Anhang A

Herleitung der Erhaltungsgleichungen

Ausgangspunkt für die in Kapitel 3.1 dargestellten Gleichungen stellen die Bilanzgleichungen für

- Masse im Einstoffsystem
- Impuls im Einstoffsystem
- Energie im Einstoffsystem
- Stoff im Mehrstoffsystem

dar.

Die Massenerhaltungs- oder auch Kontinuitätsgleichung ergibt sich zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{A.1}$$

Für ein inkompressibles Fluid mit $\rho = konst.$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{A.2}$$

Die Impulsbilanz

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \rho k_j + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i} \tag{A.3}$$

wird in ihrer differenziellen Form auch Erste Cauchysche Bewegungsgleichung genannt. Der im Spannungstensor enthaltene mittlere Druck entspricht nicht dem thermodynamischen Druck. Es wird aber gezeigt [47], dass in der Wärme- und Stoffübertragung und unter der Annahme eines inkompressiblen Fluids der mittlere Druck gleich dem thermodynamischen ist.

Die Cauchysche Bewegungsgleichung gilt unabhängig von den Materialeigenschaften des Fluids. Zur vollständigen Lösung eines speziellen Problems ist folglich eine entsprechende Materialgleichung nötig, die den Spannungstensor mit der Bewegung eines Stoffes verknüpft. Für den vorliegenden Fall kann von einem Newtonschen Fluid ausgegangen werden, wodurch der Ansatz für den Spannungstensor in den Stokes'schen Ansatz übergeht. Eingesetzt in die Causchysche Bewegungsgleichung erhält man somit, unter Vernachlässigung der Volumenviskosität, die Navier-Stokes'sche Gleichung für ein inkompressibles Fluid.

$$\rho\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \rho k_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_i}^2} \tag{A.4}$$

Die Energiegleichung erhält man, unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung und unter Ausschluss von Diffusion für ein Einstoffsystem, zu

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{P}}{\partial x_i} \tag{A.5}$$

Die Leistungsdichte $\dot{P}$ lässt sich über die Schleppleistung durch den Spannungstensor ausdrücken

$$-\frac{\partial \dot{P}}{\partial x_i} = \tau_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{A.6}$$

Die Energiegleichung wird damit zu

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial x_i} + \tau_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{A.7}$$

Über die Beziehung $h = e + pv$ kann die Energiegleichung mithilfe der Kontinuitätsgleichung in die Enthalpieform überführt werden

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \Phi \tag{A.8}$$

Für reine Stoffe kann durch Ausnutzung von

$$dh = c_p dT - \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp \tag{A.9}$$

und

$$\dot{q}_i = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{A.10}$$

unter der Annahme eines thermisch idealen Gases mit konstanter Wärmeleitfähigkeit und im inkompressiblen Fall die Temperaturform der Energiegleichung erhalten werden, wobei für kleine Machzahlen die Dissipationsleistung Φ vernachlässigt werden kann [47].

$$\rho c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2} + \Phi \tag{A.11}$$

Die Stoffaustausch- oder auch Komponenten-Kontinuitätsgleichung lautet

$$\xi_A \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}\right] + \rho \frac{\partial \xi_A}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial \xi_A}{\partial x_i} = -\frac{\partial \dot{j}_{Ai}}{\partial x_i} + \dot{\Gamma}_A \tag{A.12}$$

Die Anwendung der Kontinuitätsgleichung für die Gesamtmasse führt zum Verschwinden des Terms in der eckigen Klammer. Wird der Diffusionsstrom $\dot{j}_{Ai}$ nach dem Fickschen Gesetz mit $D_{AB} = D_{BA} = D$ eingesetzt und chemische Reaktionen ausgeschlossen, d. h., $\dot{\Gamma}_A = 0$, folgt

$$\rho \frac{\partial \xi_A}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial \xi_A}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial x_i}\right) \tag{A.13}$$