

# Ein Beitrag zur geschlossen-analytischen Modellierung des Randeffekts und der interlaminaren Rissentstehung in ebenen Mehrschichtverbunden

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

**Christopher Stephan Ulrich Frey, M.Sc.**

aus Würzburg

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Tag der Einreichung: 18.04.2023  
Tag der mündlichen Prüfung: 20.06.2023

Darmstadt 2023

Christopher Stephan Ulrich Frey

*Ein Beitrag zur geschlossen-analytischen Modellierung des Randeffekts und der interlaminaeren Rissentstehung in ebenen Mehrschichtverbunden*

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUprints: 2023

Tag der mündlichen Prüfung: 20.06.2023

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-241823

URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/24182>

 Creative Commons License (CC-BY-NC-ND 4.0 International), 2023.

Freies Vervielfältigen und Weiterverbreiten – Namensnennung –  
Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Fachgebietes Strukturmechanik an der Technischen Universität Darmstadt entstanden. An dieser Stelle will ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank geht an Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker für seine wohlwollende Unterstützung und Förderung meiner wissenschaftlichen Arbeit und die hierfür gewährte Freiheit. Seine fachlicher Rat und seine kompetente Betreuung waren eine große Hilfe.

Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt, Leiter des Fachgebiets Leichtbau und Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt, danke ich sehr für sein Interesse an der vorliegenden Arbeit und für die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Mein Dank gilt ebenfalls Frau Heike Herbst für ihre vielfältige Hilfe und die gute Zusammenarbeit.

Meinen Kolleginnen und Kollegen am Fachgebiet Strukturmechanik danke ich für die vielen konstruktiven Diskussionen und für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre.

Zuletzt danke ich besonders meiner Familie und meinen Freunden für ihre Geduld und die moralische Unterstützung.



# Kurzfassung

Mehrschichtverbunde aus faserverstärktem Kunststoff werden aufgrund ihrer Vielseitigkeit und ihrer hervorragenden spezifischen Eigenschaften vermehrt zur Konstruktion von Strukturbauteilen eingesetzt. Ihr lagenweiser Aufbau bietet große Chancen, stellt aber zugleich auch eine ernstzunehmende Herausforderung dar: Einerseits ermöglicht er es, die effektiven Eigenschaften des Verbunds gezielt einzustellen, andererseits führen die schichtweise unterschiedlichen elastischen Eigenschaften zu einem lokalisierten Auftreten hoher interlaminarer Spannungen in der Nähe der freien Ränder. Dieser Randeffect kann eine Trennung der Einzelschichten auslösen und infolgedessen zu einer Degradation der Steifigkeit und Festigkeit und möglicherweise einem Totalversagen der Verbundstruktur führen. In dieser Arbeit wird ein effizientes Berechnungswerkzeug zur strukturmechanischen Analyse und Auslegung von Faser-Kunststoff-Verbunden entwickelt, das sowohl den Laminat-Randeffect beschreibt als auch die Entstehung von Delaminationen zuverlässig vorher-sagt.

Zur Ermittlung der Verschiebungen und Spannungen in der Nähe der freien Ränder von Winkelverbunden wird ein neues verschiebungsbasiertes Mehrschichtverfahren konzipiert, das auf der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung beruht. Die Modellierung lässt sich durch die Annahme eines generalisierten ebenen Verzerrungszustands auf eine zweidimensionale Geometrie reduzieren und resultiert in einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, für das eine geschlossen-analytische Lösung angegeben werden kann. Um die Methode zu verifizieren, wird ein numerisches Referenzmodell auf Basis eines speziell entwickelten Finiten Elements implementiert. In einem umfangreichen Vergleich an verschiedenen Struktur- und Belastungskonfigurationen wird gezeigt, dass das analytische Verfahren die typische Verwölbungsgestalt und die dominante interlaminare Schubspannung in guter Übereinstimmung mit den numerischen Referenzergebnissen reproduziert.

Auf Basis dieser Ergebnisse wird ein Konzept zur Bewertung der Delaminationsneigung von Winkelverbunden mittels der Finiten Bruchmechanik entwickelt. Die Herleitung von Skalierungsgesetzen sowie das Monotonieverhalten der mechanischen Feldgrößen erlauben eine hocheffiziente Implementierung

des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums. Die hohe Vorhersagegenauigkeit der neuen Methode wird anhand experimenteller sowie numerischer Referenzdaten herausgestellt. Hierzu wird im Finite-Elemente-Programm ABAQUS ein Kohäsivzonenmodell implementiert. Für mechanisch belastete Lamine zeigen die ermittelten effektiven Festigkeiten eine sehr gute Übereinstimmung mit den Referenzergebnissen. Insbesondere ist das analytische Verfahren in der Lage, die wichtigsten qualitativen Effekte, den Schichtdickeneffekt und den Einfluss des Schichtwinkels, korrekt abzubilden. Im Falle einer kombinierten thermisch-mechanischen Belastung wird in Übereinstimmung mit den Referenzergebnissen gezeigt, dass die effektive mechanische Festigkeit durch eine überlagerte Temperaturdifferenz signifikant beeinflusst wird. Zudem wird die Effizienz der vorgeschlagenen Bewertungsmethode genutzt, um den Einfluss wichtiger Strukturparameter auf die Versagenslast zu erfassen und die große Relevanz der Delaminationsentstehung in Winkelverbunden im Vergleich zu einem möglichen intralaminaren Versagen hervorzuheben.

# Abstract

Composite laminates made of fiber-reinforced plastic are increasingly used for the design of structural components due to their versatility and excellent mass-specific properties. Their layered structure is their biggest advantage and disadvantage at the same time. On the one hand, it enables structural designers to adapt the effective material stiffness properties to given requirements. On the other hand, the layerwise discontinuous stiffness properties cause highly localized concentrations of interlaminar stresses near the free edges. The so-called free-edge effect may induce interfacial cracks, which consequently lead to a rapidly decreasing stiffness and strength and possibly end in the total failure of the structure. For the structural mechanical analysis and assessment of composite materials, this work develops a computational tool that both efficiently describes the free-edge effect and reliably predicts the onset of delaminations.

A new displacement-based multilayer method based on third-order shear deformation theory is developed to determine displacements and stresses near the free edges of angle-ply laminates. The model can be reduced to a two-dimensional geometry by assuming a state of generalized plane strain that results in a system of ordinary differential equations, which allows for an analytical closed-form solution. To verify the method, a numerical reference model is implemented based on a specially developed finite element. In a comprehensive comparison of various structural and loading configurations, it is demonstrated that the analytical method reproduces the typical warping deformation and the dominant interlaminar shear stress in good agreement with the numerical reference results.

Based on these results, a concept for predicting interlaminar crack nucleation in symmetric angle-ply laminates is developed using Finite Fracture Mechanics. The derivation of scaling laws as well as the monotonic behavior of the mechanical field quantities allow a highly efficient implementation of the coupled stress and energy criterion. The excellent prediction accuracy of the new method is highlighted using experimental as well as numerical reference data. To this end, a cohesive zone model is set up in the finite element software ABAQUS. For laminates subjected to a mechanical loading, the determined

effective strengths show a very good agreement with the reference results. In particular, the analytical method is able to correctly reproduce the most important qualitative phenomena, the layer thickness effect and the influence of the ply angle. In the case of a combined thermomechanical loading, it is shown in agreement with the reference results that the effective mechanical strength is significantly affected by a superimposed temperature. Moreover, the efficiency of the proposed model is exploited to quantify the influence of important structural parameters on the failure load and to emphasize the high relevance of delamination occurrence in angle-ply laminates compared to a possible intralaminar failure.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Ziel der Arbeit . . . . .	3
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	4
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Lineare Elastizitätstheorie . . . . .	5
2.2 Mechanik ebener Laminate . . . . .	11
2.2.1 Klassische Laminattheorie . . . . .	12
2.2.2 Theorien höherer Ordnung . . . . .	16
2.3 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik . . . . .	19
2.3.1 Klassische Versagenskriterien . . . . .	20
2.3.2 Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik . . . . .	21
2.3.3 Bruchmechanik finiter Risse . . . . .	25
<b>3 Der Laminat-Randeffekt: Stand der Forschung</b>	<b>29</b>
3.1 Das Wesen des Randeffekts . . . . .	29
3.1.1 Grundprinzip . . . . .	29
3.1.2 Versagen an freien Laminaträndern . . . . .	33
3.2 Modelle zur Spannungsanalyse . . . . .	35
3.2.1 Näherungsweise geschlossen-analytische Methoden . . . . .	35
3.2.2 Numerische Methoden . . . . .	39
3.3 Modelle zur Versagensbewertung . . . . .	41
<b>4 Entwicklung effizienter Modelle zur analytischen Beschreibung des Laminat-Randeffekts</b>	<b>47</b>
4.1 Mechanisches Modell . . . . .	47
4.2 Konzept mit schubstarrten Schichten . . . . .	53
4.2.1 Grundkonzept . . . . .	53
4.2.2 Lösung des Differentialgleichungssystems . . . . .	56
4.3 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie erster Ordnung	58
4.3.1 Grundkonzept . . . . .	58

## Inhaltsverzeichnis

4.3.2	Variationsproblem . . . . .	59
4.4	Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung	62
4.4.1	Grundkonzept . . . . .	62
4.4.2	Variationsproblem . . . . .	64
4.4.3	Modellierung der gerissenen Struktur . . . . .	67
4.5	Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle . . . . .	72
4.5.1	Numerisches Vergleichsmodell . . . . .	73
4.5.2	Ergebnisse der ungerissenen Konfiguration . . . . .	77
4.5.3	Ergebnisse der gerissenen Konfiguration . . . . .	86
4.6	Anmerkungen . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Analyse der interlaminaren Rissinitiierung mithilfe der Finiten Bruchmechanik</b>	<b>89</b>
5.1	Einführung . . . . .	89
5.2	Versagensbewertung mittels analytischer Lösung . . . . .	90
5.2.1	Auswertung des gekoppelten Kriteriums . . . . .	90
5.2.2	Berechnung der Energiefreisetzungsrate . . . . .	91
5.2.3	Skalierungsgesetze . . . . .	93
5.3	Versagensbewertung mittels numerischer Modelle . . . . .	94
5.3.1	Auswertung des gekoppelten Kriteriums . . . . .	94
5.3.2	Bewertung mithilfe eines Kohäsivzonenmodells . . . . .	95
5.4	Inverse Bestimmung der Bruchparameter . . . . .	99
5.5	Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last . . . . .	104
5.5.1	Vergleich mit numerischen Resultaten . . . . .	105
5.5.2	Vergleich mit Experimenten . . . . .	110
5.5.3	Einfluss der Bruchparameter . . . . .	112
5.5.4	Inter- und intralaminare Versagen . . . . .	114
5.6	Ergebnisse: Rissinitiierung unter thermischer Last . . . . .	116
5.6.1	Diskussion der kritischen Temperaturdifferenzen . . . . .	117
5.6.2	Thermisch-mechanische Belastung . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

AWV	Ausgeglichener Winkelverbund
CLT	Klassische Laminattheorie (engl.: classical laminate theory)
CZM	Kohäsivzonenmodell (engl.: cohesive zone model)
FBM	Finite Bruchmechanik
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FSDT	Schubdeformationstheorie erster Ordnung (engl.: first order shear deformation theory)
GEVZ	Generalisierter ebener Verzerrungszustand
SW	Sandwich-Modell
TSDT	Schubdeformationstheorie dritter Ordnung (engl.: third order shear deformation theory)

## Indizes und Schreibweisen

$\bigcirc_c$	Kritischer Wert
$\bigcirc_f$	Wert bei Versagen
$\bigcirc_I, \bigcirc_{II}, \bigcirc_{III}$	Auf den Rissöffnungsmodus I, II bzw. III bezogene Größe
$\bigcirc^{\text{exp}}$	Experimentell ermittelte Größe
$\bigcirc^{\text{mat}}$	Auf das Matrixmaterial bezogene Größe
$\bigcirc^{(k)}$	Auf die $k$ -te Laminatschicht bezogene Größe
$\bigcirc^{(a)}$	Auf die virtuelle Zwischenschicht bezogene Größe
$\bigcirc^{(e)}$	Auf das Element $e$ bezogene Größe
$\bigcirc^T$	Auf die Temperatur bezogene Größe
$\bigcirc^*$	Ausgangswert, vorgegebener Wert einer Größe
$\tilde{\bigcirc}$	Approximierte Größe
$\hat{\bigcirc}$	Auf die Schichtmittelebene bezogene Größe
$\delta\bigcirc$	Virtuelle Größe
$\partial\bigcirc$	Rand des Gebiets

## Nomenklatur

### Lateinische Formelzeichen

$\Delta a, \Delta A$	Finite Risslänge, finite Rissfläche
$A$	Fläche
$A$	Konstante
$A_\theta$	Hilfsfunktion
$A_{ij}$	Dehnsteifigkeiten, $i, j = 1, 2, 6$
$A_{ij}^S$	Transversale Schubsteifigkeiten, $i, j = 4, 5$
$b$	Breite
$b_n$	Koeffizient der Formfunktion
$B$	Konstante
$B_\theta$	Hilfsfunktion
$B_{ij}$	Kopplungssteifigkeiten, $i, j = 1, 2, 6$
$B_{ij}^S$	Transversale Schubsteifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 4, 5$
$\mathbf{B}, \mathbf{B}_0, \overline{\mathbf{B}}$	Matrizen der partiellen Ableitungen der Formfunktionen
$c_n$	Koeffizienten der Formfunktion
$c_{ijkl}$	Komponenten des Steifigkeitstensors $i, j, k, l = 1, 2, 3$
$C$	Konstante
$C_{ij}$	Steifigkeiten in Voigt-Notation, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$\overline{C}_{ij}$	Steifigkeiten in Voigt-Notation in Laminat-Koordinaten
$D_{ij}$	Biegesteifigkeiten, $i, j = 1, 2, 6$
$D_{ij}^S$	Transversale Schubsteifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 4, 5$
$E$	Elastizitätsmodul
$E$	Innere Energie
$E_{xx}$	Effektive Längssteifigkeit
$E_{ij}$	Steifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 1, 2, 6$
$E_{ij}^S$	Transversale Schubsteifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 4, 5$
$f$	Beliebige Spannungsfunktion
$f_{ij}$	Dimensionslose Eigenfunktion der Spannungen, $i, j = 1, 2, 3$
$\mathbf{f}$	Volumenkräfte
$\mathbf{F}$	Schnittkraftvektor
$F$	Basisdimension Kraft
$F_{ij}$	Steifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 1, 2, 6$
$F_{ij}^S$	Transversale Schubsteifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 4, 5$
$g$	Beliebige Funktion der Verzerrungen
$g_i$	Dimensionslose Eigenfunktion der Verschiebungen, $i = 1, 2, 3$
$G$	Schubmodul
$\mathcal{G}$	Differentielle Energiefreisetzungsrate
$\overline{\mathcal{G}}$	Inkrementelle Energiefreisetzungsrate
$\mathcal{G}_c$	Bruchzähigkeit
$G_{ij}$	Steifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 1, 2, 6$

$h$	Gesamtdicke des Laminats
$H_{ij}$	Steifigkeiten höherer Ordnung, $i, j = 1, 2, 6$
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$K$	Steifigkeit der Kohäsivelemente
$K$	Kinetische Energie
$K$	Spannungsintensitätsfaktor
$K_c$	Bruchzähigkeit
$\mathbf{K}^{(e)}$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathcal{L}$	Differentialoperator
$l$	Länge des Modells
$l_e$	Kantenlänge der Kohäsivelemente
$l_{CZ}$	Länge der Kohäsivzone
$m$	Interaktionskoeffizient des Versagensmoduskonzepts
$M$	Laminat-Schnittmomente
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$N$	Laminat-Schnittkräfte
$N_i$	Formfunktionen in der Finite-Elemente-Formulierung
$O$	Laminat-Schnittmomente höherer Ordnung
$P$	Leistung der äußeren Kräfte
$P$	Laminat-Schnittmomente höherer Ordnung
$P$	Uniaxiale Zuglast, äußere Last
$Q$	Querkräfte
$Q$	Wärmeenergiefluss, nicht-mechanischer Energietransport
$Q_{ij}$	Reduzierte Steifigkeiten, $i, j = 1, 2, 6$
$\bar{Q}_{ij}$	Reduzierte Steifigkeiten im Laminat-Koordinatensystem
$R$	Querkräfte höherer Ordnung
$s_{ijkl}$	Komponenten des Nachgiebigkeitstensors
$S$	Querkräfte höherer Ordnung
$S$	Scherfestigkeit
$S_{ij}$	Nachgiebigkeiten in Voigt-Notation, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$\bar{S}_{ij}$	Nachgiebigkeiten in Voigt-Notation in Laminat-Koordinaten
$t$	Dicke der Lamineinzelschicht
$\mathbf{t}$	Flächenkräfte, Spannungsvektor
$\Delta T$	Temperaturdifferenz
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{T}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$	Systemmatrizen der mechanischen Modellierung
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{u}_0$	Vektor der Starrkörperverschiebungen
$\bar{\mathbf{u}}$	Verschiebungsvektor im Rahmen des GEVZs
$\mathbf{v}_i$	Eigenvektor bzw. Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda_i$

## Nomenklatur

$v_n$	Vektor der Knotenverschiebungen des Knotens $n$
$U$	Formänderungsenergiegedichte
$V$	Volumen
$W^a, W^i$	Arbeit der äußeren bzw. inneren Kräfte
$\Delta W_\sigma$	Bei der Rissöffnung geleistete Arbeit
$x, y, z$	Koordinaten
$x_1, x_2, x_3$	Koordinaten
$X_c, X_t$	Druck- bzw. Zugfestigkeit in Faserrichtung
$Y_c, Y_t$	Druck- bzw. Zugfestigkeit in Querrichtung

## Griechische Formelzeichen

$\alpha$	Thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha$	Thermische Ausdehnungskoeffizienten in Voigt-Notation
$\gamma$	Technische Gleitung, Schubdeformation
$\gamma_i$	Transversale Schubdeformationen in Vektornotation
$\Gamma$	Energiedissipation
$\delta$	Relative Abweichung
$\delta$	Separation der Rissflanken
$\varepsilon$	Verzerrung
$\varepsilon_0$	Axiale Dehnung in $x$ -Richtung des Laminats
$\varepsilon$	Infinitesimaler Verzerrungstensor
$\varepsilon_i$	Ebene Verzerrungen in Vektornotation
$\varepsilon_T$	Ebene thermische Verzerrungen in Vektornotation
$\eta$	Dämpfungsparameter der Kohäsivelemente
$\vartheta$	Schichtwinkel der Einzelschicht
$\theta_i$	Freiheitsgrad höherer Ordnung, $i = x, y$
$\kappa$	Verkrümmungen der Laminatmittelfläche
$\kappa_t$	Verdrehwinkel pro Längeneinheit
$\lambda$	Eigenwert
$\lambda_i$	Freiheitsgrad höherer Ordnung, $i = x, y$
$\mu_{12}$	Innerer Reibkoeffizient des Versagensmoduskonzepts
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Pi$	Gesamtpotential
$\Pi^a, \Pi^i$	Äußeres bzw. inneres Potential
$\sigma$	Cauchyscher Spannungstensor
$\sigma$	Spannung
$\tau$	Schubspannung
$\Phi$	Vektor der unbekanntenen kinematischen Größen
$\chi$	Lösungsvektor
$\mathcal{X}$	Fundamentalsystem

$\psi_i$	Verdrehwinkel der Normale zur Schichtmittelebene, $i = x, y$
$\Psi$	Vektor der unbekannt kinematischen Größen
$\omega_0$	Vektor der Starrkörperrotationen
$\Omega$	Problembereich



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

In den letzten Jahrzehnten haben sich Verbundmaterialien als eine der wichtigsten Werkstoffklassen des Leichtbaus etabliert. Im Falle von faserverstärkten Kunststoffen besteht der Verbund aus einer Kunststoffmatrix als Bettungsmasse, die die verstärkenden Fasern umgibt. Der Hauptteil der anliegenden mechanischen Lasten wird hierbei von den Fasern getragen, während die Matrix die Fasern fixiert und stützt (Schürmann, 2007). Besonders effizient lassen sich die stark anisotropen Eigenschaften solcher Strukturen nutzen, indem sie schichtweise zu einem Laminat zusammengefügt werden. Durch die gezielte Kombination von Lagen unterschiedlicher Vorzugsrichtung können die Eigenschaften des Mehrschichtverbunds präzise auf seinen Einsatzzweck angepasst werden.

Zusammen mit weiteren Vorzügen, wie einer sehr hohen spezifischen Festigkeit und Steifigkeit, einstellbaren elektrischen und thermischen Leitfähigkeiten und einer ausgezeichneten Korrosionsbeständigkeit, sorgte das für ein starkes Wachstum des europäischen Markts für Faser-Kunststoff-Verbunde in den vergangenen zehn Jahren (Witten u. Matthes, 2022). Gerade im Transportsektor kommt das Leichtbaupotential der Werkstoffklasse besonders zum Tragen: So kann bei einem Mittelstreckenflugzeug eine Gewichtseinsparung von 1 kg eine Minderung des Kerosinverbrauchs um bis zu 2000 l während der Produktlebensdauer bewirken (Neitzel et al., 2014). Das führte dazu, dass der Strukturgewichtsanteil von Faser-Kunststoff-Verbunden in modernen Verkehrsflugzeugen wie der Boeing 787 oder dem Airbus A350 bereits über 50% erreicht hat. Neben dem gesamten Transportsektor sind das Bauwesen, die Elektroindustrie, der Sportartikelmarkt und in jüngerer Vergangenheit insbesondere die Herstellung von Windenergieanlagen wichtige Anwendungsfelder für Faser-Verbund-Werkstoffe.

## *Kapitel 1 Einleitung*

Trotz der unbestrittenen Potentiale dieser innovativen Werkstoffklasse konnte sich ihr Einsatz in vielen Branchen noch nicht in der vollen industriellen Breite durchsetzen. Das liegt einerseits an der verglichen mit konventionellen Werkstoffen schlechteren Wirtschaftlichkeit (Neitzel et al., 2014). Zum anderen stellen Mehrschichtverbunde aus faserverstärkten Kunststoffen die Anwenderin vor große Herausforderungen. Aufgrund des komplexen Aufbaus und der anisotropen Eigenschaften kommt es bei der Konstruktion und der Analyse von Strukturbauteilen aus Verbundlaminaten zu einem erheblichen Mehraufwand.

Die Spannungsanalyse ist schon für eine unidirektional faserverstärkte Einzelschicht erheblich umfangreicher als bei der Verwendung isotroper Materialien. Mit dem Grad der Werkstoffanisotropie wird auch die Versagensbewertung anspruchsvoller, da zusätzliche Versagensformen zu berücksichtigen sind (beispielsweise Cuntze, 2006).

Der Aufbau eines Mehrschichtverbunds führt zu einer weiteren Erhöhung der Komplexität. Aufgrund der lagenweise unterschiedlichen Materialeigenschaften kommt es in der Nähe freier Ränder zu lokalen, teilweise singulären Überhöhungen interlaminarer Spannungen. Dieses, als Randeffect bezeichnete, Phänomen kann die Entstehung interlaminarer Risse und somit die Trennung der Laminatschichten zur Folge haben. Delaminationen dieser Art wurden in zahlreichen Studien experimentell beobachtet (beispielsweise Lorriot et al., 2003, Lagunegrand et al., 2006, Diaz Diaz u. Caron, 2006) und können zur raschen Degradation der Laminatsteifigkeit und folglich zum Totalversagen der Struktur führen. Die klassischen Laminattheorien und bruchmechanischen Konzepte erfassen weder den Randeffect noch die Initiierung interlaminarer Risse. Gerade in Anbetracht der möglicherweise schwerwiegenden Folgen bedürfen sie einer gesonderten und eingehenden Betrachtung.

Um die Berechenbarkeit von Verbundwerkstoffen zu verbessern und ihre Anwendung in allen Teilbereichen des Leichtbaus weiter zu etablieren, ist es unerlässlich, das mechanische Verhalten zuverlässig beschreiben zu können. Das betrifft die Deformations- und Spannungsanalyse einerseits, aber andererseits auch die Vorhersage des möglichen Versagens, insbesondere die der kritischen interlaminaren Rissentstehung in Form von Randdelaminationen. Aufgrund der diversen Struktur- und Materialparameter ist im Vorauslegungsprozess oft eine große Anzahl von Parameterstudien und Variantenvergleichen notwendig. Hier gibt es einen hohen Bedarf an physikalisch motivierten, leicht anwendbaren Berechnungswerkzeugen, die Spannungen, Verformungen und das mögliche Versagen effizient und zuverlässig vorhersagen.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer effizienten und zuverlässigen Methode zur Bewertung des Randeffekts und der interlaminaren Rissentstehung in ebenen Mehrschichtverbunden. Aufgrund ihrer großen Bedeutung für Wissenschaft und Technik beschränkt sich die Studie auf die wichtige Klasse der symmetrischen ausgeglichenen Winkelverbunde.

Zur Bewertung des Versagensverhaltens einer Struktur ist das Verständnis der zugrunde liegenden Lastübertragungsmechanismen und der sich einstellenden Deformationsgestalt unerlässlich. Daher soll in dieser Arbeit eine maßgeschneiderte analytische Methode zur effizienten Ermittlung der Verschiebungs- und Spannungsfelder in Winkelverbunden unter mechanischer und thermischer Belastung entwickelt werden. Hierbei sind insbesondere die stark anisotropen und schichtweise unterschiedlichen Materialeigenschaften der verwendeten Faser-Kunststoff-Verbund-Werkstoffe zu berücksichtigen. Zur Sicherung der Qualität der Lösung ist diese anhand von numerischen Referenzdaten zu validieren.

Das Versagen von Mehrschichtverbunden kann in zwei Hauptkategorien unterteilt werden: intra- und interlaminares Versagen. Während zur Beschreibung der Vorgänge innerhalb einer Schicht bereits eine Palette von bewährten Konzepten existiert, gibt es bezüglich der Rissentstehung zwischen zwei Einzelschichten noch großen Forschungsbedarf. In dieser Arbeit soll das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium der Finiten Bruchmechanik genutzt werden, um mögliche Randdelaminationen in Winkelverbunden vorherzusagen. Zu diesem Zweck ist ein rein analytisches Bewertungsverfahren zu entwickeln, welches die effektiven Festigkeiten zuverlässig und mit hoher Genauigkeit bestimmt. Um die Vorhersagequalität zu überprüfen, ist ein numerisches Kohäsivzonenmodell zu implementieren, anhand dessen die erlangten Ergebnisse verifiziert werden. Zusätzlich soll ein Vergleich mit experimentellen Daten die Vorhersagen des entwickelten Berechnungsmodells absichern.

Ein Hauptaugenmerk ist zudem auf die Effizienz und einen hohen Automatisierungsgrad des Bewertungsverfahrens zu legen. Das soll gewährleisten, dass die Methode im Vorauslegungsprozess von Verbundstrukturen gewinnbringend für größere Parameterstudien und Optimierungsaufgaben eingesetzt werden kann.

### **1.3 Aufbau der Arbeit**

In Kapitel 2 werden die wichtigsten theoretischen Grundlagen für diese Arbeit dargelegt. Nach einer Einführung in die lineare Elastizitätstheorie und die Mechanik ebener Laminate folgt eine Beschreibung der relevantesten Aspekte der klassischen Festigkeits- und Bruchmechanik. Das Kapitel schließt mit einer Darstellung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums zur Analyse finiter Risse.

Kapitel 3 gibt einen Einblick in den aktuellen Stand der Wissenschaft zum Laminat-Randeffekt. Zunächst werden die grundlegenden Wirkmechanismen des Randeffekts und das daraus resultierende Versagensverhalten beschrieben. Es folgt ein Überblick über die existierenden Modelle zur Analyse der Spannungen in der Nähe freier Laminatränder und abschließend eine Darstellung verschiedener Ansätze zur Bewertung des interlaminaren Versagens.

In Kapitel 4 wird eine maßgeschneiderte Berechnungsmethode zur effizienten Ermittlung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in der Nähe freier Ränder von Winkelverbunden entwickelt. Hierzu werden drei neuartige verschiebungsbasierte Verfahren vorgeschlagen, die sich im Polynomgrad ihrer Ansatzfunktion unterscheiden. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Konzepte werden diskutiert und anhand einer speziell für diesen Zweck entwickelten Finite-Element-Formulierung verifiziert. Das Modell mit der größten Übereinstimmung zu den Referenzergebnissen wird für die weitere Verwendung im Rahmen dieser Studie ausgewählt.

In Kapitel 5 wird die Entstehung von Randdelaminationen untersucht. Hierzu wird das gekoppelte Kriterium der Finiten Bruchmechanik implementiert und auf Basis der Resultate des entwickelten Berechnungsmodells rein analytisch ausgewertet. Zur Absicherung der Ergebnisse wird das Bruchkriterium vergleichsweise mit Daten aus Finite-Elemente-Analysen umgesetzt und zusätzlich ein Kohäsivzonenmodell herangezogen. Die analytisch bestimmten effektiven Festigkeiten werden kritisch diskutiert und zur Bewertung der Vorhersagegenauigkeit mit experimentellen und numerischen Referenzdaten verglichen. Das entwickelte Verfahren wird angewendet, um exemplarisch den Einfluss wichtiger Materialparameter auf die Delaminationsneigung auszuweisen und die Relevanz des interlaminaren Versagensmodus zu diskutieren.

Kapitel 6 stellt die Ergebnisse der vorliegenden Studie zusammenfassend dar und gibt einen Ausblick auf mögliche Folgearbeiten.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

*In diesem Kapitel werden die wichtigsten theoretischen Grundlagen für diese Arbeit dargelegt. Nach einer Einführung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, werden verschiedene Theorien zur Modellierung von ebenen Laminaten vorgestellt. Es folgt eine Beschreibung der relevantesten klassischen Festigkeitskriterien und eine Einführung in die linear-elastische Bruchmechanik. Das Kapitel schließt mit einer zusammenfassenden Darstellung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums zur Vorhersage der Entstehung finiter Risse. Auf die jeweilige Fachliteratur wird in den Unterkapiteln verwiesen.*

### 2.1 Lineare Elastizitätstheorie

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf die Annahme kleiner Verformungen und linear-elastischen Materialverhaltens, weswegen im Folgenden die lineare Elastizitätstheorie angewendet wird. Der Abschnitt fasst die zugrunde liegenden Gleichungen kurz zusammen. Die dargestellten Inhalte sind den Werken von Becker u. Gross (2002), Gross et al. (2018) und Sadd (2009) entnommen.

**Spannungszustand.** Aus den äußeren Belastungen eines Körpers durch Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  und Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}$  resultieren im Körper innere Kräfte. Sei der Körper entlang einer beliebigen Schnittfläche  $A$  mit der Flächennormale  $\mathbf{n}$  geteilt und sei  $\Delta\mathbf{F}$  die Kraft, die vom gegenüberliegenden Körperteil auf das Flächenstück  $\Delta A$  um den Punkt  $P$  wirkt. Dann definiert der Grenzwert

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta A} \quad (2.1)$$

den *Spannungsvektor* im Punkt  $P$ . Aus den drei Spannungsvektoren auf drei unabhängigen Schnittflächen durch den Punkt  $P$ , d.h. Schnittflächen mit linear unabhängigen Normalenvektoren, lässt sich der Spannungsvektor für jeden

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

beliebigen Schnitt durch diesen Punkt bestimmen. Diese drei Spannungsvektoren charakterisieren den Spannungszustand im Punkt  $P$  eindeutig und bilden die Grundlage zur Definition des *Cauchyschen Spannungstensors*:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Hierbei repräsentieren die Diagonalelemente  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33}$  die Normalspannungen, während die Nichtdiagonalelemente  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  und  $\sigma_{13}$  auch als  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  und  $\tau_{13}$  bezeichnet werden und die Schubspannungen darstellen. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe und ist über die *Cauchysche Formel* mit dem Spannungsvektor verknüpft:<sup>1</sup>

$$t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.3)$$

Ein beliebiger Teilkörper befindet sich im Gleichgewicht, wenn sich die auf ihn wirkenden Volumenkräfte  $f_i$  und Oberflächenkräfte  $t_i$  zu null addieren:

$$\int_{\partial V} t_i \, dA + \int_V f_i \, dV = 0. \quad (2.4)$$

Mithilfe der Cauchyschen Formel (2.3), des Integralsatzes von Gauß und der Annahme, dass das Volumen  $V$  beliebig ist, folgt die Gleichgewichtsbedingung in lokaler Form:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (2.5)$$

**Deformation.** Zur Beschreibung der Deformation eines Körpers dient in der linearen Elastizitätstheorie der infinitesimale Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , dessen Komponenten  $\varepsilon_{ij}$  über die partiellen Ableitungen der Verschiebungen  $u_i$  definiert sind:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.6)$$

Die Diagonalelemente  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  und  $\varepsilon_{33}$  dieses symmetrischen Tensors zweiter Stufe werden als Dehnungen, die Nichtdiagonalelemente  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$  und  $\varepsilon_{23}$  als Schubdeformationen bezeichnet. Auch gebräuchlich sind die technischen Gleitungen  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23}, \\ \gamma_{13} &= 2\varepsilon_{13}, \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Für Ausdrücke in Indexschreibweise wird die *Einsteinsche Summenkonvention* angewendet, wonach über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts summiert wird:  $\sigma_{ij} n_j = \sum_j \sigma_{ij} n_j$ .

**Konstitutives Verhalten.** Das Stoffgesetz stellt eine Beziehung zwischen den im Körper herrschenden Spannungen  $\sigma_{ij}$  und Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$  her. In der linearen Elastizitätstheorie ist dieser Zusammenhang direkt proportional und wird durch das *Hookesche Gesetz* beschrieben:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} . \quad (2.8)$$

Die Koeffizienten  $c_{ijkl}$  sind die Komponenten eines Elastizitätstensors vierter Stufe und beschreiben die mechanischen Eigenschaften des Materials. In invertierter Form lässt sich das Hookesche Gesetz mithilfe der Nachgiebigkeiten  $s_{ijkl}$  angeben:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} . \quad (2.9)$$

Durch eine additive Erweiterung können zudem die durch eine Temperaturänderung  $\Delta T$  hervorgerufenen thermischen Dehnungen  $\alpha_{ij}\Delta T$  berücksichtigt werden:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}\Delta T . \quad (2.10)$$

Hierbei sind  $\alpha_{ij}$  die thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Materials. Aus der Symmetrie des Spannungstensors  $\sigma$ , der Symmetrie des infinitesimalen Verzerrungstensors  $\varepsilon$  und energetischen Betrachtungen folgt, dass auch im allgemeinen Fall der Anisotropie nur 21 der 81 Steifigkeiten  $c_{ijkl}$  unabhängig voneinander sind. Das ermöglicht die Darstellung des Hookeschen Gesetzes in einer weithin gebräuchlichen, auch als Voigt-Notation bezeichneten, Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} . \quad (2.11)$$

Die meisten technischen Materialien besitzen bestimmte Symmetrieeigenschaften, so dass sich die Anzahl der unabhängigen Einträge  $C_{ij}$  weiter verringert. Ist im Material eine Symmetrieebene vorhanden, man spricht in diesem Fall von monoklinem Materialverhalten, so entfallen einige Kopplungen zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten und die Anzahl unabhängiger Steifigkeiten reduziert sich auf 13. Angenommen die Symmetrieebene

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

sei die  $x_1, x_2$ -Ebene, lässt sich die konstitutive Beziehung folgendermaßen vereinfachen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Ein für diese Arbeit wichtiges Beispiel für Monoklinie ist eine unidirektional faserverstärkte Kunststoffschicht, deren Faserorientierung nicht mit der  $x_1$ -Richtung übereinstimmt.

Orthotropes Materialverhalten liegt vor, wenn im Material drei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenen vorhanden sind. In diesem Fall sind die Normalspannungen und die Gleitungen bzw. die Schubspannungen und die Dehnungen entkoppelt und es existieren noch neun unabhängige Einträge  $C_{ij}$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Eine unidirektional faserverstärkte Schicht, deren Faserrichtung mit der  $x_1$ -Richtung übereinstimmt, stellt den noch spezielleren Fall der transversalen Isotropie dar: Die Materialeigenschaften verhalten sich invariant gegenüber einer Drehung um die Vorzugsrichtung. Das Stoffgesetz besitzt die gleiche Besetzung wie im orthotropen Fall (2.13), allerdings lassen sich die Koeffizienten  $C_{ij}$  auf nur fünf unabhängige Steifigkeiten zurückführen. Im Falle der vollständigen Isotropie existieren gar nur noch zwei unabhängige Einträge.

**Reduktion auf ebene Probleme.** Viele technische Fragestellungen können in guter Näherung auf zwei Dimensionen reduziert behandelt werden. Hier sind besonders zwei wichtige Sonderfälle hervorzuheben:

Man spricht von einem *ebenen Verzerrungszustand*, wenn die Verschiebungen in einer Raumrichtung verschwinden und die übrigen Feldgrößen unabhängig von dieser Richtung sind. Folglich verschwinden auch die Verzerrungen in dieser Richtung. Sei die  $x_3$ -Richtung die Vorzugsrichtung, so folgt  $\varepsilon_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$ .

Ein *ebener Spannungszustand* tritt auf, wenn die Dicke einer Struktur klein gegenüber den anderen Dimensionen ist und zudem nur Belastungen in der Ebene auftreten. Eine solche Struktur wird auch als Scheibe bezeichnet. Aufgrund der geringen Dicke kann in guter Näherung gefolgert werden, dass alle Spannungskomponenten in dieser Richtung verschwinden:  $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ . Die verbleibenden, ebenen Spannungen sind zudem näherungsweise konstant in Dickenrichtung.

**Energetische Betrachtungen.** Neben den eingeführten Grundgleichungen bieten energetische Betrachtungen oft einen zielführenden Zugang zu den Problemen der Elastostatik. Die bei der Deformation eines elastischen Körpers geleistete Arbeit wird als Formänderungsenergie  $\Pi^i$  gespeichert. Sie ergibt sich aus der Integration der *spezifischen Formänderungsenergie*  $U$ :

$$\Pi^i = \int_V U dV. \quad (2.14)$$

$\Pi^i$  wird auch als *elastisches* oder *inneres Potential* des Körpers bezeichnet. Für den Sonderfall der linearen Elastizität ergibt sich die *Formänderungsenergie*  $U$  als

$$U = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{kl}} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.15)$$

Nach dem *Energieerhaltungssatz der Kontinuumsmechanik* muss die Änderung der inneren Energie  $E$  und der kinetischen Energie  $K$  eines Körpers gerade der Summe der zugeführten Leistungen sein (Gross u. Seelig, 2016):

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q. \quad (2.16)$$

Hierbei ist  $P$  die Leistung der äußeren Kräfte und  $Q$  stellt den kompletten verbleibenden Energiefluss über die Systemgrenzen dar. Im vorliegenden Fall einer quasi-statischen Modellierung ohne nicht-mechanische Energieformen gilt  $\dot{K} = 0$  und  $Q = 0$ . Zudem entspricht für ein rein elastisches Material die innere Energie gerade der Gesamtformänderungsenergie  $\Pi^i$ , so dass sich der Energiesatz für den Übergang von Zustand 1 zu Zustand 2 zu

$$\Pi_2^i - \Pi_1^i = W_{12}^a \quad (2.17)$$

vereinfacht, wobei  $W_{12}^a$  die Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet.

Ein weiteres bedeutendes Prinzip stellt der *allgemeine Arbeitssatz* dar. Er gilt unabhängig vom Materialverhalten und stellt einen Zusammenhang zwischen einem Gleichgewichtssystem von Spannungen  $\sigma_{ij}^{(1)}$ , Volumenkräften

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

$f_i^{(1)}$  und Flächenkräften  $t_i^{(1)}$  und einem kinematisch zulässigen Feld von Verschiebungen  $u_i^{(2)}$  und Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}^{(2)}$  dar. Die Felder (1) und (2) sind hierbei beliebig, müssen aber die zugehörigen Randbedingungen erfüllen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.5) und den kinematischen Gleichungen (2.6) folgt nach einigen Umformungsschritten der allgemeine Arbeitssatz:

$$\int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_{\partial V_t} t_i^{*(1)} u_i^{(2)} dA + \int_{\partial V_u} t_i^{(1)} u_i^{*(2)} dA . \quad (2.18)$$

Hierbei sind  $t_i^*$  die auf dem Randstück  $\partial V_t$  vorgegebenen Spannungen und  $u_i^*$  die auf  $\partial V_u$  aufgebrachten Verschiebungen. Die linke Seite der Gleichung verkörpert die von den Spannungen geleistete innere Arbeit. Das erste Integral auf der rechten Seite stellt die Arbeit der Volumenkräfte und die beiden letzten Ausdrücke die Arbeit der Oberflächenkräfte dar.

Werden nun im allgemeinen Arbeitssatz die tatsächlich wirkenden Kraftgrößen ( $\sigma_{ij}$ ,  $t_i$  und  $f_i$ ) und als kinematisches System die virtuellen Verschiebungen  $\delta u_i$  und zugehörigen virtuellen Verzerrungen  $\delta \varepsilon_{ij}$  eingesetzt, folgt das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_V t_i^* \delta u_i dV \quad \text{bzw.} \quad (2.19)$$

$$\delta W^i = \delta W^a .$$

Hier wurde zudem vorausgesetzt, dass die virtuellen Verrückungen  $\delta u_i$  auf dem Randstück  $\partial V_u$  verschwinden. Das Prinzip besagt, dass sich ein deformierbarer Körper genau dann im Gleichgewicht befindet, wenn die innere Arbeit bei einer virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage gleich der Arbeit der äußeren Kräfte ist.

Für rein elastisches Materialverhalten ist die virtuelle innere Arbeit  $\delta W^i$  gleich der virtuellen Änderung des inneren Potentials  $\delta \Pi^i$ . Besitzen die äußeren Kräfte zudem ein Potential, dann gilt  $\delta W^a = -\delta \Pi^a$  und aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen folgt direkt das *Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials*:

$$\delta \Pi = \delta \Pi^i + \delta \Pi^a = 0 . \quad (2.20)$$

Es besagt, dass ein elastischer Körper dann im Gleichgewicht ist, wenn bei beliebigen kinematisch zulässigen Variationen der Verschiebungen und Verzerrungen die Änderung des Gesamtpotentials null ist.

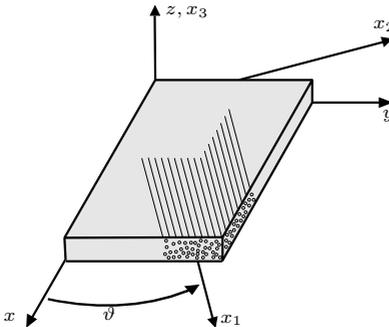
## 2.2 Mechanik ebener Laminate

Der folgende Abschnitt fasst die Grundlagen zur Modellierung von ebenen Laminaten zusammen. Zu diesem Zweck werden sowohl die klassische Laminattheorie als auch zwei Theorien höherer Ordnung knapp eingeführt. Die hier wiedergegebenen Inhalte sind den Lehrbüchern von Becker u. Gross (2002), Mittelstedt u. Becker (2016) und Reddy (2003) entnommen.

Im Sinne der vorliegenden Arbeit ist ein Laminat ein Verbund aus mehreren miteinander gefügten Einzelschichten. Bei den Einzelschichten handelt es sich um unidirektional faserverstärkte Kunststofflagen, die perfekt miteinander verbunden sind und sich in ihrer Faserorientierung unterscheiden können. Abbildung 2.1 zeigt eine Einzelschicht, deren Faserorientierung um den Winkel  $\vartheta$  in Bezug auf die globale  $x$ -Achse des Laminatkoordinatensystems gedreht ist. Zur Vereinfachung der Notation besitzt jede Lage ein lokales  $x_1, x_2, x_3$ -Schichtkoordinatensystem, dessen  $x_1$ -Achse in Faserlängsrichtung deutet. Wird in den Einzelschichten ein ebener Spannungszustand und orthotropes Materialverhalten zugrunde gelegt, lässt sich das Konstitutivgesetz der Einzelschicht im Materialhauptachsensystem für die verbleibenden drei Spannungskomponenten in Anlehnung an das dreidimensionale Materialgesetz (2.13) kompakt angeben:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.21)$$

Hierbei sind  $Q_{ij}$  die sogenannten *reduzierten Steifigkeiten*, die sich aus den geäußerten Ingenieurkonstanten (Elastizitätsmoduli  $E_i$ , Querkontraktionszahlen



**Abbildung 2.1:** Unidirektional verstärkte Einzelschicht. Das  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystem ist an der Faserlängsrichtung ausgerichtet und wird als Materialhauptachsensystem bezeichnet. Es ist um den Winkel  $\vartheta$  in Bezug auf das globale  $x, y, z$ -Laminatkoordinatensystem gedreht.

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

$\nu_{ij}$ , Schubmoduli  $G_{ij}$ ) berechnen lassen:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die technische Gleitung  $\gamma_{12}$  besitzt in Gleichung (2.21) keinen thermischen Anteil, da der zugehörige Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_{12}$  im Materialhauptachsensystem gleich null ist.

Zur Beschreibung des Laminats als Verbund von Einzelschichten unterschiedlicher Orientierung ist es zweckmäßig, das Konstitutivgesetz im globalen  $x, y, z$ -Laminatkoordinatensystem zu formulieren. Die Spannungen und Dehnungen lassen sich gemäß

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

vom Materialhauptachsensystem in das Laminatkoordinatensystem überführen, wobei die Transformationsmatrix durch

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & -2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

gegeben ist. Eingesetzt in die konstitutive Beziehung im Schichtkoordinatensystem (2.21) ergibt sich

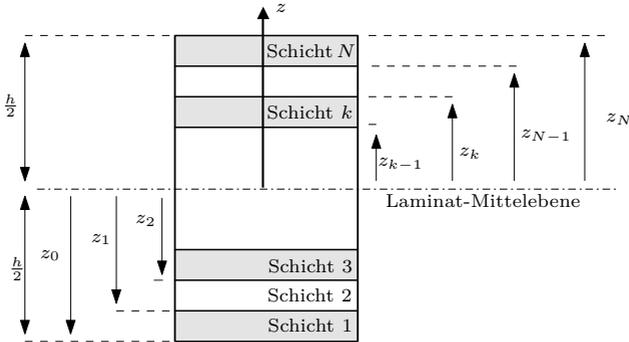
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.25)$$

als Konstitutivgesetz der Einzelschicht im Laminatkoordinatensystem. Hierbei transformieren sich die Wärmeausdehnungskoeffizienten genauso wie die Dehnung gemäß Gleichung (2.23) und für die reduzierten Steifigkeiten im Laminatkoordinatensystem gilt:

$$\bar{Q}_{ij} = T_{ik} Q_{kl} T_{jl}. \quad (2.26)$$

### 2.2.1 Klassische Laminattheorie

Ein Mehrschichtverbund entsteht durch das Zusammenfügen von mehreren Einzelschichten. Hierbei sei angenommen, dass sich die  $x, y$ -Ebene des



**Abbildung 2.2:** Darstellung eines Mehrschichtverbunds. Bezeichnung der Einzelschichten und der  $z$ -Koordinaten der Schichtgrenzen.

Laminatkoordinatensystems, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, stets in der Mittelebene des Verbunds befindet und die  $z$ -Achse in Dickenrichtung orientiert ist. Die Schichten werden ausgehend von der untersten Lage in Richtung der  $z$ -Koordinate nummeriert. Dabei werden sie durch ihre Faserorientierung gekennzeichnet: Die Bezeichnung  $[+10^\circ/-10^\circ/-10^\circ/+10^\circ]$  steht für einen ausgeglichenen Winkelverbund (AWV), welcher aus vier Schichten symmetrisch zur Mittelebene aufgebaut ist. Eine Symmetrie zur Mittelebene kann durch ein tiefgestelltes „s“ und direkt aufeinander folgende Schichten mit betragsgleichen, aber vorzeichenverschiedenen Faserwinkeln durch „ $\pm$ “ gekennzeichnet werden. So ergibt sich für den beispielhaft eingeführten symmetrischen AWV die Kurzschreibweise  $[\pm 10^\circ]_s$ .

Die *klassische Laminattheorie*<sup>2</sup> (CLT) ist eine weitverbreitete Näherung für hinreichend dünne Laminate, die auf der Kinematik der Kirchhoffschen Platten- und Scheibentheorie beruht. Hierbei wird analog zur Theorie Schubstarrer Platten vorausgesetzt, dass Normalen zur Laminatmittelebene auch nach der Deformation noch gerade und senkrecht zur deformierten Mittelebene sind. Diese Annahme wird als Normalenhypothese bezeichnet. Zudem erfährt das Laminat keine Dickenänderung und in den Einzelschichten liegt ein ebener Spannungszustand vor. Die Verschiebungen in der CLT setzen sich somit aus den Verschiebungen der Laminatmittelfläche  $\hat{u}_i$  und einem

<sup>2</sup> Engl.: Classical laminate theory

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Anteil aus der Verdrehung der Normalen zur Mittelebene zusammen:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \hat{u}_x(x, y) - z \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x}(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= \hat{u}_y(x, y) - z \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial y}(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= \hat{u}_z(x, y). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Gemäß den kinematischen Grundgleichungen (2.6) ergeben sich die ebenen Verzerrungen zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} \\ \hat{\varepsilon}_{yy} \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{x,x} \\ \hat{u}_{y,y} \\ \hat{u}_{x,y} + \hat{u}_{y,x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\hat{u}_{z,xx} \\ -\hat{u}_{z,yy} \\ -2\hat{u}_{z,xy} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

wobei die Größen  $\kappa_{ij}$  die Verkrümmungen der Laminatmittelfläche darstellen. Das Einsetzen in das Konstitutivgesetz der Einzelschicht in globalen Koordinaten (2.25) liefert die ebenen Spannungskomponenten der  $k$ -ten Laminatlage:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} \\ \hat{\varepsilon}_{yy} \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \right\}^{(k)}. \quad (2.29)$$

Zur Beschreibung des Verhaltens des Gesamtverbunds ist es oft zweckmäßig nicht die Spannungen in jedem Punkt, sondern die Schnittgrößen als integrales Maß für die Belastung der Struktur heranzuziehen. Zur Ermittlung der Schnittkräfte und -momente werden die Spannungen über die Laminatdicke integriert<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} dz, \\ \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} z dz. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Hier ist  $N$  die Anzahl der Schichten im Laminat und die Koordinaten  $z_{k-1}$  und  $z_k$  kennzeichnen die untere bzw. obere Schichtgrenze der  $k$ -ten Lage, wie in

<sup>3</sup> Man beachte, dass es sich bei den Schnittgrößen genau genommen um Kraft- bzw. Momentenflüsse handelt, die auf die Breite des Laminats bezogen sind.

Abbildung 2.2 dargestellt ist. Einsetzen der Definition der schichtweisen Spannungen (2.29) liefert das Konstitutivgesetz der klassischen Laminattheorie:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \\ M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} \\ \hat{\varepsilon}_{yy} \\ \hat{\gamma}_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Das Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verzerrungen und Verkrümmungen der Mittelfläche her. Die thermischen Schnittkräfte  $N_{ij}^T$  und -momente  $M_{ij}^T$  können als diejenigen Schnittlasten interpretiert werden, die aufgebracht werden müssten, um die aus der thermischen Last resultierenden Verzerrungen rein mechanisch hervorzurufen:

$$\begin{bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T \, dz, \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T z \, dz.$$

Die im Konstitutivgesetz (2.31) auftretende Matrix wird als Laminatsteifigkeitsmatrix bezeichnet, deren Koeffizienten wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \, dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z \, dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 \, dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Koeffizienten  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  und  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ , werden als Dehn-, Kopplungs- bzw. Biegesteifigkeiten bezeichnet. Die Besetzung der Steifigkeitsmatrix unterscheidet sich je nach Laminataufbau maßgeblich. So ist beispielsweise aus der Definition der Kopplungssteifigkeiten  $B_{ij}$  direkt ersichtlich, dass diese für einen mittensymmetrischen Aufbau identisch verschwinden. In diesem Fall sind die Schnittkräfte von den Krümmungen der Mittelfläche und die Schnittmomente von den Verzerrungen der Mittelfläche entkoppelt.

## 2.2.2 Theorien höherer Ordnung

Die in der klassischen Laminattheorie angenommene Schubstarrheit der Struktur hat zur Folge, dass kein Konstitutivgesetz für die interlaminaren Schubspannungen existiert. Diese Einschränkung ist insbesondere bei schubweicheren oder dickeren Laminaten fragwürdig. Durch die Verwendung von Verschiebungsansätzen mit einem höheren Polynomgrad bezüglich der Dickenkoordinate kommt es nicht zu dieser Restriktion. Im Folgenden werden zwei höherwertige Laminattheorien diskutiert.

**Schubdeformationstheorie erster Ordnung.** In der Schubdeformationstheorie erster Ordnung<sup>4</sup> (FSDT) wird die Normalenhypothese gelockert, so dass Normalen zur Laminatmittelebene zwar nach der Deformation noch gerade, aber nicht mehr zwingend senkrecht zur deformierten Mittelebene sind. Das hat zur Folge, dass die Verdrehwinkel  $\psi_x$  und  $\psi_y$  der Normalen als neue Unbekannte im weiterhin linearen Verschiebungsansatz auftreten:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \hat{u}_x(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= \hat{u}_y(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= \hat{u}_z(x, y). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Gemäß der kinematischen Grundgleichungen (2.6) ergeben sich die ebenen Verzerrungen zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} \\ \hat{\varepsilon}_{yy} \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{x,x} \\ \hat{u}_{y,y} \\ \hat{u}_{x,y} + \hat{u}_{y,x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

wobei im Gegensatz zur CLT die Schubverzerrungen nicht verschwinden:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_y + \hat{u}_{z,y} \\ \psi_x + \hat{u}_{z,x} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Die transversalen Schubspannungen der  $k$ -ten Laminatlage ergeben sich aus dem dreidimensionalen Materialgesetz für monoklines Materialverhalten (2.12):

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

<sup>4</sup> Engl.: First-order shear deformation theory

Die Steifigkeiten  $\bar{C}_{ij}$  im Laminatkoordinatensystem lassen sich aus denjenigen im Hauptachsensystem transformieren:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2 \vartheta + C_{55} \sin^2 \vartheta, \\ \bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \cos \vartheta \sin \vartheta, \\ \bar{C}_{55} &= C_{44} \sin^2 \vartheta + C_{55} \cos^2 \vartheta,\end{aligned}\tag{2.38}$$

wobei im Hauptachsensystem  $C_{44} = G_{23}$ ,  $C_{55} = G_{13}$ ,  $C_{45} = 0$  gilt. Es ist ersichtlich, dass die transversalen Schubspannungen nach dem Konstitutivgesetz (2.37) lagenweise konstant sind und sich folglich im Allgemeinen weder Spannungsfreiheit am Rand noch die Kontinuität an der Schichtgrenze erfüllen lässt. Aus den Schubspannungen lassen sich die Querkräfte  $Q_x$  und  $Q_y$  als integrales Maß für die Belastung in Dickenrichtung bestimmen:

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}.\tag{2.39}$$

Für die Schnittkräfte  $N_{ij}$  und -momente  $M_{ij}$  gilt weiterhin der konstitutive Zusammenhang (2.31) aus der CLT.

**Schubdeformationstheorie dritter Ordnung.** Um die transversalen Schubspannungen realitätsgetreuer abzubilden, können die kinematischen Annahmen weiter gelockert werden. In der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung<sup>5</sup> (TSDT) wird ein kubischer Ansatz für die ebenen Verschiebungen  $u_x$  und  $u_y$  gewählt, womit die Normalen zur Laminatmittelebene bei der Deformation weder gerade noch senkrecht bleiben müssen. Andererseits erhöht sich auch die Komplexität und damit der Berechnungsaufwand durch das Einführen der neuen Freiheitsgrade  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\lambda_x$  und  $\lambda_y$  im Verschiebungsansatz:

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= \hat{u}_x(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\lambda_x(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= \hat{u}_y(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\lambda_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= \hat{u}_z(x, y).\end{aligned}\tag{2.40}$$

---

<sup>5</sup> Engl.: Third-order shear deformation theory

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Die Auswertung der kinematischen Beziehungen (2.6) resultiert in einem Polynom dritten Grades für die ebenen Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{x,x} \\ \hat{u}_{y,y} \\ \hat{u}_{x,y} + \hat{u}_{y,x} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_0} + z \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1} + z^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_2} + z^3 \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{x,x} \\ \lambda_{y,y} \\ \lambda_{x,y} + \lambda_{y,x} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_3}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

und in einem quadratischen Ausdruck für die transversalen Schubdeformationen:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_y + \hat{u}_{z,y} \\ \psi_x + \hat{u}_{z,x} \end{bmatrix}}_{\gamma_0} + z \underbrace{2 \begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix}}_{\gamma_1} + z^2 \underbrace{3 \begin{bmatrix} \lambda_y \\ \lambda_x \end{bmatrix}}_{\gamma_2}. \quad (2.42)$$

Die transversalen Schubspannungen ergeben sich in der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung mithilfe des Stoffgesetzes (2.37) folglich als quadratische Funktionen der Koordinate  $z$ .

Zur Darstellung einer konstitutiven Beziehung für die TSDT werden neben den bereits definierten Schnittkräften  $N_{ij}$  und -momenten  $M_{ij}$  die zusätzlichen Wölbmomente  $O_{ij}$  und  $P_{ij}$  eingeführt:

$$\begin{bmatrix} O_{xx} \\ O_{yy} \\ O_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z^2 \, dz, \quad \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z^3 \, dz. \quad (2.43)$$

Ebenso werden neben den Querkraften  $Q_i$  weitere Schnittgrößen höherer Ordnung definiert:

$$\begin{bmatrix} S_y \\ S_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} z \, dz, \quad \begin{bmatrix} R_y \\ R_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} z^2 \, dz. \quad (2.44)$$

Hiermit lässt sich nun das Konstitutivgesetz der TSDT angeben:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ O \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \\ O^T \\ P^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & D & E \\ B & D & E & F \\ D & E & F & G \\ E & F & G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ S \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_S & B_S & D_S \\ B_S & D_S & E_S \\ D_S & E_S & F_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},$$

## 2.3 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik

wobei die Vektornotationen  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  und  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  zur Darstellung der Verzerrungen und Schubdeformationen gemäß der Gleichungen (2.41) und (2.42) dienen. Die Koeffizienten der neuen Steifigkeitsmatrizen sind folgenderweise definiert:

$$\begin{aligned} (E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} (z^3, z^4, z^5, z^6) dz & i, j &= 1, 2, 6, \\ (B_{ij}^S, D_{ij}^S, E_{ij}^S, F_{ij}^S) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij} (z, z^2, z^3, z^4) dz & i, j &= 4, 5. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die in der Theorie dritter Ordnung hinzugekommenen thermischen Schnittlasten höherer Ordnung lassen sich als

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} O_{xx}^T \\ O_{yy}^T \\ O_{xy}^T \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T z^2 dz & \text{ bzw.} \\ \begin{bmatrix} P_{xx}^T \\ P_{yy}^T \\ P_{xy}^T \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T z^3 dz \end{aligned} \quad (2.47)$$

darstellen. Bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrizen werden teilweise Ausdrücke von vierter oder noch höherer Ordnung der Laminatdicke berücksichtigt, welche insbesondere bei dünnen Laminaten einen nur geringen Einfluss haben werden. Hier muss der Anwender abwägen, ob eine leichte Erhöhung der Genauigkeit den Berechnungsaufwand der Theorie rechtfertigt. Im Rahmen der vorliegenden Studie werden ausschließlich mittensymmetrische Laminare behandelt, was die Auswertung der TSDT erheblich vereinfacht. In diesem Fall ergeben sich:  $B_{jl} = E_{jl} = G_{jl} = 0$  und  $B_{jl}^S = E_{jl}^S = 0$ .

## 2.3 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik

Um das Versagensverhalten von Werkstoffen und Strukturen zu beurteilen, wurden in der Vergangenheit zahlreiche Ansätze vorgeschlagen. In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit wichtigsten Theorien kurz beschrieben. Nach einer knappen Zusammenfassung der klassischen Festigkeitskriterien und der Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik, wird die Theorie der Finiten Bruchmechanik eingeführt.

### 2.3.1 Klassische Versagenskriterien

Die Entwicklung der klassischen Festigkeitskriterien begann teilweise bereits Ende des 19. Jahrhunderts. Ein Überblick über die etabliertesten Kriterien für isotrope Materialien findet sich bei Gross u. Seelig (2017) und für unidirektional verstärkte Werkstoffe in den Werken von Schürmann (2007) oder Mittelstedt u. Becker (2016). Die Kriterien haben meistens die Form einer Spannungs- oder Verzerrungsfunktion, deren Größe mit einem kritischen Materialkennwert verglichen wird:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_c, \quad g(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_c. \quad (2.48)$$

Der kritische Wert kann zum Beispiel im Falle einer Spannungsformulierung eine Festigkeit oder Fließgrenze  $\sigma_c$  oder im Falle einer Verzerrungsformulierung eine kritische Bruchdehnung  $\varepsilon_c$  sein. Hierbei sei vorausgesetzt, dass das Materialverhalten nur von dem aktuellen Spannungszustand, nicht aber von der Belastungsgeschichte abhängt. Die Versagensbedingung kann als Fläche im sechsdimensionalen Spannungsraum bzw. im dreidimensionalen Hauptspannungsraum interpretiert werden. Klassische Festigkeitskriterien sind in ihrer Anwendung weit verbreitet und eignen sich für homogene oder schwach inhomogene Spannungszustände. An Stellen lokal stark überhöhter oder gar singulärer Spannungen verlieren sie ihre Aussagekraft, da die Versagensbedingung (2.48) dort für beliebig kleine äußere Lasten erfüllt ist. Im Folgenden wird ein in der vorliegenden Arbeit verwendetes Festigkeitskriterium für unidirektional verstärkte Werkstoffe vorgestellt.

**Versagensmoduskonzept.** Die Grundidee von Cuntze (1996, 1999) war es, ein physikalisch fundiertes Kriterium zu formulieren, in dem jeder Versagensmodus in einem einzelnen Teilkriterium bewertet wird. Aus Überlegungen hinsichtlich der Werkstoffsymmetrie postulierte er im Rahmen des Versagensmoduskonzepts<sup>6</sup>, dass die Anzahl der unabhängigen Versagensmoden und Festigkeiten mit der Anzahl der unabhängigen Steifigkeiten des Materials übereinstimmen muss. Für unidirektional verstärkte Laminat-einzelschichten ergeben sich demnach aufgrund des transversal isotropen Materialverhaltens fünf unabhängige Versagensmoden. Hierbei handelt es sich um zwei Faserbruchformen (FF1, FF2) und drei Zwischenfaserbrucharten (IFF1, IFF2, IFF3), für die Cuntze fünf unabhängige Kriterien formulierte (Cuntze u. Freund, 2004, Cuntze, 2006). Die Teilkriterien lassen sich unter der Annahme

---

<sup>6</sup> Engl.: Failure Mode Concept

## 2.3 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik

eines ebenen Spannungszustands kompakt im Materialhauptachsensystem angeben:

$$\begin{aligned}
 \text{FF1:} \quad & \frac{\sigma_{11}}{X_t} \geq 1, \quad \text{für } \sigma_{11} > 0, \\
 \text{FF2:} \quad & -\frac{\sigma_{11}}{X_c} \geq 1, \quad \text{für } \sigma_{11} < 0, \\
 \text{IFF1:} \quad & \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \geq 1, \quad \text{für } \sigma_{22} > 0, \\
 \text{IFF2:} \quad & -\frac{\sigma_{22}}{Y_c} \geq 1, \quad \text{für } \sigma_{22} < 0, \\
 \text{IFF3:} \quad & \frac{|\tau_{12}|}{S - \mu_{12}\sigma_{22}} \geq 1.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Hierbei sind  $X_t$  und  $X_c$  die axiale Zug- bzw. Druckfestigkeit in Faserrichtung,  $Y_t$  und  $Y_c$  die transversale Zug- bzw. Druckfestigkeit und  $S$  die Scherfestigkeit. Für die als innerer Reibkoeffizient interpretierbare Größe  $\mu_{12}$  empfehlen Petersen et al. (2016) auf Basis einer experimentellen Studie an einem kohlenstofffaserverstärkten Kunststoff einen Wert von  $\mu_{12} = 0,22$ . Durch die Überlagerung der Teilkriterien zu einem Interaktionsgesetz ergibt sich eine glatte Versagensfläche im Spannungsraum:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\sigma_{11} + |\sigma_{11}|}{2X_t} \right)^m + \left( \frac{-\sigma_{11} + |\sigma_{11}|}{2X_c} \right)^m + \\
 & \left( \frac{\sigma_{22} + |\sigma_{22}|}{2Y_t} \right)^m + \left( \frac{-\sigma_{22} + |\sigma_{22}|}{2Y_c} \right)^m + \left( \frac{|\tau_{12}|}{S - \mu_{12}\sigma_{22}} \right)^m = 1.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

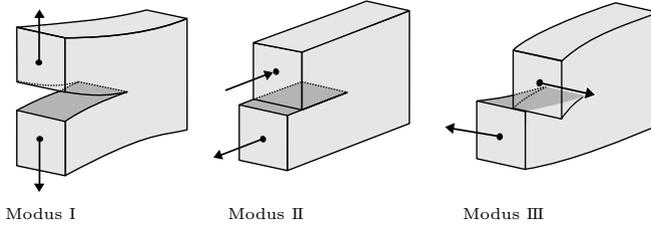
Der Exponent  $m$  wird als Interaktionskoeffizient bezeichnet.

### 2.3.2 Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik

Im Gegensatz zu den Festigkeitskriterien, die einen weitgehend homogenen Spannungszustand in einer ungestörten Struktur voraussetzen, beschäftigt sich die Bruchmechanik mit dem Verhalten von Körpern mit initialem Riss und hierbei insbesondere mit der Frage der Rissausbildung. Die Unterdisziplin der linear-elastischen Bruchmechanik stützt sich auf die Annahme, dass inelastische Vorgänge nur in einem sehr kleinen Bereich um die Risspitze auftreten und für die makroskopische Betrachtung vernachlässigt werden können. Die hier dargestellten Grundlagen sind den Standardwerken von Gross u. Seelig (2017) und Kuna (2008) entnommen.

Es werden grundsätzlich die in Abbildung 2.3 dargestellten Formen der Rissöffnung unterschieden. Im Falle von Modus I öffnet sich der Riss symmetrisch

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen



**Abbildung 2.3:** Illustration der Rissöffnungsmoden.

und senkrecht zur Rissebene. Bei Modus II tritt eine antisymmetrische Scherung der Rissufer senkrecht zur Rissfront und bei Modus III parallel zur Rissfront auf.

**Rissspitzenfeld.** Mithilfe einer asymptotischen Analyse können Reihendarstellungen für die Spannungen und Verschiebungen im Nahfeld der Risspitze ermittelt werden. Für den Fall eines geraden Risses in einer ebenen Struktur ergibt sich bezüglich eines Polarkoordinatensystems  $(r, \phi)$  mit Ursprung in der Risspitze folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= r^{-1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\phi) + \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\phi) + r^{1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(3)}(\phi) + \dots, \\ u_i - u_{i0} &= r^{1/2} \hat{u}_i^{(1)}(\phi) + r \hat{u}_i^{(2)}(\phi) + r^{3/2} \hat{u}_i^{(3)}(\phi) + \dots. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Hier ist  $u_{i0}$  eine mögliche Starrkörperbewegung und  $\hat{\sigma}_{ij}^{(k)}(\phi)$ ,  $\hat{u}_i^{(k)}(\phi)$  sind Funktionen des Winkels  $\phi$ , die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind. Im Nahfeld der Risspitze dominiert der erste Term der Reihendarstellung (2.51), welcher bezüglich der Spannungen für  $r \rightarrow 0$  singularär wird, so dass die Glieder höherer Ordnung dort in guter Näherung vernachlässigt werden können. Es ist üblich, das Rissspitzenfeld in symmetrische und antisymmetrische Anteile aufzuspalten. Dabei entspricht der symmetrische Anteil

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= K_I r^{-1/2} f_{ij}^I(\phi), \\ u_i - u_{i0} &= K_I r^{+1/2} g_i^I(\phi). \end{aligned} \quad (2.52)$$

gerade einer Modus I-Rissöffnung. Der hierbei auftretende *Spannungsintensitätsfaktor*  $K_I$  ist ein Maß für die Stärke der Spannungsüberhöhung und ist abhängig von der Geometrie, dem Material und der äußeren Belastung der Struktur<sup>7</sup>. Für die antisymmetrischen Anteile der Rissöffnung (Modus II bzw.

<sup>7</sup> Der Spannungsintensitätsfaktor wird in der Literatur auch kurz als *K-Faktor* bezeichnet.

### 2.3 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik

Modus III) lassen sich äquivalente Beziehungen mit den zugeordneten Spannungskonzentrationsfaktoren  $K_{\text{II}}$  und  $K_{\text{III}}$  angeben. Die Spannungskonzentrationsfaktoren gehen nicht aus der asymptotischen Analyse hervor und müssen gesondert bestimmt werden. Dies kann für Sonderfälle auf rein analytischem Wege und für allgemeinere Struktursituationen mithilfe von numerischen Verfahren passieren. Umfangreiche Sammlungen von Spannungsintensitätsfaktoren für eine Vielzahl von Struktursituationen finden sich zum Beispiel in den Handbüchern von Tada et al. (2000) oder Pilkey u. Pilkey (1997). Im allgemeinen Fall gemischter Belastung ist es zweckmäßig die Felder gemäß den Rissöffnungsmoden aufzuspalten:

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2} [K_{\text{I}} f_{ij}^{\text{I}}(\phi) + K_{\text{II}} f_{ij}^{\text{II}}(\phi) + K_{\text{III}} f_{ij}^{\text{III}}(\phi)]. \quad (2.53)$$

Der Exponent des ersten Terms der Verschiebungsreihe (2.51) wird als *Singularitätsordnung*  $\lambda$  bezeichnet, wobei die Spannungen mit  $r^{\lambda-1}$  abklingen. Für einen Riss in homogenem, isotropem Material gilt  $\lambda = 1/2$ , die Spannungen haben dementsprechend ein Abklingverhalten der Ordnung  $1/\sqrt{r}$ . Neben dem diskutierten Fall des Risses gibt es auch in anderen strukturmechanischen Konfigurationen Stellen singulärer Spannungen mit gegebenenfalls anderen Singularitätsordnungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= r^{\lambda_1-1} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\phi) + r^{\lambda_2-1} \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\phi) + r^{\lambda_3-1} \hat{\sigma}_{ij}^{(3)}(\phi) + \dots, \\ u_i - u_{i0} &= r^{\lambda_1} \hat{u}_i^{(1)}(\phi) + r^{\lambda_2} \hat{u}_i^{(2)}(\phi) + r^{\lambda_3} \hat{u}_i^{(3)}(\phi) + \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

Insbesondere sind Spitzkerben zu nennen, bei denen sich die Singularitätsordnung je nach Öffnungswinkel zwischen  $1/2$  und  $1$  bewegt. Ebenso treten singuläre Spannungen an Bimaterialübergängen auf, wobei  $\lambda$  maßgeblich vom elastischen Kontrast der Fügepartner abhängt. Für  $1/2 < \lambda_1 < 1$  spricht man von schwachen, für  $0 < \lambda_1 \leq 1/2$  von starken Singularitäten. Situationen mit  $\lambda < 0,5$  treten nur in Sonderfällen auf, so zum Beispiel in bestimmten Bimaterialkerben (Hell u. Becker, 2015, Sator, 2010). Ebenso zeigt Hell (2018), dass unter der Forderung einer an der Singularität beschränkten Formänderungsenergie und Verschiebung die Singularitätsordnung nie negativ werden kann.

**K-Konzept.** Die Darstellung (2.52) legt nahe, dass es um eine Rissspitze eine Zone gibt, in der der Verlauf der mechanischen Feldgrößen vor allem durch den Spannungsintensitätsfaktor charakterisiert wird. Diese Zone ist begrenzt, da in größerer Entfernung zur Rissspitze die Terme höherer Ordnung der Reihenentwicklung (2.51) nicht mehr vernachlässigbar sind. Die Gültigkeit der Darstellung (2.52) ist jedoch auch nach innen beschränkt, da sich in einer Zone um die Rissspitze Vorgänge abspielen, die sich nicht

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

mit der linearen Elastizitätstheorie beschreiben lassen. Da dieses innerste Gebiet jedoch gegenüber der  $K$ -dominierten Zone sehr klein ist, muss auch das Geschehen dort indirekt vollständig von  $K$  charakterisiert sein. Der Spannungsintensitätsfaktor kann also als alleiniges Maß für die Belastung der Struktur in der Umgebung der Risspitze genutzt und somit zur Formulierung einer Versagenshypothese herangezogen werden:

$$K_I = K_{Ic}. \quad (2.55)$$

Das sogenannte  $K$ -Konzept besagt, dass es zu Risswachstum kommt, wenn der Spannungsintensitätsfaktor genauso groß ist wie die materialspezifische *Bruchzähigkeit*  $K_c$ . Die Formulierung (2.55) bezieht sich auf eine reine Modus I-Rissöffnung, sie lässt sich jedoch äquivalent auf Modus II oder Modus III übertragen. Für gemischte Beanspruchungen kann eine geeignete Form  $f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0$  gewählt werden.

**Energiebilanz beim Rissfortschritt.** Zur energetischen Betrachtung des Rissfortschritts ist es zweckmäßig, alle Energieformen, die mit dem Bruchprozess zusammenhängen, als eigenen Term  $\Gamma$  in die Energiebilanz aufzunehmen. Handelt es sich um einen quasistatischen Vorgang, sind keine nichtmechanischen Energieformen beteiligt und besitzen die äußeren Kräfte ein Potential, kann der Energiesatz (2.16) wie folgt geschrieben werden:

$$\dot{\Pi}^i + \dot{\Pi}^a + \dot{\Gamma} = 0, \quad (2.56)$$

wobei aufgrund der Irreversibilität des Prozesses  $\dot{\Gamma} \geq 0$  gelten muss. Die beim Rissfortschritt um die Bruchfläche  $dA$  dissipierte Energie  $d\Gamma$  lässt sich unter der Annahme der Existenz einer konstanten spezifischen Bruchenergie als

$$d\Gamma = \mathcal{G}_c dA \quad (2.57)$$

angeben. Hierbei ist  $\mathcal{G}_c$  eine materialspezifische Konstante, die als *Risswiderstand* oder *Bruchzähigkeit* bezeichnet wird. Mithilfe dieser Definition lässt sich die Energiebilanz als Bruchkriterium schreiben:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \mathcal{G} = \mathcal{G}_c, \quad (2.58)$$

wobei  $\mathcal{G}$  die auf den infinitesimalen Rissfortschritt bezogene *Energiefreisetzungsrate* ist. Dieses Kriterium wurde in leicht modifizierter Form zum ersten Mal von Griffith (1921) formuliert und besagt, dass die Änderung des Gesamtpotentials beim quasistatischen Rissfortschritt gleich der für den Rissfortschritt benötigten Energie sein muss. Für reine Moden lässt sich

innerhalb der linear-elastischen Bruchmechanik zeigen, dass das *Griffithsche Kriterium* vollkommen äquivalent zum  $K$ -Konzept ist und es gilt:

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E^*} \text{ (Modus I)}, \quad \mathcal{G} = \frac{K_{II}^2}{E^*} \text{ (Modus II)}, \quad \mathcal{G} = \frac{K_{III}^2}{2G} \text{ (Modus III)} \quad (2.59)$$

mit

$$E^* = \begin{cases} E & \text{im ebenen Spannungszustand} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{im ebenen Verzerrungszustand} \end{cases} \quad (2.60)$$

### 2.3.3 Bruchmechanik finiter Risse

Die Finite Bruchmechanik<sup>8</sup> (FBM) ist verglichen mit der klassischen Festigkeits- oder der Bruchmechanik ein junges Forschungsgebiet, deren Grundzüge erstmals von Hashin (1996) skizziert wurden. Sie findet vor allem Anwendung bei der Bewertung von schwachen Spannungssingularitäten oder Spannungskonzentrationen und füllt somit eine wichtige Lücke im Feld der Versagensanalyse. Einen detaillierten Überblick über die Theorie und die vielfältigen Anwendungen der FBM findet sich bei Weißgraeber et al. (2016b).

**Versagen an Bimaterialpunkten und Kerben.** Während die klassische Festigkeitsmechanik gut geeignet ist, um annähernd homogene Spannungsverteilungen zu beurteilen, fokussieren sich bruchmechanische Konzepte auf die starke Spannungssingularität des Rissspitzenfelds. Im Falle schwacher Spannungssingularitäten, wie sie zum Beispiel an Bimaterialpunkten oder Kerben auftreten, sind jedoch beide Konzepte nicht anwendbar. Auf der einen Seite führt die lokale Auswertung eines festigkeitsbasierten Kriteriums in dem Punkt gegen Unendlich strebender Spannungen zu einer verschwindend geringen Versagenslast. Auf der anderen Seite kann ein energetisches Kriterium vom Griffith-Typ (2.58) auch für beliebig große äußere Lasten niemals erfüllt werden, da die differentielle Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}$  für Singularitätsexponenten  $\lambda > 0,5$  identisch verschwindet (Hell, 2018, Felger, 2020, Leguillon u. Sanchez-Palencia, 1999).

Als Alternative wurden zahlreiche nichtlokale Versagenskriterien für die Analyse schwacher Spannungssingularitäten vorgeschlagen. Auf der Seite der Festigkeitsmechanik besteht die Idee darin, die Bewertung nicht am Ort unbegrenzter Spannungen, sondern entweder punktweise in einem gewissen Abstand dazu (Peterson u. Wahl, 1936, Whitney u. Nuismer, 1974) oder

---

<sup>8</sup> Engl.: Finite Fracture Mechanics

über eine gewisse Distanz gemittelt (Neuber, 1936, Novozhilov, 1969) durchzuführen. Waddoups et al. (1971) begegnen dem Problem indem sie einen fiktiven Anfangsriss finiter Länge einführen, um anschließend die Werkzeuge der linear-elastischen Bruchmechanik nutzen zu können. In seinem Übersichts-werk fasst Taylor (2007) diese Überlegungen als *Theorie kritischer Distanzen*<sup>9</sup> zusammen. All diesen Konzepten ist gemeinsam, dass sie einen neuen Längenparameter einführen, der vorab nicht bekannt ist und zum Beispiel über geeignete Experimente bestimmt werden muss. Da es sich dabei nicht um einen Materialkennwert handelt, sondern zudem eine Abhängigkeit von der Geometrie der Struktur besteht (Dunn et al., 1997, Qian u. Akisanya, 1998), ist die Anwendbarkeit der Theorien teilweise unpraktikabel.

**Grundidee der Finiten Bruchmechanik.** Hashin (1996) beobachtete bei der Rissinitiierung in Laminaten, dass sich entstehende Mikrorisse in einem sehr kurzen Zeitraum zu einem Riss finiter Länge vereinen. Da der betrachtete Zeitraum sehr kurz ist, modellierte Hashin die Rissentstehung in spröden Strukturen nicht als kontinuierlichen, sondern als diskreten Vorgang. Er formulierte die Idee von spontan initiiierenden Rissen mit endlicher Rissgröße  $\Delta A$  und begründete damit das neue Gebiet der FBM. Zudem zeigte er, dass die freigewordene Energie bezogen auf die finite Rissfläche als Maß für ein energetisches Kriterium vom Griffith-Typ (2.58) herangezogen werden kann. Analog zur differentiellen wird eine *inkrementelle Energiefreisetzungsrate*

$$\bar{\mathcal{G}}_i = -\frac{\Delta\Pi_i}{\Delta A}, \quad i \in \{I, II, III\} \quad (2.61)$$

definiert, indem die Änderung des Gesamtpotentials bei der Rissinitiierung  $\Delta\Pi$  mit der endlichen Größe  $\Delta A$  des entstehenden Risses in Beziehung gesetzt wird. Dabei bezeichnet der Index  $i \in \{I, II, III\}$  die Energiefreisetzung, die den verschiedenen Rissöffnungsmoden entspricht. Der Grenzwert der inkrementellen Energiefreisetzungsrates für  $\Delta A \rightarrow 0$  ist die differentielle Energiefreisetzungsrates und umgekehrt kann  $\bar{\mathcal{G}}$  durch Mittelwertbildung aus  $\mathcal{G}$  berechnet werden:

$$\bar{\mathcal{G}}_i(\Delta A) = \frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A} \mathcal{G}_i(A) dA. \quad (2.62)$$

**Gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium.** Basierend auf den Ideen von Hashin schlug Leguillon (2002) ein *gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium* für die instantane Entstehung eines Risses finiter Größe  $\Delta A$  in hinreichend spröden Strukturen vor. Die aus einem festigkeits- und einen

<sup>9</sup> Engl.: Theory of critical distances

### 2.3 Einführung in die Festigkeits- und Bruchmechanik

bruchmechanischen Teilkriterium bestehende Versagenshypothese benötigt als Parameter nur eine Festigkeit und eine Bruchzähigkeit, nicht aber einen empirischen Längenparameter. Vielmehr liefert das Modell, neben der kritischen Last, die initiale Risslänge als Ergebnis. Das Spannungsteilkriterium fordert, dass die gesamte Oberfläche  $\Omega_c$  des potentiellen Risses im ungerissenen Zustand überlastet ist. Hierzu muss eine Versagenshypothese von Typ (2.48) in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega_c$  erfüllt sein:

$$f(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta A), \quad (2.63)$$

wobei  $\sigma_c$  eine geeignete Materialfestigkeit ist. Das energetische Teilkriterium fordert, dass die Änderung des Gesamtpotentials bei der Bildung eines Risses der finiten Größe  $\Delta A$  größer oder gleich der für den Bruchprozess benötigten Energie sein muss. Mithilfe der Definitionen der Energiefreisetzungsrate finiter Risse (2.61) und der Bruchzähigkeit (2.57) lässt sich ein Kriterium vom Griffith-Typ (2.58) in inkrementeller Darstellung formulieren:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta A) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.64)$$

Da im Folgenden ausschließlich ebene Probleme mit einer konstanten Tiefe  $l$  behandelt werden, ist die Rissgröße  $\Delta A = l\Delta a$  direkt proportional zur Risslänge  $\Delta a$ . Das gekoppelte Kriterium postuliert die spontane Initiierung eines Risses finiter Länge  $\Delta a$ , wenn die beiden notwendigen Bedingungen (2.63) und (2.64) gleichzeitig erfüllt sind:

$$f(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.65)$$

Im Allgemeinen führt die Auswertung des gekoppelten Kriteriums (2.65) zu einem beschränkten Optimierungsproblem, in dem die kleinste kritische Last  $P_{\ddagger}$  gesucht wird, die beide Teilbedingungen gleichzeitig erfüllt:

$$P_{\ddagger} = \min_{P, \Delta a > 0} \{P \mid f(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c\}. \quad (2.66)$$

In vielen Problemen der Strukturmechanik zeigen die Spannungen in der betrachteten Umgebung der Singularität ein streng monoton fallendes Verhalten, während die inkrementelle Energiefreisetzungsrate streng monoton zunimmt. In solchen Situationen, von Bažant u. Planas (1997) als positive Geometrien<sup>10</sup> bezeichnet, vereinfacht sich die Auswertung des gekoppelten Kriteriums maßgeblich, da sich die beiden Teilkriterien (2.63, 2.64) mit Gleichheit erfüllen lassen. Das monoton steigende Energiekriterium liefert somit eine untere Grenze für die Risslängen, welche aus energetischer Sicht möglich

<sup>10</sup>Weißgraeber et al. (2016a) bezeichnen Struktursituationen, in denen auch die inkrementelle Energiefreisetzungsrate abnimmt, als negative Geometrien.

sind. Dahingegen ist der überlastete Bereich nach außen begrenzt und das monoton fallende Spannungskriterium stellt eine obere Schranke für mögliche Risslängen dar. Ist die Spannungsfunktion  $f(\sigma_{ij})$  zudem direkt proportional zur äußeren Last  $P$  und die inkrementelle Energiefreisetzungsrate  $\bar{\mathcal{G}}$  direkt proportional zum Quadrat der äußeren Last, dann lässt sich die Last  $P$  aus dem Kriterium (2.65) eliminieren und die initiale Risslänge  $\Delta a_f$  ergibt sich als Lösung der impliziten Gleichung

$$\frac{f^2(\sigma_{ij}(\Delta a))}{\sigma_c^2} = \frac{\bar{\mathcal{G}}(\Delta a)}{\mathcal{G}_c}. \quad (2.67)$$

Die zugehörige Versagenslast  $P_f$  lässt sich anschließend eindeutig unter Verwendung von  $\Delta a_f$  aus einem der beiden Teilkriterien (2.63, 2.64) ermitteln.

**Anwendung der Finiten Bruchmechanik.** Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium wurde erfolgreich auf zahlreiche Struktursituationen mit Spannungssingularitäten und -überhöhungen angewendet. Stellvertretend für Konfigurationen mit singulären Spannungen seien hier insbesondere Spitzkerben (Leguillon, 2002, Leguillon u. Yosibash, 2003, Carpinteri et al., 2008, Sapora et al., 2013), Klebeverbindungen (Carrere et al., 2015, Stein et al., 2015, Doitrand u. Leguillon, 2018, Felger et al., 2019b) und Bimaterial-übergänge (Felger et al., 2019a, Bremm, 2022) genannt. Auch eignet sich die FBM zur Analyse der Querrissbildung (García et al., 2016, Hell, 2018) und der Entstehung von Delaminationen (Martin et al., 2010, Hebel et al., 2010, Dölling et al., 2020, Frey et al., 2021c) in Mehrschichtverbunden. Ebenfalls beachtenswert ist die Erweiterung des Anwendungsbereichs des gekoppelten Kriteriums durch Leguillon u. Yosibash (2017) und Rosendahl (2020) auf nichtlineares Materialverhalten.

Die Finite Bruchmechanik lässt sich auch zur Bewertung von nichtsingulären Spannungskonzentrationen einsetzen, wobei insbesondere Löcher (Camanho et al., 2012, Martin et al., 2012, Weißgraeber et al., 2016a, Felger et al., 2017, Rosendahl et al., 2017) und Bolzenverbindungen (Catalanotti u. Camanho, 2013, Nguyen-Hoang, 2022) zu erwähnen sind. Dabei ist es möglich den experimentell beobachteten *Lochgrößeneffekt* korrekt abzubilden. Größeneffekte treten auch in anderen Struktursituationen wie Klebeverbindungen und Laminaten auf und beschreiben die Abhängigkeit der effektiven Festigkeit der Struktur von der charakteristischen Abmessung des Spannungskonzentratoren, wie beispielsweise dem Lochdurchmesser, der Klebschichtdicke oder der Einzelschichtdicke (Bažant u. Planas, 1997). Während klassische Festigkeitskriterien Größeneffekte nicht erfassen, können diese mithilfe der FBM in guter Übereinstimmung zu experimentellen Befunden wiedergegeben werden.

## Kapitel 3

# Der Laminat-Randeffekt: Stand der Forschung

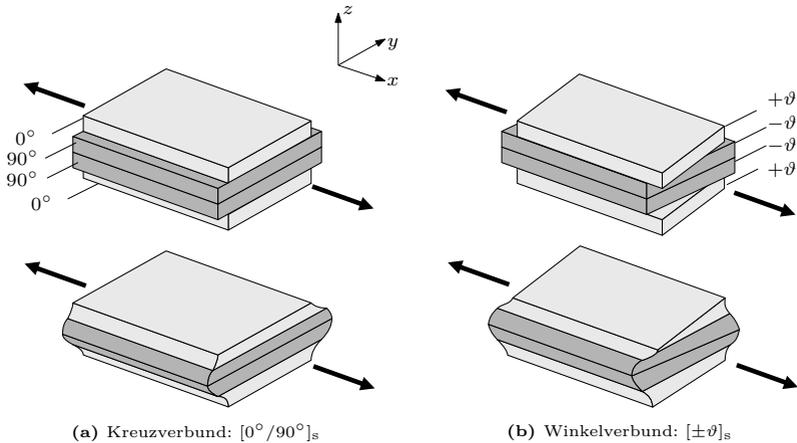
*Dieses Kapitel gibt einen Einblick in den aktuellen Stand der Wissenschaft zum Laminat-Randeffekt. Das dient zum einen dem besseren Verständnis, zum anderen der Einordnung der vorliegenden Arbeit in den wissenschaftlichen Kontext. Zunächst werden die grundlegenden Wirkmechanismen des Randeffekts und das daraus resultierende Versagensverhalten beschrieben. Es folgt ein Überblick über die existierenden Modelle zur Analyse der Spannungen in der Nähe freier Laminatränder und abschließend eine Darstellung verschiedener Ansätze zur Bewertung des interlaminaren Versagens.*

### 3.1 Das Wesen des Randeffekts

Der Laminat-Randeffekt wurde vermutlich erstmalig in den Sechzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts erwähnt (Mittelstedt u. Becker, 2007a) und ist seitdem Gegenstand zahlreicher wissenschaftlicher Arbeiten. Er beschreibt das Auftreten stark lokalisierter interlaminarer Spannungen in der Nähe freier Ränder von Mehrschichtverbunden aufgrund der lagenweise unterschiedlichen Steifigkeitseigenschaften. Diese mitunter singulären Spannungen werden von der klassischen Laminattheorie (CLT) nicht erfasst und können zu vorzeitigem Versagen infolge von Randalaminationen oder zur Minderung der effektiven Laminatsteifigkeit führen.

#### 3.1.1 Grundprinzip

Die zugrunde liegenden Wirkmechanismen des Randeffekts werden im Folgenden an zwei Beispielen erläutert. Abbildung 3.1 zeigt zwei mittensymmetrische Laminatverbunde unter uniaxialer Zuglast: einen  $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Kreuzverbund (a) und

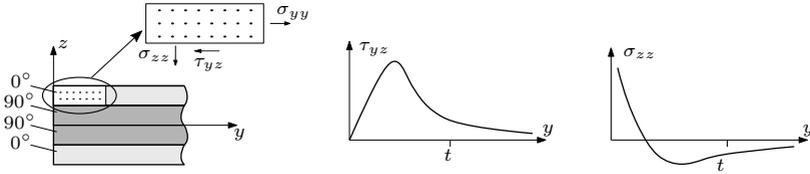


**Abbildung 3.1:** Laminat unter axialer Zugbelastung. Darstellung der Verformungen der unverklebten Einzelschichten (oben) und des Gesamtverbunds im gefügten Zustand.

einen ausgeglichenen  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbund (b). Im oberen Teil der Abbildung ist die Deformationsgestalt dargestellt, die sich einstellen würde, wenn die Einzelschichten nicht miteinander verklebt wären, sondern sich frei verformen könnten. Im gefügten Zustand sind die Verschiebungen an den Schichtgrenzen stetig und der Verbund verformt sich als Ganzes, wie im unteren Teil von Abbildung 3.1 dargestellt ist. In einem hinreichenden Abstand von den Enden sind die durch die Lasteinleitung induzierten lokalen Effekte entsprechend des Saint-Venant-Prinzips abgeklungen und es liegt eine in Längsrichtung konstante Zugbelastung vor. Da neben der Belastung auch die Geometrie der Proben in  $x$ -Richtung unveränderlich ist, sind die resultierenden Dehnungs- und Spannungsfelder zwar dreidimensional, aber nur von den Querschnittskoordinaten  $y$  und  $z$  abhängig und in Längsrichtung konstant. Dieser spezielle Zustand wird als *generalisierter ebener Verzerrungszustand*<sup>11</sup> (GEVZ) bezeichnet. Ausführliche Herleitungen des GEVZs finden sich beispielsweise bei Lekhnitskii (1963) oder Hwu (2010).

**Kreuzverbund.** Im Falle des  $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Kreuzverbunds besitzen die Lagen abweichende Querkontraktionseigenschaften und würden sich im ungefügten Zustand in Folge der Zugbelastung unterschiedlich stark in Querrichtung

<sup>11</sup> Engl.: state of generalized plane strain



**Abbildung 3.2:** Gleichgewichtsbetrachtungen zum Laminat-Randeffect am Beispiel eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Kreuzverbunds.

deformieren (siehe Abbildung 3.1a oben). Die  $0^\circ$ -Schichten besitzen in Querrichtung keine verstärkenden Fasern und ziehen sich somit aufgrund der größeren Nachgiebigkeit der Matrix stärker zusammen als die  $90^\circ$ -Lagen. Da im Rahmen dieser Arbeit eine ideale Fügung der Lagen innerhalb eines Mehrschichtverbunds angenommen wird, müssen die Verschiebungen an der Schichtgrenze stetig sein und die Deformationsgestalt kann sich nicht frei ausbilden. Infolgedessen kommt es zu einer Querkontraktionsbehinderung und zu im Randbereich stark überhöhten interlaminaren Spannungen zwischen den Schichten. Zur Verdeutlichung wird eine Gleichgewichtsbetrachtung an dem in Abbildung 3.2 links dargestellten Randstück der oberen  $0^\circ$ -Schicht durchgeführt. Hierbei sei der rechte Rand des freigeschnittenen Elements hinreichend weit im Laminatinneren, so dass die Randspannungen dort abgeklungen sind. Aufgrund der Querkontraktionsbehinderung steht der betrachtete Ausschnitt der Struktur unter einer Zuglast  $\sigma_{yy}$ , welche am spannungsfreien Rand verschwindet und sich im Inneren beispielsweise aus der klassischen Laminattheorie ergibt. Das Kräftegleichgewicht in dieser Richtung

$$-\int_0^{y^*} \tau_{yz} \, dy + \int_t^{2t} \sigma_{yy} \, dz = 0 \quad (3.1)$$

impliziert das Vorhandensein der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{yz}$ . Hierbei sei  $t$  die Einzelschichtdicke und  $y^*$  die Breite des freigeschnittenen Elements. Der qualitative Verlauf der Schubspannung  $\tau_{yz}$  ist in der Mitte der Abbildung 3.2 dargestellt: Am freien Rand muss die Komponente gemäß der Randbedingung verschwinden, und auch in Richtung der Laminatmitte wird sie der CLT entsprechend abklingen.<sup>12</sup> Eine Momentenbetrachtung um eine Parallele zur  $x$ -Achse durch den Bimaterialpunkt ( $y = 0, z = t$ ) zeigt, dass

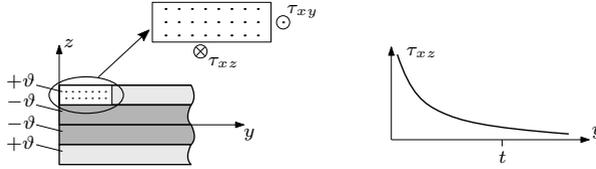
<sup>12</sup>Strenggenommen besitzt die Spannung  $\tau_{yz}$  am Bimaterialpunkt eine Unstetigkeit: Bei Annäherung entlang der Schichtgrenze werden gemäß Gleichung (2.54) aufgrund der diskontinuierlichen Materialeigenschaften alle Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$  singularär, was für  $\tau_{yz}$  im Widerspruch zur Randbedingung steht. Die Singularität von  $\tau_{yz}$  ist jedoch so stark lokalisiert, dass sie für die folgenden Betrachtungen vernachlässigt wird. Eine ausführlichere Diskussion hierzu findet sich bei Bremm (2022).

eine auftretende interlaminare Schälspannung  $\sigma_{zz}$  die Momentenwirkung der Zugspannung  $\sigma_{yy}$  kompensieren kann:

$$-\int_0^{y^*} \sigma_{zz} y \, dy - \int_t^{2t} \sigma_{yy} (z - t) \, dz = 0. \quad (3.2)$$

Diese Spannungskomponente muss in der Nähe des Randes das Vorzeichen wechseln, um das Kräftegleichgewicht in Dickenrichtung nicht zu verletzen. Der qualitative Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{zz}$  ist in der Abbildung 3.2 rechts dargestellt: Während auch diese Komponente im Laminatinneren abklingt, zeigt sie im Bimaterialpunkt am freien Rand ein schwach-singuläres Verhalten. Da es sich hierbei zudem um eine Zugspannung handelt, ist die Struktur an dieser Stelle stark gefährdet hinsichtlich der Entstehung eines interlaminaren Risses.

**Winkelverbund.** Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Modellierung des Randeffekts und des daraus resultierenden Versagens in ausgeglichenen Winkelverbunden (AWVs). In einem  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbund besitzen die einzelnen Schichten zwar die gleichen Querkontraktions-, jedoch unterschiedliche Schubdeformationseigenschaften. Folglich erführen Schichten mit unterschiedlichen Faserwinkeln in einem ungefügten Zustand auch unterschiedliche Schubdeformationen. Diese Situation ist in Abbildung 3.1b oben dargestellt: Schichten mit betragsgleichen, aber vorzeichenverschiedenen Faserorientierungen ( $\pm\vartheta$ ) zeigen unter uniaxialer Zugbelastung ebenso betragsgleiche, aber vorzeichenverschiedene Scherungen  $\gamma_{xy}$ . Durch die Verbindung der Schichten innerhalb des Laminats werden diese Schubdeformationen teilweise verhindert und es stellt sich die im unteren Teil der Abbildung 3.1b verbildlichte Verwölbungsform ein, die in zahlreichen experimentellen Studien beobachtet wurde, beispielsweise von Lecomte-Grosbras et al. (2013) oder Herakovich et al. (1985). Die Schubdeformationsbehinderung bewirkt das Auftreten von ebenen Schubspannungen  $\tau_{xy}$ , welche gemäß der CLT lagenweise konstant und betragsgleich sind, jedoch je nach Vorzeichen des Faserwinkels unterschiedliche Vorzeichen besitzen. In Richtung des spannungsfreien Randes müssen die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  zur Erfüllung der Randbedingung auf null zurückgehen, was das Auftreten der interlaminaren Schubspannungen  $\tau_{xz}$  in der unmittelbaren Umgebung des Bimaterialpunkts am freien Rand zur Folge hat. Zum besseren Verständnis wird wieder eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem freigeschnittenen Element der oberen  $+\vartheta$ -Schicht durchgeführt (vgl. Abbildung 3.3 links). Die ebene Schubspannung  $\tau_{xy}$  wirkt am rechten Rand des betrachteten Elements gemäß der CLT in positive  $x$ -Richtung. Um die



**Abbildung 3.3:** Gleichgewichtsbetrachtungen zum Laminat-Randeffekt am Beispiel eines  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbunds.

resultierende Kraft zu kompensieren, muss in der Grenzfläche zwischen den Schichten die interlaminare Schubspannung  $\tau_{xz}$  auftreten:

$$\int_t^{2t} \tau_{xy} dz - \int_0^{y^*} \tau_{xz} dy = 0. \tag{3.3}$$

Die Komponente hat direkt im Bimaterialpunkt am freien Rand einen schwach-singulären Charakter und klingt im Inneren des Laminats rasch ab, wie in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Auch in Winkelverbunden besteht somit aufgrund der in Randnähe auftretenden interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$  die Gefahr der Bildung interlaminarer Risse.

Der Vollständigkeit halber ist zu erwähnen, dass in Randnähe auch die interlaminaren Spannungen  $\sigma_{zz}$  und  $\tau_{yz}$  auftreten, wobei diese ein bis zwei Größenordnungen kleiner als die Schubspannung  $\tau_{xz}$  sind (Dölling, 2022, Martin et al., 2010). Zudem verschwindet  $\tau_{yz}$  direkt am Rand und die Schälspannung  $\sigma_{zz}$  ist dort eine Druckspannung, was sie hinsichtlich einer Randdelamination weniger kritisch macht. Aus diesen Gründen wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit ausschließlich die interlaminare Schubspannungskomponente  $\tau_{xz}$  zur Modellierung der interlaminaren Rissentstehung in symmetrischen AWWs herangezogen.

### 3.1.2 Versagen an freien Laminaträndern

Das Versagen von Verbundmaterialien kann prinzipiell in zwei Hauptkategorien unterteilt werden: intra- und interlaminare Versagen. Während sich bei einer interlaminaren Schädigung die Einzelschichten im Rahmen von Delaminationsvorgängen voneinander lösen, beschreibt das intralaminare Geschehen die Entstehung von Faser- und Zwischenfaserbrüchen innerhalb einer Einzelschicht. Daneben existieren weitere kritische Grenzzustände wie beispielsweise das Erreichen der Fließgrenze oder der Glasübergangstemperatur des Matrixmaterials, Stabilitätsversagen oder Verformungsgrenzen,

auf die in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird (Schürmann, 2007). Das inter- und das intralaminare Versagen werden üblicherweise getrennt voneinander betrachtet, können aber auch miteinander gekoppelt auftreten. So kann es durch entstehende Delaminationen zu Steifigkeitsreduktionen und Spannungsumverteilungen kommen, die dann wiederum maßgeblich für das folgende intralaminare Versagen sind (Garg, 1988). Auslöser für Delaminationen sind interlaminare Spannungen zwischen den Schichten, die beispielsweise an freien Laminaträndern, bestehenden Materialfehlern oder an Klebe- und Bolzenverbindungen auftreten können.

Im Folgenden wird die interlaminare Rissinitiierung in Winkelverbunden infolge des Laminat-Randeffekts näher beschrieben. Insbesondere das Versagen von AWVs unter Zugbelastung wurde in zahlreichen experimentellen Studien untersucht, da sich hier zuverlässig Delaminationen beobachten lassen, die durch singuläre Randspannungen verursacht wurden (Herakovich, 1982). Lauraitis (1971) stellte in einer der ersten Studien zu diesem Thema fest, dass in  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbunden mit Faserorientierungen von  $\vartheta = 15^\circ$  oder  $30^\circ$  die Schichttrennung einen maßgeblichen Anteil am Versagen der Struktur hat, während bei großen Schichtwinkeln ( $\vartheta = 60^\circ, 75^\circ$ ) keine Delaminationen auftreten. Auch Pipes et al. (1972) beobachteten interlaminare Randrisse an  $[\pm 30^\circ]_s$ -Winkelverbunden und vermuteten einen Zusammenhang zu den gemessenen transversalen Schubverzerrungen. Im Gegensatz dazu konnten sie an  $[\pm 45^\circ]_s$ -Proben keine interlaminare Rissentstehung feststellen. Diese Ergebnisse wurden von Rotem u. Hashin (1975) und Herakovich (1981) im Allgemeinen bestätigt. Auch sie stellten fest, dass Winkelverbunde unter uniaxialer Zugbelastung mit Orientierungen von  $\vartheta < 45^\circ$  zu Delaminationen neigen, während diese für Winkel  $\vartheta > 45^\circ$  nicht mehr zu beobachten sind. Herakovich et al. (1985) analysierten die transversale Schubverzerrung am freien Rand als Funktion des Schichtwinkels und stellten ein Maximum für  $\vartheta = 15^\circ$  fest.

Oplinger et al. (1973) verglichen die kritische Delaminationslast von  $[\pm\vartheta]_s$ - und  $[+\vartheta_4 / -\vartheta_8 / +\vartheta_4]$ -Laminaten und stellten fest, dass diese für  $\vartheta = 10^\circ$  bei der Verwendung dünnerer Schichten in alternierender Reihenfolge ( $[\pm\vartheta]_s$ ) größer ist als bei der Zusammenfassung von Einzelschichten gleicher Orientierung. Dieser *Schichtdickeneffekt* beschreibt die Abnahme der Delaminationslast mit zunehmender Einzelschichtdicke und wird auch in den experimentellen Studien von Harrison u. Bader (1983), Lorriot et al. (2003), Lagunegrand et al. (2006), Diaz Diaz u. Caron (2006) und Herakovich (1982) beschrieben. Letzterer beobachtet zudem einen Wechsel der Versagensart in Abhängigkeit der Schichtdicke: Während bei der Verwendung von dünnen Schichten die intralaminare Rissbildung ausschlaggebend ist, gewinnt bei dickeren Lagen zunehmend das interlaminare Versagen an Bedeutung. Für Lagenwinkel von

$\vartheta = 45^\circ$  konnte kein Dickeneffekt beobachtet werden, zudem versagten die Lamine innerhalb der Einzelschichten.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Randdelamination in symmetrischen, ausgeglichenen Winkelverbunden mit Faserorientierung bis zu  $\vartheta = 45^\circ$  unter uniaxialer Zugbelastung eine der vorherrschenden Versagensarten ist. Zudem scheint ein Größeneffekt in Form einer Abhängigkeit der effektiven Versagenslast von der Einzelschichtdicke zu existieren.

## 3.2 Modelle zur Spannungsanalyse

Seit den ersten Studien von Pipes u. Pagano (1970) und Puppo u. Even-  
sen (1970) ist die Analyse der interlaminaren Spannungskonzentrationen an  
freien Laminaträndern Gegenstand wissenschaftlicher Arbeit. Die klassische  
Laminattheorie beschreibt das globale Verhalten eines Mehrschichtverbunds,  
indem sie die Verzerrungen der Laminatmittelebene auf die Effektiveigen-  
schaften des geschichteten Materials zurückführt. Da das Geschehen des  
Laminat-Randeffekts stark lokalisiert ist und aus den lagenweise unterschied-  
lichen Steifigkeitseigenschaften resultiert, ist die CLT nicht geeignet dies-  
ses darzustellen. Trotz der Vielzahl der Studien ist bis heute keine exakte  
geschlossen-analytische Formulierung zur Beschreibung der Spannungen be-  
kannt (Mittelstedt u. Becker, 2007a). Viele Arbeiten begegnen dem Thema  
näherungsweise in analytischer Form, andere entwerfen semi-analytische oder  
numerische Modelle.

Dieses Unterkapitel gibt einen Überblick über die Ansätze zur Spannungsana-  
lyse, wohlwissend dass dieser Überblick aufgrund der sehr großen Anzahl der  
erschiedenen Publikationen nicht vollständig ist. Der interessierte Leser sei  
auf die zahlreichen Übersichtsarbeiten zu diesem Thema verwiesen (Mittel-  
stedt et al., 2022, Mittelstedt u. Becker, 2007a, 2004, Kant u. Swaminathan,  
2000, Reddy u. Robbins Jr, 1994, Herakovich, 1989b, Pagano, 1989, Pagano  
u. Soni, 1989, Soni u. Pagano, 1983, Salamon, 1980). Der Schwerpunkt der  
vorliegenden Zusammenstellung liegt auf den analytischen Methoden, im  
Anschluss werden einige numerische Ansätze diskutiert.

### 3.2.1 Näherungsweise geschlossen-analytische Methoden

Die Vorstellung der analytischen Näherungslösungen folgt einer von Mittel-  
stedt u. Becker (2007a) vorgeschlagenen Klassifizierung. Sie unterteilen diese

Methoden in einfache gleichgewichtsbasierte Untersuchungen, verschiebungsbasierte und spannungsbasierte Modelle. Die verschiebungs- und spannungsbasierten Theorien können entweder mit Ansatzfunktionen, welche über die gesamte Laminatdicke gültig sind, oder mit schichtweisen Ansätzen formuliert werden.

**Gleichgewichtsmodelle.** Die frühen Überlegungen von Puppo u. Evenesen (1970) basieren auf anisotropen Lagen, die durch Grenzflächenschichten zur Übertragung der interlaminaren Schubspannungen verbunden sind. Die Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen führt zu einem Satz von Differentialgleichungen, der eine grobe qualitative Abschätzung der interlaminaren Schubspannungen ermöglicht. Einige Jahre später schlugen Pagano u. Pipes (1971, 1973) ein Modell vor, das ebenfalls auf Gleichgewichtsforderungen und den Annahmen der CLT basiert und erste Näherungen für die interlaminare Normalspannung liefert. Daraus zogen sie Schlussfolgerungen für die Optimierung der Schichtreihenfolge zur Vermeidung von interlaminarem Versagen. Das Modell wurde von Harris u. Orringer (1978) verfeinert und von Conti u. De Paulis (1985) für Spannungsvorhersagen in Dickenrichtung angewendet.

**Verschiebungsbasierte Modelle.** Bei der Verwendung von verschiebungsbasierten Ansätzen führt die Modellierung der Verbundstruktur als effektive Einzelschicht zu einem kontinuierlichen Verschiebungsfeld in Dickenrichtung, ohne dass Übergangsbedingungen an den Grenzflächen formuliert werden müssen. Andererseits ergeben sich aus diesem Ansatz und dem lagenweise unterschiedlichen konstitutiven Materialverhalten Unstetigkeiten der interlaminaren Spannungen an den Schichtgrenzen. Pagano (1974) entwickelte ein Modell zur Berechnung der interlaminaren Normalspannung in symmetrischen Laminaten unter uniaxialer Dehnung und homogener thermischer Belastung. Es basiert auf den kinematischen Annahmen des GEVZs und einem global formulierten Verschiebungsfeld nach der Schubdeformationstheorie erster Ordnung (FSDT), das mit einem zusätzlichen linearen Term für die Verschiebung in Dickenrichtung angereichert wird. Becker (1993, 1994a) schlug zur Ermittlung der Schälspannung in mittensymmetrischen Laminaten vor, das CLT-Verschiebungsfeld mit speziellen Termen höherer Ordnung anzureichern, um die Verwölbungsgestalt abbilden zu können. Hierfür entwickelte er Formulierungen für Kreuz- und Winkelverbunde, die jeweils auf trigonometrischen Funktionen basieren. Das resultierende Eigenwertproblem liefert die interlaminaren Spannungen effizient in Form von abklingenden Exponentialfunktionen als geschlossen-analytische Lösung. In einer weiteren Studie verfeinerte Becker (1994b) diesen Ansatz für Winkelverbunde, indem er einen verallgemeinerten Verschiebungsansatz verwendete und ihn mithilfe

der Methode komplexer Potentiale löste. Zudem leiteten Becker u. Kress (1994) aus diesem Modell einen Ausdruck für die Minderung des effektiven Elastizitätsmoduls infolge des Randeffekts ab.

Im Vergleich zu einer globalen Formulierung der Verschiebungen bieten schichtweise Ansätze eine größere Flexibilität zur Anpassung an den Schichtaufbau der Struktur. Einerseits sind bei dieser Strategie Übergangsbedingungen erforderlich, um die Kontinuität der Verschiebungen an den Grenzflächen zu gewährleisten, andererseits kann so Stetigkeit der interlaminaren Spannungen gefordert werden. Pipes u. Pagano (1974) approximierten die Verschiebungen in Winkelverbunden unter uniaxialer Dehnung mit hyperbolischen Fourierreihen. Konvergenzuntersuchungen zeigten aber, dass für eine quantitative Darstellung der Lösung eine sehr große Anzahl von Reihengliedern entwickelt werden müssen. Kress u. Becker (1995) schlugen die Verwendung eines schichtweise konstanten Verschiebungsfeldes für ein quasi-isotropes sechslagiges Laminat unter einachsiger Zuglast vor, wobei die Verschiebung in Dickenrichtung vernachlässigt wurde. Das Modell liefert die Steifigkeitsreduzierung aufgrund des Randeffekts in guter Übereinstimmung mit Referenzlösungen. Die von Zhu u. Lam (1998) vorgeschlagene Methode basiert auf einem schichtweisen Verschiebungsfeld, das als kubisches Polynom der Dickenkoordinate formuliert ist. Es garantiert dabei die Kontinuität der Verschiebungen und interlaminaren Spannungen an den Schichtgrenzen. Die Freiwerte der Ansatzfunktionen werden mithilfe einer Rayleigh-Ritz-Methode bestimmt und die resultierende Lösung erfüllt die dynamischen Randbedingungen in einem integralen Sinn. Tahani u. Nosier (2003) schlugen ein Modell zur Untersuchung von Kreuzverbunden vor. Sie formulierten Ansätze für die Verschiebungen an den Schichtgrenzen und interpolierten dazwischen linear. Um die Genauigkeit des Verfahrens zu erhöhen wird jede der physikalischen Schichten in mehrere mathematische Schichten unterteilt. Auf Basis einer Konvergenzstudie schlugen die Autoren die Verwendung von sechs Unterschichten pro Laminatlage vor. Diese Methodik wurde von Mittelstedt u. Becker (2006, 2007b, 2008) auf Laminat mit beliebigem Aufbau unter thermischer und mechanischer Belastung erweitert. Sie verwendeten einen Variationsansatz zur Ermittlung eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung und bestimmten eine geschlossene Lösung in Form von abklingenden Exponentialfunktionen. Im Inneren des Laminats stimmen die Ergebnisse mit der CLT-Lösung überein, während die Spannungsfreiheit des Randes in einem integralen Sinn erfüllt wird.

**Spannungsbasierte Modelle.** Eine alternative Herangehensweise besteht darin, nicht die Formfunktionen für die Verschiebungen sondern für die Spannungen zu postulieren. Flanagan (1994) untersuchte den Randeffekt in Kreuz-

und Winkelverbunden und entwickelte zu diesem Zweck die Spannungen über die gesamte Laminatdicke als harmonische Reihe. Mithilfe des Prinzips vom Minimum des Gesamtenergierpotentials leitete er ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Spannungen ab. Die Lösung erfüllt alle Spannungsrandbedingungen exakt, zeigt aber ein unrealistisches oszillierendes Verhalten in der Nähe des freien Randes.

Die große Mehrheit der Autoren von spannungsbasierten Theorien verwendet schichtweise Ansätze. Wichtige Vertreter dieser Klasse sind Kassapoglou u. Lagace (1986, 1987), die die sogenannte *Force-Balance-Methode* zur Bestimmung der interlaminaren Spannungen in symmetrischen Laminaten vorschlugen. Sie modellierten die Spannungen in jeder Schicht separat als Produkt aus einem exponentiellen Term für die Breitenrichtung und einem Polynom für die Dickenrichtung. Die freien Konstanten der Formfunktionen werden durch Auswertung der Übergangsbedingungen an den Schichtgrenzen und der Randbedingungen mithilfe des Prinzips vom Minimum des Gesamtenergierpotentials bestimmt. Diese Methode ist in der Lage, sowohl die CLT-Lösung im Inneren des Laminats als auch die ansteigende Spannung am freien Rand in guter Näherung zu reproduzieren. Durch diese Studie inspiriert, passten zahlreiche Forscher das Modell weiter an (Kassapoglou, 1989, Morton u. Webber, 1993, Rose u. Herakovich, 1993, Lin et al., 1995) und verallgemeinerten es auf thermische Lasten (Webber u. Morton, 1993). Neben der weitverbreiteten Force-Balance-Methode gibt es weitere Theorien, die auf schichtweise formulierten Spannungsfunktionen beruhen. Tang (1975) und Tang u. Levy (1975) verwendeten Potenzreihen bezüglich der Schichtdicke und hyperbolische sowie trigonometrische bezüglich der Breite zur Approximation der Spannungsfelder. Die wesentliche Einschränkung des geschlossen-analytischen Verfahrens besteht darin, dass die resultierenden Spannungen nicht über die gesamte Dicke der Struktur kontinuierlich sind. Bar-Yoseph u. Pian (1981) und Bar-Yoseph (1983) arbeiteten an ähnlichen Ideen. Pagano (1978a,b) schlug die Verwendung von schichtweisen Spannungen mit linearer Abhängigkeit von der Dickenkoordinate und die Unterteilung der physikalischen Schichten in mathematische Subschichten vor, um die Genauigkeit des Modells zu erhöhen. Die aus einem Variationsansatz ermittelte Lösung erfüllt alle Rand- und Übergangsbedingungen, andererseits ist das Verfahren aber sehr rechenaufwändig. Um es effizienter zu gestalten, unterteilten Pagano u. Soni (1983) den Problembereich und verwendeten das oben beschriebene Modell nur in dem randnahen Bereich. Für den verbleibenden Teil schlugen sie die Verwendung einer Einschichttheorie mit geringerem Rechenaufwand vor. Dieser Ansatz wird in der Literatur als *global-local-model* bezeichnet. Die Ideen von Pagano und Soni wurden von anderen Autoren übernommen und weiterentwickelt (Harrison u. Johnson, 1996, Johnson u.

Kemp, 1985, Diaz Diaz et al., 2002, Pagano et al., 1998).

In der vorliegenden Studie wird eine effiziente analytische Methode zur Ermittlung der Randspannungen in symmetrischen AWVs entwickelt. Dabei werden die Verschiebungen schichtweise als Produkt aus unbekanntem Exponentialfunktionen in Breitenrichtung und Polynomen für die Dickenrichtung modelliert. Die durch das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials gewonnene Lösung erfüllt alle Kontinuitätsbedingungen an den Schichtgrenzen und die Laminatoberfläche ist spannungsfrei. Die Forderung der Spannungsfreiheit des Randes wird im integralen Sinne erfasst. Zudem zeigt die Lösung eine gute Übereinstimmung mit numerischen Referenzdaten.

#### 3.2.2 Numerische Methoden

Die näherungsweise geschlossen-analytischen Modelle sind sehr effizient und vermitteln dem Anwender ein Verständnis für die Wirkmechanismen und die wichtigsten Einflussparameter des Randeffects. Andererseits sind sie meist nur für spezielle Laminataufbauten und Lastfälle konstruiert und folglich beschränkt in ihrer Anwendbarkeit. Demgegenüber lassen sich numerische Verfahren oft besser auf neue Struktursituationen erweitern und sind somit gerade in der industriellen Praxis unersetzlich.

Gerade in der Anfangsphase der Randeffect-Forschung spielte das *Verfahren der Finiten Differenzen* eine bedeutende Rolle. So lösten Pipes u. Pagano (1970) in ihrer wegweisenden Arbeit das System partieller Differentialgleichungen mit dieser Methode und ermittelten so das dreidimensionale Spannungsfeld an den Rändern von  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbunden. In der Folgezeit wurden weitere auf dem Verfahren der Finiten Differenzen basierende Arbeiten publiziert (Pipes, 1972, 1980, Altus et al., 1980). Bauld et al. (1985) veröffentlichten einen Vergleich zwischen Ergebnissen, die mit dem Verfahren der Finiten Differenzen und mit der *Finite-Element-Methode* erzielt wurden. Sie sahen die beiden Ansätze hinsichtlich der Ergebnisgüte als gleichwertig an und erkannten, dass beide Verfahren die Spannungssingularität, selbst mit einer sehr feinen Diskretisierung, nicht vollständig erfassen können.

In den folgenden Jahren gewann die Finite-Element-Methode zunehmend an Bedeutung und es erschien eine große Anzahl von Studien zum Laminat-Randeffect, von denen hier nur eine kleine Auswahl erwähnt wird. Eine ausführlichere Zusammenfassung findet sich in den zu Beginn von Abschnitt 3.2 zitierten Übersichtsstudien. Wang u. Crossman (1977a,b, 1978a,b) publizierten eine Serie von detaillierten Untersuchungen an Laminaten mit unterschiedlichen Schichtreihenfolgen unter mechanischer, thermischer und hygroskopischer Belastung. Hierfür verwendeten sie eine Diskretisierung aus dreiecksförmigen

Elementen basierend auf der Kinematik des GEVZs, welche in Richtung des Bimaterialpunkts stark verfeinert ist. Um die Effizienz der Methode zu erhöhen wurde das Innere der Lamine teilweise als Einschichtmodell abgebildet. Whitcomb u. Raju (1983) entwickelten ein Verfahren zur Reduktion des Problemgebiets auf einen randnahen Bereich, wobei sie die benötigten Schnittlasten aus der CLT ermittelten. Ebenso benutzten sie ein zweidimensionales Modell auf Basis des ebenen Spannungszustands zur Abbildung des Randeffekts in Kreuzverbunden und merkten an, dass dies für Winkelverbunde aufgrund der Schubkopplung nicht möglich ist. In einer weiteren Studie untersuchten sie den Schichtdickeneffekt und fanden heraus, dass die Einzelschichtdicke der angrenzenden Lagen, nicht aber die Gesamtlaminatdicke einen Einfluss auf das Abklingverhalten der interlaminaren Spannungen zu haben scheint (Whitcomb u. Raju, 1985). Wu (1987, 1990) beschäftigte sich mit dem Einfluss von thermischen Eigenspannungen auf die Laminatfestigkeit, konnte aber keine eindeutige Tendenz feststellen. In seinem Modell berücksichtigte er außerdem Nichtlinearitäten und untersuchte den Einfluss eventuell vorhandener, dünner Zwischenschichten aus Matrixmaterial. Yi (1993) behandelte in seiner Studie den Einfluss von zeitabhängigen Vorgängen in viskoelastischen Materialien auf die interlaminaren Spannungen. Weiterhin wurde der Randeffekt infolge von piezoelektrischen Effekten von Artel u. Becker (2005) für Winkel- und Kreuzverbunde untersucht. Sie stellten fest, dass die Auswirkungen der Kopplung der elektrischen und mechanischen Felder auf die interlaminaren Spannungen im Falle des Kreuzverbunds kritischer sind als beim Winkelverbund. Zhang u. Binienda (2014) analysierten den Randeffekt in Gewebelagen unter Zugbelastung mithilfe eines Modells, in dem sie mittels sich wiederholender Elementarzellen die Fasern und die Matrix getrennt darstellten. Sie konnten die Verformung infolge des Randeffekts in guter Übereinstimmung zu experimentellen Befunden darstellen. Die interlaminaren Spannungen und das daraus resultierende Versagen zwischen den Glaskeramik- und den Stahlschichten in Hochtemperaturbrennstoffzellen aufgrund von thermischer Belastung wurden in einer Studie von Bremm et al. (2021) untersucht. Generell können die singulären interlaminaren Spannungen am freien Rand von Laminaten mithilfe von verschiebungsbasierten Standardelementen nur mit einer sehr feinen Diskretisierung und folglich einem sehr großen Berechnungsaufwand zufriedenstellend abgebildet werden (Pin u. Pian, 1973). Aufgrund dessen wurden in zahlreichen Studien Spezialelemente entwickelt, die aufgrund ihrer Ansatzfunktionen besser geeignet sind die Spannungssingularität darzustellen. Allerdings erfordert die Verwendung dieser Elemente teilweise Vorkenntnisse oder ist auf Spezialfälle beschränkt, was ihre breite Anwendung erschwert.

Eine andere Möglichkeit, um den Randeffekt samt der Spannungskonzentra-

tion effizient abzubilden, bietet die von Song u. Wolf (2000a,b) entwickelte *Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode* (Mittelstedt u. Becker, 2005, Artel u. Becker, 2006, Dieringer u. Becker, 2015, Dölling et al., 2018b, 2021). Bei diesem Verfahren muss das Problemgebiets nur entlang des Randes diskretisiert werden, während in radialer Richtung analytische Potenzfunktionen als Ansätze verwendet werden. Daraus resultiert ein deutlich verringerter Berechnungsaufwand und gleichzeitig die Möglichkeit, die singulären Spannungen in Form einer endlichen Potenzreihe mit hoher Genauigkeit zu modellieren. In dieser Arbeit wird eine Finite-Element-Analyse (FEA) als Referenzlösung für die analytische Spannungsmodellierung herangezogen.

### 3.3 Modelle zur Versagensbewertung

Für die Gestaltung von Faserverbundstrukturen ist neben der Kenntnis der Belastungen auch die Vorhersage des potentiellen Versagens von größter Wichtigkeit. Da die ebenen Schichtspannungen beschränkt sind, können zur Analyse des intralaminaren Versagens klassische Festigkeitskriterien (vgl. Unterabschnitt 2.3.1) herangezogen werden. Dieses Vorgehen hat sich vielfach bewährt und es steht eine große Bandbreite an Versagenskriterien für unidirektional verstärkte Materialien zur Verfügung. Zur Analyse der Entstehung von Delaminationen aufgrund der teilweise singulären interlaminaren Spannungen eignen sich diese Konzepte, wie in Unterabschnitt 2.3.3 erläutert ist, nicht. Aufgrund des singulären Verhaltens des Spannungsfeldes am freien Rand werden lokale Festigkeitskriterien schon bei verschwindend geringen äußeren Lasten erfüllt. Darüber hinaus sind bruchmechanische Ansätze wegen des fehlenden Anfangsrissses ebenfalls nicht geeignet. Als Alternative wurden zahlreiche nichtlokale Versagenskriterien zur Vorhersage der Initiierung interlaminarer Risse vorgeschlagen.

Viele Autoren arbeiten mit spannungsbasierten Konzepten, die entweder in einem bestimmten Abstand zur Singularität (*point method*) oder über eine gewisse Distanz gemittelt (*line method*) ausgewertet werden. Die Auswertelänge ist dabei anfänglich unbekannt. Kim u. Soni (1984) bewerteten die interlaminare Festigkeit von mittensymmetrischen Laminaten mithilfe der Schälspannung, die über die Distanz einer Einzelschichtdicke gemittelt ist. In einer weiteren Studie (Soni u. Kim, 1986) verallgemeinerten sie ihre Methode durch die Einbeziehung aller interlaminaren Spannungskomponenten. Zhou u. Sun (1990) verwendeten ein quadratisches Interaktionskriterium, wobei sie die Spannungskomponenten über eine Länge von zwei Schichtdicken mittelten. Sie stellten dem inter- das intralaminare Versagen gegenüber und merkten an,

dass für den betrachteten AWW die interlaminare Rissbildung bis zu einem Schichtwinkel von  $35^\circ$  dominant ist. Brewer u. Lagace (1988) berechneten die Mittelungslänge für das von ihnen angewandte Interaktionskriterium aus experimentellen Daten. Hierfür zogen sie Daten für drei verschiedene Laminataufbauten heran und bildeten daraus einen Durchschnittswert. Für das verwendete kohlefaserverstärkte Epoxidharz (AS1/3501-6) erhielten sie für die Mittelungslänge einen Wert, der zwischen ein und zwei Einzelschichtdicken liegt. Auch Lagunegrand et al. (2006) nutzten experimentelle Daten um die Auswertelänge zu ermitteln. Sie gaben einen Wert von circa einem Zwanzigstel der Einzelschichtdicke an. Diaz Diaz u. Caron (2006) schlugen ein punktuell ausgewertetes Schubspannungskriterium zur Vorhersage der interlaminaren Rissentstehung in AWWs vor. Dabei verwendeten sie den Spannungswert unmittelbar am freien Rand, der aufgrund der Art der durchgeführten Spannungsanalyse endlich ist (Diaz Diaz et al., 2002).

Andere nichtlokale Konzepte postulieren einen bestehenden Anfangsriss um die Werkzeuge der linear-elastischen Bruchmechanik anwenden zu können. Rybicki et al. (1977) verwendeten ein energetisches Kriterium vom Griffith-Typ (2.58) um Delaminationen in mittensymmetrischen Laminaten zu analysieren. Hierbei postulierten sie einen Anfangsriss von der Dimension der Einzelschichtdicke. Ein ähnliches Vorgehen wählten Wang u. Crossman (1980) und Crossman et al. (1980) zur Bewertung des interlaminaren Versagens in  $[\pm 25^\circ/90_n]_s$ -Verbunden. Auch sie vermuteten einen inhärenten Defekt mit der Länge einer Einzelschichtdicke und nahmen an, dass sich dieser in einer dünnen Harzschicht zwischen den Laminatlagen ausbreiten wird. Die ermittelten Delaminationslasten stimmen gut mit experimentellen Befunden überein und der Schichtdickeneffekt kann korrekt abgebildet werden. In einer anderen Studie modellierten Crossman et al. (1979) die Größe des Anfangsrisses als Funktion der Festigkeit, Steifigkeit und Bruchzähigkeit des Materials. Auch Leguillon (1999) stellte die Größe als materialspezifischen Kennwert in Abhängigkeit von Steifigkeit und Bruchzähigkeit dar. Er sah dabei einen gewissen Bezug zu anderen charakteristischen Dimensionen wie zum Beispiel dem Faserdurchmesser. Zwei Jahre später verglichen Leguillon et al. (2001) die Anwendung eines gemittelten Spannungskriteriums mit den Voraussagen des Griffith-Kriteriums unter der Annahme eines initialen Risses. Sie sahen keinen Zusammenhang zwischen den Längenparametern der beiden Methoden, vielmehr müsste die Auswertelänge des Spannungskriteriums deutlich größer sein als die Größe des Initialrisses in der Bruchmechanik, um die gleichen Versagenslasten zu erzielen.

Das Modell von O'Brien (1982) geht von einer vollständigen Delamination über die komplette Breite des Laminats aus. Auf Basis dieser Annahme wird die Energiefreisetzung mittels der CLT modelliert und kommt folglich ohne

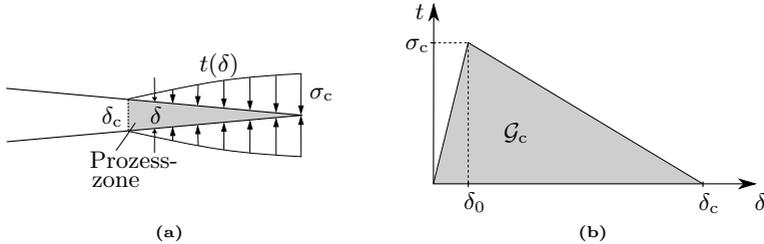
inhärenten Anfangsriß aus. Diese einfach anwendbare Methode erlaubt einige qualitative Erkenntnisse wie zum Beispiel den Einfluss der Schichtdicke oder der Schichtorientierung abzuschätzen.

**Finite Bruchmechanik.** Die Finite Bruchmechanik ist ein nichtlokales Versagenskonzept, das die festigkeitsmechanische und die bruchmechanische Betrachtungsweise vereint. Durch die Berücksichtigung eines spannungs- und eines energiebasierten Teilkriteriums entfällt, wie in Unterabschnitt 2.3.3 erläutert ist, die Notwendigkeit einen künstlichen Längenparameter vorzugeben. Die Theorie wurde bereits mehrfach zur Vorhersage von Randdelaminationen in Verbundstrukturen angewendet. So nutzten Hebel u. Becker (2008) und Bremm et al. (2021) das gekoppelte Kriterium um auf Basis von Finite-Element-Analysen Versagensmechanismen in Hochtemperaturbrennstoffzellen zu analysieren. Hierbei wurden erfolgreich Delaminationen zwischen Glaskeramikdichtungen und Stahlschichten infolge thermischer Belastungen vorausgesagt. Hebel et al. (2010) und Martin et al. (2010) beschäftigten sich in ihren Studien mit der interlaminaren Rissentstehung in symmetrischen Winkelverbunden. Martin et al. (2010) ermittelten dabei die benötigten Versagensparameter, die Bruchzähigkeit und die Festigkeit, mithilfe einer Ausgleichsrechnung aus experimentell bestimmten Delaminationslasten. Dieses Vorgehen führt einerseits zu einer sehr guten Übereinstimmung der errechneten effektiven Festigkeiten mit den experimentellen Daten, andererseits aber auch zu diskutablen Werten für die Festigkeit und die Bruchzähigkeit. Dölling et al. (2018a,b, 2019, 2021) bewerteten die Delaminationsneigung von Winkelverbunden, wobei sie die hocheffiziente Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode nutzten, um die Eingangsdaten für die FBM zu generieren. Unter Verwendung von analytischen Methoden untersuchten Frey et al. (2020, 2021a,b) die interlaminare Rissentstehung in  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunden. Die Studien von Dölling et al. (2021) und Frey et al. (2021c) verwenden die Finite Bruchmechanik zur Vorhersage von Delaminationen in Verbundwerkstoffen unter thermischer Last.

**Kohäsivzonenmodellierung.** Ein anderes Konzept, das sich zur Beschreibung von Delaminationsprozessen eignet, ist die Kohäsivzonenmodellierung<sup>13</sup> (CZM). Wie in der Finiten Bruchmechanik werden in diesem Konzept sowohl festigkeitsmechanische als auch energetische Aspekte bei der Versagensbewertung berücksichtigt. In der jüngeren Vergangenheit erfährt das Modell eine zunehmende Beliebtheit, da es geeignet ist, um spröde und duktile Bruchvorgänge in den verschiedensten Struktursituationen abzubilden (Gross u. Seelig,

---

<sup>13</sup> Engl.: cohesive zone model



**Abbildung 3.4:** Prinzipskizze des Kohäsivzonenmodells (a) und des bilinearen Konstitutivgesetzes.

2017, Da Silva u. Campilho, 2012). Zudem ist es benutzerfreundlich in vielen Finite-Element-Programmpaketen implementiert.

Die Modellierung basiert auf den Arbeiten von Barenblatt (1959) und Dugdale (1960) und berücksichtigt den Schädigungsprozess entlang eines vordefinierten Pfades in einer streifenförmigen Prozesszone. Innerhalb dieser sogenannten Kohäsivzone können sich die durch die Kohäsionsspannung  $t(\delta)$  belasteten potenziellen Rissufer um den Betrag  $\delta$  separieren (vgl. Abbildung 3.4a). Das oft stark nichtlineare Konstitutivgesetz der Kohäsivzone beschreibt den Zusammenhang zwischen der Rissöffnung  $\delta$  und der Kohäsionsspannung  $t(\delta)$ . In Abbildung 3.4b ist beispielhaft ein bilinearer Verlauf dargestellt: Die Spannung nimmt linear mit der Rissöffnung zu, bis die Materialfestigkeit  $\sigma_c$  erreicht ist. Anschließend beginnt die Steifigkeitsdegradation bis das Material bei einer kritischen Rissöffnung  $\delta_c$  vollständig versagt. Für linear-elastische Materialien entspricht die Fläche unter der Kurve genau der Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_c$ , wobei die Form des Konstitutivgesetzes an die jeweilige Struktursituation angepasst werden kann (Alfano, 2006, Cornetti et al., 2018). Die Vorhersagegenauigkeit von numerischen CZM-Implementierungen ist nicht nur von der Form des Kohäsivgesetzes abhängig, sondern insbesondere auch von der Wahl numerischer Parameter wie der Größe oder der initialen Steifigkeit der Kohäsivelemente. Zudem geht die Lösung des nichtlinearen Randwertproblems oft mit einem erheblichen Rechenaufwand einher. Einen guten Überblick über die Details zur Kohäsivzonenmodellierung bietet die Veröffentlichung von Elices et al. (2001).

Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit sind insbesondere die Studien von Camanho u. Davila (2002), Camanho et al. (2003), Turon et al. (2007), Yang u. Cox (2005) und Harper u. Hallett (2008) erwähnenswert, in denen Delaminationsprozesse in Laminaten mithilfe der CZM analysiert wurden. Frey et al. (2021c) und Dölling (2022) verwendeten die CZM um die Vorhersagen

### *3.3 Modelle zur Versagensbewertung*

der FBM bezüglich der interlaminaren Rissbildung in Winkelverbunden abzusichern.



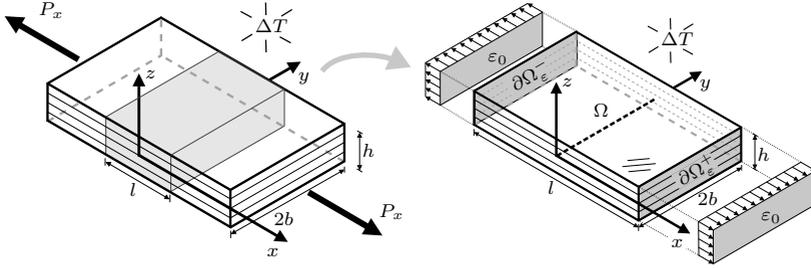
## Kapitel 4

# Entwicklung von effizienten Modellen zur analytischen Beschreibung des Laminat-Randeffekts

*Ziel dieses Kapitels ist die Entwicklung einer maßgeschneiderten analytischen Methode zur Ermittlung der Verschiebungen und Spannungen in der Nähe der freien Ränder von Winkelverbunden unter mechanischer und thermischer Belastung. Da die erzielten Ergebnisse als Grundlage für eine Vorhersage möglicher Randalaminationen dienen, sind insbesondere die Verläufe entlang des potentiellen Risspfades von Interesse. Zunächst werden das zugrunde liegende mechanische Modell und die verwendeten Annahmen eingeführt. Zur Ermittlung der mechanischen Feldgrößen werden anschließend drei neuartige verschiebungsbasierte Mehrschichtverfahren vorgeschlagen, die sich im Polynomgrad ihrer Ansatzfunktion unterscheiden. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Konzepte werden diskutiert und anhand einer speziell für diesen Zweck entwickelten Finite-Elemente-Formulierung verifiziert. Das Modell mit der größten Übereinstimmung zu den Referenzdaten wird für die weitere Verwendung im Rahmen dieser Studie ausgewählt. Die vorgestellten Modellierungen und Ergebnisse wurden in international begutachteten Fachzeitschriften und Tagungsbänden publiziert (Frey et al., 2020, 2021a,b, 2023).*

### 4.1 Mechanisches Modell

In diesem Abschnitt wird das diskutierte mechanische Modell einschließlich der zugehörigen Grundgleichungen und Bezeichnungen eingeführt. Betrachtet wird zuerst allgemein das auf der linken Seite von Abbildung 4.1 dargestellte Verbundlaminat aus homogenen, anisotropen und linear-elastischen Schichten, welches einer axialen Zugkraft  $P_x$  und einer homogenen Temperaturdifferenz



**Abbildung 4.1:** Links: Laminat unter uniaxialer Zugkraft  $P_x$  und homogener thermischer Belastung  $\Delta T$ . Rechts: Repräsentativer Ausschnitt  $\Omega$  der Länge  $l$ . Die Zuglast wirkt in Form einer konstanten Längsdehnung  $\epsilon_0$  auf den Rand  $\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon^+ \cup \partial\Omega_\epsilon^-$ .

$\Delta T$  ausgesetzt ist. Die Struktur besitzt die Höhe  $h$  und die Breite  $2b$ . Ein kartesisches  $x, y, z$ -Koordinatensystem mit den entsprechenden Verschiebungen  $u_x, u_y$  und  $u_z$  wird so eingeführt, dass die  $x, y$ -Ebene die Laminatmittelebene enthält und die Längsbelastung  $P_x$  in  $x$ -Richtung zeigt. Gemäß den Erläuterungen in Abschnitt 3.1 sei angenommen, dass die durch die Lasteinleitung induzierten lokalen Effekte in einem Bereich ausreichend weit von den Enden abgeklungen und die sich einstellenden Verzerrungs- und Spannungsfelder zwar dreidimensional, jedoch unabhängig von der Längskoordinate sind. Es liegt somit ein generalisierter ebener Verzerrungszustand (GEVZ) vor. Die Zugbelastung wird in der Modellierung des mittigen Gebiets durch eine homogene axiale Dehnung  $\epsilon_0$  dargestellt (vgl. Abbildung 4.1 rechts).

**Verschiebungsfeld.** Unter diesen Voraussetzungen lässt sich das schichtweise Verschiebungsfeld nach einem von Lekhnitskii (1963) und Hwu (2010) beschriebenen Verfahren allgemein als

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= S_{11}(Ay + Bz + C)x + \bar{u}_x(y, z) + \omega_y z - \omega_z y + u_{x0}, \\ u_y(x, y, z) &= -S_{11} \frac{A}{2} x^2 - \kappa_t x z + \bar{u}_y(y, z) - \omega_x z + \omega_z x + u_{y0}, \\ u_z(x, y, z) &= -S_{11} \frac{B}{2} x^2 + \kappa_t x y + \bar{u}_z(y, z) + \omega_x y - \omega_y x + u_{z0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

darstellen, wobei  $S_{11}$  eine Komponente des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  der jeweiligen Lage ist. Die Größen  $u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}$  und  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  stehen für die Starrkörpertranslationen und -rotationen der Struktur,  $A$  und  $B$  charakterisieren die Biegungen in der  $x, y$ - und der  $x, z$ -Ebene.  $C$  bezeichnet die gleichmäßige Längsdehnung des Körpers und  $\kappa_t$  ist der Verdrehwinkel pro

Längeneinheit um die  $x$ -Achse. Die drei Funktionen  $\bar{u}_x(y, z)$ ,  $\bar{u}_y(y, z)$  und  $\bar{u}_z(y, z)$  sind unbekannte Komponenten der Verschiebungen, die gemäß den Annahmen des GEVZs nicht von der Längskoordinate  $x$  abhängen.

Das Verschiebungsfeld (4.1) enthält zehn unbekannte Konstanten, die aus den Rand- und Symmetriebedingungen des jeweiligen Randwertproblems bestimmt werden müssen. Die vorliegende Studie konzentriert sich auf die Situation eines symmetrischen ausgeglichenen  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkerverbands bestehend aus vier Schichten der Dicke  $t$ . Nach Pipes u. Pagano (1970) und Mittelstedt u. Becker (2007a) erfüllt das Verschiebungsfeld in diesem Fall bestimmte Symmetriebedingungen. Bezüglich der Laminatmittelebene ( $x, y$ -Ebene) gilt

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(y, z) &= \bar{u}_x(y, -z), \\ \bar{u}_y(y, z) &= \bar{u}_y(y, -z), \\ \bar{u}_z(y, z) &= -\bar{u}_z(y, -z)\end{aligned}\tag{4.2}$$

und in Bezug auf eine zur  $x, z$ -Ebene parallele Ebene mit  $y = b$

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(y + b, z) &= -\bar{u}_x(-y + b, z), \\ \bar{u}_y(y + b, z) &= -\bar{u}_y(-y + b, z), \\ \bar{u}_z(y + b, z) &= \bar{u}_z(-y + b, z).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Die Auswertung dieser Eigenschaften führt auf die Konstanten  $A = B = \kappa_t = u_{x0} = u_{y0} = u_{z0} = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  (Wang u. Choi, 2020). Mit  $S_{11}C = \varepsilon_0$  ergibt sich das Verschiebungsfeld in stark vereinfachter Form zu

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= \varepsilon_0 x + \bar{u}_x(y, z), \\ u_y(x, y, z) &= \bar{u}_y(y, z), \\ u_z(x, y, z) &= \bar{u}_z(y, z),\end{aligned}\tag{4.4}$$

wobei die axiale Dehnung  $\varepsilon_0$  aus einem mechanischen und einem thermischen Anteil bestehen kann.

**Randwertproblem.** Im Folgenden wird die Voigt-Notation verwendet und zur Vereinfachung der Darstellung ein neuer Differentialoperator  $\mathcal{L}$  definiert:

$$\mathcal{L} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z}.\tag{4.5}$$

Hierbei gilt:

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit kann das resultierende Randwertproblem in kompakter Form angegeben werden:

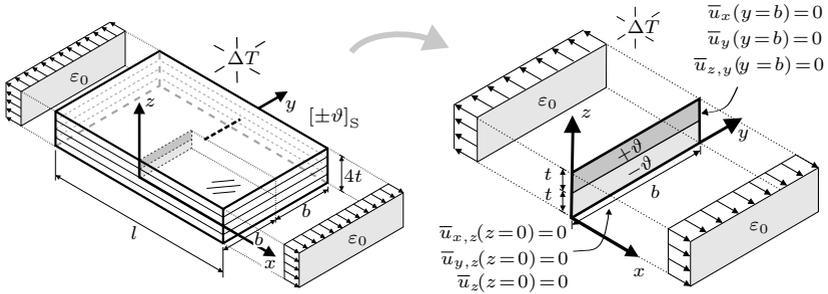
$$\mathbf{L}^T \mathbf{C} (\mathcal{L} \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} \Delta T) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.6)$$

$$(\mathbf{L}_x^T n_x + \mathbf{L}_y^T n_y + \mathbf{L}_z^T n_z) \mathbf{C} (\mathcal{L} \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} \Delta T) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_\varepsilon, \quad (4.7)$$

$$u_{x,x} = \varepsilon_0 \quad \text{auf } \partial\Omega_\varepsilon. \quad (4.8)$$

Hierbei ist  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  der linear-elastische Steifigkeitstensor in Voigt-Notation und  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  der als Spaltenvektor aufgeschriebenen Satz an thermischen Ausdehnungskoeffizienten. Zu beachten ist, dass sich die Größen  $\mathbf{C}$  und  $\boldsymbol{\alpha}$  von Schicht zu Schicht unterscheiden und somit Funktionen der Koordinate  $z$  sind. Der Rand der Struktur  $\partial\Omega$  kann gemäß Abbildung 4.1 in zwei Teile untergliedert werden: Während die äußere Dehnung  $\varepsilon_0$  auf die Oberfläche  $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon^+ \cup \partial\Omega_\varepsilon^-$  wirkt, ist der verbleibende Teil des Randes ( $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_\varepsilon$ ) lastfrei. Die Größe  $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$  stellt den Einheitsnormalenvektor auf der jeweiligen Oberfläche dar und die Verschiebungen sind mit  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bezeichnet. Gleichung (4.6) entsteht durch Einsetzen des Materialgesetzes und der kinematischen Grundgleichungen in die Gleichgewichtsbedingungen.

**Modellreduktion.** Die im Modell vorhandenen Symmetrien gemäß der Bedingungen (4.2) und (4.3) erlauben die Reduktion der betrachteten Struktur auf ein zweischichtiges Viertelmodell der Breite  $b$ . Da die unbekanntes Felder  $\bar{u}_i(y, z)$  im Verschiebungsansatz des generalisierten ebenen Verzerrungszustands nach Ansatz (4.4) unabhängig von der Längskoordinate sind, kann die Geometrie zudem auf ein ebenes Modell in der  $y, z$ -Ebene zurückgeführt werden. Die Reduktion der Modellgeometrie ist in Abbildung 4.2 dargestellt und erlaubt eine effiziente Betrachtung des Randwertproblems (4.6). Die Randbedingungen des Viertelmodells können aus den Symmetriebedingungen des



**Abbildung 4.2:** Die Symmetrieeigenschaften und der generalisierte ebene Verzerrungszustand erlauben, es die Struktur auf ein zweidimensionales Viertelmodell zu reduzieren.

ursprünglichen Modells abgeleitet werden. Bezüglich der Laminatmittelebene ( $z = 0$ ) gilt

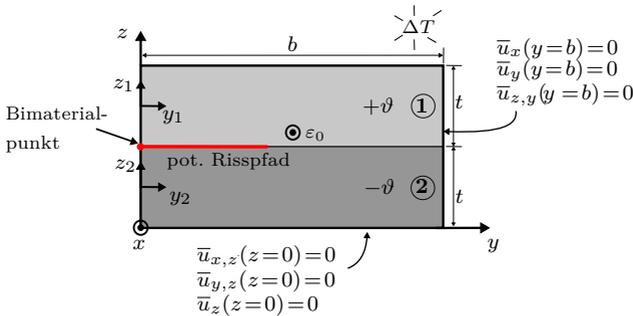
$$\begin{aligned}\bar{u}_{x,z}(y, z = 0) &= 0, \\ \bar{u}_{y,z}(y, z = 0) &= 0, \\ \bar{u}_z(y, z = 0) &= 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

und am rechten Rand bei  $y = b$

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(y = b, z) &= 0, \\ \bar{u}_y(y = b, z) &= 0, \\ \bar{u}_{z,y}(y = b, z) &= 0.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Der linke Rand ( $y = 0$ ) und die Oberfläche des Laminats bei  $z = 2t$  sind unbelastet und spannungsfrei, wobei am Bimaterialpunkt – dort wo die Grenzfläche zwischen den Schichten auf den freien Rand trifft ( $y = 0, z = t$ ) – singuläre interlaminare Spannungen auftreten. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden zwei lokale Koordinatensysteme in den Mittelebenen der Schichten eingeführt. Das auf die  $y, z$ -Ebene reduzierte Modell inklusive der diskutierten Randbedingungen ist in Abbildung 4.3 dargestellt und dient als Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

In den folgenden Abschnitten werden effiziente analytische Konzepte entwickelt, um die Spannungen und Verschiebungen in der Nähe der freien Ränder von symmetrischen AWWs zu ermitteln. Wie in Abschnitt 3.2 ausgeführt ist, existieren bereits Modelle zur analytischen Darstellung des Laminat-Randeffekts. Bisher wurde keine exakte geschlossen-analytische Lösung des Randwertproblems (4.6) gefunden (Mittelstedt u. Becker, 2007a), und auch die hier vorgeschlagenen Verfahren liefern Näherungslösungen. Das Ziel der



**Abbildung 4.3:** Schematische Darstellung des zweidimensionalen Viertelmodells.

Modellierung ist die Entwicklung eines maßgeschneiderten Berechnungswerkzeugs, das die zur Vorhersage von interlaminaren Versagen benötigten Daten bereitstellt. Aus diesem Grund sind insbesondere die Verläufe entlang des potentiellen Risspfades – also ausgehend vom freien Rand entlang der Grenzfläche zwischen zwei Schichten unterschiedlicher Orientierung – von Interesse. Für den betrachteten Winkelverbund existieren in Randnähe drei stark überhöhte interlaminare Spannungskomponenten, welche für die Entstehung einer Delamination maßgeblich sein können: die Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$ , sowie die Schälspannung  $\sigma_{zz}$ . Wie bereits in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, ist die Schubspannung  $\tau_{xz}$  ca. zwei Ordnungen größer als die anderen beiden Komponenten (Dölling, 2022, Martin et al., 2010). Da  $\tau_{yz}$  zudem direkt am Rand verschwindet und die Schälspannung  $\sigma_{zz}$  dort eine Druckspannung ist, konzentrieren sich die folgenden Betrachtungen auf die Schubspannungen  $\tau_{xz}$ . Die Verschiebung  $u_z$  ist in der betrachteten Situation gemäß den Annahmen des GEVZs unabhängig von der  $x$ -Koordinate, wodurch sich die kinematische Beziehung für die ausschlaggebende transversale Schubverzerrung zu  $\gamma_{xz} = u_{x,z}$  vereinfacht. Somit ist die Verschiebung  $u_z$  für die Vorhersage der Delamination von untergeordnetem Interesse und wird im Folgenden vernachlässigt (Puppo u. Evensen, 1970, Herakovich et al., 1985).

In den folgenden Unterkapiteln werden drei verschiebungsbasierte Mehrschichtmodelle entwickelt, die sich in dem Grad der Ansatzfunktion unterscheiden: das grundlegendste Modell besitzt schubstarre Schichten, während die fortgeschritteneren Konzepte auf der Schubdeformationstheorie erster bzw. dritter Ordnung basieren.

## 4.2 Konzept mit schubstarren Schichten

Verbundlaminate sind in den meisten technischen Anwendungen als flächige Strukturen geringer Dicke ( $h \ll b, l$ ) konzipiert. In einem ersten Konzept werden die mechanischen Feldgrößen dementsprechend innerhalb einer Einzelschicht als konstant über die Dicke modelliert.

### 4.2.1 Grundkonzept

Als Ausgangspunkt für die Überlegungen in diesem Abschnitt dient der folgende Ausdruck für das Verschiebungsfeld der  $k$ -ten Laminatschicht ( $k = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} u_x^{(k)}(x, y, z) &= \varepsilon_0 x + \hat{u}_x^{(k)}(y), \\ u_y^{(k)}(x, y, z) &= \hat{u}_y^{(k)}(y), \\ u_z^{(k)}(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

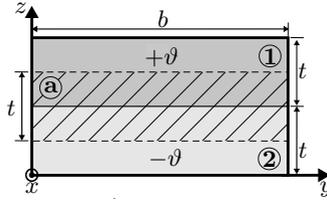
Die unbekanntenen Verschiebungen  $\hat{u}_i^{(k)}$  sind in den Mittelebenen der Schichten definiert und in Dickenrichtung unveränderlich. Die Auswertung der kinematischen Grundgleichungen (2.6) ergibt

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \hat{u}_{y,y} \\ \hat{u}_{x,y} \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (4.12)$$

für die ebenen Verzerrungen, während die transversalen Schubdeformationen verschwinden:  $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ . Die ebenen Spannungen lassen sich anschließend aus der Konstitutivgesetz der Einzelschicht (2.25) ermitteln.

Der in Dickenrichtung schichtweise konstante Ansatz (4.11) führt im Allgemeinen zu an den Grenzflächen diskontinuierlichen Verschiebungen und ist nicht in der Lage die Verwölbung des Laminats zu reproduzieren. Insbesondere die transversale Schubverzerrung  $\gamma_{xz}$ , die für Modellierung des Randeffekts in symmetrischen Winkelverbunden wesentlich ist (Wang u. Crossman, 1977b), verschwindet.

Um dieses Problem zu umgehen, wird eine virtuelle Grenzschicht der Dicke  $t$  zwischen den Mittelebenen der unidirektionalen Laminatlagen eingeführt, innerhalb der die transversalen Schubverzerrungen auf Basis einer vereinfachten Kinematik modelliert werden. Abbildung 4.4 zeigt eine schematische Skizze des resultierenden Modells, das im Folgenden in Anlehnung an die *general sandwich-type*-Ansätze der Klebschichtmodellierung (Bigwood u. Crocombe,



**Abbildung 4.4:** Schematische Darstellung des Sandwich-Modells für den Laminat-Randeffekt. Die Grenzschicht („a“) ist der eigentlichen Struktur überlagert.

1989, Stein, 2018) als Sandwich-Modell (SW) bezeichnet wird. Die virtuelle Grenzschicht, die mit dem hochgestellten Index ( $a$ ) bezeichnet ist, wird der eigentlichen Struktur überlagert, so dass die Höhen der Einzelschichten ( $t$ ) und des Viertelmodells ( $2t$ ) unverändert bleiben.

**Modellierung der Grenzschicht.** Die virtuelle Grenzschicht ist nach dem *weak-interface*-Ansatz konzipiert. Gemäß dieses Modellierungsansatzes (Hashin, 2002, Benveniste u. Miloh, 2001, Lenci, 2001) dürfen die Verschiebungen, d. h. im vorliegenden Fall  $u_x$  und  $u_y$ , an der Grenzfläche Unstetigkeiten aufweisen und die Dehnungen in der virtuellen Schicht werden als konstant in Dickenrichtung angenommen. Daher können die transversalen Schubdeformationen direkt durch die Verschiebungen der Laminatlagen ausgedrückt werden:

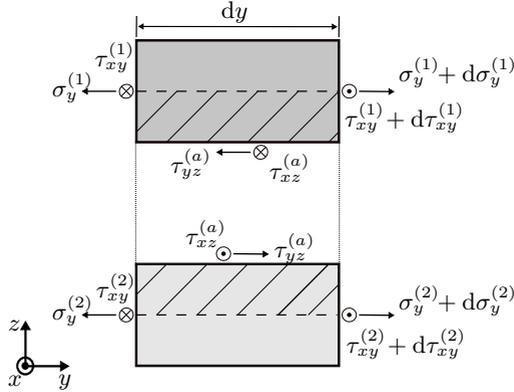
$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^{(a)} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} \hat{u}_y^{(1)} - \hat{u}_y^{(2)} \\ \hat{u}_x^{(1)} - \hat{u}_x^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Das konstitutive Verhalten der Grenzschicht wird durch eine kontinuierliche Verteilung linearer Federn in die tangentialen Richtungen modelliert, wobei die Spannungen einem orthotropen Materialgesetz folgen. Für die interlaminaren Schubspannungen wird die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^{(a)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(a)} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^{(a)} \quad (4.14)$$

postuliert, wobei die Schubsteifigkeiten  $\bar{C}_{ij}^{(a)}$  der Grenzschicht aus denen der beiden Laminatlagen gemittelt werden. Es folgt:  $\bar{C}_{44}^{(a)} = \bar{C}_{44}^{(+\vartheta)} = \bar{C}_{44}^{(-\vartheta)}$ ,  $\bar{C}_{55}^{(a)} = \bar{C}_{55}^{(+\vartheta)} = \bar{C}_{55}^{(-\vartheta)}$  und  $\bar{C}_{45}^{(a)} = 0$ .

## 4.2 Konzept mit schubstarken Schichten



**Abbildung 4.5:** Freikörperbild eines infinitesimalen Streifens (Breite  $dy$ ) des Sandwich-Modells.

**System gewöhnlicher Differentialgleichungen.** An einem freigeschnittenen infinitesimalen Streifen der Breite  $dy$  werden die Gleichgewichtsbedingungen schichtweise ausgewertet. Für das in Abbildung 4.5 dargestellte Element ergeben sich die folgenden vier Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy,y}t - \tau_{xz}^{(a)} &= 0, \\
 \sigma_{yy,y}t - \tau_{yz}^{(a)} &= 0, \\
 \tau_{xy,y}t + \tau_{xz}^{(a)} &= 0, \\
 \sigma_{yy,y}t + \tau_{yz}^{(a)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Das Einsetzen der Materialgesetze und der kinematischen Beziehungen der Laminatschichten (2.25, 4.12) und der Grenzschicht (4.13, 4.14) in die Gleichgewichtsbedingungen führt auf ein System aus vier homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das System lässt sich mithilfe der Systemmatrizen  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  und dem Vektor der unbekanntenen Verschiebungen

$$\boldsymbol{\Psi} = \left[ \hat{u}_x^{(1)} \quad \hat{u}_y^{(1)} \quad \hat{u}_x^{(2)} \quad \hat{u}_y^{(2)} \right]^T \tag{4.16}$$

kompakt angeben:

$$\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\Psi}_{,yy} + \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}. \tag{4.17}$$

Die Randbedingungen am spannungsfreien Rand ( $y = 0$ ) und in der Symmetrieebene ( $y = b$ ) vervollständigen das zu lösende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(1)}(y = 0) &= 0, & \hat{u}_y^{(1)}(y = b) &= 0, \\ \sigma_{yy}^{(2)}(y = 0) &= 0, & \hat{u}_y^{(2)}(y = b) &= 0, \\ \tau_{xy}^{(1)}(y = 0) &= 0, & \hat{u}_x^{(1)}(y = b) &= 0, \\ \tau_{xy}^{(2)}(y = 0) &= 0, & \hat{u}_x^{(2)}(y = b) &= 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die äußeren Lasten ( $\varepsilon_0$  bzw.  $\Delta T$ ) werden dabei über die Randbedingungen berücksichtigt.

### 4.2.2 Lösung des Differentialgleichungssystems

Um eine allgemeine Lösung des Systems (4.17) zu bestimmen, wird zunächst ein Hilfsvektor

$$\Phi = [\Psi \quad \Psi_{,y}]^T \tag{4.19}$$

definiert, mit dessen Hilfe das System zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung überführt werden kann:

$$\Phi_{,y} = \mathbf{T}\Phi \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}. \tag{4.20}$$

Hierbei ist  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  die Einheitsmatrix.

**Rückführung auf Eigenwertproblem.** Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (4.20) für die unbekanntten Verschiebungen und ihre Ableitungen lässt sich mithilfe des Ansatzes

$$\Phi = \mathbf{v}e^{\lambda y} \tag{4.21}$$

effizient lösen, wobei  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor der Systemmatrix  $\mathbf{T}$  und  $\lambda$  der zugehörige Eigenwert ist. Zu jedem der Eigenwerte  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 8\}$ , existiert eine linear unabhängige Vektorlösung  $\chi_i$  des Systems (4.20). Im Allgemeinen können die Eigenwerte je nach betrachteter Struktursituation entweder null, real oder komplex sein (Weißgraeber et al., 2014, Stein, 2018).

Im vorliegenden Fall gibt es vier Null-Eigenwerte  $\lambda_i = 0$ , aber nur zwei zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$ . Aus diesen ergeben sich gemäß des Ansatzes (4.21) zwei Lösungsvektoren:

$$\chi_i = \mathbf{v}_i \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \tag{4.22}$$

## 4.2 Konzept mit schubstarrten Schichten

wobei es sich um Starrkörperbewegungen, hier speziell um Verschiebungen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung, handelt. Falls, wie im vorliegenden Fall, die geometrische Vielfachheit einer Nullstelle geringer ist als die algebraische Vielfachheit, so lassen sich zusätzlich zu den Eigenvektoren linear unabhängige Hauptvektoren höherer Ordnung bestimmen, so dass zu einem  $n$ -fachen Eigenwert auch  $n$  linear unabhängige Lösungsvektoren konstruiert werden können. Nach Merz u. Knabner (2017) erfüllen die Hauptvektoren  $\mathbf{v}^{(k)}$  der Stufe  $k$  zum Eigenwert  $\lambda$  folgende Bestimmungsgleichung:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0} \quad \wedge \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v}^{(k)} \neq \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

Man beachte, dass die geläufigen Eigenvektoren genau den Hauptvektoren erster Stufe entsprechen. Für das betrachtete System können für den vierfachen Nulleigenwert neben den beiden Eigenvektoren zwei Hauptvektoren zweiter Stufe gefunden werden. Aus den Hauptvektoren  $\mathbf{v}_i$  der Stufe  $k$  lassen sich die Lösungsanteile

$$\chi_i(y) = e^{\lambda y} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})^n \mathbf{v}_i y^n \quad \text{mit} \quad i = 3, 4 \quad (4.24)$$

konstruieren. Die Lösungen zu den Hauptvektoren zweiter Ordnung entsprechen für die betrachtete Struktursituation einer Dehnung in  $y$ -Richtung und einer Drehung um die  $z$ -Achse.

Reelle Eigenwerte treten in Paaren von betragsgleichen positiven und negativen Zahlen  $\lambda_{\mathbb{R}} = \pm a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , auf und besitzen die linear unabhängigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_{\mathbb{R}}^+$  und  $\mathbf{v}_{\mathbb{R}}^-$ . Die Lösungen zu den reellen Eigenwerten sind gemäß des Ansatzes (4.21) als Exponentialfunktionen gegeben:

$$\chi_{\mathbb{R}} = \{\mathbf{v}_{\mathbb{R}}^+ e^{ay}, \mathbf{v}_{\mathbb{R}}^- e^{-ay}\}. \quad (4.25)$$

Je nach Vorzeichen des Eigenwerts handelt es sich um abklingende oder ansteigende Lösungsanteile, wobei in der betrachteten Struktursituation mit einer Singularität bei  $y = 0$  nur die abklingenden Anteile von Bedeutung sind. Im vorliegenden Fall gibt es zwei Paare von betragsgleichen reellen Eigenwerten und somit vier zugehörige linear unabhängige Vektorlösungen  $\chi_5$ ,  $\chi_6$ ,  $\chi_7$  und  $\chi_8$ .

**Allgemeine Lösung.** Die Gesamtheit der acht linear unabhängigen Lösungsvektoren bildet das sogenannte Fundamentalsystem

$$\mathcal{X} = [\chi_1 \quad \chi_2 \quad \dots \quad \chi_8] \quad (4.26)$$

und die allgemeine Lösung  $\Phi$  ergibt sich aus der Linearkombination aller möglichen speziellen Lösungen:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^8 C_i \chi_i, \quad (4.27)$$

wobei die unbekanntenen Koeffizienten  $C_i$  aus den Randbedingungen des Systems (4.18) bestimmt werden.

Es lässt sich zusammenfassen, dass das Sandwich-Modell mit den Verschiebungen  $\hat{u}_i^{(k)}$  ( $i = x, y, k = 1, 2$ ) vier Unbekannte besitzt und in einem lagenweise konstanten Verschiebungsfeld resultiert, das an der Schichtgrenze einen Sprung aufweist. Die interlaminaren Schubspannungen ergeben sich aus diesem Verschiebungssprung auf Basis der speziellen Grenzschicht-Kinematik (4.13) und dem linear-elastischen Materialgesetz (4.14).

### 4.3 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie erster Ordnung

Um die Verwölbung der Struktur abbilden zu können, ohne eine virtuelle Zwischenschicht einzuführen, wird in den folgenden beiden Konzepten die Abhängigkeit der Verschiebung  $u_x$  von der Dickenkoordinate  $z$  direkt im Verschiebungsansatz berücksichtigt. Grundlage der folgenden Betrachtungen ist wieder der in Abbildung 4.3 dargestellte Querschnitt des Laminat-Viertelmodells in der  $y, z$ -Ebene.

#### 4.3.1 Grundkonzept

In diesem Abschnitt wird gemäß der in Abschnitt 2.2.2 eingeführten Schubdeformationstheorie erster Ordnung das Verschiebungsfeld der  $k$ -ten Laminatschicht ( $k = 1, 2$ ) als Polynom ersten Grades der Dickenkoordinate  $z$  formuliert:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)}(x, y, z) &= \varepsilon_0 x + \hat{u}_x^{(k)}(y) + z^{(k)} \psi_x^{(k)}(y), \\ u_y^{(k)}(x, y, z) &= \hat{u}_y^{(k)}(y) + z^{(k)} \psi_y^{(k)}(y), \\ u_z^{(k)}(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die unbekanntenen Funktionen  $\hat{u}_i^{(k)}$  und  $\psi_i^{(k)}$  entsprechen den Verschiebungen der Schichtmittelebene bzw. den Verdrehwinkeln der Normalen und hängen

### 4.3 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie erster Ordnung

nur von der Koordinate  $y$  ab. Die Auswertung der kinematischen Beziehungen (2.6) ergibt die ebenen Verzerrungskomponenten als lineare Funktion von  $z$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \hat{u}_{y,y} \\ \hat{u}_{x,y} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_0}^{(k)} + z^{(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}^{(k)}, \quad (4.29)$$

während die transversalen Schubdeformationen lagenweise konstant sind:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^{(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{yz} \\ \psi_{xz} \end{bmatrix}}_{\gamma_0}^{(k)}. \quad (4.30)$$

Die Spannungen und Schnittgrößen können gemäß der im Grundlagenteil eingeführten konstitutiven Beziehungen (2.29, 2.31, 2.37, 2.39) ermittelt werden. Das Modell erster Ordnung erlaubt gemäß des Ansatzes (4.28) eine lineare Variation der Verschiebungen  $u_x^{(k)}$  und  $u_y^{(k)}$  über die Schichtdicke. Die Übergangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_x^{(1)}(z^{(1)} = -t/2) &= u_x^{(2)}(z^{(2)} = +t/2) \\ u_y^{(1)}(z^{(1)} = -t/2) &= u_y^{(2)}(z^{(2)} = +t/2), \end{aligned} \quad (4.31)$$

gewährleisten dabei die Stetigkeit der Verschiebungen zwischen den Laminatlagen. Das ermöglicht es, die Verdrehwinkel der Normalen der Mittelebene der  $-\vartheta$ -Schicht in Abhängigkeit der übrigen kinematischen Größen auszudrücken:

$$\begin{bmatrix} \psi_x^{(2)} \\ \psi_y^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/t \left( \hat{u}_x^{(1)} - \hat{u}_x^{(2)} \right) - \psi_x^{(1)} \\ 2/t \left( \hat{u}_y^{(1)} - \hat{u}_y^{(2)} \right) - \psi_y^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

was die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells von acht auf sechs reduziert.

#### 4.3.2 Variationsproblem

Für das vorgestellte Modell ist es zweckmäßig, sich zur Gewinnung der Differentialgleichungen eines energiebasierten Variationsprinzips zu bedienen, da eine Herleitung auf Basis der Formulierung von Gleichgewichtsbedingungen in diesem Fall nicht eindeutig ist (Mittelstedt, 2017). Das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials (2.20) liefert eindeutig die sechs Differentialgleichungen samt der zwölf Randbedingungen, die zur Bestimmung der

unbekannten kinematischen Größen nötig sind. Da im vorliegenden Fall keine Spannungsrandbedingungen und Volumenlasten existieren, verschwindet das äußere Potential:  $\Pi^a = 0$ . Die Anwendung des Verfahrens vereinfacht sich somit zur Forderung, dass die Variation des inneren Potentials verschwindet:

$$\delta\Pi = \delta\Pi^i = \delta\left(\Pi^{i,(1)} + \Pi^{i,(2)}\right) = 0, \quad (4.33)$$

wobei das innere Potential der  $k$ -ten Schicht auf Basis der Schnittgrößen angegeben werden kann:

$$\Pi^{i,(k)} = \frac{l}{2} \int_0^b \left\{ \mathbf{N}^{(k)T} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_T^{(k)} \right) + \mathbf{M}^{(k)T} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} + \mathbf{Q}^{(k)T} \boldsymbol{\gamma}_0^{(k)} \right\} dy. \quad (4.34)$$

Hierbei ist  $\boldsymbol{\varepsilon}_T = \Delta T [\alpha_{xx} \ \alpha_{yy} \ \alpha_{xy}]^T$  der Vektor der ebenen thermischen Verzerrungen, die Größen  $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1$  bzw.  $\boldsymbol{\gamma}_0$  enthalten Verzerrungsanteile gemäß den Gleichungen (4.29, 4.30) und die Länge  $l$  ist in der gewählten ebenen Betrachtung beliebig.

**Differentialgleichungssystem.** Die Anwendung des Variationsverfahrens liefert nach Ausführung der partiellen Integration und Einsetzen der kinematischen und konstitutiven Beziehungen (4.29, 4.30, 2.31, 2.39) ein System von sechs gekoppelten, homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} N_{xy,y}^{(1)} + \frac{2}{t}(M_{xy,y}^{(2)} - Q_x^{(2)}) &= 0, \\ N_{xy,y}^{(2)} - \frac{2}{t}(M_{xy,y}^{(2)} - Q_x^{(2)}) &= 0, \\ N_{yy,y}^{(1)} + \frac{2}{t}(M_{yy,y}^{(2)} - Q_y^{(2)}) &= 0, \\ N_{yy,y}^{(2)} - \frac{2}{t}(M_{yy,y}^{(2)} - Q_y^{(2)}) &= 0, \\ M_{xy,y}^{(1)} - M_{xy,y}^{(2)} &= Q_x^{(1)} - Q_x^{(2)}, \\ M_{yy,y}^{(1)} - M_{yy,y}^{(2)} &= Q_y^{(1)} - Q_y^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

### 4.3 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie erster Ordnung

Die Randbedingungen am spannungsfreien Rand ( $y = 0$ ) und in der Symmetrieebene ( $y = b$ ) vervollständigen das zu lösende Randwertproblem:

$$\begin{aligned}
 N_{xy}^{(1)}(y=0) + 2/t M_{xy}^{(2)}(y=0) &= 0, & \hat{u}_x^{(1)}(y=b) &= 0, \\
 N_{yy}^{(1)}(y=0) + 2/t M_{yy}^{(2)}(y=0) &= 0, & \hat{u}_x^{(2)}(y=b) &= 0, \\
 N_{xy}^{(2)}(y=0) - 2/t M_{xy}^{(2)}(y=0) &= 0, & \hat{u}_y^{(1)}(y=b) &= 0, \\
 N_{yy}^{(2)}(y=0) - 2/t M_{yy}^{(2)}(y=0) &= 0, & \hat{u}_y^{(2)}(y=b) &= 0, \\
 M_{xy}^{(1)}(y=0) + M_{xy}^{(2)}(y=0) &= 0, & \psi_x^{(1)}(y=b) &= 0, \\
 M_{yy}^{(1)}(y=0) + M_{yy}^{(2)}(y=0) &= 0, & \psi_y^{(1)}(y=b) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Die äußeren Lasten ( $\varepsilon_0$  bzw.  $\Delta T$ ) werden über die dynamischen Randbedingungen im System berücksichtigt.

**Lösung des Systems.** Werden die Schnittkräfte durch die zugrunde liegenden Verschiebungen ausgedrückt, können die Differentialgleichungen (4.35) in Matrixschreibweise kompakt als System zweiter Ordnung

$$\mathbf{T}_1 \Psi_{,yy} + \mathbf{T}_2 \Psi = \mathbf{0} \tag{4.37}$$

mit den Systemmatrizen  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  und dem Vektor der Unbekannten

$$\Psi = \Psi \in \mathbb{R}^{6 \times 1} = [\hat{u}_x^{(1)}, \hat{u}_y^{(1)}, \hat{u}_x^{(2)}, \hat{u}_y^{(2)}, \psi_x^{(1)}, \psi_y^{(1)}]^T \tag{4.38}$$

angeben werden. Analog zu der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Vorgehensweise kann das Differentialgleichungssystem auf ein System erster Ordnung reduziert und mithilfe des Exponentialansatzes (4.21) auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt werden. Die allgemeine Lösung für die unbekannt kinematischen Größen ergibt sich gemäß Gleichung (4.27) als Linearkombination aller möglichen speziellen Lösungen. Die Verdrehwinkel  $\psi_x^{(2)}$  und  $\psi_y^{(2)}$  der Schicht 2 werden anschließend mithilfe der Substitutionsbeziehung (4.32) bestimmt.

Von besonderem Interesse für die Vorhersage des interlaminaren Versagens ist der Verlauf der transversalen Schubspannung  $\tau_{xz}$ . Das Modell erster Ordnung bildet den Verlauf der Verschiebungen linear über die Dicke ab und resultiert somit in lagenweisen konstanten transversalen Schubverzerrungen und -spannungen, wodurch im Allgemeinen weder die Spannungsfreiheit des freien Rand bei  $z = 2t$  noch die Stetigkeit an den Schichtgrenzen gewährleistet

ist. Abhilfe schafft die Bestimmung der interlaminaren Schubspannungen aus der Integration der lokalen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz}(z) \\ \tau_{xz}(z) \end{bmatrix} = \int_z^{2t} \begin{bmatrix} \sigma_{yy,y}(\bar{z}) \\ \tau_{xy,y}(\bar{z}) \end{bmatrix} d\bar{z}, \quad (4.39)$$

was im vorliegenden Fall zu einem quadratischen Verhalten von  $\tau_{xz}$  in Dickenrichtung führt. Allerdings steht der so ermittelten Schubspannungsverlauf im Widerspruch zu dem im Modell verwendeten Konstitutivgesetz (2.37) und ist somit nicht mehr exakt im Sinne der Elastizitätstheorie.

Es lässt sich zusammenfassen, dass das Modell erster Ordnung sechs Unbekannte besitzt ( $u_i^{(k)}, \psi_i^{(1)}$ ) und in der Lage ist, ein lineares Verschiebungsfeld und eine schichtweise konstante Schubverzerrung zu reproduzieren. Die Stetigkeit der Verschiebungen an der Schichtgrenze wird bereits im Variationsansatz berücksichtigt, während die Rand- und Übergangsbedingungen an die transversalen Schubspannungen erst in der Spannungsnachrechnung zur Geltung kommen. Insbesondere bei dickeren oder schubweicheren Laminaten kann es aufgrund der Annahme lagenweiser konstanter Schubverzerrungen zu größeren Ungenauigkeiten kommen.

## 4.4 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung

Mit dem Ziel die Rand- und Übergangsbedingungen realitätsgetreuer berücksichtigen und die Deformation der Struktur detaillierter abbilden zu können, wird ein Verschiebungsansatz dritter Ordnung implementiert.

### 4.4.1 Grundkonzept

Um die Verwölbungsform des symmetrischen ausgeglichenen Winkelverbunds möglichst exakt und zugleich effizient zu modellieren, eignet sich ein Ansatz nach der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die Verschiebungen der  $k$ -ten Einzelschicht ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)}(x, y, z) &= \varepsilon_0 x + \hat{u}_x^{(k)}(y) + z^{(k)} \psi_x^{(k)}(y) + z^{(k)2} \theta_x^{(k)}(y) + z^{(k)3} \lambda_x^{(k)}(y), \\ u_y^{(k)}(x, y, z) &= \hat{u}_y^{(k)}(y) + z^{(k)} \psi_y^{(k)}(y) + z^{(k)2} \theta_y^{(k)}(y) + z^{(k)3} \lambda_y^{(k)}(y), \\ u_z^{(k)}(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

#### 4.4 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung

Wie im vorangegangenen Modell stehen die unbekannt Funktionen  $\hat{u}_i^{(k)}$  und  $\psi_i^{(k)}$  für die Verschiebungen der Schichtmittelebenen bzw. die Verdrehwinkel der Normalen der Mittelebene. Zusätzlich kommen in der Theorie dritter Ordnung die Freiheitsgrade höherer Ordnung  $\theta_i^{(k)}$  und  $\lambda_i^{(k)}$  hinzu. Die Auswertung der kinematischen Beziehungen (2.6) resultiert in einer Darstellung der ebenen Verzerrungskomponenten als Polynom dritten Grades von  $z$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \hat{u}_{y,y} \\ \hat{u}_{x,y} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_0} + z^{(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1} + z^{(k)2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_2} + z^{(k)3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{y,y} \\ \lambda_{x,y} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_3}. \quad (4.41)$$

Die transversalen Schubverzerrungen

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^{(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_y \\ \psi_x \end{bmatrix}}_{\gamma_0} + z^{(k)} \underbrace{2 \begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix}}_{\gamma_1} + z^{(k)2} \underbrace{3 \begin{bmatrix} \lambda_y \\ \lambda_x \end{bmatrix}}_{\gamma_2} \quad (4.42)$$

und demzufolge auch die interlaminaren Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$ , zeigen eine quadratische Abhängigkeit von der Dickenkoordinate. Somit besteht die Möglichkeit, mehr Rand- und Übergangsbedingungen zu berücksichtigen als in der Theorie erster Ordnung. Neben der Stetigkeit der Verschiebungen kann nun auch die Stetigkeit der interlaminaren Schubspannungen an den Schichtgrenzen und die Spannungsfreiheit der freien Oberfläche gefordert werden:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(1)}(z^{(1)} = -t/2) &= \tau_{yz}^{(2)}(z^{(2)} = +t/2), \\ \tau_{xz}^{(1)}(z^{(1)} = -t/2) &= \tau_{xz}^{(2)}(z^{(2)} = +t/2), \\ \tau_{yz}^{(1)}(z^{(1)} = +t/2) &= 0, \\ \tau_{xz}^{(1)}(z^{(1)} = +t/2) &= 0, \\ \tau_{yz}^{(2)}(z^{(2)} = -t/2) &= 0, \\ \tau_{xz}^{(2)}(z^{(2)} = -t/2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Zusammen mit den kinematischen Übergangsbedingungen (4.31) ist es dadurch möglich, die Freiheitsgrade höherer Ordnung  $\theta_i^{(k)}$  und  $\lambda_i^{(k)}$  auf Verschie-

bungen der Schichtmittelflächen  $\hat{u}_i^{(k)}$  und die Verdrehwinkel der Normalen  $\psi_i^{(k)}$  zurückzuführen:

$$\begin{bmatrix} \lambda_x^{(1)} \\ \lambda_y^{(1)} \\ \lambda_x^{(2)} \\ \lambda_y^{(2)} \end{bmatrix} = -\frac{4}{3t^2} \begin{bmatrix} \psi_x^{(1)} + t\theta_x^{(1)} \\ \psi_y^{(1)} + t\theta_y^{(1)} \\ \psi_x^{(2)} - t\theta_x^{(2)} \\ \psi_y^{(2)} - t\theta_y^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_x^{(1)} \\ \theta_y^{(1)} \\ \theta_x^{(2)} \\ \theta_y^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{2}{5t^2} \begin{bmatrix} A_\theta + \frac{\overline{C}_{45}}{\overline{C}_{55}} B_\theta \\ -B_\theta - \frac{\overline{C}_{45}}{\overline{C}_{44}} A_\theta \\ -A_\theta + \frac{\overline{C}_{45}}{\overline{C}_{55}} B_\theta \\ B_\theta - \frac{\overline{C}_{45}}{\overline{C}_{44}} A_\theta \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } A_\theta &= -3\hat{u}_x^{(1)} + 3\hat{u}_x^{(2)} + t\psi_x^{(1)} + t\psi_x^{(2)}, \\ B_\theta &= +3\hat{u}_y^{(1)} - 3\hat{u}_y^{(2)} - t\psi_y^{(1)} - t\psi_y^{(2)}, \\ \overline{C}_{ij} &= \overline{C}_{ij}^{(1)}. \end{aligned}$$

Somit besitzt das Modell dritter Ordnung nach Auswertung der Rand- und Übergangsbedingungen in Dickenrichtung noch die acht Unbekannten  $\hat{u}_i^{(k)}$  und  $\psi_i^{(k)}$ ,  $i, k \in \{1, 2\}$ . Zudem ist aus der Substitutionsvorschrift (4.45) erkennbar, dass sich die vier unbekanntenen Größen  $\theta_i^{(k)}$  aus lediglich zwei unabhängigen Funktionen  $A_\theta(\hat{u}_x^{(1)}, \hat{u}_x^{(2)}, \psi_x^{(1)}, \psi_x^{(2)})$  und  $B_\theta(\hat{u}_y^{(1)}, \hat{u}_y^{(2)}, \psi_y^{(1)}, \psi_y^{(2)})$  bestimmen lassen.

#### 4.4.2 Variationsproblem

Wie im Modell erster Ordnung ist es auch in diesem Fall zweckmäßig die Differentialgleichungen und die zugehörigen Randbedingungen mittels des Prinzips vom Stationärwert des Gesamtpotentials (4.33) zu bestimmen. Das innere Potential der Schicht  $k$  in der Theorie dritter Ordnung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Pi^{i,(k)} &= \frac{l}{2} \int_0^b \left\{ N^{(k)T} \left( \varepsilon_0^{(k)} - \varepsilon_T^{(k)} \right) + \right. \\ &\quad M^{(k)T} \varepsilon_1^{(k)} + O^{(k)T} \varepsilon_2^{(k)} + P^{(k)T} \varepsilon_3^{(k)} + \\ &\quad \left. Q^{(k)T} \gamma_0^{(k)} + S^{(k)T} \gamma_1^{(k)} + R^{(k)T} \gamma_2^{(k)} \right\} dy. \end{aligned} \quad (4.46)$$

#### 4.4 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung

Hierbei ist  $\varepsilon_T = \Delta T [\alpha_{xx} \alpha_{yy} \alpha_{xy}]^T$  der als Spaltenvektor dargestellte Satz an thermischen Dehnungen,  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  bzw.  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  enthalten Verzerrungsanteile gemäß der Gleichungen (4.41, 4.42) und die Länge  $l$  ist in der gewählten ebenen Betrachtung beliebig. Da bei dem betrachteten Randwertproblem kein äußeres Potential vorhanden ist ( $\Pi^a = 0$ ), ergibt sich das Gesamtpotential als  $\Pi = \Pi^{i,(1)} + \Pi^{i,(2)}$ .

**Differentialgleichungssystem.** Die Auswertung der Variationsvorschrift  $\delta\Pi = 0$  führt zu einem System von acht homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
 N_{xy,y}^{(1)} - 3c_2(O_{xy,y}^{(1)} - O_{xy,y}^{(2)}) + 6c_3(P_{xy,y}^{(1)} + P_{xy,y}^{(2)}) \\
 + d_1(Q_x^{(1)} + Q_x^{(2)}) - d_2(R_x^{(1)} + R_x^{(2)}) &= 0, \\
 N_{yy,y}^{(1)} - 3c_2(O_{yy,y}^{(1)} - O_{yy,y}^{(2)}) + 6c_3(P_{yy,y}^{(1)} + P_{yy,y}^{(2)}) \\
 + d_1(Q_y^{(1)} + Q_y^{(2)}) - d_2(R_y^{(1)} + R_y^{(2)}) &= 0, \\
 N_{xy,y}^{(2)} + 3c_2(O_{xy,y}^{(1)} - O_{xy,y}^{(2)}) - 6c_3(P_{xy,y}^{(1)} + P_{xy,y}^{(2)}) \\
 - d_1(Q_x^{(1)} + Q_x^{(2)}) + d_2(R_x^{(1)} + R_x^{(2)}) &= 0, \\
 N_{yy,y}^{(2)} + 3c_2(O_{yy,y}^{(1)} - O_{yy,y}^{(2)}) - 6c_3(P_{yy,y}^{(1)} + P_{yy,y}^{(2)}) \\
 - d_1(Q_y^{(1)} + Q_y^{(2)}) + d_2(R_y^{(1)} + R_y^{(2)}) &= 0, \\
 M_{xy,y}^{(1)} + c_2t(O_{xy,y}^{(1)} - O_{xy,y}^{(2)}) - c_3t(7P_{xy,y}^{(1)} + 2P_{xy,y}^{(2)}) \\
 - d_3(9Q_x^{(1)} - Q_x^{(2)}) - d_4(12S_x^{(1)} - 7S_x^{(2)}) &= 0, \\
 M_{yy,y}^{(1)} + c_2t(O_{yy,y}^{(1)} - O_{yy,y}^{(2)}) - c_3t(7P_{yy,y}^{(1)} + 2P_{yy,y}^{(2)}) \\
 - d_3(9Q_y^{(1)} - Q_y^{(2)}) - d_4(12S_y^{(1)} - 7S_y^{(2)}) &= 0, \\
 M_{xy,y}^{(2)} + c_2t(O_{xy,y}^{(1)} - O_{xy,y}^{(2)}) - c_3t(2P_{xy,y}^{(1)} + 7P_{xy,y}^{(2)}) \\
 + d_3(Q_x^{(1)} - 9Q_x^{(2)}) - d_4(7S_x^{(1)} - 12S_x^{(2)}) &= 0, \\
 M_{yy,y}^{(2)} + c_2t(O_{yy,y}^{(1)} - O_{yy,y}^{(2)}) - c_3t(2P_{yy,y}^{(1)} + 7P_{yy,y}^{(2)}) \\
 + d_3(Q_y^{(1)} - Q_y^{(2)}) - d_4(7S_y^{(1)} - 12S_y^{(2)}) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

wobei die verwendeten Konstanten durch

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{2}{5t^2}, & c_3 &= \frac{4}{15t^3}, \\
 d_1 &= \frac{3}{5t}, & d_2 &= \frac{84}{5t^3}, & d_3 &= \frac{2}{25}, & d_4 &= \frac{4}{25t}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

gegeben sind.

Die zugehörigen Randbedingungen am freien Rand ( $y = 0$ )

$$\begin{aligned}
 N_{xy}^{(1)} - 3c_2(O_{xy}^{(1)} - O_{xy}^{(2)}) + 6c_3(P_{xy}^{(1)} + P_{xy}^{(2)}) &= 0, \\
 N_{yy}^{(1)} - 3c_2(O_{yy}^{(1)} - O_{yy}^{(2)}) + 6c_3(P_{yy}^{(1)} + P_{yy}^{(2)}) &= 0, \\
 N_{xy}^{(2)} + 3c_2(O_{xy}^{(1)} - O_{xy}^{(2)}) - 6c_3(P_{xy}^{(1)} + P_{xy}^{(2)}) &= 0, \\
 N_{yy}^{(2)} + 3c_2(O_{yy}^{(1)} - O_{yy}^{(2)}) - 6c_3(P_{yy}^{(1)} + P_{yy}^{(2)}) &= 0, \\
 M_{xy}^{(1)} + c_2t(O_{xy}^{(1)} - O_{xy}^{(2)}) - c_3t(7P_{xy}^{(1)} + 2P_{xy}^{(2)}) &= 0, \\
 M_{yy}^{(1)} + c_2t(O_{yy}^{(1)} - O_{yy}^{(2)}) - c_3t(7P_{yy}^{(1)} + 2P_{yy}^{(2)}) &= 0, \\
 M_{xy}^{(2)} + c_2t(O_{xy}^{(1)} - O_{xy}^{(2)}) - c_3t(2P_{xy}^{(1)} + 7P_{xy}^{(2)}) &= 0, \\
 M_{yy}^{(2)} + c_2t(O_{yy}^{(1)} - O_{yy}^{(2)}) - c_3t(2P_{yy}^{(1)} + 7P_{yy}^{(2)}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

und in der Symmetrieebene ( $y = b$ )

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_x^{(1)}(y = b) = 0, \quad \psi_x^{(1)}(y = b) &= 0, \\
 \hat{u}_y^{(1)}(y = b) = 0, \quad \psi_y^{(1)}(y = b) &= 0, \\
 \hat{u}_x^{(2)}(y = b) = 0, \quad \psi_x^{(2)}(y = b) &= 0, \\
 \hat{u}_y^{(2)}(y = b) = 0, \quad \psi_y^{(2)}(y = b) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

folgen ebenfalls eindeutig aus der Auswertung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials (4.33). Über die Randbedingungen finden auch die äußeren Lasten  $\varepsilon_0$  bzw.  $\Delta T$  Eingang in das Randwertproblem.

**Lösung des Systems.** Werden die Schnittkräfte durch die zugrunde liegenden Verschiebungen ausgedrückt, können die Differentialgleichungen (4.47) in Matrixschreibweise kompakt als System zweiter Ordnung

$$\mathbf{T}_1 \Psi_{,yy} + \mathbf{T}_2 \Psi = \mathbf{0}, \tag{4.51}$$

mit den Systemmatrizen  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  und dem Vektor der Unbekannten

$$\Psi = \mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{8 \times 1} = [\hat{u}_x^{(1)}, \hat{u}_y^{(1)}, \hat{u}_x^{(2)}, \hat{u}_y^{(2)}, \psi_x^{(1)}, \psi_y^{(1)}, \psi_x^{(2)}, \psi_y^{(2)}]^T \tag{4.52}$$

angeben werden.

Analog zu der in Unterabschnitt 4.2.2 beschriebenen Vorgehensweise kann das Differentialgleichungssystem auf ein System erster Ordnung reduziert und mithilfe des Exponentialansatzes (4.21) auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt werden. Die allgemeine Lösung für die unbekannt kinematischen Größen

#### 4.4 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung

ergibt sich gemäß Gleichung (4.27) als Linearkombination aller möglichen speziellen Lösungen.

Die zuvor mittels der Rand- und Übergangsbedingungen eliminierten Größen  $\theta_i^{(k)}$  und  $\lambda_i^{(k)}$  werden anschließend mithilfe der Substitutionsvorschrift (4.44) ermittelt. Von besonderem Interesse für die Vorhersage des interlaminaren Versagens im folgenden Kapitel 5 ist der Verlauf der interlaminaren Schubspannung. Diese wird wie im Modell erster Ordnung gemäß Gleichung (4.39) aus der Integration der lokalen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt.

Das Modell dritter Ordnung besitzt acht Unbekannte  $(u_i^{(k)}, \psi_i^{(k)})$  und ist in der Lage einen kubischen Verlauf der Verschiebungen und ein quadratisches Verhalten der transversalen Schubverzerrungen über die Schichtdicke wiederzugeben. Die Stetigkeit der Verschiebungen an der Schichtgrenze wird ebenso bereits im Variationsansatz berücksichtigt wie die Rand- und Übergangsbedingungen für die interlaminaren Schubspannungen an den Schichtgrenzen und der freien Oberfläche des Laminats.

#### 4.4.3 Modellierung der gerissenen Struktur

Zur Untersuchung potentieller Randalaminationen mithilfe der Finiten Bruchmechanik ist neben der interlaminaren Schubspannung auch die Energiefreisetzung eines potentiellen Risses von Interesse (vgl. Abschnitt 2.3.3). Um diese zu bestimmen, müssen in einem ersten Schritt die Deformation der gerissenen Struktur und insbesondere die Verschiebungen der entstandenen Rissflanken ermittelt werden.

**Grundkonzept.** Hierzu wird das bekannte Laminatviertelmodell mit einem interlaminaren Riss der Länge  $\Delta a$  versehen. Das resultierende Modell ist in Abbildung 4.6 dargestellt, wobei die Rissöffnung sich nicht wie gezeigt normal zu den Rissflanken einstellen wird, sondern fast ausschließlich tangential in  $x$ -Richtung stattfindet (Rissöffnungsmodus III). Das Modell wird zur mathematischen Beschreibung in einen gerissenen Teilbereich A und einen ungerissenen Bereich B untergliedert. Alle Größen der entsprechenden Bereiche sind mit einem hochgestellten A bzw. B gekennzeichnet.

Der ungerissene Teilbereich B ( $\Delta a \leq y \leq b$ ) wird, abgesehen von seiner Länge und den Übergangsbedingungen bei  $y = \Delta a$ , entsprechend des Modells der ungerissenen Struktur (Abschnitt 4.4.1) behandelt. Es gelten weiterhin die Rand- und Übergangsbedingungen (4.43) und folglich lassen sich die kinematischen Größen  $\theta_i^{(k,B)}$  und  $\lambda_i^{(k,B)}$  gemäß der Substitutionsvorschrift

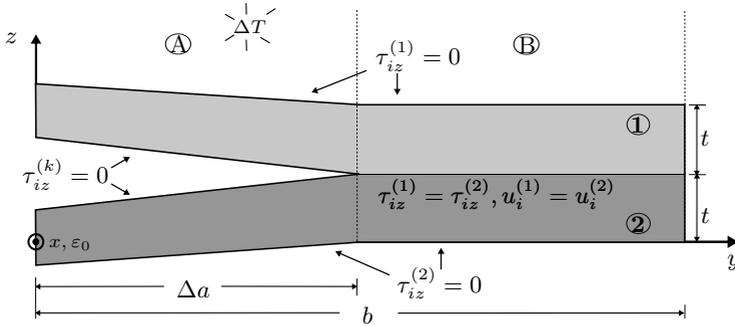


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der gerissenen Struktur.

(4.44) auf die Verschiebungen der Mittelflächen  $\hat{u}_i^{(k,B)}$  und die Verkippen der Normalen  $\psi_i^{(k,B)}$  zurückführen.

Im Teilbereich A hingegen verschwinden die interlaminaren Schubspannungen auf den Rissflanken:

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^{(1,A)}(z^{(1)} = -t/2) &= 0, \\
 \tau_{xz}^{(1,A)}(z^{(1)} = -t/2) &= 0, \\
 \tau_{yz}^{(2,A)}(z^{(2)} = +t/2) &= 0, \\
 \tau_{xz}^{(2,A)}(z^{(2)} = +t/2) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

Weiterhin Gültigkeit hat die Spannungsfreiheit der Modellober- und Unterseite gemäß der dritten bis sechsten Beziehung von (4.43).

Auch hier können die Freiheitsgrade höherer Ordnung  $\theta_i^{(k,A)}$  und  $\lambda_i^{(k,A)}$  auf Verschiebungen der Schichtmittelflächen  $\hat{u}_i^{(k,A)}$  und die Verdrehwinkel der Normalen  $\psi_i^{(k,A)}$  zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \theta_x^{(1,A)} \\ \theta_y^{(1,A)} \\ \theta_x^{(2,A)} \\ \theta_y^{(2,A)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} \lambda_x^{(1,A)} \\ \lambda_y^{(1,A)} \\ \lambda_x^{(2,A)} \\ \lambda_y^{(2,A)} \end{bmatrix} &= -\frac{4}{3t^2} \begin{bmatrix} \psi_x^{(1,A)} \\ \psi_y^{(1,A)} \\ \psi_x^{(2,A)} \\ \psi_y^{(2,A)} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

#### 4.4 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung

Somit besitzt das Modell dritter Ordnung im Teilbereich A nach Auswertung der Rand- und Übergangsbedingungen in Dickenrichtung noch die acht Unbekannten  $\hat{u}_i^{(k,A)}$  und  $\hat{\psi}_i^{(k,A)}$  mit  $k = 1, 2$ ,  $i = x, y$ . Für die spätere Formulierung der Übergangsbedingungen zwischen Teilsystem A und Teilsystem B ist hervorzuheben, dass die Substitutionsgleichungen für die kinematischen Größen  $\theta_i^{(k)}$  und  $\lambda_i^{(k)}$  von Bereich A nicht denen des ungerissenen Bereichs B gemäß Gleichung (4.44) entsprechen, da sich auch die Rand- bzw. Übergangsbedingungen an der Schichtgrenze unterscheiden.

**Differentialgleichungssystem.** Analog zu dem in Abschnitt 4.4.2 beschriebenen Vorgehen wird das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials (4.33) angewendet, um die zugrundeliegenden Differentialgleichungen und Randbedingungen zu ermitteln. Das innere Potential der Schicht  $k$  teilt sich in einen Anteil des Bereichs A und einen Anteil des Bereichs B auf:

$$\begin{aligned} \Pi^{i,(k)} &= \Pi^{i,(k,A)} + \Pi^{i,(k,B)} = \\ &= \frac{l}{2} \int_0^{\Delta a} \int_{-t/2}^{+t/2} \left( \varepsilon_{ij}^{(k,A)} - \alpha_{ij}^{(k)} \Delta T \right) \sigma_{ij}^{(k,A)} dz^{(k)} dy \\ &+ \frac{l}{2} \int_{\Delta a}^a \int_{-t/2}^{+t/2} \left( \varepsilon_{ij}^{(k,B)} - \alpha_{ij}^{(k)} \Delta T \right) \sigma_{ij}^{(k,B)} dz^{(k)} dy . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die Anwendung des Variationsverfahrens liefert ein System von je acht homogenen Differentialgleichungen für die beiden Teilbereiche A und B. In Form von Schnittgrößen dargestellt sieht das System für den gerissenen Teilbereich wie folgt aus:

$$\begin{aligned} N_{xy,y}^{(1,A)} &= 0, \\ N_{xy,y}^{(2,A)} &= 0, \\ N_{yy,y}^{(1,A)} &= 0, \\ N_{yy,y}^{(2,A)} &= 0, \\ M_{xy,y}^{(1,A)} - c_1 P_{xy,y}^{(1,A)} - \frac{4}{5} Q_x^{(1,A)} &= 0, \\ M_{xy,y}^{(2,A)} - c_1 P_{xy,y}^{(2,A)} - \frac{4}{5} Q_x^{(2,A)} &= 0, \\ M_{yy,y}^{(1,A)} - c_1 P_{yy,y}^{(1,A)} - \frac{4}{5} Q_y^{(1,A)} &= 0, \\ M_{yy,y}^{(2,A)} - c_1 P_{yy,y}^{(2,A)} - \frac{4}{5} Q_y^{(2,A)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

wobei die verwendete Konstante durch  $c_1 = 4/3t^2$  gegeben ist.

**Rand- und Übergangsbedingungen.** Für den freien Rand bei  $y = 0$  ergeben sich die folgenden acht dynamischen Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 N_{xy}^{(1,A)}(y = 0) &= 0, \\
 N_{xy}^{(2,A)}(y = 0) &= 0, \\
 N_{yy}^{(1,A)}(y = 0) &= 0, \\
 N_{yy}^{(2,A)}(y = 0) &= 0, \\
 M_{xy}^{(1,A)}(y = 0) - c_1 P_{xy}^{(1,A)}(y = 0) &= 0, \\
 M_{xy}^{(2,A)}(y = 0) - c_1 P_{xy}^{(2,A)}(y = 0) &= 0, \\
 M_{yy}^{(1,A)}(y = 0) - c_1 P_{yy}^{(1,A)}(y = 0) &= 0, \\
 M_{yy}^{(2,A)}(y = 0) - c_1 P_{yy}^{(2,A)}(y = 0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Im ungerissenen Teilbereich B behalten die im vorigen Abschnitt hergeleiteten acht Differentialgleichungen (4.47) und die acht kinematischen Randbedingungen (4.50) in der Laminatmitte bei  $y = b$  ihre Gültigkeit. Zusätzlich führt das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials auf 16 Bedingungen am Übergang vom gerissenen zum ungerissenen Teilbereich der Struktur. An der Stelle  $y = \Delta a$  ergeben sich die folgenden acht kinematischen Übergangsbedingungen für die Verschiebungen der Schichtmittelebenen  $\hat{u}_i^{(k)}$  und die Verkippen der Normalen  $\psi_i^{(k)}$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_x^{(1,A)}(y = \Delta a) &= \hat{u}_x^{(1,B)}(y = \Delta a), \\
 \hat{u}_x^{(2,A)}(y = \Delta a) &= \hat{u}_x^{(2,B)}(y = \Delta a), \\
 \hat{u}_y^{(1,A)}(y = \Delta a) &= \hat{u}_y^{(1,B)}(y = \Delta a), \\
 \hat{u}_y^{(2,A)}(y = \Delta a) &= \hat{u}_y^{(2,B)}(y = \Delta a), \\
 \psi_x^{(1,A)}(y = \Delta a) &= \psi_x^{(1,B)}(y = \Delta a), \\
 \psi_x^{(2,A)}(y = \Delta a) &= \psi_x^{(2,B)}(y = \Delta a), \\
 \psi_y^{(1,A)}(y = \Delta a) &= \psi_y^{(1,B)}(y = \Delta a), \\
 \psi_y^{(2,A)}(y = \Delta a) &= \psi_y^{(2,B)}(y = \Delta a).
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

#### 4.4 Konzept mittels der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung

Zudem resultieren aus der Variation acht dynamische Übergangsbedingungen für die Schnittgrößen an der Stelle  $y = \Delta a$ :

$$\begin{aligned}
 N_{xy}^{(1,A)} &= N_{xy}^{(1,B)} - 3c_2 (O_{xy}^{(1,B)} - O_{xy}^{(2,B)}) + 6c_3 (P_{xy}^{(1,B)} + P_{xy}^{(2,B)}), \\
 N_{yy}^{(1,A)} &= N_{yy}^{(1,B)} - 3c_2 (O_{yy}^{(1,B)} - O_{yy}^{(2,B)}) + 6c_3 (P_{yy}^{(1,B)} + P_{yy}^{(2,B)}), \\
 N_{xy}^{(2,A)} &= N_{xy}^{(2,B)} + 3c_2 (O_{xy}^{(1,B)} - O_{xy}^{(2,B)}) - 6c_3 (P_{xy}^{(1,B)} + P_{xy}^{(2,B)}), \\
 N_{yy}^{(2,A)} &= N_{yy}^{(2,B)} + 3c_2 (O_{yy}^{(1,B)} - O_{yy}^{(2,B)}) - 6c_3 (P_{yy}^{(1,B)} + P_{yy}^{(2,B)}), \\
 M_{xy}^{(1,A)} - c_1 P_{xy}^{(1,A)} &= M_{xy}^{(1,B)} + c_2 t (O_{xy}^{(1,B)} - O_{xy}^{(2,B)}) \\
 &\quad - c_3 t (7P_{xy}^{(1,B)} + 2P_{xy}^{(2,B)}), \\
 M_{yy}^{(1,A)} - c_1 P_{xy}^{(1,A)} &= M_{yy}^{(1,B)} + c_2 t (O_{yy}^{(1,B)} - O_{yy}^{(2,B)}) \\
 &\quad - c_3 t (7P_{yy}^{(1,B)} + 2P_{yy}^{(2,B)}), \\
 M_{xy}^{(2,A)} - c_1 P_{xy}^{(2,A)} &= M_{xy}^{(2,B)} + c_2 t (O_{xy}^{(1,B)} - O_{xy}^{(2,B)}) \\
 &\quad - c_3 t (2P_{xy}^{(1,B)} + 7P_{xy}^{(2,B)}), \\
 M_{yy}^{(2,A)} - c_1 P_{yy}^{(2,A)} &= M_{yy}^{(2,B)} + c_2 t (O_{yy}^{(1,B)} - O_{yy}^{(2,B)}) \\
 &\quad - c_3 t (2P_{yy}^{(1,B)} + 7P_{yy}^{(2,B)}).
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ein wichtiges Ziel der Modellierung der gerissenen Struktur ist die Ermittlung der Rissflankenverschiebungen, da diese für die bruchmechanischen Untersuchungen im Folgekapitel von großem Interesse sind. Allerdings gewährleisten die kinematischen Übergangsbedingungen an die Verschiebungen der Schichtmittelebenen  $\hat{u}_i^{(k)}$  und die Verkippungen der Normalen  $\psi_i^{(k)}$  (4.58) im Allgemeinen nicht die Stetigkeit der Verschiebungen an der Riss Spitze. Um diese sicherzustellen, werden zusätzlich zwei kinematische Bedingungen an der Stelle  $y = \Delta a$  formuliert:

$$\theta_x^{(1,A)} = \theta_x^{(1,B)} \quad \text{und} \quad \theta_y^{(1,A)} = \theta_y^{(1,B)}. \tag{4.60}$$

Im gerissenen Teilbereich sind die Freiheitsgrade  $\theta_i^{(k,A)}$  gemäß der Beziehung (4.54) gleich null. Da im ungerissenen Teilbereich nach Gleichung (4.45) zudem nur zwei der vier Größen  $\theta_i^{(k,B)}$  unabhängig sind, folgt aus den zusätzlichen kinematischen Bedingungen (4.60), dass am Übergang ( $y = \Delta a$ ) auch alle Größen  $\theta_i^{(k,B)}$  identisch verschwinden und die Verläufe aller  $\theta_i^{(k)}$  stetig sind. Unter dieser Voraussetzung sind gemäß den Substitutionsvorschriften (4.44, 4.54) auch alle Freiheitsgrade  $\lambda_i^{(k)}$  bei  $y = \Delta a$  stetig.

Die Formulierung der zwei zusätzlichen kinematischen Bedingungen (4.60)

bewirkt somit zusammen mit den acht Übergangsbedingungen für die Verschiebungen der Schichtmittelebenen  $\hat{u}_i^{(k)}$  und die Verkippungen der Normalen  $\psi_i^{(k)}$  (4.58), dass alle 16 kinematischen Größen ( $\hat{u}_i^{(k)}$ ,  $\psi_i^{(k)}$ ,  $\theta_i^{(k)}$ ,  $\lambda_i^{(k)}$ ) am Übergang vom gerissenen zum ungerissenen Teilbereich stetig sind. Dieses Vorgehen gewährleistet somit die Stetigkeit der Verschiebungen nicht nur entlang der Schichtmittelebenen, sondern in der gesamten Struktur. Um die beiden zusätzlichen kinematischen Bedingungen (4.60) berücksichtigen zu können, werden die fünfte und die siebte Teilgleichung der dynamischen Übergangsbedingungen (4.59) nicht zur Lösung des Randwertproblems herangezogen.

**Lösung des Systems.** Werden die Schnittkräfte durch die zugrunde liegenden Verschiebungen ausgedrückt, können die Differentialgleichungen (4.47,4.56) in Matrixschreibweise kompakt als System zweiter Ordnung

$$\mathbf{T}_1 \Psi_{,yy} + \mathbf{T}_2 \Psi = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

mit den Systemmatrizen  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$  und dem Vektor der Unbekannten

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi \in \mathbb{R}^{16 \times 1} = \\ \left[ \hat{u}_x^{(1,A)}, \hat{u}_y^{(1,A)}, \hat{u}_x^{(2,A)}, \hat{u}_y^{(2,A)}, \psi_x^{(1,A)}, \psi_y^{(1,A)}, \psi_x^{(2,A)}, \psi_y^{(2,A)}, \right. \\ \left. \hat{u}_x^{(1,B)}, \hat{u}_y^{(1,B)}, \hat{u}_x^{(2,B)}, \hat{u}_y^{(2,B)}, \psi_x^{(1,B)}, \psi_y^{(1,B)}, \psi_x^{(2,B)}, \psi_y^{(2,B)} \right]^T \end{aligned} \quad (4.62)$$

angeben werden. Das Differentialgleichungssystem kann analog zu der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Vorgehensweise gelöst werden.

## 4.5 Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle

Im folgenden Unterkapitel wird die Vorhersagegenauigkeit der entwickelten analytischen Modelle durch den Vergleich der Spannungs- und Verschiebungslösungen mit Referenzergebnissen aus Finite-Elemente-Analysen überprüft. Zu diesem Zweck wird zunächst ein speziell für den generalisierten ebenen Verzerrungszustand entwickeltes Finites Element vorgestellt. Anschließend werden die analytischen Näherungslösungen mit dem numerischen Ergebnis verglichen und die Vorhersagegenauigkeit der vorgeschlagenen Modelle wird diskutiert. Das Ziel des Vergleichs ist es, das analytische Verfahren mit der höchsten Vorhersagequalität für die weitere Verwendung im Rahmen dieser Studie auszuwählen. Die Betrachtung findet für verschiedene Materialien, Schichtdicken, Schichtwinkel und Lastfälle statt.

### 4.5.1 Numerisches Vergleichsmodell

Zur Verifizierung des analytischen Verfahrens wird mithilfe des Finite-Elemente-Programmpakets ABAQUS (Version 2018) ein numerisches Referenzmodell erstellt. Wie bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben, herrscht in der Nähe des freien Laminatrandes ein dreidimensionaler Spannungszustand. Die Spannungen und Dehnungen sind allerdings unter den Annahmen des GEVZ in Längsrichtung der Struktur ( $x$ -Richtung) unveränderlich. Diese Eigenschaft wurde bereits in vorherigen Abschnitten genutzt, um die analytischen Überlegungen auf eine zweidimensionale Struktur zu reduzieren (vgl. Abschnitt 4.1).

In den Elementbibliotheken der, dem Autor bekannten, kommerziellen Finite-Elemente-Programme existieren keine ebenen Elemente, welche in der Lage sind die Kinematik des GEVZ abzubilden. Deshalb besteht ein mögliches Vorgehen darin, die Verschiebungsfreiheitsgrade der Knoten von dreidimensionalen Standardelementen über Kopplungsgleichungen miteinander zu verknüpfen, so dass die Kinematik des GEVZs abgebildet wird (Hebel, 2010, Lessard et al., 1996, Frey et al., 2021c, Artel, 2007). Diese Methode ist ineffizient bezüglich der zum Aufbringen der Kopplungsgleichungen und zum Lösen des Gleichungssystems benötigten Rechenzeit. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit ein spezielles Finites Element entwickelt, das den GEVZ in zwei Dimensionen vollständig reproduzieren kann, was zu einer erheblichen Reduzierung des Rechenaufwands führt. Martin et al. (2010) verfolgten in ihrer Studie einen ähnlichen Ansatz.

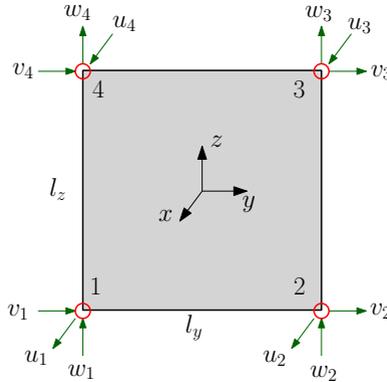
**Entwicklung eines Finiten Elements.** Das vorgeschlagene zweidimensionale Element, im Folgenden auch als GEVZ-Element bezeichnet, ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Es besitzt vier Knoten mit je drei Freiheitsgraden, den Knotenverschiebungen  $\mathbf{v}_n^{(e)} = [u_n^{(e)}, v_n^{(e)}, w_n^{(e)}]^T$ , wobei  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  die Knotennummer ist,  $e \in \{1, \dots, N_e\}$  das jeweilige Element und  $N_e$  die Gesamtzahl der Elemente im gesamten Modell bezeichnet. Die Verschiebungen innerhalb des Elements werden näherungsweise als

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(e)} = [\tilde{u}_x^{(e)}, \tilde{u}_y^{(e)}, \tilde{u}_z^{(e)}]^T = \sum_{n=1}^4 N_n \mathbf{v}_n^{(e)} + [N_5 \varepsilon_0 l_x, 0, 0]^T \quad (4.63)$$

beschrieben, wobei die Formfunktionen als

$$N_n = \frac{1}{4} \left( 1 + 2b_n \frac{y}{l_y} \right) \left( 1 + 2c_n \frac{z}{l_z} \right), \quad N_5 = \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{x}{l_x} \right) \quad (4.64)$$

definiert sind. Die verwendeten Koeffizienten  $b_n$  und  $c_n$  sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Der zweite Term in Gleichung (4.63) berücksichtigt die



**Abbildung 4.7:** Prinzipskizze des neu entwickelten Finite Elements mit drei Freiheitsgraden an jedem der vier Knoten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde der Index ( $e$ ) für die Knotenverschiebungen weggelassen. Das Element hat die Abmessungen  $l_y$  in  $y$ - und  $l_z$  in  $z$ -Richtung. Die gedachte Tiefe in  $x$ -Richtung sei  $l_x$ .

homogene axiale Dehnung  $\varepsilon_0$  in  $x$ -Richtung. Folglich sind die resultierenden Verzerrungen durch

$$\tilde{\varepsilon}^{(e)} = [\tilde{\varepsilon}_x^{(e)}, \tilde{\varepsilon}_y^{(e)}, \tilde{\varepsilon}_z^{(e)}, \tilde{\gamma}_{yz}^{(e)}, \tilde{\gamma}_{xz}^{(e)}, \tilde{\gamma}_{xy}^{(e)}]^T = \sum_{n=1}^4 \mathbf{B}_n^{(e)} \mathbf{v}_n^{(e)} + \mathbf{B}_0^{(e)} \varepsilon_0 l_x \quad (4.65)$$

gegeben, wobei die Matrizen  $\mathbf{B}_n^{(e)}$  und  $\mathbf{B}_0^{(e)}$  die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen enthalten:

$$\mathbf{B}_0^{(e)} = \left[ \frac{\partial N_5}{\partial x}, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T, \quad \mathbf{B}_n^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Die Bestimmung der Elementsteifigkeit mittels einer numerischen Integration führt oftmals zu überhöhten Werten, da die linearen Ansatzfunktionen die Deformationsmoden der Struktur nur unzureichend wiedergeben können (Hahn u. Reck, 2018). Zur Umgehung dieses Problems wird in der beschriebenen

## 4.5 Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle

**Tabelle 4.1**

Koeffizienten der Formfunktionen  $N_n$

Knotennummer	1	2	3	4
$b_n$	-1	1	1	-1
$c_n$	-1	-1	1	1

Formulierung der volumetrische Anteil der Verzerrung  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}$  nicht an jedem Integrationspunkt, sondern über das Elementvolumen gemittelt, berücksichtigt. Diese, in der Fachliteratur auch als *B-bar method* bezeichnete, Methode wird unter anderem von Hughes (1987) und Zienkiewicz et al. (2005) beschrieben und auch in ABAQUS für bestimmte Elemente angewendet. Technisch umgesetzt wird sie, indem in der kinematischen Beziehung (4.65) die modifizierte Matrix  $\bar{\mathbf{B}}_n^{(e)}$  anstelle von  $\mathbf{B}_n^{(e)}$  verwendet wird:

$$\bar{\mathbf{B}}_n^{(e)} = \mathbf{B}_n^{(e)} - \mathbf{B}_{n,V}^{(e)} + \bar{\mathbf{B}}_{n,V}^{(e)} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{B}_{n,V}^{(e)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{n,V}^{(e)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial x} & \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial x} & \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial x} & \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Hierbei sind die über das Volumen gemittelten Ableitungen der Formfunktionen wie folgt definiert:

$$\frac{\partial \bar{N}_n}{\partial x_i} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial N_n}{\partial x_i} dV. \quad (4.68)$$

Durch die Definition der Matrix

$$\bar{\mathbf{B}}^{(e)} = [\bar{\mathbf{B}}_1^{(e)}, \bar{\mathbf{B}}_2^{(e)}, \bar{\mathbf{B}}_3^{(e)}, \bar{\mathbf{B}}_4^{(e)}] \quad (4.69)$$

und des Vektors der Elementknotenverschiebungen

$$\mathbf{v}^{(e)} = [u_1^{(e)}, v_1^{(e)}, w_1^{(e)}, u_2^{(e)}, v_2^{(e)}, w_2^{(e)}, u_3^{(e)}, v_3^{(e)}, w_3^{(e)}, u_4^{(e)}, v_4^{(e)}, w_4^{(e)}]^T \quad (4.70)$$

lässt sich die Verzerrung des Elements ( $e$ ) in Matrixschreibweise ausdrücken:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} = \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)} + \mathbf{B}_0^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 l_x. \quad (4.71)$$

Unter Verwendung dieser Approximation der Verzerrungen und des Elastizitätsgesetzes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}$  ergibt sich für das Gesamtpotentials eines Elements ( $\Pi^{\text{a},(e)} = 0$ ):

$$\Pi^{(e)} = \Pi^{\text{i},(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \left\{ (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} - \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \Delta T)^{\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} - \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \Delta T) \right\} dV. \quad (4.72)$$

Die Anwendung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials liefert nach Aufsummieren über alle  $N_e$  Elemente des Modells und Einsetzen der kinematischen Beziehung (4.71):

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \sum_{e=1}^{N_e} \delta\mathbf{v}^{(e)\text{T}} \left\{ \int_{V^{(e)}} \left( \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \right) dV \mathbf{v}^{(e)} + \right. \\ \left. \int_{V^{(e)}} \left( \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{B}_0^{(e)} \varepsilon_0 l_x \right) dV \right. \\ \left. - \int_{V^{(e)}} \left( \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \Delta T \right) dV \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Damit diese Forderung für beliebige virtuelle Verschiebungen  $\delta\mathbf{v}^{(e)}$  erfüllt ist, muss der Ausdruck in den geschweiften Klammern verschwinden. Es folgt:

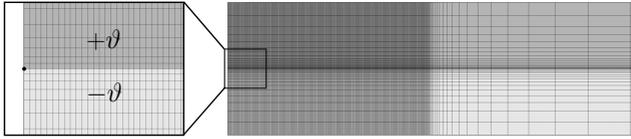
$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{F}_d^{(e)} + \mathbf{F}_T^{(e)}, \quad (4.74)$$

wobei die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{(e)}$  und der mechanische und der thermische Beitrag zum Elementlastvektor,  $\mathbf{F}_d^{(e)}$  und  $\mathbf{F}_T^{(e)}$ , definiert sind als

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} dV, \\ \mathbf{F}_d^{(e)} &= - \int_{V^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{B}_0^{(e)} \varepsilon_0 l_x dV, \\ \mathbf{F}_T^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{(e)\text{T}} \mathbf{C}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \Delta T dV. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Die Formulierung des neuen Elements wurde in der Programmiersprache FORTRAN umgesetzt und mittels einer Subroutineschnittstelle<sup>14</sup> in ABAQUS implementiert. Die Assemblierung aller Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren zu einem globalen Gleichungssystem und die Lösung dessen wird anschließend wieder von Funktionen des ABAQUS-Hauptprogramms bewerkstelligt. Die Ergebnisse der benutzerdefinierten Formulierung wurden umfassend mit Referenzergebnissen verifiziert, die durch vollständige dreidimensionale Finite-Elemente-Analysen von Schneider (2019) gewonnen wurden.

<sup>14</sup>Hierbei wurde die Subroutine UEL (Engl.: User element) verwendet.



**Abbildung 4.8:** Randnaher Bereich des diskretisierten Laminatviertelmodells. Eine zusätzliche Detailansicht (links) zeigt die stark verfeinerte Diskretisierung in Richtung des Bimaterialpunktes.

**Aufbau des Laminatmodells.** Auf Basis des GEVZ-Elements wurde ein numerisches Referenzmodell des Laminatviertels aus Abbildung 4.3 unter Verwendung der in Abschnitt 4.1 diskutierten Rand- und Symmetriebedingungen erstellt. Die Umsetzung erfolgte hierbei über die PYTHON-Schnittstelle von ABAQUS, was einen vollautomatisierten und parametrisierten Programmablauf vom Modellaufbau bis hin zur Auswertung der Ergebnisse sicherstellt. Die axiale Dehnung  $\varepsilon_0$  wird auf alle Elemente der Struktur gleichmäßig aufgebracht, ebenso wirkt die homogene Temperaturlast  $\Delta T$  auf alle Knoten des Modells. Weiterhin wird für die Einzelschichten linear-elastisches, monoklines Materialverhalten vorausgesetzt, wobei die Schichten untereinander als ideal verbunden angenommen werden. Die Vernetzung erfolgt ausschließlich mit rechteckigen GEVZ-Elementen. Um die hohen Spannungsgradienten am freien Rand abbilden zu können, wird dort eine Partition mit einer stark verfeinerten Diskretisierung erstellt. Im diesem Bereich haben die Elemente eine minimale Kantenlänge in  $y$ - und in  $z$ -Richtung von  $10^{-3}$  mm, wobei sich die Einzelschichtdicke in der Größenordnung von  $10^{-1}$  mm befindet. Ein Ausschnitt der diskretisierten Struktur ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Je nach Schichtdicke haben die implementierten Modelle insgesamt zwischen  $2 \cdot 10^5$  und  $4 \cdot 10^5$  Freiheitsgrade und benötigen auf einem gewöhnlichen Arbeitsplatzrechner<sup>15</sup> zwischen 60 und 120 Sekunden Berechnungszeit inklusive Modellaufbau und Ausgabe der Ergebnisse.

#### 4.5.2 Ergebnisse der ungerissenen Konfiguration

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der entwickelten analytischen Methoden mit denen des numerischen Modells verglichen. In den nachstehenden Diagrammen sind die Ergebnisse der analytischen Ansätze als durchgezogene Linien dargestellt (schwarz: TSDT, blau: FSdT, grau: SW), während die

<sup>15</sup>Die Angabe beziehen sich auf die Nutzung eines Arbeitsplatzrechners mit Intel® Core™ i5 Prozessor mit 6 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3,6 GHz.

## Kapitel 4 Modelle zur Beschreibung des Laminat-Randeffekts

**Tabelle 4.2**

Linear-elastische Materialeigenschaften einer unidirektionalen Einzelschicht im lokalen Materialhauptachsensystem. Die fehlenden Daten ergeben sich aus Symmetriegründen zu  $E_{33} = E_{22}$ ,  $G_{13} = G_{12}$ ,  $\nu_{13} = \nu_{12}$  und  $\alpha_{22} = \alpha_{33}$ .<sup>17</sup>

Einzelschicht	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{22}$	$t_0$
	GPa				–		$10^{-6}/\text{K}$		mm
T800/914 <sup>a</sup>	159	8,4	4,1	4,1	0,33	0,5	0,02	22,5	0,125
G947/M18 <sup>b</sup>	97,6	8,0	3,1	2,7	0,37	0,5	-0,6 <sup>d</sup>	30,0 <sup>d</sup>	0,19
T700/CTE1 <sup>c</sup>	153,82	10,61	5,58	5,58	0,315	0,315	3,1 <sup>e</sup>	24,7 <sup>e</sup>	0,13

<sup>a</sup> Lorriot et al. (2003), <sup>b</sup> Lagunegrand et al. (2006), <sup>c</sup> Diaz Diaz u. Caron (2006),

<sup>d</sup> typische Werte für kohlefaserverstärkte Einzelschichten aus Becker u. Gross (2002),

<sup>e</sup> Werte eines vergleichbaren Materials aus Wei et al. (2015)

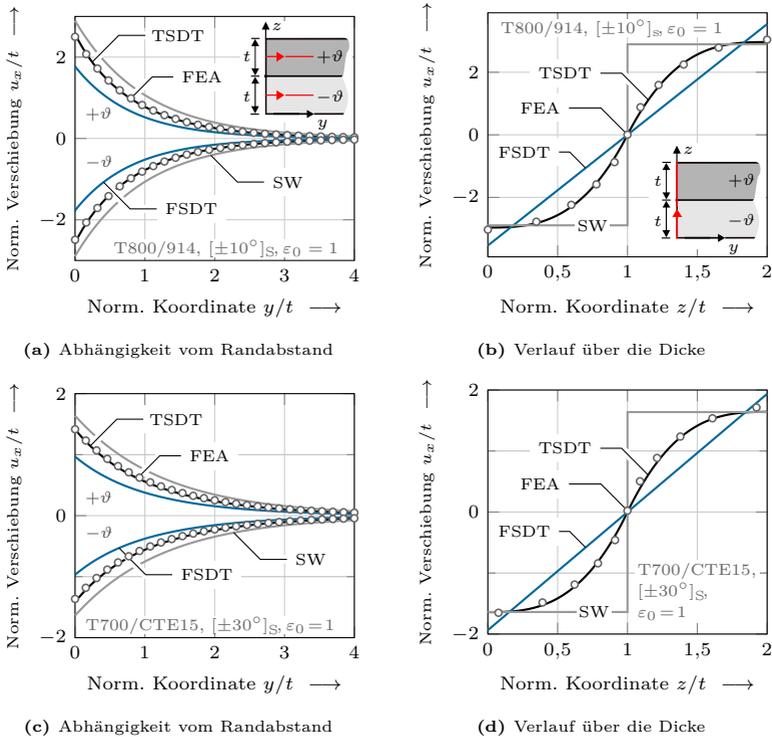
Daten aus den Finite-Elemente-Analysen (FEA) mit Kreisen gekennzeichnet sind. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf symmetrische  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbunde aus drei verschiedenen kohlefaserverstärkten Epoxidharzen, deren Materialeigenschaften und Schichtdicken in Tabelle 4.2 aufgeführt sind. Alle Konfigurationen haben eine Breite von  $2b = 20$  mm und werden entweder durch eine homogene Längsdehnung  $\varepsilon_0 = 1$  oder eine konstante Temperaturdifferenz  $\Delta T = -1$  K belastet<sup>16</sup>.

**Vergleich der Verschiebungen.** Abbildung 4.9 zeigt die durch eine axiale Dehnung  $\varepsilon_0$  induzierte Längsverschiebung  $u_x$  für zwei Struktursituationen: für ein  $[\pm 10^\circ]_s$ -Laminat aus dem Material T800/914 (a,b) und ein T700/CTE1- $[\pm 30^\circ]_s$ -Verbund (c,d). Die Darstellungen 4.9a und 4.9c illustrieren den Verlauf der Verschiebungen in den Schichtmittelebenen in Abhängigkeit des normierten Randabstands  $y/t$ . Die Absolutwerte der Verschiebungen nehmen mit zunehmendem Abstand zum freien Rand monoton ab, was den Erwartungen gemäß der linearen Elastizitätstheorie entspricht. Dieses Phänomen wird von allen drei analytischen Modellen qualitativ korrekt erfasst. Während das Modell erster Ordnung (FSDT) das Verhalten deutlich unter- und das Sandwich-Modell (SW) es deutlich überschätzt, stimmen die Resultate des

<sup>16</sup>Die Ergebnisse wurden mithilfe der Einheitslasten generiert. Diese liegt im mechanischen Lastfall weit über der Bruchdehnung der Materialien. Ergebnisse mit anderen Lasten lassen sich im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie mithilfe linearer Skalierung effizient umrechnen.

<sup>17</sup>Unidirektionalen Schichten besitzen transversal-isotrope Materialeigenschaften, die sich durch fünf elastische Konstanten charakterisieren lassen. Der Schubmodul in der isotropen Ebene ergibt sich gemäß der linearen Elastizitätstheorie zu  $G_{23} = E_{23}/(2(1 + \nu_{23}))$ . Dies ist bei den der Literatur entnommenen Daten nur für das Materialsystem G947/M18 der Fall. In der vorliegenden Arbeit wird trotzdem mit den in der Literatur angegebenen Daten gearbeitet, weswegen hier sechs elastische Konstanten angegeben sind.

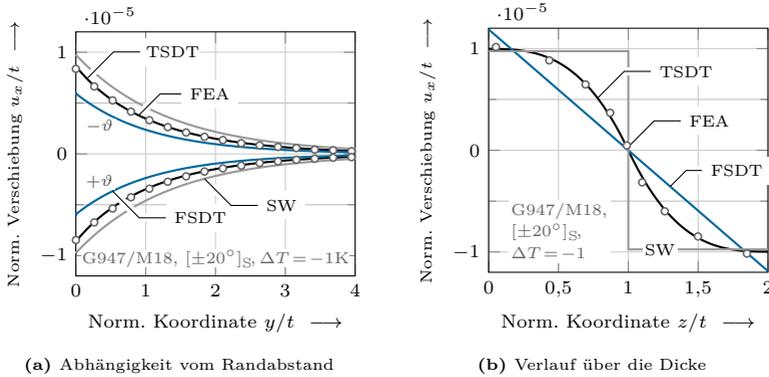
## 4.5 Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle



**Abbildung 4.9:** Normierte Längsverschiebung  $u_x/t$  in Bezug auf den normierten Randabstand (a,c) bzw. die normierte Dickenkoordinate (b,d). Die Abbildung bezieht sich auf  $[\pm\theta]_s$ -Verbunde aus den Materialien T800/914 und T700/CTE15 unter homogener Längsdehnung  $\varepsilon_0$ .

Modells dritter Ordnung (TSDT) sehr gut mit den Referenzergebnissen überein.

Auch die Verteilung der Längsverschiebung  $u_x$  in Dickenrichtung, dargestellt in Abbildung 4.9b und 4.9d, wird durch das TSDT-Modell in sehr guter Übereinstimmung mit den FEA-Daten beschrieben. Die Ergebnisse des FSDT- und des SW-Modells weichen von den Referenzergebnissen ab. Hier wird der Polynomgrad der Verschiebungsansätze der Modelle sichtbar: Während das Sandwich-Modell eine schichtweise konstante Verschiebung bezüglich der Dickenrichtung und der Ansatz erster Ordnung eine lineare Verteilung vorhersagt, ergibt das Modell dritter Ordnung ein kubisches Verhalten. Die



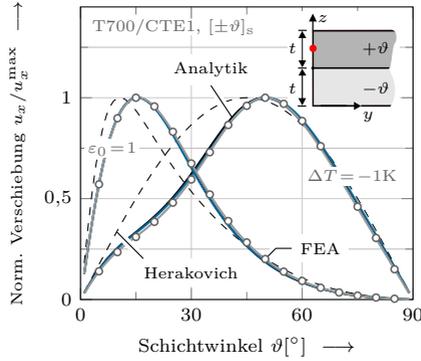
**Abbildung 4.10:** Normierte Längsverschiebung  $u_x/t$  in Bezug auf den normierten Randabstand (a) bzw. die normierte Dickenkoordinate (b). Die Abbildung bezieht sich auf einen symmetrischen AWW mit dem Lagenaufbau von  $[\pm 20^\circ]_s$  aus der Materialkombination G947/M18 unter homogener Temperaturlast von  $\Delta T = -1\text{K}$ .

Ergebnisse für die beiden dargestellten Materialkombinationen ähneln sich qualitativ stark, wobei die Absolutwerte der Verschiebungen beim T800/914- $[\pm 30^\circ]_s$ -Verbund höher sind.

Die Längsverschiebung eines  $[\pm 20^\circ]_s$ -AWVs aus der Materialkombination G947/M18 unter einer homogenen Temperaturlast von  $\Delta T = -1\text{K}$  ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Im Gegensatz zum Zuglastfall prägt sich die Verwölbung jedoch mit umgekehrten Vorzeichen aus: Die  $+\vartheta$ -Schicht wird in negative und die  $-\vartheta$ -Schicht in positive  $x$ -Richtung deformiert. Die bezüglich der mechanisch belasteten Laminat getätigten Aussagen treffen auch unter thermischer Last zu. Das Modell dritter Ordnung (TSDT) beschreibt die Verteilung der Längsverschiebungen sowohl in Abhängigkeit vom Randabstand als auch in Dickenrichtung mit sehr guter Übereinstimmung zu den FEA-Referenzergebnissen.

Die Abhängigkeit der Längsverschiebung  $u_x$  von der Schichtorientierung  $\vartheta$  ist in Abbildung 4.11 für einen  $[\pm \vartheta]_s$ -Verbund aus der Materialkombination T700/CTE1 dargestellt. Zu diesem Zweck ist die Verschiebung  $u_x$  in normierter Form am freien Rand in der Mittelebene der  $+\vartheta$ -Schicht über dem Lagenwinkel aufgetragen. Zum einen wird deutlich, dass die drei analytischen Modelle den Einfluss der Schichtorientierung in Übereinstimmung mit den FEA-Daten wiedergeben. Zweitens ist zu erkennen, dass die maximale axiale Verschiebung unter thermischer Belastung bei höheren Lagenwinkeln auftritt als unter mechanischer Belastung. Dieses Verhalten wurde qualitativ auch

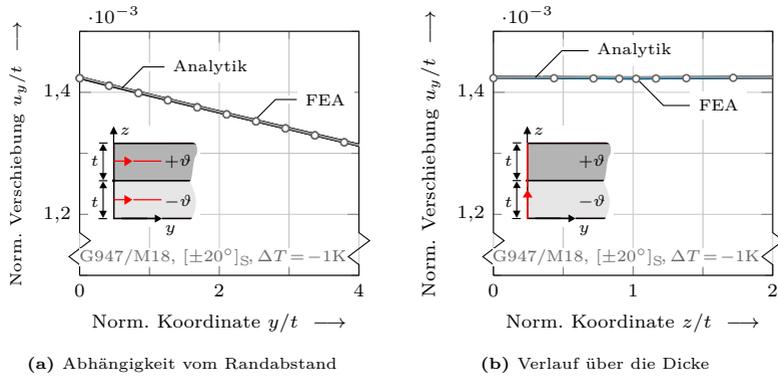
## 4.5 Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle



**Abbildung 4.11:** Normierte Längsverschiebung  $u_x/u_x^{\max}$  am freien Rand in der Mittelebene der  $+\vartheta$ -Schicht in Abhängigkeit des Schichtwinkels  $\vartheta$ . Die Studie bezieht sich auf  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunde aus der Materialkombination T800/914 unter gleichmäßiger Längsdehnung  $\varepsilon_0$  bzw. homogener Temperaturlast  $\Delta T$ .

von Herakovich (1981) vorhergesagt, der diesen Effekt auf die Abhängigkeit der Materialdaten von der Schichtorientierung zurückführte. Er erklärte das Auftreten der Verwölbung durch die unterschiedlichen Schubverzerrungskoeffizienten der Einzelschichten. Diesen Koeffizient definierte er für uniaxiale Zuglasten als  $\eta_{xy,x} = \gamma_{xy}/\varepsilon_0 = \bar{S}_{16}/\bar{S}_{11}$  und postulierte, der Randeffect sei für denjenigen Winkelverbund am ausgeprägtesten, bei dem der Unterschied der Schubverzerrungskoeffizienten der  $\pm\vartheta$ -Schichten  $\Delta\eta_{xy,x}$  am größten sei. Für Temperaturlasten definierte er den Schubverzerrungskoeffizienten als  $\eta_{xy,x} = \bar{\alpha}_{xy}$ . In der vorliegenden Studie ergeben die Auswertungen des Modells dritter Ordnung und des numerischen Modells übereinstimmend eine maximale axiale Verschiebung für  $\vartheta = 15^\circ$  im mechanischen Lastfall und  $\vartheta = 50^\circ$  im thermischen Lastfall, während die Überlegungen von Herakovich zu geringfügig kleineren Schichtwinkeln führen.

Der Vollständigkeit halber ist in Abbildung 4.12 die Verschiebung  $u_y$  für einen  $[\pm 20^\circ]_s$ -G947/M18-Verbund dargestellt. Die Verschiebung in Querrichtung ( $y$ -Richtung) ist in beiden Schichtmittelebenen identisch und fällt ausgehend vom freien Rand monoton ab bis sie in der Mitte des Laminats, gemäß der vorgegebenen Symmetriebedingungen, verschwindet. Die Verschiebung  $u_y$  wird von allen drei analytischen Modellen in Übereinstimmung mit den numerischen Referenzdaten wiedergegeben. Da sich die Materialeigenschaften der  $\pm\vartheta$ -Schichten in Querrichtung nicht unterscheiden, ist die Querkontraktion über die Dicke des Laminats weitgehend konstant und hat insbesondere an



**Abbildung 4.12:** Normierte Querkontraktion  $u_y/t$  in Bezug auf den normierten Randabstand (a) bzw. die normierte Dickenkoordinate (b). Die Studie bezieht sich auf einen symmetrischen AWW mit dem Lagenaufbau von  $[\pm 20^\circ]_S$  aus dem Material G947/M18 unter homogener Temperaturlast von  $\Delta T = -1K$ .

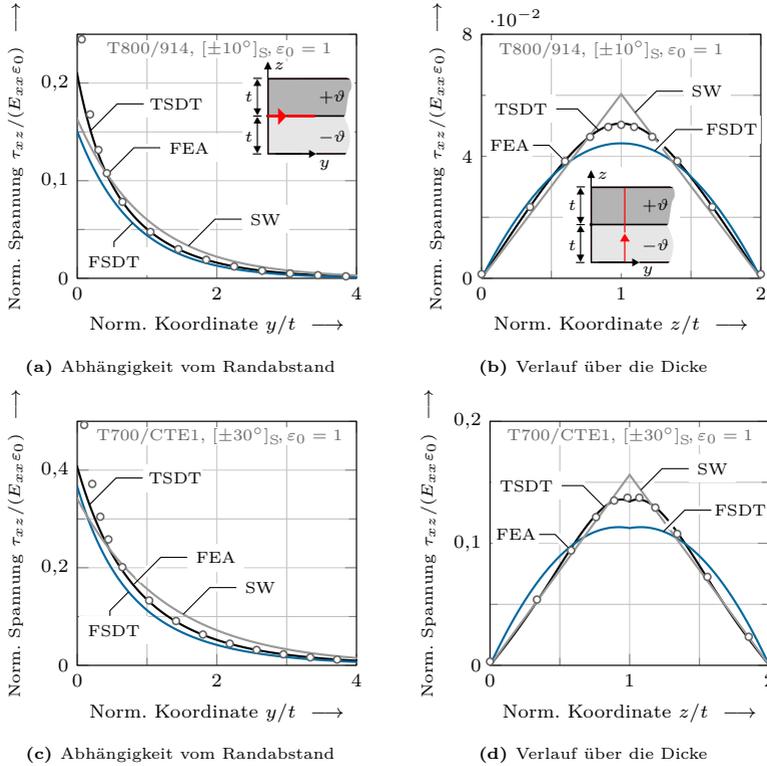
der Schichtgrenze einen verschwindend geringen Gradienten in  $z$ -Richtung. Herakovich (1989a) folgert daraus, dass an der Schichtgrenze keine relevanten Spannungen  $\sigma_{yy}$  und somit auch keine bedeutenden interlaminaren Spannungen  $\tau_{yz}$  und  $\sigma_{zz}$  vorhanden sein können. Diese Beobachtung wird von anderen Studien bestätigt (beispielsweise Martin et al., 2010, Dölling et al., 2020, Frey et al., 2021c).

**Vergleich der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$ .** In Abbildung 4.13 ist die interlaminare Schubspannung  $\tau_{xz}$  in  $[\pm \vartheta]_S$ -Verbunden unter uniaxialer Zuglast für zwei verschiedene Materialkonfigurationen illustriert. Die Spannungskomponente ist auf die äußere Last normiert als  $\tau_{xz}/(E_{xx}\varepsilon_0)$  dargestellt. Dabei ist  $E_{xx}$  die effektive Längssteifigkeit des Laminats, die sich gemäß Mittelstedt u. Becker (2016) näherungsweise unter Verwendung der CLT aus den Dehnsteifigkeiten  $A_{ij}$  ermitteln lässt:

$$E_{xx} = \frac{1}{h} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right). \quad (4.76)$$

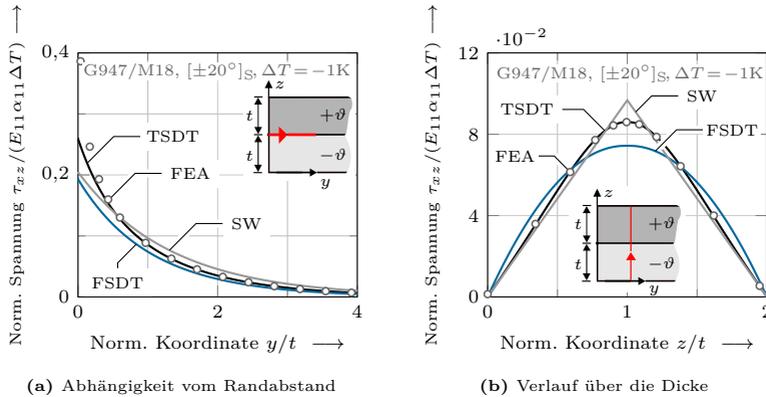
Die Darstellungen 4.13a und 4.13c zeigen den Verlauf der normierten interlaminaren Schubspannung entlang der Schichtgrenze in Abhängigkeit der normierten Koordinate  $y/t$ . Die Finite-Elemente-Lösung sagt eine starke Zunahme der interlaminaren Spannung mit abnehmendem Randabstand voraus. Aus theoretischer Sicht wird die Spannung an dem Punkt, an dem die

## 4.5 Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle



**Abbildung 4.13:** Normierte interlaminaire Schubspannungen  $\tau_{xz}/(E_{xx}\varepsilon_0)$  in Bezug auf den normierten Randabstand (a,c) bzw. die normierte Dickenkoordinate (b,d). Die Auswertung der Spannungen für die Darstellungen (b) und (d) erfolgte im Abstand einer Einzelschichtdicke vom freien Rand ( $y = t$ ). Die Abbildung bezieht sich auf symmetrische AWV mit dem Lagenaufbau von  $[\pm\vartheta]_s$  aus den Materialien T800/914 und T700/CTE1 unter homogener Längsdehnung  $\varepsilon_0$ .

Grenzfläche auf den freien Rand trifft, singular (Wang u. Choi, 1982a,b). Diese Singularität kann weder von der Finite-Elemente-Methode noch von den analytischen Modellen dargestellt werden und wird als starke Spannungskonzentration abgebildet. Während in Richtung der Laminatmitte die Überhöhung abklingt und alle betrachteten Methoden gut mit der Referenzlösung übereinstimmen, gelingt es in der Nähe des freien Randes nur dem Modell dritter Ordnung die Spannungsüberhöhung auch in quantitativer Hin-

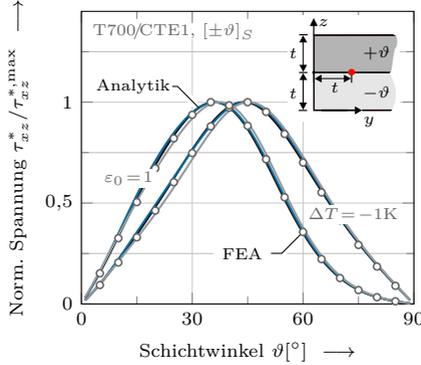


**Abbildung 4.14:** Normierte interlaminare Schubspannungen  $\tau_{xz}/(E_{11}\alpha_{11}\Delta T)$  in Bezug auf den normierten Randabstand (a) bzw. die normierte Dickenkoordinate (b). Die Auswertung der Spannungen für die Darstellung (b) erfolgte im Abstand einer Einzelschichtdicke vom freien Rand ( $y = t$ ). Die Abbildung bezieht sich auf einen  $[\pm 20^\circ]_S$ -Verbund aus der Materialkombination G947/M18 unter homogener thermischer Belastung von  $\Delta T = -1\text{K}$ .

sicht zu beschreiben. Dessen Ergebnisse stimmen für Randabstände größer als die Hälfte der Schichtdicke ( $y > t/2$ ) mit den numerischen Daten gut überein. Dahingegen beschreiben das FSDT- und das SW-Modell den Effekt nur qualitativ.

Die dargestellte interlaminare Schubspannung  $\tau_{xz}$  wird in allen analytischen Modellen nicht durch ihr jeweiliges konstitutives Gesetz bestimmt, sondern durch Integration der Gleichgewichtsbedingung gemäß Gleichung 4.39, was besonders bei der Betrachtung der Verläufe in Dickenrichtung deutlich wird (vgl. Abbildung 4.13b,d). Die Auswertung resultiert in einem linearen bzw. quadratischen Verlauf der Schubspannung in Bezug auf die  $z$ -Koordinate für das schubstarre bzw. das Modell erster Ordnung und in einem Polynom vierter Ordnung für das TSDT-Modell. Die Finite-Elemente-Lösung sagt eine Kurve mit einem deutlichen Maximum an der Grenzfläche zwischen der  $+\vartheta$ - und der  $-\vartheta$ -Schicht und Nullstellen an der freien Oberfläche ( $z = 2t$ ) und in der Laminatmittelebene ( $y = 0$ ) voraus. Abbildung 4.13 (b,d) zeigen deutlich, dass alle drei analytischen Ansätze die Nullstellen korrekt abbilden, während nur das Modell dritter Ordnung den kompletten Verlauf auch quantitativ gut approximiert. Aus Abbildung 4.14 wird deutlich, dass die getätigten Aussagen auch auf thermisch belastete AWVs übertragbar sind.

## 4.5 Verifizierung und Vergleich der analytischen Modelle

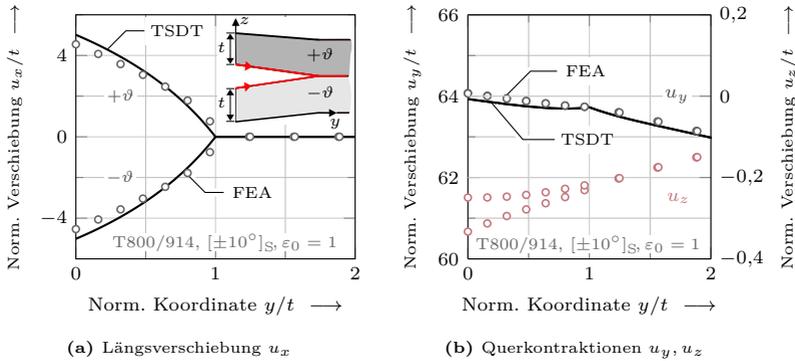


**Abbildung 4.15:** Normierte interlaminaire Spannung  $\tau_{xz}^*/\tau_{xz}^{*,\max}$  im Abstand einer Einzelschichtdicke vom freien Rand in Abhängigkeit vom Schichtwinkel. Die Studie bezieht auf ein  $[\pm\vartheta]_S$ -Verbund aus der Materialkombination T700/CTE1 unter gleichmäßiger Längsdehnung  $\varepsilon_0$  oder homogener Temperaturlast  $\Delta T$ .

Die Abhängigkeit der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$  vom Lagenwinkel  $\vartheta$  ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Dazu wird die Grenzflächenspannung in normierter Form im Abstand einer Einzelschichtdicke ( $y = t$ ) dargestellt<sup>18</sup>. Zum einen wird deutlich, dass alle analytischen Modelle den Einfluss des Lagenwinkels in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FEA wiedergeben. Zum anderen ist zu erkennen, dass die maximale Schubspannung unter thermischer Belastung bei höheren Lagenwinkeln auftritt als unter mechanischer Belastung.

Dieses Verhalten wurde qualitativ auch von Herakovich (1981) vorhergesagt und bereits diskutiert. In der vorliegenden Studie ergibt die Auswertung des Modells dritter Ordnung eine maximale interlaminaire Schubspannung für  $\vartheta = 36^\circ$  im mechanischen Lastfall und  $\vartheta = 45^\circ$  im thermischen Lastfall. Nach klassischen Festigkeitskriterien sind diese speziellen Winkelverbunde besonders anfällig für interlaminaire Rissbildung. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird das Delaminationsverhalten im Rahmen eines umfangreicheren gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium diskutiert, das diesen Schluss nicht zulässt.

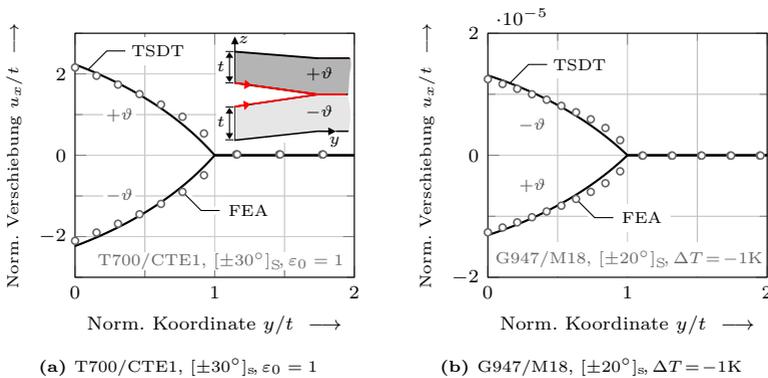
<sup>18</sup>Hierbei ist im mechanischen Lastfall  $\tau_{xz}^* = \tau_{xz}(y = t, z = t)/(E_{xx}\varepsilon_0)$  und im Falle einer Temperaturlast  $\tau_{xz}^* = \tau_{xz}(y = t, z = t)/(E_{11}\alpha_{11}\Delta T)$ .



**Abbildung 4.16:** Rissflankenverschiebung eines symmetrischen AWVs mit dem Lagenaufbau von  $[\pm 10^\circ]_s$  aus der Materialkombination T800/914 unter axialer Dehnung  $\varepsilon_0 = 1$  in Abhängigkeit vom Randabstand.

### 4.5.3 Ergebnisse der gerissenen Konfiguration

In diesem Abschnitt wird die Verschiebungslösung des auf der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung basierenden Modells der gerissenen Struktur (vgl. Abschnitt 4.4.3) verifiziert. In Abbildung 4.16a ist die axiale Verschiebung der Rissflanken eines symmetrischen AWVs mit dem Lagenaufbau  $[\pm 10^\circ]_s$  aus der Materialkombination T800/914 unter axialer Zuglast in Abhängigkeit vom Randabstand dargestellt. Deutlich erkennbar verschieben sich die beiden Rissufer antisymmetrisch in positive bzw. negative  $x$ -Richtung. Dieser Effekt wird von der analytischen Lösung wiedergegeben, wobei leichte quantitative Abweichungen zur Referenzlösung bestehen. In Querrichtung ( $y$ -Richtung) schnürt sich das Laminat ein (vgl. Abbildung 4.16b), wobei beide Rissflanken die gleichen Verschiebungen  $u_y$  erfahren. Infolgedessen kommt es zu keiner relevanten Rissöffnung im Rissöffnungsmodus II. Die analytische Lösung gibt diese Beobachtungen in guter Übereinstimmung zu den Referenzdaten wieder. In  $z$ -Richtung kommt es gemäß des numerischen Modells zu einer geringen Modus I-Rissöffnung, deren Maximum jedoch zwei Größenordnungen geringer ist als das der Modus III-Rissöffnung. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird deshalb von einer Rissform im reinen Öffnungsmodus III ausgegangen. In Abbildung 4.17 ist die Modus III-Rissöffnung für zwei weitere Konfigurationen illustriert. Hierbei zeigt sich qualitativ ein ähnliches Verhalten, auch hier zeigen die Vorhersagen der entwickelten Modelle eine gute Übereinstimmung mit den numerischen Daten. Zu beachten ist, dass im Fall



**Abbildung 4.17:** Rissflankenverschiebung  $u_x$  von symmetrischem AWW mit dem Lagenaufbau von  $[\pm\vartheta]_s$  in Abhängigkeit vom Randabstand.

eines  $[\pm 20^\circ]_s$ -AWV aus dem Material G947/M18 bei einer Abkühlung um  $\Delta T = -1\text{K}$  die Rissöffnung mit umgekehrten Vorzeichen stattfindet, vgl. Abbildung 4.17b.

## 4.6 Anmerkungen

Das Ziel dieses Kapitels war die Entwicklung eines effizienten Berechnungswerkzeugs, das die Eingangsdaten für eine Analyse der interlaminaren Rissentstehung in symmetrischen AWWs bereitstellt. Hierzu wurden drei neuartige verschiebungsbasierte Mehrschichtmodelle vorgestellt und deren Ergebnisse mit denen einer maßgeschneiderten Finite-Elemente-Formulierung verglichen. Als Ergebnis lässt sich festhalten, dass im Rahmen dieser Studie ein höherer Polynomgrad der Ansatzfunktion zu einer besseren Übereinstimmung der Ergebnisse mit den Referenzergebnissen führt. Mithilfe des Modells dritter Ordnung kann die Deformation mit hoher Genauigkeit approximiert werden, während die Modelle niedriger Ordnung die Überhöhung am freien Rand und die Verteilung in Dickenrichtung teilweise nicht quantitativ korrekt wiedergeben. Ebenso ist das TSDT-Modell am besten geeignet die interlaminare Spannungskomponente  $\tau_{xz}$  abzubilden. Aufgrund der Ergebnisse dieses Vergleichs wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Studie mit dem Modell dritter Ordnung gearbeitet. Das analytische Wesen der vorgeschlagenen Berechnungsmethode und eine effiziente Implementierung in der Programmier-

## *Kapitel 4 Modelle zur Beschreibung des Laminat-Randeffekts*

sprache PYTHON führen zu Rechenzeiten von lediglich 0,01 bis 0,02 Sekunden für eine Spannungsanalyse auf einem gewöhnlichen Arbeitsplatzrechner<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup>Die Angabe beziehen sich auf eine Spannungsanalyse der ungerissenen Struktur und die Nutzung eines Arbeitsplatzrechners mit Intel® Core™ i5 Prozessor mit 6 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3,6 GHz.

## Kapitel 5

# Analyse der interlaminaren Rissinitiierung mithilfe der Finiten Bruchmechanik

*Im folgenden Kapitel wird die Delaminationsneigung von ausgeglichenen Winkelverbunden unter mechanischer und thermischer Last mithilfe der Finiten Bruchmechanik analysiert. Die in Abschnitt 4.1 vorgestellte Struktursituation und die Anwendung des Berechnungsmodells dritter Ordnung gemäß Abschnitt 4.4 bilden hierfür die Grundlage. Auf Basis der analytisch ermittelten Ergebnisse wird das gekoppelte Kriterium der Finiten Bruchmechanik implementiert. Anschließend wird zur Verifizierung der Ergebnisse einerseits das Kriterium mit Daten aus Finite-Elemente-Analysen ausgewertet und zusätzlich ein numerisches Kohäsivzonenmodell herangezogen. Nach einer inversen Bestimmung der versagenskritischen Materialparameter erfolgt die Untersuchung der interlaminaren Rissentstehung. Die rein analytisch erzielten Ergebnisse werden kritisch diskutiert und zur Bewertung der Vorhersagegenauigkeit des Berechnungsmodells mit experimentellen und numerischen Daten verglichen. Teile der hier dargestellten Inhalte wurden in international begutachteten Fachzeitschriften und Tagungsbänden publiziert (Frey et al., 2020, 2021c,b,a).*

### 5.1 Einführung

Wie in Abschnitt 3.3 dargestellt, ist die Finite Bruchmechanik (FBM) geeignet, um Delaminationen infolge der singulären Spannungen am Rand von ebenen Mehrschichtverbunden zu analysieren. Die dem Autor bekannten Studien zur Anwendung der FBM auf den Laminat-Randeffekt basieren jedoch alle auf numerischen Verfahren zur Ermittlung der mechanischen Feldgrößen (Hebel et al., 2010, Martin et al., 2010, Dölling et al., 2020). Im Gegensatz dazu erlaubt die hier entwickelte, rein analytische Herangehensweise eine höchst effiziente Versagensbewertung und ermöglicht somit auch die Durchführung

größerer Parameterstudien zur Identifikation der Haupteinflussfaktoren auf die effektive Festigkeit. Das physikalisch begründete Wesen der neuen Methode ermöglicht zudem eine Interpretation der Wirkweise des Versagensprozesses. Hierzu wird in Anlehnung an die experimentellen Studien von Lorriot et al. (2003), Lagunegrand et al. (2006) und Diaz Diaz u. Caron (2006) vorausgesetzt, dass sich der interlaminare Riss ausschließlich in Modus III öffnet. Dieses Vorgehen ist in Übereinstimmung mit den Ausführungen in Kapitel 4 und den Arbeiten von Kim u. Hong (1986), Martin et al. (2010) und Dölling et al. (2020), die aufgrund der dominanten interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$  ebenfalls nur die Modus III-Rissöffnung berücksichtigen.

## 5.2 Versagensbewertung mittels analytischer Lösung

Die aus dem Berechnungsmodell dritter Ordnung (vgl. Abschnitt 4.4) gewonnenen mechanischen Feldgrößen werden nun genutzt, um das gekoppelte Kriterium der FBM auszuwerten.

### 5.2.1 Auswertung des gekoppelten Kriteriums

Für die betrachtete reine Modus III-Rissöffnung vereinfacht sich das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium (2.65) zu

$$\tau_{xz} \geq \tau_c \quad \forall y \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}_{\text{III}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_{\text{III}c}, \quad (5.1)$$

wobei  $\tau_c$  die interlaminare Schubfestigkeit und  $\mathcal{G}_{\text{III}c}$  die Bruchzähigkeit bezüglich einer Modus III-Rissöffnung darstellt. Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{xz}$  ist unter der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens direkt proportional zur äußeren Last  $\varepsilon_0$  und nimmt – in der näheren Umgebung des Bimaterialpunkts – mit zunehmendem Abstand vom freien Rand entlang der Schichtgrenze streng monoton ab. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate  $\bar{\mathcal{G}}_{\text{III}}$  hingegen verhält sich proportional zum Quadrat der äußeren Last und besitzt entlang der Schichtgrenze mit zunehmenden Randabstand ein streng monoton steigendes Verhalten. Somit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um das gekoppelte Kriterium in der Form (2.67) zu verwenden. Zusammen mit den Beziehungen (5.1) ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\tau_{xz}^2(\Delta a, \varepsilon_0^*)}{\tau_c^2} = \frac{\bar{\mathcal{G}}_{\text{III}}(\Delta a, \varepsilon_0^*)}{\mathcal{G}_{\text{III}c}} \quad (5.2)$$

## 5.2 Versagensbewertung mittels analytischer Lösung

zur Bestimmung der unbekanntem Länge  $\Delta a_f$ . Die Dehnung  $\varepsilon_0^*$  ist hierbei beliebig aber konstant. Das versagenskritische Spannungsniveau  $\sigma_f$ , im Folgenden auch als effektive Festigkeit bezeichnet, kann anschließend gemäß

$$\sigma_f = E_{xx} \varepsilon_0^* \frac{\tau_c}{\tau_{xz}(\Delta a_f, \varepsilon_0^*)} = E_{xx} \varepsilon_0^* \sqrt{\frac{\mathcal{G}_{IIIc}}{\bar{\mathcal{G}}_{III}(\Delta a_f, \varepsilon_0^*)}} \quad (5.3)$$

wahlweise aus dem Spannungs- oder dem Energieteilkriterium ermittelt werden.

### 5.2.2 Berechnung der Energiefreisetzungsrate

Neben der Spannungsverteilung ist für die Versagensbewertung mit der FBM auch die Menge der freigesetzten Energie bei der spontanen Bildung eines Risses der Länge  $\Delta a$  relevant. Diese kann mit dem *Rissöffnungsintegral* ermittelt werden, wobei die bei der Rissbildung geleistete Spannungsarbeit  $\Delta W_\sigma$  betrachtet wird (beispielsweise Cherepanov, 1979). Sie ergibt sich als Integral über die gesamte Rissoberfläche  $\Delta A$ :

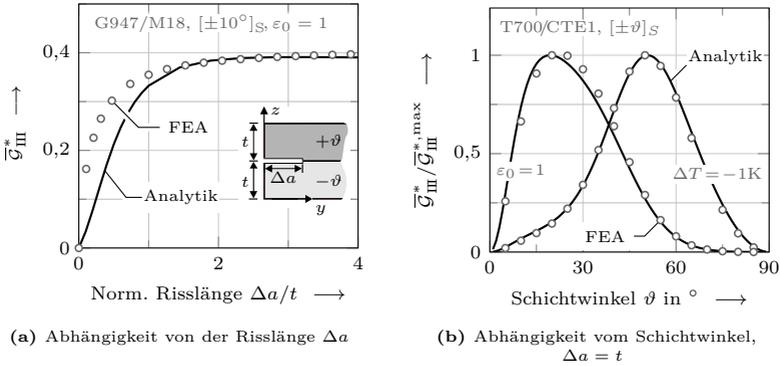
$$\Delta W_\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Delta A} \left\{ \sigma_z(u_z^+ - u_z^-) + \tau_{yz}(u_y^+ - u_y^-) + \tau_{xz}(u_x^+ - u_x^-) \right\} dA, \quad (5.4)$$

wobei  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz}$  die interlaminaren Spannungskomponenten entlang des potentiellen Risspfads vor der Rissöffnung und  $u_x^\pm, u_y^\pm$  und  $u_z^\pm$  die Verschiebungen des oberen und unteren Rissufers bezeichnen. Im vorliegenden Fall einer antisymmetrischen Modus III-Rissöffnung vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\Delta W_\sigma = -l \int_0^{\Delta a} \tau_{xz} u_x^+ dy = \Delta \Pi. \quad (5.5)$$

Hier ist  $l$  die Länge der Struktur in  $x$ -Richtung. Die Arbeit  $\Delta W_\sigma$  ist gleich der Änderung des Gesamtpotentials  $\Delta \Pi$  bei der Rissentstehung und kann somit zur Ermittlung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate  $\bar{\mathcal{G}}$  nach Gleichung (2.61) genutzt werden.

Abbildung 5.1a zeigt die inkrementelle Energiefreisetzungsrate für die Initiierung eines interlaminaren Risses in einem  $[\pm 10^\circ]_s$ -Verbund aus der Materialkombination G947/M18 unter einachsiger Zugbelastung. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate ist dabei in dimensionsloser Form als  $\bar{\mathcal{G}}_{III}^* = \bar{\mathcal{G}}_{III} / (E_{xx} t \varepsilon_0^2)$  über der normierten Risslänge  $\Delta a/t$  aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass die inkrementelle Energiefreisetzungsrate ein streng monoton steigendes Verhalten bezüglich der Risslänge aufweist, wobei die Steigung in der unmittelbaren Umgebung der Singularität am stärksten ist und für



**Abbildung 5.1:** Normierte inkrementelle Energiefreisetzungsrate  $\bar{\mathcal{G}}_{\text{III}}^*$  für  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbunde. Dargestellt ist die Abhängigkeit von der Anfangsrisslänge  $\Delta a$  für ein  $[\pm 10^\circ]_s$ -Laminat unter Zuglast(a) und die Abhängigkeit vom Schichtwinkel  $\vartheta$  bei einer festen Risslänge von  $\Delta a = t$  für eine reine mechanische und eine reine thermische Belastung (b).

längere Risse abnimmt. Das analytische Berechnungsmodell bildet die hohe Anfangssteigung nicht komplett ab, da es auch, wie in Abschnitt 4.5.2 diskutiert wurde, die theoretisch singulären Spannungen in direkter Nähe zum freien Rand nicht in voller Höhe reproduziert. Für Risslängen größer als die Einzelschichtdicke sind die vorhergesagten Werte aber in guter Übereinstimmung zu den numerischen Referenzdaten. Da die Länge der initiierten Risse in der Größenordnung der Einzelschichtdicke ist (Diaz Diaz u. Caron, 2006, Dölling, 2022), wird diese Abweichung toleriert. In Abbildung 5.1b ist die Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate vom Schichtwinkel für Risse in einem T700/CTE1-Winkelverbund unter uniaxialer Zug- und homogener Temperaturbelastung dargestellt. Hierbei ist die entdimensionalisierte Energiefreisetzungsrate auf ihr Maximum normiert. Es ist zu beachten, dass die Entdimensionalisierung sich im thermischen Fall von obiger Definition unterscheidet. Für Temperaturlasten gilt  $\bar{\mathcal{G}}_{\text{III}}^* = \bar{\mathcal{G}}_{\text{III}} / (E_{11} t (\alpha_{11} \Delta T)^2)$ . Die Energiefreisetzungsrate geht in Richtung der Grenzfälle  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = 90^\circ$  gegen null und nimmt dazwischen ein deutliches Maximum an. Ähnlich wie die interlaminare Schubspannung (vgl. Abbildung 4.15) erreicht auch die Energiefreisetzungsrate ihr Maximum für thermische Lasten erst bei größeren Schichtwinkeln als unter mechanischer Last. Die analytische Modellierung sagt die größten Werte von  $\bar{\mathcal{G}}_{\text{III}}^*$  unter Zuglast für  $\vartheta = 19^\circ$  und unter thermischer Last für  $\vartheta = 51^\circ$  vorher.

### 5.2.3 Skalierungsgesetze

Skalierungsgesetze erlauben die effiziente Ermittlung von Spannungen und Energiefreisetzungsraten für unterschiedliche Lastfälle und Konfigurationen mit variierenden Strukturabmessungen. Im Fall des betrachteten symmetrischen AWVs unter uniaxialer Zugbelastung ist der Verlauf jeder Spannungskomponente  $\sigma_{ij}$  entlang der Schichtgrenze eine Funktion der Koordinate  $y$ , der Schichtdicke  $t$ , des Schichtwinkels  $\vartheta$ , der Materialparameter und der Last  $\varepsilon_0$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(y, t, \vartheta, E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \varepsilon_0). \quad (5.6)$$

Da die interlaminaren Spannungen nur in unmittelbarer Randnähe relevant sind und auch die Länge der initiierten Risse klein ist, gilt für alle weiteren Betrachtungen  $y \ll b$ , weswegen die Abhängigkeit von der Breite  $b$  bewusst vernachlässigt wird. Mit den Werkzeugen der Dimensionsanalyse (Bluman u. Kumei, 1989, Unger u. Leyer, 2015) wird nun ein Skalierungsgesetz für die Spannung  $\sigma_{ij}$  hergeleitet. Unter Verwendung eines Kraft-Länge-Systems ( $LF$ -System) lässt sich die Dimensionsmatrix der Gleichung (5.6) wie folgt angeben:

	$\sigma$	$y$	$t$	$\vartheta$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$	$\varepsilon_0$
$L$	-2	1	1	0	-2	-2	-2	-2	0	0
$F$	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0

Die Dimensionsmatrix kann dabei als lineare Abbildung interpretiert werden, die die Potenzen der Eingangsgrößen auf die Potenzen der Basisdimensionen ( $L, F$ ) abbildet (Bremm, 2022). Durch die Anwendung des  $\Pi$ -Theorems (Buckingham, 1914, Barenblatt, 1996) kann die dimensionslose Darstellung

$$\frac{\sigma_{ij}}{E_{11}} = F\left(\frac{y}{t}, \vartheta, \frac{E_{22}}{E_{11}}, \frac{G_{12}}{E_{11}}, \frac{G_{23}}{E_{11}}, \nu_{12}, \varepsilon_0\right) = F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7) \quad (5.7)$$

für die Spannungen hergeleitet werden. Die anschließende Entwicklung der Funktion  $F$  als Taylorreihe um den Entwicklungspunkt  $\Pi_7 = \varepsilon_0 = 0$  ergibt

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7) \approx F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, 0) + F'(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, 0) \Pi_7, \quad (5.8)$$

wobei  $F'$  die partielle Ableitung von  $F$  nach  $\Pi_7$  darstellt und Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Da für den lastfreien Zustand  $\Pi_7 = \varepsilon_0 = 0$  die Spannung  $\sigma_{ij}$  und folglich auch die Funktion  $F$  verschwinden muss, ist der erste Term der Reihe (5.8) gleich null und es ergibt sich eine direkte Proportionalität der Spannung zur äußeren Last. Dieses Ergebnis ist in der linearen

Elastizitätstheorie bekannt, aber das genauere Betrachten der Gleichung (5.7) zeigt zudem, dass die Spannung nicht explizit von der Schichtdicke  $t$ , sondern nur vom Verhältnis  $y/t$  abhängt. Aus der Kenntnis des Spannungsverlaufs  $\sigma_{ij}^*(y, t = t^*, \varepsilon_0 = \varepsilon_0^*)$  für eine spezielle Last  $\varepsilon_0^*$  und eine spezielle Schichtdicke  $t^*$  lassen sich somit die Verläufe für beliebige Lasten und Schichtdicken skalieren:

$$\sigma_{ij}(y, t, \varepsilon_0) = \sigma_{ij}^* \left( y \frac{t^*}{t}, t^*, \varepsilon_0^* \right) \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0^*}. \quad (5.9)$$

Auch für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate kann durch ähnliche Überlegungen ein Skalierungsgesetz angegeben werden:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a, t, \varepsilon_0) = \bar{\mathcal{G}}^* \left( \Delta a \frac{t^*}{t}, t^*, \varepsilon_0^* \right) \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0^*} \right)^2 \left( \frac{t}{t^*} \right), \quad (5.10)$$

wonach  $\bar{\mathcal{G}}$  proportional zum Quadrat der äußeren Last ist. Zur Anwendung der Beziehungen (5.9) und (5.10) sei vorausgesetzt, dass der Schichtwinkel  $\vartheta$  und die Materialparameter konstant bleiben. Die Verwendung der Skalierungsgesetze reduziert den Berechnungsaufwand in den folgenden Studien erheblich, da für jede Materialkombination nur noch der Schichtwinkel im Berechnungsmodell, nicht aber die Höhe der äußeren Last und die Schichtdicke variiert werden muss. Zur Verwendung für thermische Lastfälle müssen in den Gleichungen (5.9) und (5.10) die Dehnungen  $\varepsilon_0$  bzw.  $\varepsilon_0^*$  durch die Temperaturdifferenzen  $\Delta T$  bzw.  $\Delta T^*$  ersetzt werden. Eine detaillierte Herleitung und Verifizierung der Methode findet sich zum Beispiel bei Frey et al. (2021c).

## 5.3 Versagensbewertung mittels numerischer Modelle

Um die Vorhersagegenauigkeit des analytischen Verfahrens zu bewerten, werden dessen Ergebnisse mit den Resultaten zweier numerischer Methoden verglichen. Das ist zum einen die Auswertung der FBM mit Daten aus Finite-Elemente-Analysen, zum anderen die Versagensanalyse auf Basis der weitverbreiteten Kohäsivzonenmodellierung (CZM).

### 5.3.1 Auswertung des gekoppelten Kriteriums

Die interlaminare Rissentstehung wird analog zu der analytischen Herangehensweise (Abschnitt 5.2) mittels der Finiten Bruchmechanik analysiert, mit dem Unterschied, dass die Eingangsgrößen des gekoppelten Spannungs- und

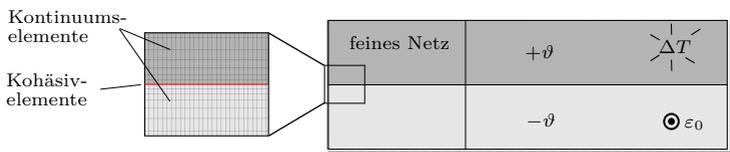
Energiekriteriums mit dem in Abschnitt 4.5.1 vorgestellten Finite-Elemente-Modell generiert werden. Es wird, in Übereinstimmung zur Auswertung mit analytisch ermittelten Daten, eine reine Modus III-Rissöffnung vorausgesetzt und folglich das Kriterium analog in der Form (5.1) ausgewertet. Ebenso werden die interlaminare Schubspannung und die inkrementelle Energiefreisetzungsrates gemäß der vorgestellten Skalierungsgesetze (5.9, 5.10) auf andere Schichtdicken und Lastniveaus umgerechnet.

Durch den Vergleich der beiden FBM-Auswertungen – basierend auf analytisch bzw. numerisch erzeugten Eingangsdaten – lässt sich bemessen, inwiefern Abweichungen der mechanischen Feldgrößen zu unterschiedlichen effektiven Laminatfestigkeiten und Risslängen führen. Somit eignet sich dieser Vergleich zur Beurteilung, ob das in Abschnitt 4.4 vorgeschlagene Berechnungsverfahren dritter Ordnung geeignet ist, um die Eingangsdaten für eine Finite Bruchmechanik-Analyse zu generieren.

#### 5.3.2 Bewertung mithilfe eines Kohäsivzonenmodells

Der Vergleich zwischen den Auswertungen des gekoppelten Kriteriums mittels analytisch bzw. numerisch ermittelten Daten beantwortet jedoch nicht die Frage, inwiefern die Finite Bruchmechanik ein adäquates Werkzeug zur Analyse interlaminarer Risse in AWWs ist. Um dies zu beurteilen, wird die in Abschnitt 3.3 vorgestellte Kohäsivzonenmodellierung (CZM) als alternatives Versagensmodell zum Vergleich herangezogen. Wie ausgeführt, wurde sie in der Vergangenheit bereits vielfach erfolgreich zur Vorhersage von Delaminationen eingesetzt und eignet sich, da sowohl festigkeits- als auch bruchmechanische Faktoren berücksichtigt werden, zudem um die Vorhersagen der Finiten Bruchmechanik abzusichern (beispielsweise Stein et al., 2015, Rosendahl et al., 2017, Talmon l'Armée u. Becker, 2020). Der interessierte Leser sei auf die Veröffentlichungen von Martin et al. (2016) und Cornetti et al. (2016, 2018) verwiesen, die die Übereinstimmung von FBM und CZM im Detail thematisieren.

**Modellaufbau.** Im Rahmen dieser Forschungsarbeit wird ein Kohäsivzonenmodell in dem kommerziellen Finite-Elemente-Programmpaket ABAQUS (Version 2018) implementiert. Die Umsetzung erfolgt parametrisiert über eine PYTHON-Schnittstelle des Programms, so dass auch größere Variantenstudien effizient durchgeführt werden können. Der Aufbau entspricht dem in Abschnitt 4.5.1 vorgestellten Finite-Elemente-Modell, wobei ein Viertel des Laminats mit den in Abschnitt 4.1 diskutierten Rand- und Symmetriebedingungen berücksichtigt wird. Zusätzlich wird zur Abbildung des Versagens



**Abbildung 5.2:** Schematische Darstellung des Kohäsivzonenmodells der Viertelstruktur mit den verwendeten Rand- und Symmetriebedingungen. Eine Detailansicht des Randbereichs zeigt die dort stark verfeinerte Diskretisierung.

zwischen den Laminatschichten eine Lage Kohäsivelemente mit verschwindend geringer Dicke eingebracht. Da in der Elementbibliothek von ABAQUS keine zweidimensionalen Kohäsivelemente vorhanden sind, die die Kinematik des GEVZs abbilden können, wird das Modell aus einer Schicht dreidimensionaler Elemente mit linearen Ansatzfunktionen aufgebaut und die Kinematik über Kopplungsgleichungen berücksichtigt. Die Diskretisierung erfolgt in einer strukturierten Weise mit Hexaederelementen<sup>20</sup>, wobei die Netzfeinheit in Richtung der Schichtgrenze und in Richtung des freien Randes stark zunimmt. In der Nähe des freien Randes ist ein fein diskretisierter Bereich vorgesehen, in dem die Elemente eine konstante Kantenlänge  $l_e$  in Richtung des Randes besitzen. In Abbildung 5.2 ist der Modellaufbau inklusive der Diskretisierung und der Randbedingungen schematisch dargestellt. Die axiale Dehnung  $\varepsilon_0$  und die homogene Temperaturlast  $\Delta T$  werden gleichmäßig auf die gesamte Struktur aufgebracht. Weiterhin wird für die Einzelschichten linear-elastisches, monoklines Materialverhalten vorausgesetzt.

Das interlaminaire Versagen wird über das konstitutive Verhalten der Kohäsivelemente abgebildet. Zu diesem Zweck wird ein bilineares Spannungs-Separations-Gesetz implementiert, wie es in Abbildung 3.4b dargestellt ist. Dabei wird der Beginn des Schädigungsprozesses über das Festigkeitskriterium

$$\tau_{xz} = \tau_c \quad (5.11)$$

bestimmt, in dem gemäß der Annahme einer reinen Modus III-Rissöffnung die interlaminaire Schubspannung  $\tau_{xz}$  und die zugehörige Festigkeit  $\tau_c$  berücksichtigt werden. Anschließend beginnt eine Degradation der Elementsteifigkeit, bis das Material bei Erreichen der energetischen Bedingung

$$\mathcal{G}_{\text{III}} = \mathcal{G}_{\text{IIIc}} \quad (5.12)$$

vollständig versagt. Die Teilkriterien sind analog zur FBM gewählt, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten.

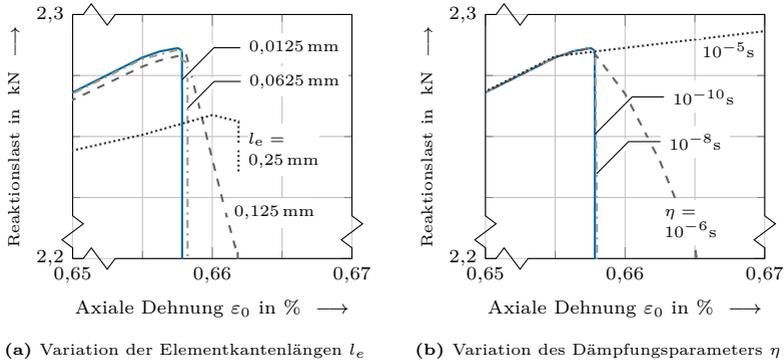
<sup>20</sup>In der Elementbibliothek von ABAQUS sind die verwendeten Kohäsivelemente mit der Abkürzung COH3D8 und die verwendeten Kontinuums-elemente mit C3D8 bezeichnet.

### 5.3 Versagensbewertung mittels numerischer Modelle

Die Entstehung einer Delamination in einem Laminat unter gleichmäßiger Längsdehnung und die damit einhergehende plötzliche Steifigkeitsabnahme führen zu einem abrupten Rückgang der Reaktionslast in Längsrichtung (vgl. Abbildung 5.3). Es sei erwähnt, dass die Reaktionslast bei einer weiteren Steigerung der äußeren Dehnung in manchen Struktursituationen erneut ansteigen kann. Zur Definition des Versagenspunkts wird innerhalb dieser Studie jedoch die erstmalige sprunghafte Degradation der Steifigkeit herangezogen. In diesem Punkt hat, für ein Laminat unter axialer Dehnung, nicht nur der Verlauf der Reaktionslast einen deutlichen Sprung, sondern auch der des elastischen Potentials. Bei einer rein thermischen Belastung steht die Reaktionslast nicht für eine Charakterisierung des Versagens zur Verfügung. In dieser Situation zeigt jedoch, neben der Formänderungsenergie, die Längsdehnung eine plötzliche Änderung im Versagenspunkt, da die Verformungsbehinderung zwischen den Einzelschichten mit der Rissinitiierung gemindert wird, und kann somit zur Kennzeichnung des Versagenspunktes genutzt werden.

**Konvergenzstudien.** Bei der Implementierung eines Kohäsivzonenmodells ist der Einfluss einiger nicht-physikalischer Modellparameter sorgfältig zu analysieren. Um zu gewährleisten, dass deren Einfluss auf die Berechnungsergebnisse vernachlässigbar klein ist, werden Konvergenzstudien bezüglich der initialen Steifigkeit der ungeschädigten Kohäsivelemente  $K$ , der Kantenlänge der Kohäsivelemente in der Prozesszone  $l_e$  und des viskosen Dämpfungsparameters  $\eta$  durchgeführt. Für die Untersuchungen wird ein  $[\pm 10^\circ]_s$ -AWV aus kohlefaserverstärktem Epoxidharz (Materialkombination T800/914) unter axialer Dehnung verwendet, wobei die Einzelschichtdicke  $t = 0,125$  mm, die Schubfestigkeit  $\tau_c = 27,5$  MPa und Bruchzähigkeit  $G_{IIIc} = 0,38$  N/mm beträgt. Die Lösung wird im Folgenden als hinreichend exakt bezüglich des betrachteten Parameters angesehen, wenn eine weitere Erhöhung beziehungsweise Reduzierung zu einer Änderung der ermittelten Versagenslast von höchstens 0,1 % führt.

Die initiale Steifigkeit der ungeschädigten Kohäsivelemente ist ausreichend groß zu wählen, so dass die Nachgiebigkeit der Gesamtstruktur durch die zusätzlichen Elemente nicht künstlich erhöht wird (Turon et al., 2007, Gonçalves et al., 2000). Andererseits führen hohe Steifigkeitswerte zu langen Rechenzeiten und können numerische Probleme verursachen. Laut einer Übersichtsstudie von Lu et al. (2019) verwenden die meisten Autoren Steifigkeiten zwischen  $10^5$  N/mm<sup>3</sup> und  $10^8$  N/mm<sup>3</sup>. Eigene Konvergenzuntersuchungen zeigen, dass die Versagenslast für die betrachtete Strukturkonfiguration ab einem Wert von  $K \geq 10^4$  N/mm<sup>3</sup> nicht mehr signifikant von der Wahl der Steifigkeit abhängt.



**Abbildung 5.3:** Last-Verformungsdiagramme zur Bestimmung des Einflusses der minimalen Elementkantenlänge der Kohäsivelemente  $l_e$  und des viskosen Dämpfungsparameters  $\eta$ . Die Studie wurde anhand eines  $[\pm 10^\circ]_S$ -Laminates aus der Materialkombination T800/914 mit einer Einzelschichtdicke von  $t = 0,125$  mm durchgeführt. Die nicht-physikalischen Modellparameter, welche nicht variiert wurden, betragen  $l_e = 0,0125$  mm,  $\eta = 10^{-10}$  s und  $K = 10^6$  N/mm.

Auch die Größe der Kohäsivelemente in der Prozesszone kann einen wesentlichen Einfluss auf die Berechnung haben. Verschiedene Autoren haben Vorschläge gemacht, wie die Länge  $l_{cz}$  der Kohäsivzone auf Grundlage der Materialkonstanten abschätzt werden kann. Eine ausführliche Übersicht ist in Turon et al. (2007) zu finden. Als Ausgangspunkt für eine Konvergenzstudie wird eine von Harper u. Hallett (2008) für Modus II angegebene Formel an eine Modus III-Rissöffnung angepasst:

$$l_{cz} = m \sqrt{E \frac{G_{IIIc}}{\tau_c^2} t}. \quad (5.13)$$

Dabei wird neben den Materialkonstanten  $E, G_{IIIc}, \tau_c$  auch die Einzelschichtdicke  $t$  berücksichtigt. Der Parameter  $m$  ist eine modellspezifische Konstante, für die Harper u. Hallett (2008) einen Wert von 0,5 vorschlagen. Nach Turon et al. (2007) soll die Kohäsivzone mit  $N_e \in \{2, \dots, 10\}$  Elementen diskretisiert werden. Für eine Wahl von  $N_e = 10$  ergibt sich für das verwendete Laminat eine Größenordnung von  $l_e \approx t/5$  für die Länge der Kohäsivelemente<sup>21</sup>. Die durchgeführte Konvergenzstudie, deren Ergebnisse in Abbildung 5.3a dargestellt sind, zeigt eine hinreichend konvergierte Bruchlast bereits für Elementgrößen  $l_e \leq 0,125$  mm, was der Einzelschichtdicke entspricht.

<sup>21</sup>Hierbei wurde für den Elastizitätsmodul konservativ der Wert des reinen Matrixmaterials HexPly 914,  $E = 3900$  MPa, aus dem Datenblatt des Herstellers Hexcel übernommen.

## 5.4 Inverse Bestimmung der Bruchparameter

Aufgrund des stark nichtlinearen Modellverhaltens kann es während der Lösung des Randwertproblems zu numerischen Schwierigkeiten kommen. Die Problematik kann deutlich entschärft werden, indem eine viskose Dämpfung in das Konstitutivgesetz der Kohäsivelemente aufgenommen wird (Hamitouche et al., 2008). Allerdings führen die viskosen Effekte zu einer Dissipation von Energie und können somit zu einer künstlichen Erhöhung der Versagenslast führen. In den in Abbildung 5.3b dargestellten Last-Verformungsdiagrammen ist dieser Effekt deutlich erkennbar, allerdings kann die effektive Festigkeit für  $\eta \leq 10^{-6}$  s als konstant angesehen werden.

Über das Ergebnis der Konvergenzuntersuchungen hinausgehend werden in den folgenden Studien die Steifigkeit der Kohäsivelemente  $K = 10^6$  N/mm<sup>3</sup>, die Elementkantenlänge  $l_e = t/10$  und der Dämpfungsparameter  $\eta = 10^{-10}$  s verwendet. Diese Wahl ist äußerst konservativ, wohlwissend dass das Konvergenzverhalten des Modells von einer Variation der Materialparameter beeinflusst werden kann. In der betrachteten Konfiguration führt dies zu einem Modell mit circa  $10^4$  Freiheitsgraden und einer Berechnungsdauer von ungefähr 5 Minuten auf einem herkömmlichen Arbeitsplatzrechner<sup>22</sup>.

## 5.4 Inverse Bestimmung der Bruchparameter

Die beiden in dieser Studie verwendeten Modelle zur Vorhersage des interlaminaren Versagens, die Finite Bruchmechanik und die Kohäsivzonenmodellierung, basieren auf den gleichen Bruchparametern. Da in beiden Konzepten sowohl festigkeits- als auch bruchmechanische Aspekte berücksichtigt werden, sind das im Falle der betrachteten Modus III-Rissöffnung die Schubfestigkeit  $\tau_c$  und die Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_{IIIc}$ .

Diaz Diaz u. Caron (2006) beschrieben die Entstehung einer Delamination in AWVs als die Vereinigung von Mikrorissen in einer dünnen Harzschicht zwischen den Laminatlagen. Hierbei geben sie für die Länge der Mikrorisse und die Dicke der Harzschicht die Größenordnung des Faserdurchmessers an. Auch Wu (1990) ging von einem Versagen des Matrixmaterials aus. Experimentelle Studien von Crossman et al. (1980) und Johannesson et al. (1984) legen nahe, dass neben dem reinen Matrixversagen, auch Ablöseprozesse des Matrixmaterials von der Faser eine wichtige Rolle spielen. Johannesson et al. (1984) beschrieben detailliert einen gezackten Verlauf der Rissfront, für dessen exakte Form sie eine Abhängigkeit von der Faserorientierung

---

<sup>22</sup>Die Angabe beziehen sich auf die Nutzung eines Arbeitsplatzrechners mit Intel® Core™ i5 Prozessor mit 6 Kernen mit jeweiliger Taktfrequenz von 3,6 GHz.

der angrenzenden Laminatlagen annehmen. Diese Beobachtungen zeigen, dass die benötigte Festigkeit und Bruchzähigkeit als Bruchparameter der Grenzfläche zu verstehen sind, die sowohl vom verwendeten Matrixsystem, vom Fasermaterial und auch von der Faserorientierung der benachbarten Schichten abhängen.

**Bruchzähigkeit und Festigkeit der Grenzfläche.** Basierend auf den experimentellen Beobachtungen einer gezackten Rissoberfläche postulierten Marom et al. (1988) eine Formel zur Beschreibung der Abhängigkeit der Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_{IIc}$  von den Faserorientierungen der benachbarten Schichten. Je stärker die Rissausbreitungsrichtung von den Faserorientierungen abweicht, desto größer ist die Bruchzähigkeit der Grenzfläche. Anderson u. König (2004) wendeten diese, ursprünglich für gewebeverstärkte Materialien entwickelte Beziehung an, um die experimentellen Daten aus Studien anderer Autoren nachzurechnen und sahen insbesondere für spröde Werkstoffe eine gute Übereinstimmung. Auch Hu et al. (2022, 2023) gaben eine Beziehung zwischen den Faserwinkeln der angrenzenden Schichten und der gemessenen Modus I-Bruchzähigkeit an, wobei sie im Gegensatz zu Marom et al. (1988) einen linearen Abhängigkeit vom Schichtwinkel  $\vartheta$  vorschlugen:

$$\mathcal{G}_c(\vartheta) = \mathcal{G}_c(\vartheta = 90^\circ) + \frac{90^\circ - \vartheta}{90^\circ} [\mathcal{G}_c(\vartheta = 0^\circ) - \mathcal{G}_c(\vartheta = 90^\circ)]. \quad (5.14)$$

Die angegebene Formel ist auf die in dieser Studie betrachtete Konfiguration einer vom Rand ausgehenden Delamination in einem ausgeglichenen  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbund angepasst. Ihr zufolge ist die Bruchzähigkeit der Grenzfläche in einem  $[\pm 90^\circ]_s$ -Verbund am geringsten, da hier die Delaminationsrichtung parallel zu der Faserorientierung ist. Sie steigt mit fallendem Schichtwinkel  $\vartheta$  linear an, bis sie für  $\vartheta = 0^\circ$  ihr Maximum erreicht. In diesem Fall ist die Rissausbreitungsrichtung senkrecht zur Faserrichtung. Hu et al. (2022, 2023) stützen ihre Aussagen auf den gezackten Verlauf der Rissfront und andere mikromechanische Effekte wie das Lösen einzelner Fasern aus der Matrix oder die Entstehung von Zwischenfaserbrüchen in den angrenzenden Schichten, die sie in einer experimentellen Untersuchung bestätigen konnten. Der Befund von Donaldson (1988), der in einer Studie an  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunden für  $\vartheta = 45^\circ$  eine kleinere Modus III-Bruchzähigkeit gemessen hat als für  $\vartheta = 15^\circ$ , passt zu diesen Erklärungen. Auch Allix et al. (1998) stellten in einer experimentellen Studie an AWVs aus kohlefaserverstärktem Epoxidharz eine Abhängigkeit der Bruchzähigkeiten  $\mathcal{G}_{Ic}$  und  $\mathcal{G}_{IIc}$  von der Faserorientierung der angrenzenden Schichten fest.

Bradley (1989) führte die Bruchzähigkeit des Verbunds auf den Modus I-Wert des Matrixharzes  $\mathcal{G}_{Ic}^{\text{mat}}$  zurück. Er gab für das Verhältnis  $\mathcal{G}_{IIc}/\mathcal{G}_{Ic}^{\text{mat}}$  einen

#### 5.4 Inverse Bestimmung der Bruchparameter

Bereich von 0,25 bis 7 und für das Verhältnis  $\mathcal{G}_{\text{IIIc}}/\mathcal{G}_{\text{Ic}}$  einen Bereich von 3 bis 10 an. Verglichen mit Modus I und II gibt es bezüglich einer Modus III-Rissöffnung und der zugehörigen Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_{\text{IIIc}}$  bedeutend weniger Untersuchungen (Tay, 2003). Li et al. (1997) folgerten aus Versuchen an  $[90^\circ/+45^\circ_-45^\circ/90^\circ]_s$ -Laminaten, dass die Modus III-Bruchzähigkeit circa viermal größer als  $\mathcal{G}_{\text{Ic}}$  ist. Laut Liao u. Sun (1996) sind die Werte von  $\mathcal{G}_{\text{IIIc}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{IIc}}$  vergleichbar.

Eine Alternative zur Verwendung von experimentell ermittelten Bruchparametern ist es, diese Parameter mithilfe der verwendeten Versagensmodelle aus experimentell bestimmten Bruchlasten zurückzurechnen. Dieses Vorgehen wird im Folgenden auch als inverse Bestimmung der Bruchparameter bezeichnet. Diaz Diaz u. Caron (2006) verwendeten die Methode zur Ermittlung der Schubfestigkeit für die Vorhersage des interlaminaren Versagens in Winkelverbunden mithilfe eines Schubspannungskriteriums. Sie erhielten eine Festigkeit von  $\tau_c = 265 \text{ MPa}$ , ein Wert der den des Matrixmaterials um ein Vielfaches übersteigt, und erklärten das mithilfe von Größeneffekten (Wisnom, 1999, Fiedler et al., 2001, Hobbiebrunken et al., 2007). Demnach ist davon auszugehen, dass die Schubfestigkeit der Grenzfläche aufgrund der sehr geringen Dicke höher ist als die des reinen Matrixmaterials. Auch Lagunegrand et al. (2006) nutzten die Methode der Rückrechnung der Bruchparameter. Zusätzlich zur Schubfestigkeit, für die sie einen vergleichbaren Wert wie Diaz Diaz u. Caron (2006) erhielten, bestimmten sie die Mittelungslänge für das verwendete nicht-lokale Festigkeitskriterium zu  $11 \mu\text{m}$ , was ca. einem hundertstel der Einzelschichtdicke entspricht. In den beiden Studien ergaben sich für unterschiedliche Schichtwinkel ähnliche Schubfestigkeiten, so dass diese als unabhängig von der Faserorientierung angenommen wurde. Martin et al. (2010) analysierten das interlaminare Versagen von AWWs mithilfe der Finiten Bruchmechanik und bedienten sich dabei der imentellen Daten von Lagunegrand et al. (2006) und Diaz Diaz u. Caron (2006). Dabei rechneten sie sowohl  $\mathcal{G}_{\text{IIIc}}$  als auch  $\tau_c$  aus den Versuchsdaten zurück. Auf diese Weise ergaben sich für das Material T700/CTE1 ähnliche Schubfestigkeiten  $\tau_c$  wie bei Diaz Diaz u. Caron (2006), während die Festigkeiten für die G947/M18-Verbunde sogar noch darüber lagen. Sowohl die Schubfestigkeiten als auch die Bruchzähigkeiten variierten dabei mit der Faserorientierung.

**Bestimmung im Rahmen der vorliegenden Studie.** Die Methode der inversen Bestimmung der Bruchparameter wird im Folgenden exemplarisch an einem T800/914- $[\pm\vartheta]_s$ -Verbund angewendet. Hierbei werden aus den von Lorient et al. (2003) bestimmten Versagenslasten (Tabelle 5.1) die Bruchzähigkeit

**Tabelle 5.1**

Experimentell ermittelte Versagenslasten  $\sigma_f^{\text{exp}}$  von drei  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunden in Abhängigkeit der Einzelschichtdicke  $t$  und des Schichtwinkels  $\vartheta$ . Die Basisschichtdicken  $t_0$  der Materialsysteme können Tabelle 4.2 entnommen werden.

	$\vartheta$ [°]	$\sigma_f^{\text{exp}}$ [MPa]				
		$t = t_0$	$t = 2t_0$	$t = 3t_0$	$t = 4t_0$	$t = 5t_0$
T800/914 <sup>a</sup>	10	826 ± 27	722 ± 28	655 ± 26	580 ± 27	619 ± 16
	20	599 ± 16	495 ± 26	418 ± 15	394 ± 14	354 ± 22
	30	406 ± 14	304 ± 7	269 ± 2	232 ± 8	227 ± 15
G947/M18 <sup>b</sup>	10	812 ± 10	723 ± 13	690 ± 10	672 ± 16	
	30	391 ± 8	351 ± 5	339 ± 5	328 ± 8	
T700/CTE1 <sup>c</sup>	10	941 ± 19	765 ± 35	731 ± 31	679 ± 5	
	20	601 ± 37	503 ± 41	459 ± 13	479 ± 15	

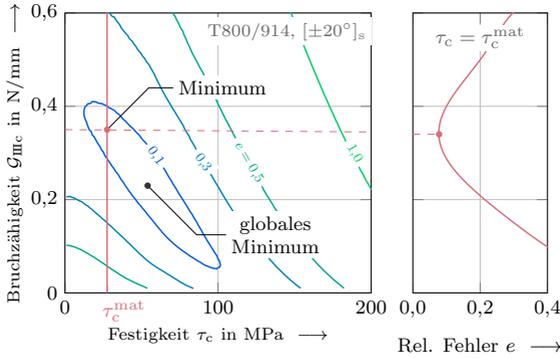
<sup>a</sup> Lorriot et al. (2003), <sup>b</sup> Lagunegrand et al. (2006), <sup>c</sup> Diaz Diaz u. Caron (2006)

$\mathcal{G}_{\text{IIIc}}$  und die Schubfestigkeit  $\tau_c$  zurück gerechnet. Für jede der untersuchten Faserorientierungen ( $\vartheta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ ) werden die Bruchparameter  $\tau_c$  und  $\mathcal{G}_{\text{IIIc}}$  innerhalb physikalisch sinnvoller Grenzen variiert und die zugehörigen effektiven Festigkeiten  $\sigma_f$  mithilfe der Finiten Bruchmechanik analytisch bestimmt. Das quadratische Mittel der relativen Fehler

$$e = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_{f,i} - \sigma_{f,i}^{\text{exp}}}{\sigma_{f,i}^{\text{exp}}} \right)^2} \quad (5.15)$$

liefert ein Maß die Abweichung der berechneten von den experimentellen Daten für das verwendete  $\tau_c, \mathcal{G}_{\text{IIIc}}$ -Paar und wird zur Bewertung der Vorhersagequalität des Modells herangezogen. Dabei ist  $n$  die Anzahl der berücksichtigten Schichtdicken und  $\sigma_f^{\text{exp}}$  die experimentell ermittelte Bruchlast. Die Ergebnisse für ein  $[\pm 20^\circ]_s$ -Laminat aus der Materialkombination T800/914 sind im linken Teil der Abbildung 5.4 als Konturplot dargestellt. Der kleinste Vorhersagefehler  $e$  ergibt sich demnach für ein Schubfestigkeit von  $\tau_c = 56$  MPa und eine Bruchzähigkeit von  $\mathcal{G}_{\text{IIIc}} = 0,23$  N/mm. In Abbildung 5.5a sind die ermittelten  $\tau_c, \mathcal{G}_{\text{IIIc}}$ -Paare in Abhängigkeit des Schichtwinkels aufgetragen. Es zeigt sich für das Material T800/914 eine mit wachsendem Schichtwinkel kleiner werdende Schubfestigkeit, wohingegen bei der Bruchzähigkeit keine klare Tendenz erkennbar ist. Diese Beobachtungen decken sich qualitativ mit denen von Dölling (2022), der die Methode der inversen Materialdatenbestimmung auf Basis von Versagenslasten auswertete, die er mithilfe der Finiten Bruchmechanik und der Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode generierte.

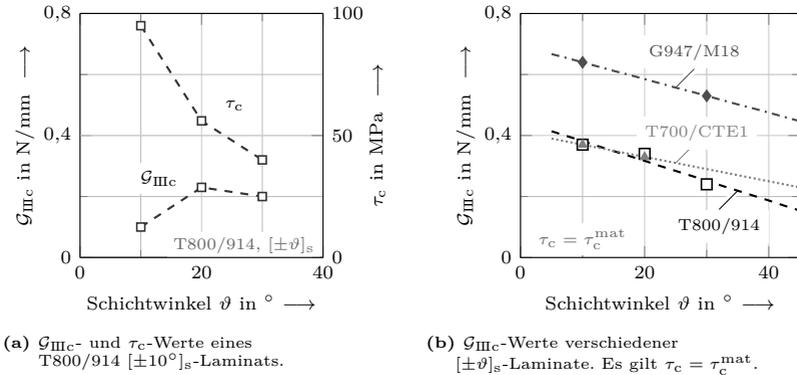
## 5.4 Inverse Bestimmung der Bruchparameter



**Abbildung 5.4:** Vorhersagefehler  $e$  zur Bestimmung der Versagensparameter  $G_{IIIc}$  und  $\tau_c$  aus experimentellen Daten. In der linken Abbildung sind die Werte des Prädiktionsmaßes  $e$  als Höhenlinien dargestellt, wobei die Bruchzähigkeit  $G_{IIIc}$  und die Schubfestigkeit  $\tau_c$  innerhalb physikalisch sinnvoller Grenzen variiert werden. Im rechten Bildteil ist die Schubfestigkeit konstant gleich der des Matrixmaterials.

Abweichend von dem beschriebenen Vorgehen wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit als Schubfestigkeit der Grenzfläche, unabhängig von der Faserorientierung der angrenzenden Schichten, die des Matrixharzes verwendet:  $\tau_c = \tau_c^{\text{mat}}$ . Die Festigkeiten der verwendeten Materialien sind in Tabelle 5.2 aufgelistet.<sup>23</sup> Dies ist als konservatives Vorgehen zu verstehen, da davon ausgegangen wird, dass sich die Delamination in einer reinen Harzschicht ausbreitet und eventuell festigkeitssteigernde Mechanismen wie der Größeneffekt oder andere mikromechanische Vorgänge vernachlässigt werden. Auf Basis dieser Annahme wird bei der Bestimmung des Prädiktionsmaßes nach Beziehung (5.15) nur noch die Bruchzähigkeit variiert. Die konstante Festigkeit  $\tau_c = \tau_c^{\text{mat}}$  ist im linken Teil der Abbildung 5.4 durch eine vertikale rote Linie hervorgehoben. Im rechten Bildteil ist das Fehlermaß  $e$  entlang dieser Linie dargestellt. Es nimmt für eine Bruchzähigkeit von  $G_{IIIc} = 0,34 \text{ N/mm}$  ein lokales Minimum an. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Vorhersagen des analytischen Verfahrens, unter der Annahme einer Schubfestigkeit von  $\tau_c = \tau_c^{\text{mat}}$ , bei Verwendung dieser Bruchzähigkeit die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Bruchlasten bieten. Die so ermittelten Bruchzähigkeiten sind in Abbildung 5.5b für verschiedene Materialien und Faserwinkel als diskrete Datenpunkte aufgetragen. Es zeigt sich für alle

<sup>23</sup>Weil in den Produktdatenblättern der Harzhersteller die Schubfestigkeit  $\tau_c^{\text{mat}}$  nicht spezifiziert ist, wird sie in Anlehnung an die Gestaltänderungsenergiehypothese aus der angegebenen Zugfestigkeit bestimmt:  $\tau_c^{\text{mat}} = \sigma_c^{\text{mat}}/\sqrt{3}$ .



**Abbildung 5.5:** Ermittelte Versagensparameter  $\mathcal{G}_{IIIc}$  und  $\tau_c$  in Abhängigkeit des Schichtwinkels  $\vartheta$ .

Laminats übereinstimmend der Trend einer mit steigendem Schichtwinkel abnehmenden Modus III-Bruchzähigkeit. Diese Beobachtung deckt sich mit den oben aufgeführten Untersuchungen von Donaldson (1988), Anderson u. König (2004) und Hu et al. (2022, 2023).

Aus den so ermittelten Datenpunkten für konkrete Schichtwinkel wird im Folgenden die Winkelabhängigkeit der Bruchzähigkeit modelliert. Gemäß den Erkenntnissen von Hu et al. (2022, 2023) wird sie mittels einer linearen Funktion aus den diskreten Datenpunkten interpoliert:

$$\mathcal{G}_{IIIc}(\vartheta) = \mathcal{G}_{IIIc}^{\vartheta=10^\circ} + a(\vartheta - 10^\circ) \quad (5.16)$$

Die zugehörigen Parameter nach Gleichung (5.16) sind in Tabelle 5.2 zusammen mit der entsprechenden Schubfestigkeit  $\tau_c$  aufgelistet. Sie werden im weiteren Verlauf der Studie sowohl für die Finite Bruchmechanik als auch für die Kohäsivzonenmodellierung verwendet. Ergänzend finden sich in der Tabelle die Zugfestigkeit und die Modus I-Bruchzähigkeit des verwendeten Harzes.

## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last

Im folgenden Unterkapitel wird die interlaminare Rissentstehung von ausgeglichenen symmetrischen Winkelverbunden unter axialer Dehnung analysiert. Hierbei wird insbesondere herausgestellt, ob das vorgeschlagene analytische

## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last

**Tabelle 5.2**

Interlaminaire Bruchparameter des Verbunds ( $\tau_c$ ,  $G_{\text{III}c}$ ) und Modus I-Werte der Matrixharze ( $\sigma_c^{\text{mat}}$ ,  $G_{\text{I}c}^{\text{mat}}$ ). Die angegebenen Größen  $G_{\text{III}c}^{\vartheta=10^\circ}$  und  $a$  entsprechen den Parametern der Gleichung (5.16). Die Daten der Matrixsysteme sind den Produktdatenblättern entnommen.

	$\tau_c$ [MPa]	$G_{\text{III}c}^{\vartheta=10^\circ}$ [N/mm]	$a$ [N/mm $^\circ$ ]	$\sigma_c^{\text{mat}}$ [MPa]	$G_{\text{I}c}^{\text{mat}}$ [N/mm]
T800/914 <sup>a</sup>	27,5	0,38	-0,0065	47,7	0,103
G947/M18 <sup>b</sup>	46,8	0,64	-0,0040	81,1	0,193
T700/CTE1 <sup>c</sup>	28,9	0,37	-0,0055	50,0	-

<sup>a</sup> Lorriot et al. (2003), <sup>b</sup> Lagunegrand et al. (2006), <sup>c</sup> Diaz Diaz u. Caron (2006)

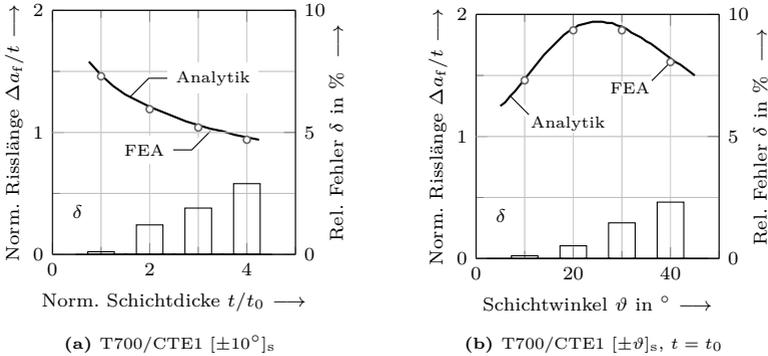
Verfahren ein geeignetes Werkzeug zur Vorhersage von Randdelaminationen ist. Die Bewertung erfolgt zum einen durch den Vergleich der erzielten Ergebnisse mit numerischen Referenzdaten. Zum anderen wird anhand von Versuchsergebnissen überprüft, in wie weit die entwickelte Methode in der Lage ist experimentelle Daten qualitativ und quantitativ wiederzugeben und somit prädiktiv zur Vorhersage von Randdelaminationen eingesetzt werden kann.

### 5.5.1 Vergleich mit numerischen Resultaten

Die Gegenüberstellung der analytischen Resultate mit numerischen Referenzdaten dient zwei Zwecken: Um zu prüfen, ob das vorgeschlagene Verfahren anwendbar ist, um die Eingangsdaten für die Finite Bruchmechanik bereitzustellen, wird das gekoppelte Kriterium zusätzlich mit numerischen FEA-Daten ausgewertet. Der Vergleich der Versagenslasten mit den Vorhersagen eines Kohäsivzonenmodells als alternatives Versagensmodell gibt Ausschluss darüber, ob das Konzept der Finiten Bruchmechanik geeignet ist um Randdelaminationen in Faserverbundwerkstoffen vorherzusagen.

**Analytische vs. numerische Anwendung der FBM.** Die Auswertung des gekoppelten Kriteriums nach Abschnitt 5.2.1 liefert in einem ersten Schritt die initiale Länge der Randdelamination  $\Delta a_f$  als Ergebnis der quadratischen Gleichung (5.2). Anschließend wird wahlweise mittels des Energie- oder des Spannungsteilkriteriums gemäß Beziehung (5.3) die effektive Festigkeit  $\sigma_f$  der Struktur bezüglich Delaminationsversagen ermittelt.

Abbildung 5.6 zeigt die initialen Längen der in einem  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbund aus der Materialkombination T700/CTE1 entstandenen Delaminationen. Im Dia-



**Abbildung 5.6:** Normierte Risslänge  $\Delta a_f/t$  von T700/CTE1  $[\pm \vartheta]_s$ -Laminaten in Abhängigkeit der Einzelschichtdicke (a) und des Schichtwinkels (b). Ergänzend ist die relative Abweichung  $\delta$  der analytischen von den numerischen Werten als Säulendiagramm verbildlicht, die zugehörige Ordinate befindet sich auf der rechten Diagrammseite.

gramm sind die Ergebnisse der analytischen Anwendung der Finiten Bruchmechanik denen einer Auswertung auf Basis von FEA-Daten gegenübergestellt. Die vorgeschlagene Methode sagt mit sehr guter Übereinstimmung zu den Referenzdaten Risslängen in der Größenordnung der Einzelschichtdicke  $t$  voraus. Diese Erkenntnis deckt sich mit den Beobachtungen von Diaz Diaz u. Caron (2006), die in einer experimentellen Studie Delaminationsversagen feststellen, wenn sich mehrere Mikrorisse zu einem Riss in der Größenordnung der Schichtdicke vereinigen. Abbildung 5.6a zeigt die normierte Risslänge  $\Delta a_f/t$  in Abhängigkeit der normierten Einzelschichtdicke  $t/t_0$  für eine Faserorientierung von  $\vartheta = 10^\circ$ . Es ist ersichtlich, dass die normierte Länge  $\Delta a_f/t$  mit zunehmender Schichtdicke leicht abnimmt, wobei die absolute Länge  $\Delta a_f$  größer wird. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ mit denen von Hebel (2010) und Martin et al. (2010) für andere kohlefaserverstärkte Laminaten überein. In Abbildung 5.6a ist ebenfalls die relative Abweichung

$$\delta = \left| \frac{\Delta a_f^{\text{ana}} - \Delta a_f^{\text{ref}}}{\Delta a_f^{\text{ref}}} \right| \quad (5.17)$$

der analytischen Lösung  $\Delta a_f^{\text{ana}}$  von der numerischen Referenzlösung  $\Delta a_f^{\text{ref}}$  dargestellt. Der relative Fehler steigt mit der Schichtdicke und beträgt im betrachteten Fall für  $t/t_0 = 4$  knapp 3%. Eine Ursache für diese Abweichung ist die Vernachlässigung der Verschiebung  $u_z$  im analytischen Modell. Diese Vereinfachung basiert auf der Voraussetzung dünner Schichten und verliert somit mit zunehmender Dicke an Rechtfertigung.

## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last

Abbildung 5.6b zeigt die normierte Risslänge  $\Delta a_f/t$  in Abhängigkeit der Faserorientierung  $t$  für eine Einzelschichtdicke von  $t = t_0 = 0,13$  mm. Die Risslänge nimmt mit dem Schichtwinkel zu, bis sie zwischen  $20^\circ$  und  $30^\circ$  ein Maximum erreicht und anschließend wieder abfällt. Auch Dölling (2022) ermittelt für das Material für  $\vartheta = 20^\circ$  größere initiale Risslängen als für  $\vartheta = 10^\circ$ . Auch hier ergeben sich sehr geringe Abweichungen der analytischen zu den numerischen FBM-Ergebnissen, die zwar mit zunehmendem Schichtwinkel größer werden, jedoch für alle dargestellten Konfigurationen kleiner als 2,5% sind.

Abbildung 5.7 zeigt die ermittelten effektiven Festigkeiten  $\sigma_f$  von  $[\pm\vartheta]_s$ -Winkelverbunden aus drei verschiedenen Materialkombinationen. Dabei ist jeweils die Abhängigkeit von der Einzelschichtdicke für ein  $[\pm 10^\circ]_s$ -Laminat und die Abhängigkeit von der Faserorientierung bei konstanter Schichtdicke  $t = t_0$  dargestellt. Den Resultaten der beiden Auswertungen der Finiten Bruchmechanik – basierend auf analytisch bzw. numerisch generierten Eingangsdaten – sind zusätzlich Ergebnisse eines Kohäsivzonenmodells (CZM) gegenübergestellt, welche im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

Bei allen drei Materialsystemen kann ein ausgeprägter Schichtdickeneffekt, also eine abnehmende effektive Festigkeit bei steigender Einzelschichtdicke, beobachtet werden. Das Phänomen lässt sich dadurch erklären, dass dickere Schichten mehr Formänderungsenergie speichern können, welche zur Initiierung eines interlaminaren Risses zur Verfügung steht. Durch die Berücksichtigung eines energetischen Teilkriteriums ist die Finite Bruchmechanik in der Lage diesen Effekt abzubilden (beispielsweise Weißgraber et al., 2016b). Zudem ist den betrachteten Konfigurationen gemein, dass das versagenskritische Spannungsniveau mit zunehmender Faserorientierung im untersuchten Winkelbereich  $5^\circ \leq \vartheta \leq 45^\circ$  geringer wird. Lediglich bei dem Material G947/M18 liegt für  $\vartheta = 40^\circ$  ein Tiefpunkt vor. Dieses Verhalten kann zu einem Teil mit der Modellierung der Bruchzähigkeit als mit dem Schichtwinkel abnehmende Funktion begründet werden. Außerdem ist die zunehmende Schubdeformationsbehinderung zu berücksichtigen. Das analytische Modell gibt diese beiden Effekte in guter Übereinstimmung zur numerischen Auswertung der FBM wieder.

Wie bereits bei den initialen Risslängen zu beobachten war, steigt die relative Abweichung zwischen analytischer und numerischer FBM-Lösung mit zunehmender Schichtdicke und zunehmendem Schichtwinkel an. Die Analyse der Daten für T700/CTE1 zeigt, dass der relative Fehler der effektiven Festigkeiten größer ist als der der Risslängen. Das ist wenig überraschend, da sich die Versagenslast gemäß Gleichung (5.3) aus der Risslänge  $\Delta a_f$  und einer weiteren fehlerbehafteten Größe, wahlweise  $\tau_{xz}$  oder  $\bar{G}_{III}$ , berechnet. Weiterhin ist

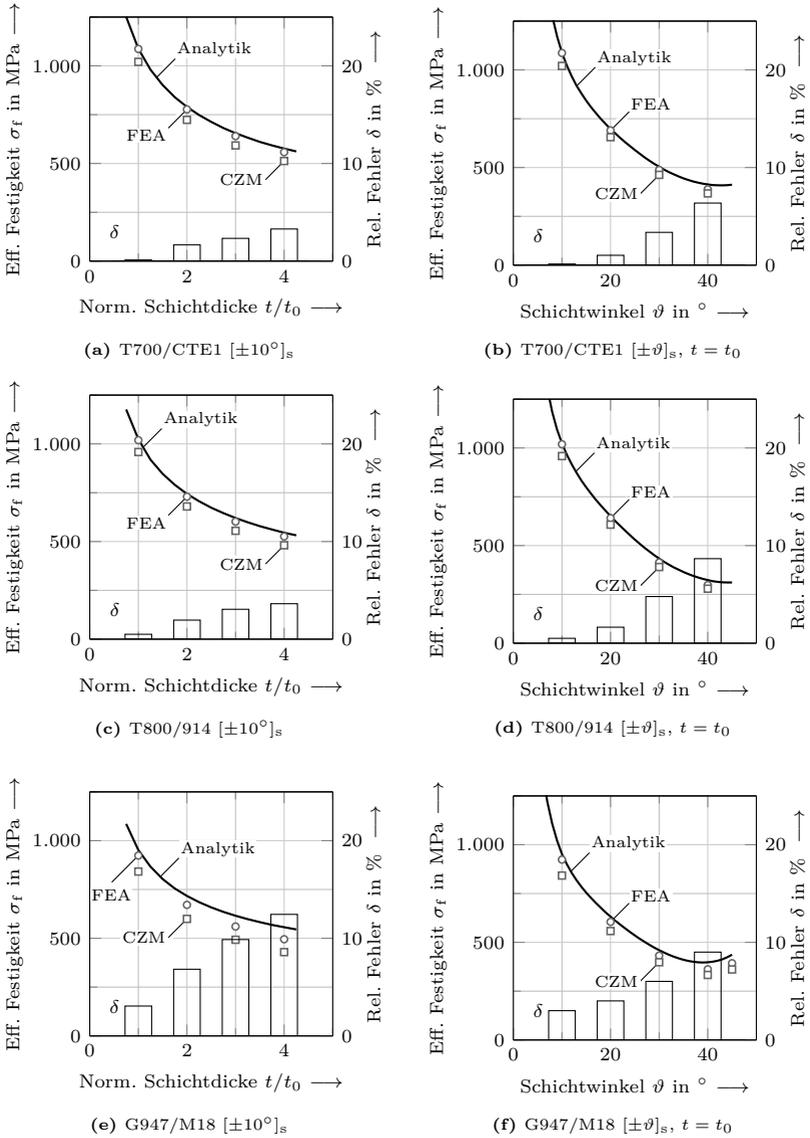
erkennbar, dass der relative Fehler bei der Materialkonfiguration G947/M18 größer ist als bei den Konfigurationen T700/CTE1 oder T800/914. Ein wichtiger Grund hierfür ist, dass die entsprechende Konfiguration mit  $t_0 = 0,19$  mm eine größere Einzelschichtdicke besitzt als die anderen betrachteten Strukturen (siehe Tabelle 4.2). Eine weitere Ursache der Ungenauigkeiten liegt in den Steifigkeitseigenschaften. Schichten aus der Materialkombination G947/M18 besitzen gegenüber den anderen betrachteten Materialkombinationen deutlich geringere Schubsteifigkeiten. Die infolge dessen größeren Schubverzerrungen und Verwölbungen können von der analytischen Berechnungsmethode nur näherungsweise abgebildet werden. Vergleichsrechnungen mit einer verkleinerten Schichtdicke beziehungsweise erhöhten Schubsteifigkeiten zeigen eine klare Reduktion der Abweichungen zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen.

Es kann festgehalten werden, dass sich die vorgeschlagene analytische Berechnungsmethode sehr gut eignet, um die Eingangsdaten für die Finite Bruchmechanik-Analysen von ausgeglichenen Winkelverbunden zu generieren. Alle grundlegenden physikalischen Effekte werden übereinstimmend zur numerischen Referenzlösung abgebildet und auch die quantitative Übereinstimmung ist gut bis sehr gut. Die Abweichungen zwischen den analytischen Resultaten und der Anwendung der FBM mit Finite-Elemente-Daten liegt bezüglich der initialen Risslänge unter 3% und bezüglich der effektiven Festigkeit mit einer Ausnahme (G947/M18,  $[\pm 10^\circ]_s$ ,  $t = 4t_0$ ) für alle in Abbildung 5.7 dargestellten Konfigurationen unter 10%.

**Kohäsivzonenmodell als alternatives Versagenskonzept.** Durch den Vergleich mit Ergebnissen eines unabhängigen Versagensmodells wird die Eignung der Finiten Bruchmechanik zur Vorhersage interlaminaarer Rissentstehung diskutiert. Hierzu wird das in Abschnitt 5.3.2 vorgestellte Kohäsivzonenmodell (CZM) herangezogen, dessen Resultate ebenfalls in Abbildung 5.7 dargestellt sind.

Die Kohäsivzonenmodellierung bildet die beiden beobachteten Effekte, den Schichtdickeneffekt und die fallende effektive Festigkeit mit größer werdendem Faserwinkel, qualitativ übereinstimmend zur Finiten Bruchmechanik ab. Auch quantitativ untermauern die Resultate der CZM die Vorhersagen der Finiten Bruchmechanik, wobei die Ergebnisse der Kohäsivzonenmodellierung geringfügig konservativer sind. Die relative Abweichung zu den Resultaten der numerischen Auswertung des gekoppelten Kriteriums sind für die in Abbildung 5.7 dargestellten Konfigurationen nicht größer als 15%. Diese Genauigkeitswerte liegen in der Größenordnung derer anderer Studien (Stein, 2018, Felger, 2020, Dölling, 2022). Es existieren zahlreiche Forschungsarbeiten,

## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last



**Abbildung 5.7:** Effektive Festigkeit  $\sigma_f$  von [ $\pm \vartheta$ ]<sub>s</sub>-Laminaten in Abhängigkeit der Einzelschichtdicke (a,c,e) und des Schichtwinkels (b,d,f). Ergänzend ist die relative Abweichung  $\delta$  der analytischen von den numerischen FEM-Ergebnissen als Säulendiagramm verbildlicht.

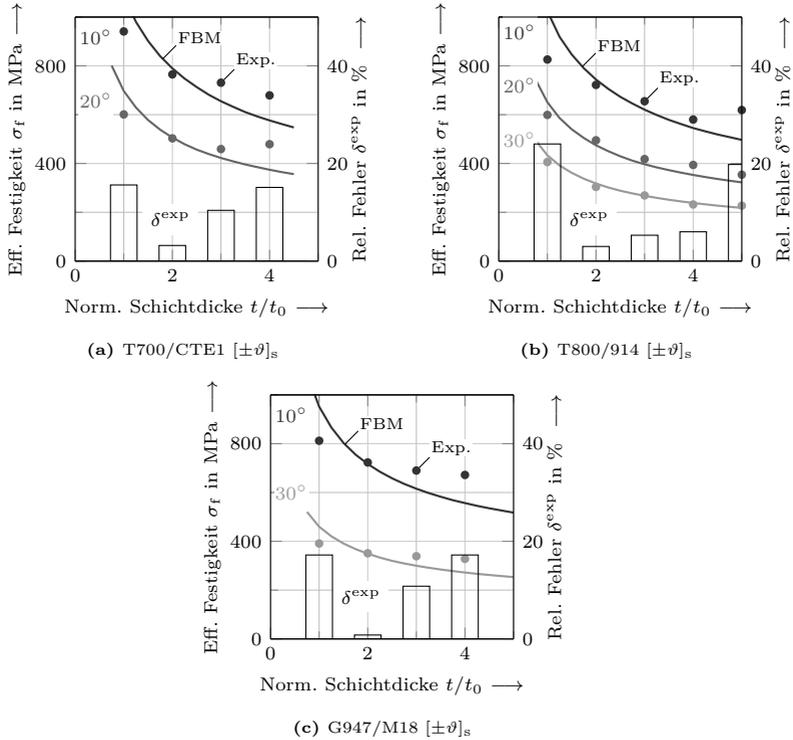
die die Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Finiten Bruchmechanik und Kohäsivzonenmodellierung im Detail thematisieren (beispielsweise Cornetti et al., 2016, 2018, Martin et al., 2016, Doitrand et al., 2019). Sie stellen dabei einen großen Einfluss des verwendeten Konstitutivgesetzes der Kohäsivzonen auf die resultierenden Versagenslasten fest. Rosendahl et al. (2017) erzielt analog zu Cornetti et al. (2014) bei Verwendung eines trilinearen, trapezförmigen Konstitutivgesetzes die besten Übereinstimmungen zu FBM-Analysen mit punktwise ausgewertetem Spannungskriterium. Die so erzielten Versagenslasten liegen meist etwas höher als bei Verwendung eines bilinearen Kohäsivgesetzes. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird darauf verzichtet Anpassungen im Konstitutivgesetz der Kohäsivzonen zu vorzunehmen, um die Abweichung zu reduzieren. Der Mehraufwand für die Auswahl und Implementierung eines trilinearen Kohäsivgesetzes steht im Rahmen der vorliegenden Studie nicht im Verhältnis zum erwarteten Mehrwert der Ergebnisse. Es wird ein bilinearer Zusammenhang gemäß Abbildung 3.4 verwendet, da dieser alle grundlegenden Effekte abbildet und sich durch seine breite Anwendung bewährt hat. Zudem ist er komfortabel im Finite-Elemente-Programmpaket ABAQUS implementiert.

Die qualitative und quantitative Übereinstimmung der versagenskritischen Spannungen aus der Finiten Bruchmechanik und der Kohäsivzonenmodellierung belegen einmal mehr das Vermögen der FBM die Entstehung interlaminaarer Risse in Mehrschichtverbunden vorherzusagen (siehe auch Abschnitt 3.3). Erstaunlich ist die quantitative Übereinstimmung auch vor dem Hintergrund, dass die Bruchparameter mithilfe des analytischen Modells kalibriert wurden.

## **5.5.2 Vergleich mit Experimenten**

Im folgenden Abschnitt werden die effektiven Festigkeiten aus der analytischen Auswertung des gekoppelten Kriteriums mit Versuchsdaten aus der Literatur verglichen. Die Literaturdaten der drei betrachteten Materialsysteme samt den Quellenangaben sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Abbildung 5.8 illustriert die Entwicklung der versagenskritischen Spannung  $\sigma_f$  mit steigender Einzelschichtdicke  $t$  für unterschiedliche Schichtwinkel  $\vartheta$ . Für den Schichtwinkel  $\vartheta = 10^\circ$  ist zudem die relative Abweichung  $\delta^{\text{exp}}$  der berechneten Werte von den experimentellen Ergebnissen als Säulendiagramm dargestellt. Diese Konfiguration ( $\vartheta = 10^\circ$ ) wird zur Diskussion des Fehlers gewählt, da hierbei für alle betrachteten Materialsysteme die mittlere quadratische Abweichung maximal ist.

## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last



**Abbildung 5.8:** Effektive Festigkeit  $\sigma_f$  von  $[\pm\vartheta]_s$ -Laminaten in Abhängigkeit der normierten Einzelschichtdicke. Ergänzend ist für  $\vartheta = 10^\circ$  die relative Abweichung  $\delta^{\text{exp}}$  der berechneten Werte von den experimentellen Ergebnissen als Säulendiagramm verbildlicht, die zugehörige Ordinate befindet sich auf der rechten Diagrammseite.

Es ist klar erkennbar, dass der Schichtdickeneffekt und die Abnahme der Versagenslast mit zunehmendem Schichtwinkel  $\vartheta$  qualitativ und quantitativ in guter Übereinstimmung zu den experimentellen Befunden wiedergegeben werden. Dabei wird der Schichtdickeneffekt von der Finiten Bruchmechanik leicht überschätzt. Das bedeutet, dass die effektive Versagenslast nach der vorgeschlagenen Methode bei dünnen Schichten überschätzt wird und mit zunehmender Einzelschichtdicke stärker abfällt als die Versuchsergebnisse das belegen. Dieses Phänomen ist bei  $\vartheta = 10^\circ$  am ausgeprägtesten. Bei größeren Schichtwinkeln ist die relative Abweichung deutlich kleiner. Auch Stein (2018) beschreibt in einer Studie über Klebschichtversagen die Tatsache, dass die

FBM für dünne Schichten zu hohe effektive Festigkeiten vorhersagt. Er führt als Begründung an, dass bei dünnen Schichten die Sprödigkeit der Struktur möglicherweise zu gering sei, um mit dem gekoppelten Kriterium ein genaues Ergebnis zu erzielen. Es ist zudem erwähnenswert, dass sich die effektiven Festigkeiten von allen drei Materialsystemen in einer sehr ähnlichen Größenordnung befinden, obwohl die Bruchparameter  $\tau_c$  und  $G_c$  von G947/M18 annähernd doppelt so groß sind als die der anderen Materialkombinationen (siehe Tabelle 5.2). Grund hierfür sind die geringeren faserdominierten Steifigkeiten von G947/M18 (Tabelle 4.2), die bei gleicher äußerer Last zu größeren Deformationen und folglich zu einer höheren Energiefreisetzungsrate führen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die vorgeschlagene analytische Auswertung des gekoppelten Kriteriums die effektiven Festigkeiten der Winkelverbunde in guter Übereinstimmung zu den experimentellen Ergebnissen wiedergibt, die grundlegenden physikalischen Effekte abbildet und die relative Abweichung mit einer Ausnahme (T800/914,  $[\pm 10^\circ]_s$ ,  $t = t_0$ ) kleiner als 20% ist. Auch der Vergleich mit Versuchsdaten führt somit zu dem Schluss, dass die vorgeschlagene analytische Methode sehr gut geeignet ist, um die Entstehung von Randleaminationen in symmetrischen AWWs zuverlässig vorherzusagen.

### 5.5.3 Einfluss der Bruchparameter auf die effektive Festigkeit

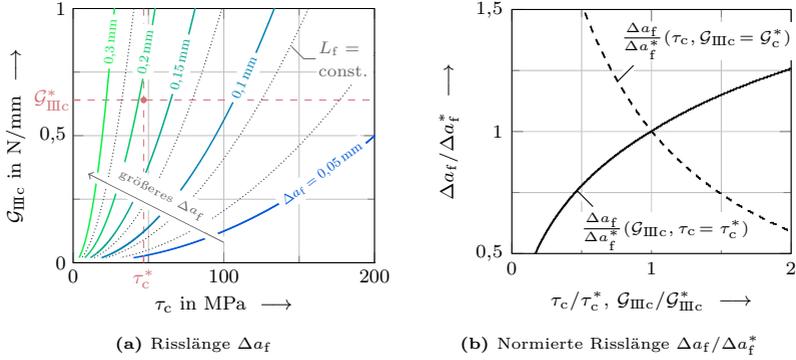
Nach der Verifizierung des entwickelten analytischen Modells, wird dieses genutzt, um den Einfluss der Bruchparameter auf die initiale Länge der interlaminiaren Risse und die effektive Festigkeit des Verbunds zu ermitteln.<sup>24</sup> Das dient zum einen dazu, die Folgen von Ungenauigkeiten bei der experimentellen Bestimmung oder der Kalibrierung der Bruchparameter quantifizieren zu können. Zum anderen kann auf diese Weise abgeschätzt werden, wie die Verwendung von Materialsystemen mit anderen Festigkeits- oder Zähigkeits-eigenschaften die Delaminationsneigung der Struktur verändert.

Der Einfluss der Schubfestigkeit  $\tau_c$  und der Modus III-Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_{IIIc}$  auf die Risslänge  $\Delta a_f$  ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Die Höhenlinien in der Grafik 5.9a entsprechen dabei Kurven gleicher Risslänge. Generell lässt sich festhalten, dass höhere Festigkeiten zu kürzeren Rissen führen, wohingegen

---

<sup>24</sup>Abgesehen von den Bruchparametern  $\tau_c$  und  $\mathcal{G}_{IIIc}$  bleiben die Materialkennwerte in dieser Studie unverändert.

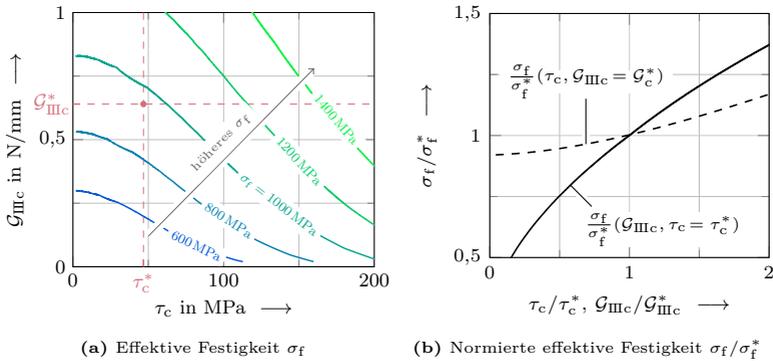
## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last



**Abbildung 5.9:** Einfluss der Bruchparameter  $\tau_c$  und  $\mathcal{G}_{IIIc}$  auf die Risslänge eines  $[\pm 10^\circ]_s$ -Verbunds aus der Materialkombination G947/M18.

hohe Bruchzähigkeiten die Bildung längerer Risse bevorzugen. Diese Ergebnisse passen zu den Erkenntnissen von Martin et al. (2010). Sie stellen auf Basis einer Dimensionsanalyse eine direkte Abhängigkeit der initialen Risslänge zu einer charakteristischen Bruchlänge  $L_f = E_{11} \mathcal{G}_c / (\tau_c^2)$  her, wonach aus einem konstanten Wert für  $L_f$  auch eine gleichbleibenden initiale Risslänge  $\Delta a_f$  folgt. In Diagramm 5.9a sind die Kurven gleicher charakteristischer Bruchlänge als gepunktete Linien dargestellt. Rot markiert sind die in Abschnitt 5.4 bestimmten Werte der Schubfestigkeit  $\tau_c^*$  und der Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_{IIIc}^*$  nach Tabelle 5.2. Die Darstellung 5.9b zeigt die Auswirkung einer Variation der Bruchzähigkeit beziehungsweise der Schubfestigkeit (gestrichelte Linie) ausgehend von diesen Werten. Es ist ersichtlich, dass in dem betrachteten  $\tau_c, \mathcal{G}_{IIIc}$ -Punkt die Schubfestigkeit einen deutlich stärkeren Einfluss auf die Länge der entstehenden Randalamination hat.

Für den Anwender von zentraler Bedeutung ist insbesondere der Einfluss der Bruchparameter auf die effektive Festigkeit der Struktur (siehe Abbildung 5.10a). Es ist intuitiv und im Diagramm klar erkennbar, dass höhere Werte der Bruchzähigkeit und der Schubfestigkeit im Allgemeinen auch die Versagenslast steigern. Im Bereich sehr kleiner Festigkeiten, ist diese jedoch stark von der Bruchzähigkeit bestimmt (linker Diagrammbereich), eine Variation von  $\tau_c$  führt in diesem Grenzfall fast ausschließlich zu einer sich ändernden Risslänge. Auch im Falle der in dieser Studie verwendeten Materialparameter ist das Verhalten stark von der Bruchzähigkeit dominiert. In Abbildung 5.10b ist ersichtlich, dass eine Halbierung der Bruchzähigkeit zu einer Reduktion der effektiven Festigkeit um 25% führt, während es bei einer Halbierung der



**Abbildung 5.10:** Einfluss der Bruchparameter  $\tau_c$  und  $G_{IIIc}$  auf die effektive Festigkeit eines  $[\pm 10^\circ]_s$ -Verbunds aus der Materialkombination G947/M18.

Schubfestigkeit nur gut 5% sind.

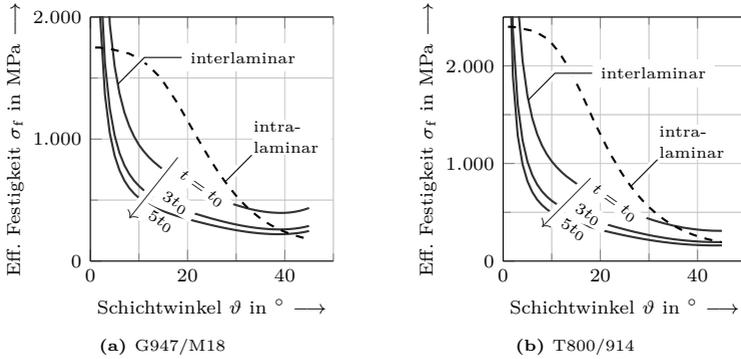
Als Ergebnis der Sensitivitätsstudie ist festzuhalten, dass im Falle der betrachteten Struktur- und Materialkonfiguration die Bruchzähigkeit von entscheidender Bedeutung für die effektive Festigkeit des Laminats ist. Ein Anwender kann durch die Wahl eines zähen Materialsystems die Delaminationsneigung des Verbunds signifikant verringern. Eine Variation der Schubfestigkeit beeinflusst in der aktuellen Studie vornehmlich die Größe des entstehenden Risses.

### 5.5.4 Gegenüberstellung von inter- und intralaminarem Versagen

Zu Beginn des Kapitels wurde die Frage gestellt, ob die vorgeschlagene Methode zur Bewertung der interlaminaren Rissentstehung in der Lage ist, experimentelle Versuchsdaten zu reproduzieren und grundlegende physikalische Effekte wiederzugeben. Das sind einerseits der Schichtdickeneffekt und die Abhängigkeit der effektiven Festigkeit von dem Schichtwinkel des AWVs. Die Eignung diese Phänomene qualitativ und auch quantitativ wiederzugeben wurde in Abschnitt 5.5.2 mit Erfolg festgestellt. Zu diesem Zweck wurde die Initiierung von Randdelaminationen in  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunden mit Schichtwinkeln von  $\vartheta \leq 45^\circ$  untersucht.

Darüber hinaus wurde in zahlreichen experimentellen Studien ein Wechsel des

## 5.5 Ergebnisse: Rissinitiierung unter mechanischer Last



**Abbildung 5.11:** Gegenüberstellung der intra- und der interlaminaren effektiven Festigkeit in Abhängigkeit des Schichtwinkels für  $[\pm\vartheta]_s$ -Laminates aus zwei verschiedenen Materialkombinationen.

Versagensmodus festgestellt: Während für  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunde mit kleinem Faserwinkel  $\vartheta$  die Schichttrennung der dominante Modus ist, wurde spätestens für Winkel  $\vartheta \geq 45^\circ$  zunehmend intralaminare Versagen detektiert (Lauraitis, 1971, Pipes et al., 1972, Rotem u. Hashin, 1975, Herakovich, 1981). Diese Beobachtungen wurden in Abschnitt 3.1.2 im Detail beschrieben und sollen nun anhand des entwickelten Versagensmodells reproduziert und diskutiert werden.

Als Kriterium zur Feststellung des intralaminaren Bruchs wird das Versagensmoduskonzept nach Cuntze in Form der Interaktionsbeziehung (2.50) herangezogen, wobei basierend auf den Empfehlungen von Petersen et al. (2016) für den inneren Reibungskoeffizienten ein Wert von  $\mu = 0,22$  und für den Interaktionskoeffizienten  $m = 2,5$  gewählt wird. In Abbildung 5.11 sind die kritischen Lasten bezüglich intra- und interlaminaren Versagens für zwei Materialsysteme in Abhängigkeit vom Schichtwinkel  $\vartheta$  gegenübergestellt. Die Versagenslasten nehmen mit zunehmendem Schichtwinkel  $\vartheta$  stark ab, wobei die zum intralaminaren Versagen gehörende Festigkeit im Gegensatz zur Delaminationslast unabhängig von der Schichtdicke ist. Für sehr kleine Schichtwinkel entspricht die intralaminare Festigkeit des Verbunds nahezu der Zugfestigkeit der unidirektionalen Schicht, wohingegen der Randeffect noch kaum ausgebildet und die kritische Delaminationslast dementsprechend sehr hoch ist. In einem Bereich sehr geringer Schichtwinkel (ca.  $0^\circ < \vartheta \leq 5^\circ$ ) liegt sie oberhalb der intralaminaren Festigkeit und die intralaminare Rissentstehung wird die vorherrschende Bruchform darstellen. Mit zunehmendem

Schichtwinkel unterschreitet die effektive interlaminare Festigkeit den intralaminaren Wert, bevor sie ihn für  $\vartheta \geq 35^\circ$  wieder überschreitet. Die konkreten Grenzen der Intervalle sind dabei von der verwendeten Materialkombination und insbesondere von der Einzelschichtdicke abhängig. Die Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung zu den Untersuchungen von Zhou u. Sun (1990) und Frey et al. (2020), die ähnliche Studien mit anderen Versagensmodellen durchführten.

Es ist festzuhalten, dass in einem Bereich kleiner und mittlerer Schichtwinkel (ca.  $5^\circ \leq \vartheta \leq 35^\circ$ ) Delaminationen das dominierende Versagensbild in ausgeglichenen Winkelverbunden unter Zugbelastung darstellen. Die Berücksichtigung möglicher Delaminationsbildung ist somit im Auslegungsprozess von Winkelverbunden unerlässlich. Für größere und kleinere Faserorientierungen kommt es dagegen öfter zu Versagen innerhalb der Einzelschichten. Aufgrund der Dickenabhängigkeit der effektiven interlaminaren Festigkeit sind Lamine mit dickeren Einzelschichten auch für größere Winkel noch anfällig für Delaminationen.

## **5.6 Ergebnisse: Rissinitiierung unter thermischer Last**

Während des Herstellungsprozesses werden faserverstärkte Kunststoffe üblicherweise bei erhöhten Temperaturen ausgehärtet. Zudem sind Verbundlamine oft auch in ihrem Gebrauch hohen Temperaturschwankungen unterworfen, so zum Beispiel in Luft- und Raumfahrtanwendungen. Daher sollte die Untersuchung des Einflusses thermisch initiiertter Spannungen ein wichtiger Bestandteil der Vorauslegung von Laminatstrukturen sein.

Viele der in Abschnitt 3.2 eingeführten Methoden zur Analyse der interlaminaren Spannungen an Laminaträndern berücksichtigen auch Temperaturlasten. Dahingegen gibt es deutlich weniger Forschungsarbeiten, die den Einfluss thermischer Belastungen auf die Delaminationsneigung von faserverstärkten Mehrschichtverbunden thematisieren. Eine Studie von Wu (1990) berücksichtigt im Rahmen einer Finite-Elemente-Analyse eine Abkühlung um circa 100 K und analysiert die Auswirkung auf das Versagensverhalten unter einer anschließenden mechanischen Belastung. Für Winkelverbunde wurde festgestellt, dass die thermische Vorbelastung die effektive Festigkeit der Struktur steigert, wobei zur Versagensvorhersage ein dehnungsbasiertes Kriterium verwendet und dabei nicht zwischen inter- und intralaminarem Versagen unterschieden wurde. In zwei Veröffentlichungen des Autors der vorliegenden Arbeit werden Delaminationen von Winkelverbunden unter rein thermischer Belastung mithilfe der Finiten Bruchmechanik analysiert (Frey et al., 2021a,c).

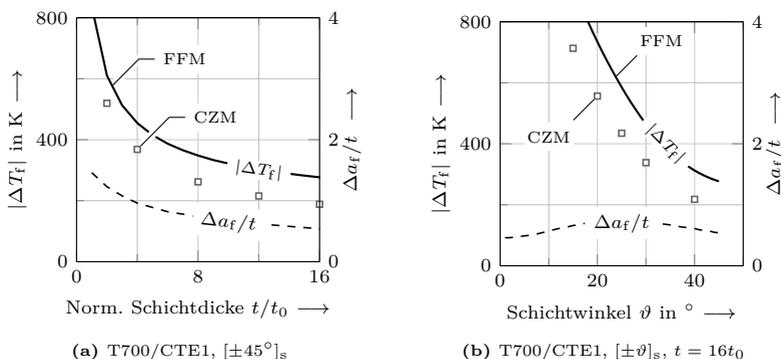
Abgesehen von faserverstärkten Verbunden ist die Entstehung von interlamina- ren Rissen in geschichteten Strukturen unter thermischer Beanspruchung Gegenstand reger wissenschaftlicher Arbeit. Hier seien exemplarisch einige Arbeiten aufgeführt, die sich zur Versagensanalyse der Finiten Bruchmechanik bedienen. So beschäftigen sich zahlreiche Arbeiten mit der Schichtenrennung in Hochtemperaturbrennstoffzellen (Müller et al., 2006, Hebel u. Becker, 2008, Hebel, 2010, Bremm et al., 2021, Bremm, 2022) und in anderen spröden Bimaterialfülgungen (Henninger u. Leguillon, 2008, Dölling et al., 2021).

Im folgenden Abschnitt wird die Entstehung interlaminarer Risse in ausgegli- chen Winkelverbunden unter rein thermischer und thermisch-mechanischer Belastung mithilfe des entwickelten analytischen Modells untersucht.

### 5.6.1 Diskussion der kritischen Temperaturdifferenzen

Abbildung 5.12 zeigt den Betrag derjenigen Temperaturdifferenz  $\Delta T_f$ , die benötigt wird, um in einem  $[\pm 45^\circ]_s$ -Verbund aus der Materialkombination T700/CTE1 ohne jegliche mechanische Belastung eine Randdelamination zu initiieren. Der Betrag  $|\Delta T_f|$  wird deshalb zur Diskussion der Ergebnisse unter rein thermischer Belastung herangezogen, weil aufgrund der Symmetrie der Struktur und der Materialeigenschaften eine positive und eine negative Temperaturdifferenz gleichermaßen kritisch ist. Darstellung 5.12a illustriert den Einfluss der Einzelschichtdicke auf die kritische Temperaturdifferenz für einen  $[\pm 45^\circ]$ -Verbund, während Abbildung 5.12b die Abhängigkeit der Versagenslast  $|\Delta T_f|$  von dem Schichtwinkel  $\vartheta$  für eine konstante Einzelschichtdicke  $t = 16t_0$  verbildlicht. Die folgenden Beobachtungen stimmen qualitativ mit der Analyse des mechanischen Lastfalls (vergleiche Abschnitt 5.5) überein. In Diagramm 5.12a ist ein ausgeprägter Schichtdickeneffekt zu erkennen: Der Betrag der versagenskritischen Temperaturdifferenz ist für dünne Einzelschichten sehr groß und fällt mit zunehmender Schichtdicke, aufgrund der größeren gespeicherten Formänderungsenergie, stark ab. Aus Abbildung 5.12b ist ersichtlich, dass der Betrag  $|\Delta T_f|$  auch mit zunehmendem Schichtwinkel im Bereich  $\vartheta \leq 45^\circ$  deutlich abnimmt.

Diese Erkenntnisse werden auch von der Referenzlösung des Kohäsivzonenmodells (CZM) belegt. Diese gibt die versagenskritischen Temperaturdifferenzen in qualitativ guter Übereinstimmung zur Finiten Bruchmechanik (FBM) wieder und bildet die beschriebenen Effekte gleichermaßen ab. Die relative Abweichung zwischen den Versagensmodellen ist dabei größer als im mechanischen Lastfall und erreicht maximal einen Wert von 47% für einen  $[\pm 45^\circ]_s$ -Verbund mit einer Einzelschichtdicke von  $t = 16t_0$ . Zu einem Teil ist



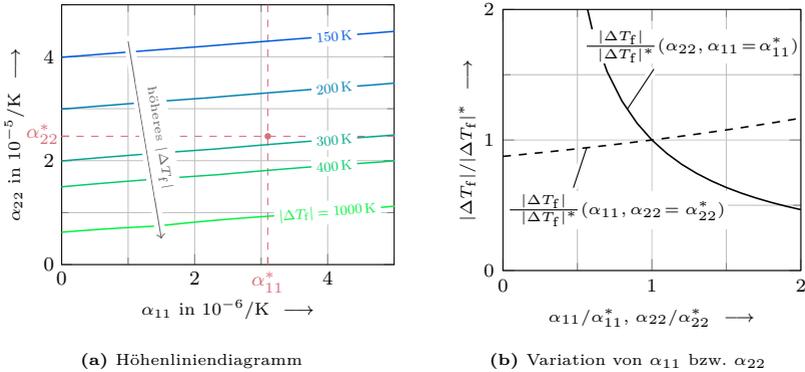
**Abbildung 5.12:** Versagenskritische Temperaturdifferenz  $|\Delta T_f|$  von T700/CTE1- $[\pm \vartheta]_s$ -Laminaten in Abhängigkeit der normierten Einzelschichtdicke (a) und des Schichtwinkels (b). Ergänzend ist die normierte initiale Risslänge  $\Delta a_f/t$  dargestellt.

die Quantität der Diskrepanz auf die große Einzelschichtdicke der untersuchten Konfigurationen zurückzuführen. Auch unter mechanischer Last steigt die relative Abweichung mit zunehmender Schichtdicke an. Zum anderen sei auf die Diskussion in Abschnitt 5.5 und die Möglichkeit, die relativen Abweichungen durch Anpassungen im Konstitutivgesetz der Kohäsivelemente zu verringern, hingewiesen. Auch in den Studien von Dölling (2022) und Bremm (2022) wird für rein-thermische Lastfälle von Abweichungen zwischen FBM und CZM in vergleichbarer Größenordnung berichtet.

Ergänzend ist in Abbildung 5.12a die Länge  $\Delta a_f$  der initiierten Delaminationen normiert dargestellt. Die Erkenntnisse stimmen auch hier mit den Beobachtungen unter mechanischer Last überein. Die Risslängen sind in der Größenordnung der Einzelschichtdicke, wobei die normierte Risslänge  $\Delta a_f/t$  mit zunehmender Schichtdicke abnimmt. Mit steigendem Schichtwinkel nimmt die Risslänge zu, bis sie zwischen  $\vartheta = 20^\circ$  und  $\vartheta = 30^\circ$  ein Maximum erreicht und anschließend wieder abfällt.

Es ist festzuhalten, dass die versagenskritischen Temperaturdifferenzen bezüglich einer Delamination unter einer rein thermischen Belastung für ausgeglichene Winkelverbunde aus der betrachteten Materialkonfiguration (T700/CTE1) sehr hoch sind. Selbst im Falle eines  $[\pm 45^\circ]_s$ -Verbunds mit sehr dicken Einzelschichten ( $t = 16t_0$ ) sagt die Finite Bruchmechanik eine Delamination erst für eine Temperaturdifferenz von  $\pm 276,8$  K voraus (CZM:  $|\Delta T_f| = 188,5$  K). Die Bildung von interlaminaren Rissen aufgrund einer reinen Temperaturlast erscheint im vorliegenden Fall unrealistisch, dennoch eignet sich die Beispiel-

## 5.6 Ergebnisse: Rissinitiierung unter thermischer Last



**Abbildung 5.13:** Einfluss der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{22}$  auf die versagenskritische Temperaturdifferenz  $|\Delta T_f|$  eines  $[\pm 45^\circ]_s$ -Verbunds aus der Materialkombination T700/CTE1.

studie, um den Einfluss der Parameter Einzelschichtdicke und Schichtwinkel auf die Delaminationsneigung zu erkennen. Zudem können mit dem vorgeschlagenen analytischen Bewertungskonzept Parameterstudien durchgeführt werden, um den Einfluss kritischer Stellgrößen zu ermitteln.

**Einfluss der Wärmeausdehnungskoeffizienten.** So ist beispielsweise die Kenntnis darüber, wie die Wahl eines anderen Materialsystems das Versagensverhalten verändern kann, für den Anwender von elementarer Bedeutung. Abbildung 5.13 illustriert exemplarisch den Einfluss der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{22}$  auf den Betrag der versagenskritischen Temperaturdifferenz. In Diagramm 5.13a sind die  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ -Kombinationen mit gleicher Versagenslast  $|\Delta T_f|$  als Höhenlinien gekennzeichnet. Es ist deutlich ersichtlich, dass die Wahl eines Materialsystems mit kleinerem Ausdehnungskoeffizient  $\alpha_{22}$  quer zur Faserrichtung die effektive Festigkeit deutlich steigert. Dahingegen steigt  $|\Delta T_f|$  mit zunehmenden Wärmeausdehnungskoeffizient in Faserrichtung  $\alpha_{11}$  leicht an. Im Diagramm rot gekennzeichnet sind die Ausgangswerte der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{11}^*$  und  $\alpha_{22}^*$  des verwendeten Materialsystems T700/CTE1 nach Tabelle 4.2. Aus Abbildung 5.13b ist ersichtlich, wie sich die kritische Temperaturdifferenz ändert, wenn einer der beiden Wärmeausdehnungskoeffizienten variiert wird, während der andere konstant bleibt. Der starke Einfluss des Wärmeausdehnungskoeffizienten in Querrichtung ist auch hier deutlich zu erkennen: Die Wahl eines Materialsystems mit

einem doppelt so großen Wert für  $\alpha_{22}$  führt zu einer Reduktion von  $|\Delta T_f|$  um mehr als die Hälfte. Der Einfluss des Wärmeausdehnungskoeffizienten in Längsrichtung ist deutlich geringer.

### 5.6.2 Thermisch-mechanische Belastung

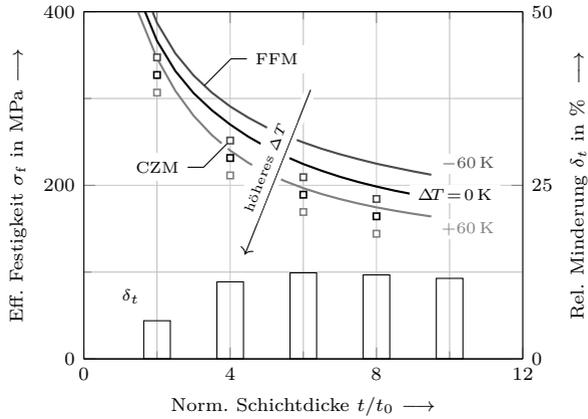
Die diskutierten Ergebnisse sagen das Auftreten von rein thermisch initiierten Delaminationen in Winkelverbunden nur in speziellen Fällen vorher. Allerdings werden Temperaturdifferenzen in den meisten technischen Anwendungen durch mechanische Belastungen überlagert. Für die Gestaltung von Mehrschichtverbunden ist die Kenntnis darüber, wie eine Temperaturlast die effektive mechanische Festigkeit beeinflusst, von großer Relevanz.

Abbildung 5.14 zeigt die effektive mechanische Festigkeit  $\sigma_f$  eines  $[\pm 30^\circ]_s$ -Laminats unter uniaxialer Zuglast in Abhängigkeit der Einzelschichtdicke. Dabei ist die mechanische Last von einer homogenen thermischen Belastung überlagert. Die Kurven entsprechen den effektiven Festigkeiten nach dem analytischen FBM-Modell bei unterschiedlichen Temperaturdifferenzen ( $\Delta T = -60\text{ K}, 0\text{ K}, 60\text{ K}$ ).

Aufgrund der Überlagerung der thermischen und mechanischen Randbedingungen sind die in Abschnitt 5.2.3 entwickelten Skalierungsgesetze für die Spannungsfelder und die inkrementelle Energiefreisetzungsrates nicht mehr in der dargestellten Form anwendbar. Grundsätzlich ist eine Skalierung der Felder mit Lastfaktoren weiterhin denkbar, diese ist jedoch anzupassen und zu verifizieren. Für die vorliegende Studie wurde darauf verzichtet und alternativ das Minimierungsproblem der Finiten Bruchmechanik (2.66) iterativ gelöst. Das verwendete Lösungsschema hat sich in verschiedenen Anwendungen der FBM bewährt (beispielsweise Stein et al., 2015, Felger et al., 2019a, Rosendahl, 2020) und führt in der vorliegenden Konfiguration nach wenigen Iterationen zum versagenskritischen Spannungsniveau  $\sigma_f$ .

Aus Abbildung 5.14 ist deutlich ersichtlich, dass eine überlagerte negative Temperaturdifferenz die effektive Festigkeit der Struktur steigert, während eine positive Temperaturdifferenz diese mindert. Diese Aussage wird auch von den Ergebnissen des Kohäsivzonenmodells gestützt, welche den qualitativen Trend übereinstimmend zur FBM abbilden. Auch die Resultate von Wu (1990), der ebenfalls eine Steigerung der mechanischen Festigkeit durch eine Abkühlung feststellte, belegen das beobachtete Verhalten. Um den Effekt zu quantifizieren, ist die relative Minderung der effektiven Festigkeit  $\delta_t$  durch eine Erwärmung der Struktur um  $\Delta T = 60\text{ K}$  zusätzlich als Säulendia-

## 5.6 Ergebnisse: Rissinitiierung unter thermischer Last



**Abbildung 5.14:** Einfluss einer überlagerten thermischen Belastung  $\Delta T$  auf die effektive Festigkeit  $\sigma_f$  eines  $[\pm 30^\circ]_s$ -Verbund aus der Materialkombination T700/CTE1 unter uniaxialer Zugbelastung. Zusätzlich ist die relative Minderung der effektiven Festigkeit  $\delta_t$  durch eine überlagerte Temperaturdifferenz von  $\Delta T = 60$  K aufgetragen.

gramm illustriert und beträgt in der betrachteten Konfiguration für dickere Einzelschichten ( $t \geq 4t_0$ ) zwischen 11% und 12%.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

**Zusammenfassung.** In der vorliegenden Arbeit wurde eine maßgeschneiderte analytische Methode zur Bewertung des Laminat-Randeffekts entwickelt. Das Verfahren behandelt die wichtige Klasse der symmetrischen ausgeglichenen Winkelverbunde unter mechanischer und thermischer Belastung. Es beinhaltet sowohl eine Analyse der in Randnähe stark überhöhten Spannungen, als auch eine Bewertung des potentiell resultierenden interlaminaren Versagens mithilfe der Finiten Bruchmechanik. Das analytische und physikalisch begründete Wesen der neuen Methode ermöglicht eine Interpretation der Wirkweise und eine Identifikation der Haupteinflussfaktoren des Randeffekts. Die effiziente Implementierung stellt sicher, dass die Methode gewinnbringend zur Gestaltung von Verbundstrukturen und für größere Parameterstudien in deren Vorauslegungsprozess genutzt werden kann.

Zu Beginn der Studie wurden die wichtigsten theoretischen Grundlagen zusammengestellt. Das beinhaltete kurze Einführungen in die Themenfelder der linearen Elastizitätstheorie, der Modellierung ebener Lamine und der klassischen Festigkeits- und Bruchmechanik. Ein Hauptaugenmerk wurde dabei auf das vergleichsweise neue Konzept der Finiten Bruchmechanik und insbesondere deren Eignung zur Vorhersage von Grenzflächenversagen gelegt. Anschließend wurden die Grundprinzipien des Laminat-Randeffekts vorgestellt. Die Darstellung umfasst sowohl eine Beschreibung der sich einstellenden Deformationen und Spannungen als auch des resultierenden Versagensbilds. Zudem beinhaltet sie einen Überblick über die bestehenden Modelle zur Spannungsmodellierung und Versagensbewertung.

Zur effizienten Ermittlung der Verschiebungen und Spannungen in der Nähe der freien Ränder von Winkelverbunden wurden anschließend drei neuartige Verfahren entwickelt. Diese sind als verschiebungsbasierte Mehrschichtverfahren einzuordnen, welche sich im Polynomgrad ihrer Ansatzfunktionen unterscheiden. Auf Basis des generalisierten ebenen Verzerrungszustands konnten die Betrachtungen auf ein ebenes Modell reduziert werden. Die

Herangehensweise resultierte in allen Fällen in einem System gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, dessen Lösung geschlossen-analytisch angegeben werden konnte. Um die Qualität der Vorhersagen abzusichern, wurde ein numerisches Referenzmodell im Finite-Elemente-Programmpaket ABAQUS erstellt. Die Entwicklung und Implementierung eines speziellen Finiten Elements, das die Kinematik des generalisierten ebenen Verzerrungszustands in zwei Dimensionen vollständig abbilden kann, führte zu einer erheblichen Reduzierung des Berechnungsaufwands.

Auf Basis eines umfangreichen Vergleichs der analytischen Resultate mit der numerischen Referenzlösung wurde von den drei entwickelten Analyseverfahren eines für die weitere Verwendung in dieser Arbeit ausgewählt. Das auf der Schubdeformationstheorie dritter Ordnung basierende Modell berücksichtigt die Kontinuität der Verschiebungen und der interlaminaren Spannungen an den Schichtgrenzen und erfüllt die Spannungsfreiheit des Randes in einem integralen Sinn. Die aus der Schubdeformationsbehinderung resultierende Verwölbungsgestalt wird in sehr guter Übereinstimmung zur numerischen Referenzlösung wiedergegeben. Auch die interlaminare Schubspannungskomponente  $\tau_{xz}$ , die für die Delaminationsentstehung maßgeblich ist, stimmt qualitativ sehr gut mit den numerischen Daten überein. Lediglich in unmittelbarer Nähe des Bimaterialpunkts ( $y < t/2$ ) und der dort auftretenden Spannungssingularität kommt es zu relevanten quantitativen Abweichungen. Zudem wurde in einer Studie der Einfluss der Faserorientierung von  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunden auf die interlaminaren Spannungen für thermische und mechanische Belastungen untersucht und die Schichtwinkel maximaler Spannungen identifiziert.

Die entwickelte Berechnungsmethode wurde erweitert, so dass auch Strukturen mit Randalaminierungen analysiert werden können. Die Verschiebungen der Rissflanken, die für die bruchmechanischen Betrachtungen relevant sind, zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit numerischen Referenzergebnissen.

Auf der Grundlage des neuen Modells zur Spannungsanalyse wurde ein Verfahren zur Bewertung der Delaminationsneigung von Winkelverbunden mittels der Finiten Bruchmechanik entwickelt. Das Monotonieverhalten der interlaminaren Schubspannung und der inkrementellen Energiefreisetzungsrates in der Umgebung des Bimaterialpunkts ermöglicht eine hocheffiziente Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums. Weiterhin wurden Gesetzmäßigkeiten hergeleitet, die es ausgehend von einer Referenzkonfiguration erlauben, die Verläufe der Spannungen und inkrementellen Energiefreisetzungsrates auf andere, selbstähnliche Konfigurationen zu skalieren. Dies führte, insbesondere bei der Bewertung des Einflusses der Einzelschichtdicke, zu einer entscheidenden Reduzierung des Berechnungsaufwands.

Die bruchmechanischen Betrachtungen wurden an  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunden aus drei unterschiedlichen Materialsystemen, mit variierenden Faserorientierungen und Einzelschichtdicken und für verschiedene Lastfälle durchgeführt. Die Verifizierung der Berechnungsmethode erfolgte durch einen Vergleich der analytischen Resultate mit experimentellen und numerischen Referenzergebnissen. Hierzu wurde im Finite-Elemente-Programmpaket ABAQUS ein Kohäsivzonenmodell implementiert. Für mechanisch belastete Laminatsysteme zeigten die ermittelten Versagenslasten für alle drei Materialsysteme eine sehr gute Übereinstimmung mit den Referenzergebnissen. Insbesondere ist das analytische Verfahren in der Lage, die wichtigsten qualitativen Effekte, den Schichtdickeneffekt und den Einfluss des Schichtwinkels, korrekt wiederzugeben. Die quantitative Übereinstimmung ist für moderate Schichtdicken und Faserorientierungen ebenfalls sehr gut. So ist die relative Abweichung der vorhergesagten effektiven Festigkeiten zu den experimentellen Referenzdaten in allen betrachteten Konfigurationen mit einer Ausnahme kleiner als 20%.

In einer Parameterstudie konnte die effiziente Implementierung des neuen Verfahrens genutzt werden, um den maßgeblichen Einfluss der Bruchzähigkeit auf die effektive Festigkeit der Struktur herauszustellen. Weiterhin wurde die Relevanz der Delaminationsentstehung im Vergleich zu einem möglichen intralaminaren Versagen untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass das interlaminare Versagen in einem Bereich mittlerer Schichtwinkel der dominante Versagensmodus für  $[\pm\vartheta]_s$ -Verbunde unter uniaxialer Zuglast ist. In den betrachteten Konfigurationen war dies für ein Intervall von ca.  $5^\circ \leq \vartheta \leq 35^\circ$  der Fall, wobei die exakten Grenzen des Bereichs von der verwendeten Materialkombination und insbesondere von der Einzelschichtdicke abhängen.

Eine Studie an einem mechanisch unbelasteten Winkelverbund lieferte die Erkenntnis, dass eine rein thermisch induzierte Delamination für die betrachtete Materialkombination erst bei sehr großen Temperaturdifferenzen auftritt. Die versagenskritische Temperaturdifferenz nimmt dabei, analog zu der effektiven Festigkeit im mechanischen Lastfall, mit zunehmender Schichtdicke und steigendem Faserwinkel ab. Zudem verringert ein größerer Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_{22}$  quer zu Faserrichtung die versagenskritische Temperaturdifferenz deutlich, wie eine Parameteruntersuchung offenlegte. Weiterhin wurde in einer Beispielstudie unter kombinierter thermischer und mechanischer Belastung herausgestellt, dass die effektive mechanische Festigkeit durch eine überlagerte Temperaturdifferenz von  $\Delta T = +60\text{K}$  um ca. 10% vermindert wird.

Anhand der betrachteten Fallbeispiele konnte die Vielseitigkeit und die Präzision der entwickelten Berechnungsmethode eindrucksvoll aufgezeigt werden.

**Ausblick.** Das vorgeschlagene Bewertungsverfahren behandelt die wichtige Klasse der symmetrischen ausgeglichenen Winkelverbunde. Für eine Generalisierung auf andere Laminattypen sollte die Verschiebungskomponente  $u_z$  in der Modellierung berücksichtigt werden, da sie in Verbunden mit anderem Aufbau oftmals nicht vernachlässigbar ist. Im verallgemeinerten Fall treten in der Nähe des freien Rands neben  $\tau_{xz}$  weitere relevante interlaminare Spannungskomponenten auf, was bei der Entstehung einer Delamination zu einer Überlagerung verschiedener Rissöffnungsmoden führt. Um dies zu berücksichtigen, ist das Bruchkriterium entsprechend zu erweitern. In Abschnitt 5.5.1 wurde eine mit der Schichtdicke zunehmende relative Abweichung zwischen analytischer Vorhersage und numerischem Referenzergebnis beobachtet. Eine Berücksichtigung der Verschiebung  $u_z$  kann zu einer höheren Vorhersagegenauigkeit für Lamine mit dickeren Einzelschichten führen.

Wie in Abschnitt 5.5.1 diskutiert wurde, kann die Übereinstimmung zwischen Finiter Bruchmechanik und Kohäsivzonenmodellierung durch eine Anpassung des Konstitutivgesetzes der Kohäsivelemente verbessert werden. In der angegebenen Literatur deutet sich an, dass die Verwendung eines trapezförmigen Kohäsivgesetzes die beste Vergleichbarkeit bietet, falls das Spannungsteilkriterium der Finiten Bruchmechanik punktweise ausgewertet wird. Hier ist im Detail herauszustellen, welche konkrete Formulierung des Kohäsivgesetzes die bruchmechanischen Vorgänge in der betrachteten Struktur- und Materialkonfiguration am besten abbildet. Diese ist in geeigneter Form in das Finite-Elemente-Modell zu implementieren.

In Abschnitt 5.6.2 wurde eine kombinierte thermisch-mechanische Belastung behandelt. Aufgrund der Überlagerung zweier Lastfälle konnten die Spannungen und die inkrementelle Energiefreisetzungsraten nicht mit den hergeleiteten Vorschriften bezüglich der äußeren Last skaliert werden, weswegen das gekoppelte Kriterium iterativ gelöst wurde. Um die Effizienz der Methode für kombinierte Lastfälle zu erhöhen, sind die Skalierungsgesetze für die interlaminare Spannung und die inkrementelle Energiefreisetzungsraten anzupassen und eine geeignete Umsetzung des gekoppelten Kriteriums zu entwickeln.

In Abschnitt 5.5.4 wurde der Delaminationsentstehung ein mögliches intralaminare Versagen gegenübergestellt. Ein anderer Ansatz besteht darin, die beiden Versagensformen nicht in Konkurrenz zueinander, sondern als interagierend zu betrachten. So kann ein Zwischenfaserriss, der auf eine Schichtgrenze stößt, eine Delamination auslösen. Umgekehrt bewirken Delaminationen Steifigkeitsreduktionen und Spannungsumverteilungen, die die Entstehung intralaminarer Risse beeinflussen.

# Literaturverzeichnis

- [Alfano 2006] ALFANO, G.: On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 6, 723–730
- [Allix et al. 1998] ALLIX, O. ; LEVEQUE, D. ; PERRET, L.: Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 5, 671–678
- [Altus et al. 1980] ALTUS, E. ; ROTEM, A. ; SHMUELI, M.: Free Edge Effect in Angle Ply Laminates: A New Three Dimensional Finite Difference Solution. In: *Journal of Composite Materials* 14 (1980), 21–30
- [Anderson u. König 2004] ANDERSON, J. ; KÖNIG, M.: Dependence of fracture toughness of composite laminates on interface ply orientations and delamination growth directions. In: *Composites Science and Technology* 64 (2004), Nr. 13-14, 2139–2152
- [Artel 2007] ARTEL, J.: *Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2007
- [Artel u. Becker 2005] ARTEL, J. ; BECKER, W.: Coupled and uncoupled analyses of piezoelectric free-edge effect in laminated plates. In: *Composite Structures* 69 (2005), Nr. 3, 329–335
- [Artel u. Becker 2006] ARTEL, J. ; BECKER, W.: On kinematic coupling equations within the scaled boundary finite-element method. In: *Archive of Applied Mechanics* 76 (2006), Nr. 11-12, 617–633
- [Bar-Yoseph 1983] BAR-YOSEPH, P.: On the Accuracy of Interlaminar Stress Calculation in Laminated Plates. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 36 (1983), 309–329
- [Bar-Yoseph u. Pian 1981] BAR-YOSEPH, P. ; PIAN, T. H.: Calculation of Interlaminar Stress Concentration in Composite Laminates. In: *Journal of Composite Materials* 15 (1981), Nr. 3, 225–239
- [Barenblatt 1959] BARENBLATT, G. I.: Concerning equilibrium cracks forming during brittle fracture. The stability of isolated cracks. Relationships with energetic theories. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 23 (1959), Nr. 5, 1273–1282

## Literaturverzeichnis

- [Barenblatt 1996] BARENBLATT, G. I.: *Cambridge texts in applied mathematics*. Bd. 14: *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- [Bauld et al. 1985] BAULD, N. R. ; GOREE, J. G. ; TZENG, L. S.: A comparison of finite-difference and finite-element methods for calculating free edge stresses in composites. In: *Computers and Structures* 20 (1985), Nr. 5, 897–914
- [Bažant u. Planas 1997] BAŽANT, Z. P. ; PLANAS, J.: *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Bd. 16. Boca Raton: CRC Press, 1997
- [Becker 1993] BECKER, W.: Closed-form solution for the free-edge effect in cross-ply laminates. In: *Composite Structures* 26 (1993), Nr. 1-2, 39–45
- [Becker 1994a] BECKER, W.: Closed-form analysis of the free edge effect in angle-ply laminates. In: *Journal of Applied Mechanics* 61 (1994), 209–211
- [Becker 1994b] BECKER, W.: Free-edge stress concentration in angle-ply laminates. In: *Archive of Applied Mechanics* 65 (1994), Nr. 1, 38–43
- [Becker u. Gross 2002] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2002
- [Becker u. Kress 1994] BECKER, W. ; KRESS, G.: Stiffness reduction in laminate coupons due to the free-edge effect. In: *Composites Science and Technology* 52 (1994), Nr. 1, 109–115
- [Benveniste u. Miloh 2001] BENVENISTE, Y. ; MILOH, T.: Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. In: *Mechanics of Materials* 33 (2001), Nr. 6, 309–323
- [Bigwood u. Crocombe 1989] BIGWOOD, D. A. ; CROCOMBE, A. D.: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 9 (1989), Nr. 4, 229–242
- [Bluman u. Kumei 1989] BLUMAN, G. W. ; KUMEI, S.: *Symmetries and Differential Equations*. John, F. New York: Springer, 1989
- [Bradley 1989] BRADLEY, W. L.: Relationship of matrix toughness to interlaminar fracture toughness. In: *Composite Materials Series*. Elsevier, 1989, 159–187
- [Bremm 2022] BREMM, S.: *Versagensbewertung thermisch belasteter Fügungen innerhalb eines Brennstoffzellenstacks*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2022
- [Bremm et al. 2021] BREMM, S. ; DÖLLING, S. ; BECKER, W. ; BLUM, L. ; PETERS, R. ; MALZBENDER, J. ; STOLTEN, D.: A methodological contribution to failure prediction of glass ceramics sealings in high-temperature solid oxide fuel cell stacks. In: *Journal of Power Sources* 507 (2021)
- [Brewer u. Lagace 1988] BREWER, J. C. ; LAGACE, P. A.: Quadratic stress criterion for initiation of delamination. In: *Journal of Composite Materials* 22 (1988), Nr. 12, 1141–1155

- [Buckingham 1914] BUCKINGHAM, E.: On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations. In: *Physical Review* 4 (1914), Nr. 4, 345–376
- [Camanho et al. 2003] CAMANHO, P. P. ; DÁVILA, C. G. ; DE MOURA, M. F.: Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. In: *Journal of Composite Materials* 37 (2003), Nr. 16, 1415–1438
- [Camanho u. Davila 2002] CAMANHO, P. P. ; DAVILA, C. G.: Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials / University of Porto. Porto, 2002. – Forschungsbericht
- [Camanho et al. 2012] CAMANHO, P. P. ; ERÇİN, G. ; CATALANOTTI, G. ; MAHDI, S. ; LINDE, P.: A finite fracture mechanics model for the prediction of the open-hole strength of composite laminates. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 43 (2012), Nr. 8, 1219–1225
- [Carpinteri et al. 2008] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; TAYLOR, D. ; SAPORA, A.: A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 7, 1736–1752
- [Carrere et al. 2015] CARRERE, N. ; MARTIN, E. ; LEGUILLON, D.: Comparison between models based on a coupled criterion for the prediction of the failure of adhesively bonded joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 138 (2015), 185–201
- [Catalanotti u. Camanho 2013] CATALANOTTI, G. ; CAMANHO, P. P.: A semi-analytical method to predict net-tension failure of mechanically fastened joints in composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 76 (2013), 69–76
- [Cherepanov 1979] CHEREPANOV, G. P.: *Mechanics of Brittle Fracture*. New York: McGraw-Hill, 1979
- [Conti u. De Paulis 1985] CONTI, P. ; DE PAULIS, A.: Simple Model To Simulate the Interlaminar Stresses Generated Near the Free Edge of a Composite Laminate. In: JOHNSON, W. (Hrsg.): *Delamination and Debonding of Materials*. STP 876. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1985, 35–51
- [Cornetti et al. 2014] CORNETTI, P. ; SAPORA, A. ; CARPINTERI, A.: Finite fracture mechanics vs. Cohesive crack modelling: An analytical comparison based on case studies. In: *16th European Conference on Composite Materials, ECCM 2014* (2014), Nr. June, 22–26
- [Cornetti et al. 2018] CORNETTI, P. ; MUÑOZ-REJA, M. ; SAPORA, A. ; CARPINTERI, A.: Finite fracture mechanics and cohesive crack model: Weight functions vs. cohesive laws. In: *International Journal of Solids and Structures* 156 (2018), 126–136
- [Cornetti et al. 2016] CORNETTI, P. ; SAPORA, A. ; CARPINTERI, A.: Short cracks and V-notches: Finite fracture mechanics vs. cohesive crack model. In: *Engineering Fracture Mechanics* 168 (2016), 2–12
- [Crossman et al. 1979] CROSSMAN, F. W. ; MAURI, R. E. ; WARREN, W. J.: *Hygro-thermal Damage Mechanisms in Graphite-Epoxy Composites / Lockheed Missiles and Space*. Palo Alto, 1979. – Forschungsbericht. – 154 S.

## Literaturverzeichnis

- [Crossman et al. 1980] CROSSMAN, F. W. ; WARREN, W. J. ; WANG, A. S. D. ; LAW, G. E.: Initiation and Growth of Transverse Cracks and Edge Delamination in Composite Laminates Part 2. Experimental Correlation. In: *Journal of Composite Materials* 14 (1980), Nr. 1, 88–108
- [Cuntze 1996] CUNTZE, R. G.: Fracture-type strength criteria formulated by invariants which consider the material symmetries of the isotropic/anisotropic material used. In: BURKE, W. R. (Hrsg.): *Proceedings of Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing*. Noordwijk, 1996, 399–409
- [Cuntze 1999] CUNTZE, R. G.: The failure mode concept - a new comprehensive 3D-strength analysis concept for any brittle and ductile behaving material. In: *Proceedings of the European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing*. Braunschweig, 1999, 269–287
- [Cuntze 2006] CUNTZE, R. G.: Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 7-8, 1081–1096
- [Cuntze u. Freund 2004] CUNTZE, R. G. ; FREUND, A.: The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates. In: *Failure Criteria in Fibre-Reinforced-Polymer Composites*. Elsevier, 2004, 429–489
- [Da Silva u. Campilho 2012] DA SILVA, L. ; CAMPILHO, R.: *Advances in Numerical Modeling of Adhesive Joints*. Springer, 2012
- [Diaz Diaz u. Caron 2006] DIAZ DIAZ, A. ; CARON, J.-F.: Prediction of the onset of mode III delamination in carbon-epoxy laminates. In: *Composite Structures* 72 (2006), Nr. 4, 438–445
- [Diaz Diaz et al. 2002] DIAZ DIAZ, A. ; CARON, J.-F. ; CARREIRA, R. P.: Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. In: *Composite Structures* 58 (2002), Nr. 2, 195–208
- [Dieringer u. Becker 2015] DIERINGER, R. ; BECKER, W.: A new scaled boundary finite element formulation for the computation of singularity orders at cracks and notches in arbitrarily laminated composites. In: *Composite Structures* 123 (2015), 263–270
- [Doitrand et al. 2019] DOITRAND, A. ; ESTEVEZ, R. ; LEGUILLON, D.: Comparison between cohesive zone and coupled criterion modeling of crack initiation in rhombus hole specimens under quasi-static compression. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 99 (2019), 51–59
- [Doitrand u. Leguillon 2018] DOITRAND, A. ; LEGUILLON, D.: Comparison between 2D and 3D applications of the coupled criterion to crack initiation prediction in scarf adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 85 (2018), 69–76
- [Dölling 2022] DÖLLING, S.: *Eine Erweiterung der Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse und Bewertung des Randeffekts in ebenen Laminaten mithilfe der Finiten Bruchmechanik*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2022

- [Dölling et al. 2019] DÖLLING, S. ; BREMM, S. ; HELL, S. ; BECKER, W.: A finite fracture mechanics approach for interlaminar crack initiation using the scaled boundary finite element method. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 19 (2019), Nr. 1
- [Dölling et al. 2021] DÖLLING, S. ; BREMM, S. ; KOHLSTETTER, A. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: Predicting thermally induced edge-crack initiation using finite fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* 252 (2021), 107808
- [Dölling et al. 2020] DÖLLING, S. ; HAHN, J. ; FELGER, J. ; BREMM, S. ; BECKER, W.: A scaled boundary finite element method model for interlaminar failure in composite laminates. In: *Composite Structures* 241 (2020), 111865
- [Dölling et al. 2018a] DÖLLING, S. ; HELL, S. ; BECKER, W.: An efficient semi-analytical finite fracture mechanics approach for the prediction of interlaminar crack initiation in composite laminates. In: *6th European Conference on Computational Mechanics* (2018)
- [Dölling et al. 2018b] DÖLLING, S. ; HELL, S. ; BECKER, W.: Investigation of the laminate free-edge effect by means of the scaled boundary finite element method. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 18 (2018), Nr. 1
- [Donaldson 1988] DONALDSON, S. L.: Mode III interlaminar fracture characterization of composite materials. In: *Composites Science and Technology* 32 (1988), Nr. 3, 225–249
- [Dugdale 1960] DUGDALE, D. S.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), 100–104
- [Dunn et al. 1997] DUNN, M. L. ; SUWITO, W. ; CUNNINGHAM, S.: Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities. In: *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), Nr. 29, 3873–3883
- [Elices et al. 2001] ELICES, M. ; GUINEA, G. V. ; GÓMEZ, J. ; PLANAS, J.: The cohesive zone model: Advantages, limitations and challenges. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2001), Nr. 2, 137–163
- [Felger 2020] FELGER, J.: *Modelling crack nucleation in composite materials: a semi-analytical two-scale approach*, Technical University Darmstadt, Dissertation, 2020
- [Felger et al. 2019a] FELGER, J. ; ROSENDAHL, P. L. ; LEGUILLON, D. ; BECKER, W.: Predicting crack patterns at bi-material junctions: A coupled stress and energy approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 164 (2019), 191–201
- [Felger et al. 2017] FELGER, J. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Asymptotic finite fracture mechanics solution for crack onset at elliptical holes in composite plates of finite-width. In: *Engineering Fracture Mechanics* 182 (2017), 621–634
- [Felger et al. 2019b] FELGER, J. ; STEIN, N. ; FREY, C. ; BECKER, W.: Scaling laws for the adhesive composite butt joint strength derived by finite fracture mechanics. In: *Composite Structures* 208 (2019), 546–556

## Literaturverzeichnis

- [Fiedler et al. 2001] FIEDLER, B. ; HOJO, M. ; OCHIAI, S. ; SCHULTE, K. ; ANDO, M.: Failure behavior of an epoxy matrix under different kinds of static loading. In: *Composites Science and Technology* 61 (2001), Nr. 11, 1615–1624
- [Flanagan 1994] FLANAGAN, G.: An Efficient Stress Function Approximation for the Free-Edge Stresses in Laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 7, 941–952
- [Frey et al. 2020] FREY, C. ; DÖLLING, S. ; BECKER, W.: Closed-form analysis of interlaminar crack initiation in angle-ply laminates. In: *Composite Structures* 257 (2020), 113060
- [Frey et al. 2021a] FREY, C. ; DÖLLING, S. ; BECKER, W.: A general sandwich-type model for delamination failure in angle-ply laminates under thermo-mechanical loading. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 21 (2021), Nr. 1
- [Frey et al. 2021b] FREY, C. ; DÖLLING, S. ; BECKER, W.: Free-edge delamination in composite laminates under tensile loading: An analytical closed-form approach. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 20 (2021), Nr. 1
- [Frey et al. 2021c] FREY, C. ; DÖLLING, S. ; LEŠTÁKOVÁ, M. ; BECKER, W.: Free-edge crack onset induced by thermal loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 230-231 (2021), 111160
- [Frey et al. 2023] FREY, C. ; HAHN, J. ; SCHNEIDER, N. ; BECKER, W.: A Layerwise Higher-Order Approach for the Free-Edge Effect in Angle-Ply Laminates. In: *Mechanics of Composite Materials* (2023), 1–20
- [García et al. 2016] GARCÍA, I. G. ; CARTER, B. J. ; INGRAFFEA, A. R. ; MANTIČ, V.: A numerical study of transverse cracking in cross-ply laminates by 3D finite fracture mechanics. In: *Composites Part B: Engineering* 95 (2016), 475–487
- [Garg 1988] GARG, A. C.: Delamination-a damage mode in composite structures. In: *Engineering Fracture Mechanics* 29 (1988), Nr. 5, 557–584
- [Gonçalves et al. 2000] GONÇALVES, J. P. ; DE MOURA, M. F. ; DE CASTRO, P. M. ; MARQUES, A. T.: Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. In: *Engineering Computations* 17 (2000), Nr. 1, 28–47
- [Griffith 1921] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 221 (1921), Nr. 582-593, 163–198
- [Gross et al. 2018] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIEGER, P.: *Technische Mechanik 4*. 10. Auflage. Berlin: Springer, 2018
- [Gross u. Seelig 2016] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik*. 6. Auflage. Berlin: Springer, 2016
- [Gross u. Seelig 2017] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics*. 3. Auflage. Berlin: Springer, 2017

- [Hahn u. Reck 2018] HAHN, M. ; RECK, M.: *Kompaktkurs Finite Elemente für Einsteiger*. Wiesbaden: Springer, 2018
- [Hamitouche et al. 2008] HAMITOUCHE, L. ; TARFAOUI, M. ; VAUTRIN, A.: An interface debonding law subject to viscous regularization for avoiding instability: Application to the delamination problems. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 10, 3084–3100
- [Harper u. Hallett 2008] HARPER, P. W. ; HALLETT, S. R.: Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 16, 4774–4792
- [Harris u. Orringer 1978] HARRIS, A. ; ORRINGER, O.: Investigation of Angle-Ply Delamination Specimen For Interlaminar Strength Test. In: *Journal of Composite Materials* 12 (1978), Nr. 3, 285–299
- [Harrison u. Johnson 1996] HARRISON, P. N. ; JOHNSON, E. R.: A mixed variational formulation for interlaminar stresses in thickness-tapered composite laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), Nr. 16, 2377–2399
- [Harrison u. Bader 1983] HARRISON, R. P. ; BADER, M. G.: Damage development in CFRP laminates under monotonic and cyclic stressing. In: *Fibre Science and Technology* 18 (1983), Nr. 3, 163–180
- [Hashin 1996] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, 1129–1145
- [Hashin 2002] HASHIN, Z.: Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002), Nr. 12, 2509–2537
- [Hebel 2010] HEBEL, J.: *Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2010
- [Hebel u. Becker 2008] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), Nr. 6-7, 410–420
- [Hebel et al. 2010] HEBEL, J. ; DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Modelling brittle crack formation at geometrical and material discontinuities using a finite fracture mechanics approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 18, 3558–3572
- [Hell 2018] HELL, S.: *Beiträge zur Analyse und Bewertung von 3D-Spannungssingularitäten mittels einer angereicherten Skalierte-Rand-Finite-Elemente-Methode*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2018
- [Hell u. Becker 2015] HELL, S. ; BECKER, W.: The scaled boundary finite element method for the analysis of 3D crack interaction. In: *Journal of Computational Science* 9 (2015), 76–81

## Literaturverzeichnis

- [Henninger u. Leguillon 2008] HENNINGER, C. ; LEGUILLON, D.: Adhesive fracture of an epoxy joint under thermal and mechanical loadings. In: *Journal of Thermal Stresses* 31 (2008), Nr. 1, 59–76
- [Herakovich 1981] HERAKOVICH, C. T.: On the relationship between engineering properties and delamination of composite materials. In: *Journal of Composite Materials* 15 (1981), Nr. 4, 336–348
- [Herakovich 1982] HERAKOVICH, C. T.: Influence of Layer Thickness on the Strength of Angle-Ply Laminates. In: *Journal of Composite Materials* 16 (1982), Nr. 3, 216–227
- [Herakovich 1989a] HERAKOVICH, C. T.: Edge effects and delamination failures. In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 24 (1989), Nr. 4, 245–252
- [Herakovich 1989b] HERAKOVICH, C. T.: Free edge effects in laminated composites. In: *Failure in Composites* 4 (1989), 205–219
- [Herakovich et al. 1985] HERAKOVICH, C. T. ; POST, D. ; BUCZEK, M. B. ; CZARNEK, R.: Free edge strain concentrations in real composite laminates: Experimental-theoretical correlation. In: *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 52 (1985), Nr. 4, 787–793
- [Hobbiebrunken et al. 2007] HOBBIEBRUNKEN, T. ; FIEDLER, B. ; HOJO, M. ; TANAKA, M.: Experimental determination of the true epoxy resin strength using micro-scaled specimens. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38 (2007), Nr. 3, 814–818
- [Hu et al. 2023] HU, P. ; LI, X. ; LUBINEAU, G.: Prediction of a complex delamination front using a general cohesive model Prediction of a complex delamination front using a general cohesive model. In: *Composites Science and Technology* 233 (2023), 109911
- [Hu et al. 2022] HU, P. ; TAO, R. ; LI, X. ; LUBINEAU, G.: Decomposing the coupling damage in mode I multidirectional delamination. In: *Composites Science and Technology* 229 (2022), 109684
- [Hughes 1987] HUGHES, T.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1987
- [Hwu 2010] HWU, C.: *Anisotropic Elastic Plates*. New York: Springer (US), 2010
- [Johannesson et al. 1984] JOHANNESSON, T. ; SJÖBLOM, P. ; SELDÉN, R.: The detailed structure of delamination fracture surfaces in graphite/epoxy laminates. In: *Journal of Materials Science* 19 (1984), Nr. 4, 1171–1177
- [Johnson u. Kemp 1985] JOHNSON, E. R. ; KEMP, B. L.: Modeling the stress field in laminated composite plates near discontinuities. In: *Composite Structures* 3 (1985), Nr. 2, 145–166
- [Kant u. Swaminathan 2000] KANT, T. ; SWAMINATHAN, K.: Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—a selective review and survey of current developments. In: *Composite Structures* 49 (2000), Nr. 1, 65–75

- [Kassapoglou u. Lagace 1986] KASSAPOGLOU, C. ; LAGACE, P. A.: An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials. In: *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), 744–750
- [Kassapoglou 1989] KASSAPOGLOU, C.: The effect of combined loading and stacking sequence on the interlaminar stress field at free edges of composite laminates. In: *30th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference: A Collection of Technical Papers, Pt. 4*, 1989, 2089–2097
- [Kassapoglou u. Lagace 1987] KASSAPOGLOU, C. ; LAGACE, P. A.: Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. In: *Journal of Composite Materials* 21 (1987), Nr. 4, 292–308
- [Kim u. Hong 1986] KIM, K. S. ; HONG, C. S.: Delamination growth in angle-ply laminated composites. In: *Journal of Composite Materials* 20 (1986), Nr. 5, 423–438
- [Kim u. Soni 1984] KIM, R. Y. ; SONI, S. R.: Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites. In: *Journal of Composite Materials* 18 (1984), Nr. 1, 70–80
- [Kress u. Becker 1995] KRESS, G. ; BECKER, W.: Effective Tensile Stiffness of Finite-Width Quasi-Isotropic Laminates. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 14 (1995), 1043–1053
- [Kuna 2008] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen: Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008
- [Lagunegrand et al. 2006] LAGUNEGRAND, L. ; LORRIOT, T. ; HARRY, R. ; WARGNIER, H. ; QUENISSET, J. M.: Initiation of free-edge delamination in composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 10, 1315–1327
- [Lauraitis 1971] LAURAITIS, K.: Failure Modes and Strength of Angle-Ply Laminates / Department of Theoretical and Applied Mechanics. University of Illinois. Urbana-Champaign, 1971. – Forschungsbericht
- [Lecomte-Grosbras et al. 2013] LECOMTE-GROSBRAS, P. ; PALUCH, B. ; BRIEU, M.: Characterization of free edge effects: Influence of mechanical properties, microstructure and structure effects. In: *Journal of Composite Materials* 47 (2013), Nr. 22, 2823–2834
- [Leguillon 1999] LEGUILLON, D.: A method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates. In: *International Journal of Fracture* 100 (1999), Nr. 1, 105–120
- [Leguillon u. Sanchez-Palencia 1999] LEGUILLON, D. ; SANCHEZ-PALENCIA, E.: On 3D cracks intersecting a free surface in laminated composites. In: *International Journal of Fracture* 99 (1999), Nr. 1-2, 25–40
- [Leguillon 2002] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21 (2002), Nr. 1, 61–72

## Literaturverzeichnis

- [Leguillon et al. 2001] LEGUILLON, D. ; MARION, G. ; HARRY, R. ; LECUYER, F.: The onset of delamination at stress-free edges in angle-ply laminates—analysis of two criteria. In: *Composites Science and Technology* 61 (2001), Nr. 3, 377–382
- [Leguillon u. Yosibash 2003] LEGUILLON, D. ; YOSIBASH, Z.: Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius. In: *International Journal of Fracture* 122 (2003), Nr. 1-2, 1–21
- [Leguillon u. Yosibash 2017] LEGUILLON, D. ; YOSIBASH, Z.: Failure initiation at V-notch tips in quasi-brittle materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 122-123 (2017), 1–13
- [Lekhnitskii 1963] LEKHNITSKII, S. G.: *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. San Francisco: Holden-Day, 1963
- [Lenci 2001] LENCI, S.: Analysis of a crack at a weak interface. In: *International Journal of Fracture* 108 (2001), Nr. 3, 275–290
- [Lessard et al. 1996] LESSARD, L. B. ; SCHMIDT, A. S. ; SHOKRIEH, M. M.: Three-dimensional stress analysis of free-edge effects in a simple composite cross-ply laminate. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), Nr. 15, 2243–2259
- [Li et al. 1997] LI, J. ; LEE, S. M. ; LEE, E. W. ; O'BRIEN, T. K.: Evaluation of the Edge Crack Torsion (ECT) Test for Mode III Interlaminar Fracture Toughness of Laminated Composites. In: *Journal of Composites Technology and Research* 19 (1997), Nr. 3, 174–183
- [Liao u. Sun 1996] LIAO, W. C. ; SUN, C. T.: The determination of mode III fracture toughness in thick composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 56 (1996), Nr. 4, 489–499
- [Lin et al. 1995] LIN, C. C. ; HSU, C. Y. ; KO, C. C.: Interlaminar stresses in general laminates with straight free edges. In: *AIAA Journal* 33 (1995), Nr. 8, 1471–1476
- [Lorriot et al. 2003] LORRIOT, T. ; MARION, G. ; HARRY, R. ; WARGNIER, H.: Onset of free-edge delamination in composite laminates under tensile loading. In: *Composites Part B: Engineering* 34 (2003), Nr. 5, 459–471
- [Lu et al. 2019] LU, X. ; RIDHA, M. ; CHEN, B. Y. ; TAN, V. B. ; TAY, T. E.: On cohesive element parameters and delamination modelling. In: *Engineering Fracture Mechanics* 206 (2019), 278–296
- [Marom et al. 1988] MAROM, G. ; ROMAN, I. ; HAREL, H. ; ROSENSAFT, M. ; KENIG, S. ; MOSHONOV, A.: The strain energy release rate of delamination in fabric-reinforced composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 8 (1988), Nr. 2, 85–91
- [Martin et al. 2010] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 9, 1297–1305

- [Martin et al. 2012] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A coupled strength and toughness criterion for the prediction of the open hole tensile strength of a composite plate. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 26, 3915–3922
- [Martin et al. 2016] MARTIN, E. ; VANDELLOS, T. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: Initiation of edge debonding: coupled criterion versus cohesive zone model. In: *International Journal of Fracture* 199 (2016), Nr. 2, 157–168
- [Merz u. Knabner 2017] MERZ, W. ; KNABNER, P.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Berlin: Springer, 2017
- [Mittelstedt 2017] MITTELSTEDT, C.: *Energiemethoden der Elastostatik*. 1. Auflage. Darmstadt: Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2017
- [Mittelstedt u. Becker 2004] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Interlaminar stress concentrations in layered structures: Part I—a selective literature survey on the free-edge effect since 1967. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), Nr. 12, 1037–1062
- [Mittelstedt u. Becker 2005] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Asymptotic analysis of stress singularities in composite laminates by the boundary finite element method. In: *Composite Structures* 71 (2005), Nr. 2, 210–219
- [Mittelstedt u. Becker 2006] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Fast and reliable analysis of free-edge stress fields in a thermally loaded composite strip by a layerwise laminate theory. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67 (2006), Nr. 6, 747–770
- [Mittelstedt u. Becker 2007a] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Free-edge effects in composite laminates. In: *Applied Mechanics Reviews* 60 (2007), Nr. 5, 217–245
- [Mittelstedt u. Becker 2007b] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: The Pipes–Pagano-problem revisited: elastic fields in boundary layers of plane laminated specimens under combined thermomechanical load. In: *Composite Structures* 80 (2007), Nr. 3, 373–395
- [Mittelstedt u. Becker 2008] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Reddy’s layerwise laminate plate theory for the computation of elastic fields in the vicinity of straight free laminate edges. In: *Materials Science and Engineering: A* 498 (2008), Nr. 1–2, 76–80
- [Mittelstedt u. Becker 2016] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminate*. 1. Auflage. Darmstadt: Studienbereich Mechanik, 2016
- [Mittelstedt et al. 2022] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W. ; KAPPEL, A. ; KHARGHANI, N.: Free Edge Effects in Composite Laminates - A Review of Recent Developments 2005-2020. In: *Applied Mechanics Reviews* 74 (2022), Nr. 1
- [Morton u. Webber 1993] MORTON, S. K. ; WEBBER, J. P.: Interlaminar Failure due to Mechanical and Thermal Stresses at the Free Edges of Laminated. In: *Composites Science and Technology* 47 (1993), 1–13

## Literaturverzeichnis

- [Müller et al. 2006] MÜLLER, A. ; GOSWAMI, S. ; BECKER, W. ; STOLTEN, D. ; DE HAART, L. G. ; STEINBRECH, R. W.: Assessment of the sealing joints within SOFC stacks by numerical simulation. In: *Fuel Cells* 6 (2006), Nr. 2, 107–112
- [Neitzel et al. 2014] NEITZEL, M. ; MITSCHANG, P. ; BREUER, U.: *Handbuch Verbundwerkstoffe : Werkstoffe, Verarbeitung, Anwendung*. 2. Auflage. München, 2014
- [Neuber 1936] NEUBER, H.: Theory of technical shape number (Theorie der technischen Formzahl). In: *Research in the Field of Engineering A (Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A)* 7 (1936), Nr. 6, 271–274
- [Nguyen-Hoang 2022] NGUYEN-HOANG, M.: *Structural assessment of composite bolted joints under bearing-bypass load interaction using analytical methods*, Technical University Darmstadt, Dissertation, 2022
- [Novozhilov 1969] NOVOZHILOV, V. V.: On a Necessary and Sufficient Criterion for Brittle Strength. In: *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 33 (1969), Nr. 2, 212–222
- [O'Brien 1982] O'BRIEN, T. K.: Characterization of Delamination Onset and Growth in a Composite Laminate. In: REIFSNIEDER, K. (Hrsg.): *Damage in Composite Materials*. American Society for Testing and Materials, 1982, 140–167
- [Oplinger et al. 1973] OPLINGER, D. W. ; PARKER, B. S. ; CHIANG, F. P.: Edge-effect Studies in Fiber-reinforced Laminates. In: *Experimental Mechanics* 14 (1973), 347–354
- [Pagano 1974] PAGANO, N. J.: On the Calculation of Interlaminar Normal Stress in Composite Laminate. In: *Journal of Composite Materials* 8 (1974), Nr. 1, 65–81
- [Pagano 1978a] PAGANO, N. J.: Free Edge Stress Fields in Composite Materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 14 (1978), 401–406
- [Pagano 1978b] PAGANO, N. J.: Stress fields in composite laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 14 (1978), Nr. 5, 385–400
- [Pagano 1989] PAGANO, N. J.: *Interlaminar response of composite materials*. Amsterdam, New York: Elsevier, 1989
- [Pagano u. Pipes 1971] PAGANO, N. J. ; PIPES, R. B.: The influence of stacking sequence on laminate strength. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), Nr. 1, 50–57
- [Pagano u. Pipes 1973] PAGANO, N. J. ; PIPES, R. B.: Some observations on the interlaminar strength of composite laminates. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 15 (1973), Nr. 8, 679–688
- [Pagano et al. 1998] PAGANO, N. J. ; SCHOEPPNER, G. A. ; KIM, R. Y. ; ABRAMS, F. L.: Steady-state cracking and edge effects in thermo-mechanical transverse cracking of cross-ply laminates. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 11, 1811–1825
- [Pagano u. Soni 1983] PAGANO, N. J. ; SONI, S. R.: Global-Local Laminate Variational Model. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 14 (1983), 207–228

- [Pagano u. Soni 1989] PAGANO, N. J. ; SONI, S. R.: Models for studying free-edge effects. In: *Composite Materials Series* 5 (1989), 1–68
- [Petersen et al. 2016] PETERSEN, E. ; CUNTZE, R. G. ; HÜHNE, C.: Experimental determination of material parameters in Cuntze’s Failure-Mode-Concept-based UD strength failure conditions. In: *Composites Science and Technology* 134 (2016), 12–25
- [Peterson u. Wahl 1936] PETERSON, R. E. ; WAHL, A. M.: Two- and Three-Dimensional Cases of Stress Concentration, and Comparison with Fatigue Tests. In: *Journal of Applied Mechanics* 5 (1936), 15–22
- [Pilkey u. Pilkey 1997] PILKEY, W. D. ; PILKEY, D. F.: *Peterson’s Stress Concentration Factors*. 2. Auflage. New York: John Wiley & Sons, 1997
- [Pin u. Pian 1973] PIN, T. ; PIAN, T. H.: On the convergence of the finite element method for problems with singularity. In: *International Journal of Solids and Structures* 9 (1973), Nr. 3, 313–321
- [Pipes 1972] PIPES, R. B.: *Solution of certain problems in the theory of elasticity for laminated anisotropic systems*, University of Texas, Arlington, Dissertation, 1972
- [Pipes 1980] PIPES, R. B.: Boundary layer effects in composite laminates. In: *Fibre Science and Technology* 13 (1980), Nr. 1, 49–71
- [Pipes et al. 1972] PIPES, R. B. ; KAMINSKI, B. E. ; PAGANO, N. J.: Influence of the Free Edge upon the Strength of Anle-Ply Laminates. In: *Analysis of the Test Methodes for High Modulus Fibers and Composites*. 521. ASTM STP, 1972, 218–228
- [Pipes u. Pagano 1970] PIPES, R. B. ; PAGANO, N. J.: Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension. In: *Journal of Composite Materials* 4 (1970), 538–548
- [Pipes u. Pagano 1974] PIPES, R. B. ; PAGANO, N. J.: Interlaminar stresses in composite laminates—an approximate elasticity solution. In: *Journal of Applied Mechanics* 41 (1974), Nr. 3, 668–672
- [Puppo u. Evensen 1970] PUPPO, A. H. ; EVENSEN, H. A.: Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress. In: *Journal of Composite Materials* 4 (1970), Nr. 2, 204–220
- [Qian u. Akisanya 1998] QIAN, Z. ; AKISANYA, A. R.: An Experimental investigation of failure initiation in bonded joints. In: *Acta Materialia* 46 (1998), Nr. 14, 4895–4904
- [Reddy 2003] REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2. Auflage. Boca Raton: CRC press, 2003
- [Reddy u. Robbins Jr 1994] REDDY, J. N. ; ROBBINS JR, D. H.: Theories and computational models for composite laminates. In: *Applied Mechanics Reviews* 47 (1994), 147–169

## Literaturverzeichnis

- [Rose u. Herakovich 1993] ROSE, C. A. ; HERAKOVICH, C. T.: An approximate solution for interlaminar stresses in composite laminates. In: *Composites Engineering* 3 (1993), Nr. 3, 271–285
- [Rosendahl 2020] ROSENDAHL, P. L.: *From Bulk to Structural Failure: Fracture of Hyperelastic Materials*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2020
- [Rosendahl et al. 2017] ROSENDAHL, P. L. ; WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Asymmetric crack onset at open-holes under tensile and in-plane bending loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 113-114 (2017), 10–23
- [Rotem u. Hashin 1975] ROTEM, A. ; HASHIN, Z.: Failure Modes of Angle Ply Laminates. In: *Journal of Composite Materials* 9 (1975), Nr. 2, 191–206
- [Rybicki et al. 1977] RYBICKI, E. F. ; SCHMUESER, D. W. ; FOX, J.: An Energy Release Rate Approach For Stable Crack Growth in the Free-Edge Delamination Problem. In: *Journal of Composite Materials* 11 (1977), Nr. 4, 470–487
- [Sadd 2009] SADD, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Burlington, Oxford: Academic Press, 2009
- [Salamon 1980] SALAMON, N. J.: An assessment of the interlaminar stress problem in laminated composites. In: *Journal of Composite Materials* 14 (1980), Nr. 1, 177–194
- [Sapora et al. 2013] SAPORA, A. ; CORNETTI, P. ; CARPINTERI, A.: A Finite Fracture Mechanics approach to V-notched elements subjected to mixed-mode loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 97 (2013), Nr. 1, 216–226
- [Sator 2010] SATOR, C.: *Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2010
- [Schneider 2019] SCHNEIDER, N.: *Entwicklung eines Finiten Elementes für den Laminatrandeffekt*, TU Darmstadt, Master Thesis, 2019
- [Schürmann 2007] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2. Auflage. Berlin: Springer, 2007. – 672 S.
- [Song u. Wolf 2000a] SONG, C. ; WOLF, J. P.: Scaled boundary finite-element method - a primer: derivations. In: *Computers and Structures* 78 (2000), Nr. 1, 191–210
- [Song u. Wolf 2000b] SONG, C. ; WOLF, J. P.: Scaled boundary finite-element method - a primer: Solution procedures. In: *Computers and Structures* 78 (2000), Nr. 1, 211–225
- [Soni u. Pagano 1983] SONI, S. R. ; PAGANO, N. J.: Elastic response of composite laminates. In: HASHIN, Z. (Hrsg.) ; HERAKOVICH, C. T. (Hrsg.): *Mechanics of Composite Materials*. New York: Pergamon, 1983, 227–242
- [Soni u. Kim 1986] SONI, S. R. ; KIM, R. Y.: Delamination of Composite Laminates Stimulated By Interlaminar Shear. In: *ASTM Special Technical Publication* 893 (1986), 286–307

- [Stein 2018] STEIN, N.: *Analytische und semi-analytische Berechnungsmodelle zur Auslegung von Strukturklebverbindungen*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2018
- [Stein et al. 2015] STEIN, N. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A model for brittle failure in adhesive lap joints of arbitrary joint configuration. In: *Composite Structures* 133 (2015), 707–718
- [Tada et al. 2000] TADA, H. ; PARIS, P. C. ; IRWIN, G. R.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3. Auflage. New York: ASME Press, 2000
- [Tahani u. Nosier 2003] TAHANI, M. ; NOSIER, A.: Free edge stress analysis of general cross-ply composite laminates under extension and thermal loading. In: *Composite Structures* 60 (2003), Nr. 1, 91–103
- [Talmon l'Armée u. Becker 2020] TALMON L'ARMÉE, A. ; BECKER, W.: Coupled stress and energy criterion for composite failure: Pointwise versus averaged evaluation of the stress criterion. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 27 (2020), Nr. 18, 1571–1582
- [Tang 1975] TANG, S.: A Boundary Layer Theory - Part I: Laminated Composites in Plane Stress. In: *Journal of Composite Materials* 9 (1975), 33–41
- [Tang u. Levy 1975] TANG, S. ; LEVY, A.: A Boundary Layer Theory - Part II: Extension of Laminated Finite Strip. In: *Journal of Composite Materials* 9 (1975), Nr. 1, 42–52
- [Tay 2003] TAY, T. E.: Characterization and analysis of delamination fracture in composites: An overview of developments from 1990 to 2001. In: *Applied Mechanics Reviews* 56 (2003), Nr. 1, 1–31
- [Taylor 2007] TAYLOR, D.: *The Theory of Critical Distances: A New Perspective in Fracture Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 2007
- [Turon et al. 2007] TURON, A. ; DAVILA, C. G. ; CAMANHO, P. P. ; COSTA, J.: An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 10, 1665–1682
- [Unger u. Leyer 2015] UNGER, J. ; LEYER, S.: *Dimensionshomogenität*. Wiesbaden: Springer, 2015
- [Waddoups et al. 1971] WADDOUPS, M. E. ; EISENMANN, J. R. ; KAMINSKI, B. E.: Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), Nr. 4, 446–454
- [Wang u. Crossman 1977a] WANG, A. S. D. ; CROSSMAN, F. W.: Edge effects on thermally induced stresses in composite laminates. In: *Journal of Composite Materials* 11 (1977), Nr. 3, 300–312
- [Wang u. Crossman 1977b] WANG, A. S. D. ; CROSSMAN, F. W.: Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. In: *Journal of Composite Materials* 11 (1977), Nr. 1, 92–106

## Literaturverzeichnis

- [Wang u. Crossman 1978a] WANG, A. S. D. ; CROSSMAN, F. W.: Calculation of Edge Stresses in Multi-Layer Laminates by Sub-Structuring. In: *Journal of Composite Materials* 12 (1978), Nr. 1, 76–83
- [Wang u. Crossman 1978b] WANG, A. S. D. ; CROSSMAN, F. W.: Stress Field Induced by Transient Moisture Sorption in Finite-Width Composite Laminates. In: *Journal of Composite Materials* 12 (1978), Nr. 1, 2–18
- [Wang u. Crossman 1980] WANG, A. S. D. ; CROSSMAN, F. W.: Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates Part 1. An energy method. In: *Journal of Composite Materials* 14 (1980), Nr. 1, 71–87
- [Wang u. Choi 1982a] WANG, S. S. ; CHOI, I.: Boundary-Layer Effects in Composite Laminates: Part 1: Free-Edge Stress Singularities. In: *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), Nr. 3, 541–548
- [Wang u. Choi 1982b] WANG, S. S. ; CHOI, I.: Boundary-layer effects in composite laminates: Part 2: Free-edge stress solutions and basic characteristics. In: *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), Nr. 3, 549–560
- [Wang u. Choi 2020] WANG, S. S. ; CHOI, I.: Boundary layer thermal stresses in angle-ply composite laminates / Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois. Urbana-Champaign, 2020. – Forschungsbericht
- [Webber u. Morton 1993] WEBBER, J. P. ; MORTON, S. K.: An analytical solution for the thermal stresses at the free edges of laminated plates. In: *Composites Science and Technology* 46 (1993), Nr. 2, 175–185
- [Wei et al. 2015] WEI, W. ; RONGJIN, H. ; CHUANJUN, H. ; ZHAO, Y. ; LI, S. ; LAIFENG, L.: Cryogenic performances of T700 and T800 carbon fibre-epoxy laminates. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 102 (2015), Nr. 1
- [Weißgraeber et al. 2016a] WEISSGRAEBER, P. ; HELL, S. ; BECKER, W.: Crack nucleation in negative geometries. In: *Engineering Fracture Mechanics* 168 (2016), 93–104
- [Weißgraeber et al. 2016b] WEISSGRAEBER, P. ; LEGUILLON, D. ; BECKER, W.: A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. In: *Archive of Applied Mechanics* 86 (2016), Nr. 1-2, 375–401
- [Weißgraeber et al. 2014] WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: A general sandwich-type model for adhesive joints with composite adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 55 (2014), 56–63
- [Whitcomb u. Raju 1983] WHITCOMB, J. D. ; RAJU, I. S.: Superposition Method for Analysis of Free-Edge Stresses. In: *Journal of Composite Materials* 17 (1983), Nr. 6, 492–507
- [Whitcomb u. Raju 1985] WHITCOMB, J. D. ; RAJU, I. S.: Analysis of Interlaminar Stresses in Thick Composite Laminates With and Without Edge Delamination. In: *ASTM Special Technical Publication* (1985), 69–94

- [Whitney u. Nuismer 1974] WHITNEY, J. M. ; NUISMER, R. J.: Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. In: *Journal of Composite Materials* 8 (1974), Nr. 3, 253–265
- [Wisnom 1999] WISNOM, M. R.: Size effects in the testing of fibre-composite materials. In: *Composites Science and Technology* 59 (1999), Nr. 13, 1937–1957
- [Witten u. Matthes 2022] WITTEN, E. ; MATTHES, V.: Der europäische Markt für Faserverstärkte Kunststoffe / Composites 2021 - Marktentwicklungen, Trends, Herausforderungen und Ausblicke / Industrievereinigung verstärkte Kunststoffe. 2022. – Forschungsbericht
- [Wu 1987] WU, C. M.: Nonlinear analysis of edge effects in angle-ply laminates. In: *Computers and Structures* 25 (1987), Nr. 5, 787–798
- [Wu 1990] WU, C. M.: Nonlinear thermal and mechanical analysis of edge effects in angle-ply laminates. In: *Computers and Structures* 35 (1990), Nr. 6, 705–717
- [Yang u. Cox 2005] YANG, Q. ; COX, B.: Cohesive models for damage evolution in laminated composites. In: *International Journal of Fracture* 133 (2005), Nr. 2, 107–137
- [Yi 1993] YI, S.: Thermoviscoelastic analysis of delamination onset and free edge response in laminated composites. In: *AIAA Journal* 31 (1993), Nr. 12, 2320–2328
- [Zhang u. Binienda 2014] ZHANG, C. ; BINIENDA, W. K.: Numerical Analysis of Free-Edge Effect on Size-Influenced Mechanical Properties of Single-Layer Triaxially Braided Composites. In: *Applied Composite Materials* 21 (2014), Nr. 6, 841–859
- [Zhou u. Sun 1990] ZHOU, S. G. ; SUN, C. T.: Failure analysis of composite laminates with free edge. In: *Journal of Composites Technology and Research* 12 (1990), Nr. 2, 91–97
- [Zhu u. Lam 1998] ZHU, C. ; LAM, Y. C.: A rayleigh-ritz solution for local stresses in composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 3-4, 447–461
- [Zienkiewicz et al. 2005] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z.: *The finite element method: its basis and fundamentals*. 6. Auflage. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005

Die Arbeit berücksichtigt 225 Quellen.

