



57

Jonas Klein

**Schnittgrößenverteilung in statisch
unbestimmten Betonbauteilen mit
nichtmetallischer Bewehrung**

Untersuchungen zur Zuverlässigkeit von
Durchlaufsystemen großer Biegeschlankheit im
Grenzzustand der Tragfähigkeit

DISSERTATION

Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Betonbauteilen mit nichtmetallischer Bewehrung

Untersuchungen zur Zuverlässigkeit von Durchlaufsystemen großer
Biegeschlankheit im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Vom Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

DISSERTATION

von

Jonas Klein M. Sc.

aus
Frankfurt am Main

D 17

Darmstadt 2023

Referent: Prof. Dr.-Ing. Carl-Alexander Graubner

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald

Tag der Einreichung: 24. Mai 2023

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2023

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. Carl-Alexander Graubner

Anschrift:

Technische Universität Darmstadt

Institut für Massivbau

Franziska-Braun-Straße 3

64287 Darmstadt

<http://www.massivbau.tu-darmstadt.de>

Klein, Jonas:

Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Betonbauteilen mit nichtmetallischer Bewehrung

Untersuchungen zur Zuverlässigkeit von Durchlaufsystemen großer Biegeschlankheit im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Dissertation // Institut für Massivbau, Technische Universität Darmstadt; Heft 57

Online veröffentlicht bei TUprints

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-245694](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:tuda-tuprints-245694)

URI: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/24569>

Veröffentlicht unter CC BY-NC-SA 4.0 International - Creative Commons, Namensnennung, Nicht-kommerziell, Weitergabe unter gleichen Bedingungen
(<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>)

Jonas Klein M.Sc.

Geboren 1990 in Frankfurt am Main. Von 2011 bis 2017 Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Universität Darmstadt sowie der University of Transport and Communications Hanoi, Vietnam (Master of Science). 2017 als Projektingenieur in der bauart Konstruktions GmbH & Co tätig. Von 2018 bis 2022 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Massivbau der Technischen Universität Darmstadt. In dieser Zeit auch als freiberuflich selbstständig Ingenieur tätig.

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Massivbau der Technischen Universität Darmstadt.

Mein besonderer Dank gilt zunächst meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Carl-Alexander Graubner. Ich freue mich sehr, dass ich diese Arbeit als letzte von ihm an der Technischen Universität Darmstadt betreute Dissertation anfertigen durfte. Für das entgegengebrachte Vertrauen sowie die fachlichen und kritischen Diskussionen möchte ich mich ausdrücklich bedanken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald danke ich ganz herzlich für sein Interesse an meiner Arbeit und für die Übernahme des Korreferats.

Bedanken möchte ich mich zudem bei allen Kolleginnen und Kollegen, mit denen ich während meiner Zeit am Institut für Massivbau zusammenarbeiten durfte. Der wissenschaftliche Austausch, die besondere und kollegiale Arbeitsatmosphäre sowie die zahlreichen gemeinsamen Erlebnisse haben mich sehr geprägt. Für die kritische und sorgfältige Durchsicht der Entwurfsfassung sowie die zahlreichen Diskussionen zu den Themen dieser Arbeit möchte ich Dr.-Ing. Dominik Beck und Lukas Bujotzek M. Sc. besonders danken. Mein besonderer Dank gilt auch meinen Zimmerkollegen Prof. Dr.-Ing. Redouan El Ghadioui für den herzlichen Empfang am Institut sowie Dr.-Ing. Johannes Koert für die interessanten Fachdiskussionen und den intensiven Austausch insbesondere in der Endphase der Erstellung dieser Arbeit.

Weiterhin möchte ich Jörg Wiech, Yves Kibnowski und Eric Rauschenbach für ihr Engagement und ihre Unterstützung bei der Durchführung der Bauteilversuche danken. Ein weiterer Dank gilt zudem Dr.-Ing. André Weber und der Schöck Bauteile GmbH für die Bereitstellung der Bewehrungselemente. Bedanken möchte ich mich ebenso bei allen Studierenden, die mich im Rahmen von Abschlussarbeiten unterstützt haben. Besonders möchte hierbei ich die Arbeiten und das Engagement von Dennis Hutterer M. Sc. und Marcus Aberle M. Sc. hervorheben.

Ein Teil der Berechnungen in dieser Arbeit wurden auf dem Lichtenberg-Hochleistungsrechner der Technischen Universität Darmstadt durchgeführt. Für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit möchte ich mich herzlich bedanken (*Project ID 1959*).

Abschließend gilt mein größter Dank meinen Eltern Margit und Eberhard, ohne deren Unterstützung mein Studium, welches mir die Möglichkeit zur Promotion am Institut für Massivbau erst ermöglicht hat, nicht möglich gewesen wäre. Ein ebenso großer Dank gilt meiner Partnerin Kim für ihre spektakuläre Unterstützung und ihren unglaublichen Rückhalt. Ohne ihr Engagement – insbesondere in den letzten Wochen der Erstellung dieser Arbeit – wäre die Fertigstellung in dieser Form nicht möglich gewesen.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Substitution von Betonstahlbewehrung durch nichtmetallische Bewehrungsmaterialien aus Faserverbundkunststoffen (FVK) hat sich in den letzten Jahren als innovativer Lösungsansatz für die bekannten Probleme des Stahlbetonbaus etabliert. Im Gegensatz zur konventionellen Betonstahlbewehrung besitzen diese FVK-Bewehrungselemente jedoch kein plastisches Verformungsvermögen, sondern verhalten sich bis zum Erreichen der Zugfestigkeit ausschließlich linear-elastisch. Dies führt dazu, dass sich die Schnittgrößen in statisch unbestimmten Tragwerken unplanmäßig in höherbewehrte Tragwerksbereiche umlagern, ohne dass sich diese Bereiche dieser zusätzlichen Beanspruchung durch die Ausbildung von Fließgelenken entziehen können. Bislang ist unklar, ob dies bei konventioneller Bemessung solcher Bauteile zu einer Unterschreitung des normativ festgelegten Sicherheitsniveaus führt.

In der vorliegenden Arbeit wird daher das Schnittgrößenumlagerungsverhalten und dessen Auswirkung auf die Tragwerkszuverlässigkeit von statisch unbestimmten Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung eingehend untersucht. Dazu wird ein Finite-Elemente-Modell auf Basis wirklichkeitsnaher nichtlinearer Materialgesetze entwickelt und für umfangreiche Parameterstudien genutzt. Aufbauend auf diesem Finite-Elemente-Modell wird anschließend ein stochastisches Modell auf Grundlage der Monte-Carlo-Methode und unter Anwendung des Adaptive Importance Samplings zur Reduzierung der Berechnungszeit erstellt. Mit diesem wird die Tragwerkszuverlässigkeit von Durchlaufsystemen mit FVK-Bewehrung unter verschiedenen Randbedingungen ermittelt und abschließend ein Vorschlag für die wirtschaftliche Bemessung solcher Bauteile unter Einhaltung des normativen Sicherheitsniveaus formuliert.

ABSTRACT

The substitution of reinforcing steel with non-metallic fiber reinforced polymer (FRP) reinforcing materials has been established in recent years as an innovative solution to the well-known problems of reinforced concrete. However, unlike conventional reinforcing steel, these FRP reinforcing elements have no plastic deformation capacity and exhibit linear elastic behavior until tensile strength is reached. As a result, internal forces in hyperstatic structures are unintentionally redistributed to areas of the structure with higher reinforcement. These areas are unable to dissipate this additional load by forming plastic hinges. To date, it is unclear whether this will result in a failure of the standardized safety level when such components are designed conventionally.

Therefore, this thesis investigates in detail the internal force redistribution behavior and its effect on the structural reliability of continuous concrete members with FRP reinforcement. For this purpose, a finite element model based on realistic nonlinear material laws is developed and used for extensive parameter studies. Based on this finite element model, a stochastic model based on the Monte Carlo method and using Adaptive Importance Sampling to reduce computational time is then developed. This model is used to determine the structural reliability of continuous systems with FRP reinforcement under various boundary conditions, and finally a proposal for the economic design of such components in compliance with the normative safety level is formulated.

INHALTSVERZEICHNIS

Inhaltsverzeichnis	I
Formelzeichen und Variablen	V
1 Einleitung.....	1
1.1 Motivation.....	1
1.2 Zielsetzung.....	3
1.3 Vorgehensweise	3
2 Schnittgrößen in statisch unbestimmten Betonbauteilen	7
2.1 Einführung	7
2.2 Tragverhalten statisch unbestimmter Stahlbetontragwerke.....	9
2.3 Schnittgrößenermittlung im Stahlbetonbau	12
2.3.1 Allgemeines	12
2.3.2 Linear-elastische Schnittgrößenermittlung	13
2.3.3 Linear-elastische Berechnung mit begrenzter Umlagerung	15
2.3.4 Verfahren nach Plastizitätstheorie im Stahlbetonbau	18
2.3.5 Nichtlineare Berechnung	23
2.4 Schnittgrößen in Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung	24
2.4.1 Allgemeines	24
2.4.2 Schnittgrößenermittlung in statisch unbestimmten FVK-Betonbauteilen.....	26
2.4.3 Literaturstudie zu statisch unbestimmten FVK-Betonbauteilen.....	27
2.5 Zusammenfassung	31
3 Grundlagen der Tragwerkszuverlässigkeit.....	33
3.1 Einführung	33
3.2 Stochastische Modellierung von Zufallsvariablen.....	33
3.2.1 Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen	33
3.2.2 Multivariate Verteilungsfunktionen	37
3.3 Formulierung des Zuverlässigkeitsproblems	38
3.3.1 Grenzzustandsfunktion	38
3.3.2 Zielzuverlässigkeit.....	40
3.3.3 Analyse von Systemen.....	41
3.4 Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse.....	42
3.4.1 Allgemeines	42

3.4.2	Monte-Carlo-Methode	43
3.4.3	Gewichtete Monte-Carlo-Methode	44
3.4.4	Gewichtete Monte-Carlo-Methode mit adaptiver Stichprobenfunktion.....	46
3.4.5	Berücksichtigung mehrerer Versagenspunkte bei AIS-Analyse	47
3.5	Zusammenfassung	49
4	Nichtlineares Last-Verformungsverhalten bewehrter Betonbauteile	51
4.1	Einführung	51
4.2	Werkstoffverhalten	51
4.2.1	Beton.....	51
4.2.2	Betonstahl	57
4.2.3	Bewehrung aus Faserverbundkunststoffen	58
4.3	Verbundverhalten und Rissbildung	62
4.3.1	Verbund zwischen Beton und Bewehrung	62
4.3.2	Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds	64
4.3.3	Rissbildung und mittlere Dehnungen unter Längszugkraft	66
4.4	Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bei reiner Biegung.....	71
4.5	Verformungen infolge Momentenbeanspruchung	74
4.6	Verformungen infolge Querkraft	75
4.6.1	Schubverformungen.....	75
4.6.2	Berücksichtigung von Zusatzverkrümmungen infolge Schubrissbildung.....	78
4.7	Zusammenfassung	79
5	Numerisches Berechnungsmodell	81
5.1	Einführung	81
5.2	Modellierung des Querschnittsverhaltens.....	81
5.2.1	Allgemeines	81
5.2.2	Modellierung der Werkstoffeigenschaften	82
5.2.3	Ermittlung der Bruttoquerschnittswerte	82
5.2.4	Ermittlung der Krümmung im Riss	83
5.2.5	Ermittlung der mittleren Krümmung	85
5.2.6	Modellierung der Zusatzverkrümmungen infolge Schubrissbildung	86
5.3	Modellierung des Systemverhaltens	86
5.3.1	Allgemeines	86
5.3.2	Weggrößenverfahren	87

5.3.3	Berücksichtigung des nichtlinearen Querschnittsverhaltens	88
5.3.4	Berücksichtigung der räumlichen Lastausbreitung	89
5.3.5	Berücksichtigung von Schubrissbildung	90
5.4	Überprüfung des Berechnungsmodells	92
5.4.1	Allgemeines	92
5.4.2	Überprüfung der Momenten-Krümmungs-Berechnung	92
5.4.3	Überprüfung des Gesamtmodells	95
5.5	Zusammenfassung	100
6	Untersuchung der Schnittgrößenverteilung in FVK-bewehrten Betonbauteilen.....	101
6.1	Einführung	101
6.2	Ermittlung der relevanten Bewehrungsverhältnisse	102
6.2.1	Allgemeines	102
6.2.2	Bewehrungsverhältnisse bei konventioneller Bemessung.....	104
6.3	Untersuchung der Momenten-Krümmungs-Beziehung.....	108
6.3.1	Allgemeines	108
6.3.2	Einfluss der Betonfestigkeitsklasse	109
6.3.3	Einfluss der Bewehrungsbruchdehnung	110
6.3.4	Einfluss einer umschnürten Druckzone	110
6.3.5	Zusatzkrümmung infolge Schubrissbildung.....	111
6.4	Vergleich von Stahl- und FVK-bewehrten Betonbalken.....	112
6.4.1	Allgemeines	112
6.4.2	Vergleich der Momenten-Krümmungs-Beziehung	112
6.4.3	Vergleich des Umlagerungsverhaltens	114
6.5	Untersuchung der Momentenumlagerung	116
6.5.1	Allgemeines	116
6.5.2	Untersuchungen des Momentenumlagerungsverhaltens	119
6.5.3	Untersuchungen der Systemtragfähigkeit.....	128
6.6	Schlussfolgerung.....	132
7	Zuverlässigkeit statisch unbestimmter Betonbauteile mit FVK- Bewehrung	135
7.1	Einführung	135
7.2	Stochastisches Modell	135
7.2.1	Modellierung der Widerstände und Einwirkungen	135
7.2.2	Auswahl der Samplingmethode	143

7.2.3	Ablauf der Zuverlässigkeitsanalyse	144
7.3	Überprüfung des stochastischen Modells	146
7.4	Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse.....	148
7.4.1	Allgemeines	148
7.4.2	Untersuchungsprogramm.....	149
7.4.3	Betrachtungen am Einfeldsystem	150
7.4.4	Betrachtungen am Zweifeldsystem.....	151
7.5	Zusammenfassung	160
8	Vorschlag zur Bemessung statisch unbestimmter Betonbauteile mit FVK-Bewehrung	163
8.1	Einführung	163
8.2	Einflussgrößen auf die Bemessung	164
8.3	Bemessungsvorschlag	168
8.4	Zusammenfassung	169
9	Resümee	171
9.1	Zusammenfassung	171
9.2	Ausblick	173
10	Literaturverzeichnis	175
Anhang	192

FORMELZEICHEN UND VARIABLEN

Die nachfolgenden Formelzeichen und Variablen entsprechen den Bezeichnungen, die in der nachfolgenden Arbeit verwendet werden. In den meisten Fällen erfolgt eine Vereinheitlichung der Bezeichnungen in Anlehnung an die in DIN EN 1992-1-1 (2011) gebräuchliche Nomenklatur. Oft verwendete Indizes und ihre Bedeutung werden zusätzlich aufgelistet.

Indizes:

bal	Balance Point
c	Beton (engl. Concrete)
cr	Riss (engl. Crack)
d	Design
E	Einwirkung
e	Element
el	elastisch
erf	erforderlich
eff	effektiv
F	Feld
f	FVK
k	charakteristisch
kurz	kurzzeit
lang	langzeit
max	maximal
pl	plastisch
R	Widerstand (engl. Resistance)
s	Stahl
St	Stütze
vorh	vorhanden
u	Höchstwert (engl. ultimate)
y	Streckgrenze (engl. yield)

Große lateinische Buchstaben:

A_c	Querschnittsfläche des Betons
A_{cc}	Kernbetonfläche
A_e	Effektiv umschnürten Kernbetonfläche
A_f	Querschnittsfläche einer FVK-Bewehrung
A_s	Querschnittsfläche einer Betonstahlbewehrung
$Cov(X)$	Kovarianz von X
E	Elastizitätsmodul (E-Modul)
$E(X)$	Erwartungswert von X
EA^I, EA^{II}	Dehnsteifigkeit im Zustand I/II
E_{cm}	Mittlerer Elastizitätsmodul des Betons als Sekante durch den Ursprung
E_f	E-Modul einer FVK-Bewehrung
$E_{f,w}$	E-Modul einer FVK-Bügelbewehrung
EI^I, EI^{II}	Biegesteifigkeit im Zustand I/II
E_s	E-Modul einer Betonstahlbewehrung
F	Kraft
F_{cd}	Bemessungswert der Betondruckkraft
F_f	Zugkraft einer FVK-Bewehrung
F_X	Verteilungsfunktion von X
GA	Schubmodul
G_k	Charakteristischer Wert einer Einwirkung aus Eigengewicht
G_m	Mittelwert einer Einwirkung aus Eigengewicht
I	Flächenträgheitsmoment
\underline{K}	Gesamtsteifigkeitsmatrix
M	Moment
	Anzahl der Versagenspunkte
\overline{M}	Virtuelles Moment
M_{cr}	Rissmoment
M_{Ed}	Einwirkendes Bemessungsmoment

M_{el}	Moment nach Elastizitätstheorie
M_{Rd}	Widerstandsmoment auf Bemessungsniveau
M_{vorh}	Vorhandenes Moment
N	Stichprobenumfang
N_{cr}	Rissnormalkraft
N_f	Anzahl Versagen
Q_k	Charakteristischer Wert einer Einwirkung infolge Nutzlast
Q_m	Mittelwert einer Einwirkung infolge Nutzlast
S	Beanspruchung
V	Querkraft
$\text{Var}(X)$	Varianz von X
V_{cr}	Schubrisskraft

Kleine lateinische Buchstaben:

a_1	Versatzmaß
$a_{stör}$	Störlänge
$a_{f,w}$	FVK-Bügelbewehrungsmenge
b	Breite
b_{red}	Querschnittsbreite unter Abzug der Fläche der Bewehrung
b_w	Stegbreite
d	Statische Nutzhöhe
$d_{1,oben}$	Randabstand obere Bewehrungslage
$d_{1,unten}$	Randabstand untere Bewehrungslage
f	Festigkeit
f_c	Betondruckfestigkeit
$f_{c,conf}$	Umschnürte Betondruckfestigkeit
f_{cd}	Bemessungswert der Betondruckfestigkeit
f_{ck}	Charakteristische Betondruckfestigkeit (5 %-Quantil)
f_{cm}	Mittlere Betondruckfestigkeit

Formelzeichen und Variablen

f_{ct}	Betonzugfestigkeit
f_f	Festigkeit einer FVK-Bewehrung
f_{fd}	Bemessungsfestigkeit einer FVK-Bewehrung
f_{fk}	Charakteristische Festigkeit einer FVK-Bewehrung
f_X	Verteilungsdichtefunktion von X
g_k	Charakteristische Last aus Eigengewicht
$h_{c,ef}$	Höhe der effektiven Zugzone
h_X	AIS-Stichprobenfunktion von X
k_a	Höhenbeiwert zur Ermittlung des Lastangriffspunktes der resultierenden Betondruckkraft
$k_{conf,e}$	Wirksamkeitsfaktors für die Umschnürungswirkung
\underline{k}_e	Lokale Elementsteifigkeitsmatrix
l	Feldlänge
l_{eff}	Effektive Feldlänge
n	Anzahl der Basisvariablen Exponent des Parabel-Rechteck-Diagramms
p	Streckenlast
p_f	Versagenswahrscheinlichkeit
\underline{p}	Lastvektor
q	Nutzlast
q_k	Charakteristische Nutzlast
q_m	Mittelwert einer Nutzlasts
r_b	Biegeradius
$s_{r,max}$	Maximaler Rissabstand
$s_{r,min}$	Minimaler Rissabstand
\underline{s}	Schnittgrößenvektor
u	Verschiebung
\underline{v}	Vektor der Verformungsgrößen in den Knoten

w_j	Wichtungsfaktor
w_k	Rissbreite
x	Druckzonenhöhe
x_i	i -te Realisation der Stichprobe / Punkt
z	Hebenarm der inneren Kräfte
z_{e0}	Abstand der Dehnungs-Null-Linie zur Schwerachse des Querschnitts

Griechische Buchstaben:

α_S	Sensitivitätsfaktor der Einwirkungsseite
α_R	Sensitivitätsfaktor der Widerstandsseite
α_{cc}	Beiwert zur Berücksichtigung von Langzeitauswirkungen auf die Betonzugfestigkeit und von ungünstigen Auswirkungen durch die Art der Beanspruchung
α_e	Verhältnis der E-Module von Bewehrung und Beton
$\alpha_{f,t}$	Dauerstandfaktor einer FVK-Bewehrung
$\alpha_{f,su}$	Faktor zur Abminderung der FVK-Festigkeit in statisch unbestimmten Systemen
β	Zuverlässigkeitsindex
β_t	Völligkeitsbeiwert
γ	Teilsicherheitsbeiwert
γ_C	Teilsicherheitsbeiwert des Betons
γ_F	Teilsicherheitsbeiwert einer FVK-Bewehrung
γ_G	Teilsicherheitsbeiwert einer Eigengewichtslast
γ_Q	Teilsicherheitsbeiwert einer Nutzlast
γ^I, γ^{II}	Scherwinkel im Zustand I/II
δ	Momentendeckungsgrad/Umlagerungsfaktor
ε	Dehnung
ε_0	Dehnung im Schwerpunkt des Querschnitts
ε_c	Betondehnung
ε_{cr}	Dehnung des Betons bei Erreichen der Betonzugfestigkeit
ε_{cu}	Betonbruchstauchung

Formelzeichen und Variablen

$\varepsilon_{cu,conf}$	Umschnürte Betonbruchstauchung
ε_{cu2}	Bemessungsbruchdehnung
ε_f	Dehnung einer FVK-Bewehrung
$\varepsilon_{f,u}$	Bruchdehnung einer FVK-Bewehrung
ε_s	Dehnung einer Betonstahlbewehrung
$\varepsilon_{sm/fm}$	Mittlere Bewehrungsdehnung
ε_y	Dehnung einer Betonstahlbewehrung bei Erreichen der Streckgrenze
ε_u	Bruchdehnung einer Betonstahlbewehrung
ζ	Bezogener Hebelarm der inneren Kräfte
	Verteilungsbeiwert
η_{Last}	Lastverhältnis
η_ρ	Verhältnis der Bewehrungsgrade
θ	Rotation
	Druckstrebenneigungswinkel
	Modellunsicherheit
κ	Krümmung
κ_{cr}	Risskrümmung
κ_u	Krümmung bei Erreichen der Zugfestigkeit
κ_y	Fließkrümmung
λ_l	Biegeschlankheit
λ_q	Schub schlankheit
μ	Bezogenes Moment
	Erwartungswert
μ_{bal}	Bezogenes Moment im Balance Point
μ_{Ed}	Bezogenes einwirkendes Biegemoment
ν	Variationskoeffizient
ξ	Bezogene Druckzonenhöhe
ρ	Geometrischer Bewehrungsgrad
	Korrelationskoeffizient

ρ_{bal}	Geometrischer Bewehrungsgrad im Balance Point
$\rho_{f,1}$	Geometrischer Bewehrungsgrad einer FVK-Längsbewehrung
$\rho_{f,w}$	Geometrischer Bewehrungsgrad einer FVK-Bügelbewehrung
σ	Spannung
σ_c	Betonspannung
$\sigma_{f/s}$	Bewehrungsspannung
τ_b	Verbundspannung
ω	mechanischer Bewehrungsgrad
Φ	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
Φ^{-1}	Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Abkürzungen:

abZ	allgemeine bauaufsichtliche Zulassung
AIS	Adaptive Importance Sampling
BFK	Basaltfaserverbundkunststoff
CFK	Carbon-/Kohlenstofffaserverbundkunststoff
CSR	Compressed Sparse Row-Verfahren
EDV	Elektronische Datenverarbeitung
FE / FEM	Finite Elemente / Finite Elemente Methode
FVK	Faserverbundkunststoff
GFK	Glasfaserverbundkunststoff
GZG	Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
GZT	Grenzzustand der Tragfähigkeit
HLR	Hochleistungsrechner
LF	Lastfall
LHC	Latin Hypercube Sampling
MC	Monte-Carlo-Methode
MCLHC	LHC-Monte-Carlo-Methode

1 EINLEITUNG

1.1 Motivation

Seit ihrer Erfindung in der Mitte des 19. Jahrhunderts hat sich die Stahlbetonbauweise – gemessen am verbauten Volumen – zu einer der dominierenden Konstruktionsarten im Bauwesen entwickelt. Die Kombination der beiden Komponenten Beton und Bewehrungsstahl ermöglicht die Errichtung effizienter und dauerhafter Tragwerke. Die nahezu unbegrenzte Formbarkeit von Betonkonstruktionen eröffnet der Bauweise ein breites Anwendungsfeld im Hoch-, Industrie- und Infrastrukturbau. Jedoch bringt ihr intensiver Einsatz auch negative Aspekte mit sich. So ist die Produktion von Zementklinker, der als Bindemittel im Beton eingesetzt wird, energieintensiv und verursacht hohe CO₂-Emissionen. Weiterhin steigt der weltweite Bedarf an Zement stetig, so wurde in der Volksrepublik China in den Jahren 2021 und 2022 mehr Zement produziert, als in den USA im gesamten 20. Jahrhundert (vgl. US Geological Survey (2023) und US Geological Survey (2019)). Aufgrund der fortschreitenden Urbanisierung großer Teile der Welt ist davon auszugehen, dass sich dieser Trend fortsetzen wird. Darüber hinaus ist auch die Produktion der Betonstahlbewehrung energieintensiv. Diese ist zusätzlich anfällig für Korrosion, der mit einer an die Exposition des Bauteils angepassten Betondeckung vorgebeugt werden muss. Insbesondere bei Außenbauteilen oder Konstruktionen im Infrastrukturbereich führt dies zu einer erheblichen Erhöhung des erforderlichen Betonvolumens. Treten dennoch korrosionsbedingte Schäden an Stahlbetontragwerken auf, sind kostenintensive Instandsetzungsmaßnahmen oder sogar die Errichtung von Ersatzneubauten erforderlich.

Als ein innovativer Lösungsansatz für diese Problemstellungen hat sich in den letzten Jahren durch intensive internationale Forschungsanstrengungen die Substitution der Betonstahlbewehrung durch nichtmetallische Bewehrungsmaterialien aus Faserverbundkunststoffen (FVK) herausgestellt. Aufgrund ihrer chemischen Eigenschaften sind diese unempfindlich gegenüber Korrosion und ermöglichen die Erstellung dauerhafter Betonbauwerke bei verminderter Betondeckung, da diese ausschließlich den Kraftübertrag zwischen Beton und Bewehrung sicherstellen muss, vgl. Preinstorfer et al. (2022). Die mechanischen Eigenschaften von Bewehrungsmaterialien aus FVK unterscheiden sich jedoch grundlegend von denen einer Betonstahlbewehrung. Während letztere in der Lage ist, vor Erreichen der Bruchdehnung plastische Verformungen aufzunehmen, versagen FVK-Bewehrungselemente bei Erreichen der Festigkeit spröde. Die Auswirkungen dieses linear-elastischen Werkstoffverhaltens auf das Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Betonbauteile war in den letzten Jahren Gegenstand umfangreicher Forschungsaktivitäten. Hierbei wurden allerdings überwiegend Untersuchungen an statisch bestimmten Tragsystemen durchgeführt.

Studien an statisch unbestimmten Tragwerken mit FVK-Bewehrung liegen nur in sehr begrenztem Umfang vor.

Im üblichen Hochbau finden statisch unbestimmte Tragsysteme jedoch in vielfältiger Form Anwendung. Insbesondere bei Verwendung der Ortbetonbauweise eignen sich linienförmige Durchlaufsysteme mit Balken- oder Plattenquerschnitt zur Herstellung von Deckensystemen. Auch im Ingenieurbau werden Durchlaufsysteme – bspw. bei rückverankerten Schlitzwänden oder mehrfeldrigen Plattenbrücken – in unterschiedlichen Formen eingesetzt. Im Unterschied zu statisch bestimmten Systemen ist die Verteilung der Schnittgrößen in statisch unbestimmten Systemen an die Steifigkeitsverhältnisse innerhalb des Tragwerks gekoppelt. Da bewehrte Betonquerschnitte, unabhängig von der Art der verwendeten Bewehrung, ein stark nichtlineares Krümmungsverhalten aufweisen, ist die Steifigkeitsverteilung entlang des Bauteils in Abhängigkeit der Beanspruchung veränderlich. Dies führt dazu, dass sich die Schnittgrößen in statisch unbestimmten Betontragwerken im Vergleich zu einer linear-elastischen Schnittgrößenverteilung umlagern. Dieser Umstand ist bei der Bauteilbemessung zu berücksichtigen und kann im Stahlbetonbau gezielt genutzt werden, um die erforderliche Bewehrungsmenge unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten zu reduzieren, vgl. Kupfer (1986). Hierzu stehen Verfahren der Schnittgrößenermittlung zur Verfügung, die eine wirklichkeitsnahe Beschreibung der Schnittgrößenverteilung ermöglichen. Zumeist findet die Schnittgrößenermittlung von Betonbauteilen jedoch auf Grundlage der Elastizitätstheorie statt. Bereits Macchi (1976) wies darauf hin, dass diese Vereinfachung ein gewisses plastisches Verformungsvermögen der maximal beanspruchten Tragwerksbereiche voraussetzt. Bei Stahlbetonbauteilen ist dies durch das plastische Verformungsvermögen des Betonstahls für übliche Fälle gegeben.

Diese plastische Verformungsfähigkeit liegt bei FVK-bewehrten Betonbauteilen nicht vor. Es ist daher fraglich, ob eine Schnittgrößenermittlung auf Grundlage der Elastizitätstheorie eine auf der sicheren Seite liegende Bemessung gewährleistet und somit das normativ festgelegte Sicherheitsniveau nach DIN EN 1990 (2011) erreicht werden kann. In den nationalen und internationalen Regelwerken zur Bemessung von Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung wird eine linear-elastische Schnittgrößenermittlung empfohlen, Einschränkungen für statisch unbestimmte Tragsysteme werden keine vorgenommen. Dass diese Verallgemeinerung keine uneingeschränkte Gültigkeit besitzt, wurde u. a. im Rahmen der Einführung der allgemeinen bauaufsichtlichen Zulassung (abZ) eines Bewehrungsstabs aus Glasfaserverbundkunststoff (GFK) deutlich (abZ Z-1.6-238 (2019)). Im Rahmen einer hierfür durchgeführten Untersuchung in Eligehausen et al. (2008) konnte gezeigt werden, dass das fehlende plastische Verformungsvermögen zu Problemen im Rahmen der Bauteilbemessung führt, jedoch durch eine Überfestigkeit der Bewehrung kompensiert werden kann. Dabei wurde ausschließlich das Bauteilversagen infolge Erreichens der Bruchdehnung der Be-

wehrung betrachtet. Die Ergebnisse der Untersuchung flossen in Form eines Abminderungsfaktors für die Bemessungsfestigkeit der GFK-Bewehrung für statisch unbestimmte Systeme in abZ Z-1.6-238 (2019) ein.

Die Untersuchungen in Eligehausen et al. (2008) stellen die einzige – dem Autor dieser Arbeit bekannte – Untersuchung zur Schnittgrößenermittlung an statisch unbestimmten Betontragwerken mit FVK-Bewehrung dar, die die Einflüsse der Umlagerung auf die Bauteilbemessung berücksichtigt. Da diese im Rahmen des Zulassungsverfahrens eines spezifischen Bewehrungsmaterials erstellt wurde und sicherheitstheoretische Aspekte keine Berücksichtigung finden, können nur bedingt allgemeingültige Aussagen abgeleitet werden. Zudem bleibt die Untersuchung auf den Versagensmodus Bewehrungsversagen beschränkt, worauf in der Studie explizit hingewiesen wird.

1.2 Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Erarbeitung vertiefter Kenntnisse über die Schnittgrößenverteilung und Biegebemessung von statisch unbestimmten Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung im Grenzzustand der Tragfähigkeit. Aufgrund der großen Relevanz in der Praxis wird sich dabei auf linienförmige Tragwerke mit Balken- und Plattenquerschnitt beschränkt. Die Erkenntnisse sollen dabei für alle gängigen stabförmigen FVK-Bewehrungsmaterialien gültig sein.

Daraus ergeben sich drei zentrale Zielsetzungen. Erstens ist das Umlagerungsverhalten in statisch unbestimmten Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung – insbesondere unter Herausarbeitung der Unterschiede zu klassischen Stahlbetonkonstruktionen – umfassend zu charakterisieren. Zweitens ist zu untersuchen, ob die Bemessung derartiger FVK-bewehrter Bauteile auf Grundlage einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung ohne Sicherheitsdefizit möglich ist. Drittens ist zu überprüfen, wie dabei die unterschiedlichen Versagensarten des bewehrten Betonquerschnitts zu berücksichtigen sind. Auf der Grundlage der Ergebnisse ist abschließend ein Bemessungsvorschlag für statisch unbestimmte Betonbauteile mit FVK-Bewehrung zu erarbeiten, der eine Biegebemessung unter Gewährleistung des normativ festgelegten Sicherheitsniveaus ermöglicht.

1.3 Vorgehensweise

Nach der Einführung in Kapitel 1 wird in Kapitel 2 zunächst in die Schnittgrößenermittlung statisch unbestimmter Betonbauteile eingeführt. Dazu wird das grundlegende Tragverhalten bewehrter Betondurchlaufträger erläutert. Zudem werden die im Stahlbetonbau zulässigen Methoden der Schnittgrößenermittlung beschrieben. Des Weiteren werden die vorliegenden Erkenntnisse zur Schnittgrößenverteilung und -ermittlung von FVK-bewehrten

Durchlaufsystemen dargestellt. Hierbei wird insbesondere auf die Unterschiede zum klassischen Stahlbetonbau eingegangen. Basierend hierauf werden die dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsfragen ausführlich dargelegt.

Da ein zentrales Element dieser Arbeit die Ermittlung der Zuverlässigkeit der untersuchten Tragsysteme ist, werden in Kapitel 3 die Grundlagen der Tragwerkszuverlässigkeit erläutert. Dazu wird nach der Darstellung der stochastischen Modellierung von Zufallsvariablen das allgemeine Zuverlässigkeitsproblem zur Beschreibung der Versagenswahrscheinlichkeit von Tragwerken im Bauwesen hergeleitet und erläutert. Abschließend werden Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse vorgestellt, mit denen die Versagenswahrscheinlichkeit von Tragwerken bestimmt werden kann. Hierbei wird insbesondere auf das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Adaptive Importance Sampling (AIS) eingegangen.

In Kapitel 4 werden die mechanischen Grundlagen des nichtlinearen Last-Verformungsverhaltens bewehrter Betonbauteile dargelegt. Neben den Werkstoffgesetzen von Beton und Bewehrung wird das Verbundverhalten der beiden Komponenten sowie dessen Auswirkung auf das Biegetragverhalten aufgezeigt. Weiterhin werden die Grundlagen der Verformungsberechnung unter Biege- sowie Querkraftbeanspruchung erläutert.

Um die Verteilung der Schnittgrößen in statisch unbestimmten Durchlaufsystemen mit FVK-Bewehrung eingehend analysieren zu können, wird, basierend auf den mechanischen Grundlagen aus Kapitel 4, in Kapitel 5 ein numerisches Berechnungsmodell entwickelt und beschrieben. Ausgehend von einer wirklichkeitsnahen Werkstoffmodellierung ermöglicht das Modell die Berechnung der Verformungen und Schnittgrößenverteilung in Durchlaufsystemen. Das Modell beinhaltet dabei eine genaue Ermittlung der Momenten-Krümmungs-Beziehung beliebiger vertikalsymmetrischer Querschnitte. Zudem ist das Modell in der Lage Verformungen infolge Schubrissbildung abzubilden. Dies umfasst zum einen zusätzliche Querschnittsverkrümmungen aus Schubrissen, zum anderen die Möglichkeit einer schubweichen Elementformulierung. Sowohl die Querschnittsberechnung als auch das Gesamtmodell werden auf Grundlage von Bauteilversuchen validiert.

Auf Grundlage des numerischen Berechnungsmodells finden in Kapitel 6 umfassende Untersuchungen zur Verteilung der Schnittgrößen in FVK-bewehrten Betonbauteilen statt. Hierbei wird sich auf linienförmige Bauteile mit Balken- und Plattenquerschnitt beschränkt. Einleitend werden hierzu die praxisrelevanten Bewehrungsverhältnisse in FVK-bewehrten Durchlaufsystemen bestimmt. Basierend hierauf wird das Momentenumlagerungsverhalten eingehend untersucht und dargestellt.

In Kapitel 7 finden, aufbauend auf den Erkenntnissen aus Kapitel 6 und auf Grundlage des in Kapitel 5 beschriebenen Berechnungsmodells, Untersuchungen zur Zuverlässigkeit von Durchlaufträgern mit FVK-Bewehrung statt. Basierend auf den Ausführungen in Kapitel 3

wird hierzu ein stochastisches Modell entwickelt und beschrieben und anhand von Berechnungen aus der Literatur validiert. Im Anschluss wird die Versagenswahrscheinlichkeit eines ungünstig ausgewählten statischen Systems unter verschiedenen Randbedingungen ermittelt und dem normativ festgelegten Sicherheitsniveau gegenübergestellt.

Auf Basis der Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalysen wird in Kapitel 8 ein Bemessungsvorschlag erarbeitet, der die Biegebemessung von Durchlaufsystemen mit FVK-Bewehrung unter Einhaltung der normativ festgelegten Versagenswahrscheinlichkeit sicherstellt.

Die zentralen Erkenntnisse der Arbeit werden in Kapitel 9 abschließend zusammengefasst und es wird ein Ausblick über weiteren Forschungsbedarf gegeben.

2 SCHNITTGRÖßEN IN STATISCH UNBESTIMMTEN BETONBAUTEILEN

2.1 Einführung

Im Folgenden werden das Systemtragverhalten sowie die gebräuchlichen Verfahren zur Ermittlung der Schnittgrößen im konstruktiven Betonbau erläutert. Hierzu wird zunächst auf den normativ ausführlich erfassten, klassischen Stahlbetonbau eingegangen. Daran anschließend werden die Besonderheiten der Schnittkraftverteilung in Bauteilen mit Faser-verbundkunststoffbewehrung (FVK-Bewehrung) erläutert, welche normativ wenig erfasst und noch Gegenstand aktueller Forschung sind. Ziel des Kapitels ist es, die derzeit bestehenden Unklarheiten bei der Schnittgrößenermittlung und Bemessung dieser Bauteile aufzuzeigen.

Hierfür ist zunächst eine Unterscheidung zwischen statisch bestimmten und statisch unbestimmten Tragwerken vorzunehmen (siehe Abbildung 2-1 (links)). Im Gegensatz zu statisch bestimmten Systemen lassen sich die Lagerreaktionen und Schnittgrößen bei statisch unbestimmten Systemen nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln, sondern sind unter Einführung von Verträglichkeitsbedingungen mit Hilfe der bekannten Methoden der Baustatik zu berechnen. Dies erfordert eine Integration der Querschnittssteifigkeiten über die Systemlänge, sodass die Materialgesetze der verwendeten Werkstoffe explizit mit einbezogen werden müssen.

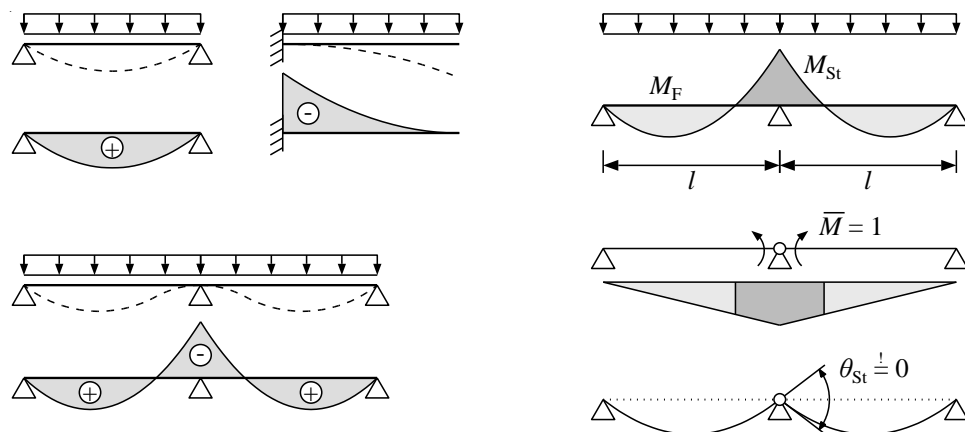


Abbildung 2-1 Links: Beispiele statisch bestimmter und unbestimmter Tragwerke
Rechts: Prinzip der virtuellen Kräfte am Zweifeldträger (nach Zilch und Zehetmaier (2010)).

Diese Notwendigkeit wird anhand des Zweifeldträgers in Abbildung 2-1 (rechts) sichtbar. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte ergibt sich die Verträglichkeitsbedingung durch Auslösen des Moments am Mittelaullager und der Vernachlässigung von Schubverformungen nach König et al. (1999) zu Gl. 2-1.

$$\theta_{St} = 2 \cdot \left(\int_0^l \frac{M_F(x) \cdot \bar{M}(x)}{EI_F(x)} \cdot dx + \int_0^l \frac{M_{St}(x) \cdot \bar{M}(x)}{EI_{St}(x)} \cdot dx \right) = 0 \quad \text{Gl. 2-1}$$

Es wird ersichtlich, dass die Biegesteifigkeiten in Feld- und Stützbereich EI_F bzw. EI_{St} direkt mit den Schnittgrößen verknüpft sind. Ändert sich das Verhältnis EI_F/ EI_{St} , ändert sich demzufolge auch das Verhältnis von Feld- zu Stützmoment. Weisen die verwendeten Baustoffe – wie im konstruktiven Ingenieurbau üblich – ein ausgeprägtes, nichtlineares Materialverhalten auf, kommt es infolge der nicht konstanten Momentenbeanspruchung zwangsläufig zu einer Änderung der Steifigkeitsverhältnisse.

Der Wahl des im Rahmen der Schnittgrößenermittlung verwendeten Materialgesetzes kommt daher eine entscheidende Rolle zu. Neben der Möglichkeit das Materialverhalten möglichst wirklichkeitsnah zu beschreiben, finden im Bauwesen oftmals linear-elastische oder elastisch-plastische Werkstoffgesetze Anwendung (siehe Abbildung 2-2). Während eine linear-elastische Materialmodellierung zu einem linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen nach dem Hookeschen Gesetz führt, steigen die Dehnungen bei einer (linear-)elastisch-plastischen Werkstoffformulierung nach Erreichen des Fließpunktes unabhängig von den Spannungen.

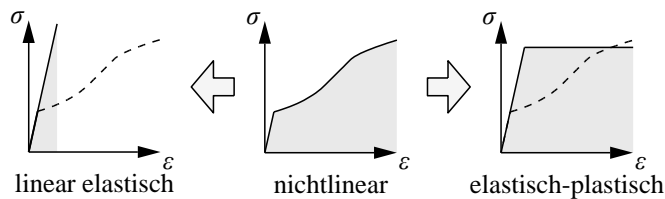


Abbildung 2-2 Modellierungsmöglichkeiten von nichtlinearem Werkstoffverhalten

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts wird nachfolgend zunächst das reale Tragverhalten statisch unbestimmter Stahlbetontragwerke erläutert. Darauf aufbauend werden die im Stahlbetonbau normativ zulässigen Methoden zur Schnittgrößenermittlung dargelegt. Daran anschließend werden die Besonderheiten und Abweichungen im Tragverhalten von Bauteilen mit FVK-Bewehrung eingeführt, kurz erläutert und vorhandene Untersuchungen zu dieser Thematik vorgestellt.

Es sei darauf hingewiesen, dass für die Ausführungen in dieser Arbeit ausschließlich balkenförmige Durchlaufsysteme betrachtet werden. Eine Untersuchung von Rahmen findet nicht statt. Ebenso wird auf Auswirkungen infolge Zwang oder Vorspannung, welche die Schnittgrößen in statisch unbestimmten Systemen ebenfalls beeinflussen können, nicht eingegangen. Abschließend sei angemerkt, dass in dieser Arbeit ausschließlich Nichtlinearitäten infolge des Materialverhaltens betrachtet werden („physikalische Nichtlinearität“). Nichtlineares Verhalten aufgrund von Bauteilverformungen („geometrische Nichtlinearität“ / Theorie II. Ordnung) findet keine Berücksichtigung.

2.2 Tragverhalten statisch unbestimmter Stahlbetontragwerke

Ein bewehrter Betonquerschnitt verhält sich lediglich bis zum Erreichen der Risslast linear-elastisch. Erreicht die Dehnung der gezogenen Querschnittsseite die Betonbruchdehnung, reißt der Querschnitt auf und die freiwerdende Zugkraft wird auf die Bewehrung umgelagert. Dies führt zu einer Abnahme der Querschnittssteifigkeit und damit zu einer Zunahme der Querschnittsverkrümmung. Besitzt die verwendete Bewehrung eine plastische Verformungsfähigkeit, nimmt die Querschnittsverkrümmung nach Erreichen der Fließlast noch stärker zu. In Abbildung 2-3 sind diese drei Zustände qualitativ dargestellt.

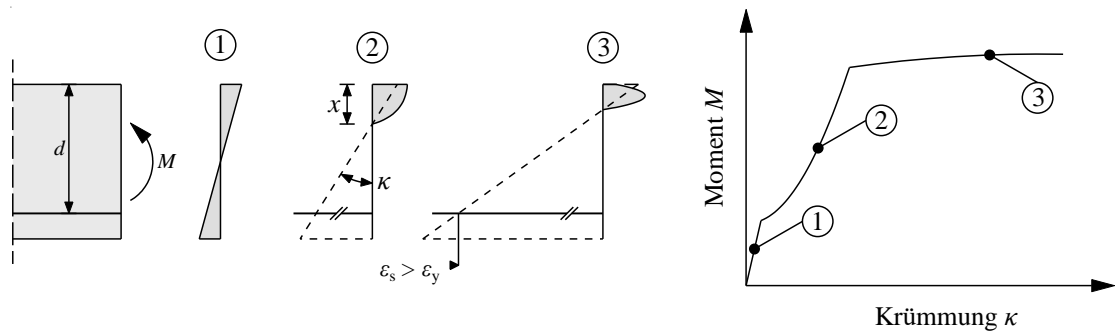


Abbildung 2-3 Querschnittsverhalten eines stahlbewehrten Betonquerschnitts

Für den in Abbildung 2-1 (rechts) eingeführten Zweifeldträger sind die Momentenverteilung und -entwicklung bei Annahme eines wirklichkeitsnahen, nichtlinearen Werkstoffverhaltens in Abbildung 2-4 exemplarisch dargestellt. Betrachtet wird ein stahlbewehrter Balkenquerschnitt mit konstanter Streckenlast q . Vereinfacht wird zunächst eine symmetrische Bewehrungsverteilung (Bewehrungsgrad im Stützbereich $\rho_{St,s}$ entspricht Bewehrungsgrad im Feld $\rho_{F,s}$) vorausgesetzt.

Bei Vorliegen eines Balken- oder Plattenquerschnitts und unter Ansatz von Bruttoquerschnittswerten ist die Biegesteifigkeit EI des ungerissenen Trägers konstant. Wird die Last q gesteigert, steigen die Momente in Stütz- und Feldbereich entsprechend der linear-elastischen Lösung. Das Verhältnis der beiden Momente ergibt sich bei Auswertung von Gl. 2-1 unter Ansatz einer konstanten Steifigkeit entlang des Systems und kann gängigen Tafelwerken entnommen werden (z. B. Albert (2022)). Es ergibt sich ein Verhältnis der Momente in Stütz- und Feldbereich η nach Gl. 2-2.

$$\eta_M = \frac{|M_{St}|}{M_F} = \frac{|-ql^2/8|}{9ql^2/128} \approx 1,78 \quad \text{Gl. 2-2}$$

Entsprechend steigt das Moment im Stützbereich schneller und erreicht das Rissmoment M_{cr} zuerst. Das Aufreißen des Stützbereichs führt zu einem Steifigkeitsabfall in diesem Bereich. Entsprechend Gl. 2-1 bleibt das Stützmoment bei weiterer Laststeigerung hinter dem Wert nach Elastizitätstheorie zurück und wächst langsamer an (Bereich 2 in Abbildung

2 Schnittgrößen in statisch unbestimmten Betonbauteilen

2-4). Erreicht der Feldbereich ebenfalls das Rissmoment, sinkt auch hier die Querschnittsteifigkeit und das Bauteil geht in Bereich 3 über.

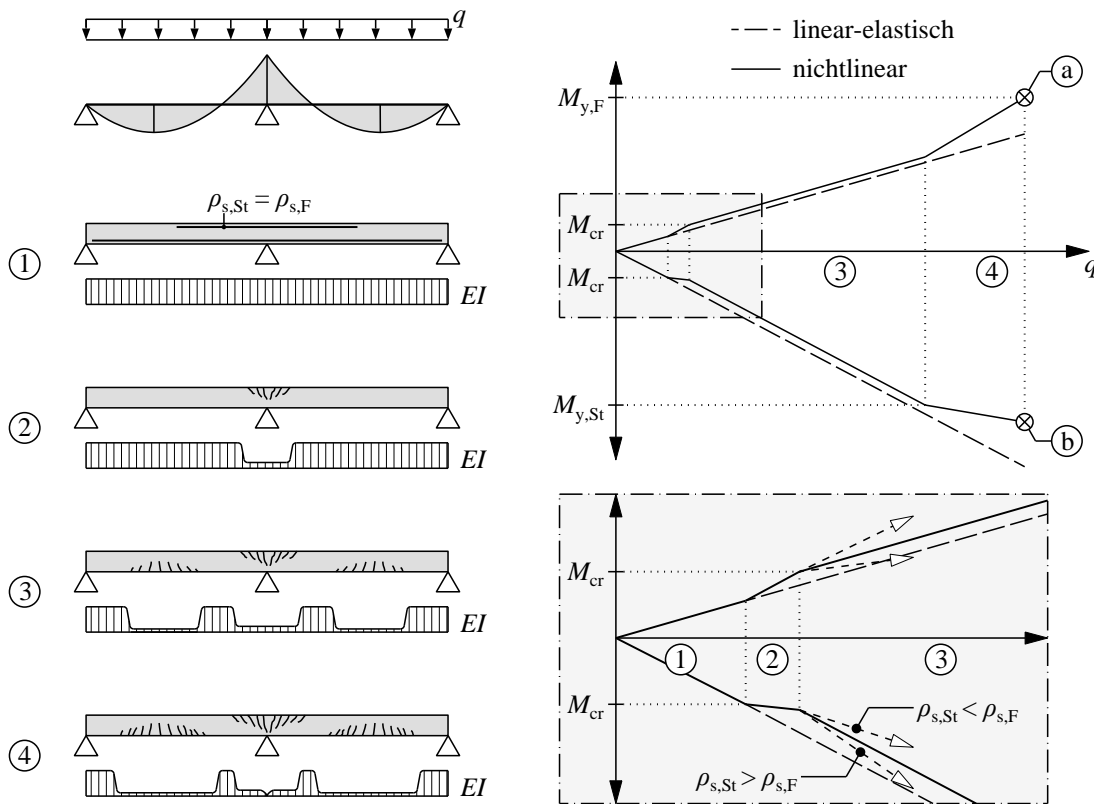


Abbildung 2-4 Momentenverteilung in einem zweifeldrigen Stahlbetonbalken (vgl. Zilch und Zehetmaier (2010))

Mit Übergang in Bereich 3 (Abbildung 2-4) verteilen sich die Schnittgrößen primär entsprechend des Verhältnisses der Steifigkeiten der gerissenen Querschnitte. Bei Annahme einer symmetrischen Bewehrungsanordnung verläuft die Momentenentwicklung in Stütze und Feld annähernd entsprechend der linear-elastischen Lösung. Liegt im Stützbereich ein größerer Bewehrungsgrad als im Feld vor, nimmt das Stützmoment infolge der höheren gerissenen Steifigkeit überproportional zu. Gegenteilig verhält es sich bei einer erhöhten Feldbewehrung, das Stützmoment bleibt hinter dem linear-elastischen Verlauf zurück. Im Feldbereich verhält es sich jeweils entgegengesetzt.

Die letzte Phase des Systemverhaltens beginnt, sobald die Bewehrung in Stütz- oder Feldbereich die Streckgrenze erreicht. Bei Annahme gleicher Bewehrungsmengen in beiden Bauteilbereichen oder einer reduzierten Stützbewehrung ist dies zuerst im Stützbereich der Fall (vgl. Bereich 4 in Abbildung 2-4). Die Querschnittskrümmungen nehmen stark zu, bleiben jedoch auf einen relativ kleinen Bereich des Tragwerks begrenzt, über der Stütze bildet sich ein plastisches Gelenk aus. Aufgrund seiner statischen Unbestimmtheit ist das System in der Lage weitere Laststeigerungen aufzunehmen. Der Stützquerschnitt nimmt

bei stark wachsender Krümmung nur noch verhältnismäßig wenig zusätzliche Last auf. Infolgedessen wächst das Moment im Feldbereich verstärkt an. Dieses Verhalten tritt nur bei Tragwerken auf, deren Querschnitte ein plastisches Verformungsvermögen besitzen. Wie in Kapitel 2.4 noch gezeigt wird, ist dies bei FVK-bewehrten Bauteilen nicht der Fall, was zu signifikanten Unterschieden im Tragverhalten statisch unbestimmter Bauteile führt.

Das vorliegende, betonstahlbewehrte System versagt unter einer der beiden Bedingungen:

- Die Bewehrung im Feldquerschnitt erreicht ebenfalls die Streckgrenze (siehe Punkt (a) in Abbildung 2-4). Auch im Feld steigen die Krümmung und damit die Verformungen erheblich an. Es bildet sich ein weiteres plastisches Gelenk und das System wird kinematisch. Weist das Tragsystem eine weitere statische Überzählige auf (z. B. Lagereinspannung oder weiteres Feld), kann die Last weiter gesteigert werden.
- Die Verformungsfähigkeit des Stützquerschnitts ist erschöpft (siehe Punkt (b) in Abbildung 2-4). Der Querschnitt über der Stütze ist nicht mehr in der Lage die Verdrehungen am Mittelaufleger aufzunehmen. Die maximal ertragbare Verdrehung wird als Rotationskapazität bezeichnet.

Neben der Momentenverteilung ändert sich auch die Verteilung der Querkräfte im Tragwerk. Da die beiden Größen über die Gleichgewichtsbedingungen gekoppelt sind, lassen sich die vorliegenden Querkräfte in jeder Phase der Schnittkraftumlagerung aus den Momenten ermitteln.

Das oben beschriebene Verhalten wird als „Schnittgrößenumlagerung“ bezeichnet. Es stellt nach König et al. (1999) jedoch keine Umlagerung im mechanischen Sinne dar, sondern drückt lediglich die oben erläuterte steifigkeitsabhängige Abweichung der Schnittgrößen von der elastizitätstheoretischen Lösung aus. Quantitativ lässt sich dies über den Momentendeckungs- bzw. Umlagerungsgrad nach Gl. 2-3 sowie Gl. 2-4 erfassen.

$$\delta = \frac{M_{\text{vorh}}}{M_{\text{el}}} \quad \text{Gl. 2-3}$$

$$(1-\delta) = 1 - \frac{M_{\text{vorh}}}{M_{\text{el}}} = \frac{M_{\text{el}} - M_{\text{vorh}}}{M_{\text{el}}} = \frac{\Delta M_{\text{uml}}}{M_{\text{el}}} \quad \text{Gl. 2-4}$$

mit:

δ Momentendeckungsgrad/Umlagerungsfaktor

$(1-\delta)$ Umlagerungsgrad

M_{vorh} Vorhandenes Moment

M_{el} Moment nach Elastizitätstheorie

In Abbildung 2-5 sind die Umlagerungsgrade für den Stützbereich des oben beschriebenen Beispiels qualitativ dargestellt. Nach dem Aufreißen des Stützbereichs steigt der Umlagerungsgrad zunächst stark an (Phase 2). Mit Erreichen der Risschnittgröße im Feld fällt er wieder ab. Wie weit der Umlagerungsgrad in Phase 3 abnimmt, hängt vom vorliegenden Steifigkeitsverhältnis der beiden Bereiche ab. Bei erhöhter Stützbewehrung ist auch ein Abfall des Umlagerungsgrads in den negativen Bereich möglich und es ergibt sich ein Stützmoment, welches über dem linear-elastischen Wert liegt. Eine ausführliche Würdigung dieses Aspekts findet in Kapitel 6.5 statt. Des Weiteren sei darauf hingewiesen, dass sich die Schnittgrößenumlagerung auf zwei grundlegende Effekte zurückführen lässt. Zunächst findet eine Umlagerung infolge Rissbildung in einem oder beiden Bereichen des Tragwerks statt. Die Verteilung der Schnittgrößen ergibt sich in erster Linie aus den Steifigkeitsverhältnissen der Querschnitte. Sobald sich im Stützbereich ein plastisches Gelenk infolge Stahlfließens bildet, kommt es zur erneuten Umlagerung. Dilger (1966) hat hierfür die Begriffe der „primären“ und der „sekundären“ Momentenumlagerung geprägt. Auch in Phase 2 ist das Umlagerungsverhalten nicht ausschließlich vom kritischen, sich im Fließbereich befindlichen Stützbereich abhängig. Je größer die Steifigkeit des Feldbereichs ist, umso langsamer nimmt auch das Stützmoment zu und umso weniger plastisches Verformungsvermögen ist erforderlich, vgl. König et al. (1999).

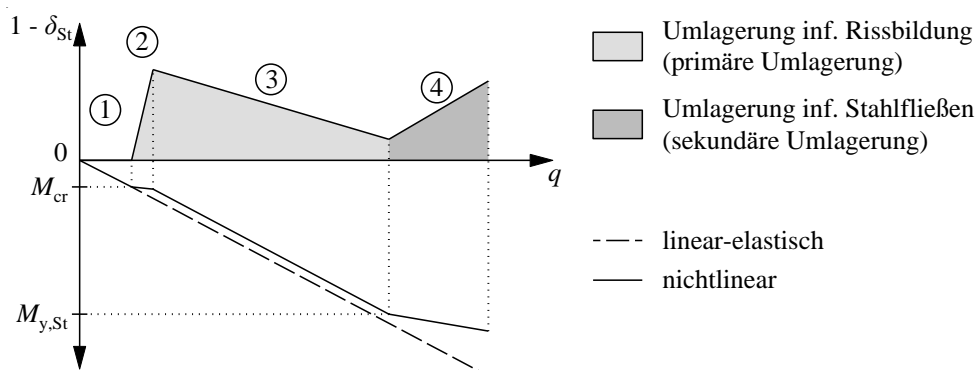


Abbildung 2-5 Momentenentwicklung und Umlagerungsgrad im Stützbereich

2.3 Schnittgrößenermittlung im Stahlbetonbau

2.3.1 Allgemeines

Wie in Kapitel 2.2 gezeigt, ist die Verteilung der Schnittkräfte in einem statisch unbestimmten Tragwerk direkt an die Bauteilsteifigkeiten und damit an die Wahl der Bewehrung geknüpft. Da die Ermittlung der Bewehrung jedoch die Hauptaufgabe der Bemessung darstellt, wird ein iteratives Vorgehen aus Bewehrungswahl und anschließender Tragfähigkeitsbestimmung erforderlich. Hinzu kommt, dass das semiprobabilistische Sicherheitskonzept der DIN EN 1990 (2011), welches DIN EN 1992-1-1 (2011) zugrunde liegt, für

die Nachweise der Grenzzustände die Verwendung von material- und einwirkungsbezogenen Teilsicherheitsbeiwerten sowie Quantilwerten auf Einwirkungs- und Materialseite vorsieht. Eine wirklichkeitsnahe Beschreibung des Bauteilverhaltens nach Kapitel 2.2 ergibt sich jedoch nur infolge der Verwendung mittlerer Materialeigenschaften. Zur Vereinfachung der Bemessung wird daher die Schnittgrößenermittlung auf Systemebene von der Querschnittsbemessung entkoppelt. Dies ermöglicht die Verwendung vom Teilsicherheitsbeiwerten sowie Quantilwerten auf Einwirkungs- und Widerstandsseite. Auf das entsprechende Sicherheitskonzept wird in Kapitel 3.3 näher eingegangen.

Im Folgenden werden zunächst die nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) bzw. Model Code 2010 (2013) zulässigen Verfahren der Schnittgrößenermittlung sowie ihre wichtigsten Hintergründe vorgestellt. Die Verfahren unterscheiden sich vorrangig in ihrer Approximation des nichtlinearen Tragverhaltens.

2.3.2 Linear-elastische Schnittgrößenermittlung

Die Ermittlung der Schnittgrößen in Stahlbetonbauteilen findet in der Baupraxis in der Regel unter der Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens statt. Dies ermöglicht nicht nur eine schnelle, auf Tabellenwerten basierende Schnittgrößenermittlung, sondern erlaubt zudem die Überlagerung verschiedener Lastfälle (Superpositionsprinzip). Auf Grundlage der auf diese Weise ermittelten Schnittgrößen kann anschließend eine Querschnittsbemessung unter Verwendung nichtlinearer Materialmodelle erfolgen. Dieses Vorgehen ermöglicht somit die bereits angesprochene Entkopplung der Schnittgrößenermittlung auf Systemebene von der Bemessung des Bauteils auf Querschnittsebene.

Die linear-elastische Schnittgrößenermittlung darf nach DIN EN 1992-1-1 (2011) und Model Code 2010 (2013) erfolgen unter der Annahme von:

- Ungerissenen Querschnitten
- Linearen Spannungs-Dehnungs-Linien (siehe Abbildung 2-2 (links))
- Mittelwert des Elastizitätsmoduls

Unter diesen Bedingungen hängt die Systemantwort ausschließlich linear von den einwirkenden Lasten ab (vgl. Bereich 1 in Abbildung 2-4).

Die getroffenen Annahmen stellen eine starke Vereinfachung dar, sind für viele Anwendungsfälle jedoch ausreichend genau. Bei einem statisch bestimmt gelagerten Tragwerk bilden sie die Schnittgrößen realitätsnah ab. Für statisch unbestimmte Systeme liegt die linear-elastische Schnittgrößenermittlung zumeist auf der sicheren, wenn auch auf der unwirtschaftlichen, Seite (vgl. DAFStb Heft 525 (2010)). Sobald der höchstbelastete Tragwerksbereich seine Tragfähigkeit erreicht, wird von einem Versagen des gesamten Systems

2 Schnittgrößen in statisch unbestimmten Betonbauteilen

ausgegangen. Eventuell vorhandene Tragreserven infolge möglicher Schnittgrößenumlagerungen, welche sich insbesondere bei hohem Verkehrslastanteil ergeben, bleiben ungenutzt.

Jedoch setzt auch eine linear-elastische Schnittgrößenermittlung ein plastisches Verhalten einiger Tragwerksteile in geringem Umfang voraus. Darauf wurde von Macchi (1976) schon früh hingewiesen. Wie in Kapitel 2.2 ausgeführt, verteilen sich die Schnittgrößen in einem statisch unbestimmten System nach Aufreißen von Stütze und Feld entsprechend den Steifigkeiten der beiden Bereiche. Die nach linear-elastischer Schnittgrößenermittlung größere Stützbewehrung führt zu einem überproportionalen Anstieg des Moments in diesem Bereich.

In Abbildung 2-6 wird dieser Umstand am Beispiel des bereits bekannten Zweifeldträgers qualitativ erläutert. Diesmal wird vorausgesetzt, dass das Bauteil für eine auf beiden Feldern wirkende Streckenlast auf Grundlage der Elastizitätstheorie bemessen wurde. Wie Gl. 2-2 zu entnehmen ist, beträgt das Verhältnis von Stütz- zu Feldmoment ca. 1,8. Näherungsweise entspricht dies auch dem Verhältnis der Bewehrungsgrade der beiden Bereiche.

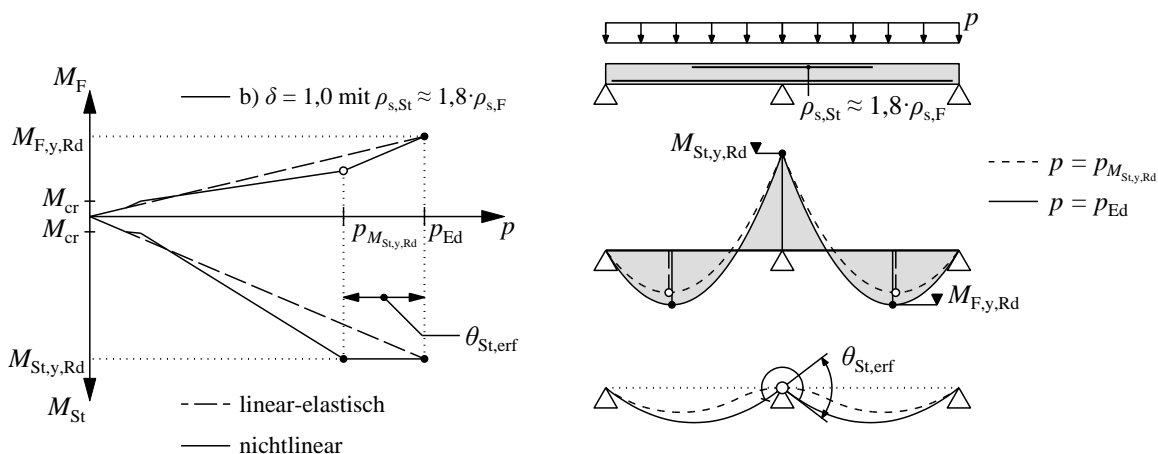


Abbildung 2-6 Realitätsnahe Momentenentwicklung bei linear-elastischer Bemessung (vgl. Macchi (1976))

Nach Aufreißen des Feldbereichs und Übergang in Phase 3 der Schnittgrößenumlagerung nach Abbildung 2-4 führt der im Vergleich zum Feld erhöhte Bewehrungsgrad im Stützbe-
 reich zu einem übermäßigen Anstieg des Stützmoments. Dieser führt dazu, dass sich das Bemessungsmoment im Stützbe-
 reich $M_{St,y,Rd}$ bereits bei einer Last, welche kleiner als die Bemessungslast p_{Ed} ist, einstellt. Damit die Systemtraglast erreicht wird, ist die Bildung
 eines plastischen Gelenks über der Stütze erforderlich. Verfügt der Stützbe-
 reich über ein ausreichendes Verformungsvermögen, erreicht der Feldquerschnitt das Bemessungsmo-
 ment, während das Stützmoment entsprechend der Approximation als Fließgelenk konstant
 bleibt. Da die hierfür erforderliche Rotationsfähigkeit gering ist und Stahlbetonquerschnitte
 grundsätzlich ein gewisses Verformungsvermögen aufweisen, stellen DIN EN 1992-1-1

(2011) und Model Code 2010 (2013) keine gesonderten Anforderungen an diese Art der Schnittgrößenermittlung. In DIN EN 1992-1-1/NA (2013) hingegen wurde die Regelung der DIN 1045-1 (2008) übernommen und es wird zur Sicherstellung dieses Verformungsvermögens für Durchlaufsysteme mit annähernd gleichen Feldsteifigkeiten und einem Stützweitenverhältnis $0,5 < l_{\text{eff},1} / l_{\text{eff},2} < 2,0$ eine maximale Druckzonenhöhe ξ_d nach Gl. 2-5 vorgeschrieben.

$$\xi_d = \frac{x_d}{d} \leq \begin{cases} 0,45 & \text{bis C50/60} \\ 0,35 & \text{ab C55/67} \end{cases} \quad \text{Gl. 2-5}$$

mit:

- ξ_d Bezogene Druckzonenhöhe infolge der Bemessungsschnittgröße
- x_d Druckzonenhöhe infolge der Bemessungsschnittgröße
- d Statische Nutzhöhe

Alternativ werden geeignete konstruktive Maßnahmen, wie eine enge Bügelumschnürung, oder andere Nachweise zur Sicherstellung einer ausreichenden Verformungsfähigkeit gefordert. Auf den Einfluss bügelumschnürter Druckzonen wird in Kapitel 4.2.1 eingegangen. Weiterhin begrenzt DIN EN 1992-1-1/NA (2013) den Bewehrungsgrad der Längsbewehrung auf 8 % der Querschnittsfläche, was ebenfalls eine gewisse Mindestduktilität sicherstellt.

2.3.3 Linear-elastische Berechnung mit begrenzter Umlagerung

Um das nichtlineare Tragverhalten näherungsweise zu erfassen, erlauben die einschlägigen Normen des Betonbaus die linear-elastische Bemessung um eine begrenzte Schnittgrößenumlagerung zu ergänzen. Die Schnittgrößenermittlung findet hierbei weiterhin unter dem Ansatz linear-elastischer Materialgesetze statt. Anschließend wird das Moment im Stützbereich mit einem zu wählenden Umlagerungsfaktor abgemindert. Das daraus resultierende (umgelagerte) Feldmoment lässt sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen und liegt jetzt über dem Wert nach Elastizitätstheorie. Da, wie in Abbildung 2-7 (links) dargestellt, bei der Bemessung statisch unbestimmter Systeme infolge veränderlicher Nutzlasten unterschiedliche Laststellungen zu berücksichtigen sind, liegt das infolge der Umlagerung des Stützmoments für den Lastfall „Volllast“ (LF1 in Abbildung 2-7 (links)) erhöhte Feldmoment noch unter dem Bemessungsfeldmoment aus einer feldweisen Belastung (LF2 in Abbildung 2-7 (links)). Die Umlagerung des Stützmoments erlaubt damit die Einsparung von Bewehrung im Stützbereich und somit eine effektivere Ausnutzung des Bauteils, vgl. hierzu Woidelko (1983) sowie Kupfer (1986). Zudem werden Bewehrungskonzentrationen in diesem Bereich vermieden, was u. a. positive Effekte auf Rissbildung sowie Einbaubarkeit hat.

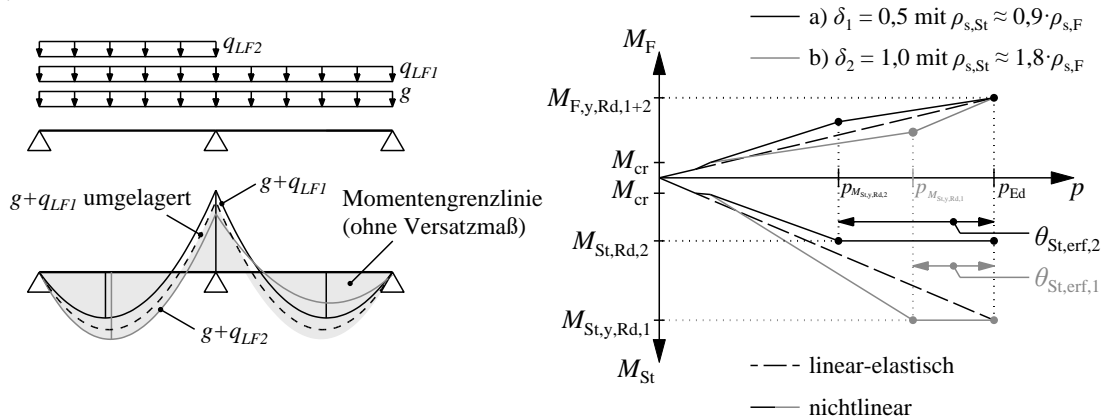


Abbildung 2-7 Links: Feldweise Belastung eines Zweifeldträgers
Rechts: Schematische Darstellung der zum Erreichen der Systemtraglast erforderlichen Rotation, in Anlehnung an Macchi (1976) bzw. Fabritius (2001)

Infolge der geringeren Bewehrungsmenge im Stützbereich nähert sich die Momentenentwicklung der linear-elastischen Lösung an, sorgt jedoch auch dafür, dass das Fließmoment in diesem Bereich früher erreicht wird. Folglich ist – vergleichen mit der linear-elastischen Schnittgrößenermittlung ohne Umlagerung – ein höheres Verformungsvermögen erforderlich. In Abbildung 2-7 (rechts) ist dies für den Zweifeldträger, welcher in Kapitel 2.2 und 2.3.2 betrachtet wurde, qualitativ dargestellt. Die aus Kapitel 2.3.2 bekannte Momentenentwicklung bei linear-elastischer Bemessung ist grau hinterlegt. Vergleichend wird von einer sehr großen planmäßigen Momentenumlagerung von 50 % ausgegangen. Das Stützmoment steigt nach Aufreißen des Feldes in diesem Fall deutlich langsamer und bleibt hinter dem linear-elastischen Verlauf zurück. Durch die Reduktion der Stützbewehrung auf 50 % des linear-elastischen Werts verringert sich das Fließmoment $M_{St,y,Rd}$ erheblich, wodurch das lokale Fließen der Stützbewehrung bereits bei einer geringeren Last $p_{M_{St,Rd,2}}$ einsetzt. Die nun erforderliche Verformungskapazität dieses Bereichs ist im Vergleich zu einer Bewehrungsführung nach Elastizitätstheorie deutlich erhöht. Infolge der angestrebten Schnittgrößenumlagerung ergibt sich die erforderliche Rotation, welche vom Stützbereich aufgenommen werden muss. Wie in Kapitel 2.3.4 noch gezeigt wird, stellt sowohl die Ermittlung des erforderlichen als auch des vorhandenen Verformungsvermögens ein komplexes Unterfangen dar. Normativ wurden daher Grenzwerte festgelegt, welche eine Momentenumlagerung ohne explizite Überprüfung der Komptabilitätsbedingung erlauben.

Auch bei diesem Verfahren wird hierzu die Rotationsfähigkeit über eine Begrenzung der bezogenen Druckzonenhöhe ξ sichergestellt. In Abbildung 2-8 sind die nach der aktuell in Deutschland gültigen Bemessungsnorm DIN EN 1992-1-1/NA (2013), der in Vorbereitung befindlichen neuen europäischen Normengeneration prEN 1992-1-1 (2021) sowie der US-amerikanischen und kanadischen Stahlbetonnormen ACI 318-19 (2019) und CAN/CSA-A23.3-04 (2004) zulässigen Druckzonenhöhen in Abhängigkeit des Umlagerungsgrads

dargestellt. Die in Kapitel 2.3.2 eingeführten maximalen Druckzonenhöhen für eine Ermittlung der Schnittgrößen ohne Umlagerung finden sich als Schnittpunkte der Kurven nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) mit der Abszisse wieder. Da die aufnehmbaren Verformungen von den Grenzdehnungen der verwendeten Materialien abhängen, unterscheiden die europäischen Normen zwischen Normalbeton ($f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$, Bruchstauchung $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$) und hochfestem Beton ($f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$, Bruchstauchung $\varepsilon_{cu} < 3,5 \text{ ‰}$) sowie normalduktilen Betonstahl (B500A, Bruchdehnung $\varepsilon_{uk} = 25 \text{ ‰}$) und hochduktilen Betonstahl (B500B, Bruchdehnung $\varepsilon_{uk} = 50 \text{ ‰}$). Weitere Unterschiede ergeben sich infolge der verwendeten Berechnungsmethoden.

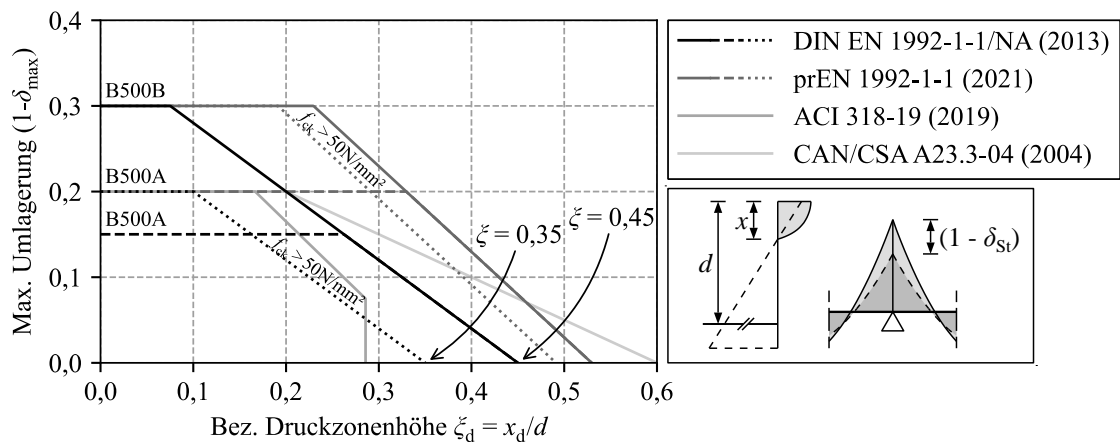


Abbildung 2-8 Zulässige Druckzonenhöhen und zugehörige Umlagerungsgrade nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013), prEN 1992-1-1 (2021), ACI 318-19 (2019) und CAN/CSA-A23.3-04 (2004)

Die in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) eingegangenen Grenzwerte ergeben sich aus der Gegenüberstellung der möglichen plastischen Rotation mit der erforderlichen Rotation. Für die mögliche Rotation gibt die Norm selbst entsprechende Zusammenhänge an, Näheres hierzu ist Kapitel 2.3.4 zu entnehmen. Die erforderlichen Rotationen wurde von Eligehausen und Fabritius (1993) unter Variation verschiedener Einflussfaktoren und Umlagerungsgrade hergeleitet und die maximal zulässigen Umlagerungen in Abbildung 2-8 abgeleitet. Eine anschauliche Darstellung dieses Vorgehens kann DAfStb Heft 525 (2010) entnommen werden.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Ermittlung der möglichen Rotation nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) auf der bezogenen Druckzonenhöhe infolge der Bemessungswerte der Einwirkungen und Widerstände basiert. Eine Neuberechnung der Druckzonenhöhe im Rahmen der Bemessung ist daher nicht vorzunehmen. Die Berechnung der erforderlichen Rotation nach Eligehausen und Fabritius (1993) bezieht sich ebenfalls auf die Bemessungswerte der Baustoffe, vgl. CEB Bulletin d'information No. 242 (1998). Eine ausreichende Versagenswahrscheinlichkeit wird demnach über die Verwendung von Quantil- und Teilsicherheitsbeiwerten gewährleistet. Voll-probabilistische Betrachtungen wurden u. a. von

Kraemer (1982) durchgeführt. Er untersuchte beidseitig eingespannte Einfeldträger (Mittelfeld eines unendlich langen Durchlaufträgers) und stellte fest, dass eine Reduzierung des Stützmoments um bis zu 40 % zu keiner geringeren Versagenswahrscheinlichkeit führt. Aktuellere Untersuchungen sind u. a. in Baji und Ronagh (2013), Nguyen (2022) und Gussella (2022) zu finden.

Abschließend sei erwähnt, dass die in Abbildung 2-8 dargestellten Umlagerungsfaktoren der DIN EN 1992-1-1/NA (2013) nur für den in der Bemessungspraxis primär relevanten Fall einer Umverteilung der Momente von der Stütze ins Feld gültig sind. Die zur Ableitung der Faktoren genutzte Modellbildung der möglichen plastischen Rotation berücksichtigt näherungsweise positive Effekte, welche sich im Stützbereich eines Durchlaufträgers einstellen und in Kapitel 2.3.4 näher erläutert werden. Dies beschränkt ihre Anwendung auf diese Bereiche, vgl. DAfStb Heft 525 (2010). Weiterhin schreibt DIN EN 1992-1-1/NA (2013) ab einer Schnittgrößenumlagerung von mehr als 15 % den expliziten Nachweis der Begrenzung der Spannungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit vor. Mit Herabsetzung des Bemessungsmoments über der Stütze besteht die Möglichkeit, dass bereits im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (GZG) plastische Stahldehnungen auftreten.

2.3.4 Verfahren nach Plastizitätstheorie im Stahlbetonbau

2.3.4.1 Normative Anwendung

Die bisher vorgestellten Methoden der Schnittgrößenermittlung verzichten auf einen expliziten Nachweis der Verformungskompatibilität und erlauben so eine einfache und auch für Handrechnungen geeignete Bestimmung der Schnittgrößen. Wird die Verformungsfähigkeit der maximal beanspruchten Tragwerksbereiche rechnerisch nachgewiesen, ist die Anwendung von Methoden auf Grundlage der Plastizitätstheorie möglich. Die breite Verfügbarkeit von EDV-gestützten Berechnungsumgebungen auf Grundlage der Finite-Elemente-Methode (FEM, vgl. hierzu Kapitel 5) hat dazu geführt, dass diese Methoden in der heutigen Bemessungspraxis des Stahlbetonbaus kaum noch Anwendung finden. Auf die Methoden soll daher an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Eine übersichtliche Darstellung der Verfahren sowie der ihnen zugrunde liegenden Grenzwertsätze kann Duddeck (1973), Leonhardt (1978) sowie Bieger (1995) entnommen werden.

DIN EN 1992-1-1/NA (2013) erlaubt im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) sowohl die Anwendung von plastizitätstheoretischen Verfahren auf Grundlage des statischen (unteren) als auch des kinematischen (oberen) Grenzwertsatzes. Für die Bemessung von Durchlaufträgern bietet sich der statische Grenzwertsatz an, da die Bewehrungsmengen und damit die aufnehmbaren Fließmomente zunächst nicht bekannt sind. Die Schnittgrößenverteilung kann nahezu frei gewählt werden und damit die in Kapitel 2.3.3 eingeführten Grenzwerte überschreiten. Nach der Querschnittsbemessung ist die Rotationsfähigkeit jener

Tragwerksbereiche, die durch die Wahl der Schnittgrößenverteilung gezielt entlastet wurden, nachzuweisen. Hierzu ist die erforderliche Rotation des Tragwerks der zulässigen Rotation gegenüberzustellen. Die erforderliche Rotation ist z. B. mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte zu bestimmen (vgl. Abbildung 2-1, ein Beispiel kann Kordina et al. (1992) entnommen werden). Es ist anzumerken, dass nach Fingerloos et al. (2012) zur Ermittlung der erforderlichen Rotation die rechnerischen Mittelwerte nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) Kapitel 5.7 (NA.10) zu verwenden sind (siehe hierzu auch Kapitel 2.3.5). Die zulässige Rotation wird in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) in Abhängigkeit der bezogenen Druckzonenhöhe (Bemessungsniveau) angegeben und geht auf Ahner und Kliver (1998) sowie Ahner und Kliver (1999) zurück und ist in Abbildung 2-9 grafisch dargestellt. Während Ahner und Kliver (1998) einen nichtlinearen Zusammenhang zur Berechnung der zulässigen plastischen Rotation angeben, wird dieser in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) linear angenähert. Der ansteigende Ast der Graphen stellt das Querschnittsversagen infolge Bewehrungsversagen dar. Nach Erreichen der maximalen Rotationskapazität am Balance Point (Beton und Betonstahl erreichen ihre jeweiligen Bruchdehnungen) versagt der Querschnitt infolge von Betondruckversagen. Als weitere Faktoren gehen die Bewehrungsbruchdehnung ε_{uk} , das Verhältnis von Zugfestigkeit zu Streckgrenze $(f_t/f_y)_k$ sowie die Schubschlankheit λ_q ein. Wie in Kapitel 2.3.3 bereits erwähnt, wurden die zulässigen Rotationen auf Grundlage der Bemessungswerte der Einwirkungen und Widerstände hergeleitet, weshalb auch hier die bezogene Druckzonenhöhe auf Bemessungsniveau ξ_d als Eingangsgröße dient.

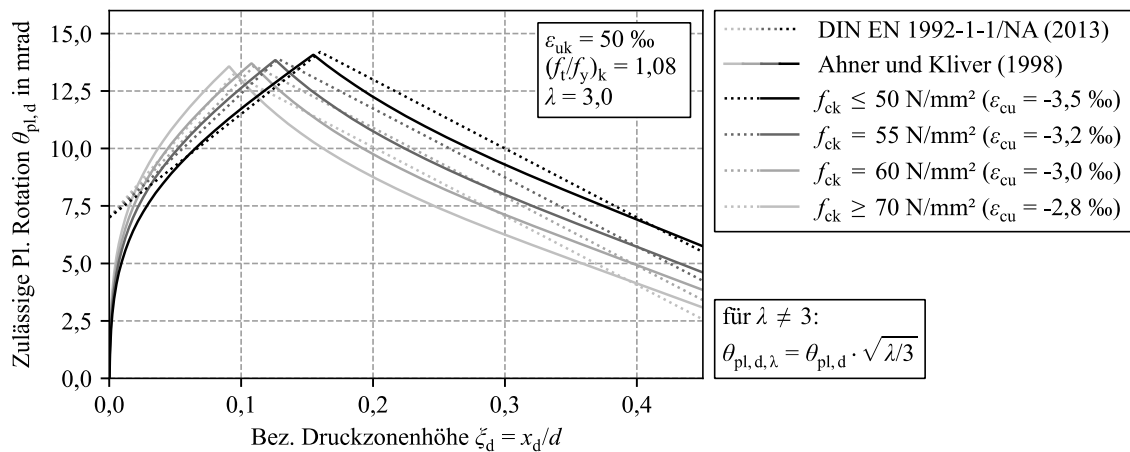


Abbildung 2-9 Zulässige plastische Rotation nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) und Ahner und Kliver (1998)

Zur Ermittlung der zulässigen Rotation kommen somit der wirklichkeitsnahen Beschreibung des plastischen Verformungsverhaltens und der möglichst umfassenden Berücksichtigung aller Einflussfaktoren entscheidende Rollen zu, auf welche im Folgenden kurz eingegangen wird.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass den in Kapitel 2.3.3 angesprochenen Limitationen infolge der Nachweise im GZG durch die Verwendung größerer Umlagerungsgrade bei der Anwendung dieses Verfahrens besonderes Augenmerk geschenkt werden muss.

2.3.4.2 Rotation plastischer Gelenke im Stahlbetonbau

Die Untersuchung der Verformungsfähigkeit plastizierender Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau ist seit vielen Jahren Gegenstand zahlreicher Forschungsvorhaben. Hervorzuheben sind u. a. die Arbeiten von Dilger (1966), Bachmann (1967), Woidelko (1983), Langer (1987), Spanke (1987), Graubner (1989), Kreller (1989), Bigaj (1999) und Fabritius (2001). Im Laufe der Zeit wurde eine Vielzahl von Modellen und Ansätzen entwickelt, um die zulässige plastische Rotation möglichst wirklichkeitsnah abzubilden. CEB Bulletin d'information No. 242 (1998) enthält eine übersichtliche Zusammenstellung der relevanten Modelle und ihrer Grundlagen. In Anlehnung an CEB Bulletin d'information No. 242 (1998) und Graubner (1989) werden im Folgenden zunächst die maßgeblichen Einflussfaktoren auf die Rotationsfähigkeit von Stahlbetonbauteilen getrennt nach Material-, Querschnitts- und Systemebene dargestellt. Einige davon werden in den weiteren Ausführungen vertieft.

MATERIALEBENE

- Materialeigenschaften des Betons
- Stahlfestigkeit und Duktilitätsklasse
- Verbundeigenschaften zwischen Beton und Bewehrung

QUERSCHNITTEBENE

- Querschnittsform und -abmessung
- Geometrischer und mechanischer Bewehrungsgrad der Zugbewehrung
- Umschnürungswirkung einer Bügelbewehrung
- Bewehrungskonfiguration (Stabdurchmesser und -abstand)
- Druckbewehrungsgrad

SYSTEMEBENE

- Statisches System
- Einflüsse aus Schubrißbildung
- Lastart und -anordnung
- Wiederholte und zyklische Belastung
- Dauer der Belastung

Bachmann (1967) unterscheidet zwischen plastischen Gelenken infolge von Biegebeanspruchung (Biegerissgelenk) und infolge des kombinierten Auftretens von Momenten und Querkraften (Schubrißgelenk). Die beiden Gelenkarten sind in Abbildung 2-10 (links) dargestellt. Während sich die plastische Rotation für Biegerissgelenke nach König et al. (1999)

durch die Integration der Verkrümmungsdifferenz aus der Krümmung bei Erreichen der Zugfestigkeit κ_u und der Fließkrümmung κ_y zwischen den Momentennullpunkten ermitteln lässt, führen die schrägen Schubrisse in Bereichen hoher Querkräfte (Mittelaufleger von Durchlaufträgern) zu einer Erhöhung der Bewehrungsspannung. Hiermit geht eine Ausweitung des plastizierenden Bereichs einher, was die Rotation erheblich steigern kann. In den meisten Modellen wird dieser Effekt durch die Berücksichtigung des Versatzmaßes und der Abminderung der Druckstrebenneigung in der Nähe des Zwischenauflagers erfasst.

Zur Bestimmung der möglichen Rotation ist zudem die in Abbildung 2-10 (rechts) dargestellte Modellbildung sinnvoll. Der negative Momentenbereich wird als Einfeldträger herausgelöst, an welchem die Integration der Krümmungen stattfindet. An ihm ergibt sich die plastische Gesamtrotation gemäß Gl. 2-6.

$$\theta_{\text{pl,ges.}} = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{a_q} (\kappa_u - \kappa_y) dx}_{\theta_{\text{pl,bieg}}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3} (\kappa_u - \kappa_y) \cdot a_1}_{\theta_{\text{pl,schub}}} \quad \text{Gl. 2-6}$$

mit:

- κ_u Krümmung bei Erreichen der Zugfestigkeit
- κ_y Fließkrümmung
- a_q Abstand Momentennulldurchgang zu Auflager
- a_1 Versatzmaß
- $\theta_{\text{pl,bieg}}$ Biegeanteil der plastischen Rotation
- $\theta_{\text{pl,schub}}$ Schubanteil der plastischen Rotation

Der Faktor $2/3$ bei der Bestimmung von $\theta_{\text{pl,schub}}$ (Gl. 2-6.) beschreibt nach Ahner und Kliver (1998) die Völligkeit der Schubkrümmungen durch die Abminderung der Druckstrebenneigung.

Auf Grundlage der oben dargestellten Zusammenhänge lassen sich die zu Beginn des Kapitels aufgeführten und in den Kapiteln 2.3.3 und 2.3.4.1 bereits angesprochenen Einflussfaktoren auf die Momentenumlagerung erläutern. Da der Biegeanteil der Rotation nach Gl. 2-6 als Differenz von κ_u und κ_y definiert ist, nimmt er mit steigender Bewehrungs- sowie Betonbruchdehnung ε_{uk} bzw. ε_{cu} zu. Dies erklärt die Berücksichtigung der Duktilitätsklasse des Baustahls bei den Grenzwerten der linear-elastischen Schnittgrößenermittlung in Kapitel 2.3.3 sowie der zulässigen Rotation in Kapitel 2.3.4.1. Da mit steigender Betonfestigkeit die zugehörige Bruchstauchung sinkt, findet auch die Betonfestigkeitsklasse Eingang in beide Verfahren.

2 Schnittgrößen in statisch unbestimmten Betonbauteilen

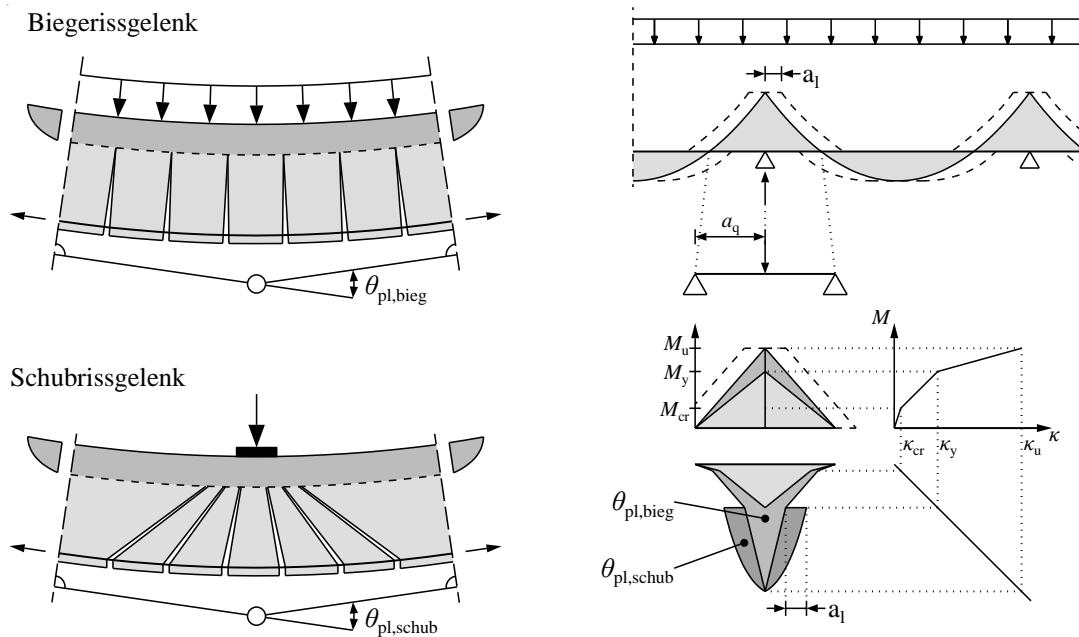


Abbildung 2-10 Links: Plastische Gelenktypen nach Bachmann (1967)
Rechts: Modellbildung zur Berechnung der plastischen Rotation nach Ahner und Kliver (1998)

Da die bezogene Druckzonenhöhe ζ_d nichts anderes als den vorliegenden mechanischen Bewehrungsgrad ω_d darstellt, bildet sie den Dehnungszustand im Querschnitt und somit die in der gestauchten Betonrandfaser und der Bewehrungslage vorliegenden Dehnungen ab. Dies wird mit der Einführung des Völligkeitsbeiwerts für die Betondruckzone α_R und den in Gl. 2-7 bis Gl. 2-9 dargestellten Zusammenhängen deutlich.

$$F_{cd} = x_d \cdot b \cdot \alpha_R \cdot f_{cd} \quad \text{Gl. 2-7}$$

$$A_{bew} = \frac{F_{sd}}{f_{yd}} = \frac{F_{cd}}{f_{yd}} \quad \text{Gl. 2-8}$$

$$\omega_d = \frac{A_{bew} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \alpha_R \cdot \frac{x_d}{d} = \alpha_R \cdot \zeta_d \quad \text{Gl. 2-9}$$

Daher wird die bezogene Druckzonenhöhe in den Kapiteln 2.3.2, 2.3.3 und 2.3.4.1 als maßgebender Parameter verwendet. Erreichen beide Werkstoffe ihre Bruchdehnung, stellt sich die maximale Querschnittskrümmung ein. Wird der mechanische Bewehrungsgrad, ausgehend von diesem als Balance Point bezeichneten Zustand, erhöht oder verringert (und damit die bezogenen Druckzonen vergrößert oder verkleinert), erreicht nur noch einer der beiden Werkstoffe seine Bruchdehnung und die Krümmung sinkt (für Betonstahl kommt hierbei noch der Einfluss der Nachverfestigung hinzu). In Abbildung 2-11 sind die erläuterten Zusammenhänge qualitativ dargestellt.

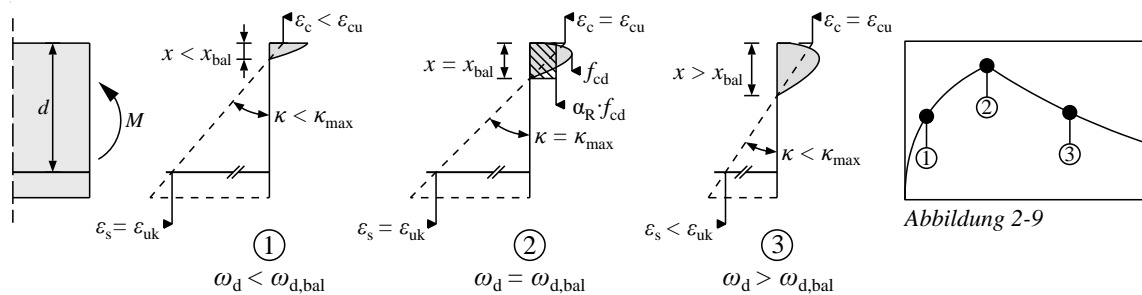


Abbildung 2-11 Zusammenhänge zwischen Druckzonenhöhe, mechanischem Bewehrungsgrad und Querschnittsverkrümmung

Als letzter maßgeblicher Einflussfaktor ist die Schubschlankheit zu nennen. Diese ist nach König et al. (1999) als $\lambda = a_q/d = M/(Q \cdot d)$ definiert. Die Länge a_q ist dabei der Abstand des Mittelauflegers zum Momentennulldurchgang. In der Modellbildung nach Abbildung 2-10 entspricht dies der halben Trägerlänge des Ersatzsystems. Nach Ahner und Kliver (1998) erfasst die Schubschlankheit zwei gegenläufige Effekte. Mit steigender Schubschlankheit nimmt zum einen der negative Momentenbereich und damit die zu integrierende Länge in Gl. 2-6 zu. Dies erhöht den Biegeanteil der plastischen Rotation. Zum anderen beeinflusst die Schubschlankheit den Bewehrungsgrad, ab dem sich die plastische Rotation infolge der Schubrissbildung erhöht. Je größer die Schubschlankheit ist, umso später zeigt sich der Einfluss der Schubrissbildung auf das plastische Rotationsvermögen.

Auf weitere Einflüsse, wie die Modellierung der Zugversteifung (Tension Stiffening), die Duktilitätsparameter der Bewehrung oder den Effekt einer Druckbewehrung, wird an dieser Stelle nicht eingegangen und auf die oben aufgeführten Arbeiten verwiesen.

2.3.5 Nichtlineare Berechnung

Als aufwendigstes und wirklichkeitsnächstes Verfahren lassen DIN EN 1992-1-1 (2011) und Model Code 2010 (2013) die Bemessung von Bauteilen auf der Grundlage nichtlinearer Berechnungen zu. Das in Kapitel 2.3.4 vorgestellte Verfahren stellt im Grunde auch ein nichtlineares Verfahren dar. Durch die Bereitstellung der normativ zulässigen Rotationen kann hierbei jedoch eine Trennung von Schnittgrößenermittlung, Querschnittsbemessung und Prüfung der Komptabilitätsbedingungen vorgenommen werden. Im Rahmen einer „echten“ nichtlinearen Bemessung ist diese Entkopplung allerdings nicht mehr möglich. Durch die Verwendung von wirklichkeitsnahen Werkstoffgesetzen sowie der Abbildung des gesamten Tragwerks werden die Komptabilitätsbedingungen bis zum Versagenspunkt automatisch erfüllt.

Eine realitätsnahe Systemantwort ergibt sich grundsätzlich nur auf Grundlage der Mittelwerte der Materialeigenschaften. Die Bemessung nach DIN EN 1992-1-1 (2011) bzw. DIN EN 1990 (2011) fordert im jeweiligen Grenzzustand jedoch die Einhaltung der Bemessungswerte der Baustoffe. Dies führt zu einem nicht aufzulösenden Widerspruch, der eine durchgängige und konsistente Berechnung des Tragsystems dem Grunde nach unmöglich

macht. DIN EN 1992-1-1/NA (2013) schlägt daher die Verwendung von rechnerischen Mittelwerten vor. Diese wurden anhand umfangreicher Vergleichsrechnungen für Durchlaufsysteme und Rahmentragwerke so kalibriert, dass sich unabhängig von der Versagensart ein einheitlicher Teilsicherheitsbeiwert auf der Widerstandsseite von $\gamma_R = 1,3$ ergibt, vgl. DAfStb Heft 600 (2012). Ein weiteres Verfahren enthält Model Code 2010 (2013), für Bauteile unter Normalkraft nach Theorie II. Ordnung enthalten zudem DIN EN 1992-1-1 (2011) und DIN EN 1992-1-1/NA (2013) weitere Ansätze zur nichtlinearen Berechnung. Ausführungen hierzu können DAfStb Heft 631 (2019) entnommen werden.

2.4 Schnittgrößen in Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung

2.4.1 Allgemeines

In Kapitel 2.2 wurde das Tragverhalten von statisch unbestimmten Stahlbetonträgern ausführlich beschrieben. Dabei wurde deutlich, dass sich das Werkstoff- und Querschnittsverhalten direkt auf die Verteilung der Schnittkräfte auswirkt. Neben dem Aufreißen des Querschnitts sorgt insbesondere das Fließen des Betonstahls zu erheblichen Abweichungen von der linear-elastischen Momentenverteilung. Die in dieser Arbeit behandelten Bewehrungsarten aus FVK weisen jedoch kein plastisches Werkstoffverhalten auf. Sie versagen auf Zug spröde und verhalten sich ausschließlich linear-elastisch. In Abbildung 2-12 sind die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für zwei, zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit auf dem Markt verfügbaren, FVK-Bewehrungen im Vergleich zu Betonstahl dargestellt. Betrachtet werden exemplarisch Bewehrungen aus Carbonfaserverbundkunststoff (CFK) sowie Glasfaserverbundkunststoff (GFK). Die Dehnungen des Betonstahls steigen nach Erreichen der Streckgrenze schnell an, während die Spannung nur noch leicht infolge Nachverfestigung zunimmt. Demgegenüber bleibt das Verhältnis von Spannung und Dehnung bei den beiden FVK-Bewehrungen linear. Dies zeigt sich auch in der Momenten-Krümmungs-Beziehung auf Querschnittsebene. In der Darstellung in Abbildung 2-12 wird für alle Querschnitte der gleiche mechanische Bewehrungsgrad nach Gl. 2-9 unterstellt. Statt der Streckgrenze f_y wird für CFK/GFK die Zugfestigkeit f_f eingesetzt.

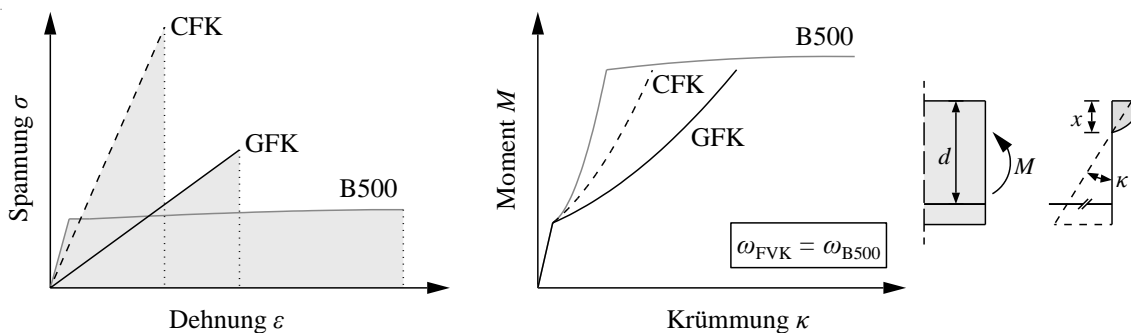


Abbildung 2-12 Vergleich des Werkstoff- und Querschnittsverhaltens von Stahl- und FVK-bewehrten Betonquerschnitten

Dies führt zu einer vergleichbaren Biegetragfähigkeit der Querschnitte. Nach Aufreißen des Querschnitts steigen die Krümmungen insbesondere für den GFK-bewehrten Querschnitt infolge des geringeren Elastizitätsmoduls (E-Modul) der Bewehrung deutlich stärker an als beim Stahlbetonquerschnitt. Der Querschnitt versagt nach Erreichen der Bruchdehnung von Beton oder Bewehrung, der für den Stahlbeton charakteristische Bereich 3 nach Abbildung 2-3 existiert nicht. Übertragen auf die Systemebene bedeutet dies, dass in statisch unbestimmten Tragsystemen die sekundäre Phase der Momentenumlagerung nach Abbildung 2-5 nicht eintritt. Geringe plastische Verformungen können sich theoretisch infolge der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons einstellen (siehe Kapitel 4.2.1). Ob und in welcher Größenordnung sich dies realisieren lässt, wird in Kapitel 6 untersucht. Grundsätzlich ist die plastische Betondehnung, insbesondere nach Erreichen des Höchstwerts der Betondruckspannungen, starken Streuungen unterworfen und beträgt nur einen Bruchteil der plastischen Reserven des Baustahls.

Wie in Kapitel 2.3.2 gezeigt, sind bei der linear-elastischen Bemessung von Durchlaufsystemen auch ohne Berücksichtigung einer Momentenumlagerung geringe plastische Verformungen erforderlich, um die Bemessungslast zu erreichen. Bei Stahlbetonbauteilen wird dies bei ausreichend kleiner Druckzonenhöhe durch den plastischen Ast der Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Bewehrung sichergestellt. Das Fehlen dieses Verformungsvermögens bei Bewehrungsmaterialien aus FVK hat unmittelbare Auswirkungen auf die Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Systemen. Um dies näher zu erläutern, wird der Zweifeldträger aus Abbildung 2-6 in Abbildung 2-13 nach der linear-elastischen Momentenverteilung mit einer FVK-Bewehrung bewehrt. Es ergibt sich analog zum Vorgehen in Kapitel 2.3.2 bei Unterstellung von $M_{St}/M_F \approx \rho_{St}/\rho_F$ eine im Vergleich zur Feldbewehrung deutlich erhöhte Stützbewehrung. Infolge dessen steigt auch hier das Stützmoment nach dem Aufreißen von Feld- und Stützbereich überproportional an. Analog zum Stahlbetonbauteil in Abbildung 2-6 erreicht der Stützbereich bei einer Last $p < p_{Ed}$ das Bemessungsmoment.

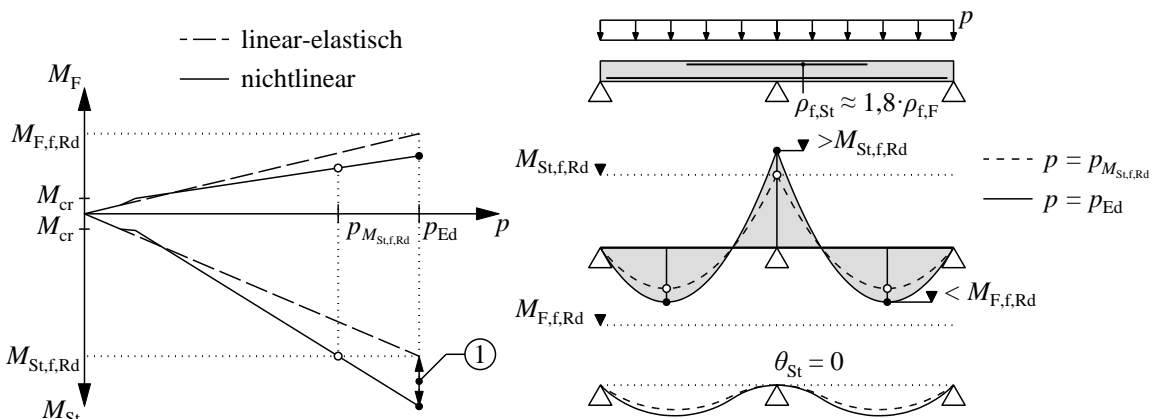


Abbildung 2-13

Realitätsnahe Momentenentwicklung bei linear-elastischer Bemessung eines FVK-bewehrten Durchlaufträgers

Da kein plastisches Verformungsvermögen aktiviert wird und sich über der Stütze kein Fließgelenk ausbilden kann, ist das Erreichen der Bemessungslast nur möglich, wenn der Stützbereich in der Lage ist weitere Belastungen aufzunehmen (vgl. Punkt 1 in Abbildung 2-13). Das rechnerische Bemessungsmoment ist jedoch bereits erreicht und der Träger versagt. Wird dieser Effekt im Rahmen der Bemessung berücksichtigt und die Bemessungsfestigkeit der Bewehrung bewusst herabgesetzt, ist ein Erreichen der Bemessungslast möglich (alternativ könnte der Stützbereich auch für eine erhöhte Bemessungslast dimensioniert werden). Ohne das Entstehen eines Fließgelenks steigt auch das Feldmoment weiterhin näherungsweise monoton an. Ob hier das Bemessungsmoment erreicht wird, hängt davon ab, wie weit die rechnerische Tragfähigkeit des Stützbereichs bei der Bemessung herabgesetzt wurde.

Im Folgenden wird eine Übersicht über bestehende Regelwerke und Untersuchungen zur Schnittgrößenermittlung und -verteilung in FVK-bewehrten Betonbauteilen gegeben und betrachtet, inwieweit die oben angestellten theoretischen Überlegungen gewürdigt werden.

2.4.2 Schnittgrößenermittlung in statisch unbestimmten FVK-Betonbauteilen

Während in Deutschland aktuell das erste Regelwerk zur Bemessung von Bauteilen mit FVK-Bewehrung in Vorbereitung ist (DAfStb (2022)), existieren international bereits entsprechende Normen und Regelwerke (JSCE (1997), ACI 440.1R-15 (2015), CAN/CSA-S806-12 (2012), fib bulletin 40 (2007), ISIS Canada (2007), ACTRC (2007)).

Alle setzen eine linear-elastische Schnittgrößenermittlung voraus. Effekte infolge Schnittgrößenumlagerung werden nicht erwähnt. In JSCE (1997), ACI 440.1R-15 (2015), CAN/CSA-S806-12 (2012) wird lediglich darauf hingewiesen, dass eine Umlagerung der Momente nicht zulässig ist. JSCE (1997) merkt allerdings an, dass es infolge großer Steifigkeitsunterschiede zu einer Umverteilung von Schnittgrößen kommen kann. Nähere Angaben hierzu werden jedoch nicht gemacht. DAfStb (2022) erlaubt eine linear-elastische Berechnung mit begrenzter Umlagerung, sofern ein „geeignetes Kriterium der Umlagerungsfähigkeit in den Ver- und Anwendbarkeitsnachweisen“ angegeben wird.

Zur Bemessung der Bauteile werden länderspezifische Verfahren und Sicherheitskonzepte angewendet. Es sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass in den meisten Regelwerken (ACI 440.1R-15 (2015), CAN/CSA-S806-12 (2012), ISIS Canada (2007)) das Versagen des Querschnitts infolge des Erreichens der Betondruckspannung als der erstrebenswerte Versagensmodus angesehen wird, da hier das Auftreten kleiner plastischer Verformungen zur Ankündigung des Versagens erwartet wird.

Das einzige, aktuell in Deutschland zugelassene stabförmige FVK-Bewehrungsmittel ist der Bewehrungsstab Schöck ComBAR aus glasfaserverstärktem Kunststoff. In der zugehörigen Zulassung (abZ Z-1.6-238 (2019)) sowie den zugehörigen technischen Informationen (Schöck Bauteile AG (2018)) wird explizit darauf hingewiesen, dass es bei statisch

unbestimmten Systemen zu einer „Umlagerung der Schnittgrößen im Verhältnis der Steifigkeiten der (gerissenen) Querschnitte“ und somit zu „einer Überhöhung der Spannungen über dem mittleren Auflager“ kommt. Aufgrund dieser Tatsache wird bei der Bemessung von Durchlaufsystemen eine herabgesetzte Bruchspannung angesetzt. Dies entspricht dem in Kapitel 2.4.1 erläuterten Vorgehen.

2.4.3 Literaturstudie zu statisch unbestimmten FVK-Betonbauteilen

Während zum Trag- und Verformungsverhalten von FVK-bewehrten Einfeldträgern zahlreiche Untersuchungen vorliegen, sind die Erfahrungen mit statisch unbestimmten Systemen noch limitiert. Im Folgenden werden einige relevante Untersuchungen, sortiert nach Erscheinungsjahr, vorgestellt und gewonnene Erkenntnisse zusammengefasst.

Mostofinejad (1997)

Es werden experimentelle und numerische Untersuchungen an Zweifeldträgern mit CFK-Bewehrung durchgeführt. Die Bauteile werden für Versagen des Betons („überbewehrt“) oder der Bewehrung („unterbewehrt“) dimensioniert. Hierbei sind die Bewehrungsgrade in Feld- und Stützbereich gleich. Infolge des nichtlinearen Betonverhaltens wird in den überbewehrten Bauteilen eine leichte Umlagerung der Momente vom Feld- zum Stützbereich (ca. 5 %) beobachtet. Die unterbewehrten Bauteile zeigen keine Schnittgrößenumlagerung. Zusätzlich wird der Einfluss der Umschnürung der Betondruckzone mit Carbonfasergelegen untersucht. Hierbei sind keine Unterschiede im Umlagerungsverhalten zu erkennen.

Grace et al. (1998)

Anhand von Versuchen an Ein- und Zweifeldträgern, bewehrt mit GFK- oder CFK-Bewehrungsstäben, wird ein Kriterium zur Bewertung der Duktilität von FVK-bewehrten Bauteilen hergeleitet. Hierzu wird die Energie infolge unelastischer Verformungen ins Verhältnis zur Gesamtenergie gesetzt. Des Weiteren wird darauf hingewiesen, dass die Verwendung von GFK- anstatt Betonstahlbügeln zu einer signifikanten Erhöhung der Verformungen führt.

Ashour und Habeeb (2008)

Es werden Einfeldsysteme sowie bewehrte Zweifeldträger mit CFK-Bewehrung experimentell untersucht. Die Zweifeldsysteme werden symmetrisch sowie mit erhöhter Stütz- oder erhöhter Feldbewehrung (Verhältnis der Bewehrungsgrade $\rho_{SI}/\rho_F = 2,6$ bzw. 0,4) bewehrt. Es wird herausgestellt, dass die Bewehrungsmenge der Felder die Verformungen maßgeblich beeinflusst, während der Einfluss der Stützbewehrung gering ist. Überraschenderweise weisen die Bauteile, unabhängig von der Bewehrungsanordnung, ab einer bestimmten Laststufe eine Momentenumlagerung ins Feld auf. Dies wird auf die starke Rissbildung im Stützbereich sowie den Verlust des Verbundes in diesem Bereich zurückgeführt.

Habeeb und Ashour (2008)

Es werden Einfeld- und Zweifeldsysteme mit Bewehrungsführungen analog Ashour und Habeeb (2008) betrachtet (experimentelle Untersuchung). Das Verhältnis ρ_{St}/ρ_F beträgt 3,7 bzw. 0,3. Das Bauteil mit erhöhter Stützbewehrung zeigt eine leichte Momentenumlagerung vom Feld- zum Stützbereich, das symmetrische Bauteil sowie jenes mit einer erhöhten Feldbewehrung weisen, verglichen mit dem linear-elastischen Momentenverlauf, ein erhöhtes Feldmoment auf.

El-Mogy (2011)

Betrachtet werden GFK- sowie CFK-bewehrte Zweifeldträger. Variiert wird dabei primär das Verhältnis der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich ($\rho_{St}/\rho_F = 1,5$ bis $1,3$ sowie $\rho_{St}/\rho_F = 0,67$). An die experimentellen Untersuchungen schließt die Erstellung eines Finite-Elemente-Modells (FE-Modell) an. Für die Untersuchungen anhand des FE-Modells wird in erster Linie eine Überbewehrung des Feldes betrachtet ($\rho_{St}/\rho_F = 0,67$). Für einzelne Betrachtungen wird das Verhältnis auf bis zu $\rho_{St}/\rho_F = 0,33$ reduziert. Auf dieser Grundlage wird eine Beziehung zwischen maximalem Momentenumlagerungsgrad (Reduktion des Moments im Stützbereich) in Abhängigkeit der Druckzonenhöhe vorgeschlagen. Diese ist in Abbildung 2-14, zusammen mit den zugehörigen Ergebnissen der experimentellen und FE-Untersuchungen, dargestellt.

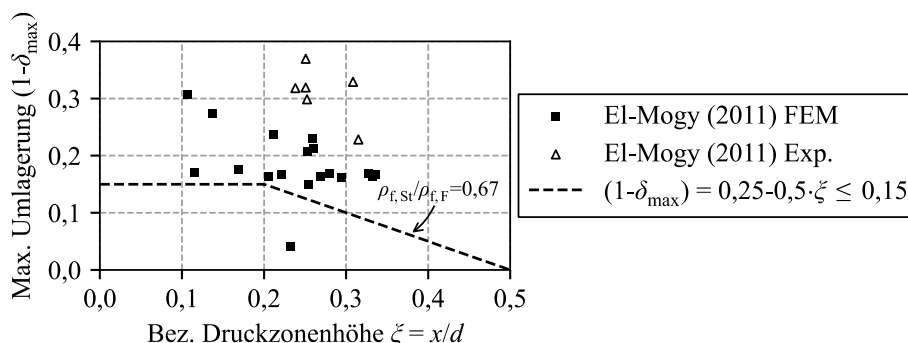


Abbildung 2-14 Vorschlag zur Momentenumlagerung nach El-Mogy (2011)

Die Druckzonenhöhen werden aus den Experimenten bzw. im FE-Modell auf Grundlage der mittleren Materialeigenschaften abgeleitet. Es ist anzumerken, dass der einzige Datenpunkt, welcher die angegebene Beziehung nicht erfüllt, aus einer Berechnung mit einem Bewehrungsverhältnis $\rho_{St}/\rho_F = 1$ stammt. Zudem wird auf den positiven Effekt einer Umschnürung der Druckzone mit Betonstahlbügeln hingewiesen.

Habeeb (2011)

Es werden die Ergebnisse aus Ashour und Habeeb (2008) sowie Habeeb und Ashour (2008) in Form einer Dissertation zusammengefasst. Darüber hinaus finden numerische Untersuchungen statt, wobei der Fokus auf der Ermittlung der Durchbiegung des Feldes liegt.

Matos et al. (2012)

In einer experimentellen Untersuchung wird die Auswirkung einer umschnürten Beton-druckzone auf das Momentenumlagerungsverhalten von GFK-bewehrten Systemen unter-sucht. Es werden ausschließlich Bügel aus Betonstahl betrachtet. Das Verhältnis der Be-wehrungsgrade in Stütze und Feld beträgt $\rho_{St}/\rho_F = 2,2$ bzw. $0,4$. Eine relative Erhöhung der Bewehrung in Stütz- oder Feldbereich führt zu einer Verlagerung der Momente in diesen Bereich. Der Einsatz von Betonstahlbügeln ruft zwar ein duktileres Verhalten hervor, die Momentenumlagerung wird jedoch kaum beeinflusst.

Mahroug (2013)

Es werden Untersuchungen an Plattenstreifen mit Bewehrung aus Carbon- bzw. Basaltfa-serverbundkunststoffen (BFK) durchgeführt. Die Bewehrungen in Stütz- und Feldbereich werden symmetrisch sowie im Verhältnis $\rho_{St}/\rho_F = 2,6$ bzw. $0,4$ (BFK) sowie $\rho_{St}/\rho_F = 3,75$ bzw. $0,4$ (CFK) angeordnet. Auch hier findet eine Umlagerung der Momente entsprechend der Bewehrungsverhältnisse statt. Die symmetrisch bewehrten Bauteile zeigen eine leichte Umlagerung der Schnittgrößen zum Feld- (BFK) bzw. Stützbereich (CFK), bewegen sich jedoch im Bereich der Versuchsstreuung. Darüber hinaus werden auch hier numerische Untersuchungen durchgeführt, deren Fokus auf der Ermittlung der Querschnittstragfähig-keit sowie der Durchbiegung des Feldes liegt.

Lou et al. (2015)

Ein FE-Modell wird entwickelt, um die Momentenumlagerung von GFK- und CFK-be-wehrten Durchlaufsystemen zu untersuchen. Die Bewehrungslagen werden im Verhältnis $\rho_{St}/\rho_F = 0,67$ angesetzt. Es wird eine Umlagerung der Momente vom Feld- zum Stützbe-reich von 5 bis 10 % beobachtet. Darauf aufbauend wird, analog El-Mogy (2011), eine Beziehung zwischen Druckzonenhöhe (Mittelwertniveau) und dem maximal möglichen Momentenumlagerungsgrad formuliert. Diese ist in Abbildung 2-15 im Vergleich zum Vorschlag von El-Mogy (2011) dargestellt.

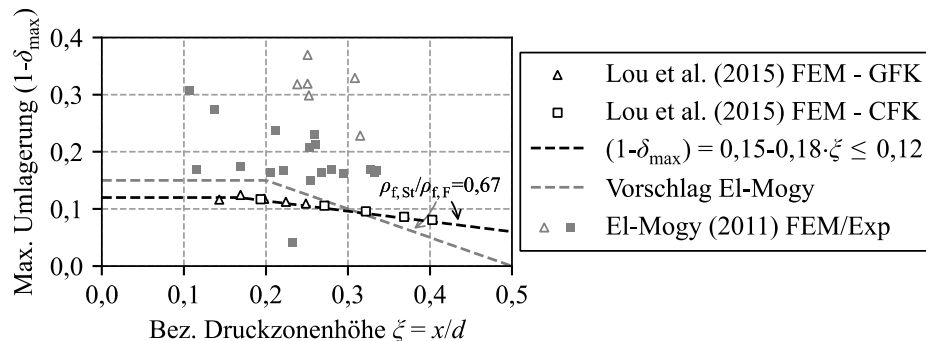


Abbildung 2-15 Vorschlag zur Momentenumlagerung nach Lou et al. (2015) im Vergleich zu El-Mogy (2011)

Akiel (2016)

In dieser Studie werden Durchlaufträger mit BFK-Bewehrung sowie mit einer Hybridbewehrung aus Betonstahl und BFK untersucht. Stütze und Feld werden symmetrisch oder mit einer erhöhten Bewehrungsmenge im Feld ($\rho_{Sv}/\rho_F = 0,5-0,85$) bewehrt. Es wird eine Umlagerung der Momente ins Feld beobachtet, wobei die Balken mit dem geringsten Verhältnis ρ_{Sv}/ρ_F erwartungsgemäß die größten Umlagerungen erfahren. In den Hybridbauteilen findet eine etwas geringere Umlagerung statt. Dies wird mit der verringerten Rissöffnung infolge der steiferen und nicht die Fließgrenze erreichenden Betonstahlbewehrung erklärt.

Baša et al. (2018)

Es findet eine experimentelle Untersuchung von Zweifeldträgern statt. Die Verhältnisse der Bewehrungsgrade betragen $\rho_{Sv}/\rho_F = 0,45$ bis 1,7. Auch hier findet eine Momentenumlagerung zum Stütz- ($\rho_{Sv}/\rho_F > 1$) oder Feldbereich ($\rho_{Sv}/\rho_F < 1$) statt.

Eligehausen et al. (2008)

Abschließend ist die Untersuchung von Eligehausen et al. (2008) hervorzuheben, die im Rahmen des Zulassungsverfahrens der allgemeinen bauaufsichtlichen Zulassung (abZ) abZ Z-1.6-238 (2019) der GFK-Bewehrungselemente der Firma Schöck angefertigt wurde. Sie ist die einzige, dem Autor dieser Arbeit bekannte, Studie, welche der in Kapitel 2.4.1 aufgeworfenen Frage konsistent nachgeht. In der Studie werden Untersuchungen auf Grundlage eines dreidimensionalen FE-Modells durchgeführt. Ziel ist die Erörterung der Frage „welche Überfestigkeit der ComBAR-Stäbe erforderlich ist, um in allen Anwendungsfällen das Erreichen der rechnerischen Traglast nach der Elastizitätstheorie zu gewährleisten“. Hierzu werden sechs Zweifeldträger mit unterschiedlichen Bewehrungsgraden, Schlankheiten und Betonfestigkeitsklassen untersucht. Jedes Bauteil wird zweimal berechnet, einmal bewehrt mit GFK-Stäben, einmal als konventionelles Stahlbetonbauteil. Die Verhältnisse der Bewehrungsgrade von Stütze und Feld betragen $\rho_{Sv}/\rho_F = 1,2$ bis 2. Ausgehend von der gewählten Bewehrungsmenge wurde die Biegetragfähigkeit der Bauteile mit Ansatz der mittleren Materialkenngrößen bestimmt. Die Bewehrungsmenge der stahlbewehrten Bauteile wird so gewählt, dass das Bauteil unter Berücksichtigung des linear-elastischen Verhaltens des Betonstahls die identische rechnerische Traglast wie das GFK-bewehrte System aufweist. Diese rechnerischen Traglasten werden den in der FE-Berechnung erzielten maximalen Traglasten gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die GFK-bewehrten Bauteile die Traglast teilweise erreichen, teilweise ist eine Überfestigkeit der Bewehrung von ca. 15 % erforderlich. Bezogen auf die maximalen Traglasten der Stahlbetonträger lag die erforderliche Überfestigkeit bei bis zu 25 %. Darüber hinaus wird darauf hingewiesen, dass diese Überfestigkeit nur bei einem Versagen der Bewehrung genutzt werden kann. Es wer-

den keine Angaben darüber gemacht, wie zu verfahren ist, wenn ein mechanischer Bewehrungsgrad vorliegt, der zu Betondruckversagen führt. Um diesen Erkenntnissen Rechnung zu tragen, wird in abZ Z-1.6-238 (2019) und Schöck Bauteile AG (2018) ein Abminderungsfaktor von $\alpha_{f,su} = 0,83$ (Bez. in abZ Z-1.6-238 (2019): „ η_{rot} “) für die Bemessungsfestigkeit der Bewehrung bei statisch unbestimmten Systemen vorgesehen.

2.5 Zusammenfassung

Nachdem das nichtlineare Tragverhalten statisch unbestimmter Stahlbetonbalken einleitend allgemein erläutert wurde, wurden die Methoden zur Schnittgrößenermittlung im Stahlbetonbau vorgestellt. Hierbei wurde insbesondere die Momentenumlagerung infolge plastischer Gelenke betrachtet. Erreicht der Betonstahl seine Fließgrenze, ist das Bauteil in der Lage, darüber hinaus aufgebrauchte Lasten in weniger beanspruchte Tragwerksteile umzuverteilen.

Anschließend wurden Überlegungen zur Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Betontragwerken mit FVK-Bewehrung angestellt. Diese wurden begleitet von einer Literaturstudie zu bereits vorhandenen Erkenntnissen auf diesem Gebiet. Es wurde deutlich, dass die Schnittgrößenverteilung in solchen Bauteilen primär vom Steifigkeitsverhältnis der Tragwerksbereiche bestimmt wird. Eine Entlastung hoch beanspruchter Stützbereiche, wie im Stahlbetonbau üblich, ist nicht möglich. Vielmehr besteht die Möglichkeit, dass der Stützbereich durch den in diesem Bereich statisch erforderlichen, höheren Bewehrungsgrad als im Feld zusätzliche Last „anzieht“ und die Bemessungslast nicht erreicht werden kann.

Die unter 2.4.3 aufgelisteten Versuchsreihen zeigen – unabhängig vom verwendeten FVK-Bewehrungsmaterial – diese Umlagerung der Schnittgrößen zum höherbewehrten Tragwerksbereich. In allen Untersuchungen wurden verschiedene Verhältnisse von Stütz- zu Feldbewehrungsgrad untersucht. Allgemeine Aussagen über die Größe der zu erwartenden Momentenumlagerung oder daraus resultierende Folgen für die Schnittgrößenermittlung werden jedoch kaum getroffen.

Die in El-Mogy (2011) und Lou et al. (2015) vorgeschlagenen Ansätze zur Abminderung des Stützmoments setzen ein Bewehrungsverhältnis von $\rho_{St}/\rho_F = 0,67$ voraus, die Feldbewehrungsmenge ist also um den Faktor 1,5 größer als die Menge der Bewehrung im Stützbereich. Wie Gl. 2-2 zu entnehmen ist, erfordert die linear-elastische Bemessung eines Zweifeldträgers jedoch ein Bewehrungsverhältnis von $\rho_{St}/\rho_F \approx 1,78$ (vereinfacht unter der Annahme einer auf beiden Feldern wirkenden Vollast). Auch die Berücksichtigung einer feldweise wirkenden Nutzlast (vgl. Abbildung 2-7) ändert dieses Verhältnis nicht grundlegend. Die daraus resultierenden Probleme für die Bemessung (eine Erhöhung des Stützmoments bei linear-elastischer Bewehrung) werden lediglich von Eligehausen et al. (2008)

gewürdigt. Die vorgeschlagene Schaffung einer „Tragfähigkeitsreserve“ infolge der Abminderung der Bewehrungsfestigkeit im Zuge der Bemessung schlagen sich in abZ Z-1.6-238 (2019) nieder.

Hierzu ergeben sich für die vorliegende drei zentrale Aspekte:

- Nicht alle in Eligehausen et al. (2008) untersuchten Bauteile erfordern die in abZ Z-1.6-238 (2019) geforderte Reduktion der Bruchspannung um $\alpha_{f,su} = 0,83$. Einige erreichten die angestrebte Traglast auch ohne die Berücksichtigung einer Überfestigkeit der Bewehrung. Es ist daher zu untersuchen, ob die deutliche Reduktion der Festigkeit um 17 % für alle Randbedingungen erforderlich ist oder ob sie zu übermäßig konservativen Ergebnissen führt. Hierfür ist eine umfassende Untersuchung des Umlagerungsverhaltens für unterschiedliche Randbedingungen erforderlich.
- Die Betrachtungen in Eligehausen et al. (2008) finden ausschließlich unter Verwendung der Mittelwerte der Materialeigenschaften statt. Daher ist unklar, inwiefern die in Kapitel 2.4.1 beschriebene Problematik durch den Teilsicherheitsbeiwert der Bewehrung abgedeckt ist. abZ Z-1.6-238 (2019) und DAfStb (2022) schreiben einen, verglichen mit Betonstahl, großen Teilsicherheitsbeiwert von $\gamma_F = 1,3$ vor. Gegebenenfalls ist dieser bereits ausreichend, um die erforderliche rechnerische Überfestigkeit zu erreichen.
- Es ist unklar, wie in statisch unbestimmten Systemen mit einem Versagen infolge der Betonbruchstauchung (Betondruckversagen) umzugehen ist. Der Vorschlag von Eligehausen et al. (2008) wird explizit nur für das Vorliegen eines Bewehrungsversagens formuliert. Diese Fragestellung gewinnt insbesondere an Bedeutung, da die Mehrzahl der international vorhandenen Regelwerke für die Bemessung von FVK-Betonbauteilen das Betonversagen als den zu präferierenden Versagensmodus ansehen.

3 GRUNDLAGEN DER TRAGWERKSZUVERLÄSSIGKEIT

3.1 Einführung

Im Rahmen dieser Arbeit soll untersucht werden, ob bei der konventionellen Bemessung von statisch unbestimmten FVK-bewehrten Bauteilen ein Sicherheitsdefizit durch die ungeplante Umlagerung von Schnittgrößen besteht. Hierzu werden nachfolgend die Grundlagen der zuverlässigkeitstheoretischen Methoden im Bauwesen erläutert. Weiterführende Informationen können z. B. Spaethe (1992), Fischer (2001) und Bachmann et al. (1997) entnommen werden.

DIN EN 1990 (2011) beschreibt Zuverlässigkeit als die „Fähigkeit eines Tragwerks oder Bauteils die festgelegten Anforderungen innerhalb der geplanten Nutzungszeit zu erfüllen“. Im Gegensatz zu deterministischen Größen ist sie nicht direkt messbar, lässt sich jedoch als Funktion der Versagenswahrscheinlichkeit definieren. Die Versagenswahrscheinlichkeit wiederum stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass das betrachtete Tragwerk oder Bauteil die an es gestellten Anforderungen nicht erfüllt. Diese Anforderungen werden durch die Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit definiert. Somit stellt die Versagenswahrscheinlichkeit eine berechenbare Größe auf Grundlage der Eingangsgrößen dar. Diese Eingangsgrößen sind Streuungen unterworfen und können im Rahmen einer probabilistischen Betrachtung als Zufallsvariablen modelliert werden. Die für das betrachtete Problem zu berücksichtigenden Zufallsvariablen werden als Basisvariablen bezeichnet.

Im Folgenden wird dazu zunächst die Modellierung solcher Zufallsvariablen beschrieben. Auf deren Basis lässt sich das Zuverlässigkeitsproblem zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit beschreiben. Abschließend werden entsprechende Methoden zur Bestimmung der Zuverlässigkeit bei komplexen Problemstellungen erläutert.

3.2 Stochastische Modellierung von Zufallsvariablen

3.2.1 Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen

Zur Beschreibung von zufälligen Vorgängen lassen sich Zufallsvariablen X definieren, welche verschiedene Realisierungen x annehmen können. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte kleiner gleich x annimmt, kann mit der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ausgedrückt werden (Gl. 3-1).

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \text{Gl. 3-1}$$

Die Verteilungsfunktion stellt das Integral der Verteilungsdichtefunktion $f_X(x)$ dar. Die Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion muss somit stets den Wert 1 annehmen. Die Wahr-

scheinlichkeit p , dass X einen Wert kleiner gleich x annimmt, lässt sich somit als der Flächeninhalt der Dichtefunktion bis zum Wert x interpretieren. Abbildung 3-1 stellt diesen Zusammenhang exemplarisch für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable dar.

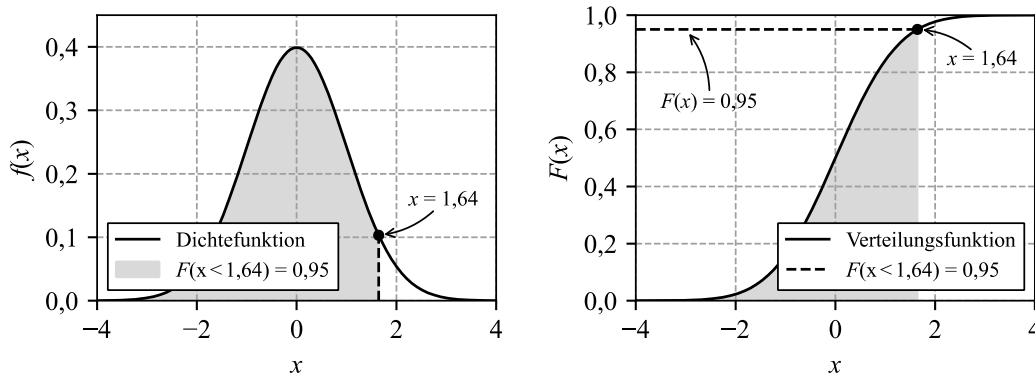


Abbildung 3-1 Links: Verteilungsdichtefunktion der Standardnormalverteilung
Rechts: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Es wird zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen unterschieden. Diskrete Zufallsvariablen besitzen eine endliche Anzahl an Realisierungen von X , wohingegen stetige Zufallsvariablen jeden Wert innerhalb des definierten Wertebereichs annehmen können. Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Modellierung zufälliger Eigenschaften stetige Zufallsvariablen verwendet.

Zufallsvariablen können durch ihre statistischen Momente charakterisiert werden, wobei mit Erwartungswert (oder Mittelwert, Gl. 3-2) und Varianz (Gl. 3-3) zumeist die ersten beiden Momente herangezogen werden. Die Normierung der Standardabweichung σ_X (Wurzel der Varianz) über den Erwartungswert führt zu dem Variationskoeffizienten v_X (Gl. 3-4).

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad \text{Gl. 3-2}$$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx \quad \text{Gl. 3-3}$$

$$v_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad \text{Gl. 3-4}$$

Zur Beschreibung von Zufallsvariablen stehen eine Vielzahl an Verteilungsfunktionen zur Verfügung. Nachfolgend werden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Verteilungstypen kurz erläutert.

Normalverteilung

Die Normalverteilung ist eine der wichtigsten Verteilungsfunktionen für die Beschreibung von natürlichen und technischen Phänomenen, vgl. Spaethe (1992). Sie ist symmetrisch

und weist keine Intervallgrenzen auf. In Gl. 3-5 und Gl. 3-6 sind die Verteilungsdichtefunktion sowie die Verteilungsfunktion der Normalverteilung gegeben, grafische Darstellungen finden sich in Abbildung 3-1 und Abbildung 3-2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \quad \text{Gl. 3-5}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] dx \quad \text{Gl. 3-6}$$

Eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 0$ und der Standardabweichung $\sigma = 1$ wird als Standardnormalverteilung bezeichnet. Ihre Werte können in tabellarischer Form angegeben werden und erleichtern die rechnerische Anwendung beliebiger Normalverteilungen, welche keine geschlossene Lösung der Verteilungsfunktion besitzen. Eine beliebige normalverteilte Basisvariable X_i lässt sich mit Gl. 3-7 in eine Standardnormalverteilung transformieren.

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad \text{Gl. 3-7}$$

Logarithmische Normalverteilung

Die logarithmische Normalverteilung beschreibt eine Zufallsvariable X für die $Y = \ln(X)$ normalverteilt ist. Sie bietet nach Spaethe (1992) den Vorteil, dass keine negativen Werte angenommen werden und eignet sich daher für eine Reihe von Anwendungen im Bauwesen, u. a. zur Beschreibung von Festigkeiten. Die zugehörige Verteilungsdichte ergibt sich gemäß Gl. 3-8.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y \cdot x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], \quad x > 0 \quad \text{Gl. 3-8}$$

Der Mittelwert μ_Y sowie die Standardabweichung σ_Y lassen sich mit den entsprechenden Größen der normalverteilten Zufallsgröße bestimmen (Gl. 3-9 und Gl. 3-10).

$$\mu_Y = \ln(\mu_X) - 0,5 \cdot \sigma_Y^2 \quad \text{Gl. 3-9}$$

$$\sigma_Y^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right) \quad \text{Gl. 3-10}$$

Abbildung 3-2 stellt beide Verteilungsfunktionen exemplarisch dar. Hierbei wird die ausgeprägte Linksschiefe der logarithmisch-normalverteilten Zufallsvariablen deutlich.

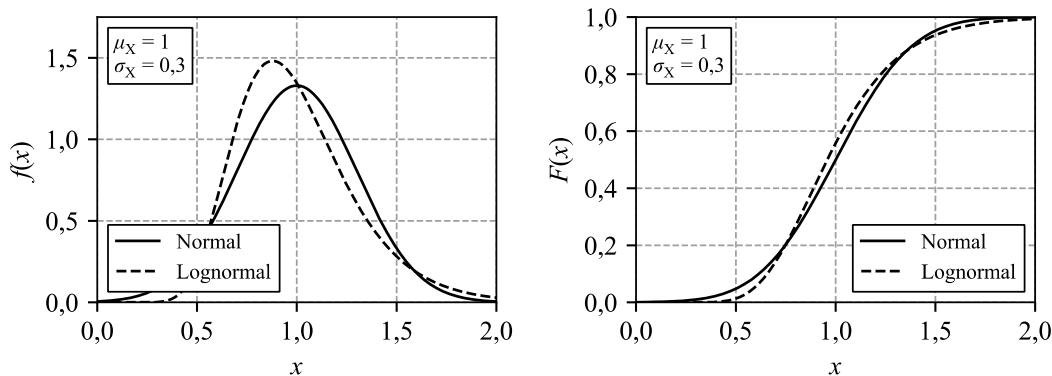


Abbildung 3-2 Vergleich von Normal- und Lognormalverteilung

Gumbel-Verteilung (Extremwertverteilung Typ I)

Oftmals sind die Größt- oder Kleinstwerte einer Folge von n Zufallsgrößen von Bedeutung. Die Verteilungsfunktion der Größt- bzw. Kleinstwerte von n Realisationen einer Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ergibt sich entsprechend der Extremwerttheorie nach Spaethe (1992) zu Gl. 3-11 und Gl. 3-12.

$$F_{\max}(x) = [F_X(x)]^n \quad \text{Gl. 3-11}$$

$$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n \quad \text{Gl. 3-12}$$

Für in beide Richtungen unbegrenzte Verteilungsfunktionen, wie die Normalverteilung, lässt sich hieraus die Extremwertverteilung vom Typ I (Gumbel-Verteilung) ableiten. Für Größtwerte ergibt sich die Verteilungsdichte der Gumbel-Verteilung nach Spaethe (1992) zu Gl. 3-13.

$$f(x) = a \cdot \exp[-a \cdot (x - u) - \exp(-a \cdot (x - u))] \quad \text{Gl. 3-13}$$

Die Parameter a und u lassen sich für die Gumbel-Verteilung der Größtwerte bei bekanntem Mittelwert und Standardabweichung mit Gl. 3-14 und Gl. 3-15 ermitteln.

$$u = \mu_X - \frac{\gamma}{a} \quad \text{Gl. 3-14}$$

$$a = \sqrt{\frac{\pi^2}{6 \cdot \sigma^2}} \quad \text{Gl. 3-15}$$

mit:

$$\gamma \approx 0,5772 \quad (\text{Euler-Mascheroni-Konstante})$$

Abbildung 3-3 zeigt einen Vergleich von normal- und gumbelverteilten Zufallsgrößen mit demselben Mittelwert und derselben Standardabweichung.

Neben der Extremwertverteilung vom Typ I lassen sich für unterschiedliche Ausgangsfunktionen zudem die Typen II und III ableiten.

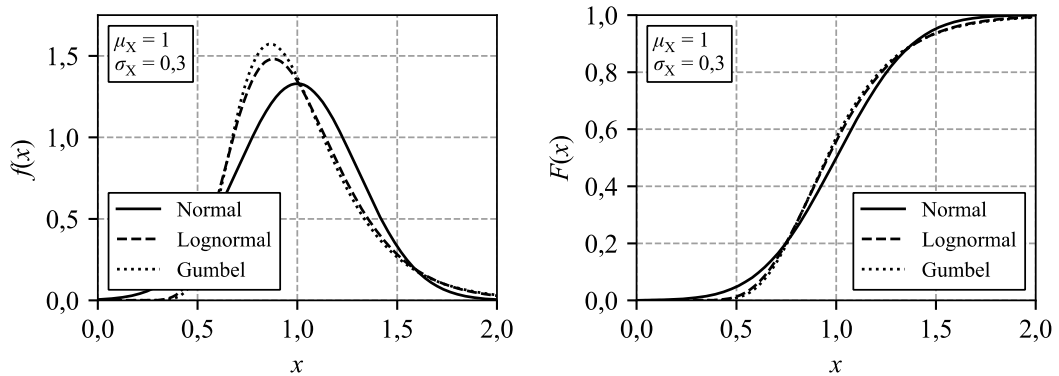


Abbildung 3-3 Vergleich von Normal-, Lognormal- und Gumbel-Verteilung

3.2.2 Multivariate Verteilungsfunktionen

Häufig müssen zur Beschreibung eines Zuverlässigkeitsproblems mehrere Eingangsgrößen und damit Basisvariablen berücksichtigt werden. Hierfür bietet sich die Verwendung von multivariaten Verteilungsfunktionen (oder Zufallsvektoren) an. Hierzu werden n Zufallsvariablen in einem Vektor zusammengefasst. Die statistischen Momente ergeben sich analog einer univariaten Verteilung. Die Erwartungswerte des Zufallsvektors lassen sich ebenfalls in Vektorschreibweise darstellen (Gl. 3-16). Für die Varianz wird dagegen die Matrixschreibweise genutzt, wobei die Elemente, welche nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, die lineare Abhängigkeit der Zufallsvariablen untereinander beschreiben (Kovarianz, Gl. 3-17).

$$\underline{\mu}_X = E \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \tag{Gl. 3-16}$$

$$\underline{\sigma}_X^2 = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix} \tag{Gl. 3-17}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Wird die Kovarianz auf das Produkt der Standardabweichungen der sie bildenden Komponenten bezogen, ergibt sich der Korrelationskoeffizient ρ nach Gl. 3-18.

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\sigma_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \quad \text{Gl. 3-18}$$

3.3 Formulierung des Zuverlässigkeitsproblems

3.3.1 Grenzzustandsfunktion

Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, stellt die Sicherheit einer Tragstruktur eine Funktion der Versagenswahrscheinlichkeit dar. „Versagen“ wird hierbei durch das Überschreiten eines Grenzzustands definiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies während eines definierten Bezugszeitraums eintritt, ist die Versagenswahrscheinlichkeit. In dieser Arbeit werden ausschließlich zeitinvariante Fragestellungen behandelt. Es wird demnach vorausgesetzt, dass sich die Eingangsgrößen als zeitinvariante Zufallsvariablen abbilden lassen.

Die Grundlage der Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit stellt das sogenannte „R-S-Modell“ dar. Dazu werden zwei Zufallsvariablen betrachtet, die eine Beanspruchung S und einen Widerstand R darstellen. Die Grenzzustandsfunktion ergibt sich dann nach Gl. 3-19.

$$g(R, S) = R - S \quad \text{Gl. 3-19}$$

Nimmt Gl. 3-19 Werte größer oder gleich Null an, tritt kein Versagen auf. Umgekehrt führt $S > R$ zum Versagen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür lässt sich auf Grundlage der gemeinsamen Verteilungsdichtefunktion beider Größen $f_{RS}(r, s)$ bestimmen. Das Integral dieser Funktion über den Versagensbereich ergibt die Versagenswahrscheinlichkeit (Gl. 3-20).

$$p_f = P(R - S < 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_{RS}(r, s) dr ds \quad \text{Gl. 3-20}$$

Anschaulich kann dies als das Volumen der gemeinsamen Verteilungsdichte im Versagensbereich beschreiben werden, wie Abbildung 3-4 illustriert. Dieses Prinzip kann auf beliebig viele Dimensionen und beliebige Grenzzustandsfunktionen ausgeweitet werden, womit sich in allgemeiner Form Gl. 3-21 ergibt.

$$p_f = P[g(X) < 0] = \int_{g(x) < 0} f_X(X) dx \quad \text{Gl. 3-21}$$

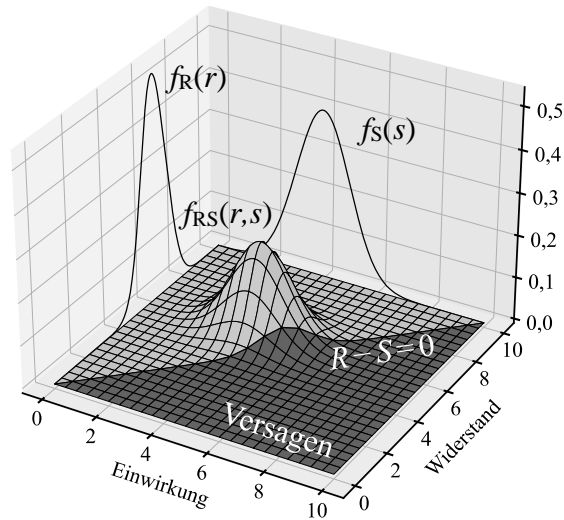


Abbildung 3-4 Gemeinsame Verteilungsdichtefunktion $f_{RS}(r,s)$ sowie Versagensbereich

Im Bauwesen ist anstatt der Verwendung der Versagenswahrscheinlichkeit der Begriff Zuverlässigkeitsindex oder Sicherheitsindex geläufig. Dieser lässt sich nach Six (2001) durch eine Überführung der Basisvariablen mittels Gl. 3-7 in den Standardnormalraum (Gl. 3-22) herleiten. Das Einsetzen der transformierten Basisvariablen in die Grenzzustandsfunktion nach Gl. 3-19 überführt auch diese in den Standardnormalraum (Gl. 3-23).

$$R^* = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad \text{sowie} \quad S^* = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad \text{Gl. 3-22}$$

$$g(R^*, S^*) = R^* \cdot \sigma_R - S^* \cdot \sigma_S + \mu_R - \mu_S \quad \text{Gl. 3-23}$$

Durch Umformung in die Hessesche Normalform ergibt sich weiterhin Gl. 3-24.

$$-\underbrace{\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}}_{\alpha_R} R^* + \underbrace{\frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}}_{\alpha_S} S^* - \underbrace{\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}}_{\beta} = 0 \quad \text{Gl. 3-24}$$

Der Zuverlässigkeitsindex β ist als der lotrechte Abstand der Grenzzustandsfunktion zum Ursprung des Standardnormalraums definiert (Gl. 3-25).

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad \text{Gl. 3-25}$$

Die Vorfaktoren α_R und α_S in Gl. 3-24 werden als Sensitivitätsfaktoren bezeichnet. Da sie sich aus dem Quotienten der Standardabweichung der jeweiligen Basisvariable und der Wurzel der Summe der Quadrate der Standardabweichungen beider Basisvariablen ergeben, gilt Gl. 3-26. Die Sensitivitäten α^2 geben dabei den Einfluss der zugehörigen Variablen auf die Tragwerkszuverlässigkeit an.

$$\alpha_R^2 + \alpha_S^2 = 1$$

Gl. 3-26

Abbildung 3-5 stellt die geometrischen Zusammenhänge anschaulich dar. Der Fußpunkt des Lots von der Grenzzustandsfunktion zum Ursprung des Standardnormalraums wird als Bemessungspunkt bezeichnet. Er hat von allen Punkten entlang der Grenzzustandsfunktion die größte Auftretswahrscheinlichkeit.

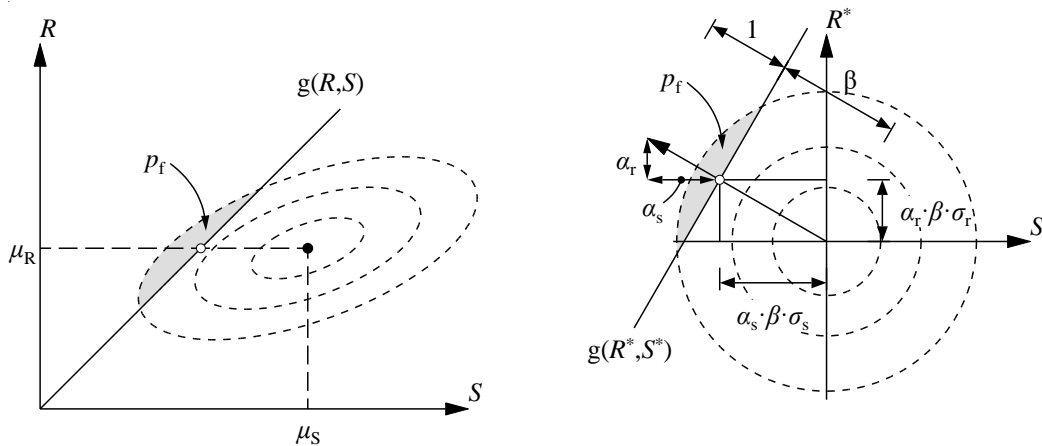


Abbildung 3-5 Links: Originalraum mit Grenzzustandsfunktion
Rechts: Standardnormalraum mit transformierter Grenzzustandsfunktion

Anschaulich beschrieben, stellt der Zuverlässigkeitsindex zudem jenen Abstand dar, welcher von der gemeinsamen Verteilungsdichte im Standardnormalraum ein Volumen abtrennt, das der Versagenswahrscheinlichkeit p_f entspricht (siehe Abbildung 3-5 (rechts)). Somit ist eine Umrechnung der Versagenswahrscheinlichkeit p_f in den Zuverlässigkeitsindex β über die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ^{-1} möglich (Gl. 3-27).

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - p_f)$$

Gl. 3-27

mit:

β Zuverlässigkeitsindex

Φ^{-1} Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

3.3.2 Zielzuverlässigkeit

Mit Hilfe des Zuverlässigkeitsindex β steht eine Größe zur Verfügung, über welche die Zuverlässigkeit einer Konstruktion charakterisiert werden kann. DIN EN 1990 (2011) empfiehlt für den Grenzzustand der Tragfähigkeit die in Tabelle 3-1 dargestellten Mindestwerte für den Zuverlässigkeitsindex (Zielzuverlässigkeitsindex).

Tabelle 3-1 Empfehlungen für Mindestwerte des Zuverlässigkeitsindex β nach DIN EN 1990 (2011)

Zuverlässigkeitsklasse	Mindestwert für β	
	Bezugszeitraum 1 Jahr	Bezugszeitraum 50 Jahre
RC 3	5,2	4,3
RC 2	4,7	3,8
RC 1	4,2	3,3

Die angestrebte Zielzuverlässigkeit wird im Rahmen der Bemessung nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) über das semiprobabilistische Sicherheitskonzept sichergestellt. Hierzu findet ein Vergleich von Beanspruchung E_d und Bauteilwiderstand R_d statt. Die beiden Größen werden auf Grundlage festgelegter Quantilwerte (charakteristische Werte) und Teilsicherheitsbeiwerte ermittelt. Die in DIN EN 1990 (2011) sowie DIN EN 1992-1-1/NA (2013) festgelegten Quantil- und Teilsicherheitsbeiwerte wurden für die Zuverlässigkeitsklasse RC 2 ermittelt, vgl. Fingerloos et al. (2012). Dabei werden nach Zilch und Zehetmaier (2010) die Sensitivitätsfaktoren der Widerstands- und der Einwirkungsseite mit $\alpha_R = 0,8$ und $\alpha_S = -0,7$ festgelegt, vgl. Fischer (2001) sowie König et al. (1982).

Da die Nutzlasten, welche im Rahmen der Zuverlässigkeitsanalyse in Kapitel 7 modelliert werden, auf Grundlage einer Wiederkehrperiode von 50 Jahren ermittelt werden, ergibt sich ein Zielzuverlässigkeitsindex $\beta = 3,8$. Aus Gl. 3-27 lässt sich Gl. 3-28 ableiten und die zugehörige Versagenswahrscheinlichkeit zu $p_f = 7,23 \cdot 10^{-5}$ bestimmen.

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad \text{Gl. 3-28}$$

Wie bereits erläutert, wurden die in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) festgelegten Teilsicherheitsbeiwerte der Bauteilwiderstände so festgelegt, dass sich hieraus ein Zuverlässigkeitsindex $\beta > 3,8$ ergibt. Für die Teilsicherheitsbeiwerte von FVK-Bewehrungen, welche z. B. in Rempel (2018) ermittelt oder in abZ Z-1.6-238 (2019) oder DAfStb (2022) vorgegeben sind, gilt dies gleichermaßen.

3.3.3 Analyse von Systemen

Besteht ein Tragsystem aus mehreren Elementen, ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit aus der Interaktion der einzelnen Versagenswahrscheinlichkeiten der Teilsysteme. In idealisierter Form lässt sich zwischen Serien- und Parallelsystemen unterscheiden. Seriensysteme können mit einer Kette verglichen werden, die versagt, sobald ein Kettenglied seine Tragfähigkeit erreicht. In Abhängigkeit davon, wie sehr ge- oder entkoppelt die einzelnen Versagensereignisse sind, ergeben sich nach Ricker (2009) eine obere und eine untere Schranke für die Versagenswahrscheinlichkeit nach Gl. 3-29.

$$\max p_{f,i} \leq p_f \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_{f,i}) \quad \text{Gl. 3-29}$$

mit:

p_f Versagenswahrscheinlichkeit des Systems

$p_{f,i}$ Versagenswahrscheinlichkeit der Systemkomponenten

Parallelsysteme hingegen versagen erst, wenn die Tragfähigkeit aller Teilelemente erreicht ist. Auch hier ergibt sich infolge der Kopplung der Versagensereignisse nach Ricker (2009) ein Bereich möglicher Versagenswahrscheinlichkeiten (Gl. 3-30).

$$\prod_{i=1}^n (p_{f,i}) \leq p_f \leq \min p_{f,i} \quad \text{Gl. 3-30}$$

Oftmals liegen im Bauwesen zudem Mischsysteme vor, was die Versagenswahrscheinlichkeit zusätzlich beeinflusst. Im Fall von FVK-bewehrten Bauteilen kann jedoch vom Vorliegen eines seriellen Systems ausgegangen werden. Da die Bewehrung keinerlei plastisches Verformungsvermögen aufweist, kann eine Umverteilung der Lasten zwischen den Tragelementen, wie es in einem Parallelsystem der Fall wäre, nicht stattfinden. Auf Querschnittsebene führt dies dazu, dass mit dem Ausfall eines einzelnen Bewehrungsstabs das Versagen des Querschnitts einhergeht, weiterführende Erläuterungen hierzu finden sich in Kapitel 4.2.3.2. Der Ausfall eines einzelnen Querschnitts führt auf Bauteilebene weiterhin zum Versagen des gesamten Tragwerks.

3.4 Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse

3.4.1 Allgemeines

Zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit stehen unterschiedliche Ansätze zur Verfügung. Für einfache Fragestellungen bieten sich analytische Lösungsverfahren, wie „FORM“ (First-Order Reliability Method) oder „SORM“ (Second-Order Reliability Method), an. Da diese im Rahmen dieser Arbeit keine Anwendung finden, wird auf eine Erläuterung der Verfahren verzichtet.

Die analytische Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit ist nur möglich, wenn die Grenzzustandsfunktion in expliziter Form vorliegt. Bei der Analyse komplexer Fragestellungen ist dies oft nicht der Fall. Hier bietet sich die Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit durch die numerische Integration des Faltungsintegrals an. Neben einfachen Integrationsverfahren, wie z. B. die Anwendung der Simpson-Regel, welche sich lediglich für die Untersuchung einfacher Probleme eignen, steht mit der Monte-Carlo-Methode ein leistungsfähiger Ansatz zur Verfügung, der universell einsetzbar ist.

3.4.2 Monte-Carlo-Methode

Die Monte-Carlo-Methode (MC-Methode) gehört zu den stochastischen Simulationsverfahren und eignet sich für beliebige Grenzzustandsfunktionen. Die Grundidee ist die Erzeugung von Zufallszahlen, die als Basisvariablen in das stochastische Modell eingehen. Hierbei ist anzumerken, dass sich echte Zufallszahlen nur auf Grundlage physikalischer Phänomene erzeugen lassen. Für die praktische Anwendung wird daher auf die Erzeugung von Pseudozufallszahlen zurückgegriffen. Die meisten gängigen Programmiersprachen stellen hierfür bereits implementierte Funktionen bereit. Für die Programmiersprache *Python* können entsprechende Funktionen der Bibliothek *Numpy* verwendet werden.

Das Einsetzen dieser Variablen in die Grenzzustandsfunktion oder – sofern diese nicht explizit vorliegt – das Verwenden als Eingangsgrößen für ein Berechnungsmodell führt zu einem Unter- oder Überschreiten des Grenzzustands. Das Unterschreiten wird als „kein Versagen“, das Überschreiten als „Versagen“ beschrieben. Das Verhältnis der Versagensfälle zu der Anzahl der durchgeführten Berechnungen ergibt eine Schätzung der Versagenswahrscheinlichkeit p_f .

In Gl. 3-31 wird hierzu zunächst das Faltungsintegral aus Gl. 3-21 um eine Indikatorfunktion I ergänzt. Fasst man das Integral in Gl. 3-31 als den Erwartungswert der Indikatorfunktion auf, folgt nach Six (2001) aus der Stichprobentheorie, dass mit Gl. 3-32 der erwartungstreue Schätzwert der Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt werden kann. Die korrespondierende Varianz der Schätzung ergibt sich gemäß Gl. 3-33.

$$p_f = \int_{g(x)<0} f_x(x) dx = \int_x I[g(x) < 0] f_x(x) dx \quad \text{Gl. 3-31}$$

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(x_i) < 0] = \frac{N_f}{N} \quad \text{Gl. 3-32}$$

$$\sigma_{\hat{p}_f}^2 = \frac{p_f - p_f^2}{N} \quad \text{Gl. 3-33}$$

mit

N_f	Anzahl Versagen
N	Stichprobenumfang
x_i	i -te Realisation der Stichprobe

Die Indikatorfunktion nimmt den Wert „1“ an, wenn der Grenzzustand unterschritten wird (Versagen), und den Wert „0“, wenn dieser überschritten wird (kein Versagen).

Für eine unendlich große Stichprobe ergibt sich mit dieser Methode die exakte Versagenswahrscheinlichkeit. Eine endliche Stichprobenanzahl führt nach Gl. 3-33 stets zu Ungenau-

igkeiten. In Abhängigkeit der angestrebten Versagenswahrscheinlichkeit und der tolerierbaren Varianz können sich sehr große erforderliche Simulationsanzahlen ergeben. Dies gilt insbesondere im Bauwesen, da hier sehr kleine Versagenswahrscheinlichkeiten angestrebt werden.

Die „direkte“ („crude“) Monte-Carlo-Methode stellt daher für viele Probleme kein effektives Simulationsverfahren dar. In solchen Fällen ist die Verwendung einer Sampling-Methode sinnvoll. Eine Übersicht über die hierfür zur Verfügung stehenden Methoden gibt Tabelle 3-2 (nach Heimann (2013) und Schwuchow (2009)).

Tabelle 3-2 Übersicht über verschiedene Samplingmethoden

Varianzminderndes Sampling		Quasi-Random-Sampling („Low-discrepancy sequences“)
Statische Methoden	Dynamische Methoden	
Latin Hypercube Sampling Stratified Sampling Spherical Sampling	Importance Sampling Adaptive Importance Sampling Adaptive Importance Directional Sampling	Sobol Sequence Halton Sequence Hammersley Set

Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit u. a. auf das Latin Hypercube Sampling (LHC) zurückgegriffen. Hierbei werden bei der Generierung der Zufallszahlen entsprechend des gewünschten Stichprobenumfangs Intervalle gleicher Wahrscheinlichkeiten gebildet. Während der Erstellung der Zufallszahlen wird darauf geachtet, dass kein Wert mehr als einmal in jeder Zeile und Spalte der Stichprobenmatrix vorkommt. Während sich für zwei Eingangsgrößen eine 2x2-Matrix ergibt, führen n Eingangsgrößen zu einem n -x- n -Hypercube, vgl. u. a. Olsson et al. (2003) sowie Damblin et al. (2013). Dies ermöglicht die Erstellung gleichverteilter Stichproben, wodurch sich mehr Realisationen im Versagensbereich ergeben und die Varianz der Monte-Carlo-Methode sinkt. Für die im Bauwesen üblichen Versagenswahrscheinlichkeiten ergibt sich jedoch oftmals immer noch eine sehr hohe Anzahl von Simulationen.

3.4.3 Gewichtete Monte-Carlo-Methode

Der Nachteil der Monte-Carlo-Methode ist, dass ein Großteil der erstellten Realisationen nicht im Versagensbereich liegt und daher nicht zur Versagenswahrscheinlichkeit beiträgt. Dies liegt daran, dass die Simulationen primär im Bereich der Mittelwerte der Basisvariablen durchgeführt werden. Durch eine Verschiebung der Stichprobenfunktion in die Nähe des Bemessungspunktes lässt sich die Effektivität der Monte-Carlo-Methode beträchtlich steigern. Dies ist durch die Einführung einer gewichteten Stichprobenfunktion möglich (vgl. Melchers (1990) und Melchers (1989)). Die Stichprobe wird dann auf Grundlage einer Schätzfunktion erstellt. Um das Ergebnis nicht zu verfälschen, muss eine Gewichtung der

Schätzfunktion vorgenommen werden. Gl. 3-31 und Gl. 3-32 werden so auf Gl. 3-34 und Gl. 3-35 erweitert. Dieses Verfahren wird als Importance Sampling (IS) bezeichnet.

$$p_f = \int_X I[g(x) < 0] \frac{f_X(x)}{h_X(x)} h_X(x) dx \quad \text{Gl. 3-34}$$

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(x_i) < 0] \frac{f_X(x_i)}{h_X(x_i)} \quad \text{Gl. 3-35}$$

In Abbildung 3-6 ist dieses Vorgehen für den eindimensionalen Fall illustriert. Eine optimale Stichprobenfunktion $h_{x,\text{opt}}$ erzeugt eine Stichprobe, die ausschließlich im Versagensbereich liegt. Durch die Gewichtung jedes Versagensfalls x_i mit dem Quotienten $f_X(x_i)/h_{x,\text{opt}}(x_i)$ lässt sich der Schätzwert der Versagenswahrscheinlichkeit bestimmen. Zur Erzeugung dieser optimalen Schätzfunktion müsste jedoch der Versagenspunkt im Vorfeld der Berechnung bekannt sein. Daher wird als Annäherung eine beliebig andere, stetige Verteilungsdichtefunktion, wie z. B. eine Normalverteilung mit der Varianz der Originalstichprobe, verwendet. Der Mittelwert dieser Verteilungsdichte kann bspw. mit einer im Vorfeld durchgeführten FORM-Analyse bestimmt werden. Da dies beim Vorliegen impliziter Grenzzustandsfunktionen oftmals nicht möglich ist, bietet sich eine iterative Vorgehensweise an. Eine solche Vorgehensweise wird in Kapitel 3.4.4 vorgestellt.

Bei der Verwendung einer nicht optimalen Schätzfunktion ergibt sich der Schätzwert der Versagenswahrscheinlichkeit ebenfalls durch Gewichtung. Hierfür ist ausgehend von Gl. 3-35 und in Anlehnung an Heimann (2013) die Formulierung von Gl. 3-36 zielführend. Die Varianz der Schätzung ergibt sich mit Gl. 3-37.

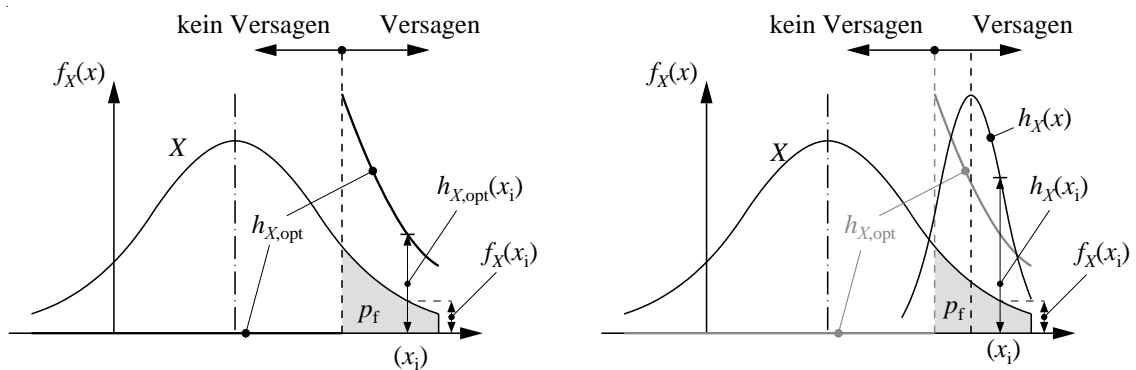


Abbildung 3-6 Links: Optimale IS-Schätzfunktion
Rechts: IS-Schätzfunktion (vgl. Heimann (2013))

$$\hat{p}_{\text{fN}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(x_i) \frac{\prod_k^n f_{X_k}(x_{k,i})}{\prod_k^n h_{X_k}(x_{k,i})} \quad \text{Gl. 3-36}$$

$$\sigma_{\text{pFN}}^2 = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(x_i) \left(\frac{\prod_k^n f_{X_k}(x_{k,i})}{\prod_k^n h_{X_k}(x_{k,i})} \right)^2 - \hat{p}_{\text{pFN}}^2 \right] \quad \text{Gl. 3-37}$$

mit:

- N Stichprobenumfang
- i Laufvariable der Realisation der Stichprobe
- n Anzahl der Basisvariablen
- k Laufvariable der Basisvariable
- f_{X_k} Originäre Verteilungsdichtefunktion der Variablen X_k
- h_{X_k} Schätzfunktion der Variablen X_k

3.4.4 Gewichtete Monte-Carlo-Methode mit adaptiver Stichprobenfunktion

Wie zuvor erläutert sind für die Erzeugung einer guten IS-Schätzfunktion a priori Informationen erforderlich. Daher bietet sich ein iteratives Vorgehen an, bei dem die Schätzfunktion in jedem Iterationsschritt verbessert wird. Nach jeder Berechnung werden die Ergebnisse ausgewertet und gehen als Vorabinformationen in den nächsten Iterationsschritt ein. Die Einträge des Vektors der geschätzten Erwartungswerte der Basisvariablen können nach jeder Iteration mit Gl. 3-38 bestimmt werden (nach Heimann (2013)). Diese Methode wird als Adaptive Importance Sampling (AIS) bezeichnet.

$$\bar{m}_{X_k} = \frac{1}{p_{\text{fN}}} \cdot \frac{1}{N} \sum_k^n x_{k,i} \cdot I(x_i) \cdot \frac{\prod_k^n f_{X_k}(x_{k,i})}{\prod_k^n h_{X_k}(x_{k,i})} \quad \text{Gl. 3-38}$$

mit:

- \bar{m}_{X_k} Geschätzter Erwartungswert der Basisvariablen X_k

Weiterhin ist eine Anpassung der Varianz der Stichprobe möglich, worauf im Rahmen dieser Arbeit jedoch verzichtet wird. Zum diesbezüglichen Vorgehen wird auf die umfassenden Darstellungen in Heimann (2013) verwiesen.

Da zu Beginn der Berechnungen keine Informationen über den Versagenspunkt vorliegen, empfiehlt Six (2001) die Durchführung einer gesonderten Startprozedur. Hierbei wird eine Stichprobe auf Grundlage der Mittelwerte der Basisvariablen mit einer durch den Parameter s skalierten Varianz erstellt. Für s werden Werte zwischen $2 \leq s \leq 3$ empfohlen, wobei zu beachten ist, dass mindestens $N_f \approx 10 \cdot n$ (mit $n =$ Anzahl der Basisvariablen) Versagenspunkte erzeugt werden. Für die in dieser Arbeit untersuchten Probleme ließen sich mit einem Skalierungsfaktor von $s = 3$ ausreichende Versagenspunkte generieren.

Nach dem Abschluss der Startprozedur steht eine erste Schätzung des Versagenspunktes zur Verfügung, welche mit jeder Iteration verbessert werden kann. Nach jeder Iteration kann der statistische Fehler der Simulation (Variationskoeffizient) mit Gl. 3-37 und Gl. 3-36 bestimmt werden. Sobald dieser einen vorab definierten Toleranzbereich nicht mehr überschreitet, kann die Iteration beendet werden.

Wie in Kapitel 3.3.1 ausgeführt, lässt sich mit Hilfe der Sensitivitätsbeiwerte α_i eine Aussage über den Einfluss der einzelnen Basisvariablen auf die Versagenswahrscheinlichkeit treffen. Nach Six (2001) bzw. Heimann (2013) lassen sich die Sensitivitätsbeiwerte auf Grundlage einer AIS Berechnung nach einer Transformation der Elemente des Erwartungswertvektors (Gl. 3-39) mit Gl. 3-40 berechnen.

$$\frac{-SN}{m_{X_k}} = \left[\frac{\bar{m}_{X_k} - \mu_{X_k}}{\sigma_{X_k}} \right] \quad \text{Gl. 3-39}$$

$$\alpha_{X_k} = \frac{\frac{-SN}{m_{X_k}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{-SN}{m_{X_k}} \right)^2}} \quad \text{Gl. 3-40}$$

3.4.5 Berücksichtigung mehrerer Versagenspunkte bei AIS-Analyse

Eine Herausforderung bei der Anwendung des Adaptive Importance Samplings stellt das Vorhandensein mehrerer Versagenspunkte dar. Treten bei komplexen Systemen verschiedene Versagensarten oder Versagensstellen auf, welche in ähnlichem Maße zur Versagenswahrscheinlichkeit beitragen, besteht die Gefahr, dass die unimodale AIS-Funktion nur einen oder sogar keinen dieser Versagenspunkte erfasst. Hierfür schlägt Six (2001) die Verwendung einer multimodalen Stichprobenfunktion vor. Diese stellt eine Linearkombination mehrerer unimodaler, multivariater Verteilungsdichten dar. Der Schätzwert der Versagenswahrscheinlichkeit kann weiterhin auf Grundlage von Gl. 3-36 bestimmt werden, jedoch als Summe aller unimodalen Verteilungsdichten (Gl. 3-41). Diese werden dabei mit einem Wichtungsfaktor w_j multipliziert, welcher der Bedeutung des korrespondierenden Versagensgebiets an der Gesamtversagenswahrscheinlichkeit Rechnung trägt.

$$\hat{p}_{\text{IN}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N I(x_i^{(j)}) \frac{\prod_k^n f_{X_k}(x_{k,i}^{(j)})}{\prod_k^n h_{X_k}(x_{k,i}^{(j)})} \cdot w_j \quad \text{Gl. 3-41}$$

mit:

M Anzahl der Versagenspunkte

w_j Wichtungsfaktor mit $\sum_{j=1}^M w_j = 1$

In jedem Berechnungsschritt werden somit M Stichproben mit jeweils N Elementen generiert. Der Wichtungsfaktor wird nach jedem Berechnungsdurchlauf für jeden Versagenspunkt in Abhängigkeit des Verhältnisses der Anzahl der Versagensergebnisse des jeweiligen Versagenspunktes zu den Gesamtversagensereignissen bestimmt (vgl. Six (2001)).

Sofern erforderlich, wird in der vorliegenden Arbeit die Anzahl der möglichen Versagenspunkte nach der Startprozedur mit skaliertem Stichprobenvarianz ermittelt. Diese wird zunächst mit einer unimodalen Stichprobenfunktion durchgeführt. Die Anzahl der Versagenspunkte ergibt sich aus den auftretenden Versagensarten sowie -stellen, die eine ähnlich große Versagenswahrscheinlichkeit aufweisen. Ist die Anzahl der Versagenspunkte bestimmt, wird mittels *k-Means*-Algorithmus eine Clusteranalyse durchgeführt, welche die Versagenspunkte in Clustern gruppiert (die Verwendung anderer Cluster-Algorithmen ist ebenfalls möglich). Basierend auf den jeweiligen Versagenspunkten des Clusters wird dann – für jeden Versagenspunkt getrennt – eine erste Schätzung der neuen Versagenspunkte ermittelt. Diese dienen als Eingangsgrößen für den nächsten Iterationsschritt und werden nach der nächsten Berechnung verbessert.

Das geschilderte Verfahren wird nachfolgend anhand eines fiktiven Zuverlässigkeitsproblems mit zwei normalverteilten Basisvariablen erläutert. Gegeben sind eine Einwirkung S mit dem Mittelwert $\mu_S = 100$ kN und einem Variationskoeffizienten $\nu_S = 0,4$ sowie eine Widerstandsgröße R mit $\mu_R = 350$ kN und $\nu_R = 0,1$. Neben der Grenzzustandsfunktion $g_1(R,S) = R - S$ wird ein zweiter Grenzzustand $g_2(R) < 500$ kN festgelegt. In Abbildung 3-7 sind die Ergebnisse der AIS-Analyse für jeden Berechnungsdurchlauf dargestellt.

Als Referenz wird eine Monte-Carlo-Simulation auf Grundlage eines Latin Hypercube Samplings durchgeführt (MCLHC). Der Stichprobenumfang beträgt $N = 10^8$. Die Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich zu $p_{f,MC} = 1,04 \cdot 10^{-5}$ mit einem statistischen Fehler von 3,1 %.

Für die AIS Analyse werden in jedem Berechnungsdurchlauf Stichproben mit dem Umfang $N = 1.000$ pro Versagenspunkt erstellt. Zunächst wird die Startprozedur basierend auf den Mittelwerten der Basisvariablen und skalierten Varianzen durchgeführt. Auf Grundlage der

Ergebnisse findet eine erste Schätzung der Erwartungswerte der Basisvariablen statt. Diese sind in Abbildung 3-7 (links oben) als Sterne gekennzeichnet. Im Anschluss wird eine bimodale Stichprobenfunktion erstellt und eine erste IS Berechnung durchgeführt. Die Auswertung der Versagenspunkte führt zu einer Gesamtversagenswahrscheinlichkeit von $p_{f,AIS,1} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ bei einem maximalen geschätzten statistischen Fehler von ca. 15 %. Basierend auf den Ergebnissen des ersten Durchlaufs findet ein zweiter und im Anschluss daran ein dritter Berechnungsdurchlauf statt. Im letzten Durchlauf ergibt sich eine Versagenswahrscheinlichkeit von $p_{f,AIS,3} = 1,04 \cdot 10^{-5}$ bei einem geschätzten statistischen Fehler von ca. 6 % (Abbildung 3-7 (rechts unten)). Somit konnte in vier Berechnungsdurchläufen mit jeweils nur 2.000 Realisierungen (1.000 je Versagenspunkt) die Versagenswahrscheinlichkeit des Systems ermittelt werden, wohingegen für eine gleichwertige Lösung mittels LHC 10^8 Durchläufe erforderlich wären.

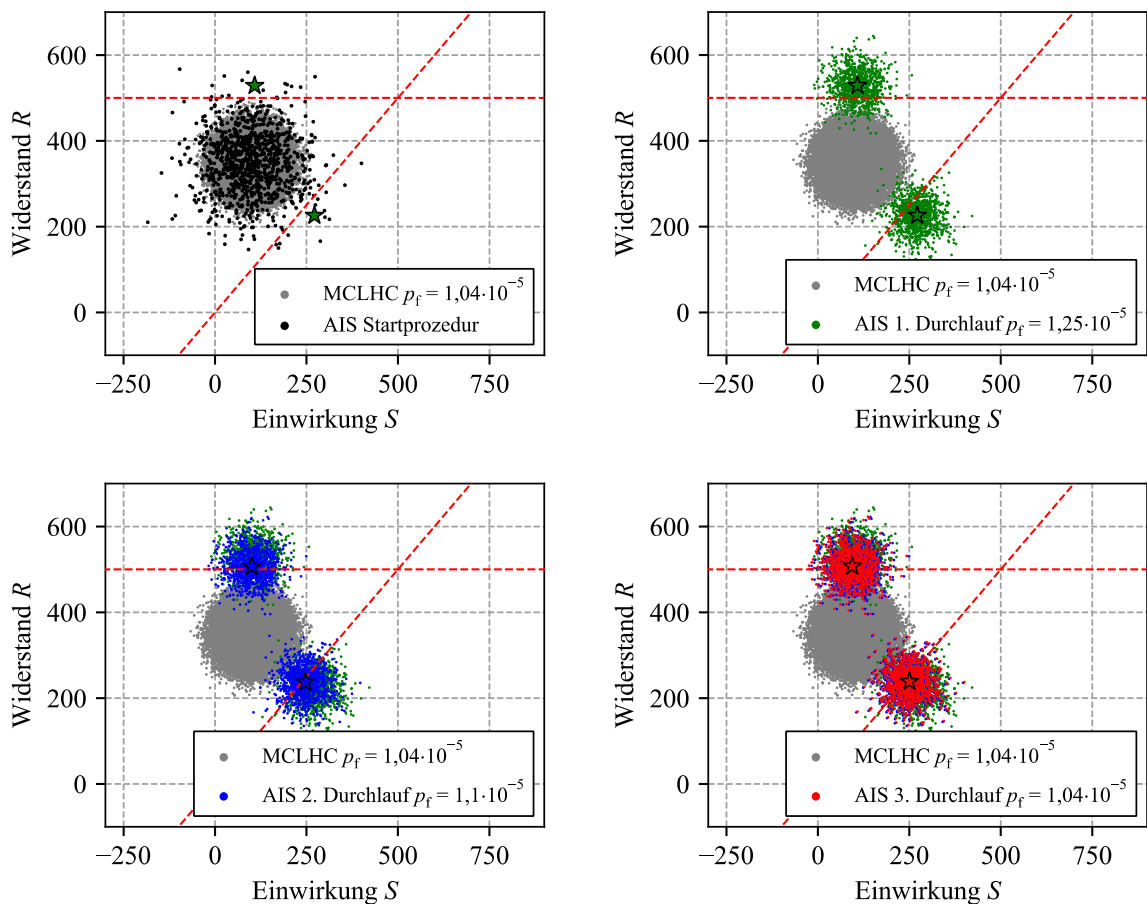


Abbildung 3-7 Exemplarische AIS-Berechnung mit mehreren Versagenspunkten

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen der zuverlässigkeitstheoretischen Methoden im Bauwesen erläutert. Dazu wurde einleitend die stochastische Modellierung von unimodalen und multivariaten Verteilungsfunktionen dargestellt. Auf Basis des „R-S-Modells“ wurde

das Faltungsintegral zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit erläutert und der Zuverlässigkeitsindex β eingeführt. Für diesen wurden die normativ festgelegten Zielwerte vorgestellt. Weiterhin wurden verschiedene numerische Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit erläutert. Der Schwerpunkt lag hierbei auf der Monte-Carlo-Methode und deren Erweiterung durch adaptive Sampling-Funktionen. In diesem Zusammenhang wurde auch die Berücksichtigung mehrerer Versagensstellen erläutert. Die vorgestellten numerischen Methoden werden in dieser Arbeit zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit von statisch unbestimmten Tragsystemen mit FVK-Bewehrung eingesetzt.

4 NICHTLINEARES LAST-VERFORMUNGSVERHALTEN BEWEHRTER BETONBAUTEILE

4.1 Einführung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des nichtlinearen Last-Verformungsverhaltens FVK- und stahlbewehrter Betonbauteile dargestellt, mit dem Ziel in Kapitel 5 ein numerisches Berechnungsmodell zur Beschreibung des Bauteilverhaltens zu erstellen (Systemebene). Hierzu wird zunächst auf die Eigenschaften der Werkstoffe sowie deren Verbund eingegangen (Materialebene). Darauf aufbauend wird das Querschnittsverhalten beschrieben (Querschnittsebene). Die aufgestellten Beziehungen dienen als Eingangsgrößen, um das nichtlineare Tragverhalten auf Systemebene ermitteln zu können.

4.2 Werkstoffverhalten

4.2.1 Beton

4.2.1.1 Allgemeines

Der moderne Beton stellt ein 5-Stoff-System aus Zuschlägen, Wasser, Bindemitteln, Zusatzmitteln und Zusatzstoffen dar. Im Folgenden werden lediglich die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Eigenschaften des Festbetons beschrieben. Umfassende Informationen zu weiteren Betoneigenschaften können u. a. Grübl et al. (2001) entnommen werden.

Es erfolgt primär eine Betrachtung des Verhaltens unter ein- und mehraxialen Druckbeanspruchungen. Da im Rahmen des numerischen Modells keine explizite Modellierung des Rissverhaltens stattfindet, wird auf die Beschreibung von Beton unter Zugbeanspruchung verzichtet und auf z. B. Hsu und Mo (2010) verwiesen. Da die numerischen Simulationen zeitinvariant durchgeführt werden, werden zeitabhängige Effekte infolge lastabhängiger (Kriechen) und lastunabhängiger Einflüsse (Schwinden) nicht dargestellt.

4.2.1.2 Einaxiales Werkstoffverhalten

Unter Druckbeanspruchung verhält sich Beton zunächst linear-elastisch. Mit Bildung von Mikro-Rissen infolge Querkzugspannungen nehmen die Dehnungen ab ca. 40 % der Druckfestigkeit jedoch überproportional zu. Mit steigender Belastung entstehen größere Makrorisse und die Steifigkeit nimmt weiter ab. Die Risse verlaufen bei normalfestem Beton in erster Linie entlang der Kontaktflächen zwischen Zuschlag und Zementmatrix. Wird die Belastung weggesteuert aufgebracht, kommt es nach dem Erreichen der Betondruckfestigkeit zu einem Abfall der Spannungen bei weiterer Zunahme der Dehnungen (Entfestigung/Nachbruchverhalten). Das beschriebene Verhalten ist abhängig von der Betonzusam-

mensetzung sowie den Erhärtingsbedingungen. Höherfeste Betone weisen bis zur Druckfestigkeit ein lineareres Verhalten auf, jedoch ist das Nachbruchverhalten weniger ausgeprägt und ihr Versagen damit spröder. Weiterhin werden die Festigkeits- und Verformungseigenschaften von den Prüfbedingungen beeinflusst. Die Festbetoneigenschaften werden mit Hilfe von Prüfkörpern ermittelt, wobei deren Gestalt/Schlankheit und Größe die Testergebnisse beeinflussen, siehe Schickert (1981). Entsprechende Zusammenhänge zur Umrechnung von Probekörpergeometrien (z. B. im Rahmen von Versuchsnachrechnungen) sind in Grübl et al. (2001) sowie Leonhardt und Mönnig (1984) gegeben. Weitere Einflüsse auf Prüfergebnisse sind u. a. die Prüfgeschwindigkeit sowie die Querdehnungsbehinderung durch die Druckplatten der Prüfmaschine.

Zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens von Beton stellt DIN EN 1992-1-1 (2011) einen nichtlinearen Zusammenhang zur Verfügung. Dieser lässt sich mit Hilfe von Gl. 4-1 beschreiben und ist in Abbildung 4-1 (links) in bezogener Darstellung für drei Betonfestigkeitsklassen dargestellt. Der Faktor k stellt hierbei das Verhältnis des Tangentenmoduls im Ursprung der Kurve zum Sekantenmodul bei Erreichen der Druckfestigkeit dar. Durch die Vorgabe von k kann somit die Völligkeit der Kurve gesteuert werden. Für $k = 1$ ergibt sich ein linearer Anstieg, $k = \infty$ führt zu einem starr-plastischen Werkstoffgesetz.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \tag{Gl. 4-1}$$

mit:

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$$k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\varepsilon_{c1}| / f_{cm}$$

ε_{c1} Betonstauchung bei Höchstwert der Betondruckspannung f_{cm}

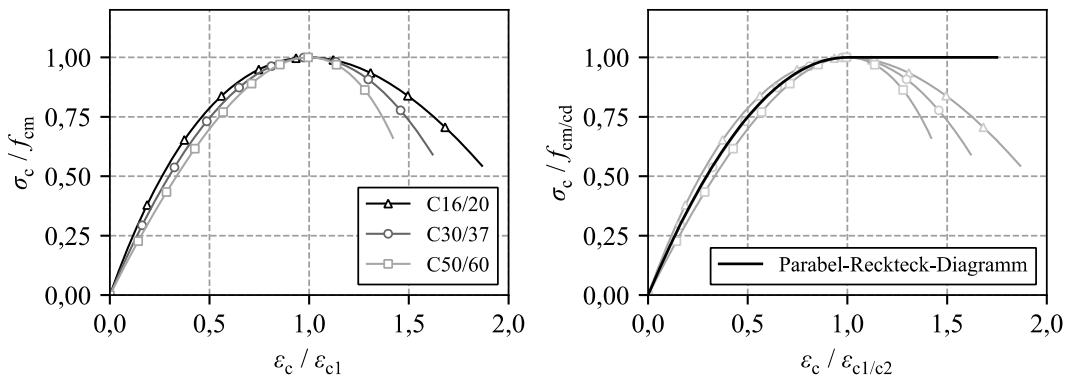


Abbildung 4-1 Links: Nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach DIN EN 1992-1-1 (2011)
 Rechts: Parabel-Rechteck-Diagramm für die Querschnittsbemessung nach DIN EN 1992-1-1 (2011)

Werte für die Betonstauchung bei Erreichen der Betondruckfestigkeit sowie das mittlere E-Modul E_{cm} sind in Tabelle 3.1 der DIN EN 1992-1-1 (2011) gegeben oder lassen sich mit Gl. 4-2 und Gl. 4-3 ermitteln. Die Bruchdehnung für normalfeste Betone wird mit $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ angegeben.

$$\varepsilon_{c1} = 0,7 \cdot f_{cm}^{0,31} \leq 2,8 \quad [\text{‰}] \quad \text{Gl. 4-2}$$

$$E_{cm} = 22.000 \cdot (f_{cm}/10)^{0,3} \quad \text{Gl. 4-3}$$

Für die Querschnittsbemessung darf nach DIN EN 1992-1-1 (2011) mit dem Parabel-Rechteck-Diagramm eine vereinfachte Formulierung verwendet werden. Dieses ist in Abbildung 4-1 (rechts) dargestellt und verwendet für normalfeste Betone einen Wert von $k = 2$ (Parameter n in Gl. 4-4). Ab Erreichen von ε_{c2} wird eine konstante Spannung angenommen (Gl. 4-5).

$$\frac{\sigma_c}{f_{cd}} = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n \quad \text{für } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad \text{Gl. 4-4}$$

$$\frac{\sigma_c}{f_{cd}} = 1 \quad \text{für } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \quad \text{Gl. 4-5}$$

mit:

- n Exponent gemäß DIN EN 1992-1-1 (2011) (= 2 für normalfeste Betone)
- ε_{c2} Betonstauchung bei Maximalfestigkeit (= 2 ‰ für normalfeste Betone)
- ε_{cu2} Bemessungsbruchdehnung (= 3,5 ‰ für normalfeste Betone)

Die Betonbruchstauchung wird in DIN EN 1992-1-1 (2011) sowohl für die Querschnittsbemessung als auch für die Verwendung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Gl. 4-1 für normalfeste Betone mit $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ angegeben. Erst für hochfeste Betone wird ein Zusammenhang verwendet, der eine Abnahme der Bruchstauchung mit steigender Betondruckfestigkeit herstellt. In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Ansätzen, die bereits für normalfeste Betone eine negative Korrelation zwischen Druckfestigkeit und Bruchstauchung annehmen, einige dieser Ansätze sind in Abbildung 4-2 (links) dargestellt. Teilweise ergeben sich hier deutliche Abweichungen zu dem in DIN EN 1992-1-1 (2011) festgelegten Wert von $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$. Weiterhin ist die Betonbruchstauchung von einer Vielzahl von Einflussfaktoren, wie dem Dehnungsgradienten (vgl. König et al. (1999), Rasch (1962)) oder der im Versuch verwendeten Messlänge (vgl. Rüschi (1955)), abhängig. Zudem lässt sich in Abhängigkeit der Bauteilhöhe ein Maßstabeffekt feststellen (vgl. Corley (1966), Bigaj (1999), Bigaj und Walraven (2002)). Für Bauteile mit geringen Nutzhöhen können sich teilweise erheblich größere Bruchstauchungen einstellen, wie in

Abbildung 4-2 (rechts) dargestellt. Diese Tatsache findet u. a. in der neuen Normengeneration prEN 1992-1-1 (2021) bei der Ermittlung der Rotationskapazität Beachtung (vgl. Caldentey et al. (2021)).

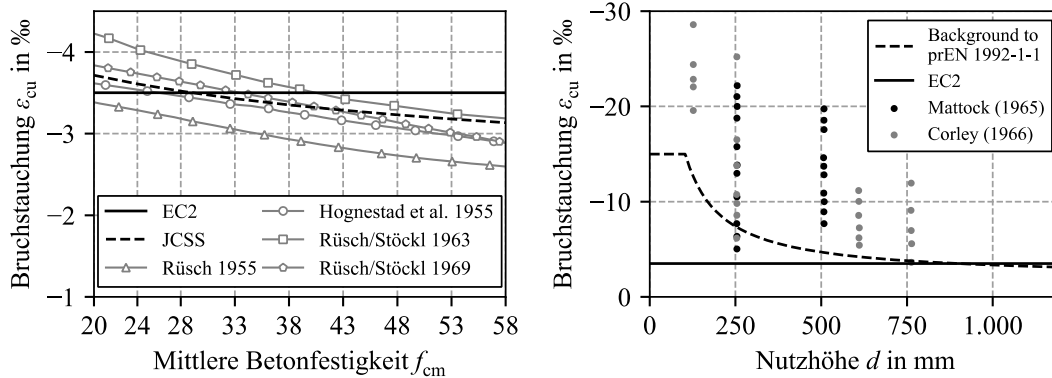


Abbildung 4-2 Links: Ansätze zur Bestimmung der Betonbruchstauchung
Rechts: In Versuchen gemessene Betonbruchstauchungen (in Anlehnung an Caldentey et al. (2021))

Weiterhin ist der Wert der Betonzugfestigkeit von Interesse. Zur Ermittlung der einaxialen Betonzugfestigkeit kann für normalfeste Betone nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) Gl. 4-6 herangezogen werden.

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad \text{Gl. 4-6}$$

In Noakowski und Schäfer (2003) wird angemerkt, dass die „effektive“ Zugfestigkeit neben der Betonfestigkeit noch von weiteren Faktoren, wie einer Vorschädigung der Oberfläche, des Dehnungsgradienten oder der Bauteildicke, abhängt. Zur Berücksichtigung dieser Effekte werden dort entsprechende Zusammenhänge angegeben. Im Rahmen dieser Arbeit finden diese Effekte keine Berücksichtigung.

4.2.1.3 Mehraxiales Werkstoffverhalten

Wie eingangs erläutert, tritt die Schädigung des Betons unter Druck infolge von Querspannungen auf. Das Vorliegen eines mehraxialen Spannungszustandes wirkt dem entgegen und es können deutlich höhere Festigkeiten und Bruchstauchungen erreicht werden. Ein solcher mehraxialer Spannungszustand kann in einem Betonbauteil durch eine Bügelumschnürung hervorgerufen werden. Für linienförmige Bauteile bietet es sich an, diesen Effekt über eine Modifikation der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons zu erfassen.

Für Stahlbetonbauteile findet sich in der Literatur eine Vielzahl von Modellen zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung solcher umschnürter Betondruckzonen (z. B. Mander et al. (1988), Park und Paulay (1975), Langer (1987), Graubner (1989)). Auch DIN

EN 1992-1-1 (2011) stellt entsprechende Beziehungen auf Grundlage des Parabel-Rechteck-Diagramms bereit.

Faserverbundkunststoffe wurden bereits früh zur Erzeugung mehraxialer Spannungszustände in Betonbauteilen verwendet. Eine gängige Anwendung ist die nachträgliche Umschnürung von Stützen zur Traglaststeigerung. Zur Beschreibung der daraus resultierenden Verbesserung der Betoneigenschaften existieren zahlreiche Modelle (z. B. Lam und Teng (2003), Teng et al. (2009), Spoelstra und Monti (1999), Maaddawy (2009)). Eine übersichtliche Zusammenstellung sowie ein Vergleich vieler Modelle findet sich in Ozbakkaloglu et al. (2013) sowie Zhang et al. (2022).

Eine Übertragung der Modelle auf Biegedruckzonen ist problemlos möglich. Hierbei ist jedoch die Reduktion der Kernbetonfläche A_{cc} in Form der effektiv umschnürten Kernbetonfläche A_e zu berücksichtigen. Diese ergibt sich aus der räumlichen Ausbreitung der Betonspannungen zwischen den Bügelschenkeln. Die hierzu erforderlichen geometrischen Zusammenhänge sind in Quer- sowie Längsrichtung in Abbildung 4-3 dargestellt.

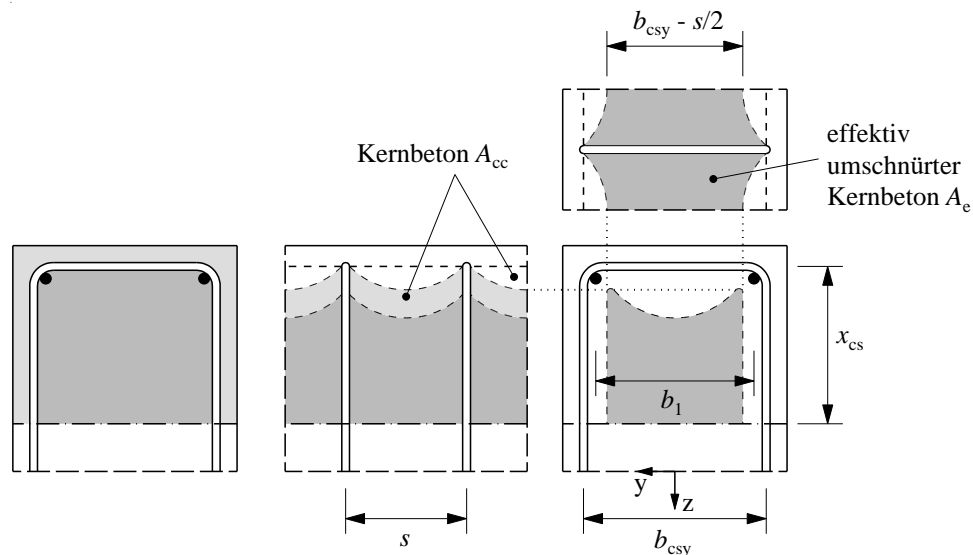


Abbildung 4-3 Ermittlung der effektiv umschnürten Kernbetonfläche

Mit Hilfe des Wirksamkeitsfaktors für die Umschnürungswirkung $k_{conf,e}$ lässt sich die effektive Umschnürungsspannung $\sigma_{c2,eff}$ aus der Umschnürungsspannung σ_{c2} berechnen. Die hierfür erforderlichen Beziehungen wurden in Mander et al. (1988) hergeleitet und sind u. a. in prEN 1992-1-1 (2021) enthalten (Gl. 4-7 bis Gl. 4-10).

$$\sigma_{c2,eff} = \sigma_{c2} \cdot k_{conf,e} \quad \text{Gl. 4-7}$$

$$\sigma_{c2} = \min \left\{ \frac{a_{f,w}}{b_{cs,y}}; \frac{a_{f,w}/2}{x_{cs}} \right\} \cdot f_{fu,w} \quad \text{Gl. 4-8}$$

$$\frac{A_e}{A_{cc}} = k_{conf,e} = k_{conf,b} \cdot k_{conf,s} \quad \text{Gl. 4-9}$$

$$k_{conf,e} = \underbrace{\left(1 - \frac{b_1}{6b_{cs,y} \cdot x_{cs}} \right)}_{k_{conf,b}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{s}{4x_{cs}} \right)}_{k_{conf,s}} \cdot \left(1 - \frac{2}{2b_{cs,y}} \right) \quad \text{Gl. 4-10}$$

Für Bügel aus FVK-Bewehrungselementen ist zu berücksichtigen, dass sich die Zugfestigkeit der Bügelbewehrung $f_{fu,w}$ aufgrund von Spannungskonzentrationen in den Bügelecken quer zu den Stabachsen reduziert. In fib bulletin 40 (2007) sowie ISIS Canada (2007) wurde hierzu eine Gleichung zur Abminderung der Festigkeit aus JSCE (1997) übernommen (Gl. 4-11).

$$f_{fu,w} = \left(\alpha \cdot \frac{r_b}{\varnothing_f} + 0,3 \right) \cdot f_{fu} \quad \text{Gl. 4-11}$$

mit:

α Beiwert (= 0,092 für Mittelwerte, vgl. Imjai et al. (2020))

r_b Biegeradius

\varnothing_f Stabdurchmesser

f_{fu} Festigkeit des FVK-Bügels

Sind die effektiven Umschnürungsspannungen bekannt, lassen sich in Abhängigkeit des gewählten Modells die Betonspannungen im Kernbeton des Querschnitts berechnen. Da die Modelle explizit nur den Kernbereich des Betons abbilden, ist für die Betondeckung eine andere Spannungs-Dehnungs-Beziehung anzusetzen.

Zur Beschreibung der Umschnürungswirkung von FVK-Bügeln wird in der vorliegenden Arbeit der Ansatz von Lam und Teng (2003), welcher in Teng et al. (2009) weiterentwickelt wurde, herangezogen. Die Betondeckung wird mit Hilfe des Ansatzes von Mander et al. (1988) modelliert. Das Modell von Teng et al. (2009) geht von einem linearen Anstieg der Spannungen über die mittlere Betonfestigkeit hinaus aus (Gl. 4-12, Abbildung 4-4). In Anhang A-1 sind die Gleichungen zur Ermittlung der erforderlichen Parameter dargestellt.

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{cm} \cdot \varepsilon_c - \frac{(E_{cm} - E_{c2})^2}{4 \cdot f_{cm}} \cdot \varepsilon_c^2 & \text{für } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_t \\ f_{cm} + E_{c2} \cdot \varepsilon_c & \text{für } \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu,conf} \end{cases} \quad \text{Gl. 4-12}$$

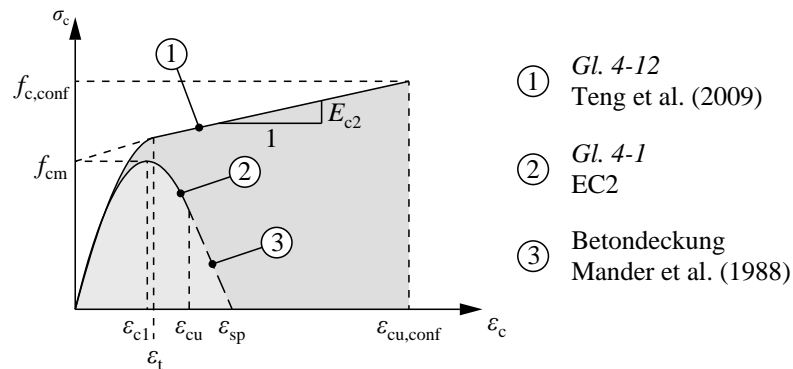


Abbildung 4-4 Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Teng et al. (2009) sowie für Betondeckung nach Mander et al. (1988)

4.2.2 Betonstahl

In Abhängigkeit des Herstellverfahrens werden die im Stahlbetonbau verwendeten Stähle in kaltverformte und wärmebehandelte Stähle unterteilt. Beide Sorten weisen bis zum Erreichen der Streckgrenze ein linear-elastisches Verhalten unter einem konstanten E-Modul von 200.000 N/mm² auf. Warmgewalzte Stähle weisen ein ausgeprägtes Fließplateau mit anschließender Nachverfestigung auf. Bei kaltverformten Stählen ist der Übergang in den Fließbereich nicht so ausgeprägt. In Abbildung 4-5 (links) sind die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen typischer Betonstähle nach DIN EN 1992-1-1 (2011) dargestellt. Zudem kann zwischen normalduktilen Betonstahl (B500A, Grenzdehnung von 25 %) und hochduktilen Betonstahl (B500B, Grenzdehnung 50 %) unterschieden werden. Im Rahmen von bauaufsichtlichen Zulassungen stehen zudem hochduktiler Erdbebenstahl (B500C, Grenzdehnung 75 %) zur Verfügung. Die Stähle werden darüber hinaus durch das Verhältnis der Zugfestigkeit zur Fließspannung $(f_t/f_y)_k$ charakterisiert. Dieses ist bei normalduktilen Stählen größer als 1,05, bei hochduktilen Stählen größer als 1,08.

Soll die Spannungs-Dehnungs-Beziehung möglichst genau beschrieben werden, finden sich entsprechende funktionale Zusammenhänge z. B. in Kreller (1989) (für warmgewalzten Stahl) oder Quast (2007) (für kaltverformten Stahl).

In der Bemessung von Stahlbetonbauteilen wird zumeist eine vereinfachte Formulierung in Form einer bi-linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung verwendet, siehe Abbildung 4-5 (rechts). Hierbei kann die Nachverfestigung durch einen linear ansteigenden Ast nach Erreichen der Fließspannung angenähert werden. Die Bruchspannung ε_{ud} wird dabei, unabhängig von der Duktilitätsklasse, auf 25 % begrenzt.

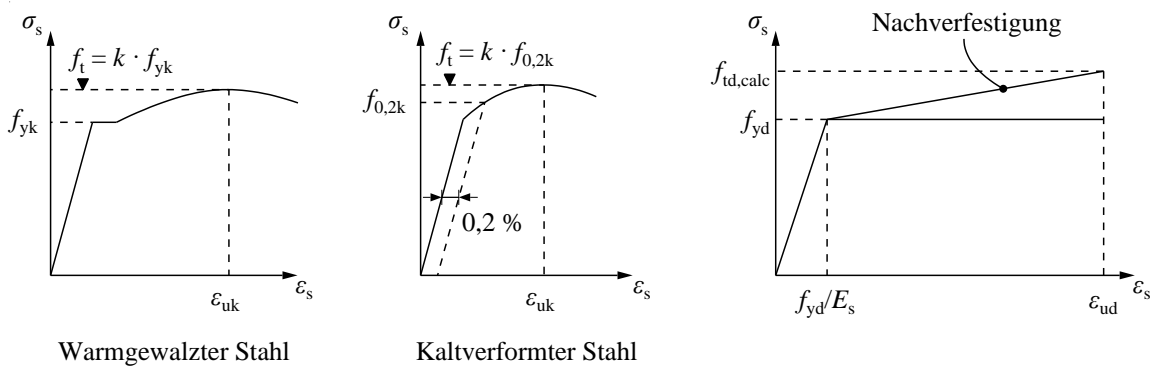


Abbildung 4-5 Links und Mitte: Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für typischen Betonstahl nach DIN EN 1992-1-1 (2011)
 Rechts: Rechnerische Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Betonstahl für die Bemessung nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013)

4.2.3 Bewehrung aus Faserverbundkunststoffen

4.2.3.1 Allgemeines

Bewehrungselemente aus FVK bestehen aus Fasern, welche in eine Kunststoff-Matrix gebettet werden. Hierzu werden Endlosfasern (Filamente) in Faserbündeln zusammengefasst und mit einer Kunststofftränkung stabilisiert. Die mechanischen Eigenschaften des Verbundwerkstoffs werden von den Werkstoffeigenschaften der beiden Bestandteile bestimmt. Im Folgenden wird lediglich auf die in dieser Arbeit relevanten, mechanischen Kenngrößen eingegangen. Vertiefende Ausführungen zu den Eigenschaften von FVK und ihren Komponenten können z. B. Bank (2006) oder Mallick (2008) entnommen werden. Eine übersichtliche Darstellung der wichtigsten Eigenschaften findet sich zudem in El-Ghadioui (2020).

Zur Anwendung in Betonbauteilen finden primär zwei FVK-Bewehrungsformen Anwendung. Zum einen werden stabförmige FVK-Bewehrungselemente (analog dem Betonstabstahl), zum anderen FVK-Gelege verwendet, in denen mehrere Faserstränge in einer Gitterstruktur angeordnet sind. Neben der Anwendung als interne Bewehrung in Neubauteilen eignen sich insbesondere FVK-Gelege in Kombination mit einer dünnen Schicht Aufbeton für die nachträgliche Verstärkung von Stahlbetonbauteilen. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich stabförmige, interne Bewehrungselemente betrachtet.

In Abhängigkeit des verwendeten Fasermaterials, der Kunststoff-Matrix sowie des Verhältnisses der beiden zueinander weisen Bewehrungselemente aus FVK unterschiedliche mechanische Eigenschaften auf. Häufig verwendete Fasertypen sind Aramid-, Basalt, Carbon- und Glasfasern. Sie alle verhalten sich bis zum Bruch ausschließlich linear-elastisch und versagen spröde. Die meisten FVK-Bewehrungen besitzen eine deutlich höhere Festigkeit

als Betonstahl. Die E-Moduln der FVK-Bewehrungsarten können einen breiten Wertebereich annehmen. Tabelle 4-1 gibt hierüber für CFK-, GFK- und BFK-Bewehrungselemente einen Überblick.

Tabelle 4-1 Mögliche Bereiche von Zugfestigkeit, E-Modul und Bruchdehnung von Bewehrung aus CFK, GFK und BFK nach El-Ghadioui (2020)

	Zugfestigkeit f_t	E-Modul E_f	Bruchdehnung $\varepsilon_{f,u}$
	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[‰]
CFK	600 – 3.690	100.000 – 580.000	5 – 17
GFK	450 – 1.600	35.000 – 60.000	12 – 37
BFK	1.000 – 1.750	56.500 – 67.700	22 – 27

In Abbildung 4-6 sind exemplarische Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von CFK, GFK sowie Betonstahl dargestellt.

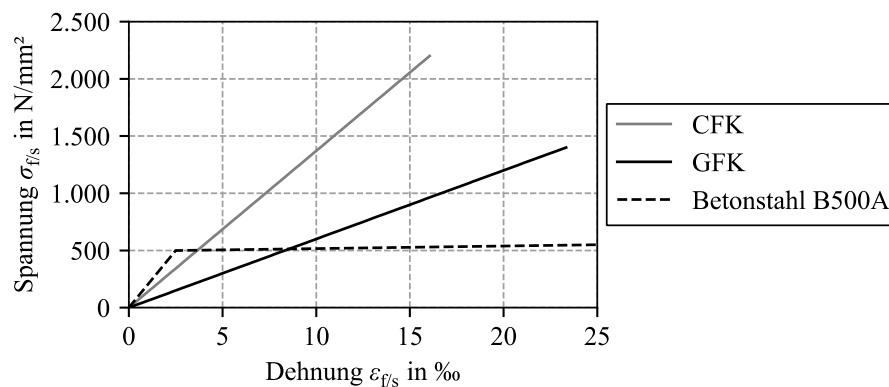


Abbildung 4-6 Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von CFK, GFK und Betonstahl

Zur Verbesserung des Verbundverhaltens ist – ähnlich dem Betonstahl – bei vielen FVK-Bewehrungen eine Profilierung auf dem Stab vorhanden. Diese kann u. a. durch eingefräste Rippen, Umflechtungen oder eine Besandung erreicht werden. So lassen sich vergleichbare Verbundeigenschaften wie bei Betonstahl erreichen, vgl. Füllsack-Köditz (2004) und Hofmann (2021).

4.2.3.2 Festigkeitsminderung infolge spröden Versagens

Infolge des nichtduktilen Versagens von Bewehrungselementen aus FVK ergeben sich negative Effekte auf die Festigkeit in Abhängigkeit der betrachteten Stablänge sowie der Anzahl der eingesetzten Stäbe (vgl. Vořechovský und Chudoba (2006), Rypl (2014), Rempel (2018)). Diese Effekte betreffen sowohl die Bewehrungsfestigkeit als auch den E-Modul, wobei die Auswirkungen auf den E-Modul nach Rempel (2018) gering sind und im Folgenden vernachlässigt werden.

Die Festigkeit von FVK-Bewehrungsstäben wird in Zugversuchen ermittelt. Hierfür sieht z. B. ASTM D7205/D7205M-06 (2016) eine freie Länge der Probe (ohne Verankerungsvorrichtungen) von 350 mm oder $40\varnothing_f$ vor. Herstellungsbedingt steigt mit der Stablänge die Anzahl möglicher Fehlstellen im Bewehrungselement. Die in einem Zugversuch ermittelte Festigkeit ist somit nur für die ihr zugrunde liegende Prüflänge gültig. Ein längeres Bewehrungselement, welches unter konstanter Beanspruchung steht, lässt sich als serielles System mehrerer kürzerer Elemente mit bekannter Bruchspannung idealisieren. Das System versagt, sobald ein Teilsystem seine Festigkeit erreicht.

Ein analoger Effekt ergibt sich infolge paralleler Bewehrungselemente. Da FVK-Werkstoffe, anders als Betonstahl, nicht in der Lage sind plastische Verformungen aufzunehmen, ergibt sich auch hier eine Idealisierung als Seriensystem. Erreicht ein Element aufgrund von Festigkeitsstreuung seine Tragfähigkeit vor den übrigen Bewehrungselementen, versagt es schlagartig. Die freiwerdenden Kräfte müssen von den noch intakten Bewehrungselementen aufgenommen werden. Da diese bereits hoch beansprucht sind, sind diese dazu meist nicht im Stande und das Bauteil versagt.

Sowohl hinsichtlich der betrachteten Bewehrungsstablänge als auch der Anzahl parallel eingesetzter Bewehrungsstäbe ergeben sich serielle Systeme. Unter den Annahmen, dass die einzelnen Elemente voneinander unabhängig sind, die Festigkeit aller Elemente derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt und diese bekannt ist, lässt sich die Verteilungsdichte des Systems bestimmen. Umfassende Untersuchungen hierzu können Rempel (2018) entnommen werden. Nachfolgend wird dies exemplarisch erläutert.

Die Elementanzahl n ergibt sich bei Betrachtungen in Abhängigkeit der Bewehrungsstablänge aus dem Quotienten der Bewehrungslänge unter konstanter Belastung und der Messlänge des zur Bestimmung der Festigkeit verwendeten Prüfkörpers. Für Betrachtungen hinsichtlich einer parallelen Anordnung der Bewehrungselemente entspricht n der Anzahl der Bewehrungsstäbe. Beispielhaft wird ein serielles System mit $n = 10$ Elementen betrachtet. Die Bruchspannung eines Elements ist normalverteilt mit der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ mit dem Erwartungswert $\mu_X = 1.000 \text{ N/mm}^2$ und der Standardabweichung $\sigma_X = 50 \text{ N/mm}^2$. In Abbildung 4-7 (links) sind die Dichtefunktionen der Extremwertfunktion der Kleinstwerte für vier, sieben und zehn Elemente dargestellt. Mit steigender Elementanzahl nehmen sowohl Erwartungswert als auch Standardabweichung ab.

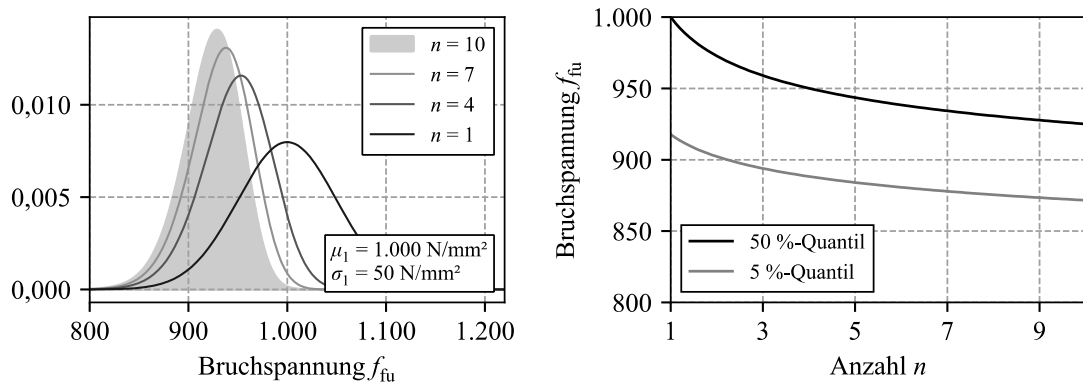


Abbildung 4-7 Links: Verteilungsdichtefunktionen der Kleinstwerte in Abhängigkeit der Elementanzahl
Rechts: Median und 5 %-Quantil der Verteilungsdichtefunktionen der Kleinstwerte

Mit Hilfe der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der allgemeinen Extremwertverteilung für Kleinstwerte (Gl. 4-13) lassen sich zudem die Quantilwerte der Verteilungsdichten bestimmen.

$$F_{\min}^{-1}(p) = F_X^{-1}\left(1 - (1-p)^{1/n}\right) \quad \text{Gl. 4-13}$$

In Abbildung 4-7 (rechts) sind der Median und das 5 %-Quantil in Abhängigkeit der Elementanzahl dargestellt. Es zeigt sich, dass sich die Rate der Abnahme der Bruchspannung mit steigender Elementanzahl zunehmend verringert.

Diese Abnahme der Bewehrungsfestigkeit ist bei der Ermittlung der Bemessungsfestigkeit zu berücksichtigen. Die im Zugversuch bestimmte mittlere Bewehrungsfestigkeit ist ggf. in Abhängigkeit der Randbedingungen auf eine effektive mittlere Festigkeit umzurechnen, bevor der charakteristische Wert (5 %-Quantil) ermittelt wird, vgl. hierzu Rempel (2018). Werden charakteristische Bewehrungsfestigkeiten herstellerseitig bereitgestellt und sind keine gesonderten Abminderungsfaktoren vorgesehen, sind diese Effekte bereits berücksichtigt, siehe z. B. abZ Z-1.6-238 (2019) und abZ Z-31.10-182 (2021). Wie im Rahmen der Zuverlässigkeitsanalyse mit diesem Effekt umgegangen wird, wird in Kapitel 7.2.1.2 erörtert.

4.2.3.3 Festigkeitsminderung infolge Dauerverhalten

Weiterhin erfahren FVK-Bewehrungen eine mehr oder weniger ausgeprägte Reduktion der Festigkeit infolge Dauerstandverhaltens. Weber (2018) führt aus, dass die einzelnen Fasern in einem Bewehrungselement – analog dem im vorherigen Kapitel beschriebenen Effekt – in Abhängigkeit von Belastung und Temperatur unterschiedliche Bruchwahrscheinlichkeiten aufweisen. Beim Versagen einer einzelnen Faser kann die freigesetzte Kraft von den umgebenden Fasern aufgenommen und über kurze Strecken in die intakten Bereiche des

Bewehrungselementes weitergeleitet werden. Diese Interaktion wird über die Zeit von Temperatur, Feuchte und Alkalität des die Bewehrung umgebenden Milieus beeinflusst.

Die daraus resultierende Festigkeitsabnahme lässt sich näherungsweise experimentell ermitteln, siehe für GFK z. B. Alex (2015), Bies et al. (2019), Weber und Baquero (2010), Weber (2018), für CFK u. a. Spelter et al. (2019).

Während diese Festigkeitsminderung bei CFK-Bewehrungen weniger ausgeprägt ist, ergeben sich für GFK teilweise beträchtliche Abminderungen. Im Rahmen der Bemessung oder einer nichtlinearen Berechnung ist daher zwischen der Kurzzeitfestigkeit $f_{f, kurz}$ und der Langzeitfestigkeit $f_{f, lang}$ zu unterscheiden.

4.3 Verbundverhalten und Rissbildung

4.3.1 Verbund zwischen Beton und Bewehrung

Der Übertrag von Kräften zwischen Beton und Bewehrung beruht bei profilierten Bewehrungsstäben auf den drei Mechanismen Haftung, Reibung sowie Verzahnung, welche in Abhängigkeit der Relativverschiebung zwischen Bewehrung und Beton (Schlupf s) unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Der durch diese Mechanismen aktivierte Kraftübertrag lässt sich durch die in der Kontaktzone zwischen Beton und Bewehrung wirkenden Verbundspannung τ_b beschreiben.

Der Verlauf der Verbundspannung τ_b in Abhängigkeit des Schlupfes s wird als Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung bezeichnet. Diese lässt sich mit Hilfe von Ausziehversuchen experimentell ermitteln und wurde schon früh in Rehm (1961) beschrieben. Der Verlauf der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung hängt neben dem verwendeten Prüfverfahren maßgeblich von der Betonfestigkeit, der bezogenen Rippenfläche des Bewehrungsstabs sowie der Lage im Bauteil bezüglich der Betonierichtung ab. Bei profilierten Bewehrungsstäben kommt der Verzahnung von Profilierung und den sich ausbildenden Betonkonsolen eine maßgebliche Bedeutung zu. Ausgehend von den Rippen der Profilierung bilden sich bei ausreichendem Schlupf rotationssymmetrische Druckkegel aus. Bei geringen Betondeckungen führt dies zu Längsrissen parallel zum Bewehrungsstab. In diesem Fall nimmt die Verbundtragfähigkeit stark ab und ein Sprenggrissversagen tritt auf. Bei ausreichender Betondeckung hingegen findet ein fortschreitender Auszug des Bewehrungsstabes statt. Während dies bei Betonstahl zu einem Abscheren der Betonkonsolen führt, können bei der Verwendung von FVK nach fib bulletin 40 (2007) unterschiedliche Versagensmodi auftreten. Liegt eine ausgeprägte Profilierung vor, kommt es ebenfalls zu einem Abscheren der Betonkonsolen oder andernfalls zu einem Versagen der Oberflächenprofilierung.

Zur Beschreibung der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung von Betonstahl existieren eine Reihe von Ansätzen. Einer der gängigsten Ansätze geht auf Elgehausen et al. (1983) zurück und fand Eingang in Model Code 2010 (2013). Für Auszugsversagen lässt sich die

Beziehung mit Gl. 4-14 bis Gl. 4-17 beschreiben und ist in Abbildung 4-8 (links) dargestellt.

$$\tau_b = \tau_{b\max} \cdot \left(\frac{s}{s_1}\right)^\alpha \quad \text{für } 0 < s \leq s_1 \quad \text{Gl. 4-14}$$

$$\tau_b = \tau_{b\max} \quad \text{für } s_1 < s \leq s_2 \quad \text{Gl. 4-15}$$

$$\tau_b = \tau_{b\max} - (\tau_{b\max} - \tau_{bf}) \cdot \frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \quad \text{für } s_2 < s \leq s_3 \quad \text{Gl. 4-16}$$

$$\tau_b = \tau_{bf} \quad \text{für } s_3 < s \quad \text{Gl. 4-17}$$

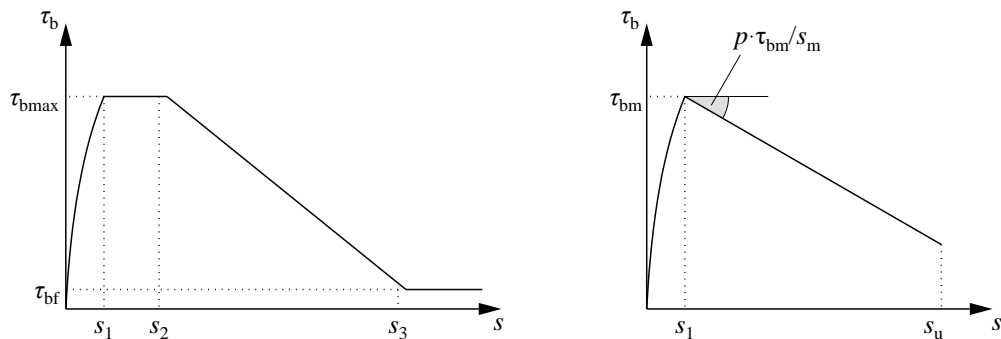


Abbildung 4-8 Links: Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für Betonstahl nach Model Code 2010 (2013)
Rechts: Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für FVK nach Model Code 2010 (2013)

Zur Ermittlung der erforderlichen Parameter finden sich in Model Code 2010 (2013) entsprechende Ansätze.

Basierend auf der Formulierung von Eligehausen et al. (1983) wurde eine analoge Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für FVK-Bewehrungen abgeleitet, vgl. Cosenza et al. (1997). Diese findet sich ebenfalls in Model Code 2010 (2013) und wird mit Gl. 4-18 und Gl. 4-19 beschrieben. Sie ist in Abbildung 4-8 (rechts) dargestellt.

$$\tau_b = \tau_{bm} \cdot \left(\frac{s}{s_m}\right)^\alpha \quad \text{für } 0 < s \leq s_m \quad \text{Gl. 4-18}$$

$$\tau_b = \tau_{bm} - \tau_{bm} \cdot p \frac{s - s_m}{s_m} \quad \text{für } s_m < s \leq s_u \quad \text{Gl. 4-19}$$

Aufgrund der zuvor beschriebenen vielfältigen Versagensmechanismen, die sich infolge der Beschaffenheit des FVK-Bewehrungselements ausbilden können, werden in Model Code 2010 (2013) keine Zusammenhänge zur Ermittlung der maximalen Verbundspannung

τ_{bm} oder dem zugehörigen Schlupfwert s_1 angegeben. Diese sind für den jeweiligen Bewehrungsstab experimentell zu bestimmen.

Die in Abbildung 4-8 gezeigten Funktionen beschreiben ein mittleres Verbundverhalten. Bereits in Eligehausen et al. (1983) wurde darauf hingewiesen, dass die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung entlang eines Bewehrungsstabes veränderlich ist. In rissnahen Bereichen sorgt das von der Profilierung der Bewehrung ausgehende Ausbrechen kegelförmiger Betonkörper zu verminderten Verbundspannungen. Ein Modell zur Erfassung dieses Effekts wird in Langer (1987) und Kreller (1989) ausführlich beschrieben. Für Bewehrungsstäbe aus FVK stellt Sooriyaarachchi (2006) ein ähnliches Verhalten fest und leitet ebenfalls einen Ansatz zur Bestimmung lokaler Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen ab.

4.3.2 Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds

Mit Kenntnis der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung lässt sich eine Verknüpfung zwischen den Dehnungen und Relativverschiebungen entlang eines einbetonierten Bewehrungsstabs nach Überschreiten der Risslast herstellen. Hierzu wird der normalkraftbeanspruchte, zentrisch bewehrte Betonstab in Abbildung 4-9 betrachtet, bei dem lediglich ein einzelner Riss auftritt (Einzelriss). Erreicht die Beanspruchung die lokale Betonzugfestigkeit, bildet sich dieser Primärriss und die inneren Kräfte teilen sich zwischen Beton und Bewehrung auf. Durch Betrachtung eines differentiellen Elements des Zugstabs der Länge dx lässt sich dieser Kraftübertrag beschreiben. Die entlang des Stabelements und über den Stabumfang aufsummierten Verbundspannungen müssen sowohl der Änderung der Betonspannung in der Betonfläche A_c als auch der Bewehrungsspannungsänderung über die Bewehrungsfläche $A_{s/f}$ entsprechen. Gl. 4-20 drückt diesen Zusammenhang aus.

$$d\sigma_{s/f}(x) \cdot A_{s/f} = \tau_b(x) \cdot u_{s/f} \cdot dx = -d\sigma_c(x) \cdot A_c \quad \text{Gl. 4-20}$$

Setzt man zudem ein Ebenbleiben des Querschnitts voraus, entspricht der Schlupf s zwischen Beton und Bewehrung der Differenz der Verschiebung u_c und $u_{s/f}$ der beiden Komponenten (siehe Gl. 4-21). Da für kleine Dehnungen die Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens für Beton gerechtfertigt ist (vgl. Abbildung 4-1 (links)), entspricht die Änderung des Schlupfs über die Elementlänge der Differenz von Bewehrungs- und Betondehnung (Gl. 4-22).

$$s = u_{s/f} - u_c \quad \text{Gl. 4-21}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du_{s/f}}{dx} - \frac{du_c}{dx} = \varepsilon_{s/f} - \varepsilon_c \quad \text{Gl. 4-22}$$

Hieraus lässt sich gemäß Krips (1984) nach Einführung von $\alpha_e = E_{s/f} / E_c$ sowie $\rho_{s/f,eff} = A_{s/f} / A_c$ die Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds in Form von Gl. 4-23 ableiten.

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{1 + \alpha_e \cdot \rho_{s/f,eff}}{E_{s/f}} \cdot \frac{4}{\phi_{s/f}} \cdot \tau_b(x) \quad \text{Gl. 4-23}$$

Die Differentialgleichung stellt einen mathematischen Zusammenhang zwischen Dehnungen, Relativverschiebungen und Verbundspannungen her. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4-9 anschaulich dargestellt. Sie zeigt die Dehnungen und Verschiebungen, die sich in der Nähe eines Einzelrisses ergeben. Im Riss nimmt die Bewehrung die gesamte Zugkraft auf, die Dehnung des Betons fällt auf Null. Durch die hierdurch entstehende Verschiebungsdifferenz (Schlupf) entstehen Verbundspannungen, welche einen Kraftübertrag von Bewehrung auf Beton ermöglichen. Aus dem Schlupf an einem Punkt x_i ergibt sich – in Abhängigkeit des Abstands vom Riss und der gewählten Beschreibung der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung – die Verbundspannung in diesem Punkt. Die Integration aller Verbundspannungen, die vom Beginn der Lasteinleitungslänge l_t bis zum Punkt x_i wirken, ergibt die Differenz der Dehnungen zwischen Bewehrung und Beton an dem Punkt x_i . Die Lasteinleitungslänge l_t beschreibt dabei die Länge, die erforderlich ist, um die im Riss in der Bewehrung wirkende Zugkraft durch Verbundspannungen soweit abzubauen, dass die Bewehrungsdehnung der Betondehnung bei Erreichen der Betonzugfestigkeit entspricht.

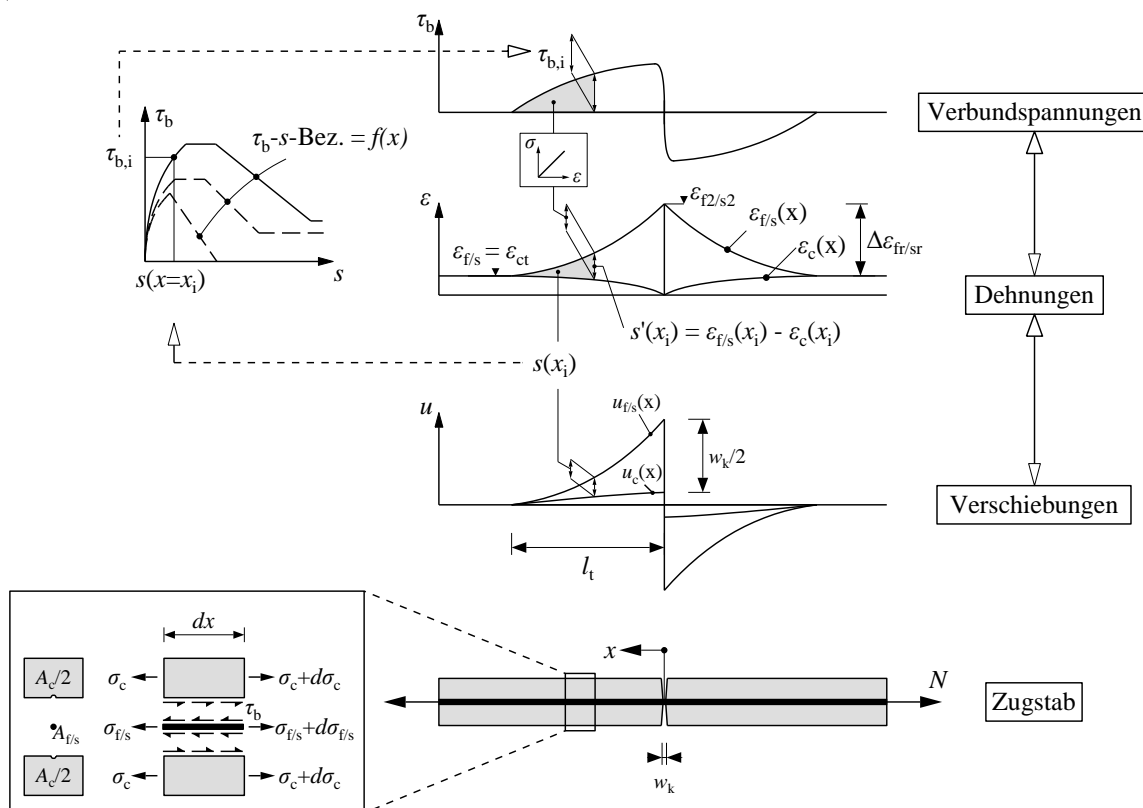


Abbildung 4-9 Interaktion von Dehnungen, Relativverschiebungen und Verbundspannungen an einem zentrisch bewehrten Betonstab unter Zugbeanspruchung am Einzelriss

Durch die Integration der Dehnungsdifferenzen ($\varepsilon_{s/f}(x_i) - \varepsilon_c(x_i)$) bis zum Punkt x_i ergibt sich wiederum der Schlupf an dieser Stelle. Auf diese Weise lässt sich zudem anschaulich die rechnerische Rissbreite w_k bestimmen. Diese entspricht dem Gesamtschlupf im Risspunkt.

Die Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds lässt eine umfassende Beschreibung der Interaktion von Beton und Bewehrung nach der Bildung von Rissen zu. Sie lässt sich sowohl analytisch als auch numerisch auswerten. Umfangreiche Ausführungen zu analytischen Lösungsansätzen finden sich für Stahlbeton in Krips (1984), König und Tue (1996) sowie Noakowski (1988). Für FVK-Bewehrungen enthalten Füllsack-Köditz (2004) und Hofmann (2021) entsprechende Untersuchungen. Analytische Lösungsansätze bleiben auf den GZG beschränkt, da nur der ansteigende Bereich der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung bis zu einem Schlupf $s = s_1$ (vgl. Abbildung 4-8) erfasst werden kann. Die numerische Beschreibung der Differentialgleichung hingegen ermöglicht eine Betrachtung über den gesamten Bereich der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung. Für Stahlbeton ist dies in Langer (1987), Kreller (1989) und Alvarez (1998) dargestellt, für Bewehrungsmaterialien aus FVK wird auf Jakubovskis et al. (2014) sowie Sooriyaarachchi (2006) verwiesen.

4.3.3 Rissbildung und mittlere Dehnungen unter Längszugkraft

Die erläuterten Zusammenhänge nach der Entstehung von Rissen beeinflussen maßgeblich das Tragverhalten von bewehrten Betonbauteilen und stellen die zentrale Charakteristik der Stahlbetonbauweise dar. Anhand des in Abbildung 4-10 dargestellten, zentrisch bewehrten Betonstabs unter Normkraftbeanspruchung kann das Tragverhalten anschaulich dargestellt werden. Hierzu wird die Zugkraft kontinuierlich gesteigert. Zunächst verhält sich der Stab linear-elastisch, die Dehnungen in Beton und Bewehrung sind in jedem Schnitt gleich (Zustand I). Der erste Riss tritt dort auf, wo die Betonzugfestigkeit infolge der räumlichen Streuung der Materialeigenschaften des Betons am geringsten ist. Erreicht die Spannung in diesem Schnitt die Betonzugfestigkeit, entsteht ein Trennriss und die gesamte Zugkraft wird von der Bewehrung aufgenommen, der Betonstab geht in den gerissenen Zustand II über.

Wie in Kapitel 4.3.2 bereits erläutert, entstehen infolge der Dehnungsdifferenzen zwischen Bewehrung und Beton Verbundspannungen, welche zu einem Abbau der Zugspannungen in der Bewehrung führen. Ausgehend vom Riss werden diese über die Eintragungslänge l_t solange reduziert, bis die Dehnungen in Bewehrung und Beton gleich sind. Infolge weiterer Laststeigerung treten zusätzliche Risse auf. Im Zustand IIa fallen die Dehnungen in der Bewehrung in einigen Bereichen weiterhin soweit ab, dass zwischen den Rissen Bereiche mit ungestörtem Verbund vorliegen. Ist dies aufgrund der Entstehung neuer Risse nicht mehr der Fall, liegt das abgeschlossene Rissbild vor und Zustand IIb ist erreicht. Erreicht die Betonspannung zwischen zwei Rissen gerade die Betonzugfestigkeit, ergibt sich der

maximale Rissabstand zu $s_{r,max} = 2 \cdot l_t$. Analog ergibt sich der minimale Rissabstand zu $s_{r,min} = l_t$, sobald die Betonspannung zwischen zwei Rissen die Betonzugfestigkeit zunächst überschreitet und eine weitere Lasterhöhung zur Bildung eines zusätzlichen Risses führt. Liegt eine Bewehrung aus Betonstahl vor, geht der Betonstab nach Einsetzen des Stahlfließens in Zustand III über und die Verformungen steigen erheblich an.

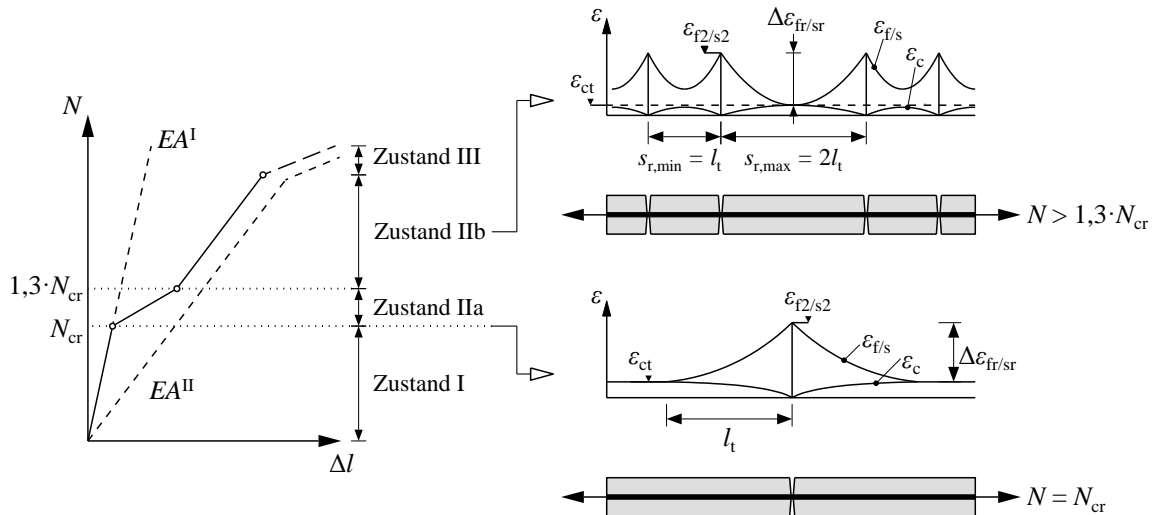


Abbildung 4-10 Zustände der Rissbildung und Dehnungsverteilung an einem zentrisch bewehrten Betonstab unter Zugbeanspruchung nach Zilch und Zehetmaier (2010)

Aus Abbildung 4-10 ist ersichtlich, dass die Dehnsteifigkeit EA nach Bildung des ersten Risses stark abfällt. Die Längenänderung des gerissenen Betonstabs liegt zwischen der des ungerissenen Stabes (Dehnsteifigkeit EA^I) und der des nackten Bewehrungsstabes (Dehnsteifigkeit EA^{II}). Diese Erhöhung der Dehnsteifigkeit ist auf den beschriebenen Übertrag der Zugspannungen von Bewehrung auf Beton zurückzuführen und wird als Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen, Zugversteifungseffekt oder „Tension Stiffening“ bezeichnet. Soll dieser Effekt nicht umfassend durch die Auswertung der Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds beschrieben werden, bietet sich die Verwendung einer mittleren Bewehrungsdehnung an. Wie in Abbildung 4-11 dargestellt, stellt sie eine Mittelung der veränderlichen Bewehrungsdehnungen dar.

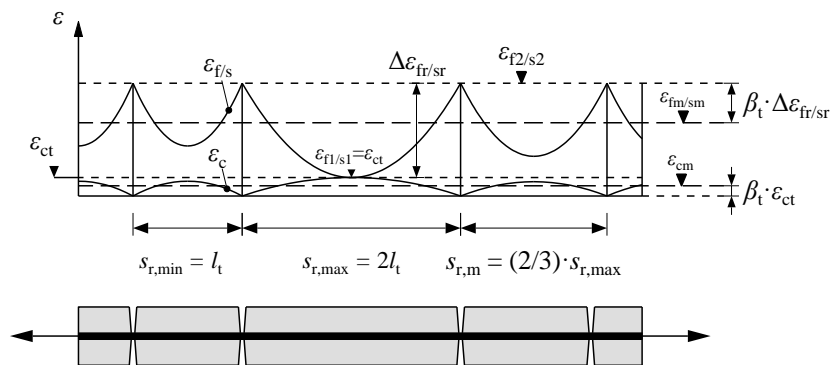


Abbildung 4-11 Dehnungsverteilung und mittlere Dehnungen an zentrisch bewehrtem Betonstab unter Zugbeanspruchung nach Zilch und Zehetmaier (2010)

Durch Einführung des Völligkeitsbeiwert der Bewehrungs- bzw. Betondehnung β_t lässt sich die mittlere Bewehrungsdehnung durch einen Abzugsterm aus der Bewehrungsdehnung im Riss ermitteln. Der Völligkeitsbeiwert β_t kann dabei als konstante, lastunabhängige oder veränderliche, lastabhängige Größe aufgefasst werden.

König und Tue (1996) bestimmen durch Auswertung der Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds am Einzelriss eines mit Betonstahl bewehrten Zugelements den Beiwert zu $\beta_t = 0,65$, Model Code 1990 (1993) gibt für den Einzelriss $\beta_t = 0,60$ an. Die Betrachtung am Einzelriss entspricht einem maximalen Rissabstand von $s_{r,max} = 2 \cdot l_t$ im abgeschlossenen Rissbild (siehe Abbildung 4-11). Vielfach wird vereinfacht von einem mittleren Rissabstand von $(2/3) \cdot s_{r,max}$ ausgegangen. Dies führt auf den finalen Völligkeitsbeiwert $\beta_t = (2/3) \cdot 0,60 = 0,4$. Model Code 1990 (1993) sieht zusätzlich noch einen Übergangsbereich für den Beginn der Rissbildung sowie einen angepassten Abzugsterm für den Bereich des Fließens des Bewehrungsstabs vor (siehe Abbildung 4-12 (links) sowie Gl. 4-24 bis Gl. 4-27; mit $\delta_d = 0,8$ für B500B und $\delta_d = 0,6$ für B500A). Die mittlere Bewehrungsdehnung lässt sich somit aus den Dehnungsverhältnissen im Riss und der Dehnungsdifferenz bei Rissbildung $\Delta \epsilon_{sr} = \epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1}$ ermitteln.

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s1} \quad \sigma_s \leq \sigma_{sr} \quad \text{Gl. 4-24}$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \frac{\beta_t (\sigma_{s2} - \sigma_{sr}) + (1,3\sigma_{sr} - \sigma_{s2})}{0,3 \cdot \sigma_{sr}} \cdot \Delta\varepsilon_{sr} \quad \sigma_{sr} < \sigma_s \leq 1,3 \cdot \sigma_{sr} \quad \text{Gl. 4-25}$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot \Delta\varepsilon_{sr} \quad 1,3 \cdot \sigma_{sr} < \sigma_s \leq f_y \quad \text{Gl. 4-26}$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot \Delta\varepsilon_{sr} + \delta_d \left(1 - \frac{\sigma_{sr}}{f_y} \right) (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sy}) \quad f_y < \sigma_s \leq f_t \quad \text{Gl. 4-27}$$

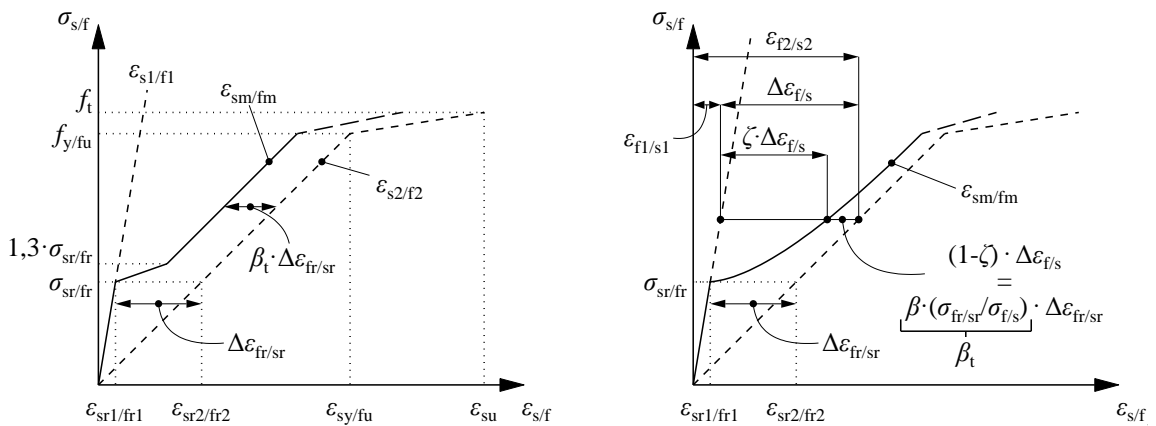


Abbildung 4-12 Links: Ermittlung der mittleren Bewehrungsdehnung nach Model Code 1990 (1993)
Rechts: Ermittlung der mittleren Bewehrungsdehnung nach Model Code 2010 (2013) bzw. CEB Bulletin d'information No. 158 (1985)

Rao (1966) hingegen stellt eine Abnahme des Zugversteifungseffekts in Abhängigkeit der Zunahme der Bewehrungsspannung fest. Dies führt auf eine belastungsabhängige Definition des Völligkeitsbeiwerts β_t , wie sie in CEB Bulletin d'information No. 158 (1985) formuliert wird, und aus Gl. 4-26 ergibt sich Gl. 4-28. Der Beiwert β erfasst Einflüsse infolge wiederholter Belastungen. Die mittlere Bewehrungsdehnung lässt sich so weiterhin in Abhängigkeit der Dehnungsdifferenz bei Rissbildung $\Delta\varepsilon_{sr}$ ausdrücken (vgl. Zilch und Zehetmaier (2010)).

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot \Delta\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{s2} - \beta \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \cdot \Delta\varepsilon_{sr} \quad \text{Gl. 4-28}$$

Die Einführung des Verteilungsbeiwerts ζ führt auf Gl. 4-29 und den in Abbildung 4-12 (rechts) dargestellten, belastungsabhängigen Verlauf der mittleren Bewehrungsdehnung. Die Beziehung in Gl. 4-29 findet sich in allgemeiner Form zur Berechnung von Verformungen auch in Model Code 2010 (2013) sowie DIN EN 1992-1-1/NA (2013).

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{s1} + \zeta \cdot \varepsilon_{s2} \quad \text{Gl. 4-29}$$

mit:

$$\zeta = \begin{cases} 1 - \beta \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 & \text{für } \sigma_s > \sigma_{sr} \\ 0 & \text{für } \sigma_s \leq \sigma_{sr} \end{cases}$$

$$\beta = 1,0 \quad \text{für Kurzzeitbelastung}$$

$$\beta = 0,5 \quad \text{für Langzeit- oder zyklische Belastung}$$

Die vorgestellten Ansätze zur Berechnung der mittleren Bewehrungsspannung wurden durch Untersuchungen an betonstahlbewehrten Zuggliedern hergeleitet, sind aber problemlos auf eine Bewehrung aus FVK übertragbar. Eine Literaturstudie zu Untersuchungen an zentrisch bewehrten Betondehnkörpern mit FVK-Bewehrung ergab, dass sich in Versuchen im abgeschlossenen Rissbild sowohl eine konstante als auch eine lastabhängige zugversteifende Wirkung des Betons zeigt.

Die in Niewels (2008) an zwei GFK-Bewehrungsarten (Stäbe mit eingefräster Profilierung und $E_f = 60.000 \text{ N/mm}^2$ sowie straff umflochtene und besandete Stäbe mit $E_f = 40.000 \text{ N/mm}^2$; jeweils $\rho = 1 \%$) durchgeführten experimentellen Untersuchungen zeigen eine konstante Mitwirkung des Betons auf Zug nach Ausbildung aller Risse. Ähnliches zeigte sich in Hofmann (2021) für Untersuchungen an Dehnkörpern mit BFK-Bewehrungsstäben (straff umwickelte und besandete BFK-Bewehrungsstäbe mit $E_f = 52.000 \text{ N/mm}^2$; $\rho = 2 \%$).

In Gribniak et al. (2018) zeigte sich hingegen eine belastungsabhängige Zugversteifung ($\rho = 2$ bis $3,7 \%$). Die untersuchten GFK-Bewehrungselemente entsprachen denen in Niewels (2008). Auch in Baena et al. (2011) und Baena et al. (2022) sowie Bischoff und Paixao (2004) lässt sich eine Abnahme des Tension Stiffenings für unterschiedliche GFK-Bewehrungsstäbe und Bewehrungsgrade mit steigender Belastung feststellen. Die experimentellen Untersuchungen in Sooriyaarachchi (2006) an straff umwickelten und besandeten GFK-Bewehrungsstäben ($E_f = 40.000 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 0,3$ bis $1,3 \%$), zeigen teilweise eine konstante, teilweise eine lastabhängige Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen.

Füllsack-Köditz (2004) führt – basierend auf umfangreichen Untersuchungen an GFK-Bewehrungselementen – aus, dass sich beide in Abbildung 5-12 dargestellten Ansätze sehr gut zur Ermittlung der mittleren Bewehrungsdehnung von GFK-bewehrten Zuggliedern eignen. Hierzu wird die Übernahme der an Betonstahl ermittelten Beiwerte β_i sowie β empfohlen.

4.4 Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bei reiner Biegung

Das in Kapitel 4.3 am zentrisch bewehrten Betonkörper hergeleitete Verhalten lässt sich auf die Zugzone biegebeanspruchter Betonbauteile übertragen. In Abbildung 4-13 (links) ist ein Betontragwerk unter reiner Biegung dargestellt. Überschreitet die Betonrandspannung in der unteren Randfaser die lokale Betonzugfestigkeit, entsteht ein Riss und die Bewehrung nimmt in dieser Stelle die gesamte Zugkraft auf. Analog zum zentrisch bewehrten Zugstab wird zwischen den Rissen ein Teil der Zugkraft über Verbundspannungen auf den Beton übertragen. Dies führt zu einer mittleren Sekantensteifigkeit EI_m^{II} , welche zwischen der Biegesteifigkeit des ungerissenen Querschnitts EI^{I} und der Biegesteifigkeit im Riss EI^{II} liegt. Abbildung 4-13 (rechts) stellt diesen mittleren Momenten-Krümmungs-Verlauf exemplarisch dar.

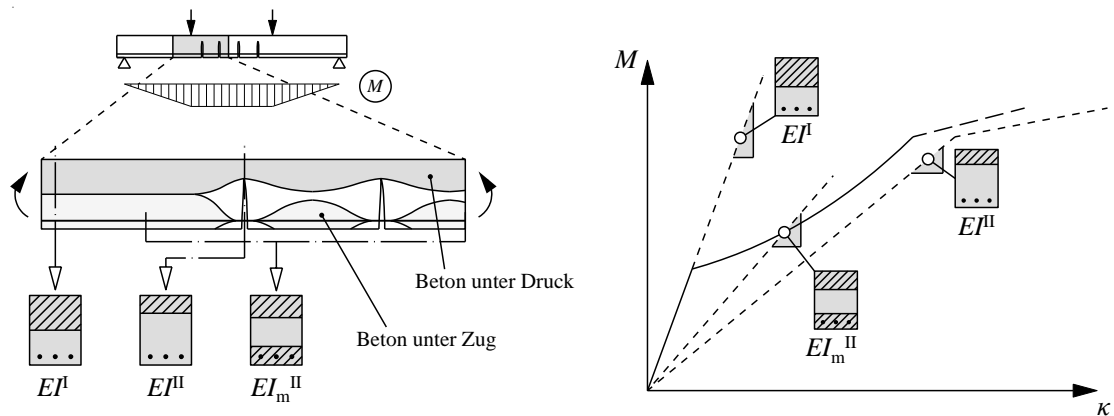


Abbildung 4-13 Links: Mitwirkung des Betons auf Zug an einem bewehrten Betonbauteil unter Biegebeanspruchung in Anlehnung an Weiler (1989)
Rechts: Momenten-Krümmungs-Beziehung unter Berücksichtigung des mittleren Querschnittsverhaltens

Zur Berücksichtigung des Zugversteifungseffekts bei der Beschreibung des Querschnittsverhaltens eines biegebeanspruchten Betonquerschnitts wird eine mittlere Krümmung $\kappa_m = M / EI_m^{\text{II}}$ eingeführt, welche die zugversteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen erfasst. Zur rechnerischen Ermittlung der Krümmung stehen zwei grundsätzliche Ansätze zur Verfügung. Wie in Abbildung 4-14 (links) dargestellt, kann die Bewehrungsdehnung im Riss ε_{f2} über die Kapitel 4.3.3 beschriebenen Ansätze rechnerisch auf die mittlere Bewehrungsdehnung ε_{fm} reduziert werden. Auf eine rechnerische Reduzierung der Betondruckspannung, welche zwischen den Rissen ebenfalls abnimmt, wird zumeist verzichtet (vgl. Kupfer und Streit (1987)). Eine zweite Möglichkeit stellt die Formulierung einer fiktiven Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons für die Zugzone dar, siehe Abbildung 4-14 (rechts). Letztgenannte Möglichkeit findet oftmals bei FE-Berechnungen Anwendung. Die Herausforderung hierbei stellt die Auswahl einer geeigneten Spannungs-Dehnungs-Beziehung für die Betonzugzone dar.

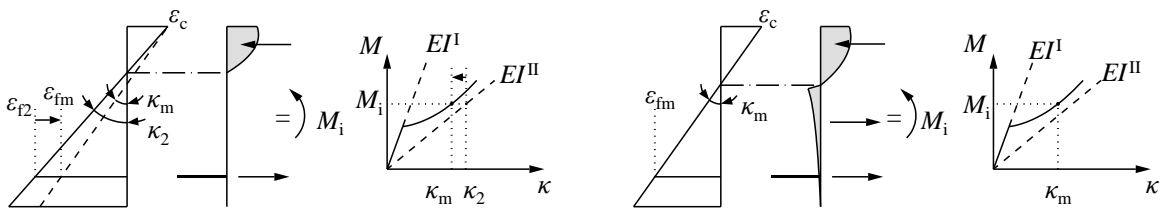


Abbildung 4-14 Links: Ermittlung der mittleren Krümmung durch Reduktion der Bewehrungsdehnung
Rechts: Ermittlung der mittleren Krümmung durch Ansatz einer fiktiven Betonzugspannung

In Abbildung 4-15 sind drei Möglichkeiten der Modellierung einer solchen fiktiven Betonzugspannung dargestellt. Die erste Möglichkeit nach Quast (1980) sowie Pfeiffer (2003) schlägt für die Zugzone ein Spannungsverlauf affin zum Parabel-Rechteck-Diagramm (vgl. Gl. 4-4 und Gl. 4-5) vor, siehe Abbildung 4-15 (links). Die maximale Betonzugspannung $f_{ct,R}$ wird bei steigender Belastung über den Faktor *VMB* (Gl. 4-30) in Abhängigkeit der Bewehrungsdehnung reduziert. Der Ansatz wurde für stahlbewehrte Bauteile entwickelt, lässt sich durch die Variation der rechnerischen Betonzugspannung $f_{ct,R}$ sowie der rechnerischen Rissdehnung $\epsilon_{ct,R}$ an beliebige Bewehrungsmaterialien anpassen.

$$VMB = \left(\frac{\epsilon_u - \epsilon}{\epsilon_u - \epsilon_{cr}} \right)^2 \quad \text{Gl. 4-30}$$

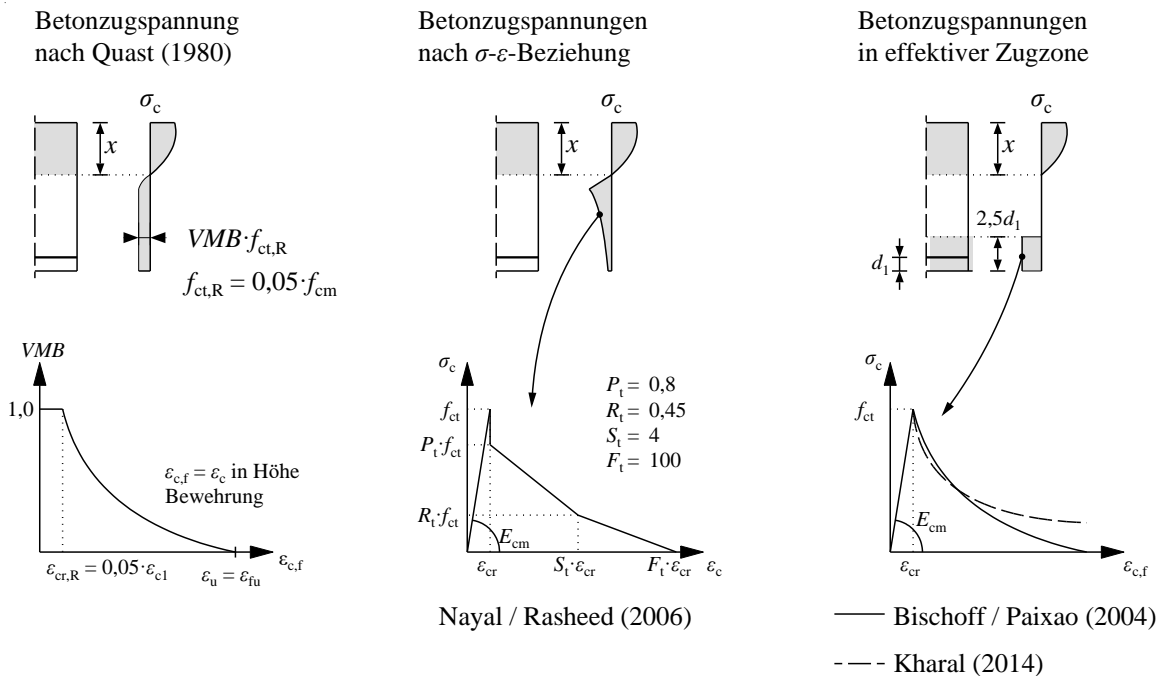


Abbildung 4-15 Links: Betonzugspannungen nach Quast (1980)
Mitte: Betonzugspannungen basierend auf expliziter Spannungs-Dehnungs-Beziehung sowie Ansatz nach Nayal und Rasheed (2006)
Rechts: Betonzugspannungen in der effektiven Zugzone sowie Ansatz nach Bischoff und Paixao (2004)

Die zweite Möglichkeit stellt die Verwendung einer explizit formulierten, fiktiven Spannungs-Dehnungs-Beziehung auf Grundlage des wirklichkeitsnahen Verhaltens von Beton auf Zug dar. Es existieren eine Vielzahl von Ansätzen, welche bereits früh entwickelt wurden, z. B. Gilbert und Warner (1978), Spanke (1987), Prakhya und Morley (1990). Aktuellere Modelle finden sich u. a. in Gribniak (2009), Sokolov (2010) oder Ng et al. (2010). Für Betonbauteile mit FVK-Bewehrung wurden entsprechende Zusammenhänge u. a. in Nayal und Rasheed (2006) entwickelt und anhand von Bauteilversuchen kalibriert. Die dort beschriebene Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist in Abbildung 4-15 (Mitte) dargestellt.

Als dritte Möglichkeit lässt sich die Mitwirkung des Betons auf Zug über die Definition einer effektiven Zugzone modellieren. Diese bildet den Wirkungsbereich der Bewehrung bei der Bildung von Sekundärrissen nach. Ansätze zur Bestimmung dieses Bereichs finden sich z. B. in DIN EN 1992-1-1/NA (2013). Für Bauteile unter reiner Biegung ergibt sich zumeist $h_{c,ef} = 2,5 \cdot (h-d)$. Die effektive Zugzone stellt einen Bezug zu dem in Kapitel 4.3 betrachteten, zentrisch bewehrten Betonstab unter Zugbeanspruchung dar. Aus Versuchen an Dehnkörpern können aus der Differenz der Normalkräfte in Betonkörper und Bewehrungsstab Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zur Beschreibung des Betonzugverhaltens in der Umgebung des Bewehrungsstabs abgeleitet werden. In Abbildung 4-15 (rechts) sind die Ansätze nach Bischoff und Paixao (2004) sowie Kharal (2014) dargestellt, welche für FVK-bewehrte Bauteile abgeleitet wurden und durch Gl. 4-31 bzw. Gl. 4-32 beschrieben werden.

$$\sigma_c = f_{ct} \cdot \exp \left[-1.100 \cdot (\varepsilon_{c,f} - \varepsilon_{cr}) \cdot \left(\frac{E_f}{200.000} \right) \right] \quad \text{Gl. 4-31}$$

$$\sigma_c = \frac{f_{ct}}{1 + \left[(E_f / 200.000) \cdot 1.400 \cdot (\varepsilon_{c,f} - \varepsilon_{cr}) \right]^\gamma} \quad \text{Gl. 4-32}$$

mit:

$$\varepsilon_{c,f} \quad \varepsilon_c \text{ in Höhe der Bewehrung } \varepsilon_c = \varepsilon_f$$

$$\gamma \quad = 0,8 \text{ für Stäbe mit Rippen; } = 1,0 \text{ für besandete Stäbe}$$

Abschließend sind in Abbildung 4-16 die Momenten-Krümmungs-Beziehungen eines FVK-bewehrten Querschnitts, welche mit dem in Kapitel 5 beschriebenen Berechnungsmodell auf Basis der vorgestellten Ansätzen ermittelt wurden, in bezogener Form dargestellt. Vergleichend ist zudem die Krümmung im Riss abgebildet. Die Ansätze, welche eine fiktive Betonzugspannung über die gesamte Betonzugzone ansetzen, zeigen nach Erreichen des Rissmoments ein sehr steifes Verhalten. Der Ansatz nach Quast (1980) zeigt in diesem Bereich – obwohl die Berechnung mit den Parametern für Stahlbeton durchgeführt wurde – eine weitestgehende Übereinstimmung mit dem Ansatz nach Nayal und Rasheed (2006),

welcher speziell für FVK-bewehrte Bauteile entwickelt wurde. Die Ansätze der Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Bischoff und Paixao (2004) und Kharal (2014) führen zu ähnlichen mittleren Krümmungen wie die Modifikation der Bewehrungsdehnung nach Model Code 1990 (1993) und Model Code 2010 (2013).

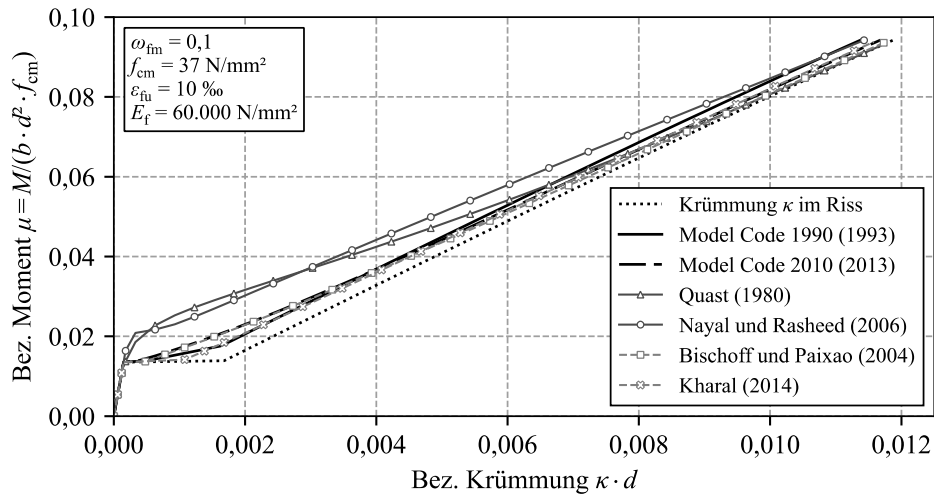


Abbildung 4-16 Vergleich verschiedener Ansätze zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension Stiffening)

4.5 Verformungen infolge Momentenbeanspruchung

Eine wirklichkeitsnahe Beschreibung des Verformungsverhaltens von Betonbauteilen unter hauptsächlich Biegebeanspruchung kann auf Grundlage der bereits angesprochenen Momenten-Krümmungs-Beziehung erfolgen. Aufbauend auf den Werkstoffeigenschaften (Materialebene) stellt sie die nächste Stufe der Beschreibung des Last-Verformungsverhaltens dar.

Unter der im Massivbau üblichen Annahme, dass die Durchbiegungen im Verhältnis zur Bauteillänge klein sind, ergibt sich der in Gl. 4-33 dargestellte Zusammenhang zwischen Verkrümmung κ und Durchbiegung w (Herleitung siehe z. B. Mang und Hofstetter (2018)).

$$\kappa = \frac{1}{r(x)} = \frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{d^2w}{dx^2} \tag{Gl. 4-33}$$

Diese Verkrümmung lässt sich auf Ebene des Querschnitts – unter Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte – durch die Dehnungen in den Randfasern beschreiben, siehe Gl. 4-34 sowie Abbildung 4-17.

Auf dieser Grundlage kann ein Zusammenhang der auf den Querschnitt wirkenden Biegebeanspruchung und seiner Verkrümmung hergestellt werden. Die bei der jeweiligen Beanspruchung vorliegende Dehnungsebene ist auf Grundlage des nichtlinearen Werkstoffverhaltens iterativ zu ermitteln. Das im Rahmen dieser Arbeit hierzu verwendete Verfahren ist in Kapitel 5.2.4 dargestellt.

$$\kappa = \frac{|\varepsilon_o| + |\varepsilon_u|}{h}$$

Gl. 4-34

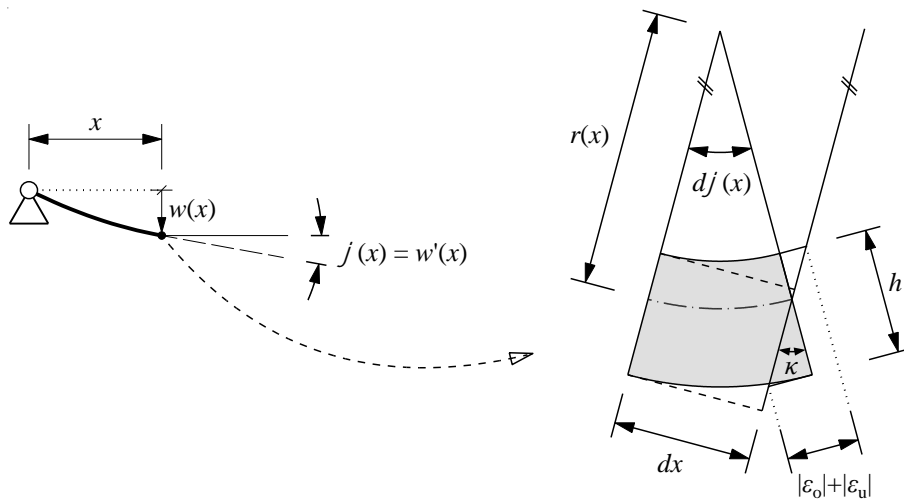


Abbildung 4-17 Definition der Verkrümmung (in Anlehnung an Mang und Hofstetter (2018) sowie Pfeiffer und Quast (2003))

4.6 Verformungen infolge Querkraft

4.6.1 Schubverformungen

In der technischen Mechanik findet eine Trennung der Bauteilbeanspruchung in Biegespannungen infolge Momenten- und Schubspannungen infolge Querkraftbeanspruchungen statt. Diese Unterscheidung wird auch bei der Beschreibung der Verformungen beibehalten. So wurden bisher lediglich Verformungen aus Biegebeanspruchung betrachtet, im Folgenden werden ergänzend Verformungen aus Querkrafteinfluss dargestellt. Diese Trennung stellt lediglich eine Rechenvereinfachung dar. In realen Bauteilen wirken ausschließlich Hauptspannungen, die rechnerische Schubkraft ergibt sich als Vertikalkomponente dieser Kräfte.

Liegt im Bauteil eine Querkraftbewehrung vor, kann es nach der Bildung von Schubrisen im Zustand II erforderlich sein, zusätzliche Schubverformungen zu erfassen. Bei der Verwendung von Bügeln aus FVK kommt diesen Verformungen infolge des teilweise geringen E-Moduls der FVK-Bewehrungselemente eine besondere Bedeutung zu (vgl. Ferreira et al. (2015), Imjai et al. (2016), Issa et al. (2016), Tran und Vu (2021)).

Zur Berücksichtigung von Schubverformungen lässt sich analog der Momenten-Krümmungs-Beziehung für Biegebeanspruchungen eine Querkraft-Gleitwinkel-Beziehung aufstellen. Vor dem Auftreten von Rissen kann der Gleitwinkel γ^I mit Hilfe des Schubmoduls G ermittelt werden. Legt man hierbei für Beton eine Querdehnzahl von $\mu = 0,2$ zugrunde, ergibt sich nach Leonhardt (1978) der Zusammenhang nach Gl. 4-35. Die Größe

A_s beinhaltet hierbei einen Schubkorrekturfaktor, der die Veränderung durch Verwölbung der Schubfläche berücksichtigt, siehe z. B. Spura (2019).

$$\gamma^I = \frac{2,4 \cdot V_E}{E_{cm} \cdot A_s} \quad \text{Gl. 4-35}$$

mit:

$$\begin{aligned} V_E & \quad \text{Querkraft} \\ A_s & = \begin{cases} 5/6 \cdot A_c & \text{für Rechteckquerschnitte} \\ h \cdot b_w & \text{für Plattenbalken} \end{cases} \\ b_w & \quad \text{Stegbreite} \end{aligned}$$

Sobald die Schubrisskraft überschritten wird, treten Schubrisse auf. Zur Ermittlung der Schubrisskraft wird auf den in Model Code 1990 (1993) vorhandenen Ansatz zurückgegriffen, welcher neben dem Längsbewehrungsgrad die Schubschlankeit berücksichtigt (Gl. 4-36). Obwohl der Ansatz für Stahlbetonbauteile entwickelt wurde, legen die Ergebnisse in Imjai et al. (2016) nahe, dass er näherungsweise auch für FVK-Bauteile gilt. Imjai et al. (2016) nutzen zur Berechnung der Schubrisskraft den Ansatz nach CEB Bulletin d'information No. 158 (1985), welcher ebenfalls den Längsbewehrungsgrad beinhaltet, und erzielen für FVK-bewehrte Bauteile sehr gute Ergebnisse. Die Eignung des Ansatzes nach Model Code 1990 (1993) wird in Kapitel 5.4 überprüft.

$$V_{cr} = 0,15 \cdot \left(\frac{3d}{a} \right)^{1/3} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot b_{red} \cdot d \quad \text{Gl. 4-36}$$

mit:

$$\begin{aligned} a & \quad \text{Abstand der Einzellast zum Auflager (= } l/4 \text{ für Streckenlasten)} \\ \xi & = 1 + \sqrt{200/d} \quad \text{mit } d \text{ in mm} \\ \rho_l & = A_f / b \cdot d \\ b_{red} & \quad \text{Querschnittsbreite unter Abzug der Fläche der Bewehrung} \end{aligned}$$

Im gerissenen Zustand lassen sich die Schubverformungen auf Grundlage eines vereinfachten Fachwerkmodells aus Druck- und Zugstreben ermitteln. Aus den Dehnungen der Betondruck- und Bewehrungszugstreben ergibt sich der gesuchte Scherwinkel nach Leonhardt (1978) mit Hilfe von Gleichung Gl. 4-37. Setzt man eine Neigung der Bügelbewehrung von $\alpha = 90^\circ$ voraus und vernachlässigt den Einfluss des Druckstrebenneigungswinkels θ auf die Betondruckstrebe, vereinfacht sich der Zusammenhang zu Gl. 4-38.

$$\gamma^{\text{II}} = \frac{V_{\text{E}}}{b_{\text{w}} \cdot 0,9d} \cdot \left(\frac{1}{E_{\text{cm}} \cdot \sin^4 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)^2} + \frac{1}{E_{\text{f,w}} \cdot \rho_{\text{f,w}} \cdot \sin^4 \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)^2} \right) \quad \text{Gl. 4-37}$$

$$\gamma^{\text{II}} = \frac{V_{\text{E}}}{b_{\text{w}} \cdot 0,9d} \cdot \left(\frac{4}{E_{\text{cm}}} + \frac{1}{E_{\text{f,w}} \cdot \rho_{\text{f,w}} \cdot \cot(\theta)} \right) \quad \text{Gl. 4-38}$$

mit

- $E_{\text{f,w}}$ E-Modul der Bügelbewehrung
- $\rho_{\text{f,w}}$ = $a_{\text{w}}/b_{\text{w}}$
- α Neigungswinkel der Bügelbewehrung
- θ Druckstrebenneigungswinkel

Um eine schrittweise Bildung der Schubrisse zu erfassen, kann der in CEB Bulletin d`information No. 158 (1985) beschriebene Übergangsbereich nach Überschreiten der Schubrisskraft mit Gl. 4-39 berücksichtigt werden.

$$\gamma_{\text{m}} = (1 - \zeta) \cdot \gamma^{\text{I}} + \zeta \cdot \gamma^{\text{II}} \quad \text{Gl. 4-39}$$

mit:

$$\zeta = \begin{cases} 0 & V_{\text{E}} \leq V_{\text{cr}} \\ 1 - \left(\frac{4V_{\text{cr}} - V_{\text{E}}}{3V_{\text{cr}}} \right)^2 & V_{\text{cr}} \leq V_{\text{E}} \leq 4V_{\text{cr}} \\ 1 & V_{\text{E}} \geq 4V_{\text{cr}} \end{cases}$$

Zur Bestimmung des Druckstrebenwinkels bei der Verwendung von FVK-Bügel finden sich Ansätze u. a. in CAN/CSA-S806-12 (2012), Kurth (2012), Kueres (2019) und Niewels (2008). Die genannten Ansätze sind in Abbildung 4-18 exemplarisch für einen Zweifeldträger unter Streckenlast ausgewertet. Die zugrunde liegenden Formeln sind in Anhang A-2 dargestellt.

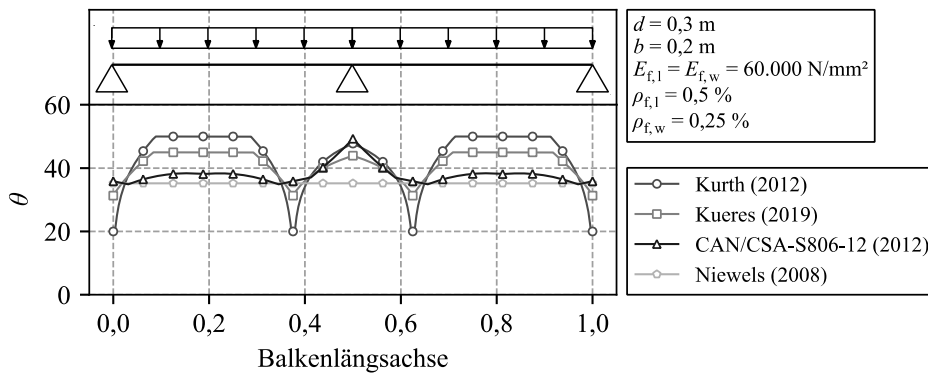


Abbildung 4-18 Ansätze zur Bestimmung des Druckstrebenneigungswinkels

4.6.2 Berücksichtigung von Zusatzverkrümmungen infolge Schubrissbildung

Neben Schubverformungen ergeben sich infolge von Querkraften außerdem zusätzliche Querschnittskrümmungen. Die diagonalen Druckstreben erhöhen die Kraft in der Betondruckzone und der Bewehrung über den Biegeanteil $F = M/z$ hinaus. Während die Zusatzkraft in der Druckzone vernachlässigbar ist, muss sie in der Bewehrungskraft Berücksichtigung finden. Im Rahmen der Bemessung von Betonbauteilen geschieht dies durch die Verschiebung der Zugkraftdeckungslinie (Zugkraft in der Bewehrung) in vertikaler Richtung um eine Zusatzkraft oder in horizontaler Richtung um das Versatzmaß.

Im Rahmen der Querschnittsberechnung bietet es sich an, diese Zusatzkraft als äußere Normalkraft zu berücksichtigen (vgl. Graubner (1989)). Bei Unterstellung einer lotrechten Bügelbewehrung kann diese nach Abbildung 4-19 mit Gl. 4-40 bestimmt werden.

$$\Delta F = V_E \cdot \cot \theta \tag{Gl. 4-40}$$

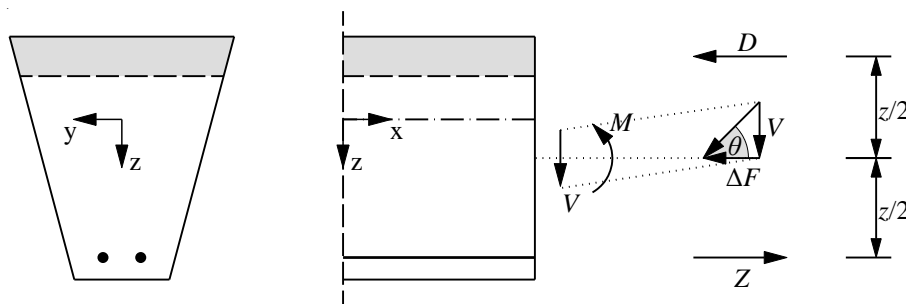


Abbildung 4-19 Zusätzliche Beanspruchung des Druck- und Zuggurtes infolge schräger Betondruckstreben infolge Schubrissbildung (in Anlehnung an Graubner (1989))

Diese zusätzliche Beanspruchung tritt auch auf, wenn im Bauteil keine Schubbewehrung vorliegt. Leonhardt und Mönnig (1977) weisen darauf hin, dass die Kraft in der Bewehrung in Auflagernähe theoretisch bis auf das Vierfache der Querkraft ansteigen kann. Nach Reineck (1990) erhöht sich zwar die Zugkraft in Bauteilen ohne Schubbewehrung in der

Längsbewehrung, jedoch bei weitem nicht in diesem Maß. Rehm et al. (1979) erläutert, dass für Platten ein Versatzmaß entsprechend der Bauteilhöhe sinnvoller ist. Dies entspricht näherungsweise den aktuellen normativen Regeln in DIN EN 1992-1-1/NA (2013), welche für Platten ein Versatzmaß entsprechend der statischen Nutzhöhe vorsieht. Für Bauteile mit FVK-Bewehrung, in denen keine Schubbewehrung vorhanden ist, sehen DAfStb (2022) und CAN/CSA-S806-12 (2012) ebenfalls ein Versatzmaß von $a_1 = d$ vor.

4.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen des nichtlinearen Last-Verformungsverhaltens bewehrter Betonbauteile erläutert. Dazu wurde zunächst das Materialverhalten von Beton, Betonstahl und FVK-Bewehrung dargestellt. Es wurden die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zur Beschreibung des einaxialen Verformungsverhaltens der Werkstoffe vorgestellt. Für den Beton wurde ergänzend auf die rechnerische Beschreibung des mehraxialen Materialverhaltens bei Vorhandensein einer Bügelbewehrung eingegangen. Anschließend wurde das Riss- und Verbundverhalten bewehrter Querschnitte ausgehend von der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung ausführlich dargestellt. Dabei wurde auch auf die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension Stiffening) eingegangen. Weiterhin wurden die Verformungsanteile aus Biege- und Schubbeanspruchung dargestellt und Möglichkeiten der Modellbildung erläutert.

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wird im folgenden Kapitel ein numerisches Berechnungsmodell vorgestellt, welches die Berechnung des Querschnitts- und Systemverhaltens unter Berücksichtigung der in diesem Kapitel erläuterten nichtlinearen Materialgesetze ermöglicht.

5 NUMERISCHES BERECHNUNGSMODELL

5.1 Einführung

Um das Tragverhalten sowie die Schnittgrößenverteilung von unbestimmten Durchlaufsystemen mit FVK-Bewehrung eingehend untersuchen zu können, wird in diesem Kapitel ein numerisches Berechnungsmodell entwickelt und validiert.

Die Berechnung findet getrennt auf Querschnitts- und Systemebene statt. Zunächst wird die Momenten-Krümmungs-Beziehung der vorliegenden Querschnitte ermittelt. Da in Stütz- und Feldbereich verschiedene Bewehrungsanordnungen vorliegen, findet die Querschnittsanalyse für beide Bereiche getrennt statt. Im nächsten Schritt erfolgt eine Unterteilung des Gesamttragwerks in finite Balkenelemente auf Grundlage des Weggrößenverfahrens. Den einzelnen Balkenelementen werden die zuvor ermittelten Momenten-Krümmungs-Beziehungen zugewiesen. Zusätzlich werden Berechnungsroutinen implementiert, welche die Berücksichtigung von Schubverformungen sowie die Zunahme der Querschnittskrümmung infolge Schubrissbildung berücksichtigen. Im Zuge einer Gleichgewichtsiteration wird die Systemreaktion für die jeweils aufgebrachte Belastung bestimmt.

Im Folgenden findet zunächst die Erläuterung der Querschnittsberechnung statt. Im Anschluss daran werden die programmtechnische Umsetzung des Weggrößenverfahrens sowie der Berechnungsablauf erläutert.

Zur Erstellung des Berechnungsmodells wird die objektorientierte Programmiersprache *Python* verwendet. Die Programmiersprache wird unter einer von der „Open Systems Interconnection“ der Internationalen Organisation für Normung (ISO) genehmigten Open-Source-Lizenz entwickelt und ist frei verwendbar. Zusätzlich werden die *Python*-Bibliotheken *Numpy* und *SciPy* genutzt. Diese ermöglichen die Verwendung von Matrizenoperationen und bieten darüber hinaus eine große Auswahl an Berechnungsalgorithmen, z. B. zur Lösung großer Gleichungssysteme.

5.2 Modellierung des Querschnittsverhaltens

5.2.1 Allgemeines

Das Verhalten eines Querschnitts unter Biegebeanspruchung lässt sich unter Annahme eines Ebenbleibens der Querschnitte mit Hilfe der Momenten-Krümmungs-Beziehung beschreiben. Diese ordnet jedem einwirkenden Moment die im Querschnitt vorliegende Krümmung zu. Dies ermöglicht eine umfassende Beschreibung des Querschnittsverhaltens, welches wiederum die maßgebliche Einflussgröße für die Systemberechnung darstellt.

Dazu sind zunächst die Geometrie des Querschnitts sowie die Lage der Bewehrung festzulegen. Da nur polygonale Querschnitte betrachtet werden sollen, ist dies über die Beschreibung der Eckpunkte per Koordinaten möglich. Es wird sich hierbei auf einfach symmetrische Querschnitte beschränkt (Symmetrie um die vertikale Achse). Dies ist für die Beschreibung von Stahlbetonbalkenquerschnitten ausreichend.

Zunächst werden die Baustoffeigenschaften sowie die Querschnittsmaße und die Bewehrungskonfiguration festgelegt. Nach der Bestimmung der Bruttoquerschnittswerte findet die Ermittlung der Momenten-Krümmungs-Beziehung statt. Aufgrund des nichtlinearen Werkstoffverhaltens muss dies iterativ erfolgen. Für die Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug stehen hierzu die in Kapitel 4.4 beschriebenen Möglichkeiten zur Verfügung:

- Ermittlung der Momenten-Krümmungs-Beziehung zunächst ohne Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug im „nackten“ Zustand II. Dies entspricht der Querschnittsverkrümmung direkt im Riss. Im Anschluss wird die Dehnung der Bewehrung in Abhängigkeit des gewählten Modells zur Erfassung des Tension Stiffenings reduziert und so die mittlere Querschnittskrümmung bestimmt.
- Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug über die Definition einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons für Zugspannungen. Im Rahmen der Querschnittsberechnung ergibt sich so direkt die mittlere Querschnittskrümmung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird von der erstgenannten Möglichkeit Gebrauch gemacht.

5.2.2 Modellierung der Werkstoffeigenschaften

Zur Abbildung des Werkstoffverhaltens werden die in Kapitel 4.1 beschriebenen Werkstoffgesetze herangezogen. Für die Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons kann sowohl die nichtlineare Beziehung als auch das Parabel-Rechteck-Diagramm nach DIN EN 1992-1-1 (2011) verwendet werden. Soll eine Umschnürungswirkung berücksichtigt werden, wird für den umschnürten Kernbeton das Werkstoffgesetz nach Teng et al. (2009) (vgl. Kapitel 4.2.1.3) verwendet.

Da sich die FVK-Bewehrung bis zum Bruch linear-elastisch verhält, ist die Formulierung eines gesonderten Werkstoffgesetzes hier nicht erforderlich. Darüber hinaus soll das Berechnungsprogramm in der Lage sein, Stahlbetontragwerke zu berechnen. Daher werden zusätzlich Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Betonstahl implementiert. Da dies nur exemplarisch erfolgen soll, werden hierfür die bi-linearen Kennlinien nach DIN EN 1992-1-1 (2011) mit und ohne Berücksichtigung einer Verfestigung herangezogen.

5.2.3 Ermittlung der Bruttoquerschnittswerte

Zu Beginn der Berechnung werden zunächst die Bruttoquerschnittswerte bestimmt. Für polygonale Querschnitte werden u. a. in Kindmann und Fricke (2002) entsprechende Ansätze

bereitgestellt. Diese gehen auf Überlegungen von Fleßner (1962) zurück und finden auch heute noch in Berechnungsprogrammen Anwendung (u. a. INCA2, Dlubal, SOFiSTiK, InfoCAD, vgl. hierzu Zimmert und Braml (2023)). Eine übersichtliche Darstellung der Berechnungsmethode kann Kindmann und Frickel (2002) entnommen werden.

5.2.4 Ermittlung der Krümmung im Riss

Da in der vorliegenden Arbeit ausschließlich Querschnitte unter einachsiger Biegung untersucht werden, kann der Dehnungszustand in einem Querschnitt mit Hilfe der Krümmung κ_y sowie der Dehnung im Schwerpunkt ε_0 vollständig beschrieben werden, vgl. Quast (2007). Ausgehend von diesen beiden Größen lässt sich die Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe mit Hilfe von Gl. 5-1 berechnen. Der Abstand der Dehnungs-Null-Linie zur Schwerachse des Querschnitts ergibt sich mit Gl. 5-2. Abbildung 5-1 stellt den Zusammenhang grafisch dar.

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \kappa_y \cdot z \quad \text{Gl. 5-1}$$

$$z_{e0} = \frac{0 - \varepsilon_0}{\kappa_y} \quad \text{Gl. 5-2}$$

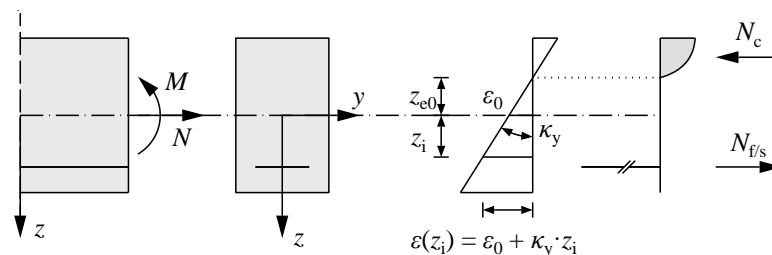


Abbildung 5-1 Dehnungs- und Spannungsverteilung im Querschnitt

Ausgehend von einer angenommenen Dehnungsverteilung können mit Hilfe der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Werkstoffe die Kräfte in der Betondruckzone und der Bewehrung sowie das vom Querschnitt aufnehmbare Moment ermittelt werden. Für rechteckförmige Druckzonen kann die Betondruckkraft analytisch unter Verwendung der bekannten Beiwerte α_R und k_a zur Beschreibung der Betondruckzone erfolgen. Die entsprechenden Zusammenhänge für die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung sowie das Parabel-Rechteck-Diagramm sind in Anhang A-3 aufgelistet. Liegt eine nicht-rechteckige Druckzone vor oder sind die Kennwerte zur analytischen Beschreibung der Betondruckzone nicht bekannt, ist eine explizite Integration der Spannungen in der Druckzone vorzunehmen („Spannungsintegration“). Eine umfassende Darstellung der hierfür vorhandenen Methoden kann Busjaeger und Quast (1990) entnommen werden. Im Berechnungsmodell wird die numerische Integration mit Streifen parallel zur Dehnungs-Null-Linie implementiert. Eine detaillierte Beschreibung dieses Vorgehens – inkl. Erweiterung auf zweiachsige Biegung – ist in Fafitis (2001) und Quast (2007) beschrieben. Zur Integration der Spannungen wird die Druckzone entlang der Kanten von Eckpunkt zu Eckpunkt umfahren. So kann

auf Grundlage der vorliegenden Dehnungsverteilung mit einer zu definierenden Betonspannungsfunktion die Betondruckkraft ermittelt werden. Dieses grundlegende Vorgehen ist in Abbildung 5-2 dargestellt. Die Breite des betrachteten Querschnittstreifens kann mit Gl. 5-3 berechnet werden.

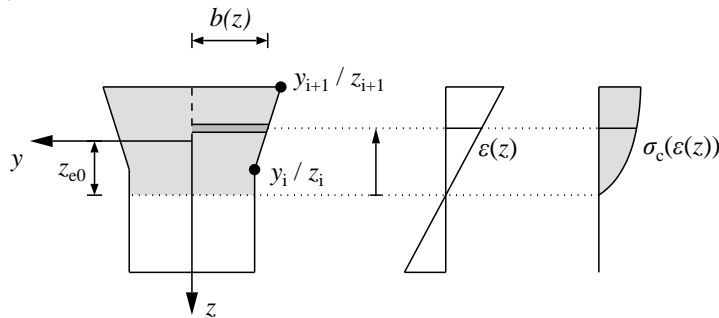


Abbildung 5-2 Numerische Integration der Betonspannungen mit Streifen parallel zur Dehnungsnulllinie

$$b(z) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{z_{i+1} - z_i} \cdot (z - z_i) \quad \text{Gl. 5-3}$$

Mit diesem Verfahren ist zudem eine Berechnung von Hohlkastenquerschnitten möglich. Hierzu wird zunächst eine Spannungsintegration unter Vernachlässigung der Aussparungen durchgeführt. Im Anschluss findet eine Umfahrung der Kanten des ausgesparten Querschnittsteils in umgekehrter Richtung statt, wodurch die Spannungen in diesem Bereich von der Gesamtbetonkraft wieder abgezogen werden.

Dies ist insbesondere bei einer Querschnittsanalyse unter Berücksichtigung eines umschnürten Betonkerns erforderlich. Die in Kapitel 4.2.1.3 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Beziehung erfasst ausschließlich den umschnürten Kernbeton, es erfolgt keine Verschmierung der Umschnürungswirkung auf die gesamte Druckzonenfläche. Daher wird für die Betondeckung, wie in Abbildung 5-3 gezeigt, ein Hohlkastenquerschnitt durch Abzug der Kernbetonfläche modelliert. Dieser erhält die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den nicht umschnürten Beton. So kann dem Kernbeton eine Betonkennlinie unter Beachtung der Umschnürungswirkung zugewiesen werden. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass die Berechnungszeit erheblich steigt, da die Spannungsintegration dreimal durchgeführt werden muss. Bei Vorliegen eines Rechteckquerschnittes kann die Betondeckung durch einen Ersatzplattenbalken beschrieben werden, sodass eine zweifache Spannungsintegration ausreichend ist.

Oft findet im Rahmen von numerischen Modellen, welche das Tragverhalten von FVK-Bauteilen abbilden sollen, der Ansatz einer fiktiven Betonzugspannung in der Zugzone Anwendung, vgl. Kapitel 4.4. Nicht immer ist ersichtlich, wie die Eingangsgrößen der Modelle zur Beschreibung der Betonspannungsverteilung in der Zugzone gewählt wurden. Während dieses Vorgehen für Stahlbetonbauteile intensiv erforscht wurde, ist dies für FVK-bewehrte Bauteile nicht der Fall.

Die Ermittlung der mittleren Krümmung erfolgt daher über die Reduktion der Bewehrungsdehnung, ausgehend von der Bewehrungsdehnung im Riss. Hierzu bieten sich die in Model Code 1990 (1993) und Model Code 2010 (2013) bereitgestellten Ansätze an, welche in Kapitel 4.4 ausführlich vorgestellt wurden. Im Berechnungsmodell werden zunächst beide Ansätze implementiert.

5.2.6 Modellierung der Zusatzverkrümmungen infolge Schubrissbildung

Wie in Kapitel 4.6.2 erläutert, führt die Bildung von Schubrissen zu einer zusätzlichen Beanspruchung des Querschnitts. Diese führt zu zusätzlichen Querschnittsverkrümmungen, die durch das Aufbringen einer äußeren Normalkraft berücksichtigt werden können. Hierbei ist zu beachten, dass diese im Rahmen der Querschnittsberechnung in der Achse des Querschnittsschwerpunkts angreift. Bei der Ermittlung dieser äußeren Normalkraft in Kapitel 4.6.2 wurde jedoch eine Wirkungslinie mittig zwischen Druck und Zuggurt vorausgesetzt. Da die Lage der Betondruckkraft im Zuge der Querschnittsberechnung ermittelt wurde, kann anschließend im Rahmen einer Schnittgrößentransformation eine Verschiebung der Normalkraft erfolgen. Auf diese Art ist es möglich, die zusätzlichen Verkrümmungen infolge Schubrissbildung einfach zu bestimmen. Im Rahmen der Ermittlung der Momenten-Krümmungs-Beziehung wird dies für jeden Querschnitt für unterschiedlich definierte äußere Normalkräfte durchgeführt. Wird im Zuge der Systemberechnung die Schubrisskraft überschritten, werden die im Bauteil wirkenden zusätzlichen Normalkräfte ermittelt und darauf aufbauend die zusätzlichen Krümmungen aus den zuvor durchgeführten Querschnittsberechnungen mit vorgegebenen äußeren Normalkräften interpoliert.

5.3 Modellierung des Systemverhaltens

5.3.1 Allgemeines

Zur Modellierung des Systemverhaltens wird eine Berechnungsroutine auf Grundlage des Weggrößenverfahrens (auch Deformationsmethode genannt) implementiert. Die Grundidee ist die Unterteilung des Tragwerks in finite Elemente, welche in Knoten miteinander verbunden sind. Im Folgenden werden lediglich die Grundzüge der Berechnungsmethode erläutert, umfassende Ausführungen können Kindmann und Kraus (2020), Wagenknecht (2018), Graf und Vassilev (2006), Steinke (2015) oder Marti (2014) entnommen werden.

Bei den nachfolgenden Ausführungen wird sich an der Nomenklatur in Kindmann und Kraus (2020) orientiert.

Ziel ist zunächst das Aufstellen eines Gleichungssystems in der Form von Gl. 5-4.

$$\underline{K} \cdot \underline{v} = \underline{p} \quad \text{Gl. 5-4}$$

mit:

\underline{K}	Gesamtsteifigkeitsmatrix
\underline{v}	Vektor der Verformungsgrößen in den Knoten
\underline{p}	Gesamtlastvektor

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix sowie der Gesamtlastvektor lassen sich auf Basis des vorliegenden Systems aufstellen. Anschließend können die Verformungsgrößen in den Knoten ermittelt und mit diesen die Kraftgrößen in den Knoten berechnet werden.

5.3.2 Weggrößenverfahren

5.3.2.1 Elementsteifigkeiten und -lasten

Grundelement des Weggrößenverfahrens sind Stabelemente, die in Knoten miteinander verbunden sind. Ausgehend vom Knotengleichgewicht wird für jedes Element die lokale Elementsteifigkeitsmatrix aufgestellt. Da im Massivbau Verformungen infolge von Normalkraft zu vernachlässigen sind, ergeben sich für jeden Knoten zwei Verschiebungsgrößen, woraus eine 4x4-Elementsteifigkeitsmatrix resultiert. In Abhängigkeit der zu berücksichtigenden Verformungen kann die Formulierung der Elementsteifigkeitsmatrix auf Grundlage schubstarrer oder schubweicher Balkenelemente stattfinden. In Anhang B-1 sind die zugehörigen Elementformulierungen dargestellt. Da das Berechnungsprogramm in der Lage sein soll, Schubverformungen abzubilden, werden schubweiche Balkenelemente verwendet.

Greifen auf dem Balkenelement Lasten an (Streckenlasten oder Einzellasten, die nicht in den Knoten liegen), wird zudem ein lokaler Elementlastvektor aufgestellt. In Anhang B-2 sind auch hierzu die relevanten Formulierungen dargestellt.

5.3.2.2 Gesamtsteifigkeitsmatrix und -lastvektor

Über die Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten findet der Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix statt. Da mit dem Berechnungsmodell ausschließlich linienförmige Systeme untersucht werden sollen und somit keine geneigten Balkenelemente auftreten, ist die Transformation der Elementbeziehungen auf ein globales Koordi-

natensystem nicht erforderlich. Die Ausrichtung des lokalen Koordinatensystems der Elemente entspricht bereits der des globalen Koordinatensystems. Zudem ergibt sich eine Gesamtsteifigkeitsmatrix in Bandstruktur, bei der lediglich die Elemente im Bereich der Hauptdiagonalen besetzt sind. Bei solchen dünn besetzten Matrizen bietet es sich an, lediglich die Einträge zu speichern, die nicht Null sind. Hierzu wird im Berechnungsmodell das Compressed Sparse Row-Verfahren (CSR) verwendet. Entsprechende Methoden sind in der Bibliothek *SciPy* bereits implementiert und ermöglichen eine effiziente Speicherung und Berechnung dieser Matrizen.

Zudem findet der Zusammenbau des Gesamtlastvektors aus den einzelnen lokalen Elementlastvektoren statt. Greifen zusätzlich Einzellasten in Knoten an, werden diese hierbei ebenso beachtet.

5.3.2.3 Lösen des Gleichungssystems und Ermittlung der Schnittgrößen

Um das Gleichungssystem in Gl. 5-4 lösen zu können, müssen die geometrischen Randbedingungen Berücksichtigung finden. Hierzu werden in der Gesamtsteifigkeitsmatrix – bis auf die Einträge auf der Hauptdiagonalen – jene Spalten und Zeilen zu Null gesetzt, welche mit den vorliegenden Lagerbedingungen (vertikale Lagerung oder Einspannung) korrespondieren. Beim Elementlastvektor wird für die Zeilen analog vorgegangen.

Da das Gleichungssystem jetzt nicht mehr singulär ist, kann es durch Bildung der Inversen der Gesamtsteifigkeitsmatrix gelöst werden (siehe Gl. 5-5).

$$\underline{v} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{p} \qquad \text{Gl. 5-5}$$

Nun sind die Verformungsgrößen in sämtlichen Knoten bekannt, sodass die hieraus resultierenden Knotenschnittgrößen auf Grundlage der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen sowie Elementlastvektoren bestimmt werden können. Ebenso lassen sich die Auflagerreaktionen mit Hilfe der Gesamtsteifigkeitsmatrix berechnen.

5.3.3 Berücksichtigung des nichtlinearen Querschnittsverhaltens

Wie in Kapitel 6.3 noch ausgeführt wird, weisen die Momenten-Krümmungs-Beziehungen von FVK-bewehrten Querschnitten ausschließlich monoton-steigende Bereiche auf. Zu einem abfallenden Ast der Momenten-Krümmungs-Beziehung nach Erreichen des maximalen Moments, wie er bei Stahlbetonquerschnitten für Betonversagen teilweise auftritt, kommt es nicht oder nur in sehr reduzierter Form. Dies erlaubt die Berücksichtigung des nichtlinearen Querschnittsverhaltens durch die Verwendung von Sekantensteifigkeiten nach Gl. 5-6 und Gl. 5-7. Da die Schnittgrößen in den Knoten ermittelt werden, die Steifigkeiten jedoch elementbezogen definiert sind, wird die Elementsteifigkeit auf Grundlage des Mittelwerts der Schnittgrößen in den angrenzenden Knoten bestimmt.

$$(EI)_i = \frac{M_i}{\kappa_i} \quad \text{Gl. 5-6}$$

$$(GA)_i = \frac{V_i}{\gamma_i} \quad \text{Gl. 5-7}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Biege- und die Schubsteifigkeit belastungsabhängig sind, ist auch im Rahmen der Systemberechnung ein iteratives Vorgehen erforderlich (Gleichgewichtsiteration). Ausgehend von der Steifigkeit des ungerissenen Querschnitts bzw. der Steifigkeit des vorangegangenen Lastschritts werden die Verformungsgrößen und Schnittkräfte bestimmt. Mit diesen werden die Steifigkeiten solange neu berechnet und ein erneuter Berechnungsdurchgang durchgeführt, bis die Steifigkeitsänderungen klein genug sind. Als Konvergenzkriterium wird die bezogene Änderung der Biegesteifigkeit $\Delta(EI) = [(EI)_{i-1} - (EI)_i]/(EI)_{i-1}$ definiert. Die Gleichgewichtsiteration wird solange durchgeführt, bis sie in allen Elementen $\Delta(EI) < 5\%$ erreicht ist.

5.3.4 Berücksichtigung der räumlichen Lastausbreitung

Zur Berücksichtigung der räumlichen Ausbreitung von Einzellasten sowie Auflagerreaktionen von Mittelstützen findet eine Auffächerung dieser Lasten unter einem Winkel von 45° zur Mittellinie des Bauteils statt (siehe Abbildung 5-4). Die angreifende Last wird in eine äquivalente Streckenlast umgerechnet und auf die Elemente aufgebracht. Elemente, auf denen die resultierende Streckenlast nur teilweise wirkt, werden entsprechend dieser Bereiche belastet. Zur Ermittlung der äquivalenten Streckenlast über einem Mittelaufleger wird die Lagerreaktion aus dem vorhergegangenen Iterationsschritt der Gleichgewichtsreaktion verwendet.

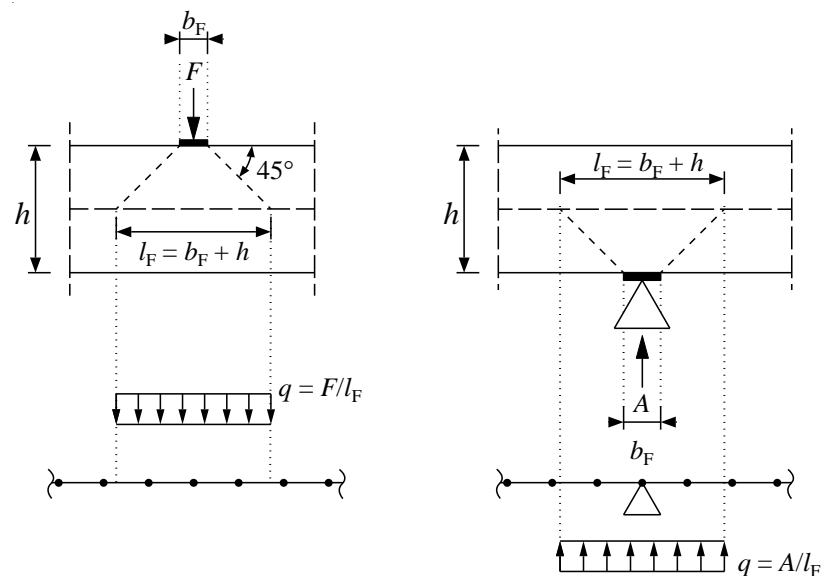


Abbildung 5-4

Berücksichtigung der räumlichen Lastausbreitung von Einzellasten und Auflagerreaktionen

5.3.5 Berücksichtigung von Schubrissbildung

5.3.5.1 Druckstrebenneigungswinkel

Das Berechnungsmodell erlaubt die Berücksichtigung von Verformungen aus Querkraftbeanspruchung. Hierzu werden die in Kapitel 4.6 beschriebenen Ansätze herangezogen. Liegt im Tragwerk eine Schubbewehrung aus FVK-Bewehrung vor, erfolgt die Ermittlung des Druckstrebenneigungswinkels θ nach CAN/CSA-S806-12 (2012). Da sich im Bereich von Zwischenstützungen steilere Druckstrebenwinkel ergeben, erfolgt in diesen Bereichen eine Anpassung des Winkels θ . Sobald eine Druckstrebe die Lagerplatte erreicht, wird der Druckstrebenneigungswinkel zur Mitte des Auflagers hin linear auf 90° erhöht. Da der Druckstrebenwinkel nach CAN/CSA-S806-12 (2012) lastabhängig und somit über die Trägerlänge veränderlich ist, ist auch der Abstand a_{zw} , ab dem die Erhöhung des Neigungswinkels stattfindet, lastabhängig. Dieser lässt sich über die Einführung einer Funktion in Abhängigkeit der veränderlichen Druckstrebenneigung bestimmen. Abbildung 5-5 verdeutlicht dieses Vorgehen schematisch.

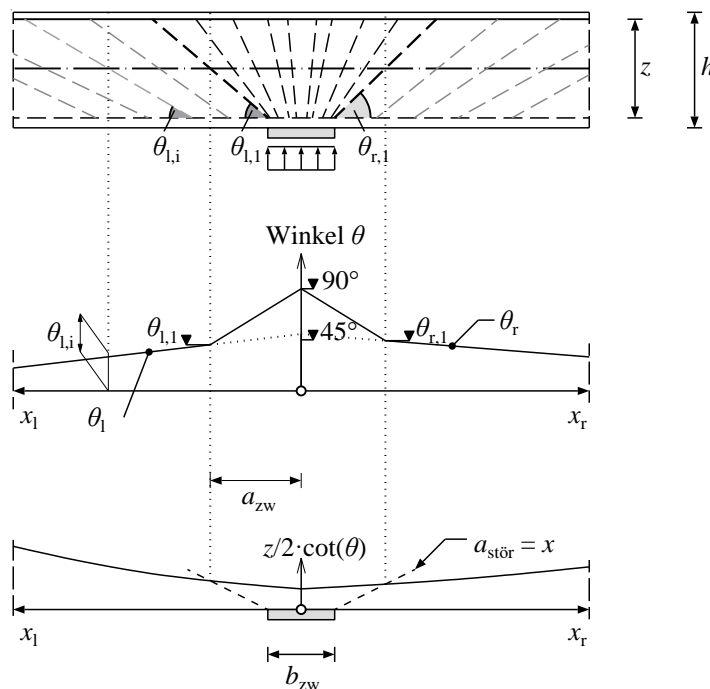


Abbildung 5-5 Erhöhung des Druckstrebenneigungswinkels im Bereich von Zwischenstützungen

5.3.5.2 Schubweiche Systemmodellierung

Da in Kapitel 5.3.2.1 die Möglichkeit der Modellierung schubweicher Elemente implementiert wurde, ist die Berücksichtigung von Schubverformungen auf Grundlage einer Querkraft-Gleitwinkel-Beziehung problemlos möglich. Hierfür werden die in Kapitel 4.6.1 beschriebenen Zusammenhänge herangezogen.

5.3.5.3 Zusatzverkrümmungen aus Schubrissbildung

Die berechneten Druckstrebenneigungswinkel gehen zudem in die Ermittlung der zusätzlichen Biegeverformungen aus der Erhöhung der Bewehrungszugkraft ein. Hierzu wird die entlang des Bauteils in der Bewehrung wirkende Zusatzkraft in Abhängigkeit der Querkraft sowie des Druckstrebenneigungswinkels nach Gl. 4-40 ermittelt. Diese ist über die Bauteillänge veränderlich. Bei der Zuordnung der Krümmungen entlang des Bauteils werden die Zusatzverkrümmungen in Abhängigkeit der vorliegenden Zusatzkraft sowie des vorliegenden Moments aus den zuvor berechneten Momenten-Krümmungs-Beziehungen bestimmt. Diese wurden für verschiedene äußere Normalkräfte berechnet, sodass zwischen diesen Momenten-Krümmungs-Verläufen interpoliert werden kann.

Um die schrittweise Bildung von Schubrissen zu berücksichtigen, wird analog dem in CEB Bulletin d'information No. 158 (1985) vorgeschlagenen Vorgehen bei der Bestimmung der Zusatzkräfte ein Übergangsbereich zwischen $V_{cr} \leq V_E \leq 4V_{cr}$ implementiert. Das beschriebene Vorgehen ist in Abbildung 5-6 schematisch dargestellt.

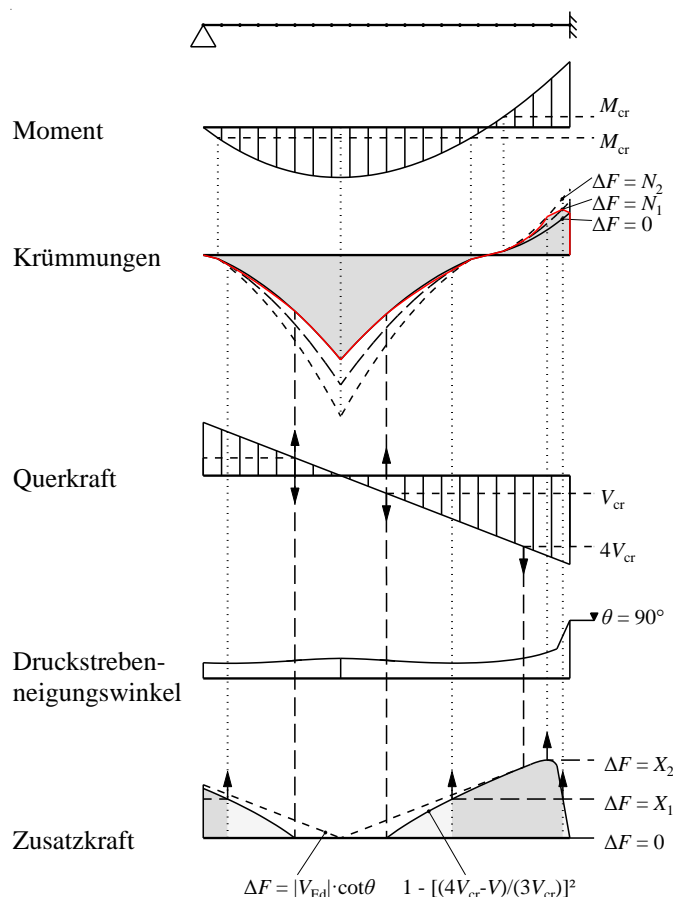


Abbildung 5-6 Berücksichtigung der Zusatzverkrümmungen infolge Schubrissbildung

Liegt im Querschnitt keine Querkraftbewehrung vor, so wird ein Druckstrebenwinkel von $\theta = 45^\circ$ angesetzt. Dies entspricht näherungsweise einem Versatzmaß von d , wie es in

CAN/CSA-S806-12 (2012) und DAfStb (2022) bei FVK-bewehrten Bauteilen ohne Schubbewehrung vorgesehen ist.

5.4 Überprüfung des Berechnungsmodells

5.4.1 Allgemeines

Um die getroffenen Berechnungsannahmen und die implementierten Berechnungsalgorithmen zu überprüfen, wird das numerische Modell mit der Hilfe von Bauteilversuchen validiert. Hierfür wird zunächst die Querschnittsberechnung auf Grundlage numerisch ermittelter Momenten-Krümmungs-Beziehungen sowie Bruchmomente überprüft. Im Anschluss daran wird das Gesamtmodell anhand von Verformungsberechnungen sowie der Momentenentwicklung in Stütz- und Feldbereich validiert. Da in Kapitel 6 auch ein Vergleich des Momentenumlagerungsverhaltens von FVK- und betonstahlbewehrten Bauteilen stattfinden soll, wird zusätzlich überprüft, ob das erstellte Modell in der Lage ist, Stahlbetontragwerke wirklichkeitsnah abzubilden.

Im Zuge der Versuchsnachrechnung wurde deutlich, dass die in Kapitel 5.2.5 thematisierte Wahl der Tension Stiffening-Modells zwischen den in Model Code 1990 (1993) und Model Code 2010 (2013) bereitgestellten Ansätzen bei der Ermittlung der Systemverformungen und -schnittgrößen von FVK-bewehrten Durchlaufträgern eine untergeordnete Rolle spielt. Daher wird im Folgenden der Ansatz aus Model Code 1990 (1993) mit dem Völligkeitsbeiwert analog einer Betonstahlbewehrung nach Füllsack-Köditz (2004) verwendet (vgl. Kapitel 4.3.3).

5.4.2 Überprüfung der Momenten-Krümmungs-Berechnung

In Abbildung 5-7 ist ein Teil der experimentellen Untersuchungen aus Al-Sunna (2006) dargestellt. In der Arbeit wurden umfangreiche Untersuchungen an GFK- und CFK-bewehrten Bauteilen durchgeführt. In Abbildung 5-7 (links) sind die Momenten-Krümmungs-Beziehungen einiger untersuchter GFK-bewehrter Balkenquerschnitte, in Abbildung 5-7 (rechts) die Momenten-Krümmungs-Beziehungen einiger GFK-bewehrter Plattenquerschnitte sowie die entsprechenden Nachrechnungen abgebildet. Für beide Querschnittsformen ergibt sich eine weitgehende Übereinstimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Lediglich im Bereich des nicht abgeschlossenen Rissbildes ergeben sich minimale Abweichungen

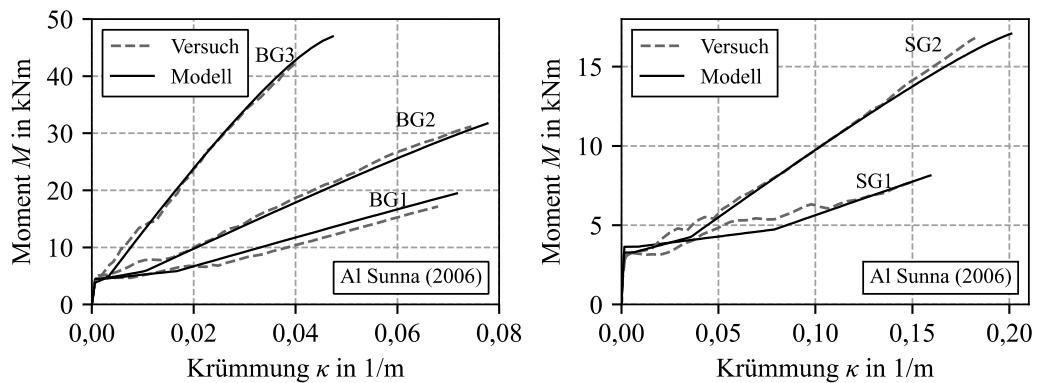


Abbildung 5-7 Momenten-Krümmungs-Beziehungen aus Al-Sunna (2006)

Abbildung 5-8 (links) zeigt die in Barris et al. (2008) sowie Barris et al. (2009) ermittelten Momenten-Krümmungs-Beziehungen für GVK-bewehrte Balkenquerschnitte. Die rechnerischen Verläufe bilden auch hier die Versuche sehr gut ab.

Abbildung 5-8 (rechts) zeigt die Momenten-Krümmungs-Beziehung eines in Gribniak et al. (2013) untersuchten GVK-bewehrten Balkens. Der Balken wies mit drei Lagen á 3Ø8 eine ungewöhnliche Bewehrungskonfiguration auf, die den zugversteifenden Effekt des Betons signifikant erhöhte. Das Berechnungsmodell überschätzt daher die Krümmungen leicht. Insgesamt kann der Verlauf jedoch sehr gut abgebildet werden.

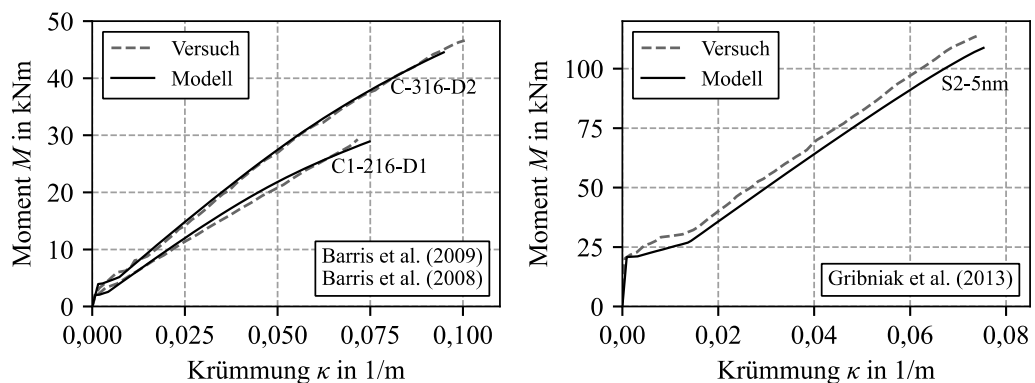


Abbildung 5-8 Links: Momenten-Krümmungs-Beziehungen aus Barris et al. (2008), Barris et al. (2009)
Rechts: Momenten-Krümmungs-Beziehung aus Gribniak et al. (2013)

In Abbildung 5-9 sind weiterhin experimentelle Momenten-Krümmungs-Beziehungen aus Pecce et al. (2000) (links, GFK-bewehrte Plattenquerschnitte) sowie Thiagarajan (2003) (rechts, CFK-bewehrte Balkenquerschnitte) dargestellt. Die Verläufe können mit Hilfe des Berechnungsmodells wirklichkeitsnah beschrieben werden. Der starke Anstieg der Krümmung infolge sehr großer Rissöffnungen im Versuch B4 aus Thiagarajan (2003), welche kurz vor dem Versagen des Bauteils auftreten, kann erwartungsgemäß nicht erfasst werden.

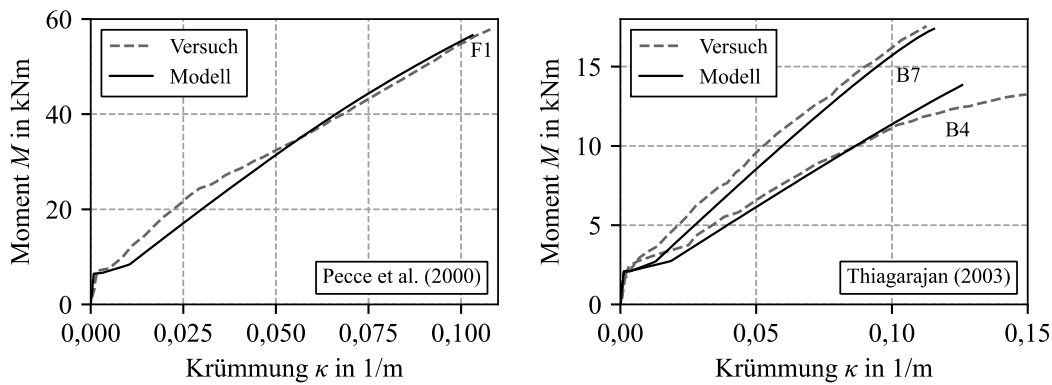


Abbildung 5-9 Links: Momenten-Krümmungs-Beziehung aus Pecce et al. (2000) Rechts: Momenten-Krümmungs-Beziehungen aus Thiagarajan (2003)

Es wurden zudem die experimentell bestimmten Bruchmomente von insgesamt 45 Versuchen aus verschiedenen Veröffentlichungen nachgerechnet. Eine vollständige Liste der nachgerechneten Versuche kann Anhang B-2 entnommen werden. In Abbildung 5-10 sind die Verhältnisse von experimentellen und berechneten Bruchmomenten dargestellt. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Viele der Bauteile versagten infolge Betondruckversagen, da dies für FVK-Bauteile oftmals die präferierte Versagensform darstellt. Leider werden die für eine möglichst realitätsnahe Nachrechnung notwendigen Parameter in den Veröffentlichungen meist nicht angegeben. Hierbei ist insbesondere die auftretende Betonbruchstauchung zu nennen. Wurde diese nicht angegeben, wird der in DIN EN 1992-1-1 (2011) festgelegte Wert von $\epsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ verwendet.

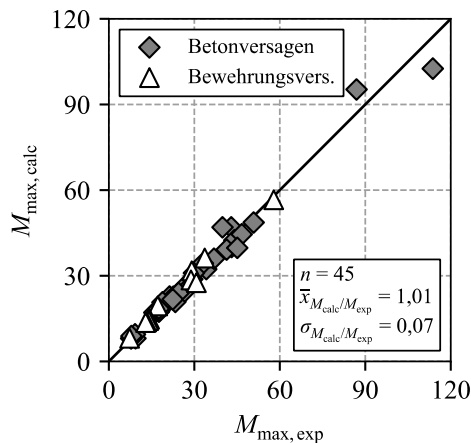


Abbildung 5-10 Verhältnis der experimentellen und berechneten maximalen Momente

5.4.3 Überprüfung des Gesamtmodells

5.4.3.1 Plattenquerschnitte

Da nur sehr wenige experimentelle Untersuchungen an statisch unbestimmten Systemen ohne Schubbewehrung vorliegen, wurden am Forschungs- und Prüflabor Massivbau der Technischen Universität Darmstadt Versuche an zweifeldrigen GFK-bewehrten Bauteilen durchgeführt. Eine umfassende Darstellung der Versuchsergebnisse ist in Anhang C gegeben. Die Bauteile wurden mit GFK-Bewehrungsstäben der Firma Schöck (ComBAR, Schöck Bauteile AG (2018)) bewehrt.

In Abbildung 5-11 sind die Durchbiegungen in Feldmitte der beiden Felder für zwei Versuche mit einer Feldlänge von 3,0 m und zwei Versuche mit einer Feldlänge von 2,25 m dargestellt. Jeweils ein Versuch wies eine erhöhte Feldbewehrung auf, der andere eine erhöhte Bewehrung im Stützbereich. Es zeigt sich, dass das Berechnungsmodell die Verformungsverläufe sehr gut abbilden kann. Lediglich im Bereich hoher Lasten werden die Verformungen unterschätzt. Hier traten im Versuch sehr große Schubrisse auf, die vom Modell nicht erfasst werden können.

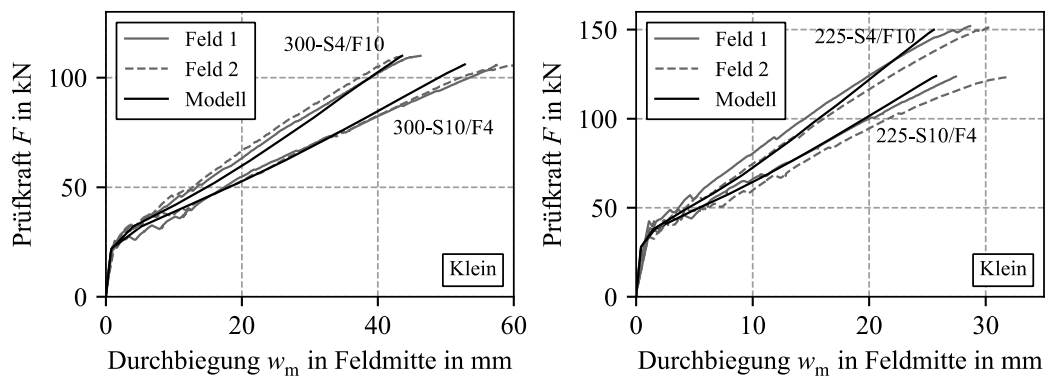


Abbildung 5-11 Durchbiegung-Prüfkraft-Verläufe der Versuche 300-S4/F10, 300-S10/F4, 225-S4/F10, 225-S10/F4

Zusätzlich sind in Abbildung 5-12 die Entwicklungen der Momente in Stütz- und Feldbereich auf Grundlage der gemessenen Lagerreaktionen dargestellt. Auch diese wurden mit dem Berechnungsmodell nachgerechnet. Sowohl für die Momentenumlagerung zur Stütze als auch ins Feld kann die Momentenentwicklung wirklichkeitsnah bestimmt werden.

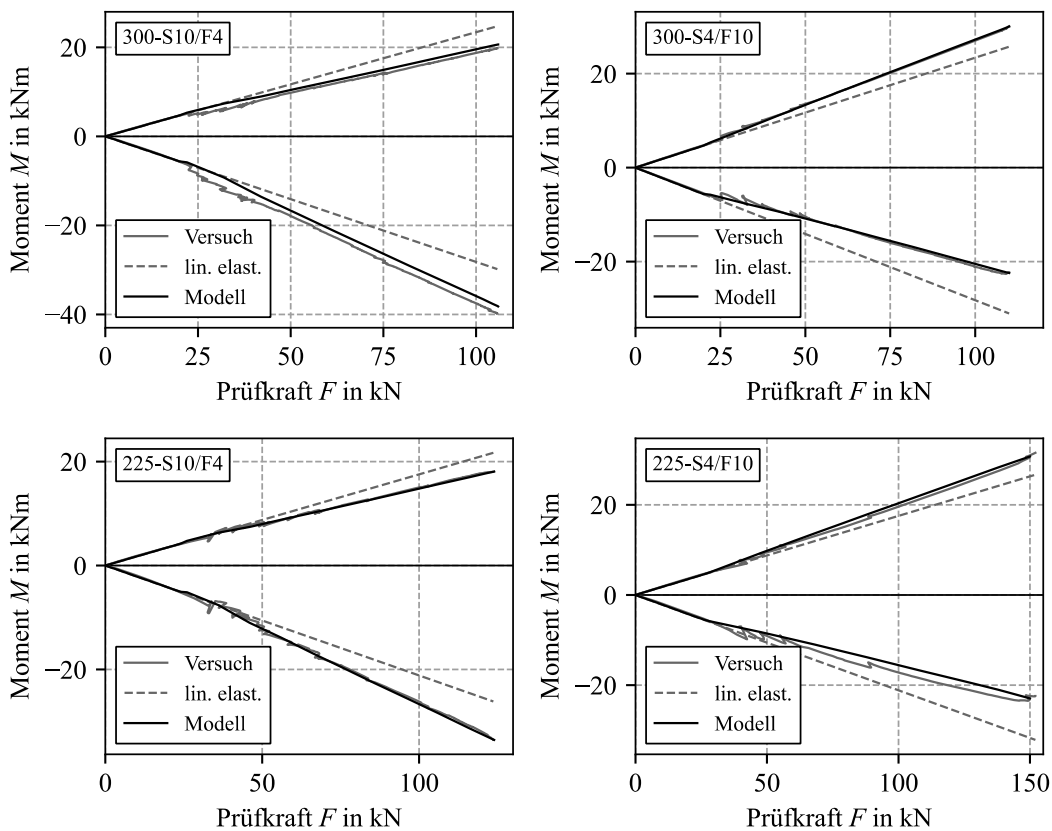


Abbildung 5-12 Momentenentwicklungen der Versuche 300-S4/F10, 300-S10/4, 225-S4/F10, 225-S10/F4

5.4.3.2 Balkenquerschnitte

Im Folgenden werden weiterhin Versuche an Durchlaufträgern mit Balkenquerschnitten dargestellt und nachgerechnet. Diese weisen eine Schubbewehrung aus FVK- oder Betonstahlbügeln auf.

El-Mogy (2011) führt Untersuchungen an GFK-bewehrten Betonbalken mit zwei Feldern durch. In Abbildung 5-13 sowie Abbildung 5-14 sind die Durchbiegungsverläufe sowie Momentenentwicklungen von zwei FVK-bügelbewehrten Bauteilen dargestellt und nachgerechnet. Neben der regulären Berechnung wurde eine Verformungsberechnung unter Vernachlässigung von Schubverformungen infolge des Fachwerkansatzes (siehe Kapitel 4.6.1) durchgeführt (schubstarre Elementformulierung). Es zeigt sich, dass eine Vernachlässigung der Schubverformungen zu einer Unterschätzung der Durchbiegungen führt. Zudem ist ersichtlich, dass die Schubbrisskraft, ab welcher Schubrisse im Bauteil auftreten, mit dem verwendeten Modell in guter Näherung ermittelt werden kann.

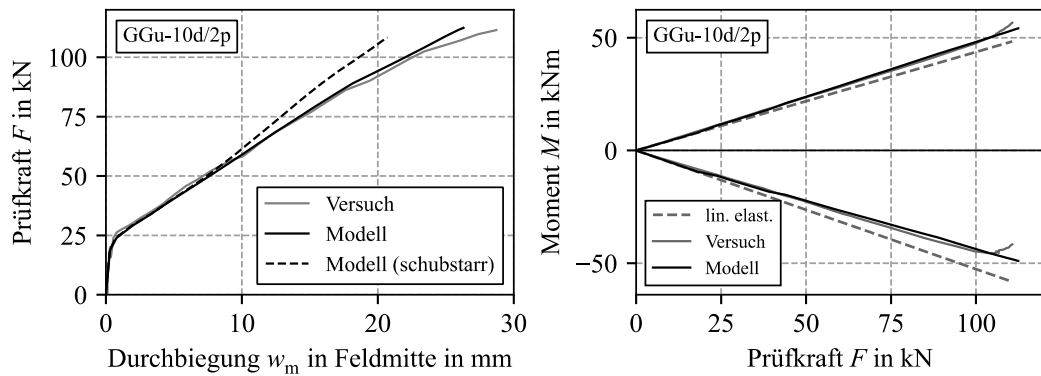


Abbildung 5-13 Links: Durchbiegung-Prüfkraft-Verlauf des Versuchs GGu-10d/2p aus El-Mogy (2011)
Rechts: Momentenentwicklung des Versuchs GGu-10d/2p aus El-Mogy (2011)

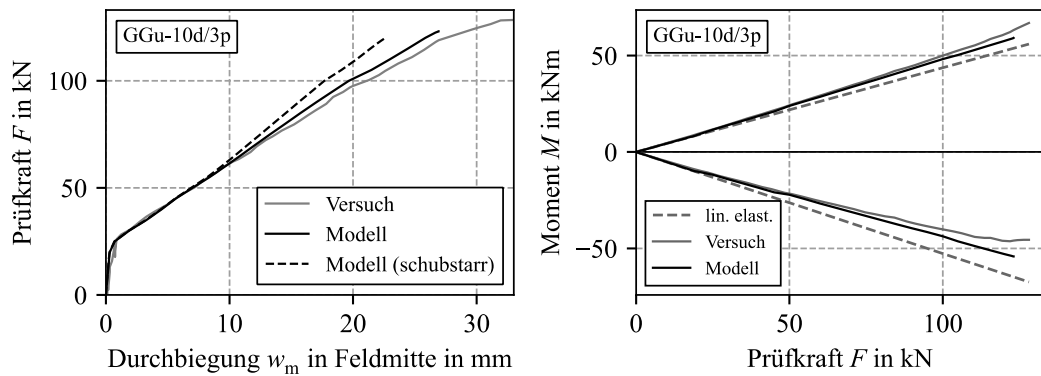


Abbildung 5-14 Links: Durchbiegung-Prüfkraft-Verlauf des Versuchs GGu-10d/3p aus El-Mogy (2011)
Rechts: Momentenentwicklung des Versuchs GGu-10d/3p aus El-Mogy (2011)

In Abbildung 5-15 und Abbildung 5-16 sind abschließend die Nachrechnungen zweier Versuche aus Matos et al. (2012) dargestellt. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Momentenverläufe, die Verformungen werden lediglich im Bereich hoher Lasten leicht unterschätzt.

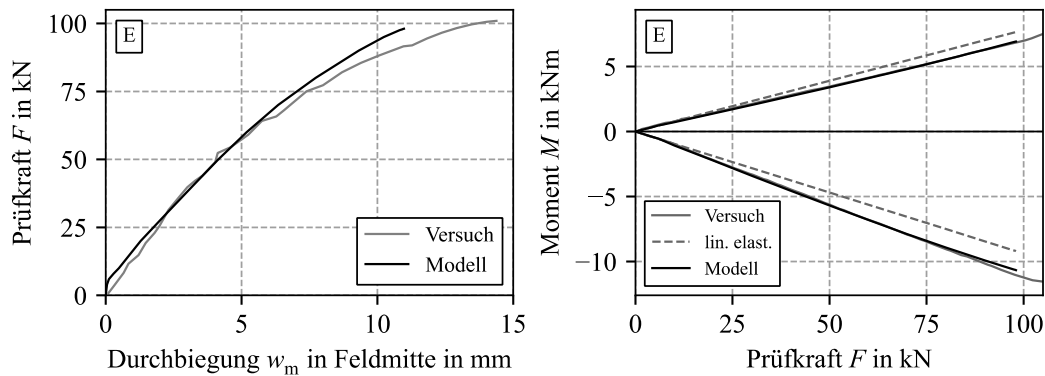


Abbildung 5-15 Links: Durchbiegung-Prüfkraft-Verlauf des Versuchs E aus Matos et al. (2012)
 Rechts: Momentenentwicklung des Versuchs E aus Matos et al. (2012)

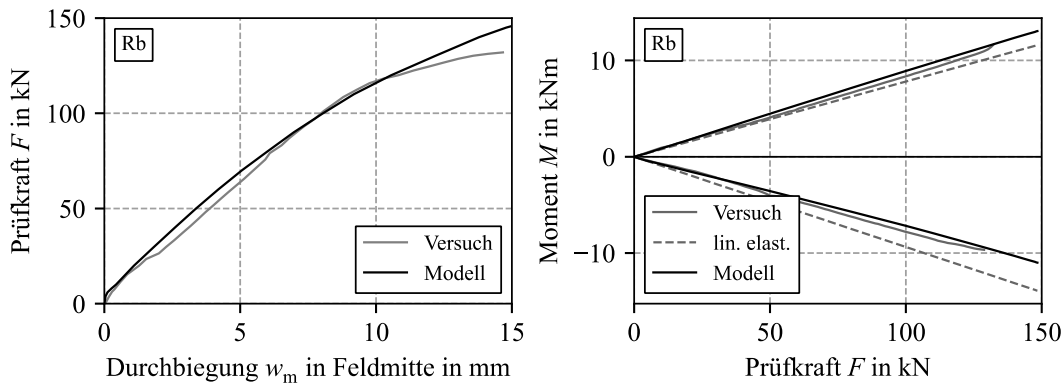


Abbildung 5-16 Links: Durchbiegung-Prüfkraft-Verlauf des Versuchs Rb aus Matos et al. (2012)
 Rechts: Momentenentwicklung des Versuchs Rb aus Matos et al. (2012)

5.4.3.3 Stahlbetonquerschnitte

Im letzten Teil der Überprüfung des Berechnungsmodells soll geprüft werden, ob das Modell zusätzlich in der Lage ist, die Verformungen und Momentenentwicklungen von Stahlbetonbauteilen zu berechnen. Hierzu wird eine bi-lineare Betonstahlkennlinie nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) zugrunde gelegt. Ist in den Bauteilen eine Schubbewehrung vorhanden, wird der Druckstrebenneigungswinkel ebenfalls mit dem in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) enthaltenen Ansatz bestimmt.

Zunächst wird hierfür das Beispiel aus der VDI-Richtlinie für Softwaregestützte Tragwerksberechnung VDI 6201 (2019), Anhang C, Blatt 2 herangezogen. Abbildung 5-17 stellt die, auf Grundlage mehrerer identischer Versuche ermittelten, Durchbiegungen in Feldmitte (rechts) sowie die Stahlkennlinie des verwendeten Bewehrungsstahls dar (links).

Das numerische Modell kann die Verformungen bis zum Erreichen der maximalen Tragfähigkeit wirklichkeitsnah abbilden. Da abfallende Bereiche der Momenten-Krümmungs-Beziehung nicht berücksichtigt werden, bricht die Berechnung bei Erreichen des maximalen Moments ab. Für die angestrebten exemplarischen Vergleiche des Umlagerungsverhaltens von FVK- und stahlbewehrten Bauteilen ist dies jedoch ausreichend.

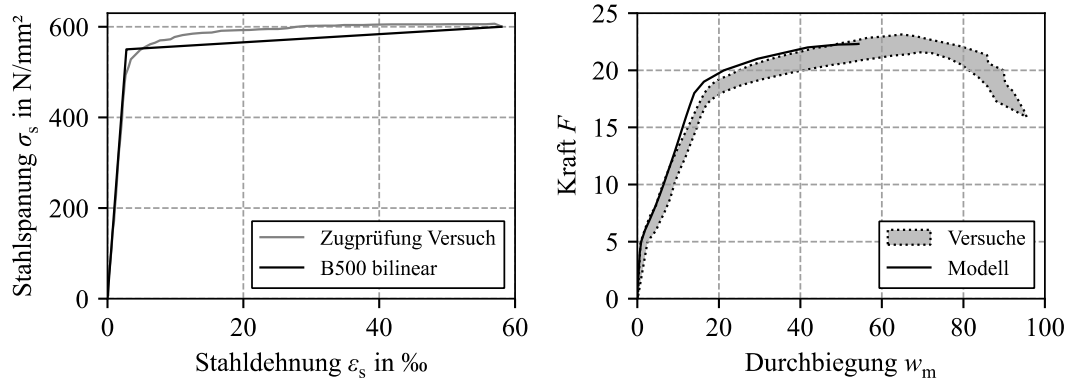


Abbildung 5-17 Links: Stahlkennlinie Bsp. aus VDI 6201 (2019), Anhang C
Rechts: Durchbiegung Bsp. aus VDI 6201 (2019), Anhang C

Zusätzlich wurden zwei Mehrfeldsysteme untersucht und nachgerechnet. In Abbildung 5-18 (links) ist die Momentenentwicklung des Versuchs PB I.2 aus Schlaich et al. (1982) dargestellt. Es zeigt sich, dass die Schnittgrößenumlagerung des Plattenbalkenquerschnitts näherungsweise erfasst werden kann. Noch bessere Ergebnisse wurden bei der Nachrechnung des zweifeldrigen Balkenversuchs aus do Carmo und Lopes (2005) erreicht. Die Momentenentwicklung des Bauteils VI-0.7 ist Abbildung 5-18 (rechts) zu entnehmen. Insbesondere die Umlagerungen infolge plastischer Querschnittskrümmungen können sehr gut abgebildet werden.

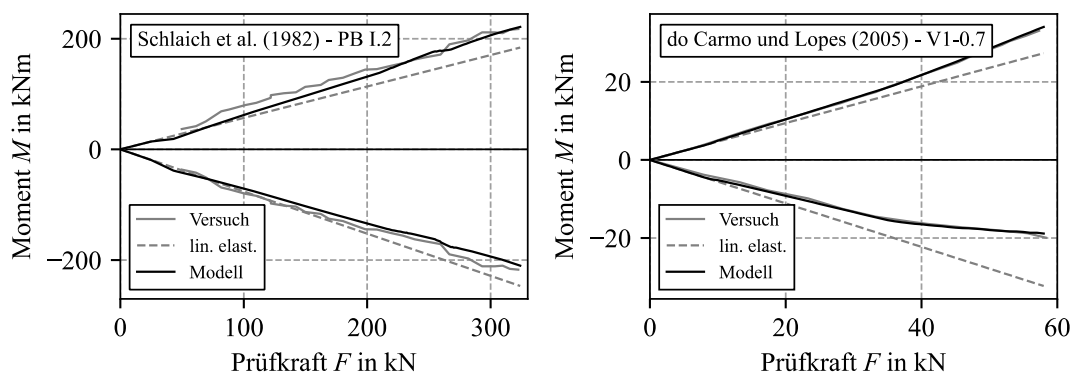


Abbildung 5-18 Links: Momentenentwicklung des Versuchs PB:I2 aus Schlaich et al. (1982)
Rechts: Momentenentwicklung des Versuchs VI-0.7 aus do Carmo und Lopes (2005)

5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein numerisches Berechnungsmodell auf der Basis nichtlinearer Materialgesetze entwickelt und beschrieben. Das Modell ist in der Lage, das Tragverhalten sowie die Schnittgrößenverteilung in bewehrten Betondurchlaufträgern wirklichkeitsnah zu beschreiben. Umfangreiche Vergleichsrechnungen mit experimentellen Untersuchungen – welche Literaturquellen entnommen sowie ergänzend im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden – zeigen, dass das erstellte und in diesem Kapitel beschriebene Berechnungsmodell eine wirklichkeitsnahe Beschreibung des Bauteilverhaltens statisch unbestimmter Durchlaufsysteme mit FVK-Bewehrung ermöglicht. Insbesondere die Entwicklung der Momente in Stütz- und Feldbereich kann auf Grundlage der nichtlinearen Werkstoffgesetze zutreffend abgebildet werden.

Darüber hinaus ist das Berechnungsmodell in der Lage die Bauteilverformungen und Momentenentwicklungen in statisch unbestimmten Ein- und Mehrfeldsystemen mit konventioneller Betonstahlbewehrung in sehr guter Übereinstimmung mit Versuchsdaten aus der Literatur zu bestimmen.

6 UNTERSUCHUNG DER SCHNITTGRÖßENVERTEILUNG IN FVK-BEWEHRTEN BETONBAUTEILEN

6.1 Einführung

Mit Hilfe des in Kapitel 5 entwickelten und validierten numerischen Berechnungsmodells wird in diesem Kapitel die Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Betonträgern mit FVK-Bewehrung untersucht. Hierbei wird sich auf balken- sowie plattenförmige Querschnitte beschränkt. Ziel ist die Beantwortung der Frage, wie stark sich die Schnittgrößen infolge der Steifigkeitsunterschiede der unterschiedlichen Tragwerksbereiche innerhalb des Bauteils umverteilen. Die Betrachtungen in diesem Kapitel finden zunächst ausschließlich unter Verwendung der Mittelwerte der Materialeigenschaften und der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons statt, da nur so eine wirklichkeitsnahe Modellierung des realen Bauteilverhaltens erwartet werden kann. Betrachtungen unter Berücksichtigung des normativ erforderlichen Sicherheitsniveaus erfolgen anschließend in Kapitel 7.

Wie bereits in Kapitel 2.4 ausgeführt, beeinflusst das Verhältnis der Bewehrungsmengen in Stütz- und Feldbereich das Umlagerungsverhalten von FVK-bewehrten Durchlaufsystemen erheblich. Daher finden zunächst Betrachtungen hinsichtlich der für übliche Praxisfälle zu erwartenden Bewehrungsgrade statt. Hierbei wird insbesondere auf den Unterschied zu konventionellen Stahlbetonbauteilen eingegangen. Die ermittelten Verhältnisse der Bewehrungsgrade stellen die zentrale Größe zur Untersuchung des Umlagerungsverhaltens auf Systemebene dar. Die Auswahl der weiteren zu betrachtenden Einflussgrößen orientiert sich an der Auflistung der Einflussgrößen auf das Umlagerungsverhalten in Stahlbetonbauteilen in Kapitel 2.3.4.2.

Um auf Querschnittsebene eine große Bandbreite an möglichen Konfigurationen zu erfassen, wird als zweite zentrale Größe der mechanische Bewehrungsgrad ω_{fm} nach Gl. 6-1 definiert. Dieser ermöglicht eine dimensionslose Beschreibung des Querschnitts unter Berücksichtigung der Baustofffestigkeiten. Es werden hierbei die Mittelwerte der Baustoffeigenschaften verwendet.

$$\omega_{fm} = \frac{A_{bew} \cdot f_{fm}}{b \cdot d \cdot f_{cm}} = \rho_{f,l} \cdot \frac{f_{fm}}{f_{cm}} = \rho_{f,l} \cdot \frac{\varepsilon_{fu,m} \cdot E_f}{f_{cm}} \quad \text{Gl. 6-1}$$

Der maximal zu betrachtende Bewehrungsgrad ergibt sich aus Begrenzungen hinsichtlich der Druckzonenhöhe auf Bemessungsniveau oder dem maximal zulässigen geometrischen Bewehrungsgrad. Die in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) geforderte Begrenzung der bezogenen Druckzonenhöhe ζ_d nach Gl. 2-5 ist für FVK-bewehrte Bauteile theoretisch nicht erforderlich, da die an sie geknüpfte Mindestduktilität bei diesen Bauteilen nicht zwangsläufig erreicht wird. Eine Begrenzung der Druckzonenhöhe ist zur Gewährleistung einer ausreichenden Versagensvorankündigung dennoch wünschenswert und wird z. B. in DAfStb

(2022) entsprechend der Regelung in DIN EN 1992-1-1/NA (2013) weiterhin gefordert. Jedoch ergibt sich bei einer maximalen Druckzonenhöhe auf Bemessungsniveau von $\xi_d = 0,45$ nach Gl. 2-9 ein Bemessungsbewehrungsgrad von nur $\omega_{fd,max} = \alpha_R \cdot \xi_d = 0,81 \cdot 0,45 = 0,36$. Die Umrechnung auf den korrespondierenden mittleren Bewehrungsgrad kann näherungsweise mit Gl. 6-2 erfolgen.

$$\omega_{fm} = \omega_{fd} \cdot \frac{f_{cd}}{f_{cm}} \cdot \frac{f_{fm}}{f_{fd}} \approx \omega_{fd} \cdot \frac{\alpha_{cc}}{\gamma_c} \cdot \gamma_f = \omega_{fd} \cdot \frac{0,85}{1,5} \cdot 1,3 = \omega_{fd} \cdot 0,74 \quad \text{Gl. 6-2}$$

Es ergibt sich ein entsprechend kleiner mechanischer Bewehrungsgrad von $\omega_{fm,max} = 0,27$.

Als weiteres Kriterium kann der maximal zulässige geometrische Bewehrungsgrad $\rho_{f,max}$ herangezogen werden. DIN EN 1992-1-1/NA (2013) legt diesen zu $\rho_{f,max} = 8 \%$ fest, abZ Z-1.6-238 (2019) fordert $\rho_{f,max} = 3,5 \%$. Abhängig von der Zugfestigkeit des verwendeten Bewehrungsmaterials ergibt sich ein großes Spektrum an möglichen maximalen, mittleren mechanischen Bewehrungsgraden. Für einen Beton C30/37 mit $f_{cm} = 37 \text{ N/mm}^2$ ergibt sich infolge der sehr unterschiedlichen Festigkeiten von FVK-Bewehrungsstäben eine Bandbreite von z. B. $\omega_{fm,max} = 0,6$ (mit $\rho_{f,max} = 3,5 \%$ und $f_{fm} = 630 \text{ N/mm}^2$) bis $\omega_{fm,max} = 4,3$ (mit $\rho_{f,max} = 8 \%$ und $f_{fm} = 2000 \text{ N/mm}^2$). In Anbetracht praxisrelevanter Bewehrungsgrade werden im Folgenden mechanische Bewehrungsgrade bis $\omega_{fm,max} = 0,5$ betrachtet. Vereinzelt werden – zu Demonstrationszwecken – auch höhere Bewehrungsgrade von bis zu $\omega_{fm,max} = 1,0$ untersucht.

Wie eingangs ausgeführt, wird im Folgenden zunächst die Frage beantwortet, welche Bewehrungsverhältnisse zwischen Stütz- und Feldbereich für übliche FVK-bewehrte Durchlaufsysteme zu erwarten sind. Im Anschluss daran wird das Verhalten auf Querschnittsebene mit Hilfe der Momenten-Krümmungs-Beziehung analysiert. Auf Grundlage der Erkenntnisse dieser beiden Betrachtungen wird das Umlagerungsverhalten auf Systemebene in Abhängigkeit verschiedener Einflussfaktoren untersucht. Hierbei werden einleitend zunächst die Unterschiede des Systemverhaltens von Stahlbeton- und FVK-bewehrten Bauteilen aufgezeigt und die in Kapitel 2.3 und 2.4 angestellten theoretischen Überlegungen vertieft.

6.2 Ermittlung der relevanten Bewehrungsverhältnisse

6.2.1 Allgemeines

In Kapitel 2.4 wurde bereits ausgeführt, dass FVK-bewehrte Tragwerke nicht in der Lage sind, Schnittgrößen infolge plastischer Verformungen umzuverteilen. Eine Umlagerung findet ausschließlich infolge Rissbildung in Abhängigkeit der Steifigkeitsverhältnisse zwischen Stütz- und Feldquerschnitt statt. Bei rechteckigen, über die Systemlänge unveränderlichen Querschnitten wird dieses Steifigkeitsverhältnis ausschließlich von der vorhandenen Bewehrungsmenge determiniert. Zur Untersuchung des Umlagerungsverhaltens ist daher

die Kenntnis über die in praxisüblichen Bauteilen auftretenden Bewehrungsmengen in Stütz- und Feldbereich unerlässlich.

Bei der konventionellen Bemessung eines Durchlaufsystems werden die Bewehrungsmengen in dem jeweiligen Tragwerksbereich ausgehend von den Momentenbeanspruchungen dieser Bereiche festgelegt. Das einwirkende Moment ergibt sich – bei dem Auftreten von Nutzlasten – aus der jeweils ungünstigsten Laststellung. Während das Eigengewicht der Konstruktion auf allen Feldern wirkt, können Nutzlasten auch ausschließlich auf einzelnen Feldern auftreten. Für einen Zweifeldträger ergibt sich beispielsweise das maximale Stützmoment bei Ansatz von Eigengewicht und Nutzlast auf beiden Feldern, während das maximale Feldmoment bei Wirkung der Nutzlast in nur einem der Felder entsteht. Für Innen- und Randfelder anderer Durchlaufsysteme ergeben sich entsprechende Lastfallkombinationen. Dies macht eine Berücksichtigung des Verhältnisses dieser beiden Lastarten erforderlich. Hierzu wird das Lastverhältnis η_{Last} nach Gl. 6-3 eingeführt. Mit steigendem Nutzlastanteil nähert sich η_{Last} dem Wert 1 an, wirkt keine Nutzlast, ergibt sich $\eta_{\text{Last}} = 0$.

$$\eta_{\text{Last}} = \frac{q_k}{q_k + g_k} \quad \text{Gl. 6-3}$$

mit:

- q_k Charakteristische Nutzlast
- g_k Charakteristische Last aus Eigengewicht

Da die Definition von η_{Last} unter Verwendung der charakteristischen Werte der Einwirkungen erfolgt, ist zudem zu beachten, dass diese Lasten im Zuge der Bemessung mit Teilsicherheitsbeiwerten zu beaufschlagen sind. DIN EN 1990 (2011) schreibt für die ungünstige Wirkung von Eigengewichtslasten einen Teilsicherheitsbeiwert von $\gamma_G = 1,35$ vor, der Teilsicherheitsbeiwert von Nutzlasten beträgt $\gamma_Q = 1,5$.

Für typische Hochbaukonstruktionen im Massivbau ergibt sich unter Annahme einer Deckenstärke von 10 cm bis 25 cm sowie eines Nutzlastbereichs von 1,5 kN/m² (Nutzungskategorie A: Wohn- und Aufenthaltsräume) und 5,0 kN/m² (Nutzungskategorie C: Versammlungsräume) ein praxisrelevanter Bereich von $0,2 < \eta_{\text{Last}} < 0,67$. Die Nutzlasten wurden gemäß DIN EN 1991-1-1/NA (2010) Tabelle 6.1DE angenommen.

In Anhang D sind für die statischen Systeme „Zweifeldträger“, „Innenfeld“ und „Randfeld“ die relevanten Laststellungen zur Ermittlung der maximalen Stütz- und Feldmomente dargestellt. Eine Auswertung dieser Momente führt auf die in Abbildung 6-1 dargestellten Verhältnisse von Bemessungsstütz- zu Bemessungsfeldmoment in Abhängigkeit des Lastverhältnisses. Für das Randfeld ergeben sich infolge der nur einseitigen Durchlaufwirkung die geringsten Verhältnisse. Wie in den folgenden Kapiteln noch gezeigt wird, ergeben sich

für das Zweifeldsystem die größten und ungünstigsten Umlagerungen. Da hier die Verhältnisse der Bemessungsmomente nur geringfügig kleiner als die des Innenfelds sind, wird in den folgenden Betrachtungen ein Zweifeldsystem verwendet. Im Regelfall ergibt sich für $\eta_{\text{Last}} = 0,5$ ein Verhältnis der Momente $M_{\text{St,Ed}}/M_{\text{F,St}}$ von etwa 1,5.

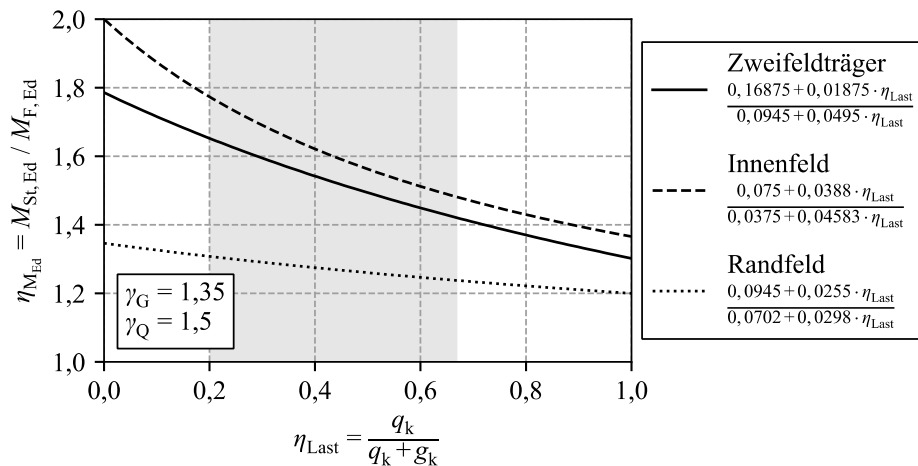


Abbildung 6-1 Verhältnisse der Bemessungsmomente

6.2.2 Bewehrungsverhältnisse bei konventioneller Bemessung

Auf Grundlage der Bemessungsmomente in Stütz- und Feldbereich können die Bewehrungsverhältnisse bestimmt werden, welche sich bei der Bemessung von FVK-bewehrten Durchlaufsystemen ergeben. Ansätze und Erläuterungen zur Biegebemessung von FVK-bewehrten Querschnitten können fib bulletin 40 (2007), Niewels (2008), Rempel (2018), El-Ghadioui (2020) oder DAfStb (2022) entnommen werden. Wie im klassischen Stahlbetonbau findet eine Bemessung auf Grundlage der Bemessungswerte der Werkstoffeigenschaften statt. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons wird durch das Parabel-Rechteck-Diagramm beschrieben, die FVK-Bewehrung wird linear-elastisch modelliert.

Die Bemessung kann analog zum Stahlbetonbau mit Hilfe dimensionsloser Beiwerte und der Iteration der Dehnungsebene erfolgen. Diese lässt sich analytisch durchführen und soll hier nicht dargelegt werden. Für Erläuterungen zum Vorgehen wird auf die oben aufgeführte Literatur verwiesen.

Durch Vorgabe des einwirkenden Moments in dimensionsloser Form (siehe Gl. 6-4; eine ggf. vorhandene äußere Normalkraft ist zuvor in die Lage der Zugbewehrung zu verschieben) ergibt sich durch die Iteration der Dehnungsebene der vorliegende Dehnungszustand. Mit diesem lässt sich mit Gl. 6-5 die erforderliche Bewehrungsmenge bestimmen.

$$\mu_{\text{Ed,s/f}} = \frac{M_{\text{Ed,s/f}}}{b \cdot d^2 \cdot f_{\text{cd}}} \quad \text{Gl. 6-4}$$

$$A_{\text{s/f,erf}} = \frac{1}{\sigma_{\text{s/f,d}}} \cdot \left(\frac{M_{\text{Ed,s/f}}}{\zeta \cdot d} \right) = \frac{1}{\varepsilon_{\text{s/f}} \cdot E_{\text{s/f}}} \cdot \left(\frac{M_{\text{Ed,s/f}}}{\zeta \cdot d} \right) \quad \text{Gl. 6-5}$$

mit:

- $\mu_{\text{Ed,s/f}}$ Bezogenes einwirkendes Moment
- f_{cd} Bemessungswert der Betondruckfestigkeit
- $\sigma_{\text{s/f,d}}$ Bewehrungsspannung
- $\varepsilon_{\text{s/f}}$ Bewehrungsdehnung
- $E_{\text{s/f}}$ E-Modul der Bewehrung
- $\zeta = z / d$ (Bezogener Hebelarm der inneren Kräfte)

In Abbildung 6-2 ist das Ergebnis einer solchen Bemessung in Form eines vereinfachten Bemessungsdiagramms für verschiedene Bewehrungsarten dargestellt. Die charakteristischen Langzeitfestigkeiten sowie E-Moduln der FVK-Bewehrungen wurden abZ Z-1.6-238 (2019) (GFK) und solidian GmbH (2023) (CFK) entnommen. Für den Betonstahl wurde die Nachverfestigung nach Erreichen der Streckgrenze vernachlässigt.

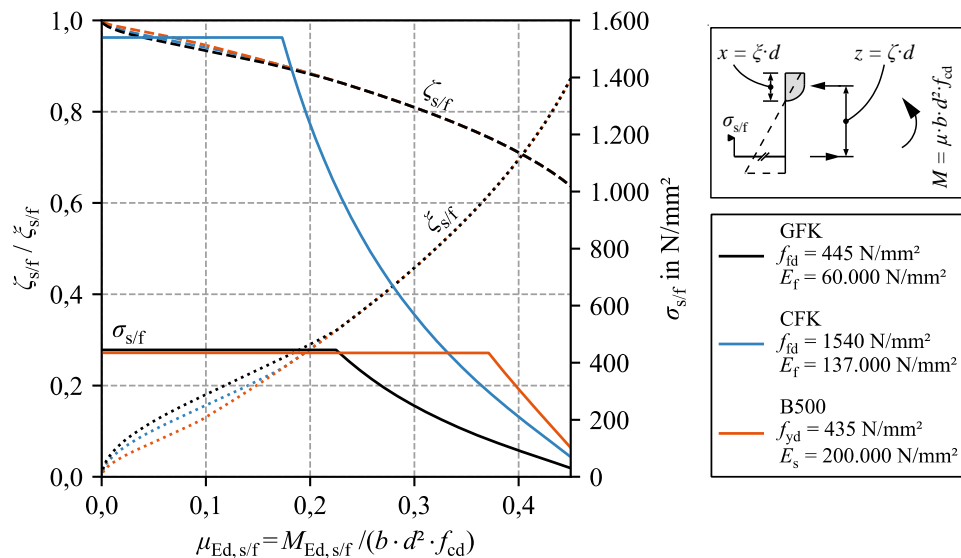


Abbildung 6-2 Beispielhaftes Bemessungsdiagramm für GFK-, CFK- und betonstahlbewehrte Querschnitte

Neben der bezogenen Druckzonenhöhe $\zeta_{\text{s/f}}$ sowie dem bezogenen Hebelarm der inneren Kräfte $\zeta_{\text{s/f}}$ sind in Abbildung 6-2 die im jeweiligen Bewehrungsmaterial vorliegenden Bemessungsspannungen $\sigma_{\text{s/f}}$ aufgetragen (in den meisten allgemeinen Bemessungsdiagrammen wird stattdessen die Bewehrungsdehnung dargestellt, hier wird jedoch bewusst diese

Darstellung verwendet). Neben kleinen Unterschieden in Druckzonenhöhe und Hebelarm fällt auf, dass die beiden FVK-Bewehrungen bereits bei bezogenen Momenten $\mu_{Ed,GFK} > 0,225$ und $\mu_{Ed,CFK} > 0,174$ nicht mehr die maximale Bemessungsspannung erreichen. An diesen Punkten findet eine Änderung des Versagensmodus von Bewehrungs- auf Betondruckversagen statt. Dieser Punkt wird als Balance Point bezeichnet, der zugehörige Bewehrungsgrad auch als „ausgeglichener Bewehrungsgrad“. Im Balance Point erreichen sowohl Beton als auch Bewehrung die Bruchspannung (siehe hierzu auch Abbildung 2-11). Dieser Punkt wird für die Betonstahlbewehrung zwar schon bei $\mu_{Ed,s} = 0,095$ erreicht, aufgrund des Fließvermögens der Bewehrung kann jedoch immer noch die volle Bemessungsfestigkeit aktiviert werden (bei Berücksichtigung einer Nachverfestigung ist diese entsprechend erhöht). Erst wenn der Betonstahl seine Fließgrenze nicht mehr erreicht, nimmt die Bemessungsspannung ab ($\mu_{Ed,s} > 0,37$). Im Stahlbetonbau gilt dieser Bereich als unwirtschaftlich und wird vermieden oder es wird eine Druckbewehrung vorgesehen.

Da die vorliegende Bewehrungsspannung als Divisor in die Bestimmung der erforderlichen Bewehrung eingeht (siehe Gl. 6-5), steigt der Bewehrungsbedarf mit abnehmender Bewehrungsspannung. In Abbildung 6-3 (links) sind die erforderlichen geometrischen Bewehrungsgrade in Abhängigkeit des bezogenen Moments aufgetragen. Diese steigen mit Einsetzen des Betonversagens (GFK/CFK) – und somit bei Überschreiten des Balance Points – bzw. Unterschreiten der Fließdehnung (Betonstahl) stark an.

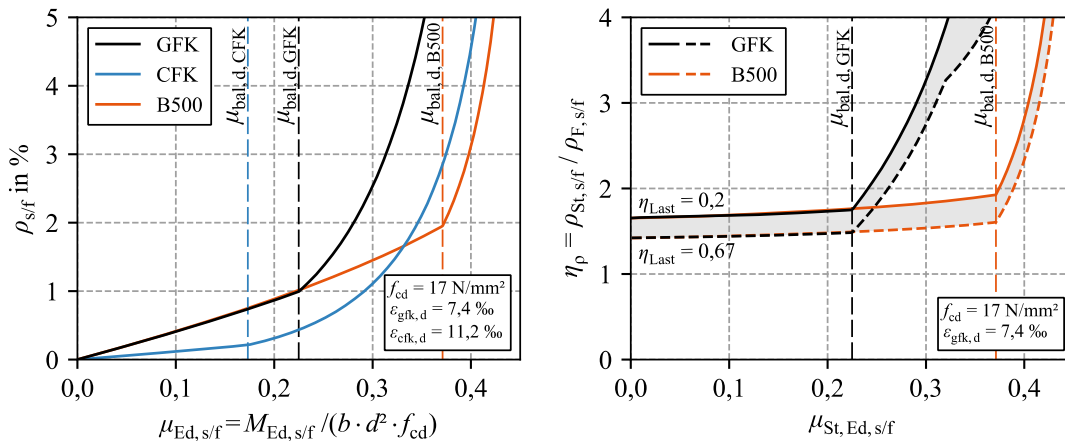


Abbildung 6-3 Links: Erforderlicher geometrischer Bewehrungsgrad
Rechts: Verhältnis der geometrischen Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich

Dies wirkt sich auch auf das Bewehrungsverhältnis zwischen Stütz- und Feldbereich bei der Bemessung von Durchlaufträgern aus. Hierzu wird das Verhältnis der Bewehrungsgrade im Stütz- und Feldbereich η_ρ nach Gl. 6-6 eingeführt.

$$\eta_{\rho} = \frac{\rho_{\text{St,f}}}{\rho_{\text{F,f}}} \quad \text{Gl. 6-6}$$

In Abbildung 6-3 (rechts) ist dieses Verhältnis η_{ρ} für verschiedene Lastverhältnisse η_{Last} für die GFK- sowie Betonstahlbewehrung aufgetragen. Hierzu wurden Stütz- und Feldbereich nach Vorgabe des bezogenen Moments $\mu_{\text{St,Ed}}$ im Stützbereich nach Abbildung 6-2 bemessen. Da die Bewehrung im Stützbereich des Stahlbetonquerschnitts erst bei vergleichsweise großen bezogenen Momenten die Streckgrenze nicht mehr erreicht, entspricht das Bewehrungsverhältnis in großen Bereichen des einwirkenden Moments in etwa dem Verhältnis von Stütz- zu Feldmoment nach Abbildung 6-1.

Beim GVK-bewehrten Bauteil hingegen steigt das Bewehrungsverhältnis bereits früh stark an. Ab ca. $\mu_{\text{St,Ed,f}} > 0,225$ erreicht der Beton im Stützbereich seine Bruchstauchung und Betondruckversagen setzt ein. Dies führt zu einer deutlichen Zunahme der erforderlichen Bewehrung (siehe Abbildung 6-3 (links)). Da die Momentenbeanspruchung im Feldbereich – in Abhängigkeit des Lastverhältnisses – kleiner ist, erfolgt die Bewehrungswahl hier noch infolge Bewehrungsversagen. Dies führt zu einem Anwachsen des Bewehrungsverhältnisses η_{ρ} .

Es zeigt sich somit, dass sich in Abhängigkeit des einwirkenden bezogenen Moments sehr unterschiedliche Verhältnisse der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich ergeben können. Bei geringen Beanspruchungen, in denen sowohl Stütz- als auch Feldbereich infolge des Erreichens der Bewehrungsbruchspannung versagen, nimmt das Bewehrungsverhältnis η_{ρ} Werte zwischen 1,4 und 1,75 an. Dies entspricht in etwa dem Verhältnis der Bemessungsmomente (siehe Abbildung 6-1). Sobald das bezogene Moment Werte erreicht, die zu einem Wechsel des Versagensmodus im Stützbereich führen, weichen die Bewehrungsverhältnisse jedoch stark vom Verhältnis der Bemessungsmomente ab. Die erforderliche Bewehrungsmenge im Stützbereich steigt stark an und das Verhältnis der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich vergrößert sich entsprechend.

Es wird zudem deutlich, dass eine reguläre Bemessung von FVK-bewehrten Durchlaufsystemen immer zu einer größeren Bewehrungsmenge im Stütz- als im Feldbereich führt ($\eta_{\rho} > 1$). Eine gezielte Überbewehrung des Feldbereichs kann zwar zu Verhältnissen $\eta_{\rho} < 1$ führen, dies entspricht jedoch nicht dem Grundgedanken einer wirtschaftlichen Bauteilbemessung und ist daher nur in ausgewählten Sonderfällen in Betracht zu ziehen (auch wenn dies in der Literatur teilweise unterstellt wird, vgl. Kapitel 2.4.3). Ebenso ist eine gezielte Reduzierung der Stützbewehrung zur Bewehrungseinsparung bei FVK-bewehrten Bauteilen – anders als im Stahlbetonbau (vgl. Kapitel 2.3 und 2.4) – nicht möglich. Der Fokus der Untersuchung des Umlagerungsverhaltens wird daher auf Bewehrungsverhältnisse $\eta_{\rho} \geq 1$ gelegt. Des Weiteren ist insbesondere der belastungsabhängige Wechsel des Versagensmodus im Stützbereich zu untersuchen.

6.3 Untersuchung der Momenten-Krümmungs-Beziehung

6.3.1 Allgemeines

Bevor das Umlagerungsverhalten FVK-bewehrter Durchlaufträger auf Systemebene untersucht wird, findet zunächst eine isolierte Betrachtung des Querschnittsverhaltens statt. Das Verkrümmungsverhalten eines bewehrten Betonquerschnitts unter Momentenbeanspruchung bestimmt maßgeblich das Verformungs- und Tragverhalten eines Systems. Für die folgenden Betrachtungen werden normierte Größen verwendet, um eine bessere Vergleichbarkeit bei gleichzeitigem Erfassen vieler Einflussgrößen zu erreichen. Neben dem bezogenen mechanischen Bewehrungsgrad wird hierzu das bezogene Moment $\mu = M/(b \cdot d^2 \cdot f_{cm})$ sowie die bezogene Krümmung $\kappa \cdot d$ verwendet. Diese Größen ermöglichen die Darstellung unabhängig von den Querschnittsmaßen sowie Baustofffestigkeiten. Für den Referenzquerschnitt wird ein Beton der Festigkeitsklasse C30/37 gewählt. Als Bewehrungsmaterial wird ein markttypischer GFK-Bewehrungsstab mit einem E-Modul $E_f = 60.000 \text{ N/mm}^2$ und einer mittleren Langzeitbruchdehnung von $\epsilon_{f,um} = 10 \text{ ‰}$ verwendet.

Einleitend gibt Abbildung 6-4 eine Übersicht über den Einfluss des mechanischen Bewehrungsgrads auf die Querschnittsverkrümmung. Betrachtet werden Bewehrungsgrade zwischen $\omega_{fm} = 0,02$ und $\omega_{fm} = 1$, wobei der Bewehrungsgrad im Balance Point ebenfalls dargestellt ist. Da in diesem Punkt sowohl Beton als auch Bewehrung die Bruchdehnung erreichen, stellt sich hier die größte Krümmung ein (siehe hierzu auch Abbildung 2-11). Ein größerer mechanischer Bewehrungsgrad führt zu einem Versagen des Querschnitts auf Beton und infolge der größeren bezogenen Betondruckzone zu einer größeren bezogenen Tragfähigkeit. Dies führt entsprechend zu kleineren Querschnittsverkrümmungen. Bewehrungsgrade $\omega_{fm} < \omega_{fm,bal}$ rufen ein Bewehrungsversagen hervor. Die Druckzonenhöhe sinkt, die Druckzone wird eingeschnürt und Krümmung sowie Tragfähigkeit sinken.

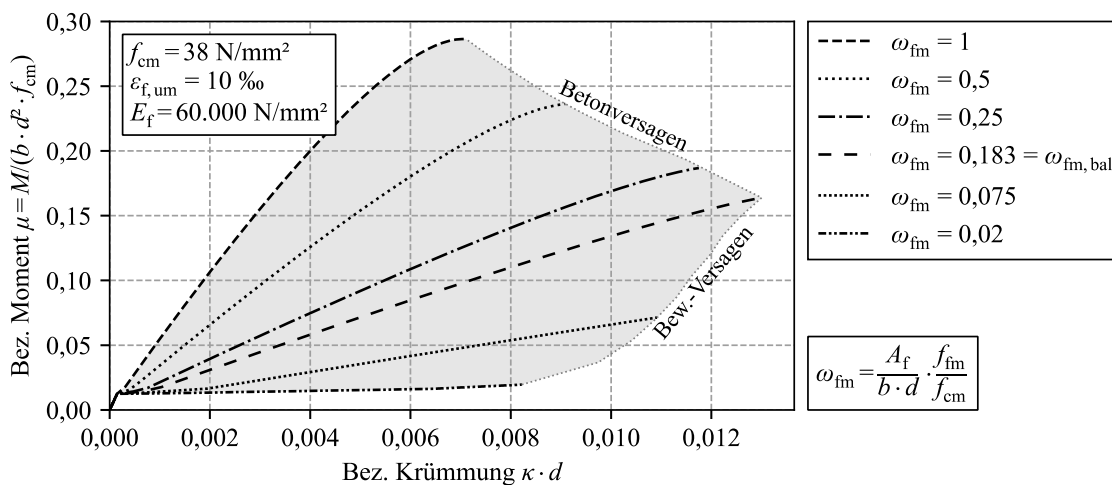


Abbildung 6-4 Momenten-Krümmungs-Beziehungen für verschiedene mechanische Bewehrungsgrade

Für größere Bewehrungsgrade ist in Abbildung 6-4 der Einfluss der nichtlinearen und nach Erreichen der Maximalspannung abfallenden Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons zu erkennen. Während die Kurven bei Bewehrungsgraden $\omega_{fm} < \omega_{fm,bal}$ nach Erreichen des Rissmoments fast linear verlaufen, weisen sie mit Annäherung an den größten betrachteten Bewehrungsgrad mit steigender Beanspruchung einen nichtlinearen Verlauf auf. Es ist anzumerken, dass fast alle Kurven streng monoton steigen. Lediglich bei einem sehr hohen Bewehrungsgrad $\omega_{fm} = 1$ zeigt sich nach Erreichen der Tragfähigkeit ein leichter Abfall der Kurve. Während dieser Bereich bei Stahlbetonquerschnitten durchaus ausgeprägt sein kann, hat er in FVK-bewehrten Querschnitten keine Relevanz.

6.3.2 Einfluss der Betonfestigkeitsklasse

In Abbildung 6-5 ist der Einfluss der Betonfestigkeitsklasse auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung dargestellt. Betrachtet werden neben dem Referenzbeton C30/37 die Festigkeitsklassen C16/20 sowie C50/60. Zum Vergleich ist zusätzlich ein Beton der hochfesten Betonfestigkeitsklasse C80/95 dargestellt, welcher jedoch nicht Gegenstand der Untersuchung ist. Infolge der bezogenen Darstellung wirkt sich die Festigkeitsklasse bei den Normalbetonen nicht auf die Tragfähigkeit aus. Auffällig ist die mit kleiner werdenden Betonfestigkeit zunehmende Völligkeit der Kurven. Dies ist auf das größere Verformungsvermögen niederfester Betone zurückzuführen. Dieser Effekt ist bei Querschnitten mit einer großen bezogenen Druckzonenhöhe (großer mechanischer Bewehrungsgrad) stärker ausgeprägt. Besonders auffällig ist dies bei dem hochfesten Beton. Bei dem abgebildeten Beton C80/95 betragen sowohl die Dehnung bei Erreichen der Betonfestigkeit als auch die Bruchdehnung $\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{cu} = 2,8 \text{ ‰}$. Die Spannung in der Betondruckzone fällt nach Erreichen von f_{cm} demnach nicht mehr ab. Stattdessen versagt der Querschnitt, was zu einem Absinken der bezogenen Tragfähigkeit führt.

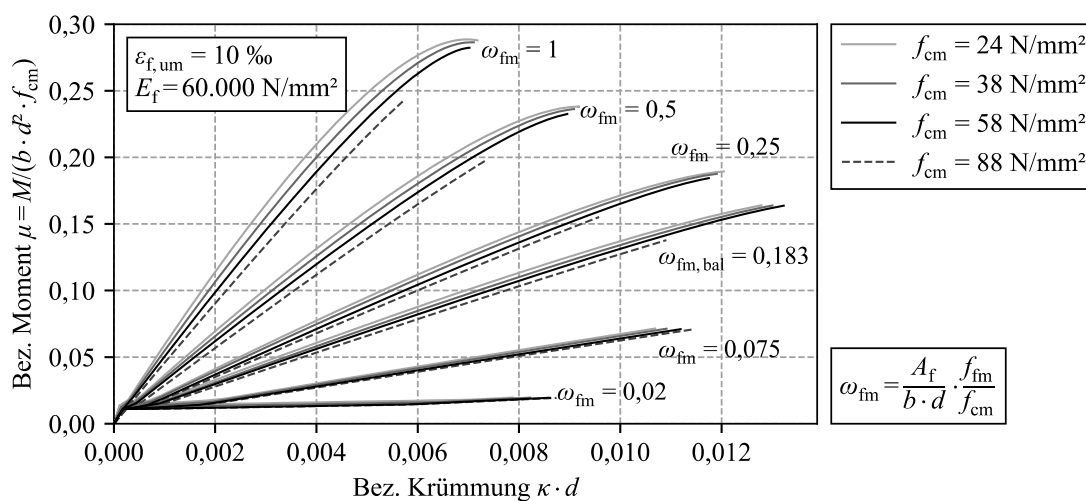


Abbildung 6-5 Einfluss der Betonfestigkeit auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung

6.3.3 Einfluss der Bewehrungsbruchdehnung

Da die Bewehrungsfestigkeit linear von der Bruchdehnung $\varepsilon_{f,um}$ und dem E-Modul E_f abhängt, ergibt sich infolge der Variation des E-Moduls in der gewählten bezogenen Darstellungsform keine Änderung in der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Die Variation der Bewehrungsbruchdehnung ist in Abbildung 6-6 dargestellt. Infolge einer höheren Bruchspannung ist der Querschnitt in der Lage größere Krümmungen aufzunehmen. Dies äußert sich insbesondere im Bereich kleiner Bewehrungsgrade, in denen der Querschnitt ein Bewehrungsversagen aufweist. Zudem ändert sich mit der Bewehrungsfestigkeit der ausgeglichene Bewehrungsgrad $\omega_{fm,bal}$, in welchem ein Wechsel des Versagensmodus stattfindet. Die zur Bewehrungsfestigkeit gehörenden Werte für $\omega_{fm,bal}$ sind in Abbildung 6-6 angegeben. Mit steigender Bewehrungsfestigkeit nimmt $\omega_{fm,bal}$ ab, der Wechsel von Bewehrungs- auf Betonversagen findet demnach bei einem geringeren mechanischen Bewehrungsgrad statt. Mit steigender Bewehrungsfestigkeit (und damit auch steigender Bruchspannung) sinkt zudem das aufnehmbare bezogene Moment bei gleichem mechanischen Bewehrungsgrad. Dies ergibt sich in der bezogenen Darstellung aus der größeren Bruchspannung, welche zu kleineren geometrischen Bewehrungsgraden führt.

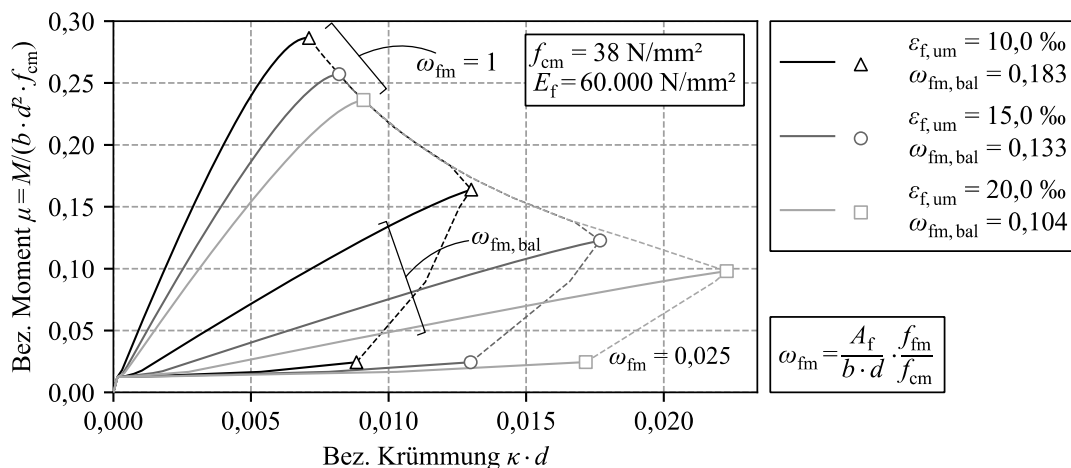


Abbildung 6-6 Einfluss der Bewehrungsbruchdehnung auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung

6.3.4 Einfluss einer umschnürten Druckzone

Wie in Kapitel 4.2.1.3 dargestellt, kann die Tragfähigkeit einer Betondruckzone durch die Erzeugung eines mehraxialen Spannungszustandes infolge einer Bügelbewehrung gesteigert werden. Hierzu wird in FVK-bewehrten Bauteilen sowohl eine Bügelbewehrung aus Betonstahl als auch aus FVK verwendet (vgl. Literaturstudie in Kapitel 2.4.3). Nach Ansicht des Autors hat die Verwendung von Betonstahlbügeln – wie sie in den experimentellen Untersuchungen primär genutzt wurde, um ein Schubversagen der Bauteile zu verhindern – keine Praxisrelevanz. Der Vorteil einer korrosionsresistenten Bewehrung entfällt beim Einbau von Bügeln aus Betonstahl. Damit wird in den meisten Praxisanwendungen

der Entwurf des Bauteils aus konventionellem Stahlbeton wahrscheinlich. Der Forschungsstand zur Umschnürungswirkung infolge von FVK-Bügeln ist aktuell jedoch noch begrenzt. Während zu umwickelten Druckgliedern zahlreiche Modelle und Untersuchungen vorliegen, wurde der mehraxiale Spannungszustand in Druckzonen biegebeanspruchter Bauteile bis jetzt kaum untersucht (siehe Kapitel 4.2.1.3). Der zur Modellierung gewählte Ansatz nach Teng et al. (2009) ermöglicht dennoch eine Abschätzung der Effekte infolge Umschnürungswirkung.

In Abbildung 6-7 ist der Einfluss zweier Bügelbewehrungsgrade $\rho_{f,w} = a_{f,w} / b$ auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung dargestellt. Betrachtet wurden mechanische Bewehrungsgrade $0,015 < \omega_{fm} < 0,5$. Für ein Versagen infolge Überschreitens der Betondruckfestigkeit steigen mit der Menge an Bügelbewehrung sowohl bezogene Tragfähigkeit als auch Krümmung. Auf Bewehrungsgrade $\omega_{fm} < \omega_{fm,bal} = 0,183$ hat eine Bügelbewehrung naturgemäß keine Auswirkungen. Die Steigerungen von Tragfähigkeit und Krümmung sind zwar nicht unerheblich, ändern aber das grundlegende Tragverhalten nicht. Darüber hinaus wurden für die Untersuchung vergleichsweise hohe Bügelbewehrungsgrade angenommen ($\rho_{f,w} = 0,75\%$ entspricht bei $b = 0,2\text{ m}$ einer Bügelanordnung von $\text{Ø}10\text{-}10/2\text{s}$). Es ist fraglich inwiefern diese in der Praxis vorzufinden sind. Daher wird eine Umschnürungswirkung in den folgenden Untersuchungen nicht angesetzt.

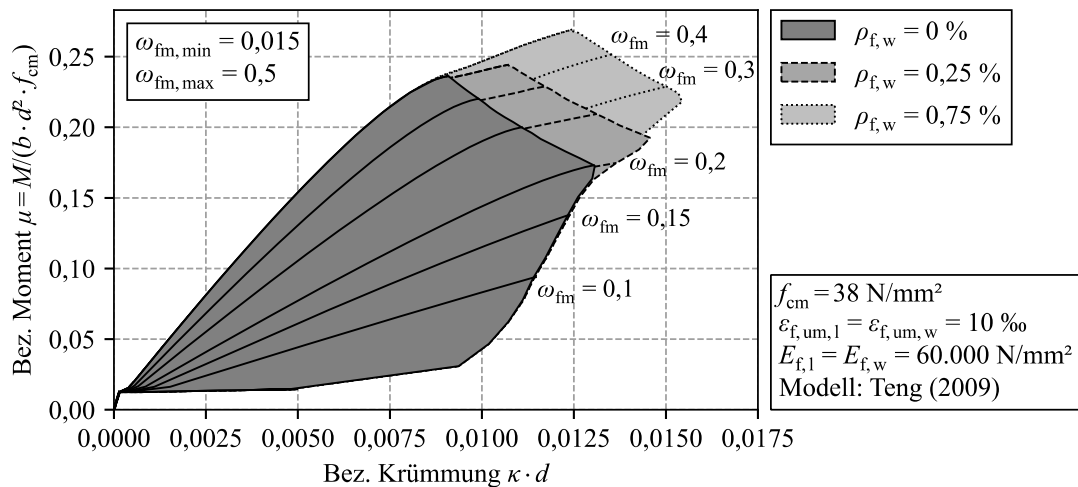


Abbildung 6-7 Einfluss einer Bügelbewehrung auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung

6.3.5 Zusatzkrümmung infolge Schubrissbildung

Wie in Kapitel 4.6.2 ausgeführt, beeinflusst das Auftreten von Schubrissen und die damit einhergehende Erhöhung der Bewehrungsspannung das Krümmungsverhalten des Querschnitts. Dies wurde in Kapitel 5.2.6 durch Aufbringen einer zusätzlichen Normalkraft auf Querschnittsebene modelliert. In Abbildung 6-8 sind die Auswirkungen dieser Normalkraft

auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung dargestellt. Die äußere Normalkraft wird in bezogener Form $\nu = N/(b \cdot h \cdot f_{cm})$ angegeben. Es zeigt sich, dass eine Vergrößerung der Krümmung bei Bewehrungsgraden $\omega_{fm} > \omega_{fm,bal}$ den größten Einfluss auf die Krümmung hat. Infolge der steigenden Druckzonenhöhe mit größeren mechanischen Bewehrungsgraden verliert sie an Einfluss. Beim kleinsten untersuchten Bewehrungsgrad kann die Zusatzkraft von $\nu_{Schubr.} = 0,08$ nicht mehr aufgenommen werden, die vorhandene Bewehrungsmenge reicht hierzu nicht aus. Für Berechnungen auf Systemebene bedeutet dies, dass die äußeren Normalkräfte – zwischen welchen im Anschluss interpoliert wird, um die im jeweiligen Querschnitt vorliegende zusätzliche Normalkraft abzubilden – im Rahmen der Querschnittsberechnung in kleineren Schritten zu steigern sind.

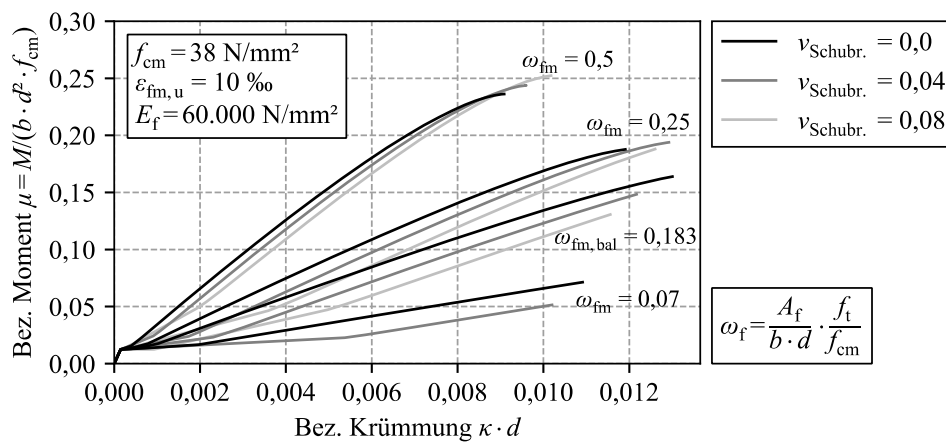


Abbildung 6-8 Einflüsse infolge zusätzlicher Normalkraft zur Erfassung von Schubrisen

6.4 Vergleich von Stahl- und FVK-bewehrten Betonbalken

6.4.1 Allgemeines

Bevor in Kapitel 6.5 das Momentenumlagerungsverhalten statisch unbestimmter Betonträger mit FVK-Bewehrung eingehend untersucht wird, sollen zunächst die theoretischen Überlegungen, welche in Kapitel 2.3.2 und 2.4.1 angestellt wurden, überprüft und eingeordnet werden. Hierzu werden zum einen die Unterschiede des Querschnittsverhaltens betrachtet, zum anderen das Systemverhalten simuliert. Bei der Bauteildimensionierung wird hierbei eine linear-elastische Schnittgrößenverteilung zu Grunde gelegt.

6.4.2 Vergleich der Momenten-Krümmungs-Beziehung

Da Bewehrungsmaterialien aus FVK kein plastisches Verformungsvermögen besitzen, unterscheidet sich die Momenten-Krümmungs-Beziehung bei FVK-bewehrten Querschnitten deutlich von dem Verhalten klassischer Stahlbetonquerschnitte. In Abbildung 6-9 sind die Momente-Krümmungs-Beziehungen verschiedener Bewehrungsarten für

$0,015 < \omega_{f/y} < 0,5$ dargestellt. Für die FVK-bewehrten Querschnitte bezieht sich der mechanische Bewehrungsgrad auf die mittlere Bewehrungsfestigkeit, bei dem Stahlbetonquerschnitt auf die mittlere Streckgrenze. Die Materialeigenschaften der GFK-Bewehrung sind an abZ Z-1.6-238 (2019) angelehnt, die Eigenschaften der CFK-Bewehrung ist solidian GmbH (2023) entnommen. Das Querschnittsverhalten des Stahlbetonquerschnitts wurde auf Grundlage eines normalduktilen Betonstahls berechnet.

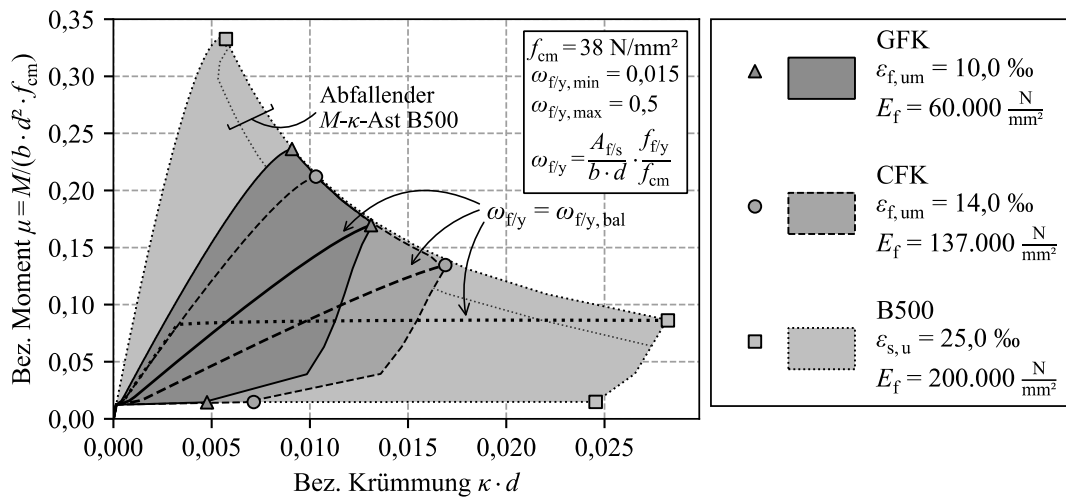


Abbildung 6-9 Vergleich der Momenten-Krümmungs-Beziehungen GFK-, CFK- und betonstahlbewehrter Querschnitte

In Abbildung 6-9 sind jene Bereiche grau schattiert hinterlegt, welche der Verlauf der Momenten-Krümmungs-Beziehung des jeweiligen Bewehrungsmaterials annehmen kann. Zusätzlich ist diejenige Momenten-Krümmungs-Beziehung explizit angegeben, die zum jeweiligen ausgeglichenen Bewehrungsgrad $\omega_{f/y,bal}$ gehört.

Infolge der normierten Darstellung ergibt sich für den Stahlbetonquerschnitt aufgrund der im Vergleich zur FVK-Bewehrung geringen Bewehrungsfestigkeit die größte absolute Bewehrungsfläche. Zusammen mit der großen bezogenen Druckzonenhöhe infolge der großen Bewehrungssteifigkeit führt dies zur größten bezogenen Tragfähigkeit. Der Einfluss der Bewehrungssteifigkeit fällt insbesondere im Vergleich zum GFK-bewehrten Querschnitt auf. Die Bruchspannung der GFK-Bewehrung ist nur geringfügig größer als die des Betonstahls ($f_{GFK,m} = 600 \text{ N/mm}^2$ zu $f_{ym} = 500 \text{ N/mm}^2$). Aufgrund der stärkeren Einschnürung der Druckzone infolge des geringen E-Moduls der GFK-Bewehrung fällt die Tragfähigkeit jedoch geringer aus. Des Weiteren erreicht der Stahlbetonquerschnitt deutlich größere bezogene Bruchkrümmungen.

Insbesondere die Form der Momenten-Krümmungs-Beziehungen ist hervorzuheben. In Abbildung 6-9 sind ergänzend die Verläufe für den Balance Point (ausgeglichener Bewehrungsgrad $\omega_{f/y,bal}$) jedes Bewehrungsmaterials eingetragen. An diesem Punkt erfährt der Querschnitt seine größte Krümmung. Der Stahlbetonquerschnitt zeichnet sich dadurch aus,

dass – sobald die Streckgrenze erreicht wurde – die Krümmungen stark anwachsen, während das Moment konstant bleibt (vereinfacht wurde eine Nachverfestigung in dieser Darstellung nicht berücksichtigt). Der CFK-bewehrte Querschnitt erreicht in seinem Balance Point nur etwas 60 % der maximalen Krümmung des Stahlbetonquerschnitts. Insbesondere steigt der Momenten-Krümmungs-Verlauf bis zum Versagen des Querschnitts streng monoton an. Somit geht eine Erhöhung der Krümmung immer mit einer zusätzlichen Lastaufnahme des Querschnitts einher. Der Querschnitt ist nicht in der Lage sich „der Last zu entziehen“, was zu einer Verteilung dieser Kräfte auf andere Tragwerksteile führen würde.

6.4.3 Vergleich des Umlagerungsverhaltens

In Kapitel 2.3 wurde ausgeführt, dass statisch unbestimmte Stahlbetonsysteme in der Lage sind, höher beanspruchte Tragwerksteile durch die Bildung von Fließgelenken zu entlasten. Während dies in der Bemessung auf Basis plastizitätstheoretischer Ansätze genutzt werden kann, um die Stützbewehrung gezielt zu reduzieren, ist es auch für eine Bemessung auf Grundlage einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung von Relevanz, (siehe 2.3.2). Da der Bewehrungsgrad im Stützbereich bei linear-elastischer Schnittgrößenermittlung stets größer als der Feldbewehrungsgrad ist, lagern sich die Schnittgrößen – bei entlang des Bauteils konstanter Querschnittsgeometrie – vor der Bildung eines Fließgelenks in Richtung Stützbereich um. Erst das Fließen der Stützbewehrung führt zu einem Erreichen der angestrebten Bemessungslast (vgl. Abbildung 2-6). Da eine Bewehrung aus FVK dazu nicht in der Lage ist, besteht hier die Möglichkeit einer Überbeanspruchung des Stützbereichs. Diese Überlegungen sollen in diesem Kapitel mit Hilfe des numerischen Rechenmodells exemplarisch überprüft werden. Auch wenn das numerische Modell primär zur Berechnung von FVK-bewehrten Systemen entwickelt wurde, ist es in der Lage das Tragverhalten klassischer Stahlbetontragwerke abzubilden und wurde insbesondere hinsichtlich des Momentenumlagerungsverhaltens durch Versuchsnachrechnungen validiert.

Es finden keine expliziten Parameteruntersuchungen statt, die oben erläuterten Tendenzen sollen beispielhaft überprüft werden. Hierzu wird das in Abbildung 6-10 dargestellte, zweifeldrige Deckensystem betrachtet, welches durch eine Streckenlast auf beiden Feldern belastet wird. Auch hierbei findet eine Betrachtung ausschließlich auf Grundlage der Mittelwerte der Baustoffeigenschaften statt. Das Betonverhalten wird nichtlinear, die Arbeitslinien der Bewehrungsmaterialien linear bzw. bi-linear abgebildet.

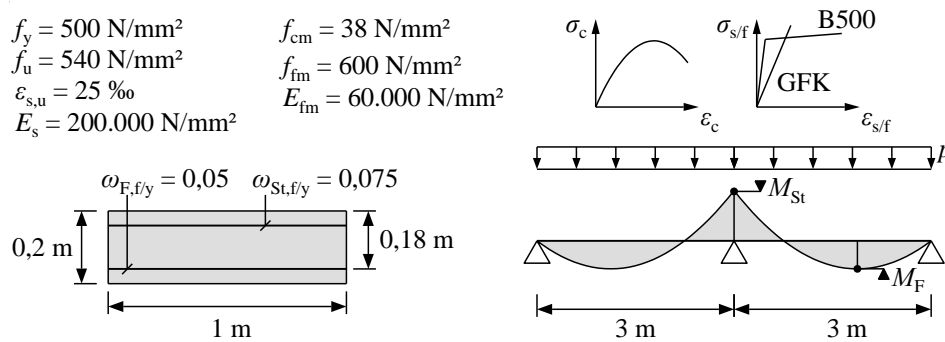


Abbildung 6-10 System zum Vergleich des Momentenumlagerungsverhaltens

Es wird ein Lastverhältnis von $\eta_{\text{last}} = q_k/(q_k+g_k) = 0,5$ unterstellt ($q_k = g_k$). Zudem wird angenommen, dass die Querschnitte ihre Tragfähigkeit infolge Bewehrungsversagen erreichen. Nach Abbildung 6-3 führt dies auf ein Bewehrungsverhältnis zwischen Stütz- und Feldbereich von ca. $\eta_p = \rho_{St,s/f}/\rho_{St,s/f} = 1,5$. Zudem werden beide Felder belastet. Wie in Kapitel 6.5.3.3 noch gezeigt wird, stellt dies bei FVK-bewehrten Bauteilen den ungünstigsten Fall für die Umlagerung der Schnittgrößen in Richtung Stützbereich dar.

Sowohl das Stahlbeton- als auch das FVK-bewehrte Bauteil besitzen denselben mechanischen Bewehrungsgrad in Stütz- und Feldbereich, um eine ähnliche Querschnittstragfähigkeit zu generieren. Diese fällt für das Stahlbetonbauteil infolge der unterstellten Nachverfestigung des Betonstahls etwas größer aus.

In Abbildung 6-11 sind die Ergebnisse der Querschnitts- sowie Systemberechnungen dargestellt. Die Momenten-Krümmungs-Beziehungen (Abbildung 6-11 (links)) zeigen die für das jeweilige Bewehrungsmaterial typischen Verläufe. Die maximale Querschnittstragfähigkeit des Stahlbetonstützquerschnitts beträgt $M_{R,\text{max},B500} = 92,8 \text{ kNm}$, was für das gewählte Zweifeldsystem einer Streckenlast auf beiden Feldern von $p_{E,\text{max},B500} = 8 \cdot M_{St,\text{max},B500}/l^2 = 8 \cdot 92,8 \text{ kNm}/(3\text{m})^2 = 82,5 \text{ kN/m}$ entspricht. Dies stellt die theoretische Traglast des Systems für eine linear-elastische Betrachtung dar. Für den GFK-bewehrten Querschnitt ergibt sich bei einer Tragfähigkeit des Stützbereichs von $M_{R,\text{max},FVK} = 85,5 \text{ kNm}$ eine Systemtraglast von $p_{E,\text{max},GFK} = 8 \cdot 85,5 \text{ kNm}/(3\text{m})^2 = 76 \text{ kN/m}$.

Aus Abbildung 6-11 (rechts) wird deutlich, dass sich das in Kapitel 2.3.2 und 2.4.1 beschriebene Tragverhalten einstellt. Nach Aufreißen des Feldbereichs lagern sich die Momente in beiden Bauteilen Richtung Stützbereich um. Mit Erreichen des Rissmoments im Feldbereich kehrt sich diese Tendenz um. Da das Verhältnis der Bewehrungsgrade zwischen Stütz- und Feldbereich in beiden Bauteilen gleich ist, entwickeln sich die Momentenverläufe ähnlich. Das Stützmoment nimmt Werte größer der linear-elastischen Schnittgrößenverteilung an. Mit Erreichen der Streckgrenze im Stützbereich des Stahlbetonbauteils beginnt sich dieser der Last wieder zu entziehen und das Feldmoment steigt überproportional. Die Systemtragfähigkeit ergibt sich zu $88,2 \text{ kNm}$. Die theoretische Traglast wird demnach erreicht und sogar um ca. 6 % übertroffen.

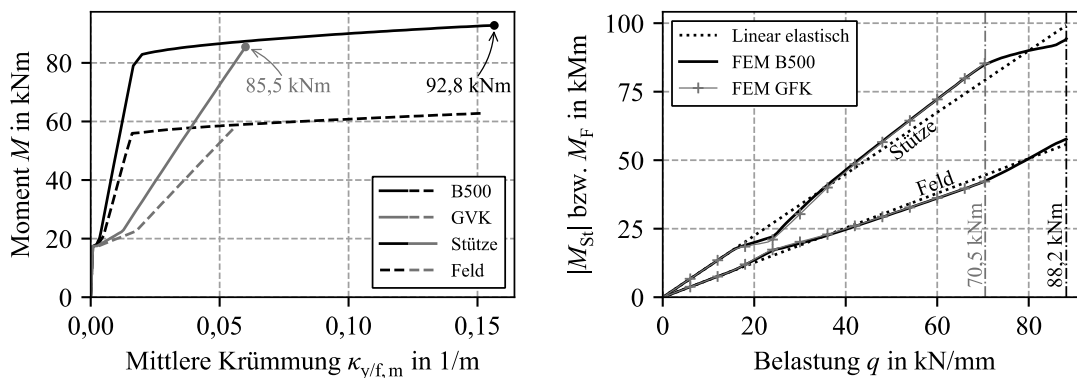


Abbildung 6-11 Links: Vergleich der Momenten-Krümmungs-Beziehungen
Rechts: Vergleich der Momentenentwicklung

Das GVK-bewehrte System hingegen versagt nach Erreichen des Bruchmoments im Stützbereich. Zu dieser Laststufe ist das im Bauteil auftretende Stützmoment ca. 8 % größer als nach linear-elastischer Schnittgrößenverteilung. Die angestrebte Traglast wird damit um ca. 7 % unterschritten.

Es zeigt sich, dass die getroffenen Annahmen durch das numerische Berechnungsmodell bestätigt werden. Die unplanmäßige Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich im GFK-bewehrten System und die damit verbundene Unterschreitung der angestrebten Traglast ist signifikant und stellt ein Problem für die Dimensionierung solcher Bauteile dar. Wie groß diese Umlagerung in Abhängigkeit verschiedener Einflussgrößen ist, wird im folgenden Kapitel behandelt. Die oben angestellten Betrachtungen fanden ohne die Berücksichtigung des semiprobabilistischen Bemessungskonzepts nach DIN EN 1990 (2011) statt. Daher ist im Anschluss daran zu klären, inwiefern diese Traglastunterschreitung durch das bestehende Sicherheitskonzept aufgefangen wird. Untersuchungen hierzu werden in Kapitel 7 vorgenommen.

6.5 Untersuchung der Momentenumlagerung

6.5.1 Allgemeines

Nachfolgend wird der Einfluss verschiedener Parameter auf das Systemtrag- und Momentenumlagerungsverhalten von FVK-bewehrten Durchlaufsystemen untersucht. Als Referenzbauteil wird ein Zweifeldträger mit Balkenquerschnitt ($d/b = 1,5$) untersucht. Das Bauteil sowie die verwendeten Baustoffe sind in Abbildung 6-12 abgebildet. Es wird ein GFK-Bewehrungsstab mit einer mittleren Langzeitfestigkeit von $f_{fm} = 600 \text{ N/mm}^2$ herangezogen, die zugehörige Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird linear-elastisch abgebildet. Der Beton entspricht der Festigkeitsklasse C30/37, dessen Spannungs-Dehnungs-Beziehung nichtlinear nach DIN EN 1992-1-1 (2011) modelliert wird. Das Referenzsystem wird durch eine Gleichstreckenlast auf beiden Feldern bis zum Erreichen der Traglast belastet, der Einfluss einer feldweisen Belastung wird im Rahmen der Parameterstudie ebenfalls untersucht.

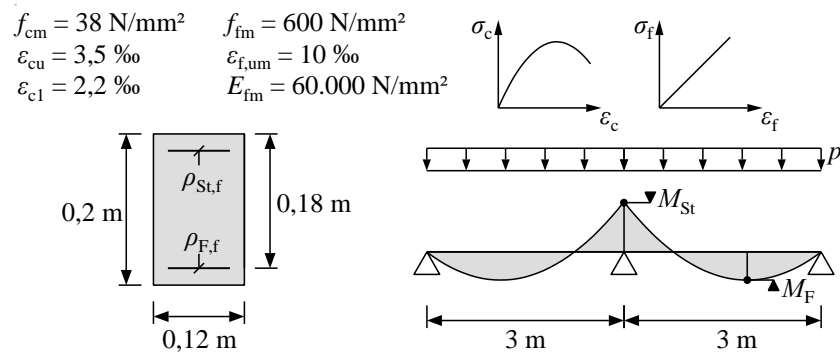


Abbildung 6-12 Referenzsystem zur Untersuchung der Momentenumlagerung

Wie in Kapitel 6.2 gezeigt, ergeben sich bei einer konventionellen Bemessung eines Durchlaufträgers ausschließlich Bewehrungsverhältnisse $\eta_\rho > 1$, die Bewehrungsmenge im Stützbereich ist immer größer als im Feld. Einleitend wird an dieser Stelle exemplarisch auch ein Bewehrungsverhältnis $\eta_\rho < 1$ untersucht, um das Umlagerungsverhalten in FVK-bewehrten Durchlaufsystemen allgemein zu beschreiben.

Betrachtet werden zunächst die beiden Bewehrungsverhältnisse $\eta_\rho = 1,5$ (Bewehrungsmenge im Stützbereich 1,5-mal so groß wie im Feld, ergibt sich näherungsweise nach Abbildung 6-3 (rechts) für Bewehrungsversagen) sowie $\eta_\rho = 0,67$ (Bewehrungsmenge im Feld 1,5-mal so groß wie im Stützbereich).

In Abbildung 6-13 (links) sind die Entwicklungen der Momente in Stütz- und Feldbereich für die beiden ausgewählten Bewehrungsverhältnisse dargestellt. Der mechanische Bewehrungsgrad im Stützbereich wurde zu $\omega_{St,fm} = 0,1$ gewählt. Die Momente folgen zunächst der linear-elastischen Lösung. Nach Erreichen des Rissmoments im Stützbereich steigt das Moment im Feld zunächst sehr schnell an, da die Steifigkeit des hier noch ungerissenen Querschnitts größer als die des gerissenen Stützbereichs ist. Mit Aufreißen des Feldes nähern sich die Steifigkeitsverhältnisse wieder an und die Momentenverläufe entwickeln sich in Richtung der linear-elastischen Schnittgrößenverteilung. Das Stützmoment des Bauteils mit $\rho_{St,f} > \rho_{F,f}$ ($\eta_\rho = 1,5$) steigt jetzt überproportional und nimmt Werte größer der linear-elastischen Lösung an. Infolge der hier höheren Steifigkeit findet eine Umlagerung der Schnittgrößen zu diesem Bereich hin statt. Ist der geometrische Bewehrungsgrad im Feld größer als im Stützbereich ($\rho_{St,f} < \rho_{F,f}$; $\eta_\rho = 0,67$), lagern sich Teile der Schnittgrößen nach Erreichen des Rissmoments im Feld auch hier in Richtung Stütze um. Da die Steifigkeit des Feldbereichs jedoch höher ist, bleibt das Moment in diesem Bereich größer als nach linear-elastischer Berechnung. In beiden Systemen tritt das Versagen im Stützbereich auf. Die gezielte Entlastung dieses Bereichs durch die erhöhte Feldbewehrung bei $\eta_\rho = 0,67$ führt hier zu einer höheren Systemtraglast.

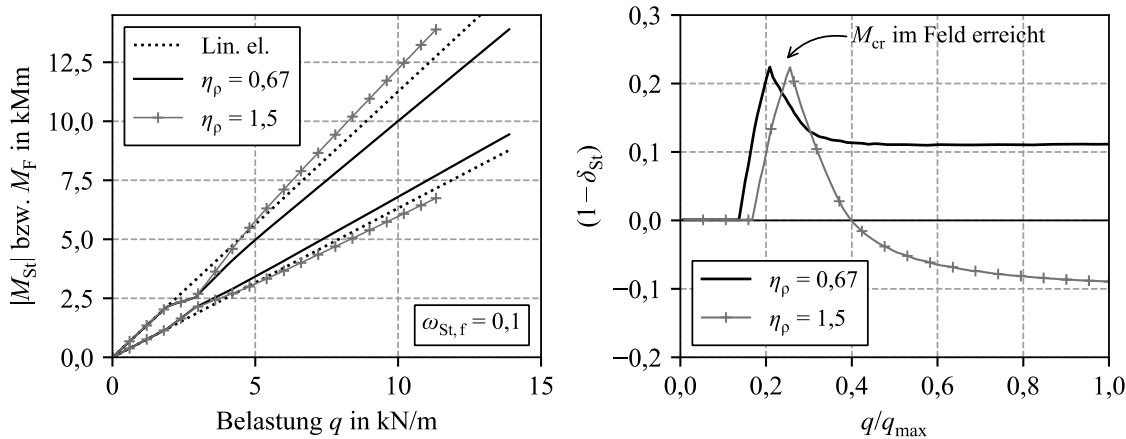


Abbildung 6-13 Links: Exemplarischer Verlauf der Momentenentwicklung für $\omega_{St,f} = 0,1$ und $\eta_\rho = 0,67$ bzw. $\eta_\rho = 1,5$
Rechts: Zugehörige Momentenumlagerungsgrade

In Abbildung 6-13 (rechts) sind die Umlagerungsgrade des Stützbereichs nach Gl. 2-4 abgebildet, vgl. hierzu auch Abbildung 2-5. Auf der Abszisse sind die Belastungen in bezogener Form aufgetragen. Infolge der höheren Systemtragfähigkeit für das System mit $\eta_\rho = 0,67$ wird das Rissmoment im Feld, bezogen auf die Maximallast, früher erreicht. Nach den ersten Rissen im Feldbereich beginnt der Umlagerungsgrad zu fallen. Dies geschieht so lange, bis die Rissbildung im Feld größtenteils abgeschlossen ist, der Umlagerungsgrad stabilisiert sich. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Momentenumlagerungsgrad für $\eta_\rho = 1,5$ nach diesem Punkt deutlich stärker fällt und Werte kleiner 0 annimmt (Stützmoment größer als nach linear-elastischer Berechnung).

Das hier angenommene Bewehrungsverhältnis von $\eta_\rho = 0,67$ stellt eine rein theoretische Überlegung dar. Wie in Kapitel 6.2.2 gezeigt, liegt das Verhältnis von Stütz- zu Feldbewehrung bei einer konventionellen Bemessung (für Bewehrungsversagen) zwischen $1,4 < \eta_\rho < 1,75$. Sollte auf dieser Grundlage ein Bewehrungsverhältnis von $\eta_\rho = 0,67$ angestrebt werden, die Bewehrungsmenge im Feld also 1,5-mal so groß wie im Stützbereich sein, würde dies eine Überbewehrung des Feldes um den Faktor $1,4/0,67 = 2,1$ bzw. $1,75/0,67 = 2,6$ bedeuten. Dies ist mit dem Grundsatz einer wirtschaftlichen Bauteildimensionierung nicht vereinbar.

Es ist daher in praxisrelevanten Fällen immer von einer größeren Bewehrungsmenge im Stütz- als im Feldbereich und damit von einer unplanmäßigen Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich auszugehen. Damit einher geht das Versagen des Bauteils vor Erreichen der angestrebten Systemtraglast (siehe Kapitel 6.4.3 sowie Abbildung 6-11). Die folgenden Betrachtungen werden daher für $\eta_\rho \geq 1$ durchgeführt.

In Kapitel 6.2.2 wurde zudem deutlich, dass die Bewehrungsmenge im Stützbereich stark zunimmt, sobald der Querschnitt in diesem Bereich infolge des Erreichens der Beton-

bruchstauchung versagt. Da der Feldbereich – auch bei der Berücksichtigung einer feldweisen Nutzlastanordnung im Rahmen der Bemessung – stets eine geringere Beanspruchung aufweist, tritt hier weiterhin ein Versagen der Bewehrung auf. Dies kann zu Bewehrungsverhältnissen führen, die deutlich größer als $\eta_\rho = 1,75$ sind. Durch die Bauteilbemessung ist demnach das Verhältnis der erforderlichen Bewehrungsmengen in Stütz- und Feldbereich an die vorliegende Bauteilbeanspruchung gekoppelt. Anschaulich wurde dies in Abbildung 6-3 (rechts) gezeigt. Überschreitet die Belastung im Stützbereich das zum Balance Point gehörende bezogene Moment, steigt das Bewehrungsverhältnis stark an.

Um die Einflüsse relevanter Einflussgrößen auf das Umlagerungsverhalten sowie die auftretenden Effekte isoliert betrachten zu können, findet zunächst eine Entkopplung des Bewehrungsverhältnisses von der Beanspruchungssituation des Bauteils statt. Die Untersuchungen werden in einem ersten Schritt in Abhängigkeit festgelegter Bewehrungsverhältnisse untersucht, betrachtet werden Verhältnisse bis $\eta_\rho = 3$. Dies ermöglicht eine Untersuchung des Umlagerungsverhaltens in Abhängigkeit der Ausnutzung des Stützquerschnitts. Dieser wird im Folgenden über den dort vorliegenden mechanischen Bewehrungsgrad $\omega_{St, fm}$ definiert. Basierend auf dem im Stützbereich gewählten mechanischen Bewehrungsgrad, wird auf Grundlage des Bewehrungsverhältnisses η_ρ die Bewehrungsmenge im Feldbereich ermittelt. Dies ermöglicht eine grundlegende Beschreibung des Umlagerungsverhaltens.

Weiterhin finden Untersuchungen unter Berücksichtigung der in Kapitel 6.2.2 dargestellten Thematik statt. Hierzu wird das Bewehrungsverhältnis in Abhängigkeit der Beanspruchungssituation dynamisch ermittelt. So ist insbesondere eine Untersuchung des schnellen Anwachsens der Bewehrungsmenge im Stützbereich nach Erreichen des zum Balance Point gehörenden bezogenen Moments in diesem Bereich möglich.

6.5.2 Untersuchungen des Momentenumlagerungsverhaltens

6.5.2.1 Allgemeines Umlagerungsverhalten

Zunächst wird das generelle Momentenumlagerungsverhalten des Referenzsystems untersucht. In Abbildung 6-14 (links) ist dazu der Umlagerungsgrad im Stützbereich bei Erreichen der Traglast $(1 - \delta_{St, u})$ für ausgewählte Bewehrungsverhältnisse η_ρ in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrads im Stützbereich $\omega_{St, fm}$ dargestellt. Für sehr kleine mechanische Bewehrungsgrade zeigt sich für alle Bewehrungsverhältnisse eine starke Abnahme des Umlagerungsgrads von einem hohen Ausgangswert aus. Für diese kleinen Bewehrungsgrade ist direkt nach dem Aufreißen des Stützbereichs der Steifigkeitsunterschied zum noch ungerissenen Feldbereich sehr groß. Es findet somit zunächst eine starke Entlas-

tung des Stützbereichs statt. Infolge des geringen Bewehrungsgrads im Stützbereich erreicht das Bauteil seine Traglast, bevor sich die Schnittgrößen nach dem Aufreißen des Feldbereichs wieder in Richtung Stützbereich umlagern können.

Bei symmetrischer Bewehrung der beiden Bauteilbereiche ($\rho_{St,f} = \rho_{St,f}$; $\eta_p = 1$) zeigt sich auch mit steigendem mechanischen Bewehrungsgrad eine leichte Umlagerung in Richtung Feldbereich. Der absolute Wert des Moments ist im Stützbereich (bei der hier angenommenen Belastung beider Felder) immer größer als im Feld. Beide Bereiche weisen die gleiche Bewehrungskonfiguration und damit bei gleicher Momentenbeanspruchung die gleiche Steifigkeit auf. Da das Moment im Stützbereich jedoch größer als im Feldbereich ist und die Steifigkeit hier somit geringer ist, findet eine geringe Umlagerung in Richtung Feld statt.

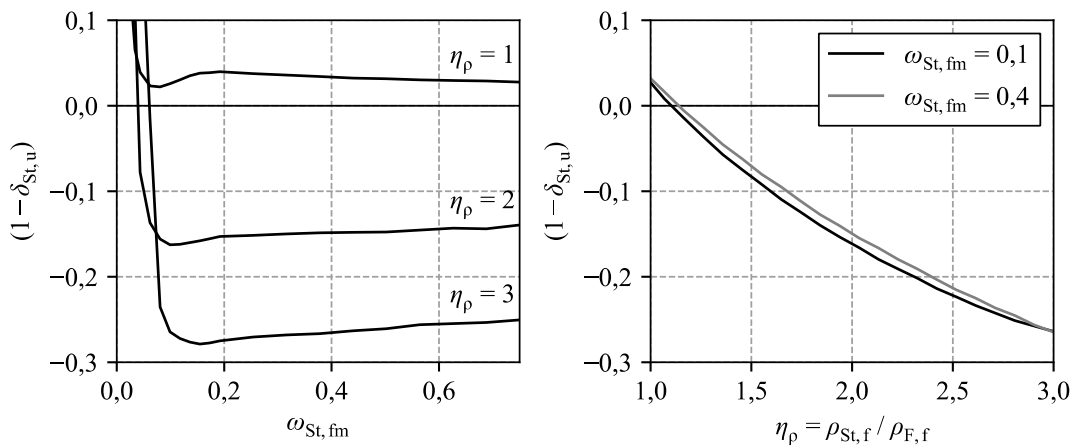


Abbildung 6-14 Links: Umlagerungsgrad in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrads im Stützbereich für ausgewählte Bewehrungsverhältnisse
Rechts: Umlagerungsgrad in Abhängigkeit des Bewehrungsverhältnisses für ausgewählte mechanische Bewehrungsgrade

Für Bewehrungsverhältnisse $\eta_p > 1$ zeigt sich bei Erreichen der Systemtraglast eine deutliche Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Aus Abbildung 6-14 wird ersichtlich, dass diese in großen Bereichen des mechanischen Stützbewehrungsgrads von dessen Höhe unabhängig sind. In Abbildung 6-14 (rechts) ist daher der Umlagerungsgrad für ausgewählte mechanische Bewehrungsgrade in Abhängigkeit des Bewehrungsverhältnisses η_p aufgetragen. Es zeigt sich die erwartete starke Zunahme der Umlagerung vom Feld- zum Stützbereich (Umlagerungsgrad $(1 - \delta_{St,u})$ nimmt ab) mit steigendem Bewehrungsverhältnis.

Auf Grundlage des Bewehrungsverhältnisses $\eta_p = 2$ werden die in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrads im Stützbereich $\omega_{St, fm}$ auftretenden Effekte vertiefend untersucht. In Abbildung 6-15 (rechts) sind die Entwicklungen des Umlagerungsgrads in Ab-

hängigkeit der bezogenen Belastung q/q_{\max} für zwei ausgewählte mechanische Bewehrungsgrade exemplarisch dargestellt. Die beiden Bewehrungsgrade sind in Abbildung 6-15 (links) kenntlich gemacht. Da der mechanische Bewehrungsgrad $\omega_{\text{St, fm}} = 0,04$ zu einer geringeren Systemtraglast führt, findet die zweiten Phase der Schnittgrößenumlagerung (vgl. Abbildung 2-5) bei einer größeren bezogenen Belastung statt. Nach Aufreißen des Stützbereichs bei ca. $q/q_{\max} = 0,4$ ist der Steifigkeitsunterschied zum noch ungerissenen Feldbereich hier besonders groß und das Stützmoment nimmt im Vergleich zum linear-elastischen Schnittgrößenverlauf um ca. 25 % ab. Mit dem Aufreißen des Feldes (ca. $q/q_{\max} = 0,6$) nähert sich das Stützmoment wieder dem Wert nach Elastizitätstheorie an. Für den mechanischen Bewehrungsgrad $\omega_{\text{St, fm}} = 0,1$ ergibt sich ein affiner Verlauf. Die Umlagerung zum Feldbereich in der ersten Phase der Schnittgrößenumlagerung fällt geringer aus, jedoch dominiert auch hier der noch ungerissene Feldbereich das Umlagerungsverhalten. In der dritten Phase der Schnittgrößenumlagerung findet nach Aufreißen des Stützbereichs infolge der größeren Systemtraglast eine größere Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich statt.

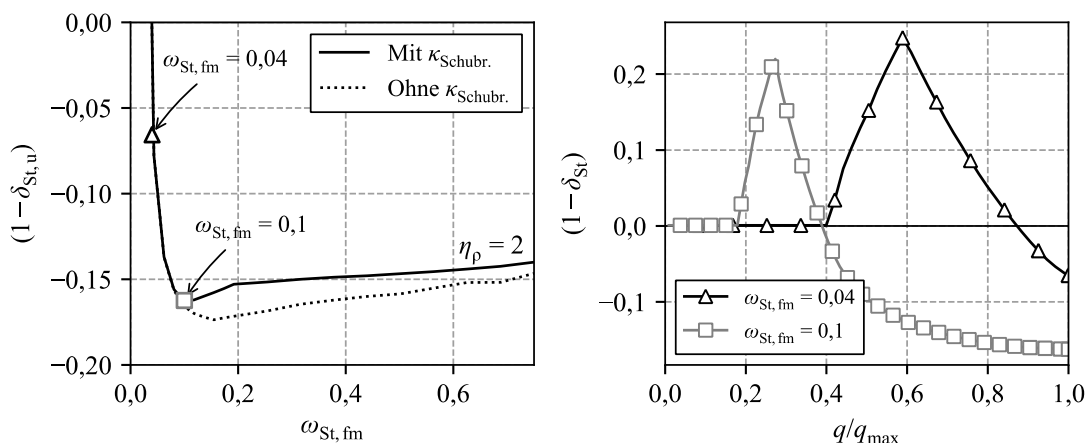


Abbildung 6-15 Links: Umlagerungsgrad für $\eta_p = 2$
Rechts: Momentenumlagerungsgrad in Abhängigkeit der bezogenen Belastung für $\omega_{\text{St, fm}} = 0,04$ und $\omega_{\text{St, fm}} = 0,1$

In Abbildung 6-15 (links) ist zudem der Umlagerungsgrad unter Vernachlässigung der Zusatzkrümmung, welche sich infolge der Bildung von Schubrisen ergibt, dargestellt. Wie in Kapitel 4.6.2 und 5.3.5.3 erläutert, führen die schrägen Betondruckstreben nach Einsetzen der Schubrisenbildung zu einer erhöhten Beanspruchung in der Bewehrung. Diese führt zu zusätzlichen Querschnittsverkrümmungen. Wie in Abbildung 6-15 (links) sowie Abbildung 6-16 (links) dargestellt, führen diese zusätzlichen Krümmungen zu einer Zunahme des Umlagerungsgrads. Dieser Effekt ist in Abbildung 6-16 (rechts) für einen ausgewählten mechanischen Bewehrungsgrad dargestellt. Die Umlagerungsgrade verlaufen zunächst deckungsgleich. Bei Berücksichtigung der zusätzlichen Krümmungen findet ab ca. $q/q_{\max} = 0,6$ eine erneute Zunahme des Umlagerungsgrads statt.

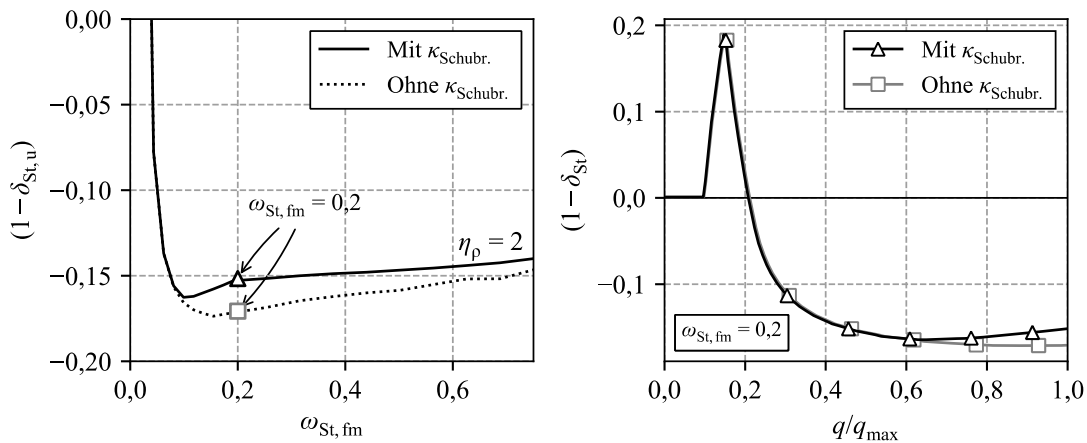


Abbildung 6-16 Links: Umlagerungsgrad für $\eta_p = 2$
Rechts: Momentenumlagerungsgrad für $\omega_{St, fm} = 0,2$

In Abbildung 6-17 ist zusätzlich zum Momentenumlagerungsgrad die Entwicklung der Querkraft am Mittelaufleger auf einer zweiten (rechten) Ordinate aufgetragen. Sobald diese die Schubrisskraft erreicht (horizontale Strichpunktlinie in Abbildung 6-17), steigt der Umlagerungsgrad leicht. Ab der Bildung von Schubrisen am Mittelaufleger (Ort mit der größten Querkraftbeanspruchung) muss die Bewehrung dort sukzessive zusätzliche Kräfte aufnehmen. Dies führt zu zusätzlichen Krümmungen und damit zu einer reduzierten Steifigkeit. Infolgedessen setzt eine Umverteilung der Schnittgrößen in den Feldbereich ein, der Stützbereich kann sich der Belastung geringfügig entziehen. Somit wirkt sich die Berücksichtigung dieser Zusatzkrümmungen günstig auf eine zusätzliche Beanspruchung des Stützbereichs infolge unplanmäßiger Schnittgrößenumlagerung aus.

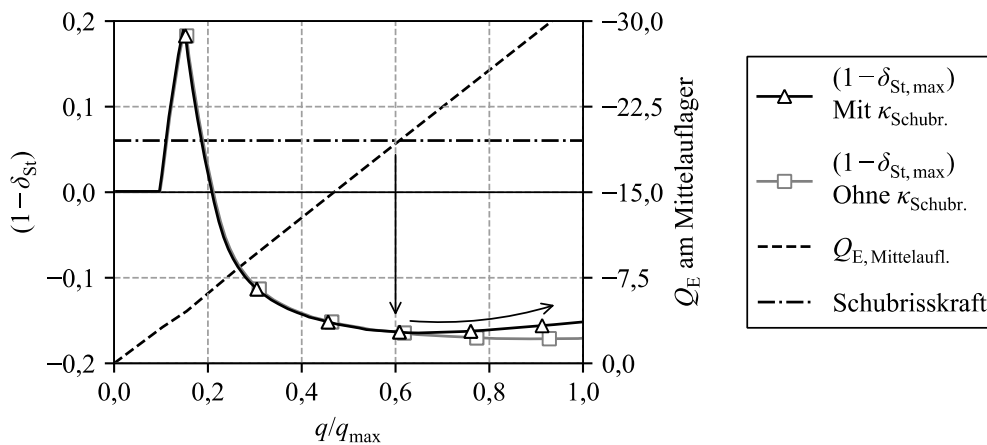


Abbildung 6-17 Momentenumlagerungsgrad sowie Entwicklung der Querkraft am Mittelaufleger für $\omega_{St, fm} = 0,2$

Eine zusätzlich geringfügige Entlastung des Stützbereichs ergibt sich aufgrund des plastischen Verformungsvermögens der Betondruckzone. In Abbildung 6-18 (links) sind die Umlagerungsgrade für $\eta_p = 2$ erneut aufgetragen. Mit steigendem Bewehrungsgrad entzieht sich der Stützbereich der Last geringfügig, der Umlagerungsgrad steigt leicht. Dies ist auf

die Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons zurückzuführen. In Abbildung 6-18 (rechts) sind die Momenten-Krümmungs-Beziehungen für $\omega_{St,f} = 0,2$ sowie $\omega_{St,f} = 0,6$ dargestellt. Mit steigendem Bewehrungsgrad weist der Verlauf ein deutlich nichtlineares Verhalten auf, während die Momenten-Krümmungs-Beziehung für $\omega_{St,f} = 0,2$ fast linear verläuft (vgl. hierzu auch Kapitel 6.3.1). Zusätzlich sind die Dehnungs- und Spannungsverteilungen des Querschnitts bei Erreichen der Bruchkrümmung angegeben. Eine Erhöhung des Bewehrungsgrades führt zu einer Vergrößerung der bezogenen Druckzonenhöhe und damit zum nichtlinearen Verlauf der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Diese sorgt für eine geringe Entlastung des Stützbereichs. Es ist jedoch anzumerken, dass insbesondere der abfallende Bereich der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons großen Streuungen unterworfen ist (vgl. Kapitel 4.2.1). Von einer tatsächlichen Realisierung dieser – ohnehin kleinen – plastischen Umlagerung ist daher nur bedingt auszugehen. Liegen stark umschnürte Betondruckzonen durch Anordnung einer Bügelbewehrung o. ä. vor, ist dieses Verhalten durchaus herbeizuführen. Wie in Kapitel 6.3.4 ausgeführt, liegen bisher jedoch kaum Erkenntnisse zu FVK-bügelumschnürten Biegedruckzonen vor.

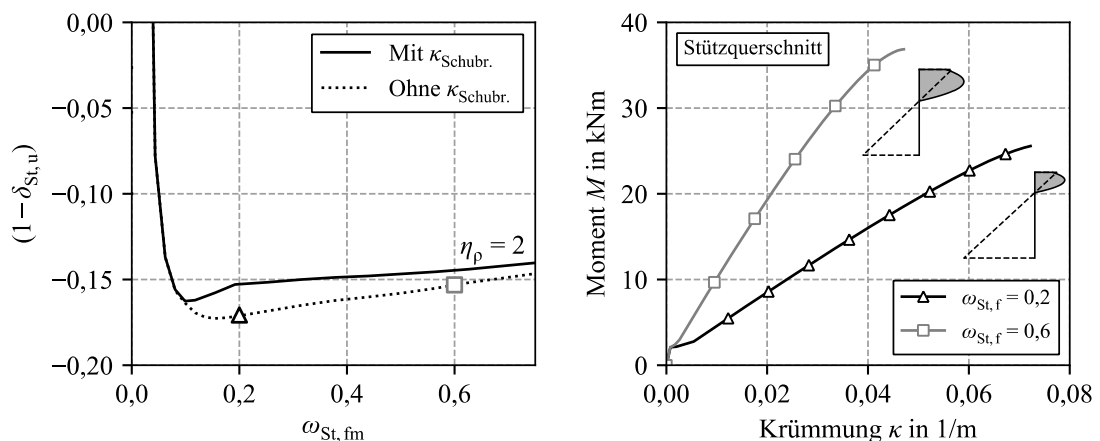


Abbildung 6-18 Links: Umlagerungsgrad für $\eta_\rho = 2$
Rechts: Momenten-Krümmungs-Beziehung im Stützbereich für $\omega_{St,fm} = 0,2$ und $\omega_{St,fm} = 0,6$

Nachfolgend werden die Einflüsse verschiedener Parameter auf das oben allgemein beschriebene Umlagerungsverhalten untersucht. Infolge der bezogenen Darstellung sind die Betrachtungen für alle rechteckförmigen Querschnitte gültig. Wie in Kapitel 6.3 gezeigt, ergeben sich infolge einer Variation der Querschnittsparameter keine grundlegenden Änderungen des Querschnittsverhaltens. Auf Untersuchung des Umlagerungsverhaltens unter expliziter Variation der Querschnittseigenschaften wird daher verzichtet.

6.5.2.2 Einfluss des statischen Systems auf das Umlagerungsverhalten

Bisher wurden alle Betrachtungen an einem System mit zwei Feldern durchgeführt. Daher werden zunächst unterschiedliche statische Systeme betrachtet. Zusätzlich werden das

Rand- sowie Innenfeld eines unendlich langen Durchlaufträgers betrachtet. Die Momentenverteilungen von allen anderen möglichen Durchlaufsystemen liegen zwischen diesen drei Möglichkeiten. In Abbildung 6-19 (links) ist der Einfluss des vorliegenden Systems für drei Bewehrungsverhältnisse dargestellt. Für jedes System wurde diejenige Laststellung gewählt, welche zur maximalen Beanspruchung des Stützbereichs führt (siehe Anhang D).

Für den Zweifeldträger wurde die Streckenlast daher auf beiden Feldern angesetzt. Für das Innen- sowie das Randfeld wurden die beiden an den betrachteten Stützbereich angrenzenden Felder sowie die übernächsten Felder belastet. Vereinfacht wurden keine auf alle Felder wirkende Last angesetzt (Eigengewichtslast). Trotz dieser Vereinfachung, welche in Innen- sowie Randfeld die Umlagerung der Momente zum Stützbereich hin vergrößert, ergibt sich für alle Bewehrungsverhältnisse im Zweifeldträger die größte Schnittgrößenumverteilung. Dieser Effekt ist unabhängig vom mechanischen Bewehrungsgrad. Für die beiden anderen Systeme ergeben sich in einem (Randfeld) oder beiden (Innenfeld) an den Stützbereich angrenzenden Feldern zusätzliche durchschlagende Momente, was die Umlagerungsfähigkeit einschränkt.

In Abbildung 6-19 (rechts) ist der Umlagerungsgrad zusätzlich in Abhängigkeit des Bewehrungsverhältnisses η_ρ für den mechanischen Bewehrungsgrad im Stützbereich $\omega_{St, fm} = 0,1$ aufgetragen. Auch hier wird deutlich, dass sich im Zweifeldsystem die geringsten Umlagerungsgrade und damit die größten unplanmäßigen Umlagerungen vom Feld zum Stützbereich einstellen. Die Heranziehung eines Zweifeldträgers als primäres statisches System zur Untersuchung der Schnittgrößenumlagerung in FVK-bewehrten Durchlaufträgern ist daher gerechtfertigt.

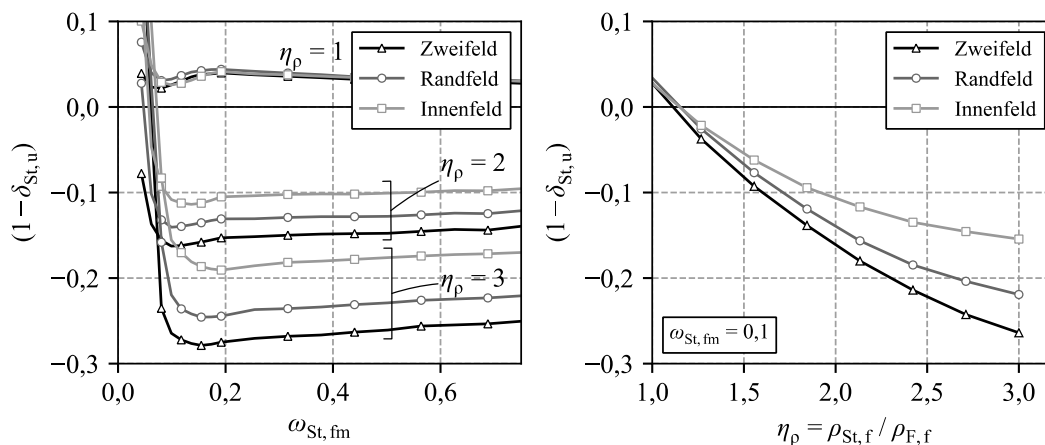


Abbildung 6-19 Einfluss des statischen Systems auf den Umlagerungsgrad

6.5.2.3 Einfluss einer feldweisen Belastung auf das Umlagerungsverhalten

Nachdem das Zweifeldsystem als maßgebendes System zur Untersuchung des Umlagerungsverhaltens bestätigt wurde, wird der Einfluss einer feldweisen Belastung betrachtet.

Dazu wird eine volle Belastung beider Felder mit der Belastung nur eines Feldes verglichen. Es wird ein Lastverhältnis $\eta_{\text{Last}} = 0,5$ ($q_k = g_k$; siehe Gl. 6-3) angenommen. Die veränderliche Einwirkung ist demnach genau so groß wie die ständige Beanspruchung infolge Eigengewicht. Auf eine Berücksichtigung der in der Bemessung zu beachtenden Teilsicherheitsbeiwerte der Einwirkungsseite wird an dieser Stelle vereinfachend verzichtet. Da das Eigengewicht auf beiden Feldern wirkt, ergibt sich infolge des gewählten Lastverhältnisses für eines der beiden Felder des Systems eine doppelt so große Streckenlast. Abbildung 6-20 (links) stellt die Umlagerungsgrade für verschiedene Lastverhältnisse für eine volle sowie teilweise Belastung des Zweifeldsystems dar. Aufgrund der unsymmetrischen Beanspruchung bei feldweiser Belastung vergrößert sich der positive Momentenbereich. Dies führt zu einer Abnahme der Feldsteifigkeit, was die Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich begünstigt. Dies bestätigt sich ebenfalls in der auf das Bewehrungsverhältnis bezogenen Darstellung in Abbildung 6-20 (rechts). Es ist jedoch herauszustellen, dass eine feldweise Belastung zu einer geringeren Beanspruchung des Stützbereichs führt. Für diesen ergibt sich unter einer Volllast auf beiden Feldern der ungünstigste Lastfall. Es ist daher zu untersuchen, ob die größere Umlagerung bei feldweiser Belastung auch zu einer größeren Beanspruchung des Stützbereichs führt. Betrachtungen hierzu werden in Kapitel 6.5.3 angestellt.

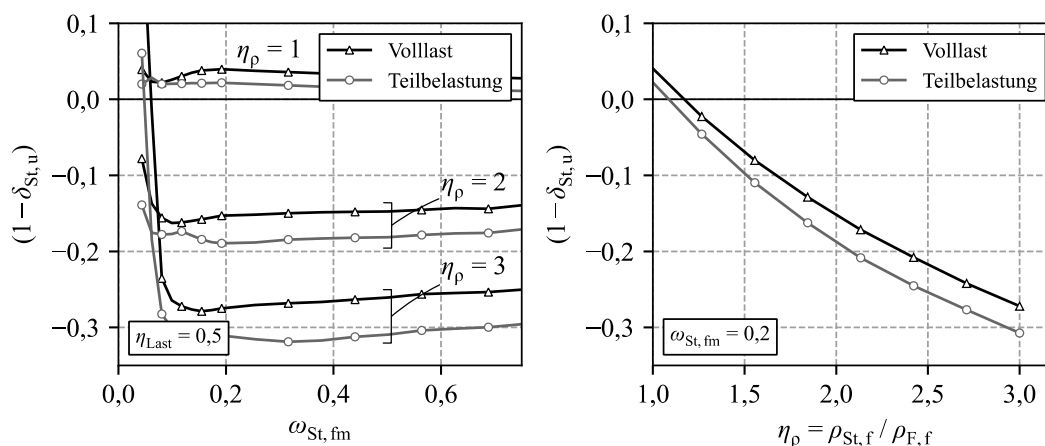


Abbildung 6-20 Einfluss einer feldweisen Laststellung auf den Umlagerungsgrad

6.5.2.4 Einfluss einer schubweichen Systemmodellierung auf das Umlagerungsverhalten

Sobald in einem Betonträger Schubrisse entstehen, ergeben sich infolge der schrägen Betondruckstreben zusätzliche Beanspruchungen in der Längsbewehrung und damit zusätzliche Krümmungen. Darüber hinaus kann der fachwerkartige Lastabtrag bei Bauteilen mit Schubbewehrung (siehe Kapitel 4.6.1) bei einer schubweichen Systemmodellierung zu zusätzlichen Verformungen führen. Abbildung 6-21 (links und rechts) zeigt dies für Bügelbewehrungsgrade $\rho_{\text{w},\text{f}} = 0,25\%$ sowie $\rho_{\text{w},\text{f}} = 0,75\%$. Der E-Modul wurde analog zur

Längsbewehrung zu 60.000 N/mm² gewählt. Da die Schubbrisskraft bei kleinen mechanischen Bewehrungsgraden nicht erreicht wird, zeigt sich ein Effekt erst ab ca. $\omega_{St, fm} = 0,15$. Große Schubkräfte treten vor allem am Mittelaufleger auf und führen dort zu zusätzlichen Verformungen, die diesen Bereich entlasten. Der Stützbereich kann sich – analog einer Berücksichtigung der Zusatzverkrümmungen infolge Schubbrissbildung – der Last geringfügig entziehen. Die Modellierung eines schubweichen Systems wirkt sich demnach günstig auf unplanmäßige Umlagerungen der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich aus.

Es ist anzumerken, dass dieser Effekt insbesondere auf das angenommene geringe E-Modul der GFK-Bewehrung zurückzuführen ist. Für FVK-Bügel mit einer größeren Steifigkeit ergeben sich geringe Verformungs- und damit Umlagerungszuwächse.

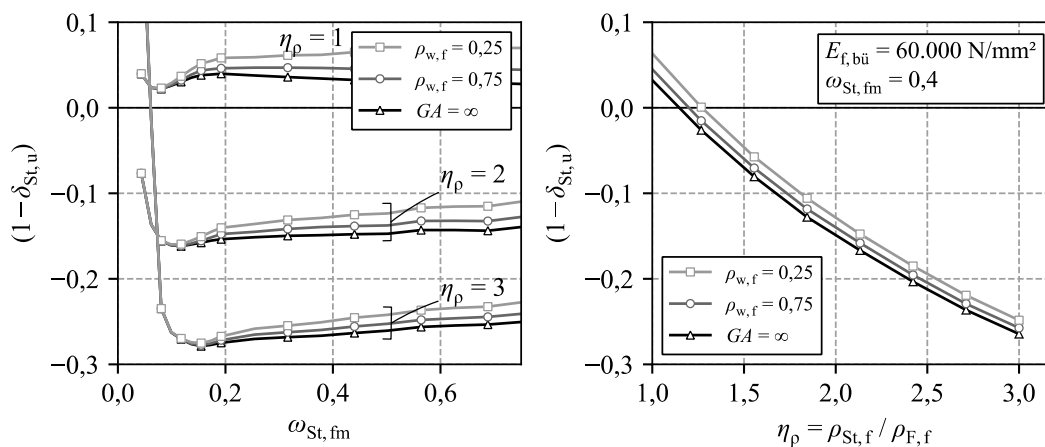


Abbildung 6-21 Einflüsse infolge schubweicher Systemmodellierung auf den Umlagerungsgrad

6.5.2.5 Einfluss der Biegeschlankheit auf das Umlagerungsverhalten

Bei der Erfassung der Momentenumlagerung in Stahlbetonbauteilen kommt der Schubschlankheit des Systems eine entscheidende Bedeutung zu. Diese ist nach König et al. (1999) für Durchlaufträger definiert als $\lambda_q = M/(V \cdot d) = a_q/d$, wobei a_q dem Abstand des Mittelauflegers zum Momentennulldurchgang entspricht (siehe Abbildung 2-10). Die Schubschlankheit lässt sich in die Bauteilbiegeschlankheit $\lambda_1 = l/d$ umrechnen. Nach Ahner und Kliver (1998) gilt hierfür Gl. 6-7.

$$\lambda_q = \eta_{sys} \cdot \lambda_1 \tag{Gl. 6-7}$$

mit:

$$\eta_{sys} = \frac{\lambda_q}{\lambda_1} = \frac{M}{V \cdot d} \cdot \frac{d}{l} = \frac{0,125}{0,625} = 0,2 \quad \text{für Zweifeldsysteme}$$

Die Schubschlankheit determiniert in Stahlbetonbauteilen maßgeblich die plastische Verformungsfähigkeit des hochbeanspruchten Stützbereichs, da sie die Länge des negativen

Momentenbereichs sowie die Neigung der Druckstreben am Mittelaugler beeinflusst. Eine Vergrößerung der Schubschlankheit führt nach Ahner und Kliver (1998) zu einer größeren plastischen Rotation infolge Biegung. Gegenläufig dazu setzt die Vergrößerung der aufnehmbaren Krümmungen am Mittelaugler infolge Schubrissbildung mit steigender Schubschlankheit erst bei größeren Bewehrungsgraden ein.

Aufgrund des bei einer FVK-Bewehrung nicht vorhandenen plastischen Verformungsvermögens sind infolge der Schubschlankheit jedoch keine großen Auswirkungen auf das Umlagerungsvermögen zu erwarten. In Abbildung 6-22 sind die Auswirkungen einer Variation der Bauteilbiegeschlankheit λ_1 für verschiedene Bewehrungsverhältnisse in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrads dargestellt. Für die Berechnungen werden die Zusatzkrümmungen infolge Schubrissbildung berücksichtigt, die Systemmodellierung findet – anders als in Kapitel 6.5.2.4 – Schubstarr statt. Zusätzlich ist der Umlagerungsgrad bei Vernachlässigung der Zusatzverkrümmungen infolge Schubrissbildung ebenfalls in Abbildung 6-22 (links) dargestellt. Dieser ist für das jeweilige Bewehrungsverhältnis für alle Biegeschlankheiten deckungsgleich. Mit steigender Bauteilschlankheit setzte die Zunahme des Umlagerungsgrads infolge der Zusatzkrümmung aus Schubrissbildung erst bei einem größeren mechanischen Bewehrungsgrad ein. Dies führt dazu, dass der Einfluss dieses Effekts auf die Momentenumlagerung für große Biegeschlankheiten abnimmt. Aufgrund des linear-elastischen Werkstoffverhaltens der FVK-Bewehrung ergeben sich keine weiteren Einflüsse infolge Bauteilbiegeschlankheit. Ergänzend ist in Abbildung 6-22 (rechts) der Umlagerungsgrad für $\omega_{St, fm} = 0,2$ in Abhängigkeit des Bewehrungsverhältnisses aufgetragen.

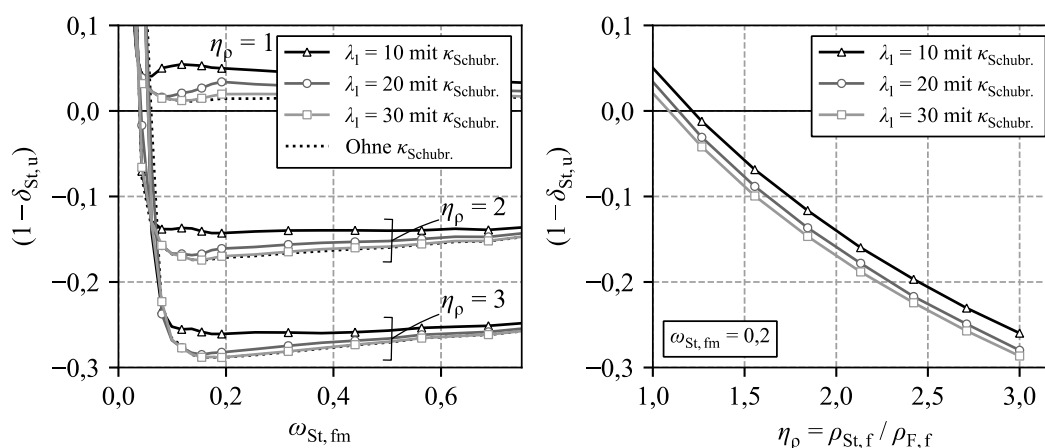


Abbildung 6-22 Einflüsse infolge Trägerschlankheit $\lambda_1 = l/d$ auf den Umlagerungsgrad

6.5.3 Untersuchungen der Systemtragfähigkeit

6.5.3.1 Allgemeines

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde das allgemeine Umlagerungsverhalten ausgehend von festgelegten Verhältnissen der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich untersucht. Wie in Kapitel 6.2 gezeigt, ist dieses Verhältnis jedoch von der Beanspruchungssituation des Bauteils und den damit einhergehenden Versagensmodi des Stütz- und Feldbereichs abhängig. Daher wird das Umlagerungsverhalten im Folgenden unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus Kapitel 6.2.2 analysiert. Als Laufparameter wurde bisher der mechanische Bewehrungsgrad im Stützbereich $\omega_{St, fm}$ oder das Verhältnis der Bewehrungsgrade η_p herangezogen. Beide eignen sich für die in diesem Kapitel durchzuführenden Betrachtungen nicht. Der mechanische Bewehrungsgrad ω_{fm} ist in Bezug auf die Bewehrungsfestigkeit definiert, welche bei einem Versagen des Querschnitts infolge Erreichens der Betondruckstauchung jedoch nicht erreicht wird. Dies erschwert eine anschauliche Aufbereitung der Erkenntnisse. Ebenso nimmt das Bewehrungsverhältnis η_p in Abhängigkeit der Belastung und damit des vorliegenden Versagensmodus variable Werte an.

Die Untersuchungen werden daher in Abhängigkeit des bezogenen Moments im Stützbereich $\mu_{St, Em}$ durchgeführt. Basierend auf dem vorliegenden bezogenen Moment im Stützbereich wird die hier erforderliche Bewehrungsmenge nach Gl. 6-5 bestimmt. In Abhängigkeit eines gewählten Lastverhältnisses η_{Last} sowie unter Berücksichtigung der maßgebenden Laststellung (Eigengewicht auf beiden Feldern, veränderliche Last auf einem Feld, vgl. hierzu auch Abbildung 6-1 sowie Abbildung 6-3 (rechts)) ergibt sich die Bewehrungsmenge im Feld. Die angestrebte Systemtraglast p_{Ziel} lässt sich für einen Zweifeldträger mit Gl. 6-8 ermitteln, das absolute Moment im Stützbereich mit Gl. 6-9.

$$p_{Ziel} = \frac{8 \cdot M_{St, Ziel}}{l^2} \quad \text{Gl. 6-8}$$

$$M_{St, Ziel} = \mu_{St, Em} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cm} \quad \text{Gl. 6-9}$$

Die angestrebte Last p_{Ziel} würde erreicht, wenn sich die Schnittgrößen ausschließlich auf Grundlage der Elastizitätstheorie einstellen. Wie in Kapitel 6.4.3 bereits gezeigt, verhindert das linear-elastische Werkstoffverhalten der FVK-Bewehrung dies.

Für die so bestimmten Bewehrungsmengen wird mit dem numerischen Berechnungsmodell die Systemtraglast sowie der Umlagerungsgrad bei Erreichen dieser Traglast ermittelt. Betrachtet wird ein Zweifeldsystem, da sich – wie in Kapitel 6.5.2.2 gezeigt – so die größten unplanmäßigen Umlagerungen einstellen. Es findet eine Belastung beider Felder statt, um eine größtmögliche Beanspruchung des Stützbereichs zu erzielen. Die Auswirkungen einer feldweisen Belastung werden exemplarisch ebenfalls betrachtet. Neben dem Umlagerungs-

grad steht mit der Systemtraglast eine weitere Größe zur Beschreibung des Umlagerungsverhaltens FVK-bewehrter Durchlaufträger zur Verfügung. In Abbildung 6-23 sind das beschriebene Vorgehen sowie die verwendeten Baustoffeigenschaften dargestellt.

Die folgenden Untersuchungen werden weiterhin auf Grundlage der Mittelwerte der Baustoffeigenschaften durchgeführt. Ebenso wird sowohl bei der Ermittlung der erforderlichen Bewehrung als auch bei der Ermittlung der Systemtraglast die nicht-lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons verwendet. Die Auswirkungen des normativen Bemessungskonzepts auf die Systemtraglast werden in Kapitel 7 gesondert untersucht.

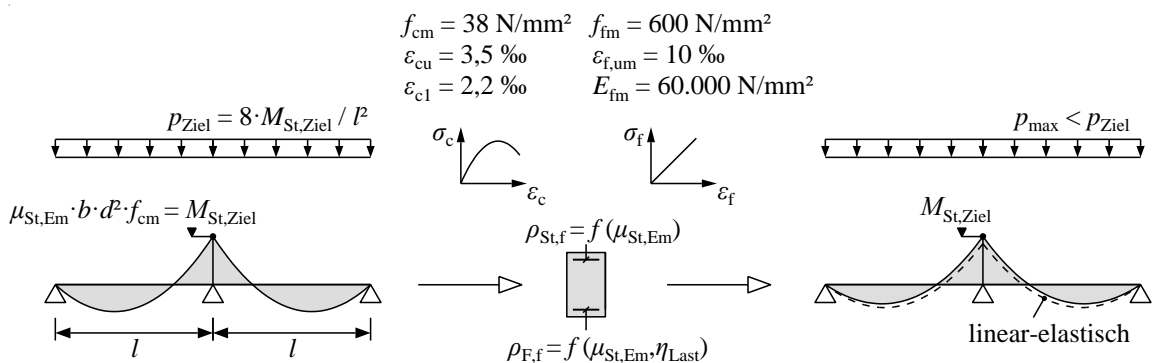


Abbildung 6-23 Vorgehen zur Untersuchung der Systemtraglast

6.5.3.2 Einfluss des Lastverhältnisses auf die Systemtragfähigkeit

In Abbildung 6-24 ist der Umlagerungsgrad im Stützbereich bei Erreichen der Systemtraglast ($1 - \delta_{St,u}$) sowie das Verhältnis der ermittelten Systemtraglast zur angestrebten Traglast p_{max}/p_{Ziel} in Abhängigkeit des bezogenen Moments im Stützbereich $\mu_{St,Em}$ dargestellt. Untersucht werden zwei Lastverhältnisse η_{Last} . Das Lastverhältnis wirkt sich im Rahmen der Ermittlung der Bewehrungsmengen auf den Bewehrungsgrad im Feldbereich aus. Der höhere Nutzlastanteil bei $\eta_{Last} = 0,67$ führt zu einem höheren Bewehrungsgrad im Feld und somit zu einer geringeren Steifigkeitsdifferenz zwischen Stütz- und Feldbereich im gerissenen Zustand. Dies führt durchweg zu einer geringeren Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Für bezogene Momente $\mu_{St,Em} < \mu_{bal,m} = 0,17$ zeigt sich nur eine moderate Schnittgrößenumlagerung. Analog dazu wird die angestrebte Systemtraglast nur leicht unterschritten. Bis zu $\mu_{bal,m}$ erreicht die Bewehrung im Stützbereich ihre Bruchdehnung. Sobald bei $\mu_{St,Em} = 0,17$ der Versagensmodus im Stützbereich wechselt, kann die Bewehrungsfestigkeit nicht mehr ausgenutzt werden. Die zur Aufnahme des vorgegebenen bezogenen Moments $\mu_{St,Em}$ erforderliche Bewehrungsmenge steigt stark an (siehe Abbildung 6-3 (links)). Da die Bewehrung im Feld aufgrund der geringeren Momentenbeanspruchung weiterhin die Bruchdehnung erreicht, steigt der Bewehrungsbedarf hier weniger stark. Das Verhältnis der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich η_ρ nimmt infolgedessen deutlich zu (siehe Abbildung 6-3 (rechts)). Dies führt zu einer größeren Steifigkeitsdifferenz zwischen Stütz- und Feldbereich im gerissenen Zustand. Der Umlagerungsgrad

fällt ab und die Schnittgrößen verteilen sich in Richtung Stützbereich um. Erwartungsgemäß wird die angestrebte Traglast deutlich unterschritten, ab $\mu_{St,Em} = 0,26$ werden nur noch lediglich 75 % der Ziellast erreicht. Auch der Wechsel des Versagensmodus im Feldbereich bei $\mu_{St,Em} = 0,25$ bzw. $\mu_{St,Em} = 0,28$ (für $\eta_p = 0,67$ bzw. $\eta_p = 0,2$) kehrt diesen Trend nicht um.

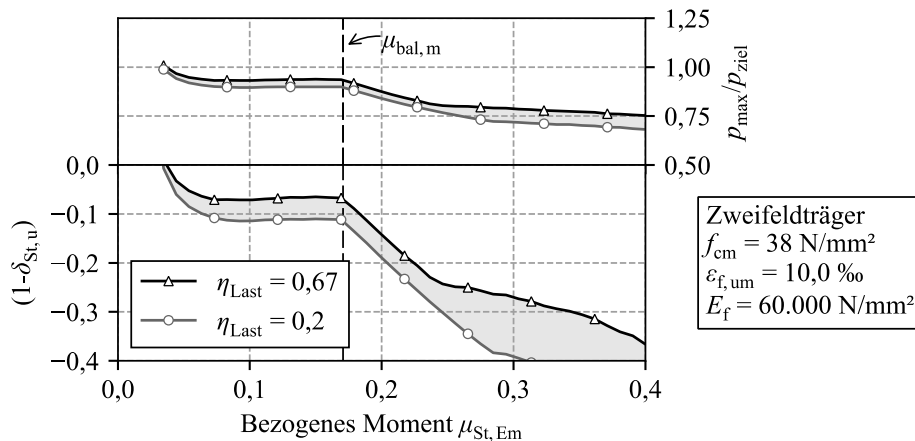


Abbildung 6-24 Einfluss des Lastverhältnisses auf den Umlagerungsgrad und die Systemtraglast

6.5.3.3 Einfluss einer feldweisen Belastung auf die Systemtragfähigkeit

In Kapitel 6.5.2.3 wurde gezeigt, dass eine feldweise Belastung zu geringeren Umlagerungsgraden und somit zu einer größeren Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich führt. Jedoch wird der Stützbereich bei einer nur in einem Feld wirkenden Nutzlast nicht maximal beansprucht. Dies bestätigt die in Abbildung 6-25 dargestellte Untersuchung. Neben einer vollen Belastung beider Felder (Volllast) wurde eine feldweise Belastung für ein Lastverhältnis $\eta_{Last} = 0,5$ ($q_k = g_k$; siehe Gl. 6-3) simuliert. Es wird deutlich, dass sich zwar eine größere Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich einstellt. Aufgrund der geringeren Beanspruchung des Stützbereichs kann die angestrebte Traglast jedoch größtenteils erreicht werden. Das Verhältnis p_{max}/p_{Ziel} ist bei einer feldweisen Belastung durchgängig größer als bei Ansatz einer vollen Belastung beider Felder. Hinsichtlich einer übermäßigen Beanspruchung des Stützbereichs infolge unplanmäßiger Schnittgrößenumlagerungen stellt die Belastung beider Felder somit die maßgebende Laststellung dar.

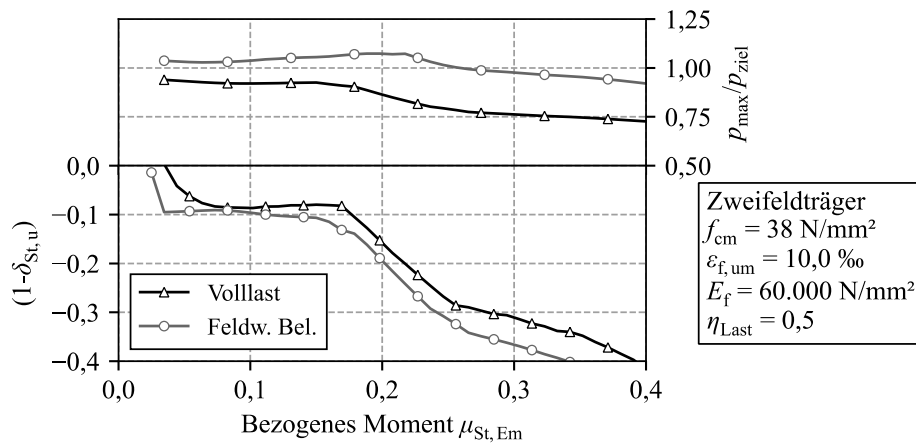


Abbildung 6-25 Einfluss einer feldweisen Belastung auf den Umlagerungsgrad und die Systemtraglast

6.5.3.4 Einfluss der Bewehrungsbruchdehnung auf die Systemtragfähigkeit

In Kapitel 6.2.2 sowie 6.3.3 wurde dargelegt, dass die Lage des Balance Points, an welchem sowohl Beton als auch Bewehrung ihre Festigkeit erreichen und welcher den Wechsel des Versagensmodus kennzeichnet, von der Festigkeit der Bewehrung beeinflusst wird. Abbildung 6-26 zeigt daher den Einfluss der Bewehrungsfestigkeit auf die Systemtraglast. Die bereits beschriebenen Effekte stellen sich unabhängig von der Bruchspannung der Bewehrung ein. Lediglich der Balance Point und damit der Wechsel des Versagensmodus im Stützbereich wird bei einem anderen bezogenen Moment $\mu_{St,Em}$ erreicht.

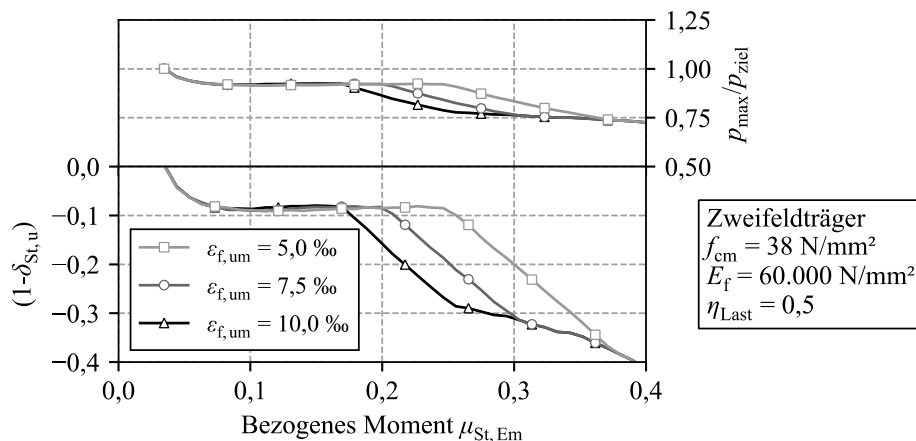


Abbildung 6-26 Einfluss der Bewehrungsbruchspannung auf den Umlagerungsgrad und die Systemtraglast

6.6 Schlussfolgerung

Die in Kapitel 6.5 durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass die Momentenverteilung in FVK-bewehrten Betonträgern fast ausschließlich vom Verhältnis der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich bestimmt wird. Bei praxisnahen Bewehrungsverhältnissen ergibt sich im Vergleich zu einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung stets eine Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Dies führt zu einer höheren Beanspruchung als aufgrund einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung zu erwarten wäre. Da Bewehrungsmaterialien aus FVK kein plastisches Verformungsvermögen aufweisen, kann sich der Stützbereich dieser zusätzlichen Beanspruchung – anders als in einem Stahlbetonbauteil – nicht entziehen. Dies führt dazu, dass die theoretische Systemtragfähigkeit nicht erreicht werden kann. Eine geringfügige Entlastung des Stützbereichs ergibt sich lediglich aus Zusatzverkrümmungen durch die Bildung von Schubrisen sowie zusätzlichen Schubverformungen bei schubweicher Systemmodellierung. Bei den weiteren Betrachtungen werden diese Effekte, die das Tragverhalten ohnehin nur untergeordnet beeinflussen, auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt. Die größten ungünstigsten Umlagerungen vom Feld- zum Stützbereich treten in einem System mit zwei Feldern auf. Diese vergrößern sich zwar infolge feldweise wirkender Nutzlasten, jedoch geht hiermit eine reduzierte Beanspruchung des Stützbereichs einher. Die maßgebliche Laststellung stellt daher eine Volllast auf beiden Feldern dar.

Als besonders kritisch sind jene Beanspruchungssituationen zu bewerten, die zu einem Erreichen der Betonbruchstauchung im Stützbereich führen. Da die Festigkeit der Bewehrung nicht mehr ausgenutzt werden kann, steigt der im Stützbereich erforderliche geometrische Bewehrungsgrad stark an und die Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich nimmt zu. Während diese für kleine Beanspruchungen und ein Versagen des Stützquerschnitts infolge Erreichens der Bewehrungsfestigkeit bei ca. 10 % liegen, wachsen sie ab dem Wechsel der Versagensart fast linear mit der Beanspruchung. Es werden absolute Umlagerungsgrade von über 40 % erreicht. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6-27 abschließend für ein FVK-Bewehrungsmaterial mit einer Bruchdehnung $\varepsilon_{f,um} = 10 ‰$ dargestellt.

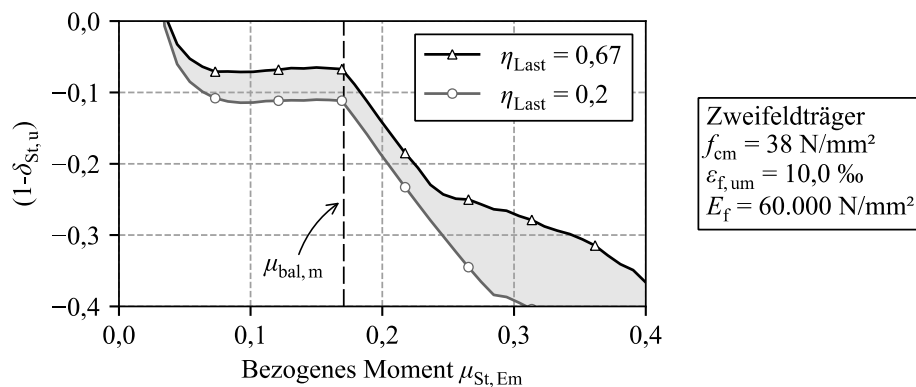


Abbildung 6-27 Umlagerungsgrad in Abhängigkeit des bezogenen Moments im Stützbereich

Bisher fanden alle Betrachtung auf Basis der Mittelwerte der Materialeigenschaften statt. Daher ist weiterhin die Frage zu klären, in welchem Umfang diese unplanmäßige Umlagerung der Schnittgrößen und die damit einhergehende übermäßige Beanspruchung des Stützbereichs durch das semiprobabilistische Sicherheitskonzept, welches der Bemessung nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) bzw. für FVK-bewehrte Bauteile nach DAfStb (2022) zugrunde liegt, aufgefangen werden kann. Es ist naheliegend, dass dies – wenn überhaupt – lediglich in Bereichen geringer Bauteilbelastungen möglich ist, in denen der Stützbereich infolge des Erreichens der Bewehrungsfestigkeit versagt. Hier finden lediglich moderate Umlagerungen statt (siehe Abbildung 6-27), welche durch das normative Sicherheitskonzept erfasst sein könnten. Für Beanspruchungen, die zu einem Erreichen der Betonbruchs-tauchung im Stützbereich führen, ist dies nicht zu erwarten. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass viele internationale Normenwerke (z. B. ACI 440.1R-15 (2015) und CAN/CSA-S806-12 (2012), siehe Kapitel 2.4.2) eine Betonversagen FVK-bewehrter Bauteile als den anzustrebenden Versagensmodus ansehen, ist dies als problematisch zu bewerten.

7 ZUVERLÄSSIGKEIT STATISCH UNBESTIMMTER BETONBAUTEILE MIT FVK-BEWEHRUNG

7.1 Einführung

Wie im vorherigen Kapitel ausgeführt, lagern sich die Schnittgrößen in FVK-bewehrten Durchlaufsystemen im Vergleich zu einer linear-elastischen Schnittgrößenverteilung unplanmäßig in Richtung Stützbereich um. Dies führt zu einer erhöhten Beanspruchung dieses Bereichs, da das Bauteil – anders als im Stahlbetonbau – nicht in der Lage ist, hochbeanspruchte Bereiche durch plastische Verformungen zu entlasten. Unklar ist, inwiefern dieser Effekt durch die bestehenden Bemessungsregeln für FVK-bewehrte Bauteile abgedeckt ist oder ob dieser Effekt dazu führt, dass das in DIN EN 1990 (2011) angestrebte Sicherheitsniveau bei statisch unbestimmten Systemen nicht erreicht wird.

Zur Klärung dieser Frage wird auf Basis der Monte-Carlo-Methode (siehe Kapitel 3.4) und des in Kapitel 5 beschriebenen Berechnungsmodells ein Modell zur Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit (stochastisches Modell) entwickelt. Anhand dieses Modells werden Zuverlässigkeitsanalysen unter verschiedenen Randbedingungen durchgeführt, um den Zuverlässigkeitsindex statisch unbestimmter FVK-bewehrter Träger zu ermitteln. Zunächst wird hierzu die stochastische Modellierung der Widerstände und Einwirkungen dargelegt und die Verteilungsfunktionen sowie statistischen Momente der relevanten Eingangsgrößen festgelegt. Zudem werden geeignete Samplingmethoden zur Reduktion der Berechnungsdauern ausgewählt. Im Anschluss findet eine Validierung des Modells mit Hilfe von Zuverlässigkeitsanalysen an Einfeldträgern aus der Literatur statt.

Mit dem entwickelten und validierten Modell wird anschließend das Zuverlässigkeitsniveau eines einfeldrigen Vergleichsbauteils ermittelt. Darauf aufbauend erfolgt die Analyse eines Zweifeldsystems unter der Variation verschiedener Einflussgrößen.

7.2 Stochastisches Modell

7.2.1 Modellierung der Widerstände und Einwirkungen

7.2.1.1 Statistische Kennwerte von Beton

Stochastische Untersuchungen der Betondruckfestigkeit wurden schon früh u. a. in Rüscher et al. (1969) durchgeführt. Umfangreiche Auswertungen von Prüfergebnissen zeigten, dass die Standardabweichung der Druckfestigkeit unabhängig von der untersuchten Betonfestigkeitsklasse ist. Dies wird auf die mit zunehmender Festigkeitsklasse intensiveren Maßnahmen zur Qualitätssicherung zurückgeführt (vgl. Gröbl et al. (2001)). Die Standardabweichung beträgt im Mittel ca. 5 N/mm^2 , was bei Ansatz einer Normalverteilung zu dem

in DIN EN 1992-1-1 (2011) definierten, charakteristischen Wert der Betondruckfestigkeit nach Gl. 7-1 führt (5 %-Quantil).

$$f_{ck} = f_{cm} - K_{p=0,05} \cdot 5 \text{ N/mm}^2 \approx f_{cm} - 8 \text{ N/mm}^2 \quad \text{Gl. 7-1}$$

mit:

$$K_{p=0,05} = 1,645 \quad \text{Quantilfaktor des 5 \%-Quantils}$$

Aktuellere Untersuchungen (siehe Rempel (2018), Tue et al. (2005)) lassen hingegen auf eine steigende Standardabweichung bei höheren Betonfestigkeiten schließen.

Um die Vergleichbarkeit mit bestehenden Zuverlässigkeitsanalysen an FVK-bewehrten Tragwerken zu gewährleisten, wird in der vorliegenden Arbeit eine konstante Standardabweichung der Betondruckfestigkeit verwendet. Als Verteilungsfunktion wird, wie vielfach in der Literatur ausgeführt (Six (2001), Heimann (2013), Schwuchow (2009), Rempel (2018) oder Häußler-Combe et al. (2015)), eine Log-Normalverteilung gewählt. Diese nimmt keine negativen Werte an, was die Beschreibung eines Festigkeitswertes ermöglicht und zudem den Ausführungen in Rüsç et al. (1969) zur stochastischen Verteilung der Betondruckfestigkeit entspricht.

Zur stochastischen Modellierung weiterer Festbetoneigenschaften stellt JCSS (2001) entsprechende Ansätze bereit. Grundsätzlich ist von einer Korrelation der Materialeigenschaften von Beton untereinander auszugehen. Daher ist es zweckmäßig die Vorfaktoren, welche zur Ermittlung der weiteren Festbetoneigenschaften verwendet werden (vgl. Kapitel 4.2.1), einer Streuung zu unterwerfen. JCSS (2001) stellt hierzu Variationskoeffizienten bereit. Diese Variationskoeffizienten lassen sich problemlos auf die Ansätze zur Bestimmung der Materialeigenschaften des Betons nach DIN EN 1992-1-1 (2011) übertragen.

Da in der vorliegenden Arbeit das Biegetragverhalten untersucht wird, wird auf eine stochastische Modellierung des E-Moduls verzichtet. Zwar wirkt sich das E-Modul auf das Verformungsverhalten der Betondruckzone aus, durch eine deterministische Bestimmung des E-Moduls aus der streuenden Betonfestigkeit wird dieser Effekt jedoch erfasst. Die Berücksichtigung einer gesonderten Streuung des Verformungsvermögens ist insbesondere bei schlanken, normalkraftbeanspruchten Bauteilen von Bedeutung.

Wie in Kapitel 4.2.1 gezeigt, ist die Betonbruchstauchung großen Streuungen unterworfen. Diese wird daher entsprechend JCSS (2001) als log-normalverteilte Zufallsgröße modelliert. Als Mittelwert wird nicht die in JCSS (2001) formulierte Beziehung in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit, sondern die in DIN EN 1992-1-1 (2011) definierte Bruchstauchung $\varepsilon_{cu} = -3,5 \text{ ‰}$ verwendet. Der Variationskoeffizient beträgt nach JCSS (2001) $v_{\varepsilon_{cu}} = 15 \text{ ‰}$.

Es wird zudem auf eine gesonderte stochastische Modellierung der Betonzugfestigkeit verzichtet. Diese wird deterministisch anhand von Gl. 4-6 aus der streuenden Betondruckfestigkeit ermittelt. Signifikante Auswirkungen der Betonzugfestigkeit auf das Systemtragverhalten ergeben sich nur bei unterschiedlichen Zugfestigkeiten in Stütz- und Feldbereich des Durchlaufträgers. Werden die Materialeigenschaften des Betons entlang der Bauteilachse vollständig korreliert angenommen, ändert sich das Umlagerungsverhalten, z. B. bei einer nach unten streuenden Betonfestigkeit, in allen Tragwerksbereichen nicht maßgeblich.

An dieser Stelle soll daher kurz der Umgang mit der räumlichen Korrelation der Festbetoneigenschaften erläutert werden. Durch die Inhomogenität des Betons weichen die Materialeigenschaften innerhalb des Bauteils voneinander ab. Eine wirklichkeitsnahe Modellierung dieses Effekts ermöglicht die Verwendung von Zufallsfeldern („Random Field“, eine Übersicht über entsprechende Modellierungsmöglichkeiten kann u. a. Grziwa (2017) entnommen werden). Dies stellt jedoch ein sehr aufwendiges Unterfangen dar und erfordert eine feine Unterteilung des Berechnungsmodells, wobei jedem Element eigene, miteinander korrelierte Betoneigenschaften zugewiesen werden. Das erstellte numerische Modell ermöglicht nur die Modellierung eines Feld- und eines Stützbereichs. Diese werden im vorliegenden Fall als vollständig korreliert angenommen, da die Bestimmung der Autokorrelation dieser beiden Bereiche im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist. Eine vollständige Entkopplung der beiden Bereiche unter der Annahme, dass Stütz- und Feldbereich vollständig unkorreliert sind, wird den Verhältnissen in realen Bauwerken noch weniger gerecht. Die beste Näherung stellt daher eine vollständige Korrelation der Betoneigenschaften dieser beiden Bereiche dar.

Es wird weiterhin der nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013) zur Berücksichtigung von Langzeitauswirkungen auf die Betondruckfestigkeit und von ungünstigen Auswirkungen durch die Art der Beanspruchung vorgesehene Faktor α_{cc} berücksichtigt. Grundsätzlich ist dieser Faktor ebenfalls Streuungen unterworfen. Da über die Verteilungsparameter jedoch nur wenige Erkenntnisse vorliegen, wird er deterministisch angenommen. In Anlehnung an Häußler-Combe et al. (2015) sowie Häußler-Combe und Weselek (2020) wird α_{cc} auch bei der Standardabweichung der Betonfestigkeit berücksichtigt. In Tabelle 7-1 sind die statistischen Kennwerte der Basisvariablen zur Beschreibung der Materialeigenschaften von Beton zusammengefasst.

Tabelle 7-1 Statistische Kennwerte des Betons

Bez.	Einheit	Verteilungsfkt.	Mittelwert μ_x	Standardabw. σ_x	CoV ν_x
f_{cm}	N/mm ²	LN	$\alpha_{cc} \cdot (f_{ck} + 8)$	$\alpha_{cc} \cdot 5$	variabel
ε_{cu}	‰	LN	3,5	0,525	0,15

7.2.1.2 Statistische Kennwerte der Bewehrung

Da die Herstellung der Bewehrungsmaterialien unter werksseitiger Qualitätskontrolle erfolgt, ist von geringen Streuungen der Materialeigenschaften auszugehen. Insbesondere bei der Bestimmung der Zugfestigkeit kommt jedoch der verwendeten Prüfmethode eine besondere Bedeutung zu. Da FVK-Werkstoffe nur eine sehr geringe Festigkeit quer zur Faserrichtung aufweisen, ist eine Fixierung der Probekörper ohne nennenswerte Querdrücke sicherzustellen. Anderenfalls kann es zu einem gestörten Tragverhalten im Bereich der Lasteinleitung und einer daraus resultierenden Unterschätzung der Festigkeit kommen.

Zur Ermittlung geeigneter, statistischer Kennwerte wird in Tabelle 7-2 eine Übersicht über Variationskoeffizienten für Bewehrungsfestigkeit und E-Modul aus der Literatur gegeben.

Tabelle 7-2 Übersicht über Variationskoeffizienten von FVK-Bewehrung

Bew.-Material	Bew.-Typ	CoV Festigkeit	CoV E-Modul	Quelle
GFK	Stab	0,05	0,05	Pilakoutas et al. (2002)
		0,078	0,025	Jeong et al. (2003)
		0,07	0,08	Shield et al. (2011)
		0,022	-	Keller et al. (2017)
		0,08	0,08	Khorramian (2020)
		0,07	-	Koosha et al. (2021)
		0,046	0,039	Hiesch (2023)
CFK	Stab	0,05	0,05	Pilakoutas et al. (2002)
	Gelege	0,08	0,01	Niewels (2008)
		0,03	0,015	Häußler-Combe und Weselek (2020)
AFK	Gelege	0,08	0,01	Niewels (2008)

Der Variationskoeffizient der Bewehrungsfestigkeit nimmt Werte zwischen 2,2 % und 8 % an, das E-Modul streut weniger stark. Für die folgenden Betrachtungen wird ein Variationskoeffizient der Bewehrungsfestigkeit von $v_f = 0,05$ und des E-Moduls von $v_{Ef} = 0,025$ verwendet.

Die Zuverlässigkeitsanalysen in dieser Arbeit sollen zeitinvariant durchgeführt werden. Wie in Kapitel 4.2.3.3 dargestellt, nimmt die Festigkeit einer FVK-Bewehrung jedoch in Abhängigkeit der Standzeit ab. Auch diese Festigkeitsabnahme stellt eine Zufallsgröße dar und kann mithilfe statistischer Methoden beschreiben werden, vgl. Idemudia et al. (2022). Hierauf wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und es werden in Anlehnung an Rempel (2018) und Häußler-Combe und Weselek (2020) sowohl bei der Bemessung des Bauteils als auch bei der nichtlinearen Berechnung die Langzeitfestigkeiten verwendet.

Die Zuverlässigkeitsanalysen sollen für GFK- sowie CFK-Bewehrungsstäbe unter Berücksichtigung der Langzeitfestigkeit durchgeführt werden. Für die Berechnung der mittleren Bewehrungsfestigkeiten wird sich an Schöck Bauteile AG (2018) (GFK) sowie solidian GmbH (2023) (CFK) orientiert.

In Schöck Bauteile AG (2018) wird für den GFK-Bewehrungsstab ComBAR lediglich die charakteristische Langzeitfestigkeit angegeben ($f_{\text{gfk,lang,k}} = 580 \text{ N/mm}^2$). Nach Schöck Bauteile AG (2018) handelt es sich hierbei um den 5 %-Quantilwert. Bei Unterstellung eines Variationskoeffizienten von 5 % sowie einer normalverteilten Grundgesamtheit ergibt sich hieraus eine mittlere Langzeitfestigkeit von $f_{\text{gfk,lang,m}} = 630 \text{ N/mm}^2$. Überprüfen lassen sich diese Annahmen anhand von Kurzzeitversuchen an diesem Bewehrungsmaterial, welche in Hiesch (2023) sowie im Rahmen der in Anhang C beschriebenen Bauteilversuche durchgeführt wurden. In Zugversuchen wurden mittlere Kurzzeitfestigkeiten von $f_{\text{gfk,kurz,m}} = 1.408 \text{ N/mm}^2$ (Hiesch (2023)) sowie $f_{\text{gfk,kurz,m}} = 1.354 \text{ N/mm}^2$ (Anhang C) ermittelt. Dies entspricht einem Beiwert zur Berücksichtigung des Dauerstandverhaltens von $\alpha_{\text{gfk,t}} = f_{\text{gfk,lang,m}} / f_{\text{gfk,kurz,m}} = 0,45$ bzw. $\alpha_{\text{gfk,t}} = 0,47$. Dies deckt sich mit den in Alex (2015) durchgeführten Untersuchungen zum Dauerstandverhalten des Bewehrungsstabs ComBAR, für welchen ein Abminderungsbeiwert von $\alpha_{\text{gfk,t}} = 0,48$ bestimmt wird.

In solidian GmbH (2023) wird der untere Grenzwert sowohl der charakteristischen als auch der mittleren Kurzzeitfestigkeit $f_{\text{cfk,kurz,k}} = 2.000 \text{ N/mm}^2$ bzw. $f_{\text{cfk,kurz,m}} = 2.200 \text{ N/mm}^2$ ausgewiesen. Angaben zur Abminderung der Festigkeit infolge von Dauerstandeffekten werden nicht gemacht. In Anlehnung an Rempel (2018) und El-Ghadioui (2020) wird $\alpha_{\text{cfk,t}} = 0,9$ angenommen.

Werte für den mittleren E-Modul der Bewehrungen werden ebenfalls Schöck Bauteile AG (2018) sowie solidian GmbH (2023) entnommen. Die ermittelten Kenngrößen sind in Tabelle 7-3 zusammengefasst.

Tabelle 7-3 Statistische Kennwerte der Bewehrung

Mat.	Bez.	Einheit	Verteilungsfkt.	Char. Wert (5 %-Quantil)	Mittelwert μ_x	Standardabw. σ_x	CoV ν_x
GFK	$f_{\text{gfk,lang}}$	N/mm ²	N	580	630	31,5	0,05
	E_{gfk}	N/mm ²	N	-	60.000	1.500	0,025
CFK	$f_{\text{cfk,lang}}$	N/mm ²	N	1.800	1.980	100	0,05
	E_{cfk}	N/mm ²	N	-	137.000	3.425	0,025

In Kapitel 4.2.3.2 wurde ausgeführt, dass die im Querschnitt wirksame Bewehrungsfestigkeit infolge der streuenden Festigkeitseigenschaften entlang des Bewehrungsstabs und zwischen den Bewehrungsstäben von der Stablänge sowie von der Anzahl der im Querschnitt vorhandenen Stäbe abhängig ist. Stochastisch lässt sich dies als eine Kombination zweier serieller Systeme abbilden. Da in dieser Arbeit ausschließlich Untersuchungen an Bauteilen

unter Streckenlasten durchgeführt werden, ergeben sich keine Bereiche konstanter Belastung. Dies gilt insbesondere für die Stützbereiche von Durchlaufträgern, in welchen der Momentenverlauf stark veränderlich ist. Die Streuung der Festigkeit entlang eines Bewehrungsstabes wird daher nicht berücksichtigt, da in guter Näherung angenommen werden kann, dass die Bewehrungsfestigkeit im Bereich der maximalen Momentenbeanspruchung in Feld- und Stützbereich vorliegt. Weiterhin wird angenommen, dass die Festigkeiten der einzelnen Bewehrungsstäbe vollständig korreliert sind. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da davon ausgegangen werden kann, dass die zur Herstellung eines Bauteils verwendeten Bewehrungsstäbe aus der gleichen Produktionscharge stammen und ihre Eigenschaften stark bis vollständig korreliert sind.

7.2.1.3 Statistische Kennwerte geometrischer Abmessungen

Da im Rahmen der Zufälligkeitsanalyse Bauteile mit FVK-Bewehrungsstäben mit einem Durchmesser analog zu Betonstabstahl untersucht werden, erfolgt bei der Festlegung der Streuung der geometrischen Eigenschaften eine Orientierung am klassischen Stahlbetonbau. Der Vorgang sowie die Bedingungen bei der Herstellung eines Bauteils mit Bewehrungsstäben aus FVK entsprechen denen eines Stahlbetonbauteils. Da die statische Nutzhöhe für biegebeanspruchte Bauteile die maßgebende geometrische Größe darstellt, werden die Außenmaße des Querschnitts deterministisch zu den Mittelwerten des Querschnitts festgelegt. Um die Streuung der statischen Nutzhöhe und damit des inneren Hebelarms der Kräfte zu erfassen, wird die Betondeckung der Bewehrung als Basisvariable modelliert.

JCSS (2001) gibt für die Standardabweichung geometrischer Maße Werte zwischen 5 mm und 15 mm an. In Hausmann (2007), Six (2001) und Heimann (2013) wird für biege- bzw. normalkraftbeanspruchte Stahlbetonbauteile eine Standardabweichung der Betondeckung von 5 mm verwendet. Rempel (2018) ermittelt für textilbewehrte Querschnitte (CFK-Gellege) eine Standardabweichung von 3 mm (Bauteilhöhe: 150 mm). Da in der vorliegenden Arbeit stabförmige Bewehrungselemente betrachtet werden, wird für die Standardabweichung der Betondeckung $\sigma_{\text{cnom}} = 5 \text{ mm}$ angesetzt. Diese Streuung wird für Feld- sowie Stützquerschnitt unkorreliert angenommen.

7.2.1.4 Einwirkungen

Streuungen des Eigengewichts der Konstruktionen ergeben sich aus Abweichungen der Bauteilabmessung sowie der Betondichte. Diese können allgemein als gering angenommen und mit einem Variationskoeffizienten der Eigengewichtslast von $v_g = 0,1$ berücksichtigt werden (vgl. Six (2001), Schwuchow (2009), Heimann (2013)). Die Berücksichtigung eines Quantilwerts ist nach DIN EN 1990 (2011) nicht erforderlich, der charakteristische Wert entspricht dem Mittelwert.

Die stochastische Modellierung von Nutzlasten hingegen gestaltet sich deutlich aufwendiger. Umfassende Ausführungen dazu können Bachmann et al. (1997) sowie Hausmann (2007) und Ricker (2009) entnommen werden. Da die Modellierung der Nutzlasten der in dieser Arbeit durchgeführten Zuverlässigkeitsanalyse zeitinvariant geschieht, wird auf eine Darstellung dieser Grundlagen verzichtet. Nachfolgend wird erläutert, wie auf Basis der in DIN EN 1991-1-1/NA (2010) festgelegten Nutzlasten der Mittelwert der Einwirkung ermittelt wird. Dieser stellt eine Basisvariable des stochastischen Modells dar.

Ndudzo (2000) gibt an, dass keine Aussage darüber getroffen werden kann, welche Quantilwerte die in DIN EN 1991-1-1/NA (2010) aufgeführten Nutzlasten beschreiben. Ricker (2009), Six (2001) und Schwuchow (2009) definieren sie als 98 %-Quantil, Heimann (2013) setzt ein 95 %-Quantil voraus. Unter der Annahme, dass die veränderlichen Einwirkungen einer gumbelverteilten Zufallsgröße folgen, lässt sich unter Zuhilfenahme der bekannten Zusammenhang zur Beschreibung einer Gumbel-Verteilung (siehe z. B. Fischer (2001) sowie Spaethe (1992)) der Mittelwert der Nutzlast mit Gl. 7-2 bestimmen.

$$\mu_Q = \frac{Q_p}{1 - \left[\gamma + \ln(-\ln p) \right] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot v_Q}{\pi}} \quad \text{Gl. 7-2}$$

mit:

- μ_Q Mittelwert der veränderlichen Einwirkung
- Q_p Charakteristischer Wert der veränderlichen Einwirkung (p -Quantil)
- p Quantil
- v_Q Variationskoeffizient der veränderlichen Einwirkung
- $\gamma \approx 0,5772$ (Euler-Mascheroni-Konstante)

Durch Einsetzen der Konstanten ergeben sich Gl. 7-3 und Gl. 7-4 zur Bestimmung des Mittelwerts der veränderlichen Einwirkung für die Verwendung des 95 %- oder 98 %-Quantils.

$$\mu_Q = \frac{Q_{0,95}}{1 + 1,8658 \cdot v_Q} \quad \text{für 95 \% -Quantil} \quad \text{Gl. 7-3}$$

$$\mu_Q = \frac{Q_{0,98}}{1 + 2,5923 \cdot v_Q} \quad \text{für 98 \% -Quantil} \quad \text{Gl. 7-4}$$

In Abhängigkeit des gewählten Variationskoeffizienten v_Q der Nutzlast sowie des Quantilwerts ergeben sich somit unterschiedliche Verhältnisse von Mittelwert zu Quantilwert. Tabelle 7-4 gibt einen Überblick über verschiedene Ansätze aus der Literatur.

Tabelle 7-4 Ansätze zur Ermittlung des Mittelwerts der veränderlichen Einwirkung

ν_Q	p -Quantil	μ_Q	Quelle
0,4	0,98	$0,49 \cdot Q_k$	Six (2001), Schwuchow (2009)
0,4	0,95	$0,57 \cdot Q_k$	Heimann (2013)
0,164	0,98	$0,7 \cdot Q_k$	Ricker (2009), Rempel (2018)

In Anlehnung an die sehr detaillierten Untersuchungen von Ricker (2009) werden in dieser Arbeit die veränderlichen Einwirkungen entsprechend modelliert.

Auch die Standardabweichung wird gemäß Ricker (2009) und auf der sicheren Seite liegend zu $\sigma_Q = 0,2 \cdot Q_k$ angenommen. Dies ermöglicht zudem eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu bestehenden Zuverlässigkeitsanalysen FVK-bewehrter Bauteile, da Rempel (2018) analoge Ansätze verwendet. In Tabelle 7-5 werden die festgelegten Kennwerte zusammengefasst.

Da in der vorliegenden Arbeit Systeme mit mehr als einem Feld betrachtet werden, ist festzulegen, ob eine Korrelation der Lasten in verschiedenen Feldern vorliegt. JCSS (2001) sieht für Nutzlasten – unabhängig davon, ob sich die Lasten auf demselben oder einem anderen Geschoss befinden – eine Kovarianz nach Gl. 7-5 vor.

$$Cov(q_1, q_2) = \sigma_v^2 \tag{Gl. 7-5}$$

Die Werte für die Standardabweichung σ_v unterschiedlicher Nutzungskategorien werden ebenfalls tabellarisch angegeben. Für Büro- und Wohnräume ergeben sich damit nach JCSS (2001) Korrelationskoeffizienten von $\rho_{q_1q_2} = 0,15$ bzw. $\rho_{q_1q_2} = 0,3$.

Tabelle 7-5 Statistische Kennwerte der Einwirkungen

Bez.	Einheit	Verteilungsfkt.	Mittelwert μ_x	Standardabw. σ_x
G_m	N/mm ²	N	G_k	$0,1 \cdot G_k$
Q_m	N/mm ²	GUM	$0,7 \cdot Q_k$	$0,2 \cdot Q_k$

7.2.1.5 Modellunsicherheiten

Da jedes Modell nur eine Approximation der Realität darstellt, sind neben den Eingangsgrößen auch die Ergebnisse Unsicherheiten unterworfen. Dies betrifft sowohl die Modellierung der Einwirkungen als auch der Widerstände.

Zur Abbildung dieser Unsicherheiten werden die Ergebnisse der Einwirkungs- und Widerstandsmodelle mit Realisierungen einer Zufallsvariable mit dem Mittelwert $\theta_{E/R} = 1$ und einer festzulegenden Standardabweichung $\sigma_{\theta_{E/R}}$ multipliziert.

Die Streuungen des Berechnungsmodells können durch den Vergleich des Modells mit Versuchsergebnissen bestimmt werden (siehe Kapitel 5.4). Jedoch enthalten auch die Ergebnisse dieser Bauteilversuche Ungenauigkeiten (z. B. infolge Messtechnik, vgl. Ricker (2009)). Daher wird in Übereinstimmung mit JCSS (2001) und fib bulletin 80 (2016) ein Variationskoeffizient auf der Widerstands- sowie Einwirkungsseite von $v_\theta = 0,1$ verwendet. Die Zufallsvariablen werden log-normalverteilt angenommen. Tabelle 7-6 fasst die statistischen Kennwerte der Modellunsicherheiten zusammen.

Tabelle 7-6 Statistische Kennwerte der Modellunsicherheiten

Bez.	Einheit	Verteilungs-fkt.	Mittelwert μ_x	CoV v_x
θ_S	-	LN	1	0,1
θ_R	-	LN	1	0,1

7.2.2 Auswahl der Samplingmethode

Zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit stehen u. a. die in Kapitel 3.4 beschriebenen Methoden zur Verfügung. Infolge der Komplexität des numerischen Modells ergeben sich auch unter Verwendung diverser Optimierungsverfahren zur Reduktion der Berechnungszeit (z. B. die Verwendung von schwachbesetzten Matrizen in der FE-Berechnung, die Reduktion der Anzahl der Stützstellen bei der Aufstellung der Momenten-Krümmungs-Beziehung, das Ausnutzen der Systemsymmetrie, sofern möglich) Berechnungszeiten von 0,1 bis 0,5 Sekunden. Für deterministische Betrachtungen und Parameterstudien stellt dies ein sehr gutes Leistungsverhältnis dar. Die Verwendung der Monte-Carlo-Methode – auch bei Nutzung eines varianzmindernden Samplings wie Latin Hypercube Sampling (MCLHC) – erfordert jedoch bei den im Bauwesen angestrebten, sehr geringen Versagenswahrscheinlichkeiten mehrere Millionen Berechnungen. So ergibt sich mit einer mittleren Berechnungszeit von 0,25 Sekunden bei 10.000.000 Berechnungen eine Gesamtdauer von 700 Stunden. Eine Reduktion dieser Rechenzeit lässt sich durch die Parallelisierung des Berechnungsablaufs und die Aufteilung einzelner Berechnungen auf mehrere Rechenkerne erreichen. Zur Durchführung solcher Berechnungen steht an der Technischen Universität Darmstadt der Lichtenberg-Hochleistungsrechner (HLR) zur Verfügung. Dieser verfügt über insgesamt 630 Rechenknoten mit jeweils 96 Kernen. Da das Berechnungsmodell in der Programmiersprache *Python* erstellt wurde, kann die programmtechnische Umsetzung hierfür mit den Bibliotheken *MPI for Python* (Verteilung der Berechnungen auf mehr als einen Rechenknoten) oder *multiprocessing* (Ansteuerung von max. einem Rechenknoten) erfolgen. Die Aufteilung einer MCLHC Simulation auf z. B. sieben Rechenknoten (672 Kerne) führt zu handhabbaren Rechendauern von ca. einer Stunde. Da jedoch pro untersuchter Parameterkombination mehrere Berechnungen unter Variation der primären Eingangsgröße (z. B. bezogenes Moment oder Bewehrungsgrad) vorzunehmen

sind, ergeben sich immer noch beträchtliche Berechnungszeiten. Es daher nicht sinnvoll, sämtliche Zuverlässigkeitsanalysen unter Verwendung eines LHC-Samplings durchzuführen. Wie in Kapitel 3.4.4 gezeigt, stellt das Adaptive Importance Sampling (AIS) eine attraktive Alternative dar, mit der gleichwertige Ergebnisse mit einem Bruchteil des Rechenaufwandes erzielt werden können. Auch bei Verwendung des AIS werden die Berechnungen parallelisiert und auf den HLR ausgelagert.

Allerdings ist bei der Verwendung des AIS im Rahmen von komplexen Systemen, wie Durchlaufträgern, zu beachten, dass unter bestimmten Bedingungen mehrere Grenzzustände auftreten können. Sollte dies der Fall sein, ist eine Clusteranalyse vorzunehmen und ggf. verschiedene Versagensbereiche unter Verwendung multimodaler Stichprobenfunktionen zu untersuchen (vgl. Kapitel 3.4.5), worauf in den folgenden Ausführungen entsprechend eingegangen wird.

7.2.3 Ablauf der Zuverlässigkeitsanalyse

Nachfolgend wird der Ablauf der durchgeführten Zuverlässigkeitsanalyse erläutert. An dieser Stelle wird nur auf den „globalen“ Berechnungsablauf eingegangen. Die Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit mit den beiden Methoden AIS und MCLHC wird in Kapitel 3.4 ausgeführt.

In Abbildung 7-1 ist der Ablauf einer Zuverlässigkeitsanalyse dargestellt. Zunächst sind die zu untersuchenden Randbedingungen festzulegen. Neben den geometrischen Größen und Materialeigenschaften sind die Teilsicherheitsbeiwerte sowie weitere Abminderungsbeiwerte festzulegen. Als primäre Laufvariable, welche unter ansonsten konstanten Randbedingungen variiert wird, wird in der vorliegenden Arbeit das bezogene Bemessungsmoment im Stützbereich $\mu_{St,Ed}$ oder der geometrische Bewehrungsgrad im Stützbereich ρ_{St} verwendet.

Unter Ansatz der Bemessungswerte der Materialeigenschaften wird das Bauteil zunächst bemessen. Wird $\mu_{St,Ed}$ als Variable genutzt, kann die erforderliche Bewehrungsmenge mit Hilfe von Gl. 6-5 und dem in Kapitel 6.2.2 aufgeführten Bemessungsverfahren bestimmt werden. Stellt ρ_{St} die primäre Eingangsgröße dar, ist die Bewehrungsmenge im Stützbereich bereits bekannt und das zugehörige bezogene Bemessungsmoment analog zu ermitteln. Da das Lastverhältnis η_{Last} der charakteristischen Einwirkungen q_k und g_k festgelegt wurde, kann mit Abbildung 6-1 das zugehörige Bemessungsmoment im Feld ermittelt und auch hier anschließend die Bemessung durchgeführt werden. In den in Abbildung 6-1 dargestellten Zusammenhängen sind die ungünstigen Laststellungen für Stütz- und Feldbereiche bereits berücksichtigt. Alternativ können zuerst die charakteristischen Lasten auf Grundlage des Bemessungsmoments im Stützbereich und der zugehörigen Laststellung bestimmt und mit den bekannten Formeln zur Schnittgrößenermittlung an Durchlaufträgern

unter Berücksichtigung der zugehörigen Laststellung das Bemessungsfeldmoment berechnet werden.

Die Ermittlung der charakteristischen Lasten erfolgt mit dem absoluten Moment im Stütz-
bereich, welches mit Gl. 6-9 zu bestimmen ist. Für einen Zweifeldträger können q_k sowie
 g_k anschließend mit Gl. 7-6 und Gl. 7-7 bestimmt werden. Basierend auf den in Tabelle 7-5
gewählten Lastmodellierungen lassen sich die Mittelwerte der Einwirkungen berechnen.

$$q_k = \frac{8 \cdot M_{St,Ed} \cdot \eta_{Last}}{l^2 \cdot [\gamma_G \cdot (1 - \eta_{Last}) + \gamma_Q \cdot \eta_{Last}]} \quad \text{Gl. 7-6}$$

$$g_k = q_k \cdot \frac{1 - \eta_{Last}}{\eta_{Last}} \quad \text{Gl. 7-7}$$

Somit sind alle Eingangsgrößen für die Zuverlässigkeitsanalyse bestimmt. Diese kann mit
den erläuterten Methoden auf Grundlage der Mittelwerte der Materialeigenschaften und
Lasten durchgeführt werden.

Hierzu wird eine FE-Berechnung für jede i -te Realisation der erzeugten Stichprobe mit
Umfang N_{LCH} durchgeführt (MCLHC). Für das AIS werden jeweils K Iterationen mit Um-
fang N_{AIS} durchgeführt, wobei eine kontinuierliche Verbesserung der Stichprobenfunktion
mit jedem Iterationsschritt vorgenommen wird. Ist eine Clusteranalyse und die Verwen-
dung einer multimodalen Stichprobenfunktion erforderlich, wird dies für jeden Versagens-
punkt vorgenommen (Anzahl der Versagenspunkte: M). Wie in Kapitel 3.4.4 ausgeführt,
ist nach jedem AIS-Durchlauf zu prüfen, ob der statistische Fehler ausreichend klein ist.
Der Grenzwert wurde hierfür mit 10 % festgelegt. In den meisten Fällen reichten hierzu
 $K = 4$ Iterationen mit einem Stichprobenumfang von jeweils $N_{AIS} = 1.000$ aus.

Mit dem numerischen Modell wird auf Basis der mittleren Materialparameter und -gesetze
für jede i -te Realisierung die Systemtraglast $q_{i,max}$ ermittelt. Diese stellt die Wider-
standsgröße dar und wird mit einer Zufallsgröße zur Erfassung der Modellunsicherheit des
Berechnungsmodells $\theta_{i,R}$ multipliziert. Auf der Einwirkungsseite wird die zur i -ten Reali-
sierung gehörende Nutzlast q_i ebenfalls mit einem Faktor zur Erfassung der Unsicherheiten
in der Lastermittlung $\theta_{i,S}$ multipliziert. Aus dem Vergleich beider Größen ergibt sich der
Wert der Indikatorfunktion I ($I = 0 \rightarrow$ kein Versagen; $I = 1 \rightarrow$ Versagen).

Sind die Nutzlasten auf den einzelnen Feldern nicht vollständig korreliert, ist vor dem Be-
ginn der FE-Simulation das Verhältnis dieser beiden Lasten $\eta_{i,q} = q_{i,m,1} / q_{i,m,2}$ zu bestim-
men. Die in der FE-Simulation auf die Felder aufgebrachten Lastinkremente werden ent-
sprechend diesem Verhältnis gewählt. Damit ergibt sich in jeder Laststufe ein Nutzlastver-
hältnis, das dem der betrachteten i -ten Realisierung entspricht.

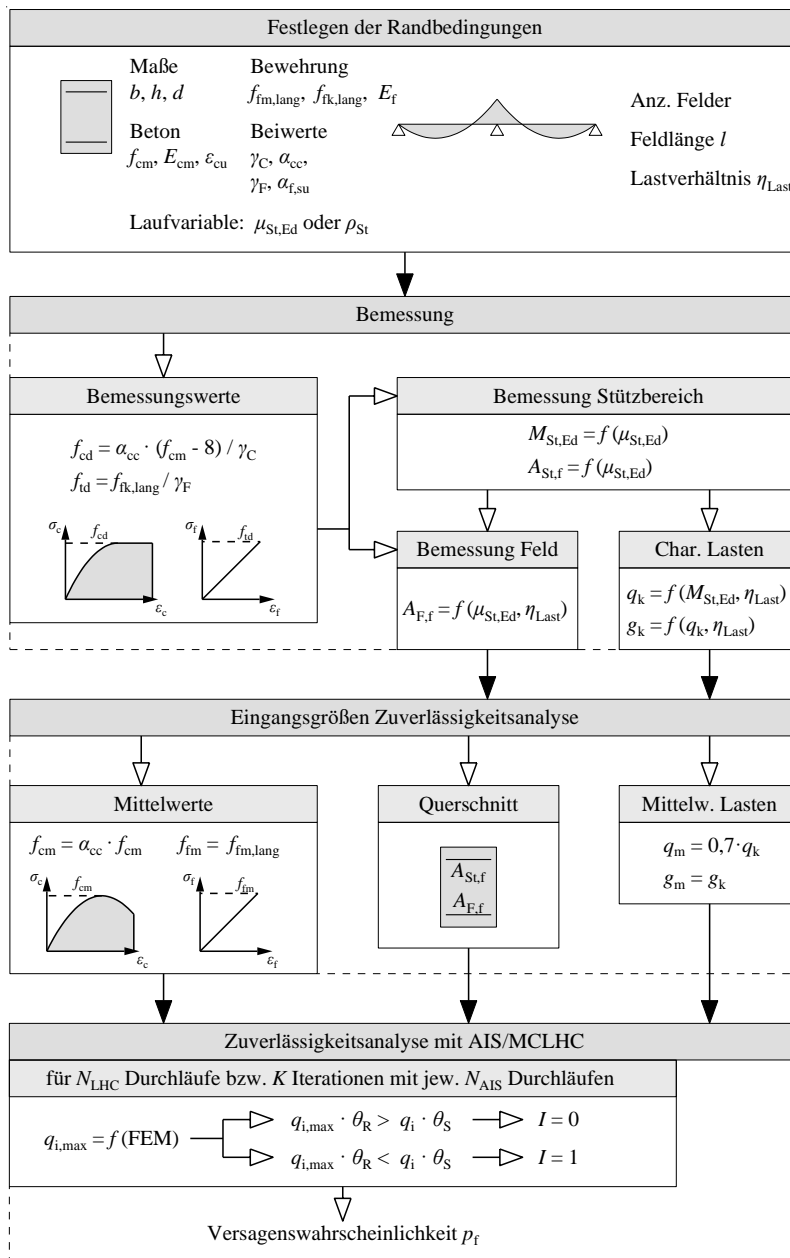


Abbildung 7-1 Ablauf der Zuverlässigkeitsanalyse

7.3 Überprüfung des stochastischen Modells

Bevor die Zuverlässigkeitsanalysen zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit statisch unbestimmter Betonbauteile durchgeführt werden, wird das AIS-Modell anhand von Vergleichsberechnung an Einfeldträgern aus der Literatur validiert. Da FVK-bewehrte Bauteile untersucht werden, werden hierzu die Untersuchungen in Rempel (2018) herangezogen. In der Arbeit werden eine Vielzahl von probabilistischen Betrachtungen mit dem Ziel, einen Teilsicherheitsbeiwert für FVK-bewehrte Bauteile zu ermitteln, durchgeführt.

In Abbildung 7-2 und Abbildung 7-3 sind die in Rempel (2018) ermittelte Zuverlässigkeitsindizes β der Berechnungen „C10“ sowie „A10“ dargestellt. Diese wurden für mehrere

geometrische Bewehrungsgrade ρ_1 durchgeführt und mit einer FORM-Analyse ermittelt. Vergleichend sind das Ergebnis der implementierten AIS-Berechnung sowie der zugehörige geschätzte statistische Fehler abgebildet. Es zeigt sich für beide Berechnungen eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Berechnungsmethoden. Lediglich für kleine geometrische Bewehrungsgrade ermittelt die AIS-Berechnung minimal größere Werte für den Zuverlässigkeitsindex.

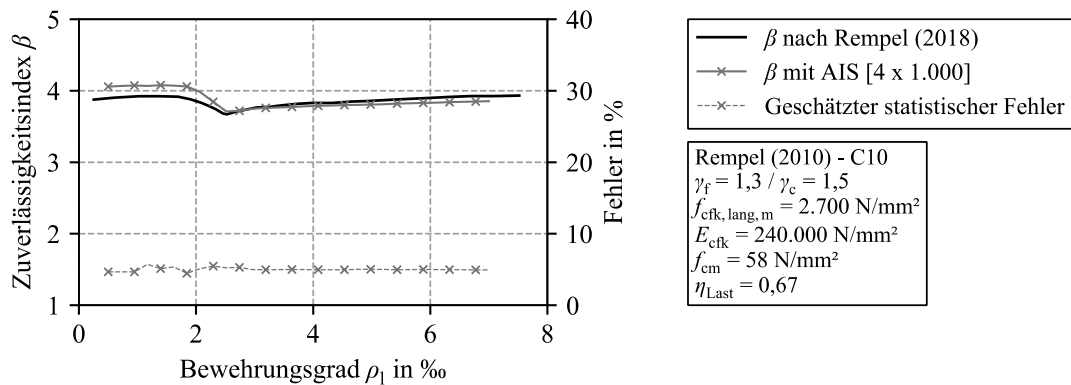


Abbildung 7-2 Überprüfung des stochastischen Modells anhand Berechnung „C10“ aus Rempel (2018)

Es wurde zudem überprüft, ob im Rahmen der AIS-Berechnung eine Cluster-Analyse zur Berücksichtigung verschiedener Versagenspunkte erforderlich ist. Die in den Berechnungen „C10“ sowie „A10“ untersuchten Systeme stellen Einfeldträger dar, bei denen das Versagen stets in Feldmitte auftritt. Jedoch können mit Beton- und Bewehrungsversagen zwei unterschiedliche Versagensmodi auftreten. Der Versagensmodus eines Bauteils wird durch den vorliegenden Bewehrungsgrad bestimmt (vgl. Abbildung 2-11). Während kleine Bewehrungsgrade zu Bewehrungsversagen führen, wird bei großen Bewehrungsgraden das Versagen der Betondruckzone maßgebend. Abgrenzen lassen sich diese beiden Bereiche durch den Balance Point. Für Bewehrungsgrade in der Nähe dieses Punktes ist eine Vorhersage des zu erwartenden Versagensmodus aufgrund der streuenden Materialparameter nicht eindeutig möglich. Im Rahmen der AIS-Berechnung wird daher nach dem ersten Berechnungsdurchlauf (mit skalierten Streuungen) geprüft, ob beide Versagensarten ähnlich häufig auftreten. Ist dies der Fall, wird eine Clusteranalyse durchgeführt und die folgenden AIS-Durchläufe finden mit einer bimodalen Stichprobe statt. Es zeigt sich, dass sich die beiden, nach dem ersten AIS-Durchlauf gefundenen Versagenspunkte mit jeder Iteration einander annähern und sich eine Versagenswahrscheinlichkeit analog der einer AIS-Analyse ohne Bildung von Clustern ergibt. Dies wird durch beispielhafte AIS-Berechnungen (ohne Clusteranalyse) in Rempel (2018) bestätigt, die zu identischen Versagenswahrscheinlichkeiten führen.

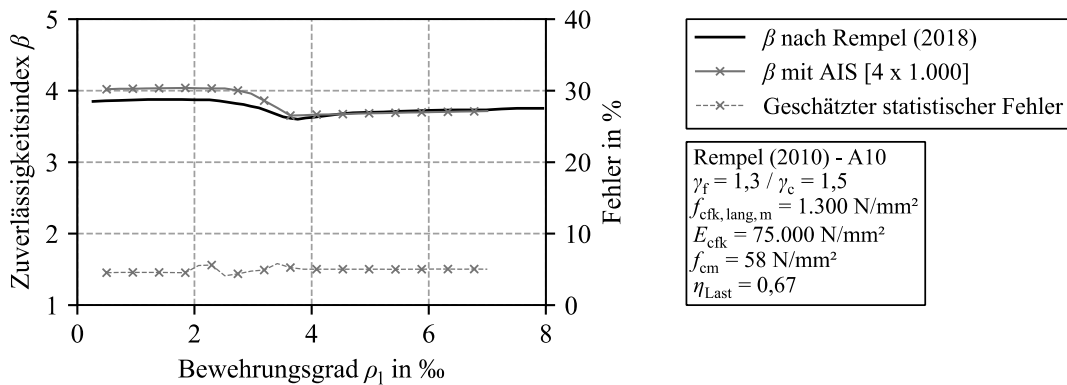


Abbildung 7-3 Überprüfung des stochastischen Modells anhand Berechnung „A10“ aus Rempel (2018)

7.4 Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse

7.4.1 Allgemeines

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse an Durchlaufträgern mit FVK-Bewehrung dargestellt. Ziel ist die Klärung der Forschungsfrage, ob durch die unplanmäßige Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich ein Sicherheitsdefizit besteht und die in DIN EN 1990 (2011) festgelegte Versagenswahrscheinlichkeit unterschritten wird. In den Betrachtungen in Kapitel 6 wurde gezeigt, dass in Zweifeldsystemen die größten ungünstigen Schnittgrößenumlagerungen zur Stütze auftreten, weshalb ein solches System gewählt wird. Auf eine schubweiche Systemmodellierung wird dabei verzichtet. Ebenso werden Zusatzkrümmungen, welche infolge Schubbrissbildung auftreten können, vernachlässigt. Wie in Kapitel 6.5.2.1 dargestellt, führen diese zu einer Reduktion der Umlagerung in Richtung Stützbereich, da sie eine Entlastung dieses Bereichs begünstigen. In guter Näherung werden diese Effekte daher nicht berücksichtigt.

Es wird zudem darauf hingewiesen, dass in den vorliegenden Untersuchungen die Menge der Bewehrung ausschließlich infolge der Biegetragfähigkeit des Bauteils bestimmt wird. Auf eine Berücksichtigung der Schubtragfähigkeit sowie von Verformungsnachweisen wird verzichtet. Die Gründe hierfür werden nachfolgend kurz dargelegt.

Das numerische Berechnungsmodell wurde für die Vorhersage des Biegetragverhaltens von FVK-bewehrten Bauteilen entwickelt und validiert. Die Vorhersage der Schubtragfähigkeit mittels numerischer Methoden stellt ein äußerst aufwendiges Unterfangen dar, da hierzu eine Abbildung des Bauteils mittels dreidimensionaler FE erforderlich ist. Im Rahmen einer Zuverlässigkeitsanalyse kommt dabei zudem der räumlichen Streuung der Materialeigenschaften des Betons eine besondere Bedeutung zu, vgl. Tran (2018). Die Ermittlung der Schubtragfähigkeit von FVK-bewehrten Bauteilen mit Hilfe von analytischen Methoden führt allgemein zwar zu guten Ergebnissen (siehe z. B. El-Ghadioui (2020), Hof-

mann (2021)), jedoch liefern diese Ansätze für Durchlaufsysteme nur unzureichende Resultate (siehe z. B. Cavagnis (2017)). Die Schubtragfähigkeit ist in großem Maß abhängig von der Bauteilschlankheit. Wie in Kapitel 6.5.2.5 dargestellt, trifft dies auf das Umlagerungsverhalten in FVK-bewehrten Bauteilen (unter Vernachlässigung der Effekte infolge Schubrissbildung) nicht zu. Die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsuntersuchung sind daher ohne Einschränkungen auf Schlankheiten übertragbar, bei denen der Schubwiderstand den Biegewiderstand überschreitet.

Auf die Berücksichtigung der Bauteilverformungen im GZG wird ebenfalls verzichtet. Diese werden maßgeblich von der Schlankheit und der Bewehrungsmenge beeinflusst. Wie bereits ausgeführt, ist ein Übertrag der Ergebnisse auf andere Schlankheiten problemlos möglich. Des Weiteren wird die Bauteildurchbiegung besonders durch den im Feldbereich vorliegenden Bewehrungsgrad beeinflusst (vgl. Habeeb (2011), El-Mogy (2011)). Wird dieser zur Begrenzung der Durchbiegung über den zur Sicherstellung der Biegetragfähigkeit erforderlichen Wert erhöht, verringert sich die Steifigkeitsdifferenz zwischen Feld- und Stützbereich und die Umlagerungen in Richtung Stützbereich nehmen ab. Dies stellt somit einen günstigen Fall hinsichtlich der untersuchten Fragestellung dar.

7.4.2 Untersuchungsprogramm

Die Zuverlässigkeitsanalysen finden an einem hochbautypischen Deckensystem mit zwei Feldern statt, Abbildung 7-4 stellt die System- und Querschnittsmaße dar. Es wird ein normalfester Beton der Festigkeitsklasse C30/37 sowie eine Stabbewehrung aus GFK verwendet. Jede Zuverlässigkeitsanalyse wird für verschiedene bezogene Momente im Stützbereich $\mu_{St,Ed}$ durchgeführt. So wird ein breites Spektrum an Belastungs- und Bewehrungssituationen abgedeckt.

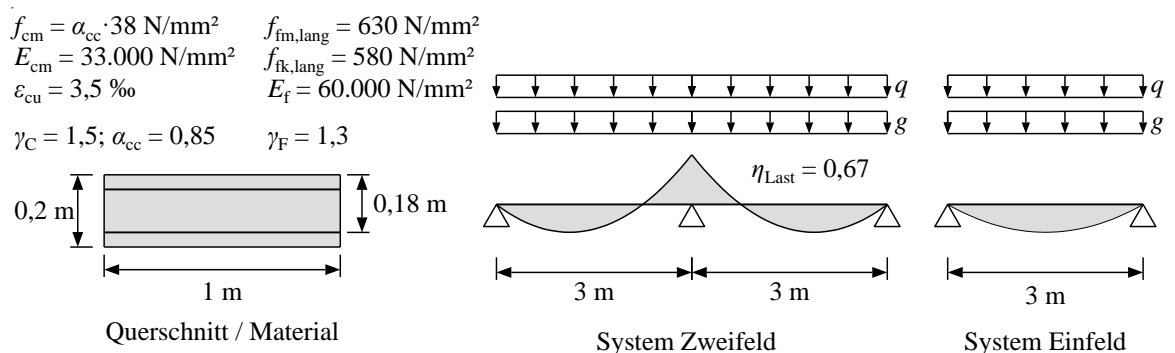


Abbildung 7-4 Referenzsysteme mit Materialkennwerten

In Bemessung und probabilistischer Berechnung werden Abminderungen sowohl der Bewehrungsfestigkeit infolge Dauerstandeffekten ($f_{f,lang}$) als auch der Betonfestigkeit infolge von Langzeitauswirkungen und Beanspruchungsart (α_{cc}) berücksichtigt.

Der Teilsicherheitsbeiwert für Beton beträgt gemäß DIN EN 1992-1-1/NA (2013) $\gamma_C = 1,5$. Bewehrungsseitig wird nach abZ Z-1.6-238 (2019), DAfStb (2022) und Rempel (2018) $\gamma_F = 1,3$ verwendet.

Das Lastverhältnis wird zunächst zu $\eta_{\text{Last}} = 0,67$ festgelegt. Dies führt zwar zu den geringeren Steifigkeitsunterschieden zwischen Stütz- und Feldbereich und damit zu geringeren Umlagerungen als bei kleineren Lastverhältnissen, diese Unterschiede sind jedoch vergleichsweise klein (vgl. Abbildung 6-24). Demgegenüber hat die Nutzlast aufgrund ihrer großen Streuung einen großen Einfluss auf die Zuverlässigkeit der Konstruktion, vgl. Rempel (2018). Da zu erwarten ist, dass dieser Effekt überwiegt, wird das Lastverhältnis zu $\eta_{\text{Last}} = 0,67$ gewählt. Im Rahmen der Parameterbetrachtungen wird ergänzend ein günstigeres Lastverhältnis betrachtet.

Der Betrachtungszeitraum für die Untersuchungen beträgt 50 Jahre. Der in DIN EN 1990 (2011) für die Zuverlässigkeitsklasse RC 2 festgelegte Zielzuverlässigkeitsindex beträgt somit $\beta = 3,8$ (vgl. Kapitel 3.3.2). Dieser wird in den folgenden Darstellungen als zulässiger Grenzwert eingetragen.

Bevor Untersuchungen am Zweifeldsystem vorgenommen werden, wird eine Zuverlässigkeitsanalyse eines statisch bestimmten Systems durchgeführt. Die hier ermittelten Sicherheitsniveaus sollten den normativen Vorgaben genügen und dienen als Vergleichswerte für die Untersuchungen am Zweifeldsystem.

7.4.3 Betrachtungen am Einfeldsystem

Da in einem Tragsystem mit nur einem Feld keine Umlagerungseffekte auftreten und der Teilsicherheitsbeiwert basierend auf bestehenden Untersuchungen festgelegt wurde, ist davon auszugehen, dass das Einfeld-Referenzsystem das angestrebte Sicherheitsniveau erfüllt. Als Laufvariable wird das Bemessungsmoment in der Mitte des Feldes $\mu_{F,Ed}$ gewählt.

In Abbildung 7-5 sind die Ergebnisse der AIS-Analyse in Form des Zuverlässigkeitsindex β für bezogene Momente bis $\mu_{F,Ed} = 0,4$ dargestellt. Die statistischen Fehler der Analysen liegen, bis auf einen Ausreißer, deutlich unter 10 %. Der Umfang der Stichproben und Iterationen wird daher als ausreichend bewertet.

Als horizontale Linie ist zudem der Zielzuverlässigkeitsindex $\beta = 3,8$ eingetragen. Wie erwartet, erfüllen alle bezogenen Momente das normativ festgelegte Sicherheitsniveau. Für kleine bezogene Momente liegt der Zuverlässigkeitsindex bei ca. $\beta = 4$ und Bewehrungsversagen tritt auf. Mit zunehmendem bezogenem Moment nimmt β leicht ab, da der Anteil der Versagenspunkten infolge Betonversagen zunimmt. Den kleinsten Wert nimmt der Zuverlässigkeitsindex im bezogenen Moment des Balance Points an. Dieser ist zusätzlich als vertikale Linie in das Diagramm eingetragen. Ermittelt wurde er auf Grundlage der Bemessungswerte und unter Ansatz des Parabel-Rechteck-Diagramms für die Betondruckzone.

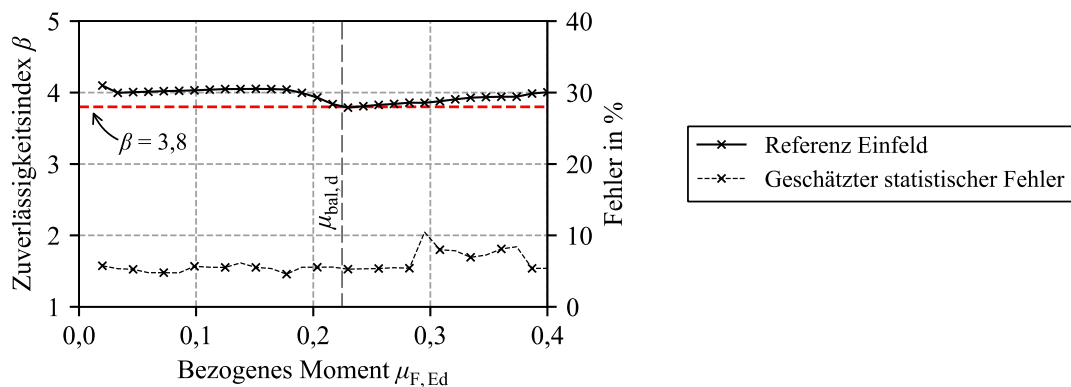


Abbildung 7-5 Zuverlässigkeitsindex des Einfeld-Referenzsystems

7.4.4 Betrachtungen am Zweifeldsystem

7.4.4.1 Allgemeines

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalysen am Zweifeldsystem dargestellt. Hierzu wird das bezogene Moment im Stützbereich für jede betrachtete Parameterkombination variiert, um ein breites Bauteilspektrum abzudecken.

Da in der vorliegenden Arbeit Systeme mit mehr als einem Feld betrachtet werden, ist festzulegen, ob eine Korrelation der Lasten in den verschiedenen Feldern vorliegt. Stellt das Deckensystem eine Nutzungseinheit (z. B. einen Büroraum, einen Serverraum etc.) dar, kann vereinfacht davon ausgegangen werden, dass die auftretenden Lasten vollständig korreliert sind (vgl. hierzu auch Bachmann et al. (1997)). Handelt es sich bei den beiden Deckenfeldern um unterschiedliche Nutzungseinheiten (z. B. zwei unterschiedliche Räume), können die Nutzlasten auch unkorreliert auftreten.

Primäres Ziel ist die Untersuchung der unplanmäßigen Schnittgrößenumlagerung von Feld zum Stützbereich auf die Tragwerkszuverlässigkeit. Wie in Kapitel 6.5.3.3 gezeigt, stellt eine Belastung beider Felder den hierfür ungünstigen Fall dar, wie es bei vollständig korrelierten Nutzlasten der Fall ist. Eine unkorrelierte Modellierung der Nutzlasten führt zu unterschiedlichen Lasten in beiden Feldern, entsprechend wird der Stützbereich nicht maximal beansprucht. Die Zuverlässigkeit der Konstruktion wird dann nicht mehr von der hier untersuchten Fragestellung bestimmt. Der Großteil der Untersuchungen findet daher unter Annahme vollständig korrelierter Nutzlasten statt. Eine Betrachtung für nicht vollständig korrelierte Nutzlasten wird zusätzlich durchgeführt.

7.4.4.2 Referenz-Zweifeldsystem

Vor der Durchführung der Zuverlässigkeitsanalysen am Zweifeldsystem wird ein deterministischer Vergleich der Bauteiltragfähigkeiten auf Bemessungs- und Mittelwertniveau

durchgeführt. Die Vorgehensweise entspricht der in Kapitel 6.5.3 beschriebenen Vorgehensweise, jedoch unter Berücksichtigung der Bemessungs- und Mittelwerte der Materialeigenschaften und -gesetze. Das Verhältnis der Systemtragfähigkeiten q_m/q_d erlaubt eine erste Beurteilung der Bauteilzuverlässigkeit und entspricht einer globalen „Sicherheitsmarge“. Abbildung 7-6 zeigt die Ergebnisse dieser Untersuchung, zum Vergleich ist das Verhältnis q_m/q_d für das Einfeldsystem ebenfalls eingetragen.

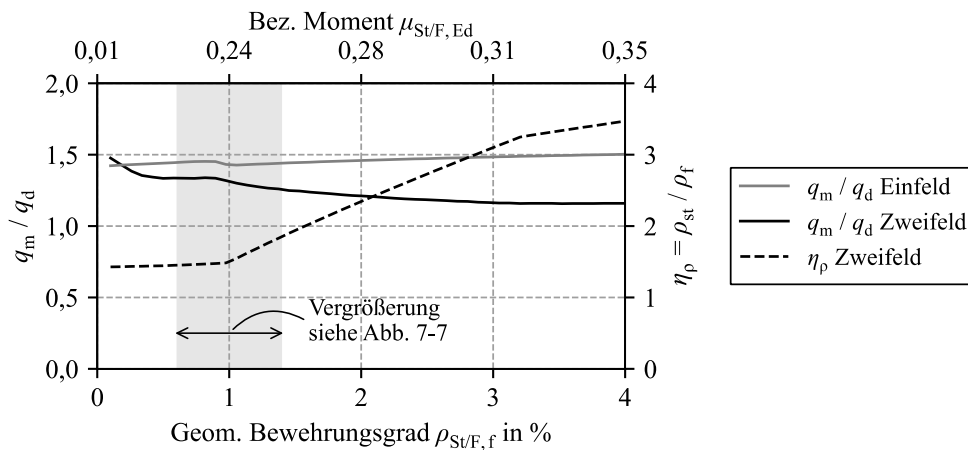


Abbildung 7-6 Vergleich der Systemtraglasten und Bewehrungsverhältnisse für Bemessungs- und Mittelwerte der Materialeigenschaften

Auf der oberen Abszisse ist das bezogene Bemessungsmoment im Stützbereich (Zweifeld) bzw. Feldmitte (Einfeld) aufgetragen, auf der unteren Abszisse der zugehörige geometrische Bewehrungsgrad. Da der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen nichtlinear ist (siehe Abbildung 6-3 (links)), sind die Skalen der beiden Achsen verschieden. Da der geometrische Bewehrungsgrad einen konsistenten Vergleich zwischen der Berechnung mit Mittelwerten und der Berechnung mit Bemessungswerten ermöglicht, wird dieser linear aufgetragen. Auf der linken Ordinate ist das Verhältnis q_m/q_d , auf der rechten Ordinate das Verhältnis der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich η_ρ für das Zweifeldsystem aufgetragen. Für das Zweifeldsystem ist mit Annäherung an einen geometrischen Bewehrungsgrad von ca. $\rho_{St/F,f} = 1$ ‰ eine deutliche Abnahme des Verhältnisses q_m/q_d zu verzeichnen. Dieser Bereich ist in Abbildung 7-7 vergrößert dargestellt. Die geometrischen Bewehrungsgrade $\rho_{bal,m,\epsilon 1}$, $\rho_{bal,m}$ und $\rho_{bal,d}$ sind hier zusätzlich als vertikale Linien eingetragen.

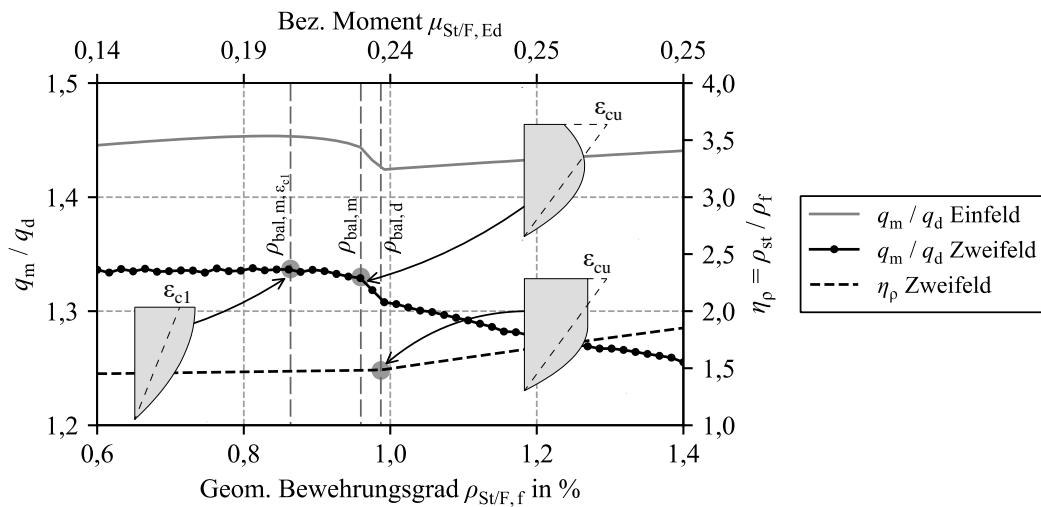


Abbildung 7-7 Detail aus Abbildung 7-6

Der Bewehrungsgrad $\rho_{\text{bal},m,\epsilon_1}$ markiert den Punkt, an dem in den Berechnungen auf Basis der Mittelwerte in der Betondruckzone die Druckfestigkeit f_{cm} erreicht wird. Die Dehnung in der druckbeanspruchten Randfaser beträgt $\epsilon_c = \epsilon_{c1}$ (vgl. Abbildung 4-1 (links)). Mit zunehmendem Bewehrungsgrad nimmt diese weiter zu und die Druckzonenhöhe steigt sowohl in den Berechnungen auf Grundlage der Mittelwerte als auch in den Berechnungen auf Basis der Bemessungswerte. Da jedoch bei den Mittelwertberechnungen die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons nach DIN EN 1992-1-1 (2011) verwendet wird – während bei den Berechnungen auf Basis der Bemessungswerte das Parabel-Rechteck-Diagramm (vgl. Abbildung 4-1 (rechts)) zugrunde liegt – nimmt das Verhältnis q_m/q_d geringfügig ab. Aufgrund des Entfestigungsbereichs der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons nach DIN EN 1992-1-1 (2011) ist die Betondruckzone bei den Mittelwertberechnungen nicht in der Lage, die gleiche Druckkraft aufzunehmen wie das Parabel-Rechteck-Diagramm (welches keinen Entfestigungsbereich aufweist) bei den Berechnungen auf Basis der Bemessungswerte.

Bei $\rho_{\text{St}/F,f} = \rho_{\text{bal},m}$ ändert sich die Versagensart bei den Mittelwertberechnungen, während dies bei den Berechnungen auf Basis der Bemessungswerte erst bei $\rho_{\text{St}/F,f} = \rho_{\text{bal},d}$ der Fall ist. Da bei den Mittelwertberechnungen die Bewehrungsfestigkeit nicht mehr ausgenutzt werden kann, führt dies, sowohl im Einfeld- als auch im Zweifeldsystem, zu einer signifikanten Abnahme des Verhältnisses q_m/q_d . Beim Einfeldträger steigt das Verhältnis q_m/q_d ab $\rho_{\text{St}/F,f} = \rho_{\text{bal},d}$ wieder an, da die Zunahme der erforderlichen Bewehrung diesen Effekt kompensiert. Beim Zweifeldsystem hingegen nimmt q_m/q_d weiter ab. Mit der Zunahme der Stützbewehrung steigt auch das Verhältnis der Bewehrungsgrade in Stütz- und Feldbereich η_p und die unplanmäßige Umverteilung der Schnittgrößen nimmt zu (vgl. Kapitel 6.2 sowie 6.6). Die Betrachtungen zeigen, dass der Bewehrungsgrad bzw. das bezogene Moment die Sicherheitsmarge q_m/q_d maßgeblich beeinflusst und zu unterschiedlichen Effekten infolge des nichtlinearen Werkstoff- und Querschnittsverhaltens führt. Zudem ist anzumerken, dass

die Sicherheitsmarge q_m/q_d in einem FVK-bewehrten Zweifeldsystem deutlich kleiner als in einem statisch bestimmten System ist.

Um diese deterministische Betrachtung hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf die Versagenswahrscheinlichkeit des Zweifeldsystems zu quantifizieren, werden nachfolgend Zuverlässigkeitsanalysen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7-8 dargestellt, auch hier liegen die geschätzten statistischen Fehler innerhalb des definierten Toleranzniveaus.

Zum Vergleich sind ergänzend die Ergebnisse des Referenz-Einfeldsystems (Abbildung 7-5) eingetragen. Für sehr kleine bezogene Momente liegt der Zuverlässigkeitsindex β des Zweifeldsystems geringfügig über dem des Einfeldsystems. Sobald jedoch Umlagerungen der Schnittgrößen in Richtung Stützbereich auftreten (vgl. Abbildung 6-27), sinkt der Zuverlässigkeitsindex so weit ab, dass er näherungsweise dem Zielzuverlässigkeitsindex $\beta = 3,8$ entspricht. Der Sicherheitsabstand zu diesem Wert, welcher im Einfeldsystem durch den großen Teilsicherheitsbeiwert der Bewehrung entsteht, wird infolge der unplanmäßigen Umlagerung vollständig aufgezehrt. Ab einem bezogenen einwirkenden Moment von ca. $\mu_{St,Ed} = 0,175$ wird der Schwellenwert von $\beta = 3,8$ unterschritten und das normativ festgelegte Sicherheitsniveau nicht mehr erreicht. Mit zunehmendem $\mu_{St,Ed}$ nimmt β weiter ab, bevor sich der Zuverlässigkeitsindex ab ca. $\mu_{St,Ed} > 0,32$ auf niedrigem Niveau stabilisiert. Die Abnahme von β ab $\mu_{St,Ed} \geq \mu_{bal,d}$ ist auf die Zunahme der erforderlichen Bewehrungsmenge im Stützbereich und der damit einhergehenden verstärkten Umlagerung der Schnittgrößen hin zu diesem Bereich zurückzuführen. Die Reduktion des Zuverlässigkeitsindex β für bezogene Momente $0,175 < \mu_{St,Ed} < \mu_{bal,d}$ resultiert – analog zu den Ausführungen in Abbildung 7-7 – aus dem Wechsel der Versagensart im Stützbereich. Während dieser Effekt im Einfeldsystem durch den Teilsicherheitsbeiwert der Bewehrung γ_F aufgefangen wird, unterschreitet das Zweifeldsystem bereits vor Erreichen von $\mu_{bal,d}$ den Zielzuverlässigkeitsindex.

Damit kann gezeigt werden, dass der Zielzuverlässigkeitsindex für statisch unbestimmte Systeme in großen Anwendungsbereichen signifikant unterschritten wird und die aktuellen Bemessungsregeln das in DIN EN 1990 (2011) festgelegte Sicherheitsniveau nicht gewährleisten können.

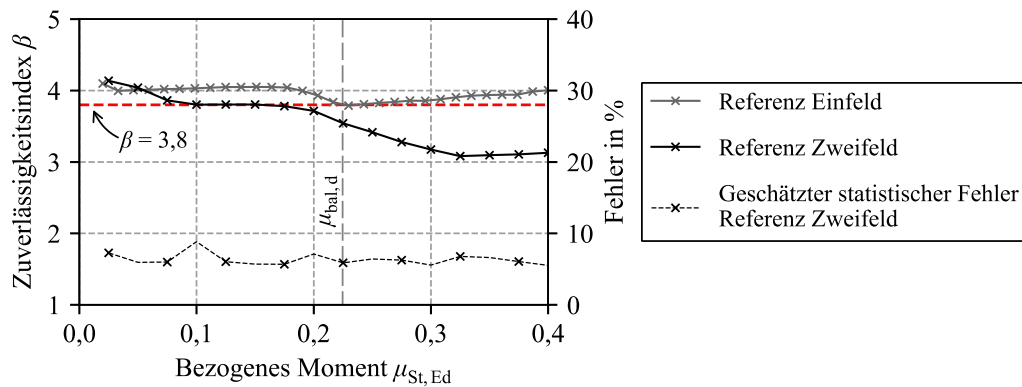


Abbildung 7-8 Zuverlässigkeitsindex des Referenz-Zweifeldsystems

In Abbildung 7-9 sind ergänzend die Sensitivitätsbeiwerte α^2 der AIS-Analyse dargestellt. Wie in Kapitel 3.3.1 erläutert, geben diese den Einfluss der Basisvariablen auf den Zuverlässigkeitsindex an. Die Nutzlast q hat einen dominierenden Einfluss auf die Versagenswahrscheinlichkeit, was die in Kapitel 7.4.2 aufgestellte Hypothese bestätigt. Weiterhin ist der Einfluss der Materialeigenschaften von Bewehrung und Beton in Abhängigkeit des vorliegenden Versagensmodus zu beobachten. Für die Summe der Sensitivitätsfaktoren der Einwirkungsseite (q, g, θ_S) ergibt sich für Bewehrungsversagen ein Wert von ca. $\alpha_S \approx 0,85$, für Betonversagen ca. $\alpha_S \approx 0,81$. Diese liegen damit marginal über der Empfehlung nach DIN EN 1990 (2011) von $\alpha_S \approx 0,7$ (vgl. Kapitel 3.3.2). Die Summe der Sensitivitätsfaktoren der Widerstandsseite ergibt sich zu $\alpha_R \approx 0,53$ (Bewehrungsversagen) bzw. $\alpha_R \approx 0,59$ (Betonversagen). Der in DIN EN 1990 (2011) vorgeschlagene Wert von $\alpha_R \approx 0,8$ wird geringfügig unterschritten. Es ist jedoch zu beachten, dass die Summe der in DIN EN 1990 (2011) vorgeschlagenen quadrierten Sensitivitätsbeiwerte über 1 liegt. Weiterhin führt Müller (2021) aus, dass die Sensitivitätsbeiwerte in Abhängigkeit von den Streuungen der Basisvariablen noch deutlich stärker von den in DIN EN 1990 (2011) empfohlenen Werten abweichen können. Die Modellierung der Basisvariablen in Kapitel 7.2.1 wird daher als zutreffend angesehen.

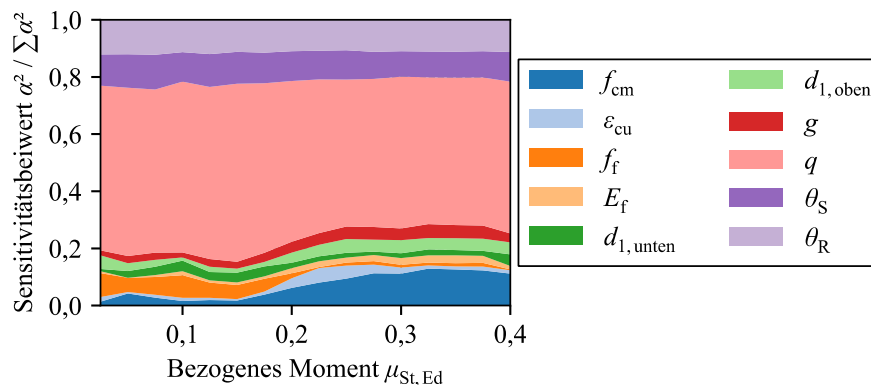


Abbildung 7-9 Sensitivitätsbeiwerte des Referenz-Zweifeldsystems

7.4.4.3 Einfluss einer reduzierten Bemessungsfestigkeit

Zur Erfassung einer unplanmäßigen Umlagerung der Schnittgrößen in statisch unbestimmten FVK-bewehrten Systemen ist in abZ Z-1.6-238 (2019) eine zusätzliche Abminderung der Bemessungsfestigkeit der GFK-Bewehrung mit dem Faktor $\alpha_{f,su} = 0,83$ vorgesehen, welcher auf Eligehausen et al. (2008) zurückgeht. Auch hier wird festgestellt, dass bei konventioneller Dimensionierung eines Mehrfeldsystems die angestrebte Traglast nicht erreicht werden kann. Es wird vorgeschlagen, diesem Effekt für ein Bewehrungsversagen im Stützbereich durch eine Reduzierung der Bemessungsfestigkeit der Bewehrung zu begegnen. Für ein Versagen des Querschnitts infolge Erreichens der Betonbruchstauchung werden keine Angaben gemacht.

Die Auswirkungen einer Berücksichtigung dieses Abminderungsfaktors auf den Zuverlässigkeitsindex sind in Abbildung 7-10 im unteren Teil der Grafik dargestellt. Der Faktor wurde hierbei sowohl im Stütz- als auch im Feldbereich zur Abminderung der Bemessungsfestigkeit der Bewehrung herangezogen. Eine ausschließliche Reduktion der Bemessungsfestigkeit im Stützbereich führt zu höheren Stützbewehrungsgraden und damit zu einer verstärkten Schnittgrößenumlagerung zu diesem Bereich.

Durch die Abminderung der Bemessungsfestigkeit vergrößert sich der Abstand des Zuverlässigkeitsindex im niedrigen Lastbereich zum Schwellenwert $\beta = 3,8$ deutlich. Dieser wird dadurch erst bei höheren Bemessungsmomenten $\mu_{St,Ed}$ unterschritten. Auch eine weitere Reduzierung der Bemessungsfestigkeit der Bewehrung (hier beispielhaft mit dem Faktor $\alpha_{f,su} = 0,75$ dargestellt) ändert an der grundsätzlichen Tendenz nichts. Die geringere Bemessungsfestigkeit der Bewehrung führt bei gleicher Beanspruchung zu höheren erforderlichen geometrischen Bewehrungsgraden, wie der obere Teil von Abbildung 7-10 zeigt. Der geometrische Bewehrungsgrad, ab dem bei Annahme eines mittleren Bauteilverhaltens die Betonbruchstauchung erreicht wird (siehe Abbildung 7-7), wird so bei geringeren Beanspruchungen erreicht. Dadurch verschiebt sich der Beginn der Abnahme des Zuverlässigkeitsindex in Richtung kleinerer Werten von $\mu_{St,Ed}$. Der genaue Beginn dieser Abnahme wird von den streuenden Materialeigenschaften des Betons und den übrigen Randbedingungen bestimmt.

Das grundlegende Problem der unplanmäßigen Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld zum Stützbereich kann durch eine Reduzierung der Bewehrungsfestigkeit im Rahmen der Bemessung nicht gelöst werden. Darüber hinaus wird der Zuverlässigkeitsindex für Bereiche, in denen die Bewehrungsfestigkeit erreicht wird, unnötig erhöht. Wie in Kapitel 7.4.4.2 gezeigt, deckt der reguläre Teilsicherheitsbeiwert der Bewehrung die Reduktion des Zuverlässigkeitsindex in diesen Bereichen bereits weitestgehend ab. Bei bezogenen Momenten, die zu einem Versagen des Stützbereichs infolge Erreichens der Betonbruchstauchung führen, wirkt sich die Bemessungsfestigkeit der Bewehrung erwartungsgemäß nur in geringem Umfang aus.

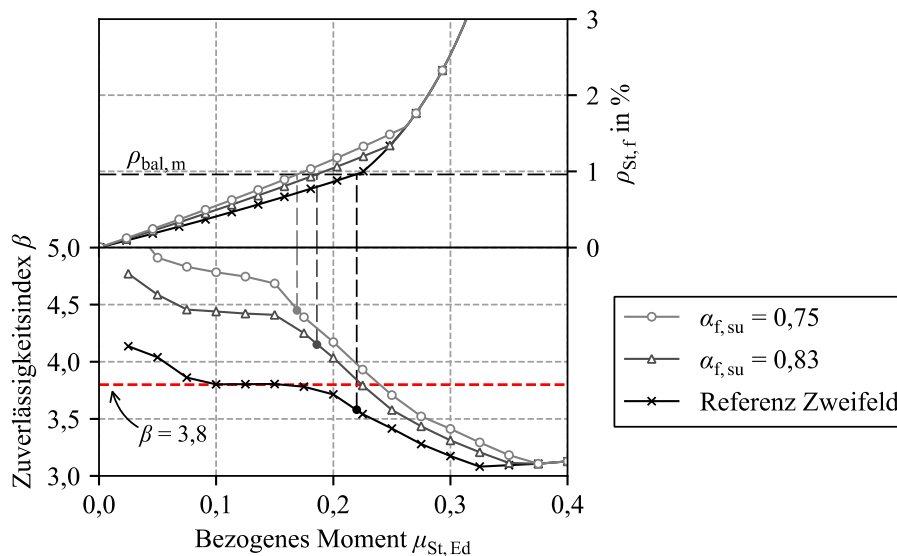


Abbildung 7-10 Einfluss einer Abminderung der Bemessungsfestigkeit der Bewehrung auf den Zuverlässigkeitsindex

7.4.4.4 Einfluss des Bewehrungsmaterials

In Abbildung 7-11 sind die Auswirkungen der Verwendung eines anderen FVK-Bewehrungsmaterials dargestellt. Es wird eine CFK-Bewehrung herangezogen, welche auch unter Berücksichtigung von Langzeiteffekten eine deutlich höhere Festigkeit als die GFK-Bewehrung des Referenzbauteils aufweist. Zudem ist der Wert des E-Moduls etwa doppelt so groß.

Aufgrund der höheren Bewehrungsfestigkeit ist der geometrische Bewehrungsgrad bei gleicher Beanspruchung deutlich geringer. Die daraus resultierende, größere Bewehrungsdehnung bei gleichem bezogenem Moment führt dazu, dass der Beton – sowohl bei der Annahme eines mittleren Bauteilverhaltens als auch bei der Bauteilbemessung – seine Bruchstauchung bei geringeren bezogenen Momenten erreicht. Dies führt zu einer horizontalen Parallelverschiebung des Verlaufs des Zuverlässigkeitsindex. Infolge des linear-elastischen Werkstoffverhaltens der FVK-Bewehrungen treten ansonsten keine weiteren Effekte auf. Das etwas höhere Sicherheitsniveau im Bereich kleiner bezogener Momente ist auf den geringfügig größeren, relativen Abstand von charakteristischer und mittlerer Bewehrungsfestigkeit zurückzuführen.

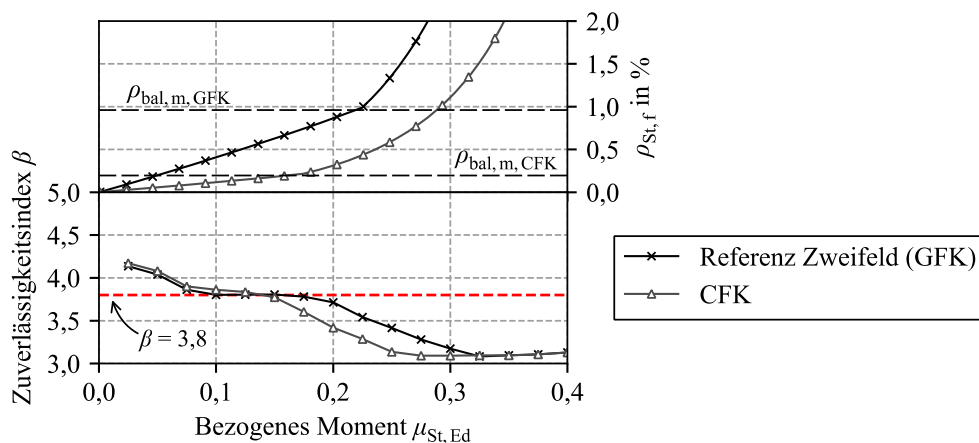


Abbildung 7-11 Einfluss des Bewehrungsmaterials auf den Zuverlässigkeitsindex

7.4.4.5 Einfluss des Lastverhältnisses

Bisher wurde von einem Lastverhältnis $\eta_{\text{Last}} = 0,67$ ausgegangen. Hierbei ist die charakteristische Nutzlast doppelt so groß wie die charakteristische Eigengewichtslast. Aufgrund der großen Streuungen der Nutzlast sind hierfür die größten Versagenswahrscheinlichkeiten zu erwarten, vgl. Rempel (2018). Allerdings treten bei diesem Lastverhältnis auch die geringsten, unplanmäßigen Umlagerungen auf (siehe Kapitel 6.5.3.2). Daher wird der Einfluss des Lastverhältnisses auf das Zuverlässigkeitsniveau gesondert betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7-12 dargelegt. Neben dem Lastverhältnis $\eta_{\text{Last}} = 0,67$ ist der Verlauf des Zuverlässigkeitsindex für $\eta_{\text{Last}} = 0,5$ ($q_k = g_k$) dargestellt.

Obwohl ein kleineres Lastverhältnis zu einer größeren Steifigkeitsdifferenz zwischen Stütz- und Feldbereich und damit zu einer größeren Umlagerung vom Feld- zum Stützbe- reich führt, zeigt sich, dass der Zuverlässigkeitsindex unabhängig vom bezogenen Moment zunimmt. Die Zunahme beträgt im Bereich des Bewehrungsversagens ca. $\Delta\beta = 0,35$. Mit zunehmendem bezogenem Moment reduziert sich die Zunahme geringfügig, für bezogene Bemessungsmomente $\mu_{\text{St,Ed}} \geq 0,3$ hat das Lastverhältnis keinen signifikanten Einfluss auf den Zuverlässigkeitsindex. Der Zielzuverlässigkeitsindex wird in diesem Bereich jedoch ohnehin nicht erreicht.

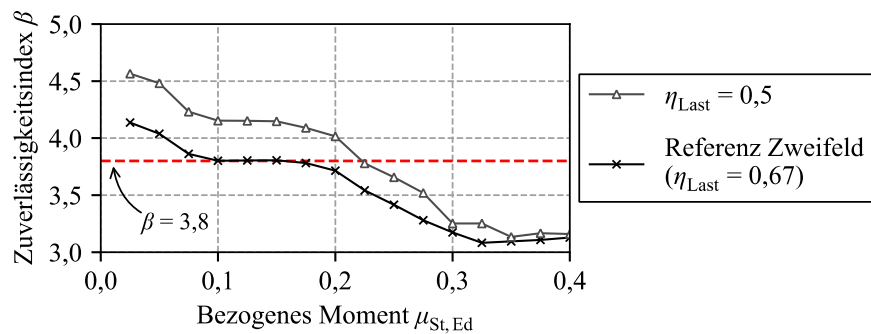


Abbildung 7-12 Einfluss des Lastverhältnisses auf den Zuverlässigkeitsindex

7.4.4.6 Einfluss der Nutzlastkorrelation

In den Kapiteln 6.5.3.3 und 7.4.4.1 wurde bereits erläutert, dass für die in dieser Arbeit untersuchte Fragestellung vollständig korrelierte Nutzlasten in beiden Feldern den relevanten Fall darstellen. Dennoch wird im Folgenden der Einfluss unkorrelierter Nutzlasten untersucht. Vereinfacht wird hierfür von einem vollständig unkorreliertem Zusammenhang der Nutzlasten ausgegangen ($\rho_{q_1q_2} = 0$).

Unterschiedliche Nutzlasteinwirkungen auf beiden Feldern des Zweifeldsystems können dazu führen, dass die Querschnittstragfähigkeit nicht im Stützbereich, sondern im Feldbereich erreicht wird. Dies ist im Rahmen der AIS-Analyse zu berücksichtigen, da es bei der Verwendung einer unimodalen Stichprobenfunktion dazu kommen kann, dass die generierte Stichprobe nur einen Teil des Versagensgebietes abdeckt (z. B. ausschließlich das Versagen des Stützbereichs) und ein Versagensbereich unberücksichtigt bleibt. In solchen Fällen ist eine Clusteranalyse durchzuführen und eine multimodale Stichprobenfunktion zu verwenden (vgl. Kapitel 3.4.5).

Im Rahmen der AIS-Berechnung wird nach dem ersten Berechnungsdurchlauf eine trimodale, multivariate Stichprobenfunktion erstellt. Da die Nutzlast sowohl im rechten als auch im linken Feld größer sein kann, ergeben sich drei theoretische Versagensstellen. Die zugehörigen Versagenswahrscheinlichkeiten werden dann zur Berechnung der Gesamtversagenswahrscheinlichkeit entsprechend ihrem Anteil an der Summe der Versagenspunkte gewichtet. Zur Überprüfung der getroffenen Annahmen und der programmtechnischen Umsetzung der AIS-Berechnung wurden Vergleichsrechnungen auf Basis der MCLHC-Methode durchgeführt. Da hierbei die Erzeugung der Stichprobe unabhängig von der Anzahl der Versagensstellen ist, kann die Methode unabhängig von den Randbedingungen angewendet werden.

In Abbildung 7-13 sind die Ergebnisse der Berechnungen dargestellt. Zur Reduzierung des geschätzten statistischen Fehlers der AIS-Analyse wird der Stichprobenumfang von $N_{AIS} = 1.000$ auf $N_{AIS} = 5.000$ und die Anzahl der Iterationen von $K = 4$ auf $K = 6$ erhöht.

Die implementierte AIS-Berechnung unterschätzt die Versagenswahrscheinlichkeit geringfügig, die Abweichungen zur MCLHC-Methode betragen ca. $\Delta\beta = 0,2$. Die im Rahmen der AIS-Berechnung durchgeführte Clusteranalyse und die anschließende Verbesserung der Schätzfunktion bieten somit noch Optimierungspotential, wovon an dieser Stelle jedoch abgesehen wird. Da die statistischen Fehler der MCLHC-Methode im definierten Toleranzbereich liegen, werden die so ermittelten Werte des Zuverlässigkeitsindex als belastbar angesehen. Die aufgestellte Hypothese kann dabei bestätigt werden. Die Berücksichtigung einer unkorrelierten Nutzlast führt unabhängig von der Bauteilbeanspruchung zu einer Erhöhung des Sicherheitsniveaus.

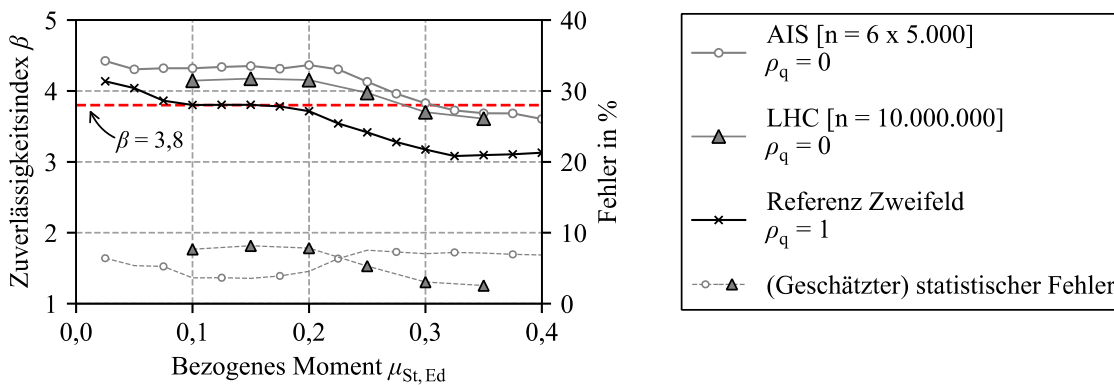


Abbildung 7-13 Einflüsse unkorrelierter Nutzlasten auf den Zuverlässigkeitsindex

7.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Zuverlässigkeit von statisch unbestimmten Systemen mit FVK-Bewehrung unter Biegebeanspruchung umfassend untersucht. Betrachtet wurden hierzu Durchlaufträger mit rechteckigem Querschnitt.

Ziel war die Beurteilung der Tragwerkszuverlässigkeit hinsichtlich einer unplanmäßigen Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Diese entsteht, da Stützbereiche in FVK-bewehrten Bauteilen stets höhere Bewehrungsgrade als Feldbereiche aufweisen. Dies führt nach dem Übergang beider Bereiche in den gerissenen Zustand II zu einer Steifigkeitsdifferenz zwischen diesen Bauteilbereichen. Infolgedessen lagern sich die Schnittgrößen in Richtung des Stützbereichs um, welcher – im Gegensatz zum Stahlbetonbau – nicht in der Lage ist, sich diesen durch die Aufnahme plastischer Verformungen zu entziehen.

Da die Berechnungen mit einer Variation des einwirkenden bezogenen Moments im Stützbereich durchgeführt wurden, konnte ein großer Bereich von Belastungssituationen und Bewehrungskonfigurationen abgedeckt werden. Zunächst wurde eine Zuverlässigkeitsanalyse für ein Einfeld-Referenzsystem durchgeführt. Diese ermöglicht eine Einordnung des Zuverlässigkeitsniveaus des statisch unbestimmten Systems. Die Analyse des Einfeld-Referenzsystems zeigte, dass der Teilsicherheitsbeiwert für FVK-Bewehrung $\gamma_F = 1,3$ eine

ausreichende Versagenswahrscheinlichkeit gewährleistet. Die Ergebnisse decken sich mit den Erkenntnissen in Rempel (2018). Insbesondere im Bereich kleiner Beanspruchungen (Bewehrungsversagen maßgebend) ergibt sich ein Zuverlässigkeitsindex, der ca. $\Delta\beta = 0,2$ über dem in DIN EN 1990 (2011) festgelegten Zielzuverlässigkeitsindex von $\beta = 3,8$ liegt.

Die wesentlichen Ergebnisse der Untersuchungen am Zweifeldsystem sind in Abbildung 7-14 zusammengefasst. In Kapitel 6.5.2.2 wurde gezeigt, dass dieses statische System zu den ungünstigsten Umlagerungsverhältnissen führt. Im Bereich kleiner Beanspruchungen wird der festgelegte Zuverlässigkeitsindex von $\beta = 3,8$ in allen Untersuchungen erreicht. Mit steigender Beanspruchung findet ein Wechsel der Versagensart im Stützbereich statt, was zu einem deutlichen Anstieg der erforderlichen Bewehrungsmenge in diesem Bereich führt. Dies führt zu einer verstärkten Umlagerung der Momente vom Feld- zum Stützbe- reich und damit zu einer Abnahme des Zuverlässigkeitsindex. Dieser Effekt tritt bei allen untersuchten Randbedingungen auf. Die Untersuchungen unter Berücksichtigung des Ein- flusses des Nutzlastanteils sowie der Nutzlastkorrelation zeigen durchweg günstigere Er- gebnisse. Die Variation der Bewehrungsfestigkeit führt bereits bei kleineren bezogenen Momenten zu einem Wechsel der Versagensart. Die in abZ Z-1.6-238 (2019) vorgesehene Abminderung der Bewehrungsfestigkeit erhöht den Zuverlässigkeitsindex im Bereich geringer Belastungen unnötig, mit dem Erreichen der Betondruckstauchung im Stützbereich kann der Zielzuverlässigkeitsindex auch so nicht erreicht werden.

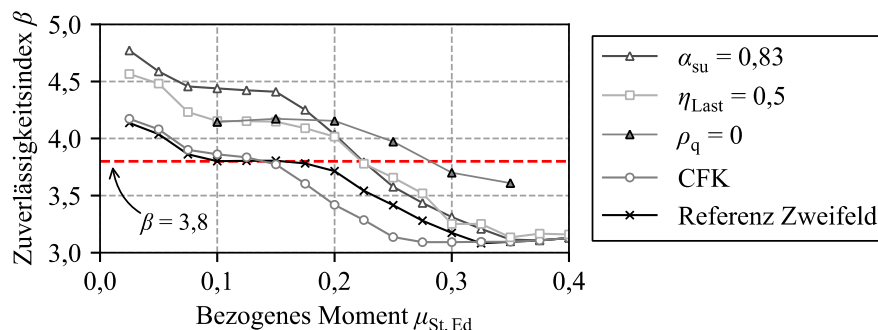


Abbildung 7-14 Zusammenfassung der Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse

Die derzeit gültigen Bemessungsregeln für FVK-bewehrte Bauteile können das in DIN EN 1990 (2011) festgelegte Sicherheitsniveau für statisch unbestimmte Durchlaufsysteme unter Biegebeanspruchung nicht in allen Beanspruchungssituation gewährleisten. Im folgenden Kapitel wird daher ein Vorschlag formuliert, mit dem der normativ festgelegte Zielzuverlässigkeitsindex erreicht werden kann.

8 VORSCHLAG ZUR BEMESSUNG STATISCH UNBESTIMMTER BETONBAUTEILE MIT FVK-BEWEHRUNG

8.1 Einführung

Auf der Grundlage der in Kapitel 7 durchgeführten Zuverlässigkeitsanalysen wird nachfolgend ein Vorschlag für die Bemessung von statisch unbestimmten Durchlaufträgern mit FVK-Bewehrung unter Biegebeanspruchung im Grenzzustand der Tragfähigkeit formuliert. Wie in Kapitel 6 gezeigt, findet in statisch unbestimmten Tragwerken mit FVK-Bewehrung im gerissenen Zustand II eine Umverteilung der Schnittgrößen in die Tragwerksbereiche mit höherer Steifigkeit statt. Da die Steifigkeit eines Querschnitts im gerissenen Zustand primär von der im Querschnitt vorhandenen Bewehrung beeinflusst wird, erfahren diese Bereiche Momentenbeanspruchungen, die nicht mehr der linear-elastischen Schnittgrößenverteilung entsprechen. Es zeigte sich, dass das Steifigkeitsverhältnis und damit das Verhältnis der Bewehrungsgrade in den verschiedenen Tragwerksbereichen die bestimmende Einflussgröße darstellt.

Unter Berücksichtigung der feldweisen Wirkung von Nutzlasten und in Abhängigkeit des vorliegenden statischen Systems und Lastverhältnisses beträgt das Verhältnis der Bemessungsmomente in Stütz- und Feldbereich $\eta_{MEd} = 1,25$ bis $\eta_{MEd} = 1,8$ (Abbildung 6-1). Bei geringen Beanspruchungen entspricht dieses Verhältnis näherungsweise dem Verhältnis der erforderlichen Bewehrungsmengen (Abbildung 6-3 (rechts)). Steigen die Bemessungslasten so weit an, dass im Stützbereich die Betonbruchstauchung erreicht wird, kann hier die Bewehrungsfestigkeit nicht mehr vollständig ausgenutzt werden und die erforderliche Bewehrungsmenge im Stützbereich nimmt signifikant zu. Da das Bemessungsmoment im Feldbereich immer kleiner ist als im Stützbereich und dieser Tragwerksbereich weiterhin die Bewehrungsfestigkeit erreicht, steigt hier die erforderliche Bewehrungsmenge weniger stark an. Dies führt zu einer Vergrößerung der Steifigkeitsdifferenz zwischen Stütz- und Feldbereich und damit zu einer verstärkten Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum den Stützbereich.

Abbildung 8-1 zeigt den Zuverlässigkeitsindex für das in Kapitel 7.4 untersuchte Zweifeld-Referenzsystem. Aufgetragen sind die beiden Lastverhältnisse $\eta_{Last} = 0,67$ und $\eta_{Last} = 0,5$. Der Großteil der Betrachtungen wurde für das – hinsichtlich der Versagenswahrscheinlichkeit – ungünstige Lastverhältnis $\eta_{Last} = 0,67$ durchgeführt. Es zeigt sich, dass das in DIN EN 1990 (2011) festgelegte Zuverlässigkeitsniveau für geringe Beanspruchungen, bei denen im Stützbereich ein Versagen der Bewehrung eintritt, weitestgehend eingehalten werden kann. Bei beiden Lastverhältnissen kommt es zu einer Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Diese sind jedoch durch den Teilsicherheitsbeiwert der Bewehrung $\gamma_F = 1,3$ abgedeckt. Der Zuverlässigkeitsindex erfüllt den normativ festgelegten Wert von $\beta = 3,8$ für $\eta_{Last} = 0,5$ uneingeschränkt. Für das Lastverhältnis $\eta_{Last} = 0,67$ tritt

bereits vor dem Wechsel der Versagensart im Stützbereich eine geringfügige Unterschreitung der Zielzuverlässigkeit ein. Diese beträgt jedoch lediglich $\Delta\beta = 0,25$ und kann toleriert werden. Da beim Einsatz von FVK-Bewehrung häufig schlanke Tragwerke mit geringem Eigengewicht angestrebt werden, ist die Berücksichtigung des Lastverhältnisses $\eta_{\text{Last}} = 0,67$ zweckmäßig. Im üblichen Hochbau in Massivbauweise liegen jedoch zumeist geringere und damit für die betrachtete Fragestellung günstigere Lastverhältnisse vor. Dies legitimiert zusätzlich die geringfügige Unterschreitung des Zielzuverlässigkeitsindex für Beanspruchungen, die zu einem Versagen der Bewehrung im Stützbereich führen.

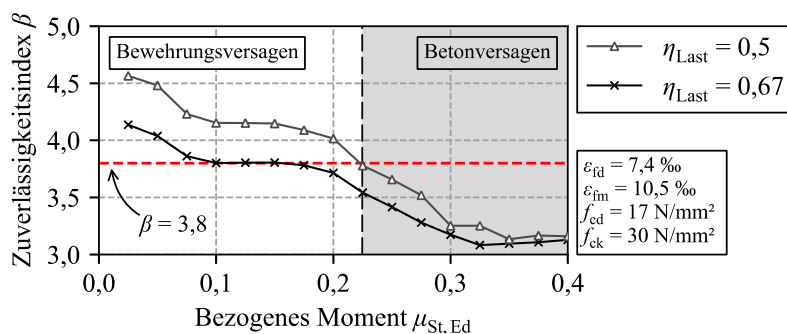


Abbildung 8-1 Zuverlässigkeitsindex für das Referenz-Zweifeldsystem

Sobald jedoch die Bemessungssituation zu einem Versagen des Stützquerschnittes infolge Betondruckversagen führt, kommt es zu einer verstärkten und unzulässigen Unterschreitung des angestrebten Zuverlässigkeitsniveaus. In Kapitel 7.4 konnte gezeigt werden, dass diese Unterschreitung unter allen betrachteten Randbedingungen auftritt.

Auch wenn in einschlägigen internationalen Bemessungsnormen, welche Bemessungsregeln für FVK-bewehrte Bauteile enthalten (z. B. ACI 440.1R-15 (2015) und CAN/CSA-S806-12 (2012)), das Querschnittsversagen infolge Erreichen der Betonbruchstauchung als präferierte Versagensart definiert wird, ist dies bei der Bemessung von statisch unbestimmten Systemen möglichst auszuschließen.

8.2 Einflussgrößen auf die Bemessung

Zur Abgrenzung der im Stützbereich auftretenden Versagensarten ist die Verwendung des „ausgeglichenen bezogenen Moments“ (bezogenes Moment am Balance Point) μ_{bal} nach Gl. 8-1 zweckmäßig. Gemäß DIN EN 1992-1-1 (2011) sind für alle normalfesten Betone die Beiwerte zur Beschreibung der Betondruckzone α_{R} und k_{a} bei Erreichen der Betonbruchstauchung ϵ_{cu} auf Bemessungsniveau konstant und bekannt.

$$\mu_{\text{bal}} = \alpha_{\text{R}} \cdot \xi_{\text{d}} \cdot (1 - k_{\text{a}} \cdot \xi_{\text{d}}) \tag{Gl. 8-1}$$

mit:

$$\alpha_{\text{R}} = 0,81 \text{ (für normalfeste Betone)}$$

$$k_a = 0,42 \text{ (für normalfeste Betone)}$$

$$\zeta_d = \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| + \varepsilon_{fd}}$$

$$\varepsilon_{cu} = -3,5 \text{ ‰ (für normalfeste Betone)}$$

ε_{fd} Bemessungsbruchspannung der FVK-Bewehrung

Das bezogene Moment im Balance Point $\mu_{Ed, bal}$ ist damit lediglich vom Bemessungswert der Bruchdehnung des verwendeten Bewehrungsmaterials abhängig. In Abbildung 8-2 ist Gl. 8-1 für normalfeste Betone grafisch aufgetragen.

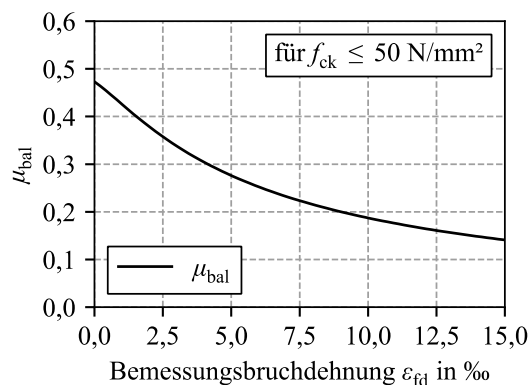


Abbildung 8-2 Ausgeglichenes bezogenes Moment für normalfeste Betone

Das bezogene einwirkende Moment kann mit Gl. 8-2 bestimmt werden. Für $\mu_{Ed, St} < \mu_{bal}$ erreicht die Bewehrung im Stützbereich ihre Bemessungsfestigkeit, bei $\mu_{Ed, St} > \mu_{bal}$ liegt Betondruckversagen vor. In Abbildung 8-3 sind diese Zusammenhänge sowie die Situation im Balance Point qualitativ dargestellt. Die Darstellung wurde dazu an der horizontalen Achse gespiegelt, im Stützbereich steht eigentlich die untere Randfaser unter Druck. Ergänzend sind die Beiwerte zur Beschreibung der Betondruckzone eingetragen.

$$\mu_{Ed, St} = \frac{M_{Ed, St}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

Gl. 8-2

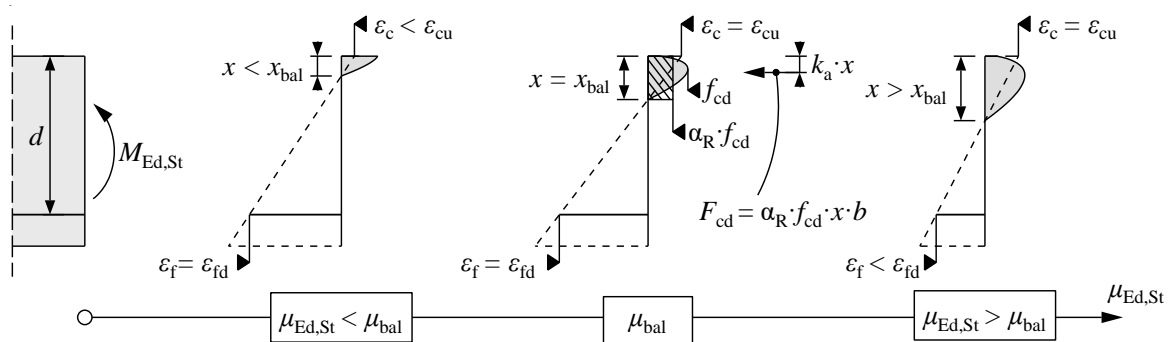


Abbildung 8-3 Dehnungs- sowie Spannungsverteilung in der Druckzone in Abhängigkeit von $\mu_{Ed, St}$

Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, sollte bei der Bemessung statisch unbestimmter Tragwerke mit FVK-Bewehrung ein Betonversagen im Stützquerschnitt ausgeschlossen werden. Nachfolgend werden daher vier Möglichkeiten diskutiert, wie dies im Rahmen der Bemessung erreicht werden kann.

Erhöhung der Betonfestigkeitsklasse

Treten im Rahmen der Bemessung Beanspruchungen im Stützbereich auf, die zu einem Betondruckversagen im Stützbereich führen, kann dem durch die Erhöhung der verwendeten Betonfestigkeitsklasse begegnet werden. Dies erhöht die Tragfähigkeit der Druckzone und führt zu einer Reduktion der Druckzonenhöhe bei gleichbleibender aufnehmbarer Betondruckkraft F_{cd} (vgl. Abbildung 8-3). Bei gleichem einwirkendem Moment $M_{Ed,st}$ wird ein kleineres bezogenes Moment $\mu_{Ed,st}$ erreicht. Die Betondruckfestigkeit kann solange gesteigert werden, bis $\mu_{Ed,st} < \mu_{bal}$ erreicht wird. Da sich die Kosten für normalfeste Betone nur geringfügig unterscheiden, stellt dieses Vorgehen eine wirtschaftliche Möglichkeit dar.

Vergrößerung der statischen Nutzhöhe

Alternativ kann die Höhe des Bauteils oder die Druckzonbreite erhöht werden. Zweckmäßig ist die Vergrößerung der statischen Nutzhöhe d , da diese quadratisch in die Bestimmung des bezogenen Moments $\mu_{Ed,st}$ eingeht. Mit zunehmender Nutzhöhe sinkt die Größe der bezogenen Druckzonenhöhe $\zeta = x/d$ und das bezogene Moment $\mu_{Ed,st}$ nimmt ab. Die Bauteilhöhe kann so lange vergrößert werden, bis $\mu_{Ed,st} < \mu_{bal}$ erreicht ist. Dies hat jedoch Auswirkungen auf das Erscheinungsbild des Tragwerks und erhöht zudem die Beanspruchungen aus Eigengewicht, was wiederum zu einer Erhöhung von $M_{Ed,st}$ führt.

Wahl einer Bewehrung mit geringerer Bemessungsbruchdehnung

Aus Abbildung 8-2 ist ersichtlich, dass μ_{bal} mit abnehmender Bemessungsbruchdehnung zunimmt. Somit kann durch die Wahl einer FVK-Bewehrung mit geringerer Bruchdehnung auf Bemessungsniveau das bezogene Moment im Balance Point μ_{bal} so weit erhöht werden, bis bei gegebenem $\mu_{Ed,st}$ ein Versagen der Bewehrung im Stützbereich eintritt ($\mu_{bal} > \mu_{Ed,st}$). Da jedoch nur eine begrenzte Auswahl an FVK-Bewehrungstypen mit unterschiedlichen Bruchspannungen auf dem Markt verfügbar ist, ist die Anwendbarkeit dieser Option eingeschränkt.

Einlegen einer Druckbewehrung

Zur Erhöhung der Tragfähigkeit der Druckzone kann alternativ eine Druckbewehrung vorgesehen werden. Um die Vorteile der Verwendung einer Biegezugbewehrung aus FVK nicht zu beeinträchtigen, ist lediglich die Verwendung einer Druckbewehrung sinnvoll, welche ebenfalls aus FVK besteht. Derzeit wird in allen Regelwerken und Zulassungen, welche Bewehrungsmaterialien aus FVK behandeln (z. B. ACI 440.1R-15 (2015),

CAN/CSA-S806-12 (2012), DAfStb (2022), abZ Z-1.6-238 (2019)), eine rechnerische Berücksichtigung der Bewehrungsfestigkeit bei Druckbeanspruchung ausgeschlossen. Zudem ist zu beachten, dass aufgrund des oftmals geringen E-Moduls der FVK-Bewehrung, die von der Bewehrung aufnehmbare Druckspannung gering ist. Während eine Druckbewehrung aus Betonstahl bereits bei einer Stauchung in der Druckzone von $\varepsilon_{f/s} = 2,18 \text{ ‰}$ die Bemessungsspannung von $\sigma_{sd} = f_{yd} = 435 \text{ N/mm}^2$ aufnehmen kann, ergibt sich für eine FVK-Bewehrung mit einem E-Modul von z. B. $E_f = 60.000 \text{ N/mm}^2$ auf diesem Stauchungsniveau eine geringe aufnehmbare Spannung von $\sigma_{fd} = 131 \text{ N/mm}^2$. Selbst bei Unterstellung von $\varepsilon_{f/s} = \varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ ergibt sich lediglich $\sigma_{fd} = 210 \text{ N/mm}^2$. Auf diese Möglichkeit wird daher an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

Ist ein Betondruckversagen im Stützbereich explizit erwünscht oder sind die diskutierten Möglichkeiten nicht anwendbar, kann die Tragwerkszuverlässigkeit durch eine bewusste Überbewehrung des Feldes sichergestellt werden. Die Wahl eines Feldbewehrungsgrades $\rho_{F,f}$ analog zum Bewehrungsgrad im Stützbereich $\rho_{St,f}$ führt dazu, dass sich die Schnittgrößen im Bauteil näherungsweise entsprechend einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung einstellen. Die Auswirkungen dieser Vorgehensweise auf den Zuverlässigkeitsindex des Referenz-Zweifeldsystems aus Kapitel 7.4 sind in Abbildung 8-4 beispielhaft dargestellt.

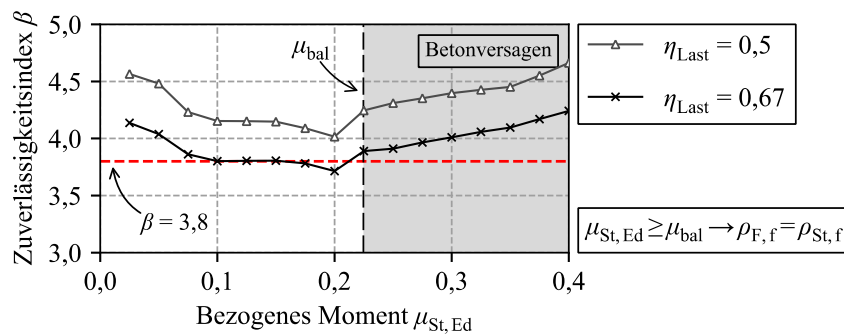


Abbildung 8-4 Auswirkungen einer Überbewehrung des Feldbereichs auf den Zuverlässigkeitsindex

Im Sinne einer wirtschaftlichen Bauteilbemessung sollte von dieser Möglichkeit jedoch Abstand genommen werden. Die starke Überbewehrung des Feldes führt zudem dazu, dass die Felder auch ohne Durchlaufwirkung (keine Stützbewehrung) die Bemessungslasten aufnehmen können, da das maximale Feldmoment eines Einfeldträgers dem Stützmoment eines Zweifeldträgers unter Volllast entspricht. Vorteile durch den Einbau einer Stützbewehrung ergeben sich dann lediglich durch die horizontale Tangente der Biegelinie im Stützbereich sowie die geringeren Durchbiegungen im Feld. Da bei FVK-bewehrten Bauteilen häufig der Nachweis der Verformungen im GZG maßgebend ist, kann die Anordnung einer Stützbewehrung daher dennoch sinnvoll sein.

Grundsätzlich ist bei einem statisch unbestimmtem Tragwerk jedoch das Versagen der Bewehrung im Stützbereich anzustreben. Von den diskutierten Möglichkeiten stellt die Erhöhung der Betondruckfestigkeit hierfür die zweckmäßigste dar. Darauf aufbauend wird im Folgenden ein Bemessungsvorschlag für statisch unbestimmte Durchlaufträger mit FVK-Bewehrung unterbreitet.

8.3 Bemessungsvorschlag

In diesem Kapitel wird ein Vorschlag für die wirtschaftliche Bemessung von Durchlaufträgern mit FVK-Bewehrung vorgestellt. Wie in Kapitel 8.2 erläutert, ist das Versagen des Stützbereichs infolge des Erreichens der Bewehrungsfestigkeit anzustreben. Ist dies aufgrund der Beanspruchungssituation nicht möglich, werden Optionen aufgezeigt, wie dies dennoch erreicht werden kann. Von diesen stellt die Erhöhung der Betonfestigkeitsklasse die sinnvollste Lösung dar. Da die Anpassung des Betonfestigkeit während der Bemessung jedoch ein iteratives Vorgehen erfordert, wird vorgeschlagen in Abhängigkeit der Beanspruchung des Stützbereichs zunächst die erforderliche charakteristische Zylinderdruckfestigkeit $f_{ck,erf}$ zu bestimmen. Diese ergibt sich durch Umformen von Gl. 8-2 sowie Umrechnen des Bemessungswertes der Betondruckfestigkeit in die charakteristische Zylinderdruckfestigkeit (Gl. 8-3). Das bezogene Moment im Balance Point wird hierbei mit Gl. 8-1 bestimmt.

$$f_{ck,erf} = \frac{M_{St,Ed}}{b \cdot d^2 \cdot \mu_{bal}} \cdot \frac{\gamma_c}{\alpha_{cc}} \quad \text{Gl. 8-3}$$

mit:

$$\gamma_c = 1,5 \text{ (Teilsicherheitsbeiwert für Beton nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013))}$$

$$\alpha_{cc} = 0,85 \text{ (Beiwert nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013))}$$

Ausgehend von $f_{ck,erf}$ ist eine Betondruckfestigkeitsklasse zu wählen für die $f_{ck} \geq f_{ck,erf}$ erreicht wird. Mit dieser können Stütz- und Feldbereich nach dem in Kapitel 6.2 erläuterten Vorgehen bemessen werden. Durch die Erfüllung der Bedingung $f_{ck} \geq f_{ck,erf}$ ist sichergestellt, dass – bei Unterstellung von $\eta_{Last} = 0,5$ – die Bewehrungsfestigkeit im Stützbereich ausgenutzt werden kann und damit das festgelegte Zuverlässigkeitsniveau der Bemessung erreicht wird.

Ergibt sich eine erforderliche charakteristische Zylinderdruckfestigkeit $f_{ck,erf} > 50 \text{ N/mm}^2$, wird auf die Wahl einer hochfesten Betonfestigkeitsklasse verzichtet. Da für diese Betone die Druckzonenbeiwerte α_R und k_a nicht konstant sind, wird ein iteratives Vorgehen erforderlich. Darüber hinaus werden hochfeste Betone in den Betrachtungen des Kapitels 7 nicht untersucht. Stattdessen wird empfohlen, die Randbedingungen zu modifizieren. Wie in Kapitel 8.2 ausgeführt, bietet sich die Erhöhung von Querschnittshöhe oder -breite sowie die

Wahl einer Bewehrung mit geringerer Bemessungsbruchdehnung an. Die Bemessung ist entsprechend der gewählten Variante zu wiederholen.

In Abbildung 8-5 ist die beschriebene Vorgehensweise schematisch dargestellt.

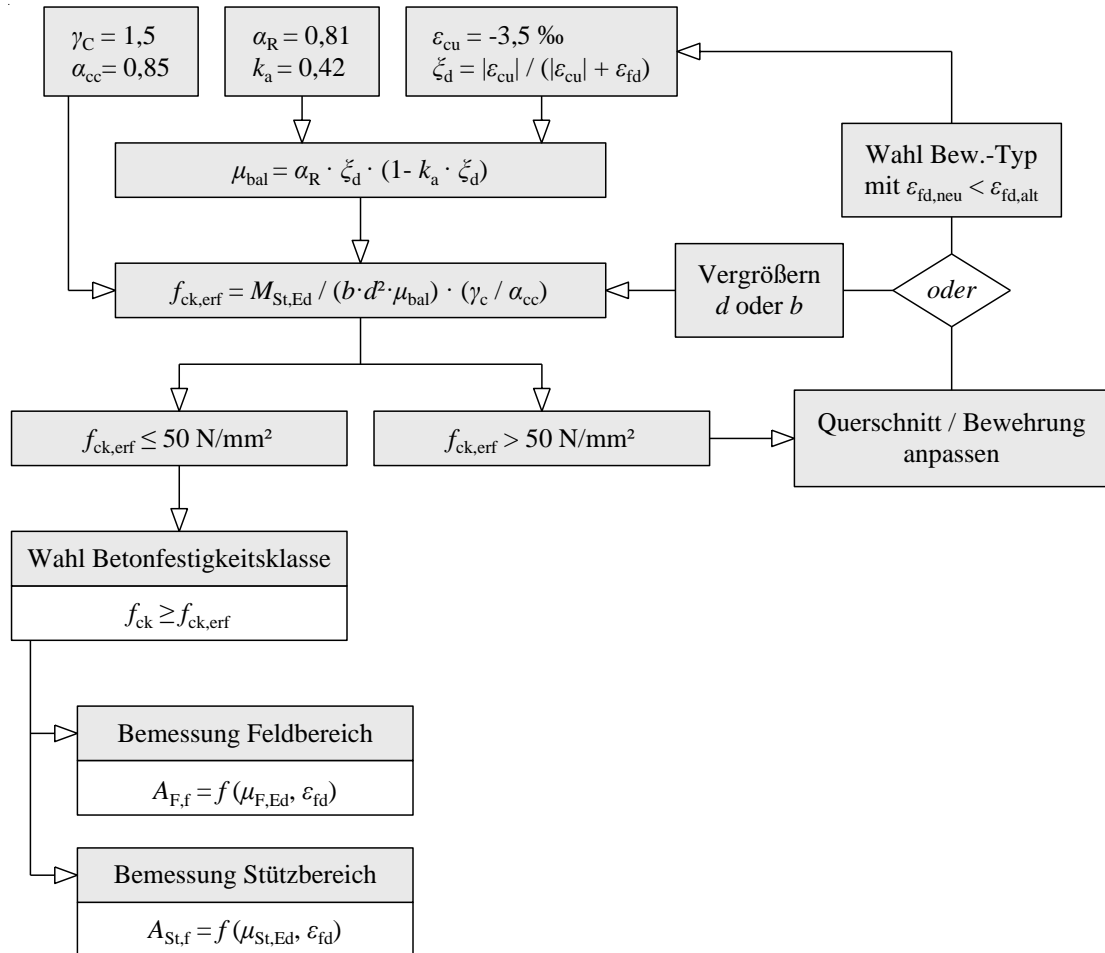


Abbildung 8-5 Vorschlag zur Bemessung statisch unbestimmter Betonbauteile mit FVK-Bewehrung

8.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Bemessungsvorschlag für die wirtschaftliche Bemessung von statisch unbestimmten Betonbauteilen mit FVK-Bewehrung unter Einhaltung des Sicherheitsniveaus nach DIN EN 1990 (2011) vorgestellt. Es wird vorgeschlagen, die Betonfestigkeitsklasse in Abhängigkeit der Bauteilbeanspruchung festzulegen, um die vollständige Ausnutzung der Bewehrungsfestigkeit im Stützbereich zu gewährleisten. Für den Fall, dass dies bei der Verwendung von normalfestem Betonen nicht möglich ist, werden alternative Optionen aufgezeigt, eine wirtschaftliche Bemessung zu erzielen. Ist das Erreichen der Betonbruchstauchung im Stützbereich explizit gewünscht, kann die Tragwerkszuverlässigkeit ausschließlich durch eine Angleichung des Feldbewehrungsgrads an den Bewehrungsgrad

des Stützbereichs erreicht werden. Vor dem Grundsatz einer wirtschaftlichen Bauteilbemessung ist davon jedoch abzuraten.

9 RESÜMEE

9.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Momentenumlagerungsverhalten sowie die Tragwerkszuverlässigkeit statisch unbestimmter Betonbauteile mit FVK-Bewehrung untersucht. Betrachtet werden linienförmige Tragsysteme mit Balken- und Plattenquerschnitt. Im Folgenden werden die zentralen Erkenntnisse der Arbeit zusammengefasst.

Nach der einleitenden Darstellung der Motivation sowie der zentralen Fragestellungen dieser Arbeit (Kapitel 1) erfolgt in Kapitel 2 eine umfassende Einführung in die Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Betonbauteilen und in die normative Schnittgrößenermittlung. Die grundlegenden Mechanismen der Schnittgrößenumlagerung werden theoretisch hergeleitet und die Unterschiede zwischen dem Umlagerungsverhalten von betonstahl- und FVK-bewehrten Durchlaufsystemen aufgezeigt. Es wird gezeigt, dass das linear-elastische Materialverhalten von FVK-Bewehrungselementen eine unplanmäßige Umlagerung der Schnittgrößen zu höherbewehrten Tragwerksteilen begünstigt. Eine Literaturstudie ergab, dass dieser Umstand in Forschung und Normung bisher nur unzureichende Beachtung findet.

Kapitel 3 führt in die Grundlagen der Tragwerkzuverlässigkeit ein. Dabei werden die stochastische Modellierung von Zufallsvariablen und die in dieser Arbeit herangezogenen Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen dargestellt. Die Formulierung des Zuverlässigkeitsproblems im Bauwesen führt zu den für die Bestimmung der Tragwerksversagenswahrscheinlichkeit relevanten Zusammenhänge. Nach der Einführung der normativ festgelegten Zielgröße der Tragwerkszuverlässigkeit erfolgt eine Erläuterung verschiedener numerischer Verfahren zur Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit. Neben der Monte-Carlo-Methode werden unterschiedliche Samplingmethoden zur Reduzierung der Berechnungszeit vorgestellt. Es wird das in dieser Arbeit verwendete Adaptive Importance Sampling erläutert und gezeigt, dass dieses auch die Analyse komplexer Systeme mit mehreren Versagenspunkten ermöglicht.

Anschließend werden in Kapitel 4 die mechanischen Grundlagen des nichtlinearen Last-Verformungsverhaltens bewehrter Betonbauteile erläutert. Zunächst werden dazu die normativ bereitgestellten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Betondruckzonen dargestellt. Weiterhin wird ein Ansatz vorgestellt, welcher die Erfassung eines mehraxialen Spannungszustands infolge einer Umschnürung der Betondruckzone durch eine FVK-Bügelbewehrung über eine Modifikation der Spannungs-Dehnungs-Linie ermöglicht. Im Anschluss wird das Werkstoffverhalten von Betonstahl sowie Bewehrungen aus FVK dargestellt. Darüber hinaus werden die negativen Auswirkungen des spröden Versagens der FVK-Bewehrung sowie des Dauerstandverhaltens auf die Bewehrungsfestigkeit aufgezeigt. Ausgehend von der Differentialgleichung des

verschieblichen Verbunds werden die Mechanismen der Rissbildung sowie das Mitwirken des Betons auf Zug (Tenion Stiffening) hergeleitet. Es werden eine Vielzahl von Modellierungsmöglichkeiten erläutert, welche eine Erfassung dieser Effekte bei Beschreibung des Krümmungsverhaltens biegebeanspruchter Querschnitte ermöglichen. Neben diesen Verformungen infolge Momentenbeanspruchung werden weiterhin Verformungen infolge Querkraftbeanspruchung behandelt. Hierbei wird nach der Bildung von Schubrisse zwischen Schubverformungen und zusätzlichen Krümmungen infolge diagonaler Druckstrebenkräfte unterschieden.

Kapitel 5 beinhaltet die Entwicklung und Beschreibung des numerischen Berechnungsmodells. Auf Grundlage wirklichkeitsnaher Werkstoffgesetze ermöglicht dieses zum einen die Ermittlung nichtlinearer Momenten-Krümmungs-Beziehungen unter Berücksichtigung des Tension Stiffenings. Zum anderen erlaubt es die Berechnung von Verformungen und Schnittgrößenverteilungen beliebiger Durchlaufsysteme auf Grundlage des Weggrößenverfahrens. Die Nichtlinearität des Querschnittsverhaltens macht die Durchführung einer Gleichgewichtsiteration zur Berechnung der Systemantwort erforderlich. Darüber hinaus findet die Bildung von Schubrisse sowie die lokale Lastausbreitung an Zwischenstützungen und Einzellasten Berücksichtigung. Abschließend findet eine Überprüfung des Berechnungsmodells anhand von Bauteilversuchen statt. Das Modell ist in der Lage das Verformungs- sowie Momentenumlagerungsverhalten von FVK-bewehrten Durchlaufträgern realitätsnah zu beschreiben. Zusätzlich wird die Eignung des Modells zur Ermittlung von Verformungen und Schnittgrößenverteilungen in Stahlbetontragwerken überprüft. Auch hier kann eine sehr gute Übereinstimmung mit Bauteilversuchen erzielt werden.

Auf Basis des Berechnungsmodells werden anschließend (Kapitel 6) umfangreiche Untersuchungen zur Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Durchlaufsystemen mit FVK-Bewehrung durchgeführt. Da hierbei das Verhältnis der Bewehrungsmengen in Stütz- und Feldbereich eine zentrale Rolle einnimmt, werden die in praxisüblichen Fällen vorliegenden Bewehrungsverhältnisse auf Grundlage der Bauteilbemessung ermittelt. Es werden zudem die in Kapitel 2 angestellten theoretischen Überlegungen zum Umlagerungsverhalten von betonstahl- und FVK-bewehrten Bauteilen vertieft und bestätigt. Die Untersuchung des Umlagerungsverhaltens erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden die grundlegenden Mechanismen der Umlagerung in FVK-bewehrten Durchlaufsystemen durch die Vorgabe fester Bewehrungsverhältnisse betrachtet. Es kann gezeigt werden, dass die Schnittgrößenumlagerung fast ausschließlich vom Verhältnis der Bewehrung in Stütz- und Feldbereich abhängt. Da sich aus der Bauteilbemessung im Stützbereich von Durchlaufsystemen stets größere Bewehrungsmengen als im Feld ergeben, kommt es in statisch unbestimmten Tragsystemen – bei konventioneller Bemessung – zwangsläufig zu einer unplanmäßigen Umlagerung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Im zweiten Teil der Untersuchung wird daher das Verhältnis der Bewehrungsgrade sowie der Umlagerungsgrad und

die Systemtraglast in Abhängigkeit der Bauteilbeanspruchung ermittelt. Es kann gezeigt werden, dass sich bei moderater Querschnittsausnutzung im Stützbereich (Bewehrungsver-sagen) Umlagerungen von ca. 10 % gegenüber einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung einstellen. Versagt der Querschnitt im Stützbereich hingegen durch Erreichen der Betonbruchspannung, kann die Festigkeit der Bewehrung nicht mehr ausgenutzt werden und die erforderliche Bewehrungsmenge steigt. Das damit einhergehende Anwachsen der Steifigkeitsdifferenz zum Feldbereich führt zu einer verstärkten Umverteilung der Schnittgrößen vom Feld- zum Stützbereich. Diese Umlagerungen können in Abhängigkeit der Randbedingungen mehr als 40 % betragen. Es konnte zudem gezeigt werden, dass die un-günstigsten Umlagerungsverhältnisse in einem System mit zwei voll belasteten Feldern auftreten.

Zur Beantwortung der Frage, inwieweit diese unplanmäßigen Schnittgrößenumlagerungen vom Feld- zum Stützbereich die Tragwerkszuverlässigkeit beeinflussen, werden in Kapi-tel 7 ausführliche Zuverlässigkeitsanalysen durchgeführt. Basierend auf dem numerischen Berechnungsmodell wird ein stochastisches Modell zur Bestimmung der Versagenswahr-scheinlichkeit vorgestellt. Die Verteilungsfunktionen der Basisvariablen werden definiert und verschiedene Samplingmethoden implementiert. Der Großteil der Berechnungen findet unter Verwendung des Adaptive Importance Sampling statt. Die Samplingmethode wird anhand von Berechnungen aus der Literatur überprüft. Es kann gezeigt werden, dass bei einem Teilsicherheitsbeiwert der FVK-Bewehrung von $\gamma_F = 1,3$ das normativ festgelegte Sicherheitsniveau für ein Versagen der Bewehrung im Stützbereich gewährleistet ist. Bei einer Beanspruchungssituation, die zu einem Betondruckversagen im Stützbereich führt, wird das Sicherheitsniveau jedoch signifikant unterschritten.

In Kapitel 8 wird daher ein Bemessungskonzept vorgeschlagen, welches eine einfache und wirtschaftliche Biegebemessung von statisch unbestimmten Durchlaufsystemen mit FVK-Bewehrung unter Einhaltung des in DIN EN 1990 (2011) festgelegten Sicherheitsniveaus gewährleistet. Hierzu ist das Auftreten von Betonversagen im Stützbereich auszuschließen. Es wird daher die Bestimmung einer Mindestbetonfestigkeitsklasse vorgeschlagen, welche die vollständige Ausnutzung der Bewehrungsfestigkeit im Stützbereich sicherstellt.

9.2 Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit sind linienförmige Durchlaufsysteme mit Balken- und Platten-querschnitten. Aufgrund der großen Anwendungsbreite dieser Tragwerksformen können die durchgeführten Untersuchungen zum Schnittgrößenumlagerungsverhalten sowie zur Tragwerkszuverlässigkeit in weiten Bereichen der Baupraxis angewendet werden. In die-sem Kontext ergeben sich jedoch noch zusätzliche Aspekte, die weiterführende For-schungstätigkeiten erfordern.

Im Hoch- und Infrastrukturbau werden neben Plattenquerschnitten häufig Plattenbalken- oder Trogquerschnitte eingesetzt. Insbesondere im Verkehrswegebau bietet sich dabei aufgrund der hohen Taumittelbelastung der Einsatz einer Bewehrung aus FVK an. Aufgrund der bei diesen Querschnittsformen unterschiedlichen Widerstandsmomente in Stütz- und Feldbereich sowohl im ungerissenen als auch im gerissenen Zustand ergeben sich hierbei jedoch zusätzliche Einflüsse auf die Momentenumlagerung. Es ist daher anzustreben, die durchgeführten Untersuchungen auf weitere Querschnittsformen auszudehnen. Ebenso fand in den durchgeführten Untersuchungen eine mögliche Vorspannung der Bauteile keine Berücksichtigung. In statisch unbestimmten, vorgespannten Tragwerken stellt sich zusätzlich ein statisch unbestimmter Momentenanteil aus Vorspannung ein. Dessen Größe ist nicht von der absoluten Bauteilsteifigkeit, sondern von der Steifigkeitsverteilung abhängig. Auch hier stellt sich die Frage nach den Auswirkungen dieser Effekte auf die Schnittgrößenverteilung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Erreichen der Querschnittsbiegetragfähigkeit im Grenzzustand der Tragfähigkeit als „Bauteilversagen“ definiert. Darüber hinaus gilt es weitere Grenzzustände zu betrachten. Im GZT ist für Bauteile mit FVK-Bewehrung dabei insbesondere das Schubversagen zu nennen. Die steifigkeitsabhängige Schnittgrößenumlagerung führt auch zu einer Umverteilung der Querkräfte. Für die Durchführung von Zuverlässigkeitsanalysen auf der Basis eines nichtlinearen Berechnungsmodells, das die Schubrissbildung sowie das Schubversagen explizit erfasst, ist hierbei die räumliche Streuung der Materialeigenschaften des Betons zu berücksichtigen.

Im GZG kommt zudem der Begrenzung der Bauteildurchbiegung bei FVK-bewehrten Tragwerken eine besondere Bedeutung zu. Aufgrund der oftmals geringen Steifigkeit der FVK-Bewehrung stellen sich größere Tragwerksverformungen als bei Stahlbetonbauteilen ein. Auch diesen Grenzzustand gilt es im Zuge von Zuverlässigkeitsanalysen zu untersuchen. Hierbei ist die Modellierung der veränderlichen Nutzlasten sowie eine wirklichkeitsnahe Erfassung des zeitabhängigen Materialverhaltens von Beton und Bewehrung von entscheidender Bedeutung.

Darüber hinaus eignen sich FVK-Bewehrungen zur nachträglichen Biegeverstärkung von Betonbauteilen. Diese Verstärkungen können sowohl im Feld als auch in den Stützbereichen angeordnet werden. Durch den Formschluss des Bestandsbauteils mit der in Spritzbeton eingebetteten FVK-Bewehrung entsteht ein Verbundbauteil mit Betonstahl- und FVK-Bewehrung. Auch bei solchen Bauteilen ist zu untersuchen, inwieweit eine eventuell auftretende, unplanmäßige Umlagerung vom Feld- zum Stützbereich die Versagenswahrscheinlichkeit beeinflusst.

10 LITERATURVERZEICHNIS

10.1 Technische Regelwerke

ACI 440.1R-15 (2015): Guide for the design and construction of structural concrete reinforced with fiber-reinforced polymer (FRP) bars. *American Concrete Institute*. Farmington Hills, USA.

ACI 318-19 (2019): Building Code Requirements for Structural Concrete. *American Concrete Institute*. Farmington Hills, USA.

CAN/CSA-A23.3-04 (2004): Design of Concrete Structures. *Canadian Standards Association SCA*. Ottawa, Canada.

CAN/CSA-S806-12 (2012): Design and Construction of Building Structures with Fibre-Reinforced Polymers. *Canadian Standards Association SCA*. Ottawa, Canada.

DIN EN 1991-1-1/NA (2010): Nationaler Anhang – National festgelegte Parameter – Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 1-1: Allgemeine Einwirkungen auf Tragwerke – Wichten, Eigengewicht und Nutzlasten im Hochbau. *DIN Deutsches Institut für Normung e.V.* Berlin: Beuth Verlag.

DIN EN 1992-1-1 (2011): Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010, in Verbindung mit Änderung A1 (2015). *DIN Deutsches Institut für Normung e.V.* Berlin: Beuth Verlag.

DIN EN 1990 (2011): Eurocode 0: Grundlagen der Tragwerksplanung (inkl. Nationaler Anhang), inkl. NA:2010, A1:2005, A1:2005/AC:2010. *DIN Deutsches Institut für Normung e.V.* Berlin: Beuth Verlag.

DIN EN 1992-1-1/NA (2013): Nationaler Anhang – National festgelegte Parameter – Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, in Verbindung mit Änderung A1 (2015). *DIN Deutsches Institut für Normung e.V.* Berlin: Beuth Verlag.

prEN 1992-1-1 (2021): Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Regeln – Regeln für Hochbauten, Brücken und Ingenieurbauwerke – Vorläufige Deutsche Sprachfassung. *DIN Deutsches Institut für Normung e.V.*

DIN 1045-1 (2008): Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton – Teil 1: Bemessung und Konstruktion. *DIN Deutsches Institut für Normung e.V.* Berlin: Beuth Verlag.

10.2 Fachliteratur

ACTRC (2007): CNR-DT 203/2006 – Guide for the design and construction of concrete structures reinforced with fiber-reinforced polymer bars. Rom, Italien: Consiglio Nazionale delle ricerche.

Ahner, C.; Kliver, J. (1999): Development of a New Concept for the Rotation Capacity in DIN 1045, Part 2. In: *Leipzig Annual Civil Engineering Report (LACER)* 4(383-392),

Ahner, C.; Kliver, J. (1998): Development of a New Concept for the Rotation Capacity in DIN 1045, Part 1. In: *Leipzig Annual Civil Engineering Report (LACER)* 3, S. 213–236.

Akiel, M. S. (2016): Performance of Continuous Concrete Slabs Reinforced With Hybrid Steel-Basalt Bars. Al Ain, Vereinigte Arabische Emirate. *United Arab Emirates University*, Department of Civil and Environmental Engineering, Dissertation.

Albert, A. (2022): Bautabellen für Ingenieure – Mit Berechnungshinweisen und Beispielen. *Bundesanzeiger Verlag*: Reguvis. Köln, 2022.

Alex, R. (2015): Fibre Reinforced Polymers (FRP) as Reinforcement for Concrete According to German Approvals. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 96, S. 12013.

Al-Sunna, R. A. (2006): Deflection behaviour of FRP reinforced concrete flexural members. Sheffield, United Kingdom. *University of Sheffield*, Department of Civil and Structural Engineering, Dissertation.

Alvarez, M. (1998): Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton. Zürich, Schweiz. *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*, Institut für Baustatik und Konstruktion, Dissertation.

Ashour, A. F.; Habeeb, M. N. (2008): Continuous concrete beams reinforced with CFRP bars. In: *Structures & Buildings* 161(SB6), S. 349–357.

ASTM D7205/D7205M-06 (2016): Standard Test Method for Tensile Properties of Fiber Reinforced Polymer Matrix Composite Bars. *ASTM International*. West Conshohocken, United States.

Bachmann, H. (1967): Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken. Zürich, Schweiz. *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*, Institut für Baustatik, Dissertation.

Bachmann, H.; Rackwitz, R.; Schueller, G. I. (1997): Tragwerkszuverlässigkeit & Einwirkungen. In: *Der Ingenieurbau -Grundwissen in 9 Bänden*. Mehlhorn, G. Ernst, Berlin, 1997.

- Baena, M.; Barris, C.; Perera, R.; Torres, L. (2022):** Influence of Bond Characterization on Load-Mean Strain and Tension Stiffening Behavior of Concrete Elements Reinforced with Embedded FRP Reinforcement. In: *Materials (Basel, Switzerland)* 15(3),
- Baena, M.; Turon, A.; Torres, L.; Miàs, C.; Barris, C.; Barbeta, G. (2011):** Experimental Study on the Tension Stiffening Effect of GFRP RC Elements. In: *Advances in FRP Composites in Civil Engineering*, S. 271–274. Ye, L.; Feng, P.; Yue, Qingrui. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- Baji, H.; Ronagh, H. R. (2013):** Reliability analysis of moment redistribution in reinforced concrete beams. In: *Magazine of Concrete Research* 65(13), S. 769–779.
- Bank, L. C. (2006):** Composites for Construction – Structural Design with FRP Materials. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Barris, C.; Torres, L.; Turon, A.; Baena, M.; Catalan, A. (2009):** An experimental study of the flexural behaviour of GFRP RC beams and comparison with prediction models. In: *Composite Structures* 91(3), S. 286–295.
- Barris, C.; Torres, L.; Turon, A.; Baena, M.; Miàs, C. (2008):** Experimental study of flexural behaviour of GFRP reinforced concrete beams. In: *Fourth International Conference on FRP Composites in Civil Engineering (CICE2008)*, 22.-24. Juli 2008, Zürich, Schweiz, S. 1–6.
- Baša, N.; Ulićević, M.; Zejak, R. (2018):** Experimental Research of Continuous Concrete Beams with GFRP Reinforcement. In: *Advances in Civil Engineering* 2018, S. 1–16.
- Bieger, K.-W. (1995):** Stahlbeton- und Spannbetontragwerke nach Eurocode 2 – Erläuterungen und Anwendungen: Springer. Berlin, Heidelberg, 1995.
- Bies, N. S.; Keller, M. L.; Pahn, M. (2019):** Degradation Behaviour of GFRP Bars in Highly Alkaline Watersaturated Concrete under Sustained Load. In: *Advanced Composites in Construction (ACIC)*, S. 39–44.
- Bigaj, A.; Walraven, J. (2002):** Size Effects in plastic hinges of reinforced concrete members. In: *HERON* 47(1), S. 53–75.
- Bigaj, A. J. (1999):** Structural Dependence of Rotation Capacity of Plastic Hinges in RC Beams and Slabs. Delft, Niederlande. *Technische Universiteit Delft*, Dissertation.
- Bischoff, P. H.; Paixao, R. (2004):** Tension stiffening and cracking of concrete reinforced with glass fiber reinforced polymer (GFRP) bars. In: *Canadian Journal of Civil Engineering* 31(4), S. 579–588.
- Busjaeger, D.; Quast, U. (1990):** Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft (Programm MASQUE). *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 415*. Berlin: Beuth Verlag.

- Caldentey, A. P.; Wijte, S.; Laaksonen, A. (2021):** Background to prEN 1992-1-1:2020-11 – Formula for Rotation Capacity – Formula for Rotation Capacity.
- Cavagnis, F. (2017):** Shear in reinforced concrete without transverse reinforcement: from refined experimental measurements to mechanical models. Lausanne, Switzerland. *Eidgenössische Technische Hochschule Lausanne, Structural Concrete Laboratory, Dissertation.*
- CEB Bulletin d'information No. 242 (1998):** Ductility of reinforced concrete structures – Synthesis Report and Individual Contributions. *Comité Euro-International du Béton CEB.* Lausanne, Switzerland.
- CEB Bulletin d'information No. 158 (1985):** CEB Design Manual on Cracking and Deformations. *Comité Euro-International du Béton CEB.* Lausanne, Switzerland.
- Model Code 1990 (1993):** CEB-FIB Model Code for Concrete Structures 1990. *Comité Européen du Béton - CEB.* Lausanne, Switzerland.
- Model Code 2010 (2013):** fib Model Code for Concrete Structures 2010. *Comité Européen du Béton - CEB.* Lausanne, Switzerland.
- Corley, W. G. (1966):** Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams. In: *Journal of the Structural Division* 92(5), S. 121–145.
- Cosenza, E.; Manfredi, G.; Realfonzo, R. (1997):** Behavior and Modeling of Bond of FRP Rebars to Concrete. In: *Journal of Composites for Construction* 1(2), S. 40–51.
- DAfStb Heft 525 (2010):** Erläuterungen zu DIN 1045-1. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 525.* Berlin: Beuth Verlag.
- DAfStb Heft 600 (2012):** Erläuterungen zu DIN EN 1992-1-1 und DIN EN 1992-1-1/NA (Eurocode 2). *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 600.* Berlin: Beuth Verlag.
- DAfStb Heft 631 (2019):** Hilfsmittel zur Schnittgrößenermittlung und zu besonderen Detailnachweisen bei Stahlbetontragwerken. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 631.* Berlin: Beuth Verlag.
- Damblin, G.; Couplet, M.; Iooss, B. (2013):** Numerical studies of space-filling designs: optimization of Latin Hypercube Samples and subprojection properties. In: *Journal of Simulation* 7(4), S. 276–289.
- DAfStb (2022):** DAfStb-Richtlinie: Betonbauteile mit nichtmetallischer Bewehrung – Geldruck. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.* Berlin: Beuth Verlag.
- abZ Z-1.6-238 (2019):** Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung - Bewehrungsstab Schöck ComBAR aus glasfaserverstärktem Kunststoff. *Deutsches Institut für Bautechnik.* Berlin.

- abZ Z-31.10-182 (2021):** Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung - CARBOrefit® - Verfahren zur Verstärkung von Stahlbeton mit Carbonbeton. *Deutsches Institut für Bautechnik*. Berlin.
- Dilger, W. (1966):** Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 179*. Berlin: Ernst & Sohn.
- do Carmo, R. N.; Lopes, S. M. (2005):** Ductility and linear analysis with moment redistribution in reinforced high-strength concrete beams. In: *Canadian Journal of Civil Engineering* 32(1), S. 194–203.
- Duddeck, H. (1973):** Seminar Traglastverfahren – Bericht Nr. 73-6. Braunschweig. *Technische Universität Braunschweig*, Institut für Statik.
- El-Ghadioui, R. (2020):** Bemessung carbonbewehrter Betonbauteile unter besonderer Betrachtung des Gebrauchszustandes – Entwicklung eines Modells zur wirklichkeitsnahen Verformungsberechnung. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Eligehausen, R.; Fabritius, E. (1993):** Steel Quality and Static Analysis. In: CEB Bulletin d'information No. 217 -Selected justification notes S. 96–107. Comité Euro-International du Béton CEB. *Comité Euro-International du Béton CEB*, Lausanne, Switzerland, 1993.
- Eligehausen, R.; Mayer, U.; Ožbolt, J. (2008):** Gutachtliche Stellungnahme zum Tragverhalten von statisch unbestimmten Tragwerken bewehrt mit ComBAR Stäben. *nolasoft - Ingenieurgesellschaft Ožbolt Mayer*. nicht veröffentlicht.
- Eligehausen, R.; Popov, E. P.; Bertero, V. V. (1983):** Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars Under Generalized Excitations. Berkeley, United States. *University of California at Berkeley*, Earthquake Engineering, Forschungsbericht UCB/EERC-83/23.
- El-Mogy, M. (2011):** Behaviour of Continuous Concrete Beams Reinforced with FRP Bars. Winnipeg, Canada. *University of Manitoba*, Department of Civil Engineering, Dissertation.
- Fabritius, E. (2001):** Zum Trag- und Rotationsverhalten von Stahlbetontragwerken mit nicht-linearer Schnittgrößenermittlung. Stuttgart. *Universität Stuttgart*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Dissertation.
- Fafitis, A. (2001):** Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete Sections in Biaxial Bending. In: *Journal of Structural Engineering* 127(7), S. 840–846.

- Ferreira, D.; Oller, E.; Barris, C.; Torres, L. (2015):** Shear strain influence in the service response of FRP reinforced concrete beams. In: *Composite Structures* 121, S. 142–153.
- Fingerloos, F.; Hegger, J.; Zilch, K. (2012):** Eurocode 2 für Deutschland – Kommentierte Fassung. Berlin: Beuth Verlag.
- Fischer, L. (2001):** Das neue Sicherheitskonzept im Bauwesen – Ein Leitfaden für Bauingenieure, Architekten und Studenten (Bautechnik spezial). Berlin: Ernst & Sohn.
- Fleißner, H. (1962):** Ein Beitrag zur Ermittlung von Querschnittswerten mithilfe elektronischer Rechenanlagen. In: *Der Bauingenieur* 37(4), S. 146–149.
- Füllsack-Köditz, R. (2004):** Verbundverhalten von GFK-Bewehrungsstäben und Rissentwicklung in GFK-stabbewehrten Betonbauteilen. Weimar. *Bauhaus-Universität Weimar*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Dissertation.
- Gilbert, R. I.; Warner, R. F. (1978):** Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs. In: *Journal of the Structural Division* 104(ST12), S. 1885–1900.
- Grace, N. F.; Soliman, A. K.; Abdel-Sayed, G.; Saleh, K. R. (1998):** Behavior and Ductility of Simple and Continuous FRP Reinforced Beams. In: *Journal of Composites for Construction* 2(4), S. 186–194.
- Graf, W.; Vassilev, T. (2006):** Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik. Berlin: Ernst.
- Graubner, C.-A. (1989):** Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze – Baustoffbedingte Abweichungen von elastizitätstheoretischen und plastizitätstheoretischen Lösungen. München. *Technische Universität München*, Lehrstuhl für Massivbau, Dissertation.
- Gribniak, V. (2009):** Shrinkage Influence on Tension-Stiffening of Concrete Structures. Vilnius, Lithuania. *Vilnius Gediminas Technical University*, Technological Sciences, Civil Engineering – 02T, Dissertation.
- Gribniak, V.; Kaklauskas, G.; Torres, L.; Daniunas, A.; Timinskas, E.; Gudonis, E. (2013):** Comparative analysis of deformations and tension-stiffening in concrete beams reinforced with GFRP or steel bars and fibers. In: *Composites Part B: Engineering*(50), S. 158–170.
- Gribniak, V.; Rimkus, A.; Torres, L.; Hui, D. (2018):** An experimental study on cracking and deformations of tensile concrete elements reinforced with multiple GFRP bars. In: *Composite Structures* 201, S. 477–485.
- Grübl, P.; Weigler, H.; Karl, S. (2001):** Beton – Arten, Herstellung und Eigenschaften. Berlin: Ernst.

- Grziwa, U. (2017):** Zuverlässigkeit schlanker UHPC-Druckglieder mit räumlich streuenden Materialeigenschaften. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Gusella, F. (2022):** Effect of the plastic rotation randomness on the moment redistribution in reinforced concrete structures. In: *Engineering Structures* 252, S. 113652.
- Habeeb, M. N. (2011):** Flexural behaviour of continuously supported FRP reinforced concrete beams. Bradford, United Kingdom. *University of Bradford*, School of Engineering, Design and Technolog, Dissertation.
- Habeeb, M. N.; Ashour, A. F. (2008):** Flexural Behavior of Continuous GFRP Reinforced Concrete Beams. In: *Journal of Composites for Construction* 12(2), S. 115–124.
- Hausmann, G. (2007):** Verformungsvorhersage vorgespannter Flachdecken unter Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Häußler-Combe, U.; Jesse, F.; Weselek, J. (2015):** Konzeption von Teilsicherheitsfaktoren für Verstärkungen von Biegequerschnitten mittels Carbonbeton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 110(11), S. 747–758.
- Häußler-Combe, U.; Weselek, J. (2020):** Ermittlung von Teilsicherheitsbeiwerten bei Carbonbeton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 115(3), S. 209–217.
- Heimann, M. (2013):** Zuverlässigkeit hoch beanspruchter Druckglieder aus ultrahochfesten Beton. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Hiesch, D. (2023):** Bemessung von Betonfertigteilen mit vorgespannter Bewehrung aus Faserverbundkunststoff – Entwicklung eines Bemessungskonzeptes unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Bauteilverformungen. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation (noch nicht veröffentlicht).
- Hofmann, S. (2021):** Rissentwicklung in Betonbauteilen mit Basaltfaserkunststoffbewehrung – Ein Modell zur Berechnung der Rissbreite bei wirklichkeitsnaher Betrachtung des Verbundverhaltens. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Hsu, T. T.; Mo, L. Y. (2010):** Unified Theory of Concrete Structures. Chichester, United Kingdom: John Wiley & Sons.
- Idemudia, D.; Oudah, F.; Newhook, J. P. (2022):** Time-Dependent Reliability Based Assessment Of Bridge Decks In Nova Scotia Reinforced Using Gfrp. In: *11th International Conference on Short and Medium Span Bridges, Toronto, Kanada*, 149.

- Imjai, T.; Garcia, R.; Guadagnini, M.; Pilakoutas, K. (2020):** Strength Degradation in Curved Fiber-reinforced Polymer (FRP) Bars Used as Concrete Reinforcements. In: *Polymers* 12(8),
- Imjai, T.; Guadagnini, M.; Garcia, R.; Pilakoutas, K. (2016):** A practical method for determining shear crack induced deformation in FRP RC beams. In: *Engineering Structures* 126, S. 353–364.
- fib bulletin 40 (2007):** FRP reinforcement in RC Structures. *International Federation for Structural Concrete*. Lausanne, Switzerland: fib.
- fib bulletin 80 (2016):** Partial factor methods for existing concrete structures. *International Federation for Structural Concrete*. Lausanne, Switzerland: fib.
- ISIS Canada (2007):** Reinforcing Concrete Structures with Fibre-Reinforced Polymers – Design Manual No. 3, Version 2. *ISIS Canada Corporation, the Canadian Network of Centers of Excellence on Intelligent Sensing for Innovative Structures*. Winnipeg, Canada.
- Issa, M. A.; Ovitigala, T.; Ibrahim, M. (2016):** Shear Behavior of Basalt Fiber Reinforced Concrete Beams with and without Basalt FRP Stirrups. In: *Journal of Composites for Construction* 20(4), S. 4015083.
- Jakubovskis, R.; Kaklauskas, G.; Gribniak, V.; Weber, A.; Juknys, M. (2014):** Serviceability Analysis of Concrete Beams with Different Arrangements of GFRP Bars in the Tensile Zone. In: *Journal of Composites for Construction* 18(5), S. 4014005.
- JSCE (1997):** Recommendation for Design and Construction of Concrete Structures Using Continuous Fiber Reinforcing Materials. *Japan Society of Civil Engineers JSCE*.
- Jeong, S.-M.; Kim, S.-J.; Kim, Y.-B.; Kim, H.-Y.; Park, K.-T. (2003):** Reliability Analysis on Flexural Behavior of FRP Bridge Decks. In: *Proceedings Advanced Materials for Construction of Bridges, Buildings, and Other Structures III*,
- JCSS (2001):** Probabilistic Model Code – Part 3: Material Properties. *Joint Committee on Structural Safety*, Verfügbar unter: https://www.jcss-lc.org/publications/jcsspmc/part_iii.pdf. Zuletzt geprüft am 21.11.2022.
- Keller, M. L.; Schultz-Cornelius, M.; Pahn, M. (2017):** Synergistic effects of alkaline environment on the behavior of GFRP bars under sustained load. In: CDCC 2017 Fifth International Conference on Durability of FRP Composite for Construction and Rehabilitation of Structures, Quebec, Kanada, 2017.
- Kharal, Z. (2014):** Tension Stiffening and Cracking Behaviour of GFRP Reinforced Concrete. Toronto. *University of Toronto*, Department of Civil Engineering, Dissertation.

- Khorramian, K. (2020):** Short and Slender Concrete Columns Internally or Externally Reinforced with Longitudinal Fiber-Reinforced Polymer Composites. Halifax, Kanada. *Dalhousie University*, Department of Civil and Resource Engineering, Dissertation.
- Kindmann, R.; Frickel, J. (2002):** Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit – Grundlagen, Methoden, Berechnungsverfahren, Beispiele. Berlin: Ernst.
- Kindmann, R.; Kraus, M. (2020):** Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau. Berlin, Germany: Ernst & Sohn.
- König, G.; Hosser, D.; Schobbe, W. (1982):** Sicherheitsanforderungen für die Bemessung baulicher Anlagen nach den Empfehlungen des NABau – eine Erläuterung. In: *Bauingenieur* 57, S. 69–78.
- König, G.; Pommerening, D.; Tue, N. V. (1999):** Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Verformungsvermögen und Schnittgrößenermittlung. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 492*. Berlin: Beuth Verlag.
- König, G.; Tue, N. V. (1996):** Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 466*. Berlin: Beuth Verlag.
- Koosha, K.; Fadi, O.; Pedram, S. (2021):** Reliability-based Evaluation of the Stiffness Reduction Factor for Slender GFRP Reinforced Concrete Columns. In: Proceedings of the Canadian Society of Civil Engineering Annual Conference 2021, S. 391–400. Walbridge, S., et al. Springer Nature Singapore, Singapore, 2021.
- Kordina, K.; Eibl, J.; Bühler, A.; Eligehausen, R.; Fabritius, E.; Grasser, E.; Feix, J.; Hilsdorf, H. K.; König, G.; Fischer, A.; Litzner, H.-U.; Loche, K.; Quast, U.; Schäfer, K.; Schießl, P.; Reuter, C.; Windels, R. (1992):** Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2 Teil 1 – (DIN V ENV 1992 Teil 1-1, Ausgabe 06.92) ; Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 425*. Berlin: Beuth.
- Kraemer, U. (1982):** Zur Zuverlässigkeit statisch bestimmt und unbestimmt gelagerter Stahlbeton- und Spannbetonträger. München. *Technische Universität München*, Lehrstuhl für Massivbau, Dissertation.
- Kreller, H. (1989):** Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung. Stuttgart. *Universität Stuttgart*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Dissertation.
- Krips, M. (1984):** Im Rissbreitenbeschränkung Stahlbeton. Darmstadt. *Technische Hochschule Darmstadt*, Insitut für Massivbau, Dissertation.

- Kueres, S. (2019):** Analysis and design of concrete beams with pre-tensioned CFRP reinforcement. Aachen. *Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen*, Lehrstuhl und Institut für Massivbau, Dissertation.
- Kupfer, H.; Streit, W. (1987):** Stahlspannungen im Gebrauchszustand bei teilweiser Vorspannung. In: *Spannweite der Gedanken -Zur 100. Wiederkehr des Geburtstages von Franz Dischinger* S. 261–273. Manfred Specht, Berlin, 1987.
- Kupfer, H. B. (1986):** Auswirkung der begrenzten Plastizität im Betonbau. In: *Bauingenieur* 61, S. 155–160.
- Kurth, M. C. (2012):** Zum Querkrafttragverhalten von Betonbauteilen mit Faserverbundkunststoff-Bewehrung. Aachen. *Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen*, Lehrstuhl und Institut für Massivbau, Dissertation.
- Lam, L.; Teng, J. G. (2003):** Design-oriented stress–strain model for FRP-confined concrete. In: *Construction and Building Materials* 17(6-7), S. 471–489.
- Langer, P. (1987):** Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau. Stuttgart. *Universität Stuttgart*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Dissertation.
- Leonhardt, F. (1978):** Vorlesungen über Massivbau – Teil 4: Nachweis der Gebrauchsfähigkeit Rissebeschränkung, Formänderungen, Momentenumlagerung und Bruchlinientheorie im Stahlbetonbau. Berlin: Springer-Verlag.
- Leonhardt, F.; Mönnig, E. (1984):** Vorlesungen über Massivbau – Teil 1: Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau. Berlin: Springer-Verlag.
- Leonhardt, F.; Mönnig, E. (1977):** Vorlesungen über Massivbau – Teil 3: Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau. Berlin: Springer-Verlag.
- Lou, T.; Lopes, S. M.; Lopes, A. V. (2015):** Neutral axis depth and moment redistribution in FRP and steel reinforced concrete continuous beams. In: *Composites Part B: Engineering* 70, S. 44–52.
- Maaddawy, T. E. (2009):** Strengthening of Eccentrically Loaded Reinforced Concrete Columns with Fiber-Reinforced Polymer Wrapping System – Experimental Investigation and Analytical Modeling. In: *Journal of Composites for Construction* 13(1), S. 13–24.
- Macchi, G. (1976):** Ductility conditions for simplified design without check of compatibility. In: CEB Bulletin d`information No. 105 -Structures hyperstatiques. Comité Euro-International du Béton CEB. *Comité Euro-International du Béton CEB*, Paris, France, 1976.
- Mahroug, M. (2013):** Behaviour of continuous concrete slabs reinforced with FRP bars – Experimental and computational investigations on the use of basalt and carbon fibre reinforced polymer bars in continuous concrete slabs. Bradford, United Kingdom. *University of Bradford*, School of Engineering, Design and Technology, Dissertation.

- Mallick, P. K. (2008):** Fiber-reinforced composites – Materials, manufacturing, and design. Boca-Raton, Fla.: CRC Press.
- Mander, J. B.; Priestley, M. J. N.; Park, R. (1988):** Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. In: *Journal of Structural Engineering* 114(8), S. 1804–1826.
- Mang, H. A.; Hofstetter, G. (2018):** Festigkeitslehre. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Marti, P. (2014):** Baustatik – Grundlagen - Stabtragwerke - Flachentragwerke. Berlin, Germany: Wilhelm Ernst & Sohn.
- Matos, B.; Correia, J. R.; Castro, L. M.; França, P. M. (2012):** Structural response of hyperstatic concrete beams reinforced with GFRP bars: Effect of increasing concrete confinement. In: *Composite Structures* 94(3), S. 1200–1210.
- Melchers, R. E. (1990):** Radial Importance Sampling for Structural Reliability. In: *Journal of Engineering Mechanics* 116(1), S. 189–203.
- Melchers, R. E. (1989):** Importance sampling in structural systems. In: *Structural Safety* 6(1), S. 3–10.
- Mostofinejad, D. (1997):** Ductility and Moment Redistribution in Continuous FRP Reinforced Concrete Beams. Ottawa, Canada. *Carleton University*, Department of Civil and Environmental Engineering, Dissertation.
- Müller, D. (2021):** Probabilistic Assessment of Existing Masonry Structures – The Influence of Spatially Variable Material Properties and a Bayesian Method for Determining Structure-Specific Partial Factors. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Nayal, R.; Rasheed, H. A. (2006):** Tension Stiffening Model for Concrete Beams Reinforced with Steel and FRP Bars. In: *Journal of Materials in Civil Engineering* 18(6), S. 831–841.
- Ndudzo, P. (2000):** Beitrag zur Bestimmung von Abminderungsfaktoren bei der Überlagerung von Geschoßlasten mit Berücksichtigung ihrer zeitlichen und räumlichen Verteilungen. Cottbus. *Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus*, Fachgebiet Bau-mechanik und Numerische Methoden, Dissertation.
- Ng, P. L.; Lam, J. Y.; Kwan, A. K. (2010):** Tension stiffening in concrete beams. Part 1: FE analysis. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings* 163(1), S. 19–28.
- Nguyen, H. A. (2022):** Probabilistic Assessment of Bending Strength of Statically Indeterminate Reinforced Concrete Beams. In: *International Journal of Engineering* 35(04), S. 837–844.

- Niewels, J. (2008):** Zum Tragverhalten von Betonbauteilen mit Faserverbundkunststoff-Bewehrung. Aachen. *Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen*, Lehrstuhl und Institut für Massivbau, Dissertation.
- Noakowski, P. (1988):** Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rißbreite – Kontinuierliche Theorie der Mitwirkung des Betons auf Zug - Rechenhilfen für die Praxis. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 394*. Berlin: Beuth Verlag.
- Noakowski, P.; Schäfer, H. G. (2003):** Steifigkeitsorientierte Statik im Stahlbetonbau – Stahlbetontragwerke einfach richtig berechnen. Berlin: Ernst.
- Olsson, A.; Sandberg, G.; Dahlblom, O. (2003):** On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. In: *Structural Safety* 25(1), S. 47–68.
- Ozbakkaloglu, T.; Lim, J. C.; Vincent, T. (2013):** FRP-confined concrete in circular sections: Review and assessment of stress–strain models. In: *Engineering Structures* 49, S. 1068–1088.
- Park, R.; Paulay, T. (1975):** Reinforced concrete structures. New York: Wiley.
- Pecce, M.; Manfredi, G.; Cosenza, E. (2000):** Experimental Response and Code Models of GFRP RC Beams in Bending. In: *Journal of Composites for Construction* 4(4), S. 182–190.
- Pfeiffer, U. (2003):** Die nichtlineare Berechnung ebener Rahmentragwerke aus Stahlbeton. In: *Beiträge zum 42. Forschungskolloquium des DAfStb am 20. und 21. März 2003 an der Technischen Universität Hamburg-Harburg*,
- Pfeiffer, U.; Quast, U. (2003):** Nichtlineares Berechnen stabförmiger Bauteile. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 98(9), S. 529–538.
- Pilakoutas, K.; Neocleous, K.; Guadagnini, M. (2002):** Design Philosophy Issues of Fiber Reinforced Polymer Reinforced Concrete Structures. In: *Journal of Composites for Construction* 6(3), S. 154–161.
- Prakhya, G. K.; Morley, C. T. (1990):** Tension-stiffening and moment-curvature relations of reinforced concrete elements. In: *ACI Structural Journal* 87(5), S. 597–605.
- Preinstorfer, P.; Huber, T.; Reichenbach, S.; Lees, J. M.; Kromoser, B. (2022):** Parametric Design Studies of Mass-Related Global Warming Potential and Construction Costs of FRP-Reinforced Concrete Infrastructure. In: *Polymers* 14(12),
- Quast, U. (1980):** Rechenansätze in Form einer Spannungsdehnungsbeziehung für das Mitwirken des Betons in der gerissenen Zugzone von Stahlbetonquerschnitten: Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Abteilung: Theoretische Grundlagen im Massivbau.

- Quast, U. (2007):** Nichtlineare Statik im Stahlbetonbau. Berlin: Bauwerk-Verl.
- Rao, P. S. (1966):** Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 177*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Rasch, C. (1962):** Spannungs-Dehnungslinie des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 154*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Rehm, G. (1961):** Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 138*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Rehm, G.; Eligehausen, R.; Neubert, B. (1979):** Erläuterung der Bewehrungsrichtlinien. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 300*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Reineck, K.-H. (1990):** Ein mechanisches Modell für den Querkraftbereich von Stahlbetonbauteilen. *Universität Stuttgart, Institut für Tragwerksentwurf und Konstruktion, Dissertation*.
- Rempel, S. (2018):** Zur Zuverlässigkeit der Bemessung von biegebeanspruchten Betonbauteilen mit textiler Bewehrung. Aachen. *Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Lehrstuhl und Institut für Massivbau, Dissertation*.
- Ricker, M. (2009):** Zur Zuverlässigkeit der Bemessung gegen Durchstanzen bei Einzel Fundamenten. Aachen. *Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Lehrstuhl und Institut für Massivbau, Dissertation*.
- Rüsch, H. (1955):** Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 120*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Rüsch, H.; Sell, R.; Rackwitz, R. (1969):** Statistische Analyse der Betonfestigkeit. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - DAfStb Heft 206*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Rypl, R. (2014):** Probabilistic approach to the mechanics of unidirectional composites with heterogeneous reinforcement. Aachen. *Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Lehrstuhl für Massivbau, Dissertation*.
- Schickert, G. (1981):** Formfaktoren der Betondruckfestigkeit. In: *Bautechnik* 58, S. 52–57.
- Schlaich, J.; Schäfer, K.; Woidelko, E. O. (1982):** Verhalten von Plattenbalken im Gebrauchs- und Bruchzustand, die nach Traglastverfahren bemessen worden sind. *Stuttgart, Universität Stuttgart, Abschlußbericht*.
- Schöck Bauteile AG (2018):** Technische Information Schöck Combar. *Schöck Bauteile AG*. Aarau.

- Schwuchow, R. (2009):** Probabilistische Zuverlässigkeits- und Sensitivitätsanalysen für schlanke Stahlbetonstützen auf Basis der Quasi-Monte Carlo Methode. Cottbus. *Technischen Universität Cottbus*, Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Stadtplanung, Dissertation.
- Shield, C. K.; Galambos, T. V.; Gulbrandsen, P. (2011):** On the History and Reliability of the Flexural Strength of FRP Reinforced Concrete Members in ACI 440.1R. In: 10th International Symposium on Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures 2011 -Tampa, Florida, USA, 2 - 4 April 2011 ; [FRPRCS. *American Concrete Institute*. Curran, Red Hook, NY, 2011.
- Six, M. (2001):** Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau. Darmstadt. *Technische Universität Darmstadt*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Sokolov, A. (2010):** Tension Stiffening Model for Reinforced Concrete Beams. Vilnius, Lithuania. *Vilnius Gediminas Technical University*, Technological Sciences, Civil Engineering – 02T, Dissertation.
- solidian GmbH (2023):** Technisches Produktdatenblatt solidian REBAR D10-CCE. *solidian GmbH*. Albstadt.
- Sooriyaarachchi, H. (2006):** Tension Stiffening Effect in GFRP Reinforced Concrete Elements. Sheffield, United Kingdom. *University of Sheffield*, Department of Civil and Structural Engineering, Dissertation.
- Spaethe, G. (1992):** Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. Wien, New York: Springer-Verlag.
- Spanke, H. (1987):** Die Momentenentwicklung und die mögliche Momentenumlagerung in Stahlbeton-Tragwerken. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Spelter, A.; Bergmann, S.; Bielak, J.; Hegger, J. (2019):** Long-Term Durability of Carbon-Reinforced Concrete: An Overview and Experimental Investigations. In: *Applied Sciences* 9(8), S. 1651.
- Spoelstra, M. R.; Monti, G. (1999):** FRP-Confined Concrete Model. In: *Journal of Composites for Construction* 9(3), S. 143–150.
- Spura, C. (2019):** Technische Mechanik 2. Elastostatik – Nach fest kommt ab. Wiesbaden, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Steinke, P. (2015):** Finite-Elemente-Methode – Rechnergestützte Einführung. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Teng, J. G.; Jiangm, T.; Lam, L.; Luo, Z. (2009):** Refinement of a Design-Oriented Stress–Strain Model for FRP-Confined Concrete. In: *Journal of Composites for Construction* 13(4), S. 269–278.

- Thiagarajan, G. (2003):** Experimental and Analytical Behavior of Carbon Fiber-Based Rods as Flexural Reinforcement. In: *Journal of Composites for Construction* 7(1), S. 64–72.
- Tran, N. C.; Vu, S. N. (2021):** Shear deformations based on variable angle truss model for concrete beams reinforced with FRP bars. In: *Structural Engineering and Mechanics* 79(3), S. 337–345.
- Tran, N. L. (2018):** Shear strength of slender reinforced concrete members without shear reinforcement – A mechanical model. Darmstadt. *Technische Hochschule Darmstadt*, Institut für Massivbau, Habilitationsschrift.
- Tue, N. V.; Schwarz, J.; Schenck, G. (2005):** Statistische Auswertung der Betondruckfestigkeit. In: *Leipzig Annual Civil Engineering Report (LACER)* 10, S. 341–356.
- US Geological Survey (2019):** Cement statistics. In: Historical statistics for mineral and material commodities in the United States. Kelly, T.; Matos, G. U.S. Geological Survey Data Series, 2019.
- US Geological Survey (2023):** Mineral Commodity Summaries 2023: U.S. Geological Survey.
- VDI 6201 (2019):** VDI 6201 Blatt 2:2019-04 – Softwaregestützte Tragwerksberechnung - Verifikationsbeispiele. *Verein Deutscher Ingenieure*. Berlin: Beuth Verlag.
- Vořechovský, M.; Chudoba, R. (2006):** Stochastic modeling of multi-filament yarns: II. Random properties over the length and size effect. In: *International Journal of Solids and Structures* 43(3-4), S. 435–458.
- Wagenknecht, G. (2018):** Baustatik - Weggrößenverfahren – Grundlagen, Finite Elemente der Stabstatik, Theorie I. und II. Ordnung. Berlin, Wien, Zürich: Beuth Verlag.
- Weber, A. (2018):** Prüfungskonzepte für Bewehrungsmaterialien mit zeitabhängigen Widerständen. In: *Bauingenieur* 93, 323-300.
- Weber, A.; Baquero, C. W. (2010):** New Durability Concepts for FRP Reinforcing Bars. In: *Concrete International* 32(7), S. 49–53.
- Weiler, G. (1989):** Beitrag zur Berechnung ebener Stabwerke aus Stahlbeton und Spannbeton mit nichtlinearem Tragverhalten.
- Woidelko, E. O. (1983):** Zum Tragverhalten nach Traglastverfahren bemessener Stahlbetonplattenbalken. Stuttgart. *Universität Stuttgart*, Institut für Massivbau, Dissertation.
- Zhang, Y.; Xiong, X.; Mohamed Elobaid Musa, M.; Lyu, X. (2022):** Analysis of a compressive strength model for FRP-confined damaged concrete columns based on the Drucker–Prager yield criterion. In: *Structural Concrete* 23(3), S. 1816–1827.

Zilch, K.; Zehetmaier, G. (2010): Bemessung im konstruktiven Betonbau. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Zimmert, F.; Braml, T. (2023): Freiformbauteile im Stahlbeton-, Spannbeton- und Verbundbau: Berechnung von Querschnittswerten. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 118(5), S. 341–352.

10.3 Programme

MPI for Python, Verfügbar unter: <https://mpi4py.readthedocs.io/en/stable/>.

multiprocessing, Verfügbar unter: <https://docs.python.org/3/library/multiprocessing.html>.

Numpy, Verfügbar unter: <https://numpy.org/>.

Python – Python Software Foundation - Version 3.9, Verfügbar unter: <https://www.python.org/>.

SciPy, Verfügbar unter: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html#>.

Anhang

ANHANG

Anhang A	Mechanische Zusammenhänge.....	193
Anhang A-1:	FVK-umschnürte Betondruckzonen nach Teng et al. (2009)	193
Anhang A-2:	Druckstrebenneigungswinkel FVK-bewehrter Betonbauteile	194
Anhang A-3:	Betondruckzonenbeiwerte.....	195
Anhang B	Finite Element Modell	197
Anhang B-1:	Elementmatrizen	197
Anhang B-2:	Versuchsdatenbank	200
Anhang C	Bauteilversuche	202
Anhang C-1:	Bauteile	202
Anhang C-2:	Materialparameter	203
Anhang C-3:	Versuchsaufbauten	203
Anhang C-4:	Versuchsergebnisse	204
Anhang D	Laststellungen.....	210

Anhang A Mechanische Zusammenhänge

Anhang A-1: FVK-umschnürte Betondruckzonen nach Teng et al. (2009)

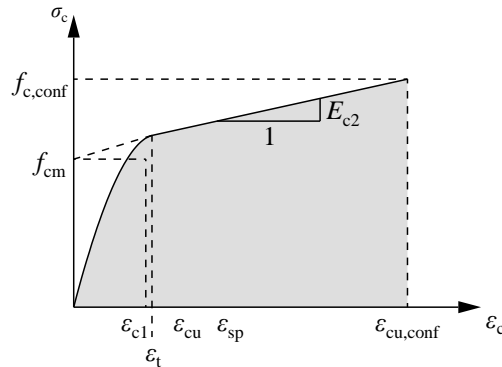


Abbildung A-1 Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Teng et al. (2009)

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{cm} \cdot \varepsilon_c - \frac{(E_{cm} - E_{c2})^2}{4 \cdot f_{cm}} \cdot \varepsilon_c^2 & \text{für } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_t \\ f_{cm} + E_{c2} \cdot \varepsilon_c & \text{für } \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu,conf} \end{cases} \quad \text{Gl. A-1}$$

$$E_{c2} = \frac{f_{c,conf} - f_{cm}}{\varepsilon_{cu,conf}} \quad \text{Gl. A-2}$$

$$\varepsilon_t = \frac{2 \cdot f_{cm}}{E_{cm} - E_{c2}} \quad \text{Gl. A-3}$$

$$\frac{\varepsilon_{cu,conf}}{\varepsilon_{c1}} = 1,75 + 6,5 \cdot \rho_k^{0,8} \cdot \rho_e^{0,45} \quad \text{Gl. A-4}$$

$$\frac{f_{c,conf}}{f_{cm}} = 1 + 3,5 \cdot (\rho_k - 0,01) \cdot \rho_e \quad \text{Gl. A-5}$$

$$\rho_e = \frac{f_{fu,w}/E_f}{\varepsilon_{c1}} \quad \text{Gl. A-6}$$

$$\rho_k = \frac{\sigma_{c2,eff}}{f_{cm}} \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{fu,w}/E_f} \quad \text{Gl. A-7}$$

Anhang A-2: Druckstrebenneigungswinkel FVK-bewehrter Betonbauteile

CAN/CSA-S806-12 (2012)

$$\theta = 30^\circ + 7000 \cdot \varepsilon_1 \quad \text{mit} \quad 30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad \text{Gl. A-8}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\left| \frac{M_E}{0,9d} + |V_E| \right|}{2 \cdot (E_{f,l} A_{f,l})} > 0 \quad \text{Gl. A-9}$$

mit:

$E_{f,l}$ E-Modul der FVK-Längsbewehrung

$A_{f,l}$ Querschnittsfläche der FVK-Längsbewehrung

Kueres (2019)

$$\theta = \arctan \left[\left(\frac{\varepsilon_1 \cdot 0,9d \cdot a_{f,w} \cdot E_{f,w}}{V_E} \right)^{1/3} \right] \quad \text{mit} \quad 21,8 \leq \theta \leq 45 \quad \text{Gl. A-10}$$

mit:

$E_{f,w}$ E-Modul der FVK-Bügelbewehrung

$a_{f,w}$ Bezogene Querschnittsfläche der FVK-Bügelbewehrung

Kurth (2012)

$$\theta = \arctan \left[\left(\frac{\left(\frac{M_E}{V_E} \cdot a_{f,w} \cdot E_{f,w} \right)^{1/3}}{A_{f,l} \cdot E_{f,l}} \right) \right] \quad \text{mit} \quad 20 \leq \theta \leq 50 \quad \text{Gl. A-11}$$

Niewels (2008)

$$\theta = \arctan \left[\left(5 \cdot \rho_{f,w}^* \right)^{0,1} \right] \quad \text{mit} \quad 25 \leq \theta \leq 45 \quad \text{Gl. A-12}$$

mit:

$\rho_{f,w}^* \quad \rho_{f,w} \cdot E_{f,w} / E_{cm}$

Anhang A-3: Betondruckzonenbeiwerte

Beiwerte der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Beton nach DIN EN 1992-1-1 (2011)

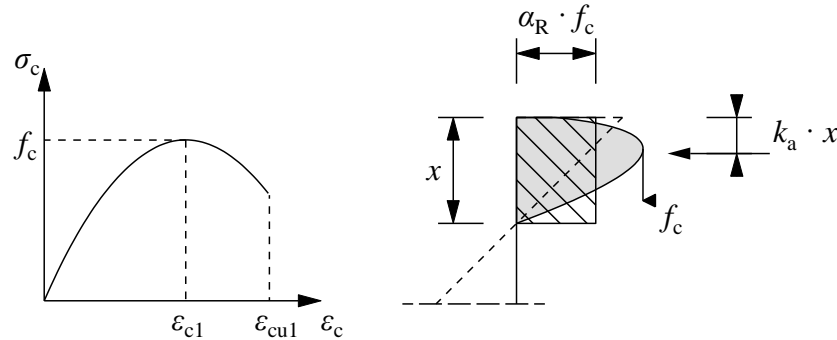


Abbildung A-2 Nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Beton nach DIN EN 1992-1-1/NA (2013)

$$\alpha_R = \frac{k}{k-2} \cdot \left(1 - \frac{\ln(N)}{N-1} \right) - \frac{Z_1}{\eta} \quad \text{Gl. A-13}$$

$$k_a = 1 - \frac{1}{\alpha_R \cdot \eta^2} \cdot \left(n \cdot Z_1 - \frac{Z_2}{(n-2)^4} \right) \quad \text{Gl. A-14}$$

$$N = 1 + (1-2) \cdot \eta \quad \text{Gl. A-15}$$

$$Z_1 = \frac{1}{(n-2)^3} \cdot [0,5N^2 - 2N + \ln(N) + 1,5] \quad \text{Gl. A-16}$$

$$Z_2 = \frac{1}{3} N^3 - 1,5N^2 + 3N - \ln(N) - \frac{11}{6} \quad \text{Gl. A-17}$$

mit:

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$$k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\varepsilon_{c1}| / f_{cm}$$

Die Gleichungen wurden Quast (2007) entnommen

Beiwerte der Parabel-Rechteck-Diagramms für Beton nach DIN EN 1992-1-1 (2011)

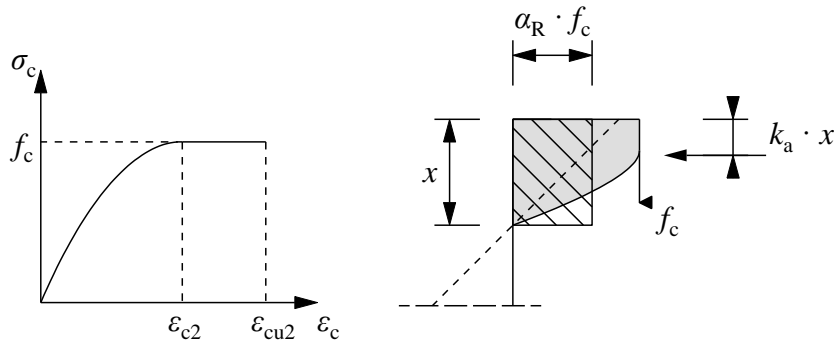


Abbildung A-3 Parabel-Rechteck-Diagramm für Beton nach DIN EN 1992-1-1 (2011)

$$\alpha_R = 1 - \frac{1-A}{(n+1) \cdot \eta} \quad \text{Gl. A-18}$$

$$k_A = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1+B}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \eta^2} \right) \cdot \frac{1}{\alpha_R} \quad \text{Gl. A-19}$$

$$A = \max(0; 1 - \eta)^{n+1} \quad \text{Gl. A-20}$$

$$B = A \left[(n+1) \cdot (n - \eta) - (n+2) \right] \quad \text{Gl. A-21}$$

mit:

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

n Exponent gemäß DIN EN 1992-1-1/NA (2013) (= 2 für normalfeste Betone)

Die Gleichungen wurden Quast (2007) entnommen

Anhang B Finite Element Modell

Anhang B-1: Elementmatrizen

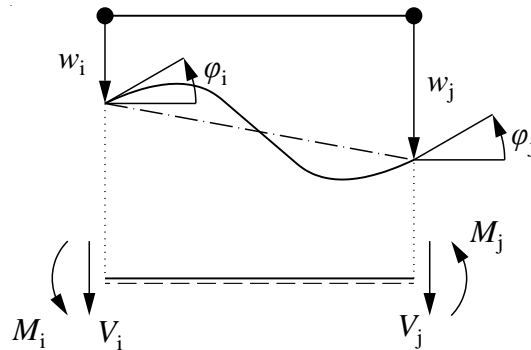


Abbildung B-1 Stabendvariablen und Vorzeichendefinition (unter Vernachlässigung Normalkraft)

Die Schnittgrößen an den Stabenden können nach Kindmann und Kraus (2020) über „Steifigkeitsbeziehungen“ mit den jeweiligen Verformungsgrößen verknüpft werden. Für die lineare Stabtheorie (Theorie I. Ordnung) ergibt sich Gl. B-1.

$$\underline{s}_e = \underline{k}_e \cdot \underline{v}_e - \underline{p}_e \quad \text{Gl. B-1}$$

mit:


$$\underline{s}_e = \begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad \text{Schnittgrößenvektor}$$

\underline{k}_e Lokale Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{v}_e = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} \quad \text{Verformungsgrößenvektor}$$

\underline{p}_e Lokaler Elementlastvektor

Lokale Elementsteifigkeitsmatrix eines schubsteifen Balkenelements



$$\underline{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3(1+\beta)} & -\frac{6EI}{l^2(1+\beta)} & -\frac{12EI}{l^3(1+\beta)} & -\frac{6EI}{l^2(1+\beta)} \\ & \frac{EI(4+\beta)}{l(1+\beta)} & \frac{6EI}{l^2(1+\beta)} & \frac{EI(2-\beta)}{l(1+\beta)} \\ & & \frac{12EI}{l^3(1+\beta)} & \frac{6EI}{l^2(1+\beta)} \\ \text{sym} & & & \frac{EI(4+\beta)}{l(1+\beta)} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. B-2}$$

mit:

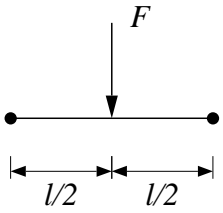
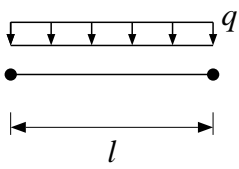
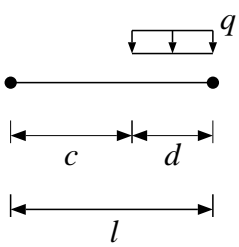
$$\beta = \frac{12EI}{GA \cdot l^2}$$

Die Formulierung wurde Marti (2014) entnommen.

Lokale Elementlastvektoren

Die Vorzeichen sind gemäß der in Abbildung B-1 getroffenen Vorzeichendefinition angeben.

Tabelle B-1 Lokale Elementlastvektoren

Lastfall	Lokaler Elementlastvektor \underline{p}_e
	$\underline{p}_e = \begin{bmatrix} \frac{F}{2} \\ \frac{F \cdot l}{8} \\ -\frac{F}{2} \\ \frac{F \cdot l}{8} \end{bmatrix}$
	$\underline{p}_e = \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{2} \\ -\frac{q \cdot l^2}{12} \\ \frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot l^2}{12} \end{bmatrix}$
	$\underline{p}_e = \begin{bmatrix} \frac{q \cdot d^3}{2 \cdot l^3} \cdot (2l - d) \\ -\frac{q \cdot d^3}{12 \cdot l^2} \cdot (4l - 3d) \\ q \cdot d - \left[\frac{q \cdot d^3}{2 \cdot l^3} \cdot (2l - d) \right] \\ \frac{q \cdot d^3}{12 \cdot l^2} \cdot \left(6 \frac{l^2}{d} - 8l + 3d \right) \end{bmatrix}$

Die Formulierungen wurden Kindmann und Kraus (2020) entnommen.

Anhang B-2: Versuchsdatenbank

Tabelle B-2 Versuchsdatenbank

Lfd.-Nr.	Quelle	QS-Bez.	h [mm]	b [mm]	d ₁ [mm]	A _f [cm ²]	Bew.-Mat.	f _r [N/mm ²]	E _f [N/mm ²]	f _{cm} [N/mm ²]	ε _{cu} [%]	M _{max,exp} [kNm]	M _{calc} [kNm]	M _{calc} /M _{exp} [-]	Versagensart
1	Almusallam (1997)	Group II	210	200	52,0	11,34	GFK	886	43.370	25,7	-	34,18	32,32	0,95	Betondruckversagen
2	Almusallam (1997)	Group III	260	200	49,0	5,07	GFK	886	43.370	25,7	-	43,05	40,06	0,93	Betondruckversagen
3	Al Sunna (2006)	BG1	250	150	29,8	1,43	GFK	665	42.750	38,1	-2,495	17,17	19,48	1,13	Bewehrungsversagen
4	Al Sunna (2006)	BG2	250	150	31,4	2,53	GFK	620	41.600	38,1	-3,16	29,06	31,73	1,09	Bewehrungsversagen
5	Al Sunna (2006)	BG3	250	150	56,6	11,40	GFK	670	41.950	36,9	-3,4	42,91	46,98	1,09	Betondruckversagen
6	Al Sunna (2006)	BC1	250	150	28,2	0,95	CFK	1.450	133.000	45,7	-2,44	28,78	28,55	0,99	Bewehrungsversagen
7	Al Sunna (2006)	BC2	250	150	29,8	2,14	CFK	1.325	108.035	43,0	-2,98	39,87	46,98	1,18	Betondruckversagen
8	Al Sunna (2006)	SG1	120	500	30,7	1,58	GFK	600	38.850	41,4	-	7,25	8,14	1,12	Bewehrungsversagen
9	Al Sunna (2006)	SG2	120	500	35,8	3,57	GFK	665	42.750	36,6	-	15,92	17,08	1,07	Betondruckversagen
10	Al Sunna (2006)	SG3	120	500	49,5	14,25	GFK	670	41.950	36,3	-	23,33	20,85	0,89	Betondruckversagen
11	Al Sunna (2006)	SC1a	120	500	34,2	1,27	CFK	1.450	133.000	40,5	-	14,28	14,79	1,04	Bewehrungsversagen
12	Al Sunna (2006)	SC1b	120	500	36,2	1,27	CFK	1.450	133.000	40,5	-	13,93	14,30	1,03	Bewehrungsversagen
13	Al Sunna (2006)	SC2a	120	500	42,8	2,85	CFK	1.325	113.305	41,4	-	21,16	21,39	1,01	Betondruckversagen
14	Al Sunna (2006)	SC2b	120	500	39,8	2,85	CFK	1.325	113.305	41,4	-	21,27	22,73	1,07	Betondruckversagen
15	Al Sunna (2006)	SC3a	120	500	48,9	5,07	CFK	1.475	118.600	40,2	-	22,65	22,69	1,00	Betondruckversagen
16	Al Sunna (2006)	SC3b	120	500	42,4	5,07	CFK	1.475	118.600	40,2	-	26,62	26,29	0,99	Betondruckversagen
17	Barris et al. (2009)	C-212-D1	190	140	26,0	2,26	GFK	1.353	63.252	59,8	-4,5	36,90	35,97	0,97	Betondruckversagen
18	Barris et al. (2009)	C-216-D1	190	140	28,0	4,02	GFK	995	64.152	56,3	-4,5	44,04	42,47	0,96	Betondruckversagen
19	Barris et al. (2009)	C-316-D1	190	140	28,0	6,03	GFK	995	64.152	55,2	-4,5	50,79	48,65	0,96	Betondruckversagen
20	Barris et al. (2009)	C-212-D2	190	160	46,0	2,26	GFK	1.353	63.252	39,6	-4,5	26,61	24,55	0,92	Betondruckversagen
21	Barris et al. (2009)	C-216-D2	190	160	48,0	4,02	GFK	995	64.152	61,7	-4,5	41,31	39,18	0,95	Betondruckversagen
22	Barris et al. (2009)	C-316-D2	190	160	48,0	6,03	GFK	995	64.152	60,1	-4,5	46,62	44,54	0,96	Betondruckversagen
23	Barris et al. (2008)	CI-212-D	190	140	26,0	2,26	GFK	1.353	63.252	32,1	-4,2	24,44	23,94	0,98	Betondruckversagen
24	Barris et al. (2008)	CI-216-D	190	140	28,0	4,02	GFK	995	64.152	32,1	-4,2	29,26	28,83	0,99	Betondruckversagen
25	Barris et al. (2008)	CI-316-D	190	140	28,0	6,03	GFK	995	64.152	32,1	-4,75	33,00	34,35	1,04	Betondruckversagen
26	Barris et al. (2008)	C2-216-D	190	140	28,0	4,02	GFK	995	64.152	45,0	-	29,84	30,93	1,04	Betondruckversagen

Tabelle B-2 (Fortsetzung)

Lfd.-Nr.	Quelle	QS-Bez.	h	b	d ₁	A _f	Bew.-Mat.	f _f	E _f	f _{cm}	ε _{cu}	M _{max,exp}	M _{max,calc}	M _{calc} /M _{exp}	Versagensart
		[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[cm ²]	[-]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]	[kNm]	[kNm]	[-]	[-]
27	Gribsniak et al. (2013)	S2-5mm	302	273	56,0	4,52	GFK	1,491	65.100	56,0	-	113,68	102,55	0,90	Betondruckversagen
28	Gribsniak et al. (2013)	S2-6mm	303	273	60,0	4,02	GFK	1,336	64.400	56,0	-	86,90	95,26	1,10	Betondruckversagen
29	Pece et al. (2000)	F1	185	500	40,0	8,87	GFK	494	42.000	30,0	-4	57,85	56,61	0,98	Bewehrungsversagen
30	Pece et al. (2000)	F2	185	500	40,0	5,07	GFK	530	42.000	30,0	-	33,65	36,20	1,08	Bewehrungsversagen
31	Sultani et al. (2021)	G3w	100	200	25,0	1,51	GFK	1.000	64.400	49,7	-	9,32	8,10	0,87	Betondruckversagen
32	Sultani et al. (2021)	G4w	103	198	20,0	1,51	GFK	1.000	64.400	49,7	-	9,17	9,50	1,04	Betondruckversagen
33	Thiagarajan (2003)	B4	152,4	152,4	28,5	0,63	CFK	1.900	140.000	51,7	-	13,25	13,84	1,04	Bewehrungsversagen
34	Thiagarajan (2003)	B6	152,4	152,4	28,5	0,63	CFK	1.900	140.000	45,9	-	12,87	13,63	1,06	Bewehrungsversagen
35	Thiagarajan (2003)	B7	152,4	152,4	29,3	0,99	CFK	1.900	140.000	49,3	-	17,55	17,39	0,99	Betondruckversagen
36	Thiagarajan (2003)	B8	152,4	152,4	29,3	0,99	CFK	1.900	140.000	51,1	-	16,92	17,82	1,05	Betondruckversagen
37	Thiagarajan (2003)	B9	152,4	152,4	29,3	0,99	CFK	1.900	140.000	53,3	-	17,49	18,28	1,05	Betondruckversagen
38	Thiagarajan (2003)	B10	152,4	152,4	30,1	1,42	CFK	1.900	140.000	53,4	-	18,81	20,69	1,10	Betondruckversagen
39	Thiagarajan (2003)	B11	152,4	152,4	30,1	1,42	CFK	1.900	140.000	55,0	-2,57	17,61	17,68	1,00	Betondruckversagen
40	Thiagarajan (2003)	B12	152,4	152,4	30,1	1,42	CFK	1.900	140.000	43,9	-	17,51	18,46	1,05	Betondruckversagen
41	Acciai et al. (2016)	S-G2	100	200	20,0	2,65	GFK	690	40.800	39,4	-	7,80	8,07	1,03	Betondruckversagen
42	Acciai et al. (2016)	S-C1	100	200	20,0	0,64	CFK	2.068	124.000	66,2	-	7,91	8,88	1,12	Betondruckversagen
43	Adam et al. (2015)	A25-2	300	120	20,0	1,63	GFK	640	30.000	19,6	-	22,39	21,74	0,97	Betondruckversagen
44	Adam et al. (2015)	A45-1	300	120	20,0	1,63	GFK	640	30.000	38,4	-	30,69	27,61	0,90	Bewehrungsversagen
45	Adam et al. (2015)	A45-2	300	120	20,0	2,76	GFK	640	30.000	38,4	-	45,05	39,77	0,88	Betondruckversagen

Anhang C Bauteilversuche

Anhang C-1: Bauteile

Tabelle C-1 Versuchsmatrix

Serie	Bez.	l_{Feld}	h	b	d	$A_{\text{St,f}}$	$A_{\text{F,f}}$	Beton
		[m]	[mm]	[mm]	[mm]	[cm ²]	[cm ²]	
Serie 1	300-S10/F4	3	150	400	131	5,03	2,01	C35/45
	300-S4/F2 ¹⁾	3	150	400	131	2,01	1,01	C35/45
	300-S4/F10	3	150	400	131	2,01	5,03	C35/45
	300-S2/F4 ¹⁾	3	150	400	131	1,01	2,01	C35/45
Serie 2	225-S10/F4	2,25	150	400	131	5,03	2,01	C35/45
	225-S4/F2	2,25	150	400	131	2,01	1,01	C35/45
	225-S4/F10	2,25	150	400	131	2,01	5,03	C35/45
	225-S2/F4	2,25	150	400	131	1,01	2,01	C35/45

¹⁾ Fehler in der Versuchsdurchführung, keine belastbaren Messdaten vorhanden

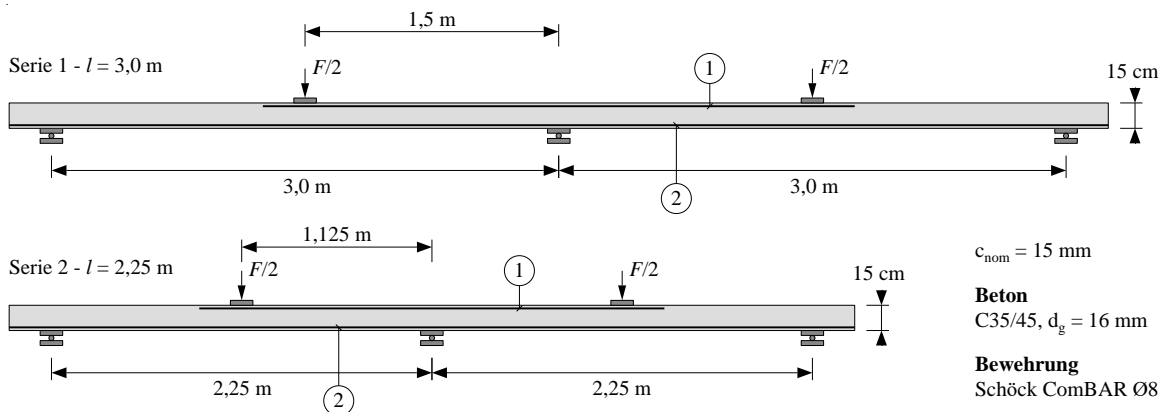


Abbildung C-1 Bauteilmaße

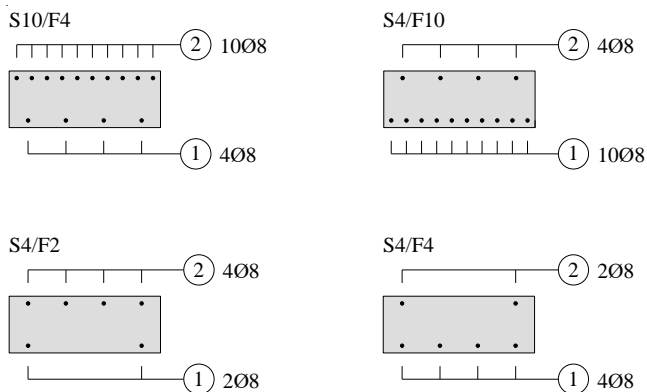


Abbildung C-2 Querschnitte

Anhang C-2: Materialparameter

Tabelle C-2 Materialeigenschaften des Betons

Probe Nr.	$f_{cm,cyl}$	$f_{ctm,sp}$	E_{cm}
	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[N/mm ²]
1	44,52	4,07	31.285
2	42,73	3,57	33.502
3	45,29	3,86	27.555
4	41,39	-	-

Tabelle C-3: Eigenschaften Schöck ComBAR Ø8

Probe Nr.	$f_{f,u}$	E_f
	[N/mm ²]	[N/mm ²]
1	1.426	57.153
2	1.341	59.355
3	1.321	59.490
4	1.191	56.081
5	1.449	57.547
Mittelwert	1.354	57.925

Anhang C-3: Versuchsaufbauten

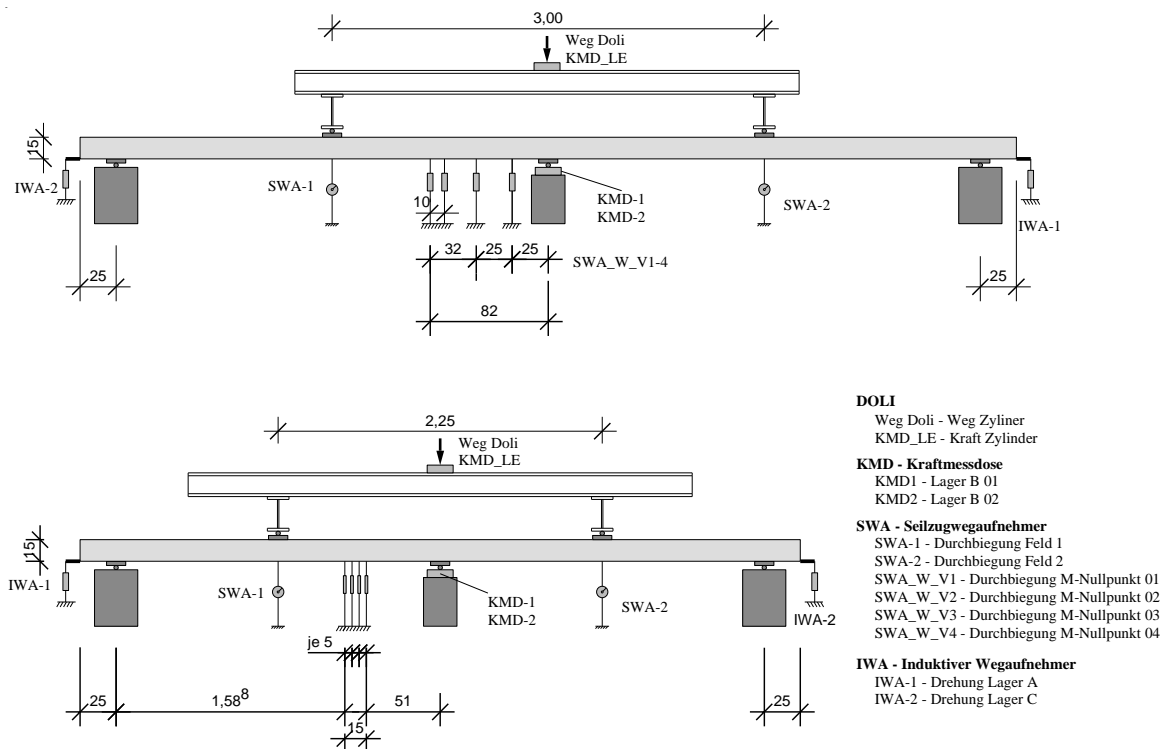
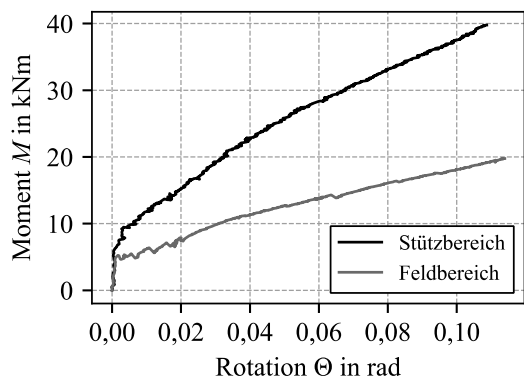
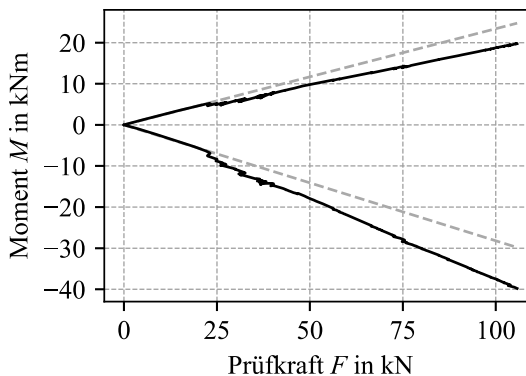
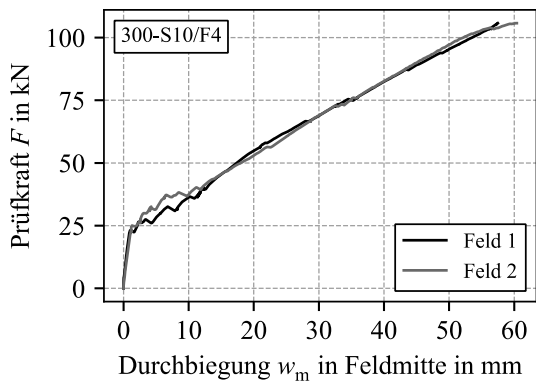


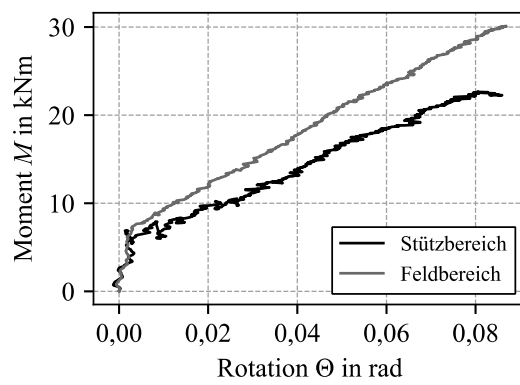
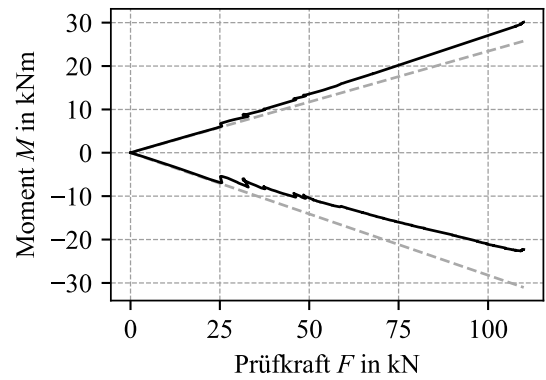
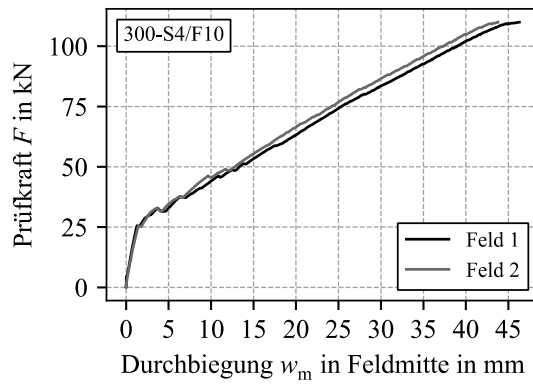
Abbildung C-3 Messtechnik

Anhang C-4: Versuchsergebnisse

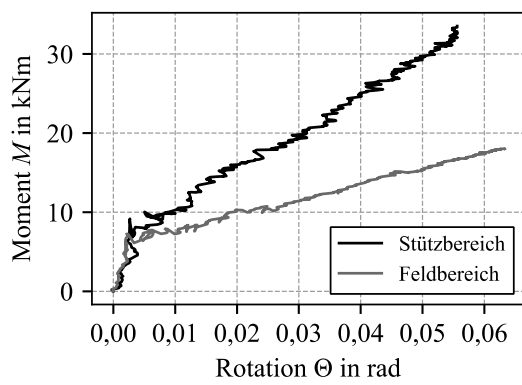
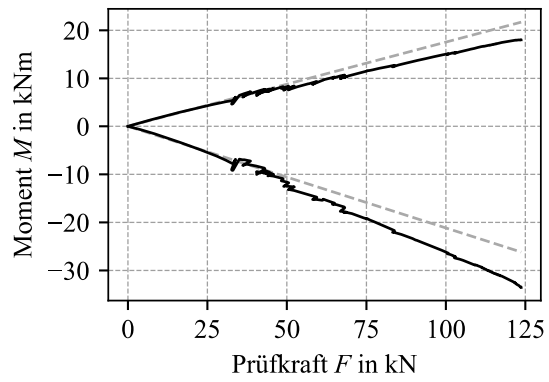
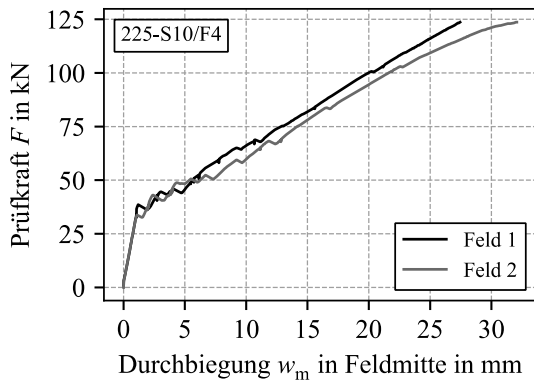
300-S10/F4



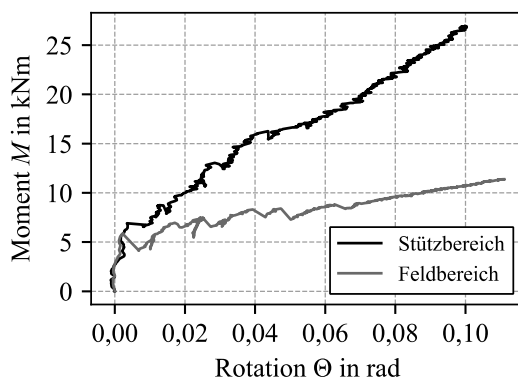
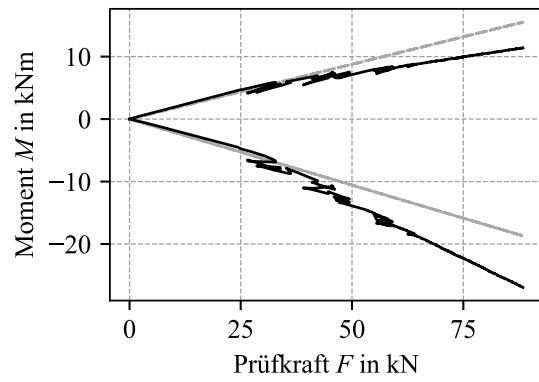
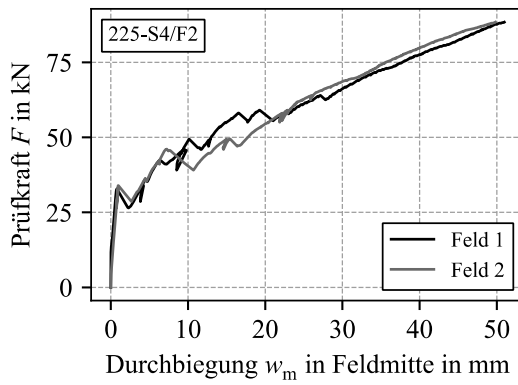
300-S4/F10



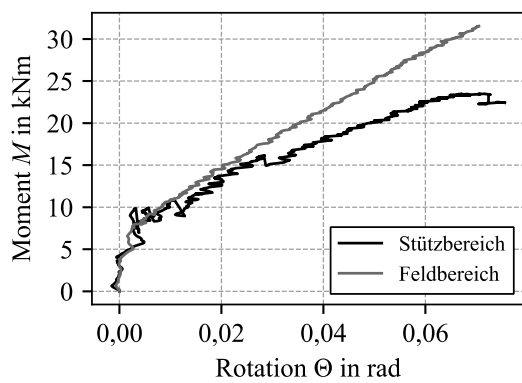
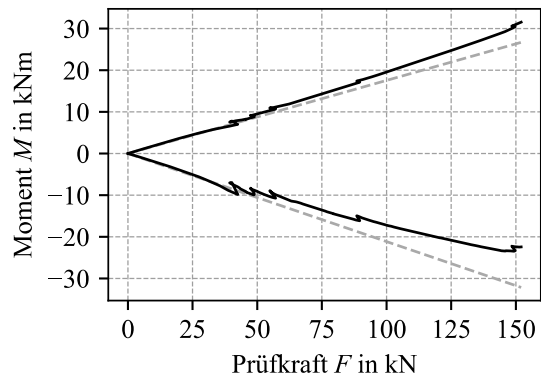
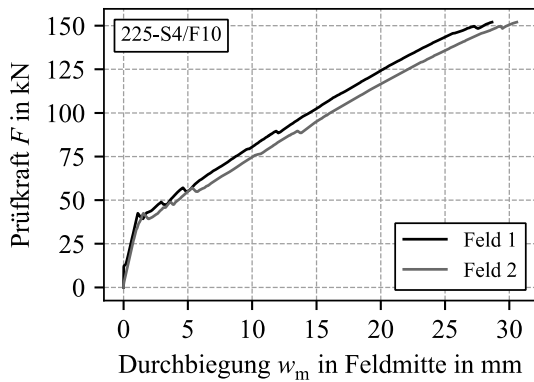
225-S10/F4



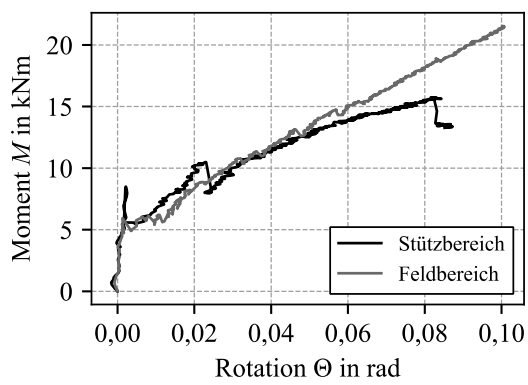
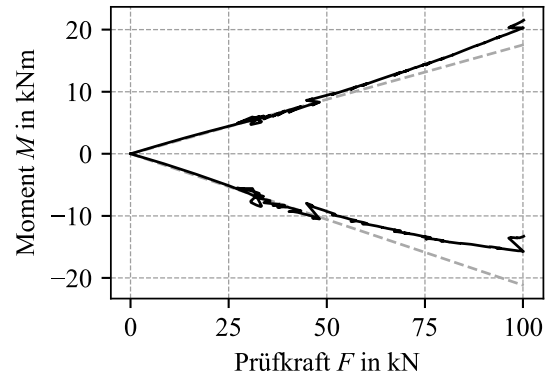
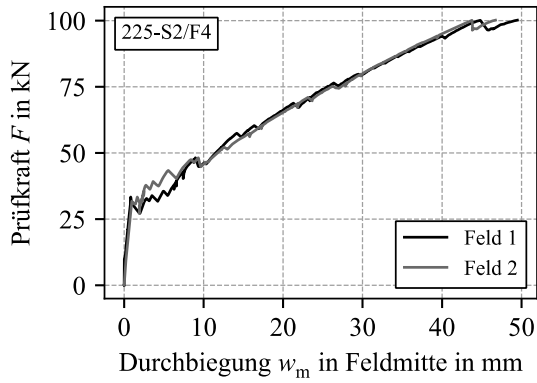
225-S4/F2



225-S4/F10

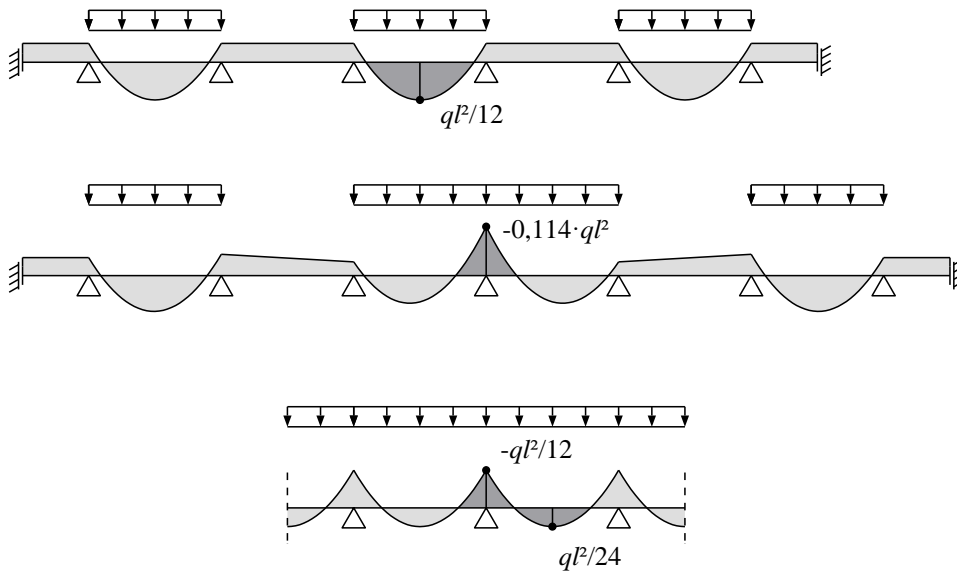


225-S2/F4

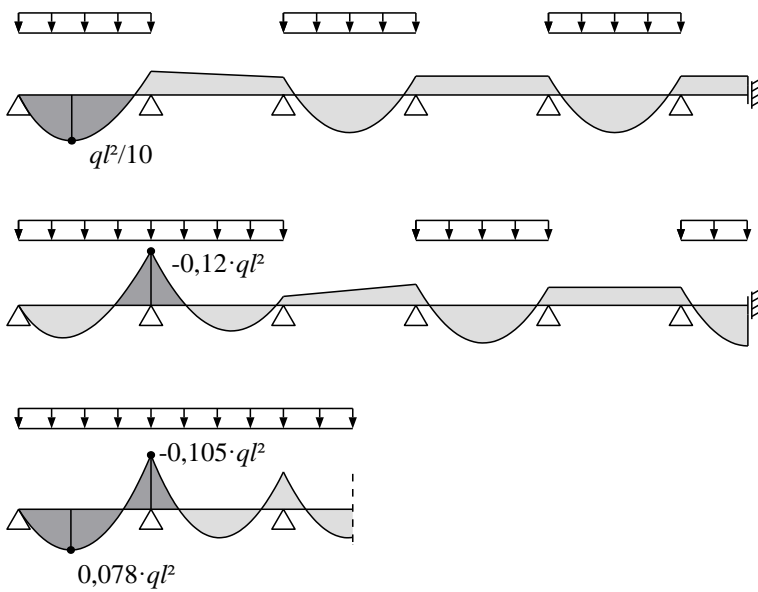


Anhang D Laststellungen

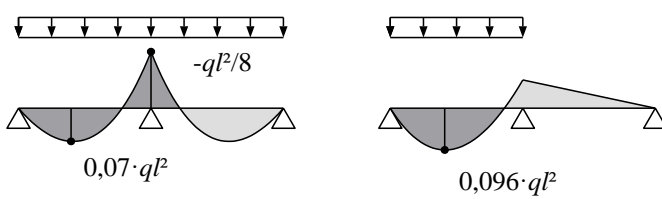
Innenfeld



Randfeld



Zweifeld



Dissertationsreihe

Prof. Dr.-Ing. Carl-Alexander Graubner

Institut für Massivbau
Technische Universität Darmstadt

- Heft 1: **Stefan Kempf (2001)**
Technische und wirtschaftliche Bewertung der Mindestbewehrungsregeln für Stahlbetonbauteile
- Heft 2: **Katja Reiche (2001)**
Nachhaltigkeitsanalyse demontagegerechter Baukonstruktionen - Entwicklung eines Analysemodells für den Entwurf von Gebäuden
- Heft 3: **Michael Six (2001)**
Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau
- Heft 4: **Eric Simon (2002)**
Schubtragverhalten von Mauerwerk aus großformatigen Steinen
- Heft 5: **Holger Schmidt (2003)**
Versagenswahrscheinlichkeit unbewehrter Wand-Decken-Verbindungen bei Gasexplosionen im Fertigteilbau
- Heft 6: **Andreas Bachmann (2003)**
Ein wirklichkeitsnaher Ansatz der böenerregten Windlasten auf Hochhäuser in Frankfurt/Main
- Heft 7: **Duy Tien Nguyen (2004)**
Rotationskapazität von biegebeanspruchten Stahlbetonbauteilen mit Schubrissbildung
- Heft 8: **Gert Wolfgang Riegel (2004)**
Ein softwaregestütztes Berechnungsverfahren zur Prognose und Beurteilung der Nutzungskosten von Bürogebäuden
- Heft 9: **Christian Glock (2004)**
Traglast unbewehrter Beton- und Mauerwerkswände - Nichtlineares Berechnungsmodell und konsistentes Bemessungskonzept für schlanke Wände unter Druckbeanspruchung
- Heft 10: **Kati Herzog (2005)**
Lebenszykluskosten von Baukonstruktionen - Entwicklung eines Modells und einer Softwarekomponente zur ökonomischen Analyse und Nachhaltigkeitsbeurteilung von Gebäuden

- Heft 11: **Andreas Garg (2006)**
Spannungszustände in Fahrbahnplatten weit gespannter Stahlverbundbrücken - Empfehlungen für die Herstellung der Ortbeton-Fahrbahnplatte von Talbrücken mit der Schalwagenmethode
- Heft 12: **Tilo Proske (2007)**
Frischbetondruck bei Verwendung von Selbstverdichtendem Beton - Ein wirklichkeitsnahes Modell zur Bestimmung der Einwirkungen auf Schalung und Rüstung
- Heft 13: **Simon Glowienka (2007)**
Zuverlässigkeit von großformatigem Mauerwerk - Probabilistische Analyse von großformatigem Mauerwerk aus Kalksandstein und Porenbeton mit Dünnbettvermörtelung
- Heft 14: **Alexander Renner (2007)**
Energie- und Ökoeffizienz von Wohngebäuden - Entwicklung eines Verfahrens zur lebenszyklusorientierten Bewertung der Umweltwirkungen unter besonderer Berücksichtigung der Nutzungsphase
- Heft 15: **Guido Hausmann (2007)**
Verformungsvorhersage vorgespannter Flachdecken unter Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften
- Heft 16: **Stefan Daus (2007)**
Zuverlässigkeit des Klebeverbundes von nachträglich verstärkten Betonbauteilen – Sicherheitskonzept für den Verbundnachweis von oberflächlich geklebter Bewehrung
- Heft 17: **Thomas Kranzler (2008)**
Tragfähigkeit überwiegend horizontal beanspruchter Aussteifungsscheiben aus unbewehrtem Mauerwerk
- Heft 18: **Lars Richter (2009)**
Tragfähigkeit nichttragender Wände aus Mauerwerk – Ein nichtlineares Berechnungsmodell und Bemessungsverfahren für biegebeanspruchte Innen- und Außenwände
- Heft 19: **Markus Spengler (2010)**
Dynamik von Eisenbahnbrücken unter Hochgeschwindigkeitsverkehr - Entwicklung eines Antwortspektrums zur Erfassung der dynamischen Tragwerksreaktion

- Heft 20: **Ngoc Linh Tran (2011)**
Berechnungsmodell zur vereinfachten Abschätzung des Ermüdungsverhaltens von Federplatten bei Fertigträgerbrücken
- Heft 21: **Carmen Schneider (2011)**
Steuerung der Nachhaltigkeit im Planungs- und Realisierungsprozess von Büro- und Verwaltungsgebäuden – Entwicklung eines Instrumentes zur Verbesserung und Optimierung der Nachhaltigkeitsqualität
- Heft 22: **Frank Ritter (2011)**
Lebensdauer von Bauteilen und Bauelementen – Modellierung und praxisnahe Prognose
- Heft 23: **Benjamin von Wolf-Zdekauer (2011)**
Energieeffizienz von Anlagensystemen zur Gebäudekühlung - Ein nutzenbezogener Bewertungsansatz
- Heft 24: **Eric Brehm (2011)**
Reliability of Unreinforced Masonry Bracing Walls – Probabilistic Approach and Optimized Target Values
- Heft 25: **Carolin Roth (2011)**
Lebenszyklusanalyse von Baukonstruktionen unter Nachhaltigkeitsgesichtspunkten – Ein Beitrag zur Beurteilung der Nachhaltigkeit von Gebäuden bei ungewissem Lebensweg
- Heft 26: **Kay-Uwe Thorn (2013)**
Neuentwicklung eines Ladungsrückhaltesystems aus textilbewehrten Betonfertigteilen
- Heft 27: **Andreas Greck (2013)**
Straßenbrücken mit einteiligem Verbundquerschnitt - Optimierung des Betonierablaufs der Fahrbahnplatte und Entwicklung eines Vorschlags zur vereinfachten globalen Systemberechnung beim Einsatz mehrerer Schalwagen
- Heft 28: **Martin Heimann (2013)**
Tragwerkszuverlässigkeit hochbeanspruchter Druckglieder aus ultrahochfestem Beton
- Heft 29: **Torsten Mielecke (2013)**
Nachhaltigkeitsbewertung von Einfamilienhäusern – Ein Beitrag zur Beurteilung und Optimierung der Nachhaltigkeitsqualität von kleinen Wohngebäuden

- Heft 30: **Sebastian Pohl (2013)**
*Nachhaltigkeit im Gebäudebetrieb – Ein Vorschlag zur Diversifizierung des-
bau- und immobilienwirtschaftlichen Zertifizierungsregimes in Deutschland*
- Heft 31: **Stefan Hainer (2015)**
*Karbonatisierungsverhalten von Betonen unter Einbeziehung klinkerreduzier-
ter Zusammensetzungen – Ein Modell zur Abschätzung des Karbonatisierungs-
fortschrittes*
- Heft 32: **Achim Knauff (2016)**
*Heizwärmeerzeugung mit Solarthermie, Geothermie und Photovoltaik für
Büro- und Verwaltungsgebäude*
- Heft 33: **Ulf Grziwa (2017)**
*Zuverlässigkeit schlanker UHPC-Druckglieder mit räumlich streuenden
Materialeigenschaften*
- Heft 34: **Björn Freund (2017)**
*Frischbetondruck lotrechter, geneigter und gekrümmter Betonbauteile bei Ver-
wendung von Betonen mit hoher Fließfähigkeit*
- Heft 35: **Gökhan Uysal (2017)**
*Kostenrisiken von Industriebauten mit flexiblen Nutzungsszenarien – Ein
Berechnungsmodell für die Investitionsentscheidung unter Verwendung
probabilistischer Methoden*
- Heft 36: **Moien Rezvani (2017)**
*Shrinkage model for concrete made of limestone-rich cements – An approach
from cement paste to concrete*
- Heft 37: **Claudia Weißmann (2017)**
*Effizienter Einsatz erneuerbarer Energieträger in vernetzten Wohnquartieren
– Entwicklung eines simulationsbasierten Verfahrens zur energetischen,
ökologischen und ökonomischen Bewertung*
- Heft 38: **Markus Blatt (2017)**
Beitrag zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetondeckenknoten
- Heft 39: **Michael Schmitt (2017)**
*Tragfähigkeit ausfachender Mauerwerkswände unter Berücksichtigung der
verformungsbasierten Membranwirkung*
- Heft 40: **Valentin Förster (2018)**
*Tragfähigkeit unbewehrter Beton- und Mauerwerksdruckglieder bei zweiach-
sig exzentrischer Beanspruchung*

- Heft 41: **Ngoc Linh Tran (2018)** – Habilitationsschrift
*Shear strength of slender reinforced concrete members without shear re-
inforcement – A mechanical model*
- Heft 42: **Jaroslav Kohoutek (2018)**
Zuverlässigkeit integraler Straßenbrücken in Massivbauweise
- Heft 43: **Jochen Zeier (2019)**
*Thermisch getrennte Stützen-Decken-Anschlüsse im Stahlbetonbau – Ein Mo-
dell zum Tragverhalten bei großen Fugendicken*
- Heft 44: **Katharina Fritz (2019)**
*Qualifizierte Beurteilung der sektoralen Ressourceninanspruchnahme im
deutschen Bauwesen*
- Heft 45: **Patrick Wörner (2020)**
*Einfluss des Nutzerverhaltens auf den Stromverbrauch in Wohngebäuden –
Entwicklung eines komplexen Simulationsmodells für energetische Analy-
sen*
- Heft 46: **Martina Lohmeier (2020)**
*Nachhaltigkeitsvergleich von Projektvarianten für Außerortsstraßen – Ein
Vorschlag für den Abwägungs- und Entscheidungsprozess in der Vorpla-
nung*
- Heft 47: **Larissa Krieger (2020)**
*Tragverhalten textildewehrter Fertigteilplatten aus hochfestem Carbonbe-
ton – Einfluss der Ausbreitung konzentrierter Einzellasten auf die Biege-
tragfähigkeit*
- Heft 48: **Sarah Steiner (2020)**
*Carbonation of concrete made of limestone-rich cement – CO₂ diffusivity
and alteration of the hydrate phases*
- Heft 49: **Redouan El Ghadioui (2020)**
*Bemessung carbonbewehrter Betonbauteile unter besonderer Betrachtung
des Gebrauchszustandes - Entwicklung eines Modells zur wirklichkeitsna-
hen Verformungsberechnung*
- Heft 50: **Sebastian Hofmann (2021)**
*Rissentwicklung in Betonbauteilen mit Basaltfaserkunststoffbewehrung bei
wirklichkeitsnaher Betrachtung des Verbundverhaltens – Ein Modell zur
Berechnung der Rissbreite im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit*

- Heft 51: **Dominik Müller (2022)**
Probabilistic Assessment of Existing Masonry Structures – The Influence of Spatially Variable Material Properties and a Bayesian Method for Determining Structure-Specific Partial Factors
- Heft 52: **Christian Alexander Herget (2022)**
Kalksteinmehl als Betonzusatzstoff für umweltfreundliche Betone – Bestimmung eines Anrechenbarkeitsfaktors zur Sicherstellung gleichwertiger Festbetoneigenschaften
- Heft 53: **Maximilian Brinkmann (2023)**
Tragfähigkeit druckbeanspruchten Lehmmauerwerks unter Berücksichtigung nichtlinearer Feuchteprofile
- Heft 54: **Dominik Hiesch (2023)**
Bemessung von Betonfertigteilen mit vorgespannter Bewehrung aus Faser-verbundkunststoff - Entwicklung eines Bemessungskonzeptes unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Bauteilverformungen
- Heft 55: **André Müller (2023)**
Methodik zur datenbasierten Typisierung von Quartieren anhand baulicher Strukturen – Geometrisch-topologische Grundlagen für die energetische Bewertung des nationalen Quartiersbestandes auf Basis von Geoinformationsdaten
- Heft 56: **Johannes Koert (2023)**
Bewertung von Unsicherheiten beim Variantenvergleich energetischer Quartierssanierungen – Entwicklung eines Simulationsmodells zur Berücksichtigung streuender Einflussgrößen über den Lebenszyklus bei der ökonomischen und ökologischen Bewertung von Wohnquartieren
- Heft 57: **Jonas Klein (2023)**
Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Betonbauteilen mit nichtmetallischer Bewehrung – Untersuchungen zur Zuverlässigkeit von Durchlaufsystemen großer Biegeschlankheit im Grenzzustand der Tragfähigkeit