l_{\text{Glas,F}} = l \cdot \frac{\sigma}{E} = 100 \text{ cm} \cdot \frac{13,76 \text{ kN}}{(0,9 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}) \cdot 7.000 \text{ kN/cm}^2} = 0,022 \text{ cm} \quad (2.5)$$

Durch Addition der Längenänderung aus (2.4) und (2.5) erhält man die Längenänderung des Glases für den Fall, dass es sich beim Bruch frei ausdehnen kann.

$$\Delta l_{\text{Glas}} = \Delta l_{\text{Glas,M}} + \Delta l_{\text{Glas,F}} = 0,092 \text{ cm} + 0,022 \text{ cm} = 0,114 \text{ cm}$$

Ohne Einschnürung ergibt sich damit eine Dehnung des Glases durch Bruch von:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 0,00114 \quad (2.6)$$

Die experimentell ermittelten Dehnungen liegen zwischen den der theoretischen Betrachtung aus gemittelten Dehnungen und den maximal möglichen aus der Randspannung:

$$\varepsilon_{\text{theoretisch, gemittelt}} = 0,00075 < \varepsilon_{\text{experimentell}} = 0,00114 < \varepsilon_{\text{theoretisch, Rand}} = 0,00160$$

Für die Berechnungen des brechenden Glasbogens in Kapitel 7 wird von der experimentell ermittelten Dehnung $\varepsilon = 0,0011$ (= 0,11 %) ausgegangen.

2.2.4 Auswertung der Versuche zur Rissgeschwindigkeit von brechendem Einscheibensicherheitsglas

Im Rahmen der Literaturrecherche konnten keine Angaben zur Rissgeschwindigkeit von ESG gefunden werden; lediglich Versuchsergebnisse für nicht vorgespanntes Flachglas von $v = 1.520$ m/s [F26] und der Hinweis auf die Abhängigkeit zwischen Glasspannung und Rissgeschwindigkeit [F30]. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit eine Versuchsreihe mit drei ESG-Scheiben mit den Abmessungen $l / b / d = 100 / 10 / 1,2$ cm geprüft. Zur Erfassung der Rissgeschwindigkeit wurde der Bruchvorgang mit einer Highspeedkamera mit 8.000 Bildern je Sekunde gefilmt und die Einzelbilder nachfolgend graphisch ausgewertet. Da das gebrochene Glas in der Aufnahme heller erscheint, wird der Rissfortschritt anhand eines festgelegten Grauwertes ermittelt. Ausgewertet werden die Bilder b - f der Abbildung 2.9. Dadurch werden Ungenauigkeiten für den Fall ausgeschlossen, dass der Start und das Ende des Bruchs zwischen zwei Bildaufnahmen liegen. Die dargestellte Bilderreihe zeigt exemplarisch einen der drei Versuche. Die Ergebnisse aller drei Versuche sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst und im Anhang zu diesem Abschnitt zusätzlich graphisch dargestellt.

Versuch	Rissfortschritt [m]	Anzahl der Bilder [-]	Rissgeschwindigkeit [m/s]
1	0,94	5	1.504
2	0,77	4	1.540
3	0,92	5	1.469
\emptyset			1.504

Tab. 2.3 Ergebnisse aus den Versuchen zur Rissgeschwindigkeit von ESG

Als Mittelwert aus allen drei Versuchen ergibt sich eine Rissgeschwindigkeit von:

$$v = 1.504 \text{ m/s} \quad (2.7)$$



a)



b)



c)



d)



e)



f)

Abb. 2.9 (a) - (f) Aufnahmen des Rissfortschritts mit 8.000 Bildern pro Sekunde: Probekörper 1

2.3 Materialeigenschaften von Polyvinylbutyral (PVB)

Polyvinylbutyral (PVB) wird im Bauwesen aufgrund der guten Haftungseigenschaften in Verbindung mit Glas als «Klebstoff» zwischen den Glasscheiben verwendet. Da es sich bei PVB um ein viskoses, thermoplastisches Material handelt, ist das Tragverhalten in erster Linie von der Belastungsdauer und der Temperatur abhängig. Für den Lastabtrag des intakten Glasbogens aus Verbundsicherheitsglas ist vor allem der Schubmodul der PVB-Folie relevant. Er bestimmt, mit welcher Nachgiebigkeit die Einzelglasscheiben miteinander verbunden sind.

2.3.1 Viskoelastisches Tragverhalten

PVB-Folien weisen ein viskoelastisches Materialverhalten auf. Diese Eigenschaft beschreibt ein zeitlich verzögertes, jedoch vollständig reversibles Verformungsverhalten eines Werkstoffs unter äußerer Einwirkung. Auf der einen Seite wird dieses zeitabhängige Verhalten durch das Kriechen, d.h. der zeitabhängigen Dehnung bei anhaltenden, konstanten Spannungen beschrieben (Abb. 2.10a), andererseits durch die Relaxation, d.h. den Spannungsabbau bei konstanter Verformung (Abb. 2.10b).

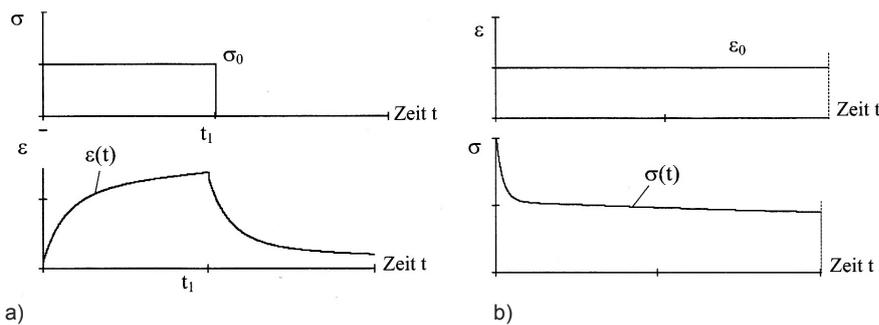


Abb. 2.10 Viskoelastisches Materialverhalten [F24] (a) Kriechen / Retardation (b) Relaxation

2.3.2 Einfluss der Temperatur

Weiterhin handelt es sich bei PVB um einen amorphen Thermoplasten, der je nach Temperatur einen festen, oder einen plastisch verformbaren bis hin zu einem flüssigen Aggregatzustand einnehmen kann [F2].

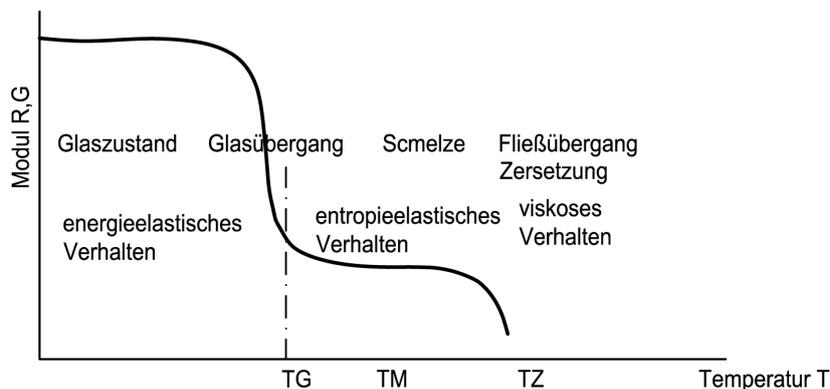


Abb. 2.11 Schematischer Modulverlauf [F24]

- Bis ca. 10° C befindet sich PVB im energieelastischen, d.h. hartelastischen Bereich. Nach Entlastung sind die aufgebrachtten Dehnungen somit vollständig und unmittelbar reversibel.
- Zwischen 10° und 20° C ist PVB im Bereich der Glasübergangstemperatur (TG). Das Verhalten ändert sich abrupt von hartelastisch zu gummi- bzw. entropieelastisch. Die Verformungen sind ebenfalls reversibel, aufgrund der Entropie gegenüber der Kraft-einwirkung jedoch zeitverzögert.
- Von 20° bis 60° C nimmt der Schubmodul mit zunehmender Temperatur ab.
- Ab 60° C beginnt das PVB zu erweichen und wird zunehmend plastisch-viskos. Es wird zunehmend weicher bis es den Schmelzpunkt T_M erreicht.

Neben der Abhängigkeit der physikalischen Eigenschaften von der Temperatur und Belastungsdauer haben weiterhin Alterung der Folie, Rezeptur, unterschiedliche Lagerungsbedingungen der Folie vor der Verarbeitung und damit verschiedene Feuchtigkeitsverhältnisse einen Einfluss. Weitere mögliche Beeinflussungen können der Literatur entnommen werden [F24].

2.3.3 Zugtragverhalten von PVB-Folien

In der Arbeit von Mark Fahlbusch [F2] wurden Kurzzeit- und Dauerzugversuche mit PVB-Folien durchgeführt. Es ergab sich, dass keine Spannung über 4 N/mm² dauerhaft aufgenommen werden kann.

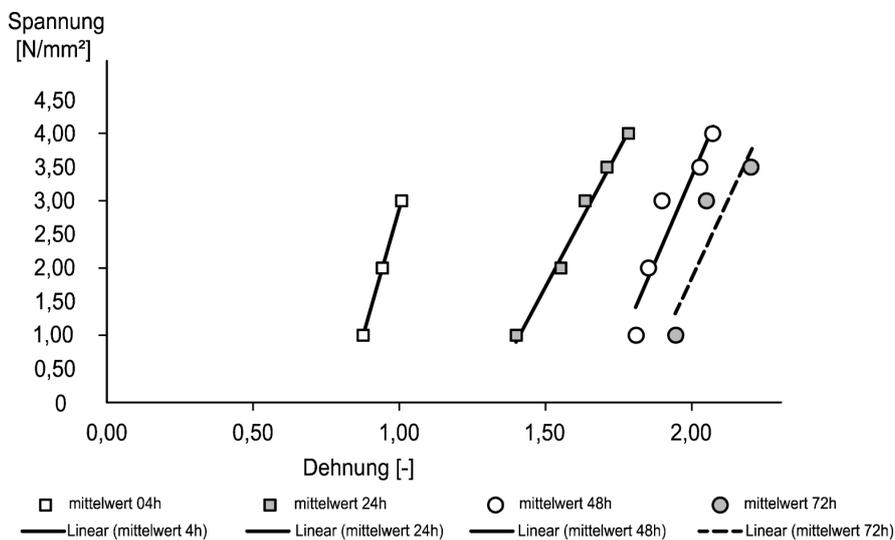


Abb. 2.12 Zugtragverhalten bei Spannungen von 1,0 - 4,0 N/mm², in Anlehnung an [F2]

Die in Arbeit [F2] untersuchte Grenzspannung von $\sigma = 20$ N/mm² ist somit nur für kurzzeitige Zugbeanspruchungen anwendbar. Für die Analyse des Bewegungsprozesses des zerstörten Glasbogens ist jedoch nicht die Zugtragfähigkeit der PVB-Folie, sondern die der gebrochenen VSG-Scheibe relevant, da die PVB-Folie durch die Haftung der Glaskörner eine wesentlich größere Steifigkeit besitzt als die PVB-Folie allein (Abschnitt 2.4.3).

2.3.4 Schubtragverhalten von PVB-Folien

In der Arbeit von Schuler [F24] wurden ausführliche Untersuchungen zu dem Einfluss der Temperatur und der Belastung (Belastungsdauer und Belastungsgeschichte) auf das Materialverhalten von Polyvinylbutyral und damit auf das Tragverhalten von Verbund sicherheitsglas durchgeführt und mit bereits vorhandenen Veröffentlichungen verglichen. Das Resultat der Untersuchungen und Recherchen ist in nachfolgender Tabelle zusammengefasst.

Lastdauer Temperatur	1 sek.	1 min.	1 Std.	1 wo	1 mo.	3 mo.
≤ 0° C	100,00	99,90	94,50	8,97	4,08	1,95
≤ 10° C	34,40	13,80	0,99	0,65	0,55	0,48
≤ 20° C	1,66	0,93	0,57	0,41	0,36	0,32
≤ 30° C	0,67	0,54	0,42	0,27	0,22	0,19
≤ 40° C	0,54	0,42	0,30	0,12	0,08	0,05
≤ 50° C	0,41	0,29	0,18	0,03	0,00	0,00
≤ 60° C	0,28	0,17	0,05	0,00	0,00	0,00
≤ 70° C	0,15	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 2.4 Rechenwerte für Schubmoduli von PVB [N/mm²] in Abhängigkeit der Temperatur und Belastungsdauer, Auswahl aus [F24] ohne Berücksichtigung von Alterungseinflüssen

Lastdauer Temperatur	< 0,5 sek. (Stoß)	< 5 sek. (Windböen)	< 10 min. (Windgrundlast)	< 7 Tage (Schneelast)	Ständig (Eigengewicht)
< 3° C	monolithisch*	monolithisch*	monolithisch*	1,00	0,20
< 25° C	monolithisch*	1,00	0,35	0,10	0,00
< 50° C	monolithisch*	0,30	0,10	0,05	0,00
< 70° C	monolithisch*	0,15	0,00	0,00	0,00

Tab. 2.5 Rechenwerte für den Schubmodul von PVB [N/mm²] in Abhängigkeit der Temperatur und Belastungsdauer [FKG 2001]

* Berechnung einschichtig mit der Gesamtglasdicke oder mehrschichtig mit $G = 2 \text{ N/mm}^2$

Ein Anwendungsvorschlag für den Ansatz des Verbundes zwischen zwei Glasscheiben wird in [F12] für den Fachverband des konstruktiven Glasbau (FKG) gemacht. Bei dem Bemessungsvorschlag wird dabei auf die in Tabelle 2.5 abgebildeten Schubmoduli verwiesen (siehe auch Abschnitt 2.4.1).

2.4 Systemeigenschaften von Verbundsicherheitsglas (VSG)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die statische und dynamische Analyse eines Glasbogens aus Verbundsicherheitsglas mit Zugband. Das Tragverhalten der Verbundglas-scheibe während der Standzeit ist hierbei stark von der Schubtragfähigkeit der PVB-Folie beeinflusst, da sie maßgeblich die Steifigkeit des Systemquerschnitts bestimmt (Abschnitt 2.4.2). Nach der Zerstörung des Glases sind die Materialeigenschaften der gebrochenen VSG-Scheibe maßgebend (Abschnitt 2.4.3 - 2.4.4).

Bezüglich der Steifigkeit des intakten Querschnitts bilden die VSG-Scheiben mit vollem Verbund und ohne Verbund ein Extrema. Hierbei ist der Biege widerstand der VSG-Scheibe mit vollem Verbund doppelt so groß wie der Biege widerstand ohne Verbund, wenn die Deckschichten die gleiche Dicke h besitzen. Bei Betrachtung der Steifigkeit des Systems handelt es sich bei vollem Verbund um das Vierfache der Steifigkeit der addierten Einzelscheiben. Bei einem nachgiebigen Verbund liegen die Werte des Biege widerstands und der Querschnittssteifigkeit zwischen vollem und keinem Verbund. An welchen der Extremwerte sich das System annähert, hängt von der Schubsteifigkeit der PVB-Folie ab. Nachfolgend sind die Spannungsverläufe der verschiedenen Verbundtragwirkungen über den Querschnitt dargestellt.

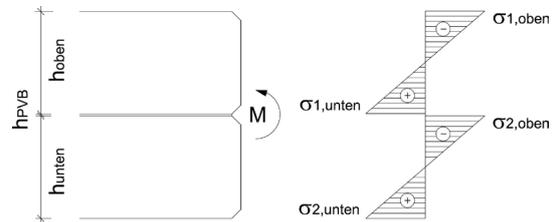
Biege widerstand und Steifigkeit

Spannungsverlauf

VSG-Scheibe ohne Verbund

$$W = 2 \cdot \frac{h^2 \cdot b}{6} = \frac{1}{3} (h^2 \cdot b)$$

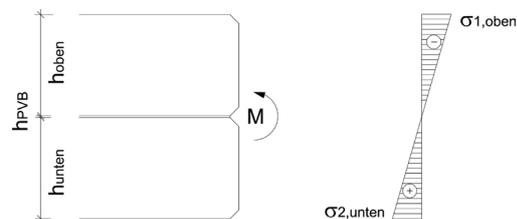
$$I = 2 \cdot \frac{h^3 \cdot b}{12} = \frac{1}{6} (h^3 \cdot b)$$



VSG-Scheibe mit vollem Verbund

$$W = \frac{(2h)^2 \cdot b}{6} = \frac{2}{3} (h^2 \cdot b)$$

$$I = \frac{(2h)^3 \cdot b}{12} = \frac{4}{6} (h^3 \cdot b)$$



VSG-Scheibe mit nachgiebigem Verbund

$$\frac{1}{3} (h^2 \cdot b) < W < \frac{2}{3} (h^2 \cdot b)$$

$W =$ s. Abschnitt 2.4.2

$I =$ s. Abschnitt 2.4.2

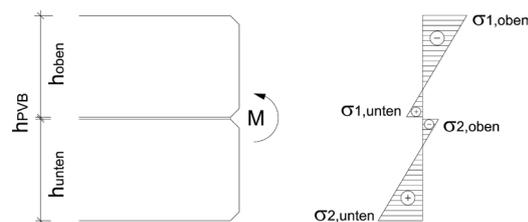


Abb. 2.13 (a-c) Spannungsverlauf in VSG

2.4.1 Ansatz der Verbundwirkung bei der Bemessung

Nach dem aktuell geltenden Baurecht darf in Deutschland ein Schubverbund lediglich für linienförmig gelagerte, absturzsichernde Verglasung [TRAV 2003] bei Stoßeinwirkung angesetzt werden. Für die Berechnung der Verglasung darf hierbei vereinfachend der volle, monolithische Glasquerschnitt in die Berechnung eingehen. Gemäß einer Empfehlung des Bau-Überwachungsvereins [BÜV 2001] sollte jedoch hierbei die Schichtdicke der PVB-Folie nicht mit in die Berechnung einfließen. Bezüglich der Berücksichtigung der Verbundwirkung zwischen den Einzelglasscheiben unterscheidet der BÜV 2001 nach [F24] je nach Lastfall zwischen vollem und keinem Verbund. Ein Ansatz mit nachgiebigem Verbund wird für keinen Lastfall vorgeschlagen. Abweichend von den Angaben der TRAV ist eine Berücksichtigung des Verbundes zwischen den Einzelscheiben von VSG nur durch Zulassungen im Einzelfall möglich.

Einen Anwendungsvorschlag zur Bemessung der Glasscheiben in Abhängigkeit des Schubmoduls der PVB-Folie wurde 2010 in [F12] für den Fachkreis für konstruktiven Glasbau (FKV) gemacht. Bezugnehmend auf Tabelle 2.5 wird für die Berechnung folgende Anmerkung gemacht:

„Die Verbundglasscheibe kann mittels geeigneter Rechenverfahren oder mit der FE- Methode (Sandwichelemente, Volumenelemente mit schubweicher Zwischenschicht etc.) berechnet werden. Für jeden Lastfall ist der zugeordnete Schubmodul aus Tabelle 1 anzusetzen. Die Überlagerung von Lastfällen erfolgt bei linearer Berechnung durch Superposition der für jeden Lastfall (mit zugehörigem G) ermittelten Spannung und Verformung. Bei nichtlinearer Berechnung sind die Lasten nacheinander entsprechend der realen Belastungsgeschichte aufzubringen.“

Da es sich bei der vorliegenden Arbeit nicht um die Bemessung einer VSG-Scheibe handelt, sondern um die Analyse des Lastabtrages eines Glasbogens, wird dem Vorschlag des Fachkreises für konstruktiven Glasbau Folge geleistet. Die Schnittgrößen werden getrennt nach Lastfällen unter der Berücksichtigung des nachgiebigen Verbundes mit dem zugehörigen Schubmodul der PVB-Folie ermittelt und anschließend superponiert. Das dazu erforderliche Flächenmoment 2. Grades wird aus dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Rechenverfahren für den nachgiebigen Verbund abgeleitet.

2.4.2 Biegesteifigkeit einer VSG-Scheibe mit nachgiebigem Verbund

In der Arbeit von Geralt Siebert [F22] werden für den Lastabtrag äußerer Lasten folgende Lösungsansätze zur Berücksichtigung des nachgiebigen Verbundes bei Verbundsicherheitsglas vorgestellt und anhand eines Beispiels miteinander verglichen:

- Lineare Sandwichtheorie [Stamm 1974]
- Theorie des nachgiebigen Verbundes [Wölfel 1987]
- Erweiterung der technischen Biege- und Verdrehtheorie [Güsgen 1999]
- Lösung der Differentialgleichung für den Sandwichbalken unter Berücksichtigung des Vierschneiden-Biegeversuchs an Verbundglasscheiben [Hooper 1973]
- Differentialgleichung des Sandwichelements mit biegesteifen Deckschichten und schubweicher Kernschicht [Stamm, Witte 1974]
- Berechnung über zwei ideale Teilträger [Kreuzinger, Scholz 1998]

Die Kontrolle der Verfahren führte für alle aufgelisteten Verfahren zu einer sehr guten Übereinstimmung der Ergebnisse. Für die Berechnung des Glasbogens mit Zugband wird das Verfahren nach Wölfel angewandt. Das ausschließlich mit Hand berechenbare Verfahren ergibt anschauliche und nachvollziehbare Spannungsverläufe für den VSG-Querschnitt. Hierbei wird das Moment aus äußerer Last in Abhängigkeit des Schubmoduls der Zwischenschicht und der Steifigkeit der einzelnen Deckschichten auf die Einzelschichten und den Gesamtquerschnitt aufgeteilt. Die Einzelquerschnitte haben hierbei dreieckförmig lineare Spannungsverläufe, wohingegen der Verbundquerschnitt als Zweipunktequerschnitt mit Spannungsblöcken angesehen wird. Aus dem Berechnungsverfahren nach Wölfel lässt sich nachfolgend die Steifigkeit des Verbundquerschnitts ableiten.

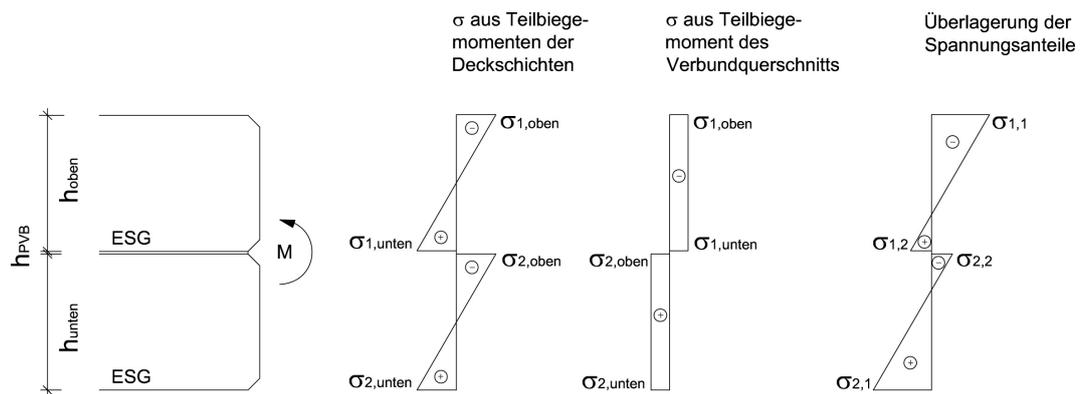


Abb. 2.14 Spannungsverlauf in VSG mit nachgiebigem Verbund

Vorgehensweise nach Wölfel:

$$B_s = \frac{E_1 A_1 \cdot E_2 A_2 \cdot e^2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

$$k = \frac{B_s}{S_Q \cdot l^2} \cdot \frac{\int_0^1 Q \bar{Q} dx}{\int_0^1 M \bar{M} dx}$$

$$S_Q = \frac{G \cdot e^2 \cdot b}{d_q}$$

$$M = M_D + M_S$$

$$M_1 = \frac{B_1}{B_D} \cdot \beta_0 \cdot M \quad , \quad M_2 = \frac{B_2}{B_D} \cdot \beta_0 \cdot M \tag{2.8}$$

$$\beta_0 = \frac{B_D}{B_D + \frac{B_s}{(1+k)}} \tag{2.9}$$

- E_i E-Modul der Deckschichten
- A Querschnittsfläche der Deckschichten
- I_i Flächenmoment 2. Grades der Deckschichten

G	Schubmodul der Zwischenschicht
A_q	Schubfläche der Zwischenschicht
B_s	Biegesteifigkeit des Querschnitts bei vollem Schubverbund
S_Q	Schubsteifigkeit des Verbundteils
K	Verhältnis der Querkraftverformung zur Gesamtverformung
$B_D = B_1 + B_2$	Biegesteifigkeit der Deckschichten, $B_1 = E_1 \cdot I_1$, $B_2 = E_2 \cdot I_2$
$M_D = M_1 + M_2$	Summe der Teilbiegemomente der Deckschichten
M_s	Teilbiegemoment der Verbundschicht
β_0	Verhältniszwert zur Aufteilung der Biegemomente

Die Aufteilung der Querkräfte auf die Deckschichten bzw. den Verbundquerschnitt erfolgt analog. Nachfolgend können die Spannungen in den Deckschichten und die Schubspannung τ_s in der Verbundschicht ermittelt werden.

$$\sigma_{11/12} = \pm \frac{M_1}{I_1} \frac{h_1}{2} - \frac{M_s}{e \cdot A_1} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{22/21} = \pm \frac{M_2}{I_2} \frac{h_2}{2} - \frac{M_s}{e \cdot A_2} \quad (2.11)$$

$$\tau_s = (1 - \beta) \frac{Q}{b \cdot e} \quad (2.12)$$

Aus dem Gewichtungsfaktor β_0 zur Aufteilung des Biegemomentes lässt sich die Steifigkeit des Verbundquerschnitts in Abhängigkeit des Schubmoduls der PVB-Folie ableiten.

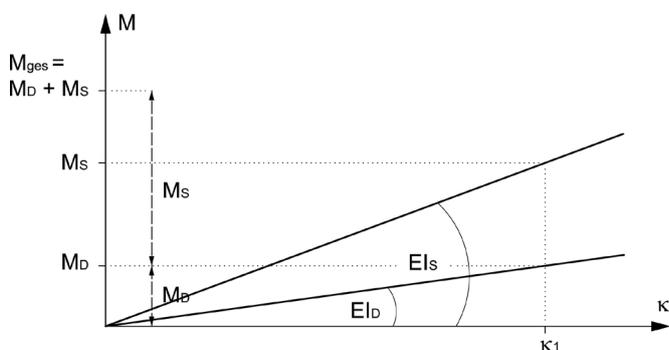


Abb. 2.15 Aufteilung des Biegemomentes in Abhängigkeit der Querschnittssteifigkeit

Bei Annahme gleicher Krümmungen an der betrachteten Stelle lässt sich gemäß Diagramm 2.15 folgende Beziehung ableiten.

$$M_D = \kappa_1 \cdot E I_D \quad (I_D = \text{Flächenmoment 2. Grades der beiden Deckschichten})$$

$$M_s = \kappa_1 \cdot E I_s \quad (I_s = \text{Flächenmoment 2. Grades des Verbundteils})$$

$$\beta_0 = \frac{M_D}{M_s} = \frac{\kappa_1 \cdot E I_D}{\kappa_1 \cdot E I_s} \quad \Rightarrow \quad I_s = \frac{I_D}{\beta_0}$$

$$I_{ges} = I_s + I_D \quad (\text{Flächenmoment 2. Grades des VSG-Querschnitts unter Berücksichtigung des nachgiebigen Verbunds})$$

2.4.3 Zugtragfähigkeit von gebrochenem VSG

In der Dissertation von Mark Fahlbusch [F2] wurde das Tragverhalten gebrochener VSG-Scheiben untersucht. Die Versuche ergaben, dass die Kornverzahnung des Glases bis zu einer Spannung von $0,7 \text{ N/mm}^2$ maßgeblich den Lastabtrag einer gebrochenen Scheibe bestimmt. Weiterhin steigert der Verbund der Glaskörner bis zu einer Spannung von $1,0 \text{ N/mm}^2$ die Steifigkeit der Scheibe.

Grundsätzlich kann davon ausgegangen werden, dass eine gebrochene VSG-Scheibe nicht nur tragfähiger, sondern auch wesentlich steifer ist als eine reine PVB-Folie. Das ist für die Bereiche, in denen sich die Glaskörner der beiden Scheiben gegenseitig überlappen (1.) aber auch in den Bereichen, in denen der Riss komplett durch den Querschnitt verläuft (2.) nachvollziehbar:

1. Der Riss verläuft gemäß der Abbildung 2.16a nicht durch beide Scheiben. Die Glaskörner beider Scheiben überlappen sich gegenseitig. Aufgrund der Schubsteifigkeit der Folie wird die Folie dort nicht allein belastet und gedehnt, sondern im Verbund mit dem Glas. Auch wenn der Verbund zwischen Folie und Glas nachgiebig ist, führt er dennoch zu einer deutlichen Versteifung des Querschnitts.

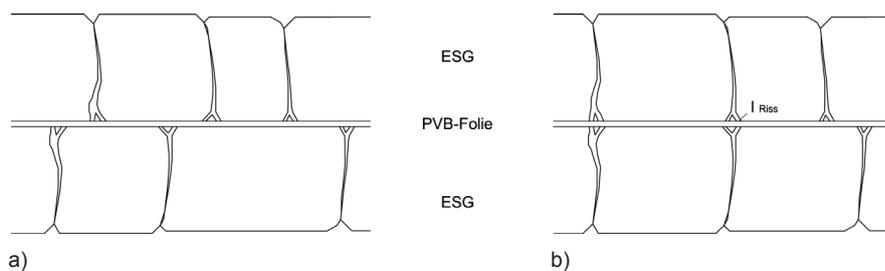


Abb. 2.16 (a) Überlappungsbereiche von Glaskörnern (b) durchgehende Risse

2. Bei durch beide Scheiben durchgängig verlaufenden Rissen wird in dem geöffneten Riss, im Gegensatz zu (1.), ausschließlich die Folie beansprucht. Da die Folie im Riss eine geringe Länge aufweist, ist dort die Längenänderung trotz einer großen Dehnung gering.

$$\Delta l = \varepsilon_{\text{Riss}} \cdot l_{\text{Riss}} = \frac{\sigma_{\text{Folie}}}{E_{\text{Folie}}} \cdot l_{\text{Riss}} \quad \text{Längenänderung der Folie im Riss}$$

Da die Dehnung und damit die Folienspannung im Riss des Glaskörpers groß ist, kommt es lokal auch zu Rissen in der Folie. In diesen Bereichen kann davon ausgegangen werden, dass sich die Kräfte in die umliegenden Bereiche umlagern.

Als Rahmenparameter für den gebrochenen, zugbelasteten Glaskörper wird in der vorliegenden Arbeit mit 51 N/mm^2 der in [F2] ermittelte und in Abbildung 2.17 dargestellte Anfangs- E-Modul einer gebrochenen VSG-Scheibe angesetzt. Basis der Dehnungen war eine Spannung von $2,0 \text{ N/mm}^2$ und $2,5 \text{ N/mm}^2$. Der E-Modul einer reinen PVB-Folie spielt bei der Betrachtung des zerstörten Glasbogens somit keine Rolle.

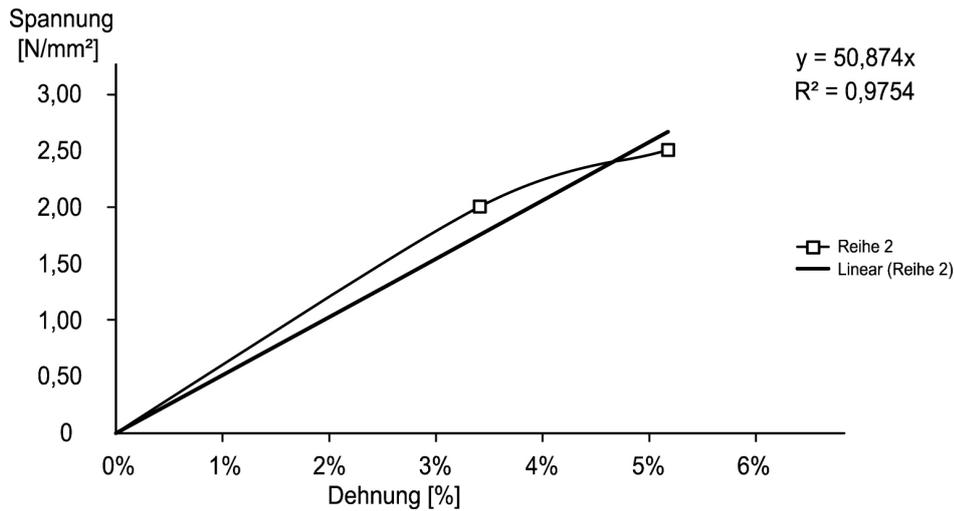


Abb. 2.17 Anfangs- E-Modul für Zug von gebrochenem VSG , aus [F2]

Die Lastweiterleitung der Druckkräfte innerhalb des zerstörten Glaskörpers erfolgt über Kontakt zwischen den Glaskörnern. Bei Druck kann in einer gebrochenen VSG-Scheibe somit der E-Modul des ungebrochenen Glases von 70.000 N/mm² angenommen werden.

2.4.4 Biegetragfähigkeit von gebrochenem VSG

Eine Rest- Biegesteifigkeit von gebrochenem VSG lässt sich über ein Kräftepaar aus Zugkraft in der PVB-Folie und einer Druckkraft durch die Glaskörner ermitteln.

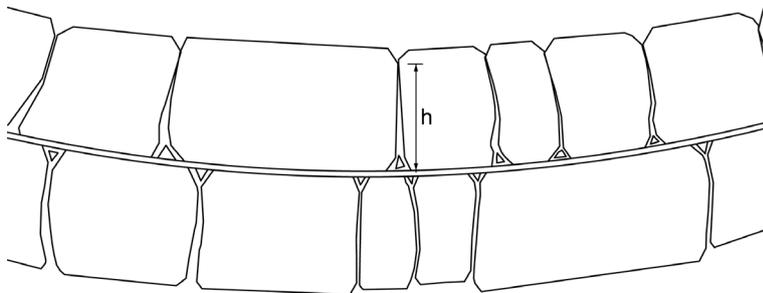


Abb.2.18 Glaskörner unter Biegebeanspruchung, in Anlehnung [F2]

In der Arbeit [F2] wird für einen gebrochenen VSG-Querschnitt von 12 mm ESG / 1,52 mm PVB / 12 mm ESG ein E-Modul von 4,2 N/mm² und ein Flächenmoment 2. Grades von $I_y = 27,6 \text{ cm}^4$ ermittelt. Diese Angaben werden für die Analyse des brechenden Glasbogens mit Zugband übernommen.

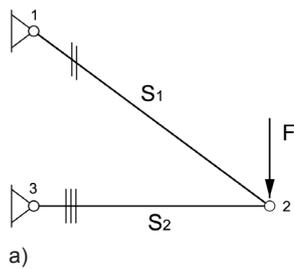
3 Mechanische und mathematische Grundlagen

3.1 Grundlagen der Statik

3.1.1 Stabwerkmodelle

Das systematische Konstruieren und Detaillieren flächiger und stabförmiger Bauteile mittels Stabwerkmodellen baut auf dem durch Moersch geprägten Begriff der «Fachwerksanalogie» auf [F3]. Hierbei werden Kräfte konsequent vom Lastangriffspunkt (= Quelle) bis zur Lagerung bzw. Lasteinleitung in den Untergrund (= Mündung) verfolgt und anhand von Vektoren in Kraftecken analysiert. Dies ermöglicht die anschauliche Analyse der Kraftgrößen sowohl in den Bauteilen selbst, als auch die Ermittlung des Kraftflusses und der Kraftgrößen innerhalb der Details. Während die Systemgeometrie und die Richtung der angreifenden Kräfte dem Lageplan entnommen werden, können die Kraftgrößen anhand der vektoriellen Darstellung im Krafteck analysiert werden. Ist ein Krafteck geschlossen, besteht Gleichgewicht am betrachteten Knoten. Das Übertragen der Pfeilrichtung aus dem Krafteck an die entsprechenden Knoten im Lageplan definiert, ob es sich um Zug (Pfeil zeigt vom Knoten weg) oder um Druck (Pfeil zeigt zum Knoten) handelt.

Lageplan



Krafteck: 1 cm = ... KN

Umfahrungssinn: 

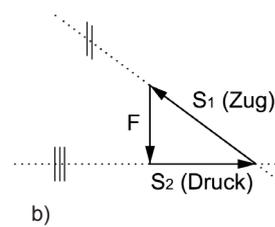


Abb. 3.1 Beispiel Stabwerkmodell (a) Lageplan (b) Krafteck an Knoten 2

Dem Ingenieur ist es dadurch möglich, kompliziertes aber wirklichkeitsnahes Materialverhalten wie Nichtlinearität, Inhomogenität und Plastizität in die Tragwerksentwicklung einzubeziehen und im Entwurfsprozess material- und systembedingte Kraftumlagerungen zu berücksichtigen.

3.1.2 Ergänzende Darstellungsregeln für Kraftecke

Um die Vorgehensweise zur Erstellung der Kraftecke im Rahmen dieser Arbeit besser nachvollziehen zu können, werden in diesem Abschnitt Darstellungsregeln festgelegt und Ergänzungen vorgeschlagen.

Bei der Erstellung der Kraftecke startet man in der Regel an Knoten, an denen maximal zwei unbekannte Kraftgrößen angreifen und analysiert von dort ausgehend sämtliche Knoten des Systems. Hierbei kann für jeden Knoten ein eigenes Krafteck gezeichnet oder alternativ alle Knoten in einem Krafteck analysiert werden. Da in dieser Arbeit sämtliche Knoten in einem Krafteck dargestellt werden, wird der Startpunkt im Krafteck durch einen Kreis kenntlich gemacht. Gemäß der gewählten Umfahrungsrichtung um den Knoten werden die Kraftgrößen im Krafteck eingetragen. Ist eine Kraftgröße bekannt, wird sie für den Nachbarknoten weiter verwendet. D.h. man ergänzt das angefangene Krafteck, indem die

bereits gezeichnete Kraftgröße für den neuen Nachbarknoten in der entgegengesetzten Richtung nochmals berücksichtigt wird. Zur Verdeutlichung welches die «Hin»- und welches die «Rückrichtung» ist, werden nachfolgend zwei verschiedene Pfeiltypen verwendet. Für den zuerst betrachteten Knoten ein geschlossener, gefüllter Pfeil. Die Nachbarknoten werden mit offenen, ungefüllten Pfeilen gezeichnet usw.. Für das Beispiel in Abbildung 3.2c bedeutet das: geschlossene Pfeile für die Umfahrung des Knoten 1 und offene Pfeile für die Umfahrung des Knoten 2.

Weiterhin werden die Kraftecke durch die qualitative Darstellung von Momenten ergänzt. In den überwiegenden Fällen werden Stabwerkmodelle dahingehend entwickelt, dass rein normalkraftbelastete Tragwerke entstehen. Der Entwurf eines Stabwerks in einer Stahlbetonscheibe ist beispielsweise dann optimal, wenn daraus ausschließlich Zug- und Druckkräfte resultieren. Die Druckkräfte werden durch den Beton übernommen, für die Zugkräfte wird Bewehrung angeordnet. Wenn, wie in dem Fall des zu analysierenden Bogens, zusätzlich noch Querkräfte vorhanden sind, sind daran zwangsläufig Momente gekoppelt, da gilt:

$$M_{(x)} = \int_{(x)}^x Q_{(x)} dx \quad (3.1)$$

Bei Kraftecken handelt es sich um eine vektorielle Darstellung der Kräfte. Deswegen ist die maßstäbliche Darstellung der Momente in einem Krafteck analog der Normal- und Querkräfte nicht vorgesehen. Es ist dennoch möglich, die Momente zumindest qualitativ im Krafteck zu berücksichtigen, damit die Darstellung für eventuell nachfolgende Berechnungsschritte (wie beispielsweise eine Spannungsberechnung) komplett ist und alle zu berücksichtigenden Kraftgrößen abbildet. Vorgeschlagen wird im Rahmen dieser Arbeit eine Momentenfläche, die analog der Formel 3.1 an den Querkraftvektor gekoppelt ist und sich über das Produkt aus Querkraft und Stablänge berechnet: $\Delta M_i = Q_i \cdot l_i$. Das ist möglich, weil die Querkraft aufgrund der polygonalen Geometrie eines Stabwerkmodells mit den zugehörigen Kräften in den Knickpunkten über die Stablänge immer und ausschließlich einen konstanten Verlauf hat (siehe auch Abschnitt 4.1.1: Geometrische Vereinfachung). Das Moment an einem bestimmten Knoten erhält man durch Addition der einzelnen Momentenabschnitte ΔM_i . Dabei ist die Querkraft vorzeichengerecht zu berücksichtigen. Die vorgeschlagenen Darstellungsregeln sind in Abbildung 3.2 an einem Kragarm mit einem Winkel zur Horizontalen veranschaulicht.

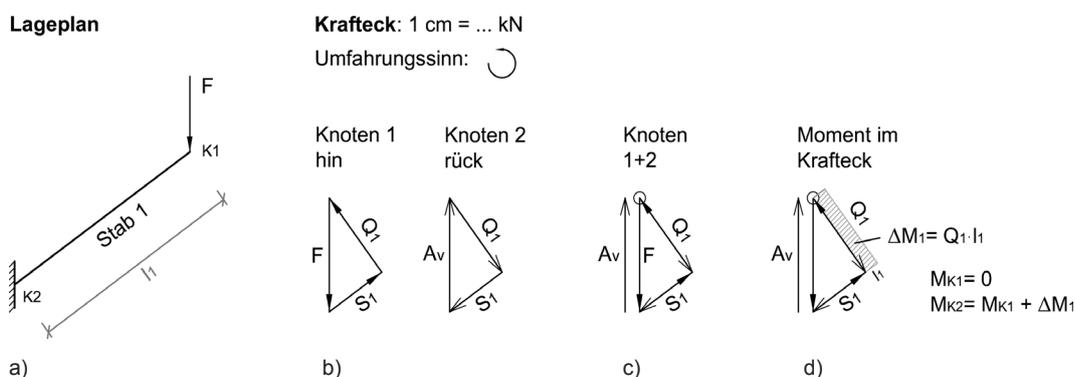
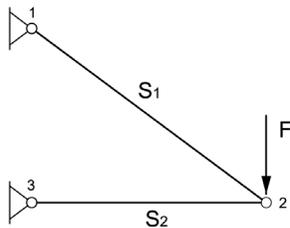


Abb. 3.2 Stabwerkmodell eines schrägen Kragarms (a) Lageplan (b) Kraftecke für beide Knoten getrennt (c) beide Knoten in einem Krafteck (d) qualitative Darstellung von Momenten im Krafteck

3.1.3 Prinzip der virtuellen Kräfte

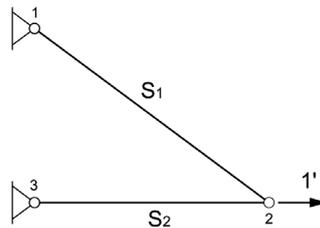
Basierend auf dem Arbeitssatz wird das Prinzip der virtuellen Kräfte angewandt, um in einem statisch bestimmten System Verformungen oder eine unbekannte Kraftgröße in einem statisch überbestimmten System zu berechnen. In einem ersten Schritt wird nachfolgend die Anwendung am Beispiel des Stabzweischlags der Abbildung 3.3, also bei einem statisch bestimmten System beschrieben. Gesucht ist die horizontale Verschiebung an Knoten 2. Hierfür wird eine virtuelle 1-Kraft in Richtung der gesuchten Verschiebung angetragen und nachfolgend die äußere Arbeit (W) beider Systeme mit der inneren Arbeit (= Formänderungsenergie Π) gleichgesetzt [F19].

0-System



a)

1-System



b)

Abb. 3.3 Lagepläne (a) 0-System (b) 1-System

Der Arbeitsbegriff in der Mechanik ist durch das Produkt aus Kraft und zurückgelegtem Weg definiert:

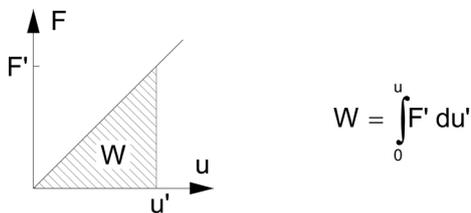


Abb. 3.4 Arbeit

Unter der Voraussetzung, dass F vom Anfangswert 0 bis zum Endwert F' gesteigert wird und sich die Last unter dieser Kraft F um den Weg u' vertikal verschiebt, ergibt sich für den ersten Anteil der äußeren Arbeit:

$$W_1 = 0,5 \cdot F \cdot u$$

Der zweite Arbeitsanteil entsteht durch die horizontale Verschiebung der virtuellen 1-Kraft durch die Kraft 1. Sie wird ebenfalls von 0 bis zum Endwert 1 gesteigert:

$$W_2 = 0,5 \cdot \bar{1} \cdot h$$

Durch die äußere Kraft F wird der Knoten 2 zusätzlich in horizontaler Richtung verschoben. Für die dort bereits in voller Größe wirkende 1-Kraft bedeutet das einen weiteren Arbeitsanteil von:

$$W_3 = \bar{1} \cdot h$$

Durch Addition der drei Terme erhält man die insgesamt geleistete Arbeit:

$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot u + \frac{1}{2} \cdot \bar{1} \cdot h + \bar{1} \cdot h \quad (3.2)$$

Zur Betrachtung der Formänderungsenergie wird das Superpositionsgesetz angewandt [F19], wonach sich die Summe der Stabkräfte durch die Addition der Stabkräfte aus F und 1 ergibt: $S = \bar{S}_i + S_i'$

Die gespeicherte Formänderungsenergie ist demzufolge:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum \frac{(\bar{S}_i + S_i')^2 \cdot l_i}{EA_i} = \frac{1}{2} \sum \frac{S_i'^2 \cdot l_i}{EA_i} + \frac{1}{2} \sum \frac{\bar{S}_i^2 \cdot l_i}{EA_i} + \sum \frac{S_i' \cdot \bar{S}_i \cdot l_i}{EA_i} \quad (3.3)$$

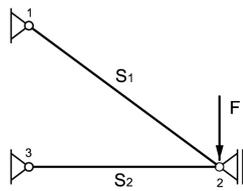
Setzt man nachfolgend die äußere Arbeit (3.2) mit der Formänderungsenergie (3.3) gleich, kürzen sich auf beiden Seiten Term 1 und Term 2 heraus (Herleitung siehe F19) und es bleibt lediglich Term drei bestehen, der die horizontale Verformung in Richtung der 1-Kraft durch Koppeln der Schnittgrößen beider Systeme beschreibt:

$$1 \cdot h = \sum \frac{S_i' \cdot \bar{S}_i \cdot l_i}{EA_i} \quad \text{horizontale Verschiebung des Knotens 2}$$

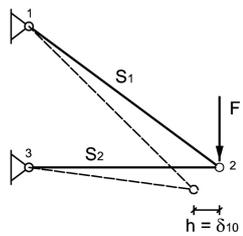
Auf der Basis dieses Prinzips lässt sich für statisch überbestimmte Systeme eine beliebige Kraftgröße ermitteln. Hierfür werden ebenfalls ein 0-System und ein 1-System gebildet. Grundlage beider Systeme ist das ursprüngliche System, bei dem das Bauteil der gesuchten Kraftgröße weggelassen und damit das überbestimmte zu einem statisch bestimmten System gemacht wird. Im 0-System wird als Belastung ausschließlich die äußere Kraft (Abb. 3.5b) und im 1-System ausschließlich eine virtuelle 1-Kraft berücksichtigt (Abb. 3.5d), die die Kraftgröße des weggelassenen Bauteils ersetzt. Zur anschaulichen Erklärung wird das Beispiel aus Abbildung 3.3 erweitert und durch ein einwertiges Lager an Knoten 2 ergänzt (Abb. 3.5a). Dadurch kann sich die horizontale Verformung des obigen Beispiels nicht einstellen und das Tragwerk wird aufgrund des neuen Lagers anders deformiert, als bei der ungezwängten Verformung. Durch die umgekehrte Betrachtung dieser Aussage wird das Vorgehen der Berechnungsweise sehr anschaulich:

Angenommen, das neu eingeführte horizontale Lager an Knoten 2 wäre nicht vorhanden. Das unter dieser Annahme statisch bestimmte System würde sich unter der äußeren Last F horizontal verschieben. Die Berechnung analog des Beispiels aus Abbildung 3.3 ergibt die Verschiebungsgröße δ_{10} (Abb. 3.5b). Nachfolgend wird die horizontale Kraft gesucht, die Knoten 2 wieder auf die ursprüngliche x-Koordinate zurückschiebt (Abb. 3.5c). Diese Kraftgröße hat zwangsläufig die gleiche Größe wie die in Realität vorhandene Lagerkraft, die diese Verformung verhindert. Um die zur Verschiebung (oder Verhinderung dieser Verschiebung) nötige Kraft zu berechnen, wird im ersten Schritt die Federkonstante des Systems in der besagten Richtung ermittelt. Die Ermittlung der Federkonstante kann mit einer beliebigen horizontalen Kraft an Knoten 2 erfolgen. Da die Konstante kraftunabhängig ist, kürzt sich die Kraft in der weiterführenden Berechnung heraus. Bei dem beschriebenen Prinzip wird in der Regel eine 1-Kraft verwendet (Abb. 3.5d).

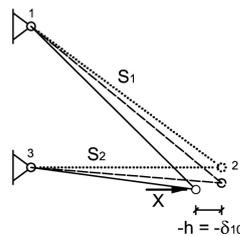
Statisch überbestimmtes System



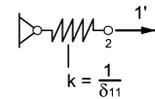
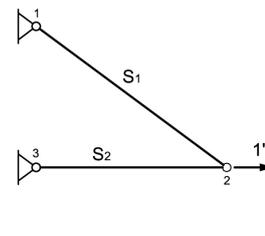
0-System



ges: X



1-System (Th. I. O.)



b) 0-System c) Haltekraft X des Lagers d) 1-System nach Th. I. Ordnung e) Federkonstante k des 1-Systems

Durch Koppeln der Schnittgrößen des 1-Systems mit sich selbst erhält man als Kehrwert die Federkonstante $(1/\delta_{11})$ des Systems, d.h. die Steifigkeit des Systems auf diese horizontale Kraft bezogen (Abb. 3.5e). Da das Prinzip auf der Theorie erster Ordnung basiert, werden alle Kraftgrößen auf Basis der Ursprungsgeometrie ermittelt. Das Produkt aus zurückgelegter Verschiebung und der Federkonstanten «k» des Systems ergibt die gesuchte Kraft «X».

$$\text{Kraft} = \text{Weg} \cdot \text{Federkonstante} \rightarrow X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Mit der statisch überzähligen Kraftgröße «X» lassen sich nachfolgend alle weiteren Schnittkräfte über die Gleichgewichtsbedingungen berechnen.

3.2 Grundlagen der Kinematik

In der Kinematik wird die Geometrie einer Bewegung beschrieben ohne auf die Kräfte als Ursache der Bewegung einzugehen.

Für die Beschreibung sind Koordinaten und Zeitangaben erforderlich, um die Lage des Körpers im Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt zu definieren. Die augenblickliche Lage eines Punktes P wird durch den Ortsvektor r in Bezug auf einen festen Bezugspunkt 0 festgelegt [F8]. Durch eine Lageänderung des Punktes P während der Zeit t beschreibt $r(t)$ die Bahn des Punktes P.

Zwei benachbarte Lagen des Punktes P und P' im Raum zu zwei Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ wird durch die Änderung des Ortsvektors $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ beschrieben (Abb. 3.6). Die Grenzwertbetrachtung dieser Änderung bezogen auf die Zeit ergibt die Geschwindigkeit (Grenzwert des Differenzenquotienten aus Weg und Zeit).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad \text{aus [F8]}$$

Demnach ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} ($\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$) die Ableitung des Ortsvektors über die Zeit. Da es sich bei der oben dargestellten Formel um eine Grenzwertbetrachtung handelt (d.h. die benachbarten Punkte rücken infinitesimal nahe zueinander), ist die Änderung des Ortsvektors die Bahntangente in Punkt P. Somit ist auch der Geschwindigkeitsvektor tangential zur Bahn gerichtet.

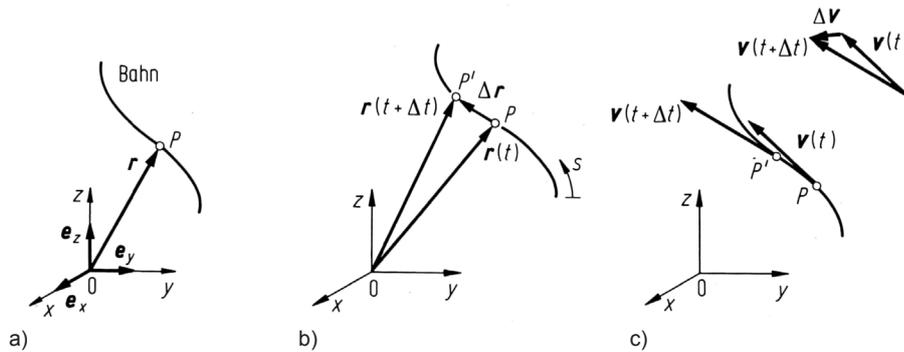


Abb. 3.6 Abhängigkeit von Lage, Orts- und Geschwindigkeitsvektor, aus [F8]

Ebenso wie der zurückgelegte Weg hängt auch die Geschwindigkeit von der Zeit ab. Analog des zurückgelegten Weges kann auch die Geschwindigkeit in den benachbarten Lagen P und P' durch $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ ausgedrückt werden. Die Änderung des Geschwindigkeitsvektors ist hier demzufolge: $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$.

Der Grenzwert der Geschwindigkeitsänderung ist definiert als **Beschleunigung** (Grenzwert des Differenzenquotienten aus Geschwindigkeit und Zeit).

Die Beschleunigung ist somit die erste Ableitung von \mathbf{v} bzw. die zweite Ableitung von \mathbf{r} . Sie ist ebenfalls ein Vektor, hat in ihrer Ausrichtung jedoch keinen Zusammenhang mit der Bahngeometrie.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad \text{aus [F8]}$$

Im Umkehrschluss kann die Geschwindigkeit auch durch Integration der Beschleunigung und der zurückgelegte Weg über Integration der Geschwindigkeit berechnet werden.

Beschleunigung: $\mathbf{a}(t)$

Geschwindigkeit: $\mathbf{v}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{a}(t) dt$

Zurückgelegter Weg: $\mathbf{r}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}(t) dt$

Dieses Vorgehen (Integration der Beschleunigung und Geschwindigkeit) wird bei der Analyse mit dynamischen Stabwerkmodellen besprochen. Der so berechnete zurückgelegte Weg wird analog des Ortsvektors $\Delta \mathbf{r}$ der Abb. 3.6 im Lageplan dargestellt (s. Kapitel 5).

3.3 Grundlagen der Kinetik

In der Kinetik wird das Zusammenspiel zwischen Kraft und Bewegung, also eine Verknüpfung der Kraft mit der Kinematik, beschrieben. Die kinetischen Grundgesetze basieren in erster Linie auf der Zusammenfassung aller experimentellen Erfahrungen Newtons und gipfelten bereits 1687 in den drei Newton'schen Grundgesetzen. Diese Grundgesetze werden allgemein als richtig angesehen, da sie mit den Erfahrungen und den Schlussfolgerungen aller Experimente übereinstimmen. Da sie jedoch nicht wirklich bewiesen werden können, haben sie Axiomen Charakter.

1. Newton'sches Gesetz:

Wenn auf einen Massepunkt keine Kraft wirkt, ist der Impuls konstant [F8].

$$p = m \cdot v = \text{konstant} \quad (m = \text{Masse}, p = \text{Impuls}, v = \text{Geschwindigkeit})$$

Mit anderen Worten bedeutet das, dass ein Massepunkt eine geradlinige, gleichförmige ($v = \text{konstant}$) Bewegung ausführt, solange keine Kraft auf den Körper einwirkt!

2. Newton'sches Gesetz:

Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der auf den Massepunkt wirkenden Kraft.

$$\text{Allgemein:} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = F$$

$$\text{bei konstanter Masse:} \quad m \frac{dv}{dt} = m \cdot a = F$$

Wenn sich während eines bewegten Vorgangs die Masse eines Körpers nicht verändert, ist die Kraft eine vektorielle Größe, die im Raum dieselbe Richtung aufweist wie die Beschleunigung.

3. Newton'sches Gesetz:

Zu jeder Kraft gibt es eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Gegenkraft [F8]:

$$\text{actio} = \text{reactio}$$

In Worten ausgedrückt wird eine Kraft, die von einem Körper auf einen anderen wirkt, in selber Größe, jedoch in entgegengesetzter Richtung erwidert.

3.3.1 Translation und Rotation

Ein geradlinig im Raum fortbewegter Körper erfährt gemäß des 2. Newton'schen Gesetzes lediglich eine Bewegungsänderung, wenn eine Kraft auf ihn einwirkt. Ob die Änderung der Bewegung eine Geschwindigkeitsänderung ist oder ausschließlich eine Änderung der Bewegungsgeometrie hängt von der Wirkungsrichtung der angreifenden Kraft ab:

- a) Haben der Kraftvektor und der Geschwindigkeitsvektor dieselben Wirkungslinien wird der Körper beschleunigt bzw. abgebremst ($\Delta r \neq 0$), ohne dass der Körper sei-

ne Richtung ändert. Es liegt eine reine Translation vor, bei der die Geschwindigkeit zu- oder abnimmt.

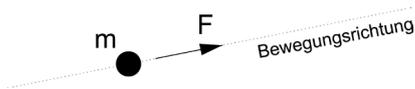


Abb. 3.7 Translation

- b) Gibt es einen spitzen oder stumpfen Winkel zwischen der angreifenden Kraft und dem bewegten Massepunkt, wird der Körper sowohl beschleunigt (bzw. abgebremst), als auch zusätzlich in seiner Richtung umgelenkt.

Der vektorielle Anteil der Kraft, der parallel zum Geschwindigkeitsvektor verläuft, treibt den Körper an (Abb. 3.8), so dass sich Geschwindigkeit und somit auch der zurückgelegte Weg erhöht. Der orthogonale Kraftanteil bewirkt eine Richtungsänderung des Körpers, ohne die Geschwindigkeit oder die Entfernung des zurückgelegten Weges zu beeinflussen (analog Fall c).

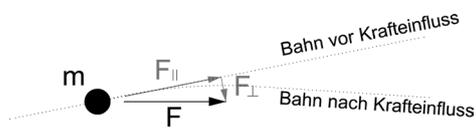


Abb. 3.8 Einfluss der Kraft auf die Bahnkurve

- c) Wirkt die Kraft kontinuierlich und ausschließlich orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor in Richtung eines Zentrums, unterliegt der Körper einer Kreisbewegung. Der Körper ändert seine Geschwindigkeit nicht und legt daher keinen zusätzlichen Weg zurück ($\Delta r = 0$). Die Kraft ändert ausschließlich die Bewegungsrichtung des Körpers und bringt die Masse auf eine Kreisbahn. Die zum Zentrum zeigende Kraft ist die Zentripetalkraft und hat die Größe:

$$F_{zp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

In Abbildung 3.9 ist eine Rotationsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit in Translation und Bewegung zum Zentrum aufgeteilt. Die in Realität kontinuierliche wirkenden Zentripetalkräfte werden hier vereinfacht in einzelnen Schritten dargestellt.

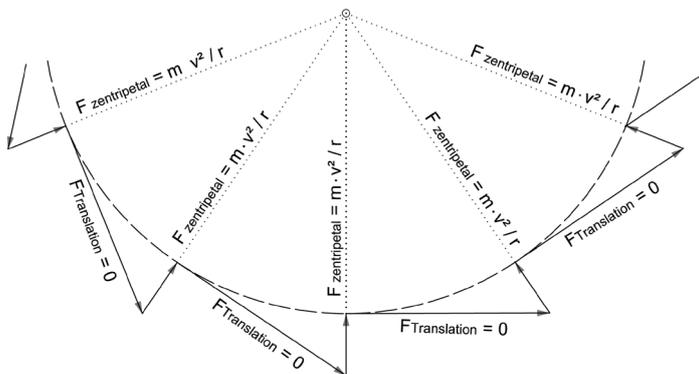


Abb. 3.9 Rotation mit konstanter Geschwindigkeit

3.4 Grundlagen der Mathematik: Numerische Integration

Die numerische Integration wird in der Mathematik als näherungsweise Berechnung von Integralen bezeichnet. Dazu wird die zu berechnende Fläche unterhalb der Funktion in einfachere Teilfiguren wie Rechtecke, Trapeze, Parabeln oder auch Funktionen höheren Grades unterteilt und diese Teilflächen nachfolgend aufsummiert.

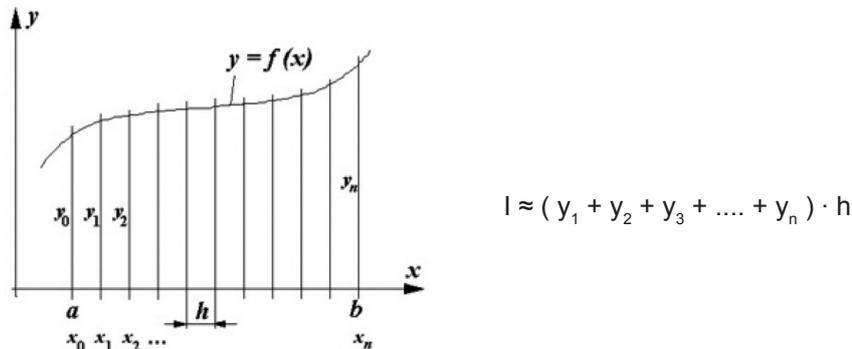


Abb. 3.10 Numerische Integration, aus [F32]

Abbildung 3.10 stellt eine der einfachsten Varianten der Gaußschen Integrationsformeln dar. Sie nähert jeden Abschnitt der Fläche unter der Kurve durch ein Rechteck an, dessen Höhe dem Funktionswert in der Mitte des Abschnitts entspricht. Für alle Formeln zur numerischen Integration gilt: Je größer die Anzahl der Abschnitte n , in die das Intervall unterteilt wird, desto besser ist die Näherung.

Die numerische Integration wird häufig von Computerprogrammen verwendet, da durch sie auch Funktionen näherungsweise integriert werden können, für die es keine Stammfunktion gibt.

3.5 Relativbewegungen und Trägheitskräfte

Durch das Prinzip von d'Alembert lässt sich ein durch Kräfte angeregter Bewegungsvorgang (Kinetik) auf die Statik zurückführen. Die Bewegung eines Massepunktes kann durch das 2. Newton'sche Gesetz ($F = m \cdot a$) beschrieben werden. Durch Umformen dieses Terms wird ein statisches Gleichgewicht ablesbar:

$$F - m \cdot a = 0$$

Die das statische Gleichgewicht herstellende Kraft wird nach d'Alembert (1717 – 1783) D'Alembertsche Trägheitskraft genannt. Da zu ihr jedoch keine Gegenkraft existiert, verletzt sie das 3. Newton'sche Gesetz (actio = reactio) und wird daher als Scheinkraft bezeichnet. Zur anschaulichen Betrachtung dieser Trägheitskräfte und deren Darstellung mittels Vektoren ist das Verständnis ihrer Wirkungsrichtung elementar. Diese Aussage scheint banal, wird jedoch bei der Berücksichtigung von Trägheitskräften in Mehrmassensystemen ein wichtiger Parameter der Analyse durch dynamische Stabwerkmodelle. Zur Veranschaulichung der auftretenden Trägheitskräfte dienen nachfolgende Beispiele:

Beispiel 1: Beschleunigendes Motorrad

Ein Motorradfahrer beschleunigt sein Motorrad durch Betätigen des Gashebels. Das Beschleunigen ist gleichbedeutend mit der Aussage «Das Motorrad wird durch eine Kraft nach vorne angetrieben»: $F = m_{\text{Motorrad}} \cdot a_{\text{Motorrad}}$

Die Person auf dem Motorrad spürt, wie es sie bei der Beschleunigung gegen die Sitzlehne drückt, d.h. sie spürt eine Kraft nach hinten. Diese Kraft nach hinten ist jedoch keine reale Kraft, sondern die Trägheit des Motorradfahrers:

$$F_{\text{Trägheit}} = m_{\text{Fahrer}} \cdot a_{\text{Motorrad}}$$

Die Masse des Motorradfahrers möchte eigentlich träge an dem ursprünglichen Ort verharren, wird aber von der Sitzlehne des Motorrads nach vorne gedrückt. Wenn der Motorradfahrer keine Lehne hätte und sich nicht festhalten würde, führe das Motorrad einfach unter ihm weg und er bliebe auf der Straße stehen.

Beispiel 2: Karussell mit konstanter Geschwindigkeit

Um einen mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Massepunkt auf einer Kreisbahn zu halten, ist ausschließlich die Zentripetalkraft erforderlich (Abb. 3.9). Sie lenkt den mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus fliegenden Körper immer zum Zentrum gerichtet um. Bei einem Karussellfahrer macht sich die Zentripetalkraft dahingehend bemerkbar, dass die Lehne des Karussellsitzes in die Seite des Karussellfahrers drückt. Für ihn fühlt es sich an, als würde er nach außen gedrückt werden. Diese gefühlte Scheinkraft ist allgemein als Zentrifugalkraft bekannt. In der Realität wird jedoch die träge Masse des Karussellfahrers von der Sitzlehne nach innen gedrückt. Es handelt sich für einen in dem System befindlichen Massepunkt somit um eine Relativbewegung. Wäre die Zentripetalkraft nicht vorhanden, flöge der Karussellfahrer mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus weiter, d.h. tangential zur Kreisbahn.

Beispiel 3: Freier Fall

In der Betrachtung des freien Falls wird die Wirkung der trägen Masse nochmals verdeutlicht. Ein fallender Körper ist der Gravitation «g» der Erde ausgesetzt und wird mit der Kraft G zu Boden gezogen:

$$G = m_{\text{schwer}} \cdot g$$

Wäre keine Gravitation vorhanden, würde der Körper in seiner Lage verharren wollen.

D.h. auch auf der Erde weist er eine träge Masse auf, die überwunden werden muss:

$$F = m_{\text{träge}} \cdot a$$

Hierbei hat die schwere Masse die gleiche Größe wie die träge Masse. Möchte man die Beschleunigung berechnen, mit der ein Körper zu Boden fällt, kann die Gewichtskraft mit der Trägheitskraft gleichgesetzt und die Masse herausgekürzt werden:

$$m \cdot g = m \cdot a \quad \rightarrow \quad g = a$$

Das Ergebnis zeigt, dass ein Körper im freien Fall ausschließlich mit der Beschleunigung g ($= 9,81 \text{ m/s}^2$) Richtung Erde fällt und dabei vollständig unabhängig von der Masse ist.

4 Analyse eines Glasbogens mit Zugband durch Stabwerkmodelle Herstellung und statisches System

Als Vorstufe zur Analyse eines versagenden Glasbogens mit Zugband mittels dynamischen Stabwerkmodellen wird in diesem Kapitel die Herstellung des Bogens und das statische System mit Stabwerkmodellen berechnet. Ziel ist, den gesamten «Lebenszyklus» des Glasbogens mit einem Verfahren zu beschreiben. Der damit einhergehende Erkenntnisgewinn ermöglicht dem Ingenieur eine Beeinflussung des Lastabtrags und der Resttragfähigkeit durch Variation der Bogengeometrie und Berücksichtigung der spezifischen Materialeigenschaften.

Um einen Bogen mit Stabwerkmodellen berechnen zu können, muss das System vorab geometrisch vereinfacht werden. Die kontinuierliche Bogengeometrie wird durch gerade Stäbe und damit als Polygonzug abgebildet, in dessen Knickpunkten die Lasten zu Resultierenden zusammengezogen werden (Abschnitt 4.1.2). Da es sich um ein statisch einfach überbestimmtes System handelt, müssen weiterhin die Biege- und Dehnsteifigkeiten der einzelnen Tragwerksteile berücksichtigt werden, um eine realitätsnahe Kraftflussanalyse zu erhalten (Abschnitt 4.3). Für die Ermittlung der statisch überzähligen Schnittkraft wird in den folgenden Abschnitten eine Kombination aus Stabwerkmodell und dem Prinzip der virtuellen Kräfte vorgeschlagen. Nachfolgend wird die Vorgehensweise allgemein dargestellt und in Kapitel 7 auf den Glasbogen mit Zugband angewendet.

4.1 Statisches System: Bogen mit Zugband

Bei dem zu untersuchenden Bogen mit Zugband handelt es sich um ein innerlich einfach statisch überbestimmtes System.

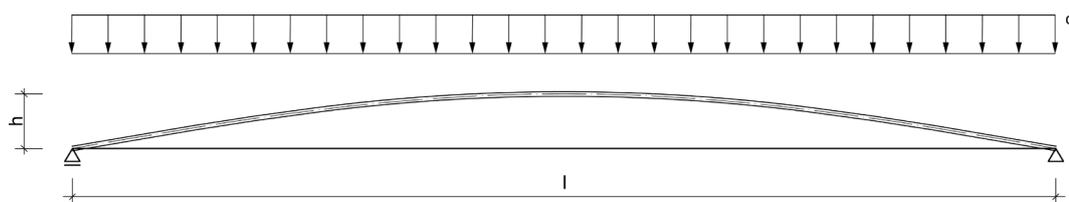


Abb. 4.1 Statisches System: Glasbogen mit Zugband, beliebige Geometrie, hier Sinusbogen

Der Lastabtrag erfolgt durch Normalkräfte, Querkräfte und Momente. Wie groß hierbei der Anteil von Normalkraft und Querkraft bzw. Moment ist, hängt von folgenden Rahmenbedingungen ab:

- dem Zusammenspiel zwischen Bogengeometrie und Belastung
- den Steifigkeiten von Bogen und Zugband

Der optimale Lastabtrag eines Bogens kann über die Geometrie einer Stützlinie entwickelt werden. Diese Stützlinie kann jedoch ausschließlich im Zusammenhang mit der zugehörigen Belastung optimal sein. Die Entwicklung einer Stützlinie aus einer beliebigen

Belastung über ein Kraffleck und Lageplan ist exemplarisch in Abbildung 4.2 dargestellt.

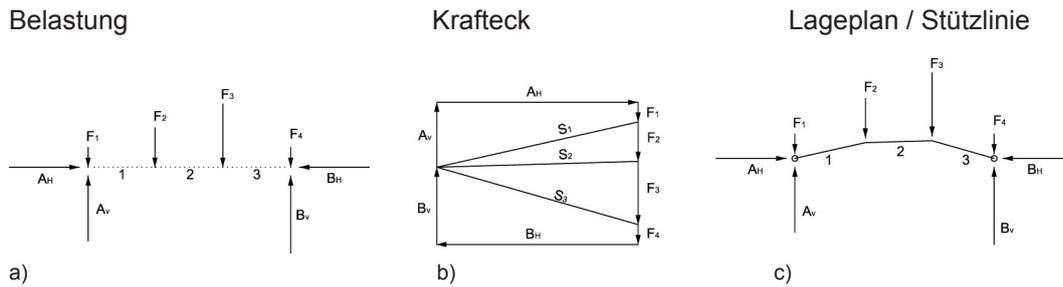


Abb. 4.2 Entwicklung der Stützlinie zu einer beliebigen Belastung (a) Belastung (b) Kraffleck (c) Geometrie der Stützlinie

Die Lagerreaktionen A_V und B_V werden durch die Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = 0$ und $\Sigma V = 0$, analog der Berechnung eines Balkens ermittelt. Die Größe der horizontalen Lagerreaktionen A_H und B_H ist frei wählbar. Je größer die Horizontalkräfte gewählt werden, desto flacher wird der Bogen. Aus einem kleinen Stich resultieren natürlich größere Stabkräfte als bei einem großen Stich.

Weichen Belastung und die zugehörige, optimale Geometrie voneinander ab, entstehen Querkraft und Biegung im System. Wie groß der Anteil an Biegung und Normalkraft ist, hängt von der Steifigkeit der Einzelkomponenten ab. Je steifer ein Bauteil ist, desto mehr Lasten zieht es an. Dieses Phänomen kann durch Stabwerkmodelle sehr anschaulich dargestellt und analysiert werden. Ein Berechnungsvorschlag hierzu wird in Abschnitt 4.3 vorgestellt.

4.1.1 Geometrische Vereinfachung

Um das System mit Stabwerkmodellen zu analysieren, muss der kontinuierlich gekrümmte Bogen in einen Polygonzug vereinfacht werden. Für die nachfolgenden Untersuchungen werden vier Abschnitte (fünf Knoten) gewählt, was eine größtmögliche Vereinfachung darstellt. Sie liefert einerseits ausreichend genaue Ergebnisse und lässt andererseits alle Versagens- und Bewegungsmöglichkeiten zu, die das System beeinflussen können. Eine geringere Anzahl von Knoten würde entweder keine Bewegungsfreiheit (Abb. 4.3a) oder nur eine antimetrische Verformung (Abb. 4.3b) ermöglichen.

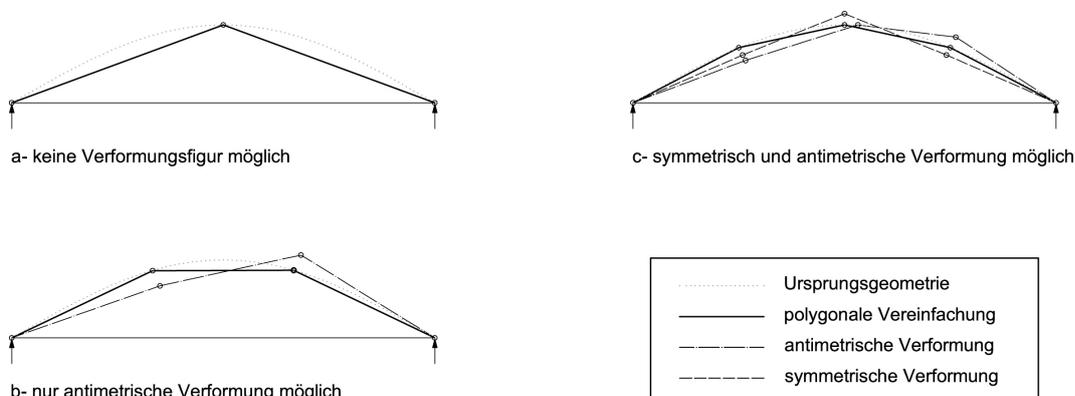


Abb. 4.3 Polygonale Vereinfachung der Geometrie

4.1.2 Lage der Knickpunkte, Knoten und Einzellasten

Zur Analyse der Schnittgrößen mittels Stabwerkmodellen kann die Lage der Knickpunkte auf dem Bogen beliebig gewählt werden, da sich aus der gewählten Lage die zugehörig passenden Lasten über Lasteinzugsbreiten ergeben. Grundsätzlich kann jedoch davon ausgegangen werden, dass eine gleichmäßige und symmetrische Einteilung genauere Ergebnisse liefert als eine asymmetrische.

Für das folgende Beispiel werden die Knickpunkte so gewählt, dass sich im projizierten Grundriss gleiche Lasteinzugsbreiten ergeben. Für die Lastkonzentration in den Knickpunkten bedeutet das gleiche Einzellasten (halbe Größe am Lager) bei Gleichstreckenlasten (z.B. Schneelasten) und unterschiedliche Lastgrößen aller anderen Lastfälle (z.B. Eigengewicht).

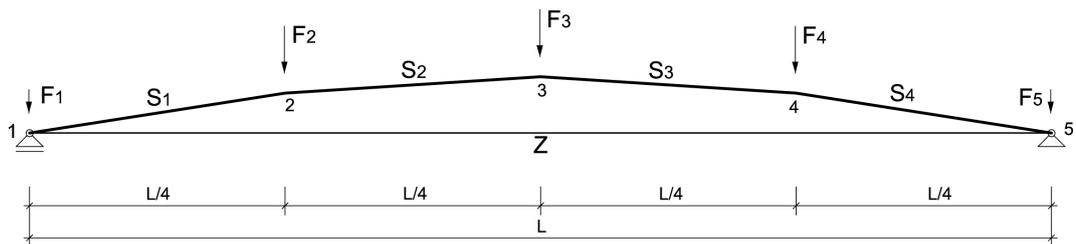


Abb. 4.4 Statisches System der gewählten Vereinfachung des Bogens mit Zugband

Im Anhang zu diesem Abschnitt wird eine Vergleichsrechnung zwischen der polygonalen Vereinfachung und einem kontinuierlichen System auf Basis einer sinusförmigen Geometrie durchgeführt. Für das gerechnete Beispiel ergibt sich bei der Normalkraft eine maximale Abweichung von 0,85 %. Sie liegt im Zugband des Bogens vor.

Die Abweichung des maximalen Momentes beträgt 0,38 %, wobei die Lage des Maximalmomentes im Bogen mit der kontinuierlichen Geometrie um $x = 40$ cm von der Lage des Maximalmomentes der polygonalen Geometrie abweicht. Dass die Lage abweicht, die Momente jedoch annähernd die gleiche Größe aufweisen, ist durch zwei gegenläufige Effekte zu erklären. Aufgrund der Berechnung mit resultierenden Einzellasten wird ein Feldmoment im Vergleich zur Berechnung mit Streckenlasten größer. Aufgrund der Geometrie und Einzellasten des polygonalen Systems verläuft das Moment zwischen den Knoten jedoch zwangsläufig linear, wodurch das maximale Moment nur an Knoten 2 vorliegen kann. Die eigentliche Lage des maximalen Momentes wird durch die polygonale Aufteilung somit «übergangen».

Die Abweichungen der minimalen Momente und der Querkräfte fallen größer aus. Sie spielen jedoch aufgrund des sehr geringen Einflusses bei der Bemessung eine untergeordnete Rolle.

4.2 Herstellung des Glasbogens

4.2.1 Thermische Vorspannung

Bezüglich der Spannungsverteilung des thermischen Vorspannprozesses wird eine Druckspannung an der Scheibenoberfläche von 110 N/mm^2 angesetzt. Diese Oberflächenspannungen wurden durchschnittlich an den geprüften Referenzscheiben des Projekts «Loggia Wasseralfingen» (siehe Kapitel 7) ermittelt.

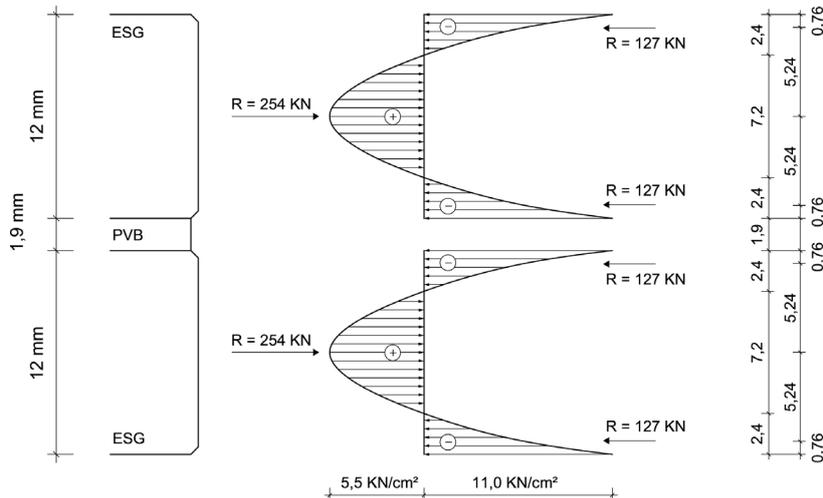


Abb. 4.5 Eigenspannungen aus thermischer Vorspannung der Glasscheiben

Aufgrund des Gleichgewichts der Spannungen über den Querschnitt werden im statischen Zustand keine resultierenden Kräfte aus der thermischen Vorspannung in das System eingebracht. Für die Analyse des Glasbogens während der Standzeit müssen somit lediglich die Spannungen an den Scheibenoberseiten (110 N/mm^2) in die Berechnung einfließen. Sie werden mit den Spannungen aus der Herstellung des Bogenstichs und den Spannungen aus der äußeren Belastung superponiert.

Für den Bruchzustand fließen die in Kapitel 2.2 ermittelten Werte für die Expansionskraft des Glases durch die Zerstörung in die Analyse mit dynamischen Stabwerkmodelle ein.

4.2.2 Aufbringen des gewünschten Stichs

Während die geometrische Vereinfachung und die statische Analyse eines Bogens mit Zugband in diesem Kapitel allgemein gültig beschrieben wird, hängt die Analyse der Herstellung stark von der Art und Weise ab, wie der Bogenstich in die Glasscheibe eingebracht wird. Aus diesem Grund wird die Herstellung in diesem Abschnitt nicht allgemein beschrieben. Als Grundlage der Berechnungen dient die Herstellung des Glasbogens in Wasseralfingen (Untersuchung aus Kapitel 7). Bei dem betrachteten Projekt wird der Stich in die Glasscheibe eingebracht, indem die ebene Scheibe wie ein zweiseitig gelagerter Balken belastet und die gewünschte Verformung über Biegung der Glasplatte hergestellt wird. Für diesen Vorgang wird die Raumtemperatur auf 60°C erhöht. Aufgrund der viskosen Materialeigenschaften der PVB-Folie bei dieser Temperatur ist die Schubtragfähigkeit der Folie vernachlässigbar gering und die Verbundwirkung zwischen den

Glasscheiben somit kaum mehr vorhanden (siehe Kapitel 2.3). Die Glasscheiben können wie zwei getrennte Einzelscheiben berechnet werden. Nachdem sich der Stich einstellt, werden die vorgewärmten Zugbänder zwängungsfrei eingebaut. Nachfolgend wird die Klimakammer auf eine Raumtemperatur von ca. 20° C abgekühlt (Abb. 4.6).

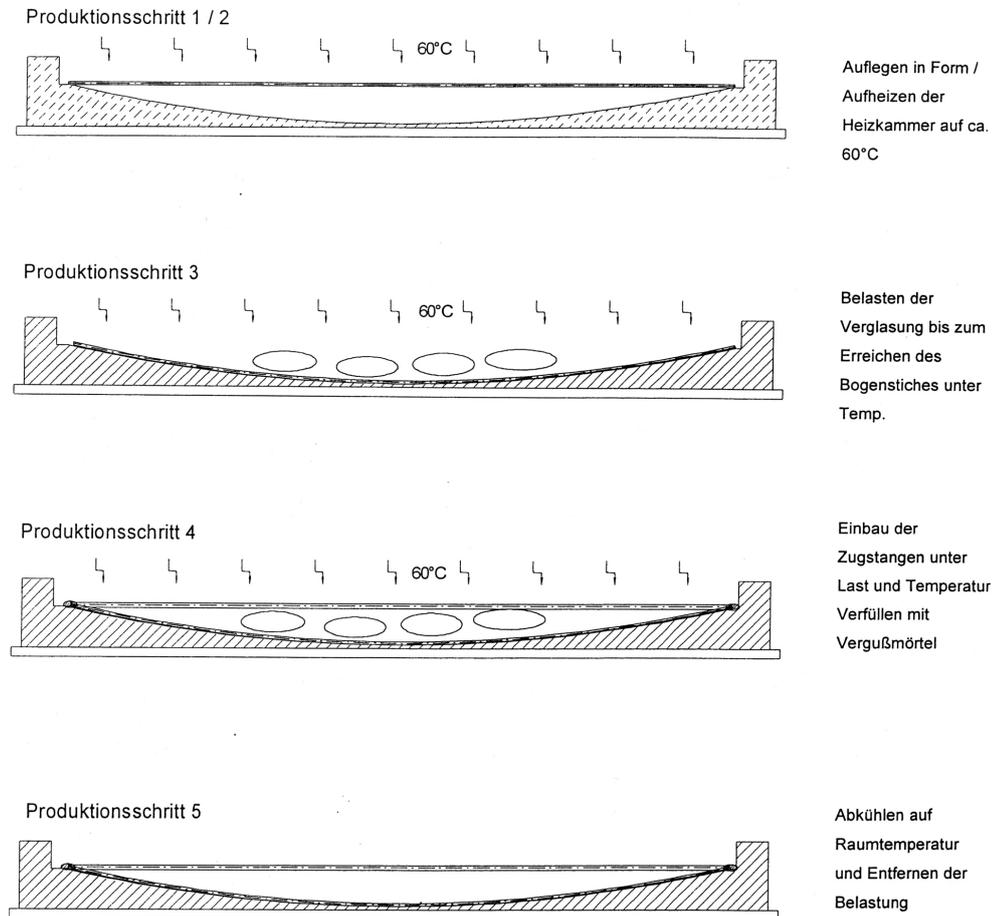


Abb. 4.6 Einbringen des Bogenstichs in der Klimakammer, aus [F31]

Durch das Einbauen der Zugbänder und das Umdrehen des Systems ändert sich der Lastabtrag. Aus der biegebelasteten Glasplatte wird ein Bogentragwerk, das durch die Fixierung der Scheibenränder in der gekrümmten Geometrie gehalten wird. Aufgrund dieser elastischen Zwängung befinden sich, anders als bei einer gekrümmt hergestellten Scheibe, Spannungen im Glas. Während die Geometrie des rein biegebelasteten Balkens durch eine Parabel beschrieben werden kann, entspricht die Geometrie des in die Form gezwängten Bogens einer Sinusfunktion. Es handelt sich hierbei um einen Druckstab mit großen Verschiebungen (Elastica), der geometrisch affin zur Knickbiegeline des Eulerfalls 2 ist.

$$w_{(x)} = w_{\max} \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$$

Funktion der Knickbiegeline des Eulerfalls 2

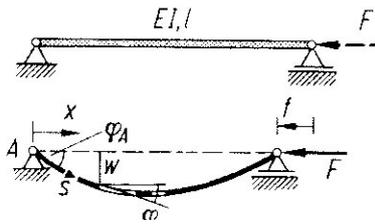


Abb. 4.7 Knickverformung eines Balkens als Druckstab, aus [F29]

Die Verzweigungslast des zweiten Eulerfalls für den schubstarrten Biegebalken folgt aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung für das in Abbildung 4.7 dargestellte Knickproblem $EI \cdot w'' + F \cdot w = 0$ aus [F13].

Mit der Lösung: $F_{\text{krit.}} = EI \cdot \frac{\pi^2}{l^2}$ (4.1)

Diese Differentialgleichung ermöglicht es jedoch lediglich, Durchbiegungen kleiner der kritischen Knicklast F_{krit} zu ermitteln.

4.2.3 Modellierung der Elastica mit Stabwerkmodellen

Sollen Stabverformungen aus einer Druckkraft größer als F_{krit} ermittelt werden, kann die überkritische Knickbiegeline mit Stabwerkmodellen simuliert werden. Hierfür wird auf das System eine Last am Scheibenrand aufgebracht, die die Scheibe wie einen Druckstab belastet. Der Druckstab weicht aufgrund seiner Imperfektion nach oben aus und krümmt sich gemäß der Knickbiegeline. Anders als die Betrachtung eines perfekten Stabes und dem damit einhergehenden Knickproblem kann die Analyse eines imperfekten Stabes eher einem Spannungsproblem zugeordnet werden. Während ein perfekter Stab bis zum Erreichen der kritischen Knicklast keine Verformungen aufweist und sich erst im überkritischen Bereich stark verformt, weist der imperfekte Stab schon bei geringen Belastungen Verformungen auf. Eine Annäherung der Last-Verformungskurven ist erst im überkritischen Bereich vorhanden.

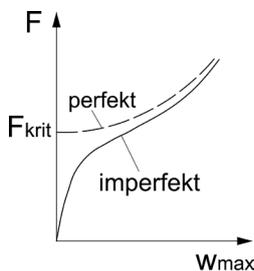


Abb. 4.8 Annäherung der Knickverformung eines perfekten und imperfekten Stabes, aus [F29]

Bei der Simulation mit Stabwerkmodellen wird die Last schrittweise auf das System aufgebracht. So kann die zunehmende Verformung des Systems in die Berechnung einfließen (Berechnung nach Theorie II. Ordnung). Weiterhin ist die Genauigkeit durch eine Reduktion des Kraftzuwachses bei der Annäherung an die kritische Knicklast steuerbar.

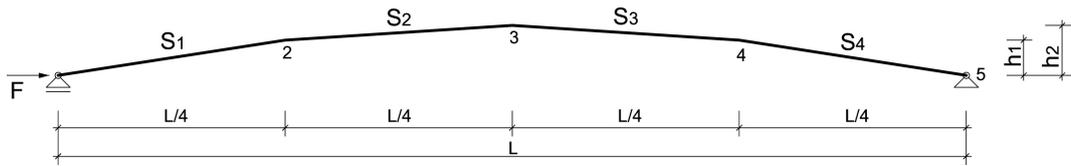
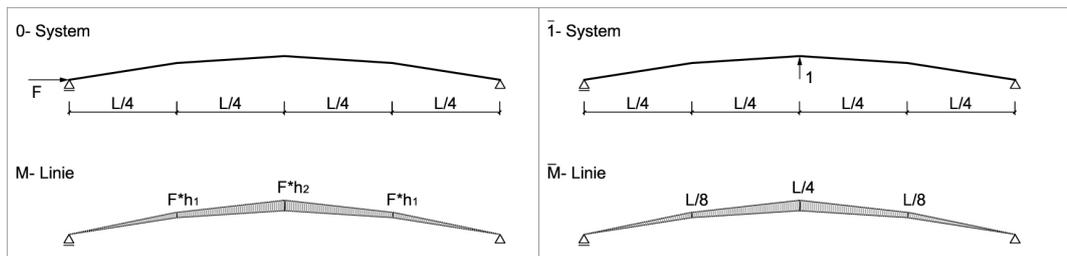


Abb. 4.9 Statisches System: Herstellung des Bogenstichs als Druckstab durch elastische Krümmung

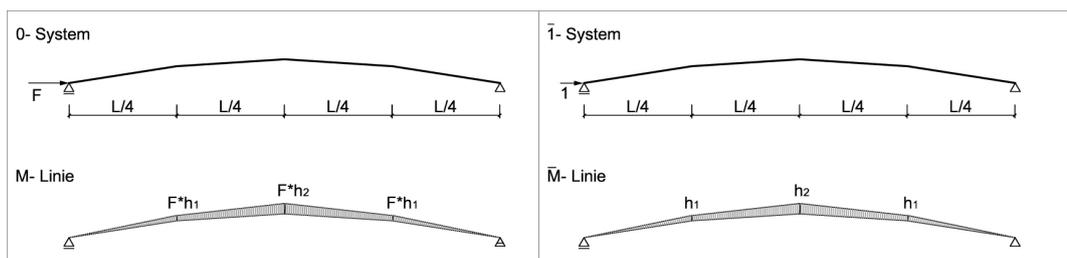
Als Vorgehensweise wird eine Kombination aus Stabwerkmodellen mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK) vorgeschlagen. Hierbei wird im 0-System die äußere horizontale wirkende Kraft F eingetragen, die den Druckstab staucht. Im 1-System wird die virtuelle Kraft 1 in Richtung des gesuchten Zuwachses der Stichhöhe (Abb. 4.10a) bzw. in Richtung der Lagerverschiebung (Abb. 4.10b) angesetzt.

Durch Koppeln der Schnittkraftlinien aus Normalkraft, Querkraft und Moment erhält man die Verformung in Richtung der im 1-System angetragenen virtuellen Kraft. Da es sich bei den nachfolgenden Betrachtungen um Glasbögen handelt, können aufgrund der im Bauwesen relevanten Dimensionierungen und damit einhergehenden Steifigkeiten die Verformungen aus Normalkraft und Querkraft vernachlässigt werden. Ihr Anteil an der Gesamtverformung ist vernachlässigbar gering.

$$\delta_{10} = \int \frac{M \bar{M}}{EI} ds + \int \frac{N \bar{N}}{EA} ds + \int \frac{Q \bar{Q}}{GS} ds \quad \text{Verformung des Systems} \quad (4.2)$$



a)



b)

Abb. 4.10 0-System und 1-System mit zugehörigen Momentenlinien für das PdvK

(a) Ermittlung des Stiches (b) Ermittlung der Horizontalverschiebung am Auflager

Da der Druckstab zu Beginn der Berechnung ausschließlich eine Imperfektion und somit eine sehr geringe Abweichung von der Horizontalen aufweist, ist die Bogenlänge mit der Spannweite des Bogens annähernd identisch. Die vereinfachte Geometrie von $L/4$ für jeden Stababschnitt führt somit zu hinreichend genauen Ergebnissen. Für die oben gewählte polygonale Aufteilung in vier Abschnitte ergibt die Auswertung der Integrale (4.2) nach Einsetzen der Rahmenbedingungen für alle beliebigen symmetrischen Geometrien und Bogensteifigkeiten eine Verformung von:

$$\Delta h_2 = \frac{F \cdot l_0 \cdot l_i \cdot (6h_1 + 5h_2)}{96 \cdot EI} \quad \text{Zuwachs an Stichhöhe} \quad (4.3)$$

$$\Delta w_x = \frac{F \cdot l_0 \cdot (2h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)}{6 \cdot EI} \quad \text{Horizontalverschiebung am Lager} \quad (4.4)$$

Mit:

Geometrische Größen siehe Lageplan (Abb. 4.9)

l_0 Spannweite des Bogens im ersten Berechnungsschritt

l_i Spannweite des Bogens im aktuellen Berechnungsschritt

In der Regel wird das Prinzip der virtuellen Kräfte in der oben dargestellten Form für die Verformungsberechnung eines statischen Zustands verwendet. Für die Anwendung einer mehrstufigen Laststeigerung muss in der Formel noch der Lastzuwachs faktor eingerechnet werden. Er berücksichtigt, dass eine bereits auf das System wirkende und mit dem System in Gleichgewicht stehende Kraft durch den Zuwachs der Stichhöhe einen zusätzlichen Einfluss auf das System ausübt (Theorie 2. Ordnung).

Für die Herleitung des Lastzuwachs faktors wird die Glasscheibe nachfolgend wie eine durch die äußere Last gespannte, elastische Feder betrachtet. Zur Berechnung der Federkonstante wird für die Kraft F der Formel (4.3) 1 kN angesetzt. Somit erhält man als Federkonstante:

$$k_{f,1} = \frac{1 \cdot l^2 \cdot (6h_1 + 5h_2)}{96 \cdot EI}$$

Sucht man nachfolgend die Verformung des Bogens in Richtung der angetragenen virtuellen Kraft aufgrund einer äußeren Last F , muss lediglich die Federkonstante mit der äußeren Last multipliziert werden: $\Delta h_2 = F \cdot k_{f,1}$

Die Stichhöhe des Bogens ist hierbei ein linearer Parameter der Federkonstanten. Das wird bei der Betrachtung der Momentenlinie im 0-System (Abb. 4.10a) anschaulich, da sie über die Exzentrizität $F \cdot h$ berechnet wird, d.h. bei der Höhe xh ist $M = F \cdot xh$. Da dieser Faktor beim Koppeln der M-Linien ausgeklammert werden kann, ist die Federkonstante linear abhängig von der Stichhöhe des Bogens:

$$k_{f,1} = \int \frac{(x \cdot M'_{1kN}) \bar{M}}{EI} ds = x \cdot \int \frac{M'_{1kN} \bar{M}}{EI} ds$$

Betrachtet man nun zwei aufeinander folgende Schritte $i-1$ und i berechnet sich die Federkonstante für die äußere Gesamtlast ΣF_i (= alle bis zu diesem Zeitschritt aufaddierten Lastschritte ΔF_i) nicht aus der absoluten Stichhöhe h_2 sondern auf Basis des Zuwachses der Stichhöhe Δh_2 durch den Lastzuwachs ΔF_i . Die Herleitung ist in Abbildung 4.11 anschaulich dargestellt. In Bild a) ist der Berechnungsschritt $i-1$ dargestellt, die Verformung aus dieser Last ist geometrisch bereits berücksichtigt. D.h. die äußere Last ΣF_{i-1} steht mit der dargestellten Geometrie aus Schritt $i-1$ im Gleichgewicht.

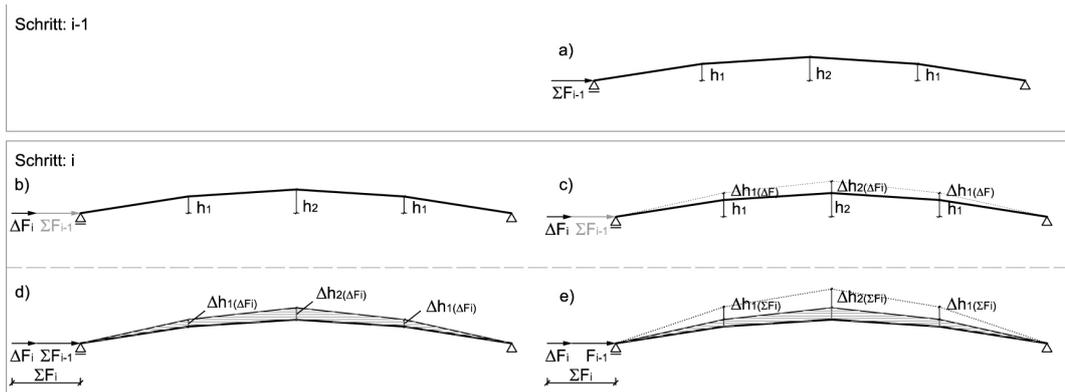


Abb. 4.11 Verformungszuwachs durch Lastzuwachs nach Theorie II. Ordnung

Wird in Berechnungsschritt i die Belastung nun nachfolgend um ΔF_i gesteigert (b), ist die Verformung daraus Δh_2 (c). Die Last ΣF_{i-1} ist in den Bildern (b) und (c) grau dargestellt, da sie mit der Geometrie aus $i-1$ im Gleichgewicht steht. Möchte man nun die Gesamtlast ΣF_i berücksichtigen (d), wirkt sie sich nur noch auf den Verformungszuwachs Δh_2 aus ΔF_i aus. D.h. dass analog der obigen Überlegung dieser Verformungszuwachs Δh die Basis zur Berechnung der Federkonstanten für ΣF_i darstellt und nicht der Absolutwert der Stichhöhe. Damit ergibt sich aus der Verformungsberechnung über ΔF_i in Schritt i die Federkonstante für die Gesamtlast:

$$k_{\Delta F_i} = \Delta F_i \cdot k_{f,i} = \frac{\Delta F_i \cdot l_0 \cdot l_i \cdot (6h_1 + 5h_2)}{96 \cdot EI} \quad \text{Federkonstante in Berechnungsschritt } i$$

Die Erhöhung des Stichts aus der Gesamtlast ΣF_i ergibt sich nachfolgend aus der Multiplikation mit der Federkonstanten des aktuellen Zeitschritts.

Zuwachs der Stichhöhe aus Lastzuwachs:

$$\Delta h_{2,i} = \Sigma F_i \cdot \frac{\Delta F_i \cdot l_0 \cdot l_i \cdot (6h_1 + 5h_2)}{96 \cdot EI} \quad \text{Vertikale Verformung an Knoten 3} \quad (4.5)$$

Die Verformung an Knoten 2 und 4 ergibt sich über die Geometrie des Sinushalbbogens:

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \Delta h_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Für die Horizontalverschiebung des Lagers gilt analog der obigen Beschreibung:

$$\Delta w_{x,i} = \Sigma F_i \cdot \frac{\Delta F_i \cdot l_0 \cdot (2h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)}{6 \cdot EI} \quad (4.6)$$

Die Spannweite im aktuellen Berechnungsschritt ergibt sich somit zu:

$$L_i = L_{i-1} - \Delta w_{x,i}$$

Da die einzigen Einflussgrößen neben der Biegesteifigkeit ($EI = \text{konstanter Wert}$) geometrische Größen sind, können sämtliche Berechnungsparameter aus dem sich schrittweise

ändernden Lageplan entnommen werden (Abb. 4.12). Die Formeln (4.5 und 4.6) lassen sich somit anwenden, ohne dass die Schnittkraftlinien gezeichnet und gekoppelt werden müssen. Die Ermittlung der Knickbiegeline und Knicklast zugehörigen Stabschnittgrößen, können für den jeweiligen Lageplan mit der zugehörigen äußeren Last durch Kräftecke veranschaulicht werden. Nachfolgend sind exemplarisch drei Schritte dargestellt.

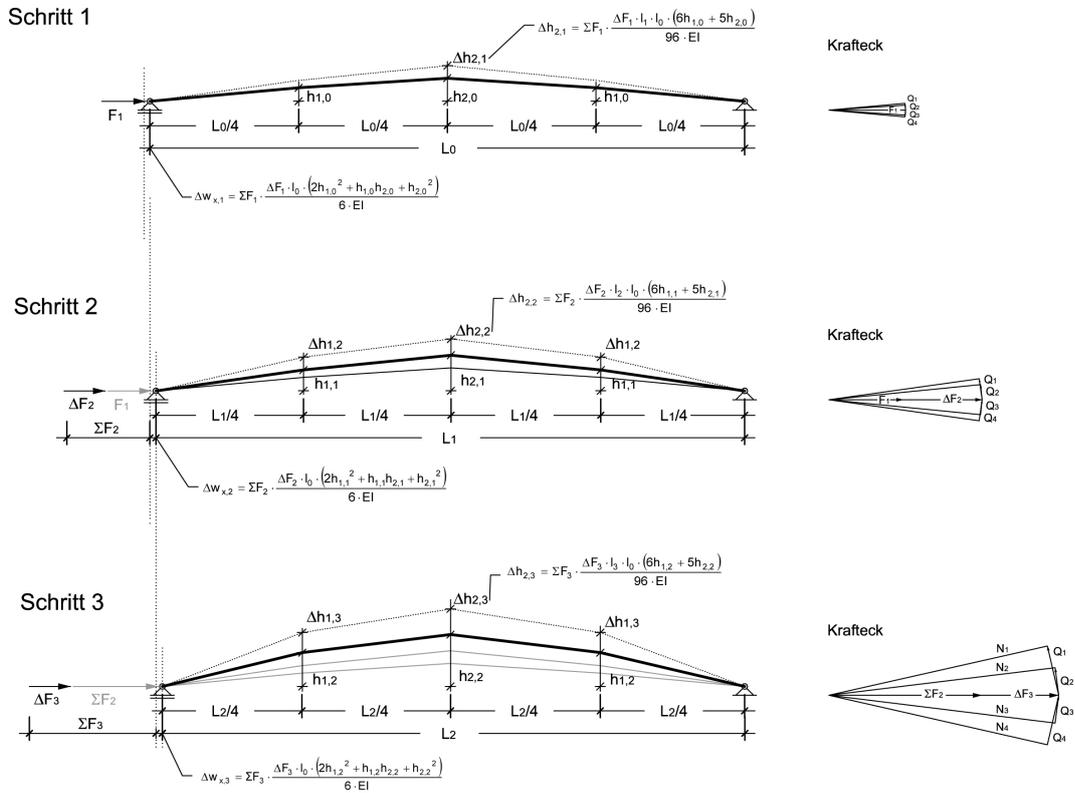


Abb. 4.12 Schrittweise Ermittlung der Knickbiegeline und zugehörigen Schnittgrößen

Legende:

- ΔF_i Lastzuwachs im Berechnungsschritt i
- ΣF_i Gesamtlast im Berechnungsschritt i
- L_i Spannweite im Berechnungsschritt i
- $h_{x,i}$ Höhe an Knoten x im Berechnungsschritt i
- $\Delta h_{x,i}$ Vertikale Verformung an Knoten x im Berechnungsschritt i
- $\Delta w_{w,i}$ Horizontale Lagerverformung im Berechnungsschritt i

4.2.4 Kontrolle der Ergebnisse

Zur Ermittlung von Durchbiegungen für Werte $F > F_{krit}$ ist in [F29] die Herleitung für das Näherungsverfahren nach Galerkin beschrieben. Mit Gleichung (4.7) kann das Gleichgewicht zwischen einer überkritischen Druckkraft und dem Systemwiderstand durch Ausknickung ermittelt werden. Da es sich bei diesem Näherungsverfahren um ein einfach anzuwendendes Handrechenverfahren handelt, wird es in Kapitel 7 als Kontrolle des Ergebnisses durch Stabwerkmodelle herangezogen.

$$w_{\max} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \cdot l \cdot \sqrt{1 - \frac{F_{\text{krit}}}{F}} \quad (4.7)$$

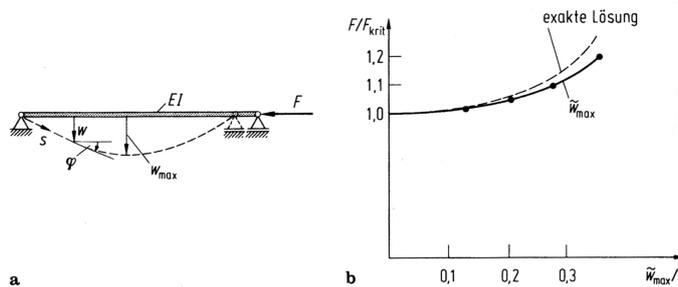


Abb. 4.13 Näherungsverfahren von Galerkin verglichen zur exakten Lösung

In Abbildung 4.13 erkennt man für einen ermittelten Verhältnswert F / F_{krit} nahe eins eine gute Affinität zwischen der Näherungslösung durch Galerkin und der exakten Lösung. Durch Umstellen der Gleichung 4.7 erhält man die Druckkraft, die den nach Eulerfall 2 ausknickenden Druckstab um w verformt.

$$F = \frac{F_{\text{krit}}}{1 - \frac{w^2 \pi^2}{8 \cdot l^2}} \quad \text{mit: } F_{\text{krit}} \text{ gemäß (4.1)} \quad (4.8)$$

Weiterhin lässt sich unter Annahme eines dehnsteifen Querschnitts die zugehörige Horizontalverformung f ermitteln:

$$f = 2 \cdot \left(\frac{F}{F_{\text{krit}}} - 1 \right) \cdot l \quad (4.9)$$

Grundsätzlich kann es sich bei dieser Kontrolle jedoch nur um eine grobe Näherung handeln, da das Verfahren von Galerkin auf der mathematischen Herleitung eines perfekten Stabes basiert (siehe Abb. 4.8).

4.3 Lastabtrag durch äußere Lasten

Bei dem Bogen mit Zugband handelt es sich um ein innerlich einfach statisch unbestimmtes System. Somit hängt der Lastabtrag bzw. die Gewichtung zwischen dem Anteil aus Bogenwirkung (Normalkraft) und Biegung im Bogen in erster Linie von der Bogengeometrie und den Steifigkeiten der einzelnen Tragwerksteile ab. In Abbildung 3.14 sind die Extremfälle des möglichen Lastabtrags dargestellt; In Abb. 4.14b ausschließlich durch Normalkraft und in Abb. 4.14c ausschließlich über Biegung. Die graphische Analyse mit Stabwerkmodellen zeigt deutlich, dass in diesem Beispiel ein Lastabtrag ausschließlich durch Normalkräfte nicht möglich ist, d.h. in Abb. 4.14b schließen sich die Kraftecke nicht. Das ist nachvollziehbar, da es sich bei der Sinusgeometrie nicht um die Stützlinie zu der im Lageplan 4.14a eingetragenen Gleichstreckenlast handelt. Folglich ist eine Querkraft

(= Vorhandensein eines Momentes) erforderlich, um ein statisches Gleichgewicht herzustellen. In Abbildung 4.14c ist das andere Extrem dargestellt, nämlich die Annahme, das System trüge ausschließlich über Querkraft und Biegung ab. Das Tragwerk hätte lediglich die Form eines Bogens, verhielte sich jedoch wie ein gekrümmter Balken. D.h. das Zugband ist entweder gar nicht vorhanden oder extrem weich.

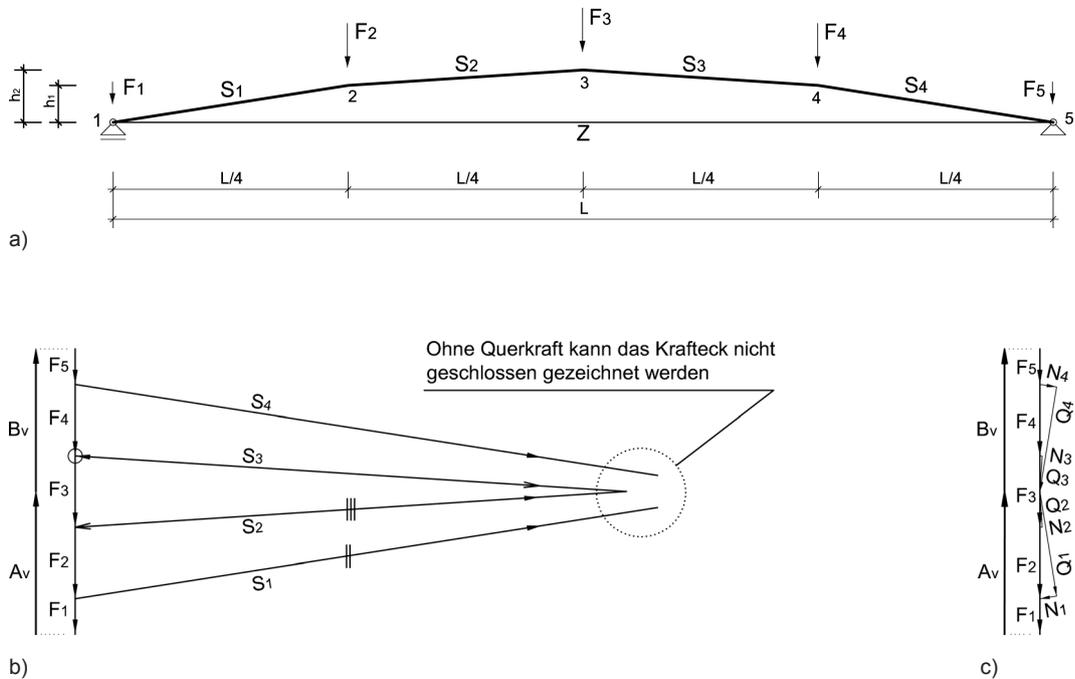


Abb. 4.14 Kraftfluss aus äußerer Belastung (a) Lageplan (b) Kraftteck bei ausschließlichem Lastabtrag durch Normalkräfte (c) Kraftteck bei überwiegender Lastabtrag durch Querkräfte

Bei einer sinnvollen Dimensionierung eines Glasbogens mit Zugband ist ein kombinierter Lastabtrag über Biegung und Normalkraft zu erwarten. Bei einer Optimierung der Querschnitte ist hierbei ein großer Normalkraftanteil anzustreben. In Abbildung 4.15 ist dieser kombinierte Lastabtrag anschaulich in einem Kraftteck dargestellt.

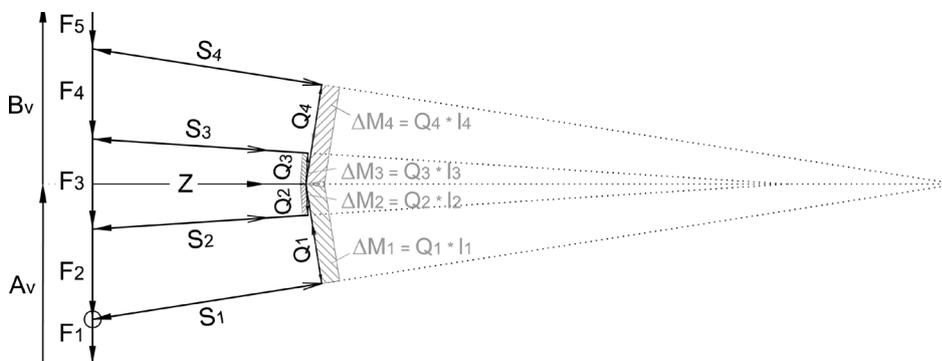


Abb. 4.15 Kraftteck: Lastabtrag durch Normalkräfte und Querkräfte bzw. Biegung

Die Größe der Querkraft ist, wie bereits beschrieben, von der Biegesteifigkeit der Glasscheiben und der Dehnsteifigkeit des Zugbandes abhängig, was in dem Kräfteck durch die Lage der Querkraft anschaulich dargestellt wird. Eine biegesteifere Glasscheibe zieht mehr Querkraft an als eine weiche, wodurch die Querkraftvektoren im Kräfteck weiter nach links rücken (Extremfall Balken). Andersherum aktiviert ein verhältnismäßig dehnsteifes Zugband mehr Bogentragwirkung (Normalkraft), was die Querkraften nach rechts rücken lässt. Die genaue Lage der Querkraft bzw. die Größe der Zugbandkraft kann unter Zuhilfenahme des Prinzips der virtuellen Kräfte ermittelt werden. Wählt man das Zugband als statisch überbestimmte Kraft, erhält man für die Zugbandkraft Z allgemein:

$$Z = \frac{\int \frac{N'\bar{N}}{EA} ds + \int \frac{M'\bar{M}}{EI} ds + \int \frac{Q'\bar{Q}}{GA} ds}{\int \frac{NN}{EA} ds + \int \frac{MM}{EI} ds + \int \frac{QQ}{GA} ds}$$

Allgemeine Formel zur Berechnung der Zugbandkraft durch das PdvK

Bei der oben gewählten geometrischen Vereinfachung erhält man nach Einsetzen der Rahmenbedingungen und Ausnutzung der Symmetrie für alle beliebigen Geometrien und Steifigkeitsverteilungen:

$$Z = \frac{\frac{2 \cdot [l_1 \cdot N_1 \bar{N}_1 + l_2 \cdot N_2 \bar{N}_2]}{E_G A_G} + \frac{[-1/4 F l h_1 l_1 + l_2 / 24 \cdot (-10 \cdot F l h_1 - 11 \cdot F l h_2)]}{E_G I_G} + \frac{2 \cdot [l_1 \cdot Q_1 \bar{Q}_1 + l_2 \cdot Q_2 \bar{Q}_2]}{G_G A_G}}{2 \cdot \left[\frac{l_1 \cdot (\bar{N}_1)^2 + l_2 \cdot (\bar{N}_2)^2}{E_G A_G} \right] + \frac{l}{E_Z A_Z} + \frac{[2/3 l_1 \cdot h_1^2 + 2/3 l_2 \cdot (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)]}{E_G I_G} + \frac{2 \cdot [l_1 \cdot (\bar{Q}_1)^2 + l_2 \cdot (\bar{Q}_2)^2]}{G_G A_G}}$$

Mit:

- F Einzellast des Stabwerkmodells
- N'_x Normalkraft des Stabes x im 0-System
- \bar{N}_x Normalkraft des Stabes x im 1-System
- Q'_x Querkraft des Stabes x im 0-System
- \bar{Q}_x Querkraft des Stabes x im 1-System
- l Spannweite des Bogens
- l_1 Länge des 1. Bogenabschnitts
- l_2 Länge des 2. Bogenabschnitts
- h_1 Höhe des 1. Knotens
- h_2 Höhe des 2. Knotens
- E_G Elastizitätsmodul des Bogengurtes
- E_Z Elastizitätsmodul des Zugbandes
- G_G Schubmodul des Bogengurtes
- A_G Querschnittsfläche des Bogengurtes
- A_Z Querschnittsfläche des Zugbandes
- I_G Flächenträgheitsmoment des Bogengurtes

Bei einem Glasbogendach mit Zugband sind bei der Wahl von baurelevanten Querschnitten die Steifigkeitsverhältnisse in der Regel so verteilt, dass lediglich die Dehnsteifigkeit des Zugbandes und die Biegesteifigkeit des Druckgurtes ausschlaggebend für die Verteilung der Last verantwortlich sind. Die Normal- und Querkräfte im Druckgurt spielen bei der Ermittlung der Zugbandkraft eine vernachlässigbare Rolle. Durch Herauskürzen dieser vernachlässigbaren Anteile und Umstellen der Terme, erhält man die vereinfachte, allgemein gültige Formel zur Ermittlung der Zugbandkraft:

$$Z = \frac{F \cdot l \cdot (16h_1 + 11h_2)}{96 \left(\frac{E_G I_G}{E_Z A_Z} + \frac{2h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{6} \right)} \quad \text{Zugbandkraft} \quad (4.10)$$

Durch die Formel wird deutlich, dass die Zugbandkraft ausschließlich über die äußere Last, die Biege- und Dehnsteifigkeit und geometrische Größen des Systems ermittelt werden kann. Das Zeichnen und Koppeln der Schnittkraftlinien des 0- und 1-Systems erübrigt sich somit, was den Berechnungsaufwand erheblich reduziert.

Die Abweichung der vereinfachten Formel im Vergleich zur genauen Lösung mit allen Koppeltermen beträgt 0,09 % (Vergleichsberechnung siehe Anhang zu diesem Abschnitt). In dem Krafteck der Abbildung 4.15 wird somit das Zusammenspiel aus Bogengeometrie und äußeren Lasten veranschaulicht. Durch die in Formel 4.10 ermittelte Zugbandkraft werden nachfolgend die Steifigkeitsverhältnisse der Tragwerksteile berücksichtigt. Aufgrund der so ermittelten Kraft kann nun das Krafteck (Abb. 4.15) fertig gezeichnet und sämtliche Schnittgrößen dargestellt werden. Durch die Lage der Querkraft im Krafteck ist weiterhin die Art des Lastabtrags und der Tragwerkstypus (Bogen / Rahmen / Balken) gekennzeichnet.

5 Dynamische Stabwerkmodelle

Die Idee, Bewegungsprozesse anhand von Stabwerkmodellen zu analysieren (= dynamische Stabwerkmodelle) basiert auf der Kraftflussanalyse mittels Stabwerkmodellen in der Statik und erweitert die Anwendung auf komplette dynamische Prozesse. Grundsätzlich befasst sich die Dynamik mit dem Zusammenspiel von Kräften und Bewegungen, wobei sowohl die Statik als auch die Kinetik Teilgebiete der Dynamik sind. In der Statik befindet sich der Körper in einer Ruhelage, da die am Körper angreifenden Kräfte im Gleichgewicht stehen und die Geschwindigkeit des Körpers null ist.

Im Gegensatz zu der statischen Ruhelage stehen die Kräfte in der Kinetik nicht im Gleichgewicht und der Körper bewegt sich, was eine sich kontinuierlich ändernde Systemgeometrie zur Folge hat. Für die Analyse eines Bewegungsprozesses mit dynamischen Stabwerkmodellen wird der kontinuierliche Bewegungsablauf in einzelne Zeitschritte unterteilt. In dem jeweils aktuellen Zeitabschnitt wird die Systemgeometrie zu Beginn des Zeitschritts betrachtet und die an dem Körper angreifenden Kräfte im Lageplan und Kräfteck analysiert. Sind die Kräfte im Gleichgewicht und die Geschwindigkeit ist null, befindet sich der Körper in Ruhelage. Ist jedoch kein Gleichgewicht vorhanden, bleibt eine resultierende Kraft übrig, die den Körper im nächsten Zeitabschnitt antreibt und somit die Systemgeometrie ändert. Diese resultierende Kraft wird nachfolgend dynamische Kraft genannt. Sie wird durch die Anordnung eines imaginären, dynamischen Stabs ermittelt. An der geänderten Systemgeometrie kann wiederum über den Lageplan und das Kräfteck die aktuelle dynamische Kraft ermittelt werden, die für den Antrieb des Körpers im anschließenden Zeitschritt verantwortlich ist. Der vollständige Bewegungsvorgang wird dadurch Schritt für Schritt zusammengesetzt.

Der Begriff dynamisches Stabwerkmodell beschreibt somit zwei wichtige Rahmenbedingungen des entwickelten Analyseverfahrens:

- (1) Ein kompletter dynamischer Prozess (incl. Bewegung) wird durch Stabwerkmodelle analysiert.
- (2) Die den Körper antreibende dynamische Kraft muss durch einen imaginären dynamischen Stab ermittelt werden.

In der Tragwerksplanung werden dynamische Analysen, abgesehen von Schwingungsbetrachtungen, erforderlich, wenn sich ein Tragwerk nach einem Bauteilversagen bewegt, dadurch Schnittkräfte umlagert und nachfolgend ein neues statisches Gleichgewicht findet. Beispielsweise bei Glaskonstruktionen, die durch plötzliches und unvorhersehbares Versagen und Herabfallen des Glaskörpers zu einem Risiko für Passanten werden könnten, ist in den aktuell gültigen Richtlinien [N9] und [N10] eine Resttragfähigkeit gefordert. Diese sagt aus, dass das Tragwerk auch nach Glasbruch noch eine definierte Zeit halten muss, bevor es komplett einstürzt.

Als Thema dieser Arbeit wird ein solches Szenario mit dynamischen Stabwerkmodellen anschaulich analysiert und dargestellt. Es wird exemplarisch auf einen unterspannten Glasbogen aus Verbundsicherheitsglas mit Zugband angewandt, der in Wasseralfingen

als Glasdach konzipiert und gebaut wurde. Die dynamische Betrachtung des Glasbogens mit Stabwerkmodellen beginnt im Moment der schlagartigen Zerstörung des Glasbogens durch beispielsweise Steinschlag. Der statische Anfangszustand des Systems endet mit dem Glasversagen und das Glas «fällt» nach unten durch. Das Fallen ist ein kinetischer Vorgang und zwar so lange, bis das Glas bzw. die Folie mit den daran klebenden Glaskörnern auf den hängenden Zugbändern aufliegt und somit wiederum statisch wird (Kapitel 7). Dieses neue statische System muss nachfolgend eine definierte Zeit standsicher sein, um die Resttragfähigkeit zu gewährleisten.

In diesem Kapitel werden die allgemeine Vorgehensweise und Hintergründe für die Anwendung dynamischer Stabwerkmodelle beschrieben. Nachfolgend wird die Anwendbarkeit an den Grundaufgaben Pendel und Bogen ohne Berücksichtigung der Materialeigenschaften überprüft. Nach der Kontrolle der Grundaufgaben wird in Kapitel 7 die Aufgabe «versagender Glasbogen mit Zugband» am Beispiel des Glasdachs in Wasseralfingen mit dynamischen Stabwerkmodellen gelöst.

5.1 Kurzbeschreibung der Vorgehensweise

Die allgemeine Vorgehensweise der dynamischen Stabwerkmodelle beschränkt sich grundsätzlich auf vier Berechnungen (bzw. Darstellungen) je Zeitschritt. Die Berechnungen sind für jeden Knoten durchzuführen, der eine Wegstrecke zurücklegt. Knotenpunkte die sich ausschließlich verdrehen, müssen nicht gesondert betrachtet werden. Die Verdrehung wird automatisch im Lageplan graphisch berücksichtigt. Die komplette Bewegung setzt sich schrittweise durch Wiederholen folgender vier Schritte zusammen.

Zeitschritt i

- | | | |
|----------------|--|-----------------------------------|
| a _i | Lageplan und Krafteck liefern die dynamische Kraft: | $F_{\text{dyn},i}$ |
| b _i | 2. Newton'sches Axiom ergibt die Beschleunigung: | $a_i = F_{\text{dyn},i} / m$ |
| c _i | Integration über die Zeit liefert die Geschwindigkeit: | $\Delta v_i = a_i \cdot \Delta t$ |
| d _i | Integration über die Zeit liefert den Weg: | $\Delta r_i = v_i \cdot \Delta t$ |
- Das Eintragen des berechneten Weges Δr_i in den Lageplan liefert die Basis für den nächsten Zeitschritt i+1.

Zeitschritt i+1

- | | | |
|------------------|--|---|
| a _{i+1} | Lageplan und Krafteck liefern die dynamische Kraft: | $F_{\text{dyn},i+1}$ |
| b _{i+1} | 2. Newton'sches Axiom ergibt die Beschleunigung: | $a_{i+1} = F_{\text{dyn},i+1} / m$ |
| c _{i+1} | Integration über die Zeit liefert die Geschwindigkeit: | $\Delta v_{i+1} = a_{i+1} \cdot \Delta t$ |
| d _{i+1} | Integration über die Zeit liefert den Weg: | $\Delta r_{i+1} = v_{i+1} \cdot \Delta t$ |
- Das Eintragen des berechneten Weges Δr_{i+1} in den Lageplan liefert wiederum die Basis für den nächsten Zeitschritt i+2.

Zeitschritt i+2

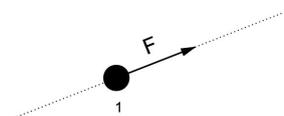
...

5.2 Hintergründe

5.2.1 Lageplan

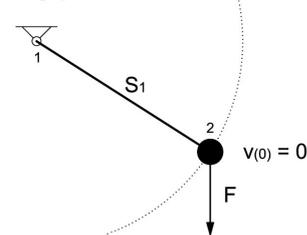
Zu Beginn der Analyse durch dynamische Stabwerkmodelle wird das dynamische System dargestellt, sämtliche auf das System einwirkenden Kräfte an den Knotenpunkten eingetragen, falls erforderlich die Lagerreaktionen berechnet und eine Stab- und Knotennummerierung eingeführt. Der Berechnungsaufwand reduziert sich, wenn im Lageplan die Bahnkurven der Massen eingetragen werden können. Wenn sie zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt sind, werden sie durch das dynamische Stabwerkmodell schrittweise ermittelt. In Abbildung 5.1 ist der Lageplan einer reinen Translation (a) und einer reinen Rotation (b) dargestellt.

Lageplan Translation



a)

Lageplan Rotation



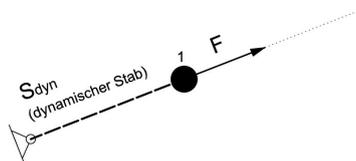
b)

Abb. 5.1 Lageplan des kinematischen Systems (a) Translation (b) Rotation

5.2.2 Der dynamische Stab

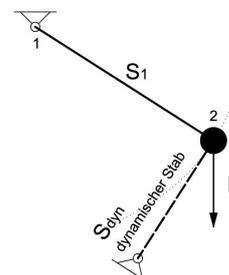
Das kinematische System wird im Lageplan durch einen imaginären, sehr weichen, gelagerten Stab ergänzt, der das System statisch, in einigen Fällen auch statisch überbestimmt macht. Seine Systemlinie muss in der zu erwartenden Bewegungsrichtung der betrachteten Masse liegen; im Falle einer rotierenden Bewegung in Richtung der Bahntangente. Dieser imaginäre, weiche Stab wird nachfolgend dynamischer Stab genannt, da über ihn die dynamische Kraft ermittelt wird, die die Masse antreibt. Er kann als Zug- oder Druckstab eingetragen werden.

Lageplan Translation



a)

Lageplan Rotation



b)

Abb. 5.2 Lageplan incl. dynamischem Stab (a) Translation (b) Rotation

Der Einsatz der dynamischen Stäbe ist nur bei statisch überbestimmten Systemen zwingend erforderlich (Erklärung siehe 5.3). Bei statisch bestimmten Systemen könnte dieser Schritt auch übersprungen und die dynamische Kraft direkt in das Kräfteck einge-

tragen werden (siehe Abschnitt 5.6, Beispiele 1 - 3: Einmassenpendel).

Da es sich bei dem dynamischen Stab um einen imaginären Stab ohne Querschnitt handelt, wird er nachfolgend wie eine Feder behandelt. Das Verhalten dieser Feder erinnert aufgrund der fehlenden Rückstellkraft trotz Stauchung bzw. Streckung an ein plastisches Material. Der lineare Zusammenhang zwischen der Dehnung und der Kraft der Feder ist jedoch eher mit einem elastischen Materialverhalten vergleichbar.

Nachfolgend wird die Federsteifigkeit ermittelt, die affin zur Massenträgheit ist. D.h., dass die dynamische Kraft die Feder in der gleichen Größenordnung staucht, wie sie die Masse in einem Zeitschritt um den Weg Δr antreibt. Aus dieser Überlegung lässt sich die Federkonstante des dynamischen Stabes über den Quotienten aus Kraft und Weg berechnen:

$$k_{\text{dyn}} = \frac{F_{\text{dyn}}}{r_{\text{dyn}}} \quad \text{Einheit : } \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}} \right]$$

Der zurückgelegte Weg wird durch die zweifach integrierte Beschleunigung ersetzt:

$$k_{\text{dyn}} = \frac{m}{\Delta t^2} \quad \text{Einheit : } \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Nach Einsetzen für $a = F_{\text{dyn}} / m$ und Herauskürzen von F_{dyn} erhält man die Federkonstante des dynamischen Stabes:

$$k_{\text{dyn}} = \frac{m}{\Delta t^2} \quad \text{Einheit : } \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad (5.1)$$

Sie ist ausschließlich von dem gewählten Zeitschritt und der Masse abhängig. Ein langer Zeitschritt hat eine große Wegstrecke zur Folge, was gleichbedeutend mit einer weichen Feder ist. Ebenso verhält es sich bei einer kleinen Masse, da die antreibende Kraft gemäß dem 2. Newton'schen Axiom eine kleine Masse stärker beschleunigt als eine große, was ebenfalls mit einer großen Wegstrecke und somit einer weichen Feder gleichbedeutend ist.

Die Berücksichtigung der dynamischen Stäbe ist bei statisch überbestimmten Systemen zwingend erforderlich, da sich die Kräfte aufgrund der Massenträgheit an den Knoten im System umlagern. Diese Umlagerung wird durch die dynamischen Stäbe berücksichtigt. In sämtlichen Systemen und Berechnungsschritten, in denen die dynamischen Stäbe an allen Knoten die gleiche Steifigkeit besitzen, können die Kraftgrößen unabhängig vom Absolutwert der Federkonstanten berechnet werden, solange die Federsteifigkeiten verglichen zu den Stabsteifigkeiten des Bogens klein sind. In diesen Fällen können die Federkonstanten bei der Berechnung der dynamischen Kräfte herausgekürzt werden (siehe Abschnitt 5.4). Im Gegensatz dazu ist die Berücksichtigung der absoluten Steifigkeitswerte der dynamischen Stäbe erforderlich, wenn:

- zusätzliche Kräfte aufgrund geometrischer Zwängungen des Nachbarknotens (z.B. Zentripetalbewegungen) entstehen (Abschnitt 5.4.2) oder
- die Steifigkeiten der dynamischen Stäbe im System unterschiedlich groß sind oder
- die Steifigkeiten der dynamischen Stäbe nicht wesentlich kleiner sind als die Dehnsteifigkeit der realen Stäbe.

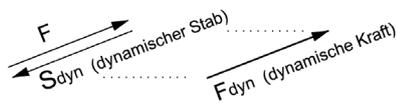
5.2.3 Ermittlung dynamischer Kräfte in Kraftecken

Im Krafteck werden dem festgelegten Dreh- bzw. Richtungssinn folgend an dem betrachteten Knoten sämtliche angreifenden Kräfte als Vektoren und die Systemlinien der an den Knoten angreifenden Stäbe eingezeichnet. Der dynamische Stab wird hierbei wie ein tatsächlich vorhandener Stab behandelt. Nimmt man ihn nachfolgend heraus, erhält man die dynamische Kraft, die die Masse im nächsten Zeitschritt antreibt. Sie hat die Kraftgröße des dynamischen Stabes, jedoch in entgegengesetzter Richtung. In Abbildung 5.3 sind die Kraftecke für die Lagepläne der Abbildung 5.2 dargestellt.

Krafteck zu Abb. 5.2a (Translation)

Maßstab: 1 cm = ... KN

Umfahrungssinn: 

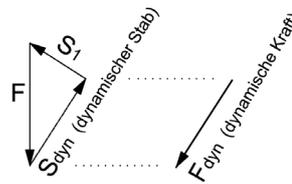


a)

Krafteck zu Abb. 5.2b (Rotation)

Maßstab: 1 cm = ... KN

Umfahrungssinn: 



b)

Abb. 5.3 Krafteck (a) für Abb. 5.2a: Translation (b) für Abb. 5.2b: Rotation

In dem abgebildeten Beispiel der Abbildungen 5.2 - 5.3 handelt es sich um ein Einmassensystem, auf das ausschließlich eine äußere Kraft «F» einwirkt. Da die Tragwerke in diesem Beispiel durch das Einbringen der dynamischen Stäbe statisch bestimmt sind, haben die Dehnsteifigkeiten der einzelnen Stäbe keinen Einfluss auf die Verteilung der Kräfte.

Wenn Systemverformungen aus Imperfektionen oder Stabdehnung bzw. Stauchung oder andere nachgiebige Bauteile berücksichtigt werden sollen, kann das über Federkräfte ($x \cdot k$) im Krafteck mit in die Berechnung eingehen. Ebenso bei der Berücksichtigung von Dämpfungskräften ($v \cdot D$). Die Abhängigkeiten der zu berücksichtigenden Kräfte von den kinematischen Zustandsgrößen werden in der allgemeinen Bewegungsgleichung der Strukturdynamik deutlich:

$$(a \cdot m) + (v \cdot D) + (x \cdot k) = F \quad (5.2)$$

$a \cdot m$	Beschleunigung [m/s ²] * Masse [kg]	= Trägheitskraft [N]
$v \cdot D$	Geschwindigkeit [m/s] * Dämpfung [kg/s]	= Dämpfungskraft [N]
$x \cdot k$	Weg [m] * Federkonstante [N/m]	= Federkraft [N]
F		= äußere Kraft [N]

Während die Trägheitskraft das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist, werden die Dämpfung mit der Geschwindigkeit und die Federkraft über den zurückgelegten Weg des Knotens berechnet. Es zeigt sich somit, dass es unter diesen Umständen sinnvoll ist, die kinematischen Größen analog Abschnitt 5.1 schrittweise zu berechnen und nicht alle drei Schritte zu einer Formel zusammen zu fassen.

Im Krafteck sind alle Einflussfaktoren sowohl aus der Systemgeometrie als auch aus inneren und äußeren Kräften berücksichtigt, wodurch das Freischneiden des dynamischen Stabes im Krafteck analog dem Freischneiden der Masse aus dem System verstanden werden kann. Die Masse wird dadurch hypothetisch behandelt, als bewege sie sich frei im Weltraum. Beeinflusst wird sie dabei ausschließlich durch eine Kraft mit der Richtung und Größe des Vektors F_{dyn} .

5.2.4 Kinematische Zustandsgrößen

Nach der Ermittlung der dynamischen Kraft durch den dynamischen Stab im Krafteck werden die kinematischen Größen Beschleunigung, Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg ermittelt. Die dynamische Kraft bezogen auf die Masse liefert die Beschleunigung (zweites Newton'sches Axiom) des Körpers im betrachteten Zeitschritt:

$$a_i = \frac{F_{\text{dyn}}}{m} \quad \text{Beschleunigung} \quad (5.3)$$

Die Integration der Beschleunigung über die Zeit liefert die Geschwindigkeit. Da die Bewegung in kleine Zeitschritte eingeteilt wird, kann der mathematische Hintergrund der Berechnung als eine numerische Integration beschrieben werden, bei der die Funktion der Beschleunigung in Rechtecksflächen mit den Stützstellen Δt unterteilt wird (Abb. 5.4). Das ermöglicht die Ermittlung der Geschwindigkeitszunahme durch eine einfache Multiplikation der Beschleunigung a mit dem gewählten Zeitschritt Δt : $\Delta v_i = a_i \cdot \Delta t$. Da es sich dabei um die Änderung der Geschwindigkeit handelt, muss die Geschwindigkeit aus dem vorhergehenden Zeitschritt addiert bzw. subtrahiert werden, um den Absolutwert zu erhalten:

$$v_i = v_{i-1} + (a_i \cdot \Delta t) \quad \text{Geschwindigkeit} \quad (5.4)$$

Bei der Analyse der Bewegung mit Stabwerkmodellen ist die Beschleunigung zu Beginn der Bewegung noch nicht bekannt. Sie setzt sich Schritt für Schritt zusammen, bis die komplette Funktion ermittelt ist. In Diagramm 5.4a sind die ersten sechs Zeitschritte der Berechnung mit dynamischen Stabwerkmodellen im Vergleich zur genauen Funktion dargestellt. Die Rechteckflächen orientieren sich dabei immer an der vorderen Stützstelle, d.h. an der Anfangsbeschleunigung eines jeden Zeitschritts. Die Grundlage des Diagramms bildet eine harmonische Schwingung.

Größere Genauigkeit erhält man durch die Berechnung mit Mittelwerten (Abbildung 5.4b). Die mittleren Beschleunigungen werden durch einen zusätzlichen Berechnungsschritt vorweg ermittelt. D.h. nach der Kenntnis der Beschleunigungen der ersten beiden Zeitschritte werden diese gemittelt und nachfolgend für den ersten Zeitschritt verwendet.

$$a_{\text{Mittelwert}} = \frac{a'_0 + a'_1}{2} \rightarrow a_0 \text{ des ersten Zeitschritts}$$

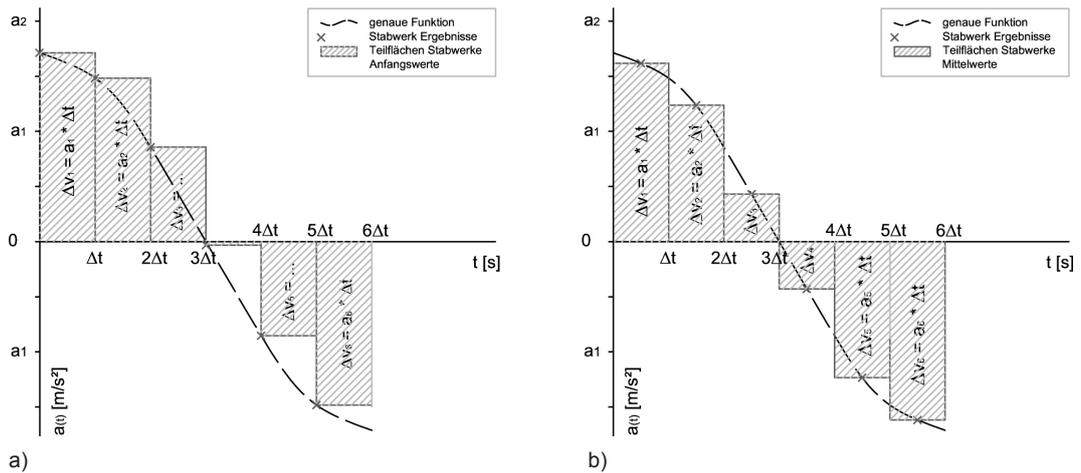


Abb. 5.4 Einteilung der Beschleunigungsfunktion in Rechteckflächen (a) Anfangswerte (b) Mittelwerte

Zur Berechnung des zurückgelegten Weges wird nachfolgend die Geschwindigkeit über die Zeit integriert (Diagramm 5.5): $\Delta r_i = v_i \cdot \Delta t$

Auch bei dem zurückgelegten Weg handelt es sich um den Zuwachs aus dem aktuellen Zeitschritt. Für den Absolutwert muss der Weg aus dem vorhergehenden Zeitschritt addiert werden:

$$r_i = r_{i-1} + (v_i \cdot \Delta t) \quad \text{Weg} \quad (5.5)$$

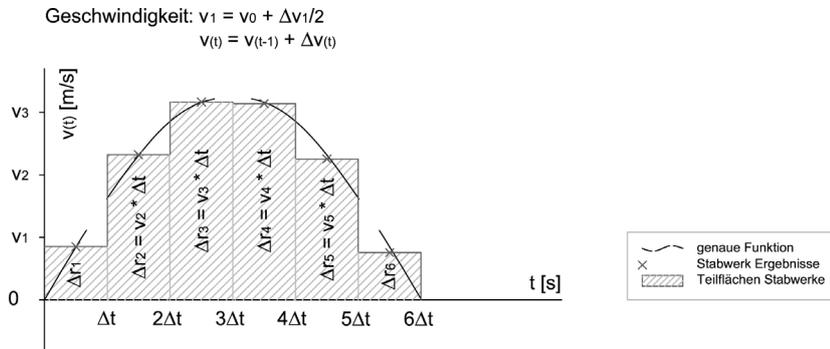


Abb. 5.5 Einteilung der Geschwindigkeitsfunktion in Rechteckflächen

Die vollständige Funktion setzt sich wiederum schrittweise aus den im dynamischen Stabwerkmodell berechneten Teilflächen zusammen. Die Abb. 5.5 zeigt erneut sechs Zeitschritte einer harmonischen Schwingung des dynamischen Stabwerkmodells im Vergleich zur genauen Funktion.

Weiterhin wird im Diagramm deutlich, dass die Geschwindigkeit im ersten Zeitschritt halbiert werden muss, wenn der Körper aus einer Ruhelage beschleunigt wird. Der erste Teilabschnitt der genauen Geschwindigkeitsfunktion ist für diesen Fall immer durch eine Dreiecksfläche genauer angenähert als durch eine Rechteckfläche. Der Flächeninhalt dieser Dreiecksfläche lässt sich durch eine Rechteckfläche berechnen, indem der Zeitschritt halbiert wird.

$$\text{Fläche}_{\text{Dreieck}} = \frac{(v_0 \cdot \Delta t)}{2}$$

Durch die Halbierung des ersten Zeitschritts wird die Geschwindigkeitsfunktion nachfolgend immer als Mittelwert der Stützstellen Δt angenähert (Abb. 5.5). Erreicht eine Masse einen Wendepunkt, d.h. der Zuwachs oder die Abnahme der Geschwindigkeit hat ein wechselndes Vorzeichen, hat das keinen Einfluss auf die oben beschriebene Vorgehensweise, da sich der Flächeninhalt unterhalb der Funktion analog des Flächeninhalts der Rechteckflächen berechnet, nämlich $\Delta t \cdot v_{\text{Mitte}}$.

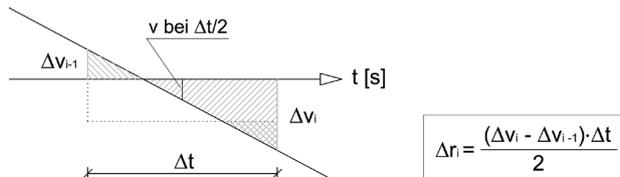


Abb. 5.6 Vorzeichenwechsel bei Geschwindigkeit und Weg

Der zurückgelegte Weg wird in den Lageplan eingetragen und bildet aufgrund der neuen Systemgeometrie die Grundlage für den nächsten Zeitschritt.

5.2.5 Eintragen des berechneten Weges im Lageplan: Translation und Zentripetalbewegung

Bei dem zurückgelegten Weg aus der dynamischen Kraft handelt es sich je Zeitschritt immer um eine lineare Wegstrecke. Bei einer reinen Translation kann der berechnete Weg daher ohne weiteren Arbeitsschritt in den Lageplan eingetragen werden.

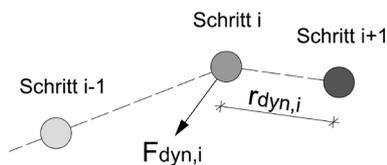


Abb. 5.7 Eintragen der Translation im Lageplan

Handelt es sich jedoch um eine Rotation, gibt es zwei Möglichkeiten den zurückgelegten Weg im Lageplan zu berücksichtigen:

- a- Der aus der dynamischen Kraft ermittelte lineare Weg wird, analog der Geometrie des dynamischen Stabes, als Tangente an die Kreisbahn eingetragen. Zusätzlich dazu wird der Weg Richtung Rotationszentrum « r_{zp} » berechnet, der aus der Zentripetalkraft resultiert und den Körper zurück auf die Kreisbahn führt (Abb. 5.8).

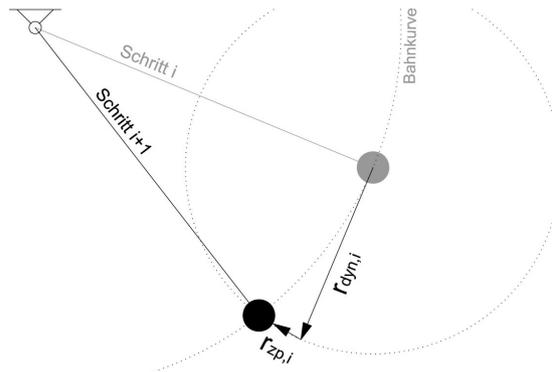


Abb. 5.8 Rotation als Translation tangential + Zentripetalweg

Nachdem die zurückgelegte Wegstrecke $r_{\text{dyn},i}$ analog des obigen Abschnitts 5.2.4 berechnet wurde, erhält man nachfolgend die Zentripetalkraft bzw. den Zentripetalweg in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Körpers $v_{\text{dyn},i}$ [F19].

$$F_{\text{Zp}} = m \cdot \frac{v_{\text{dyn},i}^2}{l} \quad (5.6)$$

Mit:

l Radius der Rotationsbewegung

m Masse des Knotens

Die daraus folgenden kinematischen Größen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg in Richtung Rotationszentrum werden analog der Translation aus der dynamischen Kraft berechnet. Jedoch ist die Geschwindigkeit aufgrund der kontinuierlich andauernden Richtungsänderung der Zentripetalkraft immer wie eine Bewegung aus der Ruhelage zu behandeln, d.h. hier wird zur Berechnung des Weges jeder Zeitschritt halbiert und sämtliche Bewegungsgrößen werden wie absolute Größen behandelt (siehe Formel 5.8).

$$a_{\text{zp},i} = \frac{F_{\text{Zp},i}}{m} \quad \text{Zentripetalbeschleunigung} \quad (5.7)$$

$$v_{\text{zp},i} = a_{\text{zp},i} \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad \text{Zentripetalgeschwindigkeit} \quad (5.8)$$

$$r_{\text{zp},i} = v_{\text{zp},i} \cdot \Delta t \quad \text{Zentripetalweg} \quad (5.9)$$

Ist man ausschließlich am Zentripetalweg interessiert, lässt er sich am einfachsten durch Abmessen im Lageplan ermitteln. Alternativ dazu kann man die Formeln 5.6 - 5.9 auch zusammenfassen:

$$r_{\text{zp},i} = \frac{v_{\text{dyn}}^2 \cdot \Delta t^2}{2 \cdot l} \quad (5.10)$$

Da die Zentripetalkraft aufgrund der Betrachtung in Zeitschritten nicht genau auf

das Rotationszentrum zeigt, kann r_{zp} über den Schnittpunkt aus der Bahnkurve und dem Kreis mit dem Radius von r_{dyn} eingetragen werden.

Die Berücksichtigung der Zentripetalkraft ist immer bei der Analyse von Mehrmassensystemen erforderlich, da die Zentripetalkraft eine Relativbeschleunigung zur Nachbarmasse darstellt (hierzu siehe Abschnitt 5.3).

- b- Der aus der dynamischen Kraft ermittelte lineare Weg wird direkt auf der Kreisbahn eingetragen (Abb. 5.9). D.h. die berechnete Wegstrecke bildet nicht wie oben beschrieben die Tangente an die Kreisbahn, sondern eine Sekante. Das ist möglich, weil der zum Rotationszentrum zeigende Weganteil, der den Körper auf die Kreisbahn zwingt, keine Auswirkung auf die zurückgelegte Entfernung hat, sondern lediglich die Bewegungsrichtung ändert. Dieses Vorgehen reduziert den Berechnungsaufwand erheblich, ist formal jedoch weniger elegant, da der berechnete Vektor F_{dyn} eine andere Richtung aufweist, als der nachfolgend eingetragene Weg. Weiterhin ist das Eintragen der zurückgelegten Entfernung als Sekante nur bei Einmassensystemen möglich. Bei Mehrmassensystemen wirkt sich der Zentripetalweg zusätzlich auf das System und die Umlenkkräfte der Massen aus (siehe Abschnitt 5.3).

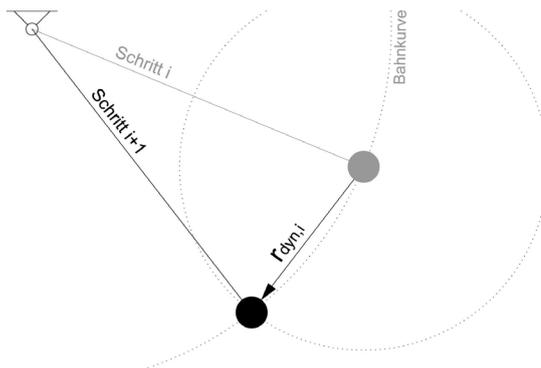


Abb. 5.9 Rotationsbewegung als Sekante

Wird eine Rotationsbewegung mit großer Amplitude und großen Zeitschritten untersucht, empfiehlt es sich, die daraus resultierenden großen Wegabschnitte zusätzlich mit einem Faktor zu belegen, der das Verhältnis zwischen der tatsächlich zurückgelegten Bogenlänge und der berechneten, linearen Entfernung berücksichtigt.

In Realität bewegt sich die Masse auf der Geometrie des Kreisbogens. Diese Geometrie wäre sehr genau angenähert, wenn man extrem kleine Zeitschritte wählte, die daraufhin zu sehr kleinen Wegabschnitten führten. Die kreisförmige Bahnkurve ist so durch einen Polygonzug mit sehr kleinen Abschnitten relativ genau angenähert. Das bedeutet jedoch einen großen Berechnungsaufwand, weswegen es sich lohnt, größere Zeitschritte zu wählen.

Der berechnete Wegabschnitt wird nachfolgend linear und nicht als Bogenlänge eingetragen, was den Körper etwas zu weit fortbewegt, wenn der lineare Wegabschnitt nicht durch besagten Faktor abgemindert wird. In dem Grundlagenbeispiel 2 «Einmassenpendel mit 160° Amplitude» (Abschnitt 5.6.2) wurde dieser Faktor ab einer Wegabweichung >

1 % zwischen Bogenlänglänge und linearer Wegstrecke berücksichtigt. Für die Masse bedeutet das im Lageplan einen überstrichenen Winkel von $\alpha > 25^\circ$. Die Wegstrecke und die Bogenlänge können entweder aus dem Lageplan heraus gemessen oder über die Formel 5.11 der Abbildung 5.10 berechnet werden.

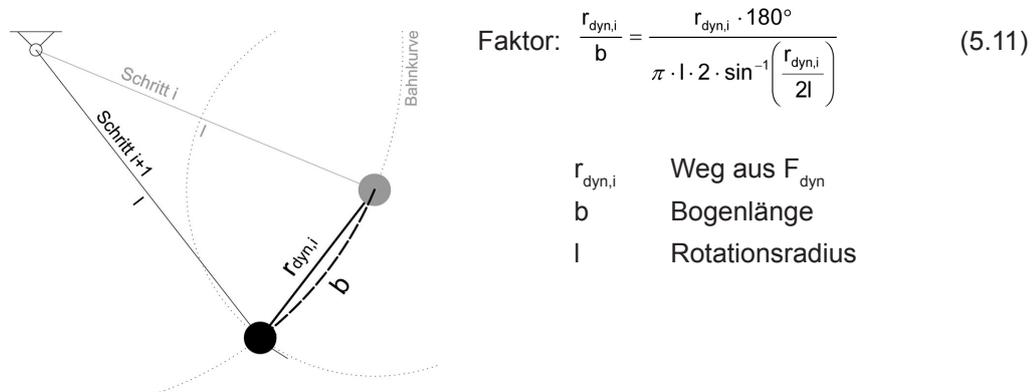


Abb. 5.10 Korrekturfaktor der linearisierten Bewegung

5.3 Auswirkung der Zentripetalkraft auf den Kraftfluss

In einigen Fällen ist es ratsam, nicht auf die Ermittlung der Zentripetalkraft zu verzichten, sondern sie bei der Analyse des Kraftflusses zu berücksichtigen. Das gilt für Mehrmassensysteme, da die Zentripetalkraft bei einer Rotation mit hoher Geschwindigkeit einen erheblichen Einfluss auf die Kräfte des gesamten Systems ausüben kann.

Bei Einmassensystemen wird die Berücksichtigung der Zentripetalkraft erforderlich, wenn die genauen Bindungskräfte zwischen der rotierenden Masse und dem Lager des Rotationszentrums ermittelt werden sollen.

5.3.1 Zentripetalkraft und Stabkräfte in statisch bestimmten Einmassensystemen

Wie bereits in Abschnitt 5.2.5 beschrieben, resultiert die Zentripetalkraft aus einer geometrischen Zwängung. Die Masse wird aufgrund einer Bindung zum Rotationszentrum auf eine Kreisbahn gezwungen. Solange diese Bindung aufrechterhalten wird, existieren Trägheitskräfte, die Zug in dieser Bindung bzw. in dem die Bindung herstellenden Stab hervorrufen. Ist man an den genauen Bindungskräften interessiert, müssen die im Kräfteck ermittelten Stabkräfte aus äußeren Lasten mit der Zentripetalkraft addiert werden:

$$\Sigma S = S_{\text{aus } F} + F_{\text{zp}} \quad (\text{Abb. 5.11})$$

Aus Gründen der Anschaulichkeit ist es möglich, die Zentripetalkraft in den Kräftecken einzutragen. Jedoch kann sie im Kräfteck nicht zur direkten Ermittlung der dynamischen Stabkräfte herangezogen werden, da sie kein Bestandteil der «Lastgeschichte» ist. Aufgrund des ständigen Richtungswechsels der Zentripetalkraft zum Rotationszentrum addiert sie sich nicht auf, wie die Geschwindigkeit und der Weg aus der dynamischen Kraft. Die direkte Berücksichtigung der Zentripetalkraft im Kräfteck zur Ermittlung der dynamischen Kraft würde deshalb zu Fehlern führen. In Abschnitt 5.4 wird deshalb vorgeschlagen, die Auswirkung des Zentripetalweges auf die dynamische Stabkraft durch eine Formel zu berücksichtigen.

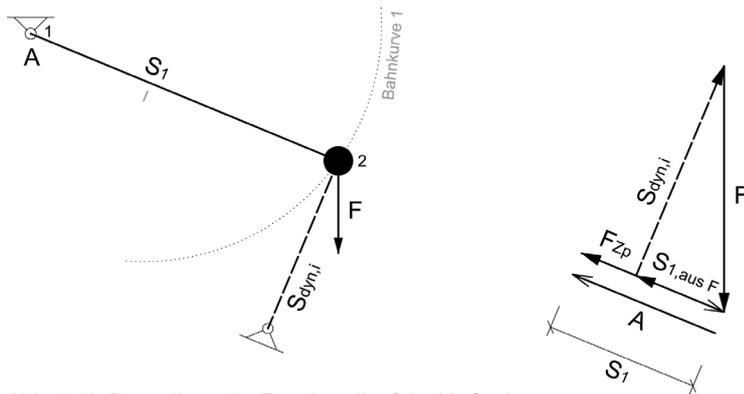


Abb. 5.11 Darstellung der Zentripetalkraft im Krafteck

5.3.2 Zentripetalkraft und Stabkräfte in statisch bestimmten Mehrmassensystemen

Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, hat die Zentripetalkraft bei Einmassensystemen keine Auswirkung auf S_{dyn} und damit keinen Einfluss auf die Fortbewegung des Knotens. Geht man jedoch davon aus, dass das System an Knoten 2 durch einen weiteren Stab mit einer weiteren Masse zu einem Doppelpendel ergänzt würde, hätte die Zentripetalbeschleunigung der oberen Masse eine Auswirkung auf die untere Masse. Diese Aussage lässt sich für alle Mehrmassensysteme verallgemeinern:

«Die erzwungene Relativbewegung eines Knotens aktiviert Trägheitskräfte an den Massen der benachbarten Knoten».

Deutlich wird das durch die Betrachtung eines etwas weniger komplexen Beispiels (Abbildung 5.12), dem Einmassenpendel, dessen Knoten im Lagerpunkt zusätzlich nach oben beschleunigt wird (= erzwungene Relativbewegung von Knoten 1 zu Knoten 2).

Ohne die aufgebrachte Beschleunigung a_1 an Knoten 1 bestünde das Krafteck an Knoten 2 lediglich aus dem unteren Teil « $F_2 - S_{1,aus F_2} - S_{dyn2}$ ». Die Beschleunigung an Knoten 1 ruft jedoch Trägheitskräfte an Knoten 2 hervor, da es sich um eine «erzwungene Relativbewegung» handelt. Diese Trägheitskraft ergänzt das Krafteck durch den Vektor $a_1 \cdot m$, was sich auch auf die dynamische Stabkraft S_{dyn} auswirkt.

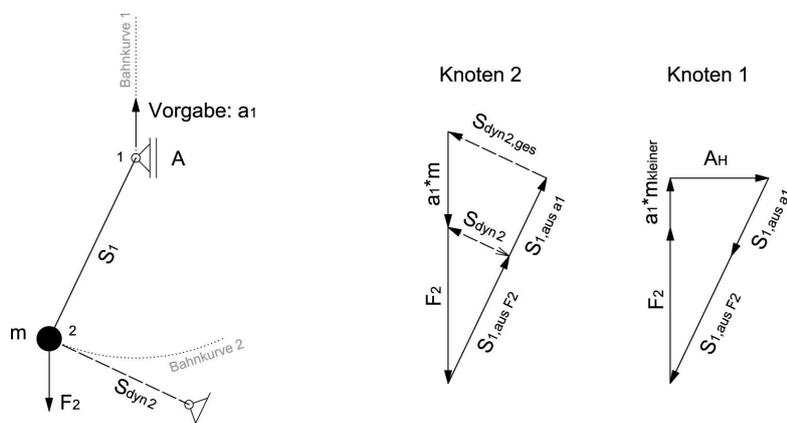


Abb. 5.12 Berücksichtigung von Relativbewegungen (siehe auch Beispiel 3)

Durch die Relativbeschleunigung a_1 wird $S_{\text{dyn}2}$ größer ($= S_{\text{dyn}2,\text{ges}}$), was gleichbedeutend mit einer größeren zurückgelegten Wegstrecke ist. Das legt den Schluss nahe, dass die Periodendauer einer solchen Schwingung bei steigender Beschleunigung des Nachbarknotens kleiner würde. Diese Annahme wird in Grundlagenbeispiel 3: «Einmassenpendel mit zusätzlicher Lagerbeschleunigung» genauer untersucht und bestätigt.

Relativbewegungen dieser Art können in Mehrmassensystemen auch durch die Zentripetalkraft entstehen, wenn die rotierende Masse durch die dynamische Kraft vorerst linear angetrieben und nachfolgend durch eine Zentripetalbeschleunigung auf die Kreisbahn gezwungen wird. Aufgrund dieser erzwungenen Relativbewegung wird ebenfalls die träge Masse des Nachbarknotens aktiviert. Die zusätzlichen Stabkräfte aus der Massenträgheit des Nachbarknotens haben in Mehrmassensystemen auch einen Rückkopplungseffekt auf den die Relativbewegung verursachenden Knoten, der die dynamische Stabkraft erhöhen oder abmindern kann.

Um diesen Rückkopplungseffekt von Relativbewegungen anschaulich zu beschreiben, wird nachfolgend das Kräftegleichgewicht bzw. die Bewegung eines Doppelpendels für einen Zeitschritt analysiert. Hierbei werden beide Knoten ausschließlich durch die Gravitationsbeschleunigung angetrieben. In einem ersten Schritt werden dynamische Stäbe nur in Richtung der Rotationsbewegung eingetragen. Dadurch erhält man ein statisch bestimmtes System, das durch Stabwerkmodelle einfach zu analysieren ist.

Lageplan

Krafteck: Maßstab: 1 cm = ... KN
Umfahrungssinn: 

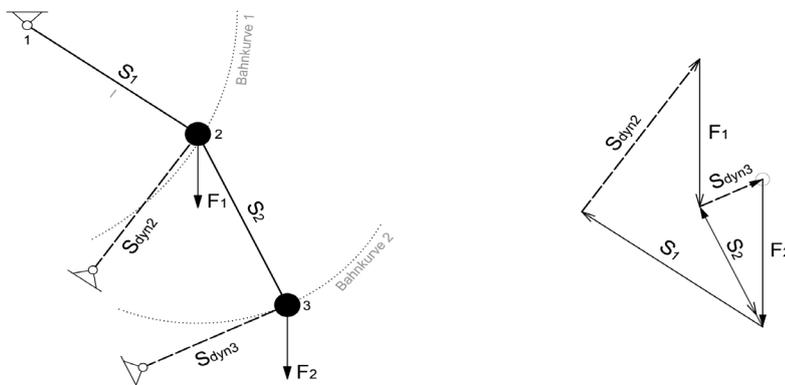


Abb. 5.13 Doppelpendel: Lageplan und Krafteck

Startet man die Betrachtung durch ein Krafteck an Knoten 3, bleibt in Abbildung 5.13 unberücksichtigt, dass sich in der Realität Knoten 2 relativ zu Knoten 3 bewegt. D.h., es muss ein Weg gefunden werden, die relative Beschleunigung von Knoten 2 zu Knoten 3 zu ermitteln. Genauso verhält es sich, wenn an Knoten 2 begonnen wird. Die Bewegung beider Massen beeinflusst die jeweils andere. Zur Verdeutlichung dieser Aussage werden zwei Extremfälle betrachtet:

- Fall 1) Annahme: Knoten 2 ist keine schwingende Masse, sondern ein Festauflager. Aufgrund der Gewichtskraft der unteren Masse wird, analog eines Einmassenpendels, eine Kraft über das Seil an den oberen Knoten geleitet.

Fall 2) Würde sich Knoten 2 im freien Fall abwärts bewegen, fielen beide Massen gleich schnell. Aus diesem Grund würde die untere Masse keine Gewichtskraft über das Seil an den oberen Knoten abgeben. Die Seilkraft wäre null und ebenso die Umlenkkräfte S_{dyn2} . Es handelt sich somit nicht um eine Rotation, sondern um eine reine Translation beider Massen. D.h. Masse 2 und 3 bewegten sich parallel zueinander im freien Fall.

Die Realität liegt zwischen den betrachteten Extremfällen. Die obere Masse bewegt sich mit einer Beschleunigung kleiner als $9,81 \text{ m/s}^2$ abwärts. Wie schnell, hängt wiederum von der Kraft ab, die von der unteren Masse an den oberen Knoten abgegeben wird. Das wiederum hängt von der Beschleunigung ab, mit der die obere Masse fällt ... usw. Somit kann vorab nicht eindeutig definiert werden, wie weit sich die obere Masse abwärts bewegt und von der unteren Masse beschleunigt wird. Aus diesem Grund muss die Größe der Seilkraft 2 iterativ ermittelt werden. Hierfür wird der vertikale Anteil von S_{dyn2} an den unteren Knoten angetragen und von der unteren Gewichtskraft « F_2 » abgezogen. Mit dem Differenzwert wird die Seilkraft, die den oberen Knoten belastet, ermittelt usw..

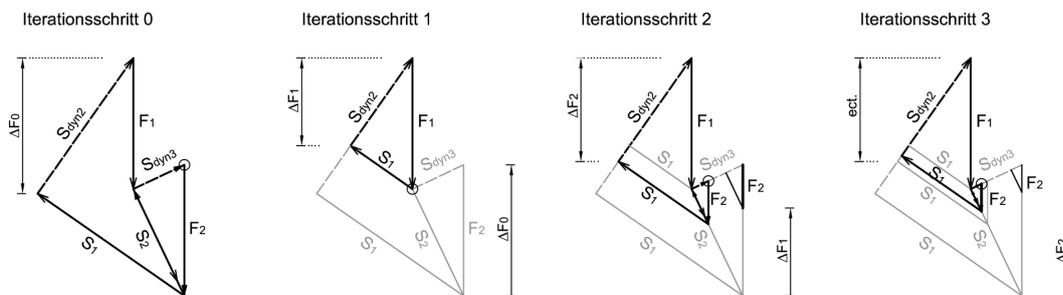


Abb. 5.14 Doppelpendel: Kräfteck mit vier Iterationsschritten zur Berücksichtigung von relativen Bewegungen

Dieses iterative Vorgehen zeigt die Beeinflussung des einen Knotens durch die Bewegung des anderen Knotens und veranschaulicht die allgemeingültige Aussage zu dem Einfluss von Relativbewegungen eines Systems. Grundsätzlich ist dieses iterative Vorgehen jedoch ziemlich aufwändig und lediglich bei statisch bestimmten Systemen beherrschbar. Statisch bestimmt ist das Doppelpendel, weil die Bewegung der unteren Masse in Richtung von S_2 nicht durch einen dynamischen Stab modelliert wurde. Ordnet man einen weiteren dynamischen Stab in Richtung der Stabachse 2 an, werden sämtliche Knotenbewegungen ohne Iteration direkt durch einen dynamischen Stab darstellbar, da der Knoten in allen Richtungen eine geführte Bewegung ausführt. Das System wird dadurch jedoch statisch einfach überbestimmt. Das hat zur Folge, dass erst eine statisch überbestimmte Kraftgröße ermittelt werden muss, bevor mit den dynamischen Stabwerkmodellen fortgefahren wird.

5.4 Kraftfluss in statisch einfach überbestimmten Mehrmassensystemen

Nachfolgend wird eine Vorgehensweise vorgeschlagen, die dynamische Stabwerkmodelle mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte verbindet, um so einfach statisch überbestimmte Tragwerke analysieren zu können. Das Vorgehen wird allgemein an einem Bogen hergeleitet und nachfolgend auf alle statisch einfach überbestimmten Systeme mit beliebiger Geometrie verallgemeinert. In den nachfolgenden Grundlagenbeispielen findet das Vorgehen Anwendung bei den Beispielen 4 - 6: Bogen mit variierender Belastung und Anfangsgeometrie. Die Ergebnisse der Grundlagenbeispiele werden in Kapitel 6 kontrolliert bevor das Verfahren in Kapitel 7 bei der Analyse des versagenden Glasbogens mit Zugband zur Anwendung kommt.

5.4.1 Dynamische Kräfte aus äußeren Lasten

Der in Abbildung 5.15 dargestellte Bogen simuliert, gemäß der in Kapitel 4 beschriebenen Vereinfachung, einen Bogen mit fünf Knoten. Er ist aufgrund der gelenkigen Knotenpunkte kinematisch und hat bei der hier dargestellten allgemeinen Herleitung eine beliebige Geometrie.

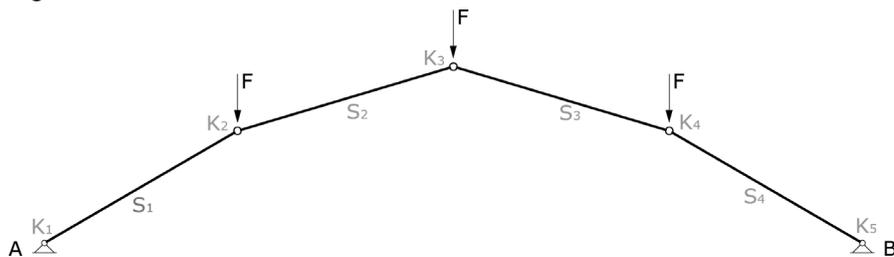


Abb. 5.15 Kinematisches System eines versagenden Bogens, beliebige Geometrie

Um den Lageplan für den ersten Zeitschritt zu zeichnen, werden die dynamischen Stäbe an allen Knoten eingetragen, die eine Wegstrecke zurücklegen, wodurch das kinematische System einfach statisch überbestimmt wird.

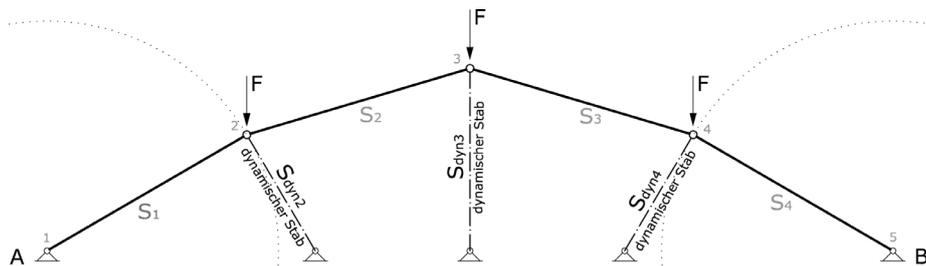


Abb. 5.16 Lageplan des dynamischen Stabwerkmodells, Zeitpunkt 0

Zur Berechnung der statisch Überzähligen wird in dieser Arbeit eine Kombination aus Stabwerkmodellen mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK) vorgeschlagen. Als statisch Überzählige wird vorerst die dynamischen Stabkraft 3 (S_{dyn3}) gewählt und ausgelöst.

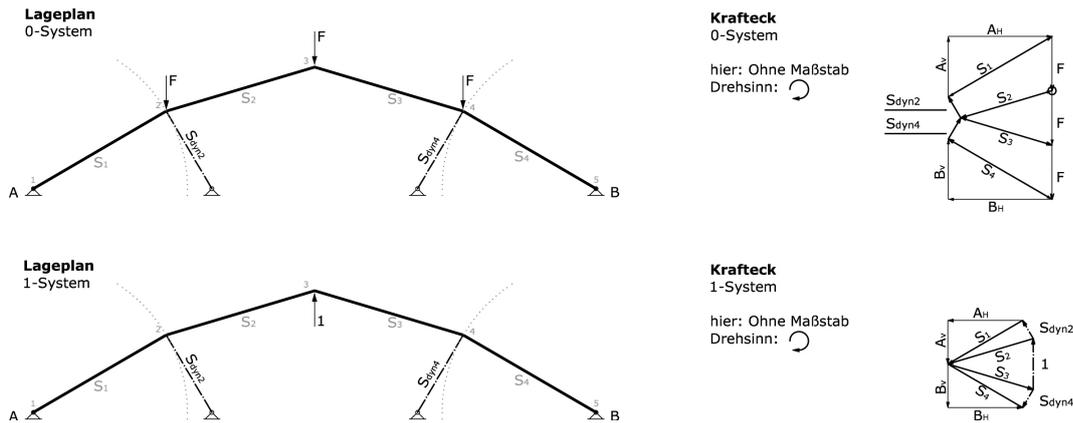


Abb. 5.17 Ermittlung der Stab- und dynamischen Kräfte bei beliebiger Bogengeometrie

Für den allgemeinen Fall mit ungleichen polygonalen Abschnitten ergibt sich durch das Koppeln des 0- und des 1-Systems für die dynamische Stabkraft 3:

$$S_{dyn3} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\int \bar{S}_i' \cdot \bar{S}_i + \int \bar{S}_{dyn,i}' \cdot \bar{S}_{dyn,i}}{\int \bar{S}_i \cdot \bar{S}_i + \int \bar{S}_{dyn,i} \cdot \bar{S}_{dyn,i}} = \frac{\frac{(S_1' \bar{S}_1) \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{(S_2' \bar{S}_2) \cdot l_2}{E_2 A_2} + \frac{(S_3' \bar{S}_3) \cdot l_3}{E_3 A_3} + \frac{(S_4' \bar{S}_4) \cdot l_4}{E_4 A_4} + \frac{S_{dyn2}' \cdot \bar{S}_{dyn2}}{k_{F2}} + \frac{S_{dyn4}' \cdot \bar{S}_{dyn4}}{k_{F4}}}{\frac{(\bar{S}_1 \bar{S}_1) \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{(\bar{S}_2 \bar{S}_2) \cdot l_2}{E_2 A_2} + \frac{(\bar{S}_3 \bar{S}_3) \cdot l_3}{E_3 A_3} + \frac{(\bar{S}_4 \bar{S}_4) \cdot l_4}{E_4 A_4} + \frac{\bar{S}_{dyn2} \cdot \bar{S}_{dyn2}}{k_{F2}} + \frac{\bar{S}_{dyn4} \cdot \bar{S}_{dyn4}}{k_{F4}} + \frac{1 \cdot 1}{k_{F2}}}$$

Mit: (5.12)

- S_i' Stabkraft i im 0-System
- \bar{S}_i Stabkraft i im 1-System
- l_i Stablänge
- EA Dehnsteifigkeit der Stäbe des Bogens
- S_{dyn k, i}' dynamische Stabkraft an Knoten k, im Zeitschritt i, im 0-System
- $\bar{S}_{dyn k, i}$ dynamische Stabkraft an Knoten k, im Zeitschritt i, im 1-System
- k_{F, i} Federkonstante der dynamischen Stäbe

Obige Formel ist für sämtliche Geometrien, Lasten und Steifigkeitsverteilungen anwendbar. Es ist jedoch möglich, diese Formel für verschiedene Anwendungen stark zu vereinfachen.

- a- Symmetrische Systeme mit symmetrischen Lasten
Für symmetrische Systeme, die analog Kapitel 4 polygonal vereinfacht werden, gilt:

$$l_1 = l_4, S_1' = S_4', \bar{S}_1 = \bar{S}_4 \text{ und } l_2 = l_3, S_2' = S_3', \bar{S}_2 = \bar{S}_3 \text{ und } S_{dyn2}' = S_{dyn4}', \bar{S}_{dyn2} = \bar{S}_{dyn4}$$

Weiterhin sind aufgrund gleicher Massen an den Knotenpunkten die Steifigkeiten der dynamischen Stäbe gleich groß: k_{F1} = k_{F2} = k_{F3} = k_F

Die Symmetrie lässt es zu, nur jeden zweiten Term (dafür aber mit dem Faktor zwei) zu berücksichtigen.

$$S_{\text{dyn3}} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{2(S'_1 \cdot \bar{S}_1) \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{2(S'_2 \cdot \bar{S}_2) \cdot l_2}{E_2 A_2} + \frac{2(S'_{\text{dyn2}} \cdot \bar{S}_{\text{dyn2}})}{k_F}}{\frac{2(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_1) \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{2(\bar{S}_2 \cdot \bar{S}_2) \cdot l_2}{E_2 A_2} + \frac{2(\bar{S}_{\text{dyn2}} \cdot \bar{S}_{\text{dyn2}}) + 1}{k_F}} \quad (5.13)$$

b- $EA \gg k_{F,i}$

In den meisten Fällen ist die Dehnsteifigkeit der realen Stäbe in Relation zur Steifigkeit der weichen dynamischen Stäben sehr groß ($EA \gg k_F$). Die Terme der Bogenstabkräfte spielen für das Ergebnis somit eine vernachlässigbare Rolle und können gestrichen werden. In diesen Fällen kürzt sich weiterhin die Federsteifigkeit der dynamischen Stäbe heraus, wenn die Massen an allen Knoten gleich groß sind. Genauso verhält es sich auch, wenn die Materialeigenschaften, d.h. die Steifigkeiten der Stäbe nicht berücksichtigt werden. Die Berechnung von S_{dyn3} vereinfacht sich dann zu nachfolgenden Formeln:

Beliebige Geometrie, sym. Lasten

sym. Geometrie, sym. Lasten

$$S_{\text{dyn3}} = \frac{(S'_{\text{dyn2}} \cdot \bar{S}_{\text{dyn2}}) + (S'_{\text{dyn4}} \cdot \bar{S}_{\text{dyn4}})}{(\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + (\bar{S}_{\text{dyn4}})^2 + 1} \quad S_{\text{dyn3}} = \frac{2(S'_{\text{dyn2}} \cdot \bar{S}_{\text{dyn2}})}{2(\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + 1} \quad (5.14)$$

Alle weiteren Varianten lassen sich aus der allgemeinen Formel 5.12 ableiten.

Da die Steifigkeit der dynamischen Stäbe zeitabhängig ist, kann diese Vereinfachung nicht angewandt werden, wenn die Analyse eines sehr kurzen Zeitschritts erforderlich ist. Das ist in den seltenen Fällen erforderlich, bei denen in sehr kurzer Zeit hohe Kräfte in das System eingebracht werden. Ein Beispiel hierfür ist die Expansionskraft bei Glasbruch (siehe Zeitschritt 1, Kapitel 7) oder das Zusammenziehen des vorgedehnten Zugbandes (Zeitschritt 2+3, Kapitel 7).

Aus der ermittelten Größe der statisch Überzähligen S_{dyn3} lassen sich im Krafteck sämtliche Kräfte, incl. der dynamischen Kräfte eindeutig bestimmen (Abbildung 5.18).

Krafteck

hier: ohne Maßstab
Umfahrungssinn: 

$$S_{\text{dyn}3} = \frac{2 \cdot (S'_{\text{dyn}2} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}2})}{2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn}2})^2 + 1}$$

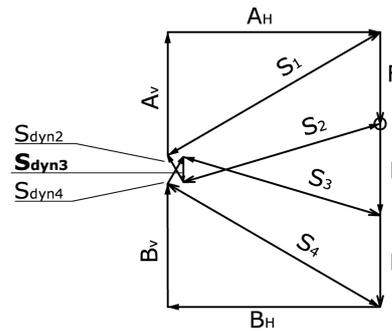


Abb. 5.18 Ermittlung der dynamischen Kräfte und der Bogenkräfte im Krafteck

Die dynamischen Kräfte haben die Kraftgröße der im Krafteck ermittelten dynamischen Stäbe S_{dyn} , zeigen jedoch in die entgegengesetzte Richtung.

5.4.2 Dynamische Kräfte aus Zentripetalbewegungen

Die durch das beschriebene Vorgehen über S_{dyn} ermittelte lineare Wegstrecke der einzelnen Massen sollte in einem weiteren Schritt «korrigiert» werden, um die Rotation der Knoten 2 und 4 um die Festauflager zu berücksichtigen. Sie legen neben der beschriebenen linearen Wegstrecke aus der dynamischen Kraft einen zusätzlichen Weg Richtung Rotationszentrum zurück (Zentripetalweg gem. Abschnitt 5.2.5).

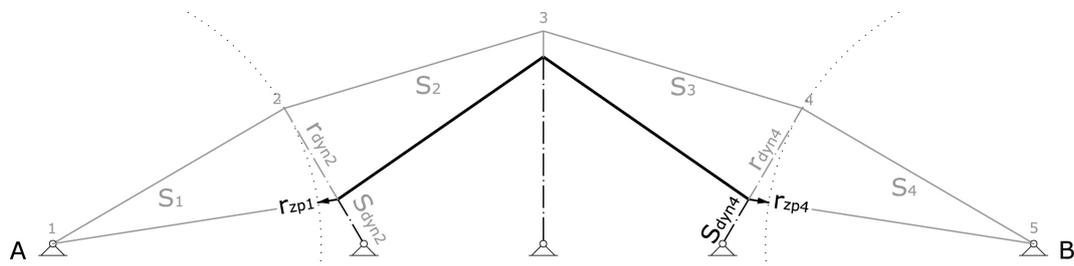


Abb. 5.19 Dynamische Stabkräfte aus dem Zentripetalweg (geometrischem Zwang)

Die einfachste und am wenigsten aufwendige Möglichkeit den Einfluss dieser geometrischen Zwängung auf den Kraftfluss zu ermitteln, ist die Berechnung über den zurückgelegten Zentripetalweg (Formel 5.10). Auch hier wird $S_{\text{dyn}3}$ als statisch überbestimmte Kraftgröße ausgelöst. Das hat den Vorteil, dass das 1-System nicht erneut berechnet werden muss. Die Kraftgrößen können der Analyse aus Abschnitt 5.4.1, Abbildung 5.17b entnommen werden. Auch hier wird vorerst die allgemeingültige Formel aufgestellt und nachfolgend mögliche Vereinfachungen aufgezeigt:

$$\Delta S_{\text{dyn}3} = \frac{(r_{\text{zp}1} \cdot \bar{S}_1) + (r_{\text{zp}4} \cdot \bar{S}_4)}{\frac{(\bar{S}_1)^2 \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{(\bar{S}_2)^2 \cdot l_2}{E_2 A_2} + \frac{(\bar{S}_3)^2 \cdot l_3}{E_3 A_3} + \frac{(\bar{S}_4)^2 \cdot l_4}{E_4 A_4} + \frac{(\bar{S}_{\text{dyn}2})^2}{k_{F2}} + \frac{l^2}{k_{F3}} + \frac{(\bar{S}_{\text{dyn}4})^2}{k_{F4}}} \quad (5.15)$$

Mögliche Vereinfachungen ergeben sich analog der Ermittlung von S_{dyn} aus äußeren Kräften, aufgrund symmetrischer Systemgeometrien oder verhältnismäßig großen Stabsteifigkeiten.

a) Symmetrische Systeme, symmetrische Lasten:

$$\Delta S_{\text{dyn3}} = \frac{2(r_{\text{zp1}} \cdot \bar{S}_1)}{\frac{2(\bar{S}_1)^2 \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{2(\bar{S}_2)^2 \cdot l_2}{E_2 A_2} + \frac{2(\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + 1}{k_F}} \quad (5.16)$$

b) $EA \gg k_{F,i}$

Außerdem können bei großen Steifigkeitsunterschieden zwischen realen Stäben und virtuellen dynamischen Stäben die ersten zwei Terme des Nenners gestrichen werden:

Beliebige Geometrie, sym. Lasten

$$\Delta S_{\text{dyn3}} = \frac{(r_{\text{zp1}} \cdot \bar{S}_1) \cdot (r_{\text{zp4}} \cdot \bar{S}_4)}{\left[(\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + 1 + (\bar{S}_{\text{dyn4}})^2 \right] / k_F}$$

sym. Geometrie, sym. Lasten

$$\Delta S_{\text{dyn3}} = \frac{2 \cdot (r_{\text{zp1}} \cdot \bar{S}_1)}{\left[2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + 1 \right] / k_F} \quad (5.17)$$

Alle weiteren Varianten lassen sich aus der allgemeinen Formel 5.15 ableiten.

Ist die dynamische Stabkraft durch den Zentripetalweg ermittelt, kann das in Abschnitt 5.4.1 (Abb. 5.18) gezeichnete Kraffteck durch ΔS_{dyn3} ergänzt werden. Die Stabkräfte, die aus S_{dyn3} folgen (also aus äußerer Belastung) sind in nachfolgendem Kraffteck grau gezeichnet, die gesamten Stabkräfte « $S_{\text{dyn3,ges}} = S_{\text{dyn3}} + \Delta S_{\text{dyn3}}$ » schwarz.

Kraffteck

hier: ohne Maßstab

Umfahrungssinn: 

$$S_{\text{dyn3}} = \frac{2 \cdot (\bar{S}'_{\text{dyn2}} \cdot \bar{S}_{\text{dyn2}})}{2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + 1} \quad \left| \quad \Delta S_{\text{dyn3}} = \frac{2(r_{\text{zp1}} \cdot \bar{S}_1)}{\left[2(\bar{S}_{\text{dyn2}})^2 + 1 \right] / k_F}$$

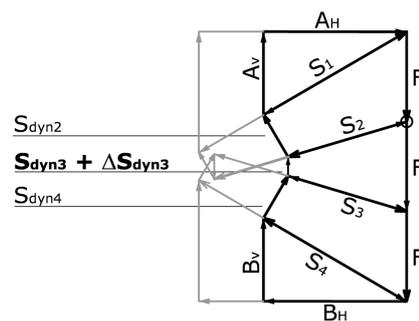


Abb. 5.20 Kraffteck der Abb. 5.18 mit zusätzlicher Kraft durch Zentripetalbewegung

5.5 Verallgemeinerung der Vorgehensweise aus 5.4

In Abschnitt 5.4 wurde das Verfahren «dynamisches Stabwerkmodell» in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte zur Berechnung eines statisch einfach überbestimmten Tragwerks vorgestellt. Zur Herleitung der Formeln wurde ein Bogen mit Zugband herangezogen; als statisch Überbestimmte die dynamische Stabkraft 3 gewählt.

Grundsätzlich kann diese Vorgehensweise bei jedem beliebigen, statisch einfach überbestimmten System angewandt werden. Beliebiger ist sowohl die Geometrie als auch die Belastung. Weiterhin kann statt des dynamischen Stabes 3 auch jeder andere dynamische Stab ausgelöst und berechnet werden. In diesem Fall werden die Indizes der dynamischen Stabkräfte einfach an die gewünschte Berechnungssituation angeglichen. Beispiel: Für ein asymmetrisches System mit drei dynamischen Stäben wird die dynamische Stabkraft 2 gesucht. In der Formel 5.14a werden die Indizes der Stabkräfte dahingehend ausgetauscht (siehe Formel unten) und das Kräfteck des 0- und 1-Systems analog angeglichen:

$$S_{\text{dyn}2} = \frac{\left(S'_{\text{dyn}3} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}3} \right) + \left(S'_{\text{dyn}4} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}4} \right)}{\left(\bar{S}_{\text{dyn}3} \right)^2 + \left(\bar{S}_{\text{dyn}4} \right)^2 + 1}$$

Dieses Vorgehen ist für alle oben angegebenen Formeln und Kräftecke gültig.

Bei symmetrischen Systemen kann es sinnvoll sein, einen der dynamischen Stäbe auszulösen, der um ein Lager rotiert. So könnte ΔS_{dyn} ausgerechnet werden, bevor das Kräfteck aus S_{dyn} gezeichnet wird, um nachfolgend die Summe beider Kräfte auf einmal im Kräfteck darzustellen.

5.6 Grundaufgaben mit dynamischen Stabwerkmodellen

Der versagende Glasbogen mit Zugband ist ein kinematisches Mehrmassensystem, das unter Berücksichtigung der komplexen Materialeigenschaften von brechendem Glas analysiert wird. Um die Vorgehensweise der dynamischen Stabwerkmodelle vorab an weniger komplexen Systemen zu überprüfen, werden nachfolgend sechs Grundaufgaben ohne Berücksichtigung der Materialeigenschaften mit dynamischen Stabwerkmodellen untersucht und nachfolgend in Kapitel 6 kontrolliert.

In den Beispielen 1 bis 3 werden Einmassenpendel mit unterschiedlichen Auslenkungen bzw. Festauflager und beschleunigtem Auflager untersucht. Bei den Aufgaben 4 bis 6 handelt es sich um die Analyse von Bögen, die als Mehrmassensysteme mit variierender Geometrie und Belastung modelliert werden.

Die Darstellung der kompletten Bewegung erfolgt dabei jeweils in einem Lageplan. Diese Abbildung setzt sich aus den in Abschnitt 5.1 bis 5.4 beschriebenen Berechnungsschritten zusammen. Um die Lastgeschichte in dem zusammengefassten Lageplan anschaulicher darzustellen, nehmen die Grauwerte mit dem Bewegungsablauf zu, d.h. sie werden mit ansteigenden Zeitschritten dunkler. So wird graphisch ablesbar, wo sich der Startpunkt befindet und wie sich der Ablauf gestaltet.

Dem Lageplan zugehörig sind jeweils die Krafftecke der einzelnen Zeitschritte und die daraus resultierenden, zurückgelegten Wege abgebildet. Da in diesem Teil der Arbeit nur die wichtigsten Daten und Darstellungen zusammengefasst sind, befindet sich im Anhang zu jedem Beispiel eine umfassende Tabelle mit allen berechneten Werten, Formeln und kinematischen Größen.

5.6.1 Beispiel 1: Einmassenpendel mit kleiner Amplitude (10°)

Das erste Beispiel wurde gewählt, um die Vorgehensweise mit dynamischen Stabwerkmodellen an einem weniger komplexen Einmassensystem zu überprüfen und darzustellen. Die Amplitude des Ausschlags beträgt 10°, damit das Ergebnis der dynamischen Stabwerkmodelle mit linearisierten Bewegungsgleichungen und hoher Genauigkeit kontrolliert werden kann. Bei größeren Amplituden würden die Ergebnisse zu stark von der Realität abweichen, wenn die Berechnung mit linearisierten Differentialgleichungen durchgeführt würde.

Die Wahl der Pendellänge unterlag mit 63,6 cm sehr praktischen Erwägungen. Einerseits sollte das nachträglich gebaute Tragmodell zur Kontrolle der Ergebnisse (Kapitel 6) eine handhabbare Größe haben, andererseits sollte für die halbe Periode der Pendelbewegung eine gerade Sekundenanzahl herauskommen, um für die dynamischen Stabwerkmodelle mit einfachen, gleichen Teilschritten rechnen zu können:

$$\frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{0,636 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 0,80 \text{ s}$$

T_0	Periodendauer
l	Pendellänge
g	Erdbeschleunigung

Obwohl die Masse bei einem Einmassenpendel aufgrund gleicher Größe von schwerer und träger Masse irrelevant ist, wurde bei den Lösungen mit dynamischen Stabwerkmodellen mit einer definierten Masse gerechnet, um bei der grundsätzlichen Vorgehensweise einer einheitlichen Systematik zu folgen. Die Masse beträgt analog des späteren Tragmodells 0,85 kg.

In Abbildung 5.21 sind sämtliche Lagepläne in einer Darstellung zusammengefasst. Die nebenstehende Tabelle zeigt die Kraftecke und die Ergebnisse der kinematischen Zustandsgrößen.

Die Berechnung wurde mit den Mittelwertsbeschleunigungen durchgeführt (gem. Abschnitt 5.2.4). Die zwei in Abbildung 5.21a dargestellten Berechnungsschritte dienen somit lediglich der Ermittlung der mittleren Beschleunigung des ersten Zeitschritts.

Der berechnete Weg wird analog Abschnitt 5.2.5 b als Sekante in den Lageplan eingetragen, d.h. die Zentripetalkraft wird nicht gesondert betrachtet.

Zur Ermittlung der dynamischen Kraft wird das Eintragen der dynamischen Stäbe im Lageplan übersprungen und die Kraft « F_{dyn} » direkt in die Kraftecke eingetragen.

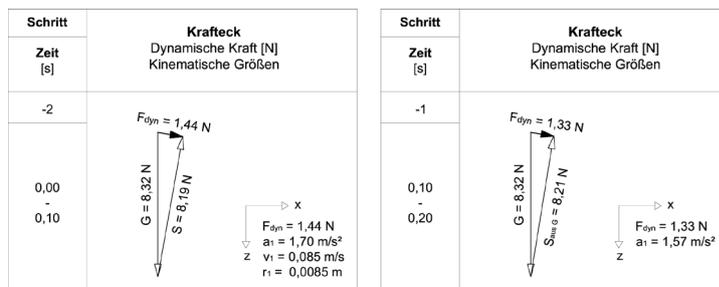
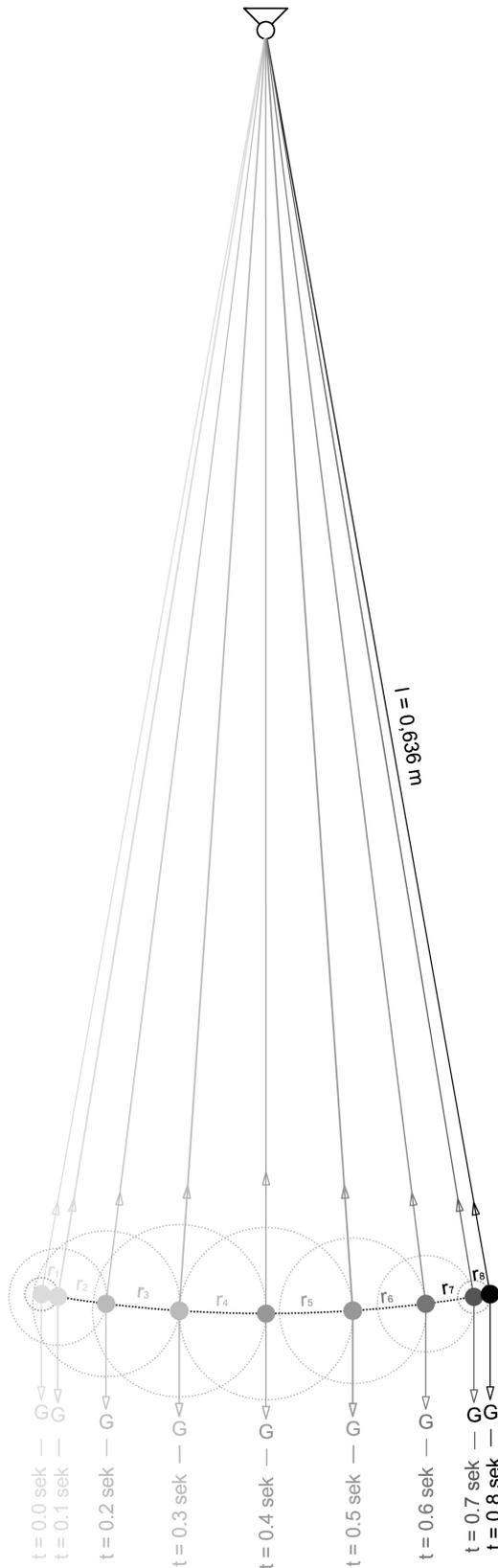


Abb. 5.21a Berechnung der Durchschnittsbeschleunigung

Lageplan

$t = 0,00 \text{ s} - 0,80 \text{ s}$

$l = 0,636 \text{ m}, m = 0,85 \text{ kg}$



b)

Kraftecke

Maßstab: 1 cm = 4 N

Schritt	Zeit [s]	Kraftecke Dynamische Kraft [N] Kinematische Größen
1	0,00 - 0,10	Mittelwert der Beschleunigung $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $\varnothing a_1 = 1,64 \text{ m/s}^2$ $v_1 = 0,085 \text{ m/s}$ $r_1 = 0,0085 \text{ m}$
2	0,10 - 0,20	$F_{dyn} = 1,34 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,21 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = 1,34 \text{ N}$ $a_2 = 1,58 \text{ m/s}^2$ $v_2 = 0,24 \text{ m/s}$ $r_2 = 0,024 \text{ m}$
3	0,20 - 0,30	$F_{dyn} = 1,03 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,26 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = 1,03 \text{ N}$ $a_3 = 1,22 \text{ m/s}^2$ $v_3 = 0,36 \text{ m/s}$ $r_3 = 0,036 \text{ m}$
4	0,30 - 0,40	$F_{dyn} = 0,56 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,30 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = 0,56 \text{ N}$ $a_4 = 0,66 \text{ m/s}^2$ $v_4 = 0,43 \text{ m/s}$ $r_4 = 0,043 \text{ m}$
5	0,40 - 0,50	$F_{dyn} = 0,00 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,32 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = 0,00 \text{ N}$ $a_5 = 0,00 \text{ m/s}^2$ $v_5 = 0,43 \text{ m/s}$ $r_5 = 0,043 \text{ m}$
6	0,50 - 0,60	$F_{dyn} = 0,56 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,30 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = -0,56 \text{ N}$ $a_6 = -0,66 \text{ m/s}^2$ $v_6 = 0,36 \text{ m/s}$ $r_6 = 0,036 \text{ m}$
7	0,60 - 0,70	$F_{dyn} = 1,03 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,27 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = -1,03 \text{ N}$ $a_7 = -1,21 \text{ m/s}^2$ $v_7 = 0,24 \text{ m/s}$ $r_7 = 0,024 \text{ m}$
8	0,70 - 0,80	$F_{dyn} = 1,34 \text{ N}$ $S_{stat,G} = 8,21 \text{ N}$ $G = 8,32 \text{ N}$ $\begin{matrix} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{matrix}$ $F_{dyn} = -1,34 \text{ N}$ $a_8 = -1,58 \text{ m/s}^2$ $v_8 = 0,08 \text{ m/s}$ $r_8 = 0,008 \text{ m}$

c)

Abb. 5.21 Dynamisches Stabwerkmodell: Einmassenpendel mit 10° Amplitude b) Lageplan c) Kraftecke

5.6.2 Beispiel 2: Einmassenpendel mit großer Amplitude (160°)

In diesem Beispiel wird die Anwendbarkeit dynamischer Stabwerkmodelle bei Rotationsbewegungen mit großen Amplituden überprüft. Die Darstellung sämtlicher Zeitschritte erfolgt wiederum in einer Abbildung. Die Berechnung wurde mit Mittelwertbeschleunigungen durchgeführt.

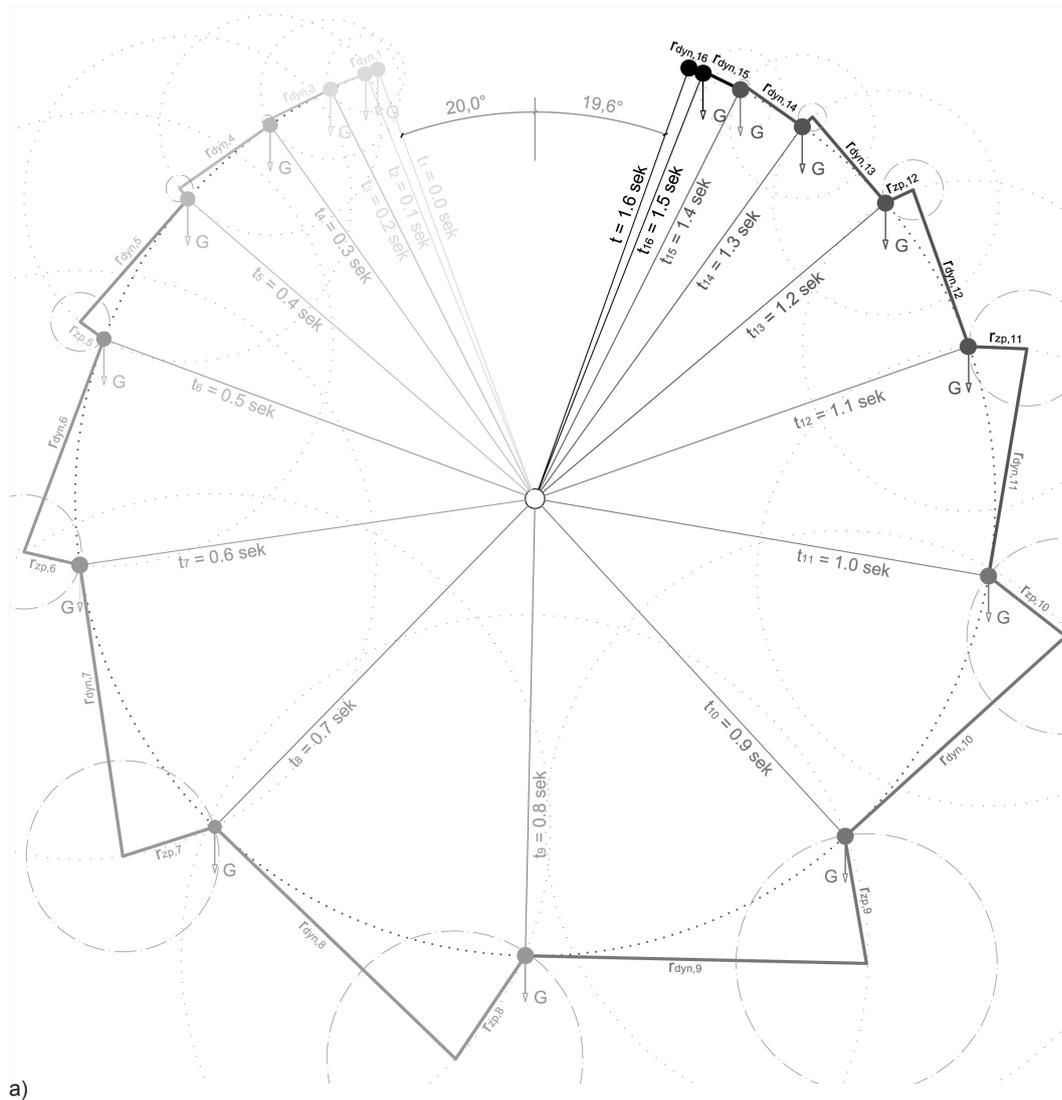
Zur Demonstration der Berechnung der Zentripetalbewegungen wurde das etwas aufwändigere Verfahren gewählt, d.h. die Translation « r_{dyn} » wird als Tangente an die Bahnkurve angetragen und nachfolgend der Zentripetalweg « r_{zp} » zum Rotationszentrum berechnet (Abschnitt 5.2.5 a).

Für die größeren Wegstrecken der Zeitschritte 5 bis 12 wurde die Abweichung zwischen Bogenlänge und linearer Fortbewegung gemäß Abschnitt 5.2.5 (Abb. 5.10) über den Faktor « f » korrigiert.

Lageplan

$t = 0,00 \text{ s} - 1,60 \text{ s}$

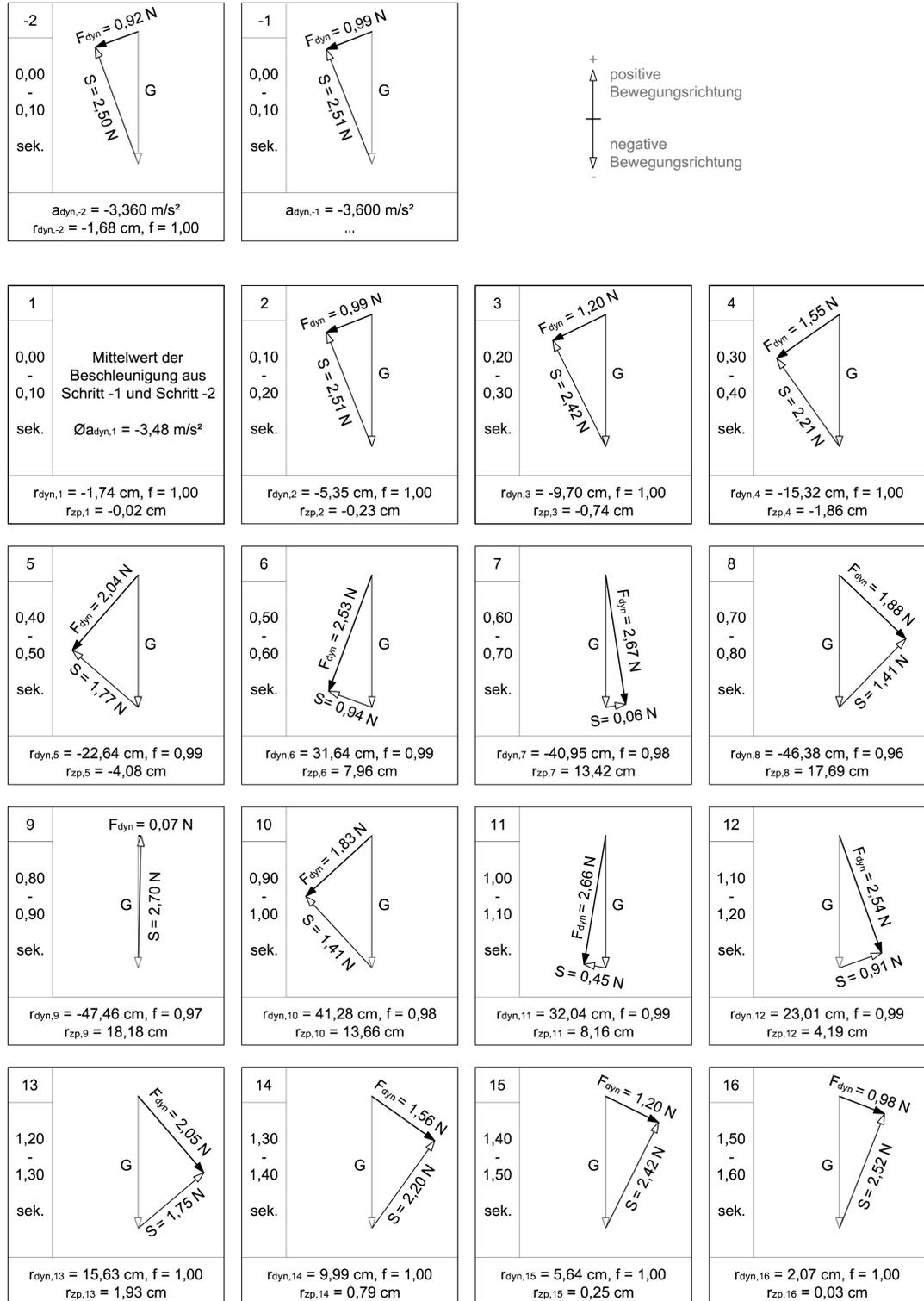
$l = 0,636 \text{ m}, m = 0,275 \text{ kg}$



Berechnung des tangentialen Weges « $r_{dyn,i}$ » gemäß Abschnitt 5.2.4 (incl. Faktor f)
 Berechnung des Abminderungsfaktors « $f = r_{dyn,i} / \text{Bogenlänge}$ » gemäß Abschnitt 5.2.5
 Berechnung des Zentripetalweges « $r_{zp,i}$ » gemäß Abschnitt 5.2.5-a

Kraftecke

Maßstab: 1 cm = 1,33 N, $\Delta t = 0,1$ Sekunden



b)

Abb. 5.22 Dynamisches Stabwerkmodell: Einmassenpendel mit 160° Amplitude (a) Lageplan (b) Kraftecke

5.6.3 Beispiel 3: Einmassenpendel, 10° Amplitude, beschleunigtes Auflager

Das dritte Grundlagenbeispiel dient der Berücksichtigung von Relativbeschleunigungen bei der Analyse mit dynamischen Stabwerkmodellen. Hierfür wird das Beispiel 1 (Einmassenpendel mit Amplitude 10°) wiederholt und das Auflager vertikal mit $a = 3,0 \text{ m/s}^2$ beschleunigt. Diese Zwangsbeschleunigung des Knoten 1 hat eine Trägheitskraft an Knoten 2 zur Folge, die die Seilkraft und damit die dynamische Kraft der Masse steigert. D.h. der Körper legt einen größeren Weg zurück, als ein Körper ohne Relativbewegung des Nachbarknotens. Als Resultat benötigt die Masse weniger Zeit für eine halbe Schwingung. In diesem Beispiel sind das nur 0,70 Sekunden verglichen zu 0,80 Sekunden des vergleichbaren Beispiels ohne Beschleunigung des Auflagers (Beispiel 1).

Für diese Aufgabe wurden nicht Mittelwert- sondern Anfangsbeschleunigungen herangezogen.

Die Translation aus der dynamischen Stabkraft wird als Sekante eingetragen, weswegen die Zentripetalbewegung nicht zusätzlich berechnet wird.

Als Masse wurde $m = 1,0 \text{ kg}$ gewählt. Daraus ergibt sich eine Gewichtskraft von 9,81 N. Die Trägheitskraft aufgrund der Beschleunigung des Auflagers von $a = 3,0 \text{ m/s}^2$ beträgt $T = 3,00 \text{ N}$.

Zur Ermittlung der dynamischen Kraft wird das Eintragen von dynamischen Stäben im Lageplan übersprungen und die resultierende Kraft « F_{dyn} » in den Kraftecken eingetragen. Durch die Vorgabe einer Beschleunigung für das Auflager steigert sich nicht nur die dynamische Kraft der Pendelmasse. Auch das gesamte System erfährt eine Bewegung «nach oben». Diese Bewegung des gesamten Systems wird durch eine getrennte Betrachtung der vertikalen Wegstrecke berücksichtigt, der sowohl die Knotenmasse als auch das Auflager unterliegt.

Die vertikale Aufwärtsbewegung wird in diesem Beispiel mit negativem Vorzeichen beschrieben. Das Vorzeichen der dynamischen Kraft ist durch die horizontale Richtung definiert:

$$-F_{\text{dyn}} \leftarrow \rightarrow + F_{\text{dyn}}$$

5.7 Beispiele 4 - 6: Bögen mit variierenden Geometrien und Lasten

Ein Beitrag zur Formfindung im Hinblick auf die Resttragfähigkeit

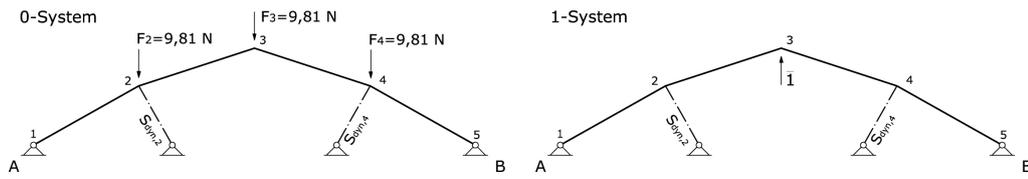
In den drei nachfolgenden Beispielen werden Bögen mit unterschiedlichen Geometrien und Lasten analysiert. Alle drei Systeme simulieren hierbei Glasbögen, bei denen durch plötzlichen Bruch Gelenke entstehen. Diese werden bei der Untersuchung mit Stabwerkmodellen jeweils in den Knickpunkten des Systems eingeführt, wodurch der kinematische Prozess beginnt. Die Analyse des Bewegungsprozesses erfolgt in diesem Kapitel jedoch ohne die Berücksichtigung der Materialeigenschaften, d.h. die Steifigkeitsverteilung der einzelnen Bauteile wird lediglich dahingehend berücksichtigt, dass die dynamischen Stäbe wesentlich weicher sind, als die realen Stäbe. Anstelle eines Zugbandes werden beide Lager zweiwertig modelliert.

Das Ziel dieser Beispiele ist neben der Erprobung dynamischer Stabwerkmodelle an statisch überbestimmten Mehrmassensystemen herauszufinden, ob das Verfahren einen grundsätzlichen Beitrag im Entwurfsprozess leisten kann. Das ist der Fall, wenn die durch die Stabwerkmodelle ermittelten Bewegungsabläufe aufgrund unterschiedlicher Anfangsgeometrien oder Lasten zu unterschiedlichen Endgeometrien führen. Da diese Endgeometrien wiederum die Basis für die Resttragfähigkeitsanalyse darstellen, ist das Auffinden der Geometrie von Bedeutung und kann durch die Gestaltung und Variation der Ursprungsgeometrie beeinflusst werden. Vor allem bei Systemquerschnitten aus ESG sinkt die Biegetragfähigkeit bei Bruch der Scheibe auf ein vernachlässigbar geringes Niveau. Für das zerstörte System bedeutet das einen vorwiegenden Lastabtrag durch Normalkräfte, wodurch die Geometrie des Systems von elementarer Bedeutung ist. Aus Gründen der Nachvollziehbarkeit werden die Kraftecke des 0-Systems, 1-Systems und das endgültige Krafteck getrennt voneinander dargestellt. Zwar könnten sie gemeinsam in einem Krafteck analysiert werden, da sie auf derselben Geometrie basieren, aber das Drucken auf Papier macht in einigen Fällen unterschiedliche Maßstäbe erforderlich. Bei einheitlichen Maßstäben würden einige 0-Systeme aufgrund sehr großer Werte die druckbaren Formate sprengen. In der Alternative wären die Kraftecke des 1-Systems aufgrund sehr kleiner Vektoren nicht mehr lesbar.

Weiterhin werden die Kraftecke des 0- und 1-Systems aus Symmetriegründen nur zur Hälfte dargestellt. Die dazu passenden Lagepläne werden aus Layoutgründen nicht den einzelnen Zeitschritten zugeordnet abgebildet, sondern nachfolgend in Abb. 24 in allgemeiner Form mit den zugehörigen Berechnungsformeln für die gewählte Unbekannte. Da die Darstellung zur Ermittlung der dynamischen Kraft sehr kompakt ist, wird hier die Arbeitsreihenfolge für jeden Zeitschritt in Kurzform zusammengefasst:

- 1- Kraftecke für das 0- und 1-System zeichnen
- 2- Überzählige Kraftgröße aus äußerer Last ausrechnen (Formel 5.14)
- 3- Endgültiges Krafteck zeichnen → sämtliche Kraftgrößen aus äußeren Lasten
- 4- Zentripetalbewegung der Massen 2 und 4 berechnen (Formel 5.10)
- 5- Überzählige Kraftgröße aus Zentripetalbewegung berechnen (Formel 5.17)
- 6- (3) ergänzen → sämtliche Kraftgrößen aus äußerer Last und Zentripetalbew.
- 7- Über $F_{\text{dyn, ges}}$ die zurückgelegten Wege berechnen (Formeln 5.3 - 5.5)

Beispiel 4: 0- und 1-System des sinusförmigen Bogens mit symmetrischen Lasten



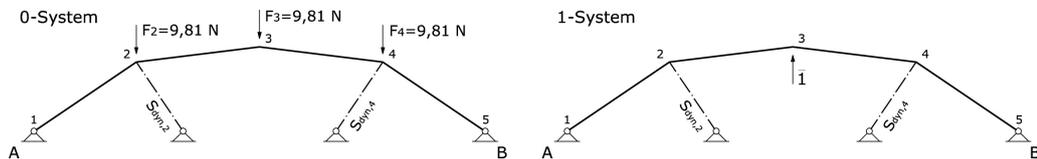
a)

Auslösen des dynamischen Stabes 3:

$$S_{\text{dyn}3} = \frac{2 \cdot (S'_{\text{dyn}2} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}2})}{2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn}2})^2 + 1} \quad (5.14b)$$

$$\Delta S_{\text{dyn}3} = \frac{2 \cdot (r_{\text{zp}1} \cdot \bar{S}_1)}{\left[2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn}2})^2 + 1 \right] / k_F} \quad (5.17b)$$

Beispiel 5: 0- und 1-System des rahmenartigen Bogens mit symmetrischen Lasten



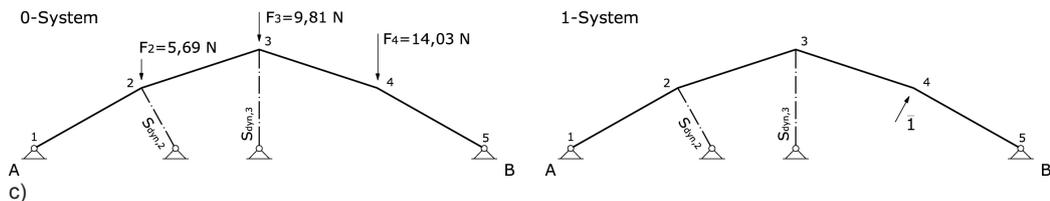
b)

Auslösen des dynamischen Stabes 3:

$$S_{\text{dyn}3} = \frac{2 \cdot (S'_{\text{dyn}2} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}2})}{2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn}2})^2 + 1} \quad (5.14b)$$

$$\Delta S_{\text{dyn}3} = \frac{2 \cdot (r_{\text{zp}1} \cdot \bar{S}_1)}{\left[2 \cdot (\bar{S}_{\text{dyn}2})^2 + 1 \right] / k_F} \quad (5.17b)$$

Beispiel 6: 0- und 1-System des sinusförmigen Bogens mit asymmetrischen Lasten



c)

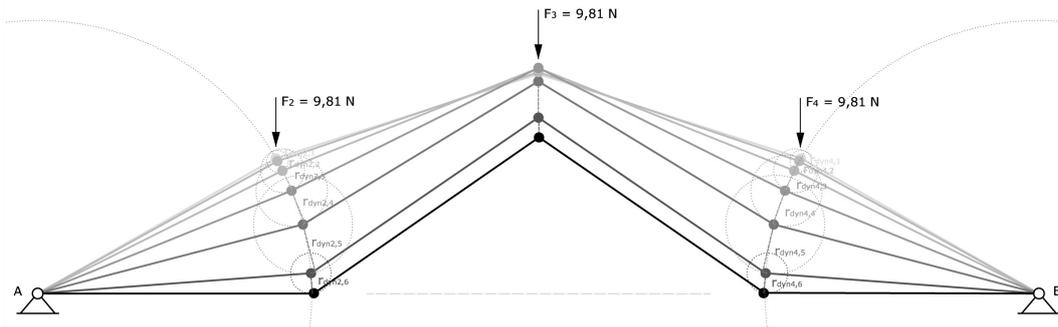
Auslösen des dynamischen Stabes 4:

$$S_{\text{dyn}4} = \frac{\frac{(S'_{\text{dyn}2} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}2})}{k_{f2}} + \frac{(S'_{\text{dyn}3} \cdot \bar{S}_{\text{dyn}3})}{k_{f3}}}{\frac{(\bar{S}_{\text{dyn}2})^2}{k_{f2}} + \frac{(\bar{S}_{\text{dyn}3})^2}{k_{f3}} + \frac{1}{k_{f4}}} \quad (5.12)$$

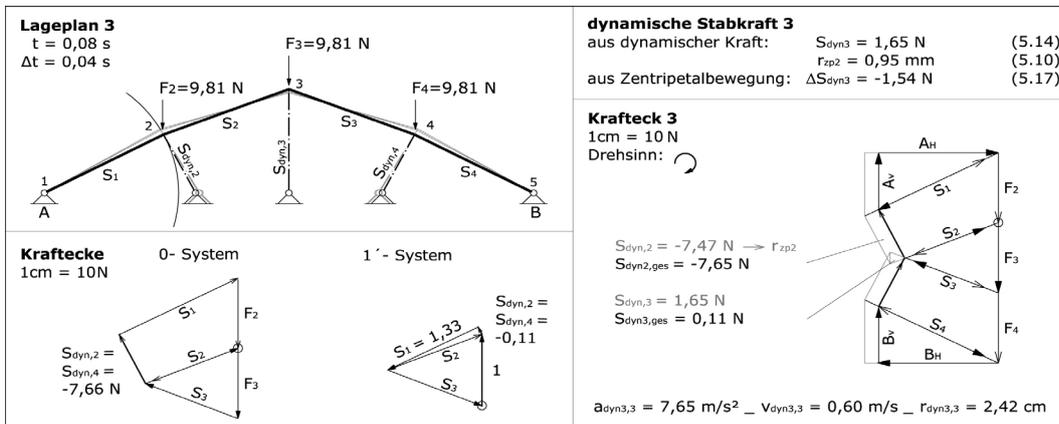
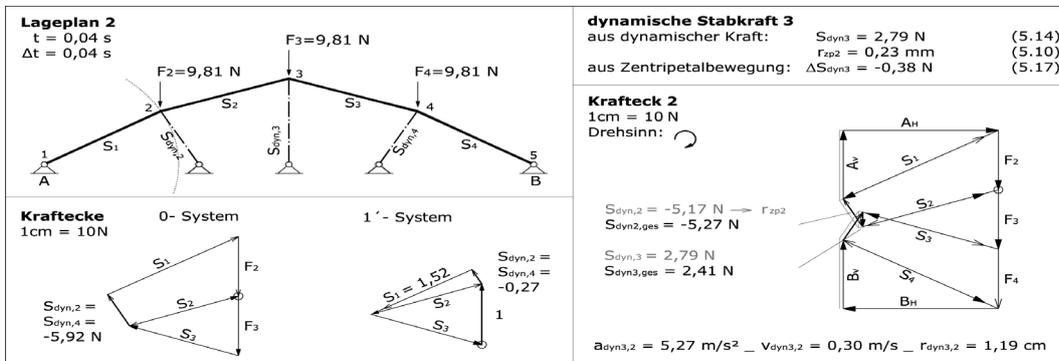
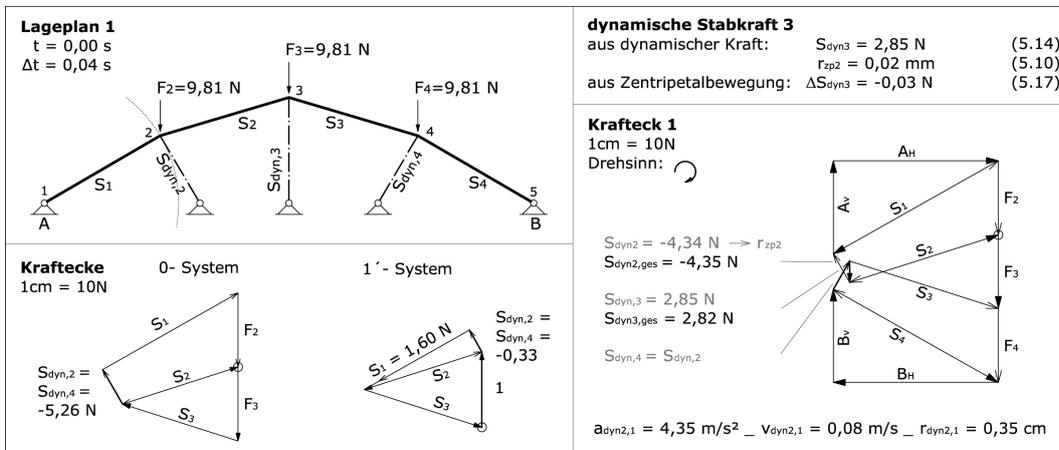
$$\Delta S_{\text{dyn}4} = \frac{(r_{\text{zp}1} \cdot \bar{S}_1) \cdot (r_{\text{zp}4} \cdot \bar{S}_4)}{\frac{(\bar{S}_{\text{dyn}2})^2}{k_{F2}} + \frac{(\bar{S}_{\text{dyn}3})^2}{k_{F3}} + \frac{1}{k_{F4}}} \quad (5.15)$$

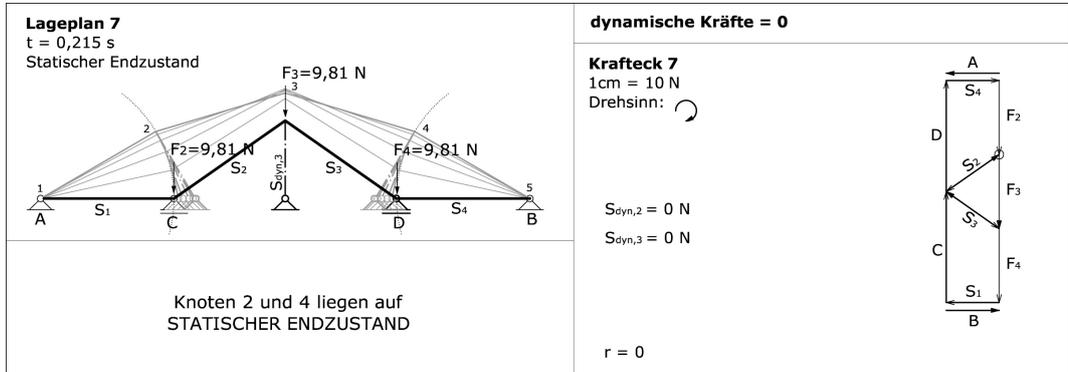
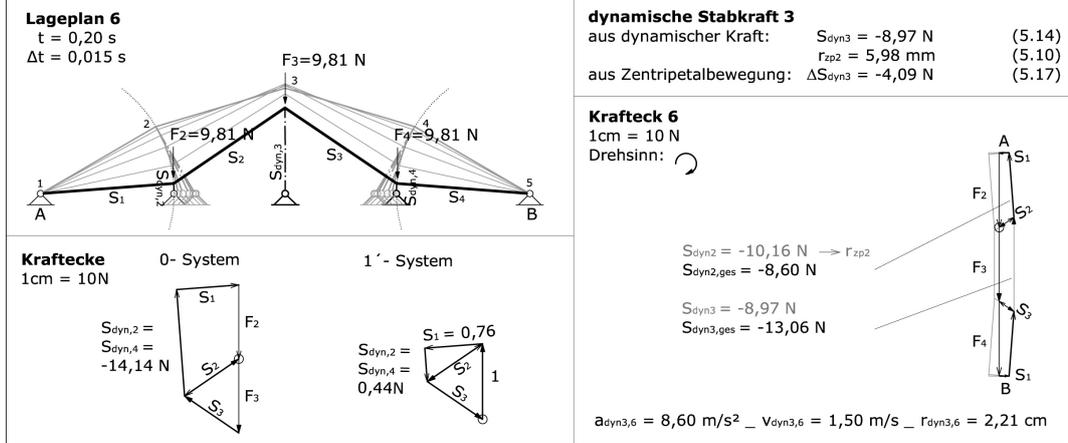
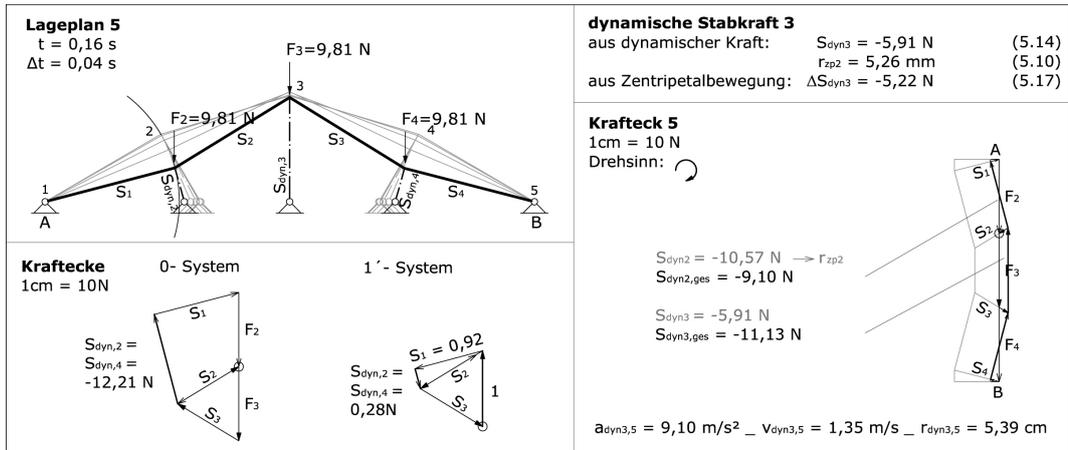
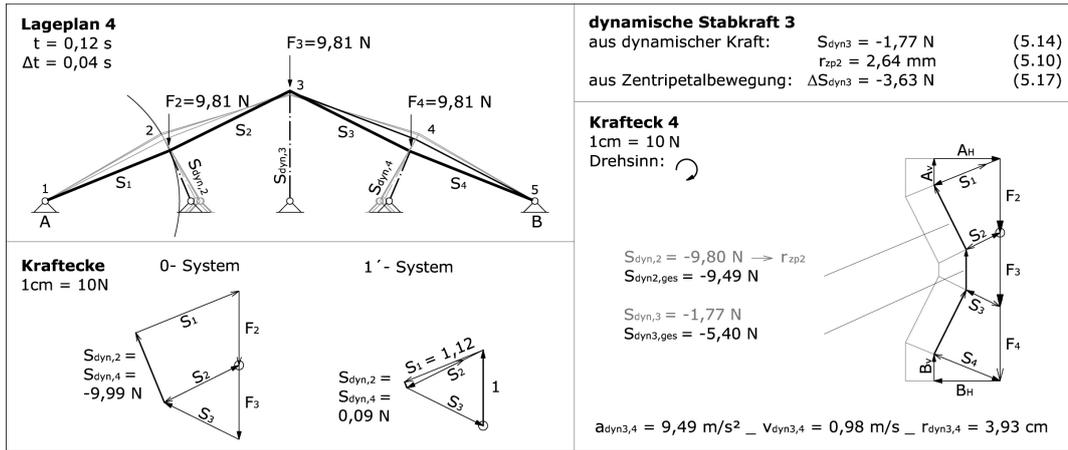
Abb. 24 a-c) 0- und 1-Systeme der Beispiele 4 bis 6 zu versagenden Bögen

5.7.1 Beispiel 4: Versagender Sinusbogen mit symmetrischer Last



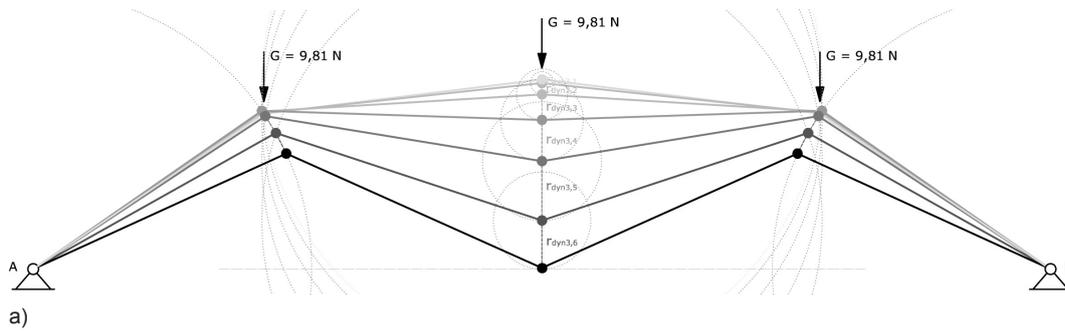
a)





b-h)
 Abb. 5.25 Dynamisches Stabwerkmodell: Versagender Sinusbogen mit symmetrischen Lasten
 (a) Lagepläne (b-h) Kraftecke 1 - 7

5.7.2 Beispiel 5: Versagender, rahmenartiger Bogen mit symmetrischer Last

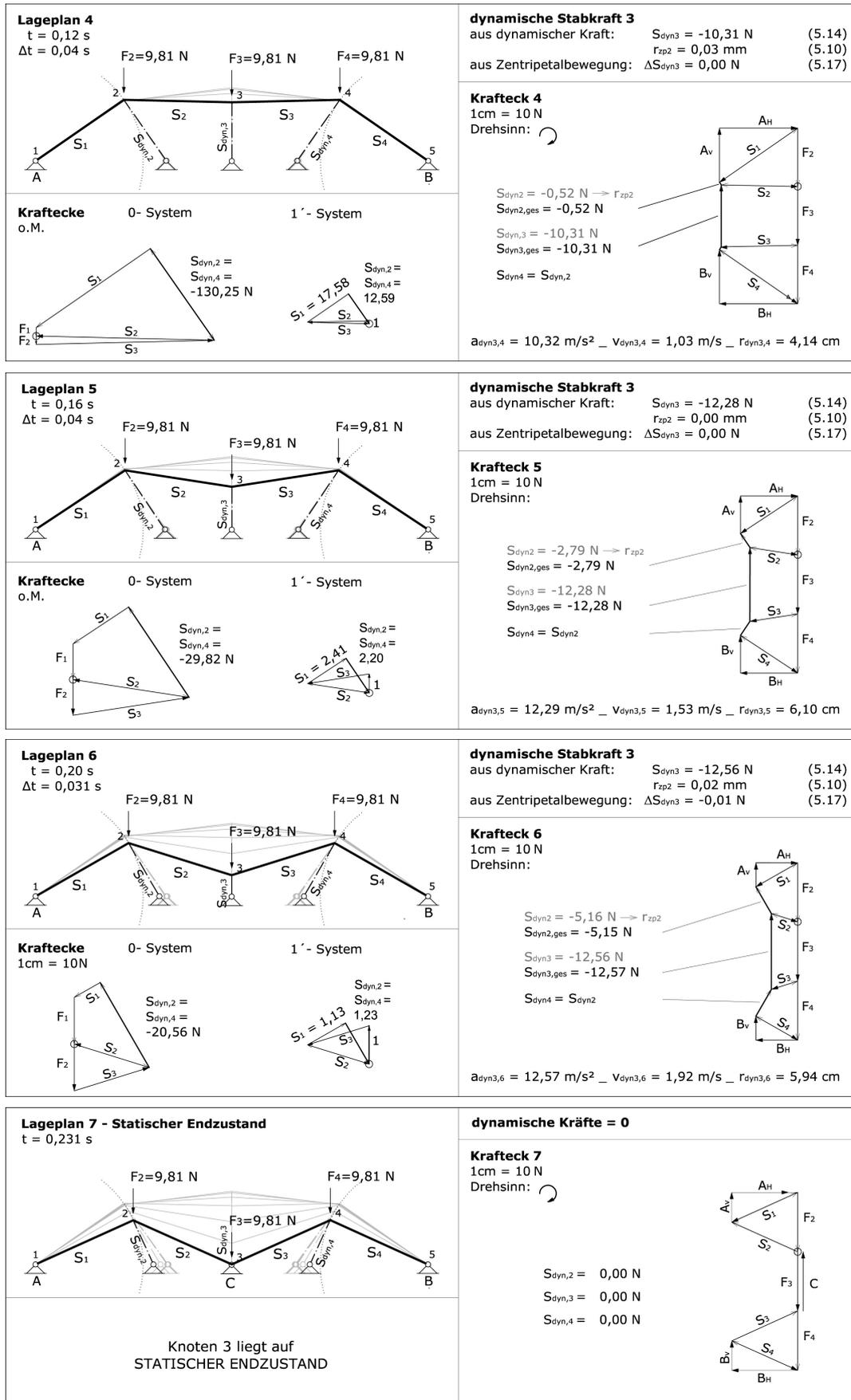


a)

<p>Lageplan 1 $t = 0,00 \text{ s}$ $\Delta t = 0,04 \text{ s}$</p>	<p>dynamische Stabkraft 3 aus dynamischer Kraft: $S_{dyn3} = -4,69 \text{ N}$ (5.14) $r_{zp2} = 0,00 \text{ mm}$ (5.10) aus Zentripetalbewegung: $\Delta S_{dyn3} = 0,00 \text{ N}$ (5.17)</p>
<p>Kraftecke 0- System o.M. 1'- System</p>	<p>Krafteck 1 1cm = 10N Drehsinn: </p> <p>$S_{dyn2} = 1,29 \text{ N}$ $S_{dyn3} = -4,69 \text{ N}$ $S_{dyn4} = 1,29 \text{ N}$</p> <p>$a_{dyn3,1} = 4,69 \text{ m/s}^2$ _ $v_{dyn3,1} = 0,09 \text{ m/s}$ _ $r_{dyn3,1} = 0,38 \text{ cm}$</p>

<p>Lageplan 2 $t = 0,04 \text{ s}$ $\Delta t = 0,04 \text{ s}$</p>	<p>dynamische Stabkraft 3 aus dynamischer Kraft: $S_{dyn3} = -5,50 \text{ N}$ (5.14) $r_{zp2} = 0,02 \text{ mm}$ (5.10) aus Zentripetalbewegung: $\Delta S_{dyn3} = -0,01 \text{ N}$ (5.17)</p>
<p>Kraftecke 0- System o.M. 1'- System</p>	<p>Krafteck 2 1cm = 10N Drehsinn: </p> <p>$S_{dyn2} = 1,48 \text{ N} \Rightarrow r_{zp2}$ $S_{dyn2,ges} = 1,46 \text{ N}$ $S_{dyn3} = -5,50 \text{ N}$ $S_{dyn3,ges} = -5,51 \text{ N}$ $S_{dyn4} = S_{dyn2}$</p> <p>$a_{dyn3,2} = 5,51 \text{ m/s}^2$ _ $v_{dyn3,2} = 0,31 \text{ m/s}$ _ $r_{dyn3,2} = 1,26 \text{ cm}$</p>

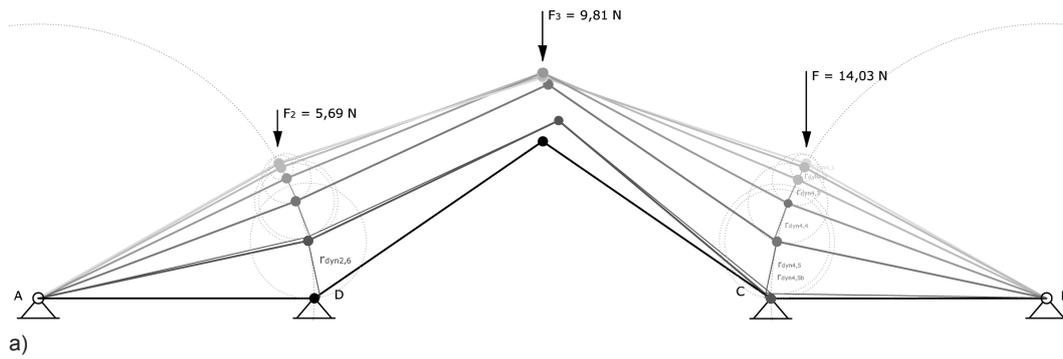
<p>Lageplan 3 $t = 0,08 \text{ s}$ $\Delta t = 0,04 \text{ s}$</p>	<p>dynamische Stabkraft 3 aus dynamischer Kraft: $S_{dyn3} = -7,69 \text{ N}$ (5.14) $r_{zp2} = 0,05 \text{ mm}$ (5.10) aus Zentripetalbewegung: $\Delta S_{dyn3} = -0,01 \text{ N}$ (5.17)</p>
<p>Kraftecke 0- System o.M. 1'- System</p>	<p>Krafteck 3 1cm = 10N Drehsinn: </p> <p>$S_{dyn2} = 1,16 \text{ N} \Rightarrow r_{zp2}$ $S_{dyn2,ges} = 1,12 \text{ N}$ $S_{dyn3} = -7,69 \text{ N}$ $S_{dyn3,ges} = -7,70 \text{ N}$ $S_{dyn4} = S_{dyn2}$</p> <p>$a_{dyn3,3} = 7,70 \text{ m/s}^2$ _ $v_{dyn3,3} = 0,62 \text{ m/s}$ _ $r_{dyn3,3} = 2,49 \text{ cm}$</p>



b-h)

Abb. 5.26 Dynamisches Stabwerkmodell: Versagender, rahmenartiger Bogen mit symmetrischen Lasten
 (a) Lagepläne (b-h) Kraftecke 1 - 7

5.7.3 Beispiel 6: Versagender Sinusbogen mit asymmetrischer Last



Lageplan 1
 $t = 0,00 \text{ s}$
 $\Delta t = 0,04 \text{ s}$

dynamische Stabkraft 4
 aus dynamischer Kraft: $S_{dyn4} = -8,33 \text{ N}$ (5.14)
 $\Gamma_{zp2} = 0,00 \text{ mm}$ $\Gamma_{zp4} = 0,04 \text{ mm}$ (5.10)
 aus Zentripetalbewegung: $\Delta S_{dyn4} = -0,01 \text{ N}$ (5.17)

Krafteck 1
 $1 \text{ cm} = 10 \text{ N}$
 Drehsinn: \curvearrowright

$S_{dyn2} = -1,01 \text{ N} \Rightarrow \Gamma_{zp2}$
 $S_{dyn2,ges} = -1,01 \text{ N}$
 $S_{dyn3} = 2,46 \text{ N}$
 $S_{dyn3,ges} = 2,45 \text{ N}$
 $S_{dyn4} = -8,33 \text{ N} \Rightarrow \Gamma_{zp4}$
 $S_{dyn4,ges} = -8,34 \text{ N}$

$r_{dyn2,1} = 0,14 \text{ cm}$ $r_{dyn4,1} = 0,47 \text{ cm}$

Lageplan 2
 $t = 0,04 \text{ s}$
 $\Delta t = 0,04 \text{ s}$

dynamische Stabkraft 4
 aus dynamischer Kraft: $S_{dyn4} = -9,28 \text{ N}$ (5.14)
 $\Gamma_{zp2} = 0,05 \text{ mm}$ $\Gamma_{zp4} = 0,38 \text{ mm}$ (5.10)
 aus Zentripetalbewegung: $\Delta S_{dyn4} = -0,08 \text{ N}$ (5.17)

Krafteck 2
 $1 \text{ cm} = 10 \text{ N}$
 Drehsinn: \curvearrowright

$S_{dyn2} = -1,43 \text{ N} \Rightarrow \Gamma_{zp2}$
 $S_{dyn2,ges} = -1,50 \text{ N}$
 $S_{dyn3} = 2,53 \text{ N}$
 $S_{dyn3,ges} = 2,26 \text{ N}$
 $S_{dyn4} = -9,28 \text{ N} \Rightarrow \Gamma_{zp4}$
 $S_{dyn4,ges} = -9,36 \text{ N}$

$r_{dyn2,2} = 0,56 \text{ cm}$ $r_{dyn4,2} = 1,51 \text{ cm}$

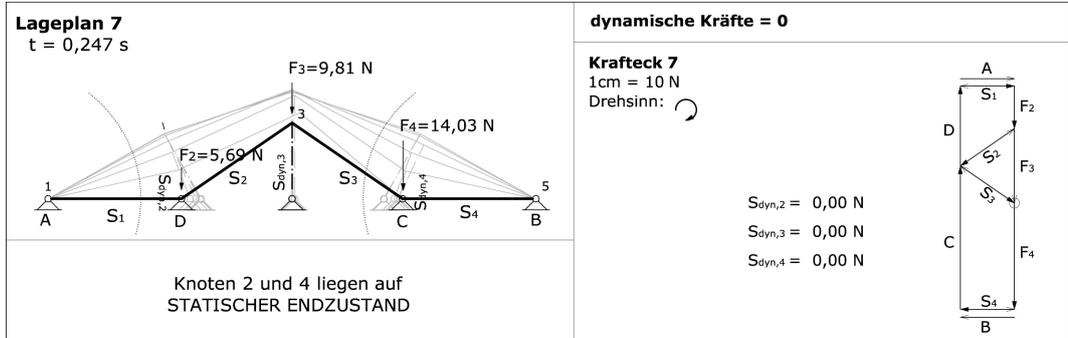
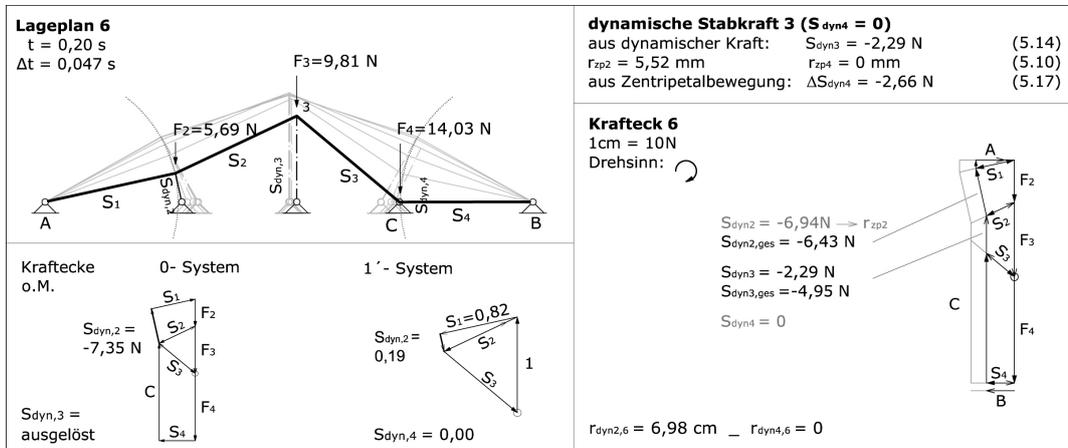
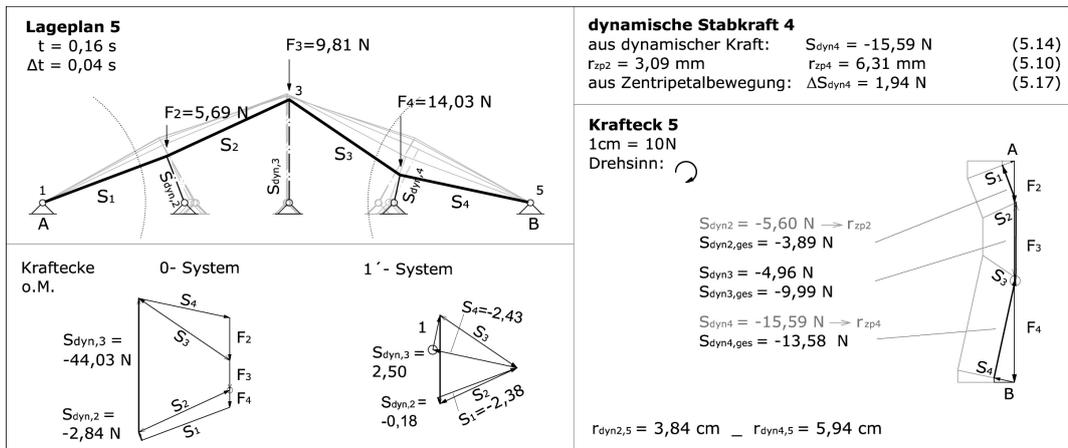
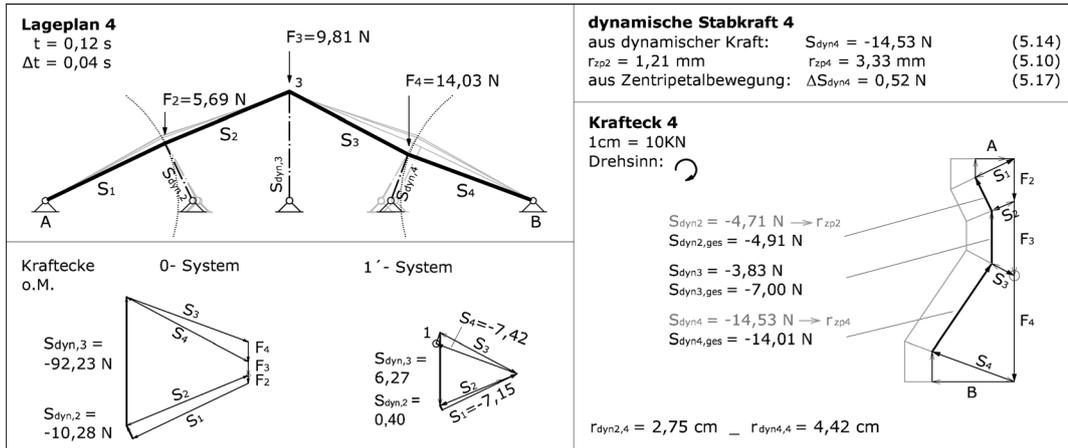
Lageplan 3
 $t = 0,08 \text{ s}$
 $\Delta t = 0,04 \text{ s}$

dynamische Stabkraft 4
 aus dynamischer Kraft: $S_{dyn4} = -11,86 \text{ N}$ (5.14)
 $\Gamma_{zp2} = 0,28 \text{ mm}$ $\Gamma_{zp4} = 1,34 \text{ mm}$ (5.10)
 aus Zentripetalbewegung: $\Delta S_{dyn4} = -0,10 \text{ N}$ (5.17)

Krafteck 3
 $1 \text{ cm} = 10 \text{ N}$
 Drehsinn: \curvearrowright

$S_{dyn2} = -2,69 \text{ N} \Rightarrow \Gamma_{zp2}$
 $S_{dyn2,ges} = -2,98 \text{ N}$
 $S_{dyn3} = 1,98 \text{ N}$
 $S_{dyn3,ges} = 0,68 \text{ N}$
 $S_{dyn4} = -11,86 \text{ N} \Rightarrow \Gamma_{zp4}$
 $S_{dyn4,ges} = -11,96 \text{ N}$

$r_{dyn2,3} = 1,39 \text{ cm}$ $r_{dyn4,3} = 2,85 \text{ cm}$



b-h)

Abb. 5.27 Dynamisches Stabwerkmodell: Versagender, Sinusbogen mit asymmetrischen Lasten

(a) Lagepläne (b-h) Kraftecke 1 - 7

5.8 Besprechung der Ergebnisse

5.8.1 Konsistenz der Berechnungen

Um die Geometrie eines neuen Zeitschritts genau definieren zu können, müssen nicht sämtliche Wege aller Massen bekannt sein. Es ist ausreichend, die Wege von maximal zwei Massen zu berechnen. Die Lage der anderen Knotenpunkte ergibt sich bei dehnstarreren Querschnitten aufgrund der vorgegebenen Stablängen. Bei der Wahl der Massen, die den zurückgelegten Weg vorgeben, d.h. die Geometrie des nachfolgenden Lageplans definieren, sollte es sich immer um Massen handeln, die in den ersten Zeitschritten fallen und damit die anderen Massen nach oben drücken. Diese Massen haben aufgrund ihrer kontinuierlichen Bewegungsrichtung eine größere Berechnungsgenauigkeit. Würden die sich zuerst aufwärts bewegenden Massen den Weg vorgeben, d.h. diejenigen, die zuerst nach oben gedrückt und später nach unten gezogen werden, kann es aufgrund der Berechnung in Zeitschritten passieren, dass der Wendepunkt verpasst wird und die Massen eine zu lange andauernde Beschleunigung in die «falsche» Richtung erfahren. Grundsätzlich kann also gesagt werden, dass die durch dynamische Stabwerkmodelle berechneten Wegstrecken nur dann für alle Knoten der neuen Geometrie konsistent sind, wenn jeder Zeitschritt getrennt für sich betrachtet wird. Bei einem Bewegungsablauf mit aufeinander folgenden Zeitschritten liefern die zuerst fallenden Knoten die genaueren Ergebnisse und die anderen Knoten folgen der Vorgabe.

5.8.2 Beschreibung der Ergebnisse und ihr Beitrag zur Formfindung im Hinblick auf die Resttragfähigkeit

Wie bereits in der Einleitung der vorliegenden Arbeit beschrieben, fällt ein Glasbogen mit Zugband nach dem Bruch der Scheibe herunter und bleibt auf den Zugstäben liegen. In diesem statischen Endzustand bildet der Glaskörper eine Falte in Querrichtung aus, wenn die Anfangsgeometrie eine Sinusfunktion war. Diese Aussage basiert auf einem Großversuch, der im Jahr 2002 für das Projekt «Loggia Wasseralfingen» durchgeführt wurde [F2]. Hierfür wurde eine sinusförmig elastisch vorgekrümmte VSG-Scheibe zerstört und der Fallprozess dokumentiert (genauer Kapitel 7).



Abb. 5.28 Großversuch eines zerstörten, herabgefallenen Sinusbogens aus Glas [F2]

Die drei Grundlagenbeispiele 4 bis 6 zu den versagenden Bögen sollen nun aufzeigen, ob sich dieser Bewegungsprozess auch mit dynamischen Stabwerkmodellen analysieren lässt und wenn ja, ob die Analyse mit variierenden Anfangsgeometrien oder asymme-

trischen Lasten zu anderen Endgeometrien führt. In Abbildung 5.29 werden die Bewegungsgeometrien der drei Versuche 4, 5 und 6 vergleichend dargestellt.

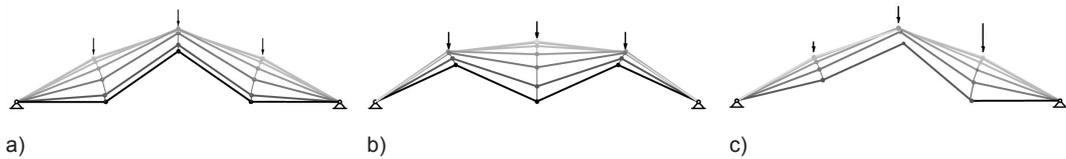


Abb. 5.29 Bewegungsablauf versagender Bögen mit verschiedenen Anfangsgeometrien bzw. Lasten
(a) Versuch 4 (b) Versuch 5 (c) Versuch 6

In Beispiel 4 wird analog des Großversuchs aus Abbildung 5.28 eine Analyse mit einer sinusförmigen Anfangsgeometrie und symmetrischen Lasten durchgeführt. Der Fallprozess des Bogens ist symmetrisch und es bildete sich im Endzustand analog des Großversuchs eine Falte in der Mitte des Tragwerks aus (Abb. 5.29a).

Im Gegensatz dazu stellt sich bei der etwas flacheren und rahmenartigeren Anfangsgeometrie des Beispiels 5 eine andere Endgeometrie ein. Hier entstehen am Ende der Bewegung zwei Falten statt einer (5.29b). Diese haben eine niedrigere statische Höhe, weisen jedoch in allen Bereichen eine kontinuierlichere Krümmung auf. Aufgrund dieser Krümmungen ist das Endsystem in Querrichtung steifer, da es die Lasten vorwiegend über Normalkräfte abtragen kann. Die ebenen Bereiche des Endsystems aus Beispiel 4 sind dahingegen in erster Linie biegebelastet (genauer Kapitel 7).

In Abbildung 5.30 sind die Endgeometrien aus Beispiel 4 und 5 mit polygonaler und vereinfacht kontinuierlicher Krümmung dargestellt.

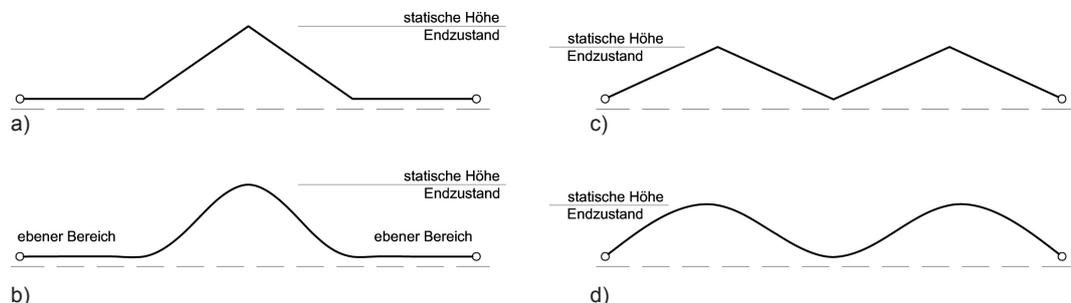


Abb. 5.30 Endgeometrien des herabgefallenen Bogens (a+b) Beispiel: 4 polygonal + kontinuierlich
(c+d) Beispiel: 5 polygonal + kontinuierlich

Der Auslöser für die unterschiedlichen Endgeometrien ist jeweils schon im ersten Zeitschritt der Analyse mit dynamischen Stabwerkmodellen zu erkennen.

In Beispiel 4 bewegen sich die lagernäheren Knoten 2 und 4 nach dem Bruch der Scheibe nach unten, während der mittige Knoten 3 nach oben gedrückt wird. Diese Tatsache hat die bereits beschriebene «einfaltige» Endgeometrie zur Folge.

Die im Vergleich zu Beispiel 4 rahmenartigere Geometrie des Beispiels 5 hat eine andere Verteilung der dynamischen Kräfte zur Folge. Hier bewegen sich die lagernahen Knoten zuerst nach außen und der mittige Knoten «fällt» herab. Die lagernahen Knoten werden erst im fünften Zeitschritt nach unten gezogen. Der mittige Knoten trifft damit zuerst auf die Zugstäbe, wodurch das System zwei Falten ausbildet.

In einer weitergehenden Betrachtung müsste noch untersucht werden, inwiefern diese Falten ein stabiles oder labiles Gleichgewicht bilden. In den Kraftecken der letzten Zeitschritte ist das wiederum anschaulich abzulesen. Das letzte Krafteck des fünften Beispiels zeigt im Bereich der mittleren Lagerung ausschließlich einen vertikalen Vektor des Lagers C. Gegen Seitenlasten oder leichte Asymmetrien würde sich die Endgeometrie voraussichtlich dahingehend verändern, dass eine Falte zur Seite rollt und sich mit der anderen Falte vereint. Das hängt bei einer genauen Analyse jedoch vom Durchhang des Zugbandes und der Reibung zwischen dem gebrochenen Glaskörper und den Zugstäben im Bereich der Lagerung C ab, was im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht wird .

Das sechste Beispiel basiert auf der Geometrie des ersten Beispiels, wird jedoch asymmetrisch belastet. Aufgrund der asymmetrischen Belastung ist auch die Fallbewegung asymmetrisch und der lagernahe Knoten vier trifft zuerst auf das Zugband. Das Endsystem gleicht jedoch dem ersten Beispiel, da der Randknoten 2 zwar zeitversetzt zu Knoten 4, jedoch vor dem mittleren Knoten 3 auf den Zugstab herabfällt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Analyse mit dynamischen Stabwerkmodellen qualitative und quantitative Aussagen zur Fallbewegung, Endgeometrie, auftretenden Kräften und Zeitdauern versagender Bauteile möglich macht. Diese Aussagen können wiederum den Formfindungsprozess eines Bogens beeinflussen, wenn die Resttragfähigkeit oder Kräfte während bestimmter Versagensszenarien innerhalb des Entwurfs berücksichtigt werden müssen.